

Ανάπτυξη Συστήματος Ελέγχου για Ενεργή
Μείωση Κραδασμών σε Πειραματική Διάταξη
Αξονικού Συστήματος

Ηφαιστίων Χριστόπουλος

Διπλωματική Εργασία



Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων: Καθηγητής Νικόλαος Κυρτάτος

Οκτώβριος 2009

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση αυτής της Διπλωματικής Εργασίας.

Κατ' αρχάς, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα, Καθηγητή Ν. Κυρτάτο, που, με αφορμή αυτήν την εργασία, μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με έναν τομέα με μεγάλο ενδιαφέρον, και μάλιστα να δω την εφαρμογή του σε πραγματικές συνθήκες πειράματος.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον Δρ. Ν. Αλεξανδράκη για την παραχώρηση της πειραματικής διάταξης, χώρων και εξοπλισμού του Εργαστηρίου, καθώς και για την βοήθεια και συνεργασία του, χωρίς τα οποία δε θα ήταν δυνατή η διεξαγωγή των δοκιμών.

Τέλος, ειδικές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον Δρ. Γ. Παπαλάμπρου, ο οποίος συνεργάστηκε άμεσα μαζί μου και μου παρείχε πολύτιμη βοήθεια, γνώσεις, ιδέες, καθώς και βιβλιογραφία, και με καθοδήγησε σε όλη τη διάρκεια του σχεδιασμού, διεξαγωγής, αποτίμησης και συγγραφής της εργασίας αυτής.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
1.1	Σκοπός	9
1.2	Επισκόπηση βιβλιογραφίας	10
1.3	Πειραματική διάταξη	10
1.3.1	Περιβάλλον Προγραμματισμού	15
1.3.2	Επενεργητής (Actuator)	15
1.3.3	Δυναμική του συστήματος	15
1.3.4	Επίδραση του επενεργητή	19
2	Έλεγχος με Χρήση Phase - Locked Loop (PLL)	21
2.1	Βασικές αρχές	21
2.2	Παρουσίαση των δομικών στοιχείων του PLL	23
2.2.1	Ανιχνευτής φάσης	23
2.2.2	Φίλτρο Βρόχου	26
2.2.3	Ταλαντωτής	27
2.3	Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς PLL - συναρτήσεις μεταφοράς	28
2.3.1	Περιγραφή στην κατάσταση κλειδώματος	28
2.3.2	Μεταβατική απόκριση στην κατάσταση κλειδώματος	31
2.3.3	Σφάλμα μόνιμης κατάστασης	35
2.3.4	Συμπεριφορά του βρόχου σε μη-κλειδωμένη κατάσταση	35
2.4	Πειραματική εφαρμογή - Αποτελέσματα	36
2.4.1	Σχεδιασμός του ελεγκτή	37
2.4.2	Αποτελέσματα	38
2.4.3	Συμπεράσματα	41

3	Αναγνώριση του Συστήματος	43
3.1	Εισαγωγή	43
3.2	Μεθοδολογία για την αναγνώριση του συστήματος	44
3.2.1	Θεωρία Πραγματοποίησης Συστημάτων	44
3.2.2	Ο Αλγόριθμος Πραγματοποίησης Ιδιοσυστήματος	45
3.2.3	Αναγνώριση Kalman με παρατηρητή κατάστασης	47
3.3	Εφαρμογή της μεθόδου - Πειραματικά αποτελέσματα	55
3.3.1	Σχεδιασμός πειράματος - Υπολογιστικά βήματα	55
3.3.2	Αποτελέσματα - Αξιολόγηση	56
4	Έλεγχος με Μοντέλο Πρόβλεψης	63
4.1	Εισαγωγή	63
4.1.1	Βασική αρχή λειτουργίας - Έννοια του ολισθαίνοντος ορίζοντα	63
4.1.2	Υπολογισμός Βέλτιστης εισόδου	66
4.2	Μορφοποίηση του προβλήματος	69
4.2.1	Συνάρτηση κόστους	69
4.2.2	Πρόβλεψη	69
4.3	Επίλυση του προβλήματος	74
4.3.1	Πλήρης μέτρηση κατάστασης	74
4.3.2	Ως πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων	76
4.3.3	Με παρατηρητή κατάστασης	77
4.4	Πειραματική εφαρμογή - Αποτελέσματα	78
4.4.1	Σχεδιασμός του ελεγκτή	79
4.4.2	Αποτελέσματα	81
4.4.3	Απόκριση συχνότητας	89
4.4.4	Συμπεράσματα	90
5	Σύγκριση Μεθόδων - Μελλοντική Εργασία	91
	Α΄ Πειραματικός Εξοπλισμός	93
	Β΄ Θεωρία Πινάκων - Χώρος Καταστάσεων - Συναρτήσεις Ευαισθησίας	95
B΄.1	Διάσπαση ιδιαζουσών τιμών (Singular Value Decomposition)	95

B'.2	Θετικά ορισμένοι πίνακες - τετραγωνικές μορφές	96
B'.3	Ελάχιστα τετράγωνα - Ψευδοαντίστροφος	96
B'.4	Χώρος Καταστάσεων	97
B'.5	Συναρτήσεις Ευαισθησίας	98
Γ'	Ψηφιακά Φίλτρα	101
Δ'	Προγράμματα MATLAB	105
Δ'.1	Πρόγραμμα MATLAB για Αναγνώριση του Συστήματος, με Χρήση Observer Kalman Identification και Eigensystem Realization Algorithm	105
Δ'.2	Πρόγραμμα MATLAB για Ρύθμιση Παραμέτρων PLL	111

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός

Στην εργασία αυτή μελετώνται μέθοδοι αυτομάτου ελέγχου με σκοπό ελάττωση του πλάτους κίνησης ελαστικά εδρασμένου ηλεκτροκινητήρα. Η κίνηση του ηλεκτροκινητήρα προκαλείται από την έκκεντρη μάζα του περιστρεφόμενου στροφείου. Η παραδοσιακή αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος είναι η ζυγοστάθμιση του στροφείου, προσαρτώντας μάζες σε δύο επιλεγμένα επίπεδα του άκαμπτου στροφείου. Στην παρούσα εργασία θα μειωθεί το πλάτος της κίνησης ασκώντας δύναμη στο σύστημα του στάτη μέσω ηλεκτρομαγνητικού πηνίου (voice coil), που θα διεγείρεται από ενισχυτή οδηγούμενο από έναν ελεγκτή.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν δύο τύποι ελεγκτών. Ο πρώτος ελεγκτής ήταν ένας Βρόχος Κλειδώματος Φάσης (Phase - Locked Loop), ο οποίος παρήγαγε περιοδικό σήμα, συγχρονισμένο σε φάση με την ταλάντωση του συστήματος. Πολλαπλασιάζοντας το σήμα αυτό με κατάλληλο αρνητικό κέρδος, ασκήθηκε δύναμη αντίθετη στη δύναμη - αίτιο της ταλάντωσης (counterforce).

Στη δεύτερη μέθοδο χρησιμοποιήθηκε έλεγχος με μοντέλο πρόβλεψης (Model Predictive Control). Ο ελεγκτής αυτός, βασιζόμενος στο απλουστευμένο μηχανικό ισοδύναμο του υπό έλεγχο συστήματος, επιδρούσε στην κίνηση του ηλεκτροκινητήρα. Με βάση την πρόβλεψη της κίνησης, υπολόγιζε μία ακολουθία τιμών του σήματος ελέγχου. Το πρώτο στοιχείο αυτής της ακολουθίας

εφαρμοζόταν στη διάταξη και ο κύκλος επαναλαμβανόταν σε κάθε περίοδο δειγματοληψίας.

1.2 Επισκόπηση βιβλιογραφίας

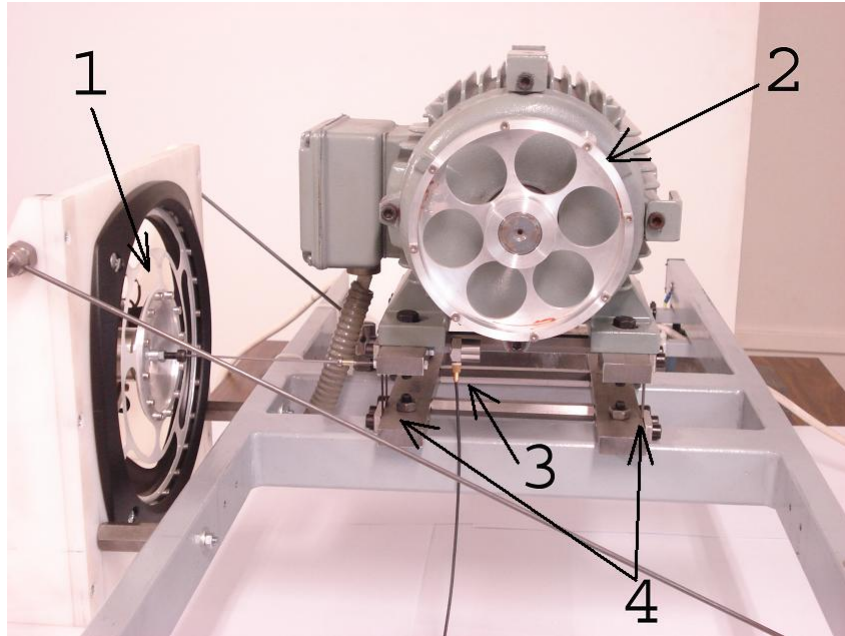
Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση ηλεκτρομαγνητικών επενεργητών, όπως αυτός που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία έχει μελετηθεί από τους M. Bai και K. Ou (2003). Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η μοντελοποίηση, παραμετρική αναγνώριση και η διαδικασία σχεδιασμού ενός συστήματος ενεργητικής απόσβεσης με voice coil.

Από τον C. Olson (2002) έχει μελετηθεί η διαδικασία σχεδιασμού κι έχουν σχεδιαστεί αλγόριθμοι και περιβάλλοντα εξομοίωσης για Active Noise and Vibration Control για την αυτοκινητοβιομηχανία, με σκοπό να ελαχιστοποιηθούν οι δυνάμεις που μεταφέρονται στο σώμα του οχήματος.

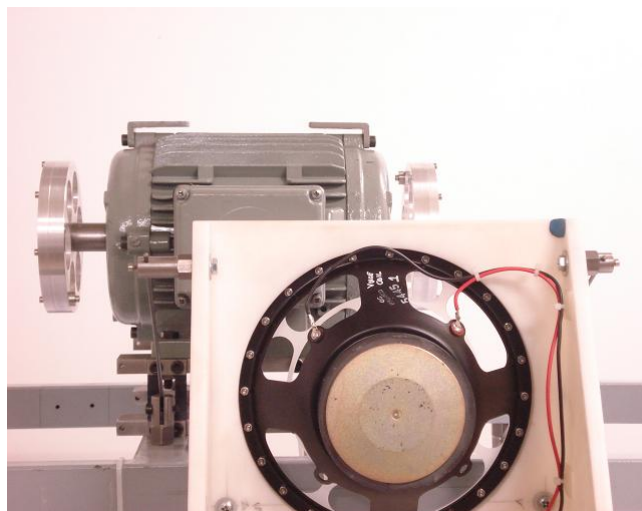
Αλγορίθμους αναγνώρισης διατάξεων που υπόκεινται σε ταλαντώσεις έχει μελετήσει ο J. N. Wang, στο βιβλίο. Εκεί παρουσιάζεται και ο αλγόριθμος ERA που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή.

1.3 Πειραματική διάταξη

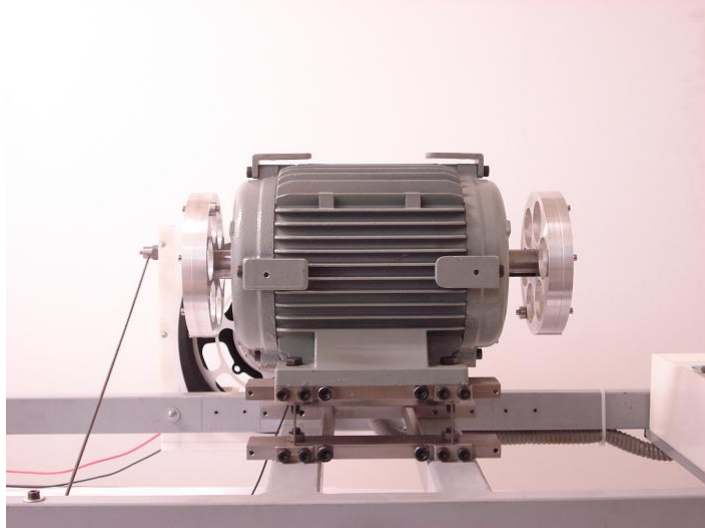
Η πειραματική διάταξη αποτελείται από έναν ηλεκτροκινητήρα με ένα στροφείο, στα άκρα του οποίου βρίσκονται δύο δίσκοι, πάνω στους οποίους έχουν τοποθετηθεί αντιδιαμετρικά έκκεντρες μάζες 5 gr. Το σύστημα είναι εδρασμένο σε ελαστικά ελάσματα, ώστε να μπορεί να κινείται ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο. Με τη βοήθεια ενός επιταχυνσιομέτρου, προσαρμοσμένου πάνω στη διάταξη, μετράται η μετατόπιση του φορείου στο επίπεδο αυτό.



Σχήμα 1.1: Πρόοψη της πειραματικής διάταξης, όπου διακρίνονται τα επιμέρους στοιχεία



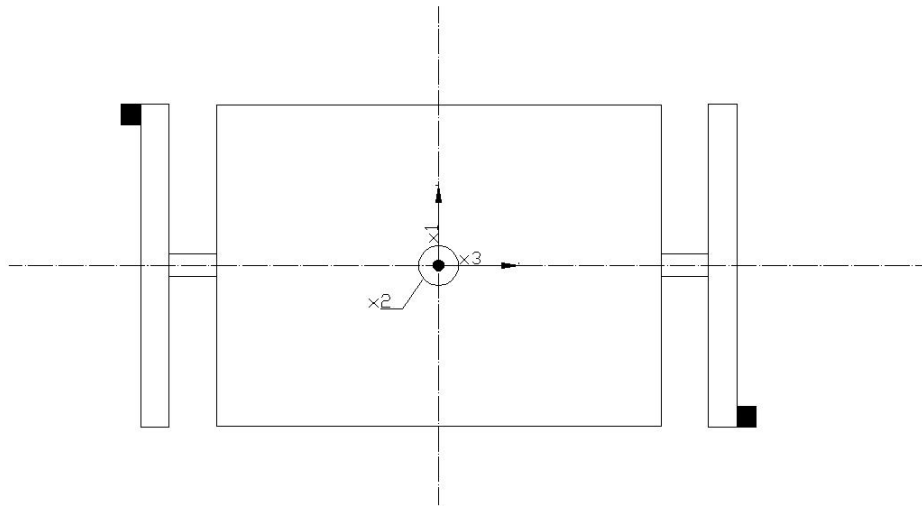
Σχήμα 1.2: Αριστερή πλάγια όψη της εγκατάστασης



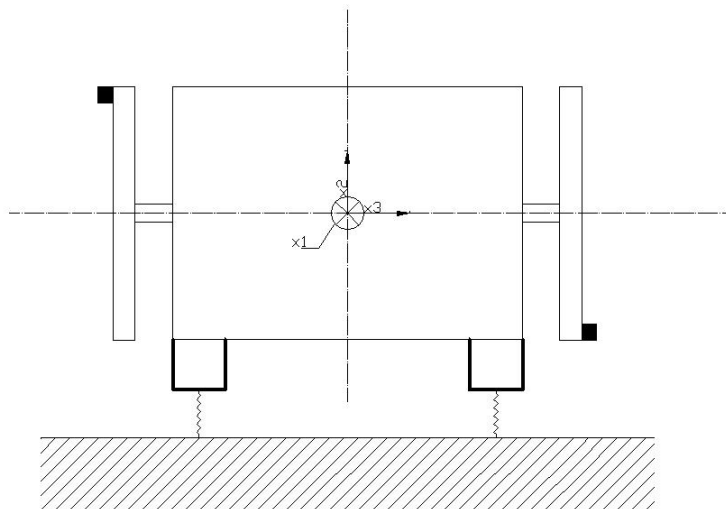
Σχήμα 1.3: Δεξιά πλάγια όψη της εγκατάστασης



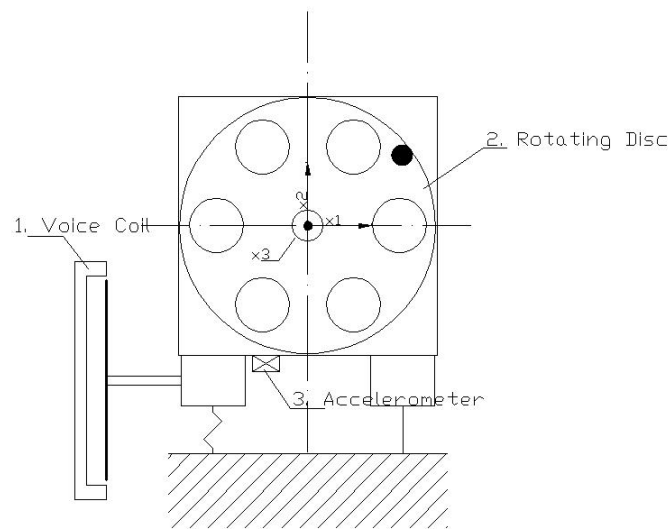
Σχήμα 1.4: Κάτοψη της εγκατάστασης με τον επενεργητή



Σχήμα 1.5: Κάτοψη του ηλεκτροκινητήρα



Σχήμα 1.6: Πλάγια όψη του ηλεκτροκινητήρα



Σχήμα 1.7: Πρόοψη του ηλεκτροκινητήρα, εδρασμένου σε εύκαμπτα ελάσματα

Στα σχήματα 1.1 έως 1.7 φαίνεται η διάταξη, στην οποία διακρίνονται:

1. Ο επενεργητής (voice coil)
2. Οι περιστρεφόμενοι δίσκοι με τις έκκεντρες μάζες
3. Το επιταχυνσιόμετρο
4. Τα ελατήρια της έδρασης

Οι μετρήσεις της επιτάχυνσης με το επιταχυνσιόμετρο διεξάγονται από μία κάρτα συλλογής δεδομένων (Data Acquisition Card), αποθηκεύονται στον υπολογιστή και χρησιμοποιούνται από τον ελεγκτή. Μετρήσεις έχουν προηγουμένως χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση του συστήματος.

1.3.1 Περιβάλλον Προγραμματισμού

Για την επικοινωνία του υπολογιστή με την πειραματική διάταξη χρησιμοποιήθηκε περιβάλλον MATLAB και ειδικότερα η εφαρμογή xPC Target. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε δύο υπολογιστές:

- Ο κύριος υπολογιστής (Host PC) εκκινείται με το κανονικό του λειτουργικό σύστημα και περιέχει το MATLAB, στο οποίο υλοποιούνται οι εκάστοτε εφαρμογές.
- Ο δευτερεύων υπολογιστής - στόχος (Target PC) χρησιμοποιεί ένα λειτουργικό σύστημα πραγματικού χρόνου, βασισμένο στο περιβάλλον MATLAB. Αυτός ο υπολογιστής συνδέεται με την εγκατάσταση, μέσω της κάρτας συλλογής δεδομένων.

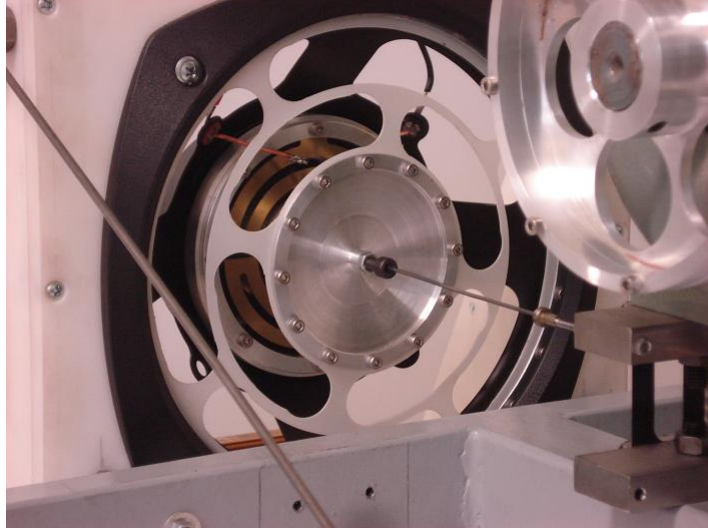
Η εφαρμογή σε Simulink μεταφράζεται μέσω του MATLAB σε γλώσσα C και μέσω τοπικού δικτύου μεταφέρεται στον δεύτερο υπολογιστή. Με αυτό τον τρόπο, κάθε φορά, ο υπολογιστής αυτός έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει μόνο τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

1.3.2 Επενεργητής (Actuator)

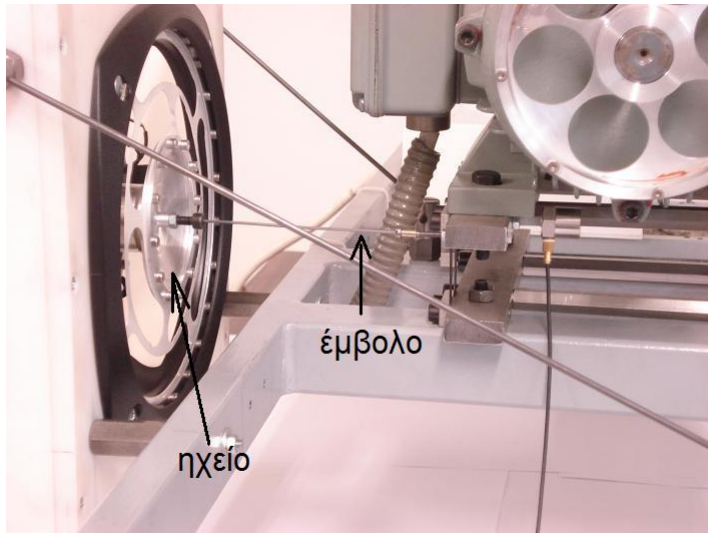
Ο επενεργητής της διάταξης είναι ένας ηλεκτρομαγνητικός επενεργητής (voice coil). Ο ελεγκτής υπολογίζει ένα σήμα - εντολή και μέσω της κάρτας συλλογής δεδομένων το στέλνει στον ενισχυτή, ο οποίος με τη σειρά του οδηγεί το πηνίο του ηχείου, το οποίο συνδέεται με τη διάταξη μέσω ενός εμβόλου (σχήματα 1.8, 1.9).

1.3.3 Δυναμική του συστήματος

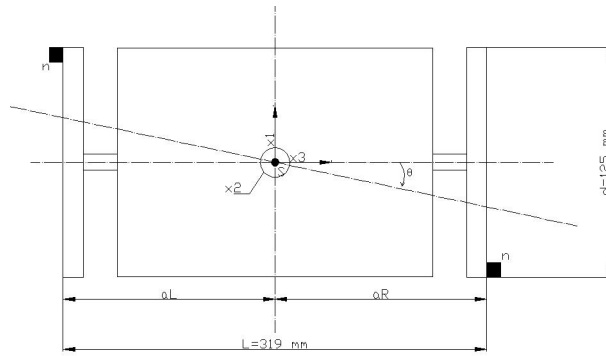
Το αίτιο ενίσχυσης των κραδασμών που παρατηρούνται στην πειραματική διάταξη είναι οι έκκεντρες μάζες των 5 gr που έχουν τοποθετηθεί στους δίσκους του στροφείου, οι οποίες σαν αποτέλεσμα έχουν την απόκλιση του άξονα περιστροφής από τον κύριο άξονα αδρανείας του σώματος [1][2]. Στο σχήμα 1.10 βλέπουμε τις έκκεντρες μάζες n τοποθετημένες σε απόσταση $a = \frac{d}{2} = 62.5mm$ από τον δεσμευμένο άξονα περιστροφής του στροφείου μάζας m . Στο σημείο S βρίσκεται το κέντρο βάρους του σώματος. Η τοποθέτηση των μαζών σε αυτά τα σημεία, στρέφει τον άξονα περιστροφής κατά γωνία θ .



Σχήμα 1.8: Ο επενεργητής



Σχήμα 1.9: Σύνδεση επενεργητή με τη διάταξη



Σχήμα 1.10: Στροφέιο μάζας m με έκκεντρες μάζες n

Οι κύριες ροπές αδρανείας του στροφείου είναι $I_1 = I_2 = 2.17 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_3 = 0.539 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, το μήκος $L = 319 \text{ mm}$. Το στροφέιο έχει μάζα $m = 5.57 \text{ kg}$.

Οι νέες ροπές αδρανείας γύρω από τους άξονες x_1 , x_2 , x_3 μετά από πρόσθεση των έκκεντρων μαζών (σχήμα 1.10) είναι

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= I_1 + 2na^2 \\
 I'_2 &= I_2 + 2n\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 I'_3 &= I_3 + 2na^2 \\
 I'_{23} &= -2na\frac{L}{2}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Είναι

$$\tan 2\theta = \frac{2I'_{23}}{I'_3 - I'_2} \tag{1.2}$$

Ισχύει όμως ότι $\tan 2\theta \approx 2\theta$, και συνεπώς θ γίνεται

$$\theta = \frac{I'_{23}}{I'_3 - I'_2} \tag{1.3}$$

όπου

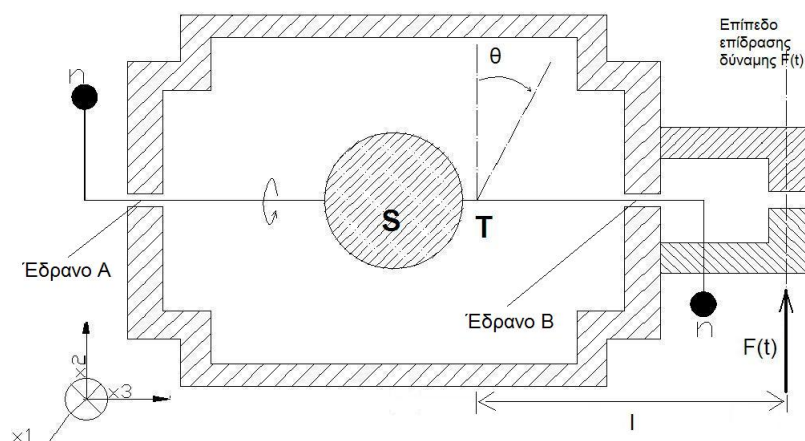
$$\begin{aligned}
 I'_3 - I'_2 &= I_3 - I_2 + 2na^2 - 2n\frac{L^2}{4} \\
 &= I_3 - I_2 + 2n\left(a^2 - \frac{L^2}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Η ποσότητα $2n\left(a^2 - \frac{L^2}{4}\right)$ είναι τάξεις μεγέθους μικρότερη από τη διαφορά

των I_2, I_3 . Συνεπώς, η γωνία θ είναι

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2na\frac{L}{2}}{I_2 - I_3} & (1.5) \\ &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 0.0625 \cdot 0.1595}{2.17 - 0.539} \\ &= 6.11 \cdot 10^{-2} \text{rad} = 3.502^\circ \end{aligned}$$

Η εξίσωση 1.5 περιγράφει τη στροφή του κύριου άξονα αδρανείας του στροφείου μετά από πρόσθεση έκκεντρων μαζών n σε απόσταση a από το κέντρο περιστροφής του στροφείου, T .



Σχήμα 1.11: Συνολικό σύστημα στάτη και στροφείου με επιβαλλόμενη δύναμη ελέγχου $F(t)$

Στο σχήμα 1.11 βλέπουμε ένα απλουστευμένο σχήμα της πειραματικής διάταξης, με τις έκκεντρες μάζες n τοποθετημένες αντιδιαμετρικά στο στροφείο, στο οποίο ασκείται η δύναμη F από τον επενεργητή. Το στροφείο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x_3 .

Η δύναμη που καλείται ο ελεγκτής να ασκήσει είναι ανάλογη με την επιτάχυνση της γωνίας περιστροφής θ , η οποία μετριέται με το επιταχυνσιόμετρο, και αντιστρόφως ανάλογη με την απόσταση του κέντρου περιστροφής από το

επίπεδο δράσης της δύναμης F .

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta} &= F \cdot l \Rightarrow \\ F &= \frac{I_1 \ddot{\theta}}{l} \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.3.4 Επίδραση του επενεργητή

Στο στρεφόμενο άκαμπτο στροφέιο επιδρά, μέσω των εδράνων A , B του ηλεκτροκινητήρα, η δύναμη $F(t)$, που ασκείται στο σώμα του από τον ηλεκτρομαγνητικό επενεργητή. Η περιοδική δύναμη $F(t)$ μεταβάλλει την απόσταση του κέντρου περιστροφής του φορτίου έδρασης του ηλεκτροκινητήρα, T , ανάλογα με το πλάτος της, τη συχνότητά της και τη διαφορά φάσης της σχετικά με την ταλάντωση της περιστροφικής κίνησης του φορείου γύρω από τον άξονα x_1 . Όταν η απόσταση l είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα κινείται σε δύο βαθμούς ελευθερίας, έναν παλινδρομικό στην κατεύθυνση x_2 και έναν περιστροφικό στην κατεύθυνση x_1 . Όταν η απόσταση l μηδενιστεί και το σημείο περιστροφής T συμπίπτει με το επίπεδο επενέργειας της δύναμης $F(t)$ και ταυτόχρονα μηδενιστεί το πλάτος της κίνησής του στην κατεύθυνση x_2 , τότε το σύστημα κινείται σε έναν βαθμό ελευθερίας. Ο ηλεκτροκινητήρας κινείται τότε διεγερόμενος από το έκκεντρο στροφέιο και τη δύναμη $F(t)$ γύρω από τον άξονα x_1 με κέντρο περιστροφής το σημείο T , που συμπίπτει με το επίπεδο επίδρασης της δύναμης $F(t)$.

Κεφάλαιο 2

Έλεγχος με Χρήση Phase - Locked Loop (PLL)

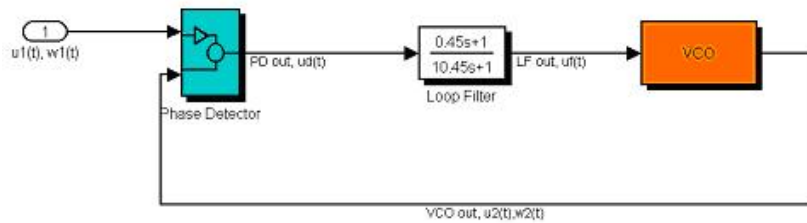
2.1 Βασικές αρχές

Ο Βρόχος Κλειδώματος Φάσης (Phase - Locked Loop ή PLL) [5],[6] είναι ένας βρόχος ελέγχου, ο οποίος παράγει, μέσω ενός ταλαντωτή, ένα σήμα το οποίο συγχρονίζεται, σε συχνότητα και φάση, με το σήμα εισόδου. Όταν ο συγχρονισμός έχει επιτευχθεί, στη λεγόμενη «κλειδωμένη» (locked) κατάσταση, το σφάλμα φάσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του ταλαντωτή είναι μηδενικό, ή παραμένει σταθερό. Ένας τέτοιος βρόχος αποτελείται από τρία βασικά στοιχεία:

- Τον ταλαντωτή (Voltage Controlled Oscillator - VCO)
- Τον ανιχνευτή φάσης (Phase Detector - PD)
- Το φίλτρο (Loop Filter - LF)

Το δομικό διάγραμμα του PLL φαίνεται στο σχήμα 2.1. Στον βρόχο του PLL εμφανίζονται τα εξής σήματα:

- Το σήμα εισόδου ή αναφοράς $u_1(t)$
- Την γωνιακή συχνότητα ω_1 του σήματος εισόδου
- Το σήμα στην έξοδο του VCO, $u_2(t)$



Σχήμα 2.1: Δομικό διάγραμμα PLL

- Την γωνιακή συχνότητα ω_2 του σήματος εξόδου
- Το σήμα στην έξοδο του PD, $u_d(t)$
- Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου, $u_f(t)$
- Το σφάλμα φάσης θ_e , που ορίζεται ως η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων $u_1(t)$ και $u_2(t)$

Στη συνέχεια, θα αναλυθεί η λειτουργία που επιτελεί καθένα από τα στοιχεία που απαρτίζουν το κύκλωμα.

Το VCO παράγει μια ημιτονοειδή ταλάντωση σε συχνότητα ω_2 , την οποία καθορίζει το σήμα εξόδου του φίλτρου. Η συχνότητα ω_2 είναι

$$\omega_2(t) = \omega_0 + K_0 u_f(t) \quad (2.1)$$

όπου ω_0 είναι η κεντρική συχνότητα του VCO και K_0 είναι το κέρδος του ταλαντωτή (VCO gain) σε $\text{rad s}^{-1}\text{V}^{-1}$.

Ο ανιχνευτής φάσης συγκρίνει τη φάση του σήματος εξόδου με τη φάση του σήματος εισόδου και παράγει ένα σήμα εξόδου $u_d(t)$, το οποίο είναι κατά προσέγγιση ανάλογο με το σφάλμα φάσης θ_e :

$$u_d(t) = K_d \theta_e \quad (2.2)$$

Εδώ, το K_d είναι το κέρδος του ανιχνευτή, σε μονάδες Volt/rad.

Συνήθως, η έξοδος του PD αποτελείται από μία DC και μία, ανεπιθύμητη συνήθως, AC συνιστώσα, η οποία εξαλείφεται από το Loop Filter.

Αναλυτικότερη παρουσίαση της λειτουργίας και μαθηματικής περιγραφής των τριών αυτών στοιχείων θα γίνει παρακάτω.

Μια γενική περιγραφή του τρόπου που δουλεύει ο βρόχος είναι η εξής: Υποθέτουμε αρχικά ότι το σήμα εισόδου $u_1(t)$ έχει συχνότητα ίση με την κεντρική συχνότητα ω_0 του VCO. Σε αυτή την περίπτωση, και αν το σφάλμα φάσης θ_e είναι μηδενικό, η έξοδος u_d του PD και κατά συνέπεια η έξοδος u_f του φίλτρου είναι επίσης μηδέν. Τότε το VCO λειτουργεί στην κεντρική του συχνότητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το θ_e είναι μη μηδενικό. Σε αυτή την περίπτωση, ο ανιχνευτής φάσης θα παράξει ένα επίσης μη μηδενικό σήμα u_d στην έξοδό του. Με κάποια χρονική υστέρηση, το φίλτρο θα δώσει και αυτό στην έξοδό του κάποιο πεπερασμένο σήμα u_f . Αυτό θα οδηγήσει το VCO να αλλάξει τη συχνότητα λειτουργίας του έως ότου το σφάλμα να εξαλειφθεί.

Αν η συχνότητα του σήματος εισόδου αλλάξει ξαφνικά κατά μία ποσότητα $\Delta\omega$, θα αρχίσει να δημιουργείται ένα σφάλμα θ_e . Αυτό θα οδηγήσει το PD να δώσει ένα σήμα στο LF, που και αυτό με τη σειρά του θα οδηγήσει το VCO να αλλάξει τη συχνότητα λειτουργίας του μέχρι να αποκτήσει ακριβώς τη συχνότητα της εισόδου, ενώ το τελικό σφάλμα φάσης μπορεί να είναι μηδενικό ή να έχει κάποια πεπερασμένη τιμή.

2.2 Παρουσίαση των δομικών στοιχείων του PLL

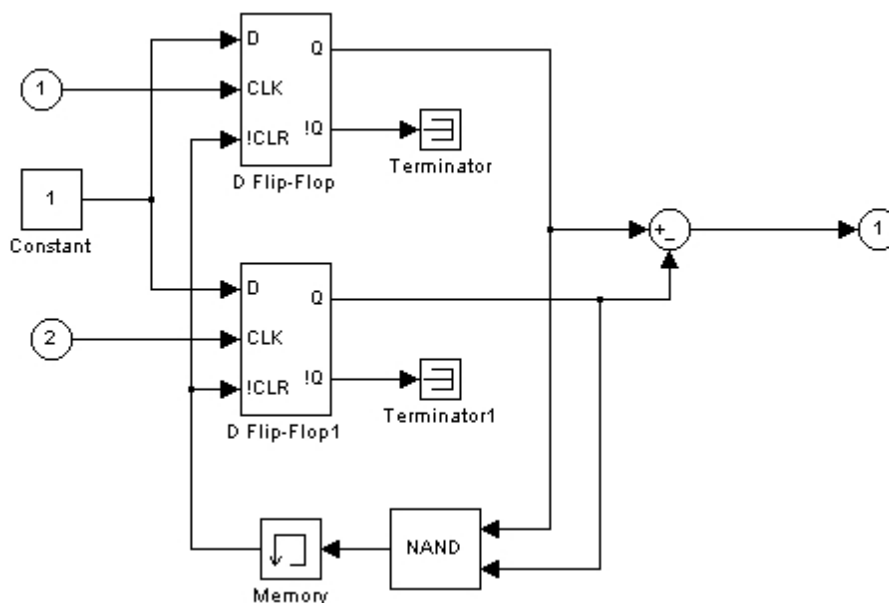
2.2.1 Ανιχνευτής φάσης

Ο ανιχνευτής φάσης είναι ένα κύκλωμα με την ικανότητα να παράγει ένα σήμα εξόδου ανάλογο με τη διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημάτων στην είσοδο του, u_1 και u_2 . Ο πιο απλός ανιχνευτής φάσης είναι ένας απλός πολλαπλασιαστής, ενώ με την πάροδο του χρόνου παρουσιάστηκαν και άλλοι τύποι, όπως η πύλη EXOR και το JK-flipflop. Αυτός όμως που δίνει καλύτερα αποτελέσματα στις περισσότερες περιπτώσεις, και θα χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία, είναι ο ανιχνευτής φάσης/συχνότητας - Phase/Frequency Detector (PFD).

Ο τύπος αυτός ανιχνευτή έχει μία βασική διαφορά από τους υπόλοιπους: το σήμα εξόδου του εξαρτάται όχι μόνο από το σφάλμα φάσης θ_e , αλλά και από το σφάλμα συχνότητας $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, όταν το PLL δεν έχει ακόμα «κλειδώσει». Αυτή η ικανότητα του PFD επιτρέπει στο PLL να «κλειδώσει» ακόμη και σε

περιπτώσεις όπου υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις συχνότητες των δύο σημάτων εισόδου.

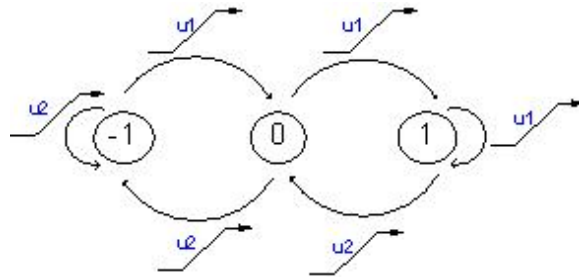
Η διάταξη του PFD, όπως υλοποιήθηκε στο Simulink, φαίνεται στο σχήμα 2.2. Το σήμα εξόδου ερμηνεύεται ως τάση (Voltage output PFD).



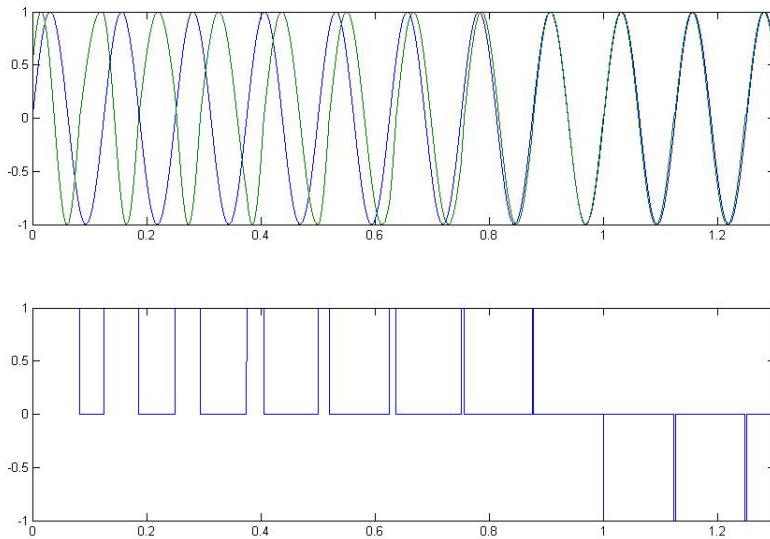
Σχήμα 2.2: Phase Frequency Detector

Το κύκλωμα PFD ανιχνεύει τις μεταβάσεις των σημάτων εισόδου από τα θετικά προς τα αρνητικά (zero crossing technique) και χρησιμοποιεί τρία λογικά επίπεδα, -1, 0 και 1. Όταν το σήμα u_1 περνάει από το μηδέν (με αυτή τη φορά), το κύκλωμα ανεβαίνει ένα λογικό επίπεδο. Όταν περνάει το u_2 , κατεβαίνει ένα λογικό επίπεδο. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο διάγραμμα καταστάσεων του σχήματος 2.3.

Στο σχήμα 2.4 επιδεικνύεται η λειτουργία του PFD. Έχουμε μία ημιτονοειδή είσοδο με συχνότητα 8 Hz, ενώ ο ταλαντωτής του PLL έχει κεντρική συχνότητα 6 Hz και επιπρόσθετα έχει μια αρχική φάση $-\pi/3$ rad. Βλέπουμε ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα τα δύο σήματα έχουν συγχρονιστεί. Ακόμη, βλέπουμε το σήμα που παράγεται από τον ανιχνευτή φάσης, το οποίο έχει τη μορφή ορθογωνικών παλμών. Όταν τα σήματα αρχίσουν να συγχρονίζονται, το πλάτος των παλμών μειώνεται.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα καταστάσεων PFD



Σχήμα 2.4: Ανίχνευση της διαφοράς φάσης από το PFD

Παρατηρούμε ότι όσο το σήμα u_1 προηγείται, η έξοδος του PFD κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1. Στη συνέχεια, το σήμα u_2 αυξάνει τη συχνότητά του και αρχίζει να προηγείται, ελάχιστα, του u_1 . Τότε, το σήμα στην έξοδο του PFD κυμαίνεται μεταξύ -1 και 0.

Το PFD εκλαμβάνει μια τιμή του $\theta_e = 2\pi$ (ή αντίστοιχα -2π) ως μηδενική. Συνεπώς, η χαρακτηριστική του είναι περιοδική με περίοδο 2π . Όταν το σφάλμα φάσης έχει τιμή εντός του διαστήματος $-2\pi < \theta_e < 2\pi$, το μέσο σήμα u_d είναι

$$\bar{u}_d = K_d \theta_e \quad (2.3)$$

όπου K_d είναι το κέρδος του ανιχνευτή. Καθώς ο ανιχνευτής υλοποιείται στο Simulink, το κέρδος δεν εξαρτάται από την τάση των λογικών επιπέδων και θα δοθεί εξωτερικά.

2.2.2 Φίλτρο Βρόχου

Υπάρχουν τρεις τύποι φίλτρων βρόχου (Loop Filters) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα κύκλωμα PLL: Passive Lead - Lag filters, Active Lead - Lag filters, Active PI filters. Στην παρούσα εφαρμογή, αλλά και γενικότερα, όταν ο ανιχνευτής φάσης είναι τύπου PFD, χρησιμοποιείται Passive Lead - Lag filter.

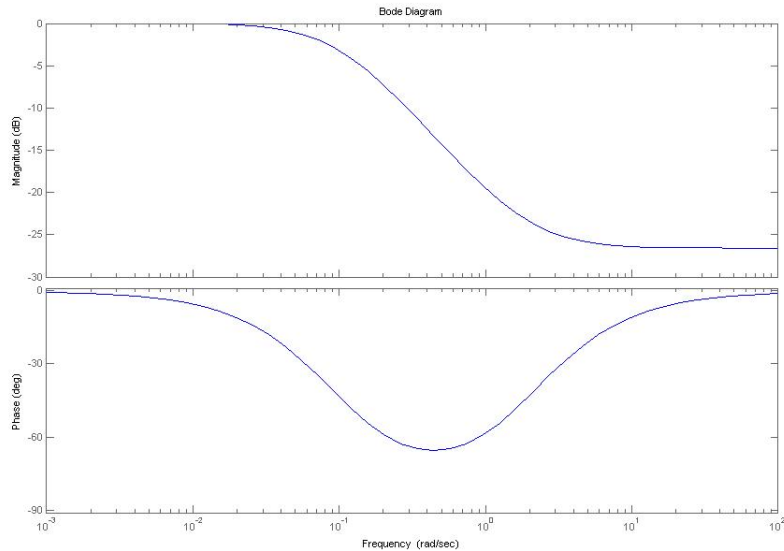
Η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου φίλτρου πρώτης τάξης είναι

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)}, \quad \tau_1, \tau_2 > 0 \quad (2.4)$$

όπου s είναι ο τελεστής Laplace και τ_1, τ_2 χρονικές σταθερές.

Ένα τέτοιο φίλτρο ονομάζεται Lead - Lag, γιατί συνδυάζει μια δράση προπορευόμενης φάσης (phase lead), που προέρχεται από τον αριθμητή, και μια δράση υπολοιπόμενης φάσης (phase lag), που προέρχεται από τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Το σχήμα 2.5 δείχνει την απόκριση ενός τέτοιου φίλτρου.

Παρατηρούμε ότι το Loop Filter έχει χαρακτηριστική φίλτρου χαμηλής διέλευσης (lowpass filter).



Σχήμα 2.5: Απόκριση Lead Lag φίλτρου πρώτης τάξης

2.2.3 Ταλαντωτής

Ο ταλαντωτής του κυκλώματος (Voltage Controlled Oscillator - VCO) παράγει ένα σήμα, η απόκλιση του οποίου από την κεντρική του συχνότητα είναι ανάλογη της τιμής του σήματος ελέγχου $u_f(t)$:

$$\omega_2(t) = \omega_0 + K_0 u_f(t) \quad (2.5)$$

Η εξίσωση (2.5) αφορά μόνο τη συχνότητα της εξόδου. Το σήμα στην έξοδο του VCO είναι

$$u_2(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + 2\pi K_0 \int_0^t u_f(\tau) d\tau + \varphi) \quad (2.6)$$

Σε αυτή τη σχέση f_0 (ή ω_0) είναι η κεντρική συχνότητα του ταλαντωτή, K_0 το κέρδος (που καθορίζει πόσο θα αποκλίνει από την κεντρική συχνότητα), φ είναι η αρχική φάση, ενώ A_0 είναι το πλάτος της εξόδου, παράμετρος η οποία στην παρούσα εργασία δεν έχει ενδιαφέρον και θεωρείται ίση με 1, καθώς το κύκλωμα θα χρησιμοποιηθεί μόνο με σκοπό να συγχρονίσει το σήμα εξόδου του με την ταλάντωση του συστήματος.

2.3 Ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς PLL - συναρτήσεις μεταφοράς

2.3.1 Περιγραφή στην κατάσταση κλειδώματος

Έχοντας περιγράψει τη δομή ενός συστήματος PLL, θα πρέπει στη συνέχεια να αναλυθεί η δυναμική συμπεριφορά του

Αν υποτεθεί ότι ο βρόχος του PLL έχει κλειδώσει και θα μείνει κλειδωμένος για κάποιο χρονικό διάστημα, μπορούμε να αναπτύξουμε ένα γραμμικό μοντέλο για το σύστημα. Στο μοντέλο που θα αναπτυχθεί, θα χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις μεταφοράς φάσης, της μορφής

$$H(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_1(s)} \quad (2.7)$$

όπου $\Theta_1(s)$ και $\Theta_2(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων φάσης $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$ αντίστοιχα. Τα σήματα φάσης προκύπτουν από τα αντίστοιχα σήματα (τάσεις) $u_1(t)$ και $u_2(t)$, και μεταφέρουν πληροφορία που αφορά μόνο στις φάσεις $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$ των σημάτων αυτών, και όχι στο πλάτος ή στη συχνότητά τους.

Όπως φαίνεται και στην παράγραφο 2.2.1, στην κλειδωμένη κατάσταση, το σήμα u_d στην έξοδο του ανιχνευτή φάσης μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$u_d \approx K_d \theta_e \quad (2.8)$$

Κατά συνέπεια, ο ανιχνευτής μπορεί να περιγραφεί από μία συνάρτηση μεταφοράς μηδενικής τάξης (ένα απλό κέρδος):

$$\frac{U_d(s)}{\Theta_e(s)} = K_d \quad (2.9)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του Loop Filter πρώτης τάξης έχει ήδη αναφερθεί (σχέση (2.4)).

Όσον αφορά στο VCO, η κυκλική συχνότητα της εξόδου του είναι

$$\omega_2(t) = \omega_0 + \Delta\omega_2(t) = \omega_0 + K_0 u_f(t) \quad (2.10)$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται σε συχνότητα. Ολοκληρώνοντας θα προκύψει η αντίστοιχη έκφραση για τη φάση του VCO.

$$\theta_2(t) = \int \Delta\omega_2(t)dt = K_0 \int u_f(t)dt \quad (2.11)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace λαμβάνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ταλαντωτή:

$$\frac{\Theta_2(s)}{U_f(s)} = \frac{K_0}{s} \quad (2.12)$$

Ο ταλαντωτής αναπαριστάται από έναν ολοκληρωτή.

Από το δομικό διάγραμμα του βρόχου (σχήμα 2.1) υπολογίζεται, σύμφωνα με τους κανόνες της άλγεβρας διαγραμμάτων, η συνάρτηση μεταφοράς φάσης κλειστού βρόχου

$$H(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{K_0 K_d F(s)}{s + K_0 K_d F(s)} \quad (2.13)$$

Εισάγοντας την εξίσωση του φίλτρου (2.4) στη συνάρτηση μεταφοράς (2.13), προκύπτει

$$H(s) = \frac{\frac{K_0(1+s\tau_2)}{\tau_1+\tau_2}}{s^2 + s \frac{1+K_0K_d\tau_2}{\tau_1+\tau_2} + \frac{K_0K_d}{\tau_1+\tau_2}} \quad (2.14)$$

Όπως συνηθίζεται, γράφουμε τον παρονομαστή στην κανονικοποιημένη του μορφή $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, όπου ω_n είναι η φυσική συχνότητα και ζ ο συντελεστής απόσβεσης.

Αυτό επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_0K_d}{\tau_1+\tau_2}}, \quad \zeta = \frac{\omega_n}{2} \left(\tau_2 + \frac{1}{K_0K_d} \right) \quad (2.15)$$

Με αυτή την αντικατάσταση, η συνάρτηση μεταφοράς (2.14) παίρνει τη μορφή

$$H(s) = \frac{s\omega_n \left(2\zeta - \frac{\omega_n}{K_0K_d} \right) + \omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (2.16)$$

Στην παραπάνω εξίσωση εμφανίζονται οι παράμετροι ω_n , ζ , καθώς και το γινόμενο K_0K_d , το οποίο ονομάζεται κέρδος βρόχου (*loop gain*) και οι διαστάσεις του είναι διαστάσεις κυκλικής συχνότητας (rad s^{-1}).

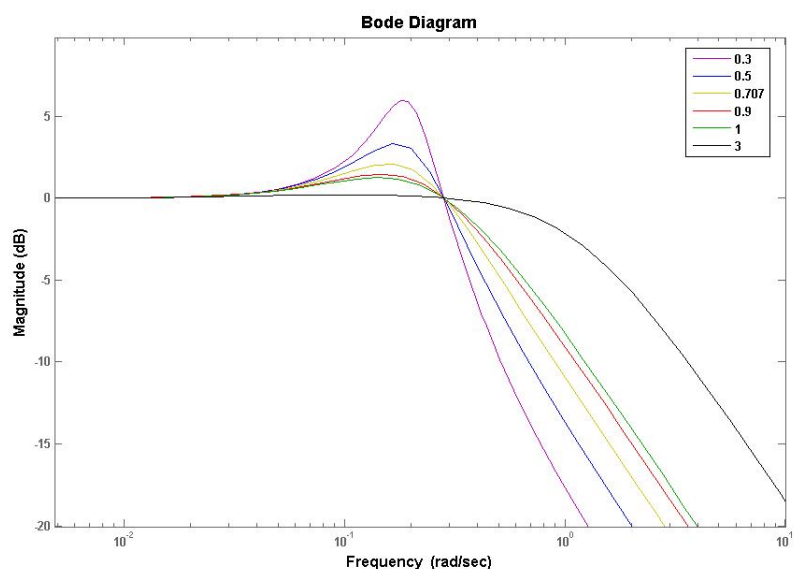
Στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει ότι

$$K_0 K_d \gg \omega_n \quad (2.17)$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε βρόχο υψηλού κέρδους (*high - gain loop*) και η (2.16) μπορεί να προσεγγιστεί με την

$$H(s) = \frac{2s\zeta\omega_n + \omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (2.18)$$

Στο σχήμα 2.6 φαίνεται το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς φάσης του PLL για διάφορους συντελεστές απόσβεσης ζ .



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς φάσης

Από το διάγραμμα πλάτους φαίνεται ότι το PLL έχει συμπεριφορά φίλτρου χαμηλής διέλευσης (*lowpass filter*).

Γίνεται επίσης φανερό η σημασία του συντελεστή απόσβεσης στη δυναμική συμπεριφορά του βρόχου. Για μικρότερους συντελεστές απόσβεσης, η απόκριση παρουσιάζει ταλαντώσεις. Όσο μικρότερος ο συντελεστής, τόσο μεγαλύτερη η υπερακόντιση (*overshoot*). Για συντελεστές μεγαλύτερους του 1 η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται πολύ επίπεδη και η απόκριση πολύ αργή. Στις περισσότερες εφαρμογές, ένας συντελεστής απόσβεσης $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$, που αντιστοιχεί σε ένα φίλτρο Butterworth δεύτερης τάξης, είναι η ιδανική επιλογή.

Χρήσιμη για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του βρόχου είναι και η συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος, η οποία συσχετίζει το σφάλμα φάσης $\theta_e(t)$ με τη φάση της εισόδου $\theta_1(t)$

$$H_e(s) = \frac{\Theta_e(s)}{\Theta_1(s)} \quad (2.19)$$

Είναι $\theta_e(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, συνεπώς $\Theta_e(s) = \Theta_1(s) - \Theta_2(s)$, και η (2.19) γίνεται

$$H_e(s) = \frac{\Theta_1(s) - \Theta_2(s)}{\Theta_1(s)} = 1 - H(s) \quad (2.20)$$

και τελικά προκύπτει

$$H_e(s) = \frac{s}{s + K_0 K_d F(s)} \quad (2.21)$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει η συνθήκη (2.17), έχουμε τελικά για τη συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος

$$H_e(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (2.22)$$

2.3.2 Μεταβατική απόκριση στην κατάσταση κλειδώματος

Γνωρίζοντας την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και τη συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος $H_e(s)$, μπορούμε να εξετάσουμε την απόκριση του PLL σε κάποιες από τις πιο σημαντικές μορφές διέγερσης.

Βηματική μεταβολή φάσης

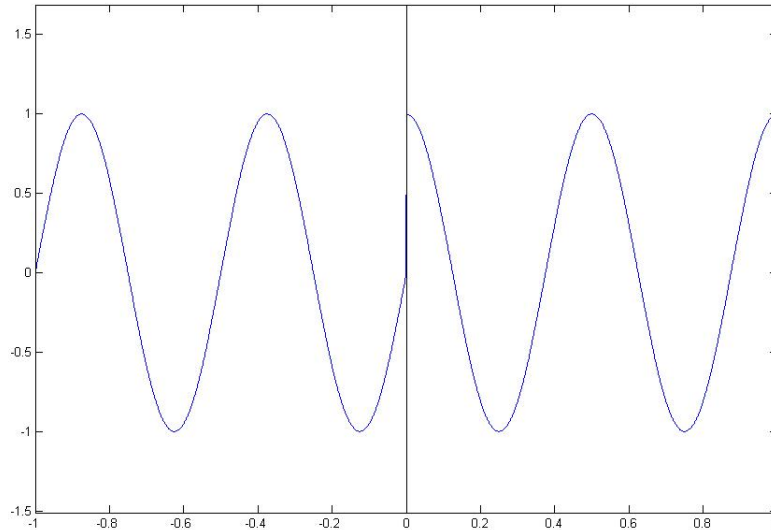
Στο σχήμα 2.7 φαίνεται ένα σήμα, η φάση του οποίου πραγματοποιεί μια βηματική μεταβολή τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το σήμα φάσης σε αυτή την περίπτωση είναι μια βηματική συνάρτηση

$$\theta_1(t) = u_{step}(t) \cdot \Delta\Phi \quad (2.23)$$

όπου $u_{step}(t)$ είναι η (μοναδιαία) βηματική συνάρτηση και $\Delta\Phi$ το μέγεθος του βήματος.

Η μετασχηματισμένη κατά Laplace σχέση είναι

$$\Theta_1(s) = \frac{\Delta\Phi}{s} \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.7: Σήμα με βηματική μεταβολή φάσης

Το σφάλμα φάσης είναι

$$\Theta_e(s) = H_e(s)\Theta_1(s) = H_e(s)\frac{\Delta\Phi}{s} \quad (2.25)$$

Συνδυάζοντας την (2.25) με την (2.21) προκύπτει για το σφάλμα

$$\Theta_e(s) = \frac{\Delta\Phi}{s} \frac{s^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (2.26)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι, για $t \rightarrow \infty$, το σφάλμα φάσης $\theta_e(\infty)$ τείνει στο μηδέν.

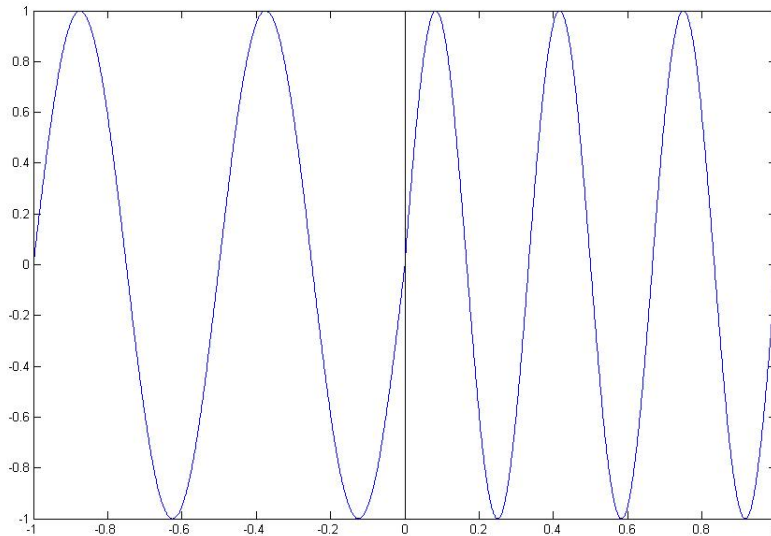
$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_e(s) = 0 \quad (2.27)$$

Βηματική μεταβολή συχνότητας

Στο σχήμα 2.8 φαίνεται ένα σχήμα του οποίου η συχνότητα υφίσταται βηματική μεταβολή κατά $\Delta\omega$ τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Σε αυτή την περίπτωση, η γωνιακή συχνότητα του σήματος αναφοράς γίνεται

$$\omega_1(t) = \omega_0 + \Delta\omega u(t) \quad (2.28)$$



Σχήμα 2.8: Σήμα με βηματική μεταβολή συχνότητας

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε το αντίστοιχο σήμα φάσης

$$\theta_1(t) = \Delta\omega \cdot t \quad (2.29)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace δίνει

$$\Theta_1(s) = \frac{\Delta\omega}{s^2} \quad (2.30)$$

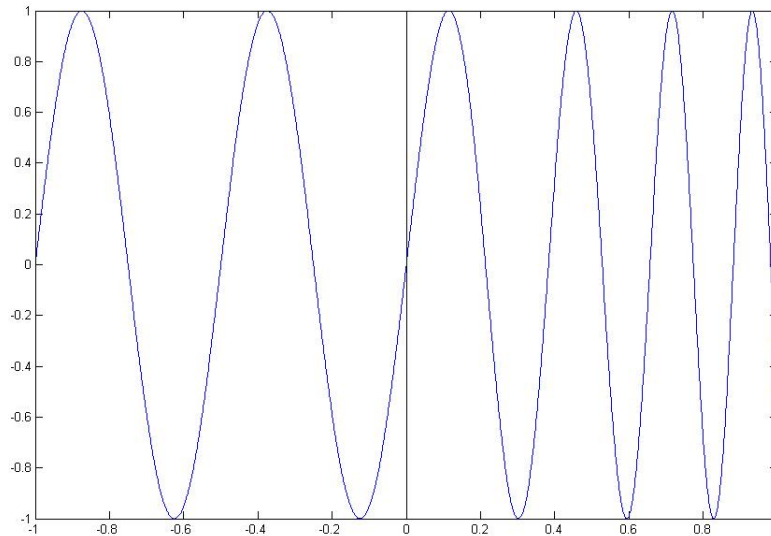
Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει ότι το σφάλμα τείνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$, μόνο όμως στην περίπτωση βρόχου υψηλού κέρδους. Αν αυτή η προϋπόθεση δεν ισχύει, στον αριθμητή της (2.30) υπάρχει ένας επιπρόσθετος πρωτοβάθμιος όρος, και τότε $\theta_e(\infty) \neq 0$.

Μεταβολή συχνότητας με σταθερό ρυθμό

Σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα στην είσοδο του βρόχου είναι

$$\omega_1(t) = \omega_0 + \Delta\dot{\omega} \cdot t \quad (2.31)$$

όπου $\Delta\dot{\omega}$ ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας. Βρίσκουμε την αντίστοιχη σχέση για τη φάση ολοκληρώνοντας:



Σχήμα 2.9: Μεταβολή συχνότητας με σταθερό ρυθμό

$$\theta_1(t) = \Delta\dot{\omega} \frac{t^2}{2} \quad (2.32)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\Theta_1(s) = \frac{\Delta\dot{\omega}}{s^3} \quad (2.33)$$

Σε βρόχο υψηλού κέρδους, με το θεώρημα τελικής τιμής βρίσκουμε τον τελικό σφάλμα φάσης

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_e(s) \Theta_1(s) = \frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_n^2} \quad (2.34)$$

Το γραμμικό μοντέλο ισχύει μόνο για μικρές τιμές του σφάλματος. Για μεγάλες αποκλίσεις η παραπάνω εξίσωση δίνει στην πραγματικότητα

$$\theta_e(\infty) = \sin \frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_n^2} \quad (2.35)$$

Καθώς το ημίτονο δεν μπορεί να ξεπεράσει τη μονάδα, ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής που δεν θα κάνει το βρόχο να «ξεκλειδώσει» είναι

$$\Delta\dot{\omega}_{max} = \omega_n^2 \quad (2.36)$$

Η εξίσωση (2.36) δίνει ένα θεωρητικό όριο το οποίο δεν μπορεί να επιτευχθεί στην πραγματικότητα. Μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση είναι

$$\Delta\dot{\omega}_{max} = \frac{\omega_n^2}{2} \quad (2.37)$$

2.3.3 Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης (Steady State Error) έχει σημαντική επίδραση σε κάθε υπό έλεγχο σύστημα. Ορίζεται ως η απόκλιση της ελεγχόμενης μεταβλητής από την επιθυμητή τιμή, όταν έχει αποσβεστεί η μεταβατική απόκριση και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία. Στην περίπτωση ενός συστήματος PLL, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι το $\theta_e(\infty)$.

Για να υπολογιστεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης θα χρησιμοποιηθεί η (2.21) και το θεώρημα τελικής τιμής.

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta(s) \frac{s}{s + K_0 K_d F(s)} \quad (2.38)$$

Χρησιμοποιώντας μια γενική έκφραση για τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου, $F(s)$

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)s^M} \quad (2.39)$$

όπου $P(s)$ και $Q(s)$ είναι πολυώνυμα του s και M ο αριθμός πόλων στο $s = 0$ (στις περισσότερες περιπτώσεις $M = 0$), προκύπτει η εξίσωση για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης

$$\theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 s^M Q(s) \Theta_1(s)}{s \cdot s^M Q(s) + K_0 K_d P(s)} \quad (2.40)$$

Το σφάλμα $\theta_e(\infty)$ έχει υπολογιστεί στις ενότητες 2.3.2 και 2.3.2 για τους συγκεκριμένους τύπους διέγερσης.

2.3.4 Συμπεριφορά του βρόχου σε μη-κλειδωμένη κατάσταση

Η γραμμική προσέγγιση που αναπτύχθηκε παραπάνω ισχύει μόνο όταν ο βρόχος είναι «κλειδωμένος». Στην μη-κλειδωμένη κατάσταση η συμπεριφορά είναι εντελώς μη - γραμμική και δε θα αναλυθεί σε βάθος. Τα ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν σε αυτή την περίπτωση είναι τα εξής:

- Κάτω από ποιες συνθήκες ο βρόχος θα «κλειδώσει»

- Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να επιτευχθεί το «κλειδώμα»
- Κάτω από ποιες συνθήκες το «κλειδώμα» θα χαθεί

Στο τελευταίο ερώτημα έχει ήδη δοθεί μια απάντηση, από τις σχέσεις (2.36), (2.37). Μια περιγραφή για τη συμπεριφορά του βρόχου στην μη-κλειδωμένη κατάσταση δίνουν οι εξής παράμετροι, οι οποίες είναι χρήσιμες και στη διαδικασία σχεδιασμού ενός τέτοιου συστήματος ελέγχου: Το *Εύρος Κλειδώματος* (*Lock Range*), $\Delta\omega_L$ και ο *Χρόνος Κλειδώματος* (*Lock Time*), T_L .

Εύρος Κλειδώματος: Η παράμετρος αυτή υποδηλώνει το εύρος των συχνοτήτων, μέσα στο οποίο ο βρόχος θα επιτύχει άμεσα το κλειδώμα, και σε γενικές γραμμές αντιστοιχεί και στο εύρος λειτουργίας του συστήματος. Στη συνήθη περίπτωση, στο μέσο του εύρους βρίσκεται η κεντρική συχνότητα του VCO, ω_0 (βλ. ενότητα 2.2.3). Στον τύπο PLL που εξετάζεται, δηλαδή σε βρόχους με ανιχνευτή φάσης τύπου PFD, το εύρος κλειδώματος μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$\Delta\omega_L \approx 4\pi\zeta\omega_n \quad (2.41)$$

Χρόνος Κλειδώματος: Υποδηλώνει το χρονικό διάστημα το οποίο πρέπει να παρέλθει μέχρι ο βρόχος να κλειδώσει. Κατά τη διαδικασία του κλειδώματος, τα σήματα u_d και u_f πραγματοποιούν ταλάντωση συχνότητας ω_n . Η ταλάντωση αυτή αποσβένεται μετά από την πάροδο περίπου μίας περιόδου. Συνεπώς, μπορούμε να προσεγγίσουμε το χρόνο κλειδώματος με τη σχέση

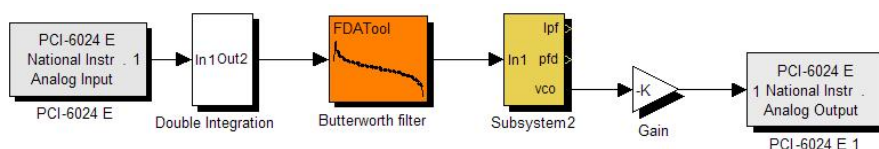
$$T_L \approx \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.42)$$

2.4 Πειραματική εφαρμογή - Αποτελέσματα

Η ιδέα της χρήσης του PLL στην παρούσα εργασία βασίζεται στην σκέψη να εφαρμοστεί δύναμη αντίθετη στη δύναμη-αίτιο της ταλάντωσης. Έτσι, χρησιμοποιήθηκε το PLL για να παράξει ένα ημιτονοειδές σήμα συγχρονισμένο με τη συχνότητα και φάση της ταλάντωσης. Το σήμα αυτό στη συνέχεια πολλαπλασιάστηκε με το κατάλληλο (αρνητικό) κέρδος, ώστε ο επενεργητής να ασκήσει την επιθυμητή αντίθετη προς την ταλάντωση δύναμη.

Πιο αναλυτικά, η διαδικασία είχε ως εξής: Το στροφέιο περιστρεφόταν σε γνωστή συχνότητα, εντός του εύρους κλειδώματος του PLL. Ανάμεσα στην κάρτα συλλογής δεδομένων και τον επενεργητή είχαμε παρεμβάλει έναν διακόπτη. Με την εκκίνηση της εφαρμογής, ο διακόπτης παρέμενε ανοικτός, για το χρονικό διάστημα, το οποίο χρειαζόταν ο βρόχος για να κλειδώσει (T_L). Μέσα στον χρόνο αυτό, το PLL κατάφερε να συγχρονίσει το σήμα της εξόδου του με το σήμα της εισόδου του (τη μέτρηση της ταλάντωσης από το επιταχυνσιόμετρο). Στη συνέχεια ο διακόπτης έκλεινε και το σήμα ελέγχου εφαρμοζόταν στη διάταξη.

Στο σχήμα 2.10 βλέπουμε το διάγραμμα ροής της διαδικασίας, όπως υλοποιήθηκε στο Simulink. Ο υπολογιστής, μέσω της κάρτας συλλογής δεδομένων, διαβάζει τη μέτρηση του επιταχυνσιόμετρου και την ολοκληρώνει δύο φορές, προκειμένου να έχουμε μέτρηση μετατόπισης. Ένα ψηφιακό φίλτρο χρησιμοποιείται για να απομακρύνει το θόρυβο και την ολίσθηση από το σήμα. Το σήμα στη συνέχεια οδηγείται στην είσοδο του PLL. Ο ταλαντωτής του βρόχου παράγει το σήμα του, συγχρονισμένο με αυτό της εισόδου, το οποίο, πολλαπλασιασμένο με το αρνητικό κέρδος, οδηγείται στο κανάλι εξόδου της κάρτας και αποστέλλεται στον επενεργητή.



Σχήμα 2.10: Διάγραμμα ροής

Η περίοδος δειγματοληψίας που χρησιμοποιήθηκε στο συγκεκριμένο πείραμα ήταν $T_s = 0.001$ sec.

2.4.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή

Η διαδικασία σχεδιασμού του ελεγκτή είναι στην ουσία μία διαδικασία επιλογής και υπολογισμού κάποιων παραμέτρων. Η διαδικασία ξεκινά επιλέγοντας το συντελεστή απόσβεσης ζ και το εύρος λειτουργίας του βρόχου. Επιλέγουμε δηλαδή τη μέγιστη και ελάχιστη συχνότητα στην οποία θα λειτουργήσει, ω_{max} και ω_{min} . Αν δεν συντρέχει κάποιος ειδικός λόγος, επιλέγεται $\zeta = 0.707$.

Ως κεντρική συχνότητα του VCO επιλέγεται το μέσο του διαστήματος $[\omega_{max}, \omega_{min}]$, $\omega_0 = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$. Στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε το χρόνο κλειδώματος T_L , καθώς και τη φυσική συχνότητα, ω_n . Με βάση αυτή την τιμή, μπορούμε να υπολογίσουμε το εύρος κλειδώματος του βρόχου, σύμφωνα με τη σχέση (2.41). Επιλέγοντας στη συνέχεια και τις τιμές των K_0 , K_d (το K_0 είναι ένα μέτρο της «ευαισθησίας» του ταλαντωτή και επιλέγεται με αυτό το κριτήριο), υπολογίζουμε το τ_2 και το άθροισμα $\tau_1 + \tau_2$ από την σχέση (2.15).

Αναλυτικότερα, χρησιμοποιήθηκε ο εξής αλγόριθμος: Ως είσοδο δίνονται τα K_0 , K_d , ω_{max} , ω_{min} , ζ , T_L . Στη συνέχεια, υπολογίζεται το $\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min}$ και οι δύο «υποψήφιες» τιμές της φυσικής συχνότητας: $\omega_{n1} = \frac{\Delta\omega}{4\pi\zeta}$ και $\omega_{n2} = \frac{2\pi}{T_L}$. Η μεγαλύτερη από τις δύο επιλέγεται ως φυσική συχνότητα ω_n . Με βάση αυτή την τιμή, υπολογίζονται τα τ_2 και $\tau_1 + \tau_2$ σύμφωνα με την σχέση (2.15). Αν επιλεγεί το ω_{n1} ως φυσική συχνότητα, επαναπροσδιορίζεται ο χρόνος κλειδώματος T_L χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.42. Αν επιλεγεί το ω_{n2} , επαναπροσδιορίζεται το $\Delta\omega = \Delta\omega_L$ με βάση τη σχέση (2.41).

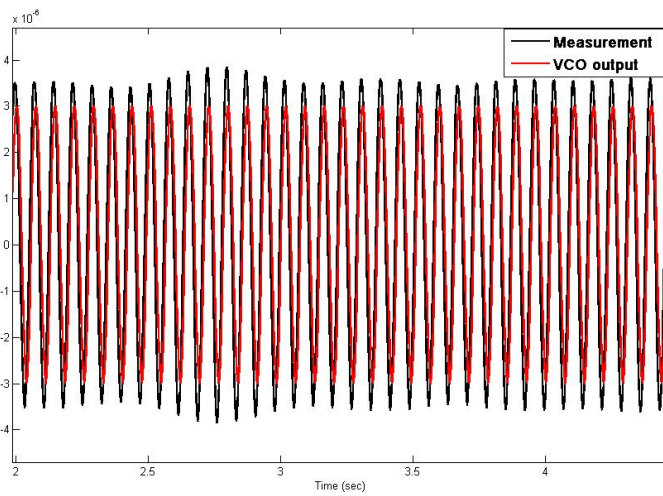
Μετά τις απαραίτητες δοκιμές, επιλέξαμε χρόνο κλειδώματος $T_L = 2$ sec, $\zeta = 0.707$, $K_0 = 10$, $K_d = 1$, $\omega_0 = 13 \cdot 2\pi$ rad/sec, με βάση την εκτίμηση για τις συνθήκες λειτουργίας, $\omega_{max} = 14 \cdot 2\pi$ rad/sec και $\omega_{min} = 12 \cdot 2\pi$ rad/sec. Η φυσική συχνότητα του βρόχου προέκυψε $\omega_n \approx 2.57$ rad/sec. Παρατηρούμε ότι η φυσική συχνότητα είναι διαφορετικό μέγεθος από τη συχνότητα ω_0 ή από τις ω_{max} , ω_{min} και δεν θα πρέπει να συγχέεται με αυτές.

2.4.2 Αποτελέσματα

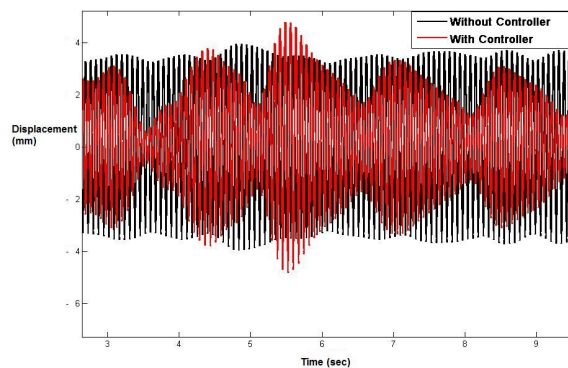
Χρησιμοποιώντας τις υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων του βρόχου και την αρχή λειτουργίας που περιγράφηκε στην εισαγωγή της ενότητας, εφαρμόστηκε και πειραματικά ο βρόχος ελέγχου στη διάταξη.

Αρχικά έγινε μια δοκιμή με το διακόπτη μόνιμα ανοιχτό, για να ελεγχθεί κατά πόσον το PLL καταφέρνει να ακολουθήσει τη φάση του σήματος αναφοράς. Στο σχήμα 2.11 βλέπουμε ότι ο βρόχος καταφέρνει να συντονιστεί με το σήμα αναφοράς με επιτυχία.

Στη συνέχεια δοκιμάστηκε το σύστημα με το βρόχο κλειστό. Στο σχήμα 2.12 βλέπουμε ένα στιγμιότυπο από το αποτέλεσμα της δοκιμής (σύγκριση των μετρήσεων με ανοιχτό και κλειστό βρόχο). Το στιγμιότυπο αυτό



Σχήμα 2.11: Σύγκριση σήματος αναφοράς - σήματος του VCO

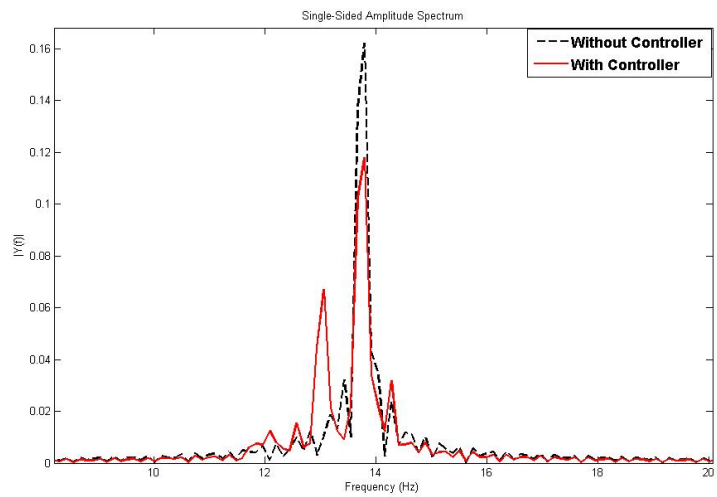


Σχήμα 2.12: Αποτέλεσμα ελέγχου με PLL

είναι χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς του συστήματος σε όλη τη διάρκεια της λειτουργίας του. Ο βρόχος ελέγχου δημιουργεί μία κυματομορφή με μεταβαλλόμενο πλάτος, το οποίο είναι στη μεγαλύτερη διάρκειά του μικρότερο από τα όρια που ορίζει η ταλάντωση του ελεύθερου συστήματος.

Καλύτερα μπορούμε να εκτιμήσουμε αυτή τη βελτίωση παρατηρώντας το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier (σχήμα 2.13). Ο μετασχηματισμός της ταλάντωσης του ελεύθερου συστήματος έχει μια κορυφή στη συχνότητα περιστροφής. Ο μετασχηματισμός των μετρήσεων με τον ελεγκτή σε λειτουργία,

δείχνει ότι το ύψος αυτής της κορυφής έχει μειωθεί, έχει εισαχθεί όμως μία χαμηλότερη κορυφή σε πιο μικρή συχνότητα, λόγω της νέας μορφής που παίρνει η απόκριση.



Σχήμα 2.13: Σύγκριση στο πεδίο της συχνότητας

2.4.3 Συμπεράσματα

Αποτιμώντας τα αποτελέσματα των δοκιμών, συμπεραίνουμε ότι ο βρόχος PLL καταφέρνει να μειώσει μέχρι ένα σημείο το μέσο πλάτος των ταλαντώσεων, δημιουργώντας μία κυματομορφή που στη μεγαλύτερη διάρκειά της περικλείεται από τα όρια που ορίζει η ταλάντωση του ελεύθερου συστήματος, χωρίς όμως η βελτίωση της συμπεριφοράς να είναι θεαματική. Σε αυτό ρόλο σίγουρα παίζουν τόσο η υστέρηση που εισάγει το φίλτρο (όσο και αν έγινε προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί, είναι αναπόφευκτη), όσο και η υστέρηση που εισάγει το υποσύστημα του επενεργητή, με αποτέλεσμα ο συγχρονισμός να μην είναι απόλυτος.

Κεφάλαιο 3

Αναγνώριση του Συστήματος

3.1 Εισαγωγή

Για το σχεδιασμό του ελεγκτή MPC θα χρειαστεί ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο θα προβλέπει την απόκριση του συστήματος σε γνωστή είσοδο, εν προκειμένω το σήμα ελέγχου. Η εξαγωγή αυτού του μοντέλου με βάση τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος θα ήταν αρκετά χρονοβόρα και περίπλοκη, ενώ θα κατέληγε σε μοντέλο πολύ μεγάλης τάξης, και πιθανότατα περιορισμένης ακρίβειας. Ο βασικός λόγος για αυτό είναι ότι ανάμεσα στον ελεγκτή (υπολογιστής) και στο αξονικό σύστημα παρεμβάλλονται ακόμη η κάρτα συλλογής δεδομένων, τα αισθητήρια, ο ενισχυτής και ο επενεργητής (Voice Coil), καθώς και το φίλτρο, στοιχεία της εγκατάστασης τα οποία αυξάνουν την πολυπλοκότητά της, και για τα οποία δεν έχουμε για όλα πλήρη γνώση. Μια λάθος εκτίμηση σε κάποια από τις παραμέτρους θα μπορούσε να επιφέρει μεγάλη απόκλιση του μοντέλου από την πραγματικότητα. Για αυτούς τους λόγους, και καθότι σκοπός δεν είναι η μελέτη των φυσικών ιδιοτήτων του συστήματος, αλλά η εξαγωγή ενός μοντέλου ικανοποιητικής ακρίβειας, θα πραγματοποιηθεί αναγνώριση του συστήματος (System Identification) [11].

Με τον όρο *αναγνώριση* περιγράφεται η διαδικασία ανάπτυξης (ή βελτίωσης) μιας μαθηματικής αναπαράστασης ενός φυσικού συστήματος, με βάση πειραματικά δεδομένα. Είναι δυνατόν να εξαχθεί μοντέλο ακόμα και χωρίς να έχουμε

καμία γνώση για τις φυσικές ιδιότητες ενός συστήματος. Στην παρούσα εργασία η αναγνώριση θα γίνει με συνδυασμό δύο μεθόδων αναγνώρισης. Θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος ERA (Eigensystem Realization Algorithm), ο οποίος εξάγει ένα μοντέλο του συστήματος στο χώρο καταστάσεων, βασιζόμενος στις παραμέτρους Markov. Για την εύρεση αυτών των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε αναγνώριση Kalman με παρατηρητή κατάστασης (Observer Kalman Identification - OKID) [9].

3.2 Μεθοδολογία για την αναγνώριση του συστήματος, Αλγόριθμος ERA, Εύρεση των παραμέτρων Markov με τη μέθοδο OKID

3.2.1 Θεωρία Πραγματοποίησης Συστημάτων (System Realization Theory) - βασικές αρχές

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου, αναπαριστάται στο χώρο κατάστασης ως εξής

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (3.2)$$

όπου $u(k)$ είναι το διάνυσμα των εισόδων του συστήματος, $y(k)$ το διάνυσμα των εξόδων και $x(k)$ το διάνυσμα καταστάσεων. Θέτοντας $u_i(0) = 1$ και $u_i(k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), για κάθε στοιχείο της εισόδου, στις (3.1) και (3.2), παίρνουμε την ακολουθία της κρουστικής απόκρισης Y :

$$Y_0 = D, \quad Y_1 = CB, \quad Y_2 = CAB, \quad \dots, \quad Y_k = CA^{(k-1)}B \quad (3.3)$$

Τα στοιχεία Y_i της ακολουθίας ονομάζονται *παράμετροι Markov* του συστήματος. Ο υπολογισμός τους από τα πειραματικά στοιχεία θα αναπτυχθεί αργότερα. Οι παράμετροι αυτές είναι η βάση για την κατασκευή του μοντέλου διακριτού χρόνου, που αναπαριστάται από τους πίνακες A, B, C και D . Καθότι $D = Y_0$, αρκεί να υπολογιστούν μόνο οι A, B, C .

Πραγματοποίηση είναι ο υπολογισμός μιας τριάδας $[A, B, C]$ από τις παραμέτρους Markov της σχέσης (3.3), που να ικανοποιεί το μοντέλο (3.1), (3.2). Το κάθε σύστημα έχει άπειρο αριθμό πραγματοποιήσεων που δίνουν

την ίδια ακριβώς απόκριση για οποιαδήποτε είσοδο. Ελάχιστη πραγματοποίηση σημαίνει ότι το μοντέλο έχει τη μικρότερη δυνατή διάσταση. Όλες οι ελάχιστες πραγματοποιήσεις έχουν το ίδιο σύνολο ιδιοτιμών.

Αν m είναι ο αριθμός των εξόδων, και r ο αριθμός των εισόδων, η πραγματοποίηση συστημάτων έχει ως βάση τον $\alpha m \times \beta r$ πίνακα Hankel των παραμέτρων Markov.

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k+1} & \dots & Y_{k+\beta-1} \\ Y_{k+1} & Y_{k+2} & \dots & Y_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k+\alpha-1} & Y_{k+\alpha} & \dots & Y_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Για $k = 1$ προκύπτει

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_\beta \\ Y_2 & Y_3 & \dots & Y_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_\alpha & Y_{1+\alpha} & \dots & Y_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι το $Y_0 = D$ δεν συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα $H(0)$. Για $\alpha \geq n$ και $\beta \geq n$, όπου n η τάξη του συστήματος, ο πίνακας $H(k-1)$ είναι βαθμού n .

3.2.2 Ο Αλγόριθμος Πραγματοποίησης Ιδιοσυστήματος (Eigensystem Realization Algorithm - ERA)

Ο πίνακας Hankel του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{H}(k-1) = [\mathbf{Y}_{s_i+k+t_j}]; \quad \mathbf{Y}_{s_i+k+t_j} = \mathbf{C}_j \mathbf{A}^{s_i+k-1+t_j} \mathbf{B}_i \quad (3.6)$$

όπου $s_0 = t_0 = 0$, s_i, t_j ακέραιοι. Για $i = j = 0$, $\mathbf{Y}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}$.

Η σχέση (3.6) μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_\beta \quad (3.7)$$

όπου $\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta$ είναι γενικευμένοι πίνακες παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας:

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{s_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_\alpha \mathbf{A}^{s_\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{t_1} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}^{t_\beta} \mathbf{B}_\beta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Από την (3.7) εύκολα προκύπτει ότι, για $k = 0$, $\mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta$.

Έστω ότι υπάρχει πίνακας \mathbf{H}^\dagger που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{I}_n \quad (3.10)$$

όπου \mathbf{I}_n μοναδιαίος πίνακας $n \times n$.

Ο πίνακας \mathbf{H}^\dagger είναι ψευδοαντίστροφος του $\mathbf{H}(0)$:

$$\mathbf{H}(0) \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{H}(0) \quad (3.11)$$

Η διαδικασία του ERA ξεκινά με την παραγοντοποίηση του πίνακα (3.6) για $k = 1$, εφαρμόζοντας την Διάσπαση Ιδιαζουσών Τιμών (*Singular Value Decomposition*):

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (3.12)$$

όπου οι στήλες των \mathbf{R}, \mathbf{S} είναι ορθοκανονικές, και ο $\mathbf{\Sigma}$ είναι

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

με $\Sigma_n = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n]$ και

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας τις πρώτες n στήλες των \mathbf{R} και \mathbf{S} , προκύπτουν οι πίνακες \mathbf{R}_n και \mathbf{S}_n αντίστοιχα. Από την (3.12) προκύπτει

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{S}_n^T \quad (3.14)$$

όπου $\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n$. Σε συνδυασμό με την (3.11) προκύπτει για τον πίνακα $\mathbf{H}(0)$:

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{S}_n \mathbf{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T \quad (3.15)$$

Από τις (3.7) για $k = 0$ και (3.14) είναι φανερό ότι ο πίνακας \mathbf{P}_α σχετίζεται με τον \mathbf{R}_n και ο πίνακας \mathbf{Q}_β με τον \mathbf{S}_n^T . Μία επιλογή είναι $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2}$ και $\mathbf{Q}_\beta = \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T$.

Για $k = 1$, από την σχέση (3.7) προκύπτει

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A} \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \mathbf{A} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (3.16)$$

Μία προφανής λύση ως προς τον πίνακα \mathbf{A} είναι

$$\mathbf{A} = \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2}$$

Αν ορίσουμε ως $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{O}_m \ \dots \ \mathbf{O}_m]$ και $\mathbf{E}_r^T = [\mathbf{I}_r \ \mathbf{O}_r \ \dots \ \mathbf{O}_r]$, όπου m είναι ο αριθμός των εισόδων, r ο αριθμός των εξόδων, και \mathbf{I}_i μοναδιαίος πίνακας τάξης i , \mathbf{O}_i μηδενικός πίνακας τάξης i , αποδεικνύεται ότι:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} [\Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2}]^{k-1} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \quad (3.17)$$

Από την παραπάνω σχέση, εύκολα προκύπτει η έκφραση για τους πίνακες πραγματοποίησης του συστήματος:

$$\hat{\mathbf{A}} = \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \quad (3.18)$$

Η παραπάνω τριάδα συνιστά μία ελάχιστη πραγματοποίηση. Το σύμβολο $\hat{}$ υποδηλώνει ότι οι παραπάνω πίνακες δεν είναι οι πίνακες του πραγματικού συστήματος, αλλά μία εκτίμηση αυτών. Η τάξη του πίνακα \mathbf{A} είναι n , η οποία είναι και η τάξη του συστήματος.

3.2.3 Αναγνώριση Kalman με παρατηρητή κατάστασης

Πολλές μέθοδοι αναγνώρισης συστημάτων στο χώρο κατάστασης, όπως η ERA που περιγράφηκε παραπάνω, βασίζονται στην ακολουθία της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, ή αλλιώς στις παραμέτρους Markov. Οι πιο άμεσες μέθοδοι για να υπολογιστούν αυτές οι παράμετροι είναι δύο: Να γίνει μετασχηματισμός Fourier στις ακολουθίες εισόδου και εξόδου (μετρήσεων) που προέκυψαν κατά το πείραμα αναγνώρισης για τον υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας του συστήματος και στη συνέχεια μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού να υπολογιστεί η ζητούμενη ακολουθία τιμών. Η δεύτερη τεχνική περιλαμβάνει την επίλυση κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου. Το βασικό όμως μειονέκτημα

και των δύο αυτών μεθόδων είναι ότι περιλαμβάνει την αντιστροφή του πίνακα των εισόδων, ο οποίος μπορεί να είναι πολύ μεγάλων διαστάσεων, ιδίως για συστήματα με χαμηλή αποόσβεση.

Αντί λοιπόν να αναγνωριστούν οι παράμετροι Markov του ίδιου του συστήματος, οι οποίες μπορεί να παρουσιάζουν πολύ αργή σύγκλιση, χρησιμοποιώντας έναν ευσταθή παρατηρητή κατάστασης μπορούμε να συμπίεσουμε τα δεδομένα και να αυξήσουμε, τεχνητά, την απόσβεση του συστήματος και να βελτιώσουμε τελικά τα αποτελέσματα της διαδικασίας της αναγνώρισης.

Παρατηρητές Κατάστασης - Βασική εξίσωση

Έστω το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τις εξισώσεις στο χώρο κατάστασης:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.19)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (3.20)$$

όπου $x(k)$ είναι διάνυσμα $n \times 1$ (διάνυσμα καταστάσεων), το $y(k)$ διάνυσμα $m \times 1$ (διάνυσμα εξόδων) και το $u(k)$ $r \times 1$ (διάνυσμα εισόδων). Υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, και για $k = 0, 1, 2, \dots, l-1$ προκύπτουν οι τιμές του $y(k)$:

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = Du(0)$$

$$x(1) = Bu(0)$$

$$y(1) = CBu(0) + Du(1)$$

$$x(2) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$y(2) = CABu(0) + CBu(1) + Du(2)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x(l-1) &= \sum_{i=1}^{l-1} A^{l-1} B u(l-1-i) \\ y(l-1) &= \sum_{i=1}^{l-1} C A^{l-1} B u(l-1-i) + D u(l-1) \end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις σε μορφή πινάκων προκύπτει

$$y_{[m \times l]} = \mathbf{Y}_{[m \times rl]} \mathbf{U}_{[rl \times l]} \quad (3.21)$$

όπου είναι

$$\begin{aligned} y &= [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(l-1)] \\ \mathbf{Y} &= [D \quad CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{l-2}B] \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(l-1) \\ & u(0) & u(1) & \dots & u(l-2) \\ & & u(0) & \dots & u(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Στη σχέση (3.21) ο πίνακας \mathbf{Y} περιέχει τις παραμέτρους Markov που πρέπει να υπολογιστούν. Οι διαστάσεις του είναι $m \times rl$. Ο πίνακας \mathbf{U} είναι $rl \times l$ άνω τριγωνικός. Για συστήματα μίας εισόδου είναι τετραγωνικός, σε άλλη περίπτωση έχει περισσότερες σειρές από στήλες.

Στη σχέση (3.21) υπάρχουν $m \times rl$ άγνωστοι και μόνο $m \times l$ εξισώσεις. Συνεπώς, στην περίπτωση που $r > 1$ δεν υπάρχει μοναδική λύση. Ακόμα όμως και σε αυτή την περίπτωση, και ιδίως αν το l είναι μεγάλο, ή η είσοδος δεν είναι αρκετά πλούσια σε συχνότητες, ο υπολογισμός του \mathbf{U}^{-1} μπορεί να οδηγήσει σε αριθμητικά σφάλματα.

Αν υποθεθεί ότι ο A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, για κάποια αρκετά μεγάλη τιμή p , θα είναι $A^k \approx 0$ για $k \geq p$. Η σχέση (3.21) μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$y_{[m \times l]} = \mathbf{Y}_{[m \times r(p+1)]} \mathbf{U}_{[r(p+1) \times l]} \quad (3.22)$$

όπου

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(p) \quad \dots \quad y(l-1)]$$

$$Y = \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{p-1}B \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(p) & \dots & u(l-1) \\ & u(0) & u(1) & \dots & u(p-1) & \dots & u(l-2) \\ & & u(0) & \dots & u(p-2) & \dots & u(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & u(0) & \dots & u(l-p-1) \end{bmatrix}$$

Τα σύμβολα U, Y υποδηλώνουν τις προσεγγίσεις των \mathbf{U}, \mathbf{Y} . Για $l \geq (p+1)$ θα υπάρχουν περισσότερες ($m \times l$) εξισώσεις από αγνώστους ($m \times r(p+1)$). Συνεπώς, οι πρώτες p παράμετροι Markov θα ικανοποιούν κατά προσέγγιση τη σχέση $Y = yU^\dagger$, όπου U^\dagger είναι ο ψευδοαντίστροφος του U .

Είναι πιθανό όμως, ιδίως για συστήματα με χαμηλή απόσβεση, το l να χρειάζεται να γίνει πάρα πολύ μεγάλη τιμή και, κατά συνέπεια, ο πίνακας U να γίνει πολύ μεγάλος, ώστε ο υπολογισμός του U να επιφέρει αριθμητικά σφάλματα. Συνεπώς, θα ήταν επιθυμητό να αυξηθεί με κάποιο τρόπο η απόσβεση του συστήματος.

Αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τον όρο $Gy(k)$ στο δεξί μέλος της (3.19), προκύπτει

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gy(k) - Gy(k) \\ &= (A + GC)x(k) + (B + GD)u(k) - Gy(k) \end{aligned}$$

και τελικά

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}v(k) \quad (3.23)$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + GC \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B + GD, & -G \end{bmatrix} \\ v(k) &= \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ο G είναι πίνακας τέτοιος ώστε ο \bar{A} να γίνει όσο ευσταθής είναι επιθυμητό. Η σχέση (3.23) έχει όμοια μορφή με την (3.19), αλλά με διαφορετικούς πίνακες και διαφορετικό διάνυσμα εισόδων. Η σχέση (3.23) ονομάζεται *εξίσωση παρατηρητή*, το διάνυσμα x είναι το διάνυσμα κατάστασης του παρατηρητή και οι παράμετροι Markov του συγκεκριμένου συστήματος είναι οι παράμετροι Markov

του παρατηρητή. Σε μορφή πινάκων, η σχέση εισόδου - εξόδου, σε αντιστοιχία με την (3.22), είναι

$$y_{\{m \times l\}} = \bar{\mathbf{Y}}_{\{m \times [(m+r)(l-1)+r]\}} \mathbf{V}_{\{[(m+r)(l-1)+r] \times l\}} \quad (3.25)$$

όπου

$$y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & y(2) & \dots & y(p) & \dots & y(l-1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{p-1}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{l-2}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(p) & \dots & u(l-1) \\ & v(0) & v(1) & \dots & v(p-1) & \dots & v(l-2) \\ & & v(0) & \dots & v(p-2) & \dots & v(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & v(0) & \dots & v(l-p-1) \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & v(0) \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα \bar{A} επιλέγονται, με βάση τον πίνακα G , ώστε $C\bar{A}^k B \approx 0$ για $k \geq p$, όπου p είναι κάποιος αρκετά μεγάλος ακέραιος. Τότε, η προσέγγιση της σχέσης (3.25) με βάση τα πραγματικά στοιχεία (μετρήσεις), γράφεται

$$y_{\{m \times l\}} = \bar{\mathbf{Y}}_{\{m \times [(m+r)p+r]\}} \mathbf{V}_{\{[(m+r)p+r] \times l\}} \quad (3.26)$$

όπου

$$y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & y(2) & \dots & y(p) & \dots & y(l-1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{p-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(p) & \dots & u(l-1) \\ & v(0) & v(1) & \dots & v(p-1) & \dots & v(l-2) \\ & & v(0) & \dots & v(p-2) & \dots & v(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & v(0) & \dots & v(l-p-1) \end{bmatrix}$$

Τα σύμβολα $\mathbf{V}, \bar{\mathbf{Y}}$ υποδηλώνουν τις προσεγγίσεις των $\mathbf{V}, \bar{\mathbf{Y}}$. Ακριβώς όπως και με τη σχέση (3.22) οι πρώτες p παράμετροι Markov θα ικανοποιούν, κατά προσέγγιση, τη σχέση

$$\bar{\mathbf{Y}} = y\mathbf{V}^\dagger \quad (3.27)$$

όπου V^\dagger είναι ο ψευδοαντίστροφος πίνακας του V . Το σφάλμα της προσέγγισης μειώνεται όσο το p αυξάνεται. Για να υπάρχει μοναδική λύση, πρέπει όλες οι γραμμές του V να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς το p δεν μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα. Το άνω όριο του είναι η τιμή που μεγιστοποιεί τον αριθμό $(r + m)p + r \leq l$ ανεξάρτητων σειρών του V .

Υπολογισμός παραμέτρων Markov

Παράμετροι Markov του συστήματος Για να εξάγουμε τον πίνακα Y των παραμέτρων Markov του συστήματος, από τις παραμέτρους του παρατηρητή, χωρίζουμε το \bar{Y} ως εξής:

$$\bar{Y} = [\bar{Y}_0 \quad \bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2 \quad \dots \quad \bar{Y}_p] \quad (3.28)$$

Είναι

$$\bar{Y}_0 = D \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k &= CA^{k-1}B \\ &= \begin{bmatrix} C(A + GC)^{k-1}(B + GD) & -C(A + GC)^{k-1}G \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{Y}_k^{(1)} & -\bar{Y}_k^{(2)} \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Να σημειωθεί ότι η παράμετρος \bar{Y}_0 έχει μικρότερη διάσταση από τις υπόλοιπες παραμέτρους. Από την (3.30) προκύπτει ότι η παράμετρος Y_1 είναι

$$\begin{aligned} Y_1 &= CB \\ &= C(B + GD) - (CG)D \\ &= \bar{Y}_1^{(1)} - \bar{Y}_1^{(2)}D \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2^{(1)} &= C(A + GC)(B + GD) \\ &= CAB + CGCB + C(A + GC)GD \\ &= Y_2 + \bar{Y}_1^{(2)}Y_1 + \bar{Y}_2^{(2)}D \end{aligned}$$

Και συνεπώς

$$\begin{aligned} Y_2 &= CAB \\ &= \bar{Y}_2^{(1)} - \bar{Y}_1^{(2)}Y_1 - \bar{Y}_2^{(2)}D \end{aligned} \quad (3.32)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο είναι

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_3^{(1)} &= C(A + GC)^2(B + GD) \\
&= C(A^2 + GCA + AGC + GCGC)(B + GD) \\
&= CA^2B + CGCAB + C(A + GC)GCB + C(A + GC)^2GD \\
&= Y_3 + \bar{Y}_1^{(2)}Y_2 + \bar{Y}_2^{(2)}Y_1 + \bar{Y}_3^{(2)}D
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned}
Y_3 &= CA^2B \\
&= \bar{Y}_3 - \bar{Y}_1^{(2)}Y_2 - \bar{Y}_2^{(2)}Y_1 - \bar{Y}_3^{(2)}D
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δεικτών κάθε όρου, και στα δύο μέλη των παραπάνω παραστάσεων, είναι το ίδιο. Επαγωγικά προκύπτει η γενική σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους Markov του αρχικού συστήματος και στις παραμέτρους Markov του συστήματος με τον παρατηρητή κατάστασης:

$$D = Y_0 = \bar{Y}_0 \tag{3.34}$$

$$Y_k = \bar{Y}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)}Y_{k-i}, \quad k = 1, \dots, p \tag{3.35}$$

$$Y_k = - \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)}Y_{k-i}, \quad k = p + 1, \dots, \infty \tag{3.36}$$

Από την (3.36) φαίνεται ότι το Y_k για $k > p + 1$ δεν είναι παρά ένας συνδυασμός των προηγούμενων p παραμέτρων Markov ($Y_{k-1}, Y_{k-2}, \dots, Y_{k-p}$) του συστήματος. Υπάρχουν δηλαδή μόνο p ανεξάρτητες παράμετροι Markov.

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός παραμέτρων Markov, p , που επιλέγουμε, πρέπει να είναι τέτοιος ώστε $mp \geq n$, όπου m είναι ο αριθμός των εξόδων και n η τάξη του συστήματος. Για ένα σύστημα μίας εξόδου, ο αριθμός των παραμέτρων πρέπει να είναι ίσος ή μεγαλύτερος της τάξης του.

Παράμετροι Markov του κέρδους του παρατηρητή (Observer Gain Markov Parameters) Το κέρδος του παρατηρητή, G , προκύπτει αφού βρεθεί η ακολουθία των παραμέτρων

$$Y_k^o = CA^{k-1}G; \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{3.37}$$

Ο πρώτος όρος στην ακολουθία είναι

$$Y_1^o = CG = \bar{Y}_1^{(2)} \quad (3.38)$$

Η επόμενη παράμετρος προκύπτει από το $Y_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2^{(2)} &= C\bar{A}G = (CAG + CGCG) \\ &= Y_2^o + \bar{Y}_1^{(2)}Y_1^o \end{aligned}$$

και προκύπτει

$$Y_2^o = \bar{Y}_2^{(2)} - \bar{Y}_1^{(2)}Y_1^o \quad (3.39)$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} \bar{Y}_3^{(2)} &= C\bar{A}^2G \\ &= (CA^2G + CGCAG + C\bar{A}GCG) \\ &= Y_3^o + \bar{Y}_1^{(2)}Y_2^o + \bar{Y}_2^{(2)}Y_1^o \end{aligned}$$

και

$$Y_3^o = \bar{Y}_3^{(2)} - \bar{Y}_1^{(2)}Y_2^o - \bar{Y}_2^{(2)}Y_1^o \quad (3.40)$$

Επαγωγικά, προκύπτει η γενική έκφραση

$$Y_1^o = CG = \bar{Y}_1^{(2)} \quad (3.41)$$

$$Y_k^o = \bar{Y}_k^{(2)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{Y}_i^{(2)}Y_{k-i}^o, \quad k = 2, \dots, p \quad (3.42)$$

$$Y_k^o = - \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)}Y_{k-i}^o, \quad k = p+1, \dots, \infty \quad (3.43)$$

Έχοντας υπολογίσει την ακολουθία $Y_k^o = CA^{k-1}G$; $k = 1, 2, 3, \dots$, όπου τα C, A έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο του ERA, το κέρδος του παρατηρητή μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$G = P^\dagger Y^o \quad (3.44)$$

όπου

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix}, \quad Y^o = \begin{bmatrix} Y_1^o \\ Y_2^o \\ Y_3^o \\ \vdots \\ Y_{k+1}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CG \\ CAG \\ CA^2G \\ \vdots \\ CA^kG \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.3 Εφαρμογή της μεθόδου - Πειραματικά αποτελέσματα

3.3.1 Σχεδιασμός πειράματος - Υπολογιστικά βήματα

Το πείραμα της αναγνώρισης συστήματος είχε ως σκοπό την εξαγωγή ενός μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει και να μπορεί να προβλέψει την απόκριση του συστήματος (πειραματική διάταξη) σε γνωστή είσοδο, δηλαδή το σήμα που θα δίνει ο ελεγκτής. Για το σκοπό αυτό, διεγείραμε την εγκατάσταση με ένα ημιτονοειδές σήμα μεταβαλλόμενης συχνότητας (chirp signal) και καταγράψαμε την απόκρισή της. Το συγκεκριμένο σήμα επιλέχθηκε για τους εξής λόγους: είναι παρόμοιας μορφής με τα σήματα που αναμένεται να παράγει ο ελεγκτής και, επιπρόσθετα, αν επιλεγεί σωστά, μπορεί να κινείται στο φάσμα των συχνοτήτων στο οποίο αναμένεται να λειτουργήσει η εγκατάσταση (και ο ελεγκτής).

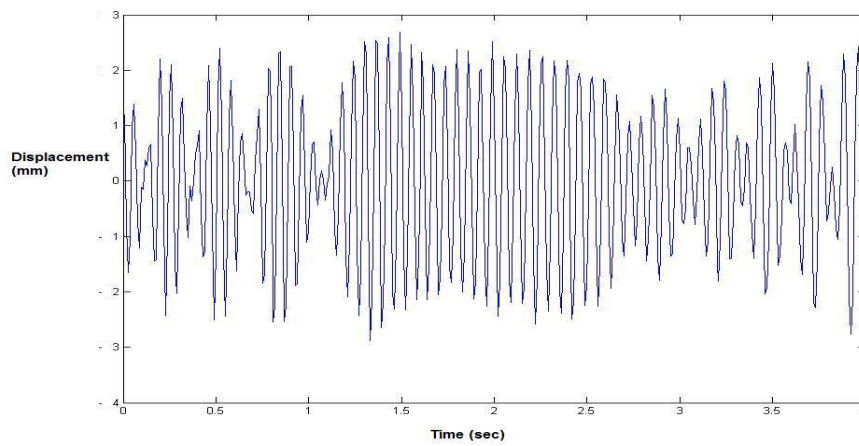
Στη συνέχεια, με δεδομένες τις χρονικές ακολουθίες της εισόδου και της καταγεγραμμένης εξόδου του συστήματος, ακολουθήθηκαν τα παρακάτω υπολογιστικά βήματα:

1. Επιλογή του αριθμού των παραμέτρων Markov, p που θα υπολογιστούν. Μετά από τις απαραίτητες δοκιμές, προσδιορίστηκε η τιμή $p = 6$. Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα, σχηματίστηκαν οι πίνακες y και V της σχέσης (3.26).
2. Υπολογισμός των παραμέτρων Markov του συστήματος και του κέρδους του παρατηρητή, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.2.3.
3. Κατασκευή του πίνακα Hankel $\mathbf{H}(0)$ από τις παραμέτρους Markov που έχουν υπολογιστεί.
4. Παραγοντοποίηση του $\mathbf{H}(0)$ με Singular Value Decomposition. Επιλογή τάξης μοντέλου στο χώρο καταστάσεων. Η τάξη προσδιορίστηκε σε $n = 3$, αρχικά με το σκεπτικό ότι οι τρεις καταστάσεις αντιστοιχούν στις τρεις καταστάσεις του φυσικού συστήματος (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση), αλλά και με βάση τα ικανοποιητικά αποτελέσματα. Αύξηση της τάξης του μοντέλου δε βελτιώνει τα αποτελέσματα, και μάλιστα, ξεπερνώντας την τιμή $n = 6$, το μοντέλο αρχίζει και αποκλίνει από το πραγματικό σύστημα, ενώ ο παρατηρητής κατάστασης γίνεται ασταθής.

5. Από τη σχέση (3.18), υπολογισμός της πραγματοποίησης $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}]$.

3.3.2 Αποτελέσματα - Αξιολόγηση

Στο πείραμα αναγνώρισης το σύστημα διεγέρθηκε με ημιτονοειδές σήμα μεταβαλλόμενης συχνότητας 20-10 Hz. Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η απόκριση που καταγράφηκε.

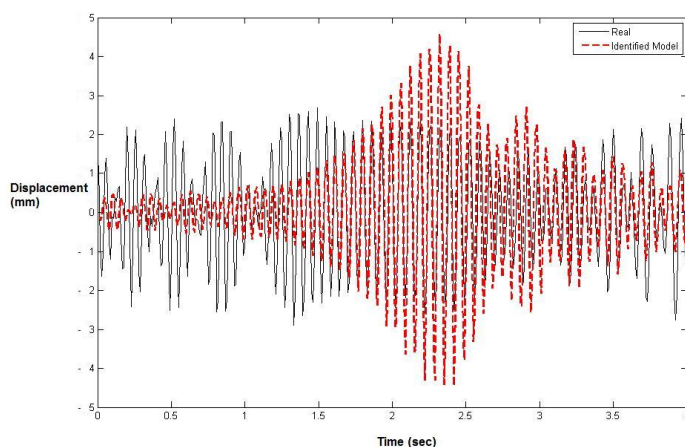


Σχήμα 3.1: Απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδή διέγερση 20-10 Hz

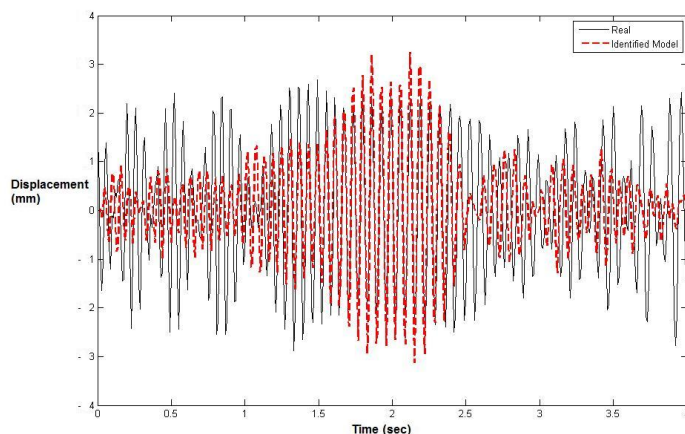
Στη συνέχεια φαίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από διάφορες μεθόδους με την πραγματική απόκριση του συστήματος, στο πεδίο του χρόνου:

- Στο σχήμα 3.2 φαίνεται το αποτέλεσμα που προέκυψε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αναγνώρισης `n4sid` [11], που χρησιμοποιεί το System Identification Toolbox του MATLAB.
- Στο σχήμα 3.3 φαίνεται η απόκριση του συστήματος που προέκυψε με τη μέθοδο ERA, χωρίς χρήση του παρατηρητή κατάστασης.
- Στο σχήμα 3.4 φαίνεται η απόκριση του συστήματος που προέκυψε με τη μέθοδο ERA, με χρήση του παρατηρητή κατάστασης.

Το μοντέλο που έδωσε η μέθοδος `n4sid` παράγει μία προσέγγιση η οποία παρουσιάζει πολύ αυξημένο πλάτος στις μεσαίες συχνότητες, ενώ στις χαμηλότερες



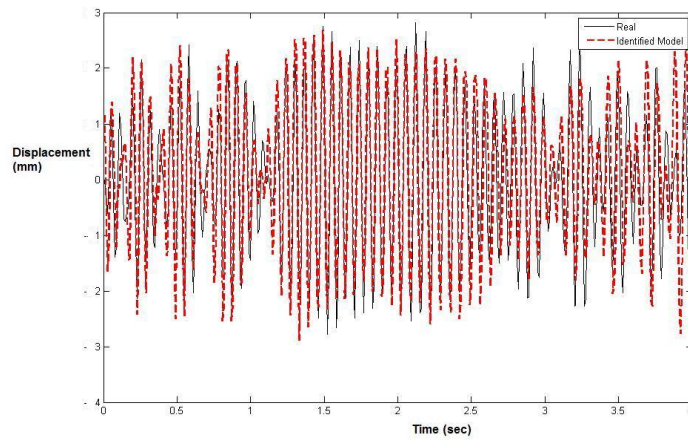
Σχήμα 3.2: Απόκριση συστήματος που προέκυψε από τη μέθοδο n4sid



Σχήμα 3.3: Απόκριση συστήματος υπολογισμένου με τη μέθοδο ERA, χωρίς παρατηρητή κατάστασης

(προς το τέλος του άξονα του χρόνου) παρουσιάζει ένα μεταβαλλόμενο πλάτος, το οποίο ακολουθεί ως ένα βαθμό τη μορφή του πραγματικού σήματος. Σε υψηλές συχνότητες (αρχή του άξονα του χρόνου) δίνει ένα σήμα με πλάτος σταθερά πολύ χαμηλότερο από το πραγματικό. Τέλος, η φάση της ταλάντωσης ακολουθείται πιστά στη μεγαλύτερη διάρκεια των μετρήσεων.

Η προσέγγιση του συστήματος ERA, χωρίς τον παρατηρητή κατάστασης, καταφέρνει σε μεγαλύτερο βαθμό να ακολουθήσει την αύξηση του πλάτους στις



Σχήμα 3.4: Απόκριση συστήματος υπολογισμένου με τη μέθοδο ERA, με παρατηρητή κατάσταση

μεσαίες συχνότητες. Στις χαμηλές συχνότητες επιτυγχάνεται μία προσέγγιση του μεταβαλλόμενου πλάτους, μετατοπισμένη όμως σε φάση, ενώ στις υψηλές συχνότητες το μέσο πλάτος της ταλάντωσης είναι σημαντικά μικρότερο του πραγματικού.

Τέλος, το μοντέλο ERA με παρατηρητή κατάσταση παράγει ένα σήμα με μορφή όμοια σχεδόν του πραγματικού, σε όλο το εύρος των συχνοτήτων, τόσο σε πλάτος, όσο και σε φάση.

Οι πίνακες του συστήματος με παρατηρητή κατάστασης, στο χώρο καταστάσεων, διακριτού χρόνου, που προέκυψαν από τη μέθοδο ERA και χρησιμοποιήθηκαν στον ελεγκτή είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0.6665 & -0.7878 & -0.0002 \\ 0.6185 & 0.5700 & -0.1404 \\ -0.2096 & 0.0921 & 0.6466 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1436 & 1.1140 \\ -0.0121 & -1.2728 \\ 0.0260 & -1.2559 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.1341 & -0.0012 & -0.0368 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μία εκτίμηση της προσέγγισης από το στατιστικό Best Fits, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$BestFit = \left(1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|} \right)$$

όπου y είναι η μέτρηση, \hat{y} η προσέγγισή της και \bar{y} η μέση τιμή του y [17]. Για το σύστημα ERA με τον παρατηρητή κατάστασης το Best Fits υπολογίστηκε σε 83.05%, για το σύστημα ERA ήταν 21.8%, ενώ για το σύστημα n4sid η τιμή του ήταν πολύ μικρή, μόλις 5.1%.

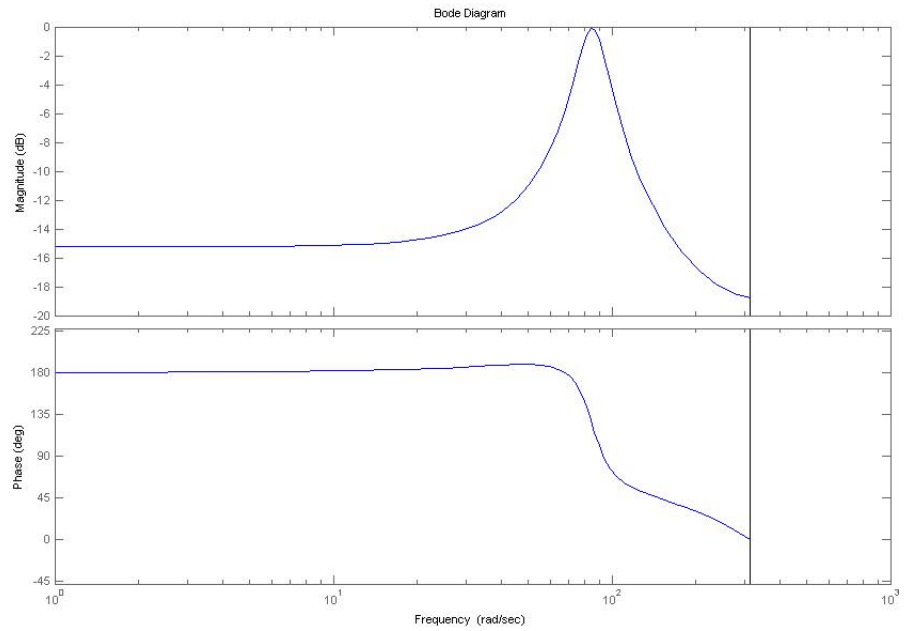
Είναι προφανές ότι το μοντέλο με παρατηρητή κατάστασης ακολουθεί τα πραγματικά δεδομένα πολύ καλύτερα από τα άλλα δύο.

Στο σχήμα 3.5 βλέπουμε το διάγραμμα Bode του μοντέλου.

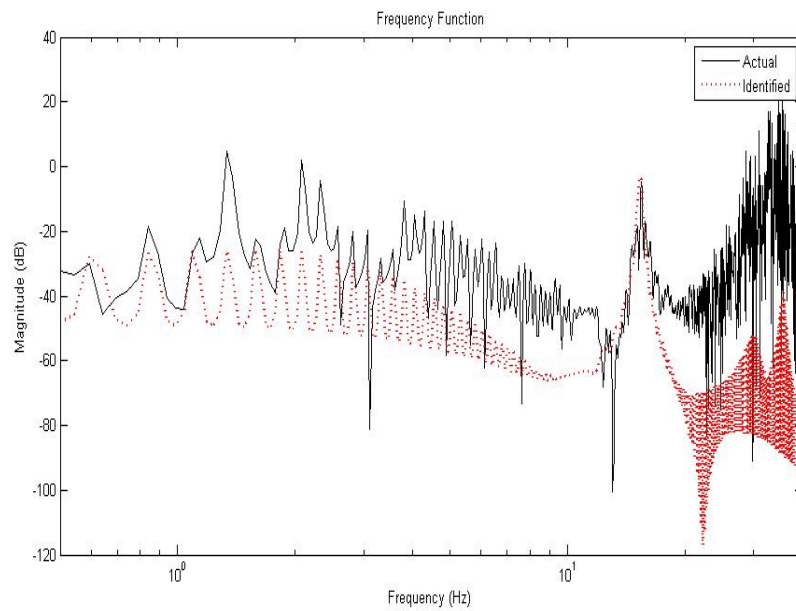
Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μια κορυφή στα 84 rad/sec, ή 13.37 Hz, που αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού του συστήματος. Στην ίδια συχνότητα παρατηρείται και αλλαγή της φάσης, από 180°, αρχικά σε περίπου 45°, ενώ στη συνέχεια η φάση ακολουθεί πορεία προς το 0.

Στη συνέχεια, κάνουμε την ίδια σύγκριση των αποτελεσμάτων, αυτή τη φορά στο πεδίο της συχνότητας, αναπαριστώντας την απόκριση συχνότητας (Frequency Response), πάλι για καθένα από τα τρία αυτά μοντέλα.

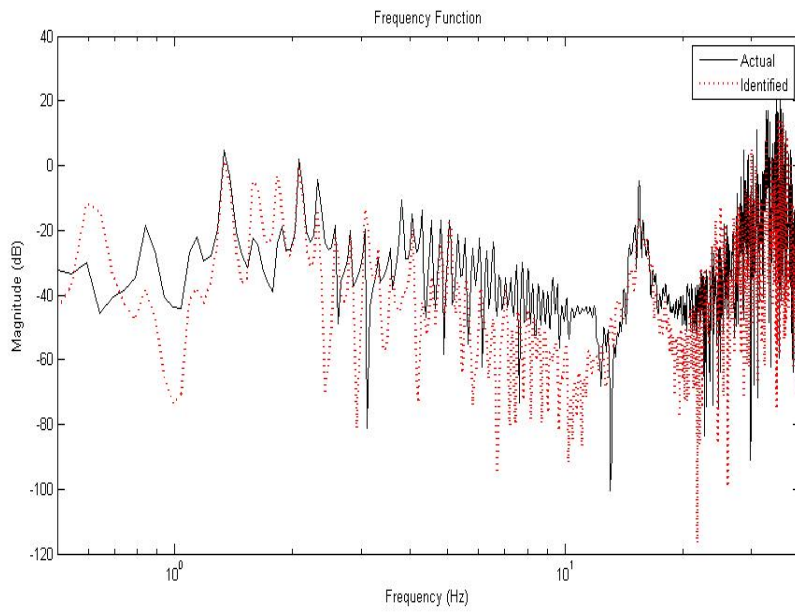
Επειδή κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, τα ελατήρια της διάταξης υπέστησαν κόπωση και κάποια στιγμή αστόχησαν, χρειάστηκε να αντικατασταθούν. Η αλλαγή αυτή άλλαξε και τη συμπεριφορά της διάταξης, οπότε το τελευταίο



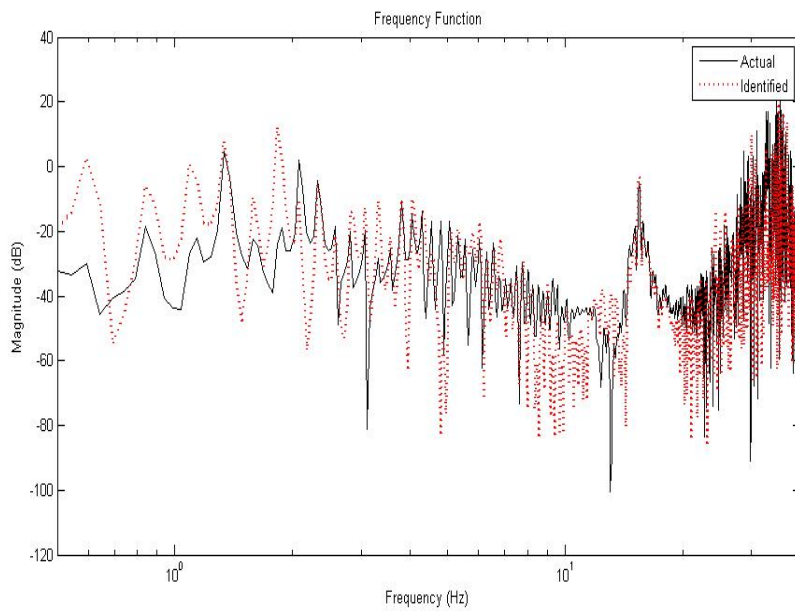
Σχήμα 3.5: Διάγραμμα Bode του μοντέλου ERA



Σχήμα 3.6: Απόκριση συχνότητας συστήματος n4sid

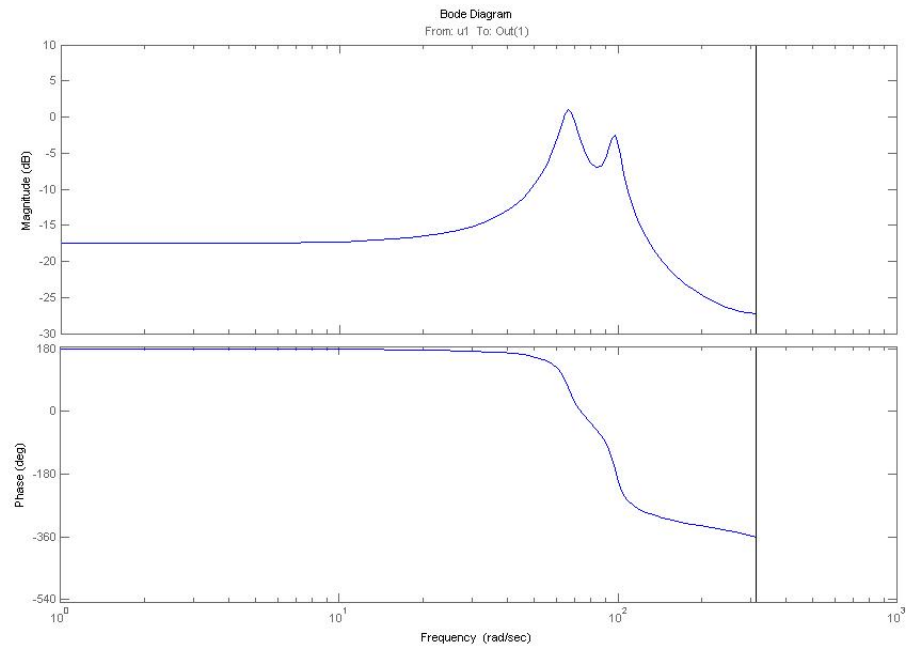


Σχήμα 3.7: Απόκριση συχνότητας συστήματος ERA



Σχήμα 3.8: Απόκριση συχνότητας συστήματος ERA με παρατηρητή κατάστασης

σχέλος δοκιμών έγινε με βάση ένα νέο μοντέλο, που προέκυψε πάλι με τον ίδιο τρόπο. Το διάγραμμα Bode του φαίνεται στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα Bode του νέου μοντέλου

Κεφάλαιο 4

Έλεγχος με Μοντέλο Πρόβλεψης

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Βασική αρχή λειτουργίας - Έννοια του ολισθαίνοντος ορίζοντα

Ο Έλεγχος με Μοντέλο Πρόβλεψης (Model Predictive Control - MPC) είναι μία σύγχρονη μέθοδος ελέγχου, η οποία ξεκίνησε να χρησιμοποιείται στην πετρελαιοβιομηχανία, αλλά όλο και περισσότερο πλέον εξαπλώνεται σε όλους τους τομείς της τεχνολογίας. Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο αυτή μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: Ο ελεγκτής έχει στη διάθεσή του ένα μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιεί για να προβλέψει τη συμπεριφορά του συστήματος, από την τρέχουσα χρονική στιγμή, και μέσα σε έναν *ορίζοντα πρόβλεψης* (*Prediction Horizon*). Με βάση την επιθυμητή τιμή της υπό έλεγχο μεταβλητής (setpoint), το μοντέλο αυτό και την τρέχουσα τιμή της εξόδου, ο ελεγκτής υπολογίζει το σήμα ελέγχου σε έναν μελλοντικό *ορίζοντα ελέγχου* (*Control Horizon*), το οποίο επιλέγεται τέτοιο ώστε το σύστημα να έχει τη βέλτιστη συμπεριφορά (όσο πλησιέστερα είναι δυνατόν στο setpoint).

Στη συνέχεια θα περιγραφεί αναλυτικότερα η λειτουργία του MPC.

Ο ελεγκτής λειτουργεί σε διακριτό χρόνο, με συγκεκριμένη συχνότητα δειγματοληψίας. Με k υποδηλώνεται η τρέχουσα χρονική στιγμή. Συνεπώς, την τρέχουσα χρονική στιγμή η έξοδος είναι $y(k)$. Το setpoint θα υποδηλώνεται με s ,

και δείχνει την πορεία την οποία πρέπει να ακολουθήσει η έξοδος, σε ιδανική περίπτωση. Συχνά το setpoint είναι μία σταθερά. Εκτός όμως από το setpoint, υπάρχει και το σήμα της ακολουθίας αναφοράς $r(k)$, (reference trajectory), το οποίο ξεκινά από την τρέχουσα τιμή $y(k)$, και περιγράφει την ιδανική τροχιά μέσω της οποίας η έξοδος του συστήματος θα πρέπει να φτάσει στην επιθυμητή τιμή. Στη συνήθη περίπτωση, το $r(k)$ συγκλίνει εκθετικά στο s , με μία χρονική σταθερά T_{ref} να καθορίζει την ταχύτητα της προσέγγισης. Αν το τρέχον σφάλμα είναι

$$\epsilon(k) = s(k) - y(k) \quad (4.1)$$

επιλέγεται μια τροχιά προσέγγισης τέτοια, ώστε το σφάλμα μετά από i χρονικές στιγμές, αν η έξοδος την ακολουθούσε επακριβώς, να είναι

$$\begin{aligned} \epsilon(k+i) &= e^{-iT_s/T_{ref}} \\ &= \lambda^i \epsilon(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας και $\lambda = e^{-T_s/T_{ref}}$, με $0 < \lambda < 1$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} r(k+i|k) &= s(k+i) - \epsilon(k+i) \\ &= s(k+i) - e^{-iT_s/T_{ref}} \epsilon(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

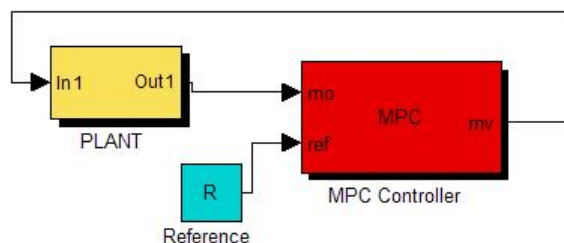
Ο συμβολισμός $r(k+i|k)$ υποδηλώνει ότι το r εξαρτάται από τις συνθήκες τη χρονική στιγμή k .

Ο ελεγκτής περιλαμβάνει ένα εσωτερικό μοντέλο πρόβλεψης, το οποίο χρησιμοποιεί για να προβλέψει τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος, ξεκινώντας από την τρέχουσα χρονική στιγμή, στο βάθος ενός ορίζοντα πρόβλεψης. Η προβλεπόμενη συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται από την ακολουθία των σημάτων ελέγχου, που υπολογίζει ο ελεγκτής, $\hat{u}(k+i|k)$ με $(i = 0, 1, \dots, H_p - 1)$, όπου με H_p υποδηλώνεται ο ορίζοντας πρόβλεψης. Το σύμβολο $\hat{u}(k+i|k)$ υποδηλώνει την πρόβλεψη που γίνεται τη χρονική στιγμή k για την τιμή του σήματος ελέγχου, u , τη χρονική στιγμή $k+i$. Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε τη (μετρούμενη) τιμή της εξόδου, $y(k)$, όταν υπολογίζεται η τιμή της εισόδου ελέγχου, $u(k)$. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό μοντέλο του ελεγκτή πρέπει να είναι *αυστηρώς κατάλληλο*, που σημαίνει ότι το $y(k)$ εξαρτάται *μόνο* από τις παρελθούσες τιμές $u(k-1), u(k-2), \dots$ της εισόδου, και όχι από την τιμή $u(k)$.

Στην πιο απλή περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία της εισόδου τέτοια ώστε η τιμή της εξόδου στο τέλος του ορίζοντα πρόβλεψης, δηλαδή τη χρονική στιγμή $k + H_p$, να πάρει την επιθυμητή τιμή $r(k + H_p)$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα σημείο σύμπτωσης (*coincidence point*), στο χρόνο $k + H_p$. Υπάρχουν διάφορες ακολουθίες $\{\hat{u}(k|k), \hat{u}(k + 1|k), \dots, \hat{u}(k + H_p - 1|k)\}$ που να το επιτυγχάνουν αυτό, και ο ελεγκτής υπολογίζει κάποια συγκεκριμένη, βασιζόμενος σε κάποια κριτήρια (βάρη), για παράδειγμα αυτή που απαιτεί τη μικρότερη ενέργεια.

Συνήθως προτιμάται η είσοδος (σήμα ελέγχου) να παραμετροποιείται, με μικρότερο αριθμό παραμέτρων. Αν υποθεθεί ότι η είσοδος μεταβάλλεται στα πρώτα n χρονικά βήματα του ορίζοντα πρόβλεψης, και μετά παραμένει σταθερή, δηλαδή $\hat{u}(k + n - 1|k) = \hat{u}(k + n|k) = \dots = \hat{u}(k + H_p - 1|k)$, μένουν μόνο n «παραμέτροι» να υπολογιστούν, οι $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k + 1|k), \dots, \hat{u}(k + n - 1|k)$.

Αφού ο ελεγκτής επιλέξει την μελλοντική ακολουθία των τιμών της εισόδου, εφαρμόζεται στο σύστημα μόνο το πρώτο στοιχείο της. Είναι δηλαδή $u(k) = \hat{u}(k|k)$, όπου $u(k)$ είναι το πραγματικό σήμα που εφαρμόζεται. Στην επόμενη στιγμή δειγματοληψίας, ο ίδιος κύκλος επαναλαμβάνεται: Μετράται η έξοδος $y(k+1)$, υπολογίζεται η νέα ακολουθία αναφοράς $r(k+i|k+1)$, γίνεται πρόβλεψη στον ορίζοντα $k + 1 + i$, με $i = 1, 2, \dots, H_p$, υπολογίζεται η νέα ακολουθία των τιμών της εισόδου (σήματος ελέγχου) $\hat{u}(k + 1 + i|k + 1)$, με $i = 0, 2, \dots, H_p - 1$, και το πρώτο στοιχείο αυτή της ακολουθίας, $u(k + 1) = \hat{u}(k + 1|k + 1)$, εφαρμόζεται στο φυσικό σύστημα. Ο ορίζοντας πρόβλεψης συνεχίζει να έχει το ίδιο μήκος H_p , αλλά ολισθαίνει κατά ένα διάστημα δειγματοληψίας κάθε φορά, για αυτό και αποκαλείται ολισθαίνων ορίζοντας (*receding horizon*).



Σχήμα 4.1: Σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με ελεγκτή MPC

Στο σχήμα 4.1 φαίνεται ένα σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με ελεγκτή

MPC. Ο ελεγκτής λαμβάνει στη είσοδό του την τιμή της υπό έλεγχο μεταβλητής, η οποία είναι έξοδος του υπό έλεγχο συστήματος (Plant στο σχήμα). Την τιμή αυτή την συγκρίνει με το σήμα αναφοράς (Reference). Στη συνέχεια, μέσω της διαδικασίας που θα αναλυθεί παρακάτω, ο ελεγκτής επιλέγει μία μελλοντική ακολουθία τιμών, το πρώτο στοιχείο της οποίας εφαρμόζει ως είσοδο στο υπό έλεγχο σύστημα.

4.1.2 Υπολογισμός Βέλτιστης εισόδου

Σε αυτή την παράγραφο θα σχηματιστεί η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος του MPC (επιλογή βέλτιστης εισόδου), σε μια απλοποιημένη εκδοχή του.

Στην απλούστερη περίπτωση, έχουμε ένα μόνο σημείο σύμπτωσης $k + H_p$ και μία μόνο παράμετρο να επιλέξουμε, όσον αφορά στην ακολουθία των τιμών της εισόδου $\hat{u}(k|k)$. Σε αυτή (και μόνο) την περίπτωση το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Με βάση το μοντέλο, υπολογίζουμε την προβλεπόμενη ελεύθερη απόκριση $y_f(k + H_p)$ του συστήματος, δηλαδή την απόκριση που θα είχαμε στο σημείο σύμπτωσης $k + H_p$, αν το σήμα ελέγχου παρέμενε σταθερό στην τελευταία τιμή του $u(k - 1)$. Αν $S(H_p)$ είναι η βηματική απόκριση του μοντέλου, H_p χρονικές στιγμές μετά την εφαρμογή της βηματικής εισόδου, η προβλεπόμενη έξοδος στη χρονική στιγμή $k + H_p$ είναι

$$\hat{y}(k + H_p|k) = \hat{y}_f(k + H_p|k) + S(H_p)\Delta\hat{u}(k|k) \quad (4.4)$$

όπου

$$\Delta\hat{u}(k|k) = \hat{u}(k|k) - u(k - 1) \quad (4.5)$$

είναι η μεταβολή της εισόδου, από την τιμή $u(k - 1)$ (τρέχουσα) στην προβλεπόμενη $\hat{u}(k|k)$. Θέλουμε να γίνει

$$\hat{y}(k + H_p|k) = r(k + H_p|k) \quad (4.6)$$

και κατά συνέπεια, η βέλτιστη μεταβολή της εισόδου είναι

$$\Delta\hat{u}(k|k) = \frac{r(k + H_p|k) - \hat{y}_f(k + H_p|k)}{S(H_p)} \quad (4.7)$$

Στα παραπάνω έχουμε υποθέσει ότι η έξοδος του μοντέλου είναι ίδια με αυτή του φυσικού συστήματος μέχρι τη στιγμή k , κάτι που δεν συμβαίνει στην πράξη.

Στην περίπτωση που έχουμε πάνω από ένα σημείο σύμπτωσης, η λύση μπορεί να δοθεί μόνο προσεγγιστικά, καθώς υπάρχουν περισσότερες εξισώσεις από μεταβλητές. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε c σημεία σύμπτωσης, και αντίστοιχα τις τιμές $r(k + P_1|k), r(k + P_2|k), \dots, r(k + P_c|k)$, με $P_c \geq H_p$, πρέπει να υπολογιστεί το $\hat{u}(k|k)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}\hat{r}(k + P_1|k) &= \hat{y}_f(k + P_1|k) + S(P_1)\Delta u(k|k) \\ \hat{r}(k + P_2|k) &= \hat{y}_f(k + P_2|k) + S(P_2)\Delta u(k|k) \\ &\vdots \\ \hat{r}(k + P_c|k) &= \hat{y}_f(k + P_c|k) + S(P_c)\Delta u(k|k)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Μία τέτοια εξίσωση επιλύεται κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Ορίζουμε τα διανύσματα:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \hat{r}(k + P_1|k) \\ \hat{r}(k + P_2|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k + P_c|k) \end{bmatrix} \quad \mathcal{Y}_f = \begin{bmatrix} \hat{y}_f(k + P_1|k) \\ \hat{y}_f(k + P_2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}_f(k + P_c|k) \end{bmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} S(P_1) \\ S(P_2) \\ \vdots \\ S(P_c) \end{bmatrix}\quad (4.9)$$

Η λύση κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$\Delta \hat{u}(k|k) = \mathcal{S}^\dagger (\mathcal{T} - \mathcal{Y})\quad (4.10)$$

όπου \mathcal{S}^\dagger είναι ο ψευδοαντίστροφος του \mathcal{S} .

Αν τώρα υποθεθεί μία πιο περίπλοκη μορφή της μελλοντικής ακολουθίας της εισόδου, δηλαδή ότι η είσοδος μεταβάλλεται μέσα στα επόμενα H_u βήματα ($H_u < H_p$), έχουμε να επιλέξουμε την ακολουθία $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+H_u-1|k)$, ενώ είναι $\hat{u}(k+H_u-1|k) = \hat{u}(k+H_u|k) = \dots = \hat{u}(k+H_p-1|k)$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}\hat{y}(k + P_i|k) &= \hat{y}_f(k + P_i|k) + H(P_i)[\hat{u}(k|k) - u(k-1)] \\ &\quad + H(P_i - 1)[\hat{u}(k+1|k) - u(k-1)] + \dots \\ &\quad + H(P_i - H_u + 2)[\hat{u}(k+H_u-2|k) - u(k-1)] \\ &\quad + S(P_i - H_u + 1)[\hat{u}(k+H_u-1|k) - u(k-1)]\end{aligned}\quad (4.11)$$

όπου $H(j) = S(j) - S(j - 1)$ (χρουστική απόκριση). Η (4.11) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\begin{aligned}\hat{y}(k + P_i|k) = & \hat{y}_f(k + P_i|k) + S(P_i)\Delta\hat{u}(k|k) \\ & + S(P_i - 1)\Delta\hat{u}(k + 1|k) + \dots \\ & + S(P_i - H_u + 1)\Delta\hat{u}(k + H_u - 1|k)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Αν ορίσουμε

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k + P_1|k) \\ \hat{y}(k + P_2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k + P_c|k) \end{bmatrix} \quad \Delta\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k + 1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k + H_u - 1|k) \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} S(P_1) & S(P_1 - 1) & \dots & S(1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S(P_2) & S(P_2 - 1) & \dots & \dots & \dots & \dots & S(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(P_c) & S(P_c - 1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & S(P_c - H_u + 1) \end{bmatrix}\quad (4.13)$$

το σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_f + \Theta\Delta\mathcal{U}\quad (4.14)$$

Θέλουμε να επιτύχουμε $\mathcal{Y} = \mathcal{T}$. Η λύση δίνεται κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων και είναι, χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό με την (4.10)

$$\Delta\mathcal{U} = \Theta^\dagger[\mathcal{T} - \mathcal{Y}_f]\quad (4.15)$$

Επιλέγοντας το πρώτο στοιχείο του $\Delta\mathcal{U}$, δηλαδή το $\Delta\hat{u}(k|k)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του σήματος εισόδου που θα εφαρμοστεί στο σύστημα:

$$u(k) = \Delta\hat{u}(k|k) + u(k - 1)\quad (4.16)$$

4.2 Μορφοποίηση του προβλήματος

Το μοντέλο του συστήματος, σύμφωνα με το οποίο ο ελεγκτής κάνει την πρόβλεψη, είναι στο χώρο καταστάσεων:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= C_y x(k)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Ενώ επιπλέον προστίθεται η εξίσωση

$$z(k) = C_z x(k) \quad (4.18)$$

όπου z είναι το διάνυσμα των ελεγχόμενων μεταβλητών εξόδου. Συχνά, όπως και στην παρούσα εργασία, οι μεταβλητές y και z ταυτίζονται.

Το μοντέλο δεν πρέπει να περιλαμβάνει τον όρο $Du(k)$ στην εξίσωση εξόδου (direct feedthrough), γιατί πάντα υπάρχει μία καθυστέρηση ανάμεσα στη μέτρηση του $y(k)$ και στην εφαρμογή του $u(k)$. Αν το μοντέλο περιλαμβάνει αυτό τον όρο, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με κατάλληλο μετασχηματισμό.

4.2.1 Συνάρτηση κόστους

Η συνάρτηση κόστους V «τιμωρεί» τις αποκλίσεις της (προβλεπόμενης) εξόδου από το σήμα αναφοράς και καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη συμπεριφορά του ελεγκτή. Ορίζεται ως εξής:

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \left\| \hat{z}(k+i|k) - r(k+i|k) \right\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \left\| \Delta \hat{u}(k+i|k) \right\|_{R(i)}^2 \quad (4.19)$$

Ο συμβολισμός $\left\| x \right\|_Q^2 = x^T Q x$ υποδηλώνει τετραγωνική μορφή. Στη συνάρτηση κόστους (4.19) μπορούν να μπουν περιορισμοί με τη μορφή ανισοτήτων, τόσο όσον αφορά στην έξοδο, ώστε να μην ξεπερνάει κάποια οριακή τιμή, όσο και όσον αφορά στην είσοδο ελέγχου και τη μεταβολή της. Ο δείκτης H_w δείχνει ότι η συνάρτηση μπορεί να μην λαμβάνει υπ' όψιν τις αποκλίσεις από το ξεκίνημα, στη συνήθη περίπτωση όμως είναι $H_w = 1$.

4.2.2 Πρόβλεψη

Ο ελεγκτής πρέπει να προβλέψει τις μελλοντικές τιμές της (ελεγχόμενης) εξόδου του συστήματος, $\hat{z}(k+i|k)$, με βάση την παρούσα του κατάσταση,

$\hat{x}(k|k)$, και τις μελλοντικές τιμές του σήματος ελέγχου (ή, αλλιώς, της τελευταίας εισόδου $u(k-1)$ και τις μελλοντικές αλλαγές της $\Delta\hat{u}(k+i|k)$).

Η επιλογή της στρατηγικής πρόβλεψης είναι μία σημαντική παράμετρος για τον σχεδιασμό του ελεγκτή. Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι με την επιλογή αυτής της στρατηγικής, στην ουσία επιλέγεται ένα μοντέλο του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο λειτουργεί ο ελεγκτής, καθώς γίνονται υποθέσεις που αφορούν στα σφάλματα μετρήσεων, στον θόρυβο και στις διάφορες διαταραχές που επιδρούν στο σύστημα. Αυτό θα φανεί καλύτερα αναλύοντας τις πιο βασικές μεθόδους πρόβλεψης.

Απουσία διαταραχών, πλήρης μέτρηση κατάστασης

Αυτή είναι η πιο απλή περίπτωση. Θεωρούμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε όλο το διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή ισχύει $\hat{x}(k|k) = x(k) = y(k)$ και κατά συνέπεια $C_y = I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Τότε

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k) &= Ax(k) + B\hat{u}(k|k) \\ \hat{x}(k+2|k) &= A\hat{x}(k+1|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\ &= A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\ &\vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) &= A\hat{x}(k+H_p-1|k) + B\hat{u}(k+H_p-1|k) \\ &= A^{H_p}x(k) + A^{H_p-1}B\hat{u}(k|k) + \dots + B\hat{u}(k+H_p-1|k) \quad (4.20)\end{aligned}$$

Έχουμε υποθέσει ότι η είσοδος αλλάζει μόνο στο χρονικό διάστημα $k, k+1, \dots, k+H_u-1$ και παραμένει σταθερή μετά από αυτό, και άρα $\hat{u}(k+i|k) = \hat{u}(k+H_u-1|k)$, για $H_u \leq i \leq H_p-1$. Θα εκφράσουμε τώρα τις μελλοντικές τιμές του σήματος ελέγχου $\hat{u}(k+i|k)$ σε όρους των διαφορών $\Delta\hat{u}(k+i|k)$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(k|k) &= \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \\ \hat{u}(k+1|k) &= \Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \\ &\vdots \\ \hat{u}(k+H_u-1|k) &= \Delta\hat{u}(k+H_u-1|k) + \dots + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \quad (4.21)\end{aligned}$$

Και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|k) &= Ax(k) + B[\Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] \\
\hat{x}(k+2|k) &= A^2x(k) + AB[\Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] + \\
&\quad + B[\Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] \\
&= A^2x(k) + (A+I)B\Delta\hat{u}(k|k) + B\Delta\hat{u}(k+1|k) + (A+I)Bu(k-1) \\
&\quad \vdots \\
\hat{x}(k+H_u|k) &= A^{H_u}x(k) + (A^{H_u-1} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) + \\
&\quad + \dots + B\Delta\hat{u}(k+H_u-1|k) + (A^{H_u-1} + \dots + A + I)Bu(k-1)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Έχοντας πλέον φτάσει στην χρονική στιγμή $k + H_u$, η συνέχεια γίνεται

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+H_u+1|k) &= A^{H_u+1}x(k) + (A^{H_u} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) + \\
&\quad + \dots + (A+I)B\Delta\hat{u}(k+H_u-1|k) \\
&\quad + (A^{H_u} + \dots + A + I)Bu(k-1) \\
&\quad \vdots \\
\hat{x}(k+H_p|k) &= A^{H_p}x(k) + (A^{H_p-1} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) + \\
&\quad + \dots + (A^{H_p-H_u} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k+H_u-1|k) + \\
&\quad + (A^{H_p-1} + \dots + A + I)Bu(k-1)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Οι (4.22), (4.23), γράφονται σε μία εξίσωση, σε μορφή πινάκων:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_u|k) \\ \hat{x}(k+H_u+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ A^{H_u+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB+B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B & \dots & AB+B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix} \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Τώρα μπορεί να υπολογιστεί η πρόβλεψη για τις τιμές που θα πάρει η μεταβλητή z :

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(k+1|k) &= C_z \hat{x}(k+1|k) \\
 \hat{z}(k+2|k) &= C_z \hat{x}(k+2|k) \\
 &\vdots \\
 \hat{z}(k+H_p|k) &= C_z \hat{x}(k+H_p|k) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k) \\ \hat{z}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Στη σχέση (4.24) απαιτείται υπολογισμός της ποσότητας A^i , πιθανότατα και για μεγάλες τιμές του i . Καθώς οι υπολογιστές λειτουργούν με πεπερασμένη ακρίβεια, μπορεί να οδηγηθούμε σε αριθμητικά σφάλματα. Για αυτό το λόγο, είναι πιο ασφαλές οι υπολογισμοί να γίνονται με επαναληπτικό τρόπο.

Σταθερή διαταραχή εξόδου

Σε αυτή τη θεωρήση υπάρχουν διαταραχές οι οποίες επιδρούν πάνω στην έξοδο του συστήματος και ισχύει $z = y$. Τη χρονική στιγμή k δεν γνωρίζουμε ποια είναι η τιμή της διαταραχής, $d(k)$, αλλά μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμησή της, $\hat{d}(k)$, συγκρίνοντας την έξοδο που μετρούμε με την προβλεπόμενη:

$$\begin{aligned}y(k) &= \hat{y}(k|k-1) + \hat{d}(k) \\ &= C_y \hat{x}(k|k-1) + \hat{d}(k|k)\end{aligned}\quad (4.27)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η διαταραχή αυτή παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια του οριζοντα πρόβλεψης. Συνεπώς, αν και οι σχέσεις (4.17), (4.18) παραμένουν, η πρόβλεψη των y και z γίνεται ως εξής:

$$\hat{z}(k+i|k) = \hat{y}(k+i|k) = C_y \hat{x}(k+i|k) + \hat{d}(k+i|k)\quad (4.28)$$

όπου

$$\hat{d}(k+i|k) = \hat{d}(k|k)\quad (4.29)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, σε κάθε χρονικό βήμα k γίνονται οι εξής ενέργειες:

1. Μέτρηση της εξόδου $y(k)$ του συστήματος.
2. Εκτίμηση της διαταραχής σύμφωνα με την (4.27).
3. Πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της εξόδου σύμφωνα με την (4.29).

Είναι δυνατόν να γίνουν και πιο περίπλοκες υποθέσεις για την φύση της διαταραχής. Η υπόθεση της σταθερής διαταραχής ονομάζεται DMC (Dynamic Matrix Control).

Παρατηρούμε ότι υιοθετώντας αυτή την υπόθεση είναι $\hat{y}(k+i|k) \neq \hat{x}(k+i|k)$, ακόμα και αν $C_y = I$.

Σε αυτή την περίπτωση, και γενικά στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να μετρήσουμε όλα τα στοιχεία του διανύσματος κατάστασης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν παρατηρητή κατάστασης για να τα εκτιμήσουμε, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο που αφορά στην αναγνώριση του συστήματος.

4.3 Επίλυση του προβλήματος

Στις παρακάτω παραγράφους αναλύεται η μέθοδος επίλυσης του βασικού προβλήματος του MPC. Καθώς κατά τη διάρκεια των δοκιμών δεν προέκυψε ανάγκη για χρήση περιορισμών, θα αναπτυχθεί μόνο η λύση του μη περιορισμένου (*unconstrained*) προβλήματος.

Στην ανάλυση αυτή θα ενσωματωθεί η συνάρτηση κόστους (4.19) στην επίλυση του προβλήματος και θα αναδειχθεί η σημασία της. Η ανάλυση θα ξεκινήσει από την πιο απλή περίπτωση, κατά την οποία όλο το διάστημα κατάστασης είναι μετρήσιμο, στη συνέχεια το πρόβλημα θα μορφοποιηθεί ως πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων και, τέλος, θα προκύψει η επίλυση του προβλήματος στην περίπτωση κατά την οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί παρατηρητής κατάστασης.

4.3.1 Πλήρης μέτρηση κατάστασης

Η συνάρτηση κόστους, όπως εισήχθη στην παράγραφο 4.2.1, είναι

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \left\| \hat{z}(k+i|k) - r(k+i|k) \right\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \left\| \Delta \hat{u}(k+i|k) \right\|_{R(i)}^2 \quad (4.30)$$

που μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$V(k) = \left\| \mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k) \right\|_Q^2 - \left\| \Delta \mathcal{U}(k) \right\|_R^2 \quad (4.31)$$

όπου

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \hat{z}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad \mathcal{T}(k) = \begin{bmatrix} \hat{r}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+H_p|k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathcal{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

και τα Q , R είναι οι πίνακες βαρών:

$$Q = \begin{bmatrix} Q(H_w) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(H_w+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q(H_p) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q(H_u - 1) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.24), (4.26), το \mathcal{Z} μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{Z}(k) = \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta \mathcal{U}(k) \quad (4.35)$$

με Ψ , Υ , Θ κατάλληλους πίνακες. Ορίζουμε το διάνυσμα του σφάλματος

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{T}(k) - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1) \quad (4.36)$$

ως τη διαφορά μεταξύ των μελλοντικών τιμών του σήματος αναφοράς και της «ελεύθερης απόκρισης» του συστήματος, δηλαδή της απόκρισης που θα είχαμε στη διάρκεια του ορίζοντα πρόβλεψης αν θέσουμε $\Delta \mathcal{U}(k) = 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} V(k) &= \left\| \Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k) \right\|_Q^2 + \left\| \Delta \mathcal{U}(k) \right\|_R^2 \\ &= [\Delta \mathcal{U}(k)^T \Theta^T - \mathcal{E}(k)^T] \mathcal{Q} [\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)] + \Delta \mathcal{U}(k)^T \mathcal{R} \Delta \mathcal{U}(k) \\ &= \mathcal{E}(k)^T \mathcal{Q} \mathcal{E}(k) - 2 \Delta \mathcal{U}(k)^T \Theta^T \mathcal{Q} \mathcal{E}(k) + \Delta \mathcal{U}(k)^T [\Theta^T \mathcal{Q} \Theta + \mathcal{R}] \Delta \mathcal{U}(k) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Η παράσταση αυτή είναι της μορφής

$$V(k) = \text{const} - \Delta \mathcal{U}(k)^T \mathcal{G} + \Delta \mathcal{U}(k)^T \mathcal{H} \Delta \mathcal{U}(k) \quad (4.38)$$

όπου

$$\mathcal{G} = 2 \Theta^T \mathcal{Q} \mathcal{E}(k) \quad (4.39)$$

και

$$\mathcal{H} = \Theta^T \mathcal{Q} \Theta + \mathcal{R} \quad (4.40)$$

Κανένα από τα \mathcal{G} , \mathcal{H} δεν εξαρτάται από το $\Delta \mathcal{U}(k)$.

Για να βρεθεί το βέλτιστο $\Delta \mathcal{U}(k)$ θα πρέπει να θέσουμε το

$$\nabla_{\Delta \mathcal{U}(k)} V = -\mathcal{G} + 2 \mathcal{H} \Delta \mathcal{U}(k) \quad (4.41)$$

ίσο με το μηδέν. Συνεπώς, η βέλτιστη ακολουθία μελλοντικών εισόδων στο σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta \mathcal{U}(k)_{opt} = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{G} \quad (4.42)$$

Καθώς μόνο το πρώτο στοιχείο αυτής της ακολουθίας εφαρμόζεται στο σύστημα, είναι

$$\Delta u(k)_{opt} = [I_l, \underbrace{0_l, \dots, 0_l}_{(H_u-1)}] \Delta \mathcal{U}(k)_{opt} \quad (4.43)$$

όπου l ο αριθμός των εισόδων στο σύστημα, I_l ο $l \times l$ μοναδιαίος πίνακας και 0_l ο $l \times l$ μηδενικός πίνακας.

Η συνάρτηση κόστους (4.19) πρέπει να είναι θετικά ορισμένη (*positive definite*), $V(k) > 0$, ή έστω ημι-θετικά ορισμένη (*semi-positive definite*), $V(k) \geq 0$. Για αυτό απαιτείται να ισχύει η συνθήκη $Q(i) \geq 0$ για κάθε i , που συνεπάγεται ότι $\Theta^T Q \Theta \geq 0$. Αν παραγωγίσουμε ξανά ως προς $\Delta \mathcal{U}(k)$, λαμβάνουμε τον πίνακα με τις δεύτερες παραγώγους

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta \mathcal{U}(k)^2} = 2\mathcal{H} = 2(\Theta^T Q \Theta + \mathcal{R}) \quad (4.44)$$

Αν ισχύει ότι $\mathcal{R} > 0$ για κάθε i , η λύση (4.42) δίνει το ελάχιστο της (4.44), η οποία θα είναι σίγουρα θετικά ορισμένη.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως δε θέλουμε να αναθέσουμε βάρος στην είσοδο, που σημαίνει $\mathcal{R}(i) = 0$. Ή μπορεί ακόμη να θέλουμε να μην αναθέσουμε βάρος σε κάποιες από τις εισόδους, κάτι που σημαίνει ότι $\mathcal{R} \geq 0$ και όχι $\mathcal{R} > 0$. Όταν λοιπόν $\mathcal{R} = 0$, θα πρέπει να είναι $\Theta^T Q \Theta > 0$ για να έχουμε ελάχιστο.

4.3.2 Ως πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

Η βέλτιστη λύση της εξίσωσης (4.42) δεν πρέπει ποτέ να υπολογίζεται με αντιστροφή του πίνακα \mathcal{H} . Για να αποφευχθούν τα αριθμητικά σφάλματα, ο καλύτερος τρόπος είναι να βρεθεί η λύση κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Καθώς ισχύει ότι $Q \geq 0$ και $\mathcal{R} \geq 0$, υπάρχουν οι πίνακες - «τετραγωνικές ρίζες», $S_Q, S_{\mathcal{R}}$ αντίστοιχα:

$$S_Q^T S_Q = Q, \quad S_{\mathcal{R}}^T S_{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \quad (4.45)$$

Αν οι Q, \mathcal{R} είναι διαγώνιοι, όπως είναι σχεδόν πάντα (βλ. εξ. (4.33), (4.34)), τότε για να βρούμε τους $S_Q, S_{\mathcal{R}}$ δεν έχουμε παρά να βρούμε την τετραγωνική ρίζα κάθε στοιχείου της διαγωνίου.

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} S_Q \{\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)\} \\ S_Q \Delta \mathcal{U}(k) \end{bmatrix}$$

για το οποίο ισχύει

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} S_Q \{\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)\} \\ S_Q \Delta \mathcal{U}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} S_Q \{\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)\} \\ S_Q \Delta \mathcal{U}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= [\mathcal{Z} - \mathcal{T}]^T S_Q^T S_Q [\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)] \\ &\quad + \Delta \mathcal{U}(k)^T S_{\mathcal{R}}^T S_{\mathcal{R}} \Delta \mathcal{U}(k) \\ &= \left\| \mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k) \right\|_Q^2 + \left\| \Delta \mathcal{U}(k) \right\|_{\mathcal{R}}^2 \\ &= V(k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Το $\Delta \mathcal{U}(k)_{opt}$ είναι η κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} S_Q \{\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)\} \\ S_Q \Delta \mathcal{U}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.47)$$

ή αλλιώς

$$\begin{bmatrix} S_Q \Theta \\ S_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \Delta \mathcal{U}(k) = \begin{bmatrix} S_Q \mathcal{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Η εξίσωση (4.48) είναι πάντα υπερ-ορισμένη. Το $\Delta \mathcal{U}(k)_{opt}$ βρίσκεται κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων:

$$\Delta \mathcal{U}(k) = \begin{bmatrix} S_Q \Theta \\ S_{\mathcal{R}} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} S_Q \mathcal{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

4.3.3 Με παρατηρητή κατάστασης

Στην πραγματικότητα συνήθως δεν έχουμε μέτρηση όλου του διανύσματος κατάστασης, κάτι που συμβαίνει και στο εν λόγω πείραμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε παρατηρητή κατάστασης. Η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι παρόμοια, μόνο που αντί για το διάνυσμα $x(k)$ χρησιμοποιούμε την εκτίμησή του, $\hat{x}(k|k)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.35) παίρνουμε το διάνυσμα των προβλεπόμενων εξόδων

$$\mathcal{Z}(k) = \Psi \hat{x}(k|k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta \mathcal{U}(k) \quad (4.50)$$

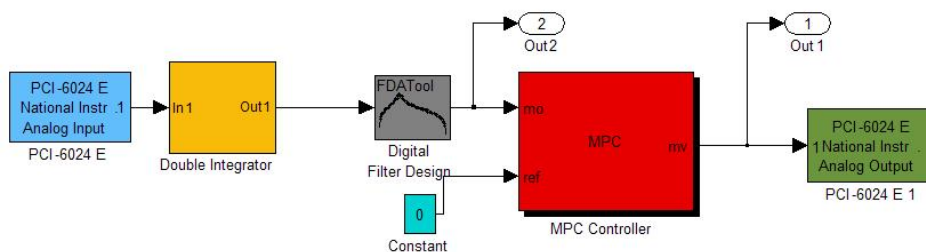
και το αντίστοιχο σφάλμα

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{T}(k) - \Psi \hat{x}(k|k) - \Upsilon u(k-1) \quad (4.51)$$

Από εκεί και πέρα, ο υπολογισμός του $\Delta U(k)$ γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

4.4 Πειραματική εφαρμογή - Αποτελέσματα

Στην παρούσα εφαρμογή έχουμε μία υπό έλεγχο μεταβλητή (τη μετατόπιση της διάταξης στο εγκάρσιο επίπεδο), η οποία συμπίπτει και με τη μοναδική έξοδο του συστήματός μας (συνεπώς $C_y = C_z$). Ο έλεγχος επιτυγχάνεται με ένα μοναδικό σήμα ελέγχου, που είναι το σήμα που δίνει ο υπολογιστής στον επενεργητή (Voice Coil) και αυτός εφαρμόζει πάνω στη διάταξη, στην οποία εφαρμόζονται ακόμη δύο μη μετρήσιμες διαταραχές (οι δυνάμεις που ασκούν οι έκκεντρες μάζες στους περιστρεφόμενους δίσκους). Με βάση αυτά έγινε και ο σχεδιασμός του ελεγκτή, με σκοπό να ελαχιστοποιηθεί η μετατόπιση (ταλάντωση) της διάταξης.



Σχήμα 4.2: Υλοποίηση συστήματος ελέγχου

Στο σχήμα 4.2 φαίνεται το διάγραμμα ροής της πειραματικής διαδικασίας. Ο υπολογιστής διαβάζει τις μετρήσεις του επιταχυνσιομέτρου από την κάρτα συλλογής δεδομένων. Το σήμα ολοκληρώνεται δύο φορές, για να μετατραπεί η μετρούμενη επιτάχυνση σε μετατόπιση, και περνάει από ένα ψηφιακό φίλτρο για να αφαιρεθούν τα ανεπιθύμητα στοιχεία (θόρυβος και ολίσθηση). Στη συνέχεια οδηγείται στον ελεγκτή και το σήμα ελέγχου που υπολογίζεται αποστέλλεται στο κανάλι εξόδου της κάρτας και από εκεί στον επενεργητή.

4.4.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή

Για το σχεδιασμό ενός ελεγκτή MPC χρειάζεται να υπολογιστούν/επιλεγούν τα παρακάτω στοιχεία/παράμετροι:

- Το μοντέλο πρόβλεψης
- Ο ορίζοντας πρόβλεψης
- Ο ορίζοντας ελέγχου
- Το σήμα αναφοράς
- Η μέθοδος πρόβλεψης και η αντιμετώπιση εξωτερικών διαταραχών
- Τα βάρη της συνάρτησης κόστους
- Οι περιορισμοί (αν υπάρχουν)

Ως μοντέλο πρόβλεψης χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο στο χώρο καταστάσεων που προέκυψε από τη μέθοδο αναγνώρισης ERA, με μία προσθήκη που θα αναλυθεί παρακάτω, με σκοπό την αντιμετώπιση των μη μετρήσιμων διαταραχών.

Όσον αφορά στους ορίζοντες, μετά από τις απαραίτητες δοκιμές αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν οι εξής τιμές: για τον ορίζοντα πρόβλεψης $H_p = 20$ και $H_p = 10$, σε άλλες δοκιμές, και για τον ορίζοντα ελέγχου $H_c = 4$ και $H_c = 2$. Καλύτερη επιλογή αποδείχθηκε το ζεύγος $H_p = 20$ και $H_c = 4$.

Ως τιμή αναφοράς τέθηκε $y = 0$ (δηλαδή στην ιδανική περίπτωση η διάταξη δε θα ταλαντωνόταν καθόλου).

Στη συνάρτηση κόστους χρησιμοποιήθηκαν τα εξής βάρη: Για τη μεταβολή των μεταβλητών εισόδου, το βάρος ήταν $R = 0.1$ και το βάρος της απόκλισης της εξόδου από την τιμή αναφοράς $Q = 1$.

Περιορισμοί δεν χρησιμοποιήθηκαν, καθώς δεν κρίθηκε απαραίτητο.

Η περίοδος δειγματοληψίας ήταν παντού $T_s = 0.01$ sec.

Μοντέλο πρόβλεψης του ελεγκτή - τροποποίηση υπάρχοντος μοντέλου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την πρόβλεψη χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο στο χώρο καταστάσεων που έδωσε η μέθοδος ERA. Αυτό το μοντέλο

περιγράφει την απόκριση του ακίνητου συστήματος στο σήμα ελέγχου. Πάνω στη διάταξη όμως ασκούνται και οι δυνάμεις λόγω των περιστρεφόμενων έκκεντρων μαζών, οι οποίες είναι άλλωστε και η αιτία της ταλάντωσής της και οι οποίες δεν συμπεριλαμβάνονται στο συγκεκριμένο μοντέλο. Πρέπει λοιπόν το μοντέλο να υποστεί να τροποποιηθεί, ώστε να τις συμπεριλάβει. Στην υπάρχουσα διάταξη δεν υπάρχει δυνατότητα μέτρησης αυτών των διαταραχών.

Για τον παραπάνω λόγο, δεν είναι δυνατό ένα πλήρες μοντέλο με σχέση εισόδου - εξόδου. Θα κάνουμε λοιπόν μία απλή παραδοχή, για μία ημιτονοειδή διαταραχή γνωστής συχνότητας $\omega = \omega_r = 2\pi f_r$ (f_r η ταχύτητα περιστροφής του άξονα), με άγνωστα πλάτος και φάση, τα οποία θα καθοριστούν από τις αρχικές συνθήκες, η οποία δρα απευθείας στο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος. Η πραγματικότητα είναι πιο σύνθετη, αλλά αυτό το απλουστευμένο μοντέλο κρίθηκε ικανοποιητικό για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Επιλέγοντας ως βοηθητικές μεταβλητές κατάστασης τις x_d, \dot{x}_d καπροκύπτει το παρακάτω μοντέλο συνεχούς χρόνου στο χώρο καταστάσεων

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi f_r)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Η βοηθητική μεταβλητή x_d εκφράζει την συνεισφορά της διαταραχής στην ολική κατάσταση του συστήματος.

Το πλήρες μοντέλο του συστήματος, που θα περιλαμβάνει τόσο τη δράση ελέγχου, όσο και τις δυνάμεις που ασκούν οι έκκεντρες μάζες θα προκύψει συνδυάζοντας τα παραπάνω με το μοντέλο που προέκυψε από τη διαδικασία αναγνώρισης του συστήματος, το οποίο θα έχουμε μετασχηματίσει στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή (*observable canonical form*), που σημαίνει ότι ο πίνακας C έχει τη μορφή $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Θέτοντας

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi f_r)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

και με $\mathbf{O}_{n \times m}$ να είναι ο $n \times m$ μηδενικός πίνακας, $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c$ οι πίνακες A, B του κανονικοποιημένου συστήματος που προέκυψε από τη διαδικασία αναγνώρισης,

μετασχηματισμένοι στο συνεχή χρόνο, το πλήρες μοντέλο του συστήματος θα είναι (στο συνεχή χρόνο):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{F} \\ \mathbf{O}_{4 \times 3} & \mathbf{\Omega}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{O}_{2 \times 1} \end{bmatrix} u(t) \quad (4.53)$$

Μετασχηματίζοντας και πάλι στο διακριτό χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0.01$ sec, προκύπτει η εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί στον ελεγκτή.

Η εξίσωση της εξόδου παραμένει η ίδια, με μοναδική αλλαγή την προσθήκη μηδενικών στοιχείων στον πίνακα $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, γώστε να συμπεριληφθούν και οι νέες μεταβλητές κατάστασης:

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} (k) \quad (4.54)$$

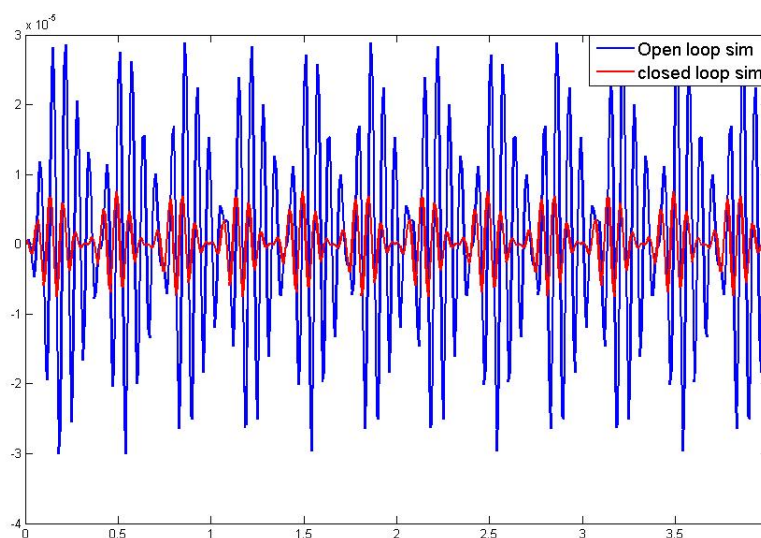
4.4.2 Αποτελέσματα

Με βάση το μοντέλο που αναπτύχθηκε παραπάνω και επιλέγοντας τις σχεδιαστικές παραμέτρους όπως στην ενότητα 4.4.1, σχεδιάστηκαν τέσσερις ελεγκτές, οι οποίοι στη συνέχεια δοκιμάστηκαν στην πειραματική διάταξη.

Αρχικά έγινε μία προσομοίωση της λειτουργίας του ελεγκτή στον υπολογιστή. Για να ομοιάζει αυτή η εικονική δοκιμή όσο το δυνατόν περισσότερο στις πραγματικές συνθήκες, το υπό έλεγχο σύστημα (Plant στο σχήμα 4.1), ήταν διαφορετικό από το εσωτερικό μοντέλο του ελεγκτή. Αυτό συμβαίνει και σε πραγματικές συνθήκες, καθώς κανένα μοντέλο δεν περιγράφει επακριβώς τη συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος. Το αποτέλεσμα αυτής της προσομοίωσης φαίνεται στο σχήμα 4.3, που συγκρίνει την απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου με την απόκριση του συστήματος ανοικτού βρόχου, δηλαδή χωρίς τη δράση του ελεγκτή.

Το αποτέλεσμα της προσομοίωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα, ήταν σημαντική μείωση του πλάτους των ταλαντώσεων, χωρίς όμως να αποσβεστούν πλήρως,

καθώς το μοντέλο του ελεγκτή ήταν διαφορετικό από το υπό έλεγχο σύστημα, ενώ στο σύστημα επιδρούσαν και μη μετρήσιμες διαταραχές, ακριβώς όπως και στις πραγματικές δοκιμές.

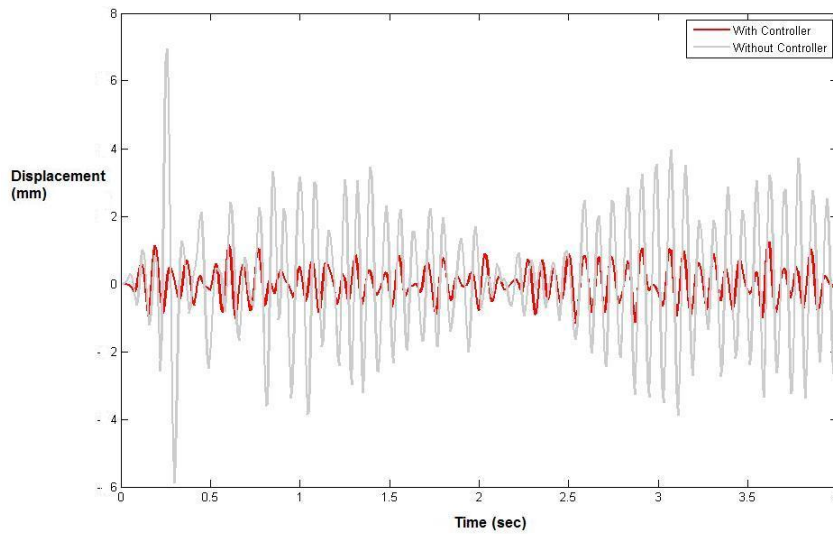


Σχήμα 4.3: Προσομοίωση λειτουργίας ελεγκτή

Οι δοκιμές που παρουσιάζονται έγιναν σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση δοκιμών χρησιμοποιήθηκαν οι ελεγκτές MPC I και MPC Ia. Στη συνέχεια χρειάστηκε να γίνει αλλαγή των ελατηρίων της διάταξης. Οι ελεγκτές MPC II και MPC III χρησιμοποιήθηκαν κατά τη δεύτερη φάση δοκιμών, με τα νέα ελατήρια.

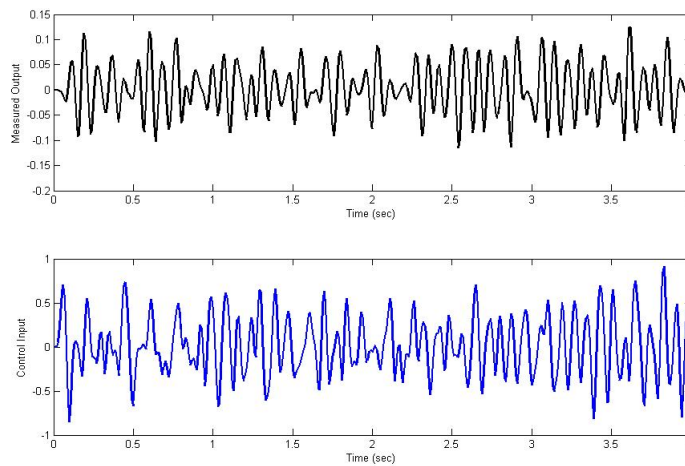
Η πρώτη φάση των δοκιμών έγινε με τα αρχικά ελατήρια. Τα καλύτερα αποτελέσματα επιτεύχθηκαν με τον ελεγκτή MPC I, ο οποίος είχε ορίζοντες πρόβλεψης και ελέγχου $H_p = 20$ και $H_c = 4$ αντίστοιχα και βάρη $Q = 1$, $R = 0.1$. Στο σχήμα 4.4 βλέπουμε ένα στιγμιότυπο των δοκιμών, στο οποίο συγκρίνονται οι αποκρίσεις του συστήματος χωρίς τον ελεγκτή και με αυτόν, σε ταχύτητα περιστροφής $f_r = 13.5$ Hz. Παρατηρούμε ότι η ταλάντωση χωρίς τον ελεγκτή ακολουθεί σε φάση την ταλάντωση του ελεύθερου συστήματος, ενώ η μείωση του πλάτους των ταλαντώσεων είναι εμφανής.

Στο σχήμα 4.5 φαίνονται η μετρούμενη έξοδος του συστήματος (πάνω), με τον ελεγκτή σε λειτουργία, και το σήμα ελέγχου (κάτω), που έδωσε ο ελεγκτής



Σχήμα 4.4: Ελεγκτής MPC I, με ταχύτητα περιστροφής $f_r = 13.5$ Hz

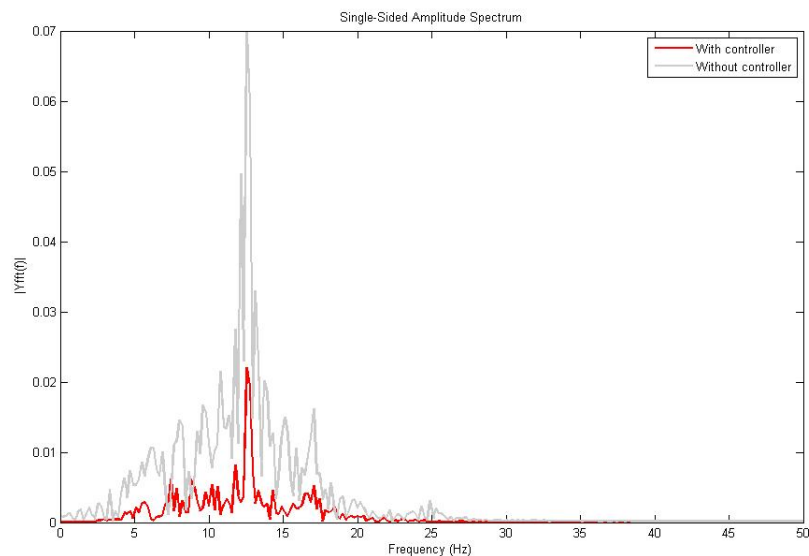
κατά τη δοκιμή.



Σχήμα 4.5: Έξοδος συστήματος (πάνω) και σήμα ελέγχου (κάτω) κατά τη λειτουργία του ελεγκτή MPC I

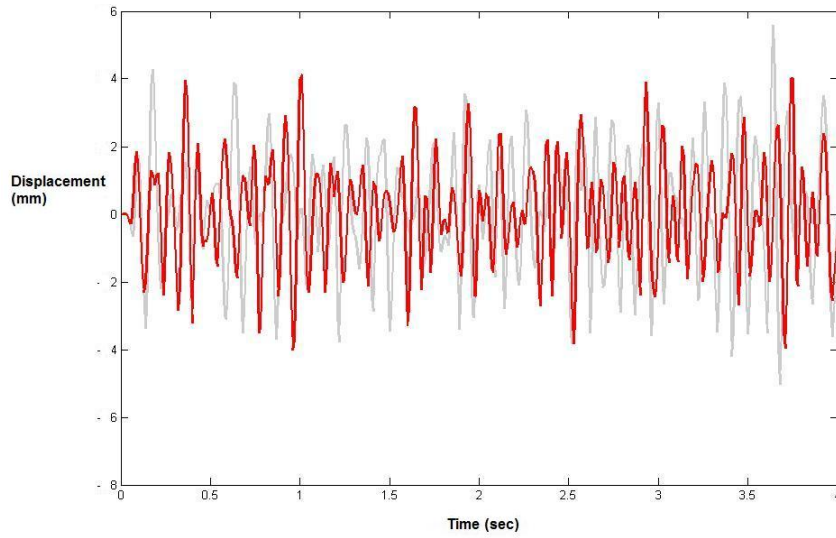
Ακόμα πιο καθαρά φαίνεται η βελτίωση της συμπεριφοράς βλέποντας τις μετρήσεις στο πεδίο της συχνότητας, συγκρίνοντας το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της εξόδου, με και χωρίς τον ελεγκτή (σχήμα 4.6). Ο μετασχηματισμός

έχει μία κορυφή στη συχνότητα περιστροφής του τροφείου. Η κορυφή βρίσκεται πολύ χαμηλότερα όταν χρησιμοποιείται ο ελεγκτής (περίπου στο 0.022 αντί για 0.07). Να σημειωθεί ότι οι παραστάσεις αυτές έχουν προκύψει από μετρήσεις μεγαλύτερης διάρκειας από αυτήν που φαίνεται στα στιγμιότυπα.

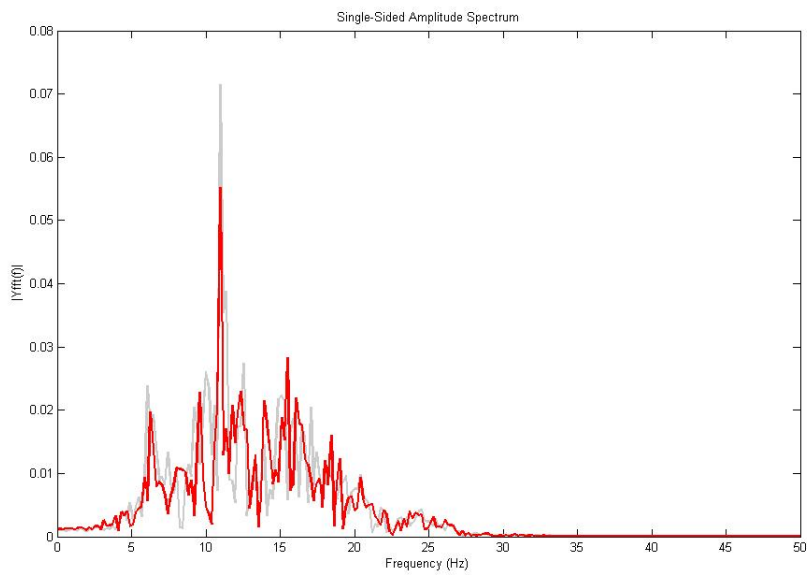


Σχήμα 4.6: Ελεγκτής MPC I - σύγκριση στο πεδίο της συχνότητας

Για να φανεί η σημασία της χρήσης του τροποποιημένου μοντέλου της ενότητας 4.4.1, που μοντελοποιεί τις μη μετρήσιμες διαταραχές που προκαλούν οι έκκεντρες μάζες, στα σχήματα 4.7 και 4.8 παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από δοκιμή με τον ελεγκτή MPC Ia, ο οποίος είχε τις ίδιες ρυθμίσεις με τον MPC I, χρησιμοποιούσε όμως το απλό μοντέλο που προέκυψε από τη διαδικασία αναγνώρισης του συστήματος, χωρίς δηλαδή να συμπεριλαμβάνει τη μη μετρήσιμη διαταραχή. Οι δοκιμές που παρουσιάζονται έγιναν σε μικρότερη συχνότητα περιστροφής, 11 Hz. Παρατηρείται ότι η βελτίωση είναι πολύ μικρότερη, όπως φαίνεται από το διάγραμμα πλάτους, αλλά και από τον μετασχηματισμό Fourier των μετρήσεων.



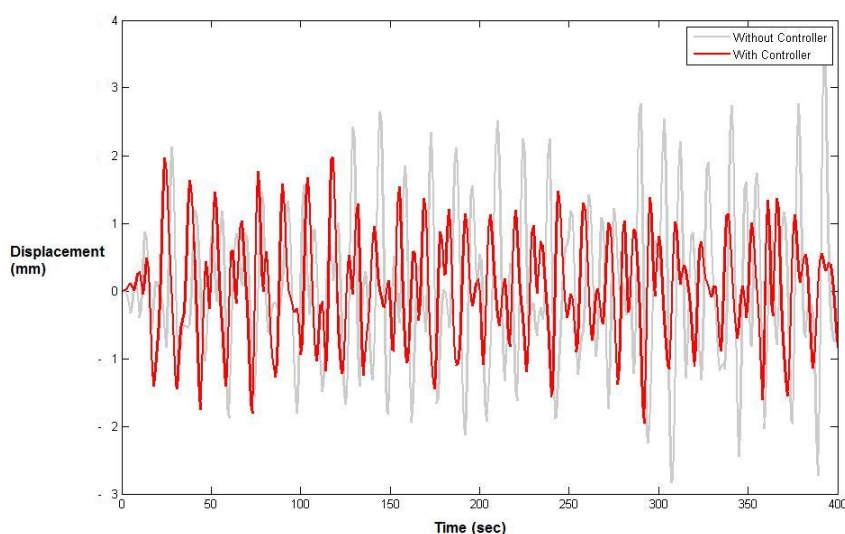
Σχήμα 4.7: Ελεγκτής MPC Ia



Σχήμα 4.8: Ελεγκτής MPC Ia - σύγκριση στο πεδίο της συχνότητας

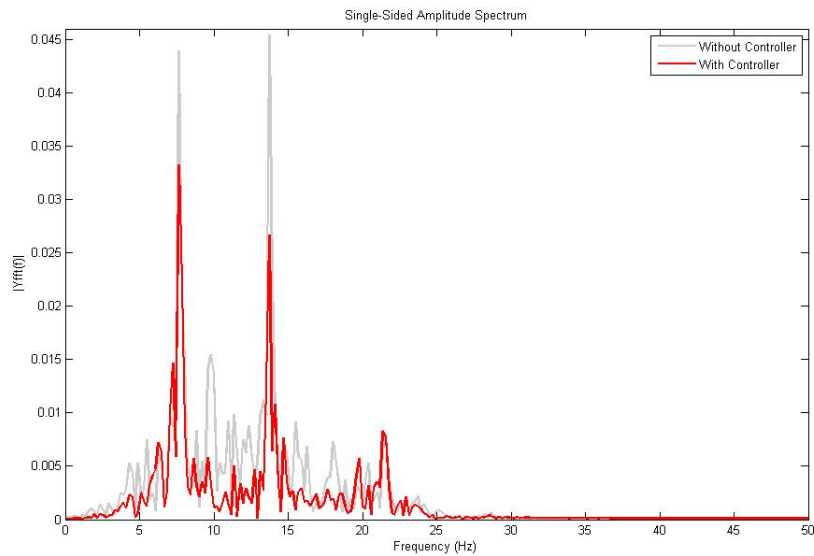
Κατά τη δεύτερη φάση δοκιμών χρειάστηκε να αλλαχθούν τα ελατήρια της έδρασης και να γίνει εκ νέου αναγνώριση του συστήματος, καθώς αυτό είχε αλλάξει συμπεριφορά. Στη φάση αυτή των δοκιμών χρησιμοποιήθηκαν οι ελεγκτές MPC II και MPC III.

Ο ελεγκτής MPC II, με ορίζοντες πρόβλεψης και ελέγχου $H_p = 20$ και $H_c = 4$ πάλι και βάρη $Q = 1$, $R = 0.1$ έδωσε τα αποτελέσματα του που φαίνονται στα σχήματα 4.9 και 4.10.



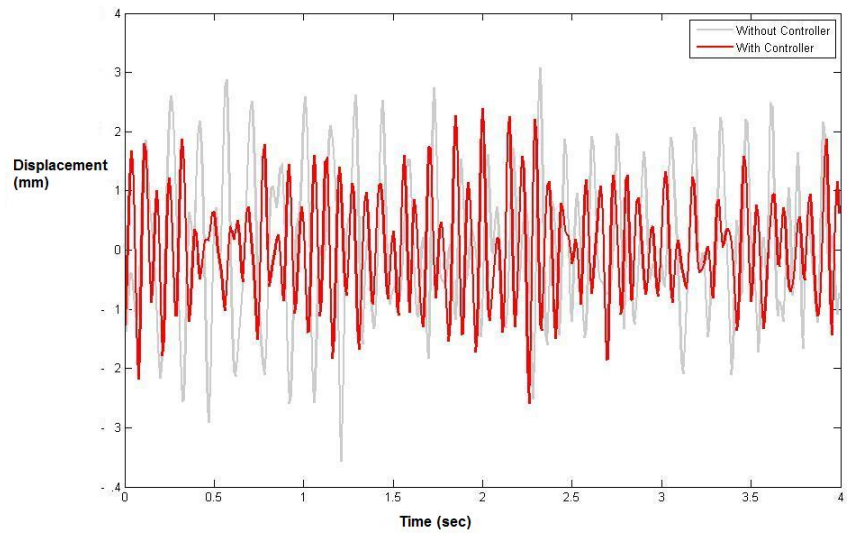
Σχήμα 4.9: Ελεγκτής MPC II

Από το σχήμα 4.10 φαίνεται ότι η απόκριση του συστήματος έχει νέα μορφή, με δύο κορυφές στο πεδίο της συχνότητας. Η μία κορυφή αντιστοιχεί στη συχνότητα περιστροφής $f_r = 13.5$ Hz και η νέα κορυφή, στα 7.5 Hz, αντιστοιχεί στην συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το τραπέζι πάνω στο οποίο βρίσκεται η διάταξη, ταλάντωση την οποία τα παλιά ελατήρια, που είχαν υποστεί κόπωση, δεν μπορούσαν να παραλάβουν.

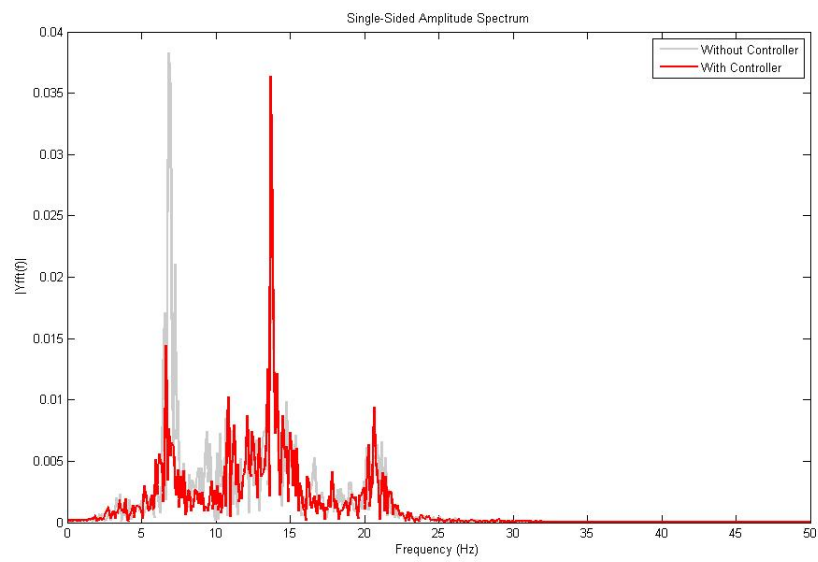


Σχήμα 4.10: Ελεγκτής MPC II
- σύγκριση στο πεδίο της συχνότητας

Σε αυτή τη φάση δοκιμών χρησιμοποιήθηκε και ο ελεγκτής MPC III, με διαφορετικές παραμέτρους από τον MPC II. Οι οριζόντες πρόβλεψης και ελέγχου H_p και H_c μειώθηκαν κατά 50%, λαμβάνοντας τις τιμές $H_p = 10$ και $H_c = 2$, ενώ τα βάρη της συνάρτησης κόστους παρέμειναν τα ίδια, $Q = 1$, $R = 0.1$. Στο σχήμα, 4.12 φαίνεται ότι, ενώ το ύψος της πρώτης κορυφής, συχνότητας 7.5 Hz, έχει μειωθεί από 0.038 σε 0.015, το ύψος της κορυφής στη συχνότητα περιστροφής $f_r = 13.5$ Hz έχει μείνει αμετάβλητη. Παρατηρώντας το σχήμα 4.11, που είναι στιγμιότυπο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς του ελεγκτή, φαίνεται ότι οι ταλαντώσεις έχουν μειωμένο πλάτος.



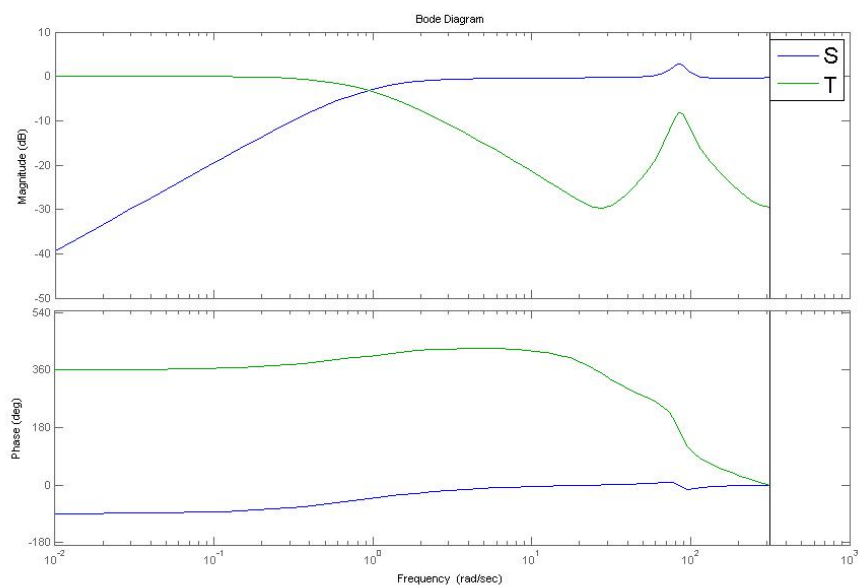
Σχήμα 4.11: Ελεγκτής MPC III



Σχήμα 4.12: Ελεγκτής MPC III - σύγκριση στο πεδίο της συχνότητας

4.4.3 Απόκριση συχνότητας

Ο ελεγκτής MPC χωρίς περιορισμούς (ή στα διαστήματα που οι περιορισμοί είναι ανενεργοί) αποτελεί γραμμικό σύστημα. Μπορούμε έτσι να παραστήσουμε τα διαγράμματα Bode των συναρτήσεων ευαισθησίας (sensitivity function) και συμπληρωματικής ευαισθησίας (complementary sensitivity function), S και T [6], του ελεγκτή MPC I, που χρησιμοποιούνται στην κλασική θεωρία ελέγχου.



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα Bode των συναρτήσεων ευαισθησίας και συμπληρωματικής ευαισθησίας

Η συνάρτηση ευαισθησίας S είναι το βασικό μέτρο της απόδοσης ενός βρόχου ελέγχου, όσον αφορά στο πόσο καλά μπορεί ο βρόχος να ακολουθήσει το σήμα αναφοράς και στην απόρριψη των διαταραχών. Η συνάρτηση συμπληρωματικής ευαισθησίας T αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου και αποτελεί μία ένδειξη για τα περιθώρια ευστάθειας του συστήματος. Περισσότερα πάνω στις συναρτήσεις ευαισθησίας αναφέρονται στο Παράρτημα Β'.5.

Παρατηρώντας το σχήμα 4.13 προκύπτουν τα εξής: Η μορφή της συνάρτησης S είναι η αναμενόμενη σε ένα σύστημα ελέγχου, έχοντας χαμηλή τιμή στις μικρές συχνότητες, κάτω από 1 rad/sec και ανεβαίνοντας στο 1 (0 dB) πάνω

από αυτή τη συχνότητα, με μία μικρή κορυφή στη συχνότητα περιστροφής. Η μορφή αυτή δείχνει ότι υπάρχει καλή απόρριψη διαταραχών (disturbance rejection) και ο βρόχος ακολουθεί ικανοποιητικά το σήμα αναφοράς.

Η συνάρτηση T έχει τιμή 0 dB μέχρι τη συχνότητα του 1 rad/sec και στη συνέχεια η τιμή της αρχίζει να πέφτει, παρουσιάζοντας όμως μια κορυφή στη συχνότητα περιστροφής. Η μορφή της συνάρτησης υποδηλώνει ότι ο βρόχος κινδυνεύει εύκολα να μεταπέσει σε αστάθεια, σε μία πιθανή μεταβολή της δυναμικής του συστήματος.

4.4.4 Συμπεράσματα

Σαν γενικό συμπέρασμα, φάνηκε ότι, όσον αφορά στους ορίζοντες πρόβλεψης και ελέγχου, ιδανική επιλογή ήταν $H_p = 20$ και $H_c = 4$. Η τροποποίηση του μοντέλου, ώστε να λαμβάνονται υπ' όψιν οι μη μετρήσιμες διαταραχές, βελτίωσε σημαντικά την απόδοση του ελεγκτή.

Τα καλύτερα αποτελέσματα έδωσε ο ελεγκτής MPC I, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε κατά την πρώτη φάση των δοκιμών. Ο ελεγκτής MPC Ia, με τις ίδιες ρυθμίσεις όσον αφορά στα βάρη και στους ορίζοντες του ελεγκτή, αλλά χωρίς το μοντέλο των μη μετρήσιμων διαταραχών πέτυχε μικρή μείωση των κραδασμών. Συγκρίνοντας τους μετασχηματισμούς Fourier των αποτελεσμάτων, ο ελεγκτής MPC I κατάφερε να μειώσει το ύψος της κορυφής κατά περίπου 68%, ενώ ο MPC Ia δεν πέτυχε μείωση μεγαλύτερη του 20%.

Στη δεύτερη φάση των δοκιμών, αν και δεν επιτεύχθηκαν το ίδιο εντυπωσιακά αποτελέσματα, ο ελεγκτής MPC II είχε ικανοποιητική απόδοση. Παρατηρώντας και πάλι τους μετασχηματισμούς Fourier, υπάρχει μία μείωση της κορυφής στη συχνότητα περιστροφής κατά 38%. Η δεύτερη κορυφή, που εμφανίστηκε στους μετασχηματισμούς μετά την αλλαγή των ελατηρίων, μειώθηκε και αυτή κατά 23%. Ο ελεγκτής MPC III, ο οποίος χρησιμοποιούσε ορίζοντες πρόβλεψης και ελέγχου μειωμένους κατά 50% ($H_p = 10$ και $H_c = 2$), παρουσίασε μειωμένη απόδοση.

Κεφάλαιο 5

Σύγκριση Μεθόδων - Μελλοντική Εργασία

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε έλεγχος με τις μεθόδους MPC και PLL. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις μεθόδους αυτές, προκύπτει το συμπέρασμα ότι με τον έλεγχο MPC επιτεύχθηκαν καλύτερα αποτελέσματα.

Η μέθοδος του PLL βασίστηκε σε μία απλή ιδέα και μία εξιδανικευμένη προσέγγιση του συστήματος, υποθέτοντας ότι όλα τα υποσυστήματα που περιλάμβανε το πείραμα (κάρτα συλλογής δεδομένων, ενισχυτές, ηχείο, υπολογιστής), αλλά και η ίδια η πειραματική διάταξη του αξονικού συστήματος, δρούσαν ακαριαία, χωρίς να συνυπολογιστούν οι, έστω και πολύ μικρές, καθυστερήσεις που προκαλεί καθένα από αυτά τα στοιχεία. Συνεπώς, ακόμη και αν ο βρόχος επιτύχει πλήρη συντονισμό με τη φάση του σήματος εξόδου, το σήμα ελέγχου που παράξει τελικά δε θα είναι πλήρως συντονισμένο με την πραγματική κίνηση της διάταξης.

Η μέθοδος του MPC είναι πιο περίπλοκη και απαιτεί περισσότερο χρόνο κατά το σχεδιασμό. Όμως η χρήση του μοντέλου πρόβλεψης της συμπεριφοράς του συστήματος, καθώς και η ιδιότητά του ελεγκτή να διορθώνει σε κάθε υπολογιστικό κύκλο τα σφάλματα που προέκυψαν στον προηγούμενο, οδήγησε σε πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Ακόμη καλύτερα αποτελέσματα θα μπορούσαν πιθανώς να επιτευχθούν, αν υπήρχε η δυνατότητα μέτρησης των δυνάμεων που θεωρήθηκαν ως μη μετρήσιμες διαταραχές. Έτσι, αντί για το απλοποιημένο

μοντέλο της μη μετρήσιμης ημιτονοειδούς διαταραχής που χρησιμοποιήθηκε στον ελεγκτή, θα υπήρχε ένα μοντέλο ακριβέστερο που θα μπορούσε να προβλέψει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη συμπεριφορά του συστήματος εντός του ορίζοντα πρόβλεψης. Ακόμη κι έτσι όμως, ο ελεγκτής MPC I (κατά κύριο λόγο) πέτυχε μεγάλη μείωση των κραδασμών στη διάταξη.

Ως μελλοντική εργασία μπορούν να προταθούν τα εξής:

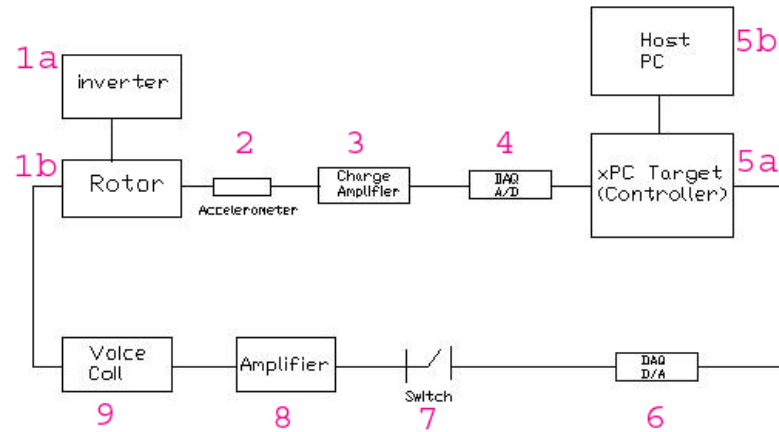
Στην εγκατάσταση χρησιμοποιήθηκε έλεγχος MPC για λειτουργία σε συγκεκριμένη ταχύτητα περιστροφής. Για λειτουργία σε διαφορετική ταχύτητα, ο ελεγκτής έπρεπε να τροποποιηθεί. Στην περίπτωση μιας εγκατάστασης που λειτουργεί με μεταβλητή ταχύτητα περιστροφής, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ελεγκτής με ρυθμιζόμενες παραμέτρους (adaptive control).

Στη συγκεκριμένη διάταξη υπάρχει ένας επενεργητής (voice coil), που επιδρά στον ένα άξονα κίνησης. Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η περίπτωση χρήσης και δεύτερου όμοιου επενεργητή, ώστε ο έλεγχος να γίνεται και στους δύο βαθμούς ελευθερίας.

Παράρτημα Α΄

Πειραματικός Εξοπλισμός

Στο σχήμα Α΄.1 φαίνεται το δομικό διάγραμμα του πειράματος: Ο αντιστροφέας (inverter)(1a) περιστρέφει το στροφείο της διάταξης (1b) με την επιθυμητή ταχύτητα περιστροφής. Η κίνηση της διάταξης καταγράφεται από το επιταχυνσιόμετρο (2). Το σήμα ενισχύεται από τον ενισχυτή (3) (Charge Amplifier) και οδηγείται στο κανάλι εισόδου της κάρτας (4), όπου από αναλογικό μετατρέπεται σε ψηφιακό. Το ψηφιακό σήμα οδηγείται στον υπολογιστή (Target PC)(5a). Ο υπολογιστής αυτός περιέχει τον ελεγκτή που έχει σχεδιαστεί στον υπολογιστή (Host PC) (5b). Ο ελεγκτής αποστέλλει το σήμα του στο κανάλι εξόδου της κάρτας (6), όπου μετατρέπεται σε αναλογικό. Το αναλογικό σήμα οδηγείται στον ενισχυτή ισχύος (8) του ηχείου. Ανάμεσα στην κάρτα και τον ενισχυτή παρεμβάλλεται ένας διακόπτης (7), έτσι ώστε να αποκόπτεται το σήμα του ελεγκτή. Το ηχείο (9) λαμβάνει το ενισχυμένο σήμα και εφαρμόζει την κατάλληλη δύναμη στη διάταξη.



Σχήμα Α'.1: Δομικό διάγραμμα του πειράματος

Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε για το πείραμα ήταν ο εξής:

- Ενισχυτής (Charge Amplifier) KISTLER Type 5007 με τις εξής ρυθμίσεις:
 - Scale 20/1...11
 - Sensitivity 4.71 pC/ms⁻²
- Κάρτα συλλογής δεδομένων National Instruments PCI-6024E με αναλογικά κανάλια
 - Κανάλι εισόδου 68 (signal)/34(ground)
 - Κανάλι εξόδου 4 (signal)/74 (ground)
- Αντιστροφέας HITACHI L200
- Πιεζοηλεκτρικό επιταχυνσιόμετρο Brüel & Kjær με χαρακτηριστικά
 - Charge Sensitivity 4.71 pC/ms⁻² / 46.2 pC/g
 - Voltage Sensitivity 3.71 mV/ms⁻² / 36.4 mV/g
- Λογισμικό MATLAB/Simulink 2007b

Παράρτημα Β'

Θεωρία Πινάκων - Χώρος Καταστάσεων - Συναρτήσεις Ευαισθησίας

Β'.1 Διάσπαση ιδιάζουσών τιμών (Singular Value Decomposition)

Αν A είναι πίνακας διαστάσεων $m \times n$, υπάρχουν πάντα πίνακες U, S, V , τέτοιοι ώστε

$$A = USV^T \quad (\text{B'.1})$$

Οι U, V είναι ορθοκανονικοί πίνακες:

$$UU^T = I, \quad VV^T = I \quad (\text{B'.2})$$

και ο S είναι ημιδιαγώνιος με ιδιάζουσες τιμές ως διαγώνια στοιχεία:

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.3})$$

με

$$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n] \quad (\text{B'.4})$$

(διαγώνιος πίνακας με τις μη-μηδενικές ιδιάζουσες τιμές) και

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (\text{B'.5})$$

B'.2 Θετικά ορισμένοι πίνακες - τετραγωνικές μορφές

Μία έκφραση της μορφής $x^T Q x$, όπου x διάνυσμα και Q συμμετρικός πίνακας, καλείται *τετραγωνική μορφή*. Μία τετραγωνική μορφή συνήθως συμβολίζεται $\|x\|_Q^2$.

Ο πίνακας Q καλείται *θετικά ορισμένος* (και γράφουμε $Q > 0$) αν ισχύει

$$x^T Q x > 0 \quad (\text{B'.6})$$

για κάθε x , εκτός του $x = 0$. Αποδεικνύεται ότι ο συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Ο πίνακας είναι *ημι-θετικά ορισμένος* (και γράφουμε $Q \geq 0$) αν ισχύει

$$x^T Q x \geq 0 \quad (\text{B'.7})$$

ή, ισοδύναμα, αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη-αρνητικές.

B'.3 Ελάχιστα τετράγωνα - Ψευδοαντίστροφος

Μία εξίσωση της μορφής

$$Ax = b \quad (\text{B'.8})$$

όπου b, x διανύσματα και A πίνακας $m \times n$ (μη τετραγωνικός) δεν έχει ακριβή ή μοναδική λύση. Λύνεται όμως κατά την έννοια των *ελαχίστων τετραγώνων*, δηλαδή μπορούμε να βρούμε διάνυσμα x που να ελαχιστοποιεί την *Ευκλείδια νόρμα*

$$\|Ax - b\|^2 \quad (\text{B'.9})$$

Η λύση αυτή είναι η

$$x = A^\dagger b \quad (\text{B'.10})$$

όπου A^\dagger είναι ο *ψευδοαντίστροφος* του A . Ο κατά Moore-Penrose ψευδοαντίστροφος είναι

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{B'.11})$$

B'.4 Χώρος Καταστάσεων

Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου αναπαριστάται στο χώρο καταστάσεων με δύο εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{B'.12})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{B'.13})$$

όπου x είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, u το διάνυσμα των εισόδων και y το διάνυσμα των εξόδων.

Μία αναπαράσταση αυτού του τύπου δεν είναι η μοναδική περιγραφή ενός συστήματος. Το ίδιο σύστημα μπορεί να περιγραφεί με άπειρες τριάδες $[A, B, C]$ (πραγματοποιήσεις), οι οποίες είναι ταυτόσημες. Μπορούμε να περάσουμε από μία πραγματοποίηση σε μία άλλη μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Αν ορίσουμε το νέο διάνυσμα κατάστασης z τέτοιο ώστε

$$x = Tz \quad (\text{B'.14})$$

μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις του συστήματος σε όρους του νέου διανύσματος κατάστασης

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T\dot{z} = ATz + Bu \\ \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \end{aligned} \quad (\text{B'.15})$$

$$\dot{z} = A_T z + B_T u$$

όπου

$$A_T = T^{-1}AT \quad (\text{B'.16})$$

$$B_T = T^{-1}B \quad (\text{B'.17})$$

Η εξίσωση της εξόδου (B'.13) γίνεται

$$y = CTz + Du \quad (\text{B'.18})$$

$$y = C_T z + Du$$

όπου

$$C_T = CT \quad (\text{B'.19})$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα σύστημα σε οποιαδήποτε μορφή επιθυμούμε. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός μοντέλου στο χώρο καταστάσεων υπολογίζεται ως εξής (υποθέτοντας ότι $x(0) = 0$):

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{B'.20})$$

όπου I μοναδιαίος πίνακας με κατάλληλες διαστάσεις.

Σε ένα σύστημα διακριτού χρόνου, οι (B'.12), (B'.13) παίρνουν τη μορφή

$$x(k+1) = A_d x + B_d u \quad (\text{B'.21})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{B'.22})$$

Οι πίνακες A_d, B_d σχετίζονται με τους αντίστοιχούς τους στο συνεχή χρόνο, A, B ως εξής:

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\xi} d\xi \right) \cdot B \quad (\text{B'.23})$$

όπου T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας. Οι πίνακες C, D παραμένουν ίδιοι.

Με αυτό τον τρόπο, οι τιμές του διανύσματος κατάστασης τις στιγμές της δειγματοληψίας του συστήματος διακριτού χρόνου ταυτίζονται με τις τιμές του διανύσματος κατάστασης του συστήματος συνεχούς χρόνου.

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου προκύπτει από τη σχέση (B'.24):

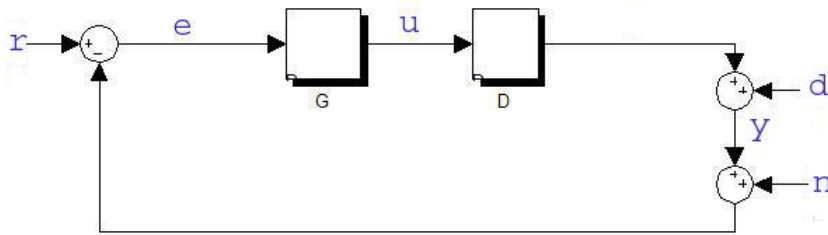
$$H(z) = C(zI - A_d)^{-1}B_d + D \quad (\text{B'.24})$$

B'.5 Συναρτήσεις Ευαισθησίας

Στο σχήμα B'.1 φαίνεται η γενική μορφή ενός συστήματος ελέγχου, με μοναδιαίο κλάδο ανάδρασης. Ο ελεγκτής (D) συγκρίνει το σήμα που παίρνει στην είσοδό του με το σήμα αναφοράς (r) και στέλνει ένα σήμα ελέγχου στο υπό έλεγχο σύστημα (G). Στην έξοδο του συστήματος προστίθενται διαταραχές (d) και θόρυβος (n) και το σήμα αυτό αποστέλλεται και πάλι στην αρχή του βρόχου, για να συγκριθεί με το σήμα αναφοράς.

Στόχος είναι να κατασκευαστεί ένα σύστημα όσο το δυνατόν λιγότερο ευαίσθητο σε διαταραχές. Η συνάρτηση ευαισθησίας ορίζεται ως

$$S(s) = (1 + GD)^{-1} \quad (\text{B'.25})$$



Σχήμα Β'.1: Δομικό διάγραμμα τυπικού βρόχου ελέγχου

και είναι στην ουσία η συνάρτηση μεταφοράς από το r στο σφάλμα που e προκύπτει στην έξοδο του πρώτου αθροιστή.

Ορίζουμε επίσης και τη *συνάρτηση συμπληρωματικής ευαισθησίας* ως

$$T(s) = (1 + GD)^{-1}GD \quad (\text{B'.26})$$

η οπού αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της αναφοράς r και της εξόδου y , εκφράζει συνεπώς τη συνάρτηση μεταφοράς του *κλειστού βρόχου*. Είναι προφανές ότι ισχύει

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (\text{B'.27})$$

Η συνάρτηση ευαισθησίας S είναι το βασικό μέτρο της απόδοσης του βρόχου, όσον αφορά στο πόσο καλά μπορεί ο βρόχος να ακολουθήσει το σήμα αναφοράς (κάνοντας το e μικρό για δεδομένο r), καθώς και όσον αφορά στην απόρριψη των διαταραχών. Η συνάρτηση ευαισθησίας είναι δυνατό να έχει μικρή τιμή για χαμηλές και μεσαίες συχνότητες, αλλά όχι σε πιο υψηλές. Έτσι, η συνάρτηση έχει συνήθως μικρή τιμή σε χαμηλές συχνότητες, κάτι που είναι επιθυμητό για να έχει ο βρόχος την απόδοση που περιγράφηκε παραπάνω. Σε υψηλότερες συχνότητες, πλησιάζει τη μονάδα και την ξεπερνάει για ένα μικρό εύρος συχνοτήτων.

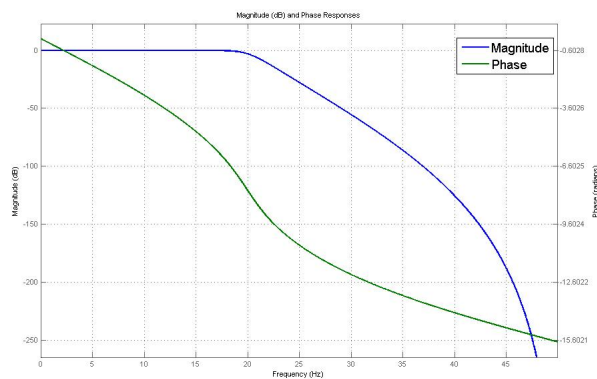
Ταυτόχρονα, θα ήταν επιθυμητό η συμπληρωματική ευαισθησία T να ήταν ίση με 1 σε όλες τις συχνότητες. Αυτό όμως είναι αδύνατο να επιτευχθεί. Έτσι, στην πράξη, η συνάρτηση T είναι συνήθως ίση με τη μονάδα στις χαμηλές και μεσαίες συχνότητες και η τιμή της πέφτει στις υψηλότερες (ενώ η S πλησιάζει στο 1). Η T αποτελεί επίσης μία ένδειξη για τα περιθώρια ευστάθειας του συστήματος [6], [10], [15].

Παράρτημα Γ'

Ψηφιακά Φίλτρα

Τα ψηφιακά φίλτρα [8][13] χρησιμοποιούνται ευρέως για να «καθαρίσουν» το σήμα από ανεπιθύμητα στοιχεία, όπως, κατά κύριο λόγο, τον θόρυβο. Δύο βασικοί τύποι τους είναι τα φίλτρα χαμηλής διέλευσης (*lowpass filters*), και τα φίλτρα υψηλής διέλευσης (*highpass filters*).

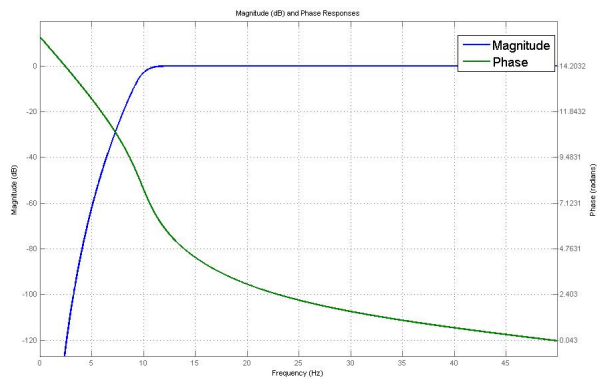
Ένα φίλτρο χαμηλής διέλευσης αποκόπτει συχνότητες υψηλότερες από μία συχνότητα αποκοπής. Η χαρακτηριστική ενός τέτοιου φίλτρου φαίνεται στο σχήμα Γ'.1.



Σχήμα Γ'.1: Φίλτρο χαμηλής διέλευσης

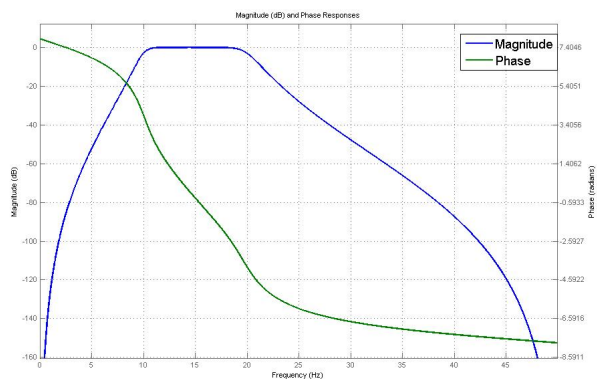
Ένα φίλτρο υψηλής διέλευσης (*highpass filter*) (σχήμα Γ'.2) κάνει ακριβώς το αντίθετο, αποκόπτει δηλαδή τις χαμηλές συχνότητες.

Συνδυασμό των δύο αποτελεί το φίλτρο διέλευσης ζώνης (*bandpass filter*) (σχήμα Γ'.3), το οποίο επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων που βρίσκονται μέσα



Σχήμα Γ'.2: Φίλτρο υψηλής διέλευσης

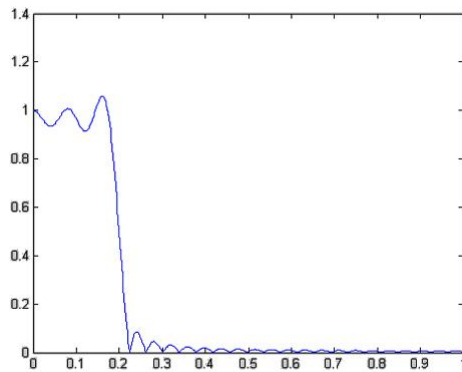
σε κάποιο εύρος.



Σχήμα Γ'.3: Φίλτρο διέλευσης ζώνης

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν φίλτρα Infinite Impulse Response - IIR, και συγκεκριμένα τύπου Butterworth. Τα φίλτρα IIR, αντίθετα με τα FIR, δεν παρουσιάζουν φαινόμενο Gibbs (ταλαντώσεις της απόκρισης στην περιοχή κοντά στη συχνότητα αποκοπής, βλ. σχήμα Γ'.4), καθώς δεν έχουμε αποκοπή της κρουστικής απόκρισης. Ακόμη, η τάξη τους είναι πολύ μικρότερη. Ενδεικτικά, ένα σύνηθες φίλτρο IIR είναι 5ης - 10ης τάξης, ενώ ένα FIR μπορεί να είναι 100ής τάξης ή και υψηλότερης.

Κάτι που πρέπει να προσεχθεί κατά το σχεδιασμό ενός ψηφιακού φίλτρου, αλλά και οποιουδήποτε άλλου συστήματος διακριτού χρόνου, είναι η συχνότητα



Σχήμα Γ'.4: Φαινόμενο Gibbs σε φίλτρο FIR χαμηλής διέλευσης

δειγματοληψίας να μην είναι χαμηλότερη της συχνότητας Nyquist, ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο παραλλαγής (*aliasing*).

Η συχνότητα Nyquist είναι

$$\omega_{Nyq} = 2\omega_{max} \quad (\Gamma'.1)$$

όπου ω_{max} είναι η υψηλότερη συνιστώσα της συχνότητας που παρατηρείται στο σήμα.

Παράρτημα Δ'

Προγράμματα MATLAB

Δ'.1 Πρόγραμμα MATLAB για Αναγνώριση του Συστήματος, με Χρήση Observer Kalman Identification και Eigensystem Realization Algorithm

```
%% Script for OKID - ERA system identification %%
%uses Observer Kalman Identification to compute
%system Markov parameters
%and Eigensystem Realization Algorithm
%to construct state space realizations
%Reference:
%Juang, J. N.: 'Applied System Identification'
%Author: H. Christopoulos
%-----
%% input data
% y: measured output
% u: plant input
% y & u must be ROW vectors
% Ts: sampling period
Ts=0.01;    %sampling period
t=0:length(u)-1;t=t*Ts; %construct time vector
```

```

l=length(y);
v=[u; y]; % observer input vector
%-----
%% Acquire observer markov parameters
p=6; % No of observer Markov params
%upper triangular input matrix:
U=toeplitz([u(1); zeros(p,1)], u(1:l-1));

yt=toeplitz([y(1);zeros(p,1)], y(1:l-1));
V=[];
for i=1:2:2*p
    j=i/2+0.5;
    V(i,:)=U(j,:);
end

for i=2:2:2*p
    j=i/2;
    V(i,:)=yt(j,:);
end

V=[zeros(2*p,1) V];
%upper triangular observer input matrix:
V=[u;V];

Yob=V'\y';
Yob=Yob'; % observer markov params vector
%-----
%% Computation of Markov parameters %%
%-----
%% System Markov params
K=50 ; % number of parameters to be computed
Ysys=[]; Y2k=[]; Yk=[];
d=Yob(1);
Yob1=[]; Yob2=[]; Ydif=[];

```

```

Yob1(1)=d; Yob2(1)=0;
% input markov params
for i=2:2:length(Yob)
    j=i/2+1;
    Yob1(j)=Yob(i);
end

for i=length(Yob1+1:K+10)
    Yob1(i)=0;
end

% output markov params
for i=3:2:length(Yob)
    j=i/2+0.5;
    Yob2(j)=Yob(i);
end

for i=length(Yob2+1:K+10)
    Yob2(i)=0;
end
Yob2=-Yob2;

for i=1:K+1
    Ydif(i)=(Yob1(i+1)-Yob2(i+1)*d);
end

Ydif=Ydif'; %must be a column vector

Yk=toeplitz(Yob2(2:K+1));
Yk=tril(Yk);
Yk=[zeros(1,K);Yk];
Yk=[Yk zeros(K+1,1)];
Yk=Yk+eye(K+1);
Ysys=Yk\Ydif;

```

```

Ysys=[d;Ysys];          % system markov params
%-----
%% Observer Gain Markov params
Yog(1)=d;
for i=1:K+1
    Y2k(i)=(Yob2(i+1));
end
Y2k=Y2k';
Yog=Yk\Y2k;
Yog=[d; Yog];          %observer gain markov params
%-----
%% direct markov params
% directly compute Markov parameters,
%in the least squares sense
Utop=toeplitz([u(1); zeros(p,1)],u);
Yer=Utop'\y';
%% Create ERA models
% creates state space models based on previously
% calculated Markov
% parameters, using function era

% without observer
[A,B,C,D]=era(Ysys,3,30,Ts);
sys=ss(A,B,C,D,Ts);    %create state space model
ysys=lsim(sys,u,t);    %system simulated output

%with observer
Yo=Yob(2:length(Yob));Yo=Yo';
P=[];
for i=1:length(Yo)
    P(i,:)=C*A^(i-1);
end

G=P\Yo;                %matrix G

```

```

Ao=A+G*C;
Bo=[B+G*D -G];
sysobs=ss(Ao,Bo,C,[0 D],Ts); %create state space model
yob=lsim(sysobs,v,t); %system simulated output

% with directly computed Markov parameters
[A2,B2,C2,D2]=era(Yer,3,30,Ts);
sysls=ss(A2,B2,C2,D2,Ts); %create state space model
yls=lsim(sysls,u,t); %system simulated output
%-----
%% Plot and compare model outputs
plot(t,y,t,yob,'r',t,ysys,'m',t,yls,'k')

```

```

%% Function ERA %%
%calculates discrete-time state-space realizations
%using Eigensystem Realization Algorithm
%with system Markov parameters as input
%-----
function [A,B,C,D]=era(h,n,N,Ts);

% [A,B,C,D]=era(h,n,N,Ts);
%
% Inputs:
%   h: discrete-time impulse response
%   n: order of the system
%   N: number of samples to assembly the Hankel matrix
%   Ts: sample time
%
% Outputs:
%   [A,B,C,D]: state-space model
% Hankel matrix
H0 = hankel(h(2:N+1));      % k = 0
H1 = hankel(h(3:N+2));      % k = 1;
% Singular Value Decomposition
[R,Sigma,S] = svd(H0);
Sigman = Sigma(1:n,1:n);

Wo = R(:,1:n)*Sigman^0.5;   % observability matrix
Co = Sigman^-.5*S(:,1:n)';  % controllability matrix

% Identified system matrices
A = Sigman^-.5*R(:,1:n)'*H1*S(:,1:n)*Sigman^-.5;
B = Co(:,1);
C = Wo(1,:);
D = h(1);
end

```

Δ'.2 Πρόγραμμα MATLAB για Ρύθμιση Παραμέτρων PLL

```
function [t2,t12,wn,w0]=pll_params(Ko,Kd,wmax,wmin,z,TL)
%[t2,t12,wn,w0]=pll_params(Ko,Kd,wmax,wmin,z,TL)
%calculates PLL tuning parameters
%for PLL with PFD and passive lead lag filter
%inputs:
%Ko: VCO gain
%Kd: PFD gain
%wmax - wmin: operating frequency range
%z: damping (usually 0.7)
%TL: lock time
%Reference:
%Ronald E. Best: 'Phase Locked Loops:
%Design, Simulation and Applications'
%
%Author: H. Christopoulos
Dw=wmax-wmin;
wn1=Dw/(4*pi*z)
wn2=2*pi/TL
w0=(wmax+wmin)/2
if wn1>wn2
    wn=wn1
    t2=2*z/wn
    t12=Ko*Kd/wn^2
    TL=2*pi/wn
else
    wn=wn2
    Dw=4*pi*z*wn
    t2=2*z/wn
    t12=Ko*Kd/wn^2
end
```


Βιβλιογραφία

- [1] Αλεξανδράκης, Ν. «Αξονικά Συστήματα με Έκκεντρες Μάζες» (σημειώσεις), ΕΜΠ, 2009
- [2] Αλεξανδράκης, Ν. «Εισαγωγή στις μετρήσεις βασικών μεγεθών» (σημειώσεις), ΕΜΠ, 2007
- [3] Bai M., Ou K. ‘Design and Implementation of Electromagnetic aActive Control Actuators’, Journal of Vibration and Control, Sage Publications, 2003
- [4] Bemporad A., Morari M., Ricker N.L. ‘Model Predictive Control Toolbox 2’, The MathWorks, 2007
- [5] Best, Ronald E. ‘Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Applications’, 6th edition, McGraw-Hill, 2007
- [6] Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A. ‘Feedback Control of Dynamic Systems’, Addison-Wesley, 1994
- [7] Gardner Floyd M. ‘Phaselock Techniques’, 2nd edition, John Wiley and Sons, 1979
- [8] Hamming R.W. ‘Digital Filters’, 3rd edition, Prentice-Hall, 1989
- [9] Juang J.N. ‘Applied System Identification’, Prentice-Hall, 1994
- [10] Maciejowski J.M. ‘Predictive Control with Constraints’, Prentice-Hall, 2002
- [11] Ljung L. ‘System Identification: Theory for the User’, Prentice-Hall, 1987

- [12] Olsson C. 'Active Engine Vibration Isolation using Feedback Control', Linnkoping Studies in Science and Technology, Thesis No. 968, 2002
- [13] Oppenheim, A.V. 'Digital Signal Processing', Prentice-Hall, 1975
- [14] Papalambrou, G. 'Optimal Control of Marine Propulsion Diesel Engine During Transient Loading Operation: Application For Smoke Opacity Reduction through Manifold Air Injection Avoiding Compressor Surge', NTUA, 2008
- [15] Skogestad S., Postlethwaite I. 'Multivariable Feedback Control: Analysis And Design', 2nd edition, Wiley, 2005
- [16] xPC Target 4, The MathWorks, 2007
- [17] System Identification Toolbox, The Mathworks 2007