

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΝΑΥΤΙΚΗ & ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ & ΕΠΙΣΤΗΜΗ”

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΑΝΤΟΧΗΣ
ΓΑΣΤΡΑΣ ΠΛΟΙΟΥ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΧΥΔΗΝ

Επιβλέπων καθηγητής
Ε. Σ. ΣΑΜΟΥΗΛΙΔΗΣ

Μεταπτυχιακός Φοιτητής
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΧΑΛΑΣΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2009

Π. ΧΑΛΑΣΤΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΑΝΤΟΧΗΣ
ΓΑΣΤΡΑΣ ΠΛΟΙΟΥ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΧΥΔΗΝ

Επιβλέπων καθηγητής
Ε. Σ. ΣΑΜΟΥΗΛΙΔΗΣ

Τριμελής Επιτροπή
Ε. Σ. ΣΑΜΟΥΗΛΙΔΗΣ
Ν. ΤΣΟΥΒΑΛΗΣ
Μ. ΤΟΥΛΙΟΣ

Στον Αρχιπλοίαρχο (ε.α.) Π. Αλούρδα που με κέντρισε...

Στον Καθηγητή Ε.Σ. Σαμουηλίδη που με καθοδήγησε...

Στην σύζυγό μου Ευλαλία και στις κόρες μου
Άντζελα και Έλενα που με ανέχτηκαν...

ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι κατά το μάλλον ελαττωτέον. Στοχεύει στην εξοικείωση με τη χρήση των διεθνών κανόνων ναυπήγησης χαλύβδινων πλοίων σε θέματα αντοχής πλοίου καθώς και στη βαθύτερη κατανόηση της μεθόδου και ορθή χρήση του λογισμικού των πεπερασμένων στοιχείων.

Κατά το ήττον, μέσα από την συγκριτική επεξεργασία των αποτελεσμάτων των διαφορετικών μεθόδων προσδιορισμού της μέγιστης αντοχής ορισμένων ναυπηγικών κατασκευών, φιλοδοξείται η εξαγωγή κάποιων χρήσιμων συμπερασμάτων σχετικά.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, με τη βοήθεια ημι-αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου, προσδιορίζεται η μέγιστη αντοχή σε διαμήκη κάμψη στο κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας τους, δύο λεπτότοιχων ναυπηγικών κατασκευών:

- Της πλέον σύνθετης διατομής του παράλληλου τμήματος της γάστρας ενός πλοίου μεταφοράς φορτίου χύδην (*bulk carrier*) και
- Της απλούστερης διατομής του μοντέλου M3-200, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε πείραμα αντοχής ερευνητικού προγράμματος ιδρύματος της αλλοδαπής και για το οποίο έχουν δημοσιευθεί τα πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα.

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 1 παρατίθεται μια σύντομη αναδρομή στις διάφορες μεθόδους προσδιορισμού της μέγιστης αντοχής των ναυπηγικών κατασκευών, στα είδη φορτίσεων της μεταλλικής κατασκευής των πλοίων και στη συμπεριφορά των δομικών στοιχείων της κατασκευής τους υπό την επίδραση των φορτίσεων αυτών. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στις θλιπτικές φορτίσεις των ενισχυμένων κατά το διάμηκες ελασμάτων, η αντοχή των οποίων σχετίζεται άμεσα με τη συνολική μέγιστη αντοχή.

Κατόπιν, στα κεφαλαία 2 και 3 γίνεται ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής για αμφοότερες τις διατομές με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- Κεφάλαιο 2: Με χρήση της ημι-αναλυτικής μεθόδου σύμφωνα με τους κοινά αποδεκτούς κανόνες ναυπήγησης χαλύβδινων πλοίων (*Common Structural Rules-C.S.R.*) του Διεθνούς Οργανισμού Νηογνομώνων (*International Association of Classification Societies - I.A.C.S.*)
- Κεφάλαιο 3: Με χρήση της αριθμητικής μεθόδου του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων *ALGOR*

Η μέγιστη αντοχή μιας λεπτότοιχης μεταλλικής κατασκευής αντιστοιχεί στη μέγιστη καμπτική ροπή M_u που δύναται να εφαρμοστεί στην διατομή πριν από την κατάρρευση της. Ορίζεται δε ως η μέγιστη τιμή ροπής της καμπύλης της *καμπτικής ροπής* M ως προς την *καμπυλότητα* χ στο αντίστοιχο διάγραμμα ($M-\chi$) της διατομής.

Για να αποτυπωθεί η καμπύλη με τον ημι-αναλυτικό τρόπο των *C.S.R.- I.A.C.S.*, παράγεται ικανός αριθμός ζευγών τιμών $M-\chi$ μέσα από μία επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε βήμα αυτής, υπολογίζεται η καμπτική ροπή που αναπτύσσει η εγκάρσια διατομή της κατασκευής λόγω της επιβληθείσας καμπυλότητας στο διάμηκες επίπεδο συμμετρίας της. Προκειμένου να εφαρμοστεί η επαναληπτική αυτή μέθοδος, η εγκάρσια διατομή διαιρείται σε δομικά στοιχεία τριών κατηγοριών ήτοι:

- Ελάσματα ενισχυμένα κατά το διάμηκες
- Ελάσματα ενισχυμένα κατά το εγκάρσιο (ή μη ενισχυμένα ελάσματα)
- Ανθεκτικά γωνιακά ελάσματα

Για κάθε τέτοιο δομικό στοιχείο προσδιορίζεται η *καμπύλη τάσης-ανοιγμένης παραμόρφωσης (σ-ε)* στην ελαστο-πλαστική περιοχή για διαφορετικές μορφές κατάρρευσης του.

Η καμπύλη *M-χ* αποτυπώνεται και με τη χρήση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων *ALGOR* με την βοήθεια του οποίου παράγεται η καμπύλη *M-χ* για κάθε δοκό. Τμήμα του παράλληλου τμήματος της γάστρας καθώς και το μοντέλο M3-200 μοντελοποιούνται με πεπερασμένα στοιχεία και με επιβολή κατάλληλων κομβικών φορτίων, ροπών ή στροφών και οριακών συνθηκών επιχειρείται η προσομοίωση της διαμήκου κάμψης τους έως την κατάρρευση. Κάνοντας χρήση των αρχείων δεδομένων αποτελεσμάτων του προγράμματος παράγονται τα διάγραμμα *M-χ* και για τις δύο διατομές.

Τέλος, στο κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων. Παράλληλα, μέσω της σύγκρισης των υφιστάμενων πειραματικών αποτελεσμάτων για την απλούστερη εκ των δύο διατομών (μοντέλο M3-200) επιχειρείται η εξαγωγή επαγωγικών συμπερασμάτων για την μέγιστη αντοχή της πλέον σύνθετης διατομής του *bulk-carrier* και για τις μεθόδους υπολογισμού της αντοχής των κατασκευών γενικότερα.

Η μελέτη γίνεται για κατάσταση *sagging*.

Κατεβλήθη προσπάθεια μετάφρασης των κυριότερων ναυπηγικών, τεχνικών και ναυτιλιακών όρων από την ελληνική στην αγγλική.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	v
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ

1.1	ΓΕΝΙΚΑ	1
1.2	ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ ΓΑΣΤΡΑΣ	2
1.3	ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΓΑΣΤΡΑΣ	3
1.4	ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ - ΠΛΟΙΟ ΔΟΚΟΣ	5
1.4.1	ΕΙΔΗ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ	6
1.4.2	ΣΤΑΤΙΚΕΣ - ΨΕΥΔΟ-ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	7
1.4.3	ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	10
1.5	ΤΟΠΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ - ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	11
1.6	ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΠΛΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ	14
1.6.1	ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	15
1.6.2	ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ	15
1.6.3	ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ	17
1.7	ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	18
1.8	ΚΟΛΟΝΕΣ ΚΑΙ ΔΟΚΟΙ-ΚΟΛΟΝΕΣ	21
1.9	ΑΠΛΑ ΚΑΙ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ	24
1.9.1	ΑΠΛΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	25
1.9.2	ΑΠΛΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	28
1.9.3	ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	30
1.9.4	ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ	32
1.10	ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΩΝ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΚΑΝΟΝΙΣΜΩΝ I.A.C.S-C.S.R.

2.1	ΓΕΝΙΚΑ	37
2.2	ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΓΑΣΤΡΑΣ	38
2.3	ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ-ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΠΑΧΗ	38
2.4	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ	41
2.5	ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ	44
2.6	ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ-ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	46
2.6.1	ΠΙΘΑΝΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΩΝ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ	46
2.6.2	ΑΝΘΕΚΤΙΚΑ ΓΩΝΙΑΚΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	46
2.6.3	ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ-ϵ	47
2.7	ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CSR	51
2.7.1	ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ σ-ϵ	55
2.8	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΩΝ CSR ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΕ BULK-CARRIER	57
2.8.1	ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ BULK-CARRIER	58
2.8.2	ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	58
2.8.3	ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΤΟΜΗΣ-ΣΥΜΒΟΛΑ	59
2.8.4	ΙΔΙΕΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ-ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ	62
2.8.5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΟΑ ΑΠΟ ΤΡΟΠΙΔΑ	64
2.8.6	ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ-ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ	72
2.8.7	ΚΑΜΠΥΛΗ M-χ BULK CARRIER	75
2.8.8	ΚΑΜΠΥΛΗ N-χ BULK CARRIER	77
2.9	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΩΝ CSR ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ M3-200	79
2.9.1	ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ M3-200	80
2.9.2	ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	81
2.9.3	ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	82

2.9.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΟΑ	82
2.9.5	ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ	84
2.9.6	ΚΑΜΠΥΛΗ Μ- χ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Μ3-200	86
2.9.7	ΚΑΜΠΥΛΗ Ν- χ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Μ3-200	87
2.10	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2	88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

3.1	ΓΕΝΙΚΑ	90
3.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	91
3.2.1	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	92
3.2.2	ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ	96
3.2.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	99
3.2.4	ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ	101
3.2.5	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ ΜΗΤΡΩΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΟΥΡΑΝΟΓΡΑΜΜΗΣ (SKYLINE ALGORITHM)	103
3.2.6	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΜΗΤΡΩΩΝ SPARSE	105
3.3	ΚΩΔΙΚΑΣ ALGOR	106
3.4	ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΜΠΤΩΜΕΝΩΝ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΚΩΔΙΚΑ ALGOR	113
3.4.1	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ	114
3.4.2	ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600x t	117
3.4.3	ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600x t ΜΕ 8 ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΑ Τ. FLAT BAR t x 45	124
3.4.4	ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600x t ΜΕ 8 ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΑ Τ. FLAT BAR t x 45	127
3.5	ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΜΨΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Μ3-200	131
3.5.1	ΜΟΝΤΕΛΟ 1: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕ ΦΡΑΚΤΕΣ	137

3.5.2	ΜΟΝΤΕΛΟ 2: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΧΩΡΙΣ ΦΡΑΚΤΕΣ	144
3.5.3	ΜΟΝΤΕΛΟ 3: ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΗ ΡΟΠΗ ΣΕ ΑΚΑΜΠΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	147
3.5.4	ΜΟΝΤΕΛΟ 4: ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΑΚΑΜΠΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	151
3.5.5	ΜΟΝΤΕΛΟ 5: ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΑ SUPPORTING DEVICES	155
3.5.6.	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ	158
3.6	ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΟΥΔΕΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ/ΑΞΟΝΑ	160
3.7	ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΜΨΗΣ BULK CARRIER	163
3.71	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ BULK CARRIER	163
3.7.2	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ	175
3.8	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3	187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ

4.1	ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	177
4.2	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4	179

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	181
---------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A	ΟΡΟΛΟΓΙΑ-ΣΥΜΒΟΛΑ-ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ C.S.R.	183
B	ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΥΜΦΩΝΩΣ C.S.R.	195
Γ	ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ ΓΑΣΤΡΑΣ ΣΥΜΦΩΝΩΣ CSR	211
Δ	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΛΙΚΩΝ ΠΑΧΩΝ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	219

Ε	ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	225
ΣΤ	ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ BULK-CARRIER	231
Ζ	ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	239
Η	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	245

ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ

Στο κεφαλαίο αυτό ορίζεται η μέγιστη αντοχή των ναυπηγικών κατασκευών (πλοίων και πλωτών κατασκευών με μορφή πλοίου), και περιγράφονται οι κυριότεροι τρόποι προσδιορισμού της. Επίσης περιγράφονται οι διάφορες μορφές καταπόνησης με έμφαση στην θλιπτική καταπόνηση των ενισχυμένων ελασμάτων η οποία και συνδέεται άμεσα με την μέγιστη αντοχή των ναυπηγικών κατασκευών.

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Είναι κοινά αποδεκτό ότι σε πολυσύνθετες κατασκευές όπως αυτή ενός πλοίου, οι οποίες λειτουργούν σε συνθήκες ενός τόσο απρόβλεπτου περιβάλλοντος όπως η θάλασσα, ο προσδιορισμός της μέγιστης αντοχής της κατασκευής εν τω συνόλω της, αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις για τους μηχανικούς ναυπηγούς.

Μολονότι η ανάλυση της κατασκευής στη γραμμική ελαστική περιοχή είναι σχετικά απλή και εύχρηστη, παρατηρήθηκε ότι το όριο ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού (*material elastic limit*) δεν αντιπροσωπεύει την πραγματική αντοχή της κατασκευής. Γενικότερα, η δυνατότητα του να φέρει φορτίο (*load-carrying capacity*) η κατασκευή, αυξάνεται πέραν του φορτίου με το οποίο αρχίζει να προκαλείται τοπική διαρροή (*local yielding*) ή ελαστικός λυγισμός (*elastic buckling*) σε κάποια από τα δομικά στοιχεία της κατασκευής. Ως εκ τούτου, η μέγιστη δυνατότητα φόρτισης της κατασκευής είναι μεγαλύτερη από εκείνη που καθορίζεται μέσω της ανάλυσης τάσεων στην ελαστική περιοχή (*linear stress analysis*).

Η μέγιστη δυνατότητα φόρτισης της κατασκευής, εάν προσδιοριστεί, αντιπροσωπεύει μια σαφώς καθορισμένη οριακή κατάσταση. Αντιθέτως, το όριο της γραμμικής

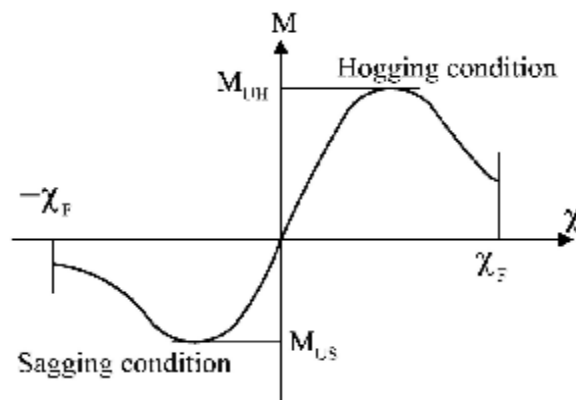
ελαστικής συμπεριφοράς της κατασκευής δεν αντιστοιχεί σε μια πραγματική κατάσταση αστοχίας της.

Ο προσδιορισμός της μέγιστης αντοχής της κατασκευής αποκλειστικά με μη γραμμική ανάλυση (*non linear analysis*) είναι συνήθως περίπλοκος και χρονοβόρος. Οι διάφορες μεθοδολογίες που έχουν επινοηθεί κατά καιρούς για τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής βασίζονται είτε στη χρήση ανάλυσης μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων (*nonlinear finite elements analysis*), είτε σε επαναληπτικές ημι-αναλυτικές μεθόδους ή σε άλλες αριθμητικές μεθόδους.

1.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ ΓΑΣΤΡΑΣ

Η μέγιστη αντοχή (*ultimate strength*) της γάστρας (*hull*) ενός πλοίου καθορίζεται από την τιμή της μέγιστης καμπτικής ροπής (*bending moment*) M_u την οποία δύναται να αναπτύξει η γάστρα καμπτόμενη κατά το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας της και πέραν της οποίας η γάστρα θα καταρρεύσει.

Η χαρακτηριστική, για την κάθε διατομή της γάστρας, μέγιστη αντοχή, σε κατάσταση sagging ή hogging, M_{US} ή M_{UH} καθορίζεται ως η μέγιστη τιμή ροπής του διαγράμματος της καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα (*curvature*) χ (βλέπε σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1-Διάγραμμα καμπτικής ροπής-καμπυλότητας γάστρας

Στο διάγραμμα του σχήματος 1.1 αποτυπώνεται η ψευδο-στατική (*quasi -static*) μη γραμμική συμπεριφορά της κατασκευής. Η καμπύλη αντιπροσωπεύει την προοδευτική κατάρρευση της διατομής υπό διαμήκη κάμψη στο κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας.

Όταν η απόλυτη τιμή της καμπυλότητας χ της γάστρας αυξάνεται προοδευτικά εξαιτίας μιας εξωτερικά επιβαλλομένης αιτίας, στη διατομή αναπτύσσεται μία ομοίως αυξανόμενη *ανθιστάμενη καμπτική ροπή* M (ως αποτέλεσμα της κατανομής των ορθών τάσεων στη διατομή λόγω της κάμψης), η οποία εξισορροπεί την εξωτερική ροπή μέχρι τη στιγμή που η κλίση της καμπύλης dM / dx γίνει μηδέν ή αλλάξει πρόσημο.

Το σημείο αυτό καθορίζει την μέγιστη αντοχή της γάστρας σε διαμήκη κάμψη για κατάσταση sagging ή hogging αντίστοιχα.

1.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΓΑΣΤΡΑΣ

Η μέγιστη αντοχή της γάστρας αποτελεί ένα σαφές σημείο ελέγχου. Λαμβάνεται υπόψη κατά την σχεδίαση ώστε να αποφεύγεται η κατάρρευση της γάστρας κατά την διαμήκη κάμψη η οποία είναι και η σημαντικότερη καταπόνηση των μεγάλων πλοίων.

Ο *Caldwell* (1965) ήταν ο πρώτος που αναφέρθηκε στην πλαστική κατάρρευση της γάστρας ενός πλοίου υπό διαμήκη κάμψη, παρά το ότι δεν συμπεριέλαβε στη μελέτη του, όπως επισημάνθηκε από τον *Faulkner* (1965) το λυγισμό των επί μέρους δομικών στοιχείων. Η πρώτη προσπάθεια να συμπεριληφθεί η επίδραση της κατάρρευσης λόγω πλαστικού λυγισμού κάποιου δομικού στοιχείου της διατομής έγινε από τον *Smith* (1977), ο οποίος χρησιμοποίησε τις *καμπύλες τάσης-ανοιγμένης βράχυνσης (load shortening curves)* των ανεξαρτήτων δομικών στοιχείων της διατομής για να υπολογίσει την συνεισφορά τους στην ανάπτυξη καμπτικής ροπής στη διατομή.

Εκτοτε, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής βασισμένες κυρίως στη ιδέα του *Smith* οι οποίες δύναται να ενταχθούν σε τρεις κατηγορίες μεθόδων:

- *Πραγματικές Μέθοδοι*, που είναι:
 - *Διερεύνηση Ατυχημάτων Πλοίων*
 - *Εργαστηριακές Δοκιμές Μοντέλων*
- *Αμεσες Μέθοδοι*, όπως:
 - *Γραμμική Μέθοδος (Linear Method)*
 - *Εμπειρικοί Τύποι (Empirical Formulas)*
 - *Αναλυτική Μέθοδος (A.M.-Analytical Method)*
- *Μέθοδοι Ανάλυσης Σταδιακής Κατάρρευσης (Progressive Collapse Analysis):*
 - *Απλοποιημένη Μέθοδος (S.M.-simplified method)*

- Μέθοδος Ιδανικής Δομικής Μονάδος (*I.S.U.M.-idealized structural unit method*)
- Μέθοδος Πεπερασμένων Μη Γραμμικών Στοιχείων (*F.E.M.-Finite Element Method*)

Η Αναλυτική Μέθοδος-Α.Μ. βασίζεται σε μια προσεγγιστική κατανομή των τάσεων στη διατομή της γάστρας σε οριακή κατάσταση, από την οποία υπολογίζεται η μέγιστη καμπτική ροπή και άρα η αντοχή της λαμβανομένου υπόψη ως οριακή κατάσταση τον λυγισμό (buckling) των θλιβόμενων και την διαρροή (yielding) των εφελκόμενων τμημάτων αντίστοιχα. Η μέγιστη καμπτική ροπή υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της κατανομής των τάσεων πάνω στη διατομή. Αν και δεν λαμβάνεται υπόψη η μείωση της αντοχής των δομικών στοιχείων πέραν της μέγιστης αντοχής, είναι δυνατή η επίτευξη αποτελεσμάτων με σχετική ακρίβεια εφόσον η υποτιθέμενη κατανομή των τάσεων στη διατομή είναι λογική.

Στη Μεθόδο Ανάλυσης Σταδιακής Κατάρρευσης της κατασκευής θεωρείται ότι η διαμήκης απόκριση της κατασκευής υπό καμπτική ροπή μπορεί να προσομοιωθεί με το άθροισμα των αποκρίσεων των διαμηκών δομικών στοιχείων της κατασκευής. Οι κύριες υποθέσεις της μεθόδου είναι ότι οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες, η συνολική διαμήκης δύναμη στη διατομή ισούται με μηδέν και ότι η άθροιση των ροπών των ορθών τάσεων που αναπτύσσονται στη διατομή ισούται με τη καμπτική ροπή της διατομής. Η ελαστοπλαστική μορφή της καμπύλης τάσεως-ανοιγμένης παραμορφώσεως των δομικών στοιχείων της διατομής σε συνδυασμό με την δεύτερη υπόθεση οδηγεί στην ανάγκη επαναπροσδιορισμού της θέσης του ουδέτερου άξονα μετά από κάθε αύξηση της καμπυλότητας. Η μέγιστη καμπτική ροπή επιτυγχάνεται όταν ήδη κάποια δομικά στοιχεία έχουν καταρρεύσει. Συνήθως σε αυτή τη μεθόδο δεν λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών δομικών στοιχείων, οπότε η υπολογισθείσα μέγιστη καμπτική ροπή δύναται να θεωρηθεί ως το άνω όριο της μέγιστης καμπτικής ροπής.

Είναι προφανές ότι το λεπτό σημείο στη Μεθόδο Ανάλυσης Σταδιακής Κατάρρευσης είναι ο προσδιορισμός της σχέσης τάσης-ανοιγμένης παραμόρφωσης των δομικών στοιχείων. Οι υπάρχουσες μέθοδοι για αυτό ομαδοποιούνται σε τρεις κατηγορίες:

- Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (*F.E.M.*), όπως του *Smith*
- Απλοποιημένη Μέθοδος (*S.M.-Simplified Method*) όπως η Μέθοδος *E.P.M.* του *Yao*, και η *Θεωρία Δοκού-Κολώνας* των *Rahman, Chaw* και *Wan et al*

- *Εμπειρικοί Τύποι*, όπως ο *Guedes Soares*

Η *μέθοδος I.S.U.M.* είναι μια απλοποιημένη μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων η οποία αναπτύχθηκε από τους *Ueda* και *Rashed* (1984). Αντίθετα με την συμβατική μέθοδο πεπερασμένων μη γραμμικών στοιχείων τα μεγάλα δομικά στοιχεία της κατασκευής που απαρτίζονται από ίδια μικρότερα δομικά στοιχεία (π.χ. ενισχυμένο έλασμα καταστρώματος) μετασχηματίζονται σε ένα δομικό στοιχείο (στοιχείο *I.S.U.M.*) το οποίο έχει σαφώς λιγότερους *κόμβους (nodes)*. Στη περίπτωση των πλοίων χρησιμοποιείται ευρέως το στοιχείο *I.S.U.M. δύο κόμβων δοκός-κολώνα (I.S.U.M. beam-column unit)* άνευ *συνημμένου ελάσματος (attached plate)* και το *τετρακοβικό στοιχείο ελάσματος (plate unit)* για την προσομοίωση των ενισχυτικών και των συνημμένων ελασμάτων αντίστοιχα. Κάθε κόμβος έχει έξι βαθμούς ελευθερίας. Στις δημοσιεύσεις σχετικών εργασιών υποστηρίζεται ότι συγκρινόμενη με την συμβατική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, η μέθοδος *I.S.U.M.* μειώνει σημαντικά τόσο τον χρόνο κατασκευής του μοντέλου όσο και τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο. Παράλληλα έχει ακρίβεια αποτελεσμάτων εφάμιλλη των συμβατικών μοντέλων μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων πυκνών πλεγμάτων τα οποία όμως είναι εξαιρετικά χρονοβόρα.

Συναφώς εκτιμάται, ότι η εκτέλεση εργαστηριακών πειραμάτων για την επαλήθευση όλων των ανωτέρω μεθόδων και την διεξαγωγή εφαρμόσιμων συμπερασμάτων καθίσταται υποχρεωτική.

1.4. ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ - ΤΟ ΠΛΟΙΟ ΔΟΚΟΣ

Τα δομικά στοιχεία της μεταλλικής κατασκευής δέχονται φορτίσεις διαφόρων ειδών, οι οποίες ανάλογα με τη φορά και τη διεύθυνσή τους επιφέρουν διάφορα αποτελέσματα στη συμπεριφορά της κατασκευής.

Για πολύπλοκες μεταλλικές κατασκευές όπως αυτή του πλοίου αλλά και των λοιπών πλωτών κατασκευών που έχουν προφίλ πλοίου (*Ship Shaped Floating Production and Offloading Platforms–Ship Shaped F.P.S.O.'s*), καλούμενες εφεξής *ναυπηγικές κατασκευές*, είναι πρακτικά αδύνατη η μελέτη της αντοχής τους σε μια φάση κάτω από την ταυτόχρονη επίδραση των φορτίσεων που ασκούνται σε αυτές κατά τη διάρκεια της λειτουργίας τους.

Οι δυσκολίες για την πραγματοποίηση μιας τέτοιας ανάλυσης οφείλονται κυρίως στους εξής λόγους:

- Πολυπλοκότητα κατασκευής
- Απότομες μεταβολές της γεωμετρίας
- Χρονική και χωρική μεταβολή των φορτίσεων από το ίδιο βάρος και τις πιέσεις που ασκούνται από τη θάλασσα
- Αλληλεπίδραση της φόρτισης με την απόκριση της κατασκευής λόγω της στήριξης στη θάλασσα
- Μη γραμμικότητα της απόκρισης της κατασκευής λόγω μη γραμμικότητας του υλικού ή λόγω εύρους των μετατοπίσεων έξω από την γραμμική περιοχή.

Μια από τις παραδοχές στις οποίες βασίζεται ο υπολογισμός της αντοχής των ναυπηγικών κατασκευών είναι ότι η κατασκευή συμπεριφέρεται συνολικά ως κοίλη δοκός με λεπτά τοιχώματα. Έτσι, η μελέτη σε πρώτη φάση περιορίζεται στις περιπτώσεις φόρτισης με τις οποίες ασχολείται η μελέτη των δοκών, δηλαδή τη διαμήκη κάμψη σε δύο επίπεδα (οριζόντιο και κατακόρυφο) και τη διαμήκη στρέψη. Από αυτές, η καταπόνηση που εξετάζεται σε όλους τους τύπους ναυπηγικών κατασκευών είναι η διαμήκης κάμψη σε κατακόρυφο επίπεδο.

Κρίνεται σκόπιμη η αναφορά στα είδη των διαφορετικών φορτίσεων που ασκούνται στη μεταλλική κατασκευή με ιδιαίτερη έμφαση στον *ελαστο-πλαστικό λυγισμό* των διαμηκών ενισχυμένων ελασμάτων που όπως θα δούμε είναι η πλέον κρίσιμη καταπόνηση η οποία σχετίζεται άμεσα με την μέγιστη διαμήκη αντοχή των ναυπηγικών κατασκευών.

1.4.1 ΕΙΔΗ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ

Οι φορτίσεις μπορούν να υποδιαιρεθούν είτε ανάλογα με τη φύση τους δηλαδή τη διάρκεια και τη μεταβλητότητα τους στο χρόνο, είτε ανάλογα με την απόκριση της κατασκευής που τις παραλαμβάνει.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε *φορτίσεις σχετικά σταθερές στο χρόνο* (τουλάχιστον στη διάρκεια ενός ταξιδιού), όπως είναι το βάρος της μεταλλικής κατασκευής, η άνωση και το βάρος του μεταφερόμενου φορτίου.

Υπάρχουν όμως και *φορτίσεις που μεταβάλλονται δραστικά στο χρόνο* και στο χώρο όπως είναι η κρούση των κυμάτων, η *σφυρόκρουση (bottom slamming)*, οι ταλαντώσεις της έλικας, οι υδροδυναμικές φορτίσεις, οι αδρανειακές φορτίσεις κ.ά.

Εξετάζοντας την απόκριση της κατασκευής οι εξωτερικές φορτίσεις υποδιαιρούνται σε *στατικές (static loading)*, που παραμένουν σταθερές στο χρόνο (π.χ. το βάρος της

μεταλλικής κατασκευής, το βάρος του φορτίου, η άνωση κ.ά.) και σε *δυναμικές (dynamic loading)*.

Οι στατικές φορτίσεις επιφέρουν αλλαγές που δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και δεν αναπτύσσουν αξιόλογες αδρανειακές επιταχύνσεις στα στοιχεία της κατασκευής. Αντιθέτως, οι δυναμικές φορτίσεις προκαλούν τοπικές αποκρίσεις που μεταβάλλονται στο χρόνο, καθώς και αδρανειακές επιταχύνσεις της κατασκευής. Ένα χαρακτηριστικό της δυναμικής φόρτισης είναι ότι προκύπτουν μετακινήσεις της κατασκευής που μπορούν να μετρηθούν (στο χρονικό ορίζοντα της καθημερινής εμπειρίας).

Κατά τον σχεδιασμό οι δυναμικές φορτίσεις αντικαθίστανται με ισοδύναμες στατικές ή *ψευδό-στατικές (quasi-static) φορτίσεις* ώστε να εκκινήσει η διαδικασία *διαστασιολόγησης (scantling approach)* της μεταλλικής κατασκευής.

1.4.2 ΣΤΑΤΙΚΕΣ - ΨΕΥΔΟ-ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Ο υπολογισμός της διαμήκου αντοχής βασίζεται στην παραδοχή ότι η κατασκευή συμπεριφέρεται ως κοίλη δοκός. Κάθε *εγκάρσια διατομή (transverse section)* φορτίζεται εάν το βάρος της δεν εξισορροπείται από την άνωση που ασκείται σε αυτή.

Στην πραγματικότητα αυτό ισχύει πάντα, ακόμα και σε καταστάσεις *ήρεμου νερού (solid water)*. Αρα, σε κάθε διατομή πάντα αναπτύσσονται καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις και η ισορροπία της κατασκευής εξασφαλίζεται σε *ολικό (global)* και όχι *τοπικό (local)* επίπεδο.

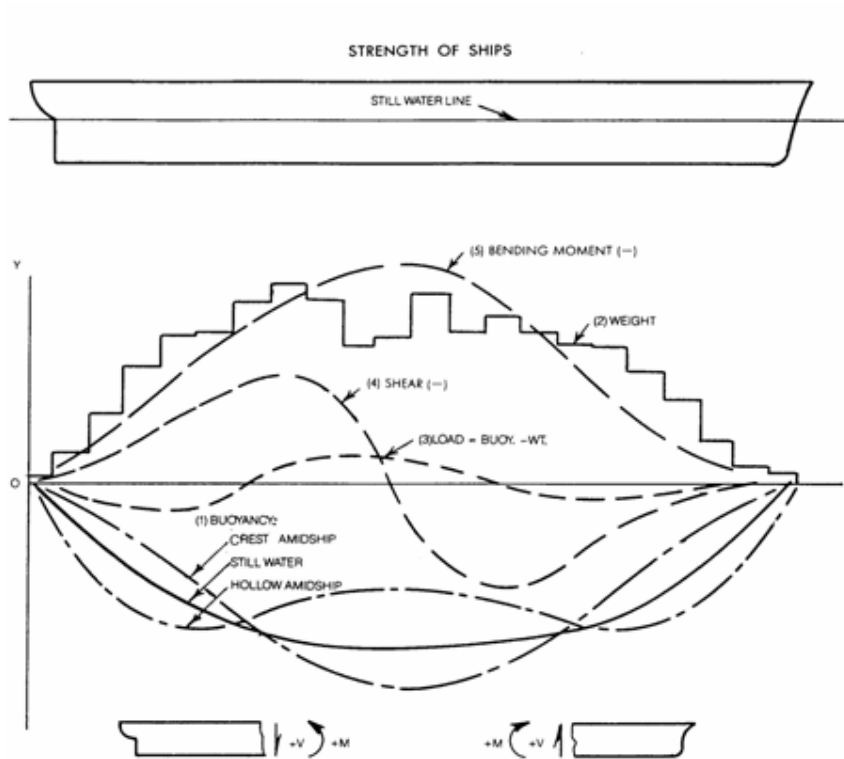
Στο σχήμα 1.2 περιγράφεται η *ψευδό-στατική φόρτιση (quasi-static loading)* του πλοίου που οφείλεται σε υποθετικό κύμα ίσο με το μήκος του πλοίου και με κορυφή συμπίπτουσα με τη *μέση τομή (midship section)* ή τα *άκρα (ends)* του πλοίου.

Η συνισταμένη *καμπύλη φόρτισης (load curve)* προκύπτει ως η διαφορά της καμπύλης άντωσης και του συνολικού βάρους.

Από την καμπύλη φόρτισης προκύπτουν εύκολα οι κατανομές *τεμνουσών δυνάμεων (shear forces)* και *καμπτικών ροπών (bending moments)*.

Επισημαίνεται ότι διαμήκης κάμψη οδηγεί στην ανάπτυξη δύο διαφορετικών εντατικών πεδίων: των ορθών τάσεων (*normal stresses*) και των διατμητικών τάσεων (*shear stresses*) που υπολογίζονται από την καμπύλη των καμπτικών ροπών και την γεωμετρία κάθε διατομής.

Έτσι, η *διαμήκης κάμψη* (*longitudinal bending*) του συνόλου της κατασκευής ως ενιαίας δοκού προξενεί θλίψη (*compression*) και εφελκυσμό (*tension*) σε στοιχεία της κατασκευής που κείνται εκατέρωθεν του ουδέτερου άξονα (*neutral axis*) της διατομής.



Σχήμα 1.2- Διαμήκης φόρτιση του πλοίου

Στα καταστρώματα (*decks*) και στον πυθμένα (*bottom structure*), δηλαδή σε φορείς που είναι διατεταγμένοι παράλληλα με τον ουδέτερο άξονα η φόρτιση είναι καθαρά θλιπτική ή εφελκυστική (συν τις διατηρητικές τάσεις).

Κάνοντας χρήση της θεωρίας της απλής κάμψης των δοκών (*Bernoulli-Euler beam theory*) η οποία προϋποθέτει ότι:

- Οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την κάμψη
- Η δοκός είναι πρισματική (σταθερή διατομή κατά το μήκος)
- Το φαινόμενο Poisson (εγκάρσιες παραμορφώσεις) αμελείται
- Το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά
- Οι διατμητικές δυνάμεις δεν επηρεάζουν τις καμπτικές τάσεις και παραμορφώσεις

η κατανομή των ορθών τάσεων δίδεται από τον γνωστό τύπο:

$$S = M \frac{y}{I} \rightarrow S_{\max} = \frac{M}{SM} = \frac{M_S + M_W}{SM}$$

όπου σ είναι η ορθή τάση σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα της διατομής I η ροπή αδρανείας της διατομής γύρω από τον ουδέτερο άξονα, $S.M.$ η ροπή αντιστάσεως της διατομής, M_S και M_W οι ροπές κάμψης σε ήρεμο νερό και κυματισμό αντίστοιχα.

Εάν εξετάσουμε τις κατανομές των ορθών τάσεων που οφείλονται σε διαμήκη κάμψη, παρατηρούμε ότι για σταθερή γεωμετρία διατομής, μεγιστοποιούνται σε περιοχές όπου μεγιστοποιείται η καμπτική ροπή και η απόσταση από τον ουδέτερο άξονα.

Στις περισσότερες διατομές πλοίων ο ουδέτερος άξονας βρίσκεται πλησιέστερα στον πυθμένα και κατά συνέπεια υψηλότερες τάσεις αναπτύσσονται στο κύριο κατάστρωμα (*main deck*). Όταν η μέση τομή συμπίπτει με κοίλο κύματος τότε οι ορθές τάσεις στο κατάστρωμα είναι θλιπτικές.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πλέον κρίσιμη περιοχή της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου από άποψη αντοχής είναι το κύριο κατάστρωμα στη περιοχή της μέσης τομής.

Εάν η αντοχή εκεί είναι ή καταστεί για κάποιο λόγο (π.χ. διάβρωση) ανεπαρκής, θα προκύψει λυγισμός (*buckling*) και σταδιακή ελαστο-πλαστική κατάρρευση (*progressive elasto-plastic collapse*) της περιοχής αυτής. Είναι πιθανόν δε το πλοίο να κοπεί στα δύο εφόσον ακολουθήσει εμφάνιση ρήγματος (*crack*).



Εικόνα 1.1-Αστοχία τύπου *jack-knifed* πλοίου τ. *Liberty*

Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρείται συχνά, αλλά έχει συμβεί σε ορισμένες περιπτώσεις (εικόνες 1.1,1.2).



Εικόνα 1.2-Αστοχία διαμηκών δομικών στοιχείων

Η διαδικασία σχεδιασμού του καταστρώματος έχει πρωτεύουσα σημασία και ως εκ τούτου πρέπει να γίνεται αφενός μεν σωστός καθορισμός των φορτίων σχεδίασης του καταστρώματος, αφετέρου δε σωστός προσδιορισμός της μέγιστης αντοχής της κατασκευής.

1.4.3 ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Οι δυναμικές φορτίσεις διαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που δεν προκαλούν δυναμική απόκριση (*dynamic response*) της κατασκευής και σε αυτές που προκαλούν. Οι πρώτες καλούνται αποκρίσεις χαμηλών συχνοτήτων και μπορεί να προσεγγιστούν με την ψευδο-στατική θεώρηση που αναφέρθηκε προηγουμένως. Εάν όμως απαιτείται ακριβής περιγραφή της συμπεριφοράς της κατασκευής, εφαρμόζεται η υδροελαστική θεωρία (*hydro-elastic theory*) στην οποία λαμβάνονται υπόψη οι παραμορφώσεις του συνόλου της γάστρας στο χρόνο. Η θεώρηση αυτή δεν είναι αρκετά εύχρηστη και δεν βρίσκει εφαρμογή στον συμβατικό σχεδιασμό παρά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

Οι δυναμικές φορτίσεις υψηλών συχνοτήτων προκαλούν διαφόρων μορφών διεγέρσεις που μπορεί να είναι:

- Υψηλής συχνότητας διαμήκεις ταλαντώσεις της κατασκευής (*springing*)
- Σφυρόκρουση
- Φορτίσεις αδρανείας σε διάφορα τμήματα της κατασκευής
- Τοπικές ταλαντώσεις που οφείλονται στη λειτουργία μηχανολογικών συστημάτων και της έλικας

Στην πρώτη περίπτωση οι διαμήκεις ταλαντώσεις (*longitudinal vibrations*) της γάστρας προκαλούνται από κρούση θαλασσίων κυμάτων στη περιοχή της πλώρης και διαρκούν αρκετό χρόνο. Προκύπτουν όταν η περίοδος βασικής κατακόρυφης ταλάντωσης (*heave*)

του πλοίου έχει σχετικά μεγάλη διάρκεια (μεγαλύτερη των 2 sec). Στην περίπτωση αυτή, όταν το πλοίο συναντά κυματισμούς με αντίστοιχη συχνότητα, η διέγερση της γάστρας δεν είναι αμελητέα και παρατηρούνται συνεχείς ταλαντώσεις.

Η *σφυρόκρουση* είναι αποτέλεσμα της κρούσης της πρωραίας περιοχής του πυθμένα με την επιφάνεια της θάλασσας και συμβαίνει όταν η σχετική ταχύτητα μεταξύ πλώρης και θάλασσας υπερβαίνει ένα κατώτατο όριο.

Οι αδρανειακές φορτίσεις σε διάφορα σημεία του πλοίου γίνονται κρίσιμες όταν η ταλάντωσή του γύρω από κάποιο άξονα αναφοράς (*διαμήκης ταλάντωση – προνευστασμός (pitch)*, *εγκάρσια ταλάντωση – διατοιχισμός (roll)*) είναι έντονη. Ένα συνηθισμένο παράδειγμα είναι η ταλάντωση του ιστού η οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

Αδρανειακές φορτίσεις προκύπτουν επίσης στην περιοχή της πρύμης ως αποτέλεσμα της λειτουργίας του μηχανολογικού εξοπλισμού και της περιστροφής της έλικας. Κατά τον σχεδιασμό των διαφόρων εξαρτημάτων αλλά και των σημείων στήριξης τους λαμβάνεται υπόψη η δράση των αδρανειακών φορτίσεων με *ισοδύναμα στατικά φορτία*. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι οι δυναμικές φορτίσεις έχουν κατά κανόνα τοπική επίδραση στη συμπεριφορά της κατασκευής, ενώ στη διαμήκη ταλάντωση δεν είναι εύκολο να αποφευχθεί το φαινόμενο μετά την κατασκευή του πλοίου.

Οι δυναμικές φορτίσεις λαμβάνονται υπόψη στο στάδιο του σχεδιασμού προσθέτοντας *ισοδύναμα στατικά φορτία* σε αυτά που έχουν ήδη υπολογισθεί. Συνήθως οι *ισοδύναμες στατικές φορτίσεις* έχουν μέγεθος της τάξης του μισού της αντίστοιχης δυναμικής φόρτισης δηλαδή χρησιμοποιείται ο συντελεστής δυναμικής μεγέθυνσης 2.0.

1.5 ΤΟΠΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ - ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Πρόβλημα αντοχής σε θλίψη υπάρχει, εκτός από το κατάστρωμα, και σε όλες τις περιοχές του πλοίου που δέχονται θλιπτικές φορτίσεις, είτε σε συνδυασμό με άλλες φορτίσεις (κατανεμημένες, σημειακές ή διατμητικές) είτε όχι.

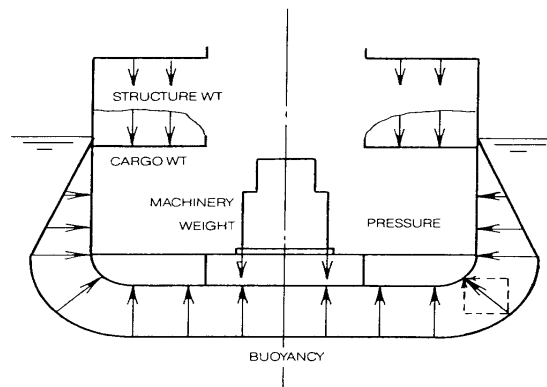
Επομένως, το μεγαλύτερο μέρος της κατασκευής, εκτός ορισμένων εξαιρέσεων (εγκάρσιες φρακτές και γενικά στοιχεία της κατασκευής που δέχονται εγκάρσιες φορτίσεις), πρέπει να ελέγχεται σε *λυγισμό (buckling)*.

Επειδή η γεωμετρία των στοιχείων της κατασκευής είναι τέτοια που ο λυγισμός προκύπτει στην ελαστο-πλαστική περιοχή, η εμφάνιση *τοπικού λυγισμού (local*

buckling) συνοδεύεται από τοπική κατάρρευση της κατασκευής. Σε πολλές περιπτώσεις παρατηρείται τοπικός λυγισμός σε περιοχές όπου είχε προβλεφθεί η σωστή διάταξη και διαστασιολόγηση, όμως λόγω διάβρωσης ή κόπωσης προέκυψε ελάττωση του πάχους ή και της κρίσιμης τάσης λυγισμού, ακολούθησε τοπικός λυγισμός και κατά συνέπεια κατάρρευση.

Οι στατικές φορτίσεις που προκαλούν διαμήκη κάμψη προκαλούν σε τοπικό επίπεδο τοπικές στατικές φορτίσεις, οι κυριότερες των οποίων περιγράφονται στο σχήμα 1.3.

Στην συγκεκριμένη διάταξη, η συνισταμένη φόρτιση που ασκείται στον πυθμένα είναι προφανώς η διαφορά της υδροστατικής πίεσης (*hydrostatic loading*) από το βάρος του μεταφερόμενου φορτίου (*cargo weight*) συν το βάρος της μεταλλικής κατασκευής (*structure weight*) συν το βάρος της μηχανής (*machinery weight*). Είναι σαφές ότι οι φορτίσεις αυτές προκαλούν κάμψη και όχι λυγισμό.



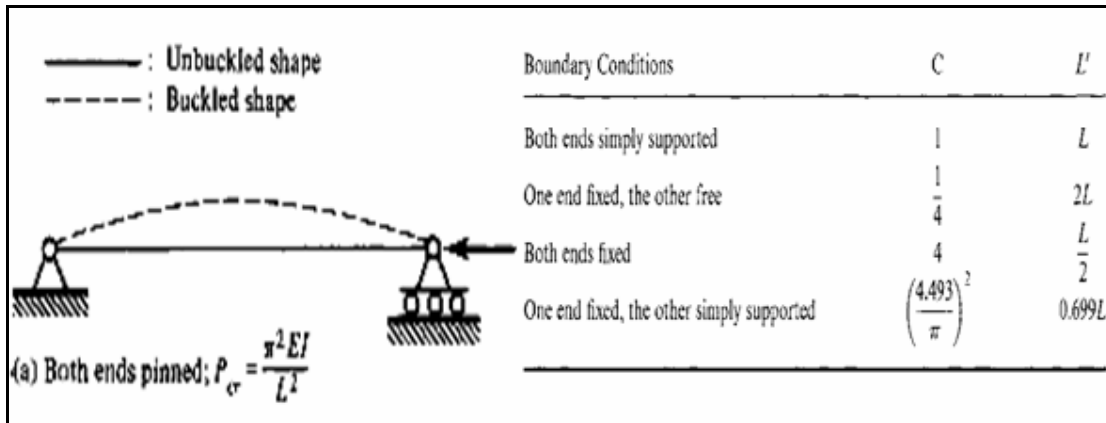
Σχήμα 1.3-Εγκάρσιες φορτίσεις σε μέση τομή

Η κάμψη ως φαινόμενο έχει ουσιαστικές διαφορές από τον λυγισμό, στη μορφή και κυρίως στην επίλυση των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων. Η φυσική διαφορά των δύο έγκειται στο ότι η κάμψη χαρακτηρίζεται από βαθμιαίες μεταβολές, που στη γραμμική ελαστική περιοχή είναι ανάλογες του επιβαλλόμενου φορτίου.

Στο λυγισμό όμως (*Euler theory*), στις περισσότερες των περιπτώσεων δηλαδή στις κατασκευές με μικρές αρχικές μετατοπίσεις, δεν παρατηρείται ουσιαστική μεταβολή στην μορφή της κατασκευής, μέχρις ότου το μέγεθος του φορτίου φθάσει κάποια κρίσιμη τιμή, το *κρίσιμο φορτίο* P_{cr} .

$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Όταν συμβεί αυτό, οι μετατοπίσεις εγκάρσια στον άξονα φόρτισης αυξάνουν ραγδαία. Η συμπεριφορά της κατασκευής εξαρτάται από τη μορφή της δηλαδή αν είναι κολόνα, έλασμα, κέλυφος και από τον τρόπο στήριξής της όπως συνοπτικά παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3.



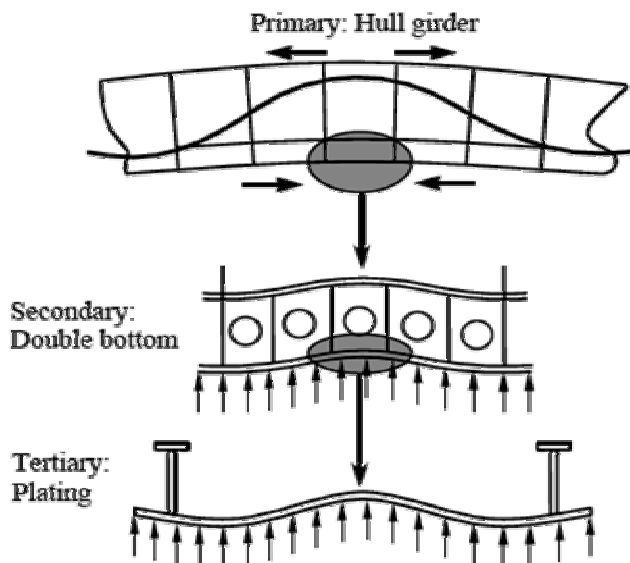
Σχήμα 1.4- Συνοπτική παρουσίαση θεωρίας λυγισμού Euler

Στο σχήμα 1.5 περιγράφεται η δράση μιας τοπικής καμπτικής φόρτισης στον πυθμένα του πλοίου. Παρατηρούμε ότι προκύπτει κάμψη στο σύνολο της κατασκευής, περιλαμβανομένων και των σταθμίδων του διπυθμένου (*double bottom girders*) αλλά και στο έλασμα που στηρίζεται στις σταθμίδες αυτές.

Στον πυθμένα δηλαδή, έχουμε υπέρθεση των δύο μορφών κάμψης και για των υπολογισμό των τάσεων πρέπει να προστεθούν ανυσματικά τα δύο εντατικά πεδία.

Γενικότερα, οι τάσεις οι οποίες οφείλονται στην απόκριση του πλοίου ως δοκαριού αναφέρονται ως *πρωτεύουσες τάσεις (primary stresses)*, οι τάσεις που προέρχονται από την απόκριση των ενισχυμένων ελασμάτων φορτιζομένων εγκάρσιως αναφέρονται ως *δευτερεύουσες τάσεις (secondary stresses)* και οι τάσεις που προέρχονται από την απόκριση των ελασμάτων μεταξύ των ενισχύσεων αναφέρονται ως *τριτεύουσες τάσεις (tertiary stresses)*.

Η διάκριση αυτή που απλουστεύει την μελέτη της απόκρισης της ναυπηγικής κατασκευής, έχει ως αποτέλεσμα την μελέτη της απόκρισης μιας μορφής καταπόνησης αγνοώντας τις άλλες.



Σχήμα 1.5-Τοπική φόρτιση στον πυθμένα με κάμψη του διπυθμένου στο σύνολό του και των ελασμάτων μεταξύ των σημείων στήριξης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η πρόσθεση των τριών τάσεων που προκύπτουν, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, δεν έχει θεωρητική βάση διότι οι κατανομές τους κατά το πάχος των ελασμάτων είναι διαφορετικές, δεν είναι σταθερές στο χρόνο και δεν έχουν την ίδια φάση. Οι προσεγγίσεις που γίνονται για τους υπολογισμούς των πρωτεύουσών, των δευτερευουσών και των τριτεύουσών τάσεων δίνουν αποτελέσματα διαφορετικής ακρίβειας.

Παρόλα αυτά το άθροισμα των τριών μέγιστων τάσεων χρησιμοποιείται σε κάποιες περιπτώσεις για τον έλεγχο των τάσεων που αναπτύσσονται στη γάστρα.

1.6 ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΠΛΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ

Η πραγματική συμπεριφορά μιας καμπτόμενης ναυπηγικής κατασκευής αποκλίνει από τα προβλεπόμενα στην απλή θεωρία της κάμψης, όταν οι αξονικές παραμορφώσεις στη διατομή δεν ακολουθούν τη γραμμική κατανομή καθ' ύψος και δεν είναι σταθερές κατά το πλάτος του πλοίου.

Τέτοιες αποκλίσεις συμβαίνουν στα ελεύθερα άκρα ασυνεχών κατασκευαστικών στοιχείων και σε στοιχεία με μη πλήρη μεταξύ τους συνεργασία. Άλλοι λόγοι είναι η υστέρηση διάτμησης (*shear lag*) και οι σχετικές κατακόρυφες μετατοπίσεις.

1.6.1 ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

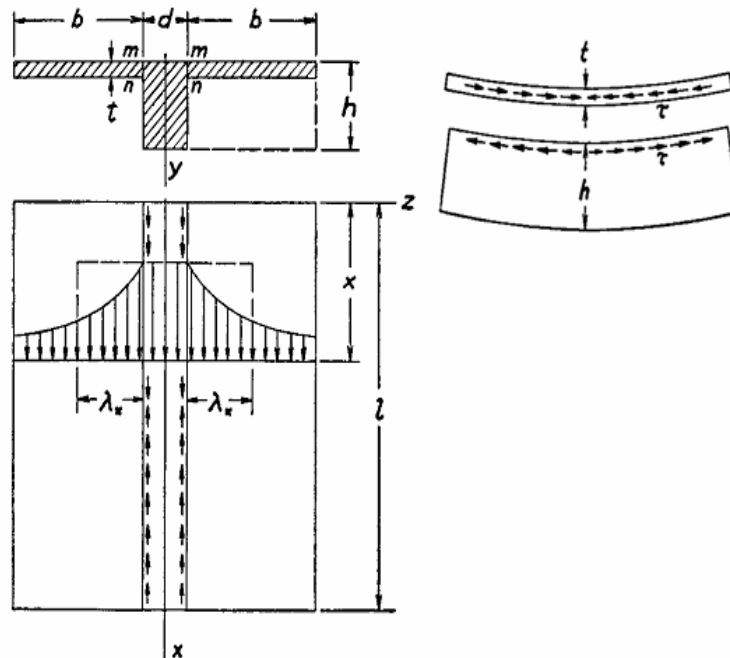
Για να υπάρχει πλήρης συνεργασία των στοιχείων της κατασκευής κατά την κάμψη, πρέπει οι ενώσεις μεταξύ τους να δύναται να μεταφέρουν τις διατμητικές τάσεις χωρίς ολίσθηση έτσι ώστε να διατηρείται η γραμμική κατανομή των παραμορφώσεων καθ' ύψος.

Η απαίτηση αυτή πληρείται όταν τα στοιχεία είναι συγκολλημένα μεταξύ τους.

1.6.2 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

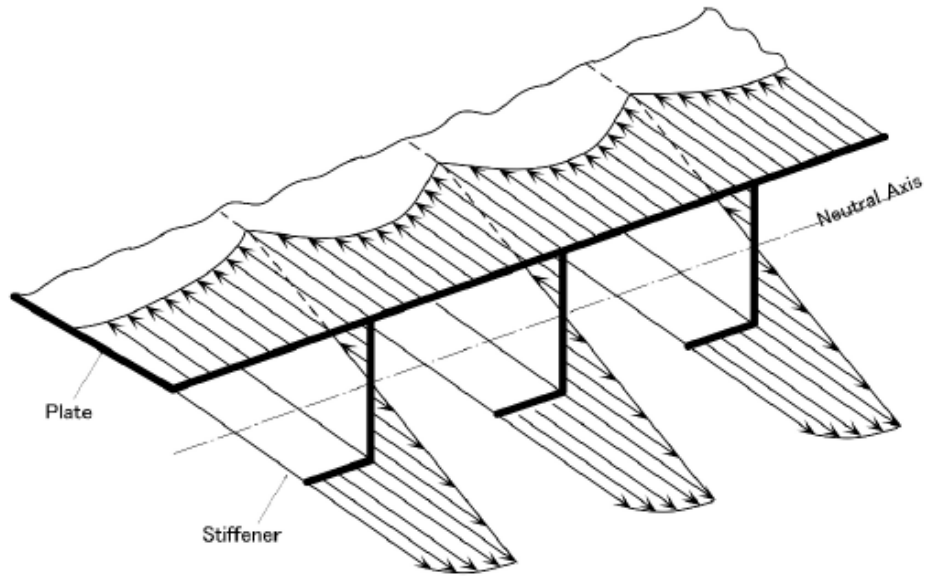
Σε κάθε λεπτότοιχο δοκάρι που κάμπτεται σε ένα επίπεδο συμμετρίας του όπως στο σχήμα 1.6 το φορτίο ισορροπείται από τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στο κορμό και οι οποίες προκαλούν τις αξονικές παραμορφώσεις σε αυτόν. Η αξονική παραμόρφωση μεταφέρεται στα πέλματα μέσω διατμητικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στις ακμές όπου τα πέλματα ενώνονται με τον κορμό

Ομως οι επίπεδες διατμητικές τάσεις στο πέλμα δεν είναι ομοιόμορφες κατά το πλάτος του (βλέπε σχήμα 1.6) και έτσι η διατομή του πέλματος δεν παραμένει επίπεδη με αποτέλεσμα να μειώνεται η ικανότητα του να φέρει αξονικές τάσεις όπως αυτές προβλέπονται από την απλή θεωρία της κάμψης.



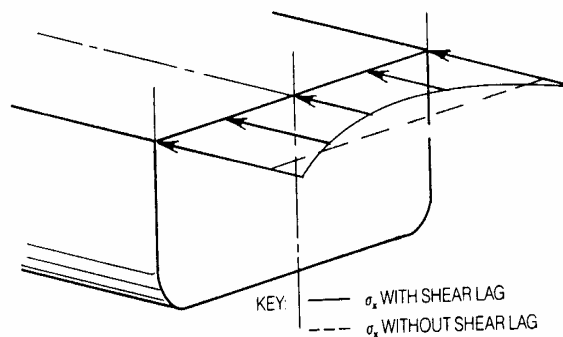
Σχήμα 1.6-Υστέρηση διάτμησης

Το φαινόμενο λέγεται υστέρηση διάτμησης, και έχει ως αποτέλεσμα την μη σταθερή κατανομή των ορθών τάσεων κατά την κάμψη σε σημεία που ισαπέχουν από τον ουδέτερο άξονα (βλέπε σχήμα 1.7)



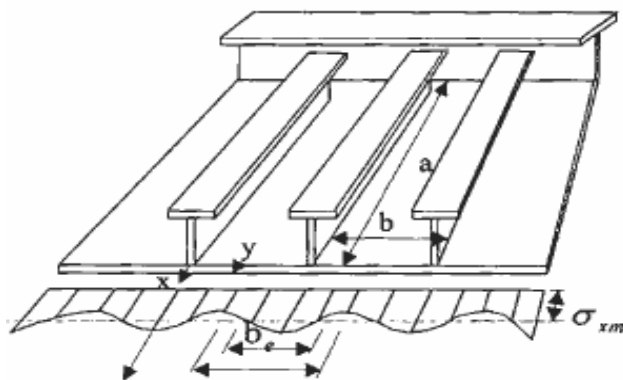
Σχήμα 1.7-Πραγματική κατανομή ορθών τάσεων λόγω κάμψης

Το φαινόμενο εξαρτάται από την γεωμετρία της διατομής και είναι πιο έντονο όσο μειώνεται ο λόγος του πάχους των ελασμάτων με επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο κάμψης προς το πλάτος των ελασμάτων με επίπεδο κάθετο προς το επίπεδο κάμψης. Στην περίπτωση των ναυπηγικών κατασκευών έχει μεγαλύτερη επίδραση στην κάμψη των κατασκευαστικών στοιχείων παρά στην κάμψη της γάστρας.



Σχήμα 1.8-Υστέρηση διάτμησης στο κατάστρωμα

Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7 η υστέρηση διάτμησης έχει ως αποτέλεσμα οι τάσεις να είναι μεγαλύτερες στην ένωση κορμού με τα πέλματα και μικρότερες σε απόσταση από την ένωση.



Σχήμα 1.9-Ενεργό πλάτος b_e συνημμένου ελάσματος καταστρώματος

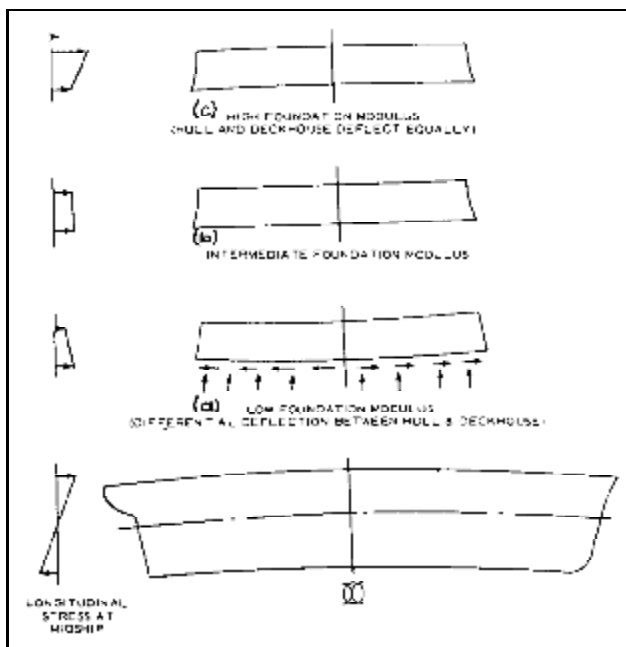
Για το λόγο αυτό, στον υπολογισμό της ροπής αντίστασης της διατομής (*section modulus*) ενός καμπτόμενου λεπτότοιχου δοκαριού, χρησιμοποιείται αντί του πλάτους του πέλματος ένα ισοδύναμο ή ενεργό πλάτος (*effective breadth*) το οποίο πολλαπλασιάζεται με τη μέγιστη τάση (στο σημείο ένωσης πέλματος και κορμού) δίδει την αξονική δύναμη που συνολικά φέρει η διατομή.

Το ίδιο κατ' επέκταση ισχύει και στην περίπτωση συνεργασίας διαμηκών ενισχυτικών με το κατάστρωμα. Το συνημμένο έλασμα καταστρώματος στο ενισχυτικό θεωρείται ότι συμμετέχει στην διαμήκη κάμψη με το ενεργό πλάτος και όχι με το πραγματικό πλάτος.

1.6.3 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Εστω δύο δοκοί ορθογωνικής διατομής, ένας συμπαγής και ένας κοίλος που και οι δύο υπόκεινται σε καμπτικά φορτία εφαρμοζόμενα στη μία επιφάνειά τους. Στην περίπτωση του συμπαγούς δοκαριού η διατομή δεν παραμορφώνεται και η μετατόπιση όλων των σημείων της είναι σταθερή.

Η συμπεριφορά του κοίλου δοκαριού είναι διαφορετική. Στο κοίλο δοκάρη οι κατακόρυφες μετατοπίσεις των σημείων του κατά μήκος μιας εγκάρσιας τομής του δεν είναι ίσες. Η καμπύλωση αυτή των ελασμάτων προκαλεί διαφορετικές αξονικές δυνάμεις σε σημεία που ισαπέχουν από τον ουδέτερο άξονα της διατομής και απομακρύνει την πραγματική απόκριση από την απλή θεωρία της κάμψης.



Σχήμα 1.9-Κάμψη καταστρώματος και υπερκατασκευής

1.7 ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Τα σχήματα 1.11 και 1.12 περιγράφουν τη γενική συμπεριφορά των μεταλλικών κατασκευών όταν, ασκούνται εξωτερικές στατικές θλιπτικές φορτίσεις. Στο σχήμα 1.11 βλέπουμε ότι στο πρώτο στάδιο παρατηρείται γραμμική ελαστική απόκριση, δηλαδή η μετατόπιση είναι ανάλογη του μεγέθους της εξωτερικής φόρτισης. Η κάθε κατασκευή έχει τη δική της χαρακτηριστική ακαμψία, η οποία αναπαρίσταται με τη κλίση της καμπύλης. Έτσι οι πιο εύκαμπτες κατασκευές εμφανίζουν μικρότερη κλίση, ενώ οι πιο άκαμπτες (δύσκαμπτες) έχουν μεγαλύτερη κλίση.

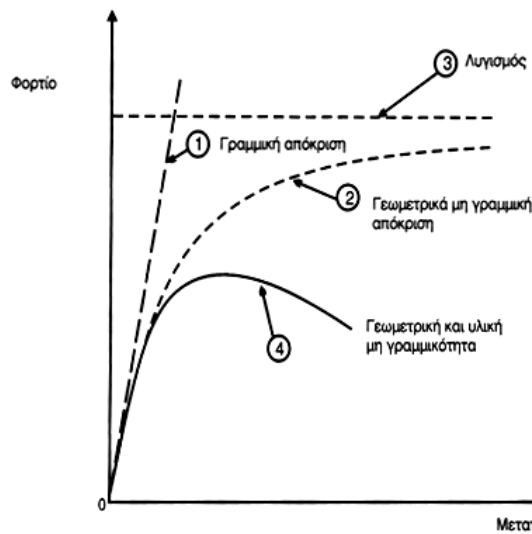
Η συμπεριφορά της κατασκευής είναι δυνατόν να αλλάξει, εάν το φορτίο γίνει ίσο με το φορτίο λυγισμού. Στην περίπτωση αυτή, η κλίση δηλαδή η ακαμψία της κατασκευής ελαττώνεται. Σε ορισμένες κατασκευές η κλίση μπορεί να παραμείνει θετική, σε άλλες μπορεί να γίνει ίση με μηδέν, ενώ σε άλλες μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα των πρώτων είναι τα απλά ελάσματα που είναι σχετικά λεπτά, παράδειγμα των δεύτερων είναι οι τέλειες πρισματικές διατομές και των τρίτων οι πρισματικές διατομές με ατέλειες.

Στο σχήμα 1.11 εικονίζεται ως καμπύλη 3 η μεταλυγισμική συμπεριφορά (*post-buckling behavior*) με μηδενική ακαμψία. Κατασκευές που υπάγονται σε αυτή τη κατηγορία δεν έχουν τη δυνατότητα να παραλάβουν μεγαλύτερα φορτία στη μεταλυγισμική περιοχή.

Η καμπύλη 2 του σχήματος 1.11 αφορά τη συμπεριφορά κατασκευών με αρχικές ατέλειες. Όπως είναι αντιληπτό, οι πραγματικές κατασκευές έχουν κατασκευαστικές ατέλειες, καθώς επίσης και ατέλειες του υλικού.

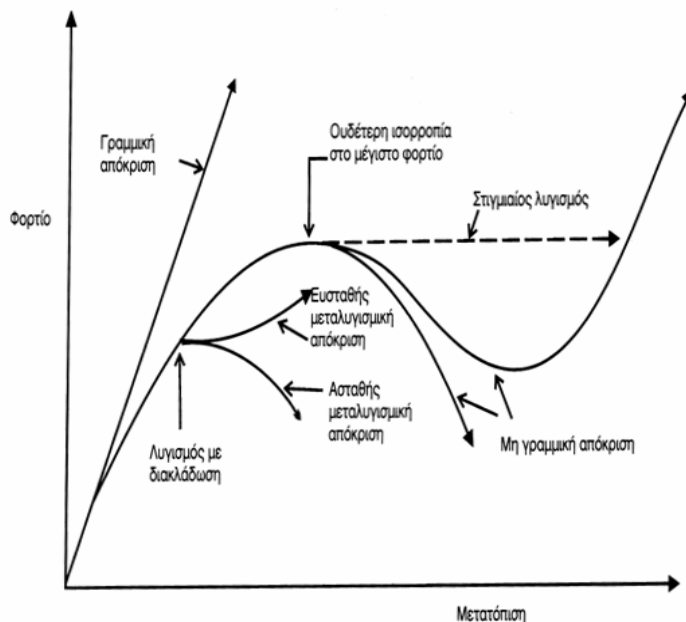
Οι κατασκευαστικές ατέλειες αφορούν τις αποκλίσεις από την τέλεια μορφή είτε λόγω της διαδικασίας εξέλασης είτε λόγω συγκολλήσεων. Έτσι, η συμπεριφορά των πραγματικών κατασκευών αναμένεται να προσεγγίζει περισσότερο την καμπύλη 2 του σχήματος.



Σχήμα 1.11-Επίδραση εξωτερικών φορτίσεων στη συμπεριφορά των όλκιμων υλικών

Ενας άλλος λόγος που οδηγεί στην απόκλιση από τη συμπεριφορά της τέλειαις πρισματικής διατομής είναι το ότι δε συμπίπτει ο άξονας επιβολής του φορτίου με το κεντροβαρικό άξονα της διατομής. Η εκκεντρότητα αυτή προκαλεί κάμψη της διατομής και πρόωρη αστοχία. Παράδειγμα τέτοιας απόκρισης είναι αυτή της διατομής με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, η οποία όμως έχει τέτοια γεωμετρία, ώστε να προκύπτει λυγισμός στην ελαστική περιοχή, προσεγγίζεται δηλαδή από την σχέση του *Euler*. Στη συμπεριφορά της διατομής αυτής δεν υπεισέρχονται φαινόμενα πλαστικοποίησης και έτσι η προέκταση της καμπύλης θα πλησιάσει ασυμπτωτικά την οριζόντια ευθεία. Εάν όμως παρατηρηθεί πλαστικοποίηση σε κάποιο σημείο της κατασκευής, αυτό θα επηρεάσει τη συμπεριφορά της και θα προκύψει ελάττωση της κλίσης (αποφόρτιση)

και κατάρρευση. Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά δε θα είναι ασυμπτωτική προς την οριζόντια, αλλά θα ακολουθήσει την τροχιά της καμπύλης 4 του σχήματος 1.10 Στο σχήμα 1.11 εξετάζονται εκτενέστερα οι διάφορες αυτές περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι στο σχήμα έχει συμπεριληφθεί και η περίπτωση του *στιγμαίου λυγισμού* (*snap buckling*), φαινόμενο που προκύπτει όταν η κατασκευή αλλάζει μορφή κατά το λυγισμό. Επειδή η τιμή της τάσης λυγισμού μιας κατασκευής με αρχικές ατέλειες εξαρτάται και από τη μορφή των ατελειών αυτών, εάν η κατανομή τους δεν είναι αυτή που αντιστοιχεί με τη μικρότερη τιμή της τάσης του λυγισμού, τότε κατά την αστοχία της κατασκευής η μορφή που θα πάρει η κατασκευή δε θα είναι αυτή που αντιστοιχεί στις αρχικές ατέλειες, αλλά αυτή που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τάση λυγισμού. Έτσι, παρατηρείται αλλαγή της μορφής (δηλαδή του αριθμού ημικυμάτων) της κατασκευής, που οδηγεί στην άμεση αύξηση των μετατοπίσεων για σταθερό φορτίο (διακεκομμένη γραμμή). Όταν δε η κατασκευή επανέλθει σε ευσταθή κατάσταση, τυχόν νέες αυξήσεις του φορτίου συνοδεύονται από συμπεριφορά ανάλογη με αυτήν της προλυγισμικής περιοχής.



Σχήμα 1.12-Κατηγορίες απόκρισης κατασκευών σε εξωτερικές φορτίσεις

Στο σχήμα 1.12 περιλαμβάνονται και διάφορες περιπτώσεις λυγισμού που συνοδεύονται από *διακλάδωση* (*bifurcation*). Σε μία από αυτές έχουμε ευσταθή μεταλυγισμική συμπεριφορά, δηλαδή η κατασκευή είναι σε μια θέση να παραλάβει φορτίσεις και στη μεταλυγισμική περιοχή, εφόσον δεν έχει προκύψει κατάρρευση.

Παράδειγμα τέτοιας κατασκευής είναι το απλό έλασμα που φέρει μονοαξονικό θλιπτικό φορτίο. Όμως εάν σε μία κατασκευή ο λυγισμός συνοδεύεται από κατάρρευση (πχ πρισματική διατομή-καμπύλη 4, σχήμα 1.11), τότε η απόκριση είναι αυτής της τελευταίας καμπύλης του σχήματος.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν τα στοιχεία της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου παραλαμβάνουν θλιπτικές φορτίσεις, υπάρχουν πολλοί δυνατοί τρόποι απόκρισης, ορισμένοι από τους οποίους μπορεί να έχουν πολύ δυσάρεστα αποτελέσματα, ενώ άλλοι λιγότερο.

Η συμπεριφορά των διαφόρων στοιχείων της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου θα εξαρτηθεί από τη γεωμετρία, τον τρόπο φόρτισης και τον τρόπο στήριξής τους. Έτσι, τα στοιχεία που φέρουν θλιπτικές φορτίσεις σε γενικές γραμμές συμπεριφέρονται όπως οι κολόνες και οι δοκοί-κολόνες ή όπως τα ελάσματα και τα ενισχυμένα ελάσματα. Υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην απόκριση αυτών των κατασκευών οι οποίες επηρεάζουν τη συμπεριφορά γενικότερα και μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις να προκαλέσουν την κατάρρευση της κατασκευής.

Γενικά όλοι οι φορείς που φέρουν θλιπτικές φορτίσεις σε ναυπηγικές κατασκευές έχουν πρισματική μορφή, η οποία είναι μία κανονική γεωμετρική μορφή που παραμένει αμετάβλητη σε όλο το μήκος της. Έτσι, μπορούμε να διακρίνουμε τους φορείς ανάλογα με τη συμπεριφορά τους ή με τον τρόπο φόρτισής τους.

Οι φορείς που καταρρέουν στη μεταλυγισμική περιοχή γενικά μπορούν να προσομοιωθούν με κολόνες, δοκούς-κολόνες ή ενισχυμένα ελάσματα, ενώ αυτοί που δεν καταρρέουν συμπεριφέρονται ως απλά ελάσματα.

1.8 ΚΟΛΟΝΕΣ ΚΑΙ ΔΟΚΟΙ-ΚΟΛΟΝΕΣ

Κολόνες ή υποστυλώματα (*columns*) συναντώνται σε όλες γενικά τις ναυπηγικές κατασκευές. Όμως εκτός από τις γνωστές πρισματικές και κυκλικές διατομές που χρησιμοποιούνται για τη στήριξη καταστρωμάτων, η θεωρία της κολόνας (*column theory*) και της δοκού-κολόνας (*beam-column*) μπορεί να βρει εφαρμογή και στην προσομοίωση των ενισχυμένων ελασμάτων. Αυτό συμβαίνει διότι η γεωμετρία του ενισχυμένου ελάσματος είναι τέτοια, ώστε η κατάρρευσή του κατά κανόνα ακολουθεί το μηχανισμό κατάρρευσης της κολόνας, διότι ο τοπικός λυγισμός του ενισχυτικού αποφεύγεται με κατάλληλη διαστασιολόγηση.

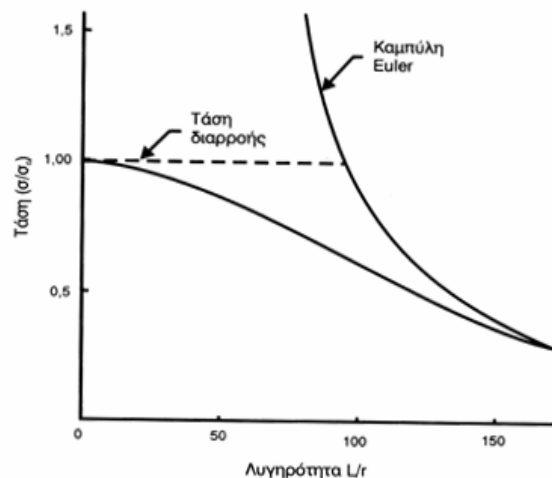
Εφόσον λοιπόν δεν παρουσιάζονται φαινόμενα τοπικού λυγισμού, η κατάρρευση είναι γενική και προκύπτει μεταξύ των σημείων στήριξης των άκρων στους νομείς.

Κατά συνέπεια η θεωρία των δοκών-κολόνων βρίσκει πολύ πιο εκτεταμένη εφαρμογή απ' ό τι αρχικά διαφαίνεται. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι είναι πιο εύχρηστη από τη θεωρία των ελασμάτων.

Η συμπεριφορά των κολόνων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, ένας όμως από τους σημαντικότερους είναι το μήκος, ιδιαίτερα σε σχέση με το μέγεθος της εγκάρσιας επιφάνειας και τη μορφή της. Έτσι, εάν σε μία κολόνα σταθερής διατομής αυξήσουμε το μήκος της, παρατηρούμε ότι το φορτίο που μπορεί να παραλάβει ελαττώνεται. Εάν επιχειρήσουμε να αυξήσουμε το φορτίο πέραν του φορτίου λυγισμού παρατηρούμε ότι αυτό δεν είναι εφικτό. Η μαθηματική θεωρία της συμπεριφοράς των κολόνων ξεκίνησε το 18^ο αιώνα, οπότε προτάθηκε η εξίσωση ελαστικού λυγισμού (*Euler*):

$$P_{cr} = \frac{kP^2 EI}{l^2}$$

Η γραφική παράσταση της δίνεται στο σχήμα 1.13. Στη σχέση αυτή, P_{cr} είναι το (κρίσιμο) φορτίο ελαστικού λυγισμού, E είναι το μέτρο ελαστικότητας (*modulus of elasticity* ή *Young's modulus*), I είναι η ροπή αδράνειας (*moment of inertia*) της εγκάρσιας διατομής περί τον άξονα κάμψης, l είναι το μήκος της κολόνας και k είναι ένας συντελεστής που εξαρτάται από τον τρόπο στήριξης των άκρων.

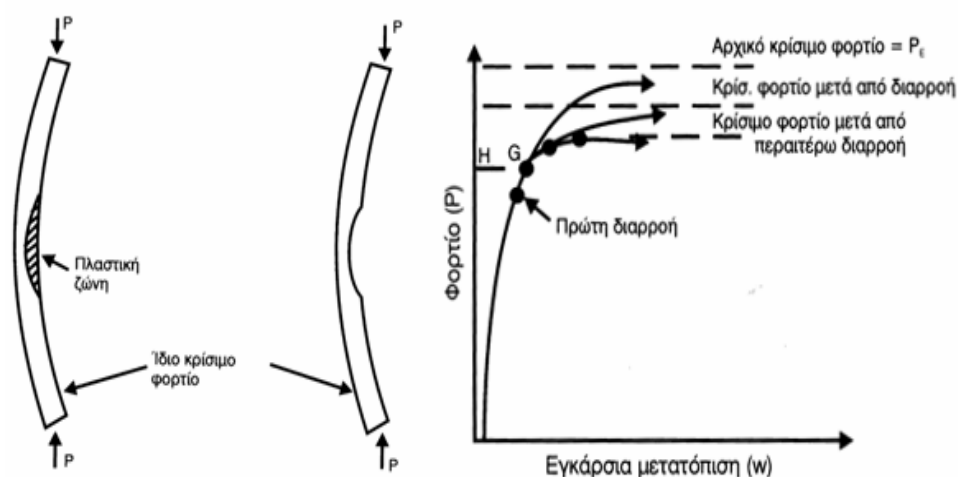


Σχήμα 1.13-Καμπύλες αντοχής ελαστικής διατομής-Euler και πραγματικής διατομής

Εάν δηλαδή η κολόνα πακτωθεί στα δύο άκρα, τότε αυξάνεται η τιμή k , καθώς αυξάνεται και η τάση λυγισμού ($\sigma_{cr}=P_{cr}/A$).

Η παραπάνω σχέση δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση των μακρών διατομών. Όταν όμως ελαττωθεί το μήκος της κολόνας, παρατηρείται σταδιακή απόκλιση από τα προσδοκώμενα αποτελέσματα, καθώς η σχέση δίνει τιμές στο φορτίο λυγισμού πολύ υψηλότερες απ' αυτές που παρατηρούνται στην πράξη.

Αυτό οφείλεται στο ότι η κολόνα παύει να είναι ελαστική και αρχίζουν να αναπτύσσονται πλαστικές ζώνες σε κρίσιμα σημεία της (σχήμα 1.14). Αυτές δεν συμβάλλουν στην μεταφορική ικανότητα της διατομής και έτσι το ωφέλιμο εμβαδόν της διατομής ελαττώνεται. Για το λόγο αυτό, το μεταφερόμενο φορτίο είναι μικρότερο από το αναμενόμενο, ενώ καθώς επεκτείνονται οι πλαστικές ζώνες η απόκλιση των δύο γίνεται ακόμα μεγαλύτερη.



Σχήμα 1.14-Επίδραση πλαστικοποίησης στην αντοχή πρισματικής διατομής

Τα παραπάνω γίνονται πιο σαφή, εάν σχεδιάσουμε την καμπύλη του *Euler*, όπως γίνεται στο σχήμα 1.13. Βλέπουμε ότι η συμπεριφορά των κολόνων προσεγγίζεται με την καμπύλη 4 του σχήματος 1.11.

Εάν λοιπόν εξετάσουμε την κολόνα ως στοιχείο της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου, γίνεται αντιληπτό ότι η τυχόν αστοχία θα επιφέρει καταστροφικά αποτελέσματα, αφού θα επέλθει τοπική κατάρρευση, η οποία υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να επεκταθεί. Για αυτό το λόγο οι συντελεστές ασφάλειας που χρησιμοποιούνται κατά τον σχεδιασμό πρισματικών διατομών είναι υψηλοί (2,5 – 3,0).

Οι πρισματικοί φορείς που χρησιμοποιούνται στην μεταλλική κατασκευή του πλοίου παραλαμβάνουν εκτός από τα θλιπτικά φορτία και φορτία που ασκούνται σε άλλες κατευθύνσεις και που μπορούν εξίσου να επιφέρουν τοπική αστοχία ή και κατάρρευση. Κατά κανόνα ένας τυπικός πρισματικός φορέας παραλαμβάνει και αξονικά και καμπτικά φορτία. Για αυτό τον λόγο άλλωστε χρησιμοποιείται ο όρος δοκός – κολόνα. Έτσι, υπό ιδανικές συνθήκες θα πρέπει πρώτα να καθοριστούν όλα τα φορτία που ασκούνται σε κάθε στοιχείο της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου και να επακολουθήσει σχεδιασμός του καθενός. Όμως μια τέτοια διαδικασία δεν είναι εφικτό να ακολουθηθεί από πλευράς χρόνου. Επιπλέον, υπάρχει αβεβαιότητα ως προς το μέγεθος και την φορά του κάθε φορτίου που ασκείται λόγω της επίδρασης :

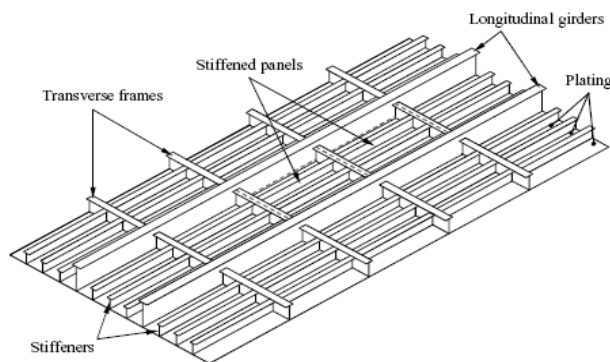
- Του περιβάλλοντος
- Των ιδιοτήτων της μεταλλικής κατασκευής

Σε αντίθεση με τον λυγισμό, κάμψη στοιχείου της μεταλλικής κατασκευής προκύπτει όταν η φόρτιση ασκείται κάθετα στην επιφάνεια του. Στην περίπτωση πρισματικού φορέα ασκείται κάθετα σε ένα στοιχείο του, π.χ. στο ένα πέλμα.

Κατά την κάμψη η απόκριση της κατασκευής αρχικά είναι ανάλογη της επιβαλλομένης φόρτισης, έχουμε δηλαδή γραμμική συμπεριφορά, αλλά σε μεταγενέστερα στάδια η απόκριση γίνεται μη γραμμική. Οι μεταλλικές κατασκευές μπορούν να υποστούν κάμψη διαφόρων ειδών, ανάλογα με την γεωμετρία τους και τον τρόπο στήριξής τους.

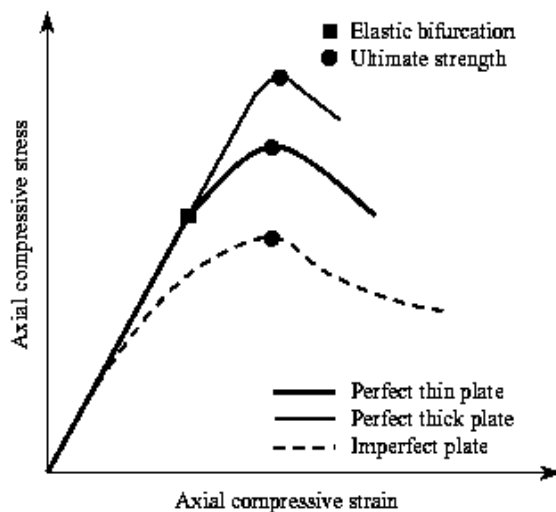
1.9 ΑΠΛΑ ΚΑΙ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ

Η πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς των ελασμάτων της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου μας ωθεί στην αναζήτηση λύσεων που λαμβάνουν υπόψη ορισμένους παράγοντες που επηρεάζουν την απόκριση τους.



Σχήμα 1.15- Τυπική μορφή ενισχυμένου ελάσματος πλοίου

Μια σημαντική απλούστευση του προβλήματος επιτυγχάνεται με την θεώρηση του ενισχυμένου ελάσματος ως δοκού-κολόνας. Η παραδοχή αυτή επιτρέπει την εύρεση λύσεων σε προβλήματα γενικού (ολικού-global) λυγισμού.



Σχήμα 1.16-Συμπεριφορά ελασμάτων υπό μονοαξονική θλιπτική φόρτιση

Ομως στην περίπτωση των τοπικών αστοχιών των διαφόρων στοιχείων που απαρτίζουν το ενισχυμένο έλασμα, αυτή η απλουστευτική παραδοχή δεν μας δίνει λύσεις.

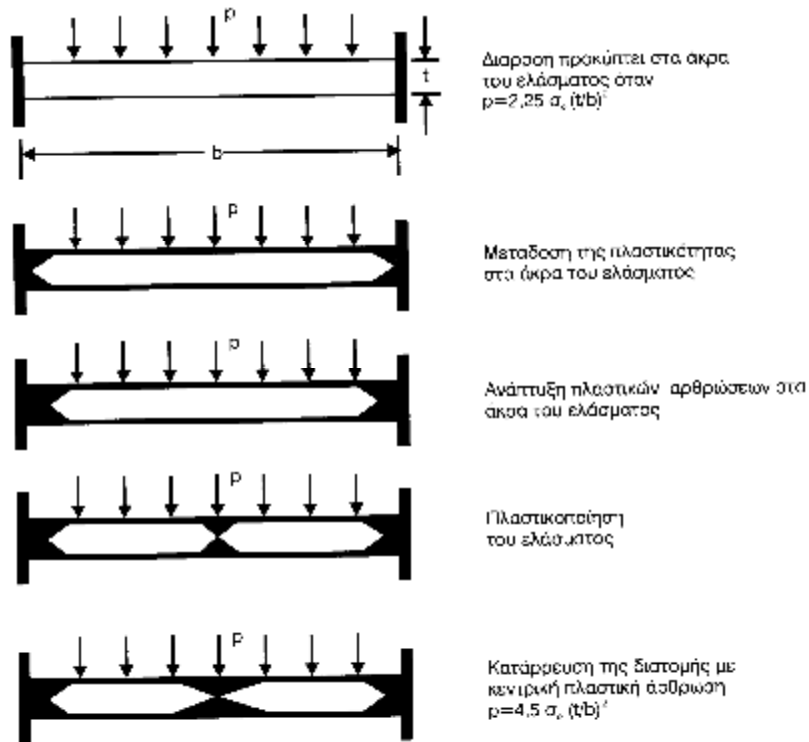
Ακολουθώς θα περιγράψουμε την συμπεριφορά των απλών ελασμάτων υπό καμπτικές και θλιπτικές φορτίσεις, και στην συνέχεια θα αναφερθούμε και σε ενισχυμένα ελάσματα.

1.9.1 ΑΠΛΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Όταν ασκούνται καμπτικές φορτίσεις (π.χ. υδροστατική πίεση) το έλασμα που στηρίζεται σε ενισχυτικά (*stiffeners*) και ζυγά (*transverse*) κάμπτεται και αναπτύσσονται τάσεις στις δύο εγκάρσιες κατευθύνσεις. Κατά κανόνα οι εξωτερικές φορτίσεις δεν είναι αρκετά υψηλές, ώστε να προκαλέσουν κατάρρευση ή εκτεταμένη πλαστική παραμόρφωση.

Οι περιοχές του πλοίου που παραλαμβάνουν μόνο καμπτικές φορτίσεις είναι κυρίως οι εγκάρσιες φρακτές. Επειδή σ' αυτές δεν ασκούνται θλιπτικές φορτίσεις, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αντοχή του ελάσματος και στη μη γραμμική περιοχή, όταν δηλαδή

αρχίζουν να αναπτύσσονται και μεμβρανικές τάσεις, καθότι δεν υπάρχει κίνδυνος λυγισμού.



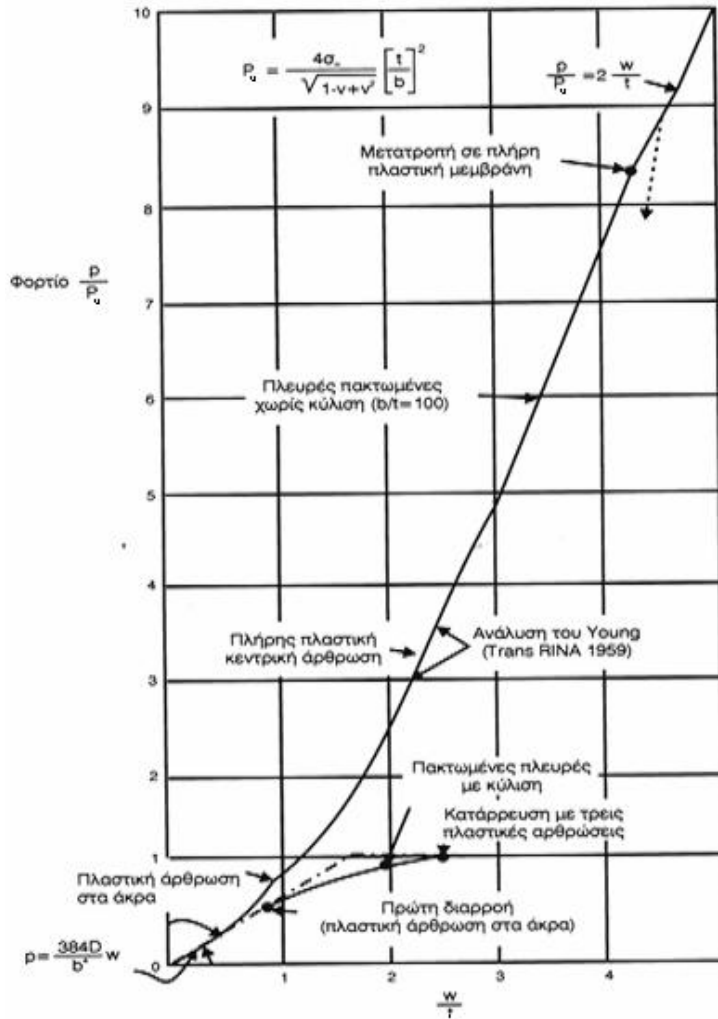
Σχήμα 1.17-Μετάδοση πλαστικότητας σε μακρύ πακτωμένο έλασμα (με δυνατότητα κύλισης)

Εάν επιλέξουμε αυτό το κριτήριο σχεδιασμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πιο λεπτά ελάσματα και συνεπώς η κατασκευή μας θα είναι ελαφρύτερη. Ομως η τυχόν επιβολή φόρτισης μεγαλύτερη της αναμενόμενης ή η σταδιακή χειροτέρευση της κατάστασης του ελάσματος λόγω διάβρωσης προκαλούν την αύξηση των τάσεων. Κατά συνέπεια είναι πιθανόν να προκύψει πλαστικοποίηση σε κάποιο σημείο, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι το έλασμα πρόκειται να καταρρεύσει άμεσα.

Το σχήμα 1.18 δείχνει πως τελική κατάρρευση του ελάσματος προκύπτει όταν η παραμόρφωση σε κάποιο σημείο του οδηγήσει στην γένεση ρήγματος σε πολύ υψηλότερες τάσεις, μετά την μετατροπή του σε πλήρη πλαστική μεμβράνη.

Η πρώτη προσέγγιση σε συμπεριφορά των απλών ελασμάτων υπό καμπτικές φορτίσεις επιτυγχάνεται με χρήση της θεωρίας δοκών. Στο επόμενο στάδιο εξετάζεται η συμπεριφορά των μακριών ελασμάτων, που διαφέρουν από τις δοκούς στο ότι να

αναπτύσσουν και εγκάρσιες τάσεις. Στα μακριά ελάσματα οι ορθές τάσεις και στις δύο κατευθύνσεις παραμένουν σταθερές σε όλο το μήκος τους. Στα πραγματικά ελάσματα όμως τα οποία έχουν πεπερασμένες διαστάσεις, τα εντατικά πεδία μεταβάλλονται κατά μήκος και των ορθογωνίων κατευθύνσεων .



Σχήμα 1.18-Καμπύλη φορτίου βέλους κάμψης για μακριά πακτωμένα ελάσματα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση όπου: w εγκάρσια μετατόπιση, t πάχος, p ομοιόμορφη κατανεμημένη φόρτιση, p_u φορτίο κατάρρευσης, σ_0 τάση διαρροής του υλικού, b πλάτος (μικρότερη διάσταση), D καμπτική ακαμψία, ν λόγος Poisson

Στο σχήμα 1.17 παρουσιάζεται η κατανομή των πλαστικών ζωνών σε εγκάρσια τομή ελασμάτων υπό κατανεμημένη φόρτιση. Αρχικά η πλαστικοποίηση εμφανίζεται στα πακτωμένα άκρα, μέχρις ότου αναπτυχθούν πλαστικές αρθρώσεις. Σε υψηλότερα όμως

φορτία το έλασμα πλαστικοποιείται και στο κέντρο, οπότε καταρρέει, εφόσον βέβαια επιτρέπεται η κύλιση των άκρων. Στο σχήμα 1.18 φαίνεται η μεταβολή των μετατοπίσεων καθώς αυξάνεται το φορτίο.

Παρατηρούμε ότι εάν τα άκρα είναι πακτωμένα και περιορίζεται η κύλισή τους, το έλασμα έχει πολύ μεγάλο απόθεμα αντοχής, και μετά την πλαστικοποίησή του, κατά μήκος των πλευρών και στο κέντρο.

Διαφορετικά, εάν δηλαδή επιτραπεί η κύλιση, πράγμα που συμβαίνει στα ελάσματα κοντά στα άκρα των καταστρωμάτων και γενικά σε περιοχές που στηρίζονται μόνο από την μία πλευρά, το άνω όριο αντοχής καθορίζεται από την ανάπτυξη πλαστικών αρθρώσεων κατά μήκος των άκρων και στο κέντρο του. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συμπεριφορά των ελασμάτων υπό καμπτικές φορτίσεις εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο στήριξής τους, δηλαδή από την μορφολογία της κατασκευής.

Ο ευκολότερος τρόπος προσέγγισης συμπεριφοράς απλών ελασμάτων σε κάμψη είναι με χρήση της θεωρίας δοκών. Μια πιο ακριβής περιγραφή επιτυγχάνεται με την θεωρία μακριών ελασμάτων (*long plate theory*), κατά την οποία αγνοούνται οι εγκάρσιες παραμορφώσεις που προκύπτουν σε ελάσματα συνήθως, πεπερασμένων διαστάσεων. Μια πληρέστερη θεωρία ελασμάτων (λεπτότοιχων ελασμάτων) περιλαμβάνει όλες τις τάσεις που αναπτύσσονται σε επίπεδες εντατικές καταστάσεις (*plane stress states*).

Τέλος στην περίπτωση παχιών ελασμάτων πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι τάσεις που αναπτύσσονται κάθετα στις επιφάνειες του ελάσματος, δηλαδή στην εγκάρσια κατεύθυνση. Τέτοια ελάσματα σπάνια συναντώνται στην κατασκευή του πλοίου και συνεπώς η επίπεδη εντατική κατάσταση προσφέρει επαρκή ακρίβεια.

1.9.2 ΑΠΛΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Το πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα που έχουν σχέση με την αντοχή του πλοίου. Η θλιπτική φόρτιση μπορεί να οδηγήσει σε ολική κατάρρευση της διατομής του καταστρώματος στην περιοχή της μέσης τομής, όπου οι καμπτικές ροπές λόγω της διαμήκου κάμψης του πλοίου και κατά συνέπεια οι ορθές διαμήκειες τάσεις μεγιστοποιούνται.

Εάν προκύψει κατάρρευση της κατασκευής στην περιοχή αυτή, τα αποτελέσματα μπορεί να είναι καταστροφικά. Κατά συνέπεια απαιτείται καλή κατανόηση της συμπεριφοράς της κατασκευής και σωστός σχεδιασμός.

Στις ναυπηγικές κατασκευές η σχετική αντοχή των διαφόρων στοιχείων είναι τέτοια ώστε, εάν προκύψει αστοχία του ελάσματος, οι περαιτέρω φορτίσεις που επιβάλλονται στην κατασκευή παραλαμβάνονται από τα ενισχυτικά. Για το λόγο αυτό ολική κατάρρευση ενός καταστρώματος προκύπτει μόνο όταν και τα ενισχυτικά έχουν αστοχήσει.

Όσον αφορά την *μορφή αστοχίας (mode of failure)* των ελασμάτων, δηλαδή το βαθμό που αυτή επηρεάζεται από την ανάπτυξη πλαστικών ζωνών, εξαρτάται κυρίως από το λόγο του πλάτους προς το πάχος (b/t) του ελάσματος και από τις οριακές συνθήκες (*boundary conditions*). Εάν ο λόγος αυτός είναι μεγαλύτερος του 80, τότε θα προκύψει λυγισμός στην ελαστική περιοχή. Εάν όμως είναι μικρότερος, όπως συμβαίνει στις ναυπηγικές κατασκευές, τότε ο λυγισμός είναι ελαστο-πλαστικός. Κατά συνέπεια έχει ήδη αρχίσει πλαστικοποίηση σε ορισμένες περιοχές του ελάσματος προτού το επιβαλλόμενο φορτίο φθάσει το φορτίο λυγισμού.

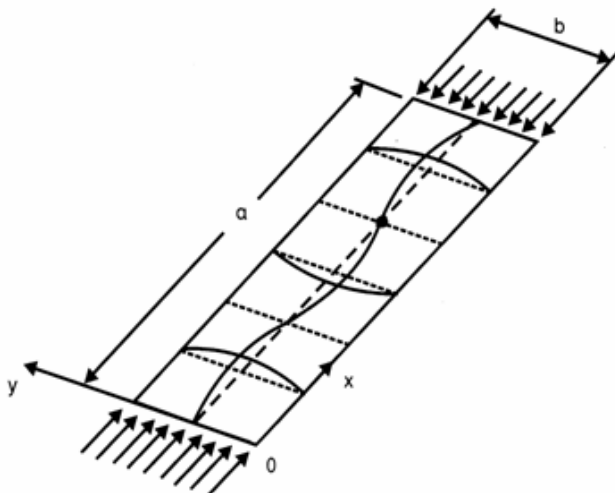
Εάν το έλασμα θεωρηθεί απλά εδρασμένο, τότε το φορτίο λυγισμού που αντιστοιχεί αποτελεί ένα *κάτω όριο*, ενώ εάν το έλασμα θεωρηθεί πακτωμένο, τότε το φορτίο λυγισμού είναι υψηλότερο και συνεπώς συνιστά ένα *άνω όριο*.

Συνήθως θεωρούμε ότι τα ελάσματα που φέρουν θλιπτικές φορτίσεις σε ναυπηγικές κατασκευές είναι απλά εδρασμένα, και κατά συνέπεια βρίσκουμε τιμές που αποτελούν το κάτω όριο της αντοχής τους.

Στο σχήμα 1.19 εικονίζεται η μορφή ενός ορθογώνιου απλού ελάσματος, που έχει υποστεί λυγισμό λόγω μονοαξονικών θλιπτικών φορτίων. Η μορφή του ελάσματος στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι αυτή που προβλέπει η θεωρία ελαστικού λυγισμού ελασμάτων, η οποία όμως διαφέρει ως ένα βαθμό από εκείνη που παρατηρείται σε ελάσματα που λυγίζουν στην ελαστο-πλαστική περιοχή.

Στην τελευταία περίπτωση το μήκος των κοιλάνσεων στην διαμήκη κατεύθυνση είναι μικρότερο από αυτό που προβλέπει η ελαστική θεωρία κατά 15-20% περίπου, ανάλογα με την γεωμετρία και τον τρόπο στήριξης του ελάσματος. Η θεωρητική μελέτη της συμπεριφοράς των ελασμάτων στην ελαστο-πλαστική περιοχή επιτυγχάνεται ευκολότερα με χρήση προγραμμάτων αριθμητικής ανάλυσης (πεπερασμένα στοιχεία, πεπερασμένες διαφορές).

Εάν συγκρίνουμε τη συμπεριφορά ενός πρισματικού φορέα (υποστυλώματος) και ενός απλού ορθογώνιου ελάσματος υπό θλιπτικές φορτίσεις, θα δούμε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές.



Σχήμα 1.19-Ελαστικός λυγισμός απλού ορθογώνιου ελάσματος υπό μονοαξονική θλιπτική φόρτιση με απλή έδραση

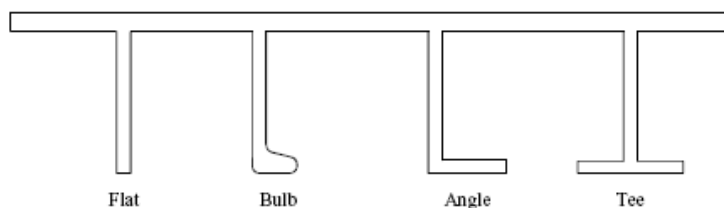
Η κύρια διαφορά έγκειται στο ότι μετά το λυγισμό, η κολόνα καταρρέει άμεσα, ενώ το απλό έλασμα, μπορεί να συνεχίσει να παραλαμβάνει και υψηλότερα φορτία. Υπάρχει δηλαδή απόθεμα αντοχής στα ελάσματα, ιδίως εάν ο λυγισμός προκύψει στην ελαστική περιοχή.

Η διαφορά αυτή παρατηρείται, διότι στην περίπτωση των ελασμάτων τα διαμήκη ενισχυτικά, στα οποία είναι συγκολλημένες οι διαμήκεις πλευρές τους προσφέρουν στήριξη κατά του λυγισμού. Αντιθέτως, στην περίπτωση των πρισματικών φορέων, τέτοια στήριξη από γειτονική κατασκευή δεν υφίσταται και έτσι προκύπτει άμεση κατάρρευση .

1.9.3 ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Στην περίπτωση που το έλασμα που υπόκειται σε καμπτική φόρτιση έχει ενισχυτικά (*stiffeners*), εκτός των καμπτικών τάσεων στο έλασμα αναπτύσσονται καμπτικές τάσεις στα ενισχυτικά. Παραλαμβάνεται ένα τμήμα της φόρτισης και από τα ενισχυτικά και έτσι οι μετατοπίσεις της κατασκευής είναι μικρότερες, σε σύγκριση με το έλασμα χωρίς ενισχυτικά.

Στο σχήμα 1.5 φαίνεται τμήμα του πυθμένα πλοίου, που φέρει υδροστατικό φορτίο. Η κάμψη του ελάσματος μεταξύ των ενισχύσεων είναι εμφανής, όπως επίσης και η κάμψη των σταθμίδων (*girders*) που το στηρίζουν.



Σχήμα 1.20-Τυπικές διατομές ενισχυτικών ελασμάτων

Στην περίπτωση των εγκάρσιων φρακτών (*transverse bulkheads*), οι οποίες συνήθως φέρουν κατακόρυφα ενισχυτικά, η κατασκευή φέρει μόνο καμπτικές (υδροστατικές) φορτίσεις. Εάν η κατασκευή έχει σχεδιαστεί στην ελαστική περιοχή εάν δηλαδή δεν επιτρέπονται πλαστικές παραμορφώσεις υπό τις συνήθεις καταστάσεις φόρτισης, η κατασκευή κάμπτεται και συμπεριφέρεται απόλυτα ελαστικά.

Εάν όμως η κατασκευή έχει υποστεί φθορά λόγω διάβρωσης ελαττώνεται η μέγιστη αντοχή της, και για τις ίδιες καμπτικές φορτίσεις οι μετατοπίσεις που προκύπτουν είναι μεγαλύτερες. Επίσης, η επίδραση της *κόπωσης* είναι εντονότερη και έτσι ελαττώνεται η αντοχή της κατασκευής.

Εάν οι φορτίσεις προκαλέσουν μόνιμες παραμορφώσεις, στα ενισχυτικά, είναι δυνατόν, λόγω συνεχιζόμενης φόρτισης, σε μελλοντική χρονική στιγμή να μεγαλώσουν και να περιοριστεί σημαντικά η αντοχή της κατασκευής. Εάν συμβεί αυτό υπάρχει περίπτωση να προκύψει *ρωγμή* (*crack*) και να πλημμυρίσει με υγρό φορτίο ή έρμα.

Σημειώνεται ότι, όταν αρχίσει να επιδεινώνεται η κατάσταση της μεταλλικής κατασκευής λόγω ενός παράγοντα (π.χ. διάβρωση), η επίδραση άλλων παραγόντων (πχ κόπωση, λυγισμός) γίνεται εντονότερη. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό, εάν εξαρτήσουμε την σχέση των φαινόμενων μεταξύ τους. Η διάβρωση προκαλεί ελάττωση του πάχους της κατασκευής. Κατά συνέπεια, η τάση λυγισμού του ελάσματος, που είναι συνάρτηση του πάχους, επίσης ελαττώνεται αντίστοιχα, οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω των ίδιων φορτίων στο πιο λεπτό έλασμα αυξάνονται. Με αυτό τον τρόπο το μέγεθος των επαναλαμβανόμενων τάσεων που οδηγούν σε κόπωση της κατασκευής αυξάνεται και έτσι η κατασκευή από πλευράς κόπωσης απαιτεί λιγότερες επαναληπτικές φορτίσεις για να φτάσει στο κρίσιμο όριό της. Με την αύξηση των τάσεων λόγω της διάβρωσης αυξάνονται και αντίστοιχες παραμορφώσεις, ενώ το περιθώριο ασφάλειας έναντι εμφάνισης ρήγματος ελαττώνεται. Έτσι υπάρχει αυξημένη

πιθανότητα εμφάνισης ρήγματος, που μπορεί να επιφέρει και καταστροφικά αποτελέσματα.

Βλέπουμε ότι η χειροτέρευση της κατάστασης της μεταλλικής κατασκευής δεν συνεχίζεται γραμμικά στο χρόνο αλλά με αυξανόμενους ρυθμούς. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι απαιτείται προσεκτική συντήρηση έτσι ώστε να διατηρείται η κατασκευή σε αποδεκτά επίπεδα και να μην προκύψει το φαινόμενο χιονοστιβάδα, που θα προκαλέσει σοβαρό πρόβλημα ασφάλειας της κατασκευής, με δυσανάλογα υψηλό κόστος απαιτούμενων επισκευών.

Οι παρατηρήσεις αυτές αφορούν βέβαια όχι μόνο τα ενισχυμένα ελάσματα που φέρουν καμπτικές φορτίσεις αλλά ολόκληρη τη μεταλλική κατασκευή του πλοίου .

1.9.4 ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΟ ΕΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

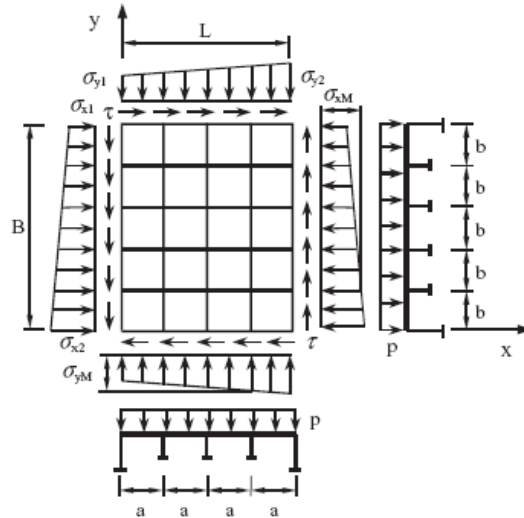
Το θέμα αυτό έχει άμεση σχέση με την συμπεριφορά των απλών ελασμάτων υπό θλιπτικές φορτίσεις, που εξετάστηκαν προηγουμένως. Όταν ένα έλασμα φέρει ενισχυτικά, αυξάνεται σημαντικά η αντοχή σε θλίψη. Εάν τα ενισχυτικά είναι παράλληλα με την επιβαλλόμενη φόρτιση , η αντοχή του ελάσματος είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι όταν είναι διαταγμένα κάθετα στη φορά της. Η *διαμήκης ενίσχυση (longitudinal stiffening)* είναι από πλευράς αντοχής η πλέον αποδοτική και για το λόγο εφαρμόζεται σε μεγάλα πλοία.

Στις ναυπηγικές κατασκευές η κατανομή του υλικού μεταξύ του ελάσματος (A_p επιφάνεια διατομής ελασμάτων) και των ενισχυτικών (A_s επιφάνεια διατομής ενισχυτικών) δίνεται από την σχέση $A_s = k A_p$ όπου συνήθως $0,2 < k < 0,4$. Επειδή όμως η τάση λυγισμού του ενισχυτικού είναι πολύ υψηλότερη αυτής του ελάσματος, η διατομή μπορεί να παραλάβει αρκετά μεγαλύτερα φορτία.

Αποτελεί όμως χαρακτηριστικό των ενισχυτικών ότι, όταν προκύψει λυγισμός σ' αυτά, δεν υπάρχει απόθεμα περαιτέρω αντοχής και η κατάρρευση που επακολουθεί είναι ραγδαία. Για αυτό το λόγο αυτό πρέπει να αποφεύγεται η κατάρρευση των ενισχυτικών, διότι μπορεί να προκληθεί σημαντική ζημιά στην κατασκευή του πλοίου. Εάν αυτό προκύψει σε κατάστρωμα αντοχής (κύριο κατάστρωμα), υπάρχει πιθανότητα να επακολουθήσει ολική κατάρρευση.

1.10 ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΩΝ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ

Στο σχήμα 1.21 εικονίζονται οι διάφορες εντός και εκτός επιπέδου φορτίσεις που δέχεται ένα ενισχυμένο έλασμα.



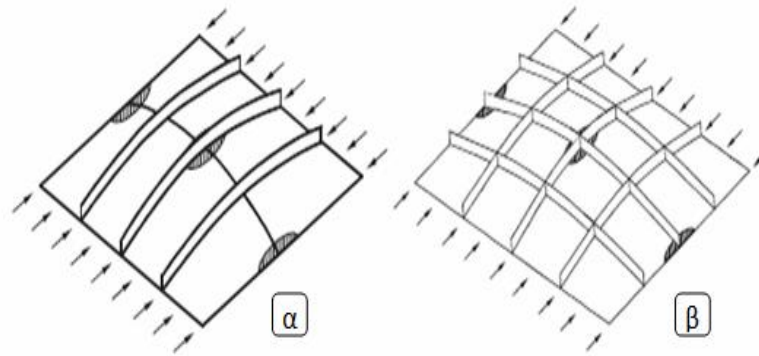
Σχήμα 1.21-Συνδυασμός φορτίσεων ενισχυμένου ελάσματος

Οι κύριοι τρόποι (μορφές) αστοχίας (*failure modes*) των ενισχυμένων ελασμάτων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε έξι:

- Μορφή I: Κατάρρευση του ενισχυμένου ελάσματος σαν ενιαία μονάδα υπό μονοαξονική θλιπτική φόρτιση
 - Μορφή I-1: Ενισχυμένο έλασμα διαμήκως (σχήμα 1.20α)
 - Μορφή I-2: Ενισχυμένο έλασμα διαμήκως και εγκάρσιως (σχήμα 1.20β)
- Μορφή II: Διαξονική θλιπτική κατάρρευση (σχήμα 1.21)
- Μορφή III: Κατάρρευση ως δοκού-κολόνας (σχήμα 1.22)
- Μορφή IV: Τοπικός λυγισμός κορμού ενισχυτικού (σχήμα 1.23)
- Μορφή V: Αστοχία tripping του ενισχυτικού (σχήμα 1.24)
- Μορφή VI: Ολική διαρροή

Η μορφή I αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου τα ενισχυτικά είναι σχετικώς ασθενή. Σε αυτή την περίπτωση το ενισχυτικό λυγίζει μαζί με το έλασμα σαν ενιαία μονάδα. Η συμπεριφορά του ενισχυμένου ελάσματος ίσως είναι αρχικά ελαστική. Το

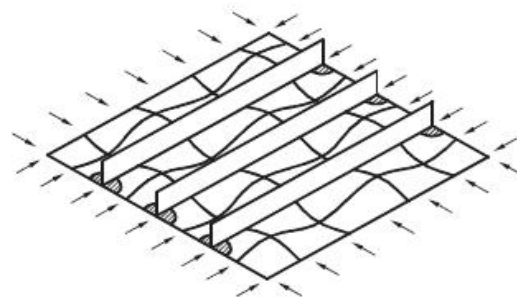
ενισχυμένο έλασμα μπορεί κανονικά να αντέξει επιπλέον φόρτιση πέραν του ορίου του ελαστικού λυγισμού. Η μέγιστη αντοχή επιτυγχάνεται όταν σχηματιστούν περιοχές διαρροής του υλικού (γραμμοσκιασμένες περιοχές στα σχήματα) μέσα στο έλασμα και/ή κατά μήκος των ακμών. Η μορφή I-1 αντιπροσωπεύει την *κατάρρευση δοκού-κολόνας*, ενώ Η μορφή I-2 προσομοιάζει την κατάρρευση ενός *ορθοτροπικού ελάσματος*.



Σχήμα 1.22-Κατάρρευση ενισχυμένου ελάσματος ως ενιαία μονάδα υπό μονοαξονική θλίψη.

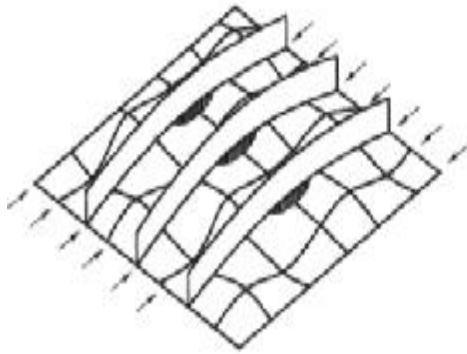
Η μορφή II αντιπροσωπεύει την κατάρρευση που συμβαίνει όταν ενισχυμένο έλασμα καταρρέει από διαρροή που συμβαίνει κατά μήκος των σημείων τομής ενισχυτικών και ελάσματος, στα άκρα του ελάσματος, χωρίς όμως αστοχία των ενισχυτικών.

Η εν λόγω μορφή κατάρρευσης είναι σημαντική σε κάποιες περιπτώσεις διαξονικής καταπόνησης και/ή σε περιπτώσεις βραχέων (κοντών) και σθεναρών (*stocky*) ελασμάτων.



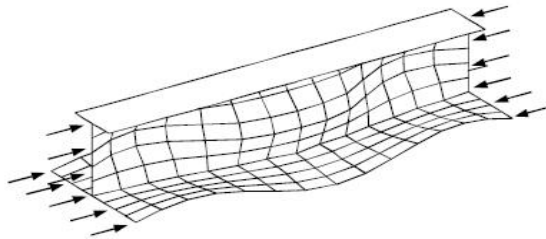
Σχήμα 1.23-Κατάρρευση ενισχυμένου ελάσματος υπό δυαξονική θλίψη.

Η μορφή III δείχνει την κατάρρευση κατά την οποία η μέγιστη αντοχή επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη διαρροή του ελάσματος και του ενισχυτικού στο μέσο. Συμβαίνει στη περίπτωση κατά την οποία το ενισχυτικό έχει ενδιάμεσες γεωμετρικές ιδιότητες, δεν είναι δηλαδή ούτε ασθενές ούτε πολύ ισχυρό.



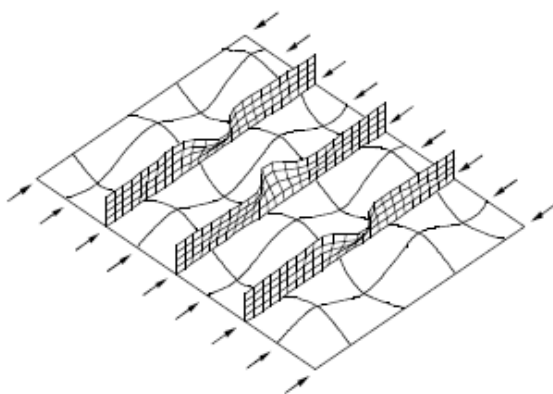
Σχήμα 1.24-Κατάρρευση δοκού-κολόνας

Οι μορφές κατάρρευσης IV, V ξεκινούν να προκαλούνται από αστοχία των ενισχυτικών, όταν ο λόγος ύψους κορμού προς το πάχος του είναι μεγάλος, και/ή όταν το πέλμα του ενισχυτικού δεν κατορθώνει να παραμείνει ευθύ με αποτέλεσμα ο κορμός του ενισχυτικού να λυγίζει ή να συστρέφεται πλευρικά.



Σχήμα 1.25-Τοπική κατάρρευση κορμού του ενισχυτικού

Η μορφή κατάρρευσης V μπορεί να συμβεί όταν η μέγιστη αντοχή προσεγγίζεται έπειτα από τον εγκάρσιο στρεπτικό λυγισμό (*lateral-torsional buckling* ή *tripping*) του ενισχυτικού. Ο τρόπος IV αντιπροσωπεύει την αστοχία κατά την οποία επέρχεται τοπική κατάρρευση από λυγισμό του κορμού του ενισχυτικού.



Σχήμα 1.26-Αστοχία 'tripping' του ενισχυτικού

Η μορφή VI συμβαίνει όταν η *λυγρότητα (slenderness)* του ενισχυμένου ελάσματος είναι σχετικά μικρή ή το ενισχυμένο έλασμα είναι βραχύ και σθεναρό και/ή όταν το ενισχυμένο έλασμα τελεί υπό αξονικό εφελκυσμό οπότε δεν συμβαίνει ούτε τοπικός ούτε ολικός λυγισμός αλλά καταρρέει από ολική διαρροή του υλικού.

Παρόλο που στην πράξη κάποιοι από τους παραπάνω τρόπους (μορφές) αστοχίας μπορεί να συμβούν και ταυτόχρονα, κατά τον σχεδιασμό θεωρούμε ότι η κατάρρευση ενός ενισχυμένου ελάσματος θα συμβεί με τον τρόπο ο οποίος προσδίδει στο ενισχυμένο έλασμα την μικρότερη τιμή μέγιστης αντοχής κατά τους υπολογισμούς αν εφαρμοσθεί ο καθένας ξεχωριστά.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΣΜΩΝ I.A.C.S-C.S.R.

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η εφαρμογή της μεθόδου των κοινά αποδεκτών κανόνων ναυπήγησης πλοίων (C.S.R.), για τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής ενός πλοίου μεταφοράς χύδην φορτίου και ενός πειραματικού μοντέλου που προσομοιάζει με τμήμα ναυπηγικής κατασκευής.

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Όσα αναπτύσσονται στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου αφορούν στην εφαρμογή των Κοινών Κανονισμών Ναυπήγησης Χαλύβδινων Πλοίων (*Common Structural Rules for Steel Vessels*) που τυγχάνουν της αποδοχής του Διεθνούς Οργανισμού Νηογνομώνων (*International Association of Classification Societies-I.A.C.S.*) από την 1^η Ιουλίου 2008.

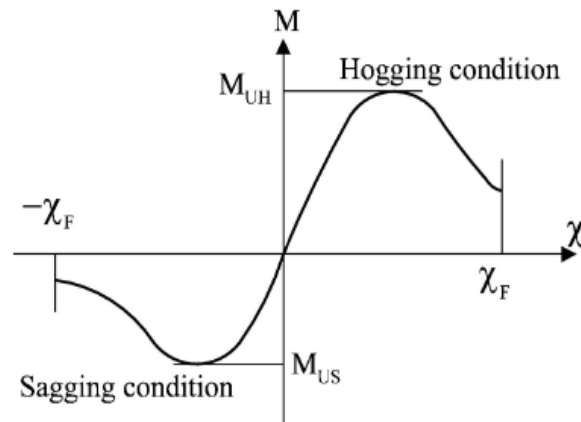
Οι εν λόγω κανονισμοί C.S.R. εφαρμόζονται στον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής σε διαμήκη κάμψη δύο ναυπηγικών κατασκευών:

- Της πλέον σύνθετης διατομής του παράλληλου τμήματος της γάστρας ενός πλοίου μεταφοράς φορτίου χύδην (*bulk carrier*)
- Της απλούστερης διατομής του μοντέλου M3-200, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε πείραμα αντοχής σε ερευνητικό πρόγραμμα ιδρύματος της αλλοδαπής και για το οποίο έχουν δημοσιευθεί τα πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα (βλέπε Βιβλιογραφία αρ.15).

Η επεξήγηση των συμβόλων που χρησιμοποιούνται καθώς και βασικοί ναυπηγικοί ορισμοί και διευκρινήσεις των C.S.R. περιλαμβάνονται λεπτομερώς στα Παραρτήματα Α, Β, και Γ.

2.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΓΑΣΤΡΑΣ

Η μέγιστη καμπτική ροπή την οποία δύναται να αναπτύξει η εγκάρσια διατομή της γάστρας ενός πλοίου, σε κατάσταση sagging ή hogging, καθορίζεται ως η μέγιστη τιμή της καμπύλης της καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ της εγκάρσιας διατομής (βλέπε σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1-Καμπύλη καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ

Η καμπυλότητα χ λαμβάνεται ως θετική για την κατάσταση *hogging* και αρνητική για την κατάσταση *sagging*.

Η καμπύλη κατασκευάζεται σύμφωνα με μια επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω.

2.3 ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ-ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΠΑΧΗ

Η εγκάρσια διατομή της γάστρας απαρτίζεται από δομικά στοιχεία (*structural elements*) τα οποία συνεισφέρουν στη διαμήκη αντοχή της γάστρας και τα οποία εκλαμβάνονται στους υπολογισμούς μέγιστης αντοχής όχι με τα πραγματικά πάχη ναυπηγήσεως t_{as_built} αλλά με τα πάχη $t_{net_offered}$ τα οποία θεωρούνται μειωμένα κατά τι λόγω κάποιας θεωρούμενης υποθετικής διάβρωσης:

$$t_{net_offered} = t_{as_built} - 0.5 t_c$$

όπου t_c το περιθώριο διάβρωσης του δομικού στοιχείου.

Το περιθώριο διάβρωσης t_c , μετρούμενο σε mm, που υφίσταται σε κάθε δομικό στοιχείο της γάστρας εξαρτάται από τις διαβρωτικές συνθήκες που επικρατούν στην περιοχή του, οι οποίες αρκετές φορές είναι διαφορετικές σε κάθε πλευρά του. Είναι:

$$t_c = \text{Roundup}_{0.5}(t_{c1} + t_{c2}) + 0.5 \quad \text{ή}$$

$$t_c = \text{Roundup}_{0.5}(2t_{c1}) + 0.5$$

όπου t_{c1} , t_{c2} οι αντίστοιχες διαβρώσεις εκατέρωθεν του δομικού στοιχείου οι οποίες συνοψίζονται στον πίνακα 2.1.

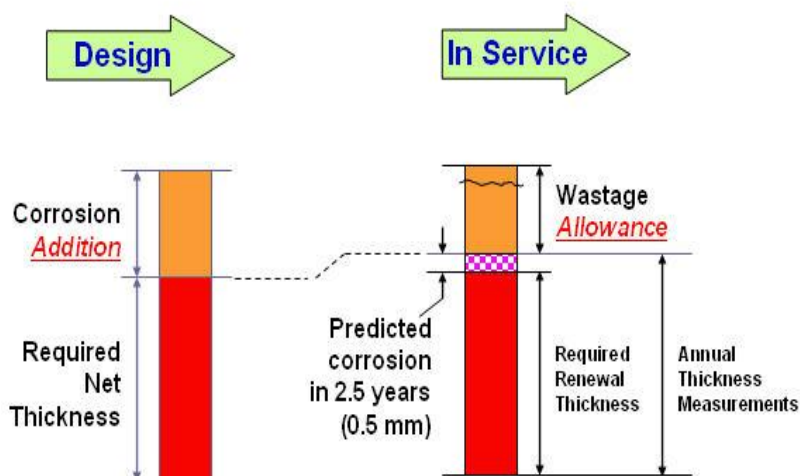
Η τιμή του t_c δεν πρέπει να λαμβάνεται, έστω και αν προκύπτει, ποτέ μικρότερη των 2 mm εκτός των περιπτώσεων κορμού ή πέλματος ενισχυτικών.

Η λεπτομερής διαδικασία των *C.S.R.* για τον υπολογισμό των τελικών παχών (*net scantlings approach*) των δομικών στοιχείων με τα οποία θα γίνει ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής της διατομής περιλαμβάνεται στο Παράρτημα Δ.

Compartment Type	Structural member		Corrosion addition, t_{C1} or t_{C2} in mm	
			BC-A or BC-B ships with $L \geq 150$ m	Other
Ballast water tank ⁽²⁾	Face plate of primary members	Within 3m below the top of tank ⁽³⁾	2.0	
		Elsewhere	1.5	
	Other members	Within 3 m below the top of tank ⁽³⁾	1.7	
		Elsewhere	1.2	
Dry bulk cargo hold ⁽¹⁾	Transverse bulkhead	Upper part ⁽⁴⁾	2.4	1.0
		Lower stool sloping plate, vertical plate and top plate	5.2	2.6
		Other parts	3.0	1.5
	Other members	Upper part ⁽⁴⁾	1.8	1.0
		Webs and flanges of the upper end brackets of side frames of single side bulk carriers		
		Webs and flanges of lower brackets of side frames of single side bulk carriers	2.2	1.2
		Other parts	2.0	1.2
	Sloped plating of hopper tank, inner bottom plating	Continuous wooden ceiling	2.0	1.2
		No continuous wooden ceiling	3.7	2.4
	Exposed to atmosphere	Horizontal member and weather deck ⁽⁵⁾		1.7
Non horizontal member		1.0		
Exposed to sea water ⁽⁷⁾		1.0		
Fuel oil tanks and lubricating oil tanks ⁽²⁾		0.7		
Fresh water tanks		0.7		
Void spaces ⁽⁶⁾	Spaces not normally accessed, e.g. access only through bolted manholes openings, pipe tunnels, etc.		0.7	
Dry spaces	Internal of deck houses, machinery spaces, stores spaces, pump rooms, steering spaces, etc.		0.5	
Other compartments than above		0.5		
Notes				
(1) Dry bulk cargo hold includes holds, intended for the carriage of dry bulk cargoes, which may carry water ballast.				
(2) The corrosion addition of a plating between water ballast and heated fuel oil tanks is to be increased by 0.7 mm.				
(3) This is not to be applied to structural members of inner bottom and located below inner bottom.				
(4) Upper part of the cargo holds corresponds to an area above the connection between the top side and the inner hull or side shell. If there is no top side, the upper part corresponds to the upper one third of the cargo hold height.				
(5) Horizontal member means a member making an angle up to 20° as regard as a horizontal line.				
(6) The corrosion addition on the outer shell plating in way of pipe tunnel is to be considered as water ballast tank.				
(7) Outer side shell between normal ballast draught and scantling draught is to be increased by 0.5 mm.				

Πίνακας 2.1-Περιθώρια διάβρωσης δομικών στοιχείων

Η προσπάθεια των C.S.R. να συνδέσουν το ελάχιστο, από άποψη αντοχής, απαιτούμενο πάχος των δομικών στοιχείων της κατασκευής ενός νεόδμητου πλοίου, με το ελάχιστο αποδεκτό πάχος λόγω της εκτιμώμενης διάβρωσης κατά την λειτουργία του πλοίου είναι προφανής και παριστάνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2-Προσέγγιση ελάχιστου απαιτούμενου πάχους.

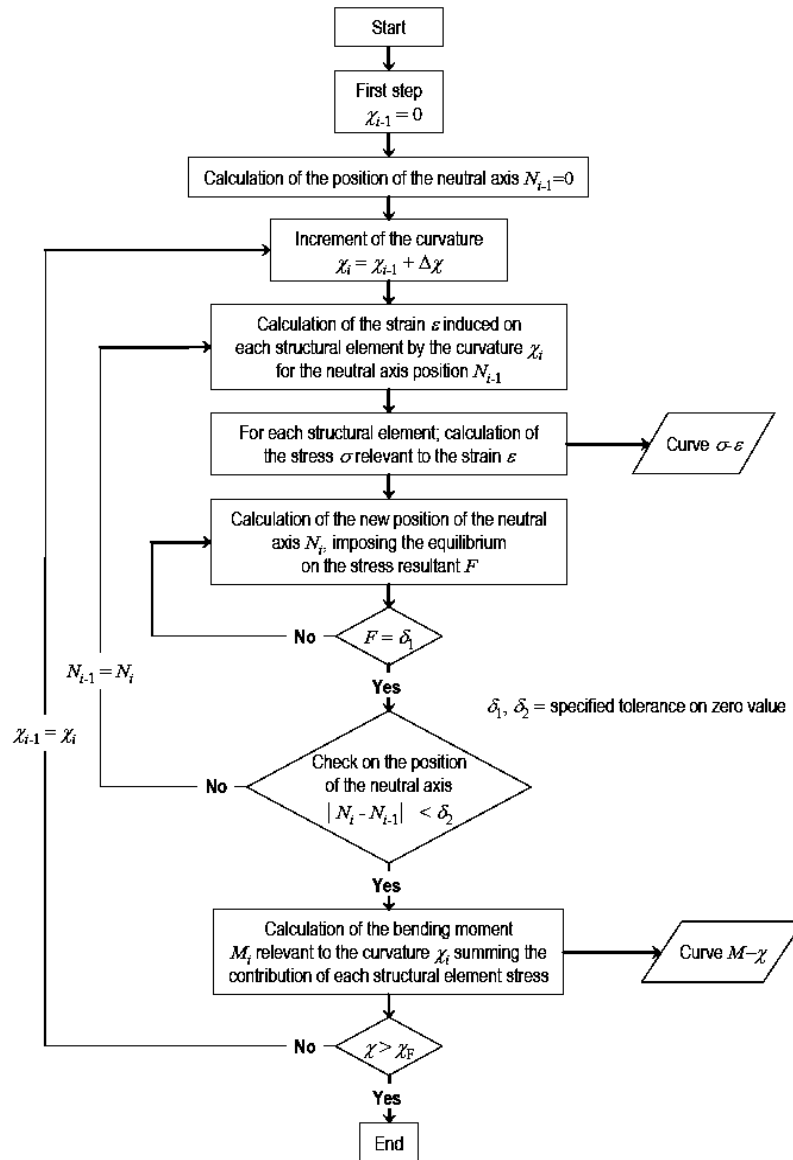
Από την άλλη, στους C.S.R. εκτιμάται ότι στην πραγματικότητα, δεν είναι δυνατόν να συμβεί ταυτόχρονα η μέγιστη διάβρωση σε όλα τα δομικά στοιχεία. Για αυτό και κατά τον υπολογισμό της μέγιστης αντοχής αφαιρείται το 50% της μέγιστης διάβρωσης από όλα τα δομικά στοιχεία, και προσαυξάνεται κατά 0.5 mm, το οποίο ισούται με το περιθώριο διάβρωσης για το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επιθεωρήσεων του πλοίου (2.5 έτη).

2.4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ

Η καμπύλη $M-\chi$ κατασκευάζεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας της οποίας το λογικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο σχήμα 2.3.

Σε αυτή την προσέγγιση, η μέγιστη καμπτική ροπή την οποία μπορεί να φέρει η γάστρα καθορίζεται ως η μέγιστη τιμή της καμπύλης της διαμήκουσ καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ της εγκάρσιας διατομής του πλοίου.

Η καμπύλη παράγεται μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε βήμα i αυτής παράγεται κι ένα σημείο της καμπύλης με συντεταγμένες M_i, χ_i , όπου M_i είναι η καμπτική ροπή που αναπτύσσει η εγκάρσια διατομή λόγω της επιβαλλομένης καμπυλότητας χ_i .



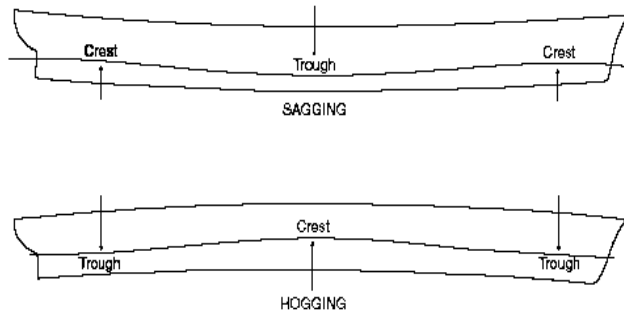
Σχήμα 2.3-Λογικό διάγραμμα επαναληπτικής διαδικασίας

Σε κάθε βήμα η καμπυλότητα προκύπτει αν στην καμπυλότητα του προηγούμενου βήματος χ_{i-1} προστεθεί η τιμή καμπυλότητας $\Delta\chi$.

Η αύξηση αυτή αντιστοιχεί σε αύξηση της γωνίας περιστροφής της διατομής ως προς τον οριζόντιο ουδέτερο άξονα της.

Η αύξηση της περιστροφής της διατομής προκαλεί *αξονική παραμόρφωση ϵ (strain)* σε κάθε δομικό στοιχείο της διατομής, η τιμή της οποίας εξαρτάται από την απόσταση του δομικού στοιχείου από τον οριζόντιο ουδέτερο άξονα της διατομής.

Σε κατάσταση διαμήκους κάμψης *sagging* τα δομικά στοιχεία που είναι πάνω από τον ουδέτερο άξονα θλίβονται (βραχύνονται), ενώ όσα βρίσκονται κάτω από τον ουδέτερο άξονα εφελκύνονται (επιμηκύνονται). Το αντίθετο συμβαίνει στη κατάσταση *hogging* (βλέπε σχήμα 2.4)



Σχήμα 2.4-Καταστάσεις διαμήκους κάμψης *sagging*, *hogging*

Η τάση σ που αναπτύσσεται σε κάθε δομικό στοιχείο ένεκα της παραμόρφωσης ϵ καθορίζεται από την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης σ - ϵ (*load end-shortening curve*) του στοιχείου στη οποία λαμβάνεται υπόψη η συμπεριφορά του στοιχείου στην μη γραμμική ελαστο-πλαστική περιοχή (*non linear elasto-plastic domain*).

Η κατανομή των τάσεων που επάγονται στα δομικά στοιχεία της διατομής, διαφοροποιεί τη θέση του ουδέτερου άξονα σε κάθε επαναληπτικό βήμα, καθόσον η σχέση σ - ϵ είναι μη γραμμική.

Η νέα θέση του ουδέτερου άξονα σε κάθε βήμα υπολογίζεται μέσω μιας επίσης επαναληπτικής διαδικασίας με την οποία επιβάλλεται ως συνθήκη η ισορροπία μεταξύ των τάσεων που κατανέμονται στη διατομή.

Όταν η θέση του ουδέτερου άξονα προσδιοριστεί και άρα η συναφής κατανομή των τάσεων έχει καθορισθεί, τότε η καμπτική ροπή M_i που αναπτύσσει η εγκάρσια διατομή περίξ της νέας θέσης του ουδέτερου άξονα, λόγω της επιβαλλομένης καμπυλότητας χ_i υπολογίζεται αθροίζοντας την συνεισφορά σε ροπή του κάθε δομικού στοιχείου.

Τα κυριότερα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας προσέγγισης της μέγιστης καμπτικής ροπής συνοψίζονται ως ακολούθως:

- Βήμα 1** Διαμοίρασε την διατομή σε δομικά στοιχεία
- Βήμα 2** Καθόρισε την σχέση τάσης-παραμόρφωσης για όλα τα δομικά στοιχεία

- Βήμα 3** Υπολόγισε την αρχική τιμή της καμπυλότητας και την αρχική θέση του ουδέτερου άξονα για το πρώτο βήμα (χρησιμοποιώντας την τιμή καμπυλότητας που αναπτύσσει τάση ίση με το 1% της τάσης διαρροής του καταστρώματος αντοχής):

$$\chi_1 = \Delta\chi = \frac{0.01 \frac{R_{eH}}{E}}{z_D - N}$$

όπου z_D η Z-συντεταγμένη σε m του καταστρώματος αντοχής στη πλευρά

- Βήμα 4** Υπολόγισε για κάθε στοιχείο την αντίστοιχη παραμόρφωση $\epsilon_i = \chi z_i$ και την αντίστοιχη τάση σ_i
- Βήμα 5** Υπολόγισε την θέση του ουδέτερου άξονα z_{NA} σε κάθε βήμα επιβάλλοντας ισορροπία δυνάμεων στη διατομή: $\sum A_i \sigma_i = \sum A_j \sigma_j$ το i -στο στοιχείο υπό θλίψη ,το j -στο στοιχείο υπό εφελκυσμό)

- Βήμα 6** Υπολόγισε την αντίστοιχη ροπή αθροίζοντας την

$$M_U = \sum \sigma_{U_i} A_i (z_i - z_{NA_cur})$$

- Βήμα 7** Εάν η κλίση της καμπύλης είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη αρνητική τιμή σταμάτησε την επαναληπτική διαδικασία. Αλλιώς, αύξησε την καμπυλότητα κατά $\Delta\chi$ και επέστρεψε στο βήμα 4.

2.5 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Κατά την εφαρμογή της ανωτέρω επαναληπτικής διαδικασίας οφείλεται να γίνουν οι ακόλουθες παραδοχές:

- Ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής υπολογίζεται στις εγκάρσιες διατομές της γάστρας μεταξύ δύο γειτονικών ενισχυμένων εγκάρσιων νομέων (*transverse web*)
- Η διατομή παραμένει επίπεδη μετά την κάμψη της
- Η συμπεριφορά του υλικού είναι ελαστο-πλαστική

- Η εγκάρσια διατομή χωρίζεται σε δομικά στοιχεία τα οποία δρουν ανεξαρτήτως (βλέπε σχήμα 2.5). Αυτά τα στοιχεία είναι: εγκάρσιως ενισχυμένα ελάσματα και/ή διαμήκη ενισχυτικά μετά του συνημμένου ελάσματος ή ανθεκτικά γωνιακά ελάσματα που αποτελούνται συνήθως από διασταυρούμενα ελάσματα
- Οι καμπύλες σ - ϵ κάθε δομικού στοιχείου αντιπροσωπεύουν τους πιθανούς μηχανισμούς (τρόπους) κατάρρευσης (*failure modes*) του κάθε στοιχείου και η τάση σ λαμβάνεται ως η μικρότερη μεταξύ των τάσεων των διαφορετικών τρόπων αστοχίας
- Η επαναληπτική διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η καμπυλότητα φτάσει την τιμή χ_F , σε m^{-1} , σε κατάσταση hogging ή sagging όπου:

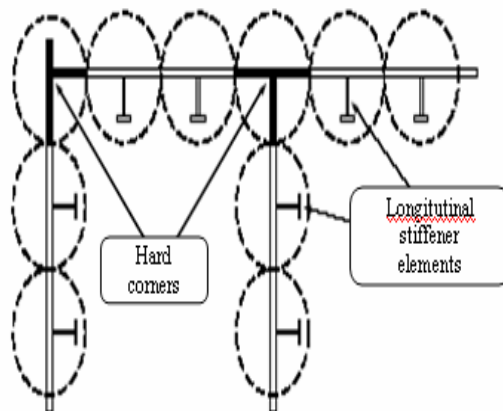
$$\chi_F = \pm 0.003 \frac{M_Y}{EI_Y}$$

και M_{Y1}, M_{Y2} η μικρότερη μεταξύ των:

$$M_{Y1} = 10^3 R_{eH} Z_{AB}$$

$$M_{Y2} = 10^3 R_{eH} Z_{AD}$$

Εάν η τιμή χ_F δεν επαρκεί για τον υπολογισμό της μέγιστης τιμής της καμπύλης M - χ , η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί μέχρις ότου η επιβαλλομένη καμπυλότητα επιτρέψει τον υπολογισμό της μέγιστης καμπτικής ροπής της καμπύλης.



Σχήμα 2.5-Είδη δομικών στοιχείων της εγκάρσιας διατομής

2.6 ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Οι μαθηματικές σχέσεις με τις οποίες κατασκευάζονται οι καμπύλες σ - ϵ των δομικών στοιχείων σύμφωνα με τους κανονισμούς C.S.R. παρατίθενται λεπτομερώς στο Παράρτημα Ε.

Εξαιρουμένων των γωνιακών ανθεκτικών, και της εφελκυστικής καταπόνησης, στις υπόλοιπες περιπτώσεις θεωρείται ότι αυξανόμενου της παραμόρφωσης ϵ προκύπτει μια διαρκώς απομειούμενη ενεργός επιφάνεια της διατομής του στοιχείου δηλαδή μια διαρκώς απομειούμενη ικανότητα της διατομής του στοιχείου να φέρει φορτίο.

2.6.1 ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΩΝ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ

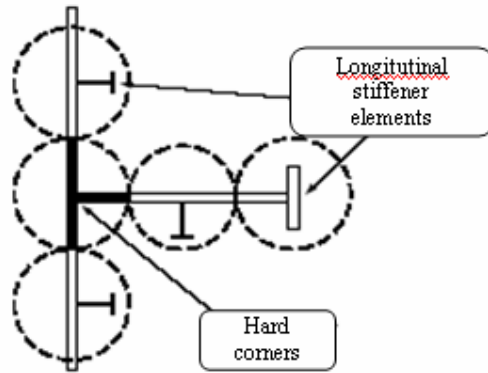
Τα ελάσματα και τα διαμήκη ενισχυτικά που απαρτίζουν την εγκάρσια διατομή της γάστρας δύναται να καταρρεύσουν ακολουθώντας έναν από τους παρακάτω τρόπους (βλέπει πίνακα 2.2):

ΔΟΜΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ	ΤΡΟΠΟΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ
Εφελκυσόμενα εγκάρσιως-ενισχυμένα ελάσματα	Ελαστο-πλαστική κατάρρευση
Θλιβόμενα διαμήκη ενισχυτικά	Λυγισμός δοκού-κολώνας Στρεπτικός λυγισμός Τοπικός λυγισμός κορμού ενισχυτικού με πέλμα Τοπικός λυγισμός κορμού ενισχυτικών τύπου πλάκας
Θλιβόμενα εγκάρσιως-ενισχυμένα ελάσματα	Λυγισμός πλάκας

Πίνακας 2.2- Τρόποι αστοχίας δομικών στοιχείων

2.6.2 ΑΝΘΕΚΤΙΚΑ ΓΩΝΙΑΚΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τα ανθεκτικά γωνιακά δομικά στοιχεία (*hard corners*) της εγκάρσιας διατομής καταρρέουν συνήθως με ελαστο-πλαστικό τρόπο (*διαρροή του υλικού*). Τα στοιχεία αυτά, αποτελούνται από δύο ελάσματα που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τυπικά ανθεκτικά γωνιακά δομικά στοιχεία είναι: ελάσματα σειράς υδροσυλεκτών (*bilge strake*), ελάσματα ζωστήρα (*shear strake*), ελάσματα υδρορροής καταστρώματος (*deck stringer elements*), ελάσματα σταθμίδων στην ένωση τους με το κατάστρωμα (*girder deck connections*) και πέλματα στο σημείο ένωσης τους με τον κορμό (*face plate-web connections*) μεγάλων σταθμίδων (βλέπε σχήμα 2.5,2.6).

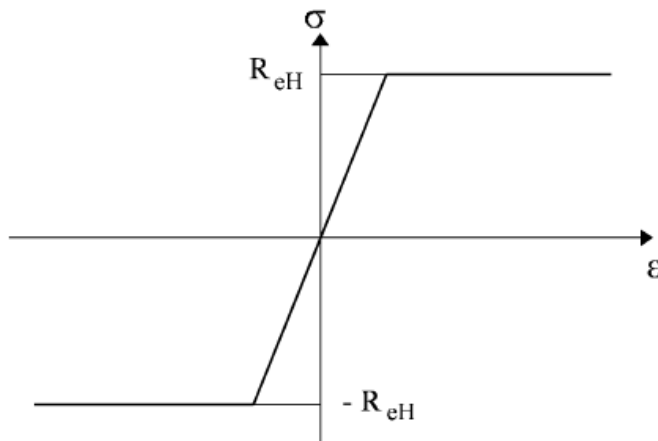


Σχήμα 2.6-Είδη δομικών στοιχείων της εγκάρσιας διατομής

2.6.3 ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ϵ

Σχετικά με τις καμπύλες σ - ϵ των δομικών στοιχείων επισημαίνονται τα ακόλουθα:

- Η καμπύλη σ - ϵ της ελαστο-πλαστικής κατάρρευσης που περιγράφει την συμπεριφορά όλων των δομικών στοιχείων που εφελκύνονται καθώς και των ανθεκτικών γωνιακών στοιχείων (σε εφελκυσμό και θλίψη), έχει την μορφή της ελαστικής-τέλεια πλαστικής καμπύλης (βλέπε σχήμα 2.7 ή καμπύλη 1 σχήματος 2.8).

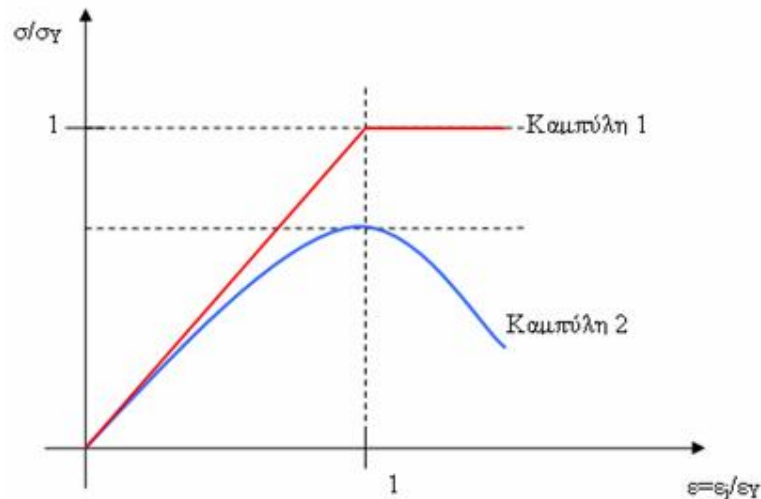


Σχήμα 2.7- Ελαστο-τέλεια πλαστική κατάρρευση δομικών στοιχείων

- Η μορφή της καμπύλης σ - ϵ που περιγράφει την ελαστο-πλαστική κατάρρευση των δομικών στοιχείων είτε λόγω λυγισμού δοκού-κολόνας ή στρεπτικού

λυγισμού ή τοπικού λυγισμού κορμού ενισχυτικού έχει γενικά μορφή της καμπύλης 2 του σχήματος 2.8. Η μέγιστη τιμή πάντα προκύπτει για $\epsilon_j/\epsilon_Y=1$.

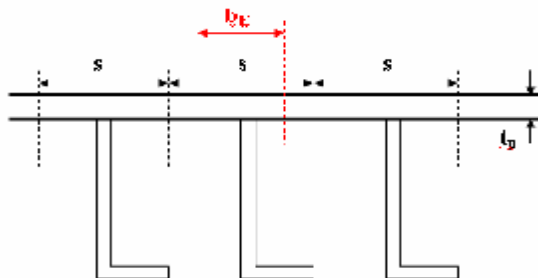
Κατά τον ελαστο-πλαστικό λυγισμό των διαμηκών ενισχυτικών, λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της υστέρησης διάτμησης (*shear lag*) και θεωρείται ότι το ενεργό πλάτος (*effective breadth*) του συνημμένου ελάσματος μεταβάλλεται συναρτήσει του $\epsilon=\epsilon_j/\epsilon_Y$ (σχετική ανοιγμένη παραμόρφωση), με αποτέλεσμα η σχέση που περιγράφει την καμπύλη σ - ϵ (καμπύλη 2 σχήματος 2.8) να μην είναι σε καμία περιοχή γραμμική.



Σχήμα 2.8-Καμπύλη 2:ελαστο-πλαστική κατάρρευση θλιβόμενων διαμηκών ενισχυτικών.

Ο δείκτης Y σχετίζεται με τη διαρροή-yield

Είναι αξιοσημείωτο ότι, η σχέση που δίδει το ενεργό πλάτος του συνημμένου ελάσματος είναι διαφορετική όταν το ενεργό πλάτος χρησιμοποιείται για υπολογισμό της εγκάρσιας επιφάνειας και όταν χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ροπής αδρανείας.



Σχήμα 2.9-Τυπική διάταξη γωνιακού ενισχυτικού με συνημμένο έλασμα πλάτους s , πάχους t_p και ενεργού πλάτους b_E

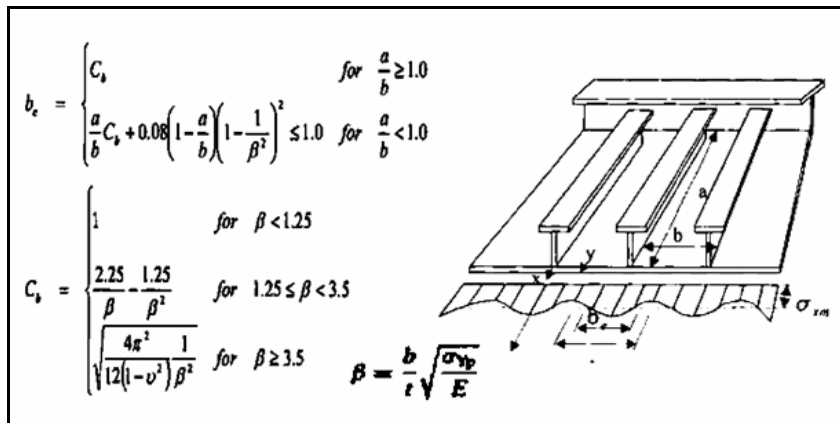
Και στις δύο περιπτώσεις λαμβάνεται υπόψη ο λόγος λυγρότητας (*slenderness ratio*) β_E του συνημμένου ελάσματος ο οποίος και αυτός εξαρτάται από την στιγμιαία διαμήκη σχετική ανοιγμένη παραμόρφωση ϵ .

$$\beta_E = 10^3 \frac{s}{t_p} \sqrt{\frac{\epsilon R_{eH}}{E}}$$

Στην περίπτωση του υπολογισμού της εγκάρσιας επιφάνειας του συνημμένου ελάσματος χρησιμοποιείται η ακόλουθη σχέση για τον προσδιορισμό του ενεργού πλάτους b_E :

$$\begin{cases} b_E = \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) s & \beta_E > 1.25 \\ b_E = s & \beta_E \leq 1.25 \end{cases}$$

Η εν λόγω σχέση λαμβάνει υπόψη τη θεώρηση του *Mansour (1977)* (βλέπε σχήμα 2.10) για τον υπολογισμό του ενεργού πλάτους.



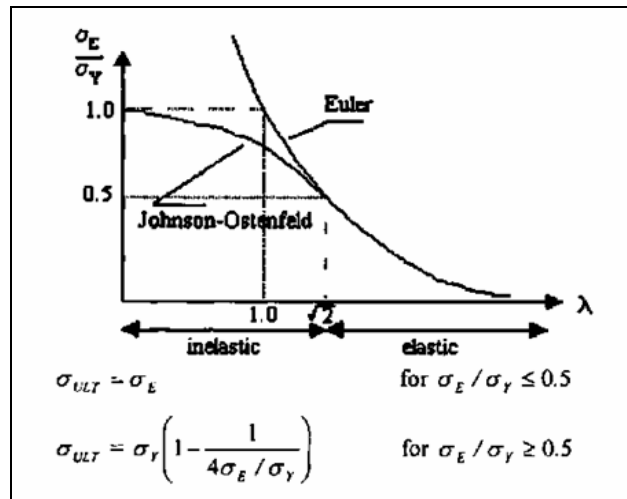
Σχήμα 2.10-Υπολογισμός ενεργού πλάτους b_e κατά *Mansour*

Στην περίπτωση του υπολογισμού ροπής αδρανείας του δομικού στοιχείου το ενεργό πλάτος b_{E1} λαμβάνεται ως:

$$b_{E1} = \frac{s}{\beta_E} \quad : \beta_E > 1.0$$

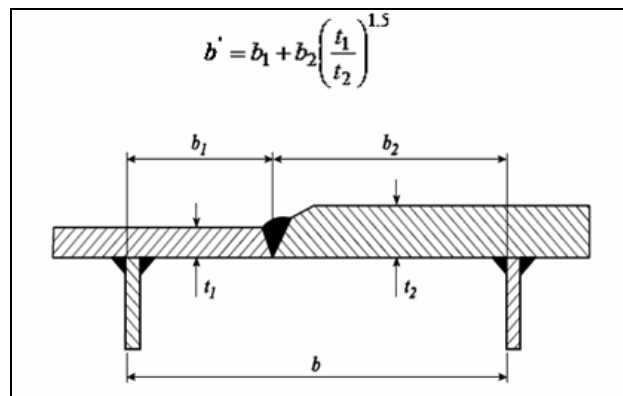
$$b_{E1} = s \quad : \beta_E \leq 1.0$$

- Επίσης, για την επίδραση της πλαστικότητας στο φαινόμενο του λυγισμού (*καμπύλη Euler*) χρησιμοποιήθηκε η διόρθωση *Johnson-Ostenfeld* (βλέπε σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11-Επίδραση διόρθωσης λόγω πλαστικότητας κατά Johnson-Ostenfeld

- Οι κανονισμοί C.S.R. θεωρούν ότι τόσο το ενισχυτικό όσο και η το συνημμένο έλασμα είναι από το αυτό υλικό και ως εκ τούτου έχουν το αυτό όριο διαρροής σ_y . Στην πράξη όμως αρκετές φορές αυτό δεν ισχύει. Η χρησιμοποίηση του μικρότερου εκ των διαφορετικών ορίων διαρροής οδηγεί σε συντηρητικότερα μεν αποτελέσματα ως προς την μέγιστη αντοχή, ασφαλέστερα δε.
- Στην περίπτωση όπου υφίσταται διαφοροποίηση του πάχους ενός ελάσματος εντός πλάτους b τότε, σύμφωνα με τον κανονισμό (ch.6, αρ.1 ,παρ. 1.1.1 / C.S.R. / Bulk-Carriers) χρησιμοποιείται το μικρότερο πάχος με ισοδύναμο πλάτος b' (βλέπε σχήμα 2.12):

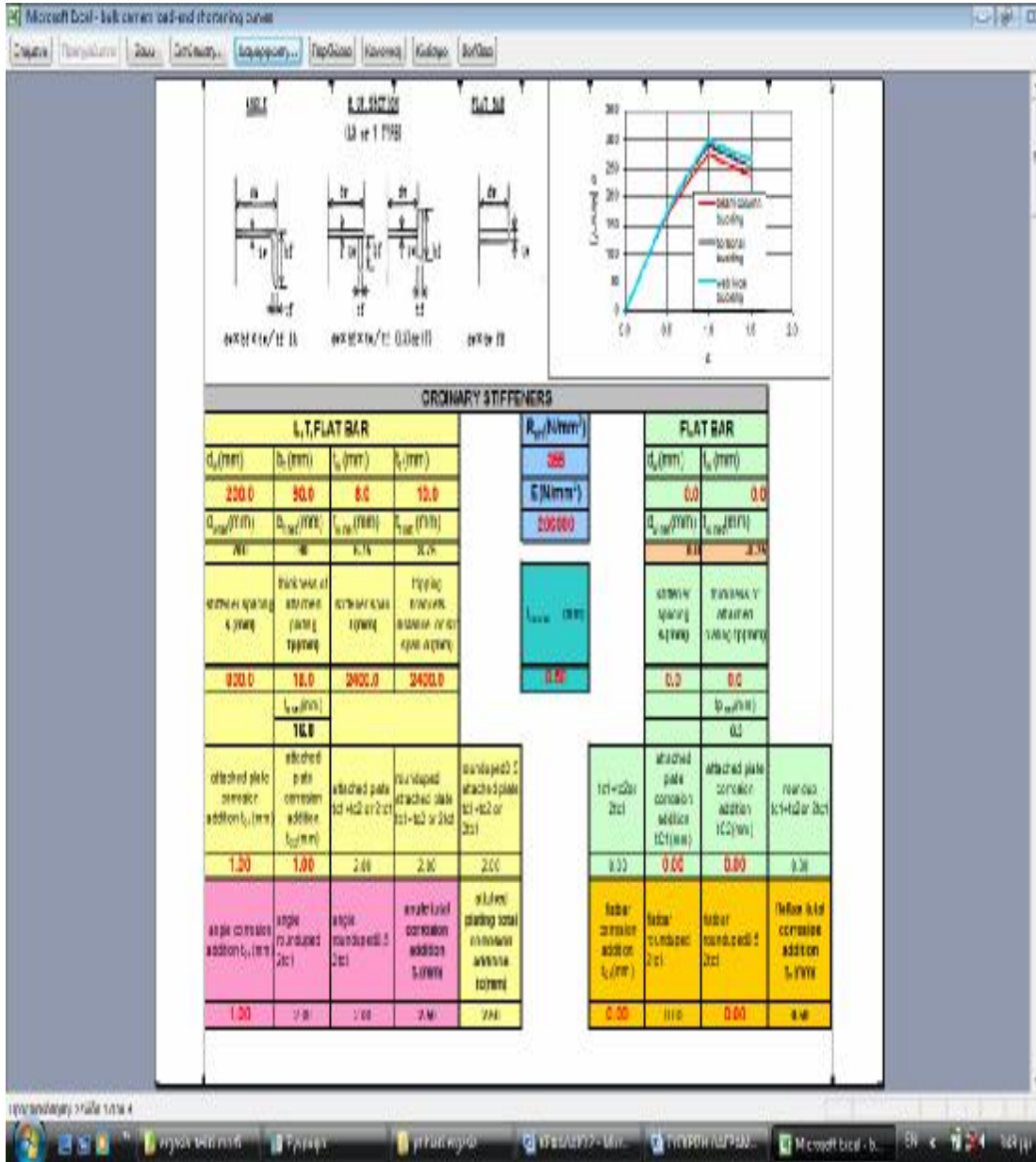


Σχήμα 2.12-Ισοδύναμο πάχος ελάσματος σε υπολογισμούς λυγισμού

2.7 ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ C.S.R.

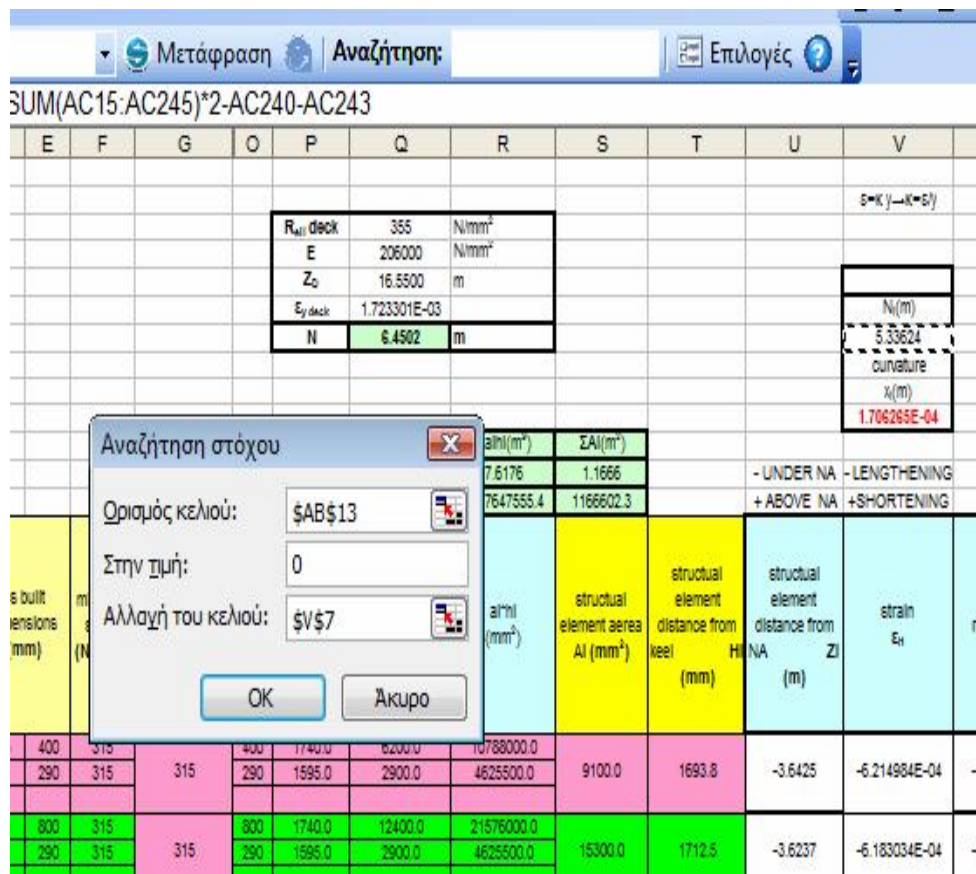
Για την εφαρμογή της μεθόδου γίνεται χρήση των υπολογιστικών φύλλων Microsoft Excel.

Ως πρώτο βήμα της μεθόδου, υφίσταται η ανάγκη κατασκευής των ελαστο-πλαστικών καμπύλων σ - ϵ και των αντίστοιχων βιβλιοθηκών (πίνακες τιμών σ - ϵ) των δομικών στοιχείων που τελούν υπό θλιπτική φόρτιση.



Σχήμα 2.13- Λογιστικό φύλλο κατασκευής καμπύλων σ - ϵ δομικών στοιχείων διαμηκών ενισχυτικών

Έτσι, κατασκευάστηκε ένα αρχείο υπολογιστικών φύλλων (bulk-carriers load end-shortening curves.xls), συνδεδεμένων μεταξύ τους, όπου σε ένα υπολογιστικό φύλλο συμπληρώνονται ως δεδομένα εισόδου (στα κελιά με την κόκκινη γραμματοσειρά) οι πραγματικές γεωμετρικές διαστάσεις και η εκτιμώμενη διάβρωση του κάθε δομικού στοιχείου. Λαμβάνονται άμεσα ως έξοδος οι καμπύλες σ-ε για όλες τις πιθανές μορφές κατάρρευσης του εν λόγω δομικού στοιχείου μαζί με τις αντίστοιχες βιβλιοθήκες τιμών. Κατόπιν, σε άλλο υπολογιστικό φύλλο (incremental-iterative approach.xls), πινακοποιούνται όλα τα δομικά στοιχεία i της διατομής, οι καμπύλες σ-ε όλων των θλιβόμενων από αυτά και υπολογίζεται με μεταβλητή την καμπυλότητα χ_i του βήματος j η αναπτυσσόμενη στη διατομή καμπτική ροπή M_j μέσω της συνεισφοράς όλων των i δομικών στοιχείων, στο καθένα εκ των οποίων, ευρισκόμενο σε εντατική κατάσταση ϵ_{ij} αναπτύσσεται τάση σ_{ij} .



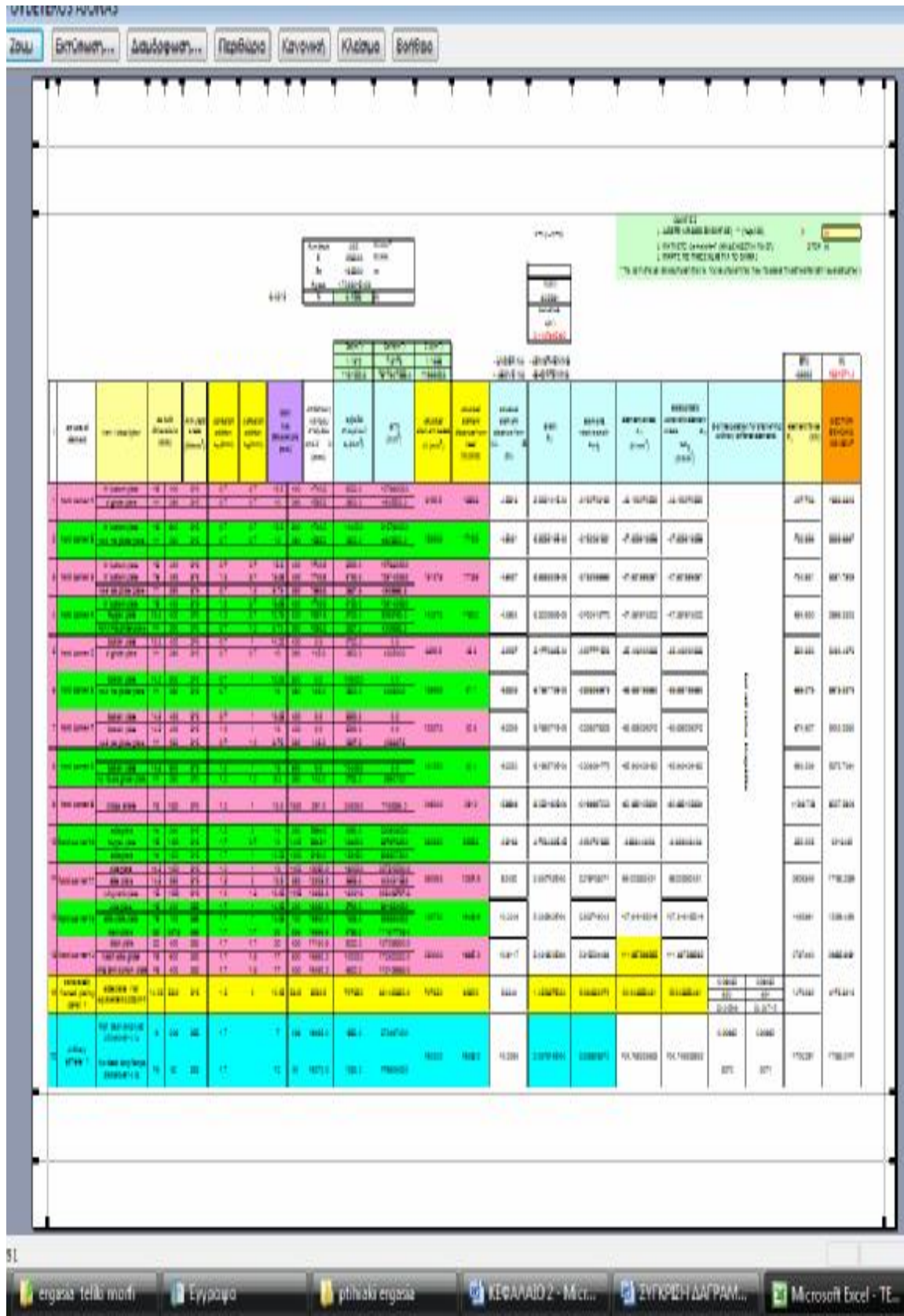
Σχήμα 2.14-Η εντολή "Αναζήτηση στόχου" σε υπολογιστικό φύλλο

Η τάση σ_{ij} λαμβάνεται από τις σχετικές βιβλιοθήκες για το κάθε στοιχείο με γραμμική παρεμβολή.

Επίσης για την εκπλήρωση της συνθήκης ισορροπίας δυνάμεων σε κάθε βήμα γίνεται χρήση του εργαλείου του Excel “Αναζήτηση Στόχου”, όπου στόχος είναι ο μηδενισμός του αθροίσματος των δυνάμεων όλων των δομικών στοιχείων σε κάθε βήμα και μεταβλητή είναι η θέση του ουδετέρου άξονα της διατομής.

Η εν λόγω εργασία αντιστοιχήθηκε στη “Μακρο-εντολή” *Ctrl+shift+F* οπότε στο ίδιο υπολογιστικό φύλλο δίδοντας τιμές στο βήμα j ($j=0,1,2,\dots,150$) που όπως ήδη αναφέρθηκε αντιστοιχεί σε καμπυλότητα χ_j , λαμβάνουμε άμεσα την καμπτική ροπή M_j καθώς και την νέα θέση του ουδετέρου άξονα ως προς την τρόπιδα N_j .

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, λαμβάνουμε ικανό πλήθος ζευγών για την αποτύπωση της ζητούμενης καμπύλης $M-\chi$.



Σχήμα 2.15-Τμήμα του υπολογιστικού φύλλου υπολογισμού ζευγών M-χ

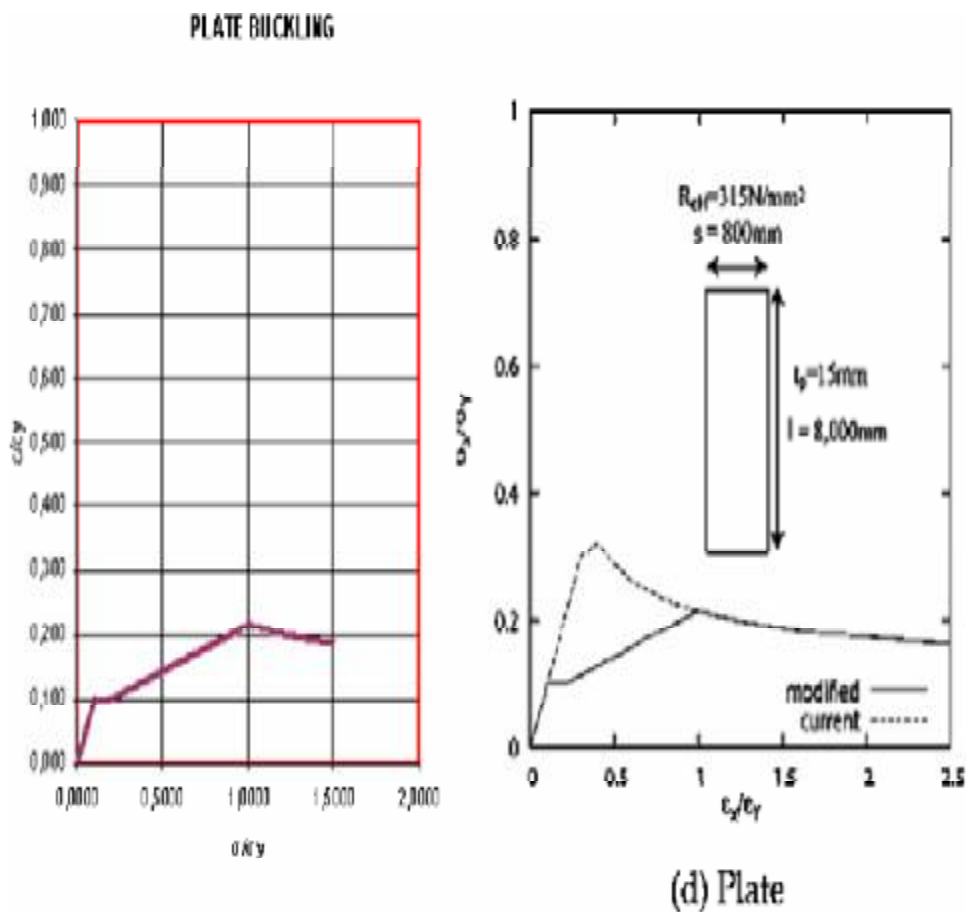
2.7.1 ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ σ - ε

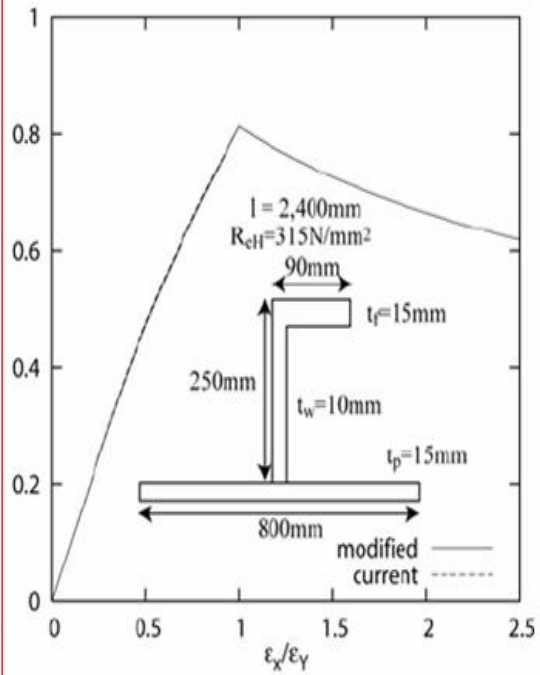
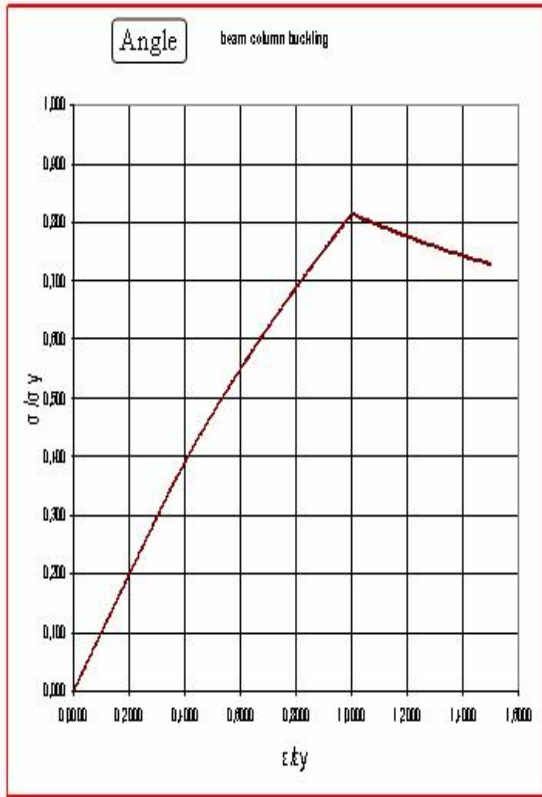
Η πιθανότητα πραγματοποίησης λάθους κατά την εκτέλεση ενός τόσο μεγάλου πλήθους μαθηματικών πράξεων όπως στη περίπτωση της κατασκευής των καμπύλων σ - ε , είναι πέραν από κάθε αμφιβολία αυξημένη.

Αν οι καμπύλες σ - ε περιέχουν σφάλμα τότε το σφάλμα αυτό θα μεταφερθεί και στην καμπύλη M - χ οδηγώντας σε εσφαλμένη εκτίμηση της μέγιστης αντοχής.

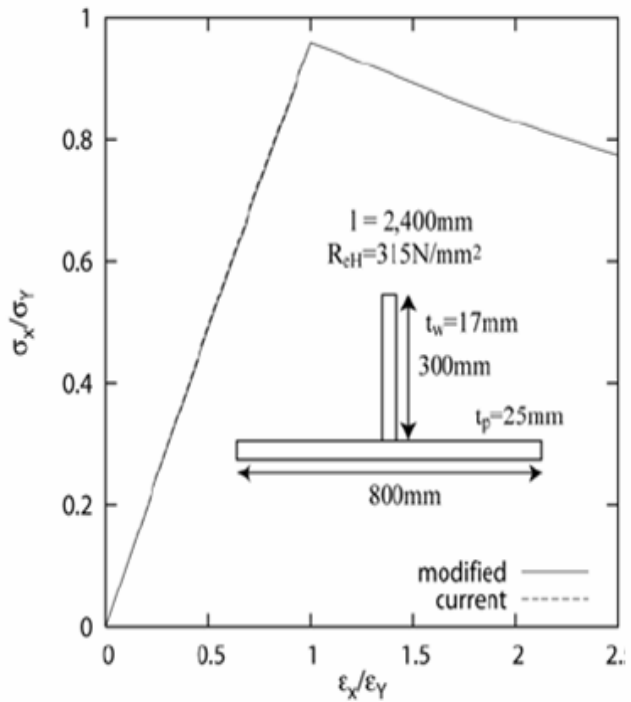
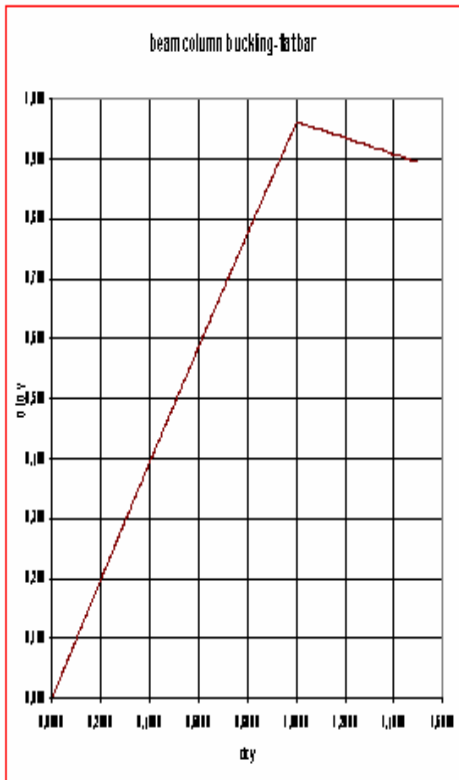
Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων των καμπύλων σ - ε χρησιμοποιήθηκε η δημοσίευση *I.A.C.S./Rules Change Notice No 1/November 2007*, στην οποία περιέχονται παραδείγματα καμπύλων σ - ε για συγκεκριμένες γεωμετρίες δομικών στοιχείων.

Για τα ίδια δομικά στοιχεία, κατασκευάστηκαν οι καμπύλες σ - ε με την χρήση των υπολογιστικών φύλλων (*bulk-carriers load end-shortening curves.xls*) και συγκρίθηκαν χωρίς να διαπιστωθεί κάποια απόκλιση όπως φαίνεται και στα ακόλουθα διαγράμματα του σχήματος 2.16.

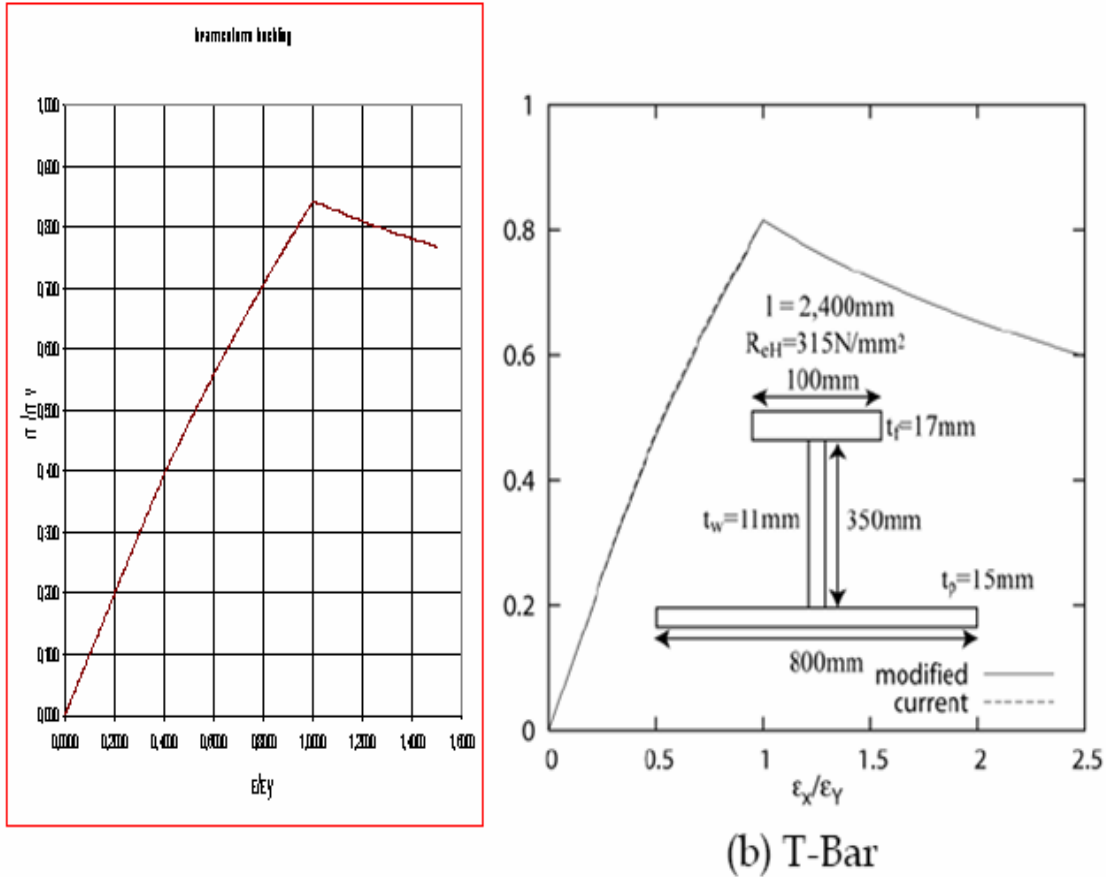




(a) Angle



(c) Flat Bar



Σχήμα 2.16-Σύγκριση καμπύλων σ - ϵ που παρήχθησαν στο Excel(αριστερά) και I.A.C.S./Rules Change Notice No 1/November 2007(δεξιά)

2.8 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΩΝ CSR ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ BULK- CARRIER

Το πλοίο εφαρμογής της μεθόδου είναι τύπου bulk carrier εκτοπίσματος 48.170 MT.

Η κατασκευή των καμπύλων σ - ϵ όσων εκ των δομικών στοιχείων περιείχαν μέρη με διαφορετικό όριο διαρροής έγινε δύο φορές.

Την πρώτη φορά θεωρήθηκε ότι όλη η διατομή του δομικού στοιχείου είχε υλικό με το μικρότερο όριο διαρροής και την δεύτερη με το μεγαλύτερο. Με το σκεπτικό αυτό εκπονήθηκαν δύο καμπύλες M- χ που όπως θα φανεί στη συνέχεια δεν παρουσιάζουν αξιοσημείωτη διαφορά.

Ως διατομή υπολογισμού μέγιστης αντοχής χρησιμοποιήθηκε αυθαιρέτως η **ασθενέστερη** εγκάρσια τομή του παραλλήλου τμήματος της γάστρας (No 2, 4 Hold) και όχι η μέση τομή (No 3 Hold).

2.8.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ BULK-CARRIER

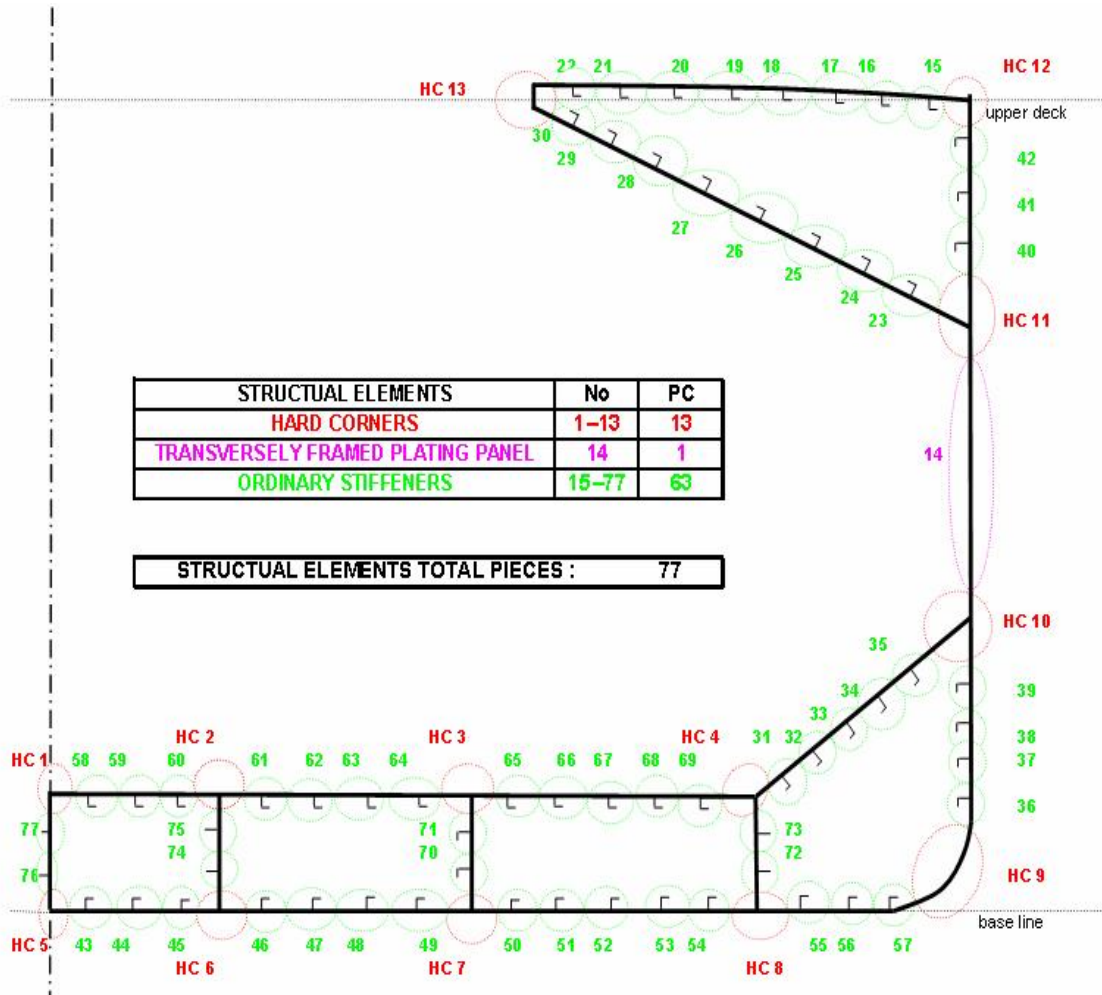
Βασικά στοιχεία του πλοίου που χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή των κανόνων C.S.R. παρατίθενται ακολούθως στον πίνακα 2.3 ενώ όλα τα διατιθέμενα κατασκευαστικά σχέδια και λεπτομέρειες του πλοίου βρίσκονται στο Παράρτημα ΣΤ.

D.W. 48, 170 MT BULK CARRIER		
<u>PRINCIPAL DIMENSIONS</u>		
Length (B. P.)	<Lpp>	180.000 m
Load Water Line Length at ds	<Ll. w. l. >	182.800 m
Scantling length	<Ls>	180.000 m
Breadth (MLD)		32.200 m
Depth (MLD)	<D>	16.550 m
Draft (MLD)	<d>	10.700 m
Scantling Draft (MLD)	<ds>	11.674 m
ALLOWABLE STILL WATER BENDING MOMENT IN INTACT CONDITION at MIDSHIP:		
HOGGING --- max. 111,000 tf-m		
SAGGING --- max. 95,500 tf-m		
ALLOWABLE STILL WATER BENDING MOMENT IN ONE HOLD FLOODING CONDITION at MIDSHIP:		
HOGGING --- max. 173,000 tf-m		
SAGGING --- max. 154,000 tf-m		

Πίνακας 2.3-Βασικά στοιχεία πλοίου

2.8.2 ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Η διατομή χωρίστηκε σε 77 δομικά στοιχεία (βλέπε σχήμα 2.17) Από αυτά, τα 63 είναι διαμήκη ενισχυτικά, τα 13 είναι ανθεκτικά γωνιακά και 1 είναι εγκάρσιως ενισχυμένο έλασμα.



Σχήμα 2.17-Διαχωρισμός της διατομής σε δομικά στοιχεία

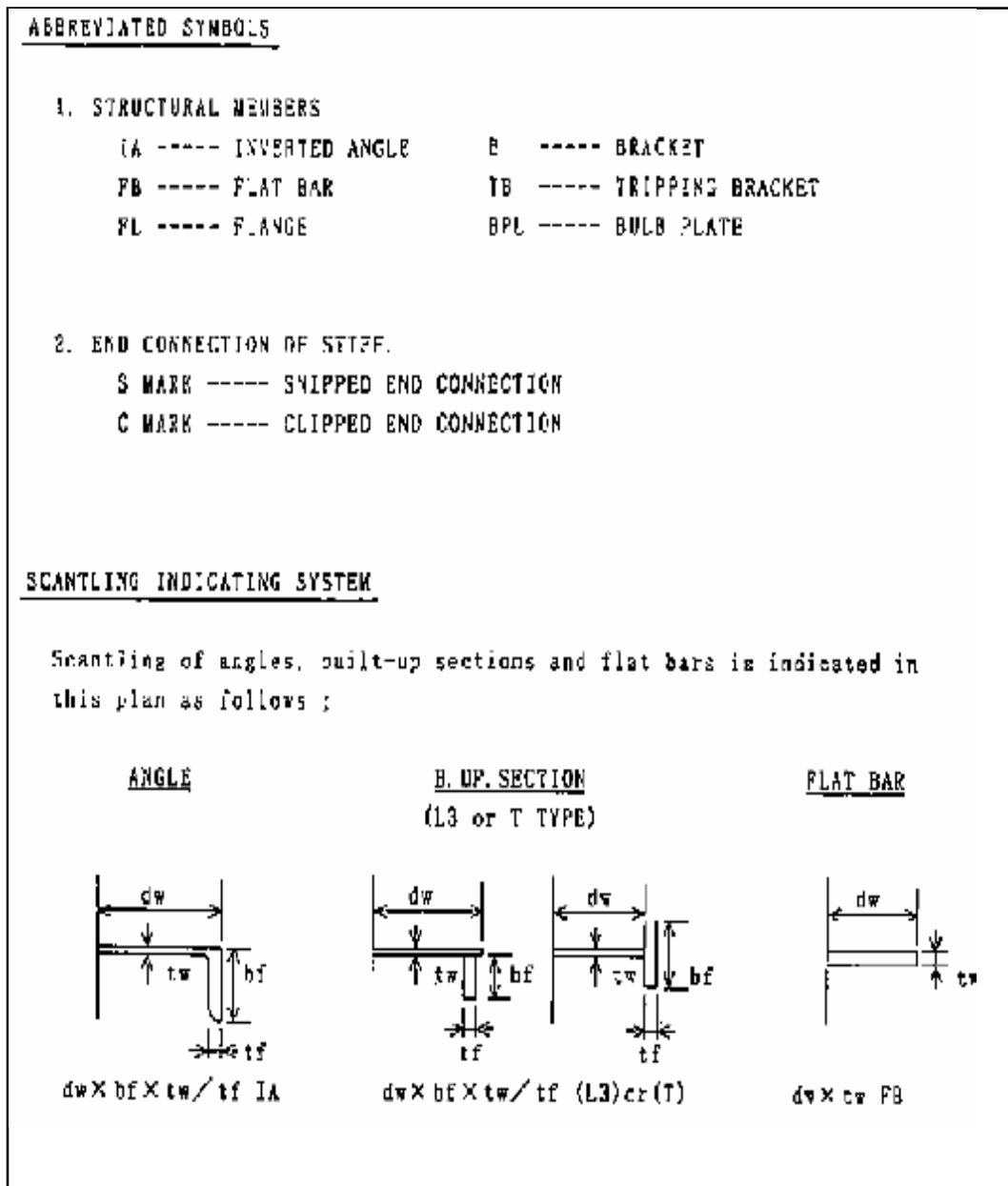
2.8.3 ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΤΟΜΗΣ-ΣΥΜΒΟΛΑ

Το υλικό της γάστρας, ελασμάτων και ενισχυτικών είναι ναυπηγικός χάλυβας υψηλής αντοχής κατηγοριών AH,AH-36,DH-36.

MARK	ΕΞΠΛΑΝΑΤΙΟΝ
NO MARK	GRADE "KA" STEEL
AH	GRADE "KA32" STEEL
AH-36	GRADE "KA36" STEEL
DH-36	GRADE "KD36" STEEL

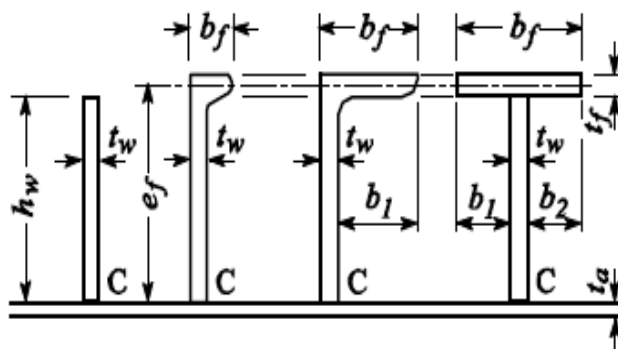
Σχήμα 2.18-Κατηγοριοποίηση χαλύβων κατασκευαστικών σχεδίων

Επίσης, στα κατασκευαστικά σχέδια επεξηγούνται οι συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται ως ακολούθως:



Σχήμα 2.19-Επεξήγηση συμβόλων κατασκευαστικών σχεδίων bulk-carrier

Ακολούθως, παρατίθενται τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την διαστασιολόγηση των διατομών των ενισχυτικών σύμφωνα με τους C.S.R.



Σχήμα 2.20-Σύμβολα ενισχυτικών κατά C.S.R.

Εύκολα παρατηρούμε ότι π.χ. στην περίπτωση των γωνιακών ενισχυτικών (*inverted angle type stiffeners*) μεταξύ των συμβόλων των σχεδίων του πλοίου και των συμβόλων του τυπολογίου των C.S.R. ισχύει:

$$e_f = d_w - 0.5 t_f$$

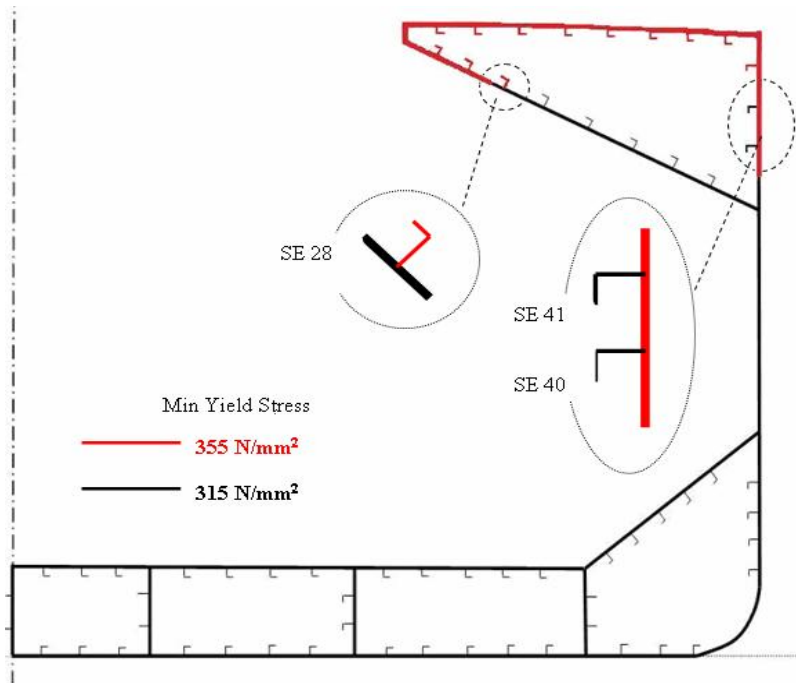
Η ανωτέρω μετατροπή είναι απαραίτητη για την ορθότητα των αποτελεσμάτων κατά την χρήση των μαθηματικών τύπων των C.S.R.

Οι ελάχιστες τάσεις διαρροής R_{eH} (*minimum yield stress*) των χρησιμοποιούμενων χαλύβων φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

MATERIALS			
MARK	EXPLANATION	min yield stress R_{eH} (N/mm ²)	material factor k
NO MARK	GRADE KA STEEL	235	1
AH	GRADE KA-32 STEEL	315	0.78
AH-36	GRADE KA-36 STEEL	355	0.72
DH-36	GRADE KD-32 STEEL	355	0.68

Πίνακας 2.4-Χαρακτηριστικά χαλύβων

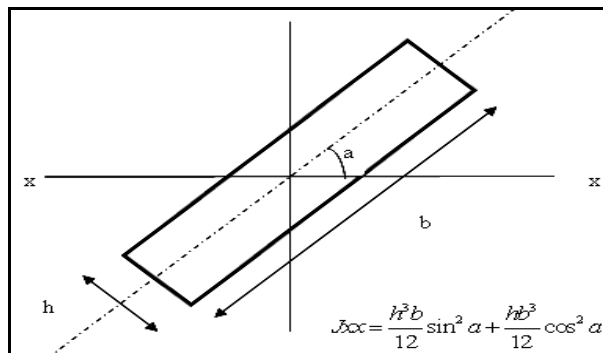
Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται η ελάχιστη τάση διαρροής των χαλύβων που χρησιμοποιήθηκαν στη διατομή και αναδुकνεύονται τα τρία δομικά στοιχεία (SE 28, 40, 41) όπου υφίσταται διαφοροποίηση στην τάση διαρροής του ενισχυτικού από την αυτήν του συνημμένου ελάσματος.



Σχήμα 2.21- Όρια ελάχιστης διαρροής υλικού διατομής. Δομικά στοιχεία με διαφορετικό όριο διαρροής ενισχυτικού-συνημμένου ελάσματος

2.8.4 ΙΔΙΕΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ-ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ

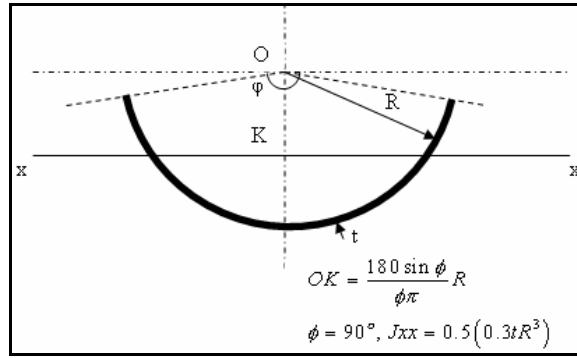
Η βασική σχέση υπολογισμού ίδιας ροπής αδρανείας που χρησιμοποιήθηκε αναφέρεται σε ορθογώνιες διατομές και περιγράφεται στο σχήμα 2.22.



Σχήμα 2.22-Ιδια ροπή αδρανείας ορθογωνικής διατομής

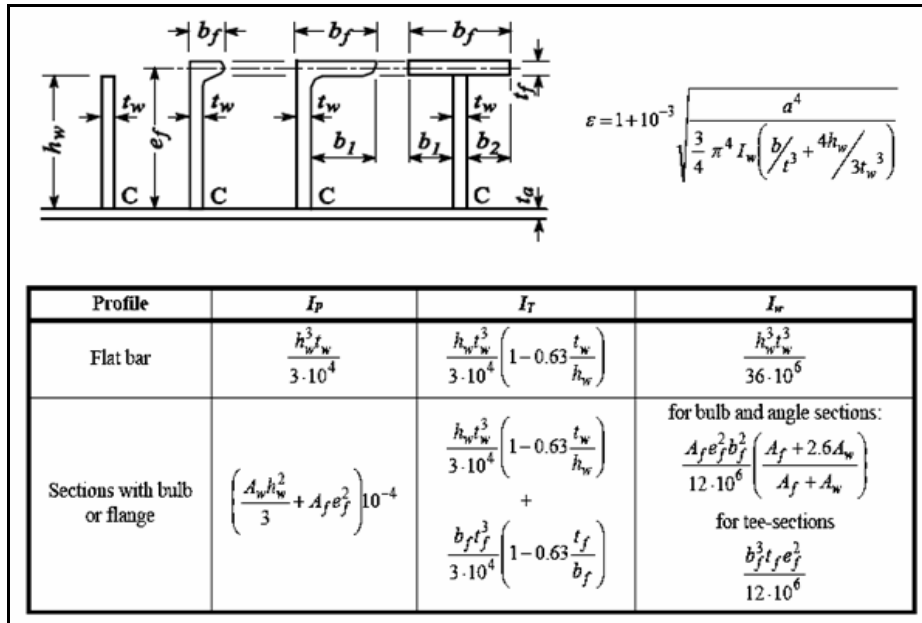
Επίσης, για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους και της ίδιας ροπής αδρανείας του ελάσματος υδροσυλλεκτών (*bilge strake*) χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις του σχήματος 2.23.

Οι ροπές αδρανείας των διαμηκών ενισχυτικών υπολογίζονται με τις σχέσεις του πίνακα 2.5.



Σχήμα 2.23-Κέντρο βάρους και ίδια ροπή αδρανείας κυκλικού τόξου

Διευκρινίζεται ότι η πολική ροπή αδρανείας λαμβάνεται με κέντρο το σημείο ένωσης του ενισχυτικού με το έλασμα C, ενώ ϵ είναι ο βαθμός πληρότητας (*degree of fixation*) του ενισχυτικού και a το μήκος του συνημμένου ελάσματος.



Πίνακας 2.5-Σχέσεις υπολογισμού ροπών αδρανείας ενισχυτικών

Ακολουθεί το υπολογιστικό φύλλο στον οποίο πραγματοποιείται προσδιορισμός της αρχικής θέσης του οριζόντιου ουδετέρου άξονα-Ο.Α. της διατομής ως προς την τρόπιδα καθώς και της ροπής αδρανείας της διατομής γύρω από τον αρχικό ουδέτερο άξονα. Σημειώνεται ότι τα πάχη των ελασμάτων έχουν ληφθεί μειωμένα λόγω διάβρωσης.

2.8.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ Ο.Α. ΑΠΟ ΤΡΟΠΙΔΑ

															$I(m^4)$	104.9		
Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΟΥΔΕΤΕΡΟΥ ΑΞΟΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΟΠΙΔΑ ΕΙΝΑΙ:															$Z_{NA}(mm)$:	6431	$I(mm^4)$	104928921048551.0
Η ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΟΜΗΣ ΕΙΝΑΙ:															$I(m^4)$:	104.9		
															$\Sigma ai(mm^2)$	Σai^3hi	Σai^3hi^3	Σi
															1183151.0	7609386383.6	101185458925197.0	218453228935.0
i	item i description	as built dimensions (mm)		$t_{C1}+t_{C2}$ or $2t_{C1}$	roundup	rounddown	total corrosion addition $t_c(mm)$	item net dimensions (mm)		γωνία του i με το οριζόντιο φ°	sinφ	cosφ	απόσταση κέντρου στοιχείου i από K $h_i(mm)$	εμβαδό στοιχείου i $a_i(mm^2)$	ai^3hi (mm ³)	ai^3hi^3 (mm ³)	ίδια ροπή αδρανείας του i (mm ⁴)	
1	bottom plate	15.5	1155	1.7	2	2	2.50	14.3	1155	0	0.000	1.000	0.0	16458.8	0.0	0.0	278512.9	
2	bottom plate	14.5	3190	1.7	2	2	2.50	13.3	3190	0	0.000	1.000	0.0	42267.5	0.0	0.0	618382.3	
3	bottom plate	14.5	3190	1.7	2	2	2.50	13.3	3190	0	0.000	1.000	0.0	42267.5	0.0	0.0	618382.3	
4	bottom plate	14.5	3190	2.2	3	2.5	3.00	13	3190	0	0.000	1.000	0.0	41470.0	0.0	0.0	584035.8	
5	bottom plate	14.5	3290	2.2	3	2.5	3.00	13	3290	0	0.000	1.000	0.0	42770.0	0.0	0.0	602344.2	
6	inn.bott.plate	18	1155	4.4	5	4.5	5.00	15.5	1155	0	0.000	1.000	1740.0	17902.5	31150350.0	54201609000.0	358423.0	
7	inn.bott.plate	18	3490	4.4	5	4.5	5.00	15.5	3490	0	0.000	1.000	1740.0	54095.0	94125300.0	163778022000.0	1083027.0	
8	inn.bott.plate	18	3690	4.4	5	4.5	5.00	15.5	3690	0	0.000	1.000	1740.0	57195.0	99519300.0	173163582000.0	1145091.6	
9	inn.bott.plate	18	3690	4.9	5	5	5.50	15.3	3690	0	0.000	1.000	1740.0	56272.5	97914150.0	170370621000.0	1090572.8	
10	hopper plate	15.5	2985	4.9	5	5	5.50	12.8	2985	45	0.707	0.707	2795.2	38058.8	106381722.9	297357925764.7	14118673900.3	
11	hopper plate	15	2815	5.4	6	5.5	6.00	12	2815	45	0.707	0.707	4845.5	33780.0	163680905.6	793115418640.3	11144667821.0	
12	bildge strake vert.part	15	299	2.2	3	2.5	3.00	13.5	299	0	0.000	1.000	0.0	4036.5	0.0	0.0	61304.3	
13	bildge strake hor.part	15	299	2.2	3	2.5	3.00	13.5	299	90	1.000	0.000	1950.0	4036.5	7871175.0	15348791250.0	30072242.3	
14	bildge strake R=1800	15	2826	2.2	3	2.5	3.00	13.5	2826	45	0.707	0.707	655.0	38151.0	24988905.0	16367732775.0	11809800000.0	
15	side plate	14	3930	2.7	3	3	3.50	12.3	3930	90	0.000	0.000	4075.0	48142.5	196180687.5	799436301562.5	0.0	
16	side plate	14	3390	3.5	4	3.5	4.00	12	3390	90	1.000	0.000	7735.0	40680.0	314659800.0	2433893553000.0	38958194295.2	
17	side plate	14.5	3940	3.5	4	3.5	4.00	12.5	3940	90	1.000	0.000	11400.0	49250.0	561450000.0	6400530000000.0	63711401264.9	
18	sheer plate	16	3280	2.7	3	3	3.50	14.3	3280	90	1.000	0.000	15010.0	46740.0	701567400.0	10530526674000.0	41903941427.2	
19	deck plate	22	3822	3.4	4	3.5	4.00	20	3822	3.0	0.052	0.999	16650.0	76440.0	1272723198.9	21190794624168.7	257154323.6	
20	deck plate	22	3158	3.4	4	3.5	4.00	20	3158	3.0	0.052	0.999	16832.5	63160.0	1063142173.6	17895365440372.2	145729654.1	
21	hatch side girder	19	600	3.5	4	3.5	4.00	17	600	90	1.000	0.000	16615.1	10200.0	169474223.5	2815834551605.6	305999806.0	
22	wing tank bottom plate	19	2045	3.5	4	3.5	4.00	17	2045	30	0.500	0.866	15851.3	34765.0	551068706.3	8735127829945.3	3026762145.7	
23	wing tank bottom plate	16.5	2990	3.5	4	3.5	4.00	14.5	2990	30	0.500	0.866	14592.5	43355.0	632657837.5	9232059493718.8	8068105019.5	

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R.

24	wing tank bottom plate	15	2990	3	3	3	3.50	13.3	2990	30	0.500	0.000	13097.5	39617.5	518890206.3	6796164476359.4	7372057966.4
25	cl girder	11	1740	1.4	2	1.5	2.00	10	1740	90	1.000	0.000	870.0	17400.0	15138000.0	13170060000.0	4390017216.1
26	side girder no4	11	1740	1.4	2	1.5	2.00	10	1740	90	1.000	0.000	870.0	17400.0	15138000.0	13170060000.0	4390017216.1
27	side girder no9	11	1740	1.9	2	2	2.50	9.75	1740	90	1.000	0.000	870.0	16965.0	14759550.0	12840808500.0	4280266785.7
28	side girder no15	11	1740	2.4	3	2.5	3.00	9.5	1740	90	1.000	0.000	870.0	16530.0	14381100.0	12511557000.0	4170516355.3
29	No1 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16495.0	1652.0	27249740.0	449484461300.0	7647153.3
30	No1 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16373.0	1080.0	17682840.0	289521139320.0	14919.3
31	No2 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16558.0	1652.0	27353816.0	452924485328.0	7647153.3
32	No2 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16436.0	1080.0	17750880.0	291753463680.0	14919.3
33	No3 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16632.0	1652.0	27476064.0	456981896448.0	7647153.3
34	No3 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16510.0	1080.0	17830800.0	294386508000.0	14919.3
35	No4 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16706.0	1652.0	27598312.0	461057400272.0	7647153.3
36	No4 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16585.0	1080.0	17911800.0	297067203000.0	14919.3
37	No5 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16781.0	1652.0	27722212.0	465206439572.0	7647153.3
38	No5 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16659.0	1080.0	17991720.0	299724063480.0	14919.3
39	No6 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16855.0	1652.0	27844460.0	469318373300.0	7647153.3
40	No6 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16733.0	1080.0	18071640.0	302392752120.0	14919.3
41	No7 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	16929.0	1652.0	27966708.0	473448399732.0	7647153.3
42	No7 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16807.0	1080.0	18151560.0	305073268920.0	14919.3
43	No8 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	93.0	0.999	-0.052	17003.0	1652.0	28088956.0	477596518868.0	7647153.3

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R

44	No8 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	3.0	0.052	0.999	16882.0	1080.0	18232560.0	307802077920.0	14919.3
45	HL-20 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	60	0.866	0.500	13265.0	1770.0	23479050.0	311449598250.0	6159669.9
46	HL-20 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	30	0.500	0.866	13389.0	1125.0	15062625.0	201673486125.0	200658.9
47	HL-19 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	60	0.866	0.500	13665.0	1770.0	24187050.0	330516038250.0	6159669.9
48	HL-19 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	30	0.500	0.866	13789.0	1125.0	15512625.0	213903586125.0	200658.9
49	HL-18 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	14043.0	1302.0	18283986.0	256762015398.0	2814854.8
50	HL-18 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	14146.0	1080.0	15277680.0	216118061280.0	191805.4
51	HL-17 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	14443.0	1302.0	18804786.0	271597524198.0	2814854.8
52	HL-17 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	14546.0	1080.0	15709680.0	228513005280.0	191805.4
53	HL-16 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	14843.0	1302.0	19325586.0	286849672998.0	2814854.8
54	HL-16 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	14946.0	1080.0	16141680.0	241253549280.0	191805.4
55	HL-15 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	15243.0	1302.0	19846386.0	302518461798.0	2814854.8
56	HL-15 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	15346.0	1080.0	16573680.0	254339693280.0	191805.4
57	HL-14 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	15643.0	1302.0	20367186.0	318603890598.0	2814854.8
58	HL-14 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	15746.0	1080.0	17005680.0	267771437280.0	191805.4
59	HL-13 web 200x90x9/14 IA	9	186	3.4	4	3.5	4.00	7	186	60	0.866	0.500	16043.0	1302.0	20887986.0	335105959398.0	2814854.8
60	HL-13 flange 200x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	30	0.500	0.866	16146.0	1080.0	17437680.0	281548781280.0	191805.4
61	HL-01 web 250x90x12/16 IA	12	234	2.4	3	2.5	3.00	10.5	234	45	0.707	0.707	2223.0	2457.0	5461911.0	12141828153.0	5612477.4

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R.

62	HL-01 flange 250x90x12/16 IA	16	90	2.4	3	2.5	3.00	14.5	90	45	0.707	0.707	2108.0	1305.0	2750940.0	5798981520.0	451528.2
63	HL-02 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	45	0.707	0.707	2788.0	1652.0	4605776.0	12840903488.0	3834063.9
64	HL-02 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	45	0.707	0.707	2673.0	1080.0	2886840.0	7716523320.0	370694.9
65	HL-03 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	45	0.707	0.707	3353.0	1652.0	5539156.0	18572790068.0	3834063.9
66	HL-03 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	45	0.707	0.707	3238.0	1080.0	3497040.0	11323415520.0	370694.9
67	HL-04web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	45	0.707	0.707	3919.0	1652.0	6474188.0	25372342772.0	3834063.9
68	HL-04 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	45	0.707	0.707	3804.0	1080.0	4108320.0	15628049280.0	370694.9
69	HL-05 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	45	0.707	0.707	4485.0	1652.0	7409220.0	33230351700.0	3834063.9
70	HL-05 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	45	0.707	0.707	4369.0	1080.0	4718520.0	20615213880.0	370694.9
71	SL-01 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	0	0.000	1.000	1740.0	1770.0	3079800.0	5358852000.0	8296.9
72	SL-01 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	90	1.000	0.000	1695.0	1125.0	1906875.0	3232153125.0	759374.5
73	SL-02 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	2540.0	1652.0	4196080.0	10658043200.0	6745.7
74	SL-02 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	2495.0	1080.0	2694600.0	6723027000.0	728999.5
75	SL-03 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	3340.0	1652.0	5517680.0	18429051200.0	6745.7
76	SL-03 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	3295.0	1080.0	3558600.0	11725587000.0	728999.5
77	SL-04 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	4140.0	1652.0	6839280.0	28314619200.0	6745.7
78	SL-04 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	4095.0	1080.0	4422600.0	18110547000.0	728999.5
79	SL-16 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	14150.0	1652.0	23375800.0	330767570000.0	6745.7

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R

80	SL-16 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	14105.0	1080.0	15233400.0	214867107000.0	728999.5
81	SL-17 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	14950.0	1652.0	24697400.0	369226130000.0	6745.7
82	SL-17 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	14905.0	1080.0	16097400.0	239931747000.0	728999.5
83	SL-18 web 250x90x9/14 IA	9	236	3.4	4	3.5	4.00	7	236	0	0.000	1.000	15750.0	1652.0	26019000.0	409799250000.0	6745.7
84	SL-18 flange 250x90x9/14 IA	14	90	3.4	4	3.5	4.00	12	90	90	1.000	0.000	15705.0	1080.0	16961400.0	266378787000.0	728999.5
85	BL&TL -01 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
86	BL&TL-01 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
87	BL&TL -02 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
88	BL&TL-02 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
89	BL&TL -03 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
90	BL&TL-03 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
91	BL&TL -05 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
92	BL&TL-05 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
93	BL&TL -06 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
94	BL&TL-06 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
95	BL&TL -07 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8
96	BL&TL-07 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
97	BL&TL -08 web 250x90x9/14 IA	9	236	1.4	2	1.5	2.00	8	236	90	1.000	0.000	118.0	1888.0	222784.0	26288512.0	8762831.8

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R.

98	BL&TL-08 flange 250x90x9/14 IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	0	0.000	1.000	243.0	1170.0	284310.0	69087330.0	16477.5
99	BL&TL -10 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
100	BL&TL-10 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
101	BL&TL -11 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
102	BL&TL-11flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
103	BL&TL -12web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
104	BL&TL-12 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
105	BL&TL -13 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.001	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
106	BL&TL-13 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
107	BL&TL -14web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
108	BL&TL-14 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
109	BL&TL -16 web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
110	BL&TL-16 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
111	BL&TL -17web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
112	BL&TL-17 flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
113	BL&TL -18web 250x90x9/14 IA	9	236	2.4	3	2.5	3.00	7.5	236	90	1.000	0.000	118.0	1770.0	208860.0	24645480.0	8215154.8
114	BL&TL-18flange 250x90x9/14 IA	14	90	2.4	3	2.5	3.00	12.5	90	0	0.000	1.000	243.0	1125.0	273375.0	66430125.0	14648.4
115	INN BOT L -01 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R

116	INN BOT L-01 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
117	INN BOT L -02 web 250x90x9/14 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
118	INN BOT L-02 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
119	INN BOT L -03 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
120	INN BOT L-03 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
121	INN BOT L -05 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.001	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
122	INN BOT L-05 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
123	INN BOT L -06 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
124	INN BOT L-06 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
125	INN BOT L -07 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
126	INN BOT L-07 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
127	INN BOT L -08 web 250x90x10/15 IA	10	235	1.4	2	1.5	2.00	9	235	90	1.000	0.000	1622.5	2115.0	3431587.5	5567750718.8	9733400.1
128	INN BOT L-08 flange 250x90x10/15 IA	15	90	1.4	2	1.5	2.00	14	90	0	0.000	1.000	1497.5	1260.0	1886850.0	2825557875.0	20580.0
129	INN BOT L -10 web 250x90x10/15 IA	10	235	2.4	3	2.5	3.00	8.5	235	90	1.000	0.000	1622.5	1997.5	3240943.8	5258431234.4	9192655.6
130	INN BOT L-10 flange 250x90x10/15 IA	15	90	2.4	3	2.5	3.00	13.5	90	0	0.000	1.000	1497.5	1215.0	1819462.5	2724645093.8	18452.8
131	INN BOT L -11 web 250x90x10/15 IA	10	235	2.4	3	2.5	3.00	8.5	235	90	1.000	0.000	1622.5	1997.5	3240943.8	5258431234.4	9192655.6
132	INN BOT L-11 flange 250x90x10/15 IA	15	90	2.4	3	2.5	3.00	13.5	90	0	0.000	1.000	1497.5	1215.0	1819462.5	2724645093.8	18452.8
133	INN BOT L -12 web 250x90x10/15 IA	10	235	2.4	3	2.5	3.00	8.5	235	90	1.000	0.000	1622.5	1997.5	3240943.8	5258431234.4	9192655.6

Κεφάλαιο 2: Υπολογισμός μέγιστης αντοχής με χρήση κανονισμών I.A.C.S.-C.S.R.

134	INN BOT L-12 flange 250x90x10/15 IA	15	90	2.4	3	2.5	3.00	13.5	90	0	0.000	1.000	1497.5	1215.0	1819462.5	2724645093.8	18452.8
135	INN BOT L -13 web 250x90x10/15 IA	10	235	2.4	3	2.5	3.00	8.5	235	90	1.000	0.000	1622.5	1997.5	3240943.8	5258431234.4	9192655.6
136	INN BOT L-13 flange 250x90x10/15 IA	15	90	2.4	3	2.5	3.00	13.5	90	0	0.000	1.000	1497.5	1215.0	1819462.5	2724645093.8	18452.8
137	INN BOT L-14web 250x90x10/15 IA	10	235	2.4	3	2.5	3.00	8.5	235	90	1.000	0.000	1622.5	1997.5	3240943.8	5258431234.4	9192655.6
138	INN BOT L-14 flange 250x90x10/15 IA	15	90	2.4	3	2.5	3.00	13.5	90	0	0.000	1.000	1497.5	1215.0	1819462.5	2724645093.8	18452.8
139	CL GIR 140x11FB	11	140	1.4	2	1.5	2.00	10	140	0	0.000	1.000	580.0	1400.0	812000.0	470960000.0	11666.7
140	CL GIR 140x11FB	11	140	1.4	2	1.5	2.00	10	140	0	0.000	1.000	1160.0	1400.0	1624000.0	1883840000.0	11666.7
141	No4 NTSGIR 140x11FB	11	140	1.4	2	1.5	2.00	10	140	0	0.000	1.000	580.0	1400.0	812000.0	470960000.0	11666.7
142	No4 NTSGIR 140x11FB	11	140	1.4	2	1.5	2.00	10	140	0	0.000	1.000	1160.0	1400.0	1624000.0	1883840000.0	11666.7
143	No9 OTSGIR web 200x90x9/14IA	9	186	1.4	2	1.5	2.00	8	186	0	0.000	1.000	580.0	1488.0	863040.0	500563200.0	7936.0
144	No9 OTSGIR flange 200x90x9/14IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	90	1.000	0.000	535.0	1170.0	625950.0	334883250.0	789749.5
145	No9 OTSGIR web 200x90x9/14IA	9	186	1.4	2	1.5	2.00	8	186	0	0.000	1.000	1160.0	1488.0	1726080.0	2002252800.0	7936.0
146	No9 OTSGIR flange 200x90x9/14IA	14	90	1.4	2	1.5	2.00	13	90	90	1.000	0.001	1115.0	1170.0	1304550.0	1454573250.0	789749.5
147	No16 NTSGIR 140x11FB	11	140	2.4	3	2.5	3.00	9.5	140	0	0.000	1.000	580.0	1330.0	771400.0	447412000.0	10002.7
148	No16 NTSGIR 140x11FB	11	140	2.4	3	2.5	3.00	9.5	140	0	0.000	1.000	1160.0	1330.0	1542800.0	1789648000.0	10002.7

2.8.6 ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ-ε ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Σε κατάσταση *sagging* τα δομικά στοιχεία (S.E.) άνωθεν του οριζόντιου ουδέτερου άξονα της διατομής τελούν υπό θλιπτική φόρτιση.

Για την κατασκευή των καμπύλων σ-ε με χρήση του υπολογιστικού φύλλου bulk carrier load-end shortening curves, δημιουργήθηκαν οι κάτωθι ομάδες δομικών στοιχείων με κοινά χαρακτηριστικά:

SE 14, SE 15, SE 16, SE 17-22, SE 23-24, SE 25, SE 26-27, SE 28, SE 29-30, SE 40-41, SE 42.

Από αυτά, το SE 14 είναι έλασμα εγκάρσιως ενισχυμένο με κέντρο βάρους (9.090 mm από τρόπιδα) σαφώς άνωθεν του αρχικού ουδετέρου άξονα (6.431 mm από τρόπιδα).

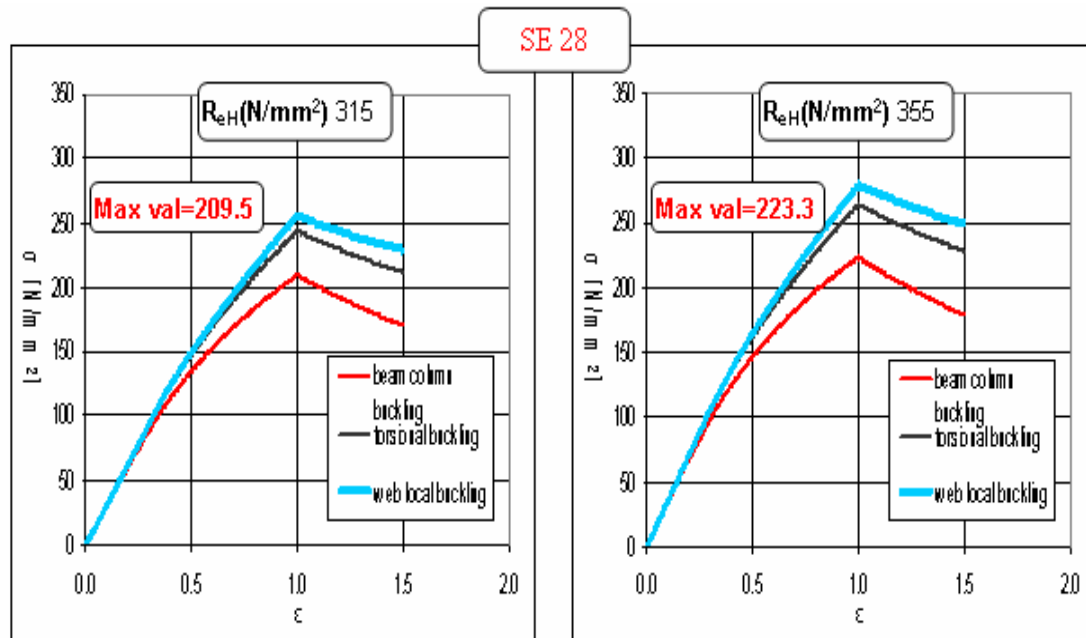
Τα υπόλοιπα είναι δομικά στοιχεία διαμηκών ενισχυτικών.

S.E. i	description	as built dimensions (mm)		min yield stress (N/mm ²)	item net dimensions (mm)	
14	side plate 't'xb' equivalent 14x6359	14.3	5940	315	12.25	5940
	cl girder plate	11	290	315	10	290
15	No1 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	355	7	236
	No1deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	355	12	90
	attached plate	22	675	355	20	675
16	No2 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	355	7	236
	No2 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	355	12	90
	attached plate	22	738	355	20	738
17-22	No3 deck long web 250x90x9/14 IA	9	236	355	7	236
	No3 deck long flange 250x90x9/14 IA	14	90	355	12	90
	attached plate	22	800	355	20	800
23-24	HL-20 web 250x90x9/14 IA	9	236	315	7.5	236
	HL-20 flange 250x90x9/14 IA	14	90	315	12.5	90
	attached plate	15	800	315	13.25	800

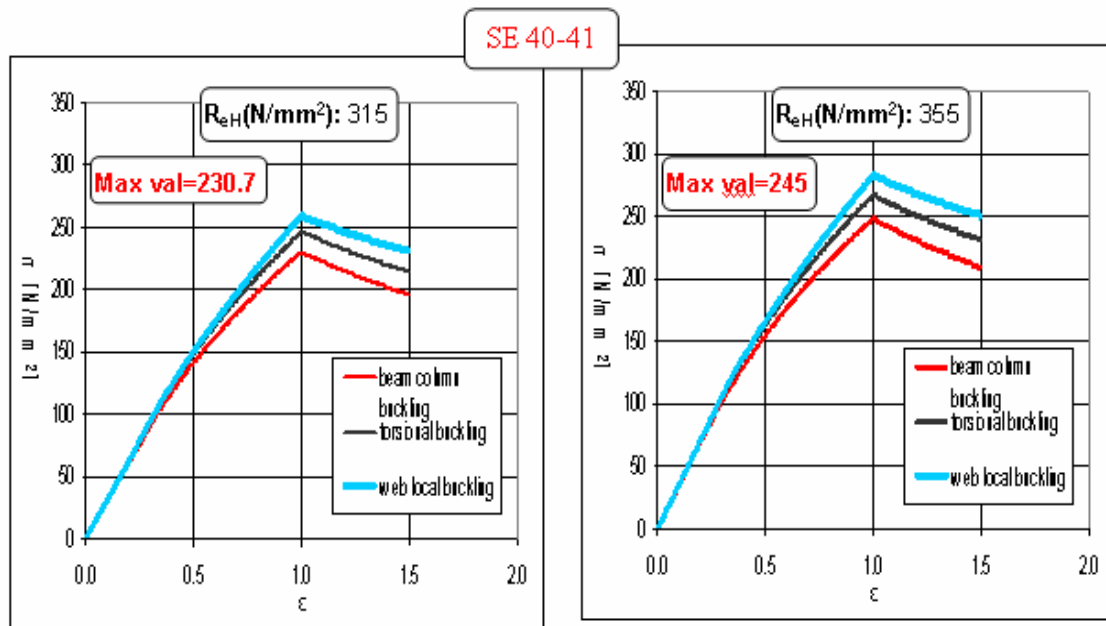
25	HL-18 web 200x90x9/14 IA	9	236	315	7	236
	HL-18 flange 250x90x9/14 IA	14	90	315	12	90
	attached plate	16.5	800	315	14.5	800
26-27	HL-17 web 200x90x9/14 IA	9	186	315	7	186
	HL-17 flange 200x90x9/14 IA	14	90	315	12	90
	attached plate	16.5	800	315	14.5	800
28	HL-15 web 200x90x9/14 IA	9	186	315	7	186
	HL-15 flange 200x90x9/14 IA	14	90	315	12	90
	attached plate	16.5	800	355	14.5	800
29-30	HL-14 web 200x90x9/14 IA	9	186	355	7	186
	HL-14 flange 200x90x9/14 IA	14	90	355	12	90
	attached plate	19	800	355	17	800
40-41	SL-16 web 250x90x9/14 IA	9	236	315	7	236
	SL-16 flange 250x90x9/14 IA	14	90	315	12	90
	attached plate	16	800	355	14.25	800
42	SL-18 web 250x90x9/14 IA	9	236	355	7	236
	SL-18 flange 250x90x9/14 IA	14	90	355	12	90
	attached plate	16	800	355	14.25	800

Πίνακας 2.6-Διαστάσεις δομικών στοιχείων υπό θλιπτική φόρτιση

Ακολουθως παρατίθενται οι καμπύλες σ - ϵ των τριών δομικών στοιχείων SE 28, SE 40-41 που έχουν διαφορετικό όριο διαρροής στο ενισχυτικό και στο συνημμένο έλασμα. Κάθε δομικό στοιχείο εξετάζεται δύο φορές θεωρώντας την πρώτη φορά ότι όλο το δομικό στοιχείο έχει το μικρότερο εκ των δύο ορίων διαρροής και την δεύτερη φορά το μεγαλύτερο. Η διαφορά που παρατηρήθηκε ως προς την μέγιστη τάση σ είναι 6.6% και 6.2 % αντίστοιχα.



Σχήμα 2.24-Καμπύλες σ-ε δομικού στοιχείου S.E. 28



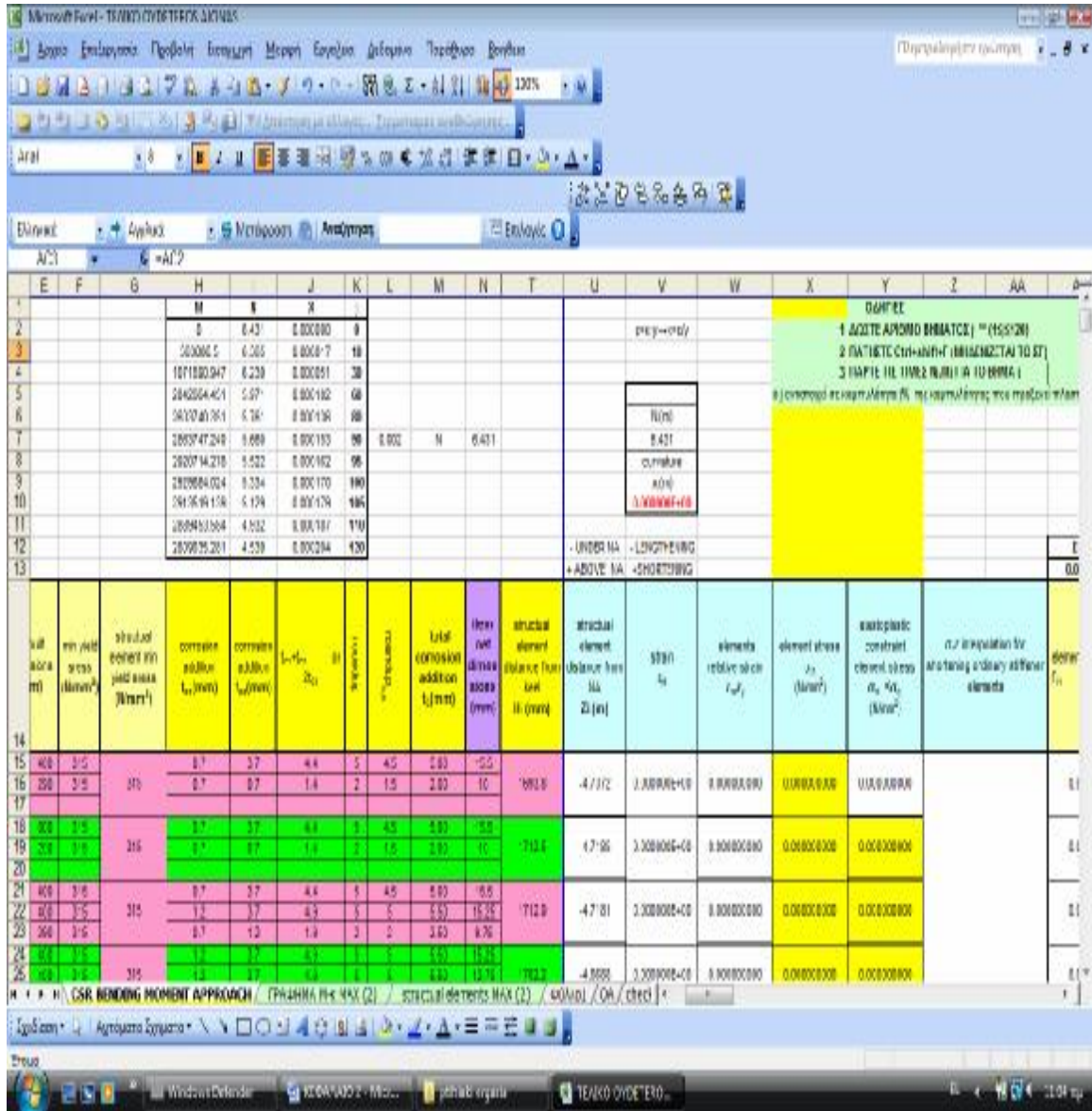
Σχήμα 2.25-Καμπύλες σ-ε δομικού στοιχείου S.E. 40-41

ε	SE15 355	SE16 355	SE17-22 355	SE 23-24 315	SE 25 315	SE 26-27 315	SE 28	SE 29-30 355	SE 40-41	SE 42 355
1.0	301.5	285.6	279.9	225.4	232.3	216.3	209.5	243.1	230.7	249.2
1.0	301.5	285.6	279.9	225.4	232.3	216.3	223.3	243.1	245.0	249.2

Πίνακας 2.7-Μέγιστες τιμές τάσεων καμπύλων σ-ε θλιβόμενων δομικών στοιχείων

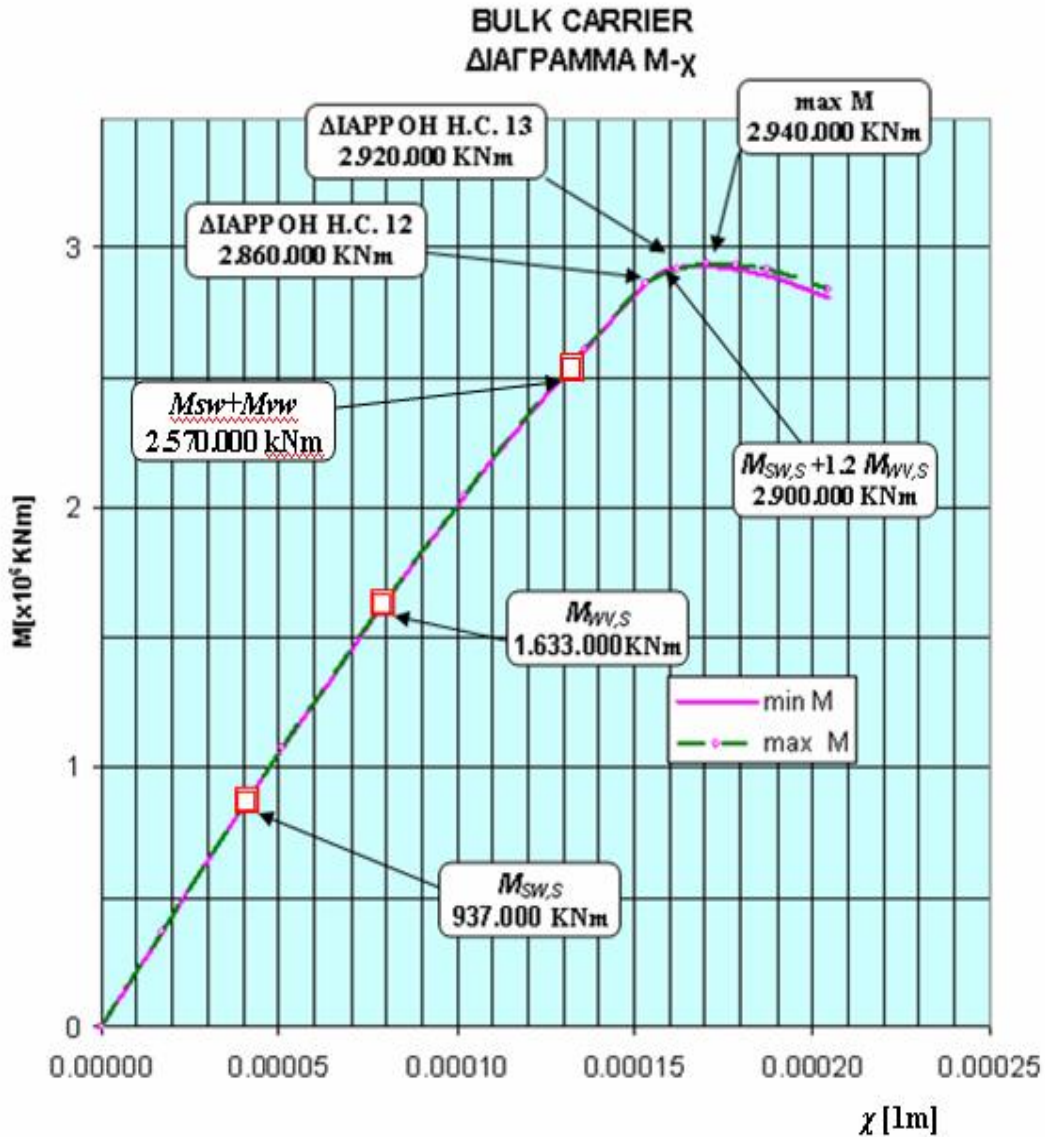
2.8.7 ΚΑΜΠΥΛΗ M-χ BULK CARRIER

Εφαρμόζοντας όλα τα παραπάνω, στο υπολογιστικό φύλλο CSR bending moment approach.xls παράγεται ικανός αριθμός ζευγών τιμών M-χ ώστε να αποτυπωθεί η καμπύλη καμπτικής ροπής-καμπυλότητας της διατομής.



Σχήμα 2.26-Υπολογιστικό φύλλο κατασκευής ζευγών M-χ

Η καμπύλη M-χ κατασκευάστηκε δύο φορές κάνοντας χρήση των ακραίων τιμών σ-ε των δομικών στοιχείων SE 28, SE 40-41 έτσι ώστε να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές ως προς την μέγιστη αντοχή της διατομής, ένεκα της διαφορετικότητας του ορίου διαρροής του υλικού των τμημάτων των εν λόγω δομικών στοιχείων.



Σχήμα 2.27-Διάγραμμα καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ
(Bulk Carrier DWT 48.170 MT)

Παρατηρείται ότι ουσιαστικά η διαφορά στη μέγιστη καμπτική ροπή είναι σχεδόν αμελητέα (0.7%) μεταξύ της μεγαλύτερης μέγιστης ροπής ($\max M=2.940.417 \text{ KNm}$) και της μικρότερης μέγιστης ροπής ($\min M=2.920.714 \text{ KNm}$) του διαγράμματος.

Επίσης, κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας κατασκευής των καμπύλων $M-\chi$ στο υπολογιστικό φύλλο CSR bending moment approach .xls παρατηρήθηκε ότι η μέγιστη καμπτική ροπή ($2.940.417 \text{ kNm}$) είναι κατά περίπου 3% μεγαλύτερη από την καμπτική ροπή κατά την οποία σημειώνεται η πρώτη αστοχία ($2.860.000 \text{ kNm}$) που

είναι η διαρροή του δομικού στοιχείο HC 12 (ένωση ελάσματος ζωστήρα-καταστρώματος).

Κατόπιν , σχεδόν άμεσα (2.920.000 kNm) αστοχούν και τα υπόλοιπα δομικά στοιχεία του καταστρώματος (ενισχυμένα ελάσματα) και το HC 13(ένωση ελάσματος εισόδου αμπαριού με κατάστρωμα).

Design Still Water bending moment intact condition at midship					
sagging	$M_{SW,S}$	95.500	tf -m	936.855,0	KN-m
hogging	$M_{SW,H}$	111.000	tf -m	1.088.910,0	KN-m
Vertical Wave Bending Moments calculation in intact condition (CSR, Ch.4, Sect.3,p.11)					
hogging	$M_{WV,H}=190F_M f_p C L^2 B C_B 10^{-3}(\text{KN-m})$			1.511.225,2	KN-m
sagging	$=110F_M f_p C L^2 B (C_B+0,7)10^{-3}(\text{KN-m})$			1.632.895,0	KN-m
	F_M : Distribution factor =		1,00	CSR ch.4,sec.3,p.12	
	f_p : probability coefficient =		1,00	CSR ch.4,sec.2,p.4	
	C: wave parameter =		9,44	CSR ch.1,sec.4,p.17	

Πίνακας 2.8-Καμπτικές ροπές σε ήρεμο νερό και κυματισμό, άθικτη κατάσταση

Επισημαίνεται ότι σε σχέση με τους κανονισμούς η καμπτική ροπή

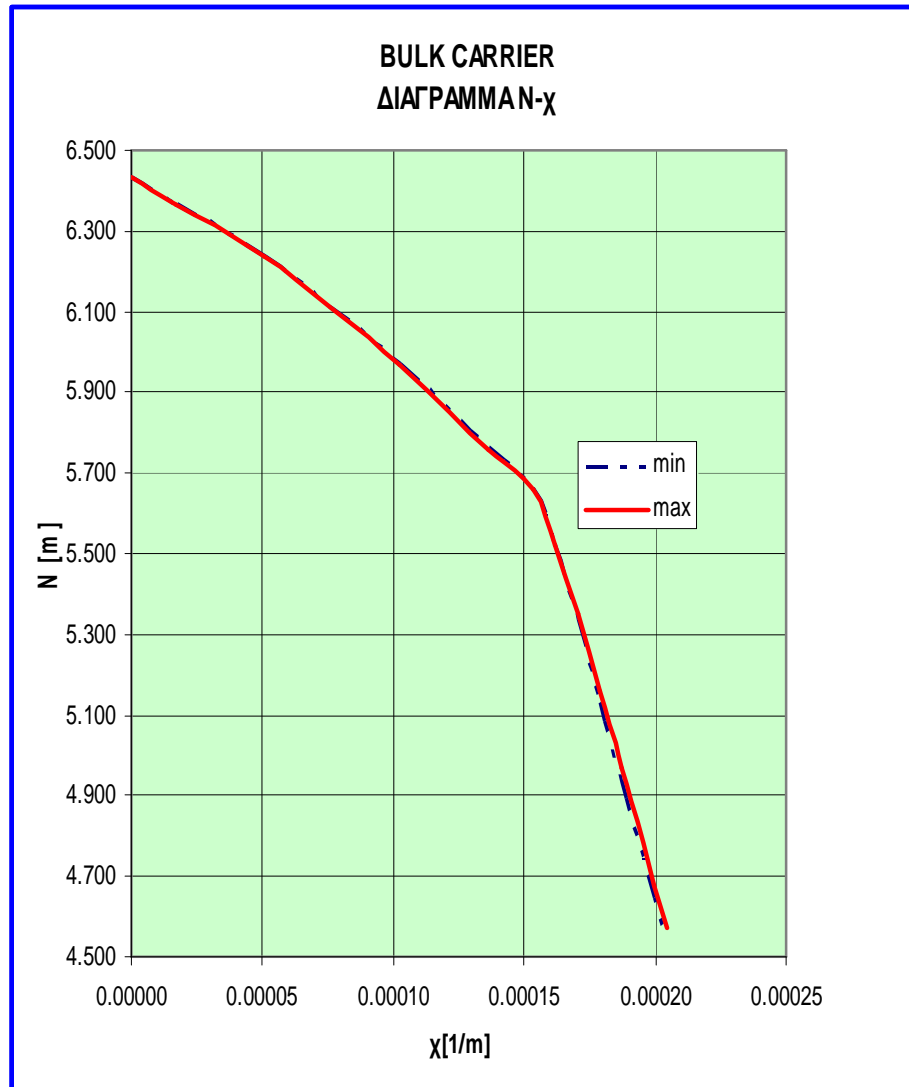
$$M = M_{SW,S} + 1.2 M_{WV,S} = 2.896.329 \text{ kNm} ,$$

οριακά ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή της καμπύλης M - χ . Οπως έχει προαναφερθεί μελετήθηκε η ασθενέστερη διατομή του παραλλήλου τμήματος με τα μέγιστα πάχη διάβρωσης ελασμάτων και όχι η μέση τομή που είναι σαφώς στιβαρότερη. Ως εκ τούτου, δεν ευσταθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων μέγιστης ροπής του διαγράμματος με την ελάχιστη απαιτούμενη μέγιστη ροπή των κανονισμών η οποία αφορά στη διατομή της μέσης τομής.

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στην περίπτωση της μέσης τομής ο κανονισμός απαιτεί $M > 1.1(M_{SW,S} + 1.2 M_{WV,S}) = 3.185.961 \text{ kNm}$ (8% μεγαλύτερη από την μέγιστη τιμή ροπής του διαγράμματος)

2.8.8 ΚΑΜΠΥΛΗ N- χ BULK CARRIER

Ακολούθως παρατίθεται το διάγραμμα απόστασης του οριζόντιου ουδετέρου άξονα από την τρόπιδα N , ως προς την καμπυλότητα χ .

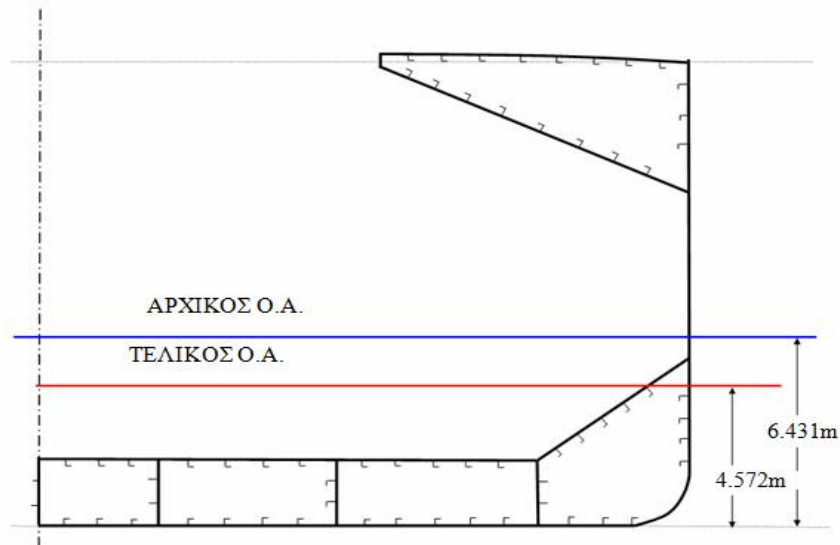


Σχήμα 2.28-Διάγραμμα απόστασης O.A. από τρόπιδα N ως προς την καμπυλότητα χ (Bulk Carrier DWT 48.170 MT)

Στο εν λόγω διάγραμμα έχουν αποτυπωθεί και οι δύο καμπύλες της μετατόπισης του O.A. για μέγιστη και ελάχιστη καμπτική ροπή.

Ομοίως παρατηρείται ότι η επίδραση της διαφοροποίησης του ορίου διαρροής μεταξύ ενισχυτικού και συνημμένου ελάσματος σε τρία δομικά στοιχεία είναι σχεδόν αμελητέα.

Η μετατόπιση του O.A. προς την τρόπιδα γίνεται εντονότερη μετά την καμπυλότητα κατά την οποία πραγματοποιείται η πρώτη πλαστικοποίηση των δομικών στοιχείων του καταστρώματος.



Σχήμα 2.29-Μετατόπιση του Ο.Α. προς την τρόπιδα σε κατάσταση sagging

Παρατηρείται ότι κατά τη μετατόπιση (πτώση) του Ο.Α. το δομικό στοιχείο Η.Σ. 10 αλλάζει μορφή καταπόνησης. Ενώ κατά την αρχική θέση του Ο.Α. υφίστατο εφελκυσμό, μόλις ο Ο.Α. μετατοπίστηκε κάτω από το γεωμετρικό κέντρο του στοιχείου η καταπόνηση του μετετράπηκε σε θλιπτική.

2.9 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΝΟΝΩΝ C.S.R. ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ M3-200

Το μοντέλο M3-200 χρησιμοποιήθηκε σε πειράματα διαμήκους κάμψης από τους *J. M. Gordo* και *C. G. Soares* (*Technical University of Lisbon, Portugal, 2004*).

Η κατασκευή των καμπύλων σ - ϵ με χρήση των C.S.R., όσων εκ των δομικών στοιχείων του μοντέλου περιείχαν μέρη με διαφορετικό όριο διαρροής έγινε τρεις φορές.

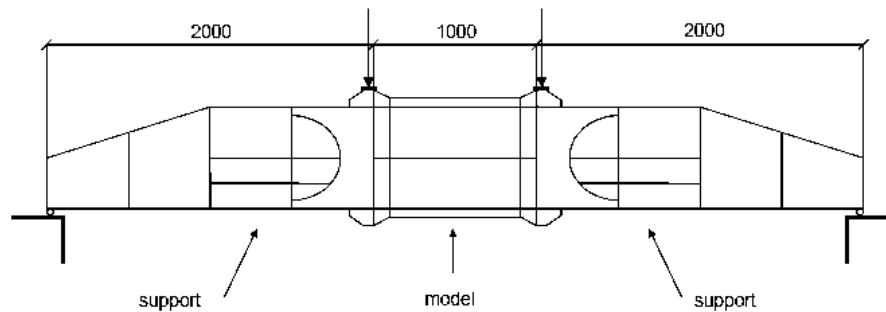
Την πρώτη φορά θεωρήθηκε ότι όλη η διατομή του δομικού στοιχείου είχε υλικό με το μικρότερο όριο διαρροής, την δεύτερη με το μεγαλύτερο και την τρίτη φορά χρησιμοποιήθηκε η μέση τιμή του ορίου διαρροής που υπολογίστηκε σε σχέση με τις επιμέρους επιφάνειες των τμημάτων με διαφορετικό όριο διαρροής:

$$S_{AVR} = \frac{s_1 A_1 + s_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

όπου s_i , A_i τα όρια διαρροής και οι επιφάνειες των τμημάτων αντίστοιχα.

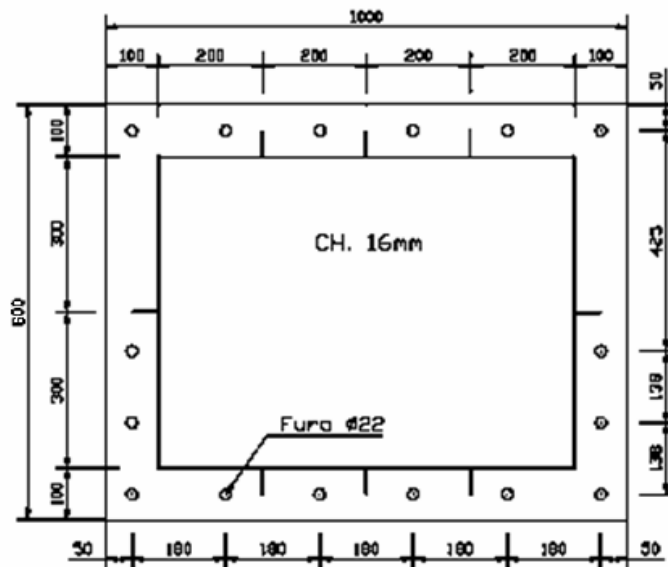
2.9.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ M3-200

Το μοντέλο έχει μήκος 1 m και στηρίζεται κοχλιωτά σε δύο υποστηρίγματα 2 m το καθένα τα οποία έχουν πολύ μεγαλύτερη ακαμψία (*rigidity*) από το μοντέλο. Η όλη διάταξη του πειράματος στην οποία φαίνεται ο τρόπος επιβολής καθαρής ροπής (*pure bending*) στο μοντέλο φαίνεται στο σχήμα 2.30. Η εν λόγω διάταξη ονομάζεται διάταξη κάμψης τεσσάρων σημείων (*4 point bending*).

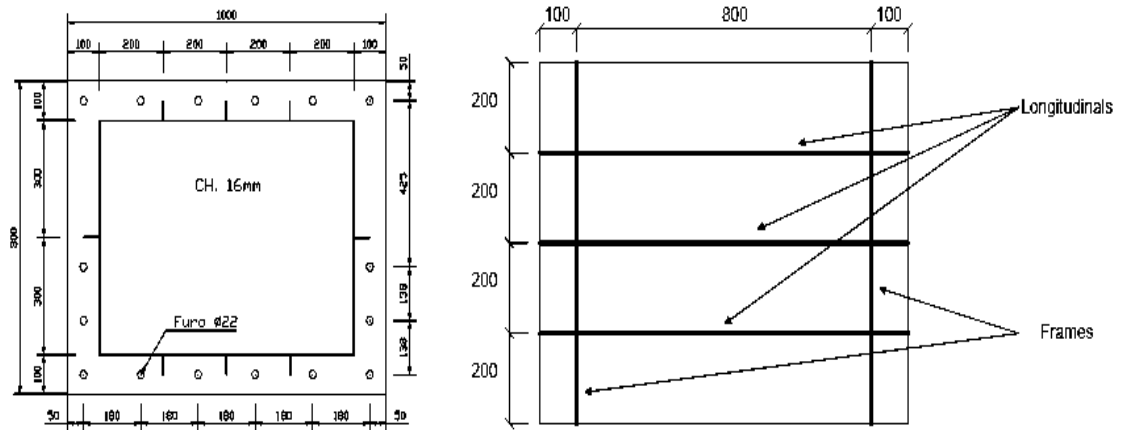


Σχήμα 2.30-Διάταξη εφαρμογής καθαρής ροπής τεσσάρων σημείων (*4 point bending*) στο μοντέλο M3-200

Τα γεωμετρικά στοιχεία της εγκάρσιας διατομή του μοντέλου παρουσιάζονται στα σχήματα 2.31, 2.32:

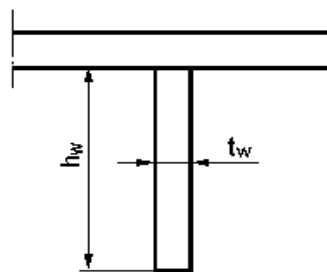


Σχήμα 2.31-Γεωμετρικά στοιχεία της διατομής του μοντέλου M3-200



Σχήμα 2.32-Γεωμετρικά στοιχεία της διατομής του μοντέλου M3-200

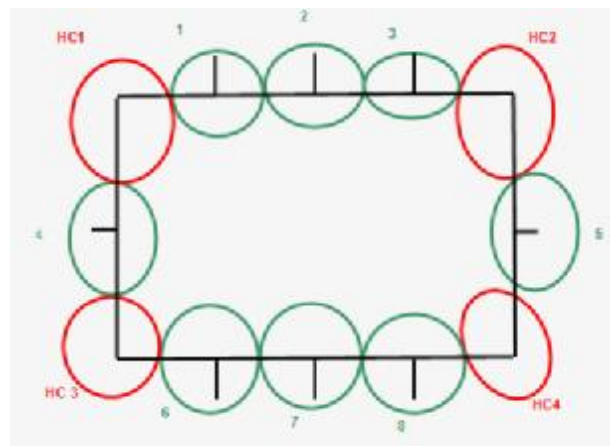
Τα ελάσματα του μοντέλου M3-200 έχουν πάχος 3 mm ενώ τα ενισχυτικά τύπου επίπεδης ράβδου (flat bar) έχουν διαστάσεις $t_w \times h_w = 4 \times 45$ mm.



Σχήμα 2.33- Ενισχυτικό τύπου επίπεδης ράβδου (flat bar)

2.9.2 .ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Η διατομή χωρίστηκε σε 12 δομικά στοιχεία (βλέπε σχήμα 2.34). Από αυτά τα 4 είναι τύπου ανθεκτικού γωνιακού και τα 8 τύπου διαμήκους ενισχυτικού.



Σχήμα 2.34- Διαχωρισμός διατομής σε δομικά στοιχεία

2.9.3 ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Το υλικό του μοντέλου είναι ναυπηγικός χάλυβας.

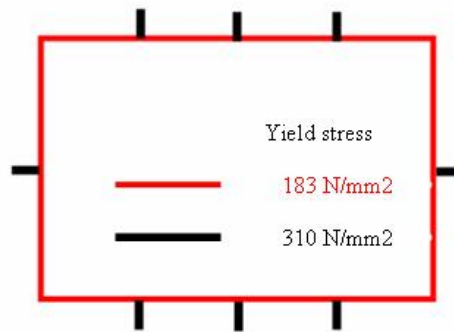
Για τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού του μοντέλου διεξήχθησαν πειράματα εφελκυσμού δοκιμίων. Παρατηρήθηκαν σημαντικές αποκλίσεις τιμών από τις αρχικές τιμές που είχαν υποτεθεί για το υλικό:

Οριο διαρροής $\sigma_y=240 \text{ MPa}$ και μέτρο ελαστικότητας $E=210 \text{ GPa}$.

Οι μέσες τιμές του ορίου διαρροής που αντιπροσωπεύουν τα πραγματικά πειραματικά δεδομένα είναι $\sigma_y=183 \text{ MPa}$ για τα ελάσματα πάχους 3mm και $\sigma_y=310 \text{ MPa}$ για τα ελάσματα πάχους 4mm.

Nominal thickness	Dimensions	Yield stress (MPa)	Maximum stress (MPa)	Elongation (%)
3	3,0x12,6	170	280	49,7
3	3,0x12,6	200	300	47,1
3	3,0x12,6	180	280	49,0
4	4,1x19,4	310	420	36,9
4	4,1x19,5	310	420	37,8
4	4,1x19,4	310	410	38,0
3	Μεση	183	287	48,6
4	Μεση	310	417	37,6

Πίνακας 2.9-Μηχανικές ιδιότητες χάλυβα μοντέλου M3-200 σε πείραμα εφελκυσμού

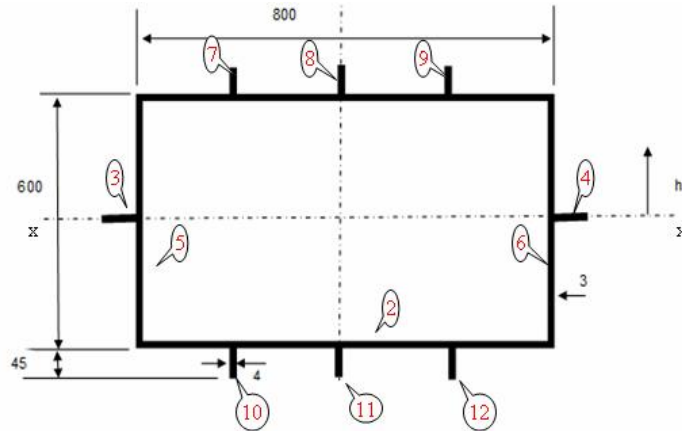


Σχήμα 2.35-Ορια διαρροής ελάσματος και ενισχυτικών μοντέλου M3-200

Είναι προφανές ότι όλα τα δομικά στοιχεία τύπου ανθεκτικού γωνιακού έχουν το ίδιο όριο διαρροής παντού ενώ τα δομικά στοιχεία τύπου διαμήκους ενισχυτικού όχι.

2.9.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΟΑ

Ο υπολογισμός της ροπής αδρανείας της διατομής του μοντέλου M3-200 έγινε με τη βοήθεια υπολογιστικού φύλλου. Η διατομή είναι διπλά συμμετρική και ο οριζόντιος άξονας συμμετρίας xx είναι προφανώς κεντροβαρικός.



i	b(mm)	t (mm)	ai (mm ²)	hi (mm)	aihi (mm ²)	li (mm ⁴)
1	800	3	2400	298.5	716400	1 800.00
2	800	3	2400	-298.5	-716400	1 800.00
3	45	4	180	0	0	240.00
4	45	4	180	0	0	240.00
5	594	3	1782	0	0	52 396 146.00
6	594	3	1782	0	0	52 396 146.00
7	45	4	180	322.5	58050	30 375.00
8	45	4	180	322.5	58050	30 375.00
9	45	4	180	322.5	58050	30 375.00
10	45	4	180	-322.5	-58050	30 375.00
11	45	4	180	-322.5	-58050	30 375.00
12	45	4	180	-322.5	-58050	30 375.00
					Ixx (mm⁴)=	104 978 622.00

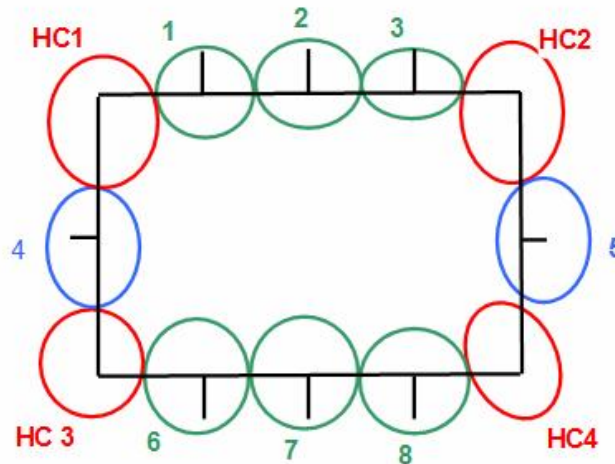
Σχήμα 2.36-Σχέδιο διατομής και πίνακας υπολογισμού ροπής αδρανείας μοντέλου M3-200.

Διαστάσεις σε mm

2.9.5 ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ϵ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΥΠΟ ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.37, η γεωμετρία της διατομής είναι τέτοια (διπλή συμμετρία) ώστε τα δομικά στοιχεία S.E. ομαδοποιούνται σε τρία είδη :

- SE-1 : HC 1,HC 2,HC 3,HC 4 (ανθεκτικά γωνιακά)
- SE-2 : 1,2,3,6,7,8 (διαμήκη ενισχυτικά)
- SE-3 : 4,5 (διαμήκη ενισχυτικά)



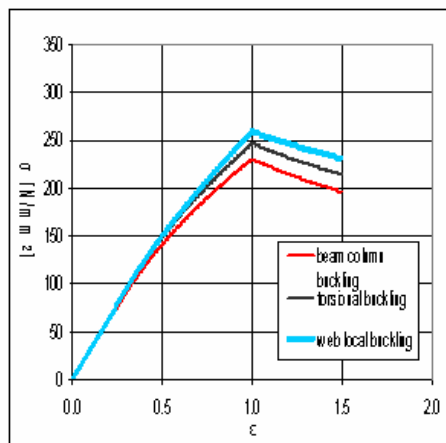
Σχήμα 2.37-Σχέδιο δομικών στοιχείων διατομής μοντέλου M3-200

Τα δομικά στοιχεία SE-2, SE-3 δεν έχουν ενιαίο όριο διαρροής σε όλη τη διατομή τους. Ως εκ τούτου οι καμπύλες σ - ϵ των δομικών στοιχείων SE-2, SE-3 θα κατασκευαστούν τρεις φορές σαν να είχαν κάθε φορά ενιαίο όριο διαρροής στα μέρη που τα απαρτίζουν. Οι τρεις τιμές ορίου διαρροής που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή των καμπύλων σ - ϵ είναι η ελάχιστη $\sigma_{ymin}=183 \text{ N/mm}^2$ (ελάσματος), η μέγιστη $\sigma_{ymax}=310 \text{ N/mm}^2$ (ενισχυτικού) και η τιμή που προσεγγίζει τον μέσο όρο $\sigma_{yavr}=205 \text{ N/mm}^2$.

	A	B	C	D	E	F	N	O	P	Q	R	S	T
1	1	structural element SE	item I description	as built dimensions (mm)		min yield stress (N/mm ²)	item dimensions (mm)		απόσταση κέντρου στοιχείου I από K h _i (mm)	εμβαδό στοιχείου I a _i (mm ²)	α ² h _i (mm ²)	structural element area A _i (mm ²)	structural element distance from keel H _i (mm)
2	1	hard corner 1	horizontal plate	3	100	183	3	100	600.0	300.0	180000.0	750.0	555.0
3			vertical plate	3	150	183	3	150	525.0	450.0	236250.0		
4													
5	2	hard corner 2	horizontal plate	3	100	183	3	100	600.0	300.0	180000.0	750.0	555.0
6			vertical plate	3	150	183	3	150	525.0	450.0	236250.0		
7													
8	3	hard corner 3	horizontal plate	3	100	183	3	100	0.0	300.0	0.0	750.0	45.0
9			vertical plate	3	150	183	3	150	75.0	450.0	33750.0		
10									0.0	0.0			
11	4	hard corner 4	horizontal plate	3	100	183	3	100	0.0	300.0	0.0	750.0	45.0
12			vertical plate	3	150	183	3	150	75.0	450.0	33750.0		
13													
14													
15													
16													
17	5	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	622.5	180.0	112050.0	780.0	605.2
18			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
19	1		attached plate	3	200	183	3	200	600	600.0	360000.0		
20	6	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	622.5	180.0	112050.0	780.0	605.2
21			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
22	2		attached plate	3	200	183	3	200	600	600.0	360000.0		
23	7	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	622.5	180.0	112050.0	780.0	605.2
24			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
25	3		attached plate	3	200	183	3	200	600	600.0	360000.0		
26	8	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	-22.5	180.0	-4050.0	780.0	-5.2
27			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
28	6		attached plate	3	200	183	3	200	0.0	600.0	0.0		
29	9	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	-22.5	180.0	-4050.0	780.0	-5.2
30			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
31	7		attached plate	3	200	183	3	200	0.0	600.0	0.0		
32	10	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	-22.5	180.0	-4050.0	780.0	-5.2
33			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
34	8		attached plate	3	200	183	3	200	0.0	600.0	0.0		
35	11	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	300.0	180.0	54000.0	1080.0	300.0
36			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
37	4		attached plate	3	300	183	3	300	300.0	900.0	270000.0		
38	12	ordinary stiffener	web	4	45	310	4	45	300.0	180.0	54000.0	1080.0	300.0
39			attached plate	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0		
40	5		attached plate	3	300	183	3	300	300.0	900.0	270000.0		

Σχήμα 2.38-Γεωμετρικά στοιχεία δομικών στοιχείων διατομής

Η γενική μορφή των καμπύλων σ-ε παρουσιάζεται στο σχήμα 2.39 μαζί με τις μέγιστες τιμές τάσης ανά περίπτωση ενώ ο τρόπος αστοχίας και των τριών δομικών στοιχείων είναι τύπου λυγισμού δοκού-κολόνας.



	σ _{yield}		
	183	204	310
σ _{max} -SE 2	141	152	196
σ _{max} -SE 3	110	117	149

Σχήμα 2.39-Μέγιστες τιμές τάσεων καμπύλων σ-ε δομικών στοιχείων για διάφορα όρια διαρροής

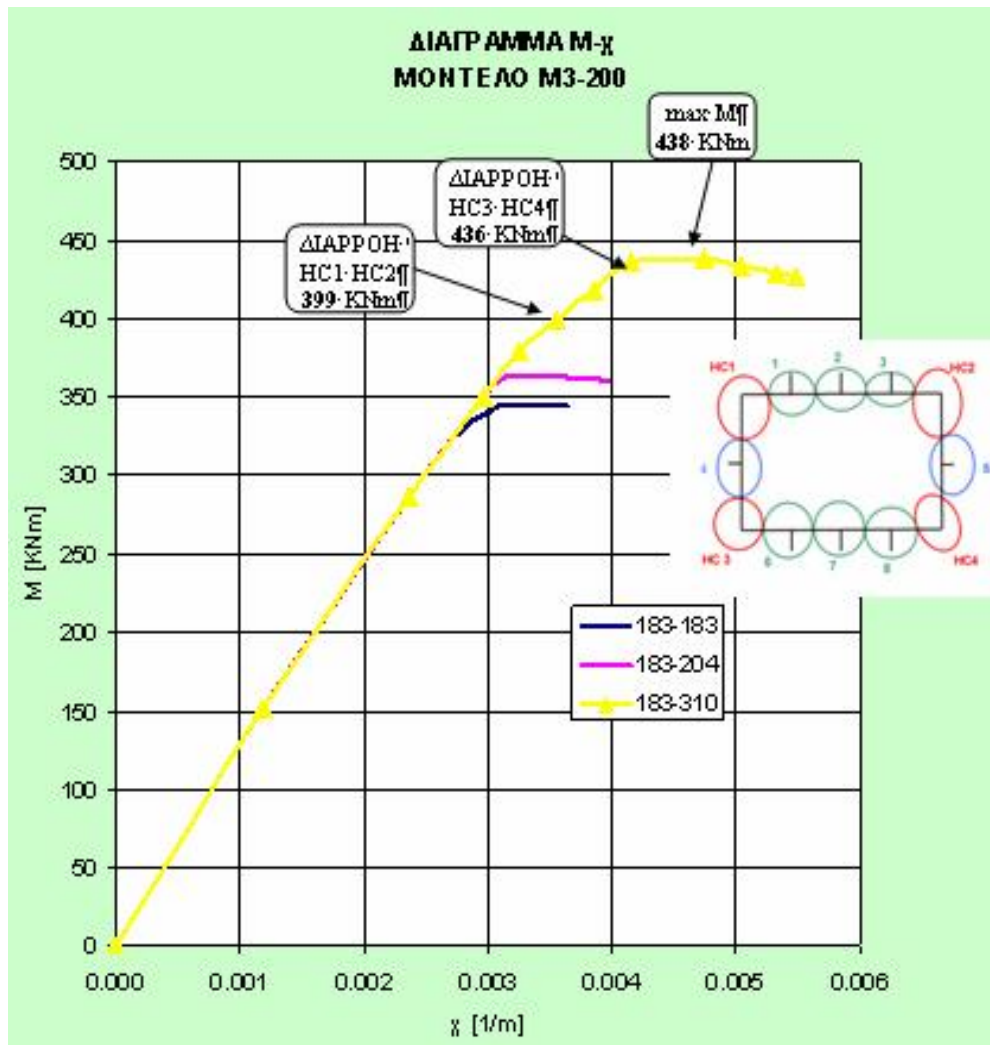
2.9.6 ΚΑΜΠΥΛΗ M-χ ΜΟΝΤΕΛΟΥ M3-200

Ακολουθως παρατίθενται τα διαγράμματα καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ για τα τρία διαφορετικά όρια διαρροής των δομικών στοιχείων *S.E. 2*, *S.E. 3*. Το *S.E. 1* έχει ενιαίο όριο διαρροής 183 N/m^2 .

Τα διαγράμματα (βλέπε σχήμα 2.40) έχουν προκύψει μέσω του υπολογιστικού φύλλου C.S.R. bending moment approach .xls.

Επιβεβαιώνεται ότι κυρίαρχο ρόλο ως προς την μέγιστη αντοχή της διατομής κατά την διαμήκη κάμψη της παίζουν τα διαμήκη ενισχυτικά.

Παρατηρώντας κατά την διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας κατασκευής της καμπύλης 183-310 στο υπολογιστικό φύλλο, όπου και φαίνεται πότε το κάθε δομικό στοιχείο φτάνει στο όριο αναπτυσσομένης τάσης,



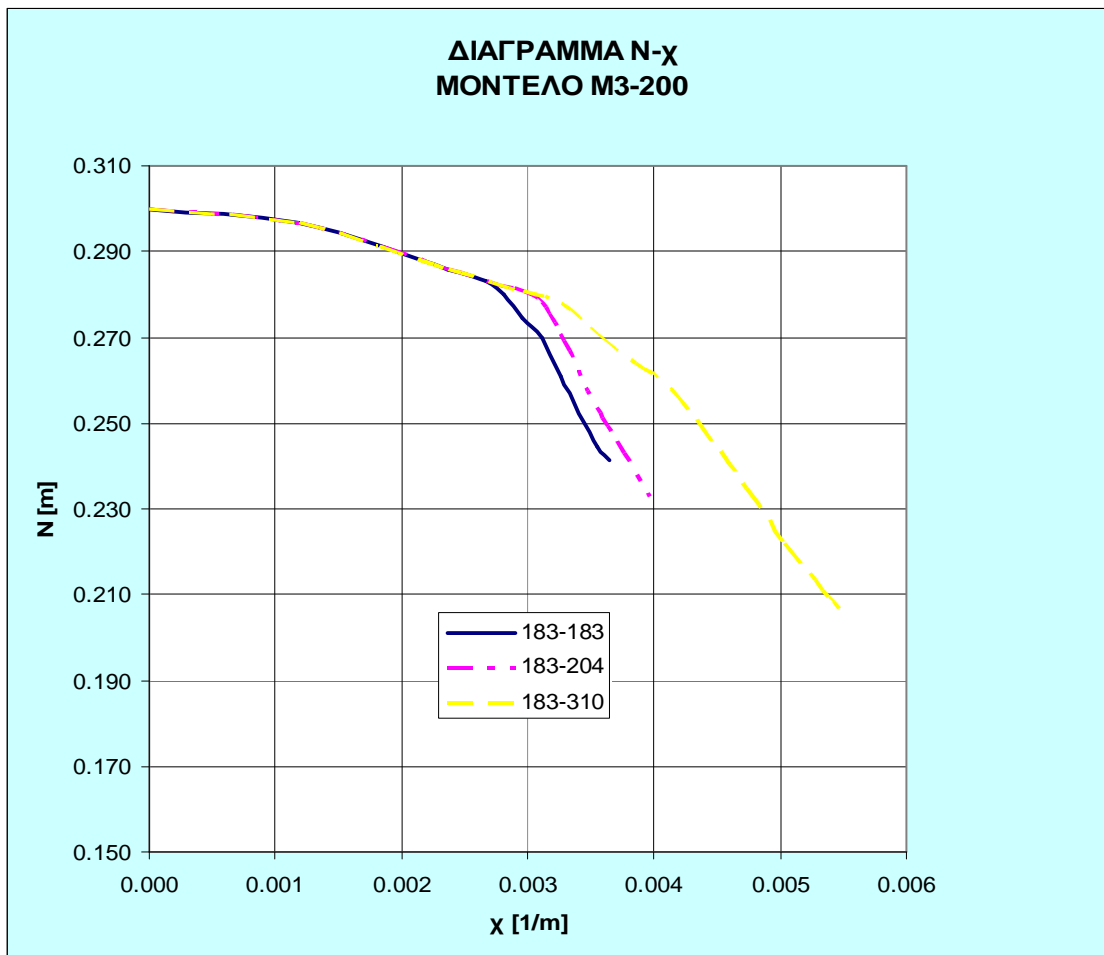
Σχήμα 2.40-Διάγραμμα καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα χ για διαφορετικά όρια διαρροής των δομικών στοιχείων

βλέπουμε ότι η μέγιστη καμπτική ροπή που αναπτύσσει η διατομή είναι περίπου 10% μεγαλύτερη από την καμπτική ροπή κατά την οποία αρχίζει η πρώτη διαρροή ορισμένων δομικών στοιχείων (HC 1, HC 2).

Αντίθετα στις καμπύλες 183-183 και 183-204 όπου τα ενισχυτικά έχουν ίδιο ή κοντινό όριο διαρροής με το έλασμα, ουσιαστικά συμπίπτει η μέγιστη καμπτική ροπή με την ροπή που προξενεί έναρξη διαρροής των δομικών στοιχείων.

2.9.7 ΚΑΜΠΥΛΗ N- χ ΜΟΝΤΕΛΟΥ M3-200

Ακολουθως παρατίθενται τα διαγράμματα απόστασης του οριζόντιου ουδετέρου άξονα από τον πυθμένα N , ως προς την καμπυλότητα χ .



Σχήμα 2.41- Διάγραμμα απόστασης του οριζόντιου ουδετέρου άξονα από τον πυθμένα N , ως προς την καμπυλότητα χ .

Η κλίση της καμπύλης γίνεται εντονότερη μετά την καμπυλότητα κατά την οποία πραγματοποιείται η πρώτη πλαστικοποίηση των δομικών στοιχείων της κατασκευής.

2.10 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την διαδικασία υπολογισμού της μέγιστης καμπτικής ροπής με την μέθοδο των κανονισμών *C.S.R.* συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Η αφαίρεση του ίδιου ποσοστού (50%) πάχους μέγιστης διάβρωσης από όλα τα δομικά στοιχεία χωρίς συνεκτίμηση της θέσης του καθενός από αυτά εκτιμάται ότι οδηγεί στη διαμόρφωση συντηρητικών αποτελεσμάτων.
- Η μη γραμμικότητα της σχέσης σ-ε των δομικών στοιχείων τύπου διαμήκους ενισχυτικού επιβάλλει μετατόπιση του ουδετέρου άξονα από το πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας.
- Στην περίπτωση ύπαρξης διαφορετικών ορίων διαρροής μεταξύ των τμημάτων ενός δομικού στοιχείου δεν υπάρχει στον κανονισμό σαφής οδηγία που να καθορίζει το ισοδύναμο όριο διαρροής.
- Η ύπαρξη 3 δομικών στοιχείων (σε σύνολο 77) με διαφορετικά όρια διαρροής (315-355 N/mm²) στα τμήματά τους, επηρέασε ασήμαντα (0.7%) την μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής του bulk carrier
- Αντιθέτως, στο μοντέλο M3-200 όπου 8 από τα 12 δομικά στοιχεία έχουν διαφορές στο όριο διαρροής των τμημάτων τους (183-310 N/mm²) σημειώνεται διαφορά 25% μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης καμπτικής ροπής.
- Η ελαστο-πλαστική κατάρρευση των δομικών στοιχείων του καταστρώματος του bulk carrier αρχίζει σε τιμή καμπτικής ροπής 3% κάτω από τη μέγιστη και ολοκληρώνεται με τη μέγιστη καμπτική ροπή.
- Η κλίση της καμπύλης θέσης του ουδετέρου μεγαλώνει απότομα μετά την πλαστικοποίηση του πρώτου δομικού στοιχείου.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η προσομοίωση της κάμψης του πειραματικού μοντέλου M3-200 και του παράλληλου τμήματος ενός πλοίου μεταφοράς χύδην φορτίου με πεπερασμένα στοιχεία καθώς και ο υπολογισμός της μέγιστης αντοχής τους. Το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Algor* επελέγη με σκοπό τη διερεύνηση των δυνατοτήτων του.

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Η ανάγκη να λυθούν και πιο σύνθετα προβλήματα οδήγησε στο να αναπτυχθούν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (*Finite Elements Method – F.E.M.*).

Ως μέθοδος είναι αρκετά παλιά, αναπτύχθηκε στην δεκαετία του 50 και αποτελεί εξέλιξη των μητρικών μεθόδων. Η μέθοδος χρησιμοποιείται ευρύτατα για την ανάλυση κατασκευών. Ακολουθείται η λογική της διακριτοποίησης ενός συνεχούς μέσου σε ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων που συνδέονται με κόμβους στους οποίους απαιτείται να ισχύει ισορροπία δυνάμεων.

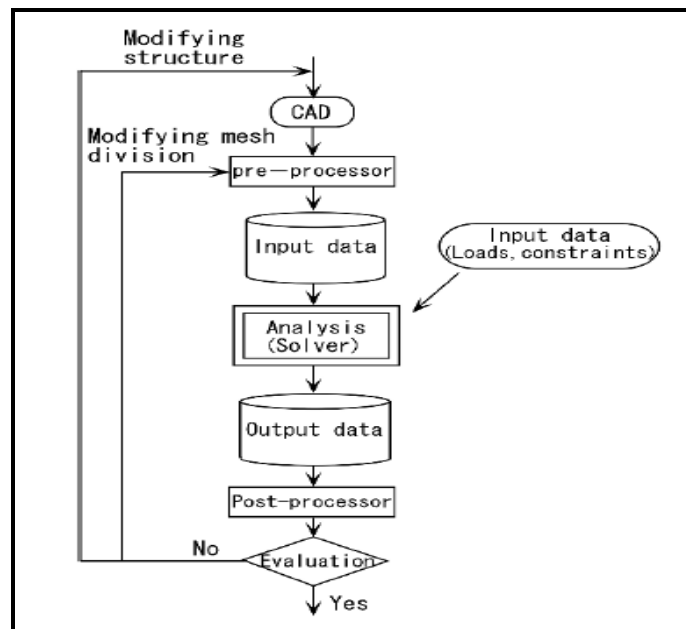
Παρά το ότι η μέθοδος F.E. είναι προσεγγιστική, μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα.

Βασικό μειονέκτημά της μεθόδου είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Η εξέλιξη στους υπολογιστές άλλαξε το μέγεθος των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν, τις μεθοδολογίες που ακολουθούνται και το εύρος και την πολυπλοκότητα των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν.

Ενας υπολογιστής της δεκαετίας του 70 μπορούσε να λύσει προβλήματα της τάξης των 90-120 κόμβων με 30-40 στοιχεία. Ενας σύγχρονος υπολογιστής μπορεί να λύσει εύκολα προβλήματα της τάξης των $50-60 \times 10^6$ κόμβων με $8-10 \times 10^6$ στοιχεία. Ενώ παλιότερα τα προβλήματα λύνονταν στις δύο διαστάσεις κάνοντας απλοποιητικές παραδοχές, τώρα επιλύονται κατευθείαν στις τρεις διαστάσεις. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πιο πολύπλοκα μοντέλα για την περιγραφή των υλικών. Ενώ αρχικά η μέθοδος επίλυε προβλήματα θεωρώντας τα υλικά με γραμμική συμπεριφορά, τώρα μπορούν να εισαχθούν η πλαστικότητα, οι κατασκευαστικές ατέλειες, η ρεολογία, κ.α.

3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων-F.E.M. είναι μια από τις αριθμητικές μεθόδους ανάλυσης που χρησιμοποιεί η υπολογιστική μηχανική για να προσομοιώσει τα φυσικά προβλήματα.



Σχήμα 3.1-Λογικό διάγραμμα ανάλυσης F.E.M.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απαιτούνται τα εξής στάδια:

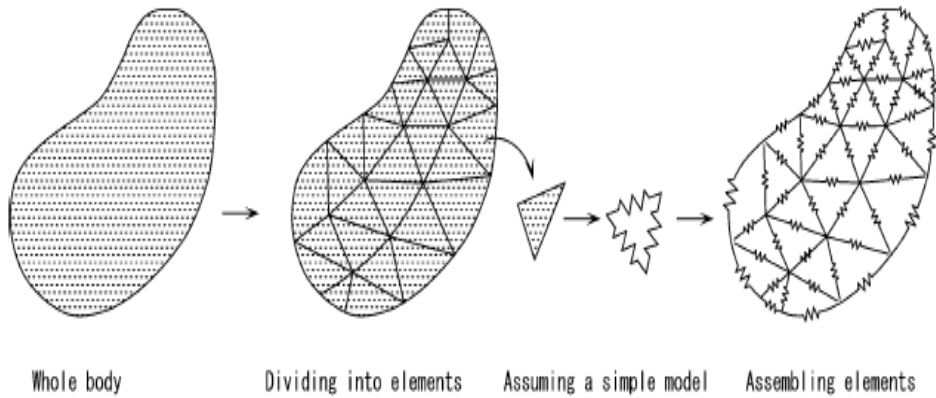
- Εισάγεται η γεωμετρία της κατασκευής σε ένα πρόγραμμα *C.A.D.* και δημιουργείται το τρισδιάστατο μοντέλο.
- Χωρίζεται το μοντέλο σε πεπερασμένα στοιχεία και αφού ετοιμαστεί το πλέγμα επιλέγεται το είδος της επίλυσης και εισάγονται τα επιπλέον δεδομένα που απαιτούνται. Αυτή η διαδικασία γίνεται με προγράμματα που αποκαλούνται *pre-processor*.
- Όταν ετοιμαστούν τα δεδομένα για επίλυση, εισάγονται σε ένα πρόγραμμα το οποίο θα κάνει την επίλυση του προβλήματος. Τέτοιου είδους προγράμματα λέγονται *solver* και χρησιμοποιούν για τις επιλύσεις αριθμητικές μεθόδους.
- Όταν τελειώσει η επίλυση πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα πρόγραμμα, που αποκαλείται *post-processor*, για να μπορέσει ο μελετητής να δει και να αξιολογήσει τα αποτελέσματα.

3.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια μέθοδος της *αριθμητικής ανάλυσης* η οποία αποτελεί φυσική προσέγγιση του προβλήματος με την *διαμέριση* του φυσικού χώρου σε επιμέρους διακριτά πεπερασμένα στοιχεία, στα οποία ορίζονται οι εξισώσεις που έχουν *ακριβή λύση*.

Επειδή δε τα προβλήματα της μηχανικής των παραμορφωσίμων (όπως και όλα τα φυσικά προβλήματα του συνεχούς μέσου) περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, μπορούμε να τα επιλύσουμε με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων.

Οι διαφορικές εξισώσεις για τα προβλήματα της μηχανικής των παραμορφωσίμων προκύπτουν από διάφορες άλλες εξισώσεις όπως οι *σχέσεις μετατοπίσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων* (2.1),(2.2), οι *εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων* (2.3) καθώς και από τις *εξισώσεις ισορροπίας* στο χώρο (2.4).



Σχήμα 3.2- Σκεπτικό μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Όπως κάθε πρόβλημα που εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις έτσι και εδώ υπάρχουν και *συνοριακές συνθήκες*, όπως φυσικές συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις κ.λπ) και βασικές συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες *Dirichlet* (2.5) και *Neumann* (2.6) (δεσμεύσεις, στηρίξεις κ.λπ.). Παραθέτουμε ορισμένες βασικές διαφορικές σχέσεις:

Σύνδεση *ανηγμένων παραμορφώσεων* ϵ – *μετατοπίσεων* u, v, w κατά x, y, z αντίστοιχα:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.2)$$

Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial j} \quad (2.3)$$

όπου τα i, j είναι x, y ή y, z ή z, x και $Oxyz$ τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} + F_i = 0 \quad (2.4)$$

όπου $i = x, y, z$ και F_i είναι οι μαζικές δυνάμεις.

Συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma_{ij} n_j = G_i \quad (2.5)$$

όπου v είναι η κλίση στο σύνορο και G_i η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στο σύνορο. Ακόμα:

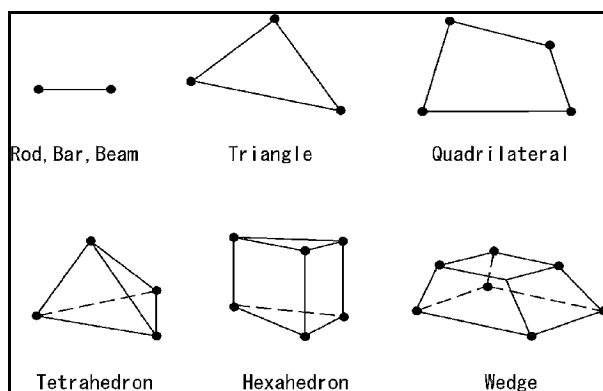
$$\underline{u} = \underline{F}_i \quad (2.6)$$

που σημαίνει ότι το *διάνυσμα μετατοπίσεων* είναι ορισμένο σε περιοχές του σώματος. Για να επιτύχουμε την αριθμητική λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε την *αρχή των δυνατών έργων*. Αν σ_{ij} και ϵ_{ij} είναι αντίστοιχα οι *τανυστές των τάσεων* και των *ανηγμένων παραμορφώσεων* ενώ P_i και δ_i είναι τα *φορτία* και οι *δυνατές μετακινήσεις*, πρέπει το έργο που προκαλείται από τα φορτία να ισούται με το δυνατό έργο των παραμορφώσεων δηλαδή:

$$\sum P_i \delta_i = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2.7)$$

Για να καταστρωθεί το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει το πεδίο του προβλήματος, το οποίο καταλαμβάνει συνήθως κάποιο πεπερασμένο όγκο στον χώρο, να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων απλούστερου σχήματος.

Κάθε πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από κάποιον αριθμό κόμβων (όπως 4 κόμβοι για ένα επίπεδο ορθογωνικό στοιχείο) όπου κάθε κόμβος έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο να δοθούν τιμές σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας.



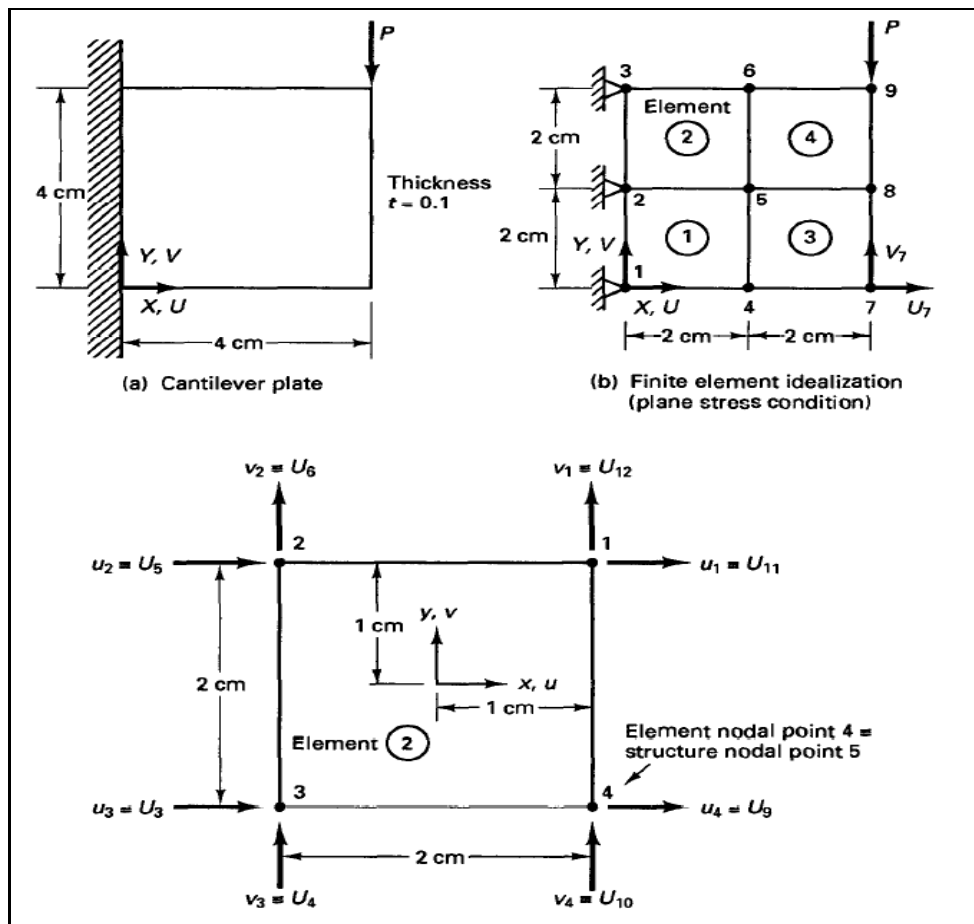
Σχήμα 3.3 -Στοιχεία F.E.M.

Τα διάφορα στοιχεία συναρμολογούνται σε κάποιους κοινούς βαθμούς ελευθερίας (ή κόμβους). Έτσι σε ένα κόμβο μπορούν να συνδέονται δύο, τρία ή και περισσότερα στοιχεία. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$[K].u = F \quad (2.8)$$

Όπου u διάνυσμα διάστασης n ίσης με τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος, όπου κάποιοι από αυτούς είναι δεσμευμένοι και αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες *Dirichlet*. Το F είναι διάνυσμα διάστασης n και περιέχει τις συνοριακές συνθήκες των φορτίσεων δηλαδή οι δυνάμεις στους κόμβους, οι πιέσεις πάνω στις πλευρές των στοιχείων καθώς και οι μαζικές δυνάμεις (όπως το ίδιο βάρος).

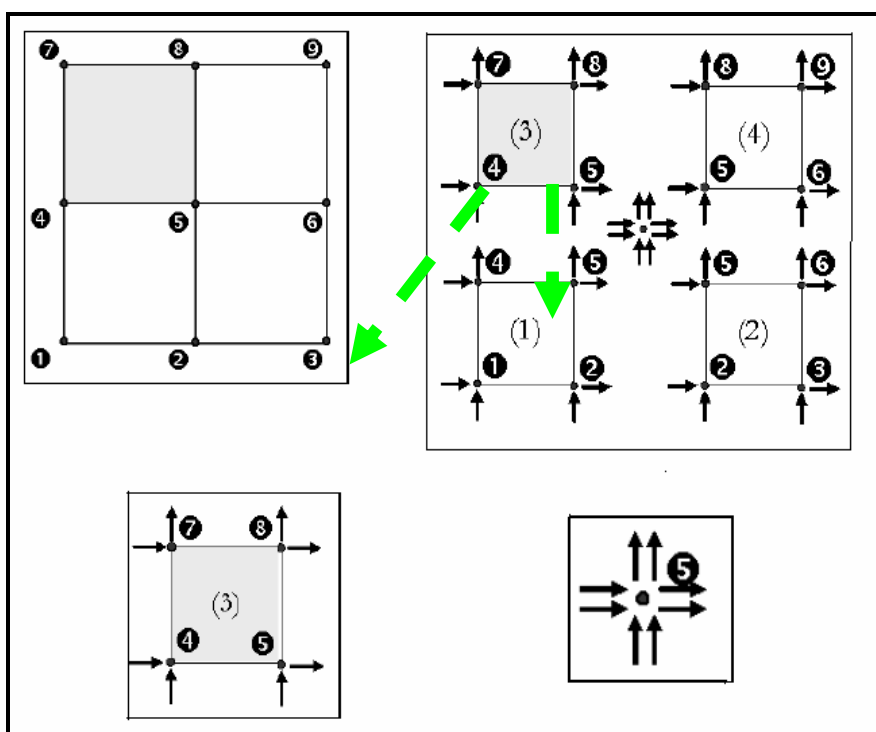
Ο πίνακας $[K]$ έχει διαστάσεις $n \times n$ και ονομάζεται πίνακας δυσκαμψίας. Στον πίνακα αυτόν περιέχεται η γεωμετρία του προβλήματος καθώς και οι φυσικές ιδιότητες των υλικών. Ονομάζεται δε πίνακας δυσκαμψίας διότι δείχνει την δυσκαμψία του συστήματος να αντιδράσει σε κάποια επιβολή εξωτερικής φόρτισης ή αλλιώς δείχνει την απόκριση του συστήματος στα εξωτερικά αίτια.



Σχήμα 3.4- Διαμέριση ενός φυσικού προβλήματος σε πεπερασμένα στοιχεία και διακριτές στηρίξεις/φορτία

Για να γίνει η επίλυση του προβλήματος επιλύεται το σύστημα εξισώσεων $[K].u=F$ και έτσι παίρνουμε τις τιμές για τα u . Έπειτα με κατάλληλες αναγωγές μπορούμε από τις μετατοπίσεις u να εξαχθούν και άλλα παράγωγα μεγέθη όπως οι τάσεις, οι παραμορφώσεις κ.λπ.

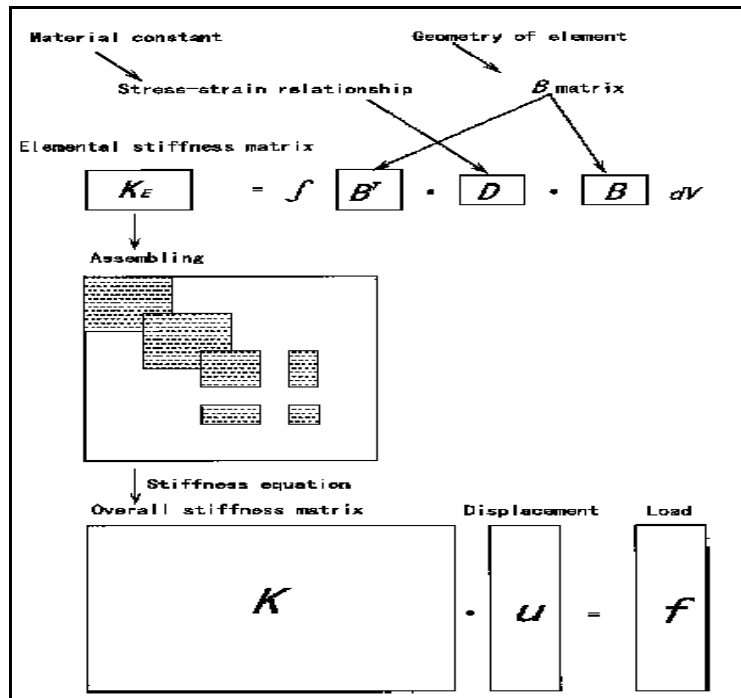
Στο σχήμα 3.4 φαίνεται η κατάστρωση ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία. Μπορούμε να δούμε το πεδίο του προβλήματος, την κατάτμηση σε πεπερασμένα στοιχεία που συναρμολογούνται σε κόμβους, τις συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις/δεσμεύσεις) καθώς και ένα απομονωμένο στοιχείο με τους τοπικούς και καθολικούς βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα 3.5-Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία εξασφαλίζει ισορροπία κόμβων, στοιχείων και ολόκληρου του σώματος

3.2.2 ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ

Για να σχηματιστεί ο πίνακας $[K]$ γίνεται μια συναρμολόγηση πολλών επιμέρους πινάκων $[K_i]$ κάθε στοιχείου (βλέπε σχήμα 3.6). Για να σχηματιστούν οι επιμέρους πίνακες $[K_i]$ χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο των σημείων Gauss.

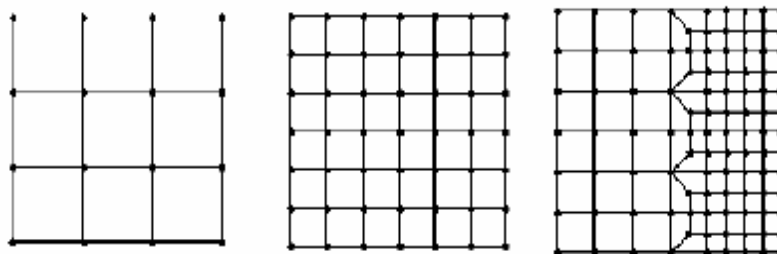


Σχήμα 3.6-Κατάστρωση βασικής εξίσωσης F.E.M.

Για να είναι εύκολοι οι υπολογισμοί για την κατάστρωση των εξισώσεων χρησιμοποιούμε *πολυώνυμα μορφής (shape functions)*, τα οποία είναι εύκολα ολοκληρώσιμα/ παραγωγίσιμα.

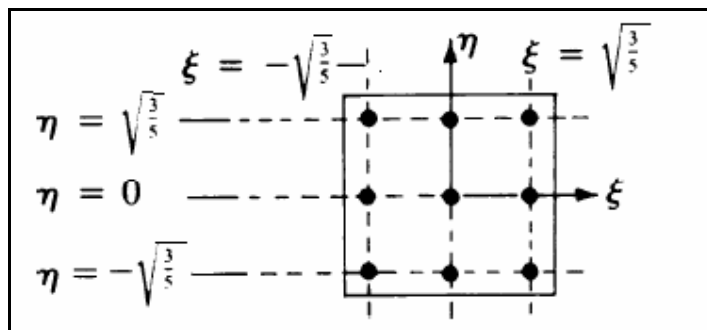
Ανάλογα με τον *βαθμό των πολυωνύμων*, λαμβάνουμε και ανάλογη *τάξη* στα στοιχεία. Έτσι χρησιμοποιώντας απλά πολυώνυμα πρώτου βαθμού, στα στερεά προκύπτουν κυβικά στοιχεία 8 κόμβων. Αν χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε το πεδίο του στοιχείου πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, τότε προκύπτουν στοιχεία ανώτερης τάξης όπως κυβικά στοιχεία 20 κόμβων.

Όσο μεγαλύτερης τάξης είναι τα στοιχεία, τόσο καλύτερη ακρίβεια έχουμε στην επίλυση, ακρίβεια που μπορούμε να αυξήσουμε και με την αύξηση πύκνωσης του πλέγματος των περασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.7-Πύκνωση πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων

Τα πολυώνυμα μορφής είναι συνήθως εκφρασμένα σε ένα τοπικό σύστημα αξόνων (ξ, η, ζ) το οποίο έχει κέντρο στο εσωτερικό του στοιχείου.



Σχήμα 3.8-Σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε επίπεδο στοιχείο

Οι τιμές των συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα κυμαίνονται μεταξύ -1 και 1. Αυτά τα πολυώνυμα μορφής παραγωγίζονται εύκολα ως προς ξ, η, ζ σχηματίζοντας τα μητρώα $[B_i]$ με τις παραγώγους τους.

Στο σχήμα 3.8 βλέπουμε τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss για ένα δυσδιάστατο στοιχείο. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων έχουμε 3 τέτοια διατεταγμένα επίπεδα. Την ακρίβεια ολοκλήρωσης με την μέθοδο Gauss μπορούμε να την αυξήσουμε αυξάνοντας τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης. Για προβλήματα τριών διαστάσεων ένας ικανοποιητικός αριθμός σημείων είναι 27 διατάσσοντας τα σημεία σε 3 στήλες, 3 γραμμές σε 3 επίπεδα ώστε τα σημεία να ισαπέχουν στις 3 κάθετες διευθύνσεις κατά $\sqrt{3/5}$.

Ο τελικός τύπος για τον σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου $[K_e]$ είναι:

$$K_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2.9)$$

Με τη βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης ο τύπος γράφεται με τη μορφή αθροίσματος διακριτών όρων:

$$K_e = \sum_{i=1}^n H_i [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] |J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)| \quad (2.10)$$

Οι H_i είναι οι συντελεστές της ολοκλήρωσης Gauss σε n διακριτά σημεία με συντεταγμένες (ξ_i, ζ_i, η_i) , ενώ η J είναι η Ιακωβιανή μετασχηματισμού από το καθολικό

σύστημα συντεταγμένων X, Y, Z στο ξ, η, ζ . Το $[D]$ είναι ένα μητρώο που υπολογίζεται από τις ελαστικές σταθερές E, ν (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson αντίστοιχα).

Μετά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων $[K] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$ προκύπτουν οι τιμές των \mathbf{u} , που στην περίπτωση της ανάλυσης μας είναι μετατοπίσεις στους βαθμούς ελευθερίας (μετατοπίσεις x, y, z στους κόμβους).

Χρήσιμα μεγέθη μετά την επίλυση δεν είναι μόνο οι μετατοπίσεις αλλά και οι τάσεις και διάφορα άλλα παράγωγα μεγέθη. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε με αριθμητικές παραγωγίσεις του πεδίου των μετατοπίσεων, να υπολογίσουμε τις ανηγμένες παραμορφώσεις καθώς και τις τάσεις στο πεδίο του προβλήματος.

Ενώ η κατανομή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι συνεχής, τα παράγωγα μεγέθη μπορεί να μην έχουν συνέχεια, ανάλογα με την τάξη των στοιχείων.

Αν τα πολυώνυμα που περιγράφουν τα στοιχεία είναι α βαθμού, τότε οι παράγωγοι είναι σταθεροί αριθμοί και η κατανομή των παραγώγων μεγεθών (π.χ. τάση) για κάποιο στοιχείο είναι σταθερή. Έτσι βλέπουμε ότι με την αύξηση της τάξης των πολυωνύμων των στοιχείων, βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

3.2.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η ακρίβεια της ανάλυσης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι συνάρτηση της ικανότητας των στοιχείων να προσομοιώνουν την πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής καθώς επίσης και της πυκνότητας του πλέγματος. Συνήθως γίνεται χρήση στοιχείων χαμηλής τάξης, για να υπάρχει ευχερέστερος έλεγχος των αποτελεσμάτων, σε συνδυασμό με πυκνό πλέγμα. Σε περιπτώσεις με μεγάλες διακυμάνσεις του πεδίου των τάσεων, απαιτείται συνδυασμός στοιχείων ανώτερης τάξεως και πυκνού πλέγματος. Έτσι κατά την κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας δημιουργούνται αλγεβρικά συστήματα με μεγάλο πλήθος αγνώστων τα οποία απαιτούν κατάλληλες μεθόδους επίλυσης και τεχνικές διαχείρισης μητρώων για μείωση της υπολογιστικής μνήμης και του χρόνου επιλύσεως από τον υπολογιστή.

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων διακρίνουμε τέσσερις οικογένειες μεθόδων επίλυσης οι οποίες αναφέρονται στα εξής προβλήματα:

- Γραμμικά προβλήματα
- Μη γραμμικά προβλήματα

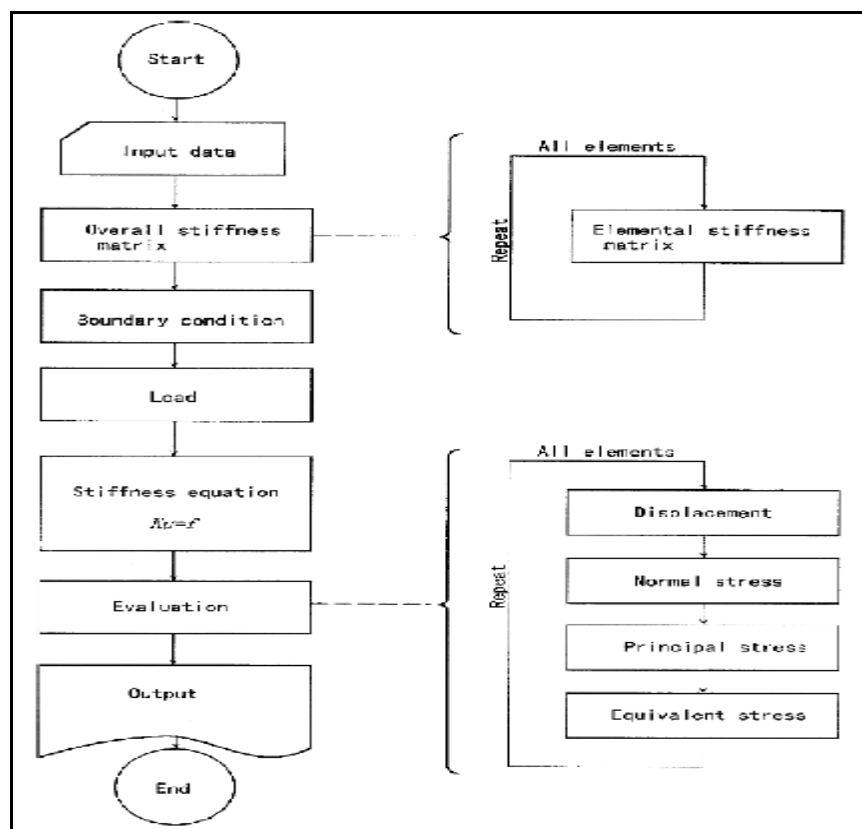
- Προβλήματα ιδιοτιμών
- Δυναμικά προβλήματα

Η επίλυση των γραμμικών προβλημάτων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο όλων των μεθόδων διότι εκτός του ότι αποτελεί το πιο χρονοβόρο τμήμα της ανάλυσης των φορέων (μπορεί να φτάσει και το 95% του χρόνου σε τρισδιάστατα προβλήματα), απαιτείται και στις άλλες τρεις κατηγορίες κατά την επίλυση υποπροβλημάτων τα οποία διατυπώνονται με τη μορφή γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας.

Οι μέθοδοι επίλυσης των γραμμικών προβλημάτων διακρίνονται σε άμεσες και σε επαναληπτικές.

Άμεση μέθοδος για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων $[K] \cdot u = F$ ορίζεται κάθε μέθοδος η οποία αν δεν λάβουμε υπόψη τα αριθμητικά λάθη στρογγύλευσης, δίνει λύση μετά προβλέψιμο αριθμό στοιχειωδών υπολογιστικών πράξεων (τέσσερις βασικές πράξεις και η εύρεση τετραγωνικής ρίζας).

Οι πιο διαδεδομένες άμεσοι μέθοδοι είναι η απαλοιφή Gauss και οι παραγόμενες από αυτή μέθοδοι παραγοντοποίησης κατά Choleski και Crout.



Σχήμα 3.9-Διάγραμμα ροής προγράμματος F.E.M.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι αναζητούν την λύση \mathbf{u} του γραμμικού συστήματος μέσω διαδοχικών διορθώσεων μιας αρχικής εκτίμησης \mathbf{u}^0

Εν γένει διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- *Στάσιμες επαναληπτικές μεθόδους (stationary)*
- *Μεθόδους διανυσματικής κλίσης (gradient methods)*

Στις *στάσιμες μεθόδους* το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε επανάληψη προκύπτει από το σφάλμα της προηγούμενης επανάληψης μέσω ενός σταθερού μητρώου. Κυριότερες επαναληπτικές μέθοδοι είναι η μέθοδος *Jacobi*, η μέθοδος *Gauss-Seidel*, η μέθοδος *διαδοχικής υπερχαλάρωσης* και η μέθοδος *συμμετρικής διαδοχικής υπερχαλάρωσης*.

Στις *μεθόδους διανυσματικής κλίσης* η επίλυση ενός συστήματος n γραμμικών εξισώσεων θεωρείται ως η ισοδύναμη διαδικασία εύρεσης του σημείου ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης ορισμένης στο n -διάστατο χώρο. Η προσεγγιστική λύση κάθε επανάληψης χρησιμοποιείται για την εύρεση της επόμενης προσεγγιστικής λύσης η οποία αντιστοιχεί ταυτόχρονα σε σημείο όπου η θεωρούμενη συνάρτηση έχει μικρότερη τιμή. Στις περισσότερες από τις *μεθόδους διανυσματικής κλίσης* τα διαδοχικά διανύσματα σφάλματος δεν μπορούν να προκύψουν μέσω κάποιου σταθερού μητρώου και για αυτό διαφοροποιούνται από τις *στάσιμες μεθόδους*. Κυριότερες μέθοδοι *διανυσματικής κλίσης* είναι η μέθοδος της *απότομης καθόδου (steepest descent method)* και η μέθοδος *συζυγών διανυσματικών κλίσεων (conjugate gradients method)*.

Στα παραρτήματα ΣΤ και Η περιλαμβάνονται για λόγους πληρότητας της παρούσας εργασίας αναλυτικά όλες οι ανωτέρω μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

3.2.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με την επίλυση με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ισχύουν για γραμμικά προβλήματα (προβλήματα ελαστικότητας / μικρών παραμορφώσεων) όπου γίνεται μια απλή επίλυση της εξίσωσης $[\mathbf{K}]\cdot\mathbf{u}=\mathbf{F}$, εφόσον ο $[\mathbf{K}]$ είναι γραμμικός τελεστής και κάθε αύξηση της \mathbf{F} συνεπάγεται μια γραμμική αύξηση της \mathbf{u} .

Σε *μη γραμμικά προβλήματα* όπου δεν υπάρχει αυτή η γραμμική σχέση, εφαρμόζουμε βηματική επίλυση/ανακυκλώσεις.

Σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα η σχέση $[\mathbf{K}]\cdot\mathbf{u}=\mathbf{F}$ μετασχηματίζεται σε

$$[K].du=dF$$

όπου το $[K]$ πια δεν είναι γραμμικός τελεστής αλλά είναι μεταβλητός (μη γραμμικός) τελεστής που εξαρτάται από την ιστορία του προβλήματος (π.χ. φορτίσεις-αποφορτίσεις κ.λ.π.).

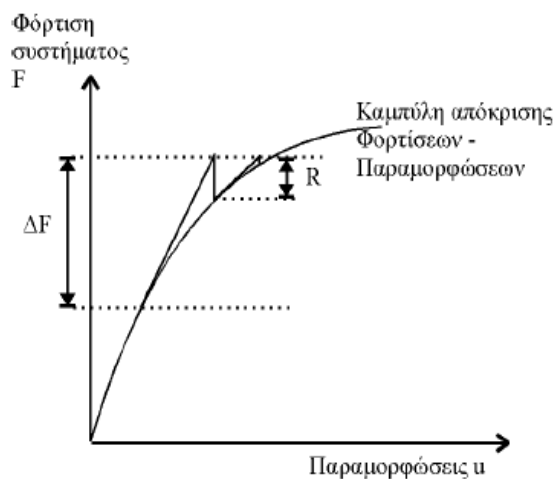
Πρακτικά χρησιμοποιείται η σχέση $[K].\Delta u=\Delta F$ διότι χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε πεπερασμένα βήματα και όχι σε απειροστά (π.χ. βηματική αύξηση των φορτίων).

Όσο περισσότερα είναι τα βήματα στα οποία υποδιαιρούμε το πρόβλημα τόσο καλύτερη ακρίβεια παίρνουμε στα αποτελέσματα, όμως τα βήματα που απαιτούνται για καλή ακρίβεια είναι τόσο πολλά που οι υπολογισμοί γίνονται ασύμφοροι.

Αυτή είναι η μέθοδος της απευθείας ολοκλήρωσης, όμως υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που μπορούν να δώσουν καλύτερη ακρίβεια με λιγότερους υπολογισμούς.

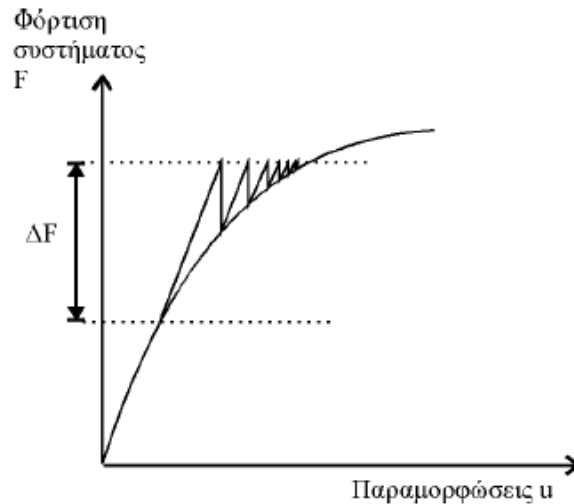
Έτσι, κάνοντας ένα βήμα με κάποια αύξηση ΔF , υπολογίζουμε το Δu από τη σχέση $[K].\Delta u=\Delta F$. Επειδή η σχέση των Δu , ΔF όπως αναφέραμε δεν είναι γραμμική, το Δu που υπολογίζουμε έχει σφάλμα. Έτσι αν πολλαπλασιάσουμε τον τελεστή $[K]$ με το Δu δεν λαμβάνουμε το αρχικό ΔF αλλά ένα Δf , ώστε να υπάρχει ένα έλλειμμα ισορροπίας $R=\Delta F-\Delta f$. Αυτή τη φορά επιλύουμε το πρόβλημα με φορτίο εισόδου το R . Μετά την επίλυση υπολογίζουμε ένα νέο R το οποίο το ξαναχρησιμοποιούμε ως νέο φορτίο κ.λ.π. ώσπου το R να γίνει αρκετά μικρό (σύγκλιση). Την διαδικασία αυτή μπορούμε να τη δούμε στο σχήμα 3.10 και ονομάζεται σύγκλιση *Newton-Raphson*.

Υπάρχουν και τροποποιημένες μέθοδοι *Newton-Raphson* οι οποίες δεν υπολογίζουν κάθε φορά ένα νέο $[K]$ αλλά χρησιμοποιούν το αρχικό (βλέπε σχήμα 3.11).



Σχήμα 3.10-Σύγκλιση με τη μέθοδο *Newton-Raphson*

Έτσι, γίνεται οικονομία υπολογισμών εφόσον ο υπολογισμός και η αντιστροφή του $[K]$ είναι πολύ χρονοβόρες διαδικασίες, αλλά χρειάζονται πολύ περισσότερες ανακυκλώσεις.



Σχήμα 3.11-Τροποποιημένη Newton-Raphson με σταθερή κλίση

Μη γραμμική συμπεριφορά έχουμε σε διάφορες περιπτώσεις. Ειδική περίπτωση μη γραμμικής συμπεριφοράς είναι τα προβλήματα που έχουν μεγάλες παραμορφώσεις ώστε η μεταβαλλόμενη γεωμετρία να επηρεάζει το πρόβλημα καθώς εξελίσσεται η φόρτιση.

Ο πιο συνηθισμένος τύπος μη γραμμικής συμπεριφοράς είναι η πλαστικότητα, όπου έχουμε μη γραμμική εξάρτηση τάσεων - παραμορφώσεων στο υλικό του προβλήματος σε αντίθεση με τα προβλήματα ελαστικότητας όπου θεωρείται γραμμική σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων (νόμος του Hook).

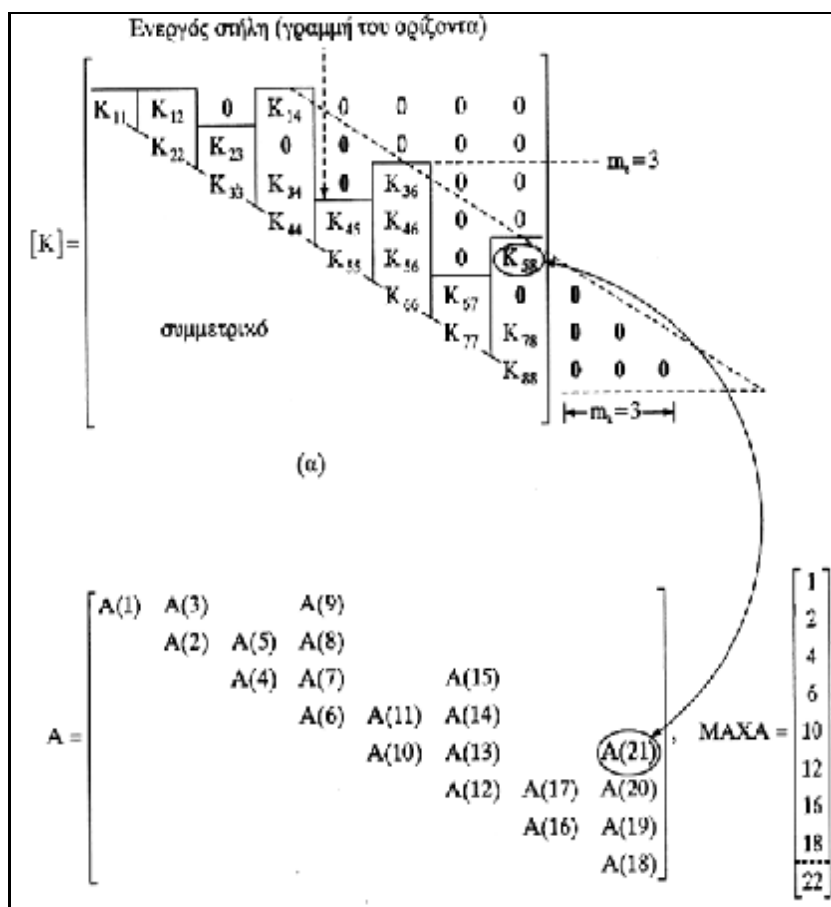
Σε όλες τις περιπτώσεις μη γραμμικής συμπεριφοράς όπως αναφέραμε το $[K]$ μεταβάλλεται ανάλογα με την κατάσταση του υλικού και τις παραμορφώσεις που έχουν εκδηλωθεί.

3.2.5 ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ ΜΗΤΡΩΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΟΥΡΑΝΟΓΡΑΜΜΗΣ (SKYLINE ALGORITHM)

Γνωρίζοντας ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό και ότι πολλά από τα στοιχεία του είναι μηδενικά, είναι σαφές ότι η απλή αποθήκευσή του σε δυσδιάστατες μεταβλητές $A(i, j)$ καθώς και η διεξαγωγή των υπολογισμών *τριγωνοποίησης* του για

την επίλυση του συστήματος με όλα τα στοιχεία του, εμπεριέχει μεγάλο υπολογιστικό φόρτο ο οποίος μπορεί να αποφευχθεί.

Ενας κλασικός τρόπος μείωσης των υπολογιστικών και αποθηκευτικών απαιτήσεων είναι με τη διαχείριση του *μητρώου δυσκαμψίας* $[K]$ με τον αλγόριθμο *ουρανογραμμής* (*skyline*). Σύμφωνα με αυτόν, αποθηκεύονται τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την *ουρανογραμμή* του μητρώου $[K]$ (βλέπε σχήμα 3.9) σε ένα μητρώο στήλη. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο γεγονός πως το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό και έχει μια δομή η οποία χαρακτηρίζεται από τη βέλτιστη διάταξη των όρων του περί την κύρια διαγώνιο. Η απόσταση από την κύρια διαγώνιο του πιο απομακρυσμένου όρου του μητρώου εξαρτάται από τη μέγιστη διαφορά m_k της καθολικής αρίθμησης των βαθμών ελευθερίας των κόμβων όλων των στοιχείων. Η απόσταση αυτή καθορίζει και το *εύρος της ζώνης* εντός της οποίας βρίσκονται οι μη μηδενικοί όροι του μητρώου, δηλαδή για $j > i + m_k$ παρατηρούμε πως τα στοιχεία είναι μηδενικά. Η τιμή m_k είναι γνωστή ως *εύρος ημιζώνης*.



Σχήμα 3.12-Αλγόριθμος ουρανογραμμής-skyline

Θεωρώντας ως $m_i, i = 1, \dots, n$ τον αριθμό της γραμμής στην οποία έχουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο, το m_i ορίζει την ουρανογραμμή του μητρώου ενώ οι τιμές $(i - m_i)$ ορίζουν τα ύψη των στηλών. Ακόμα το εύρος ημιζώνης του μητρώου δυσκαμψίας m_k ισούται με το $\max \{i - m_i\}, i = 1, \dots, n$, δηλαδή με τη μέγιστη διαφορά καθολικών βαθμών ελευθερίας που αναφέρονται σε οποιοδήποτε στοιχείο. Τα ύψη των στηλών διαφοροποιούνται για κάθε στήλη i , και είναι πολύ σημαντικό τα μηδενικά στοιχεία έξω από την ουρανογραμμή να μη συμπεριληφθούν στις εξισώσεις ισορροπίας. Τα μηδενικά στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την ουρανογραμμή αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται σε όλες τις πράξεις, δεδομένου ότι τις περισσότερες φορές γίνονται μη μηδενικά στοιχεία κατά τη μετάπτωση του μητρώου δυσκαμψίας σε άνω τριγωνική μορφή.

Με τα ύψη των στηλών του μητρώου δυσκαμψίας μπορούμε να αποθηκεύσουμε όλα τα στοιχεία κάτω από την ουρανογραμμή του $[K]$ σε ένα διάνυσμα A : Οι ενεργές στήλες συμπεριλαμβανομένου και των διαγώνιων στοιχείων αποθηκεύονται συνεχόμενα στο A . Επίσης ορίζουμε τον πίνακα $MAXA$, στον οποίο αποθηκεύουμε τις διευθύνσεις των διαγώνιων στοιχείων του K στο A δηλαδή το i -οστό διαγώνιο στοιχείο του K , το K_{ii} , στο A είναι $MAXA(I)$.

Σημειώνεται ότι το $MAXA(I)$ είναι ίσο με το άθροισμα των υψών στήλης μέχρι την $(i - 1)$ -οστή στήλη συν I . Συνεπώς ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων στην i -οστή στήλη του K είναι:

$$MAXA(I+1) - MAXA(I)$$

και οι διευθύνσεις των στοιχείων είναι

$$MAXA(I), MAXA(I)+1, MAXA(I)+2, MAXA(I+1)-1$$

Ο συνδυασμός των μητρώων A και $MAXA$ μας δίνει έναν εύκολο μηχανισμό αναζήτησης και εύρεσης των στοιχείων του K .

3.2.6 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΜΗΤΡΩΩΝ SPARSE

Ενας εναλλακτικός τρόπος αποθήκευσης του μητρώου στιβαρότητας είναι με χρήση του αλγόριθμου *sparse*. Στην περίπτωση αυτή ένα συμμετρικό μητρώο A (διαστάσεων $n \times n$) ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής

$$A \cdot X = B$$

μπορεί να αποθηκευτεί με τη χρήση ενός διανύσματος πραγματικών a (διάστασης m) και δύο πρόσθετων διανυσμάτων ακεραίων αριθμών I_{row} και I_{col} (επίσης διάστασης m). Το διάνυσμα a περιέχει όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του μητρώου A και τα δύο επιπρόσθετα διανύσματα I_{row} και I_{col} περιέχουν την θέση (αριθμός γραμμής και στήλης αντίστοιχα) ενός στοιχείου k του διανύσματος a μέσα στο μητρώο A . Είναι σαφές ότι λόγω συμμετρίας απαιτείται να αποθηκεύσουμε μόνο τα στοιχεία του κάτω τριγώνου που σχηματίζεται από τη διαγώνιο του μητρώου A .

Είναι προφανές ότι ισχύει:

$$a_k = A_{ij} \text{ με } i = I_{row,k} \text{ και } j = I_{col,k}$$

όπου m το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του κάτω (ή και του άνω λόγω συμμετρίας) τριγωνικού τμήματος του μητρώου A .

3.3 ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ALGOR

Οι βασικές αρχές πεπερασμένων στοιχείων, οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας καθώς και οι τρόποι διαχείρισης και αποθήκευσης μητρώων που αναπτυχθήκαν στις παραπάνω παραγράφους βρίσκουν άμεση εφαρμογή στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ALGOR V.16.

Τα βήματα που περιγράφουν την χρήση του κώδικα είναι:

1. Δημιουργία μοντέλου
2. Καθορισμός συστήματος μονάδων
3. Καθορισμός παραμέτρων ανάλυσης
4. Καθορισμός τύπου στοιχείου
5. Επιβολή φορτίων και περιορισμών
6. Σύνθεση καθολικού μητρώου δυσκαμψίας
7. Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων
8. Υπολογισμός αποτελεσμάτων
9. Ανασκόπηση των αποτελεσμάτων

Τα ανωτέρω βήματα χωρίζονται σε τρία στάδια:

- Μοντελοποίηση: Βήματα 1-5
- Ανάλυση: Βήματα 6-8 (εκτελούνται αυτομάτως από το ALGOR)
- Υπολογισμός αποτελεσμάτων: Βήματα 9-10

Ο κώδικας χρησιμοποιεί τόσο άμεσες όσο και επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης. Συγκεκριμένα:

- Γραμμική ανάλυση:
 - Αμεση Sparse
 - Αμεση Banded
 - Αμεση Skyline
 - Επαναληπτική Iterative (A.M.G.)

- Μη γραμμική ανάλυση:
 - Πλήρης μέθοδος Newton-Raphson
 - Τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson
 - Συνδυασμός πλήρους και τροποποιημένης μεθόδου Newton-Raphson
 - Πλήρης μέθοδος Newton-Raphson με αναζήτηση γραμμής
 - Τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson με αναζήτηση γραμμής
 - Συνδυασμός πλήρους και τροποποιημένης μεθόδου Newton-Raphson με αναζήτηση γραμμής

Ο κώδικας επιλέγει αυτόματα τη μέθοδο επίλυσης με *προεπιλεγμένες ρυθμίσεις παραμέτρων (default)*, ενώ παράλληλα επιτρέπει στο χρήστη επιλογή και ρύθμιση αυτών κατά το δounόν. Αντίθετα από τα γραμμικά προβλήματα, στη μη γραμμική ανάλυση, δεν υπάρχει κάποια μέθοδος επίλυσης που να είναι καλή για όλα τα είδη προβλημάτων.

Η επιλογή της επαναληπτικής μεθόδου μπορεί να επιλεχτεί ανάλογα με το *βαθμό μη γραμμικότητας* του προβλήματος. Τα προβλήματα με τις ισχυρές υλικές και γεωμετρικές μη γραμμικότητες απαιτούν συνήθως τους συχνότερους ανασχηματισμούς μητρώων δυσκαμψίας. Η *τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson* είναι συνήθως αποτελεσματικότερη για τα προβλήματα με ομαλή σχετικά απόκριση του υλικού ή/και χωρίς απότομες μεταβολές της γεωμετρίας ενώ η *πλήρης μέθοδος Newton-Raphson*, αν και πιο δαπανηρή σε αριθμητικό κόστος ανά επανάληψη, είναι συνήθως αποτελεσματικότερη από ότι η *τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson* στα προβλήματα με ισχυρή *μη γραμμικότητα*.

Η μέθοδος αναζήτησης γραμμής βοηθά την επαναληπτική διαδικασία για να συγκλίνει σε σύντομο χρόνο/επίπεδα φορτίων αλλά αυξάνει το υπολογιστικό κόστος ανά επανάληψη. Για μια μη γραμμική ανάλυση όπου καμία προγενέστερη γνώση δεν είναι

διαθέσιμη ως προς τη συμπεριφορά της κατασκευής, προτείνονται οι ακόλουθες διαδικασίες:

- Αρχικά ανάλυση στη γραμμική περιοχή τάσεων με επιλογή γραμμικού μοντέλου υλικού. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων στη γραμμική περιοχή θα βοηθήσει εκτός από τον έλεγχο της ορθότητας της γεωμετρίας, της επιβολής φορτίσεων και οριακών συνθηκών και στην παρατήρηση της απόκρισης της κατασκευής σε μικρές φορτίσεις. Οι μετατοπίσεις στη γραμμική ελαστική περιοχή θα αποτελέσουν οδηγό για την επιλογή του κατάλληλου αυξητικού φορτίου κάθε βήματος κατά την επαναληπτική διαδικασία ανάλυσης στη μη γραμμική περιοχή.
- Κατόπιν ανάλυση με επιλογή μοντέλου μη γραμμικού υλικού σε περιοχή μη γραμμικών τάσεων. Η ανάλυση αυτή θα αποκαλύψει τα όρια του φορτίου κατά τη βηματική επαναληπτική διαδικασία όπου η κατασκευή αρχίζει τη μη γραμμική συμπεριφορά.
- Τέλος, με τη γνώση που έχει αποκομιστεί από τα δύο προηγούμενα βήματα μπορεί να γίνει ανάλυση με επιλογή τύπου ανάλυσης *Total Lagrangian* ή *Updated Lagrangian*. Η επιλογή του βήματος πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να αναδειχθούν οι ιδιότητες του υλικού και οι αλλαγές της γεωμετρίας κατά τη φόρτιση. Στο βήμα κατά το οποίο συμβαίνουν δραστικές αλλαγές στις ιδιότητες του υλικού ή στη γεωμετρία πρέπει να επιλεγεί μικρότερο βήμα και συχνότερες ανακατασκευές του μητρώου δυσκαμψίας. Στα κρίσιμα φορτία κατάρρευσης ή ρωγμάτωσης ίσως καταστεί αναγκαίο να αγνοηθεί ο ανασχηματισμός μητρώων και/ή η συνθήκη ισορροπίας σε κάθε επανάληψη ή να μεγαλώσουν τα όρια σφάλματος κατά τη σύγκλιση με σκοπό να αναδειχθεί η προ-λυγισμική ή η μετά-λυγισμική συμπεριφορά της κατασκευής.

Αναφέρονται επιλεκτικά οι ακόλουθες παράμετροι σχετικά με την μη γραμμική ανάλυση:

- *Maximum Number of Iterations*: αριθμός επαναλήψεων που θα εκτελέσει ο επεξεργαστής σε κάθε χρονικό βήμα πριν μειώσει το χρονικό βήμα στο μισό
- *Convergence Criteria*: επιλογή μεγέθους σύγκλισης για την συνθήκη ισορροπίας κατά την επαναληπτική διαδικασία από τα παρακάτω:(η ενέργεια είναι παράγωγο των μετατοπίσεων και δυνάμεων)

- Μετατόπιση μόνο
 - Ενέργεια μόνο
 - Δύναμη μόνο
 - Μετατόπιση ή Ενέργεια
 - Μετατόπιση ή Δύναμη
 - Μετατόπιση και Ενέργεια
 - Μετατόπιση και Δύναμη
- *Convergence Based On:* Υπάρχουν τρεις επιλογές διαθέσιμες για τη σύγκλιση σε κάθε βήμα. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται μετά από σύγκριση με την τιμή ανοχής που έχει καθοριστεί στο πεδίο *Displacement Tolerance* (ανοχή μετατοπίσεως).
 - *Total Displacement:* χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα από την αρχή της ανάλυσης. Εάν η ανάλυση περιλαμβάνει κινήσεις μεγάλης κλίμακας, η μέθοδος χαλαρώνει σχετικώς την ανοχή. Η ανοχή πρέπει να ρυθμίζεται χαμηλά 1×10^{-6} - 1×10^{-15} όταν χρησιμοποιείται για την σύγκλιση το κριτήριο μετατόπισης.
 - *Displacement from Last Time Step:* η μέθοδος χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του τελευταίου (προηγούμενου) βήματος για τη σύγκλιση. Είναι πολύ ακριβής για ανάλυση με σχετικά μικρά βήματα. Η μέθοδος είναι προεπιλεγμένη και είναι χρήσιμη σε αναλύσεις που περιέχουν κινήσεις μεγάλης κλίμακας. Η ανοχή μπορεί να ρυθμιστεί από 1×10^{-3} - 1×10^{-5}
 - *Displacement from First Iteration:* η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της πρώτης επανάληψης του κάθε βήματος για τη σύγκλιση. Είναι περισσότερο συντηρητική από την προηγούμενη αλλά απαιτεί τουλάχιστον δύο επαναλήψεις σε κάθε βήμα. Η ανοχή μπορεί να ρυθμιστεί από 1×10^{-3} - 1×10^{-5}
 - *Displacement Tolerance:* η ανοχή της μετατόπισης κατά τη σύγκλιση χρησιμοποιείται για να μετρήσει την σύγκλιση ισορροπίας. Συνίσταται από 1×10^{-15} - 1×10^{-3} . Σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν το υπόλοιπο ισορροπίας είναι κάτω από αυτό το όριο.
 - *Force Tolerance:* η ανοχή δυνάμεως κατά τη σύγκλισης χρησιμοποιείται για να μετρήσει την σύγκλιση ισορροπίας. Συνίσταται από 1×10^{-15} - 1×10^{-3} . Σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν το υπόλοιπο ισορροπίας είναι κάτω από αυτό το όριο.

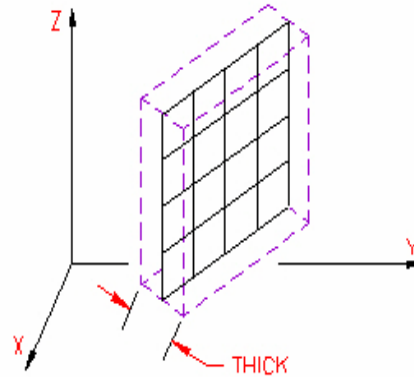
- *Line Search Convergence Tolerance*: η τιμή αυτή κυμαίνεται από 0.4-0.6.
- *Number of Allowable Stiffness Reformations per Time Step*: η παράμετρος αυτή χρησιμοποιείται όταν έχει επιλεγεί η μέθοδος *Combined Newton*. Έχει προρυθμιστεί στη τιμή 1 στη μέθοδο *Modified Newton* και στη μέγιστη τιμή στη μέθοδο *Full Newton*.
- *Matrix Reform Interval Within Each Time Step*: Απευθύνεται σε προχωρημένους χρήστες που επιθυμούν καλύτερο έλεγχο της ισορροπίας κατά την επαναληπτική διαδικασία.
- *Maximum Stiffness Reformations per Interval*: είναι ο μέγιστος επιτρεπόμενος ανασχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας μέσα σε μία επανάληψη. Απευθύνεται σε προχωρημένους χρήστες που επιθυμούν καλύτερο έλεγχο της ισορροπίας κατά την επαναληπτική διαδικασία.
- *Number of Time Steps Between Reforming Stiffness Matrix*: οι ακριβέστερες λύσεις επιτυγχάνονται αν σε κάθε βήμα γίνεται ανασχηματισμός μητρώων.
- *Number of Time Steps Between Iterations*: επιβάλλεται οι επαναλήψεις να εκτελούνται σε κάθε βήμα.

Ο κώδικας θα χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση και προσομοίωση διαμήκους κάμψης λεπτότοιχων μεταλλικών κατασκευών.

Οι επιλύσεις θα γίνουν αρχικά στη γραμμικά ελαστική περιοχή όπου για απλές γεωμετρίες (και ένα υλικό στην κατασκευή) δύναται να υπολογιστούν και τα αναλυτικά αποτελέσματα ώστε να υπάρχει σύγκριση και πιθανόν προσδιορισμός του *φορτίου έναρξης μη γραμμικότητας*.

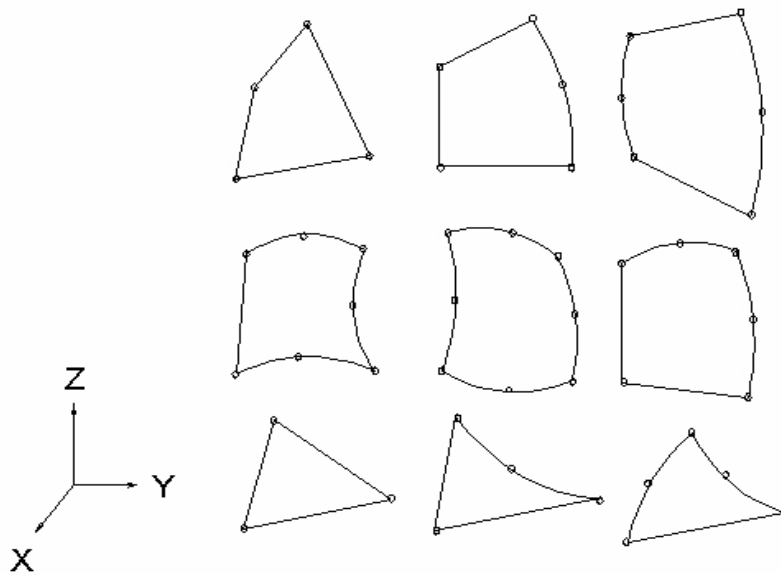
Κατόπιν θα εισάγεται στο μοντέλο του υλικού η *πλαστικότητα* και θα ακολουθεί ανάλυση στην *μη γραμμική περιοχή*.

Για τη μοντελοποίηση στην ελαστική περιοχή θα χρησιμοποιηθούν τετρακομβικά και τρικομβικά στοιχεία τρισδιάστατης πλάκας-3D plate elements. Αυτά έχουν πέντε βαθμούς ελευθερίας δηλαδή όλους εκτός από στροφή στο επίπεδο τους. Το πάχος τους θεωρείται κατανεμημένο εκατέρωθεν της μέσης επιφάνειας τους.



Σχήμα 3.13- Κατανομή πάχους σε plate element

Επίσης, για την επίλυση στη μη γραμμική περιοχή χρησιμοποιήθηκαν τα στοιχεία τρισδιάστατου κελύφους-3D shell elements οποία είναι τρικομβικά ή εξακομβικά ισοπαραμετρικά στοιχεία όταν έχουν τριγωνική μορφή και τετρακομβικά ή οχτακομβικά στοιχεία όταν έχουν τετραπλευρική μορφή. Έχουν τους ίδιους πέντε βαθμούς ελευθερίας των plate elements.



Σχήμα 3.14-Τυπικά shell-elements

Η κατανομή του πάχους είναι όπως και στα plate-elements εκατέρωθεν της μέσης επιφάνειας.

Επειδή τα shell-elements χρησιμοποιούνται από το πρόγραμμα (αντί των plate-elements) στη μη γραμμική περιοχή δίδονται οι ακόλουθες απεξηγήσεις σχετικά με τις δυνατότητες επιλογής μοντέλου του υλικού:

- *Material Nonlinear Only*: κατά την ανάλυση αγνοούνται τυχόν ταλαντώσεις και αποσβέσεις αυτών
- *Total Lagrangian*: κατά την ανάλυση, για το σχηματισμό των στατικών και κινηματικών μεταβλητών χρησιμοποιείται το αρχικό μη παραμορφωμένο σχήμα του μοντέλου
- *Updated Lagrangian*: κατά την ανάλυση, για το σχηματισμό των στατικών και κινηματικών μεταβλητών χρησιμοποιείται το επικαιροποιημένο σχήμα του μοντέλου από το προηγούμενο βήμα
- *Linear*: κατά την ανάλυση αγνοείται η μη γραμμικότητα από την γεωμετρία λόγω μεγάλων παραμορφώσεων
- *Geometrically nonlinear*: λαμβάνεται υπόψη η μη γραμμικότητα από την γεωμετρία λόγω μεγάλων παραμορφώσεων

Σχετικά με την τάξη ολοκλήρωσης αναφέρονται οι κάτωθι επιλογές:

- *2nd Order*: κατάλληλη για ορθογωνικά στοιχεία
- *3rd Order*: θα πρέπει να χρησιμοποιείται για τμήματα με μετρίως στρεβλωμένα ορθογωνικά στοιχεία
- *4th Order*: θα πρέπει να χρησιμοποιείται για τμήματα με πολύ στρεβλωμένα ορθογωνικά στοιχεία

Επίσης για την αποφυγή του φαινομένου της παρασιτικής διατμητικής ακαμψίας-*shear locking* (δηλαδή τη σταθεροποίηση του βέλους κάμψης με αύξηση της λυγρότητας λ της δοκού που είναι λάθος) καθώς και για επίτευξη σύγκλισης κατά την κάμψη των κελυφωτών φορέων υπάρχουν οι ακόλουθες επιλογές:

- *Reduced integration for membrane shear terms*: χρησιμοποιείται μειωμένης τάξης ολοκλήρωση στον υπολογισμό των μεμβρανικών διατμητικών τάσεων
- *Reduced integration for transverse shear terms*: χρησιμοποιείται μειωμένης τάξης ολοκλήρωση στον υπολογισμό των εγκαρσίων μεμβρανικών διατμητικών τάσεων
- *Suppress drilling D.O.F.*: δεσμεύει τους βαθμούς ελευθερίας που είναι κάθετοι στα στοιχεία με σκοπό τη σύγκλιση του μοντέλου

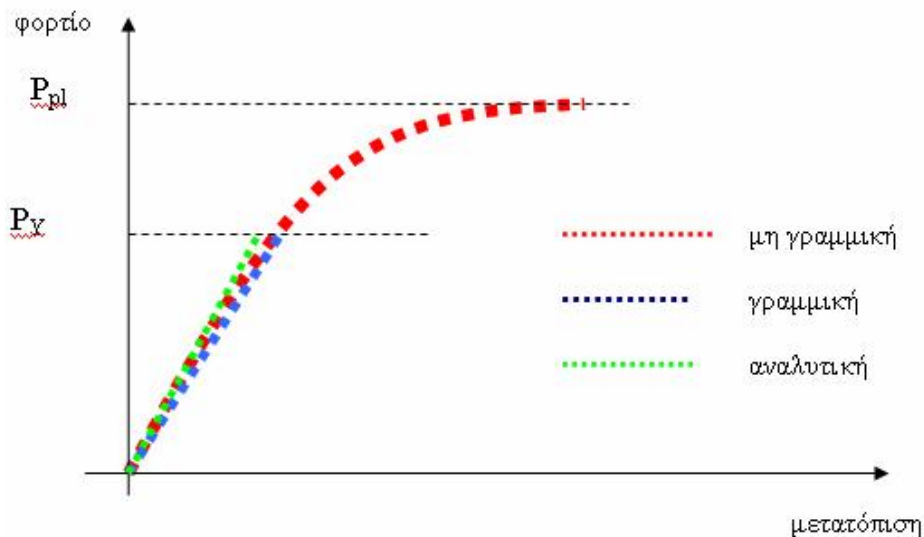
3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΜΠΤΩΜΕΝΩΝ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΚΩΔΙΚΑ ALGOR

Αρχικά κατά την ανάλυση χρησιμοποιούνται κοίλοι δοκοί με διατομές συμμετρικές, απλής γεωμετρίας όπου μπορεί να υπάρξει αναλυτική λύση για τον υπολογισμό των ορθών καμπτικών τάσεων και του μέγιστου βέλους κάμψης της δοκού.

Η αναλυτική λύση στηρίζεται στη θεωρία δοκών *Euler-Bernoulli* και βάσει αυτής υπολογίζεται το φορτίο πλαστικοποίησης της άνω ίνας (πιο απομακρυσμένης από τον ουδέτερο άξονα) της διατομής καθώς και το μέγιστο βέλος κάμψης για το φορτίο αυτό.

Οι υπολογισμοί γίνονται για την περίπτωση αμφιερέιστου δοκού (άρθρωση -κύλιση) και προβόλου δοκού (πάκτωση).

Κατόπιν μοντελοποιείται η δοκός με στοιχεία πλάκας ή κελύφους και αφού επιβληθούν οι φορτίσεις που υπολογίστηκαν αναλυτικά ότι προξενούν έναρξη πλαστικοποίησης και προσομοιωθούν οι στηρίξεις, εκτελείται ανάλυση στην ελαστική περιοχή. Κατόπιν εκτελείται ανάλυση στη μη γραμμική περιοχή.



Σχήμα 3.15-Προσέγγιση γραμμικής και μη γραμμικής επίλυσης στο ALGOR

Η εν λόγω διαδικασία έχει ως στόχο την διερεύνηση των αποκλίσεων και βελτιστοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω τροποποιήσεων στη διαμέριση, στις οριακές συνθήκες και στις επιλογές ρυθμίσεων του προγράμματος ALGOR. Τυχόν χρήσιμα συμπεράσματα από τις απλές δοκούς και το μοντέλο M3-200 θα χρησιμοποιηθούν στο 'βαρύ' μοντέλο του bulk carrier.

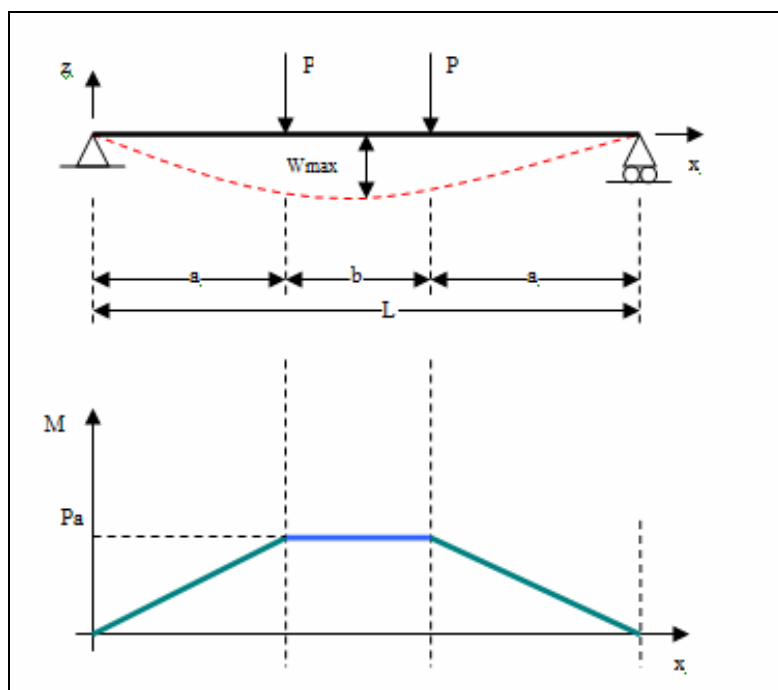
Σύμφωνα με τις οδηγίες του προγράμματος, θα πρέπει η γραμμική επίλυση (ALGOR) σχεδόν να ταυτίζεται με το μέρος της μη γραμμικής λύσης (ALGOR) που αφορά στην ελαστική περιοχή (βλέπε σχήμα 3.15).

Το κατά πόσο η αναλυτική λύση προσεγγίζεται από τις λύσεις του προγράμματος είναι σημείο προς αξιολόγηση και διερεύνηση.

3.4.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

Η κάμψη δοκών στην ελαστική περιοχή δίδει κατά περίπτωση τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- *Αμφιέρειστη δοκός φορτιζόμενη με δύο συμμετρικά ως προς το μέσο της συγκεντρωμένα φορτία P.*



Σχήμα 3.16-Αμφιέρειστη δοκός. Διάγραμμα καμπτικής ροπής M

Μέγιστο βέλος κάμψης (στο μέσο):

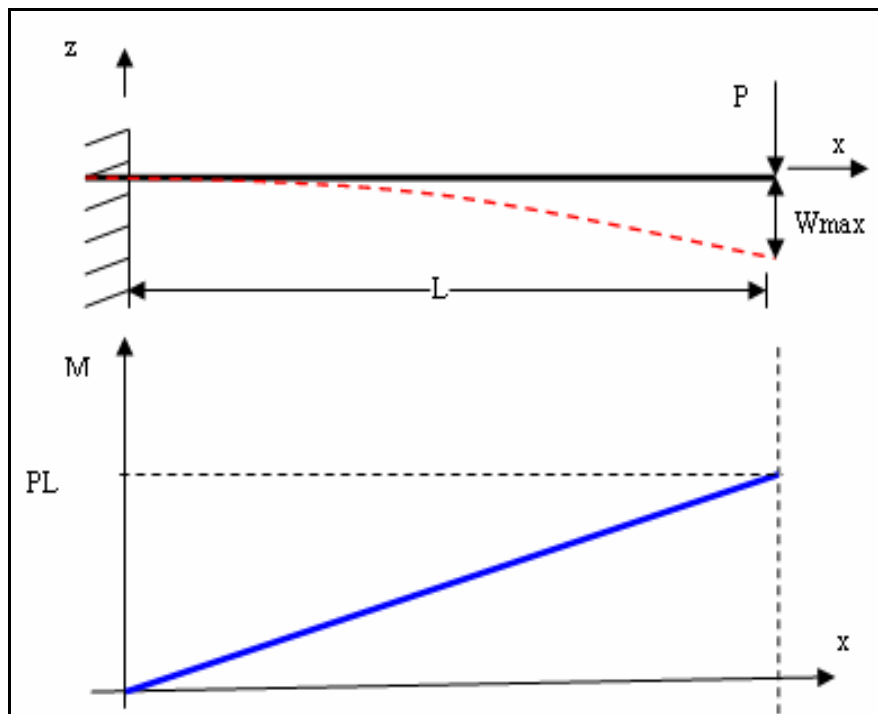
$$W_{\max} = P_Y \left(\frac{a^3}{6} - \frac{aL^2}{8} \right)$$

$$\text{όπου } P_Y = \frac{\sigma_Y I}{ay_{\max}} = \frac{\sigma_Y}{SM}$$

όπου P_Y το φορτίο που προξενεί ορθή τάση ίση με την τάση διαρροής σ_Y στην πιο απομακρυσμένη ίνα από τον ουδέτερο άξονα της διατομής (y_{\max}). Είναι:

όπου I η ροπή αδρανείας της καμπτόμενης διατομής ως προς οριζόντιο κεντροβαρικό άξονα, κάθετο στο επίπεδο κάμψης και SM η ροπή αντιστάσεως της διατομής.

- **Πρόβολος δοκός φορτιζόμενη στο ελεύθερο άκρο με συγκεντρωμένο φορτίο P**



Σχήμα 3.17-Πρόβολος δοκός. Διάγραμμα καμπτικής ροπής M

Μέγιστο βέλος κάμψης (στο ελεύθερο άκρο):

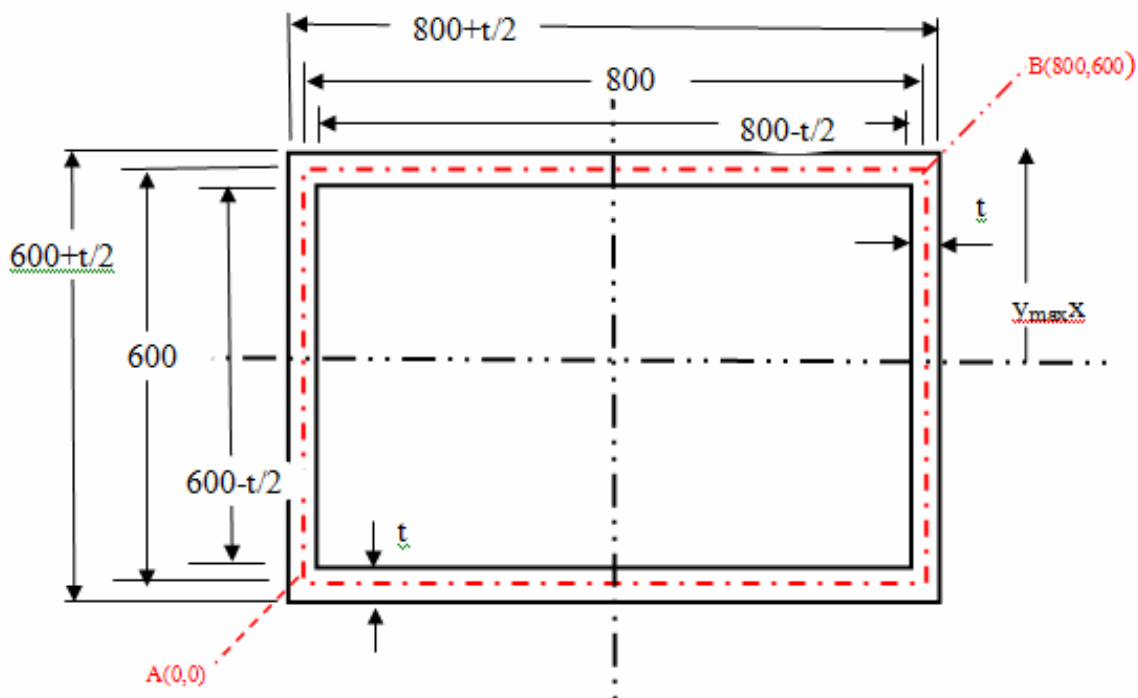
$$W_{\max} = \frac{P_Y L^3}{3EI}$$

όπου:

$$P_Y = \frac{\sigma_Y I}{ay_{\max}} = \frac{\sigma_Y}{SM}$$

Κατά τη σχεδίαση στο ALGOR και τη μοντελοποίηση με στοιχεία πλάκας ή στοιχεία κελύφους πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το πάχος του ελάσματος το οποίο κατανέμεται, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω εκατέρωθεν της μέσης επιφάνειας σχεδίασης.

Για παράδειγμα, η σχεδίαση στο ALGOR μιας ορθογωνικής διατομής-*rectangular* κάνοντας χρήση των σημείων με συντεταγμένες A(0,0), B(800,600) και πάχος t αντιπροσωπεύεται στην πραγματικότητα με το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.18-Επίδραση πάχους κατά τη σχεδίαση στο ALGOR

Η ανωτέρω παρατήρηση ελήφθη υπόψη στους αναλυτικούς υπολογισμούς γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής όπως εμβαδό και ροπή αδρανείας.

Όλες οι δοκοί που αναφέρονται παρακάτω έχουν κοινά τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

$$L=5000 \text{ mm}$$

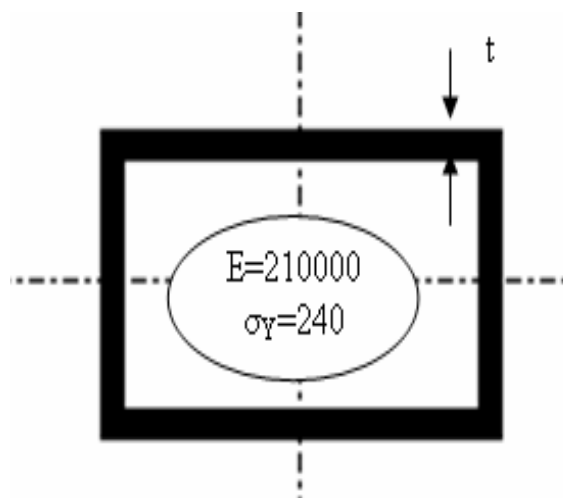
$$a=2000 \text{ mm}$$

$$b=1000 \text{ mm}$$

ενώ t είναι το πάχος του ελάσματος και y_{\max} η απόσταση της απώτατης ίνας από τον ουδέτερο άξονα σε mm.

Το όριο διαρροής του υλικού σ_y , οι ορθές τάσεις και το μέτρο ελαστικότητας E δίδονται σε N/mm^2 . Οι ροπές αδρανείας I σε mm^4 . Το φορτίο έναρξης πλαστικοποίησης P_y σε kN. Όλες οι αποστάσεις μετρούνται σε mm.

3.4.2 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600 x t



Η αναλυτική λύση δίδει τα αποτελέσματα:

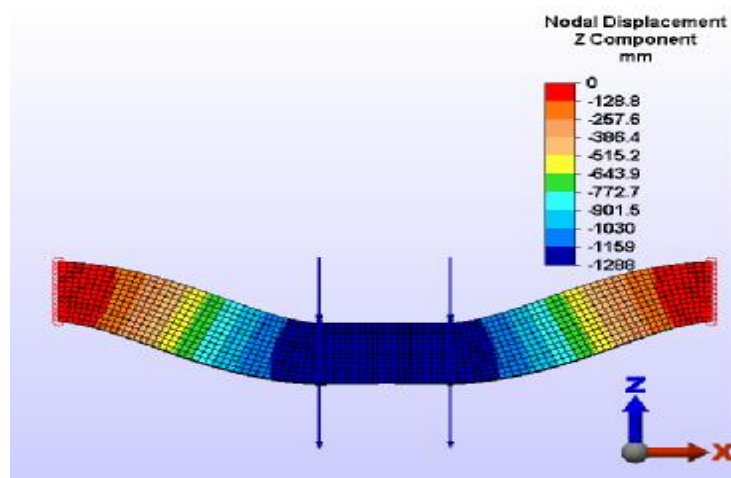
t	I ($\times 10^9$)	y _{max}	ΑΜΦΙΠΕΡΙΣΤΗ		ΠΡΟΒΟΛΟΣ	
			P _Y	W _{max}	P _Y	W _{max}
20	3,603	310	1395	9,1	546,8	30,7
3	0,540	301,5	215	9,3	86,0	31,6

Η μοντελοποίηση στο ALGOR έγινε με στοιχεία ελάσματος-plate στη γραμμική περιοχή και κελύφους-shell στη μη γραμμική, διαστάσεων αρχικά 50x50mm και σε μερικές περιπτώσεις 25x25mm για έλεγχο σύγκλισης τιμών.

Κατά την επίλυση στο ALGOR κατέστη απαραίτητη η τοποθέτηση *εγκαρσίων φρακτών* πάχους t (ίδιου πάχους με το έλασμα) αρχικά στα σημεία επιβολής του φορτίου, με σκοπό την αποφυγή τοπικών φαινομένων (υπερβολικές εγκάρσιες παραμορφώσεις) και έπειτα ανά 1000 mm για βελτιστοποίηση σύγκλισης με αναλυτικές τιμές.

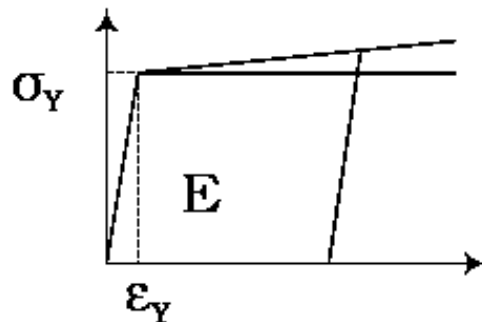
Οι οριακές συνθήκες στήριξης της δοκού προσομοιωθήκαν ως εξής:

- Αρθρωση: περιορισμός μετατοπίσεων T_x, T_y, T_z
- Κύλιση: περιορισμός μετατοπίσεων T_y, T_z
- Πάκτωση: περιορισμός των μετατοπίσεων T_x, T_y, T_z και στροφών R_x, R_y, R_z



Σχήμα 3.19-Στο μοντέλο χωρίς φρακτές παρατηρήθηκαν υπερβολικά μεγάλα βέλη κάμψης

Στη μη γραμμική περιοχή χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο υλικού πλαστικό με κράτνυση. Η κλίση της ευθείας που αντιπροσωπεύει την πλαστική περιοχή (strain hardening) ελήφθη ίση με το $E/1000$ (1/1000 της κλίσης της ευθείας της ελαστικής περιοχής). Η επιλογή αυτή για το μοντέλο του υλικού υπάρχει στο πρόγραμμα με την ονομασία *Von Mises with isotropic hardening*.



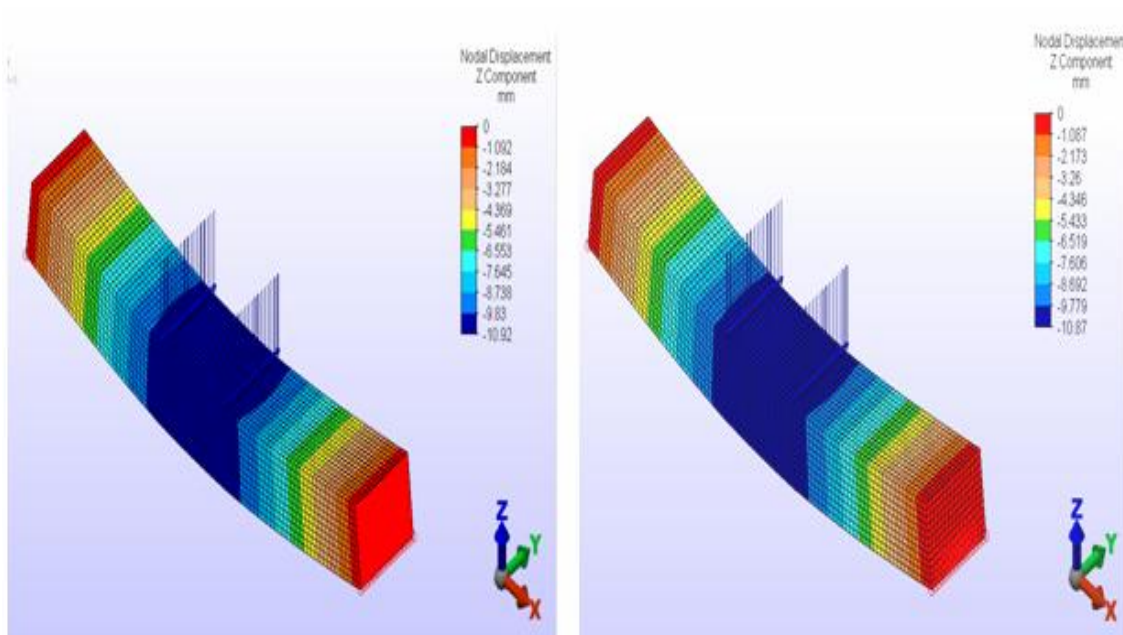
Σχήμα 3.20-Μοντέλο υλικού πλαστικό με κράτνυση

Οι επιλύσεις δοκών εκτελέστηκαν με τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις του προγράμματος *nonlinear static*.

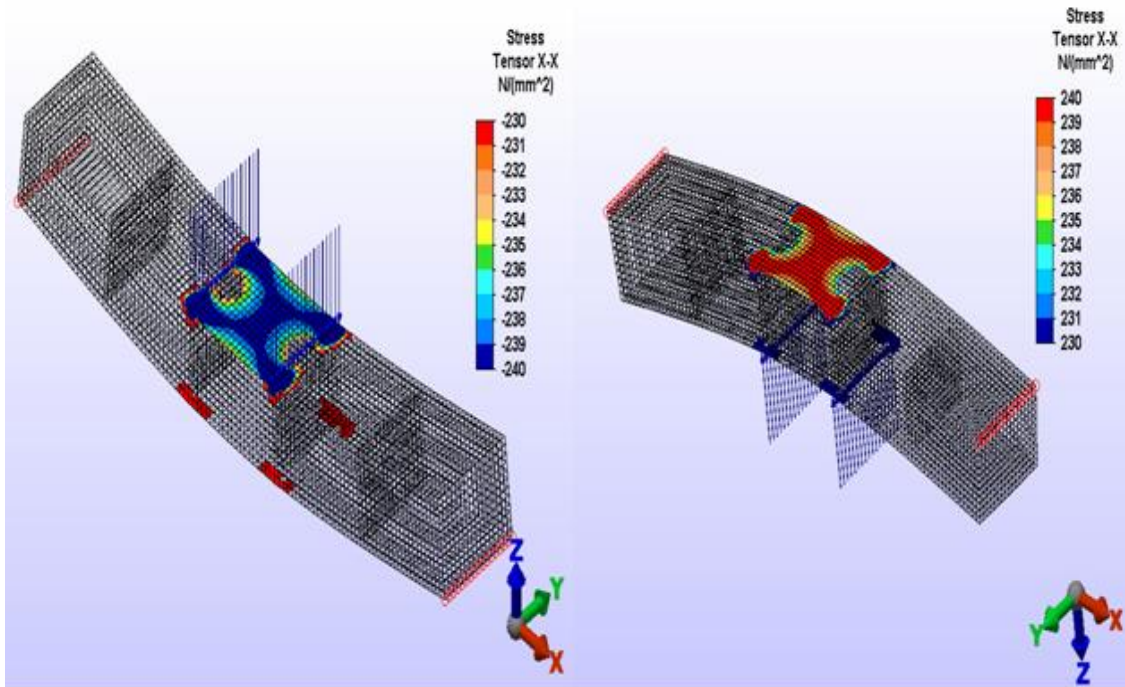
Το μέγιστο βέλος κάμψης W_{max} στις γραμμικές επιλύσεις είναι ο μέσος όρος των βελών κάμψης των κόμβων της διατομής όπου εμφανίζεται ο κόμβος με το μεγαλύτερο βέλος κάμψης.

Σχετικά με την ορθογωνική διατομή παρατηρήθηκε ότι:

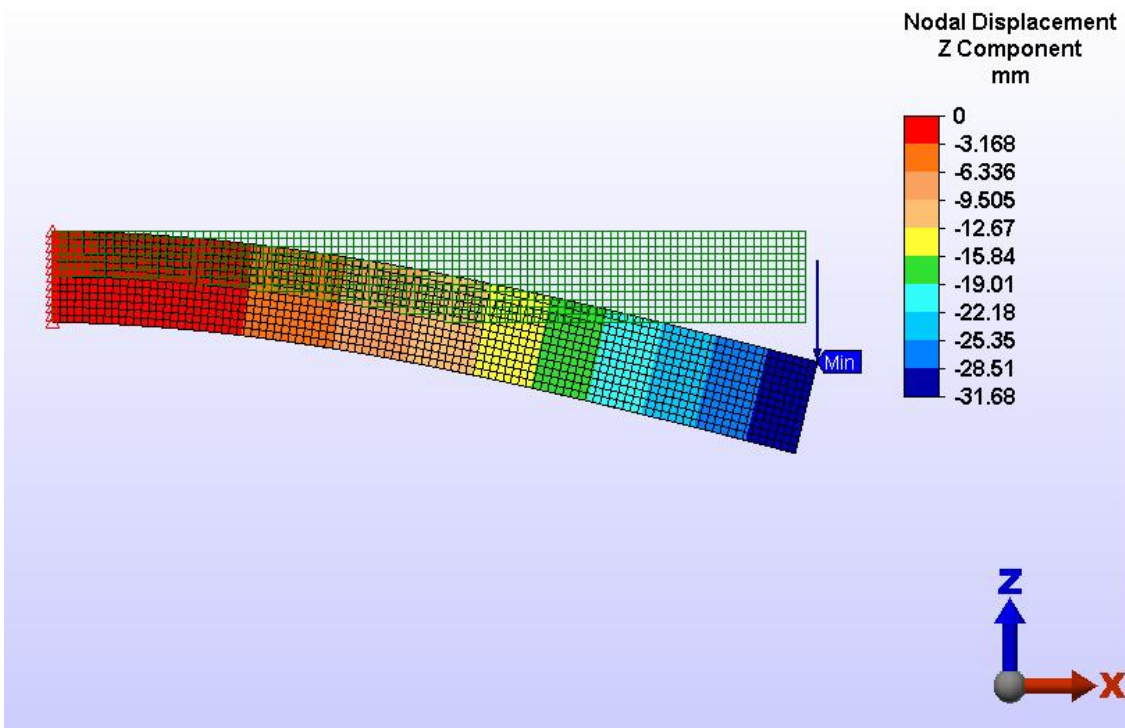
- Οι λύσεις F.E.A. (γραμμική και μη γραμμική λύση) ταυτίζονται
- Οι τιμές των μέγιστων ορθών τάσεων των λύσεων F.E.A είναι περίπου 3-5% μικρότερες από τις αντίστοιχες αναλυτικές τιμές.
- Στην αμφιέριστη δοκό η τιμή του μέγιστου βέλους κάμψης των λύσεων F.E.A. είναι περίπου 20% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αναλυτική τιμή.
- Στην πρόβολο δοκό η τιμή του μέγιστου βέλους κάμψης των λύσεων F.E.A. είναι λιγότερο από 3% μικρότερη από την αντίστοιχη αναλυτική τιμή.
- Με πύκνωση του πλέγματος σε 25x25 mm (100% πύκνωση) δεν επηρεάζονται τα αποτελέσματα
- Η επίδραση του πάχους του ελάσματος t είναι αμελητέα ως προς τις διαφορές τιμών των λύσεων



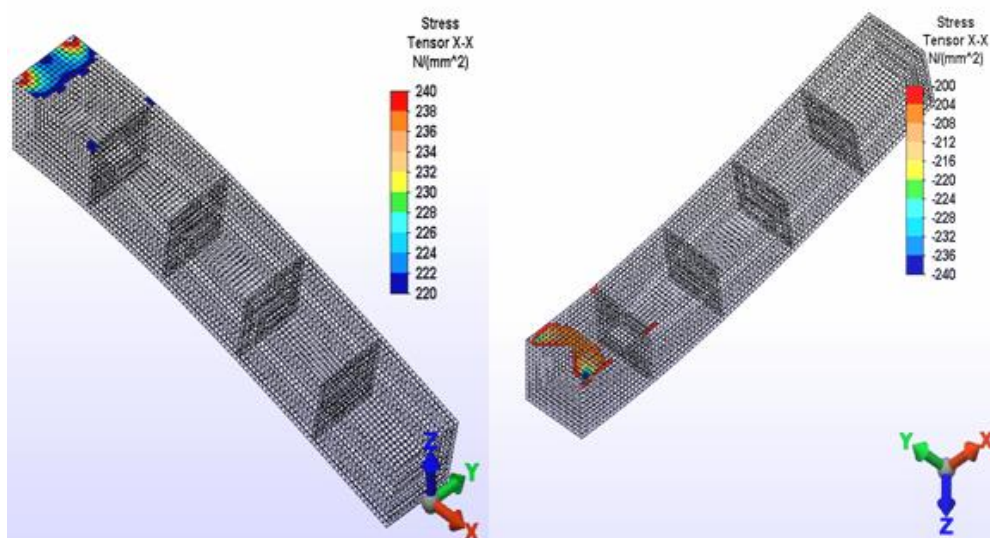
Σχήμα 3.21-Μοντέλο με πάχος ελάσματος $t=20$ mm με φρακτές στα φορτία (αριστερά) και φρακτές ανά 1000 mm (δεξιά). Η αναλυτική λύση δίδει $W_{max}=9,1$ mm. Η βέλτιστη F.E.A. δίδει 10,8 mm



Σχήμα 3.22-Διαρροή απώτατων ινών ($\sigma_y=240 \text{ N/mm}^2$)

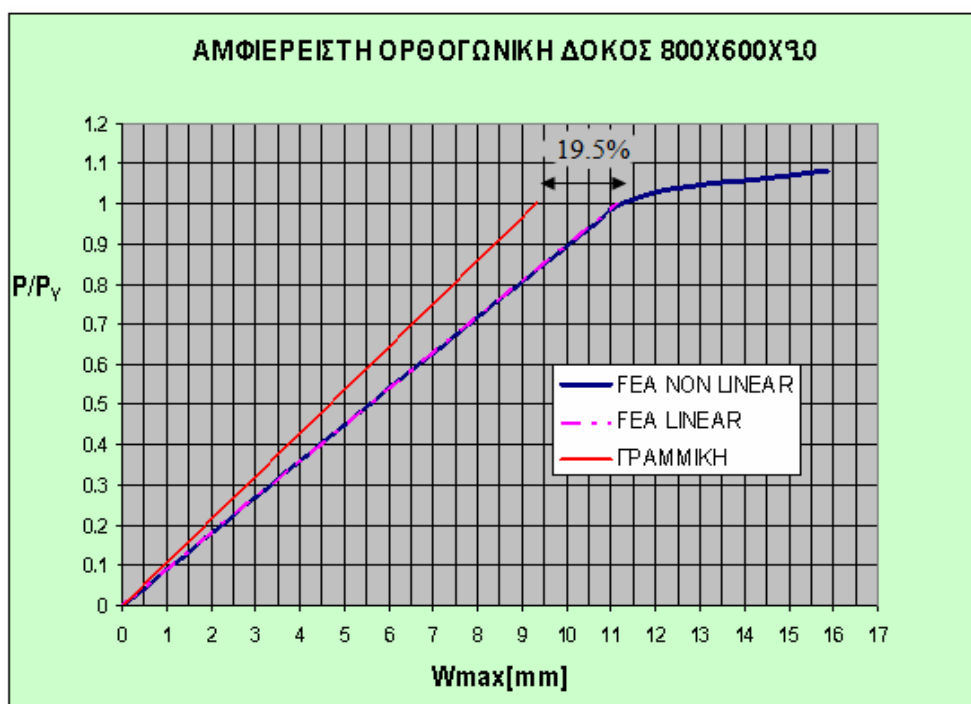


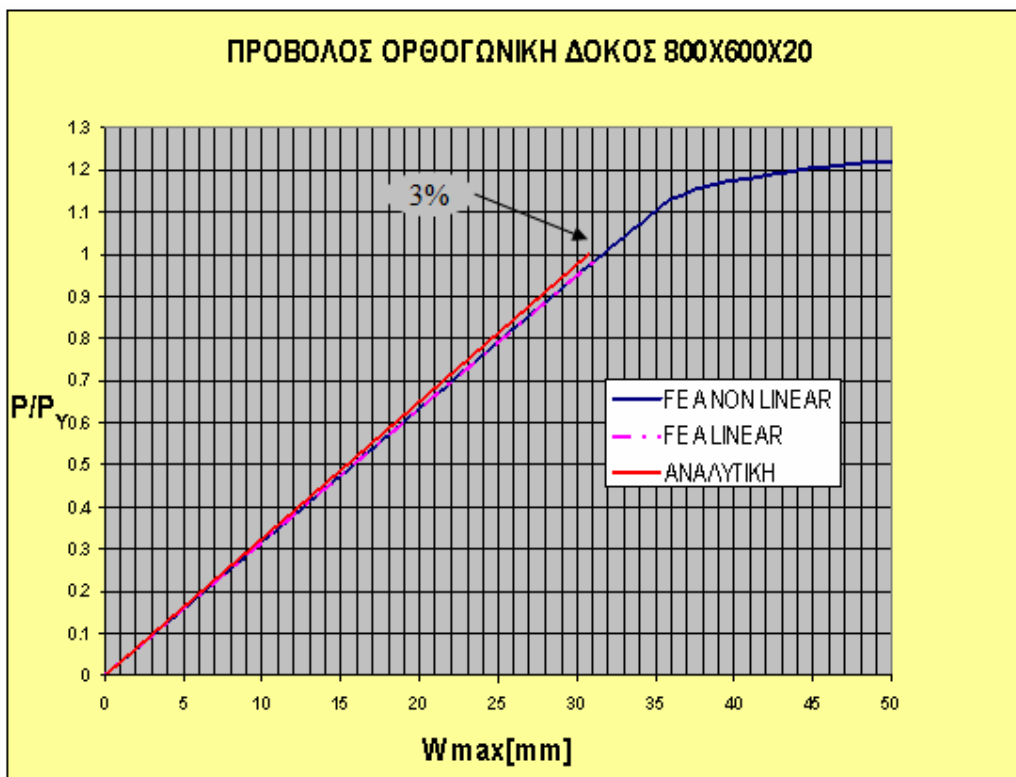
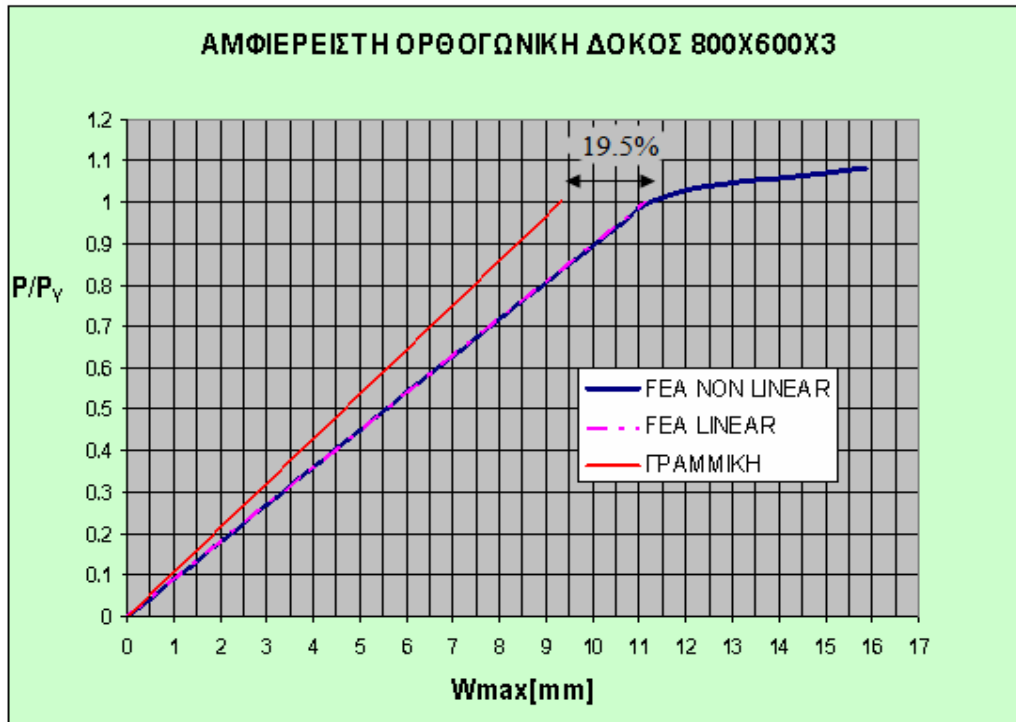
Σχήμα 3.23-Η μοντελοποίηση προβόλου πάχους $t=20 \text{ mm}$ προσεγγίζει ικανοποιητικά την αναλυτική λύση. Αναλυτικά $W_{max}=30,72 \text{ mm}$, F.E.A. LINEAR $W_{max}=31,68 \text{ mm}$, FEA NON LINEAR $W_{max}=31,62 \text{ mm}$

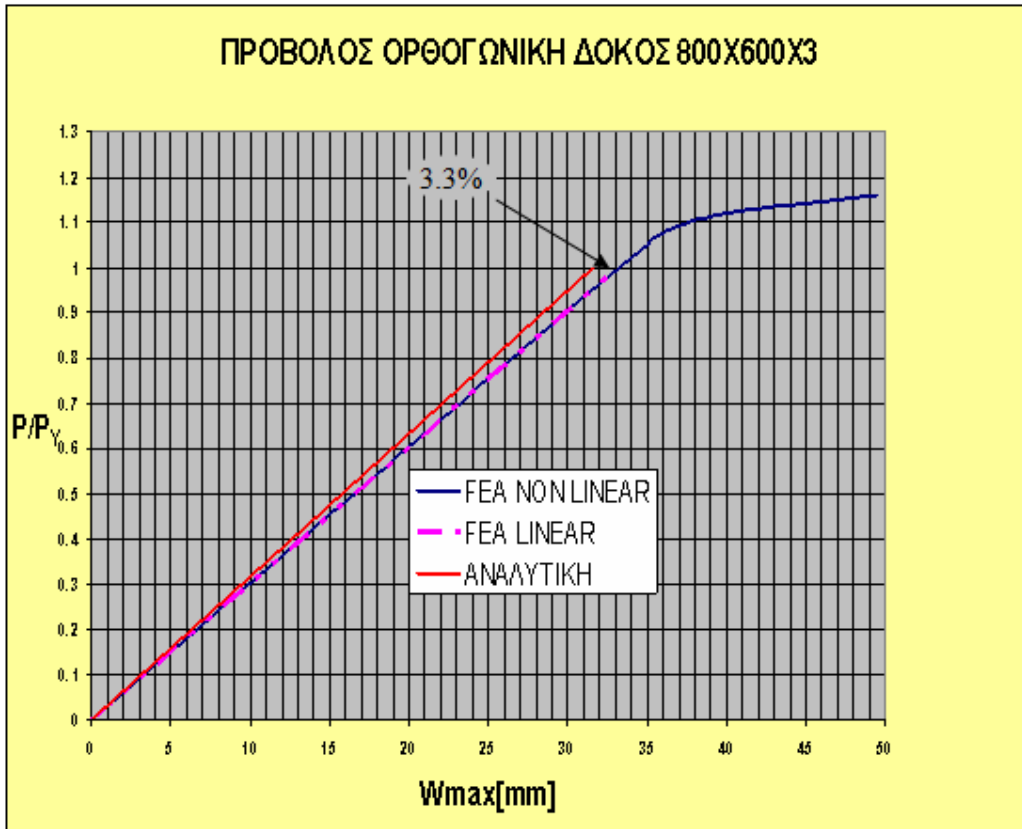


Σχήμα 3.24-Οι μέγιστες τάσεις στην πρόβολο δοκό εμφανίζονται στην πάκτωση και είναι 2-4% μικρότερες από την αναλυτική ($\sigma_y=240 \text{ N/mm}^2$)

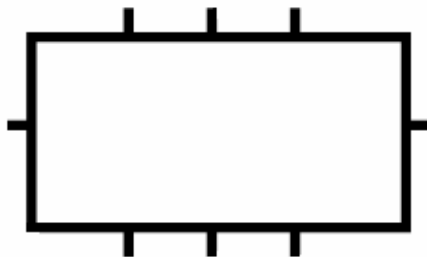
Τα αποτελέσματα διερεύνησης των λύσεων για την δοκό ορθογωνικής διατομής(μη ενισχυμένη) με πάχος ελάσματος 20 και 3 mm συνοψίζονται στα παρακάτω διαγράμματα.







3.4.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600x t ΜΕ 8 ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΑ T. FLAT BAR t x 45



Τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης για διαφορές περιπτώσεις πάχους ελάσματος παρατίθενται στους παρακάτω πίνακες:

t= 4 I=0.8192 10 ⁹	ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ		ΠΡΟΒΟΛΟΣ	
	P _Υ	W _{max}	P _Υ	W _{max}
183	217,3	6,2	86,9	21,1
310	368,0	10,5	147,2	35,7

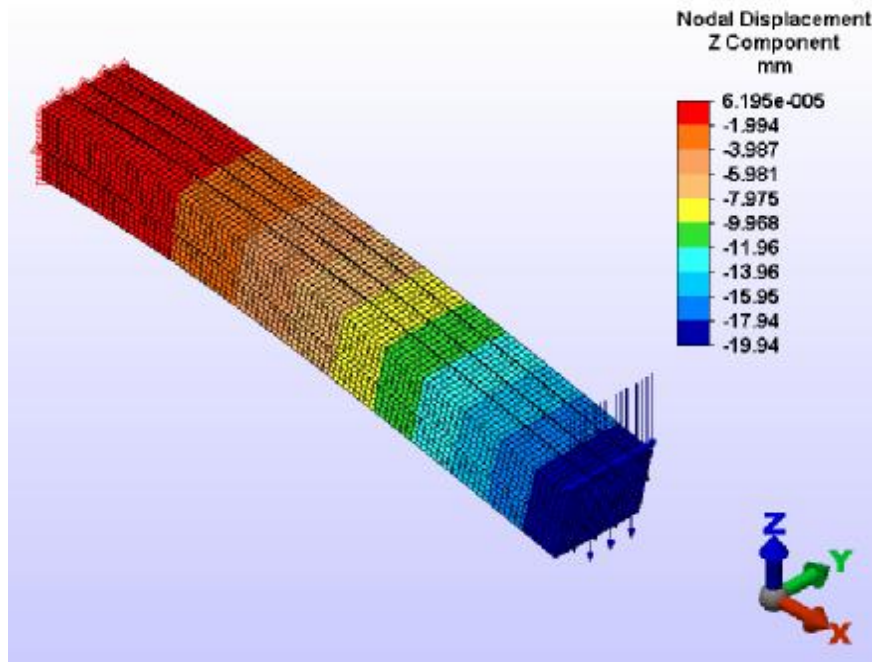
t= 3			ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ	
σ _Υ	I	y _{max}	P _Υ	W _{max}
183	0,6449 10 ⁹	345	171,1	6,2

Ως προς τη μοντελοποίηση στο ALGOR ακολουθήθηκαν οι ίδιες μεθοδεύσεις με αυτές της ορθογωνικής διατομής.

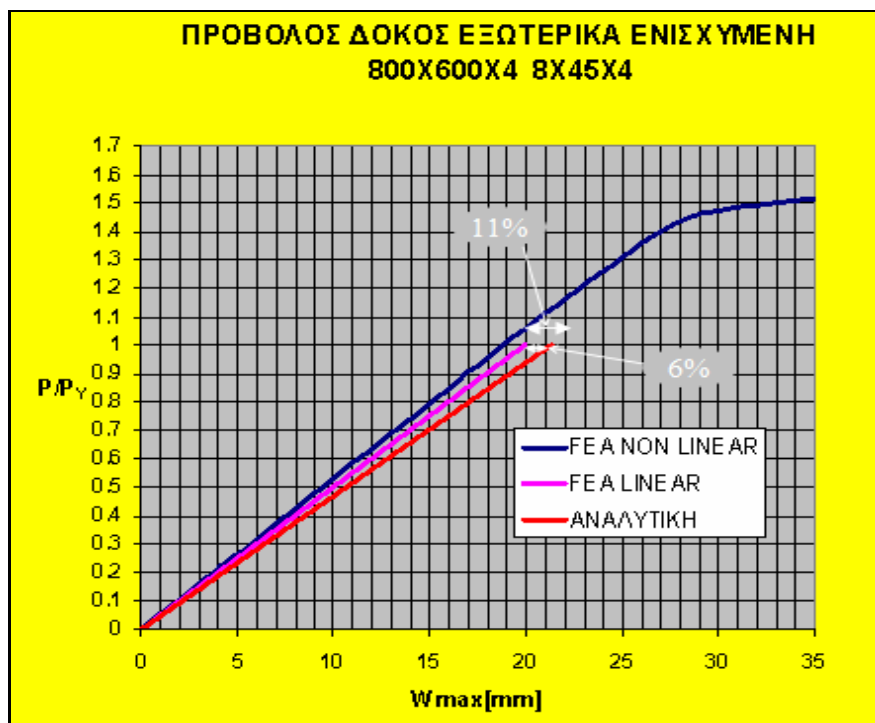
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα με κυριότερες τις ακόλουθες διαπιστώσεις:

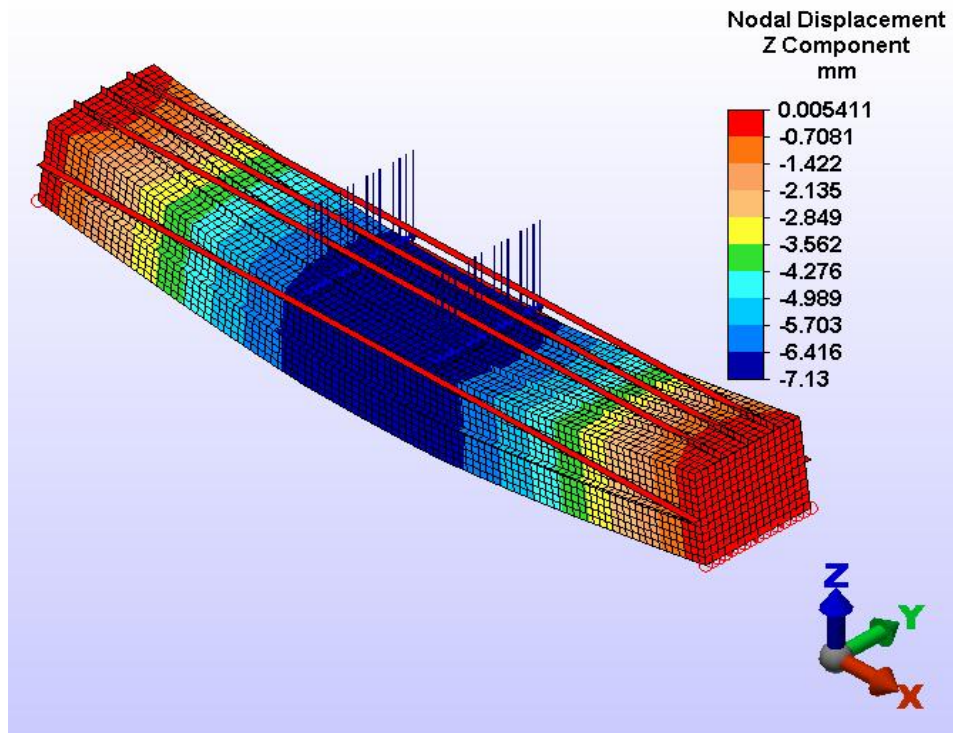
- Παρουσιάζεται απόκλιση μεταξύ γραμμικής και μη γραμμικής επίλυσης του προγράμματος της τάξεως 3-5% η οποία δεν επηρεάζεται από πύκνωση του πλέγματος.
- Στην πρόβολο εξωτερικά ενισχυμένη δοκό οι λύσεις F.E.A. δίδουν μικρότερα βέλη κάμψης από την αναλυτική λύση. Η μη γραμμική είναι κατά 11% μικρότερη και η γραμμική 6% μικρότερη.

- Στην εμφέρειστη εξωτερικά ενισχυμένη δοκό οι λύσεις F.E.A. δίδουν μεγαλύτερα βέλη κάμψης από την αναλυτική λύση. Η μη γραμμική είναι κατά 12,5% μεγαλύτερη και η γραμμική 16% μεγαλύτερη.

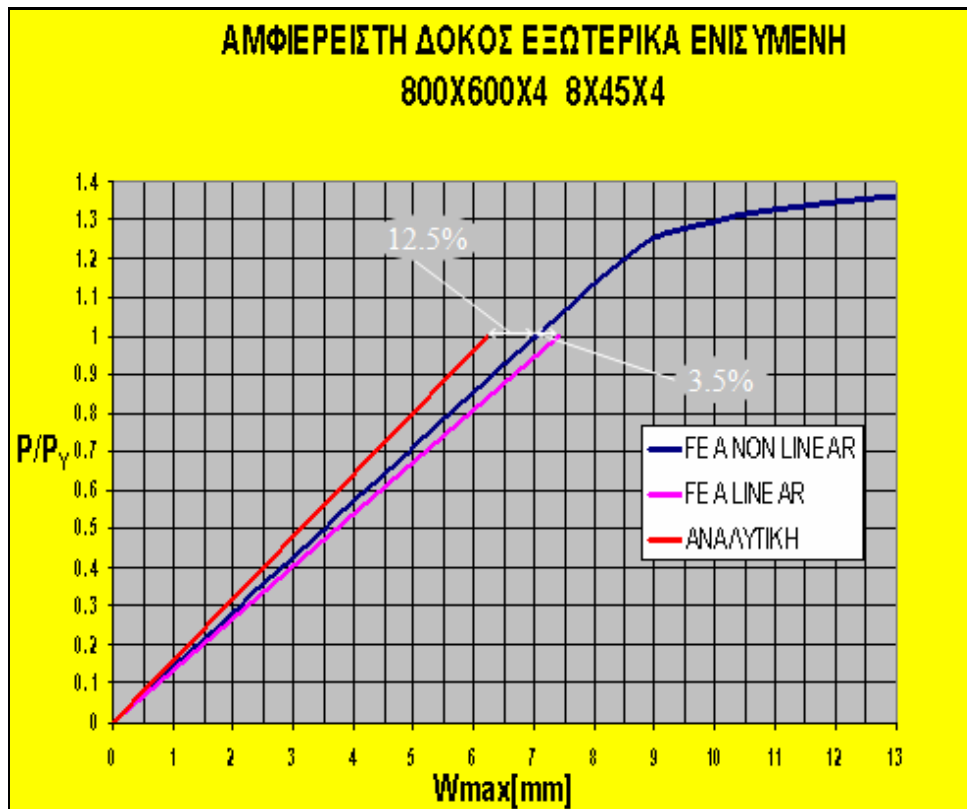


Σχήμα 3.25-Κάμψη εξωτερικώς ενισχυμένου προβόλου.

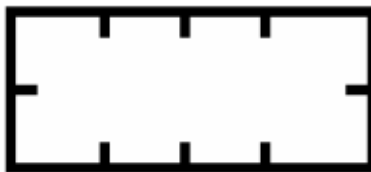




Σχήμα 3.26-Κάμψη εξωτερικώς ενισχυμένου αμφιερέιστου δοκού.



3.4.4 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ 800 x 600x t ΜΕ 8 ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΑ T. FLAT BAR t x 45

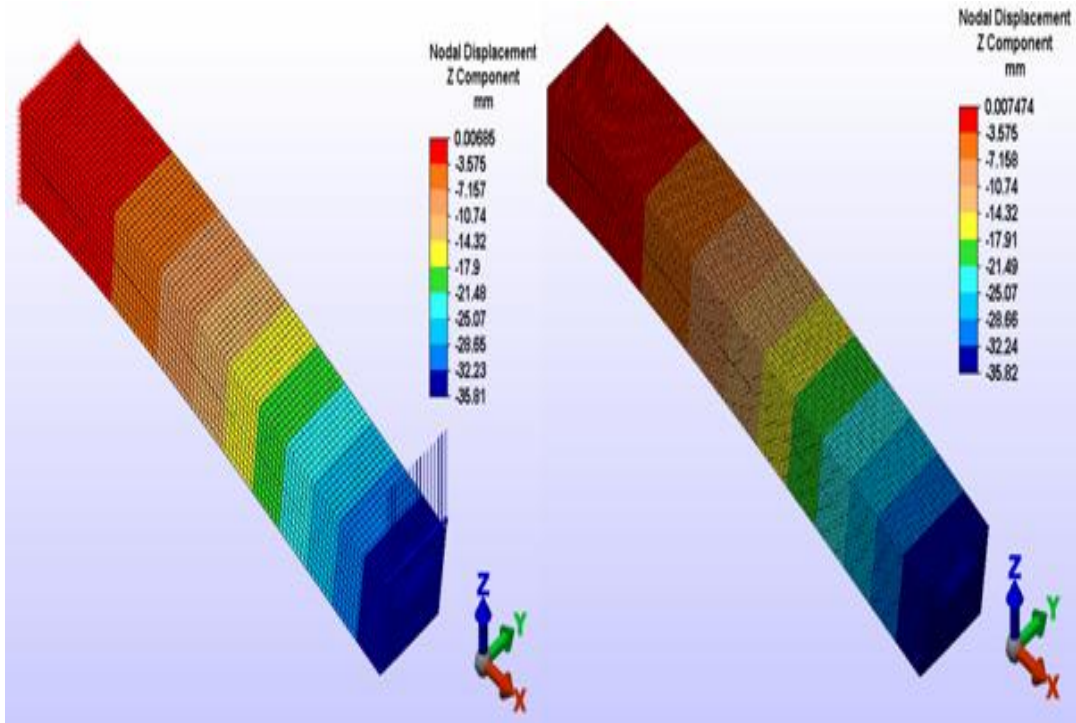


Η αναλυτική επίλυση δίδει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

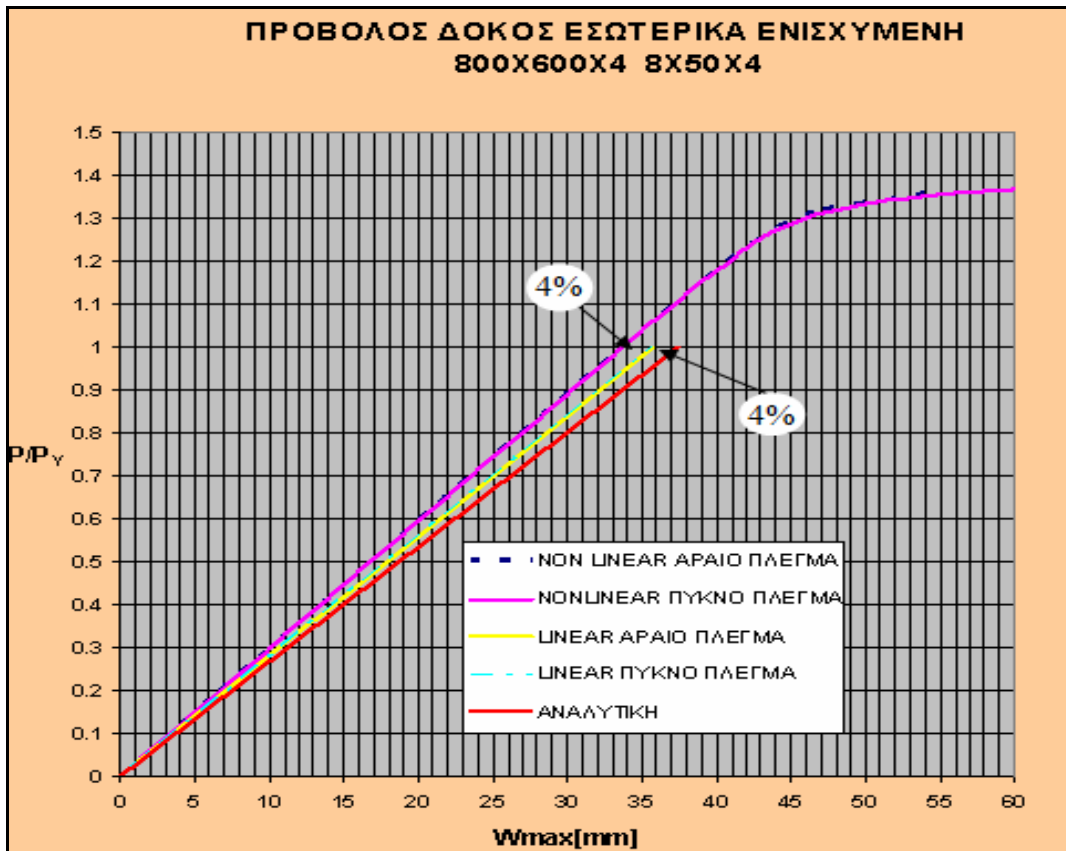
t= 4			ΑΜΦΙΕΡΙΣΤΗ		ΠΡΟΒΟΛΟΣ	
σ_Y	$I \times 10^9$	y_{max}	P_Y	W_{max}	P_Y	W_{max}
285	0,8013	302	378,1	11,1	151,2	37,4

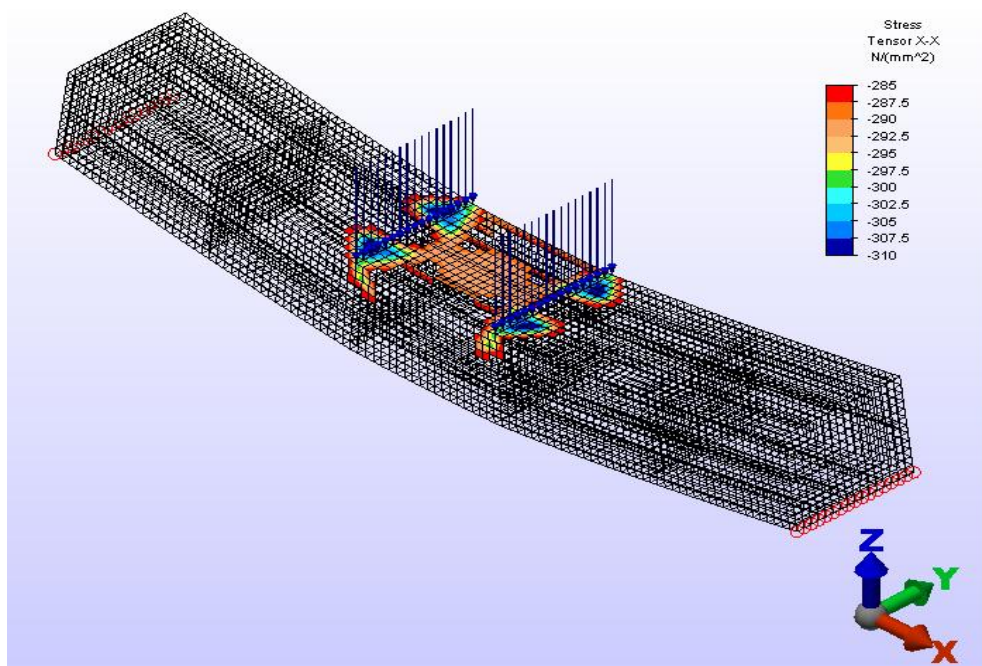
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα με κυριότερες τις ακόλουθες διαπιστώσεις:

- Παρουσιάζεται απόκλιση μεταξύ γραμμικής και μη γραμμικής επίλυσης του προγράμματος της τάξεως 4% η οποία δεν επηρεάζεται από πύκνωση του πλέγματος.
- Στην πρόβολο εσωτερικά ενισχυμένη δοκό οι λύσεις F.E.A. δίδουν μικρότερα βέλη κάμψης από την αναλυτική λύση. Η μη γραμμική είναι κατά 8% μικρότερη και η γραμμική 4% μικρότερη.
- Στην εμφιέριστη εσωτερικά ενισχυμένη δοκό οι λύσεις F.E.A. δίδουν μεγαλύτερα βέλη κάμψης από την αναλυτική λύση. Η μη γραμμική είναι κατά 9% μεγαλύτερη και η γραμμική 16% μεγαλύτερη.

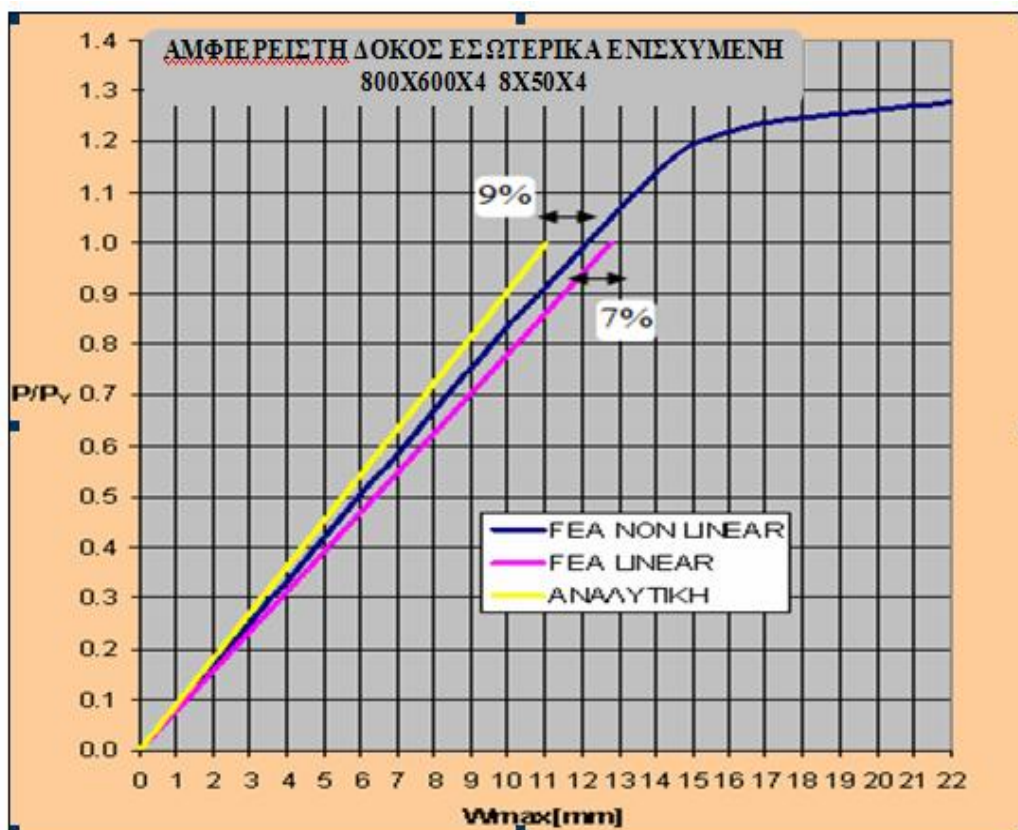


Σχήμα 3.27-Η πύκνωση του πλέγματος δεν επιφέρει δραστική αλλαγή στα βέλη κάμψης (αραιό πλέγμα 35,81mm, πυκνό πλέγμα 35,82 mm)

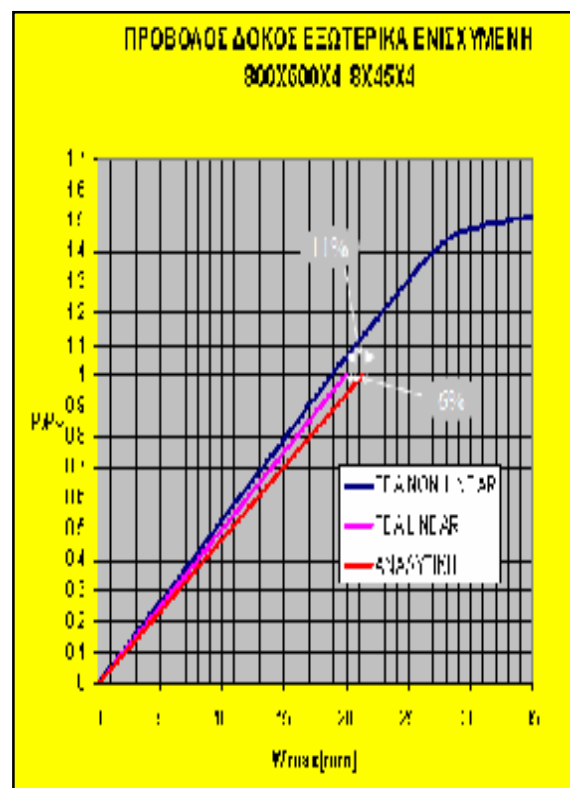
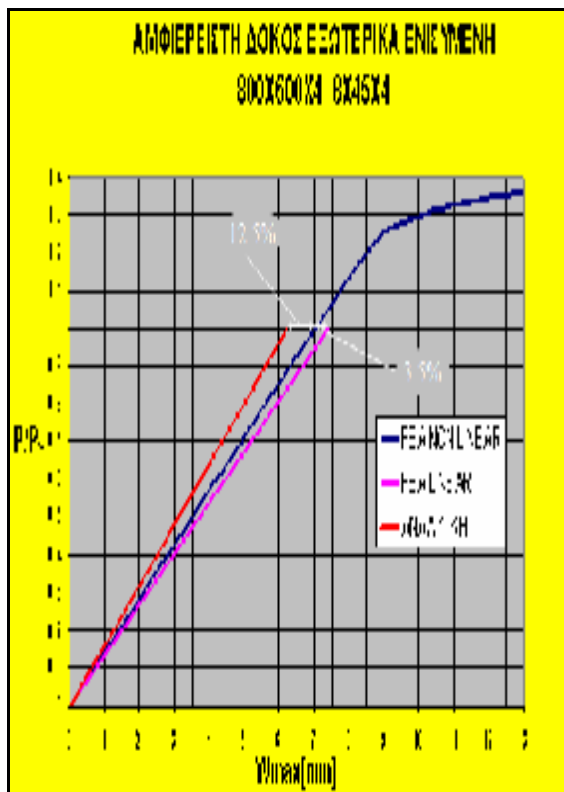
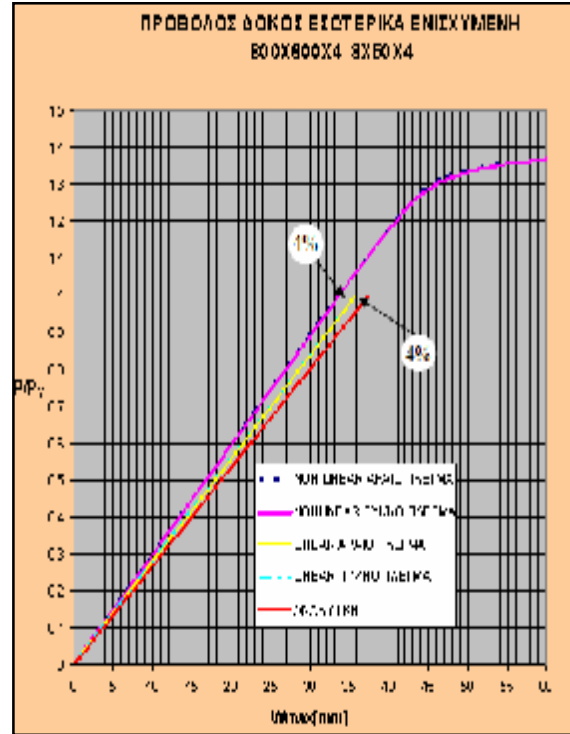
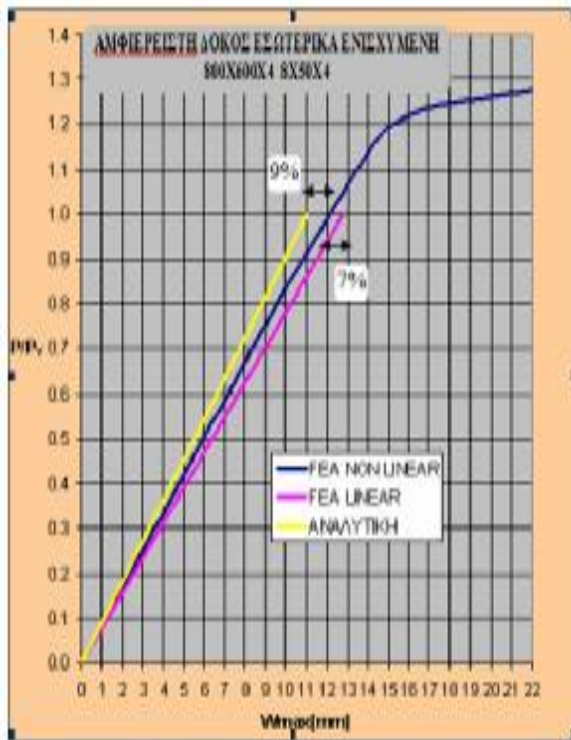


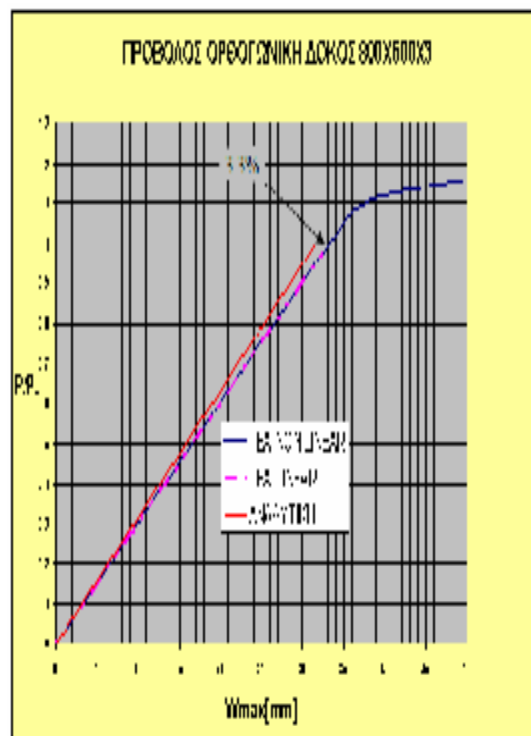
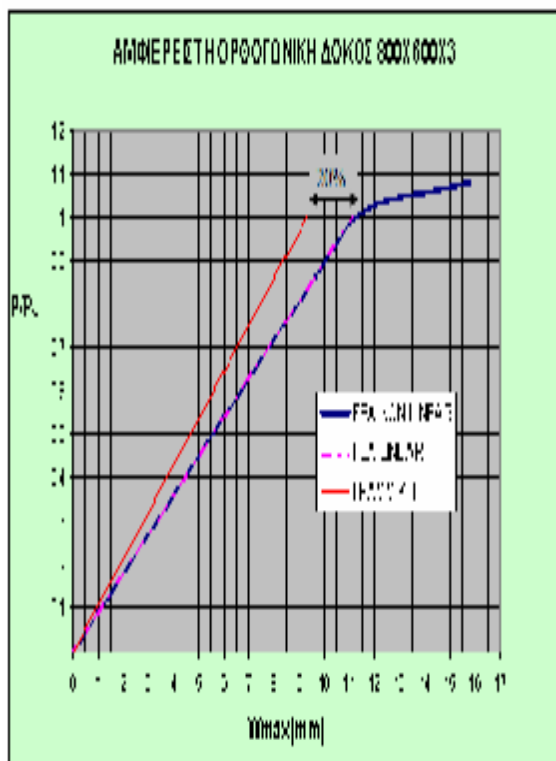


Σχήμα 3.28-Πλαστικοποίηση κατά την κάμψη, μη γραμμική επίλυση με όριο διαρροής υλικού 285 N/mm²



Ακολουθως παρατίθενται ομαδοποιημένα τα διαγράμματα των προηγούμενων περιπτώσεων κάμψης.





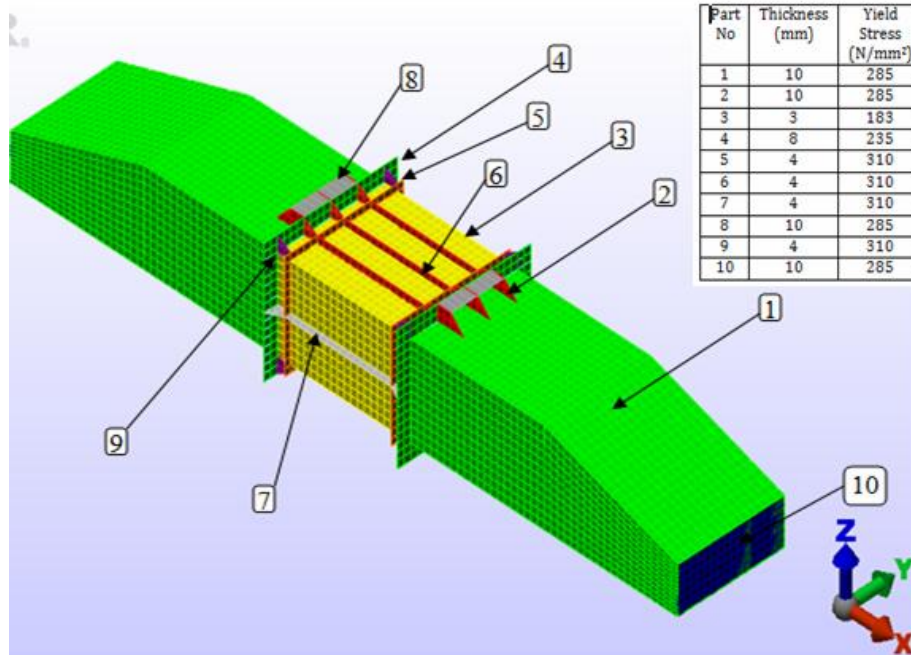
3.5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΜΨΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ M3-200

Αρχικά, μοντελοποιήθηκε το σύνολο της πειραματικής διατάξεως δηλαδή το μοντέλο M2-300 (βλέπε παράγραφο 2.9) μαζί με τις διατάξεις στήριξης (*supporting device*) αυτού.

Χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα στοιχεία ελάσματος (*3-D plate elements*) για τη γραμμική περιοχή και τρισδιάστατα στοιχεία κελύφους (*3-D shell elements*) για τη μη γραμμική περιοχή.

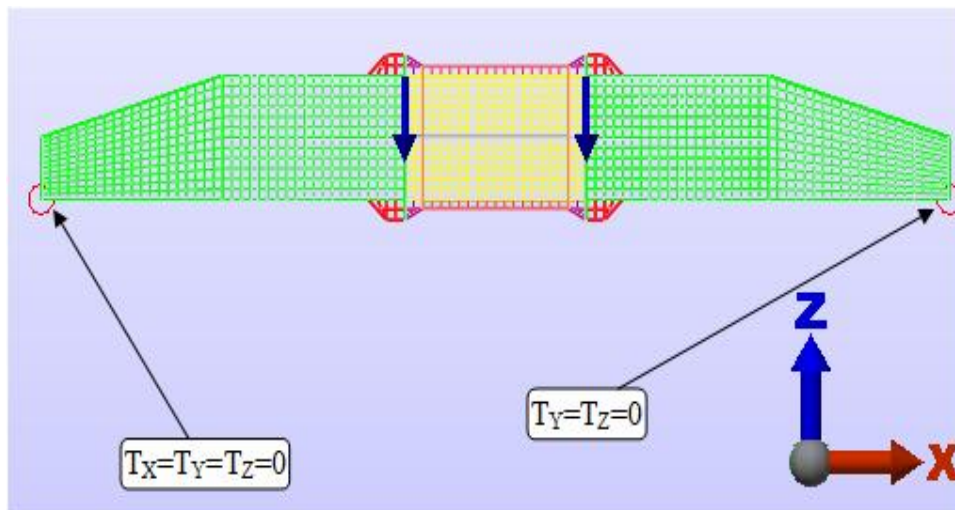
Ο συνολικός αριθμός των κόμβων του μοντέλου είναι 7094 και των στοιχείων 7594. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την μη γραμμική ανάλυση είναι της τάξεως των 30 min.

Σημειώνεται ότι τόσο οι λεπτομερείς διαστάσεις όσο και οι μηχανικές ιδιότητες της διάταξης στήριξης ελήφθησαν κατ'επίκληση.



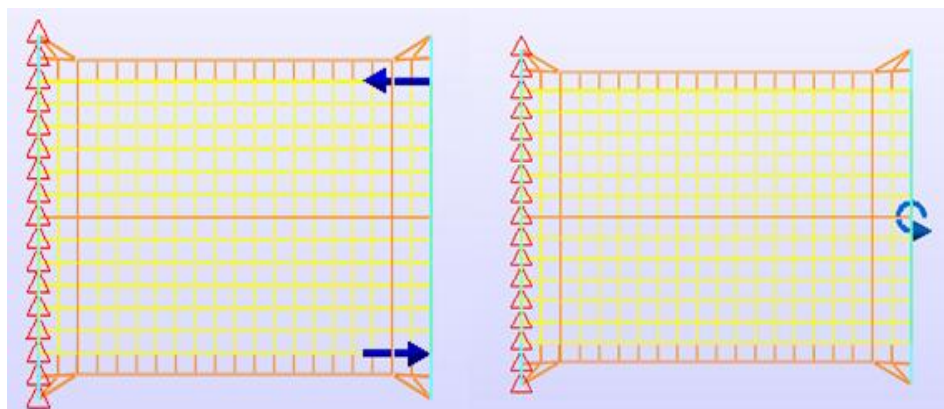
Σχήμα 3.29-Αρίθμηση τμημάτων μοντέλου και μηχανικές ιδιότητες αυτών

Η βασική διαμέριση είναι 50x50 mm ενώ χρησιμοποιήθηκαν οι οριακές συνθήκες που προσομοιάζουν την άρθρωση και την κύλιση στις κάτω ακραίες ακμές όπως και στις περιπτώσεις των αμφιερέιστων κοίλων δοκών.



Σχήμα 3.30-Προσομοίωση οριακών συνθηκών άρθρωση και κύλιση στις κάτω ακραίες ακμές

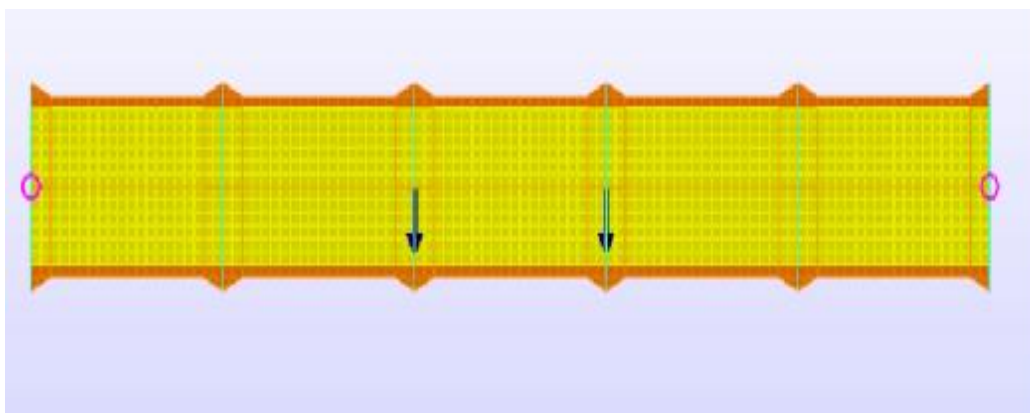
Επιπροσθέτως, για την προσομοίωση της καθαρής κάμψης με περασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκε και το μοντέλο της πακτωμένης προβόλου δοκού στην οποία επιβλήθηκε είτε συγκεντρωμένη ροπή είτε ζεύγος δυνάμεων.



Σχήμα 3.31-Προσομοίωση καθαρής κάμψης πακτωμένου προβόλου δοκού με ζεύγος η συγκεντρωμένη ροπή.

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των στοιχείων είναι 1816 και των κόμβων 1722. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την μη γραμμική ανάλυση είναι της τάξεως των 10 min.

Τέλος, για την διαπίστωση του κατά πόσο επηρεάζεται η κάμψη του μεσαίου τμήματος από τη δυσκαμψία (δηλαδή την γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες) της διάταξη στήριξης χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο αμφιερέιστου δοκού που προέκυψε από επανάληψη του μεσαίου τμήματος πέντε φορές.

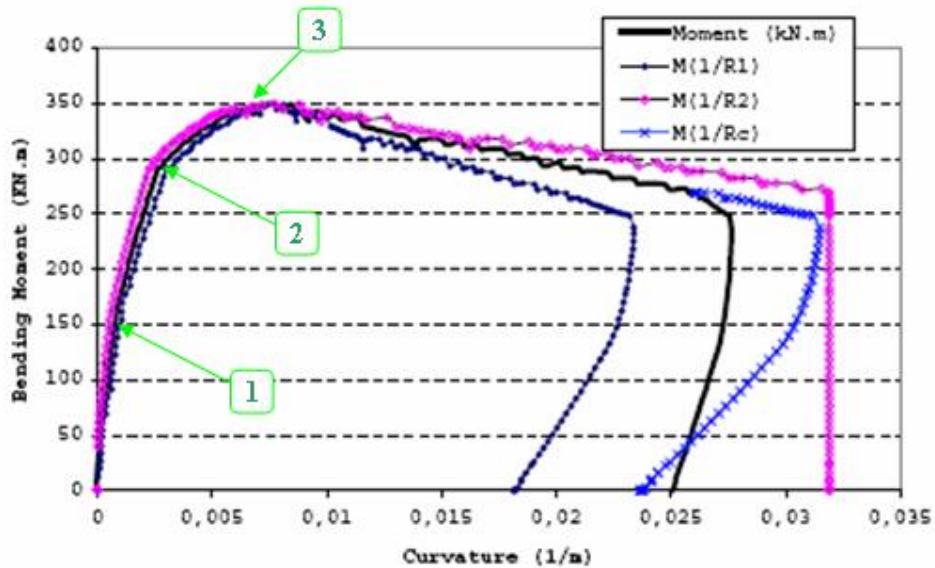


Σχήμα 3.32-Προσομοίωση καθαρής με αμφιέριστη δοκό

Ο αριθμός των στοιχείων είναι 8846 και των κόμβων 7839. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την μη γραμμική ανάλυση είναι της τάξεως των 40 min.

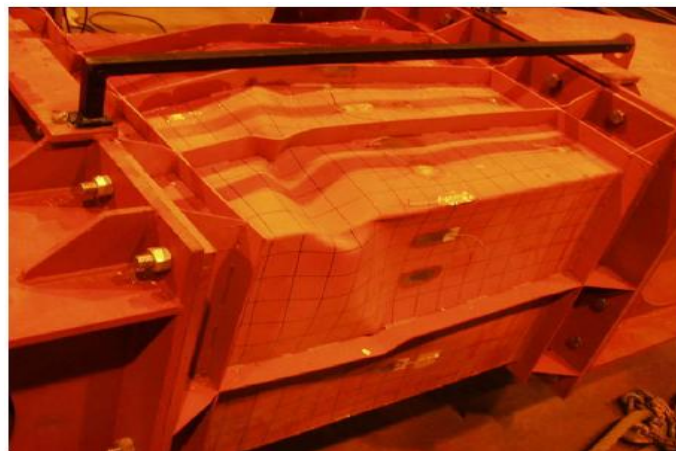
Σύμφωνα με τα στοιχεία του πειράματος, η κατασκευή υποβλήθηκε σε καθαρή διαμήκη προοδευτικά αυξανόμενη κάμψη και στην τιμή 350 kNm επήλθε η κατάρρευση της από

ελαστο-πλαστικό λυγισμό ενώ παράλληλα με κατάλληλες μετρητικές διατάξεις παρήχθη το σχετικό διάγραμμα ροπής καμπυλότητας (βλέπε σχήμα 3.2, 3.28).



Σχήμα 3.33-Διάγραμμα καμπτικής ροπής-καμπυλότητας εργαστηριακού πειράματος

Παρατηρώντας το εργαστηριακό διάγραμμα του σχήματος 3.33 διαπιστώνουμε ότι μέχρι φορτίου 150 kNm η απόκριση είναι γραμμική, ενώ από τα 150 kNm έως τα 300 kNm εξακολουθεί η γραμμικότητα αλλά με μικρότερη κλίση. Στα 300 kNm αρχίζει η πλαστικοποίηση και στα 350 kNm εμφανίζεται το όριο καμπτικής ροπής δηλαδή η μέγιστη καμπτική ροπή που δύναται να αναπτύξει η διατομή.



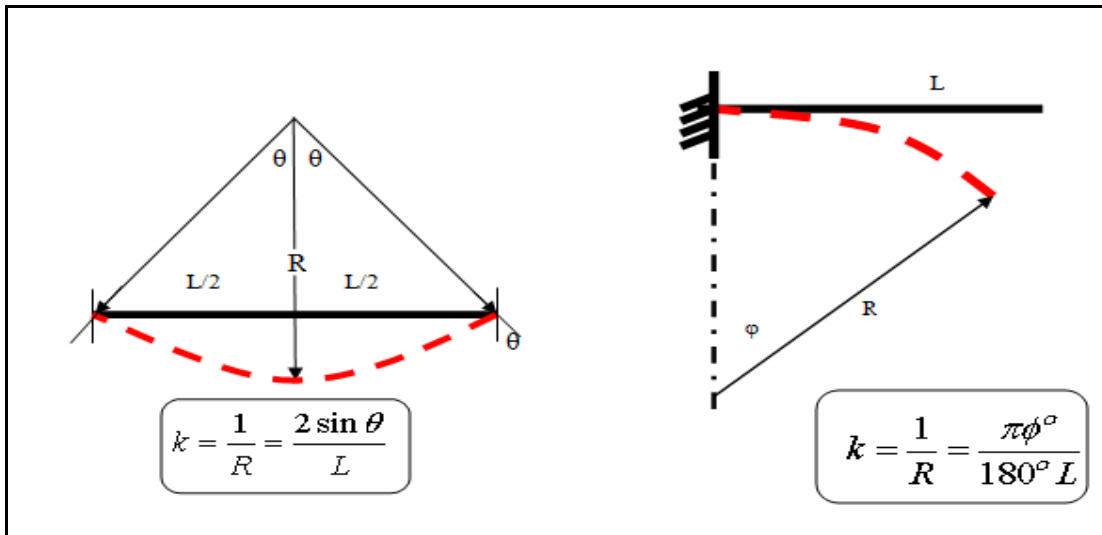
Σχήμα 3.34-Πλαστικές παραμορφώσεις

Σύμφωνα με το εν λόγω διάγραμμα, η μέγιστη ροπή αντιστοιχεί σε καμπυλότητα 0.006 (1/m). Επίσης το βέλος κάμψης που αντιστοιχεί στην μέγιστη ροπή είναι 20 mm (στο σημείο επιβολής της δύναμης).

Κατά την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, επιβλήθηκαν στα μοντέλα βηματικά αυξανόμενες φορτίσεις (δυνάμεις ή συγκεντρωμένες ροπές) έτσι ώστε να προσομοιωθεί το πείραμα και να παρατηρηθεί η συμπεριφορά της κατασκευής υπό καθαρή κάμψη.

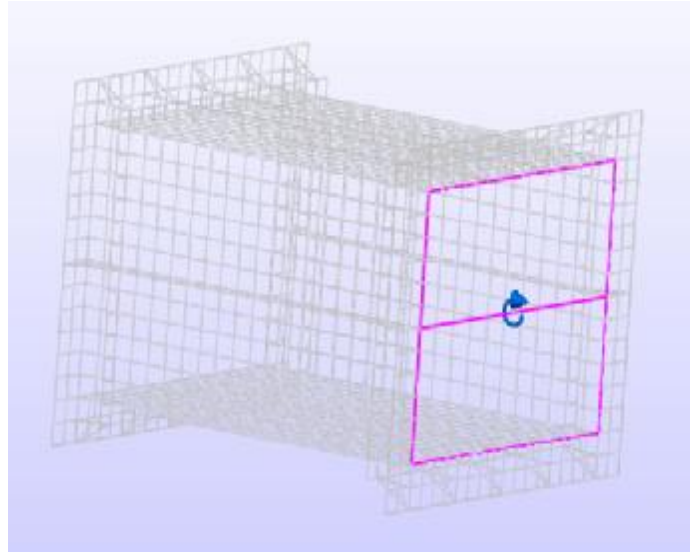
Από τα αρχεία στροφών των κόμβων του προγράμματος και των καμπτικών ροπών κάθε αυξητικού βήματος εκπονήθηκαν τα διαγράμματα καμπτικών ροπών M ως προς την καμπυλότητα κ του κάθε μοντέλου.

Όλα τα μοντέλα F.E.A. εμφάνισαν μεγαλύτερη μέγιστη καμπτική ροπή από αυτή του πειράματος, τα δε βέλη κάμψης που αντιστοιχούν στις μέγιστες ροπές είναι αρκετά μικρότερα από αυτά του πειράματος.



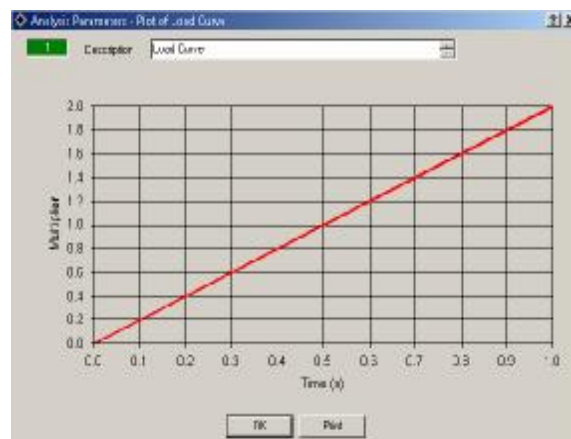
Σχήμα 3.35- Σχέση καμπυλότητας- στροφής εγκάρσιας διατομής σε πρόβολο και αμφιέριστη δοκό.

Κατά την προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία, η διατήρηση επιπεδότητας των διατομών κατά την κάμψη καθώς και η εφαρμογή της συγκεντρωμένης ροπής επιτεύχθηκε με την χρήση ενός άκαμπτου (*rigid*) πλαισίου αποτελούμενου από στοιχεία δοκού αυξημένης στιβαρότητας, συναρμοσμένου στις ακραίες ακμές της δοκού.



Σχήμα 3.36-Ακαμπτο πλαίσιο στην ακραία ακμή προβόλου για διατήρηση επιπεδότητας διατομών κατά την κάμψη και εφαρμογή συγκεντρωμένης ροπής ή επιβεβλημένης στροφής.

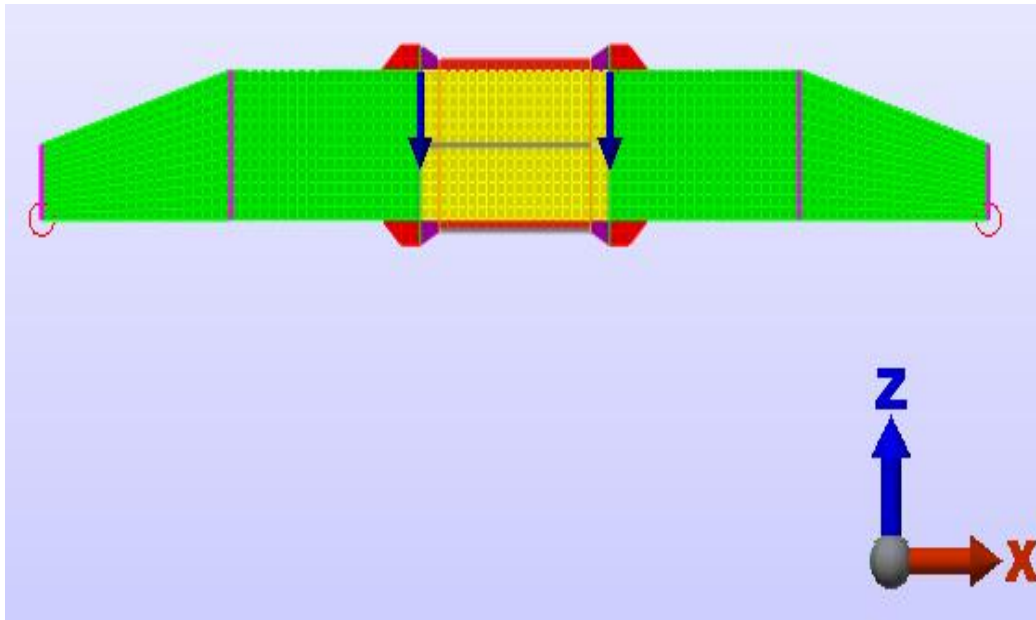
Η βηματική αύξηση των φορτίων είναι γραμμική. Η καμπύλη φόρτισης (ευθεία) ξεκινά από την αρχική τιμή μηδέν και φθάνει σε τιμή διπλάσια του πειραματικού φορτίου κατάρρευσης σε 50 διακριτά βήματα. Τα βήματα, παρόλο που στο πρόγραμμα ονομάζονται βήματα χρόνου (time steps), δεν εισάγουν στοιχεία δυναμικής ανάλυσης. Στη στατική μη γραμμική ανάλυση του προγράμματος θεωρούνται ως βήματα ψευδοχρόνου και χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση της καμπύλης φορτίσεως.



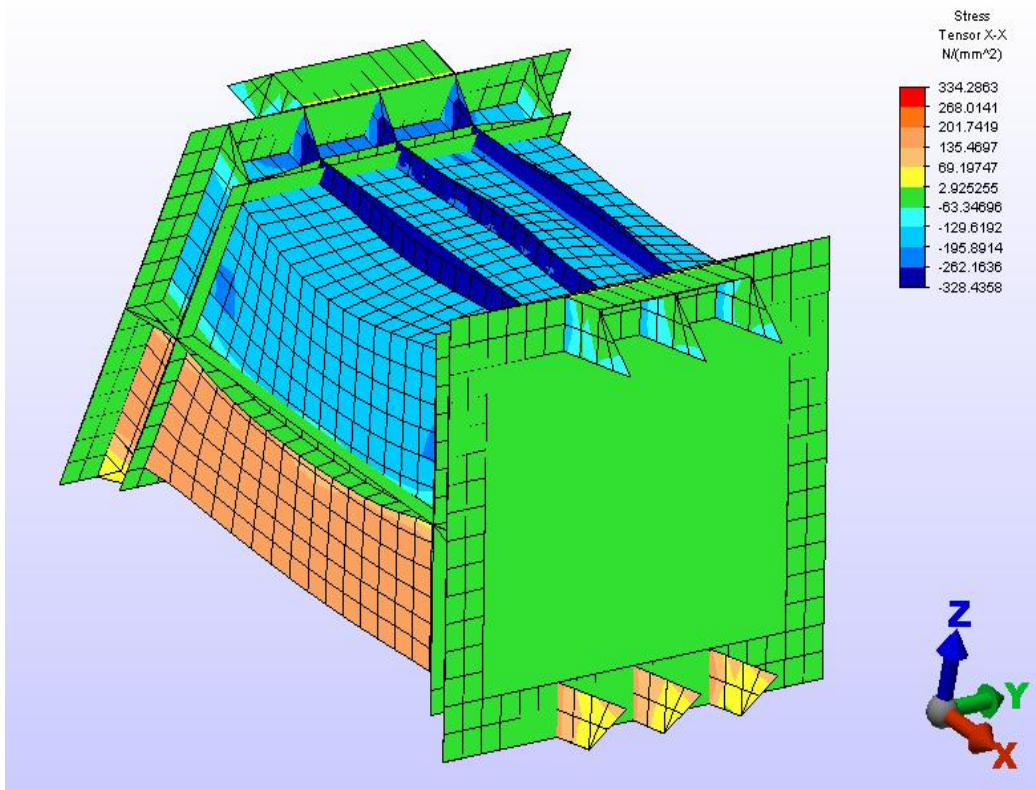
Σχήμα 3.37-Καμπύλη φορτίσεως

Στη συνέχεια παρατίθενται διάφορα μοντέλα και τα αποτελέσματα της μη γραμμικής ανάλυσης (non linear static) στο ALGOR.

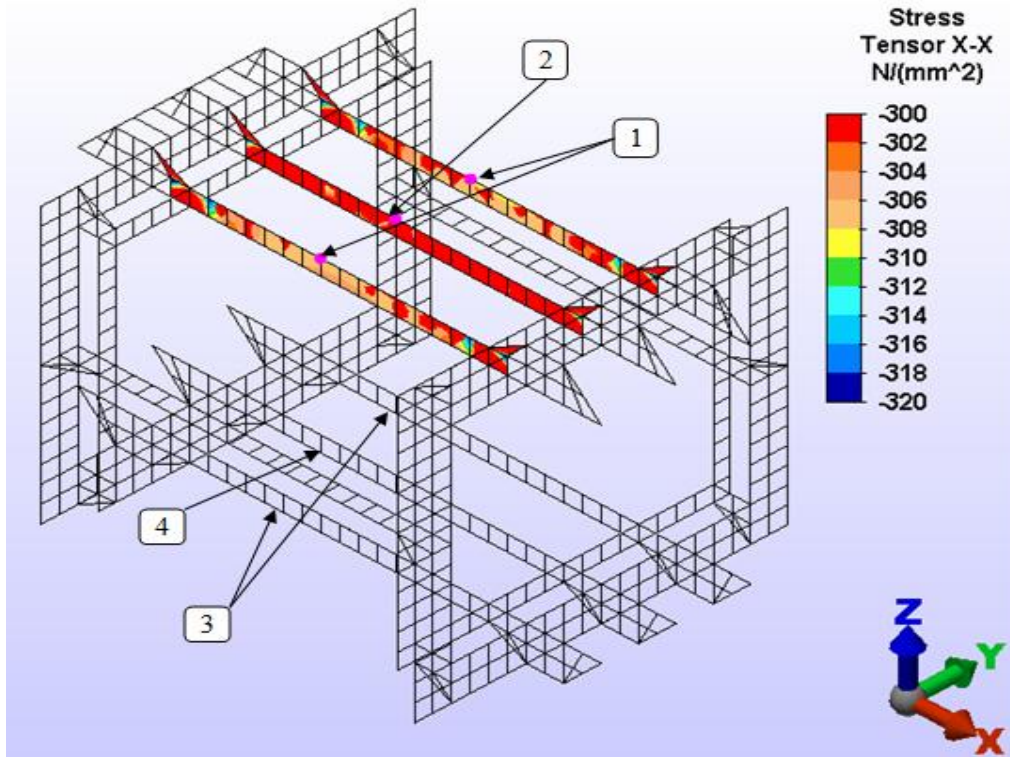
3.5.1 ΜΟΝΤΕΛΟ 1: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕ ΦΡΑΚΤΕΣ



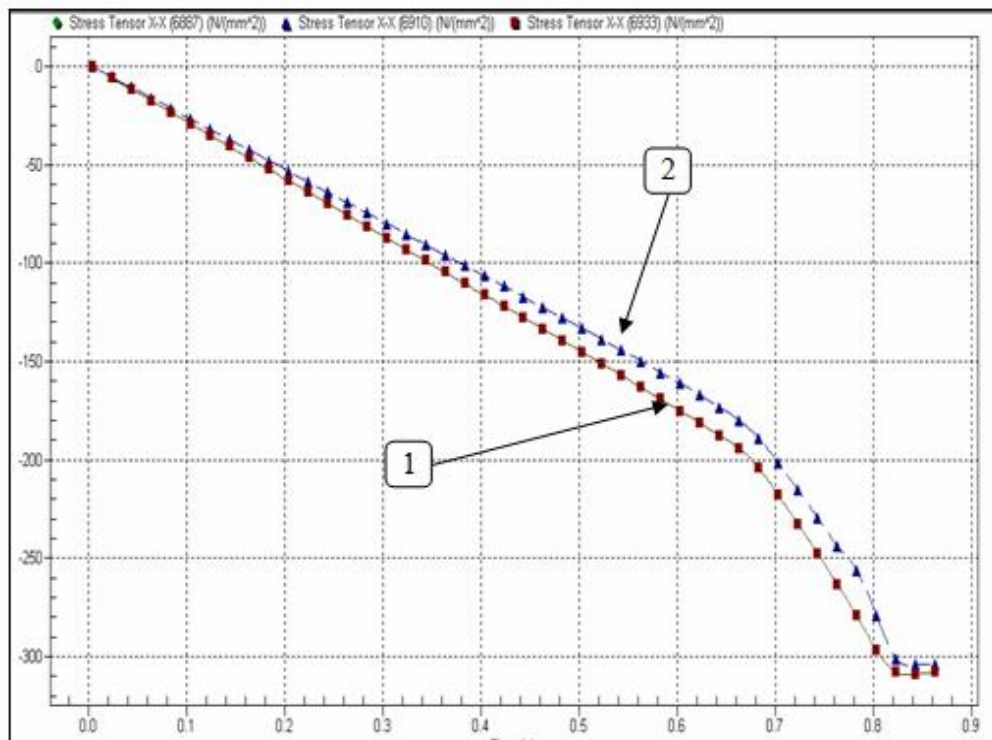
Σχήμα 3.38- Επιβολή δυνάμεων και οριακών συνθηκών



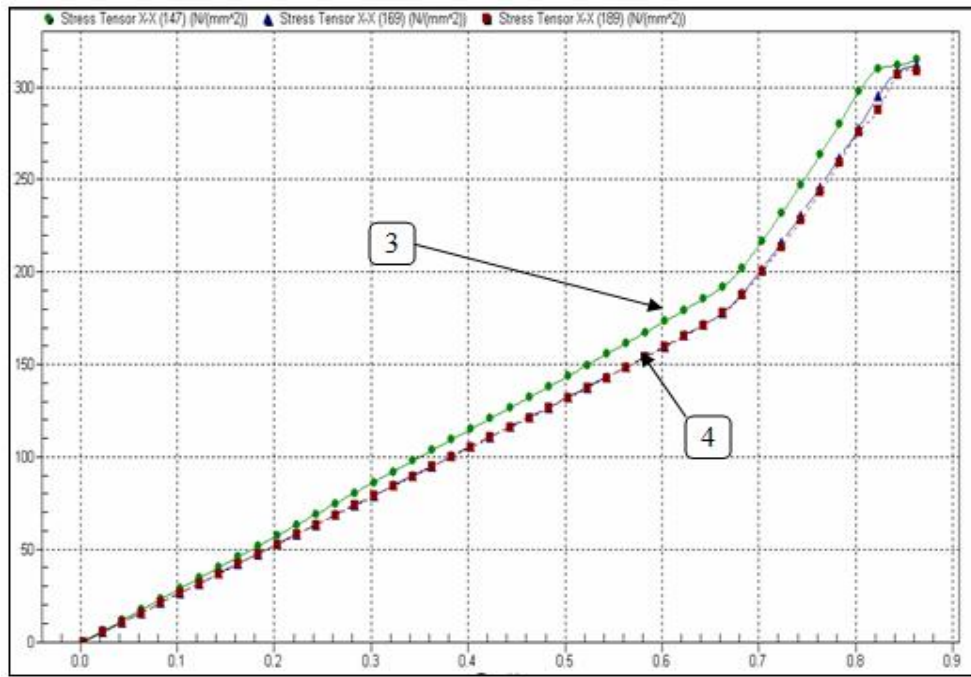
Σχήμα 3.39- Παραμορφωμένο μοντέλο



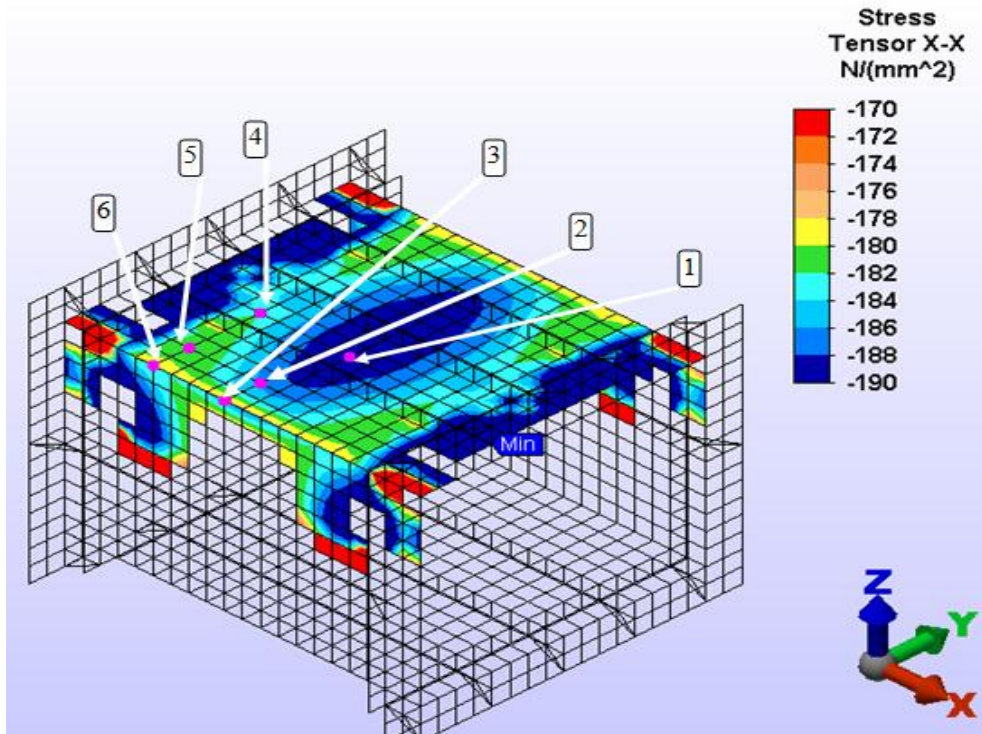
Σχήμα 3.40-Κατανομή θλιπτικών τάσεων σ_{11} στα ενισχυτικά και επιλογή σημείων ενισχυτικών 1-4



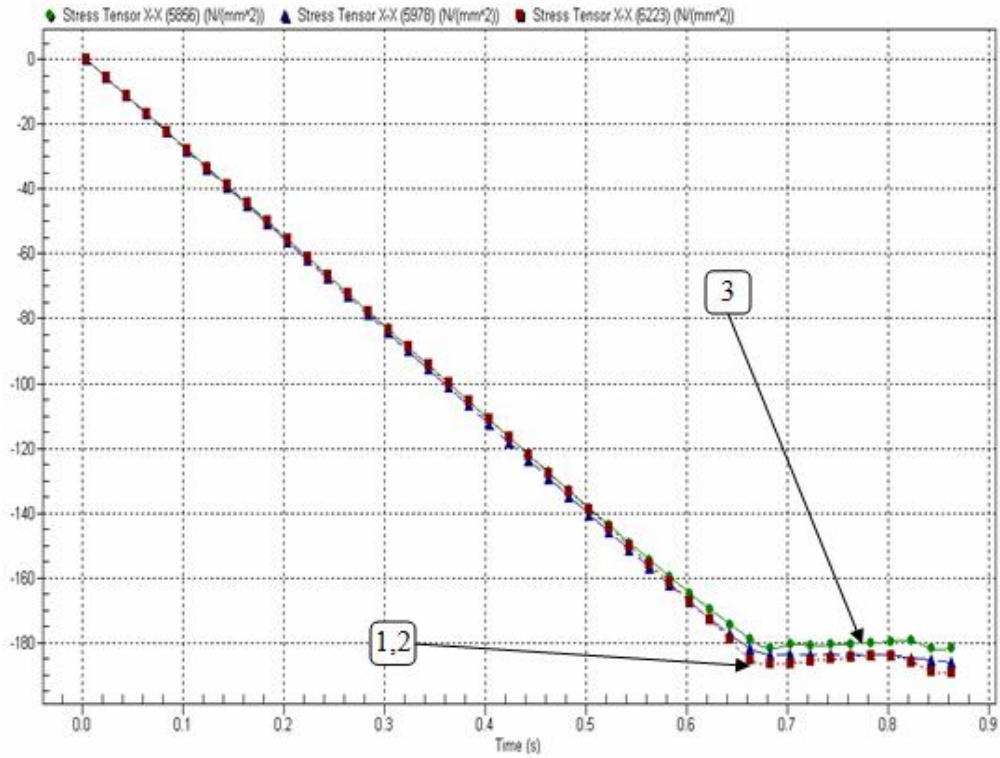
Σχήμα 3.41-Ορθές θλιπτικές τάσεις σημείων 1,2



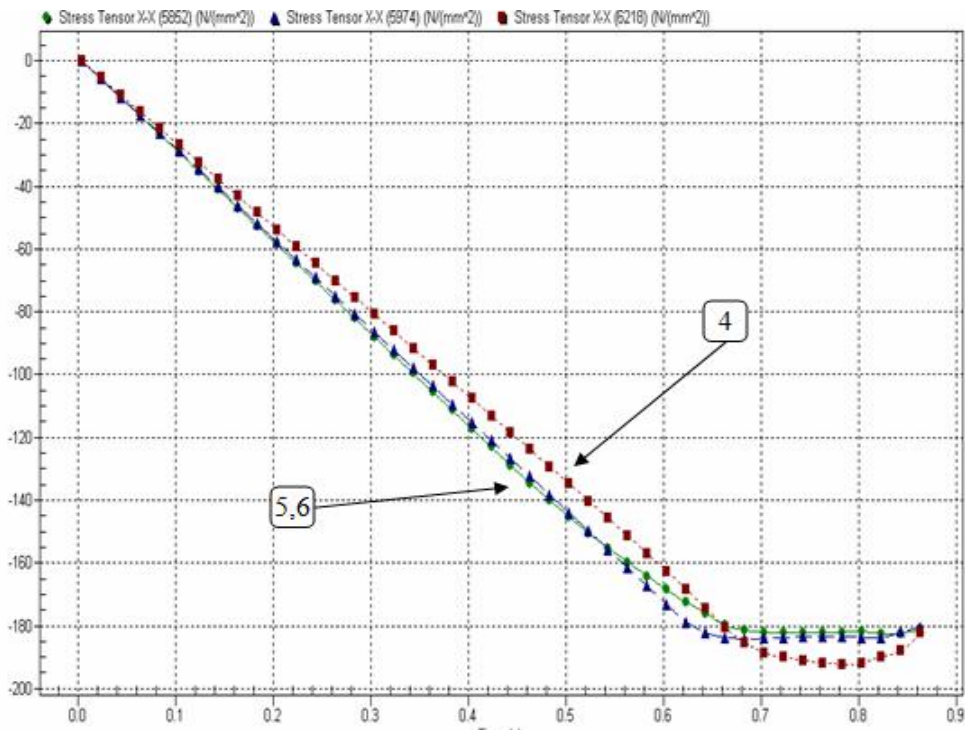
Σχήμα 3.42-Ορθές εφελκυστικές τάσεις σημείων 3,4



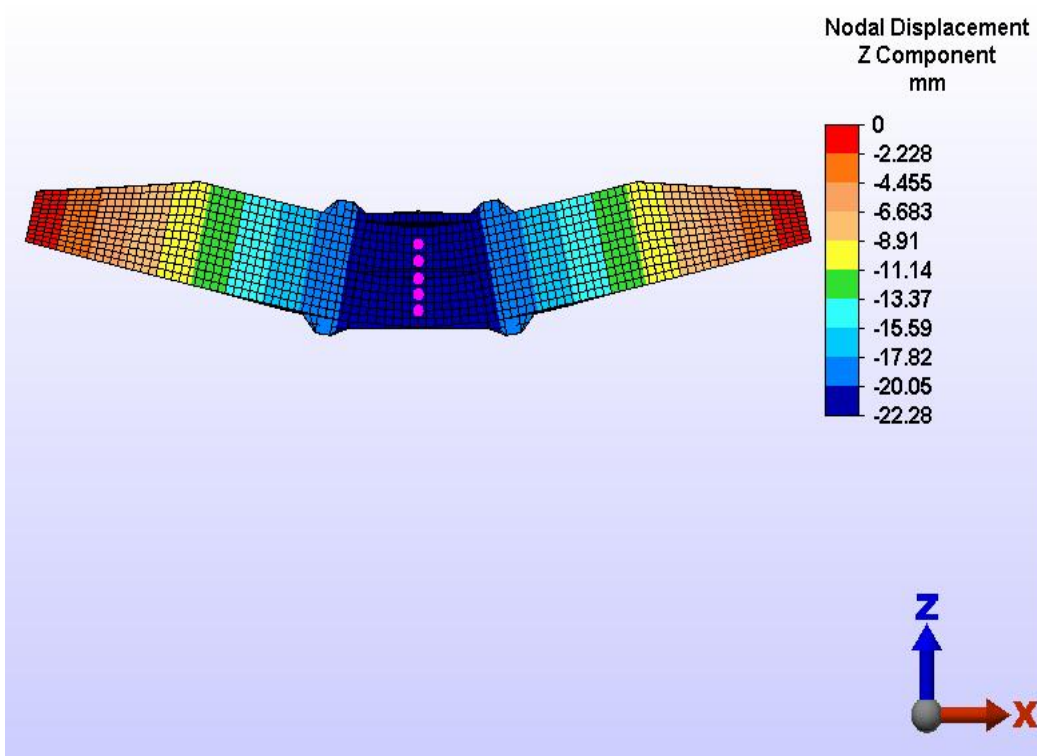
Σχήμα 3.43- Κατανομή ορθών θλιπτικών τάσεων στο έλασμα και επιλογή σημείων 1-6



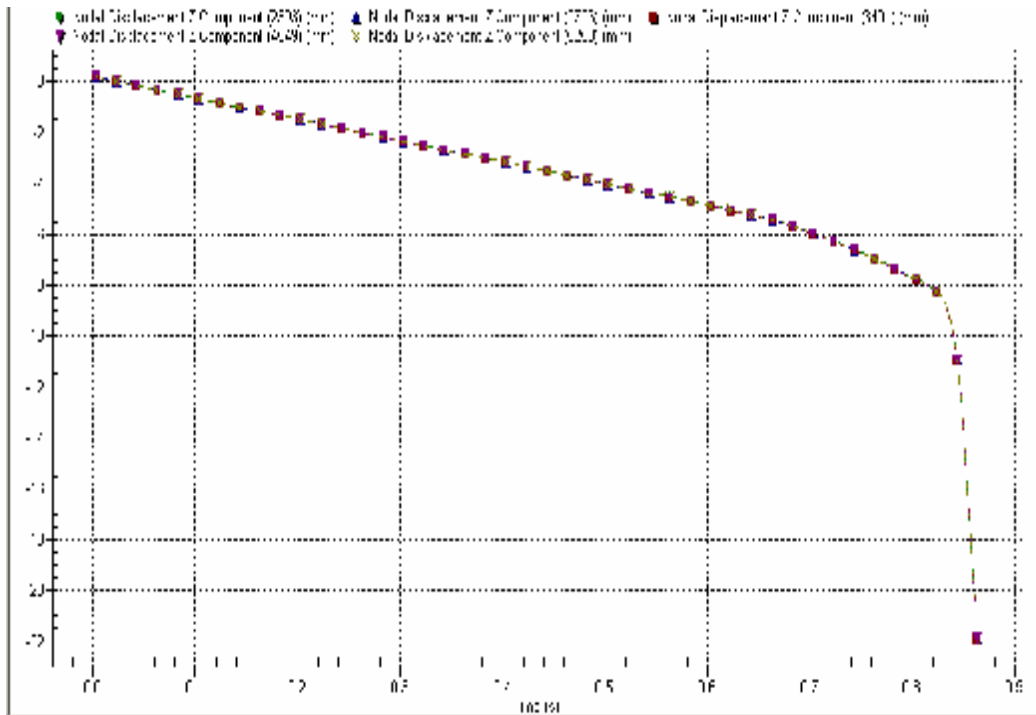
Σχήμα 3.44- Ορθές θλιπτικές τάσεις σημείων 1,2,3



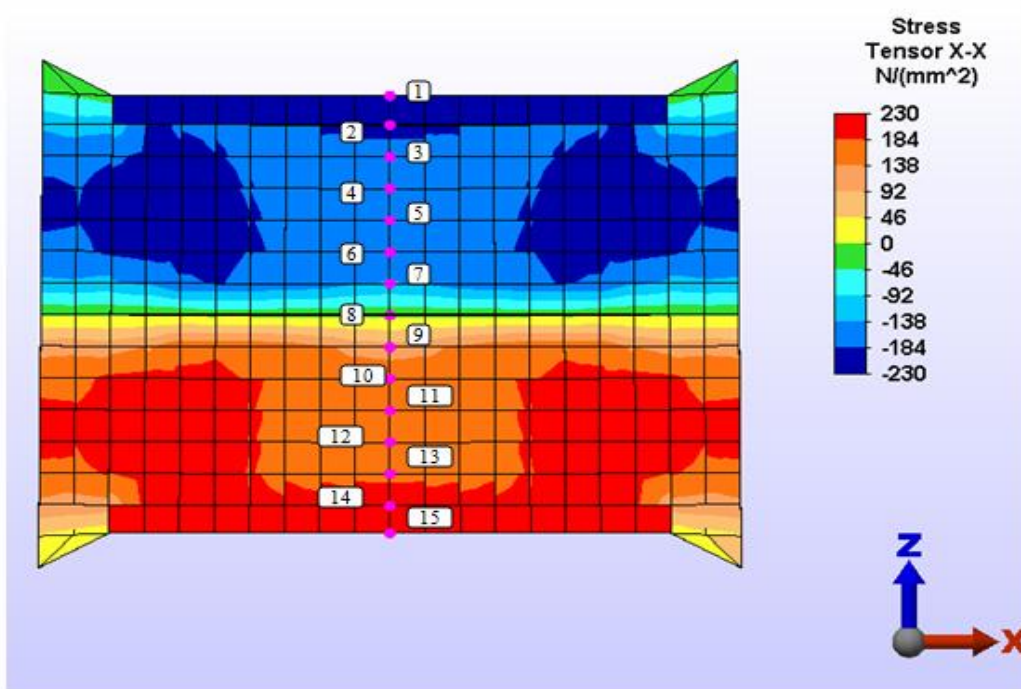
Σχήμα 3.45-Ορθές θλιπτικές τάσεις σημείων 4,5,6



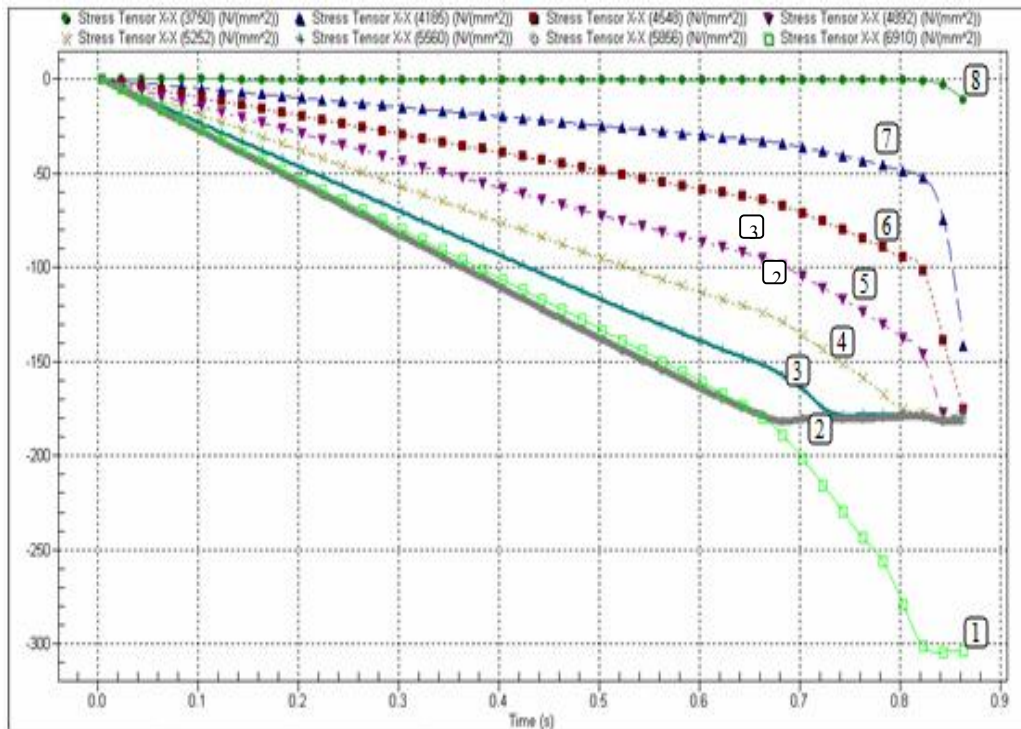
Σχήμα 3.46-Κατακόρυφες μετατοπίσεις και επιλογή σημείων



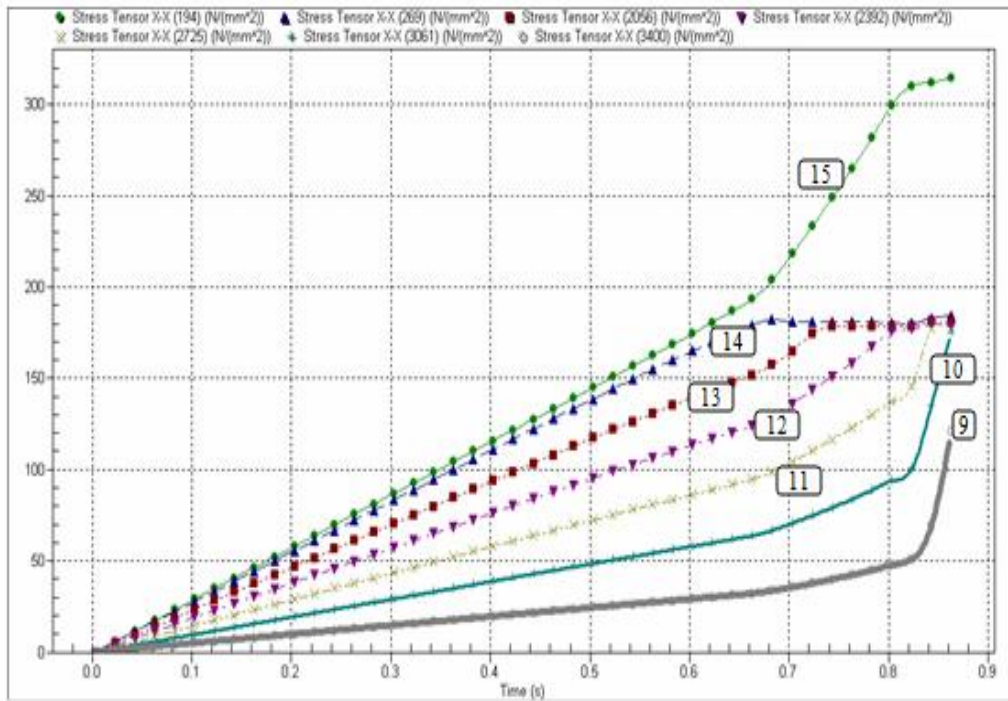
Σχήμα 3.47-Κατακόρυφες μετατοπίσεις επιλεγμένων σημείων σχήματος 3.46



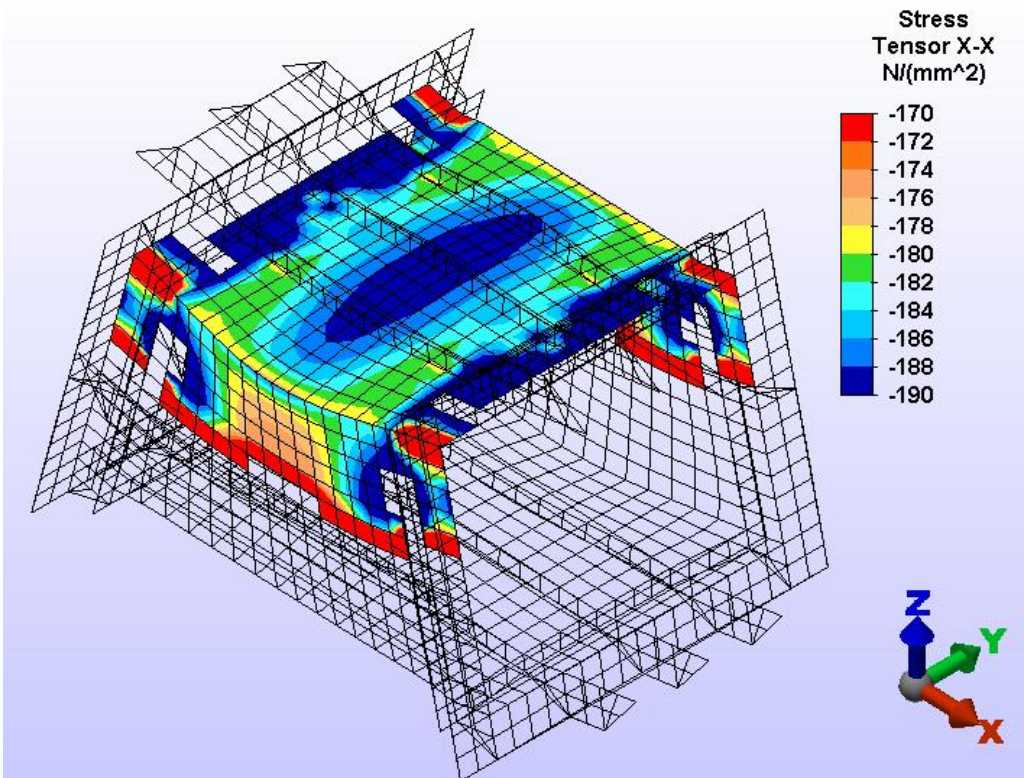
Σχήμα 3.48-Επιλογή σημείων 1-15



Σχήμα 3.49-Κατανομή θλιπτικών τάσεων σ_{xx} σημείων 1-8
σχήματος 3.48



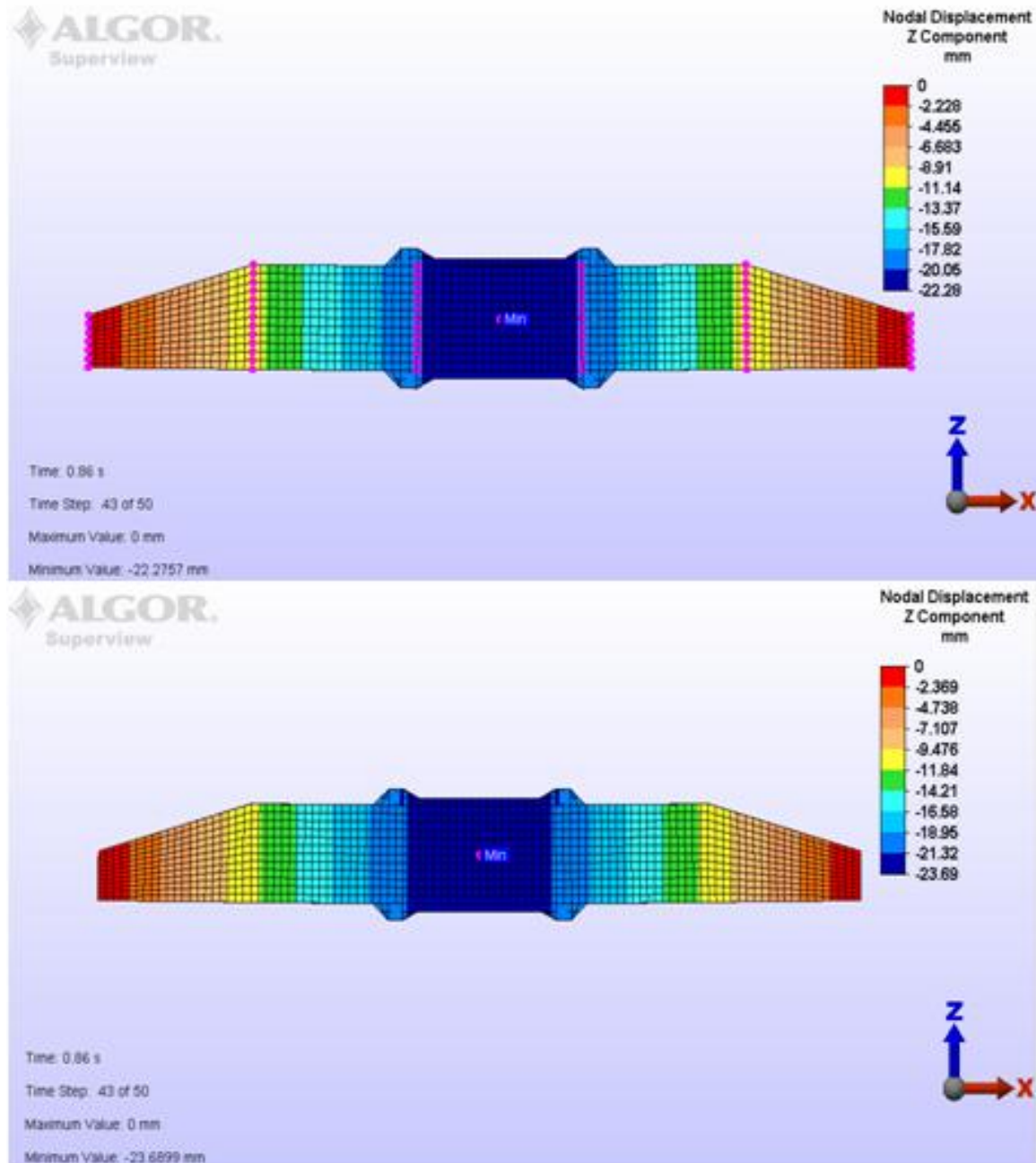
Σχήμα 3.50-Κατανομή εφελκυστικών τάσεων σ_{xx} σημείων 9-15 σχήματος 3.48



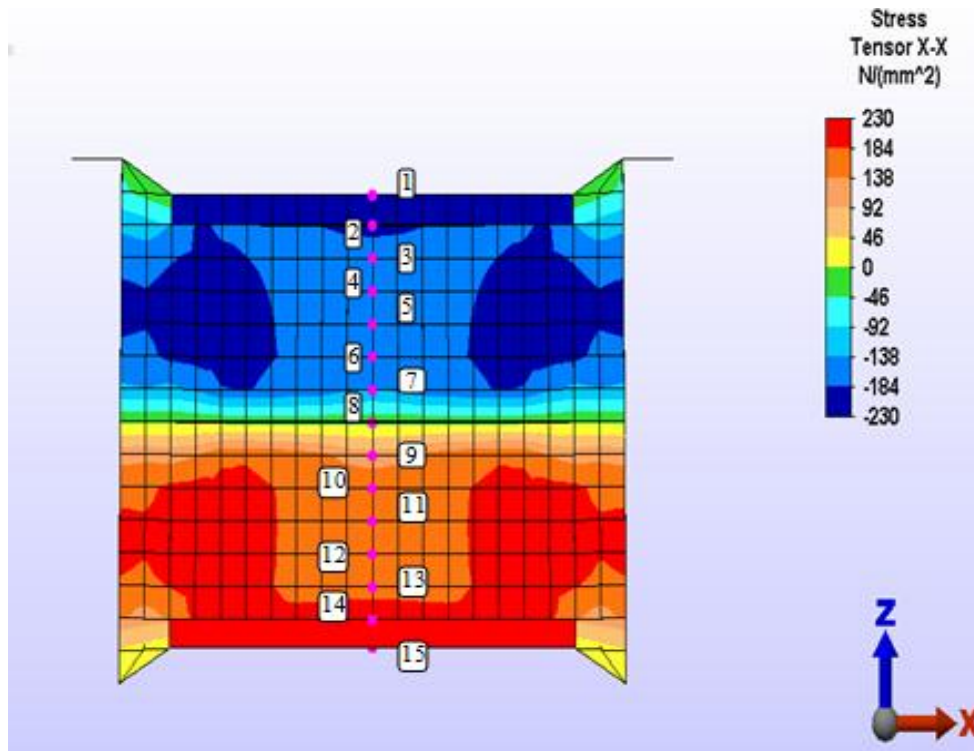
Σχήμα 3.51-Παρουσίαση παραμορφωμένου σώματος

3.5.2 ΜΟΝΤΕΛΟ 2: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΧΩΡΙΣ ΦΡΑΚΤΕΣ

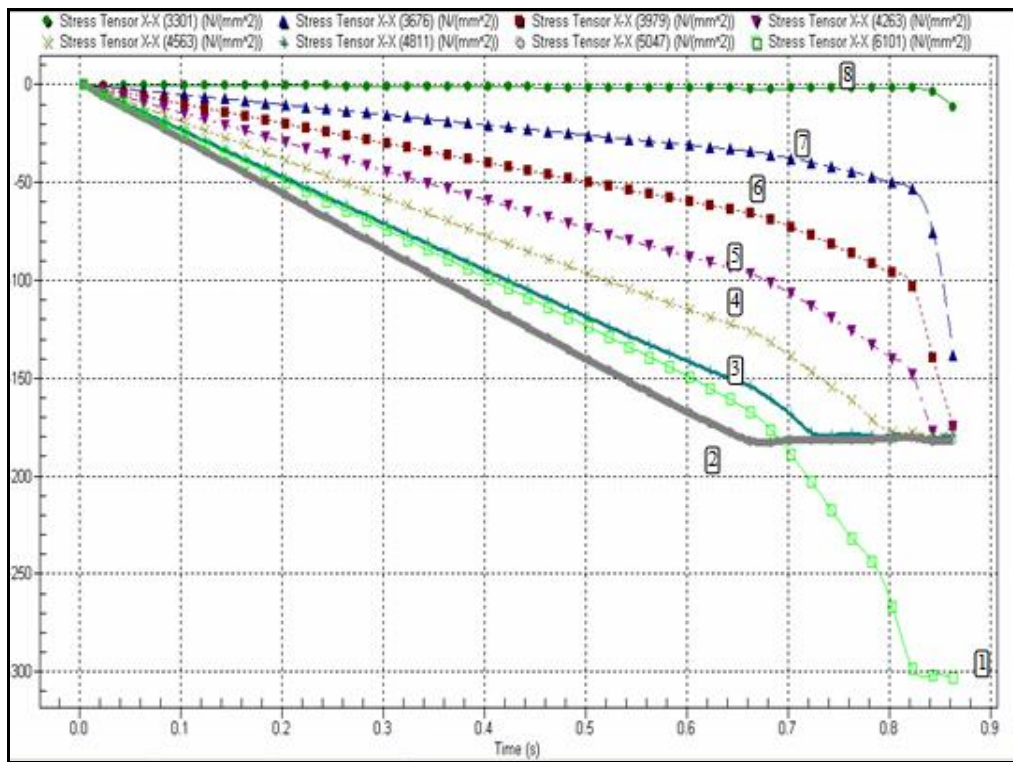
Η απομάκρυνση των εγκάρσιων φρακτών μειώνει την καμπτική δυσκαμψία έναντι του ίδιου μοντέλου με φρακτές. Στο μοντέλο χωρίς φρακτές εμφανίζονται μεγαλύτερα κατά 6% βέλη κάμψης ενώ οι κατανομές των τάσεων δεν έχουν ουσιαστικές διαφορές.



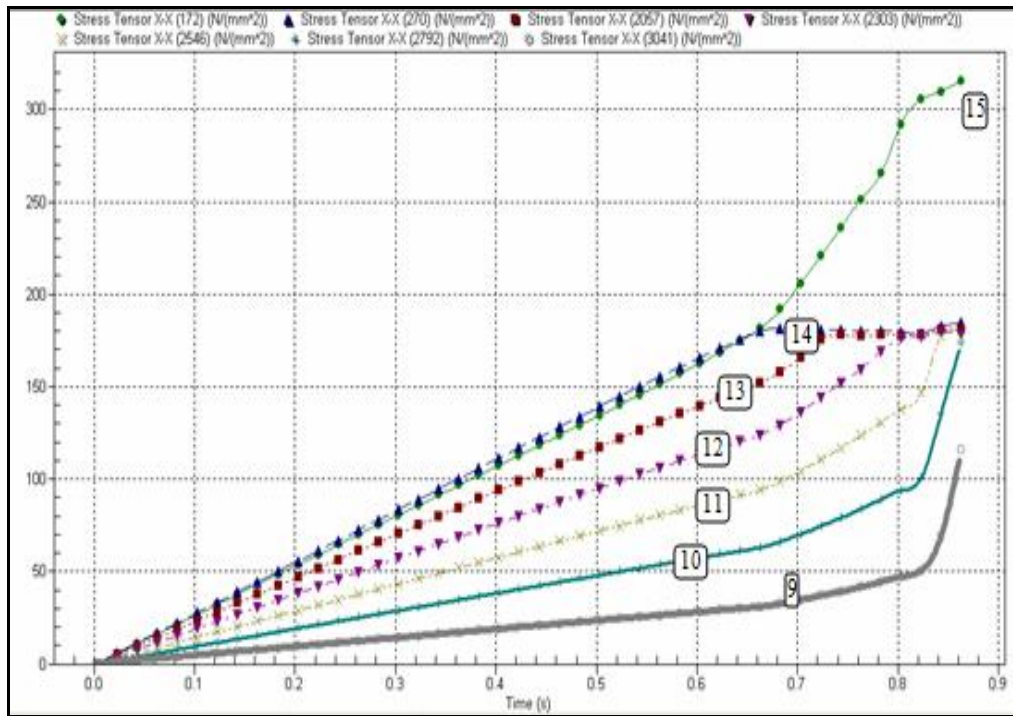
Σχήμα 3.52-Διαφοροποίηση βελών κάμψης στο μοντέλο με φρακτές (άνω)
από το μοντέλο χωρίς φρακτές (κάτω)



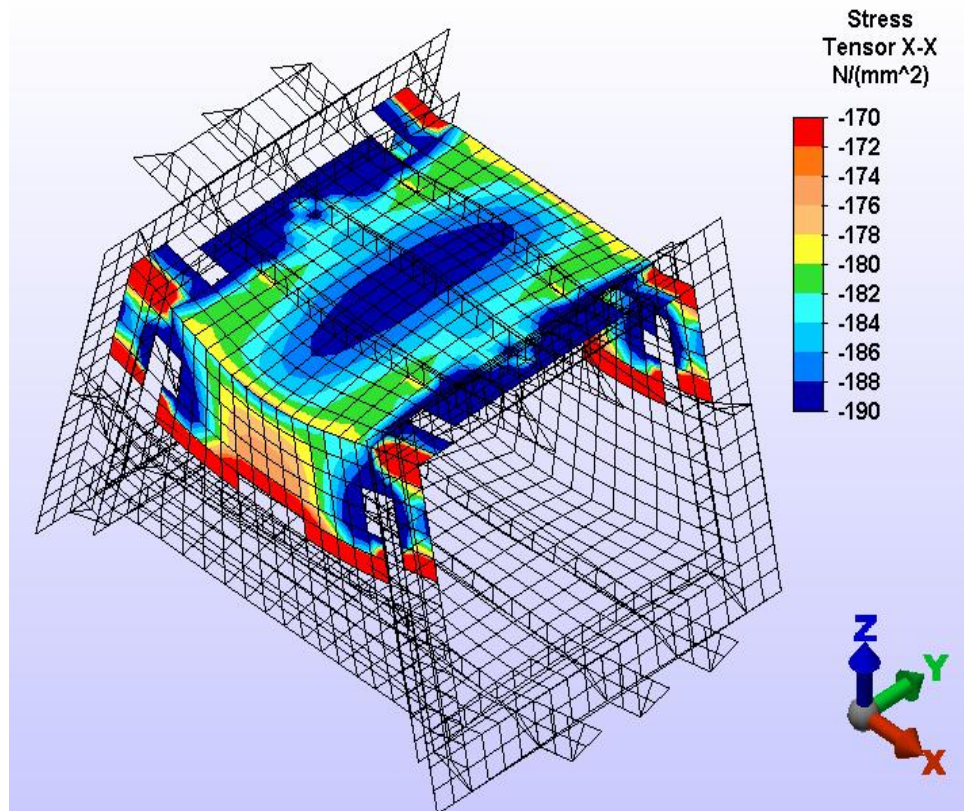
Σχήμα 3.53-Επιλογή σημείων 1-15



Σχήμα 3.54-Κατανομή θλιπτικών τάσεων σ_{xx} σημείων 1-8 σχήματος 3.54



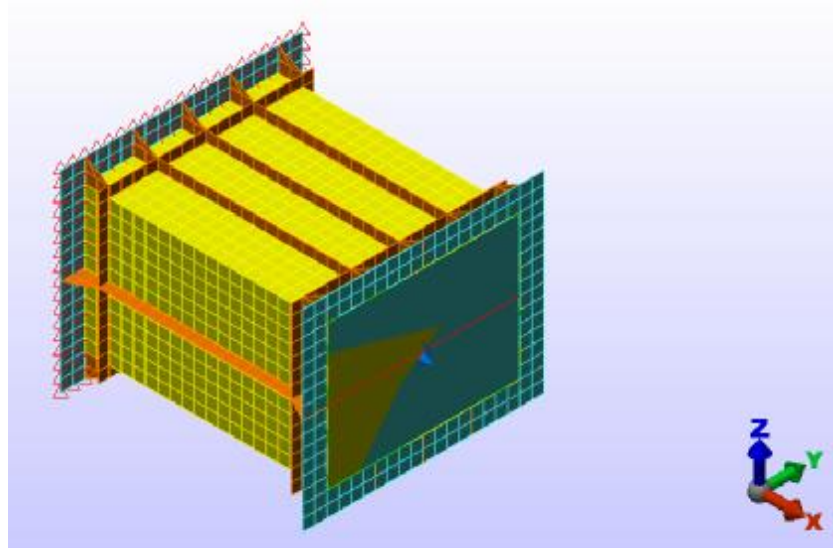
Σχήμα 3.55- Κατανομή εφελκυστικών τάσεων σ_{xx} σημείων 9-15 σχήματος 3.54



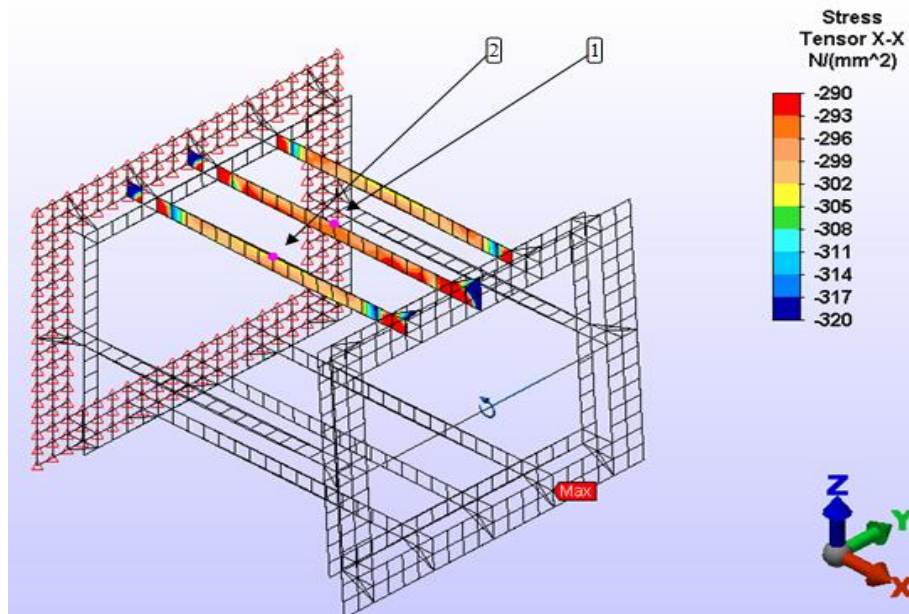
Σχήμα 3.56- Κατανομή ορθών θλιπτικών τάσεων στο έλασμα

3.5.3 ΜΟΝΤΕΛΟ 3: ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΗ ΡΟΠΗ ΣΕ ΑΚΑΜΠΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

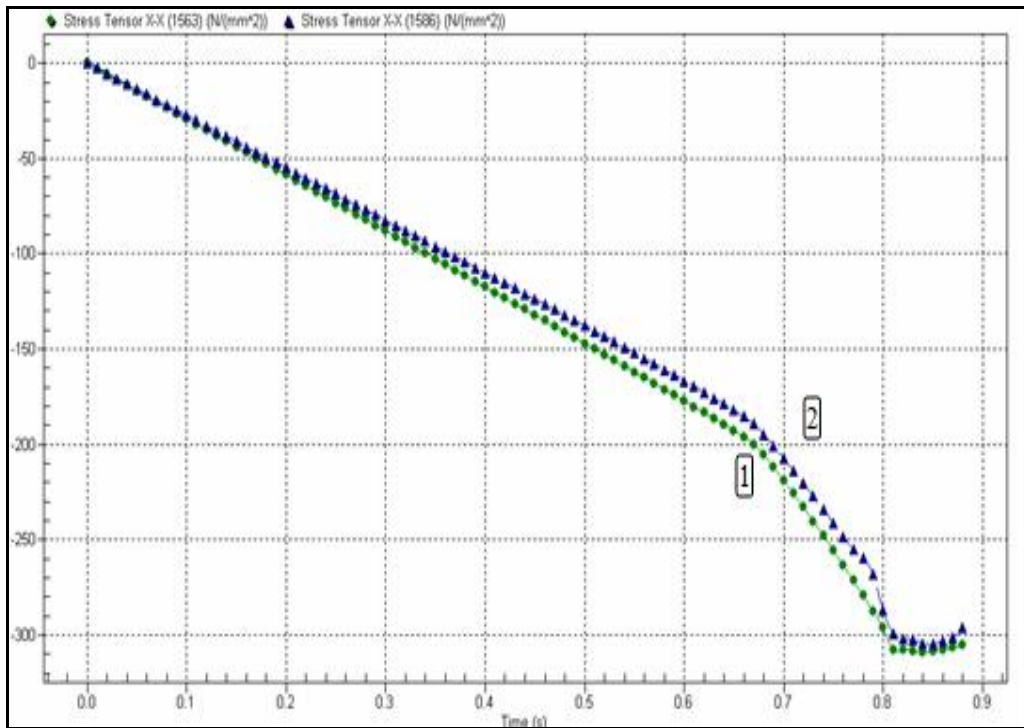
Η προσομοίωση της καθαρής κάμψης με μοντέλο προβόλου και εφαρμογή συγκεντρωμένης ροπής σε κόμβο του ακάμπτου πλαισίου εξασφαλίζει την επιπεδότητα των διατομών κατά την κάμψη



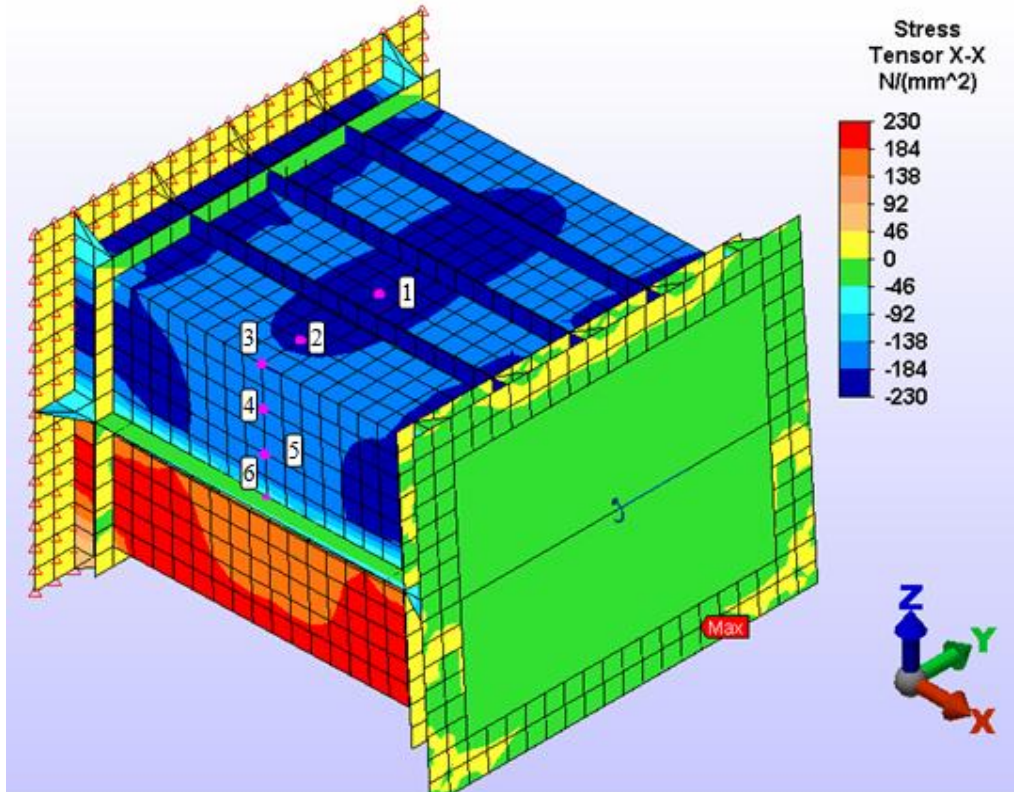
Σχήμα 3.57-Προσομοίωση της καθαρής κάμψης με μοντέλο προβόλου και εφαρμογή συγκεντρωμένης ροπής



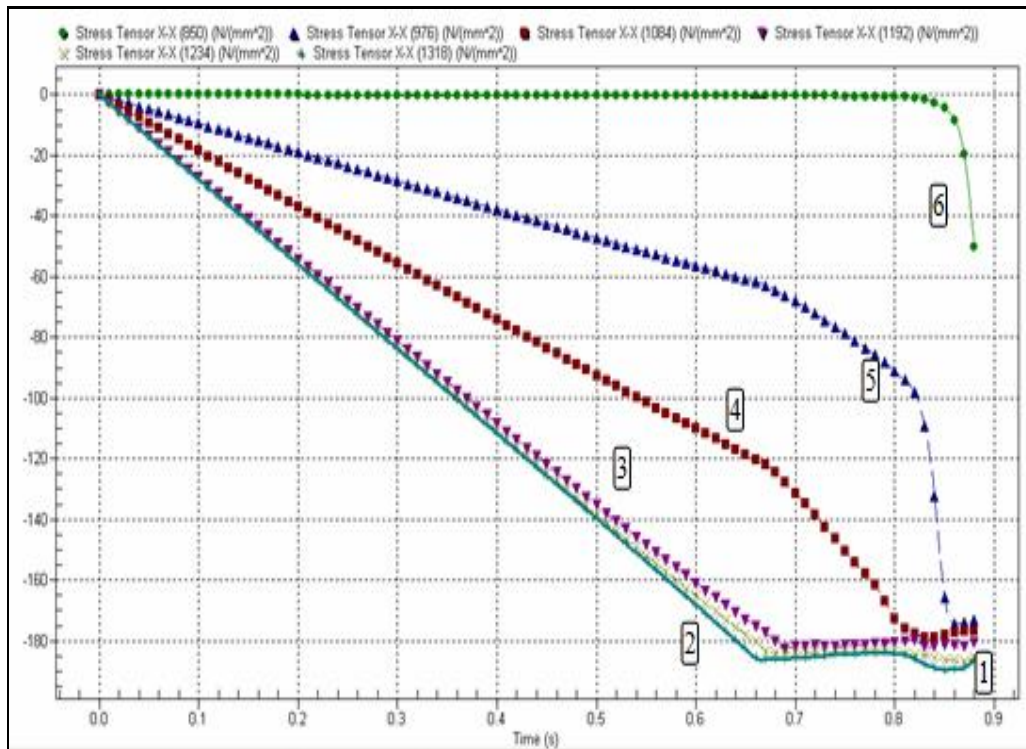
Σχήμα 3.58-Κατανομή θλιπτικών τάσεων σ_{xx} στα ενισχυτικά και επιλογή σημείων να ενισχυτικών 1,2



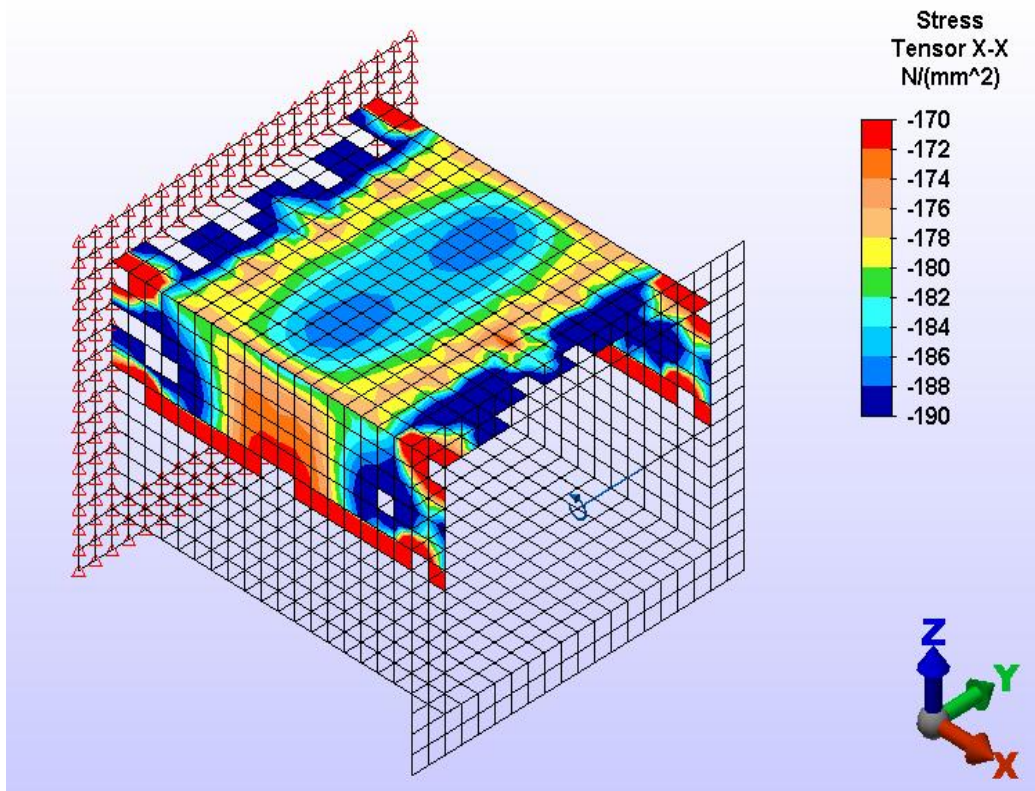
Σχήμα 3.59-Ορθές θλιπτικές τάσεις σημείων 1,2 σχήματος 3.59



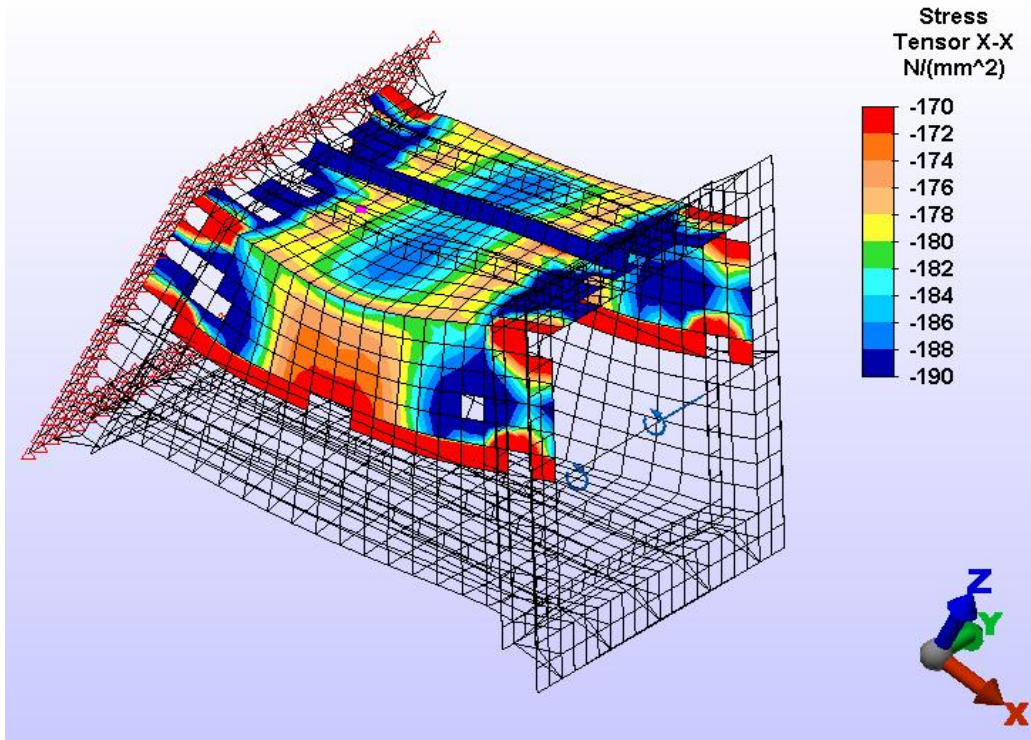
Σχήμα 3.60-Επιλογή σημείων 1-6



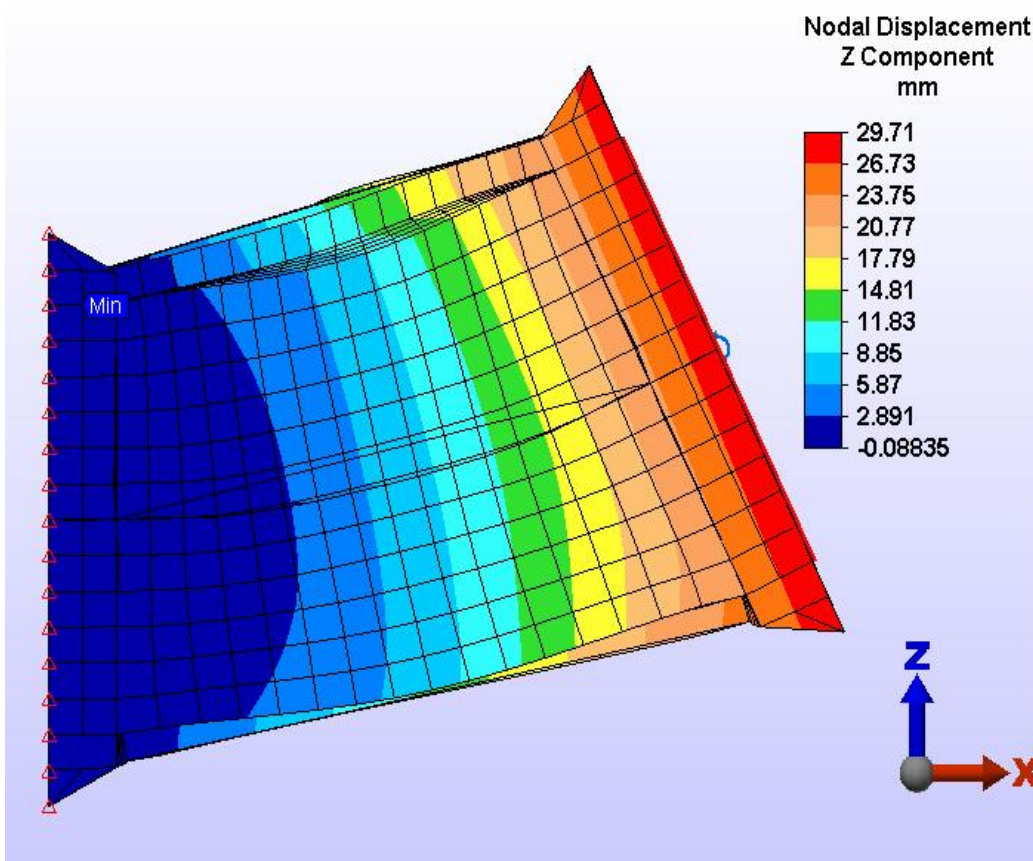
Σχήμα 3.61-Κατανομή θλιπτικών τάσεων στο έλασμα
στα σημεία 1-6 της εικόνας 3.60



Σχήμα 3.62-Κατανομή θλιπτικών ορθών τάσεων σ_{xx} στο έλασμα

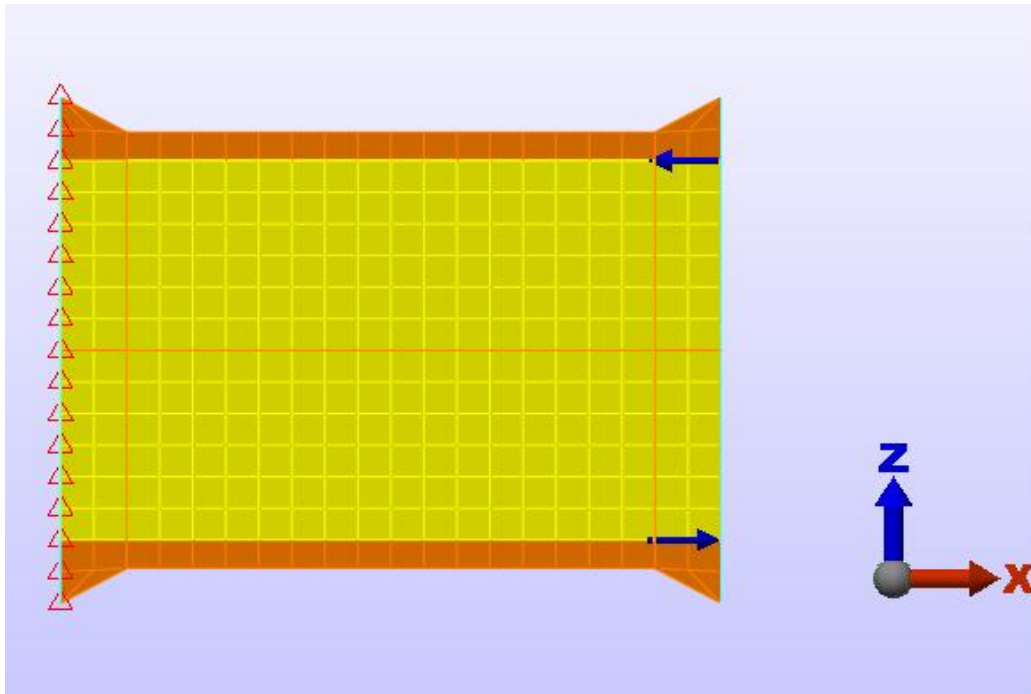


Σχήμα 3.63-Παραμορφωμένο σώμα

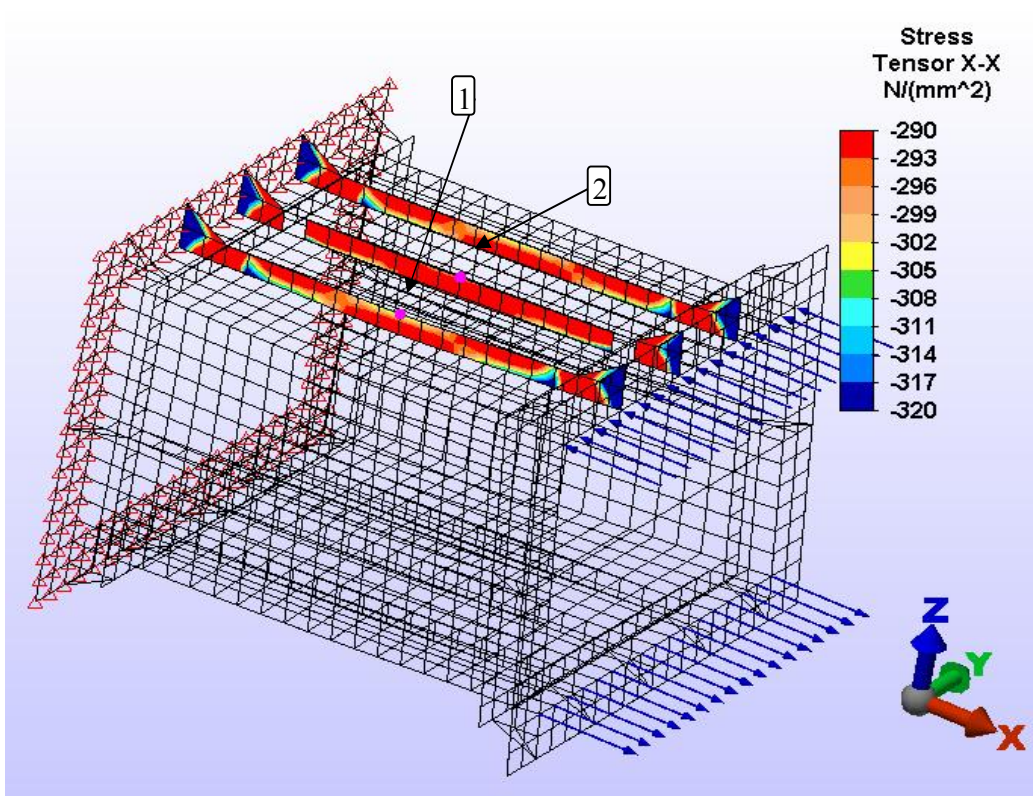


Σχήμα 3.64-Διατήρηση επιπεδότητας διατομών

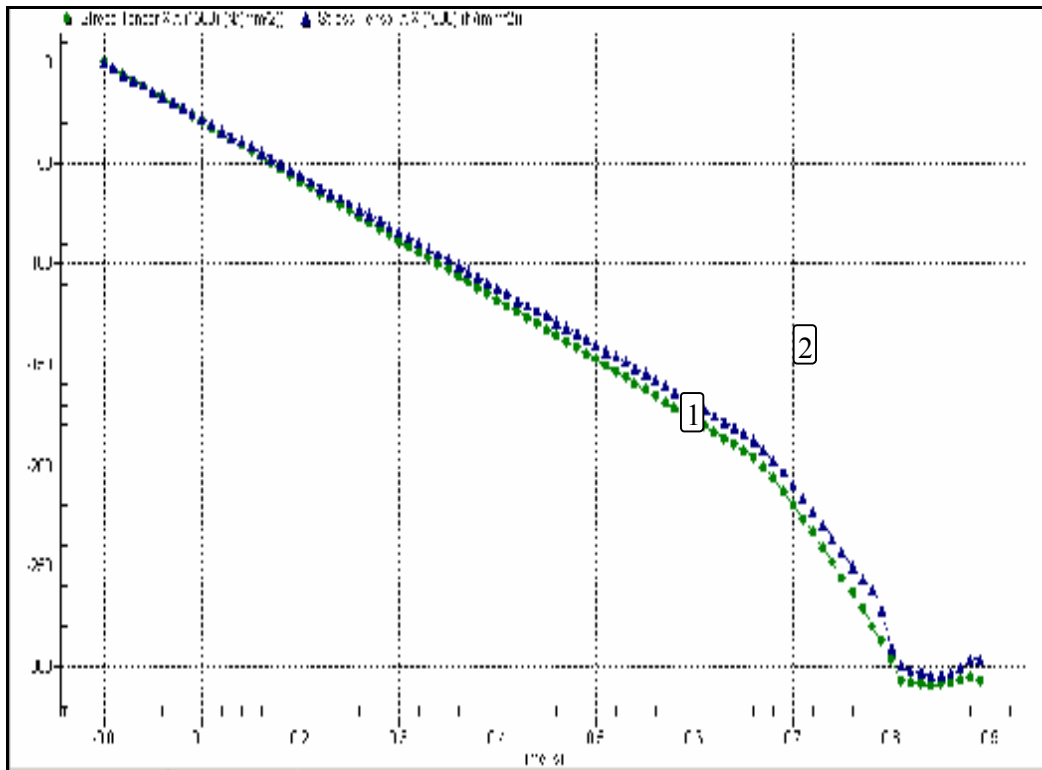
3.5.4 ΜΟΝΤΕΛΟ 4: ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΑΚΑΜΠΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ



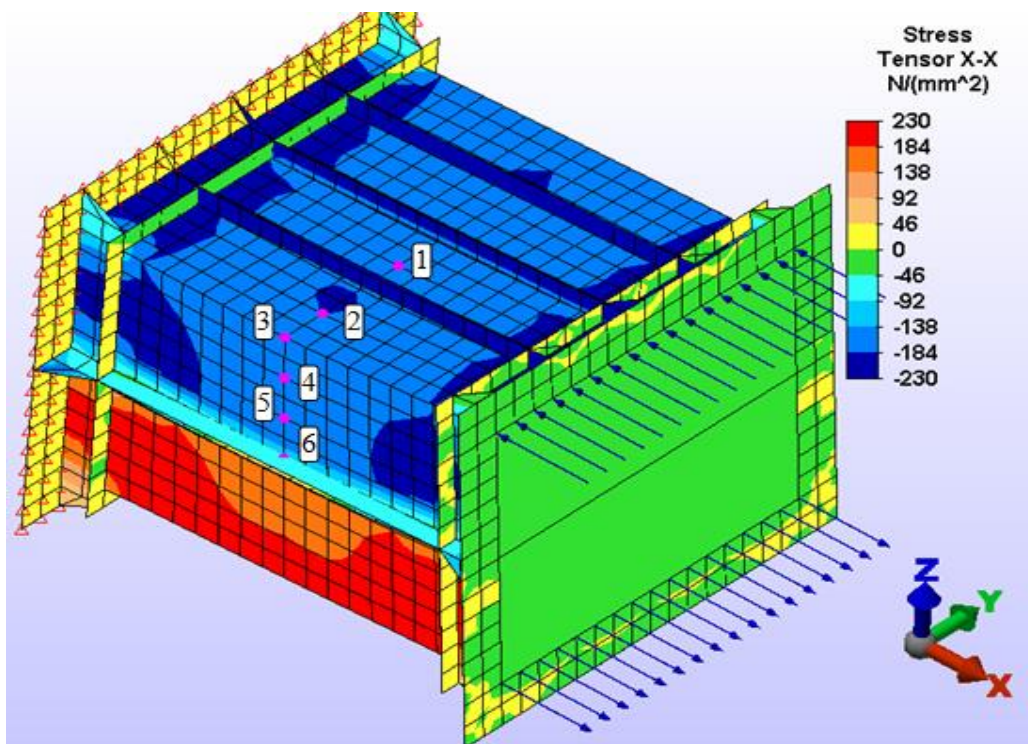
Σχήμα 3.65-Καθαρή κάμψη πακτωμένου προβόλου με ζεύγος δυνάμεων



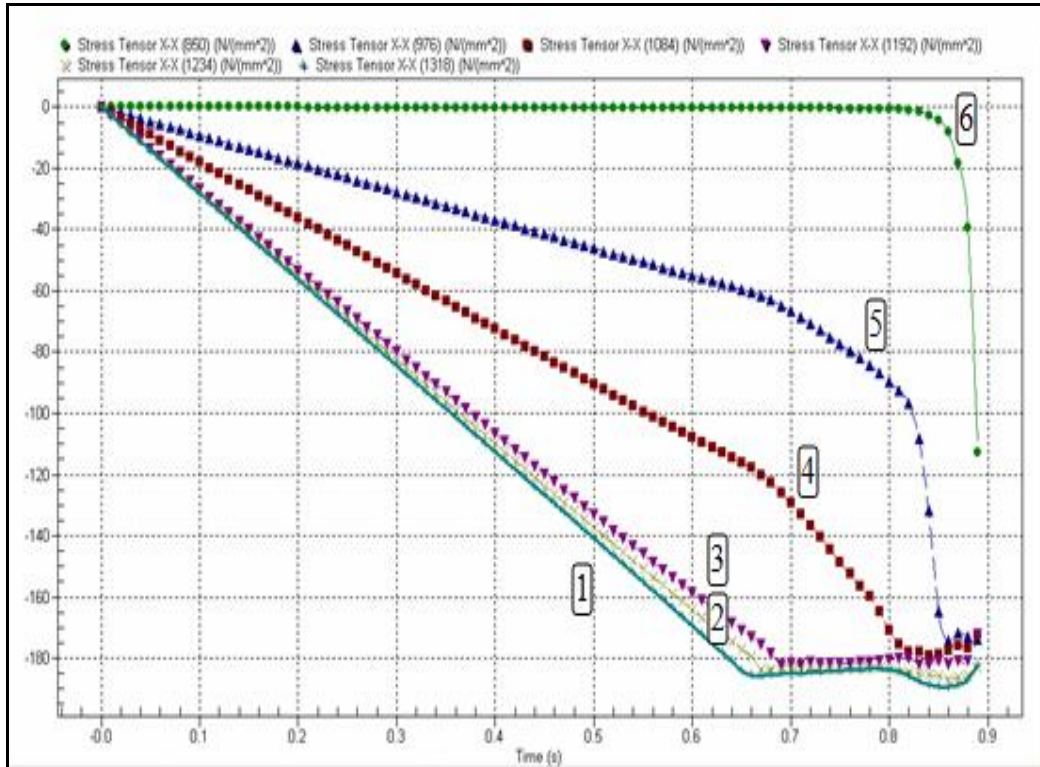
Σχήμα 3.66-Κατανομή ορθών θλιπτικών τάσεων σ_{xx} στα ενισχυτικά και επιλογή σημείων 1,2



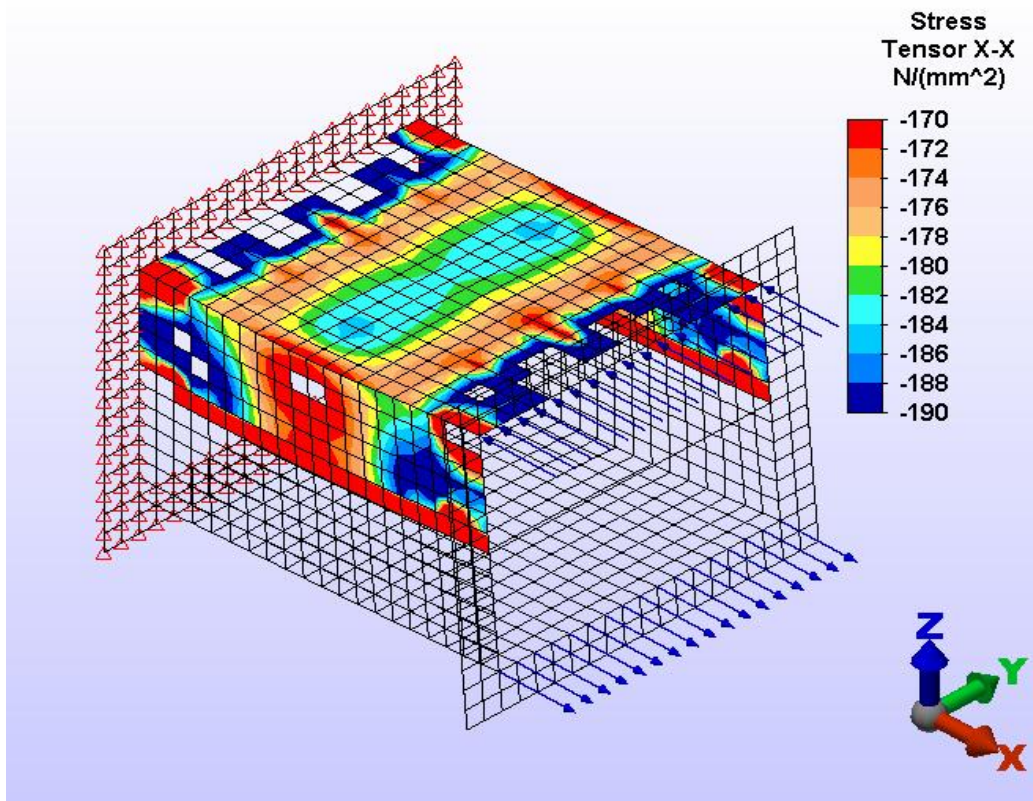
Σχήμα 3.67-Κατανομή ορθών θλιπτικών τάσεων σ_{xx} στα σημεία 1,2 του σχήματος 3.66



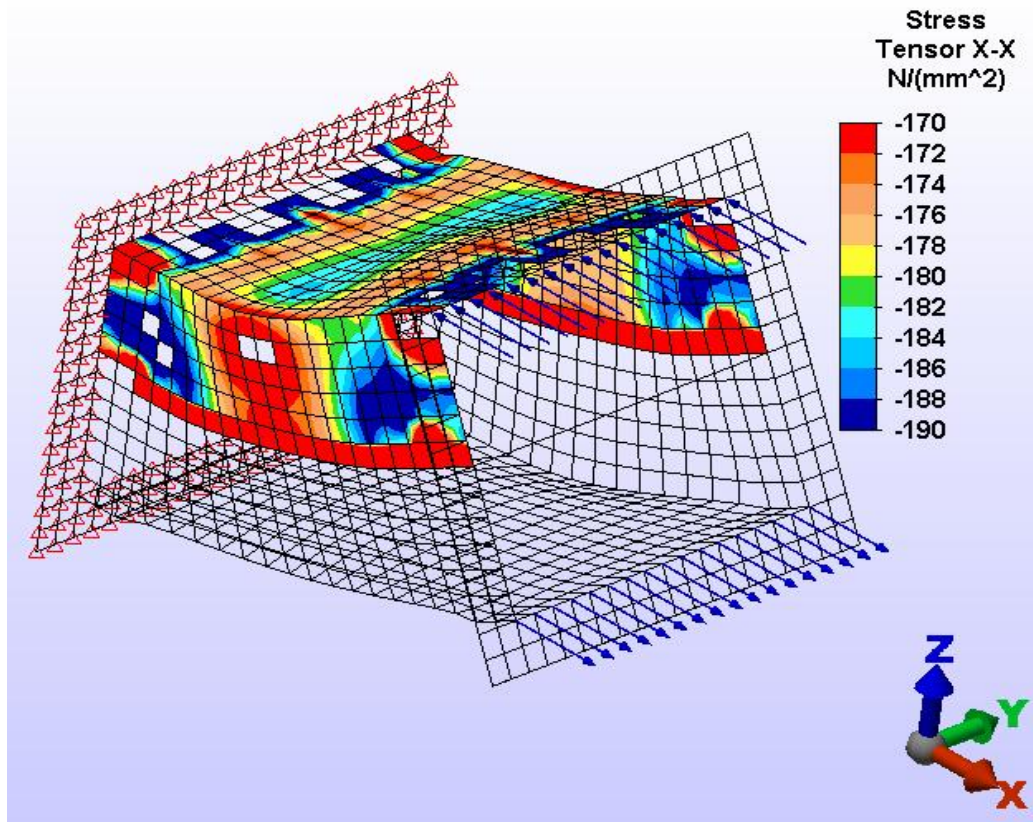
Σχήμα 3.68-Κατανομή τάσεων στο έλασμα και επιλογή σημείων 1-6



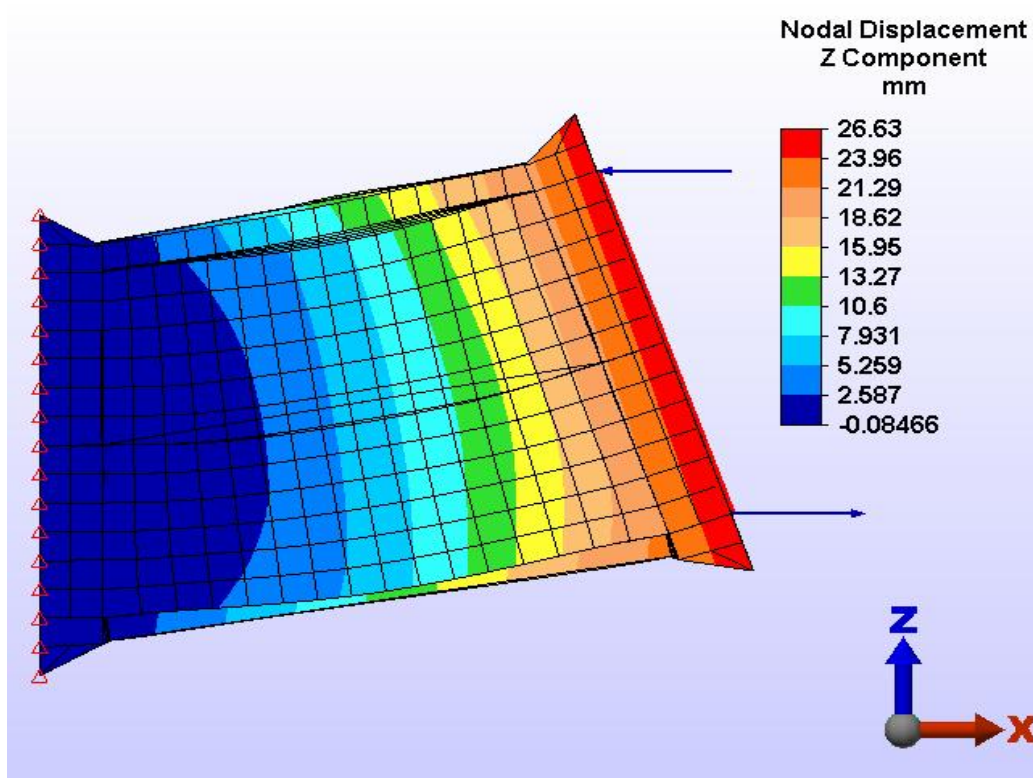
Σχήμα 3.69-Κατανομή θλιπτικών τάσεων σ_{xx} σημείων 1-6 σχήματος 3.68



Σχήμα 3.70-Κατανομή τάσεων θλιπτικών τάσεων σ_{xx} στο έλασμα



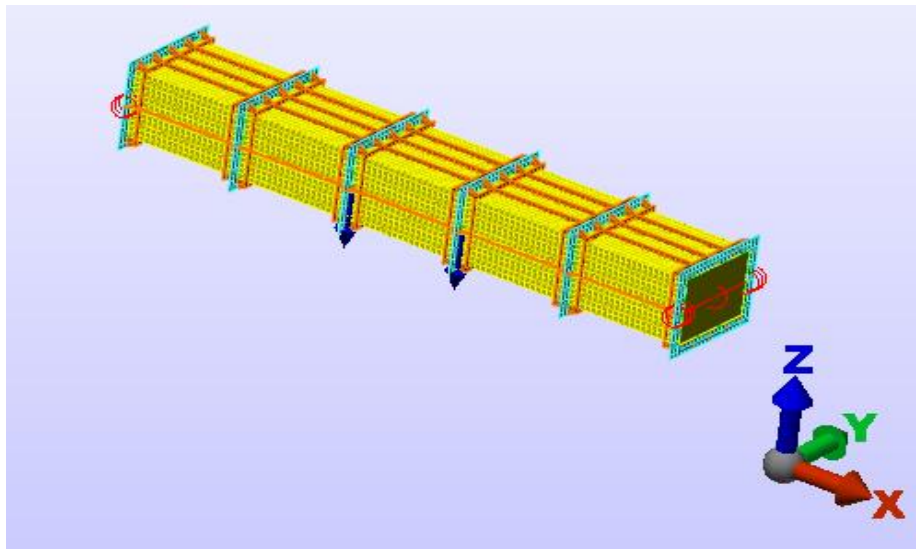
Σχήμα 3.71-Παραμορφωμένο σώμα



Σχήμα 3.72-Διατήρηση επιπεδότητας κατά την κάμψη

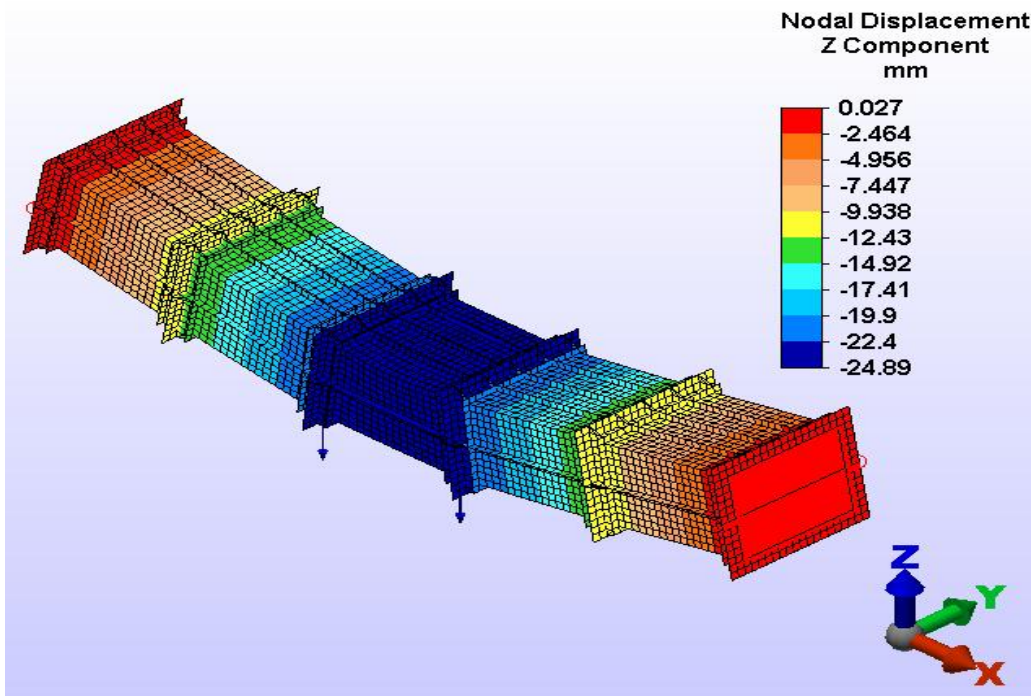
3.5.5 ΜΟΝΤΕΛΟ 5: ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΑΛΛΑΓΜΕΝΑ SUPPORTING DEVICES

Η συγκεκριμένη μοντελοποίηση των supporting devices δεν διαφοροποιεί ουσιαστικά το πεδίο των τάσεων του κεντρικού τμήματος σε σχέση με τα προηγούμενα μοντέλα.



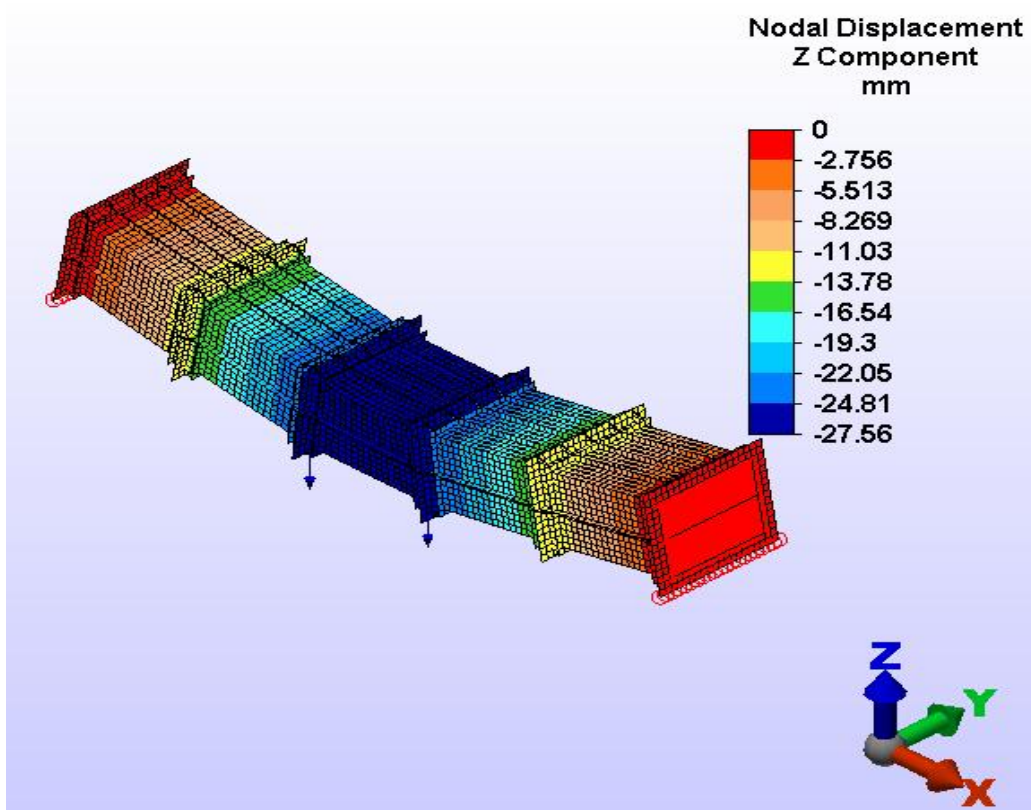
Σχήμα 3.73-Καθαρή κάμψη αμφιερείστου δοκού

Η εναλλαγή της θέσης των οριακών συνθηκών έχει σαφή επίδραση στα βέλη κάμψης όπως φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα. Στην περίπτωση της τοποθέτησης των οριακών συνθηκών στο μέσο των ακραίων πλευρών η κατασκευή εμφανίζεται ως πιο εύκαμπτη.

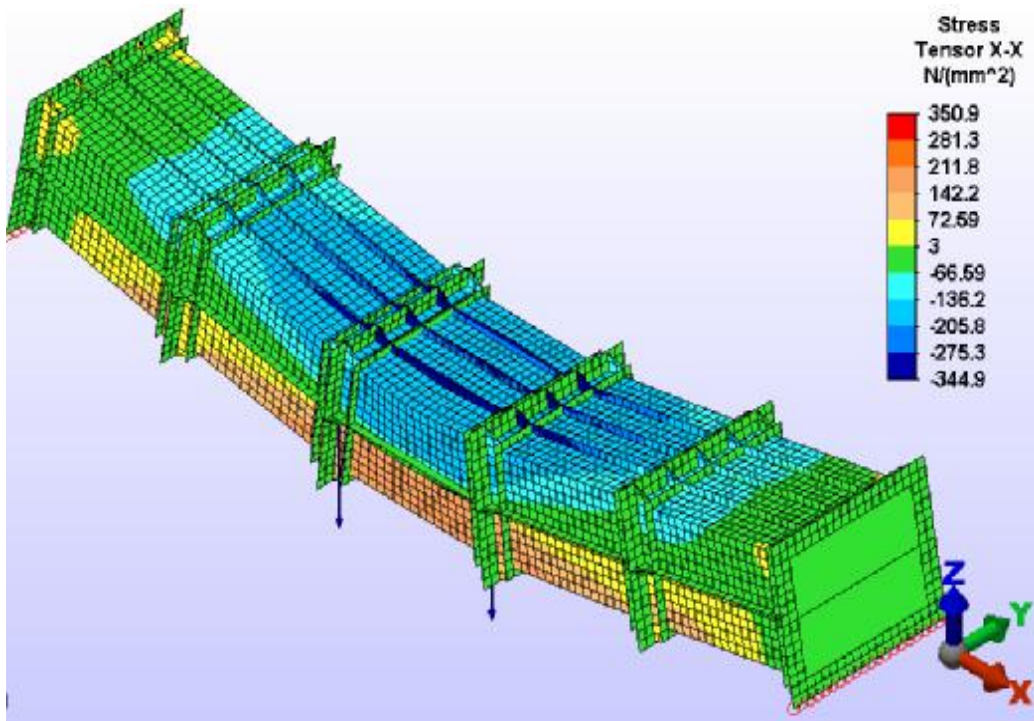


Σχήμα 3.74-Βέλος κάμψης με οριακές συνθήκες στο μέσο

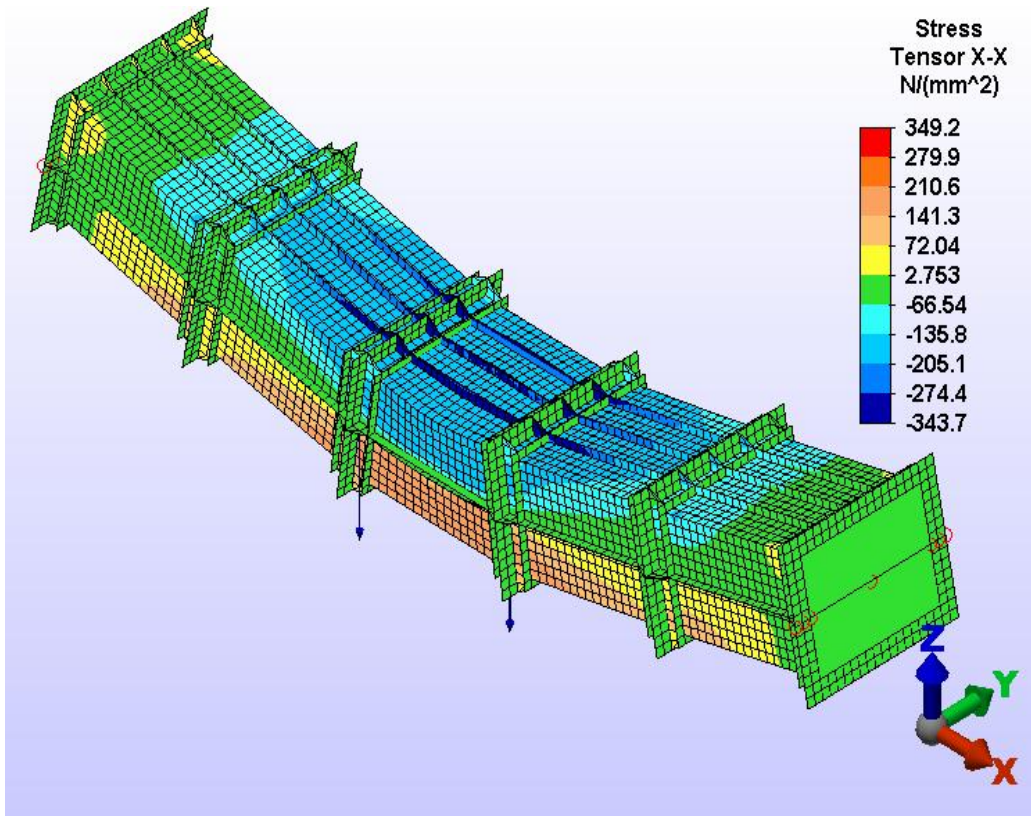
των ακραίων διατομών



Σχήμα 3.75- Βέλος κάμψης με οριακές συνθήκες στην κάτω ακμή των ακραίων διατομών



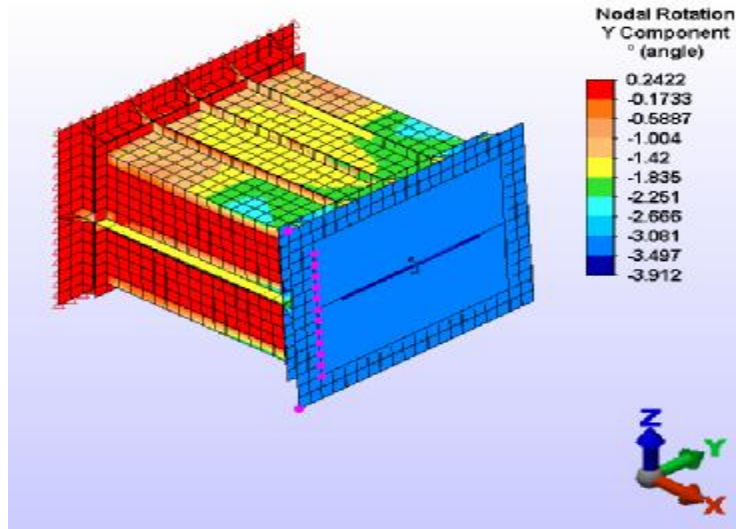
Σχήμα 3.76-Τασικό πεδίο σ_{xx} με οριακές συνθήκες στις κάτω ακμές των ακραίων πλευρών



Σχήμα 3.77-Τασικό πεδίο σ_{xx} με οριακές συνθήκες στα μέσα των ακραίων πλευρών

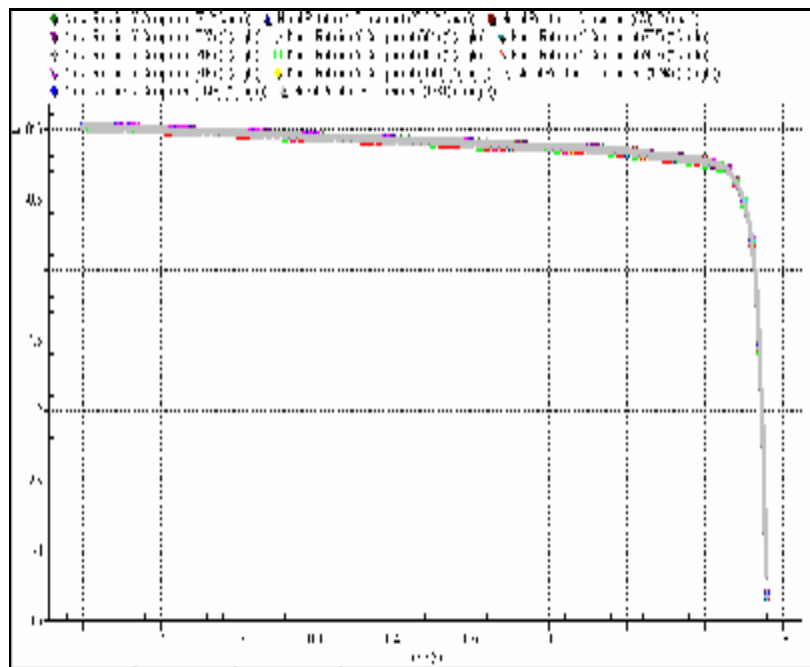
3.5.6. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ Μ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ κ

Ακολούθως παρουσιάζονται τα διαγράμματα καμπτικής ροπής M ως προς την καμπυλότητα κ των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων 1-5 των ανωτέρω παραγράφων 3.5.1-3.5.5.



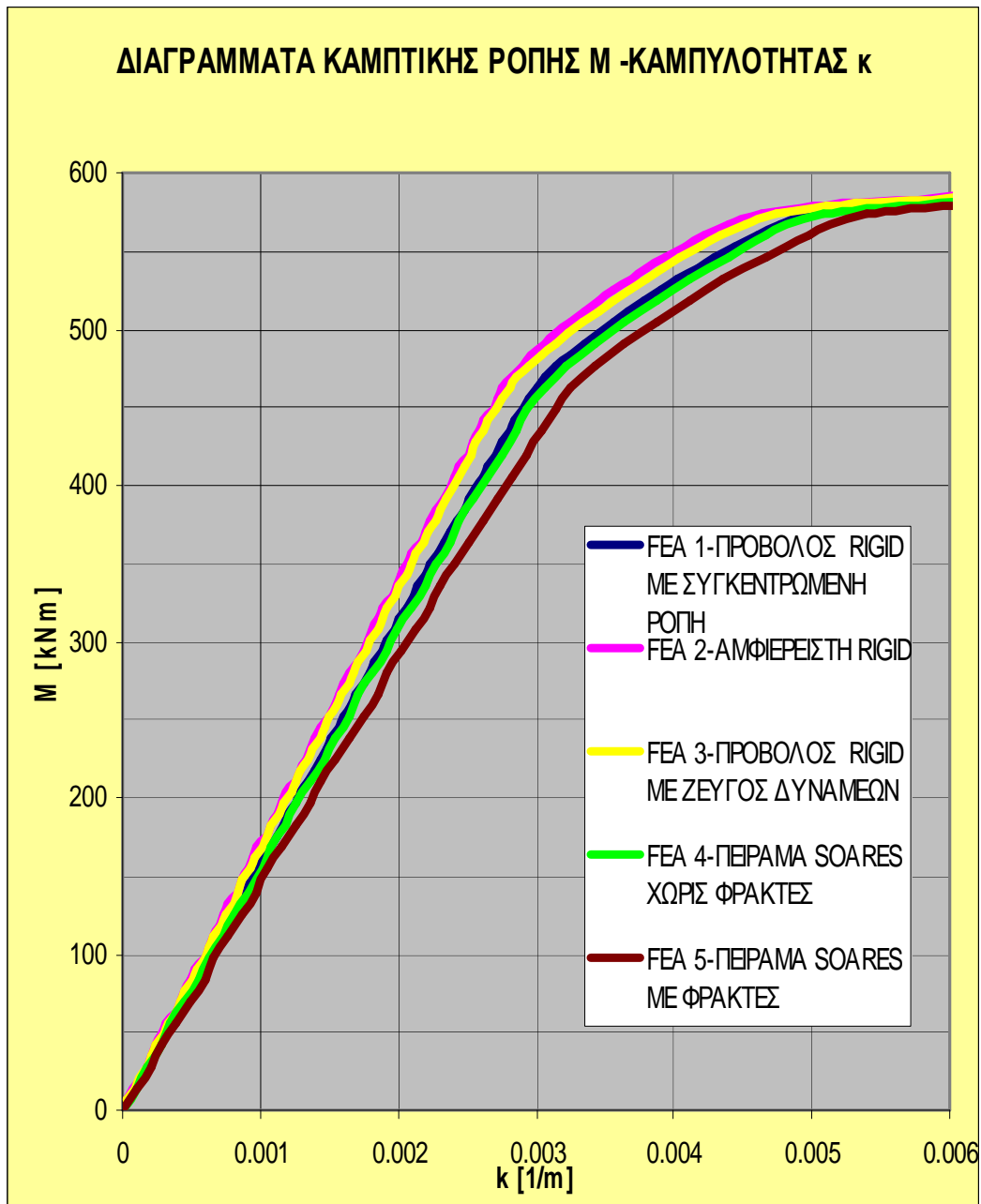
Σχήμα 3.78-Σημεία δειγματοληψίας κομβικών στροφών περίξ του άξονα Y

Η διατήρηση της επιπεδότητας της διατομής (βλέπε σχήματα 3.74, 3.75) κατά την κάμψη είναι βασική προϋπόθεση για την κατασκευή του διαγράμματος M - κ .



Σχήμα 3.79-Διάγραμμα στροφών περίξ του άξονα Y των επιλεγμένων κόμβων του σχήματος 3.74

Η σχέση μεταξύ της στροφής της διατομής και της καμπυλότητας για διάφορα μοντέλα φαίνεται στην παράγραφο 3.5 σχήμα 3.31.

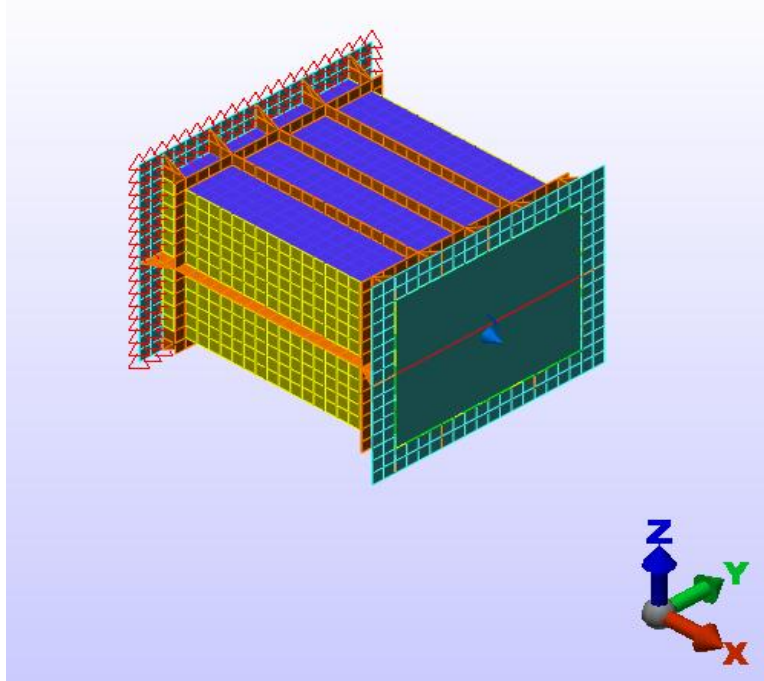


Σχήμα 3.80-Διάγραμμα καμπτικής ροπής ως προς την καμπυλότητα για τα μοντέλα 1-5

Όπως παρατηρούμε στο διάγραμμα όλα τα μοντέλα συγκλίνουν με διαφοροποιημένες καμπυλότητες στη μέγιστη τιμή καμπτικής ροπής 570 kNm.

3.6 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΟΥΔΕΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ/ΑΞΟΝΑ

Κατά την διαμήκη κάμψη κάμψη των κοίλων δοκών παρατηρείται το φαινόμενο της μετατόπισης του ουδέτερου άξονα όταν κάποιες ίνες της διατομής αρχίζουν να πλαστικοποιούνται ενώ οι συμμετρικές τους ως προς τον ουδέτερο άξονα όχι.

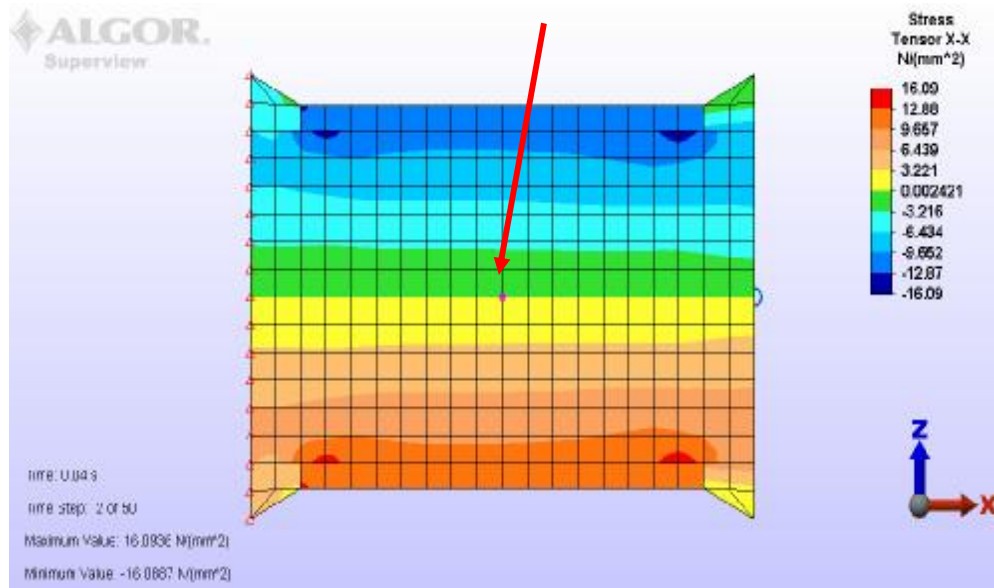


Σχήμα 3.80-Μοντέλο διαμήκους κάμψης προβόλου με συγκεντρωμένη ροπή

Το αν σε κάποιο στοιχείο της διατομής θα προηγηθεί το φαινόμενο του λυγισμού από το φαινόμενο της διαρροής εξαρτάται από τη γεωμετρία του στοιχείου.

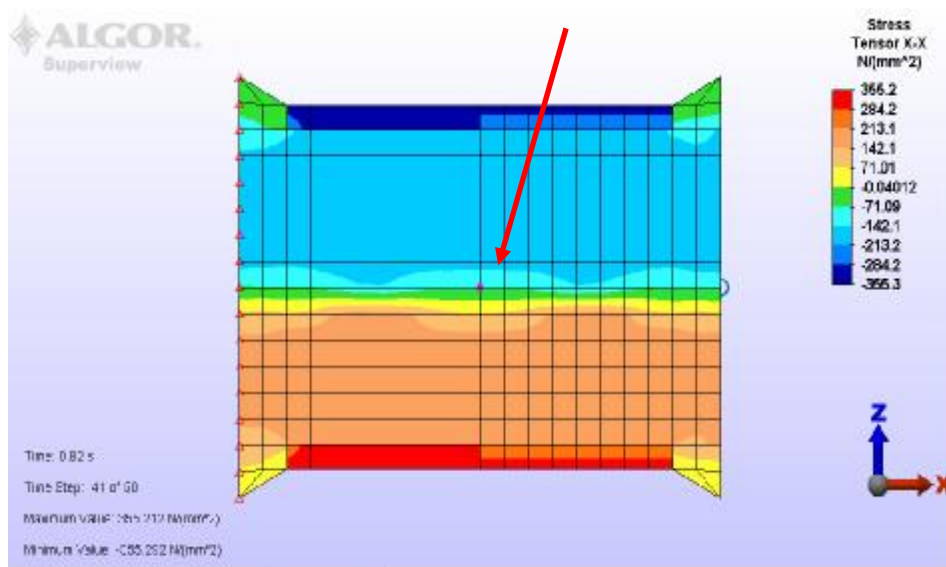
Στην συμμετρική κοίλη πρόβολο δοκό του σχήματος 3.80 το έλασμα με μπλε χρώμα (‘κατάστρωμα’) έχει όριο διαρροής 140 N/mm^2 ενώ το συμμετρικό του (‘πυθμένας’) 183 N/mm^2 , έτσι ώστε κατά την κάμψη σε sagging να διαρρεύσει πρώτο.

Θεωρώντας την πλάγια όψη της δοκού (σχήμα 3.81) παρατηρούμε ότι στα πρώτα βήματα της κάμψης το αρχικό ουδέτερο επίπεδο, λόγω συμμετρίας στη κατανομή των τάσεων ταυτίζεται προφανώς το διάμηκες οριζόντιο επίπεδο συμμετρίας.

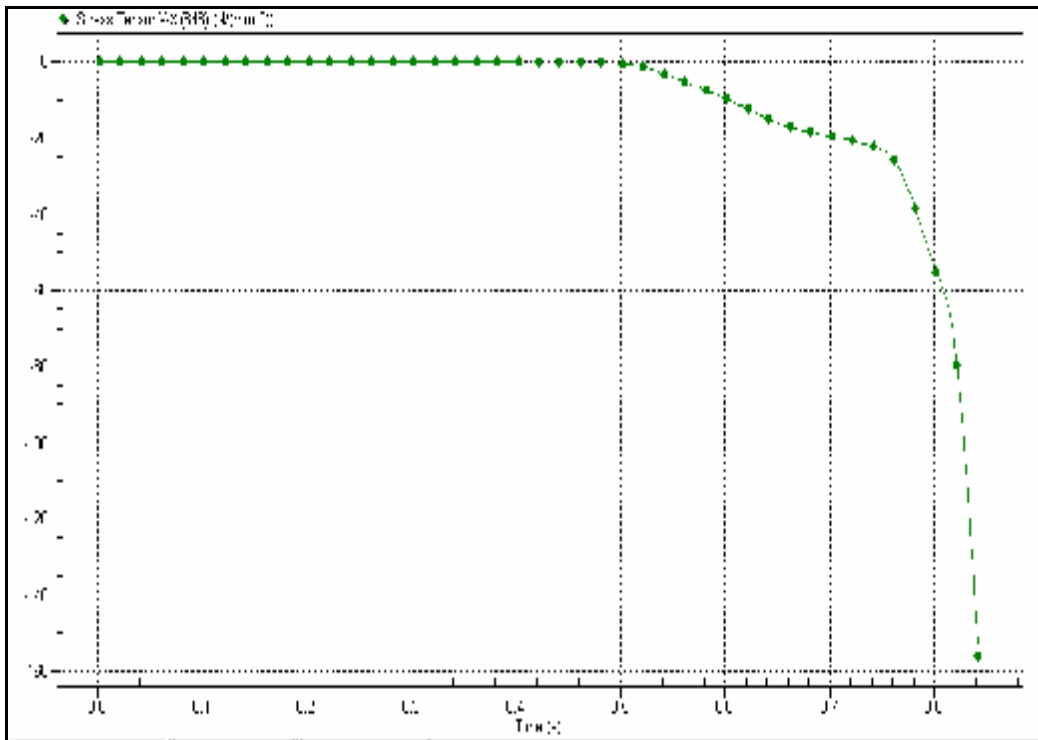


Σχήμα 3.81-Κατανομή τάσεων σxx. Ο ουδέτερος άξονας (όριο κίτρινου –πράσινου χρώματος) στη μέση του ύψους

Κατά την έναρξη πλαστικοποίησης του ‘καταστρώματος’, το ουδέτερο επίπεδο κατ’ ανάγκη μετατοπίζεται προς τον ‘πυθμένα’ έτσι ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία της διατομής από την άθροιση θλιπτικών και εφελκυστικών δυνάμεων. Έτσι στην περιοχή του αρχικού ουδετέρου επιπέδου τώρα αναπτύσσονται θλιπτικές διαμήκης τάσεις σ_{xx} , όπως φαίνεται στα σχήματα 3.82 και 3.83.



Σχήμα 3.82-Κατανομή τάσεων σxx. Μετατόπιση ουδέτερου άξονα (όριο κίτρινου –πράσινου χρώματος) προς τον ‘πυθμένα’



Σχήμα 3.83-Κατανομή τάσεων σχχ διακεκριμένου σημείου σχήματος 3.82 ή 3.81

3.7 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΜΨΗΣ BULK CARRIER

Κατά την προσομοίωση της κάμψης του πλοίου τύπου bulk carrier με πεπερασμένα στοιχεία, κατεβλήθη προσπάθεια εφαρμογής των ίδιων μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν στα μοντέλα κάμψης κοίλων δοκών και στο μοντέλο M3-200 του παρόντος κεφαλαίου, ώστε να εξαχθούν κατά το δυνατόν επαγωγικά συμπεράσματα μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων.

3.7.1 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ BULK CARRIER

Εξετάζοντας τα κατασκευαστικά σχέδια που αφορούν στο παράλληλο τμήμα του bulk carrier (Παράρτημα ΣΤ), διαπιστώνεται ότι η απόσταση των ενισχυμένων νομέων στη περιοχή του διπυθμένου είναι 2.400 mm, η απόσταση των νομέων στην πλευρά είναι 800 mm ενώ η απόσταση των ενισχυμένων νομέων στην άνω πλευρική δεξαμενή είναι 4.000 mm. Ως εκ τούτου το ελάχιστο μήκος του παράλληλου τμήματος που μπορεί να μοντελοποιηθεί ώστε να έχουμε σύμπτωση ενισχυμένων νομέων στα άκρα του τμήματος είναι 12.000 mm.

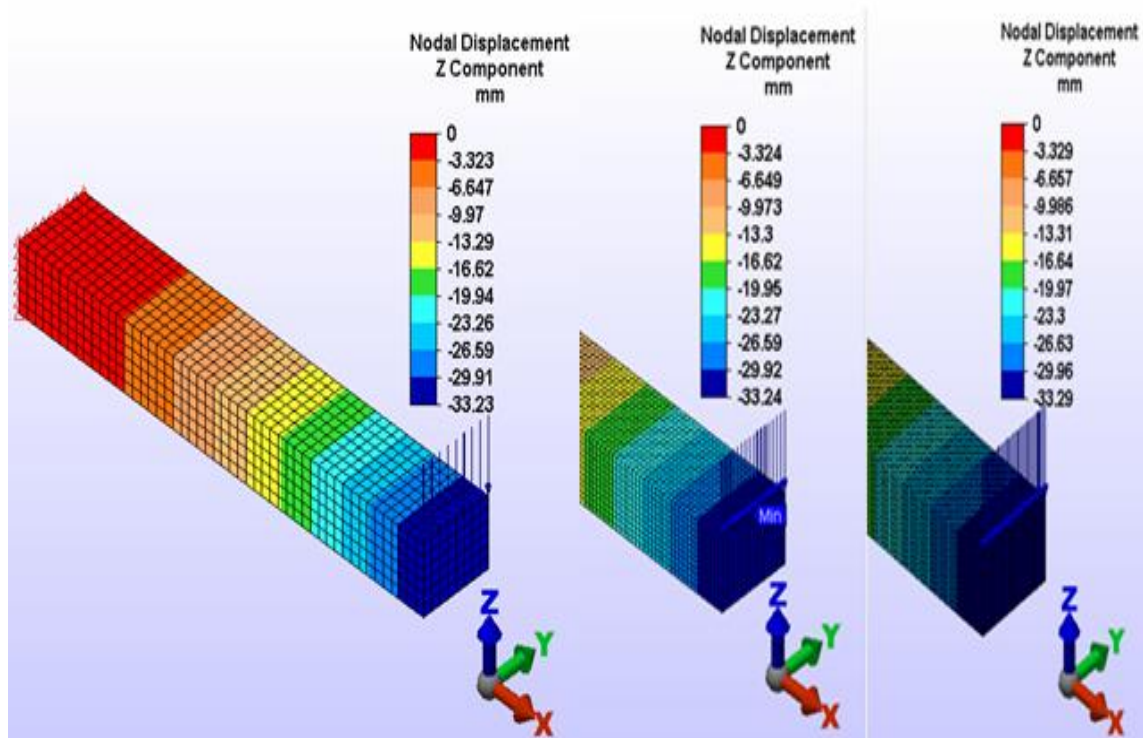
Κατά τη μοντελοποίηση της γάστρας χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα στοιχεία κελύφους-3D shell elements Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και στοιχεία δοκού αυξημένης δυσκαμψίας με σκοπό την διατήρηση της επιπεδότητας των καμπτόμενων διατομών Το μοντέλο απαρτίζεται από 139.270 πεπερασμένα στοιχεία και έχει 137.866 κόμβους. Κατά την μη γραμμική επίλυση F.E.M. (non linear static) επιλύονται σε κάθε επαναληπτικό βήμα 794.823 γραμμικές εξισώσεις.

Part No	Thickness	Yield stress	Part No	Thickness	Yield stress
1	11	235	92	12	355
2	11	235	93	7	315
4	12,5	315	94	12	315
5	11	235	95	7,5	315
7	11	235	96	12,5	315
8	16	315	100	13,5	315
10	10	315	109	15,5	315
11	10	315	110	15,5	315
20	10	315	111	8	315
21	10	315	112	13	315
30	9,75	315	120	13,25	315
31	8	315	130	13	315
32	13	315	131	7,5	315
40	9,5	315	132	12,5	315
41	9,5	315	140	13	315
49	12	315	210	15,5	315

50	12,5	315	211	9	315
59	13	355	212	14	315
60	14,25	355	220	15,5	315
61	7	315	230	15,25	315
62	12	315	231	8,5	315
63	7	355	232	13,5	315
64	12	355	239	12,75	315
70	20	355	240	12	315
71	7	355	241	10,5	315
72	12	355	242	14,5	315
80	17	355	243	7	315
88	17	355	244	12	315
89	14,5	315	250	12,25	315
90	14,25	315	251	7,5	315
91	7	355	252	12,5	315
92	12	355	253	7	315
93	7	315	254	12	315

Πίνακας 3.1-Πάχη και όρια διαρροής στοιχείων μοντέλου bulk carrier

Κατά την μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκαν τα μειωμένα, λόγω περιθωρίου διάβρωσης, πάχη ελασμάτων που χρησιμοποιήθηκαν και στη μέθοδο υπολογισμού μέγιστης αντοχής των C.S.R.

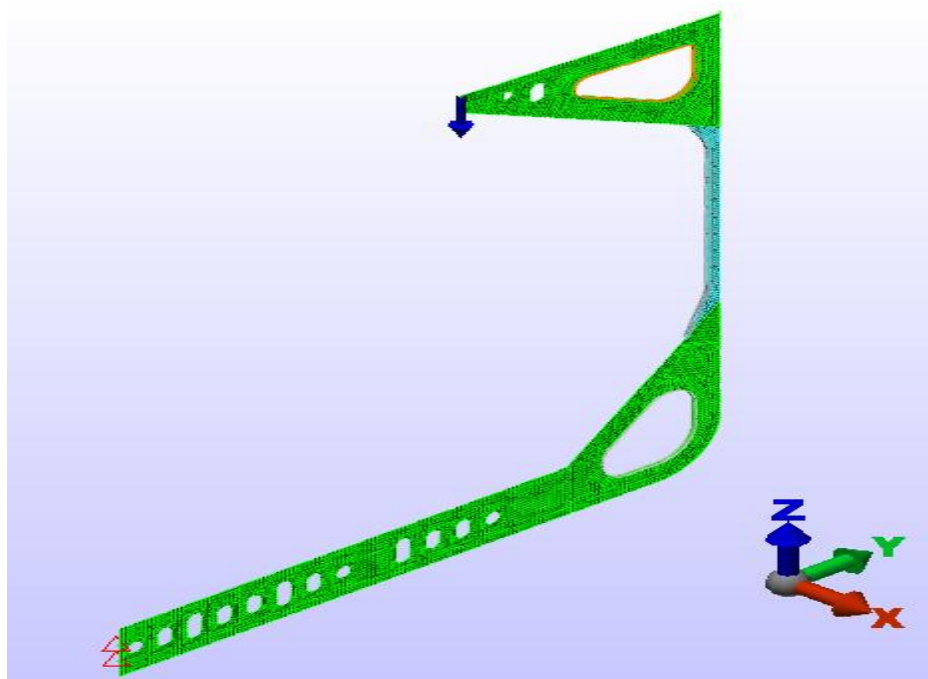


Σχήμα 3.84-Ελεγχος σύγκλισης τιμών βελών κάμψης με διαμέριση 100/50/25 mm .

Η βασική διαμέριση που χρησιμοποιήθηκε κατά την έννοια του μήκους είναι της τάξης των 100 mm. Αυτό διότι:

- Επετεύχθη σύγκλιση τιμών σε απλή ορθογωνική δοκό για 100/50/25 mm διαμέριση με αντίστοιχες τιμές βέλους κάμψης 33.23/33.24/33.29 mm.
- Δίδει ακέραιες τιμές στην κατά μήκος διαμέριση (απόσταση νομέων 800, 2400, 4000 mm).
- Το ύψος του κορμού των ενισχυτικών είναι 250 mm και το πλάτος του πέλματος 90 mm. Έτσι με δύο στοιχεία καθ' ύψος και με ένα κατά πλάτος, ο λόγος πλευρών των στοιχείων 125/100 και 90/100 (είναι κοντά στο 1).
- Όπως αποδείχτηκε παραπάνω, στο μοντέλο M3-200, το μήκος του στοιχείου ελάσματος-plate element δεν επηρεάζει (σύγκλιση τιμών για 50mm και 25mm).
- Το πρόγραμμα δεν μπορεί να αντέξει πυκνότερο (με περισσότερα στοιχεία) μοντέλο.

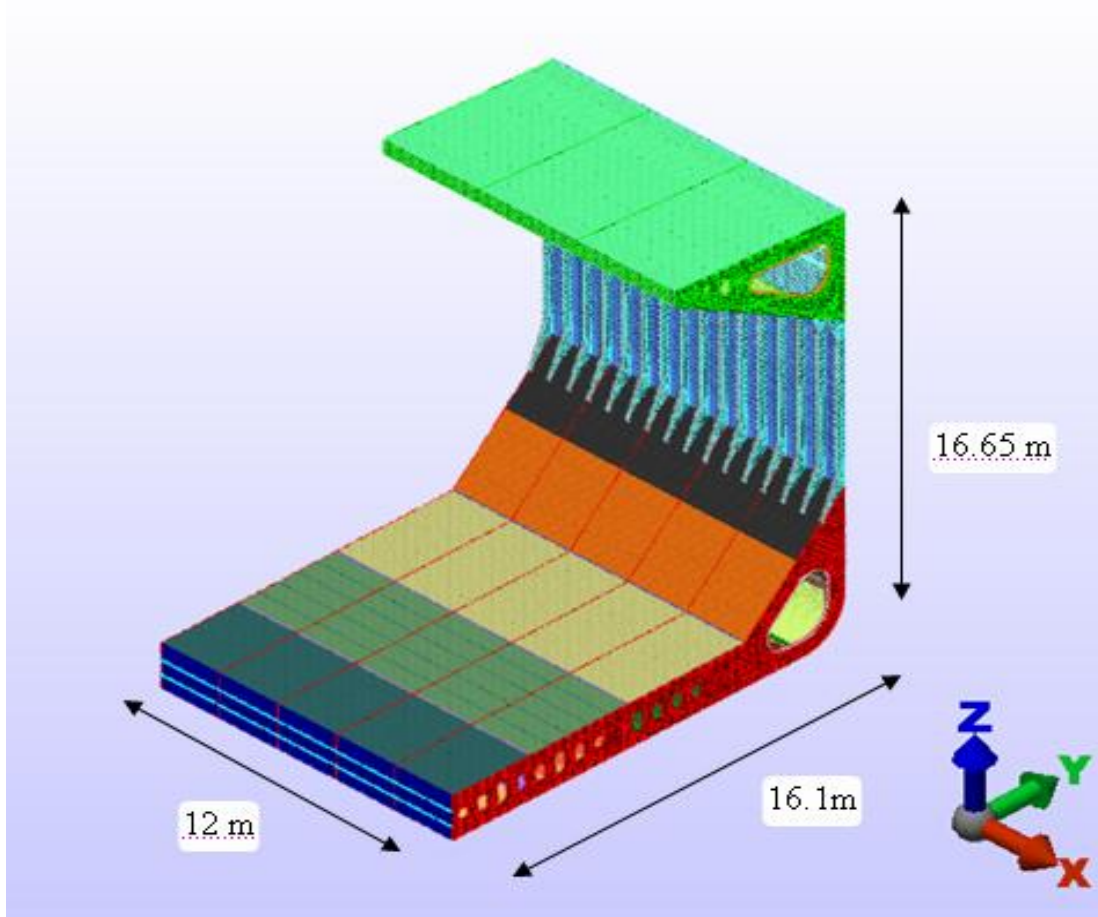
Η κατασκευή του μοντέλου ήταν ιδιαίτερα επίπονη καθόσον έγινε προσπάθεια ανάδειξης των περισσότερων σχεδιαστικών λεπτομερειών. Εξάλλου, κάθε τμήμα του μοντέλου που κατασκευαζόταν στο ALGOR έπρεπε να δοκιμαστεί ξεχωριστά με ένα υποθετικό 'τρέξιμο' για να διασφαλιστεί ότι δεν έχει κάποιο πρόβλημα γεωμετρίας ή άλλο σε σχέση με το πρόγραμμα.



Σχήμα 3.85-Δοκιμή ενισχυμένου νομέα με υποθετικό φορτίο και στήριξη

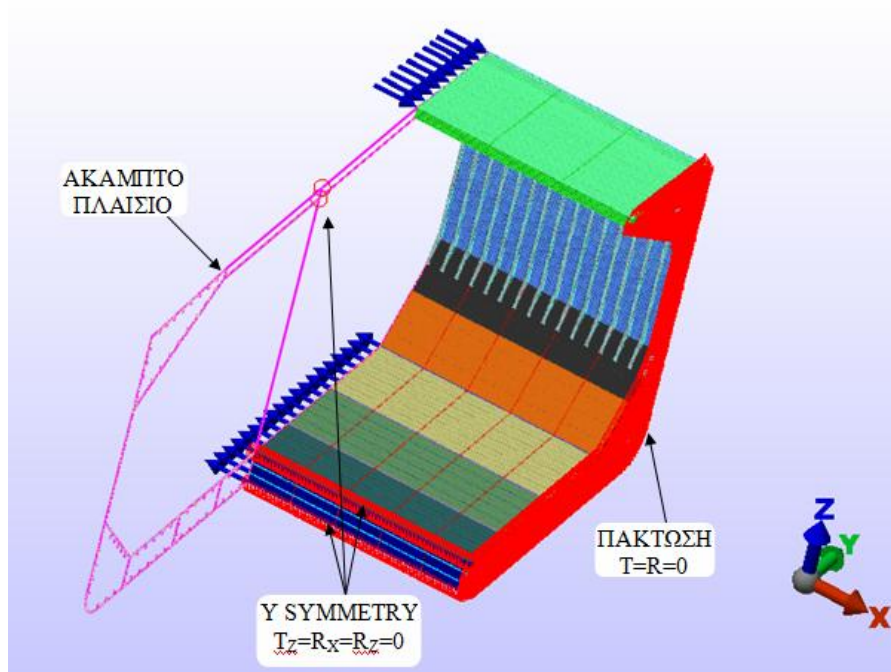
Με σκοπό την μείωση των απαιτούμενων υπολογιστικών πόρων και λόγω της προφανούς διαμήκουσ συμμετρίας της γάστρας αποφασίστηκε αρχικά η δοκιμαστική μοντελοποίηση της ημιτομής καθώς και η χρησιμοποίηση οριακών συνθηκών συμμετρίας (Y-symmetry) για το υπόλοιπο μισό.

Κατά την δοκιμή τρεξίματος μοντέλου είτε ολόκληρης της γάστρας ή μισής γάστρας αλλά διπλάσιου μήκους διαπιστώθηκε αδυναμία (break down) του προγράμματος ALGOR να ανταπεξέρθει διότι όπως αποδείχθηκε το μοντέλο ξεπερνούσε την χωρητικότητα του προγράμματος. Έτσι η μοναδική δυνατότητα ήταν η προσομοίωση της κάμψης με το μοντέλο της ημιτομής.

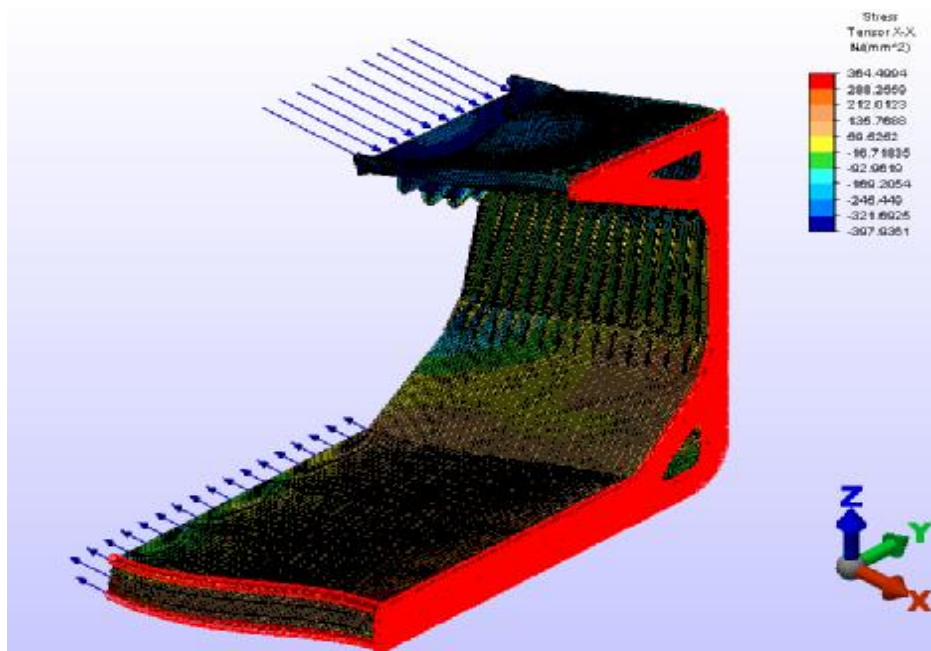


Σχήμα 3.86-Βασικές διαστάσεις μοντέλου

Εγιναν διάφορα 'τρεξίματα' με το αρχικό μοντέλο της ημιτομής όπου και διαπιστώθηκε ότι κατά την κάμψη του ως πρόβολος στον οποίο δρουν κομβικές δυνάμεις, συμπεριφέρεται ως βραχύ (κοντό) και σθεναρό (δύσκαμπτο) δοκάρι όπου υπερिशύουν τα τοπικά φαινόμενα (λυγισμός) και η διατομή δεν στρεφόταν.

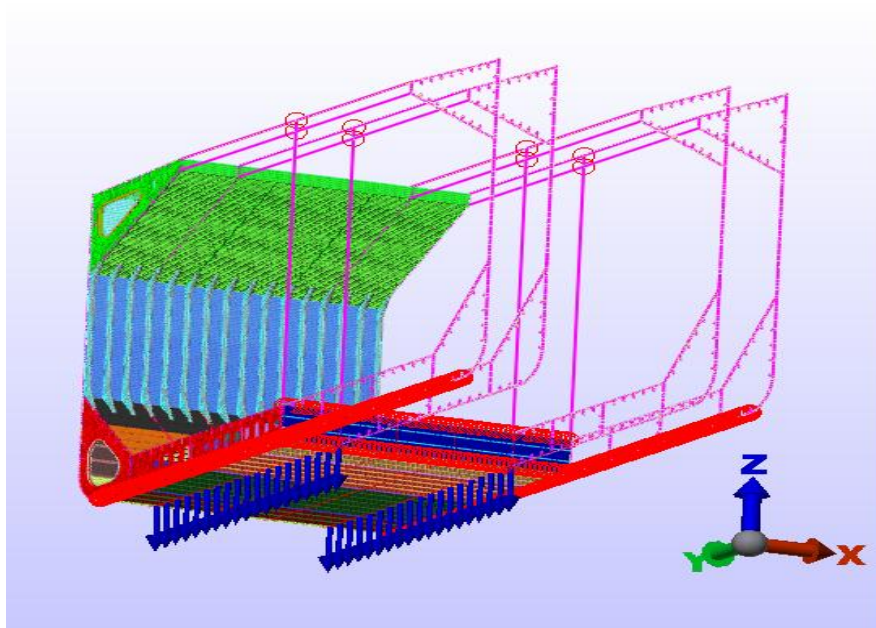


Σχήμα 3.87-Κάμψη προβόλου με ζεύγος δυνάμεων. Οι συνιστώσες ασκούνται στα ενισχυτικά

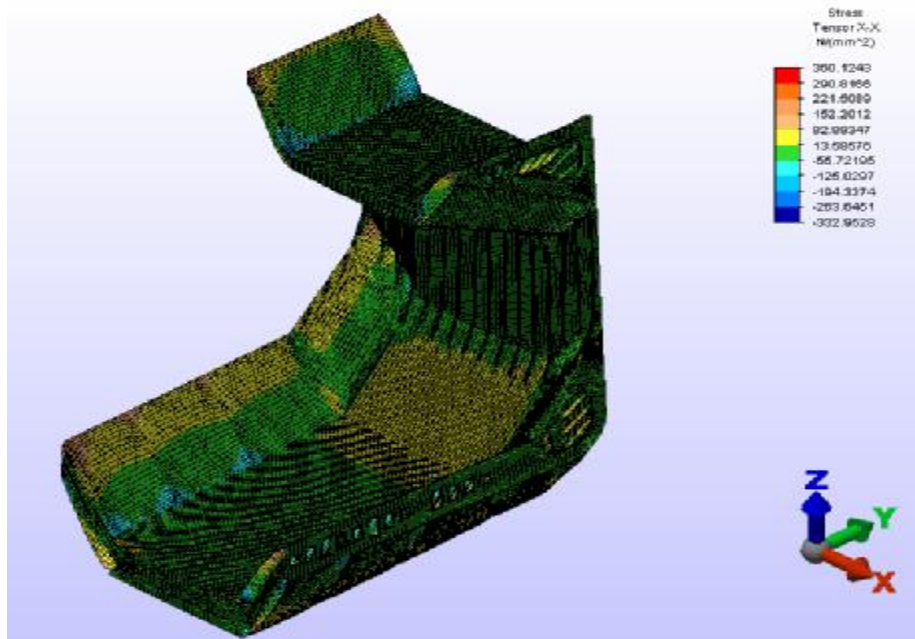


Σχήμα 3.88-Συμπεριφορά δύσκαμπτης δοκού. Αναδύκνεται ο τοπικός λυγισμός χωρίς στροφή της διατομής.

Επίσης, μη ικανοποιητικά ήταν τα αποτελέσματα της κάμψης της ημιδιατομής ως αμφιερέιστου δοκού.

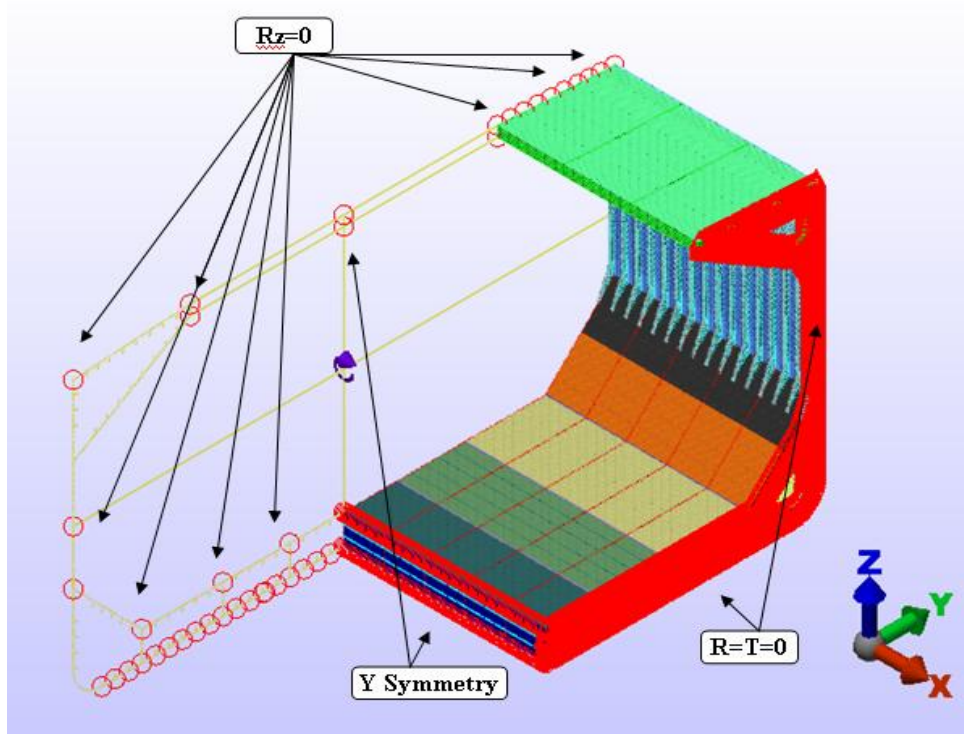


Σχήμα 3.89-Κάμψη αμφιερέιστου. Οι συνιστώσες των δυνάμεων ασκούνται στα ενισχυτικά

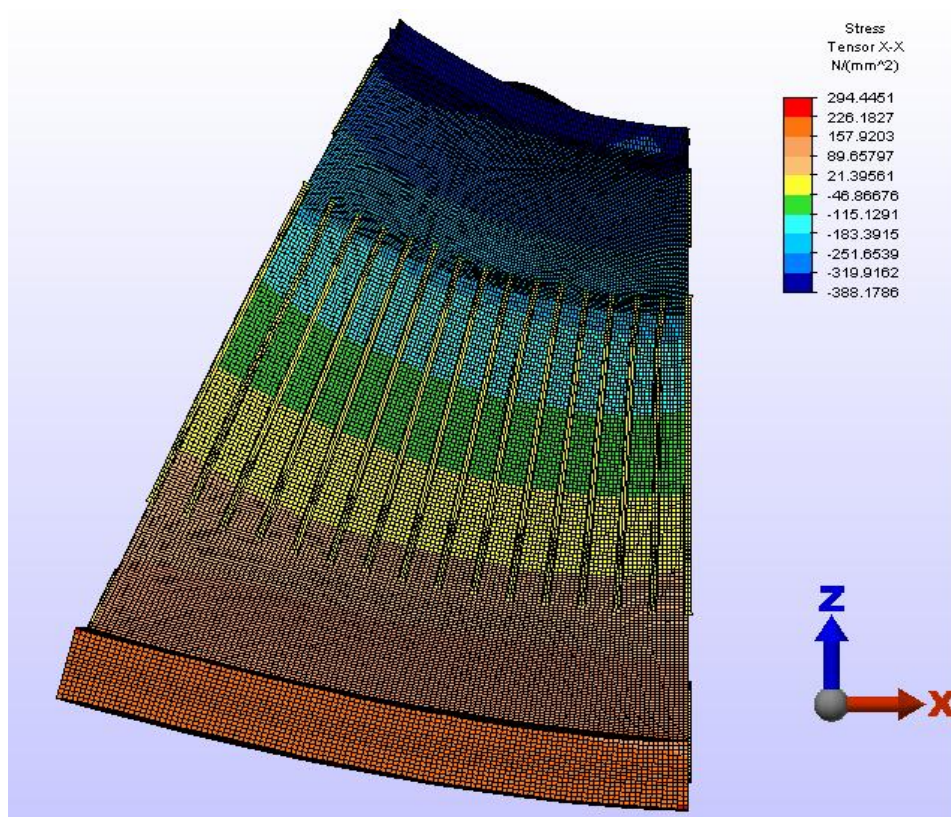


Σχήμα 3.90-Μη ικανοποιητικά αποτελέσματα κάμψης αμφιερέιστου. Κυριαρχούν τοπικά φαινόμενα και η διατομή δεν στρέφει.

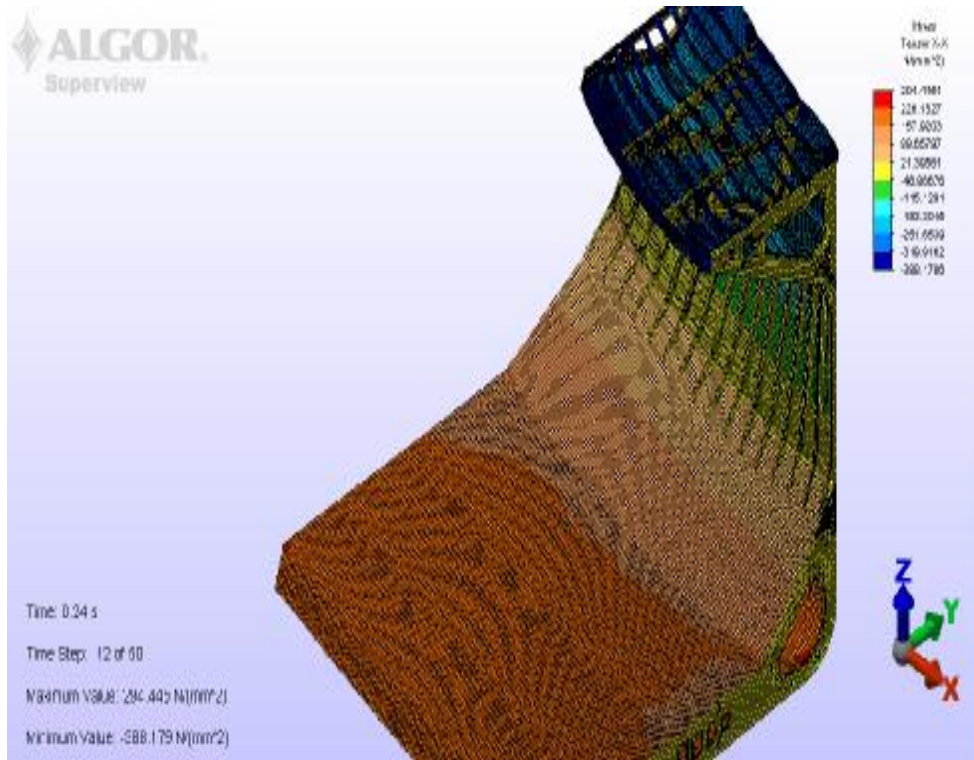
Αντιθέτως η χρησιμοποίηση συκεντρωμένης ροπής ή η επιβολή κομβικής στρωφής με την εφαρμογή κατάλληλων οριακών συνθηκών είχαν ως αποτέλεσμα τη στρόφη κατά την κάμψη της διατομής.



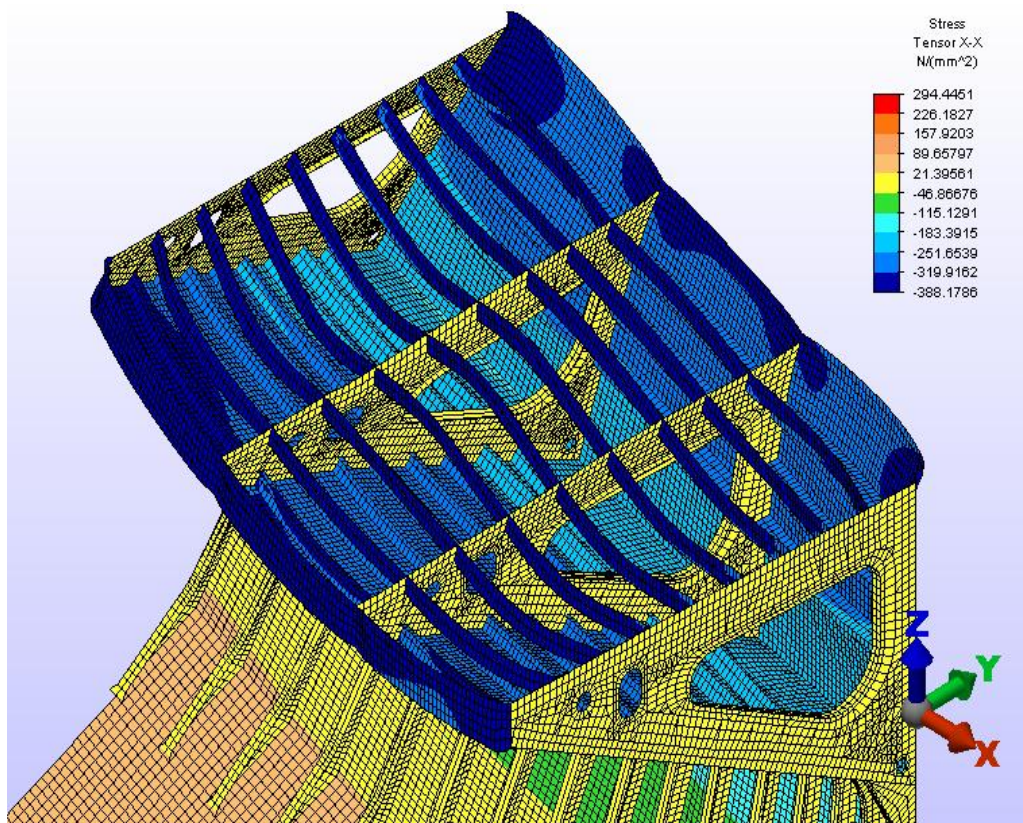
Σχήμα 3.91- Κάμψη προβόλου με συγκεντρωμένη ροπή ή στροφή.



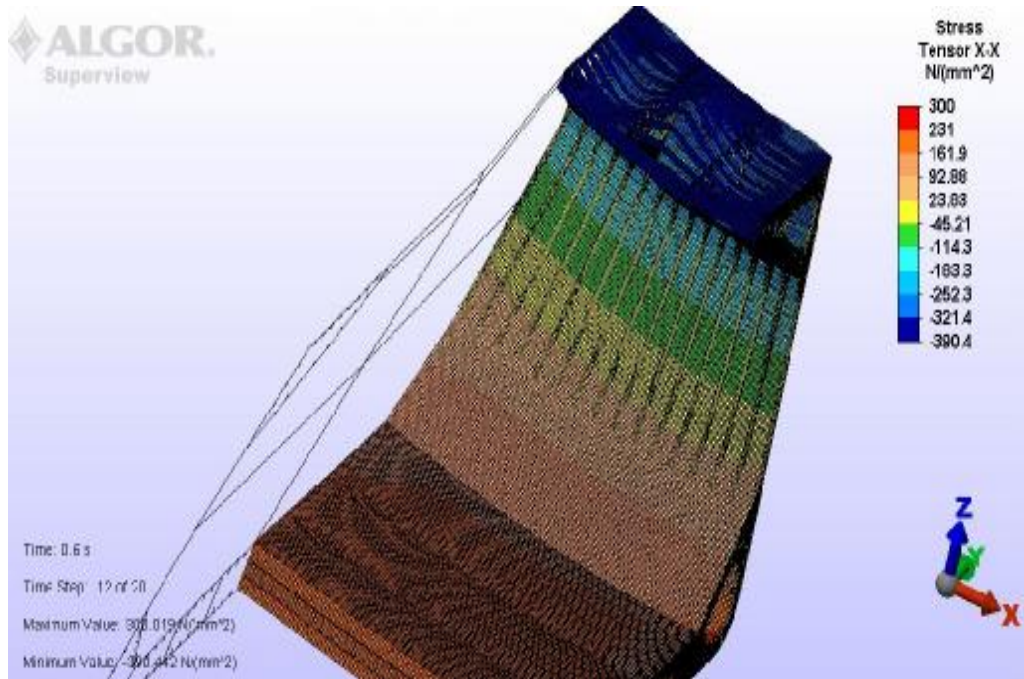
Σχήμα 3.92- Διατήρηση επιπεδότητας διατομών κατά την κάμψη.



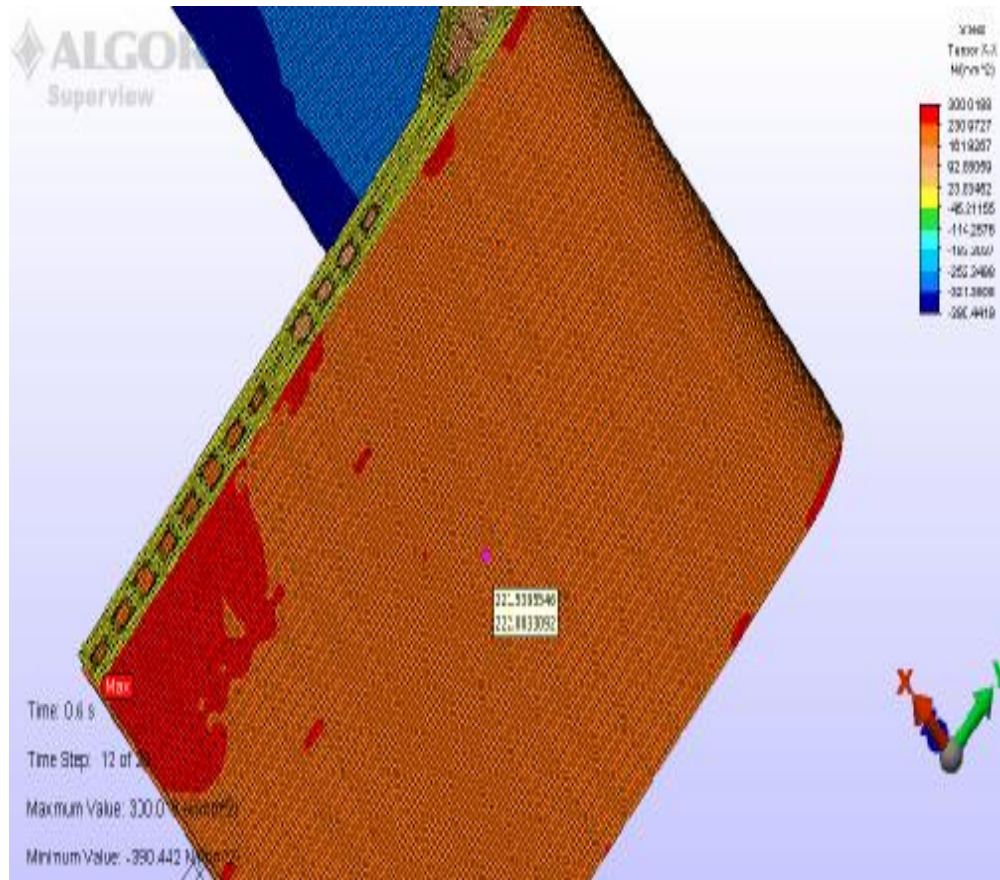
Σχήμα 3.93-Κατανομή ορθών τάσεων σ_{xx}



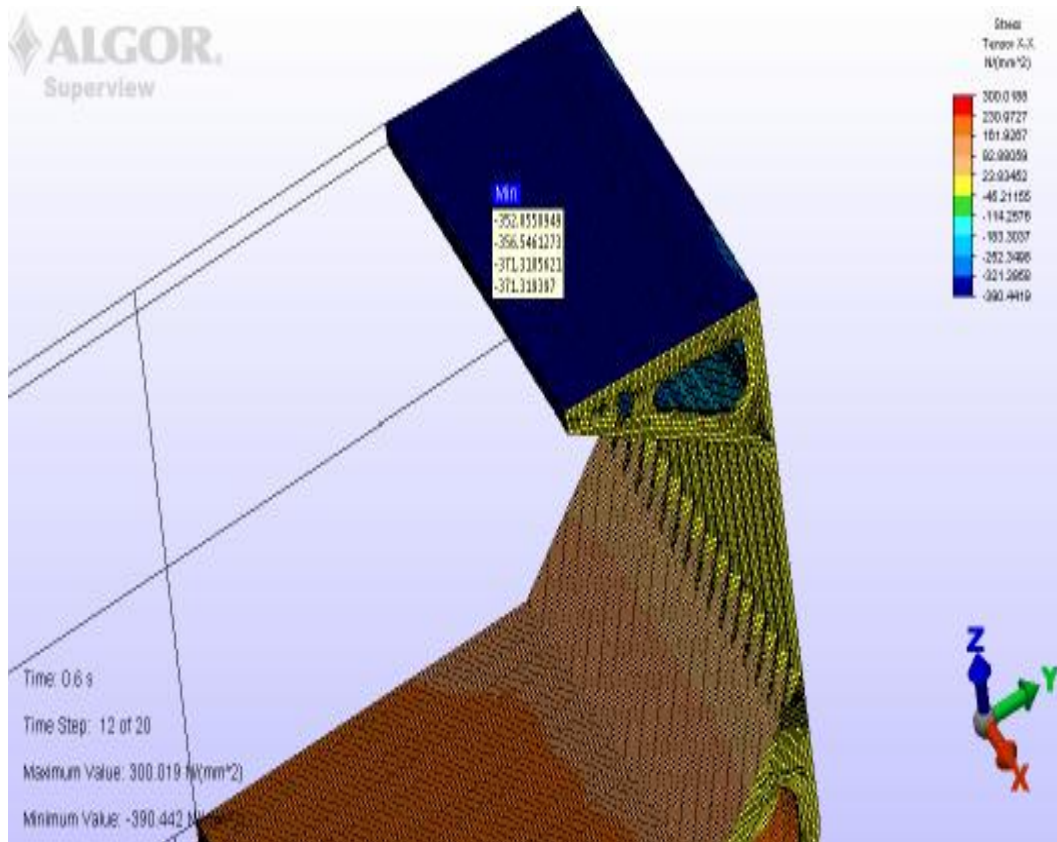
Σχήμα 3.94-Κατανομή τάσεων σ_{xx} και παραμόρφωση ενισχυτικών άνω πλευρικής δεξαμενής



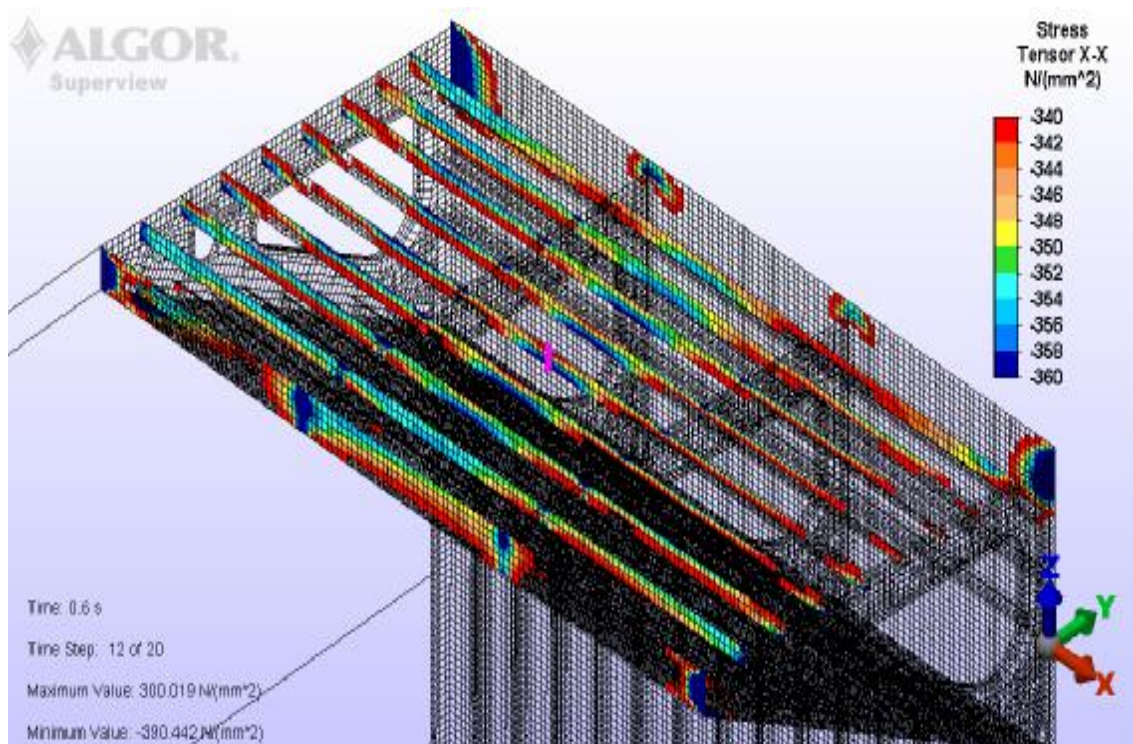
Σχήμα 3.95-Κατανομή τάσεων σ_{xx} και παραμόρφωση ενισχυτικών άνω πλευρικής δεξαμενής



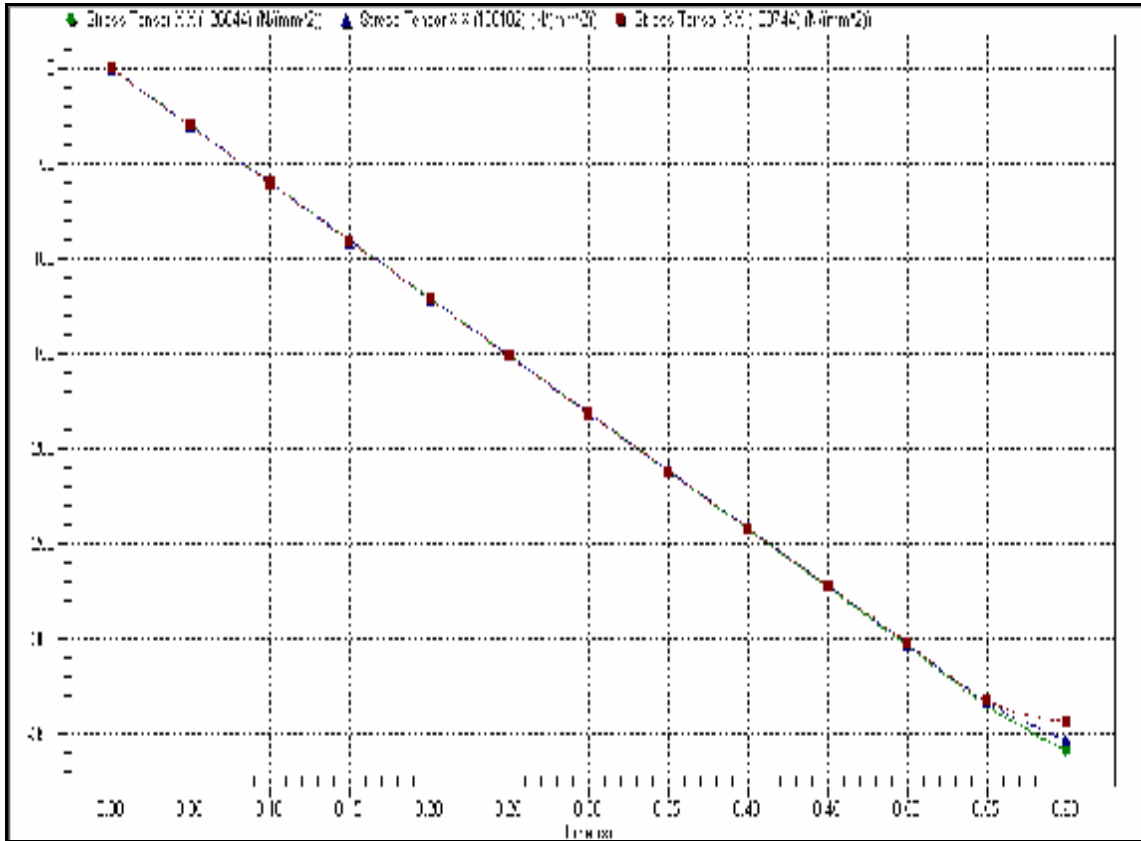
Σχήμα 3.96-Κατανομή τάσεων σ_{xx} πυθμένα



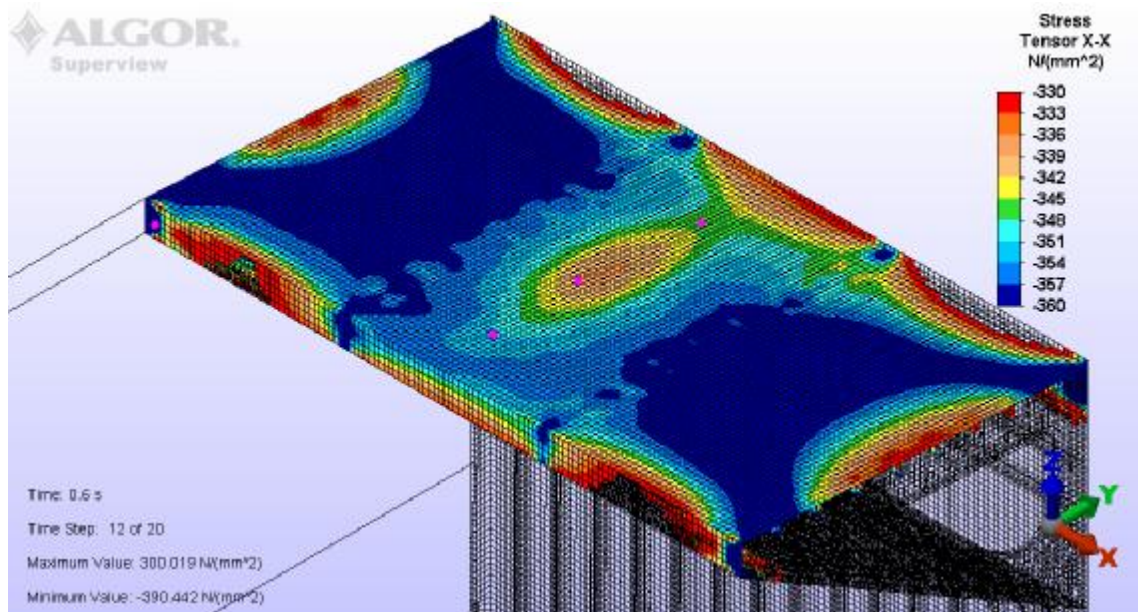
Σχήμα 3.97-Κατανομή τάσεων σ_{xx} καταστρώματος



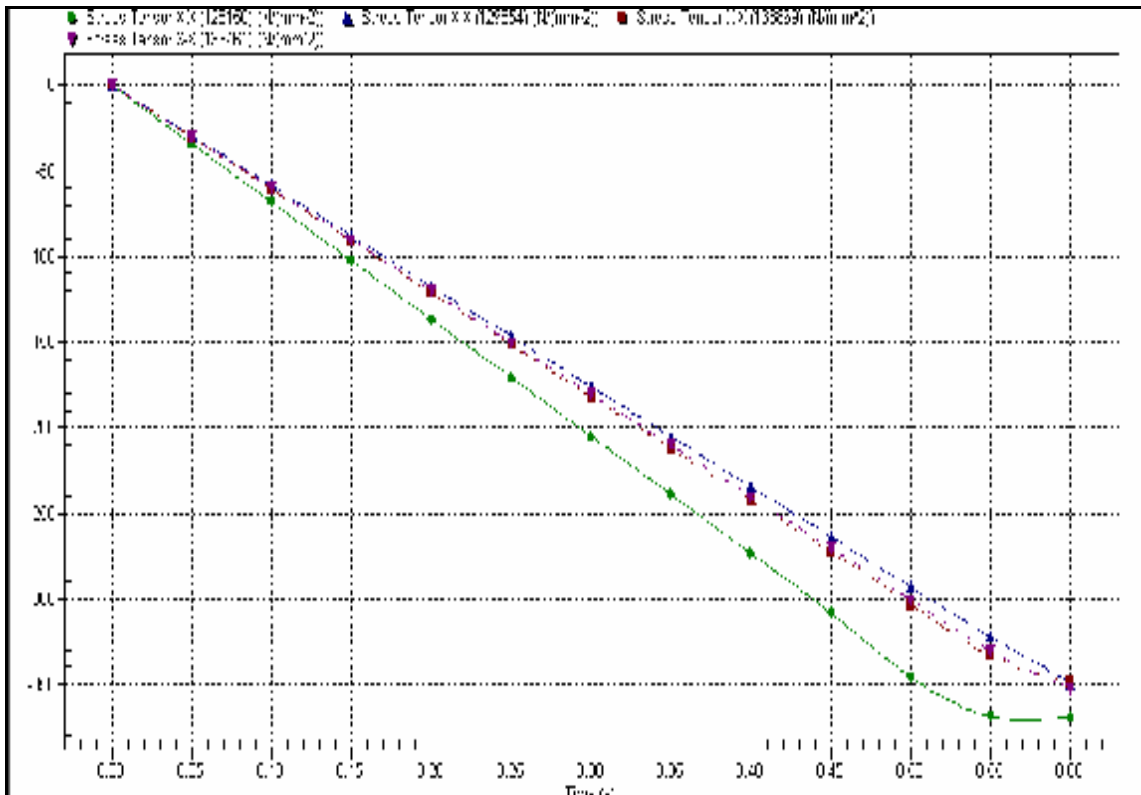
Σχήμα 3.98-Κατανομή τάσεων σ_{xx} ενισχυτικών καταστρώματος



Σχήμα 3.99-Τιμές τάσεων σ_{xx} ενισχυτικών καταστρώματος στα επιλεγμένα σημεία σχήματος 3.98



Σχήμα 3.100-Κατανομή τάσεων σ_{xx} καταστρώματος



Σχήμα 3.99-Τιμές τάσεων σ_{xx} ενισχυτικών καταστρώματος στα επιλεγμένα σημεία σχήματος 3.100

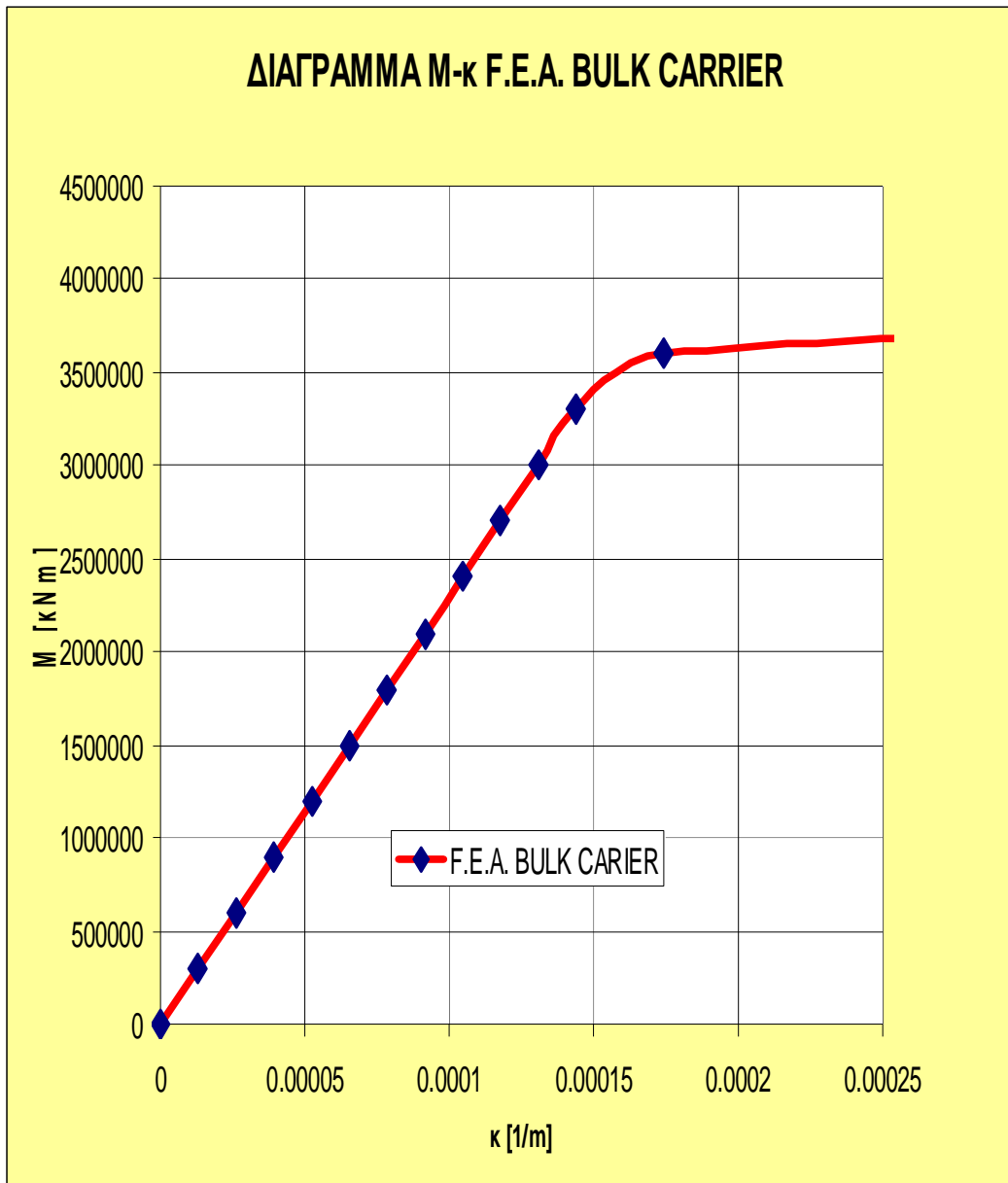
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα στο non linear static 'τρέξιμο' του bulk carrier διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο καταρρέει λόγω πλαστικοποίησης στην περιοχή ελάσματος πλευράς πλησίον του καταστρώματος και του ελάσματος εισόδου στο αμπάρι (περιοχή των Hard Corner 12 και 13 όπου και είχαν εμφανιστεί οι πρώτες πλαστικοποιήσεις στη μέθοδο *C.S.R.*). Επίσης στο step 12 της βηματικής διαδικασίας αρχίζει και η πλαστικοποίηση των ενισχυτικών στο σημείο ένωσης τους με το κατάστρωμα.

Οι μέγιστες ορθές διαμήκειες τάσεις στην περιοχή των ενισχυτικών του καταστρώματος φθάνουν τα 350-360 N/mm² με όριο διαρροής 355 N/mm² ενώ αντίθετα στον πυθμένα, όπως αναμενόταν, τηρούνται σε χαμηλότερες τιμές περί τα 220 N/mm² με όριο διαρροής τα 315 N/mm².

3.7.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ-ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ BULK CARRIER

Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα η μέγιστη καμπτική που δύναται να αναπτύξει η διατομή κατά την προσομοίωση της με πεπερασμένα στοιχεία είναι περί τα 3.600.000 kNm.

Η εν λόγω μέγιστη ροπή αντιστοιχεί σε καμπυλότητα 0.00017 (1/m), τιμή καμπυλότητας παραπλήσια με την αντίστοιχη τιμή του διαγράμματος με την μέθοδο των κανονισμών C.S.R.



Σχήμα 3.96-Διάγραμμα καμπτικής ροπής ως προς την καμπυλότητα πλοίου τύπου bulk carrier

3.8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την διαδικασία μοντελοποίησης και ανάλυσης με το πρόγραμμα ALGOR των απλών κοίλων δοκών, του μοντέλου M3-200 και του μοντέλου του bulk carrier συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Οι αποκλίσεις τιμών των ορθών τάσεων μεταξύ αναλυτικών λύσεων και ALGOR στα μοντέλα των κοίλων δοκών είναι της τάξεως του 3%.
- Οι αμφιέριστες απλές ή ενισχυμένες (εσωτερικά ή εξωτερικά) δοκοί εμφανίζουν μεγαλύτερα βέλη στο ALGOR από την αναλυτική λύση (20% η απλή, 12% η εξωτερικά και 9% η εσωτερικά ενισχυμένη δοκός αντίστοιχα).
- Οι πρόβολοι ενισχυμένες (εσωτερικά ή εξωτερικά) δοκοί εμφανίζουν μικρότερα βέλη κάμψης στο ALGOR από την αναλυτική λύση (8% και 11% αντίστοιχα) ενώ οι πρόβολοι απλές δοκοί μεγαλύτερα (3.3%)
- Η διαδοχική πύκνωση της διαμέρισης 100mm/ 50mm / 25mm δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα των ορθογωνικών κοίλων δοκών(plate και shell elements).
- Η χρήση άκαμπτου πλαισίου στα άκρα των καμπτόμενων μοντέλων συμβάλει στη διατήρηση της επιπεδότητας των διατομών κατά την κάμψη.
- Η καθαρή κάμψη του μοντέλου M3-200 στο ALGOR με 5 εναλλακτικούς τρόπους επιβολής της στροφής της διατομής οδήγησε σε σύγκλιση τιμών μέγιστης ροπής/καμπυλότητας που δύναται να φέρει η διατομή.
- Σε αντίθεση με τη μέθοδο *C.S.R.*, η μετατόπιση του ουδέτερου άξονα κατά την κάμψη μοντέλων στο ALGOR ξεκινά όταν αρχίζει η πλαστικοποίηση των ακραίων ινών της διατομής. Αυτό διότι η σχέση σ - ϵ στο ALGOR είναι γραμμική.(ελαστικό – πλαστικό με κράτυνση μοντέλο υλικού).
- Αντίθετα από το μοντέλο M3-200, η χρήση κομβικών δυνάμεων για την προσομοίωση κάμψης, στο μοντέλο του bulk carrier δεν οδήγησε σε κάμψη της διατομής αλλά σε τοπικές καταπονήσεις. Η δοκός (bulk carrier) συμπεριφέρθηκε ως κοντή και σθεναρή δοκός (stocky).
- Στο μοντέλο του bulk carrier επετεύχθη κάμψη (με στροφή της διατομής) μόνο μετά την επιβολή κομβικής στροφής η εξάσκηση συγκεντρωμένης ροπής σε κεντρικό κόμβο του άκαμπτου πλαισίου.

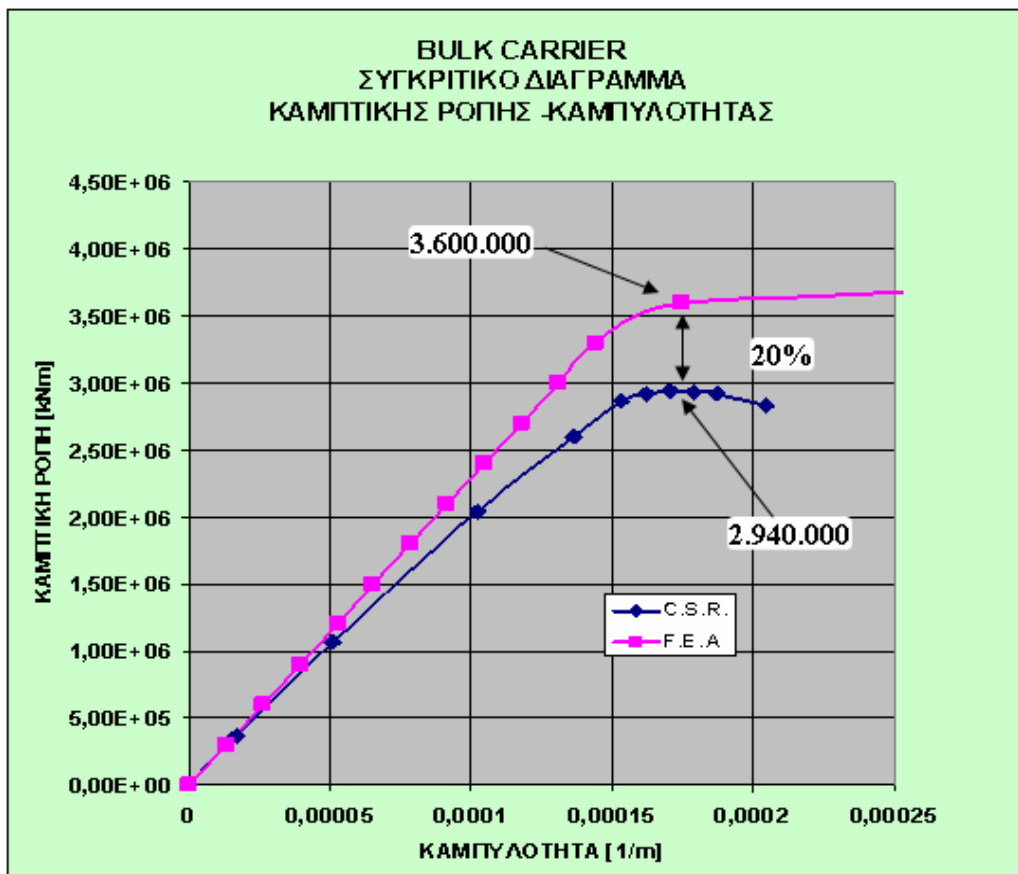
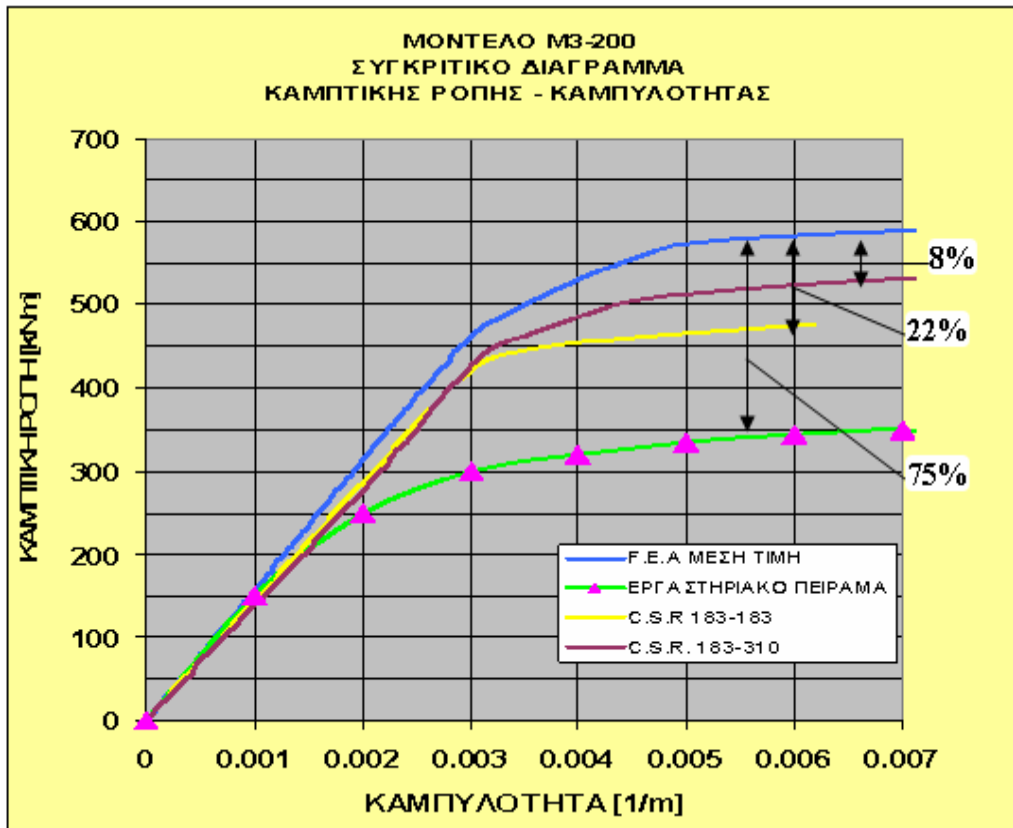
4

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των δύο διαφορετικών μεθόδων προσδιορισμού της μέγιστης αντοχής του bulk carrier και του μοντέλου M3-200. Συγκρίνονται τα διαγράμματα καμπτικής ροπής-καμπυλότητας που εκπονήθηκαν με τη μέθοδο των κανονισμών C.S.R. με τα αντίστοιχα που εκπονήθηκαν με το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων Algor.

4.1 ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Ακολούθως παρατίθενται τα συγκριτικά διαγράμματα καμπτικής ροπής-καμπυλότητας του μοντέλου M3-200 και του bulk carrier. Οι καμπτικές ροπές της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι μεγαλύτερες κατά 15-20% από τις τιμές αντίστοιχες τιμές των καμπτικών ροπών της μεθόδου C.S.R. ενώ οι πειραματικές τιμές για το μοντέλο M3-200 εμφανίζουν σημαντική διαφορά και με τις δύο μεθόδους, γεγονός που χρήζει περαιτέρω διερευνήσεως. Οι καμπυλότητες στις οποίες αναπτύσσονται οι μέγιστες καμπτικές ροπές σχεδόν ταυτίζονται.



4.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Η μέθοδος που ακολουθούν οι κανονισμοί C.S.R. για τον προσδιορισμό της μέγιστης αντοχής χαρακτηρίζεται ως ημι-αναλυτική μέθοδος και βασίζεται στη μείωση της ικανότητας των δομικών στοιχείων της διατομής να φέρουν φορτία όταν παραμορφώνονται στην αξονική τους διεύθυνση, θεωρώντας ότι διαρκώς μεταβάλλεται η γεωμετρία τους. Η ενεργός εγκάρσια επιφάνεια (υπό την έννοια του ενεργού πλάτους λόγω της υστέρησης διάτμησης) των δομικών στοιχείων θεωρείται ότι μειώνεται ακόμη και στα πρώτα στάδια αξονικής παραμόρφωσης. Η δε μέγιστη τιμή μέσης τάσης σ που δύναται να αναπτυχθεί σε κάθε θλιβόμενο δομικό στοιχείο αντιστοιχεί σύμφωνα με τις καμπύλες σ - ϵ σε τιμές 68-85% της τάσης διαρροής (βλέπε πίνακα 4.1)

Στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ALGOR η κάμψη των μοντέλων προξενεί εμφάνιση ορθών τάσεων που προοδευτικά φθάνουν μέχρι την τιμή του ορίου διαρροής του υλικού (βλέπε σχήματα 3.98 και 3.100 κεφαλαίου 3). Τα δομικά στοιχεία δεν δρουν πλέον μεμονωμένα και ανεξάρτητα όπως στη μέθοδο C.S.R. αλλά αλληλεπιδρούν στους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων τους.

Αποτέλεσμα των ανωτέρω, η μέγιστη καμπτική ροπή μέχρι την κατάρρευση της διατομής που υπολογίζεται με το ALGOR να είναι σαφώς μεγαλύτερη (15-20%) από αυτή των κανονισμών C.S.R. και γενικά οι κοίλοι δοκοί που μελετήθηκαν να εμφανίζονται πιο δύσκαμπτοι. Ληφθεί υπόψη ότι στο πρόγραμμα Algor πέραν της πλαστικότητας δεν εισάγονται αρχικές ατέλειες γεωμετρίας της κατασκευής.

Επιπροσθέτως, οι μέγιστες καμπτικές ροπές του μοντέλου M3-200 που υπολογίστηκαν τόσο με την μέθοδο των κανονισμών όσο και με την μέθοδο των C.S.R. είναι κατά πολύ μεγαλύτερες (75%) από τις πειραματικές τιμές, γεγονός που επιβεβαιώνει την ανάγκη εκτέλεσης εμπειριστατωμένων πειραμάτων σχετικά με την αντοχή των κατασκευών.

ϵ	SE15 355	SE16 355	SE17-22 355	SE 23-24 315	SE 25 315	SE 26-27 315	SE 28	SE 29-30 355	SE 40- 41	SE 42 355
1.0	301.5	285.6	279.9	225.4	232.3	216.3	209.5	243.1	230.7	249.2
1.0	301.5	285.6	279.9	225.4	232.3	216.3	223.3	243.1	245.0	249.2
	85% σ_y	80% σ_y	78% σ_y	71% σ_y	73% σ_y	68% σ_y		68% σ_y		70% σ_y

Πίνακας 4.1-Τιμές μέγιστης τάσης καμπύλων σ - ϵ θλιβόμενων δομικών στοιχείων του bulk carrier (εκτός Hard Corner)

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν κατά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού της μέγιστης αντοχής συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Τα μοντέλα στο ALGOR εμφανίζονται πιο δύσκαμπτα από ότι στη μέθοδο *C.S.R.*
- Οι μέγιστες καμπτικές ροπές είναι 20% μεγαλύτερες στο ALGOR και αναπτύσσονται στις ίδιες τιμές καμπυλότητας με τις αντίστοιχες μέγιστες καμπτικές ροπές της μεθόδου *C.S.R.*
- Η μέγιστη καμπτική ροπή στο ALGOR του μοντέλου M3-200 είναι 75% μεγαλύτερη από τη μέγιστη καμπτική ροπή του εργαστηριακού πειράματος και αναπτύσσεται σε ίδια τιμή καμπυλότητας.
- Η διεξαγωγή εμπεριστατωμένων πειραμάτων κρίνεται ως απαραίτητη για τον προσδιορισμό της αντοχής των κατασκευών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μ. Σαμουηλίδης, «Σημειώσεις Αντοχής Πλοίου», Ε.Μ.Π., Αθήνα 2007
2. Π. Καρύδης, «Επιθεώρηση, Συντήρηση και Επισκευή της Μεταλλικής Κατασκευής του Πλοίου», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2002
3. Μ. Τούλιος, «Σημειώσεις Πεπερασμένων Στοιχείων», Ε.Μ.Π., Αθήνα 2007
4. I.A.C.S.-Common Structural Rules for Bulk Carriers, July 2008
5. I.A.C.S.-Common Structural Rules, Rule Change Notice No 1, November 2007
6. J. K. Paik, A. K. Thayamballi, "Ship Shaped Offshore Installations. Design, Building and Operation", N.Y. 2007
7. Y. Okumoto, Y. Takeda, M. Mano, T. Okada, "Design of Ship Hull Structures. A Practical Guide for Engineers",
8. Enrong Qi, Weicheng Cui, Zhengquan Wan, "Comparative Study of Ultimate Hull Girder Strength of Large Double Hull Tankers", Marine Structures, 2005
9. J. M. Gordo, C. Guedes Soares, "Approximate Method to Evaluate the Hull Girder Collapse Strength", Marine Structures 2004
10. O.M.A.E. 2008-57899, June 15-20, 2008, Estoril, Portugal
11. Μ. Παπαδρακάκης, «Σημειώσεις Ανάλυσης Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», Ε.Μ.Π., Αθήνα 1996
12. Γ. Λυκίδης, «Στατική και Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών από Οπλισμένο Σκυρόδεμα με χρήση Τρισδιάστατων Πεπερασμένων Στοιχείων Διανεμημένης Ρηγμάτωσης», Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2007
13. Σ. Κοζάνης, «Ανάπτυξη Προγράμματος Πεπερασμένων Στοιχείων», Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2001
14. T. H. Soreid, "Ultimate Load Analysis of Marine Structures", Trondheim 1981
15. J. Gordo, C. Guedes Soares, "Experimental Evaluation of the Ultimate Bending Moment of a Box Girder", Ocean and Marine Structures, 2004
16. S.N.A.M.E., "Principles of Naval Architecture Vol. I", N. J. 1988

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΟΡΟΛΟΓΙΑ-ΣΥΜΒΟΛΑ-ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ C.S.R.

SYMBOLS AND DEFINITIONS- C.S.R.

1. Primary symbols and units

1.1

1.1.1

Unless otherwise specified, the general symbols and their units used in the present Rules are those defined in Tab 1.

Table 1: Primary symbols

Symbol	Meaning	Units
<i>A</i>	Area	m ²
	Sectional area of ordinary stiffeners and primary members	cm ²
<i>B</i>	Moulded breadth of ship (see [2])	m
<i>C</i>	Coefficient	-
<i>D</i>	Depth of ship (see [2])	m
<i>E</i>	Young's modulus	N/mm ²
<i>F</i>	Force and concentrated loads	kN
<i>I</i>	Hull girder inertia	m ⁴
	Inertia of ordinary stiffeners and primary members	cm ⁴
<i>L</i>	Length of ship (see [2])	m
<i>M</i>	Bending moment	kN.m
<i>Q</i>	Shear force	kN
<i>S</i>	Spacing of primary supporting members	
<i>T</i>	Draught of ship (see [2])	m
<i>V</i>	Ship's speed	knot
<i>Z</i>	Hull girder section modulus	m ³
<i>a</i>	Acceleration	m/s ²
<i>b</i>	Width of attached plating	m
	Width of face plate of ordinary stiffeners and primary members	mm
<i>g</i>	Gravity acceleration (see [2])	m/s ²
<i>h</i>	Height	m
	Web height of ordinary stiffeners and primary members	mm
<i>k</i>	Material factor (see [2])	-
<i>ℓ</i>	Length / Span of ordinary stiffeners and primary supporting members	m
<i>m</i>	Mass	t
<i>n</i>	Number of items	-
<i>p</i>	Pressure	kN/m ²
<i>r</i>	Radius	mm
	Radius of curvature of plating or bilge radius	m
<i>s</i>	Spacing of ordinary stiffeners	m
<i>t</i>	Thickness	mm
<i>w</i>	Section modulus of ordinary stiffeners and primary supporting members	cm ³
<i>x</i>	X coordinate along longitudinal axis (see [4])	m
<i>y</i>	Y coordinate along transverse axis (see [4])	m
<i>z</i>	Z coordinate along vertical axis (see [4])	m

Symbol	Meaning	Units
γ	Safety factor	-
δ	Deflection / Displacement	mm
θ	Angle	deg
ξ	Weibull shape parameter	-
ρ	Density	t/m ³
σ	Bending stress	N/mm ²
τ	Shear stress	N/mm ²

2. Symbols

2.1 Ship's main data

2.1.1

L : Rule length, in m, defined in [3.1]

L_{LL} : Freeboard length, in m, defined in [3.2]

L_{BP} : Length between perpendiculars, in m, is the length of the ship measured between perpendiculars taken at the extremities of the deepest subdivision load line, i.e. of the waterline which corresponds to the greatest draught permitted by the subdivision requirements which are applicable

FP_{LL} : Forward freeboard perpendicular. The forward freeboard perpendicular is to be taken at the forward end of the length L_{LL} and is to coincide with the foreside of the stem on the waterline on which the length L_{LL} is measured

AP_{LL} : After freeboard perpendicular. The after freeboard perpendicular is to be taken at the aft end of the length L_{LL} .

B : Moulded breadth, in m, defined in [3.4]

D : Depth, in m, defined in [3.5]

T : Moulded draught, in m, defined in [3.6]

T_S : Scantling draught, in m, taken equal to the maximum draught (see also Ch 1, Sec 1, [1.1.6])

T_B : Minimum ballast draught at midship, in m, in normal ballast condition as defined in Ch 4, Sec 7, [2.2.1]

T_{LC} : Midship draught, in m, in the considered loading condition

Δ : Moulded displacement, in tonnes, at draught T , in sea water (density $\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$)

C_B : Total block coefficient

$$C_B = \frac{\Delta}{1.025LBT}$$

V : Maximum ahead service speed, in knots, means the greatest speed which the ship is designed to maintain in service at her deepest seagoing draught at the maximum propeller RPM and corresponding engine MCR (Maximum Continuous Rating).

x, y, z : X, Y and Z co-ordinates, in m, of the calculation point with respect to the reference co-ordinate system.

2.2 Materials

2.2.1

- E : Young's modulus, in N/mm^2 , to be taken equal to:
 $E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, for steels in general
 $E = 1.95 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, for stainless steels
 $E = 7.0 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$, for aluminium alloys
- R_{eH} : Minimum yield stress, in N/mm^2 , of the material
- k : Material factor, defined in Ch 3, Sec 1, [2.2]
- ν : Poisson's ratio. Unless otherwise specified, a value of 0.3 is to be taken into account,
- R_m : Ultimate minimum tensile strength, in N/mm^2 , of the material
- R_Y : Nominal yield stress, in N/mm^2 , of the material, to be taken equal to $235/k \text{ N/mm}^2$, unless otherwise specified.

2.3 Loads

2.3.1

- g : Gravity acceleration, taken equal to 9.81 m/s^2
- ρ : Sea water density, taken equal to 1.025 t/m^3
- ρ_L : Density, in t/m^3 , of the liquid carried
- ρ_C : Density, in t/m^3 , of the dry bulk cargo carried
- C : Wave parameter, taken equal to:
$$C = 10.75 - \left(\frac{300 - L}{100} \right)^{1.5} \quad \text{for } 90 \leq L < 300\text{m}$$
$$C = 10.75 \quad \text{for } 300 \leq L < 350\text{m}$$
- h : Height, in m, of a tank, to be taken as the vertical distance from the bottom to the top of the tank, excluding any small hatchways
- z_{TOP} : Vertical distance, in m, of the highest point of the tank from the baseline. For ballast holds, z_{TOP} is the vertical distance, in m, of the top of the hatch coaming from the baseline
- ℓ_H : Length, in m, of the compartment
- M_{SW} : Design still water bending moment, in kN.m, at the hull transverse section considered:
 $M_{SW} = M_{SW,H}$ in hogging conditions
 $M_{SW} = M_{SW,S}$ in sagging conditions
- M_{WV} : Vertical wave bending moment, in kN.m, at the hull transverse section considered:
 $M_{WV} = M_{WV,H}$ in hogging conditions
 $M_{WV} = M_{WV,S}$ in sagging conditions
- M_{WH} : Horizontal wave bending moment, in kN.m, at the hull transverse section considered,
- Q_{SW} : Design still water shear force, in kN, at the hull transverse section considered
- Q_{WV} : Vertical wave shear force, in kN, at the hull transverse section considered
- p_S : Still water pressure, in kN/m^2
- p_W : Wave pressure or dynamic pressures, in kN/m^2

- p_{SF}, p_{WF} : Still water and wave pressure, in kN/m^2 , in flooded conditions
 σ_X : Hull girder normal stress, in N/mm^2
 a_X, a_Y, a_Z : Accelerations, in m/s^2 , along X, Y and Z directions, respectively
 T_R : Roll period, in s
 θ : Roll single amplitude, in deg
 T_P : Pitch period, in s
 Φ : Single pitch amplitude, in deg
 k_r : Roll radius of gyration, in m
 GM : Metacentric height, in m
 λ : Wave length, in m

2.4 Scantlings

2.4.1 Hull girder scantlings

- I_Y : Moment of inertia, in m^4 , of the hull transverse section about its horizontal neutral axis
 I_Z : Moment of inertia, in m^4 , of the hull transverse section about its vertical neutral axis
 Z_{AB}, Z_{AD} : Section moduli, in m^3 , at bottom and deck, respectively
 N : Vertical distance, in m, from the base line to the horizontal neutral axis of the hull transverse section

2.4.2 Local scantlings

- s : Spacing, in m, of ordinary stiffeners, measured at mid-span along the chord
 S : Spacing, in m, of primary supporting members, measured at mid-span along the chord
 ℓ : Span, in m, of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be, measured along the chord
 ℓ_b : Length, in m, of brackets
 t_C : Corrosion addition, in mm
 h_w : Web height, in mm, of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be
 t_w : Net web thickness, in mm, of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be
 b_f : Face plate width, in mm, of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be
 t_f : Net face plate thickness, in mm, of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be
 t_p : Net thickness, in mm, of the plating attached to an ordinary stiffener or a primary supporting member, as the case may be
 b_p : Width, in m, of the plating attached to the stiffener or the primary supporting member, for the yielding check
 A_s : Net sectional area, in cm^2 , of the stiffener or the primary supporting member, with attached plating of width s
 A_{sh} : Net shear sectional area, in cm^2 , of the stiffener or the primary supporting member
 I : Net moment of inertia, in cm^4 , of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be, without attached plating, around its neutral axis parallel to the plating

- I_p : Net polar moment of inertia, in cm^4 , of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be, about its connection to plating
- I_w : Net sectional moment of inertia, in cm^6 , of ordinary stiffener or primary supporting member, as the case may be, about its connection to plating
- I_S : Net moment of inertia, in cm^4 , of the stiffener or the primary supporting member, with attached shell plating of width s , about its neutral axis parallel to the plating
- Z : Net section modulus, in cm^3 , of an ordinary stiffener or a primary supporting member, as the case may be, with attached plating of width b_p

3. Definitions

3.1 Rule length

3.1.1

The rule length L is the distance, in m, measured on the summer load waterline, from the forward side of the stem to the after side of the rudder post, or to the centre of the rudder stock where there is no rudder post. L is to be not less than 96% and need not exceed 97% of the extreme length on the summer load waterline.

3.1.2

In ships without rudder stock (e.g. ships fitted with azimuth thrusters), the rule length L is to be taken equal to 97% of the extreme length on the summer load waterline.

3.1.3

In ships with unusual stem or stern arrangements, the rule length L is considered on a case by case basis.

3.2 Freeboard length

3.2.1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 3(1,a))

The freeboard length L_{LL} is the distance, in m, on the waterline at 85% of the least moulded depth from the top of the keel, measured from the forward side of the stem to the centre of the rudder stock. L_{LL} is to be not less than 96% of the extreme length on the same waterline.

3.2.2

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 3(1,c))

Where the stem contour is concave above the water-line at 85% of the least moulded depth, both the forward end of the extreme length and the forward side of the stem are to be taken at the vertical projection to that waterline of the aftermost point of the stem contour (above that waterline) (see Fig 1).

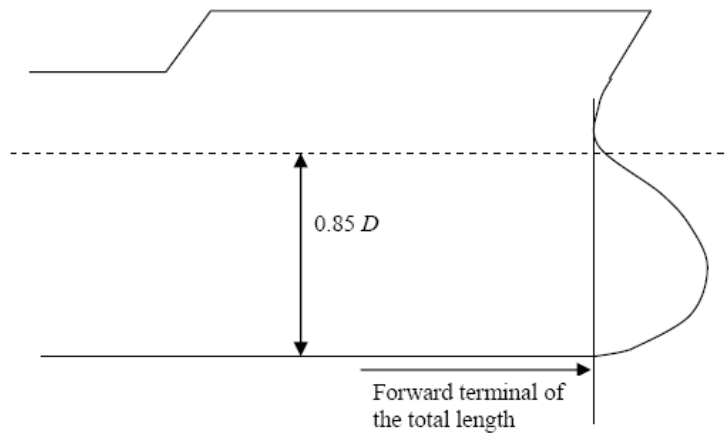


Figure 1: Concave stem contour

3.3 Ends of rule length L and midship

3.3.1 Fore end

The fore end (FE) of the rule length L , see Fig 2, is the perpendicular to the summer load waterline at the forward side of the stem.

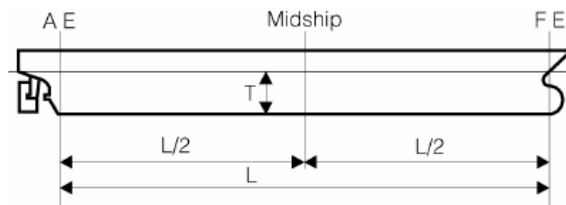


Figure 2: Ends and midship

The aft end (AE) of the rule length L , see Fig 2, is the perpendicular to the waterline at a distance L aft of the fore end.

3.3.2 Midship

The midship is the perpendicular to the waterline at a distance $0.5L$ aft of the fore end.

3.3.3 Midship part

The midship part of a ship is the part extending $0.4L$ amidships, unless otherwise specified.

3.4 Moulded breadth

3.4.1

The moulded breadth B is the greatest moulded breadth, in m, measured amidships below the weather deck.

3.5 Depth

3.5.1

The depth D is the distance, in m, measured vertically on the midship transverse section, from the moulded base line to the top of the deck beam at side on the upper-most continuous deck.

3.6 Moulded draught

3.6.1

The moulded draught T is the distance, in m, measured vertically on the midship transverse section, from the moulded base line to the summer load line.

3.7 Lightweight

3.7.1

The lightweight is the displacement, in t, without cargo, fuel, lubricating oil, ballast water, fresh water and feed water, consumable stores and passengers and crew and their effects, but including liquids in piping.

3.8 Deadweight

3.8.1

The deadweight is the difference, in t, between the displacement, at the summer draught in sea water of density $\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$, and the lightweight.

3.9 Freeboard deck

3.9.1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC. 143(77) Reg. 3(9))

The freeboard deck is defined in Regulation 3 of the International Load Line Convention, as amended.

3.10 Bulkhead deck

3.10.1

Ref. SOLAS Reg.II-1/2 .5

The bulkhead deck is the uppermost deck to which the transverse watertight bulkheads, except both peak bulkheads, extend and are made effective.

3.11 Strength deck

3.11.1

The strength deck at a part of ship's length is the uppermost continuous deck at that part to which the shell plates extend.

3.12 Superstructure

3.12.1 General

Ref. ILLC, As amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 3(10,a))

A superstructure is a decked structure on the free-board deck, extending from side to side of the ship or with the side plating not being inboard of the shell plating more than 0.04B.

3.12.2 Enclosed and open superstructure

A superstructure may be:

- enclosed, where:
 - 1) it is enclosed by front, side and aft bulkheads complying with the requirements of Ch 9, Sec 4
 - 2) all front, side and aft openings are fitted with efficient weathertight means of closing
- open, where it is not enclosed.

3.13 Forecastle

3.13.1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 3(10,g))

A forecastle is a superstructure which extends from the forward perpendicular aft to a point which is forward of the after perpendicular. The forecastle may originate from a point forward of the forward perpendicular.

3.14 Raised quarterdeck

3.14.1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 3(10,i))

A raised quarterdeck is a superstructure which extends forward from the after perpendicular, generally has a height less than a normal superstructure, and has an intact front bulkhead (sidescuttles of the non-opening type fitted with efficient deadlights and bolted man hole covers)(see Fig 3). Where the forward bulkhead is not intact due to doors and access openings, the superstructure is then to be considered as a poop.

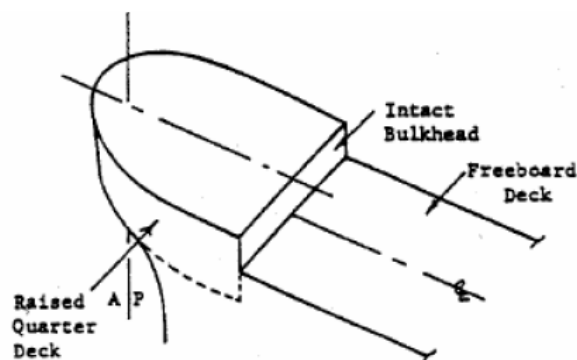


Figure 3: Raised quarter deck

3.15 Deckhouse

3.15.1

A deckhouse is a decked structure other than a superstructure, located on the freeboard deck or above.

3.16 Trunk

3.16.1

A trunk is a decked structure similar to a deckhouse, but not provided with a lower deck.

3.17 Wash bulkhead

3.17.1

A wash bulkhead is a perforated or partial bulkhead in a tank.

3.18 Standard height of superstructure

3.18.1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 33)

The standard height of superstructure is defined in Tab 2.

Table 2: Standard height of superstructure

Freeboard length L_{LL} , in m	Standard height h_s , in m	
	Raised quarter deck	All other superstructures
$90 < L_{LL} < 125$	$0.3 + 0.012 L_{LL}$	$1.05 + 0.01 L_{LL}$
$L_{LL} \geq 125$	1.80	2.30

3.19 Type A and Type B ships

3.19.1 Type A ship

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 27.1)

A Type A ship is one which:

- is designed to carry only liquid cargoes in bulk;
- has a high integrity of the exposed deck with only small access openings to cargo compartments, closed by watertight gasketed covers of steel or equivalent material
- has low permeability of loaded cargo compartments.

A Type A ship is to be assigned a freeboard following the requirements reported in the International Load Line Convention 1966, as amended.

3.19.2 Type B ship

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 27.5)

All ships which do not come within the provisions regarding Type A ships stated in [3.19.1] are to be considered as Type B ships.

A Type B ship is to be assigned a freeboard following the requirements reported in the International Load Line Convention 1966, as amended.

3.19.3 Type B-60 ship

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 27.9)

A Type B-60 ship is any Type B ship of over 100 metres in length which, according to applicable requirements of in the International Load Line Convention 1966, as amended, is assigned with a value of tabular freeboard which can be reduced up to 60 per cent of the difference between the “B” and “A” tabular values for the appropriate ship lengths.

3.19.4 Type B-100 ship

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 27.10)

A Type B-100 ship is any Type B ship of over 100 metres in length which, according to applicable requirements of in the International Load Line Convention 1966, as amended, is assigned with a value of tabular freeboard which can be reduced up to 100 per cent of the difference between the “B” and “A” tabular values for the appropriate ship lengths.

3.20 Positions 1 and 2

3.20.1 Position 1

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 13)

Position 1 includes:

- exposed freeboard and raised quarter decks,
- exposed superstructure decks situated forward of $0.25 L_{LL}$ from the perpendicular, at the forward side of the stem, to the waterline at 85% of the least moulded depth measured from the top of the keel.

3.20.2 Position 2

Ref. ILLC, as amended (Resolution MSC.143(77) Reg. 13)

Position 2 includes:

- exposed superstructure decks situated aft of $0.25 L_{LL}$ from the perpendicular, at the forward side of the stem, to the waterline at 85% of the least moulded depth measured from the top of the keel and located at least one standard height of superstructure above the freeboard deck,
- exposed superstructure decks situated forward of $0.25 L_{LL}$ from the perpendicular, at the forward side of the stem, to the waterline at 85% of the least moulded depth measured from the top of the keel and located at least two standard heights of superstructure above the freeboard deck.

4. Reference co-ordinate system

4.1

4.1.1

The ship's geometry, motions, accelerations and loads are defined with respect to the following right-hand co-ordinate system (see Fig 4):

- Origin: at the intersection among the longitudinal plane of symmetry of ship, the aft end of L and the baseline
- X axis: longitudinal axis, positive forwards
- Y axis: transverse axis, positive towards portside
- Z axis: vertical axis, positive upwards.

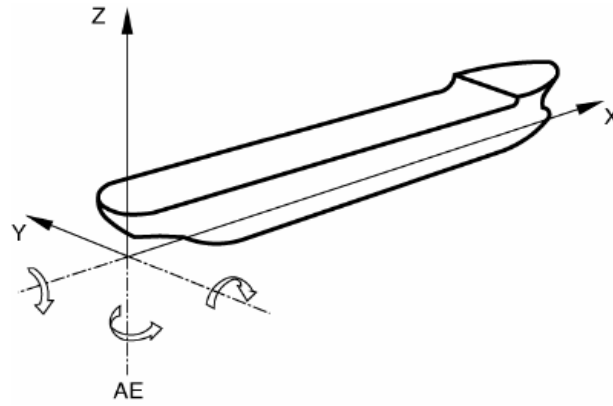


Figure 4: Reference co-ordinate system

4.1.2

Positive rotations are oriented in anti-clockwise direction about the X , Y and Z axes.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΥΜΦΩΝΩΣ C.S.R.

ULTIMATE STRENGTH CHECK-CSR

Symbols

For symbols not defined in this Section, refer to Ch 1, Sec 4.

- M_{SW} : Design still water bending moment in intact condition, in kN.m, at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, [2.2]:
- $M_{SW} = M_{SW,H}$ in hogging conditions
- $M_{SW} = M_{SW,S}$ in sagging conditions
- M_{WV} : Vertical wave bending moment in intact condition, in kN.m, at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, [3.1]
- $M_{SW,F}$: Still water bending moment, in kN.m, in flooded conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- $M_{WV,F}$: Vertical wave bending moment, in kN.m, in flooded conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- $M_{WV,P}$: Vertical wave bending moment, in kN.m, in harbour conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- M_{WH} : Horizontal wave bending moment, in kN.m, at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, [3.3]
- Q_{SW} : Design still water shear force in intact condition, in kN, at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, [2.3]
- Q_{WV} : Vertical wave shear force in intact condition, in kN, at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, [3.2]
- $Q_{SW,F}$: Still water shear force, in kN, in flooded conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- $Q_{WV,F}$: Vertical wave shear force, in kN, in flooded conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- $Q_{WV,P}$: Vertical wave shear force, in kN, in harbour conditions, at the hull transverse section under consideration, to be calculated according to Ch 4, Sec 3
- k : Material factor, as defined in Ch 1, Sec 4, [2.2.1]
- x : X co-ordinate, in m, of the calculation point with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]
- z : Z co-ordinate, in m, of the calculation point with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]
- N : Z co-ordinate, in m, of the centre of gravity of the hull transverse section defined in [1.2], with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]
- V_D : Vertical distance, in m, defined in [1.4.2]
- I_Y : Net moment of inertia, in m⁴, of the hull transverse section about its horizontal neutral axis, to be calculated according to [1.5]

- I_Z : Net moment of inertia, in m^4 , of the hull transverse section about its vertical neutral axis, to be calculated according to [1.5]
- S : Net first moment, in m^3 , of the hull transverse section, to be calculated according to [1.6]
- Z_A : Net section modulus, in m^3 , at any point of the hull transverse section, to be calculated according [1.4.1]
- Z_{AB}, Z_{AD} : Net section moduli, in m^3 , at bottom and deck, respectively, to be calculated according to [1.4.2]
- C : Wave parameter defined in Ch 1, Sec 4, [2.3.1]
- $\sigma_{1,ALL}$: Allowable normal stress, in N/mm^2 , defined in [3.1.1]
- $\tau_{1,ALL}$: Allowable shear stress, in N/mm^2 , defined in [3.2.1]
- ρ : Sea water density, taken equal to $1.025 t/m^3$.

1. Strength characteristics of the hull girder transverse sections

1.1 General

1.1.1

This Article specifies the criteria for calculating the hull girder strength characteristics to be used for the checks in [2] to [5], in association with the hull girder loads specified in Ch 4, Sec 3.

1.2 Hull girder transverse sections

1.2.1 General

Hull girder transverse sections are to be considered as being constituted by the members contributing to the hull girder longitudinal strength, i.e. all continuous longitudinal members below and including the strength deck defined in [1.3], taking into account the requirements in [1.2.2] to [1.2.9].

These members are to be considered as having (see also Ch 3, Sec 2) net offered scantlings based on gross offered thickness reduced by $0.5t_C$, when the hull girder strength characteristics are used for:

- the hull girder yielding check according to [2] to [5]
- the ultimate strength check in Ch 5, Sec 2
- the calculation of the hull girder stresses for the strength checks of plating, ordinary stiffeners and primary supporting members according to Ch 6.

1.2.2 Continuous trunks and continuous longitudinal hatch coamings

Continuous trunks and continuous longitudinal hatch coamings may be included in the hull girder transverse sections, provided they are effectively supported by longitudinal bulkheads or primary supporting members.

1.2.3 Longitudinal ordinary stiffeners or girders welded above the strength deck

Longitudinal ordinary stiffeners or girders welded above the strength deck (including the deck of any trunk fitted as specified in [1.2.2]) are to be included in the hull girder transverse sections.

1.2.4 Longitudinal girders between hatchways, supported by longitudinal bulkheads

Where longitudinal girders, effectively supported by longitudinal bulkheads, are fitted between hatchways, the sectional area of these longitudinal girders are to be included in the hull girder transverse.

1.2.5 Longitudinal bulkheads with vertical corrugations

Longitudinal bulkheads with vertical corrugations are not to be included in the hull girder transverse sections.

1.2.6 Members in materials other than steel

Where a member contributing to the longitudinal strength is made in material other than steel with a Young's modulus E equal to $2.06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, the steel equivalent sectional area that may be included in the hull girder transverse sections is obtained, in m^2 , from the following formula:

$$A_{SE} = \frac{E}{2.06 \cdot 10^5} A_M$$

where:

A_M : Sectional area, in m^2 , of the member under consideration.

1.2.7 Large openings

Large openings are:

- elliptical openings exceeding 2.5 m in length or 1.2 m in breadth
- circular openings exceeding 0.9 m in diameter.

Large openings and scallops, where scallop welding is applied, are always to be deducted from the sectional areas included in the hull girder transverse sections.

1.2.8 Small openings

Smaller openings than those in [1.2.7] in one transverse section in the strength deck or bottom area need not be deducted from the sectional areas included in the hull girder transverse sections, provided that:

$$\Sigma b_S \leq 0.06(B - \Sigma b)$$

where:

Σb_S : Total breadth of small openings, in m, in the strength deck or bottom area at the transverse section considered, determined as indicated in Fig 1

Σb : Total breadth of large openings, in m, at the transverse section considered, determined as indicated in Fig 1.

Where the total breadth of small openings Σb_S does not fulfil the above criteria, only the excess of breadth is to be deducted from the sectional areas included in the hull girder transverse sections.

1.2.9 Lightening holes, draining holes and single scallops

Lightening holes, draining holes and single scallops in longitudinals need not be deducted if their height is less than $0.25h_w$, without being greater than 75 mm, where h_w is the web height, in mm.

Otherwise, the excess is to be deducted from the sectional area or compensated.

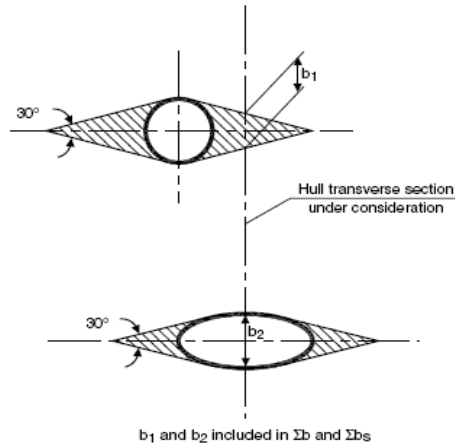


Figure 1: Calculation of Σb and Σb_s

1.3 Strength deck

1.3.1

The strength deck is, in general, the uppermost continuous deck.

In the case of a superstructure or deckhouses contributing to the longitudinal strength, the strength deck is the deck of the superstructure or the deck of the uppermost deckhouse.

1.3.2

A superstructure extending at least $0.15L$ within $0.4L$ amidships may generally be considered as contributing to the longitudinal strength.

For other superstructures and for deckhouses, their contribution to the longitudinal strength is to be assessed on a case by case basis, to evaluate their percentage of participation to the longitudinal strength.

1.4 Section modulus

1.4.1

The section modulus at any point of a hull transverse section is obtained, in m^3 , from the following formula:

$$Z_A = \frac{I_Y}{|z - N|}$$

1.4.2

The section moduli at bottom and at deck are obtained, in m^3 , from the following formulae:

- at bottom:

$$Z_{AB} = \frac{I_Y}{N}$$

- at deck:

$$Z_{AD} = \frac{I_Y}{V_D}$$

where:

V_D : Vertical distance, in m, taken equal to:

- in general:

$$V_D = z_D - N$$

where:

z_D : Z co-ordinate, in m, of strength deck at side, defined in [1.3], with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]

- if continuous trunks or hatch coamings are taken into account in the calculation of I_Y , as specified in [1.2.2]:

$$V_D = (z_T - N) \left(0.9 + 0.2 \frac{y_T}{B} \right) \geq z_D - N$$

where:

y_T, z_T : Y and Z co-ordinates, in m, of the top of continuous trunk or hatch coaming with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]; y_T and z_T are to be measured for the point which maximises the value of V_D

- if longitudinal ordinary stiffeners or girders welded above the strength deck are taken into account in the calculation of I_Y , as specified in [1.2.3], V_D is to be obtained from the formula given above for continuous trunks and hatch coamings. In this case, y_T and z_T are the Y and Z co-ordinates, in m, of the top of the longitudinal stiffeners or girders with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4].

1.5 Moments of inertia

1.5.1

The moments of inertia I_Y and I_Z , in m^4 , are those, calculated about the horizontal and vertical neutral axes, respectively, of the hull transverse sections defined in [1.2].

1.6 First moment

1.6.1

The first moment S , in m^3 , at a level z above the baseline is that, calculated with respect to the horizontal neutral axis, of the portion of the hull transverse sections defined in [1.2] located above the z level.

2. Hull girder stresses

2.1 Normal stresses

2.1.1 General

The normal stresses in a member made in material other than steel with a Young's modulus E equal to $2.06 \cdot 10^5$ N/mm² included in the hull girder transverse sections as specified in [1.2.6], are obtained from the following formula:

$$\sigma_1 = \frac{E}{2.06 \cdot 10^5} \sigma_{1S}$$

where:

σ_{1S} : Normal stress, in N/mm², in the member under consideration, calculated according to [2.1.2] and [2.1.3] considering this member as having the steel equivalent sectional area A_{SE} defined in [1.2.6].

2.1.2 Normal stresses induced by vertical bending moments

The normal stresses induced by vertical bending moments are obtained, in N/mm², from the following formulae:

- at any point of the hull transverse section, located below z_{TD} , where $z_{TD} = V_D + N$:

$$\sigma_1 = \frac{M_{SW} + M_{WV}}{Z_A} 10^{-3}$$

- at bottom:

$$\sigma_1 = \frac{M_{SW} + M_{WV}}{Z_{AB}} 10^{-3}$$

- at deck:

$$\sigma_1 = \frac{M_{SW} + M_{WV}}{Z_{AD}} 10^{-3}$$

2.1.3 Normal stresses in flooded conditions of BC-A or BC-B ships

This requirement applies to BC-A or BC-B ships, in addition to [2.1.2].

The normal stresses, in the flooded conditions specified in Ch 4, Sec 3, are to be obtained at any point, in N/mm², from the following formula:

$$\sigma_1 = \frac{M_{SW,F} + M_{WV,F}}{Z_A} 10^{-3}$$

2.2 Shear stresses

2.2.1 General

The shear stresses induced by vertical shear forces Q_{SW} and Q_{WV} in intact condition and, for BC-A and BC-B ships by vertical shear forces $Q_{SW,F}$ and $Q_{WV,F}$ in flooded condition are normally to be obtained through direct analyses.

When they are combined, vertical shear forces Q_{SW} and Q_{WV} in intact condition are to be taken with the same sign. The same is to be applied also for combination of vertical shear forces $Q_{SW,F}$ and $Q_{WV,F}$ in flooded condition.

The shear force correction ΔQ_C is to be taken into account, in accordance with [2.2.2]. The shear force correction need not to be considered at the fore end of foremost hold and aft end of aftermost hold.

As an alternative to this procedure, the shear stresses induced by the vertical shear forces Q_{SW} and Q_{WV} in intact condition and, for **BC-A** and **BC-B** ships by the vertical shear forces $Q_{SW,F}$ and $Q_{WV,F}$ in flooded condition may be obtained through the simplified procedure in [2.2.2] and [2.2.3] respectively.

2.2.2 Simplified calculation of shear stresses induced by vertical shear forces

The shear stresses induced by the vertical shear forces in the calculation point are obtained, in N/mm^2 , from the following formula:

$$\tau_1 = (Q_{SW} + Q_{WV} - \varepsilon \Delta Q_C) \frac{S}{I_{Yt}} \delta$$

where:

t : Minimum net thickness, in mm, of side and inner side plating, as applicable according to Tab 1

δ : Shear distribution coefficient defined in Tab 1

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW})$$

ΔQ_C : Shear force correction (see Fig 2), which takes into account, when applicable, the portion of loads transmitted by the double bottom girders to the transverse bulkheads:

- for ships with any non-homogeneous loading conditions, such as alternate hold loading conditions and heavy ballast conditions carrying ballast in hold(s):

$$\Delta Q_C = \alpha \left| \frac{M}{B_H \ell_H} - \rho T_{LC} \right|$$

- for other ships:

$$\Delta Q_C = 0$$

$$\varphi = 1.38 + 1.55 \frac{\ell_0}{b_0}, \text{ to be taken not greater than } 3.7$$

$$\alpha = g \frac{\ell_0 b_0}{2 + \varphi \frac{\ell_0}{b_0}}$$

ℓ_0, b_0 : Length and breadth, respectively, in m, of the flat portion of the double bottom in way of the hold considered; b_0 is to be measured on the hull transverse section at the middle of the hold

ℓ_H : Length, in m, of the hold considered, measured between the middle of the transverse corrugated bulkheads depth

B_H : Ship's breadth, in m, measured at the level of inner bottom on the hull transverse section at the middle of the hold considered

M : Total mass of cargo, in t, in the hold of the section considered

T_{LC} : Draught, in m, measured vertically on the hull transverse section at the middle of the hold considered, from the moulded baseline to the waterline in the loading condition considered.

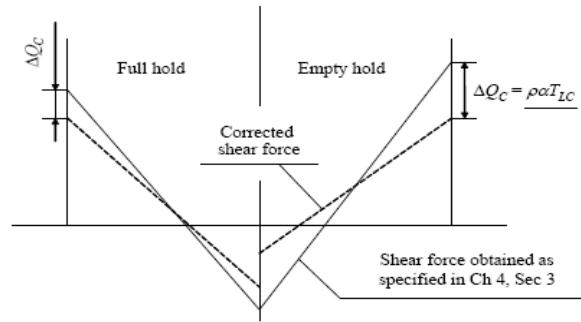


Figure 2: Shear force correction ΔQ_C

Table 1: Shear stresses induced by vertical shear forces

Ship typology	Location	t , in mm	δ
Single side ship	Sides	t_S	0,5
Double side ship	Sides	t_S	$0.5(1 - \phi)$
	Inner sides	t_{IS}	0.5ϕ

where:

t_S, t_{IS} : Minimum net thicknesses, in mm, of side and inner side, respectively

t_{SM}, t_{ISM} : Mean net thicknesses, in mm, over all the strakes of side and inner side, respectively. They are calculated as $\sum(\ell_i t_i) / \sum \ell_i$, where ℓ_i and t_i are the length, in m, and the net thickness, in mm, of the i^{th} strake of side and inner side.

ϕ : Coefficient taken equal to: $\phi = 0.275 + 0.25 \frac{t_{ISM}}{t_{SM}}$

2.2.3 Shear stresses in flooded conditions of BC-A or BC-B ships

This requirement applies to BC-A or BC-B ships, in addition to [2.2.1] and [2.2.2].

The shear stresses, in the flooded conditions specified in Ch 4, Sec 3, are to be obtained at any point, in N/mm², from the following formula:

$$\tau_1 = \left(Q_{SW,F} + Q_{WV,F} - \varepsilon \Delta Q_C \right) \frac{S}{I_Y t} \delta$$

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW,F})$$

ΔQ_C : Shear force correction, to be calculated according to [2.2.2], where the mass M is to include the mass of the ingressed water in the hold considered and the draught T_{LC} is to be measured up to the equilibrium waterline

t : Net thickness, in mm, of the side plating.

3. Checking criteria

3.1 Normal stresses

3.1.1

It is to be checked that the normal stresses σ_1 calculated according to [2.1.2] and, when applicable, [2.1.3] are in compliance with the following formula:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{1,ALL}$$

where:

$\sigma_{1,ALL}$: Allowable normal stress, in N/mm², obtained from the following formulae:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,ALL} &= \frac{130}{k} && \text{for } \frac{x}{L} \leq 0.1 \\ \sigma_{1,ALL} &= \frac{190}{k} - \frac{1500}{k} \left(\frac{x}{L} - 0.3 \right)^2 && \text{for } 0.1 < \frac{x}{L} < 0.3 \\ \sigma_{1,ALL} &= \frac{190}{k} && \text{for } 0.3 \leq \frac{x}{L} \leq 0.7 \\ \sigma_{1,ALL} &= \frac{190}{k} - \frac{1500}{k} \left(\frac{x}{L} - 0.7 \right)^2 && \text{for } 0.7 < \frac{x}{L} < 0.9 \\ \sigma_{1,ALL} &= \frac{130}{k} && \text{for } \frac{x}{L} \geq 0.9 \end{aligned}$$

3.2 Shear stresses

3.2.1

It is to be checked that the shear stresses τ_1 calculated according to [2.2.1] or [2.2.2] and, when applicable, [2.2.3] are in compliance with the following formula:

$$\tau_1 \leq \tau_{1,ALL}$$

where:

$\tau_{1,ALL}$: Allowable shear stress, in N/mm²:

$$\tau_{1,ALL} = 120/k$$

4. Section modulus and moment of inertia

4.1 General

4.1.1

The requirements in [4.2] to [4.5] provide the minimum hull net girder section modulus, complying with the checking criteria indicated in [3], and the midship net section moment of inertia required to ensure sufficient hull girder rigidity.

4.1.2

The k material factors are to be defined with respect to the materials used for the bottom and deck members contributing to the longitudinal strength according to [1]. When material factors for higher strength steels are used, the requirements in [4.5] apply.

4.2 Section modulus within 0.4L amidships

4.2.1

The net section moduli Z_{AB} and Z_{AD} at the midship section are to be not less than the value obtained, in m^3 , from the following formula:

- $Z_{R,MN} = 0.9CL^2 B(C_B + 0.7)k10^{-6}$

4.2.2

In addition, the net section moduli Z_{AB} and Z_{AD} within 0.4L amidships are to be not less than the value obtained, in m^3 , from the following formula:

- $Z_R = \frac{M_{SW} + M_{WV}}{\sigma_{1,ALL}} 10^{-3}$

- in addition, for **BC-A** and **BC-B** ships:

$$Z_R = \frac{M_{SW,F} + M_{WV,F}}{\sigma_{1,ALL}} 10^{-3}$$

4.2.3

Where the total breadth Σb_s of small openings, as defined in [1.2.8], is deducted from the sectional areas included in the hull girder transverse sections, the values $Z_{R,MN}$ and Z_R defined in [4.2.1] or [4.2.2] may be reduced by 3%.

4.2.4

Scantlings of members contributing to the longitudinal strength (see [1]), based on the section modulus requirement in [4.2.1], are to be maintained within 0.4L amidships.

4.3 Section modulus outside 0.4L amidships

4.3.1

The net section moduli Z_{AB} and Z_{AD} outside 0.4L amidships are to be not less than the value obtained, in m^3 , from the following formula:

- $Z_R = \frac{M_{SW} + M_{WV}}{\sigma_{1,ALL}} 10^{-3}$

- in addition, for **BC-A** and **BC-B** ships:

$$Z_R = \frac{M_{SW,F} + M_{WV,F}}{\sigma_{1,ALL}} 10^{-3}$$

4.3.2

Scantlings of members contributing to the hull girder longitudinal strength (see [1]) may be gradually reduced, outside 0.4L amidships, to the minimum required for local strength purposes at fore and aft parts, as specified in Ch 9, Sec 1 or Ch 9, Sec 2, respectively.

4.4 Midship section moment of inertia

4.4.1

The net midship section moment of inertia about its horizontal neutral axis is to be not less than the value obtained, in m^4 , from the following formula:

$$I_{YR} = 3Z'_{R,MIN}L \cdot 10^{-2}$$

where $Z'_{R,MIN}$ is the required net midship section modulus $Z_{R,MIN}$, in m^3 , calculated as specified in [4.2.1], but assuming $k = 1$.

4.5 Extent of higher strength steel

4.5.1

When a material factor for higher strength steel is used in calculating the required section modulus at bottom or deck according to [4.2] or [4.3], the relevant higher strength steel is to be adopted for all members contributing to the longitudinal strength (see [1]), at least up to a vertical distance, in m, obtained from the following formulae:

- above the baseline (for section modulus at bottom):

$$V_{HB} = \frac{\sigma_{1B} - k\sigma_{1,ALL}}{\sigma_{1B} + \sigma_{1D}} z_D$$

- below a horizontal line located at a distance V_D (see [1.4.2]) above the neutral axis of the hull transverse section (for section modulus at deck):

$$V_{HD} = \frac{\sigma_{1D} - k\sigma_{1,ALL}}{\sigma_{1B} + \sigma_{1D}} (N + V_D)$$

where:

σ_{1B} , σ_{1D} : Normal stresses, in N/mm^2 , at bottom and deck, respectively, calculated according to [2.1]

z_D : Z co-ordinate, in m, of the strength deck defined in [1.3], with respect to the reference co-ordinate system defined in Ch 1, Sec 4, [4]

4.5.2

The higher strength steel is to extend in length at least throughout $0.4L$ amidships where it is required for strength purposes according to the provision of the present Rules.

5. Permissible still water bending moment and shear force

5.1 Permissible still water bending moment and shear force in intact condition

5.1.1 Permissible still water bending moment

The permissible still water bending moment at any hull transverse section in intact condition, in hogging or sagging conditions, is the value $M_{5\pi}$ considered in the hull girder section modulus calculation according to [4.2] and [4.3].

In the case of structural discontinuities in the hull transverse sections, the distribution of permissible still water bending moments is considered on a case by case basis.

5.1.2 Permissible still water shear force - Direct calculation

Where the shear stresses are obtained through calculation analyses according to [2.2.1], the permissible positive or negative still water shear force in intact condition at any hull transverse section is obtained, in kN, from the following formula:

$$Q_P = \varepsilon |Q_T| - Q_{WV}$$

where:

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW})$$

Q_T : Shear force, in kN, which produces a shear stress $\tau = 120/k \text{ N/mm}^2$ in the most stressed point of the hull net transverse section, taking into account the shear force correction ΔQ_C in accordance with [2.2.2].

A lower value of the permissible still water shear force may be considered, if requested by the Shipbuilder.

5.1.3 Permissible still water shear force - Simplified calculation

Where the shear stresses are obtained through the simplified procedure in [2.2.2], the permissible positive or negative still water shear force in intact condition at any hull transverse section is obtained, in kN, from the following formula:

$$Q_P = \varepsilon \left(\frac{120}{k\delta} \frac{I_Y t}{S} + \Delta Q_C \right) - Q_{WV}$$

where:

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW})$$

δ : Shear distribution coefficient defined in Tab 1

t : Minimum net thickness, in mm, of side and inner side plating, as applicable according to Tab 1

ΔQ_C : Shear force corrections defined in [2.2.2].

A lower value of the permissible still water shear force may be considered, if requested by the Shipbuilder.

5.2 Permissible still water bending moment and shear force in harbour conditions

5.2.1 Permissible still water bending moment

The permissible still water bending moment at any hull transverse section in harbour conditions, in hogging or sagging conditions, is obtained, in kN.m, from the following formula:

$$M_{P,P} = M_{SW} + M_{WV} - M_{WV,P}$$

A lower value of the permissible still water bending moment in harbour conditions may be considered, if requested by the Shipbuilder.

5.2.2 Permissible still water shear force

The permissible positive or negative still water shear force at any hull transverse section, in harbour conditions, is obtained, in kN, from the following formula:

$$Q_{P,P} = \varepsilon Q_P + Q_{WV} - Q_{WV,P}$$

where:

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW})$$

Q_P : Permissible still water shear force during navigation, in kN, to be calculated according to [5.1.3].
A lower value of the permissible still water shear force in harbour conditions may be considered, if requested by the Shipbuilder.

5.3 Permissible still water bending moment and shear force in flooded condition

5.3.1 Permissible still water bending moment

The permissible still water bending moment at any hull transverse section in flooded condition, in hogging or sagging conditions, is the value $M_{SW,F}$ considered in the hull girder section modulus calculation according to [4.2] and [4.3].

In the case of structural discontinuities in the hull transverse sections, the distribution of permissible still water bending moments is considered on a case by case basis.

5.3.2 Permissible still water shear force - Direct calculation

Where the shear stresses are obtained through calculation analyses according to [2.2.1], the permissible positive or negative still water shear force in flooded condition at any hull transverse section is obtained, in kN, from the following formula:

$$Q_{P,F} = \varepsilon |Q_T| - Q_{WV,F}$$

where:

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW,F})$$

Q_T : Shear force, in kN, which produces a shear stress $\tau = 120/k \text{ N/mm}^2$ in the most stressed point of the hull net transverse section, taking into account the shear force correction ΔQ_C in accordance with [2.2.2].

5.3.3 Permissible still water shear force - Simplified calculation

Where the shear stresses are obtained through the simplified procedure in [2.2.2], the permissible positive or negative still water shear force in flooded condition at any hull transverse section is obtained, in kN, from the following formula:

$$Q_{P,F} = \varepsilon \left(\frac{120}{k\delta} \frac{I_Y t}{S} + \Delta Q_C \right) - Q_{WV,F}$$

where:

$$\varepsilon = \text{sgn}(Q_{SW})$$

δ : Shear distribution coefficient defined in Tab 1

t : Minimum net thickness, in mm, of side and inner side plating, as applicable according to Tab 1

ΔQ_C : Shear force correction, to be calculated according to [2.2.2], where the mass M is to include the mass of the ingressed water in the hold considered and the draught T_{LC} is to be measured up to the equilibrium waterline.

Section 2 – ULTIMATE STRENGTH CHECK

1. Application

1.1 General

1.1.1

The requirements of this Section apply to ships equal to or greater than 150 m in length L .

2. Hull girder ultimate strength check

2.1 Hull girder loads

2.1.1 Bending moment

The bending moment M in sagging and hogging conditions, to be considered in the ultimate strength check of the hull girder, is to be obtained, in kN.m, in intact, flooded and harbour conditions, from the following formula:

$$M = M_{SW} + \gamma_W M_{WV}$$

where:

M_{SW} , $M_{SW,F}$, $M_{SW,P}$: Design still water bending moment, in kN.m, in sagging and hogging conditions at the hull transverse section considered, to be calculated respectively in intact (M_{SW}), flooded ($M_{SW,F}$) and harbour ($M_{SW,P}$) conditions

M_{WV} , $M_{WV,F}$, $M_{WV,P}$: Vertical wave bending moment, in kN.m, in sagging and hogging conditions at the hull transverse section considered, defined in Ch 4, Sec 3, respectively in intact (M_{WV}), flooded ($M_{WV,F}$) and harbour ($M_{WV,P}$) conditions

γ_W : Safety factor on wave hull girder bending moments, taken equal to:

$$\gamma_W = 1.20$$

2.2 Hull girder bending moment

2.2.1 Curve M - χ

The ultimate bending moment capacities of a hull girder transverse section, in hogging and sagging conditions, are defined as the maximum values of the curve of bending moment capacity M versus the curvature χ of the transverse section considered (see Fig 1).

The curvature χ is positive for hogging condition and negative for sagging condition.

The curve M - χ is to be obtained through an incremental-iterative procedure, according to the criteria specified in App 1.

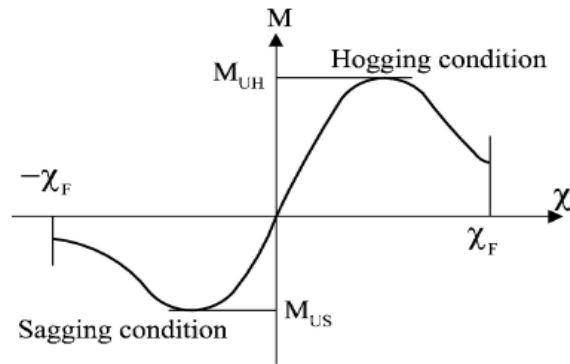


Figure 1: Curve bending moment capacity M versus curvature χ

2.2.2 Hull girder transverse sections

The hull girder transverse sections are constituted by the elements contributing to the hull girder longitudinal strength, considered with their net offered scantlings according to Ch 3, Sec 2, [3.2.4].

2.3 Checking criteria

2.3.1

It is to be checked that the hull girder ultimate bending capacity at any hull transverse section is in compliance with the following formula:

$$M \leq \frac{M_U}{\gamma_R}$$

where:

M_U : Ultimate bending moment capacity of the hull transverse section considered, calculated with net offered scantlings based on gross offered thickness reduced by $0.5 t_C$, in kN.m:

$$M_U = M_{UH} \quad \text{in hogging conditions}$$

$$M_U = M_{US} \quad \text{in sagging conditions}$$

M_{UH} : Ultimate bending moment capacity in hogging conditions, in kN.m, defined in [2.2.1]

M_{US} : Ultimate bending moment capacity in sagging conditions, in kN.m, defined in [2.2.1]

M : Bending moment, in kN.m, defined in [2.1.1] for the ship in intact, flooded and harbour conditions

γ_R : Safety factor taken equal to 1.10

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΝΤΟΧΗ ΓΑΣΤΡΑΣ ΣΥΜΦΩΝΩΣ CSR

CSR HULL ULTIMATE STRENGTH

Symbols

For symbols not defined in this Appendix, refer to Ch 1, Sec 4.

I_Y : Moment of inertia, in m^4 , of the hull transverse section around its horizontal neutral axis, to be calculated according to Ch 5, Sec 1, [1.5.1]

Z_{AB}, Z_{AD} : Section moduli, in m^3 , at bottom and deck, respectively, defined in Ch 5, Sec 1, [1.4.2].

1. Hull girder ultimate strength check

1.1 Introduction

1.1.1

This Appendix provides the criteria for obtaining the curve $M-\chi$ and the ultimate longitudinal bending moment capacity M_U that are to be calculated according to the simplified incremental-iterative approach, as specified in [2.1].

2. Criteria for the calculation of the curve $M-\chi$

2.1 Simplified method based on an incremental-iterative approach

2.1.1 Procedure

The curve $M-\chi$ is to be obtained by means of an incremental-iterative approach, summarised in the flow chart in Fig 1.

In this approach, the ultimate hull girder bending moment capacity M_U is defined as the peak value of the curve with vertical bending moment M versus the curvature χ of the ship cross section as shown in Fig 1. The curve is to be obtained through an incremental-iterative approach.

Each step of the incremental procedure is represented by the calculation of the bending moment M_i which acts on the hull transverse section as the effect of an imposed curvature χ_i .

For each step, the value χ_i is to be obtained by summing an increment of curvature $\Delta\chi$ to the value relevant to the previous step χ_{i-1} . This increment of curvature corresponds to an increment of the rotation angle of the hull girder transverse section around its horizontal neutral axis.

This rotation increment induces axial strains ε in each hull structural element, whose value depends on the position of the element. In hogging condition, the structural elements above the neutral axis are lengthened, while the elements below the neutral axis are shortened. Vice-versa in sagging condition.

The stress σ induced in each structural element by the strain ε is to be obtained from the load-end shortening curve $\sigma-\varepsilon$ of the element, which takes into account the behaviour of the element in the non-linear elasto-plastic domain.

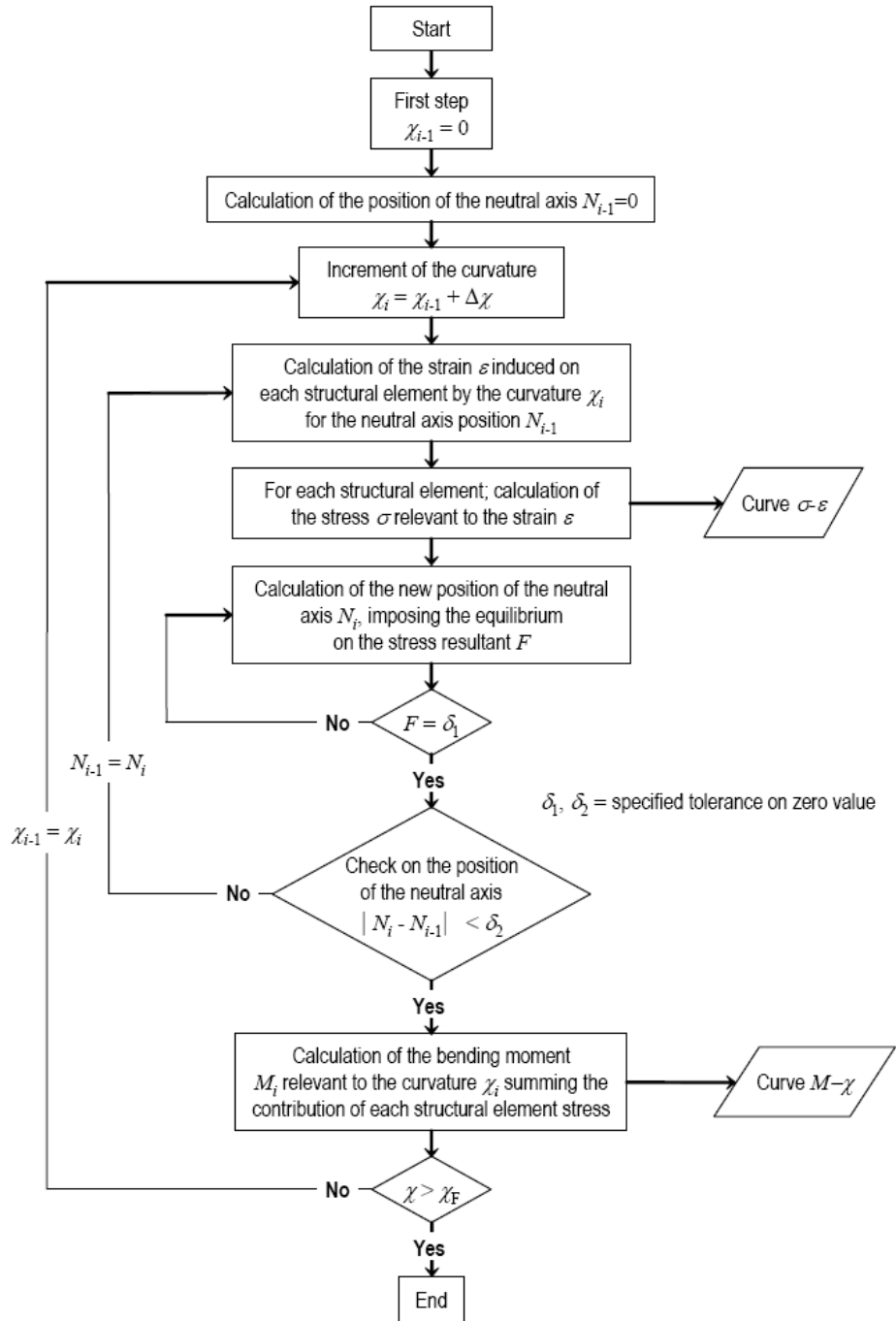


Figure 1: Flow chart of the procedure for the evaluation of the curve $M-\chi$

2.1.2 Assumption

In applying the procedure described in [2.1.1], the following assumptions are generally to be made:

- the ultimate strength is calculated at hull transverse sections between two adjacent transverse webs.

Table 1: Modes of failure of plating panel and ordinary stiffeners

Element	Mode of failure	Curve σ - ε defined in
Lengthened transversely framed plating panel or ordinary stiffeners	Elasto-plastic collapse	[2.2.3]
Shortened ordinary stiffeners	Beam column buckling	[2.2.4]
	Torsional buckling	[2.2.5]
	Web local buckling of flanged profiles	[2.2.6]
	Web local buckling of flat bars	[2.2.7]
Shortened transversely framed plating panel	Plate buckling	[2.2.8]

2.2.3 Elasto-plastic collapse of structural elements

The equation describing the load-end shortening curve σ - ε for the elasto-plastic collapse of structural elements composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula, valid for both positive (shortening) and negative (lengthening) strains (see Fig 2):

$$\sigma = \Phi R_{eH}$$

where:

Φ : Edge function, equal to:

$$\Phi = -1 \quad \text{for} \quad \varepsilon < -1$$

$$\Phi = \varepsilon \quad \text{for} \quad -1 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\Phi = 1 \quad \text{for} \quad \varepsilon > 1$$

ε : Relative strain, equal to:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_Y}$$

ε_E : Element strain

ε_Y : Strain at yield stress in the element, equal to:

$$\varepsilon_Y = \frac{R_{eH}}{E}$$

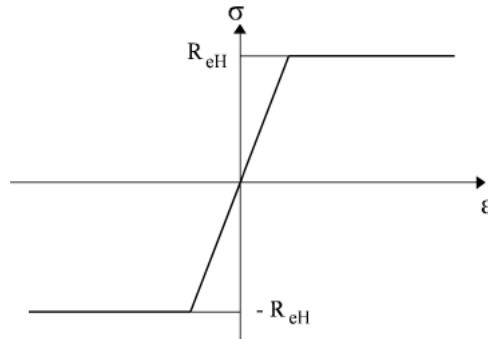


Figure 2: Load-end curve σ - ε for elasto plastic collapse

2.2.4 Beam column buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR1}-\varepsilon$ for the beam column buckling of ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula (see Fig

$$\sigma_{CR1} = \Phi \sigma_{C1} \frac{A_{Stif} + 10b_E t_p}{A_{Stif} + 10s t_p}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

A_{stif} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating

σ_{C1} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C1} = \frac{\sigma_{E1}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E1} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C1} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH} \varepsilon}{4 \sigma_{E1}} \right) \quad \text{for } \sigma_{E1} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3]

σ_{E1} : Euler column buckling stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{E1} = \pi^2 E \frac{I_E}{A_E l^2} \cdot 10^{-4}$$

I_E : Net moment of inertia of ordinary stiffeners, in cm^4 , with attached shell plating of width b_E

b_{E1} : Effective width, in m, of the attached shell plating, equal to:

$$b_{E1} = \frac{s}{\beta_E} \quad \text{for } \beta_E > 1.0$$

$$b_{E1} = s \quad \text{for } \beta_E \leq 1.0$$

$$\beta_E = 10^3 \frac{s}{t_p} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}$$

A_E : Net sectional area, in cm^2 , of ordinary stiffeners with attached shell plating of width b_E

b_E : Effective width, in m, of the attached shell plating, equal to:

$$b_E = \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) s \quad \text{for } \beta_E > 1.25$$

$$b_E = s \quad \text{for } \beta_E \leq 1.25$$

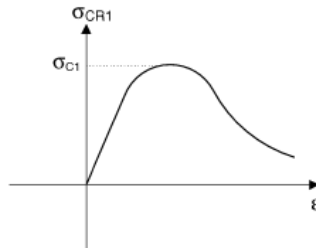


Figure 3: Load-end shortening curve $\sigma_{CR1}-\varepsilon$ for beam column buckling

2.2.5 Torsional buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR2}-\varepsilon$ for the flexural-torsional buckling of ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained according to the following formula (see Fig 4).

$$\sigma_{CR2} = \Phi \frac{A_{Stif} \sigma_{C2} + 10st_p \sigma_{CP}}{A_{Stif} + 10st_p}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

A_{stif} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating

σ_{C2} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C2} = \frac{\sigma_{E2}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E2} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C2} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH} \varepsilon}{4 \sigma_{E2}} \right) \quad \text{for } \sigma_{E2} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

σ_{E2} : Euler torsional buckling stress, in N/mm^2 , defined in Ch 6, Sec 3, [4.3]

ε : Relative strain defined in [2.2.3]

σ_{CP} : Buckling stress of the attached plating, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{CP} = \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) R_{eH} \quad \text{for } \beta_E > 1.25$$

$$\sigma_{CP} = R_{eH} \quad \text{for } \beta_E \leq 1.25$$

β_E : Coefficient defined in [2.2.4]

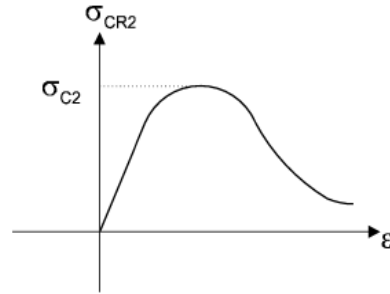


Figure 4: Load-end shortening curve $\sigma_{CR2}-\varepsilon$ for flexural-torsional buckling

2.2.6 Web local buckling of ordinary stiffeners made of flanged profiles

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR3}-\varepsilon$ for the web local buckling of flanged ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula:

$$\sigma_{CR3} = \Phi R_{eH} \frac{10^3 b_E t_p + h_w t_w + b_f t_f}{10^3 st_p + h_w t_w + b_f t_f}$$

where

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

b_E : Effective width, in m, of the attached shell plating, defined in [2.2.4]

h_{we} : Effective height, in mm, of the web, equal to:

$$h_{we} = \left(\frac{2.25}{\beta_w} - \frac{1.25}{\beta_w^2} \right) h_w \quad \text{for } \beta_w > 1.25$$

$$h_{we} = h_w \quad \text{for } \beta_w \leq 1.25$$

$$\beta_w = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3]

2.2.7 Web local buckling of ordinary stiffeners made of flat bars

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR4}-\varepsilon$ for the web local buckling of flat bar ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula (see Fig 5):

$$\sigma_{CR4} = \Phi \frac{10st_p \sigma_{CP} + A_{stif} \sigma_{C4}}{A_{stif} + 10st_p}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

A_{stif} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating

σ_{CP} : Buckling stress of the attached plating, in N/mm^2 , defined in [2.2.5]

σ_{C4} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C4} = \frac{\sigma_{E4}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E4} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C4} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH}}{4 \sigma_{E4}} \varepsilon \right) \quad \text{for } \sigma_{E4} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

σ_{E4} : Local Euler buckling stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{E4} = 160000 \left(\frac{t_w}{h_w} \right)^2$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3].

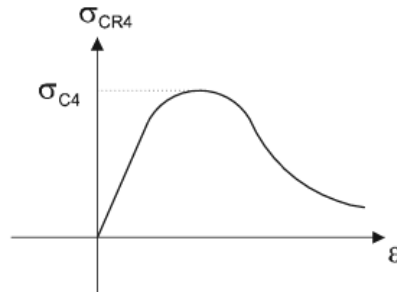


Figure 5: Load-end shortening curve $\sigma_{CR4}-\varepsilon$ for web local buckling

2.2.8 Plate buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR5-\varepsilon}$ for the buckling of transversely stiffened panels composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula:

$$\sigma_{CR5} = \min \left\{ \begin{array}{l} R_{eH} \Phi \\ \Phi R_{eH} \left[\frac{s}{\ell} \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) + 0.1 \left(1 - \frac{s}{\ell} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta_E^2} \right)^2 \right] \end{array} \right\}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3].

$$\beta_E : 10^3 \frac{s}{t_p} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}$$

s : Plate breadth, in m, taken as the spacing between the ordinary stiffeners.

ℓ : Longer side of the plate, in m.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΛΙΚΩΝ ΠΑΧΩΝ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

NET SCANTLING APPROACH

Symbols

- t_{as_built} : *As-built Thickness*: the actual thickness, in mm, provided at the newbuilding stage, including $t_{voluntary_addition}$, if any.
- t_C : *Corrosion Addition Thickness*: as defined in Ch 3, Sec 3, in mm.
- $t_{gross_offered}$: *Gross Thickness Offered*: the actual gross (full) thickness, in mm, provided at the newbuilding stage, excluding $t_{voluntary_addition}$, the owner's extra margin for corrosion wastage, if any.
- $t_{gross_required}$: *Gross Thickness Required*: the gross (full) thickness, in mm, obtained by adding t_C to the Net Thickness Required.
- $t_{net_offered}$: *Net Thickness Offered*: the net thickness, in mm, obtained by subtracting t_C from the Gross Thickness Offered
- $t_{net_required}$: *Net Thickness Required*: the net thickness, in mm, as required by the Rules that satisfy all the structural strength requirements, rounded to the closest half millimetre.
- $t_{voluntary_addition}$: *Thickness for Voluntary Addition*: the thickness, in mm, voluntarily added as the owner's extra margin for corrosion wastage in addition to t_C .

1. General philosophy

1.1

1.1.1

Net Scantling Approach is to clearly specify the “net scantling” that is to be maintained right from the newbuilding stage throughout the ship's design life to satisfy the structural strength requirements. This approach clearly separates the net thickness from the thickness added for corrosion that is likely to occur during the ship-in-operation phase.

2. Application criteria

2.1 General

2.1.1

The scantlings obtained by applying the criteria specified in this Rule are net scantlings as specified in [3.1] to [3.3]; i.e. those which provide the strength characteristics required to sustain the loads, excluding any addition for corrosion and voluntarily added thickness such as the owner's extra margin, if any. The following gross offered scantlings are exceptions; i.e. they already include additions for corrosion but without voluntarily added values such as the owner's extra margin:

- scantlings of superstructures and deckhouses, according to Ch 9, Sec 4
- scantlings of rudder structures, according to Ch 10, Sec 1
- scantlings of massive pieces made of steel forgings, steel castings.

2.1.2

The required strength characteristics are:

- thickness, for plating including that which constitutes primary supporting members
- section modulus, shear area, moments of inertia and local thickness for ordinary stiffeners and, as the case may be, primary supporting members
- section modulus, moments of inertia and first moment for the hull girder.

2.1.3

The ship is to be built at least with the gross scantlings obtained by adding the corrosion additions, specified in Ch 3, Sec 3, to the net scantlings. The thickness for voluntary addition is to be added as an extra.

3. Net scantling approach

3.1 Net scantling definition

3.1.1 Required thickness

The gross thickness required, $t_{gross_required}$, is not less than the gross thickness which is obtained by adding the corrosion addition t_C as defined in Ch 3, Sec 3 to net thickness required, as follows:

$$t_{gross_required} = t_{net_required} + t_C$$

3.1.2 Offered thickness

The gross thickness offered, $t_{gross_offered}$, is the gross thickness provided at the newbuilding stage, which is obtained by deducting the thickness for voluntary addition from the as-built thickness, as follows:

$$t_{gross_offered} = t_{as_built} - t_{voluntary_addition}$$

3.1.3 Net thickness for plate

Net thickness offered, $t_{net_offered}$, is obtained by subtracting t_C from the gross thickness offered, as follows:

$$t_{net_offered} = t_{gross_offered} - t_C = t_{as_built} - t_{voluntary_addition} - t_C$$

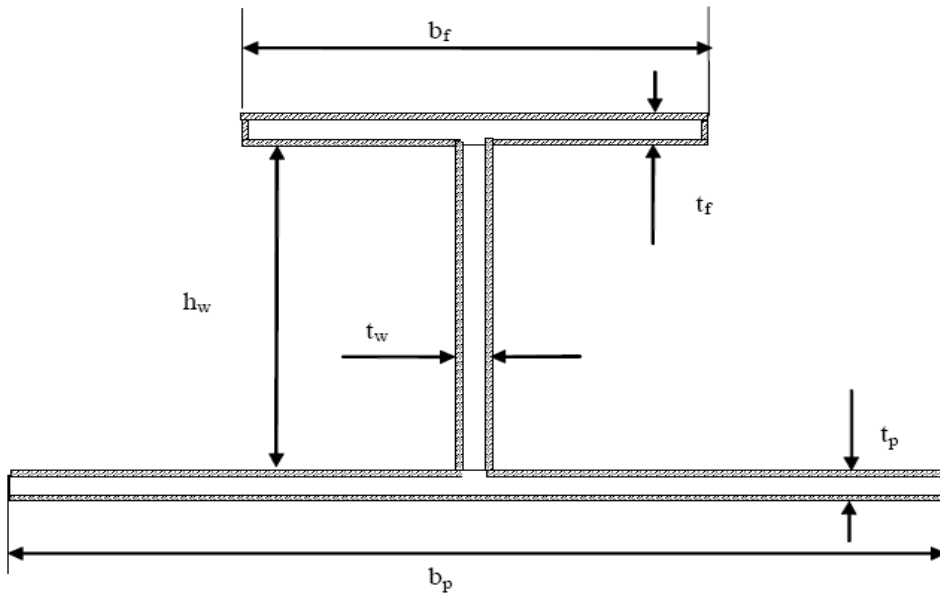
3.1.4 Net section modulus for stiffener

The net transverse section scantling is to be obtained by deducting t_C from the gross thickness offered of the elements which constitute the stiffener profile as shown in Fig.1.

For bulb profiles, an equivalent angle profile, as specified in Ch 3, Sec 6 [4.1.1], may be considered.

The net strength characteristics are to be calculated for the net transverse section.

In assessing the net strength characteristics of stiffeners reflecting the hull girder stress and stress due to local bending of the local structure such as double bottom structure, the section modulus of hull girder or rigidity of structure is obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered of the related elements.



Shadow area is corrosion addition.

For attached plate, the half of the considered corrosion addition specified in 3.2 is deducted from both sides of the attached plate.

Fig. 1 Net scantling of stiffener

3.2 Considered net scantling

3.2.1 Yielding check of the hull girder

The net thickness of structural members to be considered for the yielding check of the hull girder, according to Ch 5, Sec 1, is to be obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered.

3.2.2 Global stress such as stress due to hull girder bending moment and shear force

The net thickness of structural members to be considered for stress due to hull girder bending moment and shear force according to Ch 5, Sec1, is to be obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered.

3.2.3 Buckling check of the hull girder

The net thickness of structural members to be considered for the buckling check, according to Ch 6, Sec 3, is to be obtained by deducting t_C from the gross thickness offered.

3.2.4 Ultimate strength check of the hull girder

The net thickness of structural members to be considered for the ultimate strength check of the hull girder, according to Ch 5, Sec 2, is to be obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered.

3.2.5 Direct strength analysis

The net thickness of plating which constitutes primary supporting members to be checked stresses according to Ch 7 is to be obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered.

The net thickness of plating members to be considered for the buckling check according to Ch 6, Sec 3, using the stresses obtained from direct strength analysis, is to be obtained by deducting t_C from the gross thickness offered.

3.2.6 Fatigue check

The net thickness of structural members to be checked for fatigue according to Ch 8 is to be obtained by deducting $0.5t_C$ from the gross thickness offered.

3.2.7 Check of primary supporting members for ships less than 150 m in length L

The net thickness of plating which constitutes primary supporting members for ships less than 150 m in length L, to be checked according to Ch 6, Sec 4, [2], is to be obtained by deducting t_C from the gross thickness.

3.3 Available information on structural drawings

3.3.1

The structural drawings are to indicate for each structural element the gross scantling and the renewal thickness as specified in Ch 13, Sec 2.

If thickness for voluntary addition is included in the as-built thicknesses, this is to be clearly mentioned and identified on the drawings.

Section 3 – CORROSION ADDITIONS

Symbols

t_C : Total corrosion addition, in mm, defined in [1.2]

t_{C1}, t_{C2} : Corrosion addition, in mm, on one side of the considered structural member, defined in Tab 1

$t_{reserve}$: Reserve thickness, in mm, defined in Ch 13, Sec 2 and taken equal to:

$$t_{reserve} = 0.5$$

1. Corrosion additions

1.1 General

1.1.1

The values of the corrosion additions specified in this section are to be applied in relation with the relevant protective coatings required by Sec 5.

For materials different from carbon steel, special consideration is to be given to the corrosion addition.

1.2 Corrosion addition determination

1.2.1 Corrosion additions for steel

The corrosion addition for each of the two sides of a structural member, t_{C1} or t_{C2} , is specified in Tab 1.

The total corrosion addition t_C , in mm, for both sides of the structural member is obtained by the following formula:

$$t_C = \text{Roundup}_{0.5}(t_{C1} + t_{C2}) + t_{reserve}$$

For an internal member within a given compartment, the total corrosion addition t_C is obtained from the following formula:

$$t_C = \text{Roundup}_{0.5}(2t_{C1}) + t_{reserve}$$

where t_{C1} is the value specified in Tab 1 for one side exposure to that compartment.

When a structural member is affected by more than one value of corrosion addition (e.g. a plate in a dry bulk cargo hold extending above the lower zone), the scantling criteria are generally to be applied considering the severest value of corrosion addition applicable to the member.

In addition, the total corrosion addition t_C is not to be taken less than 2 mm, except for web and face plate of ordinary stiffeners.

1.2.2 Corrosion additions for aluminium alloys

For structural members made of aluminium alloys, the corrosion addition t_C is to be taken equal to 0.

Table 1: Corrosion addition on one side of structural members

Compartment Type	Structural member		Corrosion addition, t_{C1} or t_{C2} in mm	
			BC-A or BC-B ships with $L \geq 150$ m	Other
Ballast water tank ⁽²⁾	Face plate of primary members	Within 3m below the top of tank ⁽³⁾	2.0	
		Elsewhere	1.5	
	Other members	Within 3 m below the top of tank ⁽³⁾	1.7	
		Elsewhere	1.2	
Dry bulk cargo hold ⁽¹⁾	Transverse bulkhead	Upper part ⁽⁴⁾	2.4	1.0
		Lower stool sloping plate, vertical plate and top plate	5.2	2.6
		Other parts	3.0	1.5
	Other members	Upper part ⁽⁴⁾	1.8	1.0
		Webs and flanges of the upper end brackets of side frames of single side bulk carriers		
		Webs and flanges of lower brackets of side frames of single side bulk carriers	2.2	1.2
		Other parts	2.0	1.2
	Sloped plating of hopper tank, inner bottom plating	Continuous wooden ceiling	2.0	1.2
No continuous wooden ceiling		3.7	2.4	
Exposed to atmosphere	Horizontal member and weather deck ⁽⁵⁾		1.7	
	Non horizontal member		1.0	
Exposed to sea water ⁽⁷⁾			1.0	
Fuel oil tanks and lubricating oil tanks ⁽²⁾			0.7	
Fresh water tanks			0.7	
Void spaces ⁽⁶⁾	Spaces not normally accessed, e.g. access only through bolted manholes openings, pipe tunnels, etc.		0.7	
Dry spaces	Internal of deck houses, machinery spaces, stores spaces, pump rooms, steering spaces, etc.		0.5	
Other compartments than above			0.5	
Notes				
(1) Dry bulk cargo hold includes holds, intended for the carriage of dry bulk cargoes, which may carry water ballast.				
(2) The corrosion addition of a plating between water ballast and heated fuel oil tanks is to be increased by 0.7 mm.				
(3) This is not to be applied to structural members of inner bottom and located below inner bottom.				
(4) Upper part of the cargo holds corresponds to an area above the connection between the top side and the inner hull or side shell. If there is no top side, the upper part corresponds to the upper one third of the cargo hold height.				
(5) Horizontal member means a member making an angle up to 20° as regard as a horizontal line.				
(6) The corrosion addition on the outer shell plating in way of pipe tunnel is to be considered as water ballast tank.				
(7) Outer side shell between normal ballast draught and scantling draught is to be increased by 0.5 mm.				

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΚΑΜΠΥΛΕΣ σ - ε ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

LOAD-END SHORTENING CURVES σ - ε

Element	Mode of failure	Curve σ - ε defined in
Lengthened transversely framed plating panel or ordinary stiffeners	Elasto-plastic collapse	[2.2.3]
Shortened ordinary stiffeners	Beam column buckling	[2.2.4]
	Torsional buckling	[2.2.5]
	Web local buckling of flanged profiles	[2.2.6]
	Web local buckling of flat bars	[2.2.7]
Shortened transversely framed plating panel	Plate buckling	[2.2.8]

2.2.3 Elasto-plastic collapse of structural elements

The equation describing the load-end shortening curve σ - ε for the elasto-plastic collapse of structural elements composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula, valid for both positive (shortening) and negative (lengthening) strains (see Fig 2):

$$\sigma = \Phi R_{eH}$$

where:

Φ : Edge function, equal to:

$$\Phi = -1 \quad \text{for} \quad \varepsilon < -1$$

$$\Phi = \varepsilon \quad \text{for} \quad -1 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\Phi = 1 \quad \text{for} \quad \varepsilon > 1$$

ε : Relative strain, equal to:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_Y}$$

ε_E : Element strain

ε_Y : Strain at yield stress in the element, equal to:

$$\varepsilon_Y = \frac{R_{eH}}{E}$$

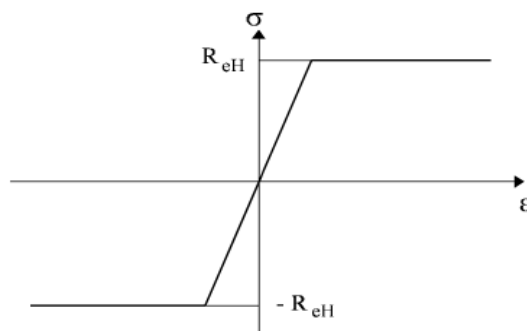


Figure 2: Load-end curve σ - ε for elasto plastic collapse

2.2.4 Beam column buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR1}-\varepsilon$ for the beam column buckling of ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula (see Fig 3):

$$\sigma_{CR1} = \Phi \sigma_{C1} \frac{A_{stif} + 10b_E t_p}{A_{stif} + 10s t_p}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

A_{stif} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating

σ_{C1} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C1} = \frac{\sigma_{E1}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E1} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C1} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH} \varepsilon}{4 \sigma_{E1}} \right) \quad \text{for } \sigma_{E1} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3]

σ_{E1} : Euler column buckling stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{E1} = \pi^2 E \frac{I_E}{A_E l^2} \cdot 10^{-4}$$

I_E : Net moment of inertia of ordinary stiffeners, in cm^4 , with attached shell plating of width b_{E1}

b_{E1} : Effective width, in m, of the attached shell plating, equal to:

$$b_{E1} = \frac{s}{\beta_E} \quad \text{for } \beta_E > 1.0$$

$$b_{E1} = s \quad \text{for } \beta_E \leq 1.0$$

$$\beta_E = 10^3 \frac{s}{t_p} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}$$

A_E : Net sectional area, in cm^2 , of ordinary stiffeners with attached shell plating of width b_E

b_E : Effective width, in m, of the attached shell plating, equal to:

$$b_E = \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) s \quad \text{for } \beta_E > 1.25$$

$$b_E = s \quad \text{for } \beta_E \leq 1.25$$

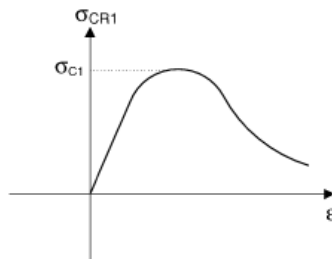


Figure 3: Load-end shortening curve $\sigma_{CR1}-\varepsilon$ for beam column buckling

2.2.5 Torsional buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR2}-\varepsilon$ for the flexural-torsional buckling of ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained according to the following formula (see Fig 4).

$$\sigma_{CR2} = \Phi \frac{A_{stif} \sigma_{C2} + 10st_p \sigma_{CP}}{A_{stif} + 10st_p}$$

where:

- Φ : Edge function defined in [2.2.3]
 A_{stif} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating
 σ_{C2} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C2} = \frac{\sigma_{E2}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E2} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C2} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH} \varepsilon}{4 \sigma_{E2}} \right) \quad \text{for } \sigma_{E2} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

- σ_{E2} : Euler torsional buckling stress, in N/mm^2 , defined in Ch 6, Sec 3, [4.3]
 ε : Relative strain defined in [2.2.3]
 σ_{CP} : Buckling stress of the attached plating, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{CP} = \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) R_{eH} \quad \text{for } \beta_E > 1.25$$

$$\sigma_{CP} = R_{eH} \quad \text{for } \beta_E \leq 1.25$$

- β_E : Coefficient defined in [2.2.4]

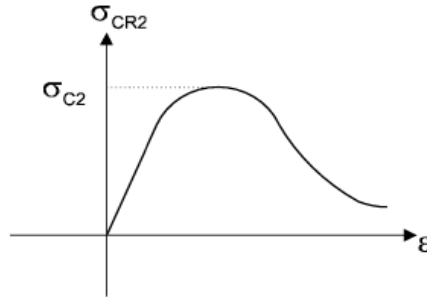


Figure 4: Load-end shortening curve $\sigma_{CR2}-\varepsilon$ for flexural-torsional buckling

2.2.6 Web local buckling of ordinary stiffeners made of flanged profiles

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR3}-\varepsilon$ for the web local buckling of flanged ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula:

$$\sigma_{CR3} = \Phi R_{eH} \frac{10^3 b_E t_p + h_w t_w + b_f t_f}{10^3 s t_p + h_w t_w + b_f t_f}$$

where

- Φ : Edge function defined in [2.2.3]

b_E : Effective width, in m, of the attached shell plating, defined in [2.2.4]

h_{we} : Effective height, in mm, of the web, equal to:

$$h_{we} = \left(\frac{2.25}{\beta_w} - \frac{1.25}{\beta_w^2} \right) h_w \quad \text{for } \beta_w > 1.25$$

$$h_{we} = h_w \quad \text{for } \beta_w \leq 1.25$$

$$\beta_w = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3]

2.2.7 Web local buckling of ordinary stiffeners made of flat bars

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR4}-\varepsilon$ for the web local buckling of flat bar ordinary stiffeners composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula (see Fig 5):

$$\sigma_{CR4} = \Phi \frac{10st_P \sigma_{CP} + A_{Stf} \sigma_{C4}}{A_{Stf} + 10st_P}$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3]

A_{stf} : Net sectional area of the stiffener, in cm^2 , without attached plating

σ_{CP} : Buckling stress of the attached plating, in N/mm^2 , defined in [2.2.5]

σ_{C4} : Critical stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{C4} = \frac{\sigma_{E4}}{\varepsilon} \quad \text{for } \sigma_{E4} \leq \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

$$\sigma_{C4} = R_{eH} \left(1 - \frac{R_{eH} \varepsilon}{4 \sigma_{E4}} \right) \quad \text{for } \sigma_{E4} > \frac{R_{eH}}{2} \varepsilon$$

σ_{E4} : Local Euler buckling stress, in N/mm^2 , equal to:

$$\sigma_{E4} = 160000 \left(\frac{t_w}{h_w} \right)^2$$

ε : Relative strain defined in [2.2.3].

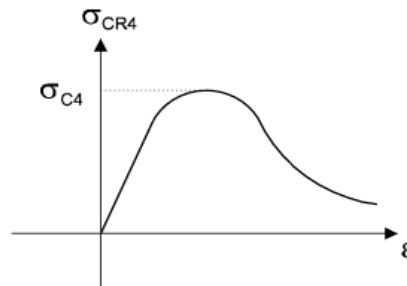


Figure 5: Load-end shortening curve $\sigma_{CR4}-\varepsilon$ for web local buckling

2.2.8 Plate buckling

The equation describing the load-end shortening curve $\sigma_{CR5-\varepsilon}$ for the buckling of transversely stiffened panels composing the hull girder transverse section is to be obtained from the following formula:

$$\sigma_{CR5} = \min \left\{ \begin{array}{l} R_{eH} \Phi \\ \Phi R_{eH} \left[\frac{s}{\ell} \left(\frac{2.25}{\beta_E} - \frac{1.25}{\beta_E^2} \right) + 0.1 \left(1 - \frac{s}{\ell} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta_E^2} \right)^2 \right] \end{array} \right.$$

where:

Φ : Edge function defined in [2.2.3].

$$\beta_E : 10^3 \frac{s}{t_p} \sqrt{\frac{\varepsilon R_{eH}}{E}}.$$

s : Plate breadth, in m, taken as the spacing between the ordinary stiffeners.

ℓ : Longer side of the plate, in m.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ BULK-CARRIER
CLASSIFICATION

NIPPON KAIJI KYOKAI

NS* (Bulk Carrier, Strengthened for the carriage of Heavy Cargoes.
 Nos.2 & 4 Holds may be empty), (ESP)

MNS* , MO

PRINCIPAL DIMENSIONS

Length (B.P.)	<Lpp>	180.000 m
Load Water Line Length at ds	<Ll.w.l.>	182.800 m
Scantling length	<Ls>	180.000 m
Breadth (MLD)		32.200 m
Depth (MLD)	<D>	16.550 m
Draft (MLD)	<d>	10.700 m
Scantling Draft (MLD)	<ds>	11.674 m

$$Cb' = \frac{\text{Displacement (MLD)}}{1.025 \times Ls \times B \times ds} \quad 0.808$$

TYPE OF FREEBOARD

ICLL 1966 B

MATERIALS

1. Materials to be in accordance with N.K. rule.
2. Steel plates

MARK	EXPLANATION
NO MARK	GRADE "KA" STEEL
AH	GRADE "KA32" STEEL
AH-36	GRADE "KA36" STEEL
DH-36	GRADE "KD36" STEEL

LOADING CONDITION

1. DESIGNED SPECIFIC GRAVITY OF CARGO :

C. H.	MAX. CARGO WEIGHT	DESIGNED SPECIFIC GRAVITY
1	13,700 mt	1.36
2	11,000 mt	0.90
3	18,300 mt	1.54 (1.025)
4	11,300 mt	0.90
5	15,400 mt	1.36

Notes) GRAVITY OF CARGO (mt/m³) = $\frac{\text{MAX. CARGO WEIGHT}}{\text{HOLD VOLUME EXCL. HATCH WAY}}$

2. DESIGNED LOCAL STRENGTH OF INNER BOTTOM

C. H.	DESIGNED LOCAL STRENGTH
1	21.2 mt/m ²
2	21.0 mt/m ²
3	24.0 mt/m ²
4	21.0 mt/m ²
5	21.2 mt/m ²

3. ON UPPER DECK

UNIFORM LOAD : 3.8 mt/m² (OUTSIDE LINE OF HATCH WAY)

4. ALLOWABLE STILL WATER BENDING MOMENT IN INTACT CONDITION at MIDSHIP:

HOGGING --- max. 111,000 tf-m

SAGGING --- max. 95,500 tf-m

5. ALLOWABLE STILL WATER BENDING MOMENT IN ONE HOLD FLOODING CONDITION

at MIDSHIP;

HOGGING --- max. 173,000 tf-m

SAGGING --- max. 154,000 tf-m

6. No.3 HOLD has been designe for filling ballast water to the hatch coaming top. Filling height between 20% and 90% of the hold height is not allowed when the vessel is in open sea.

ABBREVIATED SYMBOLS

1. STRUCTURAL MEMBERS

IA -----	INVERTED ANGLE	B -----	BRACKET
FB -----	FLAT BAR	TB -----	TRIPPING BRACKET
FL -----	FLANGE	BPL -----	BULB PLATE

2. END CONNECTION OF STIFF.

S MARK -----	SNIPPED END CONNECTION
C MARK -----	CLIPPED END CONNECTION

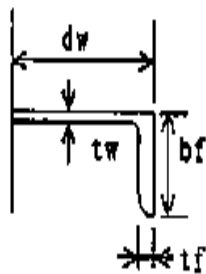
SCANTLING INDICATING SYSTEM

Scantling of angles, built-up sections and flat bars is indicated in this plan as follows ;

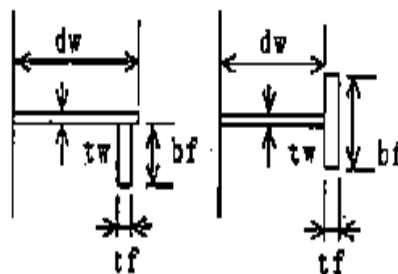
ANGLE

B. UP. SECTION

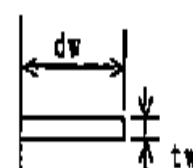
FLAT BAR



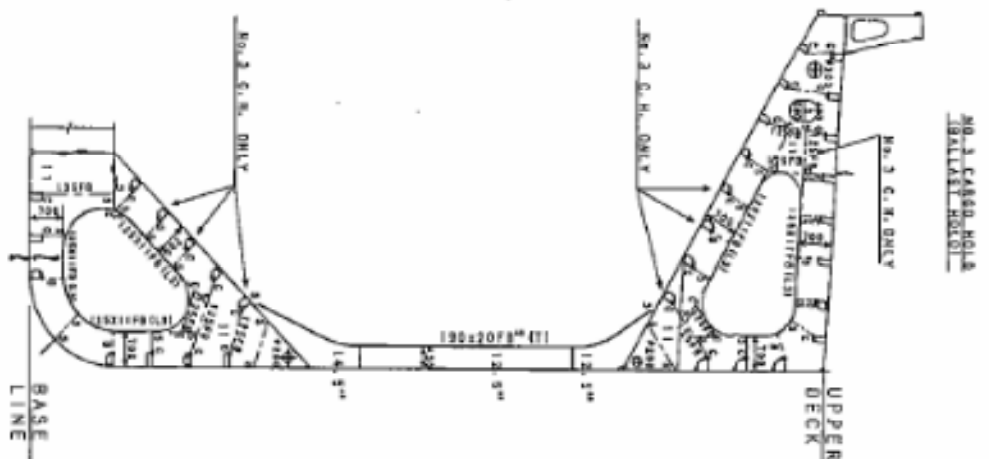
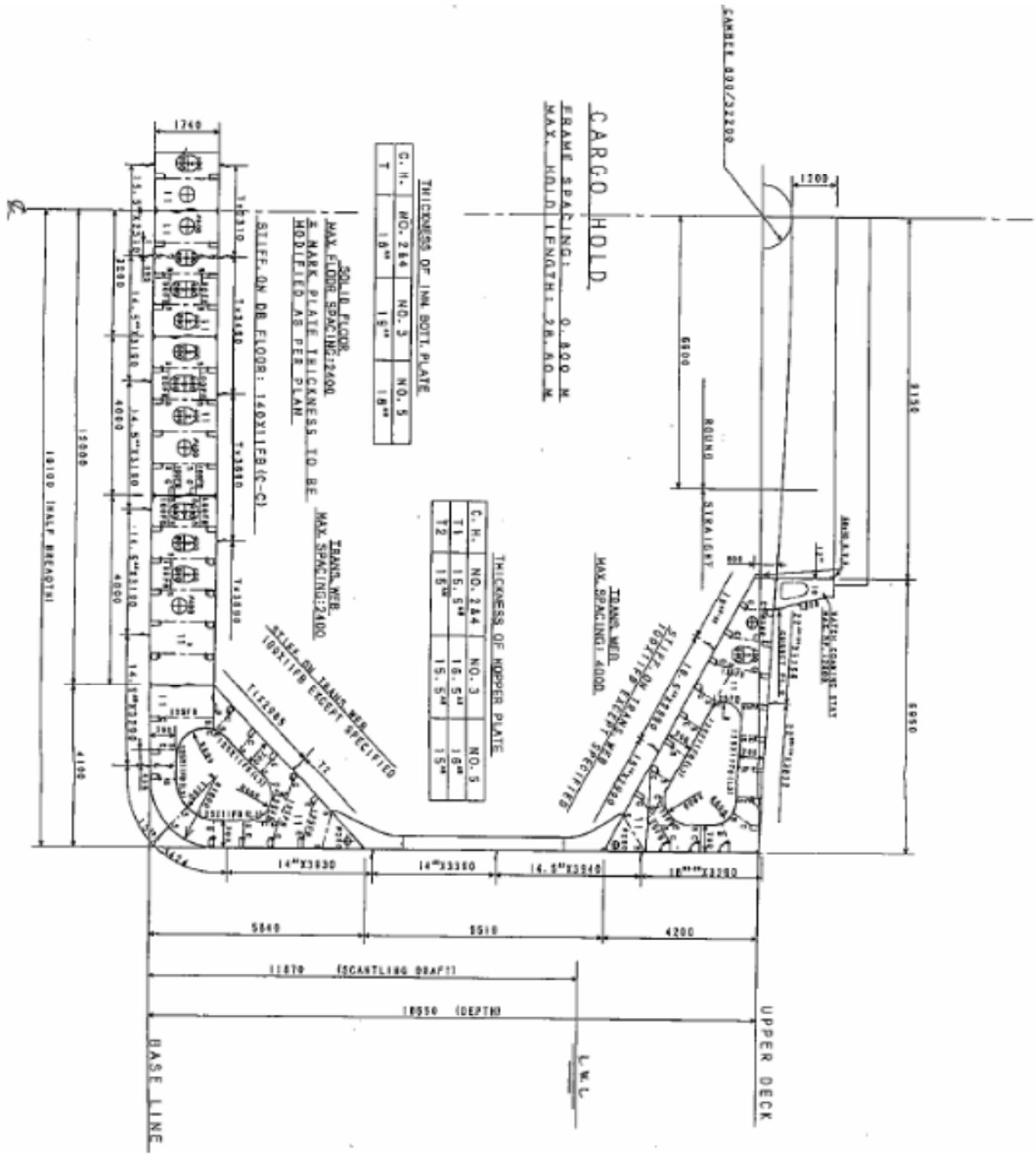
$dw \times bf \times tw / tf$ IA



$dw \times bf \times tw / tf$ (L3) or (T)

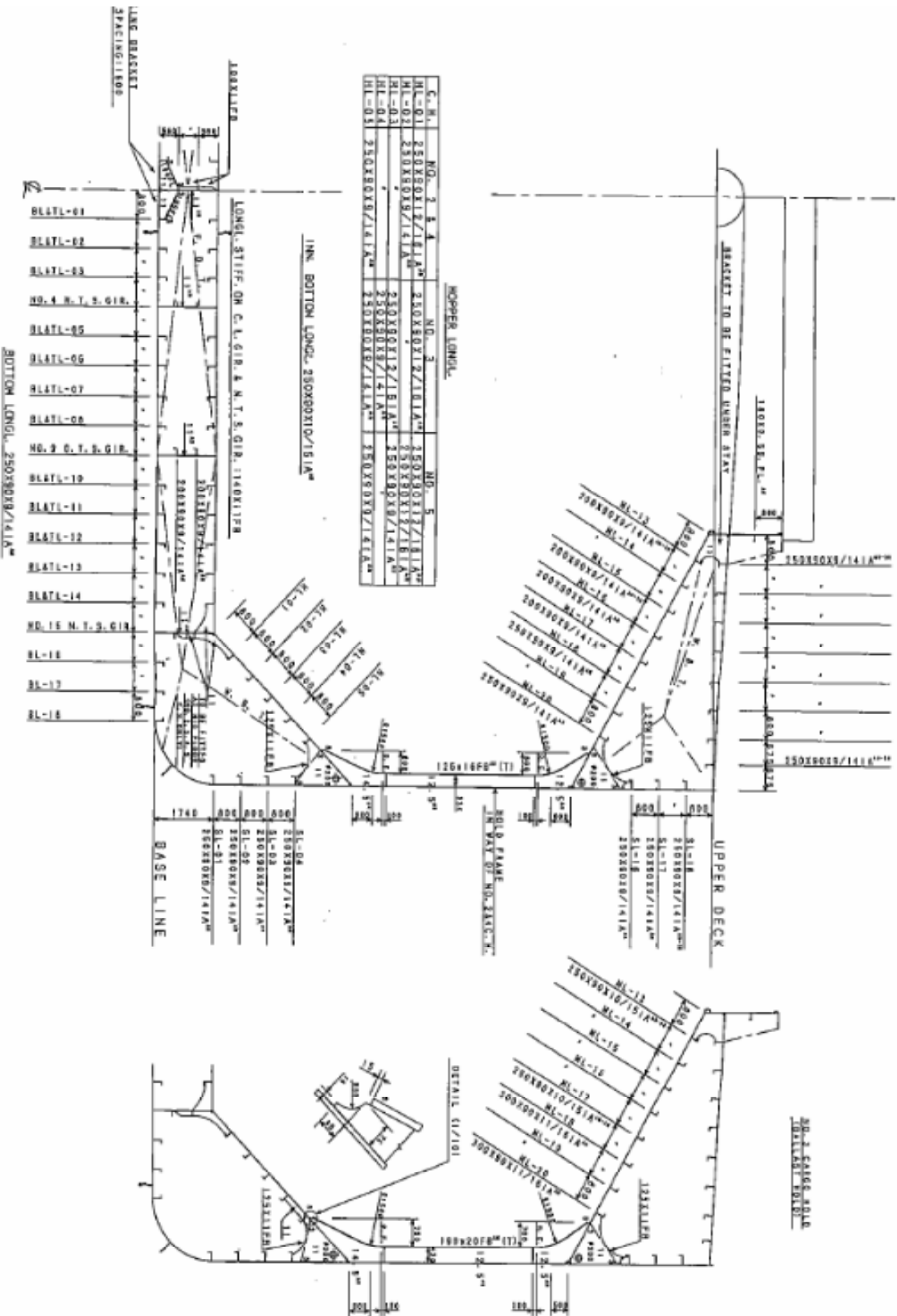


$dw \times tw$ FB

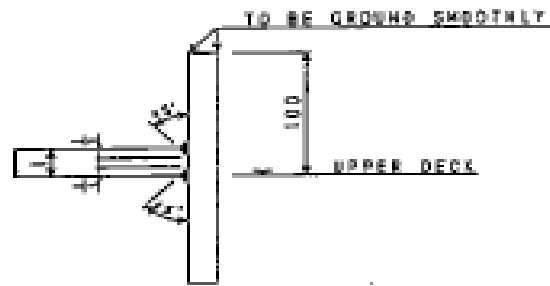


DECK LONGS.

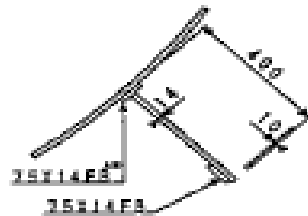
NO. 2 SALES ROLL
DOLLARS SOLD



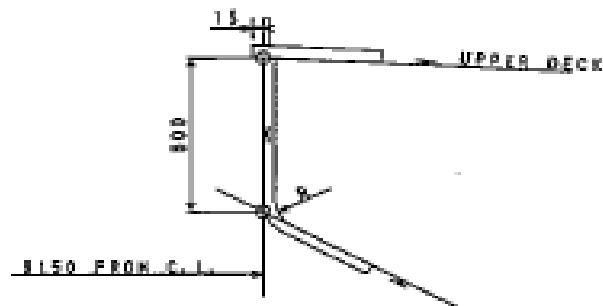
DETAIL OF GUNWALE (1/5)



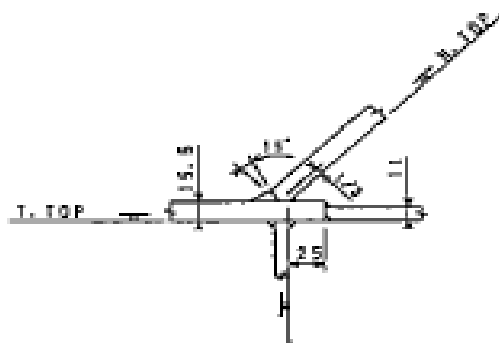
DETAIL OF BILGE KEEL (1/25)
(INTERMITTENT TYPE)



DETAIL OF HATCH SIDE GIRDER (1/10)



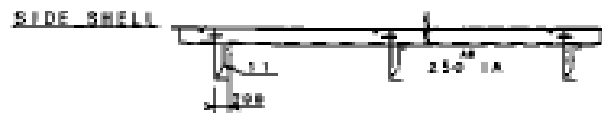
DETAIL (1/5)



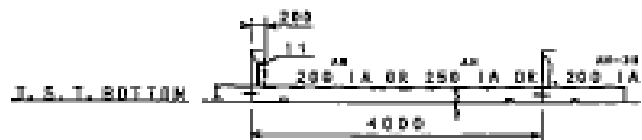
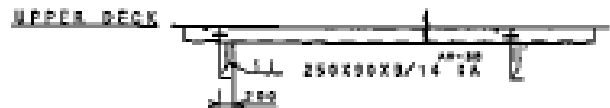
BILGE LONGI



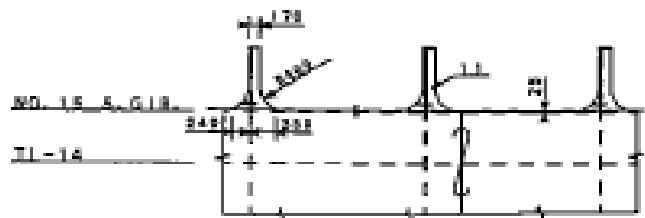
SIDE & HOPPER LONGI



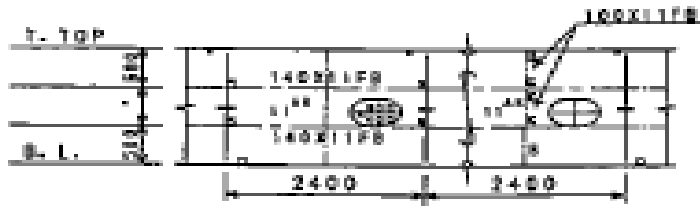
DECK & T. S. T. BOTTOM LONGI



INNER BOTTOM & SI-01 PLAN



CENTER LINE GIRDER
 TO BE MODIFIED AT HOLD-END AS PER PLAN



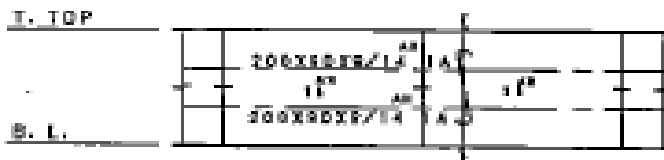
BOTTOM & INNER BOTTOM LONGI



NO. 4 N. T. SIDE GIRDER
 TO BE MODIFIED AT HOLD-END AS PER PLAN



NO. 9 O. T. SIDE GIRDER
 TO BE MODIFIED AT HOLD-END AS PER PLAN



NO. 15 N. T. SIDE GIRDER
 TO BE MODIFIED AT HOLD-END AS PER PLAN



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ

ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σαν άμεση μέθοδος για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

όπου $[K]$ ένα "μη ιδιάζων" μητρώο (διαστάσεων $n \times n$), συνήθως ορίζεται κάθε μέθοδος η οποία, αν δεν λάβουμε υπόψη αριθμητικά λάθη στρογγύλευσης, δίνει τη λύση $\{u\}$ μετά από πεπερασμένο προβλέψιμο αριθμό στοιχειωδών υπολογιστικών πράξεων (όπου σαν στοιχειώδεις υπολογιστικές πράξεις θεωρούνται οι τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις και η εύρεση της τετραγωνικής ρίζας). Οι πιο διαδεδομένες άμεσες μέθοδοι είναι η απαλοιφή Gauss και οι από αυτήν παραγόμενες μέθοδοι παραγοντοποίησης κατά Choleski και Crout.

1. Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss συνίσταται από διαδοχικούς μητρωικούς και διανυσματικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} [K^{(i)}] &\rightarrow [K^{(i+1)}] \\ \{f^{(i)}\} &\rightarrow \{f^{(i+1)}\} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2)$$

όπου $[K^{(1)}] = [K]$, $\{f^{(1)}\} = \{f\}$ ενώ σε κάθε βήμα ισχύει

$$[K^{(i)}]\{u\} = \{f^{(i)}\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Ο σκοπός του i -οστού μετασχηματισμού είναι η απαλοιφή του αγνώστου u_i από τις τελευταίες $(n-i)$ εξισώσεις του συστήματος της σχέσης (3). Οι διαδοχικοί μετασχηματισμοί καταλήγουν στο άνω τριγωνικό μητρώο $[K^{(n)}]$. (Ένα μητρώο $[M]$ καλείται άνω (κάτω) τριγωνικό όταν $M_{ij} = 0$ για $i < j$ ($i > j$)). Έτσι η λύση του συστήματος $\{u\}$ προκύπτει με μικρή υπολογιστική προσπάθεια από το τελικό σύστημα

$$[K^{(n)}]\{u\} = \{f^{(n)}\} \quad (4)$$

με "πίσω αντικαταστάσεις". (Από την n -οστή εξίσωση προκύπτει ο άγνωστος u_n που αντικαθίσταται στην $(n-1)$ -οστή εξίσωση ώστε να προκύψει ο u_{n-1} και ούτω καθεξής μέχρι τον υπολογισμό και του u_1).

Συνολικά η μέθοδος απαλοιφής Gauss μπορεί να διατυπωθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο όπου χρησιμοποιείται η "προγραμματιστική σύμβαση", σύμφωνα με την οποία ένας όρος που εμφανίζεται στο δεξιό μέρος μιας παράστασης αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο όρο που βρίσκεται στο αριστερό μέρος της παράστασης. Τα αθροίσματα που εμφανίζονται στους αλγορίθμους εκτελούνται μόνο αν το άνω όριο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του κάτω ορίου. (Αυτή η παραδοχή καθώς και η "προγραμματιστική σύμβαση" χρησιμοποιούνται σε όλους τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται στη συνέχεια των σημειώσεων).

Συνολικά η μέθοδος απαλοιφής Gauss μπορεί να διατυπωθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο όπου χρησιμοποιείται η "προγραμματιστική σύμβαση", σύμφωνα με την οποία ένας όρος που εμφανίζεται στο δεξιό μέρος μιας παράστασης αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο όρο που βρίσκεται στο αριστερό μέρος της παράστασης. Τα αθροίσματα που εμφανίζονται στους αλγόριθμους εκτελούνται μόνο αν το άνω όριο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του κάτω ορίου. (Αυτή η παραδοχή καθώς και η "προγραμματιστική σύμβαση" χρησιμοποιούνται σε όλους τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται στη συνέχεια των σημειώσεων)

Συνολικά η μέθοδος απαλοιφής Gauss μπορεί να διατυπωθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο όπου χρησιμοποιείται η "προγραμματιστική σύμβαση", σύμφωνα με την οποία ένας όρος που εμφανίζεται στο δεξιό μέρος μιας παράστασης αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο όρο που βρίσκεται στο αριστερό μέρος της παράστασης. Τα αθροίσματα που εμφανίζονται στους αλγόριθμους εκτελούνται μόνο αν το άνω όριο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του κάτω ορίου. (Αυτή η παραδοχή καθώς και η "προγραμματιστική σύμβαση" χρησιμοποιούνται σε όλους τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται στη συνέχεια των σημειώσεων)

Τριγωνοποίηση

Για $i = 1 + (n-1)$ διάτρεξε τις γραμμές $r = (i-1) + n$

$$K_{ij} = K_{ij} - \left(\frac{K_{ri}}{K_{ii}} \right) K_{rj}, \quad j = (i+1) + n$$

$$f_r = f_r - \left(\frac{K_{ri}}{K_{ii}} \right) f_i$$
(5)

Πίσω αντικατάσταση

$$u_i = \frac{f_i - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j}{K_{ii}}, \quad i = n+1$$
(6)

Στην περίπτωση που το μητρώο [K] είναι συμμετρικό, τότε η συμμετρία διατηρείται σε όλους τους μετασχηματισμούς οπότε οι σχέσεις (5) μπορούν να αναδιατυπωθούν :

Για $i = 1 + (n-1)$ διάτρεξε τις γραμμές $r = (i-1) + n$

$$K_{ij} = K_{ij} - \left(\frac{K_{ir}}{K_{ii}} \right) K_{rj}, \quad j = r + n$$

$$f_r = f_r - \left(\frac{K_{ir}}{K_{ii}} \right) f_i$$
(7)

και επομένως είναι φανερό ότι για την εφαρμογή της μεθόδου αρκεί η αποθήκευση του άνω τριγωνικού μέρους του μητρώου [K].

Αν παραβλέψουμε το θέμα των αριθμητικών λαθών, η μέθοδος απαλοιφής Gauss παρουσιάζει αριθμητική αστάθεια μόνο στην περίπτωση κατά την οποία το i -στο διαγώνιο στοιχείο του μετασχηματισμένου μητρώου $[K^{(i)}]$ είναι μηδέν ($K_{ii}^{(i)} = 0$). Σ' αυτή τη περίπτωση το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί (εφόσον βέβαια το μητρώο $[K]$ δεν είναι ιδιόζων) με τη χρήση της τεχνικής οδήγησης (pivoting) η οποία συνίσταται στις κατάλληλες ανταλλαγές γραμμών και/ή στηλών του μητρώου. Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (1) με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και τη χρήση οδήγησης είναι ουσιαστικά ταυτόσημη με την επίλυση με τη μέθοδο Gauss χωρίς οδήγησης του συστήματος

$$([P][K][Q]^T)([Q]\{u\}) = ([P]\{f\}) \quad (8)$$

όπου τα $[P]$ και $[Q]$ είναι μητρώα κινδυνότητας (διαστάσεων $n \times n$) η μορφή των οποίων καθορίζεται από την ανταλλαγή γραμμών και στηλών αντίστοιχα. Μια ειδική περίπτωση οδήγησης είναι η "συμμετρική" όπου $[P] = [Q]$. Σε προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων το μητρώο $[P][K][P]^T$ είναι το μητρώο ακαμψίας που αντιστοιχεί σε διαφορετική αριθμηση των κόμβων του δικτύου.

Αποδεικνύεται ότι η χρήση οδήγησης δεν είναι απαραίτητη όταν το μητρώο είναι θετικά ορισμένο ή έχει ισχυρή κύρια διαγώνιο. (Ένα μητρώο $[M]$ θεωρείται ότι έχει ισχυρή κύρια διαγώνιο όταν

$$M_{ii} = \sum_{j=1}^n |M_{ij}| \quad \text{ή} \quad M_{ii} = \sum_{j=1}^n |M_{ji}| \quad (9)$$

για όλες τις γραμμές ή αντίστοιχα όλες τις στήλες του μητρώου). Επομένως μπορούμε, με βάση και τα προηγούμενα, να συμπεράνουμε ότι στα προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων, όπου το μητρώο ακαμψίας είναι θετικά ορισμένο, οποιαδήποτε αριθμηση είναι αποδεκτή όσον αφορά το θέμα της αριθμητικής αστάθειας της μεθόδου επίλυσης. Άρα, η επιλογή της αριθμησης των κόμβων του δικτύου μπορεί να γίνει με στόχο τη μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου και/ή της απαιτούμενης υπολογιστικής μνήμης.

Ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου απαλοιφής Gauss είναι το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί που αναφέρθηκαν ενεργούν ταυτόχρονα στο μητρώο (ακαμψίας) $[K]$ και στο διάνυσμα του δεξιού μέλους (της φόρτισης) $\{f\}$. Το μειονέκτημα αυτό παρουσιάζεται έντονο στις περιπτώσεις που θέλουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων για πολλαπλά δεύτερα μέλη και τα οποία δεν είναι ταυτόχρονα γνωστά. Τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζονται κατά κόρον στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και ιδιαίτερα σε μη γραμμικές και δυναμικές αναλύσεις. Μια εναλλακτική λύση στο παραπάνω πρόβλημα είναι ο διαχωρισμός των πράξεων του μητρώου $[K]$ από αυτές του διανύσματος του δεξιού μέλους και που επιτυγχάνεται με τις μεθόδους παραγοντοποίησης.

2. Παραγοντοποιήσεις κατά Crout και Cholesky

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η μέθοδος απαλοιφής Gauss ουσιαστικά παραγοντοποιεί το μητρώο K στη μορφή

$$[K] = [L][U] \quad (10)$$

όπου το $[L]$ είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο με μοναδιαία στοιχεία στη διαγώνιο και το $[U]$ είναι το άνω τριγωνικό μητρώο $[K^{(n)}]$ στο οποίο καταλήγουν οι διαδοχικοί μετασχηματισμοί της μεθόδου απαλοιφής Gauss.

Οι όροι των μητρώων $[L]$ και $[U]$ μπορούν να προσδιοριστούν από την εξίσωση των όρων K_{ij} με το αντίστοιχο στοιχείο (i,j) του μητρικού γινομένου $[L][U]$. Η εξίσωση (10) γράφεται αναλυτικά ως

$$K_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} L_{ir} U_{rj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

με $L_{ii} = 1$. Ανάλογα με τη σχέση των δεικτών i, j από την (11) προκύπτουν οι

$$U_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} U_{rj}, \quad i \leq j \quad (12 \alpha)$$

$$L_{ij} = \left(K_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} U_{rj} \right) / U_{ij}, \quad i > j \quad (12 \beta)$$

Με την επιλογή μιας κατάλληλης διαδοχής των τιμών των (i,j) μπορούν να προσδιοριστούν από τις παραπάνω εξισώσεις όλοι οι άγνωστοι όροι των μητρώων $[L]$ και $[U]$. Υπάρχουν πολλές δυνατές επιλογές για την διαδοχή των τιμών των δεικτών (i,j) . Οι δύο συχνότερα χρησιμοποιούμενες είναι:

η ανά γραμμή διαδοχή: $(i,j) = (1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,1), (2,2), \dots, (2,n), \dots, (n,n)$

και η ανά στήλη διαδοχή: $(i,j) = (1,1), (2,1), \dots, (n,1), (1,2), (2,2), \dots, (n,2), \dots, (n,n)$

Αφού προσδιοριστούν οι όροι των μητρώων $[L]$ και $[U]$ το σύστημα των εξισώσεων (1) γράφεται στη μορφή

$$[L][U]\{u\} = \{f\} \quad (13)$$

και η επίλυση του ισοδυναμεί με την επίλυση των δύο συστημάτων

$$[L]\{x\} = \{f\} \quad (14.α)$$

$$[U]\{u\} = \{x\} \quad (14.β)$$

Αρχικά επιλύεται το κάτω τριγωνικό σύστημα (14.α) μέσω εμπρός αντικατάστασης σύμφωνα με τη σχέση

$$x_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

και στη συνέχεια το άνω τριγωνικό σύστημα (14.β) μέσω πίσω αντικατάστασης σύμφωνα με τη σχέση

$$u_i = \left(x_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij} u_j \right) / U_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1 \quad (16)$$

Στην περίπτωση συμμετρικού μητρώου $[K]$ αποδεικνύεται ότι $[U] = [D][L]^T$ όπου το $[D]$ είναι ένα διαγώνιο μητρώο με τους αντίστοιχους διαγώνιους όρους των μηδένων των διαδοχικών μετασχηματισμών της μεθόδου Gauss που ταυτίζονται με τους διαγώνιους όρους του $[L]$:

$$[D] = \text{diag} (K_{11}^{(1)}, K_{22}^{(2)}, \dots, K_{nn}^{(n)}) = \text{diag} (U_{11}, U_{22}, \dots, U_{nn}) \quad (17)$$

Επομένως η παραγοντοποίηση ενός συμμετρικού μητρώου $[K]$ μπορεί να γραφεί στη συμμετρική μορφή:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (18)$$

που είναι γνωστή ως **παραγοντοποίηση κατά Crout**. Σ' αυτή την περίπτωση η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ανάγεται στην επίλυση των συστημάτων

$$[L]\{x\} = \{f\} \quad (19.α)$$

$$[D]\{y\} = \{x\} \quad (19.β)$$

$$[L]^T\{u\} = \{y\} \quad (19.γ)$$

Η επίλυση του συστήματος (19.β) απαιτεί μία απλή διαίρεση κάθε όρου του $\{x\}$ με τον αντίστοιχο όρο του $[D]$. Για την ταυτόχρονη εκτέλεση αυτής της διαίρεσης και της πίσω αντικατάστασης για την επίλυση του συστήματος (19.γ) χρησιμοποιείται η σχέση

$$u_i = x_i / D_{ii} - \sum_{j=1}^i L_{ji} u_j, \quad i = n, n-1, \dots, 1 \quad (20)$$

Ο αριθμός των αρνητικών διαγώνιων όρων του $[D]$ ισούται με τον αριθμό των αρνητικών ιδιοτιμών του $[K]$, αφού αν επιδώσουμε τη σχέση (18) ως προς $[D]$ βρίσκουμε

$$[D] = [L]^{-1} [K] [L]^T \quad (21)$$

Επομένως το διαγώνιο μητρώο $[D]$ αποτελεί ένα μετασχηματισμό του $[K]$ και είναι γνωστό ότι οι μη ιδιάζοντες μετασχηματισμοί της μορφής της σχέσης (21) διατηρούν τον αριθμό των θετικών και αρνητικών ιδιοτιμών. Άρα, εφόσον το $[K]$ είναι θετικά ορισμένο (όπως συμβαίνει στην πλειονότητα των μητρώων ακαμψίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων) όλοι οι όροι του $[D]$ είναι θετικοί. Άρα υπάρχει πραγματική τετραγωνική ρίζα του $[D]$, το διαγώνιο μητρώο

$$[D]^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{D_{11}}, \sqrt{D_{22}}, \dots, \sqrt{D_{nn}}) \quad (22)$$

Ορίζοντας το κάτω τριγωνικό μητρώο $[\tilde{L}] = [L] [D]^{1/2}$ η σχέση (18) τροποποιείται σε

$$[K] = [\tilde{L}] [\tilde{L}]^T \quad (23)$$

που αποτελεί την **παράγοντοποίηση κατά Cholesky**.

Οι όροι του μητρώου $[\tilde{L}]$ μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα από την εξίσωση των όρων K_{ij} με το αντίστοιχο στοιχείο (i,j) του μητρωικού γινομένου $[\tilde{L}] [\tilde{L}]^T$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το $[\tilde{L}]$ είναι κάτω τριγωνικό η εξίσωση (23) γράφεται αναλυτικά ως

$$K_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} \tilde{L}_{ir} \tilde{L}_{jr} \quad (24)$$

και προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τον άμεσο προσδιορισμό των όρων του $[\tilde{L}]$:

$$\tilde{L}_{ii} = \sqrt{K_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} \tilde{L}_{ir}^2} \quad (25 \text{ α})$$

$$\tilde{L}_{ij} = \left(K_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} \tilde{L}_{ir} \tilde{L}_{jr} \right) / \tilde{L}_{ir}, \quad (j < i) \quad (25 \text{ β})$$

Όπως και στην παραγοντοποίηση $[L][U]$, μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε κατάλληλη διάδοχη τιμών των δεικτών (i, j) (παρολείποντας φυσικά τα ζεύγη για τα οποία $j > i$). Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων μέσω εμπρός και πίσω αντικαταστάσεων χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (15), (16) αντικαθιστώντας όμως τους όρους L_i, U_{ii} με τους $\tilde{L}_i, \tilde{U}_{ii}$ αντίστοιχα.

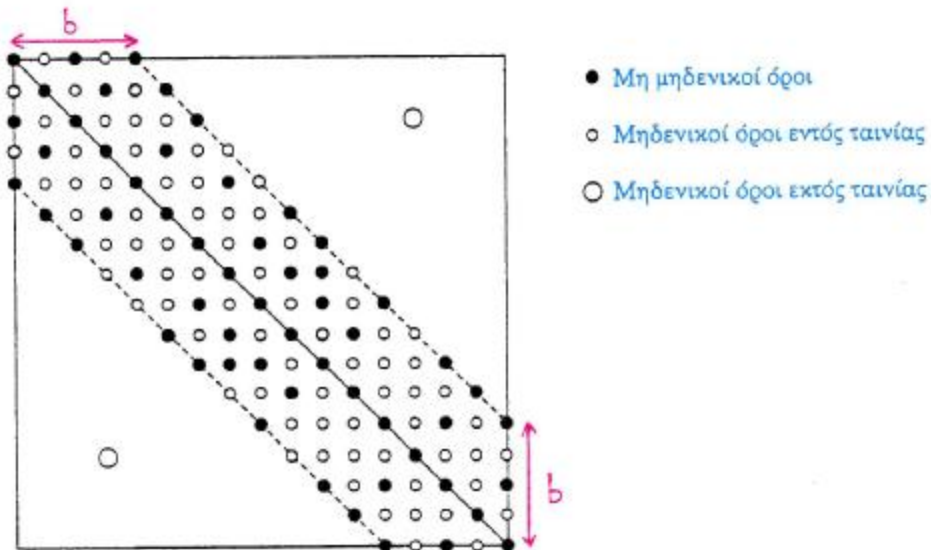
Με βάση όλα τα προηγούμενα μπορούμε να διατυπώσουμε σε αλγοριθμική μορφή τις δύο συχνότερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους παραγοντοποίησης κατά Cholesky και Crout για ένα συμμετρικό μητρώο $[K]$. Στους παρακάτω αλγορίθμους παρουσιάζεται η "ανά στήλη" διαδικασία και θεωρούμε ότι λόγω συμμετρίας είναι αποθηκευμένο μόνο το άνω τριγωνικό τμήμα του $[K]$, το οποίο μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου έχει αντικατασταθεί από το μητρώο $[\tilde{L}]^T$ για τη μέθοδο Cholesky ενώ για τη μέθοδο Crout αντικαθίσταται από το $[L]^T$ για τους όρους με $j > i$ και από τους διαγώνιους όρους του $[D]$ για $j = i$. Αντίστοιχα το διάνυσμα $\{f\}$ αντικαθίσταται από το διάνυσμα της λύσης $\{u\}$.

3. Παραγοντοποίηση μητρώων ταινιωτής αποθήκευσης.

Τα μητρώα ακαμψίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι συμμετρικά και αραιά ενώ οι όροι τους συγκεντρώνονται γύρω από την κύρια διαγώνιο ιδιαίτερα για τα σχετικώς ομοιόμορφα δίκτυα. Έτσι συνήθως χρησιμοποιούνται διάφορα σχήματα αποθήκευσης που λαμβάνουν υπόψη το γεγονός ότι μεγάλο ποσοστό των όρων του μητρώου ακαμψίας είναι μηδενικοί και παραμένουν μηδενικοί και κατά τη διάρκεια της απαλοιφής κατά Gauss ή των ισοδύναμων παραγοντοποιήσεων Cholesky και Crout.

Η απλούστερη μέθοδος οικονομικής αποθήκευσης του μητρώου ακαμψίας είναι η **ταινιωτή αποθήκευση**. Η μέγιστη από τις αποστάσεις από τη διαγώνιο των πιο απομακρυσμένων μη μηδενικών όρων κάθε γραμμής καθορίζει και το εύρος της ζώνης (ταινίας) εντός της οποίας βρίσκονται όλοι οι μη μηδενικοί όροι του μητρώου (βλέπε σχήμα 5). Αν συμβολίσουμε σαν n_{max} τη μέγιστη διαφορά στην καθολική αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας όλων των πεπερασμένων στοιχείων του προσομοιώματος (μοντέλου), το μισό εύρος της ζώνης ή **εύρος ημιζώνης** b δίνεται από τη σχέση

$$b = n_{max} + 1 \quad (33)$$

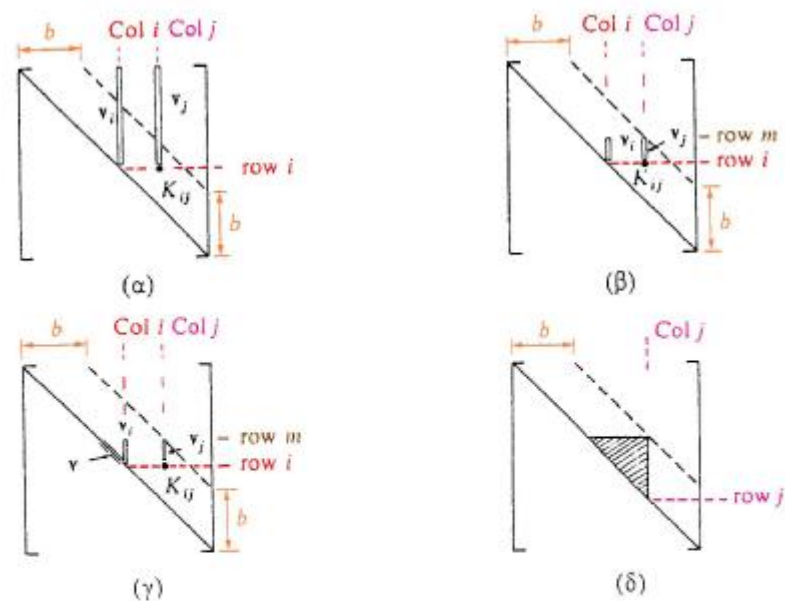


Σχήμα 5. Ταινιωτή μορφή μητρώου ακαμψίας [K].

Το γεγονός ότι αρκεί η αποθήκευση των όρων του μητρώου που βρίσκονται εντός της ζώνης μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό π.χ. στην περίπτωση του αλγορίθμου της ανά στήλη παραγοντοποίησης Cholesky. Η σχέση (26.β) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$K_{ij} = \left(K_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} K_{ir}K_{rj} \right) / K_{ii} = \left(K_{ij} - \{v_i\}^T \{v_j\} \right) / K_{ii}, \quad i = 1 + (j-1) \quad (34)$$

όπου $\{v_i\}$ είναι ένα διάνυσμα με όρους της i στήλης του $[K]$ (από τη γραμμή 1 ως τη γραμμή $i-1$) και $\{v_j\}$ ένα αντίστοιχο διάνυσμα με όρους της j στήλης τα οποία παριστάνονται και σχηματικά στο σχήμα 6(α). Υποθέτοντας ότι το μητρώο $[K]$ είναι αποθηκευμένο σε μορφή ταινιωτής αποθήκευσης (με εύρος ημιζώνης b) είναι προφανές ότι οι όροι του εσωτερικού γινομένου $\{v_i\}^T \{v_j\}$ είναι μηδενικοί για το τμήμα των διανυσμάτων που βρίσκονται πάνω από τη γραμμή m (όπου K_{mj} ο ανώτερος μη μηδενικός όρος της στήλης j και $m = j + 1 - b$ για τις στήλες $j > b$) και επομένως τα διανύσματα μπορούν να περιοριστούν όπως στο σχήμα 6(β). Έτσι, ο αλγόριθμος της παραγοντοποίησης Cholesky στις σχέσεις (26) μπορεί να τροποποιηθεί, αρκεί να αλλαχθεί το κάτω όριο των αθροισμάτων από $r = 1$ σε $r = m$ καθώς και το κάτω όριο του δείκτη i στη σχέση (26.β) από $i = 1$ σε $i = m$ όπου:



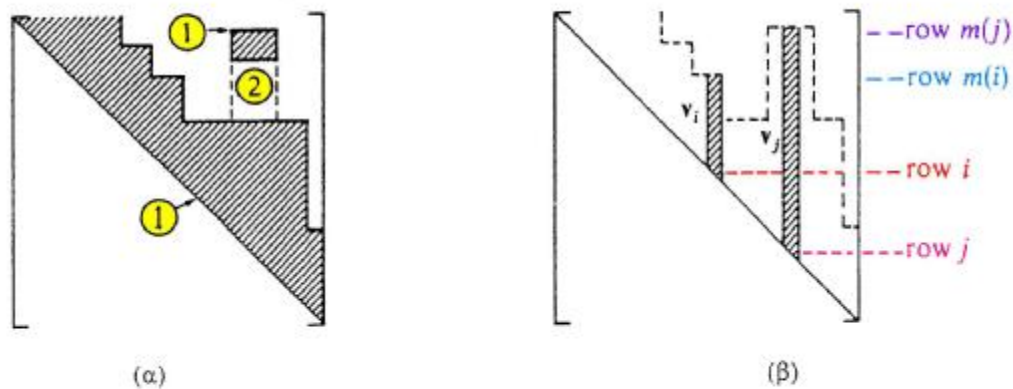
Σχήμα 6. Επιρροή της ταινιωτής αποθήκευσης. (α) Πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky, (β) Ταινιωτή παραγοντοποίηση Cholesky, (γ) Ταινιωτή παραγοντοποίηση Crout, (δ) "ενεργός περιοχή" για την τροποποίηση της στήλης j .

$$m = \max (1, j + 1 - b) \quad (35)$$

Αντίστοιχα μπορεί να τροποποιηθεί ο αλγόριθμος παραγοντοποίησης Crout των σχέσεων (30) κάνοντας χρήση των διανυσμάτων $\{v_i\}$ και $\{v_j\}$ καθώς και του διαγώνιου διανύσματος $\{v_i\}$ όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 6(γ). Σε κάθε περίπτωση οι όροι του $[K]$ που απαιτούνται για την τροποποίηση των όρων της στήλης j κατά τη διαδικασία της παραγοντοποίησης περιορίζονται στην "ενεργό περιοχή" που φαίνεται γραμμοσκιασμένη στο σχήμα 6(δ).

4. Παραγοντοποίηση μητρώων αποθήκευσης ενεργού στήλης.

Στα συνήθη προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων το δίκτυο είναι έντονα ανομοιόμορφο και υπάρχουν μεγάλες διαφορές στην αριθμηση των κόμβων και των βαθμών ελευθερίας κάθε ενός στοιχείου με αποτέλεσμα ακόμα και εντός της ημιζώνης του μητρώου $[K]$ να αποθηκεύονται πάρα πολλοί μηδενικοί όροι οι οποίοι παραμένουν μηδενικοί και μετά την παραγοντοποίηση (ή την απαλοιφή). Έτσι, είναι κατά πολύ οικονομικότερη η αποθήκευση του $[K]$ σε μορφή **ενεργού στήλης** (active column) που συχνά ονομάζεται και αποθήκευση **γραμμής οριζόντια** (skyline). Σ' αυτή τη μέθοδο αποθηκεύονται οι ενεργείς στήλες του μητρώου οι οποίες περιέχουν μόνο τους όρους οι οποίοι τροποποιούνται κατά την παραγοντοποίηση. Π.χ. αναφερόμενοι στο σχήμα 7(α), θα αποθηκευθούν οι γραμμοσκιασμένες περιοχές που αντιστοιχούν σε μη μηδενικούς όρους καθώς και το τμήμα 2 όπου αρχικά έχουμε μηδενικούς όρους που όμως θα τροποποιηθούν κατά την παραγοντοποίηση. Το ύψος της ενεργού στήλης καθορίζεται από τον πρώτο μη μηδενικό όρο της αντίστοιχης στήλης του $[K]$ (σχήμα 7(β)).



Σχήμα 7. Αποθήκευση ενεργού στήλης. (α) Γραμμή οριζόντια, (β) Ύψη ενεργών στηλών.

Και στην περίπτωση αποθήκευσης ενεργού στήλης ισχύουν οι αντίστοιχες τροποποιήσεις για τα όρια των δεικτών των αλγορίθμων που αναφέρθηκαν για την τριγωνική αποθήκευση, αλλά με την αντικατάσταση του όρου n της σχέσης (35) με τον όρο

$$n = \max (m(j), n(i)) \quad (36)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την ανά στήλη μορφή των αλγορίθμων παραγοντοποίησης οι όροι του άνω τριγωνικού τμήματος του μητρώου $[K]$ αποθηκεύονται ανά διαδοχική (ενεργό) στήλη σε μορφή μονοδιάστατου μητρώου όπως φαίνεται στο σχήμα 8. Επειδή βέβαια τα ύψη των ενεργών στηλών είναι μεταβλητά είναι απαραίτητη η αποθήκευση ενός επιπλέον διανύσματος (μήκους $n+1$) που δίνει τη θέση των διαγώνιων όρων του $[K]$ στο μονοδιάστατο μητρώο. Αν ονομάσουμε nd αυτό το διάνυσμα, τότε το πλήθος των όρων της ενεργού στήλης j δίνεται από τη σχέση

$$h(j) = nd(j+1) - nd(j) \quad (37)$$

ενώ το συνολικό πλήθος των αποθηκευμένων όρων του $[K]$ είναι $nd(n+1) - 1$. Η γραμμή $nd(j)$ όπου βρίσκεται ο πρώτος μη μηδενικός όρος της στήλης j δίνεται από τη σχέση

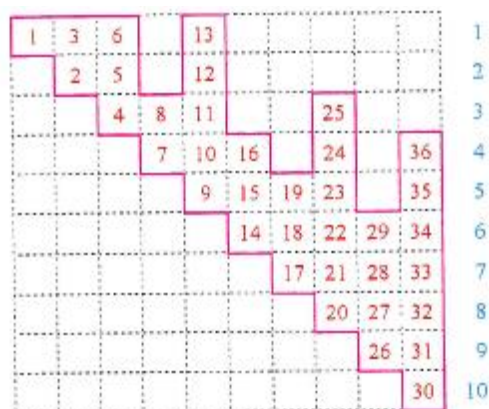
$$m(j) = j + 1 - h(j) = j + nd(i) + 1 - nd(j+1) \quad (38)$$

Η αντιστοίχιση της μονοδιάστατης (ενεργού στήλης) με τη διδιάστατη αποθήκευση του άνω τριγωνικού τμήματος του $[K]$ ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} K(i, j) &= \tilde{K}(nd(j) - i - 1), \quad i \geq m(j) \\ K(i, j) &= 0, \quad i < m(j) \end{aligned} \quad (39)$$

όπου με \tilde{K} συμβολίζουμε το μονοδιάστατα αποθηκευμένο μητρώο.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι σχετικά εύκολο να τροποποιηθούν οι αλγόριθμοι των παραγοντοποιήσεων κατά Cholesky ή Crout που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2 ώστε να ισχύουν για μητρώα που είναι αποθηκευμένα σε μορφή ενεργού στήλης.



$$nd^T = \{ 1, 2, 4, 7, 9, 14, 17, 20, 26, 30, 37 \}$$

Σχήμα 8. Μονοδιάστατη αποθήκευση ενεργού στήλης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων αναζητούν τη λύση $\{u\}$ εξισώσεων όπως η μητρική εξίσωση ισορροπίας

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

μέσω διαδοχικών διορθώσεων μιας αρχικής εκτίμησης $\{u^{(0)}\}$. Εν γένει διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: τις **στάσιμες επαναληπτικές μεθόδους** (stationary methods) και τις **μεθόδους διανυσματικής κλίσης** (gradient methods). Στις στάσιμες μεθόδους το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε επανάληψη προκύπτει από το σφάλμα της προηγούμενης επανάληψης μέσω ενός σταθερού μητρώου (για αυτό και ο όρος "στάσιμες"). Στις μεθόδους διανυσματικής κλίσης η επίλυση ενός συστήματος n γραμμικών εξισώσεων θεωρείται ως η ισοδύναμη διαδικασία εύρεσης του σημείου ελαχιστοποίησης (ή ακριβέστερα στασιμότητας) μίας συνάρτησης ορισμένης στον n -διάστατο χώρο. Η προσεγγιστική λύση κάθε επανάληψης χρησιμοποιείται για την εύρεση της επόμενης προσεγγιστικής λύσης η οποία πρέπει ταυτόχρονα να αντιστοιχεί σε σημείο όπου η θεωρούμενη συνάρτηση έχει μικρότερη τιμή. Στις περισσότερες από τις μεθόδους διανυσματικής κλίσης τα διαδοχικά διανύσματα σφάλματος δεν μπορούν να προκύψουν μέσω κάποιου σταθερού μητρώου και για αυτό διαφοροποιούνται από τις στάσιμες μεθόδους.

1. Στάσιμες επαναληπτικές μέθοδοι.

Σε όλες τις στάσιμες επαναληπτικές μεθόδους η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση υπολογισμού της προσεγγιστικής λύσης $\{u^{(k+1)}\}$ κατά την $k+1$ επανάληψη συναρτίζεται της προηγούμενης προσεγγιστικής λύσης $\{u^{(k)}\}$ εκφράζεται με μια σχέση της μορφής:

$$\{u^{(k+1)}\} = [M]\{u^{(k)}\} + \{b\} \quad (2)$$

Προφανώς η παραπάνω σχέση ισχύει και για την ακριβή λύση $\{u\}$:

$$\{u\} = [M]\{u\} + \{b\} \quad (3)$$

Αν ορίσουμε ως $\{e^{(k)}\}$ το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης κατά την επανάληψη k :

$$\{e^{(k)}\} = \{u^{(k)}\} - \{u\} \quad (4)$$

και αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (2), (3) προκύπτει ότι στις στάσιμες επαναληπτικές μεθόδους η εξέλιξη του σφάλματος σε κάθε επανάληψη δίνεται από τη σχέση:

$$\{e^{(k+1)}\} = [M]\{e^{(k)}\} \quad (5)$$

Το μητρώο $[M]$ είναι συνάρτηση του μητρώου $[K]$, σταθερό για όλες τις επαναλήψεις και ονομάζεται **χαρακτηριστικό μητρώο** της μεθόδου, ενώ το διάνυσμα $\{b\}$ ονομάζεται αντίστοιχα **χαρακτηριστικό διάνυσμα**. Οι διάφορες στάσιμες επαναληπτικές μέθοδοι διαφοροποιούνται ανάλογα με την εκλογή του μητρώου $[M]$ και του αντίστοιχου διανύσματος $\{b\}$.

1.1. Μέθοδος Jacobi

Η απλούστερη επαναληπτική μέθοδος είναι η **μέθοδος Jacobi**. Σε οποιοδήποτε κύκλο της επαναληπτικής διαδικασίας κάθε συνιστώσα u_i της λύσης $\{u\}$ προκύπτει από την επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης του συστήματος όπου όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες u_j ($i \neq j$) θεωρούνται γνωστές από την προηγούμενη επανάληψη δηλαδή:

$$u_i^{(k+1)} = K_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{ij} u_j^{(k)} \right) \quad (6)$$

Αν θεωρήσουμε ότι το συμμετρικό μητρώο $[K]$ γράφεται στη μορφή $[K] = [D] - [L] - [L]^T$ όπου $[D]$ το διαγώνιο μητρώο με τους διαγώνιους όρους του $[K]$ και $[L]$ το κάτω τριγωνικό μητρώο με τους αντίθετους των αντίστοιχων όρων του $[K]$ (και μηδενικούς διαγώνιους όρους)

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -K_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -K_{n1} & -K_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

τότε η σχέση (6) γράφεται σε μητρική μορφή

$$\{u^{(k+1)}\} = [D]^{-1} \left(\{f\} + ([U] + [L]) \{u^{(k)}\} \right) \quad (8.α)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = [D]^{-1} \left(\{f\} + ([D] - [K]) \{u^{(k)}\} \right) \quad (8.β)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = ([I] - [D]^{-1}[K]) \{u^{(k)}\} + [D]^{-1} \{f\} \quad (8.γ)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (8.γ) με τη γενική μορφή της επαναληπτικής σχέσης όλων των στάσιμων μεθόδων προκύπτει ότι το χαρακτηριστικό μητρώο και το χαρακτηριστικό διάνυσμα της μεθόδου Jacobi δίνονται από τις σχέσεις

$$[M] = [I] - [D]^{-1}[K] \quad (9.α)$$

$$\{b\} = [D]^{-1} \{f\} \quad (9.β)$$

1.2. Μέθοδος Gauss - Seidel

Η μέθοδος Gauss - Seidel αποτελεί βελτίωση της μεθόδου Jacobi όπου σε κάθε κύκλο της επαναληπτικής διαδικασίας κατά τον υπολογισμό της συνιστώσας u_i της λύσης $\{u\}$ από την σχέση (6) λαμβάνονται υπόψη οι τρέχουσες τιμές των προηγούμενων συνιστωσών. Έτσι η σχέση (6) γράφεται

$$u_i^{(k+1)} = K_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j^{(k)} \right) \quad (10)$$

ή σε μητρωική μορφή

$$\{u^{(k+1)}\} = [D]^{-1} \left(\{f\} + [L] \{u^{(k+1)}\} + [L] \{u^{(k)}\} \right) \quad (11.α)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = [D]^{-1} [L] \{u^{(k+1)}\} + [D]^{-1} \left(\{f\} + [L] \{u^{(k)}\} \right) \quad (11.β)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = ([I] - [D]^{-1}[L])^{-1} [D]^{-1} \left(\{f\} + [L] \{u^{(k)}\} \right) \quad (11.γ)$$

Επομένως τα χαρακτηριστικά μητρώο και διάνυσμα της μεθόδου Gauss - Seidel είναι

$$[M] = ([I] - [D]^{-1}[L])^{-1} [D]^{-1} [L] \quad (12.α)$$

$$\{b\} = ([I] - [D]^{-1}[L])^{-1} [D]^{-1} \{f\} \quad (12.β)$$

1.3. Μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης

Διάφορες τεχνικές "χαλάρωσης" χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων "με το χέρι" πριν την εμφάνιση των Η/Υ. Εφαρμόστηκαν κατά κύριο λόγο για την επίλυση προβλημάτων πεδίου, όπου οι μερικές διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος προσεγγίζονταν με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Όμως, έχουν χρησιμοποιηθεί ακόμα και για την επίλυση προβλημάτων δικτύων ή στατικής ανάλυσης. Η μέθοδος κατανομής των ροπών ή μέθοδος Cross, π.χ. είναι μία μέθοδος χαλάρωσης. Τέτοιες τεχνικές βασίζονταν στη μέθοδο Gauss - Seidel αλλά κατά την εφαρμογή τους ήταν συχνά αναγκαίο σε περιπτώσεις αργής σύγκλισης (και βέβαια ανάλογα με την κρίση του ανθρώπου που εφήρμοζε τη μέθοδο) να "υπερχαλαρωθούν" (over-relax) οι τιμές των μεταβλητών σε διάφορα βήματα ώστε να επιταχυνθεί η επαναληπτική διαδικασία.

Η μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης (successive overrelaxation - SOR) παρουσιάστηκε από τον Frankel (1950) με σκοπό την εφαρμογή της από Η/Υ. Παράγεται από τη μέθοδο Gauss - Seidel με μια τακτική διαδοχική υπερχαλάρωση της λύσης σε κάθε κύκλο της επαναληπτικής διαδικασίας (σε αντίθεση με την περιοδική και συχνά "σπασμωδική" χαλάρωση στην εφαρμογή αυτών των τεχνικών "με το χέρι"). Αν $\bar{u}_i^{(k+1)}$ είναι η τιμή της μεταβλητής σύμφωνα με τη μέθοδο Gauss - Seidel στην $k+1$ επανάληψη, η μεταβολή $\bar{u}_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}$ πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή υπερχαλάρωσης ω και έτσι προκύπτει η τελική τιμή της μεταβλητής

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \omega(\bar{u}_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}) \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της $\bar{u}_i^{(k+1)}$ από την εξίσωση (10) έχουμε

$$u_i^{(k+1)} = \omega K_u^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^r K_{ij} u_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) u_i^{(k)} \quad (14)$$

ή σε μητρική μορφή

$$\{u^{(k+1)}\} = \omega [D]^{-1} \{ \{f\} + [L] \{u^{(k+1)}\} + [L]^T \{u^{(k)}\} \} + (1 - \omega) \{u^{(k)}\} \quad (15.α)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = \omega [D]^{-1} [L] \{u^{(k+1)}\} + \omega [D]^{-1} \{f\} - \{ \omega [D]^{-1} [L]^T - (1 - \omega) [I] \} \{u^{(k)}\} \quad (15.β)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = ([I] - \omega [D]^{-1} [L])^{-1} \{ \omega [D]^{-1} \{f\} + ((1 - \omega) [I] + \omega [D]^{-1} [L]^T) \{u^{(k)}\} \} \quad (15.γ)$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν το χαρακτηριστικό μητρώο και διάνυσμα της μεθόδου διαδοχικής υπερχαλάρωσης

$$[M] = ([I] - \omega [D]^{-1} [L])^{-1} \{ (1 - \omega) [I] + \omega [D]^{-1} [L]^T \} \quad (16.α)$$

$$\{b\} = \omega ([I] - \omega [D]^{-1} [L])^{-1} [D]^{-1} \{f\} \quad (16.β)$$

Είναι προφανές ότι η μέθοδος Gauss - Seidel αποτελεί μερική περίπτωση της μεθόδου διαδοχικής υπερχαλάρωσης για $\omega = 1$.

1.4. Μέθοδος συμμετρικής διαδοχικής υπερχαλάρωσης

Η μέθοδος συμμετρικής διαδοχικής υπερχαλάρωσης (symmetric successive overrelaxation - SSOR) αποτελεί ένα συνδυασμό μιας εμπρός και μιας πίσω διαδοχικής υπερχαλάρωσης μέσα σε κάθε επανάληψη. Αν συμβολίσουμε με $u_i^{(k+1/2)}$ τις ενδιάμεσες τιμές των μεταβλητών κατά την εμπρός διαδοχική υπερχαλάρωση οι βασικές σχέσεις της μεθόδου γράφονται

$$u_i^{(k+1/2)} = \omega K_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{(k+1/2)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j^{(k)} \right) + (1-\omega) u_i^{(k)} \quad (17.α)$$

$$u_i^{(k+1)} = \omega K_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{(k+1/2)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j^{(k+1)} \right) + (1-\omega) u_i^{(k+1/2)} \quad (17.β)$$

ή σε μητρική μορφή

$$([I] - \omega[D]^{-1}[L])\{u^{(k+1/2)}\} = \omega[D]^{-1}\{f\} + ((1-\omega)[I] + \omega[D]^{-1}[L])\{u^{(k)}\} \quad (18.α)$$

$$([I] - \omega[D]^{-1}[L])\{u^{(k+1)}\} = \omega[D]^{-1}\{f\} + ((1-\omega)[I] + \omega[D]^{-1}[L])\{u^{(k+1/2)}\} \quad (18.β)$$

Εκφράζοντας τις σχέσεις (18) στη γενική μορφή των στάσιμων μεθόδων έχουμε

$$\{u^{(k+1/2)}\} = [M_1]\{u^{(k)}\} - \{b_1\} \quad (19.α)$$

$$\{u^{(k+1)}\} = [M_2]\{u^{(k+1/2)}\} + \{b_2\} \quad (19.β)$$

όπου

$$[M_2] = ([I] - \omega[D]^{-1}[L])^{-1} ((1-\omega)[I] + \omega[D]^{-1}[L]) \quad (20.α)$$

$$\{b_2\} = \omega([I] - \omega[D]^{-1}[L])^{-1} [D]^{-1}\{f\} \quad (20.β)$$

ενώ $[M_1]$, $\{b_1\}$ παύτίζονται με τα $[M_1]$, $\{b\}$ της μεθόδου διαδοχικής υπερχαλάρωσης και δίνονται από τις σχέσεις (16).

Αντικαθιστώντας το $\{u^{(k+1/2)}\}$ από τη σχέση (19.α) στη (19.β) προκύπτει ότι

$$\{u^{(k+1)}\} = [M_2][M_1]\{u^{(k)}\} + [M_2]\{b_1\} + \{b_2\} \quad (21)$$

Επομένως, το χαρακτηριστικό μητρώο της μεθόδου συμμετρικής διαδοχικής υπερχαλάρωσης δίνεται από τη σχέση

$$[M] = [M_2][M_1] \quad (22)$$

και το χαρακτηριστικό διάνυσμα

$$\begin{aligned} \{b\} &= [M_2]\{b_1\} + \{b_2\} \\ &= \omega(2 - \omega)[I - \omega[D]^{-1}[L]^T]^{-1}([I - \omega[D]^{-1}[L]]^{-1}[D]^{-1}\{f\}) \end{aligned} \quad (23)$$

1.5. Έλεγχος σύγκλισης στάσιμων επαναληπτικών μεθόδων

Η εξίσωση ιδιοτιμών του χαρακτηριστικού μητρώου $[M]$ εκφράζεται από τη σχέση

$$[M]\{x_i\} = \mu_i \{x_i\} \quad (24)$$

όπου μ_i η i -οστή ιδιοτιμή και $\{x_i\}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Τα ιδιοδιανύσματα σχηματίζουν μια βάση στον n -διάστατο χώρο και επομένως οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του χώρου, άρα και το διάνυσμα του λάθους της αρχικής εκτίμησης της επαναληπτικής διαδικασίας, μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\{e^{(0)}\} = \sum_{i=1}^n c_i \{x_i\} \quad (25)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση της εξέλιξης του σφάλματος και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση ιδιοτιμών παίρνουμε

$$\{e^{(1)}\} = [M]\{e^{(0)}\} = \sum_{i=1}^n c_i [M]\{x_i\} = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i \{x_i\} \quad (26)$$

και επαγωγικά

$$\{e^{(k)}\} = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^k \{x_i\} \quad (27)$$

Επομένως το σφάλμα θα μειώνεται (και η διαδικασία θα συγκλίνει) με την αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων· μόνο αν η απόλυτη τιμή κάθε ιδιοτιμής του χαρακτηριστικού μητρώου είναι μικρότερη της μονάδας

$$|\mu_i| < 1, \quad \forall i = 1, n \quad (28)$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι το σφάλμα μειώνεται τόσο ταχύτερα όσο μικρότερες είναι οι ιδιοτιμές. Άρα, ο ρυθμός σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας καθορίζεται από τη τιμή της μέγιστης (κατ' απόλυτο τιμή) ιδιοτιμής του χαρακτηριστικού μητρώου που ονομάζεται **φασματική ακτίνα** του μητρώου.

Εφόσον το χαρακτηριστικό μητρώο κάθε στάσιμης επαναληπτικής μεθόδου εξαρτάται μόνο από το $[K]$ είναι εύλογο να συμπεράνουμε ότι οι ιδιοτιμές του (και άρα η δυνατότητα και ο ρυθμός σύγκλισης μιας μεθόδου) σχετίζονται με τις ιδιοτιμές του $[K]$. Η μέθοδος Jacobi είναι η απλούστερη στάσιμη μέθοδος και προσφέρεται ιδιαίτερα για τη διερεύνηση αυτής της σχέσης. Αν θεωρήσουμε το κλιμακωμένο (scaled) μητρώο $[\bar{K}] = [D]^{-1}[K]$, δηλαδή το μητρώο ακαμψίας όπου όλος ο όρος κάθε γραμμής έχουν διαιρεθεί με τον διαγώνιο όρο της γραμμής (δηλαδή $\bar{K}_{ij} = K_{ij}/K_{ii}$ και βέβαια $\bar{K}_{ii} = 1$), η σχέση (9.α) που δίνει το χαρακτηριστικό μητρώο της μεθόδου Jacobi γίνεται

$$[M] = [I] - [\bar{K}] \quad (29)$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά την παραπάνω σχέση με $\{x_i\}$ και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση ιδιοτιμών (24) παίρνουμε

$$[\bar{K}]\{x_i\} = (1 - \mu_i)\{x_i\} \quad (30)$$

Όμοια αυτή η εξίσωση είναι μία εξίσωση ιδιοτιμών, άρα η $(1 - \mu_i)$ πρέπει να είναι μία ιδιοτιμή του $[\bar{K}]$ και το $\{x_i\}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Επιπλέον αυτή η σχέση ισχύει για όλες τις ιδιοτιμές του $[M]$ και επομένως κάθε ιδιοτιμή μ_i του $[M]$ θα σχετίζεται με κάποια ιδιοτιμή λ_i του $[\bar{K}]$ μέσω της σχέσης

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \quad (31)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (24) βλέπουμε ότι για να συγκλίνει η μέθοδος Jacobi θα πρέπει

$$0 < \lambda_i < 2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του $[\bar{K}]$ πρέπει να είναι θετικές και ταυτόχρονα μικρότερες από 2.

Ακολουθώντας αντίστοιχες διαδικασίες για άλλες στάσιμες μεθόδους δεν είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε απλές σχέσεις μεταξύ των ιδιοτιμών του $[K]$ και του $[M]$ οι οποίες να ισχύουν για όλα τα μητρώα $[K]$.

2. Μέθοδοι διανυσματικής κλίσης

Για την πλειοψηφία των μεθόδων διανυσματικής κλίσης η επαναληπτική διαδικασία εκφράζεται με μια σχέση της μορφής:

$$\{u^{(k+1)}\} = \{u^{(k)}\} + \eta_k \{\delta^{(k)}\} \quad (33)$$

όπου η προσεγγιστική λύση $\{u^{(k)}\}$ της k -οστής επανάληψης αναπροσαρμόζεται στην επόμενη επανάληψη μέσω ενός διανύσματος κατεύθυνσης $\{\delta^{(k)}\}$ και ενός βαθμωτού "μήκους βήματος" η_k .

Το διάνυσμα κατεύθυνσης μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$\{\delta^{(k)}\} = -\alpha_k [K_a]^{-1} \{g^{(k)}\} + \beta_k \{\delta^{(k-1)}\} \quad (34)$$

όπου $[K_a]$ είναι ένα προσεγγιστικό μητρώο ακαμψίας και $\{g^{(k)}\}$ το διάνυσμα των εκτός ισορροπίας (υπολειμματικών) δυνάμεων που αντιστοιχούν στη προσεγγιστική λύση της επανάληψης k :

$$\{g^{(k)}\} = [K]\{u^{(k)}\} - \{f\} \quad (35)$$

Το προσεγγιστικό μητρώο ακαμψίας $[K_a]$ αναφέρεται συχνά ως **προσταθεροποιητής** ή **προδιαθέτης** (preconditioner ή preconditioning matrix) και καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας. Μπορεί να είναι οποιοδήποτε θετικά ορισμένο μητρώο από το μοναδιαίο μητρώο, οπότε έχουμε μια μη προσταθεροποιημένη επαναληπτική διαδικασία, ως και το πλήρες μητρώο ακαμψίας $[K]$ οπότε η επαναληπτική διαδικασία εκφυλίζεται στην ουσία σε μια άμεση μέθοδο αφού συγκλίνει σε μία επανάληψη και ο υπολογιστικός φόρτος έχει μεταφερθεί στον προσδιορισμό του $[K_a]^{-1}$ δηλαδή, στην ουσία, στην παραγοντοποίηση του $[K_a]$. Παρακάτω θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στην τεχνική της προσταθεροποίησης (προδιάθεσης).

Όπως προαναφέρθηκε, οι μέθοδοι διανυσματικής κλίσης αναζητούν το σημείο ελαχιστοποίησης (στασιμότητας) μιας συνάρτησης ορισμένης στο n -διάστατο χώρο, το οποίο ταυτίζεται με τη λύση της εξίσωσης (1). Μία τέτοια συνάρτηση που χρησιμοποιείται συχνά στην επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας και ανάλυσης κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η συνάρτηση της συνολικής δυναμικής ενέργειας. Η συνολική δυναμική ενέργεια ενός διακριτοποιημένου σώματος που βρίσκεται σε μια παραμορφωμένη

κατάσταση, η οποία εκφράζεται από το διάνυσμα $\{u\}$, υπό την επίδραση κειμένων εξωτερικών δράσεων που εκφράζονται με το διάνυσμα $\{f\}$, δίνεται από τη σχέση

$$\Pi(\{u\}) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} \quad (36)$$

ενώ η μηχανική εξίσωση ισορροπίας μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = \{g\} = [K] \{u\} - \{f\} = \{0\} \quad (37)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το διάνυσμα των υπολειμματικών δυνάμεων $\{g\}$ εκφράζει την κλίση της συνολικής δυναμικής ενέργειας και βεβαίως μηδενίζεται στη θέση ισορροπίας.

Αν εκοράσουμε την συνολική δυναμική ενέργεια κατά την $k+1$ επανάληψη μιας επαναληπτικής διαδικασίας

$$\Pi(\{u^{(k+1)}\}) = \frac{1}{2} \{u^{(k+1)}\}^T [K] \{u^{(k+1)}\} - \{u^{(k+1)}\}^T \{f\} \quad (38)$$

και αντικαταστήσουμε το $\{u^{(k+1)}\}$ από τη σχέση (33) παίρνουμε (μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις)

$$\Pi(\{u^{(k+1)}\}) = \Pi(\{u^{(k)}\}) + \eta_k \{\delta^{(k)}\}^T ([K] \{u^{(k)}\} - \{f\}) + \frac{1}{2} \eta_k^2 \{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k)}\} - \{u^{(k+1)}\}^T \{f\} \quad (39)$$

Θεωρώντας δεδομένα (και επομένως σταθερά) το $\{u^{(k)}\}$ και το διάνυσμα κατεύθυνσης $\{\delta^{(k)}\}$, το βαθμωτό "μήκος βήματος" η_k είναι η μόνη μεταβλητή πυσότητα και άρα η αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας δίνει

$$\frac{\partial \Pi(\{u^{(k+1)}\})}{\partial \eta_k} = \{\delta^{(k)}\}^T \{g^{(k)}\} + \eta_k \{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k)}\} = \{0\} \quad (40)$$

και

$$\eta_k = - \frac{\{\delta^{(k)}\}^T \{g^{(k)}\}}{\{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k)}\}} \quad (41)$$

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του "μήκους βήματος" η_k είναι γνωστός σαν έρευνα γραμμής (line search), όρος που προέρχεται από τα μη γραμμικά προβλήματα καθώς για τις πιοπλάσιες γραμμικών προβλημάτων δεν απαιτείται κάποια "έρευνα" αλλά η απλή επίλυση

της σχέσης (41). Ουσιαστικά προσδιορίζει το σημείο στασιμότητας της συνολικής δυναμικής ενέργειας κατά μήκος της δεδομένης κατεύθυνσης $\{\delta^{(k)}\}$. Στο σημείο αυτό το διάνυσμα της κλίσης της δυναμικής ενέργειας είναι κάθετο στο $\{\delta^{(k)}\}$ δηλαδή

$$\{\delta^{(k)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k+1)}\} = 0 \quad (42)$$

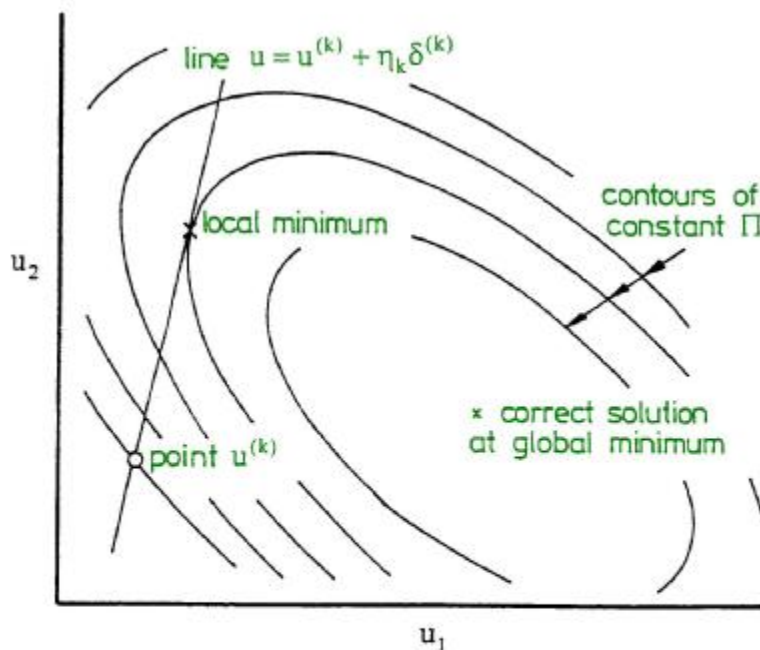
Αυτή η σχέση προκύπτει από τη σχέση (40) η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\{\delta^{(k)}\}^T (\{\mathbf{g}^{(k)}\} + \eta_k [\mathbf{K}]\{\delta^{(k)}\}) = 0 \quad (43)$$

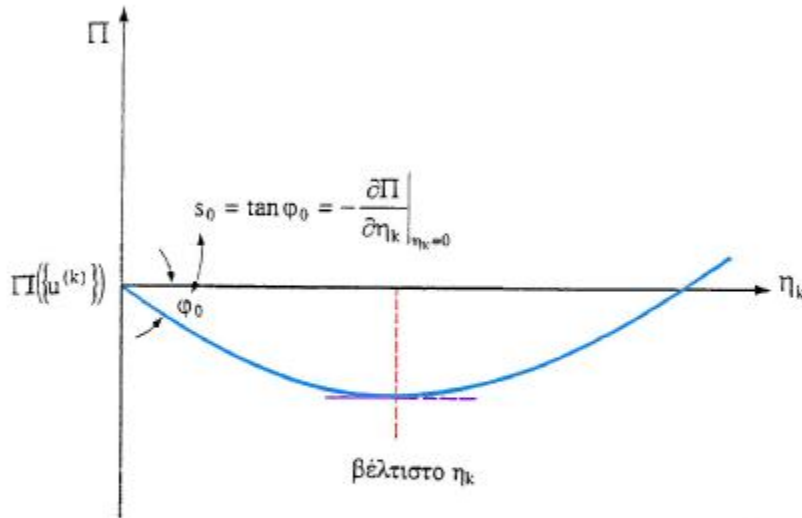
Όμως ισχύει επίσης

$$\{\mathbf{g}^{(k+1)}\} = [\mathbf{K}]\{u^{(k+1)}\} - \{f\} = [\mathbf{K}]\{u^{(k)}\} - \{f\} + \eta_k [\mathbf{K}]\{\delta^{(k)}\} = \{\mathbf{g}^{(k)}\} + \eta_k [\mathbf{K}]\{\delta^{(k)}\} \quad (44)$$

και με αντικατάσταση στη (43) προκύπτει η (42).



Σχήμα 1. Τοπική ελαχιστοποίηση συνάρτησης 2 μεταβλητών



Σχήμα 2. Η έρευνα γραμμής

Στη σχέση (41) μπορούμε να καταλήξουμε και από την απαίτηση ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης σφάλματος της επαναληπτικής διαδικασίας. Αυτή η θεώρηση είναι γενικότερη γιατί μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις προβλημάτων που δεν εκφράζονται μέσω συνολικής δυναμικής ενέργειας. Έτσι, αν $\{\bar{u}\}$ είναι μία προσεγγιστική λύση του προβλήματος μας και $\{g\} = [K]\{\bar{u}\} - \{f\}$ το αντίστοιχο διάνυσμα υπολειμματικών δυνάμεων, μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση σφάλματος της επαναληπτικής διαδικασίας σαν

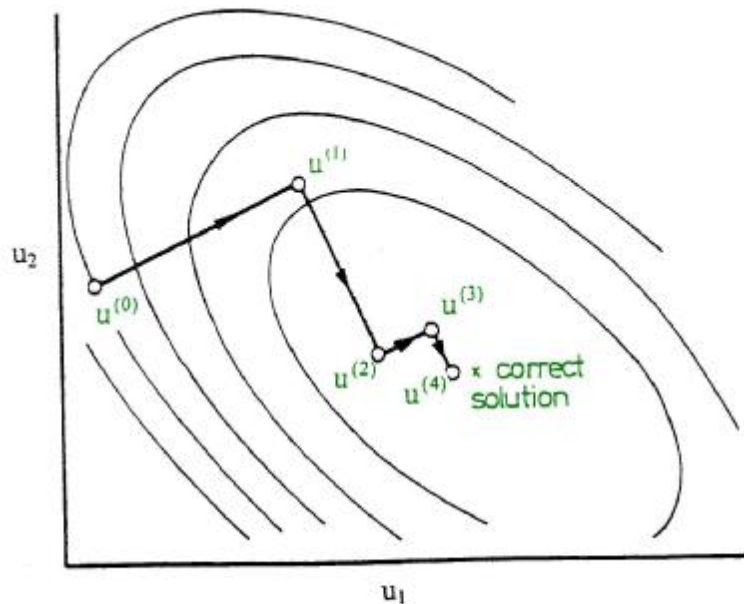
$$H = \{g\}^T [K]^{-1} \{g\} \quad (45)$$

Εφόσον το μητρώο $[K]$ είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο το ίδιο θα ισχύει και για το $[K]^{-1}$ και άρα η τιμή της H θα είναι πάντα θετική και θα μηδενίζεται μόνο για τη σωστή λύση οπότε $\{g\} = \{0\}$. Αντικαθιστώντας την έκφραση του $\{g\}$ στην (45) παίρνουμε (μετά από κάποιες πράξεις)

$$H = \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} - 2 \{\bar{u}\}^T \{f\} + \{f\}^T [K]^{-1} \{f\} \quad (46)$$

Αν θεωρήσουμε ως προσεγγιστική λύση $\{\bar{u}\}$ τη $\{u^{(k+1)}\}$ που δίνεται από τη σχέση (33) και αντικαταστήσουμε στη σχέση (46) έχουμε

$$H(\{u^{(k+1)}\}) = \eta_k^2 \{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k)}\} + 2 \eta_k \{\delta^{(k)}\}^T \{g^{(k)}\} + \{u^{(k)}\}^T [K] \{u^{(k)}\} - 2 \{u^{(k)}\}^T \{f\} + \{f\}^T [K]^{-1} \{f\} \quad (47)$$



Σχήμα 3. Σύγκλιση της μεθόδου απότομης καθόδου

και θεωρώντας όπως και παραπάνω σταθερά τα $\{u^{(k)}\}$, $\{g^{(k)}\}$ και $\{\delta^{(k)}\}$ η μόνο μεταβλητή ποσότητα είναι το η_k και επομένως η συνθήκη ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σφάλματος μας δίνει

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = 2 \left(\eta_k \{ \delta^{(k)} \}^T [K] \{ \delta^{(k)} \} + \{ \delta^{(k)} \}^T \{ g^{(k)} \} \right) = \{ 0 \} \quad (48)$$

οπότε καταλήγουμε και πάλι στη σχέση (41) για τον υπολογισμό του "μήκους βήματος" η_k .

2.1. Μέθοδος απότομης καθόδου

Η μέθοδος απότομης καθόδου (steepest descent method) επιλέγει σαν διάνυσμα κατεύθυνσης το αντίθετο του διανύσματος των υπολειμματικών δράσεων της τελευταίας επανάληψης

$$\{ \delta^{(k)} \} = - \{ g^{(k)} \} \quad (49)$$

που προκύπτει από τον γενικό τύπο (34) για $\alpha_k = 1$, $\beta_k = 0$, $[K_a] = [I]$. Η ονομασία της μεθόδου γίνεται εύκολα κατανοητή παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της σχέσης (39)

στο σχήμα 2. Προφανώς αν η γωνία καθόδου στη θέση $\eta_k = 0$ είναι φ_k και s_k είναι η τιμή της εφαπτομένης της, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (40) έχουμε

$$s_k = \tan \varphi_k = - \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \eta_k} \Big|_{\eta_k=0} = - \left\{ \delta^{(k)} \right\}^T \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} \quad (50)$$

που είναι όντως γωνία καθόδου εφόσον $\left\{ \delta^{(k)} \right\}^T \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} < 0$. Επιλέγοντας το διάνυσμα κατεύθυνσης από τη σχέση (49) αυτή η προϋπόθεση ικανοποιείται και επιπλέον η s_k παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της $\left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}^T \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}$. (Αυτό ισχύει διότι η $\left\{ \delta^{(k)} \right\}^T \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}$ είναι πηλίκο εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων και άρα δίνει το μέτρο της προβολής του $\left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}$ στη διεύθυνση του $\left\{ \delta^{(k)} \right\}$ που βέβαια είναι μέγιστο στη διεύθυνση του ιδίου.) Επομένως η κατεύθυνση της σχέσης (49) είναι η κατεύθυνση της μεγαλύτερης ή πιο απότομης καθόδου.

Έτσι, η μέθοδος απότομης καθόδου περιγράφεται με τον ακόλουθο αλγόριθμο:

Για $k=0, 1, \dots$ μέχρι τη σύγκλιση:

$$\left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} = \left[\mathbf{K} \right] \left\{ \mathbf{u}^{(k)} \right\} - \left\{ \mathbf{f} \right\} \quad (51.α)$$

$$\eta_k = \frac{\left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}^T \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}}{\left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}^T \left[\mathbf{K} \right] \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}} \quad (51.β)$$

$$\left\{ \mathbf{u}^{(k+1)} \right\} = \left\{ \mathbf{u}^{(k)} \right\} - \eta_k \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} \quad (51.γ)$$

Ο αλγόριθμος, στην παραπάνω μορφή του, απαιτεί δύο πολλαπλασιασμούς μητρώου με διάνυσμα σε κάθε επανάληψη. Γενικά, το υπολογιστικό κόστος των επαναληπτικών αλγορίθμων κυριαρχείται από γινόμενα μητρώων – διανυσμάτων. Ευτυχώς, από τον παραπάνω αλγόριθμο μπορεί να παραληφθεί ο ένας πολλαπλασιασμός. Από τις σχέσεις (44) και (46) προκύπτει ότι

$$\left\{ \mathbf{g}^{(k+1)} \right\} = \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} - \eta_k \left[\mathbf{K} \right] \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\} \quad (51.δ)$$

Η σχέση (51.α) πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $\left\{ \mathbf{g}^{(0)} \right\}$ (εκτός αν θεωρηθεί ως αρχική εκτίμηση το μηδενικό διάνυσμα, πράγμα που σπάνια συμβαίνει), όμως η (51.δ) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις επόμενες επαναλήψεις. Έτσι σε κάθε επανάληψη απαιτείται μόνο το γινόμενο $\left[\mathbf{K} \right] \left\{ \mathbf{g}^{(k)} \right\}$.

Αποδεικνύεται ότι στον n -διάστατο χώρο οι "επιφάνειες" σταθερής τιμής της συνάρτησης σφάλματος H που προαναφέρθηκε είναι ελλειψοειδή που έχουν κύριους άξονες με μήκη $(H/\lambda_1)^{1/2}$, $(H/\lambda_2)^{1/2}$, ..., $(H/\lambda_n)^{1/2}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $\left[\mathbf{K} \right]$, ενώ ανάλογη είναι και η μορφή της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας Π . Η ταχύτητα σύγκλισης της

μεθόδου απότομης καθόδου και γενικότερα των μεθόδων διανυσματικής κλίσης εξαρτάται από το "σχήμα" αυτών των επιφανειών (βλέπε και σχήμα 3). Για παράδειγμα, αν το μέγεθος όλων των ιδιοτιμών είναι περίπου το ίδιο τότε οι επιφάνειες γίνονται σχεδόν "σφαίρες" και η σύγκλιση είναι ταχύτατη. Αντίθετα όσο μεγαλύτερες είναι οι διαφορές στις τιμές των ιδιοτιμών τόσο επιβραδύνεται ο ρυθμός σύγκλισης. Ένα ποιοτικό μέτρο του ρυθμού σύγκλισης δίνεται από τον **δείκτη κατάστασης** (condition number) του $[K]$ που είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη ιδιοτιμή του μητρώου:

$$C = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \quad (52)$$

Ορίζοντας την **ενεργειακή νόρμα** ενός διανύσματος $\{x\}$ σαν

$$\|\{x\}\|_K = (\{x\}^T [K] \{x\})^{1/2} \quad (53)$$

από την ανάλυση σύγκλισης της μεθόδου απότομης καθόδου προκύπτει ένα άνω όριο της μείωσης της ενεργειακής νόρμας του διανύσματος λάθους κατά την k -οστή επανάληψη ως προς την αντίστοιχη νόρμα της αρχικής επανάληψης

$$\|\{e^{(k)}\}\|_K \leq \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^k \|\{e^{(0)}\}\|_K \quad (54)$$

Βεβαίως σε πολλές περιπτώσεις η μείωση της ενεργειακής νόρμας θα είναι μεγαλύτερη από αυτή που προκύπτει από την παραπάνω σχέση (όπως είπαμε είναι μόνο ένα άνω όριο), όμως είναι φανερό ότι σε γενικές γραμμές όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης κατάστασης τόσο χαμηλότερος θα είναι ο ρυθμός σύγκλισης. Όταν ο δείκτης παίρνει μεγάλες τιμές (που σε πολλά προβλήματα ανάλυσης κατασκευών μπορεί να είναι ακόμα και τάξεως εκατοντάδων χιλιάδων) το μητρώο χαρακτηρίζεται ως **κακής κατάστασης** (ill-conditioned) και τότε η μέθοδος απότομης καθόδου είναι ενδεχόμενο (λόγω και των αριθμητικών σφαλμάτων στρογγύλευσης κατά την υπολογιστική διαδικασία) ακόμα και να αποκλίνει.

2.2. Μέθοδος συζυγών διανυσματικών κλίσεων

Η μέθοδος **συζυγών διανυσματικών κλίσεων** (conjugate gradients method – CG) παρουσιάστηκε από τους Hestenes και Stiefel το 1952. Σ' αυτή επιλέγονται σαν διαδοχικά διανύσματα κατεύθυνσης ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\delta^{(1)}\}$, $\{\delta^{(2)}\}$ κλπ. τα οποία προσομοιάζουν, κατά το δυνατόν, τις διευθύνσεις μέγιστης κλίσης στα σημεία $\{u^{(0)}\}$, $\{u^{(1)}\}$ κλπ αντίστοιχα, αλλά που επιπλέον ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας ως προς το μητρώο $[K]$:

$$\{\delta^{(i)}\}^T [K] \{\delta^{(j)}\} = 0, \text{ για } i \neq j \quad (55)$$

Τα διανύσματα κατεύθυνσης της μεθόδου συζυγών διανυσματικών κλίσεων επιλέγονται με βάση τη σχέση

$$\{\delta^{(k)}\} = -\{\mathbf{g}^{(k)}\} + \beta_k \{\delta^{(k-1)}\} \quad (56)$$

που προκύπτει από τον γενικό τύπο (34) για $\alpha_k = 1$, $\{K_k\} = [I]$, ενώ κάθε β_k επιλέγεται ανά επανάληψη έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ορθογωνικότητας (55). Θεωρώντας ότι ισχύει η παραπάνω συνθήκη μπορεί να αποδειχθεί ότι επίσης ισχύει

$$\{\mathbf{g}^{(k-1)}\}^T \{\delta^{(i)}\} = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \quad (57)$$

δηλαδή ότι το διάνυσμα κλίσης είναι ορθογωνικό με όλα τα προηγούμενα διανύσματα κατεύθυνσης. Η απόδειξη έχει ως εξής:

Με πολλαπλασιαστική εφαρμογή της σχέσης (33) η προσεγγιστική λύση στην $k+1$ επανάληψη μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\{\mathbf{u}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{u}^{(k)}\} - \sum_{j=1}^k \tau_j \{\delta^{(j)}\}, \quad \forall i < k \quad (58)$$

ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα των υπολειμματικών δυνάμεων προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με το $[K]$ και αφαιρέσουμε το $\{\mathbf{f}\}$ και από τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης

$$\{\mathbf{g}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{g}^{(k)}\} - \sum_{j=1}^k \tau_j [K] \{\delta^{(j)}\}, \quad \forall i < k \quad (59)$$

Άρα έχουμε

$$\{\delta^{(i)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k+1)}\} = \{\delta^{(i)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k)}\} + \sum_{j=1}^k \tau_j \{\delta^{(i)}\}^T [K] \{\delta^{(j)}\}, \quad \forall i < k \quad (60)$$

Λόγω της υπόθεσης ότι ικανοποιείται η σχέση (55), ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (60) μηδενίζεται και λόγω της (42) μηδενίζεται και ο πρώτος όρος, άρα η (57) αποδείχθηκε.

Αν εκφράσουμε το $\{\delta^{(i)}\}$ στη μορφή της σχέσης (56) η (57) γίνεται

$$-\{\mathbf{g}^{(k-1)}\}^T \{\mathbf{g}^{(i)}\} + \beta_i \{\mathbf{g}^{(k-1)}\}^T \{\delta^{(i-1)}\} = 0, \quad \forall i \leq k \quad (61)$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται λόγω της ίδιας της σχέσης (57) και άρα

$$\left\{ \underline{g}^{(k+1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(i)} \right\} = 0, \quad \forall i \leq k \quad (62)$$

Του σημαίνει ότι στη μέθοδο συζυγών διανυσματικών κλίσεων κάθε διάνυσμα κλίσης είναι ορθογωνικό όχι μόνο ως προς τα προηγούμενα διανύσματα κατεύθυνσης αλλά και ως προς τα προηγούμενα διανύσματα κλίσης. Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη συνθήκη "συζυγών διανυσματικών κλίσεων" από όπου προέρχεται και η ονομασία της μεθόδου.

Απομένει ακόμα να προσδιοριστεί η παράμετρος β_k ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ορθογωνικότητας (55). Αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (56) από δεξιά με $[K] \left\{ \delta^{(k-1)} \right\}$ προκύπτει η παρακάτω σχέση για το β_k ώστε να ισχύει η (55) για $i = k$ και $j = k-1$.

$$\beta_k = \frac{\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}^T [K] \left\{ \delta^{(k-1)} \right\}}{\left\{ \delta^{(k-1)} \right\}^T [K] \left\{ \delta^{(k-1)} \right\}} \quad (63)$$

Από την (44) μπορούμε να πάρουμε

$$[K] \left\{ \delta^{(k-1)} \right\} = \frac{1}{\eta_{k-1}} \left(\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\} - \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} \right) \quad (64)$$

και αντικαθιστώντας στην (63)

$$\beta_k = \frac{\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}^T \left(\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\} - \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} \right)}{\left\{ \delta^{(k-1)} \right\}^T \left(\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\} - \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} \right)} \quad (65)$$

Όμως, λαμβάνοντας υπόψη τις (42) και (62) έχουμε

$$\beta_k = \frac{\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}}{-\left\{ \delta^{(k-1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\}} \quad (66)$$

Εκφράζοντας το $\left\{ \delta^{(k-1)} \right\}$ στη γενική μορφή των διανυσμάτων κατεύθυνσης της μεθόδου σύμφωνα με τη σχέση (56), προκύπτει

$$-\left\{ \delta^{(k-1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} = \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} - \beta_k \left\{ \delta^{(k-1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\} \quad (67)$$

Λόγω της (42), ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται και προκύπτει άλλη μία έκφραση του β_k

$$\beta_k = \frac{\left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k)} \right\}}{\left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\}^T \left\{ \underline{g}^{(k-1)} \right\}} \quad (68)$$

Η παραπάνω τιμή του β_k προέκυψε από την απαίτηση να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας για δύο διαδοχικά διανύσματα κατεύθυνσης

$$\{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} = 0 \quad (69)$$

Όμως, επαγωγικά μπορεί να αποδειχθεί η γενική ισχύς της συνθήκης ορθογωνικότητας (55). Έστω ότι το β_k επιλέγεται από τη σχέση (68) ώστε να ισχύει η (69). Τότε

$$\begin{aligned} \{\delta^{(k+1)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} &= \left(-\{\mathbf{g}^{(k+1)}\}^T + \beta_{k+1} \{\delta^{(k)}\}^T \right) [K] \{\delta^{(k-1)}\} \\ &= -\{\mathbf{g}^{(k+1)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} + \beta_{k+1} \{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} \end{aligned} \quad (70)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης είναι μηδέν, ενώ αν αντικαταστήσουμε το $[K] \{\delta^{(k-1)}\}$ από την (64) και λάβουμε υπόψη την (62) προκύπτει ότι

$$\{\delta^{(k+1)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} = \frac{1}{\eta_{k-1}} \left(\{\mathbf{g}^{(k+1)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k-1)}\} - \{\mathbf{g}^{(k+1)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k)}\} \right) = 0 \quad (71)$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία αποδεικνύεται ότι, αν ισχύει η (69), ισχύει

$$\{\delta^{(j)}\}^T [K] \{\delta^{(k-1)}\} = 0, \quad \forall j > k-1 \quad (72)$$

Όμως, η παραπάνω απόδειξη μπορεί να επαναληφθεί για οποιοδήποτε $\{\delta^{(1)}\}$ αντί του $\{\delta^{(k-1)}\}$ και επομένως αν κάθε β_k λαμβάνεται από τη σχέση (68) η συνθήκη ορθογωνικότητας (55) ισχύει.

Έτσι, η μέθοδος συζυγών διανυσματικών κλίσεων περιγράφεται με τον παρακάτω αλγόριθμο:

Αρχικές τιμές:

$$\{\delta^{(0)}\} = -\{\mathbf{g}^{(0)}\} = \{\mathbf{f}\} - [K] \{\mathbf{u}^{(0)}\} \quad (73.a)$$

Για $k=0,1,\dots$ μέχρι τη σύγκλιση:

$$\eta_k = \frac{\{\mathbf{g}^{(k)}\}^T \{\mathbf{g}^{(k)}\}}{\{\delta^{(k)}\}^T [K] \{\delta^{(k)}\}} \quad (\text{λόγω των (42), (56), (57)}) \quad (73.β)$$

$$\{\mathbf{u}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{u}^{(k)}\} + \eta_k \{\delta^{(k)}\} \quad (73.γ)$$

$$\{\mathbf{g}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{g}^{(k)}\} + \eta_k [K] \{\delta^{(k)}\} \quad (73.δ)$$

Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί αφού για κάθε συμμετρικό, θετικά ορισμένο μητρώο $[K_a]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα μητρώο $[E]$ για το οποίο ισχύει: $[E][E]^T = [K_a]$. (Ένα τέτοιο μητρώο προφανώς προκύπτει από την παραγοντοποίηση Cholesky). Τα μητρώα $[K_a]^{-1}[K]$ και $[E]^{-1}[K][E]^T$ αποδεικνύεται ότι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και επομένως μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύστημα (1) στη μορφή

$$[\hat{K}]\{\hat{u}\} = \{\hat{f}\} \quad (76)$$

όπου

$$[\hat{K}] = [E]^{-1}[K][E]^T \quad (77.a)$$

$$\{\hat{u}\} = [E]^T \{u\} \quad (77.β)$$

$$\{\hat{f}\} = [E]^{-1} \{f\} \quad (77.γ)$$

Επιλύοντας το σύστημα (76) ως προς $\{\hat{u}\}$ μπορεί να προκύψει στη συνέχεια το $\{u\}$ από την (77.β). Το $[\hat{K}]$ είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο και επομένως το (76) μπορεί να λυθεί π.χ. με κάποια από τις μεθόδους διανυσματικής κλίσης.

Το μειονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι απαιτείται ο προσδιορισμός του $[E]$ επιπλέον του $[K_a]$. Όμως, αν εφαρμόσουμε τους αλγόριθμους (51) ή (73) (της μεθόδου απότομης καθόδου ή συζυγών διανυσματικών κλίσεων αντίστοιχα) για την επίλυση του συστήματος (76) και λάβουμε υπόψη μας ότι $[E]^{-T}[E]^{-1} = [K_a]^{-1}$ προκύπτουν αλγόριθμοι για την προσταθεροποιημένη επίλυση του αρχικού συστήματος (1) όπου απαιτείται μόνο το $[K_a]^{-1}$. Έτσι, ο αλγόριθμος της **προσταθεροποιημένης μεθόδου συζυγών διανυσματικών κλίσεων** για την επίλυση του (1) με μητρώο προσταθεροποίησης το $[K_a]$ είναι ο παρακάτω:

Αρχικές τιμές:

$$\{\mathbf{g}^{(0)}\} = [K]\{\mathbf{u}^{(0)}\} - \{f\} \quad (78.a)$$

$$\{\mathbf{\delta}^{(0)}\} = -[K_a]^{-1} \{\mathbf{g}^{(0)}\} \quad (78.β)$$

Για $k=0, 1, \dots$ μέχρι τη σύγκλιση:

$$\eta_k = \frac{\{\mathbf{g}^{(k)}\}^T [K_a]^{-1} \{\mathbf{g}^{(k)}\}}{\{\mathbf{\delta}^{(k)}\}^T [K] \{\mathbf{\delta}^{(k)}\}} \quad (78.γ)$$

$$\{\mathbf{u}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{u}^{(k)}\} + \eta_k \{\mathbf{\delta}^{(k)}\} \quad (78.δ)$$

$$\{g^{(k+1)}\} = \{g^{(k)}\} + \eta_k [K] \{\delta^{(k)}\} \quad (78.ε)$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\{g^{(k+1)}\}^T [K_n]^{-1} \{g^{(k+1)}\}}{\{g^{(k)}\}^T [K_n]^{-1} \{g^{(k)}\}} \quad (78.στ)$$

$$\{\delta^{(k+1)}\} = -[K_n]^{-1} \{g^{(k)}\} + \beta_{k+1} \{\delta^{(k)}\} \quad (78.ζ)$$

Αντίστοιχα προκύπτει και ο αλγόριθμος της προσαθεροποιημένης μεθόδου απότομης καβόδου.

Η αποπλυσματικότητα του προσαθεροποιητή $[K_n]$ εξαρτάται από τον δείκτη κατάστασης του μητρώου $[K_n]^{-1}[K]$. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί ένας προσαθεροποιητής ο οποίος να προσεγγίζει αρκετά το $[K]$ ώστε να βελτιώνει τη σύγκλιση τόσο, ώστε να είναι αρκετά μικρό το κόστος του υπολογισμού του γινομένου $[K_n]^{-1} \{g^{(k)}\}$ σε κάθε επανάληψη.

Στην απλούστερη μορφή προσαθεροποίησής που είναι γνωστή ως **διαγώνια ή Jacobi προσαθεροποίηση** χρησιμοποιείται σαν προσαθεροποιητής το διαγώνιο μητρώο με τους διαγώνιους όρους του $[K]$.

