ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΕ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΥΛΙΚΑ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΝΟΡΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γούσιας Νίκος

Επιβλέπων: Καττής Μαρίνος

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2010

Πίνακας Περιεχομένων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

1.1 Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο και οι εφαρμογές του στη σύγχρονη τεχνολογία 1

1.2 Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας 2

1.3 Η δομή της εργασίας 4

2. ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ 5

2.1 Οι κινηματικές εξισώσεις, οι εξισώσεις ισορροπίας και οι εξισώσεις του Maxwell 5

2.2 Οι καταστατικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρικού μέσου 7

2.3 Οι καταστατικές εξισώσεις σε ένα πιεζοηλεκτρικό μέσο με επίπεδα συμμετρίας 9

2.4 Διερεύνηση του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος 10

3. Η ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 16

3.1 Μιγαδική διατύπωση 16

4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΦΑΣΗΣ ΣΕ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ Η ΕΞΑΡΜΩΣΗ SOMIGLIANA 20

4.1 Ορισμός του προβλήματος μετασχηματισμού φάσης σε ένα ελαστικό μέσο 20

4.2 Ο μετασχηματισμός φάσης ως πρόβλημα εξάρμωσης 21

4.3 Το διδιάστατο πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης 23

4.4 Το γενικευμένο πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης στον πιεζοηλεκτρισμό 24

5. ΤΑ ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΤΟΥ 2D ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 27

5.1 Ο σύμμορφος μετασχηματισμός στην ανισότροπη ελαστικότητα 27

5.2 Τα διφασικά δυναμικά για μια πιεζοηλεκτρική ανομοιογένεια σε μια πιεζοηλεκτρική μήτρα 29

6. ΤΑ ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ 34

6.1 Το πρόβλημα του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης σε μια ελλειπτική ανομοιογένεια 34

6.2 Το πρόβλημα της διεπιφανειακής ρωγμής σε μία ελλειπτική ανομοιογένεια 36

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 41

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 43

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο και οι εφαρμογές του στη σύγχρονη τεχνολογία

Ορισμένα κρυσταλλικά και κεραμικά υλικά, όταν υπόκεινται σε μηχανική φόρτιση, αναπτύσσουν ηλεκτρικό δυναμικό. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο και η ιδιότητα των υλικών αυτών καλείται πιεζοηλεκτρικότητα. Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ένα φαινόμενο αντιστρεπτό. Εάν, δηλαδή, εφαρμοστεί ηλεκτρικό πεδίο σε ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό παρατηρείται μηχανική παραμόρφωση σε αυτό. Το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού ανακαλύφθηκε από τους αδελφούς Jacques και Pierre Curie το 1880. Το πείραμα τους περιελάμβανε τη μέτρηση του ηλεκτρικού φορτίου που δημιουργούνταν σε κρυστάλλους έπειτα από εφαρμογή μηχανικής φόρτισης πάνω τους. Το 1881 ο Gabriel Lippmann προέβλεψε την αντιστροφή του φαινομένου με μαθηματικές σχέσεις. Την υπόθεση του Lippmann επιβεβαίωσαν πειραματικά οι αδελφοί Curie. Όπως συχνά συμβαίνει με επιστημονικές ανακαλύψεις, η πρώτη πρακτική εφαρμογή του φαινομένου ήταν στρατιωτική. Ο ηχητικός πομπός του Langevin, αποτελούμενος από πιεζοηλεκτρικές πλάκες, χρησιμοποιήθηκε αποτελεσματικά κατά τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο για την ανίχνευση γερμανικών υποβρυχίων. Σήμερα οι χρήσεις της πιεζοηλεκτρικότητας στην έρευνα και στη βιομηχανία είναι ευρέως διαδεδομένες και αυξάνονται συνέχεια με μεγάλους ρυθμούς. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι η αξιοποίηση των πιεζοηλεκτρικών ιδιοτήτων σε συσκευές ακουστικής και στους ημιαγωγούς.

Πολλά είναι τα υλικά (φυσικά και τεχνητά) που παρουσιάζουν πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες. Οι πιο διαδομένοι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι είναι ο χαλαζίας, το τοπάζιο, το άλας Rochelle και ο τουρμαλίνης. Το 1954 ανακαλύφθηκε το κεραμικό PZT, το οποίο αποτελεί μέχρι και σήμερα το πιο διαδεδομένο τεχνητό κεραμικό με πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες. Άλλα γνωστά πιεζοκεραμικά είναι ο τιτανικός μόλυβδος, το τιτανικό βάριο και το τανταλικό λίθιο.

Λόγω της εγγενούς σύζευξης μηχανικών και ηλεκτρικών πεδίων στα πιεζοηλεκτρικά υλικά, ιδιαίτερα στα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά, τα υλικά αυτά έχουν πρόσφατα χρησιμοποιηθεί ευρέως σαν ενεργοποιητές (actuators) και σαν αισθητήρες (sensors) σε "έξυπνα" υλικά. Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο πιεζοηλεκτρικό υλικό είναι το κεραμικό PZT, το οποίο παρασκευάζεται με τη συμβατική διαδικασία των κεραμικών. Το κεραμικό αυτό, αφού παρασκευασθεί, υποβάλλεται σε μια διαδικασία πόλωσης με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο εισάγει πιεζοηλεκτρικότητα και ανισοτροπία. Η εισαγόμενη ανισοτροπία μπορεί να χαρακτηρισθεί ως εγκάρσια ισοτροπία με διεύθυνση πόλωσης κάθετη στο ισότροπο επίπεδο. Ο Blenstein (1968) ανέλυσε το αντιεπίπεδο πιεζοηλεκτρικό δυναμικό πρόβλημα και ανακάλυψε την ύπαρξη των κυμάτων που πήραν το όνομά του. Ο ερευνητής αυτός έδειξε ότι, αν κάποιος πάρει το επίπεδο που είναι κάθετο στη διεύθυνση πόλωσης ως επίπεδο ενδιαφέροντος, τότε μόνο η αντιεπίπεδη παραμόρφωση είναι συζευγμένη με το συνεπίπεδο ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό ανάγει το πρόβλημα σε ένα απλό αρμονικό πρόβλημα για τις ελαστικές παραμορφώσεις και για το ηλεκτρικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή, τα ελαστικά και ηλεκτρικά πεδία είναι συζευγμένα μόνο μέσω των καταστατικών εξισώσεων. Μία ενδελεχής διερεύνηση του διδιάστατου προβλήματος του πιεζοηλεκτρικού κεραμικού PZT γίνεται στο κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας.

1.2 Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Όπως προαναφέρθηκε, η ηλεκτρομηχανική σύζευξη των πιεζοηλεκτρικών υλικών παίζει έναν ουσιαστικό ρόλος σε πολλές σύγχρονες συσκευές και σύνθετα υλικά. Τέτοιες συσκευές είναι οι κβαντικοί ημιαγωγοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως στη σύγχρονη τεχνολογία. Ένα σοβαρό πρόβλημα που είχε ανακύψει στις συσκευές αυτές είναι τα παραμένοντα ηλεκτρο-ελαστικά πεδία που εισάγονται στις συσκευές αυτές, λόγω μιας διαδικασίας που σχετίζεται με το πυροηλεκτρικό φαινόμενο. Τα ηλεκτρο-ελαστικά αυτά πεδία επηρεάζουν δραστικά την ηλεκτρονική λειτουργία των συσκευών αυτών και μερικές φορές οδηγούν σε αστοχία και υποβάθμιση τους. Συγκεκριμένα, με το επιχείρημα ότι η διαφορά στις σταθερές των υλικών των διαφορετικών φάσεων σε αυτές τις συσκευές είναι μικρή, έχει υιοθετηθεί από πολλούς ερευνητές μια σχετική απλοποίηση στη μελέτη των σχετικών πιεζοηλεκτρικών προβλημάτων των συσκευών αυτών, υποθέτοντας ότι οι μηχανικές και ηλεκτρικές σταθερές των υλικών από τα οποία

συνίστανται οι συσκευές αυτές (Ru, 2000; Ru, 2001; Pan, 2002; Downes and Faux, 1995; Davies, 1998; Downes et all, 1999; Dunn, 1994; Faux et all, 1996; Faux et all, 1997; Felten et all, 2004; Freunnd and Gossling, 1995; Gossling and Willey, 1995; Grundmann, 1995; Grundmann et all, 1995). Μια τέτοια υπόθεση, βέβαια, μπορεί να απλοποιεί τη σχετική μαθηματική ανάλυση, αλλά μια αξιόπιστη μελέτη του προβλήματος των συσκευών αυτών απαιτεί να παρθούν υπόψη οι πραγματικές συνθήκες του προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία, το πρόβλημα των ημιαγωγών αυτών αντιμετωπίζεται "κατά μέτωπο", θεωρώντας τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος, αναφορικά με τις ελαστικές και μηχανικές ιδιότητες των υλικών. Αυτό επιτυγχάνεται με την επέκταση της μεθόδου των διφασικών δυναμικών στην πιεζοηλεκτρικότητα, για την περίπτωση που η αιτία παραμόρφωσης είναι εσωτερικές τάσεις και εσωτερικά ηλεκτρικά πεδία. Η μέθοδος των διφασικών δυναμικών αναπτύχθηκε αρχικά, για να αντιμετωπίσει προβλήματα εσωτερικών τάσεων σε διφασικά υλικά (Kattis and Meguid 1995), αλλά αποδείχθηκε εξίσου δυναμική στην επίλυση και των "κλασσικών" προβλημάτων της ισότροπης και ανισότροπης ελαστικότητας.

Για να μπορέσει να αναπτυχθεί η μέθοδος των διφασικών στην πιεζοηλεκτρικότητα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να επεκταθεί πρώτα η έννοια της εξάρμωσης τύπου Somigliana, που αναφέρεται στις μετατοπίσεις, στον πιεζοηλεκτρισμό (Eshelby 1951). Αυτό γίνεται σε ένα υπό δημοσίευση άρθρο των Kattis and Karalis (2010) πάνω στην αντιεπίπεδη πιεζοηλεκτρικότητα. Στο άρθρο αυτό εισάγεται η έννοια της γενικευμένης επιφανειακής ηλεκτρομηχανικής εξάρμωσης τύπου Somigliana, όπου μαζί τη γνωστή διανεμημένη ασυνέχεια των μετατοπίσεων σε μια επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού μέσου, είναι γνωστή και μια ασυνέχεια του ηλεκτρικού δυναμικού. Στη συνέχεια, στην εργασία αυτή, η μέθοδος των διφασικών δυναμικών επεκτείνεται στην αντιεπίπεδη πιεζοηλεκτρικότητα όταν η πηγή παραμόρφωσης είναι εσωτερικές τάσεις και εσωτερικά ηλεκτρικά πεδία. Στην παρούσα εργασία τα προηγούμενα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν για την αντιεπίπεδη πιεζοηλεκτρικότητα επεκτείνονται στη γενική περίπτωση της διδιάστατης πιεζοηλεκτρικότητας. Η εργασία αποτελεί συνέχεια της ερευνητικής δουλειάς που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια από μέλη της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Δομικής Μηχανικής πάνω στο θέμα αυτό. Μια πρώτη εργασία πάνω στο θέμα αυτό είναι αυτή του Kattis *et all*,(1997) όπου η μέθοδος των διφασικών

δυναμικών επεκτείνεται στην αντιεπίπεδη πιεζοηλεκτρικότητα όταν η πηγή παραμόρφωσης είναι μηχανικές τάσεις και εξωτερικές ηλεκτρικές φορτίσεις. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι, τα τελευταία χρόνια έχει υπάρξει ένα έντονο ενδιαφέρον σε πιεζοηλεκτρικές αναλύσεις προβλημάτων που ενδιαφέρουν την τεχνολογία. Πιεζοηλεκτρικά προβλήματα στα πλαίσια της μικρομηχανικής και της θραυστομηχανικής έχουν μελετηθεί από πολλούς ερευνητές τα τελευταία χρόνια (βλέπε για παράδειγμα Suo Z., Kuo C., Barnett D.M., Willis J.R., 1992; Benveniste Y., 1993;, Wang X., Shen Y.P., 2001; Lu P., Williams F.W., 1998; Zhang Z., Meguid S.A., 1997).

1.3 Η δομή της εργασίας

Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των γενικών εξισώσεων της τριδιάστατης πιεζοηλεκτρικότητας και μια ενδελεχής διερεύνηση του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος για την περίπτωση κεραμικών με κλάση συμμετρίας 6mm. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μιγαδική διατύπωση του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης για ελαστικά προβλήματα και επεκτείνεται για την περίπτωση πιεζοηλεκτρικών υλικών. Στο πέμπτο κεφάλαιο, αναπτύσσονται οι γενικές εξισώσεις της λύσης του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος σε όρους των διφασικών δυναμικών. Στο έκτο κεφάλαιο, οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για την απόκτηση των ηλεκτρικών και ελαστικών πεδίων σε δύο προβλήματα μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας που υπόκειται σε έναν ομοιόμορφο πεδίο παραμόρφωσης και ηλεκτρικής έντασης, και στο πρόβλημα ελλειπτικής ανομοιογένειας με διεπιφανειακή ρωγμή, που διαταράσσει ένα γενικό πεδίο ελαστικών τάσεων και ηλεκτρικής έντασης. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

2. ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ

2.1 Οι κινηματικές εξισώσεις, οι εξισώσεις ισορροπίας και οι εξισώσεις του Maxwell

Θεωρούμε ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό το οποίο, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, καταλαμβάνει τον χώρο V σε σχέση με το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3). Υποθέτουμε ότι το υλικό είναι ένα συνεχές υλικό μέσο που συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά, όταν καταπονείται με μηχανικές ή άλλες δράσεις, και ότι οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε αυτό είναι απειροστές. Το πιεζοηλεκτρικό υλικό παραμορφώνεται από εξωτερικές ή εσωτερικές δράσεις. Υποθέτουμε ότι στο υλικό, μαζί με την παραμόρφωση που αναπτύσσεται, η οποία περιγράφεται με την ελαστική μετατόπιση u_i, αναπτύσσεται και ένα ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο περιγράφεται με την ηλεκτρική ένταση E_i. Στη συνέχεια, όπου εμφανίζονται λατινικοί δείκτες θα παίρνουν τις τιμές 1, 2 και 3. Στο υλικό, η εντατική κατάσταση της παραμόρφωσης περιγράφεται με τον τανυστή των τάσεων σ_{ij}, η δε ηλεκτρική κατάσταση με την ηλεκτρική μετατόπιση D_i. Όπως στην γραμμική ελαστικότητα, η παραμορφωσιακή κατάσταση σε κάθε σημείο του υλικού περιγράφεται με τον τανυστή παραμόρφωσης γ_{ij}, που συνδέεται με την μετατόπιση u_i με τις σχέσεις

$$2\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{2.1}$$

Επίσης, από την εξίσωση κίνησης ενός απειροστού στοιχείου του συνεχούς μέσου, προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$\sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u} \ , \tag{2.2}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του συνεχούς μέσου στη θέση που θεωρείται το απειροστό διαφορικό στοιχείο. Στην παρούσα εργασία ο διπλός λατινικός δείκτης όπου εμφανίζεται θα δηλώνει άθροισμα, και η δε τελεία πάνω από συνάρτηση θα δηλώνει διαφόριση ως προς χρόνο.

Στο συνεχές μέσο η ηλεκτροδυναμική κατάσταση θα περιγράφεται με τις εξισώσεις του Maxwell. Οι εξισώσεις αυτές, όταν δεν υπάρχουν ρεύματα εξ επαγωγής και ελεύθερα ηλεκτρικά φορτία, έχουν την μορφή

$$\varepsilon_{ijk}E_{j,k} + \dot{B}_i = 0, \tag{2.3α}$$

$$\varepsilon_{ijk}H_{j,k} - \dot{D}_i = 0, \tag{2.3β}$$

$$D_{i,i} = 0, \tag{2.3γ}$$

$$B_{i,i} = 0, \tag{2.3δ}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το ε_{ijk} είναι ο μοναδιαίος αντισυμμετρικός τανυστής, του οποίου τα στοιχεία είναι $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{321} = 1,\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ και μηδέν όλα τα υπόλοιπα. Το H_j είναι το μαγνητικό πεδίο, το $\mathrm{B}_i = \mu_0 \mathrm{H}_i$ η πυκνότητα της μαγνητικής ροής και μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις, με απαλοιφή του $\mathrm{B}_i = \mu_0 \mathrm{H}_i$, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση που συσχετίζει τις μεταβλητές E_i και D_i :

$$E_{k,ki} - E_{i,kk} = -\mu_0 \ddot{D}_i\,. \tag{2.4}$$

Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα θεωρούμε ότι

$$\dot{B}_i \cong 0\,. \tag{2.5}$$

Στην περίπτωση αυτή, από την (2.3α) έχουμε

$$\varepsilon_{ijk}E_{j,k} = 0\ . \tag{2.6}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο E_i μπορεί να εκφρασθεί σε όρους ενός βαθμωτού δυναμικού ϕ με τη σχέση

$$\mathrm{E}_i = -\phi_{,i} \ . \tag{2.7}$$

Έτσι, για ένα στατικό πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα $(\ddot{u} = 0)$, οι εξισώσεις (2.2) και (2.3α), που περιγράφουν τη συζευγμένη ελαστική και ηλεκτρική κατάσταση, γίνονται

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij,j} = 0, \\ &D_{i,i} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων του πιεζοηλεκτρικού υλικού με ενεργειακές και θερμοδυναμικές θεωρήσεις.

2.2 Οι καταστατικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρικού μέσου

Στην ανάπτυξη των καταστατικών εξισώσεων της πιεζοηλεκτρικότητας, θα θεωρηθεί ότι η παραμόρφωση του υλικού εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές πεδίου γ_{ij} και D_i. Θα υποτεθεί ότι αυτές είναι αντιστρέψιμες, ώστε να υπάρχει μία συνάρτηση ενέργειας $\psi(\gamma_{ij}, D_i)$, για την οποία

$$d\psi = \sigma_{ij} d\gamma_{ij} + \mathrm{E}_i dD_i \ . \tag{2.9}$$

Στην περίπτωση των υλικών με ευσταθή συμπεριφορά, η συνάρτηση ψ είναι μια κυρτή συνάρτηση στον τριδιάστατο χώρο (γ_{ij}, D_i, ψ). Μια βολική συνάρτηση ενέργειας $\psi(\gamma_{ij}, D_i)$ είναι η $w(\gamma_{ij}, \mathrm{E}_i)$, που εισάγεται με τη σχέση

$$w = \psi - E_i D_i \ . \tag{2.10}$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση w δεν είναι κυρτή συνάρτηση στο χώρο (γ_{ij}, E_i, w) επειδή έχει ένα «σαμαροειδές» (saddle) σημείο στο $(E_i, \gamma_{ij}) = (0,0)$. Από τη σχέση (2.10) παίρνοντας υπόψη την (2.9) προκύπτει

$$dw = \sigma_{ij} d\gamma_{ji} - D_i d\mathrm{E}_i, \tag{2.11}$$

όπου, για να αποτελεί η (2.11) τέλειο διαφορικό, θα πρέπει

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \gamma_{ij}}, \qquad D_i = -\frac{\partial w}{\partial \mathrm{E}_i} \tag{2.12}$$

όπου το σ_{ij} ορίζεται ως τάση και το D_i ως ηλεκτρική μετατόπιση.

Στη γραμμική πιεζοηλεκτρικότητα, η συνάρτηση w ορίζεται με τη σχέση

$$w = \frac{1}{2} C_{ijrs} \gamma_{ji} \gamma_{rs} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathrm{E}_i \mathrm{E}_s - e_{irs} \mathrm{E}_i \gamma_{rs} \tag{2.13}$$

όπου C_{ijrs} είναι οι σταθερές της ελαστικής ακαμψίας, ε_{ij} οι σταθερές της ηλεκτρικής διαπερατότητας και e_{irs} οι σταθερές της πιεζοηλεκτρικότητας. Για τις παραπάνω σταθερές ισχύουν οι παρακάτω συμμετρίες:

$$C_{ijrs} = C_{srji}, \quad \gamma_{is} = \gamma_{si}, \quad e_{irs} = e_{isr}. \tag{2.14}$$

Από τις σχέσεις (2.11) και (2.12) προκύπτουν οι

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \gamma_{rs} - e_{sij} \mathrm{E}_s \tag{2.15}$$

$$D_i = e_{irs} \gamma_{rs} + \varepsilon_{is} \mathrm{E}_s \tag{2.16}$$

που είναι οι καταστατικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρικού μέσου. Οι αντίστροφες σχέσεις των (2.15) και (2.16) είναι

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijrs} \sigma_{rs} + d_{sji} \mathrm{E}_s, \tag{2.17}$$

$$D_i = d_{irs} \sigma_{rs} + \varepsilon_{is}^{\sigma} \mathrm{E}_s, \tag{2.18}$$

όπου S_{ijrs} είναι οι σταθερές ελαστικής ευκαμψίας, d_{irs} ο τανυστής πιεζοηλεκτρικών παραμορφώσεων και $\varepsilon_{is}^{\sigma}$ οι σταθερές διηλεκτρικής διαπερατότητας.

2.3 Οι καταστατικές εξισώσεις σε ένα πιεζοηλεκτρικό μέσο με επίπεδα συμμετρίας

Σε πρακτικά προβλήματα πιεζοηλεκτρικότητας, συνήθως, εισάγεται μια σύμπτυξη δεικτών για τις ελαστικές και ηλεκτρικές παραμέτρους των υλικών. Επειδή ο τανυστής τάσης και ο τανυστής παραμόρφωσης είναι συμμετρικοί τανυστές, η κάθε συνιστώσα τους μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί με ένα δείκτη, αντί για δύο. Αυτό μπορεί να γίνει σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \\ &\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ &\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Με την ίδια λογική, ο τανυστής C_{ijkl} μπορεί να αντιπροσωπευθεί με έναν πίνακα 6×6 ως εξής

$$c_{ijkl} = c_{\alpha\beta} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3 \ , \ \alpha,\beta=1,2,...,6). \tag{2.21}$$

Στην επιλογή των παραπάνω συμβολισμών έχει χρησιμοποιηθεί η συμμετρία στο πρώτο και δεύτερο ζευγάρι των δεικτών για το C_{ijkl}. Στον τανυστή e_{mij}, η συμμετρία στους δύο τελευταίους δείκτες επιτρέπει να ορισθεί, για τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές, ένας πίνακας 3×6 με τη σχέση:

$$e_{mij} = e_{m\alpha} \qquad (m = 1, 2, 3 \ , \ \alpha=1,2,...,6). \tag{2.22}$$

Με βάση τον νέο αυτό τρόπο συμβολισμού, οι καταστατικές εξισώσεις γίνονται

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

και

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών στις (2.23) και (2.24) εξαρτάται από τη συμμετρία των κρυστάλλων. Στη γενική περίπτωση, οι εξισώσεις περιέχουν 21 ελαστικές σταθερές, 18 πιεζοηλεκτρικές σταθερές και 6 διηλεκτρικές σταθερές. Μερικές από τις σταθερές αυτές εξαφανίζονται, όταν έχουμε κρυστάλλους με περισσότερα επίπεδα συμμετρίας.

2.4 Διερεύνηση του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος

Σε ένα πιεζοηλεκτρικό μέσο οι άγνωστες συναρτήσεις είναι οι συνιστώσες μετατόπισης u_i και το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ. Όταν προσδιορισθούν οι συναρτήσεις αυτές, τότε οι τάσεις, οι ηλεκτρικές μετατοπίσεις και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προσδιορίζονται από τις σχέσεις (2.7), (2.15) και (2.16). Από τις (2.7), (2.8), (2.15), και (2.16) προκύπτει το παρακάτω σύνολο διαφορικών εξισώσεων, με άγνωστες συναρτήσεις τις u_i και ϕ:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + e_{kij} \phi_{,kj} = 0, \tag{2.25}$$

$$e_{ikl} u_{k,li} - \varepsilon_{ik} \phi_{,ki} = 0. \tag{2.26}$$

Στη συνέχεια, οι παραπάνω εξισώσεις θα γραφούν για την ειδική περίπτωση ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού με τάξης συμμετρίας 6mm. Για την περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις (2.25) και (2.26) παίρνουν την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} & c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ & + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \end{aligned} \tag{2.27α}$$

$$\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}+$$
$$+(e_{31}+e_{15})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}=0, \qquad (2.27\beta)$$

$$(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}+c_{44}(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2})+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(c_{44}+c_{13})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}+$$
$$+e_{15}(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2})+e_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0, \qquad (2.27\gamma)$$

$$(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}+e_{15}(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2})+e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(e_{31}+e_{15})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}-$$
$$-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0. \qquad (2.27\delta)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις θα εξειδικευτούν τώρα για το διδιάστατο πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα. Υποθέτονας ότι *καμία μεταβλητή πεδίου δεν μεταβάλλεται στη διεύθυνση του άξονα* x_2, οι εξισώσεις (2.27) γίνονται

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}+(e_{31}+e_{15})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}=0, \qquad (2.28\alpha)$$

$$\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}=0, \qquad (2.28\beta)$$

$$(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+e_{15}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+e_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0, \qquad (2.28\gamma)$$

$$(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}+e_{15}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0. \qquad (2.28\delta)$$

Οι εξισώσεις αυτές δείχνουν ότι, το διδιάστατο πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα στην περίπτωση των πιεζοηλεκτρικών κρυστάλλων με τάξη συμμετρίας 6mm, διασπάται σε δύο αποσυζευγμένα προβλήματα. Το ένα πρόβλημα είναι ένα καθαρά ελαστικό

αντιεπίπεδο πρόβλημα, που έχει άγνωστη συνάρτηση τη $u_2 = u_2(x_1, x_3)$. Το άλλο πρόβλημα είναι ένα συνεπίπεδο πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα με άγνωστες συναρτήσεις τις μετατοπίσεις $u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$ και $\phi = \phi(x_1, x_3)$. Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι *σε ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό με τάξη συμμετρίας 6mm είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια συνεπίπεδη ελαστική κατάσταση με την παρουσία ηλεκτρικής έντασης στη διεύθυνση των αξόνων* x_1 *και* x_3.

Θα υποθέσουμε τώρα ότι *καμία μεταβλητή πεδίου δεν μεταβάλλεται στη διεύθυνση του άξονα* x_3. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (2.27) παίρνουν τη μορφή

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \tag{2.29α}$$

$$\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \tag{2.29β}$$

$$c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) + e_{15}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) = 0, \tag{2.29γ}$$

$$e_{15}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) - \varepsilon_{11}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) = 0. \tag{2.29δ}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι, στην περίπτωση αυτή, το διδιάστατο πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα διασπάται σε δύο αποσυζευγμένα προβλήματα. Το ένα πρόβλημα είναι καθαρά ελαστικό επίπεδο πρόβλημα με άγνωστες συναρτήσεις τις $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ και $u_2 = u_2(x_1, x_2)$. Το άλλο πρόβλημα είναι ένα πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα με άγνωστες συναρτήσεις τις $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ και $\phi = \phi(x_1, x_2)$. Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι *σε ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό με τάξη συμμετρίας 6mm είναι δυνατόν να αναπτυχθεί ένα αντιεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα με την παρουσία ηλεκτρικής έντασης στις διευθύνσεις των αξόνων* x_1 *και* x_2.

Τέλος, θα υποθέσουμε ότι καμία μεταβλητή πεδίου δεν μεταβάλλεται στη διεύθυνση του άξονα x_1. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}=0, \tag{2.30α}$$

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}+(e_{31}+e_{15})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\partial x_3}=0, \tag{2.30β}$$

$$c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(c_{44}+c_{13})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+e_{15}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}+e_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0, \tag{2.30γ}$$

$$e_{15}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(e_{31}+e_{15})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0. \tag{2.30δ}$$

Η περίπτωση αυτή είναι η αντίστοιχη της πρώτης περίπτωσης που συζητήσαμε.

Πίνακας 2-1. ***Πίνακας σταθερών για πιεζοηλεκτρικά υλικά με επίπεδα συμμετρίας***

Κρύσταλλοι τριγωνικής συμμετρίας (τάξεων 32, 3m)

Ελαστικές σταθερές $C_{\alpha\beta}$						Πιεζοηλεκτρικές σταθερές e_{ai} τάξη 32			τάξη 3			Διηλεκτρικές σταθερές ε_{ik}		
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	0	0	e_{11}	0	0	0	$-e_{22}$	e_{13}	ε_{11}	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	c_{14}	0	0	$-e_{11}$	0	0	0	e_{22}	e_{13}	0	ε_{11}	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	e_{33}	0	0	ε_{33}
c_{14}	$-c_{14}$	0	c_{44}	0	0	e_{41}	0	0	0	e_{51}	0			
0	0	0	0	c_{44}	c_{14}	0	$-e_{41}$	0	e_{51}	0	0			
0	0	0	0	c_{14}	c_{66}	0	$-e_{41}$	0	$-e_{22}$	0	0			

$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

Κρύσταλλοι εξαγωνικής συμμετρίας (τάξη 6mm)

Ελαστικές σταθερές $C_{\alpha\beta}$						Πιεζοηλεκτρικές σταθερές e_{ai}			Διηλεκτρικές σταθερές ε_{ik}		
c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0	0	0	e_{13}	ε_{11}	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0	0	0	e_{13}	0	ε_{11}	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0	0	0	e_{33}	0	0	ε_{33}
0	0	0	c_{44}	0	0	0	e_{51}	0			
0	0	0	0	c_{44}	0	e_{51}	0	0			
0	0	0	0	0	c_{66}	0	0	0			

$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

Κρύσταλλοι κυβικής συμμετρίας (τάξη 43m)

Ελαστικές σταθερές $C_{\alpha\beta}$						Πιεζοηλεκτρικές σταθερές e_{ai}			Διηλεκτρικές σταθερές ε_{ik}		
c_{11}	c_{12}	c_{12}	0	0	0	0	0	0	ε_{11}	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{12}	0	0	0	0	0	0	0	ε_{11}	0
c_{12}	c_{12}	c_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	ε_{11}
0	0	0	c_{44}	0	0	e_{44}	0	0			
0	0	0	0	c_{44}	0	0	e_{41}	0			
0	0	0	0	0	c_{44}	0	0	e_{41}			

Πίνακας 2-2. ***Σταθερές πιεζοκεραμικών υλικών***

Πιεζοκεραμικό PZT 65/35		
$c_{11} = 1.594 \cdot 10^{11}$ Pa	$e_{31} = -6.127$ C/m^2	$\varepsilon_{11} = 5.66 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{12} = 7.385 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{33} = 10.71$ C/m^2	$\varepsilon_{33} = 2.243 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{33} = 1.261 \cdot 10^{11}$ Pa	$e_{15} = 8.387$ C/m^2	
$c_{44} = 3.89 \cdot 10^{10}$ Pa		
$c_{66} = 4.276 \cdot 10^{10}$ Pa		

Πιεζοκεραμικό PZT 19		
$c_{11} = 11.22 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{31} = -3.4$ C/m^2	$\varepsilon_{11} = 7.257 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{13} = 6.22 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{33} = 15.1$ C/m^2	$\varepsilon_{33} = 8.274 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{33} = 10.6 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{15} = 9.45$ C/m^2	
$c_{44} = 2.49 \cdot 10^{10}$ Pa		

Πιεζοκεραμικό PZT 4		
$c_{11} = 13.9 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{31} = -5.2$ C/m^2	$\varepsilon_{11} = 6.45 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{12} = 6.78 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{33} = 15.1$ C/m^2	$\varepsilon_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9}$ F/m
$c_{13} = 7.43 \cdot 10^{10}$ Pa	$e_{15} = 12.7$ C/m^2	
$c_{33} = 11.5 \cdot 10^{10}$ Pa		
$c_{44} = 2.56 \cdot 10^{10}$ Pa		
$c_{66} = 3.06 \cdot 10^{10}$ Pa		

3. Η ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Μιγαδική διατύπωση

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι καταστατικές εξισώσεις για ένα πιεζοηλεκτρικό μέσο έχουν τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs}\gamma_{rs} - e_{sji}\mathrm{E}_s\,, \tag{3.1}$$

$$D_i = e_{irs}\gamma_{rs} + \varepsilon_{is}\mathrm{E}_s\,. \tag{3.2}$$

Οι συντελεστές παραμόρφωσης γ_{rs} και οι συνιστώσες ηλεκτρικής έντασης E_s παρέχονται από τις σχέσεις

$$2\gamma_{rs} = u_{r,s} + u_{s,r}\,, \qquad \mathrm{E}_s = -\phi_{,s}\ . \tag{3.3}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις παραπάνω καταστατικές εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs}u_{r,s} + e_{sji}\phi_{,s}, \tag{3.4}$$

$$D_i = e_{irs}u_{r,s} - \varepsilon_{is}\phi_{,s}. \tag{3.5}$$

Αν οι σχέσεις αυτές εισαχθούν στις σχέσεις

$$\sigma_{ij,i} = 0,\ D_{i,i} = 0 \tag{3.6}$$

προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$(C_{ijrs}u_r + e_{sji}\phi)_{,sj} = 0, \tag{3.7}$$

$$(e_{irs}u_r - \varepsilon_{is}\phi)_{,sj} = 0. \tag{3.8}$$

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα θεωρήσουμε τη διδιάστατη περίπτωση, όταν δηλαδή οι συναρτήσεις u_r και ϕ δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή x_3. Θέτοντας στις παραπάνω εξισώσεις $a = i$, β=s ,όπου, οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τις τιμές 1 και 2, αποκτάμε τις εξισώσεις

$$(C_{ajr\beta}u_r + e_{\beta ja}\phi)_{,\beta a} = 0, \tag{3.9}$$

$$(e_{ar\beta}u_r - \varepsilon_{a\beta}\phi)_{,\beta a} = 0. \tag{3.10}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις σε ανεπτυγμένη μορφή γράφονται

$$\begin{aligned} &C_{1jr1}u_{r,11} + (C_{1jr2} + C_{2jr1})u_{r,12} + C_{2jr2}u_{r,22} + \\ &\qquad + e_{1j1}\phi_{,11} + (e_{1j2} + e1)\phi_{,12} + e_{2j2}\phi_{,22} = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &e_{1r1}u_{r,11} - \varepsilon_{a\beta}\phi_{,\beta a} + (e_{1r2} + e_{2r1})u_{r,12} + e_{2r2}u_{r,22} \\ &\qquad - \varepsilon_{11}\phi_{,11} - (\varepsilon_{12+}\varepsilon_{21})\phi_{,12} - \varepsilon_{22}\phi_{,22} = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Θα αναζητήσουμε τώρα λύσεις των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων στη μορφή

$$u_r = \mathrm{a}_r f(x_1 + px_2), \quad \phi = \mathrm{a}_4 f(x_1 + px_2), \tag{3.13}$$

όπου p είναι ένας μιγαδικός αριθμός, και a_r, a_4 κατάλληλες μιγαδικές σταθερές. Οι παραπάνω μορφές αποτελούν λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (3.9) και (3.10), όταν η άγνωστη παράμετρος p και ο πίνακας

$$\mathbf{a}=[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3,\mathrm{a}_4]^T \tag{3.14}$$

ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathbf{T}}) + p^2\mathbf{T}\right]\mathbf{a} = 0, \tag{3.15}$$

όπου οι πίνακες $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ και $\mathbf{T}$, ορίζονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q^E} & \mathbf{e_{11}} \\ \mathbf{e_{11}^T} & -\varepsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R^E} & \mathbf{e_{21}} \\ \mathbf{e_{12}^T} & -\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T^E} & \mathbf{e_{22}} \\ \mathbf{e_{22}^T} & -\varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

όπου

$$(\mathbf{Q^E})_{ir} = C_{i1r1}, \quad (\mathbf{R^E})_{ir} = C_{i1r2}, \quad (\mathbf{T^E})_{ir} = C_{i2r2}, \quad (e_{ij})_s = e_{ijs}. \tag{3.17}$$

Η (3.15) για να έχει λύση θα πρέπει

$$\det\left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R^T}) + p^2\mathbf{T}\right] = 0. \tag{3.18}$$

Δείχνεται ότι η εξίσωση αυτή έχει οκτώ ρίζες που είναι όλες μιγαδικής μορφής και ανά δύο συζυγείς. Ορίζουμε ως p_l $(l = 1,2,3,4)$ τη ρίζα εκείνη για την οποία $\mathrm{Im}\{p_l\} > 0$. Για τη ρίζα αυτή η τιμή του $\mathbf{a}$ που ικανοποιεί τη σχέση (3.15) θα ορίζεται με $\mathbf{a}_l$. Όταν έχουμε τέσσερις ρίζες p_l που είναι διακριτές μεταξύ τους, τότε η γενική λύση των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων θα είναι

$$\mathbf{u} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{l=1}^{4} \mathbf{a}_l f_l(z_l)\right\}, \quad \mathbf{u} = \left[u_1, u_2, u_3, \phi\right]^T. \tag{3.19}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \tag{3.20}$$

όπου

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]^T, \quad \mathbf{f}(z) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]^T, \quad z_l = x_1 + p_l x_2. \tag{3.21}$$

Στη μετατόπιση αυτή αντιστοιχεί μια ποσότητα $\mathbf{T} = \left[T_1, T_2, T_3, T_4\right]^T$ για την οποία

$$\sigma_{i1} = -T_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = T_{i,1}, \quad D_1 = -T_{4,2}, \text{ για } i = 1,2,3. \tag{3.22}$$

Η ποσότητα αυτή προκύπτει από τη σχέση

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \tag{3.23}$$

όπου

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\right]^T \ , \ \text{με} \ \ \mathbf{b} = (\mathbf{R}^{\mathbf{T}} + p\mathbf{T})\mathbf{a} = \frac{-1}{p}(\mathbf{Q} + p\mathbf{R})\mathbf{a}\,. \tag{3.24}$$

Η παραπάνω μιγαδική διατύπωση είναι η επέκταση της διατύπωσης του Eshelby et all (1973), που έχει αναπτυχθεί για τη διδιάστατη ανισότροπη ελαστικότητα, στη διδιάστατη πιεζοηλεκτρικότητα (Lothe and Barnett, 1976).

4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΦΑΣΗΣ ΣΕ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ Η ΕΞΑΡΜΩΣΗ SOMIGLIANA

4.1 Ορισμός του προβλήματος μετασχηματισμού φάσης σε ένα ελαστικό μέσο

Θα θεωρήσουμε ένα συνεχές ελαστικό υλικό μέσο που καταλαμβάνει έναν ορισμένο όγκο V στο χώρο και περιορίζεται εξωτερικά από μία επιφάνεια S. Θα υποθέσουμε ότι σε μία ορισμένη περιοχή V' του χώρου αυτού, που περιορίζεται εξωτερικά από μια επιφάνεια S' λόγω κάποιας αιτίας, συμβαίνει μια αλλαγή φάσης που προξενεί μια μεταβολή στον όγκο και στο σχήμα της περιοχής αυτής. Η μεταβολή αυτή μπορεί να περιγραφεί σε όρους της παραμόρφωσης του υλικού που καταλαμβάνει τον όγκο V', υποθέτοντας ότι το υλικό που περιβάλλει τον όγκο V' είναι απόν. Η κατάσταση αυτή αποτελεί μια πλασματική κατάσταση, που εισάγεται αυστηρά για την περιγραφή του προβλήματος. Η παραμόρφωση της περιοχής V' θα θεωρηθεί ότι περιγράφεται με τη διανυσματική μετατόπιση του κάθε υλικού σωματιδίου $\mathbf{x}$ της περιοχής που καταλαμβάνει τον όγκο V' που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{u^0} = \mathbf{u^0}(x_1, x_2)\,. \tag{4.1}$$

Η μετατόπιση αυτή θα μπορούσε να περιγραφεί με έναν τανυστή παραμόρφωσης $\boldsymbol{\gamma}^0$ του οποίου τα στοιχεία είναι οι συνιστώσες $\gamma^{\mathbf{0}}_{\mathbf{ij}} = \gamma^{\mathbf{0}}_{\mathbf{ij}}(\mathbf{x})$. Στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε ότι, τόσο η μετατόπιση $\mathbf{u^0}$, όσο και οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης $\gamma^{\mathbf{0}}_{\mathbf{ij}}$, είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις ελαστικές παραμορφώσεις που υφίσταται το ελαστικό μέσο που θεωρήσαμε. Επίσης, θα υποθέσουμε ότι οι ελαστικές παραμορφώσεις της περιοχής V' βρίσκονται στην τάξη των απειροστών παραμορφώσεων.

Στη βιβλιογραφία (Eshelby 1957; Eshelby 1973), οι παραμορφώσεις αυτές, που περιγράφουν το μετασχηματισμό φάσης που περιγράψαμε χαρακτηρίζονται ως ιδιο-παραμορφώσεις (eigen-strains, eigen-deformations, κτλ). Μια βασική παραδοχή που γίνεται για τις παραμορφώσεις αυτές είναι ότι αναπτύσσονται χωρίς τάσεις. Όμως, ο μετασχηματισμός φάσης που συμβαίνει στην περιοχή V', γίνεται με την παρουσία του υλικού που περιβάλλει τον όγκο αυτό. Η παρουσία του περιβάλλοντος υλικού εμποδίζει την ελεύθερη ανάπτυξη της ιδιο-παραμόρφωσης. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη ελαστικών παραμορφώσεων στο υλικό που καταλαμβάνει τους όγκους $V-V'$ και V'.

4.2 Ο μετασχηματισμός φάσης ως πρόβλημα εξάρμωσης

Για την ανάπτυξη των ελαστικών αυτών παραμορφώσεων σε ένα υλικό λόγω μετασχηματισμού φάσης, ιδιαίτερη σημασία έχουν οι συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στη διεπιφάνεια των δύο υλικών. Αν δεν έχει υπάρξει αστοχία στη διεπιφάνεια, ή αν δεν έχει συμβεί κάποια αλλοίωση των μηχανικών ιδιοτήτων της σύνδεσης των δύο περιοχών, τότε έχουμε τις συνθήκες της τέλειας διεπιφάνειας. Όταν η διεπιφάνεια έχει υποστεί βλάβες, τότε έχουμε την περίπτωση της ατελούς διεπιφάνειας. Στην τέλεια διεπιφάνεια έχουμε συνέχεια των αναπτυσσόμενων μετατοπίσεων και των βελών τάσης .

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο της περιοχής V' θα είναι το άθροισμα των ελαστικών μετατοπίσεων $\mathbf{u_M}$ και των ιδιο-μετατοπίσεων $\mathbf{u}^0$, δηλαδή $\mathbf{u_M}+\mathbf{u^0}$. Στην περιοχή $V-V'$, δηλαδή εξωτερικά του V', οι μετατοπίσεις θα είναι μόνο οι ελαστικές μετατοπίσεις $\mathbf{u_M}$. Στις δύο αυτές περιοχές του συνεχούς μέσου, οι τάσεις, σε κάθε σημείο, θα περιγράφονται με τις συνιστώσες $(\sigma_{ij})_M$ και $(\sigma_{ij})_I$. Γενικά, στην παρούσα εργασία, οι δείκτες M και I, όπου εμφανίζονται από εδώ και στο εξής θα δηλώνουν ποσότητες που συνδέονται με τις περιοχές $V-V'$ και V', αντίστοιχα. Αν η περιοχή V' έχει τις ίδιες ελαστικές σταθερές με την περιοχή $V-V'$, τότε η περιοχή V' θα λέμε ότι αποτελεί ένα εγκλώβισμα (inclusion), ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι αποτελεί μια ανομοιογένεια (inhomogeneity). Το υλικό που καταλαμβάνει την περιοχή $V-V'$ θα λέμε ότι αποτελεί μια μήτρα. Συνήθως, η μήτρα θεωρείται ότι

εκτείνεται γύρω από την περιοχή V' στο άπειρο σε όλες τις διευθύνσεις. Η ορολογία αυτή έχει εισαχθεί από τον Eshelby (1957).

Σε ένα υλικό σωματίδιο $\mathbf{x}$ του μέσου και σε σχέση με μία απειροστή επιφάνεια dS που περιέχει, το βέλος τάσης $\mathbf{t}$ είναι

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]^T \quad , \; t_i = \sigma_{ij} n_i , \tag{4.2}$$

όπου n_i είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετες στο dS , t_i είναι οι Καρτεσιανές συνιστώσες του βέλους τάσης και σ_{ij} είναι οι Καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων. Στη σχέση αυτή, αλλά και οπουδήποτε παρακάτω, ο επαναλαμβανόμενος λατινικός δείκτης θα δηλώνει άθροισμα.

Με βάση τα παραπάνω, οι συνθήκες συνέχειας των μετατοπίσεων και του βέλους τάσης στη διεπιφάνεια των δύο περιοχών, που θεωρείται τέλεια, περιγράφονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{t}_M = \mathbf{t}_I \, . \tag{4.3}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι παρακάτω συνθήκες, που επικρατούν στην διεπιφάνεια των δύο περιοχών,

$$\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_I = \mathbf{u}^0, \quad (\sigma_{ij})_M n_i = (\sigma_{ij})_I n_i \, . \tag{4.4}$$

Η πρώτη από αυτές δηλώνει ότι οι ελαστικές μετατοπίσεις στη διεπιφάνεια έχουν μια γνωστή ασυνέχεια $\mathbf{u}^0$, ενώ η δεύτερη ότι, το βέλος τάσης είναι συνεχές. Ο τύπος αυτών των διεπιφανειακών συνθηκών περιγράφει ένα συγκεκριμένο τύπο εξάρμωσης (dislocation) στα υλικά, που είναι γνωστός ως εξάρμωση τύπου Somigliana (Eshelby, 1951; Eshelby, 1973). Ο τύπος αυτός εξάρμωσης εμφανίζεται αρκετά συχνά στα κρυσταλλικά υλικά, αλλά και στη γεωφυσική στα σεισμικά ρήγματα.

Από την παραπάνω ανάλυση δείχθηκε ότι το ελαστικό πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης σε ένα υλικό, ανάγεται εύκολα σε ένα ελαστικό πρόβλημα εξάρμωσης τύπου Somigliana, με τις διεπιφανειακές συνθήκες (4.4).

4.3 Το διδιάστατο πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης

Θα υποθέσουμε τώρα ότι η ιδιο-μετατόπιση $\mathbf{u}^0$, που περιγράφει το μετασχηματισμό φάσης στο όγκο V' του συνεχούς ελαστικού μέσου που καταλαμβάνει τον όγκο V', είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης x_3, δηλαδή, ότι είναι συνάρτηση μόνο των συντεταγμένων x_1 και x_2. Για να μπορεί να αναπτυχθεί μια τέτοια κατάσταση, θα πρέπει ο όγκος V' να είναι ένας κύλινδρος του οποίου οι γενέτειρες είναι παράλληλες στον άξονα x_3. Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης είναι συναρτήσεις μόνο των x_1, x_2, δηλαδή

$$u_1^0 = u_1^0(x_1, x_2)\ , \qquad u_2^0 = u_2^0(x_1, x_2), \qquad u_3^0 = u_3^0(x_1, x_2)\ . \tag{4.5}$$

Ένα τέτοιο πεδίο μετατοπίσεων αντιστοιχεί στις παρακάτω μη-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης

$$\gamma_{11}^0 = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1},\ \ \gamma_{22}^0 = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2},\ \ \gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right),\ \ \gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}\right),\ \ \gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}\right). \tag{4.6}$$

Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα μετασχηματισμού φάσης γίνεται η παραδοχή για μία ομοιόμορφη διανομή των παραμορφώσεων μέσα στον όγκο V'. Θεωρούμε ότι, οι συνιστώσες του τανυστή ιδιο-παραμόρφωσης μέσα στον όγκο V' είναι σταθερές, δηλαδή είναι γνωστές οι ποσότητες $\gamma_{11}^0,\ \gamma_{22}^0,\ \gamma_{12}^0,\ \gamma_{13}^0,\ \gamma_{23}^0$.

Αν έχουμε γνωστές τις συνιστώσες αυτές, το διδιάστατο πεδίο των ιδιο-μετατοπίσεων προκύπτει με ολοκλήρωση των σχέσεων (4.6). Από την ολοκλήρωση αυτή αποκτώνται οι παρακάτω σχέσεις

$$u_1^0(x_1, x_2) = \gamma_{11}^0 x_1 + (\gamma_{12}^0 + \omega_{12}^0)x_2\ , \tag{4.7α}$$

$$u_2^0(x_1, x_2) = \gamma_{22}^0 x_2 + (\gamma_{12}^0 - \omega_{12}^0)x_1, \tag{4.7β}$$

$$u_3^0(x_1, x_2) = 2\gamma_{13}^0 x_1 + 2\gamma_{23}^0 x_2\ . \tag{4.7γ}$$

Στις σχέσεις αυτές υπεισέρχονται οι ποσότητες $\omega_{12}^0(=-\omega_{21}^0)$, οι οποίες περιγράφουν τη στροφή που υφίσταται ένα υλικό σωματίδιο. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, εκτός από τις ιδιο-παραμορφώσεις, που δίνονται από τις σχέσεις (4.6), είναι γνωστές και οι στροφές $\omega_{12}^0(=-\omega_{21}^0)$. Η στροφή σε ένα σημείο του συνεχούς μέσου παρέχεται από τη σχέση

$$\omega_{12}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right). \tag{4.8}$$

4.4 Το γενικευμένο πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης στον πιεζοηλεκτρισμό

Στην περίπτωση που το συνεχές μέσο που θεωρήσαμε προηγούμενα είναι ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό, τότε μπορούμε να γενικεύσουμε τους παραπάνω τανυστές συμπεριλαμβάνοντας στις εξισώσεις τις ποσότητες που περιγράφουν το ηλεκτρικό πεδίο. Αντίστοιχο της ελαστικής μετατόπισης είναι το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ, από το οποίο παράγονται οι συνιστώσες ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Για τη διδιάστατη περίπτωση, οι σχέσεις αυτές έχουν τη μορφή

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \qquad E_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2}. \tag{4.9}$$

Οι συνιστώσες E_1 και E_2 είναι συναρτήσεις μόνο των x_1 και x_2, όπως επίσης και το δυναμικό ϕ, δηλαδή

$$E_1 = E_1(x_1, x_2), \qquad E_2 = E_2(x_1, x_2), \qquad \phi = \phi(x_1, x_2). \tag{4.10}$$

Στον πιεζοηλεκτρισμό θα θεωρήσουμε ότι η διανυσματική μετατόπιση **u** σε ένα σημείο συμπεριλαμβάνει ως τέταρτη συνιστώσα, το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ στο σημείο αυτό, δηλαδή,

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, \phi]^T. \tag{4.11}$$

Το πιεζοηλεκτρικό υλικό, που καταλαμβάνει τον όγκο V' υφίσταται μια ιδιο-παραμόρφωση που περιγράφεται με τις συνιστώσες γ_{11}^0, γ_{22}^0, γ_{12}^0, γ_{13}^0, γ_{23}^0. Την κατάσταση αυτή συνοδεύει και ένα ιδιο-ηλεκτρικό πεδίο E_1^0 και E_2^0. Με ολοκλήρωση της (4.9) προκύπτει το ηλεκτρικό δυναμικό που παράγει το πεδίο αυτό στη μορφή

$$\phi^0(x_1, x_2) = -E_1^0 x_1 - E_2^0 x_2 . \tag{4.12}$$

Για την περίπτωση αυτή, το ιδιο-διάνυσμα $\mathbf{u}^0$ σε κάθε σημείο του όγκου V' είναι

$$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0(x_1, x_2) \\ u_2^0(x_1, x_2) \\ u_3^0(x_1, x_2) \\ \phi^0(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^0 x_1 + (\gamma_{12}^0 + \omega_{12}^0) x_2 \\ \gamma_{22}^0 x_2 + (\gamma_{12}^0 - \omega_{12}^0) x_1 \\ 2\gamma_{13}^0 x_1 + 2\gamma_{23}^0 x_2 \\ -E_1^0 x_1 - E_2^0 x_2 \end{bmatrix} . \tag{4.13}$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα εξάγεται ότι

$$\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\gamma}_1^0 x_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^0 x_2 , \tag{4.14}$$

όπου

$$\boldsymbol{\gamma}_1^0 = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^0 \\ (\gamma_{12}^0 - \omega_{12}^0) \\ 2\gamma_{13}^0 \\ -E_1^0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\gamma}_2^0 = \begin{bmatrix} (\gamma_{12}^0 + \omega_{12}^0) \\ \gamma_{22}^0 \\ 2\gamma_{23}^0 \\ -E_2^0 \end{bmatrix} . \tag{4.15}$$

Θα γράψουμε τώρα τη σχέση (4.14) σε όρους της μιγαδικής μεταβλητής $z = x_1 + ix_2$ $(i^2 = -1,\ \bar{z} = x_1 - ix_2)$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i} . \tag{4.16}$$

Με βάση τις σχέσεις (4.16) και (4.17), η σχέση (4.15) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\gamma}^0 z + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^0 \bar{z} \tag{4.17}$$

όπου

$$\gamma^0 = \frac{1}{2}(\gamma_1^0 - i\gamma_2^0)\,.$$

Στη σχέση (4.17), λειτουργώντας κάπως «ανορθόδοξα» αφήσαμε τη συνάρτηση $u^0 = u^0(z,\bar{z})$ με το ίδιο σύμβολο, εφόσον κάτι τέτοιο δεν δημιουργεί σύγχυση στην ανάλυση.

5. ΤΑ ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΤΟΥ 2D ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

5.1 Ο σύμμορφος μετασχηματισμός στην ανισότροπη ελαστικότητα

Η παρακάτω ανάλυση θα γίνει με τη βοήθεια των μιγαδικών μεταβλητών, αξιοποιώντας τις ιδιότητες των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων, και τη διευκόλυνση που μας παρέχει ο σύμμορφος μετασχηματισμός στην περίπτωση των καμπυλόγραμμων συνόρων (Muskhelisvili, 1953). Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων έχουν την ιδιότητα να ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις της ισότροπης και ανισότροπης ελαστικότητας καθώς και της πιεζοηλεκτρικότητας. Με τον σύμμορφο μετασχηματισμό, που είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, ένα σύνθετο πεδίο με καμπυλόγραμμο σύνορο μπορεί να μετασχηματιστεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το πολύπλοκο σύνορο να αντιστοιχεί σε ένα απλό σύνορο, όπως για παράδειγμα, στην περιφέρεια ενός κύκλου, ή σε μια ευθεία γραμμή. Στη μελέτη της συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών στα πλαίσια της μικρομηχανικής και νανομηχανικής, χρησιμοποιείται το μοντέλο του άπειρου ελαστικού μέσου, που θα καλείται μήτρα, μέσα στο οποίο ενυπάρχει ένα άλλο ετερογενές μέσο πεπερασμένων διαστάσεων, που θα καλείται ανομοιογένεια. Στη διδιάστατη περίπτωση, το μοντέλο αυτό μπορεί να περιγραφεί αναφορικά με το μιγαδικό επίπεδο $z = x_1 + ix_2$. Στο επίπεδο αυτό η κλειστή καμπύλη C θα αντιπροσωπεύει τη διεπιφάνεια της ανομοιογένειας-μήτρας, το εξωτερικό πεδίο τη μήτρα και το εσωτερικό πεδίο την ανομοιογένεια. Θα υποθέσουμε τώρα ότι η κλειστή αυτή καμπύλη μετασχηματίζεται στο μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$ ενός μιγαδικού επιπέδου ζ με το σύμμορφο μετασχηματισμό

$$z = m(\zeta), \quad \zeta = \rho e^{i\theta}. \tag{5.1}$$

Για παράδειγμα, όταν η καμπύλη είναι μια έλλειψη με μεγάλο και μικρό ημιάξονα α, b αντίστοιχα, ο σύμμορφος μετασχηματισμός έχει τη μορφή

$$z = mR\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \tag{5.2}$$

με

$$R = \frac{\alpha + b}{2}, \quad m = \frac{a - b}{a + b}. \tag{5.3}$$

Στην ανισότροπη ελαστικότητα, εκτός των μιγαδικών επιπέδων z και ζ, θα θεωρήσουμε και άλλα τρία ζεύγη επιπέδων, που συνδέονται με τους μιγαδικούς αριθμούς $z_l = x_1 + p_l x_2$ και ζ_l. Η διεπιφάνεια C της ανομοιογένειας, που βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο $z(= x_1 + ix_2)$ μετασχηματίζεται μέσω της σχέσης $z_l = x_1 + p_l z$ στο μιγαδικό επίπεδο z_l στην κλειστή καμπύλη C_l. Για να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες που προσφέρει ο ολόμορφος μετασχηματισμός μη ολόμορφων συναρτήσεων στην επίλυση διεπιφανειακών προβλημάτων, εισάγουμε ένα νέο μετασχηματισμό $z_l = m_l(\zeta_l)$ με τη σχέση

$$z_l(\zeta) = m_l(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - ip_l)m(\zeta_l) + \frac{1}{2}(1 + ip_l)\bar{m}\left(\frac{1}{\zeta_l}\right),$$

όπου ζ_l αντιπροσωπεύει ένα σημείο του ζ_l επιπέδου. (5.4)

Για την έλλειψη ο μετασχηματισμός αυτός έχει τη μορφή

$$z_l = \frac{a - ibp_l}{2}\zeta_l + \frac{a + ibp_l}{2}\frac{1}{\zeta_l}. \tag{5.5}$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για όλες τις περιφέρειες $|\zeta_l| = 1$ ισχύει ότι, $\zeta = \zeta_l = \sigma = \exp(i\theta)$. Αυτό σημαίνει ότι, κάθε σημείο της περιφέρειας του ζ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο των τριών επιπέδων ζ_l, και σε ένα και μόνο σημείο των επιπέδων z και z_l.

5.2 Τα διφασικά δυναμικά για μια πιεζοηλεκτρική ανομοιογένεια σε μια πιεζοηλεκτρική μήτρα

Στην ενότητα αυτή θα εξάγουμε τα διφασικά δυναμικά για μια πιεζοηλεκτρική ανομοιογένεια που βρίσκεται ένθετη σε μια πιεζοηλεκτρική μήτρα, όταν στη διεπιφάνεια εφαρμόζεται μια γενικευμένη εξάρμωση $\mathbf{u}^0$ τύπου Somigliana. Θα υποθέσουμε ότι η διεπιφάνεια μετασχηματίζεται μέσω του μετασχηματισμού $z = m(\zeta)$, στη μοναδιαία περιφέρεια $|\zeta| = 1$ ενός ζ -επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή, η γενικευμένη μετατόπιση $\mathbf{u}$ και η γενικευμένη δύναμη $\mathbf{T}$ στα δύο πεδία παρέχονται από τις σχέσεις (3.20) και (3.23).

Για πρόβλημα αυτό οι συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στη διεπιφάνεια είναι :

$$\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_I = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{T}_M = \mathbf{T}_I, \quad z \in C \tag{5.6}$$

Αμέσως παρακάτω θα εξάγουμε δύο γενικές αντιπροσωπεύσεις των ελαστικών και ηλεκτρικών πεδίων των δύο μέσων σε όρους των διφασικών δυναμικών. Η καθεμία από αυτές είναι κατάλληλη για ένα συγκεκριμένο τύπο προβλημάτων.

Πρώτη αντιπροσώπευση πιεζοηλεκτρικών πεδίων

Με αντικατάσταση των (3.20) και (3.23) στις συνοριακές συνθήκες (5.6) προκύπτει

$$\mathbf{A}_M \mathbf{f}_M(\sigma) - \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(1/\sigma) - \mathbf{u}^0(\sigma, 1/\sigma) = \mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(\sigma) - \bar{\mathbf{A}}_M \bar{\mathbf{f}}_M(1/\sigma) \tag{5.7}$$

και

$$\mathbf{B}_M \mathbf{f}_M(\sigma) - \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(1/\sigma) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(\sigma) - \bar{\mathbf{B}}_M \bar{\mathbf{f}}_M(1/\sigma) \tag{5.8}$$

όπου $\sigma = e^{i\theta}$, ένα σημείο της διεπιφάνειας στο ζ -επιπέδο. Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα εάν ορίσουμε,

$$\mathbf{f}_o(\zeta) = \begin{cases} i\mathbf{A}_M \mathbf{f}_M(\zeta) - i\bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(1/\zeta) - i\mathbf{u}^0(\zeta, 1/\zeta) & |\zeta| \geq 1 \\ i\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(\zeta) - i\bar{\mathbf{A}}_M \bar{\mathbf{f}}_M(1/\zeta) & |\zeta| \leq 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

όπου $\mathbf{f}_0(\zeta)$ μια διανυσματική συνάρτηση, οι συνιστώσες της οποίας είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

Αντίστοιχα, η δεύτερη διεπιφανειακή συνθήκη ικανοποιείται εάν τα μιγαδικά δυναμικά εκφρασθούν ως

$$\mathbf{q}_o(\zeta)=\begin{cases}\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\zeta)-\bar{\mathbf{B}}_I\bar{\mathbf{f}}_I(1/\zeta) & |\zeta|\geq 1\\ \mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(\zeta)-\bar{\mathbf{B}}_M\bar{\mathbf{f}}_M(1/\zeta) & |\zeta|\leq 1\end{cases} \tag{5.10}$$

όπου $\mathbf{q}_0(\zeta)$ μια διανυσματική συνάρτηση όπως και η $\mathbf{f}_0(\zeta)$.

Από τις (5.9) και (5.10) προκύπτουν οι παρακάτω γενικές αντιπροσωπεύσεις

$$\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\zeta)=\mathbf{H}^{-1}\left[\mathbf{f}_0(\zeta)+\bar{\mathbf{M}}_I^{-1}\mathbf{q}_0(\zeta)+i\mathbf{u}^0\left(\zeta,\frac{1}{\zeta}\right)\right], \tag{5.11}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_M\bar{\mathbf{f}}_M(1/\zeta)=\bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta)-\mathbf{M}_I^{-1}\bar{\mathbf{q}}_0(1/\zeta)-i\bar{\mathbf{u}}^0\left(\zeta,\frac{1}{\zeta}\right)\right], \tag{5.12}$$

για τη μήτρα ($|\zeta|\geq 1$),

$$\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(\zeta)=\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{f}_0(\zeta)+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}\mathbf{q}_0(\zeta)], \tag{5.13}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I\bar{\mathbf{f}}_I(1/\zeta)=\mathbf{H}^{-1}[\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta)-\mathbf{M}_M^{-1}\bar{\mathbf{q}}_0(1/\zeta)], \tag{5.14}$$

και για την ανομοιογένεια ($|\zeta|\leq 1$).Στις σχέσεις αυτές, το $\mathbf{H}$ είναι ένας θετικά ορισμένος ερμιτιανός πίνακας, που περιέχει ελαστικές σταθερές των διυλικών, και ορίζεται με τη σχέση

$$\mathbf{H}=\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \tag{5.15}$$

όπου M_a (α=M ή I) είναι ένας πίνακας που ορίζεται με τη σχέση $M_a=-iB_aA_a^{-1}$ (Lothe και Barnett, 1976).

Οι σχέσεις (5.11)-(5.14) δείχνουν ότι το ελαστικό και το ηλεκτρικό πεδίο στην ανομοιογένεια και στη μήτρα εκφράζεται σε όρους των μητρωικών συναρτήσεων $\mathbf{f}_0(\zeta)$ και $\mathbf{q}_0(\zeta)$, που αποτελούν τα ***διφασικά δυναμικά*** του διφασικού συστήματος. Οι μητρωικές συναρτήσεις των τάσεων, σε όρους των διφασικών δυναμικών γράφονται

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_M(\zeta) = \mathbf{H}^{-1}\left[\mathbf{f}_0(\zeta) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}\mathbf{q}_0(\zeta) + i\mathbf{u}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right] + \\ + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta) - \mathbf{M}_I^{-1}\bar{\mathbf{q}}_0(1/\zeta) - i\bar{\mathbf{u}}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\mathbf{T}_I(\zeta) = \bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{f}_0(\zeta) + \bar{\mathbf{M}}_M^{-1}\mathbf{q}_0(\zeta)] + \mathbf{H}^{-1}[\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta) - \mathbf{M}_M^{-1}\bar{\mathbf{q}}_0(1/\zeta)]. \tag{5.17}$$

Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, τα διφασικά δυναμικά προσδιορίζονται ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες και οι ιδιόμορφες συνθήκες του προβλήματος.

Για την ειδική περίπτωση μιας άκαμπτης και μονωμένης ανομοιογένειας $(M_I^{-1} \cong 0)$, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας, που δίνονται από τις σχέσεις (5.11) και (5.12), παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{Bf}(\zeta) = \mathbf{M}\left(\mathbf{f}_0(\zeta) + i\mathbf{u}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right), \tag{5.18}$$

$$\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}(1/\zeta) = \bar{\mathbf{M}}\left(\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta) - i\bar{\mathbf{u}}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right), \tag{5.19}$$

όπου χάριν απλότητας, οι σχετικοί δείκτες έχουν παραληφθεί. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση της τάσης και η συνάρτηση της μετατόπισης εκφράζονται σε όρους της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}_0(\zeta)$ ως ακολούθως

$$\mathbf{T}(\zeta) = \mathbf{M}\left(\mathbf{f}_0(\zeta) + i\mathbf{u}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right) + \bar{\mathbf{M}}\left(\bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta) - i\bar{\mathbf{u}}^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)\right), \tag{5.20}$$

$$i\mathbf{u}(\zeta) = \mathbf{f}_0(\zeta) - \bar{\mathbf{f}}_0(1/\zeta). \tag{5.21}$$

Δεύτερη αντιπροσώπευση των πιεζοηλεκτρικών πεδίων

Για τη διεπιφάνεια αντικαθιστώντας τις (3.20) και (3.23) στις (5.6) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\mathbf{A}_M\mathbf{f}_M(\sigma)+\bar{\mathbf{A}}_M\bar{\mathbf{f}}_M(1/\sigma)=\mathbf{A}_I\mathbf{f}_I(\sigma)+\bar{\mathbf{A}}_I\bar{\mathbf{f}}_I(1/\sigma)+\mathbf{u}^0(\sigma,1/\sigma)\,, \tag{5.22}$$

$$\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\sigma)+\bar{\mathbf{B}}_M\bar{\mathbf{f}}_M(1/\sigma)=\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(\sigma)+\bar{\mathbf{B}}_I\bar{\mathbf{f}}_I(1/\sigma)\,. \tag{5.23}$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις εκφράζονται ισοδύναμα με μία και μόνο σχέση:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\sigma)&=[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]^{-1}[\mathbf{M}_I^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(\sigma)+\\&+[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]^{-1}[\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}-\bar{\mathbf{M}}_I^{-1}]\bar{\mathbf{B}}_I\bar{\mathbf{f}}_I(\bar{\sigma})+i[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]\mathbf{u}^0(\sigma,\bar{\sigma}).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι, πάνω στη διεπιφάνεια το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας εκφράζεται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της ανομοιογένειας. Έτσι, αν ορίσουμε τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας με τη σχέση

$$\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(z)=\mathcal{Y}\mathbf{f}_0(z) \tag{5.25}$$

όπου

$$\mathcal{Y}=[\mathbf{M}_I^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]^{-1}[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]$$

και $\mathbf{f}_0(z)$ είναι μία μιγαδική ολόμορφη μητρωική συνάρτηση, τότε παίρνοντας υπόψη τις (5.24), τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας μπορούν να ορισθούν με τη σχέση

$$\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\zeta)=\mathbf{f}_0(\zeta)+\mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathbf{f}}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+i\mathcal{Z}\mathbf{u}^0\left(\zeta,\frac{1}{\zeta}\right), \tag{5.26}$$

όπου

$$\mathcal{X}=[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]^{-1}[\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}-\bar{\mathbf{M}}_I^{-1}]$$

$$\mathcal{Z}=[\mathbf{M}_M^{-1}+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}]$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινισθεί το εξής ότι, η $\mathbf{f}_0$ ορίζεται στο πεδίο που καταλαμβάνει η ανομοιογένεια σε σχέση με τα επίπεδα z_l με τη σχέση

$$\mathbf{f}_0(z) = [\, f_{01}(z_1),\, f_{02}(z_2),\, f_{03}(z_3),\, f_{04}(z_4)]^T, \tag{5.27}$$

ενώ στο πεδίο της μήτρας ορίζεται σε σχέση με τα επίπεδα μετασχηματισμού ζ_l.

6. ΤΑ ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ

Τις σχέσεις που αποκτήθηκαν προηγούμενα θα τις εφαρμόσουμε σε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις που ενδιαφέρουν την εφαρμογή. Στην πρώτη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις της δεύτερης αντιπροσώπευσης για να αποκτήσουμε τα ελαστικά και ηλεκτρικά πεδία για μια ελλειπτική ανομοιογένεια, που υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης. Το πρόβλημα αυτό ενδιαφέρει την τρέχουσα τεχνολογία των κβαντικών ημιαγωγών και παραμένει μέχρι τώρα άλυτο. Η δεύτερη περίπτωση αφορά μια ελλειπτική πιεζοηλεκτρική ανομοιογένειας που έχει μια ρωγμή στη διεπιφάνεια. Το πρόβλημα αυτό ενδιαφέρει το σχεδιασμό πιεζοηλεκτρικών συσκευών έναντι θραύσης.

6.1 Το πρόβλημα του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης σε μια ελλειπτική ανομοιογένεια

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας, η οποία υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, που περιγράφεται με τα μητρώα παραμόρφωσης

$$\boldsymbol{\gamma}_1^0 = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^0 \\ (\gamma_{12}^0 - \omega_{12}^0) \\ 2\gamma_{13}^0 \\ -E_1^0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\gamma}_2^0 = \begin{bmatrix} (\gamma_{12}^0 + \omega_{12}^0) \\ \gamma_{22}^0 \\ 2\gamma_{23}^0 \\ -E_2^0 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Όπως δείχτηκε στο κεφάλαιο 3, η ομοιόμορφη αυτή παραμόρφωση αντιστοιχεί στην ακόλουθη διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana τύπου

$$\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\gamma}^0 z + \overline{\boldsymbol{\gamma}}^0 \overline{z}, \tag{6.2}$$

όπου

$$\gamma^0 = \frac{1}{2}(\gamma_1^0 - i\gamma_2^0).$$

Για την περίπτωση της έλλειψης, ο σύμμορφος μετασχηματισμός έχει τη μορφή

$$z = m(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad R = \frac{\alpha + b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}. \tag{6.3}$$

όπου a και b είναι ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας της έλλειψης, αντίστοιχα. Η συνάρτηση $u^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)$ της σχέσης (6.2) έχει τη μορφή

$$u^0\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) = R(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0 m)\zeta + R(\bar{\gamma}^0 + \gamma^0 m)\frac{1}{\zeta}. \tag{6.4}$$

Θα αναζητήσουμε τώρα το διφασικό δυναμικό $\mathbf{f}_0$ στη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \boldsymbol{\lambda} z \tag{6.5}$$

όπου $\boldsymbol{\lambda}$ ένα άγνωστο σταθερό μητρώο στήλη που θα προσδιορισθεί παρακάτω. Εισάγοντας τις (6.4) και (6.5) στη σχέση (5.26) προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_M \mathbf{f}_M(\zeta) = R\left[\boldsymbol{\lambda} + \mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} m + i\mathcal{Z}(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0 m)\right]\zeta + \\ + R\left[\boldsymbol{\lambda} m + \mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} + i\mathcal{Z}(\bar{\gamma}^0 + \gamma^0 m)\right]\frac{1}{\zeta}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Στο άπειρο σημείο της μήτρας, οι τάσεις θα πρέπει να μηδενίζονται. Από τη σχέση (6.6) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει όταν

$$\boldsymbol{\lambda} + \mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} m + i\mathcal{Z}(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0 m) = \mathbf{0}. \tag{6.7}$$

Από τη σχέση αυτή, προκύπτει

$$\boldsymbol{\lambda} = i[\mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{X}}\mathcal{Y} m^2 - \mathbf{I}]^{-1}[\mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{Z}}(\bar{\gamma}^0 + \gamma^0 m)m + \mathcal{Z}(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0 m)]. \tag{6.8}$$

Συνεπώς, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας και της ανομοιογένειας παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(z) = \mathcal{Y}\boldsymbol{\lambda} z\,, \tag{6.9}$$

$$\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(\zeta) = R\left[\boldsymbol{\lambda} m + \mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} + i\mathcal{Z}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}^0 + \boldsymbol{\gamma}^0 m)\right]\frac{1}{\zeta}\,. \tag{6.10}$$

όπου $\boldsymbol{\lambda}$ ορίζεται με τη σχέση (6.8).

Για την ειδική περίπτωση του κύκλου, όπου $m = 0$, η σύμμορφη απεικόνιση γίνεται

$$z = R\zeta\,,\quad \bar{z} = \frac{R}{\zeta} = \frac{R^2}{z}\,. \tag{6.11}$$

Στην περίπτωση αυτή, το διφασικό δυναμικό είναι

$$\mathbf{f}_0(z) = -i\mathcal{Z}\boldsymbol{\gamma}^0 z\,, \tag{6.12}$$

και τα μιγαδικά δυναμικά το διφασικού συστήματος παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{B}_I\mathbf{f}_I(z) = -i\mathcal{Y}\mathcal{Z}\boldsymbol{\gamma}^0 z\,, \tag{6.13}$$

$$\mathbf{B}_M\mathbf{f}_M(z) = i\left[\mathcal{X}\bar{\mathcal{Y}}\bar{\mathcal{Z}} + \mathcal{Z}\right]\bar{\boldsymbol{\gamma}}^0\frac{R^2}{z}\,. \tag{6.14}$$

6.2 Το πρόβλημα της διεπιφανειακής ρωγμής σε μία ελλειπτική ανομοιογένεια

Σαν δεύτερη εφαρμογή θα θεωρήσουμε την περίπτωση μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας, που βρίσκεται σε μία ελαστική μήτρα και έχει μια ρωγμή στη διεπιφάνεια. Στην περίπτωση αυτή, το μητρώο της γενικευμένης δύναμης στα δύο χείλη της ρωγμής θα πρέπει να είναι μηδενικό, δηλαδή

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{T}^- = 0,\ \text{πάνω στη ρωγμή.} \tag{6.15}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.15), οδηγούμαστε στις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{H}^{-1}\left[\mathbf{f}_0^+(\sigma)+\bar{\mathbf{M}}_I^{-1}\mathbf{q}_0^+(\sigma)\right]+\bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\mathbf{f}_0^-(\sigma)-\mathbf{M}_I^{-1}\mathbf{q}_0^-(\sigma)\right]=0, \tag{6.16}$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{f}_0^-(\sigma)+\bar{\mathbf{M}}_M^{-1}\mathbf{q}_0^-(\sigma)]+\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{f}_0^+(\sigma)-\mathbf{M}_M^{-1}\mathbf{q}_0^+(\sigma)]=0\,. \tag{6.17}$$

Με αφαίρεση, οι σχέσεις παρέχουν

$$\mathbf{q}_0^+=\mathbf{q}_0^-=0\,,\ \text{πάνω στη ρωγμή.} \tag{6.18}$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η συνάρτηση $\mathbf{q}_0(\zeta)$ είναι μία ολόμορφη σε όλο το επίπεδο εκτός ίσως από ορισμένα σημεία. Παίρνοντας υπόψη την (6.18), η (6.16) παρέχει

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f}_0^+(\sigma)+\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{f}_0^-(\sigma)=[\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{M}_I^{-1}-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}_I^{-1}]\mathbf{q}_0(\sigma)\,. \tag{6.19}$$

Θέτοντας

$$\mathbf{f}_0(\zeta)=\mathbf{K}\mathbf{q}_0(\zeta)+\mathbf{h}_0(\zeta), \tag{6.20}$$

με

$$\mathbf{K}=[\mathbf{H}^{-1}+\bar{\mathbf{H}}^{-1}]^{-1}[\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{M}_I^{-1}-\mathbf{H}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_I^{-1}]\,, \tag{6.21}$$

η (6.19) δίνει

$$\mathbf{h}_0^+(\sigma)+\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{h}_0^-(\sigma)=0. \tag{6.22}$$

Έτσι, το συνοριακό πρόβλημα που ορίζεται με τη σχέση (6.19) έχει αναχθεί στον προσδιορισμό των ολόμορφων συναρτήσεων $\mathbf{f}_0(\zeta)$ και $\mathbf{h}_0(\zeta)$, όπου η τελευταία πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη (6.22) πάνω στη ρωγμή.

Μια ειδική λύση μπορεί να αποκτηθεί, όταν η διφασική παράμετρος $\mathbf{H}$, που δίνεται από την (5.15), είναι πραγματική, δηλαδή όταν

$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}.$

Στην περίπτωση αυτή, από τη (6.22) προκύπτει ότι

$$\mathbf{h}_0^+(\sigma) + \mathbf{h}_0^-(\sigma) = 0. \tag{6.23}$$

Η σχέση αυτή σε αναλυτική μορφή, γράφεται

$$\begin{aligned} &h_{01}^+(\sigma) + h_{01}^-(\sigma) = 0, \quad h_{02}^+(\sigma) + h_{02}^-(\sigma) = 0, \\ &h_{03}^+(\sigma) + h_{03}^-(\sigma) = 0, \quad h_{04}^+(\sigma) + h_{04}^-(\sigma) = 0 \end{aligned} . \tag{6.24}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν τρία προβλήματα Hilbert, οι λύσεις των οποίων είναι:

$$\begin{aligned} &h_{01}(\zeta) = \mathrm{X}_0(\zeta) P_1(\zeta), \quad h_{02}(\zeta) = \mathrm{X}_0(\zeta) P_2(\zeta), \\ &h_{03}(\zeta) = \mathrm{X}_0(\zeta) P_3(\zeta), \quad h_{04}(\zeta) = \mathrm{X}_0(\zeta) P_4(\zeta), \end{aligned} \tag{6.25}$$

όπου $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$, $P_3(\zeta)$ και $P_4(\zeta)$, είναι τρεις ολόμορφες συναρτήσεις, οι οποίες προσδιορίζονται από τις συνθήκες φόρτισης του προβλήματος. Η $X_0(\zeta)$ είναι μια πλειότιμη συνάρτηση της μορφής

$$X_0(\zeta) = (\zeta - \sigma_1)^{1/2} (\zeta - \sigma_2)^{1/2}, \tag{6.26}$$

που ορίζεται πάνω στο τόξο $\Gamma_c = (\sigma_1, \sigma_2)$ της ρωγμής στο οποίο πρέπει να ισχύει $X_0^+(\sigma) = -X_0^-(\sigma)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τον κλάδο εκείνο της $X_0(\zeta)$ για το οποίο $\lim_{|\zeta| \to \infty} (X_0(\zeta) / \zeta) = 1$. Στην περίπτωση αυτή, σε μορφή πινάκων η σχέση (6.25) γράφεται

$$\mathbf{h}_0(\zeta) = \mathbf{X}_0(\zeta) \mathbf{P}(\zeta), \tag{6.27}$$

όπου

$$\mathbf{P}(\zeta) = [P_1(\zeta), P_2(\zeta), P_3(\zeta), P_4(\zeta)] \tag{6.28}$$

Η εξίσωση (6.27) δείχνει ότι, όταν $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}$, το ελαστικό πεδίο είναι χωρίς διακυμάνσεις.

Στη συνέχεια, θα εξαχθεί η λύση για την γενική περίπτωση όπου το $\mathbf{H}$ δεν είναι πραγματικός πίνακας. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (6.22) οδηγεί σε τρία προβλήματα Hilbert, που προκύπτουν ως εξής. Θεωρούμε τη διαγωνοποίηση του πίνακα $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$ με τη σχέση

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}, \tag{6.29}$$

όπου

$$\mathbf{L} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4], \quad \mathbf{R}=[\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_4]. \tag{6.30}$$

όπου $(\lambda_k, \mathbf{R}_k)$ είναι τα τέσσερα ιδιο-ζεύγη που ικανοποιούν τις ιδιο-σχέσεις

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{R}_1 = \lambda_1\mathbf{R}_1, \quad \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{R}_2 = \lambda_2\mathbf{R}_2, \quad \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{R}_3 = \lambda_3\mathbf{R}_3, \quad \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{R}_4 = \lambda_4\mathbf{R}_4 \tag{6.31}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.31), η εξίσωση (6.22) γράφεται

$$\hat{\mathbf{h}}_0^+(\sigma) + \mathbf{L}\hat{\mathbf{h}}_0^-(\sigma) = 0, \tag{6.32}$$

όπου

$$\hat{\mathbf{h}}_0(\zeta) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{h}_0(\zeta). \tag{6.33}$$

Αναλύοντας την (6.32) στις συνιστώσες της, προκύπτει

$$\begin{aligned} &h_{01}^+(\sigma) + \lambda_1\hat{h}_{01}^-(\sigma) = 0, \quad \hat{h}_{02}^+(\sigma) + \lambda_2\hat{h}_{02}^-(\sigma) = 0, \\ &\hat{h}_{03}^+(\sigma) + \lambda_3\hat{h}_{03}^-(\sigma) = 0, \quad \hat{h}_{04}^+(\sigma) + \lambda_4\hat{h}_{04}^-(\sigma) = 0. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αποσυζευγμένες και συνιστούν τρία ομογενή προβλήματα τύπου Hilbert. Οι λύσεις των προβλημάτων αυτών είναι

$$\begin{aligned} &\hat{h}_{01}(\sigma) = \mathrm{X}_1(\zeta)P_1(\zeta), \quad \hat{h}_{02}(\sigma) = \mathrm{X}_2(\zeta)P_2(\zeta), \\ &\hat{h}_{03}(\sigma) = \mathrm{X}_3(\zeta)P_3(\zeta), \quad \hat{h}_{04}(\sigma) = \mathrm{X}_4(\zeta)P_4(\zeta), \end{aligned} \tag{6.35}$$

όπου $P_k(\zeta)$ είναι ολόμορφες συνάρτησεις, όπως και στην πρώτη περίπτωση. Η συνάρτηση $X_k(\zeta)$ είναι μια πλειότιμη συνάρτηση της μορφής

$$X_k(\zeta) = (\zeta - \sigma_1)^{1/2 - il_k} (\zeta - \sigma_2)^{1/2 + il_k} , \tag{6.36}$$

με

$$l_k = \frac{1}{2\pi} \ln \lambda_k . \tag{6.37}$$

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται στο τόξο Γ_c της ρωγμής και θεωρείται εκείνος ο κλάδος για τον οποίο ισχύει $\lim_{|\zeta| \to \infty} (X_k(\zeta) / \zeta) = 1$. Από τις (6.33) και (6.35), προκύπτει

$$\mathbf{h}_0(\zeta) = \mathbf{RX}(\zeta)\mathbf{P}(\zeta), \tag{6.38}$$

όπου

$$\mathbf{X}(\zeta) = diag[X_1(\zeta), X_2(\zeta), X_3(\zeta), X_4(\zeta)] , \tag{6.39}$$

$$\mathbf{P}(\zeta) = [P_1(\zeta), P_2(\zeta), P_3(\zeta), P_4(\zeta)]^T . \tag{6.40}$$

Η συνάρτηση $\mathbf{P}(\zeta)$ συγκεκριμενοποιείται κάθε φορά από την φόρτιση που επιβάλλεται στο σύστημα.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, αφού παρουσιάστηκε το τριδιάστατο πιεζοηλεκτρικό πρόβλημα στη γενική του μορφή, διερευνήθηκε διεξοδικά η διδιάστατη παραμορφωσιακή κατάσταση, για την περίπτωση των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών, με συμμετρία κλάσης 6mm, που είναι πολωμένα στη x_3 διεύθυνση. Στην ισότροπη ελαστικότητα είναι γνωστό ότι, μια διδιάστατη παραμορφωσιακή κατάσταση διασπάται σε δύο ασύζευκτες διδιάστατες παραμορφωσιακές καταστάσεις. Οι καταστάσεις αυτές είναι γνωστές, η μία σαν συνεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (επίπεδη παραμόρφωση), η δε άλλη σαν αντιεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο στην ανισότροπη ελαστικότητα, άρα και στην πιεζοηλεκτρικότητα, όπου οι δύο αυτές καταστάσεις είναι συζευγμένες. Στην παρούσα εργασία δείχνεται ότι, για την ειδική κατηγορία των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών με συμμετρία τάξης 6mm, που είναι πολωμένα στη x_3 διεύθυνση, όταν οι αιτίες που προκαλούν την παραμόρφωση δεν μεταβάλλονται στη διεύθυνση του άξονα x_2, τότε, όπως στην περίπτωση της ισότροπης ελαστικότητας, γίνεται αποσύζευξη της συνεπίπεδης και της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η αντιεπίπεδη παραμόρφωση συμβαίνει παράλληλα στον άξονα x_2, δηλαδή η αναπτυσσόμενη παραμόρφωση u_2 δεν εξαρτάται ούτε από τις άλλες μετατοπίσεις, ούτε από το ηλεκτρικό δυναμικό. Επίσης, η αντιεπίπεδη κατάσταση συμβαίνει στο επίπεδο (x_1, x_3) και συνυπάρχει με ένα ηλεκτρικό πεδίο που βρίσκεται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για την περίπτωση που οι δράσεις δεν μεταβάλλονται στη διεύθυνση x_1. Στην περίπτωση που οι αιτίες παραμόρφωσης δεν μεταβάλλονται στη διεύθυνση x_3, που συμπίπτει με τη διεύθυνση πόλωσης τότε, η διδιάστατη παραμόρφωση διασπάται πάλι σε μία αντιεπιπέδη και σε μία συνεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η αντιεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση συμβαίνει παράλληλα στον άξονα x_3 και εμφανίζεται μαζί με ένα ηλεκτρικό πεδίο που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (x_1, x_2). Η

κατάσταση αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και έχει διερευνηθεί διεξοδικά από αρκετούς ερευνητές.

Στη συνέχεια της εργασίας παρουσιάζεται η μιγαδική διατύπωση του διδιάστατου πιεζοηλεκτρικού προβλήματος, που αποτελεί την επέκταση της γενικής λύσης που έδωσε ο Eshelby και οι συνεργάτες του για τη διδιάστατη ανισότροπη ελαστικότητα, στην πιεζοηλεκτρικότητα. Η διατύπωση αυτή της γενικής λύσης της διδιάστατης πιεζοηλεκτρικότητας χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την ανάπτυξη δύο νέων γενικών αντιπροσωπεύσεων της λύσης του πιεζοηλεκτρικού προβλήματος σε διφασικά πιεζοηλεκτρικά υλικά, που στηρίζονται στην έννοια των διφασικών δυναμικών. Η ανάπτυξη των γενικών σχέσεων της λύσης συμπεριλαμβάνει μία γνωστή επιφανειακή εξάρμωση τύπου Somigliana, που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η συγκεκριμένη αυτή μορφή των γενικών αντιπροσωπεύσεων της λύσης μπορεί να δώσει λύσεις σε προβλήματα μετασχηματισμού φάσεων που εμφανίζονται σε πιεζοηλεκτρικές συσκευές σύγχρονης τεχνολογίας και δημιουργούν προβλήματα στη λειτουργία τους.

Στη συνέχεια, με εφαρμογή της πρώτης αντιπροσώπευσης της λύσης εξάγονται, για πρώτη φορά, τα ελαστικά και ηλεκτρικά πεδία σε κλειστή μορφή για μια πιεζοηλεκτρική ανομοιογένεια ελλειπτικής μορφής, που είναι ένθετη σε μια πιεζοηλεκτρική μήτρα. Η αιτία παραμόρφωσης του διαφασικού συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας είναι ένας ομοιόμορφος μετασχηματισμός φάσης, που συμβαίνει στην πιεζοηλεκτρική ανομοιογένεια. Επίσης, με εφαρμογή της δεύτερης αντιπροσώπευσης της λύσης εξάγονται τα ηλεκτρικά και ελαστικά πεδία για μια ελλειπτική ανομοιογένεια, που είναι ένθετη σε μια πιεζοηλεκτρική μήτρα, όταν υπάρχει μια ρωγμή κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η αιτία παραμόρφωσης του διαφασικού συστήματος μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε εξωτερική μηχανική ή ηλεκτρική φόρτιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Benveniste, Y., 1993. Exact results in the micromechanics of fibrous piezoelectric composites exhibiting pyroelectricity. Proc. R. Soc. Lond. A441, 59-81.

Borrelli, A., Horgan, C. O., Patri, M. C., 2004. Exponential decay of end effects in anti-plane shear for functionally graded piezoelectric materials. Proc. R. Soc. Lond. A 460, 1193-1212.

Chao, C. K., Chang, K. J., 1999. Interacting circular inclusions in antiplane piezoelectricity. Int. J. Solids Struct. 36, 3349-3373.

Chen, C. Q., Shen, Y. P., 1996. Piezothermoelasticity analysis for a circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation. In. J. Eng. Sci. 34, 1585-1600.

Chung, M. Y., Ting, T. C. T., 1996. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole. Int. J. Solids Struct. 33, 3343-3361.

Davies, J. H., 1998. Elastic and piezoelectric fields around a buried quantum dot: a simple picture. J. Appl. Phys. 84, 1358-1365.

Downes, J., Faux, D. A., 1995. Calculation of strain distribution in multiple-quantum well strained-layer structures. J. Appl. Phys. 77, 2444-2447.

Downes, J. R., Faux, D. A., O' Reilly, E. P., 1997. A simple method for calculating strain distributions in quantum dot structures. J. Appl. Phys. 81, 6700-6702.

Dunn, M. L., 1994. Electroelastic Green's functions for transversely isotropic piezoelectric media and their application to the solution of inclusion and inhomogeneity problems. Int. J. Engng Sci. 32, 119-131.

Dunn, M. L., Taya, M., 1993. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities. Proc. R. Soc. Lond. A 443, 265-287.

Dunn, M. L., Wienecke, H. A., 1997. Inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic piezoelectric solids. Int. J. Solids Struct. 34, 3571-3582.

Eshelby, J. D., 1951. The force on an elastic singularity. Proc. R. Soc. Lond. A244, 87-112.

Eshelby, J. D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc. R. Soc. Lond. A241, 376-396.

Eshelby, J. D., 1973. Dislocation theory for geoplysical applications. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A274, 331-338.

Faux, D. A., Downes, J. R., O'Reilly, E. P., 1996. A simple method for calculating strain distribution in quantum-wire structures. J. Appl. Phys. 80, 2515-2517.

Faux, Da. A., Downes, J. R., O'Reilly, E. P., 1997. Analytic solutions for strain distribution in quantum-wire structures. J. Appl. Phys. 82, 3754-3762.

Felten, F., Schneider, G. A., Munoz-Saldana, J., Kalinin, S. V., 2004. Modeling and measurement of surface displacements in BaTiO3 bulk material in piezoresponse force microscopy. J. Appl. Phys. 96, 563-568.

Freund, L. B., Gosling, T. J., 1995. Critical thickness condition for growth of strained quantum wires in substrate V-grooves. Appl. Phys. Lett. 66, 2822-2824.

Gosling, T. J., Williw, J. R., 1995. Mechanical stability and electronic properties of buried strained quantum wire arrays. J. Appl. Phys. 77, 5601-5610.

Grundmann, M., Stier, O., Bimberg, D., 1994 Summetry breaking in pseudomorphic V-groove quantum wires. Phys. Rev. B50, 14187-14192.

Grundmann, M., Stier, O., Bimberg, D., 1995. InAs/GsAs pyramidal quantum dots: strain distribution, optical phonons, and electronic structures. Phys. Rev. B52, 11969-11981.

Honein, E., Honein, T., Herrmann, G., 1995. On the interaction of two piezoelectric fibers embedded in an intelligent material. J. Intell. Mater. Syst. Struct. 6, 229-236.

Kattis M.A., Providas E., Kalamkarov A., 1997. Two-phase potentials in the analysis of smart composites having piezoelectrical components.

Kattis M.A., Karalis N., 2010. The piezoelectric surface dislocation of Somigliana type and the Eshelby inhomogeneity problem: antiplane piezo-electricity. (Υποβλήθηκε για δημοσίευση).

Kattis M.A., Meguid S.A.,1995. Two-Phase Potentials for the Treatment of an Elastic Inclusion in Plane Thermoelasticity

Lothe, J., Barnett, D. M., 1976. Integral formulation for surface waves in piezoelectric crystals. J. Appl. Phys. 47, 1799-1807.

Lu, P., Williams, F. W., 1998. Green functions of piezoelectric material with an elliptic hole or inclusion. Int. J. Solids. Struct. 35, 651-664.

Meguid, S. A., Zhong, Z., 1998, On the elliptical inhomogeneity problem in piezoelectric materials under antiplane shear and inplane electric field. Int. J. Eng. Sci. 36, 329-344.

Muskhelishvili, N. I., 1963. Some basic problems of the mathematical heory of elasticity. Groningen: Noordhoff.

Pak, Y. E., 1992. Circular inclusion problem in anti-plane piezoelectricity. Int. J. Solids Struct. 29, 2403-2419.

Pan, E., 2002. Elastic and piezoelectric fields around a quantum dot: Fully coupled or semicoupled model? J. Appl. Phys. 91, 3785-3796.

Pan, E., 2002. Mindlin's problem for an anisotropic piezoelectric half-space with general boundary conditions. Proc. R. Soc. Lond. A458, 181-208.

Ru, C. Q., 1999. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane. J. Appl. Mech. 66, 315-322.

Ru, C. Q., 2000. Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. J. Mech. Phys. Solids. 48, 693-708.

Suo, Z., Kuo, C. M., Barnett, D. M., Willis, J. R., 1992. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. J. Mech. Phys. Solids 40, 739-765.

Wang, B., 1992. Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material. Int. J. Solid Struct. 29, 293-308.

Wang, X., Shen, Y. P., 2001. On double circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity. Int. J. Solids Struct. 38, 4439-4461.

Zhong, Z., Meguid, S. A., 1997. Interfacial debonding of a circular inhomogeneity in piezoelectric materials. Int. J. Solids Struc. 34, 1965-1984.