



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΣΤΟΚΟΣ

**“ Υπολογιστική προσομοίωση μη μόνιμης ροής
στο κυκλοφορικό σύστημα ”**

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Καθηγητής Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αθήνα 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΣΤΟΚΟΣ

**“ Υπολογιστική προσομοίωση μη μόνιμης ροής
στο κυκλοφορικό σύστημα ”**

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Καθηγητής Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αθήνα 2009



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

KONSTANTINOS STOKOS

**“Computer modeling of unsteady flow
in the circulatory system”**

Supervisor:

Professor TSANGARIS SOKRATES

School of Mechanical Engineering

National Technical University of Athens

Master Thesis for
Mechanical Engineering Studies

Athens 2009

Αφιερώνεται στους γονείς μου,
για την πνευματική τους καθοδήγηση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην παρούσα εργασία, με την βοήθεια της διεθνούς βιβλιογραφίας, μελετάται η διάδοση κυμάτων σε αγγεία του κυκλοφορικού συστήματος και στην συνέχεια το κυκλοφορικό σύστημα του εγκεφάλου με βάση τον λεγόμενο κύκλο του Willis.

Συγκεκριμένα στο 1^ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην θεωρία διάδοσης κυμάτων στις αρτηρίες και αναφέρονται βιβλιογραφικές πηγές για περαιτέρω μελέτη του αντικειμένου. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες που χρησιμοποιήθηκαν στην συνέχεια της εργασίας και ο τρόπος υπολογισμού των ανακλάσεων για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται εκτενώς χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογιστικών μοντέλων ολόκληρου του κυκλοφορικού συστήματος και ειδικά του κύκλου του Willis στο κυκλοφορικό σύστημα του εγκεφάλου (circle of Willis) που βρέθηκαν στην βιβλιογραφία.

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται όλα τα επιμέρους βήματα που προηγήθηκαν της σύνταξης του υπολογιστικού κώδικα, σύμφωνα με αυτά που επιτάσσει η επιστήμη-τέχνη της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την απαραίτητη σύγκριση με τις βιβλιογραφικές πηγές αναπτύχθηκε υπολογιστικός κώδικας βασιζόμενος στην ρητή έκφραση της αριθμητικής μεθόδου Mac-Cormack. Οι οριακές συνθήκες διατυπώθηκαν κάνοντας χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών. Τα αιμοφόρα αγγεία μοντελοποιήθηκαν ως παραμορφωτοί σωλήνες και σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν η ροή θεωρήθηκε ως παλλόμενη, με διάφορους παλμούς πίεσης.

Τέλος στο 4^ο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τις υπολογιστικές περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Οι πρώτες υπολογιστικές περιπτώσεις μελετήθηκαν για να γίνει η απαραίτητη σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της βιβλιογραφίας ώστε να εξακριβωθεί η αξιοπιστία του κώδικα. Στην συνέχεια επιλύθηκε το κυκλοφορικό σύστημα του εγκεφάλου (κύκλος του Willis) σε 6 βήματα όπως αναλυτικά φαίνεται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Η μελέτη έγινε μονάχα για φυσιολογικές συνθήκες και όχι για παθολογικές (βεβαίως είναι εύκολη η μεταπήδηση στην μελέτη παθολογικών συνθηκών). Έτσι συνάχθηκαν συμπεράσματα σχετικά με την χρησιμότητα των αγγείων στην αιμάτωση της περιφέρειας και αναδείχτηκε η κατασκευαστική αρτιότητα του κυκλοφορικού συστήματος του εγκεφάλου.

ABSTRACT

In this master thesis, taking advantage of the universal bibliography, the propagation of waves in blood vessels of the circulatory system and the cerebral circulatory system according to the circle of Willis are studied.

To be more specific the 1st chapter explains the theory of wave propagation in the blood vessels and refers to bibliographic sources for extra study in this subject. The equations of incompressible flow with steady viscosity are presented. These equations were used in this study. The theory of the wave reflection for the linearized system was also presented.

The 2nd chapter deals with some characteristic examples found in the universal bibliography of models of the circulatory system in general and the cerebral circulatory system (circle of Willis).

The 3rd chapter writes about all the steps that preceded the syntax of the computational code, in relevance to what computational fluid dynamics (CFD) methodology demands. This code was based on the explicit finite difference technique Mac-Cormack. The boundary conditions were set using the method of characteristics. The blood vessels were modeled as elastic tubes and the flow as pulsatile, for different pressure pulses.

Finally, in the 4th chapter the results of the studied cases are discussed. Some cases are studied in order to sure the exact of the results, comparing them with the presented results found in the bibliographic sources. Then the cerebral circulatory system (circle of Willis) was solved in 6 steps, analytically seen in this chapter. The study of the circle of Willis was done only for physiological circumstances, not for pathological ones (it is relatively easy for pathological circumstances to be studied using the same code). Using these results, conclusions were conducted about the usage of each blood vessel in the spread of the blood in the brain mass.

ΚΙΝΗΤΡΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ, ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ, ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ, ΠΑΡΑΠΕΡΑ ΕΡΕΥΝΑ

Η επιστημονική ενασχόληση με το αντικείμενο της βιοϊατρικής τεχνολογίας αποτέλεσε σημαντικό κίνητρο δεδομένης της σπουδαιότητάς της. Η διάγνωση, η πρόληψη και η αντιμετώπιση σημαντικών ασθενειών με αποτέλεσμα ένα υψηλότερο επίπεδο ζωής για τον άνθρωπο, αποτελούν βασικό σκοπό της βιοϊατρικής τεχνολογίας.

Τα τελευταία χρόνια η συνεργασία γιατρών και μηχανικών έχει δώσει μεγάλη ώθηση στην ιατρική επιστήμη, καθώς τώρα πια αποκτά περισσότερο τεκμηριωμένη υπόσταση. Η ιατρική από αρχαιοτάτων χρόνων αποτελούσε εμπειρική κυρίως επιστήμη, τουλάχιστον όσον αφορά την διάγνωση ασθενειών. Ωστόσο τώρα πια δίνεται η δυνατότητα στον μηχανικό να εφαρμόσει τον συστηματικό και επαναστατικό τρόπο σκέψης του, κάνοντας χρήση των τεχνολογικών μέσων. Η ηλεκτρονική πληροφόρηση, μέσω έγκυρων διεθνώς ηλεκτρονικών περιοδικών, ο πειραματικός εξοπλισμός και οι πολλαπλές δυνατότητες που προσφέρει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τον μηχανικό.

Μέσω αυτής της εργασίας υπήρξε σημαντική ενασχόληση με την βιορευστομηχανική, κλάδο της βιοϊατρικής τεχνολογίας. Μελετήθηκε η ροή ασυμπίεστων ρευστών σε σωλήνες (στην προκειμένη περίπτωση η ροή αίματος σε αγγεία) για παραμορφωτά τοιχώματα και παλλόμενη ροή. Στην συνέχεια εφαρμόστηκαν τα παραπάνω για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος του εγκεφάλου, λαμβάνοντας υπ' όψιν την σπουδαιότητα του στην λειτουργία ζωτικών λειτουργιών του ανθρώπινου οργανισμού. Η εμπειρία και η σημαντική υπολογιστική βάση δεδομένων που αποκτήθηκε θα μπορούσε στο μέλλον να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση αντίστοιχων μερών του κυκλοφορικού συστήματος, ή ακόμα και για την επίλυση ολόκληρου του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπινου οργανισμού. Επίσης, σε συνδυασμό με σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, όπως για παράδειγμα ο μαγνητικός ή ο αξονικός τομογράφος θα μπορούσε να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για την ιατρική επιστήμη διεθνώς, αλλά και στην χώρα μας.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η εργασία, σε μεγάλο βαθμό, βασίστηκε σε είδη δημοσιευμένα αποτελέσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας και έγινε προσπάθεια αναπαραγωγής αυτών των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, η ενασχόληση με ένα τέτοιο υπολογιστικό πρόβλημα, έφερε την

απαραίτητη εξοικείωση με το προγραμματιστικό περιβάλλον της fortran αλλά και την αντιμετώπιση παρόμοιων υπολογιστικών προβλημάτων. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε μια καινοτόμος υπολογιστική μέθοδος, αφού είχαμε ταυτόχρονη εφαρμογή δύο αριθμητικών μεθόδων. Ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών έγινε με την μέθοδο των χαρακτηριστικών και η επίλυση του προβλήματος με την ρητή έκφραση της μεθόδου Mac-Cormack. Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι ότι η επίλυση των εξισώσεων έγινε μετά από την αδιαστατοποίηση τους, γεγονός που επιτρέπει την χρησιμοποίηση του ίδιου κώδικα ή μέρους αυτού για την επίλυση παρόμοιων εξισώσεων.

Η παραπέρα έρευνα, θα μπορούσε να στοχεύει στην βελτίωση και επέκταση του υπάρχοντος κώδικα, αλλά και στην προσπάθεια ενσωμάτωσης του στον τεχνολογικό εξοπλισμό. Η μελέτη περισσότερων παθολογικών καταστάσεων, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη αρτηριοσκληρωτικών στενώσεων, θα αποτελούσε το πρώτο βήμα. Στην συνέχεια, θα μπορούσε να γίνει επίλυση άλλων μερών του κυκλοφορικού συστήματος, όπως το μυοκάρδιο, αλλά και επέκταση του κώδικα σε όλο το κυκλοφορικό σύστημα. Ακόμα η δημιουργία ενός 3-διάστατου (3-D) κώδικα θα έδινε ακριβέστερα αποτελέσματα, αλλά με τα υπάρχοντα αριθμητικά και υπολογιστικά μέσα δεν είναι εφικτή στην πολυπλοκότητα του κυκλοφορικού συστήματος και θα απαιτούσε περισσότερο χρόνο. Τέλος, θα μπορούσε να ενσωματωθεί σε κάποιο μαγνητικό ή αξονικό τομογράφο, ούτως ώστε μετά την απόκτηση από τον τομογράφο των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, να γίνεται η επίλυση της ροής. Έτσι επιτρέπεται η εύρεση τυχών περιοχών δυσλειτουργίας του κυκλοφορικού συστήματος του ασθενή, μέσω της μελέτης της ροής του αίματος σε αυτό.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διάδοση Κυμάτων στις Αρτηρίες	1
1.1) Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα	1
1.2) Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα	3
1.3) Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες	3
1.3.1) Σύνοψη υποκεφαλαίου εξισώσεων	7
1.4) Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα	8
1.4.1) Στένωση – διεύρυνση	9
1.4.2) Διακλάδωση	10
1.5) Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηριακές περιοχές	11
1.6) Η μορφή του οδεύοντος παλμικού κύματος πίεσης	12

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Μοντέλα Κυκλοφορικού συστήματος και κύκλου Willis	13
2.1) Εισαγωγή	13
2.2) Υπολογιστικά μοντέλα κυκλοφορικού συστήματος	13
2.2.1) 1 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος	14
2.2.2) 2 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο	18
2.3) Υπολογιστικά μοντέλα του κυκλοφορικού συστήματος του εγκεφάλου (κύκλος του Willis)	21
2.3.1) 1 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο	23
2.3.2) 2 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο	24
2.3.3) 3 ^ο Υπολογιστικό μοντέλο	26

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διαμόρφωση του Προβλήματος	29
3.1) Εισαγωγή	29
3.2) Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος	30
3.3) Αδιαστατοποίηση	31
3.4) Διακριτοποίηση του χώρου	34
3.5) Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων	35
3.6) Οριακές συνθήκες	36
3.6.1) Εγγύς άκρο αγγείου	40
3.6.2) Άπω άκρο αγγείου	43
3.6.3) Διακλάδωση	45
3.7) Μέθοδος επίλυσης (MacCormack)	46
3.7.1) Βήμα πρόβλεψης (predictor step)	46
3.7.2) Βήμα διόρθωσης (Corrector step)	47

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Υπολογιστικές Περιπτώσεις και Αποτελέσματα	49
4.1) Εισαγωγή	49
4.2) Αγγείο με stent	49
4.2.1) Περίπτωση παλμού πίεσης	51
4.3) Διακλάδωση	53
4.3) Διπλή διακλάδωση	57
4.4) Κύκλος του Willis (circle of Willis)	59
4.4.1) Δημιουργία παλμού πίεσης	61
4.4.2) Βήμα 1 ^ο	62
4.4.3) Βήμα 2 ^ο	64
4.4.4) Βήμα 3 ^ο	68
4.4.5) Βήμα 4 ^ο	75
4.4.6) Βήμα 5 ^ο	78
4.4.7) Βήμα 6 ^ο (κύκλος του Willis)	87
4.4.7.1) Διαγράμματα πίεσης	88
4.4.7.2) Διαγράμματα ταχύτητας	97
4.4.7.3) Διαγράμματα διατομής	106
4.4.7.4) Διαγράμματα παροχής όγκου	115
4.4.8) Σχολιασμός των αποτελεσμάτων	124
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	127
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ	141

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ 1-1 Συντελεστής ιξώδους C_v και αδράνειας C_u συναρτήσει του αδιάστατου αριθμού Womersley W _____	6
ΣΧΗΜΑ 1-2 Σχηματική παράσταση στένωσης – διεύρυνσης_____	9
ΣΧΗΜΑ 1-3 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης_____	10

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ 2-1 Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων_____	16
ΣΧΗΜΑ 2-2 Μοντέλο του ανθρώπινου αρτηριακού συστήματος_____	17
ΣΧΗΜΑ 2-3 Μοντέλο του ανθρώπινου αρτηριακού συστήματος_____	20
ΣΧΗΜΑ 2-4 Αρτηριακό σύστημα του εγκεφάλου (κύκλος του Willis)_____	21
ΣΧΗΜΑ 2-5 Σχηματική παράσταση του μοντέλου του κύκλου του Willis_____	24
ΣΧΗΜΑ 2-6 Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis και του τμήματος που επιλύεται_____	26
ΣΧΗΜΑ 2-7 Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis και του αρτηριακού συστήματος_____	28

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ 3-1 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου_____	40
---	----

ΣΧΗΜΑ 3-2	
Σχηματική παράσταση της διακλάδωσης	45

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ 4-1	
Σχηματική παράσταση στενωμένης αρτηρίας	49

ΣΧΗΜΑ 4-2	
Παλμός πίεσης	51

ΣΧΗΜΑ 4-3	
Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό μέτρο ελαστικότητας	52

ΣΧΗΜΑ 4-4	
Η πίεση στα σημεία P, M, D για αυξημένο μ. ελαστικότητας στην περιοχή του stent	52

ΣΧΗΜΑ 4-5	
Ομαλή μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας	53

ΣΧΗΜΑ 4-6	
Σχηματική παράσταση διακλάδωσης	54

ΣΧΗΜΑ 4-7	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στην αρχή την μέση και το τέλος του πατρικού αγγείου	55

ΣΧΗΜΑ 4-8	
Η χρονική εξέλιξη της διατομής στην αρχή την μέση και το τέλος του πατρικού αγγείου	55

ΣΧΗΜΑ 4-9	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο μέσο του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος	56

ΣΧΗΜΑ 4-10	
Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο μέσο του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος	56

ΣΧΗΜΑ 4-11	
Σχηματική παράσταση διπλής διακλάδωσης	57

ΣΧΗΜΑ 4-12	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας	58

ΣΧΗΜΑ 4-13	
Η χρονική εξέλιξη της διατομής	58
ΣΧΗΜΑ 4-14	
Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis	59
ΣΧΗΜΑ 4-15	
Πατρικός και προσεγγιστικός παλμός πίεσης	61
ΣΧΗΜΑ 4.16	
Τμήμα του κύκλου του Willis	62
ΣΧΗΜΑ 4.17 – 4.19	
Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3	63 - 64
ΣΧΗΜΑ 4.20	
Τμήμα του κύκλου του Willis	64
ΣΧΗΜΑ 4.21 – 4.27	
Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 7	65 - 68
ΣΧΗΜΑ 4.28	
Τμήμα του κύκλου του Willis	68
ΣΧΗΜΑ 4.29 – 4.41	
Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 13	69 – 75
ΣΧΗΜΑ 4.42	
Τμήμα του κύκλου του Willis	75
ΣΧΗΜΑ 4.43 – 4.45	
Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3	75 – 77
ΣΧΗΜΑ 4.46 – 4.48	
Η ταχύτητα στο μέσο των αγγείων 1,2,3	77 – 78

ΣΧΗΜΑ 4.49 Τμήμα του κύκλου του Willis	78
ΣΧΗΜΑ 4.50 – 4.65 Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 16	79 – 86
ΣΧΗΜΑ 4.49 Κύκλος του Willis	87
ΣΧΗΜΑ 4.67 – 4.84 Η πίεση στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 18	88 – 96
ΣΧΗΜΑ 4.85 – 4.102 Η ταχύτητα στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 18	97 – 105
ΣΧΗΜΑ 4.103 – 4.120 Η διατομή στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 18	106 – 114
ΣΧΗΜΑ 4.121 – 4.138 Η παροχή στο μέσο των αγγείων 1,2,3 - 18	115 – 123

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

1.1 Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα [Τσαγγάρης, 2004]

Το αίμα εκρέει από την αριστερή κοιλία στο κυκλοφορικό σύστημα με ρυθμικές συσπάσεις της καρδιάς. Το προστιθέμενο αίμα στην αορτή προκαλεί αύξηση της πίεσης και επομένως προκαλεί ροή του αίματος κατά μήκος της αορτής και του κυκλοφορικού συστήματος. Δημιουργείται έτσι η ανάπτυξη σφυγμικών κυμάτων (κύματα πίεσης) και η ροή είναι παλλόμενη (pulsating flow), δηλαδή σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Ο όγκος που εκβάλλεται από την καρδιά δεν είναι σταθερός αλλά μπορεί να μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο.

Σε όλη την έκταση του αρτηριακού συστήματος η πίεση φθάνει σε μια μέγιστη τιμή που ονομάζεται συστολική πίεση. Η φυσιολογική συστολική πίεση στην αορτή είναι της τάξεως των 120 mm Hg στο νεαρό ενήλικο. Η ελάχιστη πίεση ονομάζεται διαστολική πίεση και στην βραχίονιο αρτηρία είναι της τάξεως των 70-80 mm Hg.

Το κύμα πίεσης αλλάζει μορφή και μέγεθος κατά τη μεταφορά του μέσα στο αρτηριακό σύστημα. Οι αιτίες της μεταβολής του είναι πολλές και δεν μπορούν να διαχωριστούν εύκολα διότι είναι αλληλοεξαρτώμενες. Υπάρχουν καταρχήν δύο μορφές λέπτυνσης (tapering): η γεωμετρική λέπτυνση που είναι μείωση της διατομής και η ελαστική λέπτυνση που είναι αύξηση της δυσκαμψίας του τοιχώματος (wall stiffness). Σε μέσου μεγέθους αρτηρίες η ελαστική λέπτυνση είναι μικρή και η πίεση πέφτει προοδευτικά. Όμως σε μικρού μεγέθους αρτηρίες η λέπτυνση είναι σημαντική και η πίεση πέφτει γρήγορα σε μέση τιμή 30-38 mm Hg στα αρτηρίδια και πίεση σφυγμού στα 5 mm Hg. Αυτές οι τιμές αναφέρονται σε κανονικές συνθήκες και αλλάζουν δραστικά στην περίπτωση συστολής ή διαστολής. Φθάνοντας στα τριχοειδή το κύμα πίεσης αποσβεννύεται τελείως. Η απόσβεση αυτή οφείλεται στο ιξώδες του αίματος και στην ιξώδη συνιστώσα του ιξωδοελαστικού τοιχώματος των αγγείων. Πρόσθετα, σημαντικά δρουν στον παλμό πίεσης οι αρτηριακές διακλαδώσεις και η ασυνέχεια στις ελαστικές ιδιότητες.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

Όταν το κύμα πίεσης φθάσει σε διακλάδωση ή ασυνέχεια τότε ένα τμήμα του κύματος διαδίδεται και ένα τμήμα ανακλάται. Το ανακλώμενο κύμα προστίθεται στο αρχικό και δημιουργεί αύξηση της συστολικής πίεσης (peaking), που εξαρτάται από τη στενότητα των αρτηριδίων και την δραστηριότητα των προτριχοειδικών σφιγκτήρων. Το ανακλώμενο κύμα, επανακλάται μέχρι ότου αποσβεσθεί. Η επαλληλία των διαδιδόμενων και ανακλωμένων κυμάτων προκαλεί εκτός από την ενίσχυση και διασπορά (dispersion) του κύματος. Το αορτικό κύμα πίεσης, που είναι περίπου τριγωνικής μορφής εξομαλύνεται και εκτείνεται φθάνοντας στα αρτηρίδια. Η μικρή αύξηση πίεσης που ακολουθεί την εντομή (η εντομή παρατηρείται αμέσως μετά την σύγκλιση της αορτικής βαλβίδας και οφείλεται στο εξής: όταν η κοιλία χαλαρώνει η ενδοκοιλιακή πίεση αρχίζει να ελαττώνεται γρήγορα και η προς τα πίσω ροή αίματος από την αορτή προς την κοιλία έχει ως αποτέλεσμα να αρχίζει να πέφτει και η αορτική πίεση. Η προς τα πίσω ροή κλείνει απότομα την αορτική βαλβίδα.) του παλμού πίεσης, που οφείλεται στην ανάκλαση του κύματος, στρογγυλεύεται και βαθμιαία αντικαθίσταται από αργό αλλά διακεκριμένο βαθύλωμα. Ο μηχανισμός της απόσβεσης και της ενίσχυσης των κυμάτων πίεσης είναι διαφορετικός για τις διάφορες συνιστώσες του κύματος. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε συνιστώσα οδεύει με διαφορετική ταχύτητα.

Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι περί τα 3 m/sec στη θωρακική αορτή και πάνω από 5 m/sec στις μικρότερες αρτηρίες όπου υπερέχει το κολλαγόνο. Δομικές αλλαγές του τοιχώματος επηρεάζουν την ταχύτητα διάδοσης. Επίσης, παθολογικές αλλαγές όπως σκλήρυνση ή υπέρταση ή μυϊκή συστολή του αρτηριακού τοιχώματος προκαλούν μείωση της εκτασιμότητας του τοιχώματος και επομένως αύξηση της ταχύτητας διάδοσης (για το απολύτως στερεό τοίχωμα τείνει στο άπειρο).

Υπάρχουν τέλος και πρόσθετες αλλοιώσεις του παλμού πίεσης οφειλόμενες σε κεντρομόλους μεταβολές πίεσης σε θέση καμπυλότητας αγγείων, σε ταλαντώσεις ορισμένων τμημάτων του αρτηριακού συστήματος, κυρίως σε περιοχές στενώσεων. Επίσης, υπάρχει δευτερεύουσα πάλμωση οφειλόμενη στην αναπνοή καθώς και σε μεταβολές της ενδοθωρακικής ή ενδοϊστικής πίεσης ή της πίεσης του περιβάλλοντος.

1.2 Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα [Τσαγγάρης, 2004]

Η μέτρηση της κυματομορφής της παροχής χωρίς να διαταράξουμε αυτή ήταν ανέφικτη. Με την εισαγωγή της τεχνικής μέτρησης με παλλόμενους υπερήχους Doppler έγινε δυνατή η μέτρηση της κυματομορφής παροχής κατά μήκος του αρτηριακού συστήματος και του προφίλ ταχύτητας. Σημαντική πληροφορία δίδει επίσης η μέτρηση της παροχής με τον ηλεκτρομαγνητικό μετρητή παροχής.

Αναλυτικός συσχετισμός πίεσης – ταχύτητας είναι αρκετά σύνθετος και απαιτεί την κατασκευή πολύπλοκων μοντέλων που πρέπει να λαμβάνουν τις ιδιομορφές των διαφόρων τμημάτων και περιοχών του κυκλοφορικού συστήματος. Αυτό που περιπλέκει την κατάσταση είναι οι ανακλάσεις.

Στην αορτή τα μέγιστα της ταχύτητας μπορούν να φθάσουν σε 1 m/sec ή και 1,5 m/sec σε φυσιολογικές συνθήκες, ενώ η μέση τιμή της είναι περί τα 0,4 m/sec.

Αν και η ταχύτητα είναι μη παλλόμενη στα τριχοειδή, εντούτοις υπάρχουν παλμώσεις στο φλεβικό σύστημα. Αυτό οφείλεται κυρίως στην αντλητική επενέργεια του δεξιού κόλπου της καρδιάς.

1.3 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες [Μανόπουλος, 2009]

Οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής βασίζονται σε δύο αξιωματικούς νόμους διατήρησης (για το ασυμπίεστο ρευστό). Το νόμο διατήρησης της μάζας και το νόμο διατήρησης της ορμής. Από την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Ο νόμος διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Το ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται και επιλύεται, βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής με σταθερές την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και το ιξώδες του ρευστού. Επίσης, θεωρείται ότι όλα τα σημεία της διάταξης του μοντέλου βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο με αποτέλεσμα οι βαρυτικές δυνάμεις να εξαλείφονται, ενώ υποτίθεται αξονοσυμμετρική ροή. Μέσω ενός συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, x) η εξίσωση Navier Stokes κατά την φ κατεύθυνση απλοποιείται όταν η ροή του ρευστού είναι αξονικά συμμετρική χωρίς περιδίνηση (swirl), οπότε για την ταχύτητα κατά την περιφερειακή κατεύθυνση ισχύει $w=0$. Δηλαδή, κανένα μέγεθος δεν εξαρτάται από τη φ και όλες οι μεταβολές

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

των μεγεθών ως προς φ είναι μηδενικές. Κατά τις δύο άλλες κατευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παραδοχές, οι εξισώσεις Navier Stokes έχουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-1)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1-2)$$

,όπου: v , u είναι οι ταχύτητες του ρευστού αντίστοιχα κατά την ακτινική r και αξονική x κατεύθυνση με $v=v(r, x, t)$ και $u=u(r, x, t)$.

p είναι η πίεση του ρευστού με $p=p(r, x, t)$.

ρ και ν είναι η πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Για λεπτά σώματα με σχέση πάχους προς μήκος μικρή ή αντίστοιχα για στενόμακρους κυλινδρικούς αγωγούς με σχέση ακτίνας προς μήκος μικρή, αν αδιαστατοποιηθούν οι εξισώσεις Navier-Stokes παραπάνω, τότε αναδεικνύεται ότι οι όροι ιξώδους δευτέρας τάξης κατά x είναι αμελητέοι σε σχέση με τους υπολοίπους όρους ιξώδους της εξίσωσης, οπότε οι εξισώσεις Navier-Stokes λαμβάνουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-3)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-4)$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Navier-Stokes κατά τη x κατεύθυνση με την πυκνότητα ρ , οπότε η (1-4) παίρνει τη μορφή:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-5)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφα τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο τελευταίο άθροισμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-6)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, θεωρώντας ασυμπίεστο ρευστό και αξονική συμμετρία, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot v)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-7)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες και για στενόμακρες κυλινδρικές δομές μικρής καμπυλότητας με αξονική συμμετρία, όπως φαίνεται αναλυτικά στο [Μανόπουλος, 2009], καταλήγουμε:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A \cdot \bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (1-8)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

R είναι η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού

\bar{u} είναι η μέση ταχύτητα στην διατομή ($\bar{u} = \frac{1}{A} \int_0^R u \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{Q}{A}$)

και Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

Εξίσωση ορμής κατά την x κατεύθυνση:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{\rho \cdot R} \cdot \tau_R = 0 \quad (1-9)$$

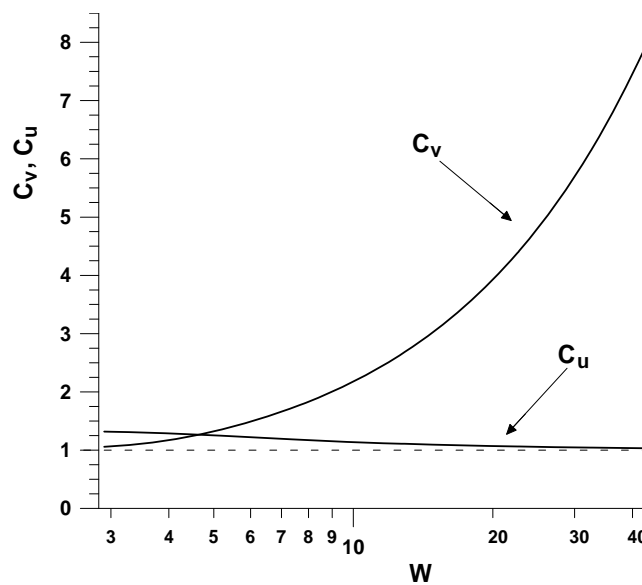
, όπου τ_R είναι η διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα.

Στην εξίσωση ορμής (1-9), η διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα τ_R είναι ένα άγνωστο μέγεθος, όπως η διατομή του κυλινδρικού αγωγού, η πίεση και η ταχύτητα του ρευστού. Όμως, μέσω κατάλληλων θεωριών η διατμητική αυτή τάση σε κυλινδρικούς αγωγούς μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής του αγωγού.

Για παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό προκύπτει:

$$\tau_R = -\frac{\rho \cdot R}{2} \cdot \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot \nu}{A} \cdot C_v \cdot \bar{u} + (C_u - 1) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \quad (1-10)$$

, όπου ο συντελεστής ιξώδους C_v και αδράνειας C_u προκύπτουν από τον αδιάστατο αριθμό Womersley W , όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα:



Σχήμα 1-1. Συντελεστής ιξώδους C_v και αδράνειας C_u συναρτήσει του αδιάστατου αριθμού Womersley W , [Manopoulos et al, 2006].

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

$$\text{,όπου: } W = R \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (1-11)$$

,όπου: ω είναι η κυκλική συχνότητα της πάλμωσης

R η ακτίνα του αγωγού

Για $W=0,67 - 2,68$, όπου κυμαίνεται στην περίπτωση του κύκλου του Willis που υπολογίζεται στο 4^ο κεφάλαιο (Υπολογιστικές Περιπτώσεις και Αποτελέσματα), θεωρούμε ότι $C_v = C_u = 1$.

$$\text{Επομένως η διατμητική τάση είναι: } \tau_R = -\frac{\rho \cdot R}{2} \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu \cdot u}{A} \quad (1-12)$$

1.3.1 Σύνοψη υποκεφαλαίου εξισώσεων

Συμπερασματικά, μπορεί να αναφερθεί ότι η προσέγγιση της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα μέσω της θεώρησης παλλόμενης ροής σε ευθύγραμμο αγωγό απλά βελτιώνει σε ικανοποιητικό βαθμό την πρόβλεψη της ροής σε σχέση με τον αν αυτή γινόταν μέσω της θεώρησης μόνιμης στρωτής ροής Poiseuille. Μαθηματικώς, καταλήγει αυτό να επιτυγχάνεται απλά με την εισαγωγή των δύο συντελεστών, ιξώδους C_v και αδράνειας C_u σε ήδη γνωστούς όρους που υπάρχουν στην εξίσωση ορμής για μόνιμη στρωτή ροή Poiseuille. Η θεώρηση αυτή της διατμητικής τάσης για έναν εύκαμπτο αγωγό είναι κοντά στην πραγματικότητα μόνο όταν οι εγκάρσιες παραμορφώσεις του αγωγού είναι σχετικά μικρές, δηλαδή μέχρι 10%. Όταν όμως οι παραμορφώσεις γίνουν έντονες, είτε λόγω εξωτερικής διέγερσης του εύκαμπτου αγωγού, είτε λόγω συρρίκνωσης εξαιτίας κάποιας διαμορφούμενης υποπίεσης, κάποιος επιπλέον όρος πρέπει να εισαχθεί που να ερμηνεύει τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής γύρω από τα έντονα συρρικνούμενα τμήματα του αγωγού.

Οι προκύπτουσες άγνωστες συναρτήσεις από την κατάστρωση του μοντέλου είναι η ταχύτητα του ρευστού, η πίεση του ρευστού και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού. Για την εύρεση των τριών αυτών αγνώστων συναρτήσεων χρησιμοποιείται μια επιπλέον αλγεβρική

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

καταστατική εξίσωση, πέραν αυτών της συνέχειας και της ορμής, η οποία συνδέει τη μεταβλητή διατομή του εύκαμπτου αγωγού με την εσωτερική διαμορφούμενη πίεση του ρευστού.

Και οι τρεις μαζί ανωτέρω εξισώσεις του μοντέλου αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα (3x3), του οποίου η επίλυση καθορίζει τα ρευστομηχανικά μεγέθη μιας μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής ρευστού εντός εύκαμπτου κυλινδρικού αγωγού με τις προαναφερθείσες παραδοχές. Συνήθως η ροή που προκύπτει από τέτοιου είδους μοντέλα δεν καλείται μονοδιάστατη αλλά ψευδο-μονοδιάστατη εξαιτίας της επιπλέον μεταβολής της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε κάθετη διεύθυνση από αυτή της ταχύτητας του ρευστού.

1.4 Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα (1-8), (1-9)

Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες το σύστημα των εξισώσεων (1-8), (1-9) παρουσιάζει σχετικά χαμηλή γραμμικότητα.

Στο σημείο ανάκλασης από το προσπίπτον κύμα (incident) έντασης P_1 δημιουργείται ένα ανακλώμενο κύμα P_2 και ένα διερχόμενο κύμα $P_{1'}$.

Ορίζεται ως συντελεστής ανάκλασης R (reflection coefficient) το πηλίκο:

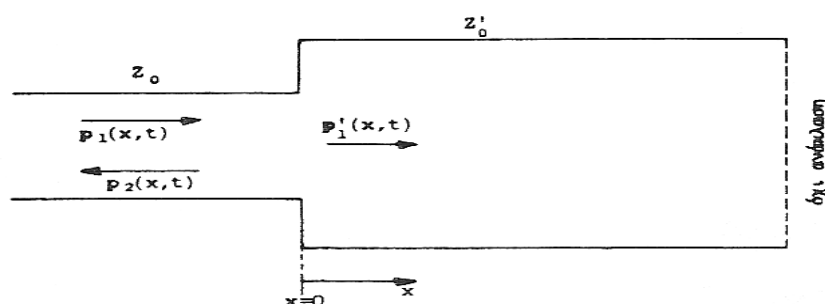
$$R = \frac{P_2}{P_1} \quad (1-13)$$

και ως συντελεστής διέλευσης T (transmission coefficient) το πηλίκο:

$$T = \frac{P_{1'}}{P_1} \quad (1-14)$$

$$\text{Ισχύει ότι: } P_1 = P_2 + P_{1'} \quad (1-15)$$

1.4.1 Στένωση – διεύρυνση [Τσαγγάρης, 2004]



Σχήμα 1-2. Σχηματική παράσταση στένωσης – διεύρυνσης

Το προσπίπτον κύμα $P_1(x,t)$ φθάνοντας στην ασυνέχεια της διατομής (στη θέση $x=0$) υφίστανται εν μέρει ανάκλαση, προκύπτει δε έτσι το ανακλώμενο κύμα $P_2(x,t)$ που οδεύει προς τα αριστερά και το διερχόμενο κύμα $P'_1(x,t)$ που οδεύει προς τα δεξιά. Υποτίθεται ότι το διερχόμενο κύμα $P'_1(x,t)$ λόγω του μεγάλου μήκους του αγωγού δεν υφίστανται νέα ανάκλαση.

Στην διεπιφάνεια ($x=0$) ισχύει συνέχεια των μεγεθών της πίεσης και της παροχής, επομένως:

$$P_1 = P_{1'} + P_2 \quad (1-16)$$

$$\text{Ο λόγος συνεκτικότητας είναι: } \lambda = \frac{1-R}{1+R} = \left(\frac{E}{E'} \cdot \frac{h}{h'}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^{5/2} \quad (1-17)$$

Γενικά:

- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής της διατομής A του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του πάχους h του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας E του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0, R = 1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση, χωρίς αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση κλειστού άκρου.

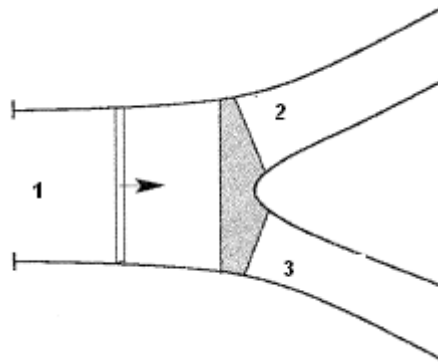
ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, $R = -1$ έχουμε ανάκλαση χωρίς μεταβολή πλάτους αλλά με αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση ανοικτού άκρου.
- Για $\lambda=1$ έχουμε την περίπτωση προσαρμοσμένων συνθηκών και δεν έχουμε ανάκλαση.

Η ασυνέχεια ανάλογα με την τιμή του λ χαρακτηρίζεται ως:

- $\lambda < 1$: Αλλαγή από λιγότερο στερεή σε περισσότερο στερεή (κλειστό άκρο).
- $\lambda > 1$: Προσαρμοσμένες συνθήκες (μη ανάκλαση).
- $\lambda > 1$: Αλλαγή από περισσότερο στερεή σε λιγότερο στερεή (ανοικτό άκρο)

1.4.2 Διακλάδωση



Σχήμα 1-3. Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Ο συντελεστής ανάκλασης για την διακλάδωση δίνεται από την σχέση [Sherwin et al, 2003]:

$$R = \frac{\frac{A_0^1}{c_0^1} - \frac{A_0^2}{c_0^2} - \frac{A_0^3}{c_0^3}}{\frac{A_0^1}{c_0^1} + \frac{A_0^2}{c_0^2} + \frac{A_0^3}{c_0^3}} \quad (1-18)$$

, όπου: A_0^i είναι η αρχική διατομή του i αγγείου

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

$$\text{και } c_0^i \text{ είναι η αρχική ταχύτητα του } i \text{ αγγείου } c_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot \rho \cdot \sqrt{A_0}}} \quad (1-19)$$

$$\text{, όπου: } \beta = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h \cdot E}{1 - \xi^2} \quad (1-20)$$

, όπου: ξ ο λόγος Poisson

1.5 Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηριακές περιοχές

Στένωση των αιμοφόρων αγγείων είναι μία σχετικά συνήθης κατάσταση στο κυκλοφορικό σύστημα. Η στένωση δημιουργείται με διάφορους μηχανισμούς, όπως π.χ. με απόθεση ινώδους ή δημιουργία ενδοαρτηριακής πλάκας. Υπάρχει καθολική συμφωνία μεταξύ των ερευνητών ότι μετά την απόθεση του ινώδους ή άλλου υλικού, το εσωτερικό τοίχωμα της αρτηρίας καλύπτεται από ενδοθηλιακό στρώμα και ενσωματώνεται στο αρτηριακό τοίχωμα. Επομένως η στενωμένη περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τμήμα της αρτηρίας με διαφορετική ακτίνα και πάχος τοιχώματος και άλλες ελαστικές ιδιότητες.

Το προηγούμενο φαινόμενο είναι μια διαδεδομένη νόσος των ηλικιωμένων κυρίως και οδηγεί σε καρδιακό έμφραγμα, εγκεφαλική θρόμβωση και άλλες σοβαρές ασθένειες. Εν μέρει αυτές οι επιπλοκές οφείλονται στην αυξημένη συστολική πίεση που παρατηρείται όταν υπάρχει στένωση που προκαλεί περαιτέρω εξέλιξη της αρτηριοσκλήρωσης. Οι προκαλούμενες μεταβολές στην μορφή και την μέγιστη τιμή της πίεσης και παροχής μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά με την χρήση της μονοδιάστατης θεωρίας και με την βοήθεια των χαρακτηριστικών.

Οι μεταβολές δεν είναι μόνο γεωμετρικές (απότομη στένωση και διεύρυνση) αλλά και μεταβολές στις ελαστικές ιδιότητες του σωλήνα. Αντίστοιχη είναι η μεταβολή του πάχους του τοιχώματος και επομένως μεταβάλλεται και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος μεταβάλλεται και λόγω της κατάλληλης αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας του τοιχώματος του σωλήνα.

Το προσπίπτον κύμα φθάνοντας στην στένωση, μόνο ένα τμήμα του διέρχεται δια της στένωσης και το άλλο τμήμα ανακλάται στο εγγύς τμήμα της στένωσης. Το ανακλώμενο τμήμα οδεύει προς τα πίσω και ανακλάται εκ νέου. Το τμήμα που διέρχεται από την στένωση διαχωρίζεται εκ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

νέου σε ανακλώμενο και διερχόμενο τμήμα φθάνοντας στην έξοδο του αγγείου. Η πίεση και η παροχή σε κάθε σημείο λαμβάνονται προσθέτοντας όλα τα διερχόμενα κύματα.

1.6 Η μορφή του οδεύοντος παλμικού κύματος πίεσης

Όπως φάνηκε από τα προηγούμενα οι διακλαδώσεις και η ασυνέχεια στην αντίσταση του αρτηριακού συστήματος προκαλούν διασπορά στον κυματικό παλμό. Αυτή η διασπορά οφείλεται και στην επιλεκτική απόσβεση του παλμού. Είναι γεγονός ότι οι υψηλότερες αρμονικές του κύματος πίεσης υφίστανται μεγαλύτερη απόσβεση, προκαλώντας αλλοίωση της μορφής του κύματος πίεσης όπως οδεύει προς την περιφέρεια.

Οι διακλαδώσεις και η ανομοιογένεια του αρτηριακού συστήματος προκαλούν ανακλάσεις κύματος. Οι ανακλάσεις συμβάλλουν σε αύξηση της μέγιστης (συστολικής) αρτηριακής πίεσης και ελαφρά μείωση της διαστολικής πίεσης προς την περιφέρεια.

Συγχρόνως χάνονται διάφορα χαρακτηριστικά του παλμού, όπως το δικροτικό κύμα (εντομή). Τόσο η πίεση, όσο και η παροχή έχουν προς την περιφέρεια πιο απότομη αύξηση κατά τη συστολή και αργότερα πτώση. Εμφανίζεται επίσης οπίσθια ταχύτητα κατά την λήξη της συστολής και σε ορισμένες περιπτώσεις ένα σύντομο πλάτωμα μετά το μέγιστο. Λόγω απόσβεσης δεν είναι δυνατό να υπάρξει στάσιμο κύμα στο αρτηριακό σύστημα.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

2.1 Εισαγωγή

Η επίλυση της ροής στο αγγείο, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο 3^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του Προβλήματος), αποτελεί την βάση για την επίλυση δικτύων με αγγεία, τόσο πολύπλοκων που μπορούν να συμπεριλάβουν το κυκλοφορικό του εγκεφάλου ακόμα και ολόκληρο το κυκλοφορικό σύστημα του ανθρώπου. Πολλές εργασίες έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια και αποδεικνύουν το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για μαθηματική και υπολογιστική προσομοίωση του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου. Ανάμεσα σε αυτές τις εργασίες, μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα παρουσιάζεται για πολύπλοκα τρισδιάστατα μοντέλα ικανά να παρέχουν αρκετές λεπτομέρειες του πεδίου ροής, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός των τάσεων τοιχώματος. Ωστόσο, αυτοί οι υπολογισμοί είναι περισσότερο απαιτητικοί, ως προς την κατασκευή της γεωμετρίας, του υπολογιστικού μοντέλου και του υπολογιστικού χρόνου. Εκτός αυτού, οι μηχανικοί και οι ιατρικοί ερευνητές συνήθως δεν χρειάζεται να γνωρίζουν λεπτομέρειες της ροής σε τέτοιο βαθμό και έτσι η εφαρμογή απλοποιημένων μοντέλων, που αποδεικνύεται ικανή να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, κερδίζει συνεχώς έδαφος.

2.2 Υπολογιστικά μοντέλα κυκλοφορικού συστήματος

Πολλές μελέτες με επεμβατικό τρόπο (in vivo) έχουν γίνει για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος. Το βασικό μειονέκτημα αυτών των μελετών είναι ότι είναι δύσκολες και ακριβές για να γίνουν καθώς επίσης και το γεγονός ότι περιορίζονται σε εύκολα προσβάσιμες αρτηρίες. Σαν αποτέλεσμα, η χρήση ενός υπολογιστικού μοντέλου με την χρήση υπολογιστή για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος αποτελεί μία καλή εναλλακτική. Τα περισσότερα υπολογιστικά μοντέλα τέτοιου είδους βασίζονται στις ίδιες εξισώσεις, την μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση ορμής κατά x και την εξίσωση συνέχειας. Διαφορές υπάρχουν μεταξύ των

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

μοντέλων κυρίως (α) στον τύπο των οριακών συνθηκών, (β) στην εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής που χρησιμοποιείται και (γ) στην μέθοδο επίλυσης.

Στην βιβλιογραφία [Stergiopoulos et al, 1992, Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003] παρατηρήθηκαν τα παρακάτω υπολογιστικά μοντέλα (μαθηματικό μοντέλο, οριακές συνθήκες, μέθοδος επίλυσης και μοντέλο αρτηριακού συστήματος).

2.2.1 1^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος [Stergiopoulos et al, 1992]

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2-1)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\pi \cdot D \cdot \tau_0}{\rho} \quad (2-2)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διατομή του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = -\frac{\rho}{\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{8 \cdot C_V \cdot \pi \cdot \mu}{\rho \cdot A} \cdot Q + (C_u - 1) \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \right] \quad (2-3)$$

, όπου: μ είναι η κινηματική συνεκτικότητα

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W , όπως παρουσιάστηκε στο 1^ο κεφάλαιο (Διάδοση Κυμάτων στις Αρτηρίες).

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής:

$$A(x) = A_0(x) \cdot [1 + C_0 \cdot (P - P_0) + C_1 \cdot (P - P_0)^2] \quad (2-4)$$

, όπου: $A_0(x)$ είναι η αρχική διατομή στην θέση x του αγγείου

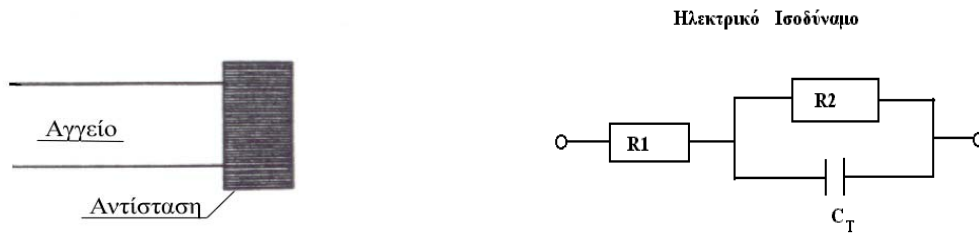
και P_0 είναι η αρχική πίεση

Αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών C_0 και C_1 και προσεγγίζει αρκετά καλά πολλές ανάλογες εξισώσεις που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία.

Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η χρονική μεταβολή της πίεσης είτε της παροχής.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.
- 3) Στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων εισάγεται μία αντίσταση για να προσομοιώσει το επισωρευτικό αποτέλεσμα που επιφέρουν τα περιφερειακά αγγεία, στα οποία διακλαδίζεται το αρχικό αγγείο, και τα τριχοειδή αγγεία. Το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης που χρησιμοποιείται αποτελείται από μία αντίσταση που βρίσκεται σε σειρά με ένα παράλληλο συνδυασμό αντίστασης και πυκνωτή (προσομοιώνει τη ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί σε ορισμένο τμήμα της κυκλοφορίας για κάθε αύξηση της πίεσης).

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS



Σχήμα 2-1. Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων

Με βάση τα παραπάνω η οριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο του αγγείου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{P}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \frac{Q}{R_1 \cdot C_T} \quad (2-5)$$

Στη παραπάνω σχέση ορίζεται ως $R_1 + R_2 = R_T$ η συνολική αντίσταση στο άκρο του αγγείου και ως C_T η χωρητικότητα ή η αγγειακή ενδοτικότητα.

Επισημαίνεται ότι για το άπω άκρο των τερματικών αγγείων του δικτύου πρέπει να οριστούν τα R_T , C_T και R_1/R_T .

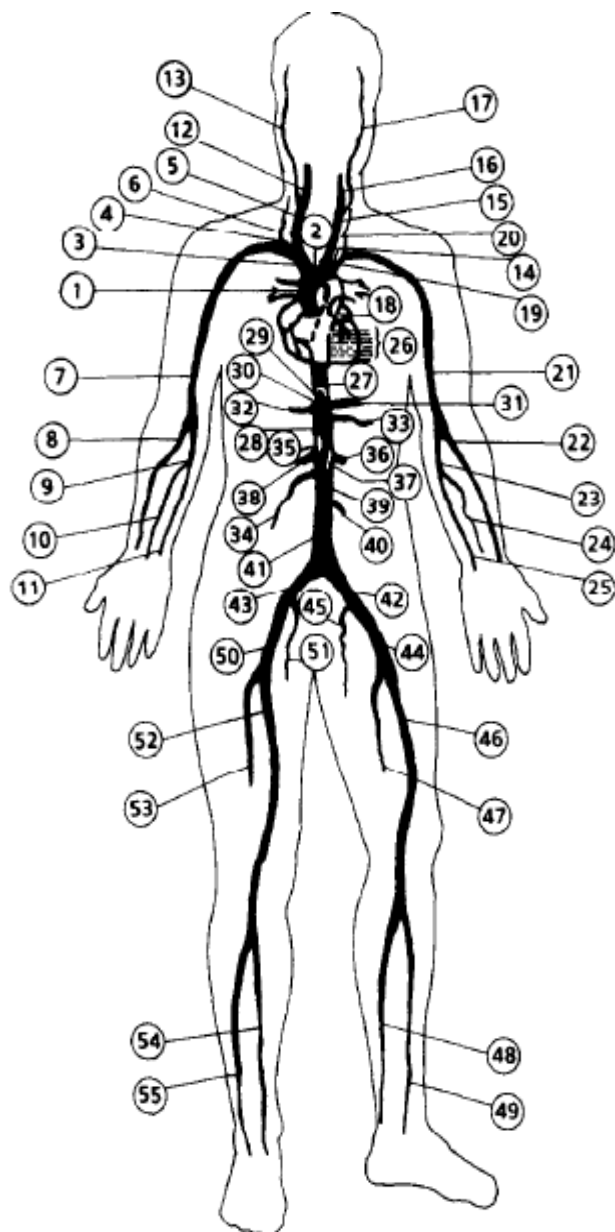
Μέθοδος υπολογισμού

Ένα απλό ρητό σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την μετατροπή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις. Οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών παραγώγων είχαν πρώτη τάξης ακρίβεια ως προς τον χρόνο και τον χώρο.

Μοντέλο αρτηριακού συστήματος

Το αρτηριακό σύστημα περιλαμβάνει 55 από τις μεγαλύτερες αρτηρίες του ανθρώπινου οργανισμού. Το εγγύς άκρο του συστήματος είναι η αρχή της αορτής, αμέσως μετά την αορτική βαλβίδα, αλλά το μοντέλο δεν περιλαμβάνει τις στεφανιαίες αρτηρίες.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS



Σχήμα 2-2 Μοντέλο του ανθρώπινου αρτηριακού συστήματος

2.2.2 2^ο Υπολογιστικό μοντέλο [Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003]

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2-1)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = - \frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\pi \cdot D \cdot \tau_0}{\rho} \quad (2-2)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διατομή του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = - \frac{\rho}{\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{8 \cdot C_v \cdot \pi \cdot \mu}{\rho \cdot A} \cdot Q + (C_u - 1) \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \right] \quad (2-3)$$

, όπου: μ είναι η κινηματική συνεκτικότητα

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W, όπως παρουσιάστηκε στο 1^ο κεφάλαιο (Διάδοση Κυμάτων στις Αρτηρίες).

Αυτό το μαθηματικό μοντέλο διαφέρει από το προηγούμενο ως προς την εξίσωση ελαστικότητας. Στην προκειμένη περίπτωση η εξίσωση ελαστικότητας παίρνει την αλγεβρική μορφή:

$$P = P_{ext} + \beta \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-6)$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h_0 \cdot E}{(1-\nu^2)} \quad (2-7)$$

, όπου: h_0 είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος του αγγείου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η χρονική μεταβολή είτε της πίεσης είτε της παροχής όγκου.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.
- 3) Μοντελοποιώντας μονάχα το αρτηριακό σύστημα του κυκλοφορικού, το πρόβλημα μπορεί να γίνει πιο εύκολο. Ωστόσο, το φλεβικό σύστημα ανακλά προς τα πίσω οδεύοντα κύματα. Έτσι είναι επιτακτική η ανάγκη της προσέγγισης των χαρακτηριστικών αυτών των ανακλάσεων. Για αυτό τον λόγο εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης. Η τερματική αντίσταση είναι ο αρνητικός λόγος της προσεγγίζουσας το άκρο χαρακτηριστικής μεταβλητής προς την απομακρυνόμενη από το άκρο χαρακτηριστική μεταβλητή (αυτή η οριακή συνθήκη παρουσιάζεται στο 3^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του Προβλήματος) λεπτομερώς).

Μέθοδος υπολογισμού

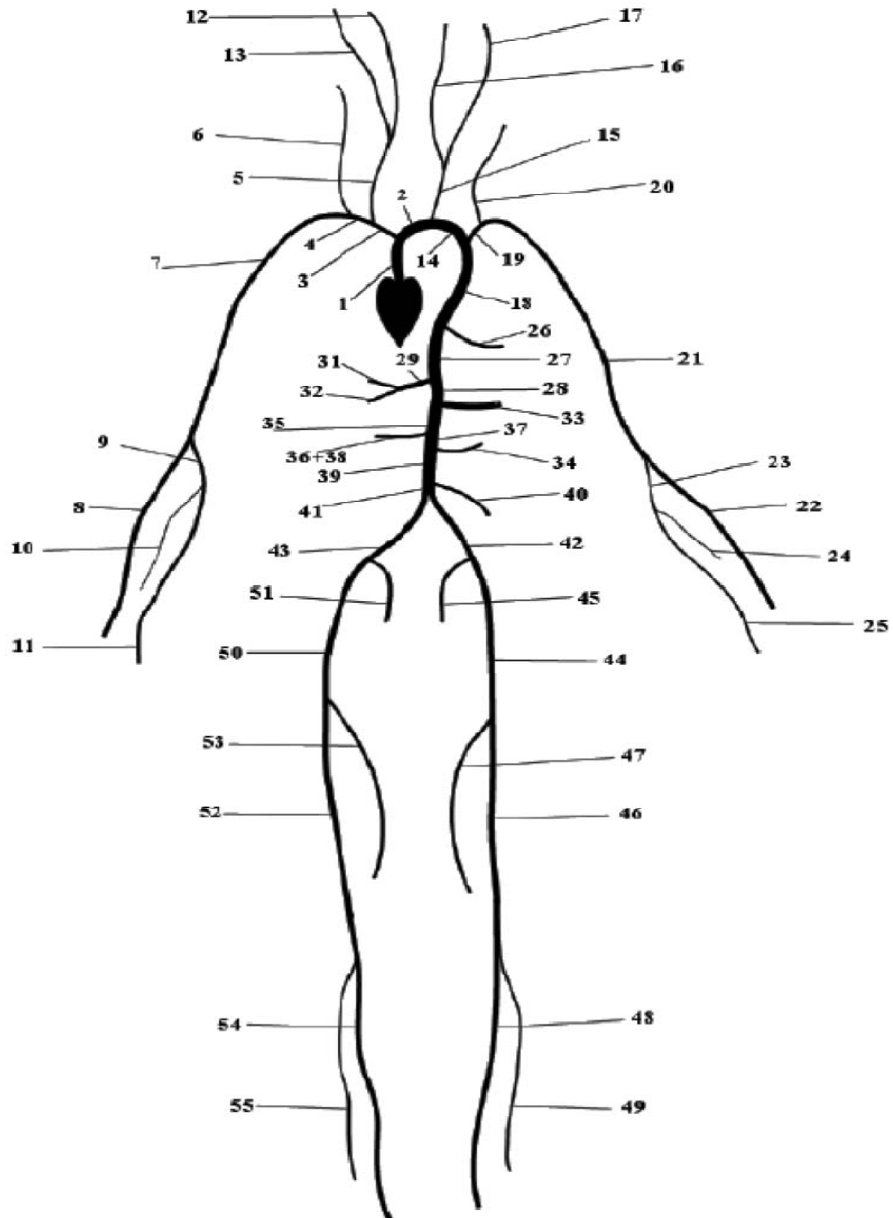
Για τον υπολογισμό των μεγεθών του κυκλοφορικού συστήματος εφαρμόστηκε η μέθοδος των χαρακτηριστικών.

Μοντέλο αρτηριακού συστήματος

Το αρτηριακό σύστημα είναι το ίδιο με αυτό που παρουσιάστηκε παραπάνω. Περιλαμβάνει 55 από τις πιο κύριες αρτηρίες του ανθρώπινου οργανισμού. Το εγγύς άκρο του συστήματος είναι η

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

αρχή της αορτής, αμέσως μετά την αορτική βαλβίδα, αλλά το μοντέλο δεν περιλαμβάνει τις στεφανιαίες αρτηρίες.

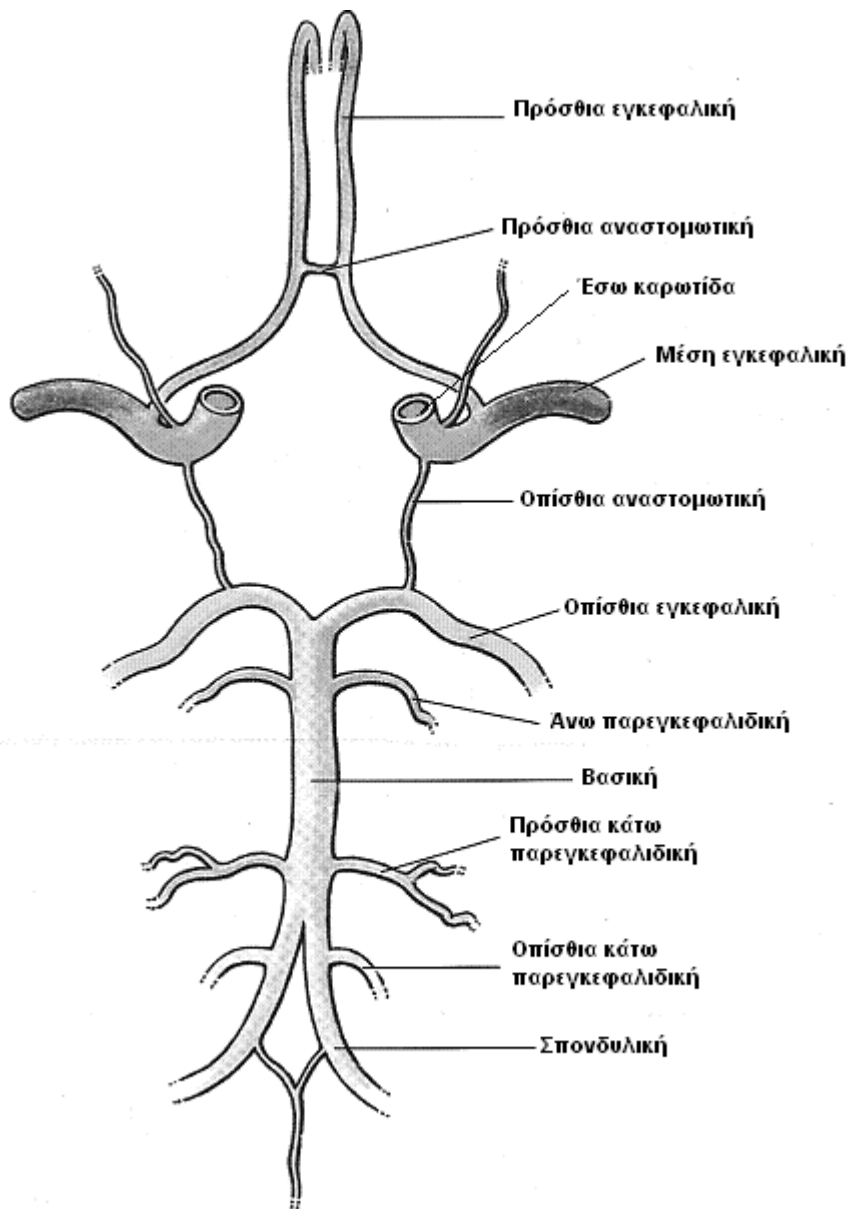


Σχήμα 2-3. Μοντέλο του ανθρώπινου αρτηριακού συστήματος

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

2.3 Υπολογιστικά μοντέλα του κυκλοφορικού συστήματος του εγκεφάλου (κύκλος του Willis)

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος απαιτεί αρκετό οξυγόνο και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητος σε περίπτωση υποξίας. Ο κύκλος του Willis είναι ένα δίκτυο αρτηριών, που μοιάζει με δαχτυλίδι και είναι υπεύθυνο για την κατανομή του οξυγονωμένου αίματος σε όλο τον εγκέφαλο.



Σχήμα 2-4. Αρτηριακό σύστημα του εγκεφάλου (κύκλος του Willis)

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

Οι έσω καρωτίδες και οι σπονδυλικές αρτηρίες τροφοδοτούν με αίμα τον κύκλο του Willis και ονομάζονται προσαγωγά αγγεία. Οι πρόσθιες, μέσες και οπίσθιες εγκεφαλικές αρτηρίες μεταφέρουν το αίμα από τον κύκλο στον υπόλοιπο εγκέφαλο και ονομάζονται απαγωγά αγγεία. Η πρόσθια και οι δύο οπίσθιες αναστομωτικές αρτηρίες συνδέουν τα απαγωγά αγγεία, ώστε να επιτρέπουν το αίμα να κατανεμηθεί για να διατηρηθεί η τροφοδοσία οξυγόνου σε όλη την μάζα του εγκεφάλου, σε περίπτωση μείωσης την παροχής αίματος σε κάποιο από τα προσαγωγά αγγεία.

Περίπου 50% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ολοκληρωμένο-τέλειο κύκλο Willis. Το υπόλοιπο 50% παρουσιάζει υποανάπτυκτες αρτηρίες και σε ορισμένες περιπτώσεις λείπουν αρτηρίες. Ωστόσο, κάποιος που παρουσιάζει μία από τις πάνω παθολογικές καταστάσεις μπορεί να μην παρουσιάζει κανένα σύμπτωμα υπό φυσιολογικές συνθήκες. Αν όμως σχηματιστεί κάποια στένωση στα προσαγωγά αγγεία, έχει αυξημένες πιθανότητες να παρουσιάσει εγκεφαλικό επεισόδιο. Η βαρύτητα που παρουσιάζει η μελέτη του κύκλου του Willis ως όργανο κατανομής του αίματος στον εγκέφαλο, προκύπτει αν αναφέρουμε ότι στον δυτικό κόσμο το εγκεφαλικό επεισόδιο είναι η τρίτη κυριότερη αιτία θανάτου, μετά το καρδιακό επεισόδιο και τον καρκίνο και ότι είναι αιτία χρόνιων προβλημάτων.

Η συστηματική μελέτη του κύκλου του Willis ξεκίνησε την δεκαετία του 1940. Το 1947 ο Rogers πειραματίστηκε με ένα μοντέλο σταθερής ροής, ακολουθούμενος από τους Avman και Bering (1961) που σχεδίασαν ένα μοντέλο σωληνώσεων χρησιμοποιώντας παλλόμενη ροή. Ο Murray (1964) σχεδίασε ένα ηλεκτρικό ανάλογο για συνθήκες σταθερής ροής, όπως έκανε και ο Fasano (1969) χρησιμοποιώντας υδραυλικό ανάλογο. Σημαντικές προσπάθειες μοντελοποίησης του κύκλου έχουν γίνει από την ομάδα των Clark και Himwich (Clark 1965, 1967, 1968, 1978, Himwich 1965, 1968, 1974). Ξεκινώντας με μοντέλα σταθερής ροής και άκαμπτων τοιχωμάτων, έχουν ερευνηθεί διάφοροι τύποι μοντέλων, καταλήγοντας σε τρισδιάστατα μοντέλα, παλλόμενης ροής με εύκαμπτα τοιχώματα. Σήμερα επιλύεται ολόκληρο το κυκλοφορικό σύστημα του ανθρώπου συμπεριλαμβανομένου και του εγκεφάλου. Στην συνέχεια παρατίθενται ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα μονοδιάστατων μοντέλων του κύκλου του Willis.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

2.3.1 1^ο Υπολογιστικό μοντέλο [Himwich et al, 1971]

Μαθηματικό μοντέλο

Η ενεργειακή εξίσωση ροής ρευστών σε αγγείο, θεωρώντας σταθερή διατομή, ίδιο υψόμετρο για όλα τα αγγεία και στρωτή ροή είναι:

$$\Delta P = R \cdot Q \quad (2-8)$$

, όπου: ΔP είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων του αγγείου

Q είναι η παροχή όγκου στο αγγείο

$$\text{και} \quad R = 128 \cdot \mu \cdot L \cdot Q / (\pi \cdot D^4) \quad (2-9)$$

, όπου: μ είναι η συνεκτικότητα

L είναι το μήκος μεταξύ των δύο σημείων του αγγείου

D είναι η διατομή του αγγείου

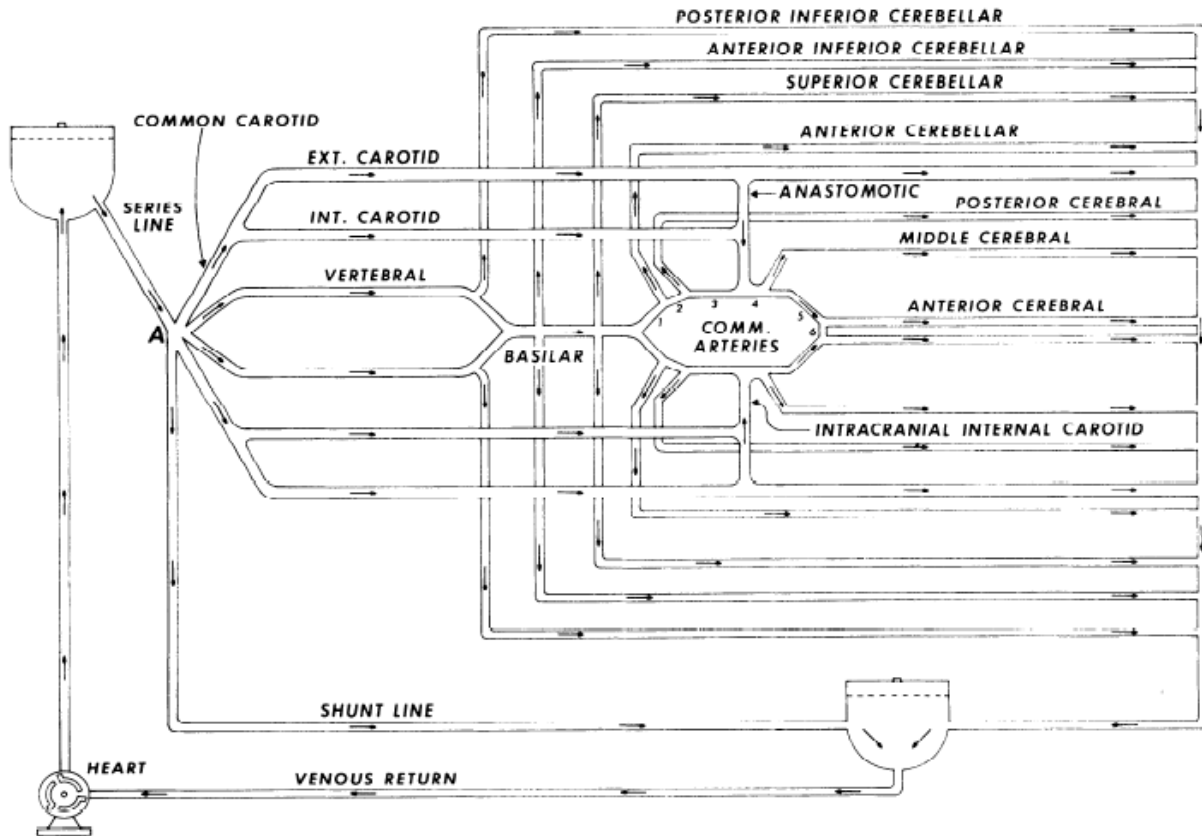
Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η πίεση.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται συνέχεια της παροχής.
- 3) Στο άπω άκρο του δικτύου, ορίζεται η πίεση.

Κυκλοφορικό σύστημα εγκεφάλου

Η σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου του κύκλου του Willis δίνεται παρακάτω:

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS



Σχήμα 2-5. Σχηματική παράσταση του μοντέλου του κύκλου του Willis

2.3.2 2^ο Υπολογιστικό μοντέλο [Hillen et al, 2003]

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A \cdot u) = 0 \quad (2-10)$$

και

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u}{A} \quad (2-11)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

u είναι η ταχύτητα κατά τον x άξονα

P είναι η πίεση

μ είναι η συνεκτικότητα του ρευστού

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω γραμμική εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής:

$$A(x) = A_0(x) \cdot [1 + \beta \cdot (P - P_d)] \quad (2-12)$$

, όπου: $A_0(x)$ είναι η αρχική διατομή σε κάθε θέση x

P_d είναι η διαστολική πίεση

Η τιμή του συντελεστή ελαστικότητας β προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι $A(P_s)/A_0=1,10$

, όπου: P_s είναι η συστολική πίεση.

Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται ο παλμός πίεσης.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή στατική πίεση και συνέχεια της παροχής.
- 3) Στα άπω άκρα του δικτύου θεωρούμε ότι ισχύει:

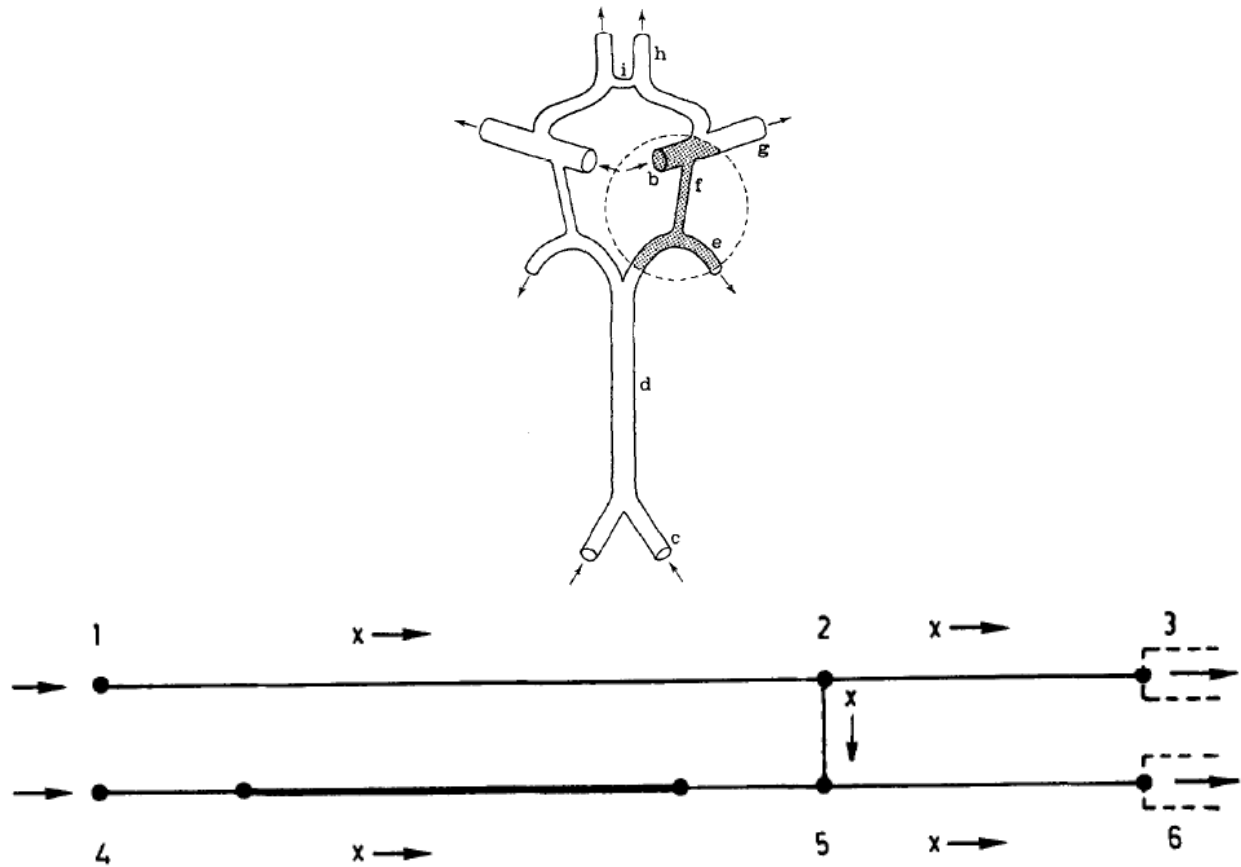
$$P - P_{ven} = R_{per} \cdot Q \quad (2-13)$$

, δηλαδή η διαφορά πίεσης του άπω άκρου του αγγείου P με την πίεση στην φλέβα P_{ven} ισούται με το γινόμενο της περιφερειακής αντίστασης R_{per} επί την αντίστοιχη παροχή όγκου Q .

Μοντέλο αρτηριακού συστήματος εγκεφάλου

Το αρτηριακό μοντέλο είναι αρκετά απλοποιημένο και περιλαμβάνει ένα χαρακτηριστικό τμήμα του κύκλου του Willis.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS



Σχήμα 2-6. Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis (πάνω) και του τμήματος που επιλύεται (κάτω)

2.3.3 3^ο Υπολογιστικό μοντέλο [Alastruey et al, 2007]

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A \cdot u) = 0 \quad (2-10)$$

και

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{22 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u}{A} \quad (2-14)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

u είναι η ταχύτητα κατά τον x άξονα

P είναι η πίεση

μ είναι η συνεκτικότητα του ρευστού

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω μη-γραμμική εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής:

$$P = P_0 + \frac{\beta}{A_0} \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-15)$$

, όπου: $\beta = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h \cdot E}{(1 - \sigma^2)}$

, όπου: h είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος του αγγείου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του αγγείου

σ είναι ο λόγος Poisson

Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η χρονική μεταβολή της παροχής όγκου.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.
- 3) Στα άπω άκρα του δικτύου εισάγονται δύο αντιστάσεις για να προσομοιώσει το επισφρευτικό αποτέλεσμα που επιφέρουν τα περιφερειακά αγγεία, στα οποία διακλαδίζεται το αρχικό αγγείο, και τα τριχοειδή αγγεία και ένας πυκνωτής (προσομοιώνει τη ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί σε ορισμένο τμήμα της κυκλοφορίας για κάθε αύξηση της πίεσης).

Με βάση τα παραπάνω η οριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο του αγγείου δίνεται από τη σχέση:

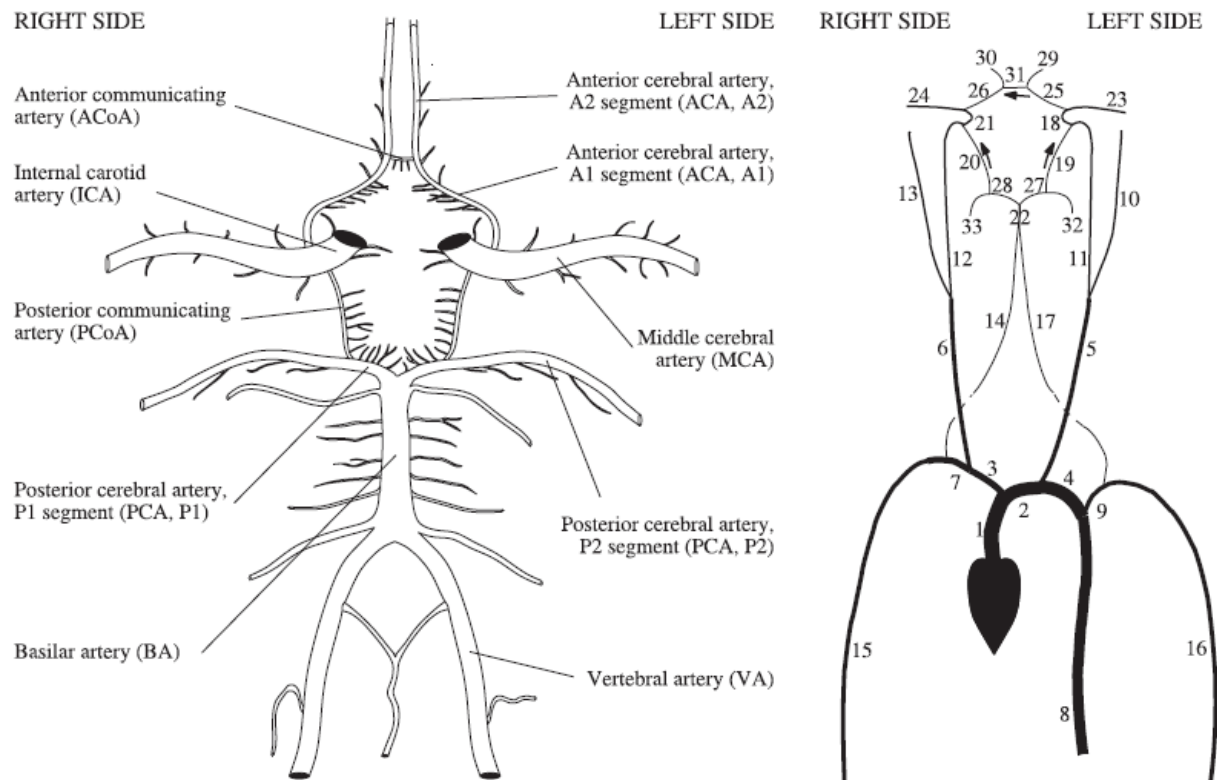
$$P_{1d} + R_2 \cdot C \cdot \frac{dP_{1d}}{dt} = P_V + (R_1 + R_2) \cdot Q_{1d} + R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot \frac{dQ_{1d}}{dt} \quad (2-16)$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ WILLIS

, όπου P_{1d} και Q_{1d} είναι η πίεση και η παροχή όγκου στο άνω άκρο της τερματικής αρτηρίας και P_v είναι η πίεση στην είσοδο του φλεβικού συστήματος.

Μοντέλο αρτηριακού συστήματος

Αυτό το υπολογιστικό μοντέλο περιλαμβάνει τις μεγαλύτερες αρτηρίες του κυκλοφορικού συστήματος και ενσωματώνει σε αυτό το κυκλοφορικό σύστημα του εγκεφάλου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2-7. Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis (αριστερά) και του αρτηριακού συστήματος (δεξιά)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Εισαγωγή [Τσαγγάρης, 2004]

Αρτηρίες ονομάζονται τα αγγεία του οργανισμού που μεταφέρουν οξυγονωμένο αίμα από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα. Όσο απομακρύνονται από την καρδιά διακλαδίζονται και σχηματίζουν όλο και μικρότερα αγγεία, μικρότερες αρτηρίες και αρτηρίδια τα οποία τελικά καταλήγουν στα τριχοειδή αγγεία.

Οι αρτηρίες εκτός από την κατάταξή τους κατά μέγεθος, κατατάσσονται συχνά και με τη δομή τους. Οι μεγάλες αρτηρίες που εκβάλλουν από την καρδιά και οι πρώτοι κλάδοι τους είναι ελαστικές αρτηρίες διότι περιέχουν μεγάλο ποσοστό ελαστίνης. Απομακρυνόμενοι από την καρδιά, το ποσοστό των μυϊκών κυττάρων που βρίσκεται υπό μορφή δακτυλίων γύρω από τον αυλό της αρτηρίας αυξάνει και η αρτηριακή δομή πλησιάζει εκείνης των μυϊκών αρτηριών.

Πέντε συντελεστές αποτελούν το τοίχωμα του αγγείου:

Ενδοθηλιακός ιστός, ίνες κολλαγόνου, ίνες ελαστίνης, λείοι μύες και βασική ουσία. Η επί της εκατό περιεκτικότητα κάθε αγγείου στις διάφορες συνιστώσες ποικίλει ανάλογα με το μέγεθος του αγγείου. Οι μεγαλύτερες μεταβολές στα ποσοστά εμφανίζονται στις αναλογίες ινών κολλαγόνου και ελαστίνης, που είναι τα ελαστικά συστατικά του τοιχώματος αφενός και των λείων μυών αφετέρου.

Επομένως, είναι επιτακτική η ανάγκη μοντελοποίησης των αρτηριών ως παραμορφωτοί σωλήνες. Η σχέση που δίνει την εξάρτηση της διατομής της αρτηρίας με την πίεση, λέγεται σχέση ελαστικότητας και παρουσιάζεται παρακάτω (3-3).

Η ροή που διαρρέει το αρτηριακό σύστημα είναι παλλόμενη, καθώς σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Παλαιότερα λόγω των μειωμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών ο υπολογισμός της ροής σε πολύπλοκα δίκτυα, ήταν δυνατός μονάχα θεωρώντας σταθερή ροή.

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σε αυτή την εργασία η ροή θεωρείται παλλόμενη, προσομοιάζοντας καλύτερα την πραγματικότητα. Οι παλμοί πίεσης ποικίλουν αναλόγως με την εφαρμογή που επιλύεται κάθε φορά.

Παρακάτω παρατίθεται όλη η διαδικασία διαμόρφωσης του προβλήματος που προηγήθηκε της σύνταξης του κώδικα υπολογισμού της ροής.

3.2 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος

Το αίμα θεωρείται ως ασυμπίεστο και συνεκτικό ρευστό. Η ροή θεωρείται ως στρωτή και μονοδιάστατη (οι λόγοι θεώρησης μονοδιάστατης ροής παρατίθενται στο 2^ο Κεφάλαιο (Μοντέλα κυκλοφορικού συστήματος και κύκλου Willis)), δηλαδή η ταχύτητα και η πίεση θεωρούνται σταθερές σε κάθε διατομή και λαμβάνουν μια μέση τιμή.

Για κάθε αρτηρία επιλύουμε τις μονοδιάστατες εξισώσεις κίνησης για την ροή. Οι εξισώσεις περιέχουν 3 άγνωστες παραμέτρους: την ταχύτητα, την πίεση και την διατομή και όλες είναι συναρτήσεις της θέσης x και του χρόνου t . Οι μονοδιάστατες εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής που επιλύθηκαν είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A \cdot u) = 0 \quad (3-1)$$

και

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \left(- \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u}{A} \right) \quad (3-2)$$

, όπου ο όρος εντός παρενθέσεως είναι ο όρος συνεκτικών απωλειών που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του κύκλου του Willis στο 4^ο κεφάλαιο (Υπολογιστικές Περιπτώσεις και Αποτελέσματα).

Στην εξίσωση (3-2) η πυκνότητα παρίσταται με το σύμβολο ρ και η δυναμική συνεκτικότητα με το σύμβολο μ . Στην ίδια εξίσωση ο τελευταίος όρος αποτελεί τον όρο συνεκτικών απωλειών για στρωτή ροή. Μια αυστηρή διατύπωση της μονοδιάστατης εξίσωσης της ορμής δεν θα επέτρεπε

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

την χρήση αυτού του όρου, καθώς αναφέρεται σε μόνιμη ροή, ωστόσο πολλές φορές χρησιμοποιείται και σε δυναμικές μελέτες, χωρίς την δημιουργία σημαντικού σφάλματος.

Οι ελαστικές ιδιότητες του τοιχώματος των αρτηριών μοντελοποιούνται εισάγοντας την σχέση ελαστικότητας. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω μη-γραμμική σχέση ελαστικότητας πίεσης – διατομής:

$$P = P_{ext} + \frac{\beta}{A_0} \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (3-3)$$

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h_0 \cdot E}{(1-\nu^2) \cdot A_0}$$

$A_0(x)$ είναι η αρχική διατομή στην θέση x του αγγείου

P_{ext} είναι η εξωτερική του αγγείου πίεση

h_0 είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος του αγγείου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

3.3 Αδιαστατοποίηση

Η αδιαστατοποίηση του μαθηματικού προβλήματος οδηγεί στην εμφάνιση αδιάστατων αριθμών που ελέγχουν το πρόβλημα και μειώνουν την πολύ-παραμετρικότητα του. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι γνωστοί αδιαστατοποιημένοι αριθμοί της ρευστομηχανικής, όπως ο αριθμός Reynolds.

Εισάγονται οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι:

$$t' = \frac{t \cdot c \delta}{L \delta} \Rightarrow t = \frac{t' \cdot L \delta}{c \delta} \quad (3-4)$$

$$x' = \frac{x}{L \delta} \Rightarrow x = x' \cdot L \delta \quad (3-5)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$A' = \frac{A}{A\delta} \Rightarrow A = A' \cdot A\delta \quad (3-6)$$

$$P' = \frac{P}{\rho \cdot C\delta^2} \Rightarrow P = P' \cdot \rho \cdot C\delta^2 \quad (3-7)$$

$$u' = \frac{u}{C\delta} \Rightarrow u = u' \cdot C\delta \quad (3-8)$$

$$Re = \frac{C\delta \cdot R\delta}{\nu} \quad (3-9)$$

$$\delta = \frac{R\delta}{L} \quad (3-10)$$

, όπου: $C\delta$ είναι η ταχύτητα αδιαστατοποίησης

$L\delta$ είναι το μήκος αδιαστατοποίησης

$A\delta$ είναι η διατομή αδιαστατοποίησης

$\rho \cdot C\delta^2$ είναι η πίεση αδιαστατοποίησης

$R\delta$ είναι η ακτίνα αδιαστατοποίησης

Re είναι ο αριθμός Reynolds

ν η κινηματική συνεκτικότητα

Αντικαθιστώντας η εξίσωση (3-1) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\partial(A' \cdot A\delta)}{\partial\left(\frac{t' \cdot L\delta}{C\delta}\right)} + \frac{\partial(A' \cdot A\delta \cdot u' \cdot C\delta)}{\partial(x' \cdot L\delta)} = 0$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου και διαιρώντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με

$\frac{A\delta \cdot C\delta}{L\delta}$ καταλήγουμε:

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} + \frac{\partial(A' \cdot u')}{\partial x'} = 0 \quad (3-11)$$

Κάνοντας ανακατανομή των όρων και διαιρώντας τα δύο μέλη με την πυκνότητα ρ η (3-2) είναι:

$$\frac{\partial(u' \cdot C\delta)}{\partial(\frac{t' \cdot L\delta}{C\delta})} + \frac{\partial}{\partial(x' \cdot L\delta)} \left(\frac{u'^2 \cdot C\delta^2}{2} + P' \cdot C\delta^2 \right) = - \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u' \cdot C\delta}{\rho \cdot A' \cdot A\delta}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου:

$$\frac{C\delta^2}{L\delta} \cdot \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{C\delta^2}{L\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{u'^2}{2} + P' \right) = - \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu \cdot u' \cdot C\delta}{A' \cdot A\delta}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\frac{C\delta^2}{L\delta}$:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{u'^2}{2} + P' \right) = - \frac{8 \cdot \pi \cdot u'}{A'} \cdot \frac{\nu \cdot L\delta}{C\delta} \cdot \frac{1}{A\delta}$$

Εισάγοντας τους αδιάστατους αριθμούς Re και δ :

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{u'^2}{2} + P' \right) = - \frac{8 \cdot u'}{A'} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{\delta}$$

ή

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = - \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{u'^2}{2} + P' \right) - \frac{8}{Re \cdot \delta} \cdot \frac{u'}{A'}, \text{ συντηρητική μορφή της εξίσωσης ορμής}$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εισάγοντας την παράμετρο UPT, όπου $UPT = \frac{u'^2 + 2 \cdot P'}{2}$:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'} (UPT) - \frac{8}{Re \cdot \delta} \cdot \frac{u'}{A'} \quad (3-12)$$

Η (3-3) παίρνει την μορφή:

$$P' \cdot \rho \cdot C\delta^2 = P_{ext} + \frac{\beta}{A\delta} \cdot (\sqrt{A' \cdot A\delta} - \sqrt{A_0})$$

Διαιρώντας με $\rho \cdot C\delta^2$ και τα δύο μέλη και αναδιατάσσοντας τα υπόλοιπα:

$$P' = \frac{P_{ext}}{\rho \cdot C\delta^2} + B \cdot \left(\sqrt{\frac{A' \cdot A\delta}{A_0}} - 1 \right) \quad (3-13)$$

$$\text{, όπου } B = \frac{\beta}{\rho \cdot C\delta^2 \cdot \sqrt{A_0}}$$

Εναλλακτικά, λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς την αδιαστατοποιημένη διατομή προκύπτει:

$$A' = \frac{A_0}{A\delta} \cdot \left(\frac{P' - \frac{P_{ext}}{\rho \cdot C\delta^2}}{B} + 1 \right)^2 \quad (3-14)$$

3.4 Διακριτοποίηση του χώρου

Ο μονοδιάστατος χώρος μήκους $L/L\delta$, όπου L το μήκος του αγγείου και $L\delta$ το μήκος αδιαστατοποίησης, διακριτοποιείται με πλήθος N αριθμητικών κόμβων που ισαπέχουν μεταξύ τους με αδιάστατη απόσταση: $\Delta x = \frac{L}{L\delta \cdot (N-1)}$. Η θέση κάθε κόμβου ορίζεται από την

$$\text{συντεταγμένη } x_i: \quad x_i = (i - 1) \cdot \Delta x, \quad i=1,2,\dots,N \quad (3-15)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το χρονικό βήμα προκύπτει από την σχέση ευστάθειας (3-22). Κάθε χρονικός κόμβος ορίζεται από την συντεταγμένη t_k :

$$t_k = (k - 1) \cdot \Delta t, k=1,2,\dots \quad (3-16)$$

3.5 Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων

Αντικαθιστώντας την πρώτη χρονική παράγωγο με πρόσω έκφραση διαφορών και τις χωρικές παραγώγους με πρόσω και πίσω έκφραση διαφορών (όπως επιτάσσει η μέθοδος Mac-Cormack) προκύπτουν οι παρακάτω διακριτοποιημένες αλγεβρικές σχέσεις:

Η (3-11) είναι:

$$\frac{A_i^{k+1} - A_i^k}{\Delta t} + \frac{A_{i+1}^k \cdot u_{i+1}^k - A_i^k \cdot u_i^k}{\Delta x} = 0$$

Λύνοντας ως προς A_i^{k+1} με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{k+1} = A_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (A_{i+1}^k \cdot u_{i+1}^k - A_i^k \cdot u_i^k) \quad (3-17)$$

, ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{k+1} = A_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (A_i^k \cdot u_i^k - A_{i-1}^k \cdot u_{i-1}^k) \quad (3-18)$$

Η (3-12) παίρνει την μορφή:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = - \frac{UPT_{i+1}^k - UPT_i^k}{\Delta x} - \frac{8}{Re \cdot \delta} \cdot \frac{u_i^k}{A_i^k}$$

Με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \Delta t \cdot \left(\frac{UPT_{i+1}^k - UPT_i^k}{\Delta x} + \frac{8}{Re \cdot \delta} \cdot \frac{u_i^k}{A_i^k} \right) \quad (3-19)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

, ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \Delta t \cdot \left(\frac{UPT_i^k - UPT_{i-1}^k}{\Delta x} + \frac{8}{Re \cdot \delta} \cdot \frac{u_i^k}{A_i^k} \right) \quad (3-20)$$

Το κριτήριο ευστάθειας είναι [Zagzoule et al, 1986]:

$$(|u| + C\delta) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{C\delta}, \text{ γιατί } |u| \ll C\delta \quad (3-21)$$

Αδιαστατοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας σύμφωνα με τις σχέσεις (3-4) και (3-5) η (3-21) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x'} \cdot \frac{L\delta}{C\delta \cdot L\delta} \leq \frac{1}{C\delta}$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x'} \leq 1 \quad (3-22)$$

3.6 Οριακές συνθήκες

Ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών γίνεται με την μέθοδο των χαρακτηριστικών [Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003], όπως φαίνεται παρακάτω:

Θεωρώντας μη-συνεκτικό ρευστό οι προς επίλυση μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot u) = 0 \quad (3-1)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων είναι:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-23)$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3-24)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3-25)$$

Οι εξισώσεις (3-23) και (3-25) μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + H(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3-26)$$

$$\text{, όπου } U = \begin{bmatrix} A \\ u \end{bmatrix} \text{ και } H = \begin{bmatrix} u & A \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial A} & u \end{bmatrix}$$

Η διατομή είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($A > 0$), επομένως οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα H προκύπτουν από :

$$\det(\lambda \cdot I - H) = 0$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial A}} = u \pm c \quad (3-27)$$

$$\text{, όπου } C = \sqrt{\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial A}} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot \rho \cdot A_0}} \cdot A^{1/4} \quad (3-28)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

είναι ποσότητα με μονάδες ταχύτητας και είναι η ταχύτητα διάδοσης κυμάτων σε σωλήνα. Για φυσιολογικές συνθήκες ισχύει ότι: $u \ll C$.

Άρα $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$.

Κάνοντας χρήση βασικών ιδιοτήτων των πινάκων [Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003] η σχέση (3-26) μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3-29)$$

, όπου $W = [W_1, W_2]^T$ είναι το διάνυσμα των χαρακτηριστικών μεταβλητών.

Η (3-29) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0 \quad (3-30)$$

και

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0 \quad (3-31)$$

Είναι:

$$W_{1,2} = \int_{u_0}^u du \pm \int_{A_0}^A \frac{c}{A} dA \quad (3-32)$$

, όπου θεωρούμε ως συνθήκες αναφοράς: ($A_0, u_0=0$)

Τότε:

$$W_{1,2} = u \pm 4 \cdot (c - c_0) \quad (3-33)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εμπλέκοντας και την εξίσωση ελαστικότητας και κάνοντας απλές αλγεβρικές πράξεις προκύπτει:

$$W_{1,2} = u \pm \frac{2 \cdot (P - P_{ext})}{\rho \cdot (C + C_0)} \quad (3-34)$$

, ή λύνοντας ως προς A, u:

$$A = \left(\frac{2 \cdot \rho \cdot A_0}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{W_1 - W_2}{8} + c_0\right)^2, \quad u = \frac{W_1 + W_2}{2} \quad (3-35)$$

Για τον υπολογισμό της διατομής χρησιμοποιήθηκαν δύο επιπλέον σχέσεις που προκύπτουν ως φαίνεται παρακάτω:

Από τις σχέσεις (3-33) προκύπτει:

$$A = \left(\frac{2 \cdot \rho \cdot A_0}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{W_1 - 2 \cdot u + W_2}{8} + c_0\right)^4$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$A = \left(\frac{2 \cdot \rho \cdot A_0}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{W_1 - u}{4} + c_0\right)^4 \quad (3-36)$$

και

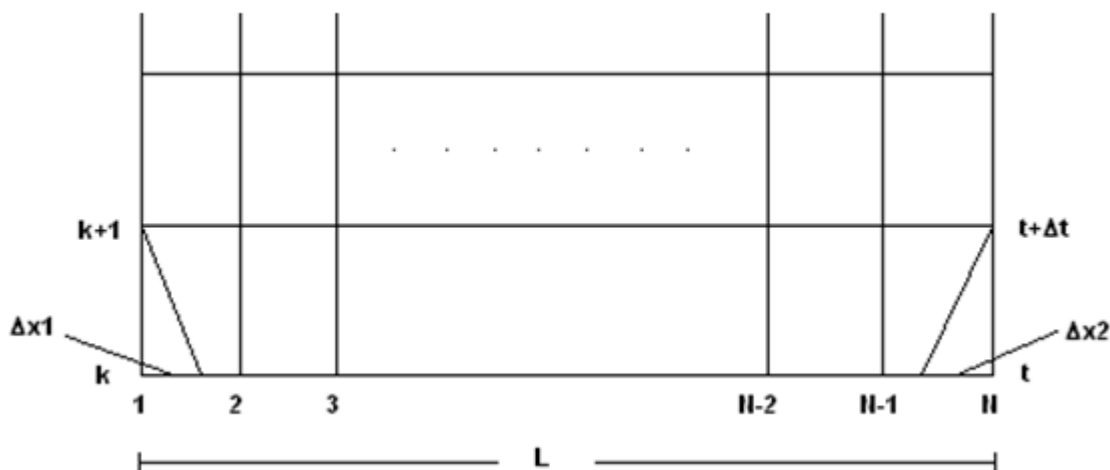
$$A = \left(\frac{2 \cdot \rho \cdot A_0}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot u - W_2 - W_1}{8} + c_0\right)^4$$

κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$A = \left(\frac{2 \cdot \rho \cdot A_0}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{u - W_2}{4} + c_0\right)^4 \quad (3-37)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε γνωστό το πεδίο ροής σε όλο το μήκος του αγγείου την χρονική στιγμή t και θέλουμε να το υπολογίσουμε την χρονική στιγμή $t+\Delta t$:



Σχήμα 3.1 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου

3.6.1 Εγγύς άκρο αγγείου

Θεωρώντας ότι οι χαρακτηριστικές μεταβλητές πάνω στις χαρακτηριστικές γραμμές είναι σταθερές μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t+\Delta t$ και κάνοντας προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο είναι:

$$W_2^{k+1}(0) = W_2^k(-\lambda_2^k(0) \cdot \Delta t) = W_2^k(\Delta x_1^k) \quad (3-38)$$

Με γραμμική παρεμβολή υπολογίζεται ότι:

$$u^k(\Delta x_1) = u_1 \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_1}{\Delta x} + u_2 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \quad (3-39)$$

και

$$c^k(\Delta x_1) = c_1 \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_1}{\Delta x} + c_2 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \quad (3-40)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

, όμως

$$\lambda_2^k(0) = u^k(\Delta x_1) - c^k(\Delta x_1) = u - c \quad (3-41)$$

Όμως $\lambda_2^k(0) = -\frac{\Delta x_1}{\Delta t}$. Άρα:

$$-\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = u - c \quad (3-42)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3-39) και (3-40) στην (3-42):

$$\Delta x_1 = -\Delta t \cdot \left(u_1 \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_1}{\Delta x} + u_2 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x} - c_1 \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_1}{\Delta x} - c_2 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \right)$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$\Delta x_1 = -\frac{\Delta t \cdot (u_1 - c_1)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (-u_1 + c_1 + u_2 - c_2)} \quad (3-43)$$

Άρα:

$$W_2^{k+1}(0) = W_2^k(0) \cdot \left(1 - \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \right) + W_2^k(\Delta x) \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \quad (3-44)$$

Στο εγγύς άκρο, συνήθως θέτουμε ένα παλμό πίεσης ή παροχής, ή κάποια χρονική μεταβολή της χαρακτηριστικής μεταβλητής W_1 . Θέτοντας την χαρακτηριστική μεταβλητή W_1 , μπορούμε από τις σχέσεις (3-34) και (3-35) να υπολογίσουμε τα A , u , P . Θέτοντας κάποια χρονική μεταβολή παλμό πίεσης ή παροχής, πρέπει να βγάλουμε κάποια σχέση $W_1 = W_1(P, W_2)$ ή $W_1 = W_1(Q, W_2)$ αντίστοιχα.

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Παρακάτω υπολογίζεται η σχέση $W_1=W_1(P,W_2)$, αφού στην εργασία θεωρήσαμε παλμούς πίεσης.

Από τις σχέσεις (3-33) προκύπτει:

$$W_1 - W_2 = 8 \cdot (c - c_0)$$

Αντικαθιστώντας την (3-30) σχέση της ταχύτητας διάδοσης:

$$W_1 - W_2 = 8 \cdot \sqrt{\frac{\beta_0}{2 \cdot \rho \cdot A_0}} \cdot (A^{1/4} - A_0^{1/4}) \quad (3-45)$$

Όμως:

$$P - P_{ext} = \beta_0 \cdot \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0} \quad (3-3)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\frac{A_0}{\beta_0}$:

$$(P - P_{ext}) \cdot \frac{A_0}{\beta_0} = \sqrt{A} - \sqrt{A_0}$$

Λύνοντας ως προς \sqrt{A} και υψώνοντας τα δύο μέλη στην $1/2$:

$$A^{1/4} = \sqrt{\frac{(P - P_{ext}) \cdot A_0}{\beta_0} + \sqrt{A_0}} \quad (3-46)$$

Αντικαθιστώντας την (3-46):

$$W_1 - W_2 = 8 \cdot \sqrt{\frac{\beta_0}{2 \cdot \rho \cdot A_0}} \cdot \left(\sqrt{\frac{(P - P_{ext}) \cdot A_0}{\beta_0} + \sqrt{A_0}} - A_0^{1/4} \right)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις:

$$W_1 = W_2 + \frac{8}{\sqrt{2 \cdot \rho}} \cdot \left(\sqrt{(P - P_{ext}) + \frac{\beta_0}{\sqrt{A_0}}} - \sqrt{\frac{\beta_0}{\sqrt{A_0}}} \right) \quad (3-47)$$

3.6.2 Άπω άκρο αγγείου

Ομοίως ισχύει ότι:

$$W_1^{k+1}(L) = W_1^k(L - \lambda_1^k(L) \cdot \Delta t) = W_1^k(L - \Delta x_2^k) \quad (3-48)$$

Είναι:

$$\lambda_1^k = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = u + c \quad (3-49)$$

,όπου

$$u = u_N \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_2}{\Delta x} + u_{N-1} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x} \quad (3-50)$$

και

$$c = c_N \cdot \frac{\Delta x - \Delta x_2}{\Delta x} + c_{N-1} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x} \quad (3-51)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε ότι:

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta t \cdot (u_N + c_N)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{N-1} + c_{N-1} - u_N - c_N)} \quad (3-52)$$

Άρα

$$W_1^{k+1}(L) = W_1^k(L) \cdot \left(1 - \frac{\Delta x_2}{\Delta x} \right) + W_1^k(L - \Delta x) \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x} \quad (3-53)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το κυκλοφορικό σύστημα, όπως έχουμε αναφέρει, είναι ένα δίκτυο με μεγάλες αρτηρίες που διακλαδίζονται συνεχώς σε μικρότερες μέχρι τα τριχοειδή αγγεία. Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τις μεγαλύτερες αρτηρίες του δικτύου, το πρόβλημα μπορεί να απλουστευτεί αρκετά, μοντελοποιώντας ένα μέρος του δικτύου. Ωστόσο, το δίκτυο των αγγείων που αμελούμε επίσης αντανακλά πίσω οδεύοντα κύματα. Έτσι πρέπει να προσεγγιστούν αυτές οι ανακλάσεις στο τέλος του μοντελοποιημένου δικτύου. Έτσι εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης (terminal resistance).

Στην εργασία αυτή θεωρήθηκε η τερματική αντίσταση, ως ο λόγος των χαρακτηριστικών:

$$R_t = -\frac{W_2}{W_1} \quad (3-54)$$

Για $R_t=1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση.

Για $R_t=0$ έχουμε μηδενική ανάκλαση.

Για $R_t > 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με αρνητική ταχύτητα.

Για $R_t < 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με θετική ταχύτητα.

Επομένως, έχοντας υπολογίσει με γραμμική παρεμβολή, όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε παραπάνω, την χαρακτηριστική μεταβλητή W_1 , μπορώ να υπολογίσω και την χαρακτηριστική μεταβλητή W_2 από την σχέση:

$$W_2 = -R_t \cdot W_1 \quad (3-55)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε από τις σχέσεις (3-34) και (3-35) τα μεγέθη A , u , P .

Εναλλακτικά, κάνοντας χρήση της γραμμικής σχέσης παροχής όγκου και διαφοράς πίεσης, μεταξύ του άπω άκρου του δικτύου και της αρχής του φλεβικού συστήματος, για μια σταθερή περιφερειακή αντίσταση έχουμε (Αυτή η οριακή συνθήκη χρησιμοποιήθηκε στο 6^ο βήμα του

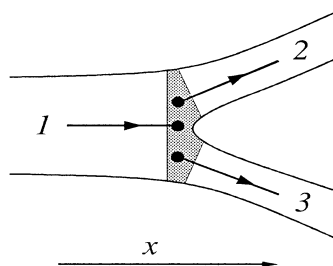
ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

κύκλου του Willis, τα αποτελέσματα του οποίου δίνονται στο 4^ο Κεφάλαιο (Υπολογιστικές περιπτώσεις και αποτελέσματα)):

$$\Delta P = R_{per} \cdot Q \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{P - P_{ven}}{R_{per} \cdot A} \quad (3-56)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3-56) υπολογίζεται η ταχύτητα στο άνω άκρο του δικτύου. Η διατομή και η πίεση στο ίδιο σημείο υπολογίζονται κάνοντας χρήση των εξισώσεων συνέχειας και ελαστικότητας αντίστοιχα.

3.6.3 Διακλάδωση



Σχήμα 3.2 Σχηματική παράσταση της διακλάδωσης

Αρχικά ισχύει η συνέχεια των παροχών μάζας, δηλαδή:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2 + A_3 \cdot u_3 \quad (3-57)$$

Επίσης, θεωρούμε συνέχεια στατικής πίεσης. Τότε:

$$P_1 = P_2 \quad (3-58)$$

και

$$P_1 = P_3 \quad (3-59)$$

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.7 Μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack [Anderson, 1995]

Η μέθοδος MacCormack αποτελεί ένα ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, που έχει δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χώρο και τον χρόνο. Εισάχθηκε το 1969 και έγινε η πιο φημισμένη ρητή μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση πεδίων ροής για τα επόμενα 15 χρόνια. Σήμερα έχει εμπλουτιστεί με περισσότερο περίπλοκες προσεγγίσεις.

Θεωρούμε ότι το πεδίο ροής σε κάθε θέση του όγκου ελέγχου είναι γνωστό την χρονική στιγμή t και θέλουμε να υπολογιστεί την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, δηλαδή πρόκειται για μία μέθοδο χρονοπροέλασης. Στην συνέχεια παρατίθεται ο τρόπος υπολογισμού της διατομής A με την βοήθεια της εξίσωσης διατήρησης της μάζας, κάνοντας χρήση της μεθόδου MacCormack. Ομοίως υπολογίζεται και η ταχύτητα με την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Η πίεση υπολογίζεται από την σχέση ελαστικότητας, αφού είναι γνωστή η διατομή.

Η διατομή στην θέση i για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ είναι:

$$A_i^{k+1} = A_i^k + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} \cdot \Delta t$$

, όπου $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av}$ είναι μια αντιπροσωπευτική μέση τιμή της χρονικής παραγώγου $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ ανάμεσα στις χρονικές τιμές t και Δt . Αυτή η μέση τιμή υπολογίζεται σε δύο βήματα, πρόβλεψης και διόρθωσης.

3.7.1 Βήμα πρόβλεψης (predictor step)

Αντικαθιστούμε με πρόσω διαφορές το δεξί άκρο της εξίσωσης διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial A^k}{\partial t_i} = - \left(\frac{A_{i+1}^k \cdot u_{i+1}^k - A_i^k \cdot u_i^k}{\Delta x} \right)$$

Όλες οι μεταβλητές είναι γνωστές την χρονική στιγμή t , άρα το δεξί μέλος είναι γνωστό. Έτσι υπολογίζεται η διατομή A την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, με τους δύο πρώτους όρους σειράς Taylor:

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$A_i^{k+1} = A_i^k + \frac{\partial A^k}{\partial t_i} \cdot \Delta t$$

Η διατομή A_i^{k+1} υπολογιζόμενη από αυτό το βήμα πρόβλεψης είναι πρώτης τάξης ακρίβεια, αφού περιέχει όρους πρώτης τάξης της σειράς Taylor.

3.7.2 Βήμα διόρθωσης (Corrector step)

Στο βήμα διόρθωσης, αρχικά υπολογίζεται η χρονική παράγωγος με τα δεδομένα του βήματος πρόβλεψης για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial A^{k+1}}{\partial t_i} = - \left(\frac{A_i^{k+1} \cdot u_i^{k+1} - A_{i-1}^{k+1} \cdot u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x} \right)$$

Η μέση τιμή της χρονικής παραγώγου της διατομής υπολογίζεται από τον αριθμητικό μέσο των χρονικών παραγώγων:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_i^k + \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_i^{k+1} \right] \quad (3-60)$$

Έτσι υπολογίζεται η διορθωμένη τιμή της διατομής την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ από την γνωστή σχέση:

$$A_i^{k+1} = A_i^k + \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{av} \cdot \Delta t \quad (3-61)$$

Αυτά τα δύο βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης επαναλαμβάνονται για όλα τα σημεία του αγωγείου και έτσι υπολογίζεται το πεδίο ροής σε όλα τα σημεία την χρονική στιγμή $t+\Delta t$. Για να υπολογιστεί η ταχύτητα u κατά μήκος του αγωγείου επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία κάνοντας χρήση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής.

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Όπως περιγράφηκε παραπάνω στο βήμα πρόβλεψης χρησιμοποιούμε πρόσω διαφορές και στο βήμα διόρθωσης πίσω διαφορές, γεγονός που καθιστά την μέθοδο Mac-Cormack διπλής ακρίβειας μέθοδο.

Τέλος για την συγκεκριμένη υπολογιστική μέθοδο δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται πρόσω και πίσω διαφορές για τα βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης αντίστοιχα. Η μέθοδος θα είχε την ίδια ακρίβεια αν χρησιμοποιούνταν με τον αντίθετο τρόπο. Θα μπορούσε θεωρητικά να υπάρχει εναλλαγή του τρόπου διαφόρισης σε κάθε βήμα.

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

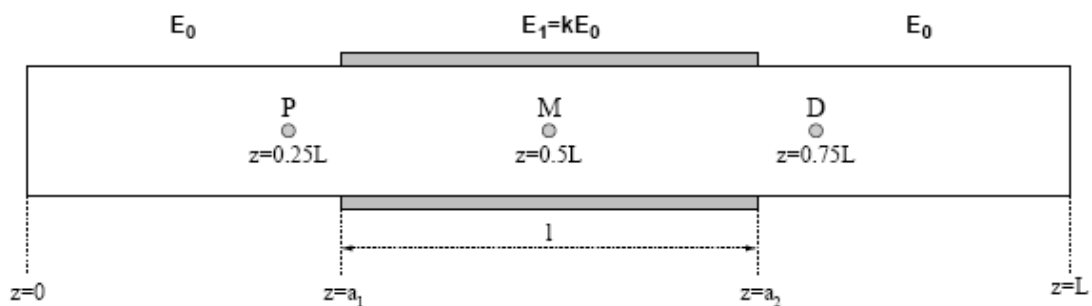
4.1 Εισαγωγή

Επειδή ο υπολογιστικός κώδικας που συντάχτηκε δεν είχε ελεγχθεί ως προς την εγκυρότητά του κρίθηκε σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματά του με αυτά αντίστοιχων δημοσιευμένων άρθρων [Formaggia et al, 2003, Sherwin et al, 2003].

Έτσι παρακάτω παρατίθεται μία σειρά υπολογιστικών περιπτώσεων που επιλύθηκαν για να ελεγχθεί το υπολογιστικό σχήμα που παρουσιάστηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά των αντίστοιχων άρθρων.

4.2 Αγγείο με stent [Formaggia et al, 2003]

Θεωρούμε την περίπτωση αρτηρίας, στην οποία έχει τοποθετηθεί μεταλλικό πλέγμα (stent), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1 και μελετούμε τις αλλαγές που δημιουργούνται στην πίεση από την απότομη αλλαγή των ελαστικών χαρακτηριστικών, λόγω της ύπαρξης του stent, το οποίο είναι ένα μεταλλικό πλέγμα που τοποθετείται στις στενωμένες αρτηρίες για να αποκατασταθεί η ροή.



Σχήμα 4.1 Σχηματική παράσταση στενωμένης αρτηρίας

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κομμάτι που προσομοιώνει την ύπαρξη της πρόσθεσης του stent μήκους l είναι αυτό που βρίσκεται μεταξύ των συντεταγμένων a_1 και a_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας θεωρείται ως πολλαπλάσιο του μέτρου ελαστικότητας E_0 του φυσιολογικού ιστού.

Τρία σημεία κατά μήκος του αγγείου έχουν επισημανθεί με τα γράμματα P (proximal=εγγύς), M (medium=μέσο) και D (distal=άπω). Θα χρησιμοποιηθούν ως σημεία ελέγχου για την μεταβολή της πίεσης. Θεωρήθηκαν οι αρχικές τιμές $A=A_0$ και $u=0$, αμελήθηκε ο συνεκτικός όρος απωλειών και θεωρήθηκε η εξωτερική του αγγείου πίεση $P_{ext}=0$.

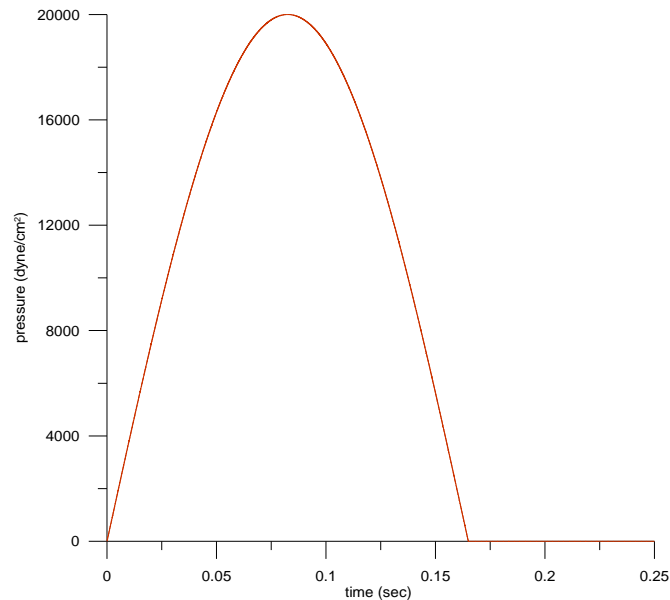
Οι οριακές συνθήκες για αυτή την περίπτωση είναι οι παρακάτω:

1. Στο άπω άκρο θεωρούμε μη-ανακλώμενες (non-reflecting) οριακές συνθήκες, θεωρώντας ότι η χαρακτηριστική μεταβλητή W_2 παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική της τιμή, δηλαδή $W_2=0$ (αγγείο απείρου μήκους όπου το οδεύον κύμα πίεσης δεν φτάνει στο άπω άκρο). Η χαρακτηριστική μεταβλητή W_1 υπολογίζεται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 3^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του προβλήματος).
2. Για το εγγύς άκρο του αγγείου θεωρούμε ότι η χαρακτηριστική μεταβλητή W_1 υπολογίζεται από την σχέση (3-47), εφόσον δίνεται παλμός πίεσης. Η χαρακτηριστική μεταβλητή W_2 υπολογίζεται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 3^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του προβλήματος).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.2.1 Περίπτωση παλμού πίεσης

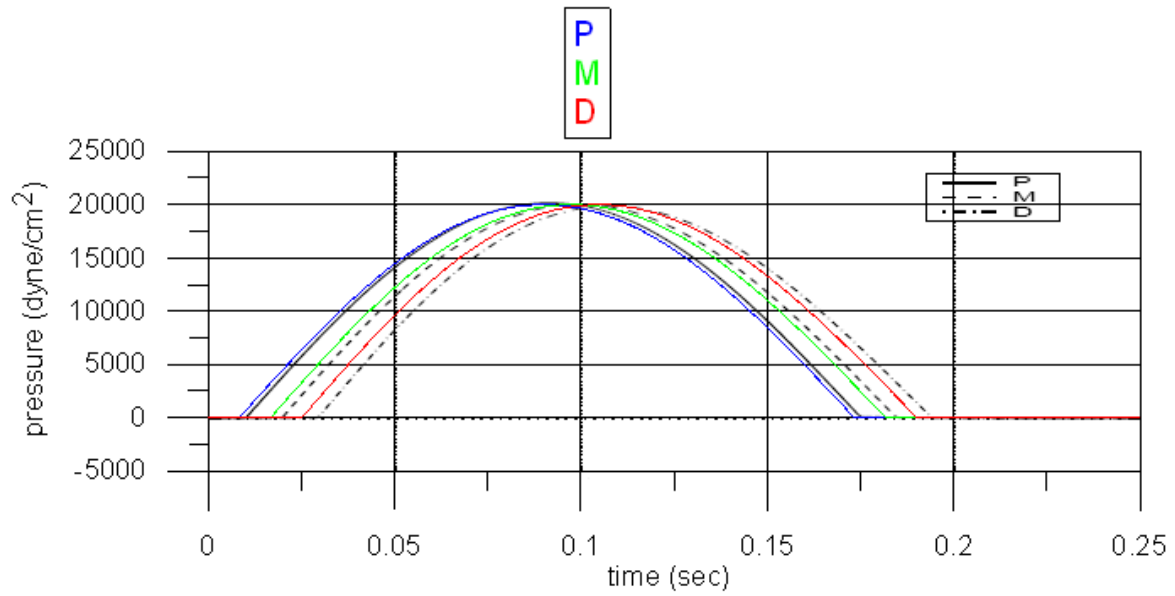
Ο παλμός πίεσης που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός του παρακάτω σχήματος:



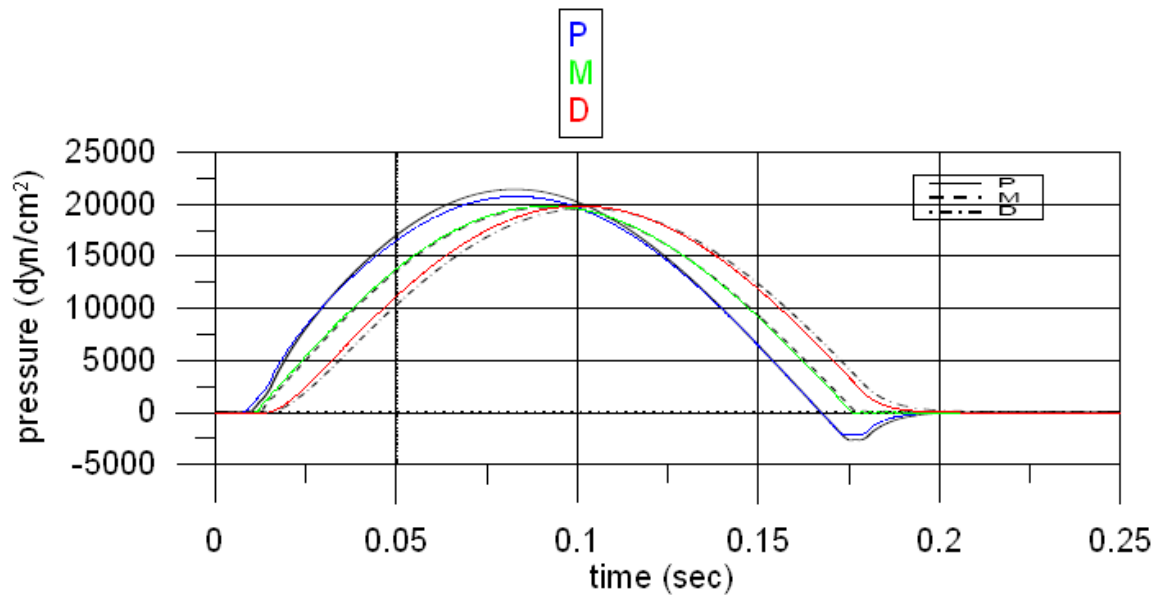
Σχήμα 4.2 Παλμός πίεσης [Formaggia et al, 2003]

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση σταθερού μέτρου ελαστικότητας καθ' όλο το μήκος του αγγείου (Σχήμα 4.3), αλλά και την περίπτωση του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας για το μήκος του stent l (Σχήμα 4.4). Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής είναι $E1=100 \cdot E0$, το μήκος της στενωμένης περιοχής είναι $l = a2-a1 = 5$ cm και το μήκος του αγγείου είναι $L = 15$ cm. Όταν το μέτρο ελαστικότητας παραμένει το ίδιο καθ' όλο το μήκος του αγγείου ο παλμός ταξιδεύει ανεπηρέαστος. Αντιθέτως στην περίπτωση αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας, ο παλμός διαφοροποιείται. Καθώς το κύμα εισέρχεται στην περιοχή του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας τμήμα αυτού ανακλάται και το υπόλοιπο τμήμα επιταχύνεται. Ακόμα μία ανάκλαση παρουσιάζεται στη έξοδο από το stent, όταν επανερχόμαστε στο αρχικό μέτρο ελαστικότητας. Το κύμα στο σημείο D παρουσιάζεται αποδυναμωμένο, γιατί ποσοστό της ενέργειας έχει ανακλαστεί προς τα πίσω και ποσοστό αυτής έχει παγιδευτεί μέσα στο μήκος του stent. Η βασική επιρροή του stent είναι η αύξηση της πίεσης στο σημείο P που πλησιάζει τα 25000 dyne/cm².

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



Σχήμα 4.3 Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό μέτρο ελαστικότητας

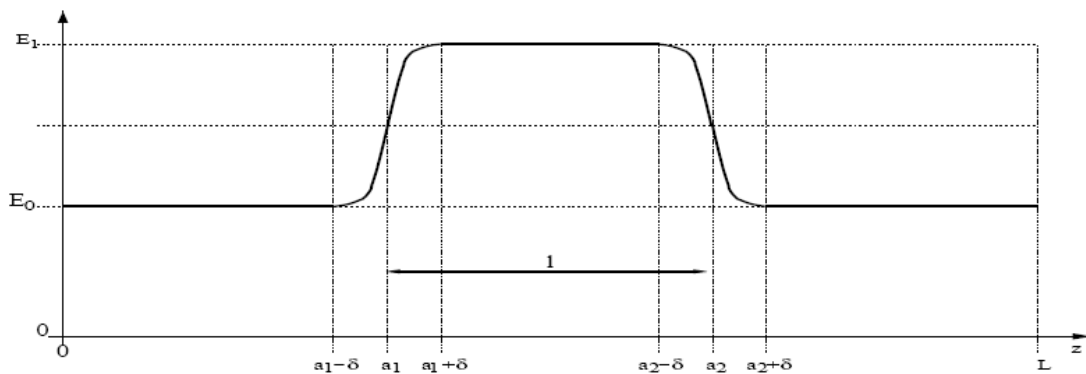


Σχήμα 4.4 Η πίεση στα σημεία P, M, D για αυξημένο μέτρο ελαστικότητας στην περιοχή του stent

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι μικρές αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, οφείλονται σε δύο λόγους:

1. Στην εργασία του [Formaggia et al, 2003] δίνεται ομαλή μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5, ενώ στην εργασία για λόγους απλότητας και ευκολίας θεωρήθηκε ότι έχουμε βηματική μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας.



Σχήμα 4.5 Ομαλή μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας

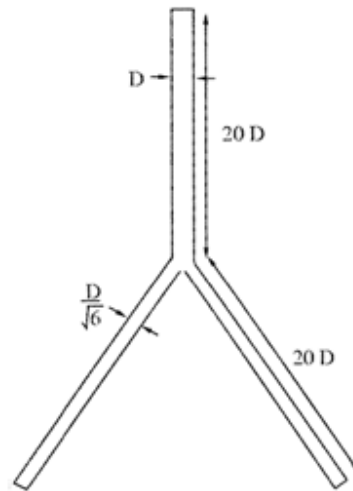
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.

4.3 Διακλάδωση [Sherwin et al, 2003]

Σκοπός της συγκεκριμένης εφαρμογής είναι η μελέτη της ανάκλασης λόγω της διακλάδωσης. Για αυτό τον λόγο ενώ η ανάκλαση στο τέλος των θυγατρικών αγγείων λαμβάνεται υπ' όψιν κανονικά, δεν επιτρέπεται σε αυτό το ανακλώμενο κύμα να εισέρθει στο πατρικό αγγείο, δημιουργώντας προβλήματα στην εξαγωγή συμπερασμάτων από την ανάκλαση λόγω της διακλάδωσης.

Θεωρούμε την περίπτωση της διακλάδωσης (Σχήμα 4.6):

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



Σχήμα 4.6 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε 3 αγγεία, όπου κάθε αγγείο είναι μήκους $20 \cdot D$, όπου $D=2,5\text{cm}$ είναι η διατομή του πατρικού αγγείου. Η ταχύτητα διαμέσου του πατρικού αγγείου είναι $C=300\text{ cm/s}$. Για να προκύψει αυτή η τιμή της ταχύτητας επιλέγονται για το πατρικό αγγείο οι φυσιολογικές τιμές πάχους τοιχώματος αγγείου $h=0,05\text{ cm}$ και μέτρου ελαστικότητας $E = 3,375 \cdot 10^6\text{ dyne/cm}^2$.

Για να επιτύχουμε γραμμικό συντελεστή ανάκλασης στην διακλάδωση (παράγραφος 1.4.2) $R_f=0,5$, θεωρούμε ότι τα θυγατρικά αγγεία έχουν διάμετρο $D/\sqrt{6}$ και πάχος τοιχώματος $h/\sqrt{6}$.

Στο εγγύς άκρο δίνεται η χαρακτηριστική μεταβλητή W_1 :

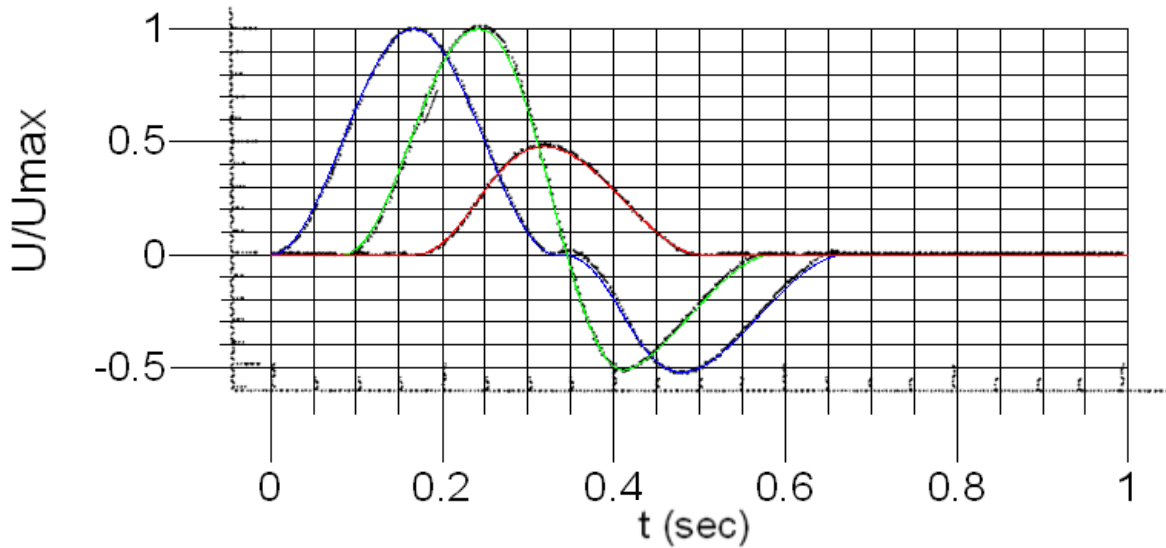
$$W_1 = 50 \cdot \sin^2(3 \cdot \pi \cdot t) \cdot H\left(t - \frac{1}{3}\right) \quad (4-1)$$

, όπου $H\left(t - \frac{1}{3}\right)$ η συνάρτηση Heaviside: $H(t - a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

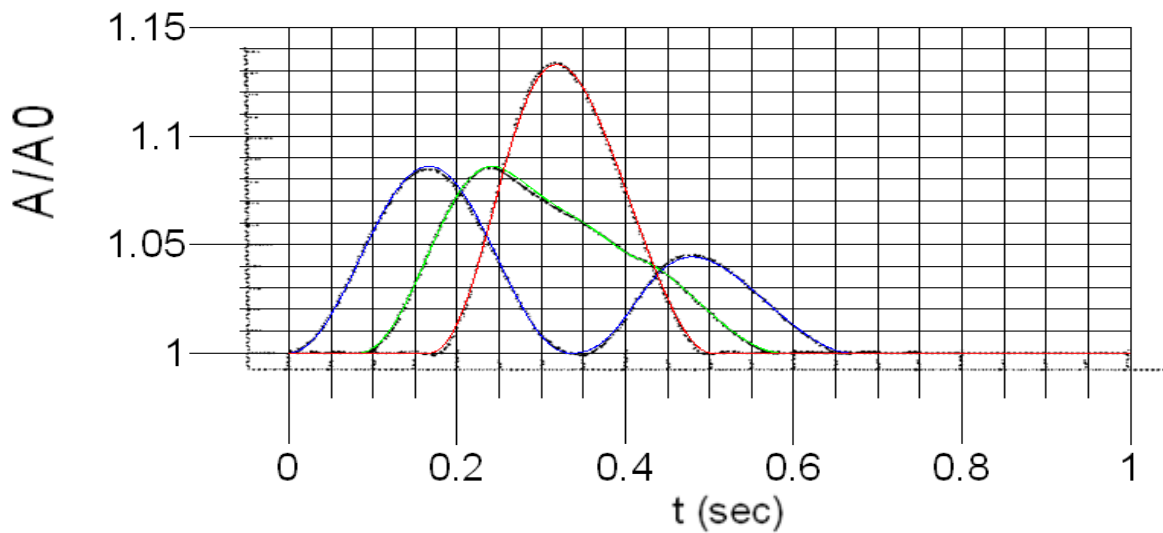
Η συγκεκριμένη οριακή συνθήκη δίνει μία θετική ημιτονοειδή ταχύτητα στην είσοδο και όλα τα πίσω οδεύοντα κύματα απορροφώνται, χωρίς περεταίρω ανάκλαση.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στα παρακάτω σχήματα (4.7,4.8) φαίνεται στο πατρικό αγγείο η χρονική εξέλιξη της ανηγμένης ταχύτητας ως προς την μέγιστη ταχύτητα και της ανηγμένης διατομής ως προς την αρχική διατομή.



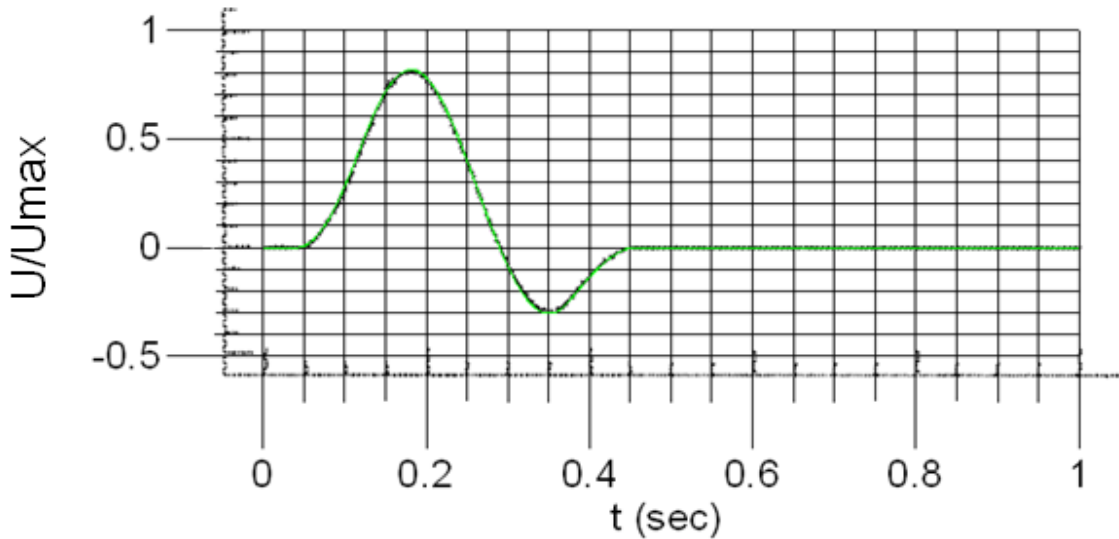
Σχήμα 4.7 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στην αρχή την μέση και το τέλος του πατρικού αγγείου



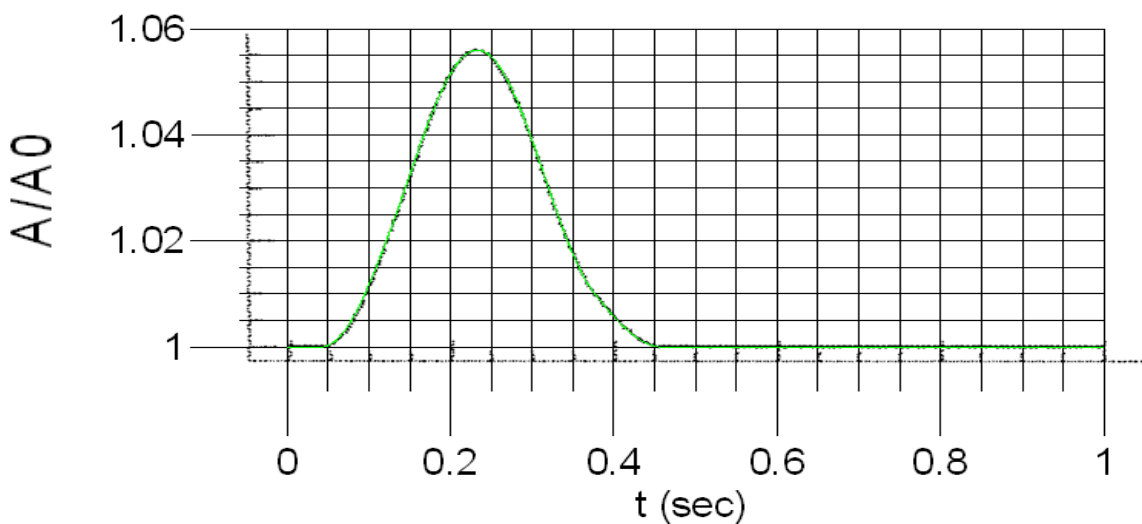
Σχήμα 4.8 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στην αρχή την μέση και το τέλος του πατρικού αγγείου

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ίδιο παράδειγμα, αλλά με διπλασιασμένη ταχύτητα διάδοσης του κύματος, πράγμα που επιτυγχάνεται τετραπλασιάζοντας το μέτρο ελαστικότητας του πατρικού αγγείου $E = 13,5 \cdot 10^6 \text{ dyne/cm}^2$ και διατηρώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους.



Σχήμα 4.9 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο μέσο του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος

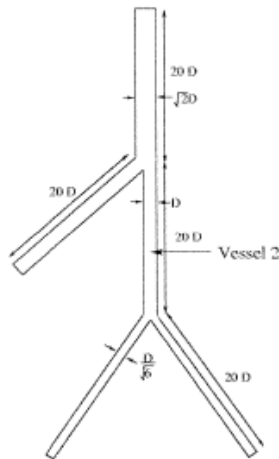


Σχήμα 4.10 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο μέσο του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.3 Διπλή διακλάδωση [Sherwin et al, 2003]

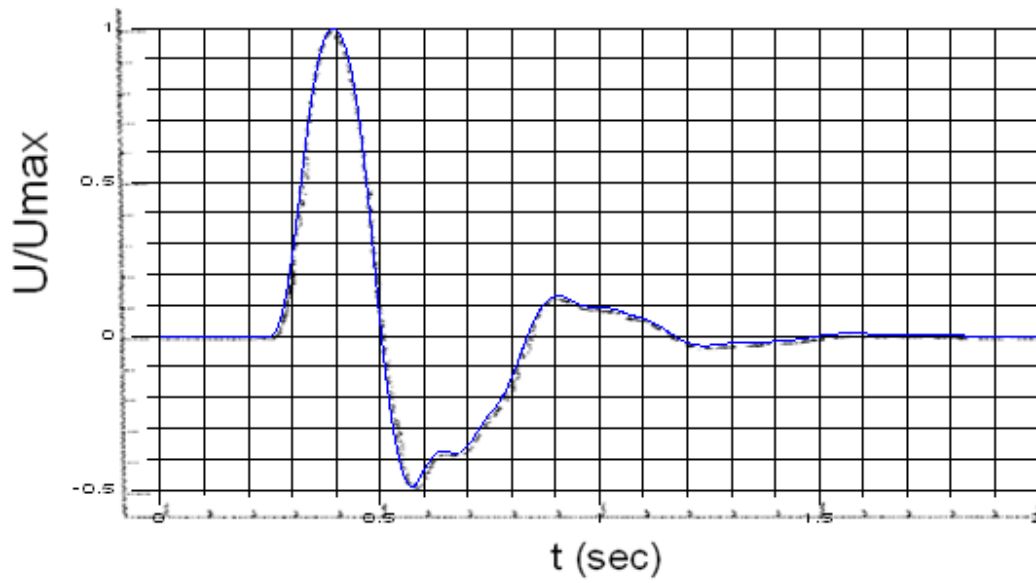
Για να ολοκληρώσουμε την σύγκριση των αποτελεσμάτων θεωρούμε μία διπλή διακλάδωση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και εφαρμόζουμε την ίδια υπολογιστική τακτική με πριν.



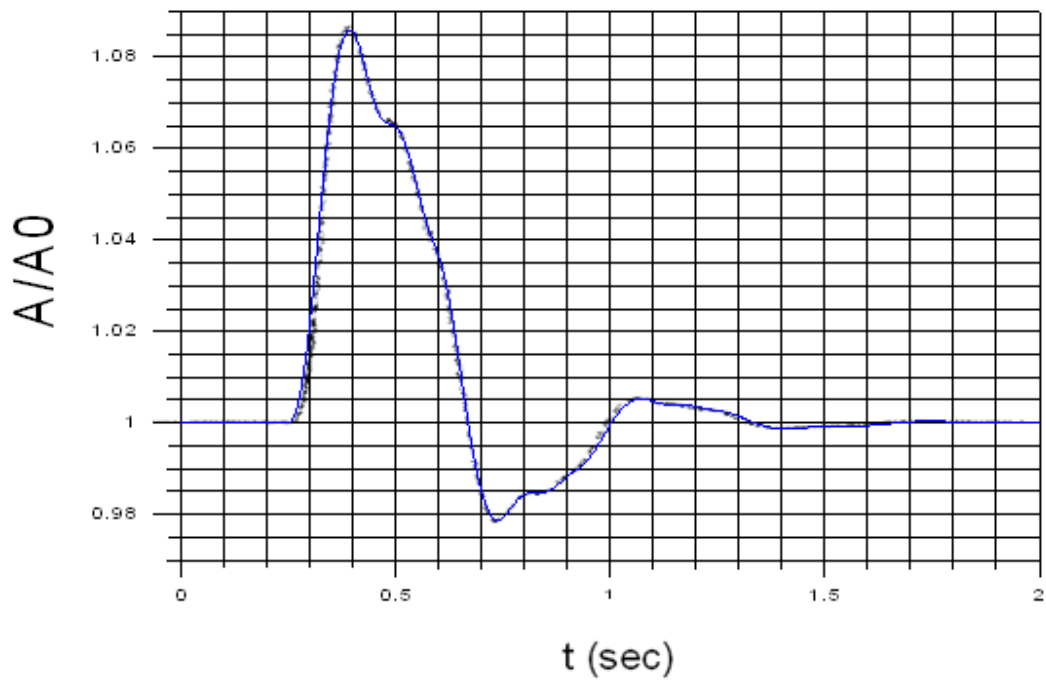
Σχήμα 4.11 Σχηματική παράσταση διπλής διακλάδωσης

Σε αυτή την περίπτωση τα κάτω 3 αγγεία είναι όμοια με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης. Τα δύο πρόσθετα αγγεία είναι τέτοια ώστε ο συντελεστής ανάκλασης της πάνω διακλάδωσης να προκύπτει $Rf = -0,5$. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την ίδια ταχύτητα διάδοσης κύματος σε όλα τα αγγεία, έχοντας τα θυγατρικά αγγεία της ίδιας διαμέτρου και θέτοντας στο πατρικό αγγείο διάμετρο $\sqrt{2} \cdot D$ και πάχος τοιχώματος $\sqrt{2} \cdot D$. Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας όπως έχει υπολογιστεί στο κέντρο του αγγείου 2 (vessel 2), χρησιμοποιώντας πάντα την ίδια οριακή συνθήκη στην είσοδο του δικτύου (4-1).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



Σχήμα 4.12 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας

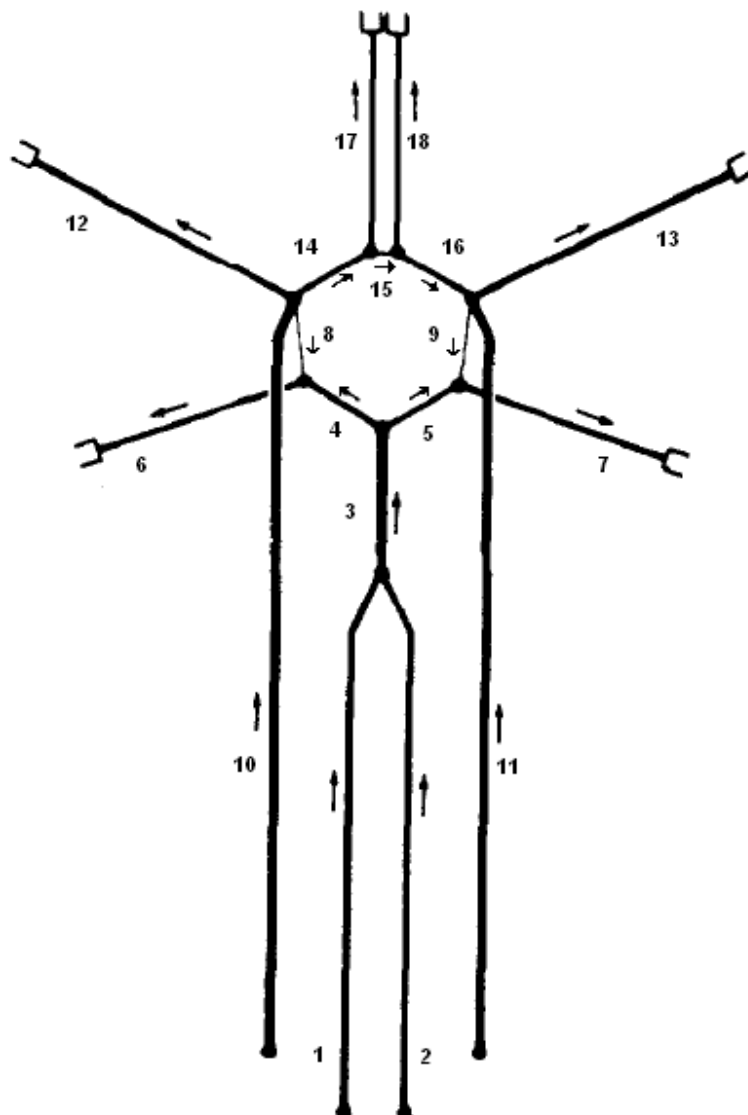


Σχήμα 4.13 Η χρονική εξέλιξη της διατομής

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4 Κύκλος του Willis (circle of Willis)

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κύκλου βρίσκονται μέσα στα όρια των διαστάσεων, όπως αυτά παρουσιάζονται στο [Hillen et al, 1982]. Ακολουθεί το σχηματικό διάγραμμα του κύκλου του Willis, και των κυριότερων κλάδων αυτού [Hillen et al, 1986].



Σχήμα 4.14 Σχηματική παράσταση του κύκλου του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στους κάτω πίνακες φαίνονται τα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά των αρτηριών αλλά και οι τιμές των περιφερειακών αντιστάσεων για τα απαγωγά αγγεία [Hillen et al, 1986].

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΑΓΓΕΙΟΥ (Α.Α.)	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ (cm)	ΜΗΚΟΣ L(cm)	ΠΑΧΟΣ h(cm)	Μ. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Ε (dyne/cm ²) · 10 ⁶
Έσω Καρωτιδική Αρτηρία/Internal Carotid Artery (10)	0,40	25	0,05	8
Έσω Καρωτιδική Αρτηρία/Internal Carotid Artery (11)	0,40	25	0,05	8
Σπονδυλική Αρτηρία/Vertebral Artery (1)	0,27	20	0,034	8
Σπονδυλική Αρτηρία/Vertebral Artery (2)	0,27	20	0,034	8
Πρόσθια Εγκεφαλική Αρτηρία I/Anterior Cerebral artery I (14)	0,20	2	0,029	16
Πρόσθια Εγκεφαλική Αρτηρία I/Anterior Cerebral artery I (16)	0,20	2	0,029	16
Πρόσθια Εγκεφαλική Αρτηρία II/Anterior Cerebral artery II (17)	0,20	5	0,03	16
Πρόσθια Εγκεφαλική Αρτηρία II/Anterior Cerebral artery II (18)	0,20	5	0,03	16
Μέση Εγκεφαλική Αρτηρία/Middle cerebral artery (12)	0,26	7	0,036	16
Μέση Εγκεφαλική Αρτηρία/Middle cerebral artery (13)	0,26	7	0,036	16
Οπίσθια Αναστομωτική Αρτηρία/Posterior communicating artery (8)	0,10	2	0,018	16
Οπίσθια Αναστομωτική Αρτηρία/Posterior communicating artery (9)	0,10	2	0,018	16
Οπίσθια Εγκεφαλική Αρτηρία I/Posterior cerebral artery I (4)	0,18	2	0,027	16
Οπίσθια Εγκεφαλική Αρτηρία I/Posterior cerebral artery I (5)	0,18	2	0,027	16
Οπίσθια Εγκεφαλική Αρτηρία II/Posterior cerebral artery II (6)	0,20	7	0,026	16
Οπίσθια Εγκεφαλική Αρτηρία II/Posterior cerebral artery II (7)	0,20	7	0,026	16
Βασική Αρτηρία/Basilar artery (3)	0,43	3	0,04	16
Πρόσθια Αναστομωτική Αρτηρία/Anterior communicating artery (15)	0,02	0,5	0,019	16

Πίνακας 4.1 Γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά κυριότερων αρτηριών του κύκλου του Willis

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ (dyne/cm ⁵)
Peripheral resistance of Posterior Cerebral Artery	39000
Peripheral resistance of Posterior Cerebral Artery	39000
Peripheral resistance of Middle Cerebral Artery	52000
Peripheral resistance of Middle Cerebral Artery	52000
Peripheral resistance of Anterior Cerebral Artery	78000
Peripheral resistance of Anterior Cerebral Artery	78000

Πίνακας 4.2 Περιφερειακές αντιστάσεις των απαγωγών αγγείων

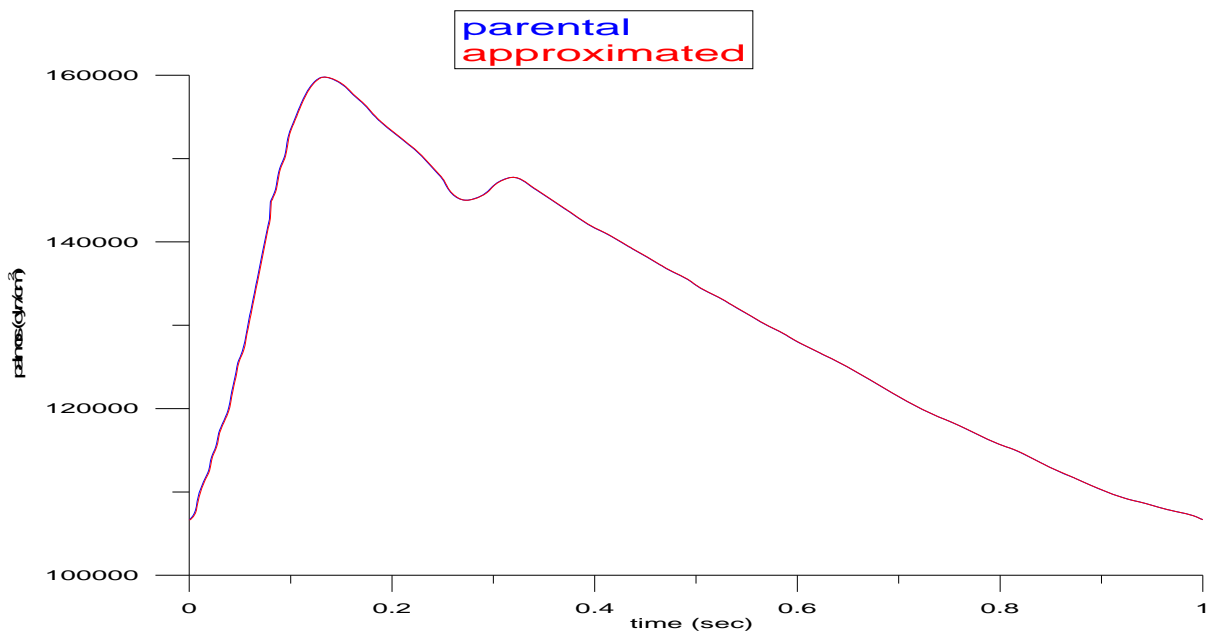
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.1 Δημιουργία παλμού πίεσης

Στην βιβλιογραφία οι περισσότερες εργασίες δίνουν κάποιο παλμό πίεσης για την είσοδο των προσαγωγών αγγείων [Hillen et al, 1982, Hillen et al, 1986, Zagzoule et al, 1986]. Έτσι κρίθηκε σκόπιμο να δοθεί παλμός πίεσης [Hillen et al, 1986].

Αρχικά σαρώθηκε η συγκεκριμένη γραφική παράσταση του παλμού πίεσης και διαβάστηκε από το πρόγραμμα engage, ένα πρόγραμμα ψηφιοποίησης γραφικών παραστάσεων. Ωστόσο τα δεδομένα που προέκυψαν δεν είχαν σταθερό χρονικό βήμα, δημιουργώντας πρόβλημα για την συνέχεια της διαδικασίας. Με την βοήθεια του grapher, ενός προγράμματος γραφικών έγινε παρεμβολή smoothing splines ώστε να αποκτηθούν περισσότερα σημεία για την συγκεκριμένη γραφική παράσταση. Στην συνέχεια με την βοήθεια του matlab έγινε γραμμική παρεμβολή και προέκυψαν σημεία με σταθερό χρονικό βήμα Δt . Ακολούθως, με έναν υπολογιστικό κώδικα προσέγγισης fourier και κάνοντας χρήση των σημείων, υπολογίζεται η προσεγγιστική καμπύλη, βάσει της σχέσης:

$$P(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_0^N (A(n) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \pi \cdot t) + B(n) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \pi \cdot t))$$

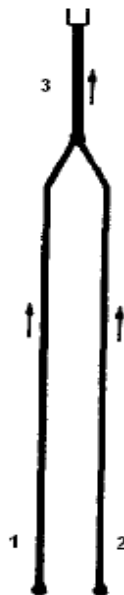


Σχήμα 4.15 Πατρικός [Hillen et al 1986] και προσεγγιστικός παλμός πίεσης

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

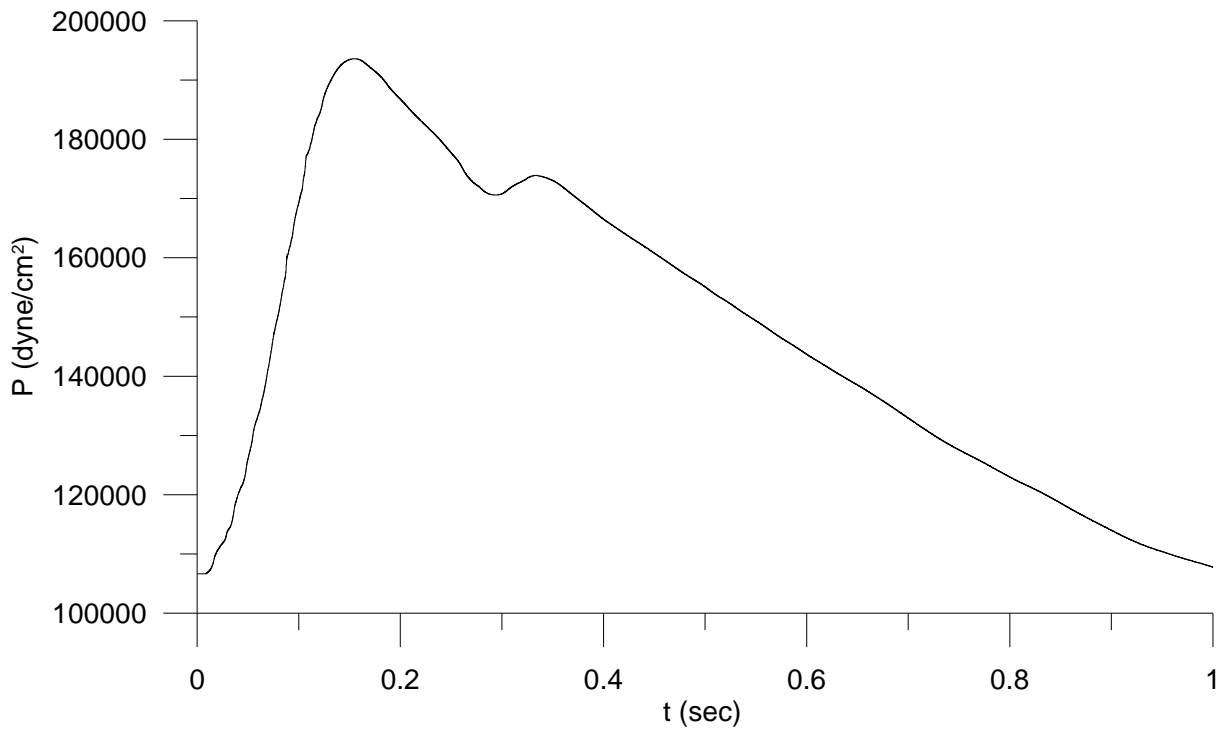
Η επίλυση του κύκλου του Willis έγινε σταδιακά σε 6 βήματα. Σε κάθε βήμα προσθέτονταν ένα επιπλέον μέρος (αριθμός αγγείων) του κύκλου μέχρι να καταλήξουμε στο τελικό μοντέλο. Αυτό έγινε για να ελέγχεται η εγκυρότητα κάθε βήματος, φτάνοντας με αυτό τον τρόπο ομαλά στο τελικό μοντέλο. Παρακάτω γίνεται η παράθεση των σχετικών αποτελεσμάτων. Δίνεται το τμήμα του κύκλου που επιλύεται και στα διαγράμματα τα χαρακτηριστικά της ροής. Για τα 5 πρώτα βήματα δίνεται μόνο η πίεση στο μέσο των αγγείων και όχι οι υπόλοιπες μεταβλητές (διατομή, ταχύτητα, παροχή) και θεωρείται μη συνεκτική ροή. Στο τελευταίο βήμα βεβαίως δίνονται όλες οι μεταβλητές στο μέσο των αγγείων και θεωρείται συνεκτική ροή. Για το ίδιο βήμα η σύγκλιση της λύσης προκύπτει οπτικά, χωρίς να υπολογίζεται ο βαθμός σύγκλισης. Θα μπορούσε να υπολογιστεί σε επόμενο στάδιο.

4.4.2 Βήμα 1^ο

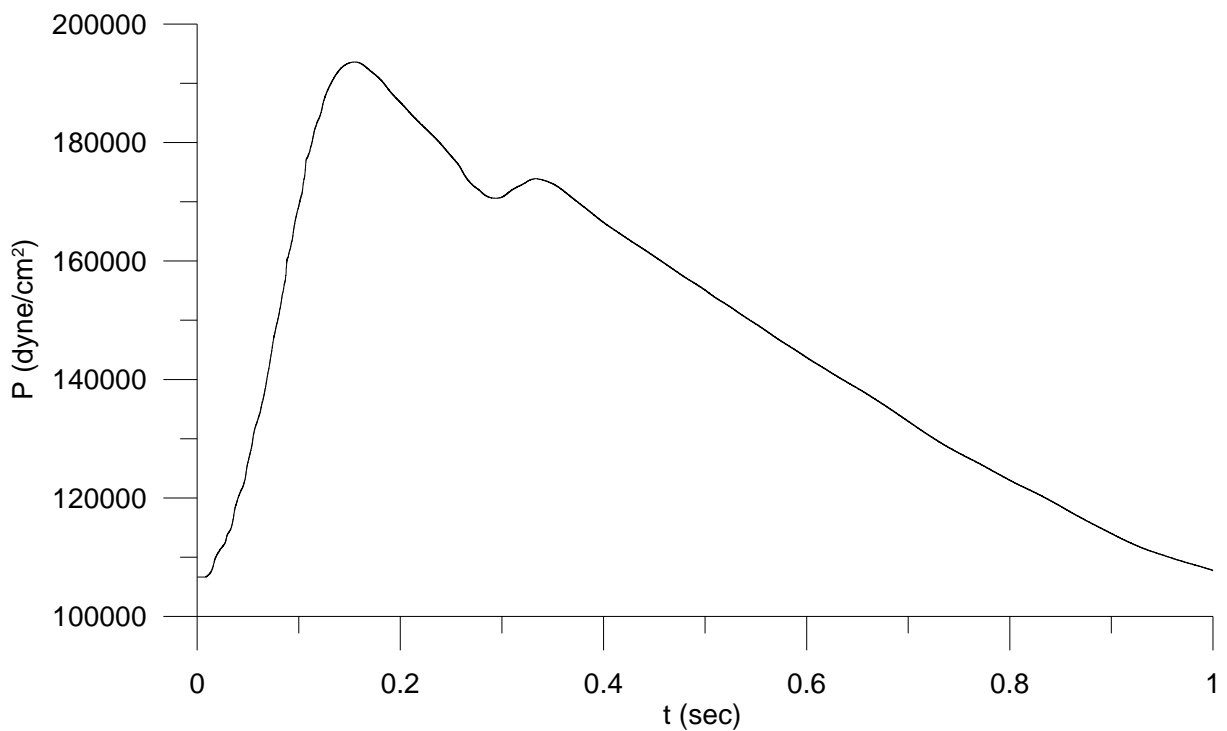


Σχήμα 4.16 Τμήμα του κύκλου του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

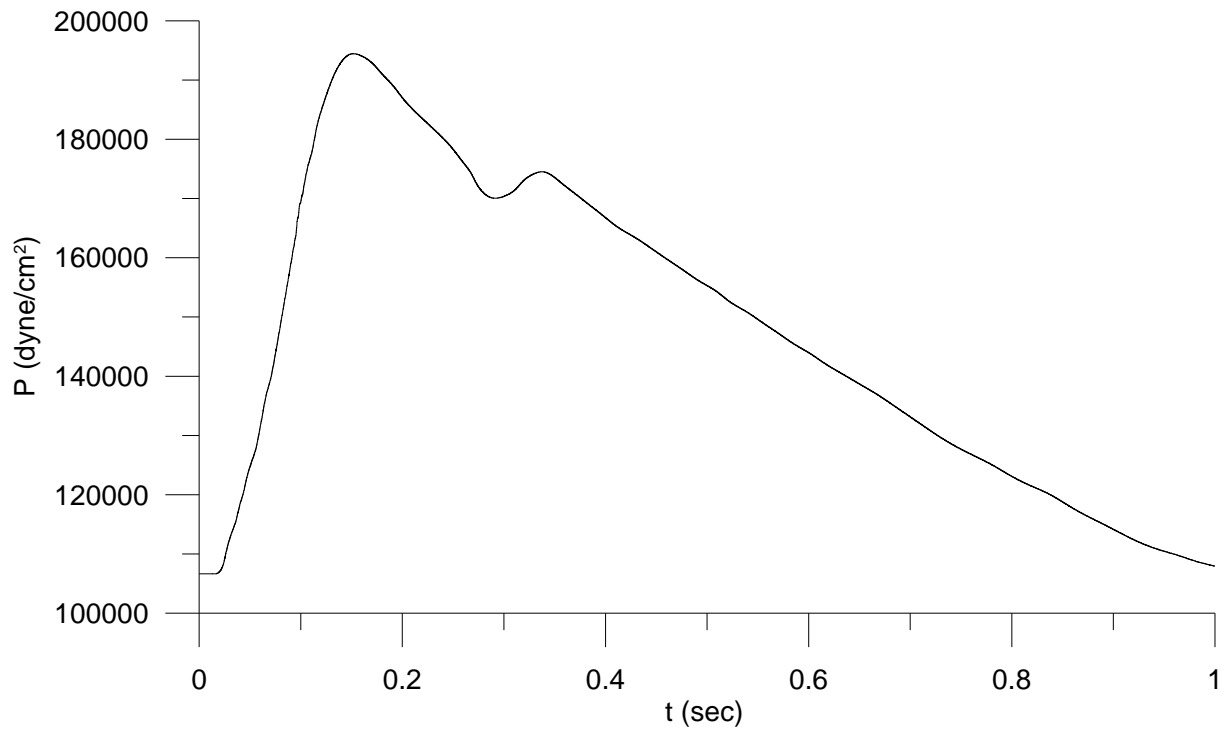


Σχήμα 4.17 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1



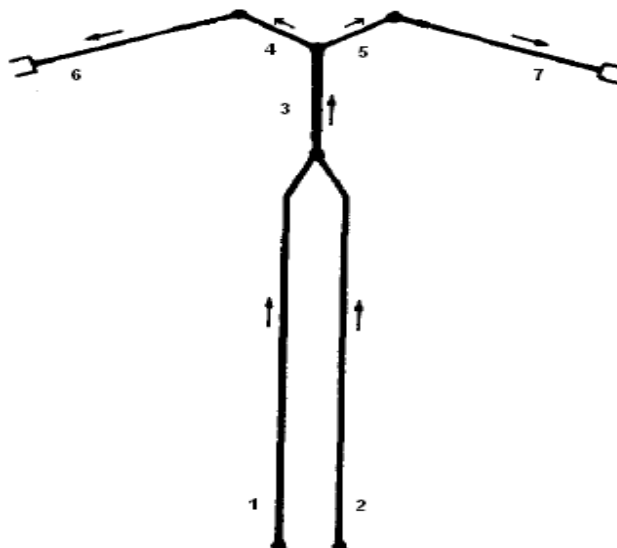
Σχήμα 4.18 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



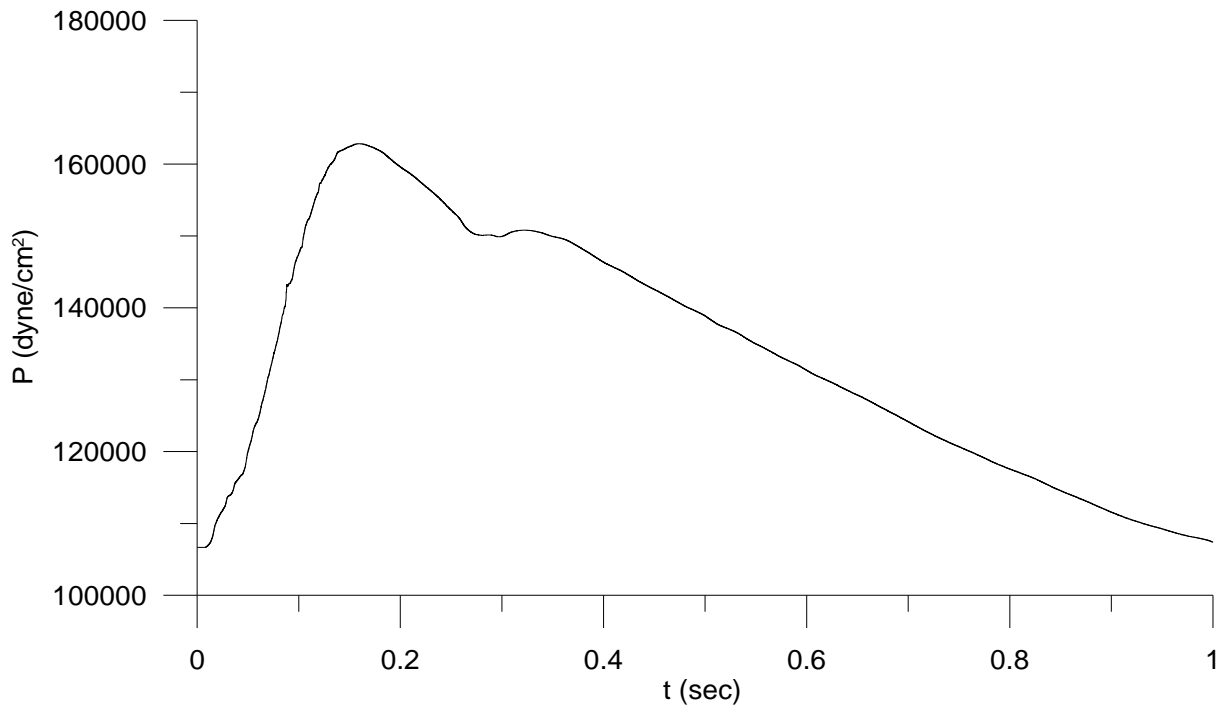
Σχήμα 4.19 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

4.4.3 Βήμα 2^ο

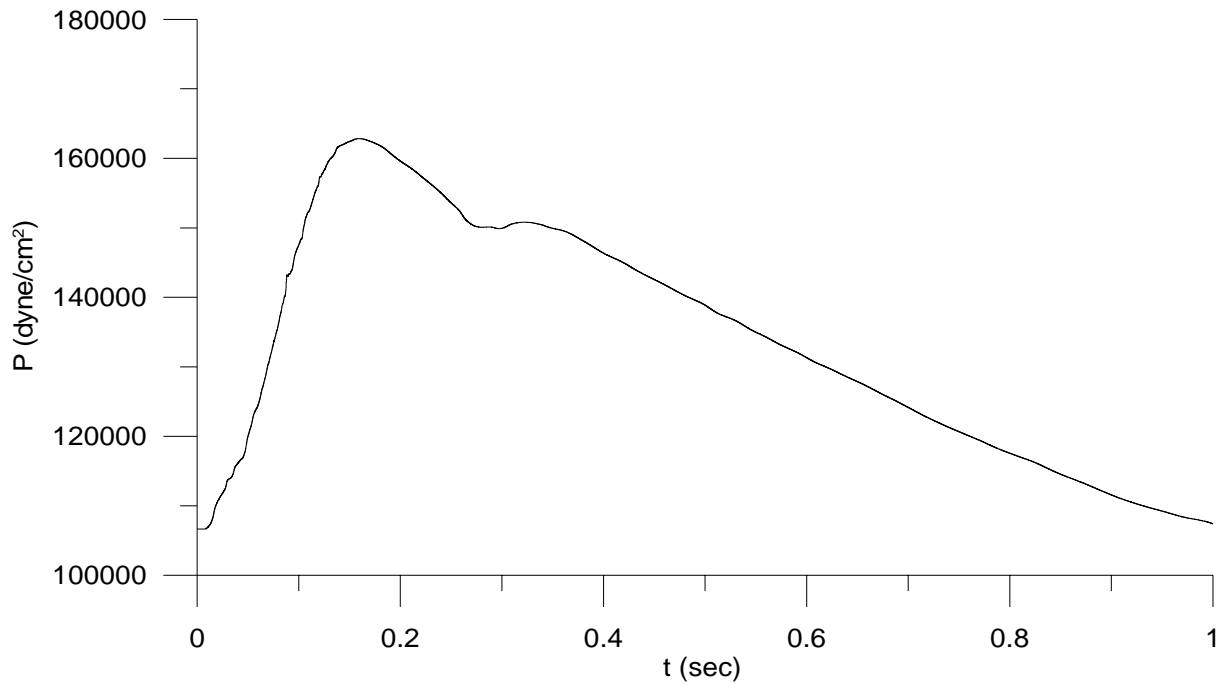


Σχήμα 4.20 Τμήμα του κύκλου του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

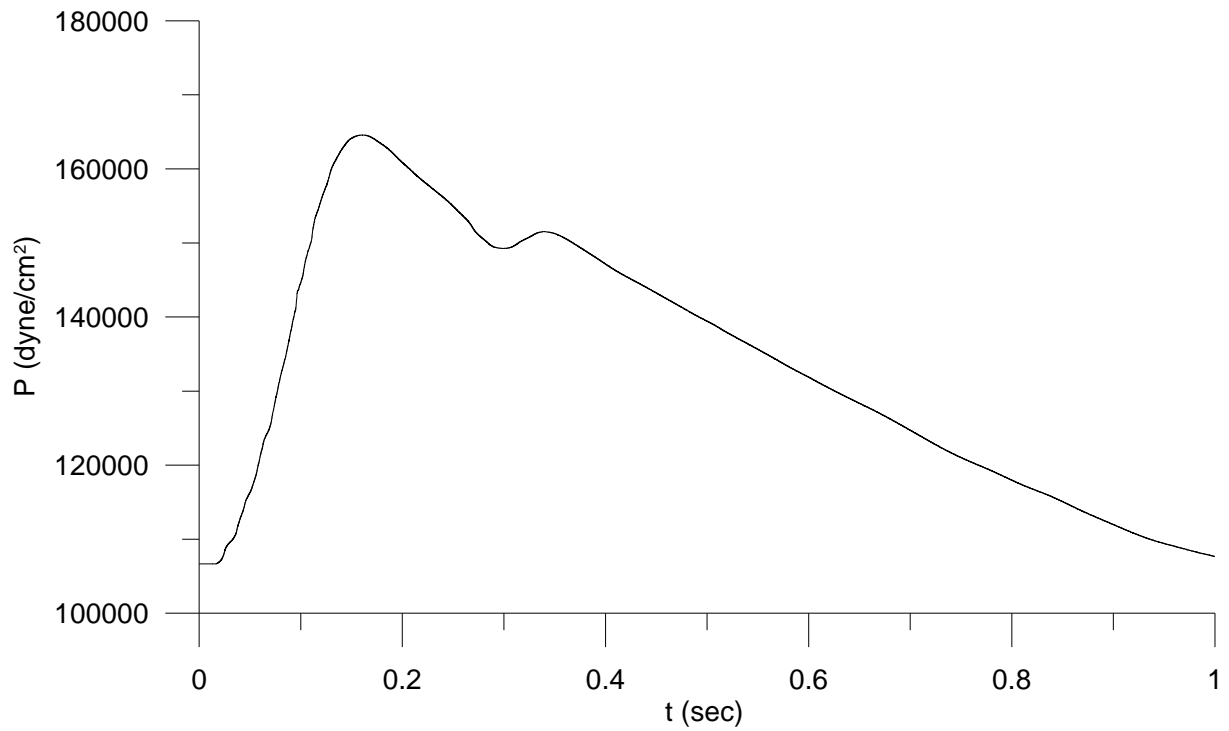


Σχήμα 4.21 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1

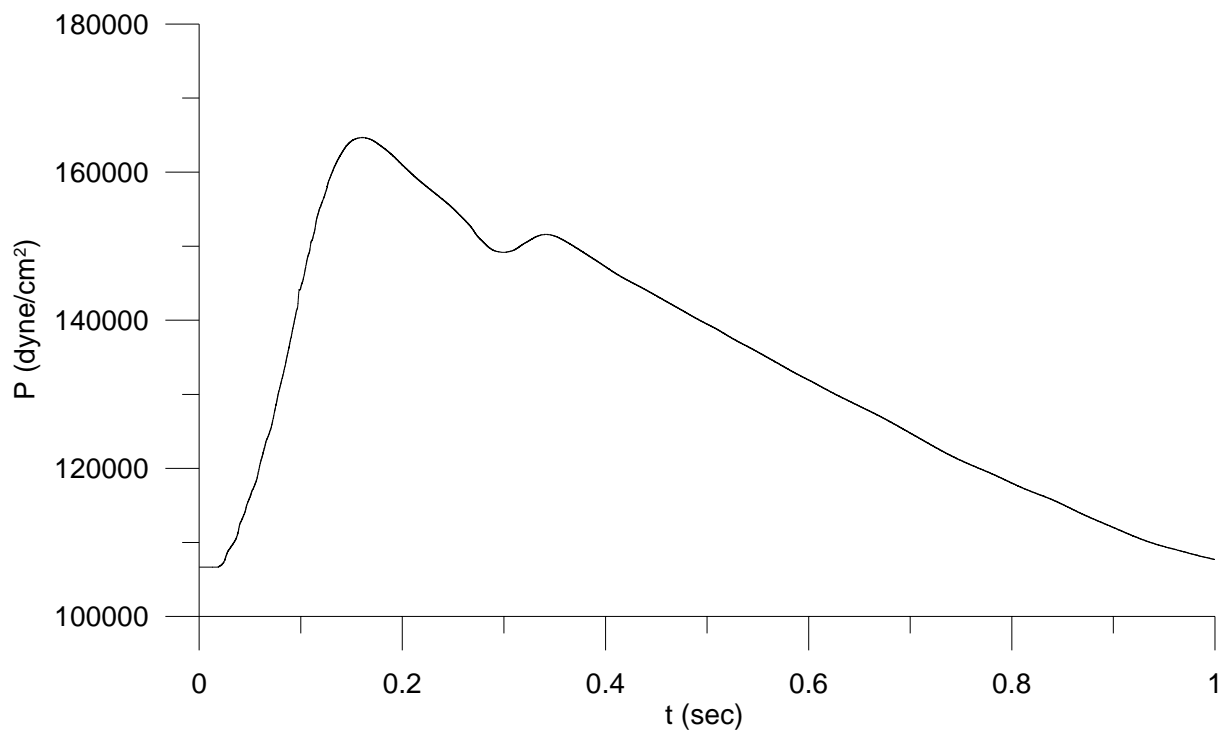


Σχήμα 4.22 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

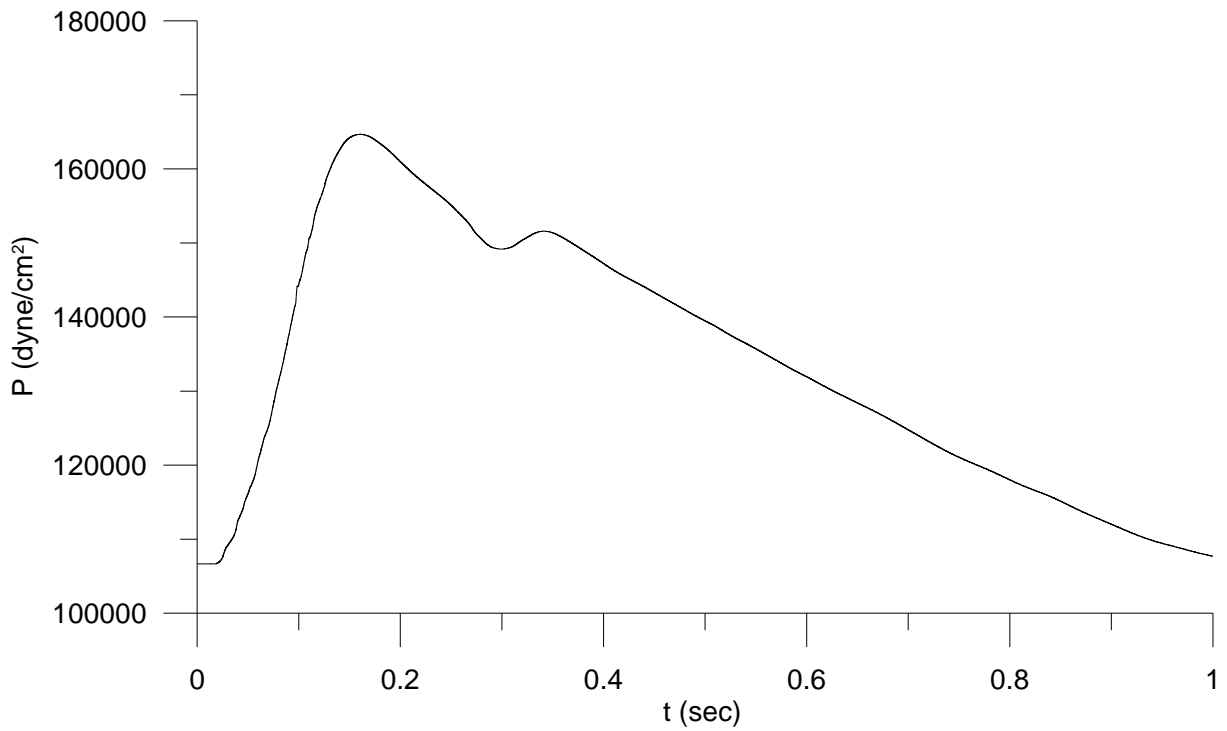


Σχήμα 4.23 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

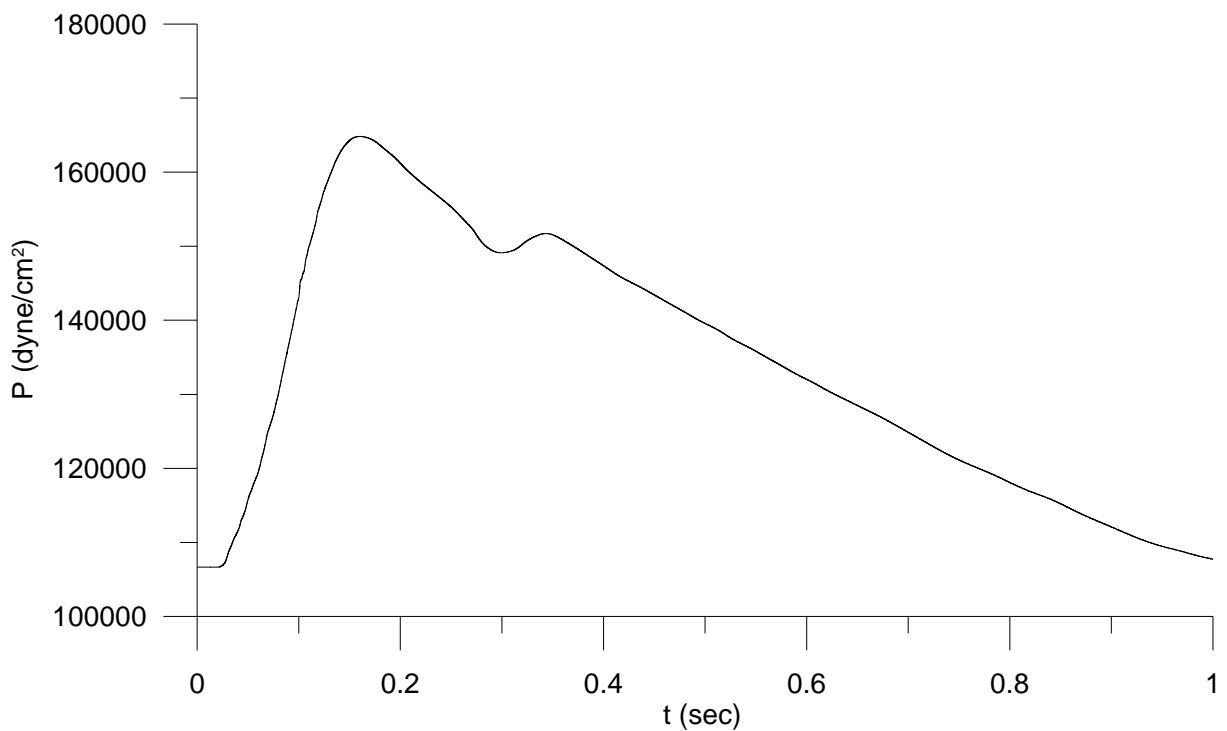


Σχήμα 4.24 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

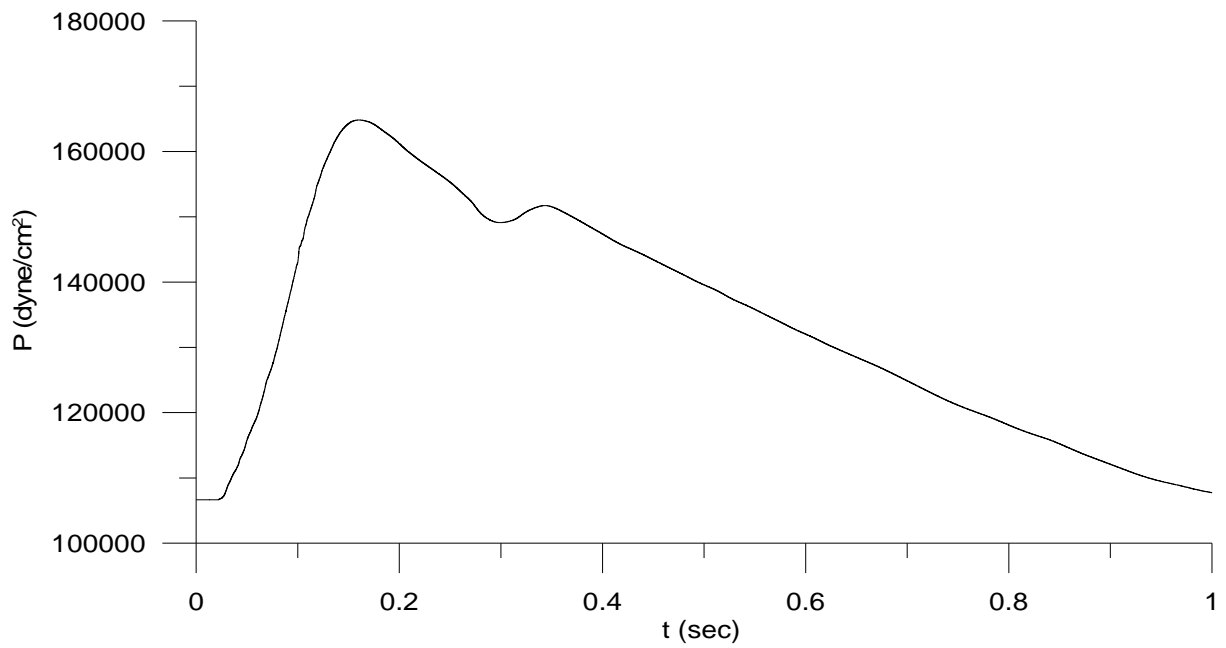


Σχήμα 4.25 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 5



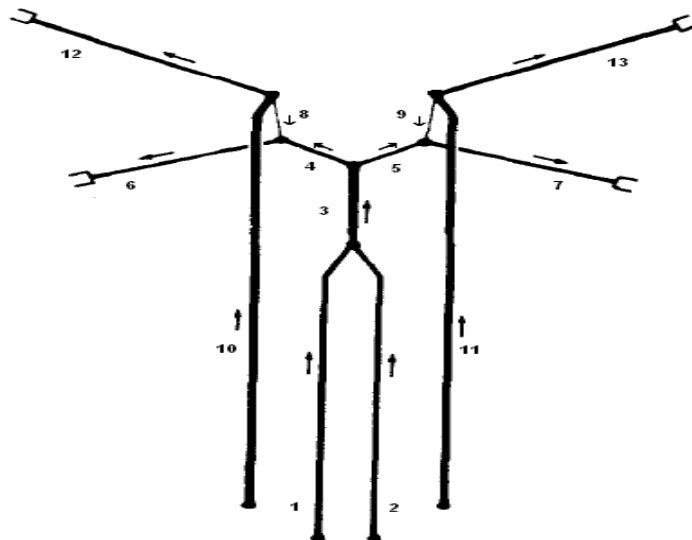
Σχήμα 4.26 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



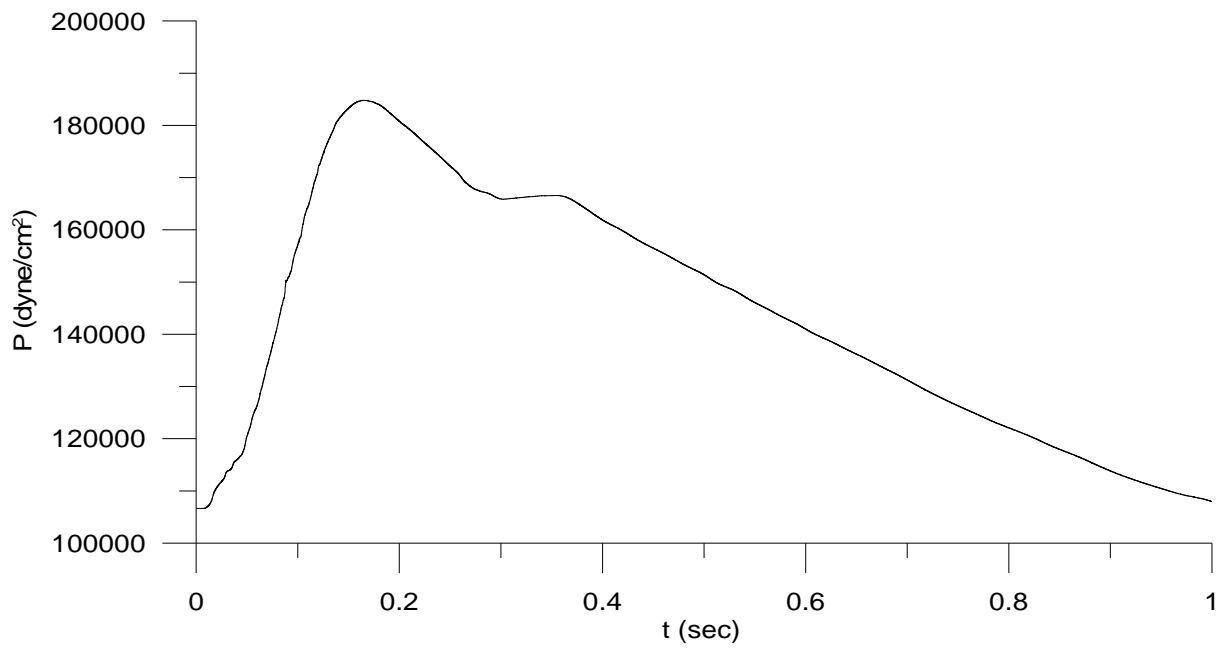
Σχήμα 4.27 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 7

4.4.4 Βήμα 3^ο

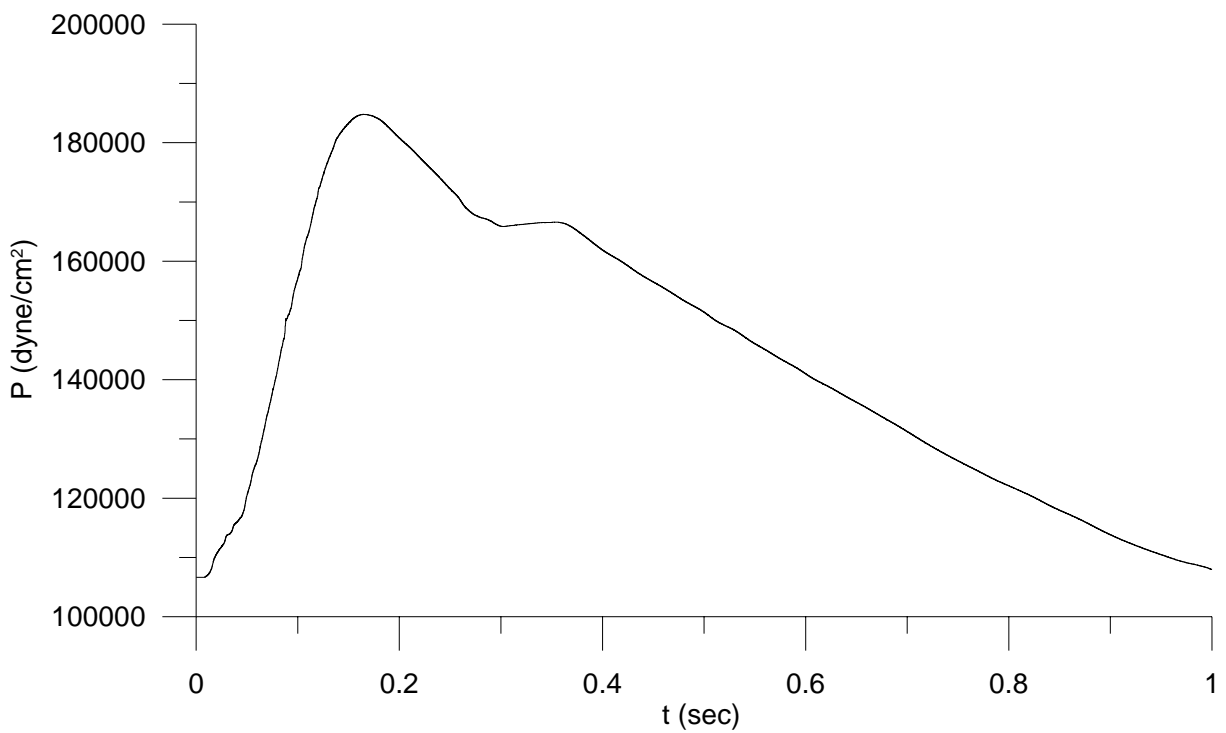


Σχήμα 4.28 Τμήμα του κύκλου του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

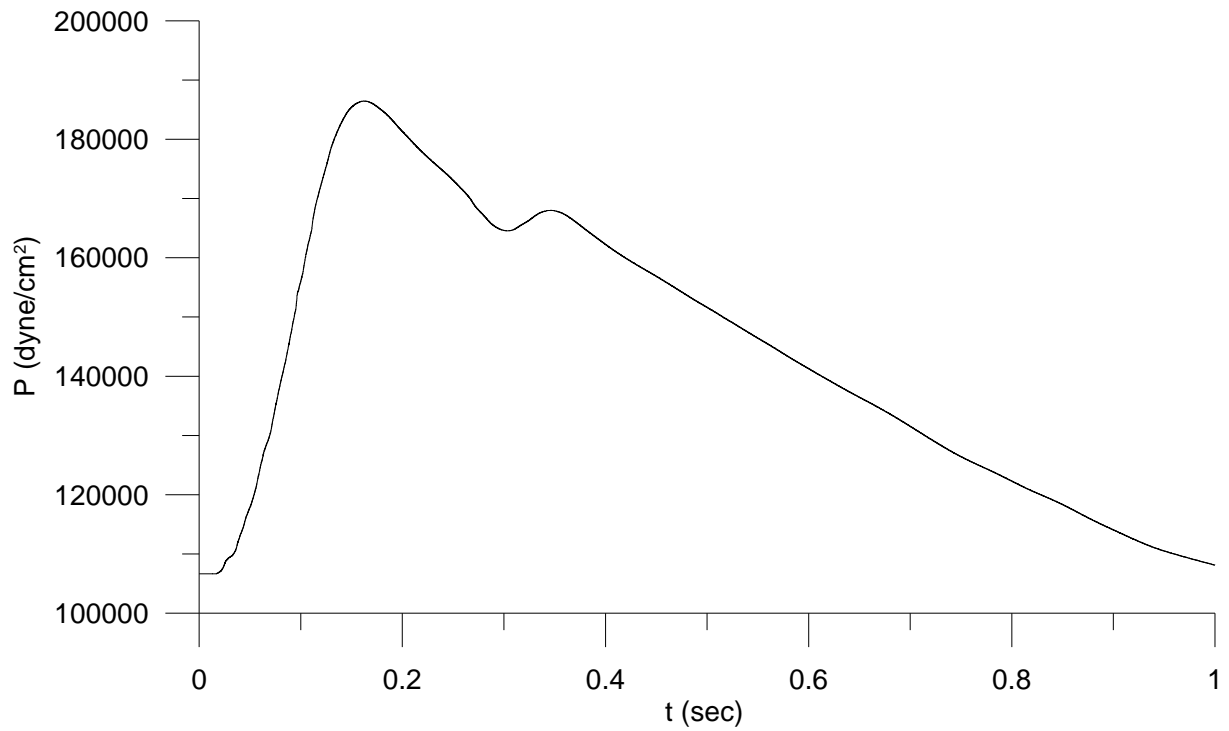


Σχήμα 4.29 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1

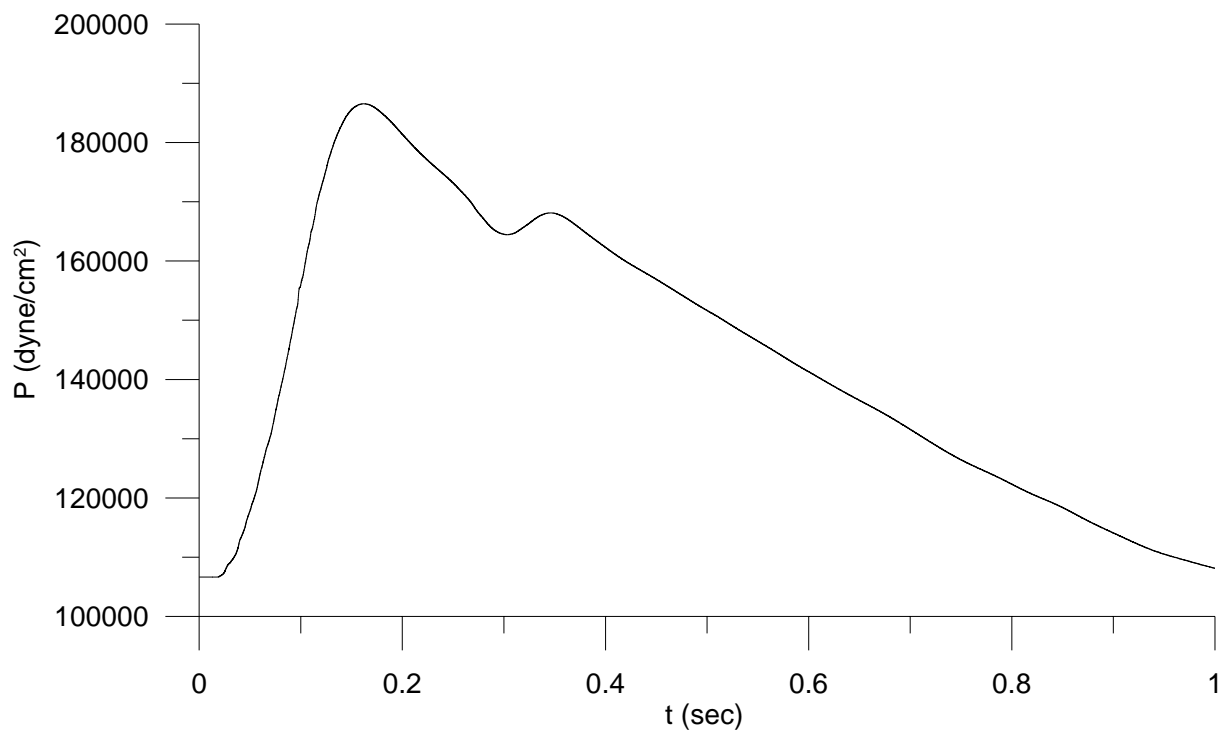


Σχήμα 4.30 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

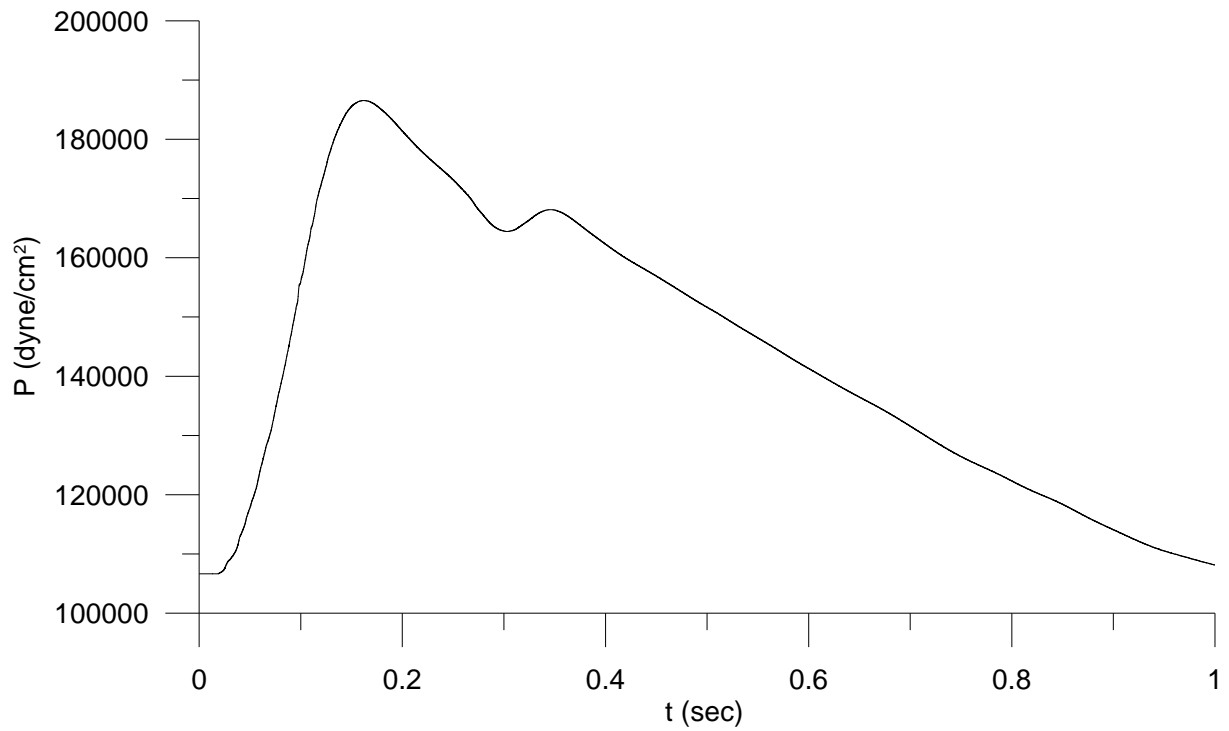


Σχήμα 4.31 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

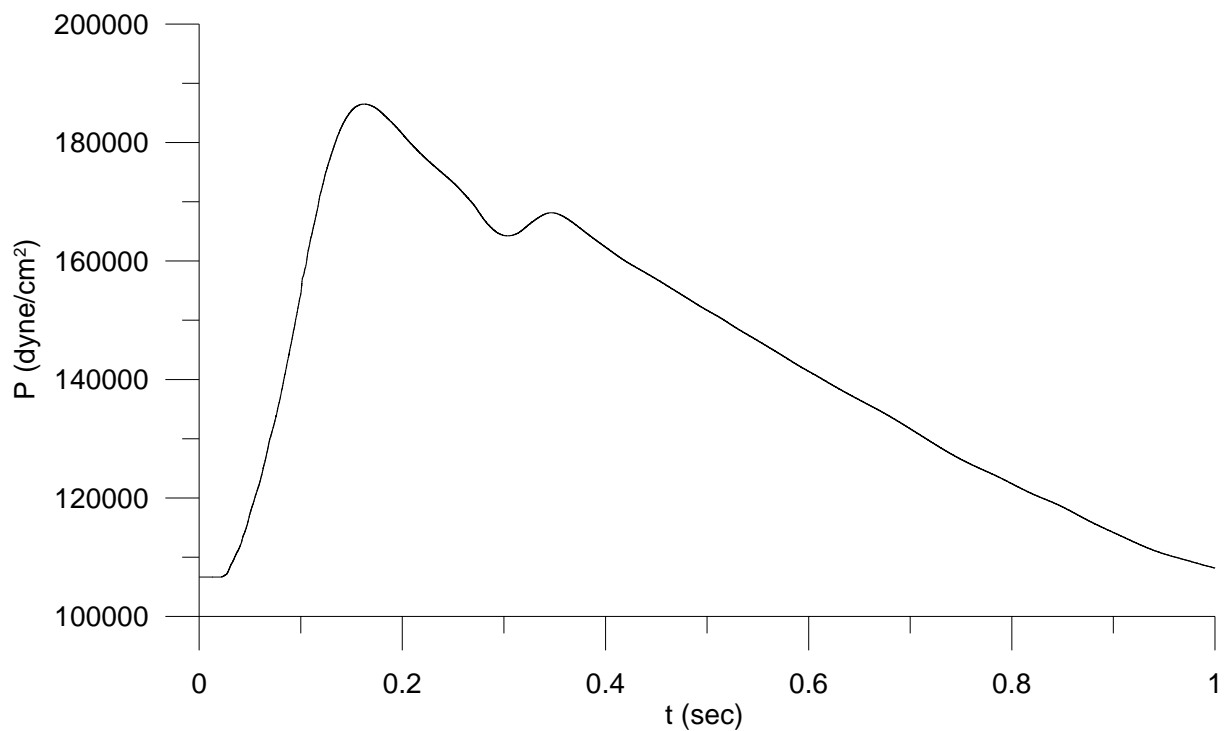


Σχήμα 4.32 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

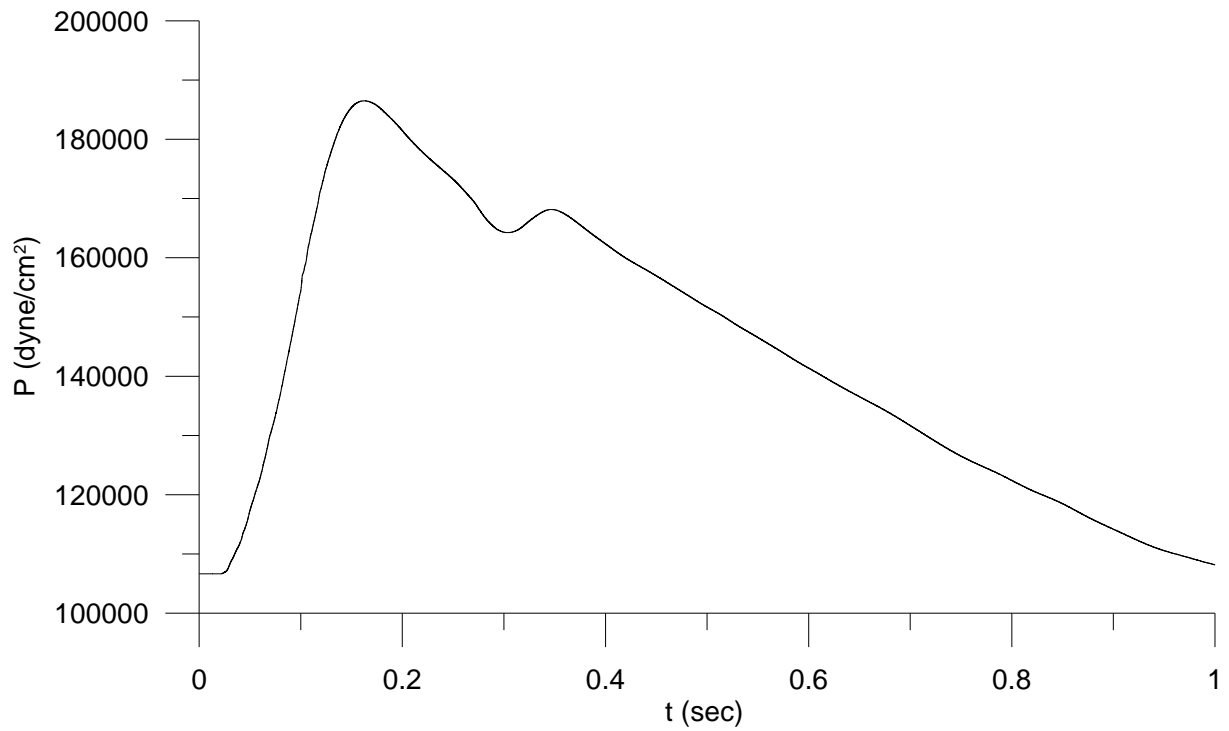


Σχήμα 4.33 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 5

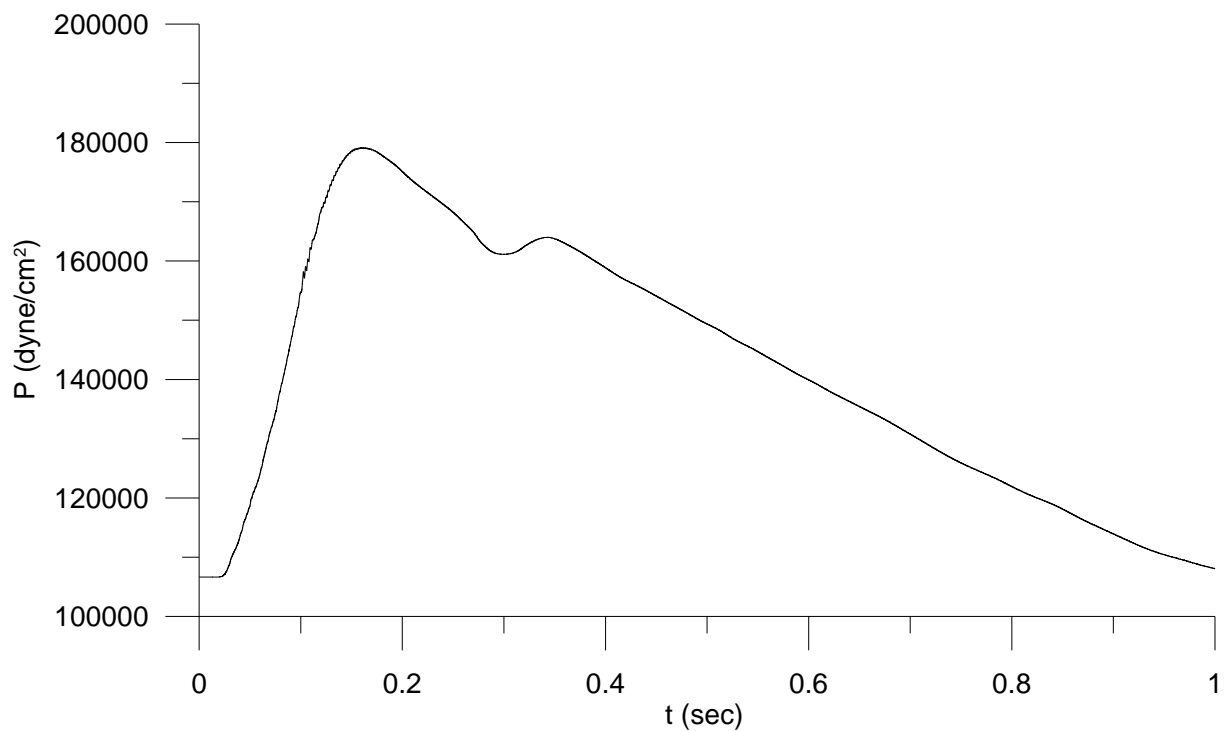


Σχήμα 4.34 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

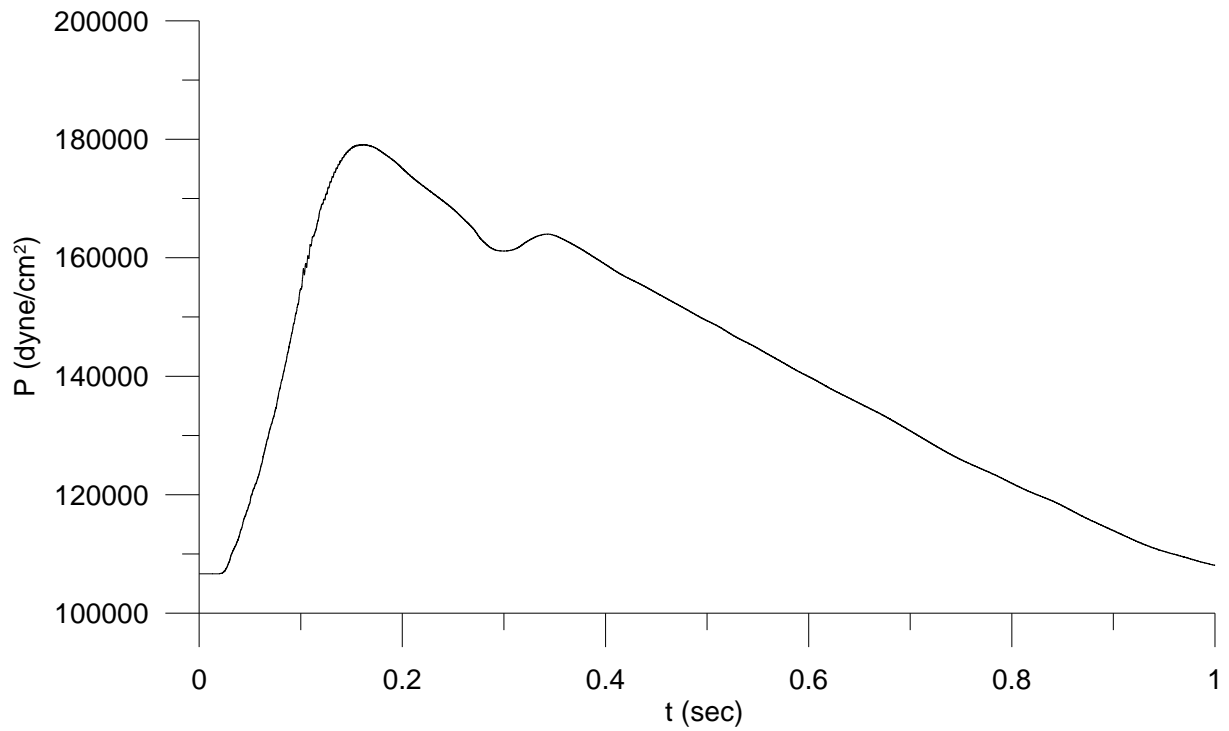


Σχήμα 4.35 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 7

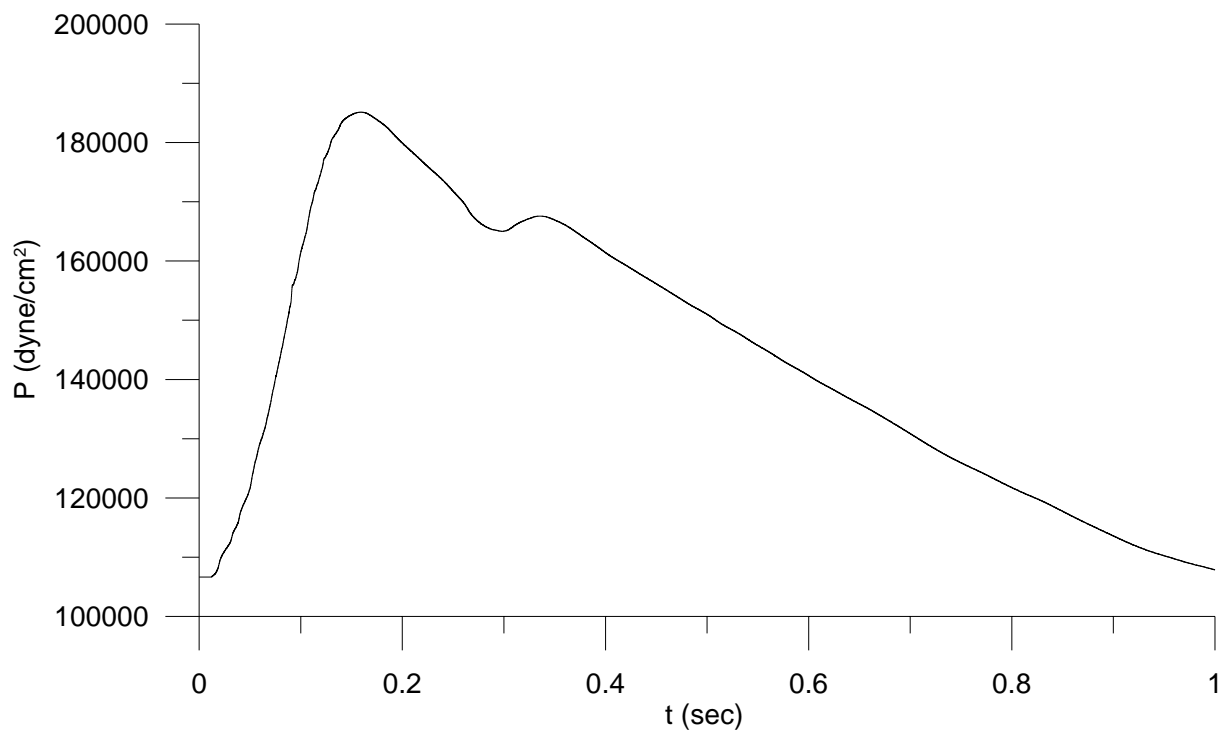


Σχήμα 4.36 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

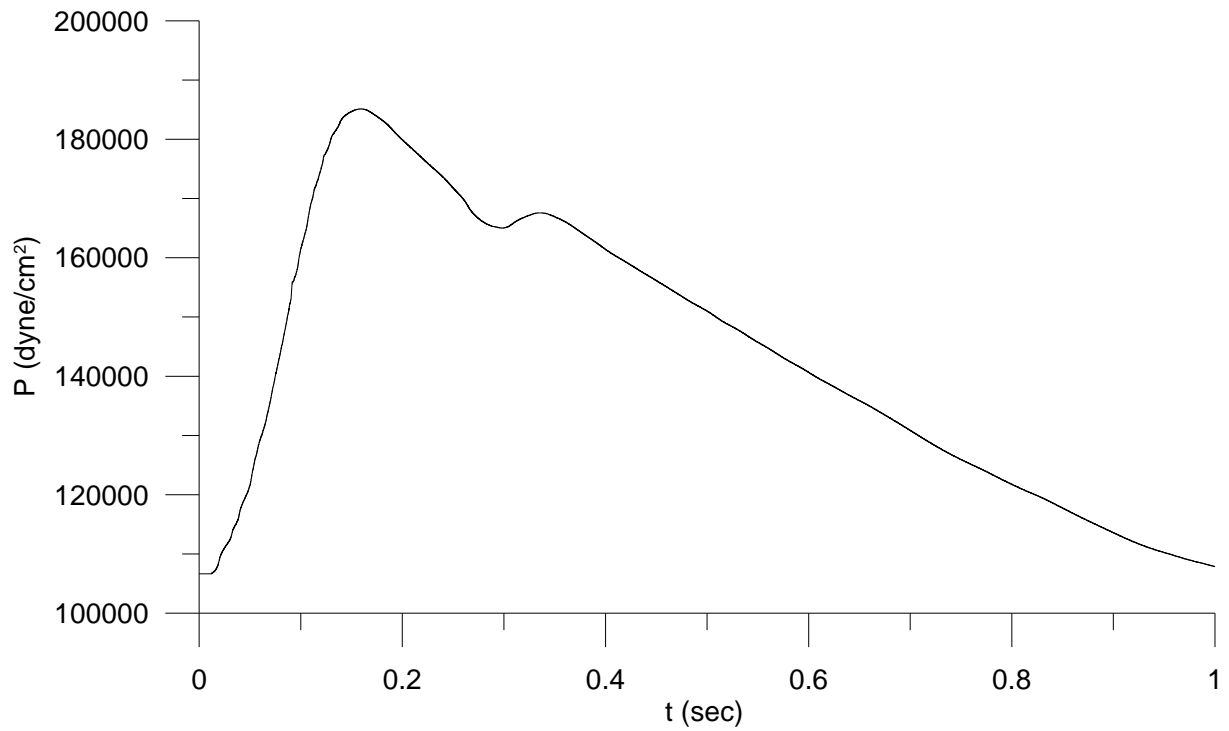


Σχήμα 4.37 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 9

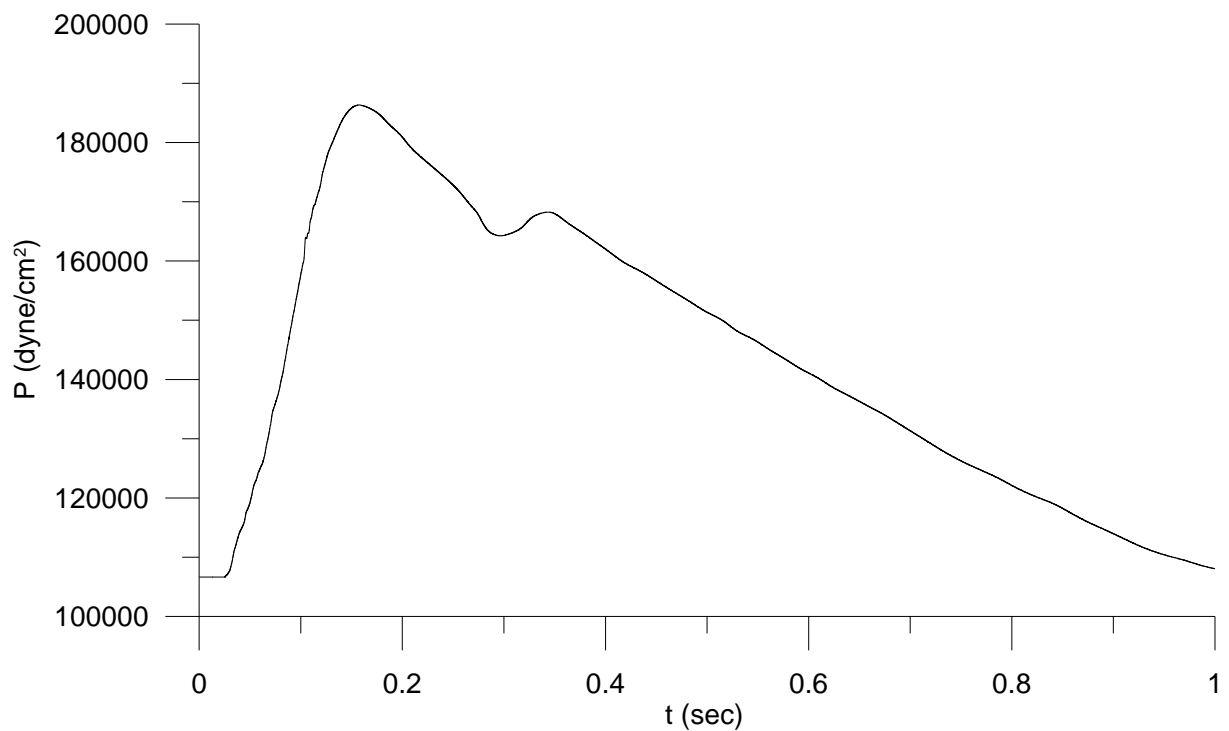


Σχήμα 4.38 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

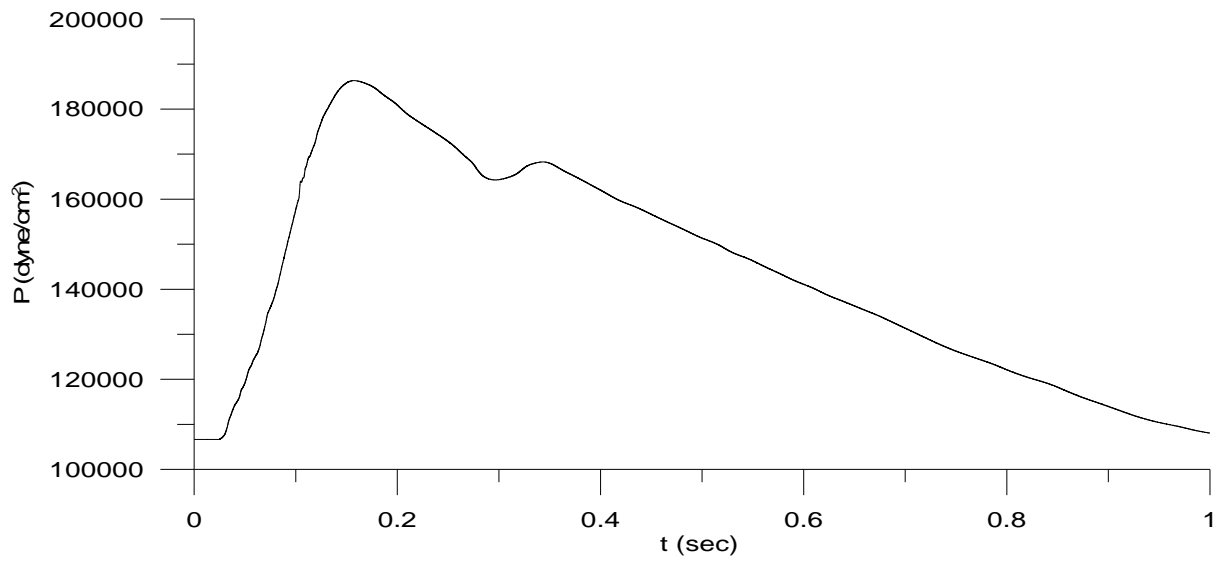


Σχήμα 4.39 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 11



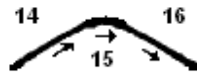
Σχήμα 4.40 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

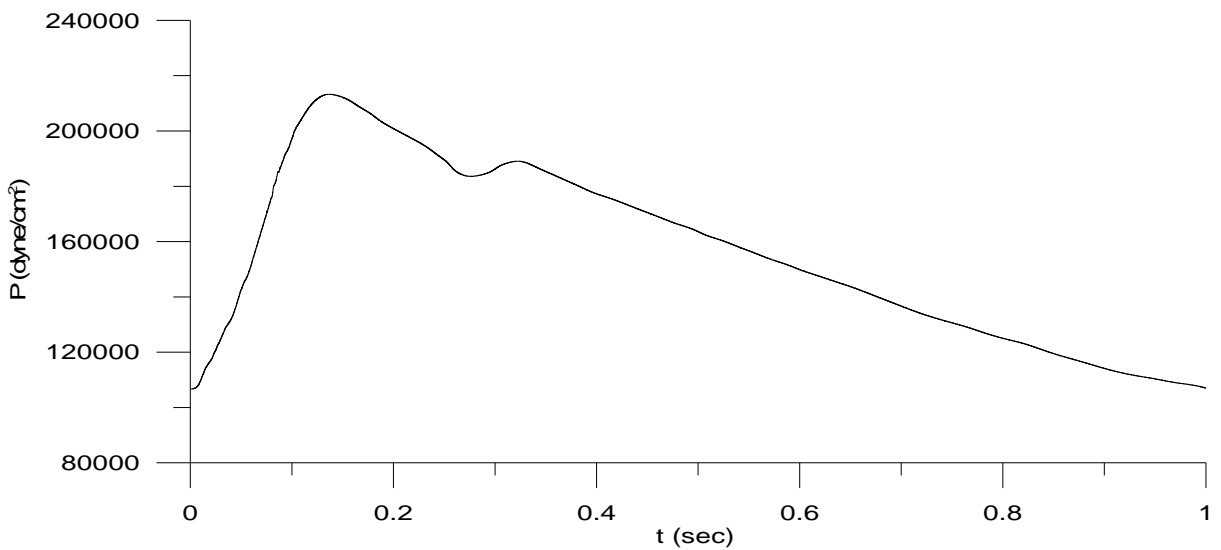


Σχήμα 4.41 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 13

4.4.5 Βήμα 4^ο

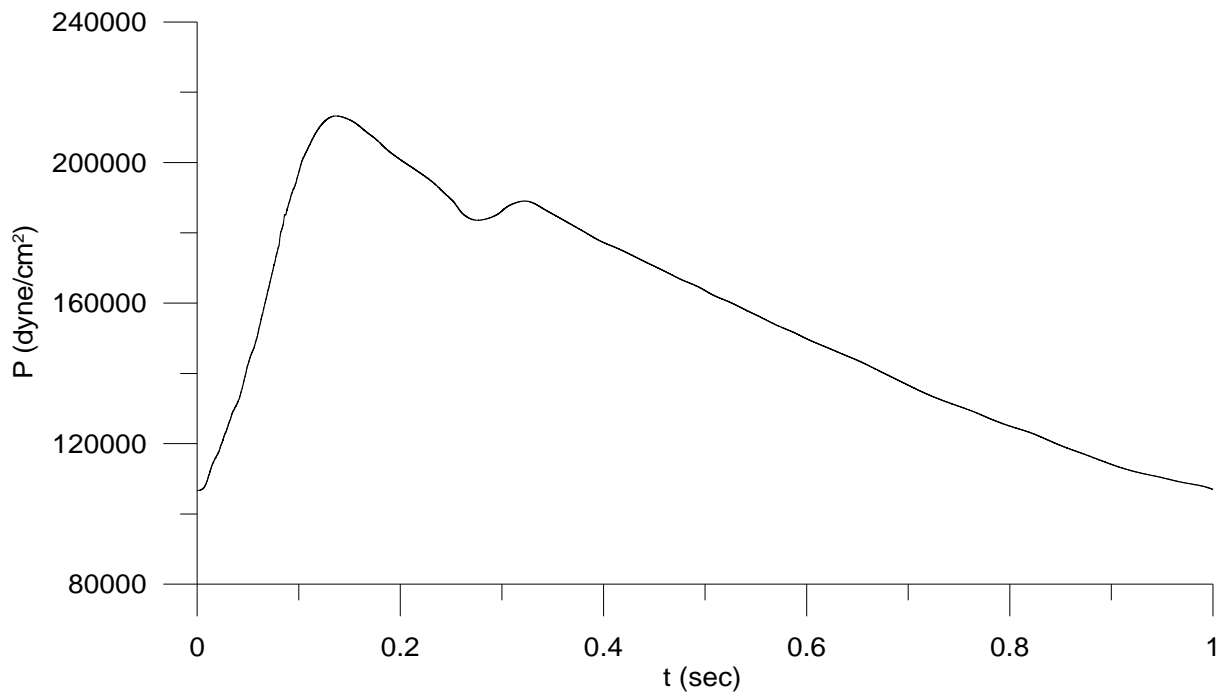


Σχήμα 4.42 Τμήμα του κύκλου του Willis

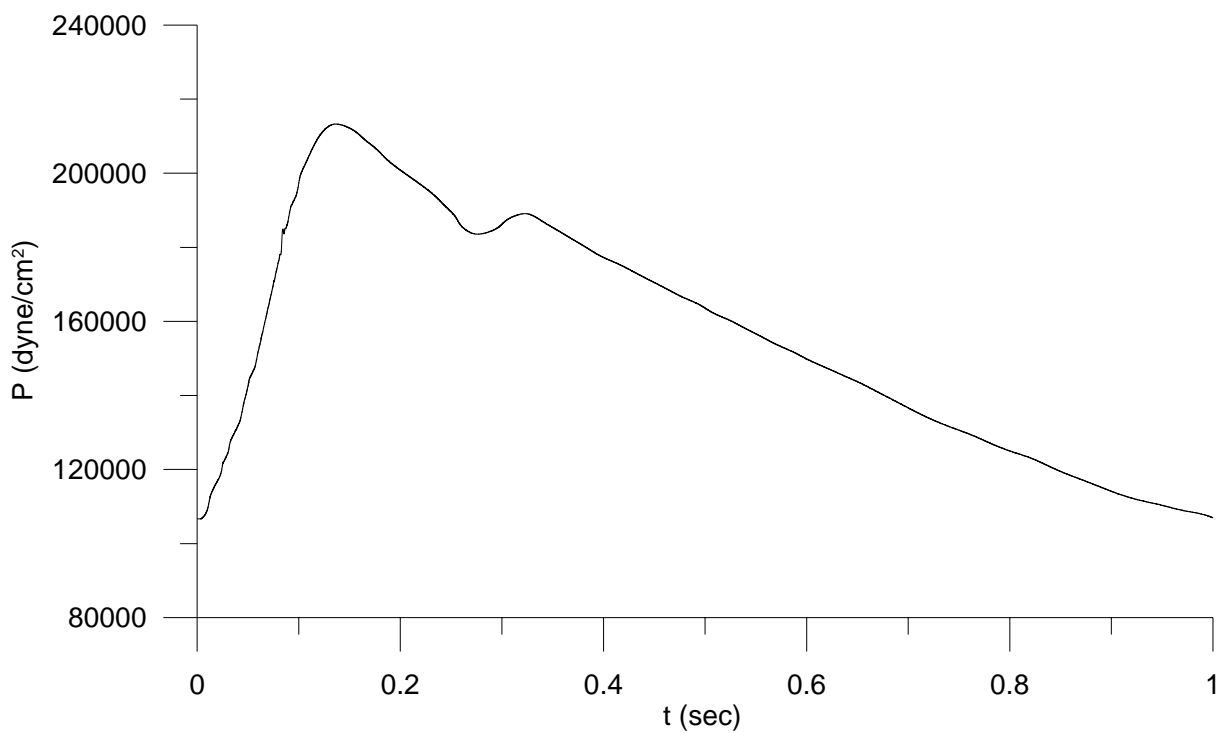


Σχήμα 4.43 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

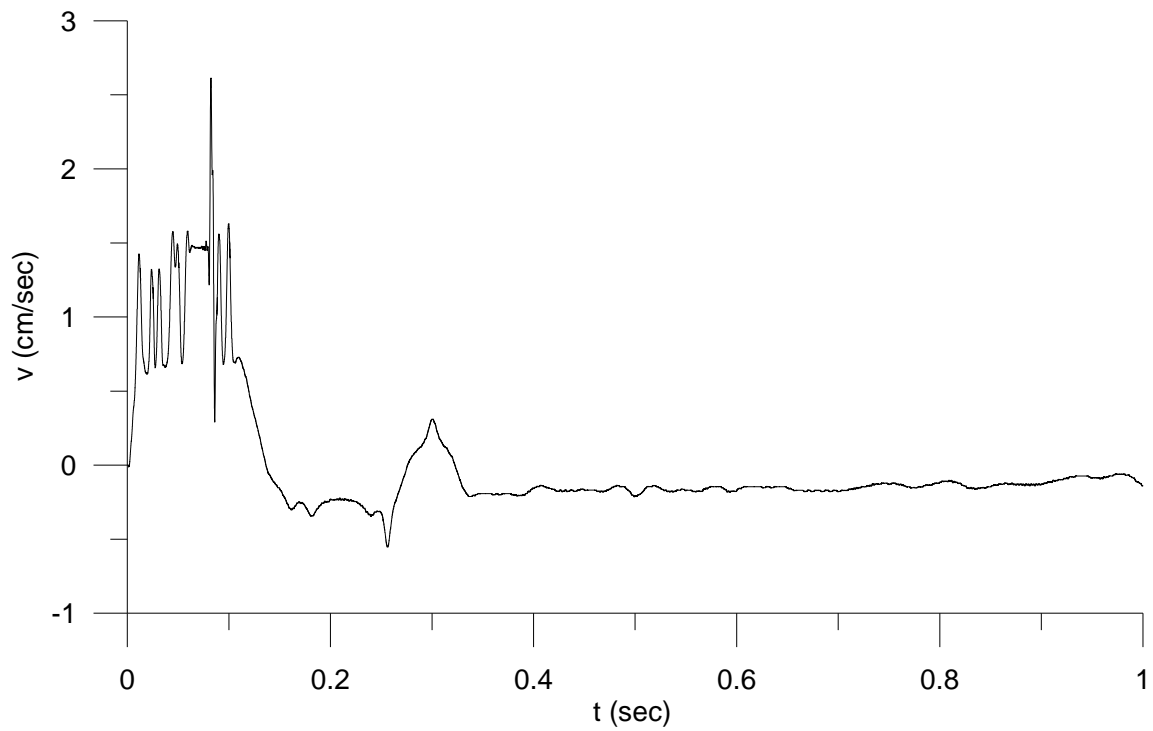


Σχήμα 4.44 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

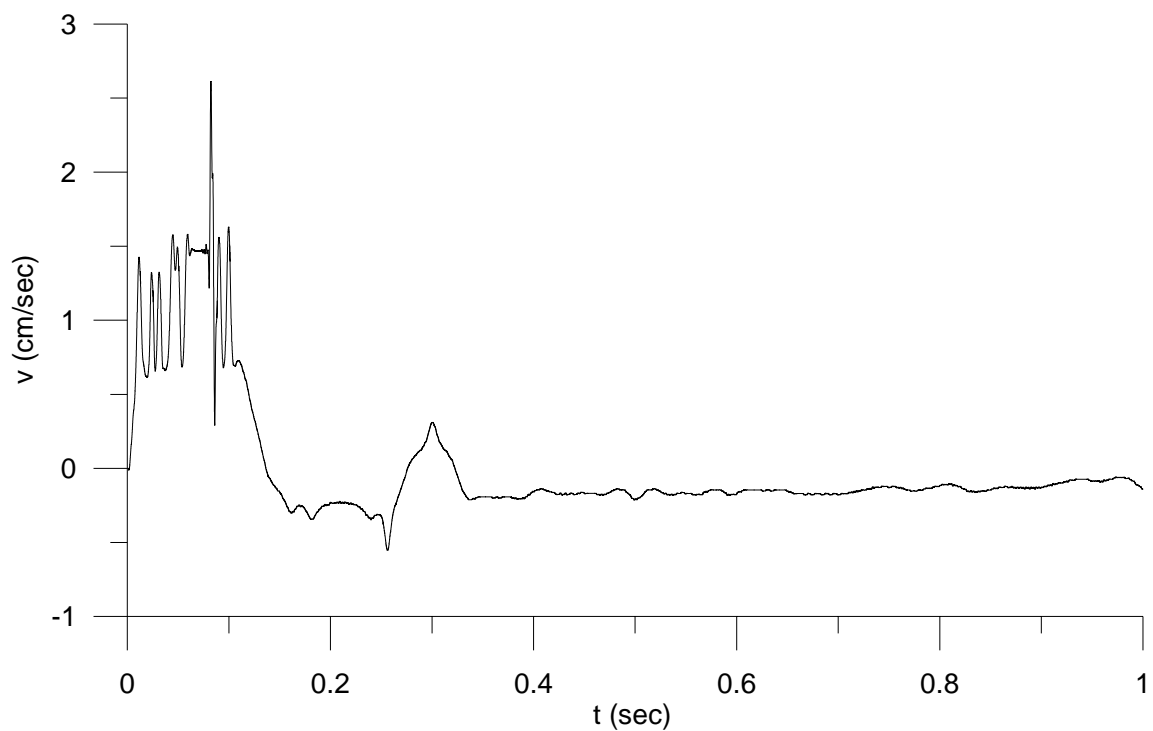


Σχήμα 4.45 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

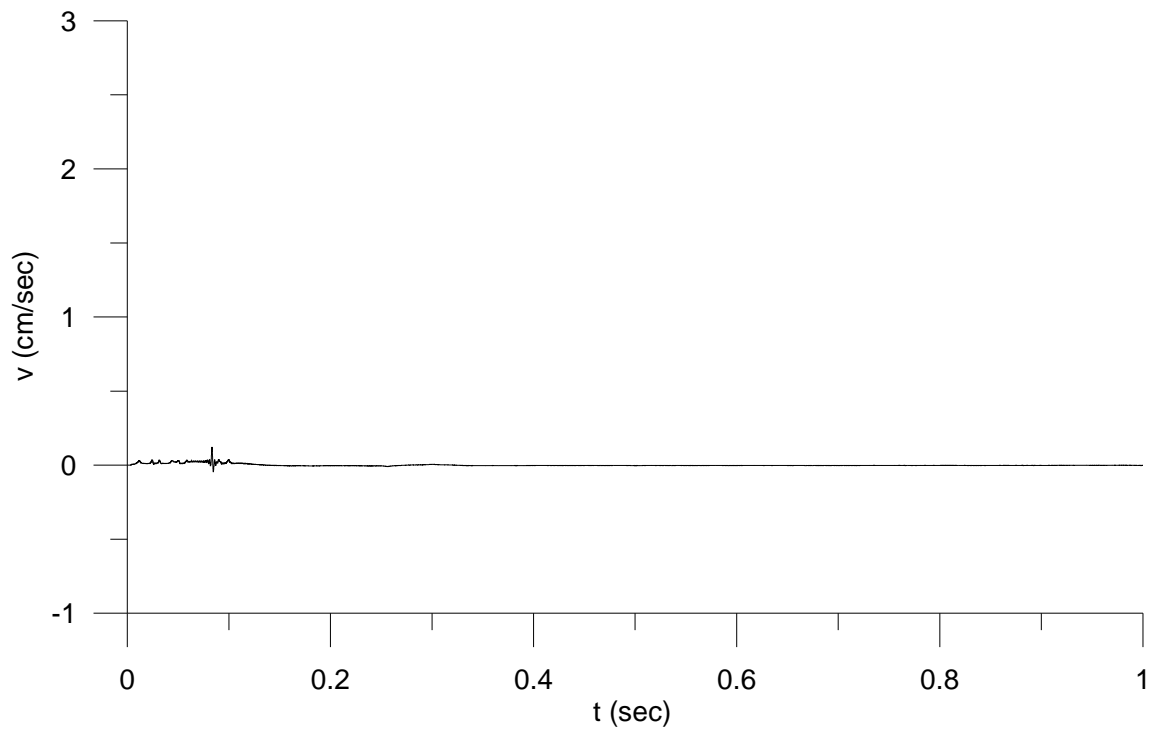


Σχήμα 4.46 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 1



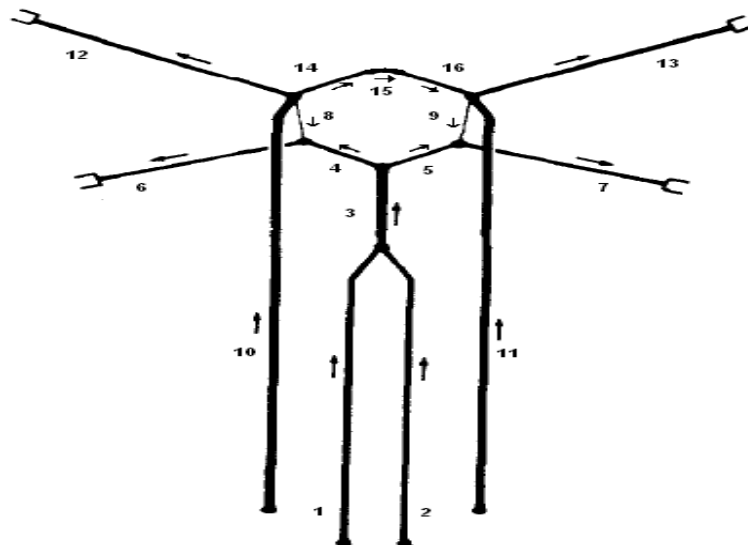
Σχήμα 4.47 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



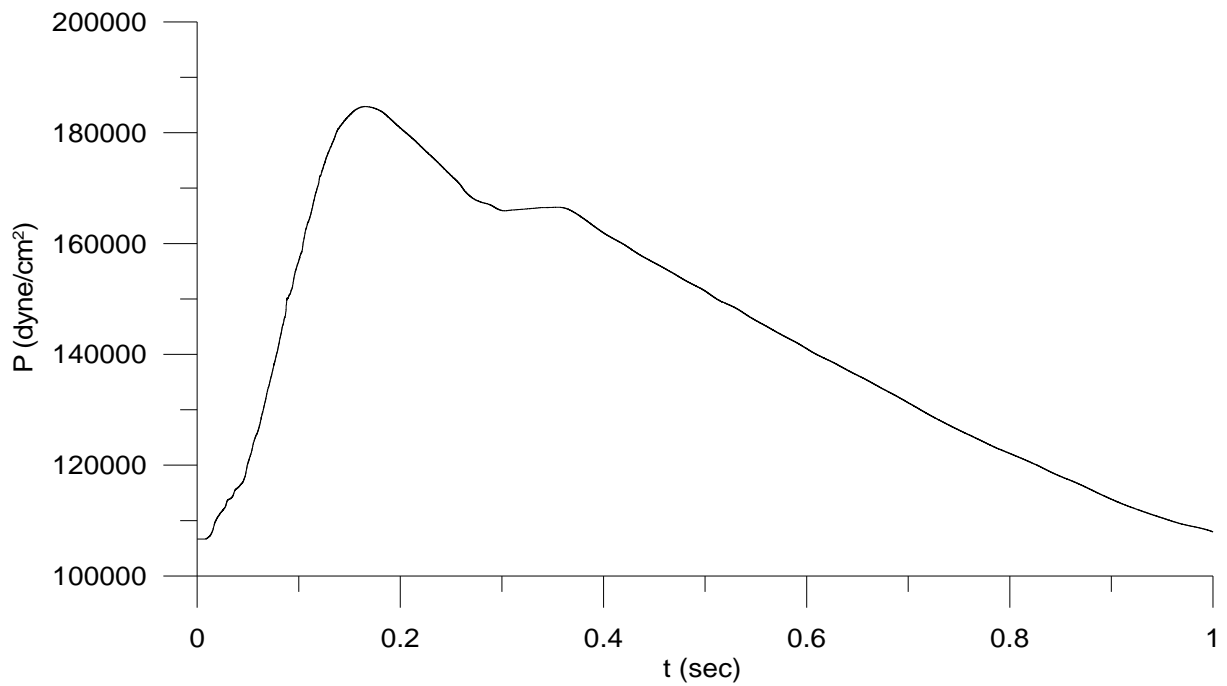
Σχήμα 4.48 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 3

4.4.6 Βήμα 5^ο

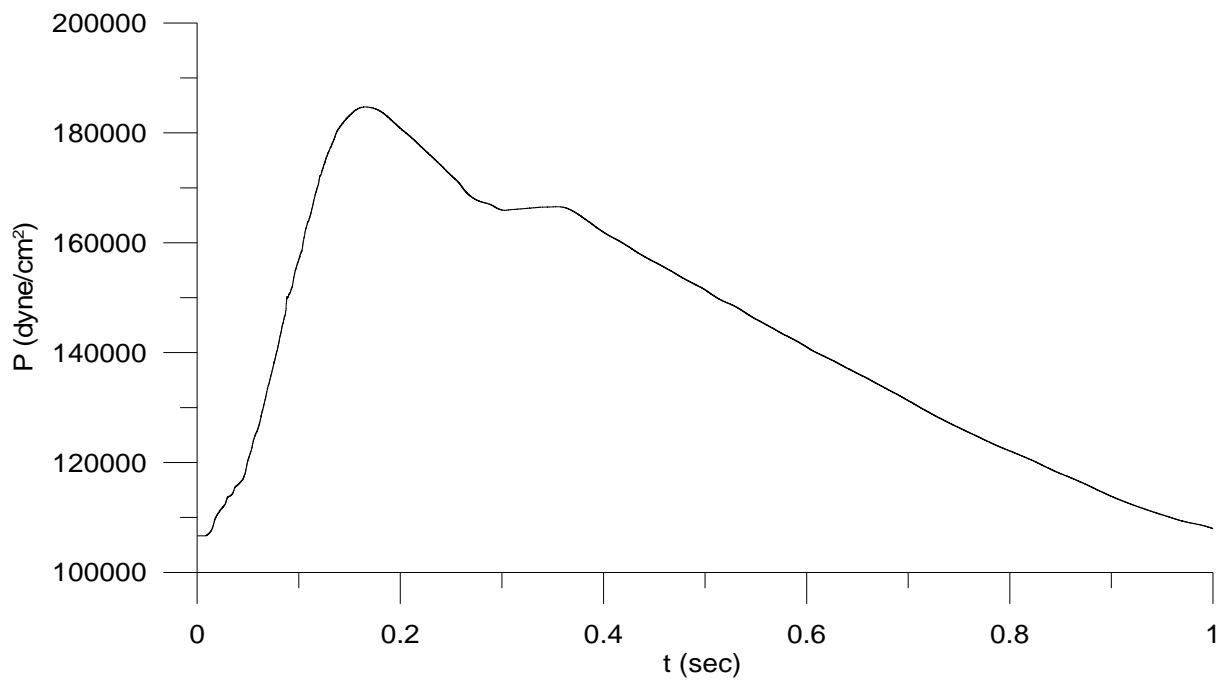


Σχήμα 4.49 Τμήμα του κύκλου του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

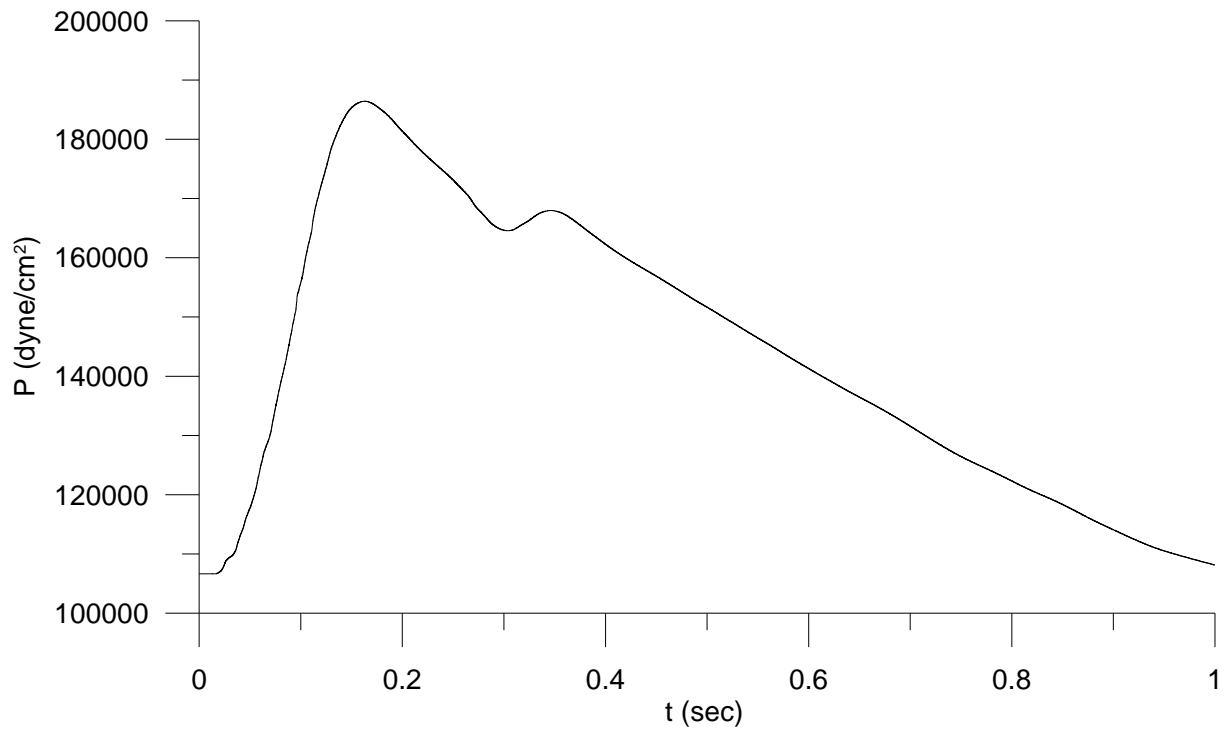


Σχήμα 4.50 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1

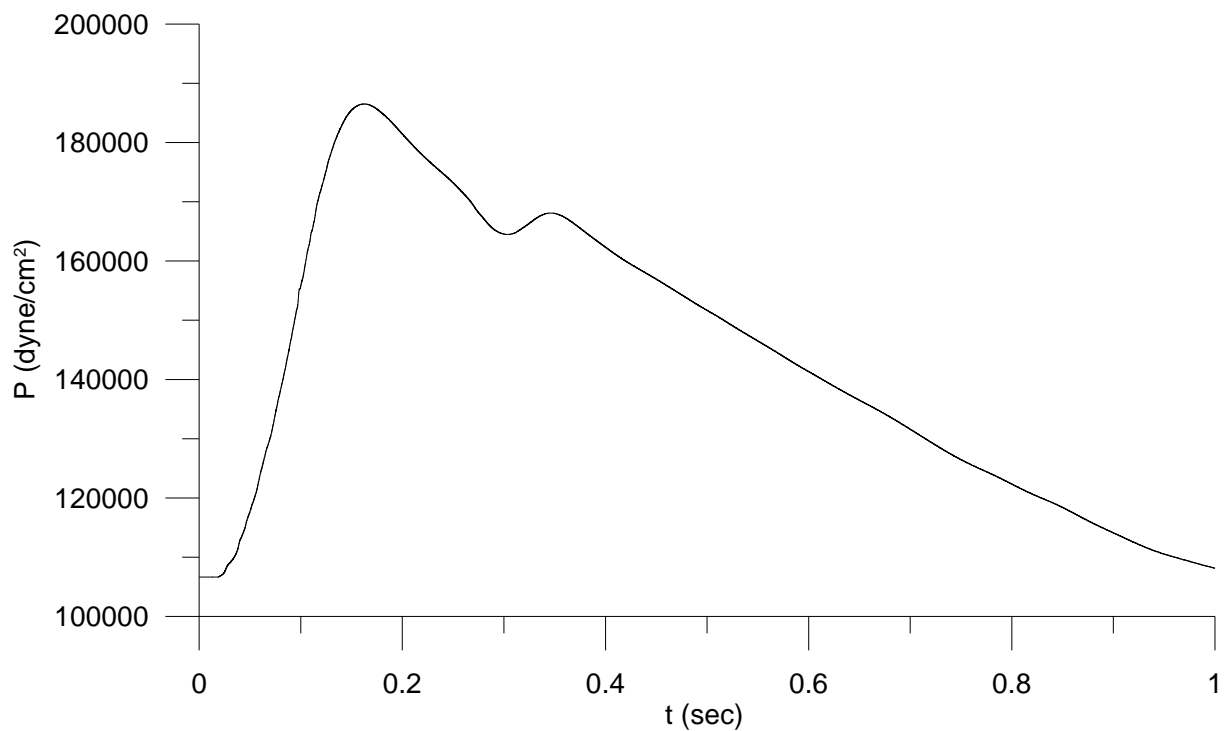


Σχήμα 4.51 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

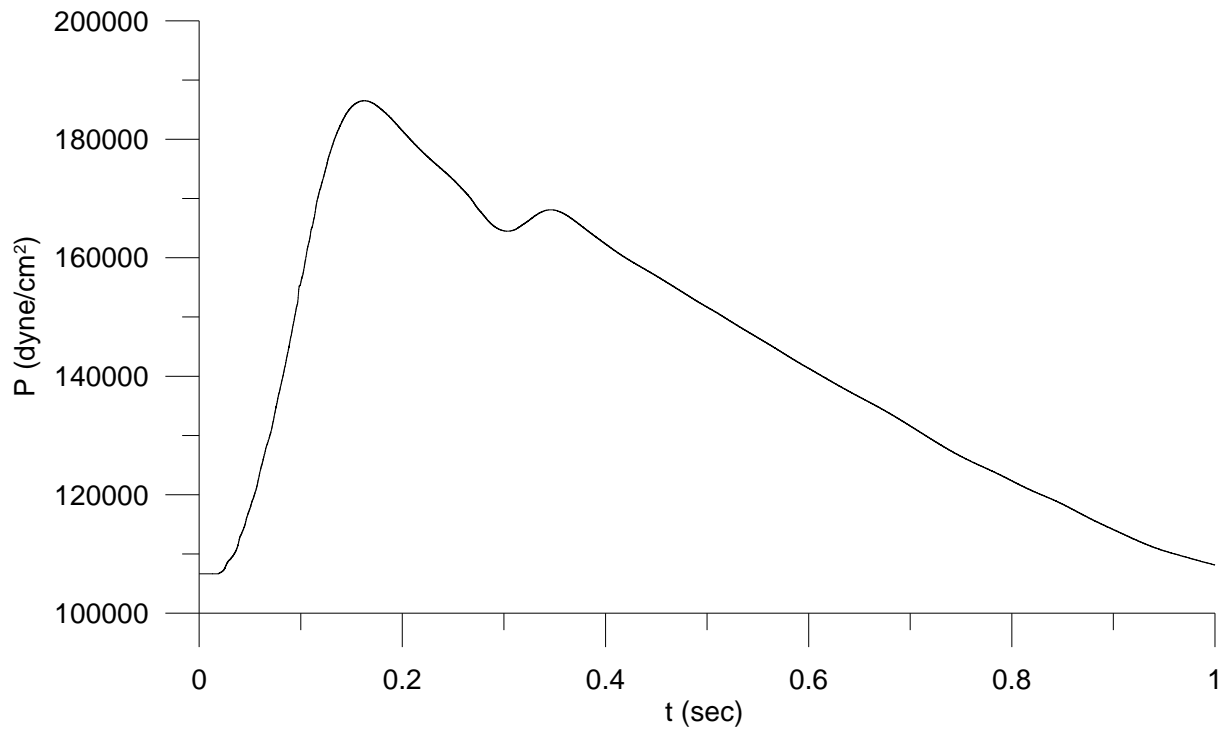


Σχήμα 4.52 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

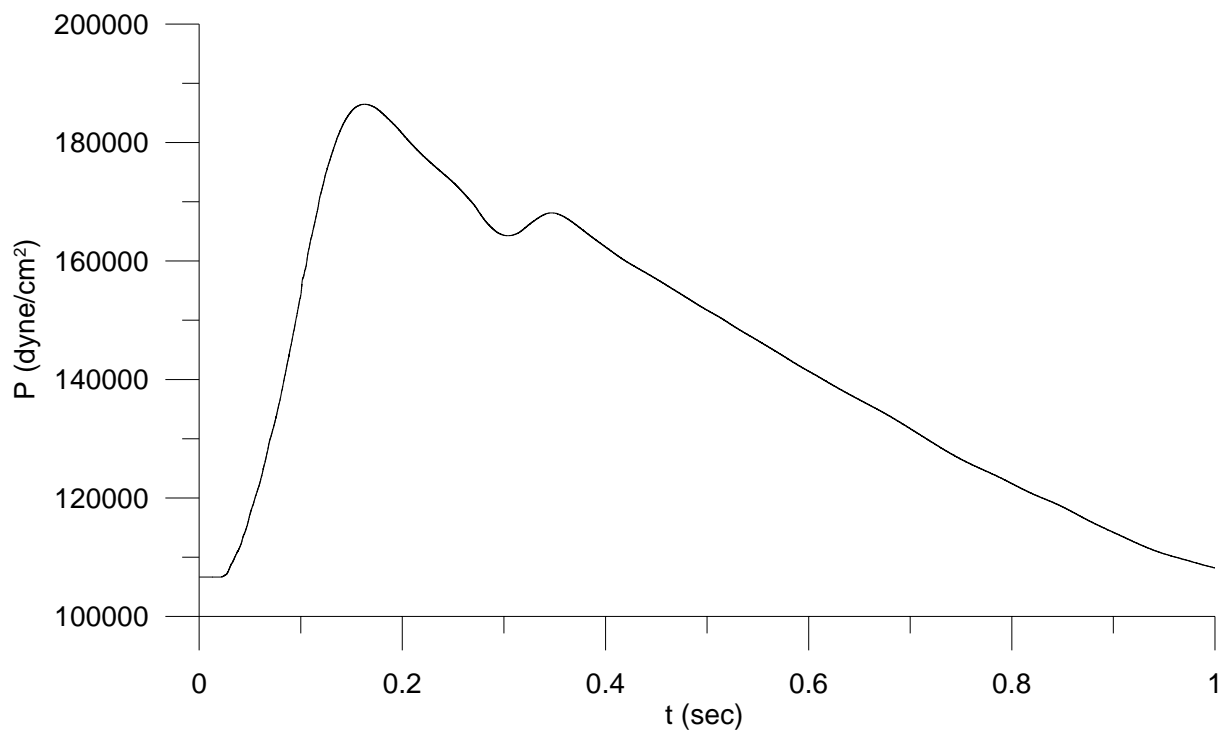


Σχήμα 4.53 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

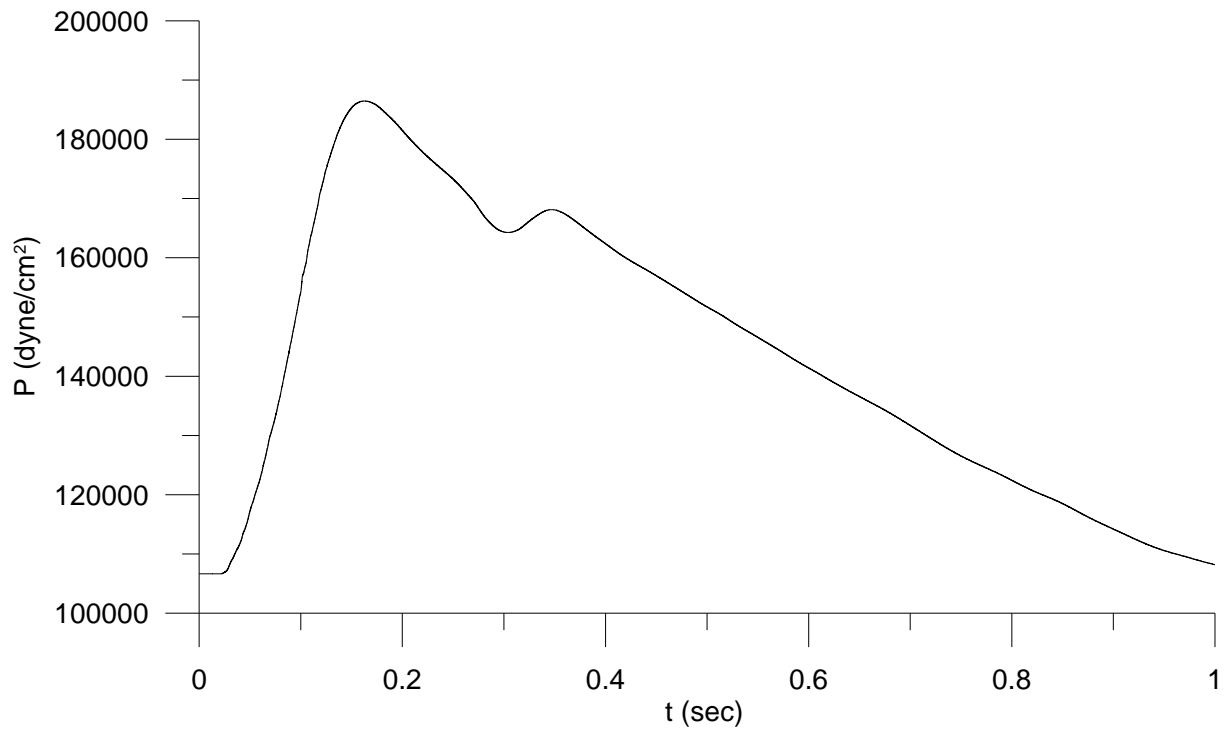


Σχήμα 4.54 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 5

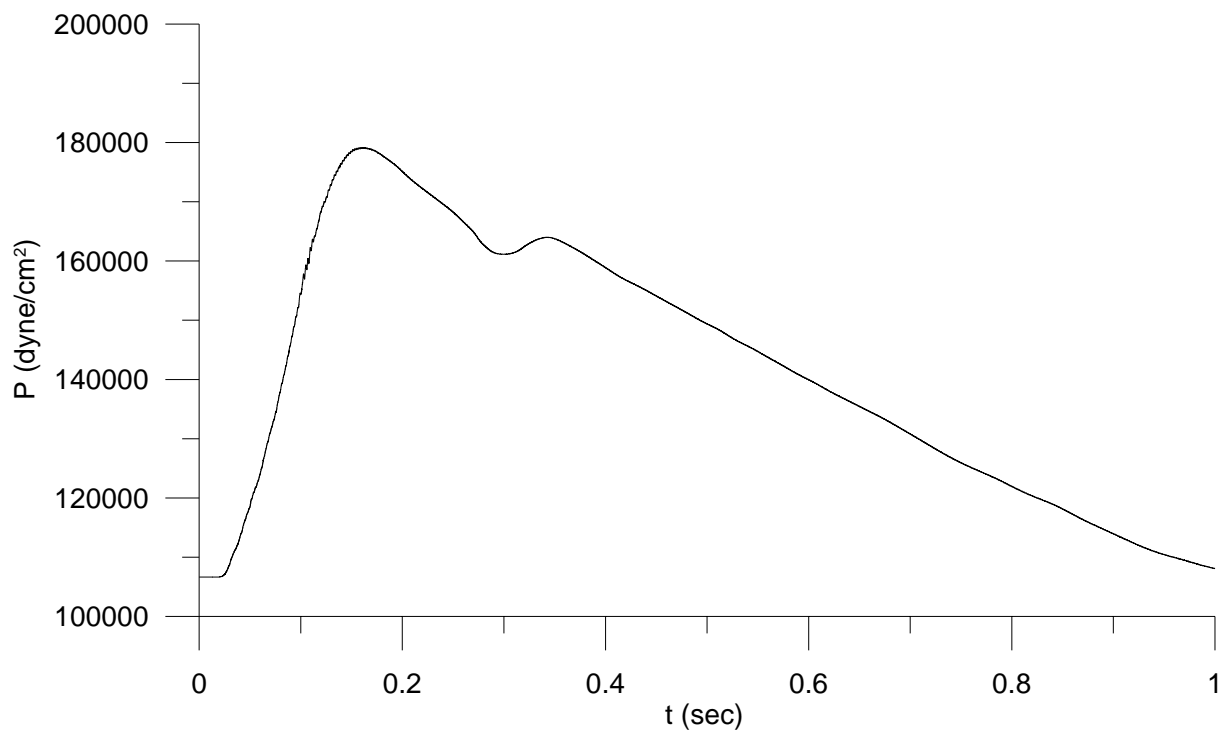


Σχήμα 4.55 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

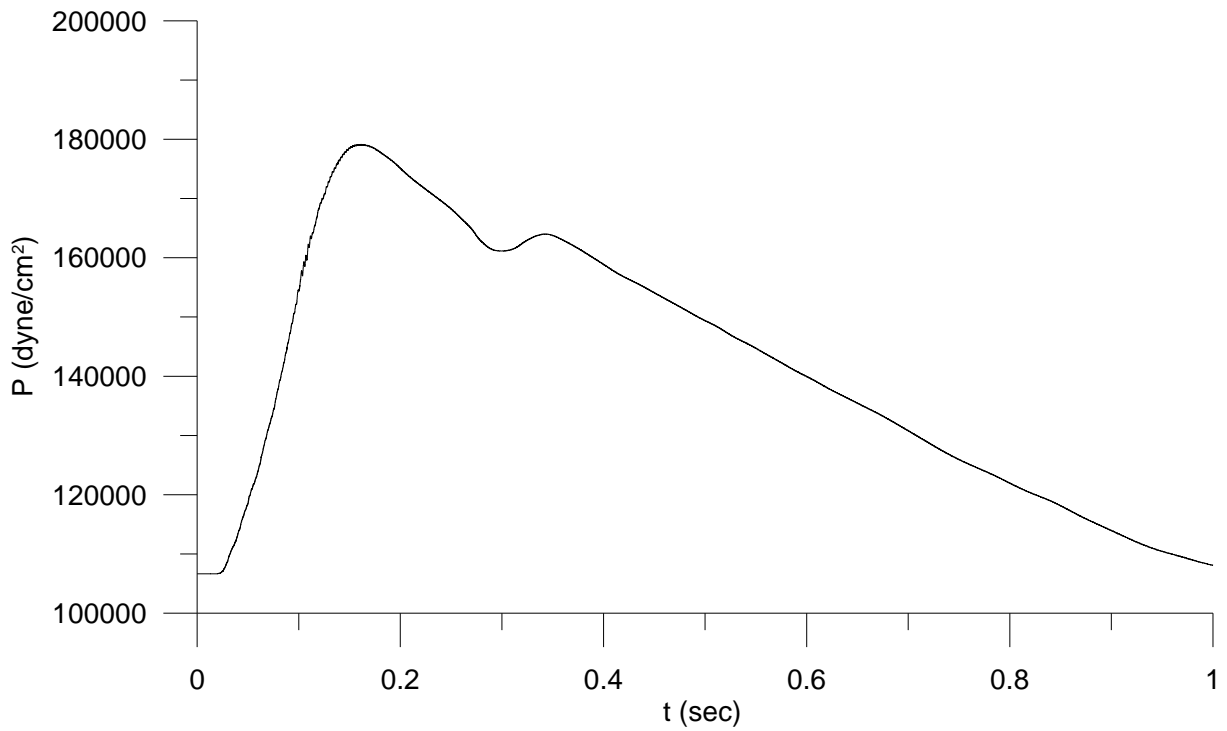


Σχήμα 4.56 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 7

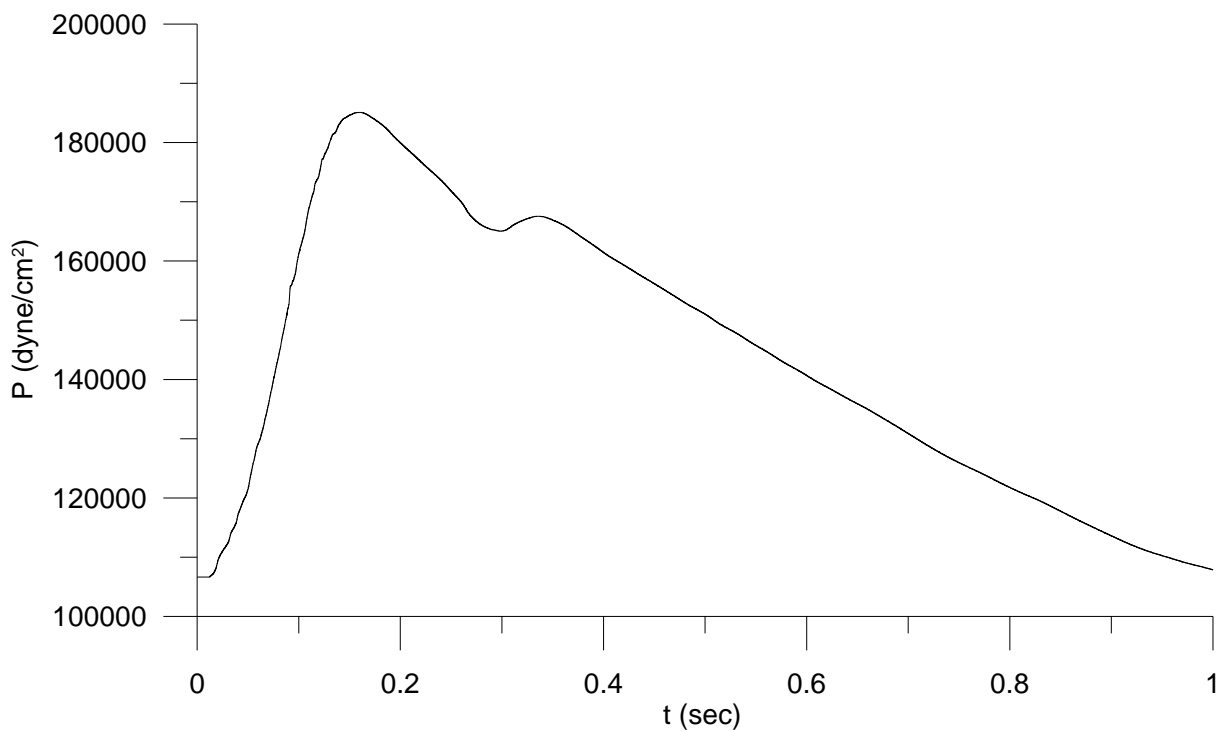


Σχήμα 4.57 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

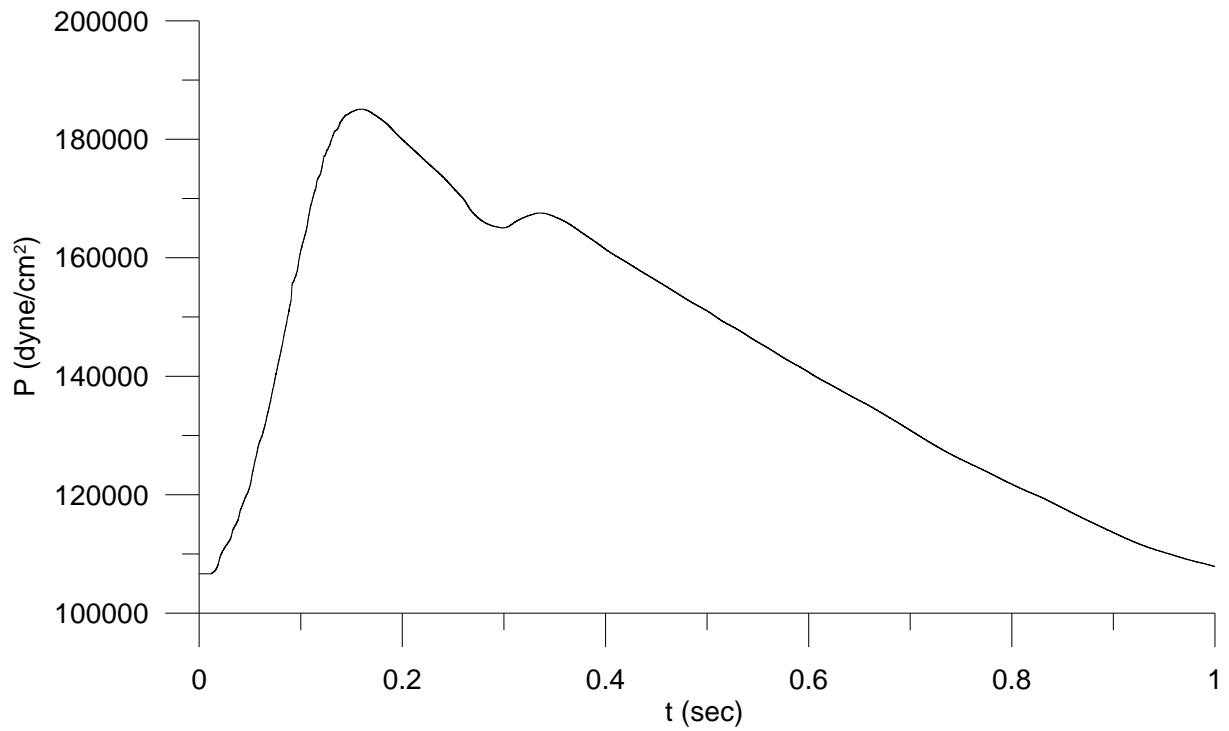


Σχήμα 4.58 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 9

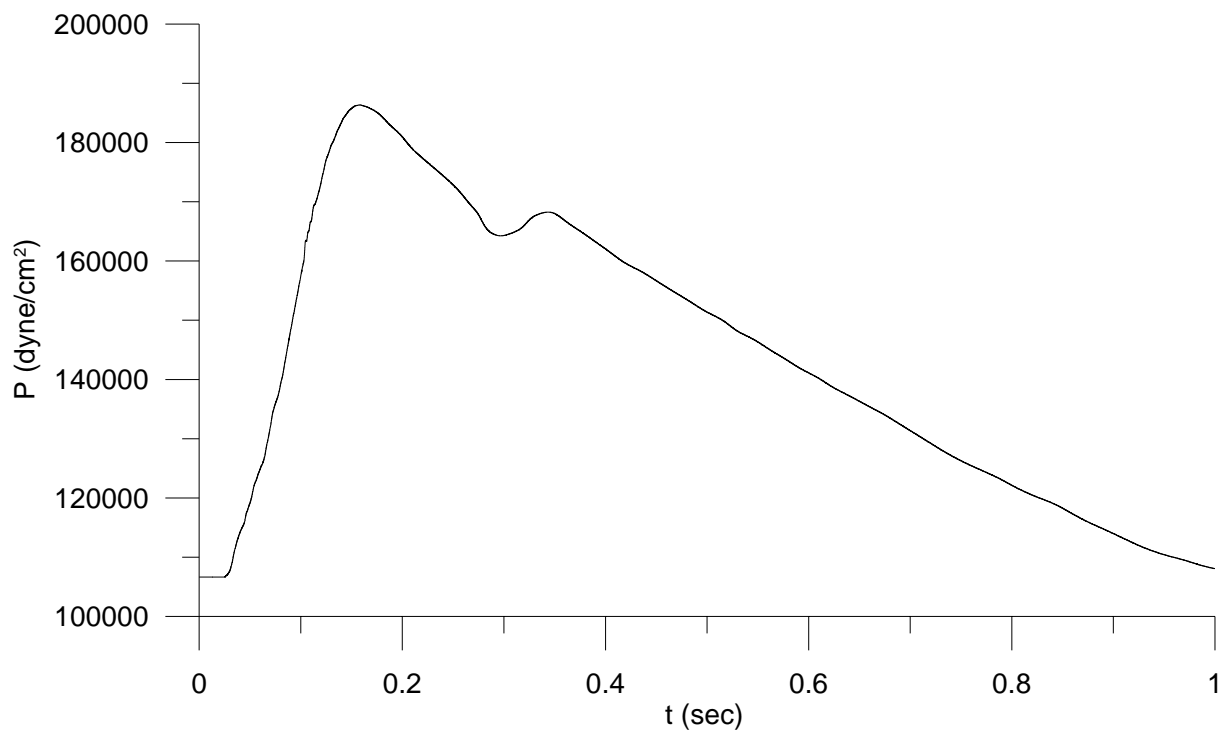


Σχήμα 4.59 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

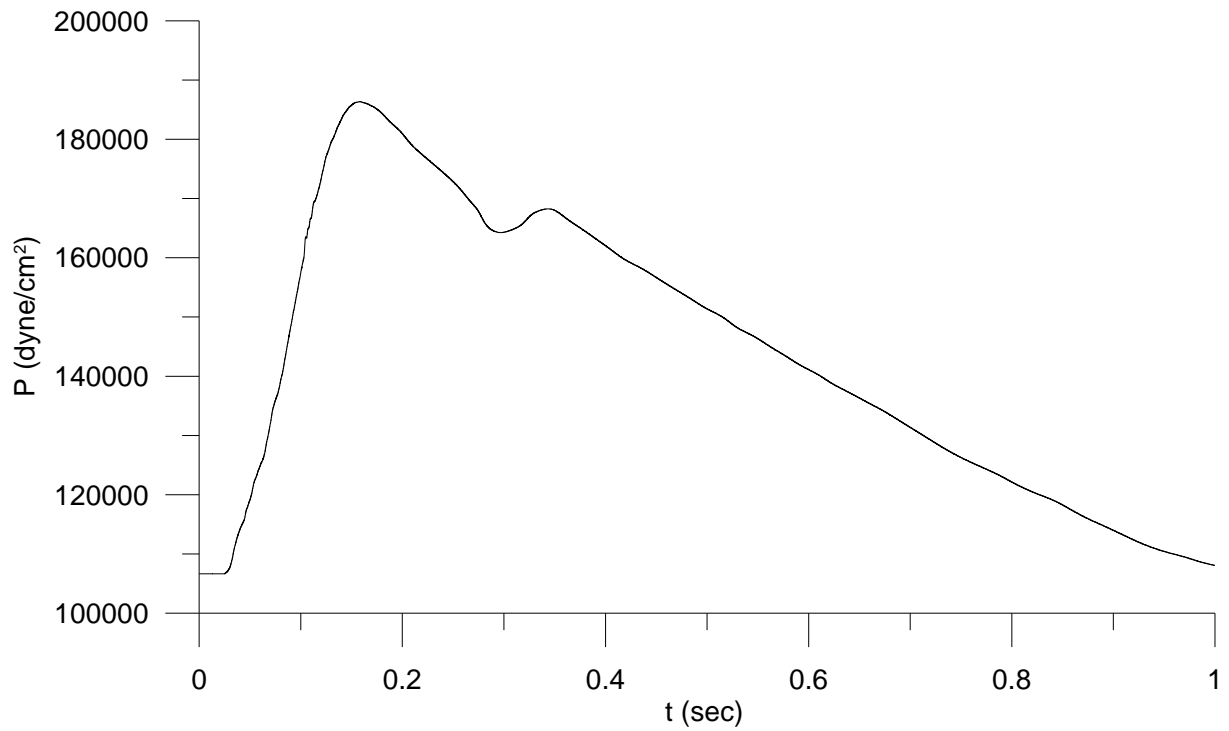


Σχήμα 4.60 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 11

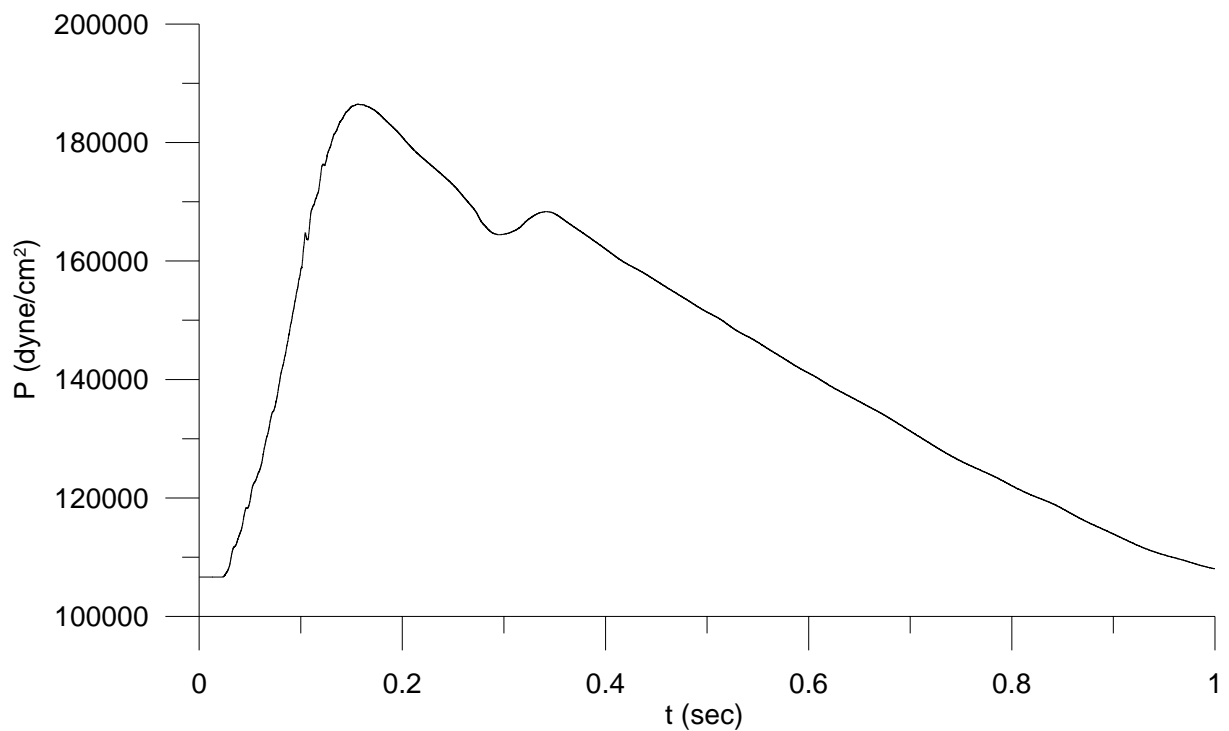


Σχήμα 4.61 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

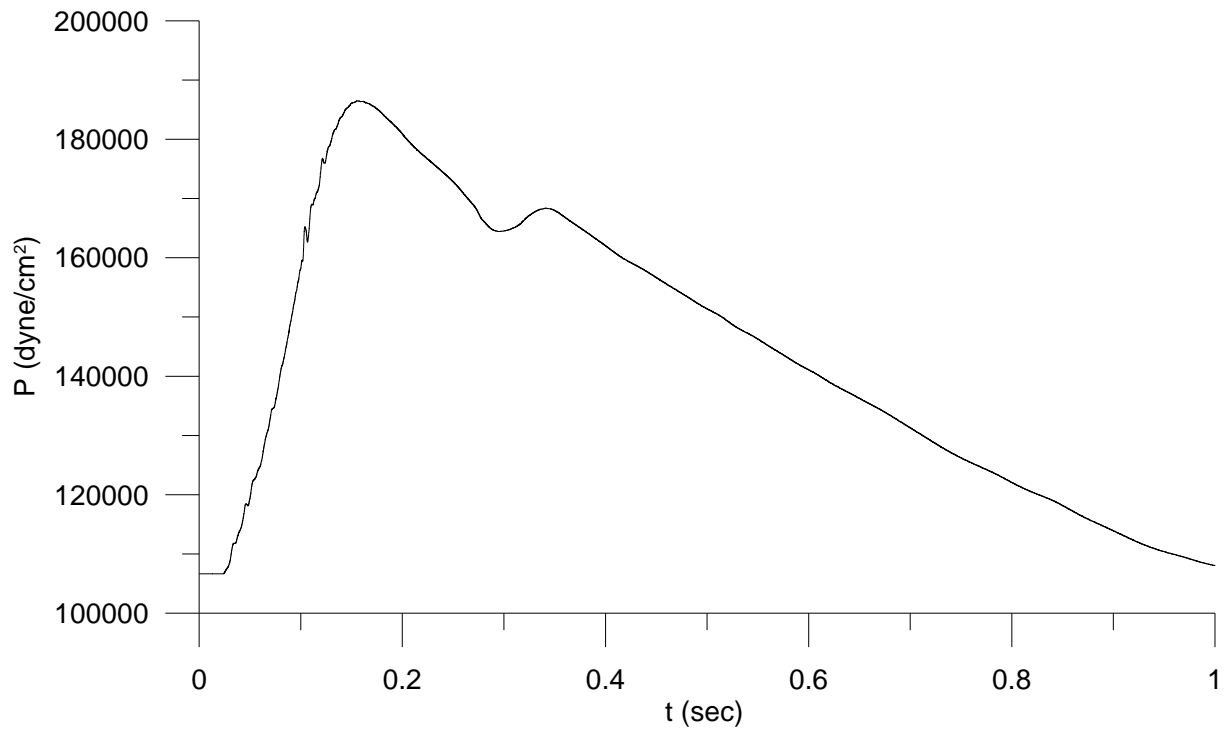


Σχήμα 4.62 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 13

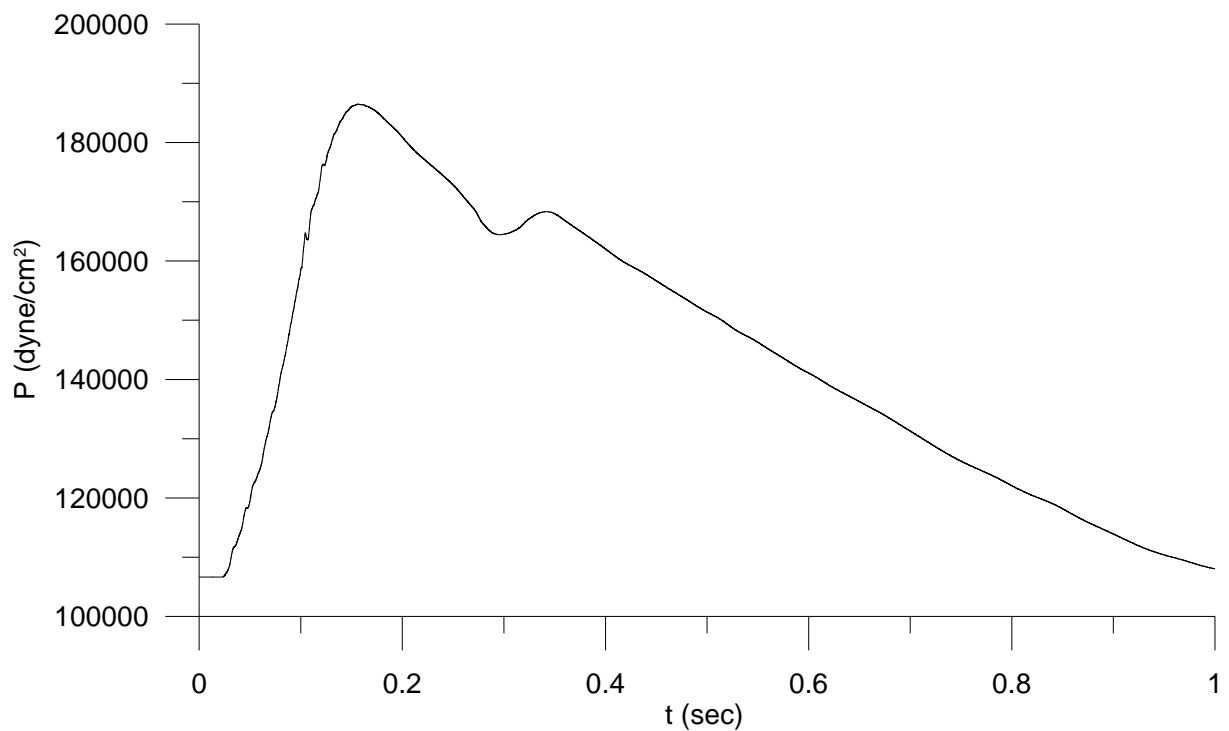


Σχήμα 4.63 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 14

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



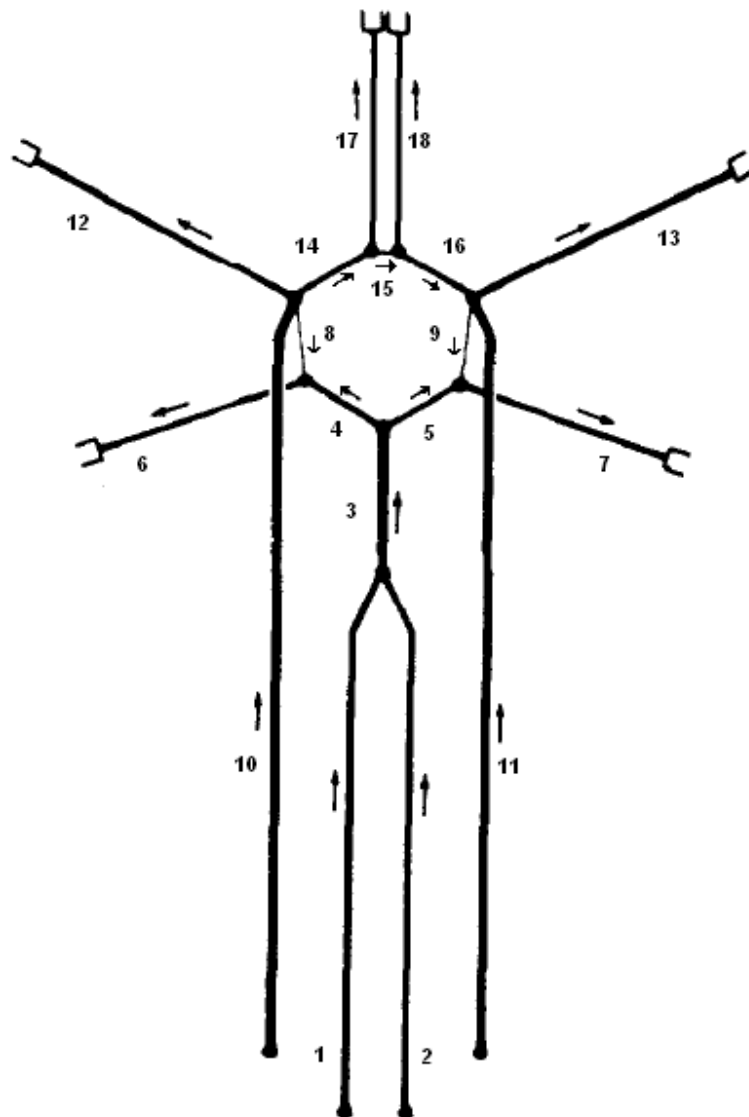
Σχήμα 4.64 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 15



Σχήμα 4.65 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 16

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

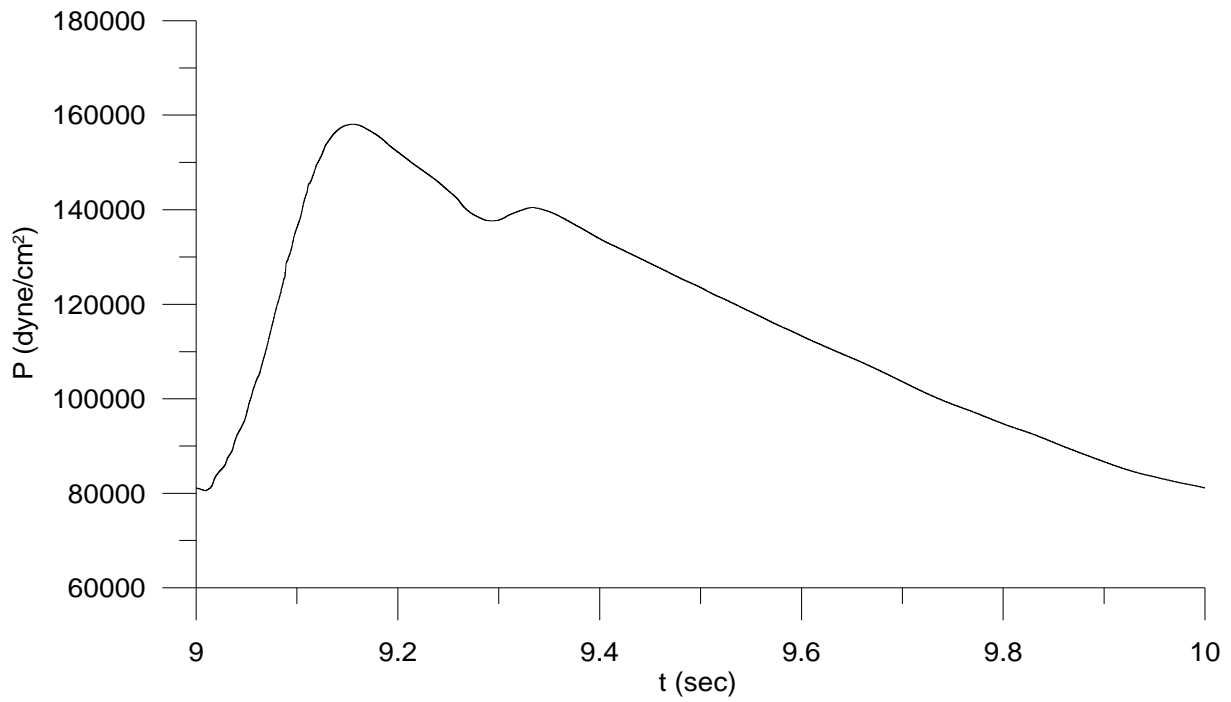
4.4.7 Βήμα 6^ο (κύκλος του Willis)



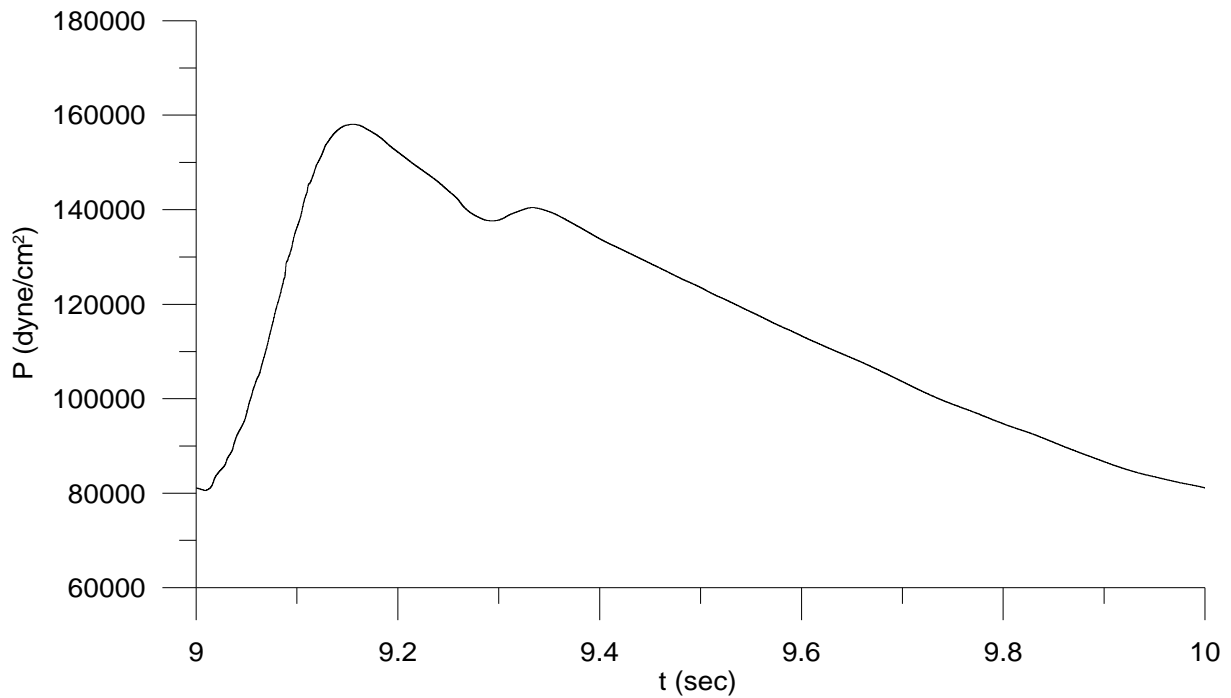
Σχήμα 4.66 Κύκλος του Willis

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.7.1 Διαγράμματα πίεσης

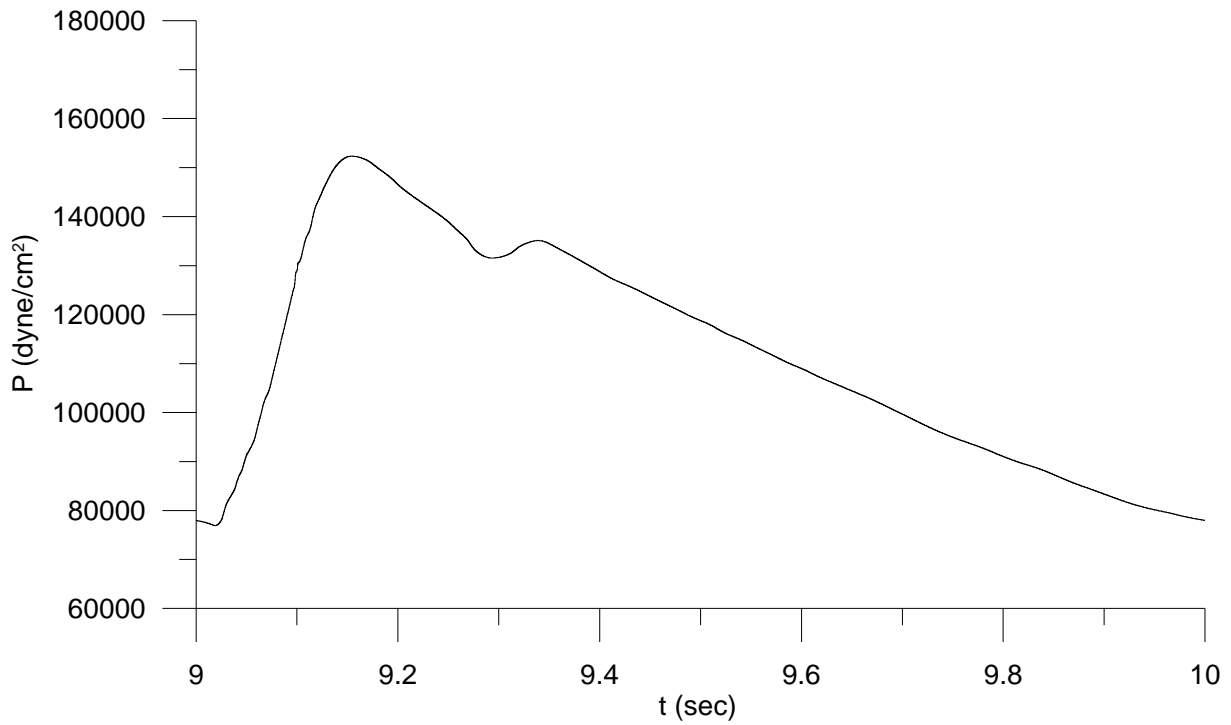


Σχήμα 4.67 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 1

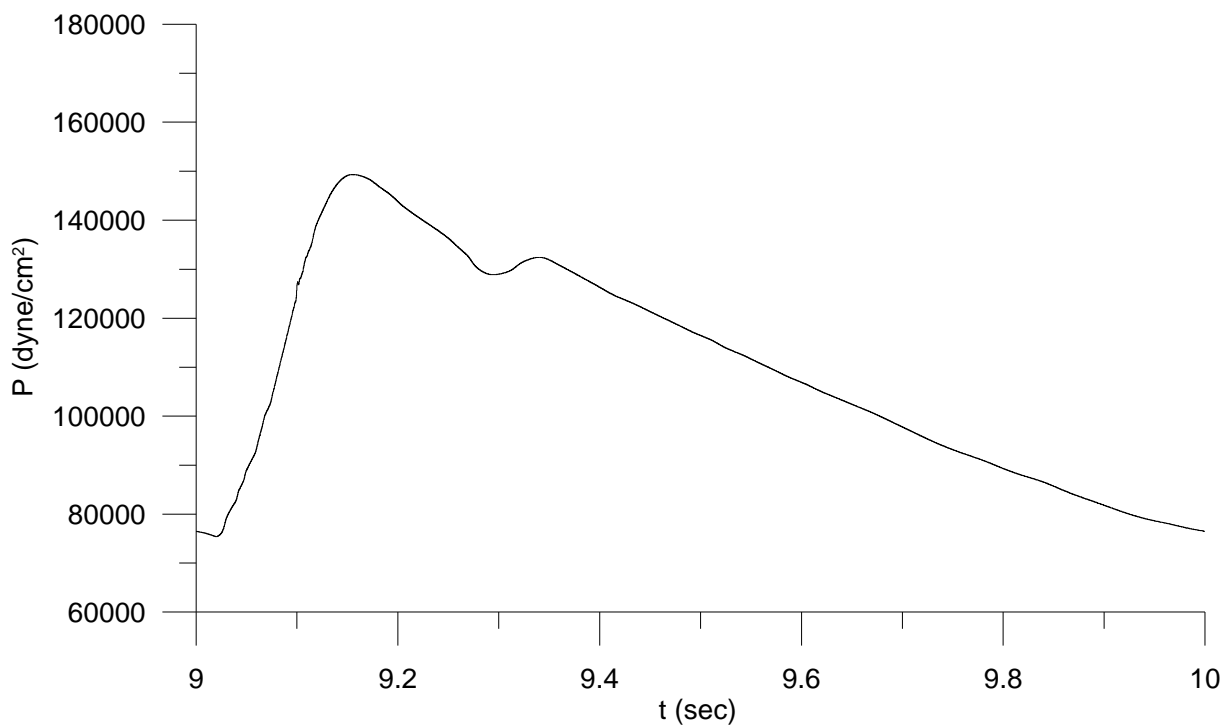


Σχήμα 4.68 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

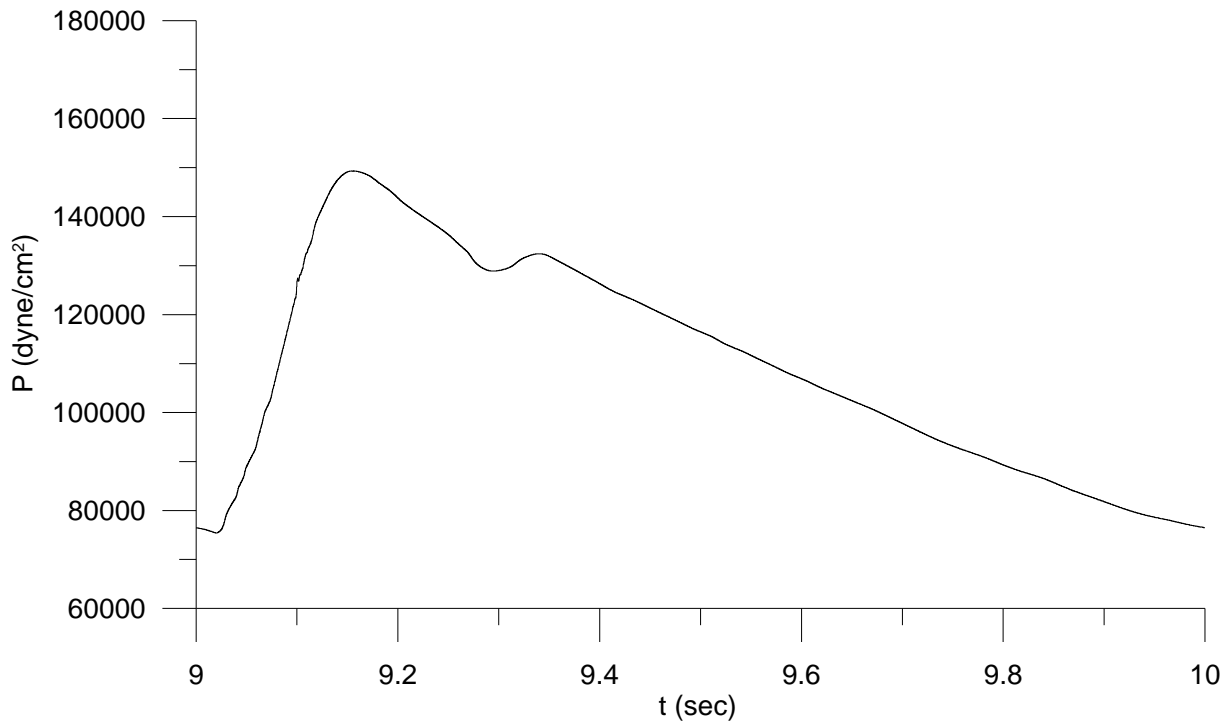


Σχήμα 4.69 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 3

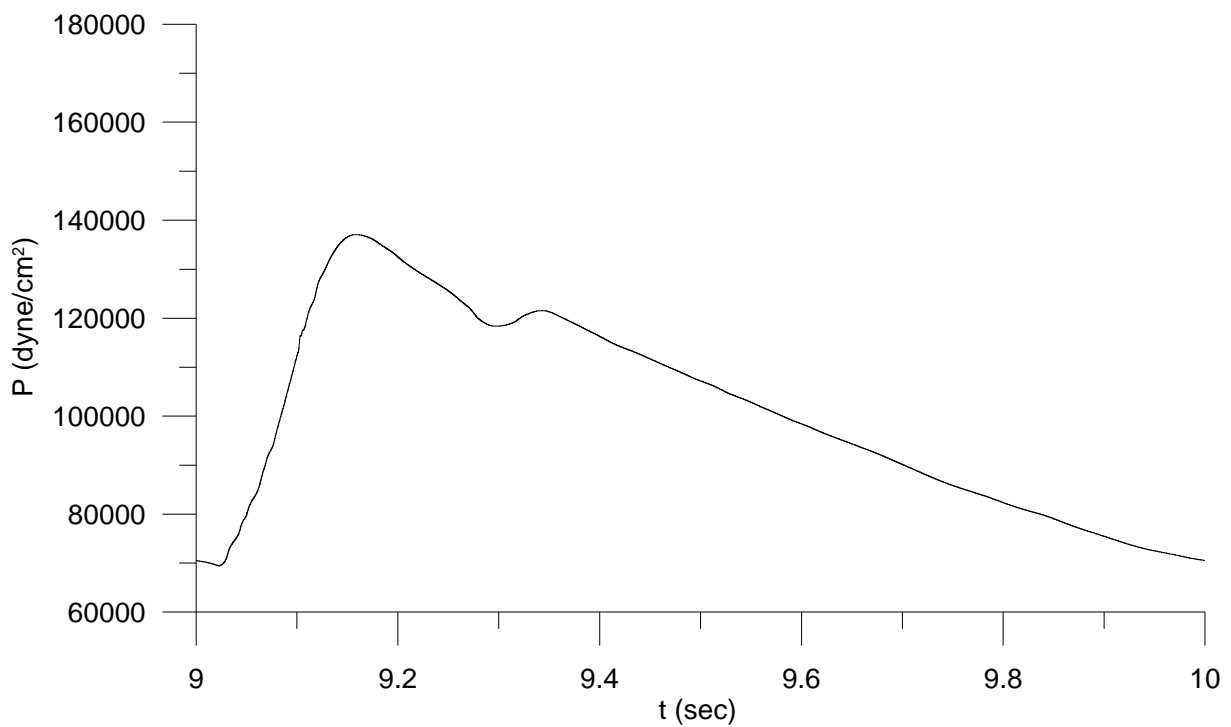


Σχήμα 4.70 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

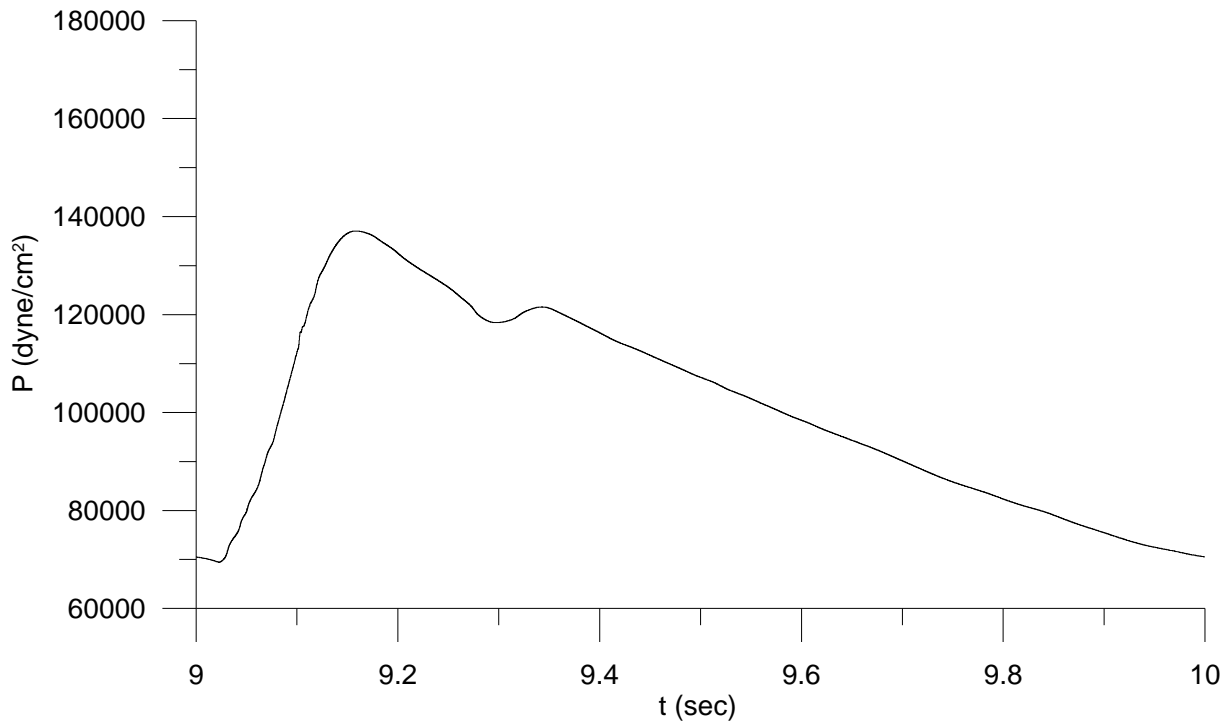


Σχήμα 4.71 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 5

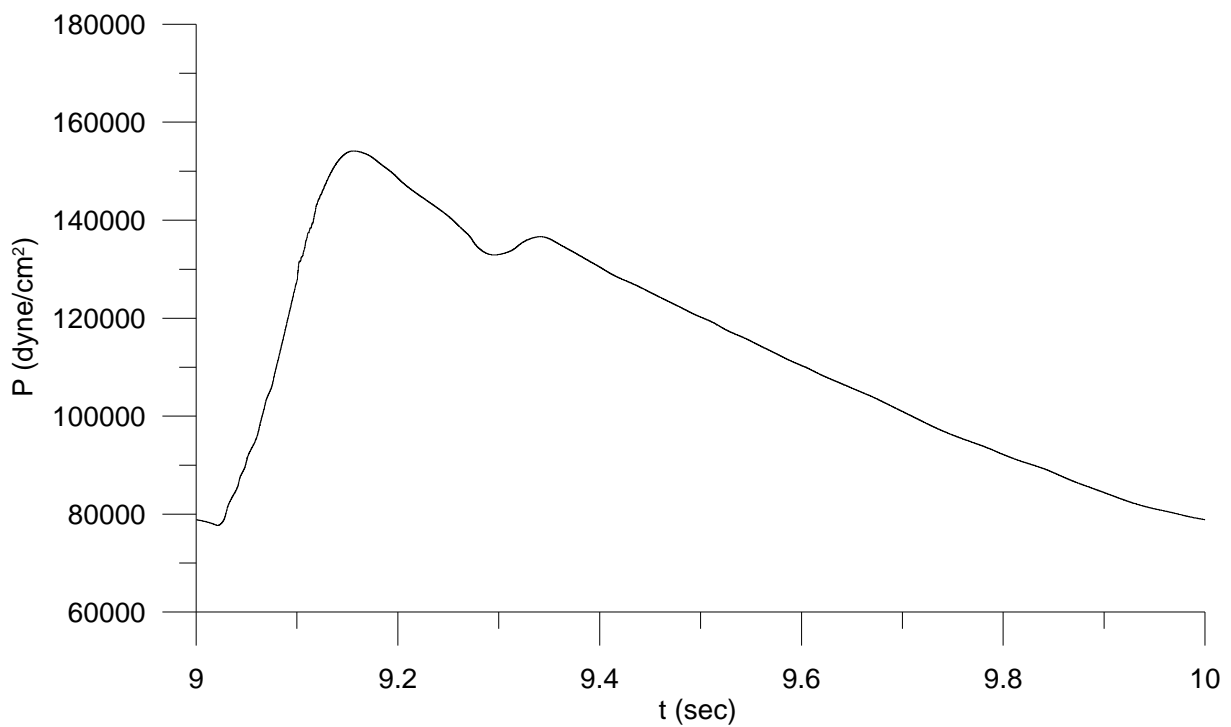


Σχήμα 4.72 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

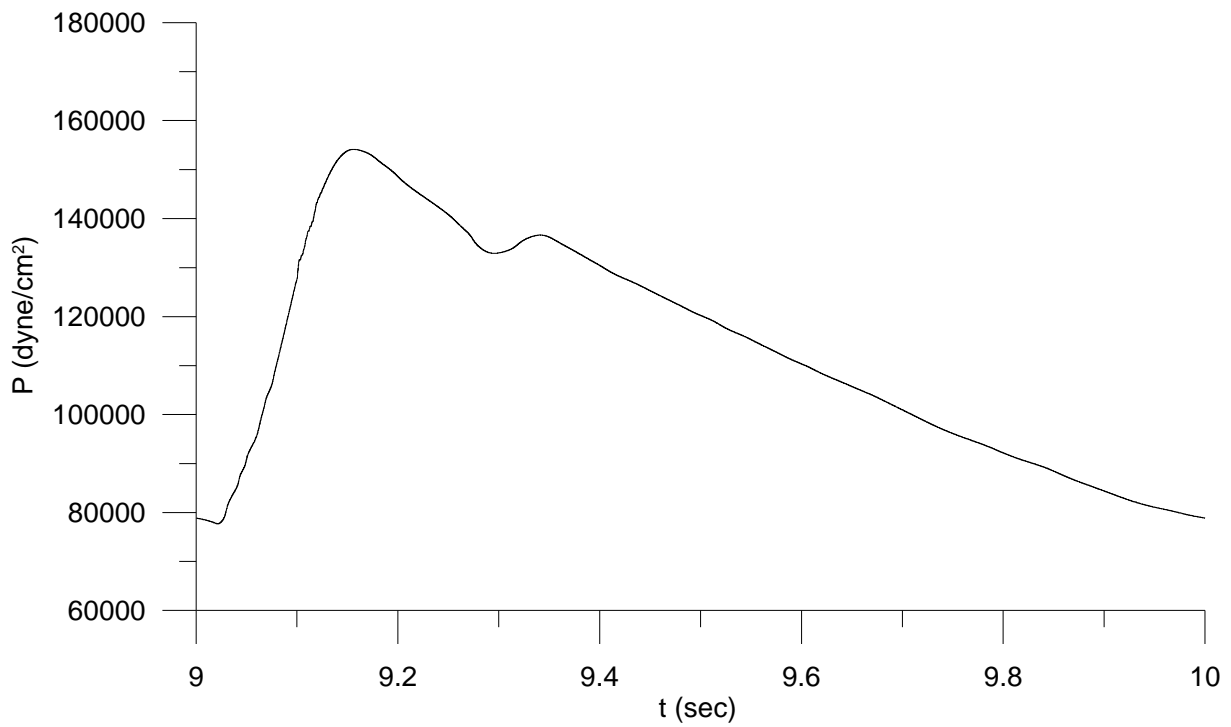


Σχήμα 4.73 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 7

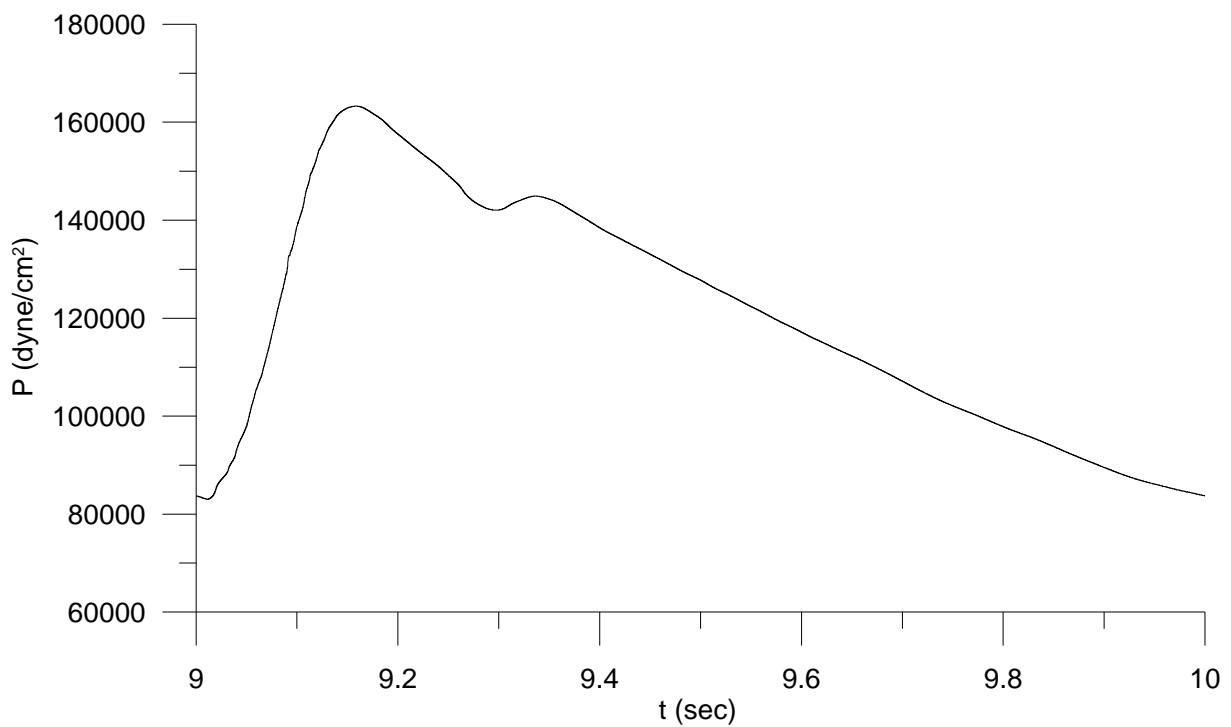


Σχήμα 4.74 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

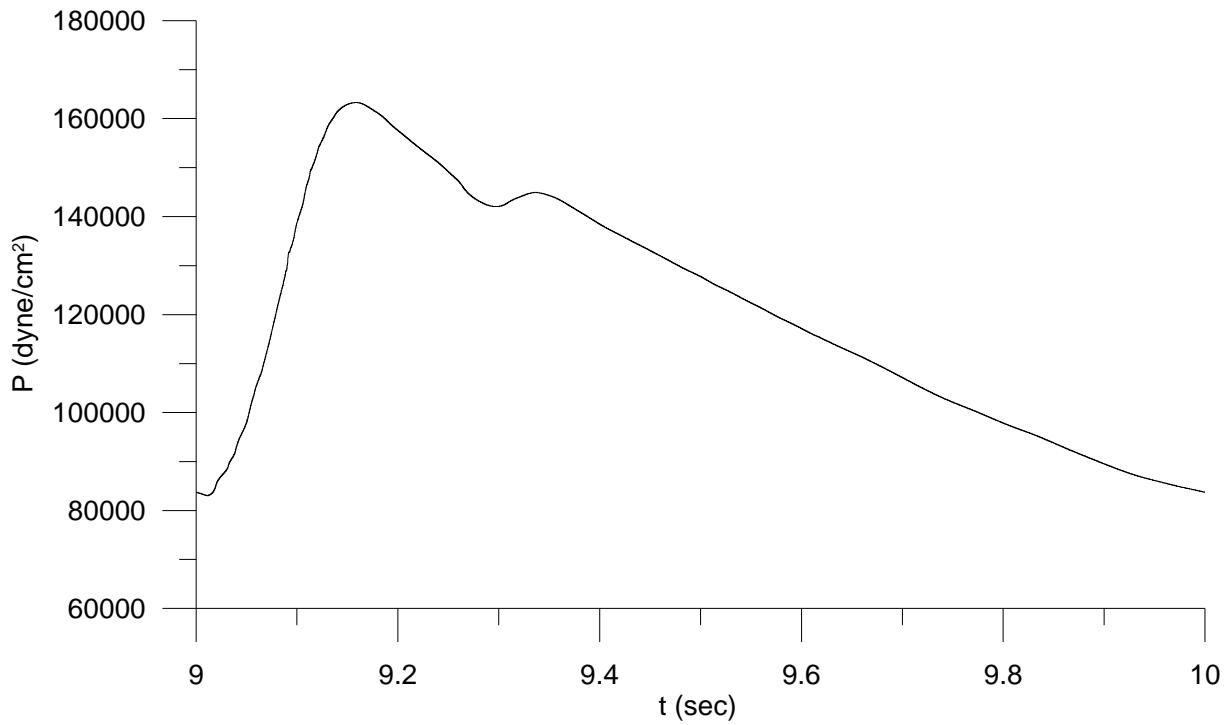


Σχήμα 4.75 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 9

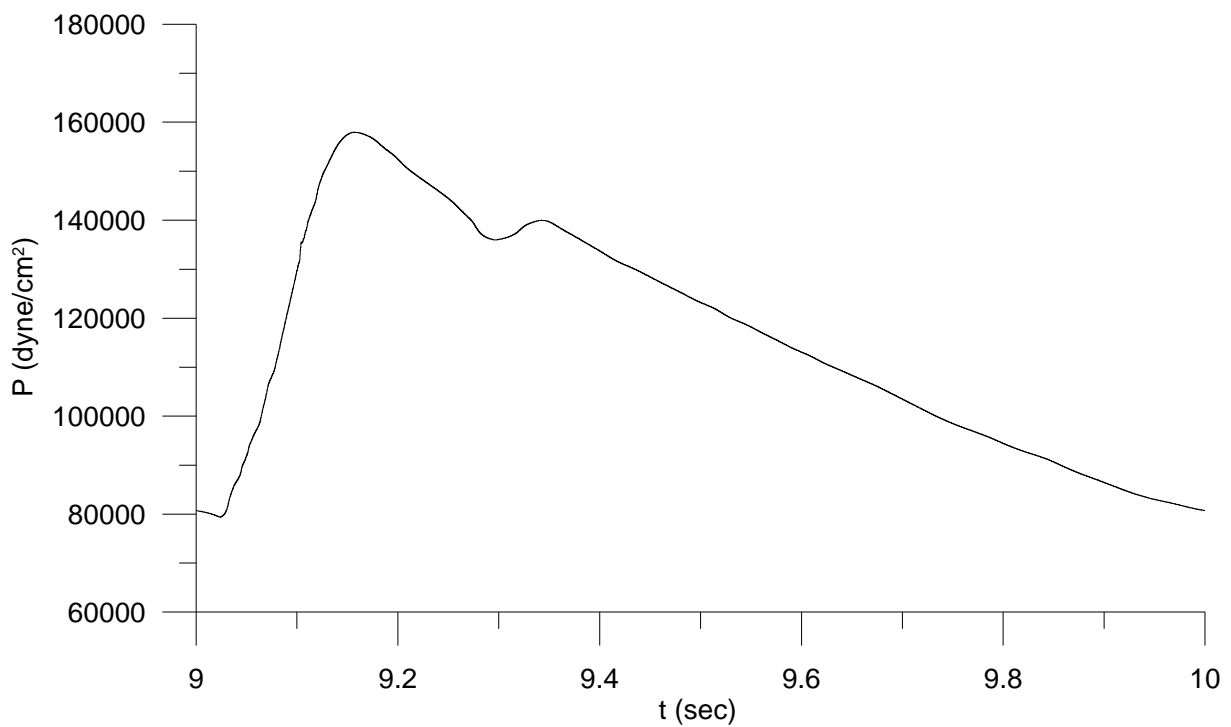


Σχήμα 4.76 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

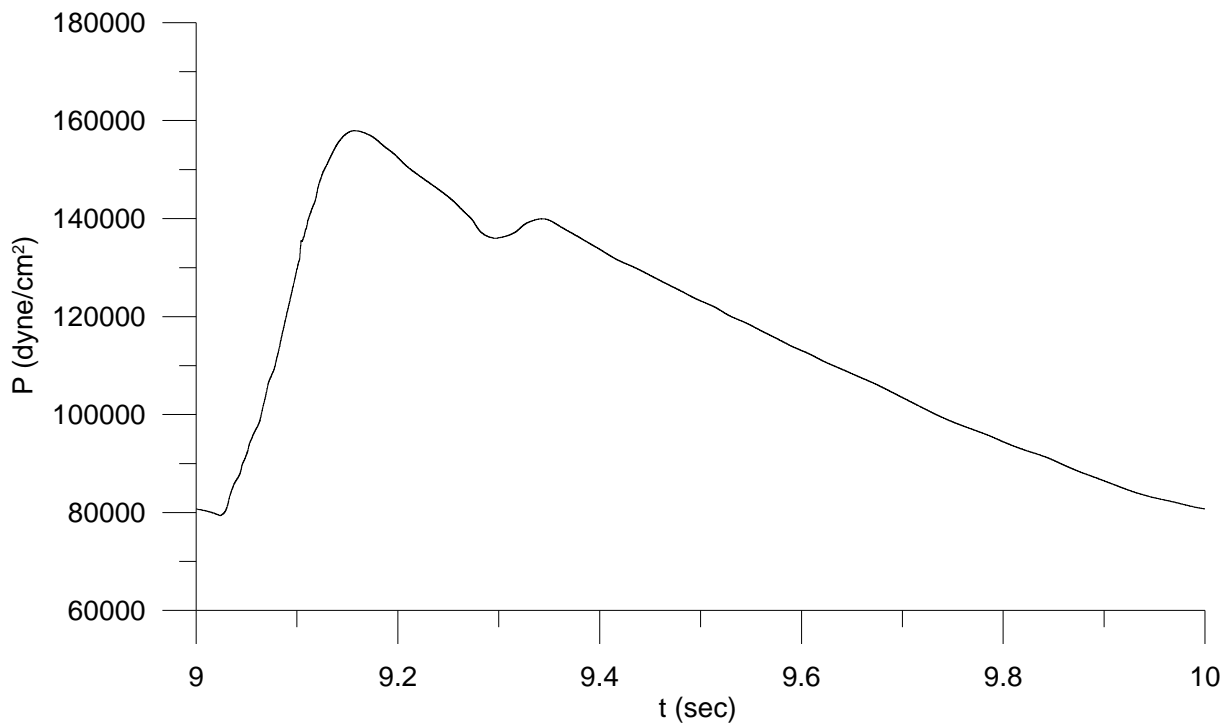


Σχήμα 4.77 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 11

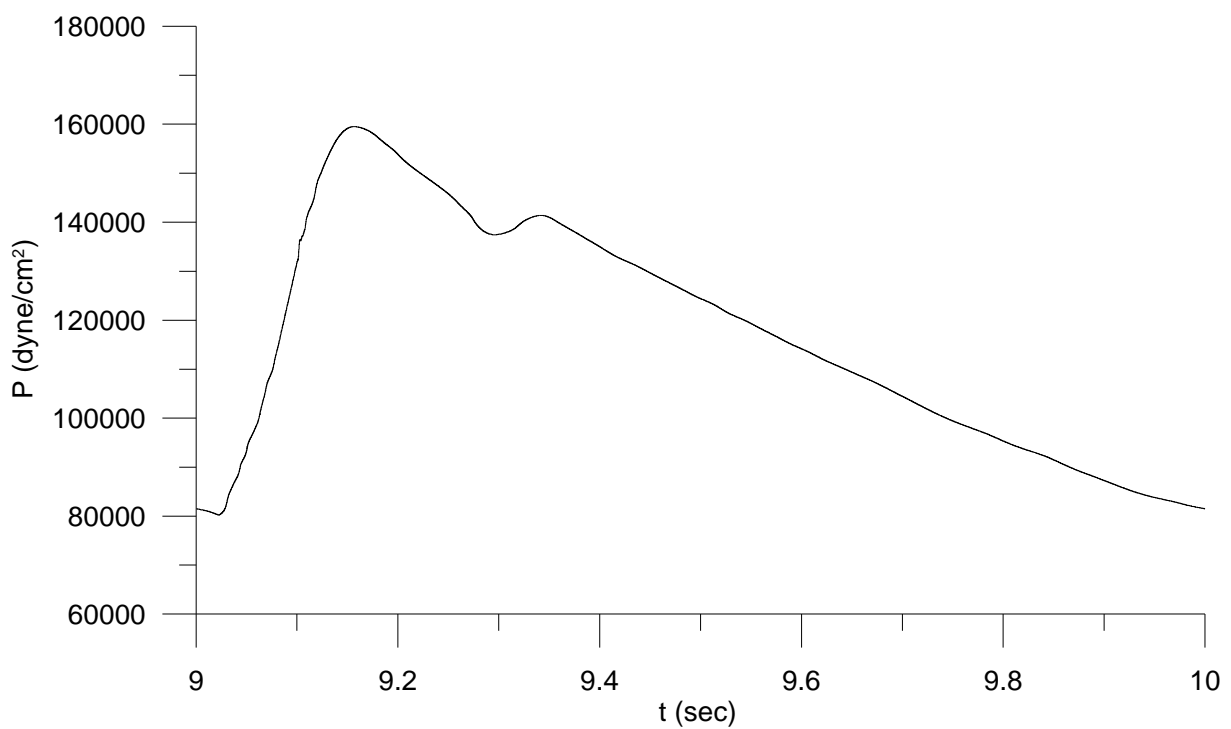


Σχήμα 4.78 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

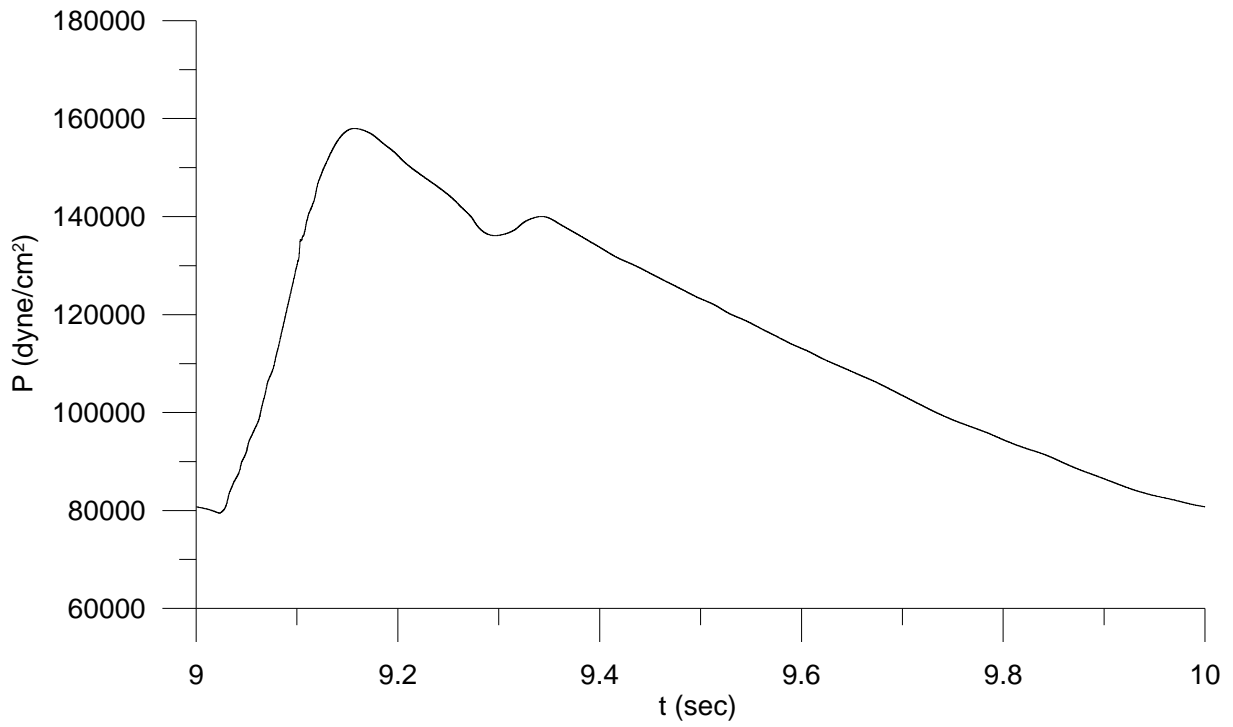


Σχήμα 4.79 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 13

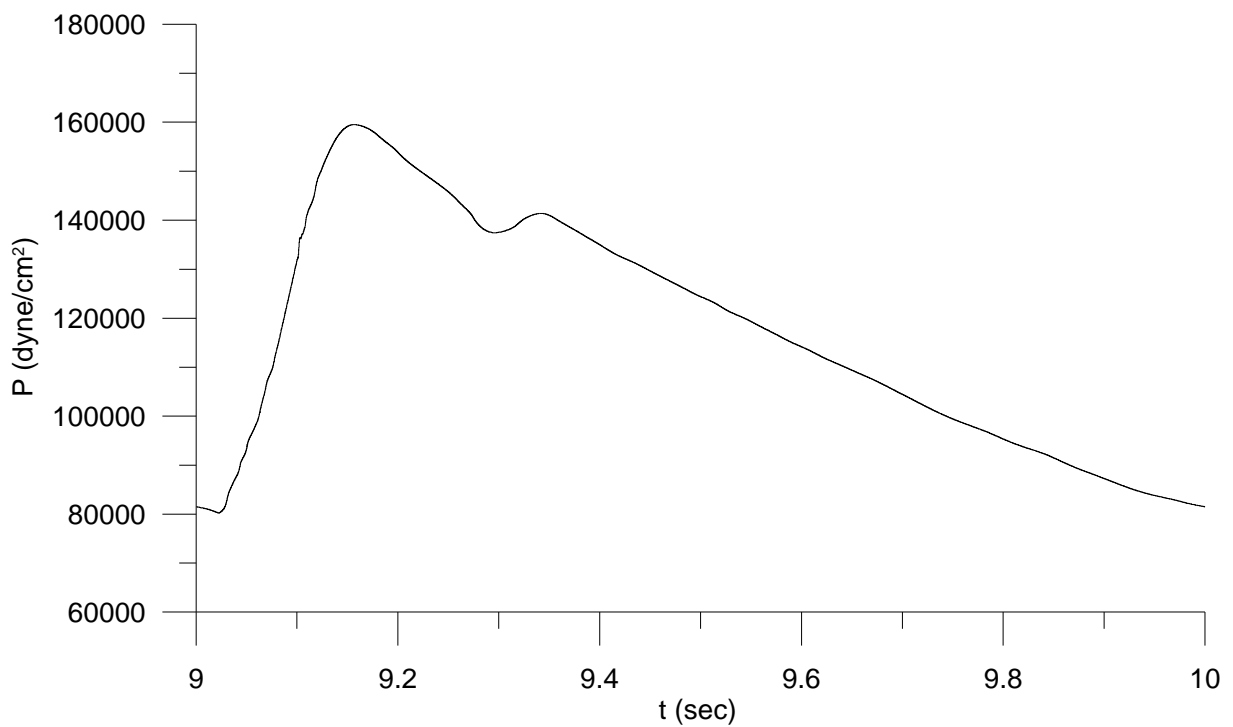


Σχήμα 4.80 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 14

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

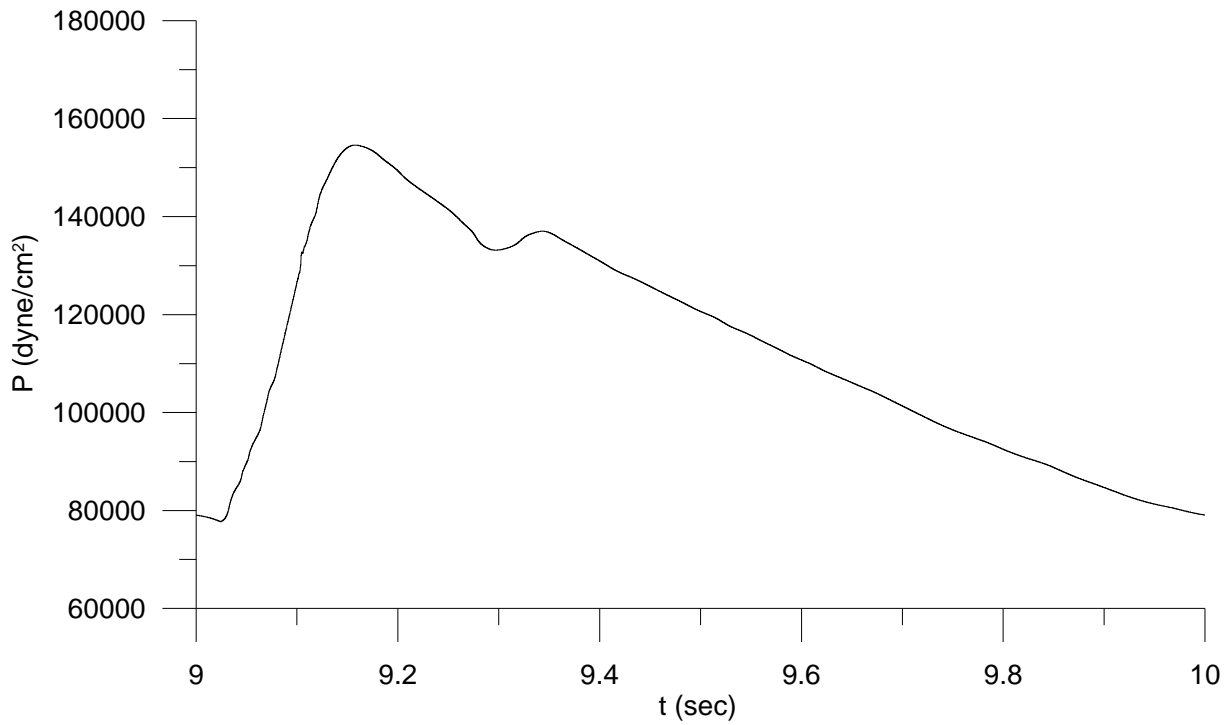


Σχήμα 4.81 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 15

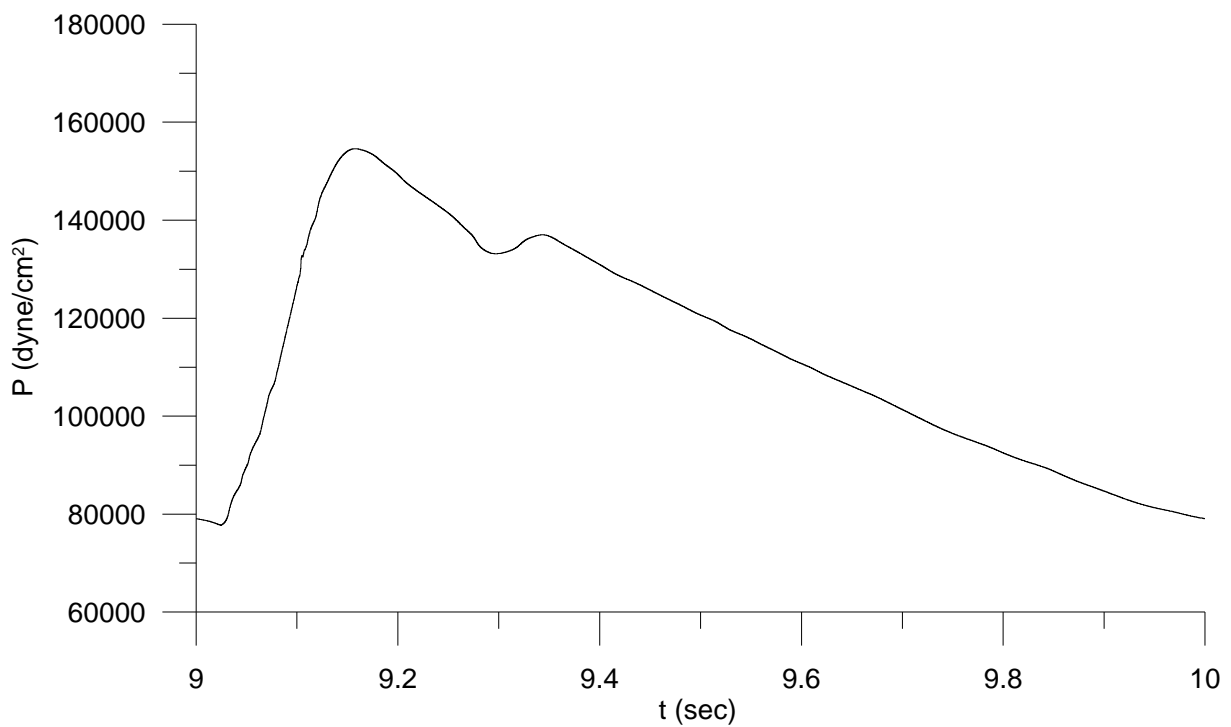


Σχήμα 4.82 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 16

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



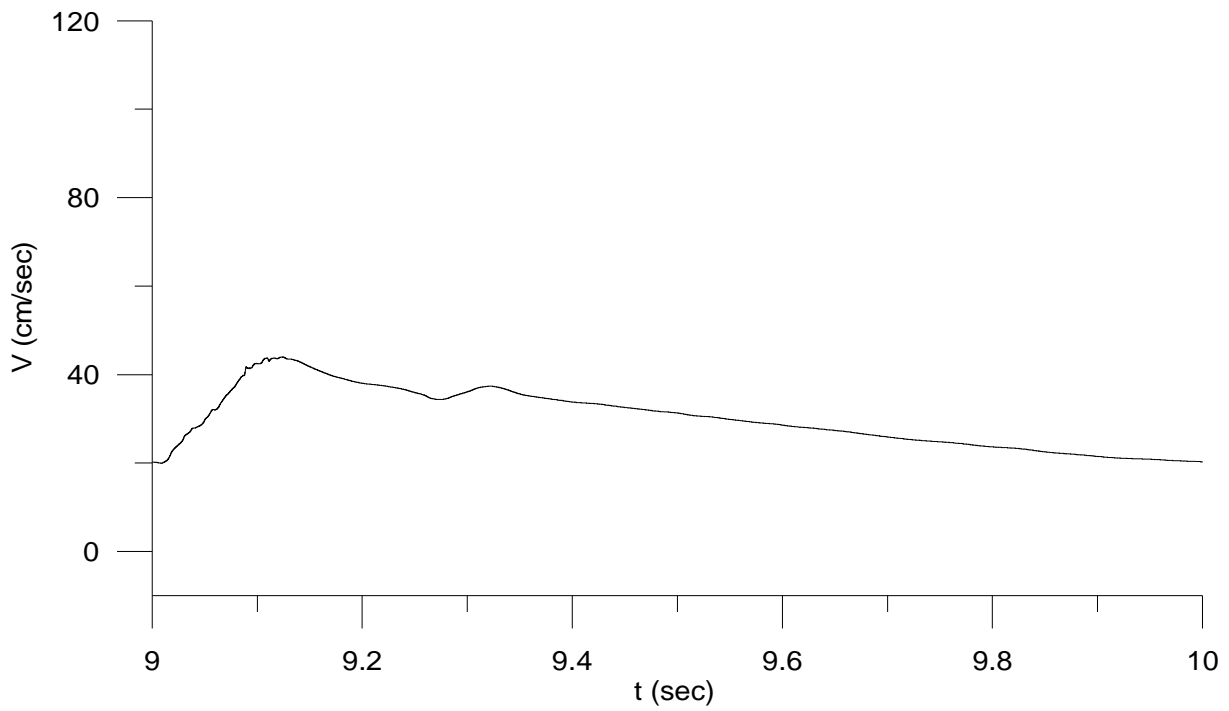
Σχήμα 4.83 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 17



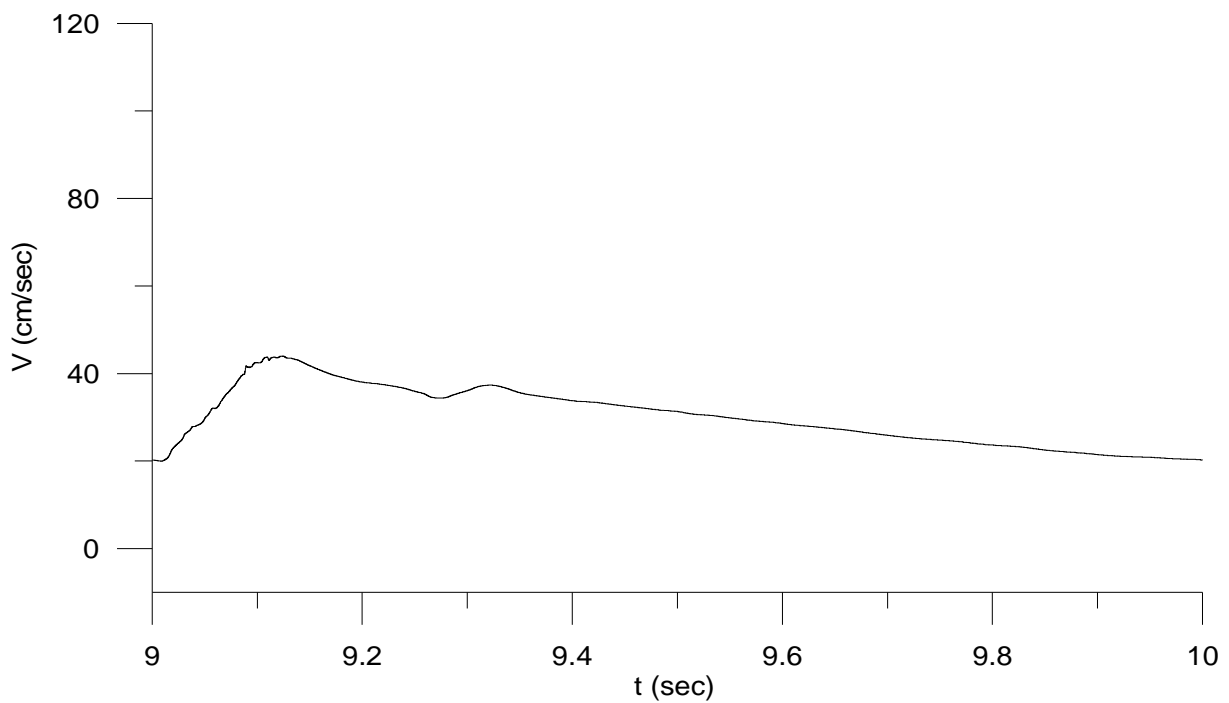
Σχήμα 4.84 Η πίεση στο μέσο του αγγείου 18

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.7.2 Διαγράμματα ταχύτητας

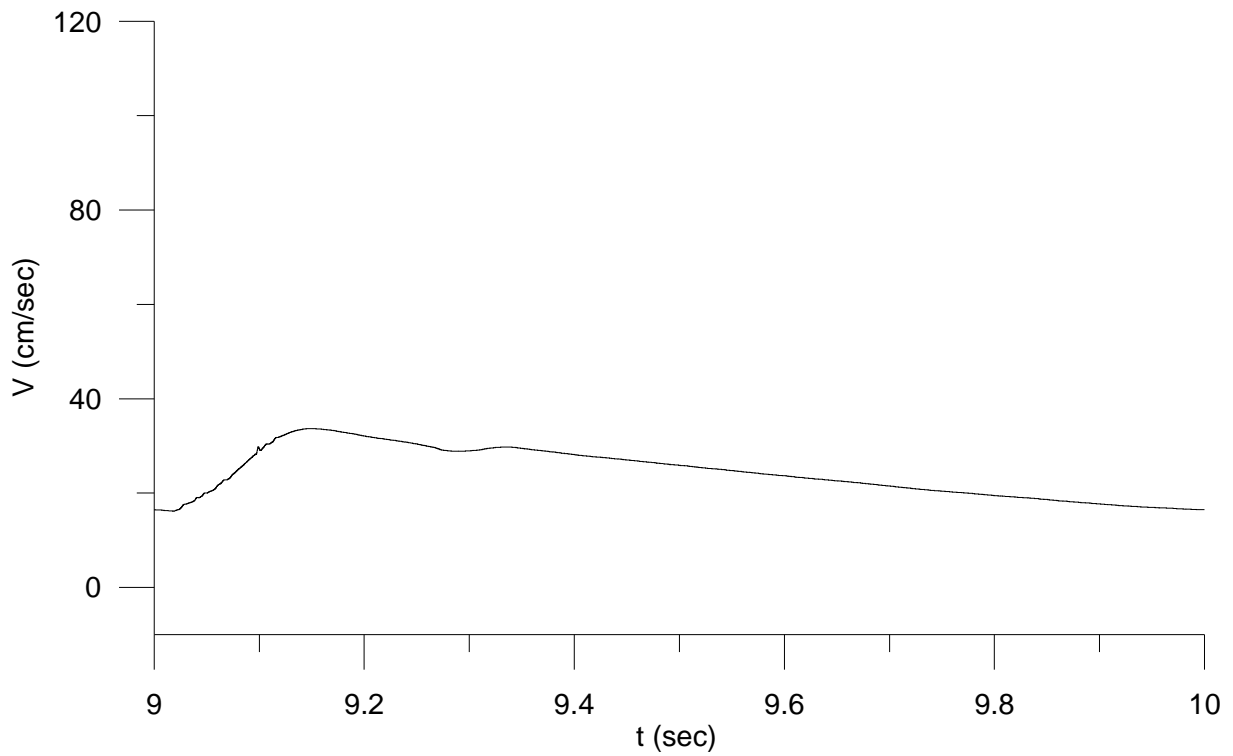


Σχήμα 4.85 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 1

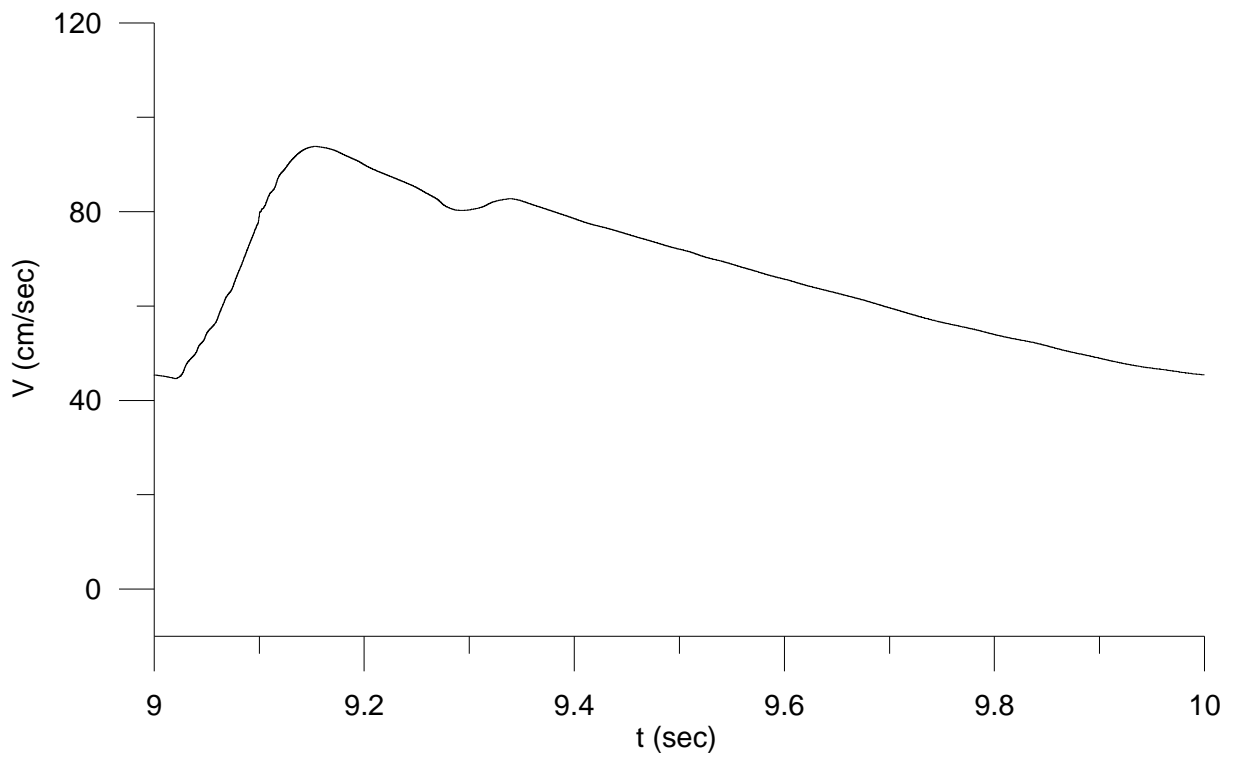


Σχήμα 4.86 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

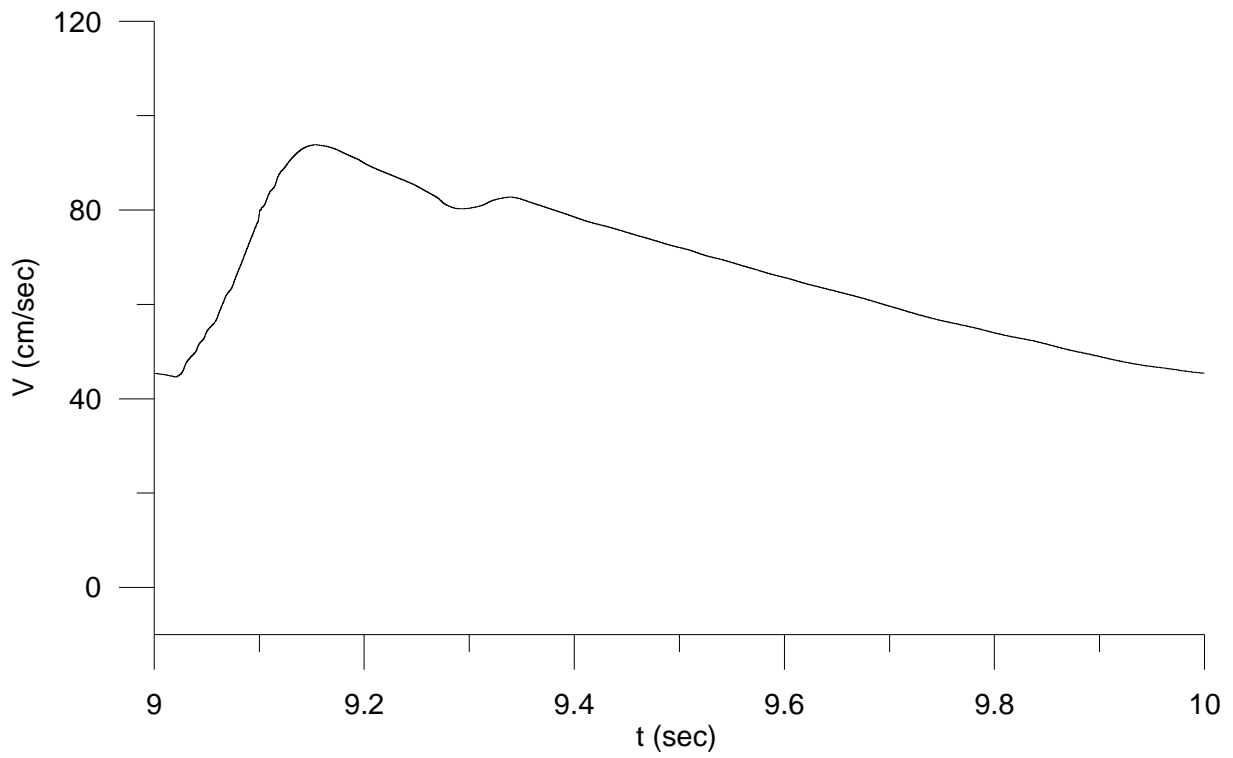


Σχήμα 4.87 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 3

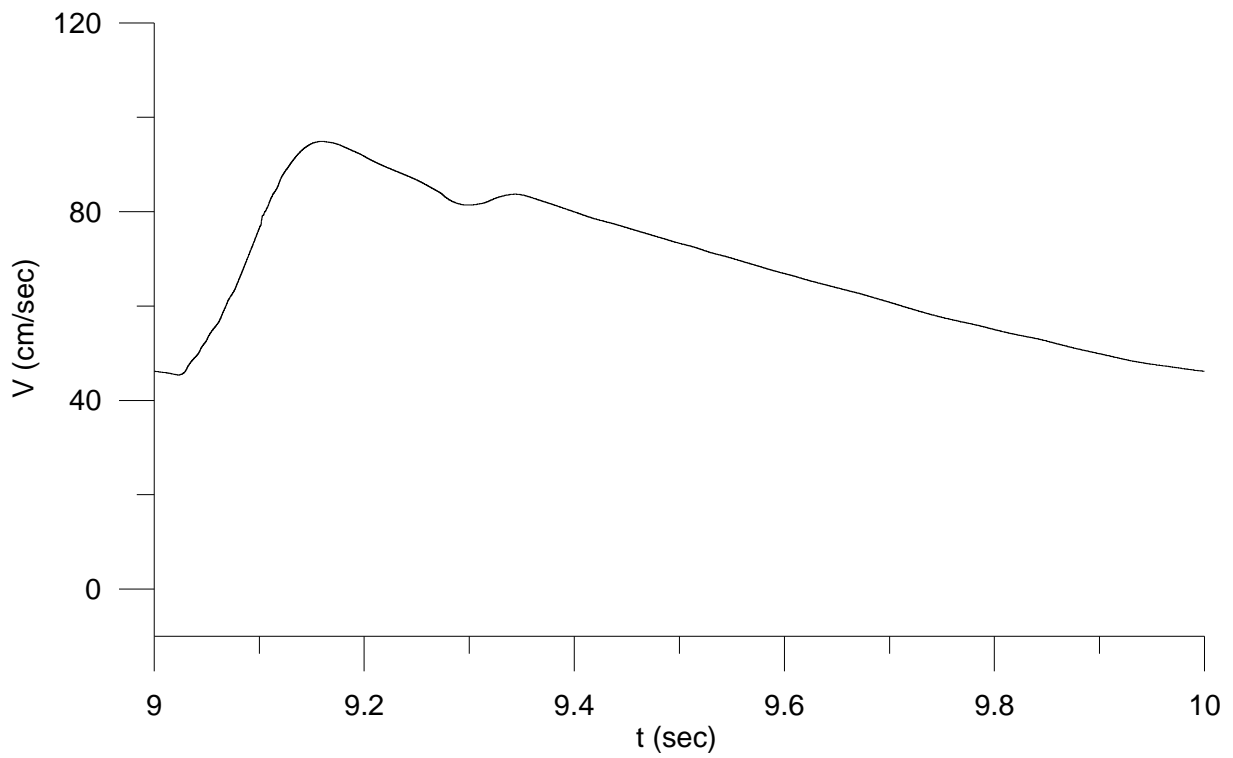


Σχήμα 4.88 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

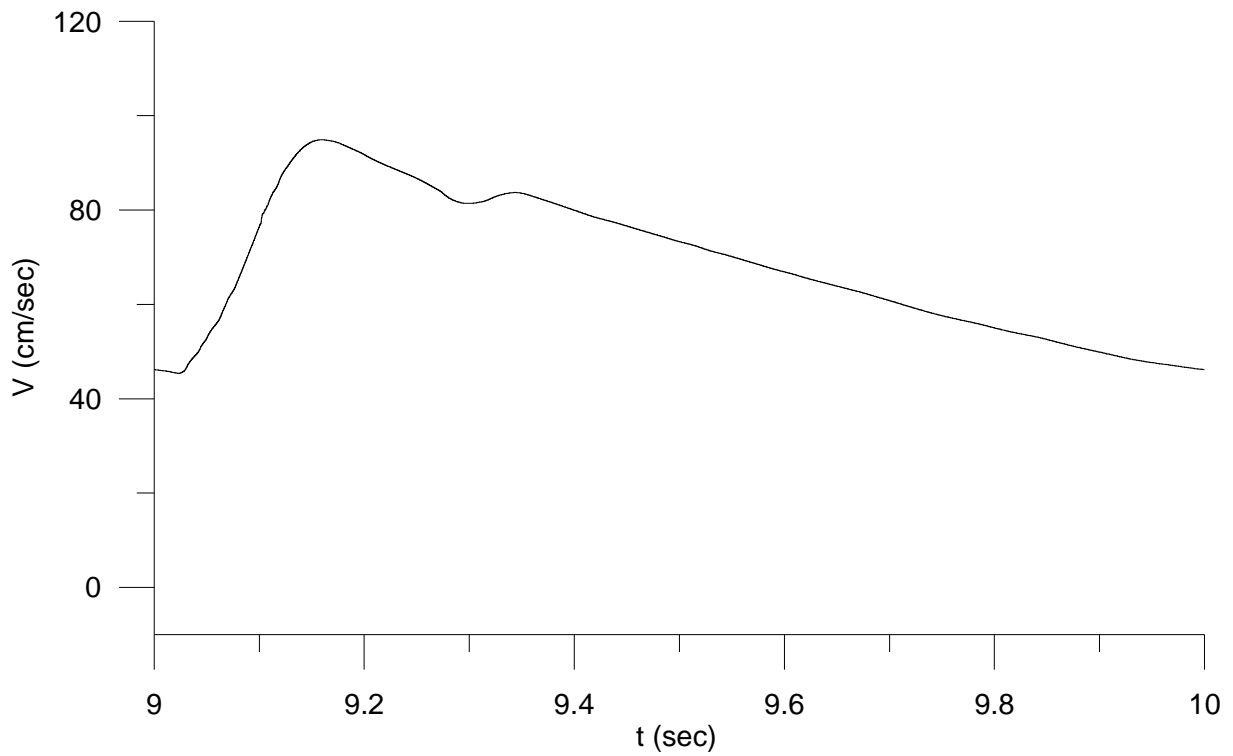


Σχήμα 4.89 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 5

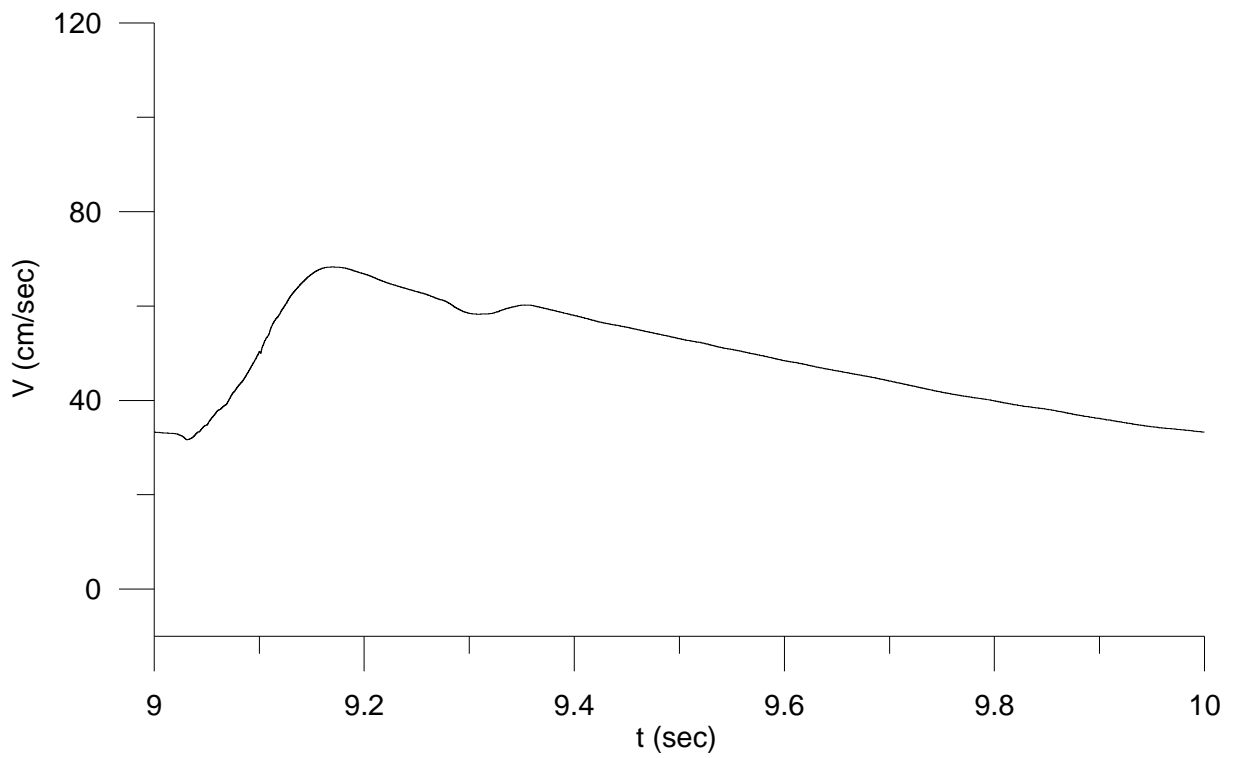


Σχήμα 4.90 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

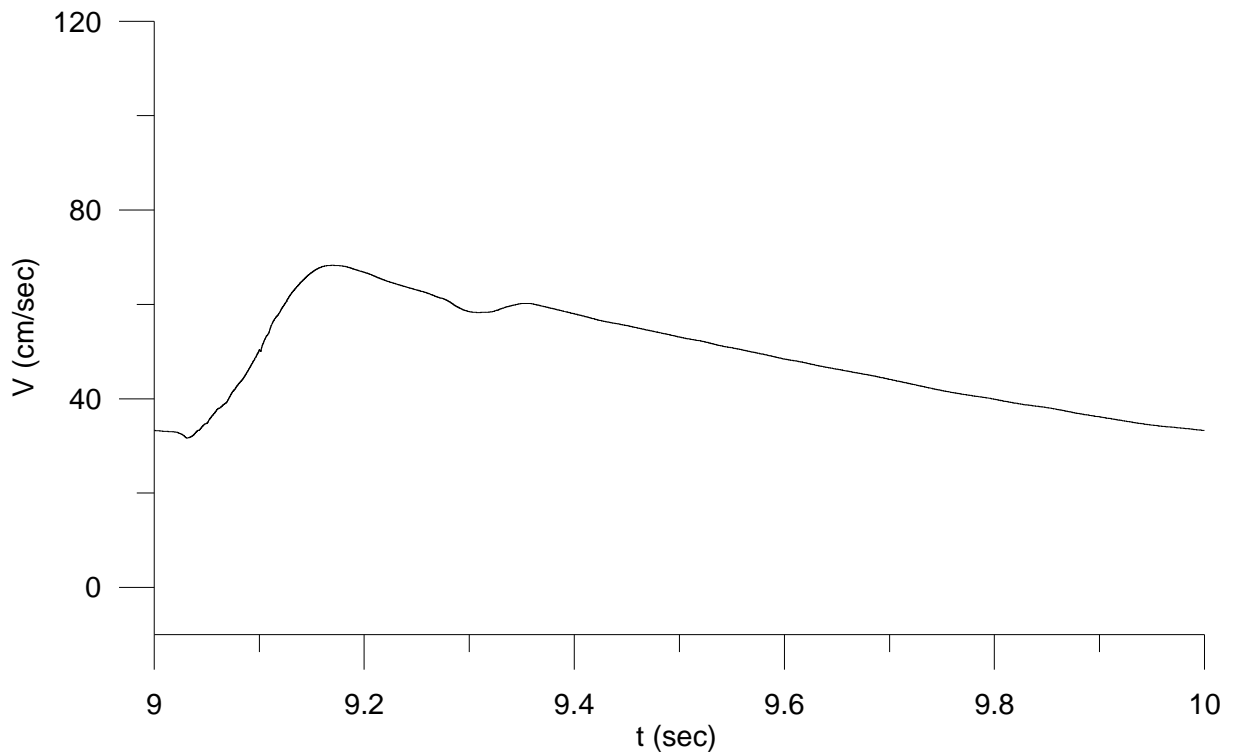


Σχήμα 4.91 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 7

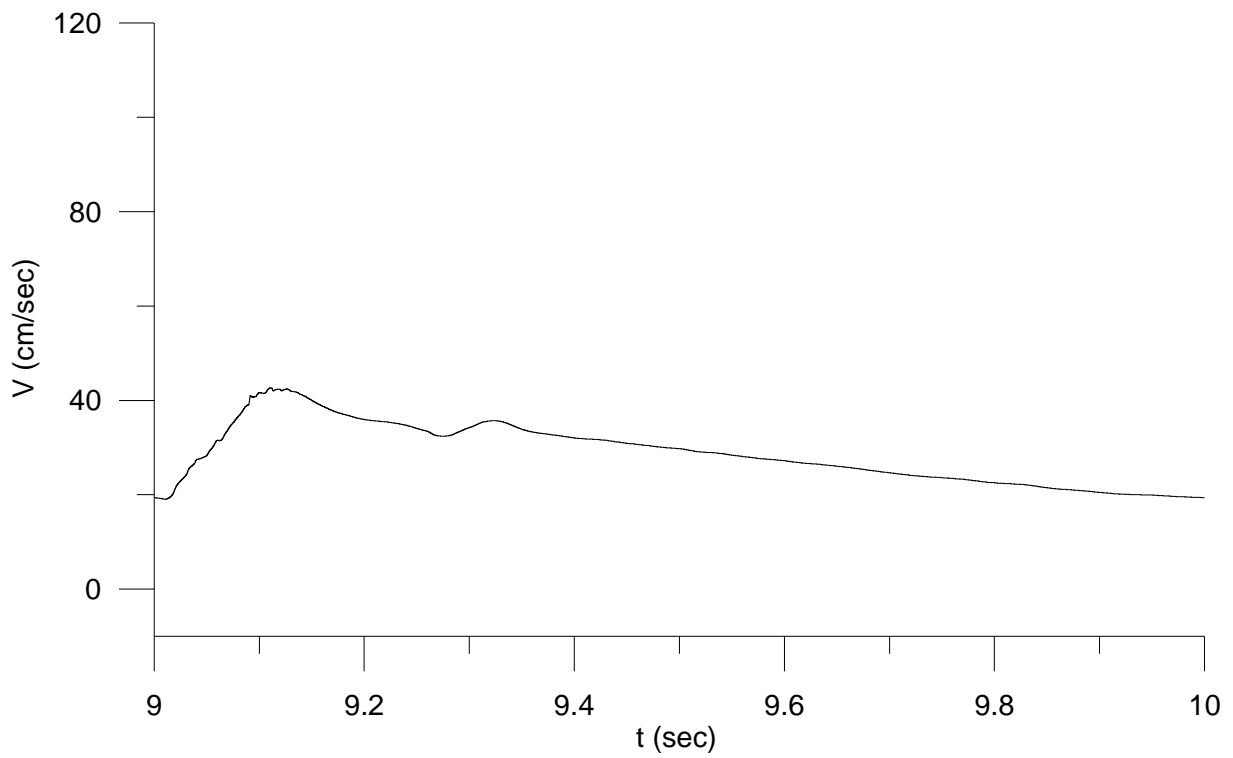


Σχήμα 4.92 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

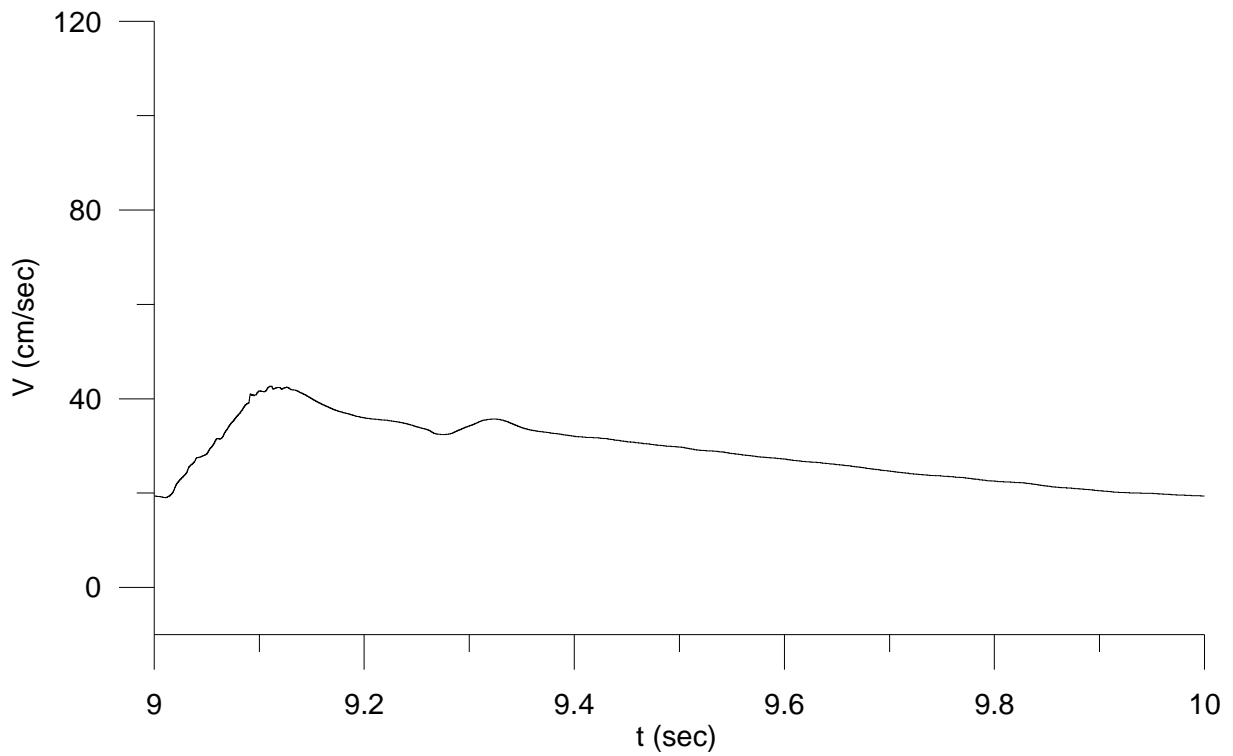


Σχήμα 4.93 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 9

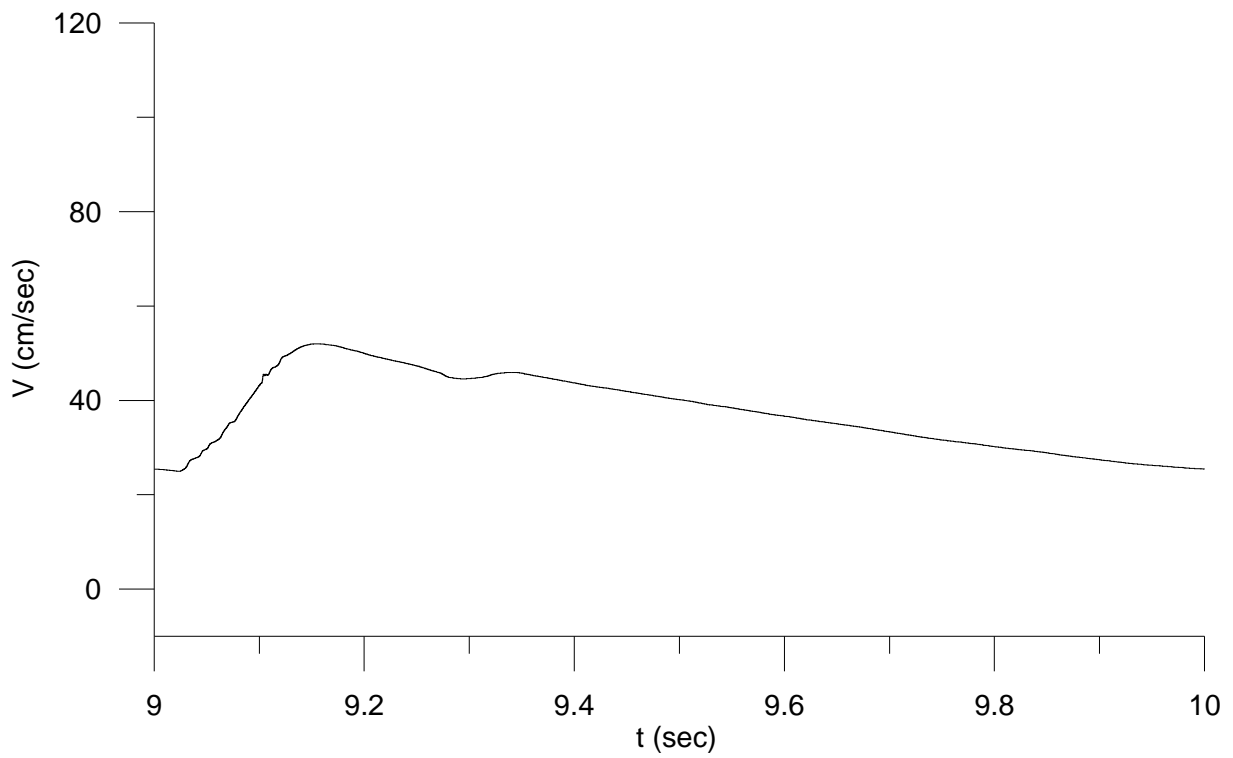


Σχήμα 4.94 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

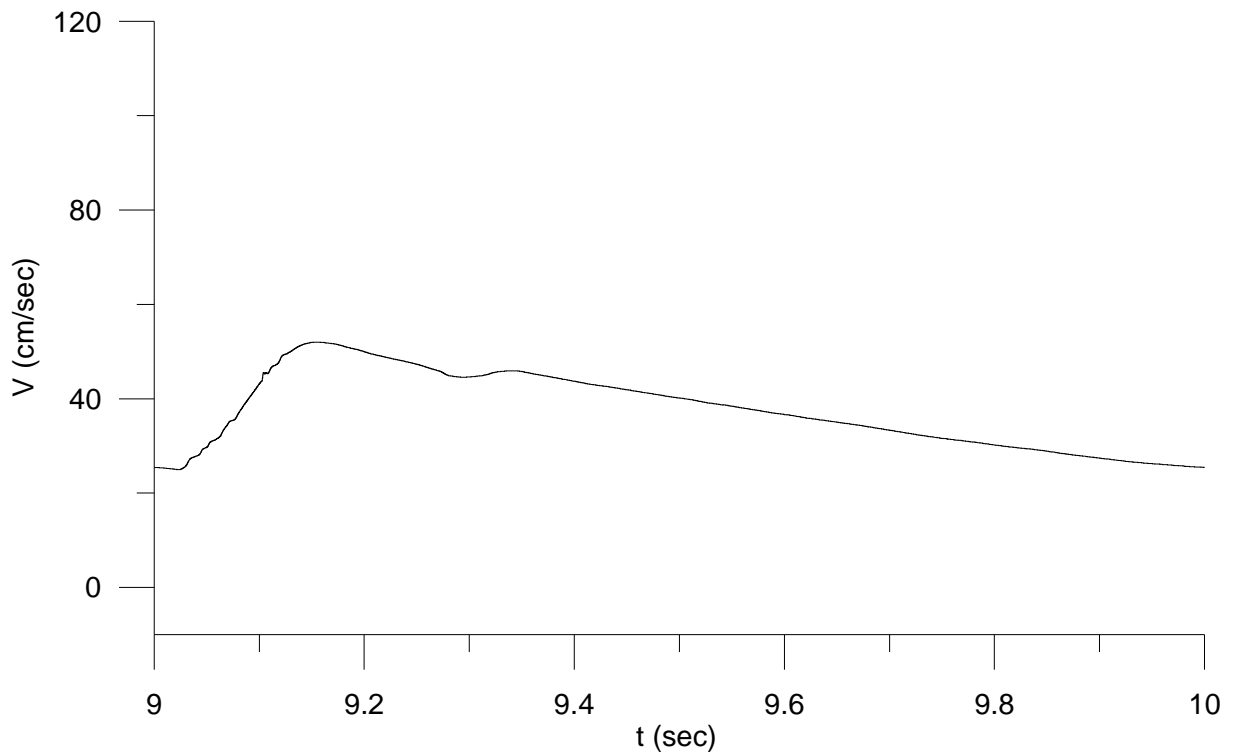


Σχήμα 4.95 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 11

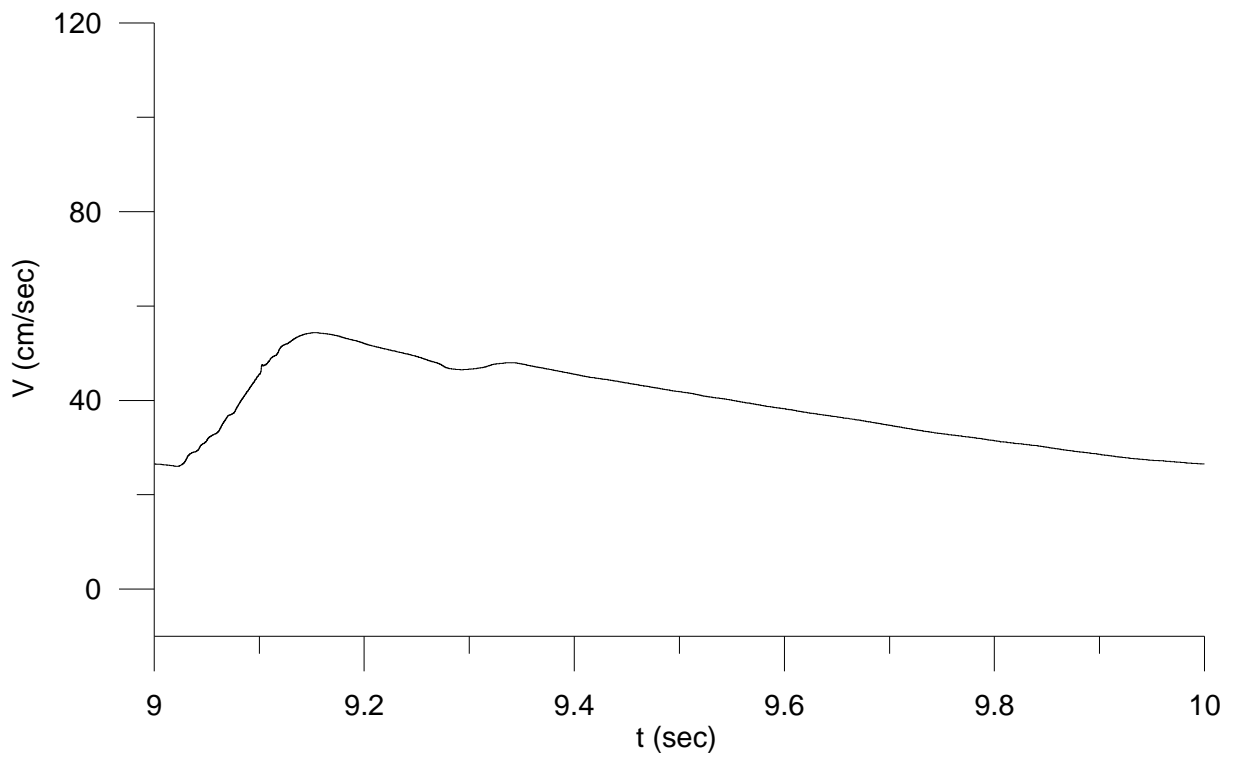


Σχήμα 4.96 Η ταχύτητα στο μέσο του αγωγίου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

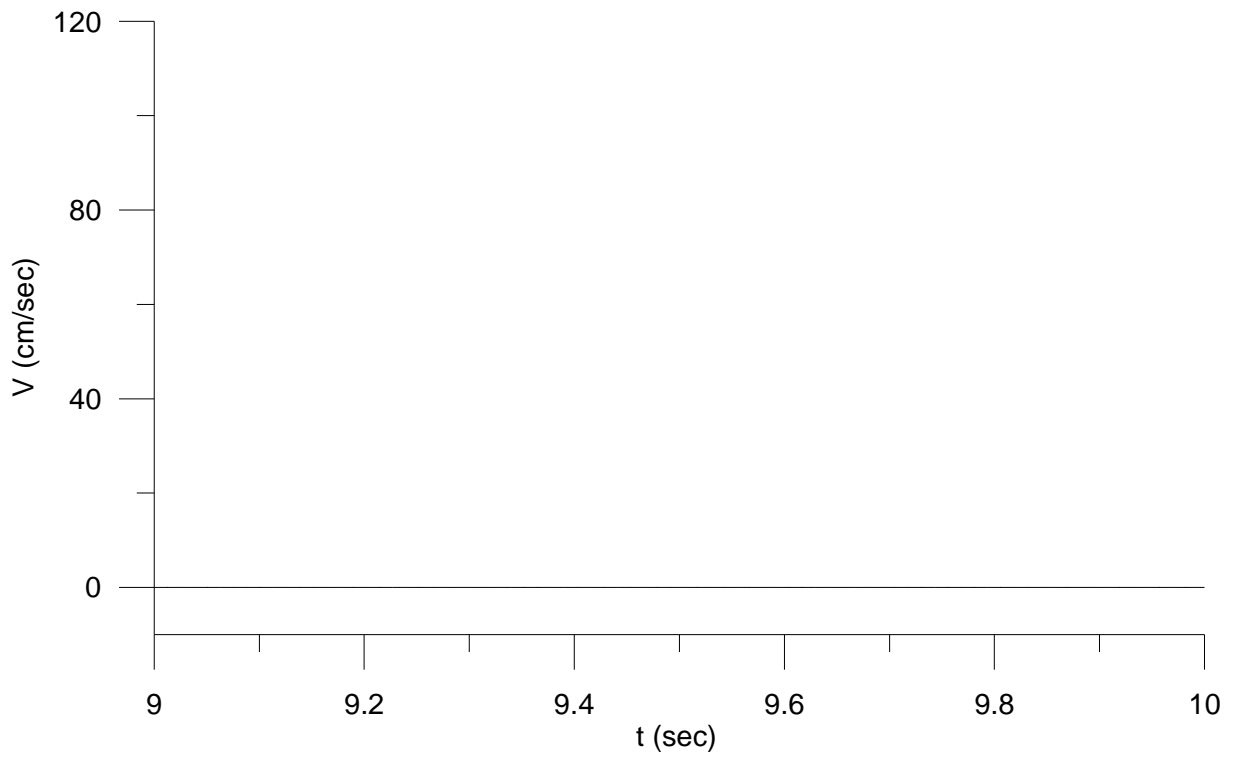


Σχήμα 4.97 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 13

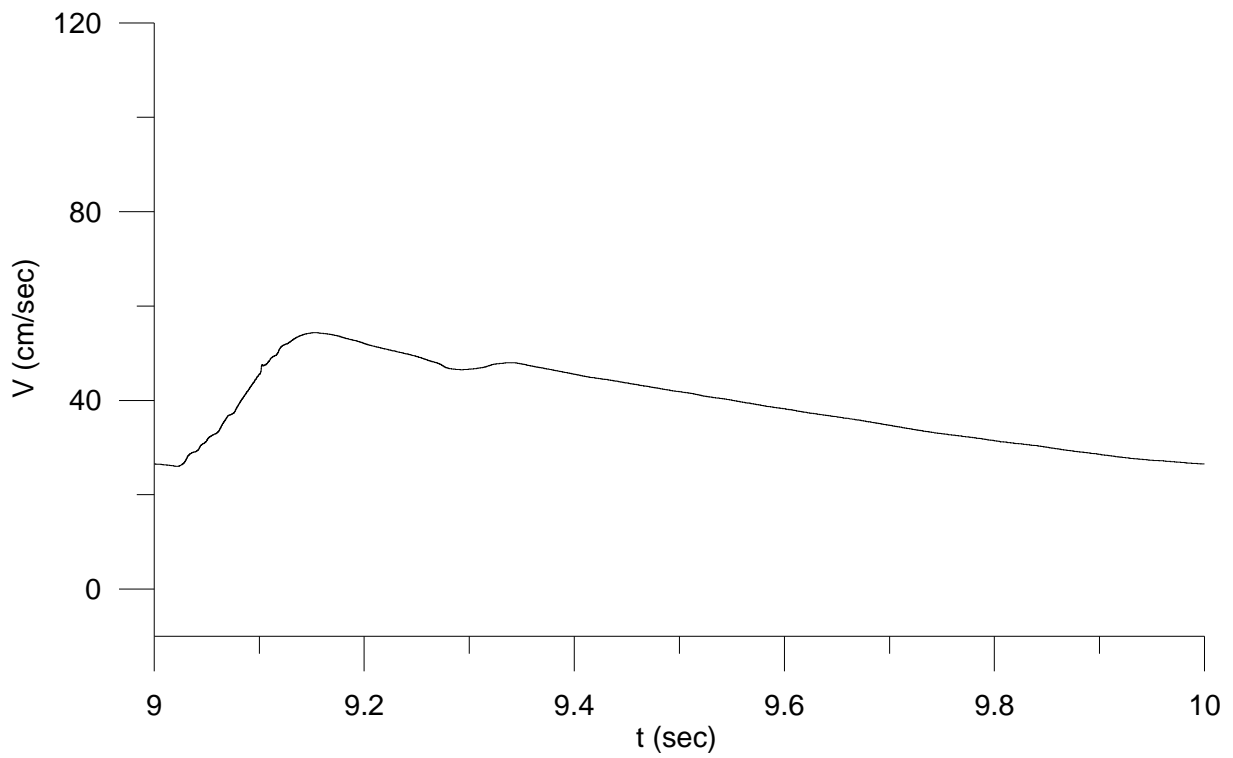


Σχήμα 4.98 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 14

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

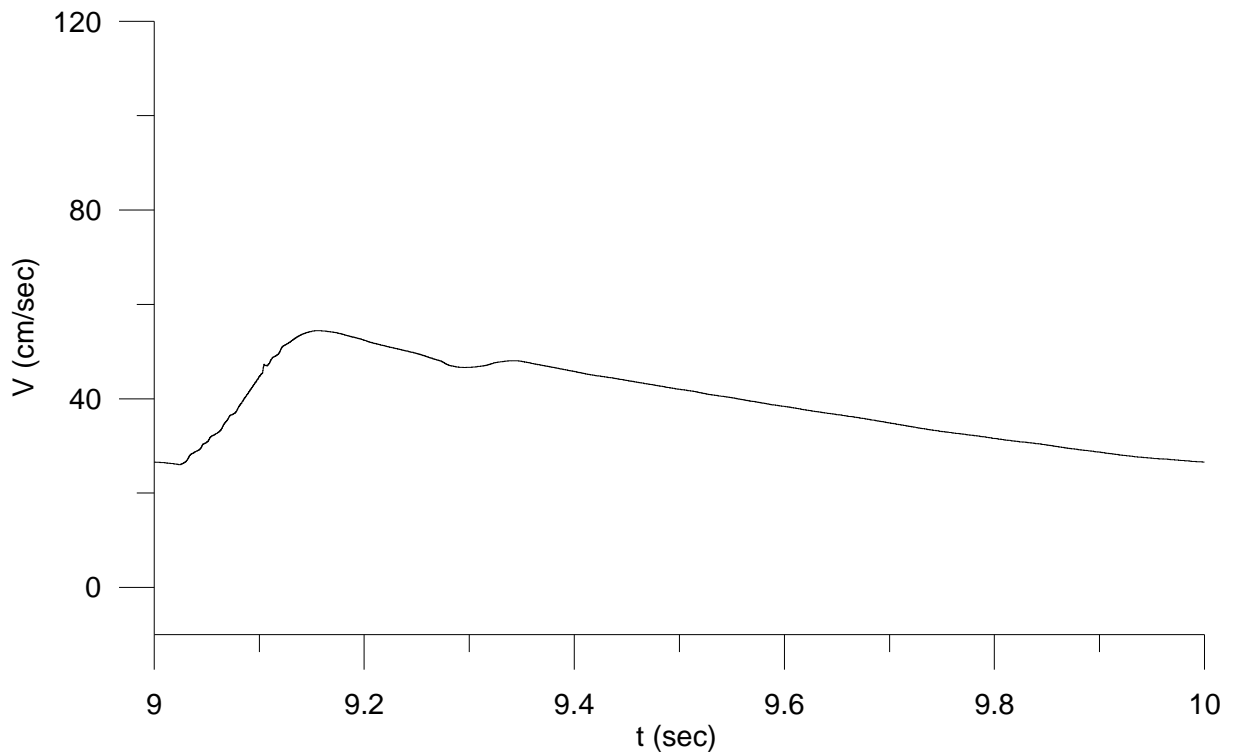


Σχήμα 4.99 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 15

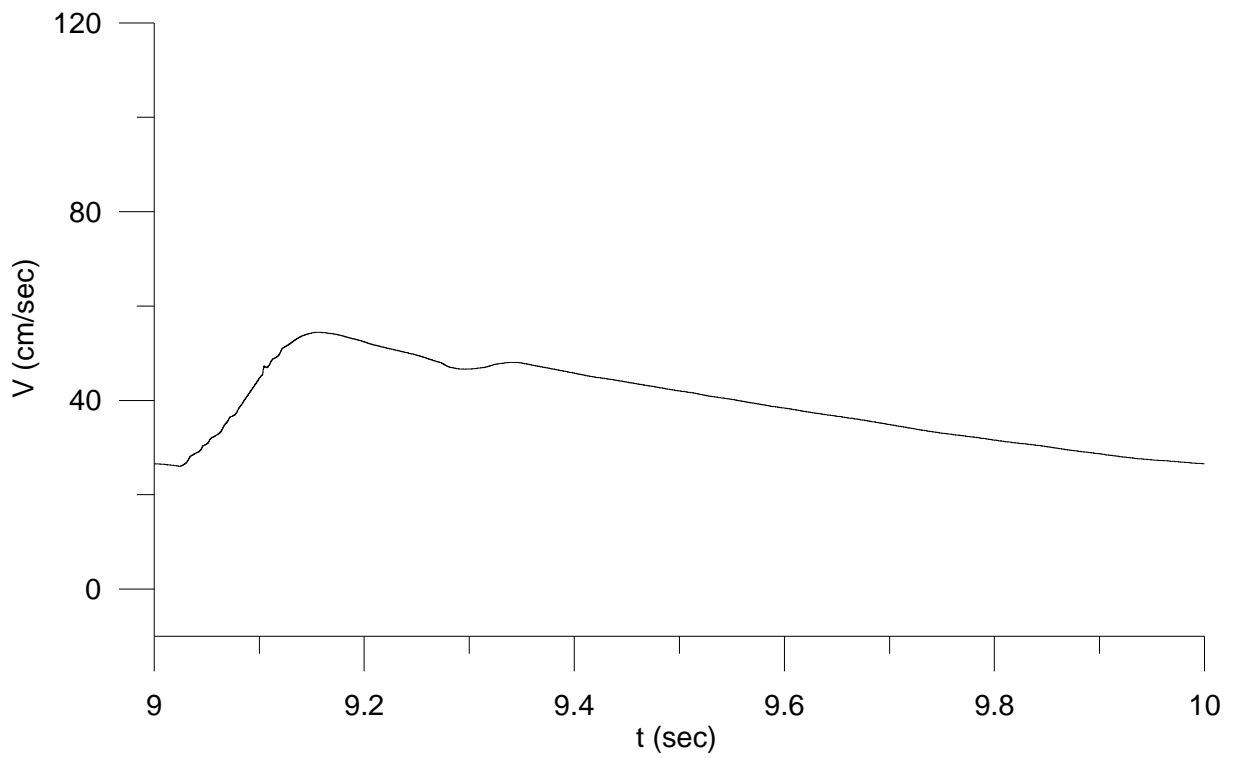


Σχήμα 4.100 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 16

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



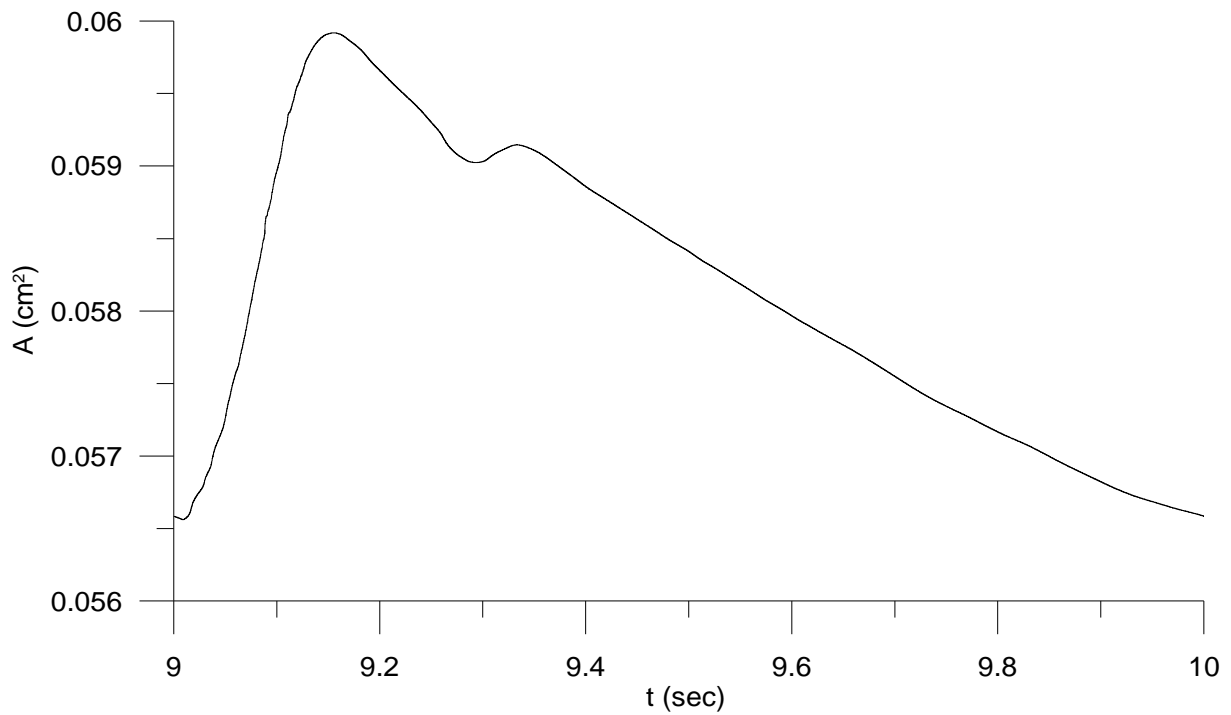
Σχήμα 4.101 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 17



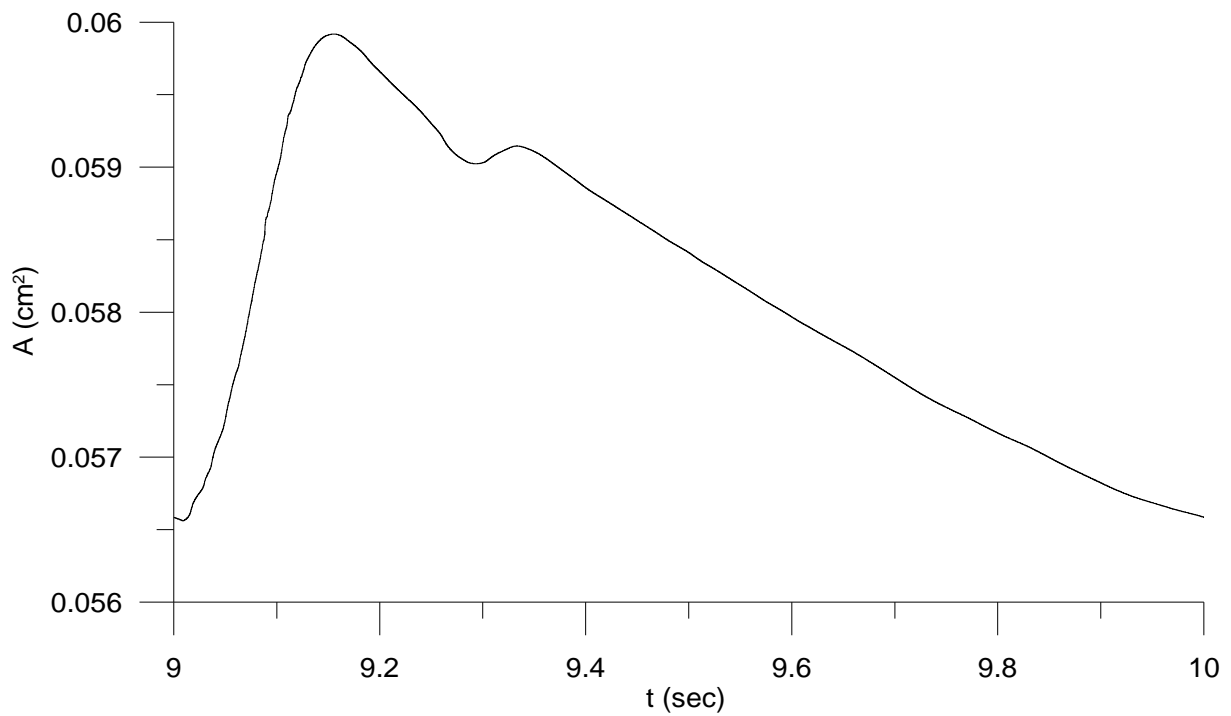
Σχήμα 4.102 Η ταχύτητα στο μέσο του αγγείου 18

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.7.3 Διαγράμματα διατομής

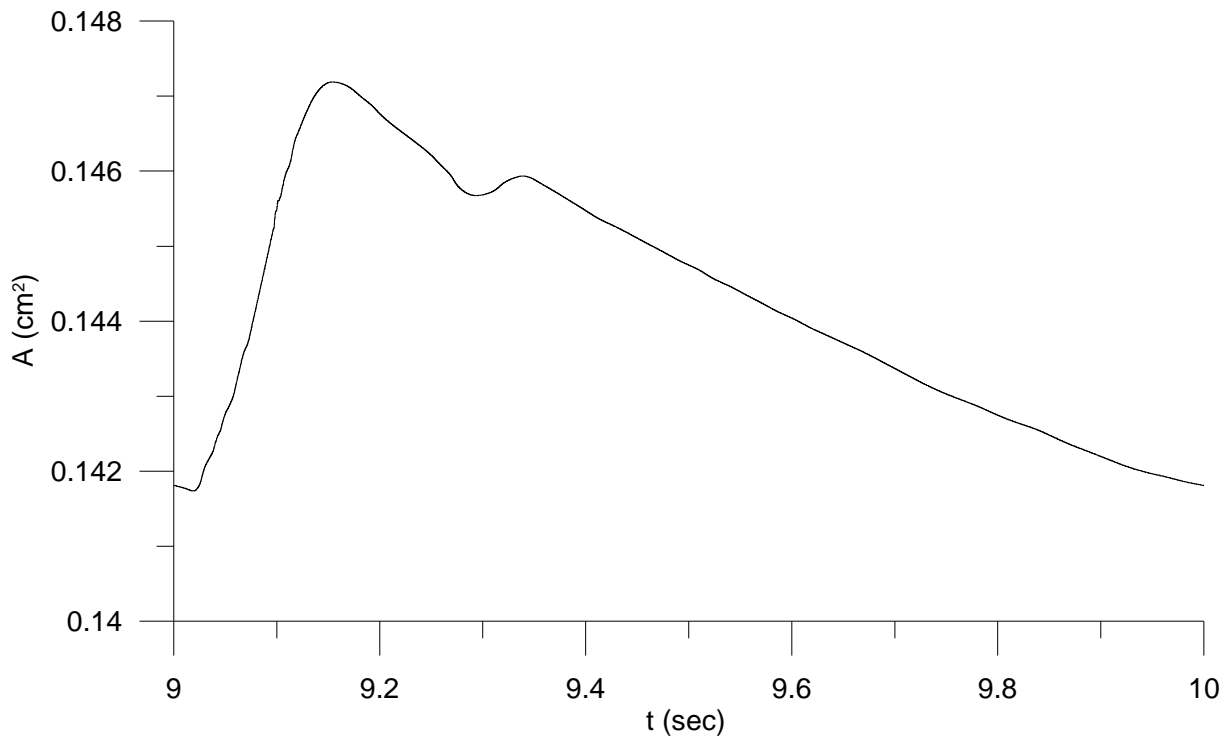


Σχήμα 4.103 Η διατομή στο μέσο του αγγείου 1

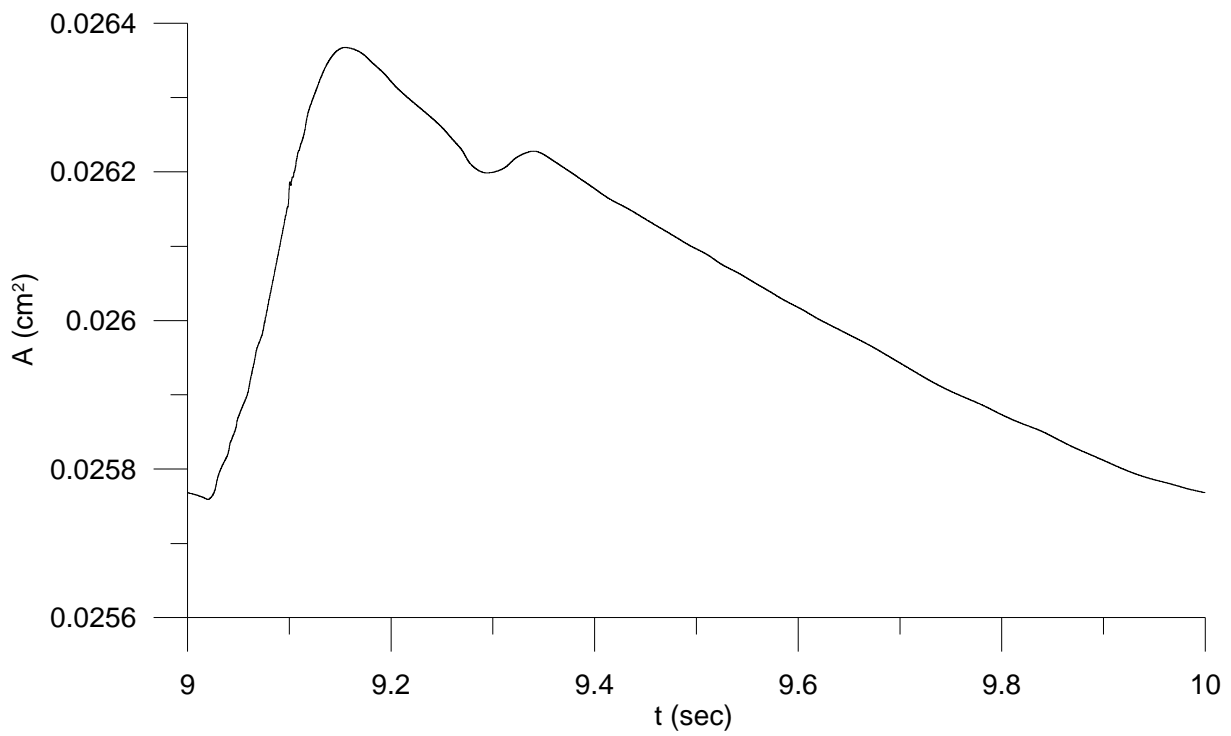


Σχήμα 4.104 Η διατομή στο μέσο του αγγείου 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

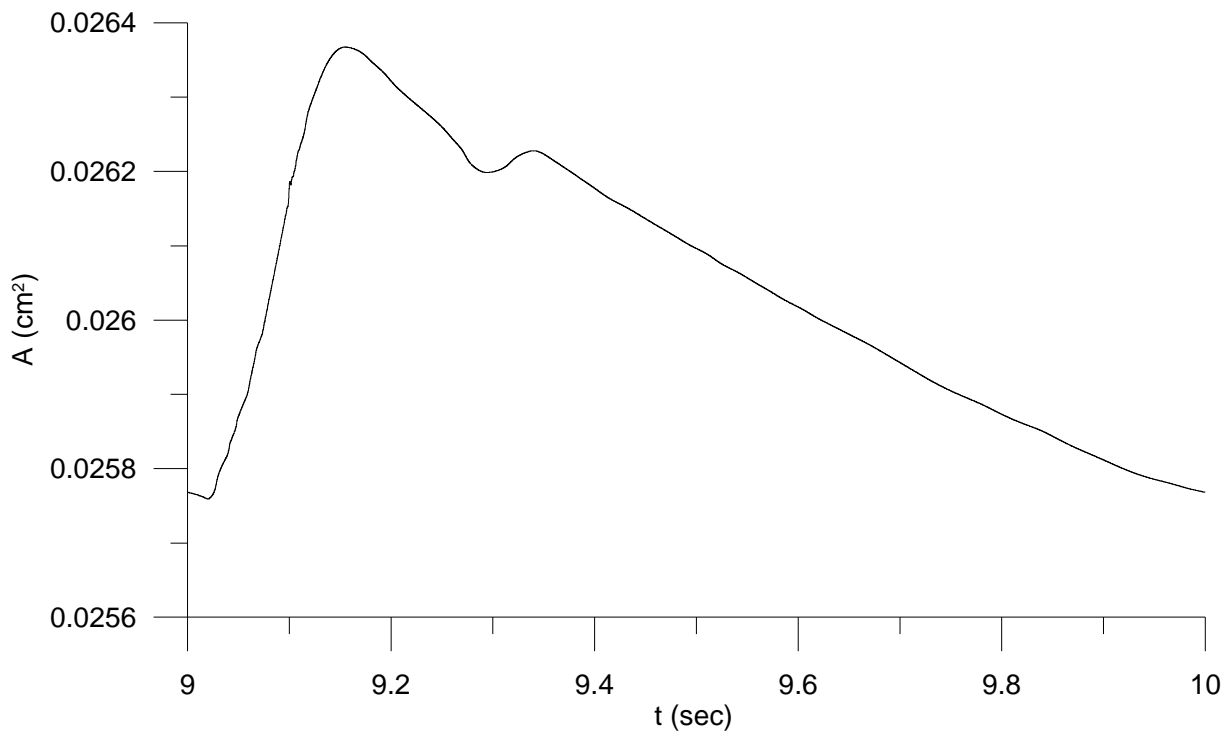


Σχήμα 4.105 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 3

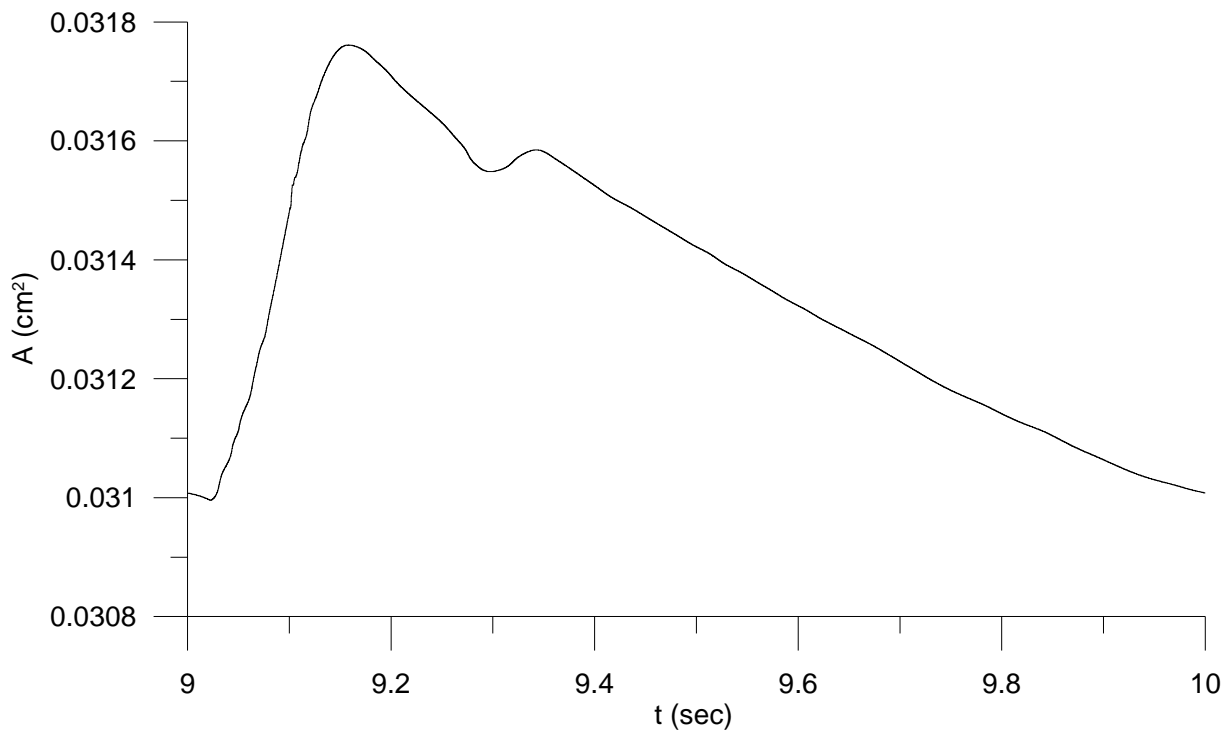


Σχήμα 4.106 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

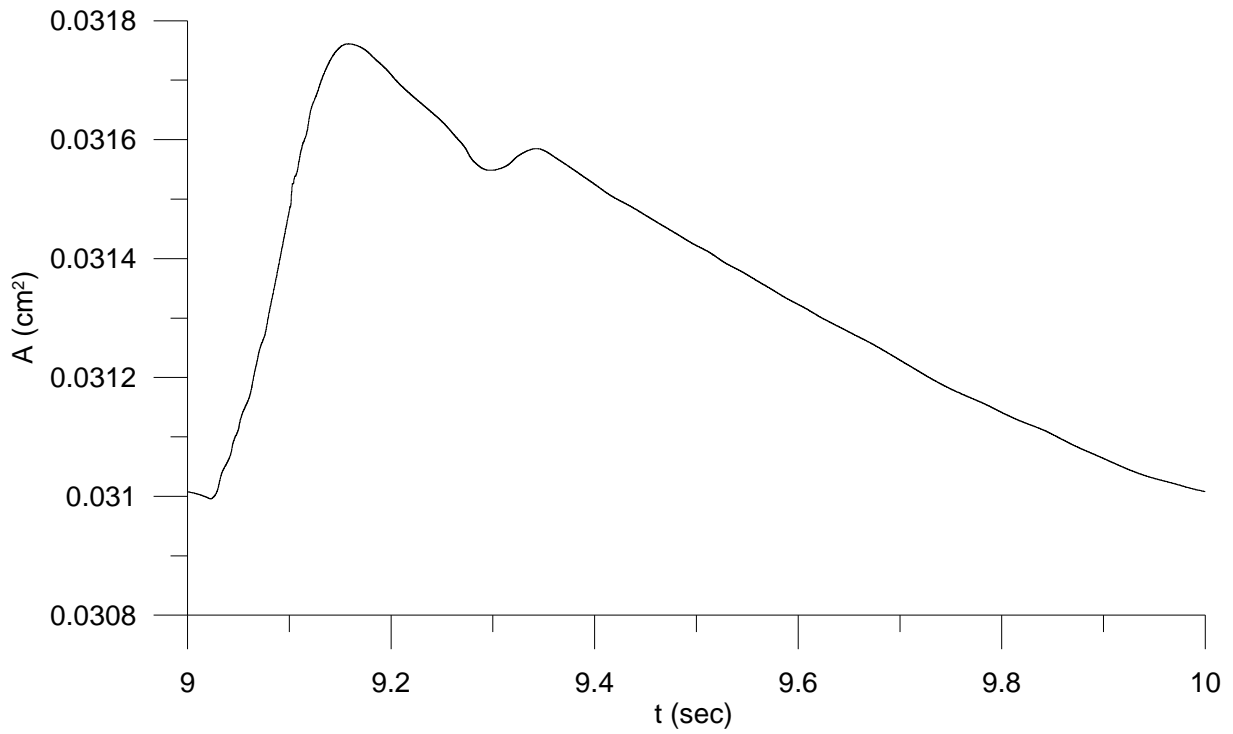


Σχήμα 4.107 Η διατομή στο μέσο του αγγείου 5

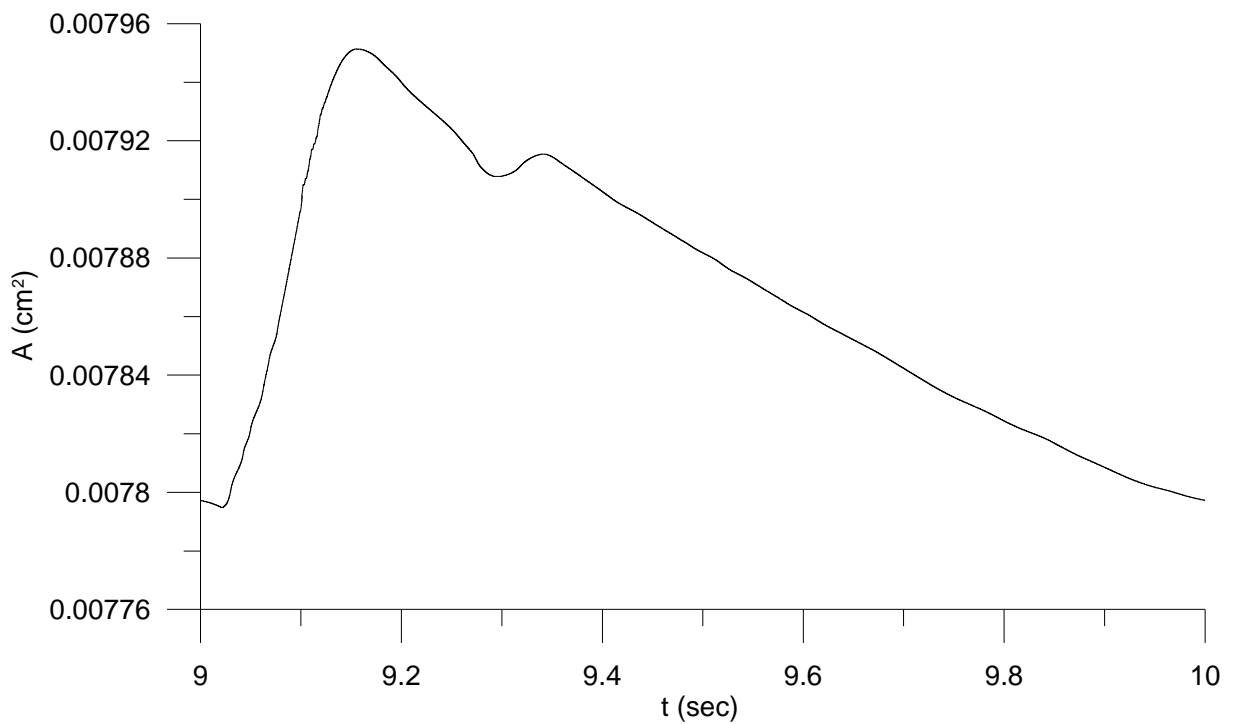


Σχήμα 4.108 Η διατομή στο μέσο του αγγείου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

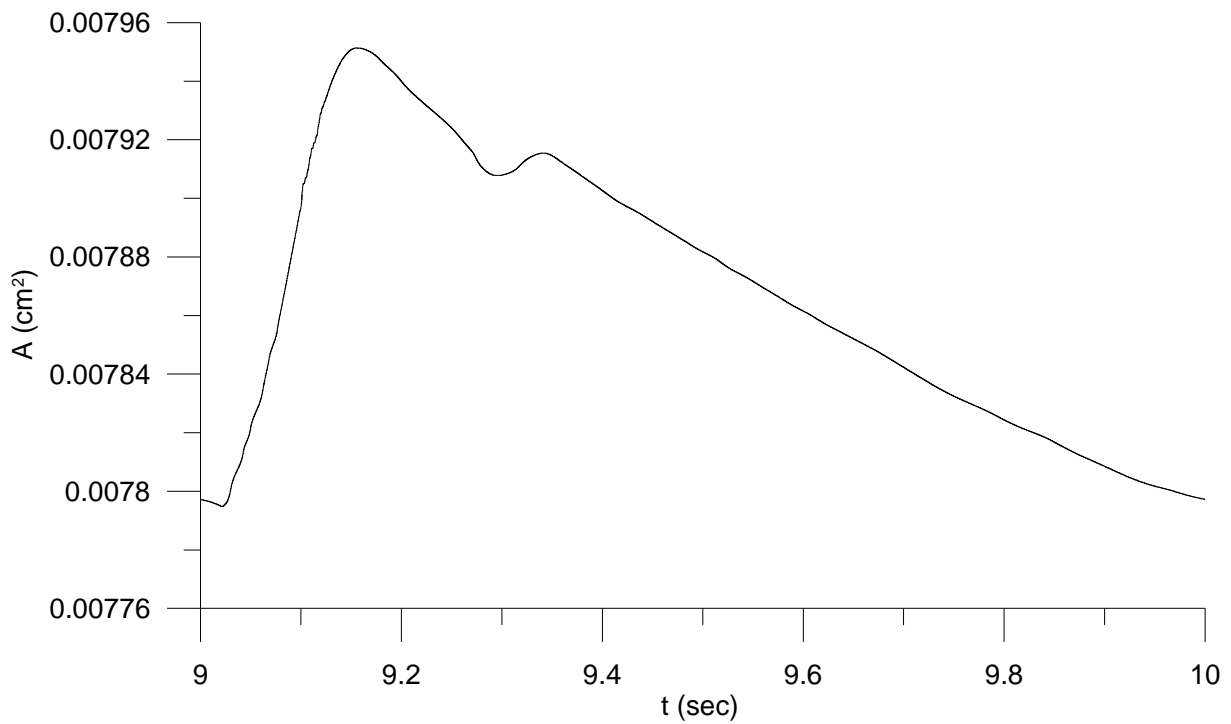


Σχήμα 4.109 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 7

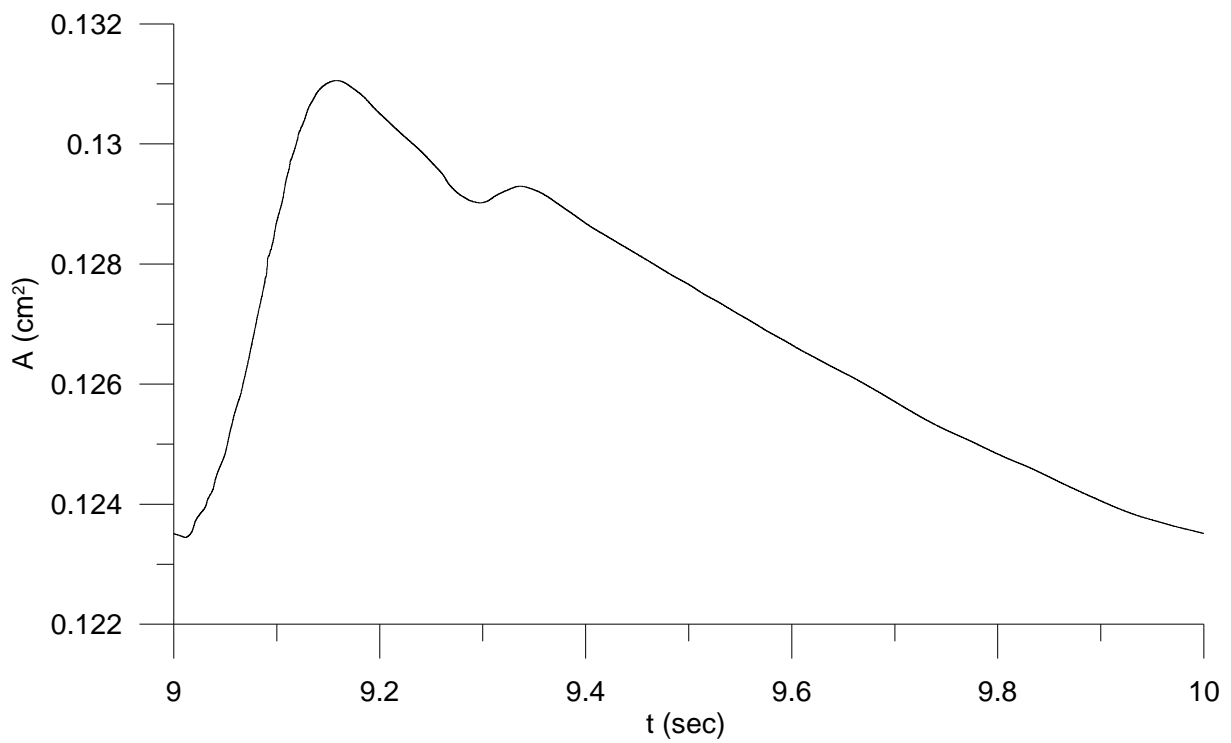


Σχήμα 4.110 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

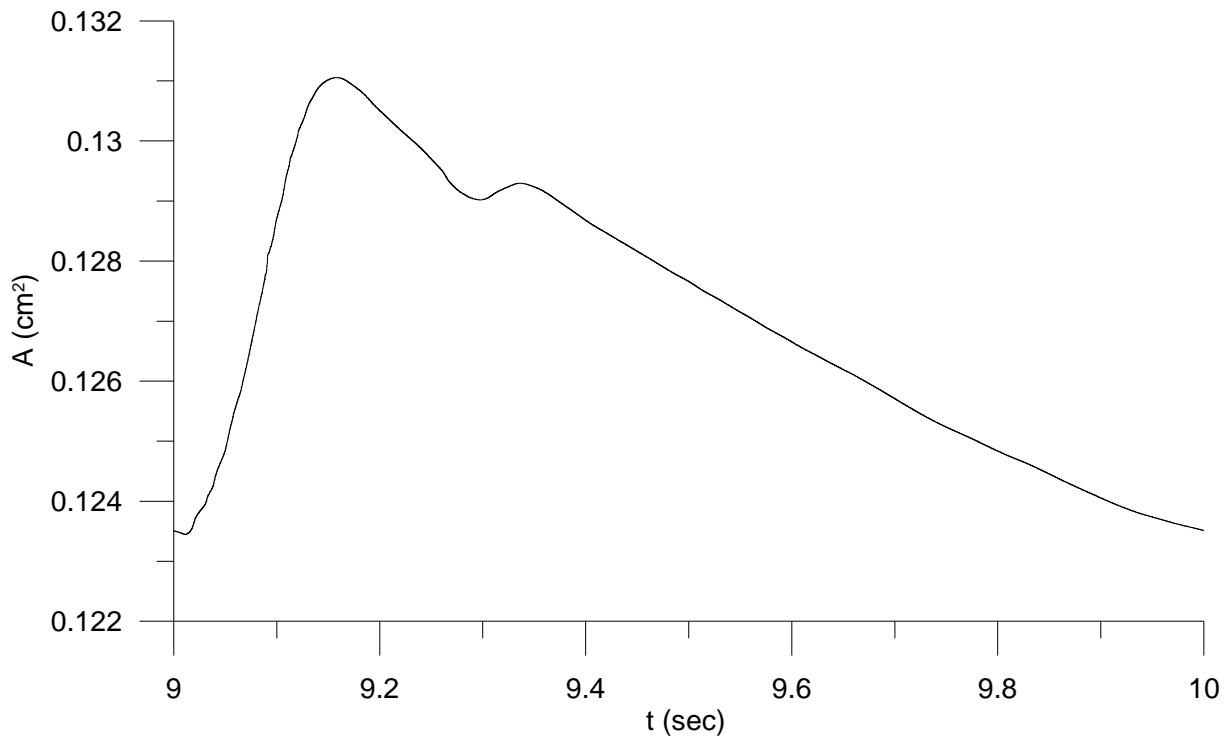


Σχήμα 4.111 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 9

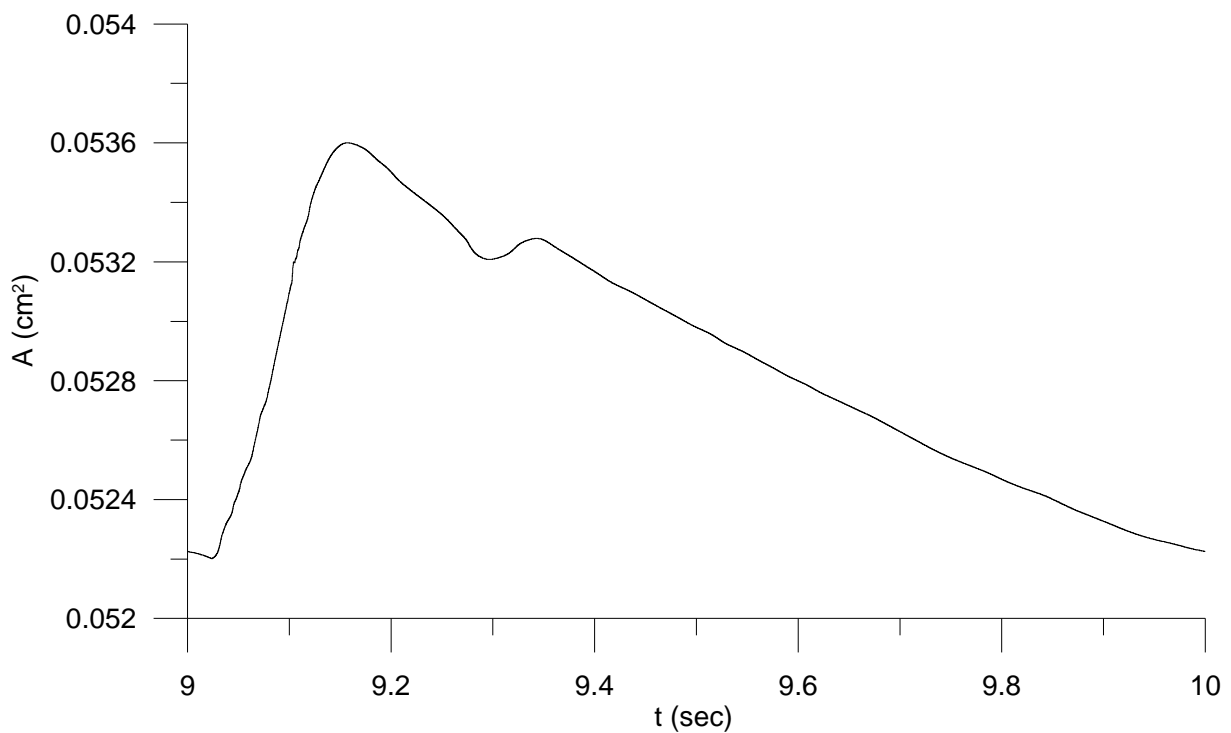


Σχήμα 4.112 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

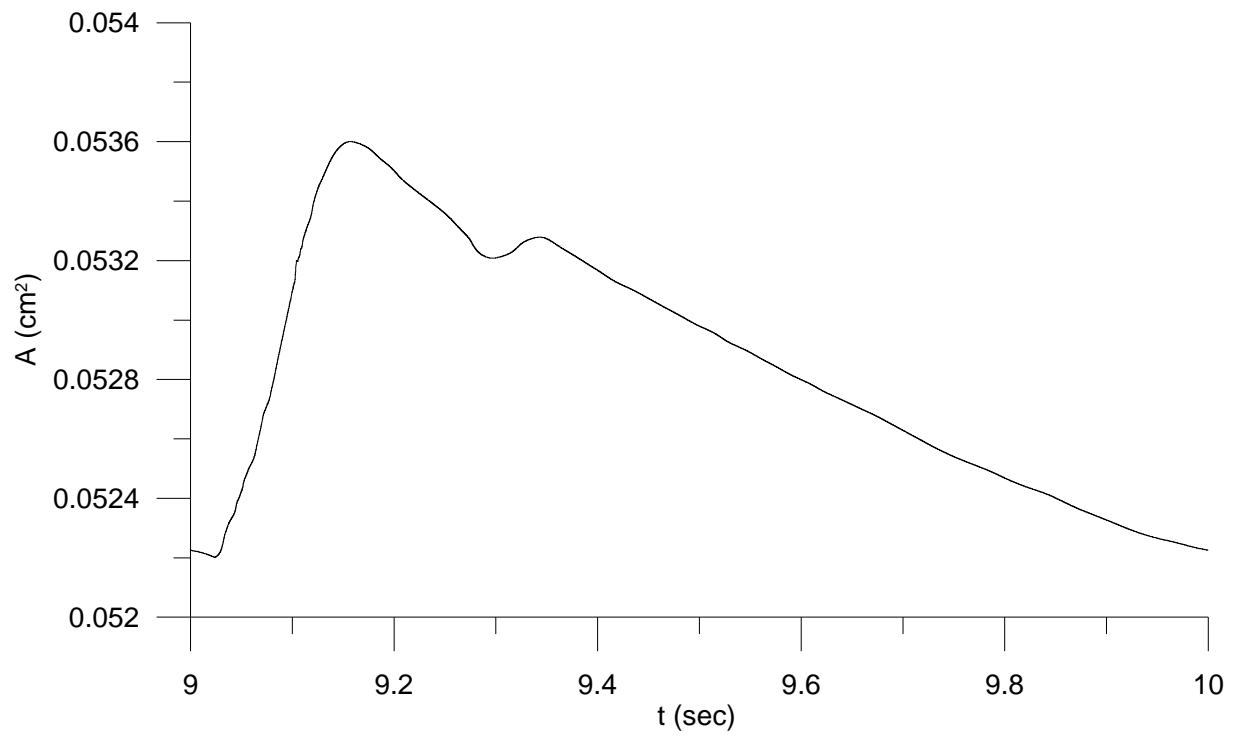


Σχήμα 4.113 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 11

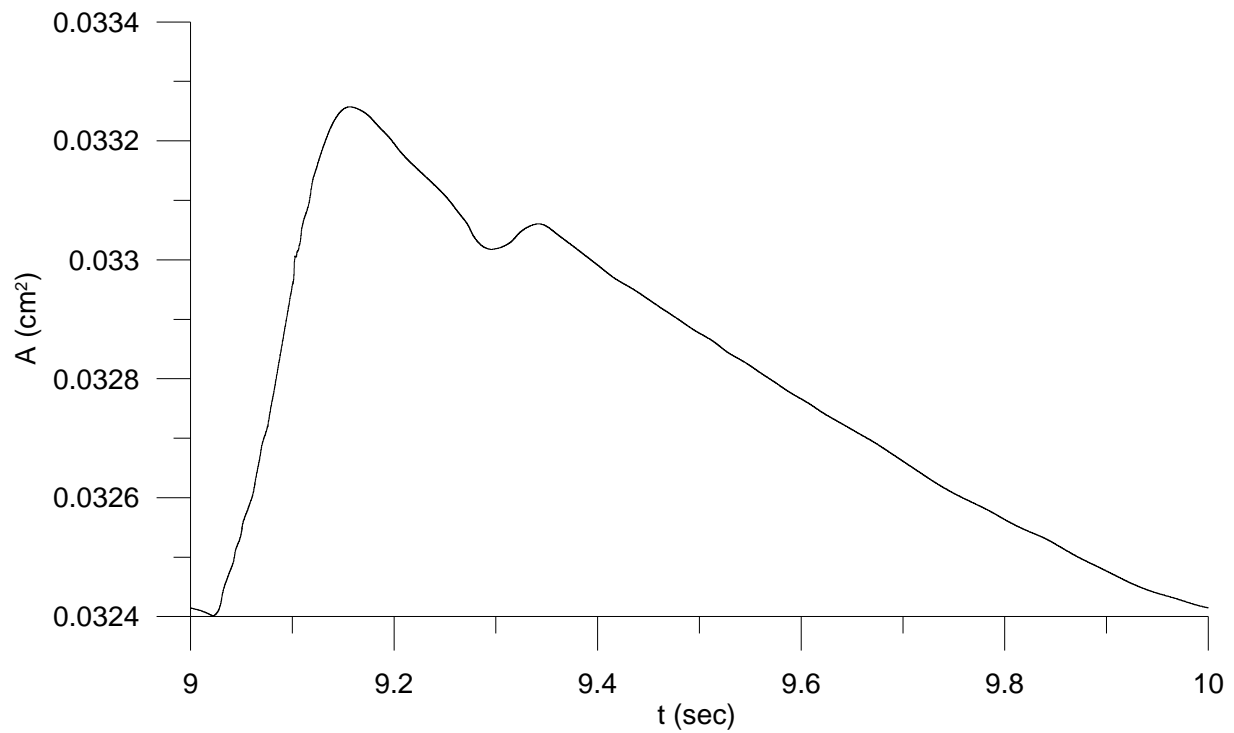


Σχήμα 4.114 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

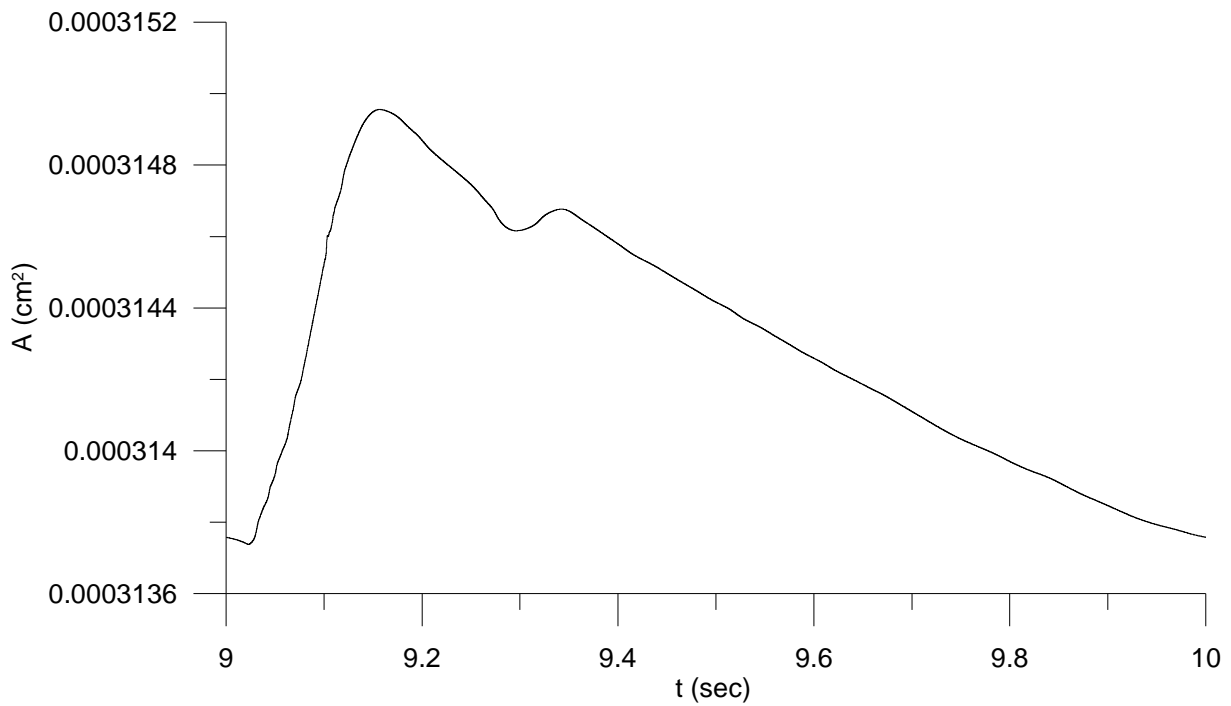


Σχήμα 4.115 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 13

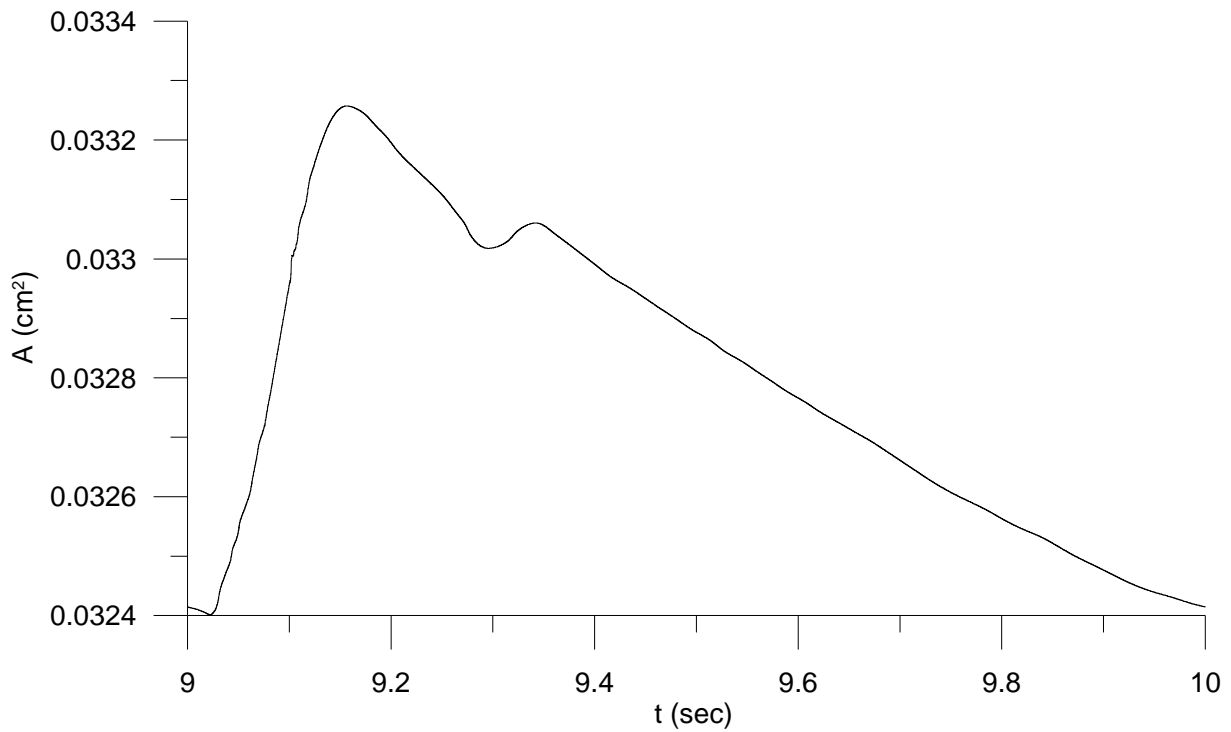


Σχήμα 4.116 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 14

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

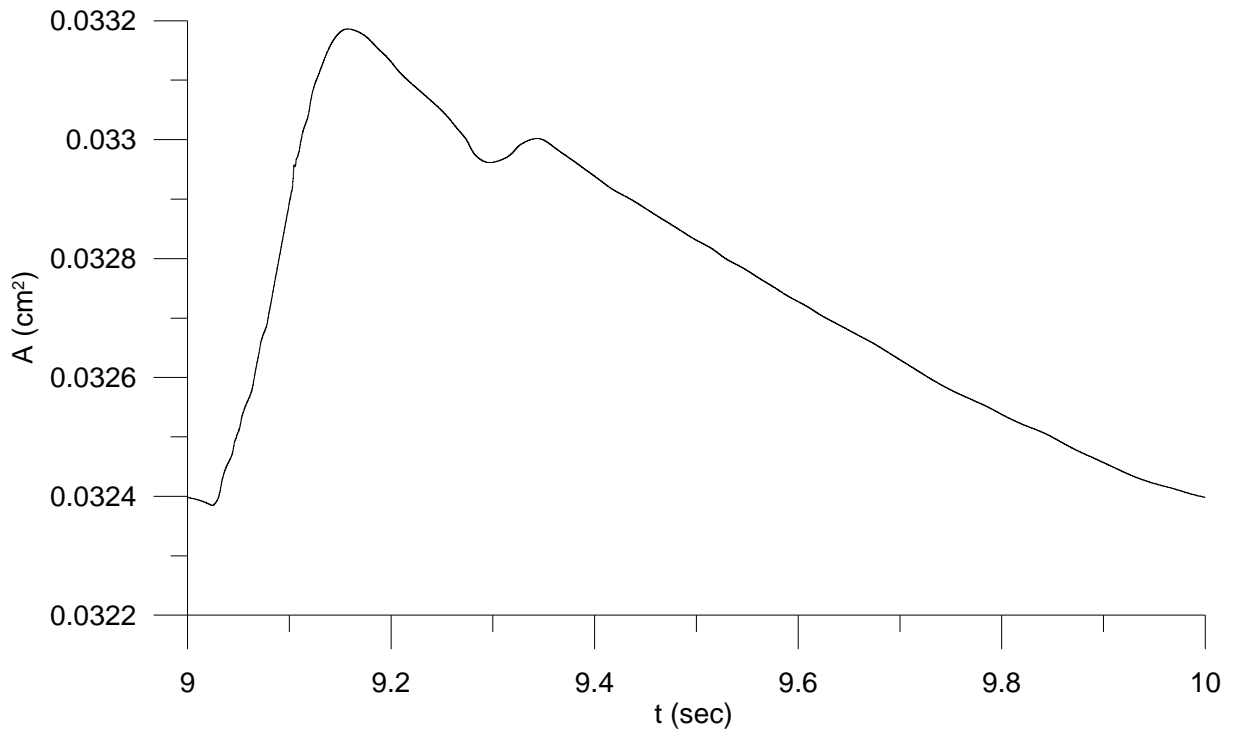


Σχήμα 4.117 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 15

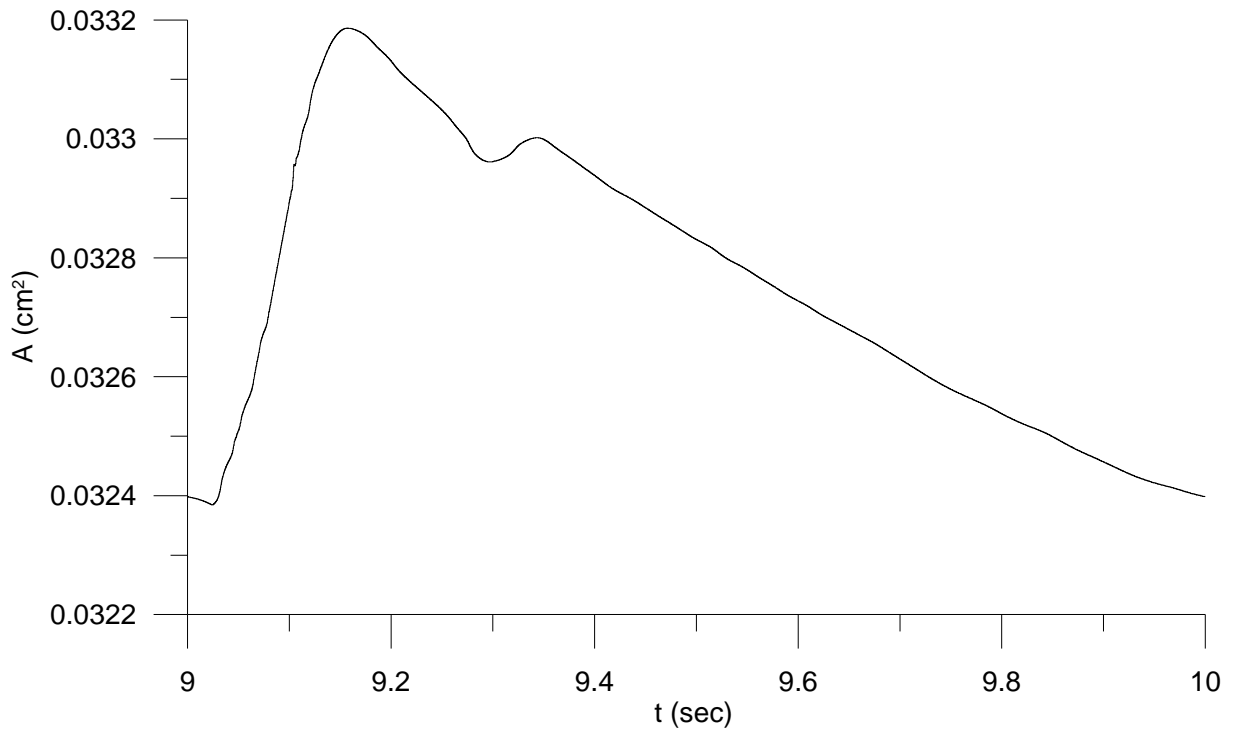


Σχήμα 4.118 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 16

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



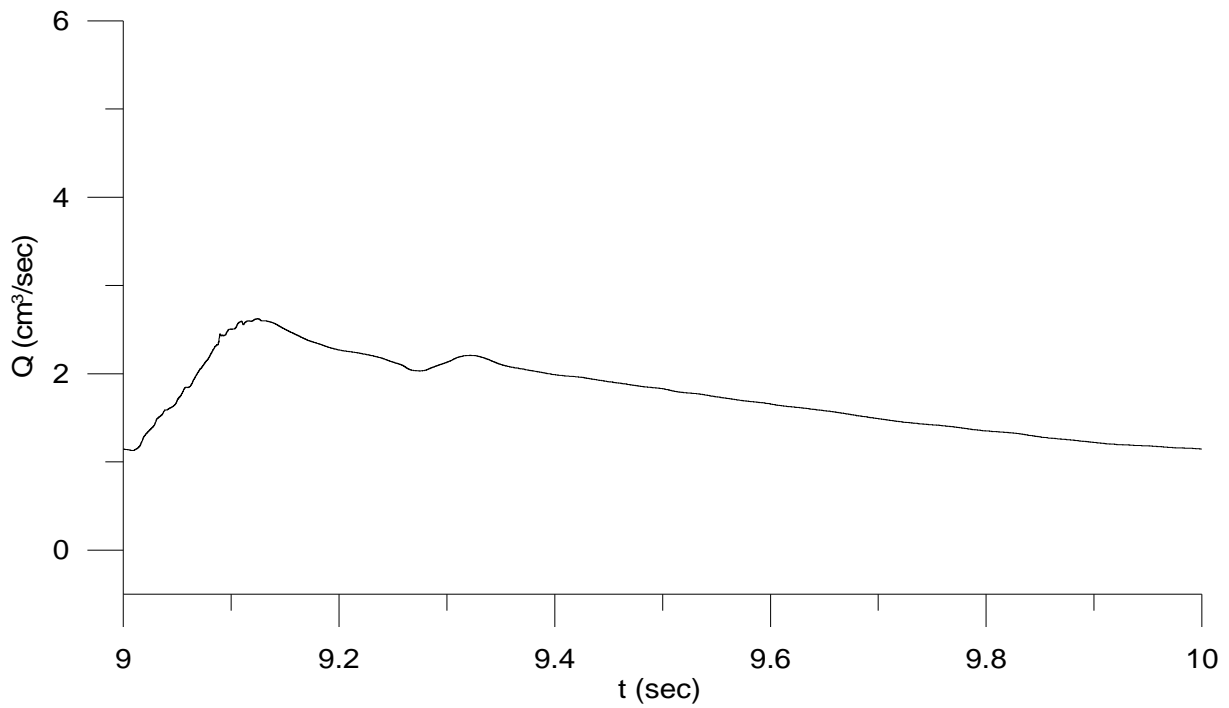
Σχήμα 4.119 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 17



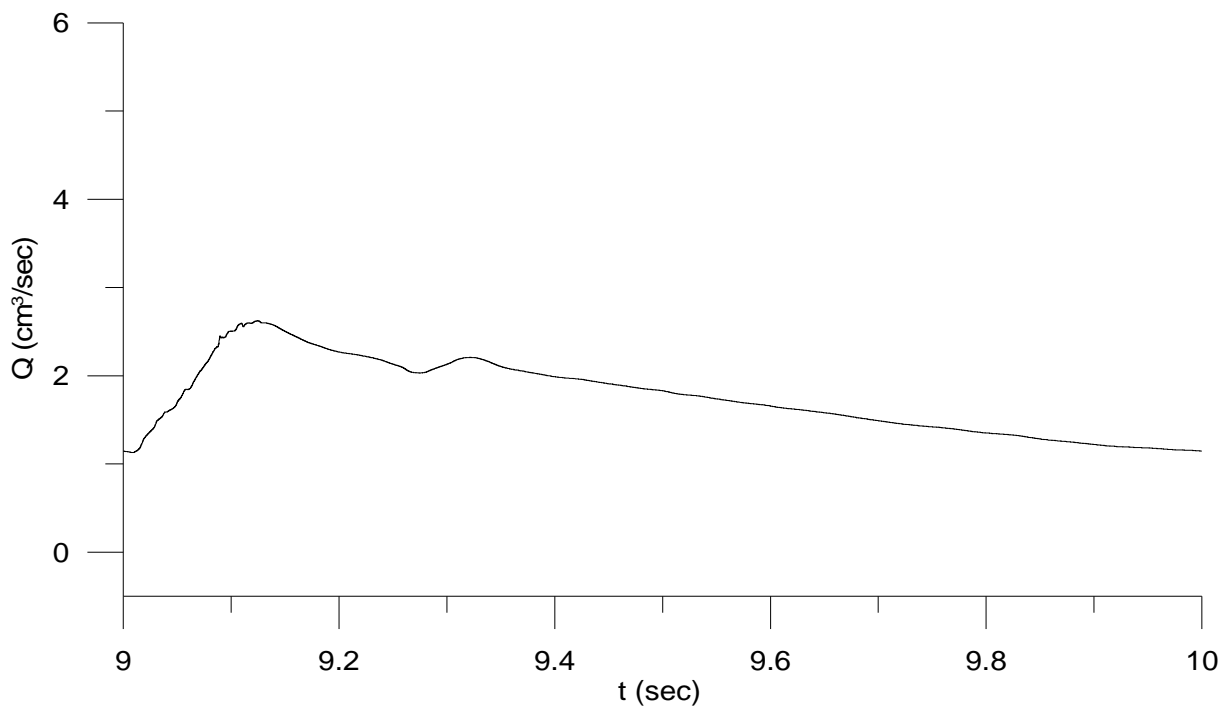
Σχήμα 4.120 Η διατομή στο μέσο του αγωγίου 18

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.7.4 Διαγράμματα παροχής όγκου

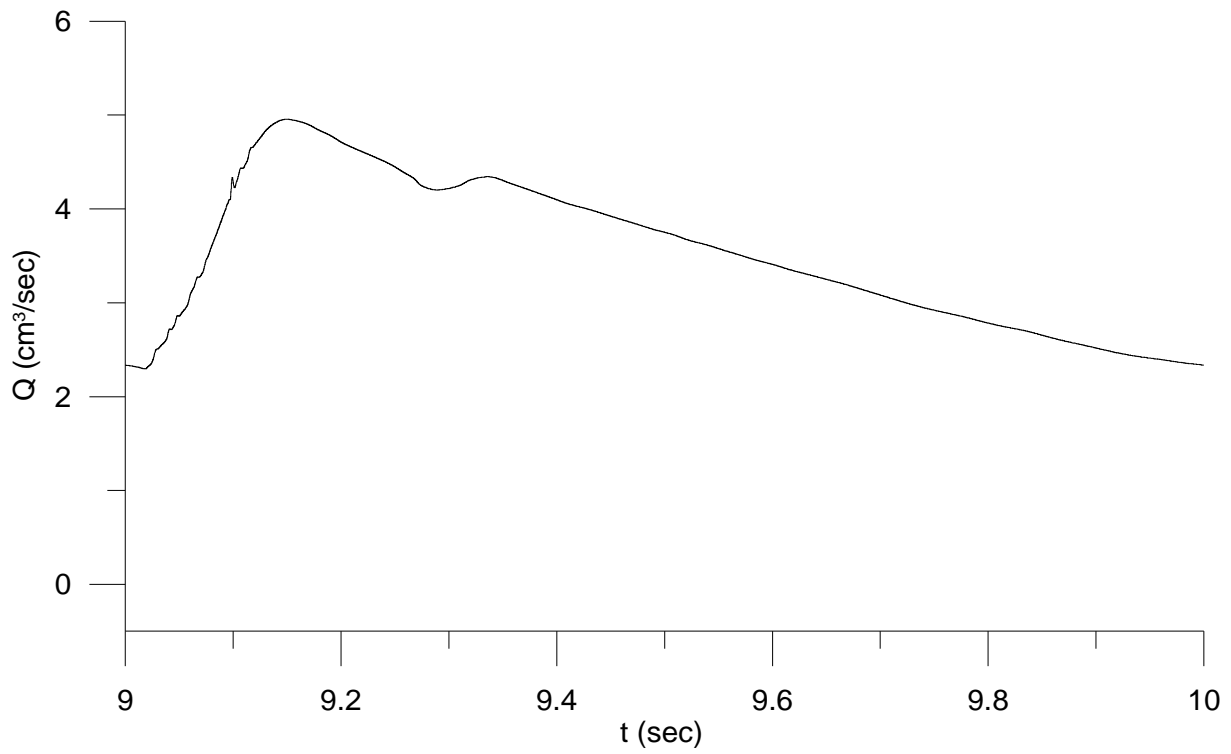


Σχήμα 4.121 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγού 1

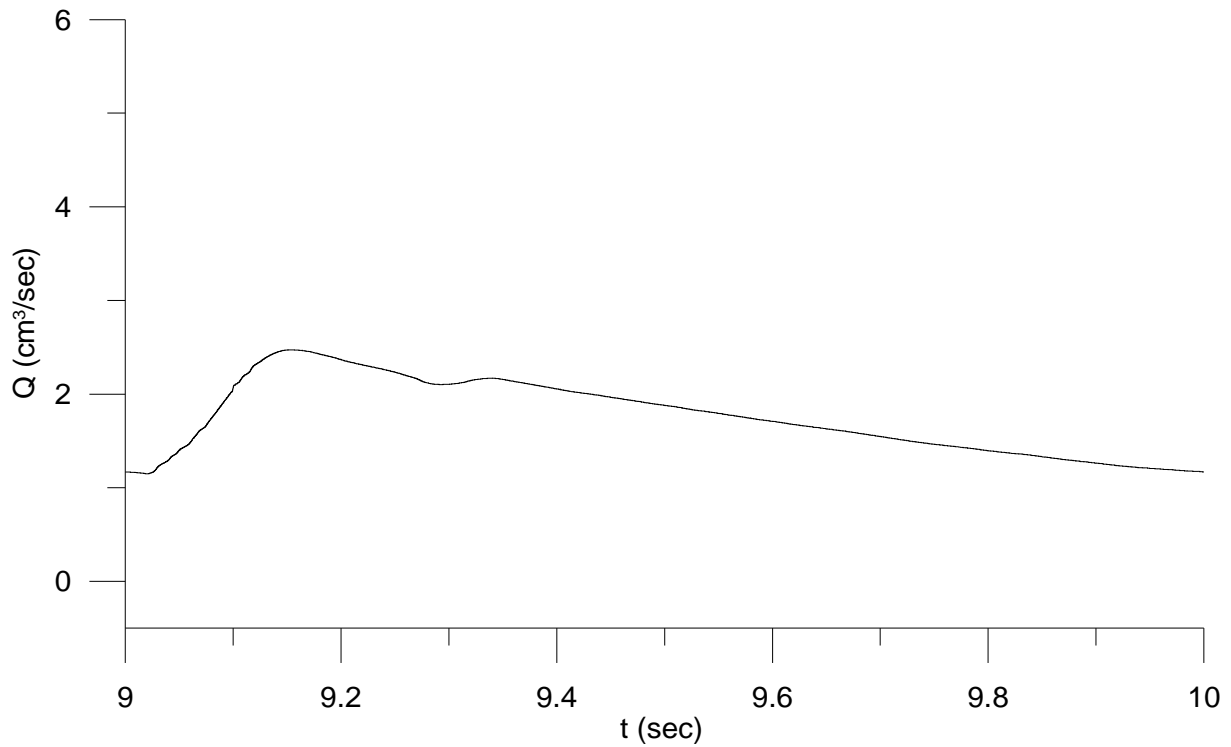


Σχήμα 4.122 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγού 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

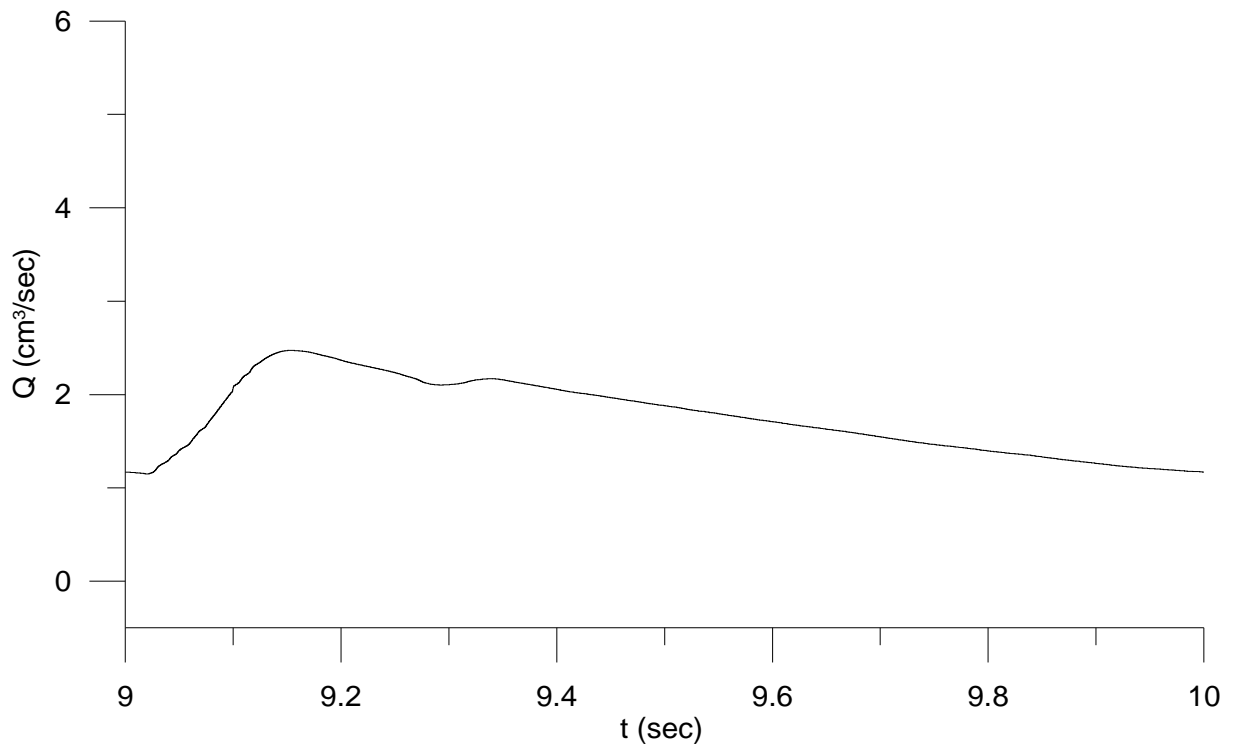


Σχήμα 4.123 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 3

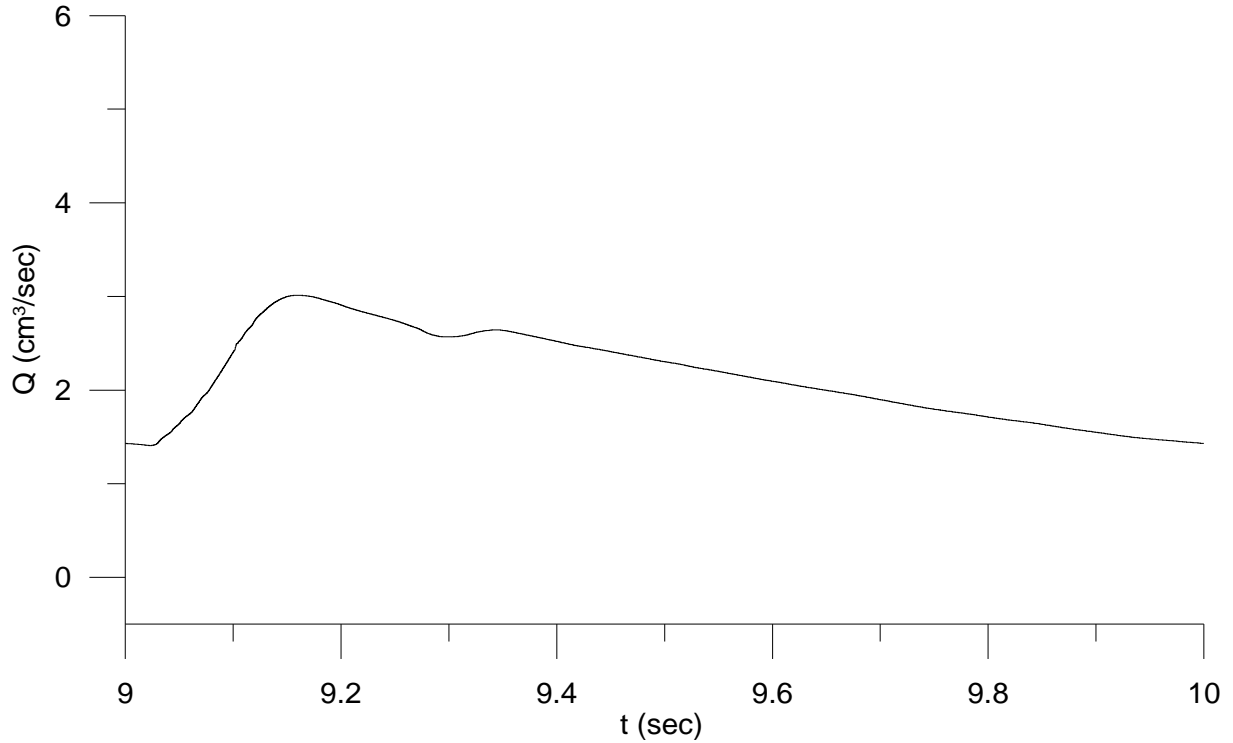


Σχήμα 4.124 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

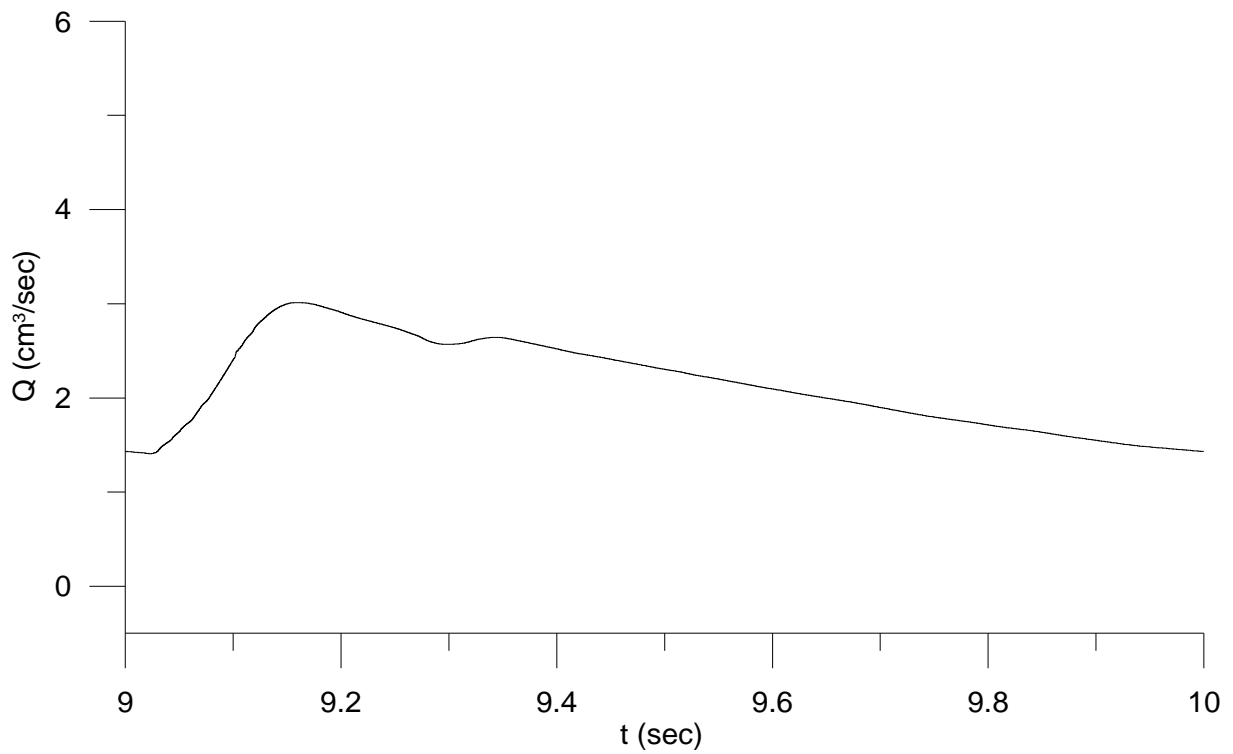


Σχήμα 4.125 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 5

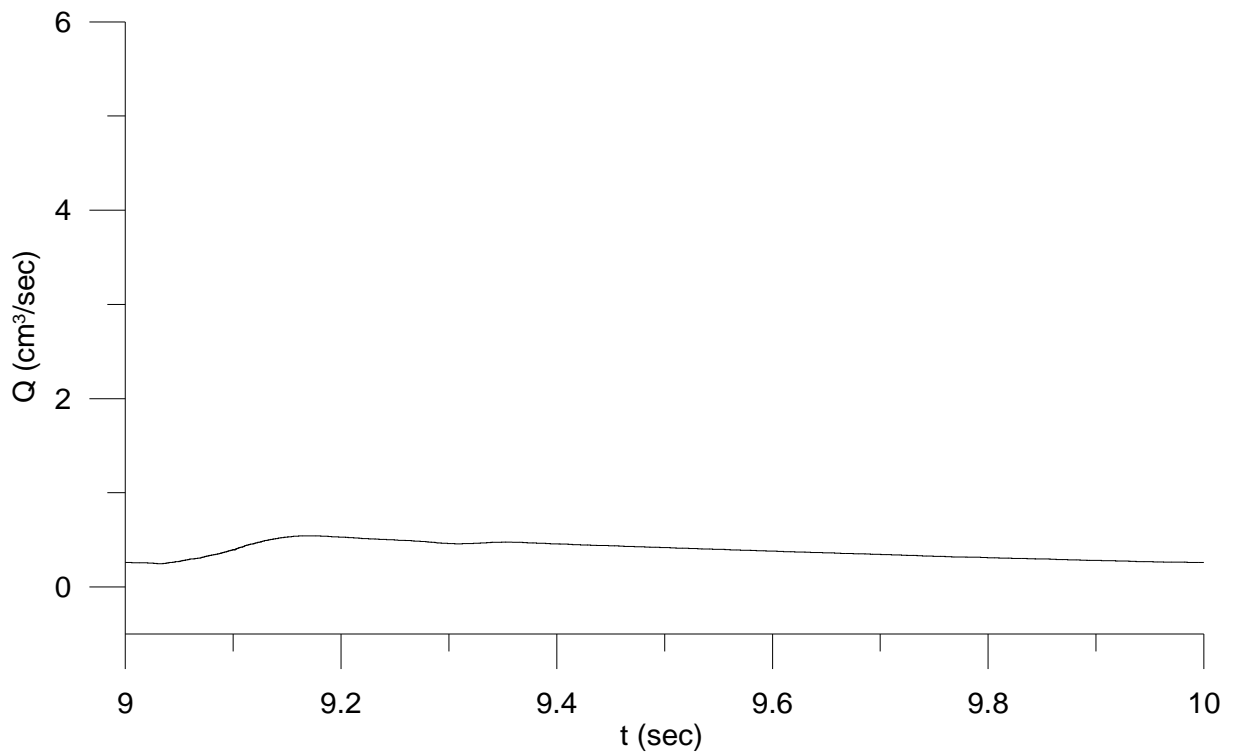


Σχήμα 4.126 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

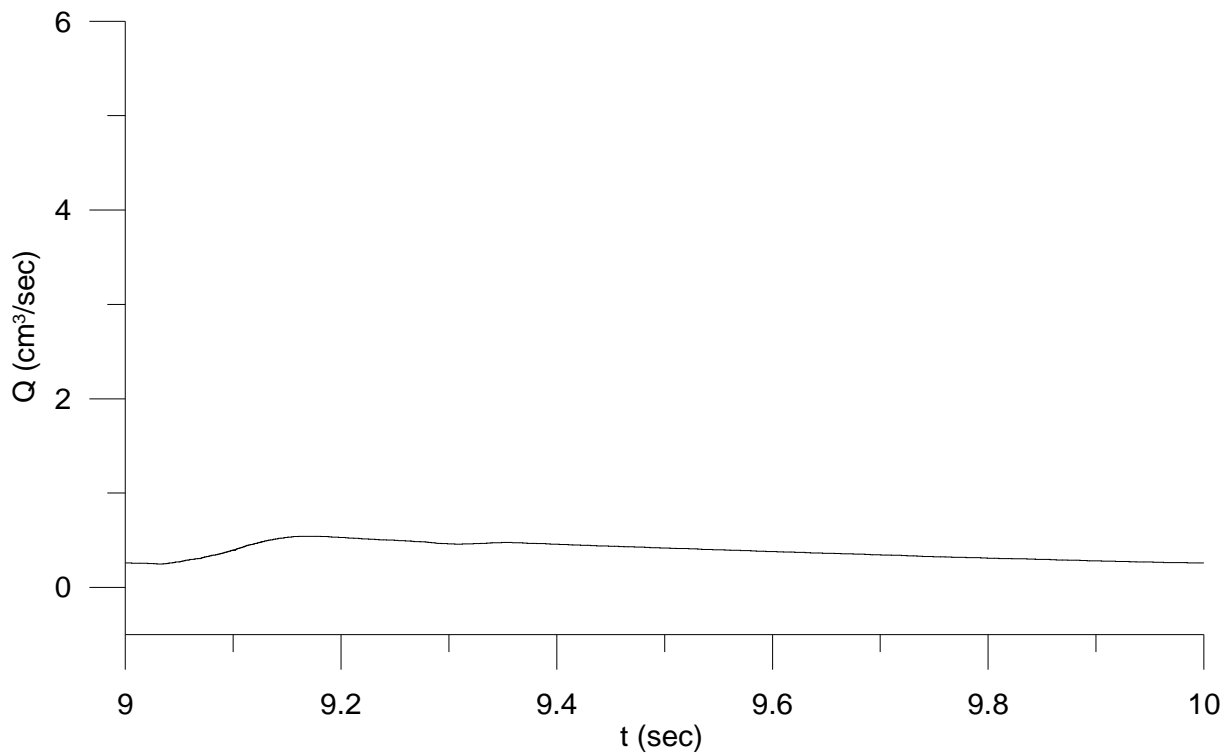


Σχήμα 4.127 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 7

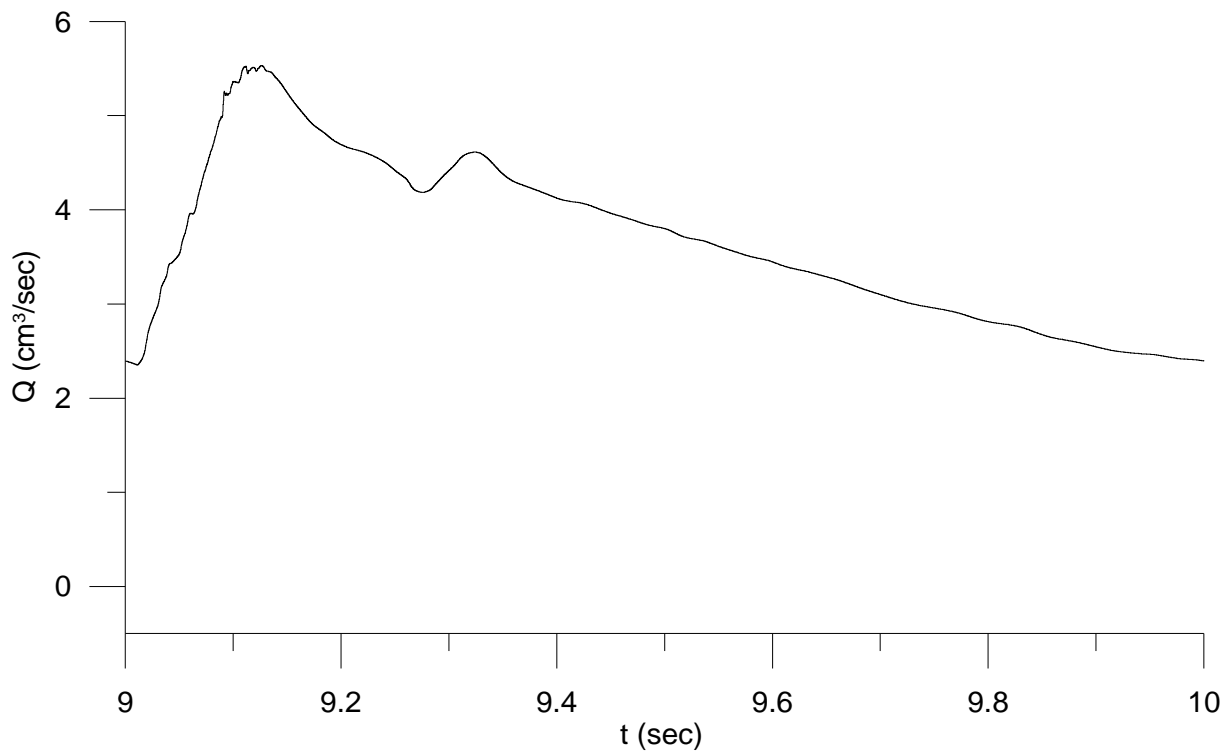


Σχήμα 4.128 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 8

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

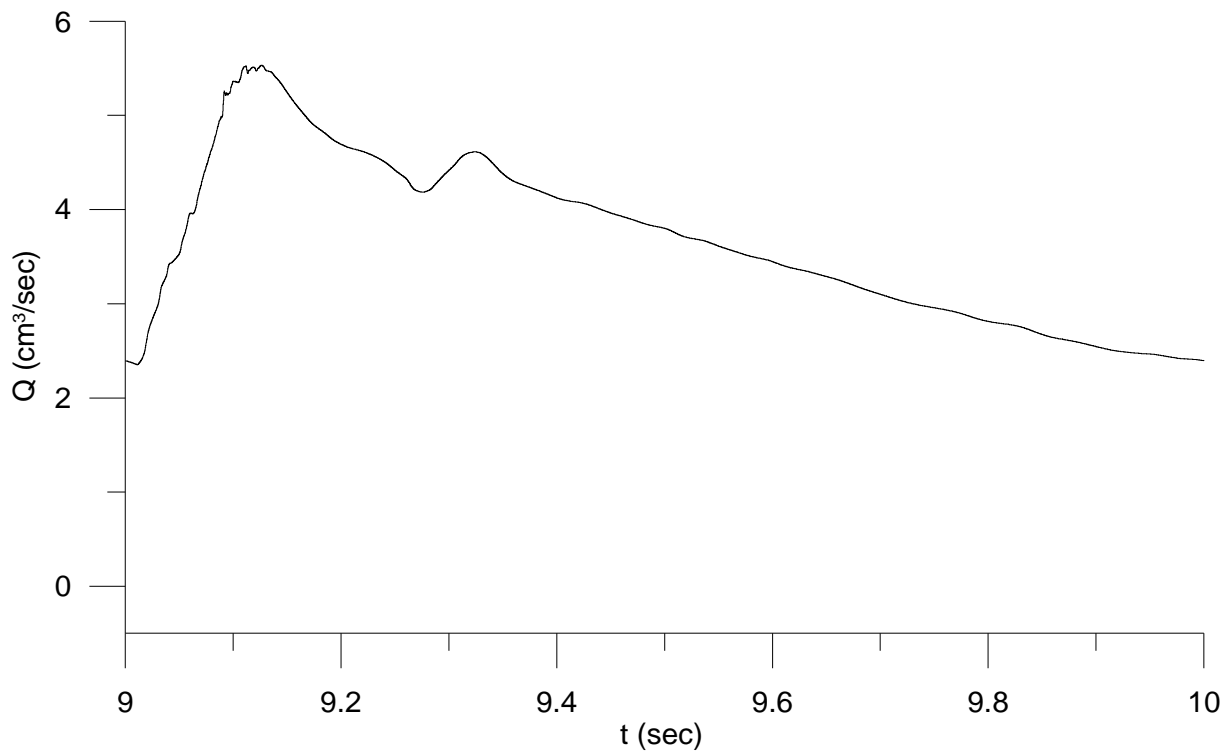


Σχήμα 4.129 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγείου 9

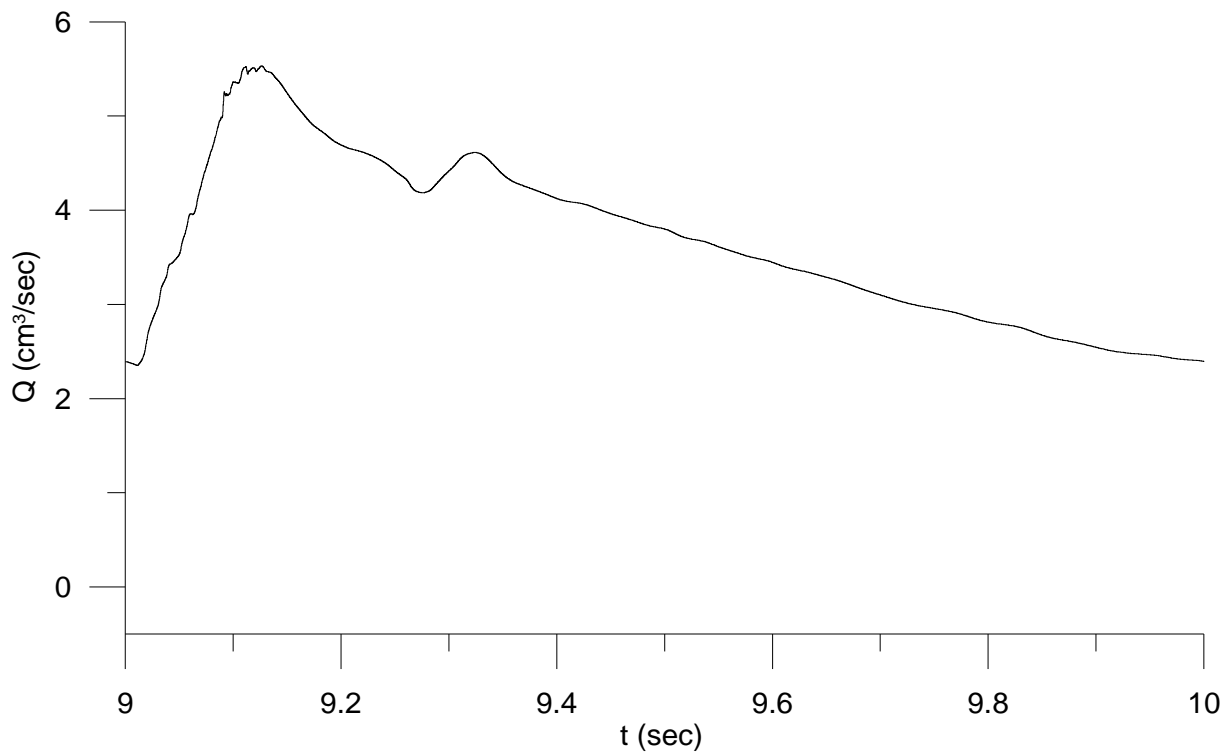


Σχήμα 4.130 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγείου 10

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

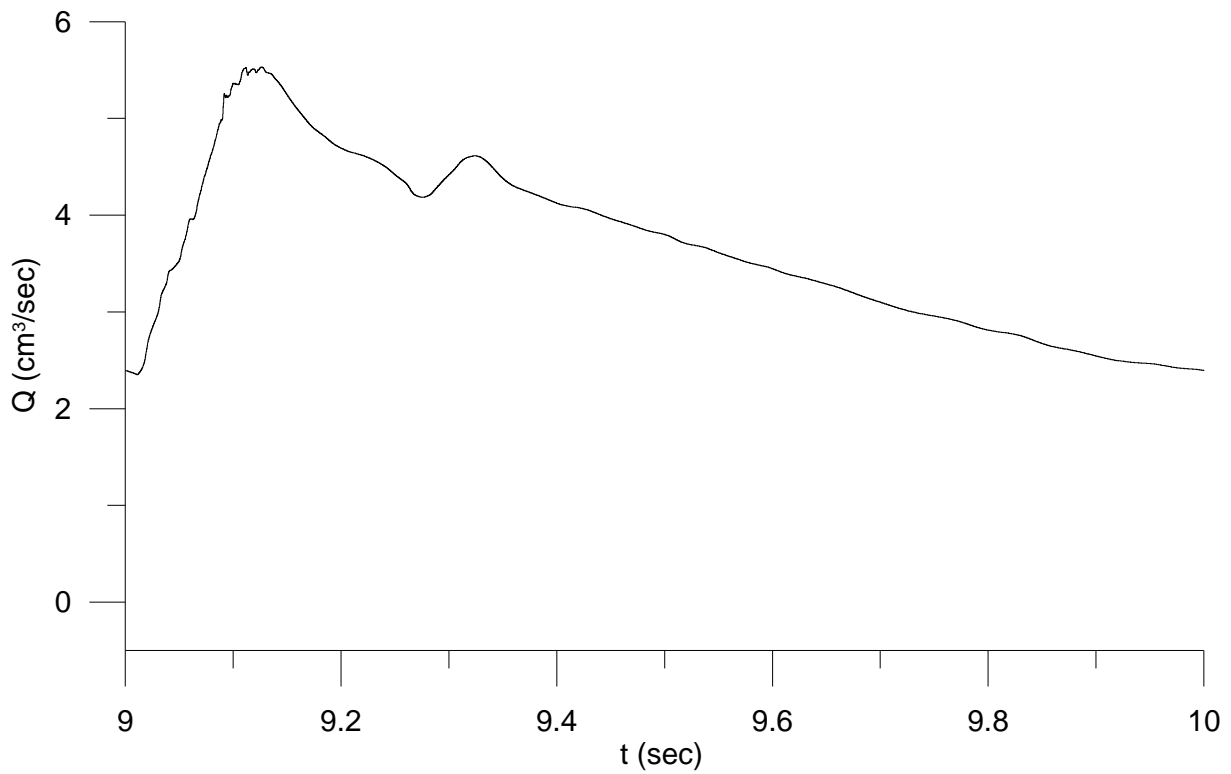


Σχήμα 4.131 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 11

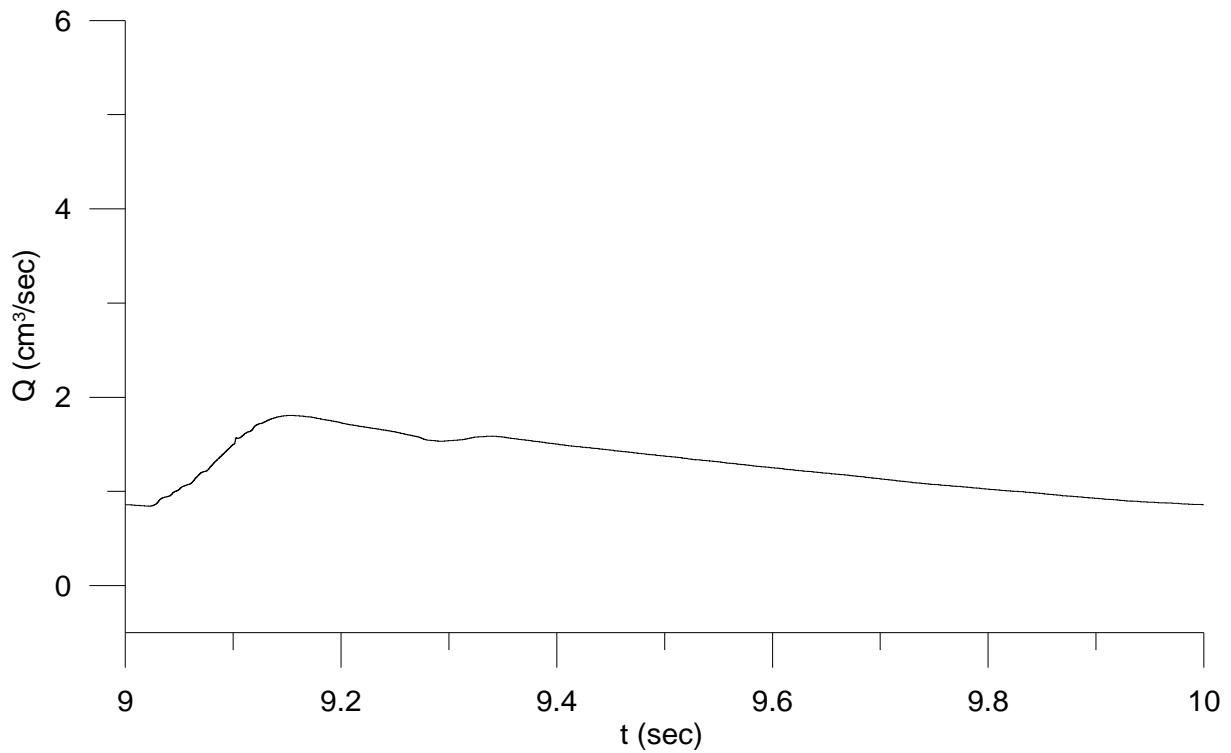


Σχήμα 4.132 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

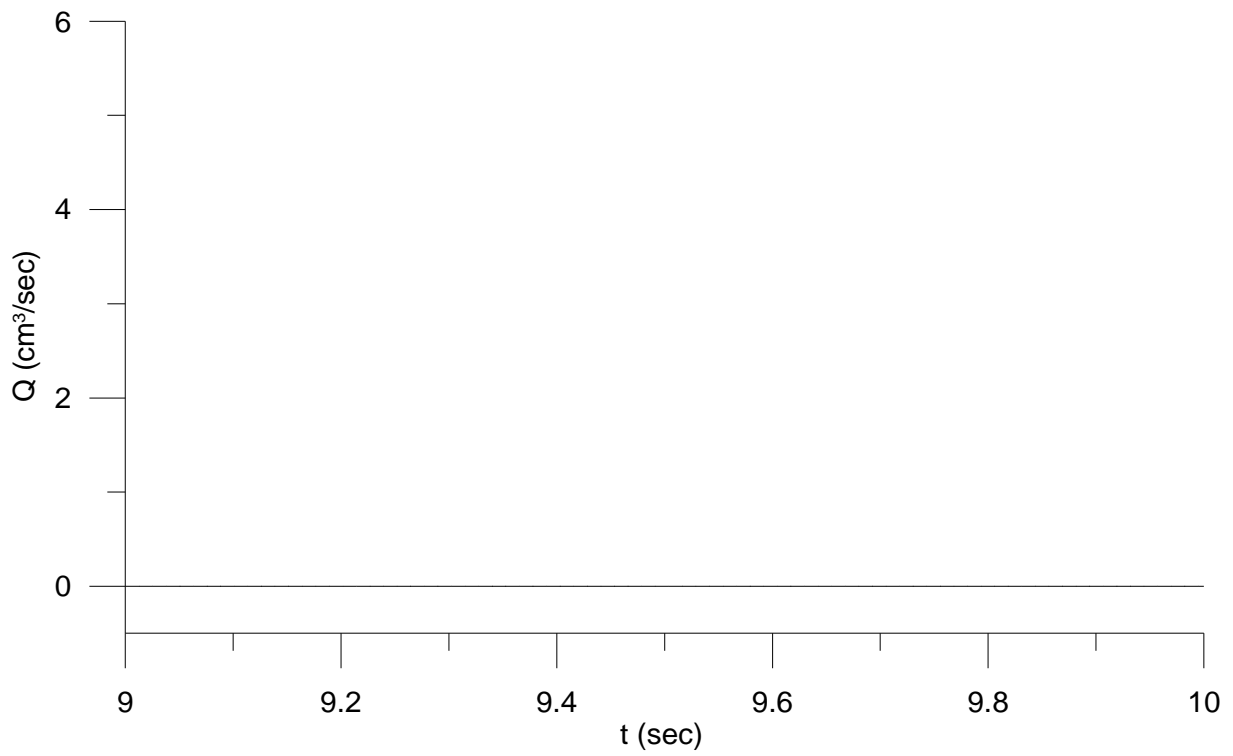


Σχήμα 4.133 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγείου 13

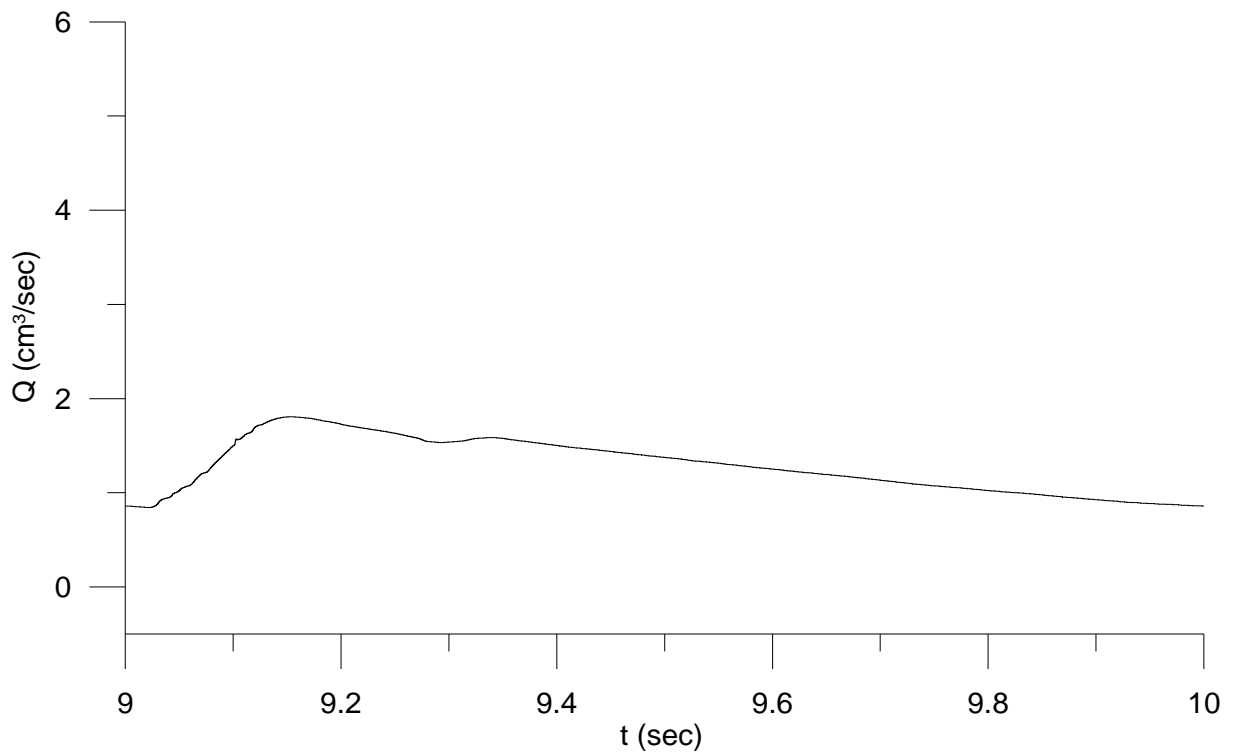


Σχήμα 4.134 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγείου 14

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

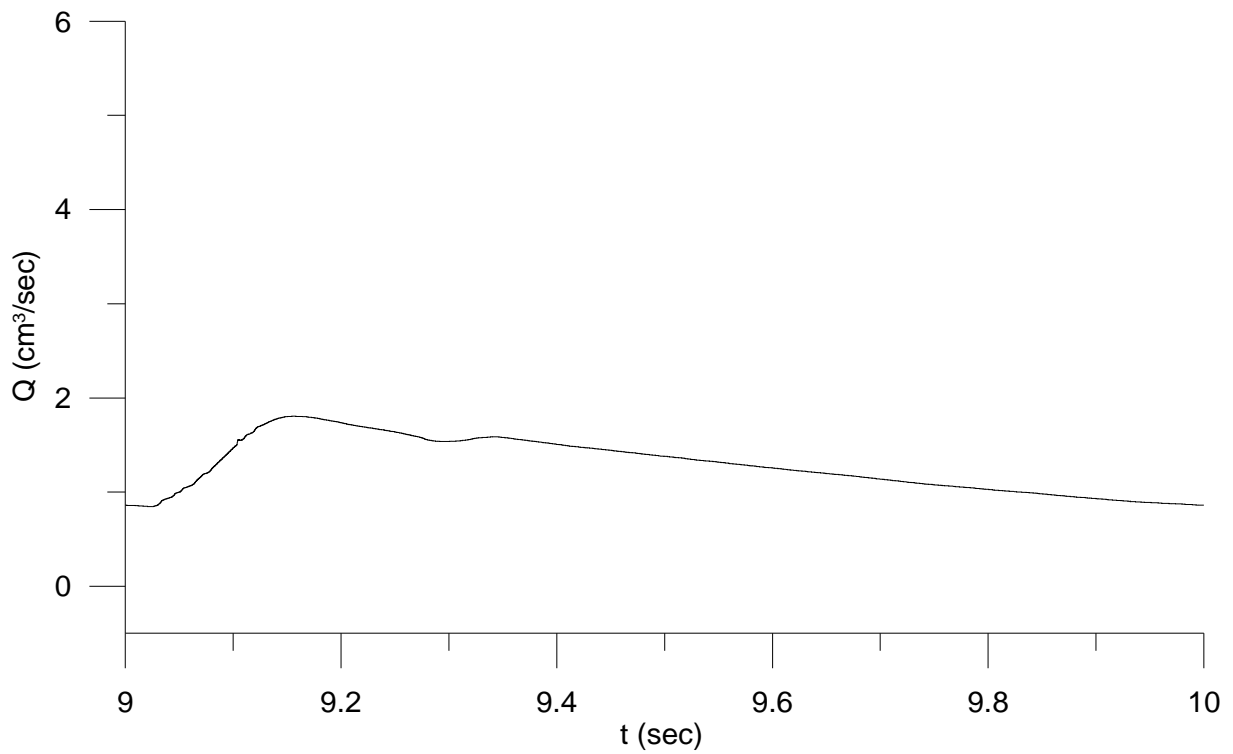


Σχήμα 4.135 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 15

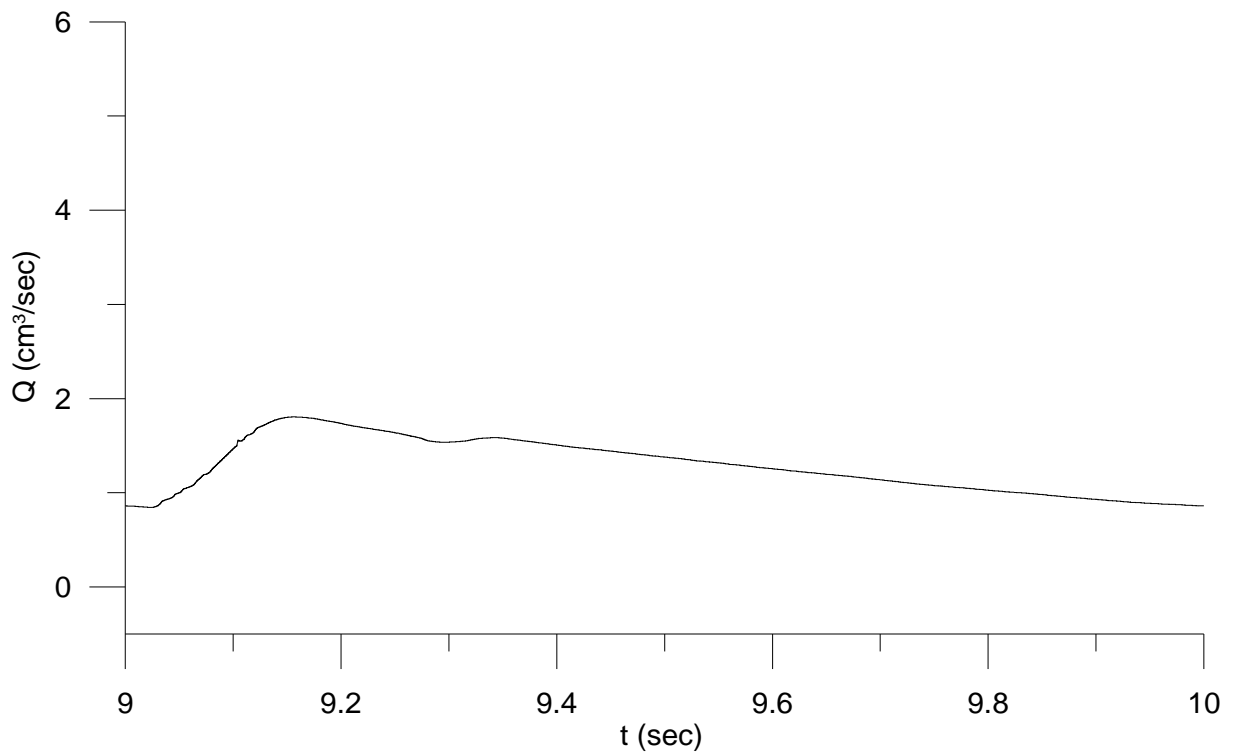


Σχήμα 4.136 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 16

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



Σχήμα 4.137 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 17



Σχήμα 4.138 Η παροχή όγκου στο μέσο του αγωγίου 18

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.4.8 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Στην συνέχεια ακολουθεί ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων, εστιάζοντας κυρίως στην παροχή όγκου, που είναι ο σημαντικότερος δείκτης για την σωστή λειτουργία του κυκλοφορικού συστήματος του εγκεφάλου. Η οξυγόνωση του εγκεφάλου θα πρέπει να είναι ικανή να συντηρήσει τις λειτουργίες του. Επομένως, θα πρέπει η παροχή αίματος προς τον εγκέφαλο να είναι σταθερή αλλά και η αιμάτωση να είναι ομοιόμορφη, ώστε όλες οι λειτουργίες που αναφέρονται σε συγκεκριμένα κέντρα του εγκεφάλου να επιτελούνται ικανοποιητικά και να μην προκαλείται υποξία.

- Η μορφή των καμπυλών διατομής είναι ίδια με αυτών της πίεσης για το ίδιο αγγείο καθώς διατομή και πίεση σχετίζονται μέσω μη-γραμμικής αλγεβρικής σχέσης.
- Οι μεγαλύτερες ταχύτητες παρατηρούνται στα αγγεία 6, 7 Οπίσθιες Εγκεφαλικές Αρτηρίες II (Posterior Cerebral Arteries II) και 4, 5 Οπίσθιες Εγκεφαλικές Αρτηρίες I (Posterior Cerebral Arteries I).
- Η ταχύτητα στο αγγείο 15 Πρόσθια Αναστομωτική Αρτηρία (Anterior Communicating Artery) είναι μηδενική λόγω συμμετρίας.
- Ομοίως δεν υπάρχει παροχή όγκου στην Πρόσθια Αναστομωτική Αρτηρία, όπως ήταν αναμενόμενο λόγω συμμετρίας.
- Παρατηρείται παρόμοια μορφή σε όλες τις καμπύλες παροχής όγκου για τα απαγωγά αγγεία.
- Η μέση παροχή όγκου στα απαγωγά αγγεία παρουσιάζει διαφορές. Η μεγαλύτερη παροχή εμφανίζεται στις Οπίσθιες Εγκεφαλικές Αρτηρίες II (Posterior Cerebral Arteries II), ακολουθούν οι Μέσες Εγκεφαλικές Αρτηρίες (Middle Cerebral Arteries) και τέλος η μικρότερη παροχή παρουσιάζεται στις Πρόσθιες Εγκεφαλικές Αρτηρίες II (Anterior Cerebral Arteries II).
- Οι τιμές των παροχών βρίσκονται σε φυσιολογικά όρια, μετά από σύγκριση με τις μέσες τιμές που παρουσιάζονται σε *in vivo* (επεμβατικές) μετρήσεις για τα απαγωγά και προσαγωγά αγγεία [Fahrig et al, 1999].

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

	Fahrig	Διπλωματική	(%)
ACA	1,8	1,3	-28
MCA	2,3	2,0	-13
PCA	1,2	2,1	75
ICA	3,9	3,7	-5
VA	1,3	1,7	31

Πίνακας 4.3 Μέσες παροχές για τα απαγωγά και προσαγωγά αγγεία

- Η παροχή στις Αναστομωτικές Αρτηρίες είναι περίπου 2 φορές μικρότερη από την παροχή στα απαγωγά αγγεία, πράγμα που δείχνει πως ο ρόλος τους είναι περιορισμένος σε υγιείς και χωρίς ελλείψεις σε αγγεία κύκλους του Willis.
- Σε περίπτωση έλλειψης ή δυσπλασίας μίας από τις αρτηρίες Πρόσθια Εγκεφαλική I και Οπίσθια Εγκεφαλική I, οι Αναστομωτικές Αρτηρίες είναι οι μόνοι δυνατοί δρόμοι προς τα απαγωγά αγγεία. Σε τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζουν αυξημένη παροχή.
- Δεν παρατηρούνται διαφορές ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις για όλα τα μεγέθη (P, A, V, Q) μεταξύ των συμμετρικών αρτηριών, πράγμα αναμενόμενο λόγω της συμμετρίας της γεωμετρίας και των συνοριακών συνθηκών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα παρατίθεται το διάγραμμα ροής του κώδικα που επιλύει τον κύκλο του Willis. Αρχικά ορίζονται τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα ροής.

Ορισμός συμβόλων

N0	: πλήθος αγγείων
DXD	: διαστατό χωρικό βήμα
DTD	: διαστατό χρονικό βήμα
NT	: πλήθος επαναλήψεων
NY	: πλήθος επαναλήψεων χωρίς τύπωση αποτελεσμάτων
VIS	: κινηματική συνεκτικότητα
DENS	: πυκνότητα
PR	: λόγος Poisson
TP	: περίοδος παλμού πίεσης
P0	: εξωτερική πίεση
NTOT	: πλήθος συντελεστών fourier
PV0	: πίεση στην είσοδο του φλεβικού συστήματος
NA	: αύξων αριθμός αγγείου
ZL	: μήκος αγγείου
D	: διάμετρος αγγείου

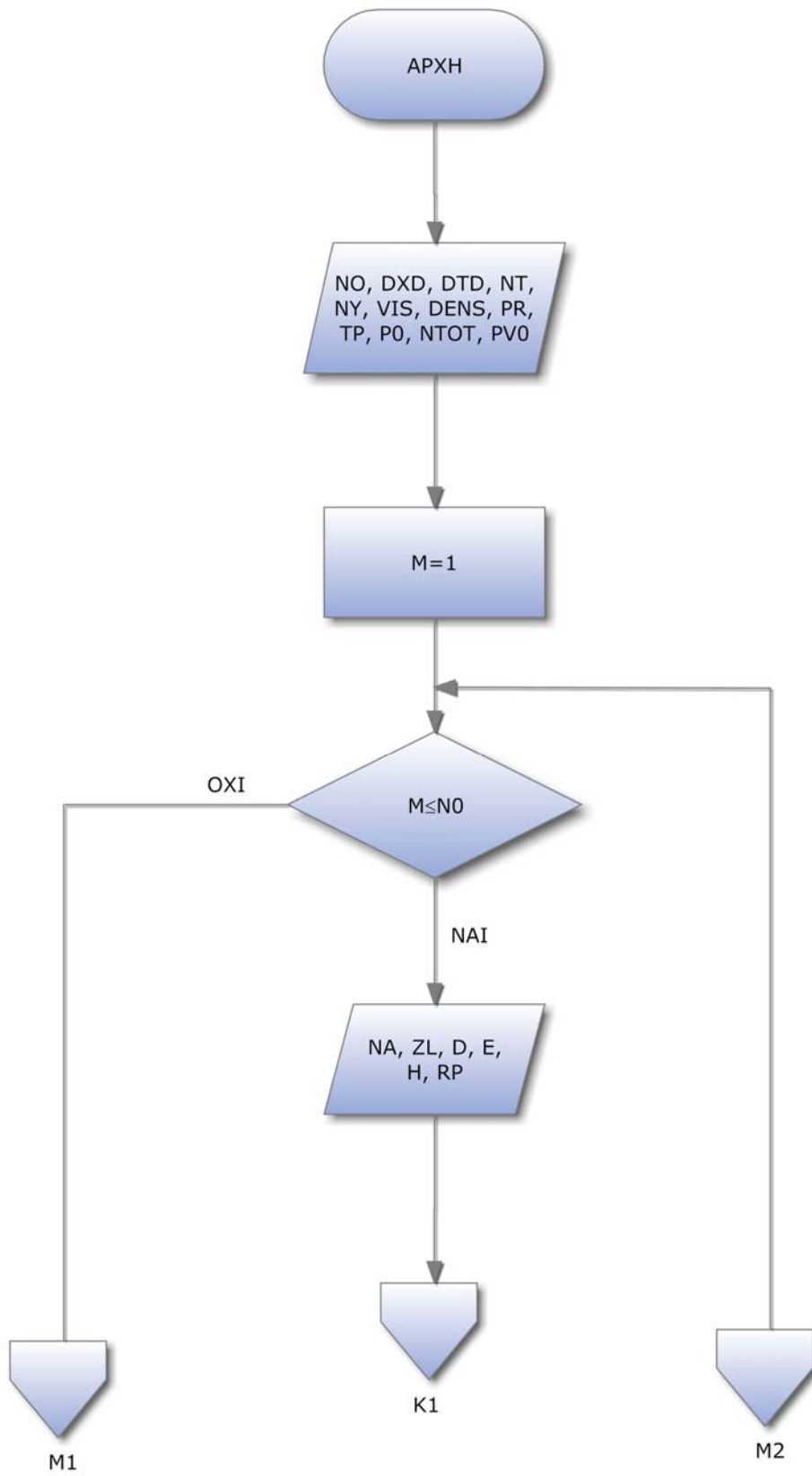
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

E	: μέτρο ελαστικότητας αγγείου
H	: πάχος τοιχώματος αγγείου
RP	: περιφερειακή αντίσταση (για τα τερματικά αγγεία)
R0	: ακτίνα αγγείου
A0	: διατομή αγγείου
β_0	: παράμετρος
C0	: αρχική ταχύτητα διάδοσης αγγείου
K	: πλήθος χωρικών κόμβων αγγείου
DX	: αδιάστατο χωρικό βήμα
DT	: αδιάστατο χρονικό βήμα
R	: λόγος αδιάστατου χρονικού βήματος προς χωρικό βήμα
AP	: πίεση αδιαστατοποίησης
CA	: ταχύτητα αδιαστατοποίησης
AA	: διατομή αδιαστατοποίησης
ALA	: μήκος αδιαστατοποίησης
δ	: παράμετρος δ
Re	: αδιάστατος αριθμός Re
PV0A	: αδιαστατοποιημένη πίεση στην είσοδο του φλεβικού συστήματος
P00	: αδιαστατοποιημένη πίεση (αρχική πίεση σε όλο το μήκος των αγγείων)
V00	: αδιαστατοποιημένη ταχύτητα (αρχική ταχύτητα σε όλο το μήκος των αγγείων)
A00	: αδιαστατοποιημένη διατομή (αρχική διατομή σε όλο το μήκος των αγγείων)

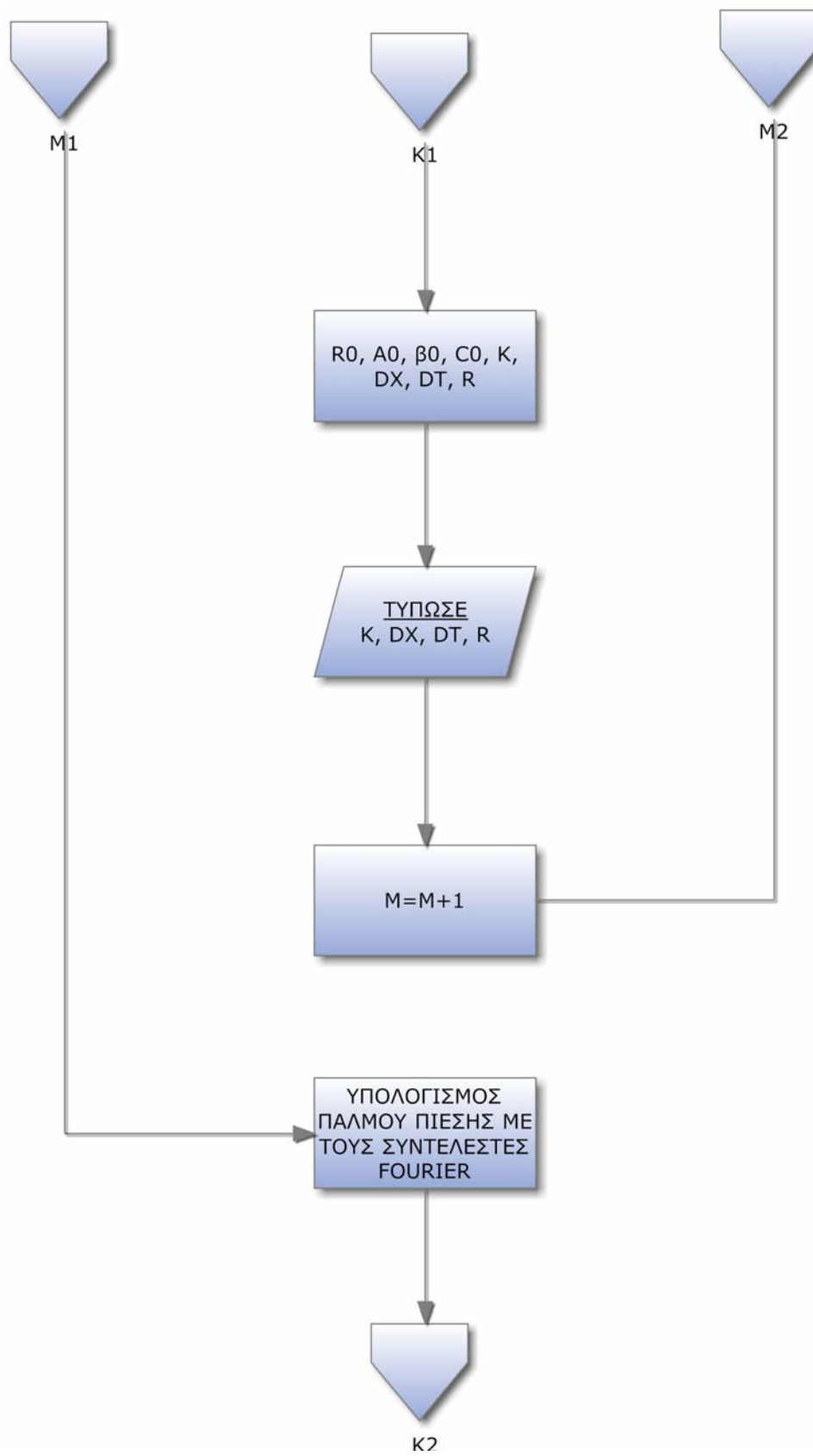
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A	: αδιαστατοποιημένη διατομή
P	: αδιαστατοποιημένη πίεση
V	: αδιαστατοποιημένη ταχύτητα
W1	: χαρακτηριστική μεταβλητή
W2	: χαρακτηριστική μεταβλητή
C	: ταχύτητα διάδοσης
T	: χρονική στιγμή
$\Delta X1$: μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών
$\Delta X2$: μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών
M	: βοηθητική μεταβλητή (τρέχων αριθμός αγγείου)
I	: βοηθητική μεταβλητή (τρέχων κόμβος αγγείου)
JT	: βοηθητική μεταβλητή (τρέχων χρονικός κόμβος)

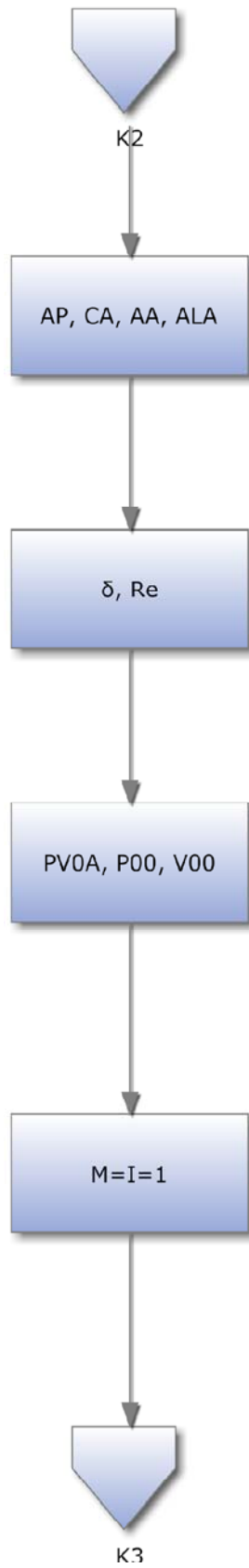
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



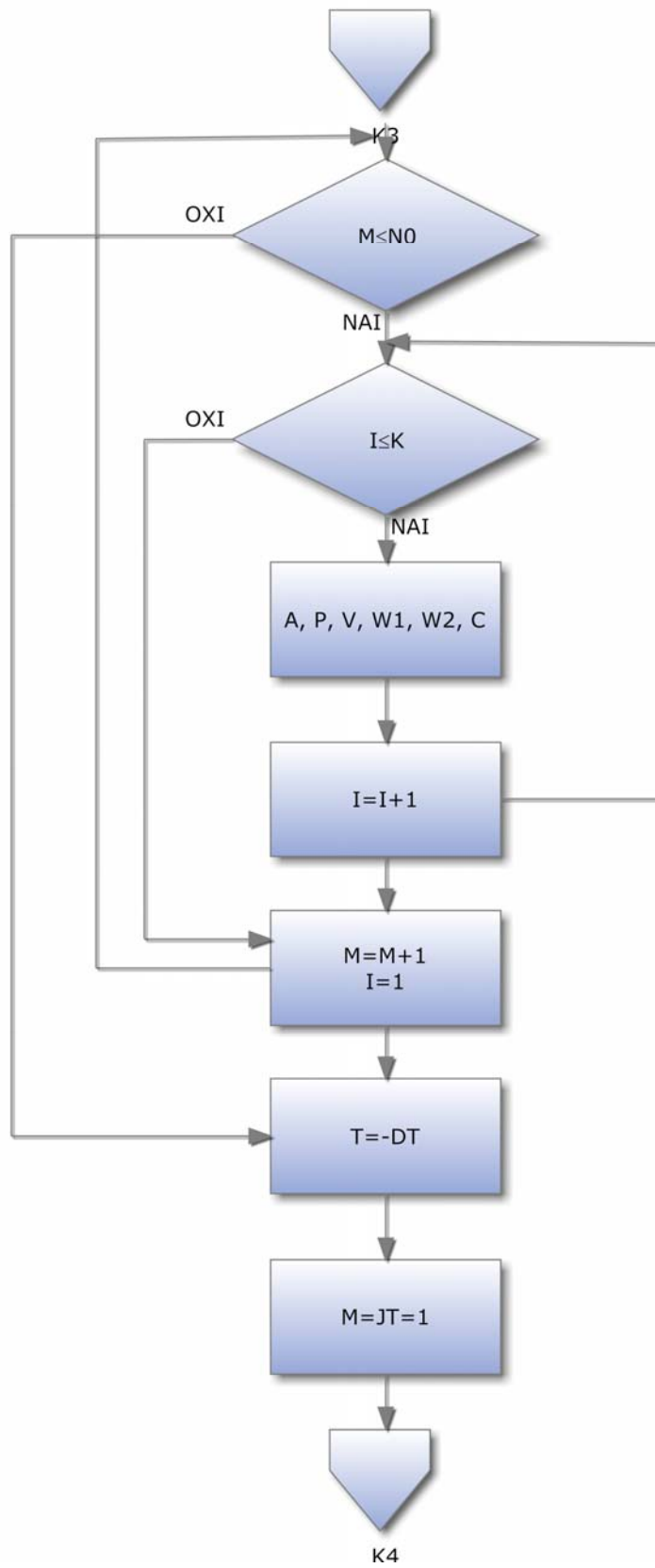
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



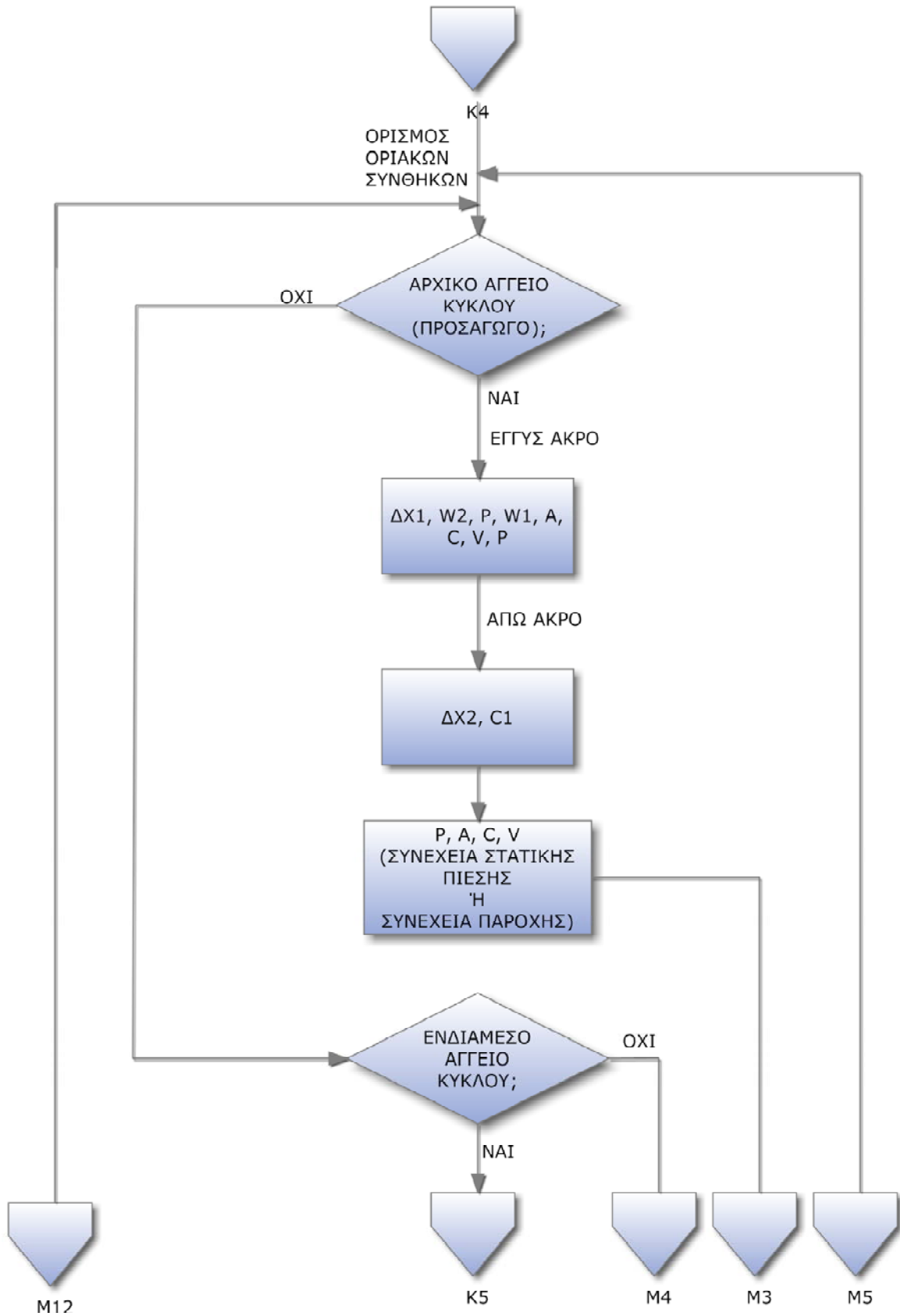
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



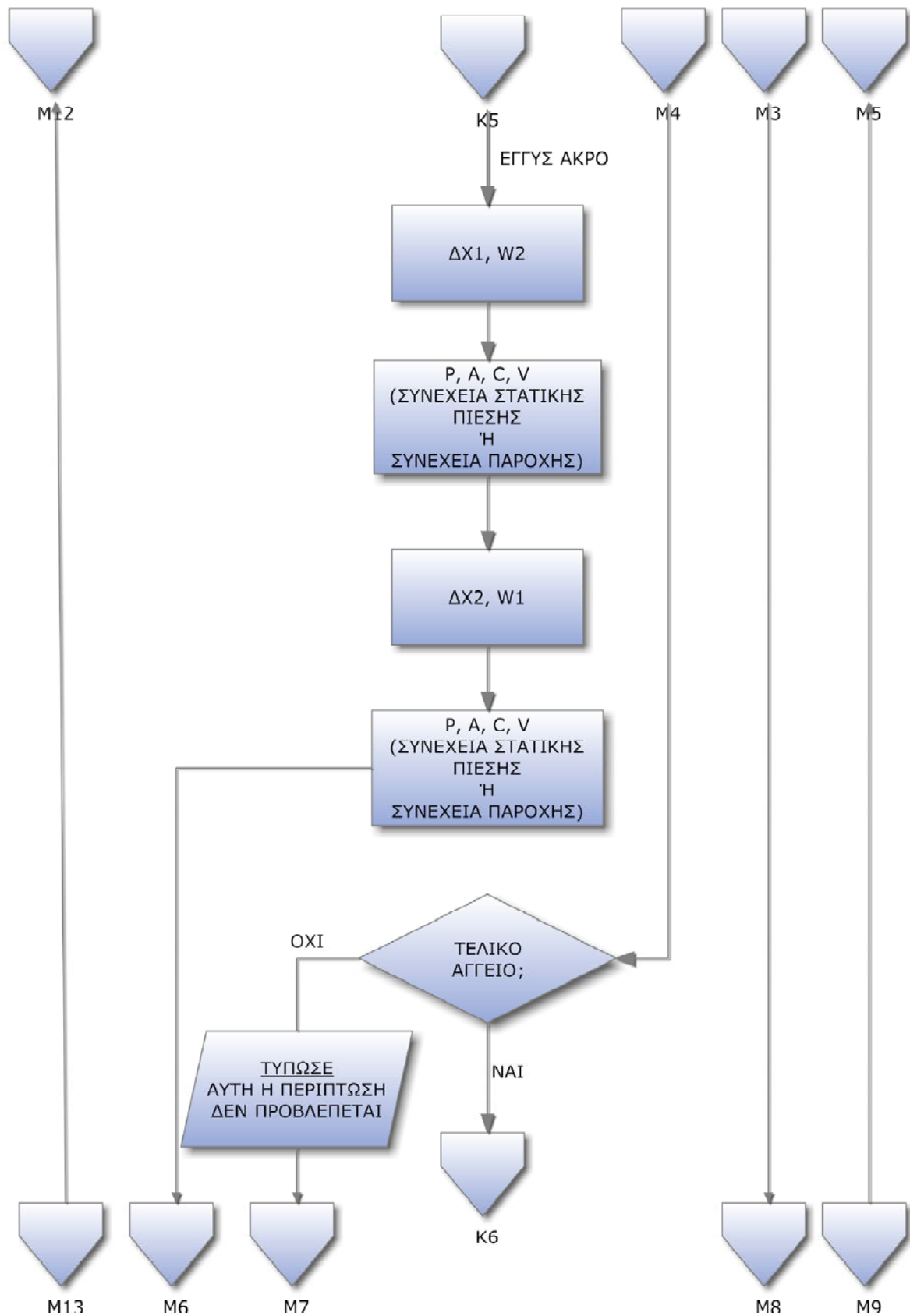
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



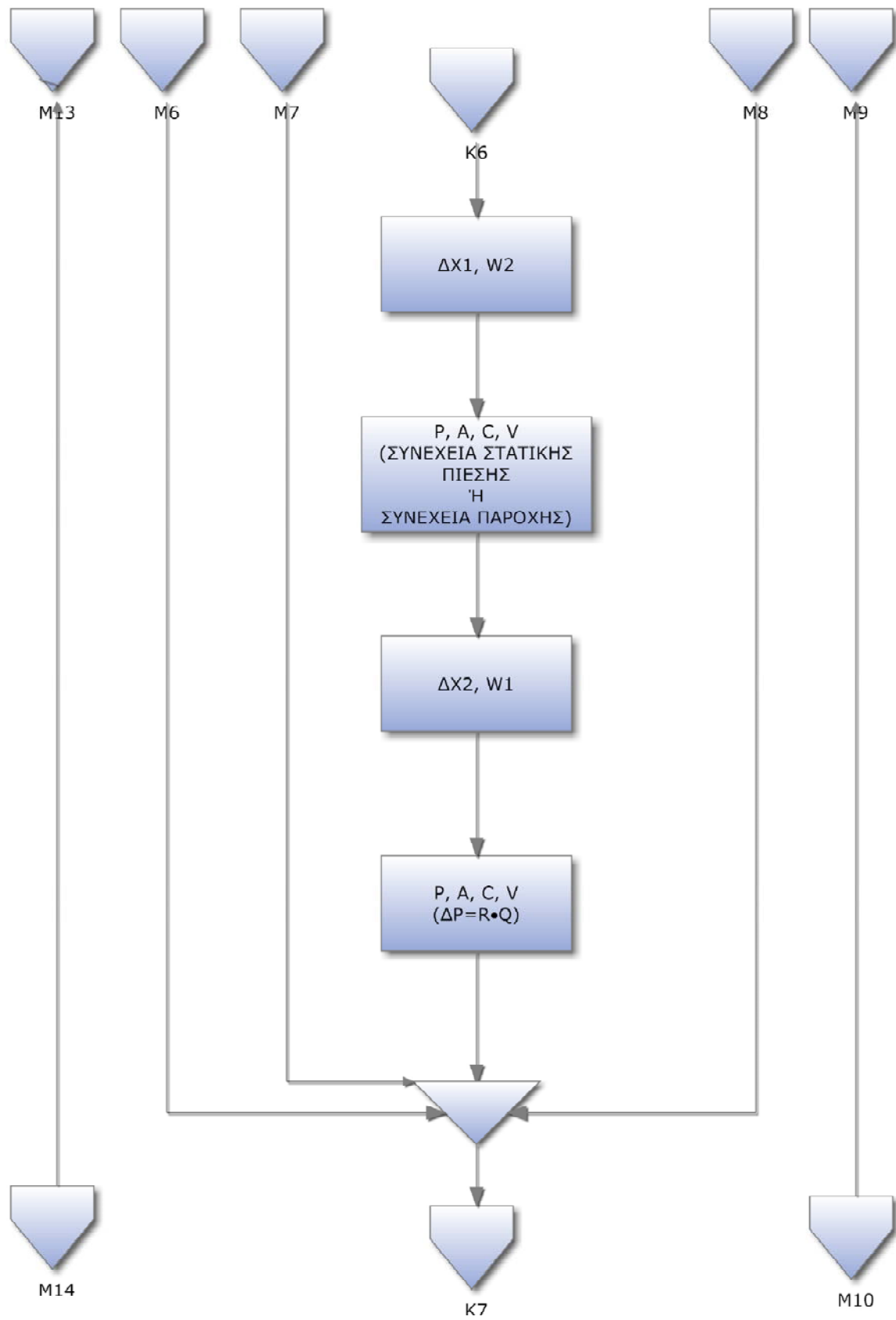
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



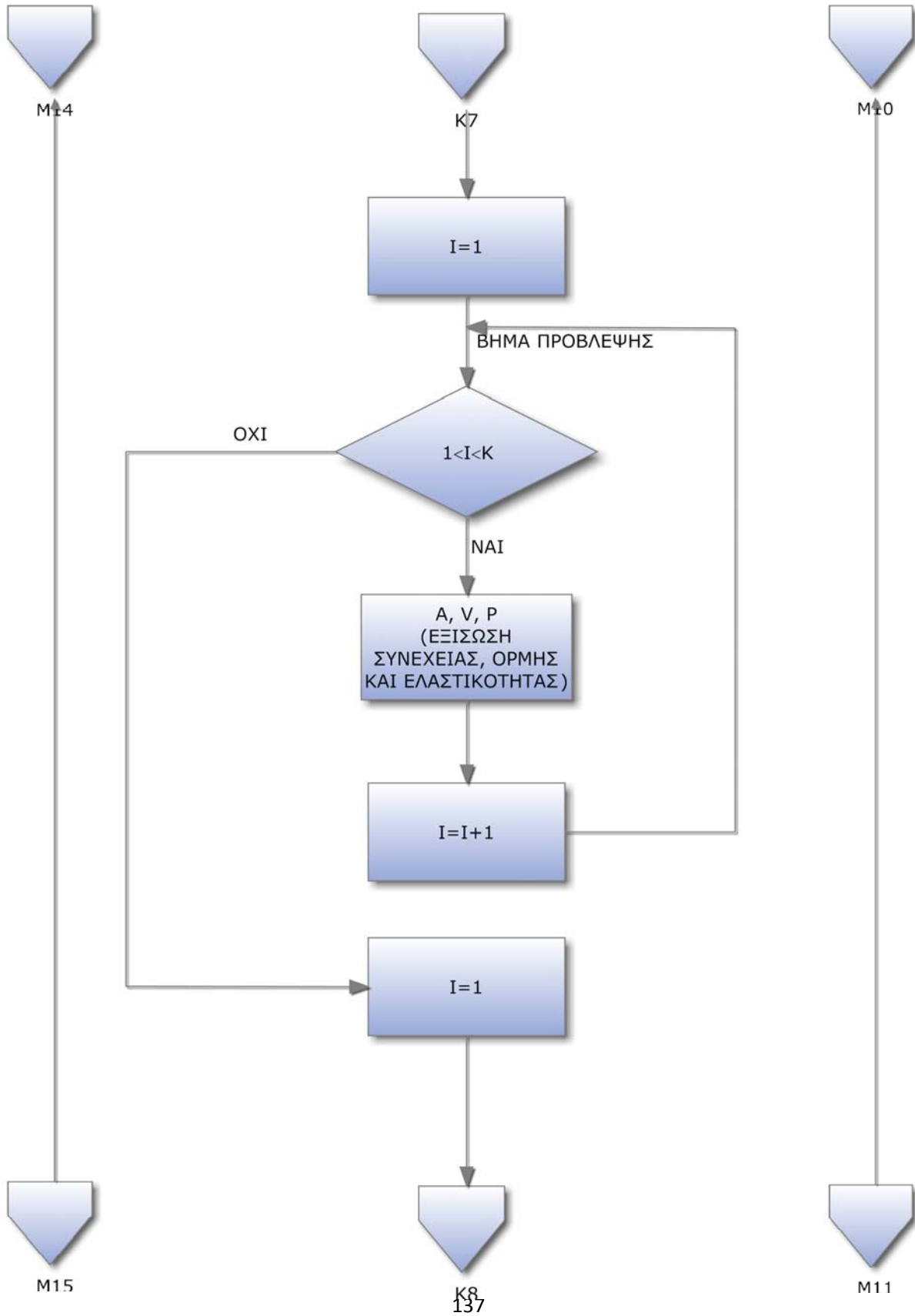
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



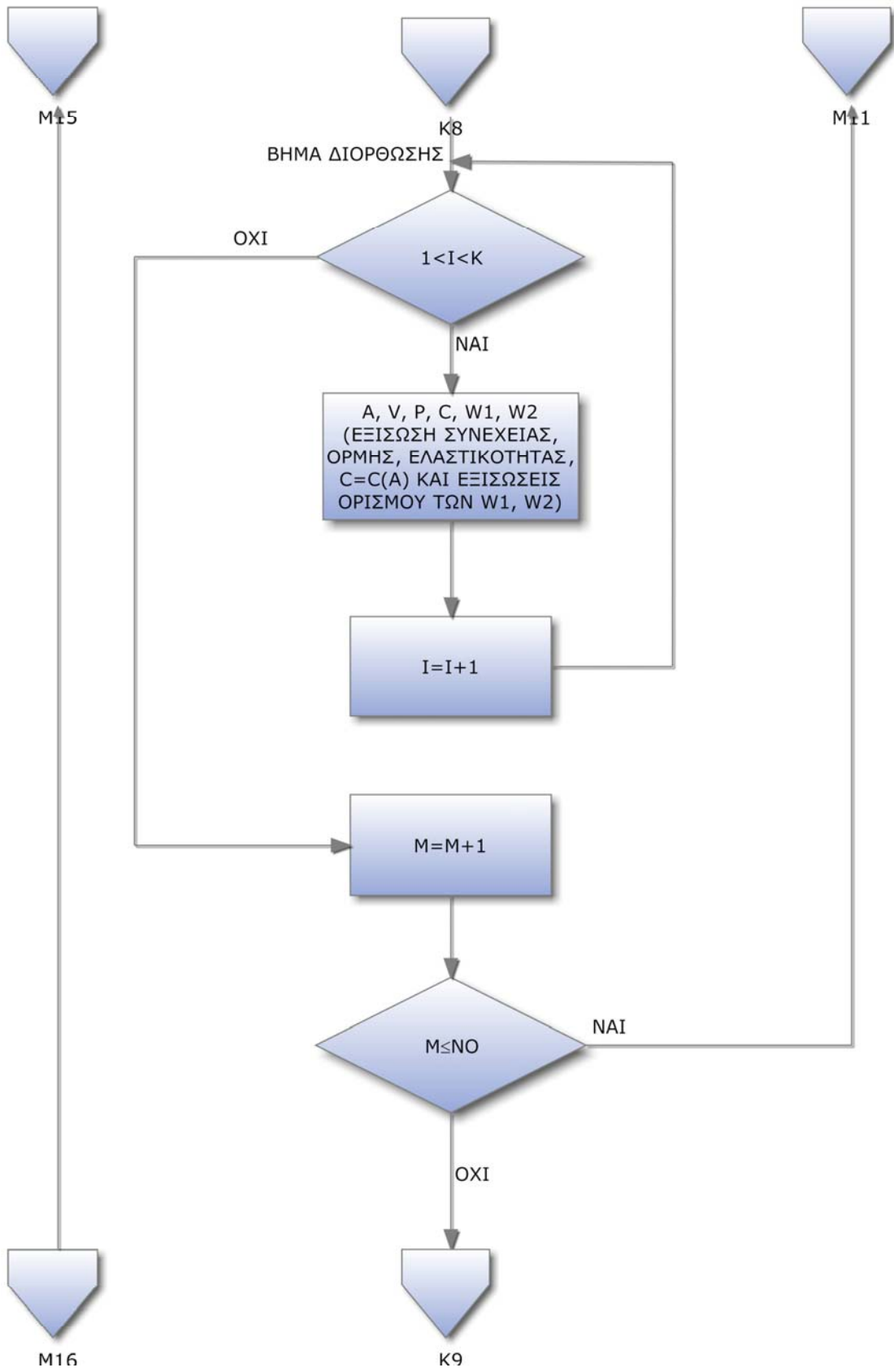
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



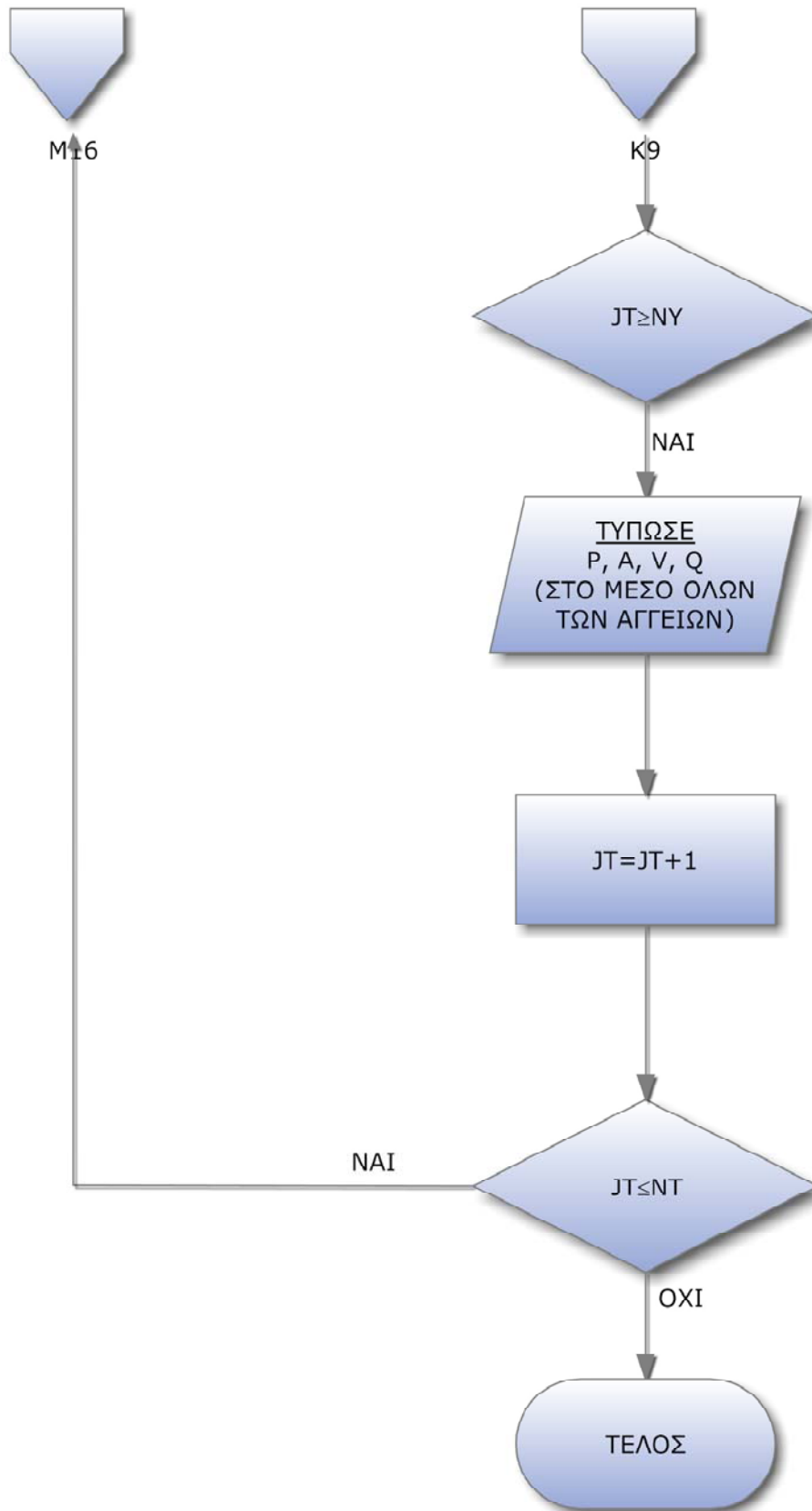
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Σ. Τσαγγάρης, Βιορευστομηχανική και Βιοϊατρική Τεχνολογία, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2004 σελ. 117 - 154.
- [2]. Σ. Τσαγγάρης, Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005 σελ. 56 - 88.
- [3]. Γ. Μπεργελές, Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006 σελ. 95 - 125.
- [4]. Χ. Μανόπουλος, «Μελέτη αντλητικών φαινομένων σε ιατροβιολογικές εφαρμογές, μέσω αλληλεπίδρασης ροής ρευστού και κίνησης σώματος», Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009, σελ. 49 - 66.
- [5]. John D. Anderson, Computational Fluid Dynamics the Basics with Applications, United States of America 1995 pp. 222 – 225.
- [6]. I. Formaggia, A. Veneziani, “Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system”, VKI-Lecture Series, 2003.
- [7]. Α. Καμμά, Μαθήματα ανατομικής, Παραδόσεις Τεχνολογικού Ιδρύματος, Τ.Ε.Ι Αθηνών, Αθήνα 2006, σελ. 115 – 117.
- [8]. M. L. Roller, M.E. Clark, 1969, Precursor Cerebral Circulation Models, J. Biomechanics, Vol. 2, pp. 241 – 250.
- [9]. W.A. Himwich, M.E. Clark, 1971, Cerebral Blood Flow Comparisons Between Model and Prototype, Journal of Applied Physiology, Vol. 31, pp. 873 – 879.
- [10]. J.C. Chao, N.H.C. Hwang, 1971, A Dynamic Model of the Circle of Willis, J. Biomechanics, Vol. 4, pp. 141 – 147.
- [11]. Berend Hillen, Tae Gaasbeek, Hendrik W. Hoogstraten, 1982, A Mathematical Model of the Flow in the Posterior Communicating Arteries, J. Biomechanics, Vol. 15, pp. 441 – 448.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- [12]. Mokhtar Zagzoule, Jean-Pierre Marc-Vergnes, 1986, A Global Mathematical Model of the Cerebral Circulation in Man, *J. Biomechanics*, Vol. 19, pp. 1015 – 1022.
- [13]. Berend Hillen, Hendrik W. Hoogstraten, Lourens Post, 1986, A Global Mathematical Model of the Cerebral Circulation in Man, *J. Biomechanics*, Vol. 19, pp. 187 – 194.
- [14]. Berend Hillen, Bart A. H. Drinkenburg, Hendrik W. Hoogstraten, Lourens Post, 1988, Analysis of Flow and Vascular Resistance in a Model of the Circle of Willis, *J. Biomechanics*, Vol. 21, pp. 807 – 814.
- [15]. Jan Duros, 1990, Comment on Analysis of Flow and Vascular Resistance in a Model of the Circle of Willis, *J. Biomechanics*, Vol. 23, pp. 507 – 508.
- [16]. N.Stergiopoulos, D.F. Young, T.R. Rogge, 1992, Computer Simulation of Arterial Flow with Applications to Arterial and Aortic Stenoses, *J. Biomechanics*, Vol. 25, pp. 1477 – 1488.
- [17]. Albert van der Zwan, Berend Hillen, Cornelis A.F. Tulleken, Manuel Dujovny, 1993, A Quantitative Investigation of the Variability of the Major Cerebral Arterial Territories, *Stroke*, Vol. 24, pp. 1951 – 1959.
- [18]. A. Viedma, C. Jimenez-Ortiz, V. Marco, 1997, Extended Willis Circle Model to Explain Clinical Observation in Periorbital Arterial Flow, *J. Biomechanics*, Vol. 30, pp. 265 – 272.
- [19]. Carlo Alberto Lodi, Mauro Ursino, 1999, Hemodynamic Effect of Cerebral Vasospasm in Humans: A Modeling Study, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 27, pp. 257 – 273.
- [20]. F. Cassot, M. Zagzoule, J.-P. Marc Vergnes, 2000, Hemodynamic role of the Circle of Willis in stenoses of internal carotid arteries. An analytical solution of a linear model, *J. Biomechanics*, Vol. 33, pp. 395 – 405.
- [21]. Marc A. Mintun, Brian N. Lundstrom, Abraham Z. Snyder, Andrei G. Vlassenko, Gordon L. Shulman, Marcus E. Raichle, 2001, *Medical Sciences*, Vol. 98, pp. 6859 – 6864.
- [22]. A. Ferrandez, T. David, M.D. Brown, 2002, Numerical Models of Auto-regulation and Blood Flow in the Cerebral Circulation, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Vol. 5, pp. 7 – 20.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- [23]. Tim David, Michael Brown, A. Ferrandez, 2003, Auto-Regulation and Blood Flow in the Cerebral Circulation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43, pp. 701 – 713.
- [24]. Rainald Lohner, Juan Cebra, Orlando Soto, Peter Yum, James E. Burgess, 2003, Applications of Patient-Specific CFD in Medicine and Life Sciences, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43, pp. 637 – 650.
- [25]. S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiro, K. Parker, 2003, One-Dimensional Modeling of a Vascular network in Space-Time Variables, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 47, pp. 217 – 250.
- [26]. Krzysztof Cieslicki, Dariusz Ciesla, 2005, Investigation of Flow and pressure distributions in Physical Model of the Circle of Willis, *J. Biomechanics*, Vol. 38, pp. 2302 – 2310.
- [27]. S.M. Moore, K.T. Moorhead, J.G.Chase, T. David, J. Fink, 2005, One-Dimensional and Three-Dimensional Models of Cerebrovascular Flow, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 127, pp. 440 – 449.
- [28]. S.M. Moore, T. David, J.G.Chase, J. Arnold, J. Fink, 2006, 3D Models of Blood flow in the Cerebral Vasculature, *J. Biomechanics*, Vol. 39, pp. 1454 – 1463.
- [29]. Christos G. Manopoulos, Demetri S. Mathioulakis, Sokrates G. Tsangaris, 2006, One-dimensional model of Valveless pumping in a Closed Loop and a Numerical Solution, *J. Biomechanics*, Vol. 39, pp. 1454 – 1463.
- [30]. J. Alastruey, K.H. Parker, J. Peiro, S.M. Byrd, S.J Sherwin, 2007, Modeling the Circle of Willis to Access the Effects of Anatomical Variations and Occlusions on Cerebral Flows, *J. Biomechanics*, Vol. 40, pp. 1794 – 1805.