



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΠΜΣ «ΝΑΥΤΙΚΗ & ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ &
ΕΠΙΣΤΗΜΗ»
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Κριτήρια **πρόβλεψης** της αστοχίας κατασκευών από
όλκιμα υλικά σε διάφορες εντατικές καταστάσεις και
εφαρμογή τους σε κώδικα **πεπερασμένων** στοιχείων

του

Δημητρίου Ν. Σάββα

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Α.Π.Θ

Μεταπτυχιακή εργασία υποβληθείσα σε εκπλήρωση των απαιτήσεων για τον
μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών «Ναυτική & Θαλάσσια Τεχνολογία & Επιστήμη»

στο

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή:

Εμ. Σαμουηλίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ν. Τσούβαλης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μ. Τούλιος, Ειδ. Επιστήμων, Δρ. Ναυπηγός Μηχ/γος Μηχ/κός.

Σεπτέμβριος 2009

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, είτε με την συμβουλή τους είτε με την καθοδήγηση που μου παρείχαν. Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνονται στον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών κύριο Εμμανουήλ Σαμουηλίδη που μου παρείχε την ευκαιρία της εκπόνησης της παρούσας εργασίας, καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια, συμβουλή και υποστήριξη του κατά την εκτέλεσή της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπλήρωτή Καθηγητή κύριο Νικόλαο Τσούβαλη καθώς και τον Ειδικό Επιστήμων κύριο Μιχαήλ Τούλιο για την συμμετοχή τους στην Συμβουλευτική Επιτροπή.

Τέλος θερμές ευχαριστίες οφείλω στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στην μητέρα μου για την υποστήριξη, υπομονή και εμπιστοσύνη που μου δείχνουν πάντα σε κάθε μου προσπάθεια.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εισαγωγή.....	8
1.1. Σκοπός Εργασίας.....	9
1.2. Δομή Εργασίας.....	11
2. Όλκιμη αστοχία μετάλλων.....	12
2.1. Εισαγωγή.....	12
2.2. Μοντέλα πλαστική αστάθειας.....	14
2.3. Μοντέλα όλκιμης θραύσης μετάλλων.....	17
2.3.1. Εμπειρικά κριτήρια.....	22
2.3.2. Μοντέλα ανάπτυξης κενών.....	26
2.3.3. Μοντέλα που βασίζονται σε αρχές της Μηχανικής Συνεχούς Βλάβης.....	29
2.3.4. Μοντέλα που βασίζονται στο πορώδες των υλικών.....	33
3. Σύγκρουση/Προσάραξη πλοίου-Μοντέλα αστοχίας.....	35
3.1. Χρησιμοποιούμενα κριτήρια αστοχίας.....	35
3.2. Το κριτήριο RTCL.....	38
3.3. Το κριτήριο BWH.....	42
3.3.1. Το κριτήριο του Hill για την δημιουργία τοπικού λαιμού.....	44
3.3.2. Το κριτήριο διατμητικής αστάθειας των Bressan-Williams.....	47
3.3.3. Συνδυασμός κριτηρίων Bressan-Williams-Hill.....	50
4. Εφαρμογή των κριτηρίων RTCL και BWH.....	52
4.1. Εισαγωγή.....	52
4.2. «Πείραμα διεϊσδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων» [Alsos H. and Amdahl J. 2008- (1)].....	54
4.2.1. Σκοπός του πειράματος.....	54
4.2.2. Περιγραφή της γεωμετρίας και των υλικών των κατασκευαστικών στοιχείων του πειράματος.....	54
4.2.3. Εκτέλεση του πειράματος.....	57
4.2.4. Πειραματικά αποτελέσματα.....	58
4.2.4.1. Δοκίμιο ελάσματος χωρίς ενισχυτικά (US).....	59
4.2.4.2. Δοκίμιο ελάσματος με ένα διαμήκες ενισχυτικό (FB-1).....	61
4.2.4.3. Δοκίμιο ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2).....	63
4.2.5. Παρατήρηση των επιφανειών θραύσης-Ανάλυση.....	65
4.2.6. Συμπεράσματα από τα αποτελέσματα των πειραμάτων.	66

4.3. «Αριθμητική προσομοίωση πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων».....	69
4.3.1. Τεχνικές αριθμητικής προσομοίωσης της έναρξης και διάδοσης των ρωγμών με τα πεπερασμένα στοιχεία.....	70
4.3.2. Επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα.....	75
4.3.3. Ανάπτυξη Νόμου Κλίμακας κριτηρίου RTCL για στοιχεία κελύφους.....	77
4.3.4. Μοντελοποίηση του πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων.....	81
4.3.5. Αριθμητικά Αποτελέσματα προσομοιώσεων.....	84
4.3.5.1. Δοκίμιο ελάσματος χωρίς ενισχυτικά (US).....	86
4.3.5.2. Δοκίμιο ελάσματος με ένα διαμήκες ενισχυτικό (FB-1).....	95
4.3.5.3. Δοκίμιο ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2).....	102
4.3.6. Συμπεράσματα από την εκτέλεση των αριθμητικών προσομοιώσεων.....	108
5. Σύνοψις-Συστάσεις περαιτέρω έρευνας.....	111
Βιβλιογραφία.....	115
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	119
Α. Υπολογισμός «triaxiality» σε απλές καταστάσεις φόρτισης.....	119
Β. VUMAT Ρουτίνα: Ανάλυση-Κώδικες.....	121
Γ. Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	145

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εισαγωγή

1.1.Σκοπός Εργασίας

Η αστοχία των κατασκευών όπως, πλοίων, αεροπλάνων, αυτοκινήτων, τρένων, κτηρίων, εξαιτίας της επιβολής ακραίων φορτίων, έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια ζών και περιουσιών. Όσο αναφορά την ναυπηγική, τα συνηθέστερα ατυχήματα είναι οι συγκρούσεις, οι προσαράξεις και οι εκρήξεις στα πλοία, που μπορεί να συνοδεύονται και από πυρκαγιά. Η αστοχία στις ναυπηγικές κατασκευές, πέρα από τις συνέπειες που προαναφέρθηκαν, έχει και τεράστιες περιβαλλοντικές επιπτώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ατύχημα του τάνκερ «Prestige» τον Νοέμβριο του 2002 στον Ατλαντικό ωκεανό, στον κόλπο της Γαλικίας, βορειοδυτικά της Ισπανίας. Εξαιτίας των δυσμενών καιρικών συνθηκών που επικρατούσαν στην περιοχή προκλήθηκαν ρωγμές στις δεξαμενές του πλοίου με αποτέλεσμα η γάστρα του να κοπεί στα δύο και να βυθιστεί (Εικόνα 1.1-1). Περίπου 77.000 τόνοι αργού πετρελαίου διέρρευσαν στην θάλασσα και δημιούργησαν μια τεράστια πετρελαιοκηλίδα. Η οικολογική καταστροφή που συνεχίζεται έως και σήμερα, είναι ανυπολόγιστη.

Για την αποφυγή τέτοιων ατυχημάτων και για την δημιουργία ασφαλέστερων κατασκευών είναι ανάγκη οι μηχανικοί να κατανοήσουν πλήρως κάθε πρώιμη αστοχία. Στόχος είναι να αναλυθούν όλοι οι μηχανισμοί που την προκαλούν, τόσο στο μακροσκοπικό όσο και στο κρυσταλλογραφικό επίπεδο του υλικού. Η κατανόηση των μηχανισμών αστοχίας από την πλευρά των μηχανικών, θα επιτρέψει την ασφαλή πρόβλεψη της εναπομείνουσας αντοχής των κατασκευών, όταν σε αυτές επιβάλλονται ακραία φορτία. Η γνώση των κρίσιμων συνθηκών και περιοχών αστοχίας, καθώς και η ικανότητα ελέγχου της εξέλιξης της ζημιάς στα κατασκευαστικά στοιχεία, θα αποτρέψει μελλοντικά ατυχήματα με τραγικές συνήθως συνέπειες, που προκαλούνται λόγω της ολικής κατάρρευσης των κατασκευών.

Η σημαντικότερη μορφή αστοχίας των κατασκευών είναι η θραύση. Η θραύση είναι το αποτέλεσμα της έναρξης και διάδοσης μικροσκοπικών ρωγμών εντός του υλικού. Η αποφυγή της είναι σχεδόν αδύνατη όταν έχουν ήδη δημιουργηθεί ρωγμές στην κατασκευή, οι οποίες διαδίδονται με μεγάλη ταχύτητα. Αρχικός σκοπός λοιπόν των μηχανικών είναι η δημιουργία κατασκευών χωρίς την ύπαρξη προϋπαρχουσών ρωγμών ή ατελειών. Η συνεχής τελειοποίηση της παραγωγικής διαδικασίας και οι νέες μέθοδοι μη καταστροφικού ελέγχου, ώστε να εντοπίζονται έγκαιρα τυχόν αρχικές ατέλειες στις παραγόμενες κατασκευές, έχουν κάνει εφικτό τον παραπάνω στοχο. Ωστόσο θραύση μπορεί να συμβεί και σε κατασκευές χωρίς εμφανής αρχικές ρωγμές. Συνεπώς είναι σημαντικό να κατανοηθούν όλοι εκείνοι οι μηχανισμοί που συντελούν στην έναρξη και εξέλιξη των ρωγμών.

Αρκετά μέταλλα που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, υφίστανται πριν την θραύση τους, υψηλή πλαστική παραμόρφωση γεγονός που οφείλεται στην όλκιμη συμπεριφορά τους. Οι ναυπηγικοί χάλυβες που μας ενδιαφέρουν (mild steel) είναι ιδιαίτερος ελατοί. Συχνά σε κατασκευές από υλικά, που χαρακτηρίζονται ως όλκιμα, παρατηρείται αστοχία χωρίς εμφανή σημάδια θραύσης. Πρόκειται για έναν διαφορετικό τύπο αστοχίας που περιγράφεται ως «πλαστική αστάθεια». Εδώ ο μηχανισμός αστοχίας βασίζεται ακριβώς στην όλκιμη συμπεριφορά που επιδεικνύουν τα υλικά αυτά, τα οποία έχουν την τάση να σχηματίζουν τοπικά, ζώνες υψηλής συγκέντρωσης πλαστικής παραμόρφωσης. Οι περιοχές αυτές που αναφέρονται και ως «τοπικός λαιμός» προκαλούν χαλάρωση του υλικού, με συνέπεια η κατασκευή να μην μπορεί πλέον να φέρει φορτία. Η όλκιμη συμπεριφορά των υλικών και οι διαφορετικοί μηχανισμοί

αστοχίας που παρατηρούνται σε αυτά, «πλαστική αστάθεια ή/και θραύση», είναι ένα αντικείμενο που απασχολεί έντονα τους μηχανικούς.



Εικόνα 1.1-1: Η βύθιση του τάνκερ 'Prestige' στις βορειοδυτικές ακτές της Ισπανίας

Η μελέτη της αστοχίας των κατασκευών είναι ένα σύνθετο πρόβλημα στο οποίο εμπλέκονται παράγοντες που αφορούν τόσο τις ιδιότητες των υλικών όσο και την γεωμετρία των κατασκευών. Ενδεικτικά οι μηχανισμοί σχηματισμού ρωγμών φαίνεται να εξαρτώνται από το είδος του υλικού, την γεωμετρία της κατασκευής καθώς και από τον τρόπο φόρτισής της. Τυπικός μηχανισμός αστοχίας στα όλκιμα υλικά είναι η δημιουργία μικροκενών γύρω από εγκλείσματα μέσα στο υλικό, τα οποία διογκώνονται λόγω εξωτερικής φόρτισης τους και συνενώνονται μεταξύ τους, σχηματίζοντας τελικά ρωγμές που διαδίδονται και προκαλούν θραύση. Η θραύση χωρίζεται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, την όλκιμη και την ψαθυρή, ανάλογα το μέγεθος της διαρροής του υλικού, που προηγείται αυτής. Διευκρινίζουμε ότι σε μια κατασκευή από όλκιμο υλικό μπορούν να αναπτυχθούν μηχανισμοί αστοχίας που οδηγούν σε όλκιμη ή και ψαθυρή θραύση, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν (θερμοκρασία, ρυθμός επιβαλλόμενης φόρτισης). Εξετάζοντας τις ρηγματωμένες επιφάνειες των κατασκευών, ανακαλύπτουμε διαφορετικούς μηχανισμούς αστοχίας στους δύο παραπάνω τύπους θραύσης. Ξεχωρίζουμε λοιπόν μηχανισμούς ενδοκρυσταλλικής και περικρυσταλλικής ρηγμάτωσης. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι σε κατασκευές με αρχικές ρωγμές και σε κατασκευές χωρίς αρχικές ρωγμές, οι μηχανισμοί αστοχίας που αναπτύσσονται και προκαλούν τελικά την θραύση τους είναι διαφορετικοί.

Στην παρούσα εργασία το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην μελέτη των μηχανισμών αστοχίας που αναπτύσσονται σε αρηγμάτωτες κατασκευές από όλκιμα υλικά. Το πρόβλημα της πρόβλεψης της αστοχίας στην περίπτωση αυτή είναι αρκετά πολύπλοκο. Ο τρόπος που τα μικροκενά δημιουργούνται γύρω από εγκλείσματα του υλικού, η διαδικασία κατά την οποία διογκώνονται και συνενώνονται με τα γειτονικά τους κενά ώστε να σχηματιστούν τελικά ρωγμές και οι συνθήκες διάδοσης των ρωγμών αυτών, διαφέρει ανάλογα με το είδος του υλικού, την γεωμετρία της κατασκευής και τον τρόπο φόρτισής της. Επίσης η υψηλή συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης τοπικά στα

όλκιμα υλικά που είναι χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς τους πριν την αστοχία τους, οδηγεί σε πολύπλοκους σχηματισμούς όπως λαιμός ή τοπικές διατμητικές λωρίδες υλικού. Λόγω των διαφορετικών αυτών σχηματισμών στο υλικό, η αστοχία προκαλείται από διαφορετικούς παράγοντες. Ιδιαίτερα σημαντική για τον σχηματισμό των ρωγμών είναι η επίδραση του παράγοντα της τριαξονικής εντατικής κατάστασης, 'triaxiality', που επικρατεί τοπικά σε κάθε σημείο της κατασκευής, όπως για παράδειγμα κατάσταση επίπεδης έντασης, επίπεδης παραμόρφωσης, αξονοσυμμετρική ή κατάσταση υδροστατικής έντασης ή θλίψης. Οι διαφορετικές καταστάσεις τάσεων που αναπτύσσονται εντός του υλικού, εξαρτώνται από τον τρόπο φόρτισης της κατασκευής (εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση, κάμψη, ψαλιδισμός ή συνδυασμός φορτίσεων). Συνεπώς από τα παραπάνω γίνονται αντιληπτές οι δυσκολίες που παρουσιάζει η μελέτη του φαινομένου της όλκιμης θραύσης και καταδεικνύεται η ανάγκη περαιτέρω έρευνας, για την ανάπτυξη ενός αξιόπιστου εργαλείου πρόβλεψης της αστοχίας των κατασκευών.

Σήμερα η πρόοδος στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών και η αύξηση της υπολογιστικής τους ισχύος, καθιστούν εφικτή την επίλυση μεγάλων αριθμητικών προβλημάτων με μικρό υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί εξαιρετικό υπολογιστικό εργαλείο για την αριθμητική ανάλυση των τάσεων και παραμορφώσεων σε μεγάλες κατασκευές που υφίστανται φορτία. Από την άλλη η συνεχής βελτίωση των εμπορικών λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων (FEM), έχει κάνει απλή και προσιτή την χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου. Σε θεωρητικό επίπεδο η προσπάθεια των μηχανικών επικεντρώνεται στην ανάπτυξη ενός κριτηρίου αστοχίας, που θα αποτελεί για παράδειγμα μία έκφραση των στοιχείων του τανυστή των τάσεων ή των παραμορφώσεων ή συνδυασμό των αναλλοίωτων ποσοτήτων ή ακόμη και των ρυθμών μεταβολής των στοιχείων αυτών. Η έκφραση αυτή θα πρέπει να περιγράφει κατά το δυνατόν αξιόπιστα τους μηχανισμούς που ευθύνονται για την αστοχία των κατασκευών. Στόχος είναι το κριτήριο αστοχίας να ενσωματωθεί σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αριθμητική πρόβλεψη των αστοχιών στις κατασκευές. Πλεονέκτημα θα ήταν η ευκολη χρήση του κριτηρίου, η οποία θα προέρχεται από την απλή μαθηματική του διατύπωση, έτσι ώστε κατά την διαδικασία βαθμονόμησής του (calibration) να απαιτείται ο καθορισμός συγκεκριμένων, ελάχιστων παραμέτρων που θα προκύπτουν εύκολα για κάθε υλικό μέσω απλών πειραμάτων. Επίσης θα ήταν πρακτικό το κριτήριο να είναι όσο το δυνατόν γενικότερο, να μπορεί δηλαδή να χρησιμοποιηθεί για διαφορετικά υλικά και για κατασκευές υπό διαφορετικές συνθήκες καταπόνησης. Η έρευνα των μηχανικών στο συγκεκριμένο πεδίο απαντά στην ανάγκη δημιουργίας ασφαλέστερων κατασκευών, που η αντοχή τους σε ακραία φορτία θα έχει πολλαπλά οφέλη για την οικονομία, το περιβάλλον και την προστασία των ανθρώπινων ζωών. Μέρος της έρευνας αυτής φιλοδοξεί να αποτελέσει και η παρούσα εργασία.

1.2. Δομή Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Ο σκοπός της εργασίας, η αναγκαιότητα της έρευνας στο πεδίο πρόβλεψης της αστοχίας των κατασκευών, οι δυσκολίες που αυτή παρουσιάζει και οι προκλήσεις για τους μηχανικούς, καθώς και τα οικονομικά και περιβαλλοντικά οφέλη που προκύπτουν από την κατασκευή ασφαλέστερων κατασκευών, παρουσιάζονται ως μια σύντομη εισαγωγή στο Κεφάλαιο 1.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια ανασκόπηση των μεθόδολογιών που έχουν αναπτυχθεί έως και σήμερα, για την περιγραφή των μηχανισμών αστοχίας στις κατασκευές. Τα μοντέλα κατατάσσονται, ανόλογα με το τι ορίζεται ως αστοχία, σε δύο μεγάλες κατηγορίες, στα μοντέλα πλαστικής αστάθειας καθώς και στα μοντέλα όλκιμης θραύσης. Αντιπροσωπευτικά κριτήρια και των δύο κατηγοριών παρουσιάζονται με βάση τα όσα αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία.

Τα κριτήρια αστοχίας που έχουν προταθεί έως και σήμερα από τους νηογνώμονες για την πρόβλεψη της αστοχίας πλοίου σε περίπτωση σύγκρουσης ή προσάραξης παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3. Αναλύονται επίσης τα προσφάτως προτεινόμενα κριτήρια αστοχίας, RTCL και BWH, τα οποία βασίζονται σε συνδυασμό προηγούμενων κριτηρίων και έχουν δείξει αρκετά καλά αποτελέσματα. Συζητούνται επίσης τα πλεονεκτήματά τους καθώς και οι δυσκολίες εφαρμογής τους.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η εφαρμογή των κριτηρίων RTCL και BWH στην προσομοίωση μοντέλων, μέσω της εισαγωγής τους σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά περιγράφεται το πείραμα που εκτελέστηκε από τους Alsos και Amdhal (1) στο πανεπιστήμιο της Νορβηγίας και αφορά την διείσδυση βολβού κωνικού σχήματος σε πακτωμένα ελάσματα με ή χωρίς ενισχυτικά. Το συγκεκριμένο πείραμα προσομοιώνει την προσάραξη πλοίου σε βράχο ή την σύγκρουσή του με την πλήρη εμβάλλοντος πλοίου. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι αριθμητικές προσομοιώσεις του παραπάνω πειράματος που εκτελέστηκαν με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus και την εισαγωγή των κριτηρίων RTCL και BWH σε αυτό. Αναφέρεται ο τρόπος βαθμονόμησής των κριτηρίων καθώς και οι τεχνικές προσομοίωσης της διάδοσης των ρωγμών με τα πεπερασμένα στοιχεία. Η αξιοπιστία των κριτηρίων στην πρόβλεψη αστοχιών προκύπτει από την σύγκριση που γίνεται μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά.

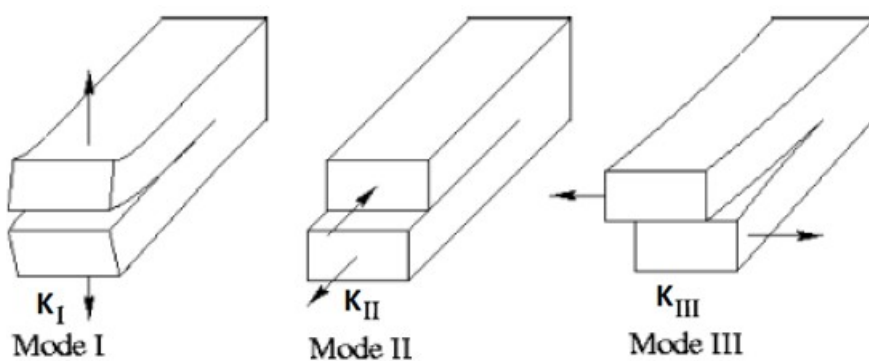
Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται μια σύνοψη της εργασίας που εκτελέστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια ενώ συγχρόνως δίδονται συστάσεις για τις νέες ερευνητικές κατευθύνσεις που προκύπτουν. Στα Παραρτήματα ο αναγνώστης θα μπορούσε να αναζητήσει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον υπολογισμό της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων σε απλές περιπτώσεις φόρτισης, πληροφορίες για τον κώδικα που αναπτύχθηκε σε Fortran 77 για την εισαγωγή των κριτηρίων RTCL και BWH στο Abaqus, τον κώδικα για την περιγραφή της πλαστικότητας του υλικού και την επιβολή της συνθήκης επίπεδης έντασης στα στοιχεία κελύφους καθώς και αρκετές εικόνες και διαγράμματα που προέκυψαν από την αριθμητική προσομοίωση του πειράματος διείσδυσης κωνικού βολβού στα δοκίμια US, FB-1 και FB-2 όπως αυτά περιγράφονται στο κεφάλαιο 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. Όλκιμη αστοχία μετάλλων

2.1.Εισαγωγή

Η μελέτη του φαινομένου της θραύσης απασχολεί εδώ και πολλά χρόνια τους μηχανικούς, καθώς είναι ζωτικής σημασίας στην σχεδίαση ασφαλέστερων κατασκευών. Αρχικά αναπτύχθηκε η κλασική θεωρία της γραμμικά ελαστικής μηχανικής των θραύσεων, «Linear Elastic Fracture Mechanics» (LEFM) για κατασκευές με προυπάρχουσες ρωγμές. Σύμφωνα με αυτήν ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του υλικού, ο παράγοντας έντασης των τάσεων K , περιγράφει τις συνθήκες που επικρατούν στο άκρο της ρωγμής. Ανάλογα με τον τρόπο φόρτισης των δοκιμίων ορίστηκαν τρεις συντελεστές έντασης των τάσεων όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1-2. Παρά την πρωταρχική της σημασία, η θεωρία της γραμμικά ελαστικής μηχανικής των θραύσεων περιορίζεται σε μια μικρή περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής όπου το υλικό θεωρείται ότι βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής των τάσεων. Για υλικά ελαστικά-πλήρως πλαστικά αναπτύχθηκαν διαφορετικές θεωρίες, όπως η θεωρία ανοίγματος των χειλέων της ρωγμής «Crack Tip Opening Displacement» (CTOD) και το ολοκλήρωμα-J, οι οποίες για μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζονται από το μέγεθος και την γεωμετρία της κατασκευής. Αναπτύχθηκαν επίσης θεωρίες οι οποίες χρησιμοποιούν, εκτός του συντελεστή έντασης των τάσεων και ένα δεύτερο χαρακτηριστικό μέγεθος του υλικού, για την περιγραφή των συνθηκών στο άκρο της ρωγμής. Οι θεωρίες αυτές όπως για παράδειγμα η J-Q θεωρία είναι περισσότερο περιγραφικές και λιγότερο ικανές για την πρόβλεψη των ρωγμών, συνεπώς δεν προτιμούνται. Τις τελευταίες δεκαετίες αρκετή έρευνα έχει γίνει στο πεδίο της πρόβλεψης της αστοχίας των κατασκευών λόγω κόπωσης. Η υπόθεση μικρής πλαστικής περιοχής γύρω από το άκρο της ρωγμής διευκολύνει την επίλυση. Αντιθέτως κατά την όλκιμη θραύση δεν μπορούμε να υποθέσουμε μικρή πλαστική περιοχή καθώς στο σημείο που γίνεται η έναρξη των ρωγμών συγκεντρώνονται μεγάλα ποσά πλαστικής παραμόρφωσης.



Εικόνα 2.1-2: Τύπος θραύσης και αντίστοιχος συντελεστής έντασης τάσεως σε δοκίμια με προυπάρχουσα ρωγή ανάλογα τον τρόπο φόρτισής τους.

Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο κριτήριο αστοχίας που έχει ήδη ενσωματωθεί στα περισσότερα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων είναι το κριτήριο της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης. Το συγκεκριμένο κριτήριο είναι ανεξάρτητο της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων που επικρατούν τοπικά στην κατασκευή και συνεπώς δεν δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα. Είναι δηλαδή ανεξάρτητο του «triaxiality» το οποίο είναι ένα μέγεθος που περιγράφει την τριαξονική κατάσταση των τάσεων που αναπτύσσεται στα σημεία της κατασκευής λόγω της φόρτισης (Παράρτημα Α). Ακόμη και για την απλή περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού, η πρόβλεψη της αστοχίας από το συγκεκριμένο κριτήριο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι ο σχηματισμός «λαιμού» στο δοκίμιο μονοαξονικού εφελκυσμού προκαλεί την ανάπτυξη τάσεων και παραμορφώσεων και στις τρεις

διαστάσεις, διαταράσσοντας έτσι την ομοιόμορφη κατανομή των μεγεθών αυτών ως προς την διεύθυνση της φόρτισης του δοκιμίου. Σε ατυχήματα πλοίων όπως σύγκρουση ή προσάραξη τα κατασκευαστικά τους στοιχεία υποβάλλονται σε πολύπλοκες και διαφορετικές εντατικές καταστάσεις. Επομένως η χρήση του κριτηρίου ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης σε αυτού του είδους τις εφαρμογές δεν προτείνεται. Ο σκοπός των ναυπηγών μηχανικών είναι η ορθή πρόβλεψη της θέσης έναρξης των ρωγμών και ο τρόπος διάδοσής τους. Με την προσομοίωση της συμπεριφοράς της γάστρας υπό την επιβολή ακραίων φορτίων, επιχειρείται ο υπολογισμός της ζημιάς που θα προκληθεί σε αυτήν, ώστε να εκτιμηθεί η εναπομείνουσα αντοχή του πλοίου. Η γνώση της ακεραιότητας της γάστρας θα αποτρέψει τυχόν εισροή υδάτων ή εκροή πετρελαίου που μπορεί να προκληθεί σε περίπτωση εκτεταμένης βλάβης. Το κριτήριο αστοχίας που θα χρησιμοποιηθεί σε τέτοιου είδους εφαρμογές θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν του την τριαξονική κατάσταση των τάσεων, καθώς αυτή επηρεάζει σημαντικά τον τρόπο αστοχίας των κατασκευών και το μέγεθος της ζημιάς που προκαλείται στο υλικό.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται διάφορες προσεγγίσεις της όλκιμης αστοχίας των κατασκευών χωρίς προϋπάρχουσες ρωγμές, οι οποίες αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα Θα περιγραφούν μοντέλα πλαστικής αστάθειας καθώς και μοντέλα όλκιμης θραύσης μετάλλων. Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν τα εμπειρικά κριτήρια, τα μοντέλα που βασίζονται στην ανάπτυξη κενών στο υλικό, τα μοντέλα που στηρίζονται σε αρχές της μηχανικής της συνεχούς βλάβης καθώς και τα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψιν τους το πορώδες των υλικών.

2.2. Μοντέλα πλαστική αστάθειας

Συχνά πριν την θραύση των κατασκευών από όλκιμα υλικά, στα κρίσιμα σημεία όπου εκδηλώνονται οι αρχικές ρωγμές, προηγείται υψηλή συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης. Την στιγμή αυτή, η κατανομή των παραμορφώσεων στην κατασκευή είναι αρκετά πολύπλοκη ενώ μπορεί να εμφανίζει απότομες κλίσεις από σημείο σε σημείο. Ιδιαίτερα κατά την μορφοποίηση ελασμάτων, για παράδειγμα έλαση, διέλαση, βαθεία κοίλανση, οι μηχανικοί προσπαθούν να κατανοήσουν τους μηχανισμούς αστοχίας που λαμβάνουν χώρα έως και την θραύση τους, ώστε να πετύχουν την μέγιστη μορφοποίησή τους. Πρώτοι οι Keeler (2) και Goodwin (3) εξήγαγαν τα γνωστά διαγράμματα 'FLD' (Forming Limits Diagram) τα οποία καθορίζουν τα όρια

μορφοποίησης των ελασμάτων. Για τον σκοπό αυτό εκτέλεσαν πειράματα διαξονικής επίπεδης φόρτισης σε ελάσματα, όπου μελετούσαν την συμπεριφορά τους, καθώς αύξαναν συνεχώς τον λόγο μέγιστης προς ελάχιστης παραμόρφωσης. Όταν λοιπόν παρατηρούσαν υπό σταθερό ρυθμό του λόγου παραμόρφωσης, απότομες μεταβολές στην δύναμη καταπόνησης, είχαν μια ένδειξη για τον σχηματισμό λαιμού στο έλασμα, και συνεπώς κατέγραφαν την τιμή της παραμόρφωσης που επικρατούσε την στιγμή αυτή στο δοκίμιο. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στα ελάσματα δημιουργούνται δύο είδη λαιμού, ο λαιμός που προκαλείται λόγω ομοιόμορφης κατανομής των παραμορφώσεων και είναι ανάλογος με τον λαιμό που παρατηρείται στην μεσαία εγκάρσια διατομή κυλινδρικού δοκιμίου που υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό (diffuse neck), καθώς και ο τοπικός λαιμός που σχηματίζεται σε περιορισμένες ζώνες υλικού όπου επικρατούν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (localized neck). Χαρακτηριστικό του 'diffuse neck' ή διαχεόμενου λαιμού είναι ότι προκαλεί σταδιακή και ήπια μείωση του πάχους του ελάσματος ενώ η έκτασή του είναι αρκετά μεγαλύτερη από το πάχος του. Σημειώνεται ότι η δημιουργία διαχεόμενου λαιμού στο έλασμα δεν θεωρείται κρίσιμη για την θραύση του. Αντίθετα ο τοπικός λαιμός είναι εκείνος που καθορίζει τα όρια μορφοποίησης των ελασμάτων τα οποία απεικονίζονται στα διαγράμματα FLD. Μια επέκταση των διαγραμμάτων FLD είναι τα FFLD (Fracture Forming Limits Diagram) τα οποία απεικονίζουν τα όρια των μέγιστων και ελάχιστων παραμορφώσεων στο έλασμα λίγο πριν την τελική του θραύση. Πρώτος ο Considere (4) το 1885 προέβλεψε την έναρξη ομοιόμορφα διαχεόμενου λαιμού (diffuse necking) σε κατάλληλα δοκίμια, εκτελώντας πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού και καθορίζοντας το μέγιστο φορτίο P_{max} που απαιτείται για τον σχηματισμό του τοπικού λαιμού σε αυτά. Με αύξηση της παραμόρφωσης στα δοκίμια αυξάνεται το μήκος τους με ταυτόχρονη μείωση της διατομής τους. Το φορτίο όμως $P = \sigma A$ όπου σ η πραγματική τάση, συνεχίζει να αυξάνει λόγω κράτυνσης του υλικού που θεωρείτε ότι ακολουθεί τον εκθετικό νόμο κράτυνσης $\sigma = K\varepsilon^n$. Δηλαδή η αύξηση της τάσης λόγω κράτυνσης του υλικού, αντισταθμίζει την μείωση της διατομής. Κάποια στιγμή όμως η μείωση της διατομής λόγω του τοπικού λαιμού είναι αρκετά μεγάλη ώστε το φορτίο P να φτάνει τελικά μια μέγιστη τιμή:

$$dP = 0 = d(\sigma A) = A d\sigma + \sigma dA \quad d\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{A}{A_0}\right) = 0 \quad (2.2-1)$$

$\sigma = \sigma_{eq} \bar{\sigma} \sigma_1$ για μονοαξονικό εφελκυσμό

Υποθέτοντας πλήρως πλαστικό και ασυμπίεστο υλικό προκύπτει:

$$-\frac{dA}{A} = \frac{d\sigma}{\sigma} \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A} \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \quad (2.2-2)$$

το παραπάνω κριτήριο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_1} = \sigma \quad (2.2-3)$$

Όπου το ε_1 παριστάνει την μέγιστη κύρια παραμόρφωση που σε περίπτωση μονοαξονικού εφελκυσμού έχει την διεύθυνση της φόρτισης. Για υλικό που η καταστατική του σχέση περιγράφεται από τον εκθετικό νόμο κράτυνσης ισχύει:

$$\sigma_{eq} = K \varepsilon_{eq}^n \quad (2.2-4)$$

όπου K και n είναι σταθερές του υλικού.

Η κύρια μέγιστη παραμόρφωση στο σημείο σχηματισμού του λαιμού για μονοαξονικό εφελκυσμό γίνεται τότε:

$$\sigma_{eq} \bar{\kappa} \sigma_1 = K \varepsilon_1^n \text{ για μονοαξονικό εφελκυσμό}$$

$$\frac{\mu \sigma_1}{\mu \varepsilon_1} = \bar{\sigma}_1 \quad n K \varepsilon_1^{n-1} = K \varepsilon_1^n$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_{eq} = n} \text{ σε μονοαξονικό εφελκυσμό} \quad (2.2-5)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να καθοριστούν αναλυτικά οι τιμές των παραμορφώσεων που απαιτούνται για την δημιουργία διαχεόμενου λαιμού σε έλασμα από ισοτροπικό υλικό και υπό διαξονική φόρτιση. Ο Swift (5) το 1952 πρότεινε τον υπολογισμό της κύριας μέγιστης παραμόρφωσης από τον τύπο:

$$\varepsilon_1 = \frac{2n(1 + \rho_R + \rho_R^2)}{(1 + \rho_R)(2\rho_R^2 - \rho_R + 2)} \text{ σε διαξονικό εφελκυσμό} \quad (2.2-6)$$

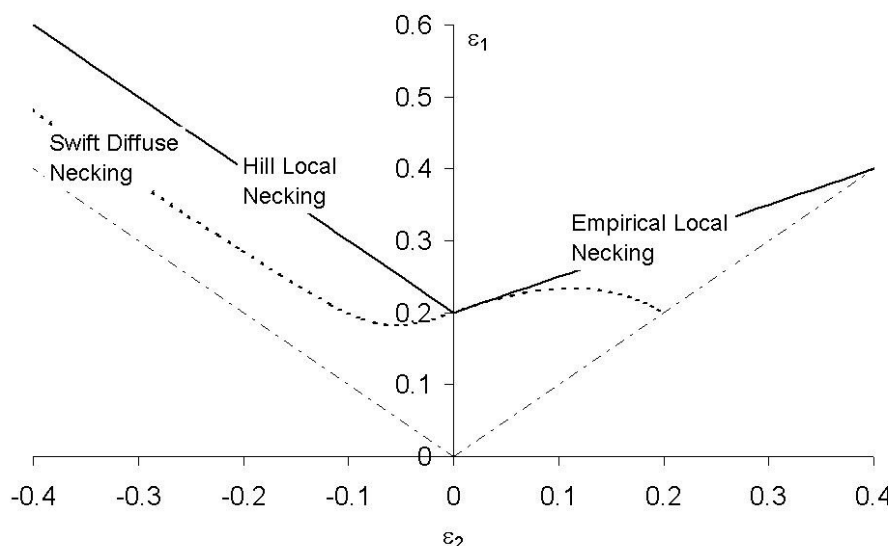
Ο παραπάνω τύπος ισχύει όταν το έλασμα φορτίζεται αναλογικά στις δύο διευθύνσεις ώστε να επικρατεί σταθερός λόγος παραμορφώσεων $\rho_R = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = const$

Αργότερα ο Hill (6) (1952) για ισοτροπικό υλικό που υπακούει σε εκθετικό νόμο κράτνσης και για περιοχή παραμορφώσεων ($\varepsilon_1 > 0$ και $\varepsilon_2 < 0$) απέδειξε ότι οι κύριες παραμορφώσεις την στιγμή έναρξης του τοπικού λαιμού ικανοποιούν την σχέση:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = n \quad \text{για } \varepsilon_2 < 0 \quad (2.2-7)$$

Συνεπώς ο Hill βασιζόμενος στην κλασική θεωρία πλαστικότητας καθόρισε την έναρξη ομοιόμορφα διαχεόμενου και τοπικού λαιμού στην περιοχή των παραμορφώσεων όπου $\varepsilon_1 > 0$ και $\varepsilon_2 < 0$. Αντίθετα στην περιοχή των παραμορφώσεων όπου $\varepsilon_1 > 0$ και $\varepsilon_2 > 0$ η σχέση που πρότεινε ο Hill δεν προέβλεπε ορθά τον σχηματισμό λαιμού. Για την περιοχή αυτή τα όρια μορφοποίησης των ελασμάτων καθορίζονται υποθέτοντας αρχικές ατέλειες στα ελάσματα [θεωρία των Marciniak και Kuczunski, 1967 (7)] ή χρησιμοποιώντας την θεωρία της ανάλυσης διαταραχών (perturbation analysis) μελετώντας δηλαδή την συνεχή ανάπτυξη πλαστικών ασταθειών στο έλασμα με βάση την γραμμική αθροιστική συνεισφορά τους στην ολική αστοχία. [Dudzinski και Molinari, 1991 (8)]. Εκτός από τις προηγούμενες σύνθετες θεωρίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο απλός εμπειρικός τύπος που εισήγαγαν οι Parmar και Mellor [1978, (9)] όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.2-3:

$$\varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 = n \quad \text{για } \varepsilon_2 > 0, \text{ εμπειρικός τύπος} \quad (2.2-8)$$



Εικόνα 2.2-3: Διαγράμματα FLD από κριτήρια πλαστικής αστάθειας των Swift, Hill και εμπειρικό κριτήριο για ισοτροπικό υλικό που ακολουθεί εκθετικό νόμο κράτνσης με εκθέτη $n=0.2$, (ϵ_2 , ϵ_1) η κύρια ελάχιστη και μέγιστη παραμόρφωση αντίστοιχα. Το σημείο (0 , 0.2) αντιστοιχεί σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης.

2.3. Μοντέλα όλκιμης θραύσης μετάλλων

Το πρόβλημα της όλκιμης θραύσης των μετάλλων απασχολεί εδώ και αρκετά χρόνια τους μηχανικούς που προσπαθούν να αυξήσουν την αντοχή των κατασκευών. Αρκετά πειράματα που διεξήχθησαν σε δοκίμια από όλκιμους χάλυβες, απέδειξαν ότι η θραύση τους δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της πλαστικής παραμόρφωσης που αναπτύσσεται σε αυτά, αλλά σχετίζεται άμεσα με το μέγεθος της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων η οποία εκφράζεται από το «triaxiality». Αρκετά απλά στην διατύπωσή τους κριτήρια αστοχίας έχουν προταθεί έως τώρα, τα οποία αν και δίνουν καλά αποτελέσματα για μια συγκεκριμένη περίπτωση φόρτισης των δοκιμίων, αποτυγχάνουν όταν η κατάσταση των τάσεων και των παραμορφώσεων μεταβάλλεται. Τα περισσότερα κριτήρια που αναφέρονται στην βιβλιογραφία εξαρτώνται τόσο από την κατάσταση των τάσεων και παραμορφώσεων όσο και από την ιστορία των μεγεθών

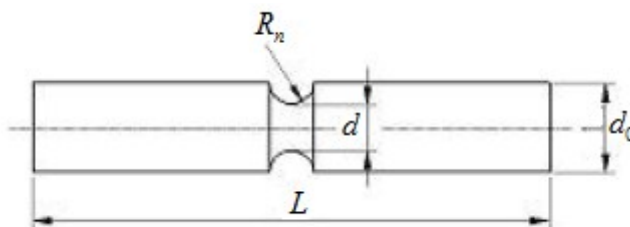
αυτών στο σημείο της θραύσης. Για παράδειγμα στα εμπειρικά κριτήρια η θραύση προβλέπεται ότι θα συμβεί όταν το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης των τάσεων και παραμορφώσεων $f_{emp}(\sigma, \varepsilon)$, ως προς την ιστορία της παραμόρφωσης $d\varepsilon$, φτάσει μια κρίσιμη τιμή D_{cr} σύμφωνα με τον τύπο:

$$D_{cr} = \int f_{emp}(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.3-9)$$

Ο Bridgman [1952, (10)] ήταν ο πρώτος που έδειξε ότι στο σημείο της θραύσης η πλαστική παραμόρφωση που αναπτύσσεται εξαρτάται άμεσα από την τριαξονική κατάσταση των τάσεων. Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης εκτέλεσε πειράματα εφελκυσμού σε κυλινδρικά δοκίμια με διαφορετικές ακτίνες εγχοπής R_n «notched circular specimens» (Εικόνα 2.3-4). Τα πειράματα αποκάλυψαν ότι η υδροστατική πίεση που επικρατεί στα εγκλείσματα του υλικού παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη κενών, τα οποία διογκώνονται εφόσον έρθουν σε επαφή με γειτονικά τους κενά με τα οποία και συνενώνονται προκαλώντας έτσι την έναρξη των ρωγμών. Σύμφωνα με τον Bridgman η μεγαλύτερη τιμή υδροστατικής πίεσης σ_H εμφανίζεται στο κέντρο της κρίσιμης διατομής του δοκιμίου όπου και αναπτύσσεται λαιμός. Κατέληξε λοιπόν στον υπολογισμό της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων στο σημείο του λαιμού με βάση τον αναλυτικό τύπο:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq, \max}} = \frac{1}{3} + \ln \frac{d}{4R_n} + 1 \quad (2.3-10)$$

όπου R_n η αρχική ακτίνα της εγχοπής και d η διάμετρος της αρχικής ελάχιστης εγκάρσιας διατομής του κυλινδρικού δοκιμίου.



Εικόνα 2.3-4: Κυλινδρικό δοκίμιο με εγχοπή για πείραμα εφελκυσμού

Η τριαξονική κατάσταση των τάσεων που επικρατεί στα σημεία του δοκιμίου περιγράφεται από την τιμή του λόγου $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$ που καλείται «triaxiality» και συμβολίζεται για συντομία με το γράμμα T. Το σ_H εκφράζει την υδροστατική τάση που δίνεται από τον τυπο:

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (2.3-11)$$

ενώ το σ_{eq} εκφράζει την ισοδύναμη τάση, η οποία μπορεί να δοθεί από τον τύπο των ισοδύναμων Von-Mises τάσεων ως εξής:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

(2.3-12)

s_{ij} είναι ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων:

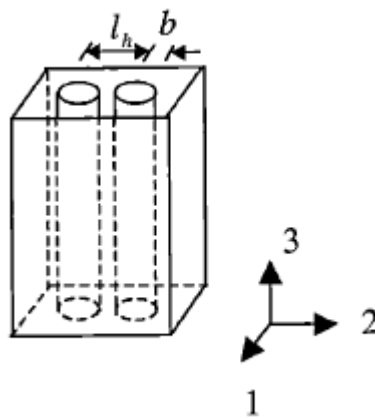
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_H \text{ όπου το } \delta_{ij} \text{ είναι το δέλτα του Kronecker.}$$

Η ενεργή παραμόρφωση στην θραύση ϵ_{eq}^f υπολογίζεται στην κρίσιμη διατομή του δοκιμίου από μια σχέση μεταξύ της αρχικής διαμέτρου της d_0 και της διαμέτρου της μετά την θραύση d_f ως εξής:

$$\epsilon_{eq}^f = 2 \ln \frac{d_0}{d_f}$$

(2.3-13)

Αργότερα παρουσιάστηκαν μελέτες που λάμβαναν υπόψη την μικροδομή των υλικών, την ανάπτυξη των μικροκενών και τους μηχανισμούς συνενωσής τους με τα γειτονικά τους κενά για την δημιουργία των ρωγμών. Σημαντικές είναι οι εργασίες των McClintock [1968, (11)] και Rice-Tracey [1969, (12)]. Συγκεκριμένα ο McClintock μοντελοποίησε την δομή του υλικού θεωρώντας το ως μια μήτρα που περιέχει κενά σε σχήμα κυλίνδρων (Εικόνα 2.3-5). Ο όγκος των κυλινδρικών κενών αυξάνεται συνεχώς μεταβάλλοντας το σχήμα τους ανάλογα με την κατάσταση των τάσεων που επικρατεί στη μήτρα.



Εικόνα 2.3-5: Γεωμετρία μοντέλου θραύσης του McClintock που βασίζεται στην αύξηση του όγκου των κυλινδρικών οπών

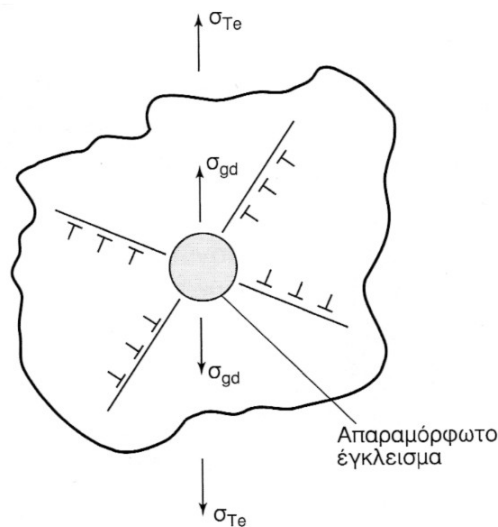
Η θραύση υποτίθεται ότι συμβαίνει όταν δύο γειτονικά κυλινδρικά κενά ακουμπήσουν μεταξύ τους. Αργότερα οι Rice και Tracey ανέπτυξαν ένα τρισδιάστατο μοντέλο θραύσης θεωρώντας ότι η θραύση συμβαίνει λόγω της αύξησης του όγκου αρχικών σφαιρικών κενών εντός του υλικού με την επιβολή τασικού πεδίου στην μήτρα. Τα περισσότερα μοντέλα που βασίζονται στην ανάπτυξη αρχικών μικροκενών στο υλικό περιγράφονται από την γενική σχέση:

$$D_{cr} = f \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \frac{\varepsilon_{eq}^f}{\varepsilon_{eq}^{th}} \varepsilon_{eq}$$

(2.3-14)

η οποία σχετίζεται με την τριαξονική εντατική κατάσταση και την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση. Η έναρξη της ζημιάς γίνεται όταν η τιμή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης φτάσει μια οριακή τιμή ε_{eq}^{th} (threshold strain) και εξελίσσεται μέχρι την θράυση όπου η τιμή της παραμόρφωσης είναι ε_{eq}^f , D_{cr} είναι το ποσό της βλάβης που απαιτείται για την θράυση.

Στα παραπάνω κριτήρια, τα οποία αναπτύχθηκαν αρχικά για ελαστοπλαστικά υλικά, ο μηχανισμός της όλκιμης θραύσης βασίζεται κυρίως στη συνένωση ή όπως αλλιώς λέγεται στη συμφύα των μικροκενών. Η ύπαρξη δευτερογενών φάσεων ή εγκλεισμάτων μέσα σε ένα υλικό επηρεάζει αρνητικά την συνολική ολκιμότητα, εφόσον αυτά έχουν μικρότερη ολκιμότητα από την μήτρα. Η παρουσία των συστατικών αυτών λειτουργεί καταλυτικά στην έναρξη μικρορωγμών ή μικροκενών. Κατά την επιβολή μιας εξωτερικής εφελκυστικής τάσης, σ_{Te} , η ασυνέχεια της παραμόρφωσης στη διεπιφάνεια εγκλείσματος/μήτρας οδηγεί στη δημιουργία νέων διαταραχών, οι οποίες προκαλούν μια επιπρόσθετη τάση, σ_{gd} και η οποία τείνει να αποκολλήσει το εγκλείσμα από τη μήτρα ή να το οδηγήσει σε θράυση (Εικόνα). Αν η διεπιφάνεια εγκλείσματος/μήτρας δεν είναι αρκετά ισχυρή, τότε δημιουργείται ένα μικροκενό.



Εικόνα 2.3-6: Μηχανισμός δημιουργίας μικροκενού πλησίον της διεπιφάνειας εγκλείσματος/μήτρας

Η συνολική εφελκυστική τάση που μεταφέρεται στη διεπιφάνεια είναι ίση με:

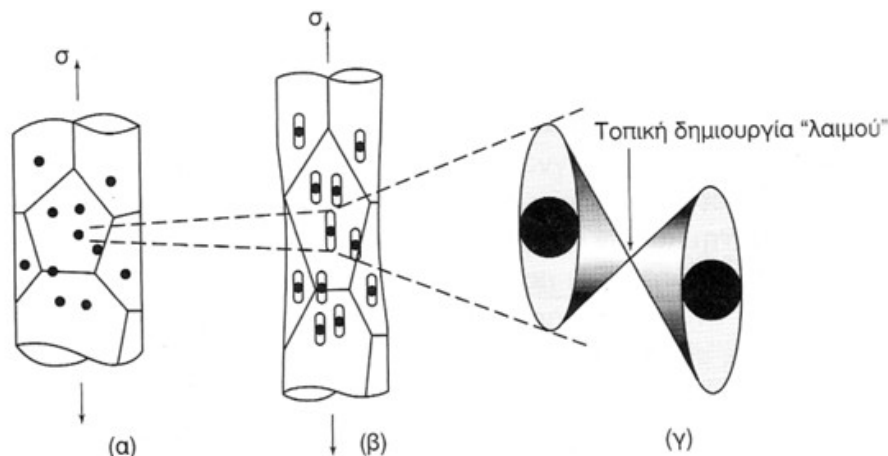
$$\sigma_T = \sigma_{Te} + \sigma_{gd}$$

(2.3-15)

Σε συγκεκριμένη τιμή τάσης σ_T τα μικροκενά που δημιουργούνται συνενώνονται μεταξύ τους και οδηγούν τελικά στην θραύση του υλικού.

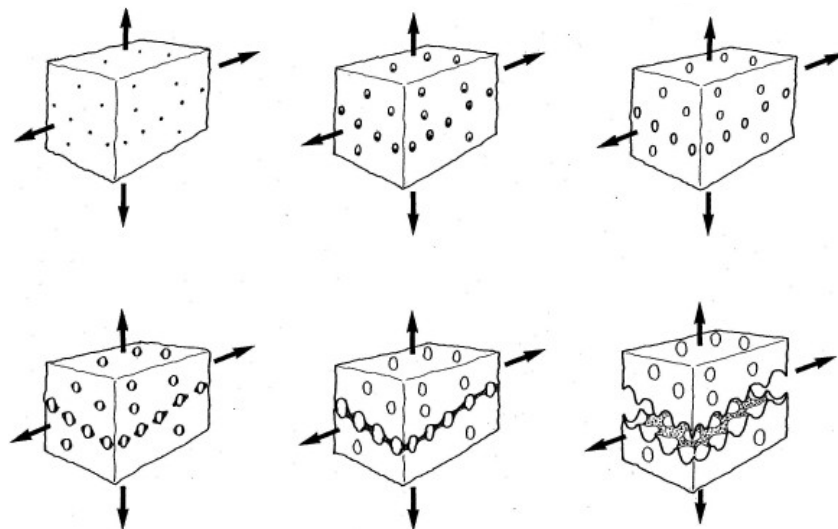
Οι μηχανισμοί συνένωσης των μικροκενών είναι κυρίως δύο:

- «**Μηχανισμός συνένωσης με τοπική δημιουργία λαιμού**». Στην Εικόνα 2.3-7 φαίνεται ο συγκεκριμένος μηχανισμός, σύμφωνα με τον οποίον η συνένωση πραγματοποιείται μέσω τοπικής δημιουργίας λαιμού μεταξύ των δύο μικροκενών.



Εικόνα 2.3-7: (α) Επιβολή εφελκυστικής τάσης σε υλικό που παρουσιάζει διασπορά εγκλεισμάτων. (β) Δημιουργία μικροκενών. (γ) Συνένωση μικροκενών με μηχανισμό τοπικής δημιουργίας λαιμού.

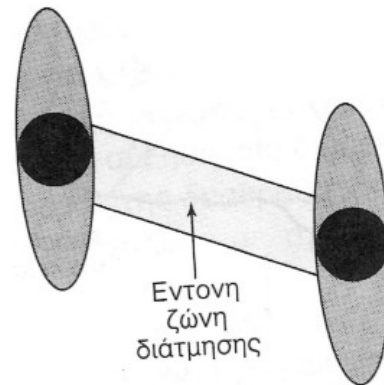
Στην Εικόνα 2.3-8 φαίνεται χαρακτηριστικά ο μηχανισμός ανάπτυξης των κενών, η δημιουργία τοπικού λαιμού ανάμεσα στα κενά που έχουν αναπτυχθεί, η συνένωση των κενών και τελικά η θραύση που οδηγεί σε αστοχία της κατασκευής.



Εικόνα 2.3-8: Στάδια Όλκιμης θραύσης από ανάπτυξη κενών. Τα κενά δημιουργούνται γύρω από εγκλείσματα, λόγω φόρτισης αυξάνεται ο όγκος τους, δημιουργείται τοπικά λαιμός ανάμεσα στις συνδέσεις τους, το υλικό των συνδέσεων σπάει, συνενώνονται τα κενά και σχηματίζονται ρωγμές.

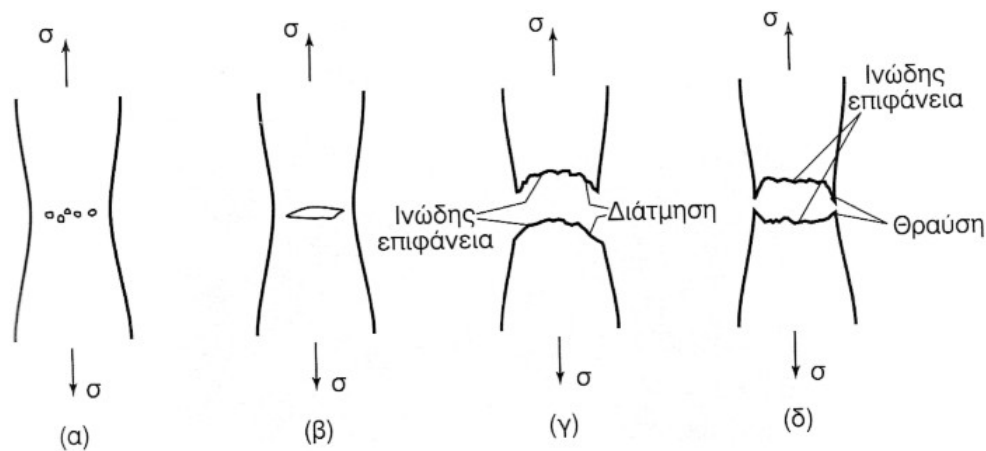
- «**Μηχανισμός συνένωσης μέσω δημιουργίας ζώνης διάτμησης**». Σύμφωνα με τον μηχανισμό αυτό, η γεφύρωση των μικροκενών συντελείται με έντονη

διατμητική παραμόρφωση και εμφάνιση ζώνης διάτμησης στη μεταξύ τους περιοχή (Εικόνα 2.3-9).



Εικόνα 2.3-9: Συνένωση μικροκενών σύμφωνα με το μηχανισμό δημιουργίας ζώνης διάτμησης.

Τα στάδια της μακροσκοπικής αστοχίας του υλικού σε κυλινδρικό δοκίμιο υπό μονοαξονικό εφελκυσμό παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.3-10. Η τελική θραύση χαρακτηρίζεται από τη μορφή των άκρων των δύο θραυσμάτων, κοντά στην επιφάνεια θραύσης τους. Στην Εικόνα 2.3-10 γ και δ αντίστοιχα ξεχωρίζουμε δύο μορφές θραύσης που αναφέρονται ως «κόνος-κρατήρας» και ως «διπλός κρατήρας». Η μακροσκοπική μορφολογία της επιφάνειας θραύσης και στις δύο περιπτώσεις είναι ινώδης.



Εικόνα 2.3-10: Στάδια όλκιμης θραύσης: (α) δημιουργία μικροκενών, (β) συνένωση μικροκενών, (γ) θραύση με διάτμηση άκρων και (δ) θραύση με διάρρηξη άκρων.

Μέχρι σήμερα έχουν προταθεί αρκετά διαφορετικά μοντέλα όλκιμης θραύσης. Σύμφωνα με τον Atkins [1997, (13)] θα μπορούσαμε να τα κατατάξουμε σε τέσσερις κατηγορίες: στα εμπειρικά (empirical models), στα μοντέλα που βασίζονται στην ανάπτυξη των κενών εντός του υλικού (void growth models), σε εκείνα που υπακούουν στις αρχές της μηχανικής της συνεχούς βλάβης στο υλικό (continuum damage mechanics CDM) καθώς και στα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψιν το πορώδες των υλικών (porosity based material models). Στην συνέχεια θα αναφερθούν τα κυριότερα κριτήρια που ανήκουν σε κάθε μία από τις κατηγορίες που αναφέρθηκαν.

2.3.1.Εμπειρικά κριτήρια

Τα περισσότερα από τα εμπειρικά κριτήρια που έχουν προταθεί μέχρι σήμερα αποτελούν απλές εκφράσεις της μέγιστης τιμής των τάσεων, των παραμορφώσεων, του πλαστικού έργου ανά μονάδα όγκου, καθώς και συνδυασμό αυτών των ποσοτήτων. Το πιο κοινό από τα εμπειρικά κριτήρια που χρησιμοποιείται ευρύτερα σε εφαρμογές μορφοποίησης ελασμάτων, λόγω της απλότητάς του, είναι το κριτήριο της κρίσιμης παραμόρφωσης κατά το πάχος του ελάσματος, που θεωρεί ότι η θραύση συμβαίνει όταν ξεπεραστεί η κρίσιμη αυτή τιμή της παραμόρφωσης. Επίσης ένα άλλο απλό κριτήριο αφορά το πλαστικό έργο ανά μονάδα όγκου που εκφράζεται από το ολοκλήρωμα $\sigma_{eq} d\epsilon_{eq}$, όπου το σ_{eq} είναι η ισοδύναμη Von-Mises τάση. Η θραύση σε ένα στοιχείο του υλικού υποτίθεται ότι συμβαίνει, όταν το πλαστικό έργο ανά μονάδα όγκου φτάσει μια κρίσιμη τιμή. Το κριτήριο που αναπτύχθηκε από τους Cockcroft και Latham [1972, (14)] αποτελεί μια τροποποίηση της παραπάνω έκφρασης. Η διαφορά είναι ότι εισάγει στο παραπάνω ολοκλήρωμα το μέγεθος της κύριας μέγιστης τάσης σ_1 καταλήγοντας στον τύπο:

$$D = \sigma_1 d\epsilon_{eq} \quad (2.3.1-16)$$

Στην συνέχεια ο Oh [1979, (15)] τροποποίησε το κριτήριο των Cockcroft και Latham εισάγοντας στην έκφρασή του έναν λόγο τάσεων ως εξής:

$$D = \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} d\epsilon_{eq}$$

(2.3.1-17)

Η παραπάνω έκφραση αποδεικνύεται ικανή να προβλέψει την θραύση σε εφαρμογές όπου στην κατασκευή επικρατούν αρνητικές και μικρές τιμές τριαξονικής κατάστασης τάσεων «triaxiality». Φαίνεται δηλαδή να λειτουργεί καλά υπό θλιπτική κατάσταση τάσεων. Ο Brozzo [1972, (16)] τροποποίησε εκ νέου το κριτήριο των Cockcroft και Latham ώστε να συμπεριλάβει την επίδραση της υδροστατικής πίεσης στην θραύση. Σύμφωνα με τον Brozzo η θραύση προβλέπεται να συμβεί όταν η τιμή του ολοκληρώματος D της συνάρτησης της υδροστατικής τάσης σ_H , ως προς την προσαύξηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $d\epsilon_{eq}$, πάρει μια κρίσιμη τιμή D_{cr} σύμφωνα με τον τύπο:

$$D = \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - \sigma_H)} d\epsilon_{eq}$$

(2.3.1-18)

Η κρίσιμη τιμή D_{cr} θεωρείται ως παράμετρος του υλικού. Επίσης το κριτήριο του Norris [1978, (17)] βασίζεται όπως και τα περισσότερα εμπειρικά κριτήρια στην υδροστατική τάση και την πλαστική παραμόρφωση σύμφωνα με την σχέση:

$$D = \frac{1}{1 - c_N \sigma_H} d\epsilon_{eq}$$

(2.3.1-19)

όπου το c_N αποτελεί παράμετρο του υλικού. Το κριτήριο θα πρέπει να ικανοποιείται εντός μιας περιοχής ακτίνας r_c στο υλικό, ώστε να θεωρηθεί ότι υπάρχει βλάβη που μπορεί να οδηγήσει σε θραύση. Η ακτίνα r_c είναι χαρακτηριστική του κάθε υλικού.

Ο Atkins το 1981 (18) τροποποιώντας την έκφραση του Norris πρότεινε τον δείκτη ζημιάς:

$$D = \left[\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_\theta}{d\varepsilon_z} + \frac{1}{2} \frac{1}{d\varepsilon_z} - c_A \sigma_H \right] d\varepsilon_{eq} \quad (2.3.1-20)$$

όπου ε_θ και ε_z δηλώνουν την περιφερειακή και αξονική αντίστοιχα παραμόρφωση σε ένα κυλινδρικό δοκίμιο που υποβάλλεται σε συμπίεση, εκφρασμένα σε αξονοσυμμετρικό σύστημα αξόνων. Στην γενικότερη περίπτωση θα μπορούσαμε για το παραπάνω κριτήριο στον λόγο των παραμορφώσεων να χρησιμοποιήσουμε τις κύριες τιμές τους ($d\varepsilon_1/d\varepsilon_2$). Η παράμετρος c_A χρησιμοποιείται για την βαθμονόμηση του κριτηρίου.

Αργότερα στο γενικό κριτήριο θραύσης που αναπτύχθηκε από τους Johnson και Cook [1985, (19)] περιλαμβάνεται η επίδραση της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων, της παραμόρφωσης, του ρυθμού παραμόρφωσης καθώς και της θερμοκρασίας. Εδώ ο δείκτης ζημιάς δίνεται από τον τύπο:

$$D = \frac{d\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_f} \quad (2.3.1-21)$$

όπου ε_f εκφράζει την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στην θραύση κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες τάσεων, ρυθμού παραμόρφωσης και θερμοκρασίας που επικρατούν την στιγμή που προκαλείται η θραύση (δηλαδή για $D=1$). Η έκφραση της παραμόρφωσης ε_f δίνεται από τον αναλυτικό τύπο:

$$\varepsilon_f = D_1 + D_2 \exp \left[D_3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right] + D_4 \ln \left[\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right] + D_5 T^* \quad (2.3.1-22)$$

όπου οι σταθερές $D_1 \dots D_5$ χρησιμοποιούνται για την βαθμονόμηση του κριτηρίου, ο ρυθμός παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}_0$ συνήθως έχει την τιμή $1.0s^{-1}$ ενώ το T^* είναι μια ομόλογη θερμοκρασία που ορίζεται ως εξής:

$$T^* = \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \quad (2.3.1-23)$$

Εάν ο ρυθμός παραμόρφωσης και η ομόλογη θερμοκρασία τεθούν μηδεν, τότε στην έκφραση της παραμόρφωσης ε_f μένει μόνο η πρώτη αγκύλη και συνεπώς το κριτήριο αστοχίας γίνεται παρόμοιο με το κριτήριο των Rice-Tracey που θα εξηγηθεί στην συνέχεια (Ενότητα 2.3.2). Για να αποφευχθούν αριθμητικά προβλήματα όταν $\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} < 1$, οι

Camacho και Ortiz [1997, (20)] τροποποίησαν τον όρο του ρυθμού παραμόρφωσης που περιέχεται στον τυπο 2.3.1-7 των Johnson και Cook εκφράζοντάς τον ως εξής:

$$\epsilon_f = D_1 + D_2 \exp \left(D_3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} + \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} \right)^{D_4} + D_5 T^* \quad (2.3.1-24)$$

Σημειώνεται ότι σε προβλήματα που απασχολούν τους ναυπηγούς μηχανικούς και αφορούν κυρίως συγκρούσεις και προσαράξεις πλοίων, οι ρυθμοί παραμόρφωσης που προκαλούνται είναι σχετικά χαμηλοί, συγκριτικά με τους ρυθμούς παραμόρφωσης σε βαλλιστικά προβλήματα κρούσεων. Επίσης οι θερμοκρασίες που αναπτύσσονται, λόγω και της παρουσίας του νερού, δεν συνεισφέρουν σημαντικά στην χαλάρωση του υλικού (material softening). Συνεπώς η επίδρασή των παραπάνω παραγόντων παραλείπεται από τον υπολογισμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στην θραύση (τύποι 2.3.1-7 ή 2.3.1-9 ανάλογα). Γενικά τα προβλήματα των συγκρούσεων και προσαράξεων πλοίων ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων χαμηλής ταχύτητας κρούσεως και επομένως η χρήση του κριτηρίου αστοχίας των Johnson και Cook δεν προτείνεται. Αντίθετα στην προσομοίωση έκρηξης σε πλοίο, οι ρυθμοί παραμόρφωσης και τα ποσά θερμότητας που προσδίνονται στο υλικό είναι αρκετά υψηλά, ιδιαίτερα εάν μετά την έκρηξη εκδηλωθεί και πυρκαγιά. Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή του κριτηρίου των Johnson και Cook θα μπορούσε να προβλέψει αξιόπιστα την θραύση αφού οι συνθήκες που επικρατούν είναι ιδανικές για την ορθή λειτουργία του συγκεκριμένου κριτηρίου αστοχίας.

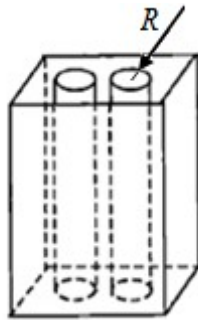
2.3.2. Μοντέλα ανάπτυξης κενών

Πολλές μελέτες έχουν διεξαχθεί μέχρι σήμερα και αφορούν την σχέση της μικροδομής του υλικού με τους μηχανισμούς όλκιμης θραύσης. Οι σημαντικότερες είναι του McClintock και των Rice και Tracey οι οποίοι λαμβάνουν υπόψιν τους τον τρόπο ανάπτυξης των κενών στο υλικό. Ο McClintock [1968, (11)] μελέτησε τα κενά στις δύο διαστάσεις, θεωρώντας τα ως μια σειρά κυλίνδρων ίσης ακτίνας εντός μιας μήτρας υλικού, που υπόκειται σε ένα απομονωμένο πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων. Περιέγραψε λοιπόν την ανάπτυξη των κενών με βάση τον εξής αναλυτικό τύπο:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\epsilon}_{eq} \sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \frac{(1-n) \sigma_H \sqrt{3}}{\sigma_{eq}}$$

(2.3.2-25)

όπου R και \dot{R} είναι αντίστοιχα η ακτίνα και ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας των κυλινδρικών κενών όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.2-11.



Εικόνα 2.3.2-11: Το μοντέλο κυλινδρικών οπών του McClintock

Η παράμετρος n είναι ο εκθέτης στον νόμο κράτυνσης του υλικού που εκφράζεται από την σχέση $\sigma_{eq} = K \epsilon_{eq}^n$. Σε μια απλοποιημένη έκδοση του μοντέλου του McClintock, η ζημιά στο υλικό από την αύξηση του όγκου των κενών σε αυτό, εκφράζεται από το ολοκλήρωμα:

$$D = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} d\epsilon_{eq}$$

(2.3.2-26)

Όταν ο δείκτης D φτάσει την κρίσιμη τιμή D_{cr} τότε τα κενά συνενώνονται και το δοκίμιο αστοχεί. Σημειώνεται ότι το κριτήριο θεωρεί ως συνένωση των κενών την απλή επαφή τους. Δηλαδή μηχανισμοί συνένωσης των κενών όπως η δημιουργία λαιμού μεταξύ των μικροκενών ή ο σχηματισμός διατμητικών λωρίδων υλικού ανάμεσα σε αυτά, δεν λαμβάνονται υπόψιν από το μοντέλο του McClintock.

Από την άλλη οι Rice και Tracey [1969, (12)] στην εργασία τους θεώρησαν αρχικά την ύπαρξη κενών σφαιρικού σχήματος εντός μιας μήτρας υλικού η οποία υποβάλλεται σε ένα απομακρυσμένο πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων. Οι ακτίνες των σφαιρικών κενών μεταβάλλονται με ορισμένο ρυθμό, λόγω του πεδίου των τάσεων και των παραμορφώσεων, με συνέπεια την αύξηση του όγκου των κενών και τελικά την

συνένωσή τους όταν η ακτίνα τους έχει φτάσει μια κρίσιμη τιμή. Ο αναλυτικός τύπος που πρότειναν για την περιγραφή της αύξησης των κενών είναι ο εξής:

$$\ln \frac{R}{R_0} = \frac{\epsilon_{coal}}{\epsilon_{nuc}} \alpha_{RT} \exp \left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_{eq}} \right) d\epsilon_{eq} \quad (2.3.2-27)$$

όπου R και R₀ είναι η τρέχουσα και αρχική, αντίστοιχα, ακτίνα των σφαιρικών κενών, ε_{nuc} και ε_{coal} είναι οι τιμές των παραμορφώσεων την στιγμή που ξεκινά η αύξηση των σφαιρικών κενών και την στιγμή που συνενώνονται μεταξύ τους, ενώ το α_{RT} είναι σταθερά του υλικού. Οι Rice και Tracey καθόρισαν την τιμή του α_{RT} σε 0.283 για τους μαλακούς χάλυβες (mild steel), ενώ άλλοι συγγραφείς όπως ο Atkins [1997, (13)] πρότειναν α_{RT} = 0.427. Η συνένωση των σφαιρικών κενών συμβαίνει όταν ο

λόγος των ακτίνων υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, $\frac{R}{R_0} > \frac{R_c}{R_0}$. Η παράμετρος α_{RT} δεν

αποτελεί κρίσιμο μέγεθος καθώς επηρεάζει αναλογικά την βλάβη του υλικού όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση. Η τιμή της παραμέτρου αυτής μαζί με την τιμή του

κρίσιμου λόγου $\frac{R_c}{R_0}$ θα πρέπει να προσδιοριστούν από συγκεκριμένα πειράματα για

κάθε υλικό. Συχνά το μοντέλο των Rice-Tracey εκφράζεται ως ένας δείκτης ζημιάς όπως αυτός ορίστηκε από τους Hancock και Mackenzie [1976, (21)]:

$$D = \alpha_{HM} \exp \left(\frac{c_{HM}}{2} \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) \epsilon_{eq} \quad (2.3.2-28)$$

Όταν η παράμετρος c_{HM} = $\frac{3}{2}$ τότε η παραπάνω σχέση είναι ίδια με την έκφραση του μοντέλου ανάπτυξης σφαιρικών κενών των Rice και Tracey. Παρόλα αυτά αρκετές εφαρμογές έχουν δείξει ότι για c_{HM} = 2 το μοντέλο προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα. Η παράμετρος α_{HM} χρησιμοποιείται ως σταθερά βαθμονόμησης.

Ένα άλλο μοντέλο που αναπτύχθηκε από τον Chaouadi [1994, (22)] και είναι γνωστό ως «damage work model», χρησιμοποιεί το έργο πλαστικής παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου στο οποίο συμπεριλαμβάνει την επίδραση της αλλαγής του όγκου λόγω της ανάπτυξης των κενών στο υλικό. Για την περιγραφή της ανάπτυξης των κενών ο Chaouadi χρησιμοποιεί το μοντέλο των Rice-Tracey, το οποίο συσχετίζεται με την αλλαγή του όγκου και με το έργο που παράγει η ζημιά στο υλικό dW_D «damage work» σύμφωνα με την σχέση:

$$dW_D = \frac{3\alpha_c \sigma_H}{\sigma_{eq}} \exp \left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_{eq}} \right) d\epsilon_{eq} \quad (2.3.2-29)$$

Η θραύση υποτίθεται ότι συμβαίνει όταν το έργο της ζημιάς φθάσει μια κρίσιμη τιμή $W_{D,crit}$, η οποία είναι χαρακτηριστική του υλικού. Ο παράγοντας α_c χρησιμοποιείται ως σταθερά βαθμονόμησης.

Τέλος ο LeRoy [1981, (23)] εξετάζοντας την ανάπτυξη και την συνένωση των κενών σε δοκίμια από ανθρακούχο χάλυβα που τα υπεβαλλε σε μονοαξονικό εφελκυσμό πρότεινε ένα απλό μοντέλο όλκιμης θραύσης το οποίο έχει ως εξής:

$$D = (\sigma_1 - \sigma_H) d\varepsilon$$

(2.3.2-30)

Σημειώνεται ότι σε όλα τα παραπάνω κριτήρια, τόσο στα εμπειρικά όσο και σε εκείνα που βασίζονται στην ανάπτυξη των κενών, ο βαθμός της ζημιάς που υφίσταται το υλικό δεν επηρεάζει την καταστατική του σχέση. Δηλαδή αν και είναι εμφανές ότι η αύξηση του όγκου των κενών εντός της μήτρας του, προκαλεί την χαλάρωση και την μείωση της αντοχής του «material damage softening», ωστόσο η σχέση τάσεων παραμορφώσεων «constitutive material law», για λόγους απλότητας, θεωρείται ανεπηρέαστη (uncoupled damage models). Τα παραπάνω κριτήρια όπως αυτά διατυπώθηκαν χρησιμοποιούνται συχνά στις περισσότερες εφαρμογές, αφού περιγράφουν απλοϊκά τους μηχανισμούς όλκιμης θραύσης παραβλέποντας όμως αρκετούς παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν το φαινόμενο. Ωστόσο ο εύκολος τρόπος βαθμονόμησής τους μέσω της εκτέλεσης απλών πειραμάτων καθώς και η εφαρμογή τους σε αριθμητικές προσομοιώσεις με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, τα καθιστούν ελκυστικά για την εισαγωγή τους σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων.

2.3.3. Μοντέλα που βασίζονται σε αρχές της Μηχανικής Συνεχούς Βλάβης

Για την σύζευξη του ποσού της βλάβης που έχει υποστεί ένα υλικό, με τον καταστατικό του νόμο (constitutive material law), χρησιμοποιούνται έως σήμερα δύο κυρίως προσεγγίσεις: το μοντέλο του Gurson (24) που λαμβάνει υπόψιν του το πορώδες του υλικού στην εξέλιξη της ζημιάς (Ενότητα 2.3.4), καθώς και το μοντέλο που πρώτος πρότεινε ο Kachanov [1958, (25)] και βασίζεται σε αρχές της μηχανικής της συνεχούς βλάβης «Continuum Damage Mechanics» ή CDM. Το μοντέλο CDM όπως προτάθηκε αργότερα από τον Lemaitre [1985, (26)] είναι ένα μοντέλο που συνδυάζει την θεωρία ελαστοπλαστικότητας με την ισοτροπική εξέλιξη της βλάβης στο υλικό. Το μέγεθος της ζημιάς μετράται μέσω μιας συνεχής συνάρτησης της βλάβης D , η οποία στο μοντέλο του Lemaitre (27) εκφράζεται ως μια γραμμική σχέση της πλαστικής παραμόρφωσης. Για τον υπολογισμό της βλάβης που υφίσταται το υλικό λαμβάνονται υπόψιν τόσο η προοδευτική υποβάθμιση των ιδιοτήτων του υλικού όσο και η απώλεια της στιβαρότητάς του, λόγω της μη αντιστρεπτής διαδικασίας αύξησης και συνένωσης των κενών σε αυτό. Με την υπόθεση ισότροπης κατανομής των μικρορωγμών και των κενών εντός του υλικού, η παράμετρος της βλάβης D μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη της διεύθυνσης. Θα μπορούσαμε λοιπόν να περιγράψουμε το ποσό της βλάβης σε σχέση με την ζημιά που υφίσταται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ως εξής:

$$D = 1 - \frac{E_{eff}}{E_0}$$

(2.3.3-31)

ή ανάλογα σε σχέση με την μείωση της ενεργής επιφάνειας του υλικού που μπορεί να φέρει φορτία ως:

$$D = 1 - \frac{A_{eff}}{A_0}$$

(2.3.3-32)

όπου E_{eff} και A_{eff} είναι αντίστοιχα η τρέχων ενεργή τιμή του μέτρου ελαστικότητας του Young και του εμβαδού της επιφάνειας που μπορεί να φέρει φορτία. Αντίστοιχα E_0 και A_0 είναι το αρχικό μέτρο ελαστικότητας και η αρχική επιφάνεια. Το μοντέλο CDM υποθέτει ένα δυναμικό F_D για να εκφράσει την απώλεια ενέργειας λόγω της βλάβης στο υλικό, ενώ στην περίπτωση που η βλάβη συμβαίνει και λόγω της πλαστικότητας ορίζεται επιπλέον το δυναμικό F_P , ώστε τελικά το συνολικό δυναμικό που εκφράζει την απώλεια έργου στο υλικό λόγω αστοχίας, να δίνεται από την αθροιστική σχέση:

$$F = F_P(\tilde{\sigma}_{ij}, H) + F_D(Y, \epsilon_{eq}, D)$$

(2.3.3-33)

Το Y είναι μια εσωτερική μεταβλητή που σχετίζεται με την βλάβη. Το F_p είναι το δυναμικό απωλειών που σχετίζεται με την πλαστική παραμόρφωση και δίνεται ως συνάρτηση της πραγματικής τάσης $\tilde{\sigma}$ και του ισοτροπικού συντελεστή κράτυνσης H , «Hardening stress» που εξαρτάται από μια μεταβλητή r . Το δυναμικό πλαστικών απωλειών όταν το υλικό πλαστικοποιείται ακολουθώντας τον νόμο διαροής κατά Von Mises μπορεί να εκφραστεί από τον τύπο:

$$F_p(\sigma_{ij}, H, D) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}}{1-D} - H(r) - \sigma_y \quad (2.3.3-34)$$

Ο Lamaitre τροποποίησε τον νόμο του Hooke εκφράζοντας την παραμόρφωση στο υλικό ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (2.3.3-35)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η παραμόρφωση στο υλικό που έχει υποστεί βλάβη μπορεί να εκφραστεί από ανάλογο νόμο με τον καταστατικό νόμο ενός υλικού χωρίς βλάβη ($D=0$). Η ενεργή πραγματική τάση $\tilde{\sigma}$, είναι η τάση που υπολογίζεται πάνω στην επιφάνεια του υλικού που μπορεί να φέρει φορτία, ως εξής:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (2.3.3-36)$$

Η εξέλιξη της βλάβης δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{M F_D}{M Y} \quad (2.3.3-37)$$

όπου λ είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής και Y ο ρυθμός απελευθέρωσης της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης:

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2 f \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}}{2E(1-D)^2} \quad (2.3.3-38)$$

Η συνάρτηση της τριαξονική κατάστασης των τάσεων «triaxiality» στον παραπάνω τύπο ορίζεται ως:

$$f \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \quad (2.3.3-39)$$

ν είναι ο λόγος του Poisson.

Όσο αναφορά το δυναμικό λόγω της βλάβης F_D , αυτό καθορίζεται κυρίως μέσω φαινομενολογικών θεωρήσεων. Ο Lemaître πρότεινε μια έκφρασή του ως εξής:

$$F_D = \frac{S}{s_0 + 1} \frac{Y}{S} \frac{\delta_0^{s_0+1}}{S} (1-D)^{-1} \quad (2.3.3-40)$$

Όπου S και s_0 είναι σταθερές του υλικού που συχνά λαμβάνουν την τιμή μηδέν. Συνεπώς η εξέλιξη της ζημιάς στο μοντέλο του Lemaître δίνεται από την σχέση:

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & r \leq r_D \\ \frac{Y}{S(1-D)} \dot{r} & r > r_D \end{cases} \quad (2.3.3-41)$$

όπου \dot{D} και r_D είναι ο ρυθμός βλάβης και το όριο για την έναρξη της βλάβης αντίστοιχα. Η μεταβλητή κράτυνσης του υλικού \dot{r} δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{r} = \dot{\epsilon}_{eq} (1-D) \quad (2.3.3-42)$$

Όταν η μεταβλητή βλάβης D φθάσει μια κρίσιμη τιμή D_{cr} , η οποία είναι χαρακτηριστική του υλικού, προκαλούνται μικρορωγμές στη δομή του.

Αρκετές πειραματικές παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι η ανάπτυξη των μικροκενών ακολουθεί μια μη γραμμική σχέση ανάμεσα στο ποσό της βλάβης και την πλαστική παραμόρφωση. Οι Chandrakanth και Pandey [1994, (28)] καθώς και οι Tai και Yang [1986, (29)] ήταν οι πρώτοι που πρότειναν μη γραμμικά μοντέλα για την περιγραφή της εξέλιξης της βλάβης σε συγκεκριμένα υλικά. Στην ίδια φιλοσοφία, ο Bopora παρουσίασε αργότερα [1997, (30)] ένα ισοτροπικό μη γραμμικό μοντέλο βλάβης ικανό να περιγράψει την εξέλιξη της ζημιάς σε διαφορετικά υλικά. Ο νόμος βλάβης στο μοντέλο αυτό είναι ο ακόλουθος:

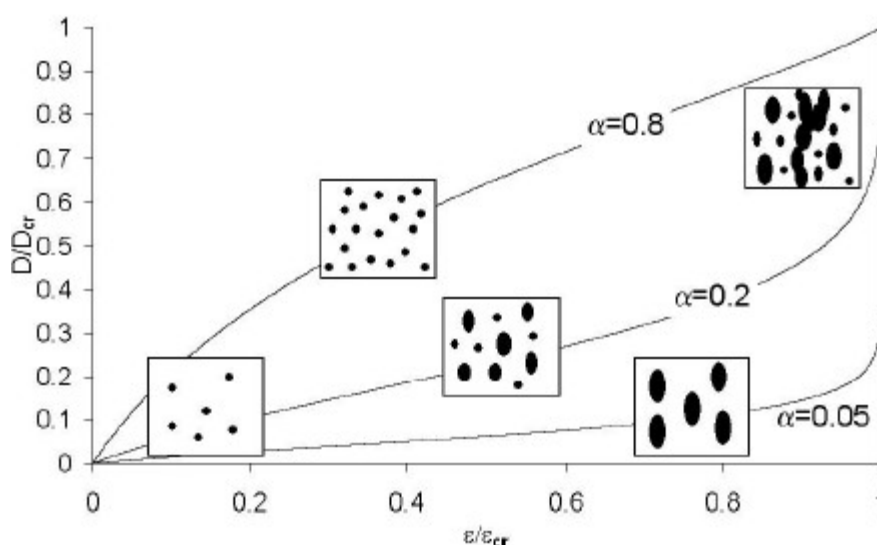
$$dD = \alpha \frac{(D_{cr} - D_0)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln \epsilon_f - \ln \epsilon_{th}} f \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) (D_{cr} - D)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{dr}{r} \quad (2.3.3-43)$$

Εδώ το D_{cr} και το ϵ_f είναι αντίστοιχα η κρίσιμη τιμή της μεταβλητής της βλάβης και η αξονική παραμόρφωση στην οποία συμβαίνει η όλκιμη θραύση. Η αξονική παραμόρφωση στην οποία ξεκινά να αναπτύσσεται η βλάβη στο υλικό ϵ_{th} «threshold strain», εκφράζει στην ουσία το όριο στο οποίο τα κενά στο υλικό ξεκινούν να σχηματίζονται γύρω από τα εγκλείσματα (nucleation of voids). Ο εκθέτης της βλάβης, α , χαρακτηρίζει τον βαθμό της μη γραμμικότητας στον νόμο εξέλιξης της ζημιάς, ενώ η

συνάρτηση του 'triaxiality' $f \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)$, είναι ίδια με εκείνη στο μοντέλο του Lemaître,

(εξίσωση 2.3.3-9). Η παράμετρος D_0 καθορίζει την αρχική ζημιά στον όγκο αναφοράς του υλικού και συνήθως τίθεται μηδέν.

Μετά από πειράματα σε δοκίμια από σφαιροειδή χυτοσίδηρο [LeRoy 1981, (23)] έγινε γνωστό ότι η εξέλιξη της ζημιάς που αφορά στην ανάπτυξη των αρχικών σχηματισθέντων κενών στο υλικό είναι πολύ αργή, ενώ από μια τιμή πλαστικής παραμόρφωσης και μετά, η ζημιά εξελίσσεται ραγδαία. Το γεγονός αυτό οφείλεται μερικώς στον σχηματισμό λαιμού, καθώς αυξάνεται η τιμή της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων στο σημείο δημιουργίας του λαιμού, ευνοώντας έτσι την γρήγορη ανάπτυξη των μικροκενών. Οι Tai [1990, (31)] και Bonora [1997, (30)] περιέγραψαν στις εργασίες τους τα διαφορετικά στάδια που ακολουθεί η εξέλιξη της ζημιάς στα μέταλλα. Στην Εικόνα 2.3.3-12 φαίνονται τρεις διαφορετικοί τρόποι εξέλιξης της ζημιάς στο μοντέλο του Bonora, ανάλογα με την τιμή του εκθέτη της βλάβης α (εξίσωση 2.3.3-13).



Εικόνα 2.3.3-12: Η εξέλιξη της ζημιάς για διαφορετικές τιμές του εκθέτη βλάβης α , 0.05, 0.2 και 0.8. Μοντέλο Bonora, (1997).

Στα μέταλλα με χαμηλή τιμή του εκθέτη α , όπως για παράδειγμα στον καθαρό χαλκό, έχει πειραματικά παρατηρηθεί ότι τα κενά σχηματίζονται με πολύ αργό ρυθμό παρόλο που το υλικό έχει ξεπεράσει την τιμή παραμόρφωσης \mathcal{E}_{th} , που είναι το όριο για τον σχηματισμό νέων κενών στο υλικό. Με αύξηση της παραμόρφωσης ακόμη λιγότερα κενά δημιουργούνται ενώ τα ήδη υπάρχοντα αναπτύσσονται με πολύ μικρή ταχύτητα. Όταν όμως η παραμόρφωση φτάσει την κρίσιμη τιμή \mathcal{E}_{cr} τα μεγαλύτερα κενά συνασπίζονται ταχύτατα με συνέπεια η θραύση να συμβεί ακαριαία. Στους μαλακούς χάλυβες όπου η τυπική τιμή του α είναι 0.2, ο σχηματισμός κενών γίνεται αμέσως μόλις το όριο της παραμόρφωσης \mathcal{E}_{th} ξεπεραστεί. Υπό αυξανόμενη παραμόρφωση περισσότερα κενά σχηματίζονται ενώ τα ήδη υπάρχοντα αναπτύσσονται συνεχώς. Σε διάφορα κράματα αλουμινίου όπου $\alpha=0.8$, ένας μεγάλος αριθμός κενών σχηματίζεται στην οριακή τιμή της παραμόρφωσης \mathcal{E}_{th} , ενώ όσο αυτή αυξάνεται, παρατηρείται από την μία τα ήδη υπάρχοντα κενά να διογκώνονται με σχεδόν μηδενικό ρυθμό, από την άλλη όμως όλο και περισσότερα νέα κενά να δημιουργούνται.

Σε κάποια άλλα πειράματα μελετήθηκε η ανισοτροπική συμπεριφορά των υλικών στην εξέλιξη της ζημιάς. Με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα που εξήχθησαν, αναπτύχθηκαν μοντέλα που λαμβάνουν υπόψιν τους την ανισοτροπία της βλάβης στο

υλικό, όπως για παράδειγμα τα μοντέλα των Murakami [1987, (32)], Chow -Wang [1987, (33)] και του Lemaitre [2000, (34)]. Σε αυτά η σύζευξη της βλάβης με τις σχέσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά του υλικού γίνεται μέσω των στοιχείων των τανυστών τάσεως ή παραμόρφωσης με διαφορετικό τρόπο για το καθένα.

2.3.4. Μοντέλα που βασίζονται στο πορώδες των υλικών

Ο Oyane το 1972 υποστήριξε στην εργασία του (35), ότι η όλκιμη θραύση των μετάλλων συμβαίνει όταν ο λόγος του όγκου των κενών προς τον όγκο των στερεών στο υλικό ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Τροποποιώντας λοιπόν το κριτήριο διαρροής Von Mises, κατέληξε στην περιγραφή της πλαστικότητας που οφείλονταν στο πορώδες του υλικού. Σε μια απλοποιημένη εκδοχή του μοντέλου του, η ζημιά που υφίσταται το υλικό, μπορεί να περιγραφεί βάση της σχέσης:

$$D = \frac{\varepsilon_{uf}}{\varepsilon_{ui}} \frac{\sigma_H}{\alpha_0 \sigma_{eq}} \varepsilon_{eq}$$

(2.3.4-44)

όπου α_0 σταθερά του υλικού.

Αργότερα ο Gurson [1977, (24)] πρότεινε ένα συνεχές μοντέλο για την περιγραφή της πλαστικότητας του υλικού λόγω του πορώδους του. Το μοντέλο αυτό βασίζονταν σε ελαστικά-τέλεια πλαστικά υλικά που περιείχαν μικροεγκλείσματα και υποβάλλονταν σε πεδίο πλαστικών τάσεων. Η εργασία του βασίστηκε σε προηγούμενες υποθέσεις άλλων ερευνητών, οι οποίοι μελετούσαν την ανάπτυξη ενός σφαιρικού κενού μέσα σε όλκιμη και ασυμπίεστη μήτρα. Η συνθήκη διαρροής που χρησιμοποίησε είναι η εξής:

$$F(\sigma_{eq}, \sigma_{kk}, f, \sigma_y) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2f \cosh \left(\frac{\sigma_H}{2\sigma_y} \right) (1 + f^2)$$

(2.3.4-45)

όπου το f είναι ο λόγος του όγκου των κενών προς τον συνολικό όγκο του υλικού. Τα σ_{eq} και σ_H είναι αντίστοιχα η ισοδύναμη von Mises τάση και η υδροστατική πίεση, ενώ σ_y είναι η τάση διαρροής του υλικού της μήτρας.

Το πορώδες που εκφράζεται με την παράμετρο f , μειώνει την ικανότητα του υλικού να φέρει φορτία και να αναπτύξει μακροσκοπικά τάσεις. Όταν το f προσεγγίζει την τιμή της μονάδας η επιφάνεια διαρροής εκφυλίζεται σε σημείο, ενώ όταν είναι μηδέν η συνάρτηση διαρροής ταυτίζεται με την συνθήκη διαρροής κατά von Mises. Η μεταβολή του πορώδους στο υλικό εξαρτάται άμεσα από την ανάπτυξη των ήδη σχηματισθέντων κενών. Υποθέτοντας πλαστική ασυμπίεστοτητα για το υλικό της μήτρας μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο όγκου των κενών, ο οποίος μεταβάλλεται συνεχώς «void

growth», γεγονός που επιτρέπει την μέτρηση του πορώδους f του υλικού σε κάθε χρονική στιγμή.

Οι Tvergaard και Needleman [1984, (36)] στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν καλύτερα, πειραματικά αποτελέσματα, τροποποίησαν το αρχικό μοντέλο του Gurson και κατέληξαν στο γνωστό GTN μοντέλο, στο οποίο συμπεριέλαβαν την ύπαρξη πολλαπλών κενών υπό διαφορετικές διατάξεις εντός της μήτρας. Η συνθήκη διαρροής που πρότειναν είναι η εξής:

$$F(\sigma_{eq}, \sigma_{kk}, f, \sigma_y) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2}{2} \frac{3\sigma_H}{2\sigma_y}\right) - 1 - (q_3 f^*)^2$$

(2.3.4-46)

Όπου τα q_1 , q_2 και q_3 χρησιμοποιούνται ως σταθερές βαθμολογίας. Συμπεριέλαβαν επομένως με την παραπάνω έκφραση, την ραγδαία αύξηση του πορώδους του υλικού στην συνθήκη διαρροής. Αυτή η μεταβολή του πορώδους που οφείλεται στην συνένωση των κενών εντός του υλικού, ορίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$f^* = \begin{cases} f & f \leq f_c \\ f_c + K(f - f_c) & f > f_c \end{cases}$$

(2.3.4-47)

όπου

$$K = \frac{f_u - f_c}{f_f - f_c}$$

(2.3.4-48)

το f_c είναι η τιμή του πορώδους κατά την στιγμή που η διαδικασία συνένωσης των κενών ξεκινά, f_f η τιμή του πορώδους την στιγμή της θραύσης, ενώ f_u η μέγιστη τιμή του. Το πορώδες του υλικού αυξάνεται είτε λόγω σχηματισμού νέων κενών στο υλικό, είτε λόγω διόγκωσης των ήδη σχηματισθέντων κενών:

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucleation} + \dot{f}_{growth}$$

(2.3.4-49)

Η έναρξη σχηματισμού νέων κενών «πυρήνωση» (nucleation), υποτίθεται ότι συμβαίνει όταν ξεπεραστεί ένα συγκεκριμένο όριο παραμόρφωσης \mathcal{E}_{th} «threshold strain». Σύμφωνα με του Chu και Needleman [1980, (37)] ισχύει η σχέση:

$$\dot{f}_{nucleation} = A_N \dot{\mathcal{E}}^p$$

(2.3.4-50)

όπου

$$A_N(\varepsilon_{eq}^p) = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_N)^2}{S_N^2} \right]$$

(2.3.4-51)

Το S_N και ε_N είναι αντίστοιχα η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή της παραμόρφωσης.

Τέλος ο Rousselier [1987, (38)] πρότεινε ένα διαφορετικό μοντέλο, το οποίο αποτελεί συνδυασμό μοντέλου που βασίζεται σε αρχές της μηχανικής συνεχούς βλάβης και μοντέλου που βασίζεται στην ανάπτυξη του πορώδους στο υλικό. Τα μεγέθη που χρησιμοποιεί είναι η ελεύθερη ενέργεια και το πλαστικό δυναμικό, καταλήγοντας σε μια έκφραση που είναι αρκετά πιο γενική από εκείνη του Gurson. Η συνθήκη διαρροής που ακολουθεί το υλικό στο συγκεκριμένο μοντέλο διατυπώνεται ως εξής:

$$F(\sigma_{eq}, \sigma_{kk}, f, \sigma_y) = \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)\sigma_y} + \frac{\sigma_1}{\sigma_y} f D \exp \left[\frac{\sigma_{kk}}{(1-f)\sigma_1} \right] - 1$$

(2.3.4-52)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. Σύγκρουση/Προσάραξη πλοίου-Μοντέλα αστοχίας

3.1. Χρησιμοποιούμενα κριτήρια αστοχίας

Για την λεπτομερή ανάλυση των μηχανισμών αστοχίας που αναπτύσσονται στην περίπτωση σύγκρουσης ή προσάραξης πλοίου, απαιτούνται αρκετές πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες των υλικών. Τα δεδομένα όμως που είναι στην διάθεση των μηχανικών είναι αρκετά περιορισμένα και συνεπώς κάνουν την πρόβλεψη της αστοχίας, δύσκολη υπόθεση. Συχνά οι οργανισμοί πιστοποίησης της ασφάλειας των πλοίων, θέτουν απαιτήσεις μόνο ως προς την ποιότητα του χάλυβα που θα χρησιμοποιηθεί. Από την άλλη, η ανάλυση της αντοχής του πλοίου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, λόγω του μεγάλου μεγέθους της κατασκευής, απαιτεί διακριτοποίηση με αραιό πλέγμα (coarse mesh) ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος. Συνήθως χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους με διαστάσεις από 5 έως 15 φορές μεγαλύτερες του πάχους τους. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι η χρήση ενός σύνθετου μοντέλου βλάβης σε τετοιου είδους εφαρμογές δεν είναι δυνατή. Συνεπώς είναι ανάγκη να εφαρμοστούν απλά κριτήρια, που τα περισσότερα προέρχονται από εμπειρικές παρατηρήσεις, χωρίς αυστηρά διατυπωμένη θεωρητική βάση, με καλά ωστόσο αποτελέσματα.

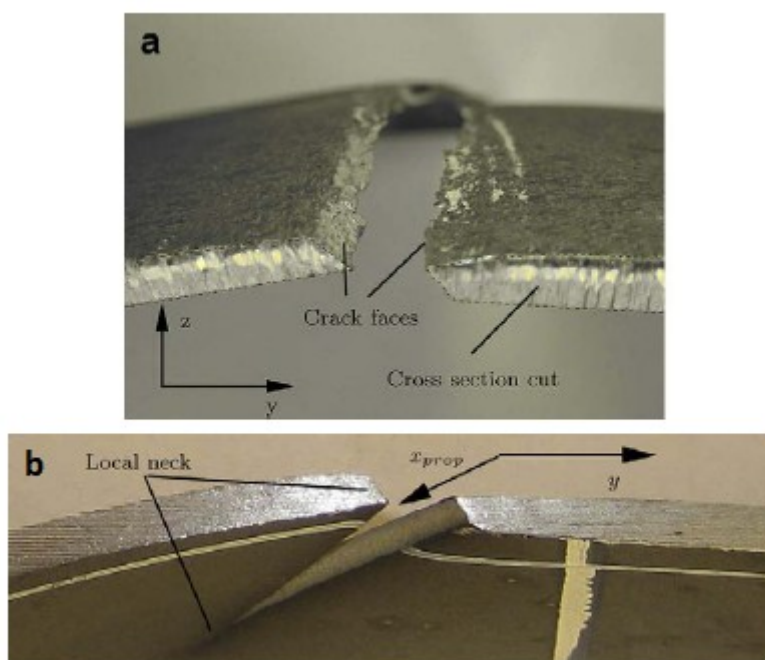
Ένα από τα κριτήρια που προτείνεται είναι το κριτήριο των Lehmann και Peschmann [2001, (39)]. Το κριτήριο αυτό προκύπτει από μετρήσεις της παραμόρφωσης πάνω σε ελάσματα από την γάστρα πλοίων που λόγω σύγκρουσης ή προσάραξης έχουν υποστεί

αστοχία,. Οι τιμές της παραμόρφωσης καταγράφονται τόσο για επιφάνειες του υλικού που έχουν υποστεί θραύση όσο και για περιοχές που παρουσιάζουν αστοχία λόγω πλαστική αστάθειας, όπως για παράδειγμα σημεία με ενδείξεις σχηματισμού τοπικού λαιμού (Εικόνα 3.1-13). Τελικά το κριτήριο δίνει την κρίσιμη ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση σε σχέση και με το μήκος του στοιχείου διακριτοποίησης ως εξής:

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_g + \varepsilon_m \frac{x_e}{t} \frac{t}{l_e}$$

(3.1-53)

η ε_m χαρακτηρίζεται ως «necking strain» και είναι η μέση τιμή των παραμορφώσεων που μετριέται πάνω στην ρηγματωμένη επιφάνεια του ελάσματος. Η ε_g χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη παραμόρφωση «uniform strain» και προκύπτει από τις μετρήσεις στις λιγότερο παραμορφωμένες περιοχές. Το l_e είναι το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου που χρησιμοποιείται για την διακριτοποίηση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, t είναι το πάχος του ελάσματος ενώ το x_e περιγράφει το μέσο πλάτος που καταλαμβάνει ο λαιμός που σχηματίζεται κοντά στις επιφάνειες θραύσης. Οι Lehmann και Peschmann [2001, (39)] αναφέρουν ότι ο όρος $\varepsilon_m \frac{x_e}{t}$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία παράμετρο α . Έτσι για λεπτά χαλύβδινα ελάσματα πάχους από 5 έως 12 mm οι δύο παράμετροι του υλικού ε_g και α , θεωρείται ότι έχουν τιμή 0.1 και 0.8 αντίστοιχα. Για ελάσματα με μεγαλύτερο πάχος, από 12 mm και πάνω, θεωρείται ότι $\varepsilon_g = 0.08$ και $\alpha = 0.65$.



Εικόνα 3.1-13: (α) Επιφάνεια θραύσης και (β) επιφάνεια σχηματισμού τοπικού λαιμού σε έλασμα από την γάστρα πλοίου, που έχει υποστεί αστοχία.

Ένα κριτήριο με παρόμοια λογική προτείνεται από τον οργανισμό Germanischer Lloyd (GL) το οποίο βασίζεται στην συνεχή μείωση του πάχους των ελασμάτων, εξαιτίας της πλαστικής παραμόρφωσης που υφίσταται. Όπως το κριτήριο των Lehmann και Peschmann, έτσι και το GL μεταβάλλεται ανάλογα με το μέγεθος του στοιχείου διακριτοποίησης. Μια σύντομη περιγραφή του κριτηρίου αυτού δίνεται από τον Zhang [2004, (40)]. Η έκφρασή του έχει ως εξής:

$$\mathcal{E}_{cr}^t = \mathcal{E}_g^t + \mathcal{E}_e^t \frac{t}{l_e}$$

(3.1-54)

όπου \mathcal{E}_g^t και \mathcal{E}_e^t δηλώνουν την μέση ομοιόμορφη και μέγιστη αντίστοιχα παραμόρφωση κατά την διεύθυνση του πάχους του ελάσματος. Ενδεικτικές τιμές των παραμορφώσεων αυτών για τους περισσότερους ναυπηγικούς χάλυβες είναι $\mathcal{E}_g^t = 0.056$ και $\mathcal{E}_e^t = 0.54$. Στην εργασία του ο Ehlers [2008, (41)] σύγκρινε τα δύο παραπάνω κριτήρια, ενώ για τις περιπτώσεις που μελέτησε, το κριτήριο των Lehmann και Peschmann έδωσε περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα σε σχέση με το GL. Ωστόσο τα κριτήρια αυτά βασίζονται μόνο στην πλαστική παραμόρφωση, χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν τους την τριαξονική κατάσταση των τάσεων που αποδεδειγμένα παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της ζημιάς στο υλικό.

Ένα πρόσφατο κριτήριο που αναπτύχθηκε και περιλαμβάνει την επίδραση της υδροστατικής τάσης, είναι εκείνο των Lehmann και Yu [1998, (42)]. Το κριτήριο αυτό αναφέρεται ως δείκτης διάρρηξης του υλικού, «rupture index» και χαρακτηρίζεται από την παράμετρο I_R ως εξής:

$$I_R = f \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^m \mathcal{E}_{cr}$$

(3.1-55)

όπου \mathcal{E}_{cr} είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση την στιγμή της θραύσης και $m = 2n + 1$ είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του υλικού που εξαρτάται από τον εκθέτη κράτνωσης n , όταν το υλικό ακολουθεί τον εκθετικό νόμο κράτνωσης $\sigma_{eq} = K \mathcal{E}_{eq}^n$. Τα K και n είναι παράμετροι του υλικού ενώ τα σ_{eq} και \mathcal{E}_{eq} είναι τα ισοδύναμα μεγέθη τάσης και παραμόρφωσης αντίστοιχα. Ο δείκτης διάρρηξης I_R εξαρτάται από μία συνάρτηση της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων. Η συνάρτηση αυτή είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιήθηκε στο μοντέλο της συνεχούς βλάβης του Lemaitre [1985, (26)] και είναι η εξής:

$$f \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2$$

(3.1-56)

όπου ν ο λόγος του Poisson. Το κριτήριο I_R βαθμονομείται με την βοήθεια πειράματος μονοαξονικού εφελκυσμού. Ο Broekhuijsen [2003, (43)] το χρησιμοποίησε σε πρόβλημα επαφής χαλύβδινου ελάσματος πάχους 12 mm με απαραμόρφωτο αντικείμενο «indentation test», προβλέποντας αρκετά καλά την θέση και εξέλιξη των ρωγμών στα συγκεκριμένα δοκίμια.

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστούν τα κριτήρια RTCL και BWH. Τα κριτήρια αυτά θα εφαρμοστούν στην προσομοίωση πειράματος διείδυσης απαραμόρφωτου κωνικού βολβού σε δοκίμια από χάλυβα που αφορούν ελάσματα με ή χωρίς ενισχυτικά. Και τα δύο κριτήρια αποτελούν συνδυασμό άλλων γνωστών κριτηρίων αστοχίας, ορισμένα από τα οποία τα έχουμε ήδη περιγράψει. Με τον συνδυασμό κριτηρίων επιχειρείται να καλυφθεί μεγαλύτερο εύρος εφαρμογής των κριτηρίων, ώστε να είναι ικανά να προβλέψουν αξιόπιστα την αστοχία των κατασκευών υπό διαφορετικές τιμές της τριαξονικής εντατικής κατάστασης «triaxiality».

3.2. Το κριτήριο RTCL

Τα περισσότερα από τα κριτήρια που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2, είναι εκφράσεις που περιέχουν μια συνάρτηση της τριαξονικής κατάστασης τάσεων

$f(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}})$ Οι Wierzbicki και Werner [1998, (44)] έδειξαν ότι το κριτήριο των

Cockcroft και Latham μπορεί να εκφραστεί στην μορφή του ολοκληρώματος

$\int \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} d\varepsilon$ και συνεπώς να συμπεριλάβει την επίδραση της υδροστατικής

κατάστασης των τάσεων σ_H . Η συνάρτηση του «triaxiality» δόθηκε από τους Kudo και Aoi [1967, (45)] μετά από πειραματικές παρατηρήσεις σε συμπαγή κυλινδρικά δοκίμια που τα υπέβαλλαν σε αξονική συμπίεση (upsetting tests). Παρατήρησαν ότι στο χώρο των κύριων παραμορφώσεων οι τιμές που καταγράφονταν την στιγμή της θραύσης των δοκιμίων σχημάτιζαν ευθεία γραμμή με κλίση -1/2. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν αργότερα από τους Kuhn-Dieter [1977, (46)] και Thomason [1990, (47)]. Η αναλυτική γραμμική σχέση που δίνει τα σημεία όπου παρατηρείται πειραματικά η θραύση είναι:

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 = k \quad (3.2-57)$$

όπου $k = \varepsilon_1$ όταν $\varepsilon_2 = 0$, δηλαδή το σημείο τομής με τον άξονα των κύριων μέγιστων παραμορφώσεων στο διάγραμμα FFLD (Fracture Forming Limit Diagram).

Ακολουθώντας την J2-θεωρία ροής του υλικού, υποθέτουμε κατάσταση επίπεδης τάσης, δηλαδή $\sigma_{3j} = 0$ και θεωρώντας αμελητέες διατμητικές τάσεις στο επίπεδο $\sigma_{12} \neq 0$, οι Wierzbicki και Werner [1998, (44)] όρισαν την συνάρτηση του «triaxiality» στο κριτήριο των Cockcroft και Latham, ως εξής:

$$f = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = 2 \frac{1 + \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \sqrt{12 - 27 \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2}}{3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} + \sqrt{12 - 27 \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2}} \quad (3.2-58)$$

(3.2-58)

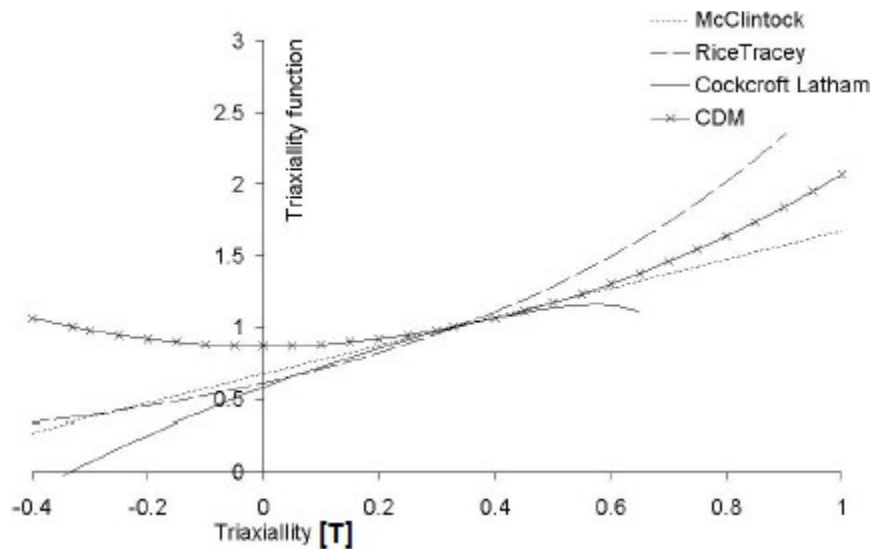
Η παραπάνω συνάρτηση ισχύει μόνο για κατάσταση επίπεδης τάσης και για χαμηλές τιμές του triaxiality T , ενώ για $T = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} > \frac{2}{3}$ η σχέση δεν ορίζεται αφού προκύπτει αρνητική ρίζα. Για την περίπτωση της ομογενούς συμπίεσης, δηλαδή για $T \ll -\frac{1}{3}$ προκύπτει $f(T)$ πολύ μικρό, γεγονός που σημαίνει ότι δεν υπάρχει συσώρευση βλάβης στο υλικό το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

Η απλοποιημένη αρχική εκδοχή της συνάρτησης 3.2-2 σύμφωνα με τους Cockcroft και Latham περιέχει την μέγιστη κύρια τάση σ_1 ως εξής:

$$f(T) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} \quad (3.2-59)$$

(3.2-59)

Στην Εικόνα 3.2-14 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις $f(T)$, για ορισμένα γνωστά κριτήρια.



Εικόνα 3.2-14: Η συνάρτηση του 'triaxiality' για τα κριτήρια των McClintock, Rice και Tracey, Cockcroft και Latham και για το μοντέλο CDM.

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω εικόνα το κριτήριο των Cockcroft και Latham δεν προβλέπει θραύση για την περίπτωση ομογενούς υδροστατικής συμπίεσης, ενώ τα υπόλοιπα κριτήρια προβλέπουν την συνεχή συσώρευση ζημιάς στο υλικό ακόμη και στην περιοχή των πολύ αρνητικών τιμών του 'triaxiality', γεγονός που δεν συνάδει με τις πραγματικές παρατηρήσεις. Ειδικά το μοντέλο CDM, στο οποίο η συνάρτηση $f(T)$ είναι κυβική, προβλέπει την αύξηση του ρυθμού συσώρευσης ζημιάς σε μεγαλύτερες αρνητικές τιμές του T . Σημειώνεται ότι τα κριτήρια 'void growth, CDM και porosity models', έχουν αναπτυχθεί με την υπόθεση θετικής τιμής 'triaxiality' και συνεπώς ο βασικός μηχανισμός της βλάβης στον οποίο βασίζονται δεν είναι η διάτμηση που συναντάται σε αρνητικές τιμές του T αλλά η αύξηση των κενών στο υλικό.

Για θετικές τιμές του 'triaxiality' ($T > 0$) τα κριτήρια που βασίζονται στην ανάπτυξη των κενών και ειδικότερα το κριτήριο των Rice και Tracey μοντελοποιούν ορθά τον μηχανισμό θραύσης λόγω αύξησης του όγκου των κενών. Παρόλα αυτά το κριτήριο προβλέπει την συσώρευση ζημιάς ακόμη και στην περιοχή όπου η τριαξονική κατάσταση τάσεων είναι αρκετά αρνητική, $T < -\frac{1}{3}$, που υποδηλώνει μεγάλη συμπίεση του υλικού όπου στην πράξη δεν συμβαίνει θραύση. Όταν το υλικό υφίσταται υδροστατική συμπίεση, τα κενά εμποδίζονται στο να αυξήσουν τον όγκο τους. Η αστοχία σε αυτήν την περίπτωση ακολουθεί διαφορετικό μηχανισμό, που τα κριτήρια ανάπτυξης κενών αδυνατούν να περιγράψουν. Για το λόγο αυτό τροποποιούνται ώστε η βλάβη να σταματά για $T < -\frac{1}{3}$, «cutoff value».

Συνοψίζοντας σημειώνουμε ότι το κριτήριο των Cockcroft και Latham είναι ικανό για την ορθή πρόβλεψη της όλκιμης θραύσης που βασίζεται στο μηχανισμό της έντονης διάτμησης του υλικού ενώ το κριτήριο των Rice και Tracey μοντελοποιεί ορθά τον μηχανισμό αστοχίας που βασίζεται στην ανάπτυξη των κενών στο υλικό. Το κριτήριο

RTCL αποτελεί συνδυασμό των δύο αυτών κριτηρίων, συμπεριλαμβάνοντας και μια οριακή τιμή για την οποία δεν υπάρχει βλάβη (cutoff value για $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \ll -\frac{1}{3}$).

Με τον τρόπο αυτό το κριτήριο έχει εφαρμογή σε ευρύτερο πεδίο τιμών της τριαξονικής εντατικής κατάστασης. Η βλάβη που υφίσταται το υλικό μπορεί να εκφραστεί από το ολοκλήρωμα:

$$D = \int \left[\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right]_{RTCL} d\varepsilon \quad (3.2-60)$$

όπου η συνάρτηση του 'triaxiality' εκφράζεται από την σχέση:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{for } \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \ll -\frac{1}{3} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} & \text{for } -\frac{1}{3} < \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{1.65} \exp \left[\frac{3\sigma_H}{2\sigma_{eq}} \right] & \text{for } \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \gg \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.2-61)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης 3.2-5 στο ολοκλήρωμα 3.2-4 και παραγωγή της σχέσης που προκύπτει ως προς τον χρόνο, εκφράζεται ο ρυθμός συσώρευσης της ζημιάς \dot{D} στο υλικό ως εξής:

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & T \ll -1/3 \quad (\text{cutoff value}) \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} & -1/3 < T < 1/3 \quad (\text{Cockcroft - Latham}) \\ \exp \left[\frac{3T-1}{2} \right] & T \gg 1/3 \quad (\text{Rice - Tracey}) \end{cases} \quad (3.2-62)$$

όπου σ_1 είναι η μέγιστη κύρια τάση, $\dot{\varepsilon}_{eq}$ ο ρυθμός μεταβολής της ισοδύναμης παραμόρφωσης, σ_{eq} η ισοδύναμη von Mises τάση και T η τιμή της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων. Σημειώνεται ότι στην παραπάνω έκφραση χρησιμοποιήθηκε στην περιοχή του $-1/3 < T < 1/3$ η συνάρτηση του 'triaxiality' που ορίστηκε αρχικά από τους Cockcroft και Latham $f(T) = (\sigma_1 / \sigma_{eq})$ και όχι η τροποποιημένη έκφραση των Wierzbicki και Werner [1998, (44)], (Εξίσωση 3.2-2).

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του παραπάνω τύπου είναι ότι, για $T = 1/3$ δηλαδή για μονοαξονικό εφελκυσμό, το κριτήριο ταυτίζεται με το κριτήριο της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, αφού τότε $\dot{D} = \dot{\epsilon}_{eq}$. Το γεγονός αυτό απλοποιεί την διαδικασία βαθμονόμησης του κριτηρίου. Το μόνο που απαιτείται, είναι η εκτέλεση πειραμάτων μονοαξονικού εφελκυσμού σε κατάλληλα δοκίμια, από όπου θα προσδιοριστεί η κρίσιμη τιμή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης ϵ_{cr} που αναπτύσσεται στο σημείο της θραύσης τους. Προκύπτει δηλαδή ότι σε μονοαξονικό εφελκυσμό η κρίσιμη τιμή της βλάβης του κριτηρίου RTCL, ταυτίζεται με την κρίσιμη ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, $D_{cr} = \epsilon_{cr}$.

Η ανηγμένη μορφή του κριτηρίου έχει ως εξής:

$$D = \frac{1}{\epsilon_{cr}} \dot{D} dt$$

(3.2-63)

Όταν $D \geq 1$ το κριτήριο RTCL θεωρεί ότι συμβαίνει θραύση στο σημείο ελέγχου της κατασκευής, δηλαδή στα σημεία ολοκλήρωσης των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της κατασκευής.

3.3. Το κριτήριο BWH

Προηγούμενος στην Ενότητα 2.2 παρουσιάστηκαν τα μοντέλα πλαστικής αστάθειας με κυριότερα τα διαγράμματα FLD «Forming Limits Diagrams», τα οποία αποτελούν μια από τις πρωταρχικές μεθόδους καθορισμού των ορίων μορφοποίησης στα ελάσματα. Το μειονέκτημα των διαγραμμάτων αυτών, είναι ότι ισχύουν μόνο για την περίπτωση αναλογικής φόρτισης, δηλαδή υπό την επιβολή σταθερού λόγου παραμορφώσεων

$k = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ στο επίπεδο του ελάσματος. Η ιστορία της φόρτισης παριστάνεται στο

διάγραμμα FLD (Εικόνα 3.3-15a) με μια ευθεία γραμμή που έχει κλίση k . Ο λόγος, των ρυθμών μεταβολής των κύριων τιμών της παραμόρφωσης, που συμβολίζεται με

$\beta = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}$, παραμένει επίσης σταθερός. Με ε_2 συμβολίζεται η ελάχιστη κύρια τιμή της

παραμόρφωσης ενώ με ε_1 η μέγιστη. Οι εργασίες των Ghosh και Laukonis [1976, (48)] καθώς και των Graf και Hosford [1993, (49)] έδειξαν ότι για μη αναλογική ιστορία φόρτισης, που είναι και το σύνηθες στις εφαρμογές, τα όρια μορφοποίησης που προβλέπουν τα διαγράμματα FLD μεταβάλλονται, καθιστώντας έτσι την χρήση τους μη πρακτική. Ένας απλός τρόπος για την λύση του προβλήματος αποτελεί η δημιουργία διαγραμμάτων που θα περιγράφουν τα όρια μορφοποίησης των ελασμάτων στο χώρο των κυρίων τάσεων και όχι στον χώρο των κυρίων παραμορφώσεων. Οι Stoughton [2000, (50) και 2001, (51)] και Zhu [2004, (52)] ήταν οι πρώτοι που παρουσίασαν διαγράμματα FLD στο χώρο των κυρίων τάσεων.

Οι τάσεις συνδυάζονται με τον ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης, μέσω των σχέσεων της αρχικής συνθήκης διαρροής του υλικού και του νόμου πλαστικής ροής του. Για τον χάλυβα αλλά και αρκετά άλλα μέταλλα, η διατύπωση της μαθηματικής θεωρίας της πλαστικότητας βασίζεται στον κανόνα της ορθογωνικότητας «associated rule», όπου η επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού ταυτίζεται με την επιφάνεια διαρροής (συναρτημένη πλαστικότητα). Η σχέση που συνδέει τους ρυθμούς παραμόρφωσης με τις τάσεις είναι η εξής:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

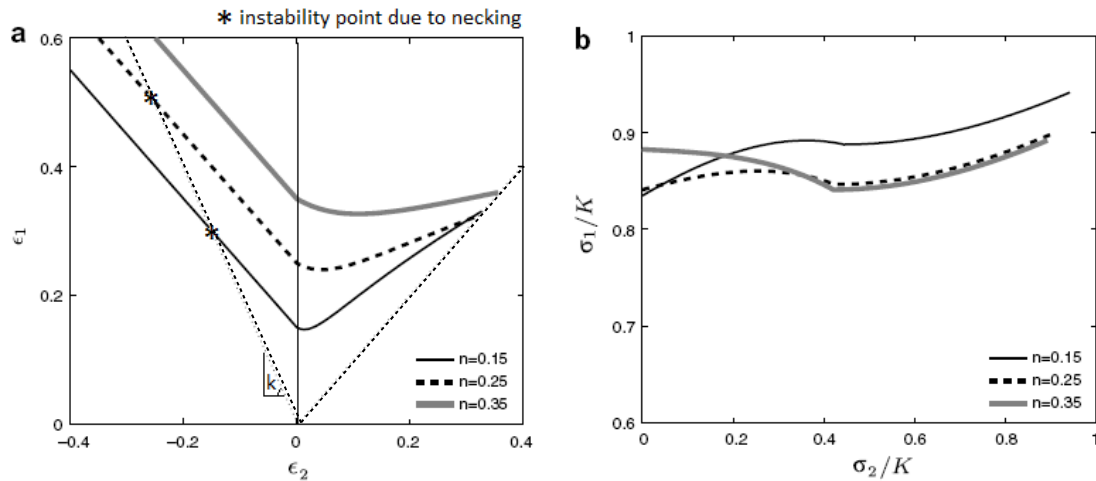
(3.3-64)

όπου $\dot{\varepsilon}_{ij}$ και σ_{ij} δηλώνουν αντίστοιχα τον ρυθμό παραμόρφωσης και την τάση εκφρασμένα σε τανυστική μορφή, $\dot{\lambda}$ είναι ο πλαστικός συντελεστής αναλογίας και το f περιγράφει την επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού που μπορεί να ταυτίζεται όπως είπαμε με την επιφάνεια διαρροής του υλικού. Εάν ισχύει η J2-θεωρία πλαστικής ροής και υποθεθούν συνθήκες επίπεδης έντασης, η σχέση μεταξύ του λόγου των ρυθμών κύριας παραμόρφωσης β και του λόγου των κύριων τάσεων α έχει ως εξής:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1+2\beta}{\beta+2}$$

(3.3-65)

Σημειώνεται ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για τις πλαστικές παραμορφώσεις αφού οι ελαστικές θεωρούνται μικρές και δεν λαμβάνονται υπόψιν στον τύπο. Στην Εικόνα 3.3-15 παρουσιάζονται τα διαγράμματα FLD τριών υλικών (a) στο χώρο των κύριων παραμορφώσεων και (b) στο χώρο των κύριων τάσεων. Η διαφορά τους είναι ότι στο χώρο των κυρίων τάσεων η καμπύλη των ορίων μορφοποίησης «Forming Limits Curve», και στα τρία υλικά, παραμένει σχεδόν σταθερή με μικρές διαφορές μεταξύ τους, γεγονός που επιτρέπει την χρήση της συγκεκριμένης καμπύλης σε μη αναλογική φόρτιση των ελασμάτων. Αντίθετα στο χώρο των κυρίων παραμορφώσεων, για μη αναλογική παραμόρφωση η καμπύλη FLC δίνει μεγάλες διαφορές στην πρόβλεψη των σημείων πλαστικής αστάθειας του υλικού.



Εικόνα 3.3-15: Forming Limits Diagram (FLD) ελάσματος από τρία διαφορετικά υλικά (a) χώρος κύριων παραμορφώσεων, (b) χώρος κύριων τάσεων. Και οι δύο εικόνες αναφέρονται στα ίδια υλικά. Τα διαγράμματα στο (b) είναι κανονικοποιημένα από τον συνετελεστή κράτνσης K (από τον εκθετικό νόμο κράτνσης του υλικού $\sigma_{eq} = K \epsilon_{eq}^n$ όπου $\sigma_{eq}, \epsilon_{eq}$ είναι η ισοδύναμη τάση και παραμόρφωση ενώ n είναι ο εκθέτης κράτνσης).

3.3.1. Το κριτήριο του Hill για την δημιουργία τοπικού λαιμού

Το 1952 ο Hill (6) πρότεινε ένα κριτήριο για την πρόβλεψη του σχηματισμού τοπικού λαιμού σε χαλύβδινο έλασμα, στην περιοχή των αρνητικών τιμών του λόγου

$\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} < 0$. Το κριτήριο αυτό υποθέτει τον σχηματισμό τοπικού λαιμού υπό γωνία ϕ

ως προς την διεύθυνση δράσης της κύριας μέγιστης τάσης. Κατά μήκος της στενής λωρίδας υλικού όπου σχηματίζεται ο τοπικός λαιμός, οι προσαυξητικές παραμορφώσεις είναι μηδενικές. Ο προσανατολισμός της στένωσης του υλικού δίνεται από την γωνία ϕ ως εξής:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{-\beta}}$$

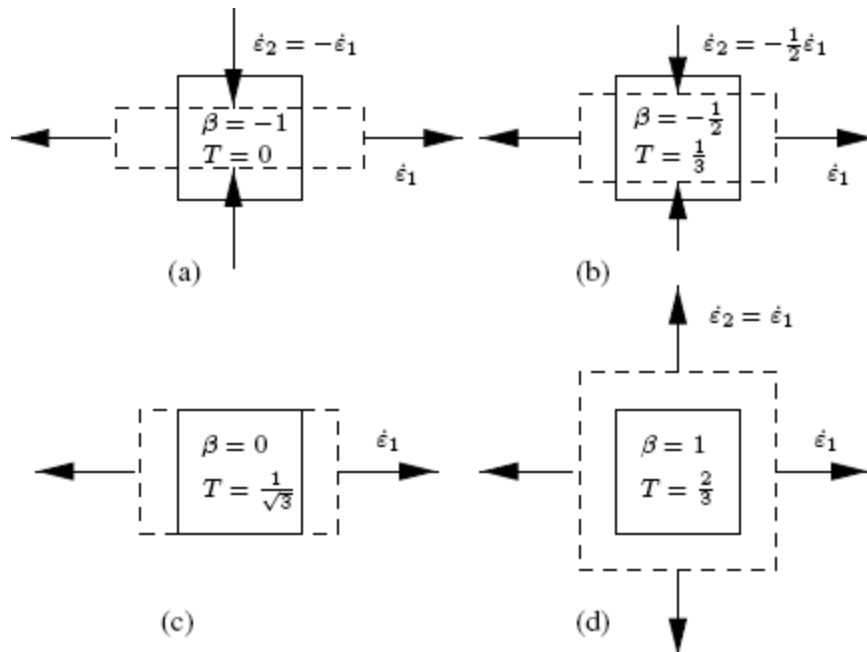
(3.3.1-66)

η οποία ορίζεται μόνο για αρνητικές τιμές του β . Αξίζει να σημειωθεί ότι η τριαξονική κατάσταση των τάσεων που επικρατεί στο υλικό «triaxiality» συνδέεται με τον λόγο των παραμορφώσεων β με βάση την σχέση:

$$T = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\beta + 1}{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}$$

(3.3.1-67)

Στην Εικόνα 3.3.1-16 παρουσιάζονται τέσσερις χαρακτηριστικές καταστάσεις τάσεων στο υλικό, ενώ δίνονται οι αντίστοιχες τιμές του T και του β .



Εικόνα 3.3.1-16: Διάφορες καταστάσεις τάσεων σε σχέση με την τιμή του λόγου των ρυθμών κύριων παραμορφώσεων β και του 'triaxiality' T . Όλες οι περιπτώσεις είναι για κατάσταση επίπεδης έντασης. (a) Κατάσταση καθαρής διάτμησης, (b) μονοαξονικός εφελκυσμός, (c) επίπεδη παραμόρφωση, (d) διαξονικός εφελκυσμός.

Λόγω της συγκέντρωσης πλαστικής παραμόρφωσης τοπικά σε ένα σημείο του ελάσματος η ενεργή εγκάρσια επιφάνεια που μπορεί να φέρει φορτία μειώνεται λόγω μείωσης του πάχους του ελάσματος στο συγκεκριμένο σημείο. Το φαινόμενο αυτό αντισταθμίζεται από την κράτυνση του υλικού με συνέπεια ο ελκυστής τάσεως T_1 στην επιφάνεια αυτή να συνεχίζει να αυξάνεται. Την στιγμή όμως σχηματισμού του τοπικού λαιμού, συμβαίνει υπερβολική παραμόρφωση «straining» του ελάσματος υπό σταθερό φορτίο, δηλαδή ισχύει $M T_1 = 0$. Από αυτό προκύπτει ότι, οι συνθήκες τάσεως και παραμορφώσεως που επικρατούν την κρίσιμη στιγμή της πλαστικής αστάθειας στο υλικό συνδέονται ως εξής:

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1 (1 + \beta)$$

(3.3.1-68)

Υποθέτοντας ότι το υλικό ακολουθεί τον εκθετικό νόμο κράτυνσης $\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n$ όπου (K, n) παράμετροι του υλικού και $(\sigma_{eq}, \varepsilon_{eq})$ οι ισοδύναμες τιμές τάσεων και παραμορφώσεων και θεωρώντας ότι ισχύει η αναλογία:

$$\alpha = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

(3.3.1-69)

η ισοδύναμη παραμόρφωση που απαιτείται για τον σχηματισμό τοπικού λαιμού στο έλασμα δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{2n}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{1 + \beta}$$

(3.3.1-70)

Εάν υποτεθεί αναλογική παραμόρφωση του ελάσματος τότε η σχέση του Hill γίνεται:

$$\varepsilon_1^* = \frac{\hat{\varepsilon}_1}{1 + \beta}$$

(3.3.1-71)

όπου το $\hat{\varepsilon}_1$ αποτελεί παράμετρο βαθμονόμησης του υλικού και συνήθως τίθεται ίσο με τον εκθέτη κράτυνσης n, ενώ σε ορισμένες εφαρμογές, διαφορετική τιμή του $\hat{\varepsilon}_1$, που μπορεί να προκύψει μετά από μετρήσεις, δίνει αποτελέσματα πιο κοντά στα πειραματικά. Καθώς η εξίσωση 3.3.1-6 ισχύει μόνο για αναλογική φόρτιση, έχει περιορισμένη εφαρμογή. Εναλλακτικά μπορεί να προκύψει από την εξίσωση 3.3.1-5, η καμπύλη των ορίων μορφοποίησης του ελάσματος στο χώρο των τάσεων και επομένως σε μορφή που δεν εξαρτάται από τον τρόπο φόρτισης του (Εικόνα 3.3-1b):

$$\sigma_{eq} = K \frac{\hat{\varepsilon}_1 \sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\sqrt{3} (1 + \beta)}$$

(3.3.1-72)

Η παραπάνω σχέση δίνει την ισοδύναμη τάση που απαιτείται για τον σχηματισμό τοπικού λαιμού στο έλασμα. Η παράμετρος $\hat{\varepsilon}_1$ μπορεί να θεωρηθεί όπως και προηγουμένως ίση με τον εκθέτη κράτυνσης του υλικού n.

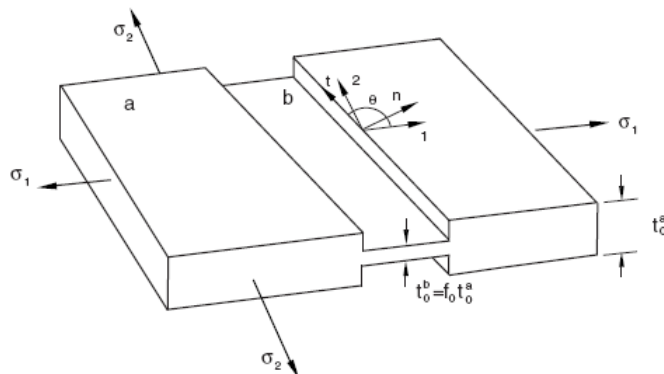
Τελικά η μέγιστη κύρια τάση που αναπτύσσεται την στιγμή του σχηματισμού τοπικού λαιμού στο έλασμα προκύπτει από την Εξίσωση 3.3.1-7 στην εξής μορφή:

$$\sigma_1 = \frac{2K}{\sqrt{3}} \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}} \frac{\hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{3} (1 + \beta)} \sqrt{\beta^2 + \beta + 1}$$

(3.3.1-73)

3.3.2. Το κριτήριο διατμητικής αστάθειας των **Bressan-Williams**

Το κριτήριο σχηματισμού τοπικού λαιμού που πρότεινε ο Hill έχει εφαρμογή μόνο στις αρνητικές τιμές του λόγου β , συνεπώς για την περιγραφή της πλαστικής αστάθειας στην περιοχή των θετικών τιμών του β απαιτούνται διαφορετικές προσεγγίσεις. Πρώτοι οι Marciniak και Kuczynski [1967, (7)] ανέπτυξαν μια μεθοδολογία (M-K method) που θεωρεί ότι ο τοπικός λαιμός προκαλείται λόγω αρχικών ατελειών στο υλικό. Οι ατέλειες εισάγονται με την μορφή αυλακιού σε στοιχειώδες τμήμα υλικού με ορθογωνικό σχήμα όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3.2-17. Κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης το πεδίο των τάσεων υπολογίζεται μέσω αριθμητικής διαδικασίας σε προσυζητική μορφή. Ο λαιμός θεωρείται ότι ξεκινά να σχηματίζεται όταν το υλικό στο αυλάκι παραμορφώνεται με σημαντικά υψηλότερο ρυθμό παραμόρφωσης από εκείνον του περιβάλλοντος υλικού. Άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι ο λόγος των ρυθμών κύριας παραμόρφωσης β , στο σημείο που ξεκινά ο σχηματισμός του λαιμού τείνει στο μηδέν, γεγονός που σημαίνει συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Η μέθοδος M-K περιγράφει με φυσικό τρόπο τα αρχικά στάδια σχηματισμού τοπικού λαιμού στο υλικό και συνεπώς δεν εξαρτάται από τον τρόπο φόρτισης. Δηλαδή όπως και τα διαγράμματα FLD στο χώρο των τάσεων, έτσι και η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και για μη-αναλογική παραμόρφωση (non-proportional straining). Το μειονέκτημα είναι οι υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις της μεθόδου όταν εισάγεται σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση των κατασκευών. Κυρίως εκείνο που επιβαρύνει το υπολογιστικό κόστος είναι το μικρό μέγεθος στοιχείων που απαιτείται για την ορθή διακριτοποίηση των αυλακιών-αρχικών ατελειών, καθώς και το γεγονός ότι οι σχέσεις που περιγράφουν το μοντέλο M-K θα πρέπει να εισαχθούν σε κάθε ένα στοιχείο χωριστά και να επιλυθούν αριθμητικά.



Εικόνα 3.3.2-17: Μοντέλο των Marciniak και Kuczynski, στοιχειώδες τμήμα υλικού με αρχική ατέλεια στην μορφή αυλακιού.

Συνεπώς είναι αναγκαία να χρησιμοποιηθούν απλούστερα μοντέλα όπως το μοντέλο των Bressan και Williams [1983, (53)]. Σε αντίθεση με την μέθοδο M-K το κριτήριο BW μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση της αστοχίας των ελασμάτων, με ικανοποιητικά αποτελέσματα και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος. Στην θεωρία της πλαστικότητας ο μηχανισμός της παραμόρφωσης βασίζεται στην ολίσθηση συγκεκριμένων κρυσταλλογραφικών επιπέδων που προκαλείται λόγω διατμητικών τάσεων στο υλικό. Πειραματικές παρατηρήσεις απέδειξαν ότι τα επίπεδα αστοχίας σε μεταλλικά ελάσματα ταυτίζονται σχεδόν με την διεύθυνση των επιπέδων ολίσθησης κατά την φορά της μέγιστης διατμητικής τάσης [Bressan and Williams, 1983, (53)]. Συνεπώς θα ήταν λογικό να υποθέσουμε ότι μπορεί να εμφανιστεί αστάθεια σε ένα σημείο του υλικού χωρίς να υπάρχουν ικανές ενδείξεις που να προειδοποιούν για τον σχηματισμό τοπικού λαιμού. Καταδεικνύεται λοιπόν η ανάγκη ανάπτυξης ενός

κριτηρίου που να μπορεί να προβλέπει τον σχηματισμό τοπικού λαιμού, όταν η αστάθεια του υλικού βασίζεται στις διατμητικές τάσεις «shear stress based instability criterion». Οι Bressan και Williams ανέπτυξαν το κριτήριο BW το οποίο αποτελεί μια απλή έκφραση, που η εφαρμογή του δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η έκφρασή τους στηρίζεται σε τρεις βασικές υποθέσεις. Πρώτα απ' όλα η διατμητική αστάθεια ξεκινά κατά το πάχος του ελάσματος και προς την κατεύθυνση όπου στο στοιχειώδες τμήμα υλικού δεν παρατηρείται αλλαγή μήκους. Το επίπεδο πάνω στην συγκεκριμένη διεύθυνση χαρακτηρίζεται ως κρίσιμο επίπεδο διάτμησης και τέμνει κατά το πάχος το στοιχειώδες τμήμα υλικού. Δεύτερον η αστάθεια ξεκινά όταν η διατμητική τάση στο συγκεκριμένο σημείο ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή η οποία αποτελεί και ξεχωριστό χαρακτηριστικό κρίσιμο μέγεθος για κάθε υλικό. Τέλος οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι αρκετά μικρές σε σχέση με τις πλαστικές, στο σημείο σχηματισμού λαιμού και συνεπώς δεν λαμβάνονται υπόψιν στο κριτήριο.

Με βάση την Εικόνα 3.3.2-18 και τις υποθέσεις που έγιναν, το κριτήριο μπορεί να εκφραστεί με έναν απλό μαθηματικό τύπο. Όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 3.3.2-18(a) το κεκλιμένο επίπεδο κατά το πάχος του στοιχείου όπου συμβαίνει η διατμητική αστάθεια (επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση x_n), σχηματίζει γωνία $\pi/2 - \theta$ με το επίπεδο του ελάσματος. Η επιμήκυνση κατά την διεύθυνση αυτή είναι μηδενική οπότε $\dot{\epsilon}_t = 0$. Έτσι προκύπτει η εξής σχέση ανάμεσα στην γωνία του κεκλιμένου επιπέδου και στον ρυθμό μεταβολής των κύριων παραμορφώσεων:

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{\pi}{2} \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} = 0$$

(3.3.2-74)

$$\text{όπου } \cos 2(\theta + \pi/2) = -\cos 2\theta$$

Με αντικατάσταση στην σχέση 3.3.2-1 προκύπτει:

$$\cos 2\theta = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}$$

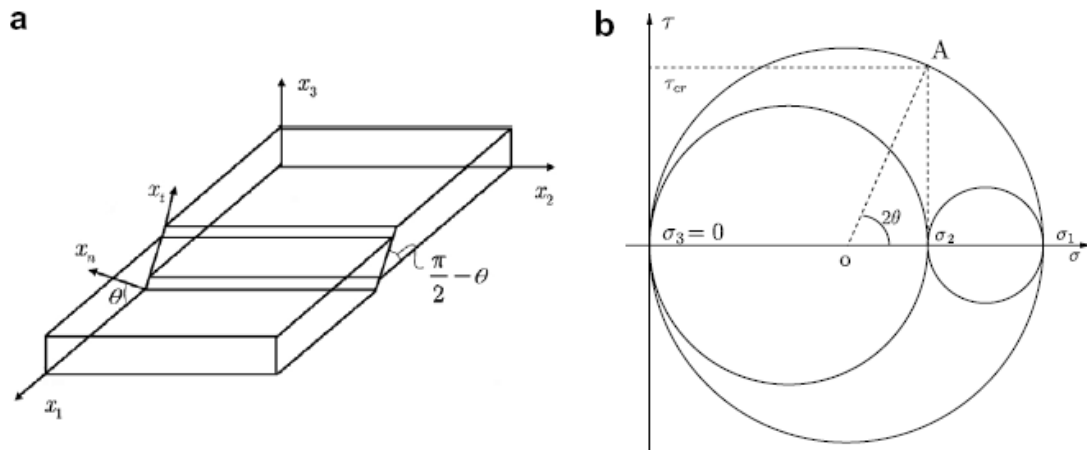
(3.3.2-75)

Υποθέτωντας πλαστική ασυμπίεστότητα, $\dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}_1(1 + \beta)$ η γωνία θ μπορεί να βρεθεί από τον λόγο των ρυθμών κύριων παραμορφώσεων β ως εξής:

$$\cos 2\theta = \frac{\beta}{2 + \beta}$$

(3.3.2-76)

Η αντίστοιχη κατάσταση των τάσεων που επικρατεί μπορεί να βρεθεί αναλυτικά από τους νόμους μετασχηματισμού των τάσεων ή απλά από τον κύκλο του Mohr που φαίνεται στην Εικόνα 3.3.2-18(b).



Εικόνα 3.3.2-18: (α) Τοπική διατμητική αστάθεια σε στοιχείο υλικού. Στην διεύθυνση x_1 δεν παρατηρείται αλλαγή μήκους. (β) Ο κύκλος του Mohr όπου φαίνονται τα στοιχεία της τάσης.

Καταλήγουμε συνεπώς στην εξής σχέση ανάμεσα στην κρίσιμη διατμητική τάση, την μέγιστη κύρια ορθή τάση και την γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου:

$$\tau_{cr} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\theta \quad (3.3.2-77)$$

όπου το τ_{cr} είναι η κρίσιμη διατμητική τάση όπου παρατηρείται διατμητική αστάθεια στο υλικό. Τελικά με συνδυασμό των εξισώσεων 3.3.2-3 και 3.3.2-4 προκύπτει η έκφραση του κριτηρίου BW στην μορφή:

$$\sigma_1 = \frac{2\tau_{cr}}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{2 + \beta}}} \quad (3.3.2-78)$$

Οι Bressan και Williams αρχικά πρότειναν την βαθμονόμηση του κριτηρίου μέσω πειραμάτων μονοαξονικού και διαξονικού εφελκυσμού. Ένας άλλος τρόπος βαθμονόμησης θα μπορούσε να γίνει σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης ($\beta=0$) με την βοήθεια δοκιμίων με εγκοπές (notched specimens) ή απλά με βάση την ανάλυση του Hill.

Εάν η βαθμονόμηση γίνει με βάση την ανάλυση του Hill και την εξίσωση 3.3.1-8 για $\beta=0$ η κρίσιμη τιμή της διατμητικής τάσης που προβλέπει το κριτήριο BW υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\tau_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3}} K \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\epsilon}_1^{\frac{n}{2}} \quad (3.3.2-79)$$

όπου $\hat{\epsilon}_1$ τίθεται ίσο με τον εκθέτη κράτνωσης του υλικού n .

3.3.3. Συνδυασμός κριτηρίων *Bressan-Williams-Hill*

Το κριτήριο BW αναπτύχθηκε για να εφαρμοστεί στην περιοχή των θετικών τιμών του β , δηλαδή στο πρώτο τεταρτημόριο των διαγραμμάτων FLD, όπου η σχέση του Hill αποτυγχάνει. Υπενθυμίζεται ότι $\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}$ ο λόγος των ρυθμών κύριας παραμόρφωσης.

Παρόλα αυτά η διατύπωσή του δεν απαγορεύει την χρήση του ακόμη και για $\beta < 0$. Ωστόσο η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του κριτηρίου στην περιοχή αυτή τίθεται υπό αμφισβήτηση. Συνεπώς για την κάλυψη όλου του πεδίου τιμών του β , αναπτύχθηκε το κριτήριο BWH που αποτελεί συνδυασμό των κριτηρίων του Hill και των Bressan και Williams. Η μαθηματική έκφραση του κριτηρίου αυτού είναι η εξής:

$$\sigma_1 = \frac{2K}{\sqrt{3}} \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\hat{\epsilon}_1}{1 + \beta} \sqrt{\beta^2 + \beta + 1} \quad (Hill)$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} K \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\hat{\epsilon}_1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{2 + \beta}}} \quad \beta > 0 \quad (Bressan - Williams)$$

(3.3.3-80)

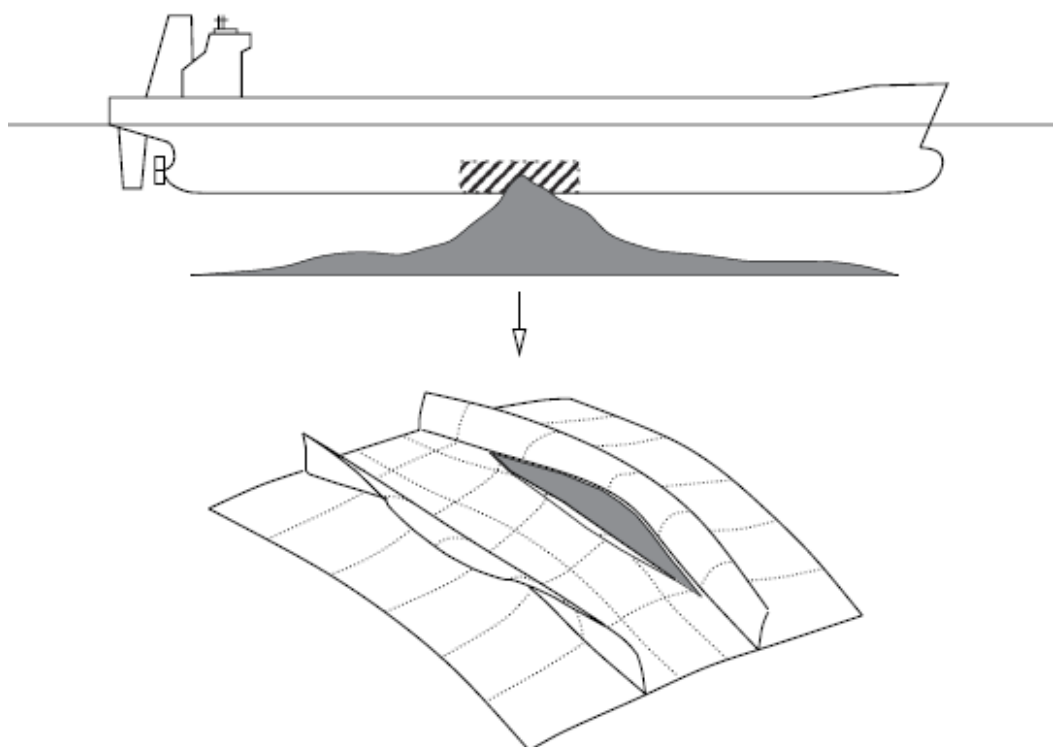
όπου σ_1 εκφράζει την κρίσιμη τιμή της μέγιστης κύριας τάσης για τον σχηματισμό πλαστικής αστάθειας στο υλικό ανάλογα με την τιμή του λόγου β . Για $\beta=0$ οι δύο σχέσεις ταυτίζονται. Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη με τις καμπύλες των διαγραμμάτων FLD στο χώρο των τάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. Εφαρμογή των κριτηρίων **RTCL** και **BWH**.

4.1.Εισαγωγή

Τα κριτήρια αστοχίας RTCL και BWH όπως αυτά περιγράφησαν στο Κεφάλαιο 3, εισάγονται σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Στόχος είναι να εφαρμοστούν στην προσομοίωση της ζημιάς που υφίστανται τα κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας πλοίου υπό ακραία φορτία. Το πρόβλημα που ενδιαφέρει είναι κυρίως η προσάραξη πλοίου στο βυθό της θάλασσας (Εικόνα 4.1-19). Ωστόσο παρόμοια ανάλυση θα μπορούσε να διεξαχθεί και στην προσομοίωση της ζημιάς σε περίπτωση σύγκρουσης δύο πλοίων, κατά την πτώση αντικειμένων πάνω στο κατάστρωμα, σε εκρήξεις καθώς και σε συγκρούσεις με παγόβουνα.



Εικόνα 4.1-19: Προσάραξη πλοίου στο βυθό της θάλασσας, ζημιά σε έλασμα του πυθμένα της γάστρας λόγω εισχώρησης αιχμηρού αντικειμένου-βράχος.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται αρχικά το πείραμα της διείδυσης κωνικού βολβού σε ελάσματα από χάλυβα που διεξήχθη από τους Alsos και Amdahl [2008, (1)] στο 'Norwegian University of Science and Technology'. Ειδικότερα αναφέρεται ο σκοπός

του πειράματος, περιγράφεται η γεωμετρία και τα υλικά των κατασκευαστικών στοιχείων, παρουσιάζονται τα στάδια εκτέλεσης και η μέθοδος καταγραφής δεδομένων στο πείραμα ενώ παράλληλα γίνεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Στην συνέχεια αναφερόμαστε στην αριθμητική προσομοίωση του παραπάνω πειράματος. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ο τρόπος μοντελοποίησης του και ο κώδικας που αναπτύχθηκε σε Fortran για την εισαγωγή των κριτηρίων αστοχίας RTCL και BWH σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης περιγράφονται οι τεχνικές που είναι ενσωματωμένες στα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων και αφορούν την προσομοίωση της ζημιάς (π.χ μέθοδος αφαίρεσης στοιχείου), αναλύεται το πρόβλημα της επίδρασης του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα και προτείνεται διαδικασία εξάλειψής του. Επίσης γίνεται αναφορά στην προσομοίωση της καταστατικής συμπεριφοράς των υλικών, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των κριτηρίων, όπως τα διαγράμματα δύναμης-μήκους διείσδυσης (Force-indentation diagrams) καθώς και η κατανομή χαρακτηριστικών μεγεθών στα δοκίμια την στιγμή λίγο πριν την αστοχία τους, όπως η κατανομή της ισοδύναμης τάσης, της πλαστικής παραμόρφωσης, του ποσού της ζημιάς κ.α. Επιπλέον εξετάζεται η αξιοπιστία των κριτηρίων ως προς την ορθή πρόβλεψη της θέσης και εξέλιξης των ρωγμών. Τέλος τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά ενώ διαπιστώνονται οι ελλείψεις και τα πλεονεκτήματα των δύο κριτηρίων (RTCL vs BWH).

4.2. «Πείραμα διείσδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων»

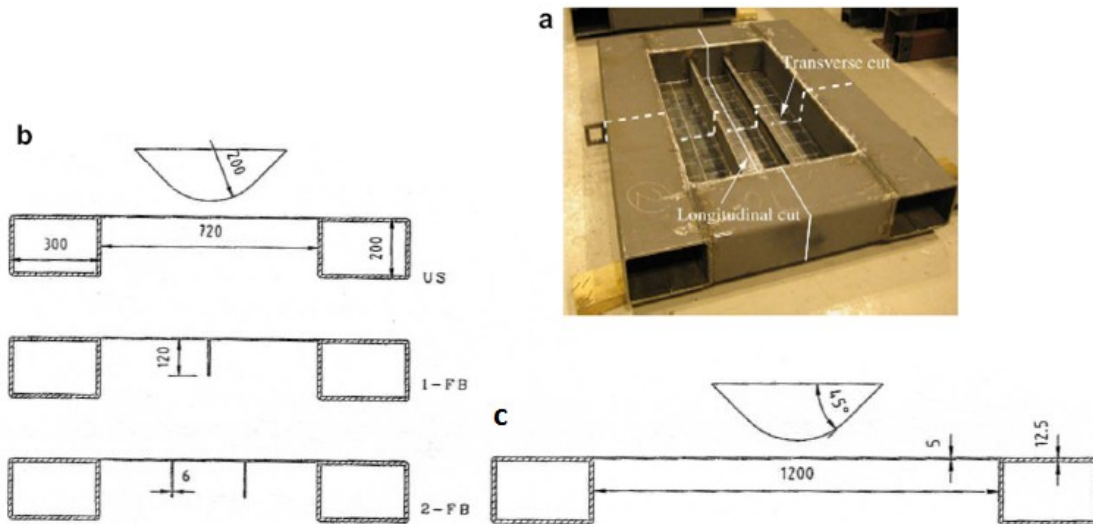
[Alsos H. and Amdahl J. 2008- (1)]

4.2.1. Σκοπός του πειράματος

Ο σκοπός της εκτέλεσης πειράματος διείσδυσης κωνικού βολβού κάθετα στο επίπεδο ελάσματος, είναι η προσομοίωση της κατάστασης των τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στα κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας πλοίου, όταν αυτό προσαράζει κάθετα στον πυθμένα της θάλασσας «stranding». Επίσης το πείραμα αυτό θα μπορούσε να προσομοιώσει την σύγκρουση της πλήρης εμβάλλοντος πλοίου στα πλευρά εμβαλλόμενου πλοίου «ship collision». Στόχος είναι ο υπολογισμός της εναπομείνουσας αντοχής της γάστρας, ο έλεγχος στην εξέλιξη της βλάβης της, καθώς και η εκτίμηση του κινδύνου εισροής υδάτων ή εκροής πετρελαίου από τις δεξαμενές του πλοίου. Το πείραμα προσφέρει δυνατότητα δημιουργίας μιας βάσης δεδομένων, η οποία θα προκύψει από τις μετρήσεις στο πείραμα, ώστε να χρησιμοποιηθεί στην αξιολόγηση των μοντέλων αστοχίας που εφαρμόζονται σε αριθμητικές προσομοιώσεις του πλοίου σε περίπτωση ατυχημάτων. Σημειώνεται ότι αν και για την αξιόπιστη καταγραφή δεδομένων που αφορούν συγκρούσεις και προσαράξεις πλοίων απαιτείται η εκτέλεση πειραμάτων σε πραγματική κλίμακα, παραδείγματος χάριν σύγκρουση κανονικών πλοίων και όχι δοκιμίων, υπό διαφορετικές γωνίες, η εκτέλεση πειραμάτων στο εργαστήριο όπως αυτό που περιγράφουμε στις επόμενες ενότητες, παρά τις αναγκαίες απλοποιήσεις που γίνονται, δίνουν μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας με αρκετά χαμηλότερο κόστος.

4.2.2. Περιγραφή της γεωμετρίας και των υλικών των κατασκευαστικών στοιχείων του πειράματος.

Το πείραμα αφορά τον υπολογισμό της εναπομείνουσας αντοχής τριών δοκιμίων: (α) έλασμα χωρίς ενισχυτικά «US», (β) έλασμα με ένα διαμήκες ενισχυτικό στο μέσον του «FB-1» και (γ) έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά «FB-2». Και στις τρεις περιπτώσεις των δοκιμίων το έλασμα έχει την ίδια γεωμετρία: μήκος 1200 mm, πλάτος 720 mm και πάχος 5 mm. Τα ενισχυτικά είναι απλά ορθογώνια παραλληλόγραμμα «flat bar stiffeners FB» με ύψος 120 mm και πάχος 6 mm. Στην περίπτωση του δοκιμίου FB-2 η απόσταση μεταξύ των ενισχυτικών είναι 240 mm. Τα δοκίμια συγκολλούνται περιμετρικά σε άκαμπτο ορθογωνικό πλαίσιο (Εικόνα 4.2.2-20a). Οι διαστάσεις των ορθογωνίων διατομών που αποτελούν το πλαίσιο είναι 200 mm ύψος, 300 mm πλάτος και 12.5 mm πάχος όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.2-20b. Επίσης τα ενισχυτικά συγκολλούνται τόσο πάνω στο έλασμα όσο και στο περιμετρικό πλαίσιο. Η όλη διαδικασία της συναρμολόγησης ακολουθεί κανόνες των οργανισμών νηογνομόνων.

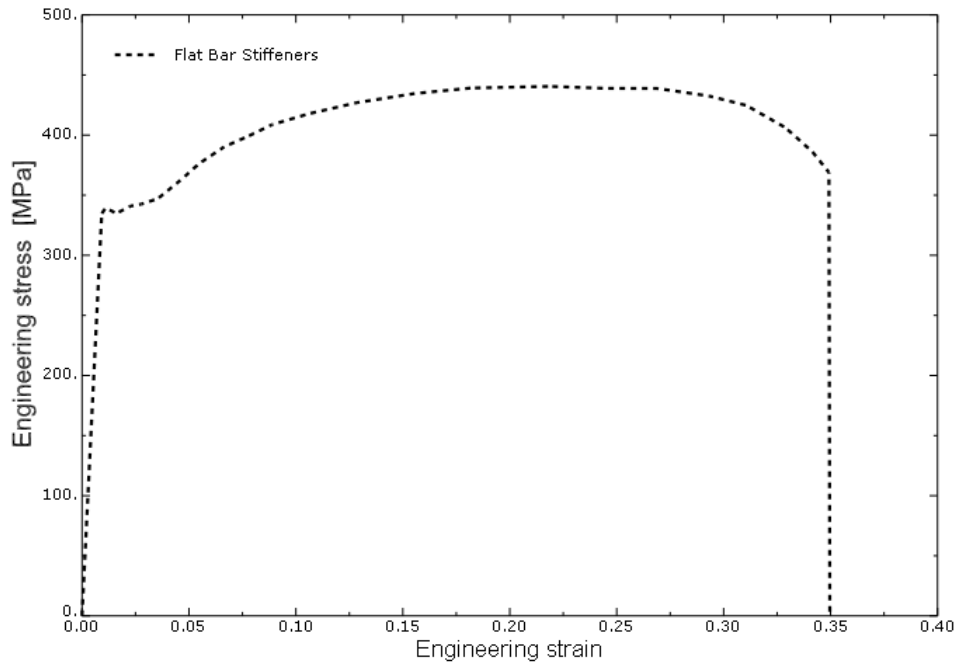


Εικόνα 4.2.2-20: Γεωμετρία κατασκευαστικών στοιχείων πειράματος, (α) Συναρμολογημένη διάταξη, (β) εγκάρσια τομή, (γ) διαμήκης τομή.

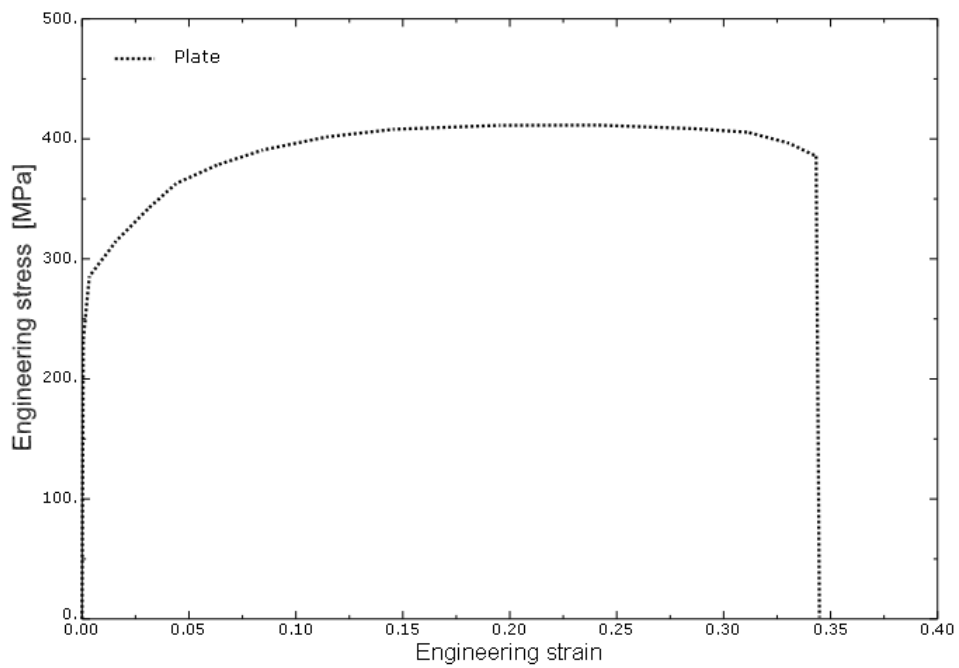
Ο διεισδυτής προέρχεται από την κατεργασία ενός συμπαγούς χαλύβδινου κομματιού σε τόρνο. Έχει την μορφή κώνου με σφαιροειδές άκρο όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.2-20b&c. Η γωνία ανοίγματος του κώνου είναι 45° ενώ η ακτίνα του άκρου 200 mm. Για την κατασκευή των κατασκευαστικών στοιχείων του πειράματος χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές ποιότητες χάλυβα. Για το πλαίσιο χρησιμοποιήθηκε χάλυβας υψηλής αντοχής (S355NH EN10210) ενώ για το έλασμα και τα ενισχυτικά χρησιμοποιήθηκε μαλακός χάλυβας, κοινός σε ναυπηγικές κατασκευές (S235JR EN10025). Οι καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων μηχανικού, παρουσιάζονται στις Εικόνες Εικόνα 4.2.2-21 και Εικόνα 4.2.2-22. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ορισμένα από τα χαρακτηριστικά των υλικών που θεωρείται ότι ακολουθούν τον εκθετικό νόμο κράτνσης:

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} \sigma_y & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{plat} \\ K (\varepsilon_{eq} + \varepsilon_0)^n & \text{if } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_{plat} \end{cases}$$

Κατασκευαστικό Στοιχείο	Κατηγορία Υλικού	σ_y [MPa]	K [MPa]	n	ε_{plat}
Έλασμα	S235JR EN10025	285	740	0.24	-
Ενισχυτικά	S235JR EN10025	340	760	0.22 5	0.01 5



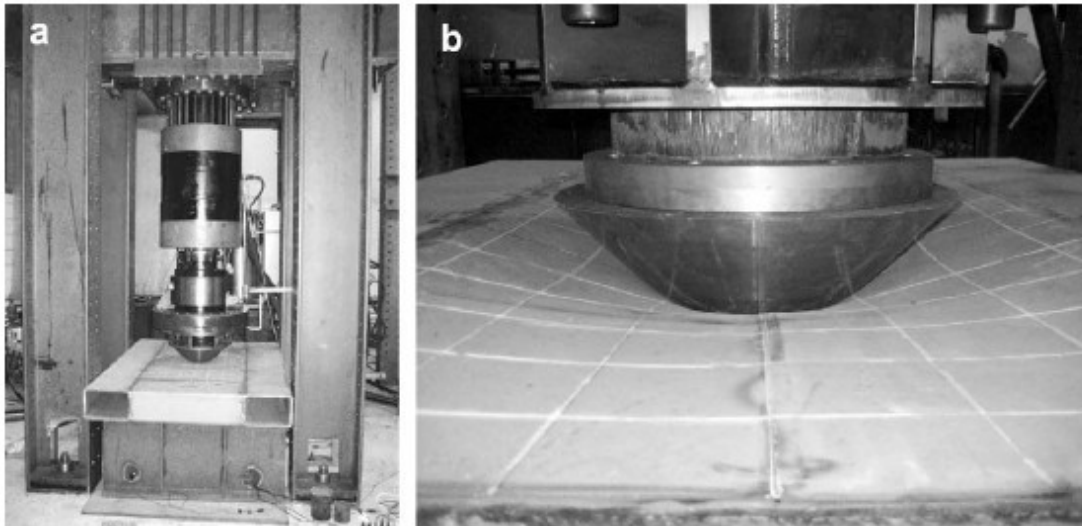
Εικόνα 4.2.2-21: Καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων για τα ενισχυτικά.



Εικόνα 4.2.2-22: Καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων για το έλασμα.

4.2.3. Εκτέλεση του πειράματος

Το πείραμα διεξάγεται σε υδραυλική μηχανή δοκιμών μεγίστου φορτίου 250 τόνων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.3-23. Η δύναμη επαφής μεταξύ διεισδυτή και δοκιμίων καθώς και η μετατόπιση του κωνικού άκρου καταγράφονται απευθείας από την μηχανική διάταξη, μέσω αισθητήρων που φέρει η κεφαλή στο άκρο. Εξαιτίας του μεγέθους των δυνάμεων, που αναπτύσσονται κατά την εκτέλεση του πειράματος, τα μηχανικά μέρη της διάταξης υφίστανται παραμορφώσεις. Είναι λοιπόν δυνατόν οι μετρήσεις των αισθητήρων που είναι τοποθετημένοι στην κεφαλή του διεισδυτή να επηρεάζονται από την παραμόρφωσή του, με συνέπεια η μετατόπιση που καταγράφουν να μην είναι η πραγματική. Για τον λόγο αυτόν τοποθετούνται στο δάπεδο ειδικό καταγραφείς παρακολούθησης της μετατόπισης. Ο υδραυλικός μηχανισμός της διάταξης επιβάλλει ρυθμό μετατόπισης διεισδυτή της τάξεως των 10 mm/min. Η εξέλιξη του πειράματος παρακολουθείται από δύο κάμερες που τραβούν φωτογραφίες ανά 5 δευτερόλεπτα. Για την καλύτερη οπτική παρατήρηση της παραμόρφωσης των δοκιμίων, έχει σχεδιαστεί κάναβος διαστάσεων 100x100 mm πάνω σε αυτά όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.3-23(b).



Εικόνα 4.2.3-23: (a) Υδραυλική μηχανή επιβολής φορτίου, (b) εισχώρηση κεφαλής διεισδυτή στο δοκίμιο.

4.2.4. Πειραματικά αποτελέσματα

Στο πείραμα που περιγράψαμε προηγουμένως, ο ρυθμός της μετατόπισης που επιβάλλεται στα δοκίμια, επιλέγεται όσο είναι πρακτικά δυνατόν χαμηλότερος, ώστε να μην επιδρούν δυναμικά φαινόμενα στα αποτελέσματα. Η διείδυση του άκρου με ταχύτητα 10 mm/min αντιστοιχεί σε ρυθμό ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στο υλικό $\dot{\epsilon}_{eq}$ της τάξεως των $2 \cdot 10^{-4} : 3 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Οι τιμές αυτές προέκυψαν μετά από αριθμητικούς υπολογισμούς με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, και την αριθμητική προσομοίωση του πειράματος. Για την μελέτη της επίδρασης του ρυθμού παραμόρφωσης στα πειραματικά αποτελέσματα, η ταχύτητα μετατόπισης στο άκρο του διείδυτη μειώνεται σε 1 mm/min. Με την εφαρμογή του ρυθμού αυτού της μετατόπισης για σύντομο χρονικό διάστημα, καταγράφεται μείωση στον ρυθμό παραμόρφωσης των δοκιμίων κατά 0.1 φορές. Η αντίστοιχη όμως μείωση της δύναμης επαφής μεταξύ διείδυτη και ελάσματος δεν ξεπερνά το 1-2%. Παρόλα αυτά η επίδραση που έχει ο ρυθμός της παραμόρφωσης είναι αισθητή. Ένας τρόπος για να συμπεριλάβουμε το δυναμικό αυτό φαινόμενο στα αποτελέσματα των τάσεων είναι η τροποποίησή τους με βάση τον τύπο των Cowper-Symonds ως εξής:

$$\frac{\sigma_{eq}^D}{\sigma_{eq}} = 1 + \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^m}{C} \quad (4.2.4-81)$$

όπου σ_{eq} η στατικά και σ_{eq}^D η δυναμικά ισοδύναμη τιμή της τάσης διαρροής του υλικού. Οι τιμές των παραμέτρων (C, m) παίρνουν σύμφωνα με τους Cowper και Symonds τις τιμές 40.4 s^{-1} και 5 αντίστοιχα. Σε εφαρμογές όμως όπου οι κατασκευές υφίστανται μεγάλες παραμορφώσεις προτιμάται η χρήση μεγαλύτερων τιμών για την παράμετρο C . Στο συγκεκριμένο πείραμα κατά την αξιολόγηση της έκφρασης των Cowper-Symonds για παράμετρο $C = 4000 \text{ s}^{-1}$, προέκυψαν διαφορές στην δύναμη, της τάξης του 2%. Στην γενικότερη περίπτωση η επίδραση του ρυθμού της παραμόρφωσης γίνεται αισθητή με άυξηση των φορτίων 2-4% σε σχέση με τα φορτία που αναπτύσσονται υπό σχεδόν στατική κατάσταση (σχεδόν στατική επιβολή παραμόρφωσης $\dot{\epsilon}_{eq} \approx 0$). Στα επόμενα πειραματικά αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν δεν έχει ληφθεί υπόψιν η επίδραση αυτού του δυναμικού φαινομένου, καθώς το πείραμα θεωρείται ότι εκτελείται υπό σχεδόν στατικές συνθήκες.

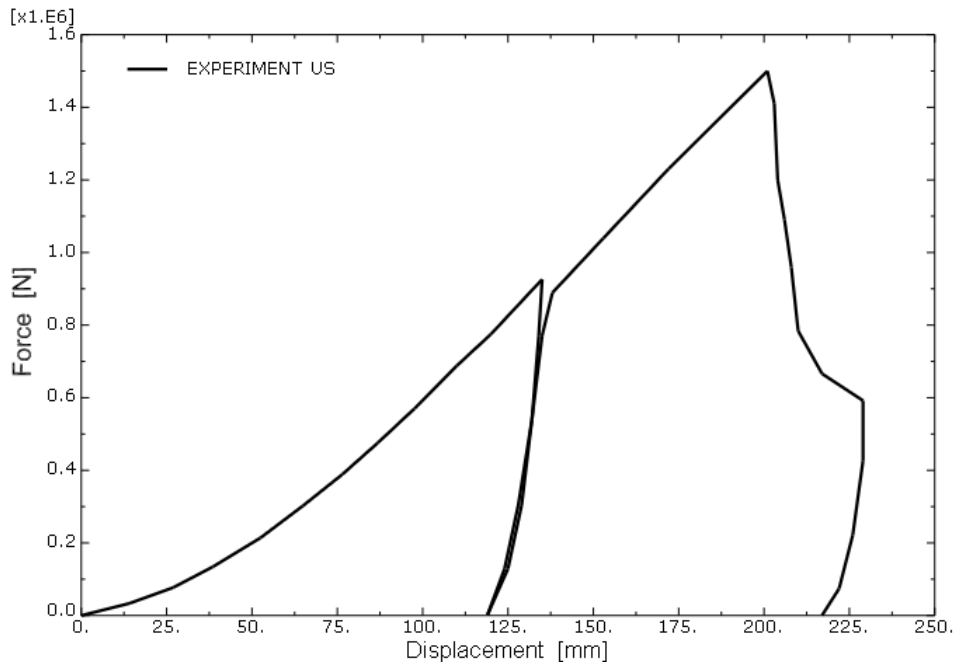
4.2.4.1. Δοκίμιο ελάσματος χωρίς ενισχυτικά (US)

Ο σκοπός της εκτέλεσης πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε έλασμα χωρίς ενισχυτικά (UnStiffened panel-US) είναι διπλός: Πρώτον η ανάπτυξη μεμβρανικών τάσεων στο έλασμα μπορεί να μελετηθεί χωρίς την επίδραση που έχει η παρουσία ενισχυτικών και δεύτερον τα αποτελέσματα που αφορούν την αντίσταση του δοκιμίου στην διείδυση και την εξέλιξη της παραμόρφωσης, θα αποτελέσουν μια βάση σύγκρισης με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τα δοκίμια με τα ενισχυτικά.

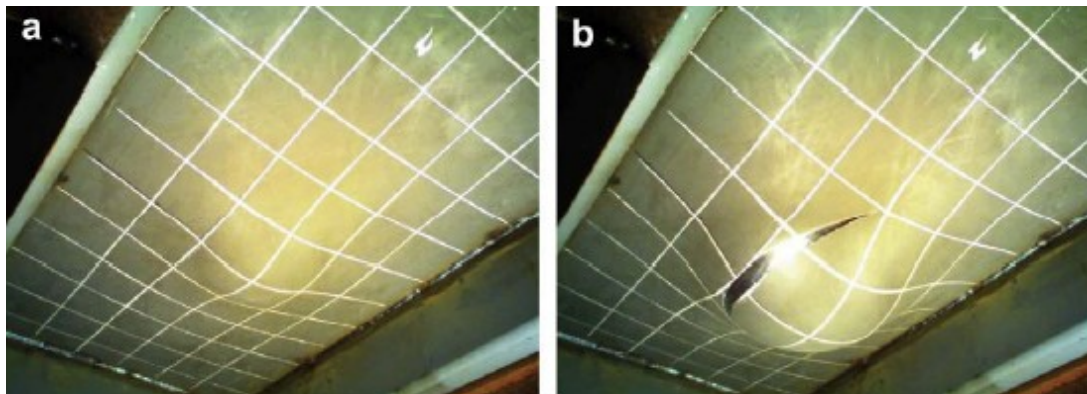
Στην Εικόνα 4.2.4.1-24 παρουσιάζεται η καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διείδυτη (F-δ) για το δοκίμιο 'US'. Η αντίσταση του δοκιμίου στην διείδυση προέρχεται κυρίως από την ανάπτυξη μεμβρανικών τάσεων στο έλασμα. Η συνεισφορά των καμπτικών τάσεων στην δύναμη αντίστασης είναι σχεδόν αμελητέα. Επειδή το μέγιστο μήκος διαδρομής του διείδυτη που ρυθμίζεται υδραυλικά από την μηχανική διάταξη είναι 150 mm, είναι απαραίτητο το δοκίμιο να αποφορτιστεί μετά από περίπου 130 mm μετατόπισης διείδυτη, να ρυθμιστεί το ύψος του πλαισίου στήριξης και να φορτιστεί εκ νέου από τον διείδυτη μέχρι του σημείου θραύσης του. Μια ενδιαφέρων παρατήρηση στο διάγραμμα είναι ότι η δύναμη αντίστασης του δοκιμίου μετά την επαναφόρτιση δεν φτάνει κατευθείαν στο επίπεδο που ήταν πριν την αποφόρτιση. Μια εξήγηση για την πτώση της δύναμης επαφής στο σημείο αυτό είναι ότι οι δυνάμεις λόγω τριβής χαλαρώνουν, με αποτέλεσμα να παρατηρείται μικρή ολίσθηση των επιφανειών επαφής. Το γεγονός αυτό συμβαίνει όταν η μετατόπιση του διείδυτη σταματά για λίγα λεπτά ώστε να ρυθμιστεί το ύψος του πλαισίου, το έλασμα όμως συνεχίζει να παραμορφώνεται μέχρι να απομακρυνθούν εντελώς οι επιφάνειες που είναι σε επαφή, δηλαδή μέχρι την ολική αποφόρτιση του.

Εξαιτίας του λόγου των πλευρών του ελάσματος (aspect ratio 5/3) το μεγαλύτερο ποσό μεμβρανικών τάσεων αναπτύσσεται κατά την εγκάρσια διεύθυνση του, δηλαδή κατά την διεύθυνση της μικρότερης πλευράς του. Στην μετωπική ζώνη επαφής μεταξύ άκρου διείδυτη και ελάσματος δεν εμφανίζονται υψηλές παραμορφώσεις. Αντίθετα στην ζώνη επαφής μεταξύ περιφέρειας βολβού διείδυτη και ελάσματος, εξαιτίας της τριβής αναπτύσσονται διατμητικές δυνάμεις ολίσθησης μεταξύ των επιφανειών επαφής και επομένως η πλαστική παραμόρφωση έχει μέγιστη τιμή. Η δύναμη αντίστασης του δοκιμίου αυξάνει κατά το μέγιστον μέχρι την τιμή των 1500 KNewton για μετατόπιση διείδυτη περίπου 200 mm. Μετά την τιμή αυτήν προκαλείται ρωγμή του ελάσματος. Η θέση έναρξης της ρωγμής συμβαίνει σε απόσταση 100 χιλιοστών από το κέντρο του ελάσματος προς την εγκάρσια διεύθυνση του όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.4.1-25(b).

Μετά την έναρξη της ρωγμής, η αντίσταση του δοκιμίου μειώνεται κατά ποσοστό μεγαλύτερο του 50%. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.4.1-25 η ρωγμή έχει αρχικά μια κυκλική πορεία ενώ στην συνέχεια διαδίδεται διαγώνια προς τις γωνίες του ελάσματος. Ο τρόπος αυτός διάδοσης της ρωγμής οφείλεται στην ακαριαία ανακατανομή των μεμβρανικών τάσεων κατά την διαμήκη διεύθυνση του ελάσματος μετά την αρχική εκδήλωση της ρωγμής σε αυτό.



Εικόνα 4.2.4.1-24: Καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διεισδυτή (F-δ) για έλασμα χωρίς ενισχυτικά (US panel).



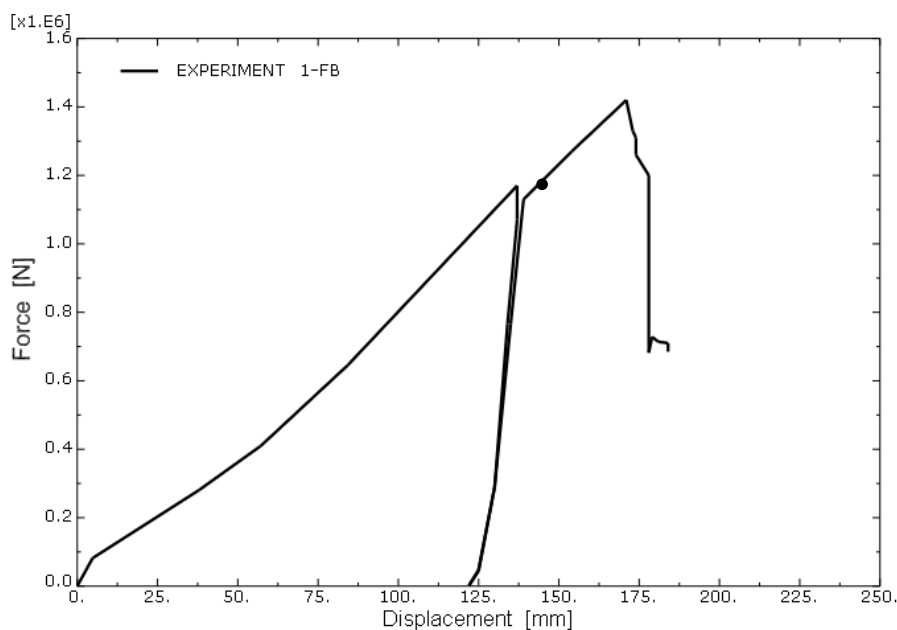
Εικόνα 4.2.4.1-25: Παραμόρφωση δοκιμίου US κατά την φόρτισή του από διεισδυτή, (a) πριν τη θραύση, (b) μετά την θραύση.

4.2.4.2. Δοκίμιο ελάσματος με ένα διαμήκες ενισχυτικό (FB-1)

Η καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διεισδυτή, για την περίπτωση ελάσματος με ένα διαμήκες ενισχυτικό στο μέσον του, παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.2.4.2-26. Το άκρο του διεισδυτή έρχεται σε επαφή με το έλασμα στην κεντρική του περιοχή, εκεί που συνδέεται με το ενισχυτικό. Λόγω των δυνάμεων επαφής που επάγονται στο ενισχυτικό παρατηρείται σημαντική κάμψη αυτού. Αρχικά η αντίσταση του δοκιμίου οφείλεται στις διατμητικές τάσεις και όχι στις μεμβρανικές όπως είδαμε στην περίπτωση του δοκιμίου US. Σημειώνεται ότι η γεωμετρία και το υλικό του ενισχυτικού παίζουν σημαντικό ρόλο στο μέγεθος της αντίστασης που μπορεί να φέρει το δοκίμιο κατά την διείσδυση.

Καθώς η μετατόπιση του διεισδυτή αυξάνεται, παρουσιάζεται το φαινόμενο του «tripping» στο ενισχυτικό, δηλαδή η «δίπλωσή» του στο πλάι του ελάσματος γύρω από το πέλμα της συγκόλλησης. Το σημείο έναρξης του φαινομένου αυτού σημειώνεται στο διάγραμμα F-δ (Εικόνα 4.2.4.2-26) με έναν μικρό κύκλο. Το «tripping» του ενισχυτικού ξεκινά γύρω στα 140 mm μετατόπισης διεισδυτή. Τυχόν ατέλειες των ενισχυτικών ή μικρές αποκλίσεις του σημείου επαφής του άκρου του διεισδυτή από το κέντρο του ελάσματος μπορεί να επιφέρουν έναρξη του ‘tripping’ σε εντελώς διαφορετικό μέγεθος διείσδυσης. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα F-δ η αλλαγή που επιφέρει το φαινόμενο του ‘tripping’ στην καμπύλη είναι ελάχιστα αισθητή, γεγονός που μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι η αντίσταση του δοκιμίου προέρχεται κυρίως από το έλασμα και όχι από τα ενισχυτικά.

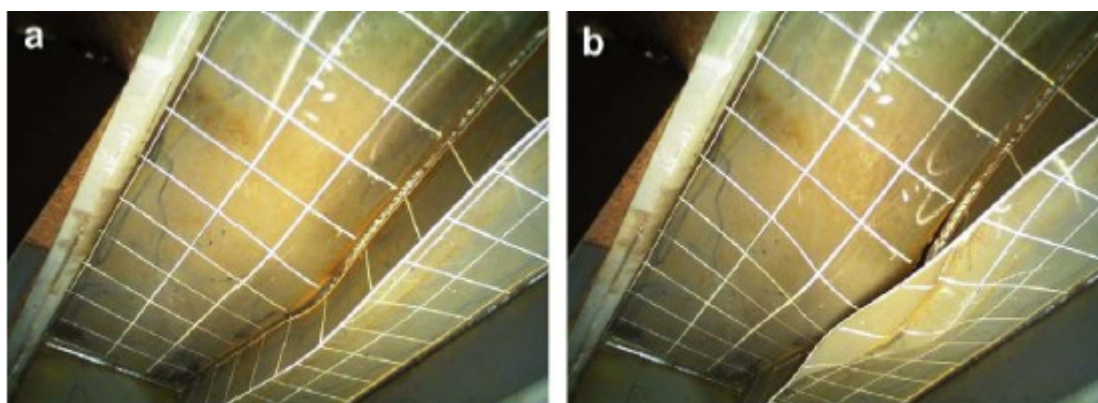
Όπως και στο προηγούμενο πείραμα, η περιορισμένη μετατόπιση που μπορεί να εφαρμόσει η υδραυλική μηχανή στον διεισδυτή μας αναγκάζει να αποφορτίσουμε το δοκίμιο μετά από 130 mm αυτής, να ρυθμίσουμε την θέση του πλαισίου στήριξης και να επαναφορτίσουμε το δοκίμιο μέχρι και την θραύση του. Και πάλι το μέγεθος της αντίστασης μετά την επαναφόρτιση δεν φτάνει αμέσως στο ίδιο επίπεδο που ήταν πριν την αποφόρτιση, γεγονός που αποδόθηκε προηγουμένως στην χαλάρωση των τάσεων λόγω της τριβής μεταξύ των πλευρικών επιφανειών επαφής.



Εικόνα 4.2.4.2-26: Καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διεισδυτή (F-δ) για έλασμα με ένα διάμηκες ενισχυτικό στο μέσον του (FB-1 panel).

Θα περίμενε κανείς η θραύση να ξεκινήσει από το ενισχυτικό στο μέσο της εξωτερικής διαμήκης ακμής του, εκεί δηλαδή που αναπτύσσονται οι μέγιστες καμπτικές τάσεις σε αυτό. Κάτι τέτοιο όμως δεν παρατηρείται στο πείραμα. Η κάμψη του ενισχυτικού σημειώνεται ότι συμβαίνει γύρω από το μεσαίο εγκάρσιο επίπεδο του δοκιμίου. Εκείνο που παρατηρείται στο πείραμα, είναι ότι το ενισχυτικό αφού καμφθεί ως ένα βαθμό, αντί να υποστεί θραύση, υφίσταται «tripping», με συνέπεια να διπλώσει προς τη μία πλευρά του ελάσματος (Εικόνα 4.2.4.2-27b). Θραύση τελικά παρατηρείται μόνο πάνω στο έλασμα, λίγα εκατοστά δίπλα από το πέλμα της συγκόλλησης. Στην Εικόνα 4.2.4.2-27 φαίνεται το παραμορφωμένο δοκίμιο πριν και μετά την θραύση του. Σημειώνεται ότι στον τρόπο θραύσης του δοκιμίου, επιδρά τόσο η γεωμετρία της συγκόλλησης όσο και η διαδικασία που ακολουθείται κατά την συγκόλληση καθώς το ποσό της θερμότητας που εκλύεται από αυτήν μεταβάλλει τις ιδιότητες του υλικού στην περιοχή γύρω από το πέλμα της.

Μετά την έναρξη της ρωγμής στο έλασμα οι μεμβρανικές τάσεις που αναπτύσσονται καθοδηγούν αυτήν προς την ραφή συγκόλλησης και κατά την διαμήκη διεύθυνση της. Το πείραμα δείχνει ότι η πτώση στην αντίσταση του δοκιμίου την στιγμή της έναρξης της ρωγμής είναι περίπου 50%, χωρίς όμως να χάνεται πλήρως η λειτουργικότητά του δοκιμίου, αφού συνεχίζει να ανθίσταται σε φορτία εωσότου η ρωγμή διαδοθεί στα άκρα του ελάσματος. Τότε λόγω της εκτεταμένης ζημιάς προκαλείται η ολική κατάρρευση του δοκιμίου. Η εναπομείνουσα αντοχή που επίδεικνύει το ενισχυμένο έλασμα είναι ιδιαίτερα σημαντική κατά την σχεδίαση των κατασκευών, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ με χρήση κατάλληλων ενισχυτικών) μπορεί να φτάσει έως και το 50-60% της συνολικής αντίστασης που μπορεί να φέρει η κατασκευή πριν την εκδήλωση των ρωγμών.

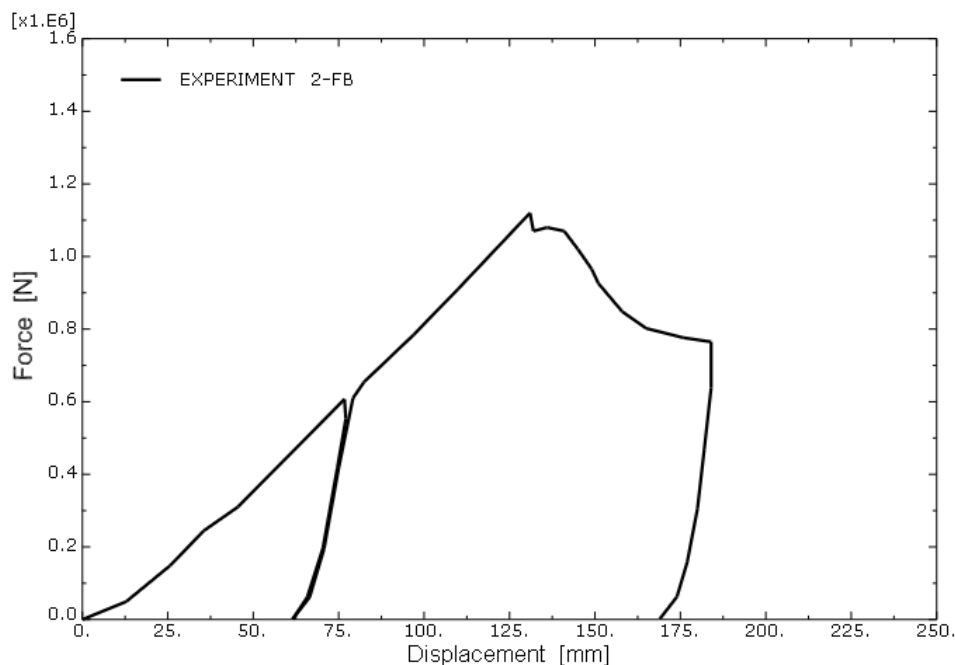


Εικόνα 4.2.4.2-27: Παραμόρφωση ελάσματος με ένα διαμήκες ενισχυτικό (FB-1) κατά την φόρτισή του από τον διεσδυτή, (a) πριν την θραύση, (b) μετά την θραύση.

4.2.4.3. Δοκίμιο ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2)

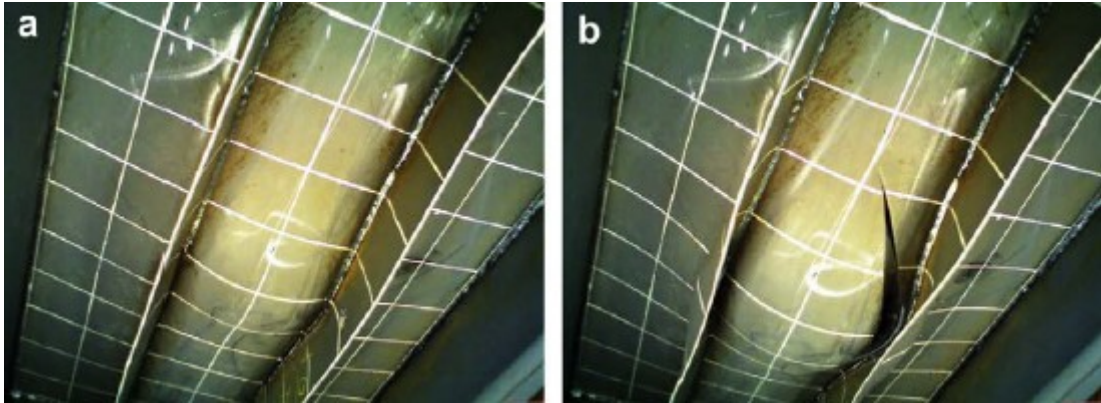
Η καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διεισδυτή, για την περίπτωση του δοκιμίου FB-2, δίνεται στην Εικόνα 4.2.4.3-28. Αρχικά η περιοχή του ελάσματος, ανάμεσα στα δύο ενισχυτικά, είναι και η περιοχή που φέρει τα μεγαλύτερα φορτία αντίστασης. Μέχρι μήκος διείσδυσης 20 mm δεν παρατηρείται καμία παραμόρφωση των ενισχυτικών, τα οποία παραμένουν ευθεία κατά την διαμήκη διεύθυνσή τους. Με περαιτέρω αύξηση του μήκους διείσδυσης, παρατηρείται υψηλή συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης στο έλασμα στην περιοχή επαφής του με τον διεισδυτή και ιδιαίτερα στα σημεία σύνδεσης του με τα ενισχυτικά, τα οποία υφίστανται κάμψη.

Όπως φάνηκε από το πείραμα τα ενισχυτικά είναι ικανά να φέρουν φορτία αντίστασης ακόμη και αφού έχουν υποστεί το φαινόμενο 'tripping' και έχουν διπλώσει προς την μια πλευρά του ελάσματος. Οπότε η περιοχή του ελάσματος ανάμεσα στα ενισχυτικά θα συνεχίζει να παραμορφώνεται όσο αυξάνεται η μετατόπιση του διεισδυτή. Η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται ως «αδύναμη ζώνη» του δοκιμίου, αφού μεγάλα ποσά πλαστικής παραμόρφωσης συγκεντρώνονται σε αυτήν και το υλικό τείνει να αναπτύξει εκεί τοπικό λαιμό, πριν την τελική αστοχία του δοκιμίου. Αν συγκρίνουμε τα ποσά πλαστικής παραμόρφωσης που αναπτύσσονται στην συγκεκριμένη περιοχή, για το ίδιο μήκος διείσδυσης (λίγο πάνω από τα 20 mm) ανάμεσα στο δοκίμιο του εδώ πειράματος και στο δοκίμιο US που μελετήσαμε προηγουμένως, θα παρατηρήσουμε μεγάλες διαφορές στο μέγεθος της παραμόρφωσης. Για τον λόγο αυτό η θραύση στο δοκίμιο FB-2 εμφανίζεται σε μικρότερη τιμή μετατόπισης του διεισδυτή από ότι στο δοκίμιο US. Από το διάγραμμα στην Εικόνα 4.2.4.3-28 φαίνεται ότι η θραύση συμβαίνει όταν η μετατόπιση είναι περίπου 130 mm και η δύναμη αντίστασης 1120 KN ενώ στο US οι τιμές αυτές ήταν 200 mm και 1500 KN αντίστοιχα.



Εικόνα 4.2.4.3-28: Καμπύλη δύναμης-μετατόπισης διεισδυτή (F-δ) για έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2 panel).

Παρά την πρώιμη αστοχία η εναπομείνουσα αντοχή του δοκιμίου είναι σημαντική. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι ρωγμές διαδίδονται μέσα σε μια περιορισμένη περιοχή του ελάσματος χωρίς να επηρεάζεται η αντοχή του υπόλοιπου δοκιμίου. Η ρωγμή ξεκινά ανάμεσα στα ενισχυτικά στο σημείο ακριβώς δίπλα από το πέλμα της συγκόλλησης του ενός ενισχυτικού με το έλασμα. Στην συνέχεια διαδίδεται ημικυκλικά μέχρι το σημείο σύνδεσης του άλλου ενισχυτικού με το έλασμα όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.4.3-29(b). Μετά την έναρξη της ρωγμής εξαιτίας της ανακατανομής των μεμβρανικών τάσεων προς την διάμηκη διεύθυνση του δοκιμίου, ο ρυθμός διάδοσης της μειώνεται σημαντικά.



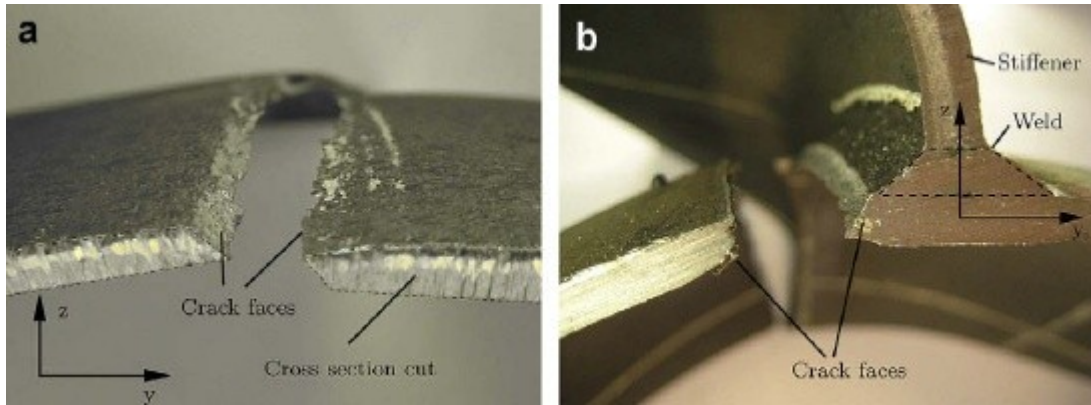
Εικόνα 4.2.4.3-29: Παραμόρφωση ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2) κατά την φόρτίσή του από διεισδυτή, (a) πριν την θραύση, (b) μετά την θραύση.

4.2.5. Παρατήρηση των επιφανειών θραύσης-Ανάλυση

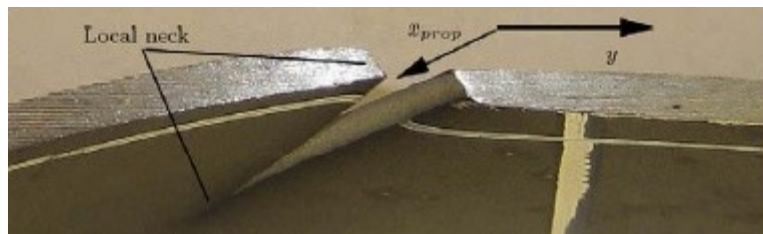
Η παρατήρηση των επιφανειών θραύσης στα δοκίμια του πειράματος μας βοηθάει στην κατανόηση των μηχανισμών αστοχίας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα για την ανάλυση της συμπεριφοράς των δοκιμίων απεικονίζονται στην Εικόνα 4.2.5-30. Στο (a) φαίνεται το επίπεδο του ελάσματος πάνω στο οποίο αστόχησε το δοκίμιο US ενώ στο (b) η τομή του δοκιμίου FB-1 στην περιοχή όπου ξεκινά η αστοχία του. Όπως αναλύθηκε προηγουμένως οι ρωγμές ακολουθούν συγκεκριμένη διαδρομή σε κάθε ένα από τα δοκίμια που εξετάστηκαν. Παρατηρώντας προσεκτικά το δοκίμιο US διαπιστώνουμε την μείωση του πάχους του ελάσματος «thinning» ειδικά στα σημεία διάδοσης της ρωγμής (Εικόνα 4.2.5-30a). Η μείωση αυτή είναι της τάξεως του 30-50% του αρχικού πάχους. Η αιτία είναι η αύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης σε συγκεκριμένη περιοχή πριν την έναρξη της αστοχίας και ο σχηματισμός λαιμού στο υλικό. Η έκταση της περιοχής αυτής στο έλασμα που χαρακτηρίζεται ως η περιοχή του διαχεόμενου λαιμού «diffuse necking» είναι πολύ δύσκολο να εκτιμηθεί από την παρατήρηση του δοκιμίου. Γεγονός είναι ότι οι περιοχές που έχουν υποστεί γενικά, μείωση του πάχους τους καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του ελάσματος. Ωστόσο διαπιστώνονται περιοχές με την μορφή στενών λωρίδων, κατά την διεύθυνση διάδοσης της ρωγμής, που έχουν υποστεί πρόσθετη μείωση πάχους. Οι περιοχές αυτές χαρακτηρίζονται ως περιοχές σχηματισμού τοπικού λαιμού «local necking». Η ανάλυση του πειράματος για το δοκίμιο US μέσω φωτογραφιών και βίντεο αποδεικνύει ότι το δοκίμιο US αστοχεί λόγω του διαχεόμενου λαιμού, χωρίς να έχει προηγηθεί η δημιουργία τοπικού λαιμού στα σημεία έναρξης των ρωγμών. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική και εξηγεί τα αριθμητικά αποτελέσματα των κριτηρίων αστοχίας BWH και RTCL κατά την προσομοίωση του δοκιμίου US όπως θα αναφέρουμε στην συνέχεια.

Όσο αναφορά το ενισχυμένο έλασμα, παρατηρείται ξεκάθαρη τάση σχηματισμού τοπικού λαιμού σε αυτό (Εικόνα 4.2.5-30b). Η μελέτη της εγκάρσιας τομής του δοκιμίου στο σημείο έναρξης της ρωγμής αποδεικνύει ότι στην επιφάνεια αυτή έχει προηγηθεί σημαντική διαρροή του υλικού. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο αφού η συγκόλληση και το ενισχυτικό αποτελούν τους υλικούς και γεωμετρικούς περιορισμούς που εμποδίζουν την ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων στο δοκίμιο. Αποτέλεσμα είναι η συγκέντρωσή τους στην περιοχή του ελάσματος δίπλα από το πέλμα της συγκόλλησης. Συνεπώς κατά την εξέλιξη της φόρτισης η κλίση της παραμόρφωσης στο σημείο αυτό αυξάνεται σημαντικά. Ενδιαφέρουσα παρατήρηση σε όλα τα πειράματα που εκτελέστηκαν αποτελεί το γεγονός ότι η θραύση δεν εμφανίζεται ποτέ στο υλικό της συγκόλλησης ή στα ενισχυτικά αλλά μόνο πάνω στα ελάσματα.

Οι φωτογραφίες στην Εικόνα 4.2.5-30 αποδεικνύουν ότι το επίπεδο αστοχίας στα δοκίμια είναι κεκλιμένο ως προς την διεύθυνση του πάχους των ελασμάτων. Η παρατήρηση αυτή ίσως να αποτελεί ένδειξη ανάπτυξης διατμητικής πλαστικής αστάθειας κατά το πάχος των ελασμάτων πριν την έναρξη των ρωγμών. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι στο δοκίμιο US οι επιφάνειες θραύσης κοντά στο σημείο σχηματισμού της αρχικής ρωγμής είναι ιδιαίτερα ‘άγριες’ και η ρωγμή πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο έχει πορεία ‘ζικ-ζακ’. Αντίθετα στο δοκίμιο με τα ενισχυτικά παρατηρούνται ομαλές και λείες επιφάνειες κατά μήκος της πορείας που ακολουθεί η ρωγμή. Συνεπώς η διάδοση της θεωρείται ότι έγινε υπό σταθερό ρυθμό αφού προηγουμένως σχηματίστηκε τοπικός λαιμός στο άκρο της. Οι χαρακτηριστικές λείες κεκλιμένες επιφάνειες που παρατηρούνται στην Εικόνα 4.2.5-31 βασίζονται σε αυτόν ακριβώς τον μηχανισμό εξέλιξης της ρωγμής.



Εικόνα 4.2.5-30: Τομή επιφανειών θραύσης κοντά στο αρχικό σημείο των ρωγμών, (α) τομή ελάσματος χωρίς ενισχυτικά, US, (β) τομή ελάσματος με διαμήκες ενισχυτικό, FB-1. Και στις δύο περιπτώσεις τα επίπεδα θραύσης είναι κεκλιμένα ως προς την διεύθυνση του πάχους των ελασμάτων.



Εικόνα 4.2.5-31: Διάδοση ρωγμής σε δοκίμια με ενισχυμένα ελάσματα: το x_{prop} δηλώνει την διεύθυνση της διάδοσης της ρωγμής που ταυτίζεται με την διαμήκη διεύθυνση του ελάσματος (γενικό σύστημα αξόνων) ενώ το y δηλώνει την εγκάρσια διεύθυνσή. Λείες επιφάνειες στις περιοχές διάδοσης της ρωγμής όπου προηγείται σχηματισμός τοπικού λαιμού στο υλικό.

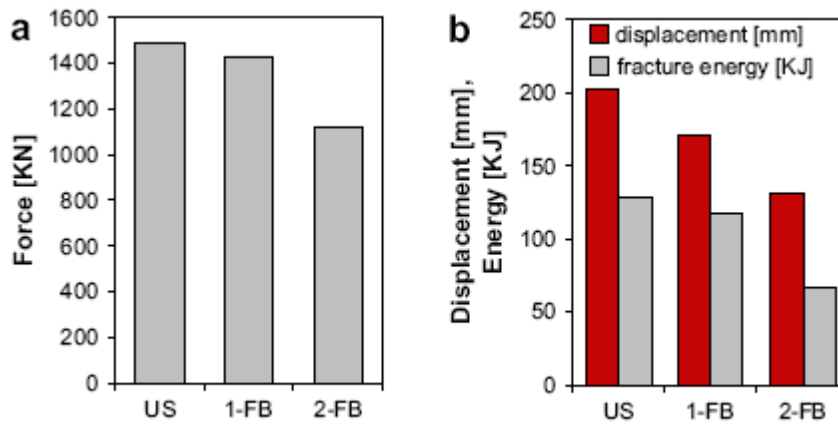
4.2.6. Συμπεράσματα από τα αποτελέσματα των πειραμάτων.

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα από τα παραπάνω πειράματα είναι ότι η ανάλυση της συμπεριφοράς των ενισχυτικών δεν μπορεί να βασιστεί στην γνωστή θεωρία κάμψης

δοκών με μεγάλες παραμορφώσεις (Timoshenko). Μετά από ένα μέγεθος μετατόπισης διεισδυτή τα ενισχυτικά του ελάσματος αρχίζουν να παραμορφώνονται ενώ υποβάλλονται σε συνδυασμό κάμψης και διάτμησης. Στην συνέχεια εμφανίζουν το φαινόμενο του 'tripping' και διπλώνουν προς την μία πλευρά του ελάσματος. Η συμπεριφορά αυτή των ενισχυτικών επηρεάζει ως ένα βαθμό την όλη αντοχή του δοκιμίου. Για παράδειγμα στο δοκίμιο FB-2 παρατηρήθηκαν μικρές στροφές στο πέλημα της συγκόλλησης, με συνέπεια να εμφανίζονται επιπρόσθετες παραμορφώσεις που επιταχύνουν την εμφάνιση ρωγμής.

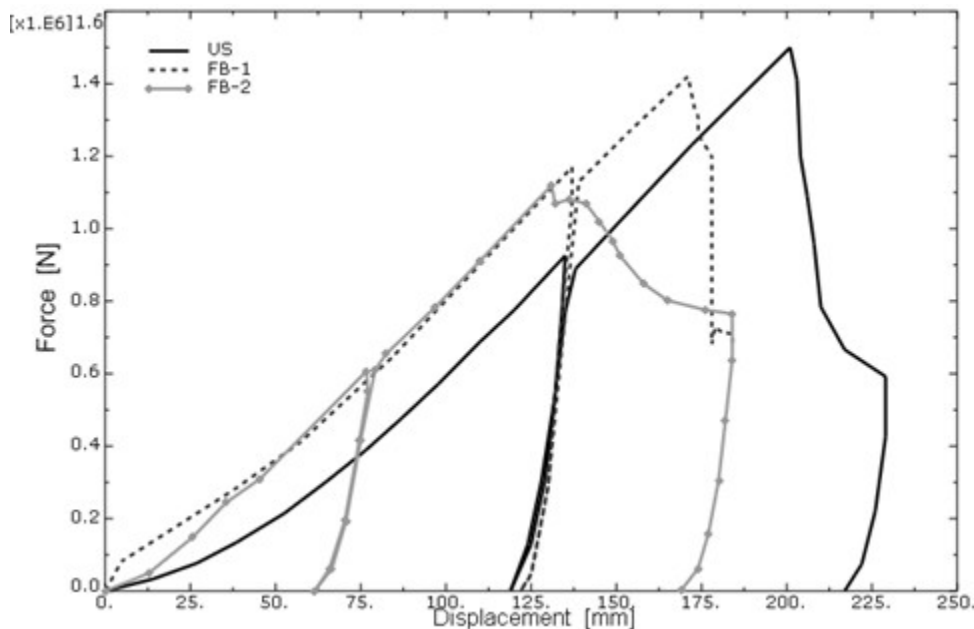
Στην Εικόνα 4.2.6-32 παρουσιάζονται ραβδοειδή διαγράμματα που αφορούν: α) την δύναμη αντίστασης που αναπτύσσει κάθε δοκίμιο έως το σημείο έναρξης της ρωγμής, β) την μετατόπιση του διεισδυτή και γ) την απαιτούμενη ενέργεια θραύσεως. Μέσω των διαγραμμάτων αυτών συγκρίνονται τα δοκίμια ως προς την συμπεριφορά τους στην όλκιμη θραύση. Όπως διαπιστώνουμε το δοκίμιο US παρουσιάζει την πιο όλκιμη συμπεριφορά. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής ενδιαφέρον συμπέρασμα: εάν αυξήσουμε τον αριθμό των ενισχυτικών σε ένα έλασμα ή τοποθετήσουμε πιο ισχυρά ενισχυτικά σε αυτό τότε αφενός πετυχαίνουμε την αύξηση της ολικής ακαμψίας της κατασκευής αφετέρου προκαλούμε την αστοχία της σε πρώιμο στάδιο. Στην περίπτωση αυτή οι παραμορφώσεις συγκεντρώνονται τοπικά σε συγκεκριμένα σημεία του ελάσματος γεγονός που υπονοεί ότι αν και η αρχική ακαμψία της όλης κατασκευής είναι μεγαλύτερη, η συνολική ενέργεια που τελικά απορροφάται καθώς και η ικανότητα αντίστασης στη διείσδυση ελαττώνονται. Το συμπέρασμα αυτό είναι αντίθετο με την φιλοσοφία σχεδίασης των κατασκευών για λειτουργία τους στην γραμμικά ελαστική περιοχή. Εδώ για την αποφυγή μεγάλων παραμορφώσεων προτιμάται η αύξηση της στιβαρότητας των κατασκευών. Παρόλα αυτά, εάν η κατασκευή κατά την διάρκεια της ζωής της, είναι πιθανόν να υποστεί ακραία φορτία, προτιμάται η σχεδίασή της με στόχο την αύξηση της όλκιμης συμπεριφοράς της ώστε να είναι σε θέση να απορροφήσει μεγάλα ποσά ενέργειας όταν χρειαστεί. Όσο αναφορά στα ελάσματα, η χρήση πιο εύκαμπτων και συνεπώς λιγότερο ανθεκτικών ενισχυτικών συνεισφέρει στην αύξηση της ικανότητας τους να απορροφούν ενέργεια υπό ακραία φορτία (διείσδυση-κρούση).

Μια άλλη προσέγγιση είναι η σχεδίαση των κατασκευών με αρχικά ελαττώματα σε συγκεκριμένες θέσεις, ώστε σε περίπτωση ακραίου φορτίου να καθοδηγηθεί ο μηχανισμός αστοχίας. Δηλαδή να είναι εφικτό να ελεγχθεί η συγκέντρωση της πλαστικής παραμόρφωσης, η θέση έναρξης και η πορεία διάδοσης των ρωγμών, με τρόπον που να οδηγούν σε επιθυμητό ασφαλή τύπο βλάβης, αποφεύγοντας έτσι τον κίνδυνο της πλήρους άμεσης κατάρρευση της κατασκευής [Tautz, (54)]. Ένα άλλος τρόπος έχει να κάνει με τον τρόπο σύνδεσης των ενισχυτικών στο έλασμα και την μείωση της στιβαρότητας της κατασκευής, αυτόματα, όταν αυτή υφίσταται ακραία φορτία. Αυτό επιτυγχάνεται με την αποσύνδεση των ενισχυτικών από το έλασμα όταν ακραία φορτία επιδρούν στην κατασκευή, γεγονός που αυξάνει την ικανότητά της στην απόρροφηση ενέργειας και την ανθεκτικότητά της στην θραύση. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην κατασκευή των τάνκερς όπου αφενός οι απαιτήσεις στιβαρότητας υπό ομαλές συνθήκες λειτουργίας είναι υψηλές, ενώ αφετέρου υπό ακραίες συνθήκες όπως σε προσάραξη ή σύγκρουση, η αύξηση της όλκιμότητας που επιτυγχάνεται με την αποσύνδεση των ενισχυτικών από τα ελάσματα της γάστρας, αποτρέπει την διάτρησή της, καθώς αυτή καθίσταται ικανή προς απορρόφηση μεγαλύτερων ποσών ενέργειας.



Εικόνα 4.2.6-32: Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών δοκιμών που αφορούν: (a) την δύναμη αντίστασης έως το σημείο έναρξης της θραύσης, (b) την μετατόπιση του διεύδουτή και την απαιτούμενη ενέργεια θραύσεως.

Η δύναμη αντίστασης σε σχέση με το μήκος διεύδουσης (F - δ) παριστάνεται στην Εικόνα 4.2.6-33 συγκριτικά για όλα τα δοκίμια. Τα συμπεράσματα που εξάγονται από το διάγραμμα της εικόνας αυτής είναι ίδια με αυτά που προέκυψαν από τα ραβδοειδή διαγράμματα στην Εικόνα 4.2.6-32. Δηλαδή τα ενισχυμένα ελάσματα σε σχέση με το έλασμα χωρίς ενισχυτικά έχουν αφενός την ικανότητα απορρόφησης μικρότερου ποσού ενέργειας πριν την τελική θραύση τους, αφετέρου δε η εναπομείνουσα αντοχή τους μετά την εκδήλωση της αρχικής ρωγμής είναι σημαντικά μεγαλύτερη. Η εναπομείνουσα αυτή αντοχή των δοκιμών είναι μεγαλύτερη για την περίπτωση του ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά καθώς η βλάβη στο δοκίμιο αυτό, περιορίζεται σε μια μικρή περιοχή του. Επίσης η αντοχή που επιδεικνύουν τα δοκίμια μετά την εκδήλωση της αρχικής ρωγμής οφείλεται επίσης στην ανακατανομή των μεμβρανικών τάσεων από την εγκάρσια προς την διαμήκη διεύθυνση του ελάσματος.



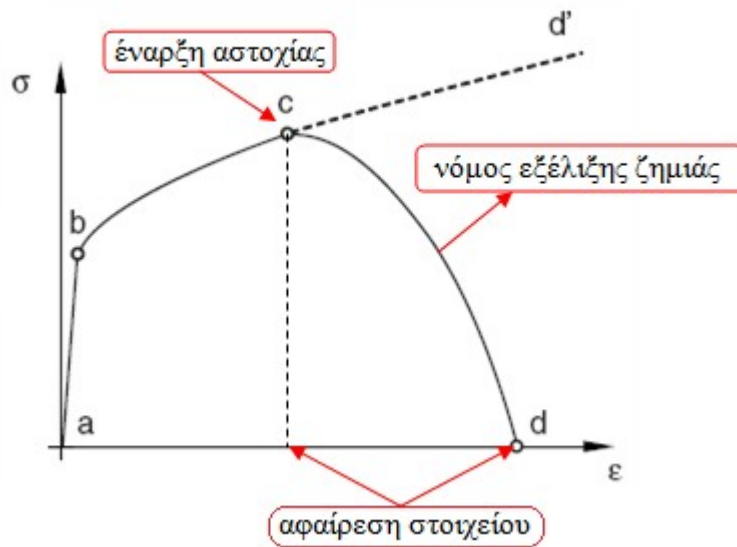
Εικόνα 4.2.6-33: Σύγκριση των καμπύλων F - δ μεταξύ των δοκιμών US, FB-1, FB-2.

4.3.«Αριθμητική προσομοίωση πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων»

4.3.1. Τεχνικές αριθμητικής προσομοίωσης της έναρξης και διάδοσης των ρωγμών με τα πεπερασμένα στοιχεία

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκαν αρκετά μοντέλα βλάβης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση και πρόβλεψη της όλκιμης αστοχίας των κατασκευών. Ορισμένα από αυτά τα μοντέλα έχουν ήδη ενσωματωθεί σε κώδικες πεπερασμένων στοιχείων και χρησιμοποιούνται για την μελέτη της αστοχίας των κατασκευών. Παραδείγματα τέτοιων ενσωματωμένων κριτηρίων, είναι το κριτήριο της μέγιστης ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, το κριτήριο των Johnson και Cook καθώς και ορισμένα κριτήρια πλαστικής αστάθειας που βασίζονται στα διαγράμματα FLD. Στην παρούσα εργασία δημιουργήθηκε κώδικας σε Fortran 77 για την ενσωμάτωση των κριτηρίων RTCL και BWH στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων «Abaqus/Explicit». Συγκεκριμένα δημιουργήθηκε ρουτίνα ‘VUMAT’, με την οποία μπορεί να επικοινωνεί εσωτερικά το Abaqus, και στην οποία ορίζεται η καταστατική σχέση του υλικού, επιλύονται οι σχέσεις που καθορίζουν την πλαστική ροή «isotropic von Mises plasticity theory» και ενσωματώνονται τα κριτήρια αστοχίας. Σημειώνεται ότι η ρουτίνα λειτουργεί μόνο για στοιχεία επίπεδης έντασης όπως είναι για παράδειγμα τα στοιχεία κελύφους που χρησιμοποιήθηκαν στις παρακάτω προσομοιώσεις. Στο Παράρτημα Β παρουσιάζεται αναλυτικά ο κώδικας που αναπτύχθηκε.

Η τεχνική που χρησιμοποιείται στο Abaqus για την προσομοίωση της έναρξης και διάδοσης των ρωγμών βασίζεται στην μέθοδο της προοδευτικής εξέλιξης της βλάβης «progressive damage evolution». Αρχικά ορίζεται μια μεταβλητή βλάβης με την οποία ποσοτικοποιείται η συσσωρευση της ζημιάς. Η μεταβλητή αυτή εξαρτάται από το συγκεκριμένο κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιούμε και η τιμή της ελέγχεται στα σημεία ολοκλήρωσης κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Όταν μια κρίσιμη τιμή προσεγγιστεί σημαίνει ότι έχουμε έναρξη της αστοχίας-ρωγμών. Μετά το σημείο αυτό το στοιχείο έχει δύο δυνατότητες: είτε να αφαιρεθεί άμεσα από το πλέγμα καθώς μειώνεται σημαντικά η ικανότητά του να φέρει φορτία (direct element deletion), είτε να καθοριστεί ένας νόμος εξέλιξης της ζημιάς-ρωγμών «damage evolution law» που θα περιγράφει την σταδιακή μείωση της ικανότητας του στοιχείου να φέρει φορτία, μέχρι της ολοκληρωτικής του αστοχίας, οπότε θα πρέπει και πάλι να αφαιρεθεί από το πλέγμα. Στην ουσία ο νόμος εξέλιξης της ζημιάς παριστάνει την επίδραση στο καταστατικό νόμο του υλικού, της χαλάρωσης που υφίσταται αυτό λόγω της εμφάνισης των ρωγμών. Στην Εικόνα 4.3.1-34 παρουσιάζεται σχηματικά η τεχνική που ακολουθεί το Abaqus στην προσομοίωση της αστοχίας των στοιχείων:



Εικόνα 4.3.1-34: Τυπική καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων-νόμος εξέλιξης της ζημιάς.

Επεξηγώντας, στο πρόγραμμα Abaqus ο καθορισμός του μηχανισμού αστοχίας στα πεπερασμένα στοιχεία αποτελείται από τέσσερα διακριτά στάδια όπου ορίζονται:

- Ενεργή συμπεριφορά του υλικού, δηλαδή ορισμός της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων χωρίς βλάβη (τμήμα a-b-c-d') σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης του στοιχείου.
- Σημείο έναρξης της αστοχίας (c). Καθορίζεται από το χρησιμοποιούμενο κριτήριο αστοχίας.
- Νόμος εξέλιξης της ζημιάς (c-d).
- Επιλογή αφαίρεσης του στοιχείου από το πλέγμα είτε στο σημείο c (σημείο έναρξης της αστοχίας) είτε στο σημείο d μετά την εξέλιξη της ζημιάς και την ολοκληρωτική αστοχία του στοιχείου.

Όπως ήδη αναφέραμε στην Ενότητα 3.2 στο κριτήριο RTCL η έκφραση της συσώρευσης της βλάβης έχει ως εξής:

$$D = \begin{cases} 0 & \text{if } T \leq -1/3 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} & \text{if } -1/3 < T < 1/3 \\ \exp\left(\frac{T-1}{2}\right) & \text{if } T \geq 1/3 \end{cases}$$

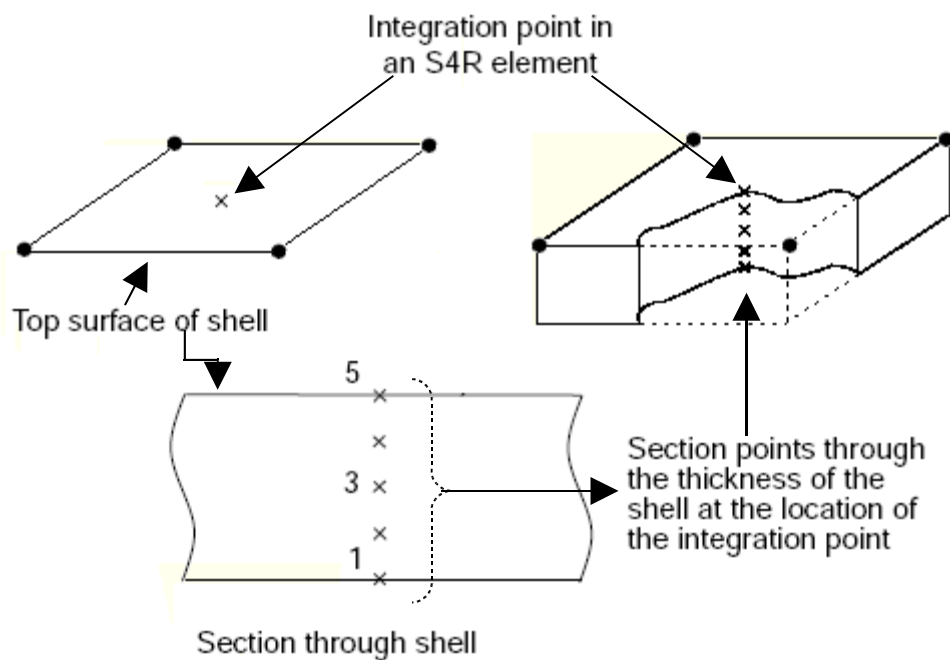
(4.3.1-82)

όπου T εκφράζει την τριαξονική κατάσταση των τάσεων. Για την ποσοτικοποίηση της βλάβης ορίζεται ο ανηγμένος συντελεστής βλάβης D_{RTCL} που δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$D_{RTCL} = \frac{1}{\epsilon_{cr}} \dot{D}dt$$

(4.3.1-83)

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η ζημιά συσσωρεύεται στα στοιχεία διακριτοποίησης του προσομοιώματος της κατασκευής, τα οποία και εξετάζουμε ως προς το μέγεθος της βλάβης που υφίστανται κατά την διάρκεια της φόρτισης. Όταν ο συντελεστής D_{RTCL} γίνει ίσος με την μονάδα σημαίνει ότι έχουμε έναρξη της αστοχίας (σημείο c στην Εικόνα 4.3.1-34). Στην παρούσα εργασία για την αριθμητική προσομοίωση του πειράματος διείδυσης κώνικου βολβού σε ελάσματα από χάλυβα (το πείραμα παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Ενότητα 4.2) χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους τόσο για την διακριτοποίηση του ελάσματος όσο και των ενισχυτικών. Τα στοιχεία κελύφους λόγω της υπόθεσης επίπεδης έντασης φέρουν σημεία ολοκλήρωσης όχι μόνο στο επίπεδό τους αλλά και κατά το πάχος τους. Στην Εικόνα 4.3.1-35 παρουσιάζεται το στοιχείο κελύφους S4R των Belytschko-Tsay που φέρει 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος του. Ο συμβολισμός S4R σημαίνει στοιχείο κελύφους με 4 κόμβους και χρήση της μεθόδου μειωμένης ολοκλήρωσης που απαιτεί μόνο ένα σημείο ολοκλήρωσης στο επίπεδο του στοιχείου για τον υπολογισμό των όρων που εμπλέκονται στο μητρώο στιβαρότητας. Οι επιλογές ολοκλήρωσης είναι είτε κατά Gauss είτε κατά Simpson.



Εικόνα 4.3.1-35: Στοιχείο κελύφους, S4R (Shell with 4 nodes, Reduced integration) με 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος.

Όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 3.2 το κριτήριο RTCL βασίζεται στην ανάπτυξη κενών εντός του υλικού, επομένως ο μηχανισμός αστοχίας εξελίσσεται στις τρεις διαστάσεις του χώρου. Για την ορθή μοντελοποίηση του τρισδιάστατου αυτού μηχανισμού αστοχίας, το κριτήριο RTCL ελέγχεται σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης κατά το πάχος του στοιχείου. Όταν το κριτήριο σε ένα σημείο ολοκλήρωσης ικανοποιείται σημαίνει ότι έχουμε έναρξη της αστοχίας στο σημείο αυτό, ενώ μπορεί να καθοριστεί ξεχωριστός νόμος εξέλιξης της ρωγμής-ζημιάς για κάθε ένα από τα σημεία ολοκλήρωσης. Η συσώρευση της ζημιάς και η απώλεια της φέρουσας ικανότητας του υλικού θεωρείται ότι συμβαίνει στην περιοχή γύρω από το συγκεκριμένο σημείο

ολοκλήρωσης. Για την αφαίρεση του στοιχείου κελύφους από το πλέγμα απαιτείται η ικανοποίηση του κριτηρίου RTCL σε όλα τα κατά το πάχος σημεία ολοκλήρωσης. Στις αριθμητικές προσομοιώσεις που εκτελέστηκαν στην παρούσα εργασία και αφορούν στην εφαρμογή του κριτηρίου RTCL τα στοιχεία αφαιρούνται άμεσα, μόλις δηλαδή η τιμή της ανηγμένης μεταβλητής βλάβης D_{RTCL} σε όλα τα σημεία ολοκλήρωσης του στοιχείου γίνει μονάδα.

Όσο αναφορά το κριτήριο BWH η έκφραση του έχει ως εξής:

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{+2K}{\sqrt{3}} \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}} \frac{\hat{\epsilon}_1}{1 + \beta} \sqrt{\beta^2 + \beta + 1} & \text{if } \beta \leq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} K \frac{\hat{\epsilon}_1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{\beta + 1}}} & \beta > 0 \end{cases}$$

(4.3.1-84)

όπου $\beta = (\dot{\epsilon}_2 / \dot{\epsilon}_1)$ ο λόγος των ρυθμών κύριας παραμόρφωσης. Μια λεπτομερής ανάλυση του κριτηρίου έγινε στην Ενότητα 3.3. Το σ_1 εκφράζει την κρίσιμη τιμή της μέγιστης κύριας τάσης που απαιτείται για τον σχηματισμό πλαστικής αστάθειας στο υλικό και εξαρτάται από την τιμή του λόγου β . Θα μπορούσαμε όπως και προηγουμένως στο κριτήριο RTCL να ορίσουμε μια ανηγμένη μεταβλητή βλάβης D_{BWH} ως εξής:

$$D_{BWH} = \frac{\sigma_{1,current}}{\sigma_1}$$

(4.3.1-85)

όπου $\sigma_{1,current}$ η τρέχων τιμή της μέγιστης κύριας τάσης που επικρατεί στην κατασκευή. Όταν η ανηγμένη μεταβλητή D_{BWH} γίνει ίση με την μονάδα σε κάποιο σημείο του υλικού, σημαίνει ότι το κριτήριο BWH ικανοποιείται και συνεπώς το σημείο αυτό θεωρείται ως σημείο έναρξης της αστοχίας. Σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία, τα σημεία ελέγχου του κριτηρίου είναι τα σημεία ολοκλήρωσης. Επειδή το κριτήριο BWH θεωρεί ως αστοχία την ανάπτυξη τοπικά σημείου πλαστικής αστάθειας στο υλικό, θα πρέπει κατά τον έλεγχο, να λαμβάνεται υπόψιν μόνο η επίδραση από τις μεμβρανικές τάσεις. Συνεπώς το κριτήριο ελέγχεται στο σημείο ολοκλήρωσης που βρίσκεται στο μέσο επίπεδο κατά το πάχος του στοιχείου, (σημείο ολοκλήρωσης 3 στην Εικόνα 4.3.1-35), διαφορετικά αν ο έλεγχος γινόταν σε κάθε ένα από τα σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος του στοιχείου, το κριτήριο θα προέβλεπε πλαστική αστάθεια στην εξωτερική του επιφάνεια, όπου και αναπτύσσονται οι μέγιστες ολικές τάσεις λόγω της συνεισφοράς των καμπτικών τάσεων, γεγονός που δεν συμφωνεί με την θέση έναρξης των ρωγμών στο πείραμα.

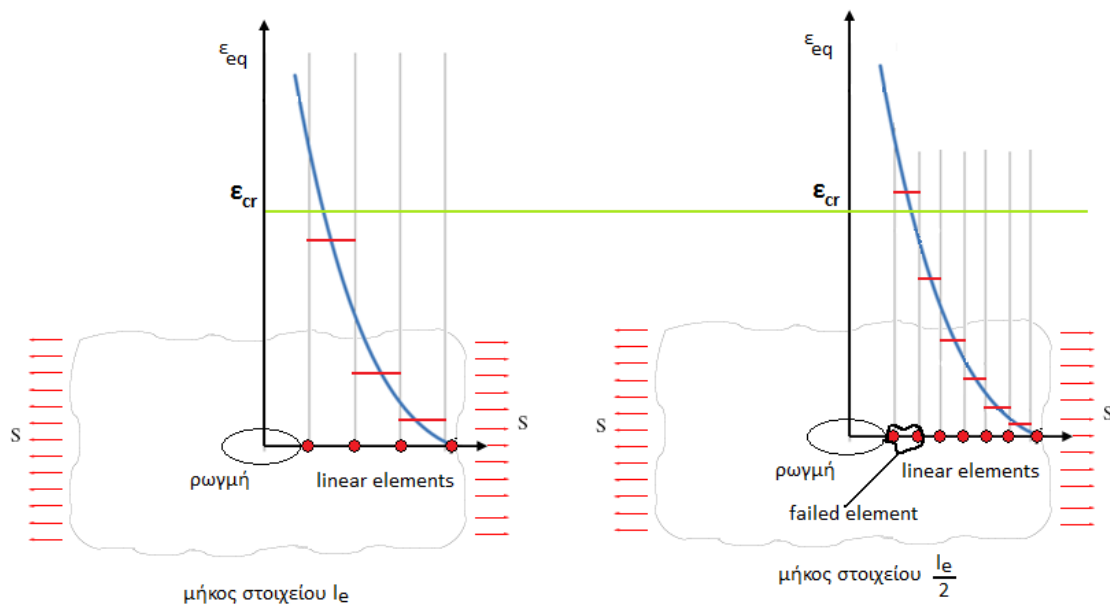
Τέλος θα αναφέρουμε ορισμένες άλλες τεχνικές προσομοίωσης της βλάβης που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τα κριτήρια αστοχίας σε προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Ορισμένες από αυτές έχουν ήδη ενσωματωθεί σε κάποια εξελιγμένα εμπορικά προγράμματα FEM ενώ άλλες έχουν ακόμη ακαδημαϊκό χαρακτήρα. Οι πιο σημαντικές είναι οι εξής:

- ✓ **«Adaptive Remeshing»:** Προσαρμοστική πύκνωση της κατασκευής στην περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής, κατά την διάδοσή της. Η διαδικασία αυτή απαιτεί συνεχείς επιλύσεις των εξισώσεων που προκύπτουν κάθε φορά από το νέο πλέγμα, με συνέπεια το υψηλό υπολογιστικό κόστος να καθιστά απαγορευτική την χρήση της μεθόδου στην προσομοίωση μεγάλων κατασκευών. Χρησιμοποιείται κυρίως για μοντελοποίηση της αστοχίας δοκιμίων με προϋπάρχουσες ρωγμές.
- ✓ **«Stress/Stiffness reduction»:** Η τεχνική αυτή βασίζεται σε αρχές των ‘damage mechanics’. Όταν ένα στοιχείο ικανοποιεί ένα κριτήριο αστοχίας, οι τάσεις ή η στιβαρότητα του στοιχείου, είτε μηδενίζονται αυτόματα είτε μειώνονται σταδιακά, όσο εξελίσσεται η φόρτιση της κατασκευής μέχρι τελικά να μηδενιστούν. Η τεχνική χαλάρωσης του υλικού μέσω ενός νόμου εξέλιξης των ρωγμών, είναι μια καλή μέθοδος για την προσομοίωση της όλκιμης θραύσης, ενώ είναι παρόμοια με τον νόμο εξέλιξης της ζημιάς που χρησιμοποιείται στην τεχνική της προοδευτικής εξέλιξης της ζημιάς με αφαίρεση στοιχείων (progressive damage with element deletion). Η διαφορά είναι ότι τα στοιχεία παρόλο που χάνουν την ικανότητά τους να φέρουν φορτία διατηρούνται στο πλέγμα, γεγονός που δίνει ένα πλεονέκτημα στην περίπτωση προσομοίωσης προβλημάτων με επαφές.
- ✓ **«Node release»:** Απελευθέρωση των κομβικών δεσμών. Εδώ κάθε συνορεύον στοιχείο θεωρείται ότι έχει ανεξάρτητους κόμβους, δηλαδή δεν υφίστανται κοινοί κόμβοι μεταξύ των γειτονικών στοιχείων. Οι ανεξάρτητοι όμως αυτοί κόμβοι αποτελούν αρχικά μια ομάδα που υπόκεινται σε περιορισμούς ως προς την σχετική τους κίνηση. Συνεπώς μέχρι την ικανοποίηση κάποιου κριτηρίου αστοχίας οι κόμβοι αυτοί κινούνται με τον ίδιο τρόπο, ενώ όταν ξεπεραστεί μια κρίσιμη τιμή απελευθερώνονται οι μεταξύ του δεσμοί και τα στοιχεία διαχωρίζονται προσομοιώνοντας έτσι την διάδοση της ρωγμής.
- ✓ **«Element kill option»:** όταν ένα στοιχείο ικανοποιεί κάποιο κριτήριο αστοχίας οι εξισώσεις του δεν λαμβάνονται πλέον υπόψιν στην επίλυση των καθολικών μητρικών σχέσεων του προσομοιώματος. Λόγω της διαδικασίας αυτής η ακαμψία της κατασκευής μειώνεται απότομα, με συνέπεια να δημιουργούνται ελαστικά κύματα τάσεων στο υλικό που προκαλούν αστάθειες κατά την επίλυση.
- ✓ **«Mesh-free method»:** είναι μια εναλλακτική αριθμητική μέθοδος που δεν βασίζεται στην διακριτοποίηση της κατασκευής με τα πεπερασμένα στοιχεία. Το πλεονέκτημά της είναι ότι απαφεύγονται προβλήματα που προκαλούνται εξαιτίας της υπερβολικής παραμόρφωσης των στοιχείων που οδηγούν είτε σε αναξιόπιστα αποτελέσματα είτε σε αύξηση του υπολογιστικού κόστους λόγω της ανάγκης δημιουργίας εκ νέου πλέγματος (Remesh). Επίσης αποφεύγεται η ανάπτυξη νόμου κλίμακας για την πρόβλεψη του σωστού επιπέδου της κρίσιμης παραμόρφωσης αστοχίας στα στοιχεία (ιδιαίτερα στα shells) ανάλογα με το μέγεθος τους.
- ✓ **«eXtended-Finite Elements Method (X-FEM)»:** Εμπλουτισμένα πεπερασμένα στοιχεία. Είναι μια καινούργια μέθοδος που ανακαλύφθηκε από τον Belytschko το 1999 (55) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μεγάλη επιτυχία στην προσομοίωση της διάδοσης των ρωγμών. Συνδυάζει πλεονεκτήματα των Mesh-Free μεθόδων με τα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία. Η θραύση

προσομοιώνεται με την διάρρηξη των στοιχείων ενώ επιπλέον βαθμοί ελευθερίας επιβάλλονται στους κόμβους για την περιγραφή του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου λόγω της παρουσίας της ρωγμής. Το μειονέκτημα είναι ότι απαιτείται η ανάπτυξη ειδικών επιλυτών ικανών να χειριστούν τα 'extended' μητρώα που προκύπτουν. Μέχρι τώρα η μέθοδος εφαρμόζεται σε μικρά προβλήματα, όπου η διακριτοποίηση γίνεται με τετρακομβικά επίπεδα στοιχεία. Η χρήση της μεθόδου σε στοιχεία κελύφους βρίσκεται ακόμη υπό ερευνητικό στάδιο.

4.3.2. Επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα

Ένα αναπόφευκτο πρόβλημα στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η εξάρτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων από το μέγεθος των στοιχείων διακριτοποίησης το οποίο είναι εντονότερο σε περιοχές όπου επικρατούν υψηλές κλίσεις της παραμόρφωσης. Παραδείγματα τέτοιων περιοχών είναι η περιοχή κοντά στο άκρο ρωγμής, σε ενώσεις κατασκευαστικών στοιχείων λόγω γεωμετρικής ή και υλικής ασυνέχειας καθώς και σε περιοχές όπου εμφανίζεται το φαινόμενο του «λαιμού» στο υλικό. Στην Εικόνα 4.3.2-36 φαίνεται σχηματικά ο τρόπος που το μέγεθος των στοιχείων διακριτοποίησης στην περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής επιδρά στα αποτελέσματα των παραμορφώσεων. Εάν χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο αστοχίας την κρίσιμη ισοδύναμη παραμόρφωση ϵ_{cr} τότε για μήκος στοιχείου l_e το κριτήριο δεν προβλέπει αστοχία στην κατασκευή. Θα πρέπει να πυκνώσουμε περαιτέρω το πλέγμα ώστε τα στοιχεία να αντιληφθούν ορθά την ζημιά και να αφαιρεθούν από το πλέγμα, προσομοιώνοντας έτσι την διάδοση των ρωγμών.



Εικόνα 4.3.2-36: Υψηλή κλίση παραμόρφωσης στο άκρο ρωγμής, επίδραση μεγέθους στοιχείων στο κριτήριο αστοχίας.

Ιδιαίτερα στα κελύφη «shell elements» λόγω της υπόθεσης επίπεδης έντασης που ισχύει σε αυτά, η επίδραση του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα είναι εντονότερη. Ενώ στα τρισδιάστατα στοιχεία συνεχούς μέσου η τάση που αναπτύσσεται κατά το πάχος τους αντιτίθεται στην παραμόρφωση που τείνει να «λεπτύνει» το στοιχείο «through thickness thinning», αντιθέτως στα στοιχεία κελύφους η τάση αυτή

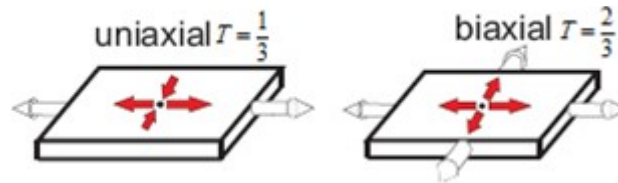
είναι μηδενική, με συνέπεια να παραμορφώνονται κατά το πάχος τους χωρίς περιορισμούς. Μόνο οι παραμορφώσεις κατά το επίπεδο του κελύφους εμποδίζονται από την παρουσία των γειτονικών του. Συνεπώς πριν την αστοχία τους τα στοιχεία παραμορφώνονται υπερβολικά σχηματίζοντας στενές λωρίδες υλικού. Το φαινόμενο αυτό είναι εντονότερο όσο μικρότερο είναι το μέγεθος των στοιχείων. Από την άλλη το πρόβλημα όταν χρησιμοποιούνται μεγαλύτερα στοιχεία είναι η αδυναμία τους να αισθανθούν τις τοπικές συγκεντρώσεις των τάσεων και των παραμορφώσεων. Για την αποφυγή αυτού του σύνθετου προβλήματος που αφορά στην πυκνότητα του πλέγματος, θα πρέπει να ληφθούν ορισμένα μέτρα.

Στην μελέτη αντοχής ελασμάτων υπό διάφορες καταπονήσεις, οι μηχανισμοί αστοχίας που συντελούνται, όπως για παράδειγμα ο σχηματισμός τοπικού λαιμού, περιορίζονται σε στενές λωρίδες υλικού, μεγέθους όσο και το πάχος του ελάσματος. Σε προβλήματα όμως όπως η σύγκρουση ή προσάραξη πλοίου, όπου μελετάται η αντοχή της γάστρας, η διακριτοποίηση των ελασμάτων της γίνεται με στοιχεία κελύφους μεγέθους 5 έως και 15 φορές το μέγεθος του πάχους τους. Όπως είναι κατανοητό στοιχεία αυτού του μεγέθους δεν είναι δυνατόν να ανιχνεύσουν τοπικά φαινόμενα στο υλικό. Αρκετοί ερευνητές που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη κριτηρίων αστοχίας, προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα της επίδρασης του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα, με το να εισάγουν ένα χαρακτηριστικό μέγεθος των στοιχείων στην έκφραση των κριτηρίων [Lee, Wierzbicki and Bao, (56)]. Με τον τρόπο αυτό η παραμόρφωση στην αστοχία ή η κρίσιμη ζημιά μειώνεται με αύξηση του μεγέθους του στοιχείου, βάση κάποιου νόμου κλίμακας «scaling law». Τα κριτήρια αστοχίας με την χρήση κατάλληλου νόμου κλίμακας είναι δυνατόν να προβλέψουν ορθά το επίπεδο αστοχίας στα στοιχεία ανεξάρτητα από το μέγεθός τους και συνεπώς να προκύψουν αξιόπιστα αριθμητικά αποτελέσματα για την αστοχία της όλης κατασκευής ανεξάρτητα από την πυκνότητα διακριτοποίησης της.

Στην παρούσα εργασία για την εφαρμογή του κριτηρίου RTCL με στοιχεία κελύφους αναπτύχθηκε νόμος κλίμακας που συμπεριλαμβάνει το μήκος των στοιχείων αυτών στο κριτήριο. Οι θεωρητικές αρχές πάνω στις οποίες στηρίχτηκε η ανάπτυξη του κριτηρίου RTCL όπως για παράδειγμα η προϋπόθεση ύπαρξης περιοχών με υψηλή συγκέντρωση πλαστικών παραμορφώσεων στην κατασκευή, είναι αυτές που επιβάλλουν την χρήση νόμου κλίμακας ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους για την διακριτοποίησή της. Σε μεγάλες τιμές «triaxiality» ($T \gg 1/3$), όπου εφαρμόζεται η έκφραση των Rice και Tracey, ο μηχανισμός έναρξης της αστοχίας βασίζεται στην αύξηση του όγκου αρχικών σφαιρικών κενών εντός του υλικού τα οποία συνενώνονται με τα γειτονικά τους όταν η ακτίνα τους ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Το φαινόμενο αυτό εξελίσσεται στις τρεις διαστάσεις και εξαρτάται άμεσα από την τιμή της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων T . Μεγάλες τιμές του T σημαίνει υψηλή υδροστατική πίεση στο συγκεκριμένο σημείο του υλικού με συνέπεια την επιτάχυνση της διόγκωσης των σφαιρικών κενών. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι τα διδιάστατα στοιχεία επίπεδης έντασης «plane stress elements», όπως είναι τα στοιχεία κελύφους δεν μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω 3-D φαινόμενο με ακρίβεια. Η μέγιστη τιμή του «triaxiality» που μπορεί να επιτευχθεί στα shell elements είναι $T = 2/3$ και αντιστοιχεί σε κατάσταση διαξονικού εφελκυσμού (Εικόνα 4.3.2-37).

Όσο αναφορά στο κριτήριο BWH δεν είναι απαραίτητη η χρήση νόμου κλίμακας καθώς το κριτήριο αυτό βασίζεται στις κύριες μέγιστες τάσεις που επικρατούν στα στοιχεία. Είναι δηλαδή ένα κριτήριο πλαστικής αστάθειας καθώς θεωρεί ότι η έναρξη της αστοχίας συμβαίνει σε ένα στοιχείο ακριβώς πριν τον σχηματισμό τοπικού λαιμού

σε αυτό. Συνεπώς αποφεύγεται η υπερβολική παραμόρφωση των στοιχείων του πλέγματος.



Εικόνα 4.3.2-37: Τιμή της τριαξονικής εντατικής κατάστασης T «triaxiality», σε στοιχείο κελύφους (a) σε μονοαξονικό εφελκυσμό και (b) σε διαξονικό εφελκυσμό.

4.3.3. Ανάπτυξη Νόμου Κλίμακας κριτηρίου RTCL για στοιχεία κελύφους

Ένας νόμος κλίμακας «scaling law» για το κριτήριο RTCL προκύπτει εάν θεωρήσουμε το υλικό στοιχείο της Εικόνα 4.3.3-38, μέσω του οποίου επιχειρείται ο υπολογισμός της κρίσιμης πλαστικής παραμόρφωσης ϵ_{cr} στο στοιχείο. Η τιμή ϵ_{cr} χρησιμοποιείται στο

κριτήριο για τον υπολογισμό της ανηγμένης ζημιάς $D_{RTCL} = \frac{1}{\epsilon_{cr}} \dot{D} dt$ που καθορίζει τον βαθμό αστοχίας στο στοιχείο. Σημειώνουμε ότι σε περίπτωση μονοαξονικού εφελκυσμού ισχύει $D_{cr} = \epsilon_{cr}$. Το \dot{D} δίνεται από την σχέση :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{if } T \leq -1/3 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} \dot{\epsilon}_{eq} & \text{if } -1/3 < T < 1/3 \\ \exp\left(\frac{2T-1}{2}\right) \dot{\epsilon}_{eq} & \text{if } T \geq 1/3 \end{cases}$$

που εκφράζει την εξέλιξη της ζημιάς σύμφωνα με το κριτήριο RTCL. Υποθέτουμε ότι το υλικό στοιχείο που παραμορφώνεται λόγω της επίπεδης φόρτισής του μέχρι το σημείο της θραύσης του, αποτελείται από δύο τμήματα. Το ένα τμήμα έχει όγκο V_n και περιέχει τον τοπικό λαιμό που σχηματίζεται στο στοιχείο, ενώ το άλλο τμήμα έχει όγκο V_r και περιέχει την περιοχή όπου αναπτύσσονται ομοιόμορφα κατανεμημένες παραμορφώσεις. Το άθροισμα των όγκων V_n και V_r δίνει τον συνολικό όγκο του στοιχείου V_{el} . Υποθέτωντας πλαστική ασυμπίεστότητα για το υλικό, οι αρχικοί όγκοι V_n και V_r δεν μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης. Συνεπώς ο σχηματισμός λαιμού γίνεται υπό σταθερό όγκο. Η μέση τιμή της κρίσιμης παραμόρφωση ϵ_{cr} που απαιτείται για την θραύση του στοιχείου, θα μπορούσε να δοθεί σε σχέση με την ομοιόμορφη κατανομή παραμόρφωσης ϵ_r στον όγκο V_r και την τιμή της μέσης παραμόρφωσης ϵ_n στον όγκο V_n που περιέχει τον λαιμό, ανηγμένη στον συνολικό όγκο του υλικού στοιχείου V_{el} ως εξής:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\varepsilon_r V_r + \varepsilon_n V_n}{V_{el}}$$

(4.3.3-86)

Ο Li στην εργασία του (57) παρουσιάζει μια παρόμοια έκφραση που προκύπτει ύστερα από αρκετή άλγεβρα μεταξύ σχέσεων που συνδέουν το μέγεθος του στοιχείου με ατέλειες στο υλικό. Το μοντέλο του αναφέρεται ως «three-piece-cell model» και υπόσχεται αρκετά καλά αποτελέσματα. Μια διαφορετική προσέγγιση γίνεται από τον Kessler (58), ο οποίος αντί να εξάγει νόμο κλίμακας που αφορά την κρίσιμη τιμή της παραμόρφωσης ε_{cr} , επικεντρώνεται στην ανάπτυξη νόμου κλίμακας για τον κρίσιμο ρυθμό της πλαστικής παραμόρφωσης στη θραύση $\dot{\varepsilon}_{cr}$.

Ο τύπος 4.3.3-1 ισχύει μόνο για στοιχεία κελύφους και αναφέρεται στην αρχική διαμόρφωσή τους, δηλαδή οι όγκοι αφορούν στο απαραμόρφωτο στοιχείο. Από την άλλη οι όροι πλαστικής παραμόρφωσης που εμπλέκονται σε αυτόν εκφράζονται σε ισοδύναμη μορφή. Σημειώνεται ότι, όταν το πλαστικά ασυμπιέστο υλικό ακολουθεί τον νόμο Mises πλαστικό νόμο ροής, η ισοδύναμη έκφραση για τις παραμορφώσεις του είναι

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}, \text{ όπου } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ οι κύριες τιμές των παραμορφώσεων.}$$

Ωστόσο σε μηχανολογικές εφαρμογές σε μια πιο πραγματική προσέγγιση ο νόμος κλίμακας θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν το παραμορφωμένο και όχι το αρχικό μέγεθος των στοιχείων ενώ η εισαγωγή του σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων θα πρέπει να μην αυξάνει υπερβολικά το υπολογιστικό κόστος.

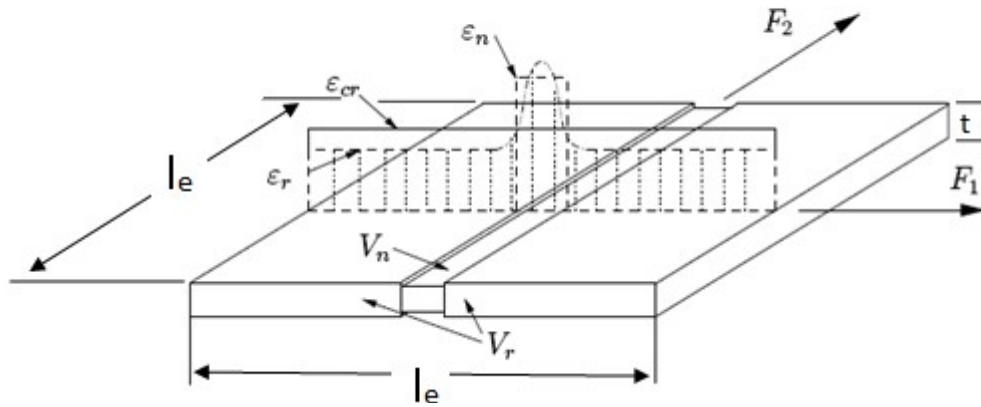
Εάν θεωρήσουμε ότι ο τοπικός λαιμός σχηματίζεται παράλληλα στις πλευρές του υλικού στοιχείου, σε μια περιοχή που στην απαραμόρφωτη κατάσταση έχει πλάτος όσο το αρχικό πάχος t του υλικού στοιχείου, τότε ο όγκος της πλαστικής αστάθειας είναι $V_n = t^2 l_e$. Ο υπόλοιπος όγκος του στοιχείου προκύπτει αυτόματα στην μορφή $V_r = V_{el} - V_n = t l_e^2 - t^2 l_e$, όπου l_e είναι το απαραμόρφωτο μήκος του στοιχείου.

Σημειώνεται ότι αρχικά το υλικό στοιχείο θεωρείται ότι έχει λόγο πλευρών ίσο με την μονάδα (aspect ratio=1). Με την αντικατάσταση στον τύπο 4.3.3-1 των παραπάνω εκφράσεων για τους όγκους προκύπτει ο νόμος κλίμακας σε άμεση εξάρτηση από το απαραμόρφωτο μήκος του στοιχείου στην μορφή:

$$\varepsilon_{cr}(l_e) = \varepsilon_r + (\varepsilon_n - \varepsilon_r) \frac{t}{l_e}$$

(4.3.3-87)

Η παραπάνω έκφραση είναι παρόμοια με αυτήν που παρουσίασαν στο κριτήριό τους οι Lehman και Peschman (Εξίσωση 3.1-1 στην σελίδα 36).



Εικόνα 4.3.3-38: Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας ανάπτυξης νόμου κλίμακας για το κριτήριο αστοχίας RTCL και στοιχεία κελύφους.

Η βαθμονόμηση του κριτηρίου αστοχίας RTCL απαιτεί την εκτέλεση πειραμάτων και αριθμητικών προσομοιώσεων μονοαξονικού εφελκυσμού σε κατάλληλα δοκίμια «bone specimens», η γεωμετρία των οποίων φαίνεται στην Εικόνα 4.3.3-39. Η έκφραση που αναπτύχθηκε για τον νόμο κλίμακας μπορεί να απλοποιηθεί βάσει των κάτωθι υποθέσεων: Θεωρούμε ένα απείρως μακρύ δοκίμιο που υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το μέγεθος του τοπικού αλλά και του διαχεόμενου στο δοκίμιο λαιμού «local and diffuse necking» είναι συνεπώς ασήμαντο σε σχέση με το μήκος του δοκιμίου. Μετρώντας πειραματικά την παραμόρφωση στο ενεργό μήκος του δοκιμίου «gauge length» διαπιστώνουμε ότι η κρίσιμη τιμή της για την θραύση του δοκιμίου είναι η τιμή της παραμόρφωση που επικρατεί στην περιοχή του διαχεόμενου λαιμού. Η σχέση 4.3.3-2 υποδηλώνει επίσης ότι για απείρως μεγάλο στοιχείο, $l_e \gg t$ η κρίσιμη ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στην θραύση είναι $\epsilon_{cr}(l_e \gg t) = \epsilon_r$. Επομένως το ϵ_r εκφράζει την μέση ισοδύναμη παραμόρφωση που αναπτύσσεται στην περιοχή του διαχεόμενου λαιμού και υπολογίζεται μέσω της εκτέλεσης πειράματος εφελκυσμού στα δοκίμια που φαίνονται στην Εικόνα 4.3.3-39. Για υλικό που ακολουθεί εκθετικό νόμο κράτησης $\sigma_{eq} = K \epsilon_{eq}^n$ προκύπτει από παρατηρήσεις ότι η τιμή $\epsilon_r \approx n$ εκτιμά αρκετά καλά την παραμόρφωση που απαιτείται για την θραύση των δοκιμίων. Η παράμετρος στον νόμο κλίμακας ϵ_n περιγράφει την κρίσιμη παραμόρφωση όταν το μήκος του στοιχείου είναι ίσο με το πάχος του $\epsilon_{cr}(l_e \approx t) = \epsilon_n$. Η τιμή αυτή υπολογίζεται μέσω της εκτέλεσης αριθμητικών προσομοιώσεων μονοαξονικού εφελκυσμού στα δοκίμια της Εικόνα 4.3.3-39 τα οποία διακρίτοποιούνται με στοιχεία κελύφους. Ο αρχικός λόγος πλευρών των κελυφών επιλέγεται να είναι κοντά στην μονάδα. Συνεπώς ο νόμος κλίμακας για την περίπτωση μονοαξονικού εφελκυσμού τροποποιείται σύμφωνα με τα προηγούμενα στην εξής μορφή:

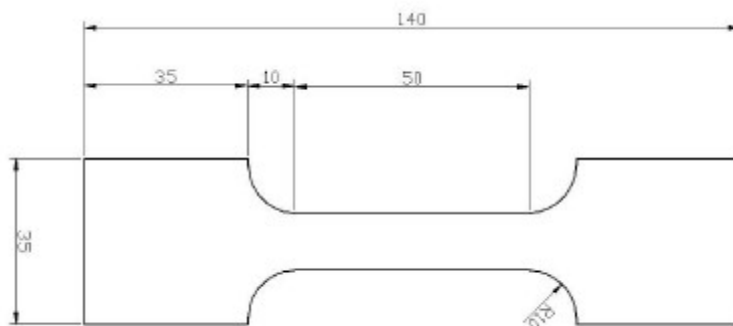
$$\epsilon_{cr}(l_e) = n + (\epsilon_n - n) \frac{t}{l_e}$$

(4.3.3-88)

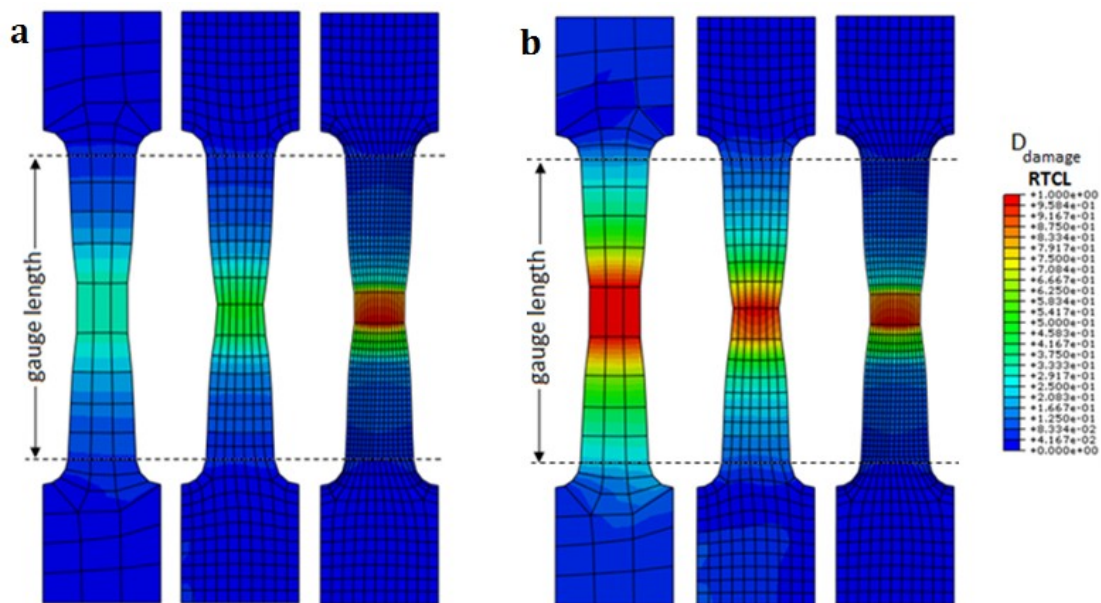
Η παραπάνω σχέση που αναφέρεται ως «fracture scaling law» είναι εκείνη που χρησιμοποιείται στην ανηγμένη έκφραση του κριτηρίου RTCL (εξίσωση 4.3.1-2). Στην Εικόνα 4.3.3-40(a) απεικονίζεται η μεταβλητή της βλάβης σε στοιχεία κελύφους, σύμφωνα με το κριτήριο RTCL όταν δεν γίνεται χρήση νόμου κλίμακας. Τα τρία δοκίμια «bone specimens» που απεικονίζονται, διαφέρουν ως προς το μέγεθος των

στοιχείων διακριτοποίησής τους. Συγκεκριμένα εκτελεστηκαν προσομοιώσεις των δοκιμίων σε μονοαξονικό εφελκυσμό επιβάλλοντας σε αυτά επιμήκυνση όσο αυτή που μετρήθηκε πειραματικά στο «gauge length» την στιγμή της θραύσης τους (fracture elongation). Από την εικόνα είναι φανερό ότι το κριτήριο RTCL για μεγάλο μέγεθος στοιχείου υποεκτιμά την βλάβη. Αυτό έχει ως συνέπεια η αριθμητική πρόβλεψη της θραύσης να γίνεται εσφαλμένα για μεγαλύτερη επιμήκυνση του δοκιμίου. Αντιθέτως στην Εικόνα 4.3.3-40(b) είναι φανερό πως η χρήση του νόμου κλίμακας βελτιώνει αισθητά τα αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία στην περίπτωση αυτή μοιάζουν να μην επηρεάζονται από το μέγεθος των στοιχείων.

Θα πρέπει ωστόσο να σημειώσουμε ότι διορθώνοντας το επίπεδο αστοχίας στα στοιχεία ανάλογα με το μέγεθός τους, βάση μιας συνάρτησης (νόμος κλίμακας), εμπεριέχει κινδύνους. Δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι πριν την θραύση του δοκιμίου παρατηρούνται μηχανισμοί αστοχίας που βασίζονται στην τοπική παραμόρφωση καθώς υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που μπορεί να επιδρούν όπως είναι ο ρυθμός της παραμόρφωσης ή η θερμοκρασία που αναπτύσσεται εξαιτίας αυτής. Συνεπώς η σχέση 4.3.3-3 θα πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή και κατά περίπτωση.



Εικόνα 4.3.3-39: Γεωμετρία των δοκιμίων ορθογωνικής διατομής «bone specimens» που χρησιμοποιούνται σε πειράματα εφελκυσμού και αριθμητικές προσομοιώσεις κατά την βαθμονόμηση του κριτηρίου RTCL. Το πάχος των δοκιμίων είναι 5 mm.



Εικόνα 4.3.3-40: Κατανομή του μεγέθους της βλάβης σύμφωνα με το κριτήριο RTCL για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις μεγέθους στοιχείων κελύφους α) χωρίς την χρήση του νόμου κλίμακας β) με χρήση του νόμου κλίμακας. Οι τιμές αναφέρονται σε επιμήκυνση των δοκιμίων την στιγμή λίγο πριν το πειραματικό σημείο της θραύσης τους.

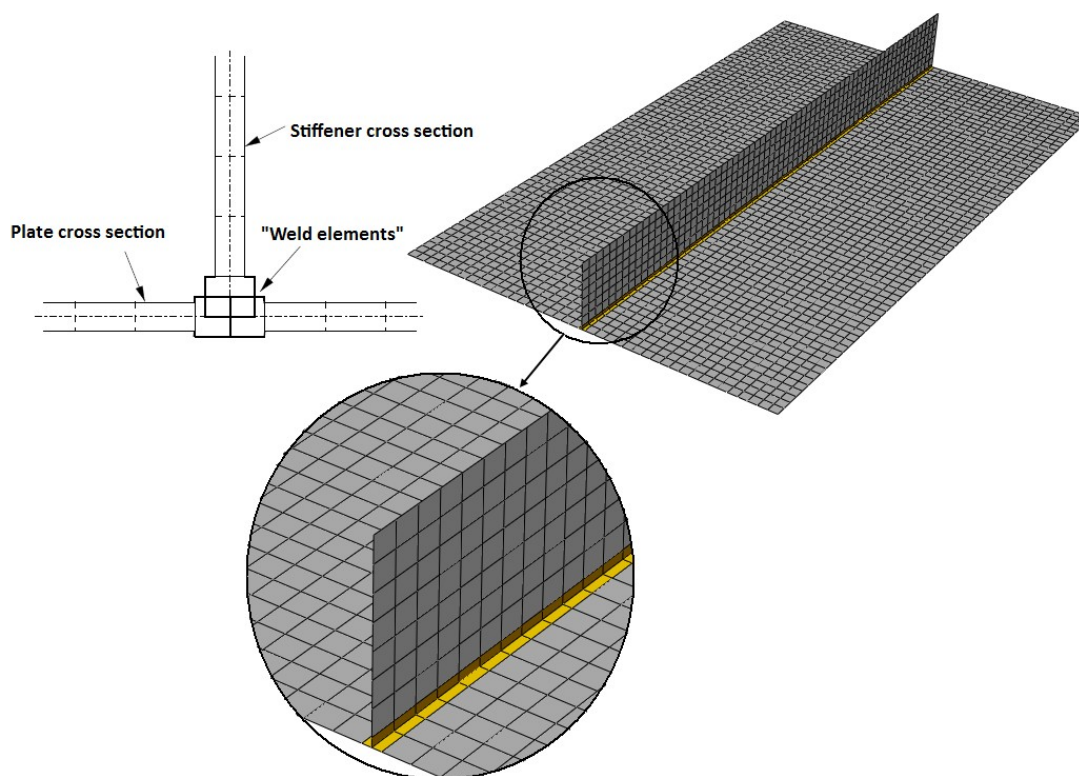
4.3.4. Μοντελοποίηση του πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων

Στο Ενότητα 4.2.2 περιγράφηκε αναλυτικά η γεωμετρία και τα υλικά των κατασκευαστικών στοιχείων του πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια ελασμάτων με ή χωρίς ενισχυτικά. Συγκεκριμένα τα δοκίμια που μελετήθηκαν ήταν: α) έλασμα χωρίς ενισχυτικά US, β) έλασμα με ένα διαμήκη ενισχυτικό στο μέσον του FB-1 και γ) έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά FB-2. Για την μοντελοποίηση τόσο του ελάσματος όσο και των ενισχυτικών χρησιμοποιούνται τα στοιχεία κελύφους των Belytschko-Tsay που φέρουν 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος τους (Ενότητα 4.3.1, Εικόνα 4.3.1-35 σελ.72). Στις αριθμητικές προσομοιώσεις που ακολουθούν, για κάθε ένα δοκίμιο αντιστοιχούν διακριτοποιήσεις με αραιό και πυκνό πλέγμα συγκεκριμένα για το κριτήριο BWH χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία κελύφους με χαρακτηριστικό μήκος 25, 18 και 10 mm ενώ για το RTCL 18, 10 και 5 mm. Σημειώνεται ότι η εφαρμογή του κριτηρίου BWH με στοιχεία μήκους $l_e = 5mm$ δεν ήταν δυνατή λόγω αριθμητικών ασταθειών κατά την επίλυση εξαιτίας της πρόβλεψης αστοχίας από το κριτήριο, που οδηγεί σε αφαίρεση των μικρών στοιχείων

του πλέγματος. Επίσης κατά την διακριτοποίηση έγινε προσπάθεια ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν αρχικό λόγο πλευρών «aspect ratio» όσο γίνεται πιο κοντά στην μονάδα.

Για την προσομοίωση της επαφής μεταξύ του δεισδυτή και των δοκιμίων χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος γενικής επαφής του Abaqus (επιλογή General contact algorithm) και ορίζεται συντελεστής τριβής μεταξύ των επιφανειών ίσος με 0.3. Η τιμή αυτή έχει προκύψει από πειραματικές μετρήσεις για επαφές μεταξύ χαλύβδινων επιφανειών. Ο αλγόριθμος επαφής του προγράμματος ελέγχει όλο το προσομοίωμα για την εύρεση επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή, ακόμη και για αυτό-επαφή (self-contact) σε περίπτωση μεγάλων παραμορφώσεων. Σημειώνεται ότι οι παράμετροι του προγράμματος ρυθμίζονται έτσι ώστε να μην επιτρέπεται η ολίσθηση μεταξύ των επιφανειών (no slip).

Λόγω της σύνδεσης των ενισχυτικών στο επίπεδο του ελάσματος με ραφή συγκόλλησης, το πάχος του υλικού στην περιοχή αυτή αυξάνεται. Στην πραγματικότητα η εγκάρσια τομή της συγκόλλησης έχει τριγωνικό σχήμα. Παρόλα αυτά για την προσομοίωσή της χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους πλάτους 6 mm τόσο πάνω στο έλασμα αριστερά και δεξιά του ενισχυτικού όσο και πάνω στο ίδιο το ενισχυτικό (Εικόνα 4.3.4-41). Το πάχος των στοιχείων συγκόλλησης για το έλασμα αυξάνεται κατά 2 mm ενώ για τα ενισχυτικά κατά 4 mm.



Εικόνα 4.3.4-41: Στοιχεία κελύφους στην ραφή συγκόλλησης.

Όσο αφορά το υλικό, θεωρείται ότι έχει ισοτροπική πλαστική συμπεριφορά που περιγράφεται από την J2-θεωρία διαρροής σε κατάσταση επίπεδης έντασης. Η καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων για τα μεγέθη μηχανικού «engineering stress-strain curve»,

τόσο για το έλασμα όσο και για τα ενισχυτικά παρουσιάζονται στις Εικόνες Εικόνα 4.2.2-22 και Εικόνα 4.2.2-21 αντίστοιχα. Το υλικό εισάγεται στο Abaqus ως υλικό που ορίζεται από τον χρήστη (user-defined material) και ακολουθεί τον τροποποιημένο εκθετικό νόμο κράτνσης:

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} \sigma_y & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{plat} \\ K(\varepsilon_{eq} + \varepsilon_0)^n & \text{if } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_{plat} \end{cases} \quad (4.3.4-89)$$

όπου σ_{eq} και ε_{eq} τα ισοδύναμα μεγέθη τάσης και παραμόρφωσης, σ_y δηλώνει την τάση διαρροής, ε_{plat} είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στο υπίπεδο των τάσεων (plateau) στο σημείο που το υλικό διαρρέει. Η ενδεικτική παραμόρφωση ε_0 δίνεται από την έκφραση:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y}{K} - \varepsilon_{plat} \quad (4.3.4-90)$$

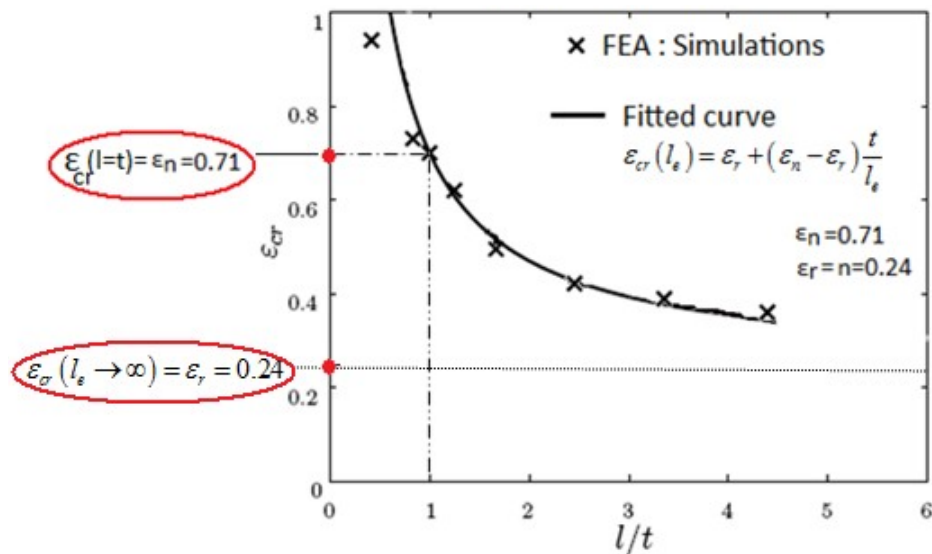
έτσι ώστε οι δύο εκφράσεις στην εξίσωση 4.3.4-1 να ταυτίζονται στο σημείο $(\varepsilon_{plat}, \sigma_y)$.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη που απαιτούνται για την ορθή μοντελοποίηση του υλικού στο έλασμα και στα ενισχυτικά. Σε όλες τις περιπτώσεις το υλικό ανήκει στην κατηγορία των μαλακών χαλύβων (mild steel), παρατηρούνται όμως διαφορές στην ποιότητά τους ανάλογα με την παρτίδα υλικού που επιλέχθηκε.

Κατασκευαστικό Στοιχείο	Κατηγορία Υλικού	σ_y [MPa]	K [MPa]	n	ε_{plat}
Έλασμα	S235JR EN10025	285	740	0.24	-
Ενισχυτικά	S235JR EN10025	340	760	0.22 5	0.01 5

Στην Ενότητα 4.3.3 περιγράψαμε την διαδικασία βαθμονόμησης του κριτηρίου RTCL και εξάγαμε για στοιχεία κελύφους, τον νόμο κλίμακας $\varepsilon_{cr}(l_e) = n + (\varepsilon_n - n) \frac{t}{l_e}$. Με την εκτέλεση μιας σειράς αριθμητικών προσομοιώσεων σε δοκίμια που υποβάλλονται σε μονοαξονικό εφελκυσμό, όπως είδαμε προηγουμένως στην Εικόνα 4.3.3-40 και χρησιμοποιώντας διαφορετικά μήκη στοιχείων l_e , καταγράφουμε τις τιμές της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στην θραύση. Οι τιμές αυτές σημειώνονται στην Εικόνα 4.3.4-42. Για $\varepsilon_n = 0.71$ και n όπως στον παραπάνω πίνακα, η αναλυτική

καμπύλη $\varepsilon_{cr}(l_e)$ προσεγγίζει αρκετά καλά τις αριθμητικές τιμές. Συνεπώς αυτές οι τιμές θα χρησιμοποιηθούν για τον μαλακό χάλυβα.



Εικόνα 4.3.4-42: Αριθμητικές τιμές ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στην θραυση για μονοαξονικό εφελκυσμό προσομοιωμένων δοκιμών με διαφορετικό μήκος στοιχείου l_e . Προσαρμογή της Αναλυτικής Καμπύλης $\varepsilon_{cr}(l_e) = n + (\varepsilon_n - n) t/l_e$. Νόμος κλίμακας για το κριτήριο RTCL για mild steel.

Όσο αναφορά στην βαθμονόμηση του κριτηρίου BWH θα πρέπει να θέσουμε κατάλληλη τιμή για την παράμετρο $\hat{\varepsilon}_1$ (τύπος 3.3.3-1 σελ.50). Από παρατηρήσεις προέκυψε ότι για $\hat{\varepsilon}_1$ ίσο με τον εκθέτη κράτυνσης του υλικού n τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις προσεγγίζουν αρκετά καλά τα πειραματικά.

4.3.5.Αριθμητικά Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την προσομοίωση του πειράματος διείδυσης κωνικού βολβού σε: α) έλασμα χωρίς ενισχυτικά «US», β) έλασμα με ένα διαμήκη ενισχυτικό στο μέσον του «FB-1» και γ) έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά «FB-2». Σε όλες τις περιπτώσεις των δοκιμών, το έλασμα και τα ενισχυτικά, όπου αυτά υπάρχουν, είναι πακτωμένα περιμετρικά προσομοιάζοντας έτσι την σύνδεσή τους με το άκαμπτο πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε κατά το πείραμα. Η δύναμη καταπόνησης προέρχεται από την επαφή του δοκιμίου με τον βολβό διείδυσης ο οποίος κινείται με ταχύτητα τέτοια ώστε να μην υπάρχει επίδραση των δυναμικών φαινομένων στα αριθμητικά αποτελέσματα. Στους παρακάτω πίνακες αναφέρονται όλες οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν ως προς τα κριτήρια αστοχίας και το μέγεθος των στοιχείων διακριτοποίησης:

Δοκίμιο	US			
	Πλήθος Στοιχείων	Πλήθος Κόμβων	BWH	RTCL
$l_e = 25mm$	1392	1471	✓	—

$l_e = 18mm$	2720	2730	✓	✓
$l_e = 10mm$	8640	8834	✓	✓
$l_e = 5mm$	34560	34946	—	✓

Δοκίμιο	FB-1			
Χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου	Πλήθος Στοιχείων	Πλήθος Κόμβων	BWH	RTCL
$l_e = 25mm$	1728	1814	✓	—
$l_e = 18mm$	3400	3520	✓	✓
$l_e = 10mm$	8670	8859	✓	✓
$l_e = 5mm$	40560	40971	—	✓

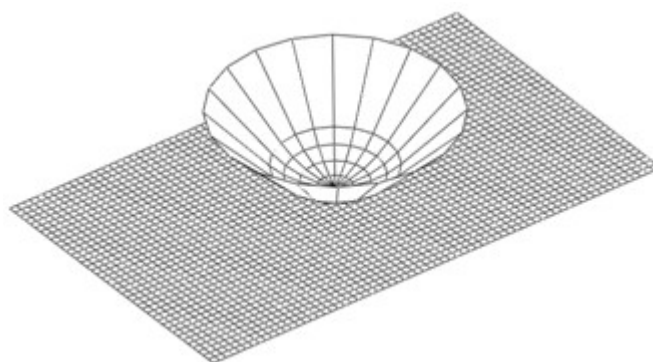
Δοκίμιο	FB-2			
Χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου	Πλήθος Στοιχείων	Πλήθος Κόμβων	BWH	RTCL
$l_e = 25mm$	2064	2157	✓	—
$l_e = 18mm$	3876	4003	✓	✓
$l_e = 10mm$	11640	11859	✓	✓
$l_e = 5mm$	46080	46514	—	✓

Το ενδιαφέρον των αποτελεσμάτων επικεντρώνεται κυρίως στην καμπύλη δύναμης-μετατόπισης (F-δ) ενώ παράλληλα τα κριτήρια αστοχίας BWH και RTCL συγκρίνονται ως προς την αξιοπιστία τους στην πρόβλεψη της αντίστοιχης καμπύλης που προκύπτει από το πείραμα. Μετά από κάθε διάγραμμα F-δ ακολουθεί η παρουσίαση εικόνων που απεικονίζουν την κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{eq}^{pl} , του μεγέθους της βλάβης D_{BWH} ή D_{RTCL} , των μετατοπίσεων και των τάσεων Von-mises στα δοκίμια. Οι κατανομές των μεγεθών αυτών αναφέρονται την στιγμή λίγο πριν την έναρξη της αστοχίας των δοκιμίων, όπως αυτή προβλέπεται από το χρησιμοποιούμενο κριτήριο αστοχίας με χρήση διαφορετικού μεγέθους πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος

απεικονίζεται η μορφή της αστοχίας που προβλέπουν τα κριτήρια σε συγκεκριμένο μήκος διείδυσης και η οποία προκύπτει από την αφαίρεση των στοιχείων, τεχνική που ακολουθεί το Abaqus για την προσομοίωση της διάδοσης των ρωγμών. Οι διαφορές μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων που προκύπτουν λόγω της εφαρμογής των κριτηρίων αστοχίας καθώς και από την χρήση διαφορετικής πυκνότητας πλέγματος γίνονται άμεσα αντιληπτές από την σύγκριση των εικόνων. Επίσης στο Παράρτημα Γ παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι καμπύλες F-δ που προκύπτουν από την εφαρμογή των κριτηρίων BWH και RTCL κατά την προσομοίωση κάθε δοκιμίου και για όλες τις περιπτώσεις πυκνότητας πλέγματος που εξετάστηκαν.

4.3.5.1. Δοκίμιο ελάσματος χωρίς ενισχυτικά (US)

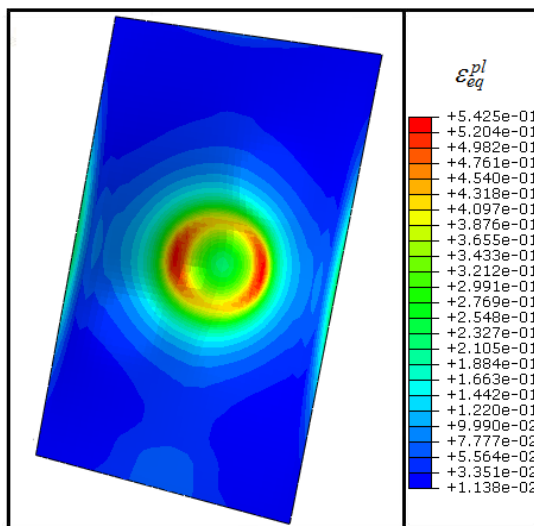
Στην Εικόνα 4.3.5.1-43 φαίνεται η διακριτοποίηση του δοκιμίου «US» που αποτελείται από έλασμα χωρίς ενισχυτικά (UnStiffened Plate).



Εικόνα 4.3.5.1-43: Διακριτοποίηση δοκιμίου «US» με στοιχεία κελύφους.

Το έλασμα έχει λόγο πλευρών 5/3, συνεπώς αντιδρά στο φορτίο που δέχεται από τον διείδυτή με ανάπτυξη μεμβρανικών τάσεων κυρίως κατά την εγκάρσια διεύθυνσή του. Η διαπίστωση αυτή επιβεβαιώνεται και από την κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης πάνω στο έλασμα όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.3.5.1-44 για μήκος διείδυσης 200 mm. Το μήκος αυτό αντιστοιχεί στο πειραματικό σημείο όπου

παρατηρείται αστοχία στο έλασμα. Όπως παρατηρούμε, οι μεγαλύτερες τιμές παραμόρφωσης αναπτύσσονται στην περιοχή όπου η πλευρική επιφάνεια του βολβού διείσδυσης έρχεται σε επαφή με το έλασμα, και μάλιστα είναι εντονότερες προς την εγκάρσια διεύθυνσή του. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στην περιοχή αυτή οφείλονται στην τριβή μεταξύ των επιφανειών επαφής. Αντίθετα η παραμόρφωση των στοιχείων εκείνων που έρχονται σε επαφή με το μέτωπο του διεισδυτή είναι μικρότερη, αφού λόγω της κάθετης διεύθυνσης επαφής μεταξύ ελάσματος και διεισδυτή, οι δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται στο σημείο αυτό είναι μικρές.

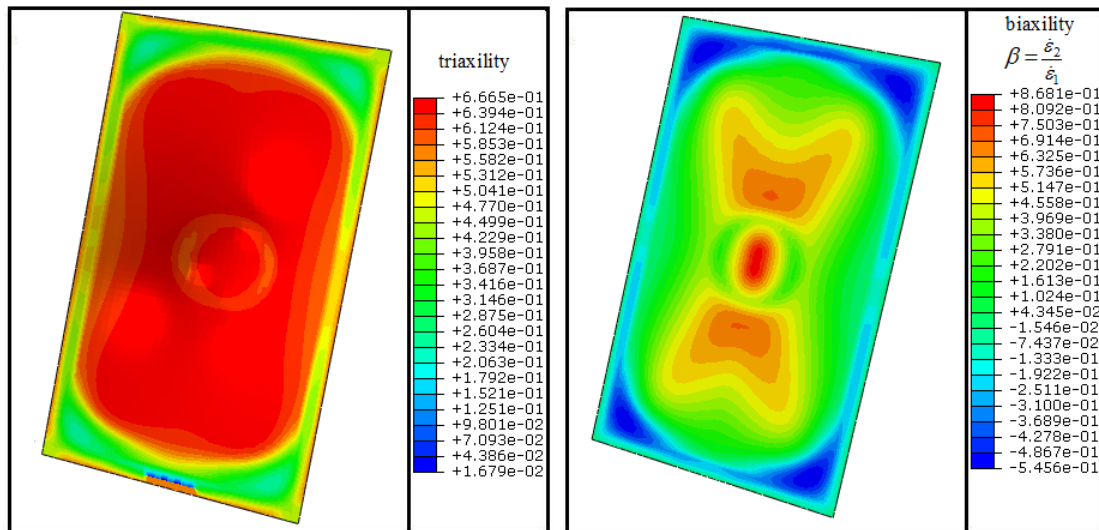


Εικόνα 4.3.5.1-44: Κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στο δοκίμιο US για μήκος διείσδυσης $U=200$ mm όπου σύμφωνα με το πείραμα το έλασμα αστοχεί.

Στην Εικόνα 4.3.5.1-45 παρουσιάζεται η κατανομή της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων καθώς και του λόγου των ρυθμών κύριας παραμόρφωσης $\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}$ για μήκος

διείσδυσης 200 mm. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα προήλθαν από προσομοίωση χωρίς την εφαρμογή κάποιου από τα κριτήρια αστοχίας. Η σχέση μεταξύ του λόγου β και της τριαξονικής κατάστασης των τάσεων παρουσιάστηκε προηγουμένως στην σελ. 45 όπου δίνονται οι τιμές τους για τέσσερις χαρακτηριστικές περιπτώσεις φόρτισης (Εικόνα 3.3.1-16). Όπως φαίνεται στη κεντρική ζώνη επαφής του ελάσματος

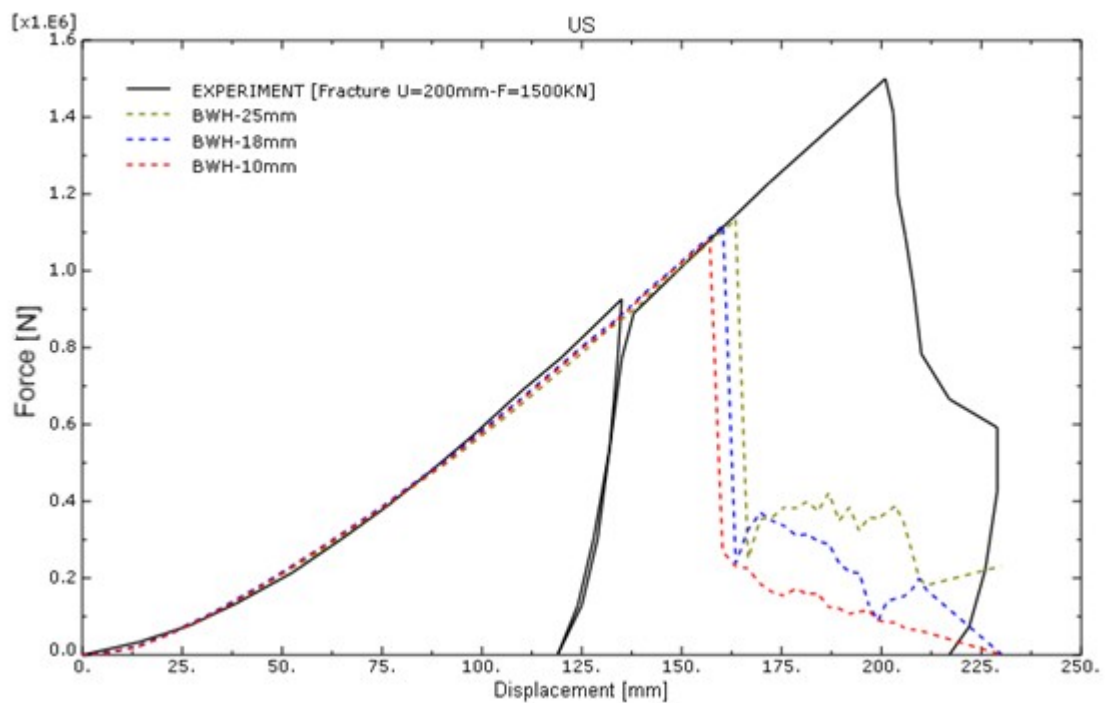
επικρατούν σχεδόν συνθήκες διαξονικού εφελκυσμού ($\beta \approx 1, T \approx \frac{2}{3}$), ενώ στην περιοχή με τις μεγαλύτερες παραμορφώσεις το β έχει τιμή κοντά στο 0.3. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε μια κατάσταση μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης ($\beta = 0$) και διαξονικής έντασης ($\beta = 1$).



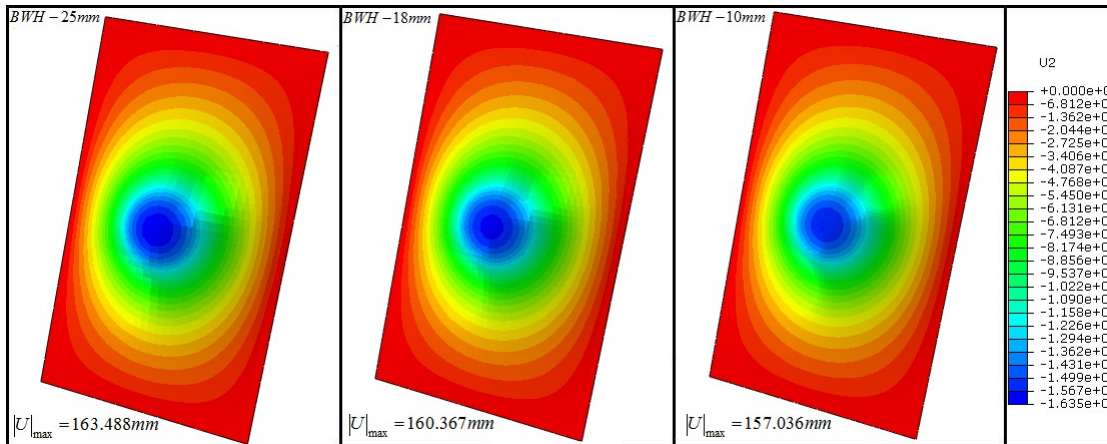
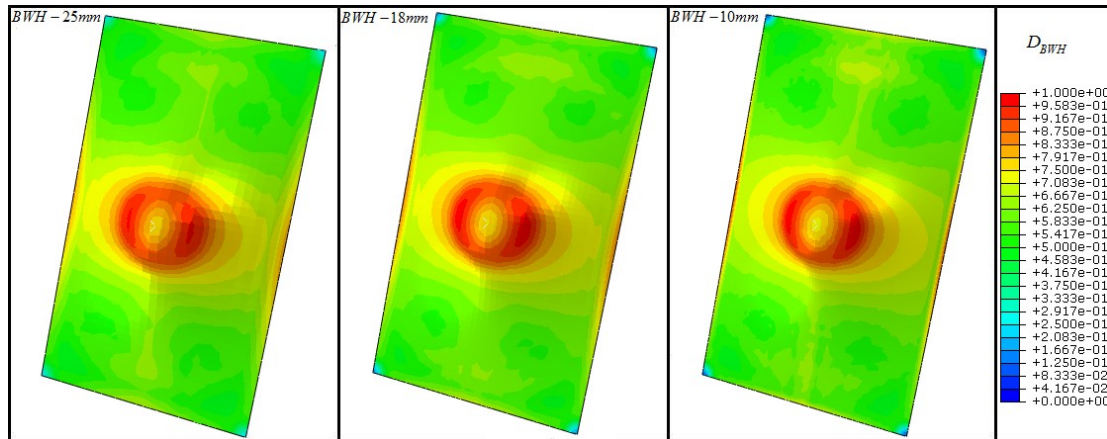
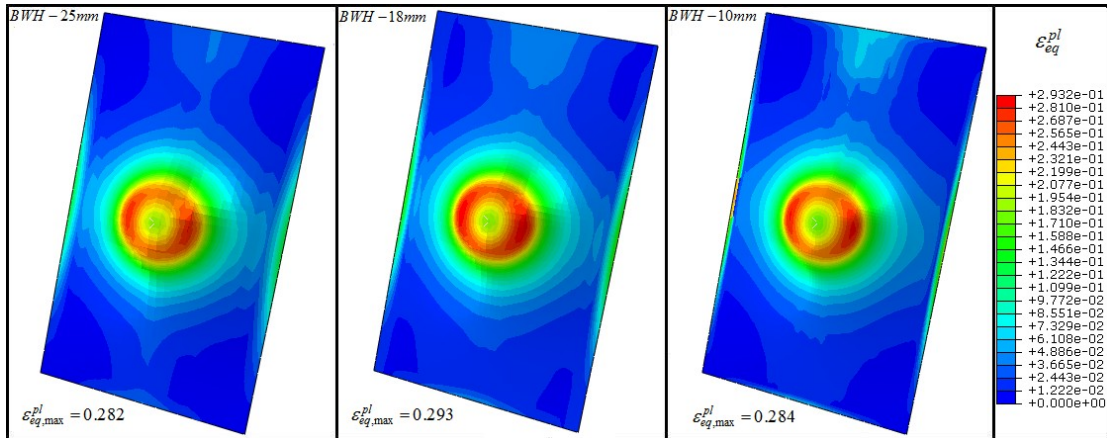
Εικόνα 4.3.5.1-45: (a) κατανομή τριαξονική εντατικής κατάστασης «triaxiality», (b) κατανομή λόγου κύριων παραμορφώσεων β «biaxiality» για μήκος διείδυσης $U=200$ mm όπου σύμφωνα με το πείραμα το έλασμα αστοχεί.

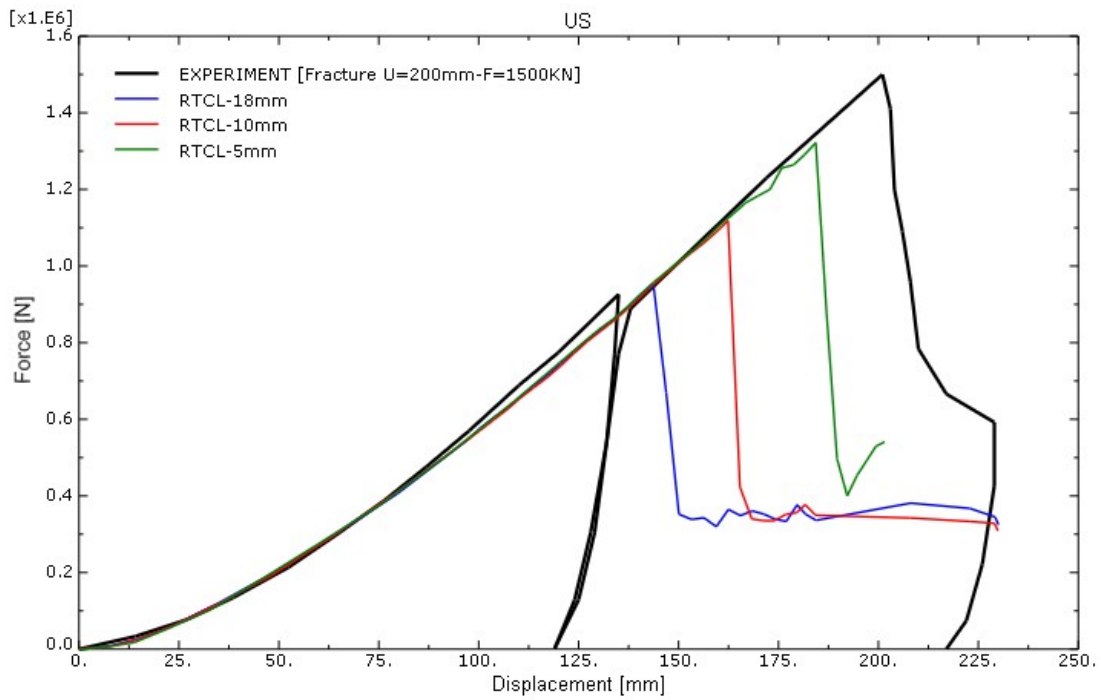
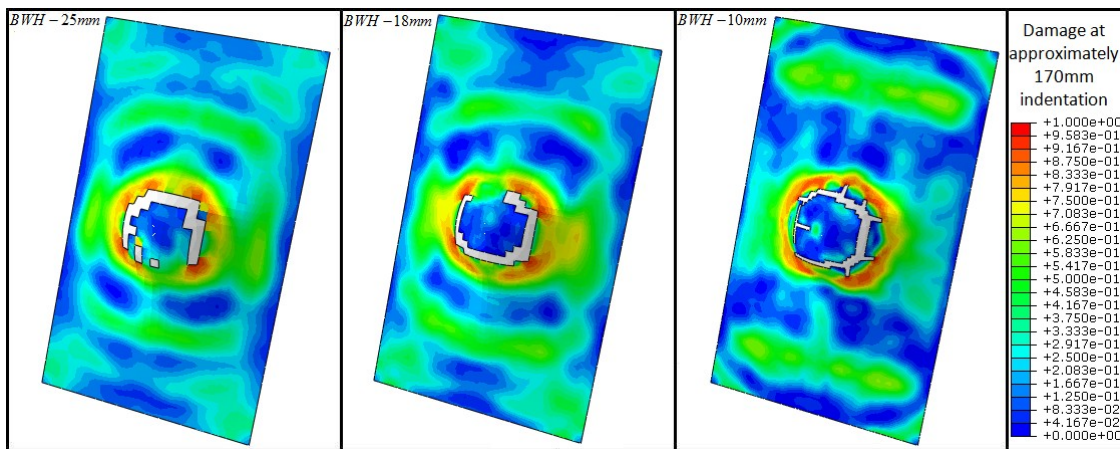
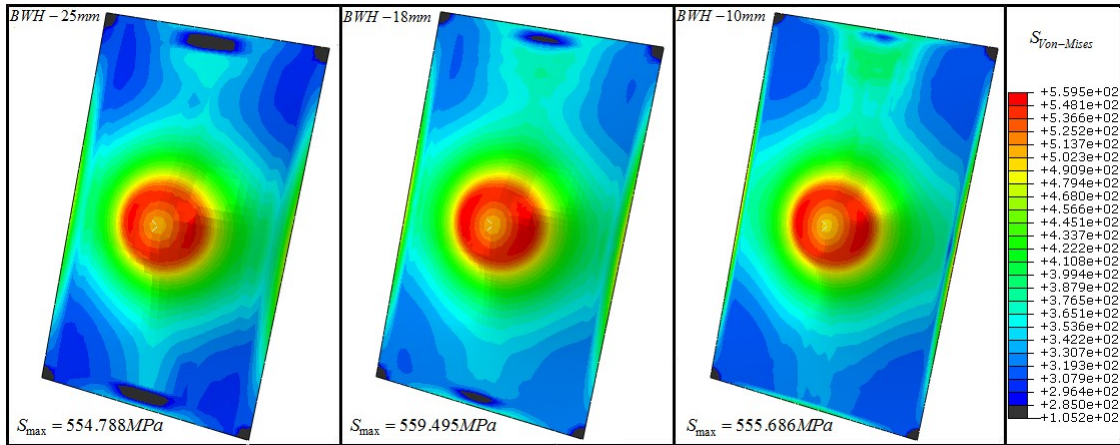
Η καμπύλη δύναμης-μετατόπισης που προέκυψε από την αριθμητική εφαρμογή των κριτηρίων αστοχίας BWH και RTCL, για κάθε μία από τις περιπτώσεις πλέγματος, παρουσιάζονται στις Εικόνες Εικόνα 4.3.5.1-46 και Εικόνα 4.3.5.1-47. Από τα διαγράμματα αυτά είναι εμφανής οι διαφορές των κριτηρίων όσο αναφορά την συμπεριφορά του δοκιμίου στην αστοχία. Έτσι λοιπόν το κριτήριο BWH προβλέπει έναρξη ρωγμών όταν η μετατόπιση του διείδυτή γίνει περίπου 157-164 mm ανάλογα με το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου που χρησιμοποιείται. Φαίνεται ότι στο κριτήριο BWH δεν επιδρά σημαντικά το μέγεθος των στοιχείων διακριτοποίησης αφού τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την χρήση στοιχείων με χαρακτηριστικό μήκος 25, 18 και 10 mm δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Αντίθετα στο κριτήριο RTCL παρά την χρήση νόμου κλίμακας για την εξάλειψη του «mesh size effect» οι διαφορές που παρατηρούνται είναι σημαντικές. Η μετατόπιση στην θραύση που προβλέπει το κριτήριο είναι από 144 έως 185 mm ανάλογα το μέγεθος του στοιχείου (18, 10 ή 5 mm). Σημειώνεται ότι η τιμή μετατόπισης που μετρήθηκε στο πείραμα την στιγμή έναρξης της θραύσης στο δοκίμιο είναι 200 mm. Η απόκλιση αυτή των αποτελεσμάτων οφείλεται σε αποτυχία του νόμου κλίμακας να προβλέψει ορθά το επίπεδο των παραμορφώσεων στα στοιχεία κελύφους την στιγμή της αστοχίας τους. Όπως φαίνεται από την κατανομή των ισοδύναμων πλαστικών παραμορφώσεων στο έλασμα, στην περιοχή όπου πειραματικά παρατηρείται ρωγή, (100 mm περίπου από το κέντρο του ελάσματος κατά την εγκάρσια διεύθυνση του), δεν αναπτύσσονται στενές ζώνες υλικού με υψηλή συγκέντρωση πλαστικών παραμορφώσεων. Αν και το μέγεθος της ισοδύναμης παραμόρφωσης φαίνεται να είναι σημαντικό η κατανομή της όμως διαχέεται σχεδόν ομοιόμορφα στο έλασμα. Οι διαπιστώσεις αυτές συμφωνούν με εκείνες που προήλθαν από την παρατήρηση των επιφανειών θραύσης στο πείραμα, δηλαδή δεν υπάρχουν περιοχές στο έλασμα που να παρουσιάζουν υψηλή κλίση παραμορφώσεων. Συνεπώς στην περίπτωση του δοκιμίου US η βασική υπόθεση του νόμου κλίμακας ότι πριν την αστοχία αναπτύσσονται τοπικά υψηλές συγκεντρώσεις πλαστικής παραμόρφωσης δεν ισχύει. Έτσι εάν στο κριτήριο αστοχίας RTCL δεν χρησιμοποιήσουμε νόμο κλίμακας και θέσουμε απλώς στον τύπο του, την παράμετρο βαθμονόμησης του $\varepsilon_{cr} \bar{\varepsilon}_n = 0.71$, τότε τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα

προκύψουν, προσεγγίζουν πολύ καλύτερα τα πειραματικά όπως φαίνεται και από την Εικόνα 4.3.5.1-48.

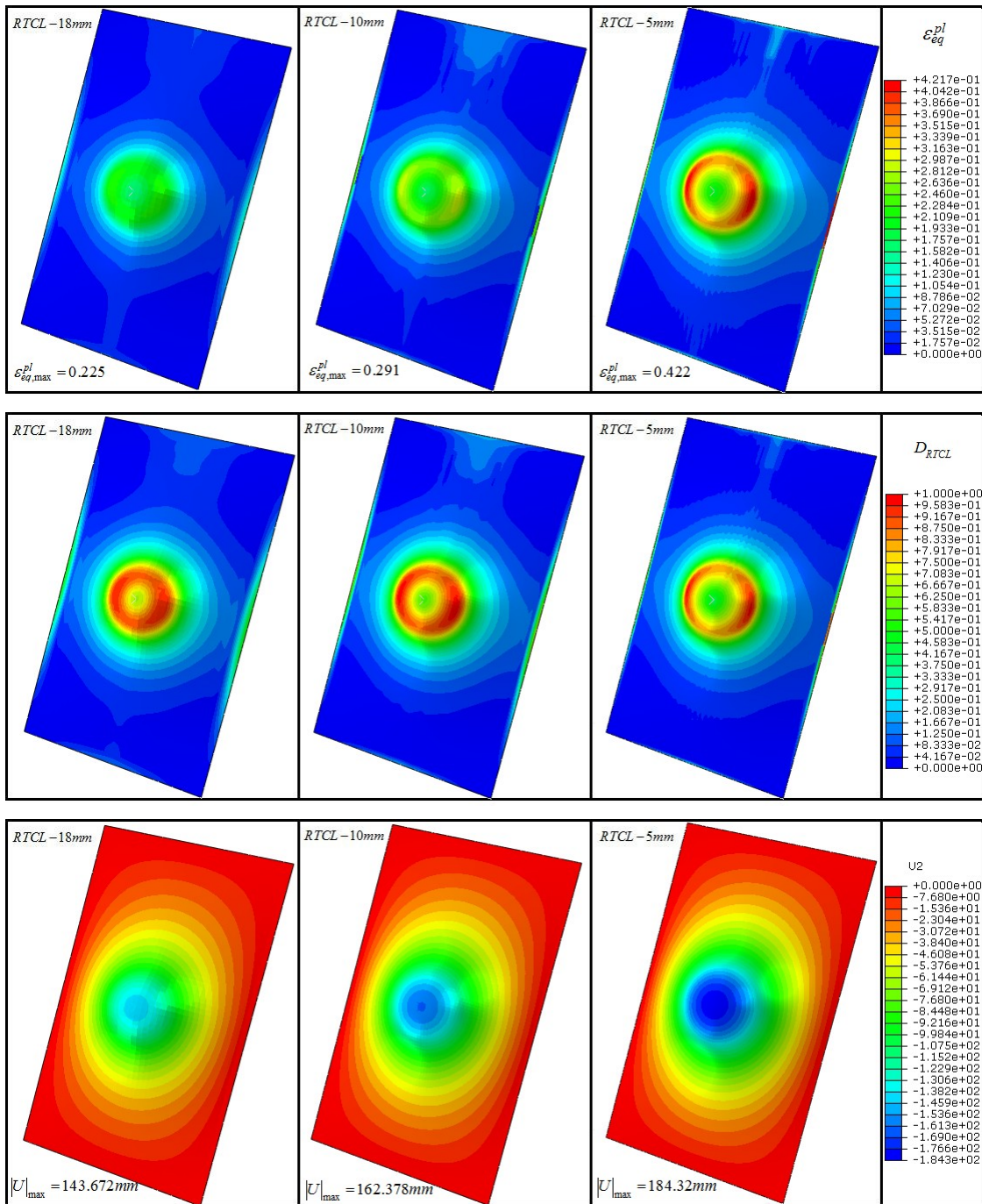


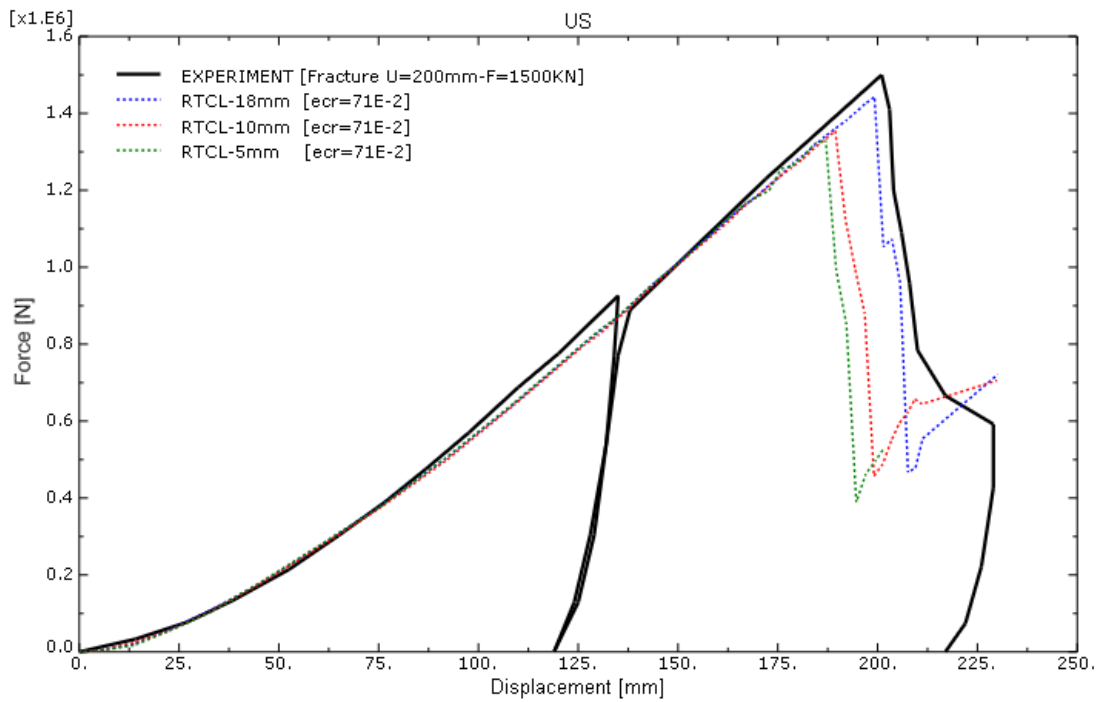
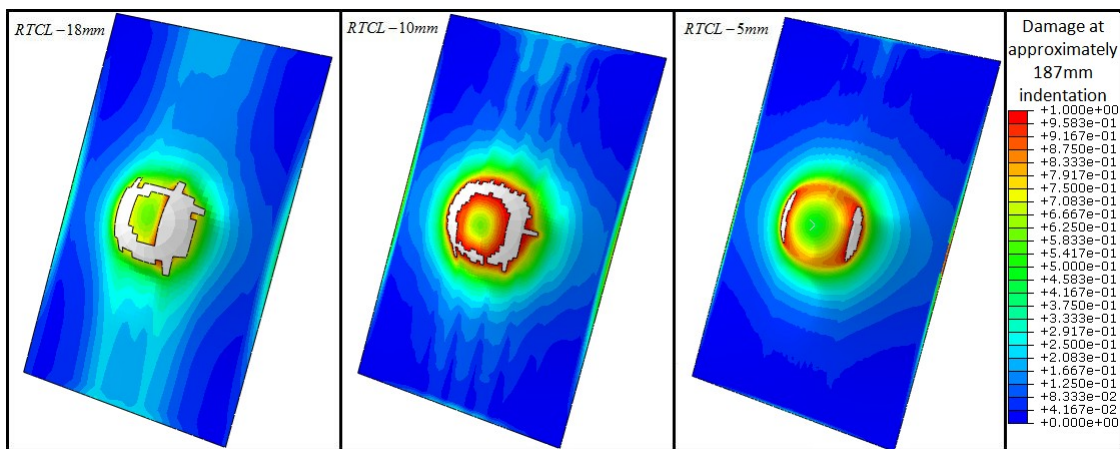
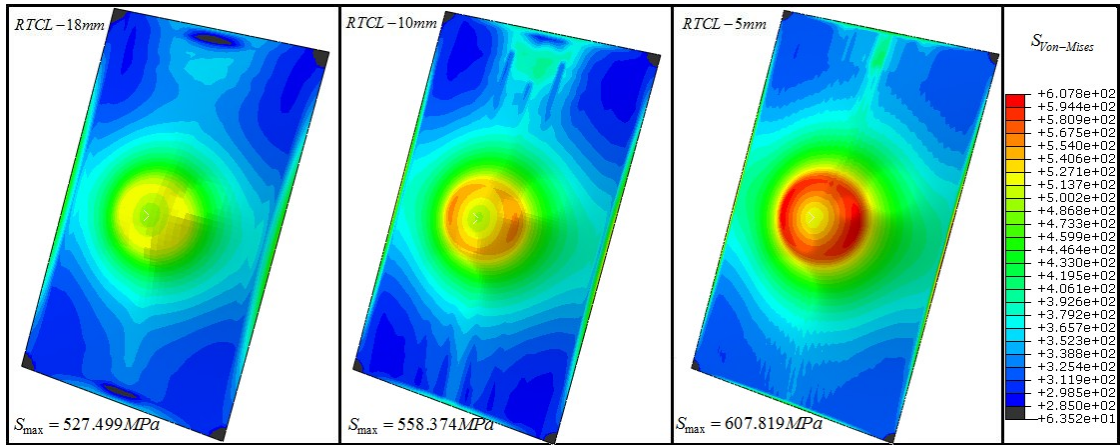
Εικόνα 4.3.5.1-46: Καμπύλη F-δ δοκιμίου US που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας BWH για 25, 18 και 10 mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.



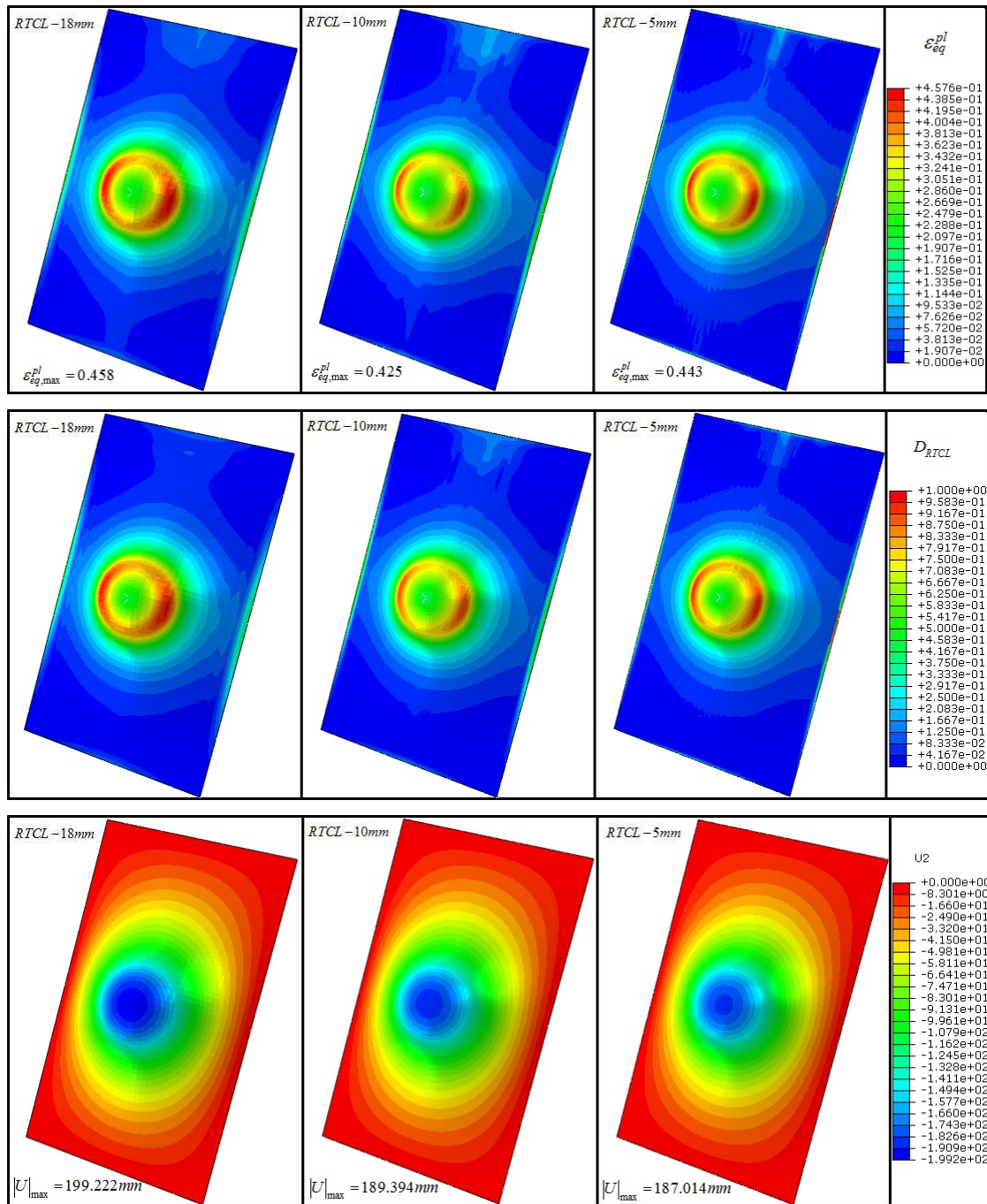


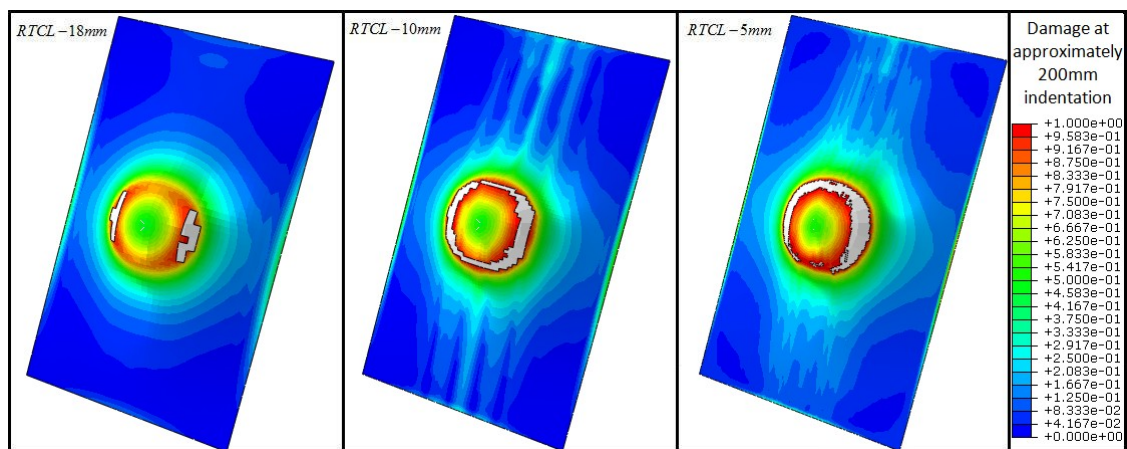
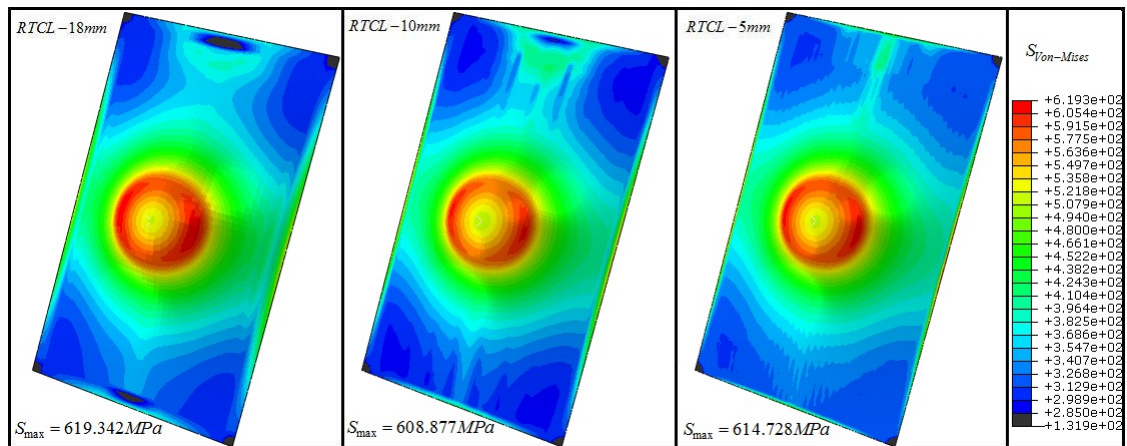
Εικόνα 4.3.5.1-47: Καμπύλη F-δ δοκιμίου US που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας RTCL και νόμο κλίμακας για 18, 10 και 5 mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.





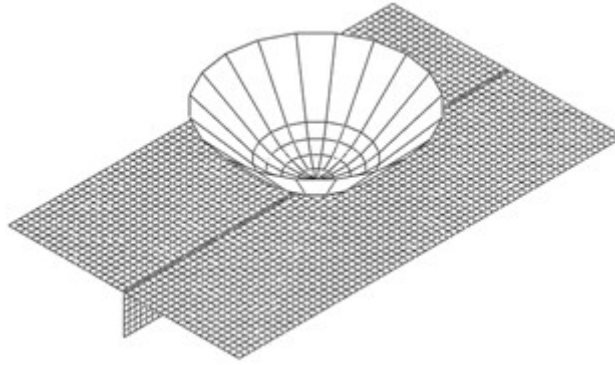
Εικόνα 4.3.5.1-48: Καμπύλη F-δ δοκιμίου US που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας RTCL χωρίς νόμο κλίμακας ($\epsilon_{cr}=0.71$) για 18, 10 και 5 mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.





4.3.5.2. Δοκίμιο ελάσματος με ένα διαμήκης ενισχυτικό (FB-1)

Στην Εικόνα 4.3.5.2-49 φαίνεται το διακριτοποιημένο δοκίμιο «FB-1» που αποτελείται από έλασμα με ένα διαμήκης ενισχυτικό στο μέσον του (Plate with 1-Flat Bar stiffener). Η σύγκριση των διαγραμμάτων F- δ που προκύπτουν από τα κριτήρια αστοχίας BWH και RTCL γίνεται μέσω των Εικόνων Εικόνα 4.3.5.2-51 και Εικόνα 4.3.5.2-52 αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι η τιμή της μετατόπισης διεισδυτή κατά την πειραματική αστοχία του δοκιμίου μετρήθηκε ίση με 175 mm.

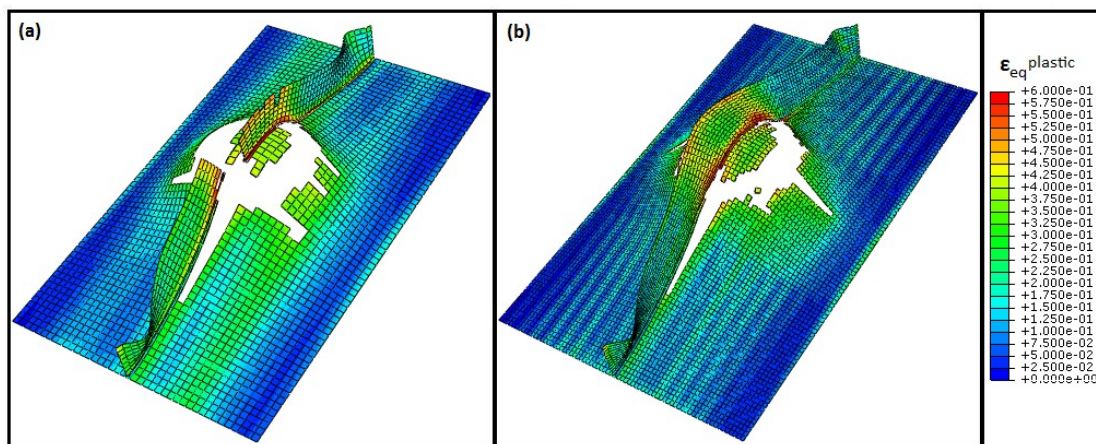


Εικόνα 4.3.5.2-49: Διακριτοποίηση δοκιμίου FB-1 με στοιχεία κελύφους.

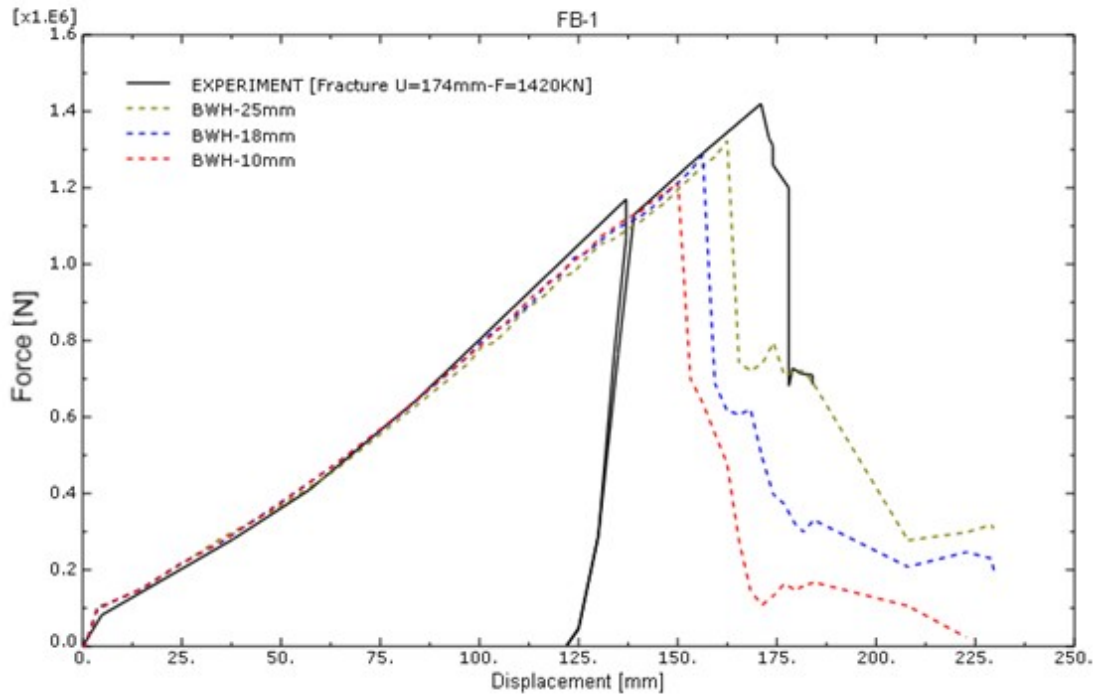
Το κριτήριο BWH προβλέπει έναρξη της αστοχίας για μετατόπιση διεισδυτή από 150 έως 163 mm ανάλογα το μέγεθος του στοιχείου διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται (25, 18 ή 10 mm). Όπως και στην περίπτωση του ελάσματος χωρίς ενισχυτικά, το κριτήριο BWH φαίνεται να επηρεάζεται ελάχιστα από το μέγεθος των στοιχείων, ενώ αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η προσομοίωση με το αραιότερο πλέγμα ($l_e = 25mm$) δίνει αποτελέσματα πιο κοντά στα πειραματικά. Από την άλλη η εφαρμογή του κριτηρίου BWH με στοιχεία χαρακτηριστικού μήκους $l_e < 10mm$ οδηγεί σε αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυση. Τα μικρά στοιχεία του ελάσματος κατά την διαξονική κατάσταση φόρτισης που επιβάλλει ο διεισδυτής σε αυτό, αναπτύσσουν υψηλές μεμβρανικές τάσεις, με αποτέλεσμα να ικανοποιούν το κριτήριο αστοχίας πρόωρα και να αφαιρούνται από το πλέγμα, σύμφωνα με την τεχνική που ακολουθεί το Abaqus κατά την προσομοίωση της διάδοσης των ρωγμών. Αντίθετα τα μεγάλα στοιχεία δεν αισθάνονται έντονα τις μεμβρανικές τάσεις που αναπτύσσονται τοπικά σε αυτά, με αποτέλεσμα να αντέχουν σε μεγαλύτερα μήκη διείσδυσης. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι με την αφαίρεσή των μεγάλων στοιχείων ένα σημαντικό κομμάτι υλικού θεωρείται ότι έχει αστοχήσει εξολοκλήρου, γεγονός που οδηγεί σε μια μη πραγματική απεικόνιση της μορφής της αστοχίας στο δοκίμιο.

Το κριτήριο RTCL προβλέπει έναρξη της αστοχίας στο δοκίμιο για μήκος διείσδυσης από 147 έως 174 mm ανάλογα το μέγεθος του στοιχείου (18, 10 ή 5 mm). Η διακριτοποίηση με στοιχεία χαρακτηριστικού μήκους όσο το πάχος του ελάσματος ($l_e = 5mm$) δίνει αποτελέσματα πολύ κοντά στα πειραματικά. Ωστόσο οι διαφορές στα αριθμητικά αποτελέσματα από την χρήση διαφορετικής πυκνότητας πλέγματος είναι εμφανής. Συνεπώς ο νόμος κλίμακας που χρησιμοποιήθηκε για την εξάλειψη του «mesh size effect» φαίνεται να μην λειτουργεί ορθά. Η βασική υπόθεση πάνω στην οποία στηρίχτηκε η ανάπτυξη του νόμου κλίμακας (δες σελ.77) ήταν η ύπαρξη εντός των στοιχείων μιας περιοχής όπου οι παραμορφώσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες (diffuse neck region) και μιας πολύ μικρότερης περιοχής σε μορφή στενής λωρίδας υλικού όπου η συγκέντρωση της πλαστικής παραμόρφωσης είναι έντονη (local neck region). Όπως φάνηκε στο πείραμα από την παρατήρηση των επιφανειών θραύσης και επιβεβαιώνεται από τα αριθμητικά αποτελέσματα μέσω της κατανομής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στο δοκίμιο, δεν υπάρχει περιοχή με έντονη συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης. Φαίνεται δηλαδή ότι η αιτία της αστοχίας είναι περισσότερο το «diffuse necking-διαχεόμενος λαιμός» παρά ο σχηματισμός «local necking-τοπικός λαιμός» στο έλασμα. Επίσης λόγω της ύπαρξης του ενισχυτικού στο μέσο του ελάσματος και λόγω της διεύθυνσης επαφής μεταξύ διεισδυτή και δοκιμίου

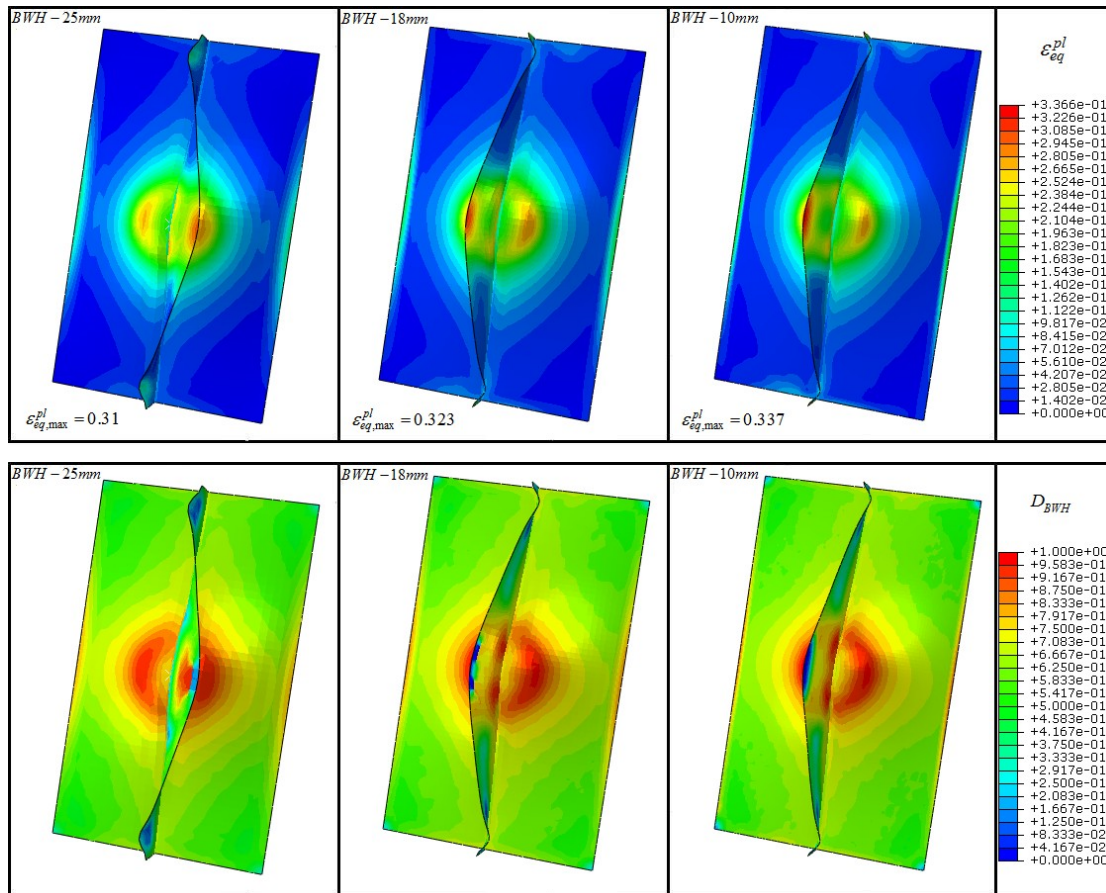
το ενισχυτικό δέχεται έντονη κάμψη με συνέπεια να αναπτύσσονται οι μεγαλύτερες πλαστικές παραμορφώσεις στην εξωτερική διαμήκη ακμή του. Ωστόσο το πείραμα έδειξε ότι η θραύση συμβαίνει στο έλασμα και όχι στο ενισχυτικό. Η εφαρμογή του κριτηρίου RTCL με μεγάλα στοιχεία ($l_e \approx 18mm$) προβλέπει εσφαλμένα θραύση και του ενισχυτικού γεγονός που δεν συμβαίνει όταν χρησιμοποιούνται μικρότερα στοιχεία όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην Εικόνα 4.3.5.2-50.

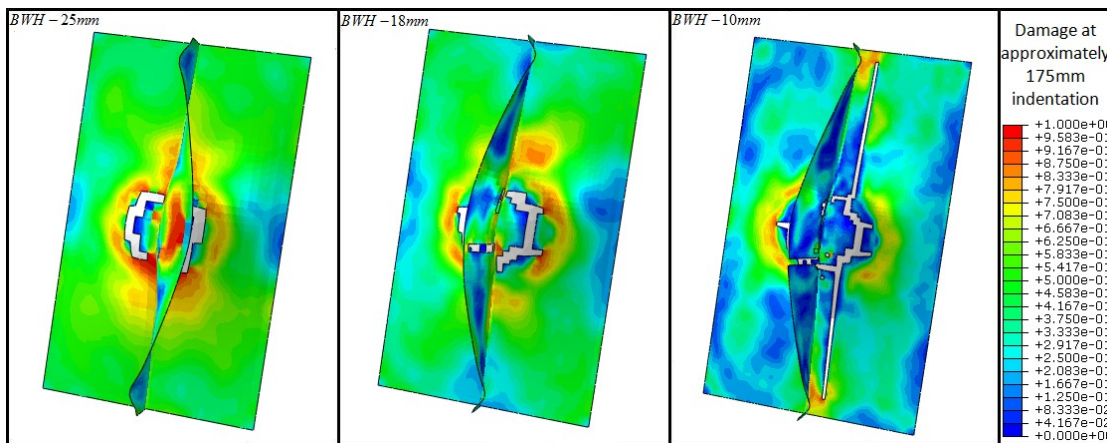
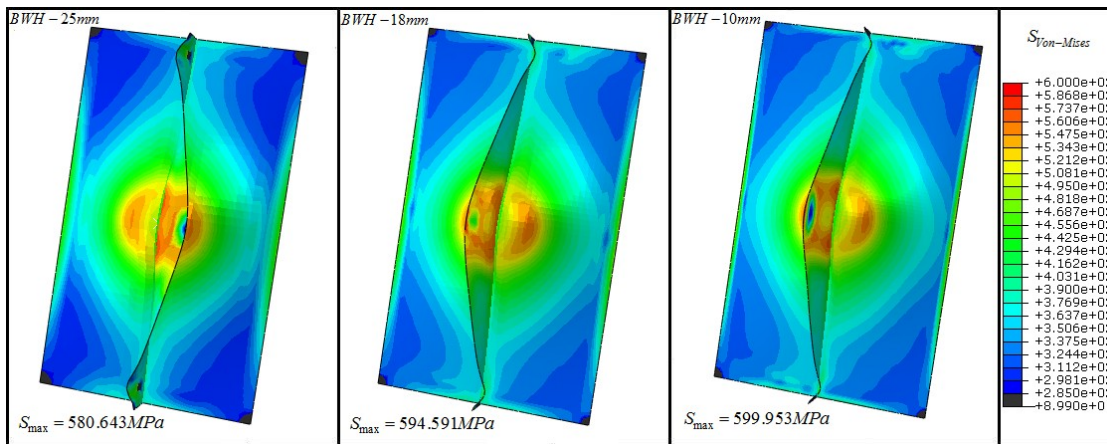
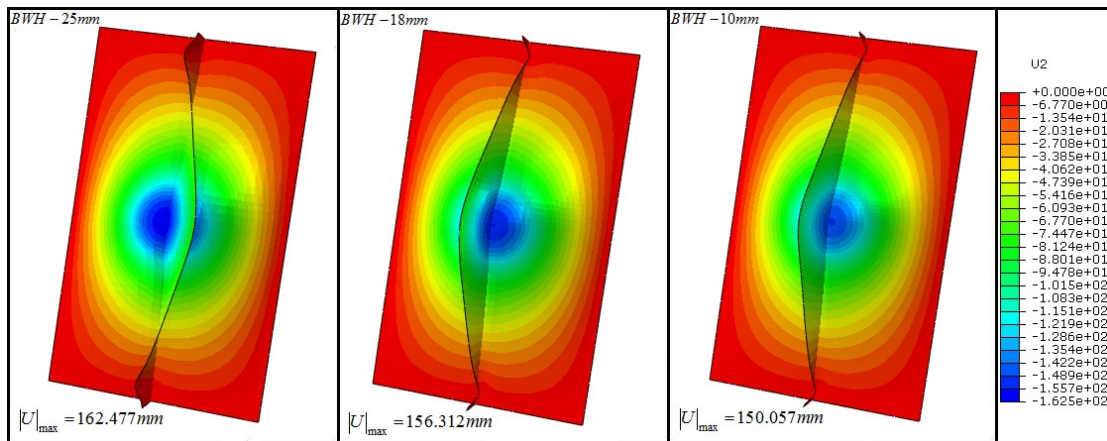


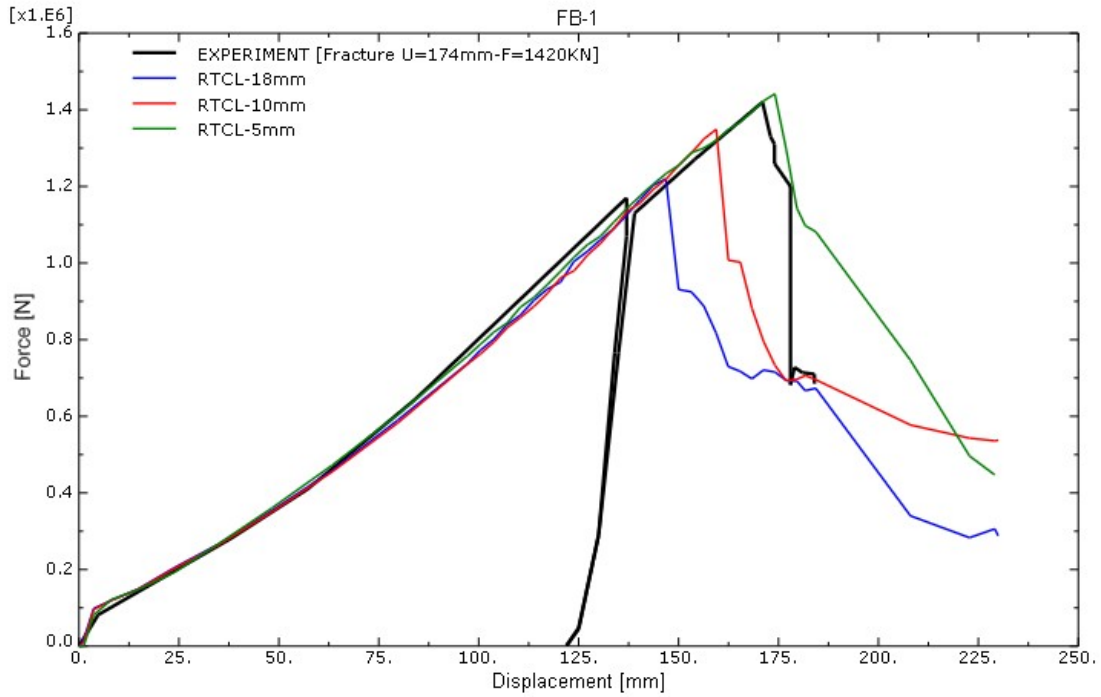
Εικόνα 4.3.5.2-50: Προσομοίωση θραύσης δοκιμίου για μέγεθος στοιχείου (a) 18mm-Επέκταση της θραύσης και στο ενισχυτικό, (b) 10mm-Θραύση μόνο του ελάσματος. Και οι δύο εικόνες αναφέρονται σε μήκος διεύθυνσης 175 mm.



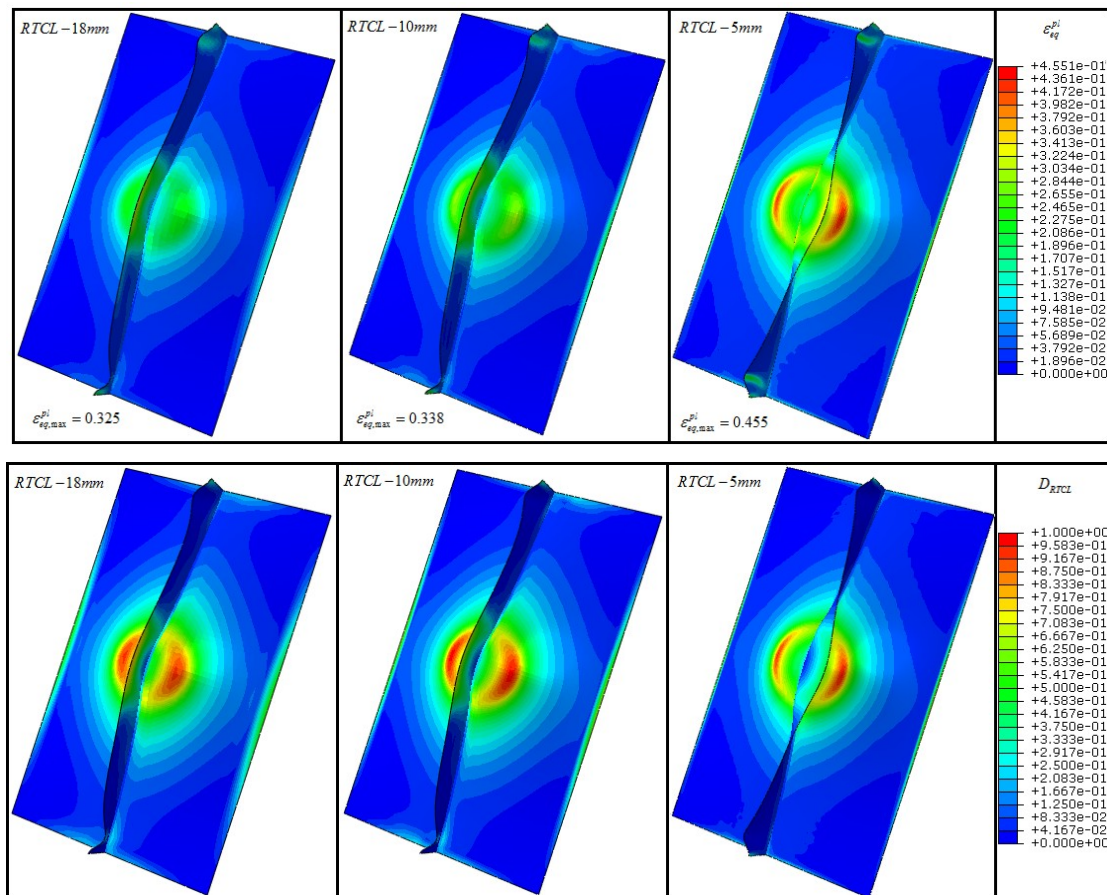
Εικόνα 4.3.5.2-51: Καμπύλη F-δ δοκιμίου FB-1 που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας BWH για 25, 18 και 10 mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.

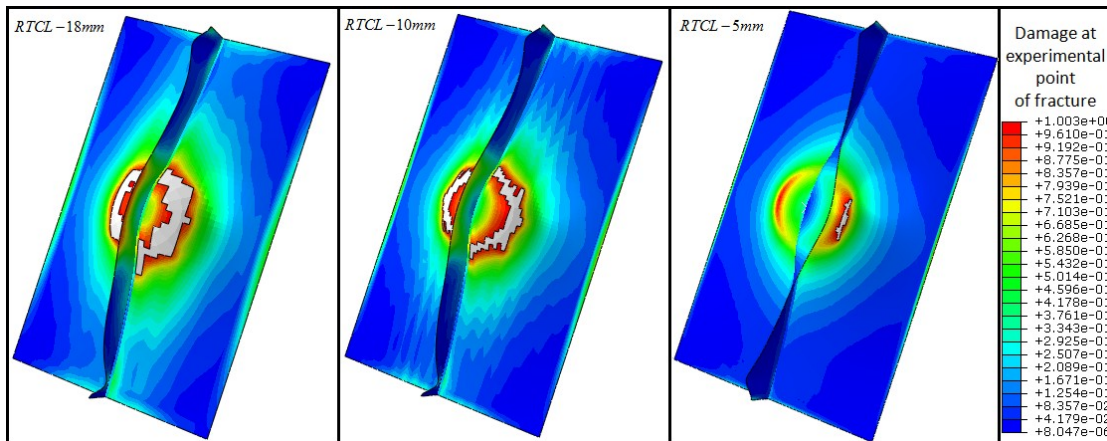
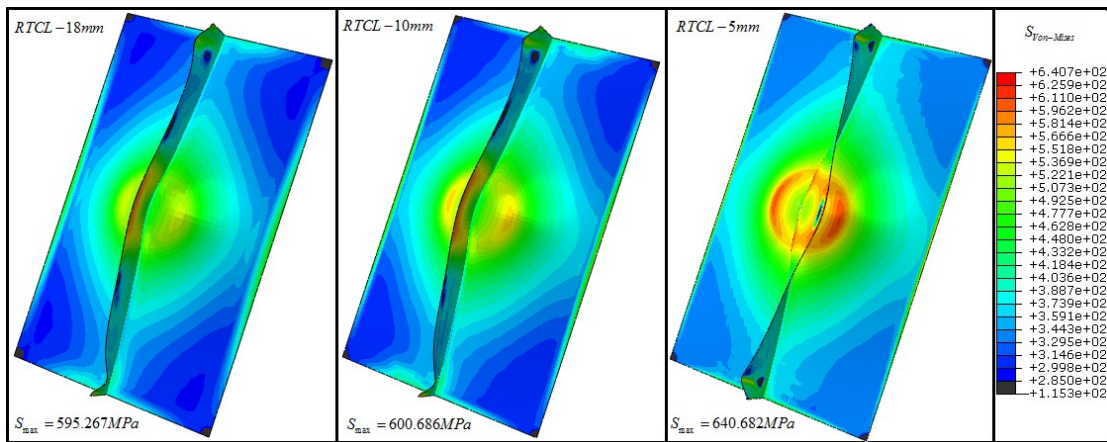
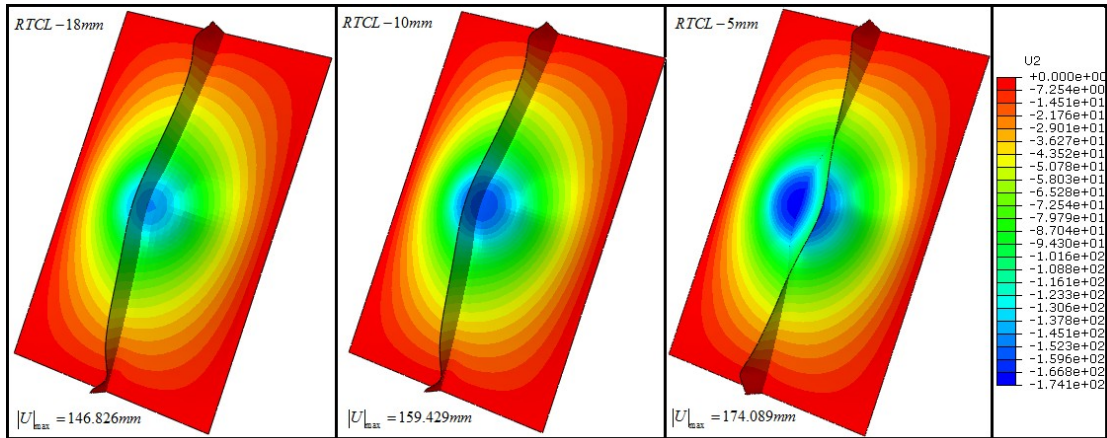






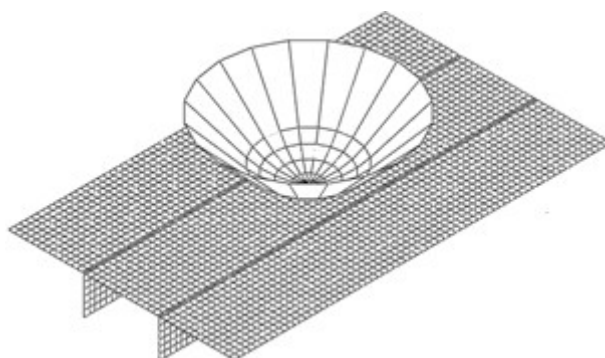
Εικόνα 4.3.5.2-52: Καμπύλη F-δ δοκιμίου FB-1 που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας RTCL και νόμο κλίμακας για 18, 10 και 5 mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.





4.3.5.3. Δοκίμιο ελάσματος με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά (FB-2)

Στην Εικόνα 4.3.5.3-53 φαίνεται το διακριτοποιημένο δοκίμιο FB-2 που αποτελείται από έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά. (Plate with 2-Flat Bar stiffeners). Οι καμπύλες F-δ που προκύπτουν από τα κριτήρια αστοχίας BWH και RTCL παρουσιάζονται στις Εικόνες 4.3.5.3-4 και 4.3.5.3-5 αντίστοιχα. Η τιμή της μετατόπισης διεισδυτή κατά την πειραματική αστοχία του δοκιμίου μετρήθηκε περίπου ίση με 133 mm. Όπως διαπιστώνουμε η σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα πειραματικά είναι πολύ καλή.

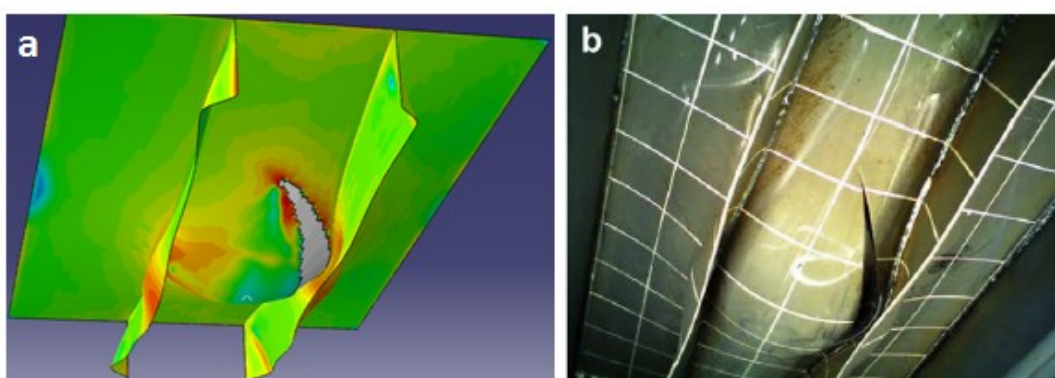


Εικόνα 4.3.5.3-53: Διακριτοποίηση δοκιμίου FB-2 με στοιχεία κελύφους.

Το κριτήριο BWH προβλέπει μήκος διείσδυσης για την αστοχία του δοκιμίου, από 114 έως 134 mm, ανάλογα το μέγεθος του στοιχείου που χρησιμοποιείται (25, 18 ή 10 mm). Στην Εικόνα 4.3.5.3-55 φαίνεται πως το κριτήριο BWH υποεκτιμά την κρίσιμη μετατόπιση αστοχίας για διακριτοποίηση του δοκιμίου με στοιχεία μήκους $l_e = 10\text{mm}$ δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση το κριτήριο επηρεάζεται σε ένα μικρό βαθμό από το μέγεθος των στοιχείων διακριτοποίησης. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το κριτήριο BWH ανήκει στην κατηγορία των κριτηρίων πλαστικής αστάθειας. Δηλαδή θεωρεί ως αστοχία την έναρξη λαιμού στο υλικό και όχι την θραύση. Συνεπώς κατά την χρήση του με τα πεπερασμένα στοιχεία δεν επιτρέπει την υπερβολική παραμόρφωση του πλέγματος. Το γεγονός αυτό αν και το καθιστά λιγότερο ευαίσθητο στην επίδραση του μεγέθους του πλέγματος, ωστόσο μπορεί να προκαλέσει την εσφαλμένη πρόβλεψη της έναρξης των ρωγμών. Για παράδειγμα το μέγεθος της παραμόρφωσης που αισθάνεται τοπικά ένα μικρό στοιχείο του πλέγματος λόγω γεωμετρικής ασυνέχειας στο σημείο αυτό, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ψευδώς, ικανό για τον σχηματισμό λαιμού, με συνέπεια την εσφαλμένη πρόωμη αφαίρεσή του στοιχείου από το πλέγμα.

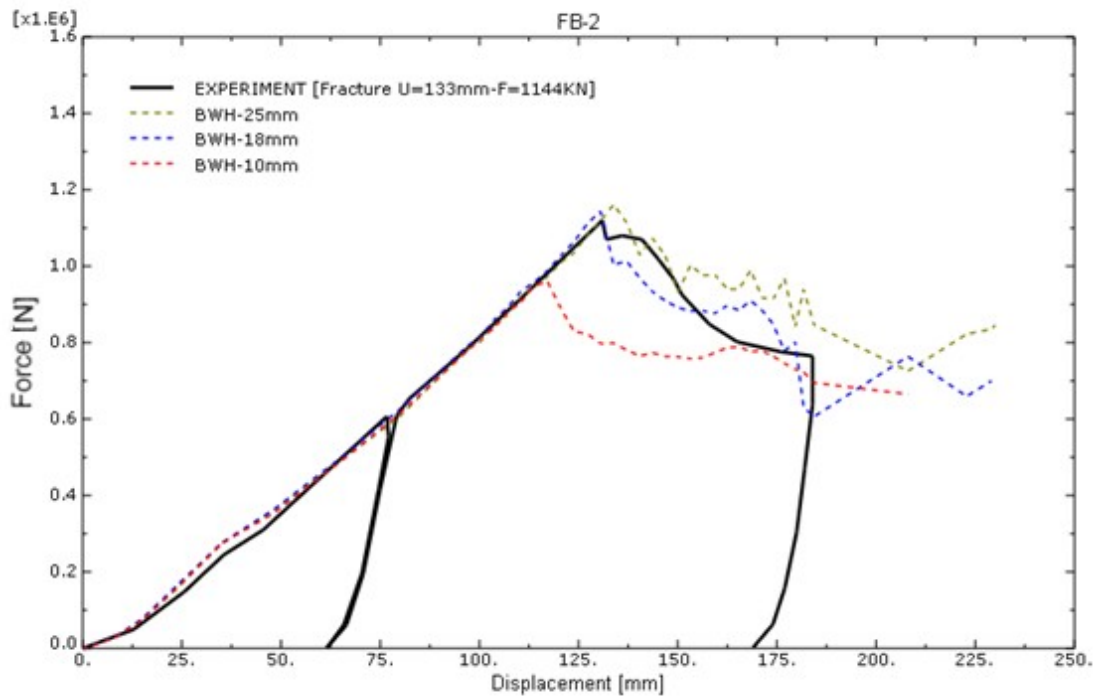
Το κριτήριο RTCL προβλέπει μετατόπιση περίπου 133.8 mm για όλες τις περιπτώσεις πυκνότητας πλέγματος ($l_e = 18, 10$ ή 5mm). Συνεπώς ο νόμος κλίμακας που εφαρμόζεται στο κριτήριο RTCL για την περίπτωση του δοκιμίου FB-2, φαίνεται να δίνει αριθμητικά αποτελέσματα ανεξάρτητα του μήκους των στοιχείων διακριτοποίησης. Η επιτυχής λειτουργία του νόμου κλίμακας στο συγκεκριμένο δοκίμιο οφείλεται στην ικανοποίηση της βασικής υπόθεσης στην οποία στηρίχτηκε η θεωρητική διατύπωση του νόμου. Σύμφωνα με αυτήν η αστοχία στα στοιχεία

προκαλείται εξαιτίας της ανάπτυξης τοπικού λαιμού σε αυτά. Συγκεκριμένα η περιοχή του ελάσματος ανάμεσα στα ενισχυτικά είναι και η περιοχή που υφίσταται τις μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Το έλασμα αντιστέκεται στην διείσδυση του βολβού με την ανάπτυξη μεμβρανικών τάσεων κατά την εγκάρσια διεύθυνσή του. Οι τάσεις αυτές περιορίζονται από τα ενισχυτικά, ενώ συγχρόνως υψηλή πλαστική παραμόρφωση συγκεντρώνεται στην ραφή συγκόλλησης μεταξύ ελάσματος και ενισχυτικών, στην περιοχή της επαφής με τον διεισδυτή. Μέσω παρατήρησης των επιφανειών θραύσης στο δοκίμιο του πειράματος, είναι εμφανής ο σχηματισμός ζωνών τοπικού λαιμού στο έλασμα στα σημεία όπου ξεκίνησαν οι ρωγμές, δηλαδή δίπλα από το πέλμα της συγκόλλησης. Από την Εικόνα 4.3.5.3-54 αποδεικνύεται ότι η προσομοίωση του δοκιμίου στο Abaqus με την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας RTCL είναι ικανή να προβλέψει ορθά την θέση και διάδοση των ρωγμών, αφού η ομοιότητα μεταξύ της μορφής της αστοχίας στο δοκίμιο του πειράματος και στο δοκίμιο της προσομοίωσης είναι αρκετά καλή.

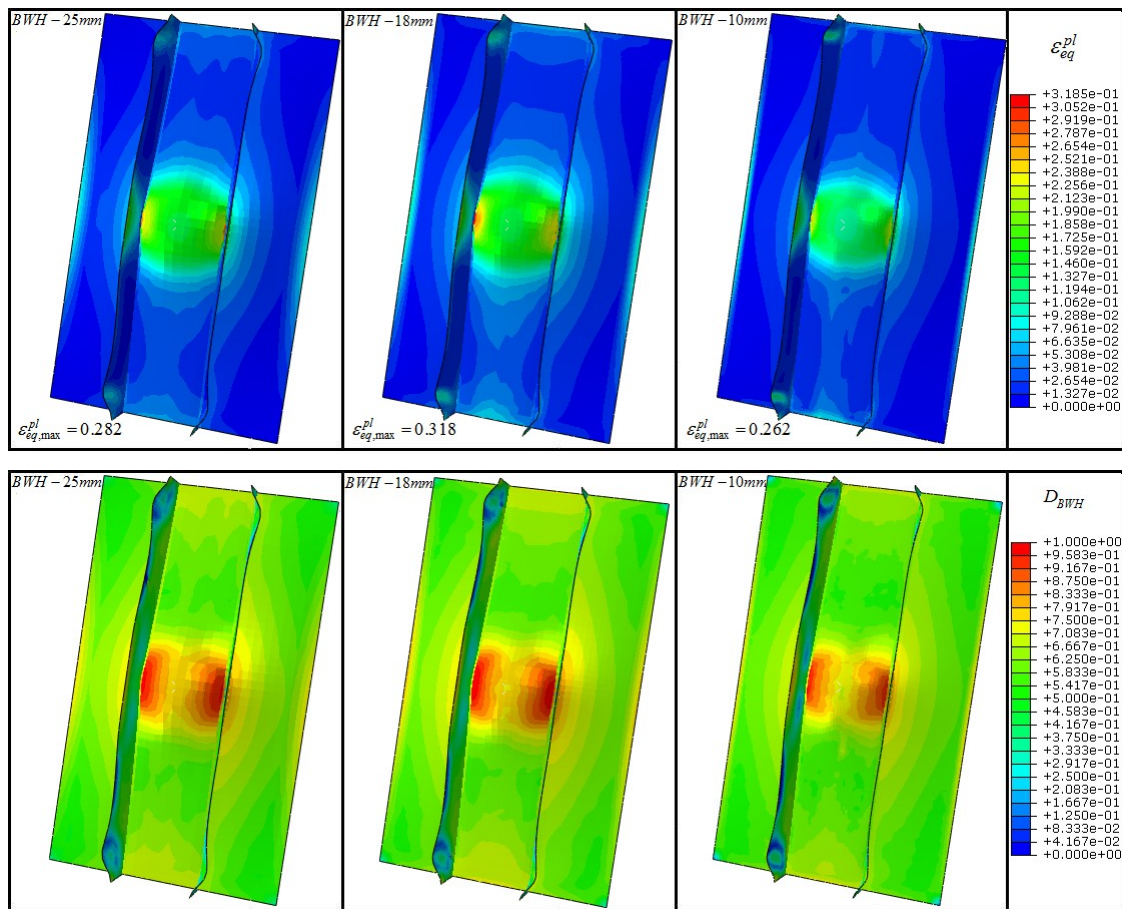


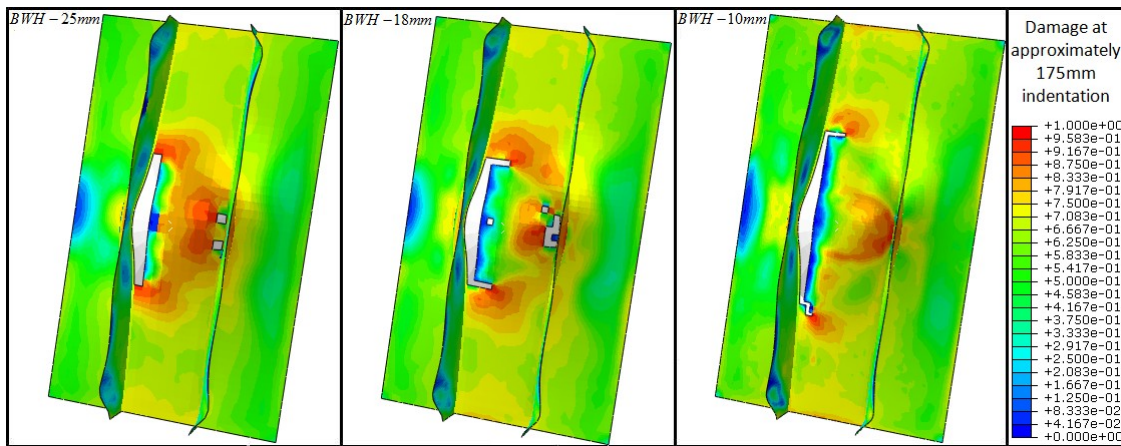
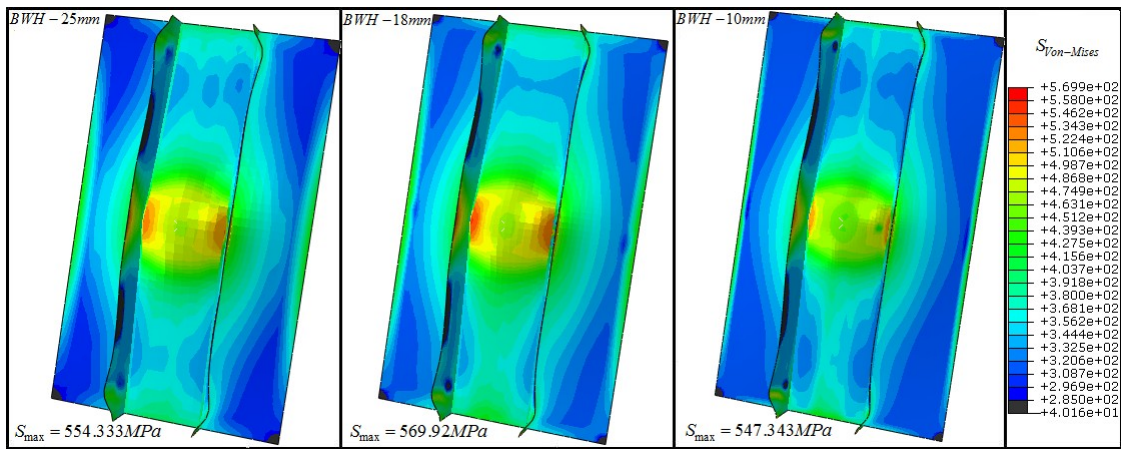
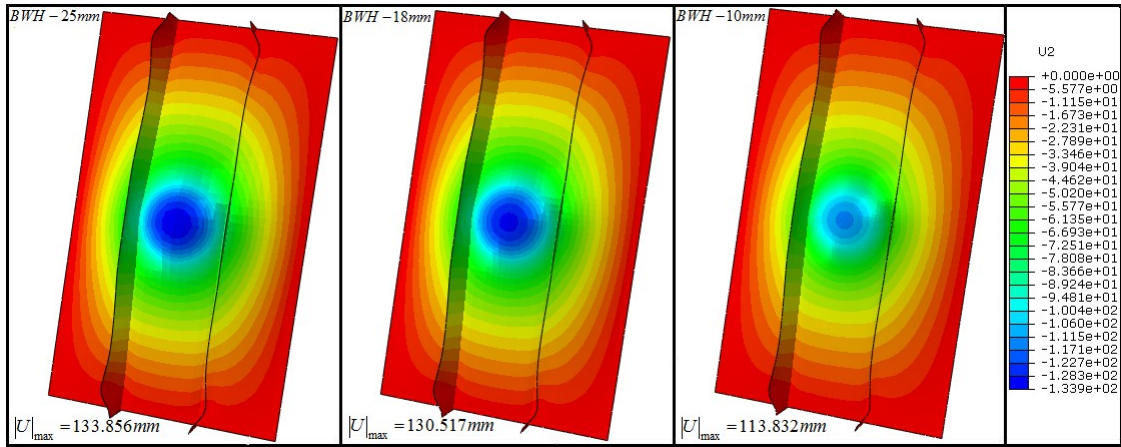
4.3.5.3-54: Σύγκριση μορφής θραύσης μεταξύ a) προσομοίωσης και b) πειράματος

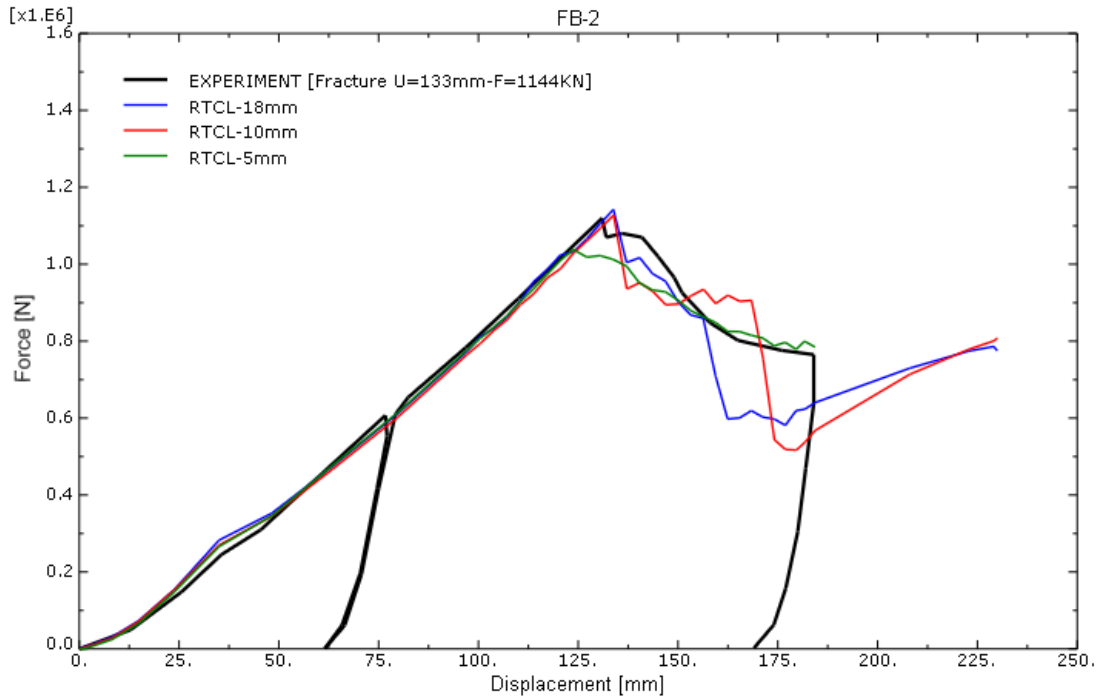
Τέλος η προσομοίωση του δοκιμίου με εφαρμογή τόσο του κριτηρίου αστοχίας BWH όσο και του RTCL είναι ικανή να προβλέψει ικανοποιητικά την εναπομείνουσα αντοχή του δοκιμίου μετά την έναρξη της θραύσης. Σημειώνουμε ότι όπως παρατηρήθηκε στο πείραμα έτσι και κατά την προσομοίωση, τα ενισχυτικά εμφανίζουν το φαινόμενο του «stripping» καταλήγοντας στην δίπλωσή τους προς την μία πλευρά του ελάσματος, από ένα μέγεθος μετατόπισης του διεισδυτή και μετά. Επίσης μετά την έναρξη της αστοχίας οι μεμβρανικές τάσεις που επικρατούν ανακατανέμονται και κατευθύνονται προς την διαμήκη διεύθυνση του, παράλληλα στα ενισχυτικά. Η εναπομείνουσα αντοχή του δοκιμίου προέρχεται κυρίως από την αντίσταση που προβάλλουν τα ενισχυτικά, καθώς και στην ανακατανομή των τάσεων, μετά το σημείο έναρξης της αστοχίας. Όπως φαίνεται και από την κατανομή του μεγέθους της βλάβης, η ζημιά που υφίσταται το δοκίμιο περιορίζεται στην περιοχή του ελάσματος ανάμεσα στα ενισχυτικά, αφήνοντας άθικτο το υπόλοιπο δοκίμιο.



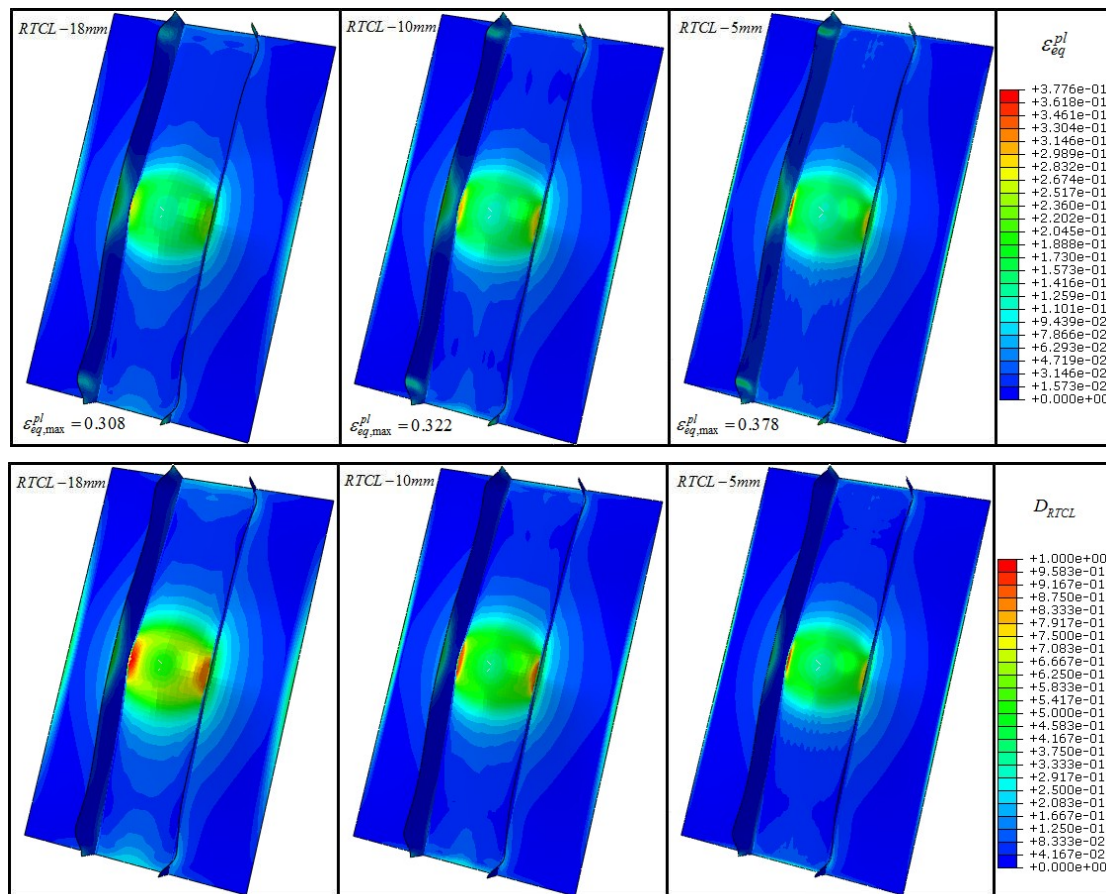
Εικόνα 4.3.5.3-55: Καμπύλη F-δ δοκιμίου FB-2 που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας BWH για 18mm και 10mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.

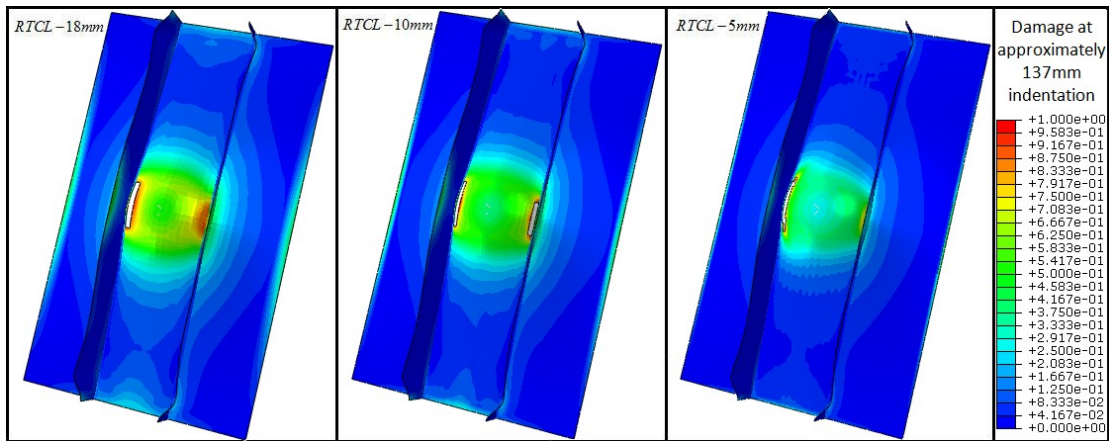
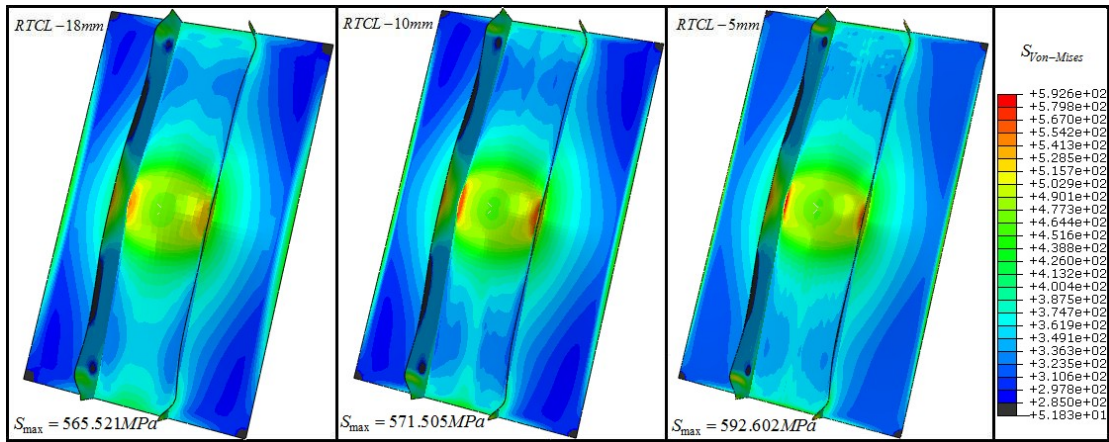
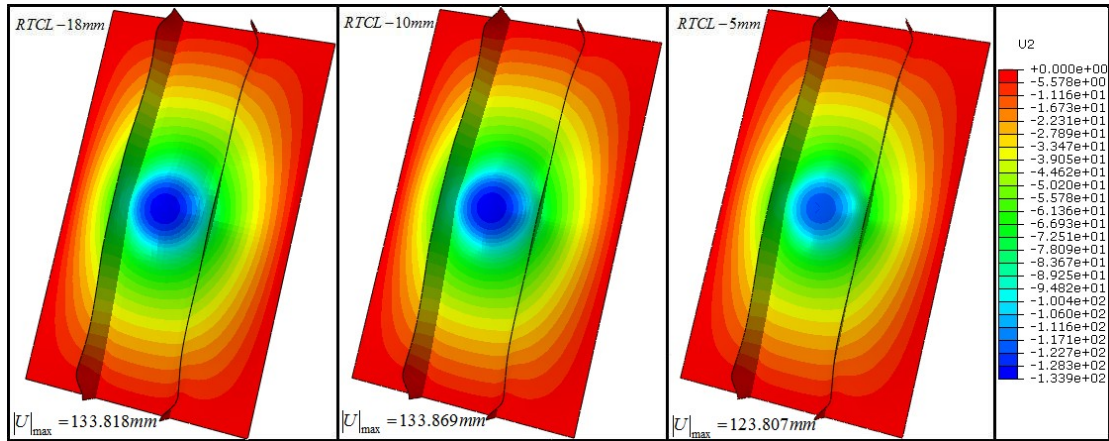






Εικόνα 4.3.5.3-56: Καμπύλη F-δ δοκιμίου FB-2 που προκύπτει με χρήση του κριτηρίου αστοχίας RTCL και νόμο κλίμακας για 18mm και 10mm χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου κελύφους. Σύγκριση με πειραματική καμπύλη.





4.3.6. Συμπεράσματα από την εκτέλεση των αριθμητικών προσομοιώσεων.

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε η αριθμητική προσομοίωση του πειράματος διεΐσδυσης κωνικού βολβού σε δοκίμια που αφορούν α) έλασμα χωρίς ενισχυτικά, β) έλασμα με ένα διαμήκες ενισχυτικό στο μέσον του και γ) έλασμα με δύο ισαπέχοντα διαμήκη ενισχυτικά. Το πείραμα περιγράφηκε στην Ενότητα 4.2. Σκοπός ήταν να ελεγχθεί η αξιοπιστία των κριτηρίων αστοχίας BWH και RTCL. Η επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα εξετάστηκε μέσω της εκτέλεσης προσομοιώσεων με στοιχεία κελύφους διαφορετικού μεγέθους. Τα χαρακτηριστικά μήκη των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 25, 18 και 10 mm για το κριτήριο BWH και 18, 10 και 5 mm για το κριτήριο RTCL. Ο αρχικός λόγος πλευρών στα κελύφη επιλέχθηκε να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην μονάδα.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του κριτηρίου BWH ήταν γενικώς ικανοποιητικά. Χαρακτηριστικό είναι ότι εκτός από την περίπτωση του δοκιμίου FB-2, η επίδραση του μεγέθους των στοιχείων διακριτοποίησης δεν ήταν σημαντική. Το κριτήριο BWH ανήκει στην γενικότερη κατηγορία των κριτηρίων πλαστικής αστάθειας. Θεωρεί δηλαδή ως αιτία της αστοχίας τον σχηματισμό τοπικού λαιμού στο υλικό. Όπως είδαμε αν και ανάμεσα στα τρία δοκίμια την πιο όλκιμη συμπεριφορά επέδειξε το δοκίμιο του ελάσματος χωρίς ενισχυτικά, εντούτοις τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν για αυτό, με εφαρμογή του κριτηρίου BWH, δεν συμφωνούν με τα πειραματικά. Από παρατηρήσεις στο πείραμα προκύπτει ότι στο δοκίμιο US κατά τον μηχανισμό αστοχίας δεν λαμβάνει χώρα σχηματισμός λαιμού από τοπική συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης. Φωτογραφίες του πειράματος δείχνουν ότι η θραύση συμβαίνει σχεδόν ταυτόχρονα με τον σχηματισμό τοπικού λαιμού. Συνεπώς το δοκίμιο US φαίνεται να αστοχεί λόγω του μεγέθους των ομοιόμορφα κατανεμημένων παραμορφώσεων στο έλασμα δηλαδή λόγω του διαχεόμενου λαιμού (diffuse necking) γεγονός που δεν μπορεί να προβλέψει το κριτήριο BWH. Το πάχος δηλαδή του ελάσματος μειώνεται όχι μόνο σε μια περιορισμένη περιοχή, εκεί δηλαδή που συμβαίνει η επαφή με τον διεϊσδυτή, αλλά σε μια ευρύτερη περιοχή του ελάσματος. Όσο αναφορά στο δοκίμιο FB-1 το κριτήριο BWH για διακριτοποίηση με στοιχεία χαρακτηριστικού μήκους 25 mm δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα ωστόσο και σε αυτήν την περίπτωση η αστοχία δεν συμβαίνει λόγω σχηματισμού τοπικού λαιμού στο υλικό. Αντίθετα για το δοκίμιο FB-2 η συγκέντρωση πλαστικών παραμορφώσεων είναι έντονη και ο σχηματισμός τοπικού λαιμού είναι εμφανής, συνεπώς το κριτήριο BWH δίνει πολύ καλά αποτελέσματα χωρίς ωστόσο να μπορούμε να αποφύγουμε μια μικρή εξάρτηση από το μέγεθος του στοιχείου που χρησιμοποιείται.

Όσο αναφορά το κριτήριο RTCL φαίνεται ότι η αδυναμία του στην ορθή πρόβλεψη της αστοχίας των δοκιμίων US και FB-1 δεν οφείλεται στο κριτήριο καθεαυτό, το οποίο βασίζεται πάνω σε μια καλά διατυπωμένη θεωρία για την περιγραφή των μηχανισμών αστοχίας στα όλκιμα υλικά, αλλά προέρχεται κυρίως από την κακή λειτουργία του νόμου κλίμακας που δεν κατορθώνει να εξαλείψει το πρόβλημα της επίδρασης του μεγέθους των στοιχείων στα αριθμητικά αποτελέσματα. Όπως είναι γνωστό τα στοιχεία κελύφους προϋποθέτουν κατάσταση επίπεδης έντασης. Αντίθετα ο μηχανισμός αστοχίας που περιγράφεται από το κριτήριο RTCL εξελίσσεται στις τρεις διαστάσεις. Συνεπώς όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους, το κριτήριο RTCL θα πρέπει να συνδυαστεί με έναν κατάλληλο νόμο κλίμακας. Στην Ενότητα 4.3.3 παρουσιάστηκε μια διαδικασία για την εξαγωγή ενός τέτοιου νόμου, ο οποίος λαμβάνει υπόψιν στον

υπολογισμό της κρίσιμης παραμόρφωσης, το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου κελύφους που χρησιμοποιείται για την διακριτοποίηση του προβλήματος. Ο συγκεκριμένος νόμος κλίμακας αναπτύχθηκε με τρόπον ώστε η χρήση του να είναι επιτυχής μόνο στην περίπτωση που παρατηρούνται τοπικές ζώνες υλικού με υψηλή συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης. Τέτοιες ζώνες είναι οι περιοχές όπου κατασκευαστικά παρατηρούνται απότομες μεταβολές στην γεωμετρία του δοκιμίου ή η περιοχή στο άκρο προυπάρχουσας ρωγμής στο υλικό. Από τις προσομοιώσεις που εκτελέστηκαν στα δοκίμια US και FB-1, καταλλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα επηρεάζονται περισσότερο από τον νόμο κλίμακας, ο οποίος κρίνεται ανεπαρκής, παρά από το ίδιο το κριτήριο RTCL. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση του δοκιμίου US το κριτήριο RTCL χωρίς την χρήση του νόμου κλίμακας έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα. Μόνο στην περίπτωση του δοκιμίου FB-2 το κριτήριο RTCL με χρήση του νόμου κλίμακας έδωσε αποτελέσματα ανεξαρτήτως του πλέγματος. Γεγονός είναι ότι η χρήση του κριτηρίου RTCL με τρισδιάστατα στοιχεία «solid elements» όπου δεν υφίσταται η ανάγκη νόμου κλίμακας, έχει εξαιρετικά αποτελέσματα [Tomqvist, 2003 (59)]. Από την άλλη το κριτήριο BWH λόγω της θεωρητικής του διατύπωσης περιορίζεται μόνο σε εφαρμογές όπου για την διακριτοποίηση χρησιμοποιούνται στοιχεία επίπεδης έντασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. Σύνοψις-Συστάσεις Περαιτέρω έρευνας

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας όπως προκύπτει από τα τέσσερα προηγούμενα Κεφάλαια είναι η κατανόηση των μηχανισμών εκείνων που συντελούν στην αστοχία των κατασκευών και η ανάπτυξη αξιόπιστων κριτηρίων που θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως υπολογιστικά εργαλεία στην αριθμητική πρόβλεψη της αστοχίας με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε κυρίως στην προσομοίωση της αστοχίας των κατασκευαστικών στοιχείων της γάστρας πλοίου σε περίπτωση ατυχήματος, όπως σύγκρουση ή προσάραξη και στον υπολογισμό της αντοχής τους, με την εξαγωγή διαγραμμάτων δύναμης-μετατόπισης από προσομοιώσεις πειραμάτων διείδυσης βολβού σε δοκίμια ελασμάτων.

Στην εργασία τα μοντέλα αστοχίας κατατάχθηκαν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το τι θεωρείται ως αστοχία στις κατασκευές. Παρουσιάστηκαν τόσο τα μοντέλα πλαστικής αστάθειας όσο και τα μοντέλα όλκιμης θραύσης των κατασκευών, ενώ περιγράφησαν κάποια αντιπροσωπευτικά κριτήρια αστοχίας και από τις δύο κατηγορίες, τα οποία αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία. Σημαντικό μέρος της εργασίας καταλαμβάνει η ανάλυση των κριτηρίων RTCL και BWH, τα οποία έχουν πρόσφατα αναπτυχθεί για εφαρμογή σε προσομοιώσεις σύγκρουσης ή προσάραξης πλοίων. Το πείραμα που εκτελέστηκε από τους Alsos και Amdhal στο πανεπιστήμιο της Νορβηγίας (1) και αφορά την διείδυση βολβού σε πακτωμένα ελάσματα με ή χωρίς ενισχυτικά, προσομοιώνεται στο Abaqus ώστε να ελεγχθεί η αξιοπιστία των προαναφερθέντων κριτηρίων στην πρόβλεψη της αστοχίας στα δοκίμια. Για το σκοπό αυτό στην παρούσα μελέτη αναπτύχθηκε κώδικας σε Fortran 77 που εισάγει το κριτήριο RTCL και BWH στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων «Abaqus». Η ρουτίνα που αναπτύχθηκε, σε συνδυασμό με την τεχνική της προοδευτικής εξέλιξης τη ζημιάς που διαθέτει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων για την προσομοίωση των ρωγμών, εφαρμόστηκε για την αριθμητική πρόβλεψη της αστοχίας στα δοκίμια του πειράματος. Μελετήθηκε επίσης ο τρόπος βαθμονόμησης των συγκεκριμένων κριτηρίων, όπου για το RTCL χρησιμοποιήθηκε νόμος κλίμακας του οποίου η διαδικασία ανάπτυξής περιγράφηκε αναλυτικά. Για το BWH η βαθμονόμηση βασίστηκε σε εμπειρικές παρατηρήσεις που καταδεικνύουν επαρκή την χρήση του εκθέτη κράτυνσης n του υλικού ως σταθερά βαθμονόμησης.

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα που εξάγουμε από την εφαρμογή των κριτηρίων BWH και RTCL είναι τα εξής:

- Το κριτήριο BWH είναι λιγότερο ευαίσθητο στην επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος.
- Για την βαθμονόμησή του BWH απαιτείται μόνο ο ορισμός της παραμέτρου $\hat{\epsilon}_1$ όπου για υλικά που ακολουθούν εκθετικό νόμο κράτυνσης τίθεται ίση με τον εκθέτη κράτυνση n .
- Το κριτήριο RTCL περιγράφει ορθά τους μηχανισμούς αστοχίας στα όλκιμα υλικά ωστόσο τα αριθμητικά αποτελέσματα αποκλίνουν από τα πειραματικά λόγω της επίδρασης της πυκνότητας του πλέγματος.
- Ο νόμος κλίμακας που αναπτύχθηκε για χρήση του με το κριτήριο RTCL προϋποθέτει την συγκέντρωση πλαστικών παραμορφώσεων σε ορισμένη περιοχή του υλικού και αστοχία αφού έχει προηγηθεί η δημιουργία τοπικού λαιμού. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο παραπάνω μηχανισμός αστοχίας δεν

παρατηρείται οπότε η χρήση του νόμου κλίμακας θα πρέπει να γίνεται με προσοχή και κατά περίπτωση.

- Για την βαθμονόμηση του κριτηρίου RTCL και την εφαρμογή του με διαφορετικά όγκια υλικά απαιτείται ο καθορισμός της κρίσιμης ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης. Χρειάζεται δηλαδή να υπολογιστούν οι τιμές των ε_r και ε_n που αποτελούν παραμέτρους του υλικού ώστε να εισαχθούν στον νόμο κλίμακας $\varepsilon_{cr}(l_e) = \varepsilon_r + (\varepsilon_n - \varepsilon_r) \frac{l}{l_e}$. Το ε_r υπολογίζεται από πείραμα εφελκυσμού σε κατάλληλο δοκίμιο (bone specimen) και για υλικά που ακολουθούν εκθετικό νόμο κράτνσης τίθεται ίσο με τον εκθέτη κράτνσης n ενώ το ε_n υπολογίζεται μέσω αριθμητικής προσομοίωσης του πειράματος εφελκυσμού για διακριτοποίηση με στοιχεία χαρακτηριστικού μήκους όσο και το πάχος τους. Σημειώνεται ότι κατά την προσομοίωση τα στοιχεία διακριτοποίησης πρέπει να έχουν αρχικό λόγο πλευρών κοντά στην μονάδα.
- Τα κριτήρια BWH και RTCL υπολογίζουν το επίπεδο των τάσεων ή των παραμορφώσεων αντίστοιχα που απαιτείται για να ξεκινήσει η αστοχία στο υλικό. Στην παρούσα εργασία ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία: εφόσον το κριτήριο που χρησιμοποιούμε προβλέπει έναρξη της αστοχίας σε κάποιο πεπερασμένο στοιχείο εκείνο αφαιρείται άμεσα από το πλέγμα. Κάτι τέτοιο οδηγεί σε αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυση λόγω των ελαστικών κυμάτων που προκαλούνται. Θα ήταν ορθότερο τα στοιχεία να διατηρούνται στο πλέγμα εωσότου χάσουν σταδιακά την ικανότητα τους να ανθίσταται σε φορτία, βάση κάποιου νόμου εξέλιξης της ζημιάς-ρωγμής. Ο νόμος αυτός μπορεί να σχετίζεται με την μετατόπιση του άκρου της ρωγμής ή με την ενέργεια που απαιτείται για την διάδοσή της.

Παρά τις όποιες αδυναμίες, η όλη προσπάθεια πρόβλεψης της αστοχίας από τα κριτήρια RTCL και BWH με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus, για τις συγκεκριμένες εφαρμογές που μελετήθηκαν, κρίνεται ικανοποιητική. Ωστόσο η έρευνα θα μπορούσε να συνεχιστεί προς τις κάτωθι κατευθύνσεις:

- Ανάπτυξη νόμου κλίμακας για το κριτήριο RTCL που θα βασίζεται στον υπολογισμό του κρίσιμου ρυθμού ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου διακριτοποίησης $\dot{\varepsilon}_{cr}(l_e)$
- Εισαγωγή σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων κριτηρίων αστοχίας και από άλλες κατηγορίες, όπως τα κριτήρια που βασίζονται σε αρχές των «damage mechanics» ή τα κριτήρια που λαμβάνουν υπόψιν τους το πορώδες των υλικών.
- Χρήση νέων τεχνικών στην προσομοίωση της έναρξης και διάδοσης των ρωγμών με τα πεπερασμένα στοιχεία ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα να είναι κατά το δυνατόν ανεξάρτητα από την πυκνότητα του πλέγματος. Για παράδειγμα «meshless method» ή «eXtended Finite Element method».
- Άναπτυξη κώδικα με ενσωματωμένα τα κριτήρια αστοχίας, για επίλυση προβλημάτων επαφών σε παράλληλους επεξεργαστές, ώστε να είναι δυνατή η πρόβλεψη της αστοχίας ολόκληρης της γάστρας πλοίου σε περίπτωση σύγκρουσης ή προσάραξης.

Βιβλιογραφία

1. **Alsos, H. S. and Amdahl, J.** *On the resistance to penetration of stiffened plates.* : International Journal of Impact Engineering, 2008.
2. **Keeler.** *Determination of forming limits in automotive stamping.* s.l. : Society of automotive engineers, 1965. 650635.
3. **Coodwin, G. M.** *Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop.* s.l. : Society of automotive engineers, 1968. 680093.
4. *Ann.des Ponts et Chaussees.* **Considere, A.** 1885. 9:574.
5. *Plastic instability under plane stress.* **Swift, H.** 18, s.l. : J. Mech. Phys. Solids, 1952, Τόμ. 1.
6. **Hill, R.** *On discontinuous states, with special reference to localized necking in thin sheets.* s.l. : J. Mech. Phys. Solids, 1952. 1:19-30.
7. *Limit strains in the process of stretch-forming sheet metal.* **Marciniak, Z. and Kuczunski, K.** 609-620, s.l. : Int. J. Mech. Sci., 1967, Τόμ. 9.
8. *Pertubation analysis of thermoviscoplastic instabilities in bi-axial loading.* **Dudzinski, D. and Molinary, A.** 601-628, s.l. : Int. J. Solids Structures, 1991, Τόμ. 27.
9. *Predictions of limit strains in sheet metal using a more general yield criterion.* **Parmer, A. and Mellor, P.** 385-391, s.l. : Int. J. Mech. Sci., 1978, Τόμ. 20.
10. **Bridgman, P. W.** *Studies in Large Plastic Flow and Fracture.* New York : McGraw-Hill, 1952.
11. *A Criterion for Ductile Fracture by Growth of Holes.* **McClintock, F. A.** 363-371, s.l. : Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1968, Τόμ. 35.
12. *On the Ductile Enlargment of Voids in triaxial Stress Fields.* **Rice, J. R. and Tracey, D. M.** 201-217, s.l. : J. Mech. Phys. Solids, 1969, Τόμ. 17.
13. **Atkins, A. G.** *Fracture Mechanics and Metalforming: Damage Mechanics and the Local Approach of Yesterday and Today.* : Fracture Research in Retrospect, 1997. pp. 81-83.
14. **Cockcroft, M. G. and Latham, D. J.** *Ductility and Workability of Metals.* : Inst. Metals, 1972. 33:96.
15. **Oh, S. ,Chen, C. C. and Kobayasi, S.** *Ductile failure in axisymmetric extrusion and drawing.* Part 2 Workability in extrusion and drawing : Journal of Engineering for Industry, 1979. 101:36-44.
16. **Brozzo, P., Deluca, B. and Rendina, R.** *A new method for the prediction of formability in metal sheet, Sheet metal forming and formability.* : Proceedings of the 7th Biennial Conference of the IDDRG, 1972.
17. **Norris, D. M., Reaugh, J. E., Moran, B. and Quinones, D. F.** *A Plastic-Strain mean-Stress Criterion for Ductile Fracture.* : Journal of Engineering Materials, 1978. 100:279-286.
18. **Atkins, A. G.** *Possible Explanation for Unexpected Departures in Hydrostatic Tension-Fracture Strain Relations.* : Metal Science, 1981. pp. 81-83.

19. **Johnson, G. R. and Cook, W. H.** *Fracture characteristics of three metals subjected to various strain, strain rates, temperatures and pressures.* : Engineering Fracture Mechanics, 1985. 21 (1):31-48.
20. **Camacho, G. T. and Ortiz, M.** *Adaptive Lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets.* : Int. J. Comp. Math. Appl. Mech. Engin., 1997. 142:269-301.
21. **Hancock, J. W. and Mackenzie, A. C.** *On the Mechanism of Ductile Failure in High-Strength Steels subjected to multi-axial Stresses.* : J. Mech. Phys. Solids, 1976. 24:147-169.
22. **Chaouadi, R., Meester, P. D. and Vandermeulen, W.** *Damage work as ductile fracture criterion.* : International Journal of Fracture, 1994. 66(2):155-164.
23. **LeRoy, G., Embury, J., Edwards, G. and Ashby, M. F.** *A mode of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids.* : Acta Metallurgica, 1981. 29:1509-1522.
24. **Gurson, A. L.** *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I -yield criteria and flow rules for porous ductile media* : ASME, J. Eng. Materials and Technology, 1977. 99.
25. **Kachanov.** *Time to the rupture process under creep conditions.* Izv. Akad. Nauk : SSR Otd. Tekn., 1958. 8:26-31.
26. **Lemaitre, J.** *A Continuum Damage Mechanics Model for Ductile Fracture.* Trans. of the ASME. : J. of Engng. Mat. and Tech., 1985. 107 (1):83-9.
27. **Lemaitre, J.** *A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits.* Mechanical Behaviour of Materials-IV : Proceedings of the Fourth International Conference, 1984. 2:1047-1053.
28. **Chandrakanth, S. and Pandey, P. C.** *An Exponential Ductile Continuum Damage Model for Metals.* : Int. J. Frac., 1994. 72:293-310.
29. **Tai, W. H. and Yang, B. X.** *A new microvoid-damage model for ductile fracture.* : Engineering Fracture Mechanics, 1986. 25 (3): 377-384.
30. **Bonora, N.** *A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure .* : Engineering Fracture Mechanics, 1997. 58 (1/2): 11-12.
31. **Tai, W. H.** *Plastic damage and ductile fracture in mild steel.* : Engineering Fracture Mechanics, 1990. 37 (4): 853-880.
32. **Murakami, S.** *Anisotropic Aspect of Material Damage and Application of Continuum Damage Mechanics.* Wien : Eds. D. Krajcinovic and J. Lemaitre. Springer, 1987. pp. 91-133.
33. **Chow, C. L. and Wang, J.** *An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture.* : Engng. Frac. Mech., 1987. 27: 547-558.
34. **Lemaitre, J., Desmorat, R. and Sauzay, M.** *Anisotropic damage law of evolution.* Eur. : J.Mech. A/Solids, 2000. 19:187-208.
35. **Oyane, M.** *Criteria of Ductile Failure Strain.* Bull. Jap. : Soc. Mech. Engng, 1972. 15: 1507-1605.
36. **Tvergaard, V. and Needleman, A.** *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar.* : Acta. Metall., 1984. 32: 157-169.

37. **Chu, C. L. and Needleman, A.** *Void nucleation effects in biaxially stretched sheets.* : J. Eng. Matl. Tech., 1980. 102: 249-256.
38. **Rousselier, G.** *Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture.* : Nuclear Engineering and Design, 1987. 105: 97-111.
39. **Lehmann, E. and Peschmann, J.** *Energy absorption by the steel structure of ships in the event of collisions.* : Marine Structures, 2001. 15: 429-441.
40. **Zhang, L., Egge, E. D., Bruhns, H.** *Approval procedure concept for alternative arrangements.* In : Proceedings of the 3th International Conference on Collision and Grounding of Ships, 2004. ICCGS.
41. **Ehlers, S., Broekhuijsen, J., Alsos, H. S., Biehl, F., Tabri, K.** *Simulating collision response of ship side structures, a failure criteria benchmark study.* : International Shipbuilding Journal, 2008. 55: 127-144.
42. **Lehmann, E., Yu, X.** *On ductile rupture criteria for structural tear in case of ship collision and grounding.* In : 7th International Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units, 1998. PRADS98 pp. 149-156.
43. **Broekhuijsen, J.** *Ductile failure and energy absorption of y-shape test sections.* Master's thesis : Delft University of Technology, 2003.
44. **Wierzbicki, T. and Werner, H.** *Cockcroft and Latham Revisited.* : Impact and Crashworthiness Laboratory Report Nr. 16, 1998. Technical report, MIT..
45. **Kudo, H. and Aoi, K.** *Effect of Compression Test Conditions upon Fracture of Medium Carbon Steel.* Japan : J. Jpn. Soc. Tech. Plast., 1967. 8:17-27.
46. **Kuhn, H. A. and Dieter, G. E.** *Workability in Bulk Forming Processes.* Waterloo, Canada : Proc. Fract., 1977. 1, ICF4.
47. **Thomason, P. F.** *Ductile Fracture of Metals.* : Pergamon Press, Oxford, 1990.
48. **Ghosh, A. K. and Laukonis, J. V.** *The influence of strain path changes on the formability of sheet steel.* In : 9th Biennial Congress of the IDDRG, 1976.
49. **Graf, A. F. and Hosford, W. F.** *Calculations of forming limit diagrams for changing strain paths.* : Metal Transactions, 1993. A 24: 2497-2501.
50. **Stoughton, T. B.** *A general forming limit criterion for sheet metal forming.* : International Journal of Mechanical Science, 2000. 42: 1-27.
51. **Stoughton, T. B.** *Stress-based forming limits in sheet metal forming.* : Journal of Engineering Materials and Science, 2001. 123: 417-422.
52. **Stoughton, T. B and Zhu, X.** *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD.* : International Journal of Plasticity, 2004. 20: 1463-1486.
53. **Bressan, J. D. and Williams, J. A.** *The use of a shear instability criterion to predict local necking in sheet metal deformation.* : International Journal of Mechanical Science, 1983. 25: 155-168.
54. **Tautz, I.** *Predetermined breaking points in a ship's double hull.* An Innovative design concept to enhance collision safety : 4th International Conference on Collision and Grounding of Ships, 2007. ICCGS.

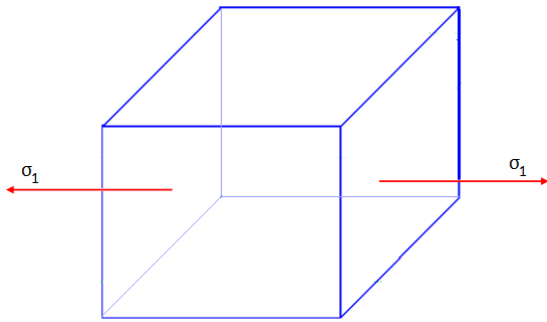
55. **Belytschko, T., Moes, N., Dolbow, J.** *A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing*. U.S.A : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. 46: 131-150.
56. **Lee, Y., Wierzbicki, T., Bao, Y.** *Necking fracture and crack propagation in flat tensile specimens*. USA : MIT Impact and Crashworthiness Laboratory Report, 2004. No: 114.
57. **Li, Y. N., Karr, D. G., Wang, G.** *Mesh size effects in simulating ductile fracture of metals*. 10th : International Symposium on Practical Design of Ships and other Floating Structures, 2007. PRADS.
58. **Kessler, L., Gese, H., Metzmacher, G., Werner, H.** *An approach to model sheet failure after onset of localized necking in industrial high strength steel stamping and crash simulations*. in : SAE Technical World Congress , 2008. 01-0503.
59. **Tornqvist, R.** *Design of crashworthy ship structures*. Norway : Ph.d Thesis, 2003. DTU.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A. Υπολογισμός «triaxiality» σε απλές καταστάσεις φόρτισης

Στην περίπτωση που οι τάσεις δρουν στην διεύθυνση των κυρίων αξόνων ισχύουν:

1. Μονοαξονικός εφελκυσμός:



$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_1$$

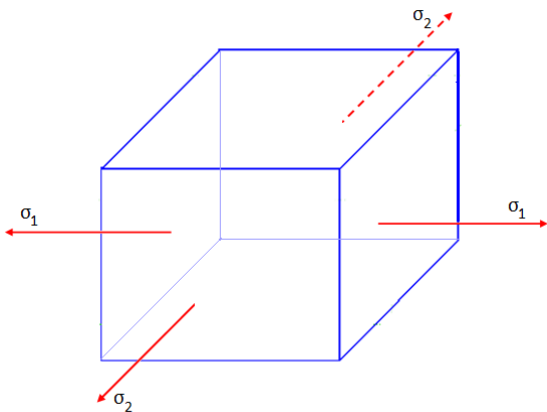
$$\sigma_{eq,mises} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2}$$

$$\sigma_{eq,mises} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_1\right)^2 + 2\left(\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{4}{9}\sigma_1^2 + \frac{2}{9}\sigma_1^2} = \sigma_1$$

$$\text{Συνεπώς } T = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{\frac{1}{3}\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3} \quad \boxed{T = 0.33}$$

2. Διαξονικός εφελκυσμός:

Εάν $\sigma_1 = \sigma_2$



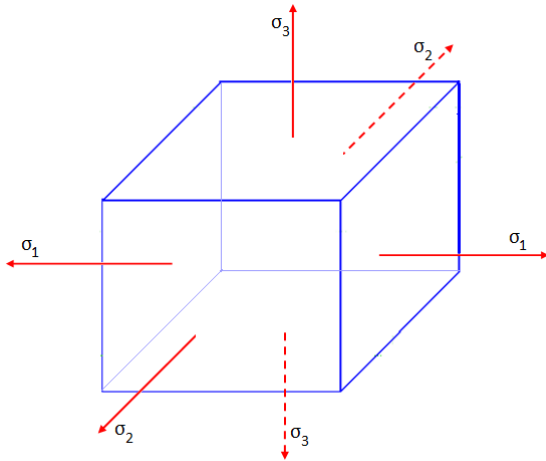
$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2}{3}\sigma_1$$

$$\sigma_{eq,mises} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + \sigma_m^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_1^2 + \sigma_m^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_1^2 + \frac{4}{9}\sigma_1^2} = \sigma_1$$

Συνεπώς $T = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{\frac{2}{3}\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{2}{3}$ $T = 0.66$

3. Υδροστατική Κατάσταση-Τριαξονικός εφελκυσμός:

Εάν $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$

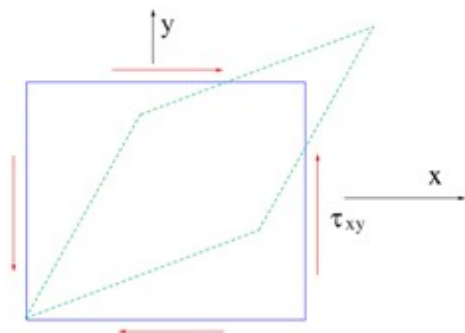


$$\sigma_m = \sigma_1$$

$$\sigma_{eq,mises} = 0$$

Συνεπώς $T = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \infty$

4. Καθαρή διάτμηση:



$$\sigma_m = 0 \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $T = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = 0$$$

*Αντίστοιχα στην μονοαξονική κύρια θλίψη $T = -0.33$, στην διαξονική κύρια θλίψη $T = -0.66$ ενώ στην υδροστατική πίεση $T = \infty$.

B. VUMAT Ρουτίνα: Ανάλυση-Κώδικες

ΑΝΑΛΥΣΗ

Αλγόριθμος:

Είσοδος-Έξοδος

Η είσοδος στον αλγόριθμο είναι ο τανυστής των τάσεων ${}^t[\sigma]$ και ο τανυστής της προσαυξητικής παραμόρφωσης $[\Delta\epsilon]$. Όλες οι μεταβλητές που χρησιμοποιεί το Abaqus για τον explicit-solver είναι σε μορφή διανυσμάτων. Για τα στοιχεία κελύφους που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία η διανυσματική μορφή των τάσεων και των παραμορφώσεων έχει ως εξής:

$$\begin{matrix} \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{matrix} & \text{και} & \begin{matrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \end{matrix} \end{matrix}$$

Η έξοδος είναι ο τανυστής των τάσεων ${}^{t+\Delta t}[\sigma]$ και ο δείκτης αστοχίας D ανάλογα το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιούμε (RTCL ή BWH)

Το μοντέλο του υλικού βασίστηκε στην θεωρία διαρροής-J2 με ισοτροπική συμπεριφορά κράτυνσης.

Διαδικασία

Το Abaqus επικοινωνεί εσωτερικά με την ρουτίνα 'VUMAT'. Ο χρήστης έχει δηλώσει μέσω του περιβάλλοντος CAE (Module: Properties→Materials) ή απευθείας στο inp αρχείο (** MATERIALS *User Material), ότι θα χρησιμοποιήσει υλικό που θα ορίσει εκείνος (User defined Material). Το Abaqus καλεί την ρουτίνα σε κάθε προσαύξηση του χρονικού βήματος τόσες φορές όσες χρειάζεται για να βρεί σημείο ισορροπίας. Η διαδικασία εκτελείται για κάθε ένα σημείο ολοκλήρωσης των στοιχείων ενώ η είσοδός τους στην ρουτίνα γίνεται ανά ομάδες (blocks of elements) κατά μέγιστο 136 στοιχείων την φορά. Ο κώδικας δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να γνωρίζει επακριβώς ποια στοιχεία εισάγονται στην ρουτίνα και για ποιο σημείο ολοκλήρωσης κατά το πάχος τους εκτελείται η διαδικασία (μεταβλητή THICKINTEGPOINT). Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό κατά τον έλεγχο των κριτηρίων αστοχίας. Το RTCL θεωρεί αστοχία όταν όλα τα σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος των στοιχείων ικανοποιούν το κριτήριο ενώ το BWH ελέγχει για αστοχία μόνο το μεσαίο κατά το πάχος σημείο ολοκλήρωσης του στοιχείου, αφού θεωρεί ότι μόνο οι μεμβρανικές τάσεις συνεισφέρουν στην βλάβη.

Βήμα 1. Αρχικοί υπολογισμοί

Για το υλικό είναι γνωστά:

- Το αρχικό μέτρο ελαστικότητας του Young E
- Ο λόγος Poisson ν

- Ο νόμος κράτυνσής του $\sigma_{eq} = \begin{cases} \sigma_y & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{plat} \\ K(\varepsilon_{eq} + \varepsilon_0)^n & \text{if } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_{plat} \end{cases}$

Αρχικά ορίζονται οι σταθερές του Lamé (μ, λ):

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\kappa} G, \text{ το γνωστό μέτρο διάτμησης}$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

Βήμα 2. Υπολογισμοί για το πρώτο χρονικό βήμα

Αν $t=0$ υπολογίζεται η ελαστική λύση:

$\Delta\varepsilon_{33} = -\frac{1}{\lambda+2G} \sigma_{33} + \lambda(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22})$, η ελαστική εκτίμηση για την παραμόρφωση κατά το πάχος.

Το ${}^t\sigma_{33}$ για μικρές μετατοπίσεις είναι μηδέν, αλλά για πεπερασμένες μπορεί να είναι μη μηδενικό λόγω της επιβολής του ρυθμού Jauman για την διόρθωση του ταυυστή των τάσεων, τεχνική που χρησιμοποιεί το Abaqus για τα στοιχεία κελύφους S4R.

$\diamond tr(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} + \Delta\varepsilon_{33}$, το ίχνος του ταυυστή των παραμορφώσεων

${}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda$, η ελαστική εκτίμηση των ορθών και της διατμητικής τάσης

όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker, ενώ η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης μπορεί να εκφραστεί ως $dp = -\lambda$ $\diamond {}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}dp$

Βήμα 2. Υπολογισμοί για $t>0$

Ελαστική πρόβλεψη

$\Delta\varepsilon_{33} = -\frac{1}{\lambda+2G} \sigma_{33} + \lambda(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22})$, η ελαστική εκτίμηση για την παραμόρφωση κατά το πάχος.

$\diamond tr(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} + \Delta\varepsilon_{33}$, το ίχνος του ταυυστή των παραμορφώσεων

$dp = -\lambda$, η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης

${}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}dp$, η ελαστική εκτίμηση των ορθών και της διατμητικής τάσης

Στη συνέχεια η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση του τρέχοντος βήματος αντικαθίστανται από τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα μέσω των μεταβλητών κατάστασης που χρησιμοποιεί το Abaqus stateOld και stateNew:

$${}^{t+dt}\bar{\varepsilon}_{pl} = {}^t\bar{\varepsilon}_{pl}$$

Η ισοδύναμη τάση που αναπτύσσεται στο υλικό για ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ${}^{t+dt}\bar{\varepsilon}_{pl}$ υπολογίζεται από τον δεδομένο νόμο κράτυνσης:

$${}^{t+dt}\bar{\sigma}_y = \begin{cases} \sigma_y & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} \leq \epsilon_{plat} \\ nK \left({}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} + \epsilon_0 \right)^n & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} > \epsilon_{plat} \end{cases}$$

Ο συντελεστής κράτυνσης υπολογίζεται από την σχέση:

$$H = \frac{d \left({}^{t+dt}\bar{\sigma}_y \right)}{d \left({}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} \right)} = \begin{cases} 0 & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} \leq \epsilon_{plat} \\ nK \left({}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} + \epsilon_0 \right)^{n-1} & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} > \epsilon_{plat} \end{cases}$$

Έλεγχος διαρροής

Για τον έλεγχο της διαρροής υπολογίζεται ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων:

$$p = \frac{{}^{t+dt}\sigma_{11} + {}^{t+dt}\sigma_{22} + {}^{t+dt}\sigma_{33}}{3}, \text{ μέση τάση}$$

$$s_{11} = {}^{t+dt}\sigma_{11} - p$$

$$s_{22} = {}^{t+dt}\sigma_{22} - p$$

$$s_{33} = -\left(s_{11} + s_{22} \right)$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η νόρμα του τανυστή των αποκλίνουσών τάσεων η οποία είναι και η έκφραση των ισοδύναμων von Mises τάσεων:

$$\|s\| = \sqrt{\frac{3}{2} \left(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 \right)} \bar{\kappa} \sigma_{von Mises}$$

Η συνάρτηση διαρροής ορίζεται ως:

$$f = \|s\|^2 - {}^{t+dt}\bar{\sigma}_y^2$$

- Αν $f < 0$ τότε η λύση είναι στην ελαστική περιοχή
- Αν $f \geq 0$ τότε υπάρχει περαιτέρω πλαστικοποίηση

Βήμα 3. Εκτίμηση της παραμόρφωσης κατά το πάχος

Για τα στοιχεία κελύφους ισχύει η συνθήκη επίπεδης έντασης γεγονός που σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει $\sigma_{33} = 0$ και ταυτόχρονα το στοιχείο να υπακούει στον νόμο διαρροής που περιγράψαμε. Για το λόγο αυτό απαιτούνται δύο εκτιμήσεις της μεταβολής κατά το πάχος. Η πρώτη εκτίμηση είναι η ελαστική ενώ η δεύτερη η τελείως πλαστική:

- ${}^{(0)}\Delta\epsilon_{33} = -\frac{1}{\lambda + 2G} \sigma_{33} + \lambda(\Delta\epsilon_{11} + \Delta\epsilon_{22})$, ελαστική εκτίμηση παραμόρφωσης
- ${}^{(1)}\Delta\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\Delta\epsilon_{11} + \Delta\epsilon_{22}) = -(\Delta\epsilon_{11} + \Delta\epsilon_{22})$, τελείως πλαστική εκτίμηση

για τελείως πλαστικό υλικό ο λόγος Poisson $\nu = \frac{1}{2}$

$$\text{Αν } |\Delta \epsilon_{11} + \Delta \epsilon_{22}| < \text{tol} \text{ και } |{}^t \sigma_{33}| < \text{tol} \text{ τότε } {}^{(1)} \Delta \epsilon_{33} = -\frac{1}{2} {}^{t+dt} \Delta \epsilon_{22}$$

όπου tol πολύ μικρός αριθμός.

Εξηγούμε ότι για την περίπτωση που ισχύει $\Delta \epsilon_{11} = -\Delta \epsilon_{22}$ τότε η ελαστική και η πλαστική εκτίμηση της παραμόρφωσης κατά το πάχος ταυτίζονται οπότε εάν ${}^t \sigma_{33} = 0$ ο επαναληπτικός αλγόριθμος του Secant αποτυγχάνει.

Ο σκοπός των επαναλήψεων που θα εκτελεστούν είναι να επιτευχθεί ${}^{t+dt} \sigma_{33} = 0$ σε όλα τα σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος των στοιχείων κελύφους.

Αρχικά εκτιμάται μια δοκιμαστική τασική κατάσταση μαζί με το δοκιμαστικό βήμα της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης (trial):

$${}^r \sigma_{11} = {}^t \sigma_{11} + 2G \Delta \epsilon_{11}$$

$${}^r \sigma_{22} = {}^t \sigma_{22} + 2G \Delta \epsilon_{22}$$

$${}^r \sigma_{33} = {}^t \sigma_{33} + 2G ({}^{(1)} \Delta \epsilon_{33})$$

$${}^r p = \frac{{}^r \sigma_{11} + {}^r \sigma_{22} + {}^r \sigma_{33}}{3}, \text{ δοκιμαστική μέση τάση}$$

$${}^r s_{11} = {}^r \sigma_{11} - {}^r p$$

$${}^r s_{22} = {}^r \sigma_{22} - {}^r p$$

$${}^r s_{33} = -({}^r s_{11} + {}^r s_{22})$$

$${}^r \|s\| = \sqrt{\frac{3}{2} ({}^r s_{11}^2 + {}^r s_{22}^2 + {}^r s_{33}^2 + 2 {}^{t+dt} \sigma_{12}^2)} \bar{\kappa} {}^r \sigma_{\text{von Mises}}$$

δοκιμαστικό προσαυξητικό βήμα ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης:

$${}^r \Delta \bar{\epsilon}_{pl} = \frac{{}^r \|s\| - {}^{t+dt} \bar{\sigma}_y}{3G + H},$$

Αρχικός υπολογισμός τάσης κατά το πάχος :

$$({}^{t=1}) \sigma_{33} = {}^r \sigma_{33} - 3G \frac{{}^r \Delta \bar{\epsilon}_{pl}}{{}^r \|s\|} {}^r s_{33},$$

Επαναληπτική διαδικασία «Secant Iterations» :

$$\blacklozenge \text{tr}(\Delta \epsilon) = \Delta \epsilon_{11} + \Delta \epsilon_{22} + {}^{(1)} \Delta \epsilon_{33}$$

$${}^{tr}\sigma_{11} = {}^t\sigma_{11} + \lambda \diamond + 2G\Delta\varepsilon_{11}$$

$${}^{tr}\sigma_{22} = {}^t\sigma_{22} + \lambda \diamond + 2G\Delta\varepsilon_{22}$$

$${}^{tr}\sigma_{33} = {}^t\sigma_{33} + \lambda \diamond + 2G \left({}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33} \right)$$

$${}^{tr}p = \frac{{}^{tr}\sigma_{11} + {}^{tr}\sigma_{22} + {}^{tr}\sigma_{33}}{3}, \text{ μέση τάση}$$

$${}^{tr}s_{11} = {}^{tr}\sigma_{11} - {}^{tr}p$$

$${}^{tr}s_{22} = {}^{tr}\sigma_{22} - {}^{tr}p$$

$${}^{tr}s_{33} = - \left({}^{tr}s_{11} + {}^{tr}s_{22} \right)$$

$${}^{tr}\|s\| = \sqrt{\frac{3}{2} \left({}^{tr}s_{11}^2 + {}^{tr}s_{22}^2 + {}^{tr}s_{33}^2 + 2 {}^{t+dt}\sigma_{12}^2 \right)} \bar{\kappa} {}^{tr}\sigma_{von Mises}$$

$${}^{tr}\Delta\bar{\varepsilon}_{pl} = \frac{{}^{tr}\|s\| - {}^{t+dt}\bar{\sigma}_y}{3G + H}$$

$${}^{(2)}\sigma_{33} = {}^{tr}\sigma_{33} - 3G \frac{{}^{tr}\Delta\bar{\varepsilon}_{pl}}{{}^{tr}\|s\|} {}^{tr}s_{33}$$

$${}^{(2)}\Delta\varepsilon_{33} = {}^{(0)}\Delta\varepsilon_{33} - {}^{(1)}\sigma_{33} \frac{{}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33} - {}^{(0)}\Delta\varepsilon_{33}}{(tol) + \left({}^{(2)}\sigma_{33} - {}^{(1)}\sigma_{33} \right)}$$

$$conv = \frac{\left| {}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33} - {}^{(0)}\Delta\varepsilon_{33} \right|}{{}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33}}, \text{ το κριτήριο σύγκλισης}$$

Αν $conv < 10^{-4}$ τότε σταματάνε οι επαναλήψεις. Διαφορετικά:

$${}^{(0)}\Delta\varepsilon_{33} = {}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33}$$

$${}^{(1)}\Delta\varepsilon_{33} = {}^{(2)}\Delta\varepsilon_{33}$$

$${}^t\sigma_{33} = {}^{(1)}\sigma_{33}$$

$${}^{(1)}\sigma_{33} = {}^{(2)}\sigma_{33}$$

και συνεχίζονται οι επαναλήψεις.

*Στην παρούσα εργασία για λόγους υπολογιστικού κόστους ορίσαμε κατά μέγιστο, τρεις επαναλήψεις για την εκτίμηση της παραμόρφωσης $\Delta\varepsilon_{33}$ στο στοιχείο κελύφους. Γενικά οι διανυσματοποιημένοι επαναληπτικοί αλγόριθμοι έχει αποδειχθεί ότι δίνουν αρκετά καλά αποτελέσματα μετά από τρεις μόνο επαναλήψεις.

Βήμα 4. Υπολογισμός της τελικής εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης

Μετά το πέρας της επαναληπτικής διαδικασίας υπολογίζονται οι τιμές του τανυστή τάσεων

και η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση κατά το πάχος του στοιχείου:

$${}^{t+dt}\sigma_{11} = {}^{tr}\sigma_{11} - 3G \frac{{}^{tr}\Delta\bar{\epsilon}_{pl}}{{}^{tr}\|s\|} {}^{tr}s_{11}$$

$${}^{t+dt}\sigma_{22} = {}^{tr}\sigma_{22} - 3G \frac{{}^{tr}\Delta\bar{\epsilon}_{pl}}{{}^{tr}\|s\|} {}^{tr}s_{22}$$

$${}^{t+dt}\sigma_{33} = 0$$

$${}^{t+dt}\sigma_{12} = {}^t\sigma_{12} - 3G \frac{{}^{tr}\Delta\bar{\epsilon}_{pl}}{{}^{tr}\|s\|} {}^t\sigma_{12}$$

$$\Delta\epsilon_{33} = {}^{(2)}\Delta\epsilon_{33}$$

$${}^{t+dt}\bar{\epsilon}_{pl} = {}^t\bar{\epsilon}_{pl} + {}^{tr}\Delta\bar{\epsilon}_{pl}$$

Βήμα 5. Εφαρμογή κριτηρίου αστοχίας

RTCL

Το κριτήριο ελέγχεται σε κάθε ένα από τα σημεία ολοκλήρωσης του στοιχείου. Δεδομένου ότι έχουμε χρησιμοποιήσει στοιχεία κελύφους S4R με 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος το κριτήριο ελέγχεται σε κάθε ένα από αυτά.

Αρχικά υπολογίζεται η τρέχουσα τιμή του «triaxiality»:

$$T = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$$

$$\text{Όπου } \sigma_H \bar{p} = \frac{{}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{22} + {}^t\sigma_{33}}{3}, \sigma_{eq} \bar{\|s\|} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2{}^t\sigma_{12}^2)} \bar{\sigma}_{von Mises}$$

και

$$s_{11} = {}^t\sigma_{11} - p$$

$$s_{22} = {}^t\sigma_{22} - p$$

$$s_{33} = {}^t\sigma_{33} - p$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η μεταβλητή εξέλιξης της ζημιάς:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} 0 & \text{if } T \leq -1/3 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} & \text{if } -1/3 < T < 1/3 \\ \exp\left(\frac{T-1}{2}\right) & T \geq 1/3 \end{cases}$$

Εάν $-1/3 < T < 1/3$ καλείται υπορουτίνα που υπολογίζει την μέγιστη κύρια τάση σ_1 από τα

στοιχεία του διανύσματος τάσεων ${}^t[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T$ και εύρεση της μεγαλύτερης πραγματικής ρίζας της σχέσης: $\sigma_{pr}^3 - I_1 \sigma_{pr}^2 + I_2 \sigma_{pr} - I_3 = 0$

Με τις αναλλοίωτες των τάσεων να δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} + \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + 2\sigma_{12} \cdot \sigma_{13} \cdot \sigma_{23} - \sigma_{11} \cdot \sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \cdot \sigma_{13}^2 - \sigma_{33} \cdot \sigma_{12}^2$$

Μετά υπολογίζεται η ανηγμένη τιμή της βλάβης με χρήση ή όχι του νόμου κλίμακας

$$\epsilon_{cr}(l_e) = n + (\epsilon_n - n) \frac{t}{l_e}$$

$$D = \frac{1}{\epsilon_{cr}} \dot{D} dt = \begin{cases} \downarrow \text{if } D < 1 & \text{no failure} \\ \blacksquare \text{if } D = 1 & \text{failed integration point} \end{cases}$$

Όταν όλα τα σημεία ολοκλήρωσης του κελύφους αστοχήσουν το στοιχείο αφαιρείται από το πλέγμα.

BWH

Στο κριτήριο BWH μόνο οι μεμβρανικές τάσεις θεωρούνται υπεύθυνες για την δημιουργία πλαστικής αστάθειας. Συνεπώς το κριτήριο ελέγχει για αστοχία μόνο στο μεσαίο κατά το πάχος του στοιχείου κελύφους, σημείο ολοκλήρωσης (αύξων αριθμός σημείου ολοκλήρωσης THICKINTEGPOINT=3).

Αρχικά υπολογίζεται ο λόγος των κύριων παραμορφώσεων β :

$$\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{\Delta \epsilon_{22}}{\Delta \epsilon_{11}}$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η μεταβλητή της ζημιάς:

$$D = \frac{\sigma_{1,current}}{\sigma_1} = \begin{cases} \downarrow \text{if } D < 1 & \text{no failure} \\ \blacksquare \text{if } D = 1 & \text{failed integration point} \end{cases}$$

όπου $\sigma_{1,current}$ η τρέχων τιμή της κύρια μέγιστης τάσης που επικρατεί στο συγκεκριμένο σημείο ολοκλήρωσης του στοιχείου. Για τον υπολογισμό της καλείται η υπορουτίνα που είδαμε και προηγουμένως στο κριτήριο RTCL. Το σ_1 είναι η κρίσιμη κύρια μέγιστη τάση για πλαστική αστάθεια στο υλικό. Η τιμή του δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_1 = \begin{cases} \downarrow 2K \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\hat{\epsilon}_1}{1 + \beta} \sqrt{\beta^2 + \beta + 1} & \text{if } \beta \leq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} K \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \hat{\epsilon}_1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{2 + \beta}}} & \beta > 0 \end{cases}$$

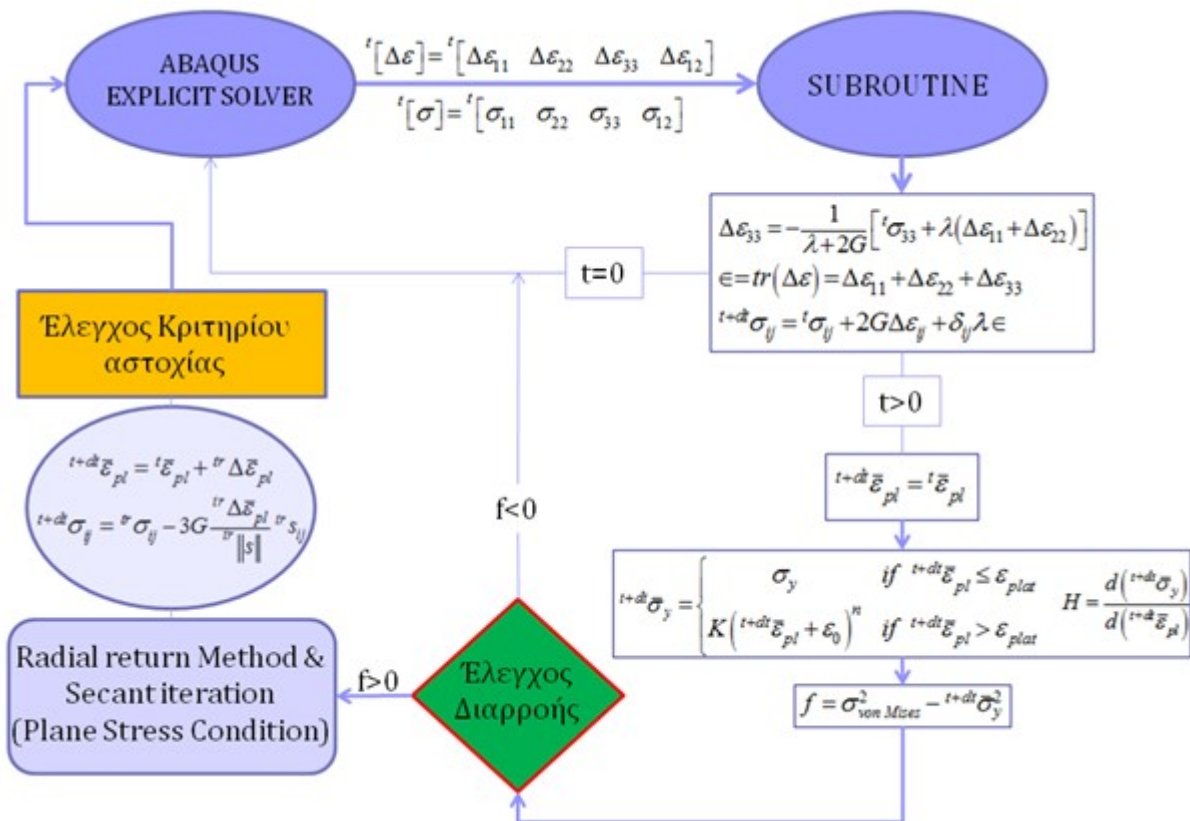
Κ και η είναι ο συντελεστής αναλογίας και ο εκθέτης στον νόμο κράτνσης του υλικού:

$${}^{t+dt}\bar{\sigma}_y = \begin{cases} \sigma_y & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\varepsilon}_{pl} \leq \varepsilon_{plat} \\ K \left({}^{t+dt}\bar{\varepsilon}_{pl} + \varepsilon_0 \right)^n & \text{if } {}^{t+dt}\bar{\varepsilon}_{pl} > \varepsilon_{plat} \end{cases}$$

ενώ το $\hat{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}^n$, προέρχεται από την βαθμονόμηση του κριτηρίου.

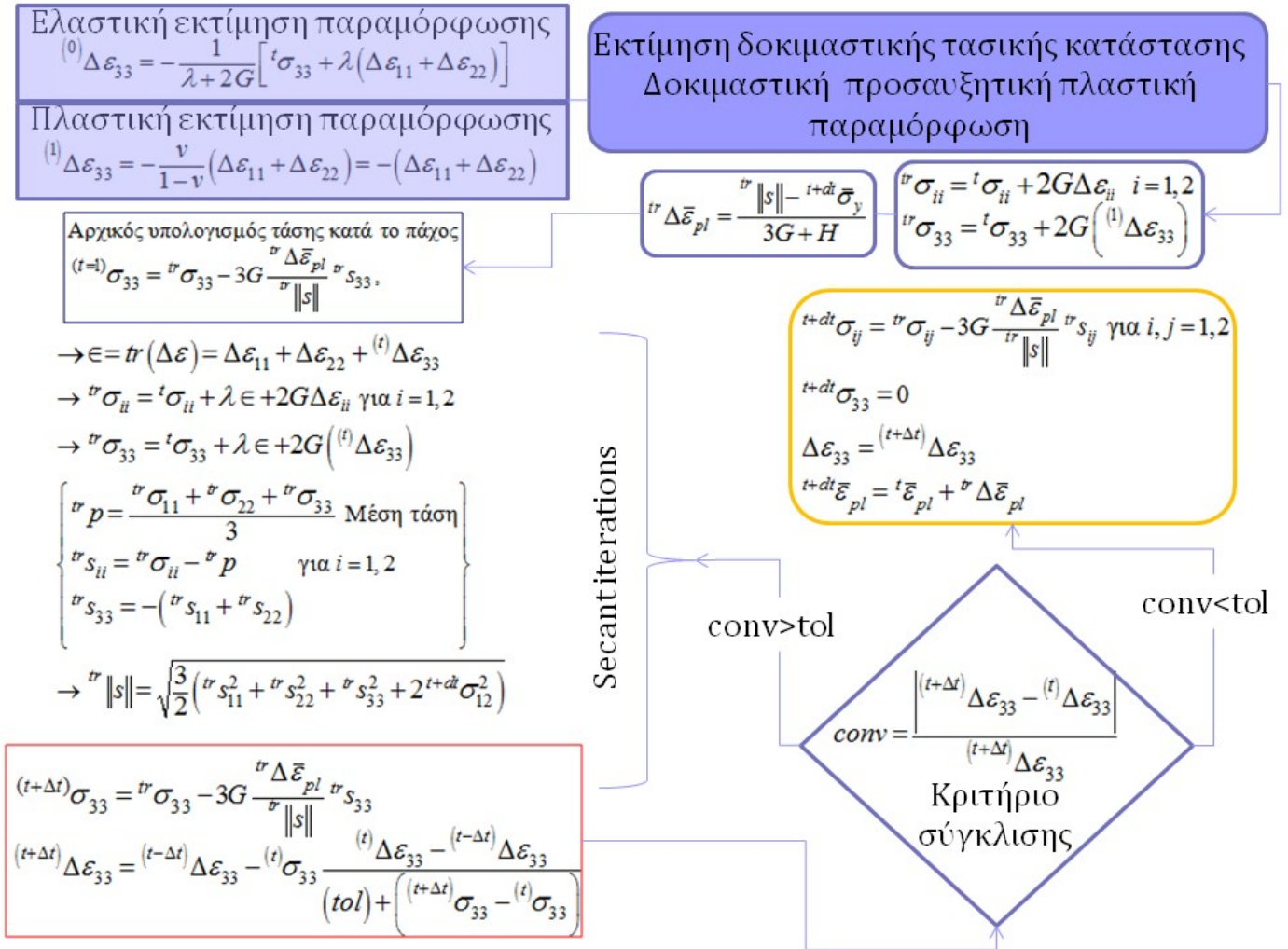
Όταν η τιμή της μεταβλητής βλάβης γίνει μονάδα, $D=1$, το στοιχείο αφαιρείται από το πλέγμα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΡΟΥΤΙΝΑΣ «VUMAT»



RADIAL RETURN ALGORITHM-SECANT ITERATIONS

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ



ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ FORTRAN 77

```
C Κώδικας «Isotropic Mises Plasticity»
C Εισαγωγή των κριτηρίων αστοχίας «Damage criterio RTCL or BWH»
C ΓΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ «S4R Belytschko-Tsay Shell Elements»
C -----
      SUBROUTINE VUMAT (
C   Read only -
      1 NBLOCK, NDIR, NSHR, NSTATEV, NFIELDV, NPROPS, LANNEAL,
      2 STEPTIME, TOTALTIME, DT, CMNAME, COORDMP, CHARLENGTH,
      3 PROPS, DENSITY, STRAININC, RELSPININC,
      4 TEMPOLD, STRETCHOLD, DEFGRADOLD, FIELDOLD,
      5 STRESSOLD, STATEOLD, ENERINTERNOLD, ENERINELASOLD,
      6 TEMPNEW, STRETCHNEW, DEFGRADNEW, FIELDNEW,
C   Write only -
      7 STRESSNEW, STATENEW, ENERINTERNNEW, ENERINELASNEW)
      implicit none
      integer NBLOCK, NDIR, NSHR, NSTATEV, NFIELDV, NPROPS, LANNEAL
      real STEPTIME, TOTALTIME, DT
      character*80 CMNAME
      real COORDMP(nblock,3), CHARLENGTH(NBLOCK)
      real PROPS(NPROPS), DENSITY(NBLOCK),
      1 STRAININC(NBLOCK, NDIR+NSHR),
      2 RELSPININC(NBLOCK, NSHR), TEMPOLD(NBLOCK),
      3 STRETCHOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR), DEFGRADOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR+NSHR),
      4 FIELDOLD(NBLOCK, NFIELDV), STRESSOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR),
      5 STATEOLD(NBLOCK, NSTATEV), ENERINTERNOLD(NBLOCK),
      6 ENERINELASOLD(NBLOCK), TEMPNEW(NBLOCK),
      7 STRETCHNEW(NBLOCK, NDIR+NSHR), DEFGRADNEW(NBLOCK, NDIR+NSHR+NSHR),
      8 FIELDNEW(NBLOCK, NFIELDV), STRESSNEW(NBLOCK, NDIR+NSHR),
      9 STATENEW(NBLOCK, NSTATEV), ENERINTERNNEW(NBLOCK),
      1 ENERINELASNEW(NBLOCK)
      real(8), parameter :: zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0,
      * third = 1.d0 / 3.d0, half = 0.5d0, op5 = 1.5d0, three=3.d0,
      * n=0.24d0, en=0.71d0, thickness=5.d0, K_mild_steel=740.d0, sy=285.d0,
      * eplat=0.d0, e0=(sy/K_mild_steel)**(1/n)-eplat, tol=10** -4
      INTEGER, parameter :: myNBLOCK=136
      integer(4) k
      real(8) peeqOld, vmises
      real(8) e, xnu, twoGi, alambda, threGi, trace, yieldold, hard
```

```

real(8) stresspower,plasticworkinc
real(8) s11Tr,s22Tr,s33Tr,s12Tr,smean,deqps,s33Tr_1
real(8) sef11Tr, sef22Tr,sef33Tr,sef12Tr,Fi
real(8) strain33_0,strain33_1,strain33_2,deqps_1
real(8) s33_1,s33_2,akrivia
integer(4) iter
real(8) striax,Ddamage,smax_princ,smin_princ,eqpl_critical

```

```

C COMMON Variables
integer(4) KARG
COMMON /ARGMNT/ KARG
integer(4) THICKINTEGPOINT,count_elements,ne,all_elements
COMMON /ARGMNT/ THICKINTEGPOINT,count_elements,ne,all_elements
REAL TOTALTIME_OLD
COMMON /ARGMNT/ TOTALTIME_OLD
REAL KMYSTATE(11640,5)
COMMON /ARGMNT/ KMYSTATE

```

```

!THICKINTEGPOINT ο αύξων αριθμός του through thickness integration point
!section points, καθορίζεται στα section properties των shells,και είναι
!τα σημεια ολοκλήρωσης κατά το πάχος (Gauss ή Simpson)

```

```

if (THICKINTEGPOINT.eq.5) then

    if( TOTALTIME .eq.TOTALTIME_OLD ) then
        count_elements=count_elements+NBLOCK
        ne=count_elements-NBLOCK
    else
        !Συνολικός αριθμός elements του μοντελου
        all_elements=count_elements

        count_elements=NBLOCK
        ne=0
    endif
    !Θεωρώ ότι έχω 5 section points συνολικά
    !Οπότε ξεκινά η αριθμηση από την αρχή
    THICKINTEGPOINT=0
else
    ne=count_elements-NBLOCK
    if (KARG.LT.1) then
        ne=0
        count_elements=NBLOCK
    endif

```

```

endif

IF (KARG.LT.1) THEN
write(*,*) 'KARG=', KARG
KARG=KARG+1
C   read(*,*) KARG !Χρησιμοποιείται για Debug, σταματά την εκτέλεση, περιμένει τον
C                   χρήση να δώσει τιμή στην μεταβλητή
C   Εσωτερικές ρουτίνες του Abaqus για να γράφει μηνύματα στο αρχείο .sta
call XPLB_ABQERR(-1,'THIS ROUTINE IS ONLY FOR PLANE
1 STRESS & SHELL ELEMENTS',1,1,')
call XPLB_ABQERR(-1,'MAX NUMBER OF ALLOWED ELEMENTS=11640,
1SECTION POINTS=5, CHANGE THIS VALUE INSIDE VUMAT IF NOT ADEQUATED
2',1,1,')
if (nshr.gt.1) then
call XPLB_ABQERR(-3,'ERROR-ONLY FOR PLANE STRESS ELEMENTS',1,1,')
end if
TOTALTIME_OLD=TOTALTIME
END IF

if ( TOTALTIME .eq. TOTALTIME_OLD ) then
THICKINTEGPOINT=THICKINTEGPOINT+1
else
TOTALTIME_OLD=TOTALTIME
THICKINTEGPOINT=1
end if

C   ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΟΥ
C   E Youngs modulus
e = props(1)
C   v poisson ratio
xnu = props(2)
C   E/(1+v)
twoGi = e / ( one + xnu )
C   λ=v*E/{(1+v)(1-2v)} σταθερά του λαμέ
alamda = xnu * twoGi / ( one - two * xnu )
C   3G=3E/{2(1+v)} εδώ το μέτρο διάτμηση G=μ εξού και threGi
threGi = op5 * twoGi

```

```

if ( stepTime .eq. zero ) then
C   Εκτελεί μόνο στο 1ο βήμα όπου stepTime=0
C   «ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ»
C   Υπολογίζει τις τάσεις από τον καταστατικό νόμο του Hooke
      do k = 1, nblock
          strainInc(k,3)=- (one/(alamda+twoGi)) * (stressOld(k,3)+
1          alamda*(strainInc(k,1)+strainInc(k,2)))
C   Δε=Δε11+Δε22+Δε33 το trace ή dilatation του τανυστή [Δε]
          trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
C   σii(new)= σii(old)+2G*Δεii+λ*Δε      i=1,2,3
          stressNew(k,1) = stressOld(k,1)
*          + twoGi * strainInc(k,1) + alamda * trace
          stressNew(k,2) = stressOld(k,2)
*          + twoGi * strainInc(k,2) + alamda * trace
          stressNew(k,3) = stressOld(k,3)
*          + twoGi * strainInc(k,3) + alamda * trace
C   σij(new)=σij(new)+2G*Δεij
          stressNew(k,4)=stressOld(k,4) + twoGi * strainInc(k,4)

      end do
C-----
C   Για stepTime > zero
else
C   Εκτελεί στο 2ο και στα υπόλοιπα βήματα όπου stepTime~0
      do k = 1, nblock
          peeqOld=stateOld(k,1)
C   -----
C   Καμπύλη κράτυνσης υλικού «mild steel S235»
          if (peeqOld.le.eplat) then
C           σεq= σy
           yieldOld=sy
C           Υπολογισμός του συντελεστή κράτυνσης
           h=dσεq/dεεp1=0
           hard=zero
          else
C           σεq=K*(εεp1+ε0)^n
           yieldOld=K_mild_steel*(peeqOld+e0)**n
C           Υπολογισμός του συντελεστή κράτυνσης
           h=dσεq/dεεp1
           hard=n*K_mild_steel*(peeqOld+e0)**(n-1)

```

```

endif
C -----
strainInc(k,3)=- (one/(alamda+twoGi)) * (stressOld(k,3) +
1          alamda*(strainInc(k,1)+strainInc(k,2)))

C      Δε=Δε11+Δε22+Δε33 το trace ή dilatation του τανυστη [Δε]
trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)

C      σii(new)= σii(old)+2G*Δεii+λ*Δε      i=1,2,3
s11Tr = stressOld(k,1) + twoGi*strainInc(k,1)+alamda * trace
s22Tr = stressOld(k,2) + twoGi*strainInc(k,2)+alamda * trace
s33Tr = stressOld(k,3) + twoGi*strainInc(k,3)+alamda * trace

C      σij(new)=σij(new)+2G*Δεij
s12Tr = stressOld(k,4) + twoGi*strainInc(k,4)

C      σm=(σ11+σ22+σ33)/3 Η Υδροστατική πίεση
smean = third * ( s11Tr + s22Tr + s33Tr )
C      σii=σii-σm , οι effective (ενεργές) τάσεις
sef11Tr = s11Tr - smean
sef22Tr = s22Tr - smean
sef33Tr = -sef11Tr - sef22Tr
sef12Tr=s12Tr

vmises= sqrt(op5*(sef11Tr*sef11Tr+sef22Tr*sef22Tr+
          sef33Tr*sef33Tr+two*sef12Tr*sef12Tr))

C      Yield Function Fi
C -----
Fi=vmises**2-yieldOld**2
if (Fi.lt.zero) then
C      Elastic Stress Update
C -----
C      σii(new)= σii(old)+2G*Δεii+λ*Δε      i=1,2,3
1 stressNew(k,1) = stressOld(k,1) + twoGi*strainInc(k,1) +
          alamda * trace
1 stressNew(k,2) = stressOld(k,2) + twoGi*strainInc(k,2) +
          alamda * trace
stressNew(k,3) = zero
C      σij(new)=σij(new)+2G*Δεij
stressNew(k,4) = stressOld(k,4) + twoGi*strainInc(k,4)

```

```

else
C      Plastic Region  $F_i \geq 0$  «Secant iteration Method»
C      -----
C      iter=0
C
C      δοκιμαστική τάση
C      s33Tr_1=stressOld(k,3)+alamda*trace+twoGi* strainInc(k,3)
C      Αρχική Ελαστική εκτίμηση παραμόρφωσης
C      strain33_0=-(one/(alamda+twoGi))*(stressOld(k,3)+
C              alamda*(strainInc(k,1)+strainInc(k,2)))
C      Αρχική τέλεια-Πλαστική εκτίμηση παραμόρφωση
C      strain33_1=-strainInc(k,1)-strainInc(k,2)
C
C      Για να μην αστοχήσει η διαδικασία των «Secant iterations»
C      if ((strainInc(k,1).eq.-strainInc(k,2)).and.
1      (stressOld(k,3).eq.zero)) strain33_1=half*strainInc(k,2)
125      trace=strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strain33_1
C      δοκιμαστικές τάσεις
C      s33Tr_1=stressOld(k,3)+alamda*trace+twoGi*strain33_1
C      s11Tr=stressOld(k,1)+twoGi*strainInc(k,1)+alamda*trace
C      s22Tr=stressOld(k,2)+twoGi*strainInc(k,2)+alamda*trace
C
C      smean= third * ( s11Tr + s22Tr + s33Tr_1 )
C      Ενεργές δοκιμαστικές τάσεις
C      sef11Tr = s11Tr - smean
C      sef22Tr = s22Tr - smean
C      sef33Tr = -sef11Tr - sef22Tr
C
C      vmises= sqrt(op5*(sef11Tr*sef11Tr+sef22Tr*sef22Tr+
C              sef33Tr*sef33Tr+two*sef12Tr*sef12Tr))
C
C      Υπολογισμός προσφυξιατικής ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης
C      deqps_1=(vmises-yieldOld)/( threGi + hard )
C
C      Υπολογισμός τάσης  $\sigma_{33}$  κατά το πάχος στοιχείου
C      s33_2=s33Tr_1-(threGi*deqps_1*sef33Tr)/vmises

```

```

C      Εκτίμηση παραμόρφωσης  $\Delta \epsilon_{33}$  κατά το πάχος στοιχείου
      strain33_2=strain33_0 - s33_1*(strain33_1-strain33_0)/
1      (tol+s33_2-s33_1)

      akrivia=abs(strain33_1-strain33_0)/abs(strain33_2)

      if (akrivia.gt.tol) then
          iter=iter+1
          if (iter.eq.3) go to 130 !Κατά μέγιστο τρεις επαναλήψεις
          strain33_0=strain33_1
          strain33_1=strain33_2
          s33_1=s33_2
          go to 125 !Συνέχιση της επαναληπτικής διαδικασίας
      else
          continue !Εάν έχει ικανοποιηθεί η ακρίβεια σταματά τις επαναλήψεις και
C      συνεχίζει την εκτέλεση του κώδικα από end if και κάτω

      end if
130  strainInc(k,3)= strain33_2 !Τελική τιμή  $\Delta \epsilon_{33}$  μετά τις επαναλήψεις
      deqps=deqps_1 !Τελική τιμή  $\Delta \epsilon_{p1}$  μετά τις επαναλήψεις,
C      προσαύξηση ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης

      vmises= sqrt(op5*(sef11Tr*sef11Tr+sef22Tr*sef22Tr+
1      sef33Tr*sef33Tr+two*sef12Tr*sef12Tr))

C      Υπολογισμός τελικής εντατικής κατάστασης
      stressNew(k,1) = s11Tr-threGi*deqps*sef11Tr/vmises
      stressNew(k,2) = s22Tr-threGi*deqps*sef22Tr/vmises
      stressNew(k,3) = zero
      stressNew(k,4) = s12Tr-threGi*deqps*sef12Tr/vmises

      end if

C      Update the state variables
C      Υπολογισμός νέας ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης μετά την προσαύξηση
      stateNew(k,1) = stateOld(k,1) + deqps

C-----
C-----ΕΠΙΛΕΓΕΤΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΕΝΟΣ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ-----
C-----RTCL--or--BWH-----

```



```

C-----EAN ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ RTCL -----
C-----
      Ddamage = zero
      if (abs(vmises).gt.zero) then
C        Υπολογισμός TRIAXIALITY striax=σm/σmises
        striax=smean/vmises
        if (striax.lt.-third) then
          !Cutoff Value
          Ddamage = zero
        else if ((striax.lt.third).and.(striax.ge.-third)) then
          !Cockcroft-Latham Criterio
        call find_princStresses (ndir,nshr, stressNew(k,1:ndir+nshr)
1          ,smax_princ,smin_princ) !Υπολογίζει τις κύριες τάσεις
        Ddamage =(smax_princ/vmises)*deqps
        else
          !Rice-Tracey Criterio
          Ddamage =EXP((three*striax-one)/two)*deqps
        end if
      else
      end if

C      Νόμος Κλίμακας «Scaling Law»
      eqpl_critical=n+(en-n)*thickness/le
      stateNew(k,2) = stateOld(k,2)+Ddamage/eqpl_critical
      ne=ne+1 !αύξων αριθμός στοιχείου
C      Πίνακας KMYSTATE με αριθμό γραμμών τον αριθμό των στοιχείων και αριθμό
C      στηλών τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης κατά το πάχος κάθε στοιχείου
C      Αποθηκεύεται για κάθε στοιχείο με αυξοντα αριθμό ne η αθροιστική ανηγμένη
C      ζημιά που έχει υποστεί ως τώρα το συγκεκριμένο thickness integration point
      KMYSTATE (ne, THICKINTEGPOINT) =KMYSTATE (ne, THICKINTEGPOINT)
1          +Ddamage/eqpl_critical
C      ΔΗΛΩΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΟΛΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΩΣΤΕ ΝΑ ΑΦΑΙΡΕΘΕΙ
C      Δηλώνω την αστοχία του υλικού σημείου όταν θα έχουν όλοι οι δείκτες
C      ζημιάς στα CROSS SECTION POINTS ξεπεράσει την κρίσιμη ανηγμένη τιμή 1
      if ((KMYSTATE (ne,1) .gt. one) .and. (KMYSTATE (ne,2) .gt. one)
1      .and. (KMYSTATE (ne,3) .gt. one) .and. (KMYSTATE (ne,4) .gt. one)
2      .and. (KMYSTATE (ne,5) .gt. one) ) then
        stateNew(k,3)=0 !αφαίρεση του στοιχείου,

```

C---Στην μεταβλητή DEPVAR δίνω τιμή 3, δηλαδή ορίζω 3 μεταβλητές κατάστασης όπου πάντα
C η τελευταία χρησιμοποιείται για να δηλώσει την αφαίρεση του στοιχείου

```
else  
endif
```

```
C-----  
C-----EAN ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ BWH-----  
C-----
```

```
ne=ne+1!αύξων αριθμός στοιχείου  
!initialiazition No damage smax_princ=0<<s1cr=10**15  
smax_princ=zero !Η τρέχων κύρια μέγιστη τάση  
s1cr=10.d0**15 !Θέτω ένα πολύ μεγάλο νούμερο για την κρισιμη κύρια μέγιστη τάση
```

C Το BWH ελέγχεται μόνο στο μεσαίο κατά το πάχος σημείο ολοκλήρωσης THICKINTEGPOINT=3

```
IF (THICKINTEGPOINT.EQ.3) THEN  
    call find_princStresses (ndir,nshr, stressNew(k,1:ndir+nshr),  
1smax_princ,smin_princ) !Υπολογίζει τις κύριες τάσεις  
  
    call find_princStresses (ndir,nshr, strainInc(k,1:ndir+nshr),  
1emax_princ,emin_princ) !Υπολογίζει τις κύριες προσαυξητικές παραμορφώσεις  
    if (abs(emax_princ).gt.zero) then  
        bi=emin_princ/emax_princ !Υπολογισμός λόγου β  
    else  
        bi=10.d0**15  
    endif  
  
    if(bi.le.zero) then !Hill's κριτήριο για β<0  
        vb=bi**2+bi+one  
        if (vb.gt.zero) then  
            vb1=two*K_mild_steel*(one+half*bi)*(two*n*sqrt(vb))**n  
            vb2=sqrt(three)*sqrt(vb)*(sqrt(three)*(one+bi))**n  
            if(abs(vb2).gt.zero) s1cr=(vb1/vb2)  
        else  
        endif  
  
    else !Bressan-Williams κριτήριο για β>=0  
        vb3=one-(bi/(two+bi))**2  
        if (abs(vb3).gt.zero) then  
            vb4=two*K_mild_steel*(two*n/sqrt(three))**n  
            s1cr=(vb4/vb3)*(one/sqrt(three))  
        else
```

```

                endif

            endif

C           Δηλώνω την αστοχία του υλικού σημείου
            IF (smax_princ.gt.slcr) THEN
                FAILED_ELEMENTS(ne,1)=120!Το 120 είναι βοηθητική τιμή-τυχαία επιλογή
            ELSE
            ENDIF

            stateNew(k,2)=Damage_Old(ne,1) !Για την αναπαράσταση της ζημιάς
            Damage_New(ne,1)=smax_princ/slcr
            ELSEIF (THICKINTEGPOINT.EQ.5) THEN
                stateNew(k,2)=Damage_Old(ne,1)
                Damage_Old(ne,1)=Damage_New(ne,1)
            ELSE
                stateNew(k,2)=Damage_Old(ne,1)
            ENDIF

C           Δηλώνω την αφαίρεση του element
            IF (FAILED_ELEMENTS(ne,1).EQ.120) stateNew(k,3)=0
C-----
end do
end if
return
end
C-----END OF 'VUMAT' ROUTINE-----

```

ΡΟΥΤΙΝΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΚΥΡΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

```

C-----
C -----Ρουτίνα για τον υπολογισμό κύριων τιμών τάσης ή παραμόρφωσης-----
C-----

  subroutine find_princStresses (ndir,nshr,s_vector,smax_princ,
  1smin_princ)
  implicit none
  integer ndir,nshr
  real s_vector(1,ndir+nshr)
  real(8) smax_princ,smin_princ
C  $\sigma^3 - \sigma^2 I_1 + \sigma I_2 - I_3 = 0$ 
C -----
C Solve a cubic equation where a=1, b=-I1, c=I2, and d=-I3 are real.
C  $a*x**3 + b*x**2 + c*x + d = 0$ 
C Variables used:
C a, b, c, d ... coefficients (input)
C y1, y2, y3 ... three transformed solutions
C y2r, y2i ... real and imaginary parts of a pair of complex roots
C x(i) ... three (generally) complex solutions (output)
C nroot ... number of roots
C Formula used are given in Tuma, "Engineering Mathematics Handbook", p7
C (McGraw Hill, 1978).
C Step 0: If a is 0. use the quadratic formula to avoid dividing by 0.
C Step 1: Calculate p and q
C  $p = ( 3*c/a - (b/a)**2 ) / 3$ 
C  $q = ( 2*(b/a)**3 - 9*b*c/a/a + 27*d/a ) / 27$ 
C Step 2: Calculate discriminant D
C  $D = (p/3)**3 + (q/2)**2$ 
C Step 3: Depending on the sign of D, we follow different strategy.
C If D<0, three distinct real roots.
C If D=0, three real roots of which at least two are equal.
C If D>0, one real and two complex roots.
C Step 3a: For D>0 and D=0,
C Calculate u and v
C  $u = \text{cubic\_root}(-q/2 + \text{sqrt}(D))$ 
C  $v = \text{cubic\_root}(-q/2 - \text{sqrt}(D))$ 
C Find the three transformed roots

```

```

C      y1 = u + v
C      y2 = -(u+v)/2 + i (u-v)*sqrt(3)/2
C      y3 = -(u+v)/2 - i (u-v)*sqrt(3)/2
C Step 3b Alternately, for D<0, a trigonometric formulation is more convenient
C      y1 = 2 * sqrt(|p|/3) * cos(phi/3)
C      y2 = -2 * sqrt(|p|/3) * cos((phi+pi)/3)
C      y3 = -2 * sqrt(|p|/3) * cos((phi-pi)/3)
C      where phi = acos(-q/2/sqrt(|p|**3/27))
C      pi = 3.141592654...
C Step 4 Finally, find the three roots
C      x = y - b/a/3

```

C Declare variables

```

real(8) I1,I2,I3,sx,sy,sz,sxy,syz,szx
integer(4) i
real(8) s1pr,s2pr,s3pr,im
complex x(3)
real(8) pi,a,b,c,d,p,q,DD
data pi/3.141592654/
integer(4) nroot
real(8) phi,temp1,temp2,y1,y2,y3,u,v,y2r,y2i

```

```

sx=s_vector(1,1)
sy=s_vector(1,2)
sz=s_vector(1,3)
sxy=s_vector(1,4)
if(nshr.gt.1) then
    syz=s_vector(1,5)
    szx=s_vector(1,6)
else
    syz=0
    szx=0
endif

```

```

C ANAΛΛΟΙΩΤΕΣ ΤΑΝΥΣΤΩΝ
I1=sx+sy+sz
I2=sx*sy+sy*sz+sz*sx-sxy**2-syz**2-szx**2
I3=sx*sy*sz+2.d0*sxy*syz*szx-sx*syz**2-sy*szx**2-sz*sxy**2
if ((I1.eq.0.d0).and.(I2.eq.0.d0).and.(I3.eq.0.d0)) then
    smax_princ=s_vector(1,1)
    return
else

```

```

C      Εισαγωγή συντελεστών στην εξίσωση  $a*x**3 + b*x**2 + c*x + d = 0$ 
C      που γίνεται μετά την αντικατάσταση:
C       $\sigma^3 - \sigma^2 * I1 + \sigma * I2 - I3 = 0$ 
      a=1.d0

      b=-I1
      c=I2
      d=-I3

c Step 0: If a is 0 use the quadratic formula. -----
      IF(a .eq. 0.d0) THEN
      if(b .eq. 0.d0) then
          if(c .eq. 0.d0) then
c          We have a non-equation; therefore, we have no valid solution
          nroot = 0
          else
c          We have a linear equation with 1 root.
          nroot = 1
          x(1) = cmplx(-d/c, 0.)
          endif
      else
c      We have a true quadratic equation. Apply the quadratic formula to find two roots.
      nroot = 2
      DD = c*c-4.*b*d
      if(DD .ge. 0.d0) then
          x(1) = cmplx((-c+sqrt(DD))/2./b, 0.)
          x(2) = cmplx((-c-sqrt(DD))/2./b, 0.)
      else
          x(1) = cmplx(-c/2./b, +sqrt(-DD)/2./b)
          x(2) = cmplx(-c/2./b, -sqrt(-DD)/2./b)
      endif
      endif

      ELSE

c Cubic equation with 3 roots
      nroot = 3

c Step 1: Calculate p and q -----
      p = c/a - b*b/a/a/3.
      q = (2.*b*b*b/a/a/a - 9.*b*c/a/a + 27.*d/a) / 27.

```

```

c Step 2: Calculate DD (discriminant) -----
    DD = p*p*p/27. + q*q/4.

c Step 3: Branch to different algorithms based on DD -----
    if(DD .lt. 0.d0) then
c      Step 3b:
c      3 real unequal roots -- use the trigonometric formulation
        phi = acos(-q/2./sqrt(abs(p*p*p)/27.))
        temp1=2.*sqrt(abs(p)/3.)
        y1 = temp1*cos(phi/3.)
        y2 = -temp1*cos((phi+pi)/3.)
        y3 = -temp1*cos((phi-pi)/3.)
    else
c      Step 3a:
c      1 real root & 2 conjugate complex roots OR 3 real roots (some are equal)
        temp1 = -q/2. + sqrt(DD)
        temp2 = -q/2. - sqrt(DD)
        u = abs(temp1)**(1./3.)
        v = abs(temp2)**(1./3.)
        if(temp1 .lt. 0.) u=-u
        if(temp2 .lt. 0.) v=-v
        y1 = u + v
        y2r = -(u+v)/2.
        y2i = (u-v)*sqrt(3.)/2.
    endif

c Step 4: Final transformation -----
    temp1 = b/a/3.
    y1 = y1-temp1
    y2 = y2-temp1
    y3 = y3-temp1
    y2r=y2r-temp1

c Assign answers -----
    if(DD .lt. 0.) then
        x(1) = cmplx( y1, 0.)
        x(2) = cmplx( y2, 0.)
        x(3) = cmplx( y3, 0.)

        smax_princ=max(abs(y1),abs(y2),abs(y2))
        smin_princ=min(abs(y1),abs(y2),abs(y2))

```

```
elseif (DD .eq. 0.) then  
  x(1) = cmplx( y1, 0.)  
  x(2) = cmplx(y2r, 0.)  
  x(3) = cmplx(y2r, 0.)
```

```
  smax_princ=max(abs(y1),abs(y2r))  
  smin_princ=min(abs(y1),abs(y2r))
```

```
else
```

```
  x(1) = cmplx( y1, 0.)  
  x(2) = cmplx(y2r, y2i)  
  x(3) = cmplx(y2r,-y2i)
```

```
C      Σε περίπτωση που προκύψουν όλες οι ρίζες φανταστικές  
      smax_princ=max(s_vector(1,1),s_vector(1,2),s_vector(1,3))  
      smin_princ=min(s_vector(1,1),s_vector(1,2),s_vector(1,3))
```

```
endif
```

```
ENDIF
```

```
return
```

```
end if
```

```
end
```


Γ. Αριθμητικά Αποτελέσματα

