

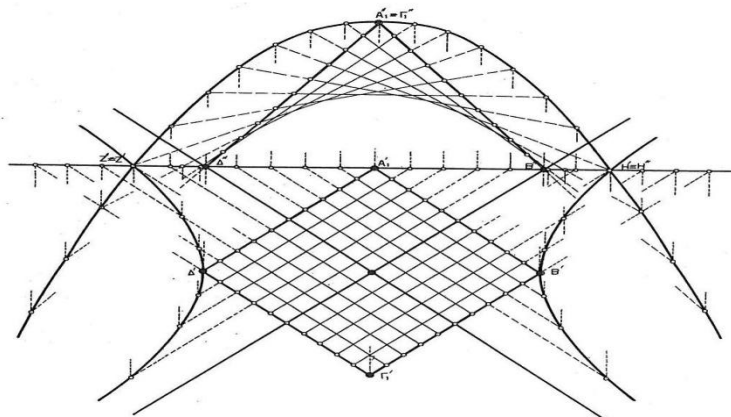


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ




Διπλωματική Εργασία: «Γεωμετρικές Εφαρμογές στα έργα Μηχανικού»



Τσαπατώρης Παναγιώτης

Επιβλέπουσα: **Κα Νίκη Πάλλα**, Λέκτορας Ε.Μ.Π, Σχολή ΕΜΦΕ

Επιτροπή Εξέτασης:

-  **Σπ.Βουτσινάς**, Καθηγητής Ε.Μ.Π, Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών
-  **Στ.Μαρκάτης**, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π, Σχολής ΕΜΦΕ
-  **Ν.Πάλλα**, Λέκτορας Ε.Μ.Π, Σχολής ΕΜΦΕ

Αθήνα, 2009

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από την παιδική μου ηλικία έτρεφα μια ιδιαίτερη αγάπη προς τα Μαθηματικά. Τα θεωρούσα (και τα θεωρώ) μια παγκόσμια γλώσσα, δυνατή, αυστηρή αλλά και πολύ ευέλικτη, όσο ευέλικτη είναι και η φαντασία του ανθρώπου.

Πάντα όμως είχα έναν ανεξήγητο δισταγμό προς τη Γεωμετρία. Την θεωρούσα στο παιδικό μυαλό μου σαν τον αδικημένο ξάδελφο της Άλγεβρας. Ομολογώ πως, η αποτελεσματικότητα, η αμεσότητα και η ευχαρίστηση που δίνει ο τελευταίος αριθμητικός υπολογισμός σε ένα πρόβλημα με έκαναν να θεωρώ τη Γεωμετρία μια διαδικασία πολύπλοκη, χωρίς ιδιαίτερο νόημα. Άλλωστε, «η ουσία είναι το αποτέλεσμα».

Ακόμα και στις πανεπιστημιακές σπουδές μου, η αριθμολαγνεία συνεχίστηκε. Περιορισμένος σε διαιδαλώδεις αλγορίθμους έβλεπα τον κόσμο χαμηλά, από τη σκοπιά ενός τίμιου λύτη και αναγνώστη.

Μέχρι που κάποια μέρα, όντας στην Πολυτεχνειούπολη, σήκωσα το κεφάλι μου ψηλά. Για πρώτη φορά θαύμασα την αρτιότητα διαφόρων γεωμετρικών κατασκευών, ασυνήθιστων και σίγουρα πρωτότυπων. Το μάθημα της Γεωμετρίας, από τις πρώτες παραδόσεις στον Πολυτεχνειακό χώρο μου προκάλεσε το ενδιαφέρον και το θαυμασμό και άρχισα να εμβαθύνω στα σχήματα που αρχικά με είχαν εντυπωσιάσει.

Μετά από αυτό, ενδιαφέρθηκα να εμβαθύνω λίγο περισσότερο στις αρχές και τις διδαχές της Γεωμετρίας. Η εργασία που κρατάτε στα χέρια σας αποτελεί το αποτέλεσμα της αναζήτησής μου σε διαφόρους κλάδους της Γεωμετρίας, οι οποίοι βρίσκουν εφαρμογή στα έργα του Μηχανικού. Σε αυτή μου την έρευνα βρήκα πράγματα ξεχωριστά και μη διαδεδομένα, ανακάλυψα όμως και μια διαφορετική πτυχή και ερμηνεία σε πράγματα ήδη διδαγμένα.

Κλείνοντας αυτό το μικρό πρόλογο, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα κα Νίκη Πάλλα, η οποία με στήριξε και με βοήθησε έμπρακτα σε όλα τα στάδια της εκπόνησης αυτής της εργασίας, μεταδίδοντάς μου παράλληλα και την αγάπη της για την επιστήμη της Γεωμετρίας.

Για την υποστήριξη αυτής της εργασίας οφείλω επίσης θερμές ευχαριστίες, στην τριμελή επιτροπή, αποτελούμενη από τους κκ. Καθηγητές :

Σπ. Βουτσινά, Καθηγητή Ε.Μ.Π., Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Στ. Μαρκάτη, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π., Σχολής ΕΜΦΕ

Ν. Πάλλα, Λέκτορα Ε.Μ.Π., Σχολής ΕΜΦΕ

Αθήνα 2009,

Τσαπατώρης Ι. Παναγιώτης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία καταγράφεται η χρησιμότητα της Γεωμετρίας (και μάλιστα διαφορετικοί κλάδοι Γεωμετρίας) σε έργα Μηχανικού. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα Γεωμετρικών εφαρμογών σε έργα Μηχανικού. Εμείς θα αρκεστούμε να παρουσιάσουμε 3 από αυτά, με την αντίστοιχη θεωρία.

- 1^η εφαρμογή:
Αναφέρεται στην **n-διάστατη Γεωμετρία** (\mathbb{R}^n).
Ένα παράδειγμα n-διάστατης Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι ο **Γραμμικός Προγραμματισμός**, ο οποίος αποτελεί μέρος της Επιχειρησιακής Έρευνας την οποία διδάσκονται όλοι οι μηχανικοί.
- 2^η εφαρμογή:
Αναφέρεται στην **τριδιάστατη Γεωμετρία** (\mathbb{R}^3). Ένα παράδειγμα τριδιάστατης Γεωμετρίας είναι η Παραστατική Γεωμετρία που απεικονίζει το χώρο (\mathbb{R}^3) στο χαρτί σχεδίασης (\mathbb{R}^2).
- 3^η εφαρμογή:
Αναφέρεται στην **διδιάστατη Γεωμετρία** (\mathbb{R}^2).
Ένα παράδειγμα διδιάστατης Γεωμετρίας χρήσιμης στους Μηχανικούς είναι τα Πλέγματα.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω εφαρμογές θα αναφέρονται σύντομα ιστορικά στοιχεία, βασικές έννοιες και ορισμοί, αντίστοιχη θεωρία και εφαρμογή στο παράδειγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1^η εφαρμογή

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1. Ιστορική Αναδρομή

Για πρώτη φορά στο Τρίτο και Τέταρτο βιβλίο Στοιχείων του Ευκλείδη αναφέρονται οι έννοιες μεγίστου και ελαχίστου.

Συγκεκριμένα, αναφέρεται η εύρεση μεγίστου και ελαχίστου ευθυγράμμου τμήματος που μπορούμε να φέρουμε από σημείο σε κύκλο, και η εύρεση παραλληλογράμμου με μέγιστη επιφάνεια όταν δίδεται η περίμετρό του.

Παρά την ανάπτυξη των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας στην Ελλάδα δεν υπήρξε σημαντική ανάπτυξη της Βελτιστοποίησης. Πολύ αργότερα, στα τέλη του 18^{ου} αιώνα γίνεται λόγος για την εύρεση βελτίστου συνάρτησης από τους Kepler, Fermat, Euler, Lagrange, που βασίζεται στο Διαφορικό Λογισμό. Λίγα χρόνια αργότερα το ενδιαφέρον στρέφεται στη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων (μέθοδος Gauss) και ανισοτικών συστημάτων (Fourier). Ο Fourier πρότεινε τη «λύση μετάβασης από κορυφή σε κορυφή του πολυέδρου» όπου αργότερα βασίστηκε η μέθοδος Simplex.

Και άλλοι μαθηματικοί έδειξαν ενδιαφέρον για τα ανισωτικά συστήματα στις αρχές του 20^{ου} αιώνα όπως οι Jordan, Motzkin και Minkowski. Ο Minkowski το 1936 παρουσίασε αλγόριθμο γνωστό ως «Μέθοδος Απαλοιφής Fourier-Motzkin». Ιδιαίτερα σημαντική υπήρξε η προσφορά του Minkowski για τα ανισωτικά συστήματα, όπου αναφέρεται ότι:

«Η γενική λύση μπορεί να μορφωθεί ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών λύσεων, τις οποίες ονομάζει ακραίες λύσεις, βασικές

λύσεις ή λύσεις κορυφής». Η ορολογία αυτή διατηρήθηκε και στη μετέπειτα θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού.

2. Εισαγωγή στο πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού

Μια περιοχή των Μαθηματικών ιδιαίτερα χρήσιμη στους Μηχανικούς είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια σχετικά νέα περιοχή των Μαθηματικών, που αναπτύχθηκε την εποχή του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου. Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν πολλοί και διακεκριμένοι μαθηματικοί, όπως οι F.Hitchcock, L.Kantorovich, T.Koopmans, G.Dantzig και είχαν κινήσει τις οικονομικές θεωρίες των J.V Neumann και W.Leontief. Τελικά το 1947 ο Dantzig θεμελίωσε το γενικό πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού και έδωσε μία απλοποιημένη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος γνωστή με το όνομα μέθοδος Simplex. Ο γραμμικός Προγραμματισμός έχει εφαρμογές στη Βιομηχανία, στις Τηλεπικοινωνίες, στις μεταφορές κ.α.

Στο πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού ζητάμε την βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$, όπου οι μεταβλητές x_1, \dots, x_n πληρούν κάποιους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις και εξισώσεις. Χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ο μεγάλος αριθμός των λύσεων που ικανοποιούν τους περιορισμούς κάθε προβλήματος, από τις οποίες λύσεις εκλέγεται η καταλληλότερη που βελτιστοποιεί την γραμμική συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$.

3. Μορφή του προβλήματος

Θα αναφέρω δύο γενικά παραδείγματα I,II, προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και την μορφή τους αντίστοιχα, που έχουν σχέση με τις βιομηχανίες.

I. m-μηχανές παράγουν n-προϊόντα.

Κάθε προϊόν επεξεργάζεται στη σειρά στις m-μηχανές και ο χρόνος επεξεργασίας κάθε προϊόντος είναι διαφορετικός. Έστω α_{ij} ο χρόνος επεξεργασίας του j προϊόντος στην μηχανή i, τότε θα έχουμε τον πίνακα **A**:

ΠΡΟΙΟΝ	1	2	3	...	n
ΜΗΧΑΝΗ 1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	...	α_{1n}
ΜΗΧΑΝΗ 2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	...	α_{2n}
ΜΗΧΑΝΗ 3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	...	α_{3n}
...
ΜΗΧΑΝΗ m	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	...	α_{mn}

Οι απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι:

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right)$$

$\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3 \dots n$

Όπου θεωρούμε ότι:

- b_i είναι ο διαθέσιμος χρόνος της i μηχανής
- x_j είναι ο απαιτούμενος αριθμός μονάδων του j προϊόντος που πρέπει να παράγεται κάθε μέρα για να μεγιστοποιήσουμε το τελικό όφελος

- c_j το όφελος που έχουμε από τη μονάδα του j προϊόντος.

Επομένως ζητάμε τη μεγιστοποίηση της γραμμικής συνάρτησης f :

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- II. n -διαφορετικά εργοστάσια προμηθεύουν m διαφορετικά προϊόντα. Αν a_{ij} είναι ο αριθμός των μονάδων του i προϊόντος που προμηθεύει το j εργοστάσιο σε μία ημέρα τότε θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα **A**:

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ	1	2	3	...	n
ΠΡΟΙΟΝ 1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	...	α_{1n}
ΠΡΟΙΟΝ 2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	...	α_{2n}
ΠΡΟΙΟΝ 3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	...	α_{3n}
...
ΠΡΟΙΟΝ m	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	...	α_{mn}

Αν b_i είναι ο ελάχιστος αριθμός μονάδων του i προϊόντος που πρέπει να προμηθευτεί, c_j το κόστος της προμήθειας από το j εργοστάσιο και x_j ο αριθμός των ημερών που πρέπει να εργάζεται το κάθε εργοστάσιο για να έχουμε το ελάχιστο κόστος προμήθειας, τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί:

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right)$$

$\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Επομένως ζητάμε την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Τελικά τα προβλήματα I και II γράφονται:

I. Μεγιστοποίηση

$$f_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

με περιορισμούς:

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right)$$

$\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Υπό μορφή πινάκων το πρόβλημα γράφεται:

$$f_{\max} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad , \text{όπου}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

II. Ελαχιστοποίηση

$f_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, με περιορισμούς:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{pmatrix}$$

$\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Υπό μορφή πινάκων το πρόβλημα γράφεται:

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad , \text{όπου} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μετατρέπεται σε πρόβλημα μεγιστοποίησης που ονομάζεται **δύϊκό** του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Το πρόβλημα τελικά παίρνει την μορφή για κάθε περίπτωση:

➤ **Μεγιστοποίηση**

$f_{\max} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$, με εξισώσεις περιορισμών :

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x'_{1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad + x'_{2} = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad + x'_{m} = b_m \end{array} \right)$$

, $\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3, \dots, n+m$.

➤ **Ελαχιστοποίηση**

$$f_{\min} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

με περιορισμούς:

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x'_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad - x'_{n+2} = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad - x'_{n+m} = b_m \end{array} \right)$$

, $\forall x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Αντίστοιχα το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μετατρέπεται σε πρόβλημα μεγιστοποίησης και λύνεται με Simplex.

Θεώρημα

Το σημείο x_0 είναι εφικτή λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ με περιορισμούς $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ αν και μόνο αν το σημείο z_0 είναι μία εφικτή λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης με περιορισμούς:

$$g = \mathbf{b}^T \mathbf{z}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{z} \leq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{z} \geq 0$$

Ορισμοί

- I. Η συνάρτηση f είναι η **αντικειμενική συνάρτηση** που μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται (I,II) αντίστοιχα.

- II. Το διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς είναι η **εφικτή λύση** του προβλήματος, δηλαδή είναι η λύση που ικανοποιεί τις ανισοεξισώσεις του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

- III. Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι **απειροσύνολο**.

- IV. Η εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση f ονομάζεται **βέλτιστη λύση**. (*maximal-minimal*).

4. Βασικές Έννοιες-Ορισμοί N-Διάστατης Γεωμετρίας

Από τη μορφή του προβλήματος προκύπτει ότι ο χώρος των λύσεων του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτός. Στη συνέχεια δίνουμε τους εξής ορισμούς:

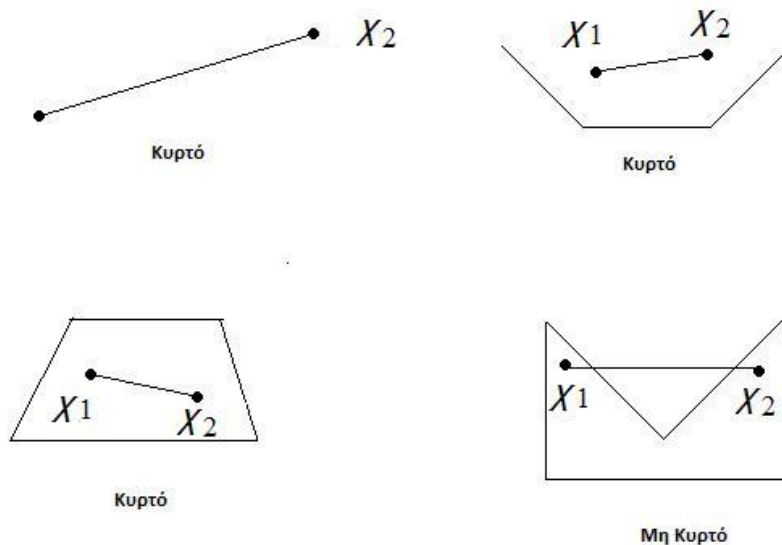
Ορισμοί

- 1) Ένα σύνολο του \mathbb{R}^n λέγεται κυρτό, αν για οποιαδήποτε δύο σημεία του x_1, x_2 που ανήκουν στο σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα x_1, x_2 ανήκει στο σύνολο.
- 2) Ευθύγραμμο τμήμα x_1x_2 είναι το σύνολο των σημείων x για τα οποία ισχύει:

$$x = tx_1 + (1-t)x_2, \text{ με } 0 \leq t \leq 1.$$

Σημείωση: Ένα σύνολο θεωρείται κυρτό αν περιέχει περισσότερα από 2 σημεία.

Μερικά παραδείγματα συνόλων φαίνονται παρακάτω:



- 3) Το σύνολο των σημείων $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ που οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την γραμμική εξίσωση:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

με $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \neq 0$ λέγεται **υπερεπίπεδο** .

Προφανώς στον \mathbb{R}^2 η (1) παριστάνει ευθεία και στον \mathbb{R}^3 η (1) παριστάνει επίπεδο.

Το υπερεπίπεδο χωρίζει τον \mathbb{R}^n σε 3 σύνολα S_1, S_2, S_3 ξένα μεταξύ τους.

Τα σύνολα αυτά είναι:

$$S_1 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < b\}$$

$$S_2 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$$

$$S_3 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > b\}$$

Τα S_1, S_3 είναι **ανοικτοί ημίχωροι** και τα $S_1 \cup S_2, S_2 \cup S_3$ είναι **κλειστοί ημίχωροι**.

- 4) Ένα σύνολο S λέγεται φραγμένο αν \exists θετικός αριθμός r τέτοιος ώστε $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq r$$

- 5) Ένα σημείο $P \in \mathbb{R}^n$ λέγεται ακραίο όταν είναι σημείο τομής n υπερεπιπέδων από εκείνα που ορίζουν το σύνολο.

5. Βελτιστοποίηση Γραμμικής Συνάρτησης

Εδώ θα αναφέρουμε μέγιστα και ελάχιστα (ακρότατα) μιας γραμμικής συνάρτησης, που είναι ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο με ακραία σημεία.

Ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- 1) Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

Απόδειξη:

Αν A, B κυρτά σύνολα θα δείξουμε ότι $A \cap B$ κυρτό σύνολο. Από τον ορισμό κυρτού συνόλου ισχύουν:

$$\text{Έστω } \alpha, \beta \in A \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in A \\ \alpha \in B \\ \beta \in A \\ \alpha \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta \in A \\ \alpha\beta \in B \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\beta \in A \cap B$$

- 2) Αν μια γραμμική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ορισμένη στο ευθύγραμμο τμήμα AB του \mathbb{R}^n τότε οι τιμές της βρίσκονται μεταξύ του $f(A)$ και $f(B)$.

Απόδειξη:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{Έστω ότι } B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ και } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

Αν Γ σημείο μεταξύ των A, B , τότε από τον ορισμό του ευθυγράμμου τμήματος υπάρχει

$t \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε: $\Gamma = tA + (1-t)B \Rightarrow \gamma_i = t\alpha_i + (1-t)\beta_i, \mu\epsilon i = 1, 2, \dots, n$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} f(\Gamma) &= c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_n\gamma_n = c_1[t\alpha_1 + (1-t)\beta_1] + \dots + [t\alpha_n + (1-t)\beta_n] = \\ &= t(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) + \dots + (1-t)(c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n) = \\ &= tf(A) + (1-t)f(B). \end{aligned}$$

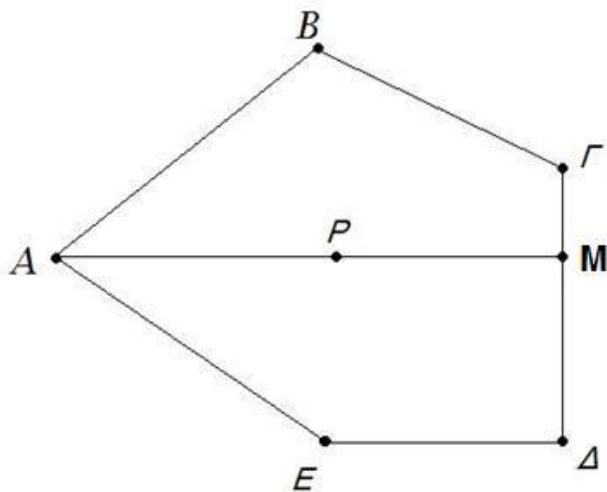
Η παραπάνω σχέση γράφεται $f(\Gamma) = tf(A) + (1-t)f(B)$.

Επειδή $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f(A) \leq f(\Gamma) \leq f(B)$.

- 3) Αν η γραμμική συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ είναι ορισμένη σε ένα κυρτό και φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^3 τότε παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή σε ακραίο σημείο του χωρίου.

Απόδειξη:

Δεν βλέπεται η γενικότητα αν αποδείξουμε το θεώρημα σε κυρτό πολύγωνο.



Έστω $f(\Gamma), f(A)$ η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση ισχύει:

$$f(\Gamma) \leq f(M) \leq f(\Delta) \text{ και } f(M) \leq f(P) \leq f(A) \text{ άρα } f(\Gamma) \leq f(P) \leq f(A).$$

6. Εφικτές και Βέλτιστες λύσεις

Ορισμοί

- I. Οι λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος ονομάζονται **εφικτές** λύσεις.
- II. Η εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση λέγεται **βέλτιστη** λύση.
- III. Μία εφικτή λύση που δεν μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός δύο εφικτών λύσεων είναι **ακραία** λύση. Η **ακραία** λύση συμπίπτει με **ακραίο** σημείο.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μια σειρά θεωρημάτων που αφορούν αυτές τις λύσεις.

Θεωρήματα

- I. Αν ξ_1, ξ_2 εφικτές λύσεις τότε ο κυρτός συνδυασμός $\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$, με $0 \leq \alpha \leq 1$ είναι εφικτή λύση.

Απόδειξη:

Αφού ξ_1, ξ_2 εφικτές λύσεις:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A\xi_1 = b \\ A\xi_2 = b \end{array} \right\} &\Rightarrow A[\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2] = \\ &= \alpha A\xi_1 + A\xi_2 - \alpha A\xi_2 = \alpha b + b - \alpha b = b. \end{aligned}$$

Άρα και ο κυρτός συνδυασμός $\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$ είναι εφικτή λύση.

Παρατήρηση: Το εφικτό σύνολο είναι κυρτό σύνολο.

- II. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Απόδειξη:

Αφού ξ_1, ξ_2 βέλτιστες λύσεις $\Rightarrow \xi_1, \xi_2$ εφικτές λύσεις άρα και η $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ εφικτή, με $0 < \lambda < 1$.

Τότε $c^T [\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2] = \lambda c^T \xi_1 + (1-\lambda)c^T \xi_2 = \lambda f_{\max} + (1-\lambda)f_{\max} = f_{\max}$,

Διότι $c^T \xi_1 = c^T \xi_2 = f_{\max}$.

Μια εφικτή λύση με όχι περισσότερα από m θετικά x_i ονομάζεται **βασική εφικτή λύση**.

Μία εφικτή λύση που δεν μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός δύο εφικτών λύσεων ονομάζεται **ακραία λύση**.

Η ακραία λύση αντιστοιχεί σε **ακραίο σημείο** του εφικτού συνόλου (κορυφή πολύτοπου).

Καθεμία από τις εξισώσεις του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού (στη γενική περίπτωση) παρουσιάζει υπερεπίπεδο και το σύστημα παρουσιάζει τομή υπερεπιπέδων. Οι βέλτιστες λύσεις (σύμφωνα με τη θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού) αναζητώνται στις κορυφές του πολύτοπου που είναι τομές n -υπερεπιπέδων.

Ενώ οι λύσεις του ανισωτικού συστήματος είναι απειροσύνολο, οι βέλτιστες λύσεις είναι πεπερασμένου πλήθους. Όσο μάλιστα αυξάνει ο αριθμός των ανισο-εξισώσεων (δηλαδή ο αριθμός των μεταβλητών), τόσο το πρόβλημα γίνεται δυσκολότερο και αντιμετωπίζεται με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή.

Μολονότι βέβαια η μαθηματική διατύπωση δεν μας περιορίζει όσον αφορά στον αριθμό των μεταβλητών, η γεωμετρική απεικόνιση των λύσεων είναι δυνατό να γίνει στον \mathbb{R}^2 , οπότε ο χώρος λύσεων παριστάνεται από ένα κυρτό πολύγωνο και στον \mathbb{R}^3 , όπου ο χώρος λύσεων περιγράφεται από ένα κυρτό πολύεδρο. Στον \mathbb{R}^n με $n > 3$ ο χώρος των λύσεων είναι πολύτοπο και κάθε έδρα του είναι πολύγωνο (στη γενική περίπτωση υπερεπίπεδο).

Ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι απειροσύνολο. Το σύνολο των ακραίων λύσεων (ακραία σημεία) είναι πεπερασμένο. Μια ακραία λύση είναι η βέλτιστη.

Αυτά προκύπτουν από τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 3: Υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ακραίων λύσεων.

Απόδειξη:

Κάθε υποσύνολο k -διανυσμάτων (όπου $k = \text{βαθμός } \mathbf{A}, k \leq m$) δεν αποτελείται κατ'ανάγκη από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ισούται

$$\text{το πολύ με } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ακραίων λύσεων.

Θεώρημα 4: Αν το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι φραγμένο τότε μια ακραία λύση είναι η βέλτιστη.

Απόδειξη:

Αν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ακραίες λύσεις τότε οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $f_1 = c^T \xi_1, f_2 = c^T \xi_2, \dots, f_p = c^T \xi_p$. Θέτουμε $f_m = c^T \xi_m = \max f_i, i = 1, 2, \dots, p$.

Έστω ξ εφικτή λύση. Αυτή γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των ακραίων λύσεων ξ_i :

$$\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_p \xi_p, \text{ όπου } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1 \text{ και } \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p.$$

Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} f &= c^T \xi = c^T (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_p \xi_p) = \lambda_1 c^T \xi_1 + \lambda_2 c^T \xi_2 + \dots + \lambda_p c^T \xi_p = \\ &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p \leq \lambda_1 f_m + \lambda_2 f_m + \dots + \lambda_p f_m \Rightarrow f \leq f_m \end{aligned}$$

διότι $f_i \leq f_m$ και $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$.

7. Βέλτιστη Λύση-Μέθοδος Simplex

Η μέθοδος Simplex βασίζεται στα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 5: Αν υπάρχουν $k (k \leq m)$ γραμμικές ανεξάρτητες στήλες του \mathbf{A} (πίνακας προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού) έτσι ώστε το b να είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών με μη αρνητικούς συντελεστές, τότε το διάνυσμα ξ που οι k συντεταγμένες του είναι αυτοί οι συντελεστές και οι υπόλοιπες συντεταγμένες μηδέν, είναι μια ακραία λύση.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι **βασικό** για τη μέθοδο Simplex και συνοδεύεται από το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 6: Αν ξ είναι μια ακραία λύση, τότε k διανύσματα-στήλες που συνδέονται με τις θετικές συντεταγμένες x_i του ξ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι το πολύ m από τα x_i είναι θετικά.

8. Λύση με τη μέθοδο Simplex-Γεωμετρική Ερμηνεία

Μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η μέθοδος Simplex.

Με αυτήν κάθε ανίσωση που επιβάλλεται από τους περιορισμούς μετατρέπεται σε εξίσωση, με την προσθήκη μίας βοηθητικής μεταβλητής σε κάθε μία από αυτές.

Κάθε λύση του συστήματος των περιορισμών είναι εφικτή λύση. Με τη βοήθεια της γραμμικής ανεξαρτησίας που εκφράζεται με τις μοναδιαίες στήλες του πίνακα \mathbf{A} προκύπτουν με τον αλγόριθμο Simplex τα ακραία σημεία (δηλαδή ακραίες λύσεις) και μία από αυτές είναι η βέλτιστη σύμφωνα με τη θεωρία.

Ο αλγόριθμος Simplex εφαρμόζεται στον πίνακα:

A	I	b
$-\mathbf{c}^T$	0	0

Η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων(στηλών) του **I** με κατάλληλους γραμμικούς μετασχηματισμούς περνά στα διανύσματα στήλες του πίνακα **A**. Τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα γίνονται μη αρνητικά και τελειώνει η μέθοδος Simplex. Η λύση προκύπτει από το βασικό θεώρημα 7i (σελ.16).

Για λόγους βιβλιογραφικής πληρότητας αξίζει να αναφέρουμε την διπλωματική του κ. Πάλλα Μηνά, όπου το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού και της γεωμετρικής του αναπαράστασης και ερμηνείας αναλύεται λεπτομερώς.

9. Τελικά συμπεράσματα-Παραδείγματα

Το πολύπλοκο πρόβλημα της γεωμετρίας (βελτιστοποίηση στον \mathbb{R}^n) έγινε αλγεβρικό πρόβλημα, εκτελέστηκε η μέθοδος Simplex (αλγόριθμος) και έπειτα ο αλγόριθμος μεταφέρθηκε σε πρόγραμμα Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, όπου η λύση του προβλήματος προέκυψε ταχύτατα.

Για να δούμε πως λειτουργεί η λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex θα εξετάσουμε ένα παράδειγμα μεγιστοποίησης.

Έστω το παράδειγμα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\max f = 6x_1 + 8x_2, \text{ με περιορισμούς:}$$

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 180$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 210$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρόβλημα ετέθη σε Η/Υ και με τη μέθοδο Simplex προέκυψαν οι παρακάτω πίνακες-βήματα της λύσης.

Πίνακας 1

x_1	x_2				b
1	1	1	0	0	100
2	1	0	1	0	180
1	3	0	0	1	210
-6	-8	0	0	0	0

Πίνακας 2

X_1	X_2				b
$2/3$	0	1	0	$-1/3$	30
$5/3$	0	0	1	$-1/3$	110
$1/3$	1	0	0	$1/3$	70
$-10/3$	0	0	0	$8/3$	560

Πίνακας 3

X_1	X_2				b
1	0	$3/2$	0	$-1/2$	45
0	0	$-5/2$	1	$1/2$	55
0	1	$-1/2$	0	$1/2$	35
0	0	0	0	1	710

Τελικά η λύση είναι $X_1=45$, $X_2=55$, $f_{max}=710$.

Για περισσότερες πληροφορίες και πρόγραμμα υπολογιστή σας παραπέμπουμε στην Διπλωματική Εργασία του κ .Πάλλα Μηνά, με τίτλο «Σχέση N-διάστατης Γεωμετρίας-Γραμμικού Προγραμματισμού-Γραφοθεωρίας-Πληροφορικής», όπου σε αυτήν γίνεται εκτενής ανάπτυξη του θέματος με τη σχετική θεωρία και προγράμματα υπολογιστή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2^η εφαρμογή

ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Ιστορική Αναδρομή

Αρχικά, ορίζουμε το χώρο όπου εργαζόμαστε και σχεδιάζουμε τα σχήματά μας. Με E συμβολίζουμε τον ευκλείδειο χώρο και τον ταυτίζουμε με τον περιβάλλοντα χώρο.

Κάθε κατασκευή στο χώρο E έχει αντίστοιχο γεωμετρικό μοντέλο (κατά προσέγγιση). Παραδείγματος χάριν η καπνοδόχος πλοίου είναι τομή λοξού κώνου με πρόσθιο επίπεδο, μια σήραγγα τοποθετημένη σε υψόμετρο υπό κλίση είναι αλληλοτομία κώνου-κυλίνδρου κλπ.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε ειδικά με τον κώνο και τις τομές του με ένα ή περισσότερα επίπεδα.

Πρέπει αυτά τα σχήματα του χώρου (\mathbb{R}^3) να τα παρουσιάσουμε στο χαρτί σχεδίασης (\mathbb{R}^2). Η γεωμετρία που επιτυγχάνει αυτό με τις μεθόδους που χρησιμοποιεί είναι η Παραστατική Γεωμετρία. Οι μέθοδοι παράστασης είναι:

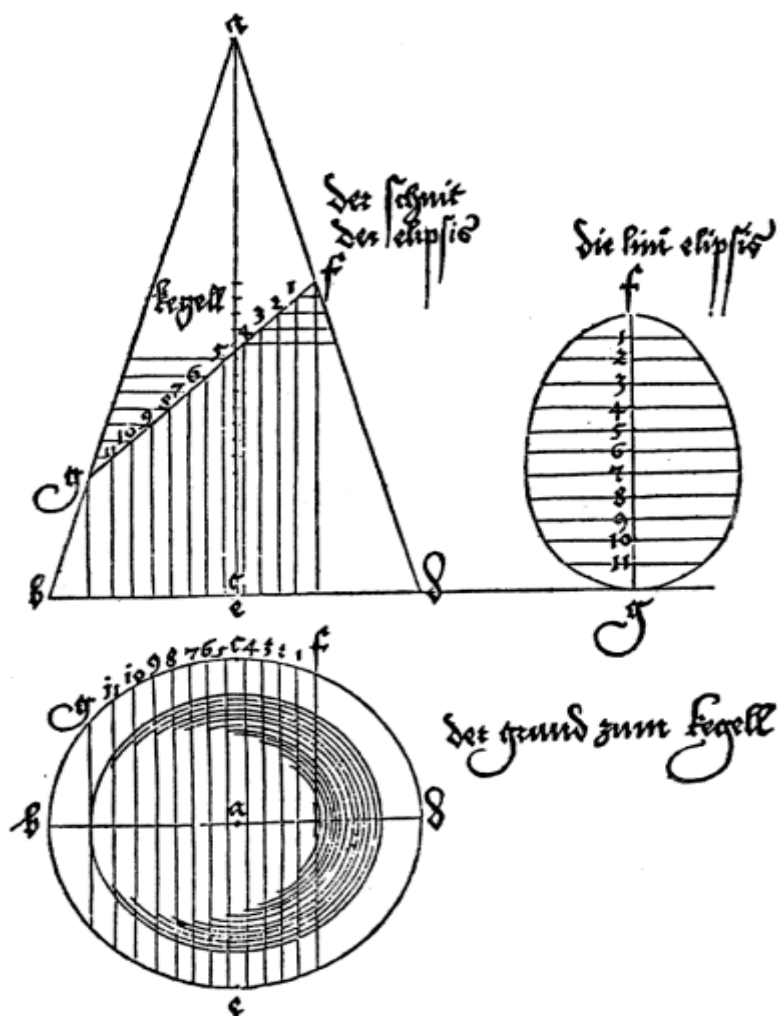
- i. Προβολή σε 2 επίπεδα
- ii. Προβολή σε ένα επίπεδο
- iii. Αξονομετρία
- iv. Προοπτική

Εμείς θα ασχοληθούμε με την μέθοδο της **προβολής σε δύο επίπεδα**.

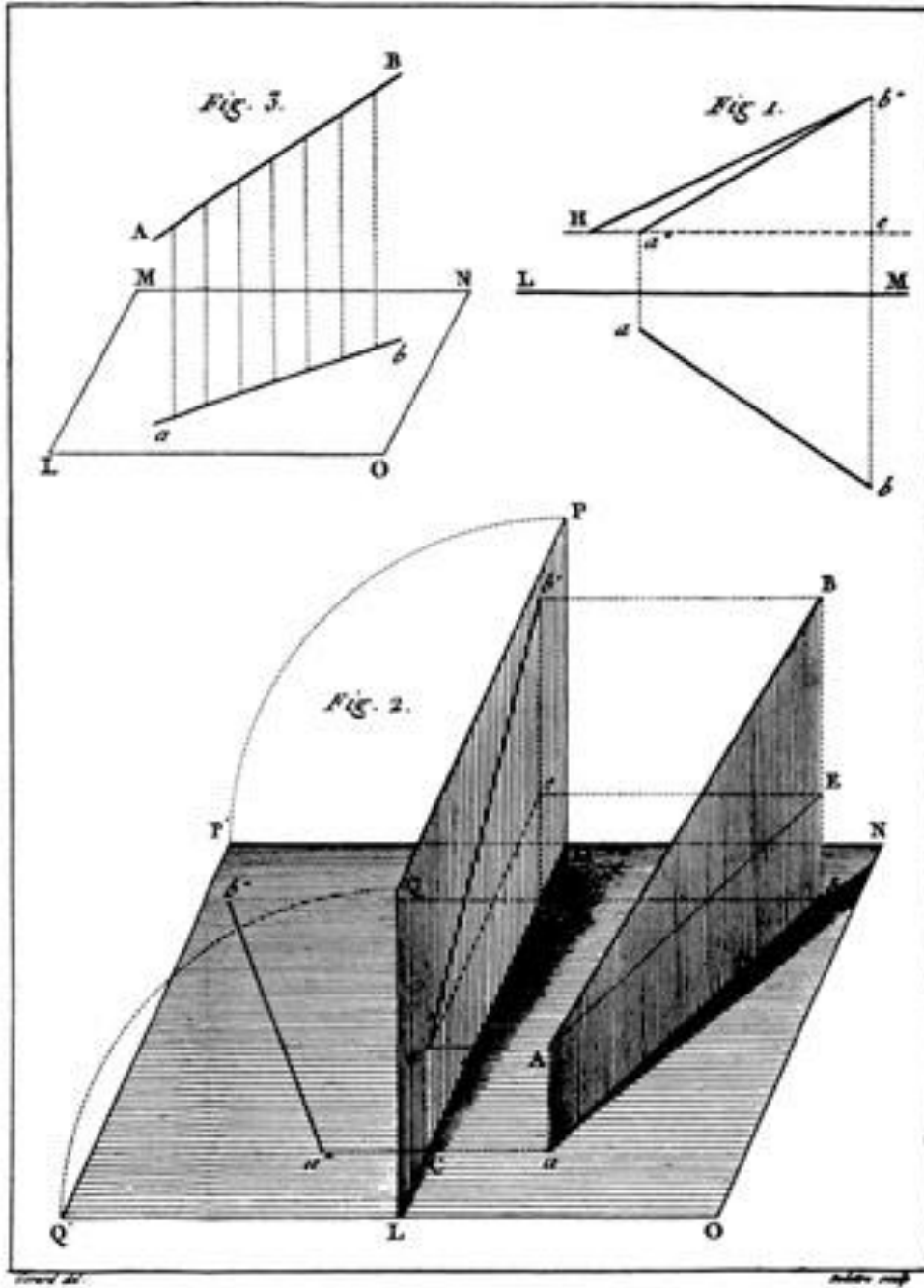
Ο πρώτος που εγγραψε Παραστατική Γεωμετρία είναι ο Γερμανός μηχανικός, ζωγράφος και φυσιοδίφης Albrecht Dürer (1471-1528). Ακολούθησαν οι Ιταλοί επιστήμονες που θέλησαν να κάνουν τελειότερες τις μεθόδους προοπτικής.

Οι πρώτες θεμελιωμένες ιδέες για τις ορθές προβολές σε ζεύγος επιπέδων σχετίζονται με προβλήματα οχυρωματικών έργων που οι λύσεις του απαιτούσαν πολύπλοκους και μακροσκελείς υπολογισμούς. Ο Gaspard Monge (1746-1818) αντιμετώπισε τα προβλήματα αυτά με εξαιρετικά εμπνευσμένο τρόπο, όταν έγινε μαθητής στη Στρατιωτική Σχολή Mezieres και ανέπτυξε εκεί τις βασικές αρχές μελετώντας την ορθή προβολή σε δύο επίπεδα προβολής. Έτσι ιδρύθηκε η μέθοδος Monge, έχοντας ως αφορμή ένα πρακτικό πρόβλημα, όπως συχνά συμβαίνει στις επιστήμες.

Το 1794-1798 ο Monge αναπτύσσει την ομώνυμη μέθοδό του, την οποία παρουσίασε το 1794 κατά τη διδασκαλία του στην École Normale στο Παρίσι.



Σπουδή του Dürer σε κωνική τομή με τη χρήση της Παραστατικής Γεωμετρίας.



Επίπεδα προβολής, σχεδιασμένα από τον Monge.

2. Εισαγωγή

Παραστατική Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία που περιγράφει τα γεωμετρικά σχήματα (Σ) του χώρου με ζεύγος προβολών (Σ', Σ'') και απεικονίζει τον τριδιάστατο χώρο (\mathbb{R}^3) στο επίπεδο που ονομάζεται χαρτί σχεδίασης (\mathbb{R}^2).

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σχημάτων του χώρου (\mathbb{R}^3) και των προβολών τους στο χαρτί σχεδίασης (\mathbb{R}^2), έτσι ώστε:

$$\mathbb{R}^3 \ni \Sigma \Leftrightarrow (\Sigma', \Sigma'') \in \mathbb{R}^2.$$

Πρόκειται για τη μέθοδο Monge.

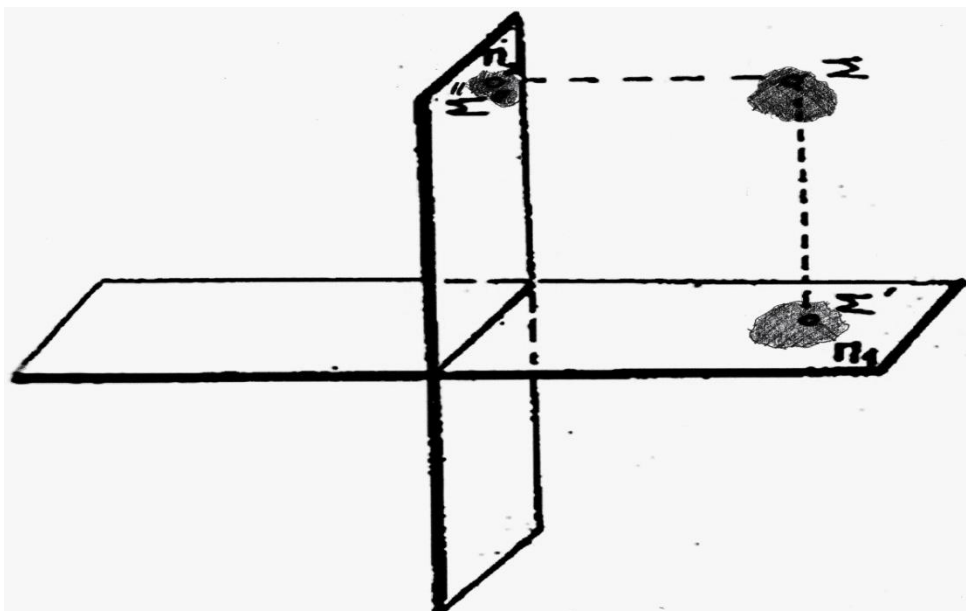
Οι προβολές του Σ γίνονται σε ζεύγος καθέτων επιπέδων Π_1, Π_2 που ονομάζονται επίπεδα προβολής.

Το Π_1 λέγεται 1^ο επίπεδο προβολής ή οριζόντιο επίπεδο προβολής.

Το Π_2 λέγεται 2^ο επίπεδο προβολής ή κατακόρυφο επίπεδο προβολής.

Το Σ' λέγεται 1^η προβολή του σχήματος Σ .

Το Σ'' λέγεται 2^η προβολή του σχήματος Σ .



Για να έχουμε τα δύο σχήματα Σ', Σ'' στο ίδιο επίπεδο θεωρούμε ότι το Π_2 στρέφεται περί τον άξονα y_{12} κατά $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ μέχρις ότου $\Pi_2 \equiv \Pi_1$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το οριζόντιο επίπεδο προβολής **χαρτί σχεδίασης**. Έτσι παίρνουμε τις 2 προβολές του $\Sigma, (\Sigma', \Sigma'')$ στο επίπεδο. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται **κατάκλιση**.

Αυτή τη γεωμετρία θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες δύο κατασκευές που έχουν το ίδιο γεωμετρικό μοντέλο.

3. Τεχνικές Κατασκευές

- 1^η κατασκευή

Καπνοσυλλέκτης πλοίου έχει σχήμα κυκλικού (ή ελλειπτικού) λοξού κώνου που έχει βάση κύκλο του Π_1 κέντρου O , ακτίνα R και ύψος h , που τέμνεται από πρόσθιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον του ύψους και εφάπτεται στην βάση του κώνου. Ζητάμε να παραστήσουμε αυτό το σχήμα του χώρου (\mathbb{R}^3) στο χαρτί σχεδίασης (\mathbb{R}^2) και να υπολογίσουμε τα αληθή του μεγέθη, διότι ως γνωστόν οι προβολές δεν δίνουν αληθή μεγέθη γενικά.

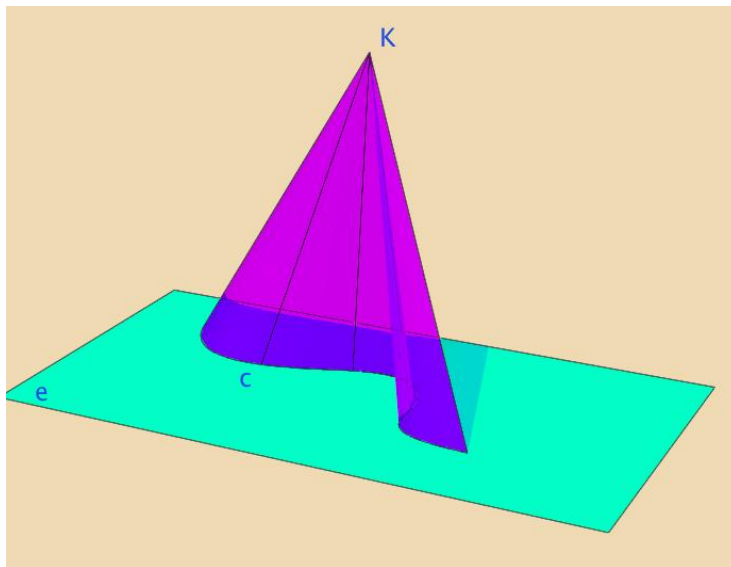
- 2^η κατασκευή

Φωταγωγός οροφής εργαστηρίου από σπλισμένο σκυρόδεμα έχει σχήμα λοξού κώλου κώνου. Η καμπύλη της βάσης είναι κύκλος κέντρου O και ακτίνας R . Η κωνική της επάνω επιφάνεια, όπου βρίσκεται και το υαλοστάσιο, ορίζεται από την τομή του λοξού κώνου με πρόσθιο επίπεδο Π , το οποίο έχει κλίση 45° ως προς το οριζόντιο επίπεδο και διέρχεται από γνωστό σημείο $\Sigma(\Sigma', \Sigma'')$ του Π_1 . Ζητούνται να σχεδιαστούν :

- Η τομή του λοξού κώνου με το επίπεδο Π ως πρώτη και δεύτερη προβολή.
- Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου κατά την μεγαλύτερη γενέτειρα.
- Το αληθές μέγεθος της κωνικής τομής.

Καθένα από τα δύο παραδείγματα λύνονται με την ίδια μέθοδο με εγγραφή κανονικής (στο παράδειγμά μας 12-γωνικής) πυραμίδας στον κώνο. Η ίδια μέθοδος χρησιμοποιείται και όταν ο κώνος είναι ελλειπτικός, ή είναι λοξός χωρίς η $KO(K'O', K''O')$ να είναι $\parallel y_{12} \equiv \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Στη σελίδα 33 παρατίθενται τα σχήματα που οδηγούν στη λύση των προβλημάτων.



(Σχ.2)

4. Γενικά περί κώνου/Παράσταση ορθού κώνου

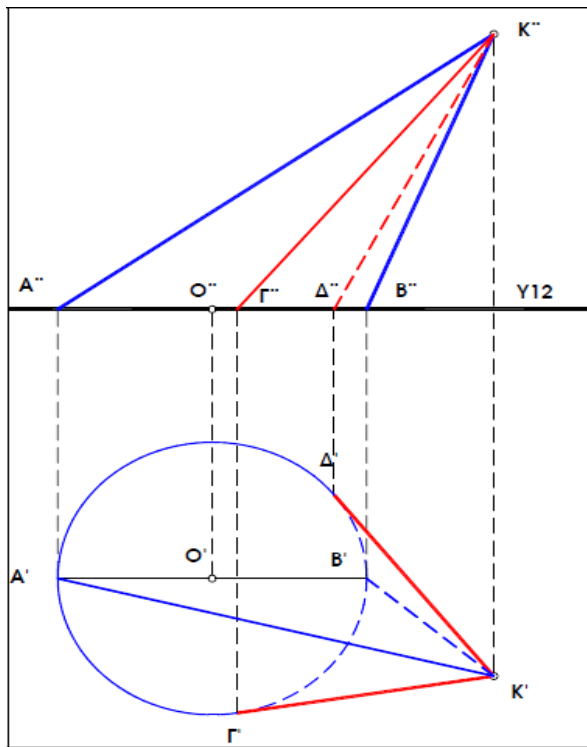
1) Ορισμοί

Κωνική επιφάνεια ή απλώς **κώνος** λέγεται η επιφάνεια που δημιουργείται από την προβολή τυχαίας καμπύλης (c) του χώρου από σταθερό σημείο K.

Η τυχαία καμπύλη (c) λέγεται **οδηγός** και το σημείο K λέγεται **κορυφή** της επιφάνειας του κώνου.

Οι ευθείες που ενώνουν την κορυφή (K) με τα σημεία της οδηγού καμπύλης (c) λέγονται **γενέτριες της επιφάνειας**. Η κωνική επιφάνεια θεωρείται ότι εκτείνεται και πάνω από την κορυφή(K).

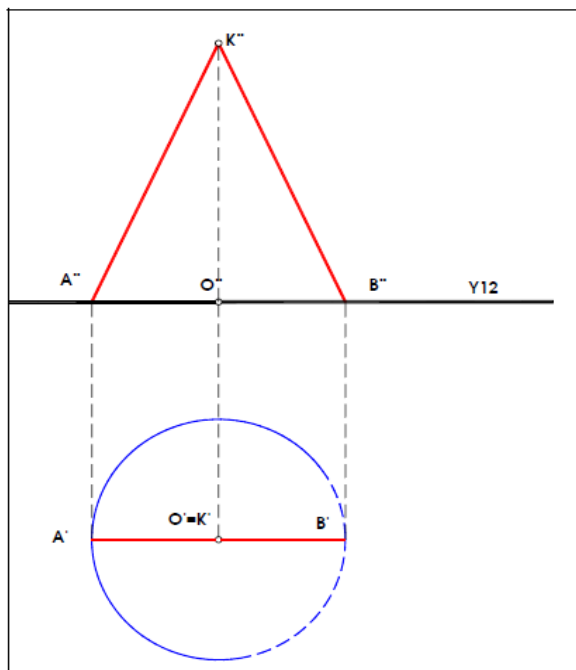
2) Οριζόντιο και κατακόρυφο περίγραμμα κώνου



(Σχ.3)

Το οριζόντιο περίγραμμα του κώνου (1^η προβολή), περιλαμβάνει την 1^η προβολή K' της κορυφής K , την 1^η προβολή της οδηγού καμπύλης και τις 1^{ες} προβολές των ακραίων γενετειρών που είναι οι εφαπτόμενες από το K' προς την προβολή της οδηγού καμπύλης.

Το κατακόρυφο περίγραμμα του κώνου (2^η προβολή), περιλαμβάνει αντίστοιχα την 2^η προβολή K'' της κορυφής, την 2^η προβολή της οδηγού καμπύλης και τις 2^{ες} προβολές των ακραίων γενετειρών.

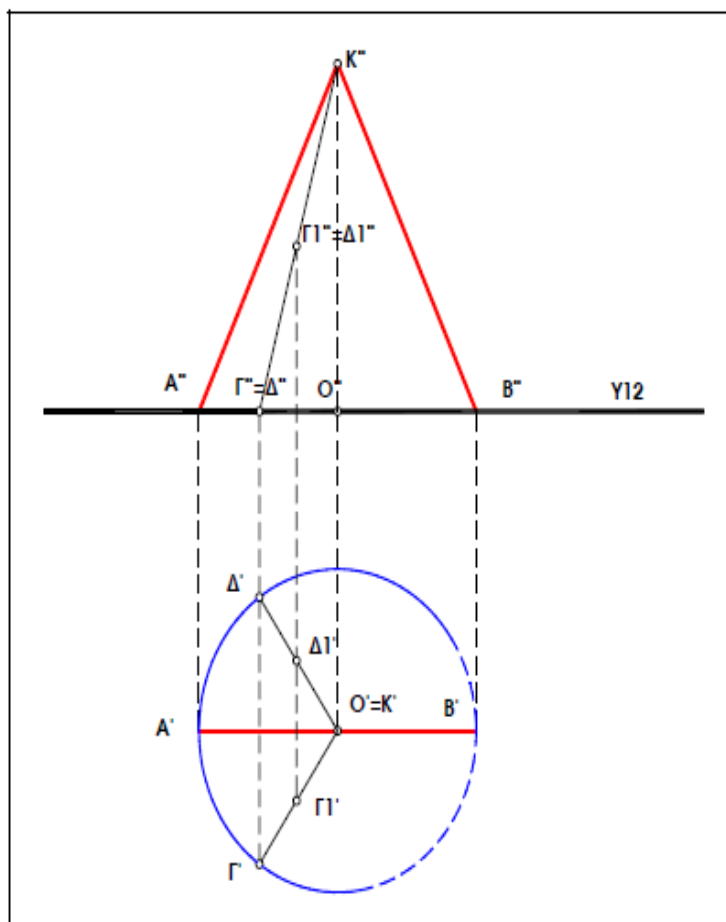


(Σχ.4)

Όταν η οδηγός καμπύλη είναι κύκλος και η προβολή της κορυφής στο επίπεδο αυτού του κύκλου συμπίπτει με το κέντρο του, ο κώνος ονομάζεται **ορθός ή εκ περιστροφής**.

Ο ορθός κώνος είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι προκύπτει από την περιστροφή της γενέτειρας KA περί άξονα την ευθεία KO .

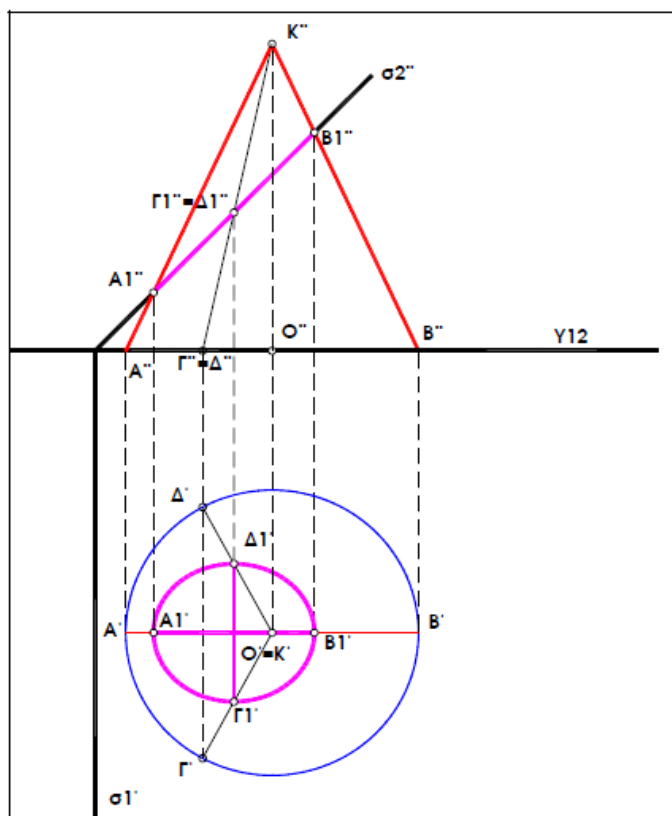
3) Προβολή σημείων της επιφάνειας ορθού κώνου



Κάθε σημείο της επιφάνειας του κώνου θεωρείται ότι ανήκει σε μία γενέτειρα του.

Το τυχόν σημείο $E_1(E_1', E_1'')$ π.χ. της επιφάνειας ανήκει στην γενέτειρα $KE (K'E', K''E'')$ και προσδιορίζεται μέσω των προβολών των γενετειρών.

(Σχ.5)



4) Ειδική περίπτωση ορθού κώνου

Τα ίδια ισχύουν όταν ο κώνος είναι εκ περιστροφής.

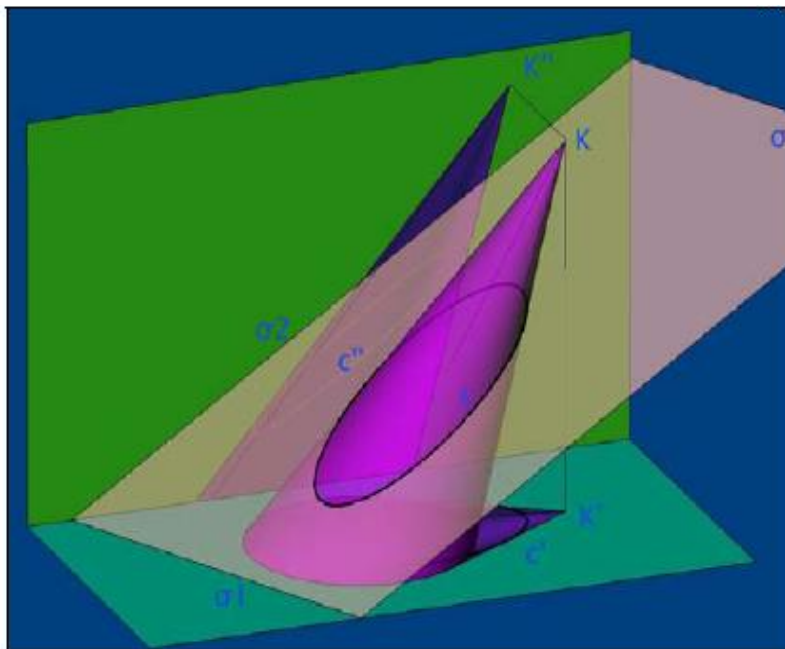
(Σχ.6)

Με αυτά τα 2 γεωμετρικά σχήματα θα ασχοληθούμε στις παρακάτω εφαρμογές:

1^η εφαρμογή: Καπνοδόχος Πλοίου

2^η εφαρμογή: Κατασκευές στεγαστρων κλειστών αθλητικών χώρων

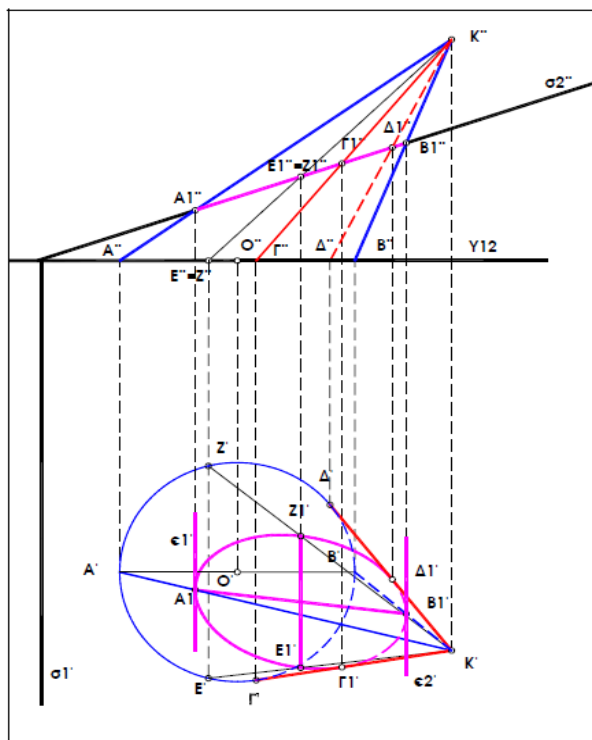
5. Τομή Κώνου με πρόσθιο επίπεδο-τομή κατά έλλειψη



Όταν το τέμνον επίπεδο είναι πρόσθιο και το 2^ο ίχνος του σ_2 τέμνει όλες τις γενέτειρες του κώνου, η τομή είναι έλλειψη. Η έλλειψη αυτή προβάλλεται στην 2^η προβολή κατά το ευθύγραμμο τμήμα A_1B_1 .

(Σχ.7)

Η A_1B_1 είναι διάμετρος της έλλειψης επειδή οι εφαπτόμενες ϵ_1 και ϵ_2 στα άκρα της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



(Σχ.8)

6. Απεικόνιση τομής λοξού κώνου με πρόσθιο επίπεδο

Στο προηγούμενο σχήμα έχουμε απεικονίσει την 1^η και την 2^η προβολή λοξού κώνου με οδηγό καμπύλη κύκλο (O,R) και κορυφή K(K',K''). Ο λοξός κώνος τέμνεται από το πρόσθιο επίπεδο $\sigma(\sigma_1', \sigma_2'')$ και η τομή του έχει αντίστοιχα προβολές της έλλειψις με άξονες (συζυγείς διαμέτρους) $A_1'B_1', E_1'Z_1'$ και $A_1''B_1'', E_1''Z_1''$.

7. Αληθές μέγεθος τομής-Ανάπτυγμα μετασχηματισμένης τομής

Για να σχεδιασθεί το ανάπτυγμα μιας κωνικής επιφάνειας χρειάζεται να γνωρίζουμε τα μήκη (KA), (KB), (KΓ)... κλπ των γενετειρών της κωνικής επιφάνειας και τις αποστάσεις των άκρων των γενετειρών μεταξύ τους. Τα πραγματικά μήκη των γενετειρών προσδιορίζονται με την μέθοδο της περιστροφής τους περί κατακόρυφο άξονα διερχόμενο από την κορυφή K της επιφάνειας, ώστε να γίνουν μετωπικές.

Η γενέτειρα KA(K'A', K''A'') π.χ. περιστρεφόμενη περί τον κατακόρυφο άξονα παίρνει την θέση KAo (K'Ao', K''Ao'') οπότε το μέγεθος (K''Ao'') είναι το πραγματικό της μήκος. Τα μήκη των αποστάσεων των άκρων των γενετειρών μετρώνται σε πραγματικό μέγεθος επί της

Η συζυγής διάμετρος της A_1B_1 είναι η E_1Z_1 η οποία είναι επίσης παράλληλος προς τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 . Στην 2^η προβολή η E_1Z_1 προβάλλεται στο σημείο $E_1''=Z_1''$, μέσον της $A_1''B_1''$.

Στην 1^η προβολή τα E_1' και Z_1' προκύπτουν μέσω των γενετειρών του κώνου.

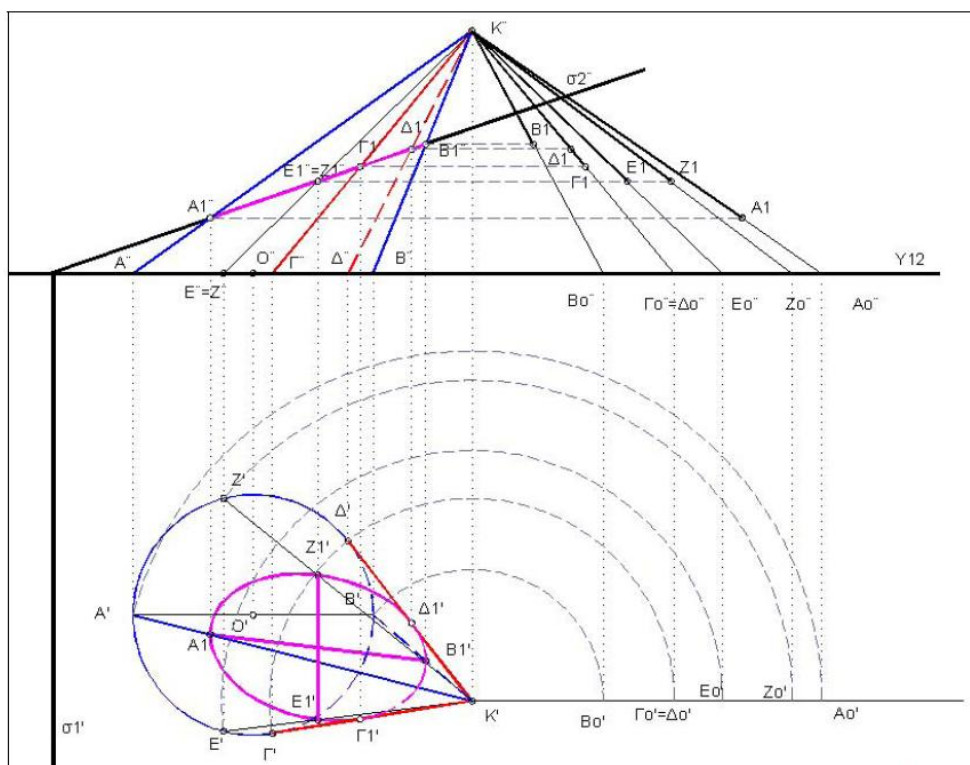
οδηγού καμπύλης. Από τα μήκη των γενετειρών και από τα μήκη των αποστάσεων των άκρων τους κατασκευάζεται το ανάπτυγμα.

Ο κύκλος της βάσης μετασχηματίζεται σε καμπύλη η οποία παρουσιάζει το πολύ δύο σημεία καμπής. Σημεία καμπής της μετασχηματισμένης της βάσης είναι τα σημεία επαφής Γ και Δ των γενετειρών του περιγράμματος της 1ης προβολής με τον κύκλο .

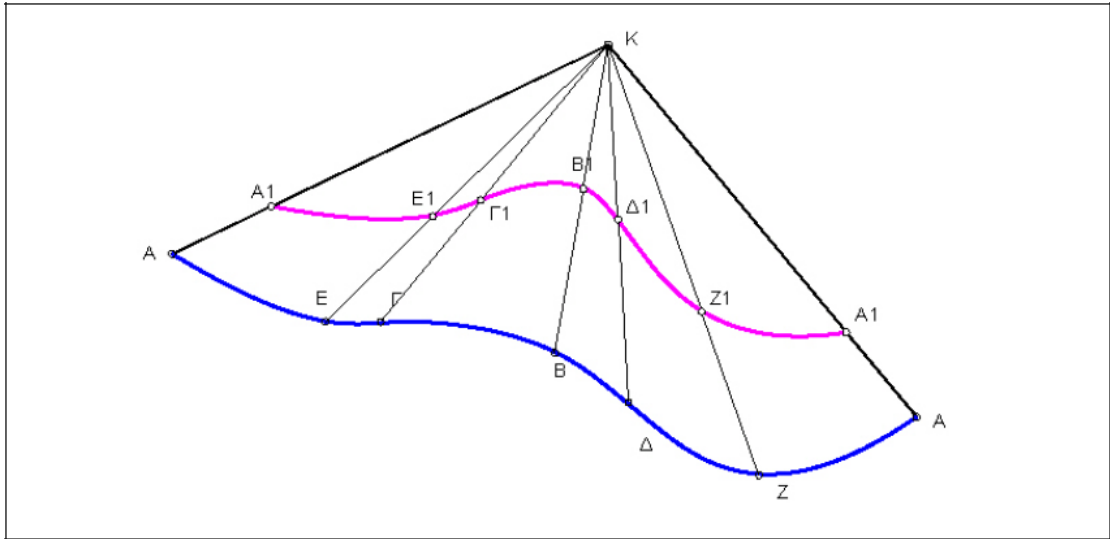
Για την μετασχηματισμένη της τομής απαιτούνται οι αποστάσεις των σημείων τομής από την κορυφή του κώνου, οι οποίες καθορίζονται επίσης μέσω της περιστροφής. Η μετασχηματισμένη της τομής παρουσιάζει επίσης δύο το πολύ σημεία καμπής τα οποία προκύπτουν ως εξής: Από την προβολή της κορυφής στο τέμνον επίπεδο φέρνουμε τις εφαπτόμενες στην τομή (στην έλλειψη). Τα σημεία επαφής (εάν υπάρχουν) γίνονται σημεία καμπής της μετασχηματισμένης της τομής.

Κατ'αυτόν τον τρόπο προκύπτουν τα παρακάτω σχήματα αναπτύγματος κώνου και μετασχηματισμένης της τομής, τα οποία βρίσκουν αυτούσια εφαρμογή στην κατασκευή μιας καπνοδόχου πλοίου, όπως αναφέραμε πρωτότερα.

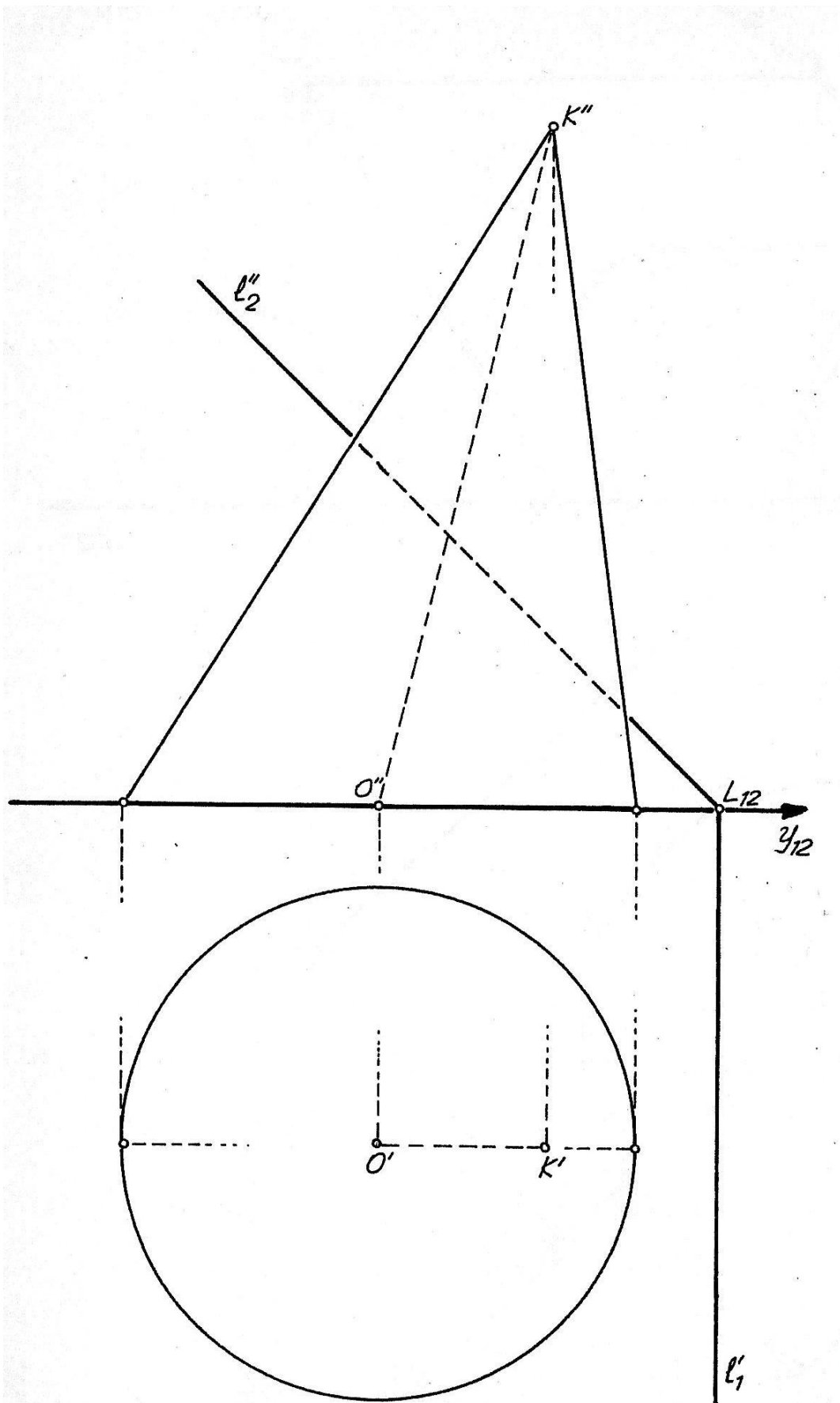
Παρακάτω παρατίθεται επιπροσθέτως και εικόνα μιας καπνοδόχου, για λόγους πλήρέστερης εποπτείας (Σχ.11).



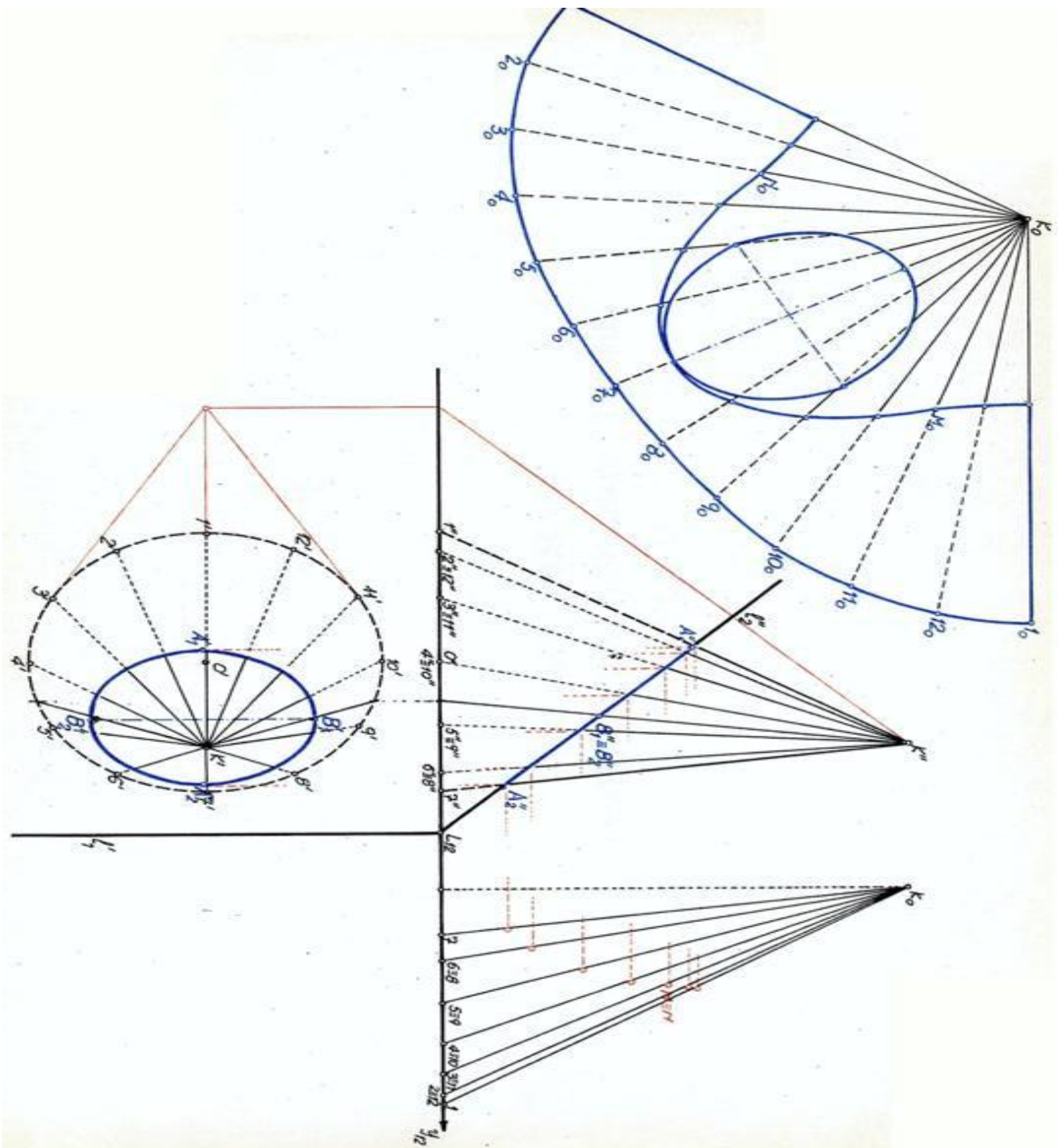
(Σχ.9)



(Σχ.10)



Σχ.11



(Σχ.12)

Στο Π_1 έχουμε την 1^η προβολή του κώνου που συνίσταται από την πρώτη προβολή της βάσης (O', R) την πρώτη προβολή της κορυφής K' και από την πρώτη προβολή του ζεύγους μετωπικών γενετειρών $(K'1', K'2')$ του κώνου.

Στο Π_2 έχουμε τη δεύτερη προβολή του κώνου που συνίσταται από την δεύτερη προβολή της βάσης (O, R) που είναι το ευθύγραμμο τμήμα $1''7'' \in \gamma_{12}$ από την 2^η προβολή της κορυφής K'' και από τη δεύτερη προβολή $(1''K'', 7''K'')$ του ζεύγους των μετωπικών γενετειρών.

Η τομή με το πρόσθιο επίπεδο είναι έλλειψη που έχει 2^η προβολή το ευθύγραμμο τμήμα $A_1''A_2''$ και πρώτη προβολή έλλειψη με άξονες $(A_1'A_2', B_1'B_2')$.

Οι προβολές της έλλειψης που είναι η τομή του κώνου με το επίπεδο τομής $\ell(\ell_1', \ell_2'')$ δεν είναι αληθή μεγέθη. Το αληθές μέγεθος της τομής υπολογίζεται με κατάκλιση του επιπέδου $\ell(\ell_1', \ell_2'')$ στο επίπεδο Π_1 .

Αν $A_0B_0, \Gamma_0\Delta_0$ η κατάκλιση των αξόνων έλλειψης (τομής) τότε η κατάκλιση της έλλειψης της τομής κατασκευάζεται και υπολογίζεται το εμβαδόν της.

Το αληθές μέγεθος της παράπλευρης επιφάνειας της κατασκευής υπολογίζεται από το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας και η μετασχηματισμένη της τομής του κώνου. Αυτό ανάγεται στο ανάπτυγμα της εγγεγραμμένης πυραμίδας στον κώνο και της μετασχηματισμένης της.

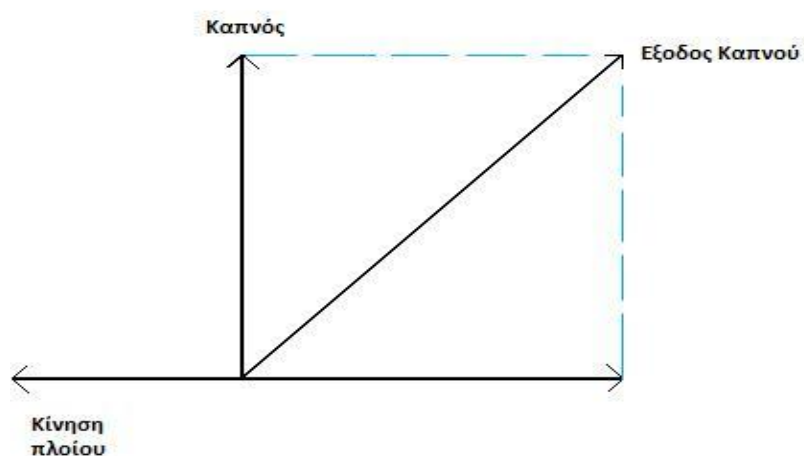
Ειδική περίπτωση

Όταν ο κώνος είναι ορθός κυκλικός, η κατασκευή γίνεται απλούστερη. Η δεύτερη προβολή της τομής είναι το ευθύγραμμο τμήμα $A_1''B_1'' \in \sigma_2$ ενώ η πρώτη προβολή της είναι έλλειψη με άξονες $A_1'B_1'$ και $\Gamma_1'\Delta_1'$.

Με την κατάκλιση του επιπέδου τομής άρα και της έλλειψης προκύπτει το αληθές μέγεθος της τομής. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου είναι κυκλικός τομέας κέντρου K και ακτίνας $KA = K''A''$ και η παράπλευρη επιφάνεια της κατασκευής ορίζεται από το τμήμα της που περιέχεται μεταξύ της βάσης του κυκλικού τομέα και της μετασχηματισμένης της τομής.

Παρατηρήσεις

- A. Ο καπνοσυλλέκτης του πλοίου είναι λοξός κώνος πάντοτε,διότι κατά την κίνηση του πλοίου ο καπνός ακολουθεί αντίθετη πορεία της πορείας του πλοίου,άρα κινείται κατά τη διαγώνιο,όπως φαίνεται στο σχήμα:



(Σχ.13)

- B. Τέτοιες κατασκευές εργαστηρίων έχουμε εντός της Πολυτεχνειούπολης στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών,όπως φαίνεται στην παρακάτω φωτογραφία:



(Σχ.14)

Ειδικές Κατασκευές

Σε αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γεωμετρικό μοντέλο σε 2 πιο σύνθετες γεωμετρικές κατασκευές .

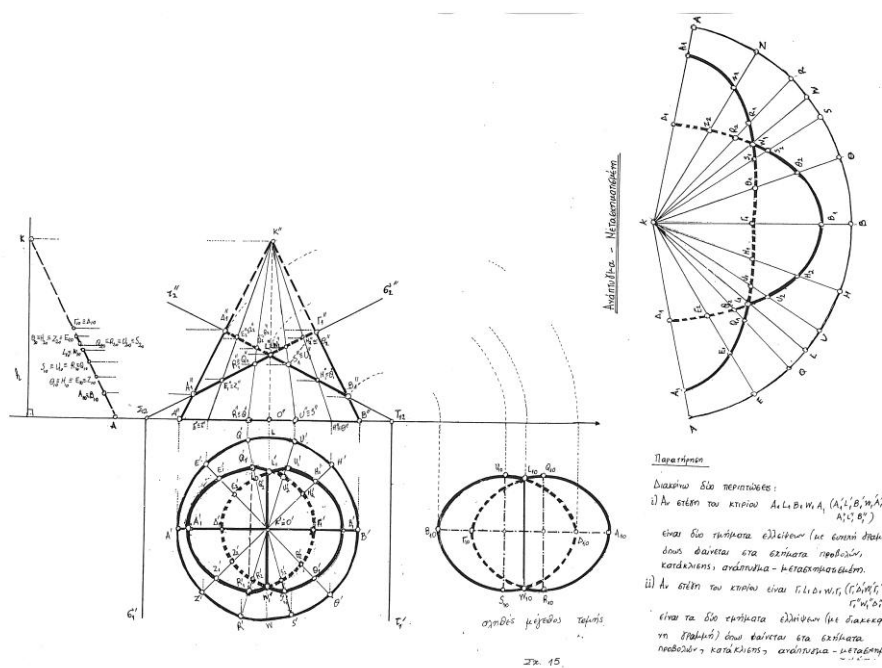
- i. Η πρώτη αναφέρεται στην τομή ορθού κυκλικού κώνου με δύο πρόσθια επίπεδα.
 - ii. Η δεύτερη σε αλληλοτομία ορθού κυκλικού κώνου και ορθής τετραγωνικής πυραμίδας.
- i. Εδώ έχουμε το σχήμα 15, το οποίο ακολουθεί παρακάτω. Προσεγγιστικά το στάδιο Ειρήνης και Φιλίας θεωρείται ορθός κώνος με τομή 2 προσθίων επιπέδων (Σχ.15).

Ουσιαστικά η γεωμετρική αυτή κατασκευή είναι τομή ελλειπτικού κώνου με υπερβολικό παραβολοειδές. Από την αναλυτική γεωμετρία είναι γνωστές οι εξής εξισώσεις:

a) Η εξίσωση ελλειπτικού κώνου:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \quad (2)$$

b) Το υπερβολικό παραβολοειδές είναι ευθειογενής επιφάνεια που παράγεται από τις 2 οικογένειες των ευθειών:

i.
$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{\beta} = 2z, a \geq 0, \beta \geq 0 \quad (3)$$



Σχ.15.

Για το υπερβολικό παραβολοειδές ισχύουν:

- 1) Οι αριθμοί α, β ονομάζονται παράμετροι του υπερβολικού παραβολοειδούς.
- 2) Επίπεδη τομή κάθετη στον άξονα Z ($Z=\lambda, \lambda \neq 0$) είναι υπερβολή και για $\lambda=0$ είναι ζεύγος ευθειών $\frac{x}{\sqrt{a}} = \pm \frac{y}{\sqrt{\beta}}$.

- 3) Κάθετη τομή του υπερβολικού παραβολοειδούς με επίπεδο στους άξονες x, y είναι παραβολή (εξού και το όνομα της επιφάνειας).
- 4) Είναι ευθειογενής επιφάνεια και αποτελείται από 2 διακεκριμένες ομάδες ευθειών, που λέγονται γενέτειρες. Οι εξισώσεις των γενετειρών είναι:

$$1^{\text{η}} \text{ ομάδα: } \left\{ \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) = 2\mu z, \mu \left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) = \lambda \right\}$$

$$2^{\text{η}} \text{ ομάδα: } \left\{ \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) = 2\mu z, \mu \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) = \lambda \right\}$$

- 5) Οι γενέτειρες της ίδιας ομάδας δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- 6) Δύο γενέτειρες διαφορετικών ομάδων βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- 7) Από κάθε σημείο του υπερβολικού παραβολοειδούς διέρχεται μία και μόνο γενέτειρα κάθε ομάδας. Οι γενέτειρες αυτές ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο στο υπερβολικό παραβολοειδές.
- 8) Είναι ευθειογενής επιφάνεια που παράγεται από την κίνηση ευθείας d , που παραμένει παράλληλη σε ένα επίπεδο ρ και συναντά 2 σταθερές ασύμβατες ευθείες d_1, d_2 και δεν είναι παράλληλη στο ρ .
- 9) Το επίπεδο ρ και οποιοδήποτε άλλο παράλληλο στο ρ λέγεται διευθύνων επίπεδο του υπερβολικού παραβολοειδούς.
- 10) Θεωρείται ιδανική επιφάνεια για στέγαση μεγάλων ανοικτών χώρων, διότι τα φορτία κατανέμονται στην περιφέρεια, όπου υπάρχουν υποστηλώματα.

- ii. Η αλληλοτομία ορθού κώνου και τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης κάθετη στον άξονα γ_{12} και βάση του κώνου εντός του τετραγώνου και ύψος πυραμίδας μικρότερο του ύψους του κώνου. Η αλληλοτομία ανάγεται σε τομή κώνου με πρόσθιο επίπεδο που περιορίζεται από τις ακμές της έδρας της πυραμίδας. Με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς το κέντρο της βάσης (κώνου και

πυραμίδας) βρίσκουμε πρώτη,δεύτερη προβολή της τομής,αληθές μέγεθος,ανάπτυγμα και μετασχηματισμένη(Σχ.16).

Παρατήρηση:Μια άλλη εφαρμογή της Παραστατικής Γεωμετρίας,χρήσιμη στους Μηχανικούς είναι προβολή σε ένα επίπεδο (μέθοδος υψομέτρων) που χρησιμοποιούν οι Πολιτικοί Μηχανικοί σε χωματουργικά έργα (οδοποιία) ή σε κατασκευές στεγών κλπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3^η εφαρμογή

ΠΛΕΓΜΑΤΑ-ΕΝΕΛΙΞΗ

10. Εισαγωγή

Τα πλέγματα είναι σχήμα του διδιάστατου χώρου (\mathbb{R}^2) και αποτελούνται από πεπερασμένο **σύνολο σημείων** n και από πεπερασμένο σύνολο m υποσυνόλων του n που ονομάζουμε **γραμμές**. Άρα τα πλέγματα είναι μια πεπερασμένη γεωμετρία για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

Με $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των n σημείων .

Με $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$ συμβολίζουμε το σύνολο των m γραμμών.

Αν A σημείο του συνόλου P που ανήκει στη γραμμή ℓ του συνόλου L λέμε ότι **το A ανήκει στο ℓ υποσύνολο του L ή το ℓ διέρχεται από το A .**

Τα σημεία του P που ανήκουν στην ίδια γραμμή ℓ του L ονομάζονται **συγγραμικά**.

Δύο γραμμές ℓ_k, ℓ_s του L που διέρχονται από το ίδιο σημείο $A \in P$ λέγονται **τεμνόμενες**. Δύο γραμμές ℓ_k, ℓ_s του L που είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο τότε ℓ_k, ℓ_s λέγονται **παράλληλες**.

Το ζεύγος των συνόλων (P, L) ονομάζεται **πεπερασμένο ομοπαράλληλικό επίπεδο (a fine plane)**.

2. Αξιώματα

Ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

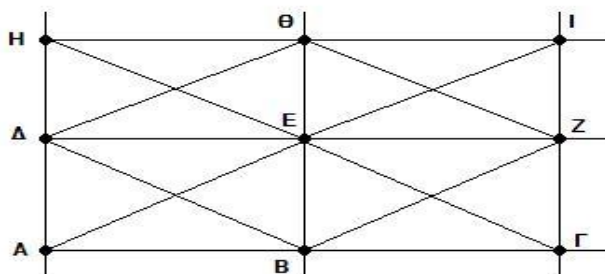
- 1) Υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που διέρχεται από 2 οποιαδήποτε σημεία.
- 2) Αν δοθούν δύο γραμμές υπάρχει το πολύ ένα σημείο που ανήκει και στις δύο γραμμές.
- 3) Υπάρχουν 4 σημεία τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συγγραμικά.
- 4) Αν P τυχαίο σημείο και ℓ μια γραμμή που δεν διέρχεται από το P , τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη με την ℓ .

Παράδειγμα:

Αν $P = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I\}$ σύνολο 9 σημείων του επιπέδου και

$L = \{AB\Gamma, \Delta EZ, H\Theta I, A\Delta H, BE\Theta, \Gamma Z I, HE\Gamma, \Theta Z A, I B \Delta, A E I, B Z H, \Gamma \Theta \Delta\}$

είναι 12 υποσύνολα (γραμμές) του P τότε το (P, L) είναι πεπερασμένη γεωμετρία που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα και έχουμε το εξής σχήμα (Σχήμα 17):



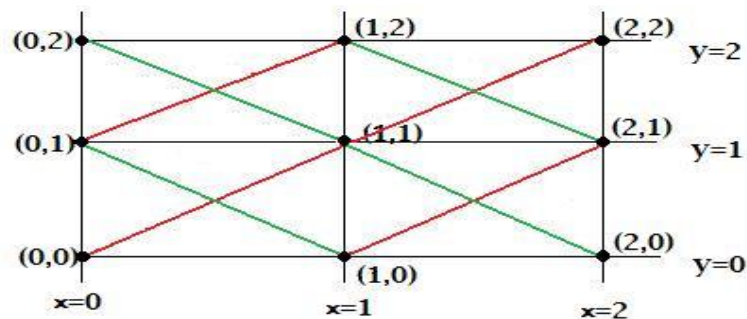
3. Θεωρήματα:

Για το πεπερασμένο ομοπαράλληλο επίπεδο ισχύουν:

- i. Ο αριθμός των σημείων του είναι n^2 .
- ii. Ο αριθμός των γραμμών του είναι $n^2 + m$.
- iii. Κάθε γραμμή περιέχει ακριβώς n σημεία.
- iv. Κάθε σημείο ανήκει ακριβώς σε $n + 1$ γραμμές.
- v. Κάθε γραμμή του είναι παράλληλη σε n γραμμές.
- vi. Κάθε γραμμή του συναντά (έχει κοινό σημείο δηλαδή) n^2 άλλες γραμμές.
- vii. Υπάρχουν $n + 1$ παράλληλες κλάσεις γραμμών
- viii. Το σύνολο όλων των γραμμών της ίδιας κλάσης σχηματίζει μία παράλληλη κλάση $[\ell]$ στο ομοπαράλληλο επίπεδο.

Σημείωση: Το n ονομάζεται **τάξη** του επιπέδου.

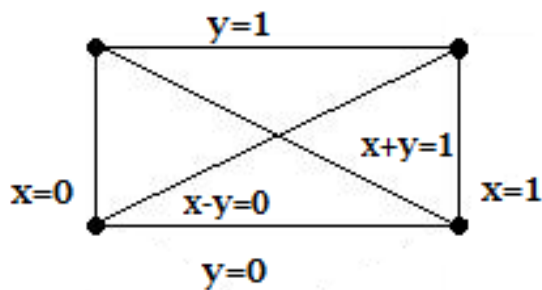
Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:



Σχήμα (18)

- ❖ $n^2=9$ σημεία.
- ❖ Τάξη $n=3$.
- ❖ $n^2 + m=3^2+3=12$ γραμμές.
- ❖ 4 κλάσεις παράλληλων ευθειών:
 - A. Κάθετη κλάση: $x=0, x=1, x=2$.
 - B. Οριζόντια κλάση: $y=0, y=1, y=2$.
 - C. Παράλληλη κλίση με κλίση 1 (κόκκινο χρώμα): $y=x, y=x+1, y=x+2$.
 - D. Παράλληλη κλίση με κλίση 2 (πράσινο χρώμα): $y=2x, y=2x+1, y=2x+2$

Αντίστοιχα για το ομοπαράλληλο επίπεδο τάξης 2 έχουμε:



(Σχήμα 19)

- $n^2=4$.
- $n^2 + 2=6$.
- 4 κλάσεις παράλληλων ευθειών.

4. Πλέγματα

Εφαρμογή αυτής της Γεωμετρίας είναι τα ορθογώνια πλέγματα. Αυτά έχουν σαν σύνολο κορυφών το καρτεσιανό γινόμενο $S \times S$ ενός συνόλου S με m σημεία.

Δύο κορυφές ενώνονται με πλευρά αν και μόνο αν έχουν μια τουλάχιστον κοινή συντεταγμένη και θα βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη του πλέγματος.

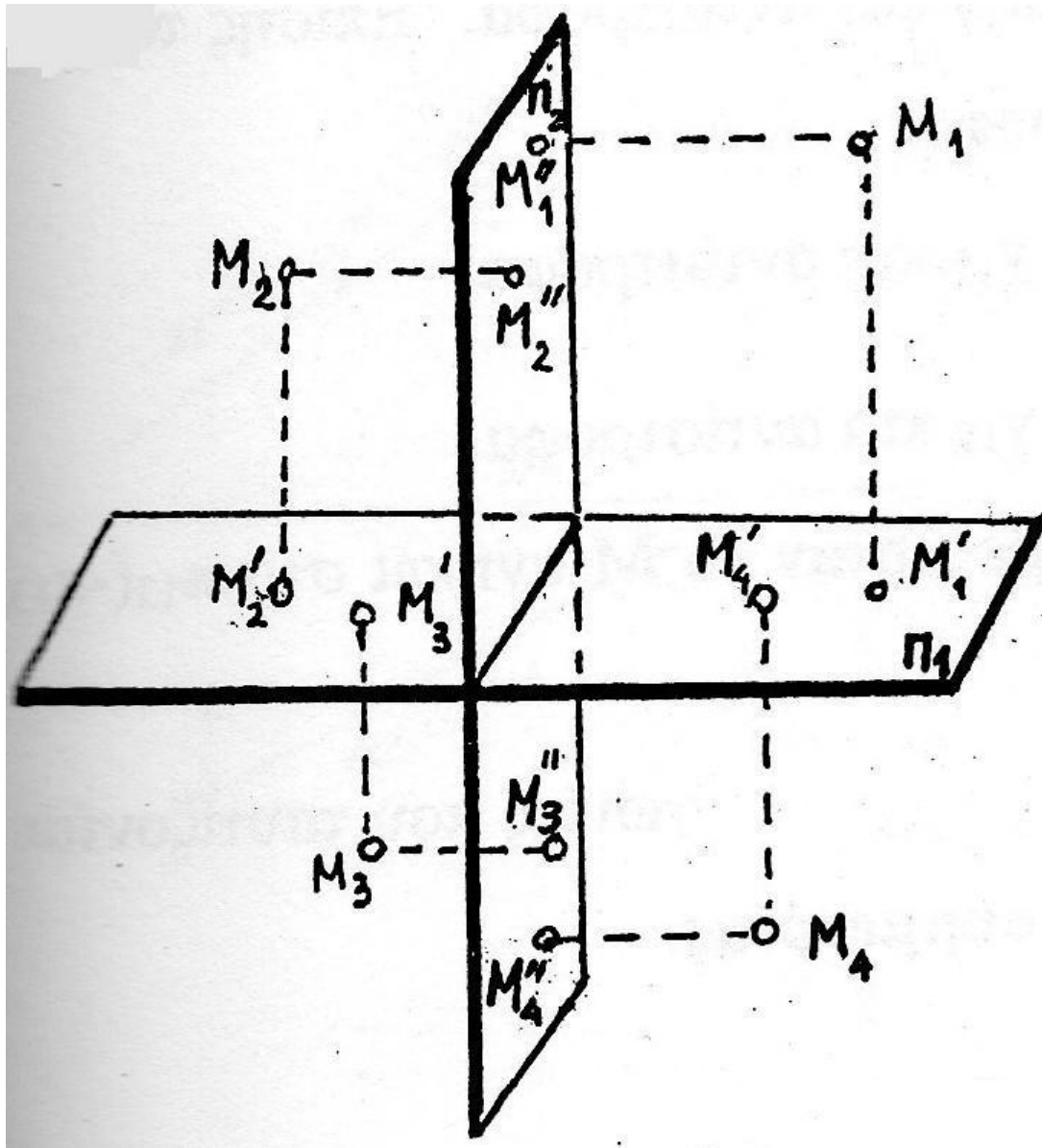
Στη θεωρία γραφημάτων τα ορθογώνια πλέγματα μελετήθηκαν από τον Ινδό μαθηματικό Bose (1894-1974) και ως ισχυρά κανονικά γραφήματα από τους Erdős, Renyi και Sos το 1965.

Μια εργασία της επιβλέπουσας αναφέρεται στα ελάχιστα άκαμπτα ατσάλινα πλέγματα¹.

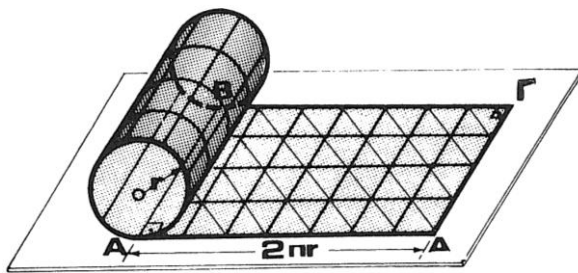
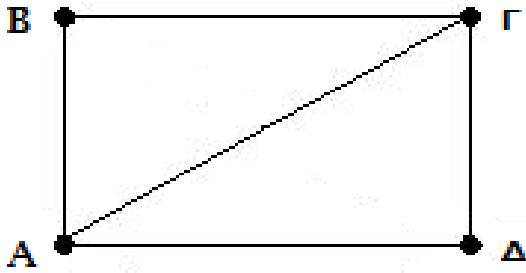
¹ Ν. Πάλλα «Συνεκτικότητα γραφήματος από τους 0-1 πίνακες γειτνίασης πρόσπτωσης», 2003.

5. Ενέλιξη

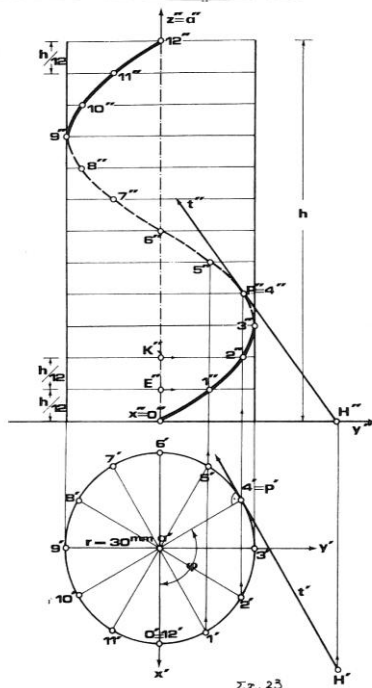
Το Γεωμετρικό Σχήμα δεν είναι στατικό. Με την κίνηση αλλάζει και η διάσταση του χώρου. Έτσι στο κεφάλαιο 2 από τον (\mathbb{R}^3) χώρο πήγαμε με **κατάκλιση** στον (\mathbb{R}^2) και αντίστοιχα από τον (\mathbb{R}^2) με **ανάκλιση** πήγαμε στον (\mathbb{R}^3) χώρο.



Έτσι, αν στο πλέγμα $AB\Gamma\Delta$ θεωρήσουμε ότι η πλευρά $AB \equiv \Gamma\Delta$ προκύπτει κύλινδρος.

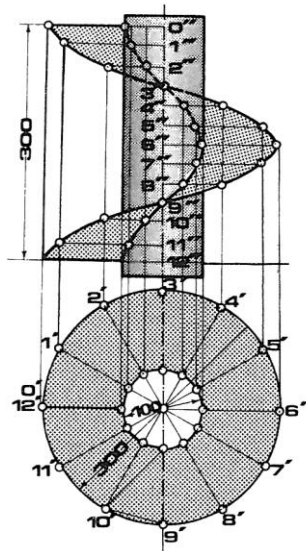


Σκ. 22



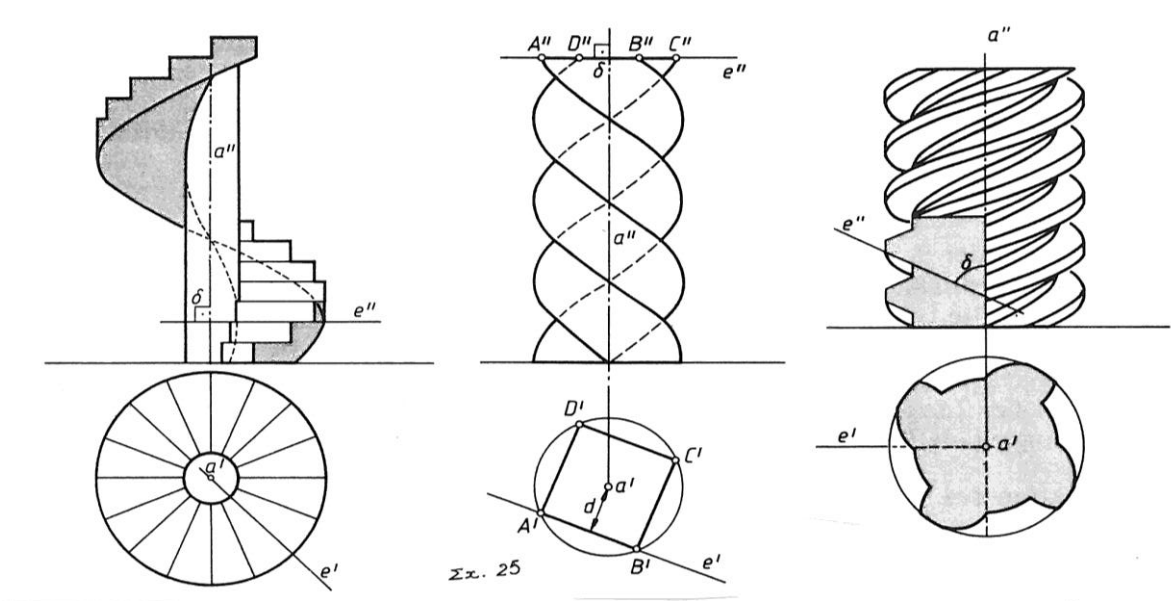
Σκ. 23

Η διαγώνιος στην περίπτωση αυτή μετατρέπεται σε ενέλιξη.

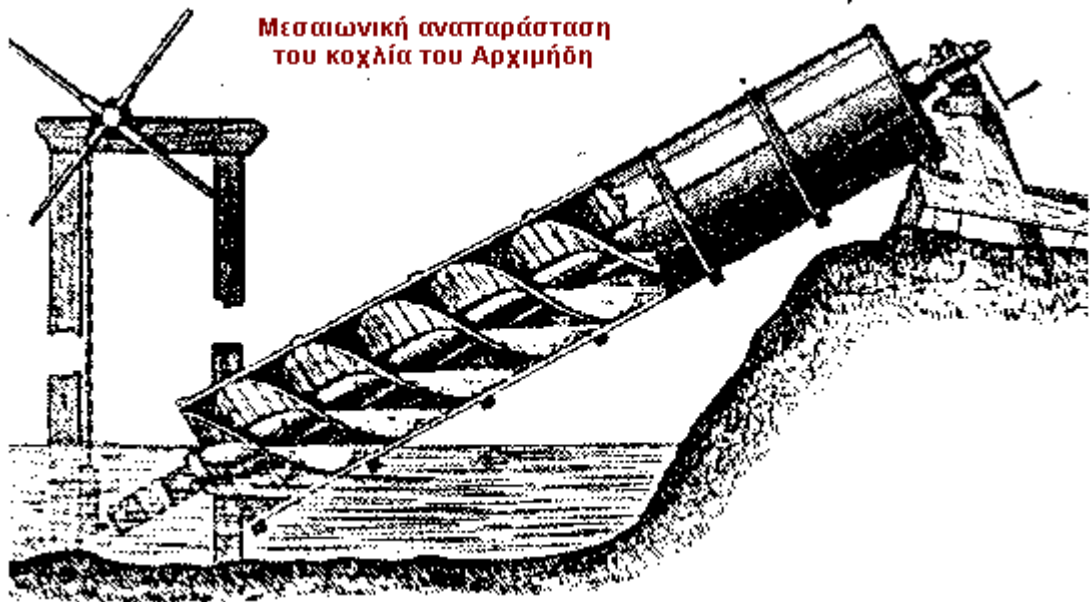


Σχ. 24

Η πλευρά $AB \equiv \Gamma\Delta$ είναι το βήμα της ενέλιξης. Τέτοια σχήματα είναι τα κυλινδρικά κλιμακοστάσια, ο κοχλίας κ.λ.π. Η μεταξύ 2 ενελίξεων επιφάνεια είναι η ενελικτική επιφάνεια που στα σχήματά μας φαίνεται ως βάση της κλίμακας ή ως παράπλευρη επιφάνεια (κλιμακοστασίου βιβλιοθήκης ΕΜΠ).



Τέτοια σχήματα που ανέφερα υπάρχουν στο χώρο του Πολυτεχνείου και ακολουθούν φωτογραφίες τους .



Ο κοχλίας του Αρχιμήδους



Το κλιμακοστάσιο της Βιβλιοθήκης του Ε.Μ.Π. Φαίνεται καθαρά η ενελικτική επιφάνεια.



Κλιμακοστάσιο του Υπουργείου Μεταφορών.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Όπως είδαμε, η Γεωμετρία δέν είναι μόνο μία επιστήμη του απτού και ήδη γνωστού φυσικού κόσμου. Πολλές από τις εφαρμογές της εφάπτονται σε τομείς που είναι υπερβατικοί και τους αγγίζει μόνο η ανθρώπινη φαντασία.

Πέρα από αυτό, που σίγουρα εξάπτει το ενδιαφέρον, εντυπωσιάζει η σαφής διαχρονικότητα της Γεωμετρίας, η οποία μπορεί πλέον να υποστηρίξει τόσο την λύση πολύπλοκων αλγορίθμων, όσο και την εφαρμοσμένη κατασκευή μέγαλων και μικρών έργων, με ακρίβεια και καλαισθησία.

Το πιο ευχάριστο όμως, είναι ότι η Γεωμετρία συνεχίζει να δίνει ερεθίσματα στον Άνθρωπο να υπερβεί τα φυσικά του όρια και να δώσει υφή και υπόσταση στους συλλογισμούς, χωρίς να είναι αποκομμένη από το φυσικό περιβάλλον, από όπου ξεκίνησε.

Είναι σίγουρο ότι θα συνεχίσει να εμπνέει το ανθρώπινο γένος, όπως κάνει εδώ και πάνω από 2000 χρόνια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- «Πεπερασμένα Μαθηματικά», Ε.Γαλανή, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 1993
- «Γραμμικός Προγραμματισμός», Σ.Κουνιάς, Θεσσαλονίκη, 1982
- «Γραμμικός Προγραμματισμός», Δ.Ξηρόκωστας, Αθήνα, 1977
- «Γραμμικός Προγραμματισμός», Μ.Παυλίδου, Θεσσαλονίκη, 1972
- «Παραδόσεις Μαθήματος Επιχειρησιακής Έρευνας», Π.Πολύζος, Αθήνα, 2005
- «Γραμμική Άλγεβρα», Ι.Μαρουλά, Αθήνα, 2003
- «Σημειώσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας», Ν.Πάλλα, 2001
- «Σημειώσεις Αναλυτικής και Παραστατικής Γεωμετρίας», Ν.Πάλλα, 2008
- «Παραστατική Γεωμετρία», Σ.Μαρκάτη, Αθήνα, 2003
- «Παραστατική Γεωμετρία», Π.Λαδόπουλος
- «Παραστατική Γεωμετρία», Γ.Λευκαδίτης
- «Παραστατική Γεωμετρία», Φούντας
- «Αναλυτική Γεωμετρία», Δ.Δασκαλόπουλου
- «Σχέση Ν-Διάστατης Γεωμετρίας-Γραμμικού Προγραμματισμού-Γραμμοθεωρίας-Πληροφορικής», Μ.Πάλλα, Αθήνα, 2008
- «Πεπερασμένες Γεωμετρίες», Ν.Πάλλα, Αθήνα, 2003
- “Introduction to Linear Programming”, W.Garvin, MacGraw-Hill, 1969

"Linear Programming", S.Gass, MacGraw-Hill,1974

*"An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games",
S.Vajda, Methuen et Co,Ltd,1968*

"Linear Programming",V.Chvatal,Freeman,1983