



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές

Διδακτορική Διατριβή

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Σ. ΖΥΜΑΡΗΣ

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2010

στους γονείς μου Σίμο και Νίκη



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές

Διδακτορική Διατριβή

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Σ. ΖΥΜΑΡΗΣ

Περίληψη

Η διδακτορική διατριβή αυτή ασχολείται με την ανάπτυξη, τον προγραμματισμό και την πιστοποίηση συζυγών μεθόδων για τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας συναρτήσεων κόστους στην αεροδυναμική/υδροδυναμική. Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται ανήκουν στην κατηγορία των συνεχών συζυγών μεθόδων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας για στρωτές και, κυρίως, για τυρβώδεις ασυμπίεστες ροές. Στην παρούσα διατριβή, το πεδίο εφαρμογής των παραπάνω μεθόδων περιλαμβάνει ροές σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών και αγωγούς. Ως τελική εφαρμογή και πέραν των προαναφερθεισών περιπτώσεων, οι οποίες εξάλλου αποτέλεσαν βάση για συγκρίσεις με αποτελέσματα άλλων μεθόδων για λόγους πιστοποίησης, το αναπτυχθέν λογισμικό εφαρμόστηκε για υπολογισμούς σε πραγματικό μοντέλο επιβατικού αυτοκινήτου.

Οι συζυγείς μέθοδοι αναπτύσσονται προκειμένου είτε να ενταχθούν σε ένα σχήμα βελτιστοποίησης μέσω μεθόδων βασισμένων στην κλίση της συνάρτησης κόστους, είτε για να χρησιμοποιηθούν οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τη συνεισφορά των στοιχείων της γεωμετρίας ενός σώματος στην αεροδυναμική του απόδοση. Ως επιπλέον στόχος της εργασίας αυτής είναι και η υποστήριξη μεθόδων υπολογισμού των παραγώγων δεύτερης τάξης, για μεθόδους τύπου Newton, οι οποίες όμως εκφεύγουν από τα όρια της διατριβής. Τονίζεται ότι η ανάπτυξη συνεχών συζυγών τεχνικών ικανών να υπολογίζουν με απόλυτη ακρίβεια τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας, κατάλληλες για οποιαδήποτε από τις παραπάνω χρήσεις, αποτελεί τον πρωτεύοντα στόχο της παρούσας διατριβής. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης οι οποίες στη συνέχεια χρησιμοποιούνται ανήκουν στις κλασικές της σχετικής βιβλιογραφίας και περαιτέρω διερεύνηση ή σύγκρισή τους δεν αποτελεί αυτοσκοπό της διατριβής.

Οι συζυγείς διατυπώσεις που θα παρουσιαστούν στηρίζονται στη διατύπωση που έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο προηγούμενης διατριβής στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών (Δρ Δ.Ι. Παπαδημητρίου), εκεί όμως για συμπίεστες ροές. Η διατύπωση αυτή ήταν ακριβής για στρωτές ροές ενώ, για την περίπτωση των τυρβωδών ροών, βασιζονταν στην ευρύτητα χρησιμοποιούμενη παραδοχή ότι οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης ήταν ανεξάρτητες των μεταβλητών ελέγχου. Η παρούσα διατριβή, η οποία αφορά ασυμπίεστες ροές, χωρίς όμως αυτό να είναι περιοριστικό, επεκτείνει τη μέθοδο ώστε να είναι απόλυτα ακριβής και στις τυρβώδεις ροές. Για να επιτευχθεί αυτό προτείνει την εισαγωγή των συζυγών

εξισώσεων των μοντέλων τύρβης, δηλαδή νέων εξισώσεων συζυγών ως προς αυτές του μοντέλου τύρβης. Επίσης, ας επισημανθεί ότι οι συζυγείς εκφράσεις για τις παραγώγους ευαισθησίας είναι ανεξάρτητες από τον προσδιορισμό μεταβολών των χωρικών γεωμετρικών ποσοτήτων και, άρα, οικονομικές σε υπολογιστικό κόστος.

Ως βάση για τον προγραμματισμό της μεθόδου χρησιμοποιήθηκαν δύο προϋπάρχοντα λογισμικά επίλυσης των εξισώσεων της ροής, το ένα χρησιμοποιεί την μέθοδο της τεχνητής συμπίεσότητας και το άλλο τον αλγόριθμο SIMPLE οδηγώντας έτσι σε δύο διαφορετικά λογισμικά για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων (το πρώτο σε γλώσσα Fortran77 και το δεύτερο σε C++). Το χρησιμοποιούμενα μοντέλα τύρβης είναι δύο, το μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras και το μοντέλο δύο εξισώσεων $k-\epsilon$. Κατά συνέπεια, δημιουργήθηκαν δύο διαφορετικές συζυγείς διατυπώσεις, μια για το συζυγές μοντέλο Spalart-Allmaras και μια για το συζυγές μοντέλο $k_a-\epsilon_a$. Οι διατυπώσεις αυτές καλύπτουν τόσο την περίπτωση μοντέλων χαμηλών αριθμών Reynolds όσο και μοντέλων υψηλών αριθμών Reynolds. Η πρώτη περίπτωση παρουσιάζεται, ενδεικτικά, για το συζυγές μοντέλο Spalart-Allmaras ενώ η δεύτερη για το μοντέλο $k_a-\epsilon_a$. Το πρώτο πρωτότυπο στοιχείο της διατριβής είναι ότι, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, παρουσιάζεται η ανάπτυξη και χρήση των συνεχών συζυγών εξισώσεων μοντέλου τύρβης· οι λίγες εργασίες που υλοποιούν αντίστοιχες μεθόδους βασίζονται αποκλειστικά στη διακριτή συζυγή μέθοδο. Για την περίπτωση του μοντέλου ροής που βασίζεται στις συναρτήσεις τοίχου, η ανάπτυξη οριακών συνθηκών για τις συζυγείς εξισώσεις στην περιοχή του τοίχου οδηγεί σε εκφράσεις οι οποίες εμπλέκουν την ταχύτητα τριβής και τις κάθετες στον τοίχο κλίσεις των μεταβλητών του συζυγούς μοντέλου τύρβης με ένα μέγεθος το οποίο ορίστηκε στο πλαίσιο της διατριβής ως συζυγής ταχύτητα τριβής. Η εισαγωγή της τελευταίας ποσότητας αποτελεί το δεύτερο βασικό στοιχείο πρωτοτυπίας της διατριβής, μιας και για πρώτη φορά εισάγεται η έννοια αυτή στη σχετική βιβλιογραφία.

Τέλος, η διατριβή ασχολείται με την ανάπτυξη συζυγών τεχνικών και για προβλήματα ελέγχου (της αποκόλλησης της) ροής. Εδώ, στόχος είναι ο προσδιορισμός των πλέον αποδοτικών θέσεων στις οποίες συμφέρει να εφαρμοστεί ενεργητικός έλεγχος της ροής με δέσμες ρευστού. Τα κριτήρια σχεδιασμού είναι συγκεκριμένα και καθορίζονται από τις συναρτήσεις-κόστους που χρησιμοποιούνται στο συζυγές πρόβλημα, λ.χ. η ελαχιστοποίηση της αντίστασης μιας αεροδυναμικής μορφής. Στη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι ίδιες οι τιμές των ροϊκών μεγεθών στο τμήμα του ορίου το οποίο μελετάται. Η συγκεκριμένη χρήση συνεχών συζυγών τεχνικών παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Λέξεις κλειδιά: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, Συζυγείς Μέθοδοι, Συζυγή Μοντέλα Τύρβης, Παράγωγοι Ευαισθησίας, Θερμικές Στροβιλομηχανές, Βελτιστοποίηση.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Laboratory of Thermal Turbomachines

**Adjoint methods for the design of shapes with optimal aerodynamic performance
in laminar and turbulent flows**

PhD Thesis

ALEXANDER S. ZYMARIS

Abstract

This PhD thesis focuses on the development, programming and assessment of adjoint methods for sensitivity analysis and optimization problems in aerodynamics/hydrodynamics. The thesis is exclusively concerned with continuous adjoint methods. Emphasis is paid to the accuracy of the computed sensitivity derivatives and, for this purpose, a solid mathematical background for developing adjoint formulations for both laminar and turbulent incompressible flows, is presented. The steepest descent method, supported by the exact gradient of the cost function, is used whenever an optimization problem is solved. Case studies related to turbomachinery blade airfoils and duct flows are presented. In addition, in the context of collaboration of the Parallel CFD & Optimization Unit of NTUA with a European automotive industry, the proposed methods and software were also applied in a real car configuration.

The developed continuous adjoint methods are utilised to produce sensitivity maps on aerodynamic bodies and in gradient-based optimization procedures. A secondary objective of this thesis is to propose adjoint methods that can be used for the computation of the Hessian matrix, in Newton optimization methods.

The developed adjoint methods are based on the continuous adjoint formulation proposed in a previous PhD thesis (by Dr. D.I. Papadimitriou) in the same Lab., which was however developed for compressible flows. That formulation was capable of computing accurate sensitivity derivatives in laminar flows, but this was not the case in turbulent ones, in which the usual assumption that the turbulence model quantities are not affected by the control variables was made. In view of the above, the present thesis proposes the development and additional solution of the adjoint to the turbulence model's equations. It is worth noting that the final adjoint sensitivity derivative expressions do not contain field integrals of mesh quantity variations, even if the cost function does, which is beneficial from the point of view of both accuracy and computing cost.

The proposed adjoint software was programmed on the basis of two different Navier-Stokes solvers, for incompressible flows. The first one uses the pseudo-compressibility method while the second one solves the flow equations in a segregated manner using the SIMPLE algorithm. Hence, two different adjoint solvers have been programmed, in Fortran77 and in C++, respectively. Furthermore, two different turbulence models have been utilized, the Spalart-Allmaras and the $k-\epsilon$. The adjoint

formulations that are presented in this thesis cover both low and high Reynolds number turbulence models. The low-Reynolds adjoint formulation relies on the Spalart-Allmaras turbulence model whereas the high-Reynolds one on the k - ϵ model. The first point of novelty of the thesis is that this is the first time the continuous adjoint to the turbulence model equation(s) is presented; though there exist a few similar research papers based on discrete adjoints, none of them deals with the continuous methods.

Regarding high-Reynolds number turbulence models, the mathematical formulation of the adjoint boundary conditions over the wall boundaries leads to the introduction of the adjoint friction velocity for the first time in the literature of adjoint methods. The latter is the second novelty of this PhD thesis. The adjoint friction velocity is related to the adjoint stress at the wall via the friction velocity of the primal problem and the normal to the wall gradients of the adjoint to the k and ϵ variables.

The proposed adjoint method is also used as the basis for developing optimization tools for the optimal placement of active flow control devices over an aerodynamic body. It is the sensitivity map produced from the adjoint method that indicates these positions. In such a case, the design variables of the control problem are the jet velocity components over the wall boundary. Methods for this kind of flow control applications is another point of novelty of this thesis.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Adjoint Methods, Adjoint Turbulence Models, Sensitivity Derivatives, Thermal Turbomachines, Optimization.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

**Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική
συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές**

Διδακτορική Διατριβή

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Σ. ΖΥΜΑΡΗΣ

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή :

1. Βουτσινάς Σπυρίδων
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
2. Γιαννάκογλου Κυριάκος (επιβλέπων)
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
3. Παπαηλιού Κυριάκος
Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή :

1. Αικατερινάρης Ιωάννης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών
Σχολή Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών
Μηχανικών
2. Βουτσινάς Σπυρίδων
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
3. Γιαννάκογλου Κυριάκος (επιβλέπων)
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
4. Μαθιουδάκης Κωνσταντίνος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
5. Μπεργελές Γεώργιος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
6. Τζαμπίρας Γεώργιος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων
Μηχανικών
7. Τσαγγάρης Σωκράτης
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Αθήνα, 2010

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	xi
Αντί προλόγου	xv
1 Εισαγωγή	1
1.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση – Γενικά περί συζυγών μεθόδων	3
1.2 Στόχοι και δομή της διατριβής	13
2 Η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες, στρωτές ροές	17
2.1 Εξισώσεις της ροής	17
2.2 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών	17
2.3 Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους	21
2.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης	23
2.3.2 Ελαχιστοποίηση της δύναμης αντίστασης	25
2.3.3 Προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού με στόχο προκαθορισμένη κατανομή πίεσης	26
2.4 Διατύπωση συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών . . .	26
2.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I	29
2.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O	31
2.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια S_W	32
2.4.4 Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια	34
2.4.5 Συζυγείς συνθήκες στα όρια συμμετρίας	34
2.5 Τελική – Γενική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας	34
2.5.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης	35
2.5.2 Ελαχιστοποίηση της δύναμης αντίστασης	35
2.5.3 Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού	37
2.6 Εφαρμογές – Πιστοποίηση μεθόδου για στρωτές ροές.	38
2.6.1 Πρώτη εφαρμογή: 2Δ πτερύγωση συμπίεστη	40
2.6.2 Δεύτερη εφαρμογή: 2Δ αγωγός	41
2.6.3 Τρίτη εφαρμογή: 2Δ πτερύγωση στροβίλου	44
2.6.4 Συμπεράσματα - σχολιασμός αποτελεσμάτων για στρωτές ροές.	44
3 Συζυγής διατύπωση για το μοντέλο τύρβης Spalart– Allmaras	51
3.1 Εξισώσεις κατάστασης: εξισώσεις της μέσης ροής και εξίσωση του μοντέλου τύρβης	54
3.2 Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων	55
3.3 Οι συζυγείς εξισώσεις	60
3.4 Συζυγείς οριακές συνθήκες	61

3.4.1	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I	62
3.4.2	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O	63
3.4.3	Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια	64
3.5	Τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας	65
3.6	Εφαρμογές - Πιστοποίηση συζυγούς μεθόδου με το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras.	65
3.7	Πρώτη εφαρμογή: αγωγός με διαμόρφωση τύπου S	67
3.8	Δεύτερη εφαρμογή: αγωγός με στένωση διατομής	71
3.9	Τρίτη εφαρμογή: αγωγός με στροφή 90°	72
3.10	Συμπεράσματα	72
4	Συζυγείς εξισώσεις με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου	83
4.1	Το μοντέλο $k-\varepsilon$ υψηλών αριθμών Reynolds.	85
4.2	Η συζυγής διατύπωση με συναρτήσεις τοίχου - Βασική ιδέα	88
4.3	Διατύπωση της συζυγούς μεθόδου	90
4.4	Οι συζυγείς εξισώσεις	96
4.5	Συζυγείς οριακές συνθήκες	96
4.5.1	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I	96
4.5.2	Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O	97
4.5.3	Συζυγείς συνθήκες στα 'στερεά όρια' S_W - Μοντέλο συζυγών συναρτήσεων τοίχου	98
4.6	Τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας	100
4.7	Διατύπωση της έκφρασης των παραγώνων ευαισθησίας στο οριόδετο σύστημα .	100
4.8	Εφαρμογές - Πιστοποίηση συζυγούς μεθόδου με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου	103
4.8.1	Πρώτη εφαρμογή: αξονικός διαχύτης	104
4.8.2	Δεύτερη εφαρμογή: αγωγός με διαμόρφωση τύπου S	106
4.8.3	Τρίτη εφαρμογή: 2Δ πτερυγώση συμπιεστή	107
4.9	Συμπεράσματα	109
5	Συζυγείς μέθοδοι: συμβολή στην επιλογή θέσης και τρόπου ενεργητικού ελέγχου της ροής	119
5.1	Προσδιορισμός της θέσης τοποθέτησης της δέσμης αναρρόφησης ή έγχυσης .	122
5.1.1	Βασική ανάπτυξη συνεκτικών όρων	122
5.1.2	Διατύπωση για τυρβώδεις ροές με μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras . .	123
5.2	Εφαρμογές - Προσδιορισμός της θέσης τοποθέτησης της δέσμης και το είδος του ελέγχου	124
5.2.1	Εφαρμογή σε αγωγό με στένωση διατομής - Υπολογισμός παραγώνων της δύναμης αντίστασης	125
5.2.2	Εφαρμογές σε αγωγούς - Υπολογισμός παραγώνων των απωλειών ολικής πίεσης	126
5.3	Συμπεράσματα	140
6	Συμπεράσματα	143
6.1	Εφαρμογή των αναπτυχθεισών μεθόδων-λογισμικού σε πραγματική εφαρμογή	147
6.2	Στοιχεία πρωτοτυπίας της διδακτορικής διατριβής	147
6.3	Προτάσεις για μελλοντική εργασία	148
A'	Ρυθμοί μεταβολής ολοκληρωμάτων - γενικές διατυπώσεις	153

Α'.1	Η γενική γραφή του ρυθμού μεταβολής ενός ολοκληρώματος – κανόνας Leibniz	154
Α'.2	Εφαρμογή στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής χωρικού ολοκληρώματος στον E^3	156
Α'.3	Εφαρμογή στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής επικαμπύλιου ολοκληρώματος στον E^2	157
Β'	Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	159
Γ'	Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης	161
Γ'.1	Οριακές συνθήκες των εξισώσεων 2.30 και 2.31	163
Γ'.1.1	Όρια εισόδου	163
Γ'.1.2	Όρια εξόδου	163
Γ'.1.3	Στερεά όρια	164
Γ'.1.4	Περιοδικά όρια και όρια συμμετρίας	164
Γ'.2	Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης – Επέκταση στις τυρβώδεις ροές	164
Δ'	Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ροής	167
Δ'.1	Διακριτοποίηση του διανύσματος της ατριβούς συζυγούς ροής	168
Δ'.2	Διακριτοποίηση του διανύσματος της συνεκτικής ροής	169
Δ'.3	Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος ολοκλήρωσης	169
Δ'.4	Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης	170
Ε'	Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων	173
Ε'.1	Διακριτοποίηση του διανύσματος της ατριβούς συζυγούς ροής	174
Ε'.1.1	Σχήμα (α)	174
Ε'.1.2	Σχήμα (β)	175
Ε'.2	Διακριτοποίηση του διανύσματος της συνεκτικής συζυγούς ροής	175
Ε'.3	Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος ολοκλήρωσης & Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης	176
ς'	Επιβολή συζυγών συνθηκών στα όρια εξόδου του πεδίου ροής, S_o	179
	Βιβλιογραφία	183

Αντί προλόγου

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους βοήθησαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής. Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διατριβής Αν. Καθηγητή ΕΜΠ Κ. Γιαννάκογλου, για την ουσιαστική καθοδήγηση που μου προσέφερε σε όλα τα στάδια της διατριβής και τη διάθεση, συνεπώς, σημαντικού μέρους του χρόνου του τόσο κατά τη φάση ανάπτυξης των μεθόδων όσο και κατά την φάση συγγραφής της διατριβής καθώς επίσης και των σχετικών επιστημονικών εργασιών. Επιπλέον, θέλω να τον ευχαριστήσω για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς επίσης και για τις γνώσεις που απέκτησα τόσο κατά τη διάρκεια της διατριβής (από το 2005) όσο και προηγουμένως, ως προπτυχιακού φοιτητή, μέσω της ερασιτεχνικής μου ενασχόλησης στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΕΘΣ) και στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης με θέματα βελτιστοποίησης και συζυγών μεθόδων.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής τον ομότιμο Καθηγητή ΕΜΠ Κ. Παπαηλιού και τον Αν. Καθηγητή ΕΜΠ Σ. Βουτσινά, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν με την ανάθεση της διατριβής και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους σχετικά με την εργασία και την παρουσίασή της. Επίσης, ευχαριστώ, τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών Ι. Αικατερινάρη και τους Καθηγητές ΕΜΠ Κ. Μαθιουδάκη, Γ. Μπεργελέ, Γ. Τζαμπίρα και Σ. Τσαγγάρη, για την τιμή που μου κάνουν να συμμετάσχουν σε αυτή.

Πολλές ευχαριστίες θα ήθελα να δώσω στους φίλους και συναδέλφους του ΕΘΣ για το ευχάριστο περιβάλλον συνεργασίας. Ειδικότερα στους Δρ. Δ. Παπαδημητρίου, Δρ. Β. Ασούτη, Δρ. Ι. Καμπόλη, Δρ. Χ. Γεωργοπούλου, Δρ. Π.Ι.Κ. Λιακόπουλο, Θ. Ζερβογιάννη, Ξ. Τρομπούκη, Ε. Κοντολέοντος, Ε. Παπουτσή και Σ. Κυριάκου. Από τους προαναφερθέντες ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Δ. Παπαδημητρίου για την υποδομή που μου παρείχε ως προς τις συζυγείς μεθόδους, τις πολύτιμες συμβουλές του κατά την έναρξη της διατριβής καθώς και την επικοινωνιακή συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστώ θερμά το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για τη χορήγηση της υποτροφίας η οποία μου παρείχε τη δυνατότητα να πραγματοποιήσω την παρούσα έρευνα για την οποία αισθάνομαι υπερήφανος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Dr rer. nat. C. Othmer από το τμήμα έρευνας και ανάπτυξης της αυτοκινητοβιομηχανίας Volkswagen AG, ο οποίος μου επέτρεψε (στο πλαίσιο υπάρχουσας γενικότερης συνεργασίας με τη Μονάδα Παράλληλης Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης, παρέχοντας μου δεδομένα στα οποία δε θα είχα πρόσβαση σε άλλη περίπτωση) να εφαρμόσω μερικές από τις αναπτυχθείσες μεθόδους σε πραγματικές εφαρμογές της αυτοκινητοβιομηχανίας. Αν και μόνο μια από τις πραγματοποιηθείσες μελέτες περιέχεται στη διατριβή, ήταν πολύ σημαντικό να φανεί ότι τα υπολογιστικά 'εργαλεία' που ανέπτυξε η παρούσα εργασία μπορούν να εφαρμοστούν και στην πράξη.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Εμπνευσμένες από τη θεωρία ελέγχου, οι συζυγείς μέθοδοι (*adjoint methods*) χρησιμοποιούνται σε φυσικά προβλήματα, τα οποία περιγράφονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε.), για τον υπολογισμό παραγώγων ολοκληρωματικών συναρτήσεων (συναρτήσεων κόστους) ως προς παραμέτρους οι οποίες ελέγχουν το φυσικό πρόβλημα (παραγώγοι ευαισθησίας). Οι εξισώσεις αυτές, μαζί με τις οριακές τους συνθήκες, θα αναφέρονται εφεξής ως εξισώσεις κατάστασης (*state equations*), κατά τη συνήθη ορολογία των συζυγών μεθόδων. Ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος μ.δ.ε. αποτελούν οι εξισώσεις Navier–Stokes οι οποίες διέπουν τα προβλήματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Οι συζυγείς μέθοδοι στηρίζονται στη διατύπωση και επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων το οποίο, όπως λέγεται, είναι το συζυγές ή δυαδικό (*adjoint/dual/costate problem*) του συστήματος των εξισώσεων κατάστασης. Με τη χρησιμοποίηση του συζυγούς προβλήματος επιτυγχάνεται οι ζητούμενες παράγωγοι να εξαρτώνται μαθηματικά μόνο από τη συζυγή λύση και όχι από το ρυθμό μεταβολής της λύσης των εξισώσεων κατάστασης ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Το στοιχείο αυτό καθιστά τη μέθοδο πολύ αποδοτική σε υπολογιστικό χρόνο, μιας και για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας απαιτούνται δύο επιλύσεις, μια των εξισώσεων κατάστασης και μια των συζυγών τους εξισώσεων, ανεξαρτήτως του πλήθους των παραμέτρων ελέγχου του προβλήματος. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται, ενδεικτικά διάφορα πεδία από τον τομέα της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής στα οποία βρίσκουν εφαρμογή οι συζυγείς μέθοδοι για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας.

Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων αποσκοπούσε και αποσκοπεί, σε μεγάλο βαθμό, στην ενσωμάτωση τους σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης της γεωμετρίας διάφορων αεροδυναμικών/υδροδυναμικών μορφών. Οι παράμετροι, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, καθορίζουν τη γεωμετρία της μορφής. Στόχος είναι η αντικατάσταση των κλασικών μεθόδων υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας (όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών), οι οποίες ήταν ιδιαίτερα δαπανηρές σε υπολογιστικό χρόνο, με τις πιο γρήγορες και αποδοτικές συζυγείς μεθόδους στους αυτοματοποιημένους αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Πέραν των εφαρμογών στις μεθόδους βελτιστοποίησης, οι υπολογιζόμενες από τις συζυγείς μεθόδους παράγωγοι ευαισθησίας μπορούν να αξιοποιηθούν στην κατασκευή χαρτών παραγώγων ευαισθησίας (*sensitivity maps*), 2.6.2, χωρίς οι τελευταίες να ενταχθούν, όπως προηγουμένως, στο πλαίσιο μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας βελτιστοποίησης. Οι χάρτες παραγώγων ευαισθησίας αποτελούν ‘εργαλεία’ τα οποία βοηθούν τον μηχανικό στη λήψη αποφάσεων σχετικών με το σχεδιασμό της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής, υποδεικνύοντας τις πλέον σημαντικές περιοχές

(από πλευράς αεροδυναμικής/υδροδυναμικής) της γεωμετρίας της προς μελέτη μορφής. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η κατασκευή χάρτη ευαισθησίας σε μια πραγματική γεωμετρία αυτοκινήτου, [1], από όπου, για παράδειγμα, εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα ως προς τη διαμόρφωση του εμπρόσθιου καθώς και του κάτω μέρους αυτού. Αφού κατασκευαστεί ο χάρτης παραγώγων ευαισθησίας, σε δεύτερο χρόνο ο μηχανικός μπορεί να επιβάλει αλλαγές στη γεωμετρία της μορφής στις περιοχές τις οποίες έχει υποδείξει ο χάρτης. Τέτοιες διαδικασίες είναι συνήθεις πρακτικές όταν πρόκειται για πραγματικές βιομηχανικές εφαρμογές, όπου σπάνια ανατίθεται σε έναν αυτοματοποιημένο αλγόριθμο ο σχεδιασμός ή επανασχεδιασμός ολόκληρης αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής.

Επίσης, οι συζυγείς μέθοδοι για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης χρησιμοποιούνται και στον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας δεύτερης τάξης. Πρόσφατα, έχουν αναπτυχθεί αποδοτικές μέθοδοι υπολογισμού του μητρώου Hess των δευτέρων παραγώγων, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], η μαθηματική διατύπωση των οποίων στηρίζεται στις συζυγείς τεχνικές παραγώγων πρώτης τάξης και ορισμένες από αυτές απαιτούν τη γνώση του πεδίου των συζυγών μεταβλητών της μεθόδου πρώτης τάξης. Στις εργασίες [9, 10] καθώς και στην [11] παρουσιάζεται εκτενώς η συνεισφορά του ΕΘΣ/ΕΜΠ στις μεθόδους υπολογισμού παραγώγων δεύτερης τάξης. Οι μεθοδολογίες αυτές χρησιμοποιούνται σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης, οι οποίοι απαιτούν τη γνώση του μητρώου Hess, [12, 13] και σε εφαρμογές της μεθόδου Monte-Carlo, [6]. Επιπροσθέτως, τόσο οι πρώτες όσο και οι δεύτερες παράγωγοι ευαισθησίας χρησιμοποιούνται σε προβλήματα στιβαρού σχεδιασμού (robust design), [14, 15, 16, 17], στα οποία ζητείται η επιλογή μιας αποδοτικής λύσης η οποία είναι συγχρόνως και λιγότερο επιρρεπής σε τυχαίες μεταβολές των λεγόμενων μεταβλητών περιβάλλοντος, παραμέτρων δηλαδή του προβλήματος που αδυνατεί να ελέγξει ο μηχανικός. Τέτοιες παράμετροι μπορεί να είναι συνθήκες της ροής ως προς τις οποίες υφίσταται κάποια αβεβαιότητα ή και παράμετροι που ελέγχουν τη γεωμετρία και σχετίζονται με κατασκευαστικές αβεβαιότητες.

Ακόμη, το συζυγές πρόβλημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό παραγώγων ευαισθησίας όχι ως προς ποσότητες που καθορίζουν τη γεωμετρία (ή σπανιότερα, τις συνθήκες ροής) αλλά και τις ίδιες τις οριακές συνθήκες του προβλήματος στα στερεά όρια της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής. Οι παράγωγοι αυτές μπορούν να υποδείξουν τις πλέον υποσχόμενες θέσεις επιβολής διατάξεων ενεργητικού ελέγχου της ροής με στόχο τη μείωση της αποκόλλησης, την καθυστέρηση της μετάβασης σε τυρβώδη ροή κ.λ.π.. Εκτενής ανάλυση αυτού του πεδίου εφαρμογής των συζυγών μεθόδων γίνεται στο κεφάλαιο 5 της διατριβής.

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής η χρησιμότητα των συζυγών μεθόδων σε ποικίλες εφαρμογές στην υπολογιστική ρευστοδυναμική (ΥΡΔ). Η παρούσα διατριβή προτείνει συζυγείς διατυπώσεις οι οποίες οδηγούν σε ακριβείς (δηλαδή αριθμητικά συνεπείς με το χρησιμοποιούμενο επιλύτη των εξισώσεων κατάστασης) παραγώγους ευαισθησίας πρώτης τάξης σε προβλήματα στρωτών ή τυρβωδών ροών για κάθε δυνατή χρήση από αυτές που προαναφέρθηκαν. Η ενσωμάτωση της συζυγούς μεθόδου σε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης δεν αποτελεί 'αυτοσκοπό' σε αυτήν τη διατριβή. Παρουσιάζονται, ασφαλώς, και τέτοιες εφαρμογές, περισσότερο όμως από τη σκοπιά της συζυγούς μεθόδου και της ακρίβειας των υπολογιζόμενων παραγώγων, στην οποία η διατριβή δίνει ιδιαίτερη έμφαση. Η διατριβή ασχολείται με την ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων για περιπτώσεις ασυμπίεστων ροών, παρόλα αυτά η συζυγής θεωρία και εξισώσεις που θα παρουσιασθούν στα επόμενα κεφάλαια επεκτείνονται και στην περίπτωση του συμπιεστού ρευστού, εξελίσσοντας, αντίστοιχα, διατυπώσεις, υποδομή και λογισμικό που παρουσιάστηκε στη διατριβή [18]. Ας επισημανθεί,

επίσης, ότι στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes για το ασυμπίεστο ρευστό ως εξισώσεις κατάστασης σε αντίθεση με την ‘ανταγωνιστική’ μέθοδο της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις εξισώσεις του συμπιεστού ρευστού της διατριβής [19].

1.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση – Γενικά περί συζυγών μεθόδων

Στην ενότητα που ακολουθεί θα επιχειρείται η παρουσίαση των συζυγών μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί ως τώρα. Αποκλειστικό μέλημα των πρώτων σχετικών εργασιών ήταν η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων για την υποστήριξη αιτιοκρατικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Παρότι, λοιπόν, δεν αποτελεί κύριο αντικείμενο της διατριβής αυτής η εμβάθυνση στις μεθόδους βελτιστοποίησης, στη βιβλιογραφική επισκόπηση των συζυγών μεθόδων η οποία ακολουθεί θα γίνεται συχνά εκτενής αναφορά σε μεθόδους βελτιστοποίησης. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι –όπως προαναφέρθηκε– ώθηση στην ανάπτυξη των μεθόδων αυτών έδωσε κυρίως η ανάγκη εφαρμογής τους σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Οι πρώτες προσπάθειες βέλτιστου σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών: Προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού

Το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού μιας αεροδυναμικής μορφής έτσι ώστε να πληροί συγκεκριμένα αεροδυναμικά κριτήρια, δεν είναι νέο. Οι πρώτες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν προς αυτήν την κατεύθυνση στόχευαν στην επίτευξη μιας επιθυμητής κατανομής πίεσης ή ταχύτητας στο στερεό όριο της μορφής, η οποία θεωρείται ότι οδηγεί στην επιθυμητή αεροδυναμική συμπεριφορά. Η επιλογή της κατανομής-στόχου στηρίζεται, σε μεγάλο βαθμό, στην εμπειρία του μηχανικού-σχεδιαστή και, αφού αποφασιστεί, αναζητείται η γεωμετρία που οδηγεί σε αυτήν την κατανομή για δεδομένες συνθήκες ροής (πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού). Από τις πρώτες εργασίες που δημοσιεύθηκαν σε αυτήν την περιοχή είναι αυτές των Mangler, [20], και Lightill, [21], οι οποίες αφορούσαν στο σχεδιασμό αεροτομών κάνοντας χρήση σύμμορφων μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, στην [21] παρουσιάστηκε μια μέθοδος για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σε ασυμπίεστα και αστρόβιλα πεδία ροής (όπου η λύση του πεδίου ταχυτήτων προέρχεται από την αναλυτική επίλυση της εξίσωσης δυναμικού) χρησιμοποιώντας μια σύμμορφη απεικόνιση από τη γεωμετρία της αεροτομής στον κύκλο με μοναδιαία ακτίνα. Η μέθοδος επεκτάθηκε αρχικά, σε 2Δ συμπιεστές ροές από τον McFadden, [22], και αργότερα από τους Garabedian και McFadden, [23], σε 3Δ προβλήματα. Επίσης, στην [24] η μέθοδος επεκτείνεται για στρωτές και τυρβώδεις ροές μέσω της εισαγωγής σε αυτήν μοντέλων τα οποία λαμβάνουν υπόψη τα συνεκτικά φαινόμενα.

Στις εργασίες [25, 26] παρουσιάζεται ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος κατά τον οποίο επιλύεται η εξίσωση του δυναμικού με συνθήκες στο όριο της αεροτομής τις τιμές του δυναμικού που προκύπτουν από την επιθυμητή κατανομή πίεσης. Με βάση τις υπολογιζόμενες κάθετες στο στερεό όριο συνιστώσες των ταχυτήτων διορθώνεται η γεωμετρία της αεροτομής. Η μέθοδος αυτή επεκτάθηκε από τον Henne, [27], ώστε να καλύπτει 3Δ ροές. Για τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν ως τώρα, προαπαιτήση αποτελεί η γνώση των επιθυμητών κατανομών πίεσης ή ταχύτητας στο όριο της αεροδυναμικής μορφής.

Συνάρτηση κόστους - αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Αξιοποιώντας τη ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και τις σύγχρονες εξελίξεις στην ΥΡΔ, η πρόσφατη τάση στην επίλυση προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών είναι η διατύπωση τους στη μορφή προβλημάτων βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης τιμής) μιας μαθηματικής συνάρτησης, της συνάρτησης κόστους F . Μέσω της συνάρτησης κόστους αποτιμάται η επίδοση της εκάστοτε γεωμετρίας ως προς τα αεροδυναμικά κριτήρια τα οποία έχουν τεθεί. Η αποτίμηση του κόστους απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων της ροής γύρω από ή μέσα στην αεροδυναμική μορφή (για την περίπτωση εξωτερικών και εσωτερικών ροών, αντίστοιχα).

Οι συναρτήσεις κόστους είναι συνήθως ολοκληρωματικές συναρτήσεις που ορίζονται είτε στα όρια του πεδίου ροής (όπως για παράδειγμα το στερεό όριο μιας αεροτομής ή τα όρια εισόδου και εξόδου ενός πεδίου ροής) είτε στο εσωτερικό του πεδίου ροής είτε, στη γενική περίπτωση, στο σύνολο του πεδίου· εξαρτώνται δε, από τις ροϊκές ποσότητες καθώς και από τις γεωμετρικές ποσότητες στις θέσεις αυτές (λ.χ. τα κάθετα στην επιφάνεια της γεωμετρίας διανύσματα κ.λ.π.). Αν, για παράδειγμα, αναζητείται η γεωμετρία εκείνη η οποία οδηγεί σε ελαχιστοποίηση της δύναμης αντίστασης σε μια αεροτομή, τότε η συνάρτηση κόστους δεν είναι άλλη παρά η μαθηματική έκφραση υπολογισμού της δύναμης αντίστασης, δηλαδή το ολοκλήρωμα των ορθών και διατημητικών τάσεων κατά συγκεκριμένη διεύθυνση, αυτήν της αδιατάρακτης ταχύτητας της ροής. Η εξάρτηση των συναρτήσεων κόστους από το πεδίο ροής (που, μεταβάλλεται και αυτό καθώς μεταβάλλεται η γεωμετρία) καθώς και η άμεση εξάρτηση τους από αυτήν καθαυτή τη γεωμετρία της μορφής (αν π.χ. η συνάρτηση κόστους ορίζεται στο στερεό όριο αυτής) αποτελεί την ‘ουσία’ του προβλήματος ελέγχου· του τρόπου δηλαδή, με τον οποίον ελέγχεται η τιμή της συνάρτησης κόστους από τις παραμέτρους που καθορίζουν/ελέγχουν τη γεωμετρία ¹.

Το πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού ανάγεται συνεπώς στο μαθηματικό πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της εκάστοτε συνάρτησης κόστους ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Η προσέγγιση αυτή δεν παρουσιάζει τα μειονεκτήματα των μεθόδων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως (όπως λ.χ. την απαίτηση γνώσης της επιθυμητής κατανομής πίεσης) και αποτελεί βάση για την ανάπτυξη γενικών μεθοδολογιών βελτιστοποίησης οι οποίες δεν εξαρτώνται από συστήματα μετασχηματισμού συντεταγμένων, θα μπορούν να εφαρμοστούν/γενικευτούν για διαφορετικά φυσικά προβλήματα που διέπονται από διαφορετικές φυσικές εξισώσεις (μη συνεκτική, στρωτή ή τυρβώδης ροής) και για διαφορετικές συναρτήσεις κόστους.

Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους είναι η χρησιμοποίηση των τιμών των πρώτων παραγώγων αυτής (και σε ορισμένες περιπτώσεις και των δευτέρων παραγώγων) ως προς τις παραμέτρους ελέγχου της γεωμετρίας υποδεικνύοντας την κατεύθυνση (στον χώρο των παραμέτρων σχεδιασμού) κατά την οποία μειώνεται κατά τον μεγαλύτερο ρυθμό η συνάρτηση κόστους. Με οδηγό αυτήν την κατεύθυνση αναζητείται η βέλτιστη λύση. Προβλήματα μεγιστοποίησης, αντί ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης (συνάρτηση καταλληλότητας) αντιμετωπίζονται με ανάλογο τρόπο. Σε αυτήν την κατηγορία μεθόδων εντάσσονται η μέθοδος της απότομης καθόδου, αυτή των συζυγών κλίσεων, κ.λ.π., [12, 13]. Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζεται η δομή ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης με χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων σε προβλήματα ΥΡΔ ².

¹Θεωρείται ότι η αεροδυναμική/υδροδυναμική μορφή έχει με κάποιον τρόπο παραμετροποιηθεί, χρήση πολυωνύμων Bézier–Bernstein, Splines, NURBS ή, ίσως, εξειδικευμένων κατά περίπτωση παραμετροποιήσεων.

²Εκτός από τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης η παρούσα διατριβή δεν ασχολείται με την άλλη



Σχήμα 1.1: Αιτιοκρατικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης για προβλήματα ΥΡΑ. Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται μέχρι να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση.

Ο προσδιορισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους για χρήση στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης αποτελεί σημαντικό στοιχείο που επηρεάζει την επιτυχή χρησιμοποίηση των μεθόδων αυτών. Πιο συγκεκριμένα, μια μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας η οποία τροφοδοτεί τη μέθοδο βελτιστοποίησης με αριθμητικά ανακριβείς παραγώγους ευαισθησίας, ιδίως όταν το πρόσημο των υπολογιζόμενων παραγώγων είναι αντίθετο από το ορθό, μπορεί να οδηγήσει τον αλγόριθμο σε αναζήτηση του βέλτιστου σε λάθος περιοχή και, συνεπώς, η βελτιστοποίηση να αποτύχει. Πέραν της ακρίβειας, το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου προσδιορισμού των παραγώγων ευαισθησίας είναι ένα δεύτερο σημαντικό στοιχείο. Η χρησιμοποίηση δαπανηρών μεθόδων σε υπολογιστικούς πόρους μπορεί να αναιρέσει το σημαντικότερο πλεονέκτημα μιας τέτοιας μεθόδου που είναι ο γρήγορος εντοπισμός της βέλτιστης λύσης. Ο εντοπισμός μπορεί να πραγματοποιείται με μικρό αριθμό κύκλων του αλγορίθμου βελτιστοποίησης αλλά, αν για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε κάθε κύκλο του αλγορίθμου το υπολογιστικό κόστος είναι υψηλό το συνολικό κόστος της μεθόδου μπορεί να καταστεί απαγορευτικό. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (παράρτημα Β'), για τον υπολογισμό των ζητούμενων παραγώγων ευαισθησίας απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης σε κάθε στοιχειωδώς τροποποιημένη ($\pm\epsilon$) από την αρχική γεωμετρία της αεροτομής. Για τη συνάρτηση κόστους F , η παράγωγος ευαισθησίας ως προς μια παράμετρο ελέγχου b_m ($m = 1, \dots, M$) υπολογίζεται με ακρίβεια δεύτερης τάξης από την έκφραση Β'.1, παράρτημα Β' (που εδώ επαναλαμβάνεται

μεγάλη κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης, τις στοχαστικές. Αυτές αναλύονται ενδελεχώς στις διατριβές [28, 29, 30, 19, 31].

για λόγους πληρότητας),

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{F(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m + \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M) - F(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m - \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M)}{2\epsilon} \quad (\text{B'.1})$$

Από τις πρώτες εργασίες προς αυτή τη κατεύθυνση ήταν αυτή των Hicks και Henne, [32, 33]. Το κόστος αυτών των μεθόδων είναι συνεπώς ανάλογο του αριθμού των παραμέτρων ελέγχου καθιστώντας αυτές ασύμφορες για χρησιμοποίηση σε προβλήματα όπως αυτά στο τομέα της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής όπου οι παράμετροι ελέγχου/μεταβλητές σχεδιασμού³ είναι συνήθως πολλές ($M \gg$). Πέραν της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών (*complex variables method*), [34, 35], μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων και ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας απαιτεί επίλυση των εξισώσεων της ροής (έναντι δύο της μεθόδου των πεπερασμένων κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας, για την ίδια τάξη ακρίβειας) για κάθε παράμετρο ελέγχου. Χρησιμοποιείται η έκφραση

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\text{Im} [F(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m + i\epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M)]}{\epsilon} \quad (1.1)$$

όπου με Im συμβολίζεται το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης F . Το κόστος είναι το μισό σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και εκτός του πλεονεκτήματος αυτού η μέθοδος υπερτερεί επίσης λόγω του ότι δεν εμφανίζει εξάρτηση από την επιλεγείσα τιμή του ϵ . Στα μειονεκτήματα της μεθόδου συγκαταλέγεται το ότι απαιτεί χρησιμοποίηση μιγαδικών μεταβλητών και, συνεπώς, επαναπρογραμματισμό του λογισμικού επίλυσης της ροής ή μέρους αυτού ώστε να χρησιμοποιεί μιγαδικές μεταβλητές και συναρτήσεις. Επίσης η μέθοδος, παρότι οικονομικότερη από αυτήν των πεπερασμένων διαφορών έχει κόστος ανάλογο του πλήθους των παραμέτρων ελέγχου, δηλαδή υψηλό για προβλήματα όπως αυτά της παρούσας διατριβής.

Οι συζυγείς μέθοδοι για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας

Η χρησιμοποίηση της μαθηματικής θεωρίας ελέγχου για προβλήματα τα οποία διέπονται από μ.δ.ε., Lions, [36], και πιο συγκεκριμένα των συζυγών μεθόδων αίρει αυτά τα προβλήματα παρέχοντας μια οικονομική σε κόστος μέθοδο για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας για τη χρησιμοποίησή τους είτε σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης είτε σε χάρτες παραγώγων ευαισθησίας (παράγραφος 2.6.2) αλλά και για οποιαδήποτε άλλη εφαρμογή. Το κόστος της συζυγούς μεθόδου είναι ανεξάρτητο του πλήθους των παραμέτρων ελέγχου και κοστίζει περίπου όσο μια επίλυση του προβλήματος των εξισώσεων κατάστασης⁴.

Η συζυγής μέθοδος εμφανίζει επίσης το πλεονέκτημα ότι δεν εξαρτάται από τη στοιχειώδη μεταβολή $\pm\epsilon$ η οποία χρησιμοποιείται στις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Στις τελευταίες, τα αποτελέσματα πρέπει να ελέγχονται για την ανεξαρτησία τους από την

³Παρότι πολλές φορές οι δύο όροι έχουν την ίδια χρήση, στη διατριβή ο όρος 'παράμετροι ελέγχου' είναι γενικότερος του όρου 'μεταβλητές σχεδιασμού' και χρησιμοποιείται παντού. Ο δεύτερος χρησιμοποιείται όταν οι παράμετροι αυτές σχετίζονται μόνο με τη γεωμετρία του σώματος.

⁴Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, κεφάλαιο 2, οι συζυγείς εξισώσεις είναι εξισώσεις παρόμοιας πολυπλοκότητας με αυτές του προβλήματος της ροής, ενώ οι υπόλοιποι όροι που πρέπει να υπολογιστούν στη συζυγή μέθοδο είναι ουσιαστικά αμελητέου κόστους.

ποσότητα αυτή εκτελώντας αρκετές και πολλές φορές δαπανηρές δοκιμές γιατί η *a priori* γνώση αυτής της ποσότητας είναι μάλλον αδύνατη, [37]. Επίσης, η χρησιμοποίηση εξαρχής όσο το δυνατό μικρότερων τιμών δεν ενδείκνυται καθότι ιδιαίτερα μικρές τιμές, πέραν ενός 'ορίου' το οποίο δεν είναι εκ' των προτέρων γνωστό, οδηγούν σε πολλαπλασιασμό των αριθμητικών σφαλμάτων και, κατά συνέπεια, σε εσφαλμένο υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, [34]. Ακόμα, η συζυγής μέθοδος δεν απαιτεί σύγκλιση των εξισώσεων της ροής σε τόσο μεγάλο βαθμό πράγμα το οποίο ισχύει συνήθως για την περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών όπου, με τις εξαιρετικά μικρές μεταβολές που επιβάλλονται στη γεωμετρία, υπάρχει ο κίνδυνος αριθμητικών ανακρίβειών στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αν οι εξισώσεις της ροής δεν έχουν αφεθεί να συγκλίνουν σε μεγάλο βαθμό, [37]. Μάλιστα, πέραν του υψηλού κόστους, που γίνεται ακόμα υψηλότερο όταν ο μηχανικός αναγκάζεται να αφήσει τις εξισώσεις να συγκλίνουν περισσότερο, σε πραγματικά προβλήματα συχνά δεν μπορεί να επιτευχθεί πολύ υψηλό επίπεδο σύγκλισης των εξισώσεων κατάστασης λόγω περιορισμών στη γένεση πλέγματος κ.λ.π.. Στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση των πεπερασμένων διαφορών είναι επισφαλής, σε αντίθεση με τη συζυγή μέθοδο η οποία δεν 'κινδυνεύει' από ανακρίβειες λόγω της αδυναμίας επαρκούς σύγκλισης των εξισώσεων ροής.

Τα παραπάνω πλεονεκτήματα οδήγησαν στην ευρεία χρησιμοποίηση των συζυγών μεθόδων στη βελτιστοποίηση στον τομέα της αεροδυναμικής και, γενικότερα, της μηχανικής των ρευστών. Ο πρώτος ο οποίος εφάρμοσε τη θεωρία ελέγχου στη μηχανική των ρευστών ήταν ο Pironneau, [38], για προβλήματα τα οποία διέπονται από μ.δ.ε. ελλειπτικού τύπου. Αργότερα, ο Jameson, [39], παρουσίασε μια συζυγή μέθοδο για προβλήματα βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική για διηχητικές ατρίβεις ροές που περιγράφονται από τις εξισώσεις της δυναμικής ροής και από τις εξισώσεις Euler. Στην εργασία [39] παρουσιάστηκε για πρώτη φορά συζυγής διατύπωση στηριζόμενη στις εξισώσεις Euler του συμπιεστού ρευστού αναλύοντας το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου και τη μαθηματική διατύπωση αυτής, χωρίς όμως εφαρμογές. Ο συγγραφέας δημοσιεύει τα πρώτα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου για 3D ατρίβεις ροές γύρω από πτέρυγες αεροσκαφών στην εργασία [40]. Η συνάρτηση κόστους αποτελούνταν από 2D κατανομές πίεσης-στόχου κατά το μήκος της πτέρυγας σε συνδυασμό με τη δύναμη αντίστασης λόγω κυμάτων κρούσης και στροβίλων. Οι υπολογισμοί έγιναν έτσι ώστε ο συντελεστής άνωσης της πτέρυγας να λαμβάνει προκαθορισμένη τιμή ρυθμίζοντας τη γωνία πρόσπτωσης του ρευστού στην πτέρυγα ενώ επιβλήθηκαν και περιορισμοί ελάχιστου πάχους. Με τον τρόπο αυτόν, η μέθοδος κατάφερε να βελτιώσει την αεροδυναμική της συμπεριφορά οδηγώντας σε πτέρυγες με μικρότερη δύναμη αντίστασης και μικρά κύματα κρούσης, τα οποία ύστερα από αρκετούς κύκλους του αλγορίθμου βελτιστοποίησης εξαφανίζονταν τελείως. Τα συμπεράσματα αυτά έδειξαν ότι ήταν μια πολλά υποσχόμενη μέθοδος. Σχεδόν ταυτόχρονα, στην [41] παρουσιάζονται αποτελέσματα βελτιστοποίησης πτέρυγας μαζί με την άτρακτο του αεροσκάφους χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο. Στη συνέχεια, [42], η μέθοδος επεκτάθηκε ώστε να καλύπτει τις εξισώσεις Navier-Stokes του συμπιεστού ρευστού. Παρουσιάστηκε αναλυτικά ο τρόπος παραγωγής των συζυγών οριακών συνθηκών για την περίπτωση της συνεκτικής ροής και η μέθοδος εφαρμόστηκε σε 3D πτέρυγα αεροσκάφους σε συνθήκες διηχητικής ροής οδηγώντας σε ροή χωρίς την εμφάνιση κυμάτων κρούσης για λειτουργία σε αριθμό Mach $M = 0.86$. Στην εργασία [43] παρουσιάζεται μια εκτενής παρουσίαση της μεθόδου για ατρίβεις και συνεκτικές ροές σε βιομηχανικές εφαρμογές από τον χώρο της αεροδυναμικής μεταξύ των οποίων δύο εφαρμογές από βελτιστοποίηση σε ολόκληρα αεροσκάφη (σε ατρίβη ροή) και μια σε διάταξη πτέρυγας-ατράκτου σε τυρβώδη ροή η οποία μοντελοποιείται με το μοντέλο τύρβης Baldwin-Lomax, [44], με χρήση της συζυγούς μεθόδου

για συνεκτικές ροές. Τα παρακάτω χρήσιμα συμπεράσματα εξάγονται από την εργασία [43]: (α) ότι η επίδραση της ατράκτου είναι σημαντική και επομένως δεν μπορεί να αγνοηθεί κατά τον σχεδιασμό-βελτιστοποίηση (β) ότι η βελτιστοποίηση μιας πτέρυγας μόνο στο σημείο λειτουργίας οδηγεί σε μια διαμόρφωση η οποία μπορεί μεν για αυτές τις συνθήκες να είναι βέλτιστη, έχοντας ουσιαστικά εξαλείψει τα κύματα κρούσης όμως, για οποιαδήποτε (έστω και μικρή) απόκλιση από τις συνθήκες στις οποίες έχει πραγματοποιηθεί η βελτιστοποίηση, τα κύματα κρούσης που εμφανίζονται είναι σημαντικά και (γ) οι βέλτιστες μεταβολές στη γεωμετρία που προτείνει η ατριβής μέθοδος είναι μικρότερες σε μέγεθος από το πάχος του οριακού στρώματος. Συνεπώς, κατά τους συγγραφείς της εργασίας, η ανάγκη για συζυγείς εξισώσεις βασισμένες στις εξισώσεις ροής του συνεκτικού ρευστού (αλλά και των μοντέλων τύρβης, όπως θα φανεί και στην παρούσα διατριβή) κρίνεται απαραίτητη. Για την αντιμετώπιση του (β) οι συγγραφείς προτείνουν η βελτιστοποίηση να γίνεται σε περισσότερα του ενός σημεία λειτουργίας (multipoint design).

Οι συζυγείς μέθοδοι που παρουσιάστηκαν ως τώρα αποτέλεσαν τις πρώτες εφαρμογές αυτών των μεθόδων στη βελτιστοποίηση στην αεροδυναμική και στη μηχανική των ρευστών και ανήκουν στην κατηγορία των συνεχών συζυγών μεθόδων. Πέραν αυτών υπάρχει και μια δεύτερη κατηγορία συζυγών μεθόδων, οι διακριτές. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο κατηγοριών έγκειται στον τρόπο (δηλαδή στη μαθηματική διαδικασία) με τον οποίο προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις και με το πότε λαμβάνει χώρα η διακριτοποίησή τους. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη συνεχή μέθοδο η μαθηματική διατύπωση γίνεται χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές/συνεχείς (εξ ου και η ονομασία της μεθόδου) εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν για να λυθούν αριθμητικά. Η συνάρτηση κόστους επαυξάνεται με την προσθήκη σε αυτήν των εξισώσεων ροής πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς μεταβλητές (πολλαπλασιαστές Lagrange). Υλοποιείται μέσω μιας μαθηματικής διαδικασίας που περιλαμβάνει τη χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και κατάλληλη διαχείριση των χωρικών και επιφανειακών (σε 3D προβλήματα) ή επικαμπύλιων (σε 2D προβλήματα) ολοκληρωμάτων. Έτσι, εξάγονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες αυτών και η έκφραση υπολογισμού των ζητούμενων παραγώγων ευαισθησίας. Η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων γίνεται σε δεύτερο επίπεδο, προκειμένου αυτές να επιλυθούν αριθμητικά. Τα σχήματα διακριτοποίησης τα οποία χρησιμοποιούνται είναι αντίστοιχα αυτών που χρησιμοποιήθηκαν και κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής, παρόλα αυτά, τυπικά, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός και ο καθένας μπορεί να εφαρμόσει ότι σχήμα επιθυμεί. Ας επισημανθεί, όμως, ότι η επιλογή της διακριτοποίησης μπορεί να επηρεάσει το τελικό αποτέλεσμα (μια σχετική μελέτη που αφορά στη διακριτοποίηση του διανύσματος της ατριβούς ροής παρουσιάζεται στο παράρτημα Δ). Στην περίπτωση της διακριτής συζυγούς μεθόδου, η μαθηματική διατύπωση ξεκινά από τις ήδη διακριτοποιημένες/γραμμικοποιημένες εξισώσεις ροής, με βάση την έννοια της δυαδικότητας (*duality*) γνωστής από τα μαθηματικά των διανυσματικών χώρων και της γραμμικής άλγεβρας, το πρόβλημα μετατρέπεται στο ισοδύναμο διακριτό συζυγές πρόβλημα. Ας επισημανθεί, στο σημείο αυτό, ότι η παρούσα διατριβή πραγματεύεται τη συνεχή συζυγή μέθοδο, χωρίς να ασχολείται με τη διακριτή μέθοδο.

Οι Burgreen και Baysal, [45], ήταν από τους πρώτους που παρουσίασαν μια διακριτή συζυγή μέθοδο για δομημένα πλέγματα η οποία χρησιμοποιήθηκε για την 3D βελτιστοποίηση πτερύγων τύπου δέλτα, η ακρίβεια της συζυγούς μεθόδου ήταν δεύτερης τάξης. Σχεδόν συγχρόνως, οι Elliot και Peraire, [46], παρουσίασαν μια διακριτή συζυγή μέθοδο με ακρίβεια δεύτερης τάξης για μη-δομημένα πλέγματα. Η μέθοδος αφορούσε ατριβείς ροές ενώ η χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε συνδυασμό με την ακρίβεια δεύτερης τάξης κατά την επίλυση

των συζυγών εξισώσεων αυξάνει την πολυπλοκότητα της μεθόδου. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε 2D και 3D προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού με στόχο μια προκαθορισμένη κατανομή πίεσης. Σε αυτά περιλαμβάνεται και η μελέτη πλήρους αεροσκάφους. Για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης χρησιμοποιήθηκε μια προσεγγιστική μέθοδος Newton, [47]. Αργότερα, επέκτειναν τη μέθοδο για την περίπτωση συνεκτικών ροών, [48], ενώ στην εργασία [49] αντιμετωπίζονται πιο πρακτικά θέματα σχετικά με τη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών, όπως για παράδειγμα η επιβολή γεωμετρικών περιορισμών. Επίσης εφαρμόζεται για τη βελτιστοποίηση 2D ή 3D αεροδυναμικών μορφών (αεροτομές, πτερυγώσεις) σε διάφορα σημεία λειτουργίας. Οι Giles και Pierce, [50, 51, 52, 53], παρουσιάζουν μια συστηματική γραφή των διακριτών συζυγών εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών για τις εξισώσεις Euler και τις εξισώσεις Navier-Stokes, στη σύγκριση μεταξύ συνεχών και συζυγών μεθόδων και σε ζητήματα τα οποία άπτονται των ιδιοτήτων των συζυγών μεταβλητών σε περιπτώσεις κυμάτων κρούσης. Στις εργασίες [54, 55] παρουσιάζονται εκτενή αποτελέσματα σε 2D και 3D εφαρμογές για τις περιπτώσεις ατριών και συνεκτικών ροών ενώ στη εργασία, [56], δίνονται αναλυτικές λύσεις για τις 1D εξισώσεις Euler. Επίσης οι Anderson και Bonhaus, [57], και οι Anderson και Nielsen έχουν αναπτύξει διακριτές συζυγείς μεθόδους για ατριβείς, στρωτές και τυρβώδεις ροές για 2D και 3D προβλήματα, [58, 59, 35]. Στην περίπτωση των τυρβωδών ροών, χρησιμοποιείται η ακριβής γραμμικοποίηση των εξισώσεων της τύρβης καθώς και του όρου των συνεκτικών τάσεων (ως προς τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας). Το ζήτημα αυτό αναλύεται στα κεφάλαια 3 και 4 της διατριβής. Γενικά, το πλέον συνηθισμένο είναι, στην περίπτωση των τυρβωδών ροών, να αμελείται η εξάρτηση των ποσοτήτων της τύρβης από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Σε ότι αφορά στη συνεχή συζυγή μέθοδο, μέχρι τώρα, αυτό δεν είναι απλά ο κανόνας αλλά η αποκλειστική τακτική. Η παρούσα διατριβή και οι συναφείς εργασίες [60, 61, 62] είναι οι πρώτες που, κατά τη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, λαμβάνουν υπόψη την εξάρτηση των τυρβωδών ποσοτήτων από τις παραμέτρους ελέγχου.

Η σύγκριση των συνεχών και διακριτών συζυγών μεθόδων, αποτελεί αντικείμενο σχολιασμού σε αρκετές εργασίες, [63, 64, 65, 66, 67]. Αυτό το οποίο μπορεί συμπερασματικά να γραφεί είναι ότι στις μεν συνεχείς μεθόδους η μαθηματική διατύπωση είναι πολλές φορές απαιτητική αλλά ο προγραμματισμός μπορεί να γίνει πιο γρήγορα. Αντιθέτως, η διακριτή μέθοδος είναι πιο άμεση σε επίπεδο διατύπωσης αλλά είναι απαιτητική σε επίπεδο προγραμματιστικό ιδίως όταν ο κώδικας έχει παραχθεί με 'χειροποίητη' διαφόριση (*hand-differentiation*). Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν λογισμικά αυτόματης ή αλγοριθμικής διαφόρισης (*Automatic Differentiation tools*) τα οποία αναλαμβάνουν να κάνουν τη δουλειά αυτή αυτοματοποιημένα. Παρέχοντας σε ένα τέτοιο λογισμικό τον πηγαίο κώδικα παράγουν ένα νέο κώδικα ο οποίος είναι το αποτέλεσμα της διαφόρισης του αρχικού ως προς τις μεταβλητές που καθορίζει ο χρήστης, [68, 69, 70, 71]. Τέτοια λογισμικά αυτόματης διαφόρισης υπάρχουν αρκετά και τα περισσότερα είναι ελεύθερα προς χρήση χωρίς κάποιο κόστος ή είναι λογισμικά ανοιχτού κώδικα. Ως παράδειγμα αναφέρουμε ορισμένα από αυτά: TAPENADE [72], ADIFOR [73], OpenAD [74], ADF95 [75], ADOL-C [76]. Πάντως, επανερχόμενοι στις διακριτές συζυγείς μεθόδους, αξίζει να αναφερθεί ότι ακόμα και με τη χρήση λογισμικού αυτόματης διαφόρισης, η διαδικασία παραγωγής του συζυγούς κώδικα παραμένει επίπονη, πόσο μάλλον όταν είναι απαραίτητη η βελτιστοποίηση του παραγόμενου κώδικα από το λογισμικό αυτόματης διαφόρισης (τα οποία συνήθως είναι αρκετά 'σπάταλα' σε χρήση πινάκων και, συνεπώς, μνήμης υπολογιστή). Μάλιστα, στην περίπτωση χρησιμοποίησης σχημάτων δεύτερης τάξης ακρίβειας (ή και μεγαλύτερης) σε μη-δομημένα πλέγματα, η δημιουργία ενός ακριβούς συζυγούς κώδικα, οικονομικού σε μνήμη υπολογιστή, για κάθε περίπτωση (π.χ. όταν υπάρχουν περιοδικά όρια) είναι αρκετά

επίπονη.

Επίσης, οι διακριτές συζυγείς μέθοδοι, εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο διατυπώνονται μαθηματικά - σε κάθε περίπτωση καταλήγουν στην αναστροφή των μητρώων που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση των εκάστοτε εξισώσεων ροής -, δεν παρέχουν ιδιαίτερη ευελιξία σε επίπεδο μαθηματικής διατύπωσης. Για παράδειγμα, ως προς τη διαχείριση των ολοκληρωμάτων στο σύνορο του πεδίου ροής, όπως θα φανεί και στο, κεφάλαιο 4, μια 'διαφορετική' αντιμετώπιση των οριακών ολοκληρωμάτων στα στερεά όρια οδήγησε σε μια νέα συνεχή συζυγή διατύπωση ειδική για ροές υψηλών αριθμών Reynolds. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν είναι εύκολο να συμβεί για τη διακριτή μέθοδο όπου λόγω της μητρωικής διατύπωσης της ο μηχανικός δεν μπορεί να επέμβει στις οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος. Αυτές προκύπτουν έμμεσα από τις ήδη διακριτοποιημένες πεδιακές εξισώσεις και οριακές συνθήκες του προβλήματος της ροής, [67].

Επίσης, με τις συνεχείς μεθόδους παρέχεται η δυνατότητα καλύτερης εποπτείας και φυσικής ερμηνείας κάθε όρου. Σε ότι αφορά στην ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, οι διακριτές και συνεχείς συζυγείς μέθοδοι μπορεί να εμφανίζουν διαφορές ιδίως για τις περιπτώσεις όπου η διακριτοποίηση του χωρίου δεν είναι ικανοποιητική, όσο πιο πυκνότερο και καλύτερης ποιότητας γίνεται το υπολογιστικό πλέγμα τόσο τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων τείνουν να γίνουν ταυτόσημα. Στην εργασία των Anderson και Venkatakrishnan, [67], συγκρίνονται εκτενώς οι δύο μέθοδοι, όχι μόνο σε επίπεδο αριθμητικών αποτελεσμάτων αλλά και ως προς τις αριθμητικές εκφράσεις των δύο μεθόδων μετά από τη διακριτοποίηση των συνεχών συζυγών εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών. Μάλιστα προτείνεται η δημιουργία μιας υβριδικής μεθόδου που στηριζόμενη στη συνεχή, ενσωματώνει τροποποιήσεις με βάση στοιχεία της διακριτής μεθόδου, καταλήγοντας έτσι σε μια μέθοδο που εμπεριέχει στοιχεία και των δύο. Οι εφαρμογές καλύπτουν ατριδή και συνεκτική ροή συμπιεστού ρευστού στην εξωτερική αεροδυναμική. Μάλιστα, σε ορισμένες εφαρμογές οι οποίες παρουσιάζονται στην εν λόγω εργασία φαίνεται να λειτουργεί καλύτερα από την κλασική συζυγή μέθοδο. Μια παρόμοια μέθοδο προτείνουν και οι Soto και Löhner, [77, 78], όπου η λύση των συνεχών συζυγών εξισώσεων ενσωματώνεται στην έκφραση παραγώγων ευαισθησίας της διακριτής συζυγούς μεθόδου.

Στη βιβλιογραφία των διακριτών συζυγών μεθόδων, αρκετές εργασίες προτείνουν διαφορετικές μεθόδους για τον υπολογισμό όρων που σχετίζονται αποκλειστικά με γεωμετρικές μεταβολές (στο όριο της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής και στο εσωτερικό υπολογιστικό πλέγμα) και εμφανίζονται στην έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Ο υπολογισμός των όρων αυτών προϋποθέτει την χρησιμοποίηση συγκεκριμένης μεθοδολογίας μετακίνησης του εσωτερικού πλέγματος και χρησιμοποίηση λ.χ. πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των ζητούμενων όρων. Η πιο απλή προσέγγιση του προβλήματος του πως θα μετακινηθεί το εσωτερικό πλέγμα είναι να ακολουθηθεί η τακτική του να μην μεταβληθεί καθόλου, μια άλλη τακτική είναι η επαναγένεση πλέγματος με βάση το 'νέο' (στοιχειωδώς τροποποιημένο) όριο της γεωμετρίας ή τέλος η χρησιμοποίηση διαφορετικών εξισώσεων (χρήση μοντέλων ελατηρίων, κ.λ.π.), [79, 80], ή αλγεβρικών εκφράσεων, [67, 81, 82], για διάδοση της μεταβολής του ορίου στο εσωτερικό του πλέγματος. Ανάλογα με την τακτική μετακίνησης του εσωτερικού πλέγματος που χρησιμοποιείται, τα αποτελέσματα των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας μπορεί να διαφοροποιούνται. Επίσης, όταν χρησιμοποιούνται μαθηματικές εκφράσεις (μ.δ.ε./αλγεβρικές εκφράσεις) για τη μετακίνηση ή επαναγένεση πλέγματος (περίπτωση δομημένων πλεγμάτων) είναι δυνατή η διαφόριση αυτών (με ή χωρίς λογισμικό αυτόματης διαφόρισης) ώστε να αποφευχθεί η χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών ή

κάποιας άλλης συναφούς μεθόδου (π.χ. μέθοδος μιγαδικών μεταβλητών). Οι Kim, Obayashi et al., [80], συγκρίνουν τις υπολογιζόμενες παραγωγούς (α) με επίλυση μιας ελλειπτικής μ.δ.ε. για τον προσδιορισμό των μεταβολών των κόμβων στο εσωτερικό πλέγμα και (β) θεωρώντας το εσωτερικό αμετάβλητο και σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουν διαφορές. Οι μεταβολές των θέσεων των κόμβων στο εσωτερικό του χωρίου υπολογίζονται χωρίς τη χρήση πεπερασμένων διαφορών, με απευθείας διαφόριση της εξίσωσης που διέπει τη μετακίνηση του εσωτερικού πλέγματος. Θεωρητικά, όσο πιο πυκνά διακριτοποιείται το πεδίο τόσο πιο μικρές θα είναι οι διαφορές μεταξύ των υπολογιζόμενων παραγωγών κατά τις περιπτώσεις (α) και (β). Για πολύπλοκα 3D προβλήματα, συχνά η διαδικασία υπολογισμού των μεταβολών με χρήση μ.δ.ε. μπορεί να γίνει δαπανηρή. Για το λόγο αυτό, στις [83, 84] προτείνεται η προσαύξηση της συνάρτησης κόστους με τη μεταβολή των εξισώσεων που καθορίζουν τη μετακίνηση του πλέγματος μέσω της εισαγωγής επιπλέον συζυγών μεταβλητών, έτσι αποφεύγεται ο υπολογισμός αυτών των όρων που σχετίζονται με μεταβολές στις θέσεις των εσωτερικών κόμβων.

Επανερχόμενοι στις συνεχείς συζυγείς μεθόδους, πρέπει να αναφερθεί ότι η απαίτηση για υπολογισμό των στοιχειωδών μεταβολών/μετακινήσεων των εσωτερικών κόμβων δεν υφίσταται. Οι πρώτες συνεχείς συζυγείς διατυπώσεις εμπειρείχαν χωρικά ολοκληρώματα με μεταβολές γεωμετρικών ποσοτήτων στις εκφράσεις των παραγωγών ευαισθησίας, για τον υπολογισμό των οποίων ήταν απαραίτητη η μετακίνηση του εσωτερικού πλέγματος. Αργότερα όμως, οι Jameson και Kim, [85], παρουσίασαν τροποποίηση κατά την οποία η παράγωγος ευαισθησίας μπορεί να υπολογιστεί με ολοκληρωματικές εκφράσεις στα όρια της αεροδυναμικής μορφής. Η μέθοδος αφορούσε ατριβείς ροές και δομημένα πλέγματα. Οι Baysal και Ghayour, [86], είχαν ήδη παρουσιάσει μια επίσης συνεχή συζυγή μέθοδο για το ατριβές συμπίεστο ρευστό, όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι ανεξάρτητες χωρικών ολοκληρωμάτων των μεταβολών γεωμετρικών ποσοτήτων. Επίσης οι Soto και Löhner, [87], παρουσίασαν τη δική τους συνεχή διατύπωση για ασυμπίεστες ροές μη-συνεκτικού ρευστού, η οποία έχει επίσης την παραπάνω ιδιότητα. Οι Papadimitiou και Giannakoglou, [88], παρουσίασαν, για πρώτη φορά, μια συνεχή συζυγή μέθοδο η οποία οδηγεί στον υπολογισμό των παραγωγών ευαισθησίας χρησιμοποιώντας μόνο οριακά ολοκληρώματα για συνεκτικές ροές και μάλιστα σε μη-δομημένα πλέγματα. Αργότερα ο Othmer, [89], πρότεινε μια μέθοδο για συνεκτικές ασυμπίεστες ροές, η οποία στηρίχθηκε στη μέθοδο των Soto και Löhner όπου όπως και οι προηγούμενες δεν απαιτεί τον υπολογισμό των στοιχειωδών μεταβολών των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος. Αποδεικνύεται ότι οι διατυπώσεις που παρουσιάζονται στα [88] και [89] είναι ισοδύναμες, βλ. [60].

Στη βιβλιογραφία συναντώνται επίσης οι λεγόμενες τεχνικές One-Shot, στις οποίες η επίλυση των εξισώσεων της ροής, των συζυγών εξισώσεων καθώς επίσης και της εξίσωσης σχεδιασμού (από όπου προκύπτει η 'διόρθωση' των παραμέτρων ελέγχου) γίνεται ταυτόχρονα οδηγώντας σε μείωση κόστους σε σύγκριση με την 'κλασική' προσέγγιση κατά την οποία πρώτα λύνονται οι εξισώσεις της ροής, μετά οι συζυγείς εξισώσεις και, τέλος, διορθώνεται η γεωμετρία, [90, 91]. Οι Soto και Löhner, [92, 93, 77], προτείνουν τη χρησιμοποίηση μεθόδου που υπολογίζει προσεγγιστικά τις παραγωγούς ευαισθησίας συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται στα στερεά τοιχώματα της αεροδυναμικής μορφής χωρίς την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Μια αντίστοιχη μέθοδος παρουσιάζεται από τους Mohammadi και Pironneau, [94, 95], ενώ στην [96] αυτή χρησιμοποιείται για το βέλτιστο σχεδιασμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών.

Ειδικά στην περιοχή των στροβιλομηχανών, συναντώνται αρκετές εφαρμογές των συζυγών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν τις παραγωγούς ευαισθησίας συναρτήσεων που αφορούν το

σχεδιασμό συμπιεστών και στροβίλων, όπως η παροχή, η γωνία εξόδου οι απώλειες ολικής πίεσης. Στις εργασίες των Campobasso, Duta και Giles, [97, 98, 99], παρουσιάζεται η αρμονική συζυγής μέθοδος για περιοδικές μη μόνιμες ροές σε στροβιλομηχανές, στη βάση της διακριτής συζυγούς μεθόδου. Στις εργασίες των Paradimitiou και Giannakoglou, [88, 100, 11] χρησιμοποιήθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο σχεδιασμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών (2Δ και 3Δ), για ατρίβεις, στρωτές και τυρβώδεις ροές (θεώρηση σταθερής τυρβώδους συνεκτικότητας). Οι συναρτήσεις κόστους που χρησιμοποιούνται είναι οι απώλειες ολικής πίεσης και η συνολική παραγωγή της εντροπίας λόγω απωλειών συνεκτικού στρώματος. Παρότι η τελευταία συνάρτηση είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της εντροπίας, εντούτοις η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας δεν εμπεριέχει χωρικούς όρους. Στην εργασία [101] παρουσιάζονται δύο διατυπώσεις, μια συζυγής και μια διακριτή, για τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes σε εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Με τον τρόπο αυτόν, τα οφέλη της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, [102], εκτός από το πρόβλημα της ροής, αξιοποιούνται και στο συζυγές πρόβλημα.

Οι Jameson και Leoniriyakit στις εργασίες [103, 104] παρουσιάζουν την αεροελαστική βελτιστοποίηση της κάτοψης πτέρυγας αεροσκάφους με χρήση της συζυγούς μεθόδου. Η συνάρτηση κόστους είναι συνδυασμός του συντελεστή οπισθέλκουσας, της κατανομής πίεσης-στόχου και του βάρους της πτέρυγας. Επίσης, στην εργασία [105] γίνεται αεροελαστική βελτιστοποίηση με τη χρήση της συζυγούς μεθόδου. Επιλύεται το συζευγμένο σύστημα των εξισώσεων του ρευστού και του στερεού με στόχο την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας πτέρυγας αεροσκάφους και τη μεγιστοποίηση της εμβέλειας πτήσης. Στην [106], το συζευγμένο σύστημα των αεροελαστικών εξισώσεων επιλύεται επαναληπτικά, «παγώνοντας» τη λύση του πεδίου ροής όταν πραγματοποιείται η δομική ανάλυση. Για την επίλυση του πεδίου ροής χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes του συμπιεστού ρευστού με το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras, [107]. Τέλος, στην [108], γίνεται επιπλέον μελέτη της επίδρασης συνεκτικών φαινομένων στην πορεία του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Επίσης, στις εργασίες [109, 110] παρουσιάζονται συνεχείς και διακριτές συζυγείς μέθοδοι για τις μη-μόνιμες εξισώσεις ροής. Η επίλυση του ακριβούς συζυγούς προβλήματος προϋποθέτει την 'πίσω' στο χρόνο ολοκλήρωση των εξισώσεων, δηλαδή σε χρονική κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν των εξισώσεων της ροής. Οι εφαρμογές αφορούν 2Δ αεροτομές με στόχο τη μείωση του χρονικά μέσου συντελεστή αντίστασης (για σταθερή τιμή του μέσου συντελεστή άνωσης). Στην [111] επεκτείνεται, από τους ίδιους συγγραφείς, η διακριτή μέθοδος σε 3Δ ροές, με εφαρμογή στην ελαχιστοποίηση του χρονικά μέσου συντελεστή αντίστασης σε μια πτέρυγα. Επίσης, στην [112] προτείνεται η χρήση της μεθόδου Monte Carlo για την επίλυση του μη-μόνιμου συζυγούς προβλήματος, η εξίσωση κατάστασης είναι η εξίσωση Burgers'. Πέραν των προαναφερθέντων, στη βιβλιογραφία απαντώνται και άλλες εργασίες που αναπτύσσουν μη-μόνιμες συζυγείς διατυπώσεις, ενδεικτικά αναφέρονται ορισμένες ακόμα [113, 114, 115].

Εκτός από τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ολοκληρωματικών συναρτήσεων οι συζυγείς διακριτές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωματικών ποσοτήτων ώστε να πληρούν επιθυμητά επίπεδα σφάλματος σε όσο το δυνατό μικρότερης διάστασης υπολογιστικό πλέγμα. Οι μέθοδοι αυτές έχουν δύο επίπεδα συνεισφοράς (α) την ακριβή πρόλεξη των ολοκληρωματικών ποσοτήτων σε συγκεκριμένο υπολογιστικό πλέγμα (*a posteriori εκτίμηση σφάλματος*) και (β) τη 'βέλτιστη' προσαρμογή του πλέγματος στις περιοχές που υποδεικνύει η μέθοδος ώστε να επιτευχθεί πρόλεξη της τιμής της ολοκληρωματικής

ποσότητας με την επιθυμητή ακρίβεια. Στην περιοχή αυτή εντάσσονται οι εργασίες [50, 116, 117, 118, 119, 120].

Τέλος, τα τελευταία χρόνια, αναπτύσσονται συζυγείς μέθοδοι για τον προσδιορισμό του μητρώου των δευτέρων παραγώγων [9, 10, 121, 3, 5, 6] οι οποίες βασίζονται τόσο στη συνεχή όσο και στη διακριτή συζυγή διατύπωση. Το υπολογιζόμενο μητρώο δευτέρων παραγώγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο είτε της ακριβούς μεθόδου Newton είτε για την εκκίνηση προσεγγιστικών μεθόδων Newton. Επίσης, οι συζυγείς μέθοδοι για τον υπολογισμό δευτέρων παραγώγων βρίσκουν εφαρμογή στις περιοχές των μεθόδων σιβαρού σχεδιασμού και των μεθόδων Monte-Carlo.

1.2 Στόχοι και δομή της διατριβής

Η ήδη εκτενής τεχνογνωσία του ΕΘΣ/ΕΜΠ στην περιοχή των συζυγών μεθόδων, [19, 11, 18], καλύπτει τις περιπτώσεις της ατρίβους και στρωτής συνεκτικής ροής για τις εξισώσεις του συμπίεστου ρευστού. Στην περίπτωση των τυρβωδών ροών, οι παραπάνω συζυγείς διατυπώσεις χρησιμοποιούν την απλουστευτική παραδοχή της αναλλοίωτης/‘παγωμένης’⁵ τυρβώδους συνεκτικότητας η οποία, όπως θα δειχθεί στο κεφάλαιο 3, επηρεάζει την ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας. Στόχος, λοιπόν, της παρούσας διατριβής είναι η διατύπωση, προγραμματισμός και πιστοποίηση συνεχών συζυγών μεθόδων για τον προσδιορισμό ακριβών παραγώγων ευαισθησίας στην περίπτωση τυρβωδών ροών. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσονται οι παρακάτω κύριοι άξονες της διατριβής που αφορούν στην ανάπτυξη και στον προγραμματισμό ακριβών συνεχών συζυγών μεθόδων για :

- μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds
- μοντέλα τύρβης με συναρτήσεις τοίχου

Η διατύπωση πραγματοποιήθηκε για τις εξισώσεις του ασυμπίεστου ρευστού. Οι τεχνικές, όμως, που αναπτύσσονται μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν και στις εξισώσεις του συμπίεστου ρευστού. Επίσης, ένα ‘παραπροϊόν’ της διατριβής είναι η ανάπτυξη και ο προγραμματισμός της συνεχούς μεθόδου ευθείας διαφόρισης για την πιστοποίηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας και με ένα δεύτερο τρόπο πέραν της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, σε στρωτές και τυρβώδεις ροές.

Εκτός από τους παραπάνω κύριους άξονες, στο τελευταίο τμήμα της διατριβής μελετάται η εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα ελέγχου της ροής, στα οποία ζητείται από τη συζυγή μέθοδο να ‘υποδείξει’ περιοχές στις οποίες η ενδεχόμενη τοποθέτηση δεσμών ρευστού θα επιφέρει δραστική βελτίωση στην αεροδυναμική/υδροδυναμική συμπεριφορά της προς μελέτη μορφής.

Η υλοποίηση μιας διατριβής με αντικείμενο τις συζυγείς μεθόδους προαπαιτεί, όπως είναι φυσικό, την ύπαρξη λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων της ροής (εξισώσεις Navier-Stokes με το απαραίτητο μοντέλο τύρβης) και, μάλιστα, σε μορφή ‘ανοικτού’ κώδικα. Ως τέτοια χρησιμοποιήθηκαν εδώ δύο επιλύτες, αφενός ένας οικείος (in-house, ανεπτυγμένος από την εργαστηριακή ομάδα του ΕΘΣ, [122, 123]) και αφετέρου ένα σχετικό ελεύθερο λογισμικό, [124, 125]. Και οι δύο αφορούν στο ασυμπίεστο ρευστό, καλύπτουν δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα ενώ παραλλαγές και των δύο λογισμικών καλύπτουν 2Δ και 3Δ

⁵Στη συνέχεια της διατριβής θα χρησιμοποιείται ο όρος ‘παγωμένη’ τυρβώδης συνεκτικότητα ο οποίος αποτελεί ακριβής μετάφραση του όρου “frozen” turbulent viscosity που χρησιμοποιείται στην εργασία [60].

ροές κατά περίπτωση. Το μεν οικείο λογισμικό χρησιμοποιεί τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεσότητας, [126, 122, 123], το δε ελεύθερο λογισμικό τον αλγόριθμο SIMPLE, [127], καλύπτοντας έτσι και τις δύο μεθοδολογίες που συναντώνται στη βιβλιογραφία. Και στις δύο περιπτώσεις έχοντας ως βάση τον κώδικα επίλυσης των εξισώσεων της ροής προγραμματίστηκε το λογισμικό επίλυσης του συστήματος των συζυγών εξισώσεων. Επίσης, και τα δύο λογισμικά υποστηρίζουν την επίλυση σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας. Το οικείο λογισμικό είναι προγραμματισμένο σε γλώσσα Fortran77 ενώ το ελεύθερο λογισμικό σε C++. Σκοπός της διατριβής δεν είναι η σύγκριση αυτών των δύο λογισμικών. Προφανώς, σε όλες τις περιπτώσεις που πιστοποιείται η προτεινόμενη συζυγής μέθοδος (λ.χ. με πεπερασμένες διαφορές, παράρτημα Β', ή με ευθεία διαφόριση, παράρτημα Γ') η σύγκριση γίνεται πάντα με τρόπο συμβατό· έτσι αν, λ.χ. η συζυγής μέθοδος είναι αυτή η οποία έχει αναπτυχθεί με βάση το οικείο λογισμικό, τότε οι πεπερασμένες διαφορές ή η ευθεία διαφόριση υλοποιούνται και αυτές με βάση τον οικείο κώδικα. Με τον τρόπο αυτόν η σύγκριση εστιάζεται στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων από τη συζυγή μέθοδο.

Η διατριβή αποτελείται από έξι κεφάλαια συμπεριλαμβανομένης και της εισαγωγής και δομείται στα υπόλοιπα πέντε κεφάλαια, ως εξής:

- Στο κεφάλαιο 2 διατυπώνονται και παρουσιάζονται οι ακριβείς συνεχείς συζυγείς εξισώσεις για τη ροή ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού. Αυτό γίνεται με τρόπο γενικό και ανεξάρτητο της εκάστοτε χρησιμοποιούμενης συνάρτησης της οποίας οι παράγωγοι θα υπολογιστούν. Στις εφαρμογές που ακολουθούν επιδιώκεται η ταύτιση των αποτελεσμάτων, δηλαδή των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζει η συζυγής μέθοδος με τις 'τιμές αναφοράς' οι οποίες προκύπτουν είτε από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είτε από αυτήν της ευθείας διαφόρισης. Η συζυγής αυτή μέθοδος αποτελεί τη 'βάση' τόσο σε επίπεδο μαθηματικής διατύπωσης όσο και σε προγραμματιστικό επίπεδο για τη δημιουργία μιας συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τυρβώδεις ροές.
- Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται διεξοδικά η μαθηματική διατύπωση της ακριβούς συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τυρβώδεις ροές και, συγκεκριμένα, για ροές με μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds. Η διατύπωση εξειδικεύεται για το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras αν και η μεθοδολογία είναι γενική. Σε επίπεδο εφαρμογών, συγκρίνονται οι τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας με αυτές των τιμών αναφοράς καθώς και με αυτές που προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση της ίδιας μεθόδου υπό την παραδοχή όμως ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι παγωμένη. Επίσης, μελετάται η σχετική σημασία των επιπλέον όρων που εισάγονται στις προϋπάρχουσες συζυγείς εξισώσεις και συζυγείς οριακές συνθήκες.
- Στο κεφάλαιο 4 θεμελιώνεται μαθηματικά και πιστοποιείται σε επίπεδο αποτελεσμάτων μια νέα-πρωτότυπη συνεχής συζυγής μέθοδος για τυρβώδεις ροές οι οποίες μοντελοποιούνται με μοντέλο τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds (χρήση μοντέλου συναρτήσεων τοίχου). Η συζυγής διατύπωση είναι ακριβής, λαμβάνει δηλαδή υπόψη της το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου του προβλήματος της ροής καθώς και το μοντέλο τύρβης $k-\varepsilon$.
- Στο κεφάλαιο 5 αναπτύσσονται οι συζυγείς μέθοδοι για τον προσδιορισμό παραγώγων συναρτήσεων κόστους ως προς τις ταχύτητες δεσμών αναρρόφησης/έγχυσης ρευστού,

\mathbf{v}_m , στις διάφορες θέσεις m του διακριτοποιημένου ορίου της γεωμετρίας (κόμβοι επιφανειακού πλέγματος). Οι παραπάνω παράγωγοι ευαισθησίας μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο προσδιορισμού των πλέον σημαντικών θέσεων στις οποίες ενδείκνυται η τοποθέτηση δεσμών αναρρόφησης/έγχυσης ρευστού. Οι παράγωγοι ευαισθησίας, $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}_m}$ (F είναι η συνάρτηση κόστους), υπολογίζονται για την περίπτωση όπου $\mathbf{v}_m = 0$, δηλαδή για την περίπτωση χωρίς δέσμη-ες ελέγχου ροής. Συνεπώς, στην κατηγορία αυτών των προβλημάτων, οι παράμετροι ελέγχου δεν είναι μεταβλητές σχεδιασμού που καθορίζουν τη γεωμετρία της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής αλλά οι ίδιες οι οριακές συνθήκες στα (στερεά) όρια της μορφής. Οι εφαρμογές οι οποίες παρουσιάζονται αφορούν ροές σε αγωγούς. Αφού έχουν υπολογιστεί οι παράγωγοι ευαισθησίας τοποθετούνται δέσμες ρευστού, είτε αναρρόφησης είτε έγχυσης σταθερής παροχής ρευστού, στις περιοχές που υπέδειξαν οι παράγωγοι ευαισθησίας με σκοπό την επιβεβαίωση των δυνατοτήτων της μεθόδου. Υπολογιστικά, ο έλεγχος της ροής επιβάλλεται μέσω επιβολής διαφορετικής οριακής συνθήκης πάνω στο όριο χωρίς να τροποποιείται η γεωμετρία.

- Τέλος, στο κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα συμπεράσματα και τα στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής ενώ προτείνονται θέματα για μελλοντική έρευνα.

Στα παραρτήματα που ακολουθούν το κυρίως μέρος της διατριβής, παρουσιάζεται αρχικά ο γενικευμένος κανόνας του Leibniz, παράρτημα Α', ο οποίος αποτελεί ένα 'αυστηρό' μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό μεταβολών/ρυθμών μεταβολής ολοκληρωματικών ποσοτήτων που συναντώνται κατά τη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Στα υπόλοιπα παραρτήματα, Β' ως ζ', παρουσιάζονται κατά σειρά: η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, η συνεχής μέθοδος της ευθείας διαφόρισης για στρωτές και τυρβώδεις ροές, θέματα που άπτονται της αριθμητικής διακριτοποίησης των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων του οικείου κώδικα και της επιβολής των συζυγών οριακών συνθηκών στο όριο εξόδου του πεδίου ροής.

Κεφάλαιο 2

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες, στρωτές ροές

2.1 Εξισώσεις της ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν τα προβλήματα της μόνιμης ροής με τα οποία ασχολείται η παρούσα διατριβή είναι οι εξισώσεις Navier–Stokes για ασυμπίεστο ρευστό. Ειδικά, στο παρόν κεφάλαιο, η ροή θεωρείται στρωτή. Οι ισχύουσες εξισώσεις, για προβλήματα ροών χωρίς μετάδοση θερμότητας, [126], διατυπώνονται στη μορφή

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2(, 3) \quad (2.2)$$

όπου με v_i συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας, p είναι η κινηματική στατική πίεση (δηλαδή, η στατική πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα αυτού· εφεξής για λόγους συντομίας η κινηματική στατική πίεση θα αναφέρεται ως στατική πίεση, εκτός αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό). Επίσης, ν είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού που θεωρείται σταθερή. Στη συνέχεια, ως διάνυσμα μεταβλητών της ροής νοείται το διάνυσμα $\mathbf{U} = [p, v_i]^T$ ενώ για τα υπόλοιπα των (διακριτοποιημένων) εξισώσεων ροής ισχύει η αντιστοιχία $R_1^U = R^p$ και $R_{i+1}^U = R_i^v$ για $i = 1, 2(, 3)$. Οι εξισώσεις της ροής (μαζί με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος) αποτελούν τις εξισώσεις κατάστασης των προβλημάτων του κεφαλαίου 2.

Για τις περιπτώσεις εσωτερικών ροών, οι συνθήκες που ‘κλείνουν’ το σύστημα των εξισώσεων 2.1, 2.2 στα όρια του πεδίου ροής, είναι οι εξής: (α) στην είσοδο του πεδίου, Dirichlet συνθήκη για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας και μηδενική Neumann για τη στατική πίεση, (β) στην έξοδο του πεδίου, μηδενική Neumann συνθήκη για την ταχύτητα και μηδενική Dirichlet για την πίεση και (γ) στα στερεά τοιχώματα, μηδενική Dirichlet για την ταχύτητα (συνθήκη μη-ολίσθησης) και μηδενική Neumann για την πίεση.

2.2 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών

Η επίλυση ενός προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού–βελτιστοποίησης μιας αεροδυναμικής μορφής ως προς ένα προκαθορισμένο κριτήριο, εκφρασμένο μαθηματικά από μια

συνάρτηση κόστους¹ $F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$, υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης F στο χώρο λύσεων των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{b} . Θεωρείται ότι έχει προηγηθεί η παραμετροποίηση της προς σχεδιασμό μορφής με χρήση σχετικής μεθόδου (πολυώνυμα Bézier–Bernstein, Splines, NURBS ή, ίσως, εξειδικευμένων κατά περίπτωση παραμετροποιήσεων) ενώ με $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ συμβολίζεται το διάνυσμα των M μεταβλητών σχεδιασμού, που εισάγει η επιλεγείσα παραμετροποίηση. Η συνάρτηση κόστους εξαρτάται από τις μεταβλητές της ροής \mathbf{U} και τις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{b} , οι οποίες καθορίζουν τη γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής. Η εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι διττή και διαμορφώνει το πρόβλημα ελέγχου: η τιμή της συνάρτησης κόστους εξαρτάται αφενός (α) άμεσα (μέσω της μαθηματικής της έκφρασης) από τις γεωμετρικές ποσότητες του πλέγματος (που διακριτοποιεί το εσωτερικό του πεδίου ροής και τα όρια αυτού) το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από τη γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής και, άρα, το διάνυσμα \mathbf{b} και αφετέρου (β) από τη ροϊκή λύση, \mathbf{U} , η οποία επίσης αποτελεί συνάρτηση του \mathbf{b} . Το \mathbf{U} , όπως είναι φυσικό, μεταβάλλεται αν μεταβληθούν οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, αν αλλάξει δηλαδή η γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής και ικανοποιηθούν οι εξισώσεις κατάστασης στο τροποποιημένο χωρίο ροής. Συνεπώς, οι μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{b} ελέγχουν την τιμή της συνάρτησης κόστους.

Αφειρηγία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος αποτελεί ο ορισμός της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, F_{aug} . Αυτή δημιουργείται από την πρόσθεση στη συνάρτηση κόστους, του χωρικού (στο πεδίο ροής) ολοκληρώματος, των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με πολλαπλασιαστές Lagrange. Οι τελευταίοι ταυτίζονται με τις επονομαζόμενες συζυγείς μεταβλητές (adjoint ή co-state variables). Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_i R_i^U d\Omega \quad (2.3)$$

Όπως προαναφέρθηκε, στο δεξί μέλος της εξίσωσης 2.3 προστίθεται το ολοκλήρωμα, στο πεδίο ροής Ω , των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης (τα οποία είναι μηδενικά δεδομένου ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις κατάστασης και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες) πολλαπλασιασμένων με το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών $\Psi = [q, u_i]^T$. Με q και u_i συμβολίζονται, αντιστοίχως, οι συζυγείς ως προς την πίεση και το διάνυσμα της ταχύτητας, μεταβλητές. Η έκφραση 2.3 μπορεί εναλλακτικά να γραφεί, χωριστά για τις εξισώσεις της ορμής και αυτήν της συνέχειας, ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (2.4)$$

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, οι οποίες εκφράζουν τις μεταβολές της συνάρτησης κόστους F ως προς ενδεχόμενες μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού, b_m . Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας επικουρούν μια αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης στην επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης F . Θεωρούμε πως στο πρόβλημα δεν υπάρχουν περιορισμοί. Σε αντίθετη περίπτωση, η βέλτιστη λύση πρέπει να πληροί τους περιορισμούς αυτούς, οι οποίοι λ.χ. μπορούν να αφορούν στο ελάχιστο πάχος ενός πτερυγίου ή τη στροφή της ροής που επιτυγχάνεται σε μια πτερύγωση στροβιλομηχανής.

¹Στα προβλήματα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης η συνάρτηση κόστους ταυτίζεται με τη συνάρτηση στόχο και, συνεπώς, οι δύο όροι είναι εναλλάξιμοι.

Δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος των εξισώσεων 2.3 είναι εξ ορισμού ίσο με μηδέν, αντί της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, αρκεί να υπολογισθεί η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης κόστους $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$. Στη συνέχεια, οι δύο αυτές γραφές των παραγώγων ευαισθησίας θα χρησιμοποιούνται αδιακρίτως. Ο εν λόγω ρυθμός μεταβολής γράφεται ως εξής

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \quad (2.5)$$

Η εξίσωση 2.5 συναρτά το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κόστους των ρυθμών μεταβολής αφενός μεν των ποσοτήτων ροής $\frac{\delta p}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta v_i}{\delta b_m}$ αφετέρου δε των στοιχειωδών όγκων ελέγχου του χωρίου ροής $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$. Μπορεί δε, με χρήση των ταυτοτήτων

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (2.6)$$

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (2.7)$$

να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} + q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

Οι τελευταίες έχουν αναπτυχθεί και αποδειχθεί στη διδακτορική διατριβή του Δ. Παπαδημητρίου [18], βλ. επίσης [88], [11]. Στην 2.6, με $\Phi = \Phi(x_i(\mathbf{b}), \mathbf{b})$ συμβολίζεται οποιαδήποτε ποσότητα της ροής, όπως για λ.χ. οι ροϊκές μεταβλητές (πίεσεις, ταχύτητες, κ.λ.π.) αλλά και τα υπόλοιπα R_l^U των εξισώσεων ροής. Αν $\Phi = R_l^U$, στο εσωτερικό του πεδίου ροής, η εξίσωση 2.6 οδηγεί στις σχέσεις

$$\frac{\delta R_l^U}{\delta b_m} = \frac{\partial R_l^U}{\partial b_m} = \frac{\partial R_l^U}{\partial x_k} = 0 \quad (2.9)$$

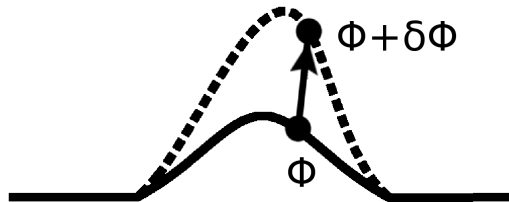
Από την εξίσωση 2.6 προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής $\frac{\delta \Phi}{\delta b_m}$ ορίζεται εύκολα στο διακριτοποιημένο πεδίο στο οποίο επιλύονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις. Για κάθε κόμβο του πλέγματος, ο όρος $\frac{\partial \Phi}{\partial b_m}$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της κομβικής τιμής της ποσότητας Φ λόγω της μεταβολής του b_m (λόγω λ.χ. τροποποίησης της μορφής του χωρίου της ροής) ως εάν η θέση του κόμβου να μην επηρεάζεται από τη μεταβολή στην τιμή του b_m . Ο όρος $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ ποσοτικοποιεί τον επιπλέον ρυθμό μεταβολής της κομβικής τιμής του Φ λόγω της μετατόπισης του αντίστοιχου κόμβου. Ο όρος αυτός εμπλέκει τη χωρική παράγωγο του Φ και το ρυθμό μεταβολής $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ της θέσης του κόμβου. Η τιμή της χωρικής παραγώγου $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ υπολογίζεται στο πεδίο ροής προτού μεταβληθεί η γεωμετρία. Ο όρος $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη αφενός τη συνάρτηση παραμετροποίησης του ορίου, μέσω του b_m , αφετέρου δε τη διαδικασία-εξισώσεις γένεσης του πλέγματος. Η σύνθεση των δύο αυτών ρυθμών μεταβολών δίνει τον ολικό ρυθμό μεταβολής $\frac{\delta \Phi}{\delta b_m}$.

Το να οριστεί η ίδια σχέση (εξ. 2.6) στο συνεχές πεδίο ροής (αντί του διακριτού όπου λ.χ. υφίσταται η έννοια του κόμβου του πλέγματος) φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, να στερείται

ερείσματος. Εν τούτοις, η ανάγκη ενός 'ισοδύναμου' ορισμού για το συνεχές πεδίο είναι απαραίτητη δεδομένου ότι το πεδίο ροής δεν έχει διακριτοποιηθεί ακόμα και, συνεπώς, δεν είναι δόκιμο να χρησιμοποιούνται όροι διακριτοποίησης. Στο συνεχές πεδίο, η απουσία πλέγματος, άρα και της έννοιας των κόμβων, υποκαθίσταται από μια 'νοητή' συνάρτηση που διέπει τη 'μετατόπιση' ενός σημείου του χώρου ως αποτέλεσμα της μεταβολής δb_m της τιμής κάποιας από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Επειδή κατάληξη είναι ο προγραμματισμός των διακριτοποιημένων μερικών διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψουν (δηλαδή των συζυγών εξισώσεων), με χρήση πλέγματος, η 'νοητή' αυτή συνάρτηση αποτελεί ουσιαστικά το 'συνεχές ισοδύναμο' της υπολογιστικής μεθόδου χωρικής διακριτοποίησης (γένεσης πλέγματος). Υπό αυτήν την έννοια, ο ολικός ρυθμός μεταβολής $\frac{\delta\Phi}{\delta b_m}$ συνίσταται από το ρυθμό μεταβολής $\frac{\partial\Phi}{\partial b_m}$ (που επιφέρει η μεταβολή του b_m σε ένα σημείο του χώρου, αν αυτό θεωρηθεί σταθερό) και το ρυθμό μεταβολής $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ που λαμβάνει υπόψη την επιφερόμενη μετακίνηση του σημείου αυτού, κατ' αντιστοιχία με τη μετακίνηση κόμβων πλέγματος στο διακριτοποιημένο πρόβλημα.

Ως συμπέρασμα, η προαναφερθείσα 'νοητή' συνάρτηση είναι ένα απαραίτητο (για τη μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου) 'εργαλείο' όπου όμως δε χρειάζεται να λάβει συγκεκριμένη μορφή γιατί, εν τέλει, στις συζυγείς διατυπώσεις που αναπτύσσονται στην παρούσα διατριβή η έκφραση προσδιορισμού των παραγώγων ευαισθησίας προκύπτει ανεξάρτητη από τη 'μετατόπιση' όλων των εσωτερικών σημείων του χωρίου. Στο όριο, δε, χρησιμοποιείται μόνο το διακριτό της ισοδύναμο.

Στη συνέχεια και χάριν απλότητας, ο όρος 'ρυθμός μεταβολής' αντικαθίσταται από τον όρο 'μεταβολή'. Επιπλέον, η μεταβολή $\frac{\partial\Phi}{\partial b_m}$ θα ονομάζεται μερική ή άμεση μεταβολή, σε αντίθεση με την ολική μεταβολή $\frac{\delta\Phi}{\delta b_m}$.



Σχήμα 2.1: Η μετατόπιση από την αρχική γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής (συνεχής γραμμή) στη νέα (διακεκομμένη γραμμή) συνεπάγεται την ολική μεταβολή της ποσότητας Φ (η ποσότητα Φ εξαρτάται από μεγέθη της ροής) κατά $\delta\Phi = \partial\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \delta x_k$. Η μεταβολή $\partial\Phi$ οφείλεται στη συνολική αλλαγή της γεωμετρίας που επιφέρει αλλαγή στη ροϊκή λύση παντού στο πεδίο ροής και όχι στη μετατόπιση του εν λόγω κόμβου. Η μεταβολή $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \delta x_k$ αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά, στην ολική μεταβολή, της μετατόπισης του κόμβου αυτού καθαυτού, θεωρώντας ότι το πεδίο ροής παραμένει αμετάβλητο.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης στο τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 2.8 και με αμοιβαίες απαλοιφές όρων, η μεταβολή της συνάρτησης κόστους εκφράζεται ως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \quad (2.10)$$

όπου S είναι το όριο του πεδίου της ροής ($S \equiv \partial\Omega$).

Στην έκφραση 2.10 μπορεί να καταλήξει κανείς απευθείας από την εξίσωση 2.3 εφαρμόζοντας σε αυτήν τον κανόνα του Leibniz που διέπει τις μεταβολές ολοκληρωμάτων όταν

αυτές συνδυάζονται με μεταβολές στο χωρίο ολοκλήρωσης. Στο παράρτημα Α' αποδεικνύεται και σχολιάζεται, για την περίπτωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η εξίσωση 2.10 με χρήση του γενικευμένου κανόνα του Leibniz, εξίσωση Α'.4. Η εξίσωση Α'.4 αποτελεί την πιο γενική μορφή (ανεξάρτητη από το είδος του ολοκληρώματος και των ολοκληρωτέων ποσοτήτων) υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής ενός ολοκληρώματος.

Στην έκφραση 2.10 εμφανίζονται μόνο οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων της ροής $\frac{\partial R_l^U}{\partial b_m}$. Απουσιάζουν δηλαδή από αυτήν οι 'μεταφορικοί' όροι της μορφής $\frac{\partial R_l^U}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m}$. Η εμπλοκή των άμεσων μεταβολών $\frac{\partial}{\partial b_m}$, αντί των ολικών $\frac{\delta}{\delta b_m}$, είναι ιδιαίτερα βολική αφού, έχοντας αντικαταστήσει τις αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων R_l^U , επιτρέπεται πλέον η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσις στους όρους εκείνους με μικτές παραγώγους των μεταβλητών της ροής ($\Phi = U_l$) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_m} \right) \quad (2.11)$$

Η εξίσωση 2.11 αποτελεί απόρροια του γεγονότος ότι η άμεση μεταβολή $\frac{\partial}{\partial b_m}$ είναι απεμπλεγμένη από οποιαδήποτε χωρική μετατόπιση δx_k .

Ο υπολογισμός της άμεσης μεταβολής $\frac{\partial \Phi}{\partial b_m}$ (για $\Phi = U_l$) στην εξίσωση 2.10 για την υπάρχουσα γεωμετρία αποτελεί την πιο απαιτητική, από πλευράς υπολογιστικού κόστους, διαδικασία σε σύγκριση με το υπολογισμό των υπολοίπων όρων της εξίσωσης αυτής. Ο υπολογισμός απαιτεί είτε (α) τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, βλ. παράρτημα Γ', είτε (β) τη χρήση πεπερασμένων διαφορών. Στην τελευταία περίπτωση, πρόκειται ουσιαστικά για μια διαφορετική χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, βλ. παράρτημα Β', όπου υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές οι ποσότητες $\frac{\partial U_l}{\partial b_m}$ και, μετά, εισάγονται στην εξίσωση 2.8 αντί για τον απευθείας υπολογισμό της $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ από την έκφραση της F , που είναι και η συνήθης τακτική μιας και πρόκειται για μια λιγότερο πολύπλοκη διαδικασία σε σύγκριση με αυτήν που περιγράφηκε προηγουμένως. Με την εφαρμογή όμως της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η οποία θα περιγραφεί στην ενότητα 2.4, επιτυγχάνεται η απαλοιφή των όρων $\frac{\partial \Phi}{\partial b_m}$ από την εξίσωση 2.10 όταν δεν είναι εκ των προτέρων γνωστοί (αυτό, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, ισχύει μόνο στην περίπτωση ορισμένων οριακών συνθηκών) και συνεπώς είναι εφικτό να υπολογιστεί η ολική μεταβολή $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ χωρίς να απαιτηθεί η επίλυση της ροής σε κάθε στοιχειωδώς τροποποιημένη κατά δb_m γεωμετρία (μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών) ή η επίλυση των μεταβολών των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ροής (μέθοδος ευθείας διαφόρισης). Στην απαλοιφή των προαναφερθέντων όρων οφείλεται η δυνατότητα της συζυγούς μεθόδου να υπολογίζει με μειωμένο υπολογιστικό κόστος τις παραγώγους ευαισθησίας ανεξάρτητα από το πλήθος M αυτών. Επισημαίνεται, ότι στη διατριβή αυτή, οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών (σχήματα κεντρικών διαφορών) και της ευθείας διαφόρισης αποτελούν 'εργαλεία' (λογισμικό-διαδικασίες) για την πιστοποίηση και μόνο των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζουν οι προτεινόμενες συζυγείς μέθοδοι.

2.3 Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους

Πριν την παρουσίαση των συναρτήσεων κόστους οι οποίες χρησιμοποιούνται στα προβλήματα της παρούσας διατριβής, θα παρουσιαστεί αρχικά η γενική περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση κόστους αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στα όρια S αλλά και

στο εσωτερικό Ω του πεδίου ροής. Μια τέτοια συνάρτηση γράφεται, γενικά, στη μορφή

$$F = \int_S F_S dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega \quad (2.12)$$

όπου με F_S και F_Ω συμβολίστηκαν οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο S και στο Ω , αντιστοίχως. Αν το όριο αποτελείται από διάφορα τμήματα, έστω είσοδο S_I , έξοδο S_O και στερεά τοιχώματα S_W (δηλαδή $S = S_I \cup S_O \cup S_W$) τότε, για κάθε τμήμα του ορίου, προκειμένου να γίνει διαχωρισμός, η ποσότητα F_S θα γράφεται ως F_{S_I} , F_{S_O} και F_{S_W} . Στη γενική περίπτωση, ισχύει $F_{S_I} \neq F_{S_O} \neq F_{S_W}$. Στην περίπτωση δε, που το όριο S αποτελείται και από άλλα διαφορετικά τμήματα, ισχύουν τα ανάλογα και γι' αυτά.

Η παράγωγος ευαισθησίας της γενικευμένης συνάρτησης κόστους 2.12 (υπολογιζόμενη με διαδικασία αντίστοιχη αυτής της προηγούμενης ενότητας) δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \\ & + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega + \int_\Omega F_\Omega \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 2.7 και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης το τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της 2.13 γράφεται

$$\int_\Omega F_\Omega \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \int_S F_\Omega \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS - \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega \quad (2.14)$$

Επομένως, η 2.13 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} d\Omega \quad (2.15)$$

όπου οι άμεσες μεταβολές $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (2.16b)$$

Με την αντικατάσταση της μεταβολής της συνάρτησης κόστους, εξίσωση 2.15, στην εξίσωση 2.10 καθίσταται, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, δυνατός ο μετασχηματισμός της έκφρασης του $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ με στόχο την ομαδοποίηση όρων και την παραγωγή των συζυγών εξισώσεων, των οριακών τους συνθηκών και της τελικής έκφρασης των παραγώνων ευαισθησίας.

Η χρησιμοποίηση των εξισώσεων 2.7 και 2.15 οδήγησε στην απλοποίηση της εξίσωσης 2.10 έτσι ώστε να μην περιέχει πλέον μεταβολές $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$, των στοιχειωδών όγκων ελέγχου του χωρίου ροής (όπως η εξίσωση 2.5) αλλά, αντί αυτών, τις στοιχειώδεις μεταβολές $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS$ στο όριο του χωρίου. Συνεπώς, η μέθοδος είναι ανεξάρτητη από τις μεταβολές των θέσεων των σημείων του χωρίου ροής. Η απουσία χωρικών ολοκληρωμάτων τα οποία εξαρτώνται από μεταβολές του πεδίου ροής και η εμφάνιση μόνο συνοριακών ολοκληρωμάτων στην έκφραση των παραγώνων ευαισθησίας έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Αντίθετα, όταν χρησιμοποιείται η κλασική συνεχής συζυγής μέθοδος, όπως αυτή

αναπτύχθηκε αρχικά από τον Jameson, [39]² τα χωρικά ολοκληρώματα που εξαρτώνται από τις μεταβολές $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$ συμμετέχουν στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας και απαιτούν, για τον υπολογισμό τους, κλήσεις του λογισμικού γένεσης πλέγματος διπλάσιες του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού (για σχήμα κεντρικών διαφορών ακρίβειας δεύτερης τάξης). Μάλιστα, όσο περισσότερες είναι οι τελευταίες, τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος που επιτυγχάνεται από τη χρήση της προτεινόμενης μεθόδου. Η ισοδυναμία των δύο μεθόδων αποδεικνύεται αφενός από τη μαθηματική διατύπωση και αφετέρου σε επίπεδο εφαρμογών. Λεπτομερέστερη αναφορά γίνεται στη διδακτορική διατριβή [18]. Επιπλέον, η χρησιμοποίηση της διατύπωσης με τα συνοριακά ολοκληρώματα επιτρέπει την ανάπτυξη μιας παραλλαγής της μεθόδου ώστε αρκετές από τις εμφανιζόμενες χωρικές παραγώγους των ροϊκών μεταβλητών στο όριο να αντικατασταθούν μόνο με τις εφαπτομενικές παραγώγους των μεγεθών αυτών (απαλείφοντας τις κάθετες στο όριο). Η διατύπωση αυτή περιγράφεται αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 4 και επιτρέπει τον υπολογισμό των όρων αυτών όταν η κατά την κάθετη κατεύθυνση διαφόριση κοντά στο στερεό όριο είναι μη-αποδεκτή (λ.χ. κατά τη χρήση μοντέλων τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds με συναρτήσεις τοίχου, βλ. κεφάλαιο 4).

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι συναρτήσεις κόστους οι οποίες χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές της παρούσας διατριβής και η διατύπωση των μεταβολών τους θα βασίζεται στη σχέση 2.15. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί ότι η συνεχής συζυγής μέθοδος θα παρουσιαστεί με τρόπο ανεξάρτητο από τη χρησιμοποιούμενη, κάθε φορά, συνάρτηση κόστους. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου και αφού επιλεγεί η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση κόστους, οι γενικές εκφράσεις αντικαθίστανται με αυτές που ισχύουν για τη συγκεκριμένη συνάρτηση, οδηγώντας σε διαφορετικές οριακές συνθήκες, διαφορετικούς όρους πηγής στο δεξιό μέλος των πεδιακών συζυγών εξισώσεων και διαφορετικές εκφράσεις υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας.

2.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

Συχνά, σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, επιδιώκεται ο σχεδιασμός βέλτιστης αεροδυναμικής μορφής ελαχιστοποιώντας τις απώλειες ολικής πίεσης της ροής που διαρρέει τη σχετική γεωμετρία, για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Δηλαδή, επιθυμείται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου (S_I) και της εξόδου (S_O) του χωρίου ροής (για προβλήματα στα οποία δεν υπάρχει συναλλαγή έργου). Ενδεικτικές εφαρμογές είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών λόγω συνεκτικότητας σε έναν αγωγό ή στην ακίνητη πτερυγώση στροβιλομηχανής. Για κινητές πτερυγώσεις, αντίστοιχη συνάρτηση κόστους θα διατυπώνονταν χρησιμοποιώντας τη σχετική ολική πίεση (αντί της ολικής πίεσης). Οι οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της ροής είναι, για την είσοδο, καθορισμένη κατανομή ταχύτητας και, για την έξοδο, καθορισμένη τιμή στατικής πίεσης (που τίθεται συνήθως ίση με μηδέν).

Η συνάρτηση κόστους αποτελείται μόνο από συνοριακά ολοκληρώματα και εκφράζεται ως εξής

$$F = \int_{S_{I,O}} F_{S_{I,O}} dS \quad (2.17)$$

²Ο Jameson σε επόμενη εργασία του, [85], παρουσίασε μια συνεχή συζυγή διατύπωση στην οποία η έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας εξαρτάται από συνοριακά ολοκληρώματα, η μαθηματική ανάλυση ήταν όμως πολύπλοκη καλύπτοντας μόνο ατριβείς ροές, χωρίς άμεση γενίκευση σε συνεκτικές ροές, και για την περίπτωση δομημένων πλεγμάτων.

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα $F_{S_{I,O}}$ στα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου δίνεται από την έκφραση

$$F_{S_{I,O}} = - \left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) v_i n_i \quad (2.18)$$

Εδώ, με $v = |\mathbf{v}|$ συμβολίζεται το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει την ολική πίεση πολλαπλασιασμένη με την παροχή μάζας (όγκου) του ασυμπίεστου ρευστού που διέρχεται από στοιχειώδη διατομή της εισόδου ή εξόδου του πεδίου ροής. Το αρνητικό πρόσημο στα ολοκληρώματα της εξίσωσης 2.17 υφίσταται λόγω του ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, με συνιστώσες n_i , κατευθύνεται εξ' ορισμού προς το εξωτερικό του πεδίου ροής. Οι μεταβολές των $F_{S_{I,O}}$ ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται από τις εκφράσεις

$$\frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial v_i} = -\frac{1}{2} v^2 n_i - v_{\langle n \rangle} v_i - p n_i, \quad \frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial p} = -v_i n_i$$

όπου με $v_{\langle n \rangle}$ συμβολίζεται η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει ότι $v_{\langle n \rangle} = v_i n_i$. Αργότερα, με $\mathbf{v}_{\langle t \rangle}$ συμβολίζεται η εφαπτόμενη συνιστώσα της ταχύτητας. Η τελευταία παριστάνεται ως διάνυσμα για να καλύψει και 3D προβλήματα και ισχύει ότι $\mathbf{v}_{\langle t \rangle} = \mathbf{v} - v_{\langle n \rangle} \mathbf{n}$. Επισημαίνεται ότι, στις εξισώσεις, οι δείκτες n και t ακόμη και αν επαναλαμβάνονται, δεν υποδηλώνουν άθροισμα αλλά μόνο την κατεύθυνση του αντίστοιχου μεγέθους (κάθετη ή εφαπτομενική). Συνεπώς, για την αποφυγή σύγχυσης με τους υπόλοιπους δείκτες, τοποθετούνται μέσα σε άγκιστρα $\langle \rangle$.

Με βάση τις σχέσεις 2.16α' και 2.16β' και δεδομένου ότι $F_{\Omega} = 0$, η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους, εξίσωση 2.15, στην προκειμένη περίπτωση, γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & - \int_{S_I} \left[\left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) n_i + v_{\langle n \rangle} v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\ & - \int_{S_O} \left[\left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) n_i + v_{\langle n \rangle} v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

Στην εξίσωση 2.19, ελήφθη υπόψη ότι τα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου δεν επιρραζονται από μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού b_m , ισχύει δηλαδή

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad (2.20\alpha')$$

$$\frac{\delta (dS)}{\delta b_m} = 0 \quad (2.20\beta')$$

$$(2.20\gamma')$$

Αυτό ισχύει αν τα όρια S_I και S_O δεν ανήκουν στο προς σχεδιασμό όριο της αεροδυναμικής μορφής. Στην ειδική περίπτωση που τα όρια S_I ή/και S_O δεν είναι σταθερά, αν λ.χ. επιτρέπεται να μεταβάλλονται οι διατομές εισόδου/εξόδου ενός αγωγού, τότε, στην παραπάνω έκφραση (και συνεπώς και στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας) παραμένουν οι όροι $\int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS$ και $\int_S F_S \frac{\delta (dS)}{\delta b_m}$ της εξίσωσης 2.15. Εφόσον έχει λυθεί το πρόβλημα της ροής, οι όροι αυτοί είναι άμεσα υπολογίσιμοι (χωρίς επιβάρυνση του υπολογιστικού κόστους της μεθόδου), αφού εξαρτώνται από τις ροϊκές μεταβλητές και τις γεωμετρικές μεταβολές των ορίων εισόδου/εξόδου.

Τέλος, αν χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$ και $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$, οι οποίες ισχύουν σε είσοδο και έξοδο αντιστοίχως, η έκφραση 2.19 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} \left(\frac{1}{2} v^2 n_i + v_{(n)} v_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \quad (2.21)$$

Ακολουθεί η απόδειξη των συνθηκών $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$ και $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$ στην είσοδο και έξοδο, αντιστοίχως, του χωρίου ροής. Όπως προαναφέρθηκε, στην είσοδο επιβάλλεται καθορισμένη κατανομή ταχύτητας (συνθήκη Dirichlet για τα v_i). Επομένως, αφού η παραπάνω οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη από την παραμετροποίηση της σχεδιαζόμενης μορφής, η ολική μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας σε κάθε θέση της εισόδου είναι μηδενική

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0 \quad (2.22)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.6 (για $\Phi = v_i$), ισχύει ότι

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$$

και με βάση την εξίσωση 2.20α' προκύπτει ότι, στην είσοδο του πεδίου ροής,

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0 \quad (2.23)$$

Στην έξοδο επιβάλλεται Dirichlet συνθήκη για τη στατική πίεση και αφού εκεί ισχύει η εξίσωση 2.20α', προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\frac{\delta p}{\delta b_m} = \frac{\partial p}{\partial b_m} = 0 \quad (2.24)$$

2.3.2 Ελαχιστοποίηση της δύναμης αντίστασης

Στην περίπτωση κατά την οποία στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αεροδυναμικής αντίστασης (οπισθέλκουσας) της προς σχεδιασμό μορφής (πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής), η συνάρτηση κόστους δίνεται από το ολοκλήρωμα των τάσεων που ασκούνται στο σώμα κατά την κατεύθυνση του διανύσματος της αδιατάρακτης ροής, δηλαδή η σχέση 2.12 λαμβάνει τη μορφή

$$F = \int_{S_W} F_{S_W} dS \quad (2.25)$$

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα F_{S_W} δίνεται από τη σχέση

$$F_{S_W} = - \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_i^j \right] n_j r_i \quad (2.26)$$

ενώ με το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{r} συμβολίζεται η σταθερή κατεύθυνση της αδιατάρακτης ροής. Στην περίπτωση εσωτερικής αεροδυναμικής, η εξίσωση 2.25 δίνει τη δύναμη η οποία ασκείται

στο σώμα κατά μια προκαθορισμένη κατεύθυνση η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα με συνιστώσες r_i . Ισχύει, προφανώς, ότι $F_\Omega = 0$.

Με βάση την εξίσωση 2.15, η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους της εξίσωσης 2.25, γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} &= \int_{S_W} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial b_m} n_i \right] r_i dS \\ &+ \int_{S_W} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS \\ &+ \int_{S_W} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS) \right] r_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3.3 Προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού με στόχο προκαθορισμένη κατανομή πίεσης

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων βελτιστοποίησης αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό μιας αεροδυναμικής μορφής. Στα προβλήματα αυτά, για δεδομένες συνθήκες ροής, αναζητείται η μορφή εκείνη που δίνει κατανομή στατικής πίεσης στα στερεά τοιχώματα με ελάχιστη απόκλιση από μια προκαθορισμένη κατανομή-στόχο. Στην περίπτωση αυτή, η γενική συνάρτηση κόστους, 2.12, εξειδικεύεται στη μορφή 2.25 όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα F_{S_W} δίνεται από τη σχέση

$$F_{S_W} = \frac{1}{2} (p - p_{tar})^2 \quad (2.28)$$

Σε αυτήν, $p_{tar} = p_{tar}(s)$ είναι η κατανομή-στόχος για τη στατική πίεση κατά το μήκος S των στερεών τοιχωμάτων της σχεδιαζόμενης μορφής. Σύμφωνα με την εξίσωση 2.15, η ολική μεταβολή της F γράφεται ως

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_{S_W} (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS + \int_{S_W} (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \frac{1}{2} \int_{S_W} (p - p_{tar})^2 \frac{\delta (dS)}{\delta b_m} \quad (2.29)$$

2.4 Διατύπωση συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών

Στη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, εξίσωση 2.10, εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των υπολοίπων των εξισώσεων της ροής, δηλαδή οι ποσότητες $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial R^p}{\partial b_m}$. Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι εν λόγω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφόριση, $\frac{\partial(\cdot)}{\partial b_m}$, των εξισώσεων της ροής 2.1 και 2.2. Επομένως, από τις προαναφερθείσες εξισώσεις και με χρήση της εξίσωσης 2.11, προκύπτουν οι

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \quad (2.30)$$

και

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right], \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.31)$$

Από τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.10, το $\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega$, με βάση την εξίσωση 2.30, γίνεται

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \quad (2.32)$$

Για το έτερο χωρικό ολοκλήρωμα της εξίσωσης 2.10, $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega$, η ανάλυση κάθε μη-συνεκτικού όρου δίνει

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i v_i n_j \frac{\partial v_j}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega \quad (2.33)$$

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \quad (2.34)$$

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \quad (2.35)$$

Οι συνεκτικοί όροι του ίδιου ολοκληρώματος γράφονται

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j dS + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega \\ &= - \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j dS + \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (2.36)$$

και, ομοίως

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) n_j dS + \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_i dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (2.37)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.32 ως 2.37 στην 2.10, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\ &\quad - \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\ &\quad + \int_{\Omega} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\ &\quad + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \quad (2.38)$$

Αντικαθιστώντας τη γενική έκφραση της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ στην 2.38, σύμφωνα με τις εξισώσεις 2.15, 2.16α' και 2.16β', αυτή λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_\Omega \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS + \int_\Omega \left(-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Από την εξίσωση 2.39, γίνεται αντιληπτό ότι η παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους έχει πλέον εκφραστεί συναρτήσει δύο ειδών μεταβολών: (α) των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών $\frac{\partial p}{\partial b_m}$, $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ στο εσωτερικό αλλά και στα όρια του πεδίου και (β) των μεταβολών γεωμετρικών ποσοτήτων $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$, $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$ μόνο στα όρια του πεδίου ροής. Οι συντελεστές, δηλαδή, με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι μεταβολές (α) εξαρτώνται μόνο από το ροϊκό (που θεωρείται γνωστό) και το συζυγές του πεδίο (το οποίο θα υπολογιστεί από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων). Αντιστοίχως, τα ολοκληρώματα στα οποία εμπεριέχονται οι μεταβολές τύπου (β) δεν εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών. Ο υπολογισμός των μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών δεν είναι αποδεκτός δεδομένου ότι για αυτό απαιτείται η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (ή των πεπερασμένων διαφορών) και αυτό συνεπάγεται πολύ αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Από την άλλη, οι μεταβολές τύπου (β), για δεδομένη παραμετροποίηση, είναι υπολογίσιμες με πολύ μικρό και σχεδόν ασήμαντο υπολογιστικό κόστος.

Με την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 2.39 τα οποία εμπεριέχουν τις μεταβολές (α), αυτές δηλαδή που δεν είναι επιθυμητό να υπολογιστούν, επιτυγχάνεται η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας να συναρτάται μόνο από μεταβολές τύπου (β). Οι τελευταίες, όπως προαναφέρθηκε, είναι εύκολα υπολογίσιμες. Η απαλοιφή των ολοκληρωμάτων με τις μεταβολές (α) επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή των συζυγών μεταβλητών στο πεδίο ροής και τα όρια αυτού ώστε να πληρούνται οι συνθήκες μηδενισμού τους. Το σημείο αυτό εξηγεί γιατί η μέθοδος είναι πιο 'οικονομική' σε υπολογιστικούς πόρους, σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας. Πιο συγκεκριμένα, από την έκφραση 2.39, απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις. Επειδή στην έκφραση 2.39 χρησιμοποιήθηκε η γενική διατύπωση 2.15 για τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους, οι συζυγείς εξισώσεις θα γραφούν επίσης σε γενική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση κόστους (της μορφής 2.12) αρκεί κατά περίπτωση να αντικατασταθούν κατάλληλα οι ποσότητες $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$. Η παραπάνω απαλοιφή οδηγεί στις εξισώσεις

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0 \tag{2.40}$$

$$R_i^u = -v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \tag{2.41}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες από τις μεταβολές των παραμέτρων σχεδιασμού δb_m , ενώ το ίδιο ισχύει και για τις συζυγείς οριακές συνθήκες.

Ικανοποιώντας τις συζυγείς εξισώσεις 2.40 και 2.41, προκύπτει η απλοποιημένη της 2.39 έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\ & + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\ & + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έχει υπολογιστικό κόστος αντίστοιχο, εν γένει, με αυτό του προβλήματος της ροής, μιας και πρόκειται για εξισώσεις 'αντίστοιχης' μορφής με αυτή των εξισώσεων ροής (είναι όμως γραμμικές). Η συζυγής λύση είναι ανεξάρτητη από τις μεταβλητές σχεδιασμού δεδομένου ότι οι συζυγείς εξισώσεις καθώς και οι οριακές τους συνθήκες δεν εξαρτώνται από τις μεταβολές τύπου (α) (σε αντίθεση, για παράδειγμα, με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης). Έτσι, η επίλυση των συζυγών εξισώσεων 'υποκαθιστά', για παράδειγμα, M επιλύσεις του συστήματος 2.30 και 2.31 (παράρτημα Γ) της μεθόδου της ευθείας διαφόρισης. Σε συνδυασμό με τα παραπάνω και θεωρώντας ότι το κόστος υπολογισμού των μεταβολών $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$ ³ είναι αμελητέο συγκριτικά με αυτό της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων της ροής (γεγονός το οποίο ισχύει) συνάγεται ότι το υπολογιστικό κόστος της συζυγούς μεθόδου είναι ανεξάρτητο του πλήθους M των μεταβλητών σχεδιασμού.

Για την τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας πρέπει να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες του προβλήματος της ροής και, από αυτές, να εξαχθούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες. Αυτό περιγράφεται στις ενότητες 2.4.1 ως 2.4.5.

2.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I

Στα τμήματα εισόδου ρευστού στο χωρίο (S_I), ισχύουν οι εξισώσεις 2.20α' και 2.23. Με βάση τη συνθήκη $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$, εξίσωση 2.23, το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 2.42, διατυπωμένο για το S_I απαλείφεται. Επίσης, στο S_I μηδενίζονται τα τέσσερα τελευταία ολοκληρώματα της 2.42 που εμπεριέχουν μεταβολές της θέσης των οριακών κόμβων και γεωμετρικών ποσοτήτων στην είσοδο. Έτσι, για τον υπολογισμό του $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$, τα ολοκληρώματα κατά μήκος της εισόδου τα οποία απομένουν είναι τα

$$- \int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \quad (2.43)$$

όπου

$$\phi_{1,ij} = \nu u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (2.44)$$

³οι όροι αυτοί εμπεριέχονται στην έκφραση παραγώγων ευαισθησίας, 2.42

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα 2.43 από την εξίσωση 2.42, αρκεί να επιβληθούν στην είσοδο του πεδίου ροής οι συνθήκες

$$\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.45\alpha')$$

$$\phi_2 = 0 \quad (2.45\beta')$$

Οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με το να επιβληθεί η κάθετη στο όριο S_I συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας ίση με

$$u_{\langle n \rangle} = u_i n_i = - \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (2.46)$$

και να μηδενιστεί η εφαπτομενική της συνιστώσα

$$\mathbf{u}_{\langle t \rangle} = \mathbf{u} - u_{\langle n \rangle} \mathbf{n} = 0 \quad (2.47)$$

Η τιμή της συζυγούς πίεσης στην είσοδο του χωρίου υπολογίζεται μέσω προεκβολής από το εσωτερικό του πεδίου (ότι ακριβώς ίσχυε για τη στατική πίεση στο πρόβλημα της ροής).

Απόδειξη των οριακών συνθηκών 2.46 και 2.47

Η οριακή συνθήκη 2.46, προέκυψε από την απαίτηση μηδενισμού του συντελεστή ϕ_2 . Η συνθήκη 2.47 μηδενισμού της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας αποδεικνύεται παρακάτω.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu (u_{\langle n \rangle} n_i + u_{\langle t \rangle} t_i) n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \nu u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \nu u_k t_k t_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους ισούται με μηδέν, αφού

$$\begin{aligned} \nu u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right) n_i + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_i \right) n_j \right] \\ &= 2 \nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j n_i \right) \\ &= 2 \nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} \right) \\ &= -2 \nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_{\langle t \rangle}}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

μιας και η κλίση $\frac{\partial v_{\langle t \rangle}}{\partial t}$ της εφαπτομενικής ταχύτητας κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση, στην είσοδο του χωρίου, είναι ανεξάρτητη των b_m . Σημειώνεται ότι, προηγουμένως χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{\langle n \rangle} n_j + v_{\langle t \rangle} t_j) \simeq \frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k} = 0$$

Επομένως, για να ισχύει η 2.45α', αρκεί να μηδενιστεί ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.48. Αυτό εξασφαλίζεται με την απαίτηση να ισχύει

$$u_k t_k = 0 \quad (2.50)$$

δηλαδή το μηδενισμό της εφαπτομενικής ταχύτητας.

2.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O

Στα όρια εξόδου του πεδίου ροής (S_O) ισχύουν οι εξισώσεις 2.20α' και 2.24. Επομένως, το δεύτερο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 2.42, διατυπωμένο για την έξοδο του πεδίου, μηδενίζεται. Ακόμη, όπως και στην περίπτωση της εισόδου, μηδενίζονται τα τέσσερα τελευταία ολοκληρώματα, αφού οι κόμβοι στην έξοδο είναι επίσης ανεπηρέαστοι από μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού.

Αυτό συνεπάγεται ότι οι εναπομείναντες όροι της έκφρασης 2.42 στην έξοδο του πεδίου ροής είναι οι εξής

$$-\int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) dS + \int_{S_O} \phi_{3,i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \quad (2.51)$$

όπου το $\phi_{1,ij}$ δίνεται στην εξίσωση 2.45α' και

$$\phi_{3,i} = u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \quad (2.52)$$

Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει ότι ο πρώτος όρος της έκφρασης 2.51 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, ενδεχομένως λόγω του ότι η θέση του ορίου S_O είναι τέτοια ώστε εκεί το πεδίο ταχύτητας να διέπεται από ικανοποιητική ομοιογένεια. Αυτό ισχύει, ασφαλώς, για εξωτερικές ροές αλλά ακόμη και σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, οι δοκιμές έδειξαν ότι ο όρος αυτός μπορεί να αμεληθεί χωρίς συνέπειες. Συνεπώς, ο όρος $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right)$ μπορεί να αμεληθεί, [89].

Προκειμένου να απαλειφεί ο δεύτερος όρος της 2.51, πρέπει να επιβληθεί η συνθήκη $\phi_{3,i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Η διανυσματική συνθήκη $\phi_{3,i} = 0$ γράφεται στο οριόδετο σύστημα, αναλυόμενη σε δύο συνιστώσες, μια κατά την κάθετη και μια κατά την εφαπτομενική στο τοίχωμα. Αυτές προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης 2.52 με το μοναδιαίο κάθετο και το μοναδιαίο εφαπτομενικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα, αντίστοιχα, και γράφονται ως

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \quad (2.53\alpha')$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \quad (2.53\beta')$$

Από τη δεύτερη συνθήκη έχει απεμπλακεί η συζυγής πίεση q . Οι δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την τρίτη 'πληροφορία' (που υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου με προεκβολή μιας συνιστώσας του διανύσματος της συζυγούς ταχύτητας), αρκούν για να προσδιοριστεί πλήρως η έξοδος του συζυγούς πεδίου ροής σε κάθε κύκλο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου. Παρότι οι εξισώσεις 2.53α' και 2.53β' μπορούν να επιλυθούν ως προς οποιαδήποτε δύο

μεγέθη από τα q , $u_{(t)}$ και $u_{(n)}$, η εξίσωση 2.53α' προτιμάται να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς πίεσης q με βάση τις τιμές των συζυγών μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης (όπως αντίστοιχα στο πρόβλημα της ροής είχαμε γνωστή τη πίεση στην έξοδο του πεδίου ροής) και η εξίσωση 2.53β' για τον προσδιορισμό της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας $u_{(t)}$.

Στις περιπτώσεις όπου η έξοδος του χωρίου ροής και, συνεπώς, και το τοπικό πλέγμα δεν έχει καθόλου ή έχει μικρή καμπυλότητα, η οποία μπορεί να αμεληθεί, (λ.χ. προβλήματα ροής σε αγωγούς ή σε στροβιλομηχανές) οι παραπάνω εξισώσεις 2.53α', 2.53β', μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω και να γίνουν

$$q = u_j v_j + u_{(n)} v_{(n)} + 2\nu \frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(n)}} \quad (2.54\alpha')$$

$$0 = u_{(t)} v_{(n)} + \nu \left(\frac{\partial u_{(t)}}{\partial n} + \frac{\partial u_{(n)}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(t)}} \quad (2.54\beta')$$

Στη δεύτερη εξίσωση, ο όρος $\frac{\partial u_{(n)}}{\partial t}$ μπορεί να αμεληθεί αφού υπάρχει ομοιομορφία καθ' ύψος στην έξοδο του πεδίου (συχνή θεώρηση αν η θέση της εξόδου βρίσκεται μακριά από την προς βελτιστοποίηση μορφή). Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση 2.54β' προκύπτει ότι η εφαπτομενική συζυγής ταχύτητα δεν εξαρτάται από τη συζυγή πίεση στην έξοδο του πεδίου ροής.

2.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια S_W

Στα στερεά όρια (S_W) ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης, δηλαδή ότι $v_i = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ολική μεταβολή οποιασδήποτε συνιστώσας του διανύσματος της ταχύτητας, στις θέσεις αυτές, είναι μηδενική, $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0$. Στην περίπτωση κατά την οποία το τμήμα του στερεού ορίου παραμετροποιείται μέσω των b_m και, συνεπώς, μεταβάλλεται όταν αυτά μεταβάλλονται (δηλαδή ισχύει $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \neq 0$), τότε από την ιδιότητα 2.6, προκύπτει ότι εκεί

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (2.55)$$

Με βάση την εξίσωση 2.55, στα στερεά όρια, από το τμήμα της εξίσωσης 2.42 διατυπωμένης μόνο κατά το μήκος του S_W απομένουν τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} & - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_{S_W} \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (2.56)$$

όπου οι ποσότητες $\phi_{1,ij}$ και ϕ_2 , ορισμένες στα στερεά όρια, δίνονται από τις εκφράσεις

$$\phi_{1,ij} = \nu u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}$$

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται οι όροι $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ και $\frac{\partial p}{\partial b_m}$, επιβάλλονται οι εξής συνθήκες

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \quad (2.57\alpha')$$

$$\mathbf{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.57\beta')$$

Στην περίπτωση κατά την οποία τμήμα του στερεού ορίου δεν αποτελεί μέρος της προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας, τότε γι' αυτό ισχύει, $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$ και επομένως ισχύουν τα όσα αναφέρθηκαν και για την είσοδο του πεδίου ροής. Ας επισημανθεί ότι, εφεξής, με τον όρο 'στερεά όρια/τοιχώματα' θα αναφερόμαστε αποκλειστικά στα τμήματα του στερεού ορίου τα οποία επηρεάζονται από τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Οποιαδήποτε άλλη 'ειδική' περίπτωση θα αποσαφηνίζεται στο κείμενο.

Απόδειξη των οριακών συνθηκών 2.57α' και 2.57β'

Οι συνθήκες 2.57α' και 2.57β' δίνουν $\phi_2 = 0$ (απαλοιφή του δεύτερου ολοκληρώματος της έκφρασης 2.55). Αρκεί, επομένως, να αποδειχτεί ότι οι παραπάνω συνθήκες αρκούν για την απαλοιφή και του όρου $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ στο τρίτο ολοκλήρωμα της έκφρασης 2.55. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες, ο σχετικός όρος γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j = \nu u_{\langle n \rangle} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &= -\nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &= -\nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \frac{\delta}{\delta b_m} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right] + \nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j \\ &\quad + \nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right] = 0 \quad (2.59)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης 2.59 παρουσιάζεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Από την έκφραση 2.58 απομένουν, επομένως, οι όροι

$$\begin{aligned} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= -\nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &\quad + \nu \frac{\partial F_{SW}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (2.60)$$

οι οποίοι εμφανίζονται στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

Απόδειξη της εξίσωσης 2.59

Από την εξίσωση της συνέχειας, εξίσωση 2.1, εκφράζοντας το διάνυσμα της ταχύτητας στο οριόδετο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ότι

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_{\langle n \rangle} n_j + v_{\langle t \rangle}^k t_j^k \right) = 0 \quad (2.61)$$

Από την εξίσωση 2.61 για το συνεκτικό ρευστό, όπου ισχύει $v_i = v_{\langle n \rangle} = v_{\langle t \rangle}^k = 0$, η εξίσωση της συνέχειας λαμβάνει, στο οριόδετο σύστημα τη μορφή

$$\frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k} = 0 \quad (2.62)$$

Λόγω του ότι η εφαπτομενική παράγωγος $\frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k}$ στο στερεό τοίχωμα είναι προφανώς ίση με μηδέν (αφού εκεί $v_{\langle t \rangle}^k = 0$), η εξίσωση 2.62 γίνεται

$$\frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} = 0 \quad (2.63)$$

Κατά συνέπεια, ο όρος 2.59 λαμβάνει τη μορφή

$$\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j = \nu \left[\frac{\partial (v_i n_i)}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial (v_j n_j)}{\partial x_i} n_i \right] = 2\nu \frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} = 0 \quad (2.64)$$

και κατά συνέπεια και η μεταβολή της είναι μηδενική.

2.4.4 Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια

Για την περίπτωση ροών σε περυγώσεις στροβιλομηχανών στα περιοδικά όρια επιβάλλεται η ισότητα των μεγεθών της ροής (p και v_i) μεταξύ των δύο αντίστοιχων περιοδικών πλεγματικών κόμβων. Οι ίδιες ακριβώς συνθήκες επιβάλλονται και στο συνεχές συζυγές πρόβλημα. Η επιβολή αυτών των συνθηκών μηδενίζει όλους τους όρους της εξίσωση 2.42 καθότι μεταξύ δύο περιοδικών κόμβων τα κάθετα διανύσματα είναι παράλληλα με ίσο μέτρο και αντίθετη φορά. Συνεπώς, επιβάλλοντας την ισότητα τιμών των συζυγών μεγεθών μεταξύ δύο αντίστοιχων περιοδικών θέσεων, αλληλοαναιρούνται οι αντίστοιχες συνεισφορές των προς ολοκλήρωση ποσοτήτων και, άρα, απαλείφονται όλες οι συνεισφορές των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των περιοδικών ορίων.

2.4.5 Συζυγείς συνθήκες στα όρια συμμετρίας

Στα όρια συμμετρίας του πεδίου, όπως στο πρόβλημα της ροής, έτσι και στο συζυγές πρόβλημα επιβάλλονται η κάθετη στο όριο συνιστώσα και κλίση της συζυγούς ταχύτητας να είναι ίσες με μηδέν.

2.5 Τελική – Γενική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Έχοντας απαλείψει τις συζυγείς εξισώσεις καθώς και τις οριακές τους συνθήκες, η εξίσωση 2.39 λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_{S_W} \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\ & + \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \end{aligned} \quad (2.65)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις της ροής και τις συζυγείς εξισώσεις, τα πεδία της ροής και των συζυγών μεταβλητών καθίστανται γνωστά. Συνεπώς, όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στη 2.65 είναι γνωστές. Αυτό ισχύει γιατί εξαρτώνται από τις ροϊκές και τις συζυγείς μεταβλητές καθώς και τις μεταβολές καθαρά γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως οι ποσότητες $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι τελικές εκφράσεις για τις παραγώγους ευαισθησίας καθώς και οι οριακές συνθήκες των συζυγών μεταβλητών για τις περιπτώσεις των τριών συναρτήσεων κόστους που καταγράφηκαν στην ενότητα 2.3 και που απασχολούν τη διατριβή.

2.5.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

Για τη συνάρτηση στόχο της εξίσωσης 2.17, οι οριακές συνθήκες της συζυγούς ταχύτητας στην είσοδο του πεδίου, όπως προκύπτουν από τις εξισώσεις 2.46 και 2.47, είναι οι εξής

$$u_{\langle n \rangle} = v_{\langle n \rangle}, \quad \mathbf{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.66)$$

Στην έξοδο, από τις εξισώσεις 2.53α' και 2.53β', προκύπτει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j - \frac{1}{2} v^2 - v_{\langle n \rangle}^2 - p \quad (2.67)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j - v_{\langle n \rangle} v_{\langle t \rangle} \quad (2.68)$$

και στα στερεά όρια, από τις εξισώσεις 2.57α', 2.57β', ότι

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \mathbf{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.69)$$

Η γενική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας, εξίσωση 2.65, γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS$$

ενώ, αντικαθιστώντας την έκφραση του υπολοίπου R^p , λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS - \int_{S_W} q \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \quad (2.70)$$

2.5.2 Ελαχιστοποίηση της δύναμης αντίστασης

Για τη συνάρτηση στόχο της εξίσωσης 2.25, στην είσοδο του πεδίου οι συζυγείς οριακές συνθήκες, εξισώσεις 2.46 και 2.47, λαμβάνουν τη μορφή

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \mathbf{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.71)$$

Στην έξοδο (βλ. εξισώσεις 2.53α' και 2.53β'), ισχύει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j \quad (2.72)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j \quad (2.73)$$

Από τις εξισώσεις 2.57α', 2.57β', προκύπτει ότι στα στερεά όρια

$$u_{\langle n \rangle} = n_i r_i \quad (2.74\alpha')$$

$$\mathbf{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (2.74\beta')$$

υπενθυμίζεται ότι με το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{r} συμβολίζεται η σταθερή κατεύθυνση της αδιατάρακτης ροής. Η έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} &= \int_{S_W} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_W} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p \delta_i^j \right] r_i \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS) \\ &- \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &+ \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \nu (n_l r_l) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j dS \\ &+ \int_{S_W} \nu (n_l r_l) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή τις εκφράσεις για τα υπόλοιπα των εξισώσεων R^P και R_i^v , εξισώσεις 2.1 και 2.2 αντιστοίχως, και την τιμή της συζυγούς ταχύτητας $u_i = (n_l r_l) n_i$ (βλ. οριακές συνθήκες 2.74α', 2.74β') προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} &= - \int_{S_W} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_W} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} (n_l r_l) n_k + \frac{\partial p}{\partial x_k} n_i r_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &+ \int_{S_W} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p \delta_i^j \right] r_i \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS) \\ &- \int_{S_W} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &- \int_{S_W} q \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &- \int_{S_W} \nu (n_l r_l) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i dS \\ &+ \int_{S_W} \nu (n_l r_l) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \\ &+ \int_{S_W} (n_l r_l) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_k dS \end{aligned} \quad (2.75)$$

Εναλλακτικός τρόπος επιβολής των συζυγών οριακών συνθηκών στο S_W

Οι συνθήκες στα στερεά όρια όπως αυτές επιβλήθηκαν με τις εξισώσεις 2.74, είναι σύμφωνες με την ανάλυση της ενότητας 2.3. Παρ' όλα αυτά, ειδικά για την περίπτωση της συνάρτησης της δύναμης αντίστασης, μπορεί να υιοθετηθεί η παρακάτω ανάλυση η οποία οδηγεί

σε διαφορετική συνθήκη στα στερεά όρια. Αυτό αποτελεί απόρροια της μορφής του πρώτου ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της εξίσωσης 2.27, το οποίο εύκολα μπορεί να αλληλοανααιρεθεί με το ολοκλήρωμα που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης στον όρο των τάσεων των εξισώσεων Navier–Stokes (τρίτο ολοκλήρωμα στην έκφραση 2.55), αρκεί να επιλεγεί κατάλληλα το u_i στο S_W ,

Η έκφραση 2.55, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις 2.26 και 2.27, γίνεται

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} (u_j n_j + r_j n_j) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] u_i n_j dS \\
& + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_{S_W} \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] n_j r_i dS \\
& + \int_{S_W} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i \right] r_i dS \\
& + \int_{S_W} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS) \right] r_i
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Επιλέγοντας τη συνθήκη

$$u_i = -r_i \tag{2.77}$$

το δεύτερο ολοκλήρωμα της έκφρασης 2.76 απαλείφεται, ενώ το τρίτο και το τέταρτο ολοκλήρωμα αλληλοανααιρούνται.

Στην περίπτωση αυτή, οι παράγωγοι ευαισθησίας δίνονται από την εξίσωση

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} & = \int_{S_W} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j + \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i \right] r_i dS \\
& + \int_{S_W} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS) + p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS) \right] r_i \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Η επιλογή της οριακής συνθήκης 2.77 έναντι των συνθηκών 2.74α', 2.74β', υπερτερεί ως προς το ότι καταλήγει σε απλούστερη έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, δεδομένου ότι στην εξίσωση 2.78 απαιτείται ο υπολογισμός λιγότερων ολοκληρωμάτων από ότι στην εξίσωση 2.75.

2.5.3 Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού

Στη περίπτωση της συνάρτησης 2.28 από τις εξισώσεις 2.46 και 2.47, οι συζυγείς οριακές συνθήκες για την είσοδο του πεδίου, λαμβάνουν τη μορφή

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \mathbf{u}_t = 0 \tag{2.79}$$

Στην έξοδο (βλ. εξισώσεις 2.53α' και 2.53β'), ισχύει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j \quad (2.80)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j \quad (2.81)$$

Τέλος, στα στερεά όρια, από τις εξισώσεις 2.57α', 2.57β' ισχύει

$$u_{\langle n \rangle} = -(p - p_{tar}) , \quad \mathbf{u}_t = 0 \quad (2.82)$$

Η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \frac{1}{2} \int_{S_W} (p - p_{tar})^2 \frac{\delta (dS)}{\delta b_m} \\ & - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & - \int_{S_W} \nu (p - p_{tar}) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & - \int_{S_W} \nu (p - p_{tar}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \end{aligned} \quad (2.83)$$

Όπως και προηγουμένως, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των υπολοίπων R^p και R_i^v και αναδιατάσσοντας τους όρους της εξίσωσης 2.83, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} (p - p_{tar}) \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \frac{1}{2} \int_{S_W} (p - p_{tar})^2 \frac{\delta (dS)}{\delta b_m} \\ & - \int_{S_W} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & - \int_{S_W} q \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} \nu (p - p_{tar}) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i dS \\ & - \int_{S_W} (p - p_{tar}) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_k dS \\ & - \int_{S_W} \nu (p - p_{tar}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.6 Εφαρμογές – Πιστοποίηση μεθόδου για στρωτές ροές.

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται εφαρμογές με τις οποίες πιστοποιείται η προτεινόμενη ακριβής συνεχής συζυγής μέθοδος σε στρωτές ροές. Οι εφαρμογές περιλαμβάνουν

περιπτώσεις ροών σε αγωγούς καθώς και σε περυγώσεις στροβιλομηχανών. Ας επισημανθεί ότι οι τελευταίες παρουσιάζονται, μόνο για λόγους πιστοποίησης της μεθόδου, για στρωτές ροές. Ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ γίνεται μέσω της εξίσωσης 2.65 (αντικαθιστώντας με τη χρησιμοποιούμενη κάθε φορά συνάρτηση κόστους) αφού έχουν πρώτα επιλυθεί οι εξισώσεις κατάστασης 2.1, 2.2 και μετά οι συζυγείς εξισώσεις 2.40, 2.41 με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Στόχος είναι να δειχθεί ότι η μέθοδος μπορεί να υπολογίσει με υψηλή πιστότητα τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας. Για το σκοπό αυτό, οι παράγωγοι ευαισθησίας, αφού υπολογιστούν με τη συζυγή μέθοδο, συγκρίνονται με τις τιμές τους που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (που χρησιμοποιεί το ίδιο λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes με το οποίο υπολογίστηκε και η ροϊκή λύση που απαιτείται για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος) ή τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης. Οι δύο τελευταίες τεχνικές θεωρείται ότι υπολογίζουν τις τιμές 'αναφοράς' των παραγώγων ευαισθησίας, δηλαδή τις 'ορθές'⁴ τιμές των παραγώγων ευαισθησίας τις οποίες πρέπει να υπολογίζει (και) η συζυγής μέθοδος. Οι συναρτήσεις κόστους που χρησιμοποιούνται είναι αυτές που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 2.3. Συγκεκριμένα, μελετώνται προβλήματα στα οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του χωρίου καθώς επίσης και της δύναμης, κατά την κατεύθυνση της αδιατάρακτης ροής, που ασκείται στα στερεά τοιχώματα της 'προς βελτιστοποίηση' μορφής.

Οι παράμετροι ελέγχου της γεωμετρίας, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, είναι (α) είτε τα σημεία ελέγχου των πολυωνύμων Bézier-Bernstein, που παραμετροποιούν την αεροδυναμική/υδροδυναμική μορφή (β) είτε οι συνιστώσες των ίδιων των σημείων της επιφάνειας των τοιχωμάτων της 'προς βελτιστοποίηση' μορφής. Στη δεύτερη περίπτωση, οι υπολογιζόμενες παράγωγοι συνθέτουν το χάρτη των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος (sensitivity map), όπως συνηθίζεται να αποκαλείται στην ορολογία των συζυγών μεθόδων.

Στην περίπτωση (α) ο υπολογισμός των μεταβολών των κόμβων του τοιχώματος $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$, που εμφανίζονται στην εξίσωση 2.65, γίνεται μέσω των πολυωνύμων Bézier-Bernstein. Συγκεκριμένα, κάθε κόμβος του στερεού ορίου με συντεταγμένες x_k εκφράζεται συναρτήσει της αδιάστατης παραμέτρου t ($t \in [0, 1]$) ως

$$x_k(t) = \sum_{i=0}^{M-1} C_i(t) X_{i,k} \quad (2.85)$$

όπου $C_i(t)$ είναι τα αντίστοιχα πολυώνυμα και $X_{i,k}$ οι συντεταγμένες των M σημείων ελέγχου της γεωμετρίας (που συμπίπτουν με τα b_m). Η ζητούμενη μεταβολή $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ δίνεται από

$$\frac{\delta x_k(t)}{\delta b_m} = \sum_{i=0}^{M-1} C_i(t) \frac{\delta X_{i,k}}{\delta b_m} \quad (2.86)$$

Αντιστοίχως μπορούν να υπολογιστούν και οι υπόλοιπες μεταβολές των γεωμετρικών ποσοτήτων στο στερεό όριο, όπως για παράδειγμα η μεταβολή του μήκους της καμπύλης $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$. Για το μήκος dS ισχύει ότι

$$(dS)^2 = (dt)^2 \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{dC_i(t)}{dt} X_{i,k} \right)^2 \quad (2.87)$$

⁴ υπό την έννοια τουλάχιστον, της απόλυτης συμβατότητας με το μοντέλο ροής και το αριθμητικό σχήμα διακριτοποίησης των αντίστοιχων εξισώσεων

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\delta(dS)}{\delta b_m} = \frac{(dt)^2}{dS} \frac{dx_k(t)}{dt} \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{dC_i(t)}{dt} \frac{\delta X_{i,k}}{\delta b_m} \right) \quad (2.88)$$

Δεδομένου ότι πρώτιστο μέλημα της παρούσας εργασίας είναι να αναπτυχθούν συνεχείς συζυγείς μέθοδοι οι οποίες να είναι ακριβείς, δηλαδή να υπολογίζουν με απόλυτη πιστότητα τις παραγώγους ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους, οι εφαρμογές που θα ακολουθήσουν περιορίζονται στον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας (με την προτεινόμενη μέθοδο) και την πιστοποίησή τους. Συνεπώς, όπως προαναφέρθηκε και στην εισαγωγή, η ένταξη της μεθόδου σε κάποιο σχήμα βελτιστοποίησης μορφής των αεροδυναμικών/υδροδυναμικών μορφών δεν αποτελεί αυτοσκοπό αν και σε επιλεγμένες εφαρμογές παρουσιάζεται και αυτό (4).

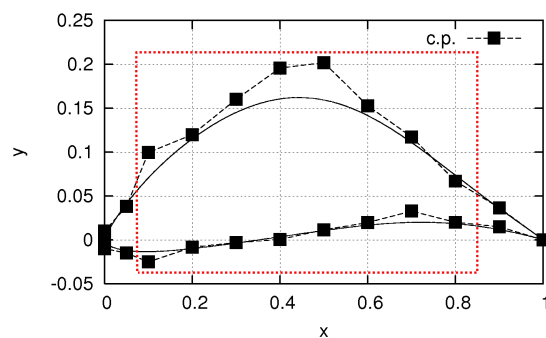
2.6.1 Πρώτη εφαρμογή: 2Δ πτερύγωση συμπίεστη

Στην πρώτη εφαρμογή μελετάται μια 2Δ πτερύγωση συμπίεστη με γωνία κλίσης 30° και λόγο βήματος προς χορδή 0.8. Ο βασισμένος στη χορδή της αεροτομής αριθμός Reynolds ισούται με $Re = 1000$. Η συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι ευαισθησίας αναζητούνται, είναι οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του χωρίου. Ο προσδιορισμός των παραγώγων ευαισθησίας γίνεται μέσω της έκφρασης 2.65.

Η παραμετροποίηση της γεωμετρίας της αεροτομής γίνεται με δύο καμπύλες Bézier-Bernstein, χωριστά για τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης. Συνολικά χρησιμοποιούνται 26 σημεία ελέγχου (13 στην πλευρά υπερπίεσης και 13 στην πλευρά υποπίεσης). Από αυτά τα σημεία, εκείνα τα όποια βρίσκονται κοντά στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής παραμένουν αμετάβλητα ενώ, για τα υπόλοιπα σημεία, σταθερές παραμένουν μόνο οι αξονικές συντεταγμένες τους. Συνολικά, τα ελεύθερα σημεία ελέγχου είναι $M = 16$ (ισο-μοιρασμένα στις δύο πλευρές της αεροτομής), σχήμα 2.2 (εντός του πλαισίου με τη διακεκομμένη γραμμή περιλαμβάνονται τα σημεία ελέγχου που είναι ελεύθερα να μετακινηθούν). Το πεδίο της πίεσης στη 2Δ πτερύγωση που μελετάται στη παρούσα εφαρμογή φαίνεται στο σχήμα 2.3. Στο σχήμα 2.4 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας όπως αυτές υπολογίζονται από τη προτεινόμενη συζυγή μέθοδο και συγκρίνονται με τις παραγώγους ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα υψηλή. Να επισημανθεί ότι μελετήθηκαν τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών για ένα εύρος τιμών της στοιχειώδους ποσότητας διαφόρισης ϵ και ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι ανεξάρτητα της τιμής της ποσότητας αυτής. Το ίδιο ισχύει και για όλα τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής. Η λεπτομέρεια κοντά στην αεροτομή των πεδίων των τριών συζυγών μεταβλητών παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5. Και στα τρία πεδία που απεικονίζονται μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο ομόρρους της συζυγούς ροής είναι ανάποδος από αυτόν της ροής του ρευστού. Το γεγονός αυτό είναι αποτέλεσμα του αντίθετου προσήμου μεταξύ των όρων της μεταφοράς και της διάχυσης στις συζυγείς εξισώσεις.

Η κάθε συζυγής μεταβλητή μπορεί να ερμηνευτεί ως το μέτρο της επίδρασης στις αντίστοιχες εξισώσεις κατάστασης, εξίσωση 2.4, που θα επιφέρει μια αλλαγή της γεωμετρίας της αεροτομής. Για παράδειγμα, στο σχήμα 2.5 (πάνω) οι μεγάλες τιμές της συζυγούς πίεσης στην πλευρά υποπίεσης υποδηλώνουν ότι μια αλλαγή της γεωμετρίας της αεροτομής θα οδηγήσει σε σημαντική μεταβολή του υπόλοιπου της εξίσωσης της συνέχειας στην

περιοχή αυτή (εννοείται αν δεν μεταβληθεί το πεδίο ροής) και μάλιστα αυτή η μεταβολή θα μεταφερθεί ανάντι της ροής λόγω των 'ανάποδων' όρων μεταφοράς στις συζυγείς εξισώσεις. Αντιθέτως, φαίνεται ότι στις περιοχές κάτω, πίσω και ακριβώς μπροστά από τη μορφή (περιοχή του συζυγούς ομόρρου) το υπόλοιπο της εξίσωσης της συνέχειας επηρεάζεται λιγότερο. Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για τις δύο συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας. Η πρώτη αποτελεί μέτρο των μεταβολών που προκαλούνται στην εξίσωση της x -ορμής και η δεύτερη μέτρο των μεταβολών στην εξίσωση της y -ορμής, και οι δύο λόγω μεταβολών της γεωμετρίας.



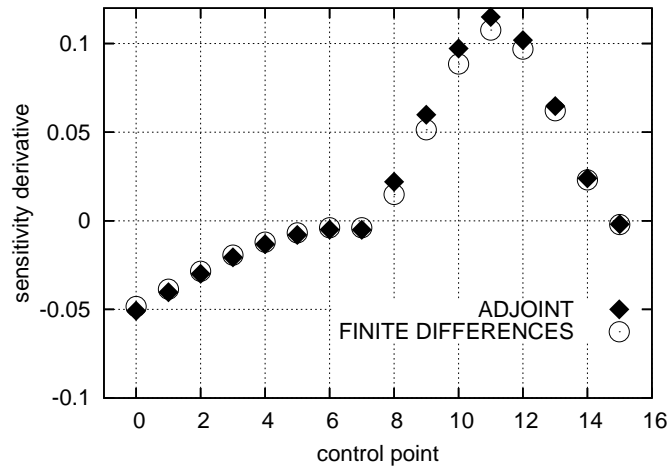
Σχήμα 2.2: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη: αεροτομή και σημεία ελέγχου Bézier (εδώ παρουσιάζονται με γωνία κλίσης μηδέν μοιρών). Σχεδιασμός χωρίς κλίμακα.



Σχήμα 2.3: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη: πεδίο πίεσης στο χώρο ροής της γεωμετρίας της αεροτομής για την οποία επιθυμείται ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης απωλειών ολικής πίεσης.

2.6.2 Δεύτερη εφαρμογή: 2Δ αγωγός

Η επόμενη εφαρμογή αφορά στον υπολογισμό του χάρτη παραγώγων ευαισθησίας ενός 2Δ αγωγού στον οποίο πραγματοποιείται στροφή της ροής κατά 90° . Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds υπολογισμένος με βάση το ύψος του αγωγού στην είσοδο ισούται με $Re = 700$. Το πεδίο της πίεσης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.6 όπου επίσης φαίνεται και η γεωμετρία του αγωγού. Η ροή δεν είναι αποκολλημένη. Η προς παραγωγή συνάρτηση είναι η δύναμη κατά την κατεύθυνση $\mathbf{r} = (1, 0)$, όπως εκφράζεται από τις εξισώσεις 2.25, 2.26. Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο φαίνονται στο σχήμα 2.7 όπου συγκρίνονται με αυτήν των πεπερασμένων διαφορών και με τη μέθοδο της ευθείας



Σχήμα 2.4: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη: πιστοποίηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ με την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο. Η σύγκριση γίνεται ως προς τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (σχήμα κεντρικών διαφορών). Η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα υψηλή.

διαφορίσης. Οι μεταβλητές σχεδιασμού b_m , $M = 180$, είναι, ουσιαστικά, όλοι οι κόμβοι του τοιχώματος (και των δύο πλευρών) που βρίσκονται κοντά στη στροφή 90° της γεωμετρίας του αγωγού, εξαιρουμένων των κόμβων που ανήκουν στο μπροστά και πίσω ίσιο τμήμα αυτού. Ο υπολογιζόμενος χάρτης παραγώγων ευαισθησίας αντιστοιχεί σε μετατόπιση του κάθε κόμβου του τοιχώματος κατά τη μοναδιαία κάθετη στην επιφάνεια κατεύθυνση. Όταν ένας κόμβος 'μετακινείται', όλα τα υπόλοιπα σημεία της επιφάνειας παραμένουν σταθερά. Συνεπώς, για έναν κόμβο μ του τοιχώματος ($\mu = 1, \dots, M$) με συντεταγμένες x_k^μ , όπου το κάθετο διάνυσμα στη θέση αυτή είναι το n_k^μ , ισχύει ότι

$$\frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = \begin{cases} \frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = 0 & , \mu \neq m \\ \frac{\delta x_k^\mu}{\delta b_m} = n_k^\mu & , \mu = m \end{cases} \quad (2.89)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διακριτό ισοδύναμο της εξίσωσης 2.65, για τις παραγώγους

ευαισθησίας είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} &= \sum_{\mu=1}^M \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right)_{\mu} \frac{\delta x_k^{\mu}}{\delta b_m} |S_{\mu}| + \sum_{\mu=1}^M (F_{S_W})_{\mu} \frac{\delta |S_{\mu}|}{\delta b_m} \\
&- \sum_{\mu=1}^M \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_j - q \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right]_{\mu} \frac{\delta x_k^{\mu}}{\delta b_m} |S_{\mu}| \\
&+ \sum_{\mu=1}^M (u_i R_i^v)_{\mu} \frac{\delta x_k^{\mu}}{\delta b_m} n_k^{\mu} |S_{\mu}| + \sum_{\mu=1}^M (q R^p)_{\mu} \frac{\delta x_k^{\mu}}{\delta b_m} n_k^{\mu} |S_{\mu}| \\
&+ \sum_{\mu=1}^M \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right]_{\mu} \frac{\delta x_k^{\mu}}{\delta b_m} |S_{\mu}| \\
&+ \sum_{\mu=1}^M \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]_{\mu} \frac{\delta (n_i^{\mu} n_j^{\mu})}{\delta b_m} |S_{\mu}|
\end{aligned} \tag{2.90}$$

όπου με $|S_{\mu}|$ συμβολίζεται το μήκος του στοιχειώδους τμήματος (2Δ) του ορίου που αντιστοιχεί στον κόμβο μ . Με τη χρήση της εξίσωσης 2.89 η εξίσωση 2.90 απλοποιείται περαιτέρω και λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} &= \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right)_m n_k^m |S_m| + (F_{S_W})_m \frac{\delta |S_m|}{\delta b_m} \\
&- \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_j - q \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right]_m n_k^m |S_m| + (u_i R_i^v + q R^p)_m |S_m| \\
&+ \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right]_m n_k^m |S_m| \\
&+ \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]_m \frac{\delta (n_i^m n_j^m)}{\delta b_m} |S_m|
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Η εξίσωση 2.91 χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας που συνθέτουν το χάρτη ευαισθησίας. Λόγω του μεγάλου αριθμού κόμβων (180), η σύγκριση των παραγώγων γίνεται σε μικρότερο, αλλά αντιπροσωπευτικό, αριθμό κατά το μήκος της γεωμετρίας. Σε αντίθετη περίπτωση, το υπολογιστικό κόστος από την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών και της ευθείας διαφόρισης για όλο το πλήθος των σημείων θα ήταν πάρα πολύ υψηλό. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται να εφαρμοστούν οι δύο αυτές μέθοδοι ανά 10 σημεία σε κάθε πλευρά του αγωγού, έτσι λαμβάνονται οι 18 παράγωγοι ευαισθησίας για καθεμία από τις δύο μεθόδους. Τα δύο αυτά γραφήματα απεικονίζονται μαζί με τις παραγώγους από τη συζυγή μέθοδο στο σχήμα 2.7 και, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η ταύτιση των τιμών των τριών μεθόδων είναι πολύ υψηλή. Επίσης, από τις σημαντικές τιμές που λαμβάνουν οι παράγωγοι ευαισθησίας στην περιοχή της στροφής της γεωμετρίας στην κάτω ⁵ πλευρά του αγωγού (τα σημεία 0 – 90 στο σχήμα 2.7 αντιστοιχούν στη κάτω πλευρά του αγωγού), φαίνεται η μεγάλη επίδραση που έχει η διαμόρφωση της γεωμετρίας στη θέση αυτή στην τιμή της συνάρτησης F . γεγονός το οποίο επαληθεύει αυτό που ήταν αναμενόμενο και από τη φυσική της ροής στη θέση αυτή.

⁵ο διαχωρισμός μεταξύ πάνω και κάτω πλευράς του αγωγού γίνεται με βάση το πια πλευρά έχει μεγαλύτερη τεταγμένη στο τμήμα αριστερά της στροφής

Στο σχήμα 2.8 παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς πίεσης όπου εμφανίζει τις υψηλότερες τιμές στην περιοχή της στροφής του αγωγού στην κάτω του πλευρά. Στο σχήμα 2.9, αριστερά, παρουσιάζεται η x -συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας, και δεξιά, η λεπτομέρεια των διανυσμάτων της συζυγούς ταχύτητας στην περιοχή του τοίχου στη στροφή της κάτω πλευράς του αγωγού. Η μορφή του πεδίου εκεί εξηγείται από τις συζυγείς οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα στερεά τοιχώματα, εξίσωση 2.77.

2.6.3 Τρίτη εφαρμογή: 2Δ πτερύγωση στροβίλου

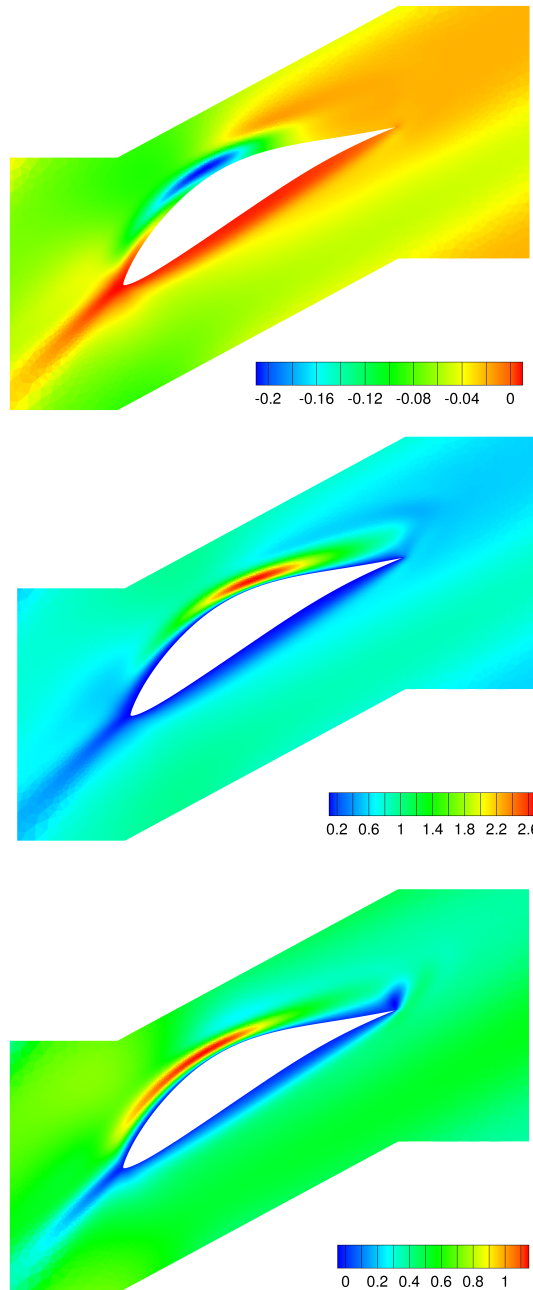
Στην παρούσα εφαρμογή μελετάται η περίπτωση μιας 2Δ πτερύγωσης στροβίλου με αριθμό Reynolds ίσο με $Re = 800$ (βασισμένο στη χορδή της αεροτομής). Η γωνία κλίσης είναι 38.44° και ο λόγος του βήματος προς τη χορδή ίσος με 0.8. Η συνάρτηση, F , είναι οι απώλειες ολικής πίεσης, 2.17. Η αεροτομή παραμετροποιείται με συνολικά 14 σημεία ελέγχου, σχήμα 2.11, εκ των οποίων 5 στην πλευρά υπερπίεσης και 5 στην πλευρά υποπίεσης είναι ελεύθερα να μεταβάλλονται κατά την y διεύθυνση ($M = 10$). Τα τρία πρώτα σημεία ελέγχου από την ακμή πρόσπτωσης καθώς και αυτό στην ακμή εκφυγής είναι σταθερά και, συνεπώς, αμετάβλητα και κατά τις δύο διευθύνσεις. Στο σχήμα 2.10 παρουσιάζονται το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας και της συζυγούς ταχύτητας. Στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου εντοπίζονται οι μεγαλύτερες τιμές των συζυγών ταχυτήτων (και το μέτρο τους) και, συνεπώς, στην περιοχή εκείνη υπάρχει σημαντική επίδραση στις εξισώσεις της ορμής από τις αλλαγές στη γεωμετρία του πτερυγίου. Και σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στην εφαρμογή 2.6.1, διακρίνεται ο 'ανάποδος' ομόρρους του συζυγούς πεδίου ροής που δημιουργεί μια ζώνη χαμηλών συζυγών ταχυτήτων μπροστά από το πτερύγιο, στην οποία δεν γίνεται τόσο 'αντιληπτή' η αλλαγή στη γεωμετρία από τις εξισώσεις της ορμής.

Στο σχήμα 2.12 συγκρίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη συζυγή μέθοδο με αυτές που έχουν προκύψει από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών· από αυτό το σχήμα συνάγεται ότι η ταύτιση των τιμών των δύο μεθόδων είναι ιδιαίτερος ικανοποιητική.

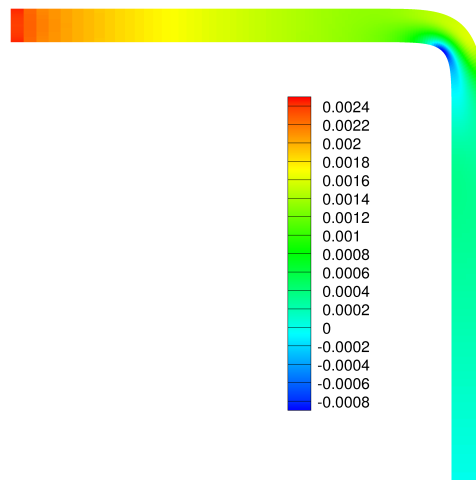
2.6.4 Συμπεράσματα - σχολιασμός αποτελεσμάτων για στρωτές ροές.

Με τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάστηκαν στο παρόν κεφάλαιο πιστοποιείται ότι η αναπτυχθείσα, για στρωτές ροές, συνεχής συζυγής μέθοδος είναι ικανή να υπολογίζει με ακρίβεια τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Υπάρχει, συνεπώς, μια 'στέρεη' βάση σε επίπεδο μαθηματικής διατύπωσης και αναπτυχθέντος λογισμικού η οποία επιτρέπει να επεκταθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος ώστε να καλύπτει με ακριβή τρόπο και τυρβώδεις ασυμπίεστες ροές με μοντέλα τύρβης μιας ή δυο μ.δ.ε. χαμηλών ή υψηλών αριθμών Reynolds. Η ανάπτυξη μιας ακριβούς μεθόδου για στρωτές ροές, πέραν του προφανούς κέρδους ότι υπολογίζει με υψηλή ακρίβεια τις παραγώγους ευαισθησίας σε τέτοιες ροές, βοηθά στο να αποκλειστούν όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες ανακρίβειών όταν η μέθοδος εφαρμοστεί σε τυρβώδεις ροές (με μόνη αλλαγή την εισαγωγή της τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t στις συζυγείς εξισώσεις, οριακές συνθήκες και έκφραση παραγώγων ευαισθησίας). Συνεπώς, οι διαφορές στις υπολογιζόμενες παραγώγους ευαισθησίας (μεταξύ συζυγούς μεθόδου και μεθόδου πεπερασμένων διαφορών/ευθείας διαφόρισης) μπορούν να αποδοθούν στο ότι δεν ελήφθησαν υπόψη οι μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας ως προς τις παραμέτρους ελέγχου του προβλήματος. Στο κεφάλαιο 3 της διατριβής θα αναλυθεί η προτεινόμενη ακριβής συζυγής μέθοδος για τυρβώδεις ροές η οποία θα λαμβάνει υπόψη της τις μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας. Στο κεφάλαιο 4 η μέθοδος θα επεκταθεί και για την περίπτωση μοντέλων τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds.

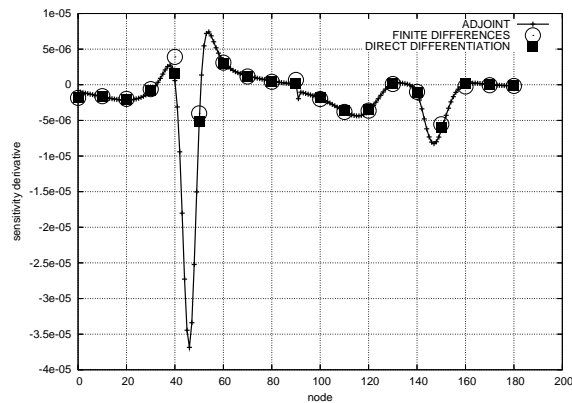
Τέλος, καθίσταται σαφές ότι η μεν θεωρία που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο αυτό είναι γενική και καλύπτει πλήρως και τις δύο περιπτώσεις επιλύτων, δηλαδή του οικείου και του ελεύθερου/ανοικτού λογισμικού. Από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν άλλες μελετήθηκαν με τον ένα και άλλες με τον άλλο επιλύτη. Για λόγους πληρότητας αναφέρεται ότι για τις εφαρμογές 2.6.1 και 2.6.3 χρησιμοποιήθηκε το οικείο λογισμικό ενώ για την εφαρμογή 2.6.2 το ανοικτό λογισμικό. Εννοείται ότι στην περίπτωση του οικείου επιλύτη, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο της τεχνητής συμπίεσότητας, προστίθενται στις συζυγείς εξισώσεις κατάλληλοι ψευδοχρονικοί όροι, με τον ίδιο τρόπο που αυτό γίνεται και στις εξισώσεις κατάστασης. Τα παραρτήματα Δ' και Ε' ασχολούνται με τον οικείο επιλύτη παρέχοντας σχετικές πληροφορίες.



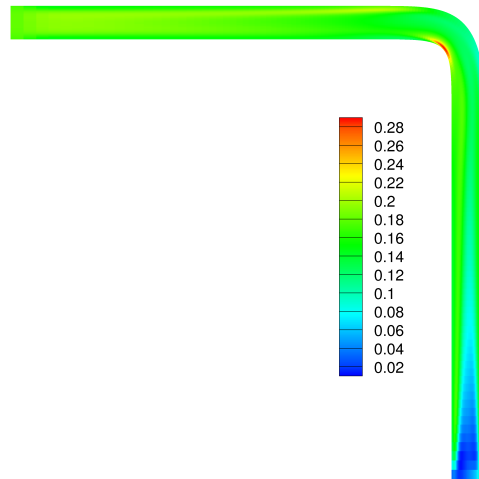
Σχήμα 2.5: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη. Πάνω: πεδίο της συζυγούς πίεσης. Μέση: πεδίο της συζυγούς ταχύτητας κατά τη x -διεύθυνση. Κάτω: πεδίο της συζυγούς ταχύτητας κατά την y -διεύθυνση. Σχεδιασμός χωρίς κλίμακα.



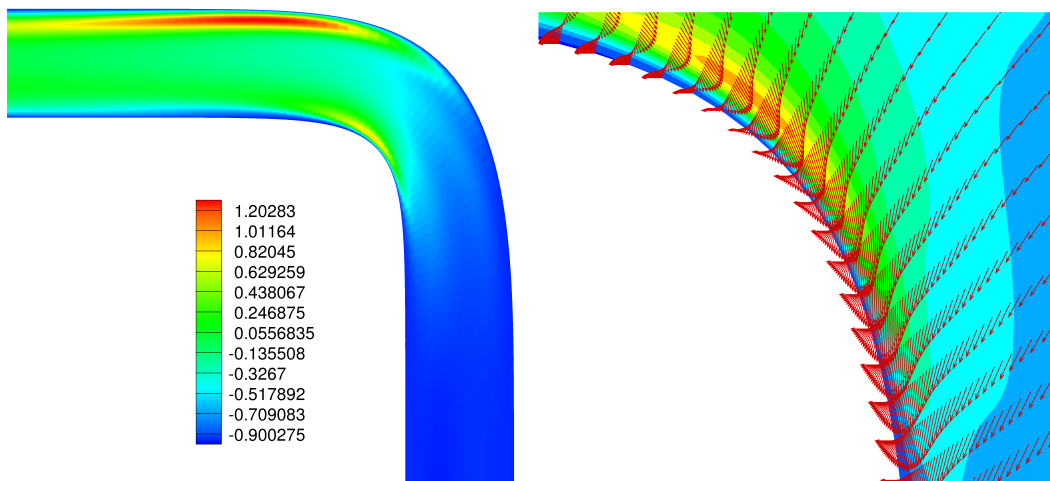
Σχήμα 2.6: Στρωτή ροή σε αγωγό: πεδίο πίεσης στον αγωγό.



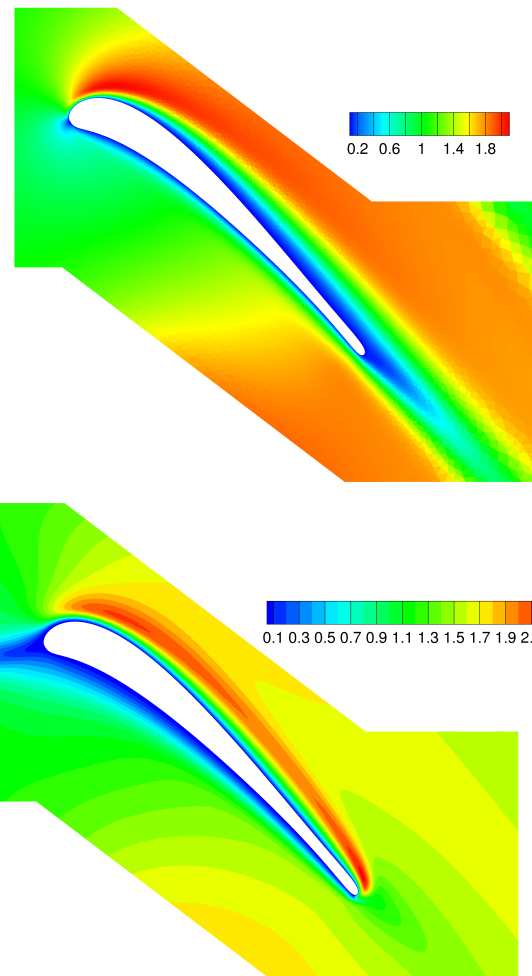
Σχήμα 2.7: Στρωτή ροή σε αγωγό: χάρτης παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ στα τοιχώματα του αγωγού κοντά στην περιοχή της στροφής της γεωμετρίας, τα πρώτα 90 σημεία αντιστοιχούν στην κάτω πλευρά του αγωγού ενώ τα υπόλοιπα 90 στην πάνω πλευρά. Σύγκριση υπολογιζόμενων τιμών χρησιμοποιώντας τρεις μεθόδους (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο, (β) πεπερασμένες διαφορές και (γ) ευθεία διαφόριση. Τα σημεία με τις μεγαλύτερες κατ' απόλυτο τιμές αντιστοιχούν στην περιοχή της στροφής στην κάτω πλευρά του αγωγού. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο αύξων αριθμός καθεμιάς από τις μεταβλητές σχεδιασμού ($m = 1, \dots, M$). Η ασυνέχεια της καμπύλης μεταξύ της 90ης και 91ης μεταβλητής σχεδιασμού οφείλεται στο ότι η μια εντοπίζεται στην κάτω πλευρά και η άλλη στην πάνω πλευρά του αγωγού. Λόγω του μεγάλου πλήθους τους ($M = 180$) και του υψηλού κόστους των μεθόδων (β) και (γ) επιλέχθηκαν ενδεικτικά 18 μεταβλητές για την πιστοποίηση των υπολογιζόμενων από τη συζυγή μέθοδο παραγώγων ευαισθησίας.



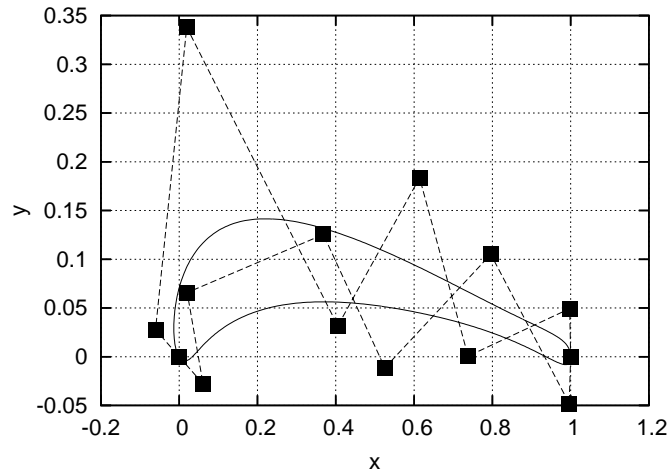
Σχήμα 2.8: Στρωτή ροή σε αγωγό: πεδίο συζυγούς πίεσης, υπολογισμένο με βάση την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο.



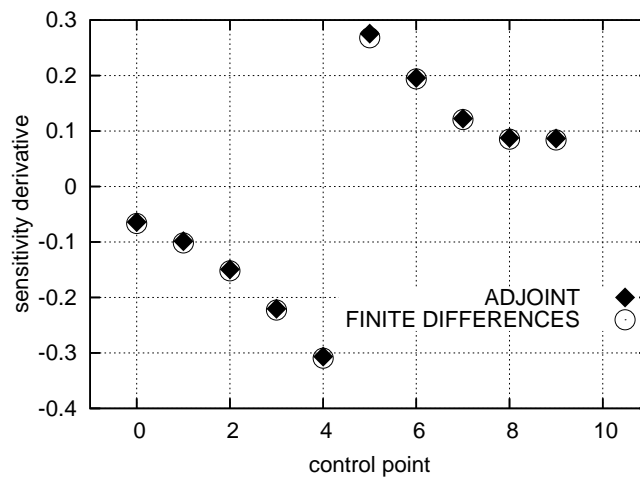
Σχήμα 2.9: Στρωτή ροή σε αγωγό. Αριστερά: πεδίο συζυγούς x -ταχύτητας. Δεξιά: διανύσματα συζυγών ταχυτήτων στην περιοχή κοντά στον τοίχο και συγκεκριμένα στην περιοχή της στροφής στην κάτω πλευρά του αγωγού.



Σχήμα 2.10: Στρωτή ροή σε 2D περύγωση στροβίλου. Πάνω: πεδίο του μέτρου της ταχύτητας $|v|$. Κάτω: πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας $|u|$.



Σχήμα 2.11: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση στροβίλου: αεροτομή και σημεία Bézier της γεωμετρίας σε γωνία κλίσης μηδέν μοιρών. Όλα τα σημεία ελέγχου πλην των τριών πρώτων στην ακμή πρόσπτωσης και αυτού της ακμής εκφυγής είναι ελεύθερα να μετακινηθούν κατά την y διεύθυνση.



Σχήμα 2.12: Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση στροβίλου: υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας με τη συζυγή μέθοδο και με αυτήν των πεπερασμένων διαφορών (σχήμα κεντρικών διαφορών).

Κεφάλαιο 3

Συζυγής διατύπωση για το μοντέλο τύρβης Spalart–Allmaras

Στο κεφάλαιο αυτό θεμελιώνεται και παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για χρονικά μόνιμες τυρβώδεις ροές ασυμπίεστου ρευστού. Προφανώς, η μέθοδος αυτή, για την περίπτωση των στρωτών ροών, συμπίπτει με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Η εν λόγω συζυγής διατύπωση διαφοροποιείται από προηγούμενες ως προς το γεγονός ότι το σύστημα των συζυγών εξισώσεων που επιλύεται αποτελείται από τις συζυγείς εξισώσεις των εξισώσεων Navier–Stokes και από τις συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Οι πρώτες, αποτελούν τις εξισώσεις της συζυγούς μέσης ροής ενώ οι δεύτερες τις εξισώσεις του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Η παρούσα συζυγής διατύπωση στηρίζεται στο μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds μιας εξίσωσης των Spalart–Allmaras, [107], αλλά μπορεί, αντίστοιχα με όσα παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, να εφαρμοστεί και για οποιοδήποτε άλλο μοντέλο τύρβης μίας ή δύο μ.δ.ε.. Εξάλλου, στο πλαίσιο της διατριβής, αυτό έχει υλοποιηθεί και για το μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων k - ϵ με χρήση συναρτήσεων τοίχου, οδηγώντας στο συζυγές μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων k_a - ϵ_a , το οποίο όμως δεν θα παρουσιαστεί εδώ αλλά στο κεφάλαιο 4 μαζί με τη μέθοδο των συζυγών συναρτήσεων τοίχου. Για λόγους πλουραλισμού, λοιπόν, έγινε η επιλογή τα δύο θέματα των κεφαλαίων 3 και 4 να αναπτυχθούν με διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Προφανώς δε, κρίθηκε άσκοπο να επαναληφθεί η ύλη των δύο αυτών κεφαλαίων και για το μοντέλο Spalart–Allmaras και για το μοντέλο k - ϵ .

Στις τυρβώδεις ροές, οι εξισώσεις της μέσης ροής είναι συζευγμένες με την εξίσωση ή τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Όλες μαζί αποτελούν τις εξισώσεις κατάστασης του προβλήματος. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει ότι, στο συζυγές πρόβλημα, κατά αντιστοιχία με τις μεταβολές των μεταβλητών της μέσης ροής, πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι ρυθμοί μεταβολής των μεταβλητών του μοντέλου τύρβης. Στη βιβλιογραφία [67, 88, 89, 42], η συνηθέστερη αντιμετώπιση είναι το να αμελώνται οι μεταβολές αυτές, υποθέτοντας ‘παγωμένη’ (ως προς τα b_m) τυρβώδη συνεκτικότητα ν_t , δηλαδή $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$. Με αυτήν την παραδοχή, η μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων καθίσταται πιο απλή, η τελική έκφραση για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας είναι και αυτή απλούστερη και τέλος, δεν απαιτείται η επίλυση της ή των επιπλέον συζυγών εξισώσεων για το συζυγές του μοντέλου τύρβης. Παρόλα αυτά, εφαρμόζοντας την παραδοχή αυτήν, οδηγούμαστε συχνά (βλ. σχετικές εφαρμογές) σε εκτιμήσεις των παραγώγων ευαισθησίας οι οποίες να διαφέρουν από την πραγματική τους τιμή. Μόνο στις, σπάνιες πλέον, περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται αλγεβρικά μοντέλα τύρβης, και εδώ πάλι υπό προϋποθέσεις, η παραδοχή

της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας, [128, 129], μπορεί να οδηγήσει σε σχετικά ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, [57].

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι, με την εισαγωγή των συζυγών εξισώσεων για το μοντέλο τύρβης, να υπολογιστούν όσο το δυνατόν πιο ακριβείς τιμές για τις παραγώγους ευαισθησίας.

Μια επισκόπηση στην πρόσφατη βιβλιογραφία των συζυγών μεθόδων δείχνει ότι μια τέτοια συνεχής συζυγής μέθοδος εμφανίζεται για πρώτη φορά. Υπάρχουν ορισμένες παρόμοιες εργασίες στις οποίες λαμβάνονται υπόψη οι μεταβολές του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, αλλά όλες τους βασίζονται στη διακριτή συζυγή μέθοδο. Για παράδειγμα, στην εργασία [130] παρουσιάζεται μια διακριτή συζυγής μέθοδος για συμπιεστές ροές όπου οι εξισώσεις της μέσης ροής επιλύονται συζευγμένα με την εξίσωση του μοντέλου Spalart-Allmaras. Αντιστοίχως, αυτό συμβαίνει και για το συζυγές πρόβλημα όπου επίσης επιλύονται συζευγμένα οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής και του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Η συζευγμένη επίλυση των εξισώσεων της ροής προϋποθέτει τη γραμμικοποίηση όλων των όρων του μοντέλου ως προς τις μεταβλητές της μέσης ροής καθώς και των εξισώσεων της μέσης ροής ως προς τη μεταβλητή της τύρβης. Επίσης στην εργασία [130], έμφαση δόθηκε στην επίλυση του ακριβούς συζυγούς προβλήματος, έτσι εκτός από ακριβής σε επίπεδο γραμμικοποίησης του μοντέλου τύρβης, η μέθοδος είναι ακριβής και ως προς άλλες παραμέτρους όπως λ.χ. τον υπολογισμό των όρων των συζυγών εξισώσεων εξαιτίας της δεύτερης τάξης ακρίβειας στο πρόβλημα της ροής. Προτάθηκε μάλιστα ένας αποδοτικός τρόπο υπολογισμού αυτών των όρων. Ένα αντίστοιχο σχήμα που να λαμβάνει τις συνεισφορές λόγω ακρίβειας δεύτερης τάξης του προβλήματος ροής στο συζυγές πρόβλημα προτάθηκε στην εργασία [131]. Η συμπεριφορά της συζυγούς μεθόδου, σε ότι αφορά στη σύγκλιση, είναι αντίστοιχη με αυτήν του προβλήματος της ροής. Σε επίπεδο εφαρμογών η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων σε 3D προβλήματα ροής γύρω από πτέρυγες και γύρω από ολόκληρο αεροσκάφος.

Στην εργασία [82], το σύστημα των εξισώσεων της ροής καθώς και το σύστημα των εξισώσεων της διακριτής συζυγούς μεθόδου επιλύονται με τη χρήση της ίδιας προσταθεροποιημένης μεθόδου Krylov. Στόχος είναι να επιτευχθεί η κατά το δυνατόν ταχύτερη και πιο αξιόπιστη σύγκλιση. Η μέθοδος ενσωματώνεται σε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης όπου χρησιμοποιείται η προσεγγιστική μέθοδος Newton όπου ο προσεγγιστικός υπολογισμός του μητρώου των δευτέρων παραγώγων στηρίζεται στη μέθοδο BFGS (Broyden-Fanno-Goldfarb-Shannon) rank-two, [12]. Στο συζυγές σύστημα εμπεριέχονται οι γραμμικοποιήσεις του μοντέλου τύρβης και των εξισώσεων της μέσης ροής ως προς τις μεταβλητές του μοντέλου τύρβης. Επίσης προτείνονται νέες εκτιμήσεις της αρχικοποίησης του μητρώου των δευτέρων παραγώγων οι οποίες εξασφαλίζουν καλύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης ενώ, για τη μετατόπιση του εσωτερικού πλέγματος, χρησιμοποιείται μια μέθοδος που βασίζεται στη 'λογική' των ελατηρίων.

Στην εργασία [132], παρουσιάζεται μια συζυγής διακριτή μέθοδος για μη-δομημένα πλέγματα, στο συζυγές σύστημα εμπεριέχονται όλοι οι όροι που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων της μέσης ροής καθώς και του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras-Edwards, [133]. Στην ίδια εργασία παρουσιάζονται αναλυτικά κάποιες πιθανές παραδοχές που μπορεί να κάνει κανείς προκειμένου να αποφύγει την ακριβή και πλήρη γραμμικοποίηση των εξισώσεων της ροής, μια εκ των οποίων είναι, άλλωστε, και η παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας. Μια δεύτερη παραδοχή η οποία επίσης διερευνάται αφορά στη γραμμικοποίηση του μοντέλου τύρβης και σχετίζεται με τη χρησιμοποίηση μιας απλοποιημένης εκδοχής αντί της πλήρους γραμμικοποίησης

των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης (εκτός από την παραδοχή της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας). Οι υπόλοιπες παραδοχές αφορούν τη μη-χρησιμοποίηση, στο συζυγές πρόβλημα, όρων που αντιστοιχούν στους όρους ακρίβειας δεύτερης τάξης του προβλήματος της ροής, τη χρησιμοποίηση προσεγγίσεων για τον υπολογισμό των όρων διάχυσης και, τέλος, τη μη-γραμμικοποίηση των όρων τεχνητής διάχυσης του σχήματος διακριτοποίησης, [134]. Από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται συμπεραίνεται ότι η ακριβής γραμμικοποίηση των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης είναι απαραίτητη μιας και τόσο η θεώρηση της σταθερούς τυρβώδους συνεκτικότητας όσο και η χρησιμοποίηση προσεγγιστικών εκφράσεων αντί της ακριβούς γραμμικοποίησης του μοντέλου τύρβης οδηγούν σε διαφορετικές τιμές παραγώνων από τις πραγματικές. Οι διαφορές μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο σημαντικές εξαρτώμενες πάντα και από την εφαρμογή. Σε ότι αφορά στη δεύτερη από αυτές τις δυο παραδοχές, σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιείται (στη συζυγή μέθοδο) η γραμμικοποίηση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras ενώ για την επίλυση της ροής χρησιμοποιείται το μοντέλο Spalart-Allmaras-Edwards και ανάποδα ¹. Η σύγκριση αυτή όπως ετέθη έχει περιορισμένη σημασία καθότι αν κάποιος επιθυμήσει να ‘πληρώσει’ το επιπλέον κόστος επίλυσης των πρόσθετων συζυγών εξισώσεων καθώς και της διατύπωσης και του προγραμματισμού της νέας συζυγούς μεθόδου σίγουρα θα το έκανε χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις συναρτήσεις του μοντέλου και του όρους παραγωγής και καταστροφής αυτού με αυτές που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο στο πρόβλημα της ροής. Πάντως, ακόμα και έτσι, φάνηκε η σημασία της χρήσης της ακριβούς γραμμικοποίησης. Σε ότι αφορά στις υπόλοιπες παραδοχές επισημάνθηκε η σημαντική, επίσης, επίδραση των όρων που προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση ακρίβειας δεύτερης τάξης στο πρόβλημα της επίλυσης της ροής πράγμα το οποίο έχει μελετηθεί εκτενέστερα στην εργασία [131].

Στην [57] παρουσιάζεται μια επίσης διακριτή συζυγής μέθοδος στην οποία οι εξισώσεις της μέσης ροής και το μοντέλο τύρβης των Spalart-Allmaras επιλύονται συζευγμένα και, επομένως, το ίδιο ισχύει για το συζυγές σύστημα εξισώσεων. Η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων της μεθόδου γίνεται με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Σύμφωνα με την εργασία αυτή, η χρησιμοποίηση της ακριβούς γραμμικοποίησης αποδεικνύεται εξαιρετικά σημαντική αφού, σε αντίθετη περίπτωση, οι συγγραφείς επιδεικνύουν σημαντικότητες αποκλίσεις από τις τιμές των παραγώνων ευαισθησίας που υπολογίζονται με χρήση των πεπερασμένων διαφορών, ακόμα δε και εναλλαγή του προσήμου. Η τελευταία προφανώς, δυσχεραίνει σημαντικά ή και οδηγεί προς λάθος κατεύθυνση τη μέθοδο βελτιστοποίησης (στην περίπτωση όπου η συζυγής μέθοδος έχει ενταχθεί στο πλαίσιο κάποιου αλγορίθμου βελτιστοποίησης). Οι εφαρμογές που εξετάζονται αφορούν σε 2D περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής και, συγκεκριμένα, στη βελτιστοποίηση της μορφής αεροτομών.

Στην [135] παρουσιάζεται μια διακριτή συζυγής μέθοδος για τις συμπιεστές εξισώσεις της μέσης ροής συζευγμένες με το μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων $k - \omega$ SST, [136]. Η μέθοδος εφαρμόζεται στη βελτιστοποίηση υποηχητικών αγωγών εισόδου. Στην [84] παρουσιάζεται μια διακριτή συζυγής μέθοδος για τις εξισώσεις της ροής καθώς και τις εξισώσεις μετακίνησης του πλέγματος. Στη γραμμικοποίηση των εξισώσεων της ροής εμπεριέχονται όλοι οι όροι του μοντέλου τύρβης ενώ χρησιμοποιούνται τεχνικές πολυπλέγματος, [137, 138] για την επιτάχυνση της επίλυσης των εξισώσεων του προβλήματος της ροής και του συζυγών αυτών. Τέλος, στην [139], παρουσιάζεται μια λεπτομερής μελέτη για την επίδραση της παραδοχής της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας σε εφαρμογές βελτιστοποίησης με

¹ τα δύο μοντέλα διαφέρουν ως προς τον όρου παραγωγής του μοντέλου

χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων.

Σε σύγκριση με όλες τις προαναφερθείσες εργασίες, η μέθοδος η οποία αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή διαφοροποιείται ουσιαστικά ως προς το ότι βασίζεται στη συνεχή συζυγή μέθοδο. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη φυσική ερμηνεία των παραγόμενων συζυγών εξισώσεων, των οριακών τους συνθηκών καθώς και τη μελέτη της σημασίας κάθε εμφανιζόμενου όρου ως προς την ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της συνεχούς μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι, αφού διατυπωθούν οι μαθηματικές εκφράσεις, ο προγραμματισμός της είναι απλούστερος συγκριτικά με τη διακριτή συζυγή μέθοδο. Στην τελευταία, συχνά, παρουσιάζονται περιορισμοί σε επίπεδο προγραμματισμού (ειδικά όταν η μέθοδος διακριτοποίησης των εξισώσεων είναι δεύτερης ή και μεγαλύτερης τάξης) και για αυτό πολλοί ερευνητές καταφεύγουν στη χρήση προσεγγιστικών Ιακωβιανών μητρώων γεγονός το οποίο έχει συχνά αντίκτυπο στις υπολογιζόμενες παραγώγους ευαισθησίας. Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων παρουσιάζονται συνοπτικά στην εργασία [132].

Επίσης, ως επισημανθεί ότι η εδώ προτεινόμενη μέθοδος αφορά στις ασυμπίεστες εξισώσεις της ροής, σε αντίθεση με τις προηγούμενες αναφορές όπου μελετώνται συμπίεστες ροές. Το τελευταίο αποτελεί μεν στοιχείο διαφοροποίησης της παρούσας διατριβής αλλά συγχρόνως δεν επηρεάζει τη γενικότητα της προτεινόμενης μεθόδου μιας και η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί και στις εξισώσεις του συμπίεστου ρευστού έτσι ώστε να διατυπωθούν μαθηματικά οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής και του μοντέλου τύρβης, για τυρβώδεις ροές συμπίεστου ρευστού.

Τέλος, η θεωρία του παρόντος κεφαλαίου είναι γενική και υπό την έννοια ότι καλύπτει τόσο την περίπτωση κατά την οποία ο συζυγής κώδικας βασιστεί σε επιλύτη της ροής που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της τεχνητής συμπίεστότητας όσο και σε επιλύτη που επιλύει τις εξισώσεις της ροής αποσυζευγμένες χρησιμοποιώντας εξίσωση πίεσης. Ο προγραμματισμός της μεθόδου του κεφαλαίου αυτού έγινε με βάση το ανοικτό λογισμικό, [124, 125]. Σε αυτό οι εξισώσεις ροής λύνονται αποσυζευγμένες με χρήση του αλγορίθμου SIMPLE, [127]. Χρησιμοποιείται ομόθετη κεντροβαρική αποθήκευση των μεταβλητών της ροής. Αριθμητική διάχυση εισάγεται στο σχήμα υπολογίζοντας την κλίση της πίεσης στην εξίσωση της πίεσης απευθείας στο κέντρο της κάθε φάτσας του εκάστοτε όγκου ελέγχου. Οι όροι μεταφοράς μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας ένα δεύτερης τάξης ανάντι σχήμα διακριτοποίησης. Το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων λύνεται μέσω της προσταθεροποιημένης (μέσω του αλγορίθμου GSTAB, biconjugate gradient stabilized, [140]) μεθόδου των συζυγών κλίσεων. Όσα ισχύουν για τον επιλύτη των εξισώσεων κατάστασης ισχύουν και για τον επιλύτη των συζυγών εξισώσεων.

3.1 Εξισώσεις κατάστασης: εξισώσεις της μέσης ροής και εξίσωση του μοντέλου τύρβης

Οι εξισώσεις κατάστασης αποτελούνται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes, 3.1, 3.2, και την εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras, 3.4, [107].

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (3.2)$$

στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.2 αναγνωρίζεται ο όρος των διατμητικών τάσεων, τ_{ij} , για τις οποίες ισχύει ότι

$$\tau_{ij} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

Στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης δεν λαμβάνονται υπόψη οι όροι μετάβασης, συνεπώς γράφεται ως

$$R\tilde{\nu} = \frac{\partial(v_j\tilde{\nu})}{\partial x_j} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) = 0 \quad (3.4)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, με $\tilde{\nu}$ συμβολίζεται η μεταβλητή του μοντέλου τύρβης. Το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης είναι $\mathbf{U} = [p, v_i, \tilde{\nu}]^T$. Ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t εκφράζεται συναρτήσει της μεταβλητής $\tilde{\nu}$ ως

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (3.5)$$

Οι όροι παραγωγής $P(\tilde{\nu})$ και καταστροφής $D(\tilde{\nu})$ της εξίσωσης 3.4 δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{Y}, \quad D(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w(\tilde{Y}) \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2} \quad (3.6)$$

ωηερε, $\tilde{Y} = Y f_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\Delta^2 \kappa^2} f_{v2}$, $Y = |e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{i}_i|$ είναι το μέτρο της στροβιλότητας, Δ η απόσταση του υπόψη κόμβου από τον τοίχο, $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$, $f_{v2} = \frac{1}{(1 + \frac{\chi}{c_{v2}})^3}$, $f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})}{c_{v2}} \left[3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right) + \left(\frac{\chi}{c_{v2}} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^{-3}$, $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$, $f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g + c_{w3}^6} \right)^{1/6}$, $g = r + c_{w2} (r^6 - r)$ και $r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y} \kappa^2 \Delta^2}$. Οι σταθερές του μοντέλου είναι $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\kappa = 0.4187$, $\sigma = \frac{2}{3}$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$ και $c_{v2} = 5$. Το σύμβολο Levi-Civita e_{ijk} που χρησιμοποιείται στο μέτρο της στροβιλότητας ορίζεται ως

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i, j, k) \in (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) \in (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & i = j, j = k, k = i \end{cases} \quad (3.7)$$

Για εσωτερικές ροές, οι οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή $\tilde{\nu}$ είναι: σταθερή Dirichlet συνθήκη στην είσοδο του χωρίου ροής, μηδενική Dirichlet στα στερεά τοιχώματα (οι εξισώσεις της ροής λύνονται μέχρι και τον κόμβο του στερεού ορίου) και μηδενική Neumann στην έξοδο. Ως προς τη συνθήκη στο στερεό όριο, να αναφερθεί ότι για την περίπτωση που χρησιμοποιείται μοντέλο συναρτήσεων τοίχου οι συνθήκες αλλάζουν, τόσο για τη μεταβλητή (ή τις μεταβλητές) της τύρβης όσο και για τις μεταβλητές της μέσης ροής. Συνέπεια αυτού είναι μια διαφορετική (ακριβής) συζυγή μέθοδος η οποία παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4. Στο παρόν κεφάλαιο θα περιοριστούμε στη συζυγή διατύπωση για χαμηλούς αριθμούς Reynolds.

3.2 Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων

Στην παρούσα ενότητα, θα αναπτυχθεί η μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου με τρόπο ανεξάρτητο (α) από τη συνάρτηση κόστους του προβλήματος

βελτιστοποίησης και (β) την παραμετροποίηση της γεωμετρίας. Η ανάλυση ξεκινά με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν του κεφαλαίου 2. Όμως, στην παρούσα περίπτωση, στο διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών εμπεριέχεται και η συζυγής μεταβλητή του μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}_a$. Συνεπώς $\Psi = [q, \mathbf{u}, \tilde{\nu}_a]^T$. Για την επαυξημένη συνάρτηση κόστους ισχύει η εξίσωση 2.3 (με $l=4$ για 2Δ και $l=5$ για 3Δ ροές, αφού έχουμε και τη συζυγή μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$). Αναπτύσσοντας την έκφραση αυτήν ξεχωριστά για κάθε μεταβλητή q , u_i και $\tilde{\nu}_a$ έχουμε ότι

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a R^{\tilde{\nu}} d\Omega \quad (3.8)$$

Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_m , χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 2.6 και 2.7, γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\partial R^{\tilde{\nu}}}{\partial b_m} d\Omega \\ &+ \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S \tilde{\nu}_a R^{\tilde{\nu}} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \quad (3.9)$$

Για τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου πρέπει να αντικατασταθούν στην εξίσωση 3.9 οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων της μέσης ροής. Οι τελευταίες γράφονται συναρτήσει των μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών (της μέσης ροής και του μοντέλου τύρβης), ως

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Η εξίσωση 2.30 είναι η ίδια με αυτήν του κεφαλαίου 2 και επαναλαμβάνεται εδώ μόνο για λόγους πληρότητας.

Στην εξίσωση 3.10 εμφανίζεται ο τελευταίος όρος (που δεν υπάρχει στην αντίστοιχη εξίσωση 2.31 του κεφαλαίου 2) και προέρχεται από τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας, $\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m}$. Για τη μεταβολή αυτή ισχύει ότι

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} = \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \quad (3.11)$$

Επίσης, θεωρείται και εδώ ότι η μοριακή συνεκτικότητα ν του ρευστού είναι σταθερή. Από την εξίσωση κατάστασης 3.4 προκύπτει ότι η άμεση μεταβολή του μοντέλου τύρβης συναρτήσει των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών δίνεται από από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{\tilde{\nu}}}{\partial b_m} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \tilde{\nu} \right)}_{\text{term1}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right)}_{\text{term2}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) \right]}_{\text{term3}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)}_{\text{term3}} \\ &- \underbrace{2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right)}_{\text{term4}} + \underbrace{\tilde{\nu} \left(-\frac{\partial P}{\partial b_m} + \frac{\partial D}{\partial b_m} \right)}_{\text{term5}} + \underbrace{(-P + D) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m}}_{\text{term6}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Με βάση τις εξισώσεις 2.30, 3.10, 3.11, το δεύτερο και το τρίτο ολοκλήρωμα της έκφρασης 3.9, γίνονται

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} + q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} \right) d\Omega &= \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
&\quad - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j u_i dS \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
&\quad + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega - \int_S \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Η μεταβολή $\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}}$ υπολογίζεται αναλυτικά χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} = \frac{\delta}{\delta \tilde{\nu}} (f_{v_1} \tilde{\nu}) = \frac{\delta f_{v_1}}{\delta \tilde{\nu}} \tilde{\nu} + f_{v_1} \tag{3.14}$$

όπου για την παράγωγο $\frac{\delta f_{v_1}}{\delta \tilde{\nu}} = \frac{1}{\nu} \frac{\delta f_{v_1}}{\delta \chi}$ ισχύει ότι

$$\frac{\delta f_{v_1}}{\delta \chi} = \frac{\delta}{\delta \chi} \left(\frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v_1}^3} \right) = \frac{3c_{v_1}^3 \chi^2}{(\chi^3 + c_{v_1}^3)^2} \tag{3.15}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\partial R^{\tilde{\nu}}}{\partial b_m} d\Omega$ της εξίσωσης 3.9, μετά την αντικατάσταση του όρου $\frac{\partial R^{\tilde{\nu}}}{\partial b_m}$ από την εξίσωση 3.12, δίνει, σε μια όρο προς όρο ανάπτυξη, ότι

$$\begin{aligned}
term1: \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \tilde{\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= \int_S \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_j \frac{\partial v_j}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \\
&\quad + \int_S \tilde{\nu}_a v_j n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \tag{3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
term2: - \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) n_j dS \\
&\quad + \int_S \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.17 μετασχηματίζεται περαιτέρω αν χρησιμοποιηθεί η εξίσωση 3.18

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k \delta b_m} \delta x_k \Rightarrow \\
\frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) n_j &= \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) n_j + \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k \delta b_m} \delta x_k n_j \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) n_j &= \frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right) - \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_m} - \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο $term2$ της εξίσωσης 3.17 λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= \frac{1}{\sigma} \left\{ -\int_S \tilde{\nu}_a (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_S \tilde{\nu}_a (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_m} dS \right. \\
&+ \int_S \tilde{\nu}_a (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
&\left. + \int_S (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS \right\} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Οι υπόλοιποι όροι $term3$, $term4$ και $term5$ της ανάπτυξης του ολοκληρώματος δίνουν ότι

$$term3 : -\frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \frac{1}{\sigma} \left\{ -\int_S \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \right\} \quad (3.20)$$

$$term4 : -\frac{2c_{b2}}{\sigma} \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) d\Omega = \frac{2c_{b2}}{\sigma} \left\{ -\int_S \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \right\} \quad (3.21)$$

$$term5 : \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \left(-\frac{\partial P}{\partial b_m} + \frac{\partial D}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \left(C_Y(\tilde{\nu}) \frac{\partial Y}{\partial b_m} + C_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} + C_{\Delta}(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial \Delta}{\partial b_m} \right) d\Omega \quad (3.22)$$

και

$$term6 : \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a (-P + D) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.23)$$

Οι συναρτήσεις $C_s(\tilde{\nu})$, $C_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v})$ και $C_{\Delta}(\tilde{\nu}, \vec{v})$ που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση 3.22, υπολογίζονται από τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης και δίνονται παρακάτω

$$C_Y(\tilde{\nu}) = \left(-c_{b1} - c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{\tilde{Y}} \right) f_{v3} \quad (3.24)$$

$$C_{\Delta}(\tilde{\nu}, \vec{v}) = -\frac{2}{d^3} \left[c_{w1} r \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \left(\frac{1}{d} - \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2} f_{v2} \right) + c_{w1} f_w \tilde{\nu} - c_{b1} \frac{f_{v2}}{\kappa^2} \tilde{\nu} \right] \quad (3.25)$$

$$C_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) = \left(-c_{b1} - c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{\tilde{Y}} \right) \left(\frac{\delta f_{v3}}{\delta \tilde{\nu}} Y + \frac{1}{\kappa^2 \Delta^2} f_{v2} + \frac{\delta f_{v2}}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 \Delta^2} \right) + c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{\tilde{\nu}} + c_{w1} \frac{f_w}{\Delta^2} \quad (3.26)$$

Για τις παραγώγους $\frac{\delta f_{v2}}{\delta \tilde{\nu}} = \frac{1}{\nu} \frac{\delta f_{v2}}{\delta \chi}$ και $\frac{\delta f_{v3}}{\delta \tilde{\nu}} = \frac{1}{\nu} \frac{\delta f_{v3}}{\delta \chi}$, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ισχύουν

$$\frac{\delta f_{v2}}{\delta \chi} = \frac{-3}{c_{v2} \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^4} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_{v_3}}{\delta \chi} = & \left(f_{v_1} + \chi \frac{\delta f_{v_1}}{\delta \chi} \right) \frac{3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v_2}} \right) + \left(\frac{\chi}{c_{v_2}} \right)^2}{c_{v_2} \left(1 + \frac{\chi}{c_{v_2}} \right)^3} + \frac{(1 + \chi f_{v_1}) \left(3 + 2 \frac{\chi}{c_{v_2}} \right)}{c_{v_2}^2 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v_2}} \right)^3} \\ & - 3(1 + \chi f_{v_1}) \frac{3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v_2}} \right) + \left(\frac{\chi}{c_{v_2}} \right)^2}{c_{v_2}^2 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v_2}} \right)^4} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Επανερχόμενοι στον *term*5 της εξίσωσης 3.22 και δεδομένου ότι για τη μεταβολή της στροβιλότητας $\frac{\partial Y}{\partial b_m}$ ισχύει

$$\frac{\partial Y}{\partial b_m} = \frac{1}{Y} e_{ijq} e_{ilm} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial v_m}{\partial b_m} \right) \quad (3.29)$$

ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.22 μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_Y(\tilde{\nu}) \frac{\partial Y}{\partial b_m} d\Omega = & \int_S \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{ijq} e_{ilm} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} n_l \frac{\partial v_m}{\partial b_m} dS \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\mathcal{C}_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{ijq} e_{ilm} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \right) \frac{\partial v_m}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (3.30)$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση 3.9 γράφεται συνολικά

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j u_i dS \\
& + \int_\Omega \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega - \int_S \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS \\
& + \int_\Omega \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \tilde{\nu}_a \tilde{\nu}_j \frac{\partial v_j}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega + \int_S \tilde{\nu}_a v_j n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) n_j dS + \int_S \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS \\
& - \int_\Omega \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega - \int_S \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS + \int_\Omega \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} n_j dS + \int_\Omega 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{ijq} e_{ilm} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} n_l \frac{\partial v_m}{\partial b_m} dS \\
& - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\mathcal{C}_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{ijq} e_{ilm} \frac{\partial v_q}{\partial b_m} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \right) \frac{\partial v_m}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_\Omega \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \left(-\frac{\partial P}{\partial \tilde{\nu}} + \frac{\partial D}{\partial \tilde{\nu}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega + \int_\Omega \tilde{\nu}_a (-P + D) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S \tilde{\nu}_a R^{\tilde{\nu}} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{3.31}$$

3.3 Οι συζυγείς εξισώσεις

Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις (μέσης ροής και μοντέλου τύρβης) προκύπτουν από την εξίσωση 3.31 απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται οι μεταβολές των ροϊκών ποσοτήτων, αφού πρώτα αναπτυχθεί η μεταβολή $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ της συνάρτησης κόστους. Ειδικότερα, για μια οποιαδήποτε συνάρτηση κόστους F η οποία ορίζεται στο εσωτερικό ή/και στα όρια του πεδίου ροής, εξίσωση 2.12, ισχύουν οι εξισώσεις 2.13, 2.14, 2.15 της παραγράφου 2.3, εκτός των 2.16α' και 2.16β'. Στη θέση τους ισχύει ότι

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \tilde{\nu}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \tag{3.32α}$$

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial \tilde{\nu}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \tag{3.32β}$$

όπου, προφανώς, σε αντιδιαστολή με το κεφάλαιο 2, λαμβάνεται πλέον υπόψη και η παράγωγος $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m}$.

Τα χωρικά ολοκληρώματα της εξίσωσης 3.31 τα οποία εμπεριέχουν όρους $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ απαλείφονται δίνοντας τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0 \quad (3.33)$$

$$R_i^u = \underbrace{-v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{R_{i,v}^u} + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_i}}_{R_{i,p}^u} - \underbrace{\tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(e_{jli} e_{jmq} \frac{C_Y}{Y} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a \right)}_{R_{i,\tilde{\nu}}^u} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.34)$$

Η συζυγής εξίσωση της συνέχειας, 3.33, είναι η ίδια με την εξίσωση 2.30 για στρωτές ροές. Το ίδιο δεν συμβαίνει, όμως, με τις συζυγείς εξισώσεις της ορμής, 3.34, στις οποίες, σε σύγκριση με τις εξισώσεις 2.31 για στρωτές ροές εμφανίζονται οι 'νέοι' όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ οι οποίοι έχουν προέλθει από τον όρο μεταφοράς του μοντέλου Spalart-Allmaras και τους όρους παραγωγής και καταστροφής 3.7 (στους οποίους εμπεριέχεται το μέτρο της στροβιλότητας που εξαρτάται από την ταχύτητα). Με $R_{i,v}^u$ συμβολίζονται οι όροι που έχουν προέλθει από τις εξισώσεις της ορμής (για αυτό και ο κάτω δείκτης v) και με $R_{i,p}^u$ αυτοί που έχουν προέλθει από την εξίσωση της συνέχειας. Οι όροι $R_{i,v}^u$ και $R_{i,p}^u$ είναι αντίστοιχοι με αυτούς των εξισώσεων 2.31.

Επίσης, απαλείφονται τα χωρικά ολοκληρώματα της εξίσωσης 3.31 που εξαρτώνται από τον όρο $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m}$ οδηγώντας στην εξίσωση του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} v_j + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) - \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} C_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v})}_{R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}} - \underbrace{(-P+D) \tilde{\nu}_a - \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}} - \frac{\partial F_\Omega}{\partial \tilde{\nu}} = 0 \quad (3.35)$$

Η εξίσωση του συζυγούς μοντέλου τύρβης αποτελεί μια επιπλέον εξίσωση στο σύστημα των συζυγών εξισώσεων επιτρέποντας τον υπολογισμό των τεσσάρων (2Δ) ή πέντε (3Δ) συζυγών μεταβλητών στις οποίες ανήκει και η μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$. Οι όροι που, στην εξίσωση 3.35, συμβολίζονται με $R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}$ είναι αυτοί που έχουν προέλθει από την εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras ενώ αυτοί που συμβολίζονται με $R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}$ έχουν προέλθει από τον όρο διάχυσης των εξισώσεων ορμής. Οι όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ στις εξισώσεις της ορμής 'συνδέουν' τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής (άρα και τη συζυγή ταχύτητα και πίεση) με τη νεοεισαχθείσα μεταβλητή του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Η σημασία τους, που όπως θα δειχθεί στη συνέχεια είναι μεγάλη, θα διερευνηθεί στο τμήμα των εφαρμογών του παρόντος κεφαλαίου.

3.4 Συζυγείς οριακές συνθήκες

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες οι οποίες 'κλείνουν' το σύστημα των συζυγών εξισώσεων. Όπως και στο κεφάλαιο 2, έτσι και εδώ, προκύπτουν

από την έκφραση της επαυξημένης συνάρτησης κόστους (εδώ 3.31) ύστερα από απαλοιφές των οριακών ολοκληρωμάτων τα οποία εμπεριέχουν μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών. Σε σύγκριση με την ενότητα 2.4, η ύπαρξη μιας επιπλέον μεταβλητής κατάστασης, της $\tilde{\nu}$, και συνεπώς μιας επιπλέον μεταβολής στην εξίσωση 3.31, της $\frac{\delta\tilde{\nu}}{\delta b_m}$, θα δώσει μια επιπλέον οριακή συνθήκη η οποία αντιστοιχεί ουσιαστικά στην εξίσωση του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Επίσης, οι όροι των μεταβολών των εξισώσεων κατάστασης οι οποίοι οδήγησαν στην εμφάνιση των όρων $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ στις συζυγείς εξισώσεις της ορμής αναμένεται να δώσουν και αντίστοιχους όρους στο όριο του χωρίου οι οποίοι θα συμπεριληφθούν στις συζυγείς οριακές συνθήκες.

3.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I

Στην είσοδο του πεδίου ροής (S_I), οι Dirichlet συνθήκες των μεταβλητών $v_i, \tilde{\nu}$ σε συνδυασμό με το ότι οι κόμβοι της εισόδου του χωρίου παραμένουν αμετακίνητοι σε κάθε μεταβολή της γεωμετρίας, εξίσωση 2.20α', οδηγούν στις εξισώσεις 2.22 και 2.23 για τις μεταβολές τις ταχύτητας ενώ για τις μεταβολές της μεταβλητής της τύρβης ισχύει

$$\frac{\delta\tilde{\nu}}{\delta b_m} = \frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial b_m} = 0 \quad (3.36)$$

Επίσης, η Neumann συνθήκη για την πίεση, οδηγεί σε μια αντίστοιχη Neumann συνθήκη για τη μεταβολή $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = 0$. Συνεπώς, όλα τα επιφανειακά ολοκληρώματα τα οποία ορίζονται στην είσοδο του πεδίου ροής και εμπεριέχουν τις παραπάνω μεταβολές απαλείφονται. Τα εναπομείναντα ολοκληρώματα στην είσοδο S_I της έκφρασης 3.31 είναι

$$-\int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} \phi_3 \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right) dS \quad (3.37)$$

όπου οι συναρτήσεις $\phi_{1,ij}$ και ϕ_2 δίνονται από τις εξισώσεις 2.44 ενώ για την ϕ_3 ισχύει ότι

$$\phi_3 = \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a (\nu + \tilde{\nu})$$

Για να απαλειφθούν αυτοί οι όροι, επιβάλλονται οι συζυγείς οριακές συνθήκες της παραγράφου 2.4.1, εξισώσεις 2.45α' και 2.45β' (που εδώ επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας)

$$\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.45\alpha')$$

$$\phi_2 = 0 \quad (2.45\beta')$$

και, επιπρόσθετα, η συνθήκη

$$\phi_3 = 0 \quad (3.39)$$

Όπως αναλύθηκε και στο κεφάλαιο 2, οι δύο πρώτες από τις παραπάνω συνθήκες αντιστοιχούν στο να επιβάλουμε την κάθετη συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας ίση με $u_{(n)} = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p}$ και την εφαπτομενική συνιστώσα της ίση με μηδέν $u_{(t)} = 0$. Η τρίτη συνθήκη οδηγεί στο $\tilde{\nu}_a = 0$ στην είσοδο του χωρίου. Για τους λόγους που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2, για τη συζυγή πίεση q η συνθήκη επιλέγεται να είναι η $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$.

3.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O

Στην έξοδο του πεδίου της ροής, S_O , όπως και στην είσοδο, ισχύει η εξίσωση 2.20α'. Με βάση αυτό, οι μηδενικές Neumann συνθήκες των μεταβλητών v_i , $\tilde{\nu}$ οδηγούν σε αντίστοιχες μηδενικές Neumann συνθήκες για τις μεταβολές

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} \right) = 0 \quad (3.40)$$

Από τη Dirichlet συνθήκη της πίεσης ισχύει η εξίσωση 2.24

$$\frac{\delta p}{\delta b_m} = \frac{\partial p}{\partial b_m} = 0 \quad (2.24)$$

Τα ολοκληρώματα τα οποία ορίζονται στην έξοδο του πεδίου ροής και στα οποία εμφανίζονται οι παραπάνω μεταβολές απαλείφονται αυτομάτως. Προκειμένου να απαλειφθούν όροι που απομένουν στην έξοδο S_O και στους οποίους εμφανίζονται οι υπόλοιπες μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών, εξίσωση 3.41,

$$- \int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) dS + \int_{S_O} \phi_{4,i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS + \int_{S_O} \phi_5 \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} dS \quad (3.41)$$

πρέπει να επιβληθούν εκεί οι συνθήκες $\phi_{4,i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$ για 3D προβλήματα) και $\phi_5 = 0$. Υπενθυμίζεται ότι ο πρώτος όρος της εξίσωσης 3.41 αμελείται (βλ. υποενότητα 2.4.2). Η συνάρτηση $\phi_{1,ij}$ δίνεται από την εξίσωση 2.44α του κεφαλαίου 2, ενώ για τις συναρτήσεις $\phi_{4,i}$ και ϕ_5 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \phi_{4,i} = & \underbrace{u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j}_{BO_{i,v}^u} \underbrace{- q n_i}_{BO_{i,p}^u} \\ & + \underbrace{\tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_i + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} C_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{jmq} e_{jli} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} n_l}_{BO_{i,\tilde{\nu}}^u} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\phi_5 = - \underbrace{\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j}_{BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}} + \underbrace{\tilde{\nu}_a v_j n_j + \left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j}_{BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial \tilde{\nu}} \quad (3.43)$$

Η συνθήκη $\phi_5 = 0$ αποτελεί την επιπλέον συνθήκη η οποία επιτρέπει την επιβολή οριακών συνθηκών για τη συζυγή μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$ στην έξοδο του χωρίου. Οι όροι $BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}$ και $BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}$ έχουν προέλθει από τις εξισώσεις της ορμής (όροι διάχυσης) και της τύρβης, αντιστοίχως. Αναφορικά με τη συνθήκη $\phi_4 = 0$, η εξίσωση 3.43 συγκρινόμενη με την εξίσωση 2.52 του κεφαλαίου 2 διαφοροποιείται ως προς τους όρους $BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}_a}$ που συναρτώνται της μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$ και προέρχονται από τον όρο μεταφοράς και τους όρους παραγωγής και καταστροφής της εξίσωσης Spalart-Allmaras. Οι υπόλοιποι όροι, $BO_{i,v}^u$ και $BO_{i,p}^u$, είναι όμοιοι με αυτούς της εξίσωσης 2.52 (με τη διαφορά ότι εδώ η ενεργός συνεκτικότητα είναι το άθροισμα $\nu + \nu_t$). Η

συνθήκη $\phi_{4,i}=0$ γραμμένη για το οριόδετο σύστημα, δίνει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \underbrace{\tilde{\nu}_a \tilde{\nu} + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \frac{C_Y}{Y} e_{jmq} e_{jli} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} n_l n_i}_{(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp} + \frac{\partial F_{SO}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \quad (3.44a)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \underbrace{\tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \frac{C_Y}{Y} e_{jmq} e_{jli} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} n_l t_i}_{(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel} + \frac{\partial F_{SO}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \quad (3.44b)$$

Από τους 'νέους' όρους στην εξίσωση 3.42 εμφανίζονται οι πρόσθετοι όροι $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$ και $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ στις εξισώσεις 3.44a', 3.44b' (σε σύγκριση με τις εξισώσεις 2.53a' και 2.53b') των οποίων η σημασία θα διερευνηθεί στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού.

3.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια

Στα στερεά όρια του πεδίου ροής, οι Dirichlet συνθήκες των μεταβλητών της ροής v_i και $\tilde{\nu}$ οδηγούν στις μηδενικές ολικές μεταβολές $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0$ (εξίσωση 2.22) και $\frac{\delta \tilde{\nu}}{\delta b_m} = 0$. Όταν το στερεό όριο παραμετροποιείται και συνεπώς μεταβάλλεται όταν αλλάζουν τιμή οι μεταβλητές σχεδιασμού b_m , οι παραπάνω εκφράσεις, λόγω της εξίσωσης 2.6, οδηγούν στη συνθήκη 2.55 για τη μεταβολή της ταχύτητας στο τοίχωμα και στη συνθήκη

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} = - \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (3.45)$$

για τη μεταβολή της μεταβλητής $\tilde{\nu}$.

Όπως ακριβώς και με την είσοδο του πεδίου, επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann για τη συζυγή πίεση, δηλαδή $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$.

Με βάση τις παραπάνω συνθήκες, στα στερεά όρια απομένουν οι όροι

$$\begin{aligned} & \int_{S_W} \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} - \int_{S_W} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS \\ & + \int_{S_W} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \phi_3 \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_{S_W} \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j dS \\ & + \int_{S_W} \tilde{\nu}_a \nu \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} \tilde{\nu}_a \nu \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & - \int_{S_W} \nu \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S \tilde{\nu}_a R^{\tilde{\nu}} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \quad (3.46) \end{aligned}$$

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα στα οποία υπάρχουν οι όροι $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right)$, $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ ή $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right)$ πρέπει να πληρούνται οι εξής οριακές συνθήκες $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0$, $\phi_2 = 0$ και $\phi_3 = 0$. Από τη συνθήκη $\phi_3 = 0$, προκύπτει ότι στα στερεά όρια ισχύει $\tilde{\nu}_a = 0$ και, συνεπώς, κάθε ολοκλήρωμα της έκφρασης 3.46 στο οποίο εμφανίζεται η συζυγής μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$ απλοποιείται. Οι άλλες δύο (2Δ) ή τρεις (3Δ), $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0$ και $\phi_2 = 0$, έχουν αναλυθεί στη σχετική παράγραφο του κεφαλαίου 2 (§2.4.3).

3.5 Τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας

Απλοποιώντας τις παραπάνω συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες από την εξίσωση 3.31, η τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_{S_W} \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\ & + \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS - \underbrace{\int_{S_W} \nu \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \tilde{v} \mathcal{C}_{\Delta}(\tilde{v}, \tilde{v}) \frac{\partial \Delta}{\partial b_m} d\Omega}_{SD_{\tilde{v}}} \quad (3.47) \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση 3.47 με την αντίστοιχη του κεφαλαίου 2, εξίσωση 2.65, εμφανίζονται οι επιπλέον όροι $SD_{\tilde{v}}$ οι οποίοι αποτελούν την άμεση επίδραση της μεταβλητής της συζυγούς τύρβης \tilde{v}_a στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας. Ο όρος 'άμεση' χρησιμοποιείται εδώ για να διαχωρίσει την επίδραση αυτή από εκείνη που προκαλεί στην υπολογιζόμενη παράγωγο ευαισθησίας η αλλαγή του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας και πίεσης λόγω του ότι και αυτές αλλάζουν με την εισαγωγή του συζυγούς μοντέλου τύρβης (όροι $R_{i,\tilde{v}}^u$, $(BO_{i,\tilde{v}}^u)_{\perp}$ και $(BO_{i,\tilde{v}}^u)_{\parallel}$). Για περαιτέρω ανάλυση του θέματος παραπέμπεται ο αναγνώστης στην ενότητα των εφαρμογών 3.6.

Η ανάλυση του κεφαλαίου 2, ειδικά για καθεμιά συνάρτηση κόστους, υποενότητες 2.5.1, 2.5.2 και 2.5.3, ισχύει και στην παρούσα μέθοδο με τη διαφορά ότι (α) στις οριακές συνθήκες πρέπει να ληφθούν υπόψη οι εξισώσεις των προηγούμενων παραγράφων (3.4.1, 3.4.2 και 3.4.3) αντί αυτών του κεφαλαίου 2 και (β) στην εκάστοτε τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας πρέπει να ληφθεί υπόψη ο όρος $SD_{\tilde{v}}$ της εξίσωσης 3.47. Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζεται η παρατήρηση ότι από τις συναρτήσεις με τις οποίες ασχολείται η παρούσα διατριβή καμία δεν ορίζεται στο εσωτερικό του πεδίου ροής Ω . Αντιθέτως όλες είναι ολοκληρωματικές συναρτήσεις των μεταβλητών της ροής στα όρια του πεδίου. Επίσης, καμία από αυτές δεν εμφανίζει άμεση εξάρτηση από την τυρβώδη συνεκτικότητα (άρα ούτε και από τη μεταβλητή \tilde{v}) και συνεπώς ισχύει ότι $\frac{\partial F_S}{\partial \tilde{v}} = 0$. Από τις εξισώσεις 3.32α', 3.32β' απομένει μόνο

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m}$$

3.6 Εφαρμογές – Πιστοποίηση συζυγούς μεθόδου με το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras.

Με την παρουσίαση, στην προηγούμενη ενότητα, της τελικής έκφρασης για τις παραγώγους ευαισθησίας, εξίσωση 3.47, ολοκληρώθηκε η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου. Στη συνέχεια, ακολουθούν οι εφαρμογές της. Στόχος της ενότητας αυτής είναι να πιστοποιηθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να υπολογίζει με σημαντική ακρίβεια τις ζητούμενες

παραγώγους ευαισθησίας. Μάλιστα, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, αυτό δεν θα ίσχυε στην περίπτωση που χρησιμοποιείτο η συνήθης παραδοχή της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας. Σε ότι ακολουθεί, ο όρος ‘προτεινόμενη μέθοδος’ θα αναφέρεται στη συζυγή μέθοδο η οποία περιλαμβάνει

- (α) τη συζυγή εξίσωση της τύρβης, εξίσωση 3.35 και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες για τη συζυγή μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$
- (β) τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής με όλους τους πρόσθετους όρους λόγω μεταβολής των ποσοτήτων της τύρβης να συμπεριλαμβάνονται στις σχετικές εξισώσεις ($R_{i,\tilde{\nu}}^u$ εξίσωση 3.34) και στις οριακές τους συνθήκες ($(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$ εξίσωση 3.44α’, $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ εξίσωση 3.44β)
- (γ) και, τέλος, την έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας με τους όρους $SD_{\tilde{\nu}}$, εξίσωση 3.47.

Αφού δειχθεί ότι η μέθοδος επιτυγχάνει να υπολογίζει με υψηλή ακρίβεια τις παραγώγους ευαισθησίας και έχοντας ως γνώμονα την απαίτηση αυτή μελετάται η επίδραση καθενός από τους εμφανιζόμενους όρους $R_{i,\tilde{\nu}}^u$, $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$, $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ και $SD_{\tilde{\nu}}$, που αποτελούν απόρροια του ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα δεν θεωρήθηκε ‘παγωμένη’. Η μελέτη αυτή γίνεται σε τρία στάδια και περιγράφεται παρακάτω:

- στο πρώτο, συγκρίνεται η επίδραση των όρων $R_{i,\tilde{\nu}}^u$, $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$ και $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ (και των τριών μονομιάς) αφαιρώντας τους από τις εξισώσεις 3.34, 3.44α’, 3.44β’ και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με αυτά της προτεινόμενης μεθόδου και της συζυγούς μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί την παραδοχή της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας. Ας επισημανθεί ότι εξακολουθεί να επιλύεται η εξίσωση της συζυγούς τύρβης, 3.35 αλλά οι προαναφερθέντες όροι απουσιάζουν. Συνεπώς, από τις τρεις συζυγείς μεθόδους οι οποίες συγκρίνονται, μόνο αυτή της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας δεν περιλαμβάνει την επίλυση της επιπλέον εξίσωσης του συζυγούς μοντέλου τύρβης.
- στο δεύτερο, με αφαίρεση του όρου $SD_{\tilde{\nu}}$ από την τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας, μελετάται η επίδρασή του όρου αυτού στο τελικό αποτέλεσμα. Η σύγκριση αυτή δεν περιλαμβάνει την εκ νέου επίλυση των συζυγών εξισώσεων, χρησιμοποιείται απλά η εξίσωση 3.47 με και χωρίς τον όρο $SD_{\tilde{\nu}}$.
- στο τρίτο στάδιο, μελετώνται ένας-ένας οι όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$, $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$ και $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ αφαιρώντας κάθε φορά τον αντίστοιχο όρο από τη σχετική εξίσωση. Εκτός από την επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα, που δεν είναι άλλο παρά οι παράγωγοι ευαισθησίας, συγκρίνεται και η επίδραση κάθε όρου στο υπολογιζόμενο πεδίο της συζυγούς μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$.

Οι εφαρμογές έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds. Τόσο στην εφαρμογή 3.7 όσο και στην 3.8 μελετάται το κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου από τη συνήθη παραδοχή της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας, στο πλαίσιο σύγκρισης αποτελεσμάτων για την ίδια γεωμετρία, αλλά σε διαφορετικούς αριθμούς Reynolds της ροής.

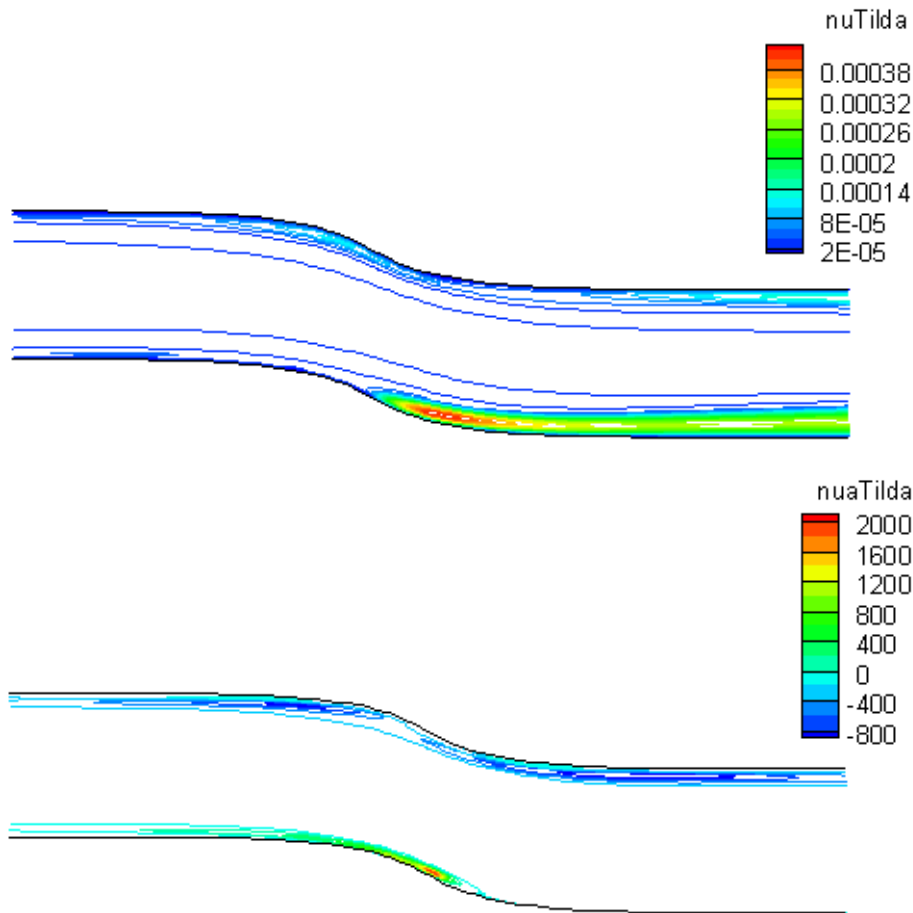
Οι παράμετροι ελέγχου της γεωμετρίας, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, είναι οι συντεταγμένες των κόμβων των στερεών τοιχωμάτων. Όπως ακριβώς συμβαίνει και στην εφαρμογή 2.6.2 του κεφαλαίου 2 ο χάρτης των παραγώγων ευαισθησίας υπολογίζεται για τις κάθετες ως προς το τοίχωμα του αγωγού (κατά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος) μετατοπίσεις των κόμβων του στερεού ορίου. Συνεπώς, από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης 3.47 προκύπτει ότι η ισοδύναμη έκφραση της εξίσωσης 2.91 για τυρβώδεις ροές, είναι η

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} = & \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right)_m n_k^m |S_m| + (F_{S_W})_m \frac{\delta |S_m|}{\delta b_m} \\
& - \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_j - q \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right]_m n_k^m |S_m| + (u_i R_i^v + q R^p)_m |S_m| \\
& + \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right]_m n_k^m |S_m| \\
& + \left[\nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]_m \frac{\delta (n_i^m n_j^m)}{\delta b_m} |S_m| \\
& - \underbrace{\left[\nu \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \right]_m n_j^m n_k^m |S_m| + \sum_{\xi=1}^{\Xi} \left[\tilde{v}_a \tilde{v} \mathcal{C}_{\Delta}(\tilde{v}, \tilde{v}) \frac{\partial \Delta}{\partial b_m} \right]_{\xi}}_{SD_{\tilde{v}}} \Omega_{\xi} \tag{3.48}
\end{aligned}$$

όπου Ξ είναι ο συνολικός αριθμός των Ω_{ξ} (εμβαδόν/όγκος ελέγχου) στα οποία διακριτοποιείται το πεδίο ροής Ω .

3.7 Πρώτη εφαρμογή: αγωγός με διαμόρφωση τύπου S

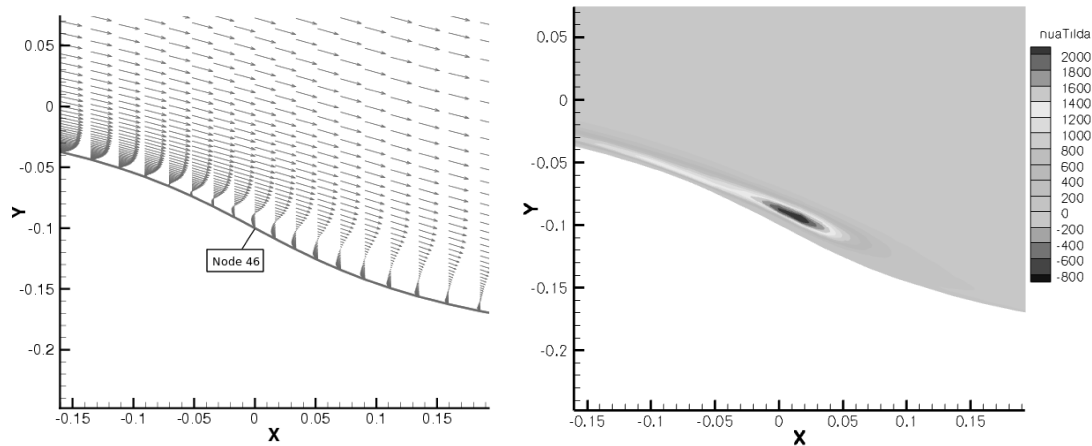
Η πρώτη εφαρμογή αφορά στη ροή στον αγωγό με διαμόρφωση τύπου S του σχήματος 3.1. Η ροή είναι τυρβώδης με αριθμό Reynolds (βασισμένο στο ύψος του αγωγού στην είσοδο) ίσο με $Re = 2 \times 10^4$. Η συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι ευαισθησίας αναζητούνται είναι οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιείται δομημένο πλέγμα που αποτελείται από 200×160 κόμβους. Το πλέγμα είναι κατάλληλα πυκνωμένο στην περιοχή κοντά στα στερεά τοιχώματα έτσι ώστε η αδιάστατη απόσταση των πρώτων κόμβων από τον τοίχο y^+ να λαμβάνει τιμές αρκετά κάτω από τη μονάδα (μέση τιμή y^+ της τάξης του 0.1). Επίσης, να επισημανθεί ότι όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι ανεξάρτητα του πλέγματος. Οι παράμετροι ελέγχου της γεωμετρίας είναι οι κόμβοι του στερεού τοιχώματος οι οποίοι βρίσκονται στην περιοχή της διαμόρφωσης S (90 στην κάτω πλευρά του αγωγού και 90 στην πάνω, $M = 180$). Οι πλεγματικοί κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται στο εμπρόσθιο και στο οπίσθιο ίσιο τμήμα του αγωγού παραμένουν αμετακίνητοι. Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα πεδία της μεταβλητής \tilde{v} του μοντέλου τύρβης καθώς και της συζυγούς της μεταβλητής \tilde{v}_a . Η ροή αποκολλάται στην περιοχή της διαμόρφωσης τύπου S στην κάτω πλευρά του αγωγού. Αυτό όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 όπου παρουσιάζονται τα διανύσματα της ταχύτητας. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται σε λεπτομέρεια το πεδίο της συζυγούς μεταβλητής \tilde{v}_a στην περιοχή της αποκόλλησης όπου και εμφανίζει τις μεγαλύτερες τιμές του.



Σχήμα 3.1: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : πεδίο μεταβλητής μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}$ (πάνω), πεδίο μεταβλητής συζυγούς μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}_a$ (κάτω). Το τελευταίο έχει υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο, επιλύοντας δηλαδή τις συζυγείς εξισώσεις 3.33, 3.34 με τη συζυγή εξίσωση του μοντέλου τύρβης 3.35.

Στο σχήμα 3.3 δίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου. Οι υπολογισμοί γίνονται (α) με την προτεινόμενη μέθοδο χωρίς καμία απλοποιητική παραδοχή και (β) με τη χρησιμοποίηση της παραδοχής ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα παραμένει αμετάβλητη ως προς τις μεταβολές στη γεωμετρία $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$. Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της μεθόδου της ευθείας διαφόρισης, παράρτημα Γ'. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι η προτεινόμενη μέθοδος υπολογίζει παραγώγους ευαισθησίας οι οποίες βρίσκονται σε απόλυτη ταύτιση με αυτές που υπολογίζει η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης. Αντιθέτως, η χρησιμοποίηση της παραδοχής της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας οδηγεί σε παραγώγους ευαισθησίας οι οποίες αποκλίνουν από τις ακριβείς τους τιμές.

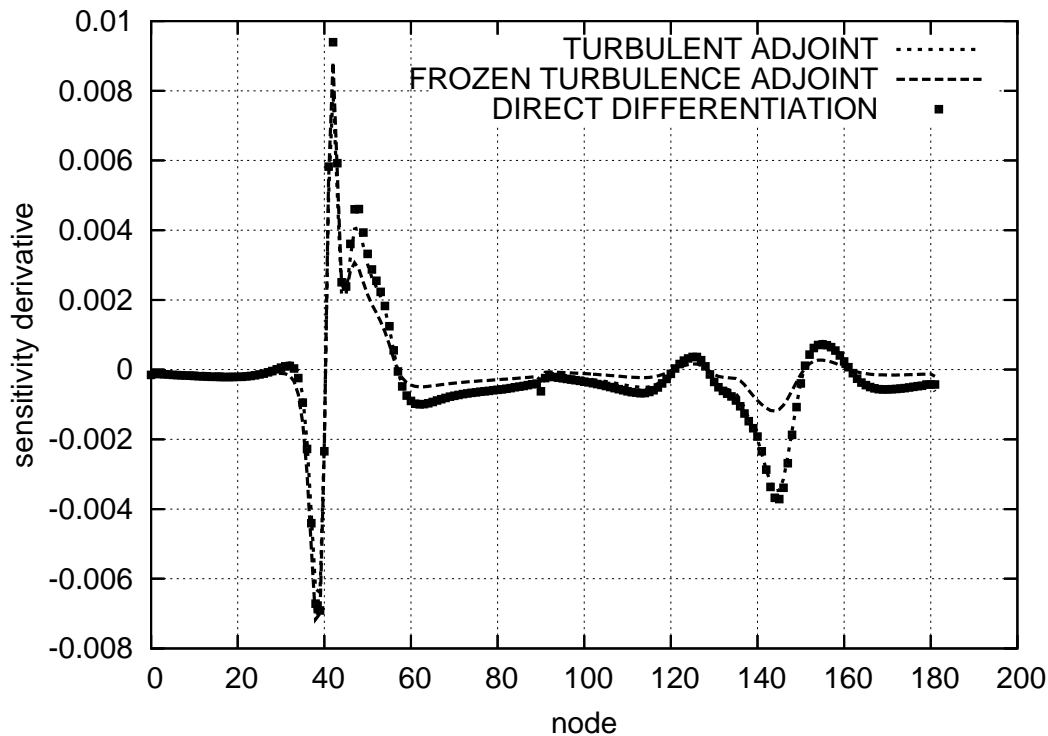
Στη συνέχεια, διερευνάται ο ρόλος των επιπλέον όρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις 3.34, 3.44α', 3.44β'), δηλαδή στις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής και στις οριακές συνθήκες καθώς και των όρων που εξαρτώνται (άμεσα) από τη μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$ στην εξίσωση 3.47 υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Το αποτέλεσμα αυτής της διερεύνησης φαίνεται στο σχήμα 3.4. Συγκεκριμένα, από το σχήμα αυτό διαπιστώνεται ότι όταν οι όροι



Σχήμα 3.2: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : αποκόλληση της ροής στην κάτω πλευρά του αγωγού - διανύσματα της ταχύτητας (αριστερά), λεπτομέρεια του πεδίου $\tilde{\nu}_a$ (σχήμα 3.1, δεξιά) στην περιοχή αυτή (δεξιά).

$SD_{\tilde{\nu}}$ παραλειφθούν από την εξίσωση 3.47, τότε οι υπολογιζόμενες παράγωγοι είναι σχεδόν ταυτόσημες με τις παραγωγούς που υπολογίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο. Συνεπώς, θα μπορούσε κανείς να τους απλοποιήσει χωρίς να αλλοιωθεί η ακρίβεια των υπολογισμών οδηγώντας σε μια περισσότερο απλοποιημένη έκφραση για την εξίσωση 3.47. Η σημασία αυτής της διαπίστωσης γίνεται εύκολα αντιληπτή αρκεί να επισημανθεί ότι ο δεύτερος όρος του $SD_{\tilde{\nu}}$ περιλαμβάνει το χωρικό ολοκλήρωμα των μεταβολών $\frac{\partial \Delta}{\partial b_m}$ που είναι ένας υπολογιστικά απαιτητικός όρος. Για να υπολογιστεί, πρέπει κάθε εσωτερικός πλεγματοκός κόμβος να συσχετισθεί με την απόστασή του από τον τοίχο και να υπολογιστούν οι μεταβολές όλων αυτών των αποστάσεων ως προς καθεμία μεταβλητή ελέγχου της γεωμετρίας, για παράδειγμα με χρήση πεπερασμένων διαφορών. Τέτοιοι υπολογισμοί συνήθως εμπεριέχουν αριθμητικό σφάλμα. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, όταν αμεληθούν οι όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ (εξίσωση 3.34), $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u\right)_\perp$ (εξίσωση 3.44α) και $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u\right)_\parallel$ (εξίσωση 3.44β) τότε οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας είναι πολύ κοντά σε αυτές που προκύπτουν αν θεωρηθεί ότι $\frac{\delta \nu_i}{\delta b_m} = 0$. Συνάγεται, επομένως, ότι οι όροι αυτοί είναι ιδιαίτερος σημαντικοί αν στόχος είναι ο υπολογισμός των παραγώγων με ακρίβεια.

Από την ανάλυση η οποία προηγήθηκε κατέστη εμφανές ότι αν επιθυμεί κανείς να υπολογίσει τις ακριβείς τιμές των παραγώγων ευαισθησίας τότε είναι σημαντικό να επιλυθεί η συζυγής εξίσωση του μοντέλου τύρβης 3.35 και να χρησιμοποιηθούν οι όροι που εμπεριέχουν τη συζυγή μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$ στις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής καθώς και στις οριακές συνθήκες αυτών. Αντιθέτως, οι όροι $SD_{\tilde{\nu}}$ στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας (όπου εμφανίζεται το $\tilde{\nu}_a$) αποδείχτηκε ότι είναι μικρής σημασίας και ενδεχόμενη παράλειψή τους δεν αλλοιώνει τη ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Προκειμένου να διερευνηθούν περαιτέρω τα παραπάνω συμπεράσματα, αφαιρέθηκε κάθε φορά ένας από τους τρεις όρους $R_{i,\tilde{\nu}}^u$, $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u\right)_\perp$ και $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u\right)_\parallel$ με τους άλλους δύο να παραμένουν στις αντίστοιχες εξισώσεις. Τα αποτελέσματα αυτής της σύγκρισης φαίνονται στο σχήμα 3.5. Από αυτά προκύπτει ότι είναι σημαντικό να παραμείνει ο όρος $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ στις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής τη στιγμή, όπου οι αντίστοιχοι όροι στις οριακές συνθήκες μπορούν να παραλειφθούν.



Σχήμα 3.3: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, όπου τα σημεία ελέγχου b_m αντιστοιχούν στις κατά την κάθετη κατεύθυνση μεταβολές της θέσης των πλεγματικών κόμβων στο στερεό όριο του αγωγού. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο αύξων αριθμός των σημείων ελέγχου ($m = 1, \dots, M$). Οι παράγωγοι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο με το συζυγές μοντέλο τύρβης (*turbulent adjoint*), (β) με την απλοποιητική παραδοχή ότι $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$ (*frozen turbulence adjoint*) και (γ) με τη μέθοδο της ευθείας διαφορίσης (*direct differentiation*).

Επίσης, στο πλαίσιο αυτής της εφαρμογής μελετήθηκε η επίδραση του αριθμού Reynolds στις καμπύλες του σχήματος 3.3. Εκτός από τον προηγούμενο αριθμό Reynolds ($Re = 2 \times 10^4$), επανεξετάστηκε η ίδια εφαρμογή για τους αριθμούς $Re = 2 \times 10^5$ και $Re = 1000$. Στα (διαφορετικά, για κάθε υπολογισμό) πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν δόθηκε προσοχή ώστε η αδιάστατη από τον τοίχο απόσταση του πρώτου κόμβου να είναι πάντα μικρότερη της μονάδας ($y^+ < 1$) πυκνώνοντας τα όποτε κρίθηκε απαραίτητο. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης φαίνονται στο σχήμα 3.6. Στην περίπτωση όπου $Re = 2 \times 10^5$ οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με την παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας διαφέρουν σημαντικά (σχήμα 3.6) από αυτές που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο. Μάλιστα, αν χρησιμοποιηθεί η παραδοχή αυτή, από το χάρτη των παραγώγων ευαισθησίας προκύπτει ότι η διαμόρφωση της γεωμετρίας στην περιοχή της διαμόρφωσης τύπου S στο πάνω μέρος του αγωγού είναι λιγότερο σημαντική από ότι στο κάτω μέρος αυτής. Στη σχετική καμπύλη το τοπικό ακρότατο στην περιοχή του κόμβου 140 είναι μικρότερο -καί' απόλυτο τιμή- από αυτό στη θέση 40, που αντιστοιχεί στην κάτω πλευρά του αγωγού. Για αυτόν τον αριθμό Reynolds, αυτό δεν ισχύει όταν χρησιμοποιηθεί η πλήρης (δηλαδή η προτεινόμενη) συζυγής μέθοδος (στην καμπύλη με την ένδειξη *turbulence adjoint* τα δύο ακρότατα εμφανίζουν την ίδια τιμή.) Όταν ο αριθμός Reynolds μειώνεται ($Re = 1000$,

σχήμα 3.6) η χρησιμοποίηση ή μη του συζυγούς μοντέλου τύρβης δεν έχει σημασία. Αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι 'όσο λιγότερο τυρβώδης' τείνει να γίνει η ροή τόσο ο ρόλος του μοντέλου τύρβης (στις εξισώσεις κατάστασης και στις συζυγείς αυτών) μειώνεται. Να επισημανθεί ότι, παρότι ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μικρός, για λόγους σύγκρισης στην προκειμένη περίπτωση, εξακολουθεί να χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης στην επίλυση των εξισώσεων της ροής.

Στο σχήμα 3.7 παρουσιάζονται οι εγκάρσιες κατανομές των μεταβλητών \tilde{v} και \tilde{v}_a λίγο πριν την περιοχή της αποκόλλησης. Στην περίπτωση της συζυγούς μεταβλητής \tilde{v}_a δίνονται τέσσερις καμπύλες όπου η καθεμία αντιστοιχεί σε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις του σχήματος 3.5. Από αυτές τις περιπτώσεις μόνο μια, αυτή όπου αμελείται ο όρος $R_{i,\tilde{v}}^u$ από τις εξισώσεις της συζυγούς μέσης ροής, δεν επιτυγχάνει να υπολογίσει την κατανομή \tilde{v}_a που υπολογίζεται από την προτεινόμενη μέθοδο.

3.8 Δεύτερη εφαρμογή: αγωγός με στένωση διατομής

Η δεύτερη εφαρμογή μελετά έναν αγωγό με στένωση της διατομής αυτού. Ο αριθμός Reynolds (βασισμένος στο ύψος του αγωγού στην είσοδο) είναι ίσος με $Re = 1 \times 10^6$. Το πλέγμα στο οποίο γίνονται οι υπολογισμοί είναι δομημένο και αποτελείται από 260×180 κόμβους. Όπως και προηγουμένως, τα σημεία ελέγχου της γεωμετρίας b_m ($M = 100$) είναι οι κάθετες ως προς το τοίχωμα του αγωγού μετατοπίσεις των κόμβων του στερεού ορίου ενώ, και εδώ, οι πλεγματικοί κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται στο εμπρόσθιο και στο οπίσθιο ίσιο τμήμα του αγωγού είναι σταθεροί στις θέσεις τους. Η χρησιμοποιούμενη συνάρτηση F είναι αυτή των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του αγωγού η οποία δίνεται από τις εξισώσεις 2.17 και 2.18. Στο σχήμα 3.13 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο, τη συζυγή μέθοδο θεωρώντας 'παγωμένη' τυρβώδη συνεκτικότητα και τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης. Οι παράγωγοι που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο και με την ευθεία διαφόριση ταυτίζονται. Συνάγεται, συνεπώς, ότι η προτεινόμενη μέθοδος επιτυγχάνει να υπολογίσει με υψηλή ακρίβεια τις παραγώγους ευαισθησίας, ενώ η συνήθης παραδοχή $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0$ οδηγεί σε σημαντική υποεκτίμηση των παραγώνων ευαισθησίας. Επομένως, τα συμπεράσματα είναι αντίστοιχα με αυτά που εξήχθησαν και στην εφαρμογή 3.7 (σχήμα 3.3).

Στην εφαρμογή αυτή διερευνάται ξανά η σημασία των όρων στους οποίους εμφανίζεται η συζυγής μεταβλητή \tilde{v}_a και εισάγονται στις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής, εξισώσεις 3.34, 3.44α', 3.44β' και στην τελική έκφραση των παραγώνων ευαισθησίας 3.47. Τα συμπεράσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.9 και είναι αντίστοιχα με αυτά που εξήχθησαν στην προηγούμενη εφαρμογή. Πιο συγκεκριμένα, η ύπαρξη ή μη του όρου $SD_{\tilde{v}}$ στην εξίσωση 3.9 επηρεάζει ελάχιστα τις υπολογιζόμενες τιμές των παραγώνων ευαισθησίας (σχήμα 3.9). Το αντίθετο ισχύει για τους όρους που προστίθενται στις συζυγείς εξισώσεις οι οποίοι όταν παραλειφθούν, οδηγούν σε διαφορετικές τιμές, παραπλήσιες αυτών που υπολογίζονται με τη θεώρηση της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας (σχήμα 3.9).

Στο σχήμα 3.10 παρουσιάζονται κατανομές κατά την κάθετη στο τοίχωμα κατεύθυνση των μεταβλητών \tilde{v} και \tilde{v}_a στη θέση που η στένωση εμφανίζει το μέγιστό της. Όπως και η κατανομή της μεταβλητής \tilde{v} , έτσι και αυτή της συζυγούς της \tilde{v}_a εμφανίζει σημαντικά υψηλές τιμές στην περιοχή πολύ κοντά στο στερεό όριο. Από το σχήμα αυτό φαίνεται και το ότι η απαίτηση για πλέγματα με μικρή απόσταση του πρώτου κόμβου από τον τοίχο είναι εξίσου σημαντική και για το συζυγές πρόβλημα όσο και για το πρόβλημα επίλυσης της ροής.

3.9 Τρίτη εφαρμογή: αγωγός με στροφή 90°

Η εφαρμογή που ακολουθεί αποσκοπεί στην επιβεβαίωση των συμπερασμάτων των προηγούμενων εφαρμογών και συγκεκριμένα των συμπερασμάτων που αφορούν στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας από την προτεινόμενη μέθοδο και τη σημασία που έχει σε αυτό ο αριθμός Reynolds της ροής. Για αυτόν το σκοπό, μελετήθηκαν τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού Reynolds για $Re = 1.2 \times 10^5$, 3.5×10^4 και 5×10^3 . Στην εφαρμογή αυτή υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ενός αγωγού με στροφή της ροής κατά 90° (γεωμετρία παρόμοια με αυτήν της εφαρμογής 2.6.2) και με συνάρτηση κόστους της απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού. Το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι δομημένο και αποτελείται από 201×161 κόμβους. Κατά την κατασκευή του έχει ληφθεί υπόψη, όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές, η αδιάστατη απόσταση του πρώτου κόμβου από τον τοίχο να είναι αρκούντως μικρότερη της μονάδας. Και εδώ, όπως και προηγουμένως, οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται ως προς τις κάθετες στην επιφάνεια μετατοπίσεις των πλεγματικών κόμβων του στερεού ορίου. Η πιστοποίηση των παραγώγων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ή της ευθείας διαφόρισης γίνεται ανά 10 σημεία ελέγχου της επιφάνειας του αγωγού (που καθένα αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του στερεού ορίου), λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους των εν λόγω μεθόδων.

Στο σχήμα 3.12 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για $Re = 1.4 \times 10^6$ και συγκρίνονται με τις τιμές τους που υπολογίζει η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Η ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων είναι ιδιαίτερα καλή. Συγκρίνοντας την προτεινόμενη μέθοδο με τη συζυγή μέθοδο στην οποία χρησιμοποιείται η απλουστευτική παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας, σχήμα 3.14 (για $Re = 1 \times 10^6$), προκύπτει ότι η προτεινόμενη μέθοδος υπολογίζει τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας με μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι η εκδοχή με 'παγωμένη' τυρβώδη συνεκτικότητα. Συγκεκριμένα, με την προτεινόμενη μέθοδο οι παράγωγοι συμπίπτουν με αυτές που υπολογίζει η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης, που χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς για τις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας. Αντίθετα, αυτό δεν συμβαίνει όταν θεωρηθεί ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι 'παγωμένη'. Οι διαφορές μεταξύ των δύο συζυγών μεθόδων είναι σημαντικές. Μάλιστα, για τον αριθμό $Re = 3.5 \times 10^4$, σχήμα 3.15, φαίνεται ότι η χρησιμοποίηση της παραδοχής αυτής οδηγεί σε υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας με λάθος πρόσημο δυσχεραίνοντας οποιονδήποτε αλγόριθμο βελτιστοποίησης που ενδεχόμενα χρησιμοποιηθεί (αν η μέθοδος ενταχθεί στο σχήμα μιας μεθόδου βελτιστοποίησης) ή τους μηχανικούς οι οποίοι θα αξιοποιούσαν το χάρτη ευαισθησίας (αν ο σχεδιασμός του αγωγού δεν γίνεται 'αυτοματοποιημένα'). Στο ίδιο σχήμα 3.15 (για $Re = 5 \times 10^3$) επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα της εφαρμογής 3.7 (σχήμα 3.6) όπου φαίνεται ότι όσο μειώνεται ο αριθμός Reynolds της ροής τόσο μειώνονται οι διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων.

3.10 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτάθηκε μια συνεχής συζυγής μέθοδος η οποία λαμβάνει υπόψη της το πλήρες σύστημα των εξισώσεων κατάστασης που περιλαμβάνει τις εξισώσεις της μέσης ροής και του μοντέλου της τύρβης. Η μέθοδος αφορά μεν ασυμπίεστες ροές αλλά μπορεί, χρησιμοποιώντας τα ίδια μαθηματικά εργαλεία, εύκολα να υλοποιηθεί και για ροές συμπιεστού ρευστού. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, [60]. Οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας είναι ακριβείς, συγκρινόμενες με τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών και της ευθείας διαφόρισης. Στην διατριβή χρησιμοποιήθηκε

το μοντέλο μίας εξίσωσης Spalart–Allmaras, αντίστοιχα, όμως, θα μπορούσε η ίδια θεωρία να εφαρμοστεί και για οποιοδήποτε άλλο μοντέλο τύρβης μίας ή δύο μ.δ.ε.. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, θα προέκυπταν οι συζυγείς εξισώσεις ως προς το εκάστοτε μοντέλο τύρβης και πρόσθετοι όροι στις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής, στις οριακές συνθήκες και στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας. Επίσης, η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου έγινε ανεξάρτητα από τη χρησιμοποιούμενη συνάρτηση κόστους, καταλήγοντας συνεπώς σε γενικές εύχρηστες εξισώσεις.

Το κέρδος από την προσθήκη των συζυγών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης είναι σημαντικό, ιδίως όταν η συνάρτηση κόστους ‘εξαρτάται ισχυρά από την τύρβη’ (όπως οι απώλειες ολικής πίεσης). Με την προτεινόμενη μέθοδο, οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας είναι ακριβείς σε αντίθεση με τις παραγώγους ευαισθησίας που υπολογίζονται με την παραδοχή ότι η τυρβώδης συνεκτικότητα είναι ‘παγωμένη’ και άρα ανεπηρέαστη από τις μεταβολές των παραμέτρων σχεδιασμού. Από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν δείχθηκε ότι οι όροι με τη μεγαλύτερη βαρύτητα είναι αυτοί που εμφανίζονται στις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις της μέσης ροής και συναρτώνται της συζυγούς μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$. Είναι αυτοί οι όροι οι οποίοι διαφοροποιούν σημαντικά το πεδίο των συζυγών ως προς τις μεταβλητές της μέσης ροής μεταβλητών u_i και q , οδηγώντας σε διαφορετικές τιμές για τις παραγώγους ευαισθησίας. Εκτός από αυτούς τους όρους, η ύπαρξη συζυγούς μοντέλου τύρβης οδηγεί και στην εμφάνιση πρόσθετων όρων στις συζυγείς οριακές συνθήκες και, επιπλέον, ενός όρου στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος. Από την ανάλυση η οποία προηγήθηκε, οι όροι αυτοί μπορούν να παραλειφθούν χωρίς να βλάπτεται ουσιαστικά η ακρίβεια της μεθόδου. Παραλείποντας τους όρους αυτούς απλοποιούνται οι τελικές εκφράσεις για τις συζυγείς οριακές συνθήκες και τις παραγώγους ευαισθησίας καθιστώντας αυτές πιο εύκολες στον προγραμματισμό.

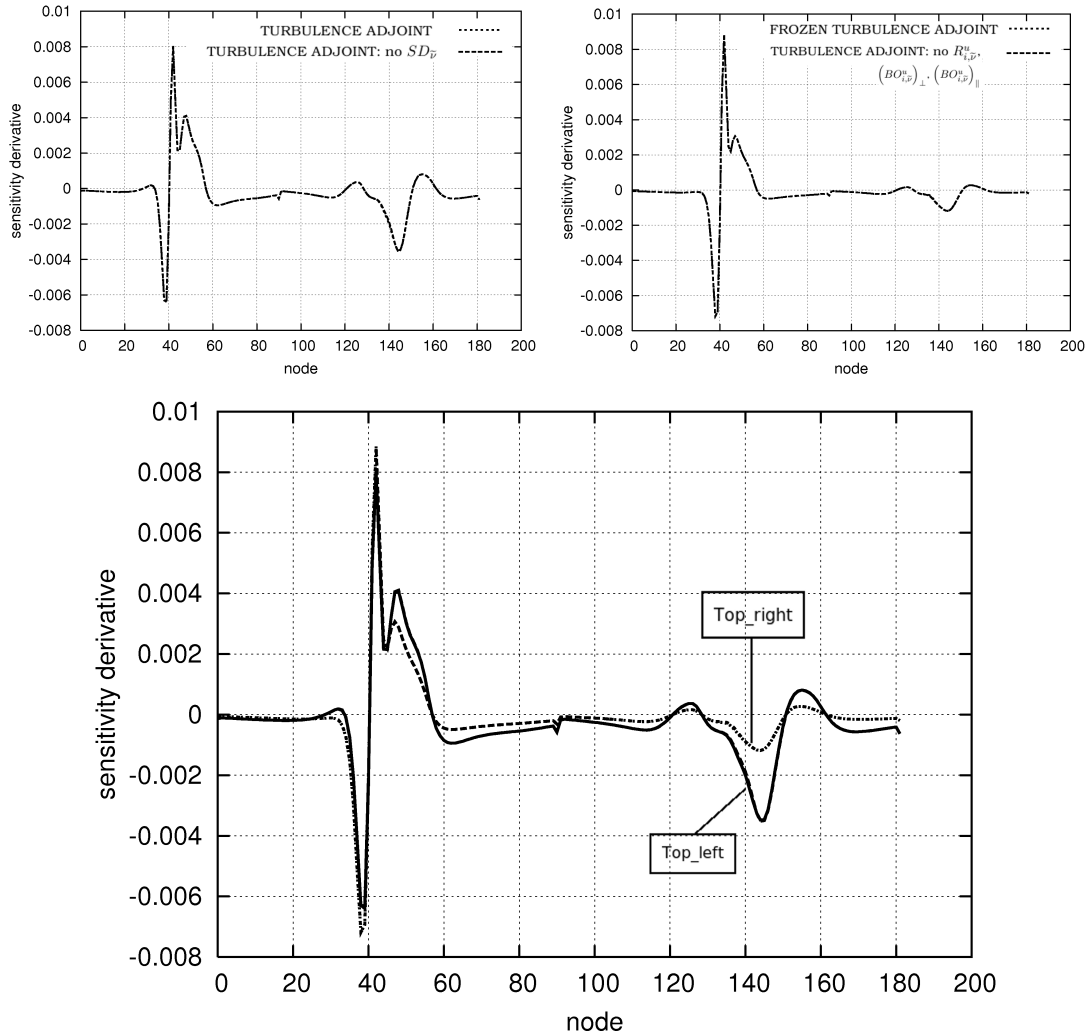
Επίσης, η απουσία του όρου $SD_{\tilde{\nu}}$ από την τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας οδηγεί σε εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων δεδομένου ότι δεν απαιτείται ο υπολογισμός της ρυθμών μεταβολής των αποστάσεων από το στερεό όριο του κάθε κόμβου του πλέγματος, $\frac{\delta\Delta}{\delta b_m}$. Ο όρος αυτός μπορεί να υπολογιστεί με χρήση πεπερασμένων διαφορών. Η διαδικασία αυτή προϋποθέτει, στη γενική περίπτωση, μεταβολή του υπολογιστικού πλέγματος είτε με επαναπλεγματοποίηση είτε με χρήση τεχνικών ελατηρίων [141, 142, 143] κ.λ.π.. Σε κάθε περίπτωση το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται. Το γεγονός ότι ο εν λόγω όρος μπορεί να αμεληθεί χωρίς σημαντική επίδραση στα αποτελέσματα βοηθά στο να μη ‘χάσει’ η μέθοδος ένα σημαντικό και βασικό της πλεονέκτημα το οποίο δεν είναι άλλο από την ανεξαρτησία των υπολογιζόμενων παραγώγων από τις μεταβολές των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος. Μάλιστα, αν χρησιμοποιείται η τακτική της επαναγένεσης του υπολογιστικού πλέγματος, για κάθε στοιχειωδώς τροποποιημένη γεωμετρία, στην περίπτωση των μη-δομημένων πλεγμάτων, η διαδικασία αυτή εμπεριέχει τον κίνδυνο να προστεθούν ή να αφαιρεθούν νέοι κόμβοι στο εσωτερικό του χωρίου δημιουργώντας έτσι, αδυναμία αντιστοίχισης μεταξύ των δύο μεταβολών για κάθε κόμβο του χωρίου και άρα αδυναμία στον υπολογισμό της διαφοράς

$$\frac{\delta\Delta}{\delta b_m} = \frac{\Delta(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m + \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M) - \Delta(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m - \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M)}{2\epsilon} \quad (3.49)$$

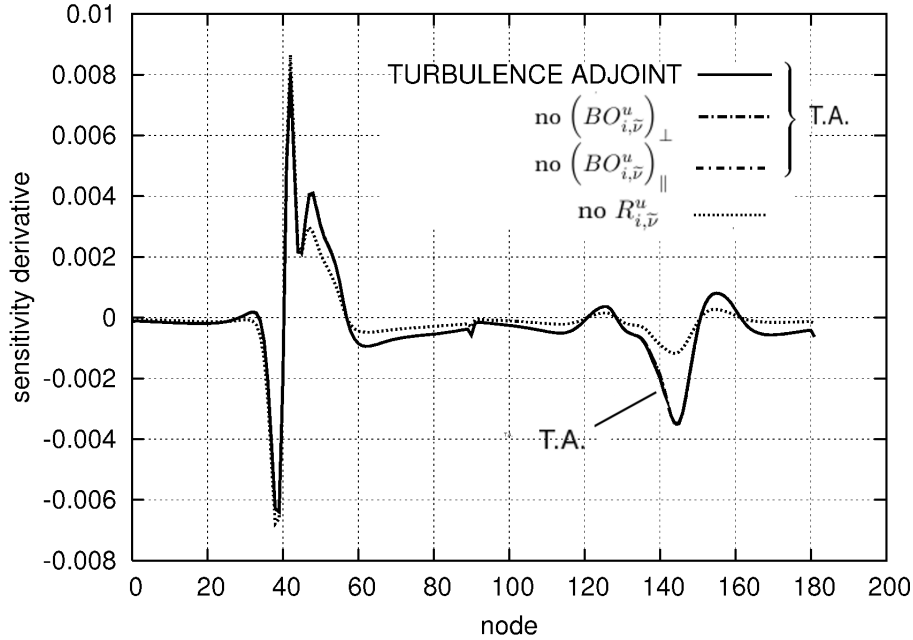
Η πιο απλή τακτική είναι να επιτραπεί η μετακίνηση μονάχα στο οριακό πλέγμα (και οι εσωτερικοί κόμβοι του πλέγματος να παραμείνουν αμετάβλητοι) αλλά αυτή η τακτική σε συνδυασμό με τη χρησιμοποίηση πλεγμάτων χαμηλών αριθμών Reynolds, δηλαδή πλεγμάτων με πολύ μικρή απόσταση του πρώτου κόμβου από το στερεό όριο, ενέχει κινδύνους δημιουργίας πλεγμάτων που οι κόμβοι του τοιχώματος υπερκαλύπτουν τους

πρώτους κόμβους από το τοίχωμα. Επίσης η διαδικασία υπολογισμού μπορεί να γίνει ημιαναλυτικά διαφορίζοντας το τμήμα του κώδικα το οποίο υπολογίζει την ελάχιστη κάθε φορά απόσταση από το στερεό όριο. Και πάλι, όμως, η διαδικασία αυτή μπορεί να μην εμπλέκει τη χρήση πεπερασμένων διαφορών, απαιτεί όμως γνώση της μεταβολής του πλέγματος και, επομένως, χρήση μίας από τις παραπάνω περιγραφείσες τακτικές (επαναπλεγματοποίηση, χρήση μεθόδου ελατηρίων, μετακίνηση μόνο των οριακών κόμβων) με τα μειονεκτήματα που αυτές παρουσιάζουν.

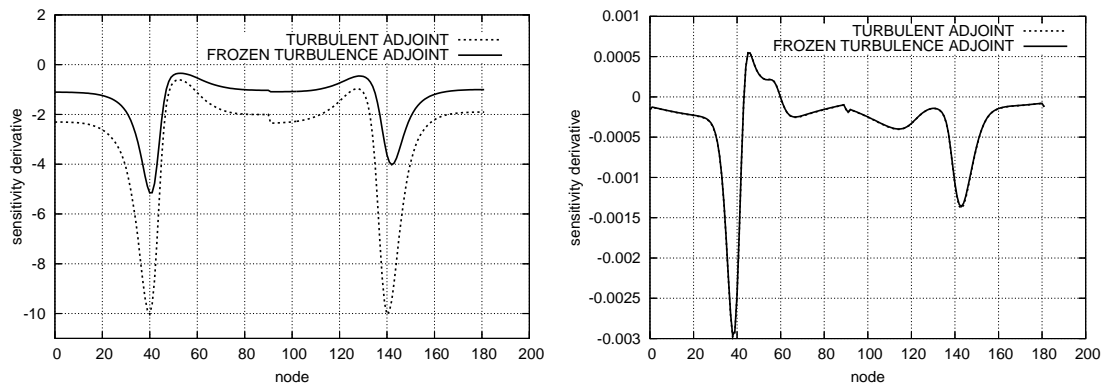
Η πολυπλοκότητα του όρου $SD_{\bar{\nu}}$ και, κυρίως, όλων των διαδικασιών που περιγράφηκαν προηγούμενα για τον υπολογισμό του, η αύξηση του υπολογιστικού κόστους (ιδίως όταν χρησιμοποιείται η τεχνική της επαναπλεγματοποίησης) και η εξάρτηση της λύσης από αυτές τις τεχνικές και τις αριθμητικές ανακρίβειες που αυτές εισάγουν αποτελούν μειονεκτήματα. Αυτά, ευτυχώς, παρακάμπτονται με τη σημαντική παρατήρηση ότι ο όρος αυτός καθορίζει ελάχιστα την τιμή των παραγώγων ευαισθησίας, σε βαθμό που η προτεινόμενη μέθοδος να εξακολουθεί να χαρακτηρίζεται ακριβής.



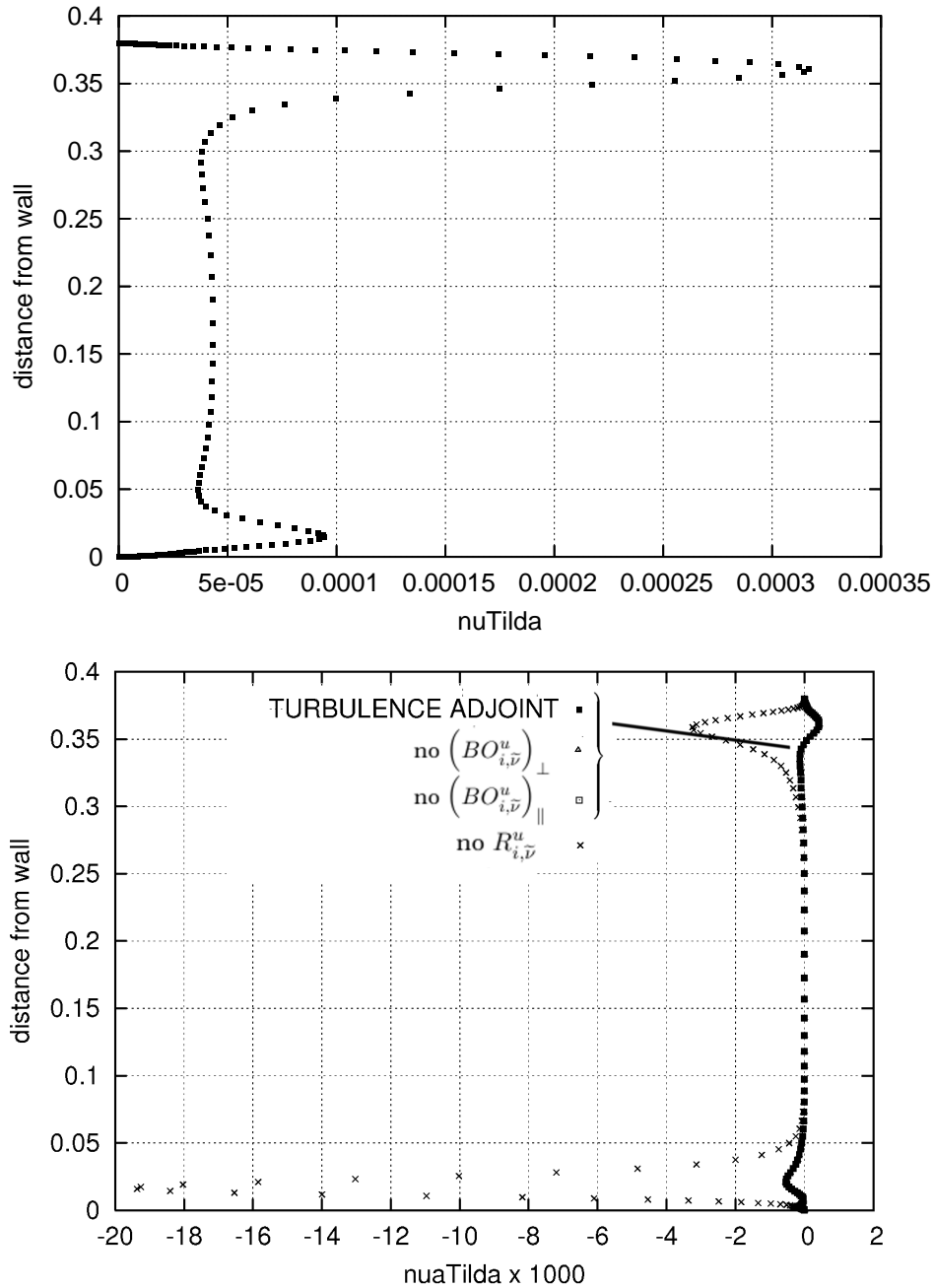
Σχήμα 3.4: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Κάτω: σύγκριση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιώντας τέσσερις μεθόδους. Οι τέσσερις καμπύλες του σχήματος συμπίπτουν ανά δύο, οδηγώντας έτσι στα δύο ζεύγη καμπυλών με σχεδόν ταυτόσημα σημεία ανά ζεύγος που απεικονίζονται στο άνω τμήμα του σχήματος. Πάνω-αριστερά: παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες με την προτεινόμενη μέθοδο χωρίς καμία απλοποιητική παραδοχή. Οι παράγωγοι είναι σχεδόν ίδιες με αυτές που προκύπτουν αν παραλειφθούν οι όροι $SD_{\tilde{v}}$ της εξίσωσης 3.47. Πάνω-δεξιά: παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες παραλείποντας τον όρο $R_{i,\tilde{v}}^u$ της εξίσωσης 3.34 και τους όρους $(BO_{i,\tilde{v}}^u)_{\perp}$, $(BO_{i,\tilde{v}}^u)_{\parallel}$ στις εξισώσεις 3.44α' και 3.44β'. Στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά με αυτά που υπολογίζονται αν χρησιμοποιηθεί η παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας (*frozen turbulence adjoint*).



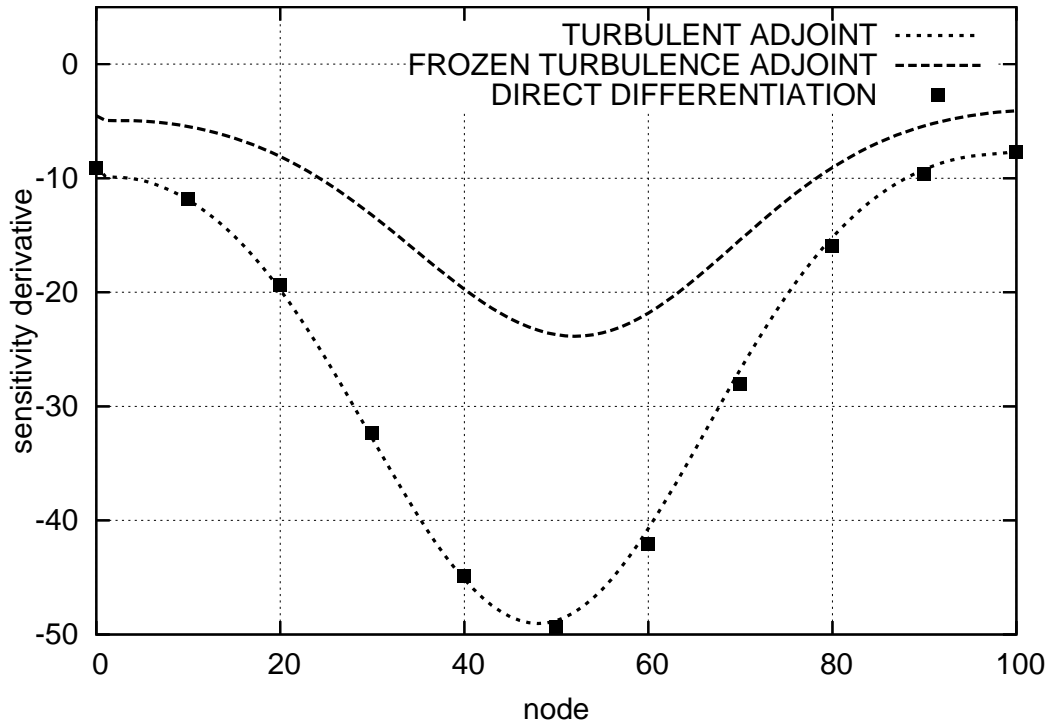
Σχήμα 3.5: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ υπολογισμένες με την προτεινόμενη μέθοδο (*turbulent adjoint*) συγκρίνονται με αυτές που υπολογίζονται αν αμεληθούν κάθε φορά ξεχωριστά οι όροι $R_{i,\bar{v}}^u$ (εξίσωση 3.34), $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\perp$ (εξίσωση 3.44α), $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\parallel$ (εξίσωση 3.44β). Η σημασία των όρων $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\perp$ και $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\parallel$ των συζυγών οριακών συνθηκών στις τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας είναι μικρή σε αντίθεση με τον όρο $R_{i,\bar{v}}^u$. Οι αντίστοιχες καμπύλες παραγώγων συμπίπτουν με αυτήν που προκύπτει από την πλήρη έκφραση χωρίς καμία παραδοχή, οδηγώντας στην ομάδα ουσιαστικά ίδιων καμπυλών που στο γράφημα συμβολίζεται με $T.A.$



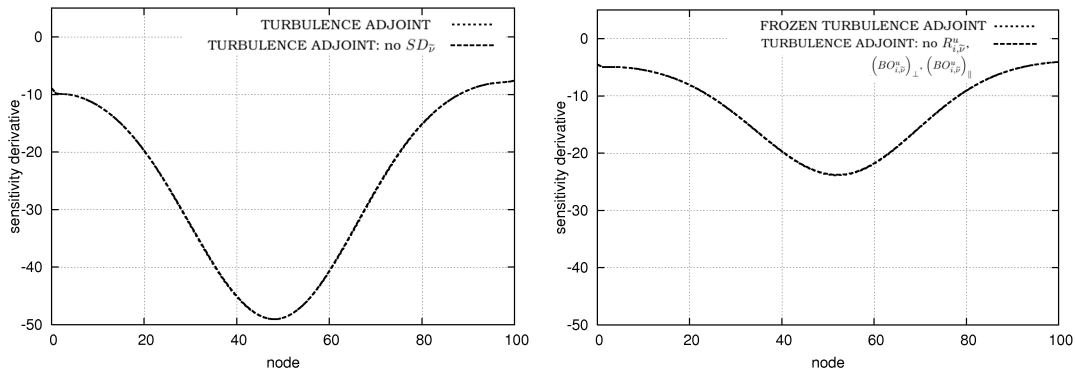
Σχήμα 3.6: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ για ροές με $Re = 2 \times 10^5$ (αριστερά) και $Re = 1000$ (δεξιά).



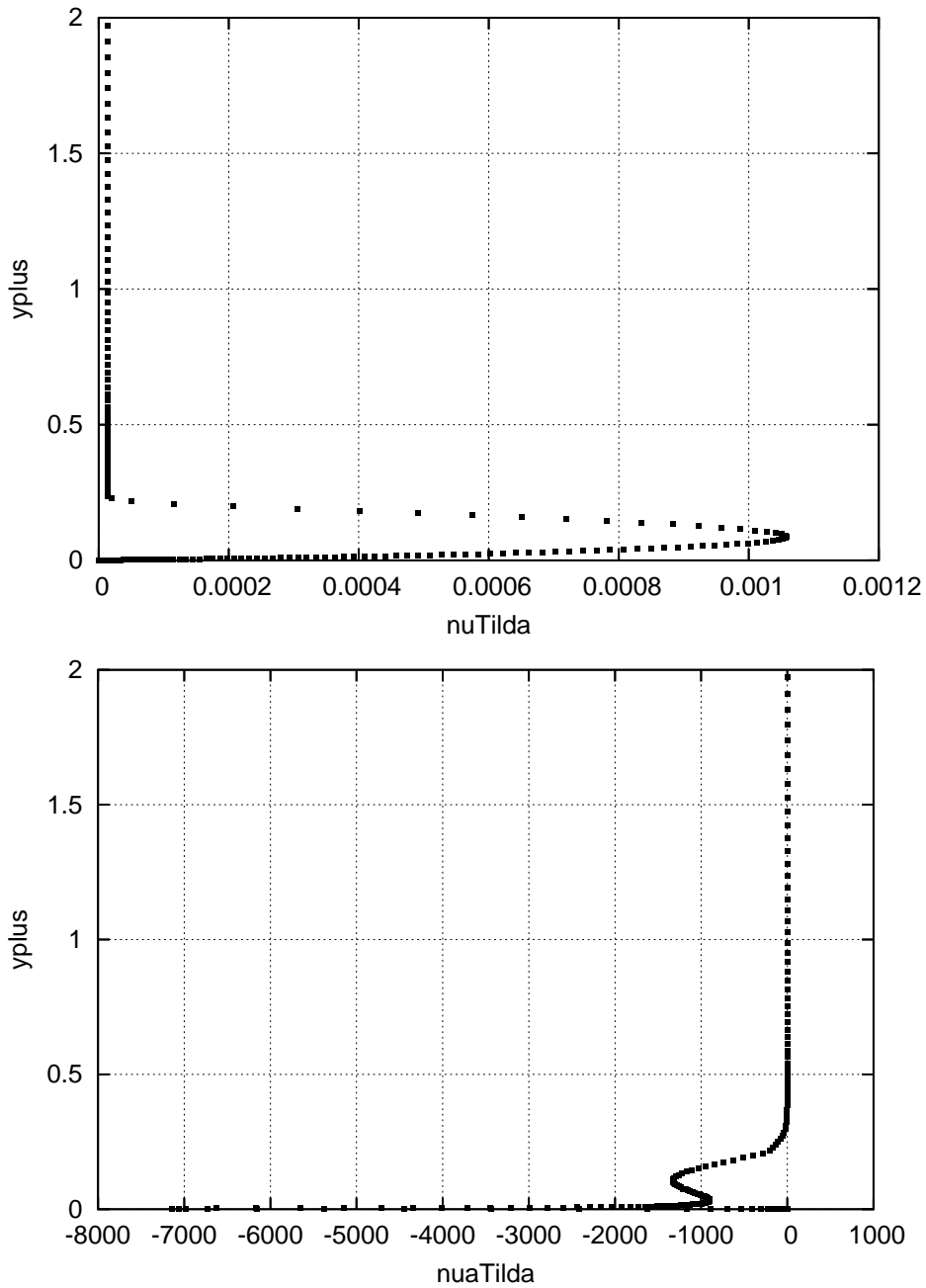
Σχήμα 3.7: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση S : (πάνω) κατανομή της μεταβλητής $\tilde{\nu}$ και (κάτω) της συζυγούς μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$ κάθετα στον τοίχο. Στον κατακόρυφο άξονα αποτυπώνεται η απόσταση από τον κάτω τοίχο του αγωγού. Οι κατανομές $\tilde{\nu}_a$ αντιστοιχούν σε υπολογισμούς (α) με την προτεινόμενη μέθοδο (*turbulent adjoint*) χωρίς καμία παραδοχή, (β) αμελώντας τον όρο $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ (εξίσωση 3.34), (γ) αμελώντας τον όρο $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\perp$ (εξίσωση 3.44α') και (δ) αμελώντας τον όρο $(BO_{i,\tilde{\nu}}^u)_\parallel$ (εξίσωση 3.44β'). Οι κατανομές (α), (β) και (γ) ουσιαστικά ταυτίζονται, εμφανίζοντας πολύ μικρές διαφορές και αυτό 'συμβαδίζει' με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο σχήμα 3.5.



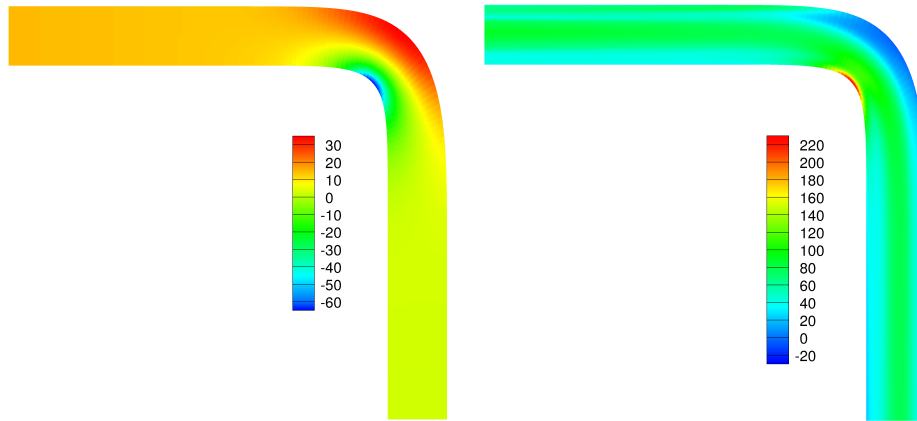
Σχήμα 3.8: Τυρβώδης ροή σε αγωγός με στένωση: παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο αύξων αριθμός των σημείων ελέγχου ($m = 1, \dots, M$). Οι παράγωγοι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο με συζυγές μοντέλο τύρβης (*turbulent adjoint*), (β) την απλοποιητική παραδοχή ότι $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$ (*frozen turbulence adjoint*) και (γ) τη μέθοδο της ευθείας διαφοράρισης. Ο υπολογισμός με τη μέθοδο της ευθείας διαφοράρισης έχει γίνει - λόγω υπολογιστικού κόστους - ανά 10 σημεία ελέγχου κατά το μήκος του αγωγού στην περιοχή της στένωσης.



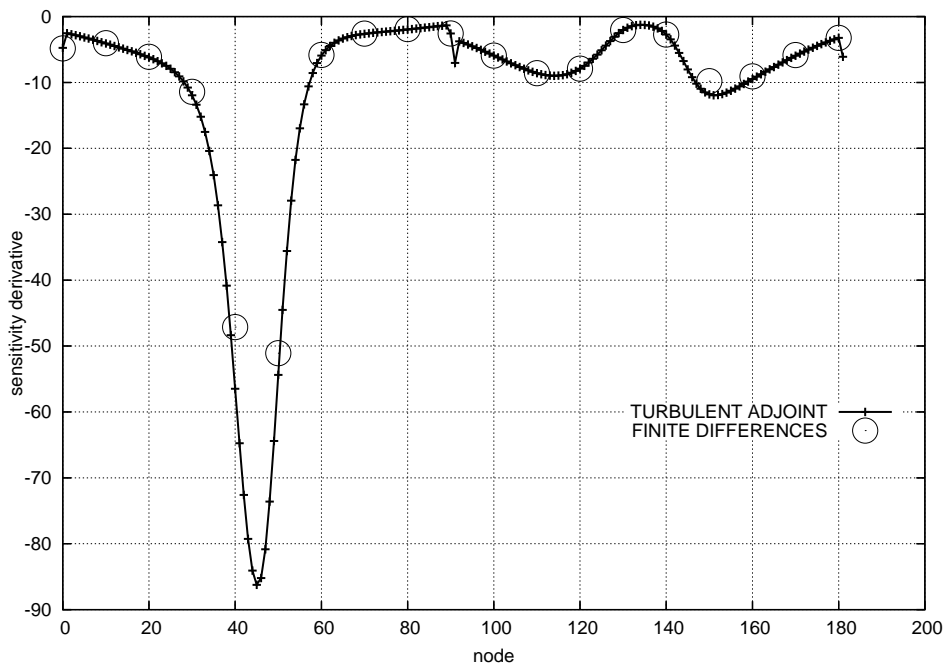
Σχήμα 3.9: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στένωση: σύγκριση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιώντας τέσσερις μεθόδους (όπως και στο σχήμα 3.4). Οι τέσσερις καμπύλες του σχήματος συμπίπτουν ανά δύο· τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου είναι σχεδόν ταυτόσημα με αυτά αυτά που προκύπτουν αν παραλειφθούν οι όροι $SD_{\bar{v}}$ της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας (αριστερό σχήμα) ενώ, αν παραλειφθούν οι όροι $R_{i,\bar{v}}^u$, $(BO_{i,\bar{v}}^u)_{\perp}$ και $(BO_{i,\bar{v}}^u)_{\parallel}$ των συζυγών εξισώσεων, η μέθοδος υπολογίζει παραγώγους ταυτόσημες με αυτές της μεθόδου της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας (δεξί σχήμα). Η σύγκριση των δύο σχημάτων είναι άμεση, δεδομένου ότι τα όρια των αξόνων στα δύο σχήματα είναι τα ίδια.



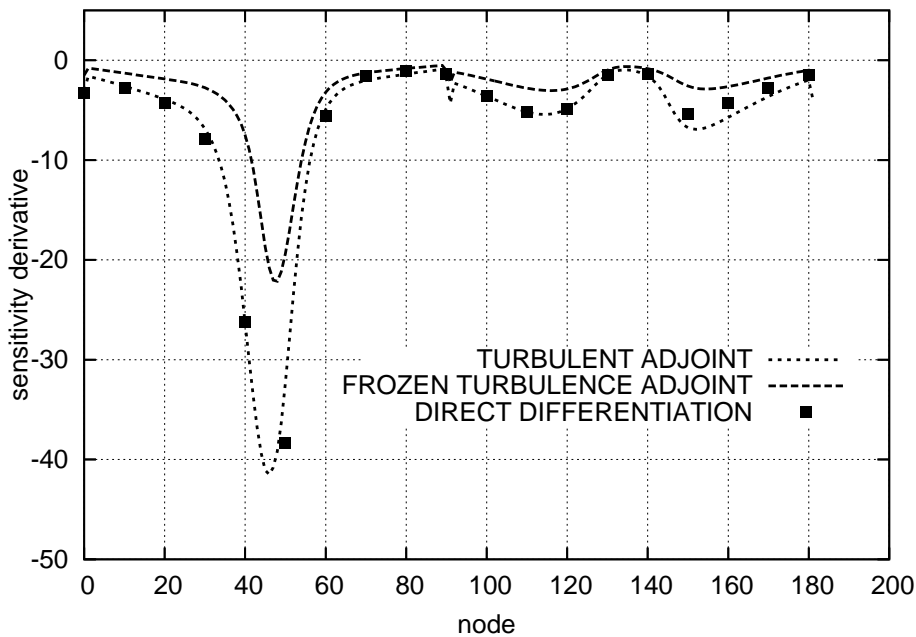
Σχήμα 3.10: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στένωση: κατανομές των μεταβλητών $\tilde{\nu}$ (πάνω) και $\tilde{\nu}_a$ (κάτω) κάθετα στον τοίχο στο σημείο που εμφανίζεται η μέγιστη στένωση της διατομής. Κατακόρυφος άξονας: αδιάστατη απόσταση από τον τοίχο y^+ .



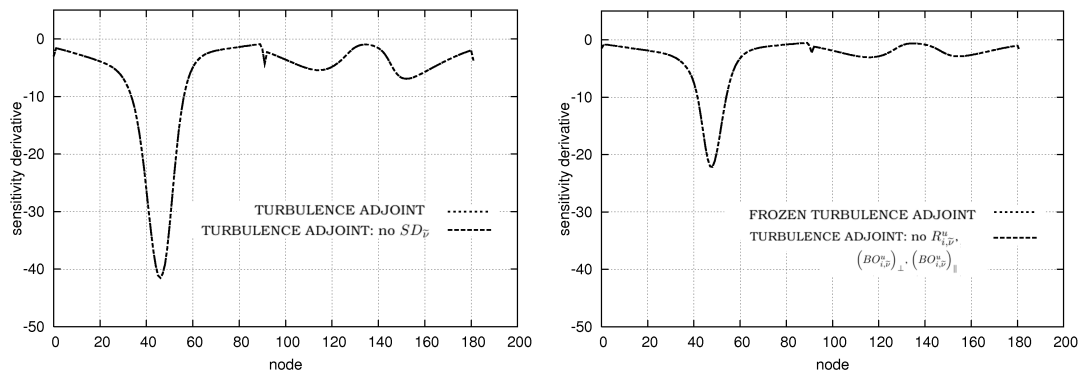
Σχήμα 3.11: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στροφή 90° ($Re = 1.4 \times 10^6$): πεδία πίεσης (αριστερά) και συζυγούς πίεσης (δεξιά).



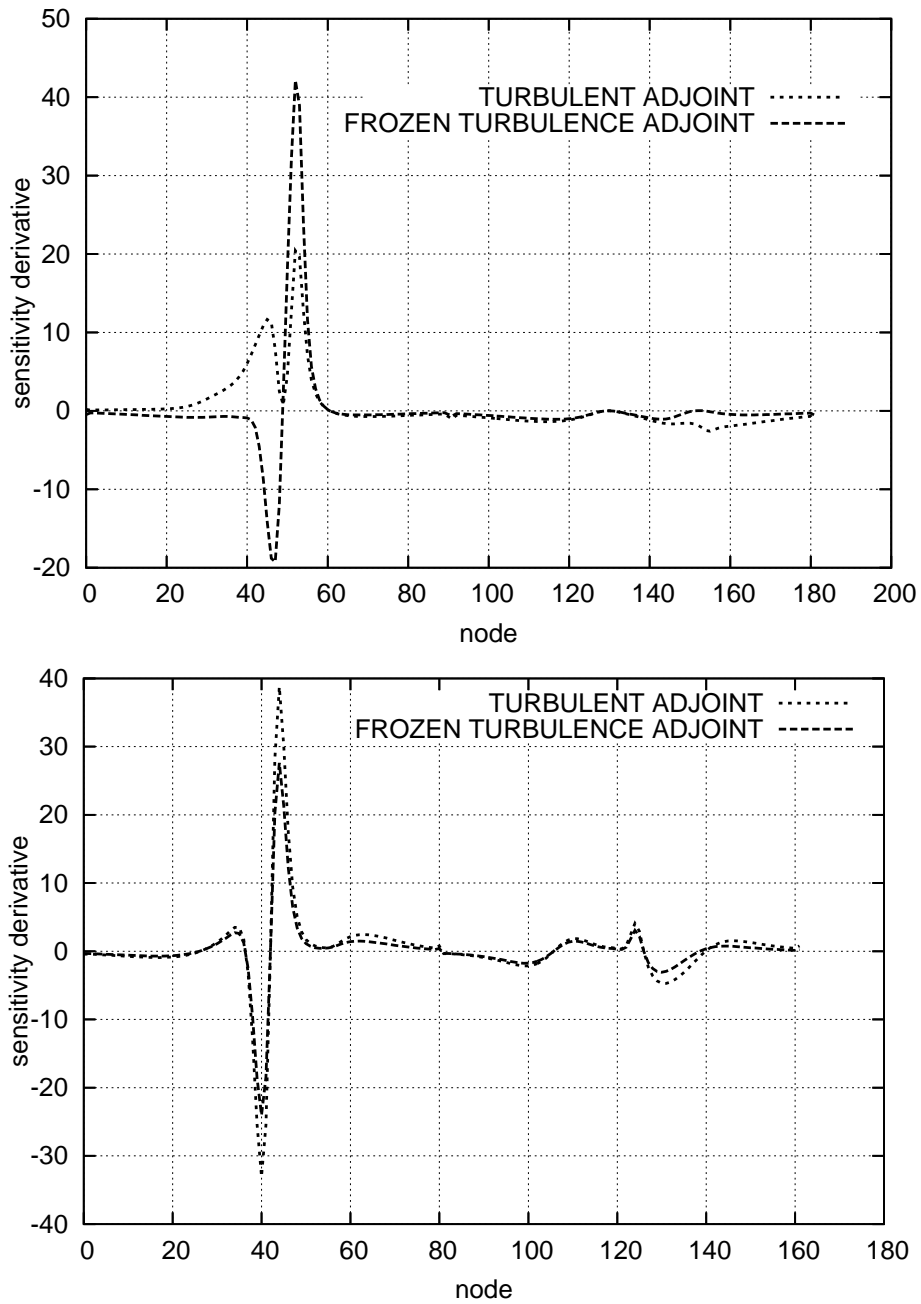
Σχήμα 3.12: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στροφή 90° : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ ($Re = 1.4 \times 10^6$) υπολογισμένες με (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο (*turbulent adjoint*) και (β) τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Ο υπολογισμός με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών γίνεται ανά 10 σημεία ελέγχου (κόμβοι του στερεού ορίου) λόγω υψηλού υπολογιστικού κόστους.



Σχήμα 3.13: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στροφή 90° : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ ($Re = 1.4 \times 10^6$) υπολογισμένες με (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο (*turbulent adjoint*), (β) την απλοποιητική παραδοχή ότι $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$ (*frozen turbulence adjoint*) και (γ) τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης. Ο υπολογισμός με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης γίνεται ανά δέκα σημεία ελέγχου λόγω υψηλού υπολογιστικού κόστους.



Σχήμα 3.14: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στροφή 90° : ($Re = 1 \times 10^6$) σύγκριση των υπολογιζόμενων παραγώνων ευαισθησίας χρησιμοποιώντας τέσσερις μεθόδους. Οι τέσσερις καμπύλες του σχήματος συμπίπτουν ανά δύο, οδηγώντας στα δύο ζεύγη καμπυλών με σχεδόν ταυτόσημα σημεία που απεικονίζονται χωριστά στο αριστερό και στο δεξί τμήμα του σχήματος. Οι άξονες έχουν τα ίδια όρια και, συνεπώς, η σύγκριση των καμπυλών είναι άμεση, παρότι δεν βρίσκονται στο ίδιο γράφημα. Αριστερά: παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες με την προτεινόμενη μέθοδο χωρίς καμία απλοποιητική παραδοχή. Οι παράγωγοι είναι σχεδόν ταυτόσημες με αυτές που προκύπτουν αν παραλειφθούν οι όροι $SD_{\bar{v}}$ της εξίσωσης 3.47. Δεξιά: παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες παραλείποντας τον όρο $R_{i,\bar{v}}^u$ (εξίσωση 3.34) και τους όρους $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\perp$ (εξίσωση 3.44α), $(BO_{i,\bar{v}}^u)_\parallel$ (εξίσωση 3.44β). Όπως προέκυψε και από το σχήμα 3.4, οι παραδοχές αυτές οδηγούν σε ταυτόσημα αποτελέσματα με την παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας.



Σχήμα 3.15: Τυρβώδης ροή σε αγωγό με στροφή 90°: παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ για ροές με $Re = 3.5 \times 10^4$ (πάνω) και $Re = 5 \times 10^3$ (κάτω).

Κεφάλαιο 4

Συζυγείς εξισώσεις με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου

Στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής έχει παρουσιαστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές και τυρβώδεις ροές. Πιο συγκεκριμένα, σε ότι αφορά στις τυρβώδεις ροές στο κεφάλαιο 3 προτάθηκε η χρησιμοποίηση επιπλέον συζυγών εξισώσεων τόσων σε αριθμό όσες είναι οι εξισώσεις του χρησιμοποιούμενου μοντέλου τύρβης. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται την εισαγωγή ισαριθμών συζυγών μεταβλητών για το συζυγές μοντέλο τύρβης. Οι πρόσθετες αυτές εξισώσεις συνθέτουν το λεγόμενο συζυγές μοντέλο τύρβης (*adjoint turbulence model*). Στο κεφάλαιο 3, παρουσιάστηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras, [107], στη γνωστή ως ‘χαμηλών αριθμών Reynolds’ παραλλαγή του. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί και θα θεμελιωθεί μαθηματικά η συνεχής συζυγής μέθοδος έτσι ώστε να καλύπτει τη χρήση μοντέλων τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds, που υλοποιούνται με χρήση συναρτήσεων τοίχου, [144, 145, 146, 147]. Οι εξισώσεις κατάστασης αποτελούνται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes, 3.1 και 3.2, και τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης δύο εξισώσεων $k-\epsilon$ για υψηλούς αριθμούς Reynolds (δηλαδή με συναρτήσεις τοίχου). Με τη χρήση των συναρτήσεων τοίχου, παρακάμπτεται η αριθμητική ολοκλήρωση των ισχυουσών εξισώσεων μέχρι και τους κόμβους των στερεών τοιχωμάτων, στη γειτονιά των οποίων εισάγεται εμπειρική πληροφορία. Αυτό έχει ως συνέπεια οι εξισώσεις να επιλύονται σε σημαντικά αραιότερα πλέγματα από αυτά που θα απαιτούνταν αν χρησιμοποιούνταν μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, δηλαδή αν επιλύονταν οι εξισώσεις κατάστασης σε όλο το χωρίο συμπεριλαμβανομένης και της περιοχής κοντά στο στερεό όριο. Η επέκταση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου έτσι ώστε να καλύπτει με ακρίβεια ροές που μοντελοποιούνται από συναρτήσεις τοίχου πραγματοποιείται εδώ σε συνδυασμό με την ανάπτυξη του συζυγούς μοντέλου τύρβης για το μοντέλο τύρβης δύο μ.δ.ε. $k-\epsilon$ υψηλών αριθμών Reynolds.

Ακόμη και σήμερα, η μέθοδος των συναρτήσεων τοίχου χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πραγματικές βιομηχανικές εφαρμογές λόγω του ότι επιτρέπει τη χρησιμοποίηση υπολογιστικών πλεγμάτων με μικρότερο πλήθος κόμβων και στοιχείων μιας και η απόσταση του πρώτου, κάθε φορά, κόμβου από το στερεό όριο δεν χρειάζεται να είναι πολύ μικρή για να καταφέρει να προλέξει τα φυσικά φαινόμενα στην περιοχή του τοίχου. Οι εξισώσεις δεν λύνονται εκεί, η πληροφορία που λείπει αναπληρώνεται από τη χρήση του μοντέλου συναρτήσεων τοίχου, η διατμητική τάση (και ισοδύναμα η ταχύτητα τριβής, v_τ), που υπολογίζεται με βάση τις συναρτήσεις τοίχου, αντικαθιστά τα συνεκτικά διανύσματα της ροής

(όροι διάχυσης) στις διακριτοποιημένες εξισώσεις της μέσης ροής κατά τους ισολογισμούς στους κόμβους που γειτνιάζουν με το στερεό όριο. Αυτό συμβαίνει γιατί, λόγω της ‘ανεπάρκειας’ του πλέγματος, δεν είναι δυνατή η χρησιμοποίηση αριθμητικών σχημάτων πεπερασμένων όγκων για τον υπολογισμό των συνεκτικών διανυσμάτων στην περιοχή μεταξύ τοίχου και πρώτου κόμβου εκτός του τοίχου.

Σε βιομηχανικούς μεγέθους εφαρμογές η γένεση πλέγματος αρκούντως πυκνού στην περιοχή του στερεού ορίου και συνάμα αποδεκτής ποιότητας, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογίζεται με ακρίβεια το οριακό στρώμα σε υπολογισμούς με μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, είναι συχνά πολύπλοκη και δαπανηρή. Εκτός τούτου, η πρόλεξη του πεδίου ροής στα αραιότερα πλέγματα, όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου, καθίσταται λιγότερο απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους διαδικασία. Η εκτεταμένη χρήση του μοντέλου συναρτήσεων τοίχου σε πραγματικές εφαρμογές, λόγω των παραπάνω πλεονεκτημάτων, καθιστά ουσιαστική την απαίτηση (λ.χ. από μηχανικούς της βιομηχανίας που χρησιμοποιούν ως μέθοδο πρόλεξης πεδίων ροής μοντέλα βασισμένα στις συναρτήσεις τοίχου) για ανάπτυξη μιας συζυγούς μεθόδου όπως είναι αυτή που περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο. Μια τέτοια μέθοδος πρέπει να είναι ικανή να λαμβάνει υπόψη της το χρησιμοποιούμενο, στο πρόβλημα επίλυσης της ροής, μοντέλο συναρτήσεων τοίχου δημιουργώντας (με βάση τη μαθηματική διατύπωση που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια του κεφαλαίου) ένα συζυγές προς αυτό μοντέλο συναρτήσεων τοίχου για χρήση κατά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Έτσι, αφενός οι εκφράσεις των συζυγών οριακών συνθηκών και, συνεπώς, και των παραγώγων ευαισθησίας διατυπώνονται με βάση τις οριακές συνθήκες για τα μεγέθη της μέσης ροής και της τύρβης που πραγματικά επιβάλλονται στην περίπτωση της θεώρησης υψηλών αριθμών Reynolds. Αφετέρου δε, όπως και στην περίπτωση του προβλήματος της ροής, αίρεται η αδυναμία αριθμητικού υπολογισμού όρων των συζυγών εξισώσεων της ορμής στην περιοχή του στερεού ορίου. Καλείται λοιπόν κανείς, όπως και στο πρόβλημα της ροής, να μην επιλύσει τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής και του συζυγούς μοντέλου τύρβης στην περιοχή μεταξύ του τοιχώματος και του πρώτου κόμβου από το τοίχωμα. Αυτό συνεπάγεται, την επιβολή τέτοιων οριακών συνθηκών για τις συζυγείς μεταβλητές της μέσης ροής ώστε να ολοκληρώνεται ο ισολογισμός των διανυσμάτων της συζυγούς μέσης ροής στον όγκο ελέγχου κοντά στο στερεό τοίχωμα (υπολογισμός συζυγούς διατμητικής τάσης) και συνθηκών για τις μεταβλητές του συζυγούς μοντέλου τύρβης.

Η μέθοδος των συναρτήσεων τοίχου, εκτός από τα παραπάνω πλεονεκτήματα εμφανίζει, βέβαια, και γνωστούς περιορισμούς. Αναφέρεται, για παράδειγμα, η αδυναμία πρόλεξης της αποκόλλησης της ροής. Ο μηχανικός που αποφασίζει να χρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο μοντέλο για την πρόλεξη της ροής γύρω από ένα σώμα, οφείλει να λάβει εξ αρχής υπόψη του τον παραπάνω περιορισμό. Από εκεί και πέρα, αν εφαρμοστεί η συζυγής μέθοδος για να οδηγήσει έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης στη βέλτιστη λύση, πρέπει οι παράγωγοι ευαισθησίας, που αυτή θα υπολογίζει, να είναι αριθμητικά ακριβείς και συνεπώς οι μαθηματικές εκφράσεις της συζυγούς διατύπωσης πρέπει να είναι συνεπείς με τις εξισώσεις κατάστασης και τις οριακές τους συνθήκες. Για να επιτευχθεί αυτό επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon$ και επιβάλλονται οριακές συνθήκες για τη συζυγή ταχύτητα στο στερεό όριο χρησιμοποιώντας τις συζυγείς συναρτήσεις τοίχου, κατά αντιστοιχία με ότι συμβαίνει κατά την επίλυση του προβλήματος της ροής. Η συζυγής μέθοδος που προτείνεται στο παρόν κεφάλαιο είναι νέα, [61], δεδομένου ότι στη σχετική βιβλιογραφία δεν υπάρχει άλλη αναφορά σε παραπλήσια συζυγή μέθοδο. Η πρωτοτυπία έγκειται πρωτίστως στην εισαγωγή και χρησιμοποίηση των συζυγών συναρτήσεων τοίχου και στην ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου η οποία στηρίζεται

και χρησιμοποιεί τη νεο-ορισθείσα συζυγή ταχύτητα τριβής. Ένα δεύτερο σε σημασία σημείο συμβολής της διατριβής έγκειται στη μαθηματική διατύπωση και χρησιμοποίηση του συζυγούς, ως προς το μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων $k-\varepsilon$, μοντέλου $k_a-\varepsilon_a$ (έχει εξάλλου, ήδη παρουσιαστεί η αντίστοιχη ιδέα για το μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds μιας εξίσωσης Spalart-Allmaras, 3, [60]).

Στη συνέχεια, αρχικά, παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου με αυστηρό τρόπο, κατά τα πρότυπα των κεφαλαίων 2 και 3, ενώ ακολουθούν τρεις εφαρμογές που στόχο έχουν να πιστοποιήσουν ότι η μέθοδος υπολογίζει με ακρίβεια τις παραγώγους ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους. Οι εφαρμογές αφορούν σε εσωτερικές ροές και ως συνάρτηση κόστους επιλέγεται αυτή των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού, 2.3.1. Τέλος, ως επισημανθεί ότι παρότι η ανάπτυξη που ακολουθεί αφορά στο μοντέλο $k-\varepsilon$ υψηλών αριθμών Reynolds, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε μοντέλο μιας ή περισσότερων μ.δ.ε. που χρησιμοποιεί το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου. Επίσης, η θεωρία του παρόντος κεφαλαίου είναι γενική και καλύπτει τόσο την περίπτωση κατά την οποία ο συζυγής κώδικας βασίζεται στο οικείο όσο και στο ανοικτό λογισμικό. Για πρακτικούς λόγους, ο προγραμματισμός της μεθόδου του κεφαλαίου αυτού στηρίχτηκε στο οικείο λογισμικό.

4.1 Το μοντέλο $k-\varepsilon$ υψηλών αριθμών Reynolds.

Οι εξισώσεις κατάστασης αποτελούνται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes, 3.1, 3.2 (με μόνη διαφορά ότι στη θέση της πίεσης p χρησιμοποιείται η ενεργός πίεση $p_{eff} = p + \frac{2}{3}k$) και τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon$ υψηλών αριθμών Reynolds, [148]. Οι τελευταίες δίνονται από

$$\begin{aligned} R^k &= v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - P_k + \varepsilon = 0 \\ R^\varepsilon &= v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k} + c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου k είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια, ε είναι η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και P_k η παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, η τελευταία δίνεται από την έκφραση

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

Η τυρβώδης συνεκτικότητα ν_t υπολογίζεται από

$$\nu_t = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.3)$$

οι σταθερές του μοντέλου είναι ίσες με $c_\mu = 0.09$, $f_\mu = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $c_1 = 1.44$, $c_2 = 1.92$, $Pr_k = 1.0$, $Pr_\varepsilon = 1.3$, [148].

Στην παρούσα διατριβή, η τεχνική συναρτήσεων τοίχου χρησιμοποιείται για την επιβολή συνθήκης ολίσθησης της ροής πάνω στο 'στερεό όριο', [144, 145, 146, 147]. Το πεδίο ροής διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας μη δομημένα πλέγματα. Με βάση το μοντέλο αυτό, ο 'πραγματικός' τοίχος θεωρείται ότι βρίσκεται σε απόσταση Δ μέσα (δηλαδή, με κατεύθυνση προς το αεροδυναμικό/υδροδυναμικό σώμα) από τους οριακούς πλεγματικούς κόμβους, οι οποίοι αποτελούν πλέον το 'στερεό όριο', σχήμα 4.1. Σε αυτούς τους πλεγματικούς οριακούς

κόμβους επιβάλλεται η συνθήκη ολίσθησης. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων κατάστασης πραγματοποιείται σε όλους του όγκους ελέγχου (συμπεριλαμβανομένων και των οριακών επί του 'στερεού ορίου') οδηγώντας στον ισολογισμό μεταξύ ατριών και συνεκτικών διανυσμάτων ροής τα οποία διασχίζουν το όριο του εκάστοτε όγκου ελέγχου μαζί με τυχόν όρους πηγής που εκφράζονται ως χωρικά ολοκληρώματα. Κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της μέσης ροής και του μοντέλου τύρβης στον όγκο ελέγχου του οριακού κόμβου P , σχήμα 4.1, λαμβάνεται υπόψη ότι η ταχύτητα εκεί είναι εφαπτόμενη στο στερεό όριο με το μέτρο της να έρχεται σε συμφωνία με τα όσα υπαγορεύουν οι συναρτήσεις τοίχου οι οποίες αναλαμβάνουν να 'γεφυρώσουν' το χάσμα μεταξύ του κόμβου P και του πραγματικού τοιχώματος που βρίσκεται σε απόσταση Δ από αυτόν. Στην επιφάνεια του 'στερεού ορίου' που αντιστοιχεί στον κόμβο P το διάνυσμα της ροής εγκάρσια στο στερεό όριο λόγω μεταφοράς είναι μηδενικό ενώ το συνεκτικό διάνυσμα υπολογίζεται από την ταχύτητα τριβής, v_τ , η οποία ορίζεται ως

$$v_\tau |v_\tau| = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i = \tau_w \quad (4.4)$$

και υπολογίζεται με βάση το νόμο του τοίχου. Συγκεκριμένα, η εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος υποδιαιρείται σε δύο υποπεριοχές, (α) τη γραμμική (στρωτό οριακό υπόστρωμα) και (β) τη λογαριθμική. Ανάλογα με την τιμή της αδιάστατης απόστασης y^+ του κόμβου P από το τοίχο, δηλαδή, ανάλογα με το αν βρισκόμαστε στην περιοχή (α) ή (β) του οριακού στρώματος, η αδιάστατη ταχύτητα, v^+ δίνεται από τις σχέσεις

$$v^+ = \frac{v_{(t)}}{v_\tau} = \begin{cases} y^+, & y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B, & y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (4.5)$$

όπου $y^+ = \frac{\Delta v_\tau}{\nu}$, $\kappa = 0.41$, $B = 5.5$, η τιμή y_c^+ προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης $y_c^+ = \frac{1}{\kappa} \log(y_c^+) + B$ και $v_{(t)}$ είναι το μέτρο της εφαπτομενικής ως προς τον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας, όταν αυτή αναλυθεί στο οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων (με t_i συμβολίζουν τα εφαπτόμενα διανύσματα στο στερεό όριο διανύσματα). Λόγω της συνθήκης ολίσθησης ισχύει $v_i = v_{(t)} t_i$. Από τις εξισώσεις 4.5 υπολογίζεται η ταχύτητα τριβής, v_τ . Έχοντας υπολογίσει την ταχύτητα $v_{(t)}$ από την επίλυση των εξισώσεων της μέσης ροής, από την έκφραση 4.5 υπολογίζεται η τιμή της ταχύτητας τριβής είτε εκτελώντας μια επαναληπτική διαδικασία (περιοχή του λογαριθμικού νόμου) είτε άμεσα μέσω του y^+ (γραμμική περιοχή). Έχοντας υπολογίσει την ταχύτητα τριβής, η διατμητική τάση στο σημείο αυτό του στερεού τοιχώματος είναι γνωστή και ολοκληρώνεται ο ισολογισμός των διανυσμάτων της ροής στον όγκο ελέγχου του σχήματος 4.1. Η επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται με ασθενή διατύπωση στον όγκο αναφοράς. Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στον τρόπο υπολογισμού της κυρίαρχης διατμητικής τάσης στους κόμβους του στερεού ορίου και περιγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο επιβάλλεται έμμεσα μια συνθήκη καθορισμού της κλίσης της ταχύτητας στους κόμβους αυτούς. Σε ότι αφορά στην πίεση, από τη θεωρία του οριακού στρώματος είναι γνωστό ότι η κλίση της κάθετα στο τοίχωμα είναι μηδενική. Αυτά αφορούν, βεβαίως, στις μεταβλητές της μέσης ροής. Αντίστοιχα πρέπει να επιβληθούν συνθήκες και για τα μεγέθη του μοντέλου τύρβης. Στον κόμβο P , σχήμα 4.1, αν και εφόσον αυτός τοποθετείται εντός της λογαριθμικής περιοχής, λαμβάνεται ότι ισχύει η θεώρηση της ισορροπίας της τύρβης, δηλαδή ότι η παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ισούται με το ρυθμό κατστροφής αυτής. Από την παραπάνω θεώρηση, γνωρίζοντας την ταχύτητα τριβής, μπορούν να επιβληθούν οι ακόλουθες Dirichlet

συνθήκες για το k και το ε , [149],

$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_m}} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon = \frac{v_\tau^3}{\kappa \Delta} \quad (4.7)$$

Στην περίπτωση που ο κόμβος P βρίσκεται στο γραμμικό οριακό υπόστρωμα, τότε η παραδοχή ότι η παραγωγή του k ισούται με το ρυθμό διάχυσης του δεν ευσταθεί και, επομένως, η επιβολή οριακών συνθηκών για τα μεγέθη της τύρβης πρέπει να γίνει διαφορετικά. Πολύ κοντά στον τοίχο, ισχύει ότι, [148]

$$k \propto y^2 \quad (4.8)$$

από την παραπάνω έκφραση αναλογίας μεταξύ k και του τετραγώνου της απόστασης γνωρίζοντας ότι για $y^+ = y_c^+$ ισχύει η έκφραση 4.6 και ότι για $y^+ = 0$ το k είναι μηδέν προκύπτει ότι

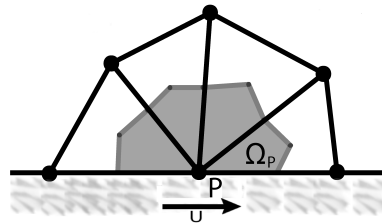
$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_m}} \left(\frac{y^+}{y_c^+} \right)^2 \quad (4.9)$$

Η εξίσωση 4.9 προέκυψε υπό τη θεώρηση ότι η σχέση αναλογίας 4.8 ισχύει εκτός από την περιοχή του στρωτού οριακού υποστρώματος και για $y^+ = y_c^+$. Για την οριακή συνθήκη του ε χρησιμοποιείται η προσέγγιση που ακολουθήθηκε στην εργασία [146], την οποία δανείστηκε από το μοντέλο μιας εξίσωσης των Norris-Reynolds, [144], όπου

$$\varepsilon = \frac{k^{1.5}}{l_\varepsilon} \quad (4.10)$$

με την κλίμακα μήκους των Norris και Reynolds, l_ε , [144], να δίνεται από

$$l_\varepsilon = \frac{c_l \Delta}{1 + \frac{5.3}{Re_t}}, \quad Re_t = \frac{k^{0.5} \Delta}{\nu}, \quad c_l = \kappa c_\mu^{-0.75} \quad (4.11)$$



Σχήμα 4.1: Θεώρηση υψηλών αριθμών Reynolds: Όγκος ελέγχου σε κόμβο του μη-δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων επί του 'στερεού ορίου', με την επιβολή ταχύτητας ολίσθησης, $v_{(t)} \neq 0$, $v_{(n=0)}$. Ο 'πραγματικός' τοίχος βρίσκεται σε απόσταση Δ κάτω από τον κόμβο P .

Στην παράγραφο 4.2, θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές που βρίσκονται πίσω από τη νέα αυτή συζυγή διατύπωση ενώ, στη συνέχεια, (παράγραφος 4.3) θα ακολουθήσει η αυστηρή και λεπτομερής μαθηματική διατύπωση. Όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος που παρουσιάζεται εδώ βασίζεται στο μοντέλο k - ε υψηλών αριθμών Reynolds, [148], στην παραλλαγή του κατά την οποία επιβάλλεται συνθήκη ολίσθησης στους κόμβους του

τοιχώματος, [144, 145, 146, 147]. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά της μεθόδου δεν περιορίζουν την εφαρμογή της σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιείται κάποιο άλλο μοντέλο τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds σε συνδυασμό με ένα διαφορετικό τρόπο υλοποίησης του νόμου του τοίχου. Οι διαφορές αυτές πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη συζυγή διατύπωση και εφαρμογή των συζυγών συναρτήσεων τοίχου, οδηγώντας, κατά περίπτωση, σε διαφοροποιήσεις, χωρίς όμως να βλάπτεται η γενικότητα της μεθόδου οι αρχές της οποίας θα αναλυθούν στη συνέχεια.

4.2 Η συζυγής διατύπωση με συναρτήσεις τοίχου – Βασική ιδέα

Η συζυγής διατύπωση στηρίζεται, όπως και προηγουμένως (κεφάλαια 2, 3), στην προσαύξηση της συνάρτησης κόστους με το εσωτερικό γινόμενο των εξισώσεων της ροής και του διανύσματος των συζυγών μεταβλητών ολοκληρωμένων στο πεδίο ροής. Υπολογίζεται η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους και κάθε χωρικός όρος στον οποίον εμφανίζονται μεταβολές των ροϊκών μεγεθών απαλείφεται από την έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας και οδηγώντας στο σύστημα των συζυγών εξισώσεων. Αναλόγως, απαλείφονται και οι όροι που εμπεριέχουν τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών στα όρια του πεδίου ροής. Οι τελευταίοι, δίδουν τις οριακές συνθήκες οι οποίες ‘κλείνουν’ το σύστημα των συζυγών εξισώσεων σε είσοδο (S_i), έξοδο (S_o) και στερεά όρια (S_w). Ο τρόπος με τον οποίο επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες στα ‘στερεά όρια’, διαφοροποιείται σε σχέση με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, κεφάλαιο 3, αποτελώντας ειδοποιό διαφορά της νέας μεθόδου. Για αυτούς τους όρους της συνάρτησης κόστους, που γράφονται στη μορφή $\int_{S_w} BW_i^u \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} BW^k \frac{\delta k}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} BW^\varepsilon \frac{\delta \varepsilon}{\delta b_m} dS$, ισχύει ότι

$$\int_{S_w} BW_i^u \frac{\delta u_i}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} BW^k \frac{\delta k}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} BW^\varepsilon \frac{\delta \varepsilon}{\delta b_m} dS = \int_{S_w} BW^{u_\tau} \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m} + \int_{S_w} h \frac{\delta(shape)}{\delta b_m} dS \quad (4.12)$$

όπου για τις συναρτήσεις BW_i^u , BW^k , BW^ε , BW^{u_τ} και h ισχύει ότι $\{BW_i^u, BW^k, BW^\varepsilon, BW^{u_\tau}, h\} = f(v_i, p, u_i, q, \mathbf{x}, \mathbf{b})$, ενώ με το συμβολισμό (*shape*) περιγράφονται οι όροι που σχετίζονται άμεσα με τη γεωμετρία της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής. Σε αυτά ανήκουν λ.χ. τα κάθετα διανύσματα, για τα οποία ισχύει προφανώς ότι (*shape*) = $g(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. Στο δεξί μέλος της έκφρασης 4.12 εμπεριέχονται μόνο μεταβολές της ταχύτητας τριβής (πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος) και μεταβολές σε γεωμετρικές ποσότητες (δεύτερο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος), απουσιάζουν δηλαδή όροι που εμπεριέχουν μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών v_i, p, k και ε , αυτό επιτεύχθηκε χρησιμοποιώντας τις συνθήκες της θεωρίας των συναρτήσεων τοίχου. Μέσω αυτών των σχέσεων (4.13, 4.14 και 4.16 έως 4.19) συνδέονται η μεταβολή στην ταχύτητα στον τοίχο (ταχύτητα ολίσθησης) και οι μεταβολές στο k και στο ε με τη μεταβολή στην ταχύτητα τριβής καθώς και με τις μεταβολές στις γεωμετρικές ποσότητες (μεταβολή στα κάθετα και εφαπτόμενα στον τοίχο διανύσματα). Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη μη-εισχώρησης ($v_{\langle n \rangle} = 0$) οδηγεί στη μηδενική μεταβολή

$$\frac{\delta v_{\langle n \rangle}}{\delta b_m} = 0 \quad (4.13)$$

Διαφορίζοντας τις εξισώσεις 4.5 των συναρτήσεων τοίχου, προκύπτει η συνθήκη για την μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας. Έτσι προκύπτει

$$\frac{\delta v_{(t)}}{\delta b_m} = c_v \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m} \quad (4.14)$$

όπου, ανάλογα με το αν ο κόμβος βρίσκεται στο στρωτό οριακό υπόστρωμα ή στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος, η συνάρτηση c_v δίνεται από

$$c_v = \begin{cases} \frac{2u_\tau \delta Re}{\nu}, & y^+ < 11.6 \\ \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B + \frac{1}{\kappa}, & y^+ \geq 11.6 \end{cases} \quad (4.15)$$

Οι συνθήκες για τις μεταβολές $\frac{\delta k}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta \varepsilon}{\delta b_m}$ προκύπτουν από διαφορίση των οριακών συνθηκών για τα k και ε αντιστοίχως. Αν ο κόμβος βρίσκεται στη λογαριθμική περιοχή, δηλαδή ισχύουν οι εξισώσεις 4.6 και 4.7,

$$\frac{\delta k}{\delta b_m} = \frac{2v_\tau}{\sqrt{c_\mu}} \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m}, \quad y^+ \geq 11.6 \quad (4.16)$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta b_m} = \frac{3v_\tau^2}{\kappa \delta} \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m}, \quad y^+ \geq 11.6 \quad (4.17)$$

Αν ο κόμβος βρίσκεται στη γραμμική περιοχή, ισχύουν οι εξισώσεις 4.9 και 4.10. Από τη διαφορίση τους έχουμε αντιστοίχως ότι

$$\frac{\delta k}{\delta b_m} = 2 \left(\frac{v_\tau}{\sqrt{c_\mu}} + \frac{y^+}{11.6} \frac{\Delta Re}{\nu} \right) \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m}, \quad y^+ < 11.6 \quad (4.18)$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta b_m} = \left(3 - \frac{5.3}{\left(1 + \frac{5.3}{Re_t}\right)^2} \frac{k^{0.5} y}{Re_t \nu} \right) \frac{k^{0.5}}{2l_\varepsilon} \frac{\delta k}{\delta b_m}, \quad y^+ < 11.6 \quad (4.19)$$

Από την εξίσωση 4.12, η συζυγής οριακή συνθήκη στα στερεά όρια είναι η

$$BW^{u_\tau} = 0 \quad (4.20)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.12 συνεισφέρει στην τελική έκφραση υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Η οριακή συνθήκη 4.20 συνδέει την ταχύτητα τριβής με τον τανυστή των συζυγών τάσεων καθώς και με τις κάθετες στο τοίχωμα παραγώγους των μεταβλητών του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Κατ' αντιστοιχία με την ταχύτητα τριβής του προβλήματος ροής, v_τ , εξίσωση 4.4, ορίζεται και η συζυγής ταχύτητα τριβής, u_τ , (*adjoint friction velocity*).

$$\frac{u_\tau^2}{\nu + \nu_t} = \frac{\tau_\psi}{\nu + \nu_t} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i \quad (4.21)$$

Από την εξίσωση 4.20 υπολογίζεται η συζυγής ταχύτητα τριβής, u_τ . Αξίζει να επισημανθεί ότι η μαθηματική έκφραση του συζυγούς μοντέλου συναρτήσεων τοίχου είναι κοινή για κάθε συνάρτηση κόστους. Οι προκύπτουσες, όμως, κατανομές της u_τ εξαρτώνται, όπως είναι φυσικό, από τη συνάρτηση κόστους του προβλήματος μιας και το μοντέλο αποτελεί συνάρτηση των συζυγών και των ροϊκών μεταβλητών.

4.3 Διατύπωση της συζυγούς μεθόδου

Όπως και στα κεφάλαια 2 και 3, η μαθηματική διατύπωση της συζυγούς μεθόδου ξεκινά από την επαυξημένη συνάρτηση κόστους

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_i R_i^U d\Omega \quad (2.30)$$

όπου $\Psi = [q, \mathbf{u}, k_a, \varepsilon_a]^T$ είναι το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Με k_a και ε_a συμβολίζονται, αντιστοίχως, οι συζυγείς ως προς τα k και του ε . Συνεπώς,

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} k_a R^k d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_a R^\varepsilon d\Omega \quad (4.22)$$

Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_m γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} k_a \frac{\delta R^k}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\delta R^\varepsilon}{\delta b_m} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} u_i R_i^v \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} q R^p \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} k_a R^k \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \varepsilon_a R^\varepsilon \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Η τελευταία έκφραση συναρτά τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους με τις μεταβολές των εξισώσεων της ροής και του χωρίου της ροής. Μπορεί να γραφεί δε, στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} k_a \frac{\partial R^k}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\ & + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S k_a R^k \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & + \int_S \varepsilon_a R^\varepsilon \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \quad (4.24)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες 2.6 και 2.7.

Η ανάπτυξη του δεύτερου και τρίτου όρου της εξίσωσης 4.24 έχει προηγηθεί στο κεφάλαιο 2 υπό τη θεώρηση, όμως, ότι η κινηματική συνεκτικότητα είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τις μεταβλητές ελέγχου του προβλήματος. Στο παρόν κεφάλαιο, παραλείπεται η πλήρης ανάπτυξη των προαναφερθέντων όρων και έμφαση δίνεται αποκλειστικά στην παρουσίαση των 'νεοεισαχθέντων' όρων λόγω της μεταβολής στην τυρβώδη συνεκτικότητα $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m}$ και της μεταβολής στην ενεργό πίεση $\frac{\delta p_{eff}}{\delta b_m}$. Δεδομένου του ότι στην έκφραση 4.24 εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των ροϊκών ποσοτήτων, μας ενδιαφέρει η άμεση (μερική) παράγωγος ευαισθησίας $\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m}$ η οποία εκφράζεται συναρτήσει των $\frac{\partial k}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m}$, κάνοντας χρήση της εξίσωσης 4.3, ως εξής

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} = 2 f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \quad (4.25)$$

Είναι, βέβαια, προφανές ότι η έκφραση 4.25 ισχύει και για τις ολικές μεταβολές των μεγεθών ν_t, k, ε .

Από τη σχέση ορισμού της ενεργού πίεσης, $p_{eff} = p + \frac{2}{3}k$, η μεταβολή $\frac{\partial p_{eff}}{\partial b_m}$ δίνεται από την έκφραση

$$\frac{\partial p_{eff}}{\partial b_m} = \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial b_m} \quad (4.26)$$

Ύστερα από την εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης, τα δύο πρώτα ολοκληρώματα της έκφρασης 4.24 γίνονται

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega \\
= & \int_{\Omega} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
+ & \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
- & \int_S (\nu + \nu_t) u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] n_j dS \\
- & \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\
+ & \int_{\Omega} 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega - \int_S 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \\
- & \int_{\Omega} f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega + \int_S f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \\
- & \frac{2}{3} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega + \frac{2}{3} \int_S u_j n_j \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης γράφονται, συναρτήσει των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών, ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^k}{\partial b_m} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_k} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial P_k}{\partial b_m} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \tag{4.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^{\varepsilon}}{\partial b_m} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_{\varepsilon}} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_1 f_1 \frac{\partial P_k}{\partial b_m} \frac{\varepsilon}{k} - c_1 f_1 P_k \frac{1}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \\
&+ c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{\partial k}{\partial b_m} + 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} - c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \frac{\partial k}{\partial b_m} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Η παράγωγος $\frac{\partial P_k}{\partial b_m}$ δίδεται από

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_m} = \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} P + \nu_t \frac{\partial P}{\partial b_m} \tag{4.30}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial b_m} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Με βάση την εξίσωση 4.28, ο τέταρτος όρος της εξίσωσης 4.24, δηλαδή ο όρος $\int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial R^{\varepsilon}}{\partial b_m} d\Omega$, γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_a \frac{\partial R^k}{\partial b_m} d\Omega &= \int_{\Omega} k_a \left[\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} k_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} k_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_k} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} k_a \frac{\partial P_k}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} k_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ο όρος μεταφοράς της εξίσωσης 4.32 δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_a \left[\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Omega} k_a \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega + \\ &\int_S v_j n_j k_a \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της εξίσωσης 4.32 γίνονται αντίστοιχα

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega \\ - \int_S k_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) n_j dS &+ \int_S \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_k} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} d\Omega - \int_S k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega - \int_S k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega &+ \int_S k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ο τέταρτος όρος της εξίσωσης 4.32, με χρήση των σχέσεων 4.30 και 4.31 και κατόπιν εφαρμογής του θεωρήματος της απόκλισης, γράφεται ως

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k_a \frac{\partial P_k}{\partial b_m} d\Omega &= - \int_{\Omega} 2k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} P \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} P \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\ &+ 2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\ &- 2 \int_S k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \end{aligned} \quad (4.36)$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις 4.33, 4.34, 4.35 και 4.36 η εξίσωση 4.32 λαμβάνει την

παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} k_a \frac{\partial R^k}{\partial b_m} d\Omega &= \int_{\Omega} \left\{ k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
&- 2 \int_S k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \\
&+ \int_{\Omega} \left\{ -v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} P \right\} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega \\
&+ \int_S \left[v_j n_j k_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j - k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \right] \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \\
&- \int_S k_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) n_j dS \\
&+ \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} + k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} P + k_a \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
&+ \int_S k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Όπως και με τον όρο $\int_{\Omega} k_a \frac{\partial R^k}{\partial b_m} d\Omega$, ομοίως και ο πέμπτος όρος της σχέσης 4.24, $\int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial R^{\varepsilon}}{\partial b_m} d\Omega$, κάνοντας χρήση της εξίσωσης 4.29, γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial R^{\varepsilon}}{\partial b_m} d\Omega &= \int_{\Omega} \varepsilon_a \left[\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_{\varepsilon}} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial P_k}{\partial b_m} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_a \left(c_1 f_1 P_k \frac{1}{k} + 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \varepsilon_a \left(c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} + c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ο όρος μεταφοράς της εξίσωσης 4.38 δίνει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon_a \left[\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega + \\
&\int_S v_j n_j \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Οι όροι διάχυσης της εξίσωσης 4.38 δίνουν

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
&- \int_S \varepsilon_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) n_j dS + \int_S \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} d\Omega - \int_S \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega + \int_S \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega - \int_S \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Ο τέταρτος όρος της εξίσωσης 4.38, με χρήση των σχέσεων 4.30 και 4.31, γράφεται ως

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} \varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial P_k}{\partial b_m} d\Omega & = - \int_{\Omega} 2\varepsilon_a c_1 f_1 f_\mu c_\mu P \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_a c_1 f_1 f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
& + 2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& - 2 \int_S \varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις 4.39, 4.40, 4.41 και 4.42, η εξίσωση 4.38 λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon_a \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial b_m} d\Omega & = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& - 2 \int_S \varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \\
& + \int_{\Omega} \left\{ -v_j \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right. \\
& + \left. \varepsilon_a \left(c_1 f_1 c_\mu f_\mu \frac{k}{\varepsilon} P + c_1 f_1 P_k \frac{1}{k} + 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} \right) \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left[v_j n_j \varepsilon_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j + \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \\
& - \int_S \varepsilon_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) n_j dS \\
& + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_\mu f_\mu P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} + c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} P \right) \right] \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις 4.27, 4.37 και 4.43, η τελική έκφραση για την παράγωγο

ευσαισθησίας γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right. \\
& + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
& + \left. \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right. \\
& - \left. 2k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - 2\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_S (\nu + \nu_t) u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] n_j dS \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\
& + \int_{\Omega} \left\{ 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right. \\
& - \left. v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} P \right. \\
& + \left. \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_{\mu} f_{\mu} P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} + c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} P \right) \right\} \frac{\partial k}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left\{ -2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j - \frac{2}{3} u_j n_j + v_j n_j k_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \right. \\
& - \left. k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} - \varepsilon_a \frac{1}{Pr_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_{\mu} c_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} \right\} \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \\
& - \int_S k_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) n_j dS \\
& + \int_{\Omega} \left\{ -f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} + k_a f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} P + k_a \right. \\
& - \left. v_j \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_{\varepsilon}} f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right. \\
& + \left. \varepsilon_a \left(c_1 f_1 c_{\mu} f_{\mu} \frac{k}{\varepsilon} P + c_1 f_1 P_k \frac{1}{k} + 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} \right) \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left[f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \right. \\
& + \left. v_j n_j \varepsilon_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j + \varepsilon_a \frac{1}{Pr_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \\
& - \int_S \varepsilon_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) n_j dS
\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.4 Οι συζυγείς εξισώσεις

Από την έκφραση 4.44, με σκοπό να απαλειφθούν οι όροι των μεταβολών των μεταβλητών της ταχύτητας και της πίεσης, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \tag{4.45} \\ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] &= 0 \tag{4.46} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής 4.46, 4.46 με τις αντίστοιχες του κεφαλαίου 3, εξισώσεις 3.33, 3.34 μπορεί εύκολα κανείς να εντοπίσει τις αντιστοιχίες μεταξύ των τεσσάρων τελευταίων όρων της εξίσωσης 4.46 με τους όρους $R_{i,\bar{v}}^u$. Επίσης, η ύπαρξη τεσσάρων όρων, αυτήν τη φορά, αντί για δύο, είναι αποτέλεσμα του ότι οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης είναι δύο και όχι μια όπως στην περίπτωση του κεφαλαίου 3.

Με την απαλοιφή των όρων που εξαρτώνται από τις άμεσες μεταβολές των μεταβλητών του μοντέλου k - ε , λαμβάνουμε τις εξισώσεις του συζυγούς μοντέλου τύρβης που αυτήν τη φορά είναι δύο, όπως δύο είναι και οι επιπλέον εξισώσεις κατάστασης (εξισώσεις μοντέλου k - ε)

$$\begin{aligned} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] \\ + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} + \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \\ + \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_\mu f_\mu P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} - c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) = 0 \tag{4.47} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} + k_a f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} P + k_a \\ - v_j \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \varepsilon_a 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} = 0 \tag{4.48} \end{aligned}$$

4.5 Συζυγείς οριακές συνθήκες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται για να κλείσουν το σύστημα των συζυγών εξισώσεων στα όρια του πεδίου ροής. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διατύπωση των συνθηκών στα στερεά όρια εκεί όπου, σε αντίθεση με οποιαδήποτε άλλη συζυγή μέθοδο της βιβλιογραφίας, εφαρμόζεται το μοντέλο των συζυγών συναρτήσεων τοίχου.

4.5.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου S_I

Στην είσοδο του πεδίου ροής ισχύει η εξίσωση 2.20α', που σε συνδυασμό με τις Dirichlet συνθήκες των μεταβλητών της ροής v_i , k , ε οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = \frac{\partial k}{\partial b_m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} = 0 \tag{4.49}$$

Με βάση την εξίσωση 4.49, στο S_I απομένουν οι όροι

$$-\int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} \phi_3^k \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} n_j \right) dS - \int_{S_I} \phi_3^\varepsilon \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j \right) dS \quad (4.50)$$

οι ποσότητες ϕ_3^k και ϕ_3^ε δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \phi_3^k &= k_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \\ \phi_3^\varepsilon &= \varepsilon_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

ενώ οι $\phi_{1,ij}$ και ϕ_2 δίνονται, κατά τα γνωστά, από τις εξισώσεις 2.44. Η απαίτηση για απαλοιφή των παραπάνω όρων οδηγεί, κατά την παράγραφο 2.4.1, στις συνθήκες $u_{\langle t \rangle} = 0$, $u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} = v_{\langle n \rangle}$.

Επίσης, για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα που περιλαμβάνουν τους όρους $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} n_j \right)$ και $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j \right)$ πρέπει να ισχύει $\phi_3^k = 0$ και $\phi_3^\varepsilon = 0$. Οι δύο τελευταίες συνθήκες οδηγούν στην επιβολή των $k_a = 0$ και $\varepsilon_a = 0$.

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουν διατυπωθεί οι οριακές συνθήκες για όλες τις συζυγείς μεταβλητές πλην της συζυγούς πίεσης για την οποία επιλέγεται μηδενική Neumann συνθήκη, όπως συνέβη και στις προηγούμενες συζυγείς διατυπώσεις για την περίπτωση αυτή.

4.5.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου S_O

Στην έξοδο του πεδίου ροής ισχύουν οι εξισώσεις 2.20α' και 2.24 ($\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$). Οι μηδενικές Neumann συνθήκες των μεταβλητών της ροής v_i , k , ε (σε συνδυασμό με την εξίσωση 2.20α') οδηγούν σε

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right) = 0 \quad (4.51)$$

Οι όροι της έκφρασης 4.44, που ορίζονται στην έξοδο του πεδίου, και οι οποίοι εμπεριέχουν μεταβολές των ποσοτήτων της ροής και δεν έχουν απλοποιηθεί λόγω της εξίσωσης 4.51, είναι οι

$$-\int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) dS + \int_{S_O} \phi_{4,i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS + \int_{S_O} \phi_5^k \frac{\partial k}{\partial b_m} dS + \int_{S_O} \phi_5^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \quad (4.52)$$

Ο μηδενισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων επιβάλλει τις συνθήκες $\phi_{4,i} = 0$ και $\phi_5^k = \phi_5^\varepsilon = 0$ και, συνεπώς, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \phi_{4,i} = & u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \\ & - 2k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - 2\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial F}{\partial v_i} = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \phi_5^k = & -2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + \frac{2}{3} u_j n_j + v_j n_j k_a \\ & + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j - k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \phi_5^\varepsilon = & f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \\ & + v_j n_j \varepsilon_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j + \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Οι εξισώσεις 4.53 αναλύονται, κατά τα γνωστά, στην εφαπτομενική και στην κάθετη ως προς το όριο συνιστώσα. Αντικαθιστώντας και την εξίσωση της συνάρτησης κόστους, 2.18, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & u_i t_i^l v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i^l \\ & - 2 \left(k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i^l = v_i t_i^l v_k n_k \end{aligned} \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned} & u_j v_j + u_i n_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q \\ & - 2 \left(k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i = v_i n_i v_k n_k + \frac{1}{2} v_k^2 \end{aligned} \quad (4.56b)$$

Ας επισημανθεί ότι οι υπογραμμισμένοι όροι εκφράζουν την εξάρτηση των οριακών συνθηκών από τις συζυγείς μεταβλητές k_a και ε_a και ότι οι όροι αυτοί 'ισοδυναμούν' με τους όρους $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u \right)_\perp$ και $\left(BO_{i,\tilde{\nu}}^u \right)_\parallel$ των εξισώσεων 3.44α', 3.44β' του κεφαλαίου 3.

4.5.3 Συζυγείς συνθήκες στα 'στερεά όρια' S_W - Μοντέλο συζυγών συναρτήσεων τοίχου

Έχοντας απαλείψει τις πεδιακές συζυγείς εξισώσεις καθώς και τις οριακές συνθήκες σε είσοδο και έξοδο, απομένουν οι όροι της έκφρασης 4.57 στα 'στερεά όρια' του πεδίου ροής που είναι οι όροι από τους οποίους θα προκύψουν οι συζυγείς συνθήκες στα 'στερεά όρια' και η τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας. Αυτοί οι όροι ξαναγράφονται στη συνέχεια για

λόγους ευκολίας

$$\begin{aligned}
& \int_{S_w} \left[u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right. \\
& - 2k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - 2\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \left. \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] n_j dS + \int_{S_w} u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\
& + \int_{S_w} \left\{ -2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + \frac{2}{3} u_j n_j \right. \\
& + v_j n_j k_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j - k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left. \right\} \frac{\partial k}{\partial b_m} dS \\
& + \int_{S_w} \left[f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \right. \\
& + v_j n_j \varepsilon_a + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j + \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left. \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} dS \\
& - \int_{S_w} k_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial b_m} \right) n_j dS \\
& - \int_{S_w} \varepsilon_a \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) n_j dS \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Με βάση τις συνθήκες 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, την έκφραση

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial b_m} &= \frac{\delta v_i}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = \frac{\delta v_{(t)}}{\delta b_m} t_i^l + v_{(t)} \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \\
&= c_v \frac{\delta v_\tau}{\delta b_m} t_i^l + v_{(t)} \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \tag{4.58}
\end{aligned}$$

στην οποία χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις 4.13, 4.14 και την έκφραση

$$\begin{aligned}
(\nu + \nu_t) u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] n_j &= u_{(t)} \frac{\delta (v_\tau^2)}{\delta b_m} - u_{(t)} \frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} \frac{v_\tau^2}{\nu + \nu_t} - (\nu + \nu_t) u_{(t)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_j t_i^l)}{\delta b_m} \\
&\quad - (\nu + \nu_t) u_{(t)} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j t_i^l \tag{4.59}
\end{aligned}$$

οι συζυγείς οριακές συνθήκες στην περιοχή των στερεών τοιχωμάτων είναι οι εξής

$$u_{(n)} = 0 \tag{4.60α)}$$

$$c_v u_\tau^2 - 2u_{(t)} v_\tau + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{2v_\tau}{\sqrt{c_\mu}} + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{3v_\tau^2}{\kappa \Delta} = 0 \tag{4.60β)}$$

$$k_a = 0 \tag{4.60γ)}$$

$$\varepsilon_a = 0 \tag{4.60δ)}$$

όπου με u_τ συμβολίζεται η συζυγής ταχύτητα τριβής, όπως αυτή ορίστηκε από τη σχέση 4.21. Η εξίσωση 4.60β' εκφράζει τις συζυγείς συναρτήσεις τοίχου (εξίσωση 4.20). Με βάση αυτή μπορεί να υπολογιστεί η συζυγής ταχύτητα τριβής ή απευθείας το 'τετράγωνο' αυτής, u_τ^2 , (ή ακριβέστερα $u_\tau |u_\tau|$) και να αντικαταστήσει τον όρο των συζυγών τάσεων στις εξισώσεις της συζυγούς ορμής.

4.6 Τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας

Η τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας προκύπτει από την έκφραση 4.44 αφού έχουν ληφθεί υπόψη και οι συζυγείς οριακές συνθήκες στην περιοχή του τοίχου. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_w} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \left(v_{(t)} \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) dS \\
&+ \int_{S_w} (\nu + \nu_t) \left[u_{(t)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_j t_i^l)}{\delta b_m} + u_{(t)} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j t_i^l \right] dS \\
&- \int_{S_w} \left[-2 f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \right] \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} \left[f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&+ \int_{S_w} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_w} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{4.61}$$

4.7 Διατύπωση της έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας στο οριόδετο σύστημα

Στην έκφραση 4.61 για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας εμφανίζονται οι χωρικές παράγωγοι των μεγεθών της ροής στο 'στερεό όριο'. Ο υπολογισμός κάποιων από αυτές τις ποσότητες μπορεί να αποφευχθεί αν η παραπάνω έκφραση μετασχηματιστεί έτσι ώστε να απαλειφθούν οι κάθετες, στο στερεό όριο, κατά κατεύθυνση παράγωγοι και να απομείνουν μόνο οι εφαπτομενικές παράγωγοι των μεγεθών της ροής. Οι τελευταίες μπορούν να υπολογιστούν με διαφόριση των μεγεθών πάνω στο στερεό όριο.

Αφειρητία της σχετικής διατύπωσης είναι η ανάλυση των δύο τελευταίων ολοκληρωμάτων της έκφρασης 4.61. Για αυτά έχουμε, λοιπόν, ότι

$$\begin{aligned}
\int_{S_w} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS &= \int_{S_w} u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_w} u_i \frac{\partial p_{eff}}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
&- \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
&- \int_{S_w} u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\int_{S_w} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS = - \int_{S_w} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \tag{4.63}$$

ο τελευταίος όρος της έκφρασης 4.62 γράφεται ως

$$\begin{aligned}
- \int_{S_w} u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS &= - \int_{S_w} 2 f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
&+ \int_{S_w} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις 4.62, 4.63 και 4.64 στη σχέση 4.61 και αναδιατάσσοντας τους όρους, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_w} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \left(v_{\langle t \rangle} \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) dS \\
&- \int_{S_w} q v_{\langle t \rangle} n_i \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} dS - \int_{S_w} q \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i \right) dS \\
&+ \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_{\langle t \rangle} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_j t_i^l)}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_{\langle t \rangle} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k t_i^l - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j t_i^l \right] dS \\
&- \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} 2 f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j \right) dS \\
&+ \int_{S_w} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j \right) dS \\
&+ \int_{S_w} u_i v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_j \right) dS \\
&+ \int_{S_w} u_i \left(\frac{\partial p_{eff}}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial p_{eff}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i \right) dS \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Για 2Δ προβλήματα, αποδεικνύεται ότι για ένα βαθμωτό μέγεθος Φ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_1 \right) \frac{\delta x_2}{\delta b_m} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_1 \right) \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \\
&= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} t_2 \right) \frac{\delta x_2}{\delta b_m} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} t_2 \right) \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(-\frac{\delta x_2}{\delta b_m}, \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \right)^T \tag{4.66}
\end{aligned}$$

όπου με $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ συμβολίζουμε την παράγωγο του Φ κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} t_k \tag{4.67}$$

Με αντίστοιχη ανάλυση αποδεικνύεται ότι, για τις συνιστώσες Φ_i ενός διανυσματικού μεγέθους Φ , ισχύει ότι

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \left(-\frac{\delta x_2}{\delta b_m}, \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \right)^T \tag{4.68}$$

Για έναν τανυστή δευτέρου βαθμού, ισχύει ότι

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i = \left(\frac{\partial \Phi_{i1}}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_{i2}}{\partial t} \right) \left(-\frac{\delta x_2}{\delta b_m}, \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \right)^T \tag{4.69}$$

Με χρήση των ιδιοτήτων 4.66, 4.68 και 4.69 μπορούμε να εκφράσουμε το τρίτο, το πέμπτο, το όγδοο, το ένατο, το δέκατο και το ενδέκατο ολοκλήρωμα της έκφρασης 4.65 μέσω των εφαπτομενικών στο στερεό τοίχωμα παραγώγων. Επομένως, η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_{S_w} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \left(v_{(t)} \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) dS \\
&- \int_{S_w} q v_{(t)} n_i \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} dS - \int_{S_w} q \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} \frac{\delta x_1}{\delta b_m} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{\delta x_2}{\delta b_m} \right) dS \\
&+ \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_{(t)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_j t_i^l)}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_i \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_1}{\delta b_m} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_2}{\delta b_m} \right] dS \\
&- \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial t} \frac{\delta x_2}{\delta b_m} - \frac{\partial k}{\partial t} \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \right) dS \\
&+ \int_{S_w} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\delta x_2}{\delta b_m} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \right) dS \\
&+ \int_{S_w} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \left(v_2 \frac{\delta x_1}{\delta b_m} - v_1 \frac{\delta x_2}{\delta b_m} \right) dS + \int_{S_w} \frac{\partial p_{eff}}{\partial t} \left(u_2 \frac{\delta x_1}{\delta b_m} - u_1 \frac{\delta x_2}{\delta b_m} \right) dS \quad (4.70)
\end{aligned}$$

Η εξίσωση 4.70 αφορά σε 2Δ προβλήματα, όμως γενικεύεται εύκολα και σε 3Δ. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή (κοινή για 2Δ και 3Δ προβλήματα)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta b_m} &= \int_{S_w} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \left(v_k t_k^l \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) dS - \int_{S_w} q v_k t_k^l n_i \frac{\delta t_i^l}{\delta b_m} dS \\
&+ \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_k t_k^l \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_j t_i^l)}{\delta b_m} dS - \int_{S_w} (\nu + \nu_t) u_k t_k^l t_j^l L_i^{(m)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS \\
&- \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_w} \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&- \int_{S_w} 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} u_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) L_i^{(m)}(k) dS + \int_{S_w} c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} u_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) L_i^{(m)}(\varepsilon) dS \\
&+ \int_{S_w} v_i u_j L_i^{(m)}(v_j) dS + \int_{S_w} u_i L_i^{(m)}(p) dS - \int_{S_w} q L_i^{(m)}(v_i) dS \quad (4.71)
\end{aligned}$$

όπου ο τελεστής $L_i^{(m)}(\)$ ορίζεται ως

$$L_i^{(m)}(\) \equiv \frac{\partial(\)}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial(\)}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i \quad (4.72)$$

είτε ως

$$L_i^{(m)}(\) = \frac{\partial(\)}{\partial x_k} t_k^l \left(n_j t_i^l - t_j^l n_i \right) \frac{\delta x_j}{\delta b_m} \quad (4.73)$$

Η περίπτωση αυτή αποτελεί ουσιαστικά τη γενίκευση στον 2Δ ή στον 3Δ χώρο της εξίσωσης 4.70.

Ειδικά για την περίπτωση 2Δ ροών, ο τελεστής $L_i^{(m)}(\cdot)$, εξίσωση 4.73, γίνεται

$$L_1^{(m)}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \frac{\delta x_2}{\delta b_m}, \quad L_2^{(m)}(\cdot) = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \frac{\delta x_1}{\delta b_m} \quad (4.74)$$

και, συνεπώς, επαληθεύει τα όσα δείχθηκαν στις εξισώσεις 4.66, 4.68, 4.69.

Απόδειξη ισοδυναμίας των τελεστών 4.72 και 4.73

Ισχύει εξ ορισμού ότι $t_k^l t_k^l = 1$, $n_k n_k = 1$ και $n_k t_k^l = 0$. Επίσης,

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} n_j \right) n_k + \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} t_j^l \right) t_k^l \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial b_m} = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} n_q \right) n_k + \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} t_q^l \right) t_k^l \quad (4.76)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 4.75, 4.76 και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i &= \left[\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} n_q \right) n_k + \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} t_q^l \right) t_k^l \right] \left[\left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} n_j \right) n_k + \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} t_j^l \right) t_k^l \right] n_i \\ &= \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} n_j \right) \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} n_q \right) n_i + \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} t_j^l \right) \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} t_q^l \right) n_i \end{aligned} \quad (4.77)$$

ομοίως ισχύει ότι

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k = \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} n_j \right) \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} n_q \right) n_i + \left(\frac{\delta x_j}{\delta b_m} t_j^l \right) \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} t_q^l \right) t_i \quad (4.78)$$

Συνεπώς, αφαιρώντας τις εξισώσεις 4.77 και 4.78 αποδεικνύεται ότι

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k - \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} t_k^l \left(n_j t_i^l - t_j^l n_i \right) \frac{\delta x_j}{\delta b_m} \quad (4.79)$$

4.8 Εφαρμογές - Πιστοποίηση συζυγούς μεθόδου με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου

Έχοντας ολοκληρώσει τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου ακολουθεί η πιστοποίηση της μέσω εφαρμογών. Σκοπός είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας με υψηλή ακρίβεια. Αυτό, ακριβώς, επιθυμείται να καταδειχθεί από τις εφαρμογές που ακολουθούν. Για να γίνει αυτό συγκρίνονται, κατά τα γνωστά, οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο με αυτές που υπολογίζονται από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (αποτελέσματα 'αναφοράς'). Παρότι ο πρωταρχικός σκοπός είναι αυτός του υπολογισμού ακριβών τιμών για τις παραγώγους, στις δύο από τις τρεις εφαρμογές που θα παρουσιαστούν, η συζυγής μέθοδος θα ενσωματωθεί σε έναν αλγόριθμο

απότομης καθόδου (*steepest descent method*) τον οποίο ‘τροφοδοτεί’ με τις υπολογιζόμενες παραγώγους ευαισθησίας. Η συνάρτηση κόστους είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του εκάστοτε αγωγού. Και στις δύο περιπτώσεις, η βέλτιστη γεωμετρία καταλίγει να εμφανίζει σημαντικά μειωμένες απώλειες ολικής πίεσης. Ας επισημανθεί ότι στη θέση της απότομης καθόδου θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένας οποιοσδήποτε άλλος αλγόριθμος αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης όπως για παράδειγμα κάποια προσεγγιστική μέθοδος Newton. Η παρούσα διατριβή δεν ασχολείται με τη σύγκριση μεταξύ αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης και, επομένως, μια τέτοια συζήτηση ξεφεύγει από το αντικείμενο της διατριβής. Συνεπώς, περιορίζεται μόνο στην εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου στις εφαρμογές όπου λύνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης της αεροδυναμικής μορφής.

Από τις τρεις εφαρμογές που πρόκειται να παρουσιαστούν οι δύο πρώτες αφορούν 2D ροή σε αγωγούς και συγκεκριμένα σε έναν αξονικό διαχύτη και σε έναν αγωγό με διαμόρφωση τύπου S . Στην τελευταία εφαρμογή υπολογίζονται παράγωγοι ευαισθησίας σε μια 2D πτερύγωση συμπίεστη. Σε όλες τις περιπτώσεις η γεωμετρία παραμετροποιείται με χρήση δύο πολυωνύμων Bézier–Bernstein, ένα για κάθε πλευρά του εκάστοτε αγωγού ή ένα για την πλευρά υπερπίεσης και άλλο ένα για την πλευρά υποπίεσης της αεροτομής του πτερυγίου. Περισσότερες λεπτομέρειες γύρω από την παραμετροποίηση αναφέρονται σε κάθε εφαρμογή ειδικά. Τα πλέγματα στα οποία επιλύονται οι εξισώσεις της ροής καθώς και οι συζυγείς εξισώσεις είναι μη-δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων.

4.8.1 Πρώτη εφαρμογή: αξονικός διαχύτης

Στη πρώτη εφαρμογή μελετάται ένας αξονικός διαχύτης. Από τις δύο πλευρές του μόνο το κάτω όριο παραμετροποιείται, το πάνω ακολουθεί πιστά τις μεταβολές του κάτω ορίου λόγω συμμετρίας. Η ροή είναι τυρβώδης με αριθμό Reynolds (βασισμένο στο ύψος του αγωγού στην είσοδο) ίσο με $Re = 1 \times 10^6$. Το μη-δομημένο πλέγμα κατασκευάζεται έτσι ώστε η αδιάστατες αποστάσεις των πρώτων κόμβων από το στερεό όριο να είναι αρκετά μεγαλύτερες της μονάδας, εμπίπτοντας συνεπώς στην περιοχή χρήσης των συναρτήσεων τοίχου (μέση τιμή y^+ της τάξης του 100). Το τμήμα του αγωγού που εμφανίζεται η διεύρυνση παραμετροποιείται με χρήση 5 σημείων ελέγχου Bézier. Όπως και σε όλες τις εφαρμογές με αγωγούς, έτσι και εδώ, τα εμπρόσθια και οπίσθια ίσια τμήματα του διαχύτη δεν παραμετροποιούνται και παραμένουν ανεπηρέαστα από οποιαδήποτε μεταβολή των σημείων ελέγχου. Το ίδιο ισχύει, φυσικά, και για τις διατομές εισόδου/εξόδου του αγωγού. Οι μεταβλητές σχεδιασμού της γεωμετρίας b_m , $M=6$, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου Bézier.

Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζονται σε μεγέθυνση τα πεδία της ταχύτητας (μέτρο, $|v_i|$), της συζυγούς ταχύτητας (μέτρο, $|u_i|$), της πίεσης και της συζυγούς πίεσης στην περιοχή της διεύρυνσης για την αρχική γεωμετρία του διαχύτη. Η ροή είναι προσκολλημένη επιτρέποντας τη χρήση συναρτήσεων τοίχου για τη μοντελοποίησή της. Η ταχύτητα μειώνεται κατά το μήκος του διαχύτη και το ίδιο συμβαίνει και για τη συζυγή ταχύτητα. Το ανάποδο ισχύει για την πίεση και τη συζυγή πίεση οι οποίες αυξάνονται. Η κατανομή της συζυγούς τάσης στον τοίχο, η οποία ισοδυναμεί με το τετράγωνο της συζυγούς ταχύτητας τριβής, u_τ^2 , κατά μήκος του τμήματος που διευρύνεται η διατομή του αγωγού φαίνεται στο σχήμα 4.3 δίπλα στην κατανομή της ταχύτητας τριβής v_τ . Από τη σύγκριση των δύο αυτών κατανομών μπορούν να εξαχθούν οι παρακάτω χρήσιμες παρατηρήσεις που αφορούν στην εξίσωση 4.60β'. Η εξίσωση 4.60β' μπορεί, για λόγους απλότητας, να γραφεί στη μορφή $u_\tau^2 = f(u_k, t_k^l)$, αμελώντας προς

το παρόν τους δύο τελευταίους όρους του δεξιού μέλους $\frac{\delta k}{\delta v_\tau}$ και $\frac{\delta \varepsilon}{\delta v_\tau}$. Αυτή η απλοποίηση, η οποία να σημειωθεί ότι δεν χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια των υπολογισμών (αφορά μόνο στα τρέχοντα σχόλια), μπορεί να επιβεβαιωθεί και από τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Δεδομένου ότι η εφαιπτομενική στο 'στερεό όριο' συζυγής ταχύτητα $u_k t_k$ μεταβάλλεται λίγο κατά μήκος του τμήματος της διεύθυνσης, η συζυγής τάση στον τοίχο u_τ^2 είναι ανάλογη της ταχύτητας τριβής v_τ . Αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνεται από το σχήμα 4.3 όπου οι δύο κατανομές μειώνονται με ανάλογο τρόπο αντικατοπτρίζοντας την επιβράδυνση της ροής.

Στο σχήμα 4.4 φαίνονται τα πεδία των μεταβλητών k και k_a και των μεταβλητών ε και ε_a στην περιοχή της διεύθυνσης του αγωγού. Οι κάθετες, ως προς τον τοίχο, κατανομές των συζυγών μεταβλητών της τύρβης απεικονίζονται στο σχήμα 4.5 για διάφορες θέσεις κατά μήκος του αγωγού. Σε αυτές μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι οι πιο σημαντικές τιμές των συζυγών μεταβλητών k_a και ε_a εμφανίζονται κοντά στην περιοχή του τοίχου· αυτό είναι αναμενόμενο γιατί μια αλλαγή στη γεωμετρία θα προκαλέσει τις σημαντικότερες αλλαγές στις εξισώσεις της τύρβης στην περιοχή αυτή.

Για αυτήν τη γεωμετρία του διαχύτη, η οποία χρησιμοποιείται ως αρχική γεωμετρία στη βελτιστοποίηση, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας του σχήματος 4.6 ως προς τις 6 μεταβλητές σχεδιασμού. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται με τις τιμές που υπολογίζονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα καλή. Όπως προαναφέρθηκε, οι 6 μεταβλητές σχεδιασμού αντιστοιχούν στις κατά x και κατά y συντεταγμένες των 3 σημείων ελέγχου Bézier (τα οποία συμβολίζονται με $CP1$, $CP2$ και $CP3$, ξεκινώντας την αρίθμησή τους από τα αριστερά του άξονα των x , σχήμα 4.6). Τα πρόσημα και οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας έρχονται σε συμφωνία με ό,τι ποιοτικά θα μπορούσε κανείς να αναμένει. Για παράδειγμα, αν η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού $CP1.x$ αυξηθεί (δηλαδή το σημείο ελέγχου $CP1$ μετακινηθεί κατά τα θετικά x , σχήμα 4.8) η γεωμετρία γίνεται πιο απότομη με αποτέλεσμα να αυξηθούν οι απώλειες. Το γεγονός αυτό εξηγεί το θετικό πρόσημο της πρώτης παραγώγου του σχήματος 4.6. Αντιστρόφως, μια μικρή αύξηση στη μεταβλητή $CP3.x$ θα οδηγήσει σε μια τοπικά 'ηπιότερη' κλίση τοιχώματος η οποία συνεπάγεται μικρότερες απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου. Αυτό έρχεται σε αντιστοιχία με το αρνητικό πρόσημο της τρίτης παραγώγου του εν λόγω σχήματος. Επιπροσθέτως, αυξάνοντας την τιμή της μεταβλητής $CP1.y$, ο αγωγός γίνεται πιο απότομος στο εμπρόσθιο του τμήμα, γεγονός το οποίο δικαιολογεί απολύτως το θετικό πρόσημο για την τέταρτη κατά σειρά παράγωγο ευαισθησίας του σχήματος 4.6. Σε ότι αφορά στο σημείο $CP3.y$, αυτό αντιστοιχεί σε αρνητική παράγωγο ευαισθησίας μιας και αν αυτό αυξηθεί (το σημείο $CP3$ μετακινηθεί κατά τα θετικά y) τότε οι απώλειες αναμένεται να μειωθούν. Τέλος, όπως αναμενόταν, το δεύτερο ελεύθερο σημείο ελέγχου, $CP2$, έχει μικρή σημασία (για αυτήν τη συγκεκριμένη γεωμετρία του διαχύτη) και αυτό επιβεβαιώνεται από το σχετικό σχήμα όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας εμφανίζουν πολύ μικρές τιμές συγκριτικά με αυτές που αντιστοιχούν στα άλλα δύο σημεία ελέγχου.

Προκειμένου να δειχθεί το όφελος από τη χρησιμοποίηση της προτεινόμενης συζυγούς διατύπωσης, χρησιμοποιήθηκε επίσης μια προσεγγιστική συζυγής διατύπωση η οποία χρησιμοποιεί τη θεώρηση της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας. Στην πραγματικότητα οι εξισώσεις της μέσης ροής και οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης είναι στενά συνδεδεμένες μέσω των συναρτήσεων τοίχου. Για τον παραπάνω λόγο η 'κατασκευή' μιας απλοποιημένης συζυγούς διατύπωσης με χρήση της παραπάνω θεώρησης δεν είναι τόσο προφανής όσο στην περίπτωση των μοντέλων τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, κεφάλαιο 3. Στην παρούσα περίπτωση η απαίτηση για 'παγωμένη' τυρβώδη συνεκτικότητα οδηγεί στο ότι οι μεταβολές ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού των k , ε και v_τ (όχι όμως και της

	$\frac{\delta F}{\delta b_1} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_2} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_3} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_4} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_5} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_6} 10^3$
<i>AM</i>	0.809111	-0.193240	-0.494843	8.715816	0.920189	-1.804938
<i>FT</i>	0.368930	-0.480133	-0.481642	1.565383	-1.720387	-1.680488
<i>FD</i>	1.079481	-0.260322	-0.708775	8.684181	1.067217	-1.888245

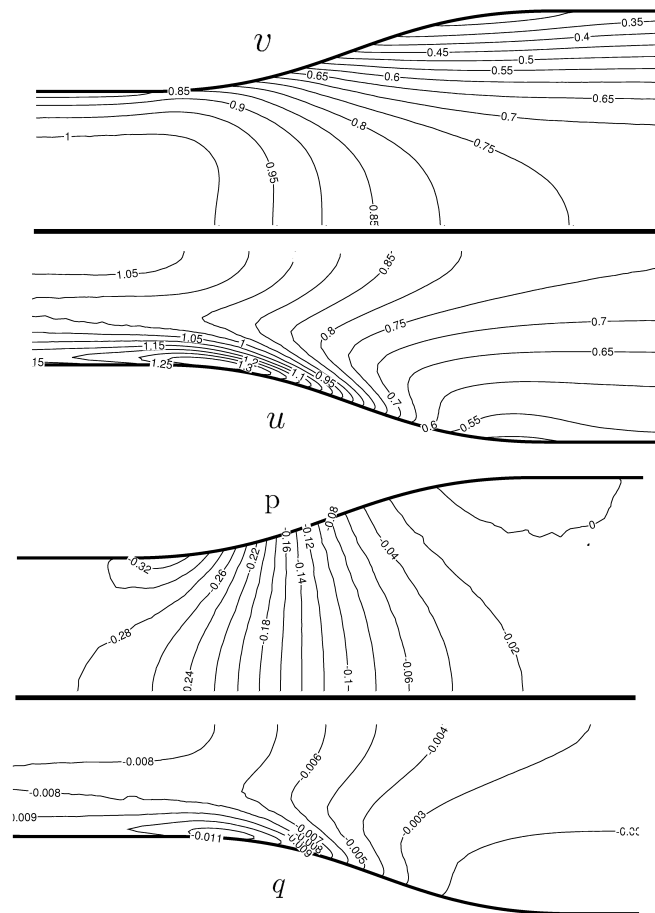
Πίνακας 4.1: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία): οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο που προτείνει διατριβή για την περίπτωση μοντέλου τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds, (*AM*), τη θεώρηση της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας (*FT*) και, τέλος, με χρήση πεπερασμένων κεντρικών διαφορών (για τιμή της στοιχειώδους ποσότητας διαφόρισης ίση με $eps = 10^{-5}$), (*FD*). Η προτεινόμενη συζυγής μέθοδος, (*AM*), επιτυγχάνει να υπολογίσει με υψηλή πιστότητα τις ζητούμενες παραγωγούς ευαισθησίας (τιμές αναφοράς αυτές της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, (*FD*)), το αποτέλεσμα αυτό αποτυπώνεται καλύτερα στο σχήμα 4.6.

ταχύτητας v_i) είναι μηδενικές. Στον πίνακα 4.1 παρατίθενται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας του σχήματος 4.6 πινακοποιημένες. Στην γραμμή *AM* (adjoint method) δίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο, στην γραμμή *FD* (finite differences) παρατίθενται οι παράγωγοι ευαισθησίας με χρήση πεπερασμένων κεντρικών διαφορών, ενώ στην επιπλέον γραμμή *FT* (frozen turbulence adjoint παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται αν εφαρμοστεί η θεώρηση της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας στη συζυγή μέθοδο που περιγράφηκε αμέσως παραπάνω. Η σημαντική διαφορά που προκύπτει κατά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τη χρήση της παραπάνω θεώρησης (σύγκριση γραμμών *FT* και *FD*) δείχνει τη σημασία χρησιμοποίησης της προτεινόμενης συζυγούς μεθόδου.

Χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο υπολογίζονται ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας οι οποίες χρησιμοποιούνται από έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο της απότομης καθόδου. Στο σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης κόστους ως προς τους κύκλους της μεθόδου βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν. Η αρχική και η τελική (ύστερα από 35 κύκλους της απότομης καθόδου) γεωμετρία του αγωγού μαζί με τα αντίστοιχα σε αυτές σημεία ελέγχου παρουσιάζονται στο σχήμα 4.8.

4.8.2 Δεύτερη εφαρμογή: αγωγός με διαμόρφωση τύπου *S*

Στη δεύτερη εφαρμογή μελετάται η τυρβώδης ροή σε έναν αγωγό ο οποίος εμφανίζει διαμόρφωση *S*. Ο αριθμός Reynolds της ροής (βασισμένος στο ύψος του αγωγού στην είσοδο του) είναι ίσος με $Re = 3 \times 10^4$. Η γεωμετρία του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας 10 σημεία ελέγχου Bézier. Τα μισά σημεία ελέγχου χρησιμοποιούνται για την πάνω πλευρά και τα άλλα μισά για την κάτω. Από τα 10 σημεία ελέγχου 6 είναι αυτά στα οποία επιτρέπεται να μεταβληθούν (αντιστοιχούν σε 3 σε κάθε πλευρά) τόσο κατά την x όσο και κατά την y κατεύθυνση, συνεπώς $M = 2 \times 6$. Τα πεδία του μέτρου της ταχύτητας και της συζυγούς ταχύτητας παρουσιάζονται στο σχήμα 4.9. Στο σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι κατανομές του τετραγώνου της συζυγούς ταχύτητας τριβής, u_τ^2 , και της ταχύτητας τριβής v_τ . Με βάση αυτό το σχήμα (4.10), επιβεβαιώνονται ξανά, τα συμπεράσματα της εφαρμογής 4.8.1 που αφορούν στην εξίσωση 4.60β'. Επίσης, στο σχήμα 4.11 παρουσιάζονται τα υπολογιζόμενα



Σχήμα 4.2: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία). Πάνω: πεδίο του μέτρου της ταχύτητας $|v|$ (άνω ήμισυ) και του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας $|u|$ (κάτω ήμισυ). Κάτω: πεδίο στατικής (άνω ήμισυ) και συζυγούς στατικής πίεσης (κάτω ήμισυ).

πεδία των συζυγών μεταβλητών της τύρβης k_a και ε_a . Από τη σύγκριση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας με τις πεπερασμένες διαφορές, σχήμα 4.12, προκύπτει ότι η ταύτιση είναι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, σχεδόν απόλυτη. Χρησιμοποιώντας τις υπολογιζόμενες παραγώγους ευαισθησίας σε συνδυασμό με τη μέθοδο βελτιστοποίησης της εφαρμογής 4.8.1 επιτυγχάνουμε τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας του αγωγού. Οι τιμές της συνάρτησης κόστους κατά την πορεία του αλγορίθμου απεικονίζονται στο σχήμα 4.13. Η αρχική και η τελική γεωμετρία του αγωγού (ύστερα από 100 κύκλους της απότομης καθόδου) παρουσιάζονται στο σχήμα 4.14.

4.8.3 Τρίτη εφαρμογή: 2Δ πτερύγωση συμπίεστή

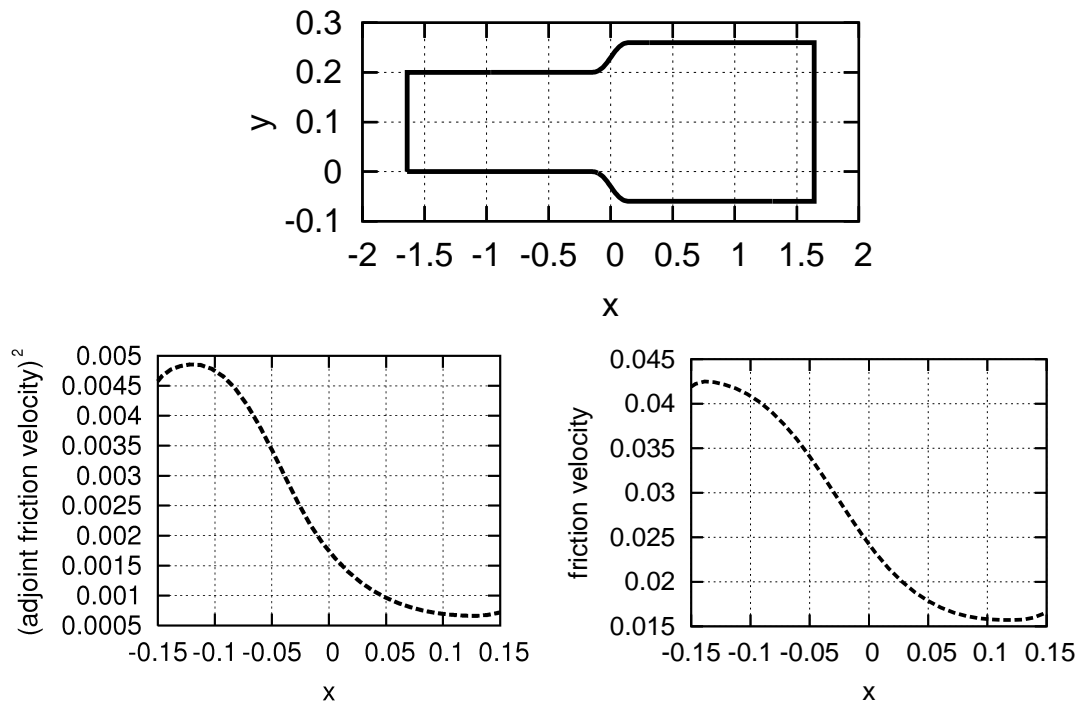
Στην τελευταία εφαρμογή μελετάται μια 2Δ πτερύγωση συμπίεστή. Η γωνία κλίσης αυτής είναι ίση με 30° ενώ ο λόγος βήματος προς τη χορδή ίσος με 0.8. Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds είναι ίσος με $Re = 1 \times 10^5$ (βασισμένος στη χορδή της αεροτομής). Η παραμετροποίηση της αεροτομής επιτελείται με συνολικά 26 σημεία ελέγχου Bézier. Από αυτά $M = 16$ συνολικά (από 8 σε κάθε πλευρά της αεροτομής) είναι ελεύθερα να

eps	$\frac{\delta F}{\delta b_1} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_2} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_3} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_4} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_5} 10^3$	$\frac{\delta F}{\delta b_6} 10^3$
10^{-3}	1.079663	-0.260377	-0.708893	8.735602	1.076892	-1.886743
10^{-4}	1.079481	-0.260326	-0.708780	8.684572	1.067312	-1.888232
10^{-5}	1.079481	-0.260322	-0.708775	8.684181	1.067217	-1.888245
10^{-6}	1.079481	-0.260322	-0.708776	8.684176	1.067216	-1.888246
10^{-7}	1.079481	-0.260321	-0.708776	8.684176	1.067217	-1.888245
10^{-8}	1.079480	-0.260315	-0.708758	8.684188	1.067220	-1.888238
10^{-9}	1.079733	-0.260236	-0.708880	8.684050	1.066874	-1.888362
10^{-10}	1.080321	-0.260508	-0.708773	8.684650	1.065857	-1.888672

Πίνακας 4.2: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία): μελέτη παραγώνων ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με χρήση διαφορετικών τιμών για τη στοιχειώδη ποσότητα διαφόρισης (eps). Οι τιμές διαφέρουν ελάχιστα γεγονός το οποίο συνεπάγεται ότι η ακρίβεια των υπολογιζόμενων τιμών αναφοράς για τις παραγώνους ευαισθησίας με $eps = 10^{-5}$ που χρησιμοποιούνται στο σχήμα 4.6 και στον πίνακα 4.1 είναι αξιόπιστη.

	$\frac{\delta F}{\delta b_{1,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{2,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{3,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{1,y}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{2,y}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{3,y}} 10^{-2}$
<i>AM</i>	0.132350	0.146288	0.138355	1.408965	1.338328	1.383206
<i>FT</i>	0.079660	0.092165	0.080026	0.646869	0.657732	0.680766
<i>FD</i>	0.134748	0.155444	0.149410	1.335599	1.371520	1.504939
	$\frac{\delta F}{\delta b_{4,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{5,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{6,x}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{4,y}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{5,y}} 10^{-2}$	$\frac{\delta F}{\delta b_{6,y}} 10^{-2}$
<i>AM</i>	-0.104727	-0.123075	-0.133411	-1.303809	-1.293449	-1.439183
<i>FT</i>	-0.035169	-0.049470	-0.065510	-0.499948	-0.594848	-0.746616
<i>FD</i>	-0.131045	-0.153260	-0.146802	-1.354187	-1.369399	-1.527819

Πίνακας 4.3: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S (αρχική γεωμετρία): οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο που προτείνει διατριβή για την περίπτωση μοντέλου τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds, (*AM*), τη θεώρηση της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας (*FT*) και, τέλος, με χρήση πεπερασμένων κεντρικών διαφορών ($eps = 10^{-5}$), (*FD*).

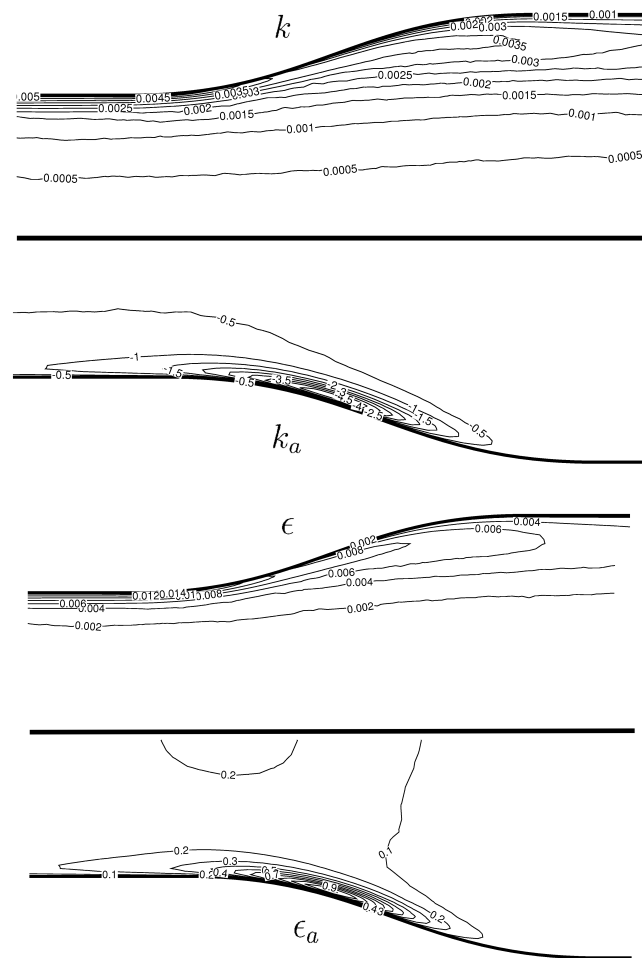


Σχήμα 4.3: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία). Αριστερά: κατανομή του τετραγώνου της συζυγούς ταχύτητας τριβής, u_{τ}^2 , ποσότητα που είναι η συζυγής διατμητική τάση στο τοίχο. Δεξιά: κατανομή της ταχύτητας τριβής, v_{τ} . Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις δύο κατανομές και σε σχέση με την εξίσωση 4.60β', συμπεραίνεται ότι το τετράγωνο της συζυγούς ταχύτητας τριβής συμπεριφέρεται ανάλογα με την ταχύτητα τριβής.

μεταβάλλονται κατά την y διεύθυνση. Από τα 5 σημεία ελέγχου της κάθε πλευράς τα οποία είναι σταθερά και, συνεπώς, αμετάβλητα τα 3 εντοπίζονται κοντά στην ακμή πρόοπτης και τα άλλα 2 στην ακμή εκφυγής. Τα πεδία της ταχύτητας (μέτρο) και της πίεσης απεικονίζονται στο σχήμα 4.15. Η μέση τιμή της αδιάστατης απόστασης y^+ των πρώτων κόμβων από το τοίχο είναι της τάξης του 40. Οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας παρουσιάζονται στο σχήμα 4.16, όπου συγκρίνονται συγχρόνως με τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Από τη σύγκριση αυτή συμπεραίνεται ότι η μέθοδος υπολογίζει με ακρίβεια τις ζητούμενες παραγωγές ευαισθησίας. Τέλος, στα σχήματα 4.17 και 4.18 παρουσιάζονται τα πεδία ροής για τις συζυγείς μεταβλητές: πρώτα της μέσης ροής, u (μέτρο, σχήμα 4.17), q (σχήμα 4.17) και μετά του μοντέλου τύρβης k_a (σχήμα 4.18) και ε_a (σχήμα 4.18).

4.9 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώθηκε μαθηματικά (συζυγείς εξισώσεις, συζυγείς οριακές συνθήκες, έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας) και παρουσιάστηκαν αποτελέσματα μιας

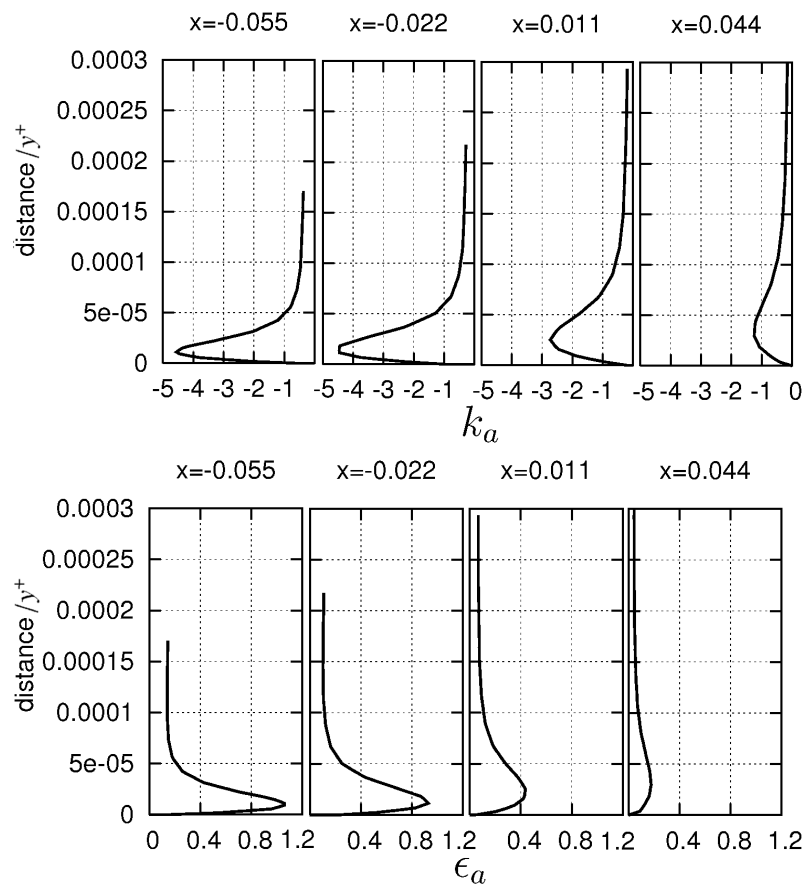


Σχήμα 4.4: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία). Πάνω: πεδίο των μεταβλητών k (άνω ήμισυ) και k_a (κάτω ήμισυ). Κάτω: πεδίο των μεταβλητών ε (άνω ήμισυ) και ε_a (κάτω ήμισυ).

συνεχούς συζυγούς μεθόδου για υψηλούς αριθμούς Reynolds. Η προτεινόμενη συζυγής μέθοδος (α) λαμβάνει υπόψη τις ακριβείς οριακές συνθήκες του προβλήματος της ροής στην περιοχή του τοίχου (δηλαδή το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου), (β) χρησιμοποιεί το μοντέλο συζυγών συναρτήσεων τοίχου, το οποίο αποτελεί τη συζυγή οριακή συνθήκη στο στερεό όριο και προκύπτει από τη συζυγή διατύπωση με βάση το (α) και (γ) εμπεριέχει το συζυγές μοντέλο τύρβης $k_a-\varepsilon_a$.

Χρησιμοποιώντας την τεχνική των συζυγών συναρτήσεων τοίχου, το σύστημα των συζυγών εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που εφαρμόζεται στις εξισώσεις κατάστασης, δηλαδή χωρίς να εφαρμοστούν σχήματα αριθμητικής διαφόρισης των συζυγών ποσοτήτων στα στερεά τοιχώματα. Η προτεινόμενη συζυγής μέθοδος είναι, όπως αποδείχτηκε στις εφαρμογές, ακριβής και οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται σχεδόν ταυτίζονται με αυτές που υπολογίζονται από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

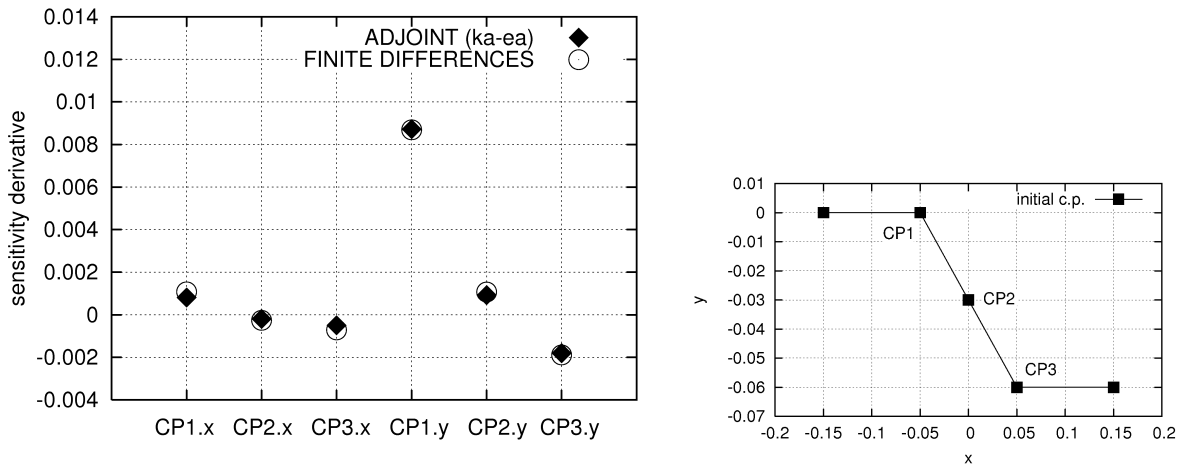
Συνεπώς, με τη νέα αυτή συζυγή διατύπωση μπορούν να υπολογίζονται παράγωγοι ευαισθησίας οι οποίες είναι ακριβείς σε προβλήματα με μοντέλα τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds (μοντέλο συναρτήσεων τοίχου) στα οποία προηγουμένως δεν υπήρχε η δυνατότητα



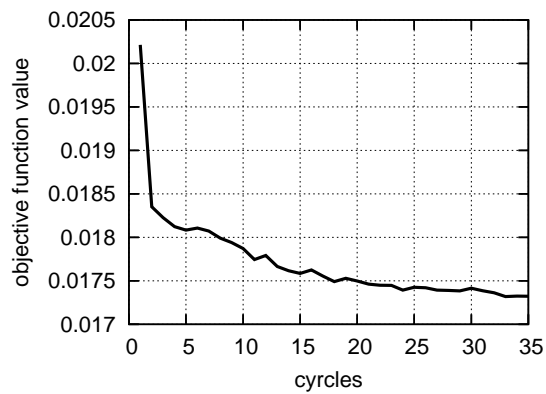
Σχήμα 4.5: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία). Κατανομές των συζυγών μεταβλητών k_a (πάνω) και ϵ_a (κάτω) κάθετα στον τοίχο για τέσσερις διαφορετικές θέσεις κατά μήκος του αγωγού στο κάτω μέρος του.

υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με χρήση συζυγών τεχνικών. Η χρησιμοποίηση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, ακόμα και στο πλαίσιο επίλυσης της ροής με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου, παραμένει μια εξαιρετικά δαπανηρή διαδικασία. Συνεπώς ο μηχανικός για να χρησιμοποιήσει τη συζυγή μέθοδο πρέπει να καταφύγει στην επίλυση με χρήση μοντέλων τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds με ό,τι αυτό συνεπάγεται (δυσκολία γένεσης πλέγματος, αύξηση του υπολογιστικού κόστους). Το κέρδος στην περίπτωση αυτή είναι διπλό, αφού το υπολογιστικό κόστος ελαττώνεται από τη χρησιμοποίηση μικρότερου πλήθους στοιχείων πλεγμάτων τόσο για την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης όσο και των συζυγών τους.

Παρότι η μέθοδος, στην παρούσα διατριβή, εξειδικεύτηκε για την περίπτωση όπου η συνάρτηση κόστους είναι οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου, εύκολα μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να εφαρμοστεί και σε άλλες συναρτήσεις. Τα όσα παρουσιάστηκαν μπορούν, επίσης, να εφαρμοστούν για οποιοδήποτε μοντέλο τύρβης μιας ή δύο μ.δ.ε. το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο των συναρτήσεων τοίχου. Επιπροσθέτως, η μέθοδος οδήγησε στο να επιβληθούν συνθήκες ολίσθησης για τη συζυγή ταχύτητα στο 'στερεό όριο' (ο πραγματικός τοίχος βρίσκεται σε απόσταση Δ κάτω από τον κόμβο P , σχήμα 4.1), όπως ακριβώς συμβαίνει και στο πρόβλημα των εξισώσεων κατάστασης. Το γεγονός αυτό

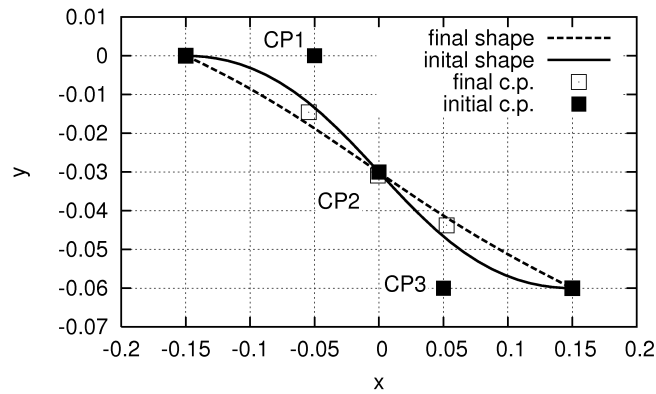


Σχήμα 4.6: Αξονικός διαχύτης (αρχική γεωμετρία): παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Σύγκριση με πεπερασμένες διαφορές (αριστερά). Δεξιά απεικονίζονται οι μεταβλητές ελέγχου της γεωμετρίας.

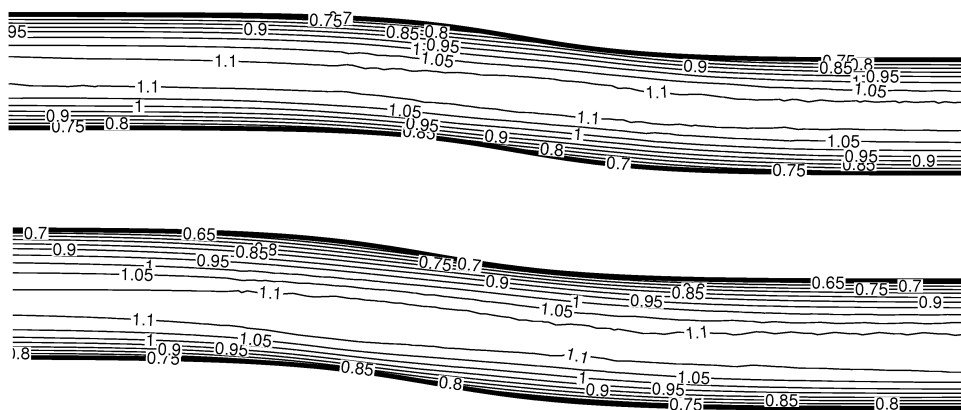


Σχήμα 4.7: Αξονικός διαχύτης: μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους κατά την πορεία της μεθόδου βελτιστοποίησης.

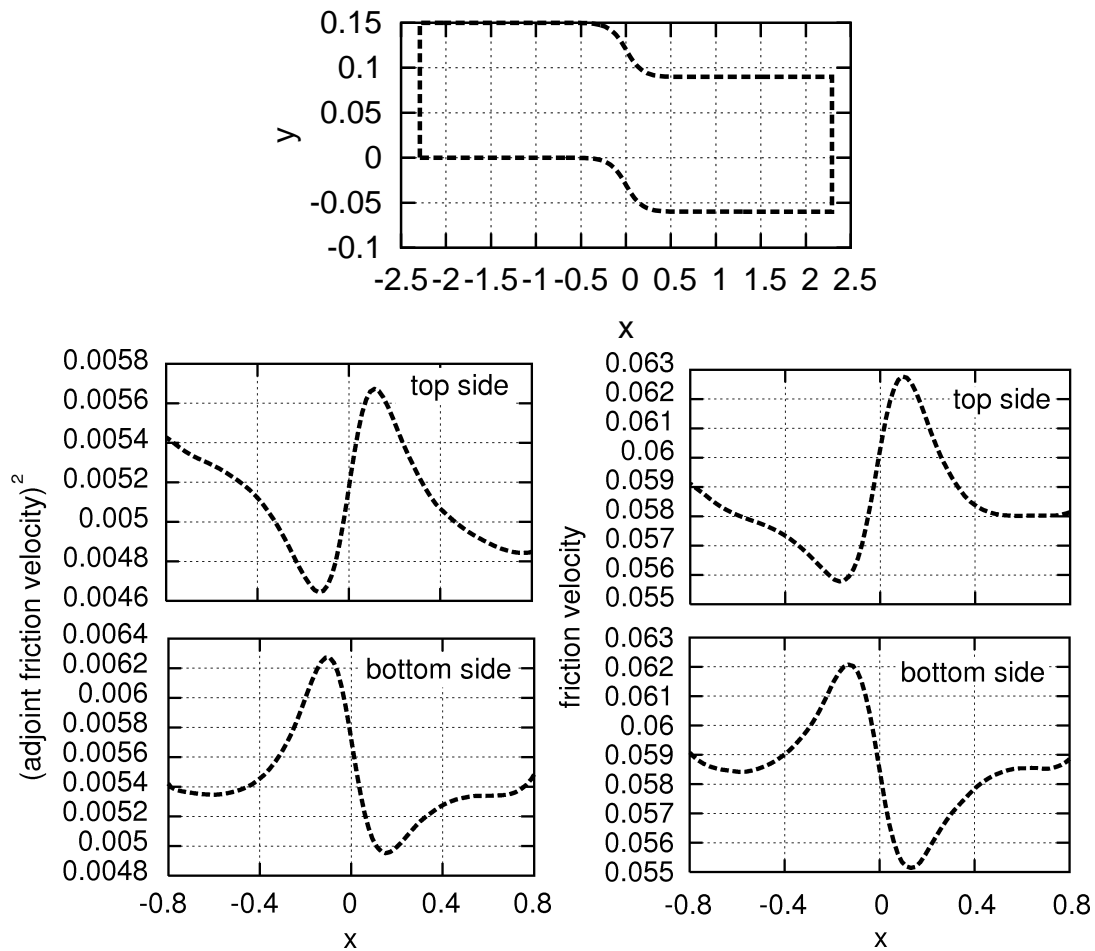
δεν είναι δεσμευτικό, η θεωρία που παρουσιάστηκε προηγουμένως μπορεί να προσαρμοστεί στην περίπτωση που η εφαρμογή του μοντέλου συναρτήσεων τοίχου στο πρόβλημα της ροής γίνεται με τρόπο διαφορετικό από αυτόν που περιγράφηκε στο παρόν κεφάλαιο.



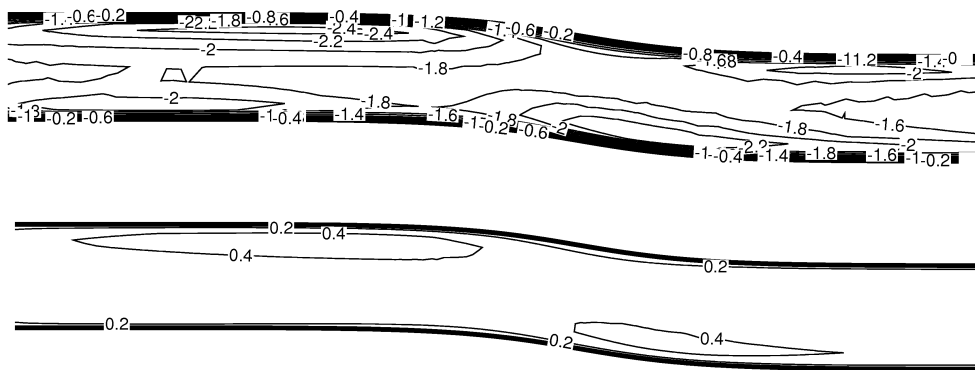
Σχήμα 4.8: Αξονικός διαχύτης: αρχική και τελική γεωμετρία του κάτω μέρους του αγωγού με μεγενθυμένη την κλίμακα των τεταγμένων προκειμένου να γίνει πιο ευκρινές το γράφημα. Παρουσιάζονται και τα σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις δύο γεωμετρίες.



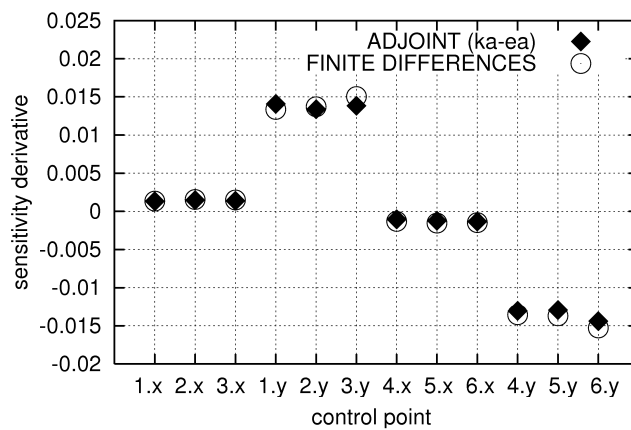
Σχήμα 4.9: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S (αρχική γεωμετρία): πεδία του μέτρου της ταχύτητας (πάνω) και της συζυγούς ταχύτητας (κάτω).



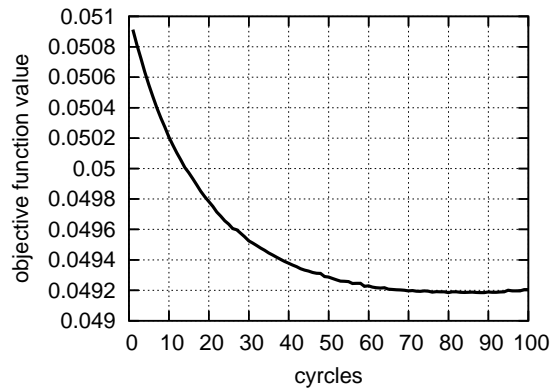
Σχήμα 4.10: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S (αρχική γεωμετρία). Πάνω: η γεωμετρία του αγωγού (η κλίμακα των δύο αξόνων δεν είναι η ίδια). Αριστερά: το τετράγωνο της συζυγούς ταχύτητας τριβής, u_τ^2 , (συζυγής διατμητική τάση στον τοίχο), κατανομή κατά το μήκος της διαμόρφωσης στην περιοχή του στερεού ορίου. Δεξιά: κατανομή της ταχύτητας τριβής, v_τ , στην ίδια περιοχή.



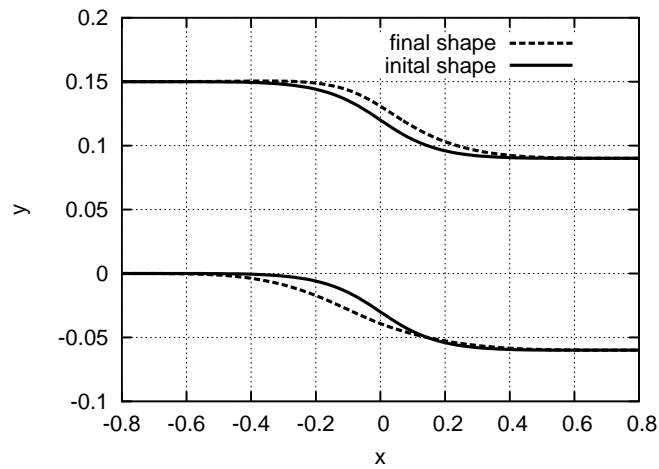
Σχήμα 4.11: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S (αρχική γεωμετρία). Πεδία των συζυγών μεταβλητών k_a (πάνω) και ε_a (κάτω).



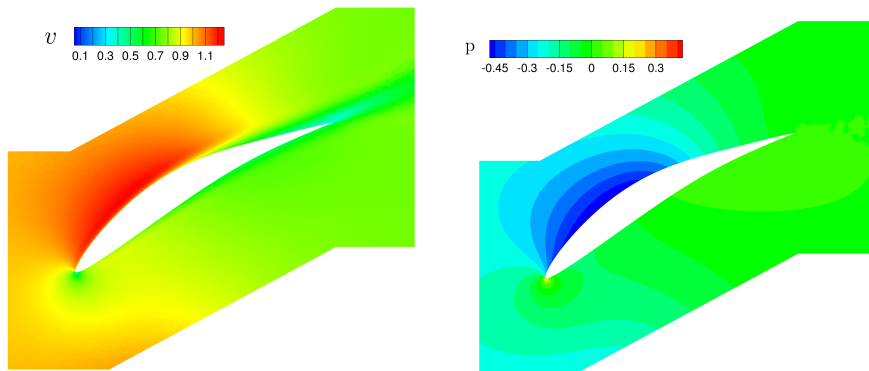
Σχήμα 4.12: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S (αρχική γεωμετρία). Παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Σύγκριση με πεπερασμένες διαφορές. Τα σημεία ελέγχου 1, 2 και 3 αντιστοιχούν στην κάτω μεριά του αγωγού, ενώ τα σημεία 4, 5 και 6 στην επάνω.



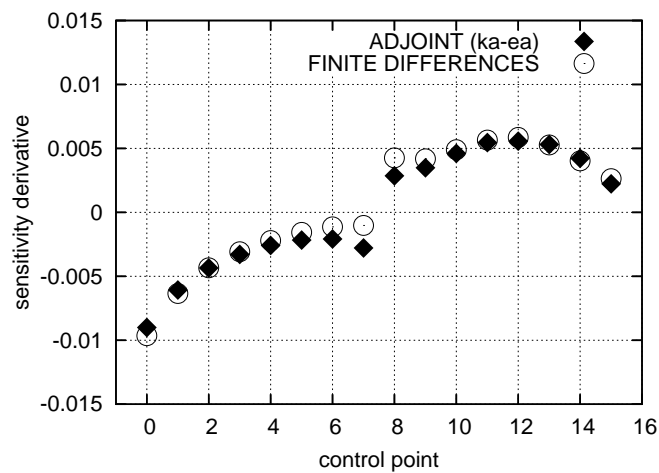
Σχήμα 4.13: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S . Μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους κατά την πορεία της μεθόδου βελτιστοποίησης.



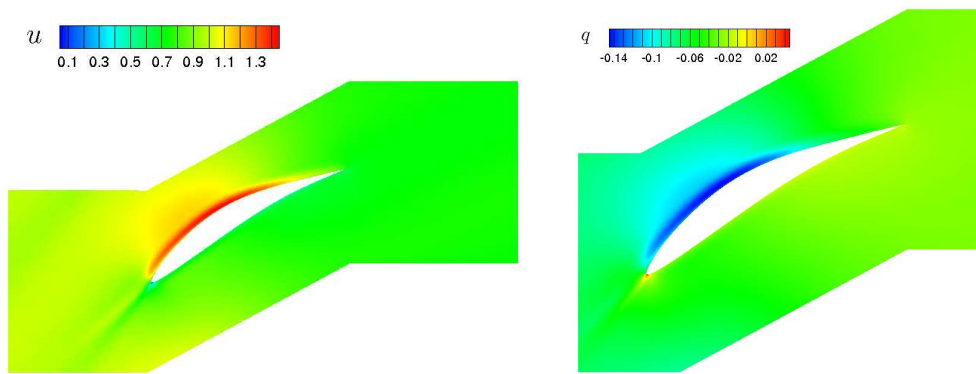
Σχήμα 4.14: Αγωγός με διαμόρφωση τύπου S . Αρχική και τελική γεωμετρία του κάτω τμήματος του αγωγού με μεγενθυμένη την κλίμακα των τεταγμένων προκειμένου να γίνει πιο ευκρινές το γράφημα.



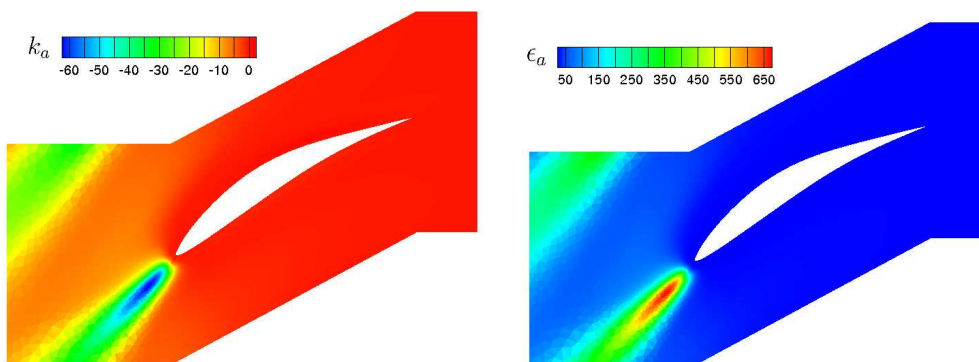
Σχήμα 4.15: 2Δ περύγωση συμπίεστη. Αριστερά: πεδίο του μέτρου της ταχύτητας $|v|$. Δεξιά: πεδίο της πίεσης.



Σχήμα 4.16: 2Δ περύγωση συμπίεστη: παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Σύγκριση με πεπερασμένες διαφορές.



Σχήμα 4.17: 2Δ περύγωση συμπίεστη. Αριστερά: πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας $|u|$. Δεξιά: πεδίο της συζυγούς πίεσης.



Σχήμα 4.18: 2Δ περύγωση συμπίεστη. Αριστερά: πεδίο της συζυγούς μεταβλητής k_a . Δεξιά: πεδίο της συζυγούς μεταβλητής ϵ_a .

Κεφάλαιο 5

Συζυγείς μέθοδοι: συμβολή στην επιλογή θέσης και τρόπου ενεργητικού ελέγχου της ροής

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και διατυπώνονται μαθηματικά συνεχείς συζυγείς μέθοδοι με σκοπό τη χρησιμοποίησή τους στην προκαταρκτική μελέτη προβλημάτων ενεργητικού ελέγχου της ροής. Το ερώτημα το οποίο καλούνται να απαντήσουν οι συζυγείς μέθοδοι αφορά στον προσδιορισμό της θέσης ή των θέσεων, πάνω σε μια ήδη υπάρχουσα γεωμετρία, που θα διανοιχτούν οπές από όπου θα πραγματοποιείται αναρρόφηση ή έγχυση δέσμης ρευστού. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται στο μηχανικό η δυνατότητα να προσδιορίζει με βάση συγκεκριμένα αεροδυναμικά/υδροδυναμικά κριτήρια, δηλαδή συναρτήσεις που εκφράζουν απώλειες (εξίσωση 2.17), αντίσταση (εξίσωση (2.3.2) κ.λ.π., τη θέση ή τις θέσεις εκείνες όπου η ενδεχόμενη τοποθέτηση ελέγχου της ροής θα επιφέρει την πλέον σημαντική βελτίωση από πλευράς αεροδυναμικής συμπεριφοράς. Οι θέσεις αυτές υποδηλώνονται από τις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται από τη συζυγή μέθοδο, όπου η σχετική σημασία της μιας θέσης σε σύγκριση με τις υπόλοιπες ποσοτικοποιείται από το μέγεθος της τιμής της παραγώγου ευαισθησίας στη θέση αυτή. Επίσης, το πρόσημο των παραγώγων υποδεικνύει το είδος του ελέγχου που θα επιβληθεί, αν για παράδειγμα συνίσταται για αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού.

Εν γένει, ο έλεγχος της ροής περιλαμβάνει τη χρήση παθητικών ή/και ενεργητικών διατάξεων οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση της ροής του ρευστού στην περιοχή κοντά στα στερεά τοιχώματα. Η εφαρμογή τεχνικών ελέγχου της ροής μπορεί να αποσκοπεί στον έλεγχο της αποκόλλησης της ροής έτσι ώστε να περιοριστεί αυτή, αν όχι να εξαλειφθεί, ή να καθυστερήσει η εμφάνισή της. Επίσης, άλλοι στόχοι μπορεί να είναι ο έλεγχος του φαινομένου της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη (είτε επιδιώκοντας την καθυστέρησή της, είτε υποδοθηθώντας την), το να περιοριστεί ή να ενισχυθεί η τύρβη, το να ελεγχθούν κύματα κρούσης και τα σχετιζόμενα με αυτά οριακά στρώματα, κ.λ.π.. Όλα τα παραπάνω φαινόμενα συνδέονται άμεσα με την αύξηση της αντίστασης (εξωτερική αεροδυναμική) ή των απωλειών (εσωτερική αεροδυναμική).

Οι τεχνικές παθητικού ελέγχου στηρίζονται σε διαμορφώσεις πάνω στην επιφάνεια της αεροδυναμικής μορφής, όπως ραβδώσεις για τη μείωση των διατμητικών τάσεων στο τοίχωμα ή κυρτώματα για τον έλεγχο των κυμάτων κρούσης, διατάξεις για τη διάσπαση μεγάλων δομών/δινών μέσα στο οριακό στρώμα (Large Eddy Breakup devices – LEBUs), ειδικές

διαμορφώσεις και διατάξεις για τις ακμές εκφυγής των πτερύγων ώστε να ενισχυθεί η άνωση (π.χ. *Gurney flap/tabs*, αποκλίνουσες ακμές εκφυγής), παλλόμενα πτερύγια καμπυλότητας, *reversed-flow flaps*, γεννήτριες δινών (*vortex generators*), κ.λ.π.. Οι παραπάνω διατάξεις παρουσιάζονται λεπτομερέστερα στο [150]. Το παρόν κεφάλαιο δεν ασχολείται με τεχνικές παθητικού ελέγχου και επομένως δεν θα επεκταθεί περαιτέρω η σχετική ανάλυση. Εξάλλου, η περίπτωση του παθητικού ελέγχου εμπίπτει στα όσα περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής, δεδομένου ότι πρόκειται για παρεμβάσεις στη μορφή του σώματος.

Ο ενεργητικός έλεγχος της ροής μπορεί να εφαρμοστεί επιβάλλοντας αναρρόφηση ή έγχυση σταθερής δέσμης ρευστού σε διάφορες θέσεις της γεωμετρίας. Ο Prandtl, [151], ήταν ο πρώτος που πρότεινε την εφαρμογή αναρρόφησης ρευστού διαμέσου μιας οπής στην επιφάνεια του σώματος με σκοπό να περιοριστεί η αποκόλληση του οριακού στρώματος. Από τότε, επιτεύχθηκε σημαντική πρόοδος στις τεχνικές ελέγχου με χρήση αναρρόφησης ή έγχυσης ρευστού σταθερής δέσμης και έγχυσης παλλόμενης δέσμης. Σχετική εμπειροστατωμένη επισκόπηση βρίσκεται στην εργασία [152]. Η παρούσα διατριβή απασχολείται με τεχνικές ελέγχου σταθερής δέσμης ρευστού (αναρρόφηση ή έγχυση). Η κατανόηση των φυσικών αρχών που διέπουν τη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή οδήγησε στην ανάπτυξη τεχνικών ελέγχου της μετάβασης μέσω αναρρόφησης ή/και μετάδοσης θερμότητας (ψύξη). Αυτές επιτυγχάνουν να καθυστερήσουν τη μετάβαση βασιζόμενες στην εξάλειψη ή έστω στον περιορισμό των αναπτυσσόμενων διαταραχών μέσα στο οριακό στρώμα οι οποίες οδηγούν σε τυρβώδεις ροές. Η αναρρόφηση/έγχυση ρευστού μπορεί να υλοποιηθεί μέσω πορωδών επιφανειών, οπών επί του στερεού ορίου και διάτρητων επιφανειών που αποτελούνται από μεγάλο πλήθος μικροσκοπικών οπών, [153, 154].

Στην περιοχή της εσωτερικής αεροδυναμικής η αναρρόφηση σταθερής δέσμης ρευστού έχει εφαρμοστεί σε πτερυγώσεις συμπιεστών, [155, 156], οδηγώντας σε μείωση της αποκόλλησης. Επίσης, στις εργασίες [157, 158] εφαρμόζεται αναρρόφηση στα κελύφη αποσκοπώντας στον έλεγχο της αποκόλλησης στην περιοχή της γωνίας ποδός. Στην εργασία [159] χρησιμοποιήθηκαν τρεις παλλόμενες δέσμες ρευστού ανάντι του δρομέα μιας βαθμίδας αξονικού συμπιεστή επιτυγχάνοντας έλεγχο της περιστροφικής αποκόλλησης. Επιπρόσθετα, στην εργασία [160] δείχτηκε ότι το ποσοστό της εγχυόμενης ορμής επιδρά σημαντικά στη ποσοστιαία βελτίωση του περιθωρίου λειτουργίας στην πρώτη βαθμίδα του συμπιεστή χαμηλής πίεσης LARZAC, παρέχοντας μάλιστα τη καμπύλη εξάρτησης των δύο μεγεθών. Στην εργασία [161] μελετάται η αποδοτικότητα χρησιμοποίησης δεσμών ρευστού υψηλής ταχύτητας για τον έλεγχο της αποκόλλησης σε ένα διαχύτη, [162].

Από τη σκοπιά της ΥΡΑ, στις εργασίες [163, 164] χρησιμοποιούνται τεχνικές RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) επίλυσης των εξισώσεων της μέσης ροής και του μοντέλου τύρβης με στόχο την ανάλυση της ροής σε διατάξεις σύνθετων δεσμών (*synthetic jets*). Αυτά τα υπολογιστικά πειράματα έδειξαν ότι η λεπτομερής μοντελοποίηση της γεωμετρίας ολόκληρης της διάταξης παραγωγής σύνθετων δεσμών δεν είναι απαραίτητη και, αντί αυτής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απλοποιημένη γεωμετρία χωρίς να επηρεάζεται η ακρίβεια των υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Στην εργασία [165] χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά λογισμικά επίλυσης της ροής μέσω τεχνικών RANS, σκοπός είναι η ανάλυση της επίδρασης της εφαρμογής είτε σταθερής είτε χρονικά μεταβαλλόμενης αναρρόφησης ρευστού σε ένα αγωγό με στένωση διατομής λόγω ύπαρξης κυρτώματος (πρόκειται για το τρίτο πρόβλημα του CFDVal2004 Workshop, <http://cfdval2004.larc.nasa.gov>). Για τη διαμόρφωση αυτή υπάρχουν επαρκή πειραματικά αποτελέσματα, [166]. Τα αποτελέσματα των δύο υπολογιστικών μεθόδων συγκρίνονται μεταξύ τους και προκύπτει ότι προσεγγίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια τα πειραματικά. Επίσης, με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα

της εργασίας [165] η διάταξη ελέγχου της ροής μπορεί να μοντελοποιηθεί με αρκετή επιτυχία μέσω μιας οριακής συνθήκης πάνω στο στερεό όριο της γεωμετρίας (τουλάχιστον για την περίπτωση της σταθερής αναρρόφησης ρευστού). Το παραπάνω συμπέρασμα είναι άκρως σημαντικό γιατί, με την απουσία της γεωμετρίας της διάταξης ελέγχου (ακόμα και μιας απλοποιημένης εκδοχής αυτής), αφενός η διαδικασία γένεσης υπολογιστικού πλέγματος καθίσταται λιγότερο πολύπλοκη και αφετέρου το πλέγμα που προκύπτει είναι μικρότερων διαστάσεων και, επομένως, ο υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση της ροής μειώνεται σημαντικά. Στην εργασία [167] διενεργείται μια αριθμητική μελέτη σε δύο γεωμετρίες διαχυτών στους οποίους επιβάλλεται έγχυση ρευστού. Στην εργασία [168] διενεργείται μια παραμετρική μελέτη σε μια γεωμετρία παρόμοια με αυτήν του τρίτου προβλήματος του CFDVal2004 Workshop, <http://cfdval2004.larc.nasa.gov>. Η παραμετρική μελέτη αφορά τη θέση της δέσμης του ρευστού, την κλίση αυτής, το ρυθμό αναρρόφησης του ρευστού και το εύρος της οπής. Με μια βήμα-προς-βήμα διαδικασία βελτιστοποίησης επιτεύχθηκε η μείωση κατά περίπου 35% του μήκους αποκόλλησης. Στη διατριβή [169] πραγματοποιείται προσομοίωση 3D συμπιεστή σε χαμηλές παροχές με διακριτή έγχυση ανάντη. Η προσομοίωση του ελέγχου γίνεται μέσω εφαρμογής κατάλληλων οριακών συνθηκών στις θέσεις των εγχυτήρων. Τέλος, στην εργασία [170] παρουσιάζεται μια επίσης εφαρμογή τεχνικών ΥΡΔ στην ανάλυση ενεργητικού ελέγχου στην αεροτομή NACA0012 όπου μελετώνται οι περιπτώσεις της χρονικά μεταβαλλόμενης αναρρόφησης/έγχυσης ρευστού σε συνδυασμό με τρεις παραμέτρους που σχετίζονται με τον επιβαλλόμενο έλεγχο: (α) τη θέση της δέσμης του ρευστού πάνω στην αεροτομή, (β) το πλάτος της περιοδικής αναρρόφησης/έγχυσης και (γ) τη γωνία της δέσμης.

Στο κεφάλαιο αυτό, όπως και στα προηγούμενα της διατριβής, χρησιμοποιούνται οι χρονικά μόνιμες εξισώσεις της ροής και συνεπώς οι συζυγείς εξισώσεις που προκύπτουν είναι και αυτές μόνιμες. Με βάση αυτό, επαναδιατυπώνεται το ερώτημα που προηγουμένως ετέθη ως εξής: ποια ή ποιες είναι οι πιο πολλά υποσχόμενες θέσεις στην ήδη υπάρχουσα γεωμετρία, στην οποία/οποιές θα διανοιχτούν οπές από όπου θα πραγματοποιείται αναρρόφηση ή έγχυση δέσμης σταθερής παροχής ρευστού; Δηλαδή, αναφερόμαστε σε σταθερή αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού και όχι σε περιπτώσεις μη-μόνιμης ροής όπως π.χ. η περίπτωση σύνθετων δεσμών.

Η χρησιμοποίηση της συζυγούς μεθόδου για τον προσδιορισμό των θέσεων στις οποίες θα τοποθετηθεί ο έλεγχος και του είδους αυτού παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα: (α) οι προτεινόμενες παράμετροι υποδεικνύονται με βάση καθορισμένες συναρτήσεις κόστους, εισάγεται δηλαδή ένα αυστηρά μαθηματικό κριτήριο για αυτόν το σκοπό και (β) δημιουργείται ένα 'αυτοματοποιημένο' εργαλείο λήψης των σχετικών αποφάσεων το οποίο δεν απαιτεί τη σε βάθος κατανόηση της φυσικής της ροής (της μετάβασης, της αποκόλλησης, των δινών και των διαταραχών του οριακού στρώματος, κ.λ.π.). Όλα αυτά βέβαια, με την προϋπόθεση ότι κανείς μπορεί να 'αναλάβει' το κόστος δύο αριθμητικών επιλύσεων του προβλήματος της ροής (που ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του ροϊκού και του συζυγούς πεδίου) και ότι διαθέτει το απαραίτητο λογισμικό της συζυγούς μεθόδου.

Τέλος, να αναφερθεί ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας το ανοικτό λογισμικό, [124, 125] με το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras χαμηλών αριθμών Reynolds. Προφανώς και η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί στο οικείο λογισμικό καθώς και με άλλα μοντέλα τύρβης.

5.1 Προσδιορισμός της θέσης τοποθέτησης της δέσμης αναρρόφησης ή έγχυσης

Η ανάλυση που ακολουθεί αφορά στην παρουσίαση της συζυγούς μεθόδου για την επιλογή, με βάση τις τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας, της θέσης ή των θέσεων εκείνων στις οποίες θα τοποθετηθούν οι δέσμες του ρευστού. Επίσης ανάλογα με το πρόσημο των παραγώγων καθορίζεται αν πρόκειται για αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού. Η παρουσίαση γίνεται με τρόπο γενικό, ως προς την έννοια ότι ισχύει για οποιοδήποτε συναρτησιακό το οποίο αναλύεται με βάση τις εξισώσεις 2.15, 2.16α' και 2.16β'. Ως παράμετροι σχεδιασμού εκλέγονται οι ταχύτητες σε κάθε κόμβο που ανήκει στην επιφάνεια ενδιαφέροντος του προβλήματος, για παράδειγμα, σε όλη την επιφάνεια ενός περυγίου ή στο οπίσθιο τμήμα ενός οχήματος ή σε ολόκληρο το όχημα. Συνεπώς, σε κάθε κόμβο από τους m στο πλήθος που ανήκουν στο μελετώμενο στερεό όριο, ισχύει ότι $\mathbf{b}_m = \mathbf{v}$ (ή $b_m^l = v_l$, $l = 1, 2, (3)$). Οι ταχύτητες αυτές δεν είναι υπαρκτές δεδομένου ότι στο στερεό όριο ισχύει η συνθήκη μη εισχώρησης (συνεκτική ροή) έχουν όμως την έννοια ότι θα υφίστανται εάν και εφόσον στην εκάστοτε θέση επιλεγεί να τοποθετηθεί δέσμη αναρροφόμενου ή εγχυόμενου ρευστού.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία βρίσκεται στην 'αίχμη' της εξέλιξης στις συζυγείς μεθόδους καθώς ελάχιστες και, σχετικά πρόσφατες εργασίες, που ανήκουν στην ενότητα αυτή έχουν δημοσιευθεί. Στην εργασία [171], χρησιμοποιείται μια μη-μόνιμη συζυγής μέθοδος για τον προσδιορισμό των οριακών συνθηκών (αναρρόφηση/έγχυση) στο πίσω τμήμα ενός κυλίνδρου, με στόχους τη μείωση της αντίστασης και τη μείωση της στροβιλότητας. Επίσης, στην εργασία [172] γίνεται έλεγχος περυγισμού (flutter control) αεροτομής, μέσω της βέλτιστης αναρρόφησης/εμφύσησης ρευστού. Συγκεκριμένα, επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις για ένα πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού, στο οποίο αναζητούνται οι βέλτιστες τιμές αναρρόφησης/εμφύσησης ρευστού σε σημεία επί της αεροτομής, ώστε να ελαχιστοποιούνται τα φορτία.

Στα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου, τα οποία αναφέρθηκαν στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο, προστίθενται και αυτά που σχετίζονται με τη χρησιμοποίηση της συζυγούς τεχνικής έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Πιο συγκεκριμένα, η συζυγής μέθοδος πλεονεκτεί έναντι της τεχνικής των πεπερασμένων διαφορών όχι μόνο σε επίπεδο υπολογιστικού κόστους (όπως έχει ήδη επισημανθεί) αλλά και ως προς το ότι για τις εφαρμογές προσδιορισμού του ελέγχου της ροής πρέπει σε κάθε κόμβο του στερεού ορίου να επιβληθεί μια στοιχειωδώς μικρή τιμή ταχύτητας, στη θέση όπου προηγουμένως ίσχυε η συνθήκη μη-εισχώρησης. Την ίδια στιγμή, στους υπόλοιπους, γειτονικούς, κόμβους θα ισχύει κανονικά η συνθήκη μη-εισχώρησης. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε παράγωγους ευαισθησίας που να απέχουν από τις πραγματικές τους τιμές εξαιτίας ανακριβειών και σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά την παραπάνω διαδικασία. Επιπροσθέτως, ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο λογισμικό επίλυσης της ροής, μπορεί να μην είναι δυνατό να διαχειριστεί ένα και μόνο έναν κόμβο του 'στερεού' ορίου ως είσοδο με ταχύτητα ίση με τη στοιχειώδη μεταβολή των πεπερασμένων διαφορών.

5.1.1 Βασική ανάπτυξη συνεκτικών όρων

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί η διατύπωση για στρωτές ροές. Το γεγονός ότι οι παράμετροι σχεδιασμού είναι οι ταχύτητες στο στερεό όριο, οδηγεί στο ότι δεν υφίσταται καμία απολύτως μεταβολή στη γεωμετρία. Επομένως, για κάθε κόμβο του χωρίου ροής (και των ορίων του συμπεριλαμβανομένων) ισχύει ότι $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$. Το ίδιο ισχύει και για τους

στοιχειώδεις όγκους ελέγχου καθώς και για τις στοιχειώδεις επιφάνειες στα όρια του πεδίου ροής, δηλαδή $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m^l} = 0$ και $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m^l} = 0$, αντιστοίχως. Η ιδιότητα 2.6, του κεφαλαίου 2, απλοποιείται και λαμβάνει την παρακάτω μορφή σε κάθε κόμβο του χωρίου

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_m^l} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial b_m^l} \quad (5.1)$$

Εξαιτίας των παραπάνω σχέσεων, η έκφραση 2.10, για την περίπτωση του ελέγχου της ροής γίνεται

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m^l} = \frac{\delta F}{\delta b_m^l} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m^l} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m^l} d\Omega \quad (5.2)$$

Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί τα όσα έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο 2 ως προς το ότι οι όροι της έκφρασης 2.42 που παραμένουν στα στερεά όρια είναι, στην περίπτωση αυτή, οι εξής

$$-\int_{S_w} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} \right) dS + \int_{S_w} \phi_2 \frac{\delta p}{\delta b_m^l} dS + \int_{S_w} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} dS \quad (5.3)$$

όπου οι ποσότητες $\phi_{1,ij}, \phi_2$ δίνονται από την εξίσωση 2.44.

Οι συζυγείς εξισώσεις είναι οι ίδιες με αυτές του κεφαλαίου 2, δηλαδή ισχύουν οι εξισώσεις 2.40, 2.41. Το ίδιο ισχύει και για τις συζυγείς οριακές συνθήκες σε είσοδο και στα στερεά όρια $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} \right) = 0, \phi_2 = 0$, καθώς επίσης και στην έξοδο του πεδίου ροής 2.53α', 2.53β'.

Η έκφραση για τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες των δεσμών αναρρόφησης ή έγχυσης

$$\frac{\delta F}{\delta b_m^l} = \int_{S_w} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} dS \quad (5.4)$$

Ο όρος $\frac{\delta v_i}{\delta b_m^l}$ είναι ίσος με $[1, 1]$ όταν αναφερόμαστε στον κόμβο m του στερεού ορίου. Για όλους τους υπόλοιπους κόμβους ισούται με μηδέν. Επομένως, στην έκφραση 5.4 το ολοκλήρωμα μηδενίζεται μιας και αποτελείται από μια και μόνο μια μη-μηδενική ολοκληρωτέα ποσότητα, αυτήν του κόμβο m , έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{\delta F}{\delta b_m^l} = \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} |S_m| \quad (5.5)$$

Με $|S_m|$ συμβολίζεται το στοιχειώδες εμβαδόν (μη προσημασμένο) του στερεού ορίου το οποίο αντιστοιχεί στον m -οστό κόμβο. Μια σημαντική παρατήρηση η οποία σχετίζεται με την έκφραση 5.5 έχει να κάνει με το ότι στην εξίσωση αυτή δεν εμφανίζεται κάποιος άμεσος όρος που να προέρχεται από τη συνάρτηση κόστους. Η επίδραση της συνάρτησης είναι, βέβαια, έμμεση καθώς διαφοροποιούνται οι συζυγείς οριακές συνθήκες και, συνεπώς, τροποποιείται το υπολογιζόμενο κάθε φορά συζυγές πεδίο.

5.1.2 Διατύπωση για τυρβώδεις ροές με μοντέλο τύρβης Spalart–Allmaras

Όπως και για τις στρωτές ροές, έτσι και εδώ, οι συζυγείς εξισώσεις είναι οι ίδιες με αυτές του προβλήματος σχεδιασμού μορφής. Συνεπώς, οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής δίνονται από τις εκφράσεις 3.33, 3.34, ενώ η συζυγής εξίσωση του μοντέλου τύρβης δίνεται από την έκφραση 3.35. Οι οριακές συνθήκες είναι αυτές που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 3.

Η ιδιότητα 5.1 συνεπάγεται ότι στα στερεά όρια οι όροι οι οποίοι απομένουν (αφού ικανοποιηθούν οι συζυγείς εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες) από την εξίσωση 3.31 και είναι αντίστοιχοι με αυτούς της έκφρασης 3.46 του κεφαλαίου 3.35, είναι οι

$$\begin{aligned}
 & - \int_{S_w} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} \right) dS + \int_{S_w} \phi_2 \frac{\delta p}{\delta b_m^l} dS - \int_{S_w} \phi_3 \frac{\delta}{\delta b_m^l} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \right) dS \\
 & - \int_{S_w} \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m^l} dS - \int_{S_w} 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m^l} n_j dS - \int_{S_w} \tilde{\nu}_a \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m^l} n_j dS \\
 & + \int_{S_w} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} dS + \int_{S_w} \nu \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m^l} dS
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Επειδή $\frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m^l} = 0$ και, επίσης, επειδή επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες του κεφαλαίου 3, δηλαδή $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} \right) = 0$, $\phi_2 = 0$ και $\phi_3 = 0$, η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m^l} = \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m^l} |S_m| \tag{5.7}$$

Παρότι οι εκφράσεις 5.5 και 5.7 είναι οι ίδιες, πρέπει να επισημανθεί ότι δεδομένου του ότι για την περίπτωση της τυρβώδους ροής επιλύονται και οι συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης συζευγμένες με τις συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής μέσω των όρων *termA1*, εξίσωση 3.34, το συζυγές πεδίο ροής είναι διαφορετικό και, επομένως, και οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι διαφορετικές από ότι αν υπολογίζονταν με την υπόθεση της ‘παγωμένης’ τυρβώδους συνεκτικότητας.

5.2 Εφαρμογές – Προσδιορισμός της θέσης τοποθέτησης της δέσμης και το είδος του ελέγχου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι εφαρμογές της προτεινόμενης συζυγούς διατύπωσης για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες της δέσμης με στόχο τον προσδιορισμό της βέλτιστης θέσης στην οποία θα εφαρμοστεί ο έλεγχος και τον τύπο αυτού (αναρρόφηση/έγχυση). Στις εφαρμογές που ακολουθούν οι παράγωγοι της δύναμης αντίστασης ή των απωλειών ολικής πίεσης (ανάλογα με την εφαρμογή) ως προς την κάθετη στο όριο ταχύτητα στη θέση αυτή, συνεπώς $\frac{\delta F}{\delta b_m^l} = \frac{\delta F}{\delta b_m^l} n_l$, όπου n_l είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που αντιστοιχεί στον κόμβο m του στερεού ορίου (το οποίο, προφανώς, παραμένει αναλλοίωτο). Υπενθυμίζεται ότι $b_m^l = v_l$ στον εκάστοτε κόμβο m του ορίου. Ας επισημανθεί επίσης, ότι το λογισμικό υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας κατά τις συνιστώσες b_m^l , $l = 1, 2(, 3)$, δεν προκαθορίζεται, δηλαδή, ότι η κλίση της δέσμης είναι η κάθετη, n_l , στο τοίχωμα. Στις εφαρμογές που ακολουθούν επιλέγεται ενδεικτικά η κάθετη διεύθυνση, αντί αυτής όμως μπορούν να υπολογιστούν παράγωγοι ευαισθησίας για οποιαδήποτε επιθυμητή κλίση δέσμης. Οι θέσεις στις οποίες οι απόλυτη τιμή των παραγώγων λαμβάνει τις μεγαλύτερες τιμές της είναι οι πιο ενδεικνυόμενες στο να τοποθετηθούν σε αυτές δέσμες ρευστού. Επίσης, το πρόσημο των παραγώγων ευαισθησίας καταδεικνύει την κατεύθυνση των ταχυτήτων της δέσμης, συνεπώς βοηθά τον μηχανικό στην επιλογή μεταξύ αναρρόφησης και έγχυσης.

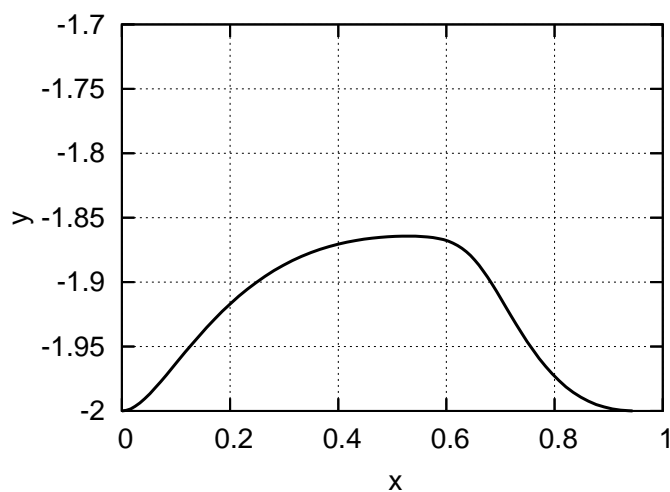
5.2.1 Εφαρμογή σε αγωγό με στένωση διατομής - Υπολογισμός παραγώγων της δύναμης αντίστασης

Η πρώτη εφαρμογή αφορά στη ροή σε έναν αγωγό με στένωση διατομής λόγω ύπαρξης κυρτώματος στη γεωμετρία αυτού, η γεωμετρία μοιάζει με την τρίτη εφαρμογή του CFDVal2004 Workshop, <http://cfdval2004.larc.nasa.gov>, [166], η οποία αποτελεί ένα πρόβλημα αναφοράς για τη μελέτη εφαρμογών ενεργητικού ελέγχου της ροής σε συμπιεστές ροές. Εδώ, παρόλα αυτά, η ροή θεωρείται ασυμπίεστη. Η γεωμετρία του κυρτώματος φαίνεται ξεχωριστά στο σχήμα 5.1 και το πεδίο ροής στο σχήμα 5.2, όπου παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες του μέτρου της ταχύτητας. Η παρουσίαση αποτελεσμάτων για την περίπτωση αυτή γίνεται με αδιάστατο τρόπο (λ.χ. μοναδιαία χορδή κυρτώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1, μοναδιαία ταχύτητα ροής στην είσοδο σε συνάφεια με την οποία παρουσιάζονται οι ισοϋψείς ταχύτητας στο σχήμα 5.2, $Re \simeq 930000$ βασισμένος στο μήκος χορδής). Στο πάνω όριο του χωρίου επιβάλλονται συνθήκες συμμετρίας (ατριβούς τοίχου). Οι εξισώσεις της ροής λύνονται θεωρώντας ότι το κάτω όριο, αυτό με τη διαμόρφωση, είναι ένας διάτρητος από οπές τοίχος επιτρέποντας την ύπαρξη δεσμών αναρρόφησης ή έγχυσης. Η συνάρτηση ως προς την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, είναι η δύναμη αντίστασης εξισώσεις 2.25 και 2.26. Σε ότι ακολουθεί, οι τιμές της αντίστασης F αλλά και των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ παρουσιάζονται χωρίς μονάδες, σύμφωνα με την προαναφερθείσα αδιαστατοποίηση. Στην περίπτωση μας επιδιώκεται ο προσδιορισμός των παραγώγων ευαισθησίας για την περίπτωση όπου $b_m^l = 0$, δηλαδή του 'κανονικού' τοίχου χωρίς αναρρόφηση ή έγχυση σε καμία θέση αυτού. Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών αυτών χρησιμοποιήθηκε δομημένο πλέγμα που αποτελείται από 360×210 κόμβους. Το πλέγμα είναι κατάλληλα πυκνωμένο στην περιοχή κοντά στο κάτω όριο έτσι ώστε να επαρκεί για τον προσδιορισμό των συνεκτικών φαινομένων εκεί, προσοχή δόθηκε ώστε η αδιάστατη απόσταση του πρώτου κόμβου από το κάτω όριο να είναι $y^+ < 1$. Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες των πεδίων των συζυγών μεταβλητών (μέτρο συζυγούς ταχύτητας, συζυγής πίεση και η μεταβλητή του συζυγούς μοντέλου τύρβης).

Η αποκόλληση της ροής στη περίπτωση όπου δεν εφαρμόζεται έλεγχος της ροής απεικονίζεται στην κατανομή του συντελεστή τριβής κατά μήκος του κυρτώματος, σχήμα 5.4. Επίσης, στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται οι τιμές που λαμβάνουν οι παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ στις αντίστοιχες θέσεις κατά το μήκος της διαμόρφωσης. Από το παραπάνω γράφημα, 5.4, διαπιστώνεται ότι οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας μειώνονται (αυξάνονται κατ' απόλυτο τιμή) ραγδαία κοντά στο σημείο με τετμημένη $x = 0.63$ (η χορδή του κυρτώματος έχει μοναδιαίο μήκος και ξεκινά από τη θέση $x = 0$) το οποίο βρίσκεται στην περιοχή όπου ξεκινά η αποκόλληση της ροής. Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η χρήση δέσμης αναρρόφησης, αντί για δέσμη έγχυσης, αναμένεται να οδηγήσει σε μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους.

Προκειμένου να παρουσιασθεί η ορθότητα των υπολογιζόμενων παραγώγων, τοποθετήθηκε έλεγχος της ροής στη θέση που υποδεικνύουν οι παράγωγοι, δηλαδή στην περιοχή μεταξύ $x = 0.625$ και $x = 0.630$ με δέσμη ρευστού κάθετη στο 'τοίχωμα' και κατεύθυνση αυτή που καθορίζεται από το πρόσημο των παραγώγων, δηλαδή αναρρόφηση. Αξιοποιώντας τα συμπεράσματα της εργασίας, [165], ο έλεγχος επιβάλλεται ως μια οριακή συνθήκη στο τμήμα αυτό του κάτω ορίου, αποτελώντας πλέον μια οπή από την οποία αναρροφάται σταθερή παροχή ρευστού. Το προφίλ των ταχυτήτων στη θέση αυτή, που αποτελεί την Dirichlet συνθήκη που θα επιβληθεί στο τμήμα αυτό του ορίου, επιλέγεται να

ακολουθεί μια κυβική κατανομή με μέγιστη τιμή ίση με το 40% της ταχύτητας στην είσοδο του χωρίου. Με την εφαρμογή του ελέγχου της ροής, η αποκόλληση της ροής μειώθηκε όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.5, όπου παρατίθενται οι κατανομές του συντελεστή τριβής κατά το μήκος του κάτω ορίου του αγωγού και σε μεγέθυνση στην περιοχή αμέσως μετά τη διαμόρφωση. Επίσης στο σχήμα 5.6 παρουσιάζεται το πεδίο ροής (μέτρο) της ταχύτητας για την περίπτωση χωρίς έλεγχο και με έλεγχο. Από τη σύγκριση των δύο περιπτώσεων, χωρίς έλεγχο και με έλεγχο, είναι εμφανής ο περιορισμός της αποκόλλησης. Σε ότι αφορά στη τιμή της συνάρτησης κόστους, αυτή μειώθηκε από $F = 0.0222$ (περίπτωση χωρίς έλεγχο) σε $F = 0.0095$ (σταθερή αναρρόφηση ρευστού), οι τιμές αυτές είναι υπολογισμένες με βάση αδιάστατες ποσότητες. Ένα ακόμα στοιχείο που συνηγορεί στην επιλογή της θέσης εφαρμογής του ελέγχου αποτελεί το ότι, κατά τα πειραματικά αποτελέσματα - για συμπιεστό ρευστό, ο έλεγχος τοποθετήθηκε περίπου στο 64% της χορδής του κυρτώματος. Παρότι ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών των ταχυτήτων της δέσμης δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης της διατριβής, παρά ταύτα στο πλαίσιο αυτής της εφαρμογής έγιναν υπολογιστικά πειράματα με παράμετρο τη μέγιστη τιμή του προφίλ ταχυτήτων στην περιοχή της οπής. Τα παραπάνω πειράματα έδειξαν μια σχεδόν γραμμική εξάρτηση της δύναμης αντίστασης με τις τιμές των ταχυτήτων στην οπή, τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής συνοψίζονται στο σχήμα 5.7.

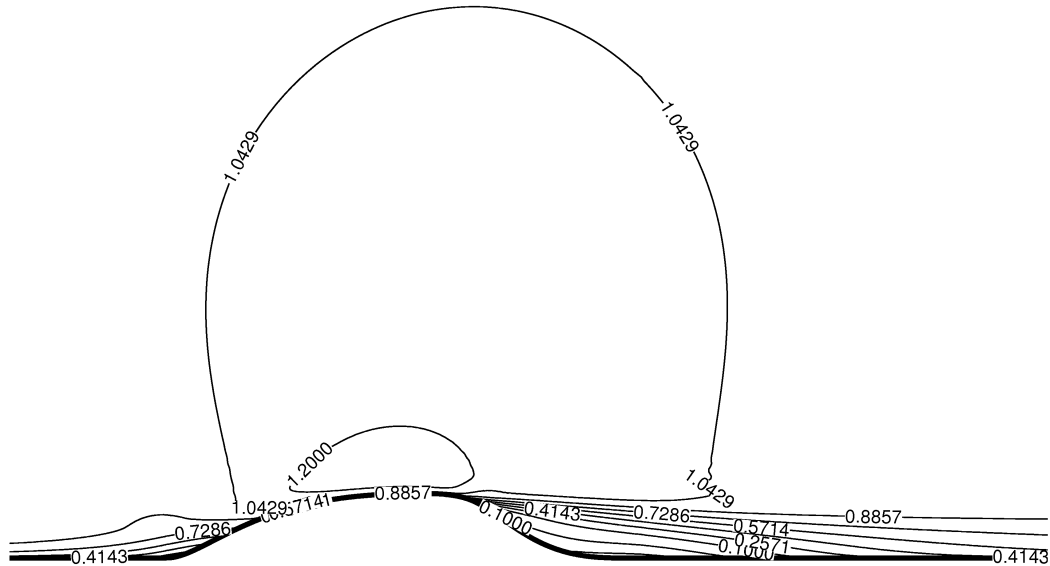


Σχήμα 5.1: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: γεωμετρία του κυρτώματος του αγωγού (χωρίς κλίμακα στους δύο άξονες).

5.2.2 Εφαρμογές σε αγωγούς - Υπολογισμός παραγώγων των απωλειών ολικής πίεσης

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο εφαρμογές με στόχο τον προσδιορισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης απωλειών ολικής πίεσης, 2.17 και 2.18, ως προς τις ταχύτητες του τοιχώματος για $b_m^l = 0$ οι οποίες με τη σειρά τους θα υποδείξουν την/τις θέσεις τοποθέτησης των σταθερών κάθετων δεσμών ρευστού και την κατεύθυνση του ρευστού σε αυτές.

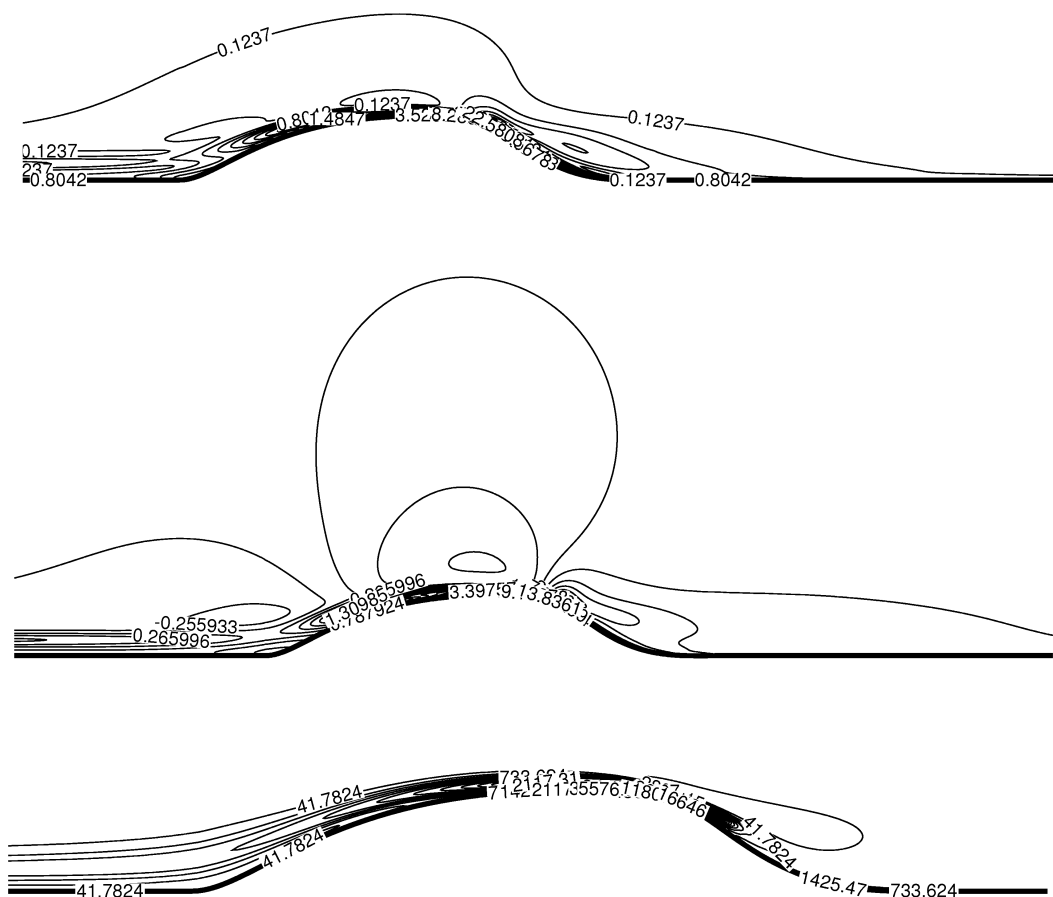
Στην πρώτη από τις δύο μελετάται ένας αγωγός με στροφή 90° , το πεδίο ροής φαίνεται στο σχήμα 5.8, όπου διακρίνονται οι ισοϋψείς του μέτρου της ταχύτητας της ροής, αντιστοίχως



Σχήμα 5.2: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: ισοϋψείς μέτρου της ταχύτητας κοντά στην περιοχή της στένωσης.

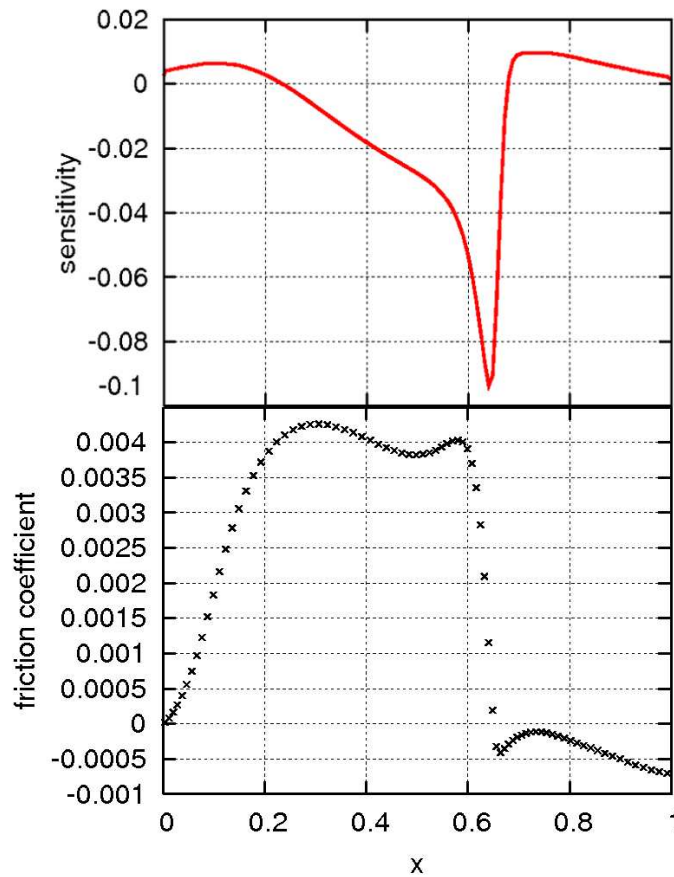
στο σχήμα 5.9 παρουσιάζεται το μέτρο της συζυγούς ταχύτητας. Χρησιμοποιείται δομημένο πλέγμα αποτελούμενο από 240×180 κόμβους και ο αριθμός Reynolds (βασισμένος στο ύψος του αγωγού στην είσοδο) είναι ίσος με $Re = 1.6 \times 10^5$. Η κατανομή των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις κάθετες στο όριο ταχύτητας ελέγχου b_m (υπολογισμός για $b_m^l = 0$) δίνεται στο σχήμα 5.10. Στον άξονα των τετμημένων εμφανίζονται οι παράμετροι ελέγχου b_m , $m = 1, \dots, M$ με $M = 180$ που η κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί στην ταχύτητα ελέγχου σε κάθε κόμβο του διακριτοποιημένου ορίου του αγωγού στην περιοχή της στροφής. Για να γίνει αντιληπτή η αντιστοιχία παραγώγου και θέσης στο στερεό όριο, παρατίθεται το σχήμα 5.11 στο οποίο παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως κατανομές επί του στερεού ορίου του αγωγού στη στροφή του. Οι μέγιστες τιμές των παραγώγων βρίσκονται ελαφρώς μπροστά (με βάση τη κατεύθυνση της ροής, η είσοδος του αγωγού είναι αριστερά) από τη στροφή στην εσωτερική πλευρά του αγωγού, θέση στην οποία ξεκινά η αποκόλληση της ροής. Στο σχήμα 5.12 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς της ταχύτητας (μέτρο) για την περίπτωση που έχει επιβληθεί δέσμη αναρρόφησης (όπως υποδεικνύει το πρόσημο των παραγώγων) στην περιοχή που υποδεικνύουν οι παράγωγοι ευαισθησίας. Η δέσμη εκτείνεται από τη θέση $x = -0.017$ ως τη θέση $x = -0.015$, το προφίλ των ταχυτήτων στη θέση αυτή ακολουθεί, όπως και στην πρώτη εφαρμογή, μια κυβική κατανομή με μέγιστη τιμή ίση με το 10% της ταχύτητας στην είσοδο του χωρίου. Με την τοποθέτηση, εκεί, της δέσμης αναρρόφησης αναμένεται ο περιορισμός της αποκόλλησης. Όντως, στα σχήματα 5.13 και 5.14, στα οποία παρουσιάζονται αντιστοίχως τα διανύσματα της ταχύτητας κοντά στην περιοχή της αποκόλλησης και στην περιοχή της επανακόλλησης της ροής, δείχνουν ότι το εύρος της περιοχής αποκόλλησης μειώνεται. Αυτό αντανακλά σε μείωση των απωλειών ολικής πίεσης, εξισώσεις 2.17 και 2.18, από $F = 8.7664$ σε $F = 7.4951$ (υπολογισμός βασισμένος σε αδιάστατες ποσότητες).

Στην επόμενη εφαρμογή μελετάται ένας αγωγός με 'έντονη' διαμόρφωση τύπου S . Η ροή



Σχήμα 5.3: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: ισοϋψείς μέτρου της συζυγούς ταχύτητας κοντά στην περιοχή της στένωσης (πάνω), συζυγούς πίεσης (μέση) και μεταβλητής του συζυγούς μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}_a$ (κάτω).

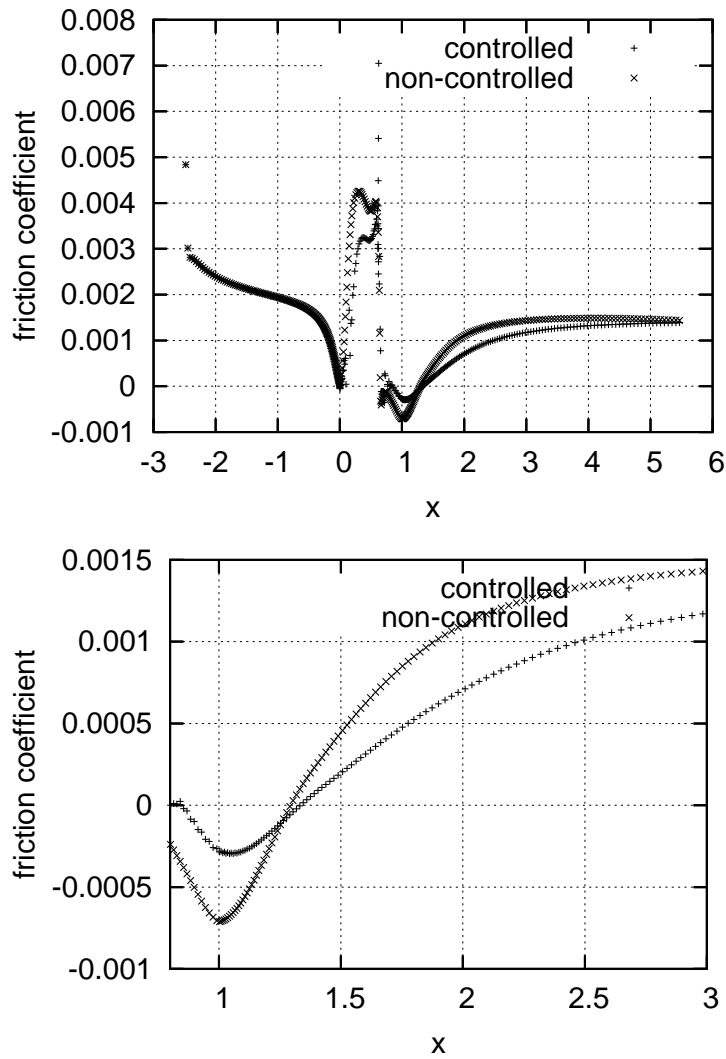
είναι αποκολλημένη με αριθμό Reynolds ίσο με $Re = 2 \times 10^5$ και δομημένο υπολογιστικό πλέγμα με 200×160 κόμβους. Στο σχήμα 5.15 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες του μέτρου της ταχύτητας ενώ στο σχήμα 5.16 παρατίθενται οι ισοϋψείς του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας, συζυγούς πίεσης και της συζυγούς μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$ του συζυγούς μοντέλου τύρβης. Η κατανομή των παραγώγων ευαισθησίας (για $b_m = 0$) παρουσιάζεται στο σχήμα 5.17 σε σχέση με την κάθετη ταχύτητα σε κάθε κόμβο του στερεού ορίου και στο σχήμα 5.18 σε σχέση με τις θέσεις του κάθε κόμβου στη γεωμετρία. Από τα δύο αυτά γραφήματα συμπεραίνεται ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον θέσεις βέλτιστης τοποθέτησης δεσμών αναρρόφησης ρευστού στις οποίες προτείνεται να τοποθετηθούν δέσμες αναρρόφησης ρευστού. Η μια βρίσκεται στην κάτω επιφάνεια του αγωγού, κοντά στο μέσο της διαμόρφωσης τύπου S , και η άλλη στην πάνω επιφάνεια, κοντά στο τέλος της διαμόρφωσης. Και οι δύο αυτές περιοχές τοποθετούνται κοντά στα σημεία που ξεκινά η αποκόλληση στην κάθε πλευρά. Επίσης, το εύρος των περιοχών των μέγιστων τιμών στην κατανομή των παραγώγων ευαισθησίας κατά μήκος της γεωμετρίας,



Σχήμα 5.4: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} n_l$) της δύναμης αντίστασης ως προς τις ταχύτητες b_m^l κατά το μήκος του κυρτώματος (πάνω) και η αντιστοιχούσα στις θέσεις αυτές κατανομή του συντελεστή τριβής (κάτω).

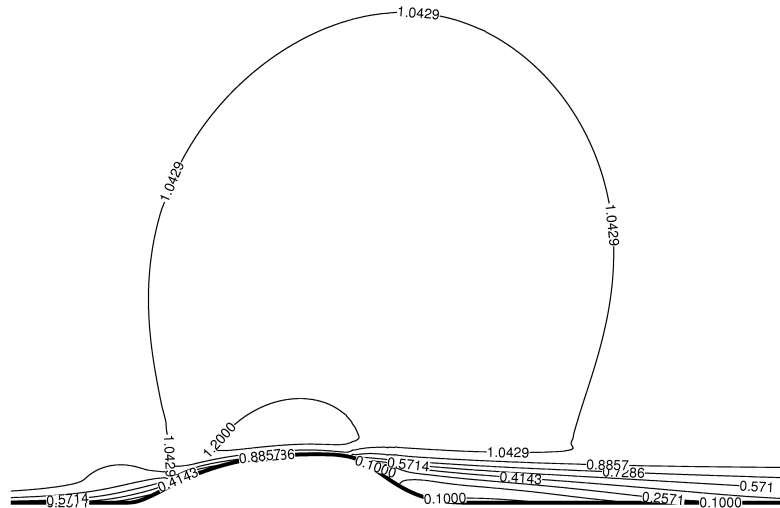
σχήμα 5.18, παρέχει πληροφορία για το εύρος των οπών σε καθεμία από τις δύο περιοχές (πλευρές του αγωγού).

Σε μια προσπάθεια ποιοτικής επιβεβαίωσης των αποτελεσμάτων, επιβάλλονται δέσμες αναρρόφησης στις προαναφερθείσες θέσεις. Συγκεκριμένα πραγματοποιούνται τρεις συναφείς μελέτες: (α) δέσμη αναρρόφησης στην κάτω πλευρά του αγωγού μεταξύ των θέσεων με τεταγμένες $x = -0.026$ και $x = -0.023$, (β) δέσμη αναρρόφησης στην πάνω πλευρά του αγωγού μεταξύ των θέσεων με τεταγμένες $x = 0.240$ και $x = 0.242$ και (γ) συνδυασμός των περιπτώσεων (α) και (β). Σε όλες τις περιπτώσεις τα προφίλ των ταχυτήτων στις δέσμες ακολουθούν κατανομές της τρίτης δύναμης του μήκους με μέγιστες τιμές ίσες με το 10% της ταχύτητας στην είσοδο του αγωγού. Στο σχήμα 5.19 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες του μέτρου της ταχύτητας για τη μελέτη (γ) καθώς και σε λεπτομέρεια οι περιοχές των δεσμών αναρρόφησης. Στον πίνακα 5.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των απωλειών ολικής πίεσης για κάθε μια από τις τρεις μελέτες. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι και οι τρεις περιπτώσεις οδηγούν σε μείωση των απωλειών. Η μεγαλύτερη από όλες παρουσιάζεται στην περίπτωση (γ) η οποία οφείλεται στην συνδυασμένη δράση και των δύο δεσμών αναρρόφησης. Συγκρίνοντας



Σχήμα 5.5: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: κατανομή του συντελεστή τριβής κατά το μήκος του αγωγού στο κάτω του όριο (πάνω) και η ίδια σε μεγέθυνση στην περιοχή της αποκόλλησης (κάτω).

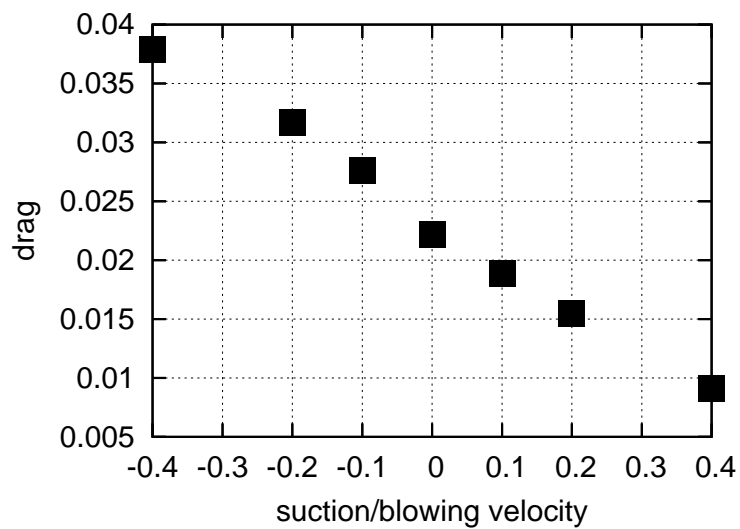
τις επιδόσεις των περιπτώσεων (α) και (β) αξίζει να επισημανθεί ότι η επιβολή ελέγχου στη θέση (α) επιφέρει σημαντικότερη μείωση στην τιμή του συναρτησιακού, γεγονός αναμενόμενο μιας και οι τιμές των παραγώγων στην περιοχή αυτή είναι σημαντικά μεγαλύτερες από ότι στην περιοχή που αντιστοιχεί στην περίπτωση (β).



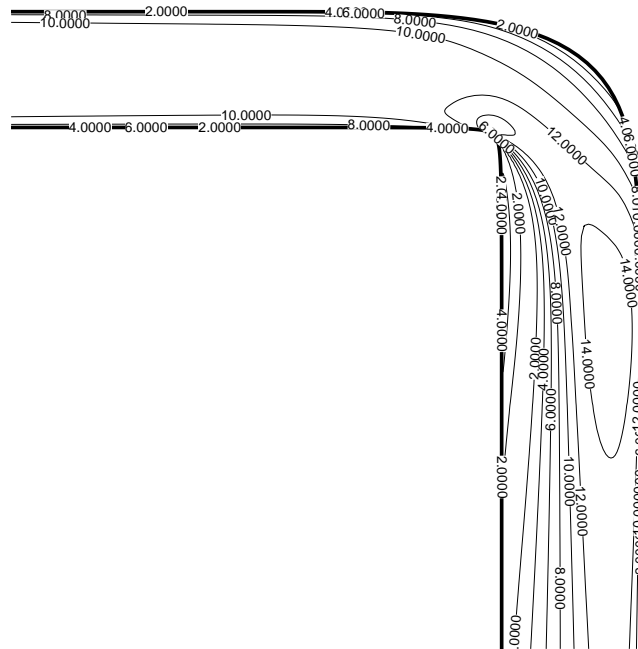
Σχήμα 5.6: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: ισοϋψείς μέτρου ταχύτητας με έλεγχο της ροής.

	χωρίς έλεγχο ροής	μελέτη (α)	μελέτη (β)	μελέτη (γ)
F	0.01835	0.01662	0.01817	0.01649
F_T	-	0.01723	0.01809	0.01697

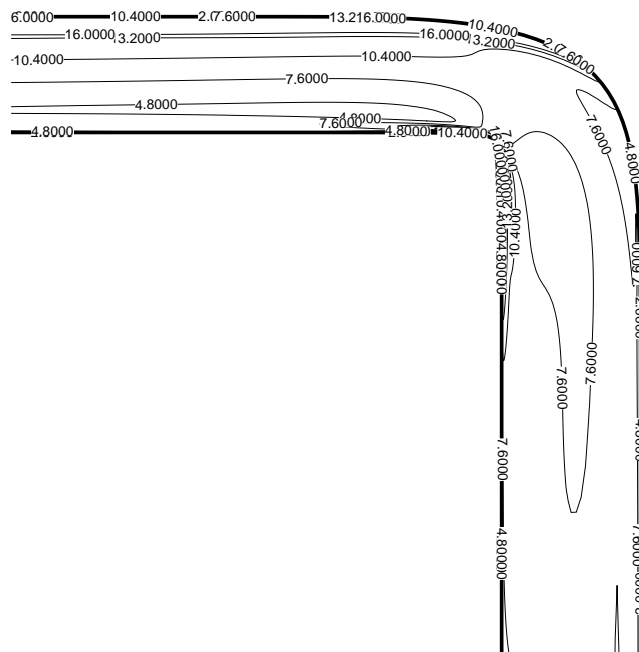
Πίνακας 5.1: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : τιμές απωλειών ολικής πίεσης για τις περιπτώσεις ελέγχου ροής με αναρρόφηση στο (α) κάτω τοίχωμα του αγωγού, (β) πάνω τοίχωμα και (γ) με αναρρόφηση και στις δύο θέσεις. Η δεύτερη σειρά τιμών F_T αντιστοιχεί στις τιμές της συνάρτησης οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή ανάπτυξης σε σειρά Taylor με παραγώγους πρώτης τάξης ($F_T = F + \delta F = F + \frac{\delta F}{\delta v_i} \delta v_i, i = 1, 2$).



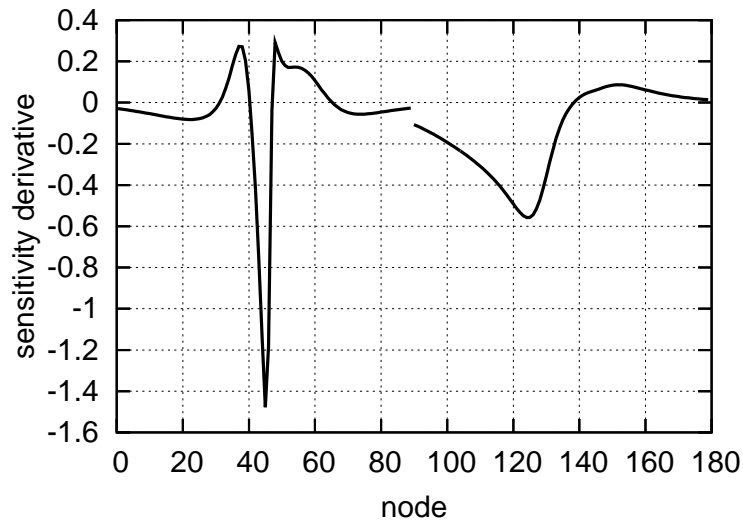
Σχήμα 5.7: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στένωση: τιμή της δύναμης αντίστασης σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της κατανομής ταχύτητας της δέσμης στην οπή. Οι θετικές τιμές του άξονα των τετμημένων αντιστοιχούν σε αναρρόφηση ενώ οι αρνητικές σε έγχυση ρευστού. Το κεντρικό σημείο αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου δεν εφαρμόζεται έλεγχος.



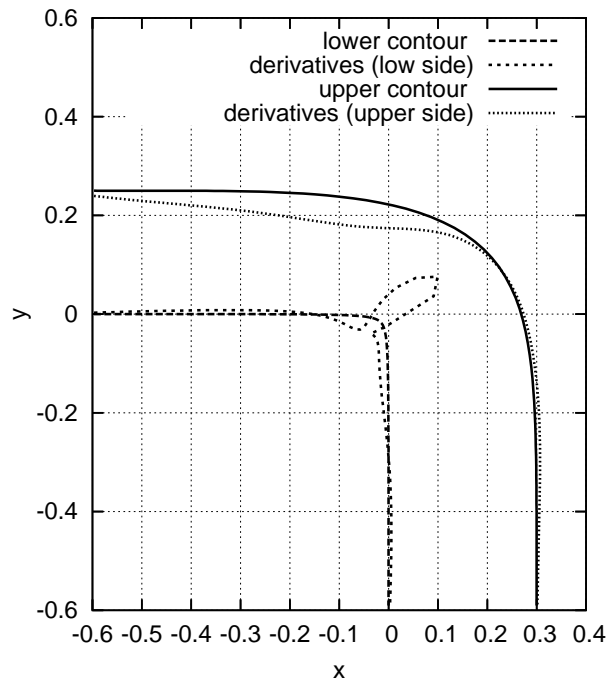
Σχήμα 5.8: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90° : ισοϋψείς μέτρου ταχύτητας.



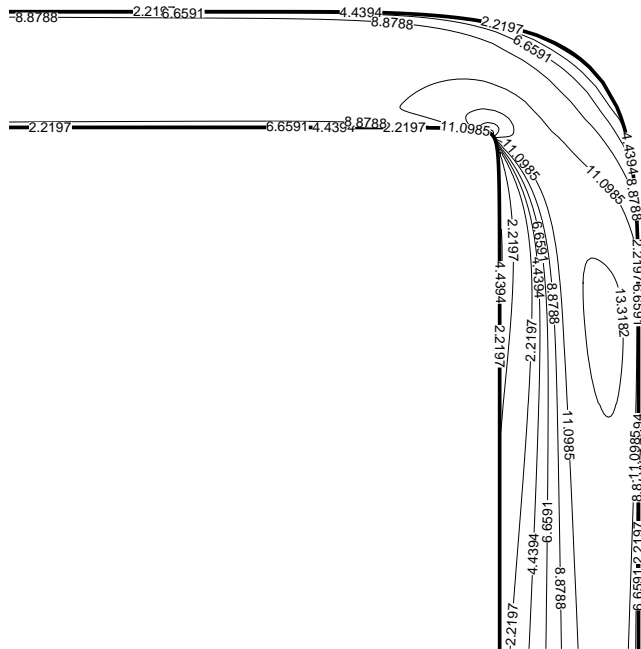
Σχήμα 5.9: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90°: ισοϋψείς μέτρου συζυγούς ταχύτητας.



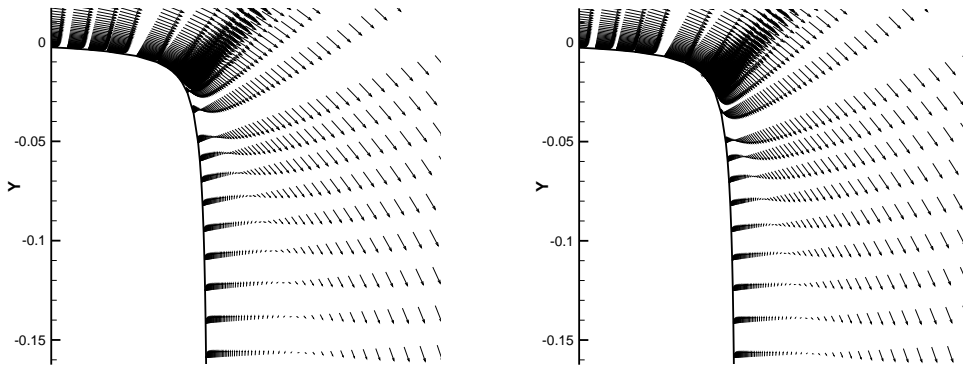
Σχήμα 5.10: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90°: παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m^l} n_l$) ως προς τις ταχύτητες b_m^l του ελέγχου σε κάθε κόμβο κατά μήκος της στροφής και στις δύο πλευρές του αγωγού (η αντιστοιχία ως προς τη θέση του κάθε κόμβου στη γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα 5.10).



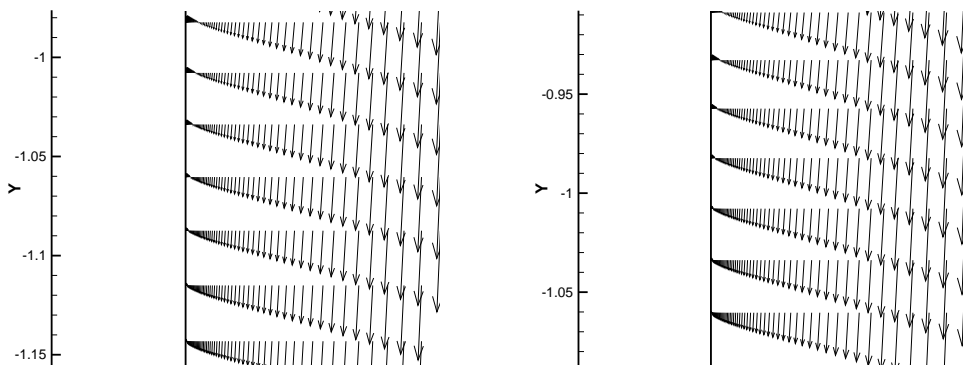
Σχήμα 5.11: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90°: γεωμετρία αγωγού και παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m^l} n_l$) ως προς τις ταχύτητες b_m^l (τιμές παραγώγων σε κλίμακα). Η κατεύθυνση των παραγώγων στο σχήμα δεν αντιστοιχεί στη φορά των δεσμών ρευστού και έχει επιλεγεί να είναι αυτή για λόγους καλύτερης αποτύπωσης των παραγώγων πάνω στο στερεό όριο λόγω της γεωμετρίας του αγωγού.



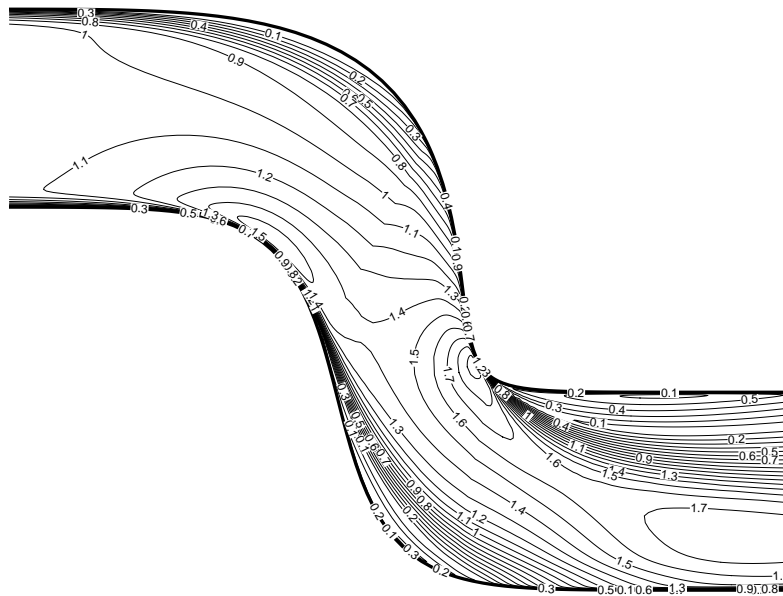
Σχήμα 5.12: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90° : ισοϋψείς καμπύλες μέτρου ταχύτητας, με έλεγχο ροής (αναρρόφηση ρευστού).



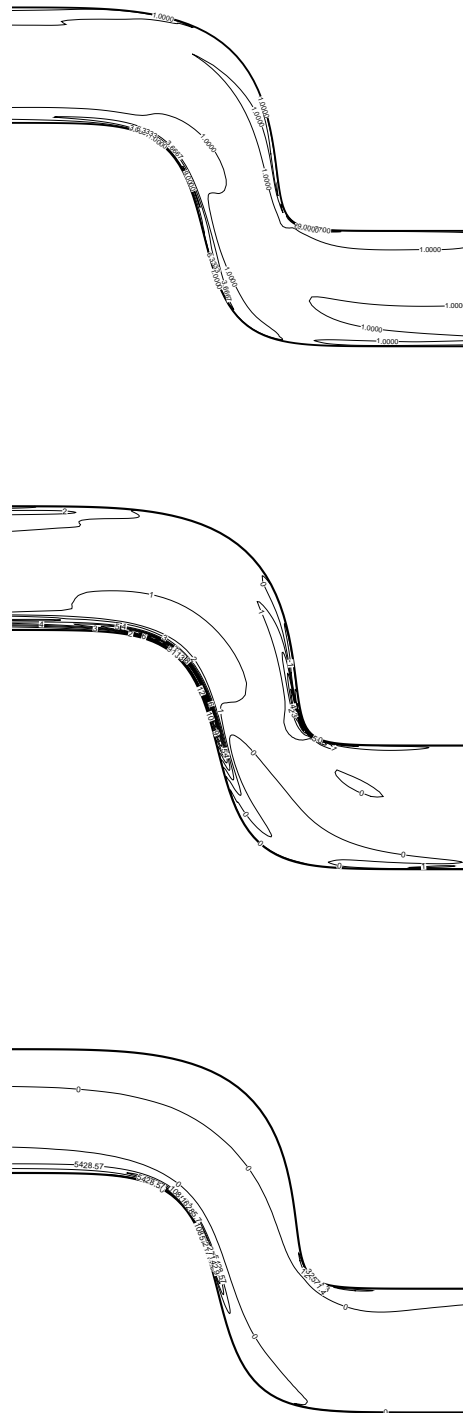
Σχήμα 5.13: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90° : λεπτομέρεια από το πεδίο ταχύτητας στην εσωτερική πλευρά, κοντά στη στροφή του αγωγού. Διανύσματα ταχύτητας χωρίς εφαρμογή ελέγχου της ροής (αριστερά) και διανύσματα ταχύτητας με έλεγχο ροής (δεξιά). Η εφαρμογή της δέσμης αναρρόφησης καθυστερεί την εμφάνιση της αποκόλλησης.



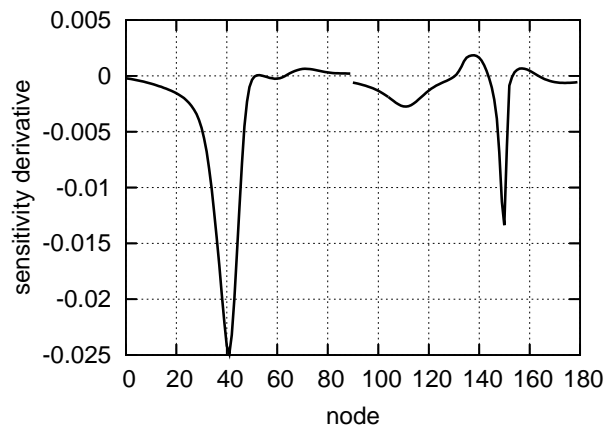
Σχήμα 5.14: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με στροφή 90° : λεπτομέρεια από το πεδίο ταχύτητας στην εσωτερική πλευρά του αγωγού κοντά στην περιοχή επανακόλλησης της ροής. Διανύσματα ταχύτητας χωρίς εφαρμογή ελέγχου της ροής (αριστερά) και διανύσματα ταχύτητας με έλεγχο ροής (δεξιά). Η εφαρμογή της δέσμης αναρρόφησης περιορίζει το μήκος της αποκόλλησης της ροής.



Σχήμα 5.15: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : ισοϋψείς μέτρου ταχύτητας. Μοναδιαία ταχύτητα ροής στην είσοδο.



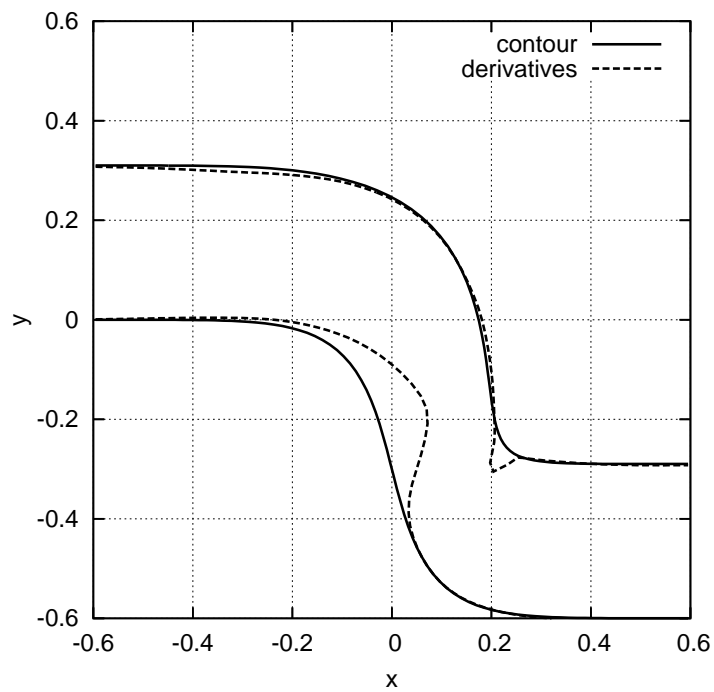
Σχήμα 5.16: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : ισοϋψείς μέτρου συζυγούς ταχύτητας (πάνω), συζυγούς πίεσης (μέση) και μεταβλητής του συζυγούς μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}_a$ (κάτω).



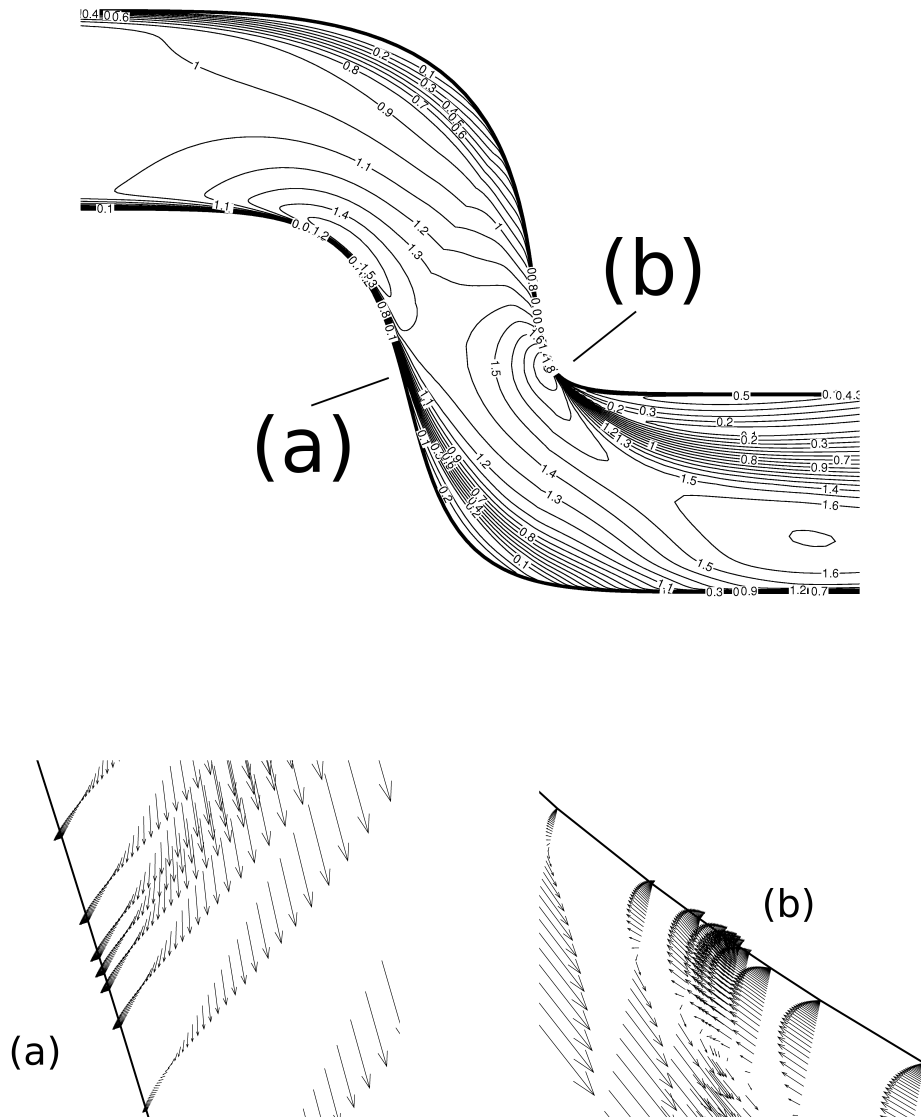
Σχήμα 5.17: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m^l} n_l$) ως προς τις ταχύτητες b_m^l του ελέγχου σε κάθε κόμβο κατά μήκος της διαμόρφωσης S (η αντιστοιχία ως προς τη θέση του κάθε κόμβου στη γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα 5.18).

5.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μια συνεχής συζυγής μέθοδος η οποία έχει στόχο τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις τιμές των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται για τις ταχύτητες στο στερεό όριο ενός σώματος. Διαθέτοντας τις παραπάνω παραγώγους ευαισθησίας είναι δυνατός ο προσδιορισμός της θέσης καθώς και του είδους του ενεργητικού (αναρρόφηση/έγχυση) ελέγχου που αν επιβληθεί στις θέσεις όπου οι παράγωγοι εμφανίζουν τις μέγιστες τιμές τους θα οδηγήσει στη βελτίωση της συμπεριφοράς της γεωμετρίας, με βάση το συνάρτηση κόστους που έχει επιλεγεί. Οι εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας οι οποίες εξήχθησαν χρησιμοποιώντας μια ανάλυση ανάλογη με αυτήν των κεφαλαίων 2 και 3 για ροές που μοντελοποιούνται με το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης χαμηλών αριθμών Reynolds Spalart–Allmaras, δεν εμφανίζουν όρο ή όρους που να εξαρτώνται άμεσα από την επιλεγμένη συνάρτηση κόστους. Παρόλα αυτά για διαφορετικές συναρτήσεις κόστους τα συζυγή πεδία θα είναι διαφορετικά λόγω διαφορετικών συζυγών οριακών συνθηκών και, συνεπώς, οι παράγωγοι ευαισθησίας θα διαφέρουν. Με τον τρόπο αυτόν δημιουργείται μια μέθοδος η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ‘αυτοματοποιημένα’ για τον προσδιορισμό του ελέγχου που θα επιβληθεί σε μια γεωμετρία με βάση συγκεκριμένα κριτήρια. Στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν επιβλήθηκε έλεγχος της ροής στα σημεία που οι παράγωγοι ευαισθησίας έχουν υποδειξί (θέσεις μέγιστων τιμών της καμπύλης). Στα αποτελέσματα δείχθηκε ότι η τιμή της συνάρτησης κόστους όντως μειώνεται, όπως είναι αναμενόμενο. Μάλιστα, στην τρίτη εφαρμογή, η μείωση στην τιμή της συνάρτησης απωλειών ολικής πίεσης είναι σημαντικότερη όταν επιβάλλεται δέσμη αναρρόφησης στη θέση με τις μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή παραγώγους ευαισθησίας (μελέτη (α)) από ότι αν επιβληθεί δέσμη στην δεύτερη θέση μεγίστου των παραγώγων (μελέτη (β)).



Σχήμα 5.18: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : γεωμετρία αγωγού και παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} n_l$) ως προς τις ταχύτητες b_m^l (τιμές παραγώγων σε κλίμακα). Η κατεύθυνση των παραγώγων στο σχήμα δεν αντιστοιχεί στη φορά των δεσμών ρευστού.



Σχήμα 5.19: Εφαρμογή στον έλεγχο της ροής σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : ισοϋψείς μέτρου ταχύτητας για την περίπτωση με έλεγχο ροής μέσω δύο ταυτόχρονων δεσμών αναρρόφησης. Κάτω: διακρίνονται σε λεπτομέρεια οι δύο δέσμες αναρρόφησης.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Η παρούσα διατριβή είχε στόχο την ανάπτυξη και τον προγραμματισμό συνεχών συζυγών μεθόδων για τον υπολογισμό ακριβών παραγώγων ευαισθησίας συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται λ.χ. σε προβλήματα αεροδυναμικής/υδροδυναμικής. Η διατριβή επικεντρώθηκε ιδιαίτερα στο ζήτημα της ακρίβειας των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας. Επίσης, κατεβλήθη προσπάθεια ώστε η διατύπωση των προτεινόμενων συζυγών μεθόδων να διέπεται από μαθηματική αυστηρότητα. Οι μέθοδοι υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο δύο ανοικτών κωδικών, του οικείου, [122], και του ελεύθερου λογισμικού, [124], καλύπτοντας έτσι και τις δύο κύριες κατηγορίες επιλυτών στην ΥΡΔ. Και στις δύο περιπτώσεις φάνηκε, η σημασία των συζυγών μοντέλων τύρβης για τον ακριβή και οικονομικό υπολογισμό (από πλευράς υπολογιστικού κόστους, σε σύγκριση με άλλες μεθόδους υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας, λ.χ. πεπερασμένες διαφορές, ευθεία διαφόριση) των παραγώγων ευαισθησίας. Στη συνέχεια, συνοψίζονται τα βασικά στοιχεία της διατριβής μαζί με τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύχθηκε μια συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές ασυμπίεστες ροές. Αφού συνιεθεί η επαυξημένη συνάρτηση κόστους, χρησιμοποιείται το θεώρημα της απόκλισης για την ανάλυση της παραγώγου ευαισθησίας σε μια πιο 'εύχρηστη' μορφή. Η μέθοδος αυτή στηρίχτηκε στην αντίστοιχη συνεχή συζυγή διατύπωση για συμπίεστες ροές η οποία παρουσιάστηκε στη διατριβή του Δ. Παπαδημητρίου, [18]. Από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν συμπεραίνεται ότι η μέθοδος μπορεί να υπολογίσει παραγώγους ευαισθησίας υψηλής πιστότητας σε σχέση με τις τιμές αναφοράς (πεπερασμένες διαφορές και μέθοδο της ευθείας διαφόρισης) με το κόστος μόνο δύο επιλύσεων, μιας των εξισώσεων της ροής και μιας των συζυγών εξισώσεων (που έχει κόστος παρόμοιο με αυτό των εξισώσεων της ροής). Επίσης, στο παράρτημα Δ' συγκρίθηκαν δύο διαφορετικά σχήματα για τη διακριτοποίηση των ατρίων συζυγών διανυσμάτων. Φαίνεται ότι η χρησιμοποίηση ενός 'μη-συντηρητικού' σχήματος, το οποίο δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε αυτό το οποίο χρησιμοποιείται κατά την επίλυση του προβλήματος της ροής, οδηγεί σε ακριβέστερο υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από τη μη-συντηρητικότητα των συζυγών εξισώσεων.

Στα κεφάλαια 3 και 4 επεκτείνεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τις περιπτώσεις τυρβωδών ροών. Οι νέες συζυγείς μέθοδοι που προκύπτουν παραμένουν ακριβείς στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, όπως και η μέθοδος για τις στρωτές ροές που αποτέλεσε την βάση για τη διατύπωση και τον προγραμματισμό τους.

Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 3, διατυπώνεται μαθηματικά και παρουσιάζονται υπολογιστικά αποτελέσματα από μια νέα, ακριβή, συνεχή συζυγή μέθοδο για την περίπτωση

κατά την οποία στο πρόβλημα της ροής χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras. Αξίζει να επισημανθεί ότι, στη σχετική βιβλιογραφία των συνεχών συζυγών μεθόδων, δεν έχει παρουσιαστεί στο παρελθόν μια τέτοια διατύπωση, η οποία δεν χρησιμοποιεί την παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας. Τα οφέλη ως προς την ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας είναι σημαντικά. Η μεθοδολογία που ακολουθείται κατά τη μαθηματική διατύπωση είναι γενική και, με εξαίρεση ορισμένες μόνο 'τεχνικές' λεπτομέρειες που αφορούν κυρίως την παραγωγή των συναρτήσεων του μοντέλου, μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε άλλο μοντέλο τύρβης μιας ή δύο εξισώσεων· εξάλλου, στο κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται για το μοντέλο $k-\varepsilon$ σε συνδυασμό με το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου. Επίσης, παρότι η μέθοδος παρουσιάζεται για ασυμπίεστες ροές, μπορεί σχετικά εύκολα να γενικευτεί για ροές συμπιεστού ρευστού. Επισημαίνεται, ακόμα, ότι η διατύπωση ισχύει για συναρτήσεις κόστους οποιασδήποτε μορφής.

Συνεπώς, με βάση τη νέα αυτή διατύπωση προκύπτει ότι οι συζυγείς εξισώσεις αυξάνονται σε πλήθος με τη προσθήκη των εξισώσεων του συζυγούς μοντέλου τύρβης, πίνακας 6. Στον πίνακα 6 παρουσιάζονται συνοπτικά όλοι οι νεο-εμφανιζόμενοι όροι: (α) η εξίσωση του συζυγούς μοντέλου τύρβης $R^{\tilde{\nu}^a} = 0$, εξίσωση 3.35, (β) οι οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή $\tilde{\nu}_a$ στην είσοδο, στα στερεά όρια ($\tilde{\nu}_a = 0$) και στην έξοδο (γ) οι πρόσθετοι όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ στις συζυγείς εξισώσεις της ορμής, εξισώσεις 3.34, (δ) οι πρόσθετοι όροι $BO_{i,\tilde{\nu}}^u$ στις συζυγείς οριακές συνθήκες, εξισώσεις 3.42, και (στ) οι όροι $SD_{\tilde{\nu}}$ στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας. Όλοι τους προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση των μεταβολών των ποσοτήτων της τύρβης ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Όλοι οι παραπάνω όροι δεν θα υπήρχαν αν χρησιμοποιούνταν η παραδοχή της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας. Από το σχήμα 3.3, το οποίο επαναλαμβάνεται εδώ, ως σχήμα 6.1 για λόγους εποπτικούς, διαπιστώθηκε ότι με την προτεινόμενη μέθοδο οι παράγωγοι ευαισθησίας ταυτίζονται με τις τιμές αναφοράς ενώ στην περίπτωση χρήσης της συνηθισμένης παραδοχής της παγωμένης τυρβώδους συνεκτικότητας οι τιμές διαφέρουν αρκετά. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε και από τις άλλες εφαρμογές οι οποίες παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Συνεπώς φαίνεται ότι η προσθήκη των επιπλέον εξισώσεων και όρων είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό ακριβών παραγώγων ευαισθησίας. Επίσης, εξήχθη το συμπέρασμα ότι από τους 'νέους' όρους, $R_{i,\tilde{\nu}}^u$,

Πίνακας 6.1: Οι εξισώσεις καταστάσεις και οι συζυγείς τους

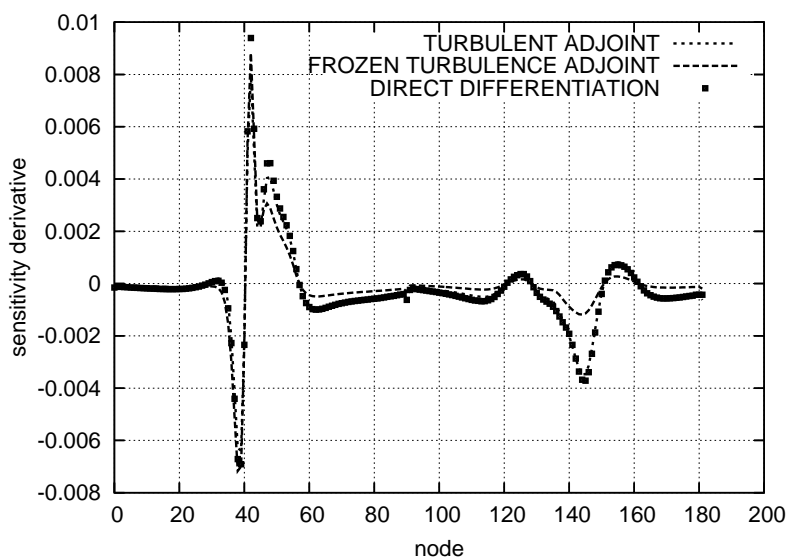
Εξισώσεις:	κατάστασης	συζυγείς
ορμής	$R_i^v = 0$	$R_i^u = 0$
συνέχειας	$R^p = 0$	$R^q = 0$
Spalart-Allmaras	$R^{\tilde{\nu}} = 0$	$R^{\tilde{\nu}^a} = 0$
του k	$R^k = 0$	$R^{k_a} = 0$
του ε	$R^\varepsilon = 0$	$R^{\varepsilon_a} = 0$

$BO_{i,\tilde{\nu}}^u$ και $SD_{\tilde{\nu}}$ αυτοί οι οποίοι εμφανίζουν τη μεγαλύτερη επίδραση στις υπολογιζόμενες παραγώγους ευαισθησίας είναι οι όροι $R_{i,\tilde{\nu}}^u$ που εμπεριέχονται στις συζυγείς εξισώσεις της ορμής. Η μικρή επίδραση των υπόλοιπων όρων επιτρέπει να μην συμπεριληφθούν στη διατύπωση, μειώνοντας την πολυπλοκότητα των υπολογισμών και το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος παρ' όλες τις απλοποιήσεις παραμένει ακριβής ως προς τον υπολογισμό των

Πίνακας 6.2: Συζυγείς εξισώσεις και οριακές συνθήκες με συζυγές μοντέλο τύρβης

Συζυγείς πεδιακές εξισώσεις	Συζυγείς συνθήκες στην έξοδο
$R^u = R_{i,v}^u + R_{i,p}^u + R_{i,\tilde{\nu}}^u + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} = 0$ (3.34)	$BO_{i,v}^u + BO_{i,p}^u + BO_{i,\tilde{\nu}}^u + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} = 0$ (3.42)
$R^q = R_p^q + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0$ (3.33)	- (γιατί $\frac{\delta p}{\delta b_m} = 0$)
$R^{\tilde{\nu}^a} = R_v^{\tilde{\nu}^a} + R_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}^a} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \tilde{\nu}} = 0$ (3.35)	$BO_v^{\tilde{\nu}^a} + BO_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}^a} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial \tilde{\nu}} = 0$ (3.43)

παραγώγων ευαισθησίας.



Σχήμα 6.1: [Επανάληψη σχήματος 3.3] Τυρβώδης ροή σε αγωγό με διαμόρφωση τύπου S : παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, όπου τα σημεία ελέγχου b_m αντιστοιχούν στις κατά την κάθετη κατεύθυνση μεταβολές της θέσης των πλεγματικών κόμβων στο στερεό όριο του αγωγού. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο αύξων αριθμός των σημείων ελέγχου ($m = 1, \dots, M$). Οι παράγωγοι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας (α) την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο με το συζυγές μοντέλο τύρβης (*turbulent adjoint*), (β) με την απλοποιητική παραδοχή ότι $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_m} = 0$ (*frozen turbulence adjoint*) και (γ) με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης (*direct differentiation*). Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζουν οι μέθοδοι (α) και (γ) βρίσκονται σε ιδιαίτερα υψηλή ταύτιση. Το ίδιο συμπέρασμα εξήχθη και από τις υπόλοιπες εφαρμογές του κεφαλαίου 3.

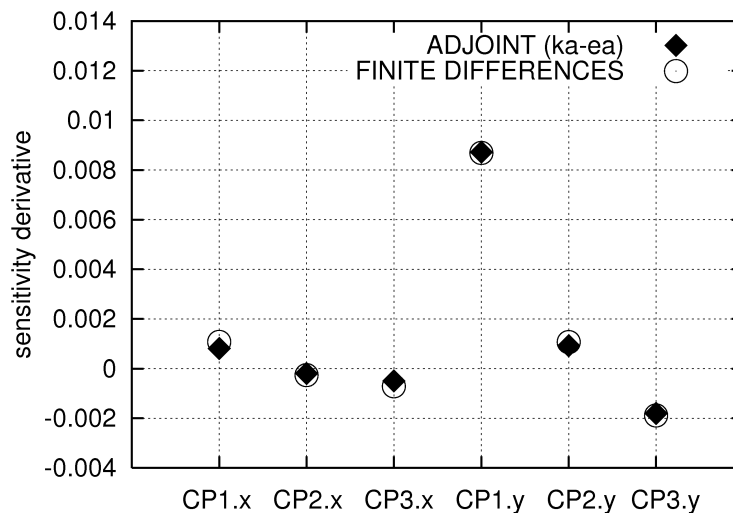
Στο κεφάλαιο 4 διατυπώνεται για πρώτη φορά μια συνεχής συζυγής μέθοδος (ούτε στη συνεχή αλλά ούτε και στη διακριτή εκδοχή έχει εμφανιστεί κάτι τέτοιο ως τώρα στη βιβλιογραφία), η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό ακριβών παραγώγων ευαισθησίας για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds. Η χρήση μοντέλων συναρτήσεων τοίχου είναι αρκετά διαδεδομένη σε βιομηχανικές εφαρμογές λόγω του χαμηλού υπολογιστικού κόστους και της ευκολίας γένεσης πλέγματος. Συνεπώς, για την περίπτωση όπου το πρόβλημα της ροής αναλύεται με τη συγκεκριμένη μέθοδο φαίνεται ότι είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας με χρήση συζυγών

μεθόδων, καθιστώντας το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο σημαντικό. Το κέρδος είναι διπλό, αφενός λόγω της μοντελοποίησης με χρήση συναρτήσεων τοίχου στα προβλήματα επίλυσης των εξισώσεων της ροής και των συζυγών αυτών (συνεπώς απαιτούνται πλέγματα λιγότερα πυκνά στην περιοχή του τοίχου) και αφετέρου λόγω της συζυγούς μεθόδου αυτής καθαυτής. Στην παρούσα διατριβή, η συγκεκριμένη διατύπωση εφαρμόζεται στο μοντέλο τύρβης $k-\epsilon$

Πίνακας 6.3: Ταχύτητες τριβής & εξισώσεις συναρτήσεων τοίχου

Πρόβλημα ροής	Συζυγές πρόβλημα
$\frac{v_\tau^2}{\nu + \nu_t} = \frac{\tau_w}{\nu + \nu_t} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i$ (4.4)	$\frac{u_\tau^2}{\nu + \nu_t} = \frac{\tau_\psi}{\nu + \nu_t} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i$ (4.21)
$v^+ = \frac{v_{(t)}}{v_\tau} = \begin{cases} y^+, & y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B, & y^+ \geq y_c^+ \end{cases}$ (4.5)	$c_\nu u_\tau^2 - 2u_{(t)}v_\tau + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\kappa} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{2v_\tau}{\sqrt{c_\mu}} + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{3v_\tau^2}{\kappa \Delta} = 0$ (4.606)

χαμηλών αριθμών Reynolds. Στο πλαίσιο τη διατύπωσης ορίζεται η συζυγής ταχύτητα τριβής, u_τ , και προσδιορίζεται η εξίσωση των συζυγών συναρτήσεων τοίχου. Από την τελευταία υπολογίζεται το διάνυσμα της συζυγούς συνεκτικής ροής που αντιστοιχεί στους κόμβους του ‘στερεού ορίου’. Ως ‘ανακεφαλαίωση’ των όσων αναφέρθηκαν για την αντιστοιχία του μοντέλου συναρτήσεων τοίχου μεταξύ του προβλήματος της ροής και του συζυγούς του στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται συνοπτικά ο πίνακας 6. Οι υπολογιζόμενες παράγωγοι



Σχήμα 6.2: [Επανάληψη σχήματος 4.6] Εφαρμογή σε αξονικό διαχύτη: παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta \theta_m}$ σε σύγκριση με πεπερασμένες διαφορές. Τόσο στην περίπτωση αυτή όσο και στις άλλες του κεφαλαίου 4 η ταύτιση των υπολογιζόμενων παραγώγων με τις τιμές που υπολογίζει η μέθοδος αναφοράς (πεπερασμένες διαφορές) είναι υψηλή.

ευαισθησίας έρχονται σε εξαιρετική συμφωνία με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Ενδεικτικά επαναλαμβάνεται το σχήμα 6.2 από

την πρώτη από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4, το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από τις υπόλοιπες εφαρμογές του κεφαλαίου 4.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 φαίνεται ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου για τον προσδιορισμό της βέλτιστης ή των βέλτιστων θέσεων στις οποίες αξίζει να εφαρμοστούν τεχνικές ενεργητικού ελέγχου της ροής και συγκεκριμένα αναρρόφηση ή έγχυση σταθερής παροχής ρευστού. Μέσα από τις παρουσιαζόμενες εφαρμογές και με βάση την πιστοποίηση της μεθόδου (ότι μπορεί να υπολογίζει με ακρίβεια τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας, που έλαβε χώρα στα προηγούμενα κεφάλαια) συνεπάγεται ότι η συζυγής μέθοδος αποτελεί ένα ευέλικτο, αυτόματο εργαλείο το οποίο μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για την πρόλεξη της θέσης/θέσεων που θα εφαρμοστεί ο ενεργητικός έλεγχος της ροής.

6.1 Εφαρμογή των αναπτυχθεισών μεθόδων-λογισμικού σε πραγματική εφαρμογή

Η ενότητα αυτή έχει σκοπό να καλύψει την απόσταση μεταξύ της βασικής και εφαρμοσμένης έρευνας, δείχνοντας ότι τέτοιες μέθοδοι, όπως αυτές που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της διατριβής, μπορούν να βρουν εφαρμογή σε πραγματικές περιπτώσεις. Για τον λόγο αυτόν στη συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα από τον υπολογισμό χάρτη παραγών ευαισθησίας σε μια πραγματική εφαρμογή και συγκεκριμένα στο ακριβές μοντέλο του αυτοκινήτου VW Passat-B6, χρησιμοποιώντας το ανοικτό λογισμικό. Η γεωμετρία του οχήματος δόθηκε στο ΕΘΣ από το τμήμα έρευνας και ανάπτυξης της ομώνυμης ευρωπαϊκής αυτοκινητοβιομηχανίας, στο πλαίσιο πρόσφατης σχετικής ερευνητικής συνεργασίας. Στα σχήματα 6.3 και 6.4 τα θερμά χρώματα υποδηλώνουν ότι μια στοιχειώδης μετακίνηση της επιφάνειας του οχήματος στη θέση αυτή κατά το κάθετο προς τα μέσα διάνυσμα θα οδηγήσει σε μείωση της δύναμης αντίστασης που ασκείται στο όχημα, το αντίθετο ισχύει, προφανώς, για τις ψυχρές χρωματικά περιοχές της γεωμετρίας.

6.2 Στοιχεία πρωτοτυπίας της διδακτορικής διατριβής

Παρακάτω συνοψίζονται τα στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής.

- Θεμελιώθηκε με μαθηματική αυστηρότητα και με γενικό τρόπο η συνεχής συζυγής μέθοδος.
- Αναπτύχθηκε συνεχής συζυγής μέθοδος με συζυγές μοντέλο τύρβης για ροές που μοντελοποιούνται με το μοντέλο χαμηλών αριθμών *Reynolds* μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras. Με τη χρήση της προτεινόμενης μεθόδου (συζυγές μοντέλο τύρβης) μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια οι παραγώγους ευαισθησίας για τυρβώδεις ροές.
- Διερευνήθηκε η σημασία των διαφόρων όρων που εμφανίζονται στην προτεινόμενη μέθοδο (συζυγές μοντέλο τύρβης) και αφού εντοπίστηκαν όροι με ασήμαντη επίδραση προτάθηκε η αφαίρεση αυτών, διατηρώντας, όμως, την ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγών ευαισθησίας.
- Αναπτύχθηκε περαιτέρω η συνεχής συζυγής μέθοδος για μοντέλα τύρβης τα οποία χρησιμοποιούν συναρτήσεις τοίχου. Με τη νέα αυτή μέθοδο είναι εφικτός ο

υπολογισμός ακριβών παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα στα οποία οι εξισώσεις κατάστασης χρησιμοποιούν μοντέλα τύρβης υψηλών αριθμών *Reynolds*.

- Η εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου στον προσδιορισμό των πλέον ενδεδειγμένων θέσεων για την εφαρμογή δεσμών ελέγχου αναρρόφησης/έγχυσης ρευστού σταθερής παροχής.

Δημοσιεύσεις

- Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C. and Othmer, C. “Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization”, *Journal of Computational Physics*, **229**(13), 5228–5245, 2010.
- Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C. and Othmer, C. “Continuous Adjoint Approach to the Spalart-Allmaras Turbulence Model for Incompressible Flows”, *Computers & Fluids*, **38**(8), 1528–1538, 2009.
- Asouti, V.G. and Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C. “Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **57**(10), 1485–1504, 2008.
- Kampolis, I.C. and Zymaris, A.S. and Asouti, V.G. and Giannakoglou, K.C. “Multilevel optimization strategies based on metamodel-assisted evolutionary algorithms, for computationally expensive problems”, *2007 Congress on Evolutionary Computation - CEC '07*, September 2007, Singapore.
- Papadimitriou, D.I. and Zymaris, A.S. and Giannakoglou, K.C. “Discrete and Continuous Adjoint Formulations for Turbomachinery Applications”, *EUROGEN 2005, International Conference Proceedings*, September 2005, Munich, Germany.
- Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C. and Othmer, C. “Optimal location of suction or blowing jets using the continuous adjoint approach”, *Fifth European Conference on Computational Fluid Dynamics - ECCOMAS CFD 2010*, June 2010, Lisbon, Portugal.
- Giannakoglou, K.C. and Papadimitriou, D.I. and Zymaris, A.S. “The continuous adjoint method for first- and second-order sensitivities in aerodynamic shape optimization”, *Introduction to optimization & multidisciplinary design in aeronautics and turbomachinery. Lecture Series von Karman Institute*, May–June 2010, Rhodes–Saint Genése, Belgium.

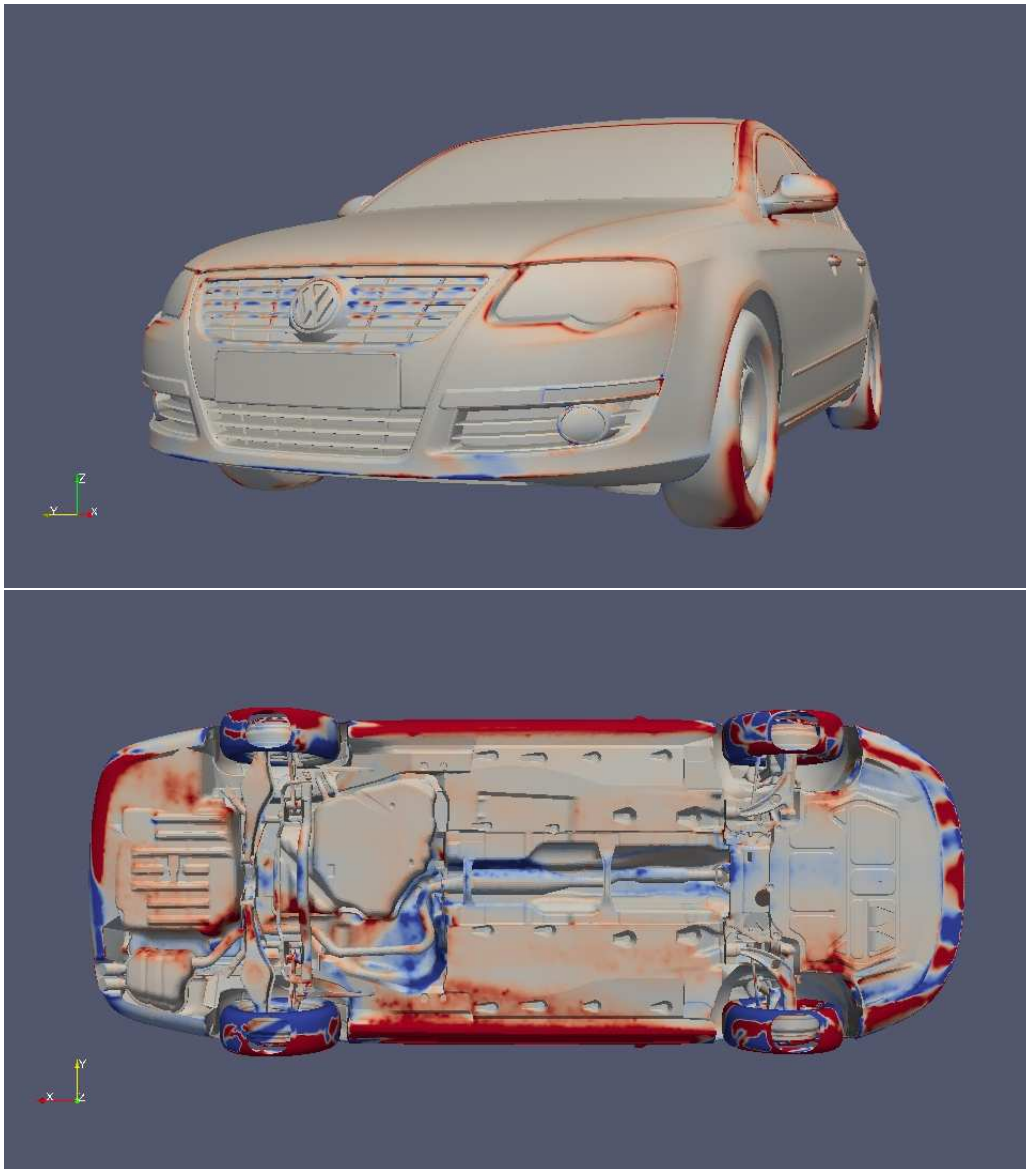
6.3 Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένα στοιχεία τα οποία αποτελούν προτάσεις για περαιτέρω έρευνα στις θεματικές περιοχές της παρούσας διατριβής.

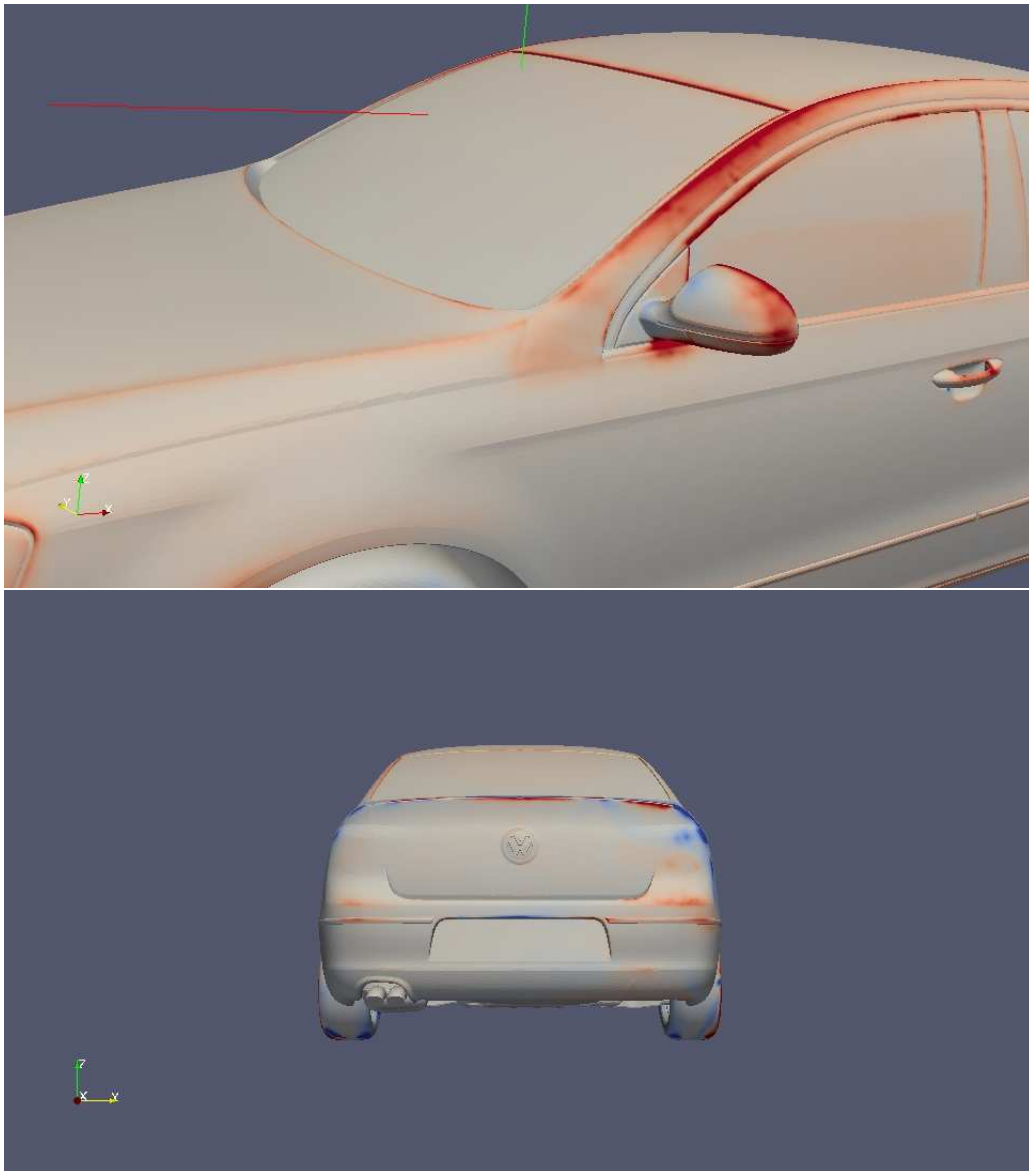
- Προφανής είναι η εφαρμογή των μεθόδων που παρουσιάστηκαν σε κώδικες που χρησιμοποιούν άλλα μοντέλα τύρβης ή για άλλες τεχνικές αντιμετώπισης του προβλήματος της τύρβης όπως λ.χ. για μεθόδους *DNS* (Direct Numerical Simulation)

και *LES* (Large Eddy Simulation). Κατά περίπτωση αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μικρές ή μεγάλες τροποποιήσεις στη διατύπωση.

- Επίσης, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε, για την περίπτωση της συζυγούς διατύπωσης για υψηλούς αριθμούς *Reynolds*, η επέκταση της μεθόδου για το συναρτησιακό την δύναμης αντίστασης, η οποία είναι ιδιαίτερης σημασίας για πραγματικές/βιομηχανικές εφαρμογές.
- Η διατριβή παρέχει το μαθηματικό υπόβαθρο για την επέκταση των συζυγών μεθόδων σε προβλήματα με διαφορετικές/πρόσθετες εξισώσεις κατάστασης, όπως λ.χ. προβλήματα με μεταφορά θερμότητας, υπό εξέλιξη στη διατριβή [122], προβλήματα αεροελαστικότητας και αερακουστικής με νέα συναρτησιακά κ.λ.π.
- Η εισαγωγή της τεχνογνωσίας των συζυγών εξισώσεων τύρβης στις μεθόδους υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας δεύτερης ή και μεγαλύτερης τάξης.
- Σε ότι αφορά τη χρήση των συζυγών μεθόδων σε προβλήματα ελέγχου ροής, ενδιαφέρον θα είχε η χρησιμοποίηση της συζυγούς μεθόδου όχι μόνο για τον προσδιορισμό των περισσότερο 'υποσχόμενων' θέσεων (για την εφαρμογή διατάξεων ενεργητικού ελέγχου της ροής) αλλά και για τον προσδιορισμό των 'βέλτιστων' χαρακτηριστικών των δεσμών αναρρόφησης/έγχυσης (λ.χ. γωνία δέσμης). Επίσης επόμενο βήμα στη μελέτη αυτών των προβλημάτων θα μπορούσε να είναι η επέκταση από δέσμες αναρρόφησης ή έγχυσης σταθερής παροχής ρευστού σε δέσμες με μεταβαλλόμενη παροχή έγχυσης και αναρρόφησης (ανάπτυξη μη-μόνιμης συζυγούς μεθόδου).
- Τέλος, η ένταξη των αναπτυχθέντων μεθόδων στις διαδικασίες μελέτης και σχεδιασμού στη βιομηχανία. Για να επιτευχθεί αυτό είναι απαραίτητη η ενσωμάτωση/επικοινωνία του λογισμικού των συζυγών μεθόδων με άλλα λογισμικά γένεσης γεωμετρίας/υπολογιστικού πλέγματος και βελτιστοποίησης στο πλαίσιο μιας 'αλυσίδας' διαδικασιών ανάλυσης και υπολογισμού.



Σχήμα 6.3: Χάρτης παραγώγων ευαισθησίας σε πραγματική γεωμετρία αυτοκινήτου. Πάνω: πλάγιο-μετωπική όψη του οχήματος, κάτω: άνοψη του οχήματος (η χρωματική κλίμακα των δύο σχημάτων είναι διαφορετική).



Σχήμα 6.4: Χάρτης παραγών ευαισθησίας σε πραγματική γεωμετρία αυτοκινήτου. Πάνω: κοντινή όψη στην περιοχή του καθρέπτη του οποίου η γεωμετρία επιδρά σημαντικά στην δύναμη αντίστασης, κάτω: πίσω όψη του οχήματος.

Παράρτημα Α΄

Ρυθμοί μεταβολής ολοκληρωμάτων – γενικές διατυπώσεις

Στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση 2.10 για τη μαθηματική διατύπωση της συζυγούς μεθόδου σε στρωτές ροές. Αντίστοιχα, στα κεφάλαια 3 και 4 χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις 3.9 και 4.24. Η εξίσωση 2.10 αποδείχτηκε (και αντίστοιχα οι εξισώσεις 3.9, 4.24) για 3Δ (και 2Δ) πεδία ροής κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης σε συνδυασμό με τις εξισώσεις 2.6 και 2.7. Η απόδειξη αυτή δεν είναι όμως γενική, μάλιστα μια ‘ισοδύναμη’, αν όχι πανομοιότυπη, απόδειξη που στηρίζεται σε μετασχηματισμό του συστήματος των συντεταγμένων¹ μπορεί να βρεθεί στην εργασία [173] (4. *Space formula*). Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 2 υπολογίστηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής, $\frac{\delta\Phi}{\delta b_m}$, ενός χωρικού ολοκληρώματος $\Phi = \int_{\Omega} \Phi_{\Omega} d\Omega$ στον ευκλείδιο χώρο E^3 (ή στον E^2) δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega_b} \Phi_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega_b} \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_{S_b} \Phi_{\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \quad (\text{Α΄.1})$$

Προηγουμένως, θεωρήθηκε ότι από τις μεταβλητές σχεδιασμού, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M)$, εξαρτάται, εκτός από την ολοκληρώσιμη ποσότητα Φ_{Ω} , και το ίδιο το χωρίο της ολοκλήρωσης, $\Omega = \Omega(\mathbf{b})$, άρα και τα όρια αυτού, $\partial\Omega = S(\mathbf{b})$. Ο κάτω δείκτης b στα σύμβολα Ω_b και S_b , στην εξίσωση Α΄.1, υποδηλώνει την εξάρτηση των Ω και S από το \mathbf{b} και θα διατηρηθεί στο παρόν παράρτημα (σε αντίθεση με το κυρίως κείμενο όπου για λόγους απλότητας παραλείπεται). Για την περίπτωση της εξίσωσης 2.10, η εξίσωση Α΄.1 θα πρέπει να εφαρμοστεί με

$$\Phi_{\Omega} = \Psi_i R_i^U \quad (\text{Α΄.2})$$

όπου το διάνυσμα Ψ είναι το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών.

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι να διατυπωθεί η θεωρία μεταβολών που οδηγεί στη θεμελίωση του συζυγούς προβλήματος με ένα γενικό και αυστηρό μαθηματικά τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, τόσο η εξίσωση Α΄.1 όσο και οι ρυθμοί μεταβολής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού των επιφανειακών ολοκληρωμάτων (που επίσης χρησιμοποιήθηκαν στη συζυγή θεωρία, λ.χ. εξίσωση 2.15) αποδεικνύεται ότι αποτελούν υποπεριπτώσεις της ίδιας γενικής εξίσωσης (κανόνας Leibniz) από την οποία υπολογίζεται ο ρυθμός της μεταβολής οποιουδήποτε ολοκληρώματος. Στη γενική περίπτωση, το Φ δεν αποτελεί αναγκαστικά

¹ Η απόδειξη της εξίσωσης 2.7 στη διδακτορική διατριβή [18] έγινε καταρχάς για δομημένα πλέγματα κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού από το καρτεσιανό σύστημα στο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, στη συνέχεια επεκτάθηκε για μη δομημένα πλέγματα.

ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ως προς κάποιο μέτρο στον ευκλείδιο χώρο E^ν αλλά ολοκλήρωμα μιας *διαφορικής μορφής* ως προς ένα προσανατολισμένο χωρίο ολοκλήρωσης σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα \mathcal{M}^ν ν -διάστασης χωρίς κάποια συγκεκριμένη δομή, [174, 175, 176].

Α'.1 Η γενική γραφή του ρυθμού μεταβολής ενός ολοκληρώματος – κανόνας Leibniz

Έστω ένα προσανατολισμένο χωρίο ολοκλήρωσης D_b διάστασης p το οποίο εξαρτάται από τις παραμέτρους \mathbf{b} ορισμένο σε μια ν -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα \mathcal{M}^ν , στην οποία ορίζεται η εξωτερική διαφορική μορφή p -βαθμού ω (p -μορφή)

$$\omega = f_I dx_I = f_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (\text{Α'.3})$$

Προηγουμένως, ο δείκτης $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ υποδηλώνει άθροιση και ισχύει ότι $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \nu$. Τα (x_1, x_2, \dots, x_ν) αποτελούν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων σε μια γειτονιά $N_M \subset \mathcal{M}^\nu$ και τα διαφορικά $dx_1, dx_2, \dots, dx_\nu$ σχηματίζουν μια βάση μορφών πρώτης τάξης (1-μορφών) στο N_M . Επισημαίνεται ότι οι συναρτήσεις f_I (που θεωρούνται 0-μορφές) είναι λείες στο N_M και εξαρτώνται από τις παραμέτρους σχεδιασμού. Το σύμβολο \wedge υποδηλώνει το εξωτερικό γινόμενο, το οποίο είναι ένα αντισυμμετρικό γινόμενο. Με βάση τον γενικευμένο κανόνα Leibniz, [173], ο ρυθμός μεταβολής του ολοκληρώματος $\int_{D_b} \omega$, ως προς καθεμιά από τις παραμέτρους b_m , δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{db_m} \int_{D_b} \omega = \int_{D_b} \frac{\partial \omega}{\partial b_m} + \int_D \mathbf{X} \cdot d_x \omega + \int_{\partial D_b} \mathbf{X} \cdot \omega \quad (\text{Α'.4})$$

όπου ∂D_b είναι το όριο του χωρίου ολοκλήρωσης D_b .

Με $\frac{\partial \omega}{\partial b_m}$ συμβολίζεται ο άμεσος ρυθμός μεταβολής της p -μορφής εξαιτίας αλλαγής στις παραμέτρους σχεδιασμού χωρίς αλλαγή στο χωρίο. Ισχύει, συνεπώς, ότι

$$\frac{\partial \omega}{\partial b_m} = \frac{\partial f_I}{\partial b_m} dx_I = \frac{\partial f_{i_1, i_2, \dots, i_p}}{\partial b_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (\text{Α'.5})$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{D_b} \frac{\partial \omega}{\partial b_m}$, για τον E^3 (ή τον E^2), ταυτίζεται με το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης Α'.1.

Στην εξίσωση Α'.4, το διάνυσμα \mathbf{X} ορίζεται ως ο μερικός διαφορικός τελεστής πρώτης τάξης

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_i} \quad (\text{Α'.6})$$

και ισοδυναμεί με μια κατά κατεύθυνση παραγωγή. Η τελευταία είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Υπενθυμίζεται ότι σε μια πολλαπλότητα M^ν , οποιουδήποτε βαθμού, η ευκλείδιος έννοια του διανύσματος ως μέτρου και διεύθυνσης, όπως συμβαίνει στον ευκλείδιο χώρο, δεν υφίσταται.

Με $d_x \omega$ συμβολίζεται η *εξωτερική παράγωγος*² της p -μορφής ω ως προς τις χωρικές συντεταγμένες x_1, x_2, \dots, x_ν μόνο (και όχι ως προς τις παραμέτρους σχεδιασμού b_m). Το

γεγονός αυτό υποδηλώνεται και από την απουσία του δείκτη b στο χωρίο της ολοκλήρωσης D . Στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, η εξωτερική παράγωγος της p -μορφής ω , εξίσωση Α.3, ορίζεται ως

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I. \quad (\text{Α.7})$$

Με βάση την εξίσωση Α.7 η εξωτερική παράγωγος $d_x \omega$ είναι μια διαφορική μορφή $(p+1)$ βαθμού (βλ. και ορισμό εξωτερικής παραγώγου, 1^η ιδιότητα).

Η πράξη $\mathbf{X} \cdot \omega$ κατά την οποία ένα διάνυσμα, \mathbf{X} , και μια p -μορφή, $\omega = a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ (που αναλύεται σε γινόμενο πρώτων μορφών), συνθέτουν μια $(p-1)$ -μορφή ονομάζεται εσωτερικός πολλαπλασιασμός (ή εσωτερική παράγωγος). Εξ ορισμού ισχύει ότι

$$\mathbf{X} \cdot \omega = \mathbf{X} \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge a_p) = \sum (-1)^{i-1} \langle \mathbf{X}, a_i \rangle \wedge \dots \wedge a^{i-1} \wedge a^{i+1} \dots \wedge a^p \quad (\text{Α.8})$$

όπου $\{a_1, \dots, a_p\}$ είναι 1-μορφές στο M^ν . Να επισημανθεί ότι ο ορισμός της εσωτερικής παραγώγου γενικεύεται για κάθε p -μορφή. Στην εξίσωση Α.8 εμφανίζεται ο εσωτερικός πολλαπλασιασμός του διανύσματος \mathbf{X} με μια 1-μορφή, στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\mathbf{X} \cdot \alpha = \left\langle \sum \frac{\partial x_i}{\partial b_m} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum a_j dx_j \right\rangle = \sum \frac{\partial x_i}{\partial b_m} a_i \quad (\text{Α.9})$$

Στην εξίσωση Α.8 χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός $\langle \mathbf{X}, \alpha \rangle \equiv \mathbf{X} \cdot \alpha$.

Ακολουθεί μια παρατήρηση σχετική με την ταύτιση διανύσματος και διαφορικού τελεστή στην πολλαπλότητα M^ν .

Θεώρημα Α.1. Έστω \mathbf{X} μια παραγωγή της άλγεβρας C_M^∞ όλων των απείρων διαφορίσιμων συναρτήσεων της M^ν και x_1, x_2, \dots, x_ν ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων της πολυπλοκότητας. Τότε ισχύει ότι $\mathbf{X}f = \sum_{i=1}^\nu X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, όπου $\mathbf{X}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{X}x_i$.

Επισημάνση. Οι συντεταγμένες x_1, x_2, \dots, x_ν είναι συναρτήσεις ορισμένες στο M^ν , συνεπώς η $\mathbf{X}x_i$ ορίζεται ως παραγωγή του \mathbf{X} που δρα στις συντεταγμένες συναρτήσεις x_i .

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος (του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, βλ. [177]) αποτελεί το γεγονός ότι ένα διανυσματικό πεδίο μιας ν -διάστατης πολλαπλότητας M^ν ταυτίζεται με την παραγωγή \mathbf{X} της άλγεβρας C_M^∞ . Αποτέλεσμα αυτού είναι τα εφαιπόμενα διανύσματα σε ένα σημείο μιας πολλαπλότητας M^ν να ταυτίζονται με τα διανυσματικά πεδία που διέρχονται από το σημείο αυτό. Και, συνεπώς, διανυσματικά πεδία και παραγωγίσεις ταυτίζονται.

Εξωτερική παράγωγος. Η εξωτερική παράγωγος, d , μιας διαφορικής μορφής επί του συνόλου $\Lambda_p(M^\nu)$ των p -μορφών μιας πολυπλοκότητας M^ν καθορίζεται μονοσήμαντα από τις εξής ιδιότητες

1. η εξωτερική παράγωγος είναι μια γραμμική απεικόνιση από το $\Lambda_p(M^\nu)$ στο $\Lambda_{p+1}(M^\nu)$
2. $d(\omega + \beta) = d\omega + d\beta$
3. $d(\omega \wedge \beta) = d\omega \wedge \beta + (-1)^p \omega \wedge d\beta$, όπου $\omega \in \Lambda_p(M^\nu)$ και $\beta \in \Lambda_q(M^\nu)$
4. $d(d\omega) = 0$ (λήμμα του Poincaré)
5. για κάθε συνάρτηση f ισχύει ότι $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Α'.2 Εφαρμογή στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής χωρικού ολοκληρώματος στον E^3

Στην παρούσα παράγραφο, θα χρησιμοποιηθεί η γενική εξίσωση Leibniz, Α'.4, προκειμένου να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ενός χωρικού ολοκληρώματος στον ευκλείδιο 3Δ χώρο (E^3), $\Phi = \int_{\Omega} \Phi_{\Omega} d\Omega$. Όπως θα αποδειχτεί, η προκύπτουσα έκφραση ισοδυναμεί με τη γραφή Α'.1 που χρησιμοποιήθηκε στη διατριβή και αποδείχτηκε με τον τρόπο του κεφαλαίου 2. Το ολοκλήρωμα Φ γράφεται

$$\Phi = \int_{\Omega} \Phi_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \omega \quad (\text{Α'.10})$$

όπου ω μια 3-μορφή (που εκφράζει το στοιχειώδη όγκο στον E^3) στο σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 , για την οποία ισχύει ότι

$$\omega = \Phi_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (\text{Α'.11})$$

όπου $\Phi_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in C_{E^3}^{\infty}$.

Στην παρούσα περίπτωση, από την εξίσωση Α'.7 προκύπτει ότι η εξωτερική παράγωγος $d_x \omega$ ισούται με

$$\begin{aligned} d_x \omega &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial x_i} dx_i \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\ &= \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial x_1} dx_1 \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) + \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial x_2} dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial x_3} dx_3 \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Α'.12})$$

Στην εξίσωση Α'.12 χρησιμοποιήθηκε η αντισυμμετρική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου, δηλαδή ότι, για μια πρώτη μορφή α , ισχύει $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Το διάνυσμα \mathbf{X} , είναι το

$$\mathbf{X} = \frac{\partial x_1}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_3} \quad (\text{Α'.13})$$

και εσωτερική παράγωγος $\mathbf{X} \cdot \omega$, με βάση τις εξισώσεις Α'.8 και Α'.9, ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \omega &= \Phi_{\Omega} \left(\frac{\partial x_1}{\partial b_m} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial x_2}{\partial b_m} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial b_m} dx_1 \wedge dx_2 \right) \\ &= \Phi_{\Omega} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_k \end{aligned} \quad (\text{Α'.14})$$

όπου $d\mathbf{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$ η στοιχειώδης επιφάνεια.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, η εξίσωση Α'.4 δίνει ότι

$$\frac{d}{db_m} \int_{\Omega} \Phi_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega_b} \frac{\partial \Phi_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_{S_b} \Phi_{\Omega} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} d\mathbf{S} \quad (\text{Α'.15})$$

Η τελευταία εξίσωση ταυτίζεται με την εξίσωση Α'.1 ($d\mathbf{S} = n_k dS$).

Α'.3 Εφαρμογή στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής επικαμπύλιου ολοκληρώματος στον E^2

Συχνά, στη συζυγή διατύπωση απαντώνται μεταβολές επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στα όρια του χωρίου. Δύο τέτοια παραδείγματα είναι η ολοκλήρωση των διατμητικών τάσεων γύρω από μια αεροτομή και η μαζικά ολοκληρωμένη ολική πίεση στα όρια εισόδου και εξόδου του πεδίου ροής.

Το ολοκλήρωμα Φ γράφεται

$$\Phi = \int_{\ell_b} \Phi_\ell dl = \int_{\ell_b} \omega \quad (\text{A'.16})$$

όπου $dl = (dx_1, dx_2)$, και ω η 1-μορφή

$$\omega = \Phi_{\ell_1} dx_1 + \Phi_{\ell_2} dx_2 \quad (\text{A'.17})$$

με $\Phi_\ell = (\Phi_{\ell_1}, \Phi_{\ell_2})$, $\{\Phi_{\ell_1}(\mathbf{x}, \mathbf{b}), \Phi_{\ell_2}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\} \in C^\infty_{E^2}$.

Η εξωτερική παράγωγος $d_x \omega$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} d_x \omega &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I = \frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 + \frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned} \quad (\text{A'.18})$$

Για το διάνυσμα \mathbf{X} , έχουμε ότι

$$\mathbf{X} = \frac{\partial x_1}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial b_m} \frac{\partial ()}{\partial x_2} \quad (\text{A'.19})$$

συνεπώς, η εσωτερική παράγωγος του $\mathbf{X} \cdot d_x \omega$, ισούται με

$$\mathbf{X} \cdot d_x \omega = \left(\frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial b_m} dx_2 - \frac{\partial x_2}{\partial b_m} dx_1 \right) \quad (\text{A'.20})$$

Τέλος, η εσωτερική παράγωγος $\mathbf{X} \cdot \omega$, που εμφανίζεται στο τρίτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Α'.4, είναι, με βάση την εξίσωση Α'.9 ίση με

$$\mathbf{X} \cdot \omega = \mathbf{X} \cdot (\Phi_{\ell_1} dx_1 + \Phi_{\ell_2} dx_2) = \frac{\partial x_1}{\partial b_m} \Phi_{\ell_1} + \frac{\partial x_2}{\partial b_m} \Phi_{\ell_2} \quad (\text{A'.21})$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση Α'.4 τις εκφράσεις Α'.7 και Α'.21 και αν τα όρια ολοκλήρωσης είναι δύο σημεία επί της καμπύλης ℓ_b , έστω τα $\partial \ell_b = \{\mathbf{x}_A(\mathbf{b}), \mathbf{x}_B(\mathbf{b})\}$, τότε προκύπτει η παρακάτω έκφραση για τη μεταβολή του ολοκληρώματος Φ

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_m} \int_{\ell_b} \omega &= \int_{\ell_b} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial b_m} dx_1 + \frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial b_m} dx_2 \right) + \int_{\ell} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{\ell_1}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial b_m} dx_2 - \frac{\partial x_2}{\partial b_m} dx_1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial x_1}{\partial b_m} \Phi_{\ell_1} + \frac{\partial x_2}{\partial b_m} \Phi_{\ell_2} \right)_{\mathbf{x}_A}^{\mathbf{x}_B} \end{aligned} \quad (\text{A'.22})$$

Η τελευταία εξίσωση, Α'.22 ταυτίζεται με την εξίσωση

$$\frac{d}{db_m} \int_{\ell_b} \Phi_\ell d\ell = \int_{\ell_b} \frac{\partial \Phi_{\ell_i}}{\partial b_m} dx_i + \int_{\ell_b} \frac{\partial \Phi_{\ell_i}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dx_i + \int_{\ell_b} \Phi_{\ell_i} \frac{\partial (dx_i)}{\partial b_m} \quad (\text{Α'.23})$$

Η εξίσωση Α'.23 προκύπτει από την ανάλυση του κεφαλαίου 2 (βλ. εξίσωση 2.13). Μια απόδειξη αυτού παρατίθεται στη συνέχεια.

Το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Α'.23 είναι το ίδιο με το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Α'.22 (στη δεύτερη εξίσωση έχει αναπτυχθεί το άθροισμα). Επίσης, ισχύει ότι

$$\frac{\partial (dx_i)}{\partial b_m} = d \left(\frac{\partial x_i}{\partial b_m} \right) \quad (\text{Α'.24})$$

επομένως το ολοκλήρωμα $\int_{\ell} \Phi_{\ell_i} \frac{\partial (dx_i)}{\partial b_m}$ της εξίσωσης Α'.23 γίνεται ίσο με

$$\int_{\ell} \Phi_{\ell_i} \frac{\partial (dx_i)}{\partial b_m} = \int_{\ell} d \left(\Phi_{\ell_i} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} \right) - \int_{\ell} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} d\Phi_{\ell_i} = \left(\Phi_{\ell_i} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} \right)_{x_A}^{x_B} - \int_{\ell} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} d\Phi_{\ell_i} \quad (\text{Α'.25})$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης Α'.25 ταυτίζεται με τον τελευταίο όρο της εξίσωσης Α'.22. Συνεπώς, για να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δύο τρόπων, αρκεί να αποδειχτεί ότι οι όροι $\int_{\ell} \frac{\partial \Phi_{\ell_i}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dx_i - \int_{\ell} \frac{\partial x_i}{\partial b_m} d\Phi_{\ell_i}$ είναι ίσοι με το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης Α'.22. Αυτό προκύπτει αν αναλυθούν οι όροι και ληφθεί υπόψη ότι

$$d\Phi_\ell = \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_2} dx_2 \quad (\text{Α'.26})$$

Παράρτημα Β΄

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Ο απλούστερος τρόπος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, μιας συνάρτησης κόστους $F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (*Finite Differences Method*). Με \mathbf{U} συμβολίζονται οι μεταβλητές της ροής και με $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ οι παράμετροι ελέγχου του προβλήματος. Συγκεκριμένα, με χρήση κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας (που είναι η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος και αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή) οι παράγωγοι ευαισθησίας δίνονται από την έκφραση

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{F(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m + \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M) - F(b_1, \dots, b_{m-1}, b_m - \epsilon, b_{m+1}, \dots, b_M)}{2\epsilon} \quad (\text{B'.1})$$

όπου $m = 1, \dots, M$ είναι το πλήθος των παραμέτρων ελέγχου/σχεδιασμού.

Όπως προαναφέρθηκε, πρόκειται για την ‘απλούστερη’ μέθοδο υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας μιας και δεν απαιτεί καμία μαθηματική διατύπωση, πλην της εξίσωσης Β΄.1, σε αντίθεση, για παράδειγμα, με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, παράρτημα Γ΄, τη μέθοδο των συζυγών μεταβλητών [34, 35] και βέβαια με τη συζυγή μέθοδο. Επίσης, ο προγραμματισμός της μεθόδου είναι άμεσος, αφού βασίζεται σε χρήση ήδη υπάρχουσων μεθόδων: παραμετροποίηση αεροδυναμικής/υδροδυναμικής μορφής, γένεση πλέγματος, επίλυση της ροής και υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης κόστους. Όμως, η απαίτηση για επίλυση δύο φορές των εξισώσεων της ροής για κάθε μια από τις M παραμέτρων ελέγχου, έκφραση Β΄.1, καθιστά το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου δυσβάστακτο όταν το μέγεθος M λαμβάνει μεγάλες τιμές. Ο εφαρμογές στο πεδίο της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής εμφανίζουν συνήθως ιδιαίτερα μεγάλο πλήθος παραμέτρων ελέγχου το οποίο σε συνδυασμό με τους κύκλους της μεθόδου βελτιστοποίησης (αν πρόκειται για εφαρμογή βελτιστοποίηση) ή με το πλήθος των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος του σώματος (αν ζητείται υπολογισμός χαρτών ευαισθησίας, κάθε κόμβος είναι ένα σημείο ελέγχου) οδηγεί ουσιαστικά σε αδυναμία χρησιμοποίησης της μεθόδου. Συγκριτικά υπενθυμίζεται ότι το κόστος της συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας μιας βαθμωτής συνάρτησης κόστους F είναι η επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων (που είναι περίπου ισοδύναμη σε υπολογιστικό κόστος με αυτή της επίλυσης των εξισώσεων της ροής). Το κόστος αυτό είναι ανεξάρτητο του πλήθους των σημείων ελέγχου M .

Ένα επίσης μειονέκτημα της μεθόδου έναντι και των τριών προαναφερθεισών μεθόδων (συζυγής, μέθοδος ευθείας διαφόρισης και μέθοδος συζυγών μεταβλητών) είναι η εξάρτηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας από την ποσότητα ϵ . Συνεπώς, όταν

χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι απαραίτητη η δοκιμή διαφόρων τιμών για την ποσότητα ϵ ώστε να πιστοποιηθεί ότι η χρησιμοποιούμενη τελικά τιμή οδηγεί σε αξιόπιστα αποτελέσματα. Ας επισημανθεί ότι αυτή η πιστοποίηση έχει λάβει χώρα σε όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή, είτε αυτό αναφέρεται ρητά σε κάθε εφαρμογή είτε όχι. Επίσης η μέθοδος προϋποθέτει την στοιχειώδη μεταβολή της γεωμετρίας του σώματος το οποίο οδηγεί σε απαίτηση για επαναγένεση του υπολογιστικού πλέγματος (ή μετατόπιση του με χρήση ελατηρίων, ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη κάθε φορά τακτική).

Για τους παραπάνω λόγους, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών δεν προτείνεται για χρήση σε προβλήματα όπως τα εξεταζόμενα στη διατριβή αυτή. Εδώ δε, χρησιμοποιείται μονάχα ως μέθοδος πιστοποίησης των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας.

Παράρτημα Γ΄

Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (*Direct Differentiation Method*), θα διατυπωθούν μαθηματικά οι σχετικές εξισώσεις καθώς και οι οριακές τους συνθήκες. Η μέθοδος διατυπώνεται πρώτα για στρωτές ροές (εξισώσεις 2.1, 2.2) και, στη συνέχεια, επεκτείνεται για τυρβώδεις ροές. Ζητούμενο είναι να υπολογιστεί, όπως και στις συζυγείς μεθόδους, η τιμή του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης κόστους, $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, εξίσωση 2.15. Για να επιτευχθεί αυτό, η μέθοδος προϋποθέτει την επίλυση του προβλήματος της ροής και επιπλέον M συστημάτων προερχόμενων από τους ρυθμούς μεταβολής των εξισώσεων ροής $\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = 0$, $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = 0$, όπου $m = 1, \dots, M$ είναι το πλήθος των παραμέτρων ελέγχου. Ας επισημανθεί ότι παρότι η μέθοδος πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων κεντρικών διαφορών (κόστους $2M$) (α) ως προς το ότι το κόστος της είναι μικρότερο (περίπου μισό) και (β) ως προς το ότι δεν εξαρτάται από τη στοιχειώδη ποσότητα διαφόρισης (που χρησιμοποιείται στις πεπερασμένες διαφορές) εξακολουθεί να είναι πολύ απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους συγκριτικά πάντα με τη συζυγή μέθοδο. Συνεπώς, στην παρούσα διατριβή, η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε και χρησιμοποιείται για να αποτελέσει ένα επιπρόσθετο εργαλείο πιστοποίησης (μαζί με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών) των υπολογιζόμενων από τις συζυγείς μεθόδους παραγώγων ευαισθησίας. Επανερχόμενοι στη σύγκριση της μεθόδου της ευθείας διαφόρισης με αυτήν των πεπερασμένων διαφορών, επισημαίνεται ότι η πρώτη δεν προϋποθέτει τη μεταβολή της γεωμετρίας του υπόψη σώματος και συνεπώς ούτε και του πλέγματος (γεγονός το οποίο συνεισφέρει επιπλέον στη μείωση του κόστους της μεθόδου έναντι των πεπερασμένων διαφορών). Ας σημειωθεί, ότι η επίλυση των εξισώσεων $\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = 0$ και $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = 0$ γίνεται στο πεδίο Ω και άρα και στο ίδιο πλέγμα στο οποίο επιλύθηκαν και οι εξισώσεις της ροής. Το γεγονός αυτό, ότι δηλαδή δεν μεταβάλλεται η γεωμετρία του σώματος εξηγεί τη μη-εξάρτηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας από τη στοιχειώδη ποσότητα διαφόρισης ϵ (β). Στον πίνακα Γ.1 παρατίθενται συγκεντρωτικά τα βασικά χαρακτηριστικά των τεσσάρων γνωστότερων μεθόδων υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας έτσι ώστε να γίνεται πιο άμεσα η σύγκριση τους. Οι μέθοδοι είναι: (α) συζυγής μέθοδος (η συζυγής συνεχής μέθοδος που παρουσιάζεται στη διατριβή, η 'κλασική' συνεχής συζυγής και η διακριτή συζυγής μέθοδος, για τις δύο τελευταίες αναφέρεται από μία αντιπροσωπευτική εργασία - για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στη βιβλιογραφία του κεφαλαίου 1), (β) μέθοδος της ευθείας διαφόρισης, (γ) μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών και (δ) μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Από τον εν λόγω πίνακα καθίσταται σαφές ότι η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, είναι περίπου 'ισάξια' με αυτή των μιγαδικών

μέθοδος	ισοδύναμες επιλύσεις ροής	ανακατασκευή γεωμετρίας	επαναγένεση / στρατηγικές μετακίνησης πλέγματος	εξάρτηση από ϵ
CA	2	×	×	×
CA [39]	2	✓	✓	×
DA [58]	2	✓	✓	×
DD	$M + 1$	✓	✓	×
CV	$M + 1$	✓	✓	×
FD	$2M$	✓	✓	✓

Πίνακας Γ.1: Βασικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν την ‘απόδοση’ των γνωστότερων μεθόδων υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας. Οι συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται στην πρώτη στήλη αντιστοιχούν σε: (α1) CA [18]: συνεχής συζυγής μέθοδος που προτείνεται στη διατριβή. (α2) CA [39]: ‘κλασική’ συνεχής συζυγής μέθοδος, ενδεικτικά αναφέρεται η πρώτη εργασία που εμφανίζεται η μέθοδος στην περιοχή της αεροδυναμικής ([39], Jameson, 1988). (α3) CA [58]: διακριτή συζυγής μέθοδος, ενδεικτικά αναφέρεται μια εργασία των Anderson και Nielsen, [58]. (β) DD : μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (γ) CV : μέθοδος μιγαδικών μεταβλητών (δ) FD : μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

μεταβλητών και υστερεί έναντι των συζυγών μεθόδων.

Εκτός από τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης, η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης βρίσκει τη σημαντικότερη εφαρμογή της στον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας δεύτερης τάξης (Hessian matrix) [9, 10, 11, 121]· όπου σε συνδυασμό με τη συζυγή μέθοδο συνθέτουν μια μέθοδο υπολογισμού του μητρώου των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις παραμέτρων ελέγχου. Αντίθετα ως προς τον υπολογισμό πρώτων παραγώγων, η μέθοδος χρησιμοποιείται αποδοτικά για τον υπολογισμό παραγώγων δεύτερης τάξης.

Πιο συγκεκριμένα, στη μέθοδο αυτή, οι εξισώσεις 2.30 και 2.31, που εδώ ξαναγράφονται για λόγους πληρότητας, επιλύονται για το εσωτερικό του πεδίου ροής Ω (ισχύει η εξίσωση 2.9) ως προς τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ συνοδευόμενες από κατάλληλα διατυπωμένες οριακές συνθήκες για αυτές τις ποσότητες.

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) = 0 \quad (2.30)$$

και

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.31)$$

Ας επισημανθεί ότι, όπως και στο συζυγές πρόβλημα, έτσι και εδώ χρησιμοποιούνται οι άμεσες μεταβολές των ροϊκών μεγεθών έναντι των ολικών για τους ίδιους λόγους που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 2.4. Οι πεδιακές εξισώσεις 2.30 και 2.31 είναι οι ίδιες για κάθε παράμετρο b_m . Αυτό που διαφοροποιείται σε κάθε περίπτωση, δηλαδή για κάθε παράμετρο ελέγχου, είναι οι οριακές συνθήκες (παράγραφος Γ.1) στην περιοχή του παραμετροποιημένου ορίου.

Έχοντας επιλύσει το παραπάνω σύστημα εξισώσεων M φορές (μια φορά για κάθε παράμετρο ελέγχου) χρησιμοποιούνται τα υπολογισμένα πεδία των ρυθμών μεταβολής $\frac{\partial p}{\partial b_m}$,

$\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ στην έκφραση 2.15, προκειμένου να εξαχθούν οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας του προβλήματος, από τη σχέση

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega \quad (2.15)$$

όπου

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (2.16\alpha)$$

$$\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (2.16\beta)$$

Γ.1 Οριακές συνθήκες των εξισώσεων 2.30 και 2.31

Οι οριακές συνθήκες για τα μεγέθη $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$, πρέπει να είναι συμβατές με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος της ροής. Από τον ολικό ρυθμό μεταβολής, $\frac{\delta(\cdot)}{\delta b_m}$, των οριακών συνθηκών του προβλήματος της ροής εξάγονται οι εκφράσεις των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών, οι οποίες και αποτελούν τις οριακές συνθήκες που 'κλείνουν' το σύστημα των εξισώσεων 2.30 και 2.31. Στις συνθήκες αυτές εμφανίζονται οι ρυθμοί μεταβολής των θέσεων των κόμβων του παραμετροποιημένου ορίου, $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$. Η σημασία αυτών των όρων είναι μεγάλη, καθότι μέσω αυτών 'αντιλαμβάνεται' το σύστημα των εξισώσεων 2.30 και 2.31 τις εν δυνάμει μεταβολές του ορίου εξαιτίας των μεταβολών στα σημεία ελέγχου της γεωμετρίας του σώματος. Ο όρος 'εν δυνάμει' χρησιμοποιήθηκε γιατί στη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης δεν επιβάλλονται πραγματικά οι μεταβολές δb_m στα σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν στους ρυθμούς μεταβολής $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι συζυγείς οριακές συνθήκες ξεχωριστά για κάθε τμήμα του ορίου του πεδίου ροής.

Γ.1.1 Όρια εισόδου

Στα όρια εισόδου, S_I , όπου ισχύουν οι εξισώσεις 2.20α' και 2.22, για την άμεση μεταβολή $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$, ισχύει η εξίσωση 2.23

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0 \quad (2.23)$$

Η μεταβολή $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου με προεκβολή (ότι ακριβώς ισχύει και για τη στατική πίεση στο πρόβλημα επίλυσης της ροής).

Γ.1.2 Όρια εξόδου

Στα όρια εξόδου, S_O , λόγω της 2.20α' και του ότι $\frac{\delta p}{\delta b_m} = 0$, για την άμεση μεταβολή $\frac{\partial p}{\partial b_m}$, ισχύει η εξίσωση 2.24

$$\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0 \quad (2.24)$$

ενώ το διάνυσμα $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ υπολογίζεται με προεκβολή από το εσωτερικό του πεδίου ροής (όπως και στο πρόβλημα της ροής για την ταχύτητα).

Γ'.1.3 Στερεά όρια

Στα στερεά όρια, S_W , τα οποία έχουν παραμετροποιηθεί και δύνανται να μεταβληθούν (μεταβάλλοντας τις τιμές των b_m) ισχύει ότι $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0$. Συνεπώς, από την εξίσωση 2.6, η άμεση μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (2.55)$$

ενώ για τη μεταβολή $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ ισχύει ότι και στα όρια εισόδου.

Γ'.1.4 Περιοδικά όρια και όρια συμμετρίας

Ισχύει ότι ακριβώς ισχύει και για το πρόβλημα επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes, μόνο που οι συνθήκες αφορούν τις άμεσες μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, για τα περιοδικά όρια, επιβάλλεται ισότητα τιμών και παραγώγων των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεγεθών μεταξύ δύο αντίστοιχων περιοδικών κόμβων. Για τα όρια συμμετρίας, η κάθετη συνιστώσα και η κάθετη κατά κατεύθυνση παράγωγος της μεταβολής της ταχύτητας είναι μηδενικές.

Γ'.2 Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης – Επέκταση στις τυρβώδεις ροές

Στην περίπτωση των τυρβωδών ροών, εκτός από τις εξισώσεις της μέσης ροής 3.1 και 3.2, στο σύστημα των εξισώσεων κατάστασης περιλαμβάνονται και οι εξισώσεις (ή η εξίσωση) του μοντέλου τύρβης. Για την περίπτωση όπου το χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης είναι το μοντέλο μιας εξίσωσης Spalart–Allmaras, εξίσωση 3.4, η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης απαιτεί την επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = 0$, $\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = 0$ και $\frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_m} = 0$ ως προς τις άμεσες μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών $\frac{\partial p}{\partial b_m}$, $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m}$. Με βάση τους ρυθμούς μεταβολής των εξισώσεων κατάστασης, εξισώσεις 2.30, 3.10 και 3.12, το σύστημα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων είναι

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) = 0 \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = & \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_m} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \tilde{\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \\ & - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} \right) + \tilde{\nu} \left(-\frac{\partial P}{\partial b_m} + \frac{\partial D}{\partial b_m} \right) + (-P + D) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_m} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται με αντικατάσταση στην εξίσωση 2.15, στην οποία οι μεταβολές $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$ δίνονται από τις εξισώσεις 3.32α' και 3.32β' (κεφάλαιο 3), όπου λαμβάνεται υπόψη ο ρυθμός μεταβολής $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m}$

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \quad (3.32\alpha')$$

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \quad (3.32\beta')$$

Οι οριακές συνθήκες που κλείνουν το σύστημα των εξισώσεων 2.30, 3.10 και 3.12 και αφορούν στις μεταβολές των μεταβλητών της μέσης ροής $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ είναι ίδιες με αυτές που περιγράφηκαν στην παράγραφο Γ'.1. Η μεταβλητή \tilde{v} στο όριο εισόδου του πεδίου ροής, S_I , λαμβάνει καθορισμένη τιμή (συνθήκη Dirichlet) γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την εξίσωση 2.20α' οδηγεί στη μηδενική Dirichlet συνθήκη της εξίσωσης 3.36

$$\frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} = 0 \quad (3.36)$$

Στα όρια εξόδου, S_O , η τιμή της μεταβλητής $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m}$ υπολογίζεται με προεκβολή από το εσωτερικό του πεδίου ροής. Τέλος, στα στερεά όρια, στα οποία η μεταβλητή της τύρβης είναι $\tilde{v} = 0$ και συνεπώς ισχύει $\frac{\delta \tilde{v}}{\delta b_m} = 0$ η μεταβολή του ορίου $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ οδηγεί στη συνθήκη 3.45

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} = - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (3.45)$$

Στην παράγραφο αυτή αναλύθηκε η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης για την περίπτωση όπου το χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης είναι αυτό των Spalart-Allmaras, τα όσα παρουσιάστηκαν μπορούν εύκολα να εξειδικευτούν και για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται άλλα μοντέλα τύρβης μιας ή δύο μ.δ.ε. .

Παράρτημα Δ΄

Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ροής

Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής χρησιμοποιείται η τεχνική των πεπερασμένων όγκων. Αναφερόμενοι σε στρωτές ασυμπίεστες ροές, οι εξισώσεις 2.1 και 2.1 του κεφαλαίου 2, γραμμένες σε διανυσματική γραφή δίνουν

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (\Delta'.1)$$

Όπου με \mathbf{f}_i^{inv} συμβολίζεται το ατριβές διάνυσμα της ροής ενώ με \mathbf{f}_i^{vis} το συνεκτικό διάνυσμα της ροής. Παρότι αναφερόμαστε στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα, στην εξίσωση Δ'.1 έχει προστεθεί και ο χρονικός όρος $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$, υπενθυμίζεται ότι $\mathbf{U} = [p, \mathbf{v}]^T$. Αυτό συμβαίνει γιατί η επίλυση του χρονικά μόνιμου συζυγούς πεδίου Ψ γίνεται με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης (time-marching method). Η ύπαρξη του χρονικού όρου καθιστά το σύστημα Δ'.1 υπερβολικό στο χώρο-χρόνο, με πραγματικές ιδιοτιμές οι οποίες εκφράζουν την ταχύτητα της πληροφορίας που διατρέχει το πεδίο ροής. Αξιοποιώντας αυτήν την ιδιότητα, η επίλυση των χρονικά μη-μόνιμων συζυγών εξισώσεων επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικά μόνιμης λύσης ως το ασυμπτωτικό (στο χρόνο t) όριο μιας χρονικά εξελισσόμενης λύσης.

Για το ατριβές διάνυσμα ισχύει ότι

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i^{inv}}{\partial x_i} = A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \quad (\Delta'.2)$$

όπου με A_i συμβολίζονται τα Ιακωβιανά μητρώα $A_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{inv}}{\partial \mathbf{U}}$, $i = 1, 2, (3)$, [126, 178].

Για το συνεκτικό διάνυσμα, \mathbf{f}_i^{vis} , ισχύει ότι

$$\mathbf{f}_i^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{bmatrix} \quad (\Delta'.3)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις Δ'.1 στον όγκο ελέγχου Ω_P του κόμβου P (για όλους τους κόμβους του πλέγματος)

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_P} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i^{vis}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (\Delta'.4)$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης, προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{S_P} (\mathbf{f}_i^{inv} - \mathbf{f}_i^{vis}) n_i dS = 0 \quad (\Delta'.5)$$

όπου $S_P = \partial\Omega_P$ το όριο του όγκου ελέγχου Ω_P .

Η εξίσωση Δ'.5 γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \mathbf{U}_P + \sum_{Q \in nei(P)} (\Phi_{PQ}^{inv} - \Phi_{PQ}^{vis}) \Delta S = 0 \quad (\Delta'.6)$$

όπου με Q συμβολίστηκαν όλοι οι γειτονικοί, $nei()$, κόμβοι του P . Τα διανύσματα της ροής \mathbf{f}_i^{inv} και \mathbf{f}_i^{vis} αντικαταστάθηκαν με τα αριθμητικά διανύσματα της ροής Φ_{PQ}^{inv} και Φ_{PQ}^{vis} (ανά μονάδα μήκους του κοινού ορίου μεταξύ των δύο γειτονικών υπολογιστικών κυψελών, του κόμβου P και του κόμβου Q).

Δ'.1 Διακριτοποίηση του διανύσματος της ατριβούς συζυγούς ροής

Το συζυγές (αριθμητικό) διάνυσμα της ατριβούς ροής μεταξύ δύο κόμβων του πλέγματος P και Q που συνδέονται μέσω της ακμής PQ υπολογίζεται με την εφαρμογή ενός μονοδιάστατου επιλύτη Riemann, [179, 123], που είναι τύπου διάσπασης της διαφοράς διανυσμάτων της ροής (*Flux Difference Splitting*)

$$\Phi_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}^{inv} (\mathbf{U}_{PQ}^L, \mathbf{n}_{PQ}) + \mathbf{H}^{inv} (\mathbf{U}_{PQ}^R, \mathbf{n}_{PQ})] - \frac{1}{2} |\bar{A}_{PQ}|^T (\mathbf{U}_{PQ}^R - \mathbf{U}_{PQ}^L) \quad (\Delta'.7)$$

Με \mathbf{H}^{inv} συμβολίζεται το φυσικό διάνυσμα της ροής (ατριβές), για το οποίο ισχύει ότι $\mathbf{H}^{inv} = \mathbf{f}_i^{inv} n_i$. Πιο συγκεκριμένα για τα δύο διανύσματα \mathbf{H}^{inv} που εμφανίζονται στην εξίσωση Δ'.7 ισχύει ότι

$$\mathbf{H}^{inv} (\mathbf{U}_{PQ}^L, \mathbf{n}_{PQ}) = (A_{PQ}^L) \mathbf{U}_{PQ}^L \quad (\Delta'.8)$$

$$\mathbf{H}^{inv} (\mathbf{U}_{PQ}^R, \mathbf{n}_{PQ}) = (A_{PQ}^R) \mathbf{U}_{PQ}^R \quad (\Delta'.9)$$

όπου με A_{PQ}^L και A_{PQ}^R συμβολίζονται τα Ιακωβιανά μητρώα υπολογισμένα για τις τιμές της αριστερής και δεξιάς κατάστασης, αντίστοιχα.

Με $|\bar{A}_{PQ}|$ συμβολίζεται η Ιακωβιανή οριζούσα για τις απόλυτες ιδιοτιμές υπολογισμένη με τη μέση τιμή των μεταβλητών \mathbf{U}_{PQ}^L και \mathbf{U}_{PQ}^R .

Για ακρίβεια πρώτης τάξης, οι τιμές της αριστερής και δεξιάς κατάστασης λαμβάνονται ίσες με τις τιμές στους κόμβους P και Q αντιστοίχως, δηλαδή ισχύει ότι $\mathbf{U}_{PQ}^L = \mathbf{U}_P$, $\mathbf{U}_{PQ}^R = \mathbf{U}_Q$. Ενώ, για ακρίβεια δεύτερης τάξης (που είναι η χρησιμοποιούμενη ακρίβεια σε όλες τις εφαρμογές της διδακτορικής διατριβής) οι τιμές των δύο καταστάσεων (αριστερή και δεξιά) υπολογίζονται από προεκβολή με βάση τις σχέσεις

$$\mathbf{U}_{PQ}^L = \mathbf{U}_P + \frac{1}{2} (\mathbf{PQ}) \nabla \mathbf{U}_P \quad (\Delta'.10\alpha')$$

$$\mathbf{U}_{PQ}^R = \mathbf{U}_Q - \frac{1}{2} (\mathbf{PQ}) \nabla \mathbf{U}_Q \quad (\Delta'.10\beta')$$

Προκειμένου να εξασφαλισθεί η μονοτονία του σχήματος προεκβολής Δ'.10 χρησιμοποιούνται συναρτήσεις περιορισμού (limiters). Συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις περιορισμού των van Leer-van Albada, [180], των Barth-Jespersen, [181] και του Venkatakrishnan, [182]. Για πληρέστερη παρουσίαση του συγκεκριμένου ζητήματος ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στις διατριβές [123, 138].

Δ'.2 Διακριτοποίηση του διανύσματος της συνεκτικής ροής

Η εξίσωση Δ'.6, για μη-δομημένα πλέγματα που αποτελούνται από τριγωνικά (2Δ) ή τετραεδρικά (3Δ) στοιχεία, λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \mathbf{U}_P + \sum_{Q \in nei(P)} \Phi_{PQ}^{inv} \Delta S - \sum_{T \in nei_T(P)} \Phi_{P,T}^{vis} \Delta S = 0 \quad (\Delta'.11)$$

όπου με $nei_T(P)$ συμβολίζονται όλα τα γειτονικά στον κόμβο P τρίγωνα (ή τετράεδρα).

Το αριθμητικό διάνυσμα της συνεκτικής ροής $\Phi_{P,T}^{vis}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την έκφραση Δ'.12 για τις παραγώγους της ταχύτητας στο στοιχείο T

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_T = \sum_{k=1}^{3(4)} \frac{\partial L_k}{\partial x_j} v_{i,k} \quad (\Delta'.12)$$

όπου με L_k συμβολίστηκαν οι συναρτήσεις μορφής του κόμβου k του τριγώνου ($k = 1, 2, 3$) ή του τετραέδρου ($k = 1, \dots, 4$).

Το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να διαχειρίζεται πέραν των μη-δομημένων πλεγμάτων που αποτελούνται από τριγωνικά (2Δ) ή τετραεδρικά (3Δ) στοιχεία και υβριδικά πλέγματα διαφόρων ειδών στοιχείων. Στη περίπτωση αυτή, δεν χρησιμοποιείται ο παραπάνω κατά στοιχείο, T , του πλέγματος υπολογισμός των συνεκτικών διανυσμάτων της ροής αλλά ένας πιο γενικός υπολογισμός κατά ακμή. Για τη δεύτερη περίπτωση, αυτής της σάρωσης κατά ακμές (όπου αντί της εξίσωσης Δ'.11 ισχύει η Δ'.6) η παράγωγος της ταχύτητας σε μια ακμή που συνδέει δύο κόμβους P και Q , δίνεται από

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{PQ} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_P + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_Q \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_P + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_Q \right] n_j \frac{v_i^Q - v_i^P}{|\mathbf{PQ}|} \right\} n_j \quad (\Delta'.13)$$

Οποιαδήποτε περαιτέρω ανάπτυξη του συγκεκριμένου θέματος δεν άπτεται του αντικειμένου της διδακτορικής διατριβής. Περισσότερες πληροφορίες παρουσιάζονται στη διατριβή [183].

Δ'.3 Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος ολοκλήρωσης

Ο υπολογισμός του ψευδοχρονικού βήματος Δt_P σε κάθε κόμβο P γίνεται με δύο τρόπους, όπως και στον υπολογισμό του συνεκτικού διανύσματος της ροής: (α) κατά στοιχείο και (β) κατά ακμή. Στην πρώτη περίπτωση ισχύει ότι, [123],

$$\Delta t_P = CFL \min \{ \Delta t_T, T \in nei_T(P) \} \quad (\Delta'.14\alpha)$$

$$\Delta t_T = \frac{h_T^2}{(|\mathbf{v}_T| + c_T) h_T + 2 \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right)} \quad (\Delta'.14\beta)$$

όπου δηλαδή, με βάση την εξίσωση Δ'.14α', εκλέγεται η μικρότερη τιμή από τα στοιχεία που περιβάλλουν τον κόμβο P . Με CFL συμβολίζεται ο αριθμός Courant–Friedrics–Levy που πολλαπλασιάζει το χρονικό βήμα και, συνεπώς, καθορίζει τη μέγιστη τιμή αυτού έτσι ώστε το σχήμα να είναι ευσταθές [184, 185]. Επίσης με c συμβολίζεται η 'τεχνητή' ταχύτητα του ήχου που ορίζεται ως $c = \sqrt{(v_i n_i)^2 + \beta}$. Εδώ β είναι η παράμετρος της τεχνητής συμπίεσότητας ($\beta > 0$) η οποία πολλαπλασιάζει την εξίσωση της συνέχειας και μέσω της οποίας 'ελέγχεται' η σύζευξη των εξισώσεων συνέχειας και ορμής, [126, 179, 178].

Για την δεύτερη περίπτωση, του υπολογισμού κατά ακμές, ισχύει ότι

$$\Delta t_P = \frac{CFL \Omega_P}{\sum_i^{2(,3)} (|v_i| + c_P) S_{P,i} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\Omega_P}{\sum_i^{2(,3)} S_{P,i}}} \quad (\Delta'.15)$$

Με Ω_P συμβολίζεται ο όγκος (εμβαδόν στις 2Δ) ελέγχου του κόμβου P στον οποίο υπολογίζεται το ψευδοχρονικό βήμα και με $S_{P,i}$ οι προβολές του όγκου ελέγχου σε καθεμιά από τις 2 ή 3 διαστάσεις, $i = 1, 2(, 3)$

$$S_{P,i} = \frac{1}{2} \sum_{Q \in nei(P)} |n_i^{PQ}| \quad (\Delta'.16)$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον υπολογισμό κατά ακμές, ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στη διατριβή [183].

Δ'.4 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Για την επίλυση της εξίσωσης Δ'.4 χρησιμοποιείται το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα που περιγράφεται στη συνέχεια και επιλύεται με τη χρήση της μεθόδου Jacobi. Η εξίσωση Δ'.4 γράφεται στη μορφή

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} = -\mathbf{R}_P^{n+1} \quad (\Delta'.17)$$

όπου $\Delta \mathbf{U}_P^{n+1} = \mathbf{U}_P^{n+1} - \mathbf{U}_P^n$ ενώ με \mathbf{R}_P^{n+1} συμβολίζονται τα υπόλοιπα των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής γραμμένων για τον κόμβο P κατά την $(n + 1)$ ψευδοχρονική επανάληψη. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$\mathbf{R}_P^{n+1} = \sum_{Q \in nei(P)} (\Phi_{PQ}^{inv} - \Phi_{PQ}^{vis}) \Delta S \quad (\Delta'.18)$$

Με Newton γραμμικοποίηση για τα υπόλοιπα \mathbf{R}_P^{n+1} , ισχύει ότι

$$\mathbf{R}_P^{n+1} = \mathbf{R}_P^n + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_P^n \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} \quad (\Delta'.19)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την εξίσωση Δ'.19 στην εξίσωση Δ'.4 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} &= -\mathbf{R}_P^n - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_P^n \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} \\ \left[\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} I_P + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_P^n \right] \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} &= -\mathbf{R}_P^n \end{aligned} \quad (\Delta'.20)$$

όπου με I_P συμβολίζεται το μητρώο το οποίο έχει όλα του τα στοιχεία μηδενικά πλην αυτών της κυρίας διαγωνίου που αντιστοιχούν στον κόμβο P .

Το μητρώο $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}$ αποτελείται από διαγώνια (*Diag*) και μη-διαγώνια (*Zm*) στοιχεία. Τα μη-διαγώνια στοιχεία του μητρώου προέρχονται από τη συνεισφορά των γειτονικών κόμβων, $Q = nei(P)$, του P στα αριθμητικά διανύσματα της ροής (για ακρίβεια πρώτης τάξης) και των γειτόνων των κόμβων Q (για ακρίβεια δεύτερης τάξης). Δεδομένου ότι η ακρίβεια της λύσης σχετίζεται με την τάξη ακρίβειας του δεξιού μέλους της εξίσωσης Δ'.20, στο αριστερό μέλος χρησιμοποιείται ακρίβεια πρώτης τάξης. Η εξίσωση Δ'.20 μπορεί συνεπώς να λάβει τη μορφή

$$Diag_P^n \Delta \mathbf{U}_P^{n+1} + \sum_{Q \in nei(P)} Zm_Q^n \Delta \mathbf{U}_Q^{n+1} = -\mathbf{R}_P^n \quad (\Delta'.21)$$

Η εξίσωση Δ'.21 επιλύεται επαναληπτικά με χρήση της μεθόδου Jacobi για κάθε μια ψευδοχρονική στιγμή (εσωτερικές επαναλήψεις) με σκοπό τον υπολογισμό της διόρθωσης $\Delta \mathbf{U}_P^{n+1}$ και συνεπώς του διανύσματος \mathbf{U}_P^{n+1} .

Παράρτημα Ε΄

Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων

Για τη διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιείται η τεχνική των πεπερασμένων όγκων, η ίδια τεχνική χρησιμοποιείται και για τη διακριτοποίηση του προβλήματος της ροής. Τα σχήματα διακριτοποίησης που χρησιμοποιούνται είναι τα ίδια μεταξύ προβλήματος της ροής και συζυγούς προβλήματος. Παρότι, θεωρητικά, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε άλλο σχήμα διακριτοποίησης για το συζυγές πρόβλημα, στην πράξη είναι προτιμότερο να επιλεγεί ο ίδιος τρόπος με αυτόν που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα της ροής. Σε αντίθετη περίπτωση, πιθανές αριθμητικές ανακρίβειες (που πηγάζουν από την αναντιστοιχία αυτή) μπορούν να οδηγήσουν σε ανακρίβειες στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Επίσης, συντρέχουν και προγραμματιστικοί λόγοι οι οποίοι συνηγορούν στην προαναφερθείσα τακτική όπως, για παράδειγμα, η χρησιμοποίηση ενός συνόλου υποπρογραμμάτων που έχουν ήδη δημιουργηθεί για το πρόβλημα επίλυσης των εξισώσεων της ροής.

Αναφερόμενοι σε στρωτές ροές, οι συζυγείς εξισώσεις 2.40 και 2.41 του κεφαλαίου 2, γραμμένες σε διανυσματική γραφή δίνουν

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{Ε'.1})$$

Όπου με $\mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv}$ συμβολίζεται το συζυγές ατριβές διάνυσμα της ροής (με τον κάτω δείκτη Ψ υποδηλώνεται ότι το διάνυσμα αυτό αντιστοιχεί στο συζυγές πρόβλημα), ενώ με $\mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}$ το συνεκτικό συζυγές διάνυσμα της ροής. Όπως και στο πρόβλημα των εξισώσεων της ροής, έτσι και εδώ, παρότι αναφερόμαστε στο χρονικά μόνιμο πρόβλημα, στην εξίσωση Ε'.1 έχει προστεθεί και ο χρονικός όρος $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, υπενθυμίζεται ότι $\Psi = [q, \mathbf{u}]^T$.

Για το ατριβές συζυγές διάνυσμα ισχύει ότι

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv}}{\partial x_i} = A_i^T \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \quad (\text{Ε'.2})$$

όπου με A_i συμβολίζονται τα κατά κατεύθυνση Ιακωβιανά μητρώα $A_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{inv}}{\partial \mathbf{U}}$, $i = 1, 2(, 3)$.

Για το συνεκτικό συζυγές διάνυσμα, $\mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}$, ισχύει ότι

$$\mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{Ε'.3})$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις Ε'.1 στον όγκο ελέγχου Ω_P του κόμβου P (για όλους τους κόμβους του πλέγματος)

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \Psi}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega_P} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (\text{Ε'.4})$$

και, εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης, προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \Psi}{\partial t} d\Omega - \int_{S_P} (\mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv} - \mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}) n_i dS = 0 \quad (\text{Ε'.5})$$

όπου $S_P = \partial\Omega_P$, το όριο του όγκου ελέγχου Ω_P .

Η εξίσωση Ε'.5 γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \Psi_P - \sum_{Q \in \text{nei}(P)} (\Phi_{\Psi,PQ}^{inv} - \Phi_{\Psi,PQ}^{vis}) \Delta S = 0 \quad (\text{Ε'.6})$$

Τα διανύσματα της ροής $\mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv}$ και $\mathbf{f}_{\Psi,i}^{vis}$ αντικαταστάθηκαν με τα αριθμητικά διανύσματα της ροής $\Phi_{\Psi,PQ}^{inv}$ και $\Phi_{\Psi,PQ}^{vis}$ (ανά μονάδα μήκους του κοινού ορίου μεταξύ των δύο γειτονικών υπολογιστικών κυψελών, του κόμβου P και του κόμβου Q).

Ε'.1 Διακριτοποίηση του διανύσματος της ατριβούς συζυγούς ροής

Το συζυγές (αριθμητικό) διάνυσμα της ατριβούς ροής μεταξύ δύο κόμβων του πλέγματος P και Q που συνδέονται μέσω της ακμής PQ υπολογίζεται με την εφαρμογή ενός μονοδιάστατου επιλύτη για το συζυγές πρόβλημα. Στη συνέχεια, θα παρουσιασθούν δύο διαφορετικά τέτοια σχήματα (α) ένα συντηρητικό που στηρίζεται στο σχήμα διάσπασης διαφορών ροής (*Flux Difference Splitting* που χρησιμοποιείται στο ευθύ πρόβλημα και (β) ένα μη-συντηρητικό το οποίο αποτελεί παραλλαγή του προηγούμενου ώστε να λαμβάνει υπόψη του τη μη-συντηρητικότητα των εξισώσεων Ε'.1 (εξίσωση Ε'.2).

Ε'.1.1 Σχήμα (α)

Σε αυτήν την περίπτωση, το συζυγές ατριβές διάνυσμα της ροής υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Phi_{\Psi,PQ}^{inv} = -\frac{1}{2} [\mathbf{H}^{inv}(\Psi_{PQ}^L, \mathbf{n}_{PQ}) + \mathbf{H}^{inv}(\Psi_{PQ}^R, \mathbf{n}_{PQ})] - \frac{1}{2} |\bar{A}_{PQ}|^T (\Psi_{PQ}^R - \Psi_{PQ}^L) \quad (\text{Ε'.7})$$

Η παραπάνω έκφραση είναι αντίστοιχη ως προς αυτήν του 1Δ επιλύτη Riemann του προβλήματος της ροής. Σε αυτή με \mathbf{H}^{inv} συμβολίζεται το συζυγές διάνυσμα της ροής (ατριβές), για το οποίο ισχύει ότι $\mathbf{H}^{inv} = \mathbf{f}_{\Psi,i}^{inv} n_i$. Πιο συγκεκριμένα, για τα δύο διανύσματα \mathbf{H}^{inv} που εμφανίζονται στην εξίσωση Ε'.7 ισχύει ότι

$$\mathbf{H}^{inv}(\Psi_{PQ}^L, \mathbf{n}_{PQ}) = (A_{PQ}^L)^T \Psi_{PQ}^L \quad (\text{Ε'.8})$$

$$\mathbf{H}^{inv}(\Psi_{PQ}^R, \mathbf{n}_{PQ}) = (A_{PQ}^R)^T \Psi_{PQ}^R \quad (\text{Ε'.9})$$

όπου με A_{PQ}^L και A_{PQ}^R συμβολίζονται τα Ιακωβιανά μητρώα υπολογισμένα για τις τιμές της αριστερής και δεξιάς κατάστασης, αντίστοιχα. Με $|\bar{A}_{PQ}|$ συμβολίζεται η Ιακωβιανή οριζούσα για τις απόλυτες ιδιοτιμές υπολογισμένη με τη μέση τιμή των μεταβλητών \mathbf{U}_{PQ}^L και \mathbf{U}_{PQ}^R .

Για ακρίβεια πρώτης τάξης, οι τιμές της αριστερής και δεξιάς κατάστασης λαμβάνονται ίσες με τις τιμές στους κόμβους P και Q αντιστοίχως, δηλαδή ισχύει ότι $\Psi_{PQ}^L = \Psi_P$, $\Psi_{PQ}^R = \Psi_Q$. Ενώ, για ακρίβεια δεύτερης τάξης (που είναι η χρησιμοποιούμενη ακρίβεια σε όλες τις εφαρμογές της διδακτορικής διατριβής) οι τιμές των δύο καταστάσεων (αριστερή και δεξιά) υπολογίζονται από προεκβολή με βάση τις σχέσεις

$$\Psi_{PQ}^L = \Psi_P + \frac{1}{2} (\mathbf{PQ}) \nabla \Psi_P \quad (\text{Ε'.10α})$$

$$\Psi_{PQ}^R = \Psi_Q - \frac{1}{2} (\mathbf{PQ}) \nabla \Psi_Q \quad (\text{Ε'.10β})$$

Ε'.1.2 Σχήμα (β)

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται το μη-συντηρητικό σχήμα

$$\Phi_{\Psi, PQ}^{inv} = -\frac{1}{2} \left[(A_{PQ}^L)^T \Psi_{PQ}^L + (A_{PQ}^L)^T \Psi_{PQ}^R \right] - \frac{1}{2} |A_{PQ}^L|^T (\Psi_{PQ}^R - \Psi_{PQ}^L) \quad (\text{Ε'.11α})$$

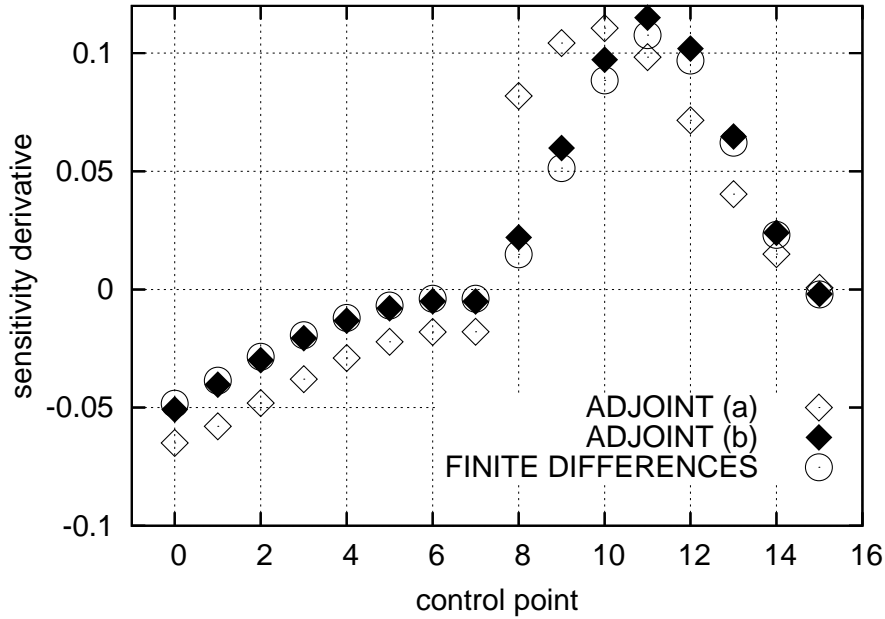
$$\Phi_{\Psi, QP}^{inv} = \frac{1}{2} \left[(A_{PQ}^R)^T \Psi_{PQ}^L + (A_{PQ}^R)^T \Psi_{PQ}^R \right] + \frac{1}{2} |A_{PQ}^R|^T (\Psi_{PQ}^R - \Psi_{PQ}^L) \quad (\text{Ε'.11β})$$

αντί του σχήματος της εξίσωσης Ε'.7. Σε αντίθεση με το (α) σχήμα υπολογισμού, στο διάνυσμα της ροής που αντιστοιχεί στον κόμβο P χρησιμοποιούνται τα Ιακωβιανά μητρώα που υπολογίζονται με βάση την κατάσταση Ψ_{PQ}^L ενώ στο διάνυσμα του κόμβου Q χρησιμοποιούνται τα Ιακωβιανά μητρώα που υπολογίζονται με βάση την κατάσταση Ψ_{PQ}^R .

Ο τρόπος αυτός υπερτερεί από το σχήμα Ε'.7. Αυτό δείχνεται από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα γραφήματα Ε'.1 (το γράφημα γίνεται για την εφαρμογή 2.6.1) και :: (το γράφημα γίνεται για την εφαρμογή 2.6.3). Ας σημειωθεί, ότι όπως είναι φυσικό, το σχήμα διακριτοποίησης (β) είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε στα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2. Η καλύτερη συμπεριφορά του δεύτερου σχήματος μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι στις συζυγείς εξισώσεις Ε'.1 το ατριβές διάνυσμα, εξίσωση Ε'.2, είναι μη-συντηρητικό. Η μη-συντηρητικότητα της έκφρασης Ε'.2 είναι απόρροια της μαθηματικής διατύπωσης, χωρίς η εν λόγω έκφραση να αποτελεί προϊόν γραμμικοποίησης (όπως αντίστοιχα συνέβη στο πρόβλημα της ροής). Επομένως, κατά την ολοκλήρωση στον εκάστοτε όγκο ελέγχου, εξίσωση Ε'.5, τα Ιακωβιανά μητρώα στην εξίσωση του κόμβου P είναι σταθερά και υπολογίζονται μόνο με βάση τις ροϊκές μεταβλητές στη θέση αυτή.

Ε'.2 Διακριτοποίηση του διανύσματος της συνεκτικής συζυγούς ροής

Ο όρος των συζυγών διατμητικών τάσεων $-\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, εξισώσεις 2.41, είναι 'αντίστοιχος' με τον όρο των διατμητικών τάσεων στις εξισώσεις κατάστασης 2.1, $-\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Επομένως, μπορεί να εφαρμοστεί ο ίδιος τρόπος διακριτοποίησης και για τα δύο προβλήματα (ευθύ-ροής και συζυγές), μάλιστα αυτό συνιστάται για τους λόγους 'αντιστοιχίας' των δύο προβλημάτων που προηγουμένως αναφέρθηκαν. Επιπροσθέτως, η μεγάλη ομοιότητα των δύο όρων επιτρέπει την άμεση χρησιμοποίηση ακριβώς των ίδιων τμημάτων λογισμικού (υποπρογράμματα, συναρτήσεις κ.λ.π.) τα οποία χρησιμοποιήθηκαν



Σχήμα Ε'.1: Στρωτή ροή σε περύγιο συμπίεστη (εφαρμογή 2.6.1): σύγκριση υπολογιζόμενων παραγώνων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ με τις παρακάτω μεθόδους: (1) τη συζυγή μέθοδο που προτείνεται στο κεφάλαιο 2 για το σχήμα (α), εξίσωση Ε'.7, (2) για την ίδια συζυγή μέθοδο με πριν αλλά με το σχήμα (β), εξίσωση Ε'.11 και (3) με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (κεντρικές διαφορές). Το σχήμα (β) διακριτοποίησης φαίνεται να υπερτερεί του συντηρητικού σχήματος (α).

και κατά την επίλυση του προβλήματος της ροής με τη μικρή διαφορά ότι αντί των ταχυτήτων \mathbf{v} , πλέον θα χρησιμοποιούνται οι συζυγείς ταχύτητες \mathbf{u} .

Η αντίστοιχη της εξίσωσης Δ'.11 για το συζυγές πρόβλημα είναι η εξίσωση Ε'.12. Η τελευταία προκύπτει από την Ε'.6, για μη-δομημένα πλέγματα που αποτελούνται από τριγωνικά στοιχεία (2Δ) ή τετραεδρικά σε (3Δ)

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \Psi_P - \sum_{Q \in \text{nei}(P)} \Phi_{\Psi, PQ}^{\text{inv}} \Delta S - \sum_{T \in \text{nei}_T(P)} \Phi_{\Psi, PT}^{\text{vis}} \Delta S = 0 \quad (\text{Ε'.12})$$

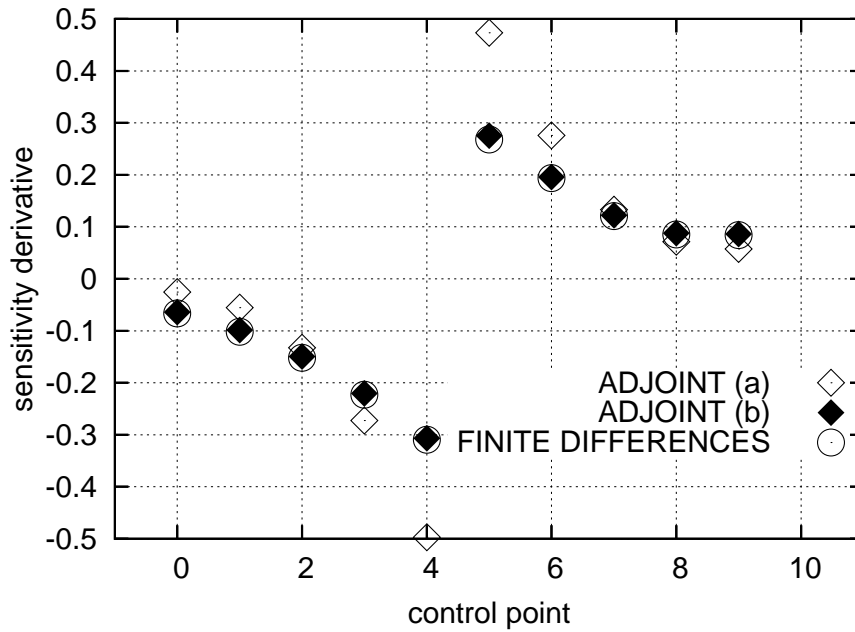
Για την περίπτωση αυτή, το αριθμητικό διάνυσμα της συνεκτικής ροής $\Phi_{\Psi, PT}^{\text{vis}}$ υπολογίζεται από τις παραγώγους

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_T = \sum_{k=1}^{3(4)} \frac{\partial L_k}{\partial x_j} u_{i,k} \quad (\text{Ε'.13})$$

όπου με L_k συμβολίστηκαν οι συναρτήσεις μορφής του κόμβου k του τριγώνου ($k = 1, 2, 3$) ή του τετραέδρου ($k = 1, \dots, 4$).

Ε'.3 Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος ολοκλήρωσης & Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Για την αριθμητική ολοκλήρωση των συζυγών εξισώσεων το ψευδοχρονικό βήμα το οποίο χρησιμοποιείται είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε κατά την τελευταία ψευδοχρονική



Σχήμα Ε'.2: Στρωτή ροή σε περύγιο στροβίλου (εφαρμογή 2.6.3): σύγκριση υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ με τις παρακάτω μεθόδους: (1) τη συζυγή μέθοδο που προτείνεται στο κεφάλαιο 2 για το σχήμα (α), εξίσωση Ε'.7, (2) για την ίδια συζυγή μέθοδο με πριν αλλά με το σχήμα (β), εξίσωση Ε'.11 και (3) με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (κεντρικές διαφορές). Όπως και στο γράφημα Ε'.1 έτσι και εδώ το σχήμα διακριτοποίησης (β) υπερτερεί του συντηρητικού σχήματος (α).

επανάληψη κατά την επίλυση των εξισώσεων της ροής. Επίσης, η μέθοδος επίλυσης που περιγράφηκε στο παράρτημα Δ' είναι αυτή που χρησιμοποιείται και για το συζυγές πρόβλημα. Ας επισημανθεί ότι, λόγω της γραμμικότητας των συζυγών εξισώσεων, τα μητρώα του αριστερού μέλους αποθηκεύονται και δεν ξανα-υπολογίζονται σε κάθε ψευδοχρονική επανάληψη.

Παράρτημα ς'

Επιβολή συζυγών συνθηκών στα όρια εξόδου του πεδίου ροής, S_O

Στο κυρίως μέρος της διδακτορικής διατριβής διατυπώθηκαν μαθηματικά οι οριακές συνθήκες για τις συζυγείς εξισώσεις (α) για στρωτές ροές, κεφάλαιο 2, (β) για τυρβώδεις ροές με το μοντέλο Spalart-Allmaras, κεφάλαιο 3 και (γ) για τυρβώδεις ροές με το μοντέλο $k-\varepsilon$ χαμηλών αριθμών *Reynolds*, κεφάλαιο 4). Από τις παραπάνω συνθήκες, αυτές στην έξοδο του πεδίου ροής παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς πρόκειται για μεικτές εκφράσεις οι οποίες εμπλέκουν τις παραγώγους των συζυγών μεταβλητών με τα μεταβλητές αυτές καθαυτές και τη συνάρτηση κόστους (εξισώσεις 2.54α', 2.54β', κεφάλαιο 2, εξισώσεις 3.44α', 3.44β', κεφάλαιο 3 και εξισώσεις 4.56α', 4.56β', κεφάλαιο 4). Η επιβολή των συζυγών οριακών συνθηκών στην έξοδο αναλύεται παρακάτω.

Έστω ότι με Ω_P , σχήμα ς'.1, συμβολίζεται ο όγκος ελέγχου που αντιστοιχεί στον κόμβο P στην έξοδο του πεδίου ροής. Παρότι το σχήμα αφορά μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων τα όσα αναφέρονται στο παράρτημα αυτό ισχύουν και για δομημένα και υβριδικά πλέγματα. Το όριο, S_P , του όγκου ελέγχου αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα βαρύκεντρο των τριγώνων με τα μέσα των ακμών του πλέγματος και ανήκουν στο εσωτερικό του πεδίου καθώς επίσης και στην έξοδο του πεδίου (τμήμα $\alpha\beta$).

Για στρωτές ροές, ολοκληρώνοντας τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις της ορμής, εξισώσεις 2.41, στον όγκο ελέγχου Ω_P , προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_P} \left[-v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right] d\Omega = \int_{S_P} \left[-v_j u_i n_j - v_j u_j n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + q n_i \right] dS + \int_{\Omega_P} u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (\varsigma'.1)$$

όπου για λόγους απλότητας της εδώ διατύπωσης θεωρείται ότι δεν υπάρχουν χωρικοί όροι F_Ω (γεγονός το οποίο δεν αποτελεί απλά μια απλουστευτική παραδοχή δεδομένου ότι οι μελετώμενες στην παρούσα διατριβή συναρτήσεις κόστους ορίζονται μόνο στα όρια του πεδίου ροής).

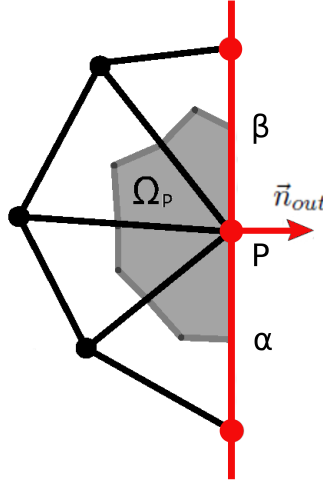
Οι συζυγείς οριακές συνθήκες στο τμήμα $\alpha\beta$ δίνονται από τις εξισώσεις 2.52

$$\phi_{3,i} = 0 \Rightarrow u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i = - \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \quad (\varsigma'.2)$$

Η επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται με έμμεσο τρόπο αντικαθιστώντας τους όρους του αριστερού μέλους της εξίσωσης ς'.2 με τον όρο $-\frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i}$ στα όρια εξόδου. Με βάση τη συνθήκη

ς'.2, η εξίσωση ς'.1 λαμβάνει τη μορφή

$$\int_{\beta\alpha} \left[-v_j u_i n_j - v_j u_j n_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + q n_i \right] dS + \int_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} dS + \int_{\Omega_P} u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (\varsigma'.3)$$



Σχήμα ς'.1: Επιβολή συζυγών οριακών στην έξοδο του πεδίου ροής, S_O : Όγκος ελέγχου σε κόμβο P του μη-δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων στην έξοδο του πεδίου ροής.

Ότι παρουσιάστηκε προηγουμένως για τις περιπτώσεις στρωτών ροών, εφαρμόζεται και για τυρβώδεις ροές (κεφάλαια 3 και 4). Πιο συγκεκριμένα, αν το πρόβλημα μοντελοποιείται με τη χρήση του συζυγούς μοντέλου τύρβης Spalart–Allmaras, τότε ολοκληρώνοντας τις συζυγείς εξισώσεις της ορμής στον όγκο ελέγχου Ω_P λαμβάνει κανείς την αντίστοιχη με την εξίσωση ς'.1 έκφραση

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_P} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(e_{jli} e_{jmq} \frac{C_Y}{Y} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a \right) \right\} d\Omega = \\ & \int_{S_P} \left\{ -v_j u_i n_j - v_j u_j n_i - (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + q n_i - \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a n_i - e_{jli} e_{jmq} \frac{C_Y}{Y} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a n_l \right\} dS \\ & + \int_{\Omega_P} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\varsigma'.4)$$

Από τις οριακές συνθήκες $\phi_{4,i} = 0$, εξισώσεις 3.42, έχουμε ότι

$$u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_i + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} C_Y(\tilde{\nu}) \frac{1}{Y} e_{jmq} e_{jli} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} n_l = - \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \quad (\varsigma'.5)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην εξίσωση ς'.4 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\beta\alpha} \left\{ -v_j u_i n_j - v_j u_j n_i - (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + q n_i - \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a n_i - e_{jli} e_{jmq} \frac{C_Y}{Y} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a n_l \right\} dS \\ & + \int_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} dS + \int_{\Omega_P} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\varsigma'.6)$$

Στο όριο εξόδου επιβάλλεται, εκτός από τις συνθήκες $\phi_{4,i} = 0$, και η συνθήκη $\phi_5 = 0$, εξίσωση 3.43, από όπου προκύπτει ότι

$$-\frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \tilde{\nu}_a v_j n_j + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j = -\frac{\partial F_{S_O}}{\partial \tilde{\nu}} \quad (\zeta'.7)$$

Ολοκληρώνοντας στον όγκο ελέγχου Ω_P την εξίσωση του συζυγούς μοντέλου τύρβης, 3.35, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_P} \left\{ \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} v_j + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) - \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) \right. \\ & \left. - \frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - (-P + D) \tilde{\nu}_a \right\} d\Omega = \\ & \int_{S_P} \left\{ \tilde{\nu}_a v_j n_j + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j - \frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right\} dS \\ & \int_{\Omega_P} \left\{ -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - (-P + D) \tilde{\nu}_a \right\} d\Omega \quad (\zeta'.8) \end{aligned}$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση, ζ'.8, χρησιμοποιηθεί η συνθήκη ζ'.7, αυτή τελικά καταλήγει να λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \int_{\beta\alpha} \left\{ \tilde{\nu}_a v_j n_j + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j - \frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} u_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right\} dS - \int_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{S_O}}{\partial \tilde{\nu}} dS \\ & + \int_{\Omega_P} \left\{ -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\delta\nu_t}{\delta\tilde{\nu}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - (-P + D) \tilde{\nu}_a \right\} d\Omega = 0 \quad (\zeta'.9) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το χρησιμοποιείται το μοντέλο συναρτήσεων τοίχου (κεφάλαιο 4), τότε από την ολοκλήρωση των εξισώσεων 4.46, στον όγκο ελέγχου Ω_P ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_P} \left\{ -v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_a \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varepsilon_a c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} d\Omega = \\ & \int_{S_P} \left\{ -v_j u_j n_i - v_j u_i n_j - (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + q n_i + 2 \left(k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right\} dS \\ & + \int_{\Omega_P} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} + \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (\zeta'.10) \end{aligned}$$

Η συζυγής οριακή συνθήκη που προκύπτει από τη συζυγή διατύπωση είναι $\phi_{4,i} = 0$, όπου η συνάρτηση $\phi_{4,i}$ δίνεται από την εξίσωση 4.53. Εισάγοντας την παραπάνω συνθήκη στην εξίσωση ζ'.10 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\beta\alpha} \left\{ -v_j u_j n_i - v_j u_i n_j - (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + q n_i + 2 \left(k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right\} dS \\ & + \int_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} dS + \int_{\Omega_P} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} + \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (\zeta'.11) \end{aligned}$$

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συνθήκη της συζυγούς μεταβλητής $\tilde{\nu}_a$ χρησιμοποιείται και για τις συνθήκες των μεταβλητών k_a και ε_a . Πιο συγκεκριμένα, από την ολοκλήρωση της συζυγούς εξίσωσης για τη μεταβλητή k_a , εξίσωση 4.47, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_P} \left\{ 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] \right. \\ & + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \\ & \left. + \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_\mu f_\mu P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} - c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \right\} d\Omega = \\ & \int_{S_P} \left\{ 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j - \frac{2}{3} u_j n_j - v_j k_a n_j - \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right\} dS \\ & + \int_{\Omega_P} \left\{ -2f_\mu c_\mu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_\mu f_\mu P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} - c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (\zeta'.12) \end{aligned}$$

Η συζυγής οριακή συνθήκη στην έξοδο του πεδίου ροής $\phi_5^k = 0$, εξίσωση 4.54, οδηγεί στο ότι

$$\begin{aligned} & -2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + \frac{2}{3} u_j n_j + v_j n_j k_a \\ & + \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j - k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - \varepsilon_a \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} = 0 \quad (\zeta'.13) \end{aligned}$$

Συνεπώς, με βάση την εξίσωση, $\zeta'.13$, η έκφραση $\zeta'.12$ γίνεται

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_\alpha} \left\{ 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j - \frac{2}{3} u_j n_j - v_j k_a n_j - \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right\} dS \\ & + \int_{\Omega_P} \left\{ \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} - 2k_a f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} 2f_\mu c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \right. \\ & \left. + \varepsilon_a \left(-2c_1 f_1 c_\mu f_\mu P + c_1 f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} - c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (\zeta'.14) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, με την οριακή συνθήκη της μεταβλητής ε_a $\phi_5^\varepsilon = 0$, εξίσωση 4.55, προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_\alpha} \left\{ -f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j - v_j \varepsilon_a n_j - \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right\} dS \\ & - \int_{\Omega_P} \left\{ f_\mu c_\mu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} + k_a f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} P \right. \\ & \left. + k_a - \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_\varepsilon} f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \varepsilon_a 2c_2 f_2 \frac{\varepsilon}{k} \right\} d\Omega = 0 \quad (\zeta'.15) \end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Othmer, C.: *CFD topology and shape optimization with adjoint methods*. VDI Fahrzeug- und Verkehrstechnik, 13. Internationaler Kongress Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, Wuerzburg, September 2006.
- [2] Arian, E.: *Analysis of the Hessian for aeroelastic optimization*. ICASE report No 95-84, 1995.
- [3] Arian, E. and Ta'asan, S.: *Analysis of the Hessian for aerodynamic optimization: inviscid flow*. Comput. Fluids, 28, 853-877, 1999.
- [4] Ghate, D.P. and Giles, M.B.: *Hessian calculation using AD*. 4th Euro AD Workshop, Aachen, Germany, December 2006.
- [5] Ghate, D. and Giles, M.: *Efficient hessian calculation using automatic differentiation*. AIAA Paper 2007-4059, 2007.
- [6] Martinelli, M. and R., Duvigneau: *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing*. AIAA Paper 2008-2071, 2008.
- [7] Raffard, R.L. and Tomlin, C.J.: *Second order adjoint-based optimization of ordinary and partial differential equations with application to air traffic flow*. 2005 American Control Conference, Portland, OR, USA, June 2005.
- [8] Sandu, A. and Zhang, L.: *Discrete second order adjoints in atmospheric chemical transport modeling*. Journal of Computational Physics, 227, (2008) 5949-5983.
- [9] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 56(10):1929-1943, 2008.
- [10] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations*. Computers & Fluids, 37(8):1029-1039, 2008.
- [11] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *Aerodynamic shape optimization using first and second order adjoint and direct approaches*. Archives of Computational Methods in Engineering, 15(4):447-488, 2008.
- [12] Nocedal, J. and Wright, S.J.: *Numerical optimization*. Springer, Series in Operations Research, New York, 1999.

- [13] Bertsekas, D.P.: *Nonlinear programming*. Athena Scientific, U.S.A., 1995.
- [14] Li, W., Huyse, L., and Padula, S.: *Robust airfoil optimization to achieve drag reduction over a range of Mach numbers*. Industrial applications and design case studies, Struct Multidisc Optim 24, 38–50, Springer-Verlag 2002, DOI: 10.1007/s00158-002-0212-4.
- [15] Green, L.L., Lin, H.Z., and Khalessi, M.R.: *Probabilistic methods for uncertainty propagation applied to aircraft design*. AIAA 2002-3140.
- [16] Putko, M.M., Taylor III, A.C., Newman, P.A., and Green, L.L.: *Approach for input uncertainty propagation and robust design in CFD using sensitivity derivatives*. Transactions of the ASME, 60/Vol. 124, March 2002, DOI: 10.1115/1.1446068.
- [17] Huyse, L. and Lewis, R.M.: *Aerodynamic shape optimization of two-dimensional airfoils under uncertain conditions*. NASA/CR-2001-210648, ICASE Report No. 2001-1.
- [18] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [19] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2009.
- [20] Mangler, W.: *Die berechnung eines tragflugelprofiles mit vorgeschriebener druckverteilung*. Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforschung 1, 46, 1938.
- [21] Lighthill, M.J.: *A new method of two-dimensional aerodynamic design*. Aeronautical Research Council, 1945.
- [22] McFadden, G.B.: *An artificial viscosity method for the design of supercritical airfoils*. New York University report C00-3077-158, 1979.
- [23] Garabedian, P. and McFadden, G.B.: *Computational fluid dynamics of airfoils and wings*. Proc. of Symposium on Transonic, Shock and Multidimensional Flows, Madison, R. Meyer (ed.), Academic Press, New York, 1981.
- [24] Elizarov, A.M., Il'inskiy, N.B., and Potashev, A.V.: *Mathematical methods of airfoil design*. Akademie Verlag, Berglin, 1997.
- [25] Tranen, J.P.: *A rapid computer aided transonic airfoil design method*. AIAA Paper 1974-501, 1974, 1974.
- [26] Volpe, G. and Melnik, R.E.: *The design of transonic aerofoils by a well posed inverse method*, 1986.
- [27] Henne, P.A.: *An inverse transonic wing design method*. AIAA Paper 1980-0330, 1980.
- [28] Γιώτης, Α.Π.: *Χρήση εξεζητικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυίας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση- αντίστροφη σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2003.

- [29] Καρακάσης, Μ.Κ.: *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών, σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [30] Καμπόλης, Ι.Χ.: *Πολυεπίπεδοι, Πολυεπεξεργαστικοί Αλγόριθμοι Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2009.
- [31] Γεωργοπούλου, Χ.: *Τεχνικές βελτιστοποίησης για τον προγραμματισμό λειτουργίας αεριο/ατμο-στροβιλικών μονάδων και το σχεδιασμό συνιστωσών τους*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2009.
- [32] Hicks, R.M., Murran, E.M., and Vanderplaats, G.N.: *An assessment of airfoil design by numerical optimization*. NASA TM X-3092, Ames Research Center, Moffet Field, California, July 1974.
- [33] Hicks, R.M. and Henne, P.A.: *Wing design by numerical optimization*. Journal of Aircraft, 15:407-412, 1978.
- [34] Newman, J.C., Anderson, W.K., and Whitfield, D.L.: *Multidisciplinary sensitivity derivatives using complex variables*. MSSU-COE-ERC-98-08.
- [35] Nielsen, E.J. and Kleb, W.L.: *Efficient construction of discrete adjoint operators on unstructured grids by using complex variables*. AIAA Paper 2005-0324, 2005.
- [36] Lions, J.L.: *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [37] Jameson, A., Kim, S., and Alonso, J.J.: *A gradient accuracy study for the adjoint-based Navier-Stokes design method*. AIAA Paper 1999-0299, 1999.
- [38] Pironneau, O.: *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [39] Jameson, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Computing, 3:233-260, 1988.
- [40] Jameson, A.: *Optimum aerodynamic design using CFD and control theory*. AIAA Paper 1995-1729, 1995.
- [41] Reuther, J. and Jameson, A.: *Aerodynamic shape optimization of wing and wing-body configurations using control theory*. AIAA Paper 1995-0213, 1995.
- [42] Jameson, A., Pierce, N., and Martinelli, L.: *Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 10:213-237, 1998.
- [43] Reuther, J., Alonso, J.J., Rimlinger, M.J., and Jameson, A.: *Aerodynamic shape optimization of supersonic aircraft configurations via an adjoint formulation on distributed memory parallel computers*. Computers & Fluids, 28:675-700, 1999.
-

-
- [44] Baldwin, W.S. and Lomax, H.: *Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows*. AIAA Paper 1978-257, 1978.
- [45] Burgreen, G.W. and Baysal, O.: *Three-dimensional aerodynamic shape optimization of wings using discrete sensitivity analysis*. AIAA Paper 1997-0103, 1997.
- [46] Elliot, J. and Peraire, J.: *Aerodynamic design using unstructured meshes*. AIAA Paper 1996-1941, 1996.
- [47] Gill, P.E, Murray, W., and Wright, M.H.: *Practical optimization*. Academic Press, 1981.
- [48] Elliot, J. and Peraire, J.: *Aerodynamic optimization using unstructured meshes with viscous effects*. AIAA Paper 1997-1849, 1997.
- [49] Elliot, J. and Peraire, J.: *Practical 3D aerodynamic design and optimization using unstructured meshes*. AIAA Journal, 35(9):1479-1485, 1997.
- [50] Giles, M.B. and N.A., Pierce: *Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour*. AIAA Paper 1997-1850, 1997.
- [51] Giles, M.B. and N.A., Pierce: *On the properties of solutions of the adjoint Euler equations*. 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Oxford, UK, 1998.
- [52] Giles, M.B. and Pierce, N.A.: *An introduction to the adjoint approach to design*. ERCOFTAC Workshop on Adjoint Methods, Toulouse, June 21-23, 1999.
- [53] Giles, M.B.: *Discrete adjoint approximations with shocks*. Springer, 2003.
- [54] Giles, M.B., Duta, M.C., and Mueller, J.D.: *Adjoint code developments using the exact discrete approach*. AIAA Paper 2001-2596, 2001.
- [55] Giles, M.B., Duta, M.C., Muller, J.D., and Pierce, N.A.: *Algorithm developments for discrete adjoint methods*. AIAA Journal, 41(2), 2003.
- [56] Pierce, N.A. and Giles, M.B.: *Analytic adjoint solutions for the quasi-one-dimensional Euler equations*. Journal of Fluid Mechanics, 426:327-345, 2001.
- [57] Anderson, W.K. and Bonhaus, D.L.: *Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows*. AIAA Journal, 37(2):185-191, 1999.
- [58] Nielsen, E.J. and Anderson, W.K.: *Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations*. AIAA Journal, 37(11):1411-1419, 1999.
- [59] Nielsen, E.J. and Anderson, W.K.: *Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes*. AIAA Journal, 40(6):1155-1163, 2002.
- [60] Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., Giannakoglou, K.C., and Othmer, C.: *Continuous adjoint approach to the spalart-allmaras turbulence model for incompressible flows*. Computers & Fluids, 38(8):1528-1538, 2009.
-

-
- [61] Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., Giannakoglou, K.C., and Othmer, C.: *Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization*. Journal of Computational Physics, 229(13):5228 – 5245, 2010.
- [62] Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., Giannakoglou, K.C., and Othmer, C.: *Optimal location of suction or blowing jets using the continuous adjoint approach*. In *Fifth European Conference on Computational Fluid Dynamics - ECCOMAS CFD 2010*, Lisbon, Portugal, June 2010.
- [63] Nadarajah, S. and Jameson, A.: *A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization*. AIAA Paper 2000-0667, 2000.
- [64] Nadarajah, S. and Jameson, A.: *Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization*. AIAA Paper 2001-2530, 2001.
- [65] Pierce, N.A. and Giles, M.B.: *An introduction to the adjoint approach to design*. Flow, Turbulence and Combustion, 65(3-4):393-415, 2000.
- [66] Giles, M.B.: *Adjoint methods for aeronautical design*. ECCOMAS CFD Conference, 2001.
- [67] Anderson, W.K. and Venkatakrisnan, V.: *Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation*. AIAA Paper 1997-0643, 1997.
- [68] Griewank, A.: *On automatic differentiation*. Mathematical Programming: Recent Developments and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [69] Courty, F., Dervieux, A., Koobus, B., and Hascoët, L.: *Reverse automatic differentiation for optimum design: from adjoint state assembly to gradient computation*. Optimization Methods and Software, 18(5):615-627, 2003.
- [70] Bücker, H.M. and Corliss, G.F.: *A bibliography on automatic differentiation*. In Bücker, H.M., Corliss, G.F., Hovland, P.D., Naumann, U., and Norris, B. (editors): *Automatic Differentiation: Applications, Theory, and Implementations*, pages 321-322. Springer, 2005.
- [71] Hascoët, L., Utke, J., and Naumann, U.: *Cheaper adjoints by reversing address computations*. Scientific Programming, 16(1):81-92, 2008.
- [72] Pascual, V. and Hascoët, L.: *TAPENADE for C*. In *Selected papers from AD2008 Bonn*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2008. August 2008.
- [73] Bischof, C., Carle, A., Khademi, P., and Mauer, A.: *The ADIFOR 2.0 system for the automatic differentiation of Fortran 77 programs*. Report CRPC-TR94491, Center for Research and Parallel Computation, Rice University, 1994.
- [74] Utke, J. and Naumann, U.: *OpenAD/F: User Manual*. Technical report, Argonne National Laboratory. latest version available online at <http://www.mcs.anl.gov/OpenAD/openad.pdf>.
-

- [75] Straka, C. W.: *ADF95: Tool for automatic differentiation of a Fortran code designed for large numbers of independent variables*. Computer Physics Communications, 168:123-139, 2005.
- [76] Griewank, A., Juedes, D., Mitev, H., Utke, J., Vogel, O., and Walther, A.: *ADOL-C: A package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++*. ACM Transactions on Mathematical Software, 22(2):131-167, 1996.
- [77] Soto, O. and Löhner, R.: *A mixed adjoint formulation for incompressible RANS problems*. AIAA Paper 2002-0451, 2002.
- [78] Soto, O., Löhner, R., and Yang, C.: *An adjoint-based design methodology for CFD optimization problems*. AIAA Paper 2003-0299, 2003.
- [79] Nielsen, E.J and Anderson, W.K.: *Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes*. AIAA Paper 2001-0596, 2001.
- [80] Kim, H.J., Sasaki, D., Obayashi, S., and Nakahashi, K.: *Aerodynamic optimization of supersonic transport wing using unstructured adjoint method*. AIAA Journal, 39(6), 2001.
- [81] Anderson, W.K. and Bonhaus, D.L.: *Aerodynamic design on unstructured grids for turbulent flows*. NASA Technical Memorandum, 112867, June 1997.
- [82] Zingg, D.W., Leung, T.M., Diosady, L., Truong, A.H., Elias, S., and Nemec, M.: *Improvements to a Newton-Krylov adjoint algorithm for aerodynamic optimization*. AIAA Paper, 2005-4857, 2005.
- [83] Nielsen, E.J. and Park, M.A.: *Using an adjoint approach to eliminate mesh sensitivities in computational design*. AIAA Paper 2005-0491, 2005.
- [84] Mavriplis, D.J.: *Discrete adjoint-based approach for optimization problems on three-dimensional unstructured meshes*. AIAA Journal, 45(4):740-750, 2007.
- [85] Jameson, A. and Kim, S.: *Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit*. AIAA Paper 2003-0040, 2003.
- [86] Baysal, O. and Ghayour, K.: *Continuous adjoint sensitivities for optimization with general cost functionals on unstructured meshes*. AIAA Journal, 39 (1), 2001.
- [87] Soto, O. and Löhner, R.: *On the computation of flow sensitivities from boundary integrals*. AIAA Paper 2004-0112, 2004.
- [88] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 36(2):325-341, 2007.
- [89] Othmer, C.: *A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 58(8): 861-877, 2008.
-

- [90] Hazra, S., Schulz, V., Brezillon, J., and Gauger, N.: *Aerodynamic shape optimization using simultaneous pseudo-timestepping*. Journal of Computational Physics, 204:46–64, 2005.
- [91] Hazra, S. B. and Schulz, V.: *Simultaneous pseudo-timestepping for aerodynamic shape optimization problems with state constraints*. SIAM J. Sci. Comput., 28(3):1078–1099, 2006.
- [92] Soto, O. and Löhner, R.: *CFD shape optimization using an incomplete-gradient adjoint approach*. ECCOMAS, Barcelona, September 2000.
- [93] Soto, O. and Löhner, R.: *General methodologies for incompressible flow design problems*. AIAA Paper 2001–1061, 2001.
- [94] Mohammadi, B. and Pironneau, O.: *Applied shape optimization for fluids*. Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [95] Mohammadi, B. and Pironneau, O.: *Shape optimization in fluid mechanics*. Annu. Rev. Fluid Mech. 2004.
- [96] Derakhshan, S., Mohammadi, B., and Nourbakhsh, A.: *Incomplete sensitivities for 3D radial turbomachinery blade optimization*. Computers & Fluids, 37 (2008) 1354–1363.
- [97] Campobasso, M.S., Duta, M.C., and Giles, M.B.: *Adjoint methods for turbomachinery design*. ISOABE Conference, 2001–1055.
- [98] Duta, M.C., Giles, M.B., and Campobasso, M.S.: *The harmonic adjoint approach to unsteady turbomachinery design*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 40(3-4):323–332, 2002.
- [99] Campobasso, M.S., Duta, M.C., and Giles, M.B.: *Adjoint calculation of sensitivities of turbomachinery objective functions*. AIAA Journal of Propulsion and Power, 19(4), 2003.
- [100] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *Total pressure loss minimization in turbomachinery cascades using a new continuous adjoint formulation*. Proceedings of the I MECH E Part A Journal of Power and Energy, 221:865–872, 2007.
- [101] Asouti, V.G., Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I., and Giannakoglou, K.C.: *Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 57(10):1485–1504, 2008.
- [102] Eriksson, L.E.: *A preconditioned Navier-Stokes solver for low mach number flows*. 3rd ECCOMAS CFD Conference, Paris, September 1996.
- [103] Leoviriyakit, K., Kim, S., and A., Jameson: *Aero-structural wing planform optimization using the Navier-Stokes equations*. AIAA Paper 2004–4479, 2004.
- [104] Leoviriyakit, K. and Jameson, A.: *Case studies in aero-structural wing planform and section optimization*. AIAA Paper 2004–5372, 2004.
-

- [105] Gauger, N.: *Adjoint approaches in aerodynamic shape optimization and MDO context*. ECCOMAS CFD, Egmond aan Zee, The Netherlands, September 2006.
- [106] Barcelos, M. and Maute, K.: *Aeroelastic design optimization for laminar and turbulent flows*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1813-1832, 2008.
- [107] Spalart, P.R. and Allmaras, S.R.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. *La Recherche Aerospaciale*, (1):5-21, 1994.
- [108] Martins, J.R.R.A., Alonso, J.J., and Reuther, J.J.: *A coupled-adjoint sensitivity analysis method for high-fidelity aero-structural design*. *Journal of Optimization and Engineering*, 6(1):33-62, 2005.
- [109] Nadarajah, S.K. and Jameson, A.: *Optimal control of unsteady flows using a time accurate method*. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Atlanta, GA, September 2002.
- [110] Nadarajah, S.K. and Jameson, A.: *Optimum shape design for unsteady three-dimensional viscous flows using a non-linear frequency domain method*. AIAA Paper 2006-3455, 2006.
- [111] Nadarajah, S.K., McMullen, M.S., and Jameson, A.: *Non-linear frequency domain based optimum shape design for unsteady three-dimensional flows*. AIAA Paper 2006-1052, 2006.
- [112] Wang, Q., Gleich, D., Saberi, A., Etemadi, N., and Moin, P.: *A Monte Carlo method for solving unsteady adjoint equations*. *Journal of Computational Physics*, 227 (2008) 6184-6205.
- [113] Protas, B.: *Adjoint-based optimization of pde systems with alternative gradients*. *Journal of Computational Physics*, 227 (2008) 6490-6510.
- [114] Mani, K. and Mavriplis, D.J.: *Unsteady discrete adjoint formulation for two-dimensional flow problems with deforming meshes*. AIAA Journal Vol. 46, No.6, June 2008.
- [115] Rumpfkeil, M.P. and Zingg, D.W.: *Unsteady optimization using a discrete adjoint approach applied to aeroacoustic shape design*. AIAA Paper 2008-18, 2008.
- [116] Giles, M.B. and Pierce, N.A.: *Improved lift and drag estimates using adjoint Euler equations*. AIAA Paper 1999-3293, 1999.
- [117] Giles, M.B. and Pierce, N.A.: *Adjoint error correction for integral outputs*. *Error Estimation and Adaptive Discretization Methods in Computational Fluid Dynamics*, pages 47-96, 2002.
- [118] Giles, M.B. and Suli, E.: *Adjoint methods for PDEs: a posteriori error analysis and postprocessing by duality*. *Acta Numerica*, pages 145-236, 2002.
- [119] Venditti, D.A. and Darmofal, D.L.: *A multilevel error estimation and grid adaptive strategy for improving the accuracy of integral outputs*. AIAA Paper 1999-3292, 1999.
-

- [120] Venditti, D.A. and Darmofal, D.L.: *Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs: Application to quasi-one-dimensional flow*. Journal of Computational Physics, 164:204–227, 2000.
- [121] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *The continuous direct-adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems*. Computers & Fluids, 38(8):1539–1548, 2009.
- [122] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και Βελτιστοποίηση Σύνθετων Ρευστομηχανικών Διατάξεων με χρήση Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Εξελκτικών Αλγορίθμων*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, υπό εξέλιξη.
- [123] Κουμπογιάννης, Δ.Γ.: *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 1998.
- [124] <http://www.openfoam.com/>.
- [125] Weller, H.G., Tabor, G., Jasak, H., and Fureby, C.: *A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques*. Computers in Physics, vol. 12, No. 6, 1998.
- [126] Wilquem, F. and Degrez, G.: *A two dimensional multiblock incompressible Euler/Navier-Stokes flow solver*.
- [127] Caretto, L.S., Gisman, A.D., Patankar, S.V., and Spalding, D.B.: *Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation*. Proceedings 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, 1972.
- [128] Jameson, A.: *Optimum aerodynamic design using the control theory*. Computational Fluid Dynamics Review, pp. 495–528, 1995.
- [129] Soemarwoto, B.: *Multi-point aerodynamic design by optimization*. Ph.D. Dissertation, Dept. of Theoretical Aerodynamics, Delft Univ. of Technology, Delft, The Netherlands, Dec.1996.
- [130] Nielsen, E.J., Lu, J., Park, M.A., and Darmofal, D.L.: *An implicit exact dual adjoint solution method for turbulent flows on unstructured grids*. Computers & Fluids, 33:1131–1155, 2004.
- [131] Papadimitriou, D.I., Zymaris, A.S., and Giannakoglou, K.C.: *Discrete and continuous adjoint formulations for turbomachinery applications*. EUROGEN 2005, International Conference Proceedings, Munich, September 2005.
- [132] Dwight, R.P. and Brezillon, J.: *Effect of approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization*. AIAA Journal, 44(12):3022-3031, 2006.
- [133] Edwards, J. and Chandra, S.: *Comparison of eddy-viscosity transport turbulence models for three-dimensional shock-separated flowfields*. AIAA Journal, Vol. 34, No. 4, 1996.
-

- [134] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E.: *Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using Range-Kutta time-stepping schemes*. AIAA Paper 1981-1259, 1981.
- [135] Lee, B.J. and Kim, C.: *Automated design methodology of turbulent internal flow using discrete adjoint formulation*. Aerospace Science and Technology, 11:163-173, 2007.
- [136] Menter, F.R.: *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. AIAA Journal, 32 (8) 1598-1605, 1994.
- [137] Mavriplis, D. J.: *Multigrid strategies for viscous flow solvers on anisotropic unstructured meshes*. Journal of Computational Physics, Vol. 145, No. 1, pp. 141-165, 1998.
- [138] Λαμπρόπουλος, Ν.Κ.: *Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2005.
- [139] Kim, C.S., Kim, C., and Rho, O.H.: *Feasibility study of constant eddy-viscosity assumption in gradient-based design optimization*. Journal of Aircraft, 40(6):1168-1176, 2003.
- [140] Saad, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*. Electronic Edition (copyright by Y. Saad), 2000.
- [141] Farhat, C., Degand, C., Koobus, M., and Lesoinne, M.: *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*. Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 163, 231-245, 1998.
- [142] Burg, C. O. E.: *A robust unstructured grid movement strategy using three-dimensional torsional springs*. AIAA Paper 2004-2529, 2004.
- [143] Λιακόπουλος, Π.Ι.Κ.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2008.
- [144] Norris, C.H. and Reynolds, W.C.: *Turbulent channel flow with a moving wall boundary*. Rept. No FM-10, Stanford University, Rept. Mech. Eng., 1975.
- [145] Rodi, W. and Scheuerer, G.: *Scrutinizing the $k-\epsilon$ model under adverse pressure gradient conditions*. J. Fluids Eng., 108:174-179, 1986.
- [146] Rodi, W.: *Experience with two-layer models combining the $k-\epsilon$ model with a one-equation model near the wall*. AIAA Paper 1991-0216, 1991.
- [147] Sondak, D.L. and Pletcher, R.H.: *Application of wall function to generalized nonorthogonal curvilinear coordinate systems*. AIAA Paper 1993-3107, 1993.
- [148] Jones, W. and Launder, B.: *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol.15, 301-314, 1972.
-

- [149] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές*. Εκδόσεις ΕΜΠ, 2005.
- [150] Stanewsky, E.: *Adaptive wing and flow control technology*. Progress in Aerospace Sciences, 37:583-667, 2001.
- [151] Prandtl, L.: *Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner-reibung*. Proceedings of Third International Mathematical Congress, Heidelberg, 1904, p. 484-91.
- [152] Lachmann, G.V.: *Boundary layer and flow control, its principles and application*. Pergamon Press, NY, vol. 1&2, 1961.
- [153] Braslow, A.L.: *A history of suction-type laminar flow control with emphasis on flight research*. NASA Monographs, vol. 13, 1999.
- [154] Greenblatt, D. and Wygnanski, I.J.: *The control of flow separation by periodic excitation*. Progress in Aerospace Sciences, 36:487-545, 2000.
- [155] Reijnen, D.P.: *Experimental study of boundary layer suction in a transonic compressor*. Phd Thesis, MIT, Cambridge, MA, USA, 1997.
- [156] Merchant, A.: *Aerodynamic design and performance of aspirated airfoils*. Proceedings of ASME Turbo Expo, Amsterdam, The Netherlands, 2002.
- [157] Peacock, R.E.: *Boundary layer suction to eliminate corner separation in cascades of airfoils*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, 3663, 1971.
- [158] Gbadebo, S.A.: *Three-dimensional separations in compressors*. Phd Thesis, Department of Engineering, Univ. Cambridge, Cambridge, UK, 2003.
- [159] Andrea, R.D., Behnken, R.L., and Murray, R.M.: *Rotating stall control of an axial flow compressor using pulsed air injection*. Transactions of the ASME, Vol. 119, pp 742-752, 1997.
- [160] Kefalakis, M. and Papailiou, K.D.: *Active flow control for increasing the surge margin on an axial flow compressor*. ASME TURBO EXPO, GT2006/90113, Barcelona, 2006.
- [161] Kumar, V. and Alvi, F.S.: *Use of high-speed microjets for active separation control in diffusers*. AIAA Journal, Vol. 44, No. 2, pp. 273-281, 2006.
- [162] Stratford, B.S.: *The prediction of separation of turbulent boundary layer*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, pp. 1-16, 1959.
- [163] Kral, L.D., Donovan, J.F., Cain, A.B., and Cary, A.W.: *Numerical simulation of synthetic jet actuators*. AIAA Paper 1997-1824, 1997.
- [164] Vatsa, V.N. and Turkel, E.: *Simulation of synthetic jets using unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*. AIAA Journal, Vol. 44, No. 2, pp. 217-224, February 2006.
- [165] Iaccarino, G., Marongiu, C., Catalano, P., and Amato, M.: *RANS simulation of the separated flow over a bump with active control*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 2003.
-

- [166] Seifert, A. and Pack, L. G.: *Active flow control on wall-mounted hump at high reynolds numbers*. AIAA Journal, 40 1363-1372, 2003.
- [167] Harishankar and Pradeep, A.M.: *Numerical simulation of flow separation and its control in s-duct diffusers*. ISABE-2009-1350, 2009.
- [168] Trompoukis, X., Asouti, V.G., Zervogiannis, T., and Giannakoglou, K.C.: *CFD analysis and parametrir study-optimization of suction-blowing flow control techniques*. 6th GRACM, International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, 19-21 June 2008.
- [169] Σκαμνάκης, Δ.Σ.: *Έλεγχος της αποκόλλησης ροής που εμφανίζεται στους συμπιεστές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2009.
- [170] Huang, L., Huang, P.G., LeBeau, R.P., and Hauser, T.: *Numerical study of blowing and suction control mechanism on naca0012 airfoil*. Journal of Aircraft, Vol.41, No.5, September-October 2004.
- [171] Li, Z., Navon, I.M., Hussaini, M.Y., and Dimet, F. X.L.: *Optimal control of cylinder wakes via suction and blowing*. Computers & Fluids, 32:149-171, 2003.
- [172] Palaniappan, K., Sahu, P., Alonso, J., and Jameson, A.: *Design of adjoint based laws for wing flutter control*. AIAA Paper 2009-148, January 2009.
- [173] Flanders, H.: *Differentiation under the integral sign*. The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, Vol. 80, No. 6 (Jun. - Jul., 1973), pp. 615-627.
- [174] Flanders, H.: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, 1990.
- [175] Sagle, A.A. and E. Walde, R.E.: *Introduction to lie groups and lie algebras*. Academic Press, New York, 1973.
- [176] Abraham, R.J., Marsden, E., and Ratiu, T.: *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer, New York, 1988.
- [177] Sattinger, D.H. and Weaver O.L.: *Ομάδες και άλγεβρες Lie με εφαρμογές στη φυσική, γεωμετρία και μηχανική*. Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1992.
- [178] Turkel, E.: *Review of preconditioning methods for fluid dynamics*. ICASE Report No 92-47, September 1992.
- [179] Anderson, K.W., Rausch, R.D, and BONHAUS, D.L.: *Implicit/multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured frids*. Journal of Computational Physics, 128 (1996) 391-408.
- [180] Albada, G.D. van, Leer, B. van, and Roberts, W.W.: *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*. Astron. Astrophys., 108:76-84, 1982.
- [181] Barth, T.J. and Jespersen, D.: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA Paper 1989-0366, 1989.
-

-
- [182] Venkatakrishnan, V.: *Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters*. Journal of Computational Physics 1995; 118(1):120–130.
- [183] Ζερβογιάννης, Θ.: *Ανάπτυξη μεθόδων σχεδίασης βέλτιστων μορφών στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές μέσω εξεζητικών αλγορίθμων και συζυγών τεχνικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, υπό εξέλιξη.
- [184] Hirsch, C.: *Numerical computation of external and internal flows, Vol. 1: Fundamentals of numerical discretization*. John Wiley & Sons, 1990.
- [185] Hirsch, C.: *Numerical computation of external and internal flows, Vol. 2: Computational Methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley & Sons, 1990.
-