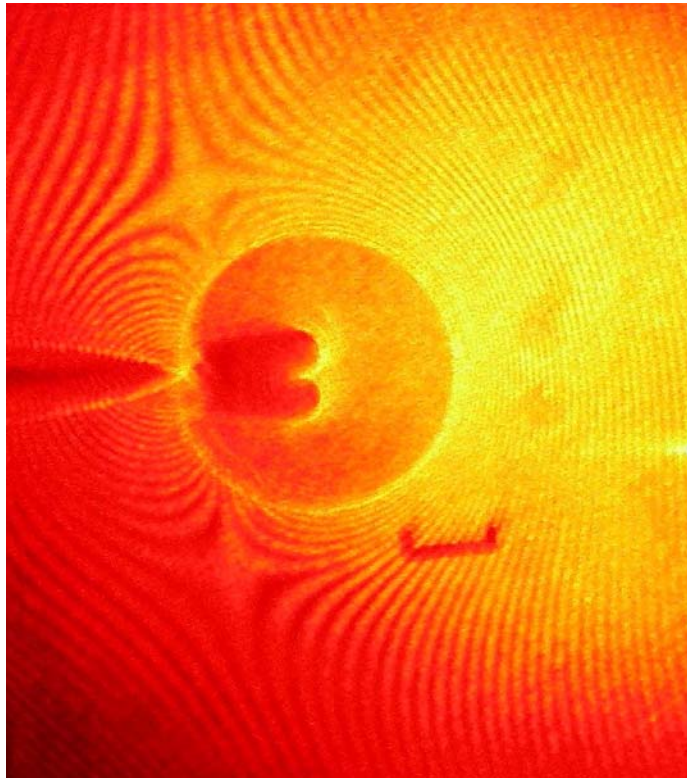




**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΝΑΚΗΣ

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΚΡΟ
ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κύριο Γεώργιο Παπαδόπουλο για την ανάθεση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Καθ'όλη τη διάρκεια της, είχα την αμέριστη βοήθεια και υποστήριξη του, καθώς ήταν πάντα πρόθυμος να συζητήσει μαζί μου τυχόν δυσκολίες που προέκυπταν και παράλληλα η συνέπειά του ήταν υποδειγματική. Επίσης την Επίκουρο καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. κυρία Βασιλική Βαδαλούκα, για την ουσιαστική βοήθειά της στις μετρήσεις των πειραμάτων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την οικογένειά μου για τη βοήθεια που μου παρείχε, καθώς και την συμπαράσταση που είχα σε όλο το διάστημα των φοιτητικών μου χρόνων, ώστε να καταφέρω να φτάσω μέχρι εδώ. Χωρίς αυτήν, η προσπάθειά μου ίσως να μην είχε ολοκληρωθεί.

*Αφιερώνεται στον αγώνα
του ανθρώπου για την επίτευξη
των στόχων του.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γνώση της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης μιας κατασκευής ή μηχανής είναι το κύριο και βασικό μέλημα κάθε μηχανικού. Η μαθηματική όμως ή θεωρητική επίλυση του προβλήματος δεν είναι πάντοτε εφικτή ή ακριβής. Γι' αυτό καταφεύγουμε στον πειραματικό προσδιορισμό της κατανομής των τάσεων εμμέσως με τη βοήθεια άλλων μεγεθών (δυνάμεων, παραμορφώσεων κλπ.) που είναι δυνατόν να μετρηθούν αμέσως με διάφορες μεθόδους (φωτοελαστικότητα, μέθοδος των ισοπαχών, μέθοδος των καυστικών) ή και απ' ευθείας από τις μηχανές ελέγχου. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν να γίνουν κάτω από ελεγχόμενες πειραματικές συνθήκες στο εργαστήριο ή ακόμη και σε τμήματα μηχανών που βρίσκονται σε λειτουργία.

Η πειραματική μεθοδολογία είναι γενικά απλούστερη από τη μαθηματική ανάλυση, ανεξάρτητη από παραδοχές, που πολλές φορές δίνουν λύσεις εκτός της πραγματικότητας και μπορεί ακόμη να δώσει ακριβείς πληροφορίες για τις τάσεις κάτω από ειδικές συνθήκες εργασίας όπου πάρα πολλοί παράγοντες υπεισέρχονται στην αντοχή και στις ιδιότητες των υλικών γενικώς. Τέτοιοι παράγοντες είναι π.χ. οι μέθοδοι παραγωγής των υλικών, οι τρόποι κατασκευής των τμημάτων των μηχανών και οι συνθήκες λειτουργίας τους κλπ.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών, στην οποία στηρίζεται αυτή η εργασία, βασίζεται στην κλασσική καυστική, η οποία είναι μια ιδιόμορφη καμπύλη, που σχηματίζεται από τη συγκέντρωση των αποκλινόντων ανακλωμένων ακτίνων που προέρχονται από την πρόσπτωση φωτεινής δέσμης πάνω σε ένα κοίλο ή κυρτό κάτοπτρο. Έτσι η μηχανική ιδιομορφία γύρω από το άκρο μιας ρωγμής ή οπής, μετατρέπεται βάσει των νόμων της οπτικής, σε οπτική ιδιομορφία δηλαδή σε μια φωτεινή καμπύλη στο χώρο, την καυστική. Το μέγεθος και η μορφή της καυστικής, η οποία προβάλλεται πάνω σε ένα πέτασμα αναφοράς, εξαρτάται από τη συγκέντρωση των τάσεων και τις οπτικές ιδιότητες του υλικού. Κατόπιν απλής μαθηματικής αναλύσεως, υπολογίζεται ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων γύρω από το άκρο της ρωγμής, της οπής, κτλ. Δια των καυστικών μελετάται μόνο η εγγύς περιοχή του άκρου της ρωγμής, οπής, κλπ, η οποία δεν μπορεί να μελετηθεί με άλλη πειραματική μέθοδο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<i>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</i>σελ.3	σελ.3
<i>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ</i>σελ.5	σελ.5
1.1 Επίλυση του προβλήματος των ρωγμών με τις Τασικές συναρτήσεις Westergaard.....σελ.5	σελ.5
1.2 Τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής.....σελ.8	σελ.8
<i>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ</i>σελ.12	σελ.12
2.1 ΓΕΝΙΚΑ.....σελ.12	σελ.12
2.2 Μεταβολή της έντασης Φωτεινής ακτίνας διερχόμενης δια διαφανούς μέσου.....σελ.12	σελ.12
2.3 Επίδραση της φόρτισης επί του οπτικού δρόμου των ανακλωμένων και διερχομένων ακτίνων.....σελ.13	σελ.13
2.4 Βασική θεωρία της Οπτικής μεθόδου των καυστικών.....σελ.16	σελ.16
2.5 Εφαρμογή της οπτικής μεθόδου των καυστικών στο επίπεδο εντατικό πρόβλημα για οπτικά ισότροπα υλικά.....σελ.20	σελ.20
2.6 Ανάλυση του ελαστικού προβλήματος της εγκάρσιας ρωγμής.....σελ.26	σελ.26
2.7 Σχηματισμός καυστικών καμπυλών.....σελ.32	σελ.32
<i>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</i>σελ.36	σελ.36
3.1 Πειραματική διάταξη.....σελ.36	σελ.36
3.2 Η Οπτική διάταξη σε επιμέρους φωτογραφίες.....σελ.39	σελ.39
3.3 Πειραματικές καυστικές και μέτρηση του εφελκυστικού συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_Iσελ.42	σελ.42
<i>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΟΠΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ c_f, c_r ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ K_I</i>σελ.47	σελ.47
4.1 Δοκίμιο 1.....σελ.48	σελ.48
4.2 Δοκίμιο 2.....σελ.58	σελ.58
4.3 Δοκίμιο 3.....σελ.67	σελ.67
Συμπεράσματα.....σελ.82	σελ.82
Βιβλιογραφία.....σελ.85	σελ.85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ

1.1 Επίλυση του προβλήματος των ρωγμών με τις Τασικές συναρτήσεις Westergaard

Ο Westergaard έδειξε ότι τα διδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν εισάγοντας την μιγαδική τασική συνάρτηση $Z(z)$ όπου $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ και εφ' όσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί με τη σχέση:

$$F = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (1)$$

$$\text{όπου : } \frac{d\bar{Z}}{dz} = \bar{Z}, \frac{dZ}{dz} = Z, \frac{dZ}{dz} = Z'$$

Από τις σχέσεις Cauchy-Riemann συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = \operatorname{Re} Z \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = -\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \operatorname{Im} Z \quad (3)$$

$$\nabla^2 (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \nabla^2 (\operatorname{Im} \bar{Z}) = 0 \quad (4)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} Z \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = y \operatorname{Re} Z' \quad (9)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$

επαληθεύονται, εφ'όσον οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} προκύπτουν από τη συνάρτηση F , από τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7),(8),(9) στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (12)$$

Και : $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \operatorname{Re} Z' - y \operatorname{Im} Z''$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z''$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -y \operatorname{Re} Z''$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \operatorname{Re} Z' + y \operatorname{Im} Z''$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} Z$$

Επομένως η μέθοδος Westergaard ανάγεται στην εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης Z , με εξαίρεση το υπό της ρωγμής οριζόμενο διάστημα, σε τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι:

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \text{ η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση}$$

Westergaard για τη ρωγμή:

$-a < x < a, y = 0$, εντός απείρου σώματος υπό διαξονική φόρτιση σ στο άπειρο, με μήκος ρωγμής $2a$. Εδώ η αρχή των αξόνων είναι στο κέντρο της ρωγμής και η τασική συνάρτηση Westergaard δίνεται από την παραπάνω σχέση.

Άλλες μορφές της τασικής συνάρτησης Airy είναι:

$F = -y \operatorname{Re} \bar{Z}$, που περιγράφει το δεύτερο τύπο (II) παραμόρφωσης και ομοίως αποδεικνύεται ότι οι τάσεις παρέχονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z'$$

$$\sigma_{yy} = -y \operatorname{Re} Z'$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'$$

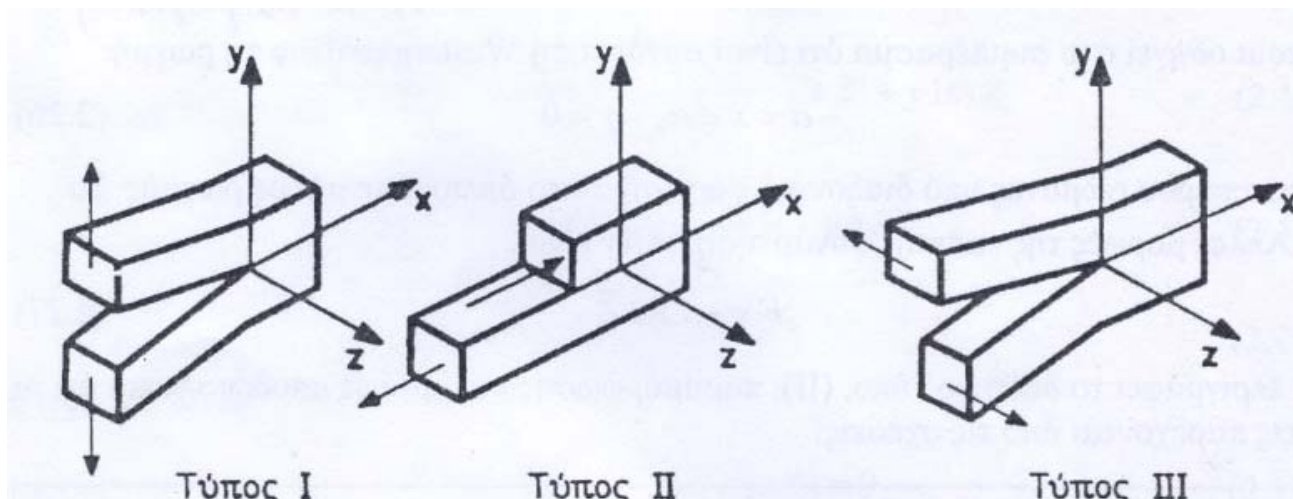
Για τον τρίτο τύπο (III) παραμόρφωσης, η τασική συνάρτηση Airy είναι της μορφής: $F = -\operatorname{Re} Z$, από την οποία προκύπτουν οι τάσεις:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{Im} Z'$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{Re} Z'$$

1.2 Τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής

Όλα τα συστήματα τάσης πλησίον του άκρου της ρωγμής, είναι πιθανό να προέρχονται από τρεις τύπους παραμόρφωσης. Ο G.R. Irwin παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλέων της ρωγμής, οι οποίοι φαίνονται παρακάτω:



➤ Εφελκυστικός τύπος-I (opening mode)

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο-I δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad \text{όπου } z = x + iy$$

Αναφέροντας τη συνάρτηση αυτή σε σύστημα αξόνων με αρχή το άκρο της ρωγμής αντί του συστήματος τοποθετούμενου στο μέσο του μήκους της ρωγμής και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\zeta = z - a$, προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta(\zeta + 2a)}}, \quad (13)$$

Η ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}}$ αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του ζ κατά Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta+2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2\alpha} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\zeta}{2\alpha} \right)^2 - \dots \right]$$

οπότε η σχέση (13) γίνεται:

$$Z_1 = \frac{\sigma(\zeta+\alpha)}{\sqrt{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2\alpha} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\zeta}{2\alpha} \right)^2 - \dots \right]$$

Για προσεγγιστική λύση παραλείπονται οι δυνάμεις του (ζ/α) , εφ'όσον το ζ είναι πολύ μικρό σε σχέση προς το α , οπότε προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_1 = \frac{\sigma\sqrt{\pi\alpha}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \cdot \text{Θέτοντας } K_I = \sigma\sqrt{\pi\alpha} \text{ στη σχέση αυτή προκύπτει:}$$

$$Z_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \cdot \text{Η σταθερά } K_I \text{ περιγράφει το μέγεθος του τασικού πεδίου στο}$$

άκρο ρωγμής και είναι ένα κριτήριο για την τασική ιδιομορφία στο άκρο ρωγμής. Η σταθερά αυτή ονομάζεται εφελκυστικός συντελεστής εντάσεων των τάσεων (stress intensity factor). Ο K_I μπορεί να προκύψει και από τη σχέση: $K_I = \lim_{z \rightarrow \alpha} \sqrt{2\pi} \sqrt{z-\alpha} \sigma_{yy}$

Θέτοντας $\zeta = re^{i\theta}$ και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (10),(11),(12) προκύπτουν οι τάσεις, όσον αφορά τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (16)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Η προσεγγιστική αυτή λύση ισχύει για $0 < r < \alpha$

Τα γραμμικά και ελαστικά υλικά, είναι τα υλικά στα οποία οι αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις είναι ελαστικές και υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων. Η γραμμικότητα μεταξύ των τάσεων και των αναπτυσσόμενων υπό αυτών παραμορφώσεων εκφράζει το γενικευμένο νόμο του Hooke. Για την περίπτωση ισότροπου και

ομογενούς πολυκρυσταλλικού υλικού, οι σχέσεις τάσεων και παραμορφώσεων εκφράζονται με τις εξής σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (17)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (18)$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις σ_{xx} και σ_{yy} από τις σχέσεις (14),(15) στις σχέσεις (17),(18) προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατόπιν ολοκλήρωσης. Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση ισχύει: $\varepsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

$$u = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύει:

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I προκύπτει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow \alpha} \sqrt{2\pi} \sqrt{z - \alpha} \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta} \lim \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{r} e^{i\theta} \sigma_{yy} \Big|_{\theta=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy}$$

➤ Συνεπίπεδος Διατμητικός τύπος-II

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μια σχετικά προς την άλλη, προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ιδίου επιπέδου. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο-II δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad , \text{ με } K_{II} = \tau\sqrt{\pi\alpha} \quad \text{όπου η σταθερά } K_{II} \text{ είναι η χαρακτηριστική του}$$

τύπου-II και ονομάζεται συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων.

➤ Εγκάρσιος Διατμητικός τύπος-III

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν προς αντίθετες εγκάρσιες κατευθύνσεις υπό την επίδραση ίσων και αντιθέτων δυνάμεων, καθέτων προς το επίπεδο του σώματος. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο-III δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad , \text{ όπου η σταθερά } K_{III} \text{ είναι η χαρακτηριστική του τύπου-III και}$$

ονομάζεται μη συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων.

Ο εφελκυστικός τύπος-I είναι ο πιο σημαντικός για πρακτικές εφαρμογές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η μέθοδος των καυστικών αποτελεί μια απλή και αποτελεσματική μέθοδο για τη μέτρηση του συντελεστή εντάσεως των τάσεων σε προβλήματα ρωγμών. Γενικά, η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής, μετατρέπεται με βάση τις αρχές της γεωμετρικής οπτικής, σε οπτική ιδιομορφία. Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από τη συγκέντρωση επί ιδιομορφής στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται καυστική, των ακτίνων φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής. Οι διαστάσεις της καυστικής σχετίζονται άμεσα με την ένταση του εντατικού πεδίου γύρω από το άκρο της ρωγμής, όπου ελέγχεται από τον συντελεστή εντάσεως των τάσεων. Η μέθοδος αρχικά εισήχθη από τον Manogg, αλλά αναπτύχθηκε και περιγράφηκε από τον Π. Θεοχάρη, σαν ένα αποτελεσματικό εργαλείο στην ανάλυση των τάσεων.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά, διαφανή (μέθοδος διερχόμενων καυστικών) και μη διαφανή (μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών) και αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο, μοναδική για τη μελέτη των ρωγμών.

Οι βασικές αρχές της οπτικής μεθόδου των καυστικών καθώς και ορισμένα γενικά στοιχεία από τη θεωρία της συμβολής του φωτός, θα αναπτυχθούν κατωτέρω.

2.2 Μεταβολή της έντασης Φωτεινής ακτίνας διερχόμενης δια διαφανούς μέσου

Θεωρούμε επίπεδη πλάκα, πάχους d , με παράλληλες παράπλευρες επιφάνειες από διαφανές υλικό και ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτουσα καθέτως επί της πλάκας. Η ακτίνα κατά την πρόσπτωση της επί της πλάκας, αφ' ενός μεν ανακλάται, αφ' ετέρου δε διαθλάται και ακολούθως διέρχεται δια της πλάκας. Η διαθλώμενη όμως ακτίνα ανακλάται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας και ακολούθως δια διαθλάσεως εξέρχεται από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Οι διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις της ακτίνας εξακολουθούν επ' άπειρον, έτσι ώστε μια απειρία ακτίνων εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια της πλάκας.

Η ένταση I της φωτεινής ακτίνας μειώνεται συνεχώς κατά τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις. Εάν με $r_{m,l}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας και με $t_{m,l}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, όπου ο δείκτης m παριστάνει τον αριθμό των ανακλάσεων και ο δείκτης l τον αριθμό των διαθλάσεων, τότε οι εντάσεις των ακτίνων αυτών δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_{r_{m,l}, t_{m,l}} = \beta^m (1 - \beta)^l I \quad , \text{όπου ο λόγος } \beta \text{ μείωσης της έντασης δίνεται από τη}$$

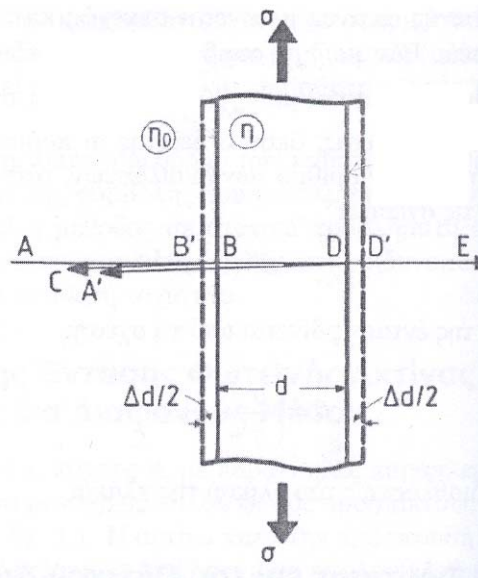
σχέση: $\beta = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$, όπου n είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της πλάκας.

Για το δείκτη διάθλασης ισχύει:

$$n = c/v = \text{ταχύτητα του φωτός στο κενό} / \text{ταχύτητα του φωτός στο υλικό}.$$

2.3 Επίδραση της φόρτισης επί του οπτικού δρόμου των ανακλωμένων και διερχομένων ακτίνων

Θεωρούμε φωτεινή ακτίνα ABDE (σχήμα 1), πολωμένη κατά τη διεύθυνση είτε της κυρίας τάσης σ_1 , είτε της κυρίας τάσης σ_2 και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας ευρισκόμενης υπό επίπεδη εντατική κατάσταση (plane stress).



Σχήμα 1: Κάθετη πρόσπτωση ακτίνας επί της πλάκας

Για την περίπτωση της ανακλάσεως της φωτεινής ακτίνας από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ δυο σημείων αναφοράς A και A' της φωτεινής ακτίνας ABDA' ($AB = A'B$), όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη, είναι:

$s_A = 2(AB)n_0 + 2dn$, όπου d είναι το πάχος της πλάκας, n_0 είναι ο δείκτης διαθλάσεως του περιβάλλοντος την πλάκα μέσου και n είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της αφόρτιστης πλάκας. Όταν η πλάκα φορτιστεί, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των αυτών σημείων A και A' , είναι:

$$s_{L_{1,2}} = 2\left((AB) - \frac{\Delta d}{2}\right)n_0 + 2(d + \Delta d)n_{1,2} \quad \text{όπου } \Delta d \text{ είναι η μεταβολή του πάχους}$$

της πλάκας που οφείλεται στη φόρτιση και $n_{1,2}$ είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού, της φορτισμένης πλάκας, κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$ αντιστοίχως. Θέτοντας:

$n_{1,2} = n + \Delta n_{1,2}$, όπου $\Delta n_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως, η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας ABDA' , που οφείλεται στη φόρτιση, δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta s_{r_{1,2}} = s_{L_{1,2}} - s_A = 2\left[(n_{1,2} - n)d + \left(n - \frac{n_0}{2}\right)\Delta d\right]$$

Ομοίως, για την οπτική ακτίνα ABDE τη διερχόμενη δια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στη φόρτιση είναι:

$$\Delta s_r = (n_{1,2} - n)d + (n - n_0)\Delta d$$

Για τη φωτεινή ακτίνα ABC την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου είναι:

$$\Delta s_f = -n_0\Delta d$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του σώματος στα οποία η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι σταθερή καλείται κροσσός και συμβολίζεται η τάξη του με N. Όσο αυξάνεται η εντατική κατάσταση του σώματος, αυξάνεται η διαφορά των κυρίων τάσεων με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται κροσσοί τάξεως N.

Ο αριθμός των κροσσών $N_{1,2}$ του λαμβανομένου συμβολογράμματος από τη συμβολή των ακτινών DA' και BC ανακλωμένων από την πίσω και εμπρός επιφάνεια της πλάκας αντίστοιχα, σχετίζεται με τη διαφορά των οπτικών δρόμων των $\delta_{1,2}$ που δίνεται από τη σχέση:

$\delta_{1,2} = (\Delta s_{r_{1,2}} - \Delta s_f) = 2[(n_{1,2} - n)d + n\Delta d]$, δια μέσου της σχέσης: $N_{1,2} = \delta_{1,2} / \lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος του χρησιμοποιημένου μονοχρωματικού φωτός.

Οι μεταβολές του δείκτη διαθλάσεως n κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 στο επίπεδο τασικό πρόβλημα, δίνονται από τον φωτοτασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta n_{1,2} = n_{1,2} - n = b_1 \varepsilon_{1,2} + b_2 (\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις.
Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στις δύο προηγούμενες, λαμβάνοντας υπόψη και το νόμο του Hooke, προκύπτει για τον αριθμό των κροσσών:

$N_{1,2} = 2d(\alpha^* \sigma_{1,2} + \beta^* \sigma_{2,1})$, όπου οι σταθερές α^* και β^* δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha^* = \frac{1}{E\lambda}(b_1 - 2\nu b_2 - m)$$

$$\beta^* = \frac{1}{E\lambda}(b_2 - \nu(b_1 + b_2) - m)$$

Ομοίως, η μεταβολή των οπτικών δρόμων των φωτεινών ακτινών ABDA' και ABDE που οφείλονται στη φόρτιση δίνονται από τις συνθήκες Favre:

$$\Delta s_{r,2} = 2c_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)] d$$

$$\Delta s_{t,2} = c_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2)] d$$

όπου $\xi_{r,t}$ είναι ο συντελεστής της οπτικής ανισοτροπίας του υλικού και $c_{r,t}$ είναι τα σεοπτικές σταθερές οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2} \quad , \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}$$

Οι τα σεοπτικές σταθερές c_r, c_t υπολογίζονται πειραματικά με τη συμβολομετρική μέθοδο.

Για οπτικώς ισότροπα υλικά θα έχουμε $\xi_{r,t} = 0$, οπότε οι παραπάνω σχέσεις αλλάζουν, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

2.4 Βασική θεωρία της Οπτικής μεθόδου των καυστικών

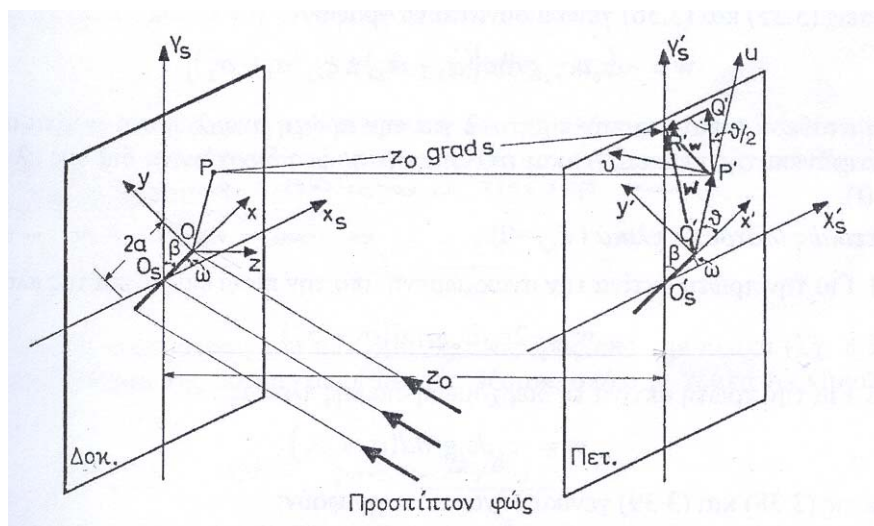
Οι φωτινές ακτίνες οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας σχηματίζουν κυματικά μέτωπα: $S(x,y,z)=\sigma\alpha\theta$. Εάν $s(x,y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ δυο επιπέδων παραλλήλων προς το μέσο επίπεδο της φορτιζόμενης πλάκας και κειμένων επι των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, τότε ισχύει η σχέση:

$$S(x,y,z)=z-s(x,y)=\sigma\alpha\theta. \quad (1)$$

και εξ'αυτής προκύπτει:

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j \quad (2)$$

Όπου i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής και ο άξονας Oz είναι κάθετος επί της πλάκας και $s(x,y)$ είναι ο οπτικός δρόμος δια της πλάκας στο τυχόν σημείο P αυτής (Σχ.2).



Σχήμα 2: Γεωμετρία της ρηγματωμένης πλάκας και σχετική θέση της πλάκας και του πετάσματος αναφοράς

Η απόκλιση των ανακλωμένων φωτεινών ακτίνων σε απόσταση z_0 από του μέσου επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα w επι του επιπέδου $z=z_0$ και δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής, από τη σχέση:

$w = z_0 \text{grad}S(x, y, z)$ και σύμφωνα με τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει:

$$w = -z_0 \text{grad}s(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (3)$$

Δεδομένου ότι τα κυματικά μέτωπα των φωτεινών ακτίνων που προσπίπτουν επί του μέσου επιπέδου της πλάκας είναι παράλληλα προς το επίπεδο αυτό, ισχύει η σχέση:

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (4)$$

όπου s_0 παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο από την πλάκα και η οποία απαλείφεται κατά τον υπολογισμό των κλίσεων και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου δια της πλάκας. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στην (3) προκύπτει:

$$w = -z_0 \text{grad}\Delta s_{r,t}(x, y) \quad (5)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z=z_0$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτινές ακτίνες.

Για την περίπτωση των οπτικώς ισότροπων υλικών ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (6)$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (7)$$

$$\alpha_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1-2\nu)b - \nu \left(n - \frac{n_0}{2} \right) \right]$$

$$\alpha_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1-2\nu)b - \nu(n - n_0)]$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$c_r = c_t - \frac{\nu \cdot n_0}{2E}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6),(7) στη σχέση (5) προκύπτει το διάνυσμα απόκλισης, όπου για την περίπτωση των οπτικώς ισότροπων υλικών ισχύει:

α) Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας:

$$w = -2z_0 dc_r grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (8)$$

β) Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη δια της πλάκας:

$$w = -z_0 dc_t grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις γενικά μπορεί να γραφούν:

$$w = -\varepsilon z_0 dc_{r,t} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (10)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση ϕ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση: $\phi = 2\alpha$

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση :

$$\alpha = grad \frac{\Delta d}{2} = -grad \left[\frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (11)$$

οπότε η γωνία ϕ είναι:

$$\phi = -\frac{vd}{E} grad(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (12)$$

Όπου $c_f = \frac{v}{E}$, είναι η ταυροοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση:

$$w = -z_0 dc_f grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (13)$$

Οι σχέσεις (10) και (13) γενικά μπορεί να γραφούν:

$$w = -\varepsilon z_0 dc_{r,t,f} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (14)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα επί της πλάκας φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα,(+), ή συγκλίνουσα,(-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_0 \pm z_i}{z_i}, \quad \text{όπου } z_0 \text{ είναι η απόσταση του πετάσματος αναφοράς από}$$

την πλάκα(στην περίπτωσή μας,από το δοκίμιο)και z_i είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα(δοκίμιο).

Θέτοντας:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon z_0 dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (15)$$

η σχέση (14) για τα οπτικώς ισότροπα υλικά,γενικά μπορεί να γραφεί:

$$w = C_{r,t,f}^* grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (16)$$

2.5 Εφαρμογή της οπτικής μεθόδου των καυστικών στο επίπεδο εντατικό πρόβλημα για Οπτικώς ισότροπα υλικά

Η επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος απαιτεί τον προσδιορισμό των τάσεων σ_{xx}, σ_{yy} , και τ_{xy} οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

και την εξίσωση συμβιβαστού συναρτήσει των τάσεων:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (19)$$

Οι σχέσεις (17), (18) επαληθεύονται, εφόσον οι τάσεις σ_{xx}, σ_{yy} και τ_{xy} προκύπτουν από συνάρτηση F , δια των σχέσεων:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (20)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = \nabla^2 F \quad (21)$$

Και από τη σχέση (19) δι' αντικατάστασής της (21) προκύπτει:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0 \quad (22)$$

$$\text{ή:} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (23)$$

Την εξίσωση (23) (εξίσωση **Laplace**) πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $F=F(x,y)$ η οποία είναι διαρμονική συνάρτηση και ονομάζεται τασική συνάρτηση ή συνάρτηση Airy.

Δια της εισαγωγής πλέον της τασικής συνάρτησης $F=F(x,y)$ η επίλυση των εξισώσεων (17),(18),(19) μετατοπίζεται στην επίλυση της εξίσωσης (23), της οποίας οι σταθερές προσδιορίζονται κατά τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Κάθε συνάρτηση $F(x,y)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (23) μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια δυο αναλυτικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$ από τη σχέση:

$$F = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad (24)$$

ή

$$2F = \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (25)$$

Από τις σχέσεις (20) και (25) προκύπτει:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \phi(z) \quad (26)$$

Κατά την επίλυση λοιπόν του επίπεδου εντατικού προβλήματος με τη μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων, το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \phi(z),$$

όπου $\phi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Έστω ότι η $\phi(z)$ είναι της μορφής:

$$\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (27)$$

Όπου $u(x,y)$, $v(x,y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x,y που ικανοποιούν τις σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (28)$$

Από τις σχέσεις (28) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις u και v ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση:

$$w = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C_{r,t,f}^* \text{grad Re } \phi(z) = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (30)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται:

$$w = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (31)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει τη σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχόντος σημείου P , στη γειτονία του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του πάνω στο πέτασμα αναφοράς τοποθετούμενου σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Εάν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή O' του συστήματος συντεταγμένων $O'x'y'z'$ επί του πετάσματος αναφοράς (σχήμα 2), τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως $W = z + w$.

Στο μιγαδικό επίπεδο γράφεται:

$$W = z + w = x + iy + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (32)$$

Το διάνυσμα W στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέτασμα αναφοράς, γράφεται:

$$W = x' + iy' \quad , \text{οπότε η σχέση (32) γράφεται:}$$

$$x' + iy' = \left(x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (33)$$

και από αυτήν προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$x' = x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$y' = y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y}$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ακτίνων. Η απόκλιση των ακτίνων στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής εξαρτάται από τη μεταβολή του πάχους και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη η οποία φωτίζεται έντονα. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται καυστική. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει ιδιόμορφη (singular) καμπύλη για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με το μηδενισμό της Ιακωβιανής (Jacobian) διακρίνουσας:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0$$

η οποία γράφεται:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{όπου: } \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω ορίζουσα προκύπτει:

$$\begin{vmatrix} 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

Από την ανάπτυξη της παραπάνω ορίζουσας προκύπτει:

$$1 + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (35)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη των σχέσεων (29) στη σχέση (35) προκύπτει:

$$1 + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ δυο φορές ως προς x , προκύπτει:

$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη των σχέσεων (28) προκύπτει:

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (36)$$

Το μέτρο της παραπάνω σχέσης είναι: $|\phi''(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2$

Και λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη των σχέσεων (29) προκύπτει:

$$|\phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (37)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (37) στη σχέση (36) προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f}^* \phi''(z)|^2 = 1 \Rightarrow |4C_{r,t,f}^* \phi''(z)| = 1 \quad (38)$$

Η σχέση (38) είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής.

Αφού ισχύει: $\overline{\phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$, η σχέση (32) γίνεται:

$$W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\phi'(z)} \quad (39)$$

Η σχέση (39) είναι η εξίσωση της καυστικής.

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard, η οποία συνδέεται με την αναλυτική συνάρτηση $\phi(z)$ με τη σχέση:

$$\phi(z) = \frac{Z(z)}{2} \Rightarrow \phi'(z) = \frac{Z'(z) \cdot 2}{4} \Rightarrow \phi'(z) = \frac{Z'(z)}{2} \quad \text{και} \quad \phi''(z) = \frac{Z''(z) \cdot 2 \cdot 4}{16} \Rightarrow \phi''(z) = \frac{Z''(z)}{2}$$

η εξίσωση (38) της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται:

$$|2C_{r,t,f}^* Z''(z)| = 1 \quad (40)$$

και η εξίσωση (39), λαμβανομένου υπόψη και του συντελεστή μεγέθυνσης λ_m γίνεται:

$$W = \lambda_m [z + 2C_{r,t,f}^* \overline{Z'(z)}] \quad (41)$$

2.6 Ανάλυση του ελαστικού προβλήματος της εγκάρσιας ρωγμής

Η συνάρτηση Westergaard για ρωγή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \quad \text{με} \quad K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{όπου } \sigma \text{ είναι η ομοιόμορφη τάση κάθετη}$$

προς τον άξονα της ρωγμής και ζ είναι η μιγαδική μεταβλητή η οποία δίνεται από τη σχέση $\zeta = re^{i\theta}$. Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad \text{προκύπτει:}$$

$$Z_I'(\zeta) = \frac{dZ_I}{d\zeta} = \frac{-K_I \cdot (\sqrt{2\pi\zeta})'}{(\sqrt{2\pi\zeta})^2} = \frac{-K_I \cdot 2\pi}{2\sqrt{2\pi\zeta} \cdot 2\pi\zeta} = \frac{-K_I}{2\sqrt{2\pi} \cdot \zeta^{1/2} \cdot \zeta} = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \zeta^{-3/2}$$

$$\text{Και} \quad \overline{Z_I'(\zeta)} = \overline{Z_I'(\bar{\zeta})} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \bar{\zeta}^{-3/2}$$

$$\text{Και} \quad Z_I''(\zeta) = \frac{d^2 Z_I}{d\zeta^2} = \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (42) στη σχέση (40) της αρχικής καμπύλης προκύπτει:

$$\left| 2C_{r,t,f}^* \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \right| = 1 \quad (43) \quad , \quad \text{από την οποία προκύπτει η ακτίνα}$$

της αρχικής καμπύλης:

$$|\zeta| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f}^* \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \quad (44)$$

Και θέτοντας : $|C_{r,t,f}| = \frac{|C_{r,t,f}^*| K_I}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow |C_{r,t,f}| = \frac{\varepsilon z_0 d c_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}}$ (45) ,

λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (15), $C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon z_0 d c_{r,t,f}}{\lambda_m}$. Έτσι η σχέση (44) γράφεται: $|\zeta| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f}\right)^{2/5}$ (46).

Δηλαδή η αρχική καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας r_0 , η οποία ορίζεται από την παραπάνω σχέση.

Για την εξίσωση της καυστικής, από τη σχέση (41) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \bar{\zeta}^{-3/2} \quad (47) \quad \text{και χρησιμοποιώντας την πολική}$$

μορφή της ζ από τη σχέση $\zeta = r e^{i\theta}$, $\bar{\zeta} = r e^{-i\theta}$, η σχέση (47)

γράφεται: $\frac{W}{\lambda_m} = r e^{i\theta} + C_{r,t,f} r^{-3/2} e^{3i\theta/2}$ (48)

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (46), η σχέση (48) γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_0 \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{3i\theta/2} \right) \quad (49).$$

Ισχύουν όμως οι σχέσεις: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ και $e^{3i\theta/2} = \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2}$ (50)

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (50) στη σχέση (49) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_0 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + i r_0 \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (51)$$

Στην παράγραφο 2.5 είχαμε αναφέρει ότι το διάνυσμα W στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέτασμα αναφοράς, γράφεται: $W = x' + iy'$

Θέτοντας τη σχέση αυτή, στη σχέση (51), προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών:

$$x'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (52)$$

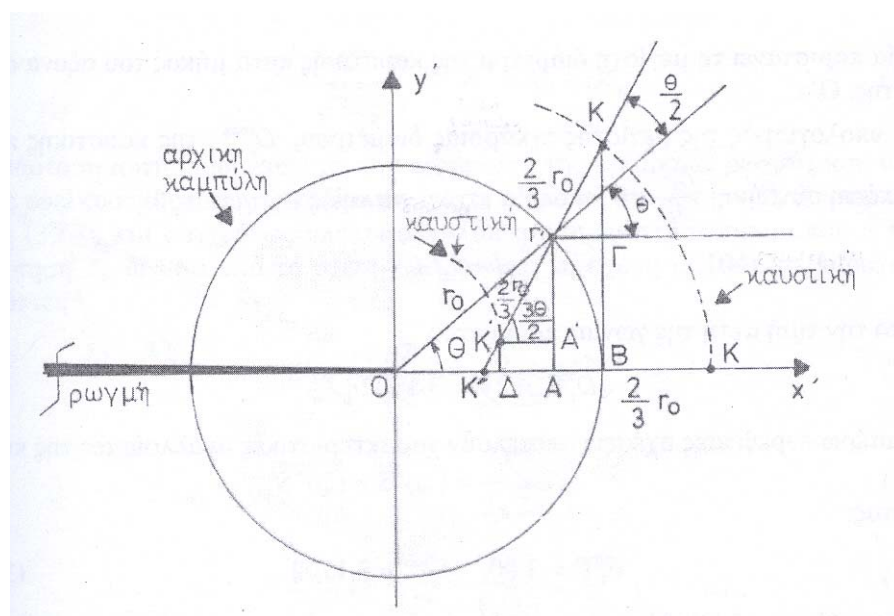
και

$$y'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (53)$$

Οι σχέσεις (52), (53) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της λαμβανομένης παρά τα άκρα της ρωγμής καυστικής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας συμπίπτοντα με τον άξονα της ρωγμής.

Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής συμπεραίνεται ότι αυτή είναι καμπύλη κλειστή, περατωμένη και περιοδική με περίοδο 4π .

Η καυστική είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K με συντεταγμένες (x', y') . Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Η γεωμετρική σχεδίαση των καυστικών

Οι συντεταγμένες του σημείου Κ της καυστικής είναι:

$$x' = (OA) + (AB) = r_0 \cos \theta + \frac{2}{3} r_0 \cos \frac{3\theta}{2} = r_0 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

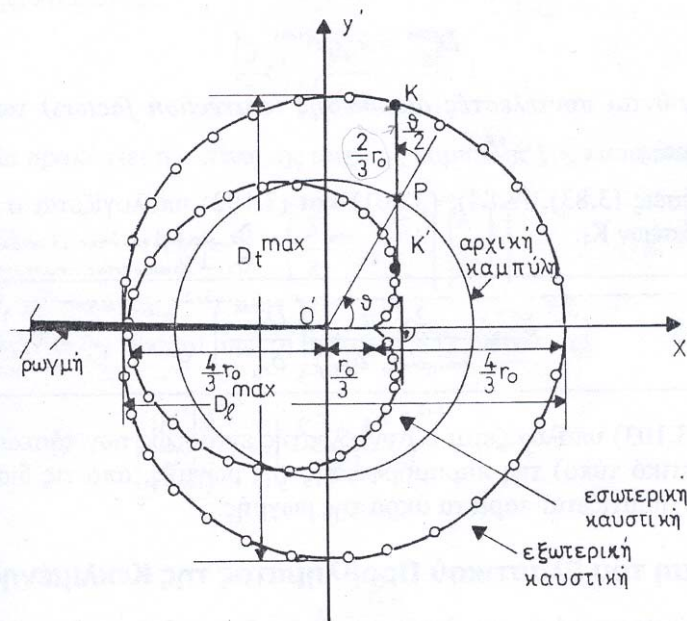
$$y' = (B\Gamma) + (\Gamma K) = r_0 \sin \theta + \frac{2}{3} r_0 \sin \frac{3\theta}{2} = r_0 \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες με τις σχέσεις (52), (53) της καυστικής. Εκτός της καυστικής αυτής (εξωτερική καυστική), σχηματίζεται καυστική εσωτερικά της αρχικής καμπύλης (εσωτερική καυστική) όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής αυτής προκύπτει από τις συντεταγμένες των σημείων Κ' :

$$x' = (O\Delta) = (OA) - (\Delta A) = r_0 \cos \theta - \frac{2}{3} r_0 \cos \frac{3\theta}{2} = r_0 \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$y' = (\Delta K') = (A\Gamma) - (A'\Gamma') = r_0 \sin \theta - \frac{2}{3} r_0 \sin \frac{3\theta}{2} = r_0 \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

Επομένως προκύπτει ότι για τη γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής, αρκεί από το άκρο Ο' της ρωγμής (σχήμα 4), να αχθεί ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής ακτίνα Ο'Ρ μήκους r_0 , που καθορίζεται από τη σχέση (46), υπό γωνία θ και ακολούθως από το σημείο Ρ διάνυσμα (το διάνυσμα απόκλισης) ΡΚ (για την εξωτερική καυστική) ή ΡΚ' (για την εσωτερική καυστική), μήκους $2r_0/3$ υπό γωνία $\theta/2$ ως προς την Ο'Ρ.



Σχήμα 4: Τα γεωμετρικά στοιχεία των καυστικών

Η ακτίνα ρ της καυστικής δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} = r_0 \sqrt{\frac{13}{9} + \frac{4}{3} \cos \frac{\theta}{2}}$$

Τα ακρότατα της ακτίνας αυτής υπολογίζονται από τη συνθήκη: $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$, η οποία ισχύει για τιμές της γωνίας θ : $\theta_i^{\max} = 0, 2\pi, \dots$

Από τις τιμές αυτές προκύπτει ότι η καυστική παρουσιάζει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στον άξονα συμμετρίας της. Οι τιμές αυτές (σχήμα 4) είναι:

$$\text{Για } \theta_{i(1)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\max} = \frac{5}{3} r_0 \lambda_m$$

$$\text{Για } \theta_{i(2)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\min} = \frac{1}{3} r_0 \lambda_m$$

Ο άξονας συμμετρίας $O'x'$ τέμνει την καυστική σε δυο σημεία που απέχουν απόσταση:

$$D_i^{\max} = 3r_0 \lambda_m \quad (54),$$

η οποία παριστάνει τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της, $O'x'$.

Ο υπολογισμός της μέγιστης εγκάρσιας διαμέτρου D_l^{\max} της καυστικής προκύπτει από τη συνθήκη: $\frac{\partial y'}{\partial \theta} = 0$, η οποία ισχύει για τιμές της γωνίας θ : $\theta_t^{\max} = 72^\circ$ και από αυτή την τιμή της γωνίας προκύπτει:

$$D_l^{\max} = 2y' = 3,1702r_0\lambda_m \quad (55)$$

Οι παραπάνω ευρεθείσες σχέσεις αποτελούν χαρακτηριστικές αναλλοίωτες της καυστικής.

Θέτοντας : $\delta_l^{\max} = 3.00$, $\delta_t^{\max} = 3.1702$,οι σχέσεις (54),(55) μπορούν να γραφούν:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_0 \delta_l^{\max} \quad (56)$$

$$D_t^{\max} = \lambda_m r_0 \delta_t^{\max} \quad (57)$$

όπου $\delta_{l,t}^{\max}$ καλούνται συντελεστές διόρθωσης (correction factors) των διαμέτρων $D_{l,t}^{\max}$ της καυστικής.

Από τις σχέσεις (45),(46),(56),(57) υπολογίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I :

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\epsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{\delta_{l,t}^{\max}} \right)^{5/2} \quad (58)$$

Από τη σχέση (58) υπολογίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I , για τον τύπο-I(εφελκυστικό τύπο) της παραμόρφωσης της ρωγμής, από τις διαμέτρους της καυστικής που σχηματίζεται παρά τα άκρα της ρωγμής.

2.7 Σχηματισμός καυστικών καμπυλών

Παρακάτω θα δούμε πώς από τις εξισώσεις των καυστικών λαμβάνουμε σχηματιζόμενες καυστικές για διάφορες γωνίες θ .

$$x_{r,f} = r_0 \left(\cos \theta \pm \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$y_{r,f} = r_0 \left(\sin \theta \pm \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad , \quad \text{όπου } r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,f} \right)^{2/5}$$

Οι δείκτες f και r στις παραπάνω εξισώσεις,αφορούν τις καυστικές που σχηματίζονται από τις ανακλάσεις στην εμπρός και πίσω επιφάνεια αντίστοιχα και ο όρος $\left(\frac{3}{2} C_{r,f} \right)$ παίρνει τις τυχαίες τιμές 1 και 1,7.

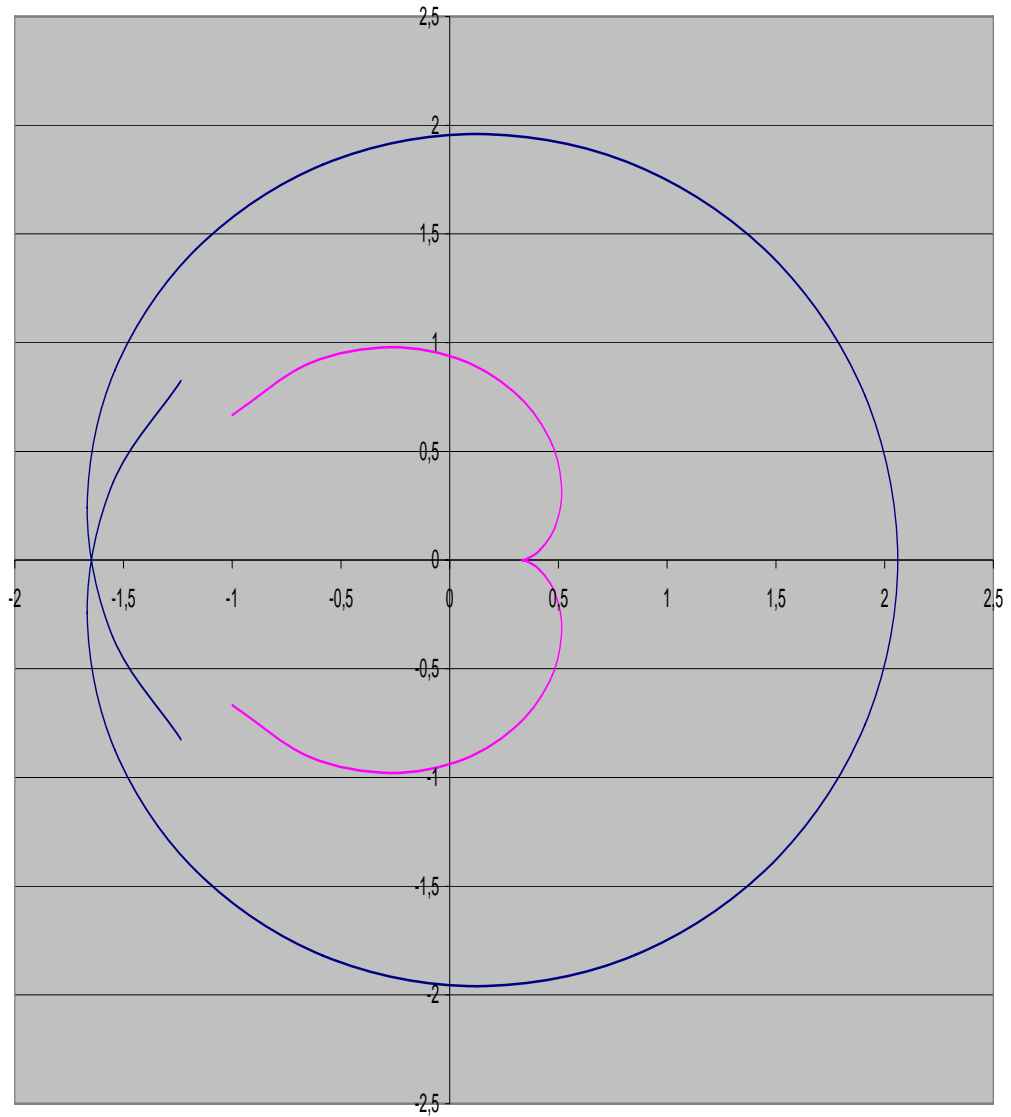
$$x_r = 1,7^{2/5} \cdot \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \qquad x_f = 1^{2/5} \cdot \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

και

$$y_r = 1,7^{2/5} \cdot \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \qquad y_f = 1^{2/5} \cdot \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

Από τις παραπάνω 4 εξισώσεις και για γωνίες από $-\pi$ έως π , (με βήμα $\pi/10$),σχηματίζονται δυο καυστικές καμπύλες,μία ανοικτή και μια κλειστή που φαίνονται παρακάτω.Οι τιμές που προέκυψαν με τη βοήθεια του Microsoft Excel είναι οι εξής:

θ	Xr_1	Yr_1	θ	Xf_1	Yf_1
-180	-1,23646	0,824306	-180	-1	-0,66667
-162	-1,55017	0,352375	-162	-0,6484	-0,90302
-144	-1,66719	-0,24226	-144	-0,26967	-0,97964
-126	-1,54093	-0,87137	-126	0,070674	-0,91331
-108	-1,16605	-1,43067	-108	0,325021	-0,74505
-90	-0,58287	-1,81933	-90	0,471405	-0,5286
-72	0,127362	-1,9599	-72	0,515028	-0,31702
-54	0,855722	-1,81447	-54	0,483496	-0,15056
-36	1,484831	-1,39365	-36	0,41716	-0,04844
-18	1,910404	-0,75631	-18	0,357052	-0,00636
0	2,060764	0	0	0,333333	0
18	1,910404	0,756314	18	0,357052	0,006357
36	1,484831	1,393649	36	0,41716	0,048441
54	0,855722	1,814473	54	0,483496	0,150558
72	0,127362	1,959903	72	0,515028	0,317019
90	-0,58287	1,819331	90	0,471405	0,528595
108	-1,16605	1,430666	108	0,325021	0,745045
126	-1,54093	0,871366	126	0,070674	0,913307
144	-1,66719	0,242257	144	-0,26967	0,979642
162	-1,55017	-0,35238	162	-0,6484	0,903021
180	-1,23646	-0,82431	180	-1	0,666667



Η καυστική χρώματος μπλε προκύπτει από ανάκλαση στην πίσω επιφάνεια και η χρώματος ροζ από την ανάκλαση στην εμπρός επιφάνεια.

Με τον ίδιο τρόπο, από τις 4 παραπάνω εξισώσεις αλλάζοντας το πρόσημο παίρνουμε:

$$x_r = 1,7^{2/5} \cdot \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

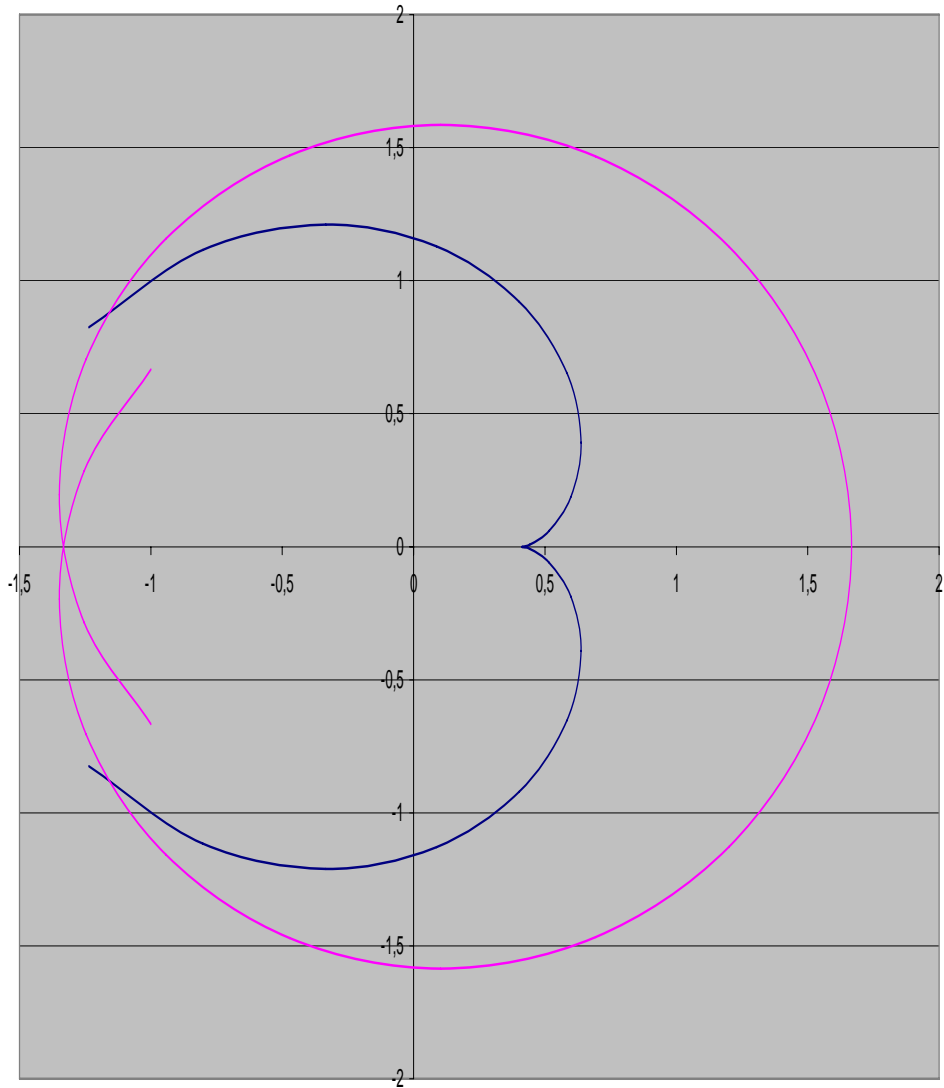
$$x_f = 1^{2/5} \cdot \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

και

$$y_r = 1,7^{2/5} \cdot \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$y_f = 1^{2/5} \cdot \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

θ	Xr_2	Yr_2	θ	Xf_2	Yf_2
-180	-1,23646	-0,82431	-180	-1	0,666667
-162	-0,80172	-1,11655	-162	-1,25372	0,284987
-144	-0,33344	-1,21129	-144	-1,34836	-0,19593
-126	0,087385	-1,12927	-126	-1,24624	-0,70473
-108	0,401875	-0,92122	-108	-0,94305	-1,15707
-90	0,582872	-0,65359	-90	-0,4714	-1,4714
-72	0,636811	-0,39198	-72	0,103006	-1,58509
-54	0,597822	-0,18616	-54	0,692075	-1,46748
-36	0,515801	-0,05989	-36	1,200874	-1,12713
-18	0,44148	-0,00786	-18	1,545061	-0,61168
0	0,412153	0	0	1,666667	0
18	0,44148	0,00786	18	1,545061	0,611677
36	0,515801	0,059895	36	1,200874	1,12713
54	0,597822	0,186159	54	0,692075	1,467476
72	0,636811	0,391981	72	0,103006	1,585094
90	0,582872	0,653586	90	-0,4714	1,471405
108	0,401875	0,921218	108	-0,94305	1,157068
126	0,087385	1,129266	126	-1,24624	0,704727
144	-0,33344	1,211287	144	-1,34836	0,195928
162	-0,80172	1,116548	162	-1,25372	-0,28499
180	-1,23646	0,824306	180	-1	-0,66667



Οι τιμές των x_{r2} και y_{r2} δημιουργούν την μπλε καυστική και οι τιμές των x_{f2} και y_{f2} δημιουργούν την ροζ καυστική.

Η καυστική χρώματος ροζ προκύπτει από την ανάκλαση στην εμπρός επιφάνεια και η μπλε καυστική, από την ανάκλαση στην πίσω επιφάνεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.1 Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη για την εφαρμογή της μεθόδου των καυστικών είναι απλή. Το δοκίμιο είναι φωτισμένο με μια μονοχρωματική δέσμη φωτός που εκπέμπεται από ένα Laser. Οι ανακλώμενες ή διαθλώμενες φωτεινές ακτίνες λαμβάνονται σε ένα πέτασμα αναφοράς, τοποθετημένο παράλληλα και σε κάποια απόσταση από το δοκίμιο. Η καυστική που σχηματίζεται στο πέτασμα αναφοράς είναι μια πολύ φωτισμένη καμπύλη, της οποίας οι διαστάσεις μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια.

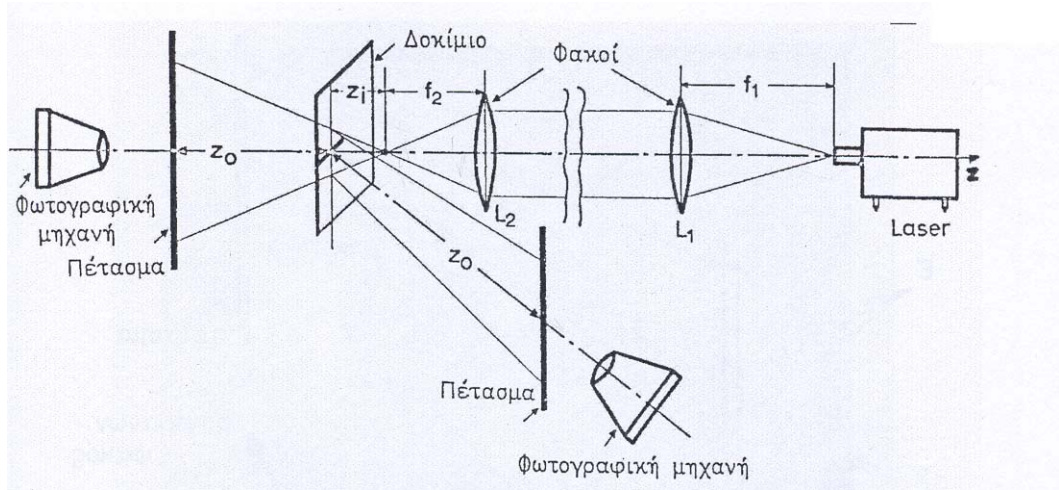
Η πειραματική διάταξη για το σχηματισμό των καυστικών είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται: (α) Πηγή φωτός (Laser He-Ne), (β) Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του Laser, (γ) Δυο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί εστιακής απόστασης $f=1\text{m}$, για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη, (δ) Δυο πετάσματα αναφοράς (θαμπόγυαλο) πάνω στα οποία προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές και (ε) Δυο φωτογραφικές μηχανές για τη λήψη των καυστικών. Τα παραπάνω απεικονίζονται με εικόνες στις επόμενες σελίδες. Τα πετάσματα αναφοράς τοποθετούνται εμπρός και πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_0 από το δοκίμιο. Στο πέτασμα εμπρός από το δοκίμιο λαμβάνονται οι καυστικές εξ'ανακλάσεως, ενώ στο πέτασμα πίσω από το δοκίμιο λαμβάνεται η καυστική διελεύσεως. Η εστία της φωτεινής δέσμης, ανάλογα με το είδος του δοκιμίου και τον τύπο των καυστικών, τοποθετείται εμπρός ή πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_i . Για διαφανή υλικά η εστία τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο (αποκλίνουσα δέσμη), ενώ για αδιαφανή υλικά η εστία τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο (συγκλίνουσα δέσμη).

Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα ή συγκλίνουσα δέσμη έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m , ενώ για παράλληλη δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με ένα ($\lambda_m=1$). Ο συντελεστής μεγέθυνσης υπολογίζεται γεωμετρικά σύμφωνα με τη γεωμετρική οπτική. Για αποκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

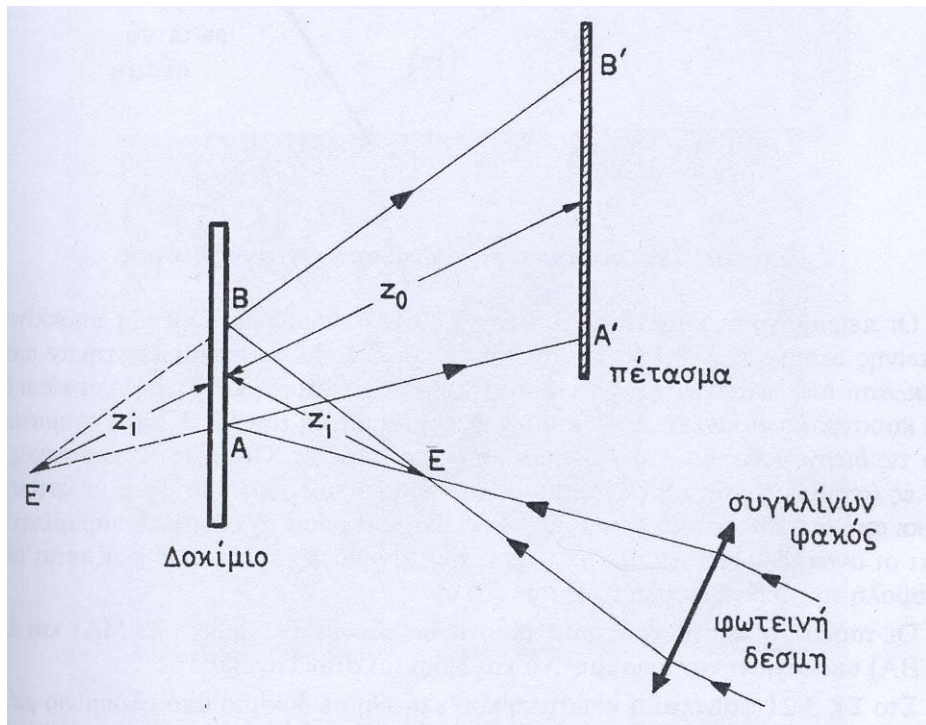
$$\lambda_m = \frac{z_0 + z_i}{z_i}$$

Για συγκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται στο σχήμα 3, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

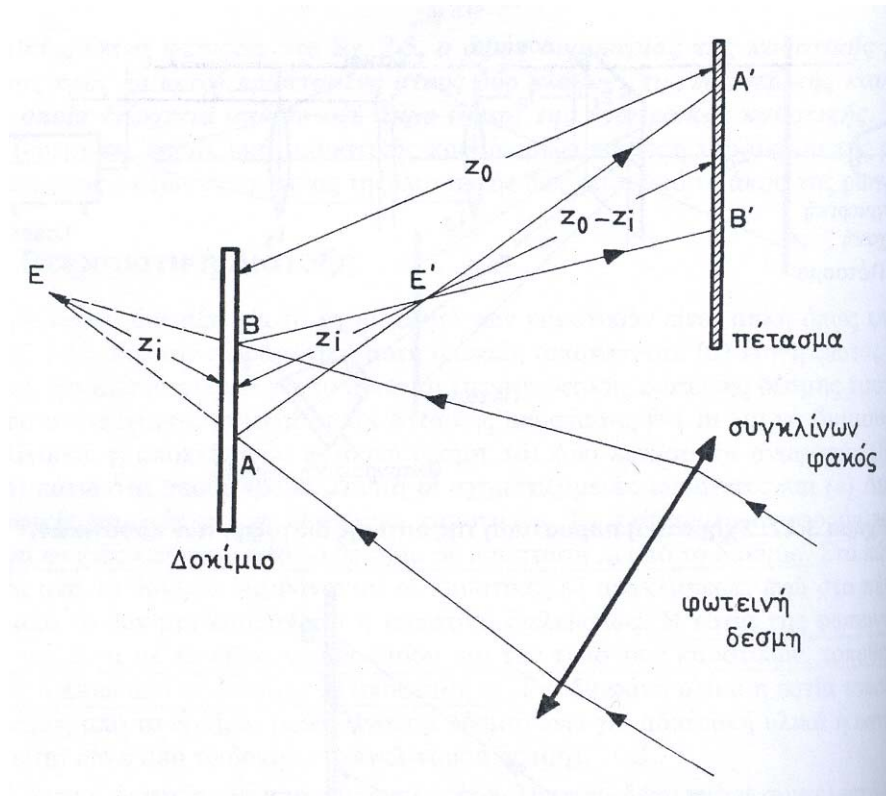
$$\lambda_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i}$$



Σχήμα 1: Σχηματική παράσταση της οπτικής διάταξης των καυστικών



Σχήμα 2: Γεωμετρία αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης



Σχήμα 3: Γεωμετρία συγκλίνουσας φωτεινής δέσμης

3.2 Η Οπτική διάταξη σε επιμέρους φωτογραφίες

Παρακάτω εμφανίζονται οι εικόνες της οπτικής διάταξης όπου αυτές ελήφθησαν στην αίθουσα ερευνών στην επιστημονική περιοχή οπτικών μεθόδων(κτήριο Αντοχής υλικών Ε.Μ.Π.)



Πηγή φωτός (Laser) και ειδικό φίλτρο



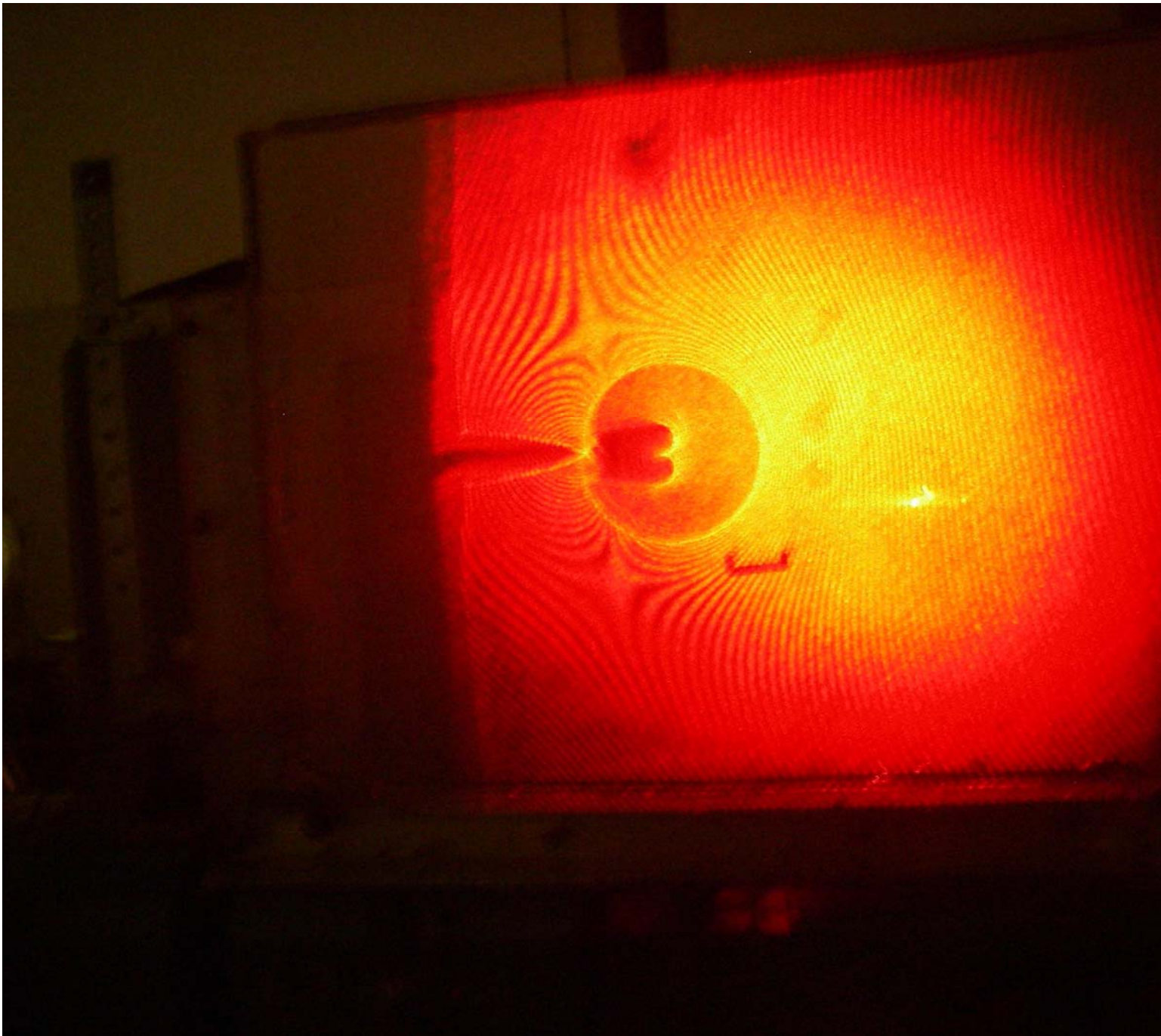
Οπτικοί φακοί



Πέτασμα αναφοράς (μπροστά από το δοκίμιο)

3.3 Πειραματικές καυστικές και μέτρηση του εφελκυστικού συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_I

Από τις πρώτες πειραματικές καυστικές που πραγματοποιήσαμε, είναι αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα 4. Η πειραματική καυστική αυτή, ελήφθη με διάταξη αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης σε δοκίμιο (σχήμα 5) από οπτικώς ισότροπο υλικό (Plexiglass), με εφελκυστικό φορτίο 200 kN. Οι καυστικές αυτές σχηματίστηκαν από την ανάκλαση των φωτεινών ακτινών από την εμπρός επιφάνεια του δοκιμίου (ανοικτή καυστική) και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου (κλειστή καυστική). Στο σχήμα 5 εμφανίζεται (πίσω από το δοκίμιο) και η καυστική, η οποία σχηματίστηκε από τις διερχόμενες δια του δοκιμίου φωτεινές ακτίνες.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια της παραπάνω καυστικής(της κλειστής), τον συντελεστή K_I , αφού πρώτα υπολογίσουμε τη θεωρητική τιμή του, έχοντας τα εξής δεδομένα:

- Εφελκυστικό φορτίο $P=200\text{kPa}$
- μήκος ρωγμής $a=1\text{ cm}$
- πάχος δοκιμίου $=3\text{ mm}$
- πλάτος δοκιμίου $=90\text{mm}$

Για τη θεωρητική τιμή του K_I ισχύει:

$$K_{I_{th}} = \sigma \sqrt{\pi a} \Rightarrow K_{I_{th}} = \frac{200 \cdot 10 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,01}}{3 \cdot 90 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{Nt \cdot \sqrt{m}}{m^2} \right) \Leftrightarrow K_{I_{th}} = 1313 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

Πρέπει όμως να ληφθεί υπ' όψη και ένας συντελεστής διόρθωσης. Οπότε έχουμε:

$K_{I_{th}} = f \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$, όπου f είναι ο συντελεστής διόρθωσης που παίρνει την τιμή 1,2.

$$\text{Άρα } K_{I_{th}} = 1,2 \cdot \frac{200 \cdot 10 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,01}}{3 \cdot 90 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{Nt \cdot \sqrt{m}}{m^2} \right) \Leftrightarrow K_{I_{th}} = 1575,6 \text{ (KPa} \cdot \sqrt{m})$$

$$\text{Από τη σχέση: } K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_r} \left(\frac{D_{l,t \text{ περ.}}}{\delta_{l,t}} \right)^{5/2} \quad (1),$$

θα πάρουμε δυο τιμές για την πειραματική τιμή του K_I . Μια τιμή εισάγοντας στην παραπάνω σχέση, την εγκάρσια διάμετρο D_t (transversal) και μια άλλη τιμή με την διαμήκη διάμετρο D_l (longitudinal). Με την D_t θα έχουμε αντίστοιχα στον παρονομαστή το δ_t , ενώ με την D_l θα έχουμε αντίστοιχα το δ_l . Έτσι τελικά θα πάρουμε τη μέση τιμή των δυο αποτελεσμάτων.

Έχουμε λοιπόν τα εξής δεδομένα:

- $D_l = 2,95\text{cm} = 0,0295\text{m}$ (μέτρηση της διαμήκους διαμέτρου από την καυστική του σχήματος 4, τυπωμένη σε φύλλο A4)
- $D_t = 3,1\text{cm} = 0,031\text{m}$
- $\varepsilon=2$
- $d=3\text{mm}=0,003\text{m}$
- $z_0=239\text{cm}$
- $z_i=40\text{ cm}$
- $\lambda_m = \frac{z_0 + z_i}{z_i} = \frac{2,39 + 0,4}{0,4} \Leftrightarrow \lambda_m = 6,975$
- Το c_r είναι η τασεοπτική σταθερά του υλικού, η οποία για plexiglass παίρνει την τιμή $c_r = 1,70 \times 10^{-10} \frac{m^2}{Nt}$
- $\delta_l=3$
- $\delta_t=3,1702$

Επίσης πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι οι τιμές των διαμέτρων D_t και D_l στη σχέση (1), είναι της παραπάνω καυστικής, που σχηματίζεται στο πέτασμα αναφοράς. Έχοντας μετρήσει το ' 'μάρτυρα' ' στο πέτασμα αναφοράς 2 cm και σε φύλλο A_4 1,1 cm, έχουμε:

$$\text{Για τη } D_{l_{\text{πετ.}}} : \frac{D_{l_{\text{πετ.}}}}{2} = \frac{D_l}{1,1} \Rightarrow D_{l_{\text{πετ.}}} = \frac{2 \cdot 2,95}{1,1} \Rightarrow D_{l_{\text{πετ.}}} = 5,36 \text{ cm} = 0,0536 \text{ m}$$

$$\text{Για τη } D_{t_{\text{πετ.}}} : \frac{D_{t_{\text{πετ.}}}}{2} = \frac{D_t}{1,1} \Rightarrow D_{t_{\text{πετ.}}} = \frac{2 \cdot 3,1}{1,1} \Rightarrow D_{t_{\text{πετ.}}} = 5,64 \text{ cm} = 0,0564 \text{ m}$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$K_{I_1} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot 2 \cdot 2,39 \cdot 0,003 \cdot 6,975^{3/2} \cdot 1,7 \cdot 10^{-10}} \left(\frac{0,0536}{3} \right)^{5/2} (Pa \cdot \sqrt{m}) \Leftrightarrow$$

$$K_{I_1} = 1587 \text{ Kpa} \cdot \sqrt{m}$$

$$\text{Και } K_{I_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot 2 \cdot 2,39 \cdot 0,003 \cdot 6,975^{3/2} \cdot 1,7 \cdot 10^{-10}} \left(\frac{0,0564}{3,1702} \right)^{5/2} (Pa \cdot \sqrt{m}) \Leftrightarrow$$

$$K_{I_2} = 1571 \text{ Kpa} \cdot \sqrt{m}$$

$$\text{Συνεπώς } K_I = \frac{K_{I_1} + K_{I_2}}{2} \Rightarrow K_I = 1579 \text{ Kpa} \cdot \sqrt{m}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της πειραματικής τιμής του συντελεστή K_I , είναι ελάχιστη.

Για τη σχεδίαση της καυστικής σε άξονες x,y παίρνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής:

$$x'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

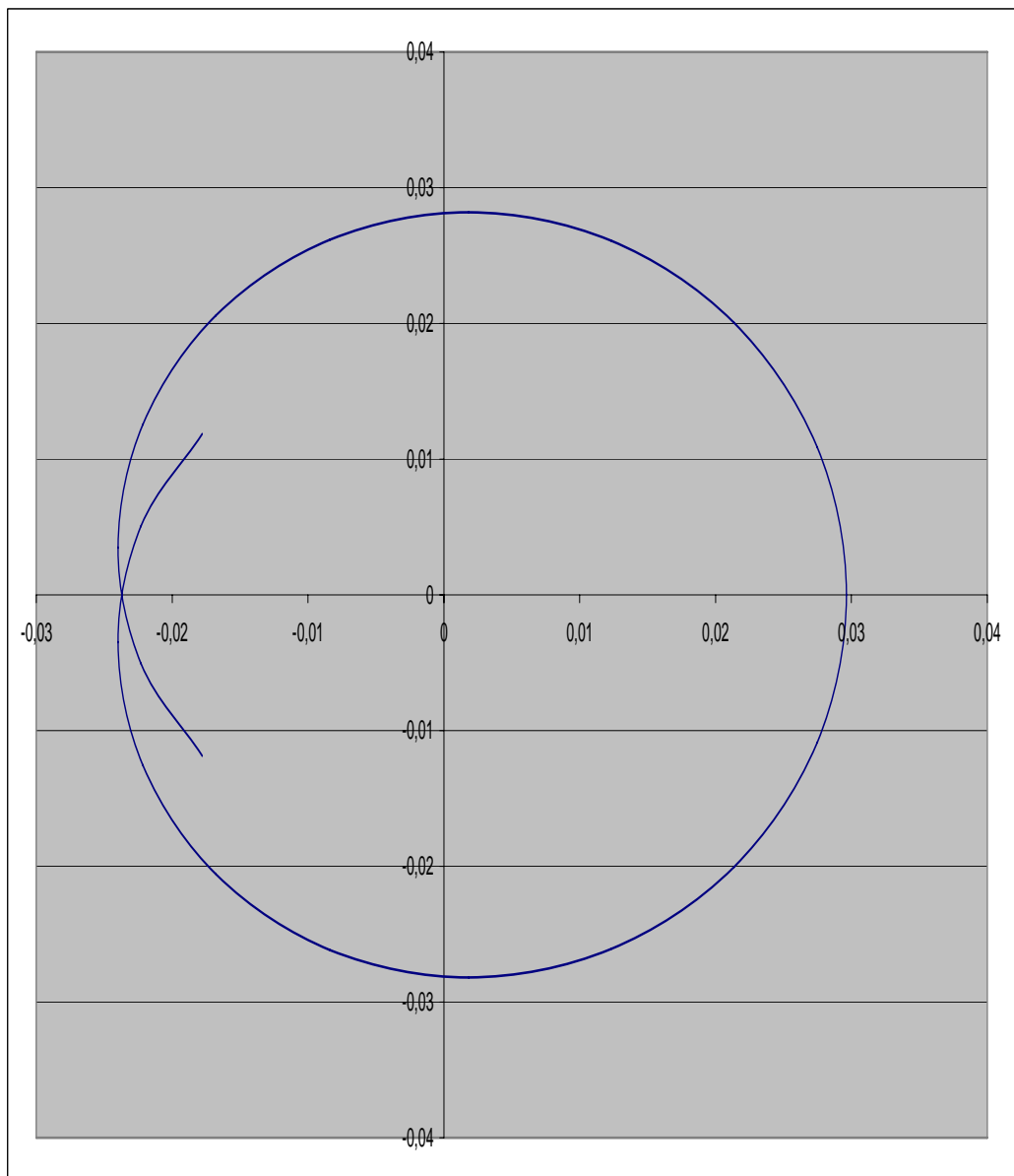
$$y'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

όπου $r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5}$ και $|C_{r,t,f}| = \frac{\varepsilon \cdot z_0 \cdot d \cdot c_{r,t,f} \cdot K_I}{\lambda_m \cdot \sqrt{2\pi}}$

Οπότε $C_r = \frac{\varepsilon \cdot z_0 \cdot d \cdot c_r \cdot K_I}{\lambda_m \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow C_r = \frac{2 \cdot 2,39 \cdot 0,003 \cdot 1,7 \cdot 10^{-10} \cdot 1575,6 \cdot 10^3}{6,975 \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow C_r = 2,19 \cdot 10^{-7}$

Άρα $r_0 = \left(\frac{3}{2} C_r \right)^{2/5} \Leftrightarrow r_0 = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

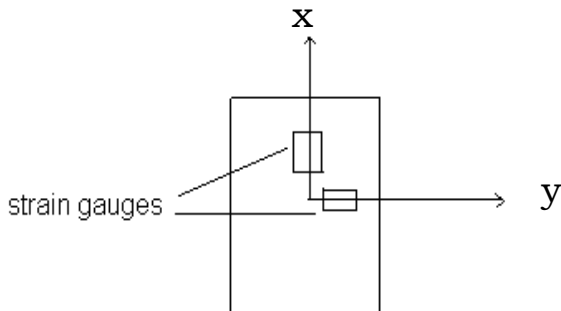
Έτσι από τις παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών για γωνίες από $-\pi$ έως π (με βήμα $\pi/10$) σχεδιάζουμε στο Microsoft excel την καυστική, η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΟΠΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ c_f, c_r ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ K_I

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιήσαμε πειράματα σε τρία δοκίμια από υλικά plexiglass και Lexan, διαφορετικού πάχους, πάνω στα οποία επικολλήθηκαν strain gauges, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (ένα στην διεύθυνση x και ένα στην διεύθυνση y) για τη μέτρηση των παραμορφώσεων ϵ_{xx} και ϵ_{yy} . Τα strain gauges είναι αισθητήρια τα οποία μετατρέπουν τις μηχανικές επιμηκύνσεις σε ηλεκτρικά σήματα. Η λειτουργία τους βασίζεται στην αλλαγή της τιμής της αντίστασης ενός αγωγού όταν αυτός τανυστεί μηχανικά. Τα αισθητήρια αυτά είναι ευαίσθητα στις μεταβολές της θερμοκρασίας όμως μπορούμε με κατάλληλη συνδεσμολογία να διορθώνουμε το σφάλμα αυτό. Αυτά τα αισθητήρια χρησιμοποιήσαμε στις μετρήσεις μας. Τις τιμές των παραμορφώσεων τις πήραμε από ένα Portable Logger TDS-302 με το οποίο ήταν συνδεδεμένα τα strain gauges.



Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν παίρνοντας διαφορετικά εφελκυστικά φορτία σε κάθε δοκίμιο και στη συνέχεια καταγράψαμε τις μετρήσεις οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω μαζί με τις εικόνες των αντίστοιχων καυστικών. Με τη βοήθεια των μετρήσεων αυτών θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε διάφορους συντελεστές και σταθερές, -κυρίως την ακριβή τιμή της τασεοπτικής σταθεράς c_r - και τελικά θα φτάσουμε στον υπολογισμό του εφελκυστικού συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_I , ο οποίος άμεσα μας ενδιαφέρει.

Για όλες τις λήψεις των καυστικών και στα τρία δοκίμια, το πέτασμα αναφοράς τοποθετήθηκε μπροστά απ' το δοκίμιο σε απόσταση $z_0 = 192cm$ και η εστία της φωτεινής δέσμης σε απόσταση $z_i = 68cm$ μπροστά από το δοκίμιο.

Παρατίθενται αναλυτικά παρακάτω οι μετρήσεις σε κάθε δοκίμιο.

4.1 Δοκίμιο 1₀ (Plexiglass)

- Πλάτος δοκιμίου: $W = 80mm$
- Πάχος δοκιμίου: $d = 2,95mm$
- Μήκος ρωγμής: $a = 1cm$

	Εφελκυστικό φορτίο P(KP)	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}
1 _η	10	1	1
2 _η	30	265	-93
3 _η	50	560	-196
4 _η	80	1000	-350
5 _η	100	1283	-449
6 _η	120	1616	-566
7 _η	150	2033	-712
8 _η	180	2460	-861

Το φορτίο για να γίνει τάση πρέπει να το διαιρέσουμε με τη διατομή του δοκιμίου. Άρα: $\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d}$

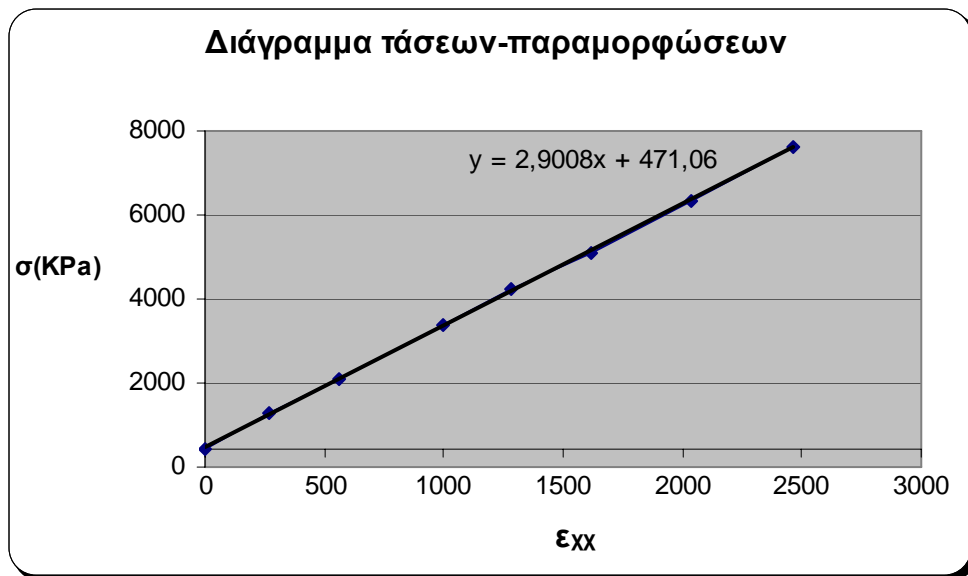
Έτσι για την 1_η μέτρηση έχουμε:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d} \Rightarrow \sigma = \frac{10}{80 \cdot 2,95} \left(\frac{KP}{mm^2} \right) \Rightarrow \sigma = \frac{10 \cdot 10}{80 \cdot 2,95 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{Nt}{m^2} \right) \Rightarrow \sigma = 423,73 KPa$$

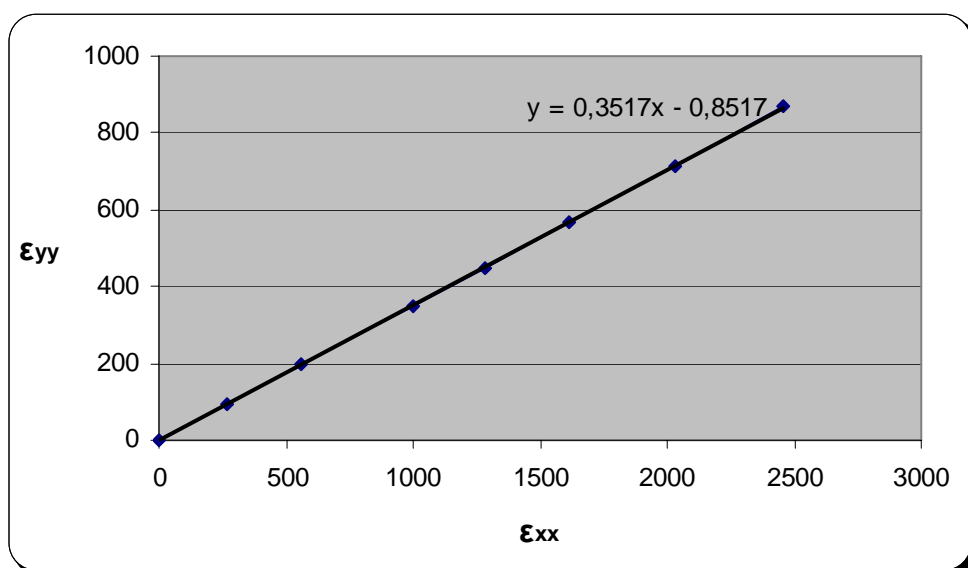
Με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες μετρήσεις, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μέτρηση	Εφελκυστικό φορτίο P (KP)	Εφελκυστική τάση σ (KPa)	$\epsilon_{xx}(*10^{-6})$	$\epsilon_{yy}(*10^{-6})$
1 _η	10	423,73	1	1
2 _η	30	1271,19	265	-93
3 _η	50	2118,64	560	-196
4 _η	80	3389,83	1000	-350
5 _η	100	4237,29	1283	-449
6 _η	120	5084,75	1616	-566
7 _η	150	6355,93	2033	-712
8 _η	180	7627,12	2460	-861

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας E , από το παρακάτω διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων βρίσκοντας την εξίσωση της ευθείας.

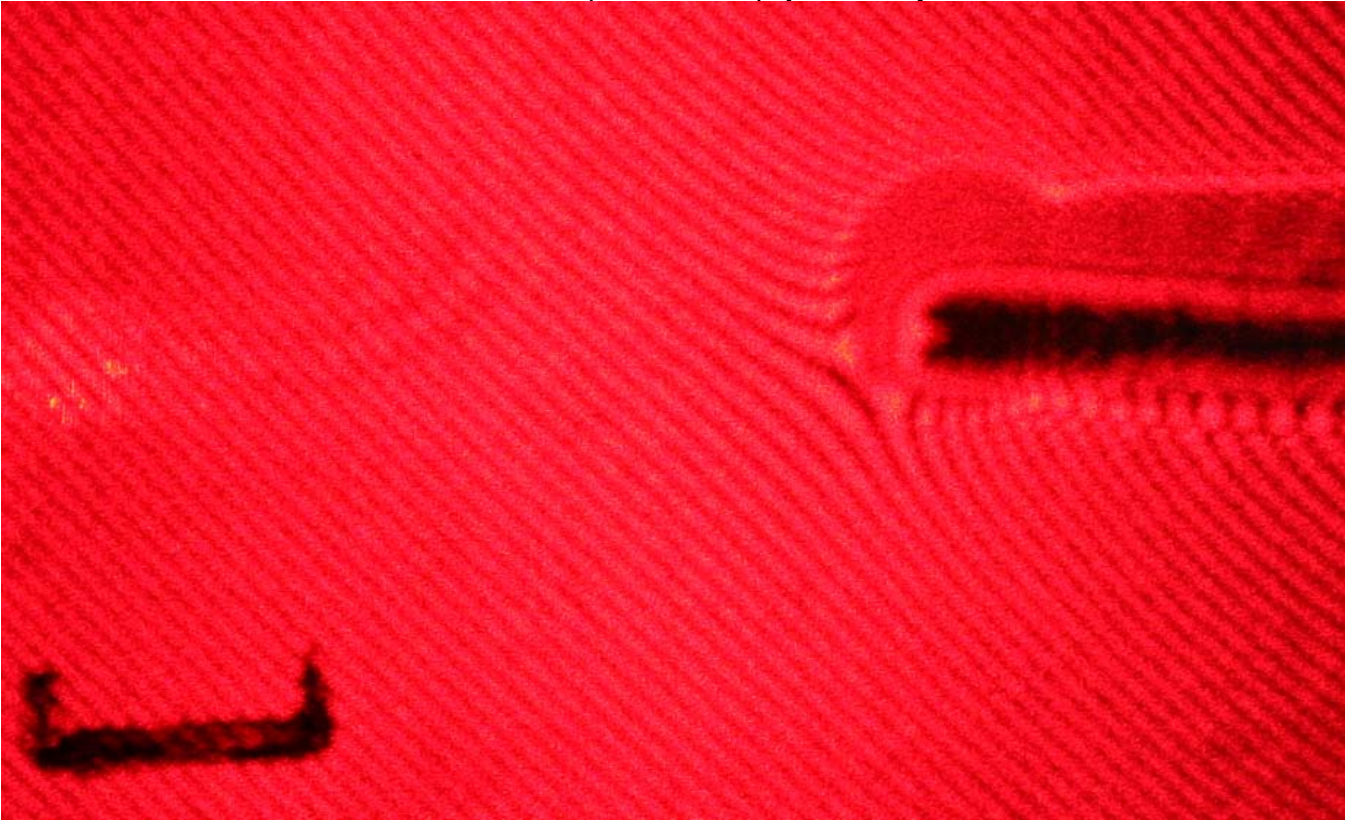


Επίσης από το επόμενο διάγραμμα με τις τιμές $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$, μπορούμε να βρούμε το λόγο poisson ν . Όλα τα μεγέθη θα ταξινομηθούν στον τελικό πίνακα στη συνέχεια.

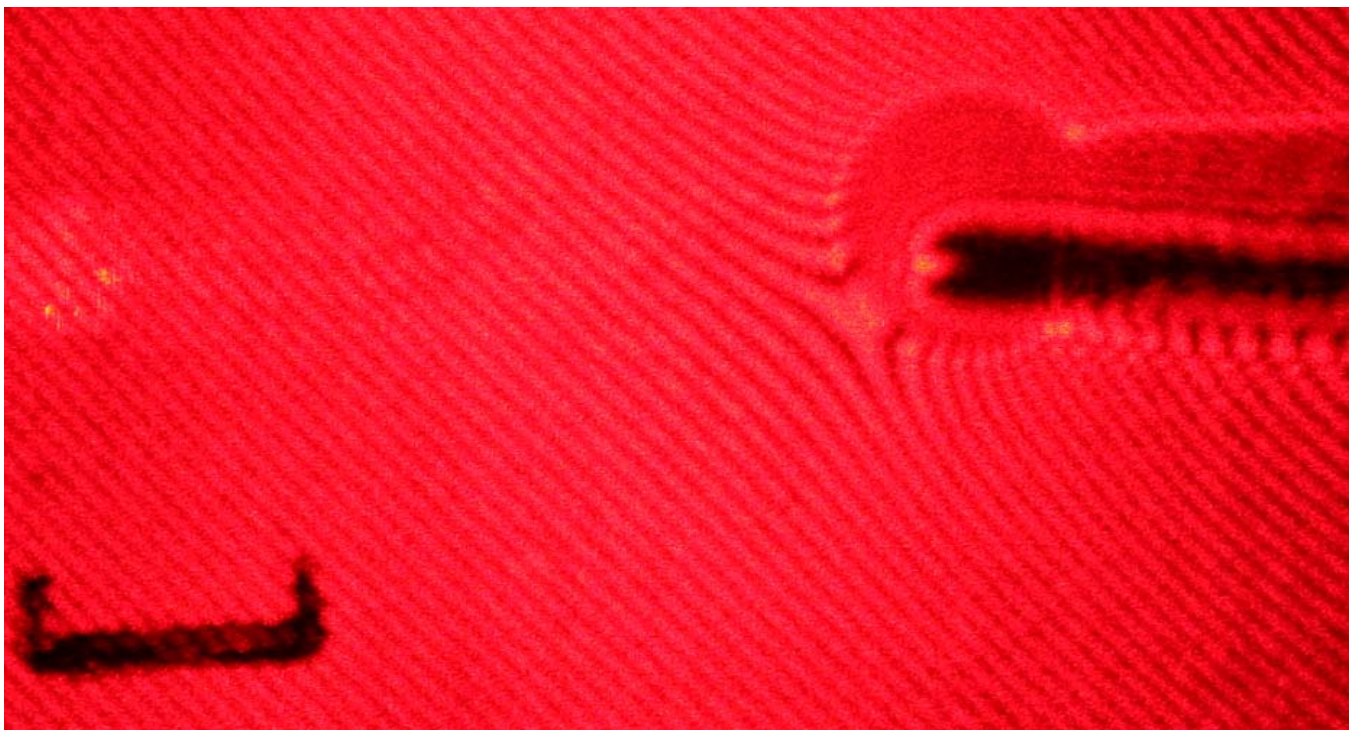


Για κάθε εφελκυστικό φορτίο, σχηματίστηκαν και οι αντίστοιχες καυστικές πάνω στο πέτασμα αναφοράς, οι οποίες ελήφθησαν με μια φωτογραφική μηχανή Canon Eos 350D Digital και απεικονίζονται παρακάτω.

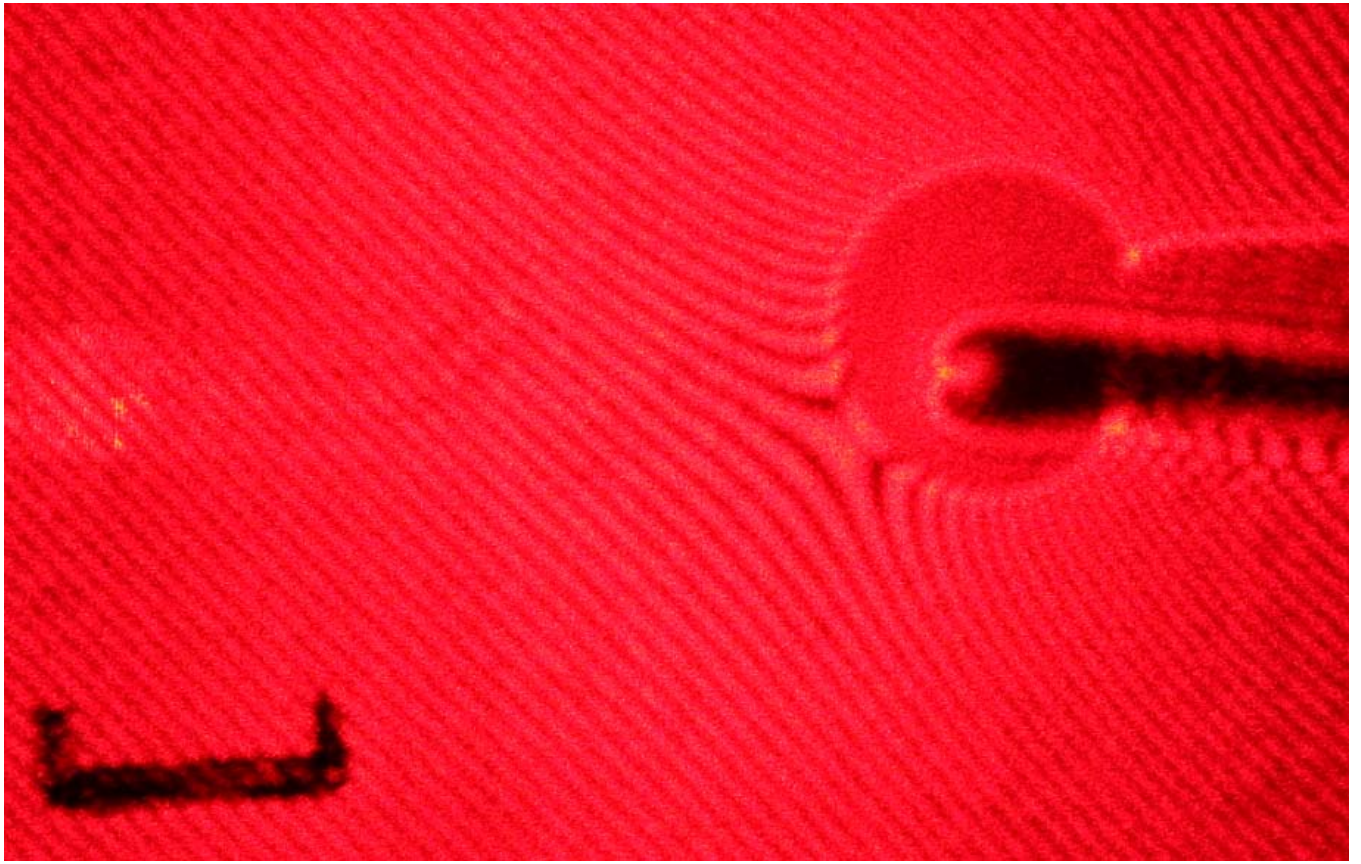
1-Για εφελκυστικό φορτίο 10 Kp



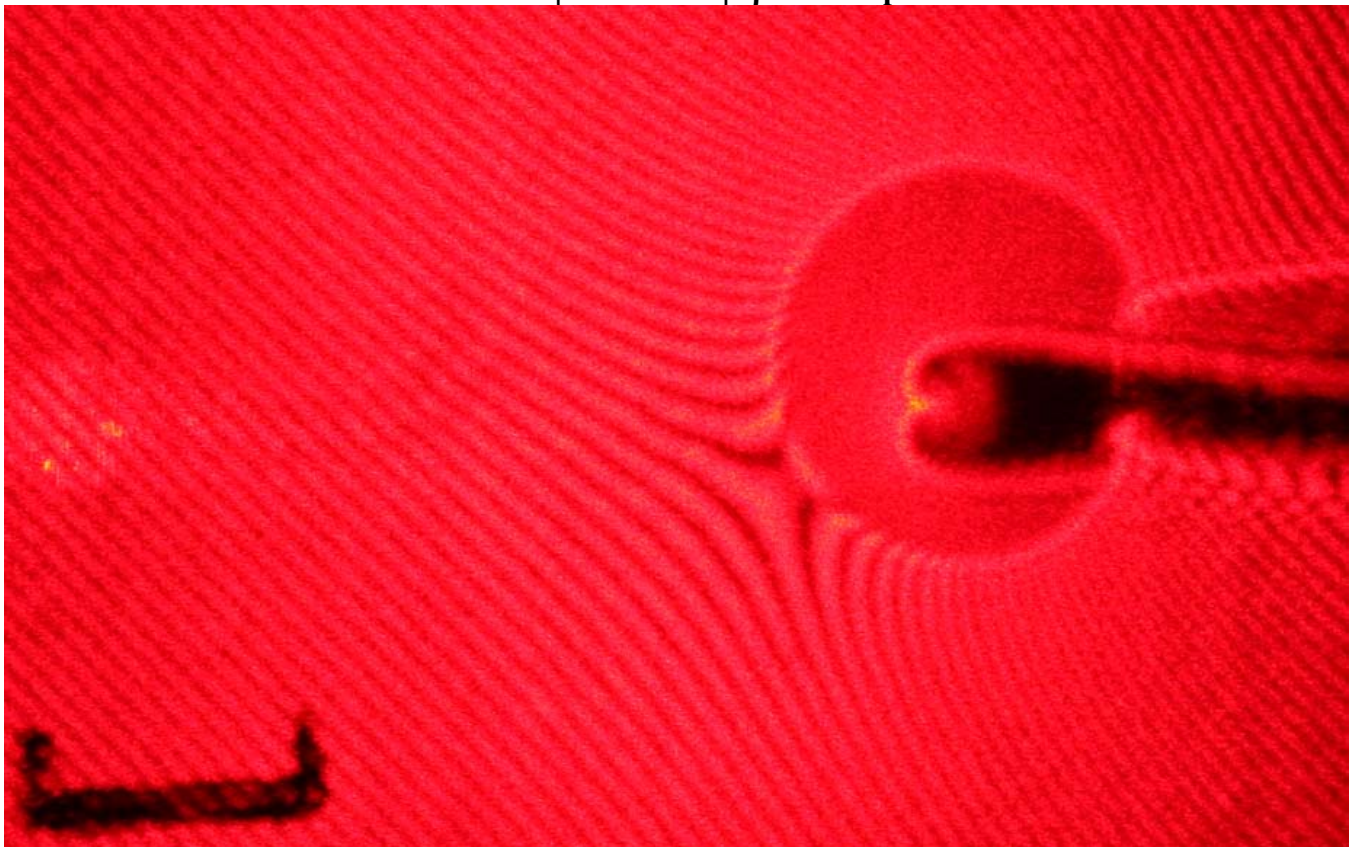
2-Για εφελκυστικό φορτίο 30 Kp



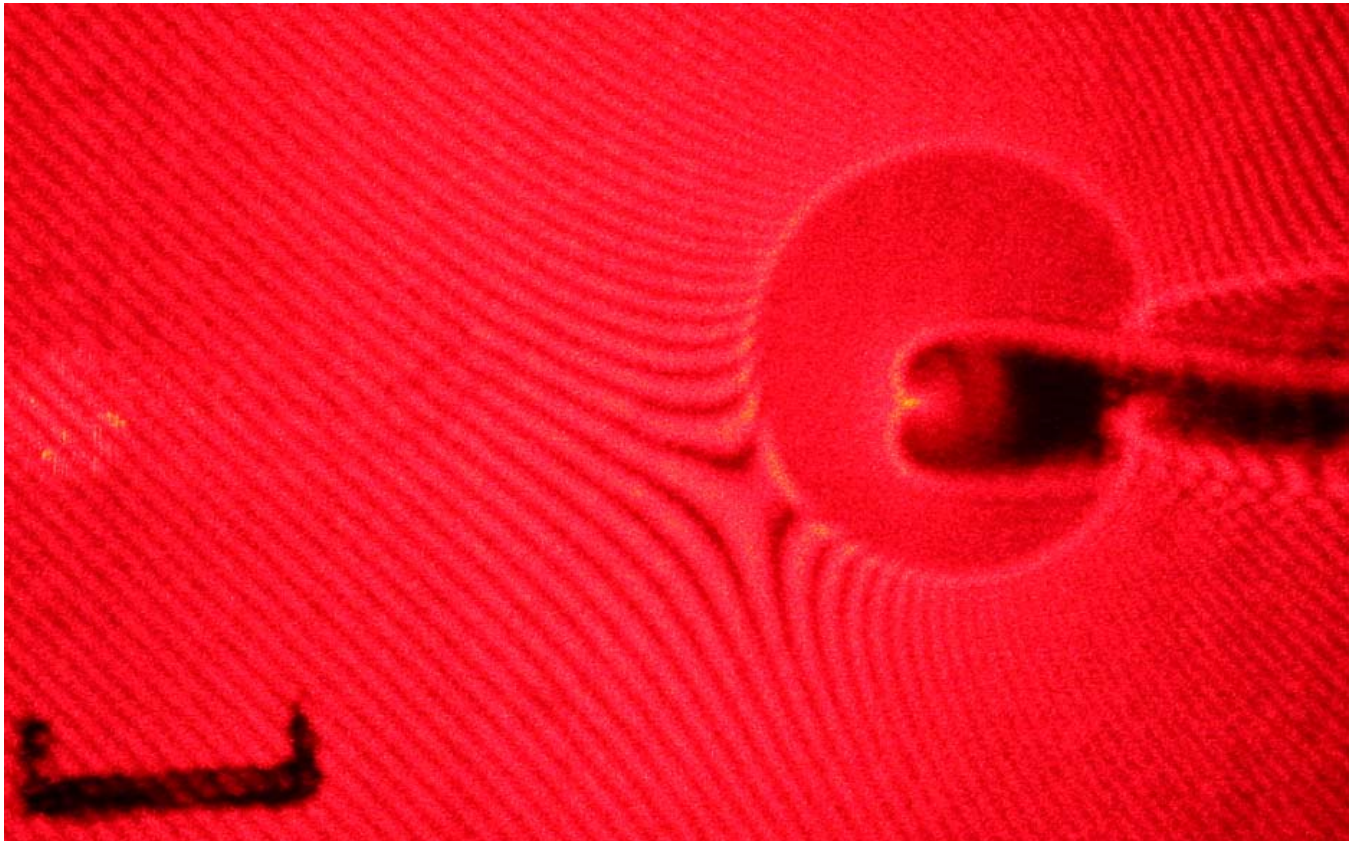
3-Για εφελκυστικό φορτίο 50 Kp



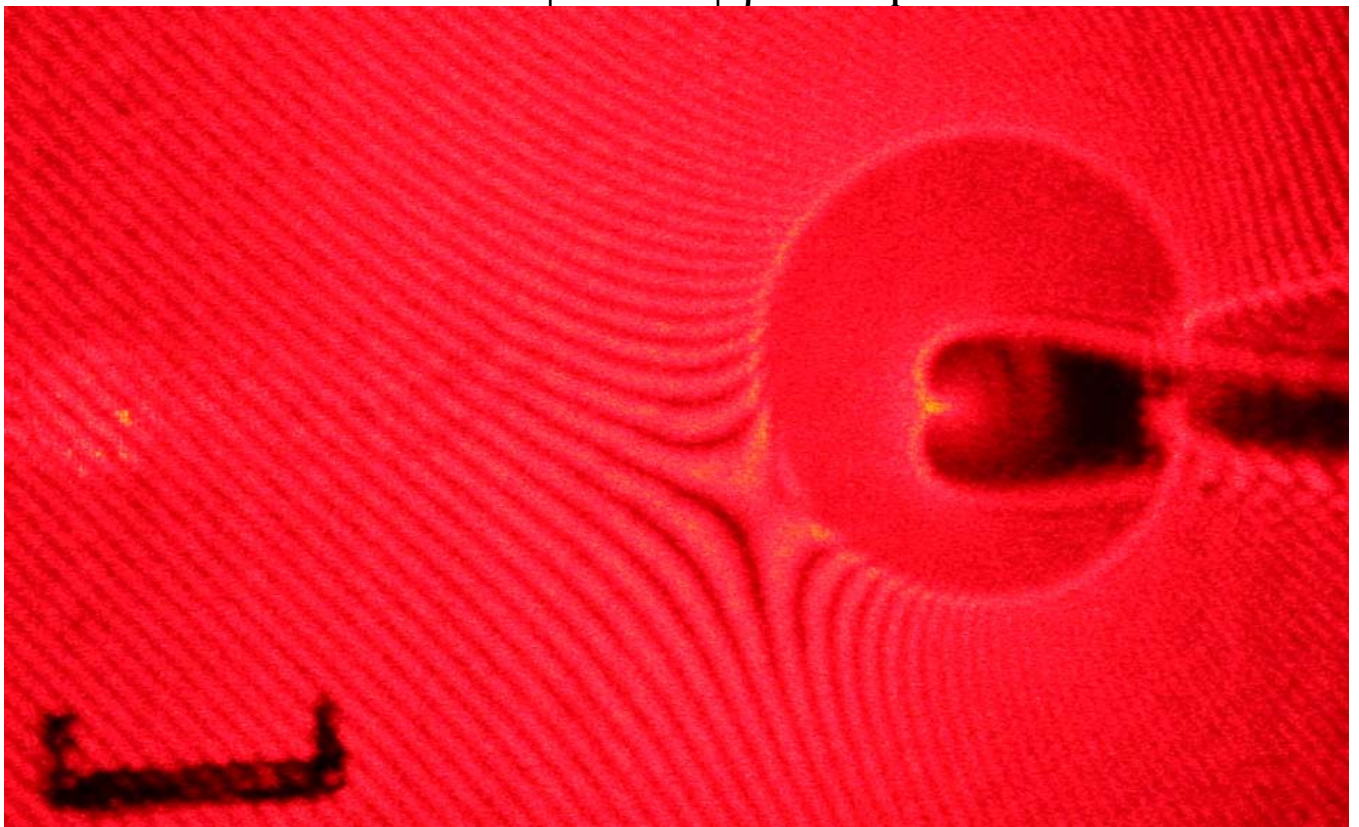
4-Για εφελκυστικό φορτίο 80 Kp



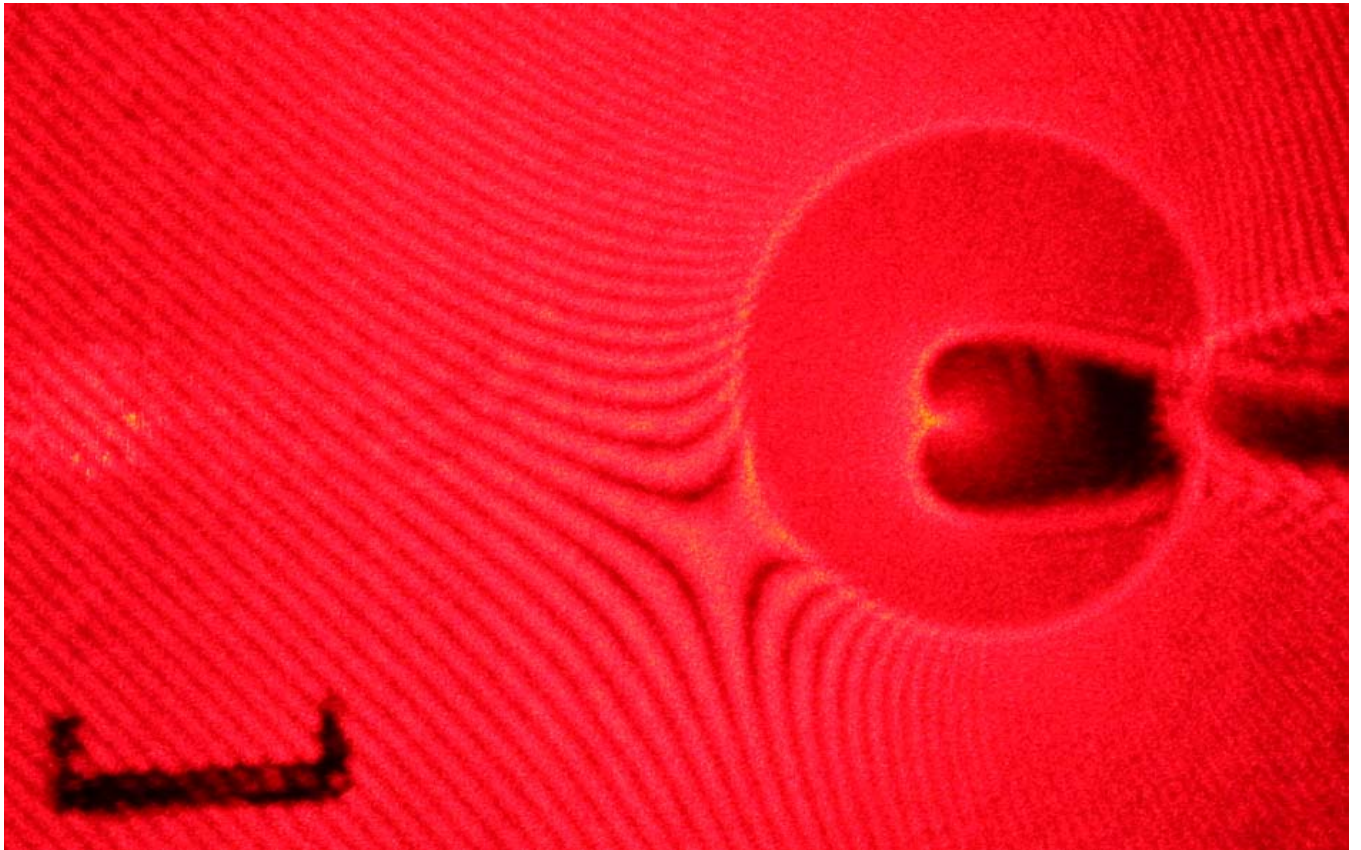
5-Για εφελκυστικό φορτίο 100 Κρ



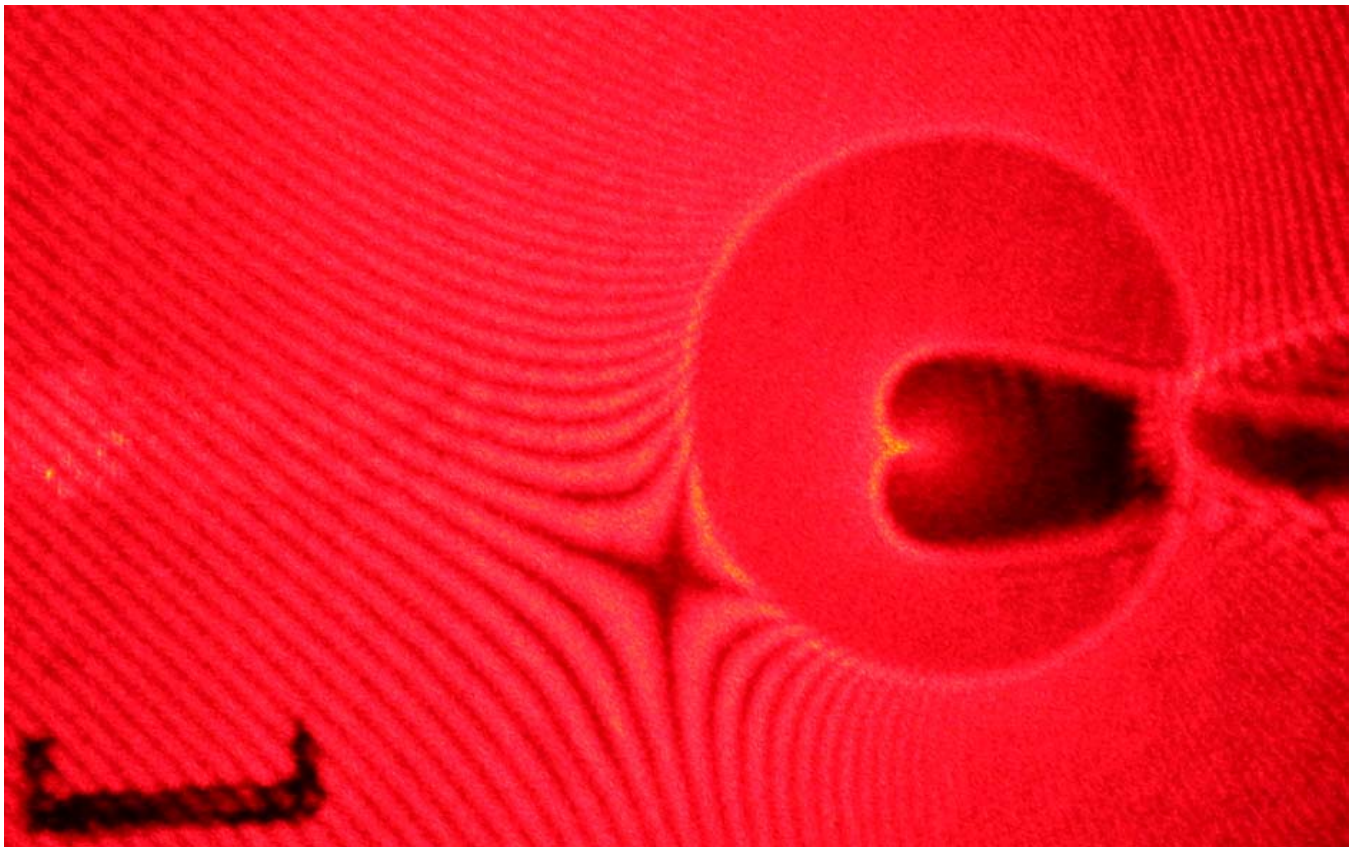
6-Για εφελκυστικό φορτίο 120 Κρ



7-Για εφελκυστικό φορτίο 150 Kp



8-Για εφελκυστικό φορτίο 180 Kp

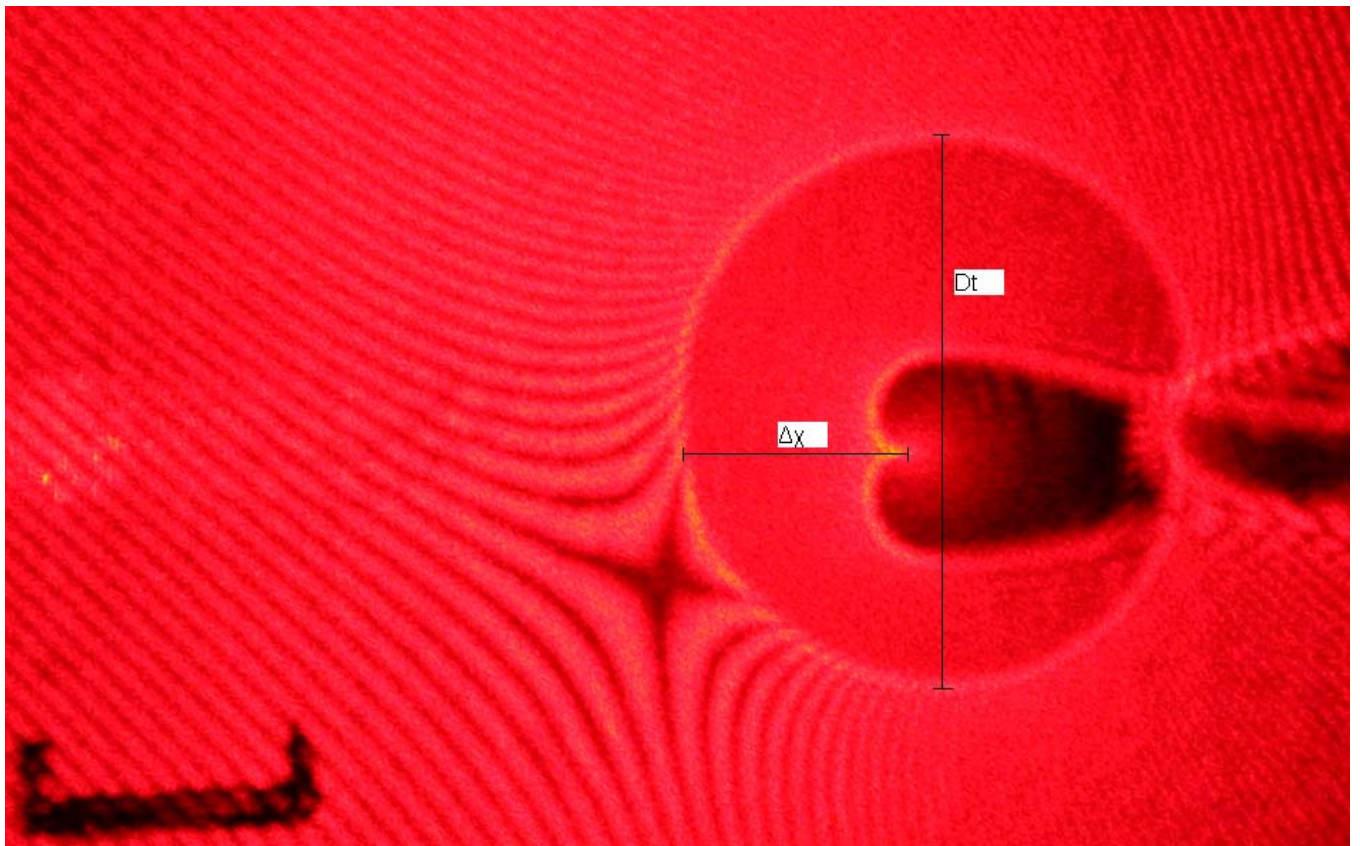


Τελικός πίνακας

P (Kp)	$\sigma=P/W*d$ (KPa)	D_t (m)	ν	E (GPa)	$c_f=\nu/E$ (m ² /Nt)	Δx (m)	c_r (m ² /Nt)	K_I (KPa*m ^{1/2})
10	423,73	0,035	-	-	-	0,012	-	-
30	1271,19	0,036	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,013	0,197*10 ⁻¹⁰	2590,87
50	2118,64	0,044	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,017	0,299*10 ⁻¹⁰	2819,13
80	3389,83	0,053	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,022	0,532*10 ⁻¹⁰	2523,09
100	4237,29	0,057	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,024	0,611*10 ⁻¹⁰	2635,13
120	5084,75	0,063	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,027	0,736*10 ⁻¹⁰	2809,50
150	6355,93	0,067	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,029	0,823*10 ⁻¹⁰	2930,51
180	7627,12	0,072	0,352	2,901	1,213*10 ⁻¹⁰	0,031	0,775*10 ⁻¹⁰	3725,50

Τα Δx και D_t υπολογίζονται από τις παραπάνω καυστικές, μετρώντας την απόσταση όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η συγκεκριμένη καυστική είναι της όγδοης μέτρησης με εφελκυστικό φορίο 180 Kp.

Με τον ίδιο τρόπο θα μετρήσουμε τα Δx και D_t σε όλες τις καυστικές και στα τρία δοκίμια.



Για να υπολογίσουμε το c_r στον παραπάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξισώσεις των καυστικών για γωνία $\theta=0$ και έχουμε:

$$\Delta x = x_r - x_f \quad \text{όπου:}$$

$$x_r = \left(\frac{3}{2}C_r\right)^{2/5} \cdot \left(\cos\theta + \frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \quad \text{και} \quad x_f = \left(\frac{3}{2}C_f\right)^{2/5} \cdot \left(\cos\theta - \frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

Άρα για $\theta=0$ παίρνουμε:

$$\Delta x = x_r - x_f \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{3}{2}C_r\right)^{2/5} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}C_f\right)^{2/5} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{3}{2}C_r\right)^{2/5} \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{3}{2}C_f\right)^{2/5} \cdot \frac{1}{3}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις σχέσεις (45) και (58) της παραγράφου 2.6 (και με $\lambda_m = 1$) έχουμε:

$$\Delta x = \left(\frac{3}{2}C_r\right)^{2/5} \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{3}{2}C_f\right)^{2/5} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon z_0 dc_r K_l}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/5} \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon z_0 dc_f K_l}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/5} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon z_0 dc_r}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 dc_r} \left(\frac{D_t}{\delta_t}\right)^{5/2}\right)^{2/5} \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon z_0 dc_f}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 dc_r} \left(\frac{D_t}{\delta_t}\right)^{5/2}\right)^{2/5} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

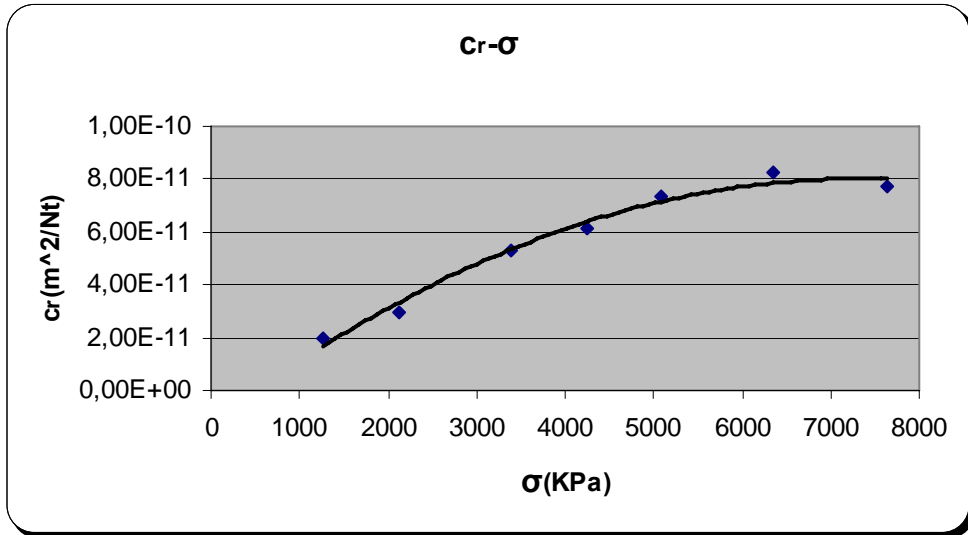
$$\Delta x = \left(\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3}\right)^{2/5} \cdot \frac{D_t}{3,1702} \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3}\right)^{2/5} \cdot \left(\frac{c_f}{c_r}\right)^{2/5} \cdot \frac{D_t}{3,1702} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta x}{D_t} = 0,526 - 0,0797 \left(\frac{c_f}{c_r}\right)^{2/5} \Rightarrow \left(\frac{c_f}{c_r}\right)^{2/5} = 6,6 - 12,55 \frac{\Delta x}{D_t} \Rightarrow \left(\frac{c_f}{c_r}\right) = \left(6,6 - 12,55 \frac{\Delta x}{D_t}\right)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{c_r}{c_f}\right) = \frac{1}{\left(6,6 - 12,55 \frac{\Delta x}{D_t}\right)^{5/2}} \Rightarrow c_r = \frac{c_f}{\left(6,6 - 12,55 \frac{\Delta x}{D_t}\right)^{5/2}} \quad (1)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπληρώνουμε την τιμή του c_r στον παραπάνω πίνακα εκτός από την πρώτη μέτρηση, όπου στη σχέση της c_r , περιέχεται η $c_{f,i}$, η οποία δεν ορίζεται.

Παρακάτω απεικονίζεται η γραφική παράσταση της τασεοπτικής σταθεράς c_r , συναρτήσεως της εφελκυστικής τάσης.



Για τον υπολογισμό του συντελεστή K_I παίρνουμε τη σχέση:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_r} \left(\frac{D_{t_{\text{πετ.}}}}{\delta_t} \right)^{5/2} \quad \text{όπου η } D_{t_{\text{πετ.}}} \text{ υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$\frac{D_{t_{\text{πετ.}}}}{2} = \frac{D_t}{3,9} \quad \text{όπου 2 και 3,9 είναι τα μήκη του μάρτυρα σε cm στο}$$

πέτασμα αναφοράς και στις εκτυπωμένες καυστικές (φύλλο Α4) αντίστοιχα. Στη σχέση του K_I , η $D_{t_{\text{πετ.}}}$, θα είναι σε m.

$$\text{Το } \lambda_m \text{ θα είναι: } \lambda_m = \frac{z_0 + z_i}{z_i} \Rightarrow \lambda_m = \frac{1,92 + 0,68}{0,68} \Rightarrow \lambda_m = 3,824$$

Έτσι για τη δεύτερη μέτρηση (για την πρώτη δεν ορίζεται K_I , εφόσον δεν ορίζεται c_r) έχουμε: $\frac{D_{t_{\text{πετ.}}}}{2} = \frac{D_t}{3,9} \Rightarrow D_{t_{\text{πετ.}}} = \frac{2 \cdot 3,7}{3,9} \Rightarrow D_{t_{\text{πετ.}}} = 1,9 \text{ cm} \Rightarrow D_{t_{\text{πετ.}}} = 0,019 \text{ m}$

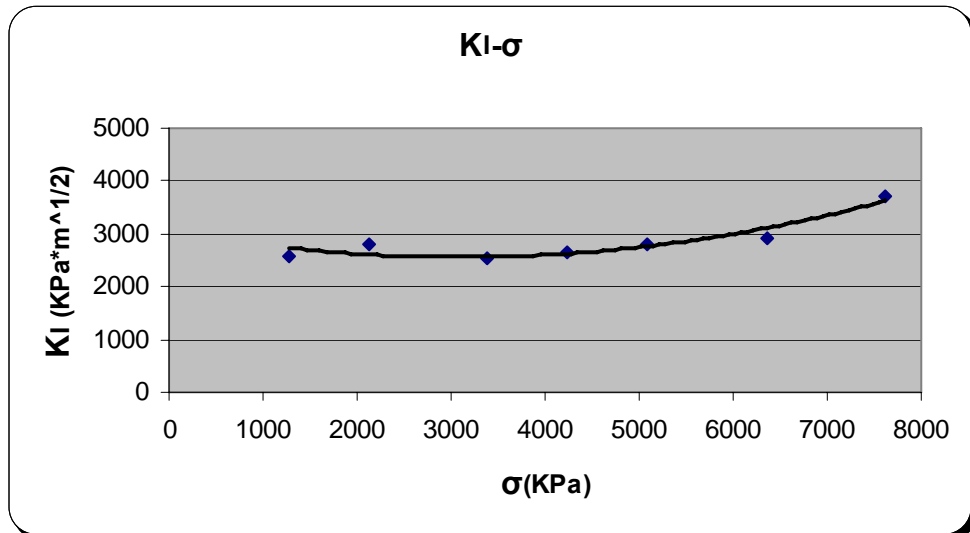
και

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_r} \left(\frac{D_{t_{\text{πετ.}}}}{\delta_t} \right)^{5/2} \Rightarrow K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3 \cdot 2 \cdot 1,92 \cdot 2,95 \cdot 10^{-3} \cdot 3,824^{3/2} \cdot 0,188 \cdot 10^{-10}} \left(\frac{0,019}{3,1702} \right)^{5/2} \Rightarrow$$

$$K_I = 2907,38 \text{ KPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

Με την ίδια διαδικασία συνεχίζουμε και για τις υπόλοιπες μετρήσεις.

Παρακάτω σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση του συντελεστή K_I , συναρτήσει της εφελκυστικής τάσης σ .



4.2 Δοκίμιο 2₀ (Plexiglass μεγαλύτερου πάχους)

- Πλάτος δοκιμίου: $W = 80\text{mm}$
- Πάχος δοκιμίου: $d = 4\text{mm}$
- Μήκος ρωγμής: $a = 1\text{cm}$

	Εφελκυστικό φορτίο P(KP)	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}
1 _η	10	2	1
2 _η	30	192	-69
3 _η	50	392	-140
4 _η	80	696	-249
5 _η	100	908	-325
6 _η	120	1114	-399
7 _η	150	1416	-507
8 _η	180	1715	-614
9 _η	200	1935	-692

Το φορτίο για να γίνει τάση πρέπει να το διαιρέσουμε με τη διατομή του δοκιμίου. Άρα: $\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d}$

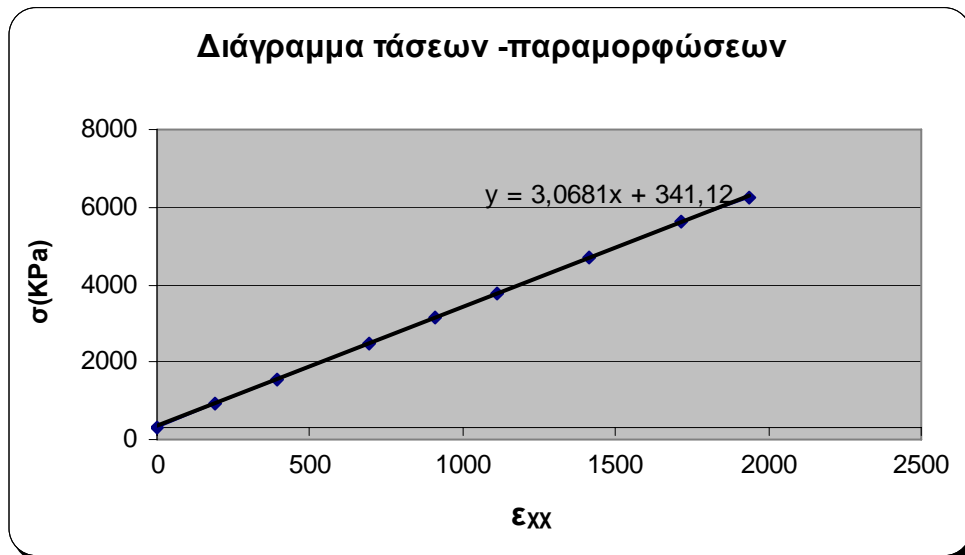
Έτσι για την 1_η μέτρηση έχουμε:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d} \Rightarrow \sigma = \frac{10}{80 \cdot 4} \left(\frac{KP}{mm^2} \right) \Rightarrow \sigma = \frac{10 \cdot 10}{80 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{Nt}{m^2} \right) \Rightarrow \sigma = 312,5 KPa$$

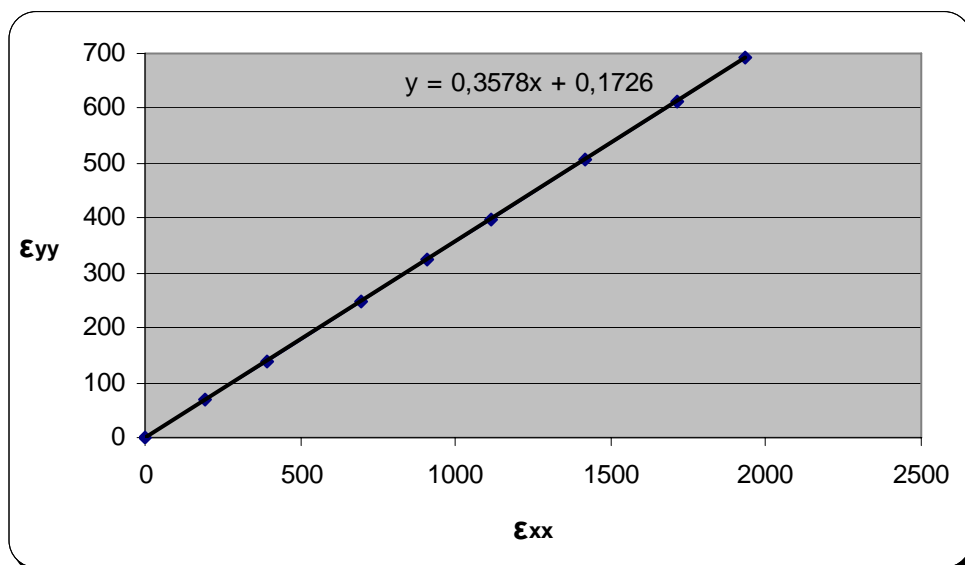
Με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες μετρήσεις, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μέτρηση	Εφελκυστικό φορτίο P (KP)	Εφελκυστική τάση σ (KPa)	$\epsilon_{xx}(*10^{-6})$	$\epsilon_{yy}(*10^{-6})$
1 _η	10	312,5	2	1
2 _η	30	937,5	192	-69
3 _η	50	1562,5	392	-140
4 _η	80	2500	696	-249
5 _η	100	3125	908	-325
6 _η	120	3750	1114	-399
7 _η	150	4687,5	1416	-507
8 _η	180	5625	1715	-614
9 _η	200	6250	1935	-692

Όπως και στο πρώτο δοκίμιο στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας E , από το παρακάτω διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων βρίσκοντας την εξίσωση της ευθείας.

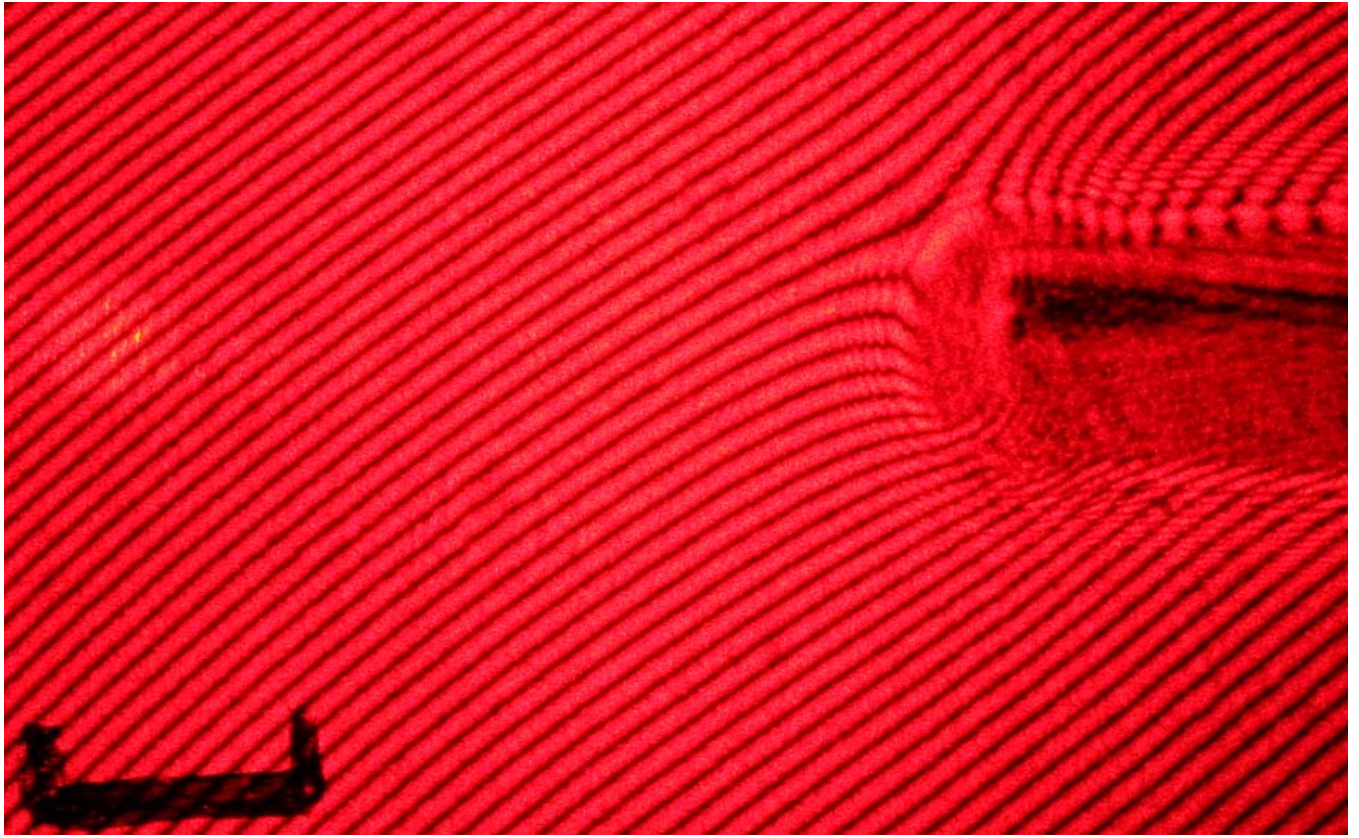


Επίσης από το επόμενο διάγραμμα μπορούμε να βρούμε το λόγο poisson ν . Όλα τα μεγέθη θα ταξινομηθούν στον τελικό πίνακα στη συνέχεια.

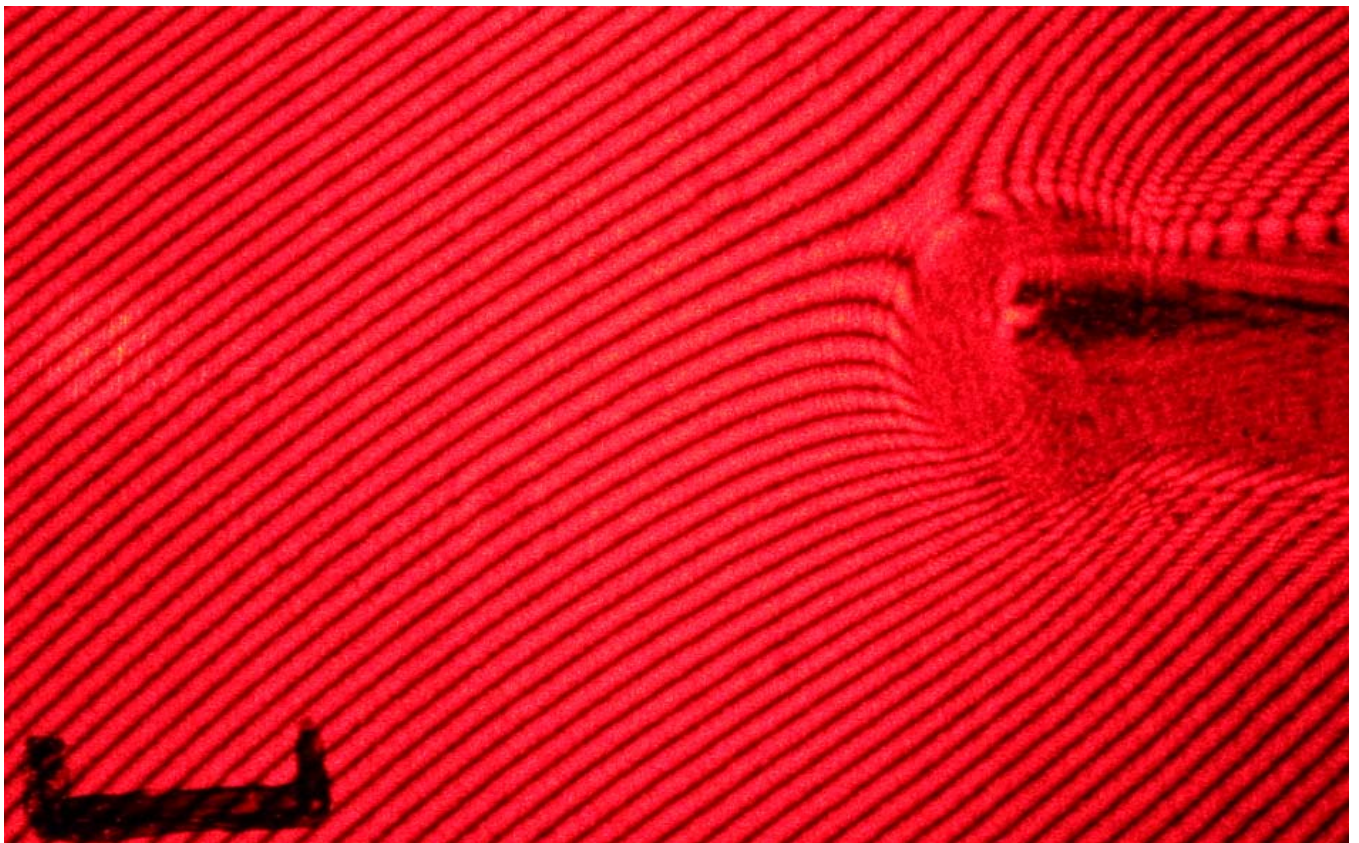


Όπως και στο πρώτο δοκίμιο, για κάθε εφελκυστικό φορτίο, σχηματίστηκαν και οι αντίστοιχες καυστικές πάνω στο πέτασμα αναφοράς, οι οποίες απεικονίζονται παρακάτω.

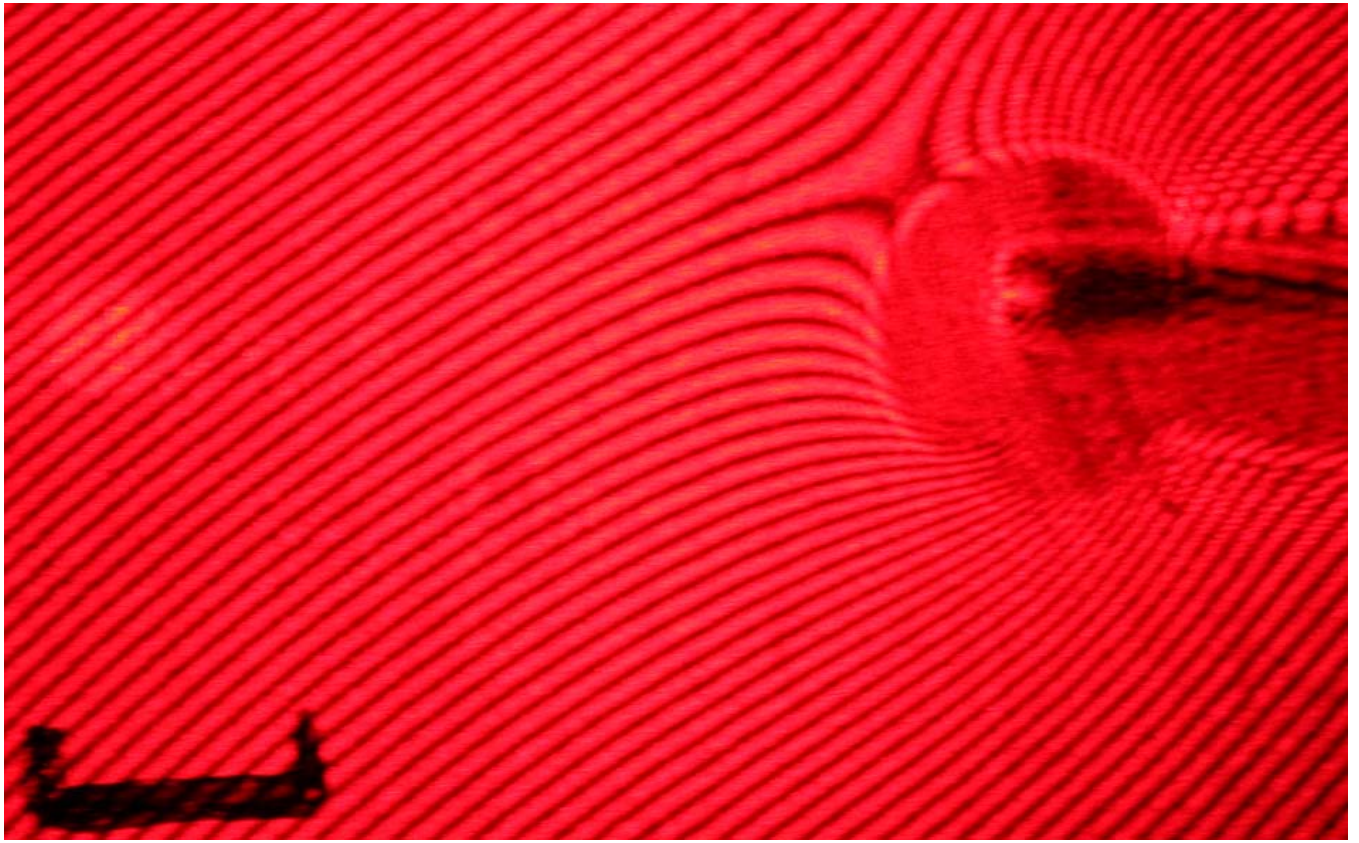
1-Για εφελκυστικό φορτίο 10 Κρ



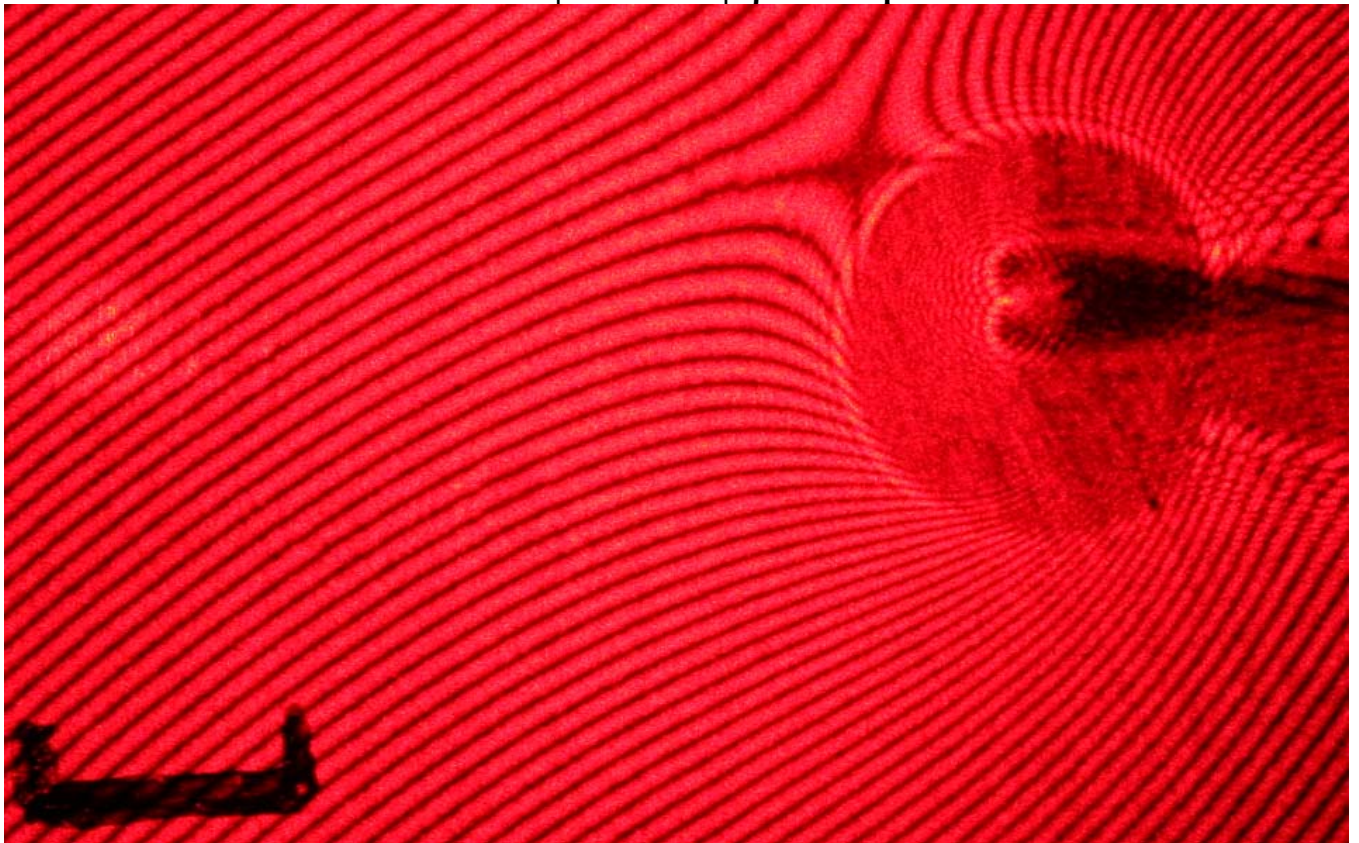
2-Για εφελκυστικό φορτίο 30 Κρ



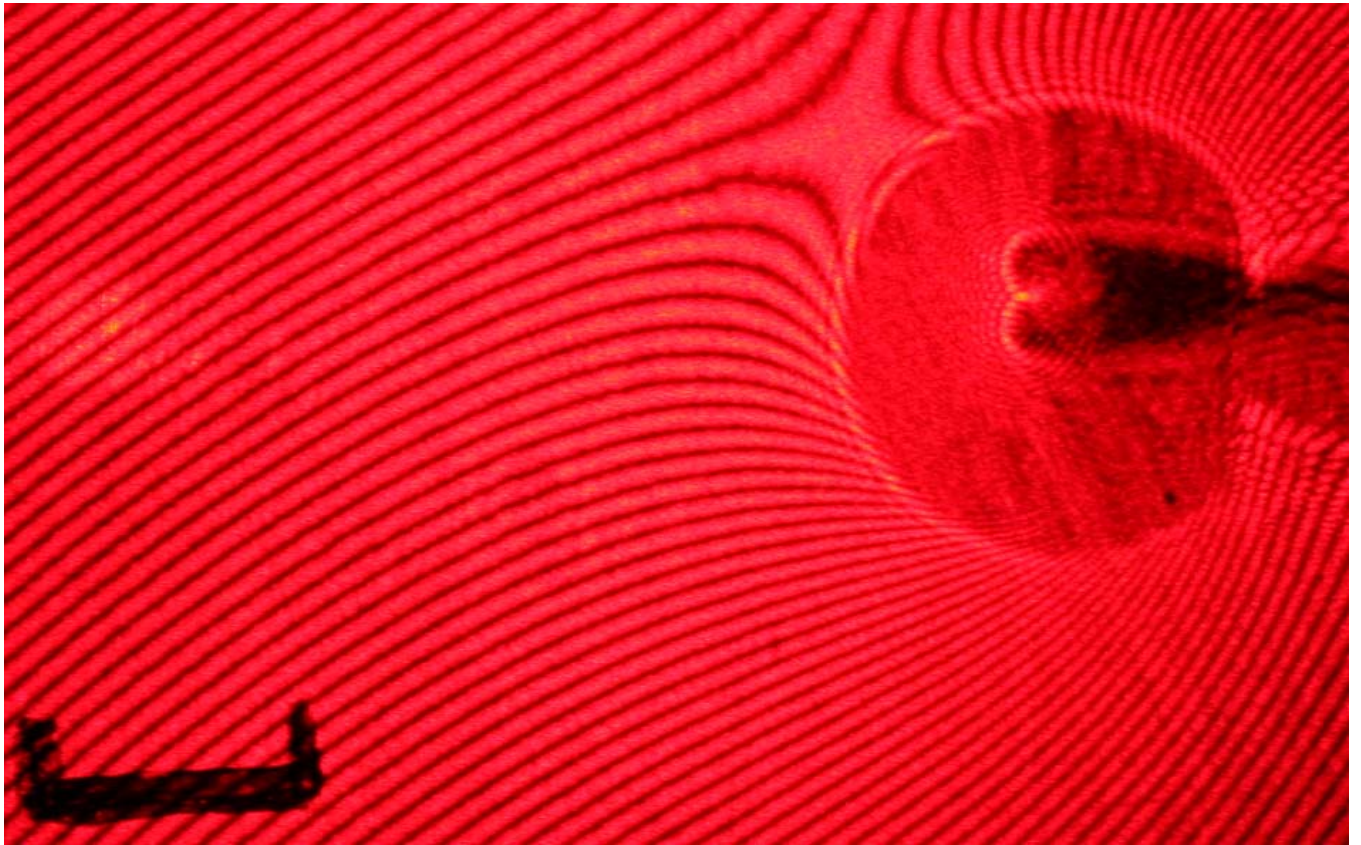
3-Για εφελκυστικό φορτίο 50 Kp



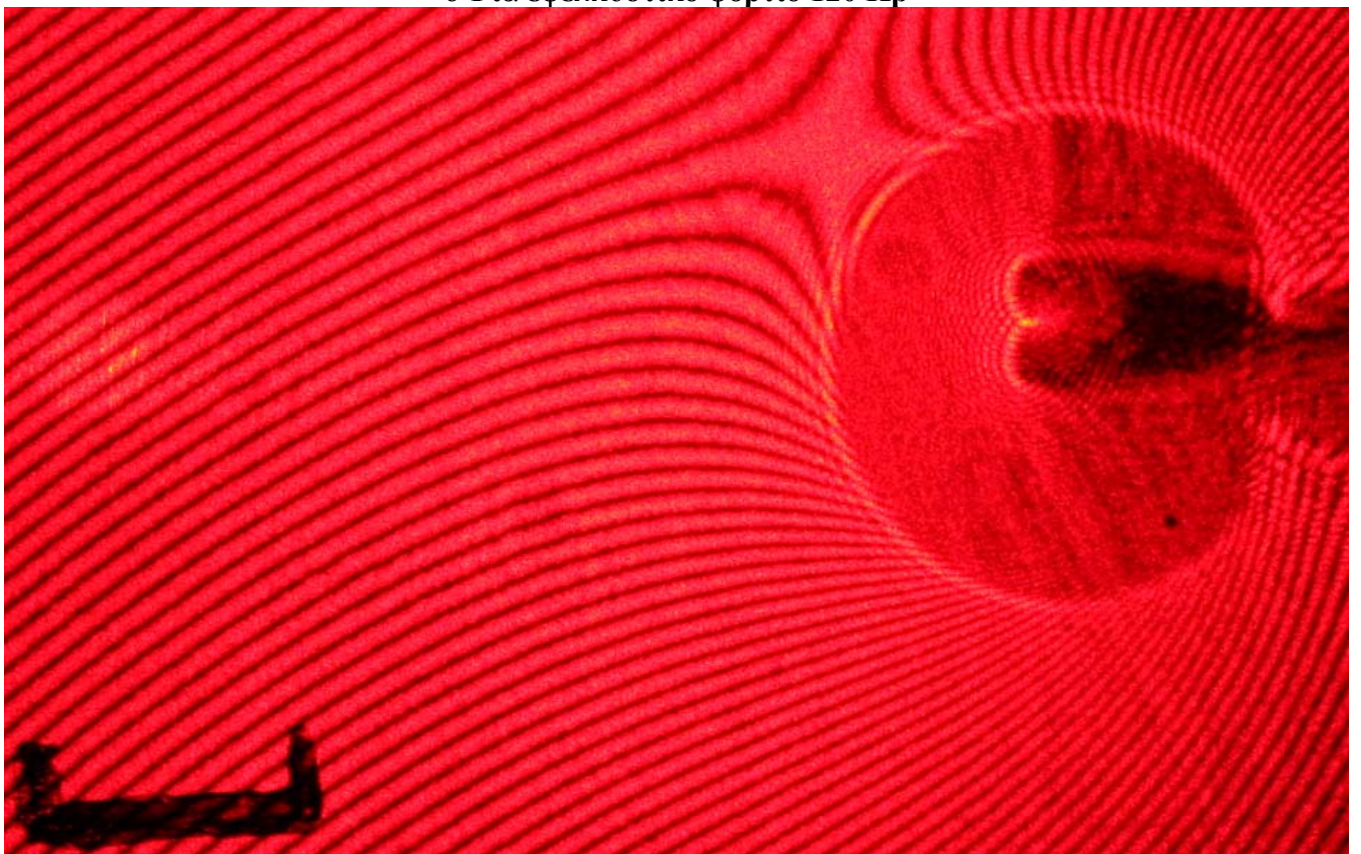
4-Για εφελκυστικό φορτίο 80 Kp



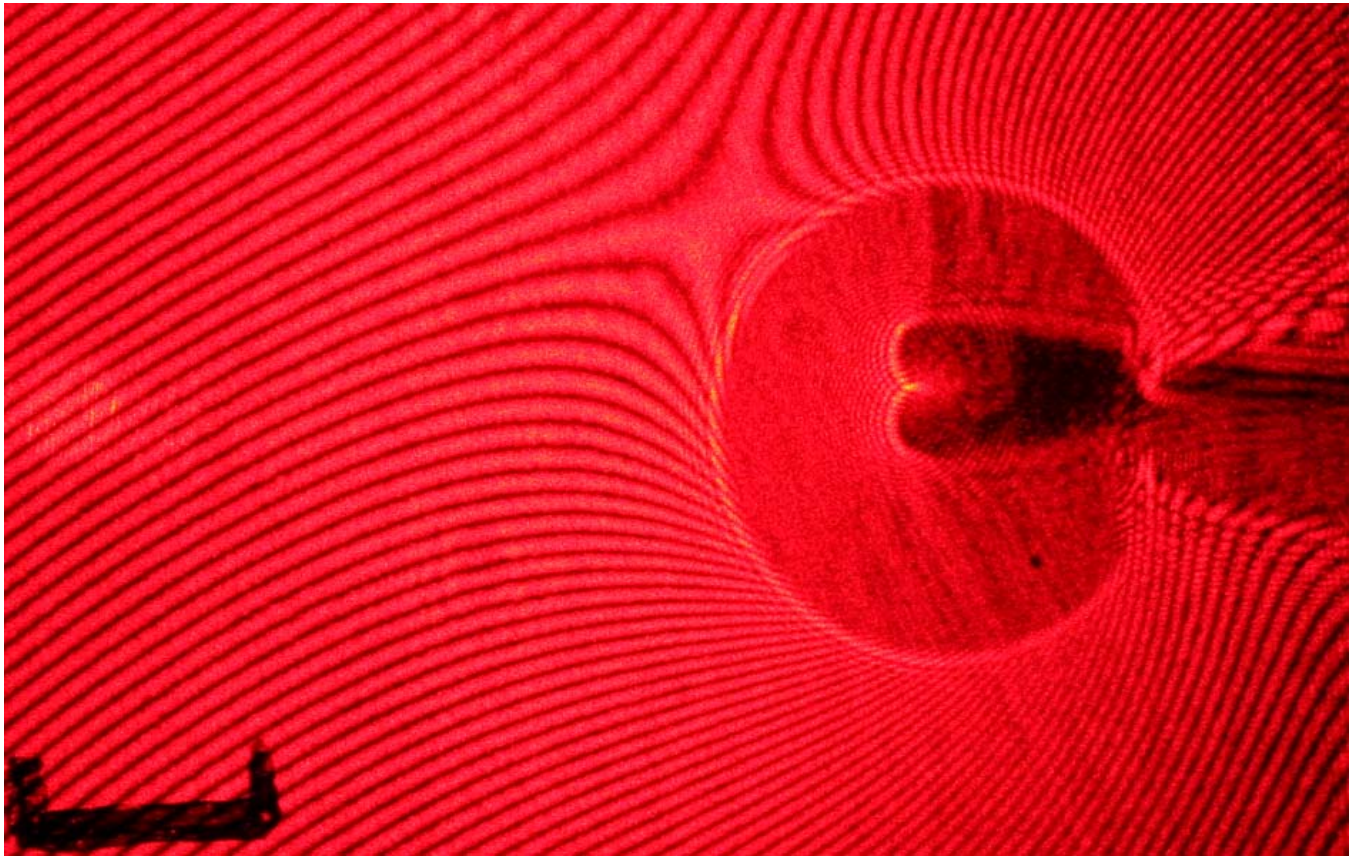
5-Για εφελκυστικό φορτίο 100 Κρ



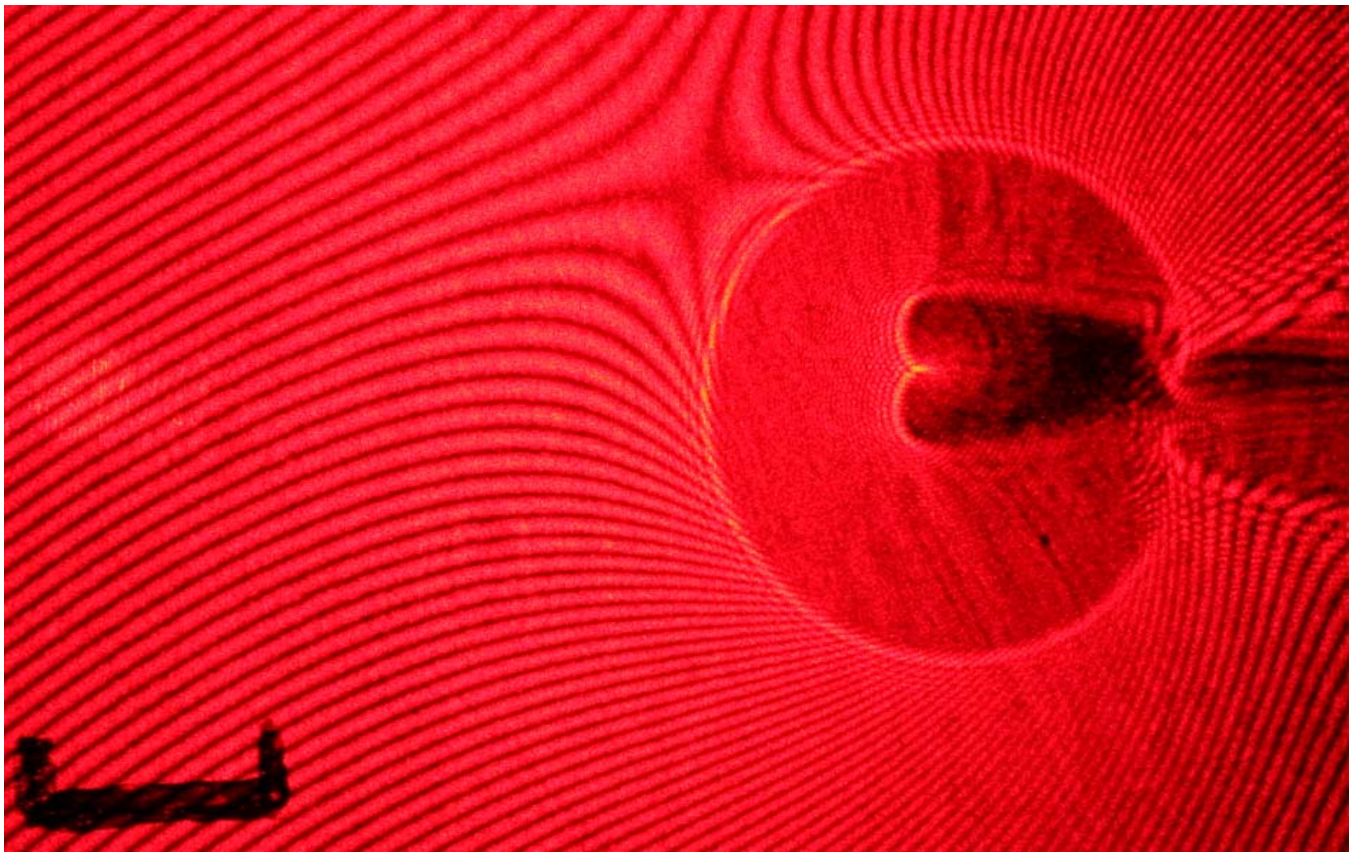
6-Για εφελκυστικό φορτίο 120 Κρ



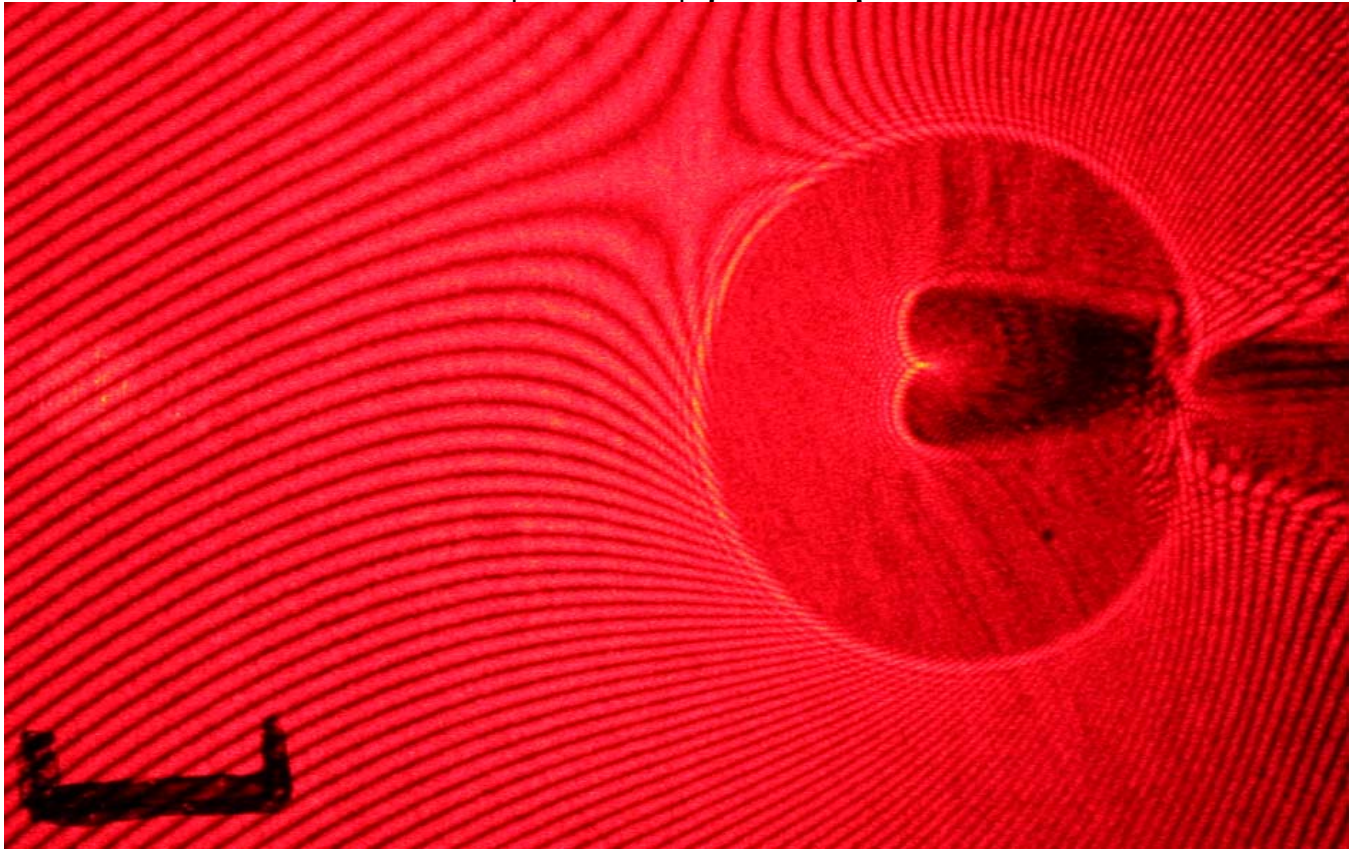
7-Για εφελκυστικό φορτίο 150 Kp



8-Για εφελκυστικό φορτίο 180 Kp



9-Για εφελκυστικό φορτίο 200 Κρ

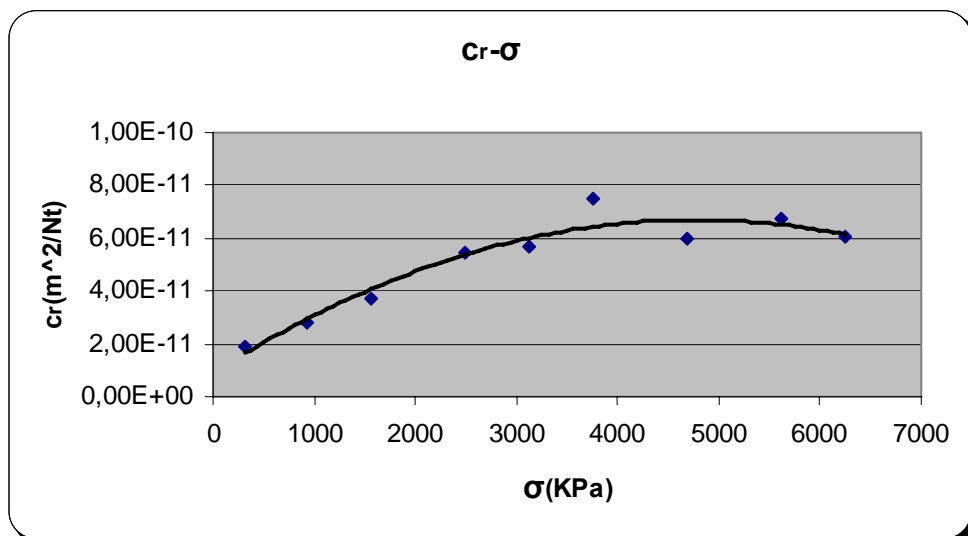


Τελικός πίνακας

P (Kp)	$\sigma=P/W*d$ (KPa)	D_t (m)	ν	E (GPa)	$c_f=\nu/E$ (m ² /Nt)	Δx (m)	c_r (m ² /Nt)	K_I (KPa*m ^{1/2})
10	312,5	0,036	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,013	$0,190*10^{-10}$	1981,16
30	937,5	0,039	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,015	$0,279*10^{-10}$	1648,06
50	1562,5	0,045	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,018	$0,372*10^{-10}$	1767,68
80	2500	0,055	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,023	$0,549*10^{-10}$	1978,11
100	3125	0,062	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,026	$0,565*10^{-10}$	2593,27
120	3750	0,065	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,028	$0,749*10^{-10}$	2201,50
150	4687,5	0,064	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,027	$0,599*10^{-10}$	3470,81
180	5625	0,068	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,029	$0,671*10^{-10}$	3605,44
200	6250	0,071	0,358	3,068	$1,167*10^{-10}$	0,030	$0,609*10^{-10}$	4425,24

Τα Δx και D_t υπολογίζονται από τις παραπάνω καυστικές. Μόνο στις καυστικές 7,8 και 9,ο μάρτυρας είναι ίσος με 3,5 cm λόγω σμίκρυνσης των δύο διαστάσεων των εικόνων κατά 10 % από τις προηγούμενες. Αυτό έγινε για να απεικονίζονται και ο μάρτυρας και η καυστική στην ίδια εικόνα και θα μας χρειαστεί στον υπολογισμό του συντελεστή K_I .

Από τη σχέση (1) συμπληρώνουμε την τιμή του c_r στον παραπάνω πίνακα. Παρακάτω απεικονίζεται η γραφική παράσταση της τασεοπτικής σταθεράς c_r , συναρτήσεως της εφελκυστικής τάσης σ .



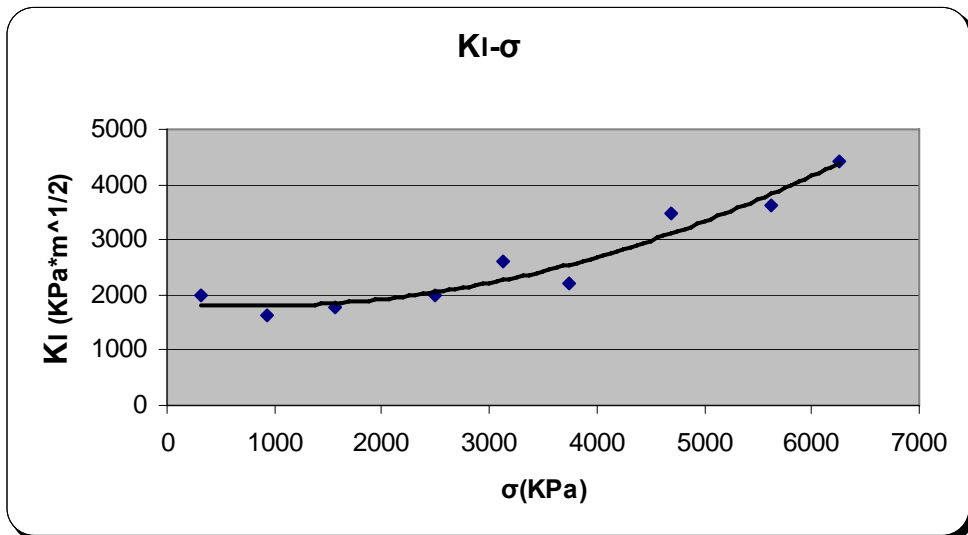
Για τον υπολογισμό του συντελεστή K_I παίρνουμε τη σχέση:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\epsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_r} \left(\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{\delta_t} \right)^{5/2} \quad \text{όπου η } D_{t_{\text{πστ.}}} \text{ υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{2} = \frac{D_t}{3,9} \quad \text{όπου 2 και 3,9 είναι τα μήκη του μάρτυρα σε cm στο πέτασμα αναφοράς και στις εκτυπωμένες καυστικές(φύλλο A4) αντίστοιχα.Στις τρεις}$$

τελευταίες καυστικές το μήκος του μάρτυρα σε φύλλο A4 είναι ίσο με 3,5cm.Άρα στην παραπάνω σχέση θα έχουμε: $\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{2} = \frac{D_t}{3,5}$, όπου θα βρούμε τη $D_{t_{\text{πστ.}}}$ (σε m) για κάθε μέτρηση και ακολούθως το συντελεστή K_I .

Παρακάτω σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση του συντελεστή K_I , συναρτήσεως της εφελκυστικής τάσης σ .



Δοκίμιο 3₀ (Lexan)

- Πλάτος δοκιμίου: $W = 80mm$
- Πάχος δοκιμίου: $d = 4,5mm$
- Μήκος ρωγμής: $a = 1cm$

	Εφελκυστικό φορτίο P(KP)	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}
1 _η	10	-4	2
2 _η	30	234	-88
3 _η	50	462	-173
4 _η	80	805	-302
5 _η	100	1036	-389
6 _η	120	1261	-473
7 _η	150	1600	-601
8 _η	180	1946	-730
9 _η	200	2149	-807
10 _η	220	2403	-902
11 _η	240	2640	-991

Με την ίδια διαδικασία, το φορτίο για να γίνει τάση, πρέπει να διαιρεθεί με τη διατομή του δοκιμίου. Άρα: $\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d}$

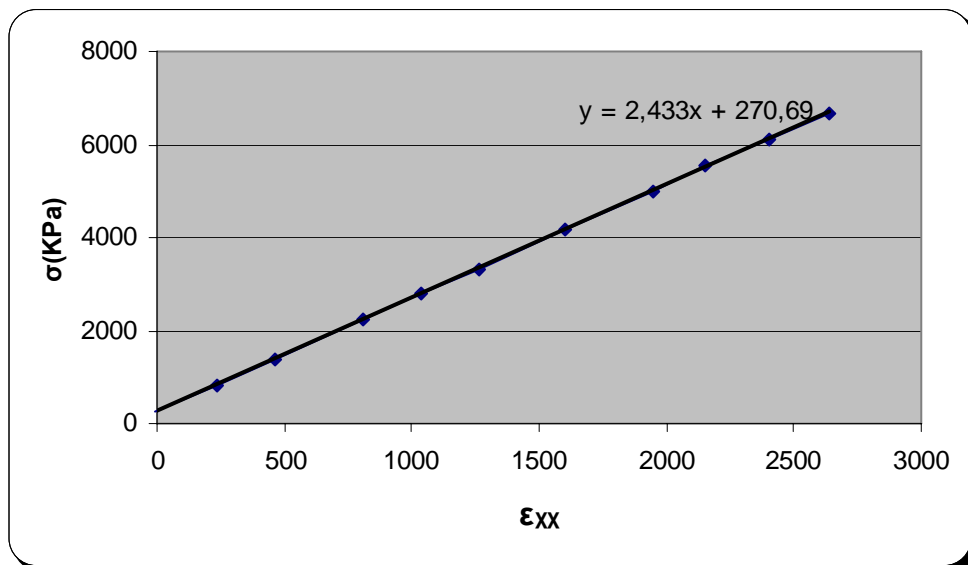
Έτσι για την 1_η μέτρηση έχουμε:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{W \cdot d} \Rightarrow \sigma = \frac{10}{80 \cdot 4,5} \left(\frac{KP}{mm^2} \right) \Rightarrow \sigma = \frac{10 \cdot 10}{80 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{Nt}{m^2} \right) \Rightarrow \sigma = 277,78 KPa$$

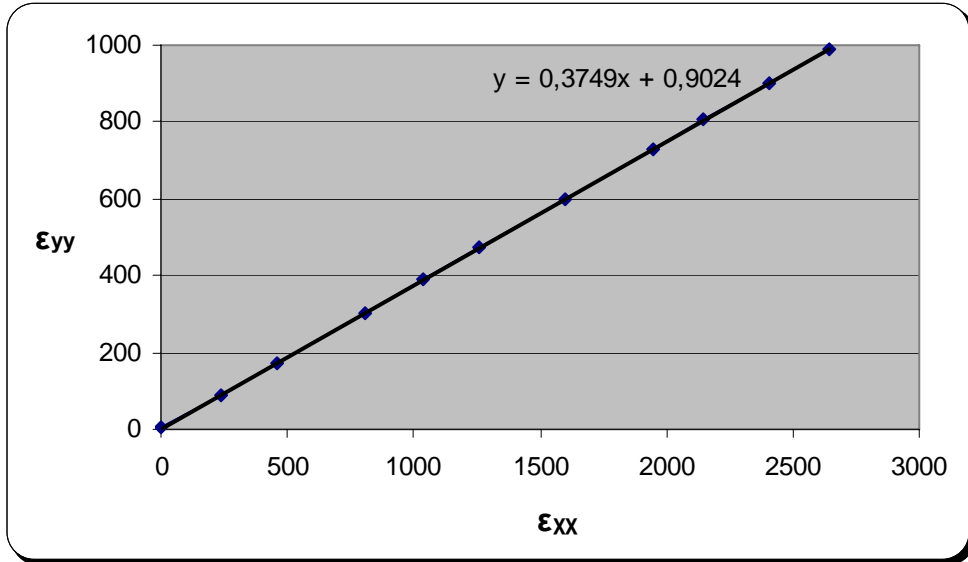
Με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες μετρήσεις, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μέτρηση	Εφελκυστικό φορτίο P (ΚΡ)	Εφελκυστική τάση σ (ΚΡα)	$\epsilon_{xx}(*10^{-6})$	$\epsilon_{yy}(*10^{-6})$
1 _η	10	277,78	-4	2
2 _η	30	833,33	234	-88
3 _η	50	1388,89	462	-173
4 _η	80	2222,22	805	-302
5 _η	100	2777,78	1036	-389
6 _η	120	3333,33	1261	-473
7 _η	150	4166,67	1600	-601
8 _η	180	5000	1946	-730
9 _η	200	5555,56	2149	-807
10 _η	220	6111,11	2403	-902
11 _η	240	6666,67	2640	-991

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας E, από το παρακάτω διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων βρίσκοντας την εξίσωση της ευθείας.

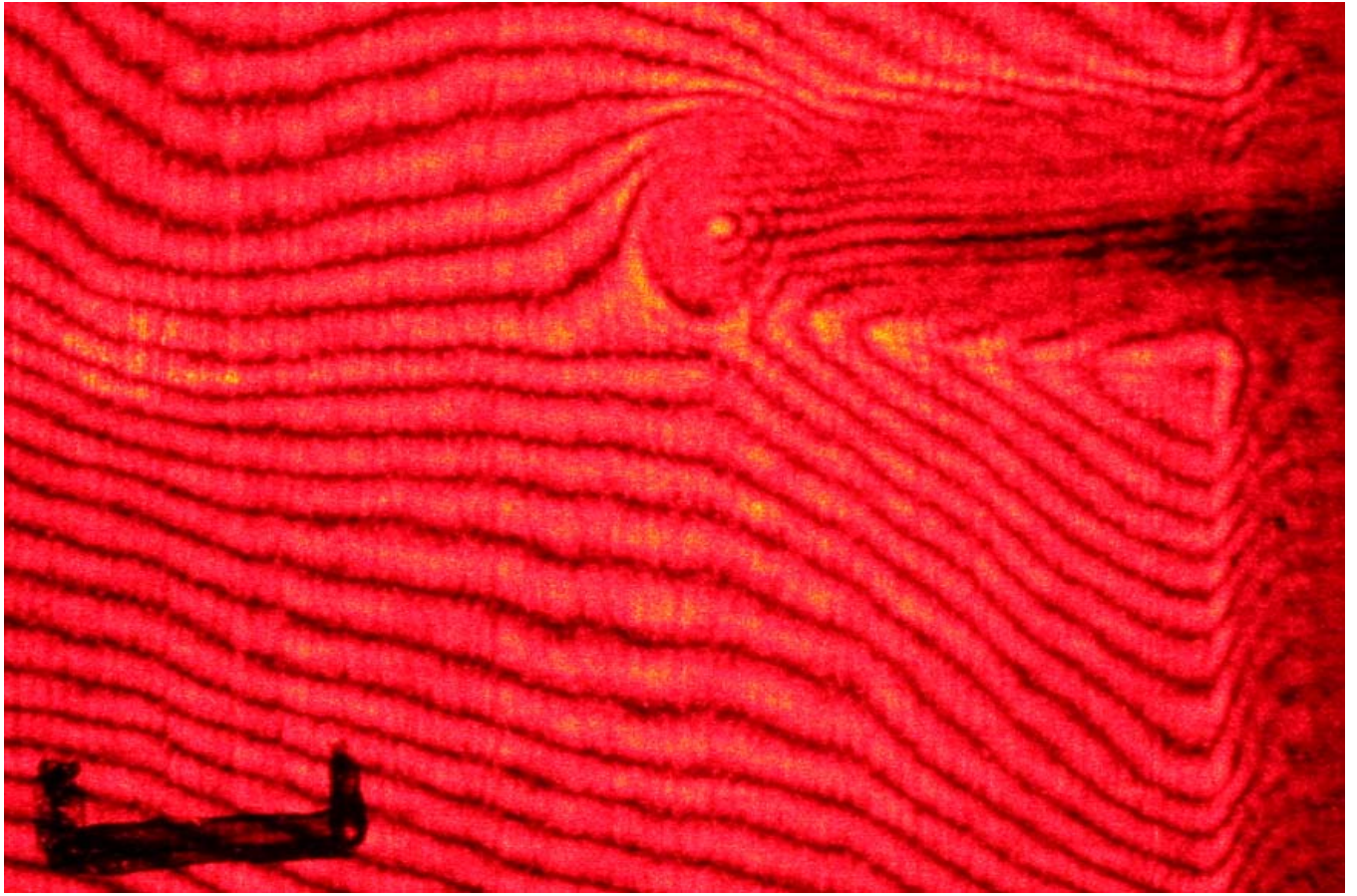


Στη συνέχεια θα βρούμε το λόγο poisson ν , από το επόμενο διάγραμμα. Όλα τα μεγέθη θα ταξινομηθούν στον τελικό πίνακα.

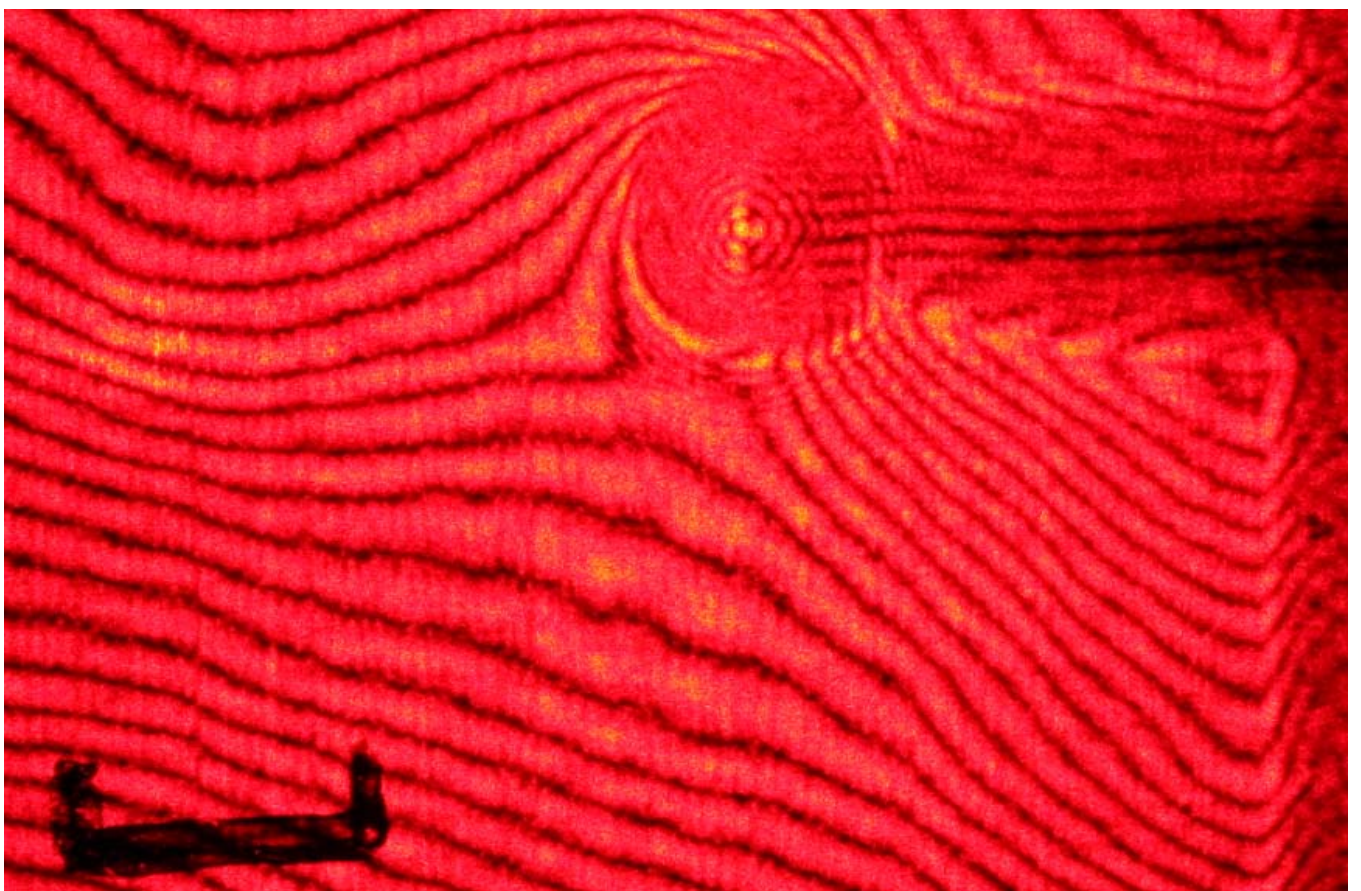


Για κάθε εφελκυστικό φορτίο, σχηματίστηκαν και οι αντίστοιχες καυστικές πάνω στο πέτασμα αναφοράς, οι οποίες ελήφθησαν και απεικονίζονται παρακάτω.

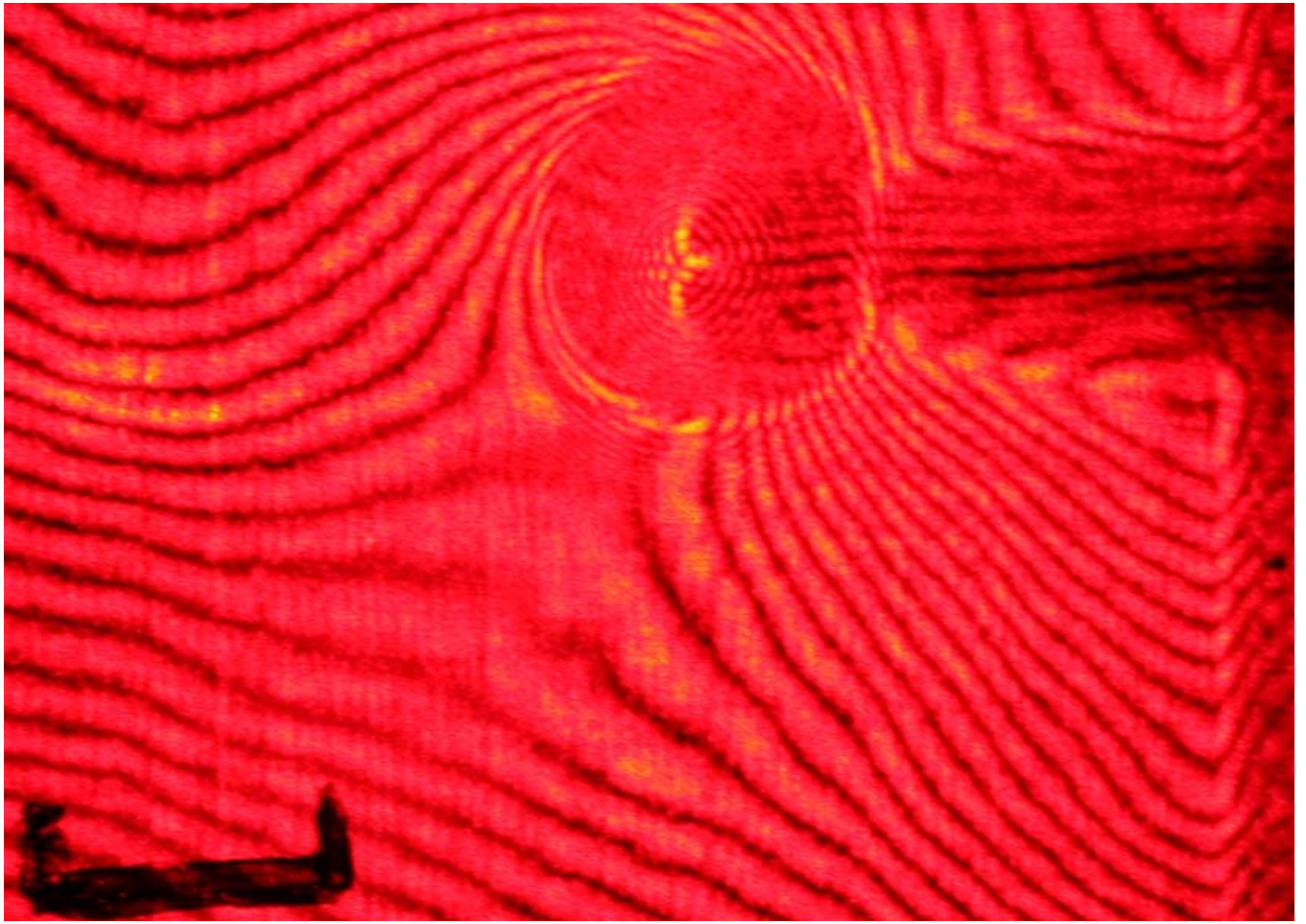
1-Για εφελκυστικό φορτίο 10 Κρ



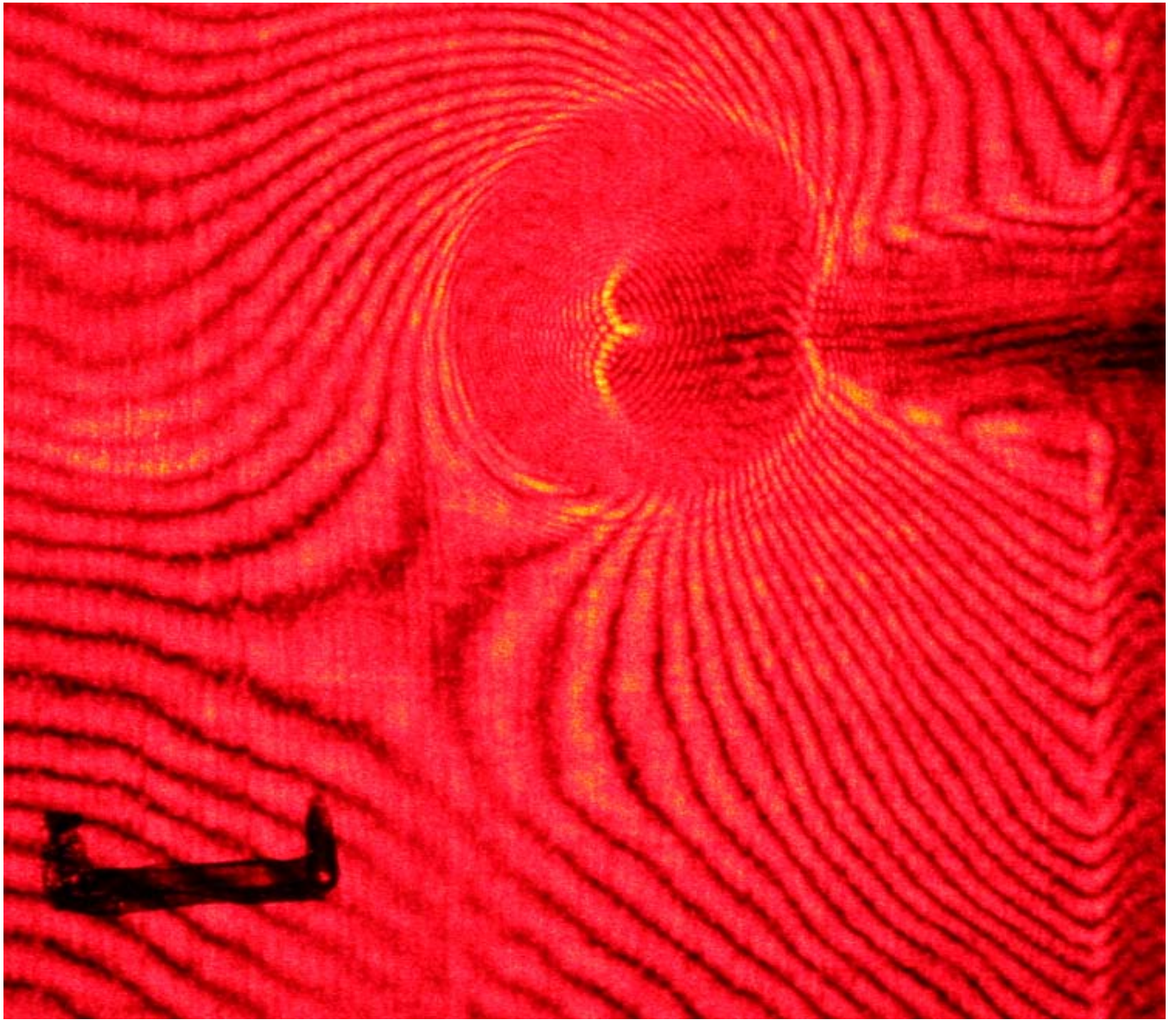
2-Για εφελκυστικό φορτίο 30 Κρ



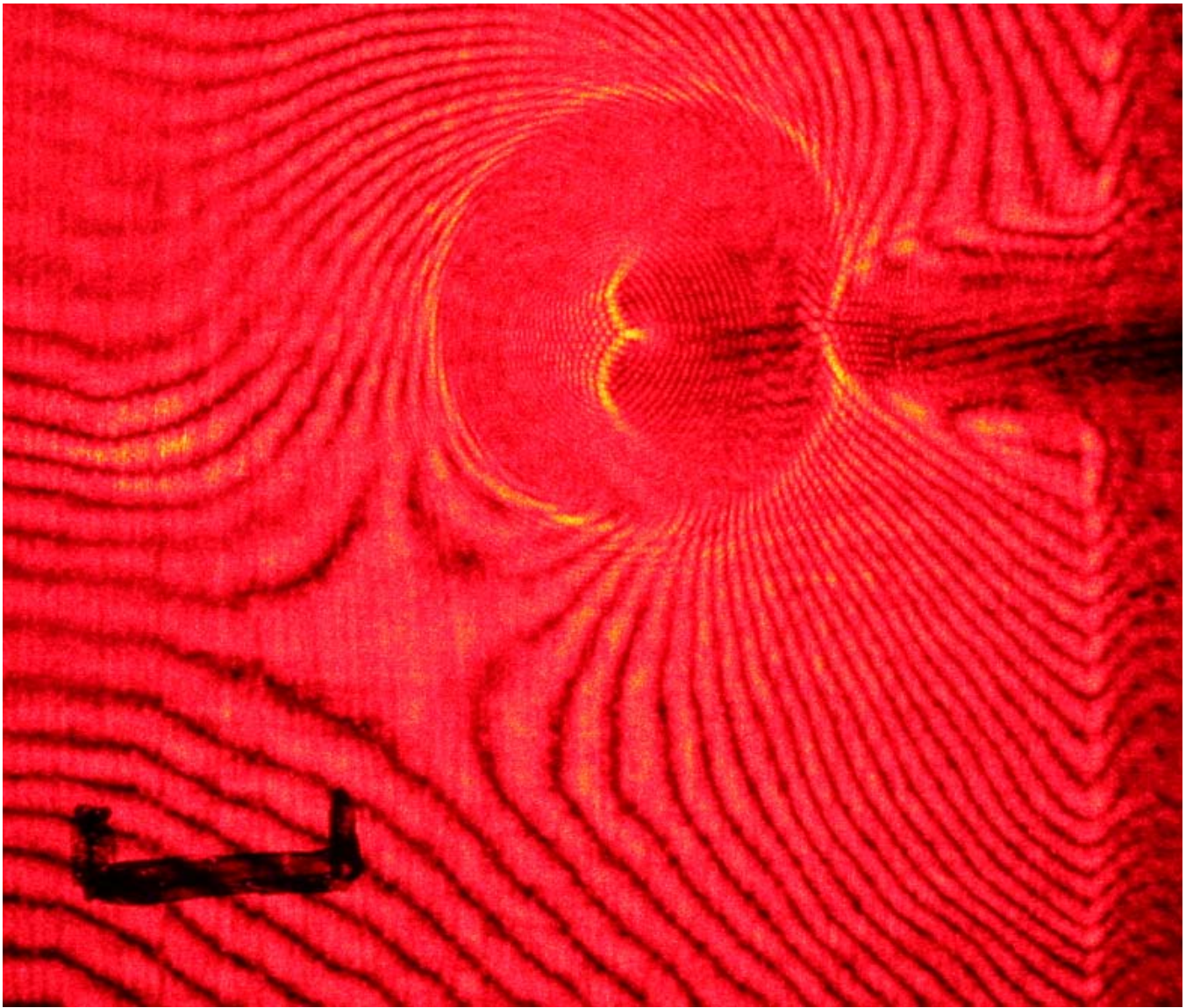
3-Για εφελκυστικό φορτίο 50 Κρ



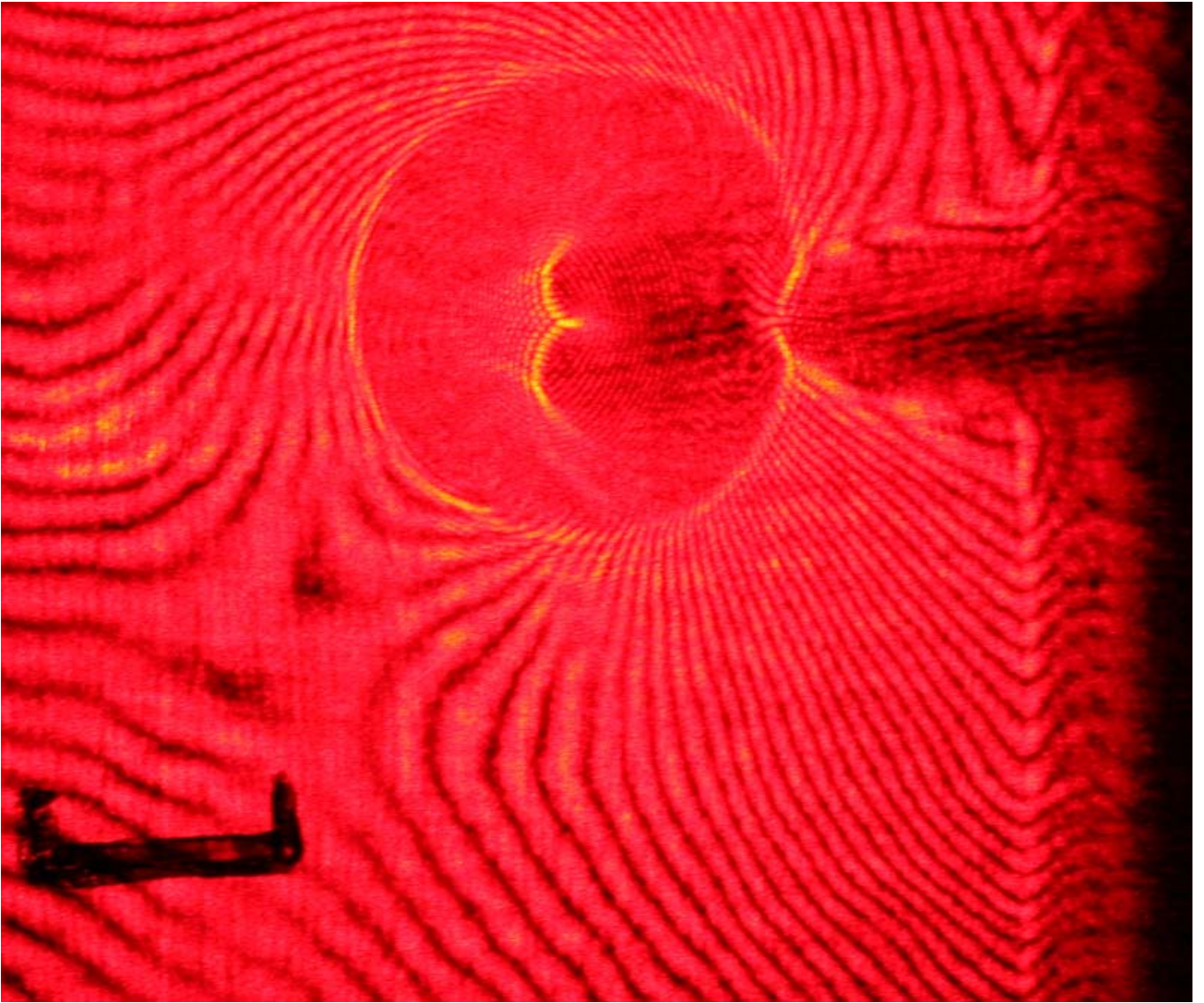
4-Για εφελκυστικό φορτίο 80 Κρ



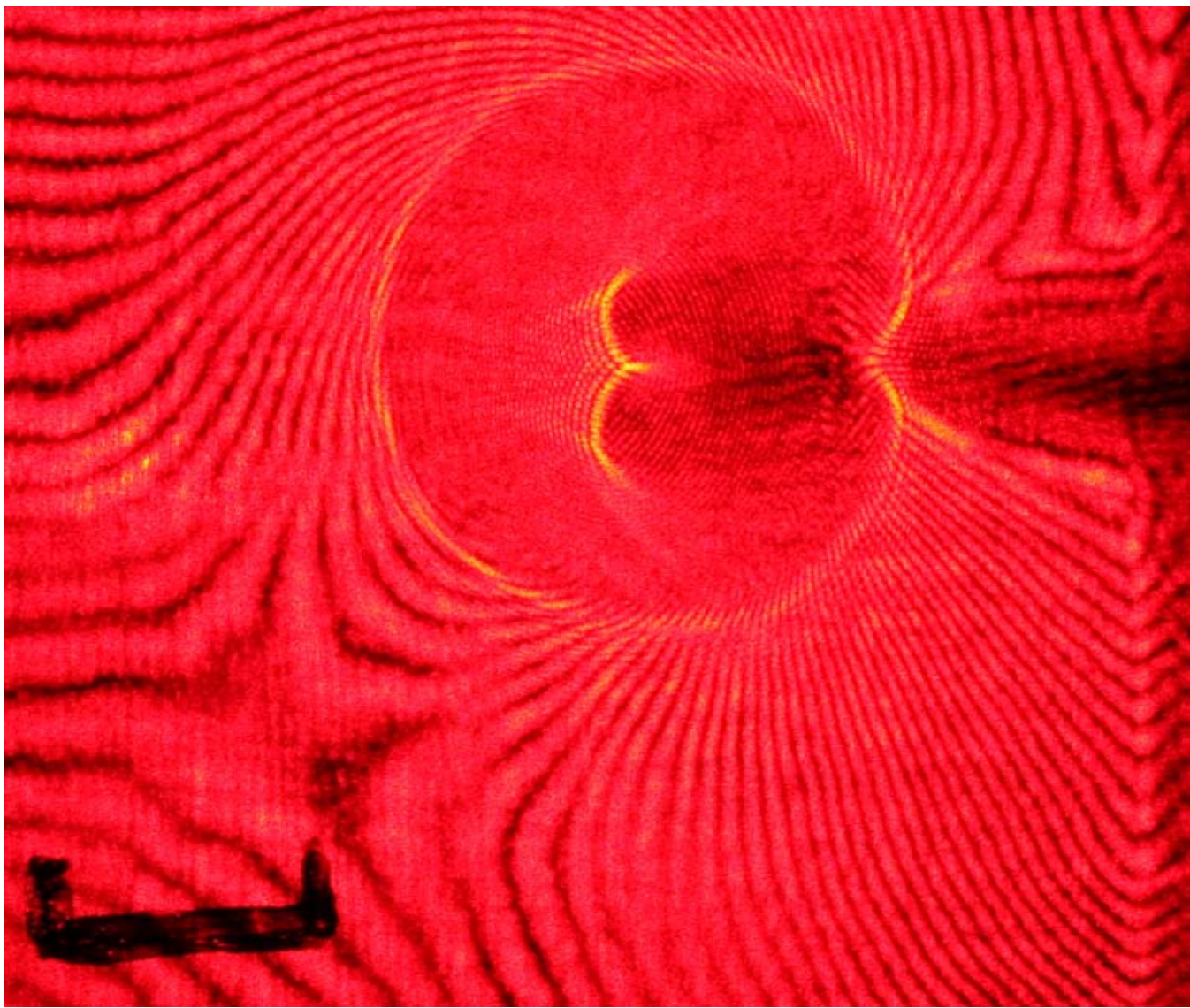
5-Για εφελκυστικό φορτίο 100 Κρ



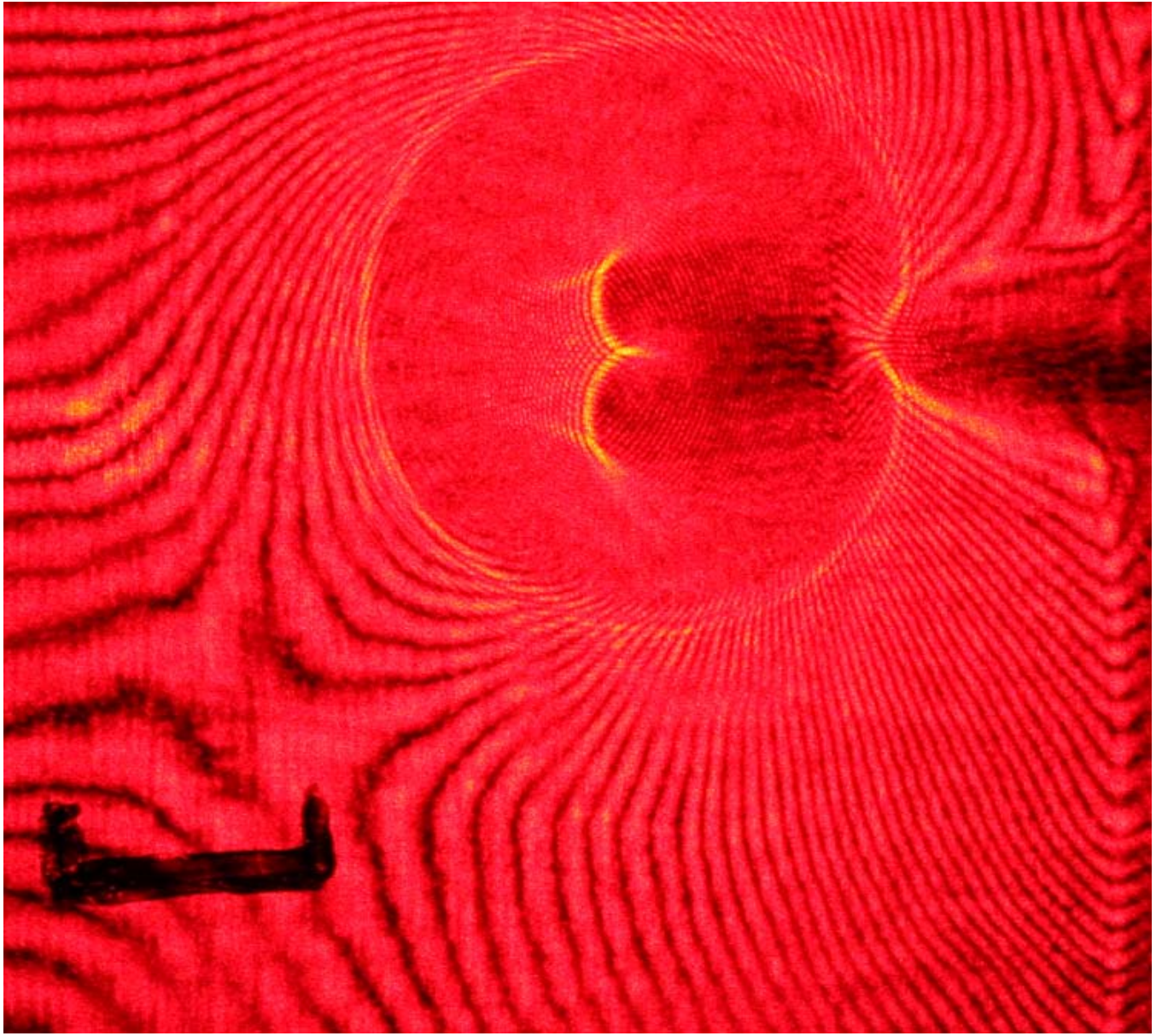
6-Για εφελκυστικό φορτίο 120 Κρ



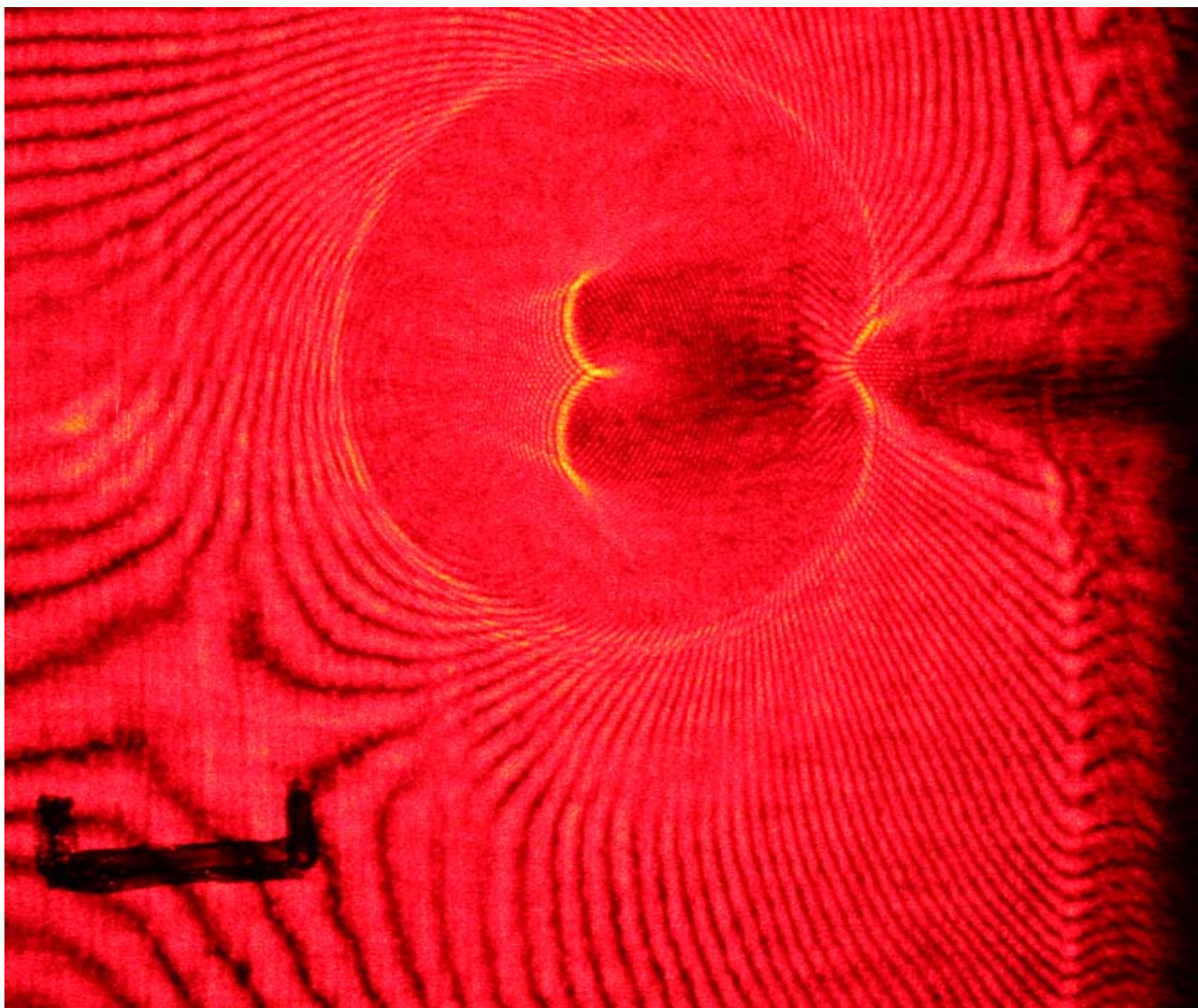
7-Για εφελκυστικό φορτίο 150 Kp



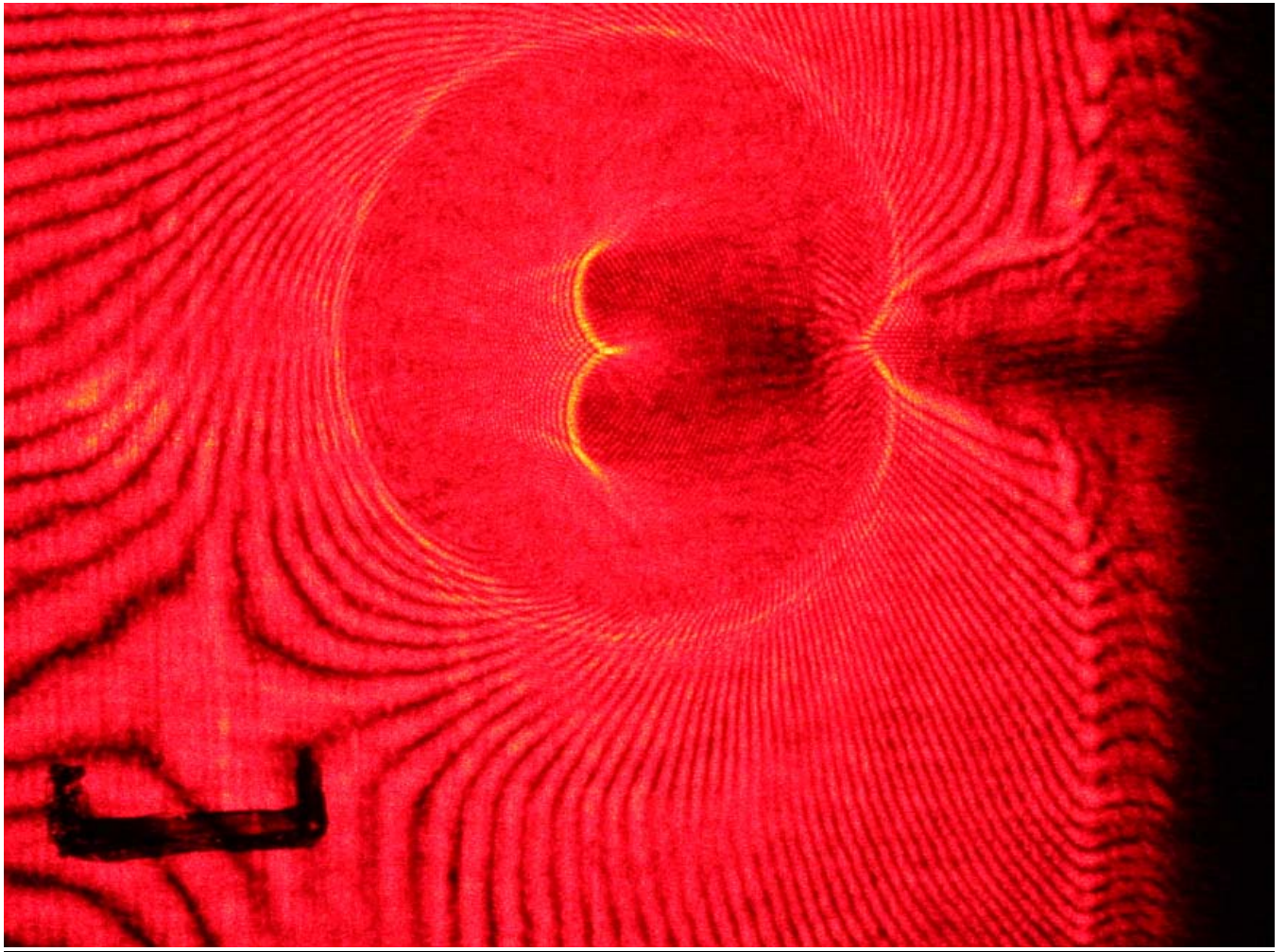
8-Για εφελκυστικό φορτίο 180 Κρ



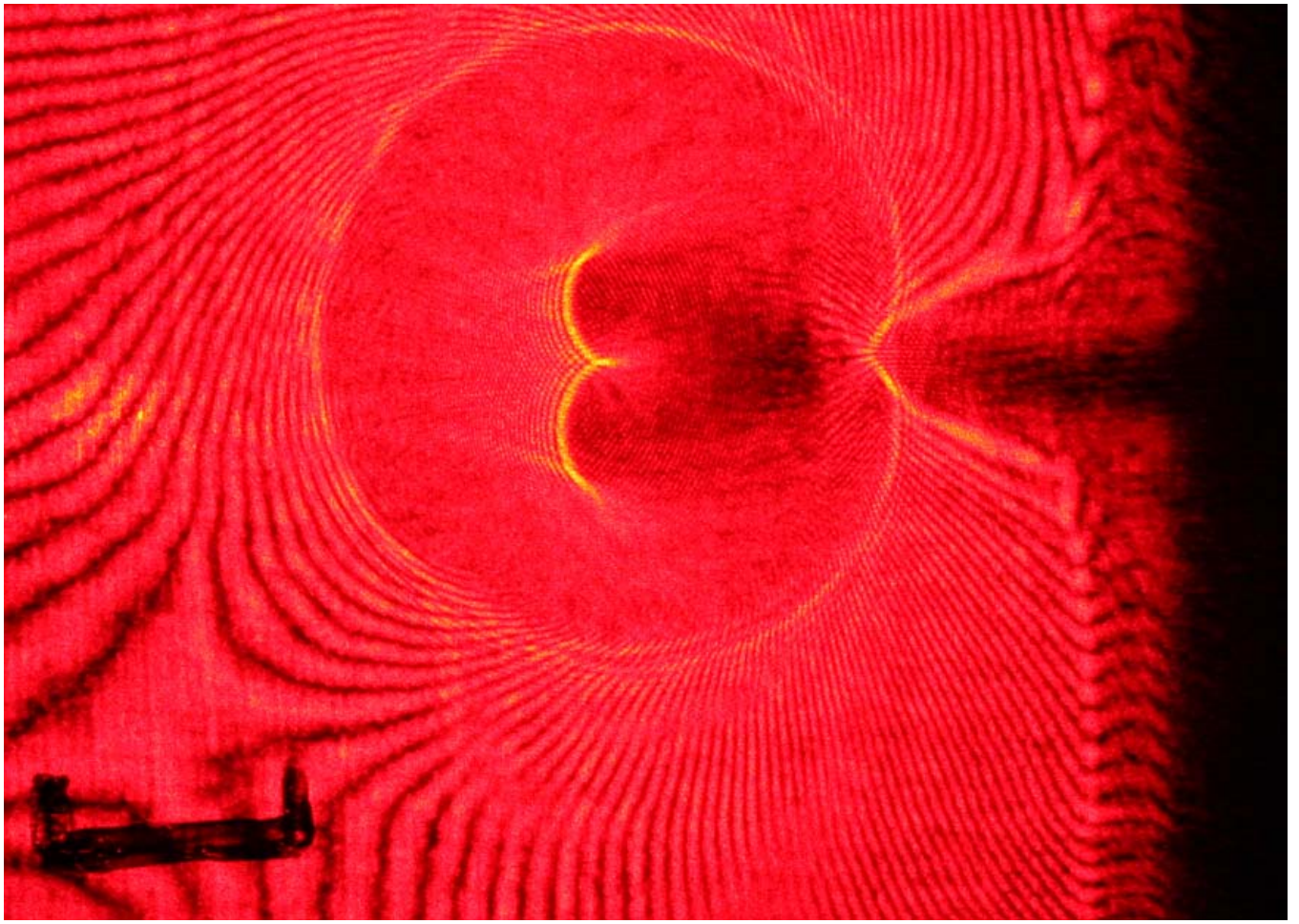
9-Για εφελκυστικό φορτίο 200 Κρ



10-Για εφελκυστικό φορτίο 220 Κρ



11-Για εφελκυστικό φορτίο 240 Kp

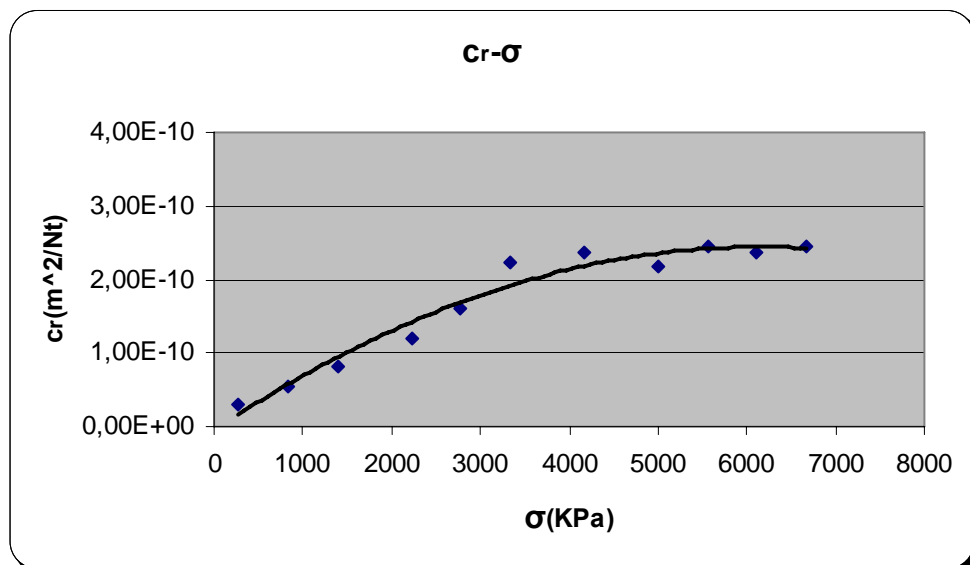


Για τις τιμές του c_r στον παρακάτω πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1), όπως στα δύο προηγούμενα δοκίμια.

Τελικός πίνακας

P (Kp)	$\sigma=P/W*d$ (KPa)	D_t (m)	ν	E (GPa)	$c_f=\nu/E$ (m ² /Nt)	Δx (m)	c_r (m ² /Nt)	K_I (KPa*m ^{1/2})
10	277,78	0,032	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,012	$0,312*10^{-10}$	663,78
30	833,33	0,042	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,017	$0,541*10^{-10}$	755,49
50	1388,89	0,052	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,022	$0,815*10^{-10}$	761,46
80	2222,22	0,064	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,028	$1,189*10^{-10}$	877,13
100	2777,78	0,067	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,030	$1,618*10^{-10}$	811,92
120	3333,33	0,07	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,032	$2,228*10^{-10}$	743,20
150	4166,67	0,085	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,039	$2,370*10^{-10}$	845,66
180	5000	0,092	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,042	$2,179*10^{-10}$	1185,79
200	5555,56	0,087	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,040	$2,456*10^{-10}$	1161,04
220	6111,11	0,085	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,039	$2,370*10^{-10}$	1379,50
240	6666,67	0,087	0,375	2,433	$1,541*10^{-10}$	0,040	$2,456*10^{-10}$	1410,89

Παρακάτω απεικονίζεται η γραφική παράσταση της τασεοπτικής σταθεράς c_r , συναρτήσει της εφελκυστικής τάσης σ .

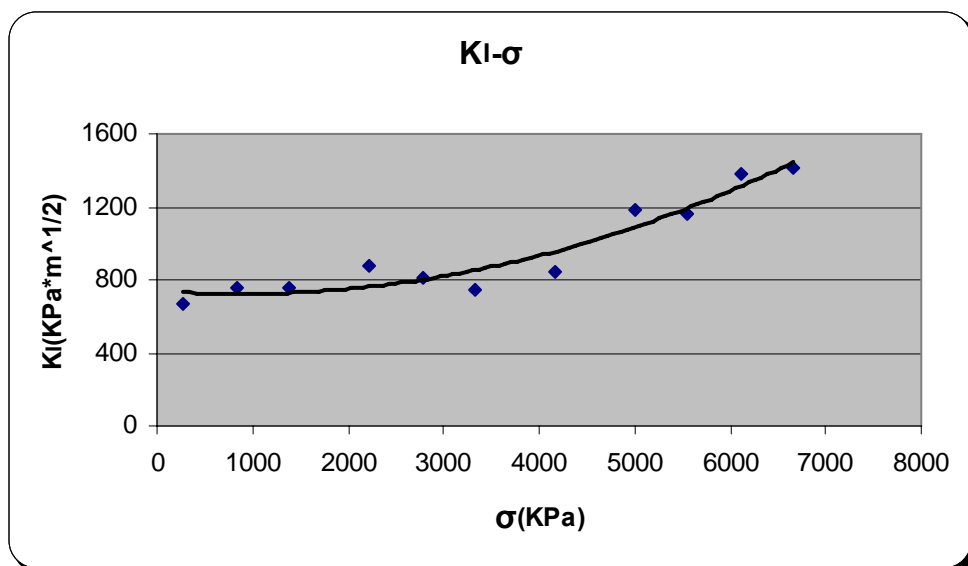


Για τον υπολογισμό του συντελεστή K_I παίρνουμε τη σχέση:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_r} \left(\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{\delta_t} \right)^{5/2} \quad \text{όπου η } D_{t_{\text{πστ.}}} \text{ υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{2} = \frac{D_t}{l}$ όπου 2 και l , είναι τα μήκη του μάρτυρα σε cm στο πέτασμα αναφοράς και στις εκτυπωμένες καυστικές(φύλλο A4) αντίστοιχα. Το μήκος του μάρτυρα l , δεν είναι το ίδιο σε όλες τις καυστικές του τρίτου δοκιμίου. Άρα στην παραπάνω σχέση θα έχουμε: $\frac{D_{t_{\text{πστ.}}}}{2} = \frac{D_t}{l}$, όπου θα βρίσκουμε τη $D_{t_{\text{πστ.}}}$ (σε m) για κάθε μέτρηση και ακολούθως το συντελεστή K_I .

Στη συνέχεια παραθέτουμε τη γραφική παράσταση του συντελεστή K_I συναρτήσει της εφελκυστικής τάσης σ .



4.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τις γραφικές παραστάσεις c_r - σ παρατηρούμε ότι με την αύξηση της τάσης, αυξάνεται και η τιμή της τασεοπτικής σταθεράς c_r και στα τρία δοκίμια, έως ότου αυτή σταθεροποιηθεί όταν η τάση σ πάρει μεγάλες τιμές. Σε μεγάλα φορτία δηλαδή η τασεοπτική σταθερά c_r καταλήγει σε τιμές που είναι από $0,7-0,8(*10^{-10})$ για το plexiglass και $2,5(*10^{-10})$ για το Lexan. Οι τιμές για το υλικό plexiglass είναι σχετικά μικρές, αλλά αυτό μπορεί να οφείλεται στην συγκεκριμένη παρτίδα παραγωγής των δοκιμίων (κάθε παρτίδα έχει και διαφορετικές ιδιότητες) ή και στην παλαιότητα των συγκεκριμένων δοκιμίων.

Για μικρές τιμές της τάσης σ , όπου έχουμε και αντίστοιχα μικρές τιμές της τασεοπτικής σταθεράς c_r , η διάμετρος D_t της καυστικής είναι και αυτή μικρή όπως φαίνεται και στους τελικούς πίνακες στα παραπάνω, αλλά και από τις εικόνες των σχηματιζόμενων καυστικών. Αντίστοιχα για μεγάλες τιμές της τάσης σ και της τασεοπτικής σταθεράς c_r , η διάμετρος της καυστικής μεγαλώνει.

Η εντατική κατάσταση στην περιοχή του άκρου της ρωγμής είναι τριαξονική, μέχρι μιας περιορισμένης απόστασης από το άκρο, μετά από την οποία πλησιάζει σε επίπεδη εντατική (plane stress) στην οποία ισχύουν:

$$\varepsilon_z \neq 0, \sigma_z = 0 \text{ και } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

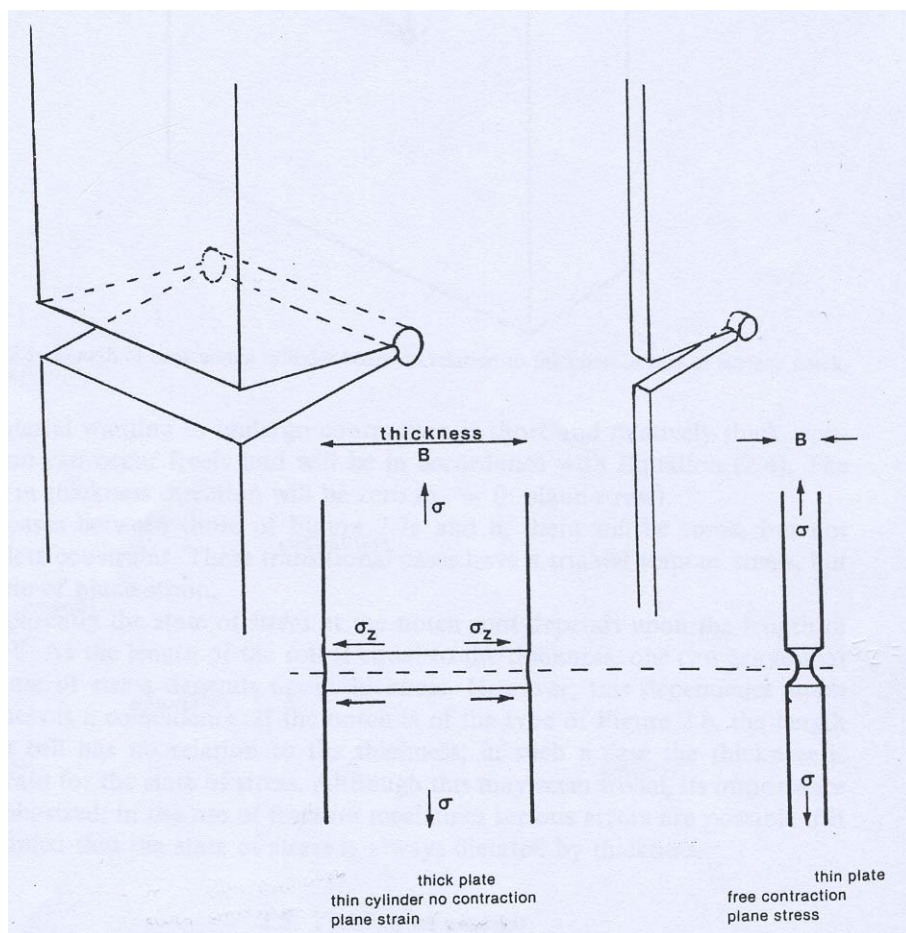
Αυτή η απόσταση εξαρτάται κυρίως από το λόγο του μήκους της ρωγμής με το πάχος του δοκιμίου. Πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής έχουμε επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain) στην οποία ισχύουν:

$$\varepsilon_z = 0, \sigma_z \neq 0 \text{ και } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

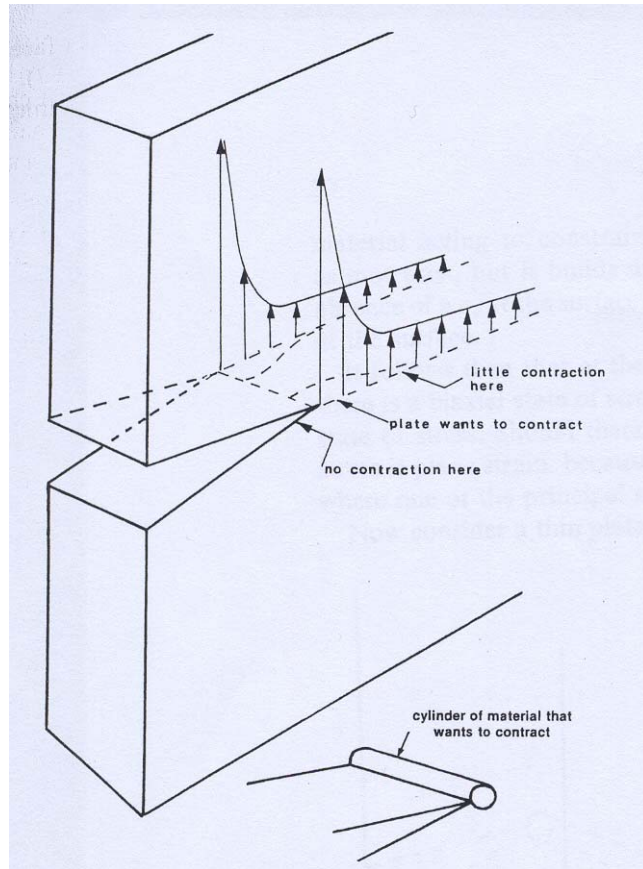
Η τριαξονικότητα μπορεί να χαρακτηριστεί από έναν εμπειρικό συντελεστή k που φαίνεται στη σχέση: $\sigma_z = k\nu(\sigma_x + \sigma_y)$, όπου σ_z είναι η ορθή τάση κάθετη στο επίπεδο του δοκιμίου. Ο συντελεστής k παίρνει την τιμή 0 για επίπεδη εντατική κατάσταση και την τιμή 1 για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση.

Όταν η τασεοπτική σταθερά c_r αυξάνει, τότε η κατάσταση τείνει στην επίπεδη εντατική-plane stress (λεπτό δοκίμιο), ενώ όταν μικραίνει, η κατάσταση τείνει στην επίπεδη παραμορφωσιακή-plane strain (παχύ δοκίμιο) – σχήμα 1. Στην ενδιάμεση κατάσταση ισχύει $\varepsilon_z \neq 0$, αλλά και $\sigma_z \neq 0$ με μικρή όμως τιμή. Τα παραπάνω φαίνονται και στα σχήματα που ακολουθούν. Η αλλαγή αυτή των δύο καταστάσεων πραγματοποιείται με απότομη μεταβολή. Στο σημείο αυτό, αν μετρήσουμε το πάχος του δοκιμίου, κυμαίνεται περίπου στα 3 mm. Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I όμως για τον οποίο ισχύει $K_I = f \cdot \sigma \sqrt{\pi a}$, δεν πρέπει να αλλάζει με τη μεταβολή αυτή, γι' αυτό σε μικρές τιμές της c_r έχουμε μικρή διάμετρο καυστικής και σε μεγάλες τιμές της c_r , έχουμε μεγάλη διάμετρο καυστικής όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έτσι ώστε ο συντελεστής K_I να παραμένει σταθερός.

Από τις γραφικές παραστάσεις K_I -σ παρατηρούμε ότι με την αύξηση της τάσης σ , η μεταβολή του συντελεστή εντάσεως των τάσεων είναι αύξουσα. Έτσι, υπολογίζοντας το συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_I , μπορούμε να προσδιορίσουμε το τασικό πεδίο στο άκρο της ρωγμής, όπου στο σχήμα 2 φαίνεται ότι όσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο άκρο της ρωγμής, οι τάσεις γίνονται πάρα πολύ μεγάλες.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΕΩΝ-Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων, Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος, Εκδόσεις Κλειδάριθμος
2. FRACTURE MECHANICS-The Experimental Method of Caustics and the Det.-Criterion of Fracture, George A. Papadopoulos, Springer-Verlag
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, Ν. Ανδριανόπουλος, Ε. Κυριαζή, Κ. Λιακόπουλος, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1991
4. FRACTURE MECHANICS, H.L. Ewalds, R.I.H. Wanhill
5. FRACTURE MECHANICS-Criteria and Applications E.E. Gdoutos, Kluwer Academic Publishers
6. ELEMENTARY ENGINEERING FRACTURE MECHANICS, David Broek, Martinus Nijhoff Publishers
7. THE PRACTICAL USE OF FRACTURE MECHANICS, David Broek, Kluwer Academic Publishers