



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

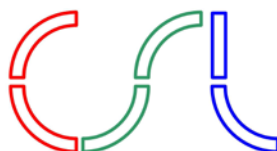
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**Εύρεση και Ανάπτυξη Δυναμικού Μοντέλου Ελικοπτέρου
Μικρού Μεγέθους**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠΥΡΟΣ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.



Control Systems Lab

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

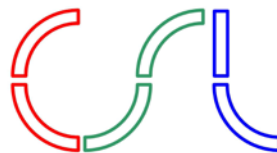
Εύρεση και Ανάπτυξη Δυναμικού Μοντέλου Ελικοπτέρου Μικρού Μεγέθους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΥ ΣΠΥΡΟΥ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.



Control Systems Lab

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Κυριακόπουλο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την ευκαιρία που μου έδωσε να μελετήσω ένα τόσο ενδιαφέρον και πρωτότυπο θέμα.

Η παρούσα διπλωματική εργασία υλοποιήθηκε στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου του Τομέα Αυτομάτου Ελέγχου και Μηχανολογικών Κατασκευών, το οποίο διαθέτει πλούσια ερευνητική δραστηριότητα και εμπειρία στον τομέα των *mobile robots* και των σύγχρονων μεθόδων αυτομάτου ελέγχου.

Ιδιαίτερη μνεία οφείλω στον Πάνο Μαράντο για το ενδιαφέρον του και τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε για τη συνεργασία μας και την υλοποίηση της εργασίας αυτής. Η συμβολή και η καθοδήγησή του συνέβαλαν σημαντικά στην επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας. Ακόμα, θα ήθελα να εκφράσω την ιδιαίτερη εκτίμησή μου στο Γιώργο Καρρά, αλλά και σε όλα τα μέλη του *Heli-Team* για την συμπαράστασή και τη βοήθειά τους κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, καθώς και σε όλο το προσωπικό του Εργαστηρίου Αυτομάτου για την συνεργασία, την καλή τους διάθεση και συναδελφικότητα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους στενούς μου φίλους για την ενθάρρυνσή και τη συμπαράστασή που μου έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010

Σπύρος Ζαφειρόπουλος

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν η ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου για μη-επανδρωμένο ελικόπτερο μικρού μεγέθους. Η διαδικασία αυτή περιελάμβανε την ανάπτυξη ενός μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου μέσω της διαδικασίας *First Principles Modeling*, καθώς και την εύρεση κατάλληλων γραμμικών δυναμικών μοντέλων. Ακόμη, έγινε η έρευνα σχετικά με την καταλληλότερη μέθοδο γραμμικής κυρίως, αλλά και μη-γραμμικής, μεθόδου αναγνώρισης παραμέτρων δυναμικού μοντέλου μικρού μεγέθους ελικοπτερού.

Συγκεκριμένα, έγινε χρήση του συνόλου χαρακτηριστικών τιμών (κατασκευαστικά στοιχεία), για *test case*, από το ελικόπτερο **MIT X-Cell 60 SE** για προσομοίωση του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου. Επίσης, έγινε εξαγωγή γραμμικού μοντέλου με τη διαδικασία της γραμμικοποίησης από το μη-γραμμικό που είχε προηγηθεί. Ακόμη, υπήρξε κατασκευή/”στήσιμο” της θεωρητικής πειραματικής διαδικασίας για την εύρεση γραμμικών μοντέλων με τη μέθοδο της αναγνώρισης παραμέτρων.

Η παραπάνω διαδικασία αποτελεί το πρώτο στάδιο για την ανάπτυξη νέων ελεγκτών για την εφαρμογή τους σε αυτόνομα μη-επανδρωμένα ελικόπτερα μικρού μεγέθους. Άρα, οι προσομοιωτές που βασίζονται στα μοντέλα αυτά θα αποτελέσουν το *test bed* για την πρώτη εφαρμογή των ελεγκτών και των αλγορίθμων αυτόνομης κίνησης των ελικοπτερών. Τέλος, ο τρόπος εξαγωγής των μοντέλων διέπεται από γενικότητα όσον αφορά στη διαχείριση των εξισώσεων και των θεωριών που χρησιμοποιήθηκαν και ως αποτέλεσμα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε ελικόπτερο αντίστοιχου μεγέθους, απλά με τροποποίηση του συνόλου των χαρακτηριστικών τιμών.

Λέξεις Κλειδιά: <<αυτόνομο μη-επανδρωμένο ελικόπτερο μικρού μεγέθους, μοντελοποίηση δυναμικής συστήματος, γραμμικό/μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο, δυναμική πτήσης, παράγωγοι ευστάθειας, γραμμική/μη-γραμμική αναγνώριση παραμέτρων, αλγόριθμοι ελέγχου>>

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Abstract

The scope of this diploma thesis was the development of a dynamic model of a small-scale unmanned helicopter. This procedure included the development of a non-linear dynamic model via the use of *First-Principles Modeling*, but also the development of suitable and appropriate linear dynamic models. Moreover, there was made a research concerning the appropriate method for, mostly linear, but also non-linear parameter system identification, in order to be used in the development of a dynamic model of a small-scale helicopter.

Specifically, a set of values (size and structural values) from the helicopter *MIT X-Cell 60 SE* was used as a test case, so as to simulate the non-linear dynamic model. Besides that, there was made an extraction of a linear dynamic model by using the method of system linearization (Our extracted non-linear model was linearized). In addition, the experimental theoretical setup was defined, so as the linear models to be developed via the system identification process.

This methodology is the first stage in the development of new controllers and in their implementation to autonomous unmanned small-scale helicopters. As a result, the simulators which will be based on these models, they will also be the *test bed* for the implementation and test of the new controllers and the new autonomous movement algorithms. Finally, the way of extraction of the models is governed by a generality as far as it concerns the manipulation of the mathematical equations and theories which were used and as a result they can be used in any small-scale helicopter by changing only the set of the characteristic values.

Keywords: <<autonomous unmanned small-scale helicopter, system dynamics modeling, linear/non-linear dynamic model, flight dynamics, stability derivatives, linear/non-linear system parameters identification, control algorithms>>

Page Intentionally Left Blank

Πίνακας περιεχομένων

1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Μη-επανδρωμένα Οχήματα και Ρομποτική	1
1.2	Δυναμικά Μοντέλα Ελικοπτέρων Μικρού Μεγέθους.....	2
1.2.1	<i>Η χρησιμότητα των μικρού μεγέθους ελικοπτέρων</i>	<i>3</i>
1.3	Αντικείμενο Διπλωματικής	3
2	Δυναμικό Μοντέλο Ελικοπτέρου.....	5
2.1	Θεωρία Ελικοπτέρου	5
2.1.1	<i>Μηχανικά και Ρομποτικά Μέρη</i>	<i>6</i>
2.1.2	<i>Αεροδυναμικά Μέρη.....</i>	<i>7</i>
2.1.3	<i>Ηλεκτρομηχανικά & Ηλεκτρονικά Μέρη.....</i>	<i>9</i>
2.2	Αποστολή Ελικοπτέρου.....	9
2.2.1	<i>Επιθυμητές Αποστολές του Ελικοπτέρου</i>	<i>10</i>
2.2.2	<i>Καταστάσεις Φακέλου Πτήσης</i>	<i>11</i>
2.2.3	<i>Διαθέσιμα Δυναμικά Μοντέλα.....</i>	<i>11</i>
2.3	Μη-γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο.....	12
2.3.1	<i>Εξισώσεις Κίνησης Στερεού Σώματος.....</i>	<i>13</i>
2.3.2	<i>Δυναμική Flapping του Ρότορα.....</i>	<i>17</i>
2.3.3	<i>Δυνάμεις και Ροπές στο Ελικόπτερο.....</i>	<i>20</i>
2.4	Γραμμικά Δυναμικά Μοντέλα.....	32
2.4.1	<i>Γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο μέσω Γραμμικοποίησης.....</i>	<i>32</i>
2.4.2	<i>Γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο μέσω Αναγνώρισης Παραμέτρων</i>	<i>35</i>
2.5	Προσομοίωση του Μη-Γραμμικού Δυναμικού Μοντέλου.....	51
2.5.1	<i>Υλοποίηση με Χρήση H/Y</i>	<i>51</i>
2.5.2	<i>Παραδείγματα (Προσομοίωσης) Πτήσης Ελικοπτέρου.....</i>	<i>54</i>
2.5.3	<i>Σύγκριση και Ανάλυση Αποτελεσμάτων.....</i>	<i>74</i>
2.6	Προσομοίωση του Γραμμικού Δυναμικού Μοντέλου.....	76
2.6.1	<i>Υλοποίηση με Χρήση H/Y.....</i>	<i>76</i>
2.6.2	<i>Παράδειγμα και Αποκρίσεις Πτήσης Hover του Ελικοπτέρου</i>	<i>77</i>

2.6.3	<i>Ανάλυση των Αποτελεσμάτων</i>	84
2.6.4	<i>Παρατηρήσεις</i>	84
3	Αναγνώριση Παραμέτρων Δυναμικού Μοντέλου	85
3.1	Λίγα λόγια για την Αναγνώριση Παραμέτρων.....	85
3.2	Αναγνώριση Παραμέτρων στην Αεροναυπηγική.....	86
3.2.1	<i>Δυσκολίες στην Αναγνώριση Παραμέτρων σε Ελικόπτερα</i>	87
3.3	Μέθοδοι Αναγνώρισης Παραμέτρων.....	87
3.3.1	<i>Αναγνώριση Παραμέτρων και Προσομοίωση</i>	88
3.3.2	<i>Γραμμική Αναγνώριση Παραμέτρων</i>	88
3.3.3	<i>Η Αναγνώριση Παραμέτρων στο Πεδίο της Συχνότητας</i>	89
3.3.4	<i>Μη-Γραμμική Αναγνώριση Παραμέτρων</i>	94
3.4	Διέγερση Συστήματος για Αναγνώριση Παραμέτρων Δυναμικού Μοντέλου.....	97
3.4.1	<i>Επισκόπηση Απαιτήσεων για Αναγνώριση Παραμέτρων Συστήματος</i>	98
3.4.2	<i>Φάσμα Συχνοτήτων Λειτουργίας</i>	98
3.4.3	<i>Δυναμική Σύζευξη</i>	99
3.4.4	<i>Σχεδιασμός Εισόδων Διέγερσης</i>	100
4	Επίλογος	104
4.1	Σύνοψη και Συμπεράσματα.....	104
4.2	Μελλοντικές Επεκτάσεις.....	105
5	Βιβλιογραφία	107
6	Παράρτημα	109
6.1	Παράγωγοι Ευστάθειας και Παράγωγοι Ελέγχου.....	109
6.2	Κατάσταση Ισορροπίας-Γραμμικοποίησης Hover.....	135

Πίνακας Εικόνων

ΕΙΚΟΝΑ 1-1 : <i>MQ-1 PREDATOR</i>	2
ΕΙΚΟΝΑ 1-2 : <i>RQ-7 SHADOW</i>	2
ΕΙΚΟΝΑ 2-1 : <i>MAXI JOKER</i>	6
ΕΙΚΟΝΑ 2-2 : <i>SUPER PUMA</i>	6
ΕΙΚΟΝΑ 2-3 : ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΡΗ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟΥ (<i>MAXI JOKER 2</i>)	6
ΕΙΚΟΝΑ 2-4 : ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ <i>SWASH PLATE</i>	7
ΕΙΚΟΝΑ 2-5 : ΚΥΡΙΕΣ ΈΛΙΚΕΣ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟΥ.....	8
ΕΙΚΟΝΑ 2-6 : ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΠΤΕΡΥΓΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΆΝΩΣΗΣ	8
ΕΙΚΟΝΑ 2-7 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ	8
ΕΙΚΟΝΑ 2-8 : ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΙΚΟ.....	8
ΕΙΚΟΝΑ 2-9: ΣΕΡΒΟΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΈΛΕΓΧΟ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΛΙΚΩΝ	9
ΕΙΚΟΝΑ 2-10 : <i>AERIAL PHOTOGRAPHING</i>	10
ΕΙΚΟΝΑ 2-11: ΣΩΜΑΤΟΔΕΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ (B.E.) ΤΟΥ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟΥ	13
ΕΙΚΟΝΑ 2-12 : ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΠΟΥ ΕΠΕΝΕΡΓΟΥΝ ΣΤΟ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟ.....	16
ΕΙΚΟΝΑ 2-13 : ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΈΛΙΚΑΣ ΣΕ ΑΡΘΡΩΤΟ <i>ROTOR HUB</i>	17
ΕΙΚΟΝΑ 2-14 : ΤΟ <i>TIP PATH PLANE (TPP)</i> ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ	18
ΕΙΚΟΝΑ 2-15 : ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΙΑΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ	21
ΕΙΚΟΝΑ 2-16 : ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ <i>HOVER</i>	21
ΕΙΚΟΝΑ 2-17 : ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ <i>FORWARD FLIGHT</i>	21
ΕΙΚΟΝΑ 2-18 : ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ <i>HOVER</i> ΚΑΙ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΘΕΣΕΙΣ.....	22
ΕΙΚΟΝΑ 2-19 : ΕΠΙΠΕΔΟ ΡΟΤΟΡΑ ΣΤΟ <i>STREAM TUBE</i> ΓΙΑ ΤΟ <i>FORWARD FLIGHT</i>	23
ΕΙΚΟΝΑ 2-20 : <i>ROTOR TIP-PATH-PLANE AND HUB-PLANE</i>	40
ΕΙΚΟΝΑ 2-21 : ΔΟΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΩΝ ΜΙΚΡΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ	44
ΕΙΚΟΝΑ 2-22 : ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ <i>BELL MIXER</i>	46
ΕΙΚΟΝΑ 2-23 : ΔΟΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ <i>ACTIVE YAW DAMPING SYSTEM</i>	47
ΕΙΚΟΝΑ 2-24: ΔΟΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΕ <i>SIMULINK</i>	52
ΕΙΚΟΝΑ 2-25: ΕΙΣΟΔΟΙ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟ <i>YAMAHA R-50</i>	55
ΕΙΚΟΝΑ 2-26: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1)	56
ΕΙΚΟΝΑ 2-27: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2)	57
ΕΙΚΟΝΑ 2-28: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1)	58
ΕΙΚΟΝΑ 2-29: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2)	59
ΕΙΚΟΝΑ 2-30: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1).....	60
ΕΙΚΟΝΑ 2-31: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2).....	61

ΕΙΚΟΝΑ 2-32: ΕΙΣΟΔΟΙ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΟ YAMAHA R-50.....	62
ΕΙΚΟΝΑ 2-33: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ	63
ΕΙΚΟΝΑ 2-34: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1)	64
ΕΙΚΟΝΑ 2-35: ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟΥ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2)	65
ΕΙΚΟΝΑ 2-36: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1).....	66
ΕΙΚΟΝΑ 2-37: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2).....	67
ΕΙΚΟΝΑ 2-38: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (3).....	68
ΕΙΚΟΝΑ 2-39: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>PEDAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1)	69
ΕΙΚΟΝΑ 2-40: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>PEDAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2)	70
ΕΙΚΟΝΑ 2-41: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>PEDAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (3)	71
ΕΙΚΟΝΑ 2-42: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LATERAL INPUT</i> ΜΕ <i>FREQUENCY SWEEP</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1).....	72
ΕΙΚΟΝΑ 2-43: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LATERAL INPUT</i> ΜΕ <i>FREQUENCY SWEEP</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2).....	73
ΕΙΚΟΝΑ 2-46: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1)	77
ΕΙΚΟΝΑ 2-47: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2)	78
ΕΙΚΟΝΑ 2-48: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>COLLECTIVE INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (3)	79
ΕΙΚΟΝΑ 2-49: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1).....	80
ΕΙΚΟΝΑ 2-50: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LATERAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2).....	81
ΕΙΚΟΝΑ 2-51: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (1).....	82
ΕΙΚΟΝΑ 2-52: ΔΙΕΓΕΡΣΗ <i>LONGITUDINAL INPUT</i> ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ (2).....	83
ΕΙΚΟΝΑ 3-1 : <i>A160 HUMMINGBIRD UNMANNED ROTORCRAFT</i>	86
ΕΙΚΟΝΑ 3-2 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	88
ΕΙΚΟΝΑ 3-3 : ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	90
ΕΙΚΟΝΑ 3-4 : ΙΔΕΑΤΗ ΜΟΡΦΗ ΕΙΣΟΔΟΥ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ <i>FREQUENCY SWEEP</i>	101

1

Εισαγωγή

1.1 Μη-επανδρωμένα Οχήματα και Ρομποτική

Η έννοια της ρομποτικής και των οχημάτων μετρούν σχεδόν έναν αιώνα ύπαρξης, ενώ “ζωντανά” παραδείγματα αυτών πλέον βρίσκονται στην καθημερινότητά μας. Παρόλα αυτά, η έννοια και ανάπτυξη των μη-επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων και η σχέση αυτών με τη ρομποτική, είναι σχετικά πρόσφατη, αν και καταγεγραμμένα παραδείγματα παρόμοιων οχημάτων υπάρχουν από το 1916 με το “*Aerial Target*”. Επόμενο βήμα στην προσπάθεια ανάπτυξης και δημιουργίας τέτοιων οχημάτων έγινε κατά τη διάρκεια και μετά τον 1^ο Παγκόσμιο Πόλεμο, αλλά κυρίως κατά τη διάρκεια του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου. Η πρώτη παρουσίαση, όμως, της σημερινής μορφής των μοντέρνων μη-επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων (*modern UAVs*) έγινε μετά το τέλος του πολέμου «Γιομ Κιπούρ» από τους Ισραηλινούς. Παράλληλα, με τη σμίκρυνση και τη βελτίωση τεχνολογιών που εφαρμόζονται σε αυτά τα οχήματα, ο Αμερικάνικος στρατός έγινε ο βασικός ενδιαφερόμενος και για το λόγο αυτό βλέπουμε ευρεία χρήση των οχημάτων στις πολεμικές επιχειρήσεις της Αμερικής. Σύγχρονα παραδείγματα τέτοιων οχημάτων είναι τα *MQ-1 Predator*, *RQ-7 Shadow* και *A160 Hummingbird*.

Η ανάγκη για τα οχήματα αυτά, όπως φαίνεται και από την ιστορία της εξέλιξης αυτών, δημιουργήθηκε από τις πολεμικές επιχειρήσεις και εκπαίδευση, αφού αποτελούν ένα μέσο αναλώσιμο και χωρίς ανθρώπινες απώλειες. Στη σημερινή εποχή, όμως, οι δυνατότητές είναι μεγάλες και ως αποτέλεσμα η χρήση αυτών επεκτείνεται και σε τομείς αρκετά μακρινούς

από τη στρατιωτική βιομηχανία. Η χρήση των UAVs είναι πλέον για πολλούς ειρηνικούς σκοπούς και σχετίζεται τόσο με την πολιτική αεροπορία, δηλαδή μεταφορές εμπορευμάτων (*cargo*), όσο και με ερευνητικά ιδρύματα ή ερασιτεχνικά ενδιαφέροντα, δηλαδή για ανάπτυξη μοντέρνων αλγορίθμων ελέγχου για αυτόνομη πτήση και αεροφωτογραφία αντίστοιχα.



Εικόνα 1-1 : MQ-1 Predator



Εικόνα 1-2 : RQ-7 Shadow

Οι προαναφερθείσες, όμως, αποστολές των μη-επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων αποτελούν μόνο την αρχή μίας πορείας αναπόφευκτης για την αεροπορία, τόσο για την πολεμική όσο και για την πολιτική, καθώς η αποσύζευξη των πτήσεων από τον ανθρώπινο παράγοντα έχει να προσφέρει πολλά στον οικονομικό τομέα, στη μείωση του χρόνου των πτήσεων και του ανθρώπινου δυναμικού για τετριμμένες αποστολές. Κυρίως, όμως, η τεχνολογία αυτή αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση της ασφάλειας των πτήσεων, ώστε ο χώρος της αεροπλοΐας να εξελιχθεί και τα ιπτάμενα οχήματα να γίνουν τα ασφαλέστερα και πιο συνηθισμένα μέσα μεταφοράς.

1.2 Δυναμικά Μοντέλα Ελικοπτέρων Μικρού Μεγέθους

Για την αναγνώριση των δυνατοτήτων των οχημάτων που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς που έχουν ήδη αναφερθεί, ως μη-επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα, είναι απαραίτητη η εύρεση και ανάπτυξη των δυναμικών τους μοντέλων. Για το λόγο αυτό γίνεται παρουσίαση της διαδικασίας παρακάτω, αφού πρώτα καθορίσουμε το ρόλο των ελικοπτέρων μικρού μεγέθους.

1.2.1 Η χρησιμότητα των μικρού μεγέθους ελικοπτέρων

Ενώ τα πρώτα μη-επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα ήταν αεροπλάνα και η ανάπτυξη των σημερινών οχημάτων τέτοιου τύπου γίνεται σε αεροπλάνα (γενικότερα σε fixed-wing aircrafts), η έρευνα για μέγιστη αύξηση των δυνατοτήτων των UAVs επικεντρώνεται στα ελικόπτερα μικρού μεγέθους. Ο λόγος αυτής της “μεταστροφής” είναι οι πτητικές ικανότητες των ελικοπτέρων τόσο όσον αφορά στις καιρικές συνθήκες όσο και στο χώρο πτήσεως αυτών. Παρέχεται, δηλαδή, η δυνατότητα της αιώρησης και της επιτόπιας στροφής γύρω από τον κατακόρυφο άξονα των οχημάτων, ενώ σε περίπτωση αεροβατικών ελικοπτέρων υπάρχει και η δυνατότητα “ανάποδης” πτήσης.

Εξαιτίας των δυνατοτήτων των ελικοπτέρων οι αποστολές για τις οποίες αυτά προορίζονται ποικίλουν και μπορούν να εφαρμοστούν σε αστικό περιβάλλον, παρακολούθηση και έλεγχος κυκλοφορίας οχημάτων, και σε περιβάλλον άσχημων καιρικών συνθηκών και γεωφυσικών και τοπογραφικών χαρακτηριστικών, *search and rescue* αποστολές.

1.3 Αντικείμενο Διπλωματικής

Η πορεία της διαδικασίας για την ανάπτυξη ενός αυτόνομου μη-επανδρωμένου ιπτάμενου οχήματος είναι πολύπλοκη και χρονοβόρα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι για την επίτευξη του στόχου αυτού είναι υποχρεωτικός ο συνδυασμός πολλών διαφορετικών τεχνολογιών, κυρίως της σημερινής εποχής και όσο πιο ανεπτυγμένης γίνεται (*state-of-the-art*), αλλά και στις μακροχρόνιες δοκιμές ώστε το όχημα να είναι ικανό να πληρεί τις προϋποθέσεις που έχουν τεθεί.

Ένα από τα πρώτα βήματα της παραπάνω διαδικασίας είναι αυτό της εύρεσης του δυναμικού μοντέλου που περιγράφει ικανοποιητικά (δηλαδή ικανοποιεί τις απαιτήσεις των πτητικών αποστολών αλλά και των αλγορίθμων ελέγχου) τη συμπεριφορά του οχήματος που έχουμε στη διάθεσή μας. Το βήμα αυτό αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής και το όχημα για το οποίο είναι επιθυμητό να γίνει η εύρεση του δυναμικού μοντέλου είναι το ελικόπτερο μικρού μεγέθους. Έτσι, στην εργασία αυτή γίνεται η παρουσίαση μεθοδολογιών που χρησιμοποιούνται για την εύρεση και ανάπτυξη δυναμικών μοντέλων ελικοπτέρου μικρού μεγέθους.

Αρχικά, αναφέρονται στοιχεία διαφορετικών επιστημών/ ή και κατευθύνσεων (ηλεκτρολογία, μηχανολογία, ρομποτική, αεροδυναμική κ.α.) που είναι απαραίτητα για το στόχο που έχει τεθεί. Ακόμα, παρουσιάζονται τα βασικά μέρη του ελικοπτέρου, τα

περισσότερα από τα οποία λαμβάνουν μέρος στην ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου (*swashplate, flybar, servos, έλικες κ.α.*).

Έπειτα, γίνεται παρουσίαση των λειτουργικών απαιτήσεων, δηλαδή οι αποστολές για τις οποίες προορίζεται το ελικόπτερο (*search and rescue, aerial photographing, ανίχνευση βλαβών κ.α.*), ενώ προσδιορίζονται και οι καταστάσεις του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου, όπως είναι η αιώρηση (*hover*), η πτήση με σταθερή ταχύτητα και σε σταθερό ύψος (*steady flight cruise*) κ.α. . Έχοντας καθορίσει τις λειτουργικές απαιτήσεις αλλά και τις πτητικές ικανότητες του ελικοπτέρου, θέτουμε και τα όρια μέσα στα οποία πρέπει να κινείται το εκάστοτε εξαγόμενο δυναμικό μοντέλο.

Εν συνεχεία, γίνεται αναφορά των μεθόδων εύρεσης και ανάπτυξης των δυναμικών μοντέλων και το κεφάλαιο αυτό συνεχίζει στην αναλυτική παρουσίαση της σχεδίασης μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου πρώτου επιπέδου με χρήση των βασικών εξισώσεων από κάθε τομέα (π.χ. αεροδυναμικής, αεροελαστικότητας κ.α.). Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται παρουσίαση της μεθόδου εύρεσης γραμμικού δυναμικού μοντέλου μέσω της γραμμικοποίησης του κατάλληλου μη-γραμμικού μοντέλου. Εκτός από τη μέθοδο αυτή, παρουσιάζεται και η παραμετρική μοντελοποίηση με γραμμικό δυναμικό μοντέλο (*Lumped Parameter System*), η εύρεση του οποίου όμως γίνεται με τη βοήθεια της πειραματικής διαδικασίας της αναγνώρισης παραμέτρων.

Προχωρώντας, παρουσιάζεται η θεωρία που απαιτείται για την θεωρητική προσέγγιση αλλά και την πειραματική διαδικασία της γραμμικής αναγνώρισης παραμέτρων δυναμικού συστήματος. Επιπρόσθετα, δείχνονται ο σχεδιασμός κατάλληλων σημάτων εισόδων διέγερσης του συστήματος, έτσι ώστε να ληφθούν τα σωστά πειραματικά δεδομένα. Ακόμη, γίνεται αναφορά σε μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μη-γραμμική αναγνώριση παραμέτρων.

Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου για συγκεκριμένες εισόδους ελέγχου αυτού, ενώ για το *test case* αυτό χρησιμοποιούνται οι τιμές του ελικοπτέρου *MIT X-Cell 60 SE*.

Για την επίτευξη των παραπάνω έγινε χρήση του λειτουργικού προγράμματος *Microsoft Windows Vista – Home Edition* και η συγγραφή έγινε με το *Microsoft Office Word 2007*. Ακόμη, για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε το πακέτο *Mathworks Matlab R2009a*, ενώ για τη γραμμικοποίηση και τον χειρισμό των αναλυτικών εξισώσεων των μοντέλων χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό πακέτο *Wolfram Mathematica 7*.

2

Δυναμικό Μοντέλο Ελικοπτέρου

Στο σημείο αυτό γίνεται εκτενής παρουσίαση της ανάπτυξης του δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου μικρού μεγέθους. Αρχικά γίνεται μία αναφορά στο ελικόπτερο σαν σύστημα και μηχανολογική/αεροναυπηγική κατασκευή, καθώς και στη λειτουργία του. Έπειτα, ακολουθεί το βασικό μέρος του κεφαλαίου, δηλαδή η ανάλυση του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσεται το δυναμικό μοντέλο, τόσο το μη-γραμμικό όσο και το γραμμικό. Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα από την προσομοίωση των μοντέλων.

2.1 Θεωρία Ελικοπτέρου

Το ελικόπτερο αποτελεί μία ξεχωριστή και ιδιαίτερη κατασκευή και για τη δημιουργία αυτής απαιτείται ο συνδυασμός γνώσεων πολλών τεχνολογικών και επιστημονικών πεδίων. Για το λόγο αυτό αλλά και εξαιτίας της πολυπλοκότητας των επιμέρους μερών αυτού, το ελικόπτερο μπορεί να θεωρηθεί μία από τις δυσκολότερες σε κατανόηση και κατασκευή μηχανές που έχει δημιουργηθεί.

Παρόλα αυτά, τα ελικόπτερα μικρού μεγέθους, που προορίζονται για χρήση είτε αερομοντελισμού είτε ως μη επανδρωμένα οχήματα, έχουν ορισμένες απλοποιήσεις ως κατασκευές, χωρίς όμως να εξαλείφονται βασικές δυσκολίες που εμφανίζονται στα ελικόπτερα μεγάλου μεγέθους. Έτσι, εξαιτίας αυτής της πολυπλοκότητας, στο σημείο αυτό

αναφέρονται ορισμένα τμήματα από τα οποία αποτελείται ένα ελικόπτερο μικρού μεγέθους και γίνεται και μία παρουσίαση των χαρακτηριστικών “κλειδιών” στη λειτουργία αυτού.



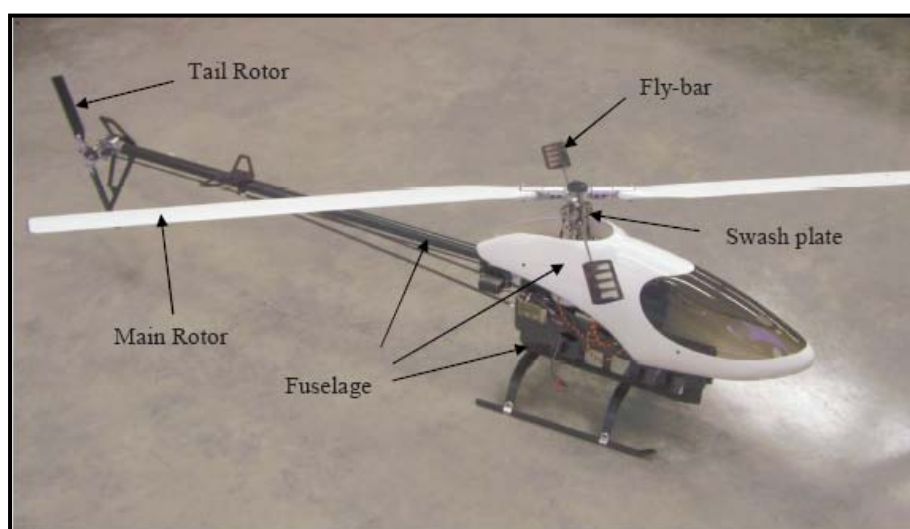
Εικόνα 2-2 : *Super Puma*



Εικόνα 2-1 : *Maxi Joker*

Αυτά είναι μέρη που σχετίζονται με τη μηχανολογία, τη ρομποτική, την αεροδυναμική, την ηλεκτρομηχανική κ.α. Ακόμη, για την ανάλυση της κίνησης του ελικοπτέρου στο χώρο απαιτούνται θεωρίες και πληροφορίες που σχετίζονται με την επιστήμη της γεωδαισίας.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται τα ορισμένα βασικά μέρη του ελικοπτέρου *Maxi Joker 2* που έχουμε στη διάθεσή μας.

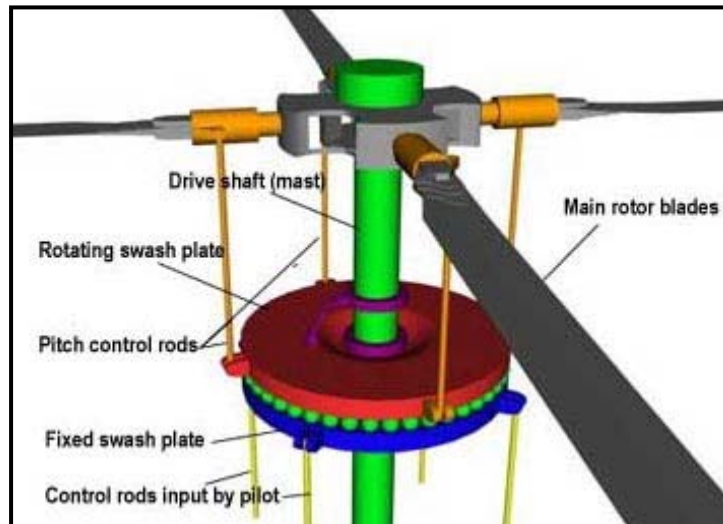


Εικόνα 2-3 : Βασικά Μέρη Ελικοπτέρου (*Maxi Joker 2*)

2.1.1 Μηχανικά και Ρομποτικά Μέρη

Τα βασικά μηχανικά και ρομποτικά μέρη που υπάρχουν σε ένα ελικόπτερο είναι αυτά που σχετίζονται με την μετάδοση της κίνησης από τον κινητήρα (μπορεί να είναι είτε ηλεκτροκινητήρας είτε κινητήρας ΜΕΚ) στις έλικες (οι έλικες θεωρούνται αεροδυναμικά

μέρη). Έτσι, τα μέρη αυτά είναι τα γρανάζια μετάδοσης της κίνησης, ο ιμάντας που μεταδίδει την κίνηση από τον κινητήρα στην ουραία έλικα και τέλος, αλλά σημαντικότερο, είναι το *swash plate*. Το *swash plate* είναι ο μηχανισμός αυτός που ευθύνεται για την όλη κίνηση του ελικοπτέρου, με 5 βαθμούς ελευθερίας (εκτός από το *yaw*), και στην πραγματικότητα μεταφέρει τις εντολές του πιλότου στην κύρια έλικα με σκοπό τον έλεγχο της γωνίας *pitch* της έλικας ως συνάρτηση τόσο των *control inputs* όσο και του αζιμούθιου του ρότορα. Εικόνα του περισσότερο διαδεδομένου τύπου *swash plate* φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2-4 : Μηχανισμός *Swash Plate*

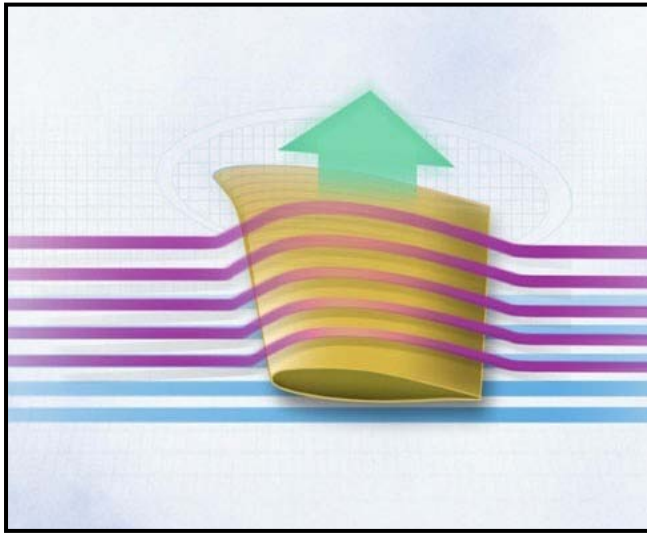
Ο μηχανισμός αυτός για την κινηματική του ανάλυση αντιμετωπίζεται ως ένας ρομποτικός μηχανισμός παράλληλων κινηματικών αλυσίδων.

Εκτός, όμως, από το *swash plate* ως ρομποτικό μέρος θεωρείται και το ίδιο το ελικόπτερο μικρού μεγέθους, καθώς στην πραγματικότητα αποτελεί μία μηχανή αυτόνομα κινούμενη στο χώρο, που για την κίνησή της προηγείται ένας προγραμματισμός τροχιάς βάσει των θεωριών της ρομποτικής. Για το λόγο αυτό υπάρχει και ο κλάδος των ιπτάμενων ρομποτών (*aerial robots*) στην οποία ανήκει και το ελικόπτερο μικρού μεγέθους.

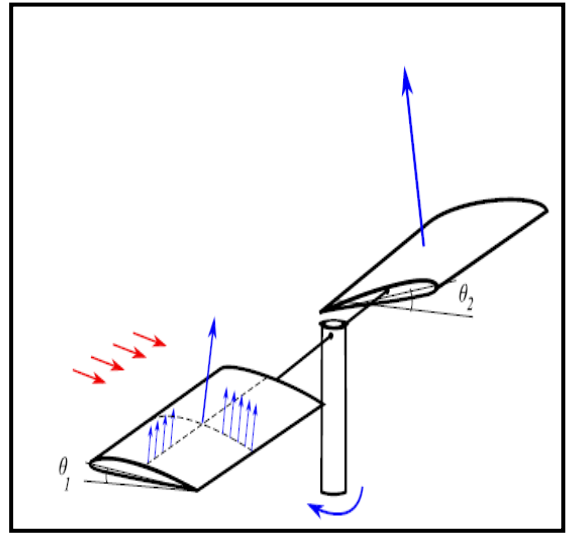
2.1.2 Αεροδυναμικά Μέρη

Το ελικόπτερο ως ιπτάμενο όχημα είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με την αεροδυναμική και πάνω σε αυτό υπάρχουν πολλά μέρη που, από τα βασικότερα για την κίνησή του, που σχετίζονται με αυτή, όπως είναι η κύρια και η ουραία έλικα, τα σταθεροποιητικά πτερύγια, καθώς και το κυρίως μέρος της ατράκτου που είναι αεροδυναμικά σχεδιασμένο σύμφωνα με τις απαιτήσεις. Συνεπώς, είναι κατανοητό πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η αεροδυναμική στη φάση του σχεδιασμού και της δυναμικής μοντελοποίησης ενός ελικοπτέρου.

Στην αριστερή παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η ροή γύρω από μία πτέρυγα, ενώ δεικνύεται και η άντωση που προκαλείται σε αυτή. Στη δεξιά εικόνα παρουσιάζονται οι έλικες του κύριου ρότορα του ελικοπτέρου, ενώ φαίνεται η κίνηση τους ως προς τον αέρα, η δύναμη που δέχονται, η γωνία *pitch* (θ_1 και θ_2), αλλά και η κίνηση του στροφείου.



Εικόνα 2-6 : Ροή γύρω από Πτέρυγα και Δύναμη Άνωσης



Εικόνα 2-5 : Κύριες Έλικες Ελικοπτέρου

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε και την ύπαρξη του *flybar* ή *stabilizer bar*, δηλαδή δύο σταθεροποιητικών πτερύγων σε άξονα 90° ως προς τον άξονα των κυρίων ελίκων (Σχήμα παραπάνω), αφού η συμβολή τους είναι μείζονος σημασίας για την πτητική ικανότητα ενός ελικοπτέρου. Είναι στην πραγματικότητα μία αερομηχανική ανάδραση και χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο σε ελικόπτερα μικρού μεγέθους.



Εικόνα 2-7 : Οριζόντιο Σταθεροποιητικό Πτερύγιο



Εικόνα 2-8 : Κάθετο Σταθεροποιητικό

2.1.3 Ηλεκτρομηχανικά & Ηλεκτρονικά Μέρη

Τα ηλεκτρομηχανικά και ηλεκτρονικά μέρη είναι αναπόσπαστα στοιχεία κάθε οχήματος. Ειδικά στην περίπτωση μικρού μεγέθους ελικοπτέρου το οποίο προορίζεται για αυτόνομη πτήση η ανάγκη και η παρουσία ηλεκτρομηχανικών και ηλεκτρονικών στοιχείων είναι ακόμα μεγαλύτερη, λόγω των αυξημένων απαιτήσεων. Έτσι, ορισμένα από τα μέρη αυτά είναι το *IMU (Inertial Measurement Unit)*, το οποίο περιέχει γυροσκόπια και επιταχυνσιόμετρα, το *GPS (Global Positioning System)*, οι σερβομηχανισμοί για την κίνηση της έλικας, ο κινητήρας και τέλος η κεντρική μονάδα επεξεργασίας των δεδομένων η οποία περιλαμβάνει ένα “μίνι” υπολογιστή για τη διαχείριση των δεδομένων από τους αισθητήρες και την επικοινωνία με το έδαφος ή άλλα οχήματα.



Εικόνα 2-9: Σερβομηχανισμός για τον Έλεγχο των Γωνιών των Ελίκων

Όλα τα μέρη που αναφέρονται παραπάνω είναι στοιχεία απαραίτητα για την πτήση του ελικοπτέρου τόσο ως αυτόνομου όσο και τηλεχειριζόμενου από κάποιον πιλότο. Έτσι, πολλά από αυτά υπάρχουν και στη συνέχεια κατά την ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου.

2.2 Αποστολή Ελικοπτέρου

Ο καθορισμός της αποστολής του ελικοπτέρου μικρού μεγέθους που παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό των πτητικών απαιτήσεων. Δηλαδή, ανάλογα με τον επιθυμητό ρόλο του ελικοπτέρου και τη λειτουργία που επιθυμούμε αυτό να διατελέσει θέτουμε και διαφορετικά δυναμικά χαρακτηριστικά και όρια στο ελικόπτερο. Επομένως, ο καθορισμός της αποστολής διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου του

ελικοπτέρου, αφού το μέσω του δυναμικού μοντέλου, αλλά και των ελεγκτών που σχεδιάζονται με βάση αυτό, μας δίδεται η δυνατότητα να μεταφράσουμε τις λειτουργικές μας επιθυμίες σε πράξη.

Η αποστολή κάθε ιπτάμενου οχήματος αποτελείται από τους γενικότερους στόχους που είναι επιθυμητό να επιτευχθούν, για παράδειγμα η αεροφωτογραφία, και από τις πτητικές απαιτήσεις του οχήματος. Οι απαιτήσεις αυτές αποτελούν το φάκελο πτήσης του ιπτάμενου οχήματος και, όπως γίνεται φανερό στη συνέχεια, αποτελούν μέρος της δυναμικής του αεροσκάφους.

Στο σημείο αυτό γίνεται παρουσίαση των γενικών αποστολών που είναι επιθυμητό να φέρει σε πέρας το μικρού μεγέθους μη-επανδρωμένο ελικόπτερο και έπειτα γίνεται ανάλυση του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου και αναφορά στους τρόπους με τους οποίους μπορεί να υπάρξει αντιμετώπιση και μαθηματική περιγραφή/μοντελοποίηση αυτών.

2.2.1 Επιθυμητές Αποστολές του Ελικοπτέρου

Τα ενδιαφέροντα του **Εργαστηρίου Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτου Ελέγχου** είναι πάντα για ειρηνικούς σκοπούς και οι προς επίτευξη αποστολές του ελικοπτέρου σχετίζονται με την πολιτική αεροπορία και άλλα ερευνητικά ενδιαφέροντα. Έτσι, έχουμε τις εξής αποστολές:

- **Αεροφωτογραφία (Aerial Photography) :**

Είναι κυρίως χόμπι, αλλά χρησιμοποιείται ευρέως για ερευνητικούς σκοπούς σε δύσβατες περιοχές αλλά και για τοπογραφικές μελέτες.

- **Αποστολές Διάσωσης :** Σε περιοχές με πυκνή βλάστηση ή περιοχές απρόσιτες για τη δορυφορική εικόνα η ύπαρξη αυτόνομου ελικοπτέρου μικρού μεγέθους αποτελεί μία εξαιρετική λύση, καθώς σε περιπτώσεις διάσωσης μπορεί να κινηθεί με μεγάλη ευκολία και ακρίβεια και να προσδιορίσει το σημείο στο οποίο υπάρχει πρόβλημα.



Εικόνα 2-10 : Aerial Photography

- **Αεροψεκασμός :** Ο αεροψεκασμός χρησιμοποιείται πολλά χρόνια στη γεωργία, αλλά ένα αυτόνομο ιπτάμενο όχημα, όπως ένα ελικόπτερο, μπορεί να προσφέρει μεγάλη ευκολία στην εξοικονόμηση χρόνου και στον καλύτερο ψεκασμό, αφού εξαφανίζεται ο ανθρώπινος παράγοντας.

-
- **Έλεγχος της Κυκλοφορίας** : Η ύπαρξη καμερών στους δρόμους των πόλεων για τον έλεγχο της κυκλοφορίας αποτελεί τη μοναδική λύση τα τελευταία χρόνια, αλλά η είσοδος των αυτόνομων ιπτάμενων οχημάτων, ειδικά των ελικοπτέρων εξαιτίας των εξαιρετικών ικανοτήτων πτήσης των, θα φέρει επανάσταση στον τομέα αυτό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο έλεγχος θα γίνεται από επιθυμητό κινούμενο σημείο και όχι από στατικό.
 - **Αυτοψία Εγκαταστάσεων** : Ο έλεγχος γραμμών ηλεκτροδότησης σε πυλώνες υψηλής τάσης αλλά και ο έλεγχος σε ανεμογεννήτριες θα γίνεται με μέσα υψηλής τεχνολογίας, όπως είναι τα αυτόνομα ελικόπτερα μικρού μεγέθους, αφού με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται μία επικίνδυνη για τον άνθρωπο εργασία, ενώ εξοικονομείται και πολύτιμος χρόνος.

2.2.2 Καταστάσεις Φακέλου Πτήσης

Έχοντας ήδη αναφέρει επιθυμητές λειτουργίες του ελικοπτέρου μπορούμε να δημιουργήσουμε μία εικόνα του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου. Μπορούμε δηλαδή να προσδιορίσουμε τις καταστάσεις πτήσεων στις οποίες πρέπει και μπορεί να εισέλθει το ελικόπτερο.

Από τη στιγμή που το ελικόπτερο μικρού μεγέθους είναι σκόπιμο να λαμβάνει μέρος σε αποστολές πολιτικής αεροπορίας δεν είναι απαραίτητες οι επιθετικές μανούβρες με μεγάλο βαθμό δυσκολίας (*aggressive maneuvering*). Συνεπώς, προσδιορίζουμε τις καταστάσεις του φακέλου πτήσης που είναι απαραίτητες για την επίτευξη των αποστολών και έχουμε:

- Απογείωση και κατακόρυφη ανοδική κίνηση (*Take-off & Ascend*)
- Προσγείωση και κατακόρυφη καθοδική κίνηση (*Land & Descend*)
- Οριζόντια κίνηση σε σταθερό ύψος (*Cruise Flight*)
- Οριζόντια κίνηση με αλλαγή διεύθυνσης (*Cruise Flight & Turn*)
- Οριζόντια κίνηση με ταυτόχρονη αλλαγή ύψους (*Cruise Flight & Altitude Change*)

Η επισήμανση των καταστάσεων του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου γίνεται, έτσι ώστε κατά τη φάση της ανάπτυξης του δυναμικού μοντέλου να είναι δυνατή η χρήση συγκεκριμένων θεωρήσεων και θεωριών της αερο-δυναμικής των ελικοπτέρων. Ακόμη, οι προσδιορισμένες αυτές καταστάσεις “δείχνουν” και τα σημεία ισορροπίας και γραμμικοποίησης του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου.

2.2.3 Διαθέσιμα Δυναμικά Μοντέλα

Η παραπάνω παρουσίαση των καταστάσεων του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου μας δίνει απαραίτητες πληροφορίες για τη φάση της μοντελοποίησης της δυναμικής, αφού

είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τι πρέπει να περιλαμβάνει το μοντέλο και τι βαθμό πιστότητας πρέπει να έχει. Έτσι, οι πτητικές καταστάσεις καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το εξαγόμενο δυναμικό μοντέλο.

Εκτός, όμως, από το ποια είναι ακριβώς τα χαρακτηριστικά που πρέπει να περιέχει το δυναμικό μοντέλο, οι καταστάσεις του φακέλου πτήσης φανερώνουν και τη πολυπλοκότητα αυτού, στην ουσία δηλαδή αν αυτό μπορεί να είναι μη-γραμμικό ή γραμμικό, καθώς και το πόσα σημεία ισορροπίας και γραμμικοποίησης πρέπει αυτό να περιέχει. Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα διαθέσιμα δυναμικά μοντέλα είναι τόσο μη-γραμμικά όσο και γραμμικά.

Τα μη-γραμμικά μοντέλα δημιουργούνται με τη διαδικασία της κατασκευής από το μηδέν με χρήση της μεθόδου *first principles modeling* (υπάρχουν στάδια μοντελοποίησης μετά το *first principles*, αλλά δεν είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν στο παρόν μοντέλο εξαιτίας της αναγκαιότητας αυτών, αλλά και της χρήσης των σε ελικόπτερα μεγάλου μεγέθους). Γίνεται, δηλαδή, χρήση βασικών θεωριών και εξισώσεων της αεροδυναμικής, της μηχανικής, της γεωδαισίας, της ρομποτικής και της αεροναυτικής, οι οποίες με κατάλληλο συνδυασμό δίνουν ένα πλήρες δυναμικό μοντέλο ελικοπτέρου.

Αντίθετα, τα γραμμικά δυναμικά μοντέλα δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν από το μηδέν και είναι πλήρως λειτουργικά, όπως συμβαίνει με τα μη-γραμμικά. Για το λόγο αυτό, τα γραμμικά μοντέλα προκύπτουν είτε μετά από κατάλληλη γραμμικοποίηση των διαθέσιμων μη-γραμμικών μοντέλων γύρω από τα επιθυμητά σημεία λειτουργίας είτε με μερική κατασκευή αυτών και έπειτα με χρήση της γραμμικής αναγνώρισης παραμέτρων.

2.3 Μη-γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο

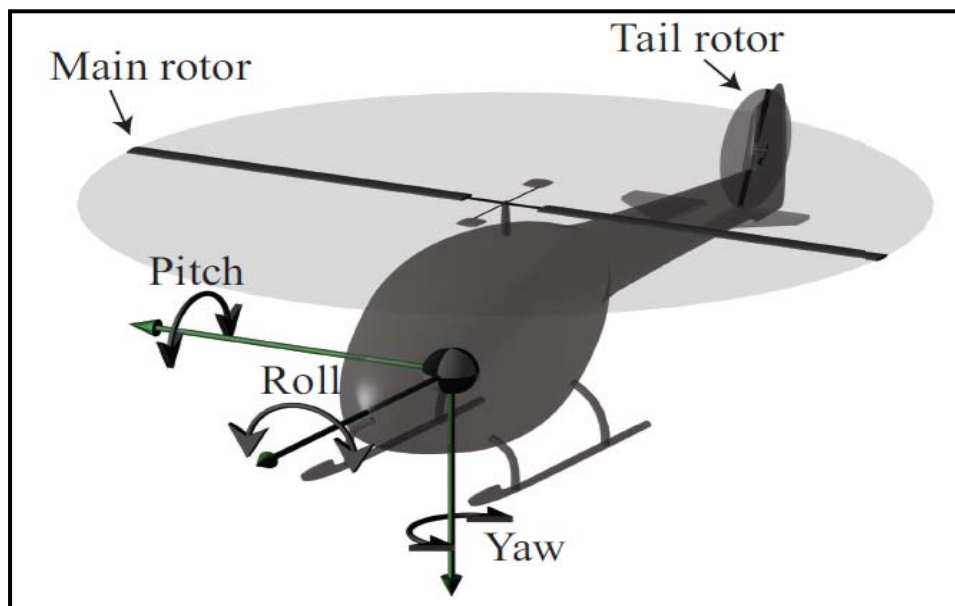
Ο βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η δημιουργία δυναμικών μοντέλων ενός ελικοπτέρου μικρού μεγέθους (διάμετρος κύριου ρότορα της τάξεως των 2 μέτρων), το οποίο να ικανό να πληρεί τις απαιτούμενες ανάγκες, δηλαδή τις καταστάσεις που έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο, και να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προσομοίωση αλλά και για ανάπτυξη κατάλληλων ελεγκτών. Έτσι, το 1^ο βήμα για την επίτευξη του στόχου αυτού είναι η ανάπτυξη του κατάλληλου μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου, λόγω της πληρέστερης φυσικής σημασίας και πιστότητας. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακέραιο σε πολλές καταστάσεις, ενώ μας δίνει τη δυνατότητα να προβούμε σε γραμμικοποίηση αυτού, άρα να αποκτήσουμε και γραμμικά μοντέλα.

Η ανάπτυξη του μη-γραμμικού μοντέλου στην παράγραφο αυτή ξεκινά από ένα γενικό σημείο και εξισώσεις, ενώ στην πορεία γίνεται ανάπτυξη των αρχικών εξισώσεων με βάση τις προαναφερθείσες θεωρίες και στο τέλος σύνδεση όλων αυτών.

2.3.1 Εξισώσεις Κίνησης Στερεού Σώματος

Η διαδικασία της μοντελοποίησης της μη-γραμμικής δυναμικής του ελικοπτέρου ξεκινά από το φυσικό σημείο εκκίνησης, δηλαδή από τις εξισώσεις στερεού σώματος. Επίσης, γίνεται στη φάση αυτή και η αναφορά στα συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται για τον προσανατολισμό του ελικοπτέρου.

Το ελικόπτερο είναι ένα όχημα που μπορεί παράλληλα να περιστραφεί και να κινηθεί ελεύθερα στο χώρο και έχει 6 β.ε. Οι εξισώσεις κίνησης τέτοιων οχημάτων (ή και σωμάτων) περιγράφονται με τη χρήση των εξισώσεων *Newton-Euler*. Πρώτα, όμως, αναφέρουμε τα δύο συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται. Αυτά είναι, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το σταθερό σύστημα αναφοράς στο χώρο (ένα σημείο στην επιφάνεια της γης) και το σωματόδετο σύστημα αναφοράς πάνω στο ελικόπτερο. Έτσι, στην εικόνα που ακολουθεί βλέπουμε το σωματόδετο σύστημα αναφοράς, το οποίο είναι τοποθετημένο στο κέντρο μάζας του ελικοπτέρου, και ταυτόχρονα δηλώνονται και οι ικανές κινήσεις (β.ε.) του ελικοπτέρου.



Εικόνα 2-11: Σωματόδετο Σύστημα Αναφοράς και Κινήσεις (β.ε.) του Ελικοπτέρου

Τώρα, σύμφωνα με τις εξισώσεις *Newton-Euler* εκφράζουμε τις εξισώσεις των κινήσεων ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (*inertial reference frame*) με χρήση της αρχής διατήρησης των δυνάμεων και ροπών. Έχουμε:

$$m \frac{d^1 \mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

και

$$I \frac{d^I \omega}{dt} = M \quad (2.2)$$

Έχοντας τις παραπάνω σχέσεις και με τη βοήθεια των θεωριών της κινηματικής κινούμενων συστημάτων αναφοράς εκφράζουμε τις εξισώσεις κίνησης του ελικοπτέρου (ως σωματόδετο σώμα πάντα) ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Έχουμε δηλαδή τις παρακάτω εξισώσεις:

$$m \dot{\mathbf{u}} + m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

και

$$I \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times I \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \quad (2.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν γενικά για τα στερεά σώματα. Ειδικότερα για την περίπτωση του ελικοπτέρου οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για 6 β.ε. είναι οι:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} * \mathbf{r} - \mathbf{w} * \mathbf{q} - \mathbf{g} * \sin\theta + \frac{X_{mr} + X_{fus}}{m} \quad (2.5)$$

$$(2) \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} * \mathbf{p} - \mathbf{u} * \mathbf{r} + \mathbf{g} * \sin\varphi * \cos\theta + \frac{Y_{mr} + Y_{fus} + Y_{tr} + Y_{vf}}{m} \quad (2.6)$$

$$(3) \quad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{u} * \mathbf{q} - \mathbf{v} * \mathbf{p} + \mathbf{g} * \cos\varphi * \cos\theta + \frac{Z_{mr} + Z_{fus} + Z_{ht}}{m} \quad (2.7)$$

$$(4) \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{q} * \mathbf{r} * \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{L_{mr} + L_{vf} + L_{tr}}{I_{xx}} \quad (2.8)$$

$$(5) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} * \mathbf{r} * \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} + \frac{M_{mr} + M_{ht}}{I_{yy}} \quad (2.9)$$

$$(6) \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{-Q_e + Q_{mr} + n_{tr} \cdot Q_{tr} N_{vf} + N_{tr}}{I_{zz}} \quad (2.10)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις έχει γίνει η θεώρηση ότι το κέντρο πίεσης της ατράκτου ταυτίζεται με το κέντρο βάρους και επομένως έχουν αμεληθεί οι αεροδυναμικές ροπές που προκύπτουν εξαιτίας αυτής. Επίσης, οι εξισώσεις της περιστροφικής κινηματικής έχουν προκύψει με χρήση της μεθοδολογίας των *quaternions*, ενώ για τον υπολογισμό των αδρανειακών ταχυτήτων χρησιμοποιείται μετασχηματισμός συντεταγμένων. Για το μετασχηματισμό αυτό χρησιμοποιείται θεωρία της γεωδαισίας στην αεροναυπηγική, πιο συγκεκριμένα γίνεται χρήση των *Flat Earth Equations*. Αυτό σημαίνει ότι η γη ως αδρανειακό σύστημα αναφοράς θεωρείται επίπεδη, αφού το όχημα κινείται σε μικρό εύρος, και αμελούνται η κεντρομόλος δύναμη, καθώς και οι επιδράσεις των δυνάμεων *Coriolis*.

Η γενική μορφή των εξισώσεων που έχουμε έως τώρα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή : $\dot{x} = f(x, \delta)$, όπου x το διάνυσμα που των καταστάσεων και δ το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου.

$$x = [u \ v \ w \ \varphi \ \vartheta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (2.11)$$

$$\delta = [\delta_{lat} \ \delta_{lon} \ \delta_{col} \ \delta_{ped}]^T \quad (2.12)$$

Στον παραπάνω u φαίνονται οι βασικές είσοδοι ελέγχου του ελικοπτέρου:

- $\delta_{lat}, \delta_{lon}$ είναι η εγκάρσια και η διαμήκης είσοδος ελέγχου αντίστοιχα
- δ_{col} είναι το *collective pitch control input*
- δ_{ped} είναι το *tail rotor collective pitch control input*

Ακόμα, πρέπει να αναφέρουμε τις γωνίες *Euler*, οι οποίες χρησιμοποιούνται για το γωνιακό προσανατολισμό των αεροσκαφών. Σύμφωνα με αυτή τη “μέθοδο”, οι γωνίες αυτές ακολουθούν μία συγκεκριμένη αλληλουχία περιστροφών γύρω από τους άξονες του αεροσκάφους και η αλληλουχία αυτή των περιστροφών είναι:

❖ Περιστροφή *yaw* (γωνία ψ γύρω από τον άξονα z), περιστροφή *pitch* (γωνία θ γύρω από το “νέο” άξονα y) και περιστροφή *roll* (γωνία φ γύρω από το “νέο” άξονα x).

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία κατασκευάζουμε τον πίνακα περιστροφής/μετασχηματισμού συντεταγμένων, ο οποίος συσχετίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου που δίνεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αυτές στο περιστρεφόμενο/σωματόδετο σύστημα αναφοράς:

$${}^b_iR = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi & s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\psi & s\varphi \cdot c\theta \\ c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi & c\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi & c\varphi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον πίνακα περιστροφής μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες της βαρυτικής έλξης σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στους σωματόδετους άξονες. Το διάνυσμα της βαρυτικής έλξης έχει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς την ακόλουθη μορφή: ${}^i g = [0 \ 0 \ g]^T$.

Έτσι, μετά το μετασχηματισμό έχουμε:

$${}^b g = {}^b_iR \cdot {}^i g = \begin{bmatrix} -g \cdot \sin\theta \\ g \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ g \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

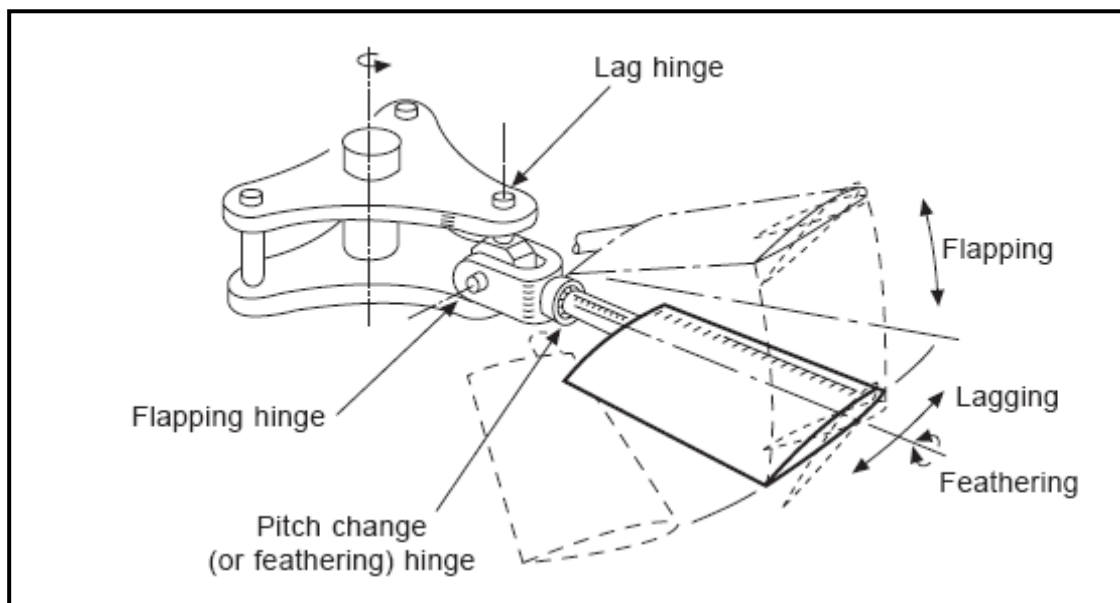
2.3.2 Δυναμική Flapping του Ρότορα

Προκειμένου να αυξήσουμε την “αξιοπιστία” του μοντέλου μας προσθέτουμε χαρακτηριστικά και άλλων δυναμικών συστημάτων, εκτός από αυτό του στερεού σώματος. Έτσι, το μοντέλο γίνεται ακριβέστερο και αποκτά και καλύτερη φυσική σημασία. Για το λόγο αυτό αναφερόμαστε στη δυναμική του ρότορα (συγκεκριμένα στη δυναμική του *flapping*).

Αρχικά, αναφέρουμε ότι η έλικα, εκτός από την περιστροφική κίνησή της (ταχύτητα Ω και αζιμουθιακή θέση/γωνία Ψ) μαζί με το *rotor-hub*, εκτελεί και άλλες τρεις (3) κινήσεις με 3 β.ε. :

- **Feathering** : η κίνηση της έλικας γύρω από το μήκος της και περιγράφεται με τη γωνία Θ (*blade pitch angle*)
- **Flapping** : η κίνηση της έλικας σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του δίσκου του ρότορα και περιγράφεται με τη γωνία β (*flapping angle*)
- **Lead-lagging** : η κίνηση της έλικας πάνω στο επίπεδο του δίσκου του ρότορα και περιγράφεται με τη γωνία ξ .

Οι 3 αυτές κινήσεις φαίνονται καθαρά στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 2-13 : Κινήσεις της Έλικας σε Αρθρωτό *Rotor Hub*

Πρέπει να αναφέρουμε, ότι οι κινήσεις αυτές μπορούν να γίνουν είτε με χρήση αρθρώσεων πάνω στο *rotor hub* (*articulated rotor* - όπως είναι και στο παραπάνω σχήμα) είτε με λυγισμό της έλικας έχοντας κατάλληλη διάταξη (*hingless rotor* - όπως είναι στα περισσότερα ελικόπτερα μικρού μεγέθους αλλά και σε αυτό του εργαστηρίου) είτε με συνδυασμό των δύο (*hybrid model*). Το σημαντικό, όμως, είναι ότι δημιουργείται μία σταθερά απόσβεσης, εξαιτίας αυτών των κινήσεων, γεγονός που επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική του ρότορα και του ελικοπτέρου γενικά.

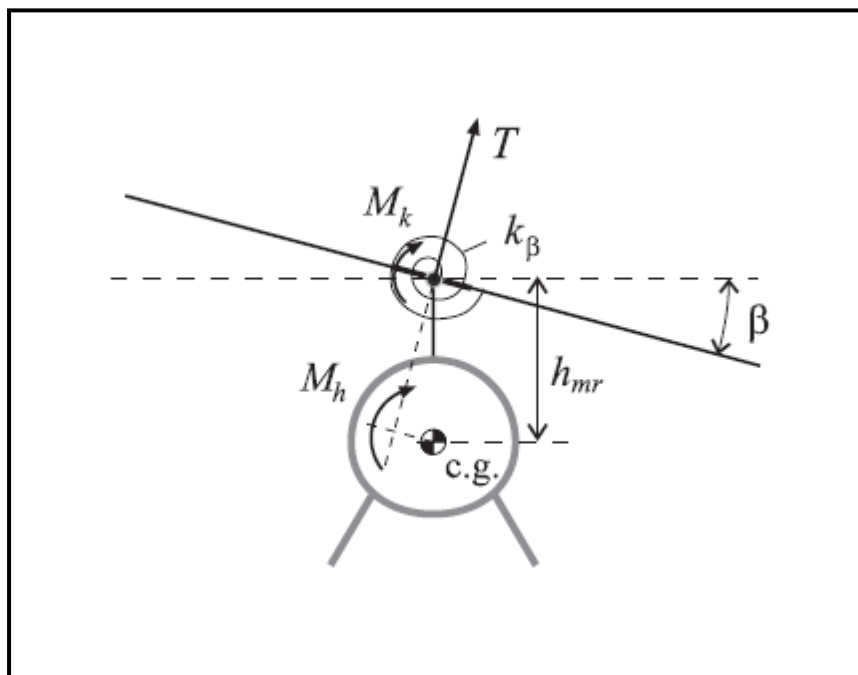
Οι προαναφερθείσες αυτές κινήσεις της έλικας διέπονται από δυναμικές εξισώσεις που παίζουν, ίσως απρόσμενα, ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην κίνηση του ελικοπτέρου.

Στη δική μας περίπτωση δεχόμαστε μία σημαντική παραδοχή και θεωρούμε τελικά την έλικα ως μία άκαμπτη δοκό προσαρμοσμένη στον άξονα περιστροφής και μοντελοποιείται μέσω της άρθρωσης για την κίνηση *flapping* στο κέντρο του *hub*, καθώς και με τη χρήση γραμμικού ελατηρίου-σπειρώματος με σταθερά k_β . Επομένως, μετά το λυγισμό αυτό των ελίκων του ρότορα δημιουργείται ένας νοητός κώνος καθώς αυτές περιστρέφονται. Ο ιδεατός αυτός κώνος έχει κορυφή το *rotor hub* και το περιφέρεια της βάσης του διαγράφεται από τα ακροπτερύγια των ελίκων, καθώς αυτές περιστρέφονται γύρω από τον άξονα z.

Η βάση του ιδεατού αυτού κώνου ονομάζεται *tip path plane*, και ορίζει ένα επίπεδο στο οποίο θεωρούμε ότι είναι πάντα κάθετη η παραγόμενη ώση από τον ρότορα. Ακόμη, ο ιδεατός κώνος είναι κεκλιμένος ως προς το οριζόντιο επίπεδο και στις 2 διαστάσεις του και σχηματίζει τη γωνία *flapping* α_1 με διαμήκη άξονα x και τη γωνία *flapping* b_1 με τον εγκάρσιο άξονα y. Οι παραπάνω γωνίες, όμως, εξαρτώνται από την αζιμουθιακή θέση του ρότορα, ενώ υπάρχει και η βασική γωνία *flapping* β . Η γωνία β δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\beta(\psi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\psi + b_1 \sin\psi \quad (2.16)$$

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η θεώρηση του ιδεατού κώνου αλλά και του *tip path plane* είναι “ζωτικής” σημασίας για τη δυναμική του ελικοπτέρου.



Εικόνα 2-14 : Το *Tip Path Plane* (TPP) και η Επίδρασή του

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω εικόνα, το *TPP* είναι υπεύθυνο για τις δυνάμεις του ρότορα στο διαμήκη και εγκάρσιο άξονα με ανάλυση της ώσης στους άξονες αυτούς.

Με αντίστοιχο βρίσκουμε και τη γωνία *flapping* του *stabilizer bar* και έχουμε:

$$\beta_s(\psi) = \alpha_{1s} \cos\psi + b_{1s} \sin\psi \quad (2.17)$$

Η γωνία αυτή μέσω ενός μηχανικού συνδέσμου “προσφέρει” αερομηχανική ανάδραση στη γωνία *pitch* της έλικας, η τιμή της οποίας τελικά δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\theta(\psi) = \theta_0 + \theta_{lon} \sin\psi + \theta_{lat} \cos\psi + k_s \beta_s \quad (2.18)$$

όπου k_s είναι η σταθερά/κέρδος της αερομηχανικής ανάδρασης με την οποία εισέρχεται το *flapping* του *stabilizer bar*.

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αναπτύγματα σειρών *Fourier*, ενώ η επίτευξη της αερομηχανικής ανάδρασης γίνεται μέσω του *swashplate*, του οποίου οι αποκλίσεις επιφέρουν μεταβολή στη γωνία *pitch* τόσο της κύριας έλικας όσο και του *stabilizer bar*.

Παρόλα αυτά, για την ικανοποιητική μοντελοποίηση της δυναμικής του ρότορα έχει αποδειχτεί ότι είναι αρκετές μόνο οι δύο γωνίες *flapping* του κύριου ρότορα και του *TPP*. Έτσι, έχουμε τις παρακάτω δυναμικές εξισώσεις για τη διαμήκη και εγκάρσια κίνηση κατά το *flapping* του ρότορα:

$$\dot{\alpha}_1 = -q - \frac{\alpha_1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_e} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} \frac{u - u_w}{\Omega_{mr} R_{mr}} + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_z} \frac{w - w_w}{\Omega_{mr} * R_{mr}} \right) + \frac{A_{\delta_{lon}}}{\tau_e} \delta_{lon} \right) \quad (2.19)$$

$$\dot{b}_1 = -p - \frac{b_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial b_1}{\partial \mu} \frac{v - v_w}{\Omega_{mr} R_{mr}} + \frac{B_{\delta_{lat}}}{\tau_e} \delta_{lat} \quad (2.20)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις η επίδραση του *flybar* (ή *stabilizer bar*) εισέρχεται μέσω της χρονικής σταθεράς τ_e και δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_e = \frac{16}{\gamma_{fb} \Omega} \quad (2.21)$$

όπου γ_{fb} είναι ο αριθμός *Lock* (*Lock Number*) για το *flybar*.

Ακόμα, για την κίνηση *flapping*, οι δυναμικές εξισώσεις της οποίας σχετίζονται με τους συντελεστές *Fourier* των εξισώσεων για τη γωνία *pitch* και *flap*, η απόσβεση έχει υπολογιστεί ότι ισούται με $\gamma/8$, όπου γ ο αριθμός *Lock* (αντιπροσωπεύει το λόγο των αεροδυναμικών δυνάμεων προς τις αδρανειακές δυνάμεις). Ο αριθμός *Lock* δίνεται από την σχέση:

$$\gamma = \frac{\rho c \alpha R^4}{I_\beta} \quad (2.22)$$

όπου I_β είναι η ροπή αδράνειας της έλικας για την κίνηση *flapping*.

2.3.3 Δυνάμεις και Ροπές στο Ελικόπτερο

Στην παράγραφο αυτή γίνεται αναλυτική παρουσίαση και περιγραφή των δυνάμεων και των ροπών που επενεργούν στο ελικόπτερο και έχουν προκύψει από τα βασικά αεροδυναμικά στοιχεία που βρίσκονται σε αυτό. Τα στοιχεία αυτά είναι:

- Ο κύριος ρότορας που ευθύνεται και για τις μεγαλύτερες δυνάμεις και ροπές.
- Ο ουραίος ρότορας που είναι υπεύθυνος κυρίως για τη σταθεροποίηση του ελικοπτέρου στον άξονα του z.
- Η άτρακτος που επηρεάζει σημαντικά την κίνηση εξαιτίας της επιφάνειάς της.
- Τα σταθεροποιητικά πτερύγια που, όπως υποδηλώνει και το όνομά τους, αναλαμβάνουν να σταθεροποιήσουν το ελικόπτερο κατά την κίνηση του, κυρίως με μεγάλες ταχύτητες.

2.3.3.1 Κύριος Ρότορας (Main Rotor)

Ο κύριος ρότορας, όπως είναι λογικό, είναι βασική συνιστώσα στην παραγωγή δυνάμεων και ροπών στο ελικόπτερο. Η δημιουργία, λοιπόν, των ροπών και των δυνάμεων αυτών οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του ρότορα γύρω από τον άξονα z του ελικοπτέρου αλλά και στη σχετική κίνηση των ελίκων του ρότορα ως προς τον αέρα. Η ουσιαστική, δηλαδή, αιτία εμφάνισης των δυνάμεων και ροπών είναι η αλληλεπίδραση των ελίκων, που έχουν κατάλληλη αεροδυναμική σχεδίαση, με τον περιβάλλοντα αέρα. Πριν, όμως, δώσουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα αεροδυναμικά και αερομηχανικά φαινόμενα είναι απαραίτητο να ορίσουμε ορισμένα βασικά μεγέθη. Έχουμε:

- Εκτός από τις σωματόδετες ταχύτητες του ελικοπτέρου υπάρχει και η **ταχύτητα του ανέμου** που επηρεάζει, σε μεγάλο βαθμό ορισμένες φορές, αεροδυναμικούς συντελεστές. $u_{wind}, v_{wind}, w_{wind}$ είναι οι 3 συνιστώσες της ταχύτητας του ανέμου στους 3 άξονες του ελικοπτέρου.
- **Στερεότητα (Solidity Ratio)** είναι ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό κάθε αεροτομής και ορίζεται ως:

$$\sigma = \frac{2c}{\pi R} \quad (2.23)$$

όπου c είναι η χορδή της αεροτομής και R η ακτίνα της έλικας.

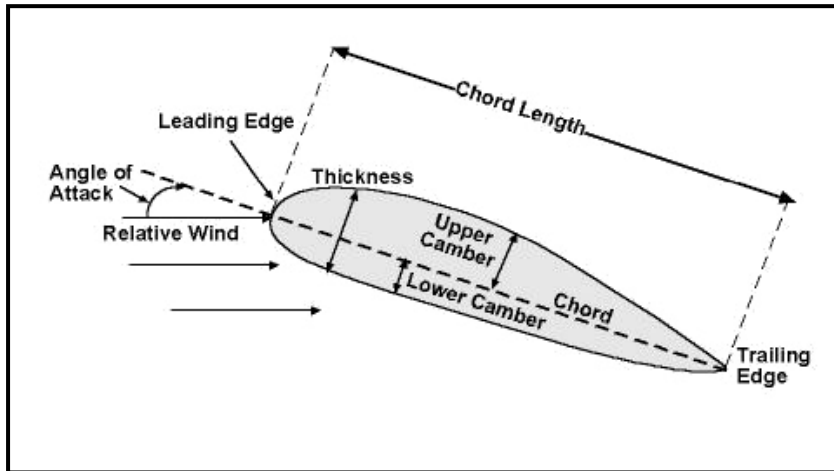
- Η γωνία *pitch* της αεροτομής ή γωνία *collective* για το ελικόπτερο, είναι η γωνία θ .
- *Lift Curve Slope*, α , είναι ο συντελεστής που δείχνει πώς μεταβάλλεται ο συντελεστής άνωσης C_L της αεροτομής ως συνάρτηση της γωνίας *pitch*.
- η_w είναι ο συντελεστής μη-ιδεατής συστολής του ομόρου.
- T είναι η ώση που δημιουργεί ο ρότορας.
- μ είναι το *advance ratio* και δίνεται από τον τύπο:

$$\mu = \frac{\sqrt{(u - u_{wind})^2 + (v - v_{wind})^2}}{\Omega R} \quad (2.24)$$

- Αντίστοιχα, αλλά για τον άξονα z, έχουμε την κάθετη συνιστώσα του *airflow*, μ_z . Δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

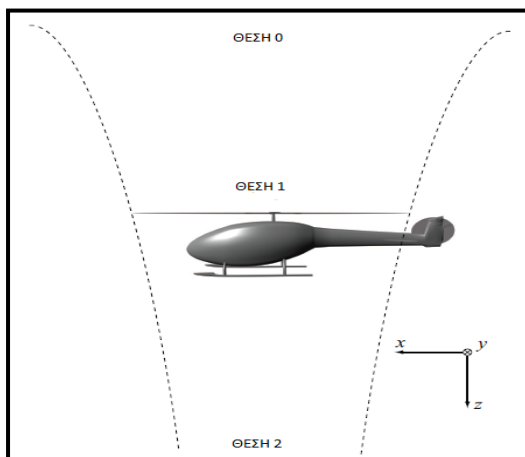
$$\mu_z = \frac{w - w_{wind}}{\Omega R} \quad (2.25)$$

Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνονται τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη μίας αεροτομής.

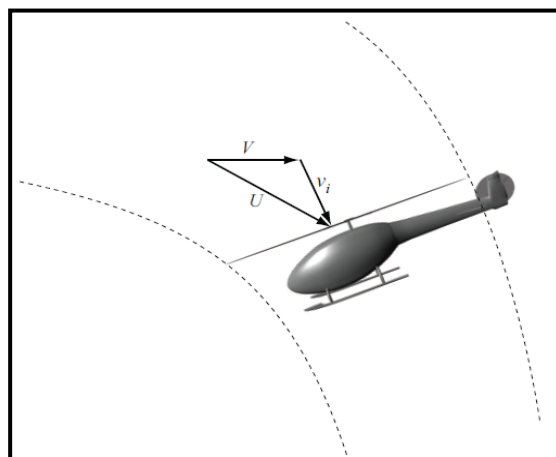


Εικόνα 2-15 : Βασικά Μεγέθη μίας Αεροτομής

Ένα ακόμα πολύ βασικό, αεροδυναμικό, μέγεθος είναι η επαγόμενη ταχύτητα, V_{imr} , και σχετίζεται με το αεροδυναμικό “φαινόμενο της εισροής αέρα από το ρότορα” (*Rotor Inflow*). Το μέγεθος αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς συμβάλλει στον προσδιορισμό της παραγόμενης ώσης και ροπής από το ρότορα σε κάθε στιγμή. Ακόμη, είναι ένα μέγεθος ο υπολογισμός του οποίου σχετίζεται με την αρχή διατήρησης της μάζας του αέρα που διέρχεται μέσα της νοητής επιφάνειας του ρότορα (*Rotor Disc*). Στις εικόνες που ακολουθούν βλέπουμε το ελικόπτερο σε *hover* και *forward flight*, ενώ φαίνεται και η σχετική θέση του ρότορα και του διερχόμενου από αυτόν αέρα.

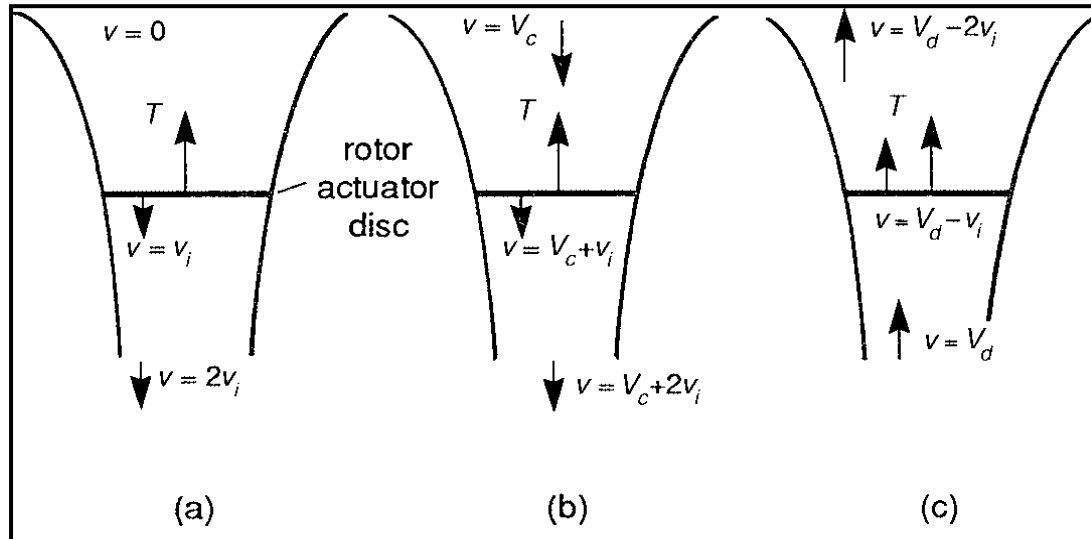


Εικόνα 2-16 : Κατάσταση *Hover*



Εικόνα 2-17 : Κατάσταση *Forward Flight*

Ξεκινώντας από την κατάσταση *hover*, με σκοπό να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα και για τις υπόλοιπες καταστάσεις, παραθέτουμε και το επόμενο σχεδιάγραμμα που είναι αρκετά λεπτομερές, ώστε να γίνουν οι κατάλληλες παρατηρήσεις.



Εικόνα 2-18 : Κατάσταση *Hover* και Επισήμανση των Ταχυτήτων στις Διάφορες Θέσεις

Η παροχή μάζας του αέρα, \dot{m} , διαμέσου της επιφάνειας του ρότορα, A_d , δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{m} = \rho A_d (V_c + V_{imr}) \quad (2.26)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης διατήρησης της ορμής και της ενέργειας για τη μάζα του διερχόμενου αέρα από το ρότορα μπορούμε να γράψουμε για την ώση του ρότορα την παρακάτω σχέση που εξαρτάται μόνο από μεγέθη στο σημείο του ρότορα (ΘΕΣΗ 1):

$$T = 2 \rho A_d (V_c + V_{imr}) V_{imr} \quad (2.27)$$

Ακόμη, αδιαστατοποιούμε την επαγόμενη ταχύτητα και γράφουμε:

$$\lambda_{imr} \text{ (ή διαφορετικά } - \lambda_0) = \frac{V_{imr}}{\Omega R} \quad (2.28)$$

Το $\lambda_{imr}(\lambda_0)$ ονομάζεται *inflow ratio* και είναι επίσης ιδιαίτερα σημαντικός συντελεστής. Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε μεταβολή καθ' ύψος του ελικοπτέρου, το *inflow ratio* γράφεται και με τη βοήθεια του συντελεστή ώσης του ρότορα (*Thrust Coefficient*), C_T :

$$\lambda_{ihover} = \sqrt{\frac{C_T}{2}} \quad (2.29)$$

Όπου
$$C_T = \frac{T}{\Omega^2 R^2 \rho A_d} \quad (2.30).$$

Με τον ίδιο τρόπο επεκτείνουμε τη θεωρία για την αλλαγή ύψους στην κατάσταση *hover*. Έτσι, εξάγουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για το *inflow ratio* για το *climb*:

$$\lambda_{imr} = \frac{C_T}{2(\mu + \lambda_{imr})} \quad (2.31)$$

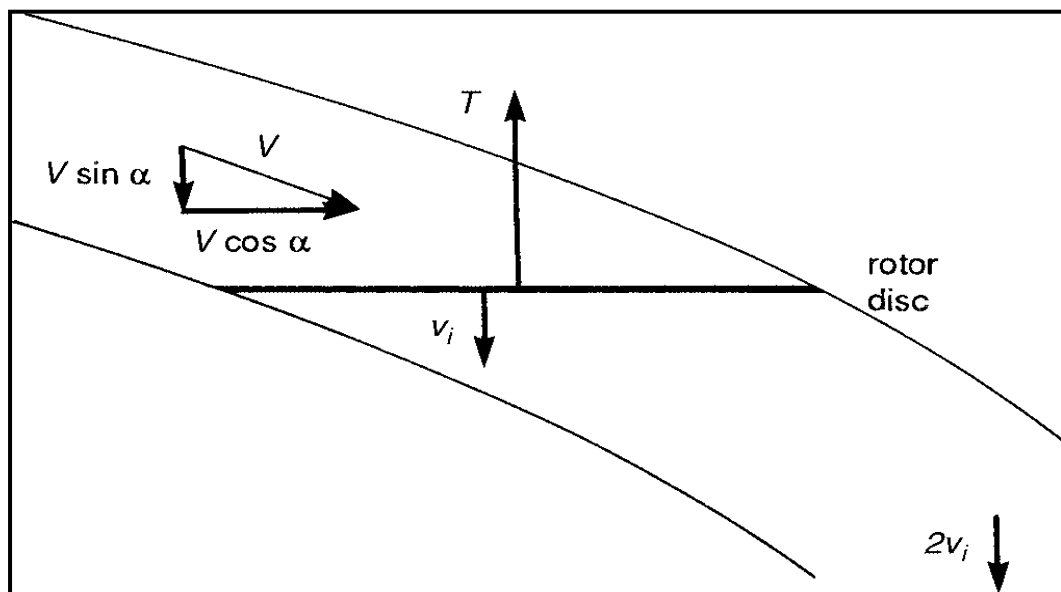
ή

$$\lambda_{imr} = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \lambda_{ihover}^2\right]} \quad (2.32)$$

Ενώ για το *descend* έχουμε:

$$\lambda_{imr} = \frac{\mu}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \lambda_{ihover}^2\right]} \quad (2.33)$$

Αφού έχουμε αναλύσει την κατάσταση της εισροής μάζας αέρα για την κατάσταση του *hover*, στο σημείο αυτό γενικεύουμε τη θεωρία για το *forward flight* και γενικά για όλο σχεδόν το φάκελο πτήσης του ελικοπτερου. Ξανά, παραθέτουμε λεπτομερές σχεδιάγραμμα, στο οποίο φαίνονται οι τα διανύσματα των ταχυτήτων και της ώσης του ρότορα, καθώς και ο ιδεατός “σωλήνας” (*stream tube*) στον οποίο βρίσκεται το ελικόπτερο.



Εικόνα 2-19 : Επίπεδο Ρότορα στο *Stream tube* για το *Forward Flight*

Η διαφορά στο *forward flight* είναι ότι το διάνυσμα της ταχύτητας του “αναρροφούμενου” από το ρότορα αέρα δεν είναι κάθετο στο επίπεδο του ρότορα. Έτσι, υπάρχουν διαφορές κατά τον υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας V_{imr} . Όπως και στην περίπτωση του *hover*, έτσι και για την παρούσα περίπτωση χρησιμοποιούμε τις αρχές διατήρησης της μάζας και της

ορμής. Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του *inflow ratio* και παρουσιάζεται στη συνέχεια:

$$\lambda_{imr} = \frac{C_T}{2\sqrt{(\mu^2 + (\lambda_{imr} - \mu_z)^2)}} \quad (2.34)$$

Για τον κύριο ρότορα θεωρούμε ότι η ροή αέρα (*main rotor inflow*) είναι σταθερή και ομοιόμορφη και η χρονική σταθερά ισορρόπησης του *inflow* για την κατάσταση *hover* είναι:

$$\tau_\lambda = \frac{0.849}{4 \lambda_{ihover} \Omega} \quad (2.35)$$

Η θεωρία που έχει χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων είναι ακριβής μόνο για τις περιπτώσεις σταθερής κατάστασης και όχι για τις περιπτώσεις αλλαγής κατάστασης, π.χ. για τη μετάβαση από το *hover* στο *forward flight*. Επομένως, επειδή μας ενδιαφέρει το δυναμικό μοντέλο να έχει τη δυνατότητα να περιγράψει ολόκληρο το φάκελο πτήσης του ελικοπτέρου και επειδή υπάρχει μη-αναλυτική σχέση, επιλυμένη πλήρως αλγεβρικά, μεταξύ του *inflow* και της ώσης, χρησιμοποιούμε επαναληπτικό αλγόριθμο για την εύρεση των αερο-δυναμικών μεγεθών του ρότορα που μας ενδιαφέρουν σε κάθε στιγμή κατά την πτήση του ελικοπτέρου. Οι εξισώσεις που απαιτούνται δίνονται εδώ και ο αλγόριθμος παρουσιάζεται αμέσως μετά και έχει προταθεί από τον *Gareth D. Padfield* ([5], σελ. 124) :

- Βρίσκουμε μία αρχική τιμή για το C_T μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$C_T = \frac{T}{\rho (\Omega R)^2 \pi R^2} \quad (2.36)$$

και δίνοντας μία αρχική τιμή στο T λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες πτήσης του ελικοπτέρου (Μπορούμε να ξεκινήσουμε ορίζοντας ως τιμή εκκίνησης για τη σύγκλιση του αλγορίθμου $T = m g$)

- Στη συνέχεια υπολογίζουμε το *inflow ratio* - λ_0 από τη σχέση:

$$\lambda_0 = \frac{C_T}{\eta_w (\sqrt{\mu^2 + (\lambda_0 - \mu_z)^2})} \quad (2.37)$$

όπου στην παραπάνω σχέση στο λ_0 δίνεται μία τιμή εκκίνησης, η οποία υπολογίζεται και είναι $\lambda_0 = \frac{V_{imr0}}{V_{tip}^{mr}}$ όπου $V_{imr0} = \sqrt{\frac{m g}{2 \rho \pi R_{mr}^2}}$. Ακόμη, η_w είναι ο συντελεστής μη-ιδεατής συστολής του ομόρου (*coefficient of non-ideal wake contraction*) .

- Υπολογίζουμε στο σημείο αυτό ξανά το συντελεστή ώσης C_T μέσω μίας σχέσης για το θεωρητικό προσδιορισμό αυτής. Επομένως έχουμε:

$$C_T^{ideal} = \frac{a_{mr} \sigma_{mr}}{2} \left(\delta_{col} \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2} \right) + \frac{\mu_Z - \lambda_0}{2} \right) \quad (2.38)$$

Στον παραπάνω τύπο έχουμε $\delta_{col} = \theta_0$ (δηλαδή τον έλεγχο της γωνίας για το *collective pitch* της κύριας έλικας) και a_{mr} είναι ο συντελεστής *lift curve slope* της κύριας έλικας.

- Τέλος, βρίσκουμε τον σωστό συντελεστή C_T με χρήση του ακόλουθου κριτηρίου:

$$C_T = \begin{cases} C_T^{ideal}, & \text{εάν } -C_T^{max} \leq C_T^{ideal} \leq C_T^{max} \\ -C_T^{max}, & \text{εάν } C_T^{ideal} < -C_T^{max} \\ C_T^{max}, & \text{εάν } C_T^{ideal} > C_T^{max} \end{cases} \quad (2.39)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$C_T^{max} = \frac{T^{max}}{\rho (\Omega R)^2 \pi R^2} \quad (2.40)$$

και ορίζεται $T^{max} = 2.5 \cdot m \cdot g$

Για τον επαναληπτικό αλγόριθμο ορίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις g_0 και Λ ως εξής:

$$g_0 = \lambda_0 - \frac{C_T}{2 \eta_w \Lambda^{1/2}} \quad (2.41)$$

$$\Lambda = \mu^2 + (\lambda_0 - \mu_Z)^2 \quad (2.42)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το αλγεβρικό επαναληπτικό σχήμα *Newton* για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\lambda_{0,j+1} = \lambda_{0,j} + f_j \cdot h_j(\lambda_{0,j}) \quad (2.43)$$

$$h_j = -\left(\frac{g_0}{dg_0/d\lambda_0} \right)_{\lambda_0=\lambda_{0,j}} \quad (2.44)$$

Και η h_j μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως εξής:

$$h_j = -\frac{\left(2 \eta_w \lambda_{0,j} \Lambda^{1/2} - C_T \right) \Lambda}{2 \eta_w \Lambda^{3/2} + \frac{a \cdot \sigma}{4} \Lambda - C_T (\mu_Z - \lambda_{0,j})} \quad (2.45)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο συντελεστής f_j εισάγεται για καλύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Στο σημείο αυτό, έχοντας παρουσιάσει τους αλγορίθμους υπολογισμού των βασικών αεροδυναμικών μεγεθών και όχι μόνο, είμαστε σε θέση να περάσουμε στην παρουσίαση των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των δυνάμεων και των ροπών που προκύπτουν από το ρότορα.

Για τον συντελεστή ροπής C_Q έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$C_Q = C_T (\lambda_0 - \mu_z) + \frac{C_{D_0} \sigma}{8} \left(1 + \frac{7}{3} \mu^2 \right) \quad (2.46)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει τον συντελεστή ροπής, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και την παραγόμενη ροπή Q_{mr} από το ρότορα:

$$Q_{mr} = C_Q \rho \Omega^2 \pi R^5 \quad (2.47)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο συντελεστής C_{D_0} είναι ο συντελεστής αντίστασης της έλικας για μηδενική άνωση.

Πλέον, στο σημείο αυτό, και αφού είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε τα αεροδυναμικά μεγέθη αλλά τη ροπή από τον κύριο ρότορα, μπορούμε να προβούμε στον υπολογισμό των δυνάμεων $F = [X \ Y \ Z]^T$ και των ροπών $M = [L \ M \ N]^T$ που οφείλονται στην περιστροφική κίνηση του κύριου ρότορα.

Για τη συνολική ροπή *roll* από τον κύριο ρότορα ισχύει:

$$L_{mr} = (K_\beta + T h_{mr}) b_1 \quad (2.48)$$

και για τη συνολική ροπή *pitch* από τον κύριο ρότορα ισχύει:

$$M_{mr} = (K_\beta + T h_{mr}) \alpha_1 \quad (2.49)$$

όπου K_β είναι η σταθερά του “ελατηρίου” με τη βοήθεια του οποίου έχουμε μοντελοποίηση την κίνηση *flapping* του ρότορα και h_{mr} είναι η απόσταση του κέντρου βάρους του ελικοπτέρου από το οριζόντιο επίπεδο (στην πραγματικότητα είναι το σημείο που βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής του ρότορα και στο επίπεδο σύνδεσης των ελίκων με το *rotor hub*). Τα μεγέθη αυτά φαίνονται και στο παραπάνω σχήμα (*Εικόνα 2-14*).

Οι δυνάμεις που προκύπτουν από τον κύριο ρότορα είναι οι ακόλουθες:

$$X_{mr} = -T_{mr} \alpha_1 \quad (2.50)$$

$$Y_{mr} = T_{mr} b_1 \quad (2.51)$$

$$Z_{mr} = -T_{mr} \quad (2.52)$$

2.3.3.2 Ουραίος Ρότορας (*Tail Rotor*)

Ο υπολογισμός των δυνάμεων και των ροπών στο ελικόπτερο εξαιτίας του ουραίου ρότορα, αν και ακολουθεί παρόμοια πορεία με αυτή για τον κύριο ρότορα, είναι σχετικά πιο πολύπλοκος. Αυτό οφείλεται στον υπολογισμό των αεροδυναμικών μεγεθών του ουραίου ρότορα, αφού αυτός αναγκάζεται να αλληλεπιδρά σε κάποιες περιπτώσεις με τον ομόρου του κύριου ρότορα. Επομένως, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν στον κύριο ρότορα αλλά ανάλογα και με τις ταχύτητες πτήσης του ελικοπτέρου ο υπολογισμός των αεροδυναμικών μεγεθών στον ουραίο ρότορα παίρνει διαφορετική τροπή.

Πριν προβούμε στον υπολογισμό των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών και μεγεθών που σχετίζονται με τον ουραίο ρότορα, δηλαδή στην απαγόμενη ταχύτητα του ουραίου ρότορα V_{itr} , στο *inflow ratio* λ_{itr} και στην παραγόμενη ώση από τον ουραίο ρότορα T_{tr} , εξετάζουμε κατά πόσο βρίσκεται η ουραία έλικα μέσα στον ομόρου (*wake*) του κύριου ρότορα. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε είναι απαραίτητη η γνώση ενός ακριβούς μοντέλου προσδιορισμού του ομόρου, ενώ απαιτούνται και ορισμένοι γεωμετρικοί συντελεστές.

Σε πρώτη φάση ορίζουμε έναν συντελεστή K_λ (*wake intensity factor*) που καθορίζει την ένταση του ομόρου του κύριου ρότορα. Έπειτα, υπολογίζουμε τις τιμές ακόλουθες παραμέτρους:

$$g_i = \frac{l_{tr} - R_{mr} - R_{tr}}{htr} \quad (2.53)$$

$$g_f = \frac{l_{tr} - R_{mr} + R_{tr}}{htr} \quad (2.54)$$

Οι παράμετροι αυτές σχετίζονται με τη γεωμετρία του ελικοπτέρου, ενώ l_{tr} είναι η απόσταση του *hub* του ουραίου ρότορα πίσω από το κέντρο βάρους του ελικοπτέρου και htr είναι η απόσταση του *hub* του ουραίου ρότορα πάνω από το κέντρο βάρους του ελικοπτέρου. Τώρα είμαστε σε θέση να καθορίσουμε εάν η ουραία έλικα βρίσκεται στον ομόρου της κύριας έλικας. Έχουμε:

– Η ουραία έλικα βρίσκεται εκτός του *downwash* εάν:

- i. $V_{imr} \leq w_a$ ή
- ii. $\frac{u_a}{V_{imr} - w_a} \leq g_i$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $K_\lambda = 0$

– Η ουραία έλικα βρίσκεται πλήρως μέσα στο *downwash* εάν:

$$\frac{u_a}{V_{imr} - w_a} \geq g_f \quad (2.55)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $K_\lambda = 1.5$

– Η ουραία έλικα βρίσκεται μερικώς στο *downwash* σε κάθε άλλη περίπτωση και τότε έχουμε:

$$K_\lambda = 1.5 \frac{\frac{u_a}{V_{imr} - w_a} - g_i}{g_f - g_i} \quad (2.56)$$

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε δηλαδή μία γραμμική αύξηση του K_λ με την εμπρόσθια ταχύτητα.

Στις παραπάνω εξισώσεις εμφανίζονται οι διαφορές των ταχυτήτων του αέρα από αυτές της μεταφορικής κίνησης του ελικοπτέρου. Έχουμε, έτσι, για όλες τις ταχύτητες:

$$u_a = u - u_w \quad (2.57)$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \mathbf{v}_w \quad (2.58)$$

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w} - \mathbf{w}_w \quad (2.59)$$

Ακόμα, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και το *advance ratio*, μ_{tr} , και την κάθετη συνιστώσα του *inflow* στον ουραίο ρότορα, μ_{ztr} . Επειδή, όμως, ο ουραίος ρότορας έχει περιστραφεί κατά 90° , σε σχέση με τον κύριο ρότορα, στον άξονα x του ελικοπτέρου, πρέπει να υπολογίσουμε και τις συνιστώσες της ταχύτητας του αέρα που να συνάδουν με την περιστροφή αυτή. Άρα, έχουμε:

$$\mathbf{u}_{tr} = \mathbf{u}_a - \mathbf{l}_{tr} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{h}_{tr} \cdot \mathbf{p} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{w}_{tr} = \mathbf{w}_a + \mathbf{l}_{tr} \cdot \mathbf{q} - K_\lambda \cdot V_{imr} \quad (2.61)$$

και τώρα υπολογίζουμε τα μ_{tr} και μ_{ztr} :

$$\mu_{tr} = \frac{\sqrt{u_a^2 + w_{tr}^2}}{\Omega_{tr} R_{tr}} \quad (2.62)$$

$$\mu_{ztr} = \frac{u_{tr}}{\Omega_{tr} R_{tr}} \quad (2.63)$$

Έχοντας όλες τις τιμές που μας είναι απαραίτητες μπορούμε στο σημείο αυτό να υπολογίσουμε τα βασικά αεροδυναμικά μεγέθη στον ουραίο ρότορα. Για την εύρεση των μεγεθών αυτών χρησιμοποιούμε τον ίδιο επαναληπτικό αλγόριθμο με αυτόν του κύριου ρότορα και παρουσιάζεται στη συνέχεια.

- Βρίσκουμε μία αρχική τιμή για το C_T μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$C_{Ttr} = \frac{T_{tr}}{\rho (\Omega_{tr} R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2} \quad (2.64)$$

και δίνοντας μία αρχική τιμή στο T λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες πτήσης του ελικοπτέρου. Για τον ουραίο ρότορα η διαδικασία εύρεσης του T_{tr} διαφοροποιείται από αυτή του κύριου ρότορα και για την εύρεσή του ολοκληρώνεται η διαφορική εξίσωση του μεγέθους της αεροδυναμικής άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου για μία μέση τιμή του *tail collective pitch*, δηλαδή:

$$dL = \frac{\rho}{2} U^2 C_{La}^{tr} \delta_{ped} c_{tr} dr \quad (2.65)$$

όπου C_{La}^{tr} ο συντελεστής άνωσης του ουραίου πτερυγίου και U η γραμμική ταχύτητα περιστροφής της ουραίας έλικας ($U = \Omega_{tr} R_{tr}$).

- Στη συνέχεια υπολογίζουμε το *inflow ratio* - λ_0 από τη σχέση:

$$\lambda_{0tr} = \frac{C_{Ttr}}{\eta_w (\sqrt{\mu_{tr}^2 + (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr})^2})} \quad (2.66)$$

όπου στην παραπάνω σχέση στο λ_0 δίνεται μία τιμή εκκίνησης, η οποία υπολογίζεται και

$$\text{είναι } \lambda_{0tr} = \frac{V_{itr0}}{V_{tr}^{tip}} \text{ όπου } V_{itr0} = \sqrt{\frac{T_{tr}}{2 \rho \pi R_{tr}^2}}.$$

- Υπολογίζουμε στο σημείο αυτό ξανά το συντελεστή ώσης C_{Ttr} μέσω μίας σχέσης για το θεωρητικό προσδιορισμό αυτής. Επομένως έχουμε:

$$C_{Ttr}^{ideal} = \frac{a_{tr} \sigma_{tr}}{2} (\delta_{ped} \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_{tr}^2}{2} \right) + \frac{\mu_{ztr} - \lambda_{0tr}}{2}) \quad (2.67)$$

Στον παραπάνω τύπο έχουμε $\delta_{ped} = \theta_{0tr}$ (δηλαδή τον έλεγχο της γωνίας για το *collective pitch* της ουραίας έλικας) και a_{tr} είναι ο συντελεστής *lift curve slope* της ουραίας έλικας.

- Τέλος, βρίσκουμε τον σωστό συντελεστή C_{Ttr} με χρήση του ακόλουθου κριτηρίου:

$$C_{Ttr} = \begin{cases} C_{Ttr}^{ideal}, & \text{εάν } -C_{Ttr}^{max} \leq C_{Ttr}^{ideal} \leq C_{Ttr}^{max} \\ -C_{Ttr}^{max}, & \text{εάν } C_{Ttr}^{ideal} < -C_{Ttr}^{max} \\ C_{Ttr}^{max}, & \text{εάν } C_{Ttr}^{ideal} > C_{Ttr}^{max} \end{cases} \quad (2.68)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$C_{Ttr}^{max} = \frac{T_{tr}^{max}}{\rho (\Omega_{tr} R_{tr})^2 \pi R_{tr}^2} \quad (2.69)$$

και ορίζεται το T_{tr}^{max} μέσω της σχέσης (2.65) για τη μέγιστη δυνατή γωνία ελέγχου του *collective pitch* της ουραίας έλικας.

Για τον συντελεστή ροπής C_{Qtr} έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$C_{Qtr} = C_{Ttr} (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr}) + \frac{C_{D0} \sigma_{tr}}{8} \left(1 + \frac{7}{3} \mu_{tr}^2 \right) \quad (2.70)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει τον συντελεστή ροπής, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και την παραγόμενη ροπή Q_{tr} από το ρότορα:

$$Q_{tr} = C_{Qtr} \rho \Omega_{tr}^2 \pi R_{tr}^5 \quad (2.71)$$

Έχοντας υπολογίσει τα αεροδυναμικά μεγέθη και στον ουραίο ρότορα είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε και τις δυνάμεις και ροπές που αυτός επιβάλλει στο ελικόπτερο.

Αρχίζοντας, αναφέρουμε ότι η δύναμη που ασκείται στο ελικόπτερο από την ουραία έλικα είναι:

$$Y_{tr} = T_{tr} \quad (2.72)$$

Όσον αφορά στις δημιουργούμενες ροπές, έχουμε για το *yaw* και το *roll* αντίστοιχα:

$$N_{tr} = -Y_{tr} \cdot l_{tr} \quad (2.73)$$

$$L_{tr} = Y_{tr} \cdot l_{tr} \quad (2.74)$$

2.3.3.3 Επίδραση της Ατράκτου στην Αεροδυναμική του Ελικοπτέρου

Η άτρακτος εξαιτίας της επιφάνειάς της επιδρά σημαντικά στην αερο-δυναμική του ελικοπτέρου. Για το λόγο αυτό είμαστε υποχρεωμένοι, προκειμένου να έχουμε ένα μοντέλο με μεγάλη ακρίβεια και πιστότητα, να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που ασκεί η άτρακτος στο ελικόπτερο (το ελικόπτερο σε σύστημα στο χώρο και οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο βάρους). Έτσι, μπορούμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά τις δυνάμεις από τις επιφάνειες της ατράκτου με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$X_{fus} = -0.5 \rho S_x^{fus} u_a V_\infty \quad (2.75)$$

$$Y_{fus} = -0.5 \rho S_y^{fus} v_a V_\infty \quad (2.76)$$

$$Z_{fus} = -0.5 \rho S_z^{fus} (w_a + V_{imr}) V_\infty \quad (2.77)$$

$$\text{όπου} \quad V_\infty = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + (w_a + V_{imr})^2} \quad (2.78)$$

Οι παράμετροι S_x^{fus} , S_y^{fus} και S_z^{fus} είναι οι “αποδοτικές” επιφάνειες στις οποίες οφείλεται το *drag* της ατράκτου και είναι για την εμπρόσθια, πλάγια και πάνω επιφάνεια της ατράκτου αντίστοιχα.

2.3.3.4 Κάθετο Σταθεροποιητικό Πτερύγιο

Το κάθετο σταθεροποιητικό πτερύγιο παράγει και αυτό δυνάμεις και ροπές που επηρεάζουν το ελικόπτερο, καθώς αυτό δρα σαν μία αεροδυναμική πτέρυγα ενώ έχει και υπολογίσιμη επιφάνεια στο συνολικό αερο-δυναμικό σχεδιασμό.

Η εγκάρσια δύναμη που προκαλείται (στον άξονα y του ελικοπτέρου δηλαδή) δίνεται από τον τύπο:

$$Y_{vf} = -0.5 \rho S_{vf} \left(C_{La}^{vf} \cdot V_\infty^{tr} + |v_{vf}| \right) v_{vf} \quad (2.79)$$

όπου S_{vf} είναι η “αποδοτική” επιφάνεια του πτερυγίου, C_{La}^{vf} ο συντελεστής άνωσης του πτερυγίου και V_∞^{tr} η αξονική ταχύτητα στο σημείο του *hub* του ουραίου ρότορα. Ακόμη, v_{vf} είναι η πλάγια σχετικά με τον αέρα ταχύτητα στο σημείο του κάθετου πτερυγίου και δίνεται από τη σχέση:

$$v_{vf} = v_a - \epsilon_{vf}^{tr} \cdot V_{itr} - l_{tr} \cdot r \quad (2.80)$$

Επίσης, ϵ_{vf}^{tr} είναι ένας ποσοστιαίος δείκτης που λέει πόσο μέρος του κάθετου πτερυγίου βρίσκεται μέσα στη ροή της επαγόμενης ταχύτητας από την ουραία έλικα. Εκτός αυτού, για να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση της απώλειας στήριξης (*stall*) του κάθετου

σταθεροποιητικού πτερυγίου θέτουμε την παρακάτω συνθήκη για την πλευρική δύναμη που αυτό ασκεί:

$$|Y_{vf}| \leq 0.5 \rho S_{vf} ((V_{\infty}^{tr})^2 + v_{vf}^2) \quad (2.81)$$

Τέλος, οι προκύπτουσες ροπές στο *yaw* και το *roll* εξαιτίας του κάθετου σταθεροποιητικού πτερυγίου είναι οι:

$$N_{vf} = -Y_{vf} \cdot l_{tr} \quad (2.82)$$

$$L_{vf} = Y_{vf} \cdot h_{tr} \quad (2.83)$$

2.3.3.5 Οριζόντιο Σταθεροποιητικό Πτερύγιο

Όπως το κάθετο σταθεροποιητικό πτερύγιο χρησιμεύει για τη βελτίωση της συμπεριφοράς του ελικοπτέρου στο *yaw* (αν και υπάρχει επίδραση και στο *roll*), έτσι το οριζόντιο πτερύγιο ενισχύει τη σταθερότητα στο *pitching* του ελικοπτέρου.

Πρώτα υπολογίζουμε την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο του οριζόντιου σταθεροποιητικού πτερυγίου. Έχουμε λοιπόν:

$$w_{ht} = w_a + l_{ht} \cdot q - K_{\lambda} \cdot V_{imr} \quad (2.84)$$

όπου l_{ht} η απόσταση του οριζόντιου πτερυγίου πίσω από το κέντρο μάζας του ελικοπτέρου.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την κάθετη δύναμη που προκύπτει στο οριζόντιο πτερύγιο εξαιτίας της ροής του αέρα γύρω από αυτό και έχουμε:

$$Z_{ht} = 0.5 \rho S_{ht} (C_{La}^{ht} \cdot |u_a| \cdot w_{ht} + |w_{ht}| \cdot w_{ht}) \quad (2.85)$$

C_{La}^{ht} είναι ο συντελεστής άνωσης του οριζόντιου πτερυγίου και S_{ht} η σταθεροποιητική του επιφάνεια, ενώ όπως και στην περίπτωση του κάθετου πτερυγίου συμπεριλαμβάνουμε την περίπτωση της απώλειας στήριξης με το κριτήριο:

$$|Z_{ht}| \leq 0.5 \rho S_{ht} (u_a^2 + w_{ht}^2) \quad (2.86)$$

Τέλος, η ροπή που συνυπολογίζεται στο *pitching* του ελικοπτέρου είναι:

$$M_{ht} = Z_{ht} \cdot l_{ht} \quad (2.87)$$

2.4 Γραμμικά Δυναμικά Μοντέλα

Η διαδικασία ανάπτυξης δυναμικού μοντέλου κατάλληλο για ελικόπτερο μικρού μεγέθους συνεχίζεται στο σημείο αυτό με τα γραμμικά δυναμικά μοντέλα. Το βήμα αυτό αποτελεί, τις περισσότερες φορές, φυσική και λογική συνέχεια μετά την ανάπτυξη ενός μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου. Παρόλα αυτά, όπως παρουσιάζεται και στη συνέχεια μπορεί να υπάρξει και η μοντελοποίηση με τη χρήση της αναγνώρισης παραμέτρων, η οποία ακολουθεί πορεία διαφορετική από τη γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού συστήματος. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη διαδικασία ανάπτυξης γραμμικού δυναμικού μοντέλου με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη είναι με γραμμικοποίηση του υπάρχοντος μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου και η δεύτερη είναι με χρήση της πειραματικής διαδικασίας της αναγνώρισης παραμέτρων.

2.4.1 Γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο μέσω Γραμμικοποίησης

Στο σημείο αυτό, και αφού έχουμε παρουσιάσει το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο για μικρού μεγέθους ελικόπτερο, παρουσιάζουμε την εξαγωγή του γραμμικού δυναμικού μοντέλου με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Γίνεται, δηλαδή, η ανάλυση της μεθόδου με την οποία γραμμικοποιούμε το μη-γραμμικό μοντέλο που έχουμε στη διάθεσή μας, ενώ παρουσιάζονται και τα σημεία ισορροπίας γύρω από τα οποία μπορούμε να/και κάνουμε τη γραμμικοποίηση αυτή.

Το σύστημα των μη-γραμμικών εξισώσεων (μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο) αποτελείται από τις εξισώσεις που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο που προηγήθηκε και στη συνέχεια δείχνεται η διαδικασία της γραμμικοποίησης.

2.4.1.1 Γραμμικοποίηση

Το σύστημα των μη-γραμμικών εξισώσεων έχει τη γενική μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \quad (2.88)$$

όπου \mathbf{t} ο χρόνος, \mathbf{x} το διάνυσμα των καταστάσεων και $\boldsymbol{\delta}$ το διάνυσμα των εισόδων. Ακόμη:

$$\mathbf{f}: \mathbf{R} \times \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ και } \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{R}^m$$

Εάν $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ είναι μία λύση του παραπάνω συστήματος για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbf{R}$ και καθορίζεται για την αρχική συνθήκη \mathbf{x}_0 και τη συγκεκριμένη/δοσμένη συνάρτηση $\boldsymbol{\psi} \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$, τότε μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε το παραπάνω σύστημα με την ακόλουθη διαδικασία.

Ορίζουμε $\delta x = x - \varphi(t)$ και $\delta u = u - \psi(t)$. Έπειτα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\delta x)}{dt} &= \delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{\varphi}(t) = f(t, x, u) - f(t, \varphi(t), \psi(t)) \\ &= f(t, \delta x + \varphi(t), \delta u + \psi(t)) - f(t, \varphi(t), \psi(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), \psi(t))\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \varphi(t), \psi(t))\delta u + F_1(t, \delta x, u) + F_2(t, \delta u) \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

όπου $F_1(t, \delta x, u) = f(t, \delta x + \varphi(t), u) - f(t, \varphi(t), u) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), \psi(t))\delta x$

και $F_2(t, \delta u) = f(t, \varphi(t), \delta u + \psi(t)) - f(t, \varphi(t), \psi(t)) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, \varphi(t), \psi(t))\delta u$

ενώ $(\partial f / \partial x)(\cdot)$ και $(\partial f / \partial u)(\cdot)$ είναι τα μητρώα *Jacobian* ως προς το x και το u αντίστοιχα. Ορίζουμε ακόμα:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), \psi(t)) = A(t) \text{ και } \frac{\partial f}{\partial u}(t, \varphi(t), \psi(t)) = B(t) \text{ και επομένως έχουμε:}$$

$$\dot{z} = A(t) \cdot z + B(t) \cdot v \quad (2.90)$$

Η εξίσωση (x.x) αποτελεί τη γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού συστήματος (x.x) και είναι μία, ποιοτική κυρίως, προσέγγιση του μη-γραμμικού μοντέλου με μία γραμμική συνάρτηση στη δοσμένη περιοχή του φ και ψ .

2.4.1.2 Σημεία Γραμμικοποίησης

Η διαδικασία της γραμμικοποίησης για την ανάπτυξη του γραμμικού δυναμικού μοντέλου του εκάστοτε συστήματος αποτελεί ένα απαιτητικό σημείο αναλυτικού, αφού περιλαμβάνει τον χειρισμό των εξισώσεων που σχηματίζουν το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο. Παρόλα αυτά, ρόλο “κλειδί” στη διαδικασία της ανάπτυξης του γραμμικού δυναμικού μοντέλου παίζει ο προσδιορισμός των σημείων ισορροπίας γύρω από τα οποία γίνεται η γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού συστήματος. Δηλαδή, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις καταστάσεις του εκάστοτε συστήματος κατά τις οποίες η δυναμική μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά με τη βοήθεια γραμμικών συναρτήσεων.

Στην περίπτωση των ιπτάμενων οχημάτων, ειδικά των ελικοπτέρων, η διαδικασία εύρεσης των σημείων γραμμικοποίησης είναι ιδιαίτερα δύσκολη, αφού τα συστήματα αυτά είναι σε μεγάλο βαθμό μη-γραμμικά και η δυναμική αυτών αλλάζει σημαντικά από μία κατάσταση πτήσης σε μία άλλη. Σε αυτό παίζει ρόλο και η κατάσταση του περιβάλλοντος, όπως είναι το ύψος πτήσης και ο άνεμος.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχει γίνει αναφορά στις καταστάσεις που είναι απαραίτητες για την επιθυμητή λειτουργικότητα του ελικοπτέρου. Αυτές είναι:

- i. Αιώρηση (*Hover*)
- ii. Απογείωση και αύξηση ύψους πτήσης (*Take-off & Ascend*)
- iii. Προσγείωση και μείωση ύψους πτήσης (*Land & Descend*)
- iv. Πτήση σε σταθερό ύψος με σταθερή ταχύτητα (*Cruise*)

Οι παραπάνω καταστάσεις μπορούν να συνδυαστούν και έτσι αποκτούμε τα σημεία γραμμικοποίησης γύρω από τα οποία γίνεται η εξαγωγή των γραμμικών δυναμικών μοντέλων. Ακόμη, επειδή η ταχύτητα πτήσης είναι ξεχωριστής σημασίας, για κάθε κατάσταση αποκτούμε ένα γενικό γραμμικό μοντέλο οι παράμετροι του οποίου μεταβάλλονται ανάλογα με την ταχύτητα πτήσης (*gain scheduling*).

Κάποια από τα σημεία γραμμικοποίησης είναι (πρέπει να τονισθεί ότι ως σημείο γραμμικοποίησης ορίζεται η σταθερή εκείνη κατάσταση του συστήματος γύρω από την οποία υπάρχει κίνηση αυτού και μας ενδιαφέρει να προσεγγίσουμε με γραμμικό δυναμικό μοντέλο):

A. *Hover-Ascend-Descend*

B. *Cruise & Altitude change*

C. *Cruise & Direction change*

Έτσι, έχοντας αναφέρει τις 3 παραπάνω καταστάσεις τις οποίες θέλουμε να προσεγγίσουμε, στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε τη γενική μορφή του γραμμικού συστήματος, δηλαδή των μητρώων κατάστασης και εισόδων, όπως αυτό παρουσιάζεται στις καταστάσεις αυτές.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{b} \\ r_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_v & X_w & 0 & X_q & X_r & 0 & X_\theta & 0 & X_\alpha & 0 & 0 \\ Y_u & Y_v & Y_w & Y_p & Y_q & Y_r & Y_\phi & Y_\theta & 0 & 0 & Y_b & 0 \\ Z_u & Z_v & Z_w & Z_p & Z_r & 0 & Z_\phi & Z_\theta & 0 & Z_\alpha & Z_b & 0 \\ L_u & L_v & L_w & L_p & L_q & L_r & 0 & 0 & 0 & 0 & L_b & 0 \\ M_u & M_v & M_w & M_p & M_q & M_r & 0 & 0 & 0 & M_\alpha & 0 & 0 \\ N_u & N_v & N_w & N_p & N_q & N_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{r_{fb}} \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_p & \Phi_q & \Phi_r & \Phi_\phi & \Phi_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_q & \Theta_r & \Theta_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_q & \Psi_r & \Psi_\phi & \Psi_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_u & A_v & A_w & 0 & A_q & 0 & 0 & 0 & 0 & A_\alpha & 0 & 0 \\ B_u & B_v & 0 & B_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{r_{fb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \alpha \\ b \\ r_{fb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_{col}} & 0 & 0 & 0 \\ Y_{\delta_{col}} & 0 & 0 & Y_{\delta_{ped}} \\ Z_{\delta_{col}} & 0 & 0 & 0 \\ L_{\delta_{col}} & 0 & 0 & L_{\delta_{ped}} \\ M_{\delta_{col}} & 0 & 0 & M_{\delta_{ped}} \\ N_{\delta_{col}} & 0 & 0 & N_{\delta_{ped}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\delta_{lon}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{\delta_{lat}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{col} \\ \delta_{lon} \\ \delta_{lat} \\ \delta_{ped} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται το μητρώο κατάστασης ονομάζονται παράγωγοι ευστάθειας (*stability derivatives*) και τα στοιχεία που απαρτίζουν το μητρώο εισόδων ονομάζονται παράγωγοι ελέγχου (*control derivatives*). Τιμές των παραγώγων για την κατάσταση του *hover*, καθώς και οι αναλυτικές σχέσεις από τις οποίες αυτές προέρχονται παρουσιάζονται στο Παράρτημα.

2.4.2 Γραμμικό Δυναμικό Μοντέλο μέσω Αναγνώρισης Παραμέτρων

Η διαδικασία ανάπτυξης γραμμικού δυναμικού μοντέλου μέσω αναγνώρισης παραμέτρων, σε αντίθεση με την προηγούμενη διαδικασία της γραμμικοποίησης, στηρίζεται σε πειράματα προκειμένου να βρούμε το μοντέλο μας με μία ανάστροφη διαδικασία. Μετράμε, δηλαδή, τις εισόδους και τις εξόδους του συστήματός μας και μέσω μιας κατάλληλης “αντιστροφής” του μοντέλου βρίσκουμε τις παραμέτρους αυτού (η διαδικασία της αναγνώρισης παραμέτρων περιγράφεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο).

Πριν από την πειραματική διαδικασία της κατάλληλης διέγερσης του συστήματος και της αναγνώρισης των παραμέτρων, είναι απαραίτητη η παρουσίαση ορισμένων βασικών εξισώσεων που διέπουν τη δυναμική του συστήματός μας. Ακόμη, οι εξισώσεις αυτές θα δεχτούν και μία γραμμικοποίηση, όχι όμως στο βαθμό της προηγούμενης διαδικασίας γραμμικοποίησης.

Για τη δημιουργία του μοντέλου η διαδικασία που ακολουθείται γίνεται με τρόπο που να ξεετάζεται κάθε δυναμικό σύστημα του ελικοπτέρου ξεχωριστά και στο τέλος γίνεται σύνθεση όλων των επιμέρους συστημάτων. Εν συνεχεία, δίνουμε στο συνολικό σύστημα τη μορφή που επιθυμούμε, για να μπορεί να προσαρμοστεί στην πειραματική διαδικασία και τελικά να γίνει αναγνώριση των παραμέτρων αυτού.

Τα επιμέρους δυναμικά συστήματα που θεωρούμε, ότι πρέπει να ληφθούν υπόψη στο συνολικό δυναμικό μοντέλο (στη συγκεκριμένη περίπτωση το δυναμικό μοντέλο προορίζεται για χρήση στην κατάσταση της αιώρησης/*hover* του φακέλου πτήσης του ελικοπτέρου) είναι τα ακόλουθα:

- Δυναμική Στερεού Σώματος (*Rigid Body Dynamics*)
- Απλοποιημένη δυναμική του ρότορα (*Simplified Rotor Dynamics*)
- Σύζευξη της δυναμικής του ρότορα και της ατράκτου (*Coupling Rotor and Fuselage Dynamics*)
- Ειδικά στοιχεία ελικοφόρων μικρής κλίμακας (*Small-Scale Rotorcraft Model Extensions*)

Μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας γίνεται η σύνθεση και παρουσίαση του πλήρους παραμετροποιημένου μοντέλου, ενώ γίνονται και ορισμένες παρατηρήσεις επί του μοντέλου και της διαδικασίας ταυτοποίησης που θα ακολουθηθεί.

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τα συγκεκριμένα δυναμικά συστήματα είναι, επειδή επιθυμούμε να επιτύχουμε την καλύτερη προσαρμογή του δυναμικού μας μοντέλου στις εκάστοτε συνθήκες πτήσης και, επομένως, για να μπορέσουμε να ταυτοποιήσουμε το μοντέλο με την καλύτερη δυνατή πιστότητα μέσω της αναγνώρισης των παραμέτρων. Έτσι, το μοντέλο οφείλει να έχει φυσική σημασία και μεγάλη ακρίβεια.

Οι δύο τελευταίες ιδιότητες που πρέπει να έχει το δυναμικό μας μοντέλο, όπως αναφέρονται παραπάνω η φυσική σημασία και η μεγάλη ακρίβεια, αλλάζουν ανάλογα με την κατάσταση του φακέλου πτήσης στην οποία βρίσκεται το ελικόπτερο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι το μοντέλο, όπως φαίνεται και στην ανάλυση που ακολουθεί, είναι ιδιαίτερα μη γραμμικό. Άρα, το μοντέλο έχει σημαντικές αλλαγές στη φυσική του σημασία και στην ακρίβειά του ανάλογα με την κατάσταση που εξετάζουμε κάθε φορά (π.χ. αιώρηση/*hover*, ευθεία πτήση με σταθερή ταχύτητα/*cruise* κ.α.). Έτσι, προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτή την ιδιαιτερότητα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο εναλλαγής καταστάσεων (*switching*) ακόμα και στον ακριβή προσδιορισμό του μοντέλου προς ταυτοποίηση.

Τα δυναμικά συστήματα που παρουσιάζονται στη φάση αυτή αντιστοιχούν στην κατάσταση της αιώρησης, χωρίς όμως να σημαίνει ότι χρήζουν σημαντικών αλλαγών για τη χρησιμοποίησή τους σε άλλες καταστάσεις.

2.4.2.1 Δυναμική Στερεού Σώματος (*Rigid Body Dynamics*)

Η δυναμική του στερεού σώματος αποτελεί ίσως την απλούστερη μορφή δυναμικού συστήματος και χρησιμοποιείται ευρέως στα αεροσκάφη με σταθερή πτέρυγα (*fixed-wing aircraft*). Ακόμη, με βάση αυτή τη δυναμική και τα μοντέλα των γραμμικών παραγώγων ευστάθειας (*linear stability derivatives models*), που είναι γραμμικοποιημένη μορφή των μοντέλων της δυναμικής του στερεού σώματος, θα προβούμε σε ανάλυση της δυναμικής, της ευστάθειας (με απώτερο σκοπό το σχεδιασμό και εφαρμογή μεθόδων ελέγχου) του ελικόπτερου. Πρέπει να αναφέρουμε, παρόλα αυτά, ότι δεν αποτελούν από μόνα τους μια ακριβή περιγραφή και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε και τα μοντέλα των δυναμικών συστημάτων που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Το ελικόπτερο μπορεί, ως γνωστόν, να κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση σε έξι (6) βαθμούς ελευθερίας (β.ε./*DOF*). Για να μπορέσουμε να κάνουμε σωστή περιγραφή της κίνησης του οχήματος αυτού χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης *Newton – Euler* (Εξισώσεις 2.5 – 2.10), ενώ έχουμε και εδώ τα διανύσματα των εξωτερικών δυνάμεων και ροπών $\mathbf{F} = [X \ Y \ Z]^T$ και $\mathbf{M} = [L \ M \ N]^T$ αντίστοιχα. Οι δυνάμεις αυτές και οι ροπές οφείλονται:

- Στον κύριο ρότορα
- Στον ουραίο ρότορα
- Στις βαρυτικές δυνάμεις
- Στις αεροδυναμικές δυνάμεις από την άτρακτο και της ουραίες επιφάνειες

Για να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης ως προς το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων (*body-fixed reference frame*) χρησιμοποιούμε τη θεωρία της κινηματικής των κινούμενων συστημάτων αναφοράς και έχουμε:

$$m\dot{\mathbf{u}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \quad (2.92)$$

όπου, $\mathbf{u} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]^T$ το διάνυσμα των ταχυτήτων της ατράκτου στους σωματόδετους άξονες και $\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}]^T$ το διάνυσμα των γωνιακών ταχυτήτων επίσης στους σωματόδετους άξονες.

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις δημιουργούμε έξι (6) συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τρεις (3) για τη μεταφορική και τρεις (3) για την περιστροφική κίνηση, οι οποίες αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του στερεού σώματος ως συνάρτηση των εξωτερικών δυνάμεων και ροπών. Έχουμε δηλαδή, όπως αναφέρονται και στο μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= (-\mathbf{w}\mathbf{q} + \mathbf{v}\mathbf{r}) + \frac{X}{m} & (2.93) \\ \dot{\mathbf{v}} &= (-\mathbf{u}\mathbf{r} + \mathbf{w}\mathbf{p}) + \frac{Y}{m} & (2.94) \\ \dot{\mathbf{w}} &= (-\mathbf{v}\mathbf{p} + \mathbf{u}\mathbf{q}) + \frac{Z}{m} & (2.95) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{aligned}} \right\} \text{Εξισώσεις για μεταφορική κίνηση}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{q}\mathbf{r} \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{L}{I_{xx}} & (2.96) \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{p}\mathbf{r} \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} + \frac{M}{I_{yy}} & (2.97) \\ \dot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{p}\mathbf{q} \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{N}{I_{zz}} & (2.98) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}} \right\} \text{Εξισώσεις για περιστροφική κίνηση}$$

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε και να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης ως συνάρτηση των εισόδων ελέγχου και των καταστάσεων του ελικοπτέρου.

Η γενική μορφή των εξισώσεων που έχουμε έως τώρα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή : $\dot{x} = f(x, \delta)$, όπου x το διάνυσμα που των καταστάσεων και δ το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου (Εξισώσεις 2.11, 2.12).

Ακόμα, πρέπει να αναφέρουμε τις γωνίες *Euler*, οι οποίες χρησιμοποιούνται για το γωνιακό προσανατολισμό των αεροσκαφών. Σύμφωνα με αυτή τη “μέθοδο”, οι γωνίες αυτές ακολουθούν μία συγκεκριμένη αλληλουχία περιστροφών γύρω από τους άξονες του αεροσκάφους και η αλληλουχία αυτή των περιστροφών είναι:

Περιστροφή *yaw* (γωνία ψ γύρω από τον άξονα z), περιστροφή *pitch* (γωνία θ γύρω από το “νέο” άξονα y) και περιστροφή *roll* (γωνία ϕ γύρω από το “νέο” άξονα x).

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία κατασκευάζουμε τον πίνακα περιστροφής/μετασχηματισμού συντεταγμένων, ο οποίος συσχετίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου που δίνεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αυτές στο περιστρεφόμενο/σωματόδετο σύστημα αναφοράς. Ο πίνακας έχει δοθεί και προηγουμένως και είναι:

$${}^b_iR = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον πίνακα περιστροφής μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες της βαρυτικής έλξης σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στους σωματόδετους άξονες. Το διάνυσμα της βαρυτικής έλξης έχει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς την ακόλουθη μορφή: ${}^i g = [0 \quad 0 \quad g]^T$.

Έτσι, μετά το μετασχηματισμό έχουμε:

$${}^b g = {}^b_iR {}^i g = \begin{bmatrix} -g \cdot \sin\theta \\ g \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi \\ g \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Με την ίδια διαδικασία κάνουμε και το μετασχηματισμό στην κινηματική της περιστροφικής κίνησης και μπορούμε να δούμε τη σχέση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας με τη μεταβολή των γωνιών *Euler* με την ακόλουθη σχέση:

$${}^b \omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \cdot \cos\phi + \dot{\psi} \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \\ \dot{\psi} \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - \dot{\theta} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε αναφορά στις παραγώγους ευστάθειας του μοντέλου κίνησης του στερεού σώματος. Οι παράγωγοι ευστάθειας αποτελούν μια γραμμικοποιημένη μορφή των εξισώσεων κίνησης, όπου οι δυνάμεις και οι ροπές παρουσιάζονται πλέον μέσω των παραγώγων, των καταστάσεων του ελικοπτέρου και των εισόδων ελέγχου.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι γνωστή από τη θεωρία των μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, αλλά είναι σωστό να τονίσουμε, ότι ανάλογα με την κατάσταση που εξετάζουμε πρέπει να αποφασίσουμε και ποια θα είναι τα σημεία ισορροπίας. Έτσι, η κατάσταση της αιώρησης χαρακτηρίζεται από μηδενική μεταφορική και γωνιακή ταχύτητα. Υπάρχουν και άλλες καταστάσεις ισορροπίας, όπως για παράδειγμα η ευθύγραμμη τροχιά/πτήση και ορισμένοι ελιγμοί (ευθύγραμμη πτήση που ακολουθείται από στροφή κ.α.).

Τελικά, μετά τη διαδικασία αυτή προκύπτουν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης και από αυτές μπορούμε να δούμε και τη μορφή των παραγώγων ευστάθειας.

Είναι πολύ σημαντικό στη διαδικασία αυτή και γενικότερα της αναγνώρισης παραμέτρων να επιλέξουμε και να κατανοήσουμε ποιες παράγωγοι ευστάθειας πρέπει να ληφθούν υπόψη στη δημιουργία του μοντέλου μας.

2.4.2.2 Απλοποιημένη Δυναμική του Ρότορα (Simplified Rotor Dynamics)

Προκειμένου να αυξήσουμε την “αξιοπιστία” του μοντέλου μας προσθέτουμε χαρακτηριστικά και άλλων δυναμικών συστημάτων, εκτός από αυτό του στερεού σώματος. Έτσι, το μοντέλο γίνεται ακριβέστερο και αποκτά και καλύτερη φυσική σημασία.

Για το λόγο αυτό αναφερόμαστε στη δυναμική του ρότορα, έστω και αν είναι μια απλοποιημένη μορφή αυτής.

Αρχικά, αναφέρουμε ότι η έλικα, εκτός από την περιστροφική κίνησή της (ταχύτητα Ω και αξιμουθιακή θέση/γωνία Ψ) μαζί με το *rotor-hub*, εκτελεί και άλλες τρεις (3) κινήσεις σε 3 β.ε. :

- *Feathering* : η κίνηση της έλικας γύρω από το μήκος της και περιγράφεται με τη γωνία Θ (*blade pitch angle*)
- *Flapping* : η κίνηση της έλικας σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του δίσκου του ρότορα και περιγράφεται με τη γωνία β (*flapping angle*)
- *Lead-lagging* : η κίνηση της έλικας πάνω στο επίπεδο του δίσκου του ρότορα και περιγράφεται με τη γωνία ξ .

Πρέπει να αναφέρουμε, ότι οι κινήσεις αυτές μπορούν να γίνουν είτε με χρήση αρθρώσεων πάνω στο *rotor hub* (*articulated rotor*) είτε με λυγισμό της έλικας έχοντας κατάλληλη διάταξη (*hingless rotor*) είτε με συνδυασμό των δύο (*hybrid model*). Το σημαντικό, όμως, είναι ότι δημιουργείται μία σταθερά απόσβεσης, εξαιτίας αυτών των

κινήσεων, γεγονός που επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική του ρότορα και του ελικοπτέρου γενικά.

Η γωνία της έλικας που μας απασχολεί ιδιαίτερα είναι η γωνία *pitch* και η σχέση που μας δίνει την τιμή της είναι η:

$$\theta(\Psi) = \theta_0 - A_1 \cos\Psi - B_1 \sin\Psi \quad (2.102)$$

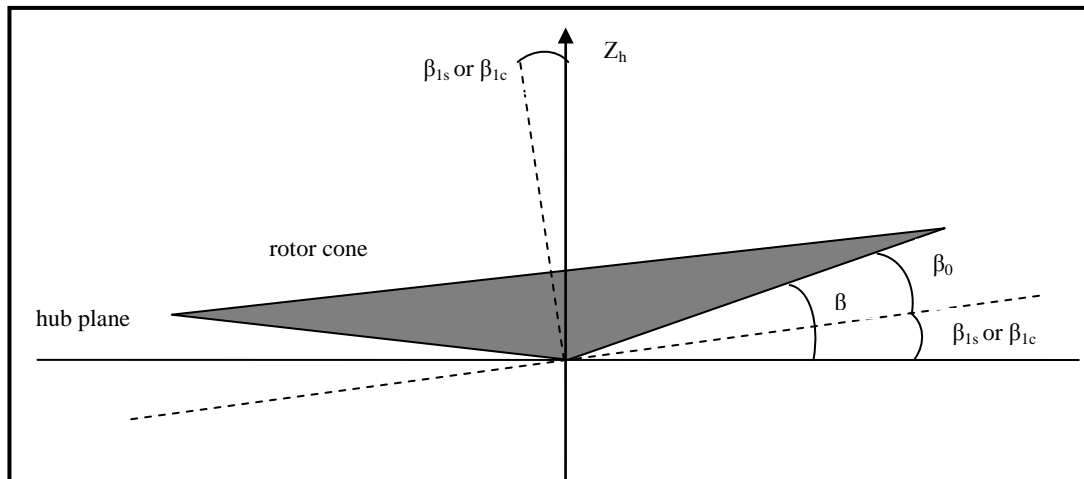
όπου θ_0 η μέση κλίση της έλικας (ελέγχεται από την είσοδο ελέγχου δ_{col}) και A_1, B_1 συναρτήσεις των δ_{lon} και δ_{lat} αντίστοιχα.

Γενικά έχουν γίνει αρκετές παραδοχές απλοποίησης του μοντέλου για να είναι σε όρια τέτοια, ώστε να μπορεί να γίνει η αναγνώριση παραμέτρων και η σημαντική παραδοχή είναι ότι θεωρούμε τελικά την έλικα ως μία άκαμπτη δοκό προσαρμοσμένη στον άξονα περιστροφής και μοντελοποιείται μέσω της άρθρωσης για την κίνηση *flapping* στο κέντρο του *hub* και με τη χρήση γραμμικού ελατηρίου-σπειρώματος με σταθερά k_β .

Η κίνηση *flapping* είναι 2π – περιοδική και για το λόγο αυτό η γενική λύση της εξίσωσης της κίνησης αυτής μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα μιας σειράς *Fourier*. Επειδή, όμως, στα κανονικού μεγέθους ελικοπτερα το πλάτος των αρμονικών όρων 2^{ns} τάξης είναι λιγότερο από το 10% αυτού των όρων 1^{ns} τάξης, οι όροι 2^{ns} και μεγαλύτερης τάξης παραλείπονται και η εξίσωση είναι:

$$\beta(\Psi) = \beta_0(t) - \beta_{1c}(t) \cos\Psi - \beta_{1s}(t) \sin\Psi \quad (2.103)$$

Αυτή η αναπαράσταση σε σειρά *Fourier* όρων 1^{ns} τάξης της κίνησης *flapping* της έλικας αποτελεί την εξίσωση του *rotor-tip-path plane (TPP)*. Ο όρος β_0 περιγράφει την κωνική γωνία του κώνου που δημιουργείται από την κίνηση *flapping* και περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση, ενώ τα β_{1c} και β_{1s} περιγράφουν τις γωνίες απόκλισης του *TPP* στη διαμήκη και εγκάρσια κατεύθυνση αντίστοιχα.



Εικόνα 2-20 : Rotor Tip-Path-Plane and Hub-Plane

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το β_0 με α_0 , το β_{1c} με \mathbf{a} και το β_{1s} με \mathbf{b} . Έτσι, η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το φαινόμενο αυτό είναι:

$$\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + K\alpha = F \quad (2.104)$$

όπου, \mathbf{D} το μητρώο απόσβεσης, \mathbf{K} το μητρώο δυσκαμψίας και \mathbf{F} το μητρώο των δυνάμεων.

Το δυναμικό αυτό μοντέλο που περιγράφεται για την κίνηση *flapping* ή για τη δυναμική του *rotor-TPP* μπορεί να αναλυθεί σε “κατηγορίες” δυναμικές και ταλαντωτικές. Η πρώτη είναι η κωνική, η δεύτερη είναι η προπορευόμενη και, τέλος, η υπολειπόμενη.

Η κωνική κατηγορία χαρακτηρίζεται από την κίνηση *flapping* της έλικας που έχει ως αποτέλεσμα αλλαγή στην κωνική γωνία β_0 και η φυσική της συχνότητα ισούται με τη φυσική συχνότητα της κίνησης *flapping* της έλικας λ_β . Η προπορευόμενη κατηγορία ανταποκρίνεται στην ταλαντωτική κίνηση του κώνου και έχει φυσική συχνότητα της τάξεως $\lambda_\beta+1$ και τέλος η υπολειπόμενη είναι μια προσεγγιστικού τύπου κίνηση του κώνου και έχει φυσική συχνότητα της τάξεως του $\lambda_\beta-1$. Στη μέθοδο, όμως, της αναγνώρισης παραμέτρων μόνον εκείνα τα δυναμικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τη δυναμική του οχήματος πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Έτσι και εδώ το δυναμικό μοντέλο του ρότορα μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο χρησιμοποιώντας μόνο εκείνα τα δυναμικά χαρακτηριστικά με χαμηλή συχνότητα, προκειμένου να συζευχθούν με τη δυναμική της ατράκτου. Για το λόγο αυτό, στο μοντέλο συμπεριλαμβάνουμε μόνο την υπολειπόμενη κατηγορία, που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Πρώτα από όλα αναιρούμε τη μεταφορική ταχύτητα, θεωρούμε μηδενικό συντελεστή σύζευξης μεταξύ των *pitch* και *flap* και αναιρούμε και τη δυναμική του κώνου. Έτσι, τα μητρώα απόσβεσης και δυσκαμψίας απλοποιούνται ακόμα περισσότερο. Έπειτα, μειώνουμε την τάξη των εξισώσεων του ρότορα για να αναιρέσουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά υψηλών συχνοτήτων. Τελικά, έχουμε ως αποτέλεσμα την εξαγωγή των παρακάτω συζευγμένων 1^{ης} τάξης εξισώσεων κίνησης του *rotor-TPP*:

$$\frac{16}{\gamma\Omega} \dot{\alpha} = -\alpha - \frac{16}{\gamma\Omega} q + \frac{p}{\Omega} + \frac{8}{\gamma\Omega^2} \frac{k_\beta}{I_\beta} \mathbf{b} - \mathbf{B}_1 \quad (2.105)$$

$$\frac{16}{\gamma\Omega} \dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{b} - \frac{16}{\gamma\Omega} \mathbf{p} - \frac{q}{\Omega} - \frac{8}{\gamma\Omega^2} \frac{k_\beta}{I_\beta} \mathbf{a} - \mathbf{A}_1 \quad (2.106)$$

όπου, $\gamma = \frac{\rho c C_{la} R^4}{I_\beta}$ ο αριθμός *Lock* και ρ η πυκνότητα του αέρα, c η χορδή της έλικας, C_{la} ο συντελεστής άνωσης της έλικας και \mathbf{R} η ακτίνα του ρότορα.

Από τις παραπάνω εξισώσεις ξεχωρίζουμε ορισμένους όρους σημαντικούς για τη συμπεριφορά του ελικοπτέρου.

- Ο όρος $\frac{16}{\gamma\Omega}$ αντιστοιχεί στη χρονική σταθερά του ρότορα τ_f .
- $-\tau_f \cdot \mathbf{q}$ (ή $\tau_f \cdot \mathbf{p}$) είναι το εγκάρσιο (διαμήκες) *flapping* από το \mathbf{q} (\mathbf{p}) που ανταποκρίνεται στην απόσβεση του ρότορα
- $-\frac{q}{\Omega}$ (ή $\frac{p}{\Omega}$) είναι το εγκάρσιο (διαμήκες) *flapping* εξαιτίας της αλλαγής της γωνίας πρόσπτωσης από το \mathbf{p} (\mathbf{q}) και είναι ένας από τους αρκετά συζευγμένους όρους
 - $\frac{8}{\gamma\Omega^2} \frac{k_\beta}{I_\beta} = \frac{8}{\gamma} (\lambda_\beta^2 - 1)$ είναι ακόμα ένας όρος που δηλώνει σύζευξη στην παρουσία περιορισμών στο *flapping*. Με τη μορφή που παίρνει μέσω της φυσικής συχνότητας βλέπουμε πώς σχετίζεται άμεσα με την απόκριση του *flapping*. Η αναπαράσταση αυτού του όρου γίνεται μέσω των παραγώγων ευστάθειας \mathbf{A}_b και \mathbf{B}_a για διαμήκες και το εγκάρσιο *flapping* αντίστοιχα.

Τώρα, ξαναγράφουμε τις εξισώσεις κίνησης 1^{ης} τάξης του *rotor-TPP* και μπορούμε να διαπιστώσουμε τη σταθερή απόκριση του διαμήκους και εγκάρσιου *flapping* για ένα βήμα των *cyclic inputs* θέτοντας $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, δηλαδή θεωρούμε μηδενική περιστροφική κίνηση της ατράκτου.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_b \mathbf{b} - \mathbf{A}_{lon} \boldsymbol{\delta}_{lon} \quad (2.107)$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{B}_a \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}_{lat} \boldsymbol{\delta}_{lat} \quad (2.108)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο ρότορας κάνει κίνηση *flapping* αναλογικά με τη γωνία *pitch* της έλικας. Αυτό σημαίνει ότι το *rotor-TPP* παίρνει μια γωνιακή θέση για την οποία το *cyclic pitch* δημιουργεί μηδενικό *cyclic pitch blade variation*.

2.4.2.3 Σύζευξη της Δυναμικής του Ρότορα και της Ατράκτου (Coupling Rotor and Fuselage Dynamics)

Για να προχωρήσουμε στο σημείο αυτό κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα της ώσης \mathbf{T} του ρότορα παραμένει κάθετο στο *rotor-TPP*. Έτσι, μπορούμε να αναλύσουμε το \mathbf{T} σε τρεις (3) συνιστώσες στους άξονες τους σώματος, δηλαδή σε:

$$\mathbf{T}_x = -\mathbf{T} \sin \alpha \cos \beta \approx -\mathbf{T} \mathbf{a} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{T}_y = \mathbf{T} \sin \beta \cos \alpha \approx \mathbf{T} \mathbf{b} \quad (2.110)$$

$$\mathbf{T}_z = -\mathbf{T} \cos \alpha \cos \beta \approx -\mathbf{T} \quad (2.111)$$

Ακόμη, οι ροπές που οφείλονται στο *flapping* του ρότορα και ασκούνται στην άτρακτο αποτελούνται από τις ροπές εξαιτίας της απόκλισης (*tilting*) του \mathbf{T} και των ροπών του *rotor hub*.

- *Rotor tilting moments:* $L_T = \mathbf{hT}_y \approx \mathbf{hTb}$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{h}(-T_x) \approx \mathbf{hTa}$$

όπου h η απόσταση από το *hub* στο κέντρο βάρους της ατράκτου.

- *Rotor hub moments:* $\mathbf{M}_\beta = \mathbf{k}_\beta \boldsymbol{\beta}$
- *Lateral and longitudinal hub torsional moments:* $L_k = \mathbf{k}_\beta \mathbf{b}$
 $M_k = \mathbf{k}_\beta \mathbf{a}$

Τελικά, λαμβάνουμε τις συνολική ροπή που ασκείται στην άτρακτο από το *flapping* του ρότορα:

$$\mathbf{L}_R = (\mathbf{hT} + \mathbf{k}_\beta) \mathbf{b} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{M}_R = (\mathbf{hT} + \mathbf{k}_\beta) \mathbf{a} \quad (2.113)$$

$$\text{και } (\mathbf{hT} + \mathbf{k}_\beta) = \mathbf{K}_\beta.$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τις δυνάμεις και τις ροπές με τη βοήθεια των παραγώγων ευστάθειας και επισημαίνουμε ότι στην αιώρηση και στην πτήση με χαμηλή ταχύτητα η ώση είναι σχεδόν ίση με το βάρος του ελικοπτέρου.

Έτσι, έχουμε:

$$\mathbf{X}_\alpha = -\mathbf{T}/\mathbf{m} = -\mathbf{g} \quad (2.114)$$

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{T}/\mathbf{m} = \mathbf{g} \quad (2.115)$$

Δηλαδή, όπως είναι προφανές, κανονικοποιούμε (*normalize*) τις δυνάμεις με τη μάζα του αεροσκάφους, ενώ για τις ροπές έχουμε:

$$\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{K}_\beta / I_{yy} \quad (2.116)$$

$$\mathbf{L}_b = \mathbf{K}_\beta / I_{xx} \quad (2.117)$$

Εδώ κανονικοποιούμε με τις ροπές αδράνειας.

Όσον αφορά στη σύζευξη των εξισώσεων κίνησης του ρότορα και της ατράκτου, αυτό γίνεται μέσω των *flapping derivatives*. Έτσι, στις εξισώσεις κίνησης κατά την εγκάρσια και διαμήκη κίνηση αντικαθιστούμε τις παραγώγους εισόδου (*input derivatives*) \mathbf{X}_{lon} και \mathbf{Y}_{lat} με τις παραγώγους \mathbf{X}_α και \mathbf{Y}_b αντίστοιχα, ενώ στις εξισώσεις κίνησης για το *roll* και το *pitch* οι παράγωγοι εισόδου \mathbf{M}_{lon} και \mathbf{L}_{lat} αντικαθιστούνται από τις \mathbf{M}_α και \mathbf{L}_b .

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε κάποιες σημαντικές διαφορές σε σχέση με το δυναμικό μοντέλου του στερεού σώματος:

- Η 1^η διαφορά είναι η αντικατάσταση των παραγώγων που μόλις αναφέρθηκε και με τον τρόπο αυτό οι εντολές *cyclic* $\boldsymbol{\delta}_{lon}$ και $\boldsymbol{\delta}_{lat}$ εισάγονται απευθείας στη δυναμική του ρότορα.
- Τα \mathbf{L}_p και \mathbf{M}_q δε χρησιμοποιούνται πλέον, αφού τώρα η απόσβεση του *roll* και του *pitch* λαμβάνεται υπόψη από την απόσβεση του ρότορα.

Το υβριδικό αυτό μοντέλο που χρησιμοποιείται εδώ έχει το πλεονέκτημα, ότι μπορεί και περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά χαμηλών συχνοτήτων του ημι-σταθερού μοντέλου (*quasi-steady model*, ορολογία που επικρατεί για τον προσδιορισμό του απλοποιημένου δυναμικού μοντέλου στερεού σώματος), καθώς και αυτά υψηλών συχνοτήτων που προέρχονται από τη δυναμική του ρότορα.

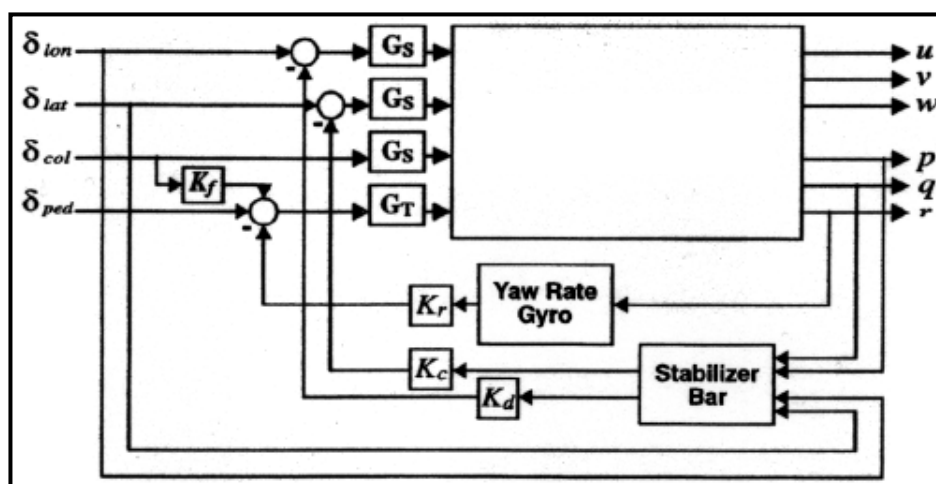
2.4.2.4 Ειδικά Στοιχεία Ελικοφόρων Μικρής Κλίμακας (*Small-Scale Rotorcraft Model Extensions*)

Στο σημείο αυτό θα επικεντρωθούμε σε ορισμένα πολύ εξειδικευμένα χαρακτηριστικά των ελικοπτέρων μικρής κλίμακας και μπορούμε να πούμε ότι η συνεισφορά τους στο τελικό αποτέλεσμα είναι ζωτικής σημασίας, καθώς χωρίς αυτές τις προσθήκες δε θα ήταν δυνατή η πτήση πολλών από αυτά.

Τα χαρακτηριστικά που αναφέρουμε και συναντάμε σχεδόν αποκλειστικά σε ελικόπτερα μικρής κλίμακας είναι τα εξής:

- i) “Μπάρα” σταθεροποίησης (*stabilizer bar/flybar*)
- ii) Ενεργό σύστημα απόσβεσης *yaw* (*active yaw damping system*)

Και τα δύο συστήματα που αναφέρονται παραπάνω αποτελούν μια μορφή δυναμικής ενίσχυσης και αυτό το επιτυγχάνουν με μία μορφή ανάδρασης. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το *flybar* δρα ως μια καθυστερημένη ανάδραση στους άξονες των *roll* και *pitch*. Ακόμη, μειώνει το εύρος (*bandwidth*) και την ευαισθησία του ελέγχου στις *cyclic* διαμήκεις και εγκάρσιες εισόδους. Παρόμοια αποτελέσματα έχει και το ενεργό σύστημα απόσβεσης *yaw*. Ένα δομικό διάγραμμα του μοντέλου φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 2-21 : Δομικό Διάγραμμα Συστημάτων Ελικοπτέρων Μικρού Μεγέθους

Το παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζει το μοντέλο που συσχετίζει το “γυμνό” δυναμικό μοντέλο του R-50 (κατασκευαστικά δεν έχει ουσιαστικές διαφορές με το ελικόπτερο που χρησιμοποιούμε εμείς στην διαδικασία αυτή) με τις συνιστώσες του ενισχυμένου πλαισίου, δηλαδή τους επενεργητές, το *yaw rate feedback* και το *flybar*.

Πρώτα από όλα, πρέπει να αναφέρουμε, ότι το *flybar* δρα ως μια ανάδραση και για το λόγο αυτό πρέπει να λάβουμε υπόψη τη λεπτομέρεια αυτή και κατά τη διάρκεια της αναγνώρισης των παραμέτρων να εφαρμόσουμε τους τυπικούς περιορισμούς που υφίστανται σε περιπτώσεις συστημάτων κλειστού-βρόχου.

Το *flybar* μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δευτερεύων ρότορας και επομένως η μοντελοποίηση της εξίσωσης κίνησης των ελίκων (*paddles*) του *flybar* θα γίνει με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του κυρίως ρότορα. Η διαφορά είναι ότι τα *paddles* δε δέχονται έλεγχο στο *collective pitch* και δεν είναι σχεδιασμένα, ώστε να παράγουν ώση. Έτσι, έχουμε:

$$\boldsymbol{\beta}_{stab} = -\boldsymbol{\beta}_{stab,1c}\cos\Psi - \boldsymbol{\beta}_{stab,1s}\sin\Psi \quad (2.118)$$

και εδώ κάνουμε αντικατάσταση του $\boldsymbol{\beta}_{stab,1c}$ με \mathbf{d} και του $\boldsymbol{\beta}_{stab,1s}$ με \mathbf{c} . Η λογική είναι ίδια με αυτή του *rotor-TPP*. Ακόμη, από πειραματικά αποτελέσματα έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός *Lock* του *flybar* γ_s είναι αρκετά μικρότερος από τον αντίστοιχο του κανονικού συστήματος και ο μικρότερος αριθμός *Lock* οδηγεί σε μεγαλύτερη αποσύζευξη του διαμήκους και του εγκάρσιου *flapping* και σε μεγαλύτερη χρονική σταθερά του *flapping*. Τελικά, οι εξισώσεις που έχουν απλοποιηθεί και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\tau}_s \dot{\mathbf{d}} = -\mathbf{d} - \boldsymbol{\tau}_s \mathbf{p} + \mathbf{D}_{lat} \boldsymbol{\delta}_{lat} \quad (2.119)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s \dot{\mathbf{c}} = -\mathbf{c} - \boldsymbol{\tau}_s \mathbf{q} + \mathbf{C}_{lon} \boldsymbol{\delta}_{lon} \quad (2.120)$$

όπου \mathbf{D}_{lat} και \mathbf{C}_{lon} είναι αντίστοιχα οι εγκάρσιες και διαμήκεις εισοδοί στο *cyclic pitch* του *flybar* διαμέσου του μοχλού ελέγχου στο μηχανισμό *Bell mixer*. Το αποτέλεσμα αυτού του μηχανισμού είναι η ενίσχυση των *cyclic* εισόδων ελέγχου της κύριας έλικας που είναι ανάλογη της γωνίας *flapping* του *flybar*.

Έτσι, οι προκύπτουσες εγκάρσιες και διαμήκεις *cyclic* εισοδοί ελέγχου του κύριου ρότορα είναι:

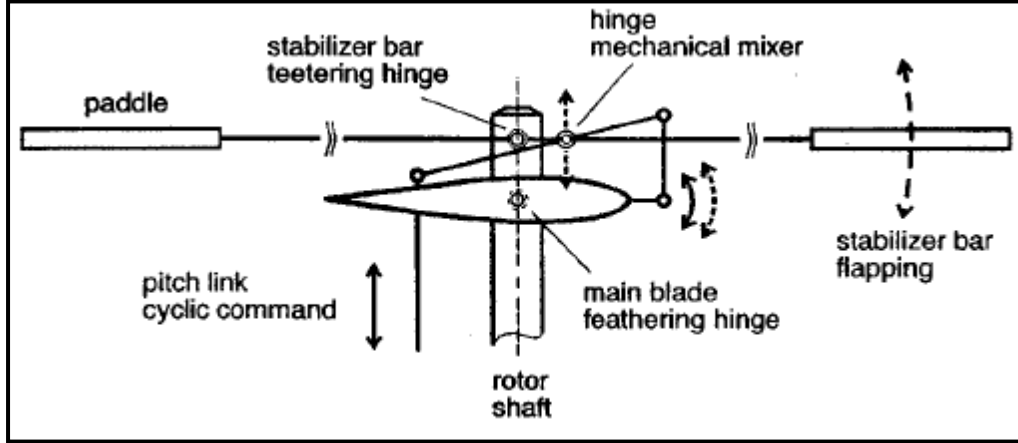
$$\overline{\boldsymbol{\delta}_{lat}} = \boldsymbol{\delta}_{lat} + \mathbf{K}_d \mathbf{d} \quad (2.121)$$

$$\overline{\boldsymbol{\delta}_{lon}} = \boldsymbol{\delta}_{lon} + \mathbf{K}_c \mathbf{c} \quad (2.122)$$

όπου \mathbf{K}_d και \mathbf{K}_c είναι σταθερές που καθορίζονται από τη γρανάζωση του *Bell Mixer*. Έτσι, οι εξισώσεις του *rotor-TPP* έχοντας αντικαταστήσει τις παραπάνω παραμέτρους παίρνει τη μορφή:

$$\tau_f \dot{\alpha} = -\alpha - \tau_f q + A_b b + A_{lon} \overline{\delta_{lon}} + A_{lat} \delta_{lat} \quad (2.123)$$

$$\tau_f \dot{b} = -b - \tau_f p + B_a a + B_{lat} \overline{\delta_{lat}} + B_{lon} \delta_{lon} \quad (2.124)$$

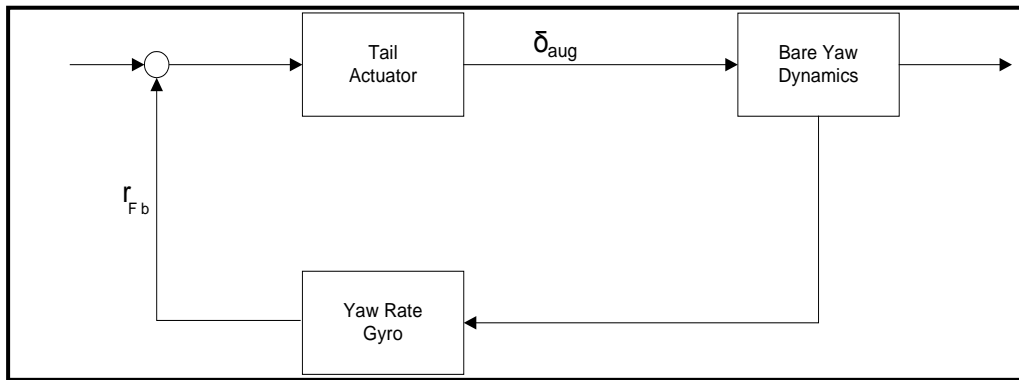


Εικόνα 2-22 : Μηχανισμός Bell Mixer

Το δυναμικό μοντέλο του yaw αν και εξάγεται με τον ίδιο τρόπο όπως και της ατράκτου, δηλαδή από τις εξισώσεις Euler, δε γίνεται μοντελοποίηση αυτού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ουραίος ρότορας είναι πολύ μικρός και περιστρέφεται πολύ γρήγορα, άρα είναι πολύ γρηγορότερη η δυναμική του από αυτή της ατράκτου και επομένως δεν υπάρχει ανάγκη να μοντελοποιηθεί. Σε πολλές περιπτώσεις μία χρονική σταθερά είναι αρκετή για να συμπεριλάβουμε τη μη-μοντελοποιημένη δυναμική. Ακόμη, η ταχύτητα του αέρα έχει και αυτή ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπών μέσω των κάθετων αεροδυναμικών δυνάμεων στην ουρά και μέσω των αλλαγών στην ώση που παράγει ο ουραίος ρότορας. Αυτά τα φαινόμενα μοντελοποιούνται με τη βοήθεια των παραγώγων ταχύτητας N_u και N_v . Τέλος, η ουραία δοκός και ο ουραίος ρότορας δημιουργούν ροπές απόσβεσης και μοντελοποιούνται μέσω της παραγώγου ευστάθειας N_r . Έτσι, το βασικό μοντέλο με τις παραγώγους ευστάθειας του yaw είναι :

$$\dot{r} = N_v v + N_r r + N_{ped} \delta_{ped} \quad (2.125)$$

Για να μπορέσουμε να αναγνωρίσουμε την πραγματική δυναμική του συστήματος του yaw πρέπει οπωσδήποτε να συμπεριλάβουμε και το *active yaw damping system*, καθώς ενώ η απλή συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι 1^{ου} βαθμού, πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι τα χαρακτηριστικά αυτής είναι 2^{ου} βαθμού, γεγονός που εξηγείται με την παρουσία του συστήματος που αναφέραμε παραπάνω.



Εικόνα 2-23 : Δομικό Διάγραμμα του Active Yaw Damping System

Η ενσωμάτωση του ενεργού συστήματος απόσβεσης yaw γίνεται μέσω μιας αρνητικής ανάδρασης του προσανατολισμού του ελικοπτέρου στον z άξονα, ο οποίος προσανατολισμός δίνεται μέσω ενός γυροσκοπίου. Επομένως, το σύστημα περιλαμβάνει το γυροσκόπιο, τον επενεργητή και τη δυναμική yaw του ελικοπτέρου.

Για την αναγνώριση των παραμέτρων δεν είναι δυνατό να έχουμε μέτρηση εν πτήση και του επενεργητή. Επομένως, όλα τα υποσυστήματα για τα οποία ισχύει το ίδιο πρέπει να γίνει αναγνώριση αυτών σε ξεχωριστά πειράματα στο έδαφος.

Το ενισχυμένο σύστημα yaw έχει τελικά χαρακτηριστικά συστήματος 2^{ου} βαθμού με ένα μικρό συντονισμό. Επειδή, όμως, είναι επιθυμητό να αποφευχθεί οποιαδήποτε περιπλοκή το σύστημα αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα 1^{ου} βαθμού με ανάδραση απλή 1^{ου} βαθμού ενός low-pass φίλτρου. Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:

$$\frac{r}{\delta_{ped}} = \frac{N_{ped}(s + K_{rfb})}{s^2 + (K_{rfb} - N_r)s + (K_r N_{ped} - N_r K_{rfb})} \quad (2.126)$$

και σε αυτό το σημείο, όμως, παρουσιάζεται το πρόβλημα της υπέρ-παραμετροποίησης, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατόν να αναγνωριστούν όλες οι παράμετροι μέσω της πειραματικής διαδικασίας. Έτσι, γίνεται και πάλι υπόθεση και τίθεται ο περιορισμός να θέσουμε τον πόλο του φίλτρου έτσι, ώστε να είναι δύο φορές γρηγορότερος από αυτόν του “γυμνού” συστήματος yaw:

$$K_{rfb} = -2N_r \quad (2.127)$$

2.4.2.5 Heave Dynamics

Αν και δεν έχει γίνει κάποια αναφορά προηγουμένως για το συγκεκριμένο σύστημα, στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στην κάθετη κίνηση του ελικοπτέρου (δηλαδή καθ' ύψος). Το βασικό μοντέλο των παραγώγων ευστάθειας για την ανώθηση (*heave*) είναι:

$$\dot{w} = (-v_0 p + u_0 q) + Z_w w + Z_{col} \delta_{col} \quad (2.128)$$

- Ο όρος στην παρένθεση αντιπροσωπεύει τις φυγοκεντρικές δυνάμεις στην ευθύγραμμη και ομαλή πτήση. Τελικά, η συνάρτηση μεταφοράς της κάθετης ταχύτητας ως προς την είσοδο *collective* δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{w}{\delta_{col}} = \frac{Z_{col}}{s - Z_w} \quad (2.129)$$

και το δυναμικό φαινόμενο που πρέπει να ληφθεί υπόψη στη δυναμική της ανώθησης είναι αυτό της απόσβεσης του ρότορα.

Ακόμα, ένας ρότορας που παράγει σταθερή ώση T στην αιώρηση δημιουργεί μία ταχύτητα εισροής αέρα:

$$V_{ihover} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \quad (2.130)$$

όπου A η επιφάνεια του δίσκου του ρότορα. Η σταθερή επίπτωση αυτού του φαινομένου στην γωνία πρόσπτωσης είναι:

$$\alpha = \theta - \Phi = \theta - \frac{1}{\Omega y} \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \quad (2.131)$$

και δείχνει πώς η αεροδυναμική γωνία πρόσπτωσης μειώνεται με αυξανόμενη την ώση. Τελικά, σύμφωνα και με πειραματικά αποτελέσματα, η απόσβεση της δυναμικής της ανώθησης είναι ορατή από την προπορευόμενη φάση και τη μικρή αύξηση στο πλάτος με τη συχνότητα.

2.4.2.6 Πλήρες Παραμετροποιημένο Μοντέλο (Complete Parameterized Model)

Στο τελευταίο αυτό σημείο του 1^{ου} σταδίου κάνουμε τη σύνθεση του τελικού μοντέλου της δυναμικής του ελικοπτέρου, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στην αναγνώριση των παραμέτρων αλλά και στη φάση της προσομοίωσης σε H/Y σε επόμενη φάση.

Η γενική μορφή είναι:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (2.132)$$

όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του ελικοπτέρου

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{p} \quad \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\varphi} \quad \boldsymbol{\theta} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_{fb} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d}]^T$$

και \mathbf{u} είναι το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου

$$\mathbf{u} = [\delta_{lat} \quad \delta_{lon} \quad \delta_{ped} \quad \delta_{col}]^T$$

Το μητρώο \mathbf{F} περιέχει τις παραγώγους ευστάθειας, το μητρώο \mathbf{G} περιέχει τις παραγώγους εισόδου και το μητρώο \mathbf{M} περιέχει τις χρονικές σταθερές του ρότορα και του *flybar*. Το σύστημα μπορεί να έρθει και στην “κλασσική” μορφή *state-space*:

- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
- $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

όπου, $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}$, $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}$

Άρα, ολόκληρη η δυναμική του ελικοπτέρου περιγράφεται από το σύστημα 11×11 που μόλις παρουσιάσαμε. Έχουν προστεθεί, όμως, και οι καταστάσεις $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ και έτσι το σύστημα είναι τελικά 13×13 . Στο μοντέλο αυτό δεν περιλαμβάνονται οι επενεργητές και έχουν προστεθεί στο σύστημα ως στοιχεία ήδη αναγνωρισμένα. Το πλήρες παραμετροποιημένο μοντέλο *state-space* φαίνεται παρακάτω.

2.5 Προσομοίωση του Μη-Γραμμικού Δυναμικού Μοντέλου

Στο σημείο αυτό γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου, ενώ γίνεται και μία σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με αυτά από ένα άλλο ελικόπτερο μεγαλύτερου μεγέθους.

2.5.1 Υλοποίηση με Χρήση H/Y

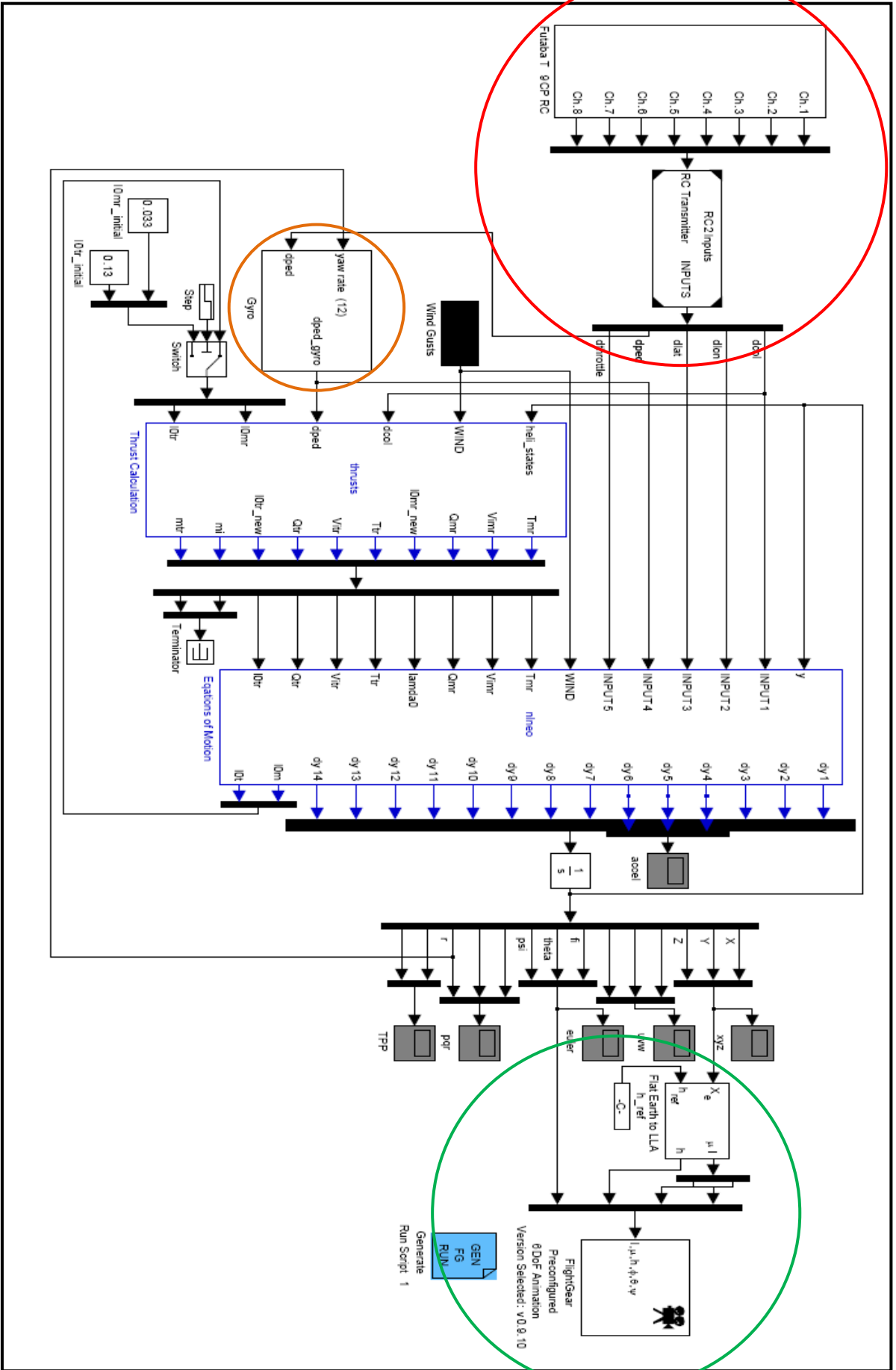
Για την υλοποίηση της προσομοίωσης του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου έγινε εκτενής χρήση του H/Y. Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκαν λογισμικά πακέτα που παρείχαν τη δυνατότητα της εικονικής μοντελοποίησης μέσω κατάλληλων δομικών διαγραμμάτων και μαθηματικού προγραμματισμού (*Matlab/Simulink*), καθώς και ένα πακέτο το οποίο παρείχε τη δυνατότητα της γραφικής απεικόνισης των αποτελεσμάτων ως εξομοίωση πτήσης (*Flight Gear*). Ακόμη, έγινε χρήση τηλεκατεύθυνσης για την πραγματοποίηση μετρήσεων και δοκιμών σε πραγματικό χρόνο (*Futaba T9CP*) με τη σύνδεση αυτής με τον H/Y και τα παραπάνω λογισμικά πακέτα.

Στην επόμενη σελίδα παρουσιάζεται το δομικό διάγραμμα που δημιουργήθηκε και χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση του μοντέλου σε *Matlab/Simulink*, ενώ αναφέρονται και ορισμένα στοιχεία για την καλύτερη κατανόηση του διαγράμματος

2.5.1.1 Στοιχεία του Δομικού Διαγράμματος

Το δομικό διάγραμμα περιέχει τα στοιχεία που είναι απαραίτητα για την προσομοίωση του δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου, καθώς και για τη σύνδεση του προγράμματος με τον εξομοιωτή (*Flight Gear*) αλλά και την τηλεκατεύθυνση. Έτσι, έχουμε τα εξής πρόσθετα στοιχεία, τα οποία δεν αναλύονται σε προηγούμενο σημείο της εργασίας και είναι απαραίτητα για την υλοποίηση της προσομοίωσης:

- 1) **Τηλεκατεύθυνση και Servos:** Η κίνηση του ελικοπτέρου στο χώρο οφείλεται στην παραγωγή δυνάμεων και ροπών από τους δύο ρότορες που διαθέτει (κύριος και ουραίος). Παρόλα αυτά, αυτό αποτελεί τον τελευταίο “κρίκο στην αλυσίδα” της δημιουργίας δυνάμεων και ροπών στο ελικόπτερο, αφού και οι έλικες στους ρότορες πρέπει να κάνουν την κατάλληλη κάθε φορά κίνηση (μεταβολή της γωνίας *pitch*). Έτσι, το πρώτο βήμα γίνεται με τη βοήθεια της τηλεκατεύθυνσης που είναι υπεύθυνη για την επικοινωνία και τον έλεγχο του ελικοπτέρου, συγκεκριμένα τα *servos*, και τον έλεγχο αυτού μέσω εντολών (*PWM* σήματα). Η κίνηση των *servos* (συνολικά 5, εκ των οποίων τα 3 χρησιμοποιούνται



Εικόνα 2-24: Δομικό Διάγραμμα σε Simulink

για την κίνηση του *swashplate* και συνεπώς της κύριας έλικας, 1 είναι υπεύθυνο για τον έλεγχο του ουραίου ρότορα και το 5^ο χρησιμοποιείται για τον ηλεκτροκινητήρα). Άρα, για τον έλεγχο του ελικοπτέρου με χρήση τηλεκατεύθυνσης ήταν απαραίτητο το *mapping* των εισόδων από αυτή στα *servos* και έπειτα στις γωνίες *pitch* των δύο ελίκων του ελικοπτέρου (τα στοιχεία αυτά περιέχονται στον κόκκινο κύκλο του παραπάνω δομικού διαγράμματος και δεν αναφέρονται στην παρούσα εργασία, καθώς δεν αποτελούν πρωτεύον αντικείμενο αυτής). Η αντιστοιχία από τις εισόδους της τηλεκατεύθυνσης (% της συνολικής κίνησης των *sticks*) στα *servos* και τέλος στις γωνίες των ελίκων είναι σχεδόν γραμμική και για την εύρεση της σχέσης αυτής είναι απαραίτητο να γίνει κινηματική ανάλυση του *swashplate*. Τέλος, στην κατηγορία των στοιχείων για τον πρωτοβάθμιο έλεγχο του ελικοπτέρου πρέπει να αναφερθεί και η 5^η είσοδος ($\delta_{throttle}$) που υπάρχει στο παραπάνω δομικό διάγραμμα. Είναι μία είσοδος που έχει παραλειφθεί από τη φάση της μοντελοποίησης της δυναμικής του ελικοπτέρου και σχετίζεται αποκλειστικά με τη ροπή του κινητήρα και το σύστημα *Engine Speed Governor* (*ESG*), δηλαδή το σύστημα που είναι υπεύθυνο για τη διατήρηση των στροφών του κινητήρα, άρα και των δύο ελίκων. Δεν υπάρχει ξεχωριστός έλεγχος από την τηλεκατεύθυνση για την είσοδο αυτή, αλλά είναι πεπλεγμένη με την είσοδο για τη γωνία *collective*. Κατά τη φάση του *mapping* όμως ήταν εφικτός ο ξεχωριστός προσδιορισμός αυτής της εισόδου. Έχουμε για την είσοδο αυτή ότι:

$$0 < \delta_{throttle} \leq 1 \quad (2.133)$$

και εισάγεται στο μοντέλο μέσω της παρακάτω σχέσης

$$Q_e = \delta_{throttle} * \frac{P_{engine}}{\Omega_{mr}} \quad (2.134)$$

και επηρεάζει άμεσα το *yaw rate* του ελικοπτέρου.

2) ***Flight Gear***: Τα στοιχεία του δομικού διαγράμματος που σχετίζονται με την εξομοίωση και τη σύνδεση του προγράμματος με το *Flight Gear* περιέχονται στον πράσινο κύκλο του παραπάνω σχήματος. Γενικά, οι εντολές για τη σύνδεση των δύο προγραμμάτων είναι διαθέσιμες μέσα από κατάλληλες βιβλιοθήκες του *Simulink* και πιο συγκεκριμένα του *Aerospace & Aerosim Blockset*. Εκτός όμως από τη σύνδεση των δύο προγραμμάτων είναι απαραίτητη και η παροχή των δεδομένων σε κατάλληλη μορφή για την εξομοίωση. Έτσι, τα δεδομένα για τη θέση του ελικοπτέρου μετατρέπονται από αυτά του *flat Earth* συστήματος στο σύστημα *WGS84* (δηλαδή γεωγραφικό μήκος και πλάτος).

3) ***Yaw Rate Gyro***: Το σύστημα αυτό υπάρχει στο παραπάνω δομικό διάγραμμα ως ένα στοιχείο (περιέχεται στον πορτοκαλί κύκλο στο παραπάνω σχήμα) και αποτελεί έναν τρόπο ελέγχου του *yaw rate* του ελικοπτέρου. Είναι απαραίτητο στοιχείο σε όλα τα

ελικόπτερα μικρού μεγέθους και ευθύνεται για την καλύτερη ευστάθεια στον άξονα z. Υλοποιείται ως ένας *PID* ελεγκτής και δεν παρουσιάζεται στη μη-γραμμική μοντελοποίηση της δυναμικής, αφού δεν αποτελεί "έμφυτο" χαρακτηριστικό της δυναμικής του ελικοπτέρου. Παρόλα αυτά, παρουσιάζεται στη γραμμική μοντελοποίηση και στο παραπάνω δομικό διάγραμμα, αφού πρέπει να λαμβάνεται υπόψη τόσο στην προσομοίωση όσο και στην αναγνώριση των παραμέτρων του γραμμικού μοντέλου.

- 4) **Χαρακτηριστικά του Solver:** Για την προσομοίωση (δηλαδή για την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων) έγινε χρήση της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης συστημάτων σταθερού βήματος (0.01 sec στη δική μας περίπτωση) *Runge-Kutta*.

2.5.2 Παραδείγματα (Προσομοίωσης) Πτήσης Ελικοπτέρου

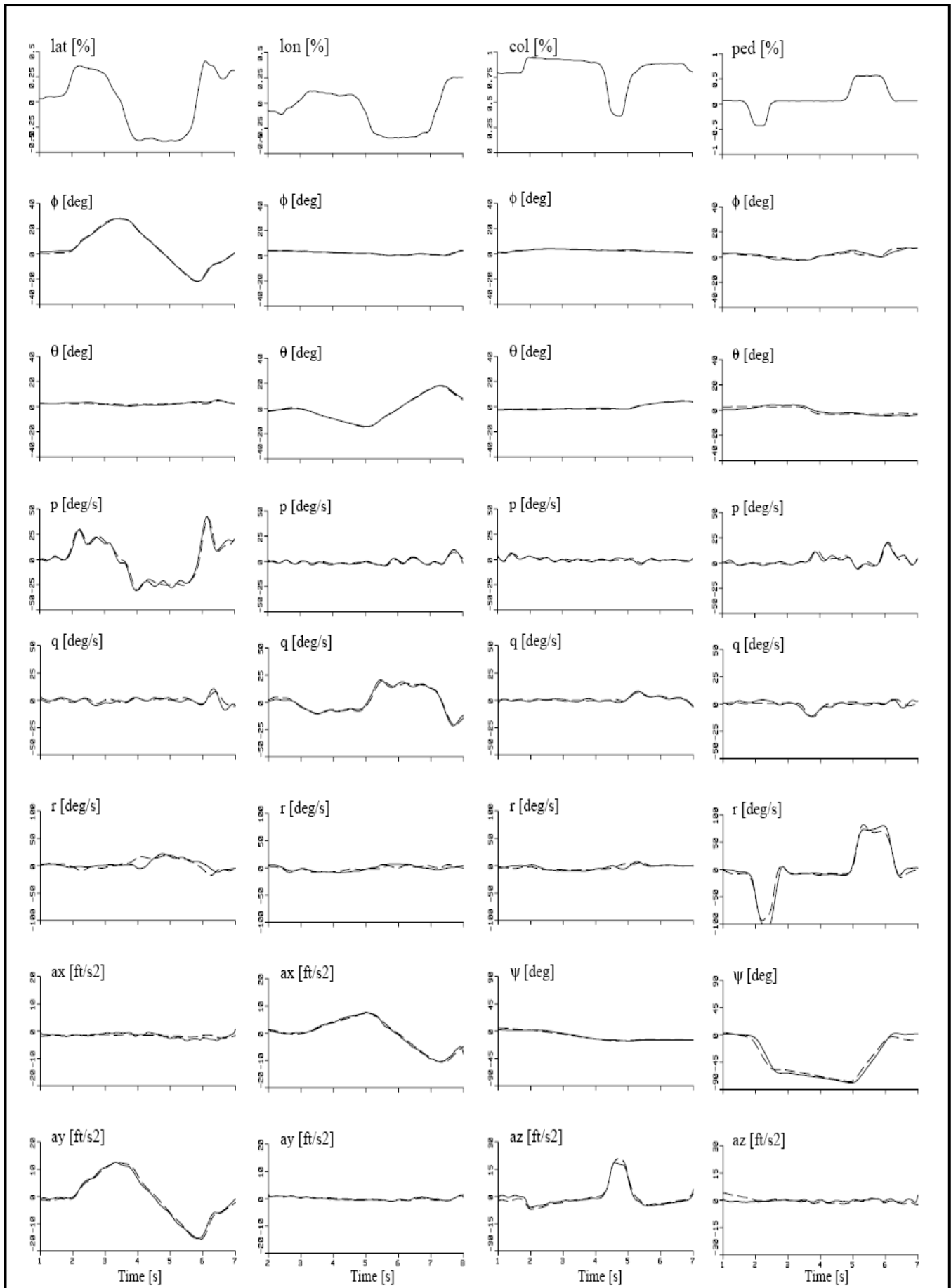
Έχοντας παρουσιάσει το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο του ελικοπτέρου αλλά και την υλοποίηση της προσομοίωσης αυτού με τη χρήση συγκεκριμένων λογισμικών σε H/Y γίνεται στο σημείο αυτό παρουσίαση αποτελεσμάτων (δηλαδή των αποκρίσεων του ελικοπτέρου σε συγκεκριμένες εισόδους). Ακόμη, γίνεται και σύγκριση ορισμένων δεδομένων με αυτά από πραγματικές αποκρίσεις κάποιου άλλου ελικοπτέρου (*Yamaha R-50*) αλλά με παρόμοιες εισόδους διέγερσης.

Οι εισόδοι που χρησιμοποιούνται για τη διέγερση των ελικοπτέρων και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων είναι τύπου *doublet* και οι εισόδοι αυτοί χρησιμοποιούνται ευρέως για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων των δυναμικών μοντέλων (είτε γραμμικά είτε μη-γραμμικά) που έχουν εξαχθεί για τα ελικόπτερα και γίνονται στο πεδίο του χρόνου (σε αντίθεση με άλλες εισόδους διέγερσης και ανάλυση αποτελεσμάτων στο πεδίο της συχνότητας στη φάση της αναγνώρισης των παραμέτρων).

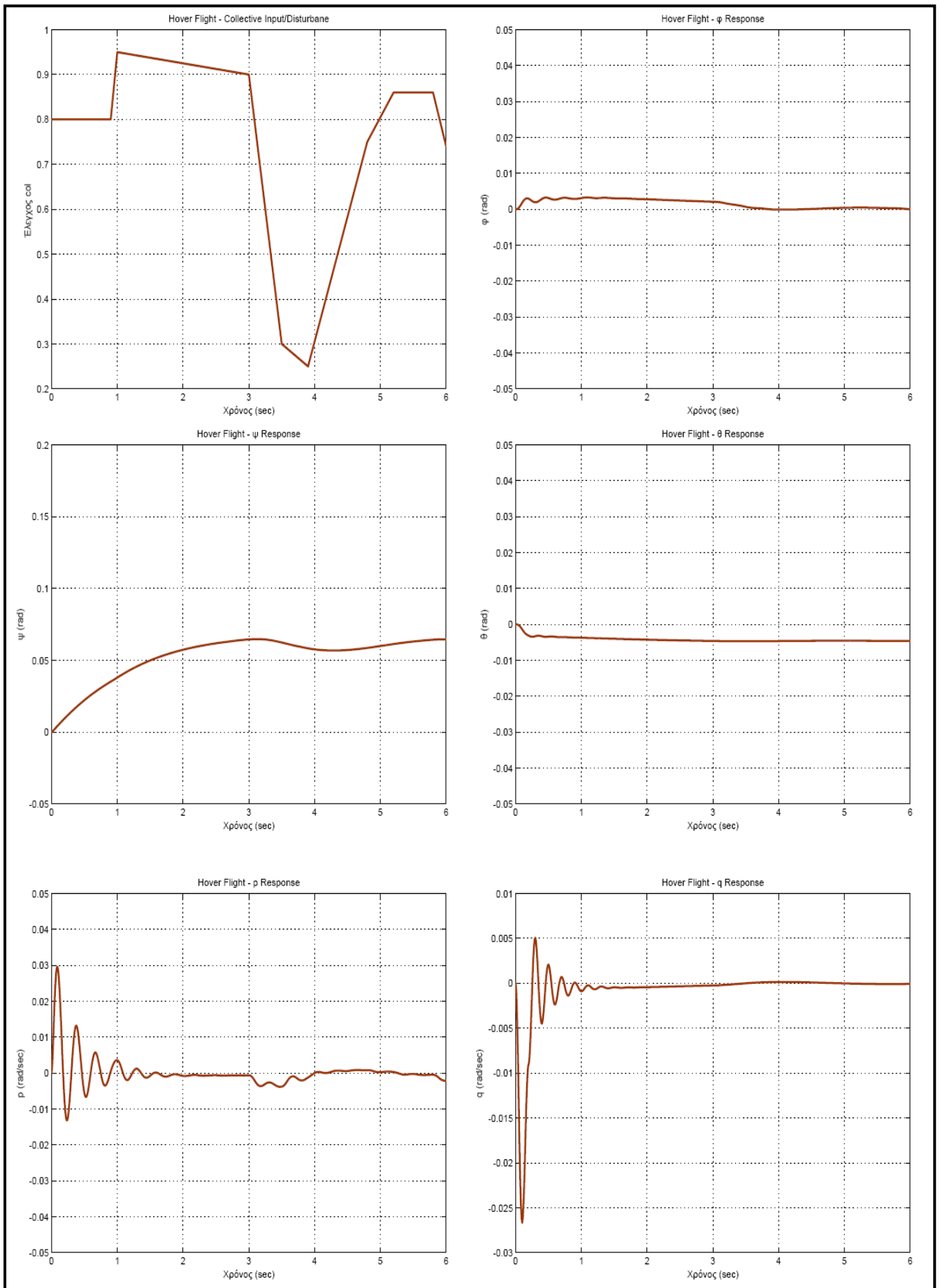
Επίσης, δίνονται και κάποια αποτελέσματα προσομοίωσης μετά από διέγερση του ελικοπτέρου με χρήση εισόδων τύπου *frequency sweep*, τύπος εισόδου που χρησιμοποιείται για τη σωστή διέγερση του συστήματος του ελικοπτέρου για την αναγνώριση παραμέτρων.

2.5.2.1 Αποτελέσματα για *Hover Flight* με Είσοδο Τύπου *Doublet*

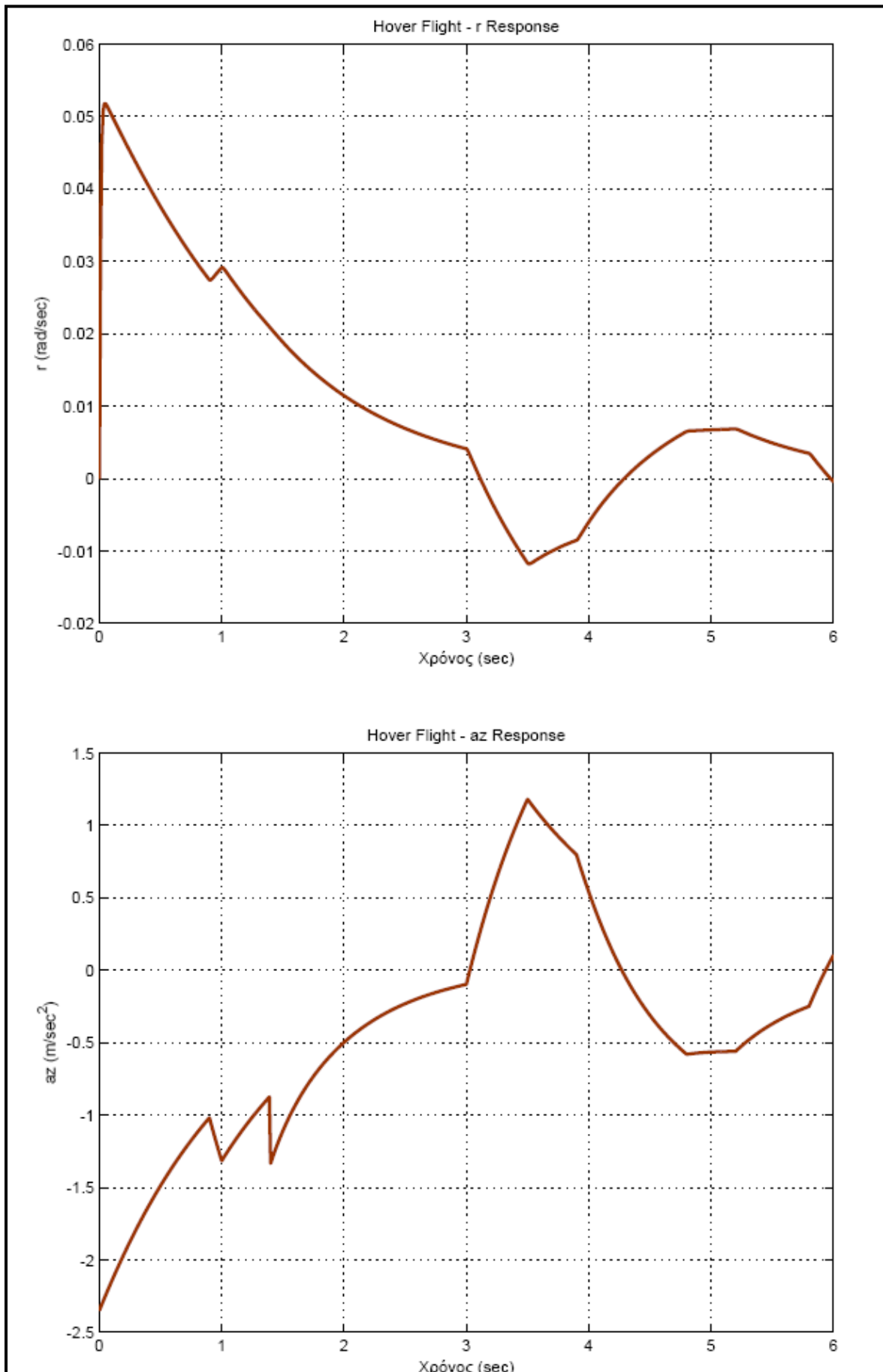
Εδώ παρουσιάζονται τα διαγράμματα των εισόδων διέγερσης αλλά και των αποκρίσεων στην κατάσταση *hover* (δηλαδή αιώρηση του ελικοπτέρου με χαρακτηριστικά πτήσης $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ & $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$). Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις πραγματικές δοκιμές πτήσης για το *Yamaha R-50* και στη συνέχεια τα δικά μας από την προσομοίωση για το ελικόπτερο *MIT X-Cell 60 SE*.



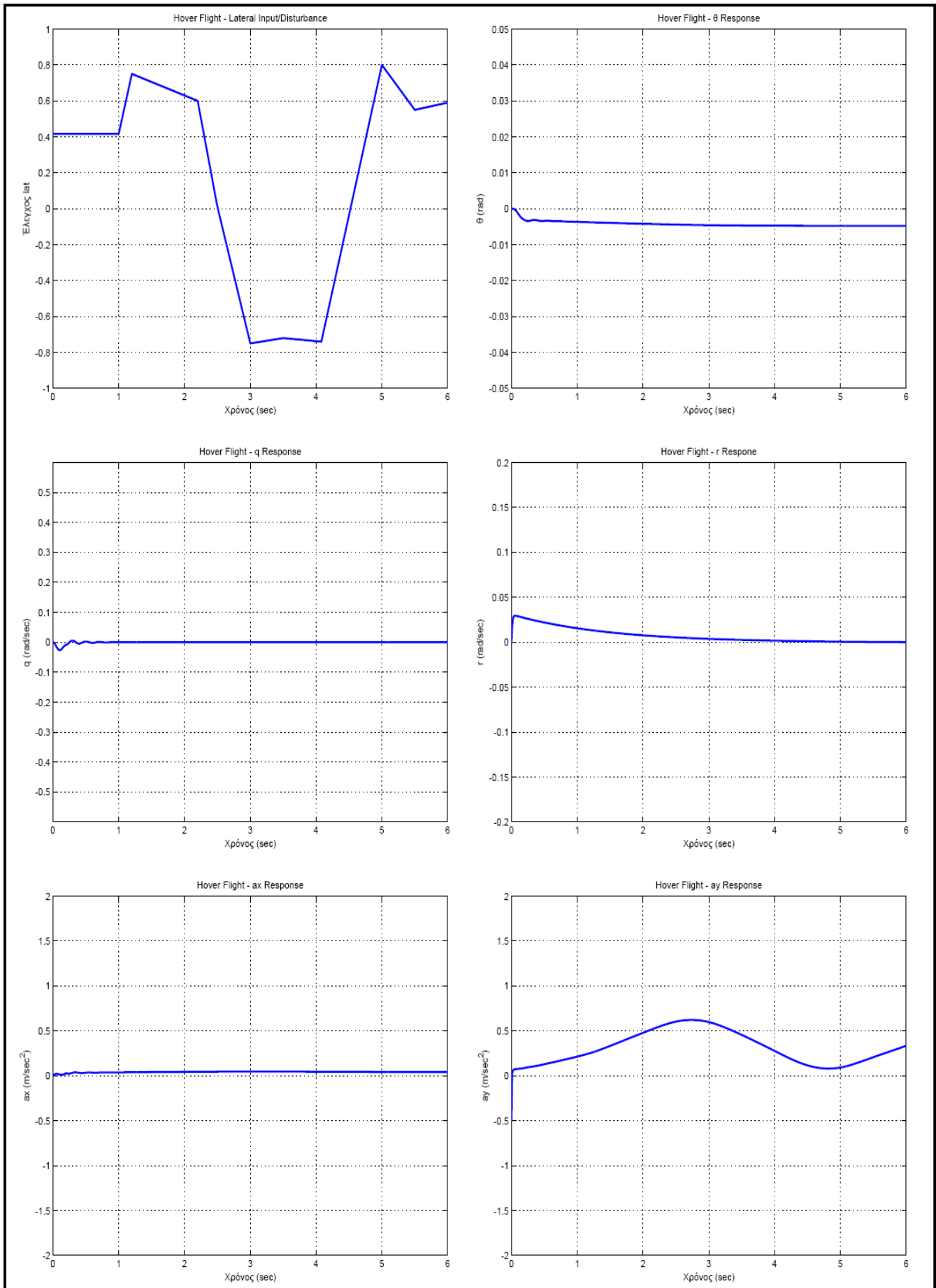
Εικόνα 2-25: Είσοδοι Διέγερσης και Αποκρίσεις για το Ελικόπτερο *Yamaha R-50*



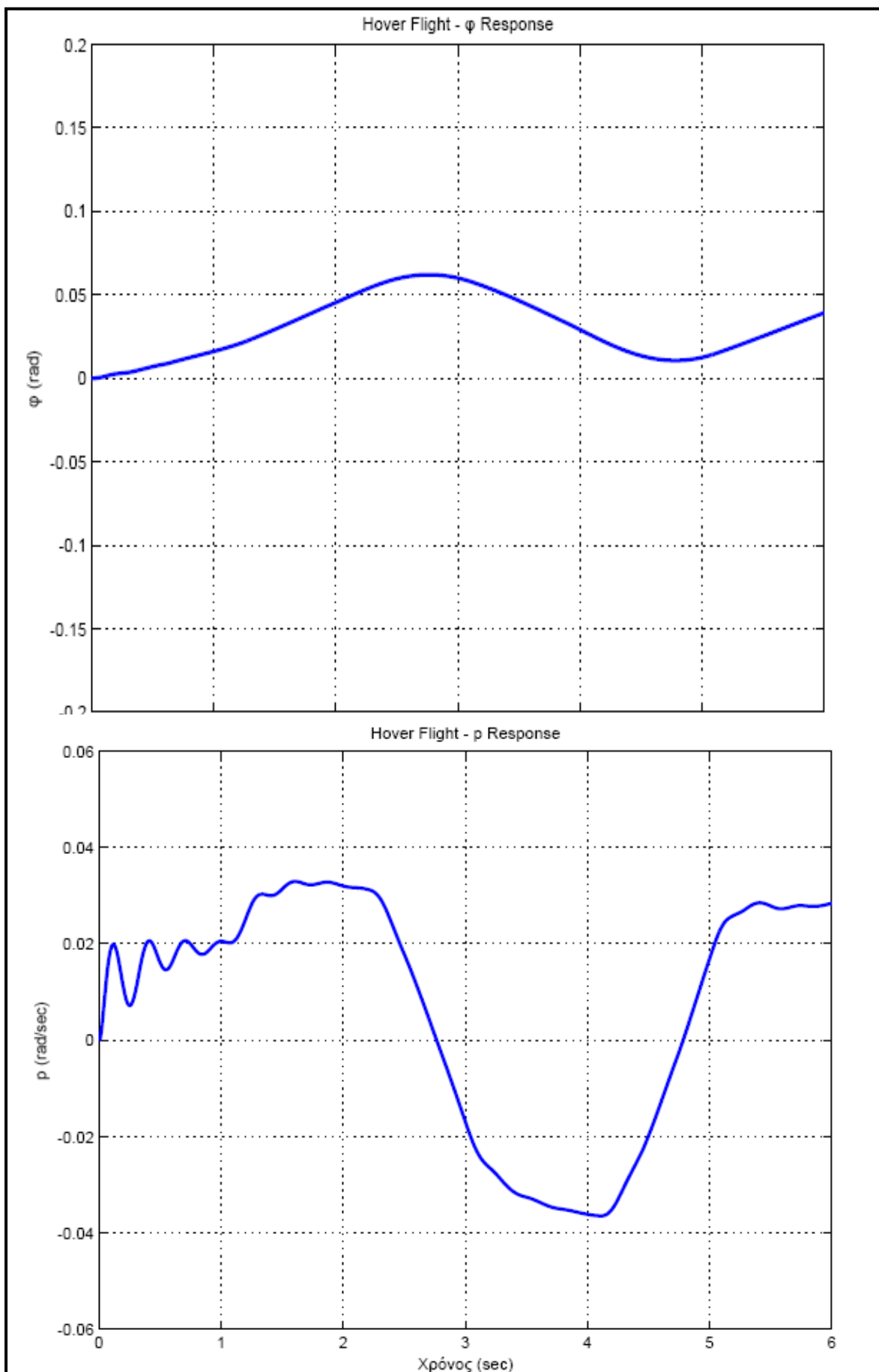
Εικόνα 2-26: Διέγερση του *Collective Input* και Αποκρίσεις (1)



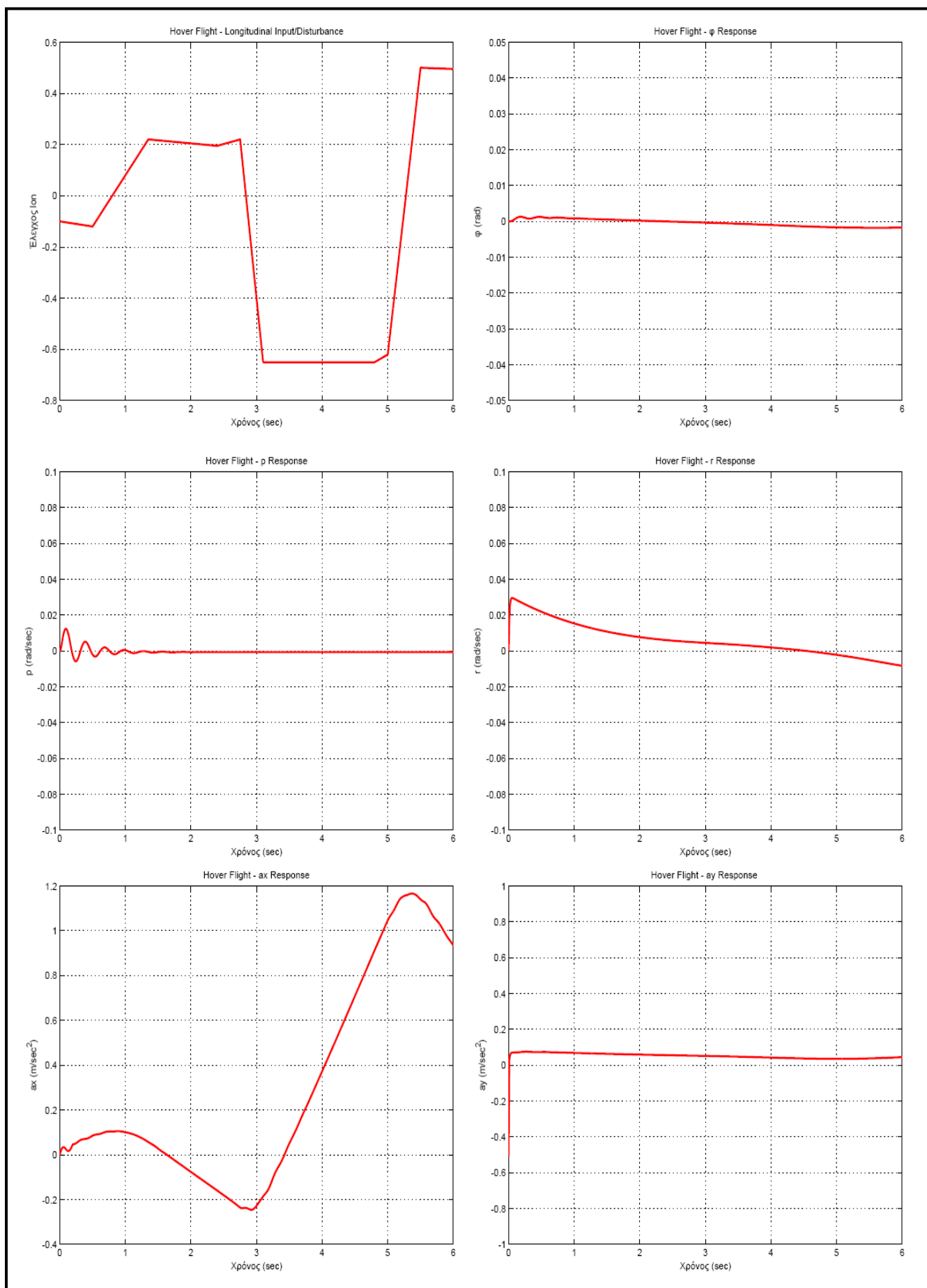
Εικόνα 2-27: Διέγερση του *Collective Input* και Αποκρίσεις (2)



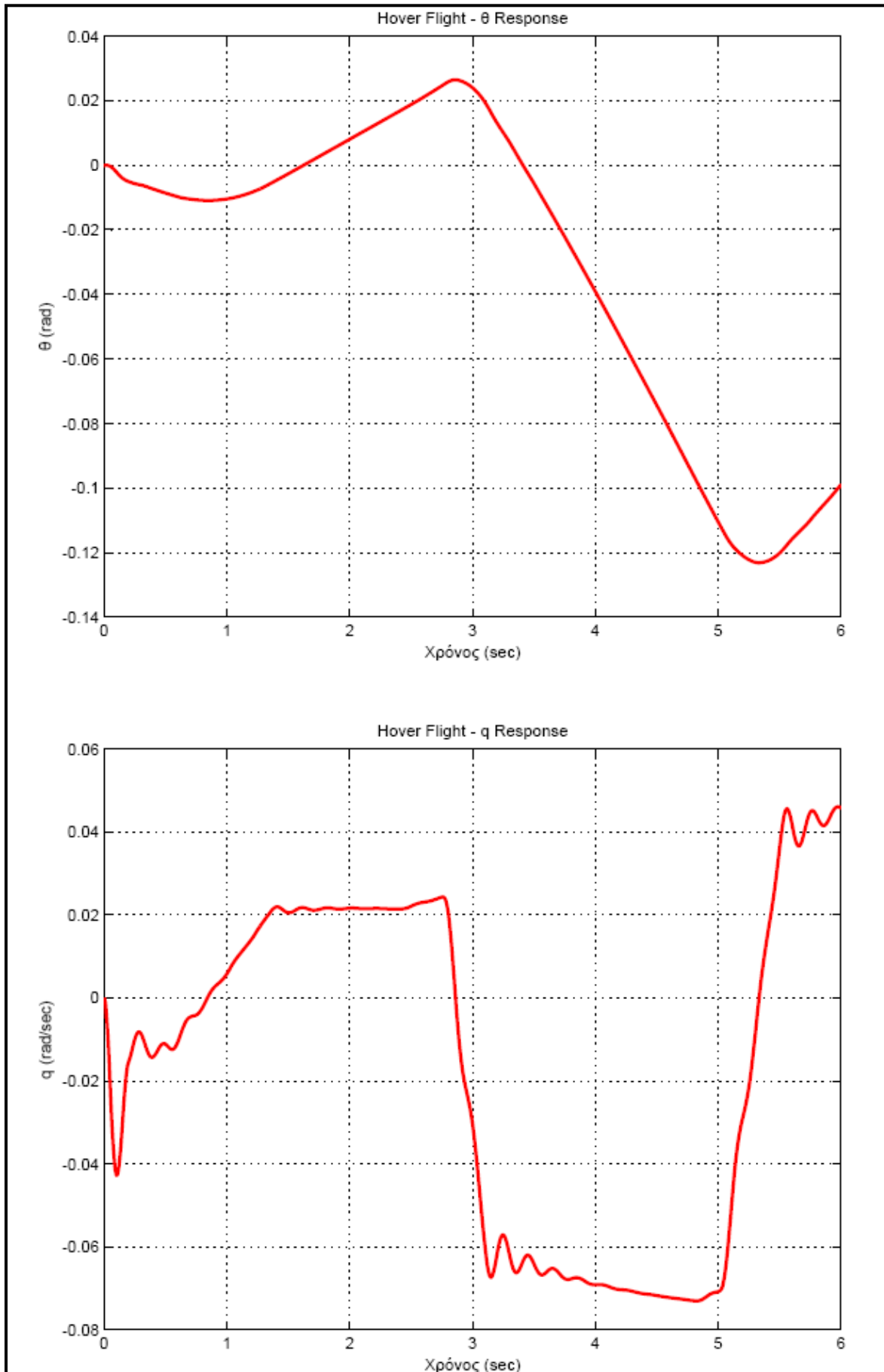
Εικόνα 2-28: Διέγερση του *Lateral Input* και Αποκρίσεις (1)



Εικόνα 2-29: Διέγερση του *Lateral Input* και Αποκρίσεις (2)



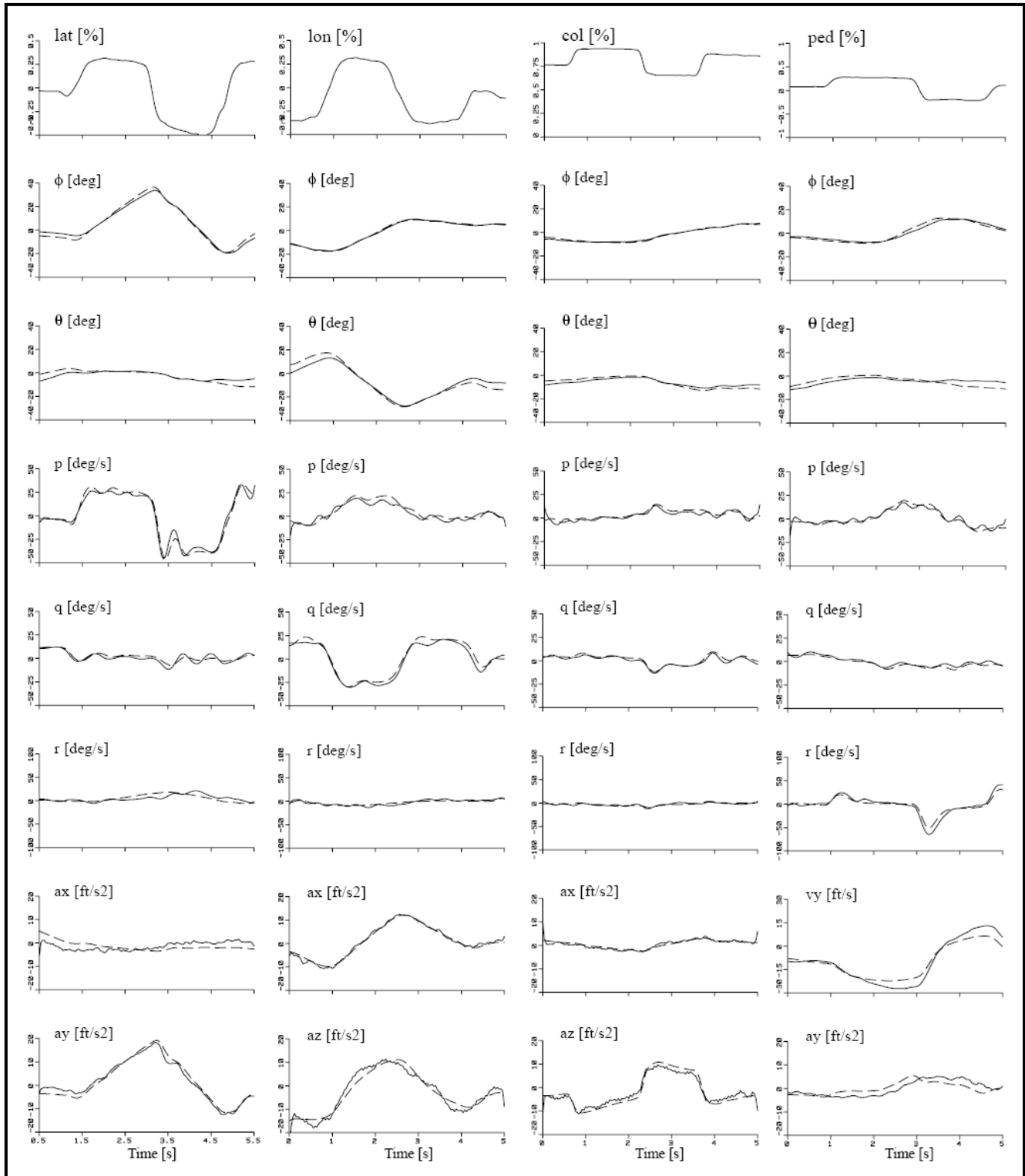
Εικόνα 2-30: Διέγερση του *Longitudinal Input* και Αποκρίσεις (1)



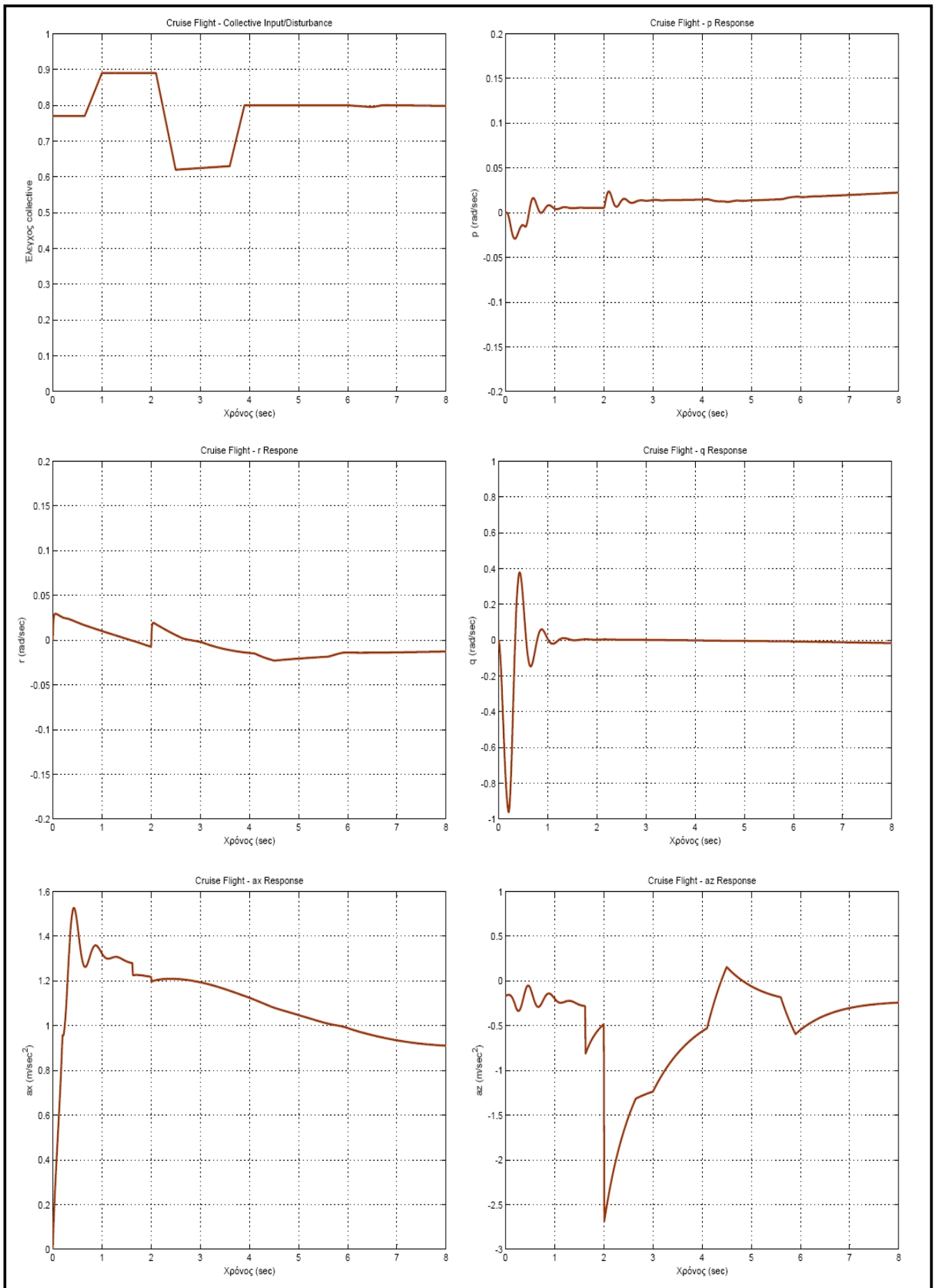
Εικόνα 2-31: Διέγερση του *Longitudinal Input* και Αποκρίσεις (2)

2.5.2.2 Αποτελέσματα για Cruise Flight με Είσοδο Τύπου Doublet

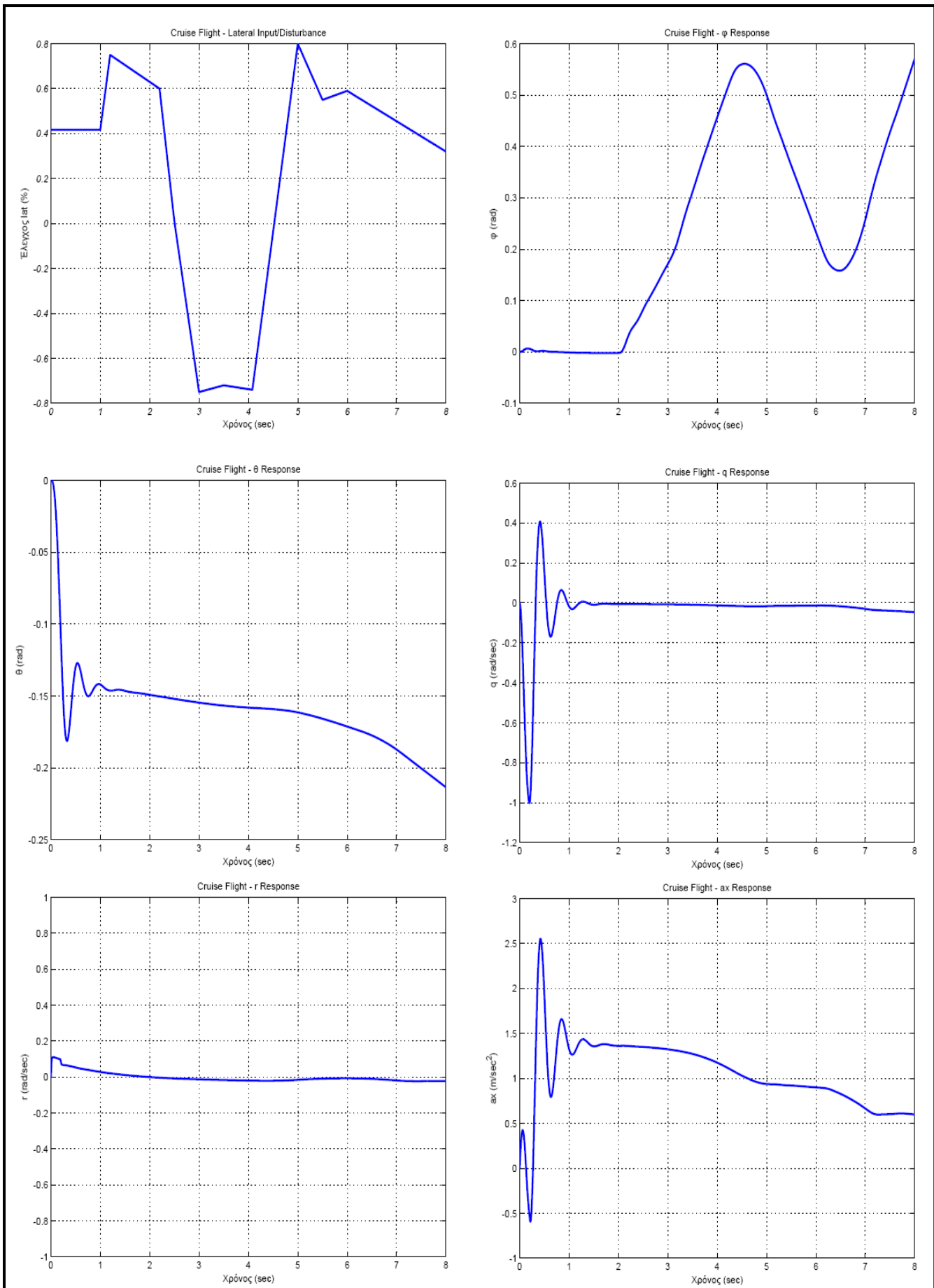
Στο σημείο αυτό γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων για *cruise flight* ($\mathbf{u}_0 \cong 13\text{m/s}$ & $v_0 \cong 3\text{m/s}$). Ομοίως με πριν, πρώτα παρουσιάζονται τα δεδομένα από την πτήση του *Yamaha R-50* και έπειτα αυτά από τις προσομοιώσεις μας για το *MIT X-Cell 60 SE*.



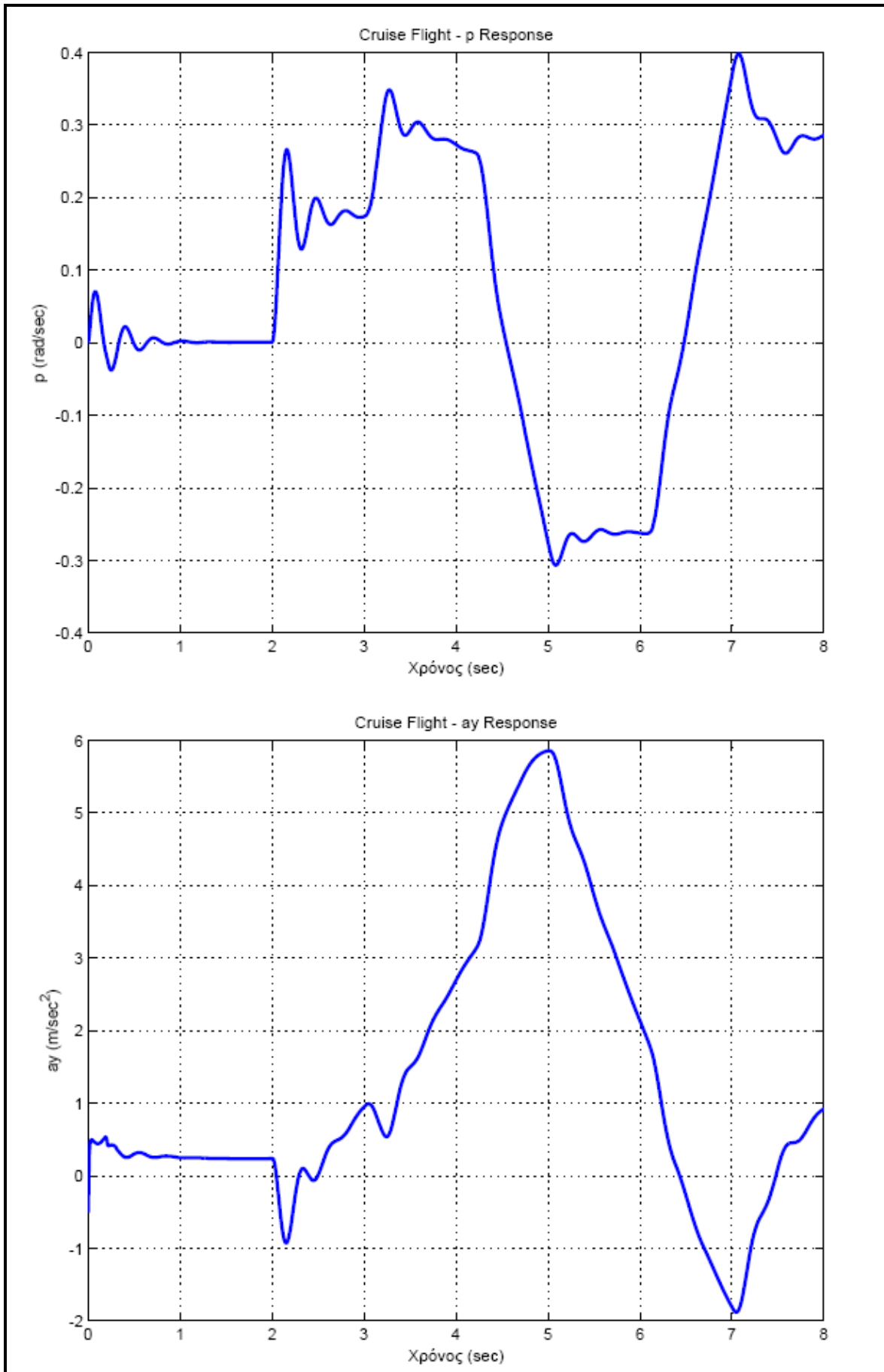
Εικόνα 2-32: Είσοδοι Διέγερσης και Αποκρίσεις για το Ελικόπτερο *Yamaha R-50*



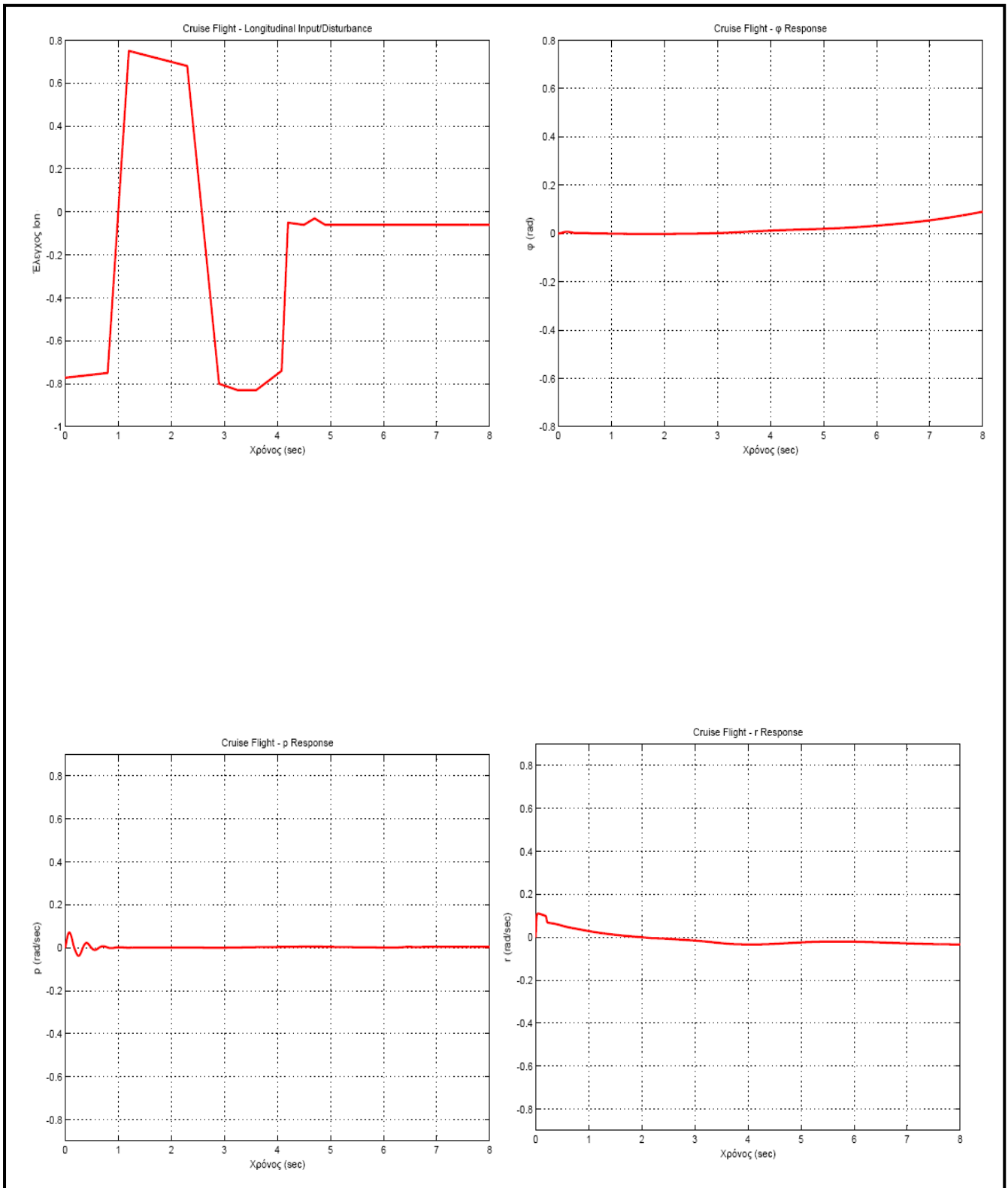
Εικόνα 2-33: Διέγερση του *Collective Input* και Αποκρίσεις



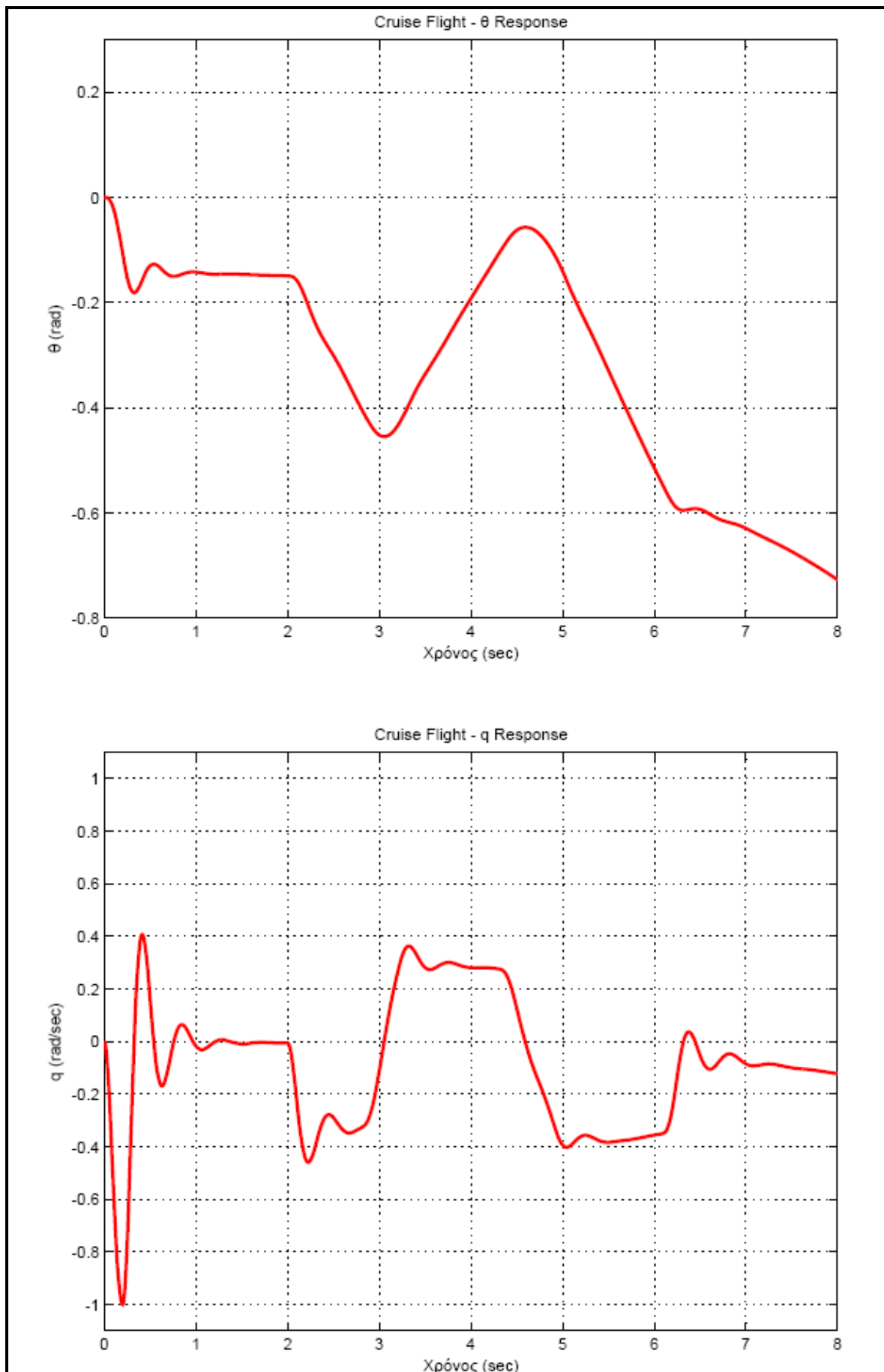
Εικόνα 2-34: Διέγερση του *Lateral Input* και Αποκρίσεις (1)



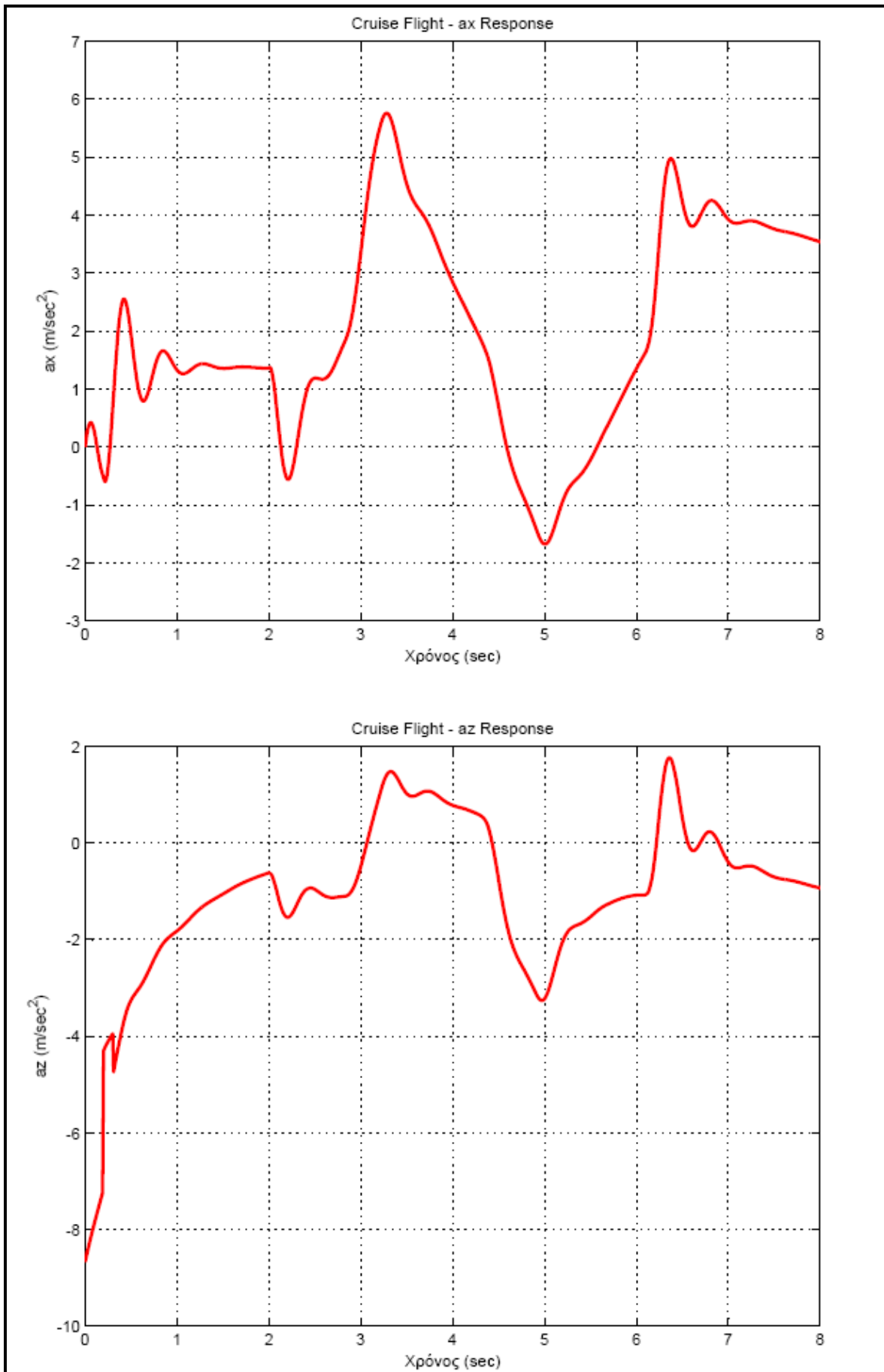
Εικόνα 2-35: Διέγερση του *Lateral Input* και Αποκρίσεις (2)



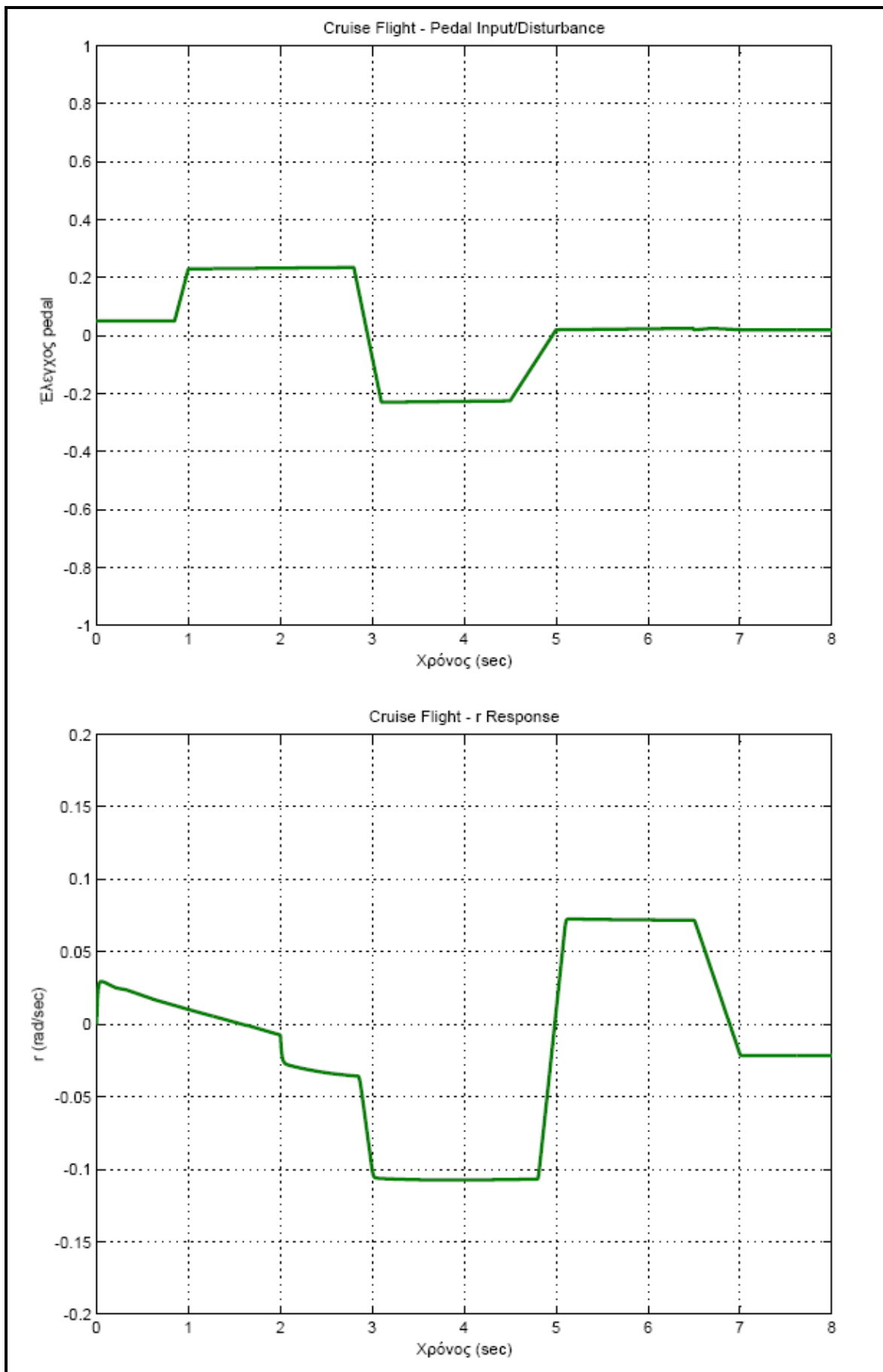
Εικόνα 2-36: Διέγερση *Longitudinal Input* και Αποκρίσεις (1)



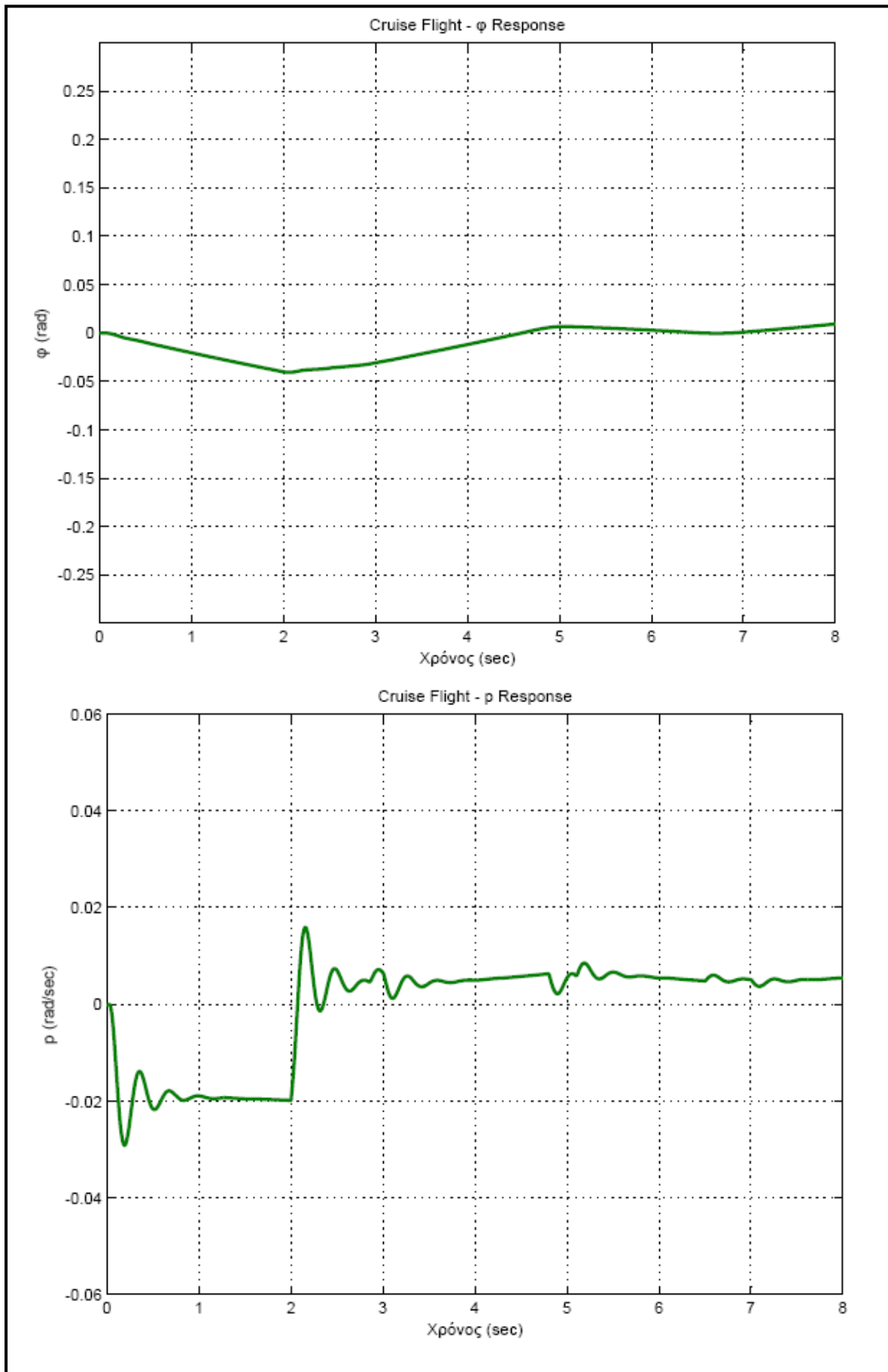
Εικόνα 2-37: Διέγερση *Longitudinal Input* και Αποκρίσεις (2)



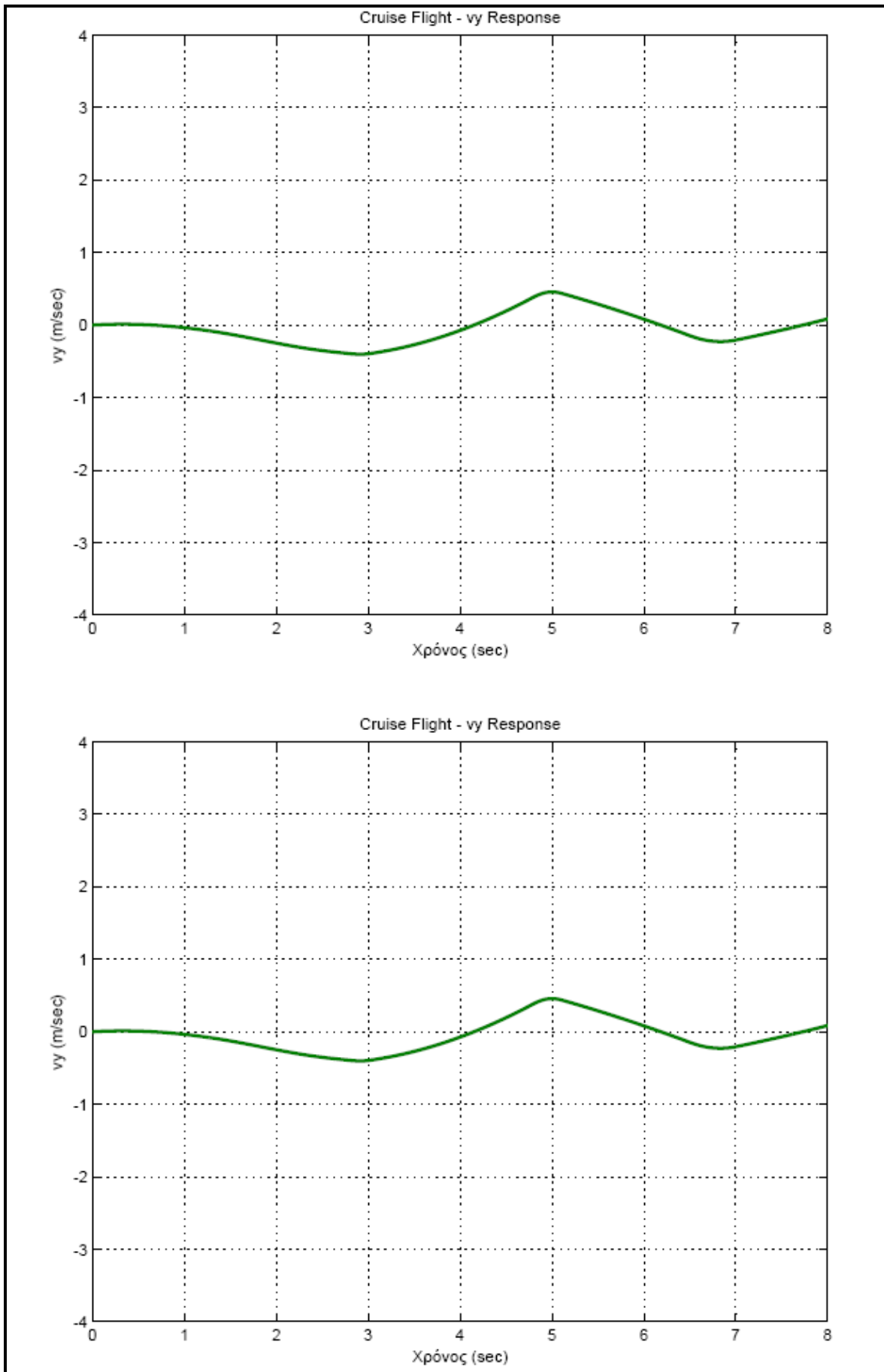
Εικόνα 2-38: Διέγερση *Longitudinal Input* και Αποκρίσεις (3)



Εικόνα 2-39: Διέγερση *Pedal Input* και Αποκρίσεις (1)



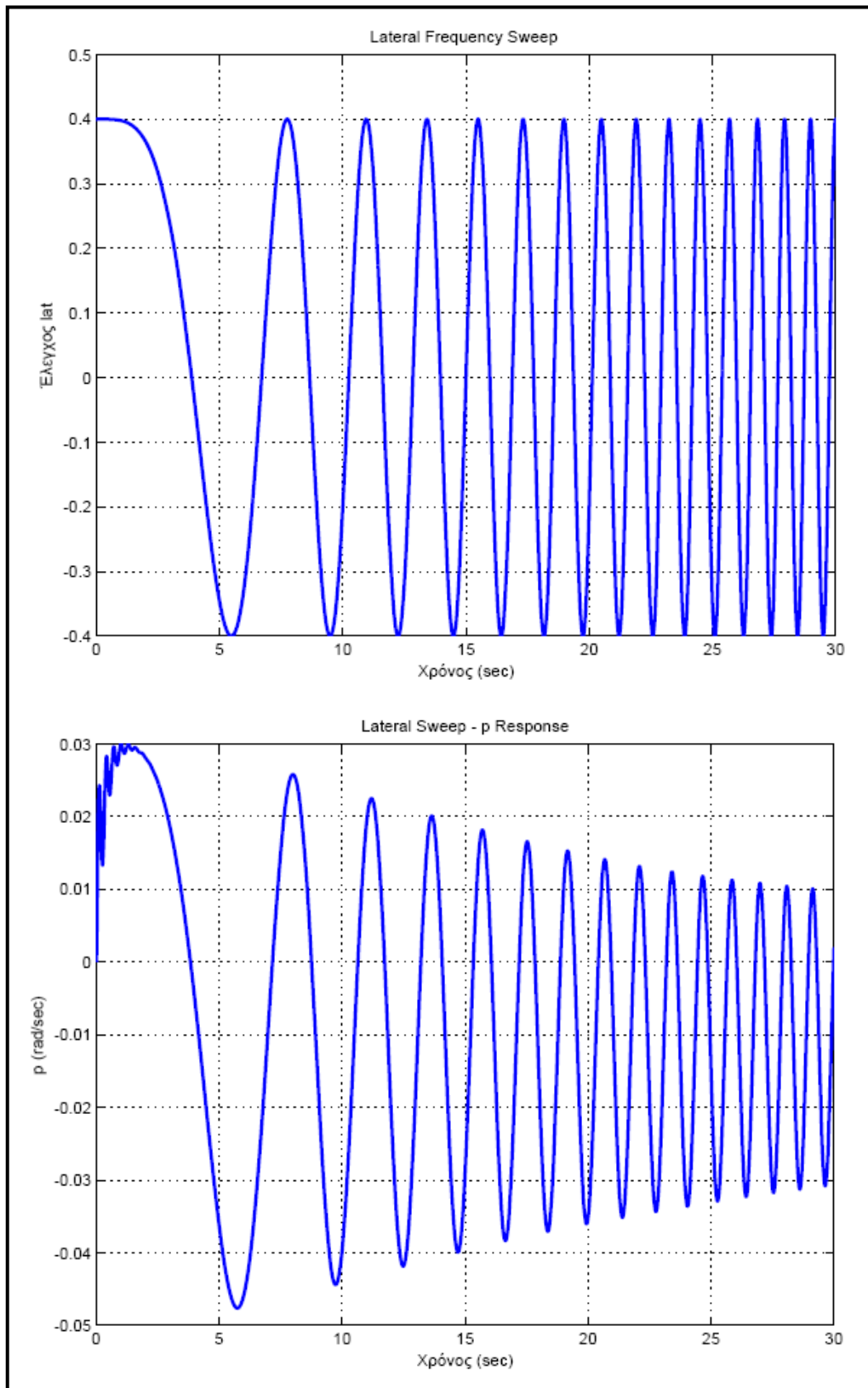
Εικόνα 2-40: Διέγερση *Pedal Input* και Αποκρίσεις (2)



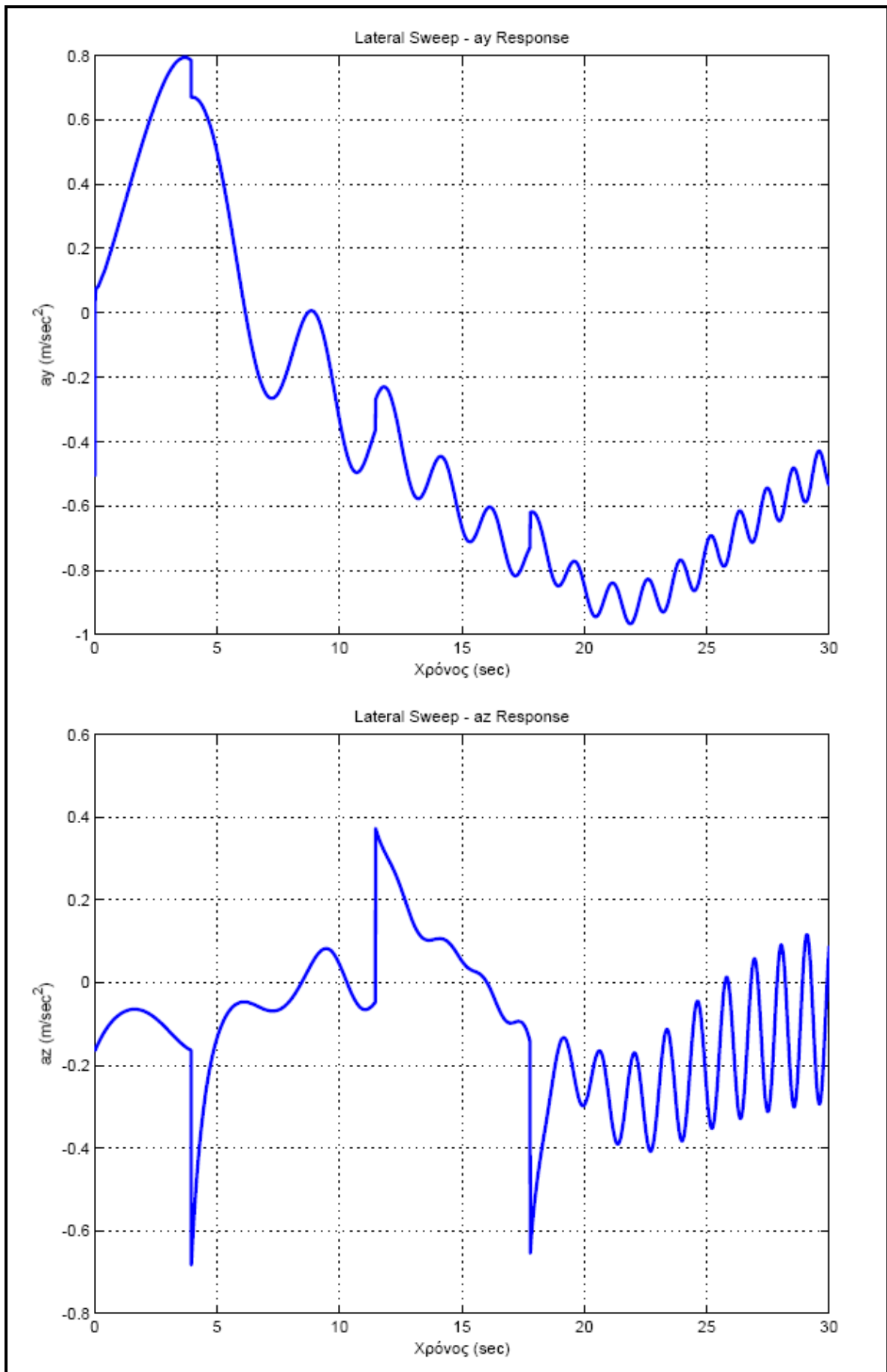
Εικόνα 2-41: Διέγερση *Pedal Input* και Αποκρίσεις (3)

2.5.2.3 Αποτελέσματα για Διέγερση με Είσοδο Τύπου *Frequency Sweep*

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται διαγράμματα με την είσοδο τύπου *frequency sweep* για το *lateral input* και τις αποκρίσεις του ελικοπτέρου.



Εικόνα 2-42: Διέγερση *Lateral Input* με *Frequency Sweep* και Αποκρίσεις (1)



Εικόνα 2-43: Διέγερση *Lateral Input* με *Frequency Sweep* και Αποκρίσεις (2)

2.5.3 Σύγκριση και Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Στην παράγραφο αυτή γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων από τα τις πραγματικές μετρήσεις και από την προσομοίωση, καθώς και η ανάλυση ορισμένων ιδιαίτερων χαρακτηριστικών που μπορούν να φανούν μέσα από τα δοσμένα διαγράμματα. Πριν, όμως, γίνονται ορισμένα σχόλια και παρατηρήσεις που σχετίζονται με τις μετρήσεις και τα αποτελέσματα. Έχουμε λοιπόν:

- Η παράθεση των αποτελεσμάτων από δύο διαφορετικά ελικόπτερα (όταν ειδικά το *Yamaha R-50* έχει σχεδόν διπλάσιο μέγεθος από το *MIT X-Cell 60 SE*) θα μπορούσε να θεωρηθεί αβασίμη. Παρόλα αυτά, τα δύο αυτά ελικόπτερα έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και η μοντελοποίηση της δυναμικής των διέπεται από τους ίδιους κανόνες και θεωρήσεις της αεροδυναμικής και της αεροελαστικότητας. Επομένως, η σύγκριση των αποτελεσμάτων μας δίνει τη δυνατότητα της πιστοποίησης, μέχρι ενός βαθμού, του μη-γραμμικού μοντέλου που έχει αναπτυχθεί.
- Σε πολλά από τα διαγράμματα της προσομοίωσης που παρουσιάζονται παραπάνω φαίνεται μία ταλάντωση στην αρχή της μέτρησης (π.χ. *Εικόνα 2-34 ax Response*). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι περισσότερες μετρήσεις της προσομοίωσης έγιναν κατά την εκκίνηση αυτής, επειδή στην περίπτωση αυτή είναι ευκολότερος ο έλεγχος των σημείων (δηλαδή γραμμικές και γωνιακές ταχύτητες του ελικοπτέρου) στα οποία είναι επιθυμητό να γίνουν οι μετρήσεις. Κατά την έναρξη όμως της προσομοίωσης υπάρχει ένα μικρό χρονικό διάστημα μέχρι να συγκλίνουν οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι ή να δράσει το γυροσκόπιο. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζεται η ταλαντωτική αυτή συμπεριφορά, η οποία όμως διαπιστώθηκε ότι δεν παρουσιάζεται σε επόμενα χρονικά σημεία κατά την προσομοίωση.
- Σε ορισμένες μετρήσεις της προσομοίωσης παρατηρείται μία απότομη αλλαγή τιμής στις αποκρίσεις (κυρίως στις πρωτεύουσες αποκρίσεις, δηλαδή στις επιταχύνσεις και τις γωνιακές ταχύτητες), σε αντίθεση με τις μετρήσεις κατά την πραγματική πτήση, όπου όλες οι αποκρίσεις παρουσιάζουν ομαλή μεταβολή. Το γεγονός αυτό είναι απόρροια της αδυναμίας σχεδίασης ομαλών εισόδων διέγερσης, της επίλυσης του μη-γραμμικού συστήματος, αλλά και επειδή το *MIT X-Cell 60 SE* είναι ακροβατικό/αεροβατικό ελικόπτερο, με αποτέλεσμα οι αντιδράσεις του στις εισόδους να είναι πολύ εντονότερες από αυτές του *Yamaha R-50*, το οποίο είναι ιδιαίτερα σταθερό και βαρύ.

Μετά τα σχόλια και τις παρατηρήσεις σχετικά με ορισμένα “περίεργα” σημεία των αποτελεσμάτων γίνεται η σύγκριση και ανάλυση αυτών.

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα των αποκρίσεων των δύο ελικοπτέρων για τις αντίστοιχες εισόδους, η συμπεριφορά είναι παρόμοια, αν εξαιρέσουμε βέβαια το εύρος των αποκρίσεων (το γεγονός αυτό είναι λογικό, αφού τα δύο ελικόπτερα έχουν διαφορετικά δυναμικά όρια). Άρα, μπορούμε να πούμε ότι το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο έχει σωστές αποκρίσεις, ειδικά από τη στιγμή που οι είσοδοι τύπου *doublet* χρησιμοποιούνται για πιστοποίηση δυναμικών μοντέλων.

Παρόλα αυτά, υπάρχει μία διαφορά στη δυναμική συμπεριφορά των δύο ελικοπτέρων, η οποία διατυπώνεται καθαρά και στις αποκρίσεις αυτών για τις αντίστοιχες εισόδους. Ενώ στις *on-axis* αποκρίσεις τα ελικόπτερα για τις αντίστοιχες εισόδους παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά, στις *off-axis* αποκρίσεις (δηλαδή η απόκριση στον άξονα x για διέγερση του ελικοπτέρου στον y) υπάρχει διαφορά. Το *Yamaha R-50* στις *off-axis* αποκρίσεις παρουσιάζει μία μικρή διέγερση με τη μορφή ταλάντωσης, σε αντίθεση με το *MIT X-Cell 60 SE*, το οποίο δεν παρουσιάζει τη συμπεριφορά αυτή. Αυτό είναι ξεκάθαρο και απόλυτα αντιληπτό από τα διαγράμματα για διέγερση στο *lateral input* κατά το *cruise flight* και την απόκριση του q . Έτσι, ενώ το ελικόπτερο ως δυναμικό σύστημα είναι εν γένει ιδιαίτερα *coupled* στη συγκεκριμένη περίπτωση η διαφορά αυτή οφείλεται στο *flybar/stabilizer bar*, αφού η επίδρασή του στα δύο ελικόπτερα είναι διαφορετικού μεγέθους.

Το *Yamaha R-50* (όπως και το ελικόπτερο που υπάρχει στο **Εργαστήριο του Αυτομάτου Ελέγχου, Maxi Joker 2**) διαθέτει *flybar* μεγαλύτερου μεγέθους συγκριτικά με *MIT X-Cell 60 SE*. Το *flybar* είναι κάθετο στον κύριο έλικα και η επίδρασή του έχει μία διαφορά φάσης 90° με αυτόν. Το γεγονός αυτό είναι υπεύθυνο για το φαινόμενο του έντονου *coupling* στο ελικόπτερο, αφού ενώ το *flybar* προσφέρει μία μεγαλύτερη ευστάθεια ως αερομηχανική ανάδραση έχει ως αποτέλεσμα και την *off-axis* διαταραχή.

Η προσφορά του *flybar* στη δυναμική συμπεριφορά του ελικοπτέρου αξιολογείται μέσω του *Lock Number*, γ_{fb} . Όταν ο αριθμός *Lock* για το *flybar* έχει τιμή μικρότερη της μονάδας, τότε η συνεισφορά του στη δυναμική συμπεριφορά του ελικοπτέρου είναι σχετικά μικρή και η δυναμική του μπορεί να συνυπολογισθεί μέσω της χρονικής σταθεράς τ_e στις εξισώσεις *flapping* του ρότορα (2.19 & 2.20). Σε αντίθετη περίπτωση, όπως συμβαίνει στο *Yamaha R-50* και το *Maxi Joker 2*, η δυναμική του *flybar* κρίνεται σκόπιμο να μοντελοποιηθεί με χρήση δύο επιπλέον διαφορικών εξισώσεων αλλά και την προσθήκη δύο όρων στις εξισώσεις για το *flapping* του ρότορα. Έτσι, στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις μας γίνονται για το *flybar*:

$$\tau_e \dot{d} = -d - \tau_e p + D_{lat} \cdot \delta_{lat} \quad (2.135)$$

$$\tau_e \dot{c} = -c - \tau_e q + C_{lon} \cdot \delta_{lon} \quad (2.136)$$

όπου στις \mathbf{d}, \mathbf{c} είναι οι γωνίες *flapping* του *flybar* (κατά αντιστοιχία με τον κύριο ρότορα) και \mathbf{D}_{lat} και \mathbf{C}_{lon} κέρδη που δείχνουν τη συνεισφορά των *cyclic* εισόδων ελέγχου του ελικοπτέρου στη δυναμική του *flybar*. Για το *flapping* του κύριου ρότορα οι εξισώσεις γίνονται:

$$\dot{\alpha}_1 = -q - \frac{\alpha_1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_e} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} \frac{u - u_w}{\Omega_{mr} R_{mr}} + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_z} \frac{w - w_w}{\Omega_{mr} * R_{mr}} \right) \right) + \frac{A_{\delta_{lon}}}{\tau_e} \overline{\delta_{lon}} + \frac{A_{\delta_{lat}}}{\tau_e} \delta_{lat} \quad (2.137)$$

$$\dot{b}_1 = -p - \frac{b_1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial b_1}{\partial \mu} \frac{v - v_w}{\Omega_{mr} R_{mr}} + \frac{B_{\delta_{lat}}}{\tau_e} \overline{\delta_{lat}} + \frac{B_{\delta_{lon}}}{\tau_e} \delta_{lon} \quad (2.138)$$

Όπου $\mathbf{B}_{\delta_{lon}}$ και $\mathbf{A}_{\delta_{lat}}$ είναι κέρδη για την *cross/off-axis* συνεισφορά και

$$\overline{\delta_{lat}} = \delta_{lat} + \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{d} \quad (2.139)$$

$$\overline{\delta_{lon}} = \delta_{lon} + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{c} \quad (2.140)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις τα \mathbf{K}_d και \mathbf{K}_c είναι τα κέρδη με τα οποία συνεισφέρουν οι γωνίες *flapping* του *flybar* ως ανάδραση στις *cyclic* εισόδους ελέγχου του κύριου ρότορα και επομένως και του ελικοπτέρου στους άξονες x και y .

2.6 Προσομοίωση του Γραμμικού Δυναμικού Μοντέλου

Στο σημείο αυτό γίνεται η παρουσίαση ορισμένων αποκρίσεων του γραμμικού δυναμικού μοντέλου του ελικοπτέρου, η εύρεση του οποίου έγινε με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης και παρουσιάζεται σε προηγούμενο σημείο του κεφαλαίου αλλά και στο παράρτημα.

2.6.1 Υλοποίηση με Χρήση H/Y

Για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή που αναφέρεται παραπάνω για το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο, αλλά είναι πολύ απλούστερη. Ακόμη, το δομικό διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε στο λογισμικό για την εύρεση των αποκρίσεων αλλάζει στο σημείο της δυναμικής, αφού το γραμμικό μοντέλο μπορεί να εκφραστεί με ένα μόνο “κουτάκι” στο *Simulink* ως *State-Space Model*. Επίσης, για τη διέγερση του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν οι εισοδοί με τις οποίες ελέγχθηκε και το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο, όπως αυτές παρουσιάζονται παραπάνω. Τέλος, τα υπόλοιπα

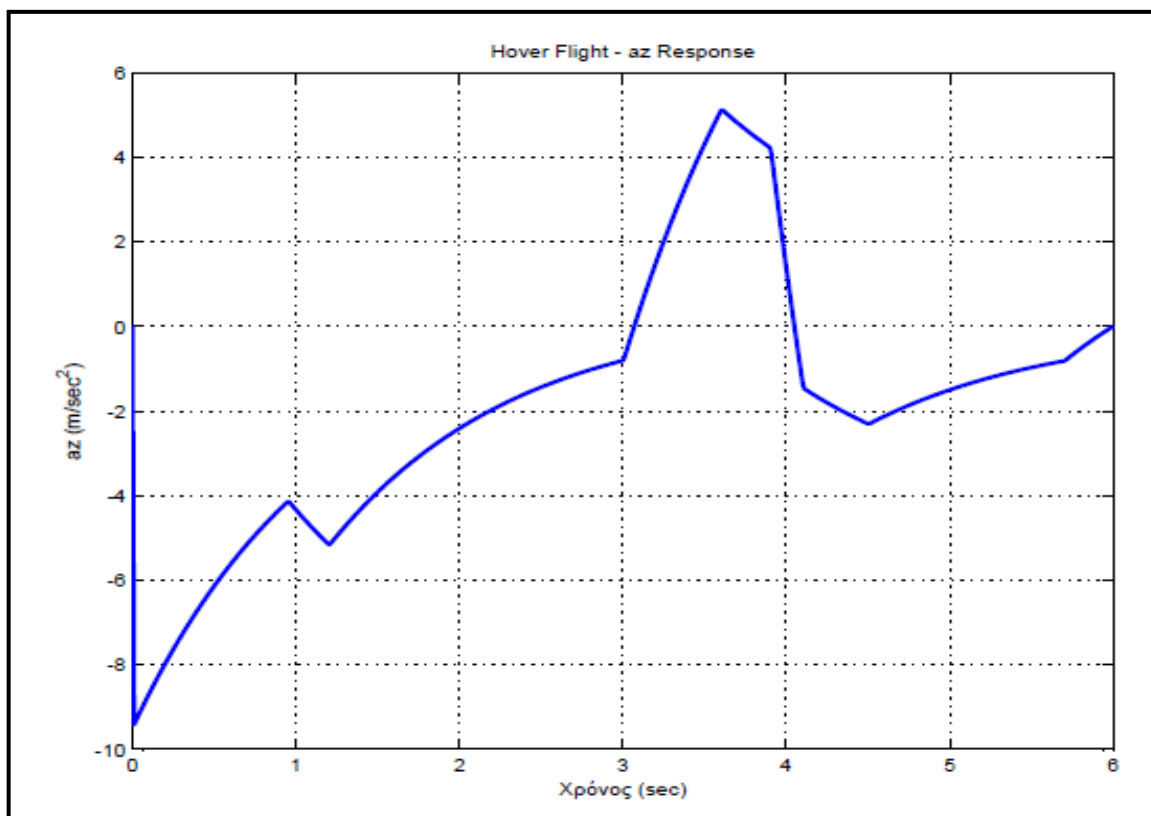
στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν κατά την προσομοίωση του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου ως είχαν χρησιμοποιήθηκαν και στην προσομοίωση του γραμμικού.

2.6.2 Παράδειγμα και Αποκρίσεις Πτήσης Hover του Ελικοπτέρου

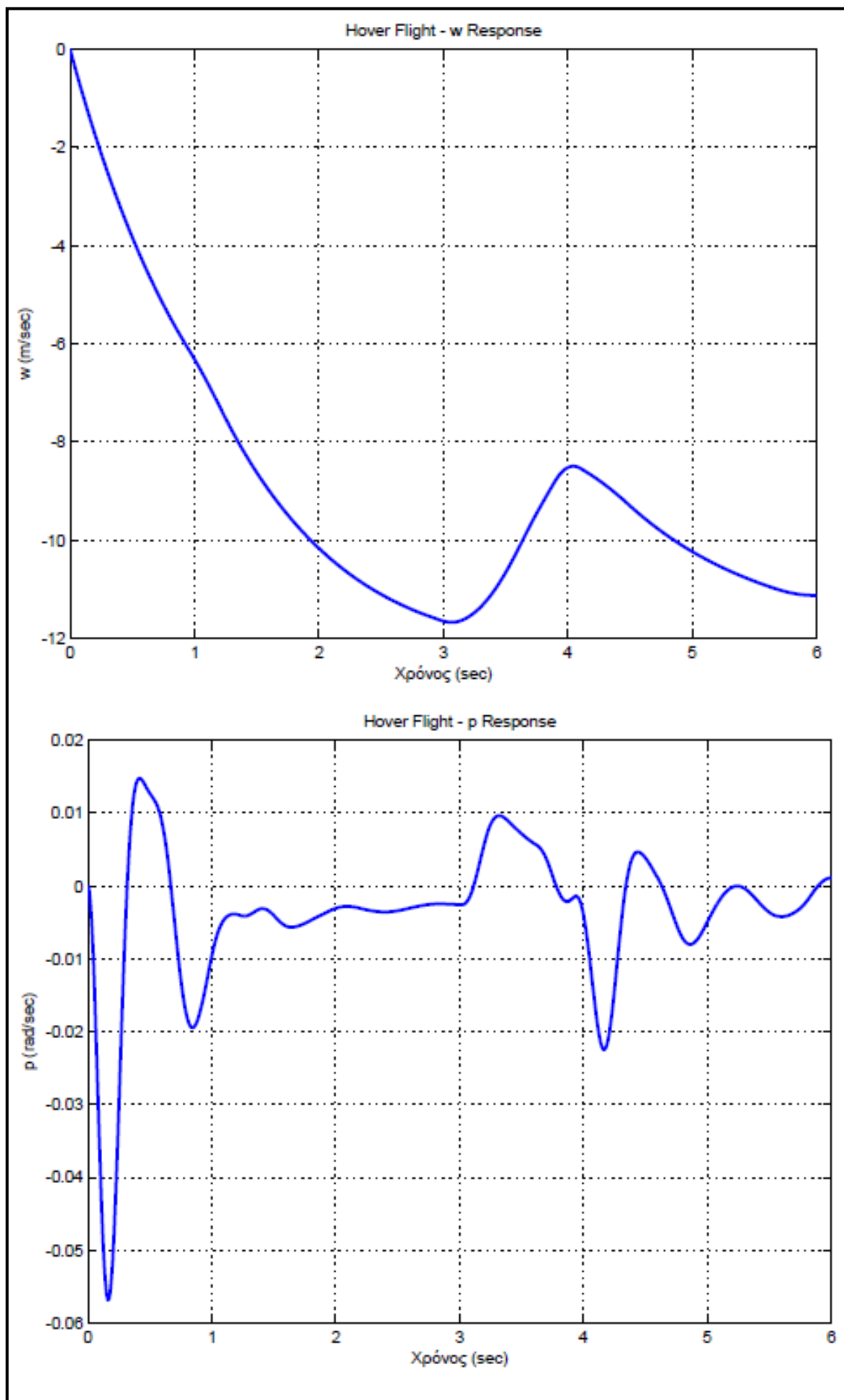
Το παράδειγμα πτήσης που χρησιμοποιείται στο σημείο αυτό είναι αυτό της κατάστασης hover και χαρακτηρίζεται μέσω των trimmed-states τα οποία είναι $(u, v, w) = \mathbf{0}$ & $(p, q, r) = \mathbf{0}$. Έτσι, με χρήση των σχέσεων που παρουσιάζονται στο παράρτημα έγινε η εύρεση των τιμών των παραγώγων ευστάθειας και ελέγχου που επίσης παρουσιάζονται στο παράρτημα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι μετρήσεις των εισόδων και ορισμένες αποκρίσεις αυτών.

*Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται είναι αυτά που έχουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

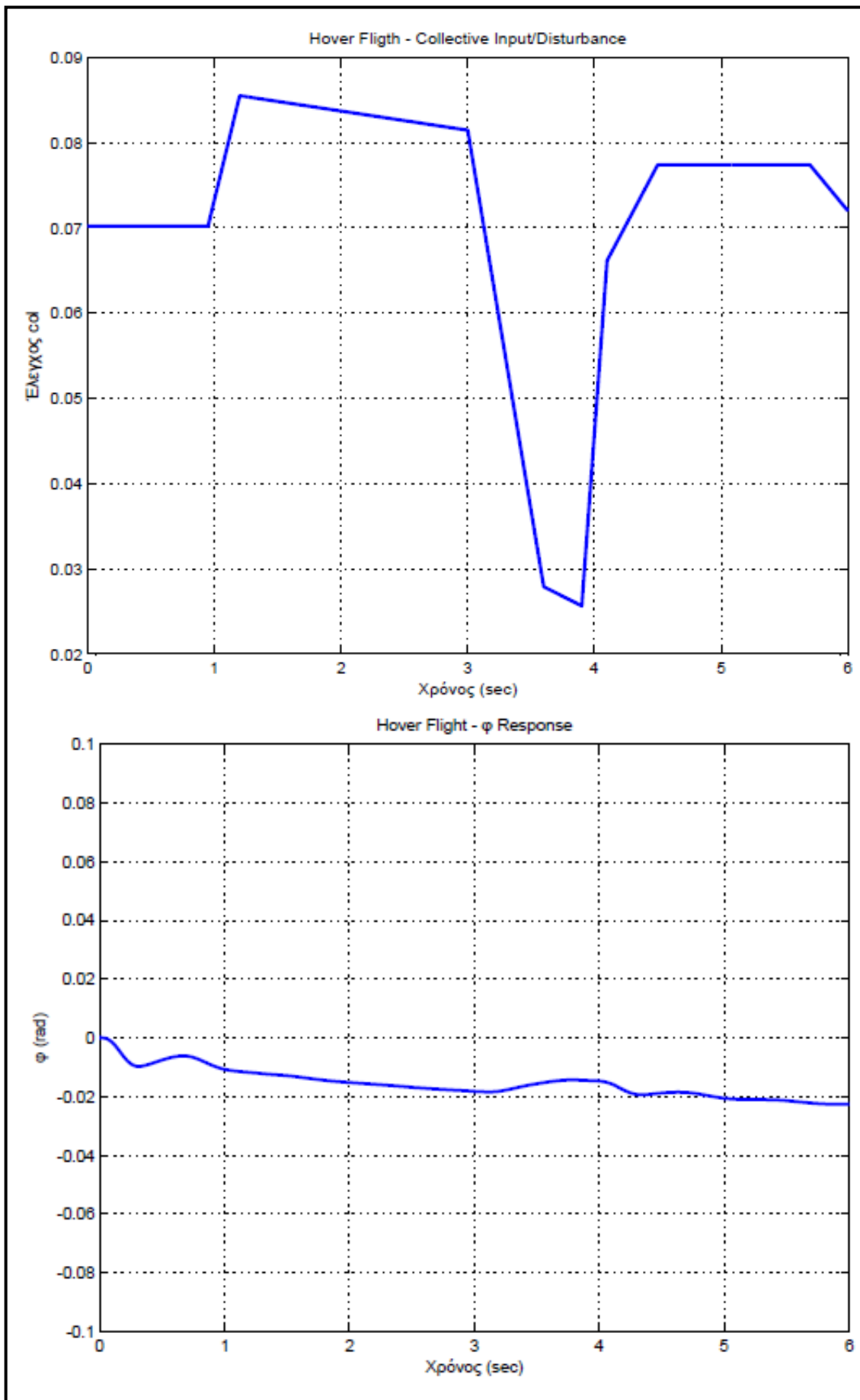
2.6.2.1 Αποτελέσματα για Hover Flight με Είσοδο Τύπου Doublet



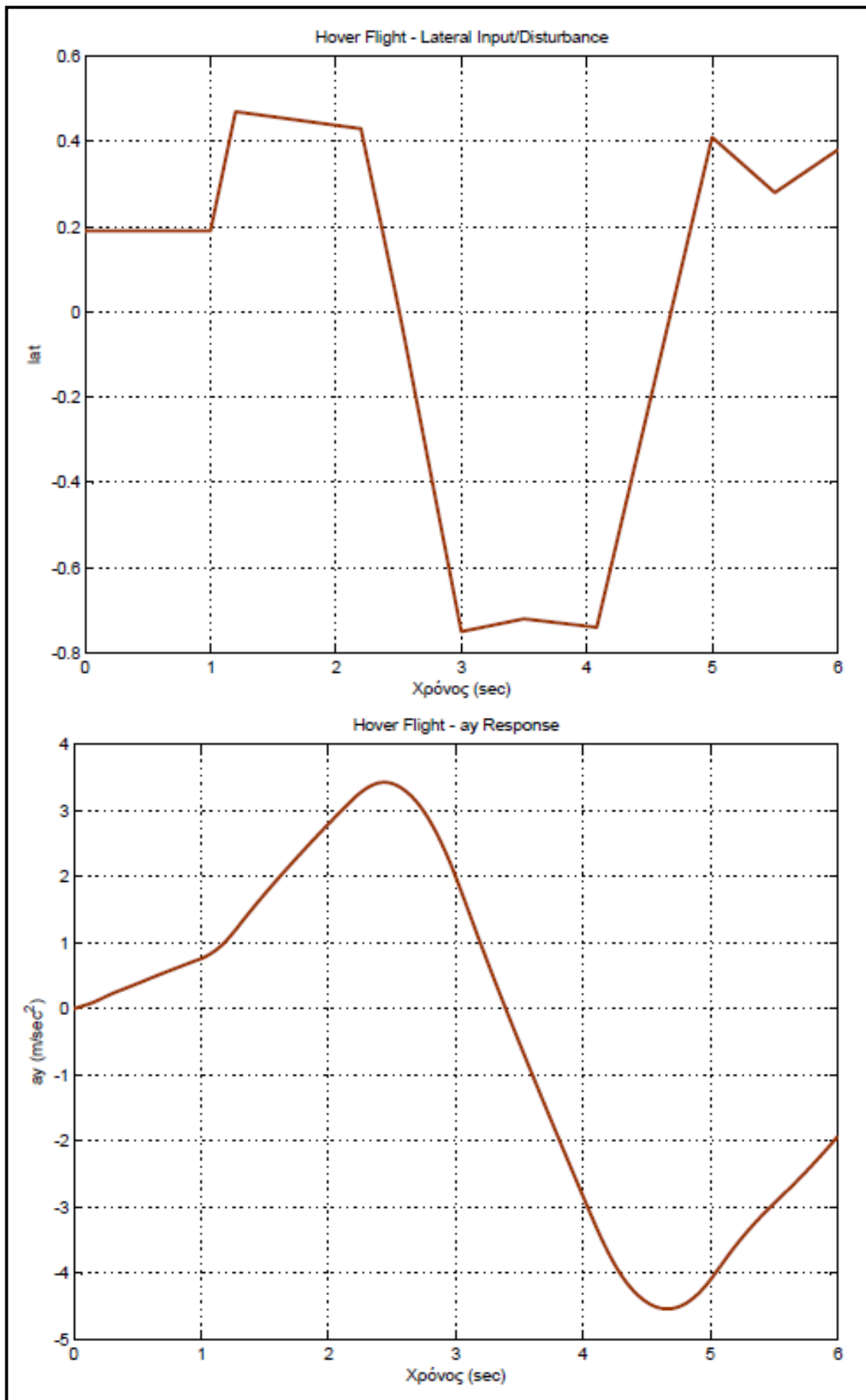
Εικόνα 2-46: Διέγερση Collective Input και Αποκρίσεις (1)



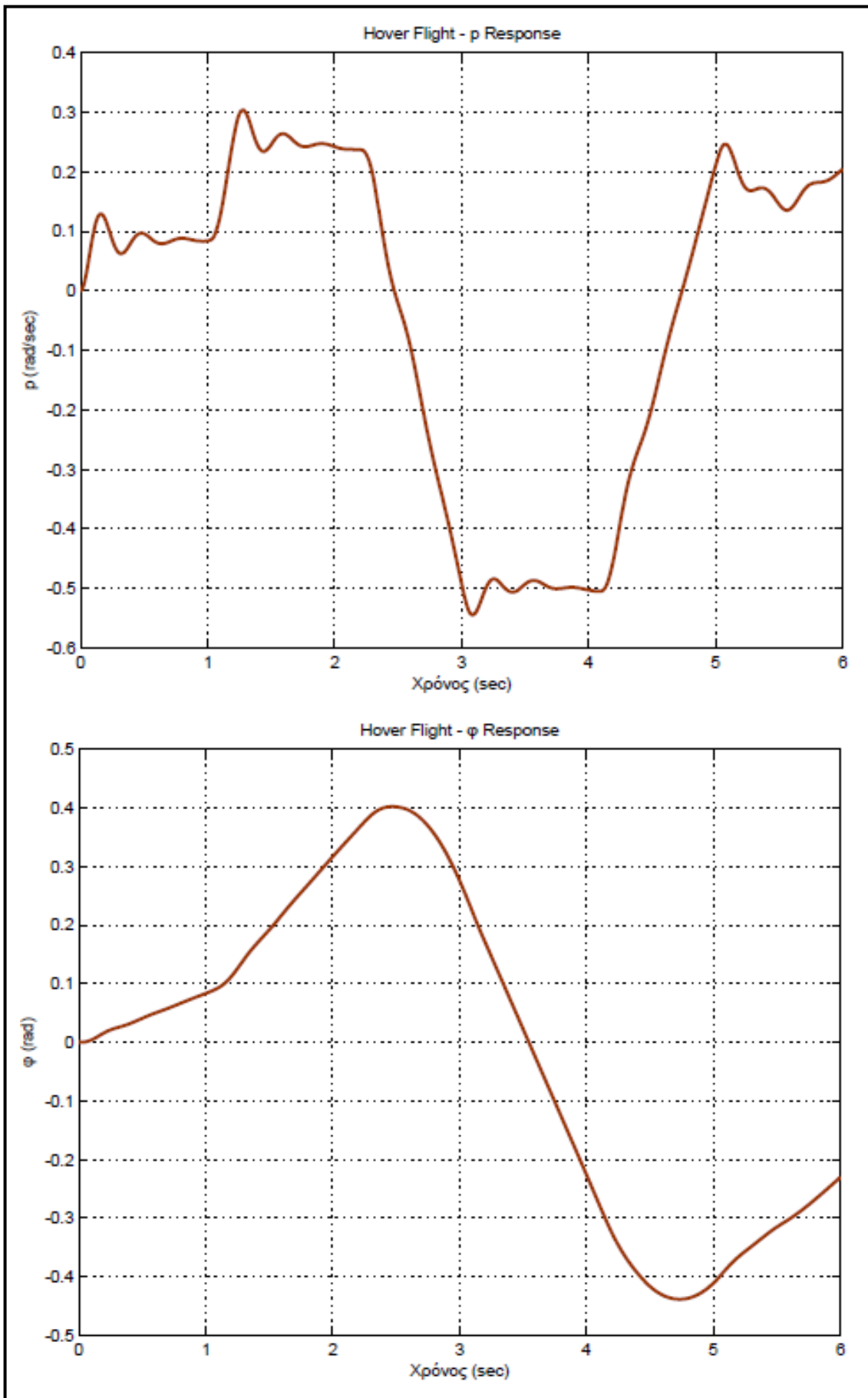
Εικόνα 2-47: Διέγερση Collective Input και Αποκρίσεις (2)



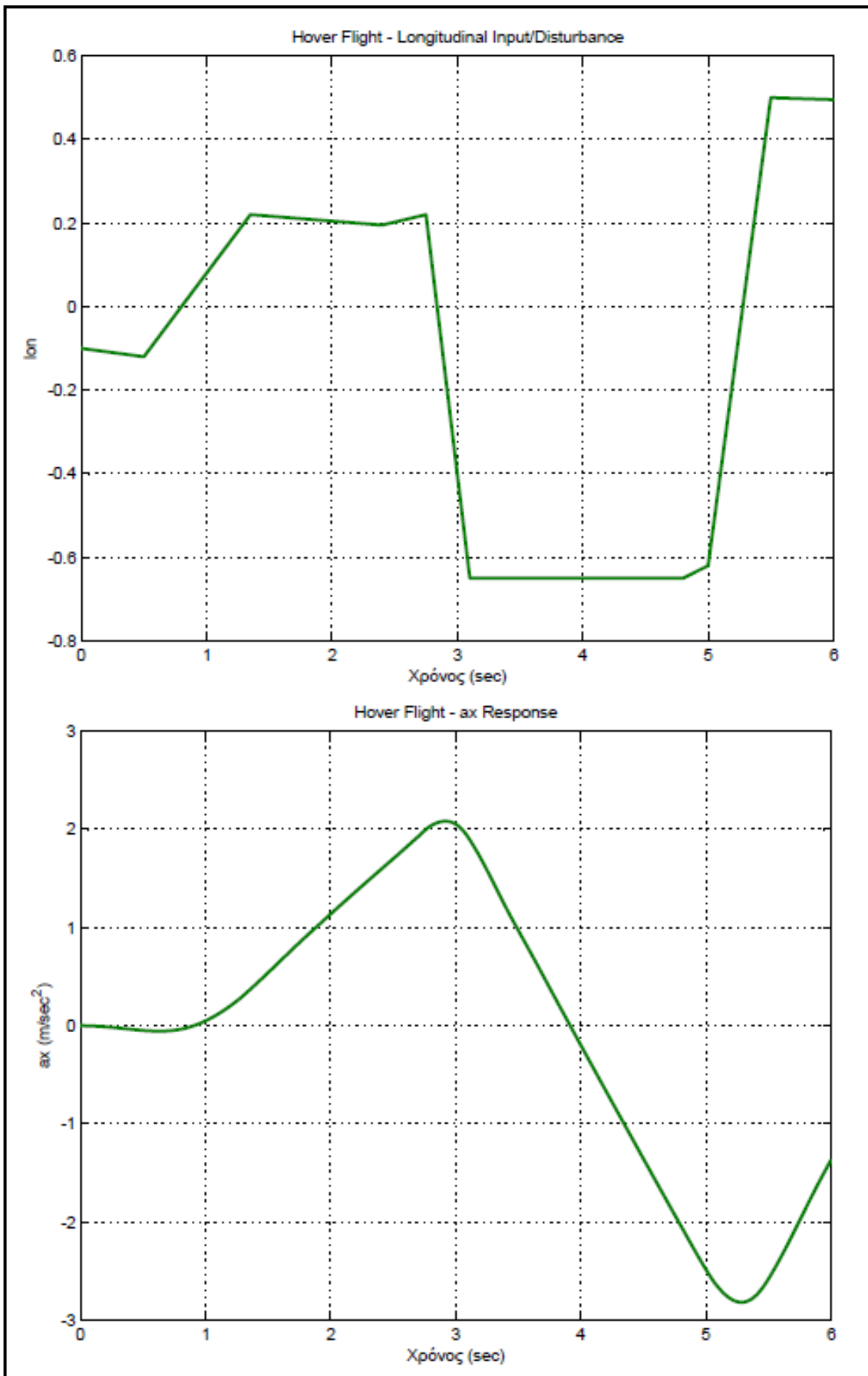
Εικόνα 2-48: Διέγερση Collective Input και Αποκρίσεις (3)



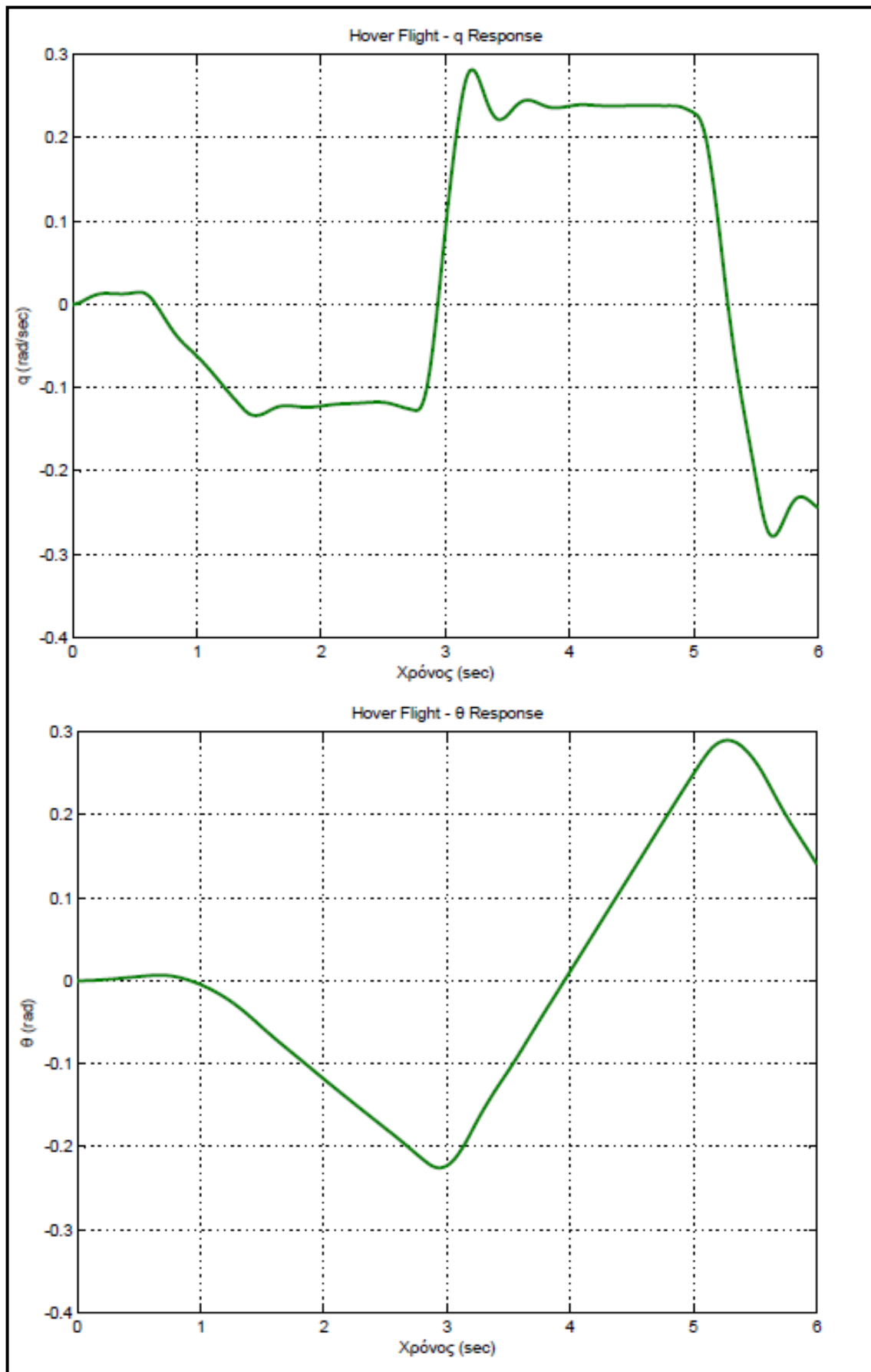
Εικόνα 2-49: Διέγερση Lateral Input και Αποκρίσεις (1)



Εικόνα 2-50: Διέγερση Lateral Input και Αποκρίσεις (2)



Εικόνα 2-51: Διέγερση Longitudinal Input και Αποκρίσεις (1)



Εικόνα 2-52: Διέγερση Longitudinal Input και Αποκρίσεις (2)

2.6.3 Ανάλυση των Αποτελεσμάτων

Στις αποκρίσεις που παρουσιάζονται παραπάνω από το γραμμικό δυναμικό μοντέλο του ελικοπτέρου στην κατάσταση του *hover* είναι φανερή η ομοιότητα με αυτές από το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο. Η ομοιότητα υπάρχει κυρίως στη μορφή των αποκρίσεων, γεγονός που δείχνει ότι τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν αντίστοιχη συμπεριφορά/αντίδραση στις ίδιες αποκρίσεις. Όσον αφορά, όμως, στα μεγέθη των αποκρίσεων υπάρχουν διαφορές, καθώς οι είσοδοι που χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο μοντέλα είχαν την ίδια μορφή, αλλά ο τρόπος με τον οποίο εισέρχονταν στο εκάστοτε σύστημα ήταν διαφορετικός. Τέλος, στις αποκρίσεις για το *longitudinal input* υπάρχει διαφορά και στα πρόσημα, δηλαδή οι αποκρίσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των X . Αυτό είναι θέμα σύμβασης του τρόπου με τον οποίο ορίζεται κάθε φορά η θετική πλευρά των αξόνων.

2.6.4 Παρατηρήσεις

Στο κομμάτι της προσομοίωσης του γραμμικού δυναμικού μοντέλου παρουσιάζεται μόνο η κατάσταση του *hover* και όχι κάποια ακόμη, όπως για παράδειγμα αυτή του *cruise*, επειδή υπάρχει μεγάλη δυσκολία στην εύρεση των σημείων της γραμμικοποίησης, ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά από το μη-γραμμικό μοντέλο ή των δεδομένων πτήσης από το ελικόπτερο *Yamaha R-50*.

3

Αναγνώριση Παραμέτρων Δυναμικού Μοντέλου

Στο σημείο αυτό δίνονται πληροφορίες για τη μέθοδο “Αναγνώριση Παραμέτρων” (*Parameter Identification*) και παρουσιάζονται τα δύο διαφορετικά προτεινόμενα μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο δικό μας ελικόπτερο. Αρχικά, παρουσιάζονται βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου, μαζί με ορισμένα πραγματικά παραδείγματα από τη βιβλιογραφία, και στη συνέχεια γίνεται αναλυτική αναφορά στην πειραματική διαδικασία και σχεδιασμό που πρέπει να ακολουθηθεί.

3.1 Λίγα λόγια για την Αναγνώριση Παραμέτρων

Για τη δημιουργία / ανάπτυξη ενός σχήματος ελέγχου κάποιου δυναμικού συστήματος, είτε αυτό είναι ρομποτικός βραχίονας είτε είναι μη-επανδρωμένο όχημα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ύπαρξη του δυναμικού μοντέλου που διέπει τη δυναμική του εκάστοτε συστήματος. Η εύρεση του δυναμικού μοντέλου μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από το είδος του, δηλαδή μη-γραμμικό ή γραμμικό. Ο ένας τρόπος ασχολείται με τη δημιουργία του μοντέλου χρησιμοποιώντας εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα που μας ενδιαφέρει και όλες οι παράμετροι αυτών είναι γνωστές ή μετρήσιμες/ υπολογίσιμες με απλές διαδικασίες, π.χ. μέτρηση βάρους, μήκους κ.α. Ο άλλος τρόπος επικεντρώνεται, αρχικά, στην εύρεση ενός παραμετρικού δυναμικού μοντέλου και έπειτα,

στην εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου με τη βοήθεια κατάλληλων πειραμάτων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Αναγνώριση Παραμέτρων και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη ρομποτική αλλά και στην αεροναυπηγική, καθώς στις περισσότερες των περιπτώσεων οι περισσότερες παράμετροι του δυναμικού μας μοντέλου μας είναι άγνωστες ή πολύ δύσκολα υπολογίσιμες. Επομένως, η μεθοδολογία αυτή, εξαιτίας της χρησιμότητάς της αλλά και της πολυπλοκότητάς της, αποτελεί έναν ιδιαίτερα αναπτυγμένο, ενδιαφέρον και απαραίτητο επιστημονικό κλάδο στη μηχανική και στη μηχανολογία.

3.2 Αναγνώριση Παραμέτρων στην Αεροναυπηγική

Η δυσκολία στη δημιουργία δυναμικών μοντέλων υψηλής ακρίβειας με χρήση του *First-Principles Modeling* στην αεροναυπηγική οδήγησε στη μέθοδο της αναγνώρισης παραμέτρων. Με τον τρόπο αυτό μας δίνεται η δυνατότητα “απόκτησης” απλών, αλλά ακριβών, δυναμικών μοντέλων και συνεπώς μπορεί να γίνει ο σχεδιασμός κάποιου κατάλληλου ελεγκτή, καθώς και η επεξεργασία και ανάλυση των ποιοτικών χαρακτηριστικών της δυναμικής του αεροσκάφους (*flying handling qualities*). Ειδικότερα, η μέθοδος αυτή δίνει τη δυνατότητα του “χαρακτηρισμού” του δυναμικού μοντέλου ανοιχτού βρόχου του αεροσκάφους. Επομένως, γίνεται ιδιαίτερα ελκυστική για τη μοντελοποίηση συστημάτων που συνδυάζουν στοιχεία και εξαρτήματα διαφορετικής φύσης (π.χ. μηχανικά, ηλεκτρομηχανικά, ψηφιακά κ.α.). Τέλος, είναι φανερό ότι τα μη-επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα (*UAVs*), και ειδικά τα μικρού μεγέθους ελικόπτερα, πληρούν όλες τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω και για το λόγο αυτό η αναγνώριση παραμέτρων χρησιμοποιείται ευρύτατα στον προσδιορισμό των δυναμικών τους μοντέλων.



Εικόνα 3-1 : A160 Hummingbird Unmanned Rotorcraft

3.2.1 Δυσκολίες στην Αναγνώριση Παραμέτρων σε Ελικόπτερα

Τα ελικόπτερα, ανεξάρτητα από το μέγεθός τους, αποτελούν ιδιαίτερα πολύπλοκα αεροδυναμικά και μηχανολογικά συστήματα. Έτσι, η πολυπλοκότητα αυτή μεταφράζεται σε δυσκολία κατά την αναγνώριση του δυναμικού συστήματός των. Έχουμε παρακάτω ορισμένες από τα χαρακτηριστικά των ελικοπτέρων:

- Τα ελικόπτερα είναι συστήματα πολλαπλών εισόδων-εξόδων (MIMO). Συνεπώς, η σύζευξη που δημιουργείται (coupling effects) μεταξύ της δυναμικής του ρότορα και της ροής του αέρα με αυτή της ατράκτου και του συστήματος ελέγχου καθιστά αδύνατο το διαχωρισμό της δυναμικής σε λιγότερο πολύπλοκα συστήματα, π.χ. διαμήκη-εγκάρσια δυναμική ή κάθετη-κατευθυντήρια δυναμική.
- Τα πολλά και διαφορετικού τύπου συστήματα που υπάρχουν πάνω στο ελικόπτερο (κινητήρας, έλικες, άξονες κ.α.) δημιουργούν υψηλού επιπέδου δονήσεις. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση θορύβου κατά τις μετρήσεις και φιλτράρισμα αυτού μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια σημαντικών δεδομένων.
- Οι “τύποι” της δυναμικής του οχήματος χωρίζονται σε υψηλές και χαμηλές συχνότητες, για τη δυναμική του ρότορα και του στερεού σώματος αντίστοιχα. Έτσι, είναι προτιμότερη η ανάλυση των δεδομένων στο πεδίο συχνοτήτων και όχι στο πεδίο του χρόνου.
- Τα ελικόπτερο από τη φύση τους είναι μη-γραμμικά συστήματα και η συμπεριφορά τους διαφέρει αρκετά ανάμεσα στα σημεία του φακέλου πτήσης τους. Το αποτέλεσμα είναι η αναγνώριση πολλών σημείων λειτουργίας, σε κάθε ένα χρησιμοποιείται και διαφορετικό γραμμικό μοντέλο.
- Η αστάθεια των ελικοπτέρων θέτει όρια στη διάρκεια και τον τύπο των εισόδων διέγερσης του συστήματος κατά τη συλλογή των πειραματικών δεδομένων. Ακόμη, εξαιτίας της αστάθειας είναι απαραίτητη η ανάδραση από τον πιλότο κατά την πειραματική διαδικασία. Επομένως, έχουμε πειράματα κλειστού βρόχου, που χρήζουν διαφορετικής μεταχείρισης σε σχέση με τα ανοικτού βρόχου πειράματα. Τα παραπάνω αποτελούν ένα ακόμη χαρακτηριστικό που οδηγεί στην ανάλυση των πειραματικών δεδομένων στο πεδίο συχνοτήτων.

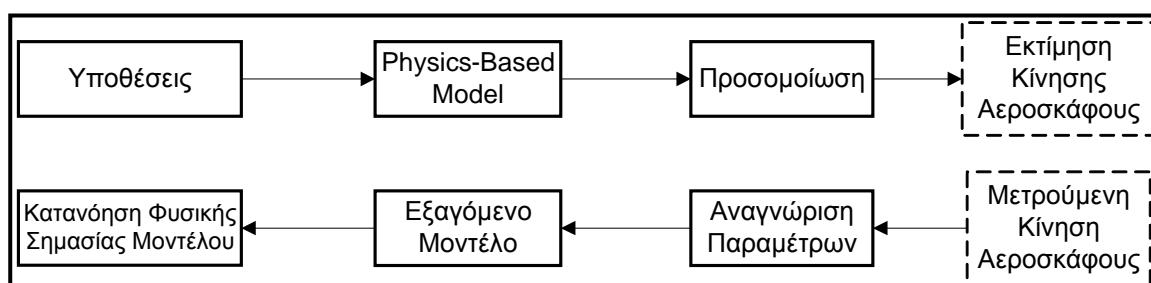
3.3 Μέθοδοι Αναγνώρισης Παραμέτρων

Στο παρόν θέμα, στην εύρεση του δυναμικού μοντέλου ενός μικρού ελικοπτέρου, υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για την κατασκευή δυναμικού μοντέλου με χρήση της αναγνώρισης παραμέτρων. Οι μέθοδοι αυτές είναι η γραμμική και η μη-γραμμική (*linear and non-linear parameter identification respectively*) αναγνώριση παραμέτρων και

περιγράφονται στη συνέχεια, ενώ, όπως υποδηλώνει και η ονομασία τους, σχετίζονται με γραμμικά και μη-γραμμικά δυναμικά μοντέλα αντίστοιχα.

3.3.1 Αναγνώριση Παραμέτρων και Προσομοίωση

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να γίνει αναφορά και στην προσομοίωση συστημάτων η οποία χρησιμοποιείται για την ανάλυση αυτών, την κατανόησή των αλλά και για το σχεδιασμό ελεγκτών. Αν και, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα που ακολουθεί, αποτελεί την αντίστροφη διαδικασία από την αναγνώριση παραμέτρων, είναι στην πραγματικότητα ένα απαραίτητο εργαλείο κατά τη δημιουργία του επιθυμητού δυναμικού μοντέλου με τη μέθοδο του *parameter system identification*.



Εικόνα 3-2 : Σύγκριση Προσομοίωσης και Αναγνώρισης Παραμέτρων

Η χρησιμότητα της προσομοίωσης θα γίνεται κατανοητή στη συνέχεια όπου παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής κατά της διαδικασία της αναγνώρισης παραμέτρων με τη μέθοδο της απόκρισης συχνότητας.

3.3.2 Γραμμική Αναγνώριση Παραμέτρων

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος αναγνώρισης παραμέτρων στον κλάδο της αεροναυπηγικής, ειδικά στα ελικόπτερα, είναι η γραμμική και επιτρέπει το σωστό “χαρακτηρισμό” της δυναμικής ανοιχτού βρόχου, όσο αυτό είναι επιτρεπτό από την αστάθεια του εκάστοτε οχήματος, ενός αεροσκάφους. Επίσης, εξειδικεύοντας ακόμη περισσότερο τη μέθοδό μας, χρησιμοποιούμε τη γραμμική αναγνώριση παραμέτρων στο πεδίο των συχνοτήτων. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής για τη δική μας περίπτωση είναι τα εξής:

- Μετρούμενος θόρυβος που δε σχετίζεται με τις εισόδους ελέγχου δεν επηρεάζει την απόκριση συχνότητας των μετρούμενων μεγεθών. Επομένως, αυτή η ανωμαλία αυτόματα διαχωρίζεται από τα δεδομένα.
- Υπάρχει η δυνατότητα επιλογής του φάσματος των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται για κάθε ζεύγος εισόδου-εξόδου. Άρα, μπορεί να γίνει σωστή “αντιστοίχιση” μεταξύ των

δυναμικών τύπων (*dynamic modes*), επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο βελτίωση των τιμών των παραμέτρων που ανήκουν τόσο στη δυναμική του στερεού σώματος όσο και σε αυτή του ρότορα.

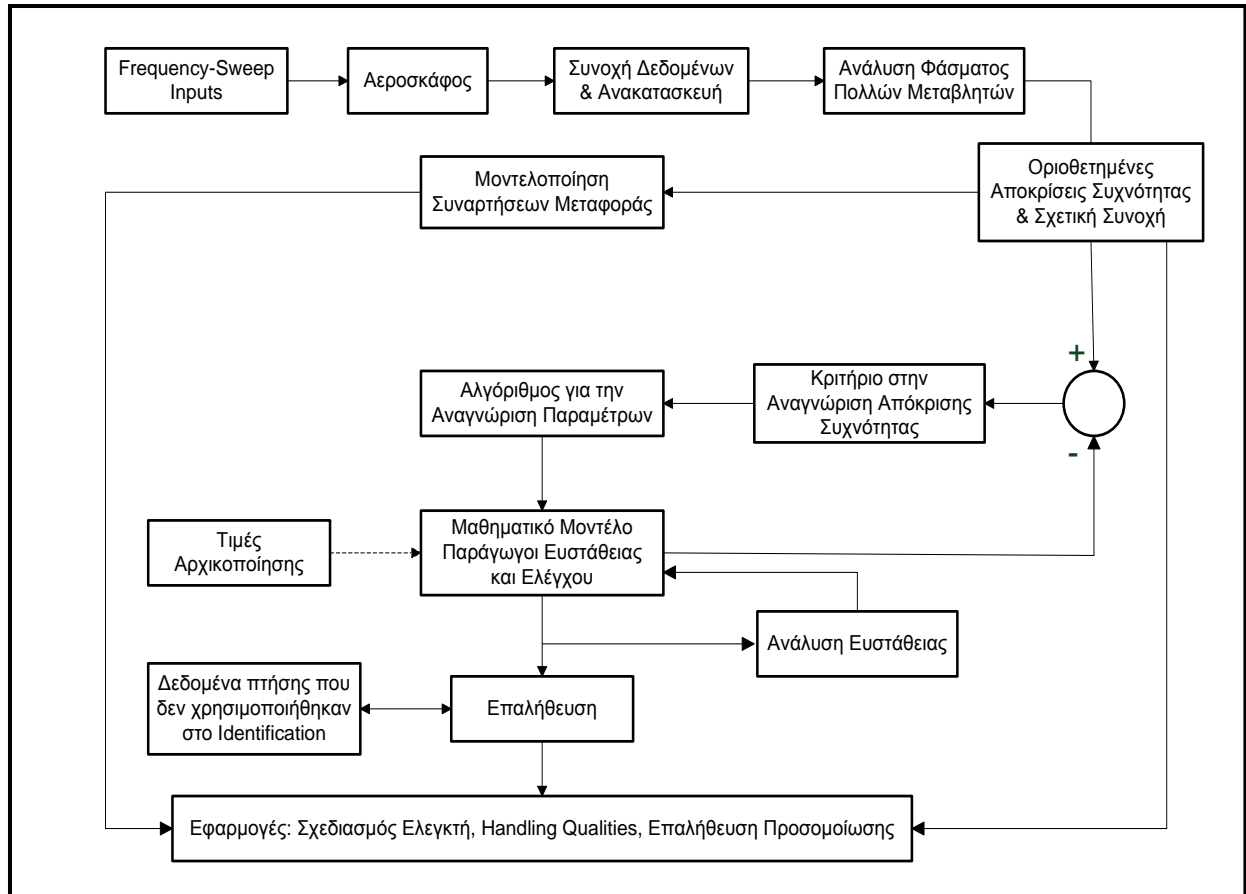
- Μπορεί να γίνει κατάλληλο φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας των μετρήσεων που δεν ανήκουν στα καθαρά πτητικό κομμάτι της δυναμικής του οχήματος, αλλά μπορεί να προέρχονται από αναταράξεις ή κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του οχήματος.
- Η διαδικασία δημιουργίας της συνάρτησης κόστους στο πεδίο συχνοτήτων απαιτεί λιγότερα πειραματικά δεδομένα σε σχέση με αυτή στο πεδίο του χρόνου και έτσι είναι περισσότερο αποτελεσματική στον προσδιορισμό των παραμέτρων.
- Υπάρχει ένα στατιστικό εργαλείο, η συνάρτηση συσχέτισης (*coherence function*), που προσφέρει ποιοτικό και ποσοτικό έλεγχο σε διάφορα ζητήματα, όπως η διέγερση του συστήματος, η ποιότητα των μετρούμενων δεδομένων και η γραμμικότητα της απόκρισης του συστήματος.
- Η ανανέωση των παραμέτρων στο επαναληπτικό σχήμα του αλγορίθμου της αναγνώρισης παραμέτρων γίνεται αλγεβρικά εξαιτίας της φύσης των αποκρίσεων συχνότητας, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα αποτελεσματική. Αντίθετα, στο πεδίο του χρόνου πρέπει οι εξισώσεις κίνησης να ολοκληρώνονται ως προς το χρόνο για κάθε επαναληπτική διαδικασία.

Επειδή γίνεται χρήση της γραμμικής μεθόδου αναγνώρισης στο πεδίο της συχνότητας, στο σημείο αυτό ακολουθεί μία παρουσίαση της βασικής θεωρητικής διαδικασίας που είναι απαραίτητο να διεκπεραιωθεί για την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων.

3.3.3 Η Αναγνώριση Παραμέτρων στο Πεδίο της Συχνότητας

Αρχικά παρουσιάζουμε το γενικό διάγραμμα ροής κατά την διαδικασία εύρεσης του δυναμικού μοντέλου με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η διαδικασία ξεκινά με τη διέγερση του αεροσκάφους με τις κατάλληλες εισόδους ελέγχου (*Frequency-Sweep Inputs*). Στη συνέχεια βλέπουμε την ανάλυση φάσματος που πρέπει να γίνει, καθώς η όλη διαδικασία λαμβάνει χώρα στο πεδίο συχνοτήτων. Ακόμη, παρατηρούμε τον επαναληπτικό βρόχο που είναι απαραίτητος στον αλγόριθμο, ώστε να μπορέσουμε να βρούμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων που επιθυμούμε. Για την εύρεση των τιμών αυτών με βάση την επαναληπτική διαδικασία χρησιμοποιούμε κριτήρια που σχετίζονται με την επιλογή του κατάλληλου φάσματος συχνοτήτων των εξόδων και των εισόδων αλλά και με την εκτιμώμενη συμπεριφορά του αεροσκάφους. Η εκτίμηση της συμπεριφοράς του αεροσκάφους συγκρίνεται με πραγματικά δεδομένα υπό τις ίδιες εισόδους διέγερσης και ανάλογα με την επιθυμητό στόχο εκλέγεται και το ανάλογο κριτήριο σύγκλισης. Στο τελευταίο αυτό βήμα της διαδικασίας εισέρχεται και η προσομοίωση του

συστήματος που χρησιμοποιείται είτε για να γίνει σύγκριση του εξαγόμενου μοντέλου με κάποιο άλλο θεωρητικής προσέγγισης είτε για να προχωρήσουμε στη σωστή ρύθμιση (*tuning*) αυτού για μελλοντική χρήση και *offline* πειράματα και μετρήσεις.



Εικόνα 3-3 : Διάγραμμα Ροής Διαδικασίας Αναγνώρισης Παραμέτρων Συστήματος

Έχοντας παρουσιάσει τη διαδικασία που ακολουθείται κατά την αναγνώριση παραμέτρων δυναμικού μοντέλου αεροσκάφους στο παραπάνω σχήμα, τώρα συνεχίζουμε με την παρουσίαση της ανάλυσης του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας, καθώς και με τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν.

3.3.3.1 Απόκριση Συχνότητας ως Μη-Παραμετρικό Μοντέλο

Στο πεδίο του χρόνου η είσοδος $u(t)$ και η έξοδος $y(t)$ ενός γραμμικού συστήματος μπορούν να συσχετιστούν μέσω του ολοκληρώματος της συνέλιξης:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \quad (3.1)$$

όπου $h(\tau)$ η κρουστική συνάρτηση. Μέσω του μετασχηματισμού *Laplace* η είσοδος και η έξοδος μπορούν να συσχετιστούν στο πεδίο της συχνότητας μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{H}(\mathbf{j}\omega) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) \quad (3.2)$$

όπου $\mathbf{Y}(\mathbf{j}\omega)$ και $\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega)$ είναι οι μετασχηματισμοί *Fourier* των σημάτων της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα, ενώ $\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της κρουστικής συνάρτησης. Δηλαδή:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (3.4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (3.5)$$

Η απόκριση συχνότητας περιγράφει πλήρως τα δυναμικά χαρακτηριστικά ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος (*Linear Time-Invariant System, LTI*). Στην περίπτωση συστημάτων πολλαπλών εισόδων-εξόδων, τότε το \mathbf{H} είναι ένας πίνακας $n_c \times n_o$ που συσχετίζει n_c εισόδους σε n_o εξόδους.

3.3.3.2 Υπολογισμός των Εκτιμώμενων Αποκρίσεων Συχνότητας

Η μιγαδική συνάρτηση απόκρισης $\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega)$ συσχετίζει και την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εισόδου \mathbf{G}_{uu} με την εξίσωση διασυσχέτισης εισόδων-εξόδων \mathbf{G}_{uy} . Δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{G}_{uy}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{H}(\mathbf{j}\omega) \cdot \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{j}\omega) \quad (3.6)$$

Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και διασυσχέτισης υπολογίζονται μέσω του μετασχηματισμού *Fourier* από τους παρακάτω τύπους:

$$\mathbf{G}_{uu}(\mathbf{j}\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \cdot E[|\mathbf{U}_k(\mathbf{j}\omega, T)|^2] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G}_{uy}(\mathbf{j}\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \cdot E[|\mathbf{U}_k^*(\mathbf{j}\omega, T) \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{j}\omega, T)|] \quad (3.8)$$

Έτσι, η συνάρτηση απόκρισης προσδιορίζεται, για τα συστήματα μονής εισόδου-εξόδου (*Single Input-Single Output Systems, SISO Systems*), από τις εξισώσεις φάσματος που αναφέρθηκαν παραπάνω και είναι:

$$\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega) = \frac{\mathbf{G}_{uy}(\mathbf{j}\omega)}{\mathbf{G}_{uu}(\mathbf{j}\omega)} \quad (3.9)$$

Για τα *MIMO* συστήματα η συνάρτηση απόκρισης είναι:

$$\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega) = \begin{bmatrix} H_{y_j u_1} \\ H_{y_j u_2} \\ \vdots \\ H_{y_j u_{nc}} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{uu}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{uy_j} \quad (3.10)$$

Οι αποκρίσεις συχνότητας ενός συστήματος *MIMO* είναι αντίστοιχες με αυτές ενός συστήματος *SISO* όταν δεν έχουμε σύζευξη στο σύστημα, καθώς και μη-συσχέτιση/επικάλυψη μεταξύ των εισόδων του συστήματος *MIMO*.

Η παραπάνω διαδικασία μετασχηματίζεται κατάλληλα για πεπερασμένο αριθμό δεδομένων και χρησιμοποιούμε τους κατάλληλους διακριτούς μετασχηματισμούς *Fourier* για να τους χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση και επεξεργασία των πειραματικών μας δεδομένων. Επομένως, με χρήση των πειραματικών μας δεδομένων από τις πτήσεις του ελικοπτέρου βρίσκουμε τις εκτιμήσεις των διακριτών εξισώσεων $\tilde{\mathbf{G}}_{uu}$ και $\tilde{\mathbf{G}}_{uy}$ και μέσω αυτών βρίσκουμε και την εκτίμηση της συνάρτησης απόκρισης $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{j}\omega_k)$.

*Ο υπολογισμός των εκτιμώμενων συναρτήσεων που αναφέρονται παραπάνω και η όλη επεξεργασία των δεδομένων γίνεται με τη βοήθεια εμπορικών πακέτων, όπως το *Matlab* και το *CIFER*. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στη δοσμένη βιβλιογραφία του κεφαλαίου.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* που χρησιμοποιείται για το μετασχηματισμό των δεδομένων μας από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας είναι ο *Discrete Fourier Transform (DFT)*, ο οποίος, όμως, είναι ιδιαίτερα απαιτητικός, αφού απαιτεί L^2 υπολογισμούς (πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις) μιγαδικών αριθμών, όπου L ο αριθμός των σημείων των πειραματικών δεδομένων. Έτσι, για την αποφυγή του *DFT* χρησιμοποιείται και ο *Fast Fourier Transform (FFT)*, ο οποίος είναι αλγοριθμικά βελτιωμένος, σε εμπορικά πακέτα που πραγματοποιούν όλη τη διαδικασία της επεξεργασίας των δεδομένων για την αναγνώριση των παραμέτρων χρησιμοποιείται και μετασχηματισμός με βάση τον αλγόριθμο *Chirp-Z*.

3.3.3.3 Συνάρτηση Συσχέτισης

Στη μεθοδολογία της αναγνώρισης παραμέτρων για την απόκτηση δυναμικού μοντέλου ξεχωριστό ρόλο παίζει η στατιστική που ενυπάρχει και χρησιμοποιείται στη θεωρία της μεθοδολογίας αυτής. Ένα χρήσιμο “εργαλείο” είναι η συνάρτηση συσχέτισης γ_{uy} . Η συνάρτηση αυτή μας δείχνει πόσο μία έξοδος σχετίζεται γραμμικά με μία είσοδο σε συνάρτηση της συχνότητας. Ο τύπος υπολογισμού της συνάρτησης συσχέτισης είναι:

$$\gamma_{uy}^2 = \frac{|G_{uy}|^2}{G_{yy} \cdot G_{yy}} \leq 1 \quad (3.11)$$

Με την τιμή της συνάρτησης συσχέτισης μπορούμε να επιλέξουμε ποια πεδία συχνοτήτων είναι απαραίτητα κατά την επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εύρεση των σωστών τιμών των παραμέτρων. Υπάρχει ένα κριτήριο σύμφωνα με το οποίο όταν:

$$\gamma_{uy}^2 \geq 0.6 \quad (3.12)$$

και η συνάρτηση συσχέτισης δεν εμφανίζει ταλαντευτική συμπεριφορά, τότε η απόκριση συχνότητας θα έχει αποδεκτή ακρίβεια.

3.3.3.4 Ανάπτυξη Παραμετροποιημένου Μοντέλου

Στην έως τώρα αναφορά στη διαδικασία της αναγνώρισης παραμέτρων δυναμικού μοντέλου έγινε αναφορά σε μη-παραμετρικές εξισώσεις, οι οποίες στην αρχή της διαδικασίας έχουν ελάχιστη ή καθόλου φυσική σημασία. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας υπάρχει το παραμετροποιημένο γραμμικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2, που σχετίζεται με την ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ανάπτυξη του μοντέλου έχει γίνει από την ανάλυση *First-Principles* και μετά από κατάλληλη γραμμικοποίηση. Εκτός αυτού του μοντέλου όμως, παρουσιάζεται σε επόμενο σημείο και μία άλλη προσέγγιση για την ανάπτυξη του γραμμικού μοντέλου, ώστε να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση των παραμέτρων του συστήματος.

Στη διαδικασία της αναγνώρισης παραμέτρων της δικής μας εφαρμογής το γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι στη μορφή εξισώσεων κατάστασης (*state-space equations*):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}(t - \tau_i) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}(t - \tau_i) \quad (3.14)$$

όπου οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι συναρτήσεις των αγνώστων παραμέτρων που περιέχονται στο διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$. Επιπρόσθετα, ανεξάρτητες χρονικές καθυστερήσεις τ_i που σχετίζονται με κάθε είσοδο \mathbf{u}_i μπορούν να συμπεριληφθούν στις παραμέτρους που επιθυμούμε να αναγνωρίσουμε.

3.3.3.5 Αναγνώριση Παραμέτρων

Οι άγνωστες παράμετροι υπολογίζονται/αναγνωρίζονται μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας βελτιστοποίησης, κατά την οποία το σφάλμα προσέγγισης στη συνάρτηση της απόκρισης συχνότητας ελαχιστοποιείται. Έτσι, για το σκοπό αυτό “κατασκευάζεται” μία κατάλληλη συνάρτηση κόστους, που δείχνει πόσο καλά η υπολογισμένες αποκρίσεις συχνότητας (βλ. σχήμα Διαγράμματος Ροής.....) ταιριάζουν με τις μετρημένες αποκρίσεις συχνότητας από την πειραματική διαδικασία. Η συνάρτηση κόστους εξαρτάται από το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$ και ισούται με το άθροισμα των σφαλμάτων του εύρους και της φάσης, υπολογιζόμενη σε n_w σημεία διακριτής συχνότητας ω_i :

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_w} \boldsymbol{\varepsilon}(\omega_i, \boldsymbol{\theta})^T \cdot \mathbf{W}(\omega_i) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\omega_i, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.15)$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega_i, \boldsymbol{\theta})$ είναι το διάνυσμα των σφαλμάτων εύρους και φάσης, ενώ $\mathbf{W}(\omega_i)$ η συνάρτηση βάρους που καθορίζει σε ποια σημεία η απόκριση είναι ακριβής. Η συνάρτηση βάρους συνήθως καθορίζεται από τη συνάρτηση συσχέτισης που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι υπολογισμένες αποκρίσεις του μοντέλου μας προέρχονται από τις συναρτήσεις μεταφοράς αυτού, έχοντας εφαρμόσει το μετασχηματισμό *Laplace* και λύσει ως προς το διάνυσμα των εξόδων $\mathbf{y}(s)$:

$$\mathbf{T}_{uy}(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{u}(s)} = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot (e^{-s\tau_i}) \quad (3.16)$$

Στην περίπτωση συστήματος *MIMO* η συνάρτηση μεταφοράς είναι πίνακας που αντιστοιχίζει την κάθε είσοδο \mathbf{u}_i στην κατάλληλη έξοδο \mathbf{y}_i .

Τέλος, αναφέρουμε ότι η αναγνώριση των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$ γίνεται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους $J(\boldsymbol{\theta})$ και αυτό είναι ένα πρόβλημα μη-γραμμικής βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο της τέμνουσας.

3.3.4 Μη-Γραμμική Αναγνώριση Παραμέτρων

Η μη-γραμμική γραμμική μέθοδος αναγνώρισης παραμέτρων, σε αντιδιαστολή με τη γραμμική μέθοδο, ασχολείται με μη-γραμμικά δυναμικά μοντέλα. Έτσι, στην αεροναυπηγική

και στην αεροναυτική τεχνολογία, όπου όλα τα συστήματα είναι πλήρως μη-γραμμικά, η μη-γραμμική μέθοδος παρέχει τη δυνατότητα του σωστού “χαρακτηρισμού”-αναγνώρισης του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου που μας ενδιαφέρει. Παρόλα αυτά, λόγω των πολύπλοκων συστημάτων που εμφανίζονται στο χώρο αυτό, τα οποία εκτός από μη-γραμμικά είναι και μεταβαλλόμενα με το χρόνο, το χώρο αλλά τις συνθήκες περιβάλλοντος, η μη-γραμμική μέθοδος δεν έχει καταφέρει να εδραιωθεί και να χρησιμοποιηθεί ευρέως.

Το μεγαλύτερο πρόβλημα στη χρησιμοποίηση μη-γραμμικών μεθόδων αναγνώρισης παραμέτρων έγκειται στη δυσκολία της ανάπτυξης του κατάλληλου δυναμικού μοντέλου. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί πολλές θεωρίες σχετικά με την προκαταρκτική μοντελοποίηση συστημάτων με σκοπό τη μη-γραμμική αναγνώριση αυτών. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό που προκαλεί προβλήματα είναι η υποχρεωτική χρήση της μεθόδου μόνο στο πεδίο του χρόνου. Έτσι, όλα τα προαναφερθέντα πλεονεκτήματα του πεδίου της συχνότητας παύουν να υπάρχουν, ενώ εμφανίζονται και ζητήματα που σχετίζονται με τη χρονική διάρκεια των πειραμάτων, αλλά και τη σωστή επεξεργασία και αξιολόγηση της ποιότητας των πειραματικών δεδομένων. Παρόλα αυτά, όπως είναι και γραμμική μέθοδο αναγνώρισης παραμέτρων, έτσι και η μη-γραμμική μέθοδος αναγνώρισης παραμέτρων αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, πιο συγκεκριμένα ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης κόστους.

3.3.4.1 Μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση του δυναμικού συστήματος αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τη μη-γραμμική αναγνώριση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν. Μοντελοποίηση, όμως, σημαίνει και κατάλληλη διαμόρφωση κάποιου υπάρχοντος δυναμικού μοντέλου εκτός από δημιουργία εκ του μηδενός κάποιου δυναμικού μοντέλου. Έτσι, από τη μία πλευρά μπορεί μετά τη μοντελοποίηση να έχουμε μοντέλο απλά τροποποιημένο ή κατάλληλα διαμορφωμένο, το οποίο να έχει απόλυτη φυσική σημασία και αντίκτυπο. Από την άλλη πλευρά, σε περίπτωση νέου μοντέλου κατάλληλου για μη-γραμμική αναγνώριση, είναι ιδιαίτερα πιθανόν το προκύπτον μοντέλο να μην έχει απολύτως καμία φυσική σημασία ή αντιστοιχία και απλά να έχει τη δυνατότητα να περιγράψει συγκεκριμένες κινήσεις/μεταβολές του συστήματός μας. Έτσι, στο σημείο αυτό γίνεται παρουσίαση δύο τρόπων μοντελοποίησης, όπου κάθε ένας ανήκει και σε διαφορετική κατηγορία από αυτές που αναφέρονται προηγουμένως:

1. Προσέγγιση με Πολυώνυμα (*Polynomial Approaches*)

Η μοντελοποίηση ενός συστήματος με προσέγγιση πολυωνύμων είναι μία μέθοδος που στην ουσία μας δίνει ένα μοντέλο το οποίο δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία και οι εξισώσεις που προκύπτουν δε σχετίζονται με θεωρήματα ή εξισώσεις από κάποια προγενέστερη αεροναυτική/αεροδυναμική μοντελοποίηση. Τα πολυώνυμα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μη-γραμμική αναγνώριση είναι πολλά, όπως τα *Kolmogorov-Gabor*, *Volterra-Series*, *NDE* κ.α. Βέβαια, κάθε πολυώνυμο από αυτά που αναφέρονται έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ή/και διαφορετική αντιμετώπιση κατά την επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων.

Τα πολυώνυμα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση της μη-γραμμικής αναγνώρισης παραμέτρων είναι τα *Kolmogorov-Gabor*, καθώς περιγράφουν μη-γραμμικό μοντέλο με ανατροφοδότηση της εξόδου (*NARX*, *NARMAX*, *NOE* κ.α.). Η γενική μορφή είναι:

$$\mathbf{y}(k) = f(\mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-m), \mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-m)) \quad (3.17)$$

όπου m η τάξη του συστήματος. Επομένως, για ένα σύστημα 2^{as} τάξεως και πολυώνυμο 2^{ou} βαθμού έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) = & \theta_1 + \theta_2 \mathbf{u}(k-1) + \theta_3 \mathbf{u}(k-2) + \theta_4 \mathbf{y}(k-1) + \theta_5 \mathbf{y}(k-2) + \\ & \theta_6 \mathbf{u}^2(k-1) + \theta_7 \mathbf{u}^2(k-2) + \theta_8 \mathbf{y}^2(k-1) + \theta_9 \mathbf{y}^2(k-2) + \\ & \theta_{10} \mathbf{u}(k-1) \mathbf{u}(k-2) + \theta_{11} \mathbf{u}(k-1) \mathbf{y}(k-1) + \theta_{12} \mathbf{u}(k-1) \mathbf{y}(k-2) + \\ & \theta_{13} \mathbf{u}(k-2) \mathbf{y}(k-1) + \theta_{14} \mathbf{u}(k-2) \mathbf{y}(k-2) + \theta_{15} \mathbf{y}(k-1) \mathbf{y}(k-2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω εξισώσεις, αν και το μοντέλο είναι μη-γραμμικό ως προς τις εισόδους και τις εξόδους, είναι πλήρως γραμμικό ως προς τις παραμέτρους αυτών θ , και επομένως το πρόβλημα ανάγεται σε γραμμική αναγνώριση παραμέτρων. Παρόλα αυτά, λόγω έλλειψης άμεσης φυσικής σημασίας, ένα τέτοιο μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί για προσομοίωση και διασταύρωση αποτελεσμάτων μεταξύ κάποιου άλλου μοντέλου αλλά και πτητικών δεδομένων υπό διαφορετικές εισόδους. Ακόμη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αρχικοποίηση τιμών στη μη-γραμμική αναγνώριση κάποιου μοντέλου που θα έχει προκύψει μέσω μορφοποίησης και κατάλληλης διαμόρφωσης.

2. Μοντελοποίηση μέσω Διαμόρφωσης Προγενέστερου Μοντέλου

Η μέθοδος που αναφέρεται στο σημείο αυτό σχετίζεται με ήδη υπάρχον μοντέλο το οποίο μετά από κατάλληλη διαμόρφωση μπορεί να έρθει σε μία μορφή που να είναι κατάλληλη για χρήση στη μη-γραμμική αναγνώριση παραμέτρων.

Η γενική μορφή ενός μη-γραμμικού συστήματος *NARX* είναι της μορφής:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = f(\mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-m), \mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-m)) \quad (3.19)$$

όπου $f(\cdot)$ η μη-γραμμική συνάρτηση ως προς τις εισόδους \mathbf{u} και τις εξόδους \mathbf{y} . Τέτοια μοντέλα μπορούν να διαμορφωθούν κατάλληλα διαχωρίζοντας το γραμμικό από το μη-γραμμικό μέρος της συνάρτησης $f(\cdot)$. Έτσι, σε αντιστοιχία με τη γραμμική αναγνώριση παραμέτρων, στη μη-γραμμική αναγνώριση το πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό της συνάρτησης $f(\cdot)$. Ακόμη, η μοντελοποίηση μπορεί να γίνει και με χρήση εξισώσεων κατάστασης, δηλαδή να είναι της μορφής:

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} + 1) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{k}), \mathbf{u}(\mathbf{k})) \quad (3.20)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{k})) \quad (3.21)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι ανάλογα με το αν όλες οι καταστάσεις \mathbf{x} μπορούν να μετρηθούν κατά την πειραματική διαδικασία ή όχι, τότε και το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε παίρνει διαφορετική τροπή. Αυτό σημαίνει πως σε περίπτωση που έχουμε καταστάσεις μη μετρήσιμες κατά την πειραματική διαδικασία, τότε οι καταστάσεις αυτές πρέπει να θεωρούνται άγνωστες ποσότητες και μπορεί να γίνει μόνο εκτίμηση αυτών. Η περίπτωση αυτή ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων με εσωτερική δυναμική (*internal dynamics models*). Τέλος, ανάλογα με την επιθυμητή ποιότητα και τις θεωρήσεις που μπορούμε να κάνουμε κατά τη μοντελοποίηση του συστήματος με χρήση του *first principles modeling* λαμβάνουμε και διαφορετικά μοντέλα από αυτά που αναφέρονται παραπάνω.

3.4 Διέγερση Συστήματος για Αναγνώριση Παραμέτρων Δυναμικού Μοντέλου

Η συλλογή “σωστών” δεδομένων για την αναγνώριση των παραμέτρων του δυναμικού μοντέλου προϋποθέτει τον κατάλληλο σχεδιασμό του πειράματος που πρέπει να διεξαχθεί. Έτσι, στην παράγραφο αυτή γίνεται περιγραφή και ανάλυση κάποιων στοιχείων της πειραματικής διαδικασίας, που είναι ιδιαίτερης σημασίας τόσο για την αναγνώριση των παραμέτρων γενικά, όσο και για το ελικόπτερο ως σύστημα προς αναγνώριση, καθώς διαθέτει ορισμένα ξεχωριστά χαρακτηριστικά που χρήζουν επιπρόσθετης προσοχής. Ειδικότερα, η ποιότητα των πειραματικών δεδομένων εξαρτάται, πρώτον, από το σωστό σχεδιασμό και εκτέλεση των πειραματικών πτήσεων και τον τύπο του αεροσκάφους που εξετάζεται και, δεύτερον, από τον κατάλληλο εξοπλισμό συλλογής των πειραματικών δεδομένων. Τέλος, ξεχωριστή θέση στο σχεδιασμό του πειράματος κατέχει η επιλογή των εισόδων διέγερσης του συστήματος.

3.4.1 Επισκόπηση Απαιτήσεων για Αναγνώριση Παραμέτρων Συστήματος

Υπάρχει μία βασική αρχή που διέπει την θεωρία της αναγνώρισης παραμέτρων συστήματος, είτε αυτή είναι στο πεδίο της συχνότητας είτε στο πεδίο του χρόνου, σύμφωνα με την οποία η καταγραφή των πειραματικών δεδομένων των πτήσεων πρέπει να περιλαμβάνουν πληροφορίες για τα δυναμικά χαρακτηριστικά του μοντέλου που επιθυμούμε να εντοπίσουμε. Σε διαφορετική περίπτωση η σωστή αναγνώριση του μοντέλου είναι αδύνατη.

Ως συνέχεια της προηγούμενης αρχής αναφέρουμε ότι δύο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά έχουν τη δυνατότητα να προδιαγράψουν την όλη πειραματική διαδικασία:

- Το φάσμα της συχνότητας στο οποίο επιθυμούμε να είναι λειτουργικό το μοντέλο προς αναγνώριση.
- Η δυναμική σύζευξη που ενυπάρχει στο σύστημα που επιθυμούμε να αναγνωρίσουμε.

3.4.2 Φάσμα Συχνοτήτων Λειτουργίας

Ο φάκελος πτήσης του ελικοπτερου, και ο χώρος λειτουργίας του εκάστοτε συστήματος γενικότερα, καθορίζει το φάσμα συχνοτήτων λειτουργίας του μοντέλου που επιθυμούμε να αναγνωρίσουμε. Πιο συγκεκριμένα, η αναγνώριση ή επαλήθευση ενός μοντέλου προσομοίωσης πτήσης απαιτεί φάσμα χαμηλών συχνοτήτων λειτουργίας και εφαρμογής, ενώ μοντέλα απαραίτητα για εφαρμογή θεωριών ελέγχου σε συστήματα πτήσεως κλειστού βρόχου απαιτούν καλή προσέγγιση κοντά στο εύρος λειτουργίας συχνοτήτων του συστήματος κλειστού βρόχου. Συνεπώς, κάθε σύστημα προς αναγνώριση έχει διαφορετικό πεδίο λειτουργίας το οποίο είναι συνάρτηση:

1. Του φάσματος των συχνοτήτων λειτουργίας του μοντέλου που μπορεί να αναγνωριστεί με μεγάλη ακρίβεια, δηλαδή να έχει μεγάλη τιμή η συνάρτηση συσχέτισης.
2. Του φάσματος που είναι δυνατόν το εκάστοτε παραμετρικό μοντέλο να προσεγγίσει.

3.4.2.1 Ιδιαιτερότητες από την Ανθρώπινη Διέγερση του Συστήματος

Κάθε δυναμικό σύστημα έχει συγκεκριμένα δυναμικά χαρακτηριστικά (*dynamic modes*) σε κάθε φάσμα λειτουργίας. Σε περίπτωση όπου δε γίνει σωστή διέγερση των χαρακτηριστικών αυτών από τις πειραματικές εισόδους, τότε αυτά δε θα εμφανιστούν στα πειραματικά δεδομένα και επομένως ούτε στο αναγνωρισμένο μοντέλο. Άρα, κατά τη

διάρκεια αναγνώρισης παραμέτρων δυναμικού μοντέλου επιθυμούμε να διεγείρουμε όλα τα δυναμικά χαρακτηριστικά που υπάρχουν στο φάσμα λειτουργίας. Για τα αεροναυτικά συστήματα τα φυσικά χαρακτηριστικά και η περίσσεια ενέργειας διέγερσης αναγνωρίζονται κατά την πειραματική διαδικασία με “πilotάρισμα” του ελικοπτέρου από πραγματικό πιλότο. Αντίθετα, τα χαρακτηριστικά υψηλών συχνοτήτων, δηλαδή των κατασκευαστικών και του ρότορα, μπορούν καλύτερα να αναγνωριστούν με χρήση αυτόματων εισόδων διέγερσης από υπολογιστή.

3.4.2.2 *Ιδιαιτερότητες από τη Διάρκεια των Πειραματικών Μετρήσεων*

Μεγάλη σημασία για την πειραματική διαδικασία και τη σωστή αναγνώριση του δυναμικού μοντέλου παίζει και η διάρκεια των εισόδων διέγερσης του συστήματος (ελικόπτερο στη δική μας περίπτωση). Σα γενικός θεωρητικός κανόνας πρέπει κάθε ανεξάρτητη διέγερση *sweep* να διαρκεί τουλάχιστον 2 έως 3 φορές όσο περίοδος του δυναμικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει. Παρόλα αυτά, εξαιτίας προβλημάτων που εμφανίζονται κατά τη μετρητική διαδικασία, όπως είναι ο θόρυβος στις μετρήσεις, ατμοσφαιρικές διαταραχές και απροσδιοριστίες ή ανακρίβειες του μοντέλου, καλό είναι η διάρκεια της εκάστοτε διέγερσης να είναι μεγαλύτερη από τη θεωρητική τιμή. Έτσι, για παράδειγμα τα ελικόπτερα, τα οποία και μας ενδιαφέρουν στην παρούσα εργασία, παρουσιάζουν μία τυπική τιμή περιόδου του φυγοειδούς (*phugoid mode*) της τάξης των 20s. Συνεπακόλουθα, για μία σωστή αναγνώριση του δυναμικού χαρακτηριστικού του φυγοειδούς θα πρέπει η διάρκεια της διέγερσης να είναι περίπου 80s. Για την αναγνώριση, όμως, της μικρής περιόδου, που έγκειται στα χαρακτηριστικά των *handling qualities* του ελικοπτέρου, απαιτείται περίοδος διέγερσης της τάξης μόνο των 20s. Τέλος, εάν ο πρωταρχικός σκοπός είναι η αναγνώριση υψηλότερων χαρακτηριστικών υψηλότερων συχνοτήτων, όπως είναι κατασκευαστικά χαρακτηριστικά ή χαρακτηριστικά των συστημάτων ελέγχου, 5-10s είναι αρκετά.

3.4.3 *Δυναμική Σύζευξη*

Η δυναμική σύζευξη (επίσης *inter-axis coupling*) είναι παρούσα όταν μία είσοδος που είναι επιθυμητό να δημιουργήσει απόκριση σε έναν άξονα, τελικά προκαλεί απόκριση του συστήματος και σε άλλον άξονα του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η δημιουργία απόκρισης *yaw* όταν εμείς επιχειρούμε να ελέγξουμε μόνο το *roll* του ελικοπτέρου. Επομένως, η ύπαρξη της δυναμικής σύζευξης θέτει περιορισμούς στις κινήσεις του “πιλότου” κατά την πειραματική διαδικασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως για τη σωστή και πλήρη

αναγνώριση του μοντέλου πρέπει να είναι εμφανής και η σημασία της δυναμικής σύζευξης, δηλαδή ο “πιλότος” δεν πρέπει να προβαίνει σε διορθωτικές κινήσεις μεγάλης κλίμακας κατά τις πτήσεις των μετρήσεων. Έτσι, όταν θα γίνεται διέγερση του συστήματος από μία είσοδο για έναν άξονα, η ύπαρξη της απόκρισης σε άλλον άξονα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και να μην εξαφανίζεται με χρήση άλλων εισόδων ελέγχου του συστήματος από τον πιλότο σε μεγάλο βαθμό.

3.4.4 Σχεδιασμός Εισόδων Διέγερσης

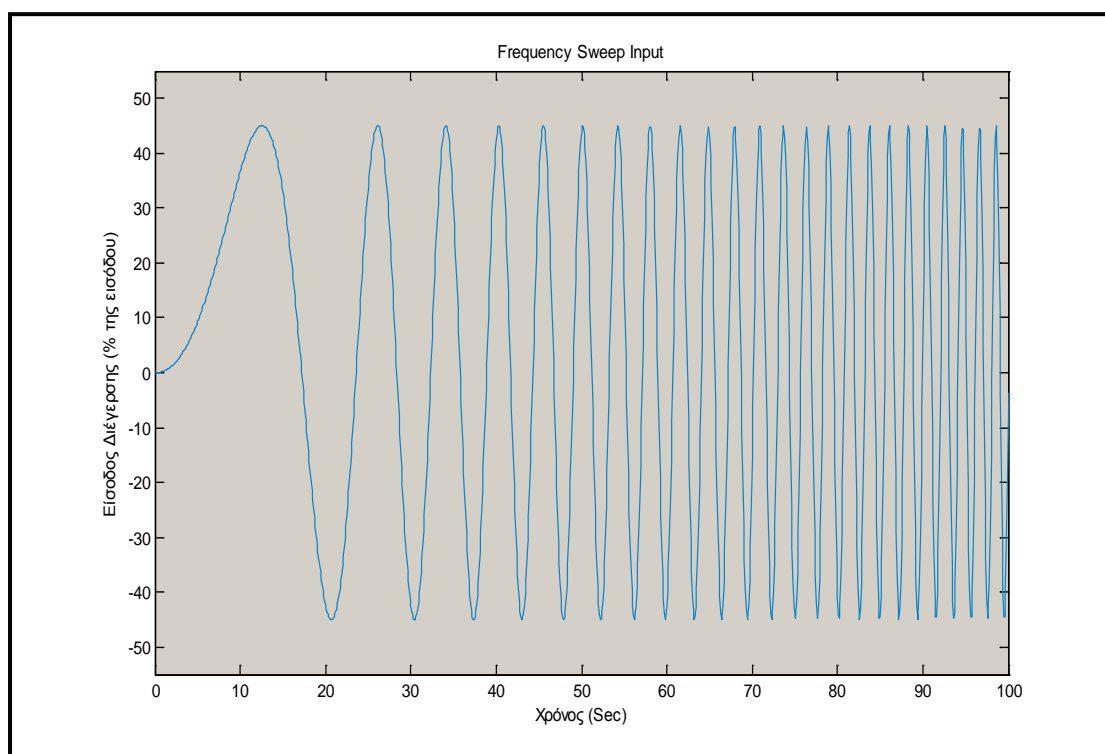
Ο σχεδιασμός των εισόδων διέγερσης του συστήματος που επιθυμούμε να αναγνωρίσουμε αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της αναγνώρισης παραμέτρων και ίσως το σημαντικότερο σημείο, καθώς ανάλογα με την ποιότητα των εισόδων διέγερσης λαμβάνουμε και τα αντίστοιχα δεδομένα προς επεξεργασία. Για το λόγο αυτό υπάρχουν θεωρίες για το βέλτιστο σχεδιασμό των εισόδων διέγερσης συστημάτων, ώστε να μεγιστοποιηθούν οι πληροφορίες που περιέχονται στα πειραματικά δεδομένα για τον ελάχιστο χρόνο πειραμάτων ή για την ελάχιστη τιμή απόκρισης του συστήματος. Για την επιλογή των κατάλληλων εισόδων βέβαια είναι απαραίτητη πολλές φορές η εκ των προτέρων γνώση της δομής του δυναμικού μοντέλου ή/και των δυναμικών χαρακτηριστικών. Αυτό, όμως, δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να γίνει στην περίπτωση πρωτότυπων κατασκευών UAVs και ελικοπτέρων. Συνεπώς, μετά από συστηματική θεωρητική προσέγγιση (π.χ. *first principles modeling*) μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις για το σχεδιασμό των αρχικών εισόδων διέγερσης του συστήματος, οι οποίες θα βελτιώνονται και ανανεώνονται κατά τη διάρκεια των πειραμάτων αναγνώρισης του συστήματος.

Όπως αναφέρεται στην προηγούμενη παράγραφο, ο σχεδιασμός των εισόδων διέγερσης για τη διεκπεραίωση των πειραμάτων της αναγνώρισης παραμέτρων προϋποθέτει τη γνώση ορισμένων στοιχείων. Εκτός από αυτά όμως, όπως η δομή του δυναμικού μοντέλου, ιδιαίτερο ρόλο παίζει και το πεδίο (πεδίο συχνότητας ή πεδίο του χρόνου) στο οποίο θα διεξαχθούν τα πειράματα. Στη δική μας περίπτωση, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, η αναγνώριση του μοντέλου θα γίνει στο πεδίο της συχνότητας, άρα και ο σχεδιασμός των εισόδων ελέγχου πρέπει να συνάδει με αυτή την επιλογή.

3.4.4.1 Frequency Sweep Inputs

Για την αναγνώριση παραμέτρων αεροναυτικού συστήματος στο πεδίο συχνοτήτων η μορφή εισόδων που χρησιμοποιείται είναι *frequency sweep*. Η μορφή αυτών των εισόδων είναι μία διακριτή αλληλουχία ημι-ημιτονοειδών εισόδων με αυξανόμενη συχνότητα. Στο

παρακάτω γράφημα φαίνεται η ιδεατή μορφή για *frequency sweep input* μίας μόνο εισόδου και χωρίς την παύση στο τέλος αυτής για την εκκίνηση της επόμενης.



Εικόνα 3-4 : Ιδεατή Μορφή Εισόδου Διέγερσης *Frequency Sweep*

Οι λόγοι για τους οποίους η παραπάνω μορφή είναι κατάλληλη για την αναγνώριση παραμέτρων συστήματος στο πεδίο της συχνότητας είναι οι εξής:

- Το φασματικό περιεχόμενο της διέγερσης έχει πολύ ομοιόμορφη κατανομή στο επιθυμητό εύρος των συχνοτήτων. Έτσι, η ικανοποιητική αυτή φασματική πυκνότητα εγγυείται επαρκή και διαρκή διέγερση. Συνεπώς, ικανοποιείται και το όριο της επιθυμητής ακρίβειας μέσω της συνάρτησης συσχέτισης.
- Υπάρχει μία κεντρική γραμμή συμμετρίας τόσο στις εισόδους όσο και στις αποκρίσεις του συστήματος. Η συμμετρία αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μπορούμε να καθορίσουμε τα ονομαστικά σημεία γύρω από τα οποία θέλουμε να κάνουμε την αναγνώριση (δηλαδή να έχουμε το γραμμικό μοντέλο – *trim points*), ενώ μας βοηθά θα διατηρούμε τις μεταβατικές κινήσεις γύρω από ένα σημείο αναφοράς κατά την πτήση. Κατά τη διεξαγωγή του πειράματος με τη συγκεκριμένη μορφή εισόδων, εάν η εκτέλεση είναι σωστή, το ελικόπτερο ξεκινά από *trim point* και τελειώνει σε *trim point*.
- Το εύρος της συχνότητας διέγερσης μπορεί να ελέγχεται πλήρως κατά τη διάρκεια της πειραματικής πτήσης και η διέγερση ξεκινά από τη χαμηλότερη επιθυμητή συχνότητα και τελειώνει στη μέγιστη επιθυμητή συχνότητα. Η συχνότητα διέγερσης μπορεί να ελέγχεται

με μετρητικά συστήματα σε πραγματικό χρόνο και είναι σημαντική, αφού δεν υπάρχει υπέρβαση των κατασκευαστικών ορίων και των πτητικών περιορισμών του ελικοπτέρου. Ακόμη, με τη διακριτή αλληλουχία των εισόδων διέγερσης μπορεί να αποφευχθεί και ενδεχόμενη διέγερση άλλων δυναμικών ή/και χαρακτηριστικών του ελικοπτέρου.

Τέλος, οι είσοδοι της μορφής *frequency sweep* θα χρησιμοποιηθούν και στο αρχικό στάδιο της διακρίβωσης των υπολογισθέντων αποκρίσεων του συστήματος σε σχέση με τα πραγματικά δεδομένα. Θα εφαρμοστούν, δηλαδή, στο αναγνωρισμένο μοντέλο οι ίδιες είσοδοι με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν και εν πτήση, αλλά δεν έλαβαν μέρος στην επεξεργασία των δεδομένων για την αναγνώριση.

3.4.4.2 Υπολογισμός Εισόδων Διέγερσης

Στο σημείο αυτό, έχοντας ήδη αναφέρει τα σημαντικά σημεία που πρέπει να ληφθούν υπόψη, δίνονται οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών των εισόδων διέγερσης κατά την αναγνώριση των παραμέτρων του συστήματος.

Έτσι, έχουμε με βάση υπάρχουσες θεωρίες πως το φάσμα της συχνότητας των εισόδων διέγερσης πρέπει να είναι:

$$0.5 \omega_{BW} \leq \omega \leq 2.5 \omega_{180} \quad (3.22)$$

όπου ω_{BW} (*bandwidth frequency*) η συχνότητα που ορίζεται ως εκείνη στην οποία η απόκριση της συμπεριφοράς του συστήματος έχει φάση -135° . Αντίστοιχα, ω_{180} είναι η συχνότητα στην οποία η φάση της απόκρισης είναι -180° . Οι παραπάνω συχνότητες μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά στην αρχή με επεξεργασία των δεδομένων, έπειτα από δοκιμές με βηματικές εισόδους και σύγκριση των δεδομένων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας για ένα σύστημα 2^{16} τάξης. Έτσι, έχοντας κάνει εκτίμηση των αρχικών τιμών των συχνοτήτων ω_{BW} και ω_{180} μπορεί να γίνει ο σχεδιασμός των αρχικών εισόδων διέγερσης. Αυτό γίνεται επιλέγοντας ως συχνότητα εκκίνησης της εισόδου την τιμή:

$$\omega_{min} = 0.5 \omega_{BW} \quad (3.23)$$

δηλαδή

$$T_{max} = \frac{2 \pi}{\omega_{min}} = \frac{4 \pi}{\omega_{BW}} \quad (3.24)$$

ενώ η τελική συχνότητα του *frequency sweep* είναι:

$$\omega_{max} = 2.5 \omega_{180} \quad (3.25)$$

άρα

$$T_{min} = \frac{2 \pi}{\omega_{max}} = \frac{4 \pi}{5 \omega_{180}} \quad (3.26)$$

Με βάση εμπειρικούς κανόνες η διάρκεια, T_{rec} , των εισόδων διέγερσης και η καταγραφή των μετρητικών δεδομένων πρέπει να είναι:

$$T_{rec} \leq (4 \text{ έως } 5)T_{max} \quad (3.27)$$

Ακόμη, το 40% της διάρκειας της διέγερσης είναι για τη δημιουργία δύο διεγέρσεων στις χαμηλές συχνότητες και το υπόλοιπο του χρόνου αφιερώνεται στην δημιουργία των διεγέρσεων των υψηλών συχνοτήτων και στην τοποθέτηση του αεροσκάφους στο σημείο ισορροπίας στην αρχή και στο τέλος της μανούβρας. Τέλος, το πλάτος των διεγέρσεων είναι για τα τυπικά αεροσκάφη στο εύρος $\pm 10-20\%$ των εισόδων ελέγχου, αλλά στη δική μας περίπτωση και εξαιτίας της ιδιαιτερότητας του ελικοπτέρου μας που είναι ακροβατικό, το πλάτος των διεγέρσεων μπορεί να φτάσει και στο $\pm 40\%$ των εισόδων ελέγχου.

4

Επίλογος

Στο τελικό αυτό κεφάλαιο είναι απαραίτητο να γίνει σύνοψη της διπλωματικής εργασίας, ενώ προτείνονται ορισμένες μελλοντικές επεκτάσεις και κατευθύνσεις, έτσι ώστε τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής να αξιοποιηθούν στο έπακρο και να γίνουν και τα ελικόπτερα μικρού μεγέθους ιδιαίτερα λειτουργικά.

4.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Η διπλωματική αυτή εργασία επικεντρώθηκε στην εύρεση και ανάπτυξη δυναμικών μοντέλων, γραμμικών και μη-γραμμικών, κατάλληλα να περιγράψουν τη συμπεριφορά ελικοπτέρων μικρού μεγέθους. Για την κατανόηση της πορείας που ακολουθήθηκε έγινε μία αναφορά στις δυνατότητες και στις επιθυμητές λειτουργίες του ελικοπτέρου, στο σύστημα αυτού, ενώ υπήρξε και παρουσίαση ορισμένων χαρακτηριστικών που συναντάμε στα ελικόπτερα μικρού μεγέθους. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά ελήφθησαν υπόψη κατά τη φάση της μοντελοποίησης, έτσι ώστε τα μαθηματικά μοντέλα να είναι όσο το δυνατόν πιστότερα γίνεται.

Όσον αφορά στη μοντελοποίηση της δυναμικής του ελικοπτέρου μέσω της διαδικασίας *first principles modeling* η διαδικασία ήταν επιτυχής, όπως φάνηκε και από τα πειραματικά δεδομένα της προσομοίωσης και της ανάλυσης αυτών, για το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο. Έτσι, μας δόθηκε η ευκαιρία να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του ελικοπτέρου ως εναέριο ρομπότ και να αποκτήσουμε μετρήσεις μετά από κατάλληλη διέγερση των εισόδων.

Επίσης, ήταν δυνατό να προβούμε σε σύγκριση του ελικοπτέρου της προσομοίωσης με άλλα ελικοπτερα αντίστοιχου μεγέθους αλλά με διαφορετικά δυναμικά χαρακτηριστικά.

Ακόμη, εκτός από τη μη-γραμμικό μοντέλο αναπτύχθηκε και το γραμμικό με τη διαδικασία της γραμμικοποίησης. Έγινε η εύρεση του μοντέλου, με χρήση των αναλυτικών σχέσεων για τις παραγώγους ευστάθειας και ελέγχου, για την κατάσταση του *hover* και μπορέσαμε να προβούμε σε ανάλυση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, ώστε να πιστοποιηθεί τόσο η γραμμικοποίηση όσο και οι τιμές των παραγώγων που προέκυψαν. Παρόλα αυτά, δεν ήταν δυνατό να γίνει η γραμμικοποίηση γύρω από την κατάσταση του *cruise*, εξαιτίας της δυσκολίας εύρεσης των *trim points* που την χαρακτηρίζουν, και δεν έγινε κάποια σύγκριση με τα αποτελέσματα του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου. Τέλος, όσον αφορά στα γραμμικά δυναμικά μοντέλα, παρουσιάστηκε η διαδικασία εύρεσης γραμμικών μοντέλων με τη διαδικασία της αναγνώρισης παραμέτρων, αλλά δεν έγιναν πειράματα πτήσεων, ώστε να εξακριβωθεί η εγκυρότητα και αποτελεσματικότητα της διαδικασίας.

Εκτός, όμως, από τη μοντελοποίηση της δυναμικής του ελικοπτέρου, που αποτέλεσε το μείζον θέμα απασχόλησης κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, έγινε μία έρευνα και για μεθόδους κατάλληλες για αναγνώριση παραμέτρων. Έτσι, στην παρούσα εργασία έγινε παρουσίαση ορισμένων μεθόδων αναγνώρισης παραμέτρων, εκ των οποίων ξεχώρισε αυτής της γραμμικής αναγνώρισης παραμέτρων στο πεδίο της συχνότητας, εξαιτίας της ευρείας χρήσης και αναφοράς της από διάφορες ερευνητικές ομάδες σε όλον τον κόσμο, αλλά και της τεκμηριωμένης υπεροχής της έναντι των μη-γραμμικών μεθόδων ή των γραμμικών μεθόδων στο πεδίο του χρόνου.

4.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Ο χώρος των εναέριων ρομπότ, και ιδιαίτερα των ελικοπτέρων μικρού μεγέθους, είναι ταχύτατα αναπτυσσόμενος και οι δυνατότητες χρήσης αυτών φαντάζουν απεριόριστες. Απώτερος σκοπός των οχημάτων αυτών είναι η αυτόνομη χρήση αυτών, ώστε να υπάρξει αποφόρτιση του ανθρώπινου δυναμικού σε πολλές περιπτώσεις όπου αυτό κρίνεται ανούσιο ή επικίνδυνο. Για την επίτευξη, όμως, του στόχου αυτού το 1^ο βήμα είναι η κατανόηση της δυναμικής των οχημάτων αυτών προκειμένου να γίνουν κατανοητά τα δυναμικά αλλά και κατασκευαστικά όρια αυτών. Έτσι, η παρούσα εργασία μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για τη φάση της κατανόησης της δυναμικής. Το επόμενο βήμα είναι η εκτέλεση πολλών πειραμάτων πτήσεων σε διάφορες καταστάσεις του φακέλου πτήσης, έτσι ώστε να ριχθεί φως σε “κρυμμένες πτυχές” της δυναμικής των ελικοπτέρων.

Έχοντας πραγματοποιηθεί αξιολογική έρευνα σχετικά με τη δυναμική του ελικοπτέρου, οι πορείες που μπορούν να ακολουθηθούν από τους επίδοξους ερευνητές είναι απεριόριστες. Μία ιδιαίτερα σημαντική επιλογή από τις υπάρχουσες είναι ο σχεδιασμός ελεγκτών με χρήση

μοντέρνων θεωριών ελέγχου, έτσι ώστε να εξασφαλισθεί η *robust & stable* πτήση του ελικοπτέρου σε οποιεσδήποτε καταστάσεις λειτουργίας αυτού, μέχρι και σε φάσεις *aggressive maneuvering*. Ακόμη, μπορούν να αναπτυχθούν αλγόριθμοι για βέλτιστη κίνηση του ελικοπτέρου κατά τη λειτουργία του ως ρομπότ (δηλαδή *path planning optimization*) ή για συνεργασία πολλών αυτόνομων, επίγειων και εναέριων, οχημάτων ταυτόχρονα.

5

Βιβλιογραφία

- [1]. Ε. Παπαδόπουλος και Κ. Κυριακόπουλος. “Σημειώσεις Ρομποτικής”. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο 2006.
- [2]. V. Gavrillets, B. Mettler, E. Feron. “*Dynamic Model for a Miniature Aerobatic Helicopter*”. Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Aeronautics and Astronautics.
- [3]. V. Gavrillets, B. Mettler, and E. Feron. “*Nonlinear model for a small-size acrobatic helicopter*”. Number AIAA 2001-4333, Montreal, Canada, August 2001. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.
- [4]. A.R.S. Bramwell. “*Bramwell’s Helicopter Dynamics*”. AIAA, Reston VA, 2001.
- [5]. G.D. Padfield. “*Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling*”. AIAA Education Series, Reston, VA, 1996.
- [6]. V. Gavrillets. “*Autonomous aerobatic maneuvering of miniature helicopters*”. Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Aeronautics and Astronautics. Thesis (Ph. D.)-- 2003.
- [7]. L. Ljung. “*System Identification: Theory for the User*”. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [8]. B. Mettler. “*Identification, Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*”. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002.
- [9]. B. Mettler, C. Dever, and E. Feron. “*System identification and characteristics of small-scale rotorcraft*”. Berlin, Germany, May 2002. NATO SCI Symposium.

-
- [10]. B. Mettler and Takeo Kanade, Mark B. Tischler. “*System Identification Modeling of a Model Scale-Helicopter*”.
- [11]. M. Saffarian and F. Fahimi. “*A Comprehensive Kinematic Analysis of A Model Helicopter's Actuating Mechanism*”. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 7 - 10 January 2008, Reno, Nevada.
- [12]. Robert T.N. Chen. “*Effects of Primary Rotors Parameters on Flapping Dynamics*”. NASA Technical Paper 1431, January 1980.
- [13]. Mark Tischler and Robert Remple. “*Aircraft and Rotorcraft System Identification: Engineering Methods with Flight-Test Examples (AIAA Education Series)*”, August 2006.
- [14]. Panos J. Antsaklis and Anthony N. Michel. “*Linear Systems*”. 2006 Birkhauser Boston, 2nd Corrected Printing
- [15]. Brian L. Stevens and Frank L. Lewis. “*Aircraft Control and Simulation*”. Wiley-Interscience; 2nd Edition (October 2003).

6

Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό γίνεται η παρουσίαση των αναλυτικών σχέσεων εύρεσης των παραγώγων ευστάθειας και ελέγχου του γραμμικού μοντέλου του ελικοπτέρου, το οποίο έχει δημιουργηθεί με τη διαδικασία της γραμμικοποίησης από το μη-γραμμικό δυναμικό μοντέλο. Ακόμη, παρουσιάζονται και οι τιμές των παραγώγων αυτών για την κατάσταση ισορροπίας του *hover*.

6.1 Παράγωγοι Ευστάθειας και Παράγωγοι Ελέγχου

Πριν τον υπολογισμό των παραγώγων γίνεται ο υπολογισμός ορισμένων αεροδυναμικών μεγεθών, όπως και στο μη-γραμμικό μοντέλο, με τη χρήση των επαναληπτικών αλγορίθμων που παρουσιάζονται στην ανάπτυξη του μη-γραμμικού δυναμικού μοντέλου. Τα μεγέθη αυτά εξαρτώνται από την ταχύτητα του ανέμου, καθώς και από την γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ελικοπτέρου, ενώ εισάγονται στον υπολογισμό των παραγώγων ως σταθερές. Τα μεγέθη αυτά είναι τα T_{mr} , C_{Tmr} , C_{Qmr} , Q_{mr} , λ_{0mr} , T_{tr} , C_{Ttr} , C_{Qtr} , Q_{tr} , λ_{0tr} και K_λ και έχουν μοναδική τιμή για κάθε σημείο ισορροπίας. Παρόλα αυτά, βρίσκονται και οι παράγωγοι αυτών των μεγεθών ως προς τις ταχύτητες (γωνιακές ή γραμμικές) και τις εισόδους ελέγχου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η πλήρης εύρεση των παραγώγων ευστάθειας και ελέγχου.

Ξεκινώντας, γράφουμε τα παραπάνω μεγέθη αφού έχουν υπολογισθεί και αναφέρονται στη συνέχεια ως σταθερές με τα σύμβολα ***TMR, CTMR, CQMR, QMR, λ0MR, TTR, CTTR, CQTR, QTR, λ0tr*** και ***ΚΛ***. Έτσι, υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους:

– *Υπολογισμός των παραγώγων του C_{Tmr}*

$$C1 = \lambda 0MR$$

$$C2 = C1 + \lambda_{0mr} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z)$$

$$\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial \mu} = \frac{-8 \cdot \eta_w \cdot \lambda_{0mr} \cdot \mu}{8 \cdot \eta_w \cdot C2 + a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial C_{Tmr}} = \frac{\sqrt{C1}}{2 \cdot \eta_w \cdot C2} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu_z} = \frac{2 \cdot \eta_w \cdot a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot C1}{8 \cdot \eta_w \cdot C2 + a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu} = \frac{2 \cdot \mu \cdot a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \delta_{col}}{4} + \frac{2 \cdot \eta_w \cdot a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \lambda_{0mr} \cdot \mu}{8 \cdot \eta_w \cdot C2 + a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \delta_{col}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta_w \cdot a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot (1 + 1.5\mu^2) \cdot C2}{8 \cdot \eta_w \cdot C2 + a_{mr} \cdot \sigma_{mr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial \mu_z} = \frac{\lambda_{0mr} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z)}{C2} + \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{C1}} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial u} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu} \cdot \frac{u}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial v} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu} \cdot \frac{v}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial w} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu_z} \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr}} \quad (6.9)$$

– Υπολογισμός των παραγώγων των T_{mr} και V_{imr}

$$C2M = \rho \cdot \pi \cdot R_{mr}^2 \cdot (\Omega_{mr} \cdot R_{mr})^2$$

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial u} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial u} \cdot C2M \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial v} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial v} \cdot C2M \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial w} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial w} \cdot C2M \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \delta_{col}} \cdot C2M \quad (6.13)$$

$$C1M = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_{mr}^2$$

$$CM = 2 \cdot VV \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_{mr}^2$$

$$VV = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Εάν $VV < 2$ τότε:

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial u} = \text{Sign}(T_{mr}) \cdot \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{2 \cdot C1M \cdot V_{imr}} \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial v} = \text{Sign}(T_{mr}) \cdot \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{2 \cdot C1M \cdot V_{imr}} \quad (6.14b)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial w} = \text{Sign}(T_{mr}) \cdot \frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{2 \cdot C1M \cdot V_{imr}} \quad (6.14c)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} = \text{Sign}(T_{mr}) \cdot \frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{2 \cdot C1M \cdot V_{imr}} \quad (6.14d)$$

Εάν $VV \geq 2$ τότε:

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial u} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{CM} - u \cdot \frac{T_{mr}}{(C1M \cdot V_{imr})^3} \quad (6.15a)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial v} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{CM} - v \cdot \frac{T_{mr}}{(C1M \cdot V_{imr})^3} \quad (6.15b)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial w} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{CM} - w \cdot \frac{T_{mr}}{(C1M \cdot V_{imr})^3} \quad (6.15c)$$

$$\frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{CM} \quad (6.15d)$$

– Υπολογισμός των παραγώγων του C_{Ttr}

$$C1 = \lambda 0TR$$

$$C2 = C1 + \lambda_{0tr} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr})$$

$$\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial \mu_{tr}} = \frac{-8 \cdot \eta_w \cdot \lambda_{0tr} \cdot \mu_{tr}}{8 \cdot \eta_w * C2 + a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial C_{Ttr}} = \frac{\sqrt{C1}}{2 \cdot \eta_w \cdot C2} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{ztr}} = \frac{2 \cdot \eta_w \cdot a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot C1}{8 \cdot \eta_w * C2 + a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} = \frac{2 \cdot \mu_{tr} \cdot a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \delta_{ped}}{4} + \frac{2 \cdot \eta_w \cdot a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \lambda_{0tr} \cdot \mu_{tr}}{8 \cdot \eta_w * C2 + a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{ped}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta_w \cdot a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot (1 + 1.5\mu_{tr}^2) \cdot C2}{8 \cdot \eta_w * C2 + a_{tr} \cdot \sigma_{tr} \cdot \sqrt{C1}} \quad (6.20)$$

Εάν $V_{imr} \leq w$ και παράλληλα $gi \geq \frac{u}{V_{imr}-w}$ τότε:

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial u} = 0 \quad (6.21a)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial v} = 0 \quad (6.21b)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial w} = 0 \quad (6.21c)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial \delta_{col}} = 0 \quad (6.21d)$$

Εάν $gf \leq \frac{u}{V_{imr}-w}$ τότε:

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial u} = 0 \quad (6.22a)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial v} = 0 \quad (6.22b)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial w} = 0 \quad (6.22c)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial \delta_{col}} = 0 \quad (6.22d)$$

Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε:

$$gg = 1.5 / [(gf - gi) \cdot (V_{imr} - w)^2]$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial u} = gg \cdot \left(V_{imr} - w - u \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial u} \right) \quad (6.23a)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial v} = -gg \cdot u \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial v} \quad (6.23b)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial w} = -gg \cdot u \cdot \left(\frac{\partial V_{imr}}{\partial w} - 1 \right) \quad (6.23c)$$

$$\frac{\partial K_\lambda}{\partial \delta_{col}} = -gg \cdot u \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} \quad (6.23d)$$

$$\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial \mu_{ztr}} = \frac{\lambda_{0tr} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr})}{C2} + \frac{\partial C_{Ttr}}{\mu_{ztr}} \frac{1}{\sqrt{C1}} \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial p} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{h_{tr}}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial r} = - \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{l_{tr}}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} \quad (6.26)$$

$$C1t = \Omega_{tr} \cdot R_{tr} \cdot (u^2 + w_{tr}^2)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial u} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot \frac{u - w_{tr} \cdot [(\partial K_\lambda / \partial u) \cdot V_{imr} + K_\lambda \cdot (\partial V_{imr} / \partial u)]}{C1t} \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial v} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{1}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} - \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot w_{tr} \cdot \frac{(\partial K_\lambda / \partial v) \cdot V_{imr} + K_\lambda \cdot (\partial V_{imr} / \partial v)}{C1t} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial w} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot w_{tr} \cdot \frac{1 - (\partial K_{\lambda} / \partial w) \cdot V_{imr} + K_{\lambda} \cdot (\partial V_{imr} / \partial w)}{C1t} \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial q} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot \frac{l_{tr} \cdot w_{tr}}{C1t} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{col}} = - \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot w_{tr} \cdot \frac{(\partial K_{\lambda} / \partial \delta_{col}) \cdot V_{imr} + K_{\lambda} \cdot (\partial V_{imr} / \partial \delta_{col})}{C1t} \quad (6.31)$$

– Υπολογισμός των παραγώγων του T_{tr} και V_{itr}

$$C2t = f_t \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_{tr}^2 \cdot (\Omega_{tr} \cdot R_{tr})^2$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial u} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial u} \cdot C2t \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial v} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial v} \cdot C2t \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial w} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial w} \cdot C2t \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial p} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial p} \cdot C2t \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial q} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial q} \cdot C2t \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial r} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial r} \cdot C2t \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{col}} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{col}} \cdot C2t \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{ped}} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{ped}} \cdot C2t \quad (6.38)$$

$$C3t = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_{tr}^2$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial u} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial v} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial w} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial p} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial p} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial q} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial q} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial r} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial r} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial \delta_{col}} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial V_{itr}}{\partial \delta_{ped}} = \text{Sign}(T_{tr}) \cdot \frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{ped}} \cdot \frac{1}{2 \cdot C3t \cdot V_{itr}} \quad (6.46)$$

– Υπολογισμός των παραγώγων του Q_{mr}

$$C_{Qmr} = C_{Tmr} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z) + C_{D0} \cdot \frac{\sigma_{mr}}{8} \cdot \left(1 + \frac{7}{3} \cdot \mu^2\right) \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \mu_z} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu_z} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z) + C_{Tmr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial \mu_z} - 1\right) \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \mu} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \mu} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z) + C_{Tmr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial \mu}\right) + C_{D0} \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{\sigma_{mr}}{8} \cdot \mu \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \delta_{col}} = \frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \delta_{col}} \cdot (\lambda_{0mr} - \mu_z) + C_{Tmr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0mr}}{\partial \delta_{col}}\right) \cdot \left(\frac{\partial C_{Tmr}}{\partial \delta_{col}}\right) \quad (6.50)$$

$$C4M = \rho \cdot (\Omega_{mr} \cdot R_{mr})^2 \cdot \pi \cdot R_{mr}^3$$

$$\frac{\partial Q_{mr}}{\partial u} = C4M \cdot \frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \mu} \cdot \frac{u}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{v^2 + v^2}} \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial Q_{mr}}{\partial v} = C4M \cdot \frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \mu} \cdot \frac{v}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{v^2 + v^2}} \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial Q_{mr}}{\partial w} = C4M \cdot \frac{\partial C_{Qmr}}{\partial \mu_z} \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr}} \quad (6.53)$$

– Υπολογισμός παραγώγων του Q_{tr}

$$C_{Qtr} = C_{Ttr} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr}) + C_{D0} \cdot \frac{\sigma_{tr}}{8} \cdot \left(1 + \frac{7}{3} \cdot \mu_{ztr}^2\right) \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{ztr}} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr}) + C_{Ttr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial \mu_{ztr}} - 1\right) \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{tr}} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr}) + C_{Ttr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial \mu_{tr}}\right) + C_{D0} \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{\sigma_{tr}}{8} \cdot \mu_{tr} \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \delta_{ped}} = \frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{ped}} \cdot (\lambda_{0tr} - \mu_{ztr}) + C_{Ttr} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{0tr}}{\partial C_{Ttr}}\right) \cdot \left(\frac{\partial C_{Ttr}}{\partial \delta_{ped}}\right) \quad (6.57)$$

$$C4T = \rho \cdot (\Omega_{tr} \cdot R_{tr})^2 \cdot \pi \cdot R_{tr}^3$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{ped}} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \delta_{ped}} \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial p} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{h_{tr}}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial r} = -C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{l_{tr}}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial u} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot \frac{u - [w_{tr} \cdot K_\lambda \cdot (\partial V_{itr}/\partial u)]}{C1T} \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial v} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{ztr}} \cdot \frac{1}{\Omega_{tr} \cdot R_{tr}} - \frac{(\partial C_{Qtr}/\partial \mu_{tr}) \cdot [(\partial K_\lambda/\partial v) \cdot V_{imr} + K_\lambda \cdot (\partial V_{imr}/\partial v)]}{C1T} \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial w} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot w_{tr} \cdot \left(1 - K_\lambda \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial w}\right) \cdot \frac{1}{C1t} \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial q} = C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot \frac{l_{tr} \cdot w_{tr}}{C1T} \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{col}} = -C4T \cdot \frac{\partial C_{Qtr}}{\partial \mu_{tr}} \cdot w_{tr} \cdot K_{\lambda} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{C1T} \quad (6.65)$$

– **Υπολογισμός παραγώγων ευστάθειας και παραγώγων ελέγχου**

Πρέπει να τονισθεί ότι όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται εδώ είναι γύρω από το σημείο γραμμικοποίησης (*trimmed states & inputs*).

Αρχικά υπολογίζονται οι παράγωγοι ορισμένων ταχυτήτων που υπάρχουν στο μη-γραμμικό μοντέλο του ελικοπτέρου και χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της γραμμικοποίησης (Τα μεγέθη με δείκτη e είναι σταθερά και έχουν την τιμή της κατάστασης γύρω από την οποία γίνεται η γραμμικοποίηση).

$$\frac{\partial V_{\infty}}{\partial u} = (u_e + (w_e + V_{imre})) \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{V_{\infty e}} \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial V_{\infty}}{\partial v} = (v_e + (w_e + V_{imre})) \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{V_{\infty e}} \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial V_{\infty}}{\partial w} = (w_e + V_{imre}) \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{V_{\infty e}} \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial V_{\infty}}{\partial \delta_{col}} = (w_e + V_{imre}) \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{V_{\infty e}} \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial u} = \frac{u_e - w_{tre} \cdot [(\partial K_{\lambda} / \partial u) \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot (\partial V_{imr} / \partial u)]}{V_{\infty tre}} \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial v} = -\frac{w_{tre} \cdot [(\partial K_{\lambda} / \partial v) \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot (\partial V_{imr} / \partial v)]}{V_{\infty tre}} \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial w} = \frac{w_{tre} \cdot (1 - [(\partial K_{\lambda} / \partial w) \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot (\partial V_{imr} / \partial w)])}{V_{\infty tre}} \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial q} = \frac{l_{tr} \cdot w_{tre}}{V_{\infty tre}} \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial \delta_{col}} = - \frac{w_{tre} \cdot [(\partial K_{\lambda} / \partial \delta_{col}) \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot (\partial V_{imr} / \partial \delta_{col})]}{V_{\infty tre}} \quad (6.74)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial u} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial u} \quad (6.75)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial w} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial w} \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial p} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial p} \quad (6.77)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial q} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial q} \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial \delta_{col}} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial \delta_{col}} \quad (6.79)$$

$$\frac{\partial V_{vf}}{\partial \delta_{ped}} = -\varepsilon_{vftr} \cdot \frac{\partial V_{itr}}{\partial \delta_{ped}} \quad (6.80)$$

$$\frac{\partial w_{ht}}{\partial u} = - \left(\frac{\partial K_{\lambda}}{\partial u} \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial u} \right) \quad (6.81)$$

$$\frac{\partial w_{ht}}{\partial v} = - \left(\frac{\partial K_{\lambda}}{\partial v} \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial v} \right) \quad (6.82)$$

$$\frac{\partial w_{ht}}{\partial \delta_{col}} = - \left(\frac{\partial K_{\lambda}}{\partial \delta_{col}} \cdot V_{imre} + K_{\lambda e} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} \right) \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial w_{ht}}{\partial q} = l_{ht} \quad (6.84)$$

$$\frac{\partial X_{fus}}{\partial V_{\infty}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{fus}^x \cdot u_e \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial Y_{fus}}{\partial V_{\infty}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{fus}^y \cdot v_e \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{\infty}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{fus}^z \cdot (w_e + V_{imre}) \quad (6.87)$$

$$\frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{imr}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{fus}^z \cdot V_{\infty e} \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{vf} \cdot C_{La}^{vf} \cdot v_{vfe} \quad (6.89)$$

$$\frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} = -0.5 \cdot \rho \cdot S_{vf} \cdot (C_{La}^{vf} + 2 \cdot |v_{vfe}|) \quad (6.90)$$

$$\frac{\partial Z_{ht}}{\partial w_{ht}} = 0.5 \cdot \rho \cdot S_{ht} \cdot (C_{La}^{ht} \cdot |u_e| + 2 \cdot |w_{hte}|) \quad (6.91)$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του X

$$X_u = X_{umr} + X_{ufus}$$

$$X_{umr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \sin(a_e) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.92)$$

$$X_{ufus} = \frac{-0.5 \cdot \rho \cdot S_{fus}^x \cdot V_{\infty e} + (\partial X_{fus} / \partial V_{\infty}) \cdot (\partial V_{\infty} / \partial u)}{m} \quad (6.93)$$

$$X_v = r_e + X_{vmr} + X_{vfus}$$

$$X_{vmr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \sin(a_e) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.94)$$

$$X_{vfus} = \frac{\partial X_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial v} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.95)$$

$$X_w = -q_e + X_{wmr} + X_{wfus}$$

$$X_{wmr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \sin(a_e) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.96)$$

$$X_{wfus} = \frac{\partial X_{fus}}{\partial V_\infty} \cdot \frac{\partial V_\infty}{\partial w} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.97)$$

$$X_p = 0$$

$$X_q = -w_e$$

$$X_r = v_e$$

$$X_\varphi = 0$$

$$X_\theta = -g \cdot \cos(\theta_e)$$

$$X_\psi = 0$$

$$X_a = X_{amr} = -T_{mre} \cdot \frac{\cos(a_{1e})}{m} \quad (6.98)$$

$$X_b = 0$$

$$X_{\delta col} = X_{\delta colmr} + X_{\delta colfus}$$

$$X_{\delta colmr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{\sin(a_e)}{m} \quad (6.99)$$

$$X_{\delta colfus} = \frac{\partial X_{fus}}{\partial V_\infty} \cdot \frac{\partial V_\infty}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.100)$$

$$X_{\delta lon} = 0$$

$$X_{\delta lat} = 0$$

$$X_{\delta ped} = 0$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του Y

$$Y_u = -r_e + Y_{umr} + Y_{ufus} + Y_{uvf} + Y_{utr}$$

$$Y_{umr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{\sin(b_e)}{m} \quad (6.101)$$

$$Y_{ufus} = \frac{\partial Y_{fus}}{\partial V_\infty} \cdot \frac{\partial V_\infty}{\partial u} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.102)$$

$$Y_{uvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} \cdot \frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial u} + \frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial v_{vf}}{\partial u} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.103)$$

$$Y_{utr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.104)$$

$$Y_v = Y_{vmr} + Y_{vfus} + Y_{vvf} + Y_{vtr}$$

$$Y_{vmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{\sin(b_e)}{m} \quad (6.105)$$

$$Y_{vfus} = \frac{-\rho \cdot S_{fus}^y \cdot V_{\infty e} + (\partial Y_{fus} / \partial V_\infty) \cdot (\partial V_\infty / \partial v)}{m} \quad (6.106)$$

$$Y_{vvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} \cdot \frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial v} + \frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial v_{vf}}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.107)$$

$$Y_{vtr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.108)$$

$$Y_w = Y_{wmr} + Y_{wfus} + Y_{wvf} + Y_{wtr}$$

$$Y_{wmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{\sin(b_e)}{m} \quad (6.109)$$

$$Y_{wfus} = \frac{\partial Y_{fus}}{\partial V_\infty} \cdot \frac{\partial V_\infty}{\partial w} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.110)$$

$$Y_{wvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} \cdot \frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial w} + \frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial v_{vf}}{\partial w} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.111)$$

$$Y_{wtr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.112)$$

$$Y_p = w_e + Y_{pvf} + Y_{ptr}$$

$$Y_{pvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial V_{vf}}{\partial p} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.113)$$

$$Y_{ptr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial p} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.114)$$

$$Y_q = Y_{qvf} + Y_{qtr}$$

$$Y_{qvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} \cdot \frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial q} + \frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial V_{vf}}{\partial q} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.115)$$

$$Y_{qtr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial q} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.116)$$

$$Y_r = -r_e + Y_{rvf} + Y_{rtr}$$

$$Y_{rvf} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial V_{vf}}{\partial r} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.117)$$

$$Y_{rtr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial r} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.118)$$

$$Y_\varphi = g \cdot \cos(\varphi_e) \cdot \cos(\theta_e) \quad (6.119)$$

$$Y_\theta = -g \cdot \sin(\varphi_e) \cdot \sin(\theta_e) \quad (6.120)$$

$$Y_\psi = 0$$

$$Y_a = 0$$

$$Y_b = Y_{bmr} = T_{mre} \cdot \frac{\cos(b_e)}{m} \quad (6.121)$$

$$Y_{\delta col} = Y_{\delta colmr} + Y_{\delta colfus} + Y_{\delta colvf} + Y_{\delta coltr}$$

$$Y_{\delta colmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{\sin(b_e)}{m} \quad (6.122)$$

$$Y_{\delta col fus} = \left(\frac{\partial Y_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial \delta_{col}} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.123)$$

$$Y_{\delta col v f} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial V_{\infty tr}} \cdot \frac{\partial V_{\infty tr}}{\partial \delta_{col}} + \frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial V_{vf}}{\partial \delta_{col}} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.124)$$

$$Y_{\delta col tr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.125)$$

$$Y_{\delta lon} = 0$$

$$Y_{\delta lat} = 0$$

$$Y_{\delta ped} = Y_{\delta ped v f} + Y_{\delta ped tr}$$

$$Y_{\delta ped v f} = \left(\frac{\partial Y_{vf}}{\partial v_{vf}} \cdot \frac{\partial V_{vf}}{\partial p} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.126)$$

$$Y_{\delta ped tr} = \frac{\partial T_{tr}}{\partial \delta_{ped}} \cdot \frac{1}{m} \quad (6.127)$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του Z

$$Z_u = Z_{umr} + Z_{ufus} + Z_{uht}$$

$$Z_{umr} = - \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{\cos(a_e) \cdot \cos(b_e)}{m} \quad (6.128)$$

$$Z_{ufus} = \left(\frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{imr}} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial u} + \frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial u} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.129)$$

$$Z_{uht} = \frac{-\rho \cdot S_{ht} \cdot C_{La}^{ht} \cdot |u_e| \cdot w_{hte} + (\partial Z_{fus} / \partial V_{\infty}) \cdot (\partial V_{\infty} / \partial u)}{m} \quad (6.130)$$

$$Z_v = -p_e + Z_{vmr} + Z_{vfus} + Z_{vht}$$

$$Z_{vmr} = - \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{\cos(a_e) \cdot \cos(b_e)}{m} \quad (6.131)$$

$$Z_{vfus} = \left(\frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{imr}} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial v} + \frac{\partial Z_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.132)$$

$$Z_{vht} = \left(\frac{\partial Z_{ht}}{\partial w_{ht}} \cdot \frac{\partial w_{ht}}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.133)$$

$$\mathbf{Z}_w = \mathbf{Z}_{wmr} + \mathbf{Z}_{wfus} + \mathbf{Z}_{wht}$$

$$\mathbf{Z}_{wmr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{\cos(a_e) \cdot \cos(b_e)}{m} \quad (6.134)$$

$$\mathbf{Z}_{wfus} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{fus}}{\partial V_{imr}} \cdot \left(1 + \frac{\partial V_{imr}}{\partial w} \right) + \frac{\partial \mathbf{Z}_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial w} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.135)$$

$$\mathbf{Z}_{wht} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{ht}}{\partial w_{ht}} \cdot \frac{\partial w_{ht}}{\partial w} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.136)$$

$$\mathbf{Z}_p = v_e$$

$$\mathbf{Z}_q = \mathbf{Z}_{qht} + u_e$$

$$\mathbf{Z}_{qht} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{ht}}{\partial w_{ht}} \cdot \frac{\partial w_{ht}}{\partial q} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.137)$$

$$\mathbf{Z}_r = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Z}_{\varphi} = -g \cdot \sin(\varphi_e) \cdot \cos(\theta_e) \quad (6.138)$$

$$\mathbf{Z}_{\theta} = -g \cdot \cos(\varphi_e) \cdot \sin(\theta_e) \quad (6.139)$$

$$\mathbf{Z}_{\psi} = \mathbf{0} \quad (6.140)$$

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_{amr} = T_{mre} \cdot \frac{\sin(a_e) \cdot \cos(b_e)}{m} \quad (6.141)$$

$$\mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_{bmr} = T_{mre} \cdot \frac{\cos(a_e) \cdot \sin(b_e)}{m} \quad (6.142)$$

$$\mathbf{Z}_{\delta col} = \mathbf{Z}_{\delta colmr} + \mathbf{Z}_{\delta colfus} + \mathbf{Z}_{\delta colht}$$

$$\mathbf{Z}_{\delta colmr} = -\frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{\cos(a_e) \cdot \cos(b_e)}{m} \quad (6.143)$$

$$\mathbf{Z}_{\delta colfus} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{fus}}{\partial V_{imr}} \cdot \frac{\partial V_{imr}}{\partial \delta_{col}} + \frac{\partial \mathbf{Z}_{fus}}{\partial V_{\infty}} \cdot \frac{\partial V_{\infty}}{\partial \delta_{col}} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.144)$$

$$\mathbf{Z}_{\delta colht} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}_{ht}}{\partial w_{ht}} \cdot \frac{\partial w_{ht}}{\partial \delta_{col}} \right) \cdot \frac{1}{m} \quad (6.145)$$

$$Z_{\delta lon} = 0$$

$$Z_{\delta lat} = 0$$

$$Z_{\delta ped} = 0$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του L

$$L_u = L_{umr} + L_{uvf} + L_{utr}$$

$$L_{umr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{h_{mr} \cdot b_e}{I_{xx}} \quad (6.146)$$

$$L_{uvf} = \frac{m \cdot Y_{uvf} \cdot h_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.147)$$

$$L_{utr} = \frac{m \cdot Y_{utr} \cdot l_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.148)$$

$$L_v = L_{vmr} + L_{vvf} + L_{vtr}$$

$$L_{vmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{h_{mr} \cdot b_e}{I_{xx}} \quad (6.149)$$

$$L_{vvf} = \frac{m \cdot Y_{vvf} \cdot h_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.150)$$

$$L_{vtr} = \frac{m \cdot Y_{vtr} \cdot l_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.151)$$

$$L_w = L_{wmr} + L_{wvf} + L_{wtr}$$

$$L_{wmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{h_{mr} \cdot b_e}{I_{xx}} \quad (6.152)$$

$$L_{wvf} = \frac{m \cdot Y_{wvf} \cdot h_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.153)$$

$$L_{wtr} = \frac{m \cdot Y_{wtr} \cdot l_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.154)$$

$$L_p = L_{pvf} + L_{ptr}$$

$$L_{pvf} = \frac{m \cdot Y_{pvf} \cdot h_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.155)$$

$$L_{ptr} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{ptr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.156)$$

$$L_q = r_e \cdot \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} + L_{qvf} + L_{qtr}$$

$$L_{qvf} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{qvf} \cdot \mathbf{h}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.157)$$

$$L_{qtr} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{qtr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.158)$$

$$L_r = q_e \cdot \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} + L_{rvf} + L_{rtr}$$

$$L_{rvf} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{rvf} \cdot \mathbf{h}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.159)$$

$$L_{rtr} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{rtr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.160)$$

$$L_\varphi = 0$$

$$L_\theta = 0$$

$$L_\psi = 0$$

$$L_a = 0$$

$$L_b = L_{bmr} = \frac{K_\beta + T_{mre} \cdot h_{mr}}{I_{xx}}$$

$$L_{\delta col} = L_{\delta colmr} + L_{\delta colvf} + L_{\delta coltr}$$

$$L_{\delta colmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{\mathbf{h}_{mr} \cdot \mathbf{b}_e}{I_{xx}} \quad (6.161)$$

$$L_{\delta colvf} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{\delta colvf} \cdot \mathbf{h}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.162)$$

$$L_{\delta coltr} = \frac{\mathbf{m} \cdot Y_{\delta coltr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.163)$$

$$L_{\delta lon} = 0$$

$$L_{\delta lat} = 0$$

$$L_{\delta ped} = L_{\delta pedvf} + L_{\delta pedtr}$$

$$L_{\delta pedvf} = \frac{m \cdot Y_{\delta pedvf} \cdot h_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.164)$$

$$L_{\delta pedtr} = \frac{m \cdot Y_{\delta pedtr} \cdot l_{tr}}{I_{xx}} \quad (6.165)$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του M

$$M_u = M_{umr} + M_{uht} + M_{utr}$$

$$M_{umr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{h_{mr} \cdot a_e}{I_{yy}} \quad (6.166)$$

$$M_{utr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.167)$$

$$M_{uht} = \frac{m \cdot Z_{uht} \cdot l_{ht}}{I_{yy}} \quad (6.168)$$

$$M_v = M_{vmr} + M_{vht} + M_{vtr}$$

$$M_{vmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{h_{mr} \cdot a_e}{I_{yy}} \quad (6.169)$$

$$M_{vtr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.170)$$

$$M_{vht} = \frac{m \cdot Z_{vht} \cdot l_{ht}}{I_{yy}} \quad (6.171)$$

$$M_w = M_{wmr} + M_{wht} + M_{wtr}$$

$$M_{wmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{h_{mr} \cdot a_e}{I_{yy}} \quad (6.172)$$

$$M_{wtr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.173)$$

$$M_{wht} = \frac{m \cdot Z_{wht} \cdot l_{ht}}{I_{yy}} \quad (6.174)$$

$$M_p = r_e \cdot \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} + M_{ptr}$$

$$M_{ptr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial p} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.175)$$

$$M_q = M_{qht} + M_{qtr}$$

$$M_{qht} = \frac{m \cdot Z_{qht} \cdot l_{ht}}{I_{yy}} \quad (6.176)$$

$$M_{qtr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial q} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.177)$$

$$M_r = p_e \cdot \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} + M_{rtr}$$

$$M_{rtr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial r} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.178)$$

$$M_\phi = 0$$

$$M_\theta = 0$$

$$M_\psi = 0$$

$$M_a = M_{amr} = \frac{K_\beta + T_{mre} \cdot h_{mr}}{yy}$$

$$M_b = 0$$

$$M_{\delta col} = M_{\delta colmr} + M_{\delta colht} + M_{\delta coltr}$$

$$M_{\delta colmr} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{h_{mr} \cdot a_e}{I_{yy}} \quad (6.179)$$

$$M_{\delta coltr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{I_{yy}} \quad (6.180)$$

$$M_{\delta colht} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Z}_{\delta colht} \cdot \mathbf{l}_{ht}}{I_{yy}} \quad (6.181)$$

$$M_{\delta lon} = \mathbf{0}$$

$$M_{\delta lat} = \mathbf{0}$$

$$M_{\delta ped} = M_{\delta pedtr} = -\frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{ped}} \cdot \frac{1}{I_{yy}}$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του N

$$N_u = N_{uvf} + N_{utr} + \frac{\partial Q_{mr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{I_{zz}} + \mathbf{n}_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial u} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{uvf} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{uvf} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.182)$$

$$N_{utr} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{utr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.183)$$

$$N_v = N_{vvf} + N_{vtr} + \frac{\partial Q_{mr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{I_{zz}} + \mathbf{n}_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial v} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{vvf} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{vvf} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.184)$$

$$N_{vtr} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{vtr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.185)$$

$$N_w = N_{wvf} + N_{wtr} + \frac{\partial Q_{mr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{I_{zz}} + \mathbf{n}_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial w} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{wvf} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{wvf} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.186)$$

$$N_{wtr} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{Y}_{wtr} \cdot \mathbf{l}_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.187)$$

$$N_p = q_e \cdot \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} + N_{pvf} + N_{ptr} + n_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial p} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{pvf} = -\frac{m \cdot Y_{pvf} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.188)$$

$$N_{ptr} = -\frac{m \cdot Y_{ptr} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.189)$$

$$N_q = p_e \cdot \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} + N_{qvf} + N_{qtr} + n_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial q} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{qvf} = -\frac{m \cdot Y_{qvf} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.190)$$

$$N_{qtr} = -\frac{m \cdot Y_{qtr} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.191)$$

$$N_r = N_{rvf} + N_{rtr} + n_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial r} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{rvf} = -\frac{m \cdot Y_{rvf} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.192)$$

$$N_{rtr} = -\frac{m \cdot Y_{rtr} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.193)$$

$$N_\varphi = 0$$

$$N_\theta = 0$$

$$N_\psi = 0$$

$$N_a = 0$$

$$N_b = 0$$

$$N_{\delta col} = N_{\delta colvf} + N_{\delta coltr} + n_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{I_{zz}} + \frac{\partial Q_{mr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{\delta colvf} = -\frac{m \cdot Y_{\delta colvf} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.194)$$

$$N_{\delta coltr} = -\frac{m \cdot Y_{\delta coltr} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.195)$$

$$N_{\delta lon} = 0$$

$$N_{\delta lat} = 0$$

$$N_{\delta ped} = N_{\delta pedvf} + N_{\delta pedtr} + n_{tr} \cdot \frac{\partial Q_{tr}}{\partial \delta_{col}} \cdot \frac{1}{I_{zz}}$$

$$N_{\delta pedvf} = -\frac{m \cdot Y_{\delta pedvf} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.196)$$

$$N_{\delta pedtr} = -\frac{m \cdot Y_{\delta pedtr} \cdot l_{tr}}{I_{zz}} \quad (6.197)$$

$$N_{thr} = Q_{\delta thre}$$

$$Q_{\delta thre} = -\frac{\delta_{thre} \cdot P_{eng}}{I_{zz} \cdot \Omega_{mr}} \quad (6.198)$$

$$N_{rfb} = -N_{\delta ped}$$

Οι παράμετροι K_r και K_{rfb} είναι σταθερές τιμές και σχετίζονται με το gyro που είναι τοποθετημένο στο ελικόπτερο.

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του A

$$A_u = \frac{1}{\tau_e} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mu} \cdot u_e \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u_e^2 + v_e^2}} \quad (6.199)$$

$$A_v = \frac{1}{\tau_e} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mu} \cdot v_e \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u_e^2 + v_e^2}} \quad (6.200)$$

$$A_w = \frac{1}{\tau_e} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mu_z} \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr}} \quad (6.201)$$

$$A_p = 0$$

$$A_q = -1$$

$$A_r = 0$$

$$A_\varphi = 0$$

$$A_\theta = 0$$

$$A_\psi = 0$$

$$A_a = -\frac{1}{\tau_e}$$

$$A_b = 0$$

$$A_{\delta col} = 0$$

$$A_{\delta lon} = -\frac{A_{d lon}}{\tau_e}$$

$$A_{\delta lat} = 0$$

$$A_{\delta ped} = 0$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου του B

$$B_u = \frac{1}{\tau_e} \cdot \frac{\partial b}{\partial \mu} \cdot u_e \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u_e^2 + v_e^2}} \quad (6.199)$$

$$B_v = \frac{1}{\tau_e} \cdot \frac{\partial b}{\partial \mu} \cdot v_e \cdot \frac{1}{\Omega_{mr} \cdot R_{mr} \cdot \sqrt{u_e^2 + v_e^2}} \quad (6.200)$$

$$B_w = 0$$

$$B_p = -1$$

$$B_q = 0$$

$$B_r = 0$$

$$B_{\varphi} = 0$$

$$B_{\theta} = 0$$

$$B_{\psi} = 0$$

$$B_a = 0$$

$$B_b = -\frac{1}{\tau_e}$$

$$B_{\delta col} = 0$$

$$B_{\delta lon} = 0$$

$$B_{\delta lat} = -\frac{B_{dlat}}{\tau_e}$$

$$B_{\delta ped} = 0$$

Παράγωγοι Ευστάθειας και Ελέγχου των Φ , Θ , Ψ

$$\Phi_u = 0$$

$$\Phi_v = 0$$

$$\Phi_w = 0$$

$$\Phi_p = 1$$

$$\Phi_q = \sin(\varphi_e) \cdot \tan(\theta_e)$$

$$\Phi_r = \cos(\varphi_e) \cdot \tan(\theta_e)$$

$$\Phi_{\varphi} = (q_e \cdot \cos(\varphi_e) - r_e \cdot \sin(\varphi_e)) \cdot \tan(\theta_e)$$

$$\Phi_{\theta} = (\sec(\theta_e))^2 \cdot (r_e \cdot \cos(\varphi_e) - q_e \cdot \sin(\varphi_e))$$

$$\Phi_{\psi} = 0$$

$$\Phi_a = 0$$

$$\Phi_b = 0$$

$$\theta_u = 0$$

$$\theta_v = 0$$

$$\theta_w = 0$$

$$\theta_p = 0$$

$$\theta_q = \cos(\varphi_e)$$

$$\theta_r = -\sin(\varphi_e)$$

$$\theta_\varphi = -(q_e \cdot \sin(\varphi_e) + r_e \cdot \cos(\varphi_e))$$

$$\theta_\theta = 0$$

$$\theta_\psi = 0$$

$$\theta_a = 0$$

$$\theta_b = 0$$

$$\psi_u = 0$$

$$\psi_v = 0$$

$$\psi_w = 0$$

$$\psi_p = 0$$

$$\psi_q = \sin(\varphi_e) \cdot \sec(\theta_e)$$

$$\psi_r = \cos(\varphi_e) \cdot \sec(\theta_e)$$

$$\psi_\varphi = (q_e \cdot \cos(\varphi_e) - r_e \cdot \sin(\varphi_e)) \cdot \sec(\theta_e)$$

$$\psi_\theta = (q_e \cdot \sin(\varphi_e) + r_e \cdot \cos(\varphi_e)) \cdot \tan(\theta_e) \cdot \sec(\theta_e)$$

$$\psi_\psi = 0$$

$$\psi_a = 0$$

$$\psi_b = 0$$

6.2 Κατάσταση Ισορροπίας-Γραμμικοποίησης Hover

Προηγουμένως παρουσιάστηκαν οι αναλυτικές σχέσεις με τις οποίες γίνεται η εύρεση των παραγώγων ευστάθειας και ελέγχου για το γραμμικοποιημένο δυναμικό μοντέλο του ελικοπτέρου και εδώ παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων για κατάσταση του *hover*.

Παράγωγοι Ευστάθειας	Τιμή
X_u	-0,0308
X_θ	-9,8
X_α	-9,8034
Y_v	-0,1388
Y_p	0,0022
Y_r	-0,0226
Y_ϕ	9,8
Y_b	9,8034
Z_w	-0,8726
L_v	-0,0115
L_p	0,0924
L_r	-1,041
L_b	404,9504
M_p	-0,000704
M_r	0,008
M_α	214,3855
N_v	0,0841
N_w	0,8085
N_p	-0,0557
N_r	0,5566
N_{rfb}	94,58
Φ_p	1
Θ_q	1
Ψ_r	1
A_r	-1
A_α	-8,35
B_p	-1
B_b	-8,35
K_r	-0,8
K_{rfb}	-3,3396

Παράγωγοι Ελέγχου	Τιμή
$Y_{\delta ped}$	3,7548
$Z_{\delta col}$	-134,6296
$L_{\delta ped}$	13,6842
$M_{\delta ped}$	-0,9694
$N_{\delta col}$	154,211
$N_{\delta ped}$	-94,58
$N_{\delta throttle}$	-4,2772
$A_{\delta lon}$	-35,07
$B_{\delta lat}$	35,07

Οι παράγωγοι που δεν αναφέρονται στους πίνακες έχουν μηδενική τιμή.