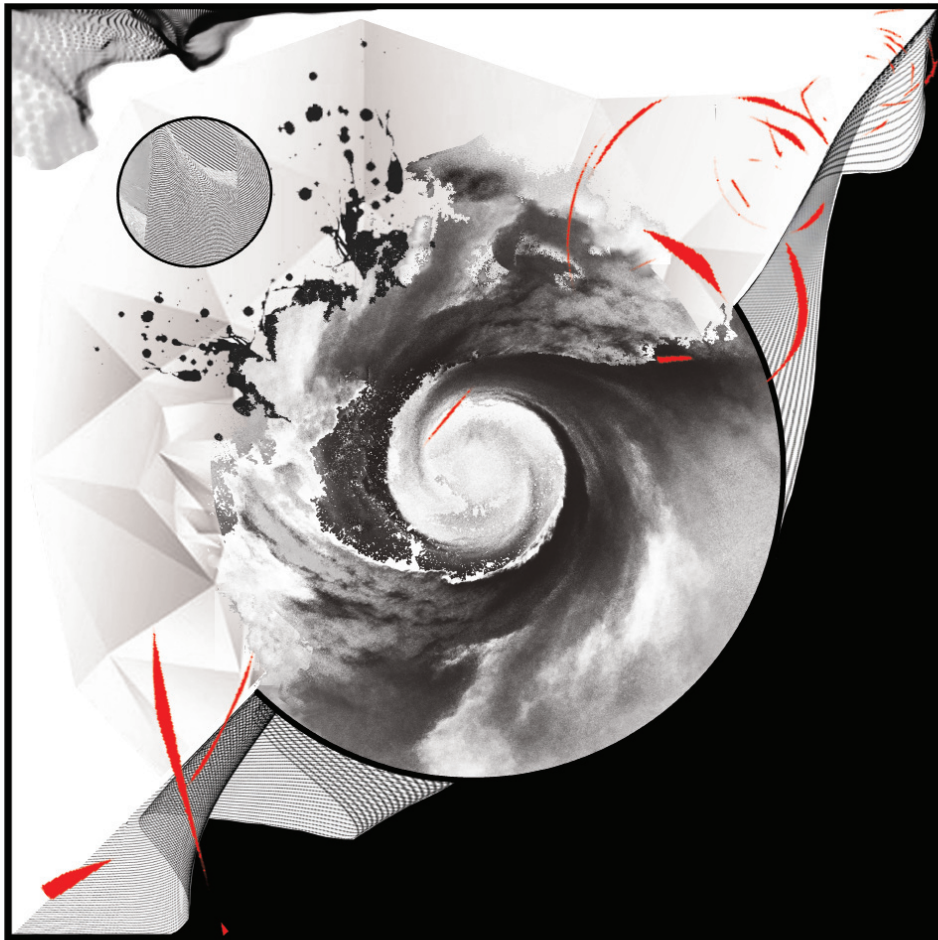


ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΔΙΝΩΝ ΑΚΡΟΠΤΕΡΥΓΙΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ, ΜΗ ΜΟΝΙΜΩΝ ΡΟΩΝ ΜΕ ΤΗΝ
ΜΕΘΟΔΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΠΕΔΙΑ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2010
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΟΥΤΣΙΝΑΣ

Π Ο Λ Ι Τ Η Σ Κ Ω Ν Σ Τ Α Ν Τ Ι Ν Ο Σ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΔΙΝΩΝ ΑΚΡΟΠΤΕΡΥΓΙΩΝ

ΥΠΟΤΙΤΛΟΣ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ, ΜΗ ΜΟΝΙΜΩΝ ΡΟΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΒΟΥΤΣΙΝΑΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΜΕΛΟΣ

ΜΑΘΙΟΥΛΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΜΕΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2010

ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Η εργασία αφιερώνεται στην μνήμη των γιαγιάδων μου

τις οποίες ελπίζω να μην ξεχάσω ποτέ.

“Είμαι ένα πλάσμα εφήμερο, αδύναμο καμωμένο από λάσπη και ονειράτα. Μα μέσα μου νιώθω να στροβιλίζονται όλες οι δυνάμεις του Σύμπαντου.”

N. Καζαντζάκης, Ασκητική

“... καταιγίδων και ζεφύρων δρόμοι, δρόμοι αρσενικοί μέσα στους νοτισμένους κάμπους, δρόμοι θηλυκοί μέσα στις πολιτείες, σπάγκοι σβούρας τρελής, ο άνθρωπος για να σας πλησιάσει χάνει το δρόμο του κι αυτή την αρετή που τον καταδικάζει στα τέρματα...”

P. Edward, Μεγάλοι Συνωμότες, δρόμοι χωρίς κανένα προορισμό

*“γιατί γνωρίσαμε τόσο πολύ ετούτη τη μοίρα μας
στριφογουρίζοντας μέσασε σπασμένες πέτρες, τρεις ή έξι
χιλιάδες χρόνια...”*

Γ. Σεφέρης, Μυθιστόρημα, ΚΒ’

*“φύλλα που στροβιλίζονται με γλάρους
αγριεμένους με τον χειμώνα”*

Γ. Σεφέρης, πάνω σε μία χειμωνιάτικη ακτίνα

*“πήρες την δίνη
ψυχή φυγόκεντρη...”*

Γ. Σεφέρης, Εις μνήμην

Ευχαριστίες

Ευχαριστήσω πολύ τον κ. Σπύρο Βουτσινά, ο οποίος με καθοδήγησε συνετά και υπομονετικά σε όλη την διάρκεια της εργασίας. Οι συζητήσεις που είχαμε και επαναλαμβάνονταν σε τακτά χρονικά διαστήματα, εξαιτίας δικών μου ερωτήσεων, δείχνουν έναν άνθρωπο που δεν ενδιαφέρεται μόνο για την προώθηση της επιστήμης ως ερευνητής αλλά και ως δάσκαλος. Όλες οι ιδέες αλλά και ο τρόπος εφαρμογής των περισσότερων τμημάτων της εργασίας προήλθαν από αυτές τις συζητήσεις με τον κ. Σπύρο Βουτσινά.

Θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου. Ιδιαίτερα την μητέρα μου και τον πατέρα μου, οι οποίοι συμμετείχαν, ο καθένας με διαφορετικό τρόπο, στην εργασία. Η μητέρα μου με την ηρεμία που προσέφερε στο χώρο του σπιτιού, όπου έγινε η συγγραφή της εργασίας, και ο πατέρας μου, με τους συνεχόμενους σχολιασμούς επί του κειμένου. Οι σχολιασμοί αυτοί ήταν ιδιαίτερα σημαντικοί.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω την Μαντώ Φυτού, Αρχιτέκτονα Μηχανικό ΕΜΠ, η οποία επιμελήθηκε καλλιτεχνικά την εργασία. Συγκεκριμένα, θέλω να την ευχαριστήσω για την εικόνα στο εξώφυλλο. Παρακαλώ να σημειωθεί ότι η εικόνα στο εξώφυλλο είναι προσωπικό της έργο.

Οι φιλολογικές διορθώσεις έγιναν από τον ξάδερφο μου, Γιάννη Σιμιτσιδέλλη. Θέλω να τον ευχαριστήσω για τις επαναλαμβανόμενες αναγνώσεις της εργασίας και τις διορθώσεις που πρότεινε. Τα χωρία που παρουσιάζονται στην αρχή της εργασίας επιμελήθηκαν από την Φιλόλογο Έλλη Τσάχαλη, την οποία ευχαριστώ για τις προτάσεις της. Επιπλέον, ευχαριστώ όλα τα υπόλοιπα μέλη της οικογένειας μου για την γενικότερη υποστήριξη τους. Τέλος, ευχαριστώ την παρέα μου οι οποίοι με εμπύχωναν και συμμετείχαν ως ρυθμιστικά «διαλείμματα» κάνοντας την συγγραφή πιο ευχάριστη.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται από διαφορετικές όψεις τη μελέτη περιοδικών πεδίων στροβιλότητας. Το πρώτο βήμα είναι να συνοψίσουμε γενικά στοιχεία για τις δίνες και τη μοντελοποίηση τους μέσω του πεδίου στροβιλότητας, αναπτύσσοντας τη σχετική φιλολογία που ακολουθείται στη δυναμική των ρευστών και τα απαραίτητα μαθηματικά. Αφού αναφερθούμε σε πολύ απλά φαινόμενα στα οποία παρατηρούνται δίνες, θα συνεχίσουμε με φαινόμενα δυναμικής με δίνες των οποίων η εξέλιξη ενεργοποιείται από μικρές διαταραχές. Τα φαινόμενα αυτά μοντελοποιούνται ως περιοδικά. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με την εξέλιξη φαινομένων τα οποία ενεργοποιούνται από μία μικρή διαταραχή του πεδίου στροβιλότητας. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας (Vortex Particle Method). Ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας η οποία ταυτόχρονα προσπαθούμε να είναι όσο το δυνατόν πιο σύγχρονη. Η μέθοδος πρέπει να επεκταθεί ώστε να μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Επεκτείνουμε τη μέθοδο, χρησιμοποιώντας τον τύπο Euler-Maclaurin, για την αντιμετώπιση των περιοδικών επαγωγών. Ο τύπος Euler-Maclaurin είναι μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την μετατροπή σειρών σε ασυμπτωτικά αναπτύγματα. Τόσο τα μαθηματικά εργαλεία όσο και η επέκταση της μεθόδου αποτελούν σημαντικό κομμάτι αυτής της εργασίας. Συνεχίζουμε με την παρουσίαση του κώδικα. Ο κώδικας έχει σχεδιαστεί εξολοκλήρου από την αρχή και έτσι ήταν δυνατόν κάθε κομμάτι του να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας ιδέες του αντικειμενοστραφή προγραμματισμού. Η εργασία τελειώνει με αριθμητικές επιδείξεις και συσχέτιση αυτών με την υπάρχουσα θεωρία και πραγματικά πειράματα. Κατά την διάρκεια της τοποθέτησης μας, προσπαθούμε να δώσουμε μία εκπαιδευτική προσέγγιση. Με αυτό τον τρόπο, ελπίζουμε η εργασία αυτή πέρα από το όποιο επιστημονικό ενδιαφέρον έχει να αποκτήσει και ένα πιο ανθρώπινο χαρακτήρα ως προς την πραγμάτωσή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΔΟΜΕΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ	7
1.1 Φαινόμενα με Δίνες.....	8
1.1.1 Ένθετο Φυσικής – Μια σύντομη αναφορά στα ελάχιστα προαπαιτούμενα για την συζήτηση των φαινομένων	9
1.1.2 Δίνες Ακροπτερυγίων – Wingtip Vortices.....	10
1.1.3 Δακτυλιοειδείς Δίνες – Vortex Rings	16
1.2 Πεδίο Στροβιλότητας	20
1.2.1 Η Αναπαράσταση του Πεδίου Ταχύτητας από το Πεδίο Στροβιλότητας.....	20
1.2.2 Πρόσθετες παρατηρήσεις για το Νόμο Biot-Savart	23
1.2.3 Εξίσωση Δυναμικής Εξέλιξης της Στροβιλότητας	27
1.2.4 Ο νόμος του Kelvin και τα θεωρήματα του Helmholtz	30
1.3 Δίνες και Στροβιλότητα.....	32
1.3.1 Ορισμοί Δινών.....	32
1.3.2 Προκαθορισμένες Μορφές του Πεδίου Στροβιλότητας – Προβλήματα αναφοράς	33
2. ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΔΙΝΩΝ ΑΚΡΟΠΤΕΡΥΓΙΩΝ	39
2.1 Πρακτικά Ζητήματα Περί των Ασταθειών των Δινών Ακροπτερυγίων	40
2.2 Οι υπάρχουσες Θεωρίες Ευστάθειας για Γραμμικές Δίνες.....	41
2.3 Αποτελέσματα Πειραμάτων Οπτικοποίησης	42
2.4 Μοντελοποίηση του Φαινομένου	48
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ	53
3.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή της Μεθόδου Στοιχείων Στροβιλότητας.....	54
3.2 Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας	57
3.2.1 Το Πρόβλημα Εξέλιξης της Στροβιλότητας.....	57
3.2.2 Μέθοδοι Στοιχείων Στροβιλότητας	58
3.2.3 Η Μέθοδος στην Πράξη	67

3.3	Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας για Περιοδικά Πεδία Στροβιλότητας	70
3.3.1	Περιοδικά Πεδία Στροβιλότητας	70
3.3.2	Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα Αθροισμάτων για Συγκλίνουσες Σειρές	80
3.3.3	Εφαρμογή στις Σειρές του Προβλήματος.....	84
3.3.4	Διορθώσεις Κοντά στις Ειδικές Περιπτώσεις	88
3.3.5	Περιοδικές Οριακές Συνθήκες	91
3.4	Το Σχήμα Ανακατανομής των Στοιχείων.....	92
3.5	Κατασκευή Διαμερισμών σε Επίπεδη Κυκλική Επιφάνεια με Σταθερό Εμβαδό	98
4.	ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΚΩΔΙΚΑΣ FORTRAN 95/03.....	105
4.1	Βασικά MODULES του Προγράμματος.....	106
4.1.1	SPACE3D.....	106
4.1.2	IMPLIED_DEFS.....	107
4.1.3	PERIODIC_PARAMETERS.....	107
4.1.4	SING_ELEM.....	108
4.1.5	VP_INIT.....	109
4.1.6	VORTWALK.....	112
4.1.7	HERMITIAN_N_STUFF	112
4.1.8	REDISTRIBUTION	114
4.2	Το Κύριο Πρόγραμμα – Παραδείγματα Χρήσης των MODULE	115
4.2.1	Παράδειγμα Πρώτο – Χρήση του module SPACE3D	115
4.2.2	Παράδειγμα Δεύτερο – Ένας Κώδικας Επίλυσης του Προβλήματος Δυναμικής Εξέλιξης Περιοδικών Πεδίων Στροβιλότητας με Ανακατανομή των Στοιχείων	116
5.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....	123
5.1	Έλεγχος Προγράμματος σε Απλά Περιοδικά Πεδία	124
5.1.1	Αναπαράσταση Πεδίων Στροβιλότητας από μία Γραμμή Στοιχείων Στροβιλότητας	124
5.1.2	Αναπαράσταση Δίνης Rankine και Lamb-Oseen από Στοιχεία Στροβιλότητας	135
5.2	Αστάθειες Δινών Ακροπτερυγίων – Αριθμητική Προσομοίωση και Σύγκριση Πειραματικών Αποτελεσμάτων	151

5.2.1	Περιπτώσεις προς μελέτη - Πειραματικά Δεδομένα και Βασικές Υποθέσεις Μοντελοποίησης	151
5.2.2	Περίπτωση Πρώτη – Σύγκριση με τα Πειράματα Οπτικοποίησης	158
5.2.3	Περίπτωση Πρώτη – Στάδια εξέλιξης του Φαινομένου	161
5.2.4	Επιβεβαίωση των Παρατηρήσεων με βάση το Πεδίο Στροβιλότητας.....	169
5.2.5	Περίπτωση Δεύτερη – Σύγκριση με τα Πειράματα Οπτικοποίησης	175
5.2.6	Περίπτωση Δεύτερη – Στάδια Εξέλιξης του Φαινομένου	178
5.2.7	Η επίδραση του λόγου κυκλοφοριών του ζεύγους δινών στην εξέλιξη του φαινομένου.....	181
5.3	Προτάσεις Βελτίωσης και Περεταίρω Ερευνητικής Εργασίας	188
5.3.1	Προτάσεις Βελτίωσης	188
5.3.2	Προτάσεις για Μελέτη Περιοδικών Φαινομένων	191
6.	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΙΔΕΙΞΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΔΙΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	195
6.1	Αστάθεια Kelvin-Helmholtz	195
6.2	Δίνες με διαταραχές και κατανομή στοιχείων στροβιλότητας στο πυρήνα της δίνης	197
7.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	201

1. ΔΟΜΕΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ

Η δυναμική των ρευστών ασχολείται με την ανάλυση ροών οι οποίες μεταβάλλονται με τον χρόνο. Η περιπλοκότητα των φαινομένων είναι τέτοια που καθιστά πολύ δύσκολη την ταυτόχρονη κατανόηση όλων των μηχανισμών που καθορίζουν την εξέλιξη τους. Επιπλέον, η ποικιλία των φαινομένων είναι τεράστια και καθιστά την ολοκληρωμένη παρουσίαση τους αδύνατη. Για τους παραπάνω λόγους μελετάμε μόνο φαινόμενα στα οποία η ροή χαρακτηρίζεται ασυμπύεστη, σταθερής πυκνότητας, δεν υπάρχουν πεδία δυνάμεων πέραν της βαρύτητας και η στροβιλότητα είναι κυρίαρχα συγκεντρωμένη σε συγκεκριμένες περιοχές της ροής που ονομάζονται δίνες. Οι περιοχές αυτές είναι ευδιάκριτες και εξελίσσονται δυναμικά ενώ ταυτόχρονα και έμμεσα καθορίζουν την εξέλιξη κάθε στοιχείου του ρευστού. Θα ασχοληθούμε εξ' ολοκλήρου με την δυναμική εξέλιξη των δινών όταν αυτές βρίσκονται μακριά από στερεά τοιχώματα. Όσο αφορά την ανάπτυξη του κεφαλαίου, γίνεται σε τρία στάδια. Αρχικά, θα παραθέσουμε φαινόμενα στα οποία δημιουργούνται δίνες. Έπειτα, θα συνοψίσουμε την βασική μαθηματική θεωρία αναπαράστασης του πεδίου ταχύτητας από το πεδίο στροβιλότητας. Τέλος, θα αναφερθούμε στις βασικότερες μοντελοποιήσεις των δινών.

1.1 Φαινόμενα με Δίνες

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφονται φαινόμενα τα οποία είναι αντικείμενα της παρούσας μελέτης. Πιο συγκεκριμένα, φαινόμενα της δυναμικής των ρευστών στα οποία εμφανίζονται δομές, τις οποίες ονομάζουμε δίνες. Η παρατήρηση των φαινομένων με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι αρκετά απλή. Αυτό εκφράζεται και από το γεγονός ότι οι δίνες γίνονται αντιληπτές ακόμα και από άτομα τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκη σχετικοί με την δυναμική των ρευστών. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων είναι το νερό που στροβιλίζεται (σχήμα 1, στο σκίτσο φαίνεται η άποψη του Olaus Magnus στην Carta Marina, 1539) ή ο αέρας που περιστρέφεται βίαια, ξεχωρίζοντας από το υπόλοιπο συνεχές (σχήμα 1, στην φωτογραφία ο κυκλώνας Κατρίνα, 2005). Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των φαινομένων είναι η χαρακτηριστική δομή που δημιουργείται καθώς το ρευστό περιστρέφεται.



Σχήμα 1. Ιστορική καταγραφή δινών.

Στα φαινόμενα αυτά η ύπαρξη της δίνης προσδιορίζεται με την όραση υπό μορφή συγκεκριμένου σχηματισμού(pattern), σχήμα 1. Ενώ από την μία, λοιπόν, έχουμε πειστεί για την ύπαρξη της «δίνης» ως φαινόμενο, από την άλλη αναζητάμε ένα σύνολο μετρίσιμων μεγεθών της ροής με το οποία θα αναπαραστήσουμε το φαινόμενο. Με αυτό το σκεπτικό θα αναλύσουμε δύο κλασσικά φαινόμενα στα οποία εμφανίζονται δίνες, σε δύο διαφορετικά επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο ανάλυσης είναι αυτό της παρατήρησης. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα πειραμάτων οπτικοποίησης της ροής. Σε δεύτερο επίπεδο, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εικόνα της ροής γύρω από μία δίνη χρησιμοποιώντας πειραματικά αποτελέσματα προηγούμενων ερευνητών. Θα παρατηρήσουμε ότι πράγματι η δίνη συνδέεται με την περιστροφή των στοιχείων του ρευστού. Για να είμαστε ακριβείς, οι δομές που παρατηρούμε συνδέονται με την περιστροφή των στοιχείων του ρευστού γύρω από τον εαυτό τους και ταυτόχρονα γύρω από άξονες μεγαλύτερης κλίμακας.

1.1.1 Ένθετο Φυσικής – Μια σύντομη αναφορά στα ελάχιστα προαπαιτούμενα για την συζήτηση των φαινομένων

Γενικά, η περιστροφή ενός στοιχείου συνδέεται με τις ροπές που ασκούνται σε αυτό βάσει του γνωστού νόμου δυναμικής $\sum M = I\dot{\omega}$. Σε ένα συνεχές οι δυνάμεις που ασκούνται είναι κατανομημένες, άρα οι ροπές μπορούν να προκύψουν μόνο από την χωρική ανομοιομορφία των κατανομημένων δυνάμεων¹, δηλαδή την ανομοιομορφία των τάσεων σε κάποια θέση του ρευστού ή και των δυνάμεων εξ' αποστάσεως όπως δυνάμεις από το πεδίο βαρύτητας ή από κάποιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Θα ασχοληθούμε με ροές στις οποίες η πυκνότητα του ρευστού δεν μεταβάλλεται² χωρικά ή χρονικά.

Όσο αφορά τις δυνάμεις πεδίου, θα ασχοληθούμε μόνο με το πεδίο βαρύτητας και συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με ροές στις οποίες η κλίμακα που εξελίσσονται είναι τέτοια ώστε το πεδίο βαρύτητας να είναι παντού παράλληλο και σταθερό³. Οπότε δεν δημιουργεί ροπή σε κάποιο στοιχείο του ρευστού και άρα δημιουργούνται ροπές μόνο από το πεδίο τάσεων.

Γενικά, το πεδίο τάσεων μοντελοποιείται ως τανυστικό πεδίο, ώστε να είναι ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων το οποίο θα επιλεγεί για την αναπαράσταση του. Το τανυστικό πεδίο τάσεων γράφεται ως το άθροισμα δύο τανυστικών πεδίων, του τανυστικού πεδίου πίεσης και του τανυστικού πεδίου συνεκτικών τάσεων (shear stresses) κατά τις σχέσεις: $\tau_{ij} \equiv \frac{1}{3}\tau_{ii}\delta_{ij} + (\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{ii}\delta_{ij})$, $p \stackrel{def}{=} \frac{1}{3}\tau_{ii}$, $\sigma_{ij} \stackrel{def}{=} (\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{ii}\delta_{ij}) \Rightarrow \tau_{ij} = p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$, όπου p το βαθμωτό πεδίο της πίεσης και σ_{ij} ο τανυστής των τάσεων διάτμησης (shear stress tensor). Το πεδίο πίεσης p εξαρτάται αποκλειστικά από θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού. Το τανυστικό πεδίο συνεκτικών τάσεων σ_{ij} υποθέτουμε ότι συσχετίζεται γραμμικά με το τανυστικό πεδίο του ρυθμού μεταβολής των τροπών και στην γενική περίπτωση απαιτούνται 81 στοιχεία για τον καθορισμό του τανυστή τετάρτης τάξης K_{ijkl} ο οποίος συνδέει τα δύο πεδία. Σε αυτό το σημείο αν κάποιος θέλει να καταλήξει στην κλασική σχέση (τάσεις Newton): $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ πρέπει να υποθέσει ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός⁴.

Η συμμετρικότητα του τανυστή των τάσεων είναι αποτέλεσμα της υπόθεσης ότι για κάθε στοιχείο του ρευστού ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής του στοιχείου (Panton, 2005)

¹ Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της μάγνητο-υδροδυναμικής όπου υπάρχουν κατανομημένες ροπές.

² Η ανομοιομορφία του πεδίου πυκνότητας σχετικά με το πεδίο πίεσης είναι δυνατόν να προκαλέσει περιστροφή των στοιχείων του ρευστού.

³ Γενικά, αναπαριστάτε από το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας.

⁴ Απαιτούνται και οι επιπλέον υποθέσεις «ισοτροπικός» και «ασυμπίεστη ροή» για να παραχθεί η παραπάνω σχέση.

καθώς και ότι δεν υπάρχει πεδίο ροών. Υπό την προϋπόθεση συμμετρικότητας του ταυυστή των τάσεων, δεν αναπτύσσεται ροπή εσωτερικά του στοιχείου του ρευστού (Kundu, 1990), δηλαδή από το ρευστό ως έχει. Για να ασκηθεί ροπή, λοιπόν, σε ένα στοιχείο του ρευστού πρέπει με κάποιο τρόπο να αλληλεπιδράσει με ένα στέρεο σώμα. Ένα στέρεο σώμα έχει την τάση να παρασύρει το ρευστό γειτονικά της επιφάνειά του ανεξάρτητα από την κατάσταση του ρευστού. Την πρώτη στιγμή που θα αρχίσει το στερεό να κινείται θα παρασύρει μαζί του στοιχεία κοντά στην επιφάνεια που καλύπτει (συνθήκη μη ολίσθησης). Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ανομοιομορφία του πεδίου τάσεων και τα στοιχεία αρχίζουν να περιστρέφονται (Panton, 2005). Ο ρυθμός περιστροφής των στοιχείων γύρω από τον εαυτό τους εκφράζεται από την στροβιλότητα. Συνεπώς, στις περιοχές του ρευστού κοντά στα στερεά σύνορα, στις οποίες η συνεκτικότητα δεν μπορεί να αμεληθεί, δημιουργείται στροβιλότητα. Στη συνέχεια η στροβιλότητα που δημιουργήθηκε ακολουθεί την δική της εξέλιξη καθώς εξαπλώνεται και αναδιανέμεται στο πεδίο ροής, με την ταχύτητα του ρευστού⁵.

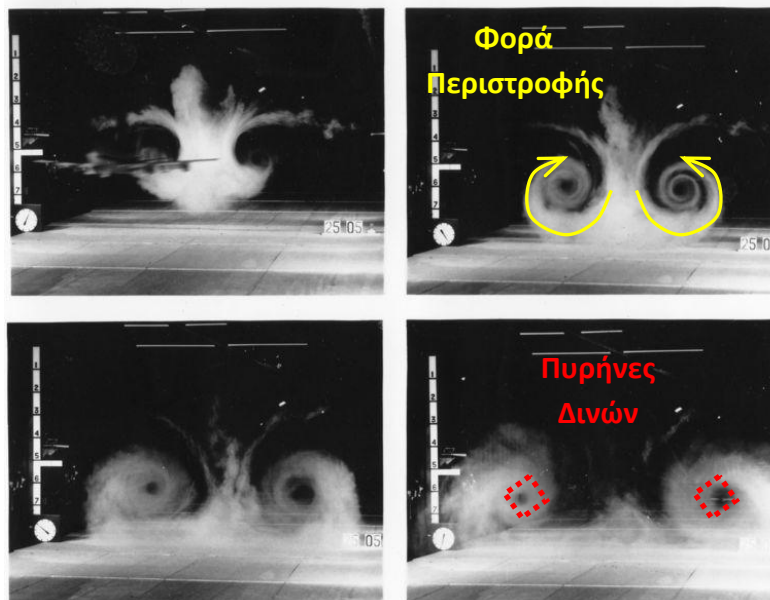
1.1.2 Δίνες Ακροπτερυγίων – Wingtip Vortices

Η πιο «δημοφιλής» μορφή τρισδιάστατης δίνης είναι η δίνη ακροπτερυγίου, δηλαδή η δίνη η οποία δημιουργείται στο άκρο μίας πτέρυγας. Στο σχήμα 2 βλέπουμε ένα πείραμα οπτικοποίησης με καπνό. Στο συγκεκριμένο πείραμα οπτικοποίησης της ροής, το οποίο έγινε από τη NASA (Vortex Research Facility), χρησιμοποιήθηκε καπνός ώστε να γίνει ορατό ένα επίπεδο του αέρα κάθετο στην επιφάνεια του εδάφους (smoke screen). Σε αυτό το πείραμα χρησιμοποιείται ένα μοντέλο του αεροσκάφους Boeing 747, το οποίο φαίνεται στο πρώτο από τα παρακάτω στιγμιότυπα. Παρατηρείστε το μέγεθος των δινών συγκριτικά με το μοντέλο, τη φορά περιστροφής των δινών και τέλος, μία περιοχή στην οποία στροβιλίζεται με ιδιαίτερη ένταση ο καπνός η οποία ονομάζεται πυρήνας της δίνης.

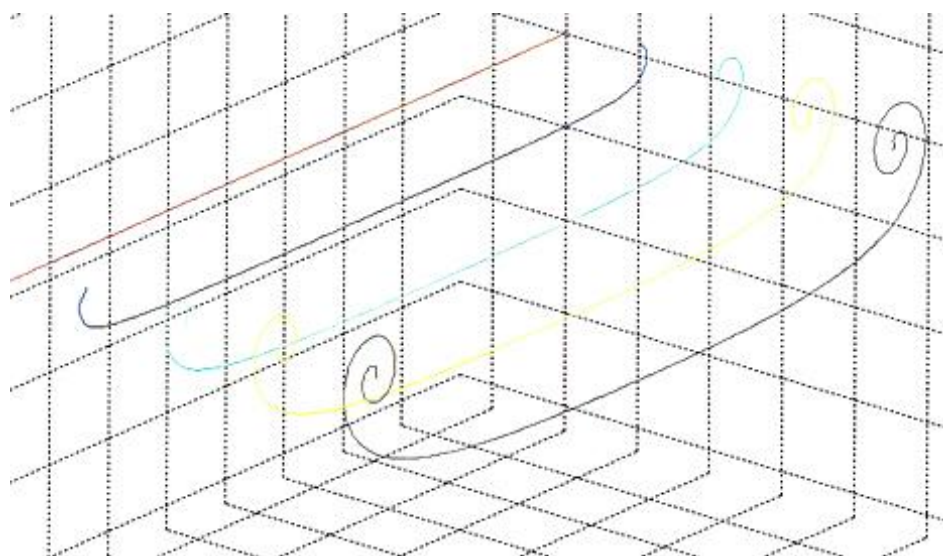
Ένα αεροπλάνο κατά την πτήση, διαταράσσει το συνεχές με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται οι δομές που παρατηρούμε, σχήμα 2, και ονομάζονται δίνες. Το κέντρο της δίνης βρίσκεται κοντά στα διαδοχικά σημεία (ίχνη) που ορίζουν οι άκρες των πτερυγίων καθώς διασχίζουν το συνεχές. Η δίνη καθορίζεται από μία γραμμή γύρω από την οποία περιστρέφονται στοιχεία του ρευστού. Επίσης, οι δίνες αφού σχηματιστούν, παρατηρούνται στο συνεχές ακόμα και μετά την απομάκρυνση του αεροσκάφους. Ας κάνουμε ένα νοητικό πείραμα με βάση το σχήμα 2. Ας υποθέσουμε ότι είχαμε τοποθετήσει πολλές επιφάνειες με καπνό και ζητάμε το αποτέλεσμα που θα βλέπαμε καθώς περνούσε το αεροπλάνο από τις επιφάνειες. Καθώς μετακινούμαστε από το επίπεδο του καπνού προς το μοντέλο, η δίνη θα

⁵ Σύμφωνα με την εξίσωση ορμής υπό την διατύπωση στροβιλότητας-ταχύτητας και τους νόμους του Helmholtz.

έχει αναπτυχθεί λιγότερο, αφού τη στιγμή που το μοντέλο βρίσκεται κοντά στον καπνό η δίνη μόλις αρχίζει να σχηματίζεται, όπως είδαμε στο προηγούμενο πείραμα. Το αποτέλεσμα του νοητικού πειράματος φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 2. Πείραμα οπτικοποίησης δινών ακροπτερυγίου με καπνό.



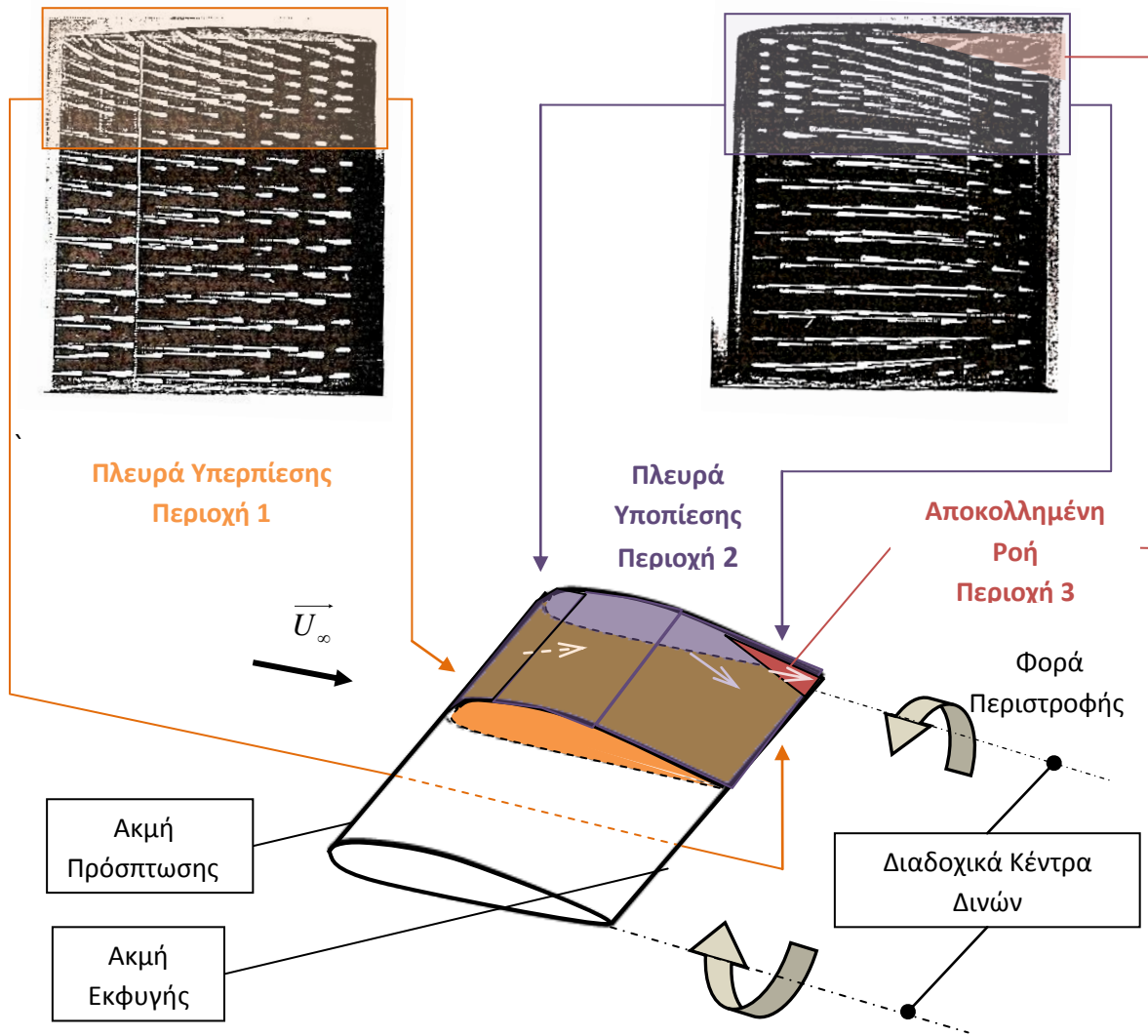
Σχήμα 3. Εξέλιξη της δίνης ακροπτερυγίου και ανάπτυξη του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας στον ομόρου πτερυγίου σε μόνιμη ροή.

Στο σχήμα 3, η κόκκινη γραμμή αντιπροσωπεύει τη θέση του αεροπλάνου ενώ οι υπόλοιπες αντιπροσωπεύουν τις επιφάνειες καπνού. Γύρω από το αεροσκάφος αναπτύσσεται

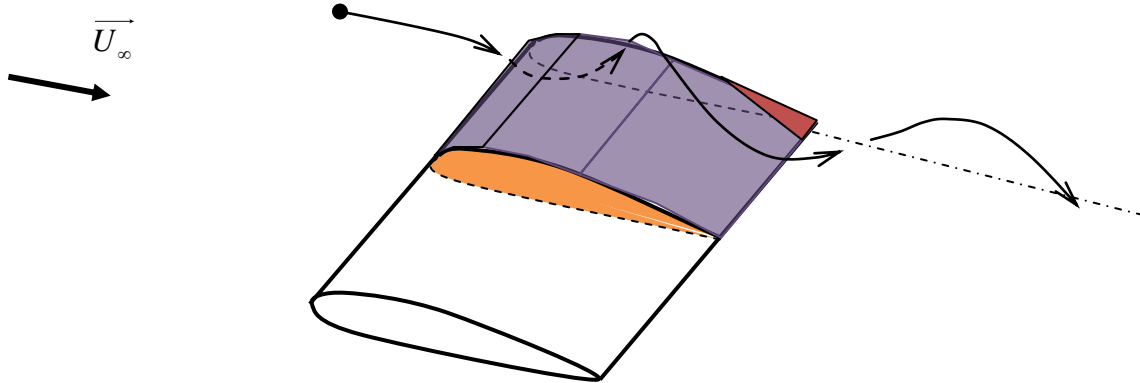
οριακό στρώμα και στο οριακό στρώμα στροβιλότητα. Καθώς περνάει η πτέρυγα από το συνεχές, τα επόμενα σημεία του συνεχούς αποκτούν στροβιλότητα. Η στροβιλότητα παραμένει στην ροή έως ότου καταστραφεί από τη συνεκτικότητα (συνεκτική διάχυση). Οι περιοχές του καπνού παρασύρονται από το στρώμα της ροής που περιέχει στροβιλότητα και σχηματίζεται το αποτέλεσμα που βλέπουμε, σχήματα 2,3. Με το πέρασμα του χρόνου η στροβιλότητα συγκεντρώνεται στο πυρήνα της δίνης και θεωρητικά μακριά του αεροσκάφους η στροβιλότητα θα είναι όλη συγκεντρωμένη στον πυρήνα της δίνης. Ας συνοψίσουμε τα βασικά σημεία των παρατηρήσεων. Πρώτον, η στροβιλότητα αναπτύσσεται στα σημεία γειτονικά στην επιφάνεια της πτέρυγας και ειδικότερα στο οριακό στρώμα. Δεύτερον, με το πέρασμα του χρόνου η στροβιλότητα ανακατανέμεται στον ομόρου της πτέρυγας και τελικά συγκεντρώνεται σε δύο περιοχές, μία κοντά σε κάθε άκρη του πτερυγίου, που ονομάζουμε πυρήνες της δίνης. Από την άλλη, οριακό στρώμα δημιουργείται γύρω από όλα τα υπόλοιπα μέρη του αεροπλάνου και έμμεσα επηρεάζει την ροή. Με δεδομένο ότι, από τις παραπάνω οπτικές παρατηρήσεις, φαίνεται η σχέση του γεωμετρικού ίχνους του ακροπτερυγίου με τον πυρήνα της δίνης, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξετάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα φαινόμενα ροής που εξελίσσονται στο ακροπτερύγιο.

Στο σχήμα 4 βλέπουμε πως η ροή παρασύρει μελάνι το οποίο παρέχεται από μικρές οπές πάνω στην ορθογώνια διατομή πτέρυγα NACA 64-309, τοποθετημένη σε γωνία πρόσπτωσης 7° (Green, 1995). Με την υπόθεση ότι το οριακό στρώμα είναι λεπτό μπορούμε να πούμε ότι το μελάνι ακολουθεί το πεδίο ταχυτήτων. Στο ίδιο σχήμα(σχήμα 4, κάτω μέρος του σχήματος) βλέπουμε τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης του πτερυγίου με την καθιερωμένη ονοματολογία. Στο κέντρο του πτερυγίου, το μελάνι είναι παράλληλο με την ακμή του ακροπτερυγίου και στις δύο πλευρές. Καθώς μετακινούμαστε προς την άκρη του πτερυγίου οι διευθύνσεις αλλάζουν. Ειδικότερα, στην πλευρά υπερπίεσης και κοντά στο ακροπτερύγιο το πεδίο κατευθύνεται προς το ακροπτερύγιο. Την περιοχή αυτή την ονομάζουμε περιοχή 1. Στην πλευρά υποπίεσης κοντά στο ακροπτερύγιο και κοντά στην ακμή πρόσπτωσης, το πεδίο κατευθύνεται προς τα μέσα του πτερυγίου, περιοχή 2, και κοντά στην ακμή εκφυγής κατευθύνεται προς το ακροπτερύγιο, περιοχή 3. Ας σχεδιάσουμε ένα νοητικό πείραμα για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, χρησιμοποιώντας την κλασική μοντελοποίηση του πεδίου ταχύτητας και πίεσης. Ένα στοιχείο του ρευστού κινείται σε μία γραμμή ροής η οποία ξεκινάει από κάποιο σημείο μπροστά από το πτερύγιο και κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Το στοιχείο μπορεί να κινηθεί είτε πάνω από την ακμή πρόσπτωσης είτε κάτω από την γραμμή πρόσπτωσης, ανάλογα της αρχικής του θέσης. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, αν το στοιχείο περάσει πάνω από την ακμή πρόσπτωσης θα βρεθεί στην πλευρά υποπίεσης. Στην πλευρά υποπίεσης θα κινηθεί προς τα μέσα του πτερυγίου. Αν τώρα το στοιχείο περάσει κάτω από τη γραμμή πρόσπτωσης, σχήμα 5, δηλαδή βρεθεί στην πλευρά υπερπίεσης, θα μετακινηθεί περιστροφικά από την πλευρά υπερπίεσης στην πλευρά υποπίεσης. Τα τελευταία είναι τα αναμενόμενα με βάση την κλασική μοντελοποίηση πίεσης-ταχύτητας καθώς και την

παρατήρηση ότι η ροή οδηγείται από την κλίση πίεσης. Τέλος, κάποια στοιχεία θα βρεθούν στην περιοχή 3. Εκεί η ροή είναι αποκολλημένη και συνεπώς η ακριβής κίνηση του ρευστού δεν είναι εύκολο να συζητηθεί ποιοτικά. Η περιοχή κοντά στην άκρη του πτερυγίου, που η ροή είναι αποκολλημένη, εξαρτάται από τη γεωμετρία του πτερυγίου και από τη γωνία πρόσπτωσης.



Σχήμα 4. Ροή στο ακροπτερύγιο και η σχέση-της με το μηχανισμό δημιουργίας της δίνης ακροπτερυγίου.

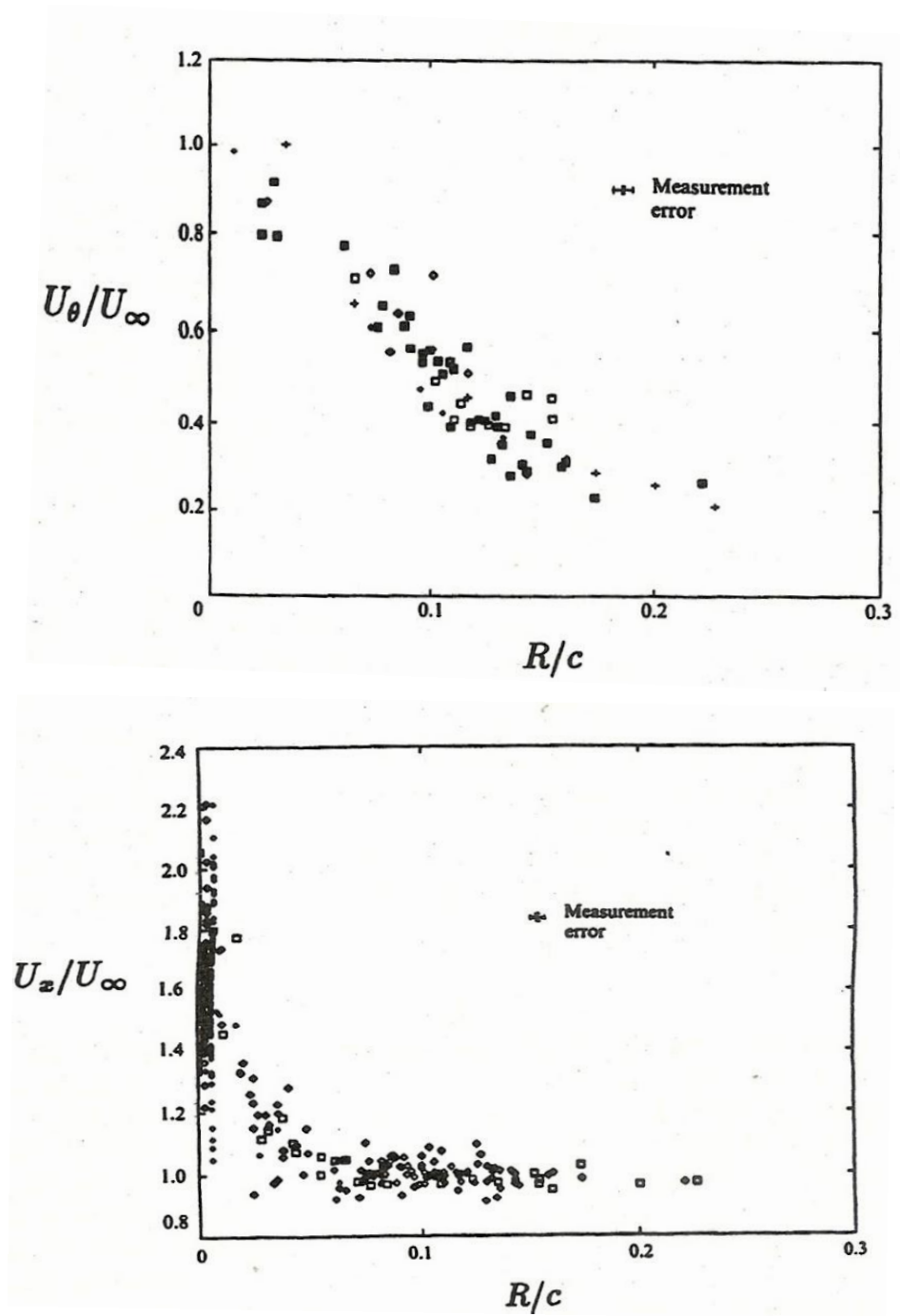


Σχήμα 5. Διαδρομή υλικού σημείου που διέρχεται από την περιοχή του ακροπτερυγίου και ο σχηματισμός της δίνης ακροπτερυγίου.

Συνοψίζοντας, η ροή κοντά στο ακροπτερύγιο κατευθύνεται από την πλευρά υπερπίεσης στην πλευρά υποπίεσης και σε μία μικρή περιοχή κοντά στο ακροπτερύγιο και την ακμή εκφυγής η ροής έχει αποκολληθεί. Η περιοχή αυτή είναι, επίσης, μία περιοχή από την οποία παράγεται στροβιλότητα. Καθώς αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης η περιοχή αυτή απλώνεται προς την ακμή πρόσπτωσης. Σε αυτή την περίπτωση χαρακτηρίζουμε την αποκόλληση ως αποκόλληση ακμής πρόσπτωσης και σε αυτήν οφείλεται η απώλεια στήριξης του πτερυγίου.

Συμπερασματικά, οι δίνες ακροπτερυγίου προκαλούνται από την ανασυγκρότηση του ελευθέρου φύλλου στροβιλότητας που δημιουργείται μετά το χείλος εκφυγής και στα ακροπτερύγια, λόγω της ασυμμετρίας της συνεκτικής ροής στις δύο όψεις της πτέρυγας. Η φορά περιστροφής της δίνης ακροπτερυγίου είναι από την πλευρά υπερπίεσης στην πλευρά υποπίεσης.

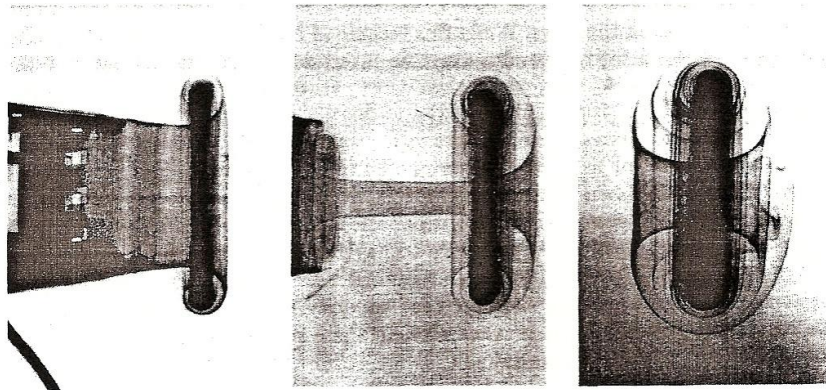
Κλείνοντας την παράγραφο για τις δίνες ακροπτερυγίων, παραθέτουμε, σχήμα 6, μετρημένα πεδία ταχυτήτων κοντά στον άξονα της δίνης και κοντά στην πτέρυγα (Green, 1995). Το πεδίο ταχύτητας προέκυψε με την τεχνική Holographic Particle Velocimetry (HPV). Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από το πείραμα είναι η απλή μορφή του πεδίου ταχύτητας. Το πείραμα αποδεικνύει ότι είναι αμελητέα η ακτινική συνιστώσα όταν το πεδίο ταχύτητας προβληθεί στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το κέντρο της δίνης. Η περιφερειακή συνιστώσα U_{θ} του πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από το κέντρο της δίνης R . Η αξονική συνιστώσα U_x του πεδίου είναι ίση με την ταχύτητα στο άπειρο εκτός από μία μικρή περιοχή. Σε αυτή την μικρή περιοχή η αξονική ταχύτητα είναι $1.62U_{\infty}$. Στα διαγράμματα, σχήμα 6, παρουσιάζονται οι μετρήσεις, δύο χορδές πίσω από την πτέρυγα.



Σχήμα 6. Μετρημένα πεδία ταχυτήτων κοντά στον άξονα της δίνης και κοντά στην πτέρυγα

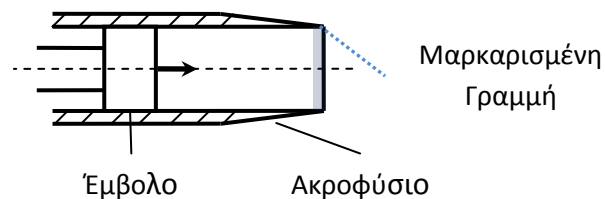
1.1.3 Δακτυλιοειδείς Δίνες – Vortex Rings

Μια διαφορετική γεωμετρική δομή δίνης, από αυτή που παρατηρήσαμε στα ακροπτερύγια ενός αεροσκάφους, είναι η δακτυλιοειδής δίνη. Η συγκεκριμένη δομή είναι δυνατόν να αναπαραχθεί εύκολα στα εργαστήριο και οι ιδιότητες της είναι ελεγχόμενες (Green, 1995), (Krueger, Dabiri, & Gharib, 2003). Στο σχήμα 7 βλέπουμε το σχηματισμό μίας δακτυλιοειδούς δίνης στο εργαστήριο, όπως παρουσιάζεται στο (Green, 1995). Μετά τον σχηματισμό η δίνη μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα ενώ το ρευστό περιστρέφεται γύρω από την δίνη.



Σχήμα 7. Δακτυλιοειδής δίνη

Ο μηχανισμός που χρησιμοποιείται για το παραπάνω πείραμα αποτελείται από ένα κυλινδρικό έμβολο και ένα ακροφύσιο, σχήμα 8. Καθώς μετακινείται το έμβολο εγχέεται μελάνι στην άκρη του ακροφύσιου. Το μελάνι παγιδεύεται από την δίνη και το αποτέλεσμα είναι το παραπάνω. Σε ένα άλλο πείραμα, μαρκάρουμε αρχικά μία γραμμή με μελάνι στην άκρη του ακροφύσιου, όπως στο παρακάτω σχήμα 8. Το αποτέλεσμα που έχουμε είναι αυτό της επόμενης εικόνας, σχήμα 9.



Σχήμα 8. Πειραματική διάταξη δημιουργίας δακτυλιοειδούς δίνης.



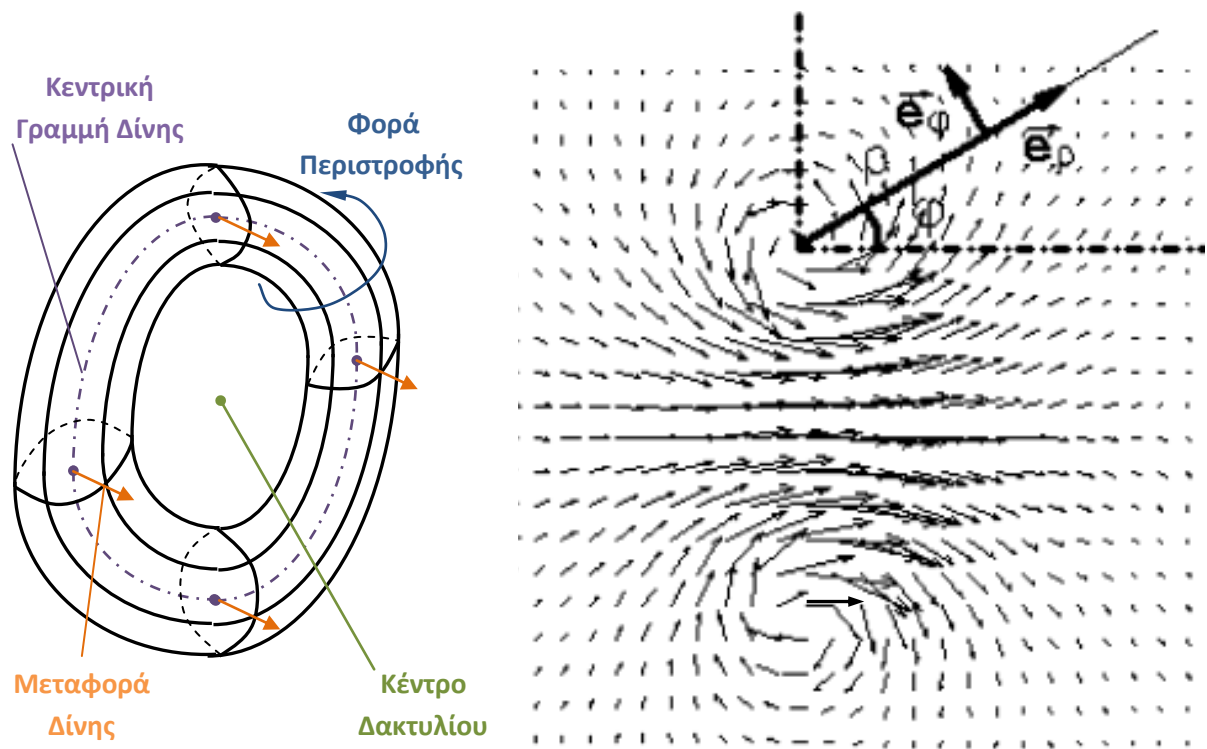
Σχήμα 9. Οπτικοποίηση δακτυλιοειδούς δίνης.

Αν συγκρίνουμε τις εικόνες αυτές με τα πειράματα οπτικοποίησης με καπνό στις δίνες ακροπτερυγίων, παρατηρούμε ότι τα σχήματα είναι όμοια. Η βασική διαφορά είναι ότι εδώ, η κεντρική γραμμή της δίνης είναι σχεδόν κυκλική. Αρχικά, η ροή οδηγείται από την διαφορά πίεσης. Η στροβιλότητα δημιουργείται καθώς διαμορφώνεται το οριακό στρώμα στο εσωτερικό του κυλίνδρου, σχήμα 10, αρχικά κοντά στα τοιχώματα του ακροφύσιου και όταν η ροή είναι πλήρως αναπτυγμένη σε όλη την εσωτερική περιοχή του ακροφύσιου. Οι φωτεινές περιοχές δηλώνουν μικρότερη στροβιλότητα.



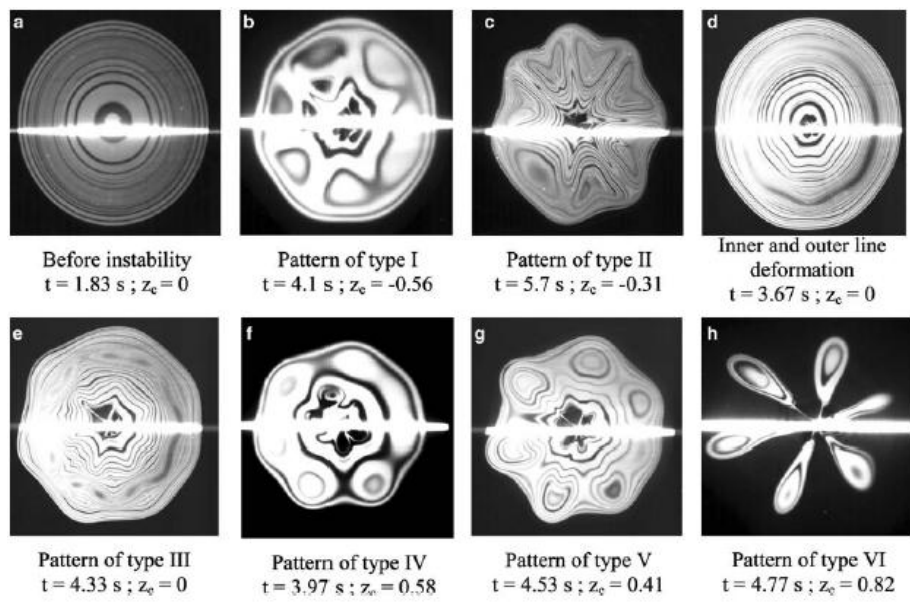
Σχήμα 10. Οριακό στρώμα στο εσωτερικό του κυλίνδρου

Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία της δακτυλιοειδούς δίνης μέσα στη οποία βρίσκεται συγκεντρωμένη στροβιλότητα. Ο δακτύλιος μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα η οποία εξαρτάται από τα την διάμετρο του δακτυλίου και το πάχος του (Saffman, 1992). Επιπλέον, τα στοιχεία του ρευστού περιστρέφονται γύρω από το δακτύλιο εκτελώντας σχεδόν περιστροφή στερεού σώματος. Στο τελευταίο διάγραμμα, σχήμα 11, βλέπουμε το πεδίο ταχύτητας σε ένα επίπεδο που τέμνει τον δακτύλιο κάθετα στην κεντρική γραμμή της δίνης. Το πεδίο προέκυψε με την τεχνική HPV (Dazin, Dupont, & Stanislas, 2006). Παρατηρήστε την περιστροφή των στοιχείων του ρευστού γύρω από την κεντρική γραμμή της δίνης και την μεταφορά της δίνης.



Σχήμα 11. Το πεδίο ταχύτητας σε ένα επίπεδο που τέμνει τον δακτύλιο κάθετα στην κεντρική γραμμή της δίνης.

Εξαιτίας της απλής δομής της δακτυλιοειδούς δίνης και της απλής αναπαράστασης της στο εργαστήριο, χρησιμοποιείται ως μοντέλο με σκοπό να γίνουν κατανοητοί οι μηχανισμοί με τους οποίους λειτουργούν πιο περίπλοκα φαινόμενα, όπως περιπτώσεις που οι αλληλεπιδράσεις δινών καταλήγουν σε αλληλεπιδράσεις δακτυλιοειδών δινών (Crow, 1970), ή για την ανάλυση των μηχανισμών αποδόμησης περιοχών με στροβιλότητα (Dazin, Dupont, & Stanislas, 2006) ή την αλληλεπίδραση της στροβιλότητας με στέρεο τοίχωμα (Green, 1995). Στην τελευταία εικόνα, σχήμα 12, παρουσιάζονται στιγμιότυπα από ένα πείραμα στο οποίο μελετάται η δυναμική εξέλιξη μίας δακτυλιοειδούς δίνης. Η δίνη κινείται κάθετα προς το επίπεδο του χαρτιού.



Σχήμα 12. Στιγμιότυπα δυναμικής εξέλιξης μίας δακτυλοειδούς δίνης.

1.2 Πεδίο Στροβιλότητας

Η μοντελοποίηση που θα ακολουθήσουμε χρησιμοποιεί το πεδίο στροβιλότητας για την αναπαράσταση και εξέλιξη του πεδίου ταχύτητας, και άρα έμμεσα του πεδίου πίεσης. Στις παρακάτω παραγράφους θα αναπτύξουμε δύο ιδέες. Πρώτον, θα παράγουμε τον νόμο Biot-Savart με τον οποίο αναπαριστάμε το πεδίο ταχύτητας από το πεδίο στροβιλότητας. Δεύτερον, θα παράγουμε τη δυναμική εξίσωση για τη στροβιλότητα. Το ενδιαφέρον σε αυτή την εξίσωση είναι η απουσία της πίεσης από την εξίσωση. Σημειώνουμε ότι γενικά είναι δύσκολο να μετρήσουμε ή να προβλέψουμε το πεδίο στροβιλότητας. Βασική αιτία της δυσκολίας αυτής είναι και η αδυναμία μοντελοποίησης των τρισδιάστατων οριακών στρωμάτων αλλά και των περιοχών αποκόλλησης πέρα από την επίλυση των πλήρων εξισώσεων Navier-Stokes.

1.2.1 Η Αναπαράσταση του Πεδίου Ταχύτητας από το Πεδίο Στροβιλότητας

Η στροβιλότητα ορίζεται ως ο στροβιλισμός του πεδίου της ταχύτητας, δηλαδή:

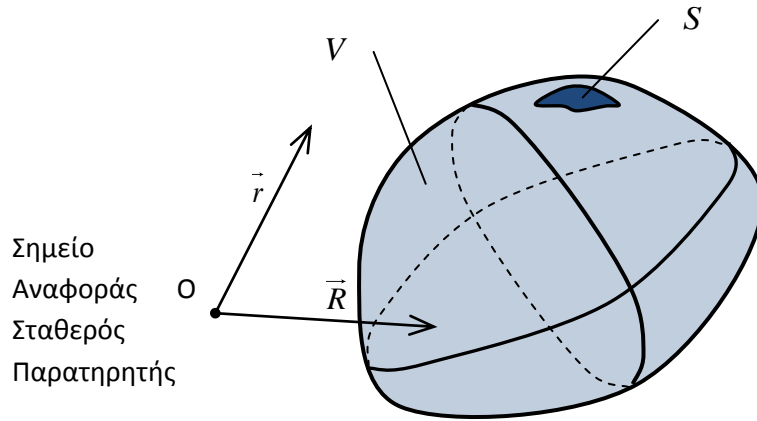
$$\vec{\omega} = \overline{\text{curl}} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \text{ή} \quad \omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι το πεδίο στροβιλότητας ορίζεται σε μία περιοχή της ροής V με σύνορο $\partial V = S$, εκτός της περιοχής αυτής θα υποθέσουμε ότι είναι μηδέν. Σε μία τυχαία θέση στον χώρο θα αναφερόμαστε ως \vec{r} ενώ σε κάθε θέση μέσα στον V ως \vec{R} . Στην ανάπτυξη που ακολουθεί υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο της S ορίζεται ένα εφαπτόμενο επίπεδο. Επιπλέον, από ένα σημείο της S καθώς μεταβαίνουμε σε οποιοδήποτε γειτονικό σημείο επί της επιφάνειας S , το εφαπτόμενο επίπεδο μεταβάλλεται με ομαλό τρόπο. Δηλαδή η επιφάνεια S είναι τύπου Lyapunov (Günter, 1967).

Ας σκιαγραφήσουμε την κλασική παρουσίαση του νόμου Biot-Savart, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά αμέσως μετά. Αρχικά, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός διανυσματικού δυναμικού. Έπειτα, με την προϋπόθεση ότι η απόκλιση του δυναμικού είναι μηδέν οδηγούμαστε σε μια εξίσωση Poisson με άγνωστο το διανυσματικό δυναμικό. Λύνοντας τη συγκεκριμένη, καταλήγουμε στο διανυσματικό δυναμικό και από εκεί στο νόμο Biot-Savart.

Θα αναπτύξουμε την πρόταση ότι το πεδίο ταχύτητας μπορεί να αναπαρασταθεί από το πεδίο στροβιλότητας, με τον κλασικό τρόπο παρουσίασης της (Batchelor, 1967), (Marchioro & Pulvirenti, 1994). Ζητάμε ένα διανυσματικό δυναμικό $\vec{\Psi}$ του πεδίου ταχύτητας, δηλαδή ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο ικανοποιεί την:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} \quad (2)$$



Σχήμα 13. Σχηματική αναπαράσταση των \vec{r} (control point), \vec{R} (integration point).

Το διανυσματικό δυναμικό υπάρχει αφού η απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης (ταχύτητα) της οποίας ζητείται το δυναμικό είναι μηδέν (η ροή προσεγγίζεται ως ασυμπίεστη). Ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας είναι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}) - \Delta \vec{\Psi} \quad (3)$$

Όπου Δ είναι ο τελεστής της εξίσωσης Laplace. Θα βρούμε ένα διανυσματικό δυναμικό για το οποίο η απόκλιση είναι μηδέν $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0$. Άρα, η σχέση (3) γίνεται:

$$\Delta \vec{\Psi} = -\vec{\omega} \quad (4)$$

Καταλήξαμε στην εξίσωση Poisson γραμμένη για κάθε συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού. Η λύση αυτής, από το θεώρημα αντιστροφής της Poisson (Rogers H. J., 1999), είναι:

$$\vec{\Psi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV(\vec{R}) + \vec{h}(\vec{r}) \quad (5)$$

Το $\vec{h}(\vec{r})$ είναι ένα αρμονικό (σωληνοειδές και αστρόβιλο) διανυσματικό πεδίο, δηλαδή κάθε συνιστώσα $h_i(\vec{r}), i=1,2,3$ ικανοποιεί την $\Delta h_i = 0$. Κάθε συνιστώσα του διανυσματικού πεδίου $\vec{\Psi}(\vec{r})$ αποτελεί ένα δυναμικό Newton (Günter, 1967). Ας ελέγξουμε την απόκλιση του δυναμικού, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz για ολοκληρώματα (Rogers H. J., 1999):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{h}(\vec{r}) \quad (6)$$

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Leibnitz, αφού ο τελεστής $\vec{\nabla} \cdot$ εφαρμόζεται στο σημείο ελέγχου \vec{r} και συνεπώς δεν αφορά το σημείο ολοκλήρωσης \vec{R} . Ο δεύτερος όρος είναι μηδέν αφού το $\vec{h}(\vec{r})$ είναι αρμονικό. Με χρήση του θεωρήματος Gauss θα μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα όγκου σε επιφανειακό. Οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς την παράμετρο του ολοκληρώματος \vec{r} . Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Gauss (απόκλισης), οι παραγωγίσεις πρέπει να γίνουν ως προς την μεταβλητή ολοκλήρωσης \vec{R} . Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f$ και ότι το πεδίο στροβιλότητας έχει απόκλιση μηδέν:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} &= \vec{\omega}(\vec{R}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\vec{\omega}(\vec{R}) \cdot \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} = -\vec{\omega}(\vec{R}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} = \\ &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot (-\vec{\omega}(\vec{R})) + (-\vec{\omega}(\vec{R})) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} \end{aligned} \quad (7)$$

Καταλήξαμε στην επόμενη σχέση (η οποία εμφανίζεται και στο (Batchelor, 1967)) και ισχύει μόνο αν το $\vec{\omega}$ είναι σωληνοειδές:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (απόκλισης), έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} d\vec{S}(\vec{R}) \quad (9)$$

Αν, λοιπόν, η κάθετη συνιστώσα της στροβιλότητας στο σύνορο είναι μηδέν (το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\omega}(\vec{R}) \cdot d\vec{S}(\vec{R})$ είναι μηδέν), δηλαδή η επιφάνεια είναι επιφάνεια ροής της στροβιλότητας ή αλλιώς ένας σωλήνα στροβιλότητας (Vortex Tube), τότε το διανυσματικό δυναμικό είναι σωληνοειδές πεδίο:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = 0 \quad (10)$$

Η ταχύτητα, η οποία λέμε ότι «επάγεται» από το πεδίο στροβιλότητας, είναι:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) + \vec{\nabla} \times \vec{h} \Rightarrow \vec{u}(\vec{r}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{\omega}(\vec{R}) \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) \Rightarrow \\ \vec{u}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r}-\vec{R}) \times \vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} dV(\vec{R})\end{aligned}\quad (11)$$

Η τελευταία σχέση είναι ο Νόμος Biot-Savart (Marchioro & Pulvirenti, 1994), (Batchelor, 1967). Η σχέση αυτή ισχύει μόνο αν ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες που προαναφέραμε. Αφού το διανυσματικό πεδίο $\vec{h}(\vec{r})$ δεν εμφανίζεται στον υπολογισμό της ταχύτητας, μπορούμε να επιλέξουμε για αυτό οποιαδήποτε θεμελιώδη λύση της Laplace και η επαγωγή ταχυτήτων που ορίζει ο Biot-Savart θα συνεχίσει να ισχύει. Σημειώνουμε ότι συνηθίζονται και οι παρακάτω τρόποι γραφής:

-Με χρήση του ολοκληρωτικού τελεστή K (Marchioro & Pulvirenti, 1994) ο οποίος ορίζεται ως $\vec{u}(\vec{r}) = K\vec{\omega}$:

$$K_- = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r}-\vec{R}) \times}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} dV(\vec{R}) \quad (12)$$

-Με χρήση του πυρήνα-πίνακα $K_{ij} \omega_j = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|^3} \varepsilon_{ikj} x_k \omega_j$, ε_{ijk} ο εναλλασσόμενος τανυστής

(alternating tensor) :

$$u_i(\vec{r}) = \iiint_V K_{ij}(\vec{r}-\vec{R}) \omega_j(\vec{R}) dV(\vec{R}) \quad (13)$$

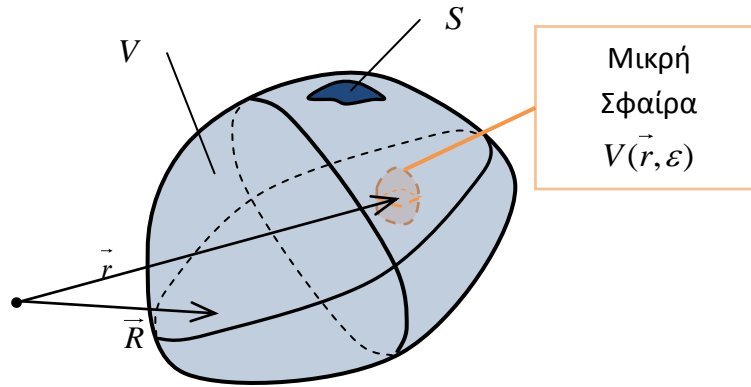
1.2.2 Πρόσθετες παρατηρήσεις για το Νόμο Biot-Savart

Στην αρχή της παρουσίασης έγινε μία υπόθεση η οποία ήταν βωβή έως τώρα. Το σημείο του χώρου \vec{r} βρίσκεται εκτός του πεδίου στροβιλότητας. Αν το σημείο βρίσκεται εντός, εμφανίζονται διάφορα προβλήματα. Ο πυρήνας του ολοκληρώματος για το διανυσματικό δυναμικό δεν είναι πλέον φραγμένος και το ολοκλήρωμα ορίζεται μόνο ως γενικευμένο. Για

τον ορισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα μικρό σφαιρικό χωρίο $V(\vec{r}, \varepsilon)$, κέντρου \vec{r} , ακτίνας ε , και συνόρου $\partial V = S(\vec{r}, \varepsilon)$ το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 14. Το διανυσματικό δυναμικό σε αυτή την περίπτωση ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα (Günter, 1967):

$$\bar{\Psi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{V-V(\vec{r}, \varepsilon)} \frac{\bar{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV(\vec{R}) \quad (14)$$

Στην τελευταία σχέση θέλουμε να τονίσουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο και για αυτό το λόγο αφήσαμε εκτός το αρμονικό πεδίο $\bar{h}(\vec{r})$, το οποίο κατά τα άλλα απαιτείται. Το ολοκλήρωμα ως όριο γνωρίζουμε ότι υπάρχει αν ο πυρήνας του ολοκληρώματος είναι ομοιόμορφα συνεχής εκτός από ένα σημείο εσωτερικά του χωρίου (Rogers H. J., 1999).



Σχήμα 14. Το σημείο \vec{r} (control point) βρίσκεται εντός του χωρίου $V(\vec{r}, \varepsilon)$

Στην προηγούμενη παράγραφο, το διανυσματικό δυναμικό βρέθηκε σωληνοειδές με την προϋπόθεση ότι εφαρμόζεται ο κανόνας του Leibnitz και η επιφάνεια είναι επιφάνεια ροής της στροβιλότητας (η στροβιλότητα είναι παντού εφαπτομενική στην επιφάνεια). Στην περίπτωση που το σημείο ελέγχου \vec{r} είναι εσωτερικό του V η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί αν θεωρήσουμε την επιφάνεια της σφαίρας $V(\vec{r}, \varepsilon)$ σαν ένα επιπλέον εξωτερικό σύνορο, οπότε και το σημείο ελέγχου έγινε εξωτερικό του όγκου ολοκλήρωσης. Με την παρατήρηση αυτή έχουμε:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{\bar{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d\bar{S}(\vec{R}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{r}, \varepsilon)} \frac{\bar{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d\bar{S}(\vec{R}) \quad (15)$$

Αν, όπως προηγουμένως, η επιφάνεια S είναι σωλήνας στροβιλότητας τότε ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της σχέσης (15) απαλείφεται και έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{r}, \varepsilon)} \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d\vec{S}(\vec{R}) \quad (16)$$

Στη γενική περίπτωση, η επιφάνεια $S(\vec{r}, \varepsilon)$ δεν είναι σωλήνας στροβιλότητας. Αφού όμως, η επιφάνεια είναι σφαιρική και το κέντρο της είναι το σημείο \vec{r} , ισχύει $|\vec{r} - \vec{R}| = \varepsilon$, $d\vec{S}(\vec{R}) = \vec{n}\varepsilon^2 d\Omega$. Με την υπόθεση ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{\omega}(\vec{R})$ είναι αναλυτικό (υπάρχει το ανάπτυγμα Taylor⁶) έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{r}, \varepsilon)} \frac{\omega_i(\vec{r}) + (R_j - r_j)(\partial_j \omega_i) + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} n_i \varepsilon^2 d\Omega = 0 \quad (17)$$

Άρα και σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό δυναμικό είναι σωληνοειδές πεδίο (απόκλιση παντού μηδέν). Τέλος, αν το σημείο στο οποίο ζητάμε το διανυσματικό δυναμικό επιλεγεί επί του συνόρου, τότε η σφαίρα βρίσκεται και εκτός και εντός του συνόρου. Στην περίπτωση αυτή μπορεί πάλι να εφαρμοστεί η ανωτέρω διαδικασία, διαφοροποιημένη, ώστε να περιλαμβάνει ο όγκος $V(\vec{r}, \varepsilon)$ μόνο την εσωτερική σφαίρα. Και πάλι καταλήγουμε σε διανυσματικό δυναμικό που είναι σωληνοειδές πεδίο. Οι ίδιες δυσκολίες εμφανίζονται και για την ταχύτητα στην περίπτωση $\vec{R} \in V$. Από την άλλη, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις λειότητας της στροβιλότητας $\vec{\omega}$ (Holder continuity, (Günter, 1967)), αποδικνυεται η ισχύς του νόμου BS, σχέση (11), και σε αυτή την περίπτωση. Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού είναι και αυτός που προτείνει η αριθμητική μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας (Vortex Particle Method). Η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας (κεφάλαιο 2), ποιοτικά αναφέρουμε ότι, χωρίζει το πεδίο στροβιλότητας σε πολλά, μικρότερα πεδία στροβιλότητας ώστε τελικά δεν τίθεται θέμα υπολογισμού ολοκληρωμάτων μέσα στο κάθε ένα από τα μικρά αυτά πεδία. Σημειώνουμε ότι η ίδια διαδικασία με την παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που το πεδίο στροβιλότητας εκτίνεται έως το άπειρο αλλά οριακά γίνεται μηδέν με ικανοποιητικό ρυθμό⁷.

⁶ Στην πραγματικότητα αρκεί η λιγότερο ισχυρή συνθήκη, δηλαδή η $\vec{\omega}(\vec{R})$ να είναι συνεχής κατά Holder για να ισχύει η σχέση 17, (Günter, 1967).

⁷ Στην βιβλιογραφία σημειώνεται ως "of exponential decay"

Παρουσιάζουμε ακολούθως ένα διαφορετικό τρόπο για να καταλήξουμε στον νόμο Biot-Savart. Η βασική διαφορά με την προηγούμενη ανάπτυξη είναι ότι δεν θα χρησιμοποιήσουμε το διανυσματικό δυναμικό αλλά θα παράγουμε την σχέση για την ταχύτητα με άμεσο τρόπο. Ο στροβιλισμός του πεδίου στροβιλότητας δίνει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u} \quad (18)$$

Οι ροές προσεγγίζονται ως ασυμπίεστες ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$), οπότε:

$$\Delta \vec{u} = -(\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) \quad (19)$$

Όπως στην προηγούμενη παρουσίαση, έτσι και εδώ, φτάσαμε στην εξίσωση Poisson γραμμένη για κάθε συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας, χωρίς όμως να απαιτείται το διανυσματικό δυναμικό, για το οποίο πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι σωληνοειδές⁸ ώστε να συνεχίσουμε με την αντιστροφή Poisson. Αντίστοιχα με την προηγούμενη παρουσίαση, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής της Poisson καταλήγουμε στην ακόλουθη λύση της εξίσωσης Poisson ($\vec{h}(\vec{r})$ αρμονικό διανυσματικό πεδίο):

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\nabla} \times \vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV(\vec{R}) + \vec{h}(\vec{r}) \quad (20)$$

Με βάση την ταυτότητα:

$$\frac{(\vec{\nabla} \times \vec{\omega})}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{R}|} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (21)$$

Η σχέση (20) γίνεται:

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) dV(\vec{R}) + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} dV(\vec{R}) + \vec{h}(\vec{r}) \quad (22)$$

Χρησιμοποιώντας ένα θεώρημα τύπου Gauss (Rogers H. J., 1999):

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \times d\vec{S}(\vec{R}) + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} dV(\vec{R}) + \vec{h}(\vec{r}) \quad (23)$$

⁸ Δηλαδή να αποδείξουμε ότι η απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού είναι μηδέν

Η τελευταία εξίσωση περιέχει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα (πάνω στο σύνορο του όγκου υπολογισμού), ένα ολοκλήρωμα όγκου και τέλος ένα διανυσματικό πεδίο. Τα ολοκληρώματα μπορούμε να τα υπολογίσουμε αν το $\vec{\omega}(\vec{R})$ είναι γνωστό, αλλά δεν μπορούμε μέχρι στιγμής να προσδιορίσουμε το πεδίο $\vec{h}(\vec{r})$, για το οποίο απαιτούνται οριακές συνθήκες. Για μία πιο πλήρη παρουσίαση παραπέμπουμε στα (Günter, 1967), (Cottet & Koumoutsakos, 2000).

1.2.3 Εξίσωση Δυναμικής Εξέλιξης της Στροβιλότητας

Η εξίσωση της ορμής, για ροή η οποία προσεγγίζεται ως ασυμπιεστή, είναι (βλ. (Panton, 2005)) (ο δείκτης $_0$ συμβολίζει παραγώγιση ως προς τον χρόνο):

$$\partial_0 u_i + u_j \partial_j u_i = -\frac{\partial_i p}{\rho} + \nu \partial_j \partial_j u_i \quad (24)$$

Όπου ν η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού. Υπολογίζοντας το $\nabla \times$ στα δύο μέλη της εξίσωσης (24), καταλήγουμε στην εξίσωση δυναμικής της στροβιλότητας (Panton, 2005):

$$\partial_0 \omega_i + u_j \partial_j \omega_i = \omega_j \partial_j u_i + \nu \partial_j \partial_j \omega_i \quad (25)$$

Η απόδειξη της σχέσης (25) έχει ως εξής. Γράφουμε την εξίσωση (24) στην διανυσματική μορφή:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 + (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (26)$$

Εφαρμόζουμε τον τελεστή $\nabla \times$ στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας και έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 + (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} \right) &= \nabla \times \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \right) \Rightarrow \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) &= \nu \nabla^2 \vec{\omega} \Rightarrow \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{u} (\nabla \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{u}) &= \nu \nabla^2 \vec{\omega} \Rightarrow \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (27)$$

Παρατηρούμε ότι η πίεση δεν εμφανίζεται στην εξίσωση, αφού η κλίση της πίεσης, εκ ταυτότητας, είναι αστρόβιλο πεδίο⁹. Οπότε η στροβιλότητα στις ροές που μελετάμε είναι αδύνατον να δημιουργηθεί από κλίση πίεσης. Ο τελευταίος όρος εκφράζει την καταστροφή ή δημιουργία της στροβιλότητας λόγω συνεκτικότητας και η σημαντικότητα-του εξαρτάται τόσο από την τιμή του συντελεστή κινηματικής συνεκτικότητας ν όσο και από το μέγεθος του όρου $\nabla^2 \vec{\omega}$. Οι ροές που μελετάμε χαρακτηρίζονται ως μη-συνεκτικές¹⁰ εκτός των περιοχών που δημιουργείται στροβιλότητα με αποτέλεσμα η επίδραση του όρου $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$ να είναι αμελητέα. Εξάριση αποτελεί το οριακό στρώμα όπου η κλίση της ταχύτητας είναι μεγάλη, ώστε τελικά ο όρος $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$ δεν είναι αμελητέος και για την ακρίβεια αν δεν υπήρχε δεν θα ήταν δυνατή η περιστροφή των στοιχείων του ρευστού. Ενδιαφερόμαστε, λοιπόν, για τον πρώτο όρο στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης, ο οποίος περιγράφει την αναδιάταξη της στροβιλότητας εξαιτίας της επιμήκυνσης και της περιστροφής των γραμμών ροής του πεδίου στροβιλότητας.

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (27) γράφεται:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Big|_j = \omega_i \partial_i u_j \quad (28)$$

Κάθε τανυστής δεύτερης τάξης μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή. Για τον τανυστή $\partial_i u_j$, έχουμε:

$$\partial_i u_j = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i) \quad (29)$$

Ο πρώτος προσθετέος είναι συμμετρικός τανυστής και το δεύτερος προσθετέος είναι αντισυμμετρικός τανυστής. Ο συμμετρικός τανυστής ονομάζεται τανυστής ρυθμού μεταβολής τροπών (strain rate tensor) και εδώ συμβολίζεται με S_{ij} :

$$S_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (30)$$

⁹ Σημειώνουμε ότι σε βαροκλινής(baroclinic) ροή ο όρος $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} p / \rho)$ δεν αμελείται

¹⁰ Ακριβέστερα, οι δυνάμεις συνεκτικότητας είναι μικρές σε σχέση με τις αδρανειακές δυνάμεις που εκφράζονται από τους υπόλοιπους όρους της σχέσης (27) $\Leftrightarrow \text{Re} > 2 \cdot 10^6$ δηλαδή πάνω από την κρίσιμη περιοχή

Ο δεύτερος προσθετός της σχέσης (29), χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ καθώς και τον ορισμό $\omega_k \stackrel{def}{=} \varepsilon_{klm}\partial_l u_m$, μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i) = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_l u_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{klm}\partial_l u_m) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k \quad (31)$$

Οπότε η σχέση (29) γίνεται:

$$\partial_i u_j = S_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k \quad (32)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (32) στη σχέση (28), έχουμε για τον όρο που ενδιαφερόμαστε:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \Big|_j = \omega_i (S_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k) = \omega_i S_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\omega_i \omega_k \quad (33)$$

Με δεδομένο ότι ο τανυστής $\omega_i \omega_k$ είναι συμμετρικός, ο δεύτερος όρος του τρίτου μέλους της σχέσης (33) είναι μηδέν. Καταλήξαμε, λοιπόν, στο αποτέλεσμα ότι ο όρος που μελετάμε αποτελεί τον ρυθμό μεταβολής των τροπών κατά την κατεύθυνση του $\vec{\omega}$:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Big|_j = |\vec{\omega}| \left(\frac{\omega_i}{|\vec{\omega}|} S_{ij} \right) \quad (34)$$

Ο όρος αυτός είναι υπεύθυνος για την στροφή και την επιμήκυνση των γραμμών στροβιλότητας. Αν η ταχύτητα αναπαριστάται αποκλειστικά από το πεδίο στροβιλότητας τότε με χρήση της σχέσης (23) έχουμε, θέτοντας $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$:

$$\begin{aligned} \partial_i u_j &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \partial_i \frac{\varepsilon_{jkl}\rho_k \omega_l}{|\vec{\rho}|^3} dV \Rightarrow \partial_i u_j = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \varepsilon_{jkl}\omega_l \partial_i \frac{\rho_k}{|\vec{\rho}|^3} dV \Rightarrow \\ \partial_i u_j &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \varepsilon_{jkl}\omega_l \left(\frac{\delta_{ik}}{|\vec{\rho}|^3} - 3 \frac{\rho_i \rho_k}{|\vec{\rho}|^5} \right) dV \Rightarrow \\ \partial_i u_j &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_{ijk}\omega_k}{|\vec{\rho}|^3} - 3 \frac{\rho_i \varepsilon_{jkl}\omega_k \rho_l}{|\vec{\rho}|^5} \right) dV \end{aligned} \quad (35)$$

Να σημειωθεί ότι ο τελεστής ∂_i εφαρμόζεται στο σημείο ελέγχου \vec{r} (control point) και όχι στο σημείο ολοκλήρωσης \vec{R} του $\vec{\rho}$. Αντικαθιστώντας την σχέση (35) στην σχέση (28), το διάνυσμα που ζητάμε γίνεται¹¹:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Big|_j = -\omega_i \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_{jkl} \omega_k}{|\vec{\rho}|^3} - 3 \frac{\rho_i \varepsilon_{jkl} \omega_k \rho_l}{|\vec{\rho}|^5} \right) dV \quad (36)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (36) στην εξίσωση δυναμικής εξέλιξης της στροβιλότητας, σχέση (27), καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$\frac{D\vec{\omega}(\vec{r})}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\vec{\omega}(\vec{r}) \times \vec{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} - 3 \frac{[(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{\omega}(\vec{r})][(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{\omega}(\vec{R})]}{|\vec{r} - \vec{R}|^5} \right) dV(\vec{R}) \quad (37)$$

Η εξίσωση αποτελεί την εξίσωση δυναμικής της στροβιλότητας στην περίπτωση που έχουμε μόνο επαγόμενες ταχύτητες από πεδίο στροβιλότητας.

1.2.4 Ο νόμος του Kelvin και τα θεωρήματα του Helmholtz

Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο μέτρο του πεδίου στροβιλότητας είναι η κυκλοφορία. Η κυκλοφορία απαιτεί για τον ορισμό-της μία κλειστή γραμμή C του συνεχούς και δίνεται από της σχέση:

$$\Gamma = \oint_C u_i dr_i \quad (38)$$

Το θεώρημα του Stokes συνδέει την κυκλοφορία κλειστής γραμμής C με την στροβιλότητα που διέρχεται από την επιφάνεια S που ορίζεται από την κλειστή γραμμή C , κατά την σχέση:

$$\Gamma = \oint_{C=\partial S} u_i dr_i = \iint_S \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k dA_i = \iint_S \omega_i dA_i \quad (39)$$

Η κυκλοφορία είναι βαθμωτό μέγεθος και κατά την σχέση (39) χαρακτηρίζει την «παροχή» στροβιλότητας $\vec{\omega}$ διαμέσου της επιφάνειας S . Η κυκλοφορία εμπλέκεται στην διατύπωση του

¹¹ Τονίζουμε ότι το ω_i - εκτός ολοκλήρωσης - αναφέρεται στο σημείο ελέγχου \vec{r}

«Νόμου του Kelvin». Σύμφωνα με τον νόμο του Kelvin: «Η κυκλοφορία κλειστής υλικής καμπύλης εντός ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού παραμένει σταθερή», (Panton, 2005), (Kundu, 1990)), (Batchelor, 1967). Αν με $C(t)$ συμβολίσουμε κλειστή καμπύλη η οποία απαρτίζεται κάθε χρονική στιγμή από τα ίδια σημεία του ρευστού¹² και Γ η κυκλοφορία διαμέσου της $C(t)$, τότε ο νόμος του Kelvin εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (40)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (40) είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Euler για ασυμπίεστο ρευστό. Η σχέση (40) μας πληροφορεί για την δυναμική της κυκλοφορίας σε κλειστές υλικές γραμμές. Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική διατύπωση για την σχέση (40) δόθηκε από τον Helmholtz στους τρεις γνωστούς νόμους που φέρουν το όνομα του. Οι νόμοι του Helmholtz καθορίζουν την δυναμική εξέλιξη των κατανομών στροβιλότητας και αποτελούν μία εναλλακτική διατύπωση του νόμου του Kelvin που βασίζεται σε διαφορικές επιφάνειες. Οι νόμοι του Helmholtz για μη συνεκτική ροή διατυπώνονται ως εξής:

- 1ος. Οι γραμμές στροβιλότητας είναι υλικές γραμμές,
- 2ος. Η ένταση ενός σωλήνα στροβιλότητας είναι σταθερή και ίση με την κυκλοφορία σε μία κλειστή γραμμή πάνω στο σωλήνα κάθε χρονική στιγμή κατά την κίνηση του σωλήνα,
- 3ος. Ένας σωλήνας στροβιλότητας ξεκινάει από στερεό σύνορο, είτε αρχίζει και τελειώνει στο άπειρο ή σχηματίζει κλειστές γραμμές.

Οι δύο πρώτοι νόμοι είναι αποτελέσματα της διατήρησης της ορμής, όποτε χαρακτηρίζονται ως δυναμικοί νόμοι, ενώ ο τρίτος νόμος είναι αποτέλεσμα της γνωστής διανυσματικής ταυτότητας $\text{div}(\text{rot}\vec{v}) = 0$, δηλαδή έχει σχέση με την κινηματική της στροβιλότητας.

Τέλος αναφέρουμε ότι ο αριθμός Reynolds των ροών με δίνες, συνήθως, υπολογίζονται με βάση την κυκλοφορία:

$$\text{Re}_\Gamma = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (41)$$

¹² Συνήθως χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό «υλική», υλική καμπύλη

1.3 Δίνες και Στροβιλότητα

Ενώ, λοιπόν, γνωρίζουμε ότι το οριακό στρώμα¹³ λειτουργεί ως πηγή στροβιλότητας δεν γνωρίζουμε πως τελικά η στροβιλότητα θα δομηθεί για να δημιουργήσει το αποτέλεσμα στο οποίο αναφερόμαστε ως δίνη. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να καθορίσουμε τι είναι τελικά η δίνη και πως συσχετίζεται πρακτικά με το πεδίο στροβιλότητας.

1.3.1 Ορισμοί Δινών

Από την συλλογή κειμένων «Fluid Vortices» του S.I. Green (Green, 1995) βρίσκουμε μεταξύ άλλων ορισμών: «Κάποιος θα μπορούσε να ορίσει τη δίνη ως μοτίβο του πεδίου ροής που η πλειοψηφία των επιστημόνων που ασχολούνται με την δυναμική των ρευστών θα αναγνώριζε ως δίνη». Ο ορισμός αυτός έχει ενδιαφέρον διότι αντανακλά τη δυσκολία ορισμού της δίνης. Παρατηρούμε, λοιπόν μία αντίφαση, πως ένα φυσικό φαινόμενο το οποίο οι περισσότεροι σχετικοί ή όχι με τη δυναμική των ρευστών αντιλαμβάνονται, είναι τόσο δύσκολο να οριστεί. Η αιτία θα μπορούσε να αποδοθεί στο ότι ο μηχανισμός σχηματισμού της δίνης είναι περίπλοκος και εξαρτάται από το φαινόμενο προς μελέτη.

Στην βιβλιογραφία εμφανίζονται διάφοροι ορισμοί για τη δίνη. Μερικοί από αυτούς είναι οι παρακάτω οι οποίοι σχολιάζονται επαρκώς στο (Jinhee & Fazle, 1995). Σημειώνουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 2 στο κεφάλαιο 5.

1. Ορισμός βάση τις Γραμμές Ροής, Lugt (1979): Μια δίνη εντοπίζεται από περιοχές του ρευστού στις οποίες οι γραμμές ροής είναι σπειροειδής.
2. Ορισμός βάση ενός προκαθορισμένου μέτρου στροβιλότητας, Metcalf (1985): Μια δίνη εντοπίζεται από την επιφάνεια στην οποία το μέτρο της στροβιλότητας έχει μία προκαθορισμένη τιμή.
3. Ορισμός με βάση τις Μιγαδικές Ιδιοτιμές της κλίσης ταχύτητας¹⁴, Chong(1990): Μια δίνη εντοπίζεται γύρω από μία περιοχή η οποία ονομάζεται πυρήνας και στην περιοχή αυτή οι ιδιοτιμές του τανυστή $\partial_i u_j$ είναι μιγαδικές.
4. Ορισμός με βάση την δεύτερη αναλλοίωτη της κλίσης ταχύτητας, Hunt(1988): Μια δίνη εντοπίζεται γύρω από μία περιοχή η οποία ονομάζεται πυρήνας και στην

¹³ Αποκλειστικά όσο αφορά τις περιπτώσεις που μελετάμε

¹⁴ Χρησιμοποιείται από το Tecplot για τον εντοπισμό του πυρήνα της δίνης

περιοχή αυτή η δεύτερη αναλλοίωτη $Q = \frac{1}{2}(\partial_i u_j \cdot \partial_j u_i)$ του τανυστή $\partial_i u_j$ είναι θετική και η πίεση είναι μικρότερη από την πίεση μακριά από την περιοχή

5. Ορισμός με βάση τις ιδιοτιμές του τανυστή $S^2 + \Omega^2$, Jinhee και Fazle(1994): Μια δίνη εντοπίζεται γύρω από μία περιοχή η οποία ονομάζεται πυρήνας και στην περιοχή αυτή ο τανυστής $S^2 + \Omega^2$, όπου S το συμμετρικό μέρος του $\partial_i u_j$ και Q το αντισυμμετρικό μέρος του $\partial_i u_j$, έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

1.3.2 Προκαθορισμένες Μορφές του Πεδίου Στροβιλότητας - Προβλήματα αναφοράς

Στην παρούσα εργασία λέγοντας δίνη θα αναφερόμαστε απλά σε περιοχές με προκαθορισμένη από εμάς δομή στροβιλότητας, δηλαδή περιοχές στις οποίες το πεδίο στροβιλότητας αναπαρίσταται με κάποια συγκεκριμένη προκαθορισμένη μορφή.

Στη γενική περίπτωση ενός τυχαίου πεδίου στροβιλότητας, ο υπολογισμός του επαγόμενου πεδίου ταχύτητας μέσω του Biot-Savart, μπορεί να γίνει μόνο με προσφυγή σε αριθμητικές μεθόδους. Παρά τούτο υπάρχουν περιπτώσεις, όπως αυτές που αναφέρουμε παρακάτω, στις οποίες η μορφή του πεδίου στροβιλότητας είναι τέτοια ώστε ο υπολογισμός να εκτελείται αναλυτικά και να οδηγεί σε κλειστή έκφραση για την ταχύτητα με βάση συνηθισμένες μαθηματικές συναρτήσεις. Οι περιπτώσεις αυτές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως «προβλήματα αναφοράς» (toy problems) για την αποτίμηση της αριθμητικής μεθοδολογίας η οποία θα αναπτυχθεί για την γενική περίπτωση στο κεφάλαιο 3. Οι συγκρίσεις θα γίνουν στο κεφάλαιο 5. Στη διεθνή βιβλιογραφία συναντάμε διάφορες περιπτώσεις μοντέλων δινών οι οποίες φέρουν το όνομα ερευνητών που τις χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά. Παρακάτω συνοψίζουμε τις πιο γνωστές. Σημειώνουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες και το πεδίο στροβιλότητας είναι παράλληλο πεδίο στον άξονα z των κυλινδρικών συντεταγμένων.

Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι συμβολισμοί (κυλινδρικές συντεταγμένες):

- για τις συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης: σημείο ελέγχου $\vec{r} = (r_\rho, r_\theta, r_z)$ και σημείο ολοκλήρωσης $\vec{R} = (R_\rho, R_\theta, R_z)$.
- η βάση του χώρου είναι $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ και το πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega}(\vec{r}) = \omega(r_\rho) \vec{e}_z$ το οποίο ορίζεται στο $V = \{(r, \theta, z) : r < R_\Delta, 0 < \theta < 2\pi, z \in R\}$, R_Δ η ακτίνα του κυλίνδρου

Το διανυσματικό δυναμικό για τις μακρινές επαγωγές ($r_\rho \geq R_\Delta$) είναι:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(\vec{r}) &= -\frac{\vec{e}_z}{4\pi} \iiint_{V(\rho,\theta,z)} \frac{\omega(R_\rho)}{\sqrt{r_\rho^2 + R_\rho^2 - 2r_\rho R_\rho \cos(r_\theta - R_\theta) + (r_z - R_z)^2}} dV(\vec{R}) \Rightarrow \\ \bar{\Psi}(\vec{r}) &= -\frac{\vec{e}_z}{4\pi} \int_0^{R_\Delta} \omega(R_\rho) R_\rho \left(\int_0^{2\pi} \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{-z_1}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{r_\rho^2 + R_\rho^2 - 2r_\rho R_\rho \cos(r_\theta - R_\theta) + (r_z - R_z)^2}} dR_z \right) dR_\theta \right) dR_\rho\end{aligned}\quad (42)$$

Παρατηρήστε ότι το διανυσματικό δυναμικό είναι παράλληλο διανυσματικό πεδίο στον άξονα z. Το πεδίο ταχύτητας είναι εύκολο να προκύψει αφού το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνο μία συνιστώσα, κατά τον άξονα z¹⁵. Η ταχύτητα, υπολογίζοντας τον στροβιλισμό (\overline{curl}) του διανυσματικού δυναμικού, είναι (κατά τη σειρά $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$, επίσης: (r_ρ, r_θ, r_z) οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z) του σημείου ελέγχου και (R_ρ, R_θ, R_z) οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z) του σημείου ολοκλήρωσης):

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) = \nabla \times \bar{\Psi}(\vec{r}) &= \left(\frac{1}{r_\rho} \frac{\partial \Psi_z}{\partial r_\theta} - \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial r_z}, \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial r_z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r_\rho}, \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial (r_\rho \Psi_\theta)}{\partial r_\rho} - \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial r_\theta} \right) \Rightarrow \\ \vec{u}(\vec{r}) &= \left(\frac{1}{r_\rho} \frac{\partial \Psi_z}{\partial r_\theta}, -\frac{\partial \Psi_z}{\partial r_\rho}, 0 \right)\end{aligned}\quad (43)$$

Τα αποτελέσματα για τις ταχύτητες είναι:

› Ακτινική Συνιστώσα:

$$\begin{aligned}u_\rho(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi r_\rho} \int_0^{R_\Delta} \omega(R_\rho) R_\rho \left(\int_0^{2\pi} \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{-z_1}^{z_1} \frac{\partial}{\partial r_\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r_\rho^2 + R_\rho^2 - 2r_\rho R_\rho \cos(r_\theta - R_\theta) + (r_z - R_z)^2}} \right) dR_z \right) dR_\theta \right) dR_\rho \Rightarrow \\ u_\rho(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi r_\rho} \int_0^R \omega(R_\rho) R_\rho \left(\int_0^{2\pi} \left(\lim_{z_1 \rightarrow \infty} \int_{-z_1}^{z_1} \frac{r_\rho R_\rho \sin(r_\theta - R_\theta)}{(r_\rho^2 + R_\rho^2 - 2r_\rho R_\rho \cos(r_\theta - R_\theta) + (r_z - R_z)^2)^{3/2}} dR_z \right) dR_\theta \right) dR_\rho \Rightarrow \\ u_\rho(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi r_\rho} \int_0^R \omega(R_\rho) R_\rho \left(\int_0^{2\pi} \frac{r_\rho R_\rho \sin(r_\theta - R_\theta)}{r_\rho^2 + R_\rho^2 - 2r_\rho R_\rho \cos(r_\theta - R_\theta)} dR_\theta \right) dR_\rho \Rightarrow \\ u_\rho(\vec{r}) &= 0\end{aligned}\quad (44)$$

¹⁵ Η ροϊκή συνάρτηση ταυτίζεται με την z-συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού

› Εφαπτομενική Συνιστώσα:

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(R_{\rho}) R_{\rho} \left(\int_0^{2\pi} \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{-z_1}^{z_1} \frac{\partial}{\partial r_{\rho}} \left(\frac{1}{\sqrt{r_{\rho}^2 + R_{\rho}^2 - 2r_{\rho}R_{\rho} \cos(r_{\theta} - R_{\theta}) + (r_z - R_z)^2}} \right) dR_z \right) dR_{\theta} \right) dR_{\rho} \Rightarrow \\
 u_{\theta}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(R_{\rho}) R_{\rho} \left(\int_0^{2\pi} \left(\lim_{z_1 \rightarrow \infty} \int_{-z_1}^{z_1} \frac{r_{\rho} - R_{\rho} \cos(r_{\theta} - R_{\theta})}{(r_{\rho}^2 + R_{\rho}^2 - 2r_{\rho}R_{\rho} \cos(r_{\theta} - R_{\theta}) + (r_z - R_z)^2)^{3/2}} dR_z \right) dR_{\theta} \right) dR_{\rho} \Rightarrow \\
 u_{\theta}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(R_{\rho}) R_{\rho} \left(\int_0^{2\pi} \frac{2(r_{\rho} - R_{\rho} \cos(r_{\theta} - R_{\theta}))}{r_{\rho}^2 + R_{\rho}^2 - 2r_{\rho}R_{\rho} \cos(r_{\theta} - R_{\theta})} dR_{\theta} \right) dR_{\rho} \Rightarrow \\
 u_{\theta}(\vec{r}) &= \frac{1}{r_{\rho}} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(R_{\rho}) R_{\rho} dR_{\rho} \quad \text{ή} \quad u_{\theta}(r) = \frac{1}{r} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(r) r dr \quad (45)
 \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι η σχέση (45) χρησιμοποιείται μόνο για τις επαγόμενες ταχύτητες εκτός της περιοχής που βρίσκεται το πεδίο στροβιλότητας και απαιτούνται τροποποιήσεις (υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων) για τις θέσεις εντός του πεδίου στροβιλότητας. Τελικά, καταλήγουμε στις:

$$u_{\theta}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \omega(\rho) \rho d\rho, r < R_{\Delta} \quad (46)$$

$$u_{\theta}(r) = \frac{1}{r} \int_0^{R_{\Delta}} \omega(\rho) \rho d\rho, r > R_{\Delta} \quad (47)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με R_{Δ} συμβολίζουμε την ακτίνα του πυρήνα της δίνης ενώ με r την απόσταση από κέντρο της δίνης (σημείο ελέγχου). Οι συνιστώσες που δεν αναφέρονται είναι μηδέν.

1. Περιστροφή Στερεού σώματος

Οι γραμμές στροβιλότητας είναι ευθείες σε όλη την έκταση του πεδίου. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το πεδίο στροβιλότητας εκφράζεται ως:

$$\omega_z(r) = \omega_0 = \text{const} \quad (48)$$

Και το πεδίο ταχύτητας:

$$u_{\theta}(r) = \frac{1}{2} \omega_0 r \quad (49)$$

Η κυκλοφορία είναι:

$$\Gamma(r) = \pi r^2 \omega_0 \quad (50)$$

2. Μοντέλο Αστρόβιλης Δίνης

Ενώ σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις είχαμε ένα σαφώς ορισμένο πεδίο στροβιλότητας εδώ το πεδίο στροβιλότητας είναι μία Dirac- δ ¹⁶. Το πεδίο ταχύτητας εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$u_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (51)$$

Και η κυκλοφορία της δίνης είναι Γ

3. Μοντέλο Δίνης Rankine

Οι γραμμές στροβιλότητας είναι ευθείες σε όλη την έκταση του πεδίου. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το πεδίο στροβιλότητας εκφράζεται ως:

$$\omega_z(r) = \begin{cases} \omega_0, & r < R_{\Delta} \\ 0, & r > R_{\Delta} \end{cases} \quad (52)$$

Και το πεδίο ταχύτητας:

$$u_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_0 r, & r < R_{\Delta} \\ \frac{1}{2} \omega_0 R_{\Delta}^2 \frac{1}{r}, & r > R_{\Delta} \end{cases} \quad (53)$$

¹⁶ Δεν υπονοούμε ότι η συνάρτηση Dirac- δ δεν είναι καλώς ορισμένη αλλά θέλουμε να τονίσουμε ότι ορίζεται από τις ιδιότητες της και μόνο ως γενικευμένη συνάρτηση

Η κυκλοφορία είναι:

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \pi r^2 \omega_0, & r < R_\Delta \\ \pi R_\Delta^2 \omega_0, & r > R_\Delta \end{cases} \quad (54)$$

Παρατηρήστε ότι στο πυρήνα της δίνης έχουμε περιστροφή στερεού σώματος. Αναφερόμαστε στην κυκλοφορία της δίνης, υπονοώντας το $\Gamma_0 = \pi R_\Delta^2 \omega_0$

4. Μοντέλο Δίνης Lamb-Oseen

Οι γραμμές στροβιλότητας είναι ευθείες σε όλη την έκταση του πεδίου. Η δίνη Lamb-Oseen προκύπτει ως λύση των εξισώσεων Navier-Stokes και μοντελοποιεί τη σταδιακή απόσβεση μίας αστρόβιλης δίνης. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το πεδίο στροβιλότητας εκφράζεται ως:

$$\omega_z(r, t) = \omega_0(t) \exp\left(-\frac{r^2}{R_\Delta^2(t)}\right) \quad (55)$$

Και το πεδίο ταχύτητας:

$$u_\theta(r, t) = \frac{\omega_0(t) R_\Delta^2(t)}{2r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_\Delta^2(t)}\right)\right) \quad (56)$$

Η κυκλοφορία είναι:

$$\Gamma(r, t) = \Gamma_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_\Delta^2(t)}\right)\right) \quad (57)$$

Με: $R_\Delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$, $\omega_0(t) = \frac{\Gamma_0}{\pi R_\Delta^2(t)}$ και $\Gamma_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r, t)$

Αναφερόμαστε στην κυκλοφορία της δίνης υπονοώντας το $\Gamma_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r, t)$. Όταν αναφερόμαστε σε μη συνεκτική δίνη Lamb-Oseen, θα εννοούμε ότι $R_\Delta(t) = R_\Delta = \text{const.}$ Παρατηρείστε ότι $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_z(r, t) = \delta(r)$.

Οι περιπτώσεις 1 και 2 είναι ακραίες περιπτώσεις οι οποίες εμφανίζονται και οι δύο στη φύση και μπορούν να αναπαραχθούν στο εργαστήριο (Kundu, 1990). Σημειώνουμε ότι ο Truesdell (1953), όπως αναφέρεται στο (Jinhee & Fazle, 1995), χρησιμοποίησε τον λόγο:

$$N_k = \left(\frac{|\vec{\omega}|^2}{2S_{ij}S_{ij}} \right)^{1/2} \quad (58)$$

ως μέτρο ποσοτικοποίησης της «ποιότητας περιστροφής». Ο λόγος ονομάζεται αριθμός κινηματικής στροβιλότητας. Στην περίπτωση της περιστροφής στερεού σώματος τείνει στο άπειρο και στην περίπτωση αστρόβιλης δίνης είναι μηδέν. Όλες οι υπόλοιπες τιμές δίνουν μία αίσθηση του κατά πόσο η ροή σε μία θέση προσεγγίζει μία από τις δύο καταστάσεις.

Η πιο συνηθισμένη μοντελοποίηση της δίνης ακροπτερυγίου χρησιμοποιεί το μοντέλο δίνης Lamb-Oseen για το πεδίο στροβιλότητάς της. Επίσης, συνήθης μοντελοποίηση ώστε να περιλαμβάνεται και η αξονική ταχύτητα της δίνης που παρατηρείται στα πειραματικά αποτελέσματα είναι το μοντέλο δίνης Burger (Panton, 2005), (Kundu, 1990). Για περισσότερα παραπέμπουμε στο (Rossi, 2000) όπου υπάρχει μία εκτεταμένη ανάλυση των παραπάνω περιπτώσεων. Στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε το πεδίο στροβιλότητας μίας δίνης Lamb-Oseen όπως προέκυψε από μετρήσεις του πεδίου ταχύτητας.

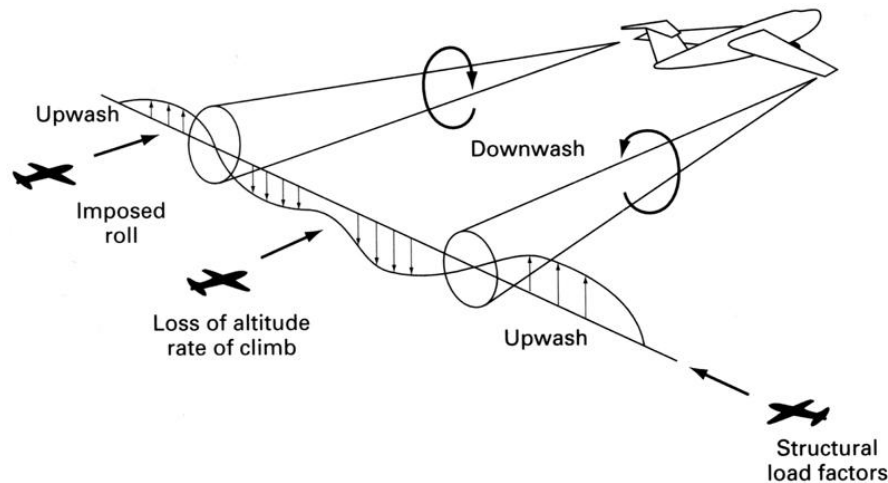
2. ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΔΙΝΩΝ ΑΚΡΟΠΤΕΡΥΓΙΩΝ

Υπάρχουν φαινόμενα στα οποία οι δίνες παρουσιάζουν μία επαναλαμβανόμενη τοπολογία και για αυτό είναι λογικό η μοντελοποίηση τους να γίνει χρησιμοποιώντας περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Επίσης, οι δομές αυτές δημιουργούνται από ευσταθείς δομές οι οποίες διαταράσσονται ελαφρώς από τη θέση ισορροπίας και ενεργοποιούν την εξέλιξη του φαινομένου. Για αυτό τον λόγο χαρακτηρίζονται ως φαινόμενα με αστάθειες. Ενδιαφερόμαστε για την εξέλιξη αυτών των φαινομένων. Το πιο γνωστό περιοδικό δισδιάστατο φαινόμενο είναι η αστάθεια Kelvin-Helmholtz, η οποία είναι γνωστή και ως αστάθεια φύλλου διάτμησης.

Συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για μίας μεγάλης κλίμακας αστάθεια η οποία παρατηρείται στις δίνες ακροπτερυγίων μακριά από το αεροσκάφος. Κανονικά οι δίνες ακροπτερυγίων πρέπει να κινούνται προς τα κάτω βάσει της ταχύτητας που επάγει η μία στην άλλη. Εξαιτίας μίας μικρής διαταραχής, η τοπολογία των δινών αλλάζει και σχηματίζονται διαφορετικές δομές. Η μοντελοποίηση του φαινομένου ως περιοδικό δεν είναι προφανής. Θα υπερασπιστούμε την επιλογή αυτή στο τέλος του κεφαλαίου αφού πρώτα συζητήσουμε μερικά πειραματικά αποτελέσματα. Άλλες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις αστάθειας με τις οποίες δεν θα ασχοληθούμε αλλά θα αναφερθούμε σε αυτές στο τέλος του κεφαλαίου 5 είναι οι μικροδομές δινών που ονομάζονται δίνες-φουρκέτες (hairpin vortices) και η τρισδιάστατη αστάθεια Kelvin-Helmholtz.

2.1 Πρακτικά Ζητήματα Περί των Ασταθειών των Δινών Ακροπτερυγίων

Η αστάθεια στις δίνες ακροπτερυγίων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για δύο λόγους. Πρώτον, είναι μία μεγάλης κλίμακας αστάθεια η οποία παρατηρείται οπτικά και ο μηχανισμός με τον οποίο λειτουργεί μπορεί να αποτελέσει εργαλείο μελέτης της αποδόμησης της στροβιλότητας σε μικρότερες κλίμακες. Δεύτερον, παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον ως μηχανισμός καταστροφής της στροβιλότητας. Οι δίνες ακροπτερυγίων μπορεί να αποτελέσουν κίνδυνο για ένα μικρότερο αεροπλάνο (Nelson, 2004), (Crouch, 2005) το οποίο θα βρεθεί κοντά σε αυτές και αυτό είναι δυνατόν αφού οι δομές καταστρέφονται πολύ αργά. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι οι κανονισμοί ασφαλείας επιβάλλουν ένα αεροσκάφος μεγέθους 737 να πετάει τουλάχιστον 5 ναυτικά μίλια πίσω από ένα αεροσκάφος μεγέθους 747. Το αποτέλεσμα συνάντησης ενός αεροσκάφους με τον ομόρου ενός άλλου στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να είναι η απώλεια στήριξης ή απώλεια ελέγχου και στην γενική περίπτωση κάποιες διαταραχές (Crouch, 2005). Πιθανές συνέπειες συνάντησης ενός αεροσκάφους με τον ομόρου ενός άλλου βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα 15 (Nelson, 2004).



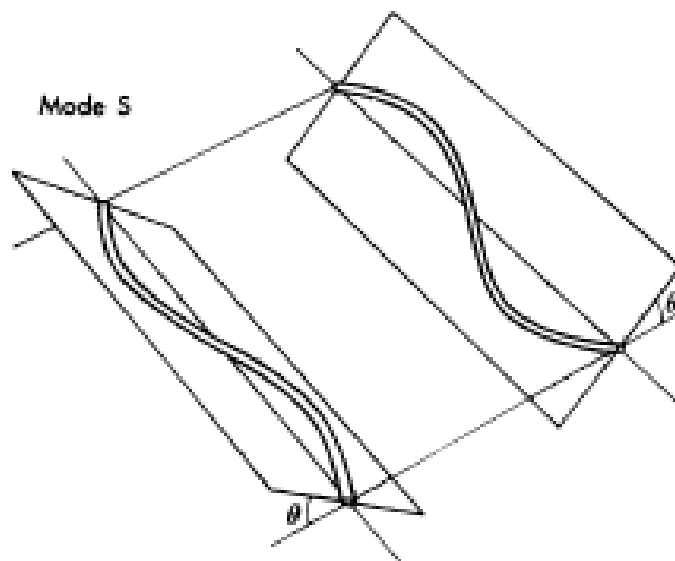
Σχήμα 15. Συνέπειες συνάντησης ενός αεροσκάφους με τον ομόρου ενός άλλου.

Στην περίπτωση που το αεροσκάφος βρίσκεται κοντά στο έδαφος η συνάντησή του με τις δίνες ακροπτερυγίου μπορεί να είναι μοιραία (Nelson, 2004). Για την αποφυγή ατυχημάτων οι κανονισμοί ασφαλείας ορίζουν χρονικές διάρκειες ασφαλείας μετά τις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα αεροσκάφος στο διάδρομο προσγείωσης όπου βρισκόταν ένα μεγαλύτερο αεροσκάφος. Το αποτέλεσμα είναι χρονικές καθυστερήσεις, τρία λεπτά μεταξύ διαδοχικών απογειώσεων και προσγειώσεων (Edwards, 2005), οι οποίες είναι ζημιογόνες για το αεροδρόμιο και συμβάλουν στην κίνηση του αεροδρομίου. Επίσης, η αλληλεπίδραση των

δινών με τα συμπυκνώματα των ατμών στους κινητήρες του αεροσκάφους (contrails) μπορεί να συμβάλλει στην εξέλιξη τους ή την καταστροφή τους και έτσι στην αποφυγή της τεχνίτης νέφωσης. Τέλος, η αλληλεπίδραση των δινών με τα καυσαέρια και την παγίδευση τους σε αυτά μπορεί να συμβάλλει στη μεταφορά τους σε κατώτερα επίπεδα της ατμόσφαιρας.

2.2 Οι υπάρχουσες Θεωρίες Ευστάθειας για Γραμμικές Δίνες

Η μελέτη του φαινομένου αλληλεπίδρασης αεροσκάφους με τις δίνες ακροπτερυγίων εμφανίζει αρκετές δυσκολίες (Nelson, 2004). Για αυτόν τον λόγο οι αστάθειες των δινών ακροπτερυγίων και η εξέλιξη τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να αναπαρασταθεί ο ομόρους ενός αεροσκάφους που βρίσκεται μακριά από το αεροσκάφος που θα αλληλεπιδράσει με αυτές. Η πρώτη μαθηματική ανάλυση του φαινομένου έγινε από το Crow (Crow, 1970). Ο Crow μοντελοποιεί το φαινόμενο χρησιμοποιώντας ένα ζεύγος δινών οι οποίες έχουν υποστεί μία ημιτονοειδή διαταραχή μικρού πλάτους, αλλά μεγάλου μήκους κύματος, και περιστρέφονται αντίρροπα. Ο Crow απέδειξε ότι οι πιο ασταθείς διαταραχές είναι συμμετρικές ημιτονοειδής διαταραχές σε σχέση με το μέσο επίπεδο των δινών με μήκος κύματος $8.6b$, όπου b η απόσταση μεταξύ των δινών και εξελίσσονται στο επίπεδο των 45° ($\theta=45^\circ$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 16 (βλ. (Crow, 1970)).



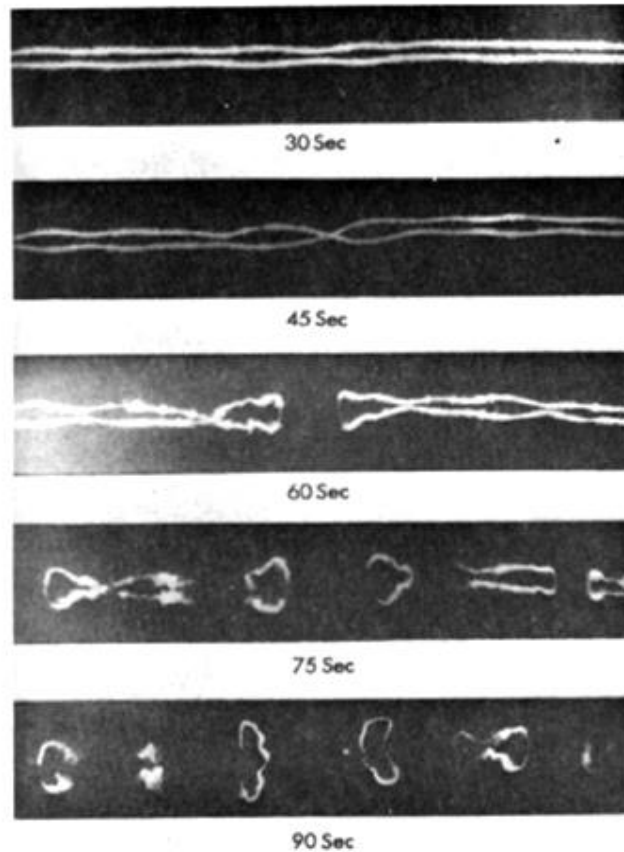
Σχήμα 16. Ασταθείς διαταραχές Crow.

Ακολούθησε μία πιο γενική ανάλυση η οποία γίνεται από τον Saffman και παράλληλα την Widnall (Saffman, 1992). Στις εργασίες αυτών, παρουσιάζονται αποτελέσματα για μια δίνη ή ζεύγος δινών με διάφορες διαταραχές και, όπως αποδεικνύεται, ο κύριος μηχανισμός εξέλιξης

των ασταθειών σχετίζεται με το ρυθμό περιστροφής που επάγει κάθε δίνη στον εαυτό της και το πεδίο ρυθμού μεταβολής των τροπών πάνω στη δίνη. Επιπλέον, εμφανίζεται και η αστάθεια που οφείλεται σε μικρά μήκη κύματος πάνω στη δίνη και είναι σημαντική στην εξέλιξη του φαινομένου πέρα από την αστάθεια μεγάλου μήκους κύματος όπως επιβεβαιώνεται από πειραματικά δεδομένα.

2.3 Αποτελέσματα Πειραμάτων Οπτικοποίησης

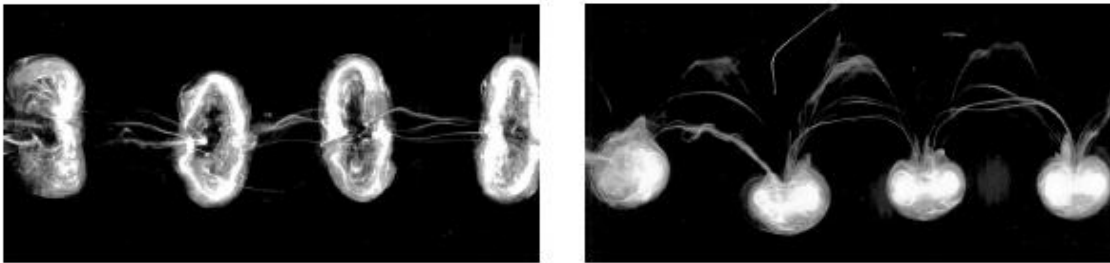
Πρακτικά εμφανίζονται δυσκολίες αναπαράστασης των φαινομένων αυτών στο εργαστήριο. Πρώτον, είναι δύσκολο να απομονωθεί μια σχεδόν ευθύγραμμη δίνη ώστε να συγκριθούν πειραματικά αποτελέσματα με τα θεωρητικά. Επίσης, η αστάθεια Crow εμφανίζεται μετά από μεγάλη απομάκρυνση του αεροσκάφους και άρα απαιτείται πολύ μεγάλη σήραγγα δοκίμων για την αναπαράσταση του φαινομένου. Τέλος, τα επίπεδα τύρβης της ροής όταν οι δίνες έλθουν σε επαφή γίνονται πολύ μεγάλα οπότε και η παρατήρηση τους είναι ιδιαίτερα δύσκολη.



Σχήμα 17. Αλλαγή τοπολογίας δινών ακροπτερυγίου και σχηματισμός δακτυλιοειδών δινών

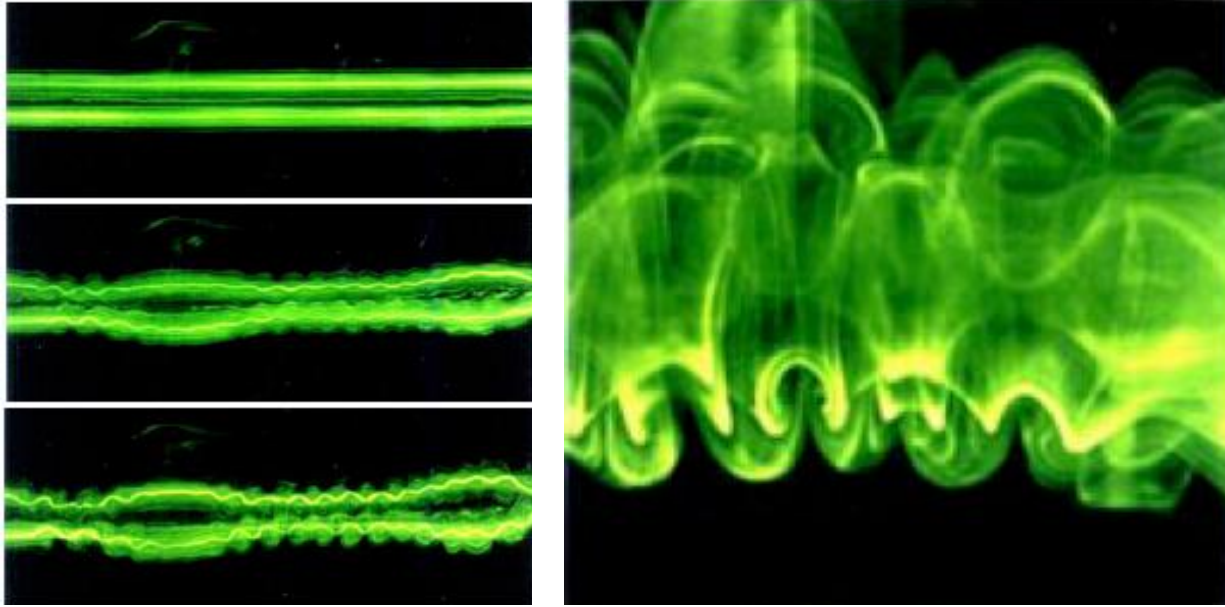
Από το 1970 είχε παρατηρηθεί ότι η τοπολογία των δινών ακροπτερυγίων αλλάζει και θα σχηματιστούν δακτυλιοειδείς δίνες όπως βλέπουμε στο σχήμα 17 (εικόνα) που πήραμε από την εργασία του Crow (Crow, Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices, 1970). Σε αυτό παρουσιάζεται η αστάθεια των δινών ακροπτερυγίων οι οποίες δημιουργούνται στον ομόρου ενός βομβαρδιστικού B47. Αυτό το πείραμα ως καθαρά πείραμα οπτικοποίησης, δεν επαληθεύει την θεωρία του Crow, αλλά αποτέλεσε το κίνητρο για την μοντελοποίηση του φαινομένου.

Τα πρώτα πειράματα στο εργαστήριο έγιναν πολύ αργότερα από τους Thomas και Auerbach το 1994 (Thomas & Auerbach, 1994). Σε αυτά επαληθεύεται η θεωρία του Crow και παρατηρείται ότι τα μήκη κύματος της πιο ασταθούς διαταραχής μεγάλου μήκους κύματος όπως προκύπτουν από τη θεωρία του Crow είναι λίγο μεγαλύτερα από αυτά που καταγράφηκαν στο πείραμα. Επίσης, ταυτόχρονα παρατηρούνται και μικρά μήκη κύματος πάνω στην κάθε δίνη. Βέβαια, δεν παρατηρήθηκε η αλλαγή στην τοπολογία των δινών. Τα πειράματα οπτικοποίησης των Leweke και Williamson το 1998 (Leweke & Williamson, 1998) ήταν τα πρώτα που παρατηρείται ο σχηματισμός των δακτυλιοειδών δινών από τις ευθύγραμμες δίνες στο εργαστήριο εξαιτίας διαταραχών μεγάλου μήκους κύματος που επιβάλλονται σε αυτές. Στο σχήμα 18 (εικόνα) βλέπουμε άνω όψη και πλάγια όψη του αποτελέσματος, $Re_T = 1450$.



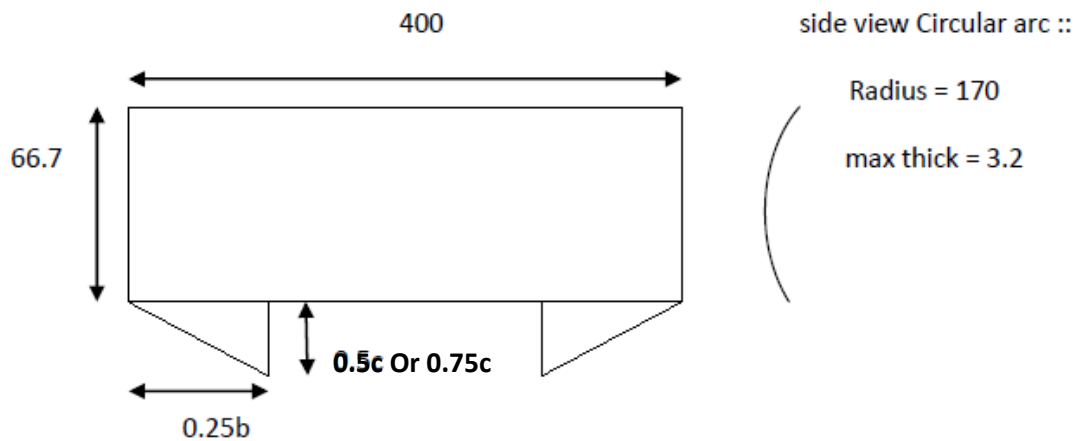
Σχήμα 18. Σχηματισμός δακτυλιοειδών δινών από τις ευθύγραμμες δίνες.

Στο ίδιο πείραμα, μετά από τον αριθμό Reynolds $Re_T > 2750$ εμφανίζονται διαταραχές με μικρά μήκη κύματος (μικρότερα του b) μαζί με τις διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος $6b$. Όπως φαίνεται στα παρακάτω στιγμιότυπα, σχήμα 19, το αποτέλεσμα αυτών είναι η δημιουργία μικρότερων δακτυλιοειδών δινών.



Σχήμα 19. Δημιουργία μικρότερων δακτυλιοειδών δινών.

Παρ' ολ' αυτά, και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις δεν χρησιμοποιήθηκε πτέρυγα για τη δημιουργία των δινών. Οι δίνες αυτές απλά προσομοιάζουν τις δίνες ακροπτερυγίων. Το πρώτο πλήρες πείραμα έγινε από τον Ortega το 2001 (Ortega, 2001). Στα πειράματα του Ortega, παρακολουθούνται οι αστάθειες που οφείλονται στις αλληλεπιδράσεις των δινών που δημιουργούνται πίσω από μία πτέρυγα με τριγωνικά flaps με την έγχυση μπογιάς στα σημεία της πτέρυγας όπου ξεκινούν οι δίνες.

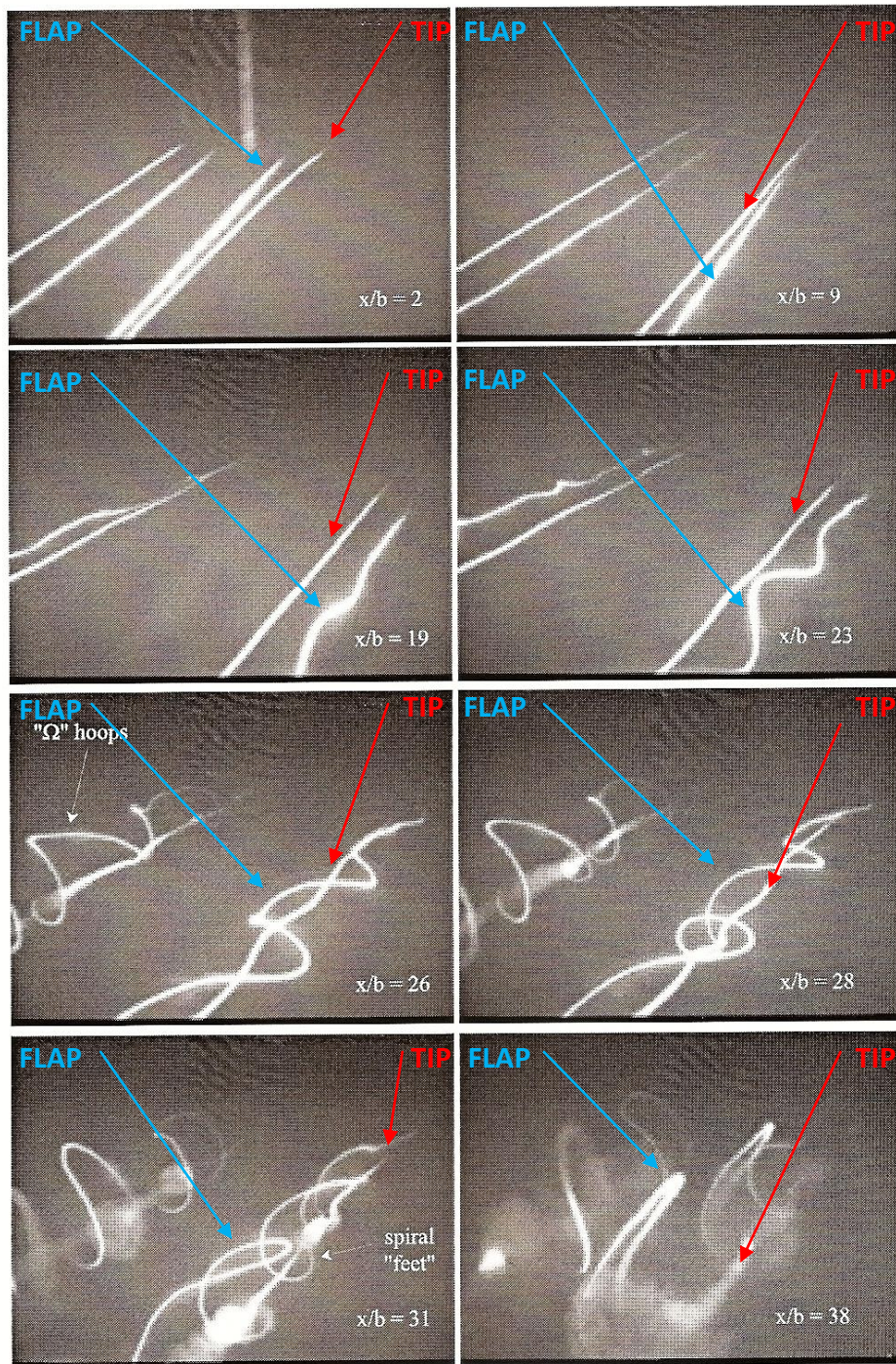


Σχήμα 20. Πειραματική διάταξη Ortega, 2001.

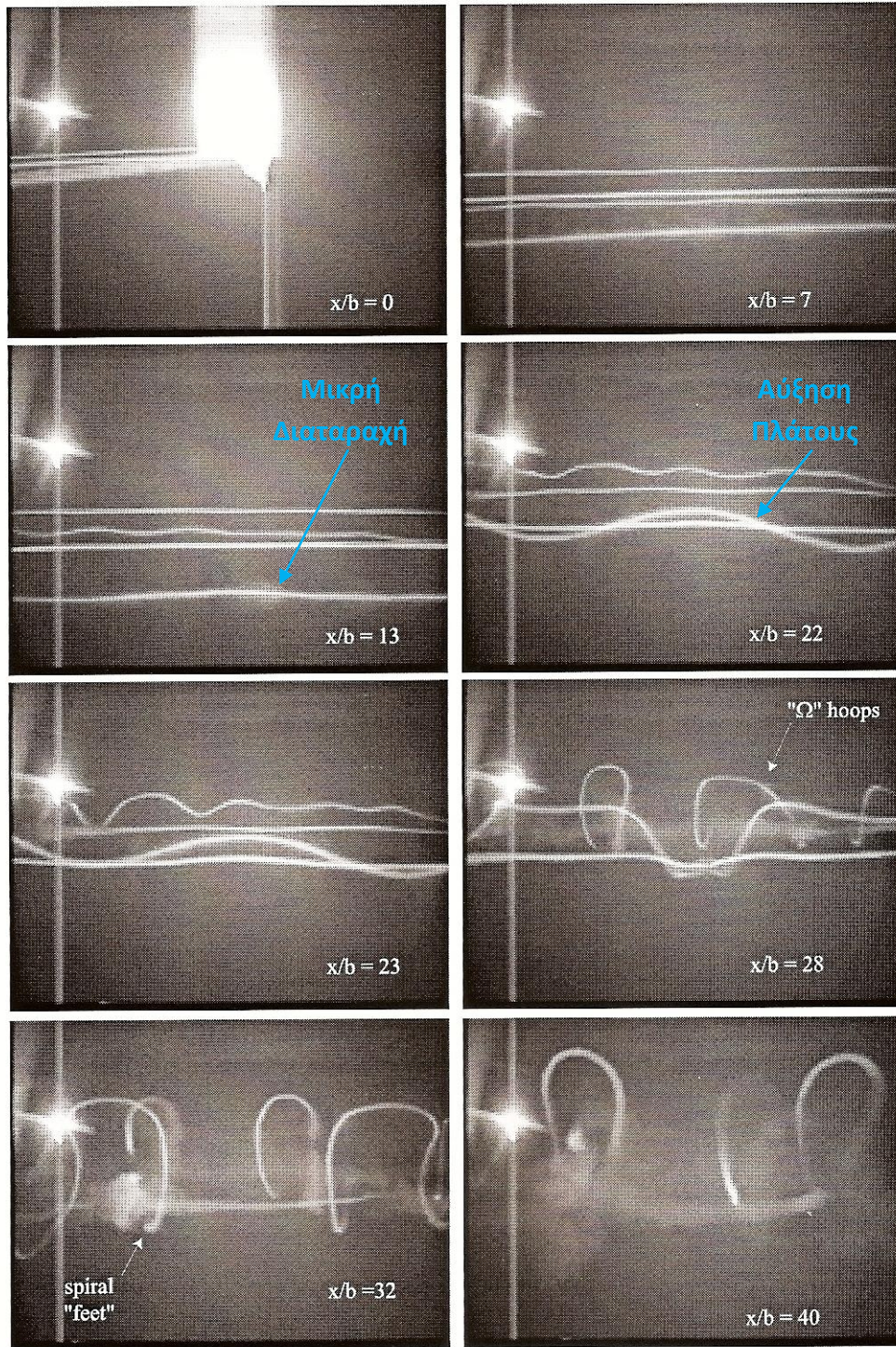
Στην περίπτωση αυτή παράγονται τέσσερις δίνες και έχουμε δύο ζεύγη δινών να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Ένα ζεύγος ξεκινά από το ακροπτερύγιο, ενώ το δεύτερο ζεύγος εσωτερικά της πτέρυγας. Οι δίνες ακροπτερυγίων είναι ισχυρότερες από αυτές που ξεκινούν

εσωτερικά της πτέρυγας. Με αυτόν τον τρόπο προσομοιάζεται η επίδραση των δινών των flaps στις δίνες ακροπτερυγίου, για αυτό και θα αναφερόμαστε στις δίνες που ξεκινούν εσωτερικά της πτέρυγας ως δίνες flap. Στο σχήμα 21 βλέπουμε διαδοχικά στιγμιότυπα του πειράματος. Σε αυτά η πτέρυγα κινείται με ταχύτητα $500 \frac{cm}{s}$ και η γωνία πρόσπτωσης είναι 2° . Στην πρώτη εικόνα φαίνονται καθαρά οι δίνες ακροπτερυγίων και flap που σημειώνονται με κόκκινο και μπλε αντίστοιχα. Αρχικά, οι δίνες flap περιστρέφονται γύρω από τις δίνες ακροπτερυγίων (tip) όπως είναι αναμενόμενο από την θεωρία. Μετά από 10 s παρατηρούμε ότι αναπτύσσεται μία διαταραχή στη δίνη flap όπως φαίνεται στη πλάγια όψη, σχήμα 21β. Ενώ 20 s αφού ξεκίνησε η πτέρυγα παρατηρούμε ότι το πλάτος της διαταραχής είναι εμφανές. Σταδιακά, η δίνη flap αρχίζει να τυλίγεται γύρω από τη δίνη ακροπτερυγίου και δημιουργούνται οι επαναλαμβανόμενες δομές που μοιάζουν με δακτυλιοειδής δίνες (Ω -hoops). Οι δομές αυτές τελικά συγκρούονται και το αποτέλεσμα είναι ένα σύννεφο μπογιάς.

Η γραμμική θεωρία ευστάθειας προβλέπει αν είναι ασταθής η διαταραχή της δίνης αλλά δεν προβλέπει τα μήκη κύματος των διαταραχών που θα αναπτυχθούν. Παρατηρούμε ότι κοντά στο αεροσκάφος δεν αναπτύσσεται καμία διαταραχή. Όσο απομακρυνόμαστε από το αεροσκάφος σταδιακά αναπτύσσεται μία μικρή διαταραχή. Τελικά όταν απομακρυνθούμε αρκετά (περίπου 23 πλάτη) η διαταραχή αυτή εξελίσσεται στην αστάθεια που παρατηρούμε μέσα σε 5 περίπου δευτερόλεπτα. Με βάση τις παραπάνω πειραματικές παρατηρήσεις οδηγούμαστε στην επιλογή της κατάλληλης μοντελοποίησης του φαινομένου.



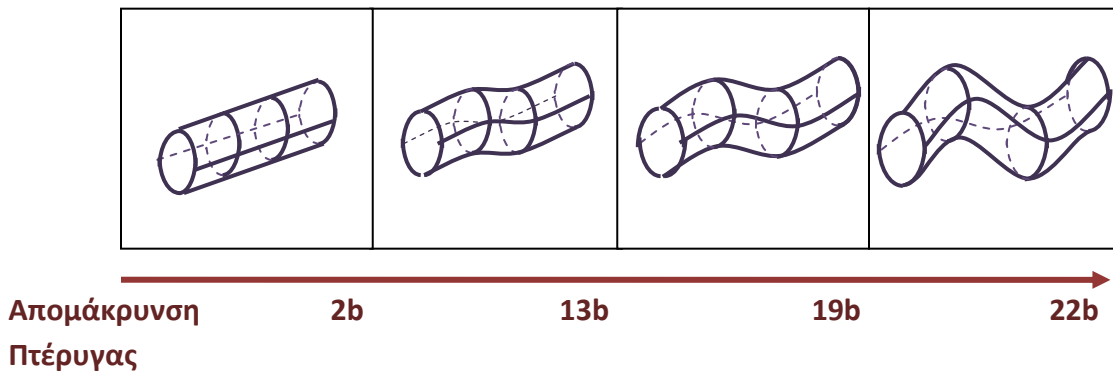
Σχήμα 21α. Διαδοχικά στιγμιότυπα του πειράματος του Ortega.



Σχήμα 21β. Διαδοχικά στιγμιότυπα του πειράματος του Ortega.

2.4 Μοντελοποίηση του Φαινομένου

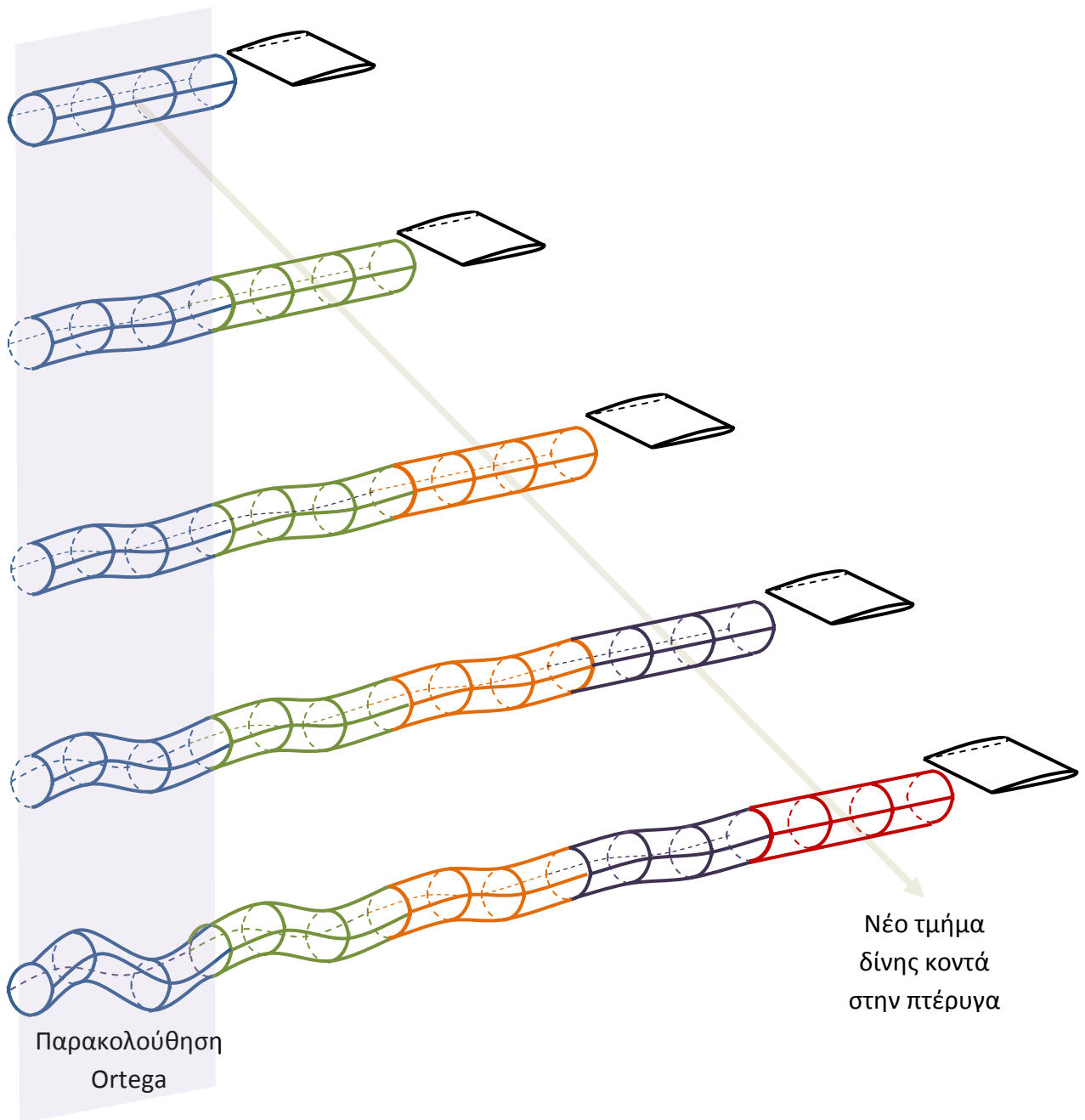
Με βάση τα πειράματα του Ortega παρατηρήσαμε ότι δημιουργείται σταδιακά μία διαταραχή στις δίνες flap καθώς απομακρυνόμαστε από το πτερύγιο με επαναλαμβανόμενο μοτίβο (δηλαδή περιοδικότητα). Αρχικά, η διαταραχή είναι μικρή και το μοτίβο δεν είναι ευδιάκριτο. Καθώς όμως απομακρύνεται η πτέρυγα, η διαταραχή μεγαλώνει και το επαναλαμβανόμενο μοτίβο φαίνεται καλύτερα. Για παράδειγμα, όπως παρουσιάζεται από τον Ortega, σε απόσταση $22b$ φαίνεται να αναδύεται επαναλαμβανόμενο μοτίβο διαταραχής μήκους κύματος $1.2b$. Η Eulerian παρατήρηση του φαινομένου μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα για το μοτίβο, σχήμα 22, όπως παρατηρείται στα στιγμιότυπα για την δίνη flap από το πείραμα του Ortega (στο σχήμα δεν φαίνεται η περιστροφή της δίνης γύρω από τη δίνη ακροπτερυγίου, μόνο η μορφή της).



Σχήμα 22. Σχηματική (Artistic view) παράσταση τμήματος περιόδου διαταραχής δίνης flap.

Σε κάθε εικόνα φαίνεται η μορφή της δίνης στην περιοχή που παρακολουθούμε καθώς απομακρύνεται η πτέρυγα από την περιοχή. Θεωρούμε ότι οι περιοχές με μπογιά είναι περιοχές παγιδευμένης στροβιλότητας¹⁷. Με βάση το σχήμα 21 η υπόθεση ότι η αστάθεια εξελίσσεται με κάποιο περιοδικό μοτίβο στροβιλότητας, που η μορφή του εξαρτάται μόνο από την απόσταση του από την πτέρυγα, φαίνεται λογική. Η τελευταία παρατήρηση αναπαρίσταται σχηματικά στο σχήμα 23. Να σημειωθεί ότι το φαινόμενο μοντελοποιείται ως περιοδικό μόνο σε περιοχές μακριά από το πτερύγιο αλλά και μακριά από την δίνη εκκίνησης, όπου τα μεταβατικά φαινόμενα δεν είναι πλέον κυρίαρχα. Στο σχήμα 23 φαίνεται σχηματικά η αναμενόμενη εξέλιξη της δίνης στην περιοχή κοντά στην πτέρυγα έως το σχηματισμό των πρώτων διαταραχών.

¹⁷ Άρα και υλικά σημεία βάση τον 1^ο νόμο του Helmholtz

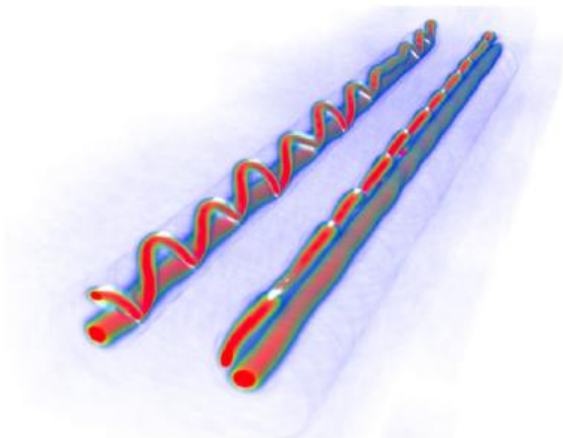


Σχήμα 23. Σταδιακή ανάπτυξη της περιοδικής διαταραχής/αστάθειας δίνης flap.

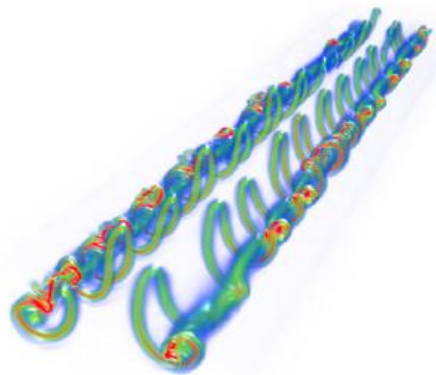
Ειδικότερα στο σχήμα 23, από τα επάνω προς τα κάτω, παρακολουθούμε την χρονική εξέλιξη τμήματος δίνης (χρώμα μπλε), με μήκος κύματος όσο της διαταραχής, καθώς απομακρύνεται από το ακροπτερύγιο. Υποτίθεται ότι το χρονικό διάστημα παραγωγής του μπλε τμήματος δίνης συμπίπτει με την περίοδο της αναμενόμενης αστάθειας. Στο ίδιο σχήμα τα τμήματα της δίνης με χρώματα πράσινο, πορτοκαλί κ.λ.π. αφορούν μεταγενέστερα χρονικά τμήματα της ίδιας δίνης. Παρατηρούμε ότι τα γειτονικά τμήματα δινών από κάποια απόσταση

από την πτέρυγα και μετά θα έχουν περίπου την ίδια μορφή. Αφού τα μήκη κύματος που παρατηρούνται είναι πολύ μικρότερα από την απόσταση τους από το πτερύγιο μπορούμε, επιπλέον, να υποθέσουμε ότι το πτερύγιο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα αλλά μόνο οι γειτονικές σε αυτό δίνες. Σημειώνουμε, ότι δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα για την επιρροή που έχει η δίνη εκκίνησης αφού δεν γνωρίζουμε την απόλυτη χρονική στιγμή που ξεκίνησε η πτέρυγα την κίνηση της. Ο Ortega διαβεβαιώνει ότι τα πειραματικά αποτελέσματα του προέκυψαν αρκετό χρόνο αργότερα ώστε η δίνη εκκίνησης να βρίσκεται μακριά των δινών.

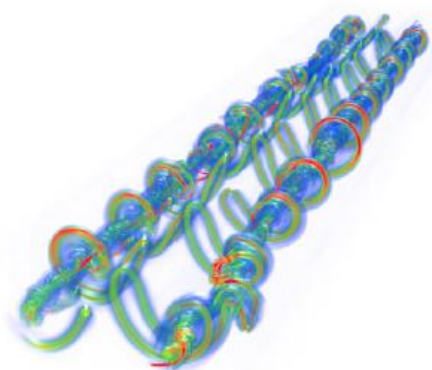
Πράγματι, λοιπόν, η υπόθεση ότι το πεδίο στροβιλότητας είναι περιοδικό αποτελεί μία εύλογη προσέγγιση. Οι επιπτώσεις της περιοδικής προσέγγισης γίνονται ιδιαίτερα αισθητές στο αριθμητικό σχήμα που θα αναπτυχθεί, αφού η μελέτη του φαινομένου αρκεί να γίνει σε μία περίοδο. Σημειώνουμε, ότι στην αριθμητική προσομοίωση του φαινομένου από την ομάδα του Π. Κουμουτσάκου η παραπάνω υπόθεση ελέγχθηκε έμμεσα χρησιμοποιώντας δισεκατομμυρία στοιχεία, όπως άλλωστε αναφέρει και ο τίτλος της εργασίας (Chatelain, Curioni, Bergdorf, Rossinelli, Adreon, & Koumoutsakos, 2008), σε μήκη αρκετά μεγαλύτερα της αναμενόμενης κλίμακας περιοδικότητας. Στο σχήμα 24, βλέπουμε μερικά αποτελέσματα του Π. Κουμουτσάκου τα οποία ενισχύουν την υπόθεση περιοδικότητας του πεδίου στροβιλότητας. Με βάση τα ανωτέρω, το πρόβλημα, ανάγεται στην επιλογή κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου η οποία πρέπει να διαχειρίζεται περιοδικά πεδία.



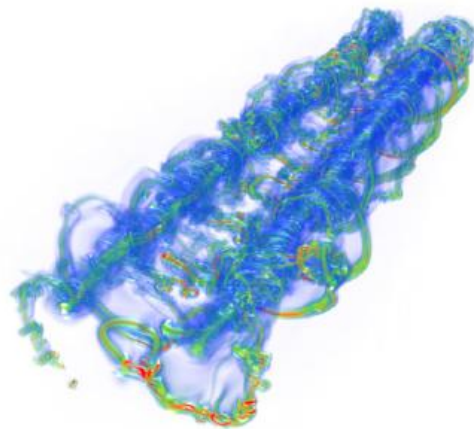
(a) $t/t_0 = 0.21$



(b) $t/t_0 = 0.25$



(c) $t/t_0 = 0.27$



(d) $t/t_0 = 0.34$

Σχήμα 24. Μοντελοποίηση της αστάθειας της δίνης ακροπτερυγίου από την ομάδα του Π. Κουμουτσάκου

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

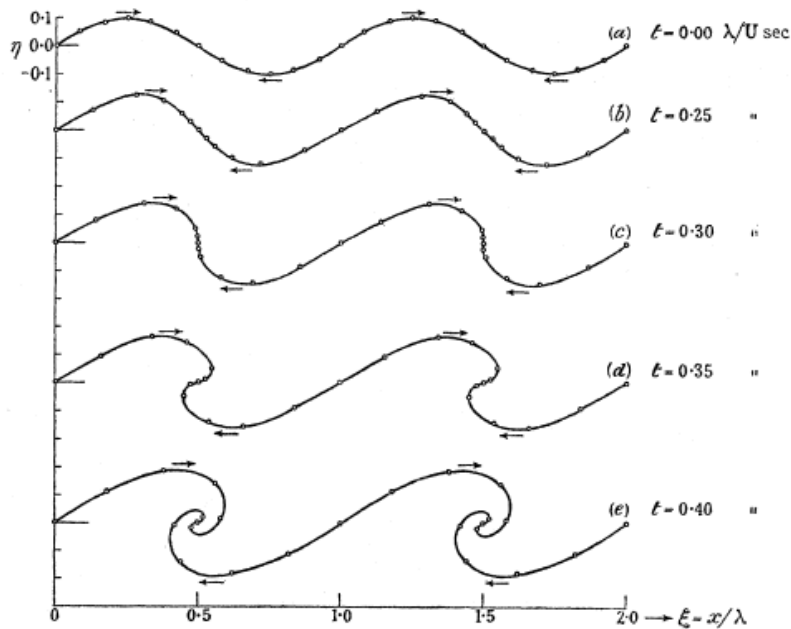
Η μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας (Vortex Particle Method) είναι μία αριθμητική μέθοδος η οποία δημιουργήθηκε για την ανάλυση προβλημάτων δυναμικής πεδίων στροβιλότητας. Η μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει οποιοδήποτε πρόβλημα δυναμικής της στροβιλότητας περιγράφοντας με απλό τρόπο το πεδίο στροβιλότητας και τις επαγόμενες ταχύτητες. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μπορούμε να αναλύσουμε περίπλοκες γεωμετρίες, προβλήματα διαχωρισμού και επανένωσης δινών αλλά και άλλες περιπτώσεις που για άλλες μεθόδους είναι δυσκολότερη ή αδύνατη. Το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι δεν απαιτείται κάποιο πλέγμα για αυτό και χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη πλέγματος (grid-free method). Από την άλλη, δεν είναι η μέθοδος επιλογής των περισσότερων επιστημόνων που ασχολούνται με προβλήματα δυναμικής των ρευστών (Voutsinas, 2006). Η βασική δυσκολία είναι ότι κατά τη λύση της εξίσωσης δυναμικής της στροβιλότητας πρέπει σε τακτά χρονικά διαστήματα να γίνεται έλεγχος του πεδίου στροβιλότητας και να αναπροσαρμόζεται. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας. Η μέθοδος χρειάζεται τροποποιήσεις ώστε να δύναται να αντιμετωπίσει περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα αθροίσματος Euler-Maclaurin θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο επεκτάθηκε η μέθοδος ώστε να συμπεριλαμβάνεται και η αντιμετώπιση περιοδικών πεδίων στροβιλότητας.

3.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή της Μεθόδου Στοιχείων Στροβιλότητας

Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία στην οποία εμφανίστηκε και χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας είναι αυτή του Rosenhead (Rosenhead L. , 1932). Ο Rosenhead ήταν ο πρώτος που αντικατέστησε ένα δισδιάστατο πεδίο στροβιλότητας με μία κατανομή στροβιλότητας¹⁸:

$$\Omega(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{12} \omega(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) \quad (59)$$

Με αυτό τον τρόπο στα σημεία \vec{R}_i βρίσκεται το διάνυσμα το οποίο παίρνουμε αποτιμώντας το διανυσματικό πεδίο στροβιλότητας σε αυτό το σημείο δηλαδή το διάνυσμα $\vec{\omega}(\vec{R}_i)$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ο Rosenhead ήταν ο πρώτος που έδωσε αποτελέσματα για την αστάθεια Kelvin-Helmholtz χρησιμοποιώντας 12 στοιχεία ($n = 12$). Το παρακάτω σχήμα 25 είναι από τη συγκεκριμένη εργασία. Βέβαια, η ιδέα της αντικατάστασης ενός συνεχούς πεδίου από μία σημειακή κατανομή δεν ήταν καινούργια. Για την ακρίβεια, ο Newton αντικατέστησε το πεδίο πυκνότητας των πλανητών με σημειακές μάζες και απέδειξε ότι οι σημειακές μάζες θα έχουν τις ίδιες μακρινές αλληλεπιδράσεις με αυτές που θα είχε το πεδίο πυκνότητας.

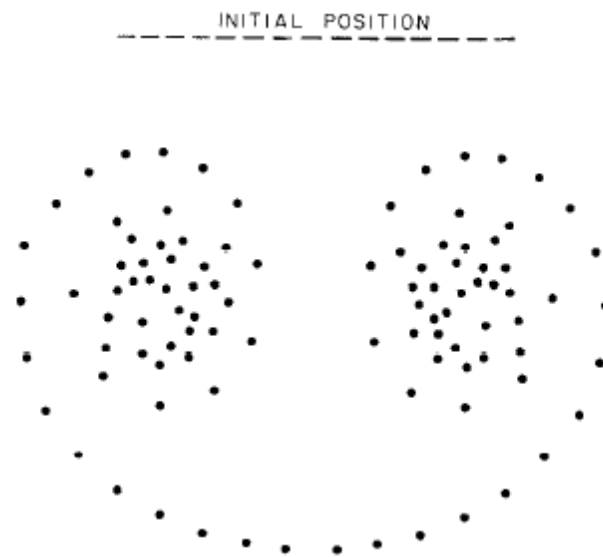


Σχήμα 25. Αριθμητική προσομοίωση αστάθειας Kelvin-Helmholtz.

¹⁸ Διακρίνουμε το πεδίο(field) στροβιλότητας από την κατανομή(distribution) στροβιλότητας

Οι πρώτες εξομοιώσεις με ηλεκτρονικό υπολογιστή, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συγκεντρωμένων ιδιοτήτων (στην οποία γενικά αναφερόμαστε ως μέθοδο n -στοιχείων) ξεκίνησε από το 1960 για προβλήματα ουράνιας δυναμικής και δυναμικής πλάσματος (για παραδείγματα απευθυνθείτε στο (Hockney & Eastwood, 1981)), ενώ για δυναμική ρευστών από το 1970.

Οι Chorin και Bernard (Chorin & Bernard, Discretization of a vortex sheet with an example of roll-up, 1973), ακολουθώντας τον Rosenhead, αναγκάστηκαν να εισάγουν μία εξομάλυνση του πεδίου ώστε να αντιμετωπίσουν τους απειρισμούς που εμφανίζονται στις επαγόμενες ταχύτητες. Τα αποτελέσματα που έδωσαν για την εξέλιξη μίας γραμμής στροβιλότητας που προκύπτει από την τομή ενός επιπέδου, κάθετου στο φύλλο διάτμησης μίας ελλειπτικά φορτισμένης πτέρυγας (σχήμα 26, συγκρίνετε αυτά με τα πειράματα καπνού στο κεφ. 2) αποδεικνύουν ότι η μέθοδος του Rosenhead είναι χρήσιμη (όπως οι ίδιοι αναφέρουν) για την περίπτωση ενός ομαλού πεδίου στροβιλότητας. Η μέθοδος συνεχίζει να εφαρμόζεται μόνο στις δύο διαστάσεις για περίπου δέκα χρόνια.



Σχήμα 26. Συστροφή ομόρου πτέρυγας με τη μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας.

Σχεδόν όλοι οι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με τη συγκεκριμένη μέθοδο ξεκίνησαν να αναπτύσσουν παρόμοιες τρισδιάστατες μεθόδους. Συγκεκριμένα, ο Leonard (Leonard, 1980) αναπτύσσει τη μέθοδο των νημάτων στροβιλότητας (vortex filament) και ο Couet 1981 (Couet, Buneman, & Leonard, 1981) παρουσίασε την πρώτη υβριδική τρισδιάστατη μέθοδο με στοιχεία στροβιλότητας. Ταυτόχρονα, οι Beale, Majda (Beale & Majda, Vortex Methods I: Convergence in three dimensions, 1982), (Beale & Majda, Vortex Methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions, 1982) και Chorin παρουσίασαν την πρώτη τρισδιάστατη μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας και απέδειξαν την σύγκλιση της μεθόδου. Η πρώτη τυπική

σύγχρονη μορφή της μεθόδου παρουσιάστηκε από τους Anderson και Greengard (Anderson & Greengard, 1985) το 1985. Την ίδια περίοδο η μέθοδος χρησιμοποιείται με επιτυχία για την μελέτη φαινομένων αεροδυναμικής από τον Σ. Βουτσινά. Μία από τις πιο πλήρης περιγραφές παρουσιάζεται από τους Winckelmans και Leonard (Winckelmans & Leonard, 1993). Στο (Winckelmans & Leonard, 1993) παρουσιάζεται και μία εκτεταμένη βιβλιογραφική επισκόπηση μαζί με την ανάλυση που παρατίθεται για διαφορετικές μορφές την μεθόδου, όπως επίσης και πλήρη επεξήγηση για συγκεκριμένα πρακτικά τμήματα της μεθόδου.

Γενικά, η μέθοδος χρησιμοποιείται σήμερα για την αντιμετώπιση τρισδιάστατων προβλημάτων μη μόνιμων ροών σε θεωρητικό επίπεδο (πολλά παραδείγματα υπάρχουν στα (Couet, Buneman, & Leonard, 1981), (Cottet & Koumoutsakos, 2000)) αλλά και για την μελέτη προβλημάτων αεροδυναμικής (πολλά παραδείγματα υπάρχουν στο (Voutsinas, 2006)).

3.2 Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας

Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας αποτελεί ένα αριθμητικό σχήμα επίλυσης του προβλήματος δυναμικής της στροβιλότητας μετατρέποντας το συνεχές πεδίο στροβιλότητας σε κατανομή στροβιλότητας. Η παρουσίαση αρχίζει με το πρόβλημα που αντιμετωπίζει το αριθμητικό σχήμα. Έπειτα, περιγράφουμε την πιο απλή μορφή της μεθόδου. Τέλος, θα αναφερθούμε σε βασικές δυσκολίες οι οποίες παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου.

3.2.1 Το Πρόβλημα Εξέλιξης της Στροβιλότητας

Τα παρακάτω σημεία συνοψίζουν το πρόβλημα εξέλιξης της στροβιλότητας:

- Για κάθε χρονική στιγμή ορίζεται το διανυσματικό δυναμικό της ταχύτητας και είναι σωληνοειδές:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} \quad (60)$$

Βάσει της παραπάνω ικανοποιείται εκ ταυτότητας η εξίσωση της συνέχειας για ροές οι οποίες μοντελοποιούνται ως ασυμπίεστες.

- Για κάθε χρονική στιγμή το σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο στροβιλότητας προκύπτει από το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας βάσει της σχέσης ορισμού της στροβιλότητας:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (61)$$

- Το διανυσματικό πεδίο θέσεων των υλικών στοιχείων της ροής \vec{R}^p εξελίσσεται όπως ορίζει η εξίσωση γραμμής ροής του πεδίου ταχύτητας, το οποίο επάγεται από το πεδίο στροβιλότητας:

$$\frac{D\vec{R}^p}{Dt} = \vec{u}(\vec{R}^p) \Rightarrow \frac{D\vec{R}^p}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\omega}(\vec{R}) \times (\vec{R}^p - \vec{R})}{|\vec{R}^p - \vec{R}|^3} dV(\vec{R}) \quad (62)$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει τις νέες θέσεις του πεδίου στροβιλότητας αφού το πεδίο στροβιλότητας αποτελείται από υλικά στοιχεία βάση τον 1^ο νόμο του Helmholtz.

- Το διανυσματικό πεδίο στροβιλότητας εξελίσσεται όπως ορίζει η εξίσωση δυναμικής εξέλιξης της στροβιλότητας για ροές που μοντελοποιούνται ως μη συνεκτικές και ασυμπίεστες:

$$\frac{D\vec{\omega}(\vec{R}^p)}{Dt} = \vec{\omega}(\vec{R}^p) \cdot \vec{\nabla} \vec{u}(\vec{R}^p) \Rightarrow$$

$$\frac{D\vec{\omega}(\vec{R}^p)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\vec{\omega}(\vec{R}) \times \vec{\omega}(\vec{R}^p)}{|\vec{R}^p - \vec{R}|^3} - 3 \frac{[(\vec{R}^p - \vec{R}) \cdot \vec{\omega}(\vec{R}^p)] [\vec{\omega}(\vec{R}) \times (\vec{R}^p - \vec{R})]}{|\vec{R}^p - \vec{R}|^5} \right) dV(\vec{R}) \quad (63)$$

- Τέλος, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\text{Αρχικό Διανυσματικό Πεδίο Θέσης Υλικών Σημείων: } \vec{R}^p(t=0) = \vec{R}^{p0}$$

$$\text{Αρχικό Διανυσματικό Πεδίο Στροβιλότητας: } \vec{\omega}(\vec{R}^{p0}, t=0) = \vec{\omega}^0$$

Να σημειωθεί ότι στην ανωτέρω παράθεση των εξισώσεων έχει γίνει η κρυφή υπόθεση ότι το πεδίο ταχύτητας οφείλεται εξ' ολοκλήρου στην κατανομή στροβιλότητας με πεδίο ορισμού τον όγκο V .

3.2.2 Μέθοδοι Στοιχείων Στροβιλότητας

Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας αποτελείται από τρία βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να χωρίσουμε το χωρίο στο οποίο υποθέτουμε ότι βρίσκεται στροβιλότητα σε μικρότερα χωρία, δηλαδή διακριτοποιούμε το πεδίο ορισμού της στροβιλότητας ή ένα τμήμα αυτού. Το δεύτερο είναι να μετατρέψουμε το πεδίο στροβιλότητας σε κατανομή στροβιλότητας, δηλαδή κατά μία έννοια «διακριτοποιούμε» την ίδια την συνάρτηση στροβιλότητας. Το τρίτο βήμα είναι να γράψουμε το νόμο Biot-Savart και την εξίσωση δυναμικής εξέλιξης για την κατανομή της στροβιλότητας και να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν, οπότε να εκφράσουμε τις εξισώσεις του προβλήματος σε διακριτοποιημένη μορφή.

Ας ξεκινήσουμε με την παρουσίαση των δύο πρώτων βημάτων. Το πεδίο ορισμού της στροβιλότητας D (support, $\text{supp } \vec{\omega}$), χωρίζεται σε n διαμερίσεις V_i . Θα αναφερόμαστε στο D και στο $\text{supp } \vec{\omega}$ ως V , ανάλογα με την περίπτωση προς αντιμετώπιση. Γενικά, το V είναι

ένα υποσύνολο του R^3 , $V \subseteq R^3$ και για τα V_i ισχύει $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Για παράδειγμα, αν το πεδίο στροβιλότητας προκύπτει από μία δίνη περιστροφής στερεού σώματος το πεδίο ορισμού είναι $D = R^3$ και $\text{supp } \vec{\omega} = R^3$. Ενώ αν το πεδίο στροβιλότητας προκύπτει από μία δίνη Lamb-Oseen, έχουμε $D = R^3$ και για το support πρέπει σε αυτή την περίπτωση να αποφασίσουμε κάποια ιδιότητα η οποία θα το περιορίσει ώστε να μην έχει άπειρο μέτρο, αποφασίζουμε για παράδειγμα να βρίσκεται εντός του V ένα σημαντικό ποσοστό της στροβιλότητας οπότε:

$$\text{supp } \vec{\omega} = \{(r, \theta, z) : 0 < r < 0.23R_\Delta, 0 < \theta < 2\pi, z \in R\} \text{ ώστε να βρίσκεται το } 0.95\omega_0$$

Αντίστοιχα, για την δίνη Rankine έχουμε $D = R^3$ και

$$\text{supp } \vec{\omega} = \{(r, \theta, z) : 0 < r < R_\Delta, 0 < \theta < 2\pi, z \in R\}$$

Στις παραπάνω περιπτώσεις τα χωρία V εκτείνονται ως το άπειρο. Η μορφή της μεθόδου όπως παρουσιάζεται εδώ δεν εφαρμόζεται σε τέτοιες περιπτώσεις και σε αυτή την ενότητα τα χωρία υποθέτουμε ότι είναι κλειστά. Στην περίπτωση πεδίων στροβιλότητας που εκτείνονται ως το άπειρο πρέπει να τοποθετήσουμε άπειρα στοιχεία στροβιλότητας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για να εφαρμόσουμε τα όσα ακολουθούν σε αυτή την παράγραφο, πρέπει να επιλέξουμε κατά βούληση ένα κλειστό και αρκετά μεγάλο support. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και για την μελέτη πεδίων που εκτείνονται ως το άπειρο και είναι περιοδικά. Τα όσα, λοιπόν, ακολουθούν σε αυτή την ενότητα αναφέρονται μόνο σε πεδία στροβιλότητας με πεδία ορισμού τα οποία είναι κλειστά χωρία.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε αποφασίσει ποιο θα είναι το χωρίο V το οποίο θα χωρίσουμε σε διαμερίσεις. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι έχουμε χωρίσει το V σε διαμερίσεις $V_i, i = 1, 2, \dots, n$. Σημειώνουμε, η διαδικασία κατασκευής των διαμερίσεων V_i του χωρίου V δεν είναι απλή. Θα σχολιάσουμε την τελευταία πρόταση στην επόμενη παράγραφο. Σε κάθε διαμέριση V_i αντιστοιχούμε το διάνυσμα $\vec{\Omega}_i$ το οποίο προκύπτει ως:

$$\vec{\Omega}_i = \iiint_{V_i} \vec{\omega}(\vec{R}) dV(\vec{R}) \quad (64)$$

Παρατηρούμε ότι η μονάδα μέτρησης του διάνυσματος $\vec{\Omega}_i$ είναι m^3/s . Το παραπάνω δεν εκφράζει ένα διάνυσμα στροβιλότητας αλλά ένα «ολοκληρωτικό μέτρο» του πεδίου

στροβιλότητας πάνω στο V_i όπου υπολογίζουμε. Στην συνέχεια αποφασίζουμε το σημείο \vec{p}_i που θα τοποθετήσουμε το $\vec{\Omega}_i$, συνηθισμένες επιλογές είναι:

- το κέντρο μάζας:

$$\vec{p}_i = \frac{\iiint_{V_i} \rho(\vec{R}) \vec{R} dV(\vec{R})}{\iiint_{V_i} \rho(\vec{R}) dV(\vec{R})} \quad (65)$$

- το κέντρο στροβιλότητας:

$$\vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i = \iiint_{V_i} \vec{\omega}(\vec{R}) \times \vec{R} dV(\vec{R}) \quad (66)$$

όπου $\rho(\vec{r})$ το πεδίο πυκνότητας του συνεχούς.

Τα \vec{p}_i και $\vec{\Omega}_i$ εξαρτώνται άμεσα από την επιλογή των V_i . Με αυτό τον τρόπο φτιάξαμε την κατανομή στροβιλότητας $\vec{\Omega}$ η οποία γράφεται ως:

$$\vec{\Omega}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{\Omega}_i \delta(\vec{r} - \vec{p}_i) \quad (67)$$

Η σχέση (67) αποτελεί την διακριτοποιημένη μορφή του πεδίου στροβιλότητας με συναρτήσεις παρεμβολής τις Dirac δ , έκαστη με στήριξη το σημείο \vec{p}_i . Έτσι το διανυσματικό πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega}$ προσεγγίζεται από την κατανομή στροβιλότητας $\vec{\Omega}$ (Voutsinas, 2006):

$$\vec{\omega}(\vec{r}) \approx \vec{\Omega}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{\Omega}_i \delta(\vec{r} - \vec{p}_i) \quad (68)$$

Από την παραπάνω διακριτοποιημένη μορφή καταλήγουμε σε μία απλή σχέση για την επαγόμενη ταχύτητα.

Ξεκινάμε από το διανυσματικό δυναμικό, αντικαθιστούμε το πεδίο στροβιλότητας από τη σχέση (68) και χρησιμοποιούμε τον ορισμό της Dirac $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)$:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{\omega}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) \Rightarrow \bar{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\sum_{i=1}^n \bar{\Omega}_i \delta(\vec{R}-\vec{p}_i)}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) \Rightarrow \\ \bar{\Psi}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \bar{\Omega}_i \iiint_V \frac{\delta(\vec{R}-\vec{p}_i)}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(\vec{R}) \Rightarrow \bar{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Omega}_i}{|\vec{r}-\vec{p}_i|}\end{aligned}\quad (69)$$

Από το διανυσματικό δυναμικό άμεσα προκύπτει η ταχύτητα :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Omega}_i \times (\vec{r}-\vec{p}_i)}{|\vec{r}-\vec{p}_i|^3} \quad (70)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εφαρμόζοντας στη σχέση (11) για την ταχύτητα, το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, με την υπόθεση ότι για κάθε ολοκλήρωμα το σημείο p_i είναι το πιο αντιπροσωπευτικό. Δηλαδή έχουμε:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \frac{\bar{\omega}(\vec{R}) \times (\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} dV(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \bar{\omega}(\vec{R}) dV(\vec{R}) \times \frac{(\vec{r}-\vec{p}_i)}{|\vec{r}-\vec{p}_i|^3} \quad (71)$$

Αν ζητάμε την ταχύτητα σε μία θέση εντός του V σε κάποιο σημείο από τα αντιπροσωπευτικά σημεία των ολοκληρωμάτων, για παράδειγμα το p_j , απλά αυτό εξαιρείται από τους υπολογισμούς:

$$\vec{u}(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\bar{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \quad (72)$$

Το διανυσματικό πεδίο θέσεων των υλικών στοιχείων της ροής, το οποίο πλέον αποτελείται από τα σημεία p_i εξελίσσεται βάση της (βλ. (Voutsinas, 2006)):

$$\frac{D\vec{p}_j}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\bar{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \quad (73)$$

Αντίστοιχα η εξίσωση δυναμικής εξέλιξης της κατανομής στροβιλότητας είναι (κατ' αντιστοιχία με την εξίσωση (37)):

$$\frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = \vec{\Omega}_j(\vec{\nabla}u) \Rightarrow \frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} - 3 \frac{[(\vec{p}_j - \vec{p}_i) \cdot \vec{\Omega}_j][\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)]}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^5} \right) \quad (74)$$

Οι εξισώσεις (73), (74) αποτελούν ένα μη γραμμικό αυτόνομο¹⁹ σύστημα $2n$ διαφορικών εξισώσεων με $2n$ αγνώστους, τα διανύσματα θέσεως $p_i, i=1,2,\dots,n$ και τα διανύσματα $\Omega_i, i=1,2,\dots,3$ οι οποίες μπορούν να λυθούν σχετικά απλά.

Συνοψίζοντας, η μέθοδος των στοιχείων στροβιλότητας αποτελείται από τρία βήματα, που διαγραμματικά φαίνονται στο σχήμα 27. Το πρώτο βήμα είναι να χωρίσουμε το χωρίο V σε διαμερίσεις. Υπενθυμίζουμε ότι πεδία στροβιλότητας τα οποία εκτείνονται ως το άπειρο δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν από την μέθοδο με την μορφή που παρουσιάζεται παραπάνω. Το δεύτερο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τα στοιχεία στροβιλότητας. Η σχέση (64) δίνει το διάνυσμα $\vec{\Omega}_i$ του i στοιχείου στροβιλότητας, ενώ οι σχέσεις (65),(66) είναι δύο πιθανές επιλογές για την θέση \vec{p}_i του i στοιχείου στροβιλότητας. Το τελευταίο βήμα είναι να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος. Σε κάθε χρονικό βήμα, προσδιορίζουμε μία νέα θέση και ένα νέο διάνυσμα $\vec{\Omega}_i$ και επαναλαμβάνουμε την λύση των διαφορικών. Στην συγκεκριμένη μορφή της μεθόδου αναφερόμαστε και ως μέθοδο σημειακών στοιχείων στροβιλότητας.

Εισάγοντας το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{e}_{ij} από το \vec{p}_i στο \vec{p}_j οι διαφορικές εξισώσεις (73), (74) γράφονται ως εξής:

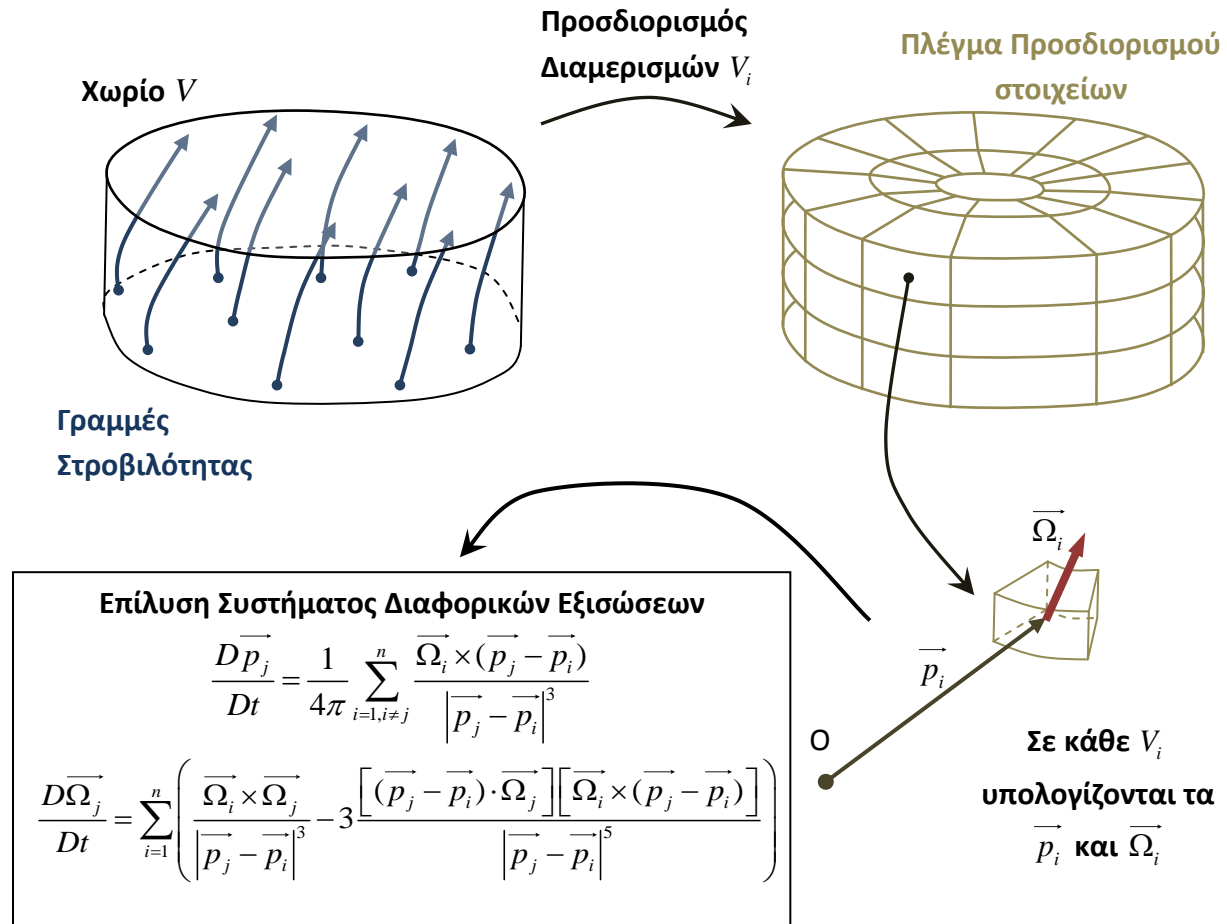
$$\vec{u}(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_{ij}}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^2} \quad (75)$$

$$\frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j - 3[\vec{e}_{ij} \cdot \vec{\Omega}_j][\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_{ij}]}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \right) \quad (76)$$

Παρατηρούμε ότι όταν ο αριθμός των στοιχείων γίνει μεγάλος ή τα στοιχεία βρεθούν κοντά, οι παρονομαστές των κλασμάτων θα είναι μικροί. Σαν αποτέλεσμα θα εμφανιστούν απειρισμοί (πολύ μεγάλοι όροι) οι οποίοι θα καταστρέψουν ξαφνικά τη λύση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι

¹⁹ Δεν είναι άμεσα εξαρτημένο από τον χρόνο

λογικό αφού η κατανομή στροβιλότητας ανακατασκευάστηκε από Dirac-δ συναρτήσεις, οι οποίες δεν ικανοποιούν επαρκείς συνθήκες λειότητας για να υπολογίζεται καλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα του νόμου Biot Savart.



Σχήμα 27. Διαγραμματική παρουσίαση της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποιούμε συναρτήσεις παρεμβολής (ή δοκιμών, test functions) για την στροβιλότητα οι οποίες είναι ομαλές. Η συνάρτηση $\zeta: R^3 \rightarrow R$ ορίζει μία ακολουθία από C^∞ συναρτήσεις η οποία οριακά τείνει στην Dirac-δ. Έτσι διατηρούμε τα πλεονεκτήματα της αρχικής κατανομής με συναρτήσεις Dirac-δ ενώ ομαλοποιείται το αποτέλεσμα. Οι συναρτήσεις $\zeta: R^3 \rightarrow R$ ονομάζονται συναρτήσεις αποκοπής (cutoff functions) και πρέπει να τηρούν ορισμένες προϋποθέσεις ώστε να είναι προσεγγίσεις της Dirac-δ (Winckelmans & Leonard, 1993), (Cottet & Koumoutsakos, 2000). Υπάρχουν πολλά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων. Για περισσότερες πληροφορίες και παραδείγματα παραπέμπουμε στα (Winckelmans & Leonard, 1993) (Beale & Majda, Vortex Methods I: Convergence in three dimensions, 1982), (Beale & Majda, Vortex Methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions, 1982), (Anderson & Greengard, 1985) και (Cottet

& Koumoutsakos, 2000). Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση αποκοπής με σφαιρική συμμετρία:

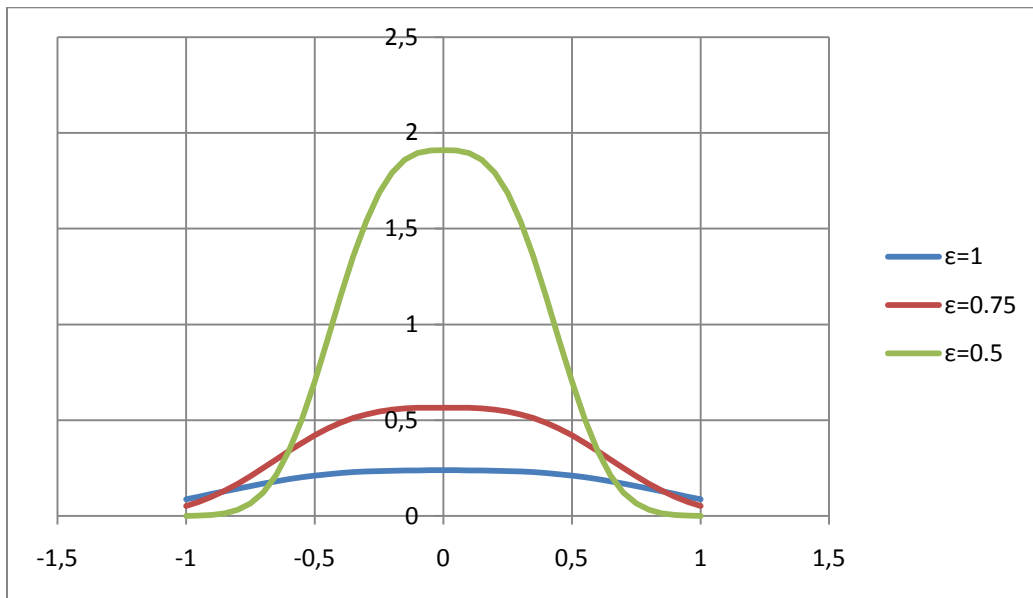
$$\zeta(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \exp\left(-|\vec{r}|^3\right) \quad (77)$$

Το πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega}$ προσεγγίζεται έτσι από την κατανομή στροβιλότητας $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\omega}(\vec{r}) \approx \vec{\Omega}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{\Omega}_i \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{p}_i|^3}{\varepsilon^3}\right) \quad (78)$$

Όπου η παράμετρος ε καθορίζει το όριο της αποκοπής.

Στο σχήμα 28 φαίνεται η συνάρτηση αποκοπής, σχέση (77), για διάφορες τιμές της παραμέτρου ε . Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αποκοπής επιδρά με τέτοιο τρόπο ώστε το $\vec{\Omega}_i$ να μην είναι πλέον συγκεντρωμένο σε ένα σημείο αλλά κατανεμημένο στην σφαίρα ακτίνας περίπου ίση με ε και κέντρο \vec{p}_i . Για αυτό τον λόγο η μέθοδος με την εισαγωγή της συνάρτησης αποκοπής ονομάζεται και μέθοδος σταγόνων στροβιλότητας (vortex blob).



Σχήμα 28. Συνάρτηση αποκοπής $\vec{p}_i \equiv 0$, σχέση (77), για διάφορες τιμές της παραμέτρου ε .

Με αντικατάσταση της σχέσης (78) στη σχέση (62) προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την επαγόμενη ταχύτητα:

$$\vec{u}(\vec{p}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \vec{\Omega}_j \times \left[\frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iiint_{V_j} \frac{\exp\left(-\frac{|\vec{R}-\vec{p}_j|^3}{\epsilon^3}\right) (\vec{p}_i - \vec{R})}{|\vec{p}_i - \vec{R}|^3} dV(\vec{R}) \right] \quad (79)$$

Υποθέτοντας $|\vec{R}| \ll |\vec{p}_i|$, ο λόγος $\frac{(\vec{p}_i - \vec{R})}{|\vec{p}_i - \vec{R}|^3}$ μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερά στη ολοκλήρωση και να εξέλθει του ολοκληρώματος όγκου. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το σημείο \vec{p}_j , τότε το ολοκλήρωμα στον όγκο V_j μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από τη σχέση:

$$\frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iiint_{V_j} \exp\left(-\frac{|\vec{R}|^3}{\epsilon^3}\right) dV(\vec{R}) = \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int_{\Omega=0}^{4\pi} \int_{R=0}^r \exp\left(-\frac{|\vec{R}|^3}{\epsilon^3}\right) R^2 d\Omega dR = \left(1 - \exp\left(-\frac{|\vec{R}|^3}{\epsilon^3}\right)\right) \quad (80)$$

Τελικά η σχέση για την ταχύτητα γίνεται:

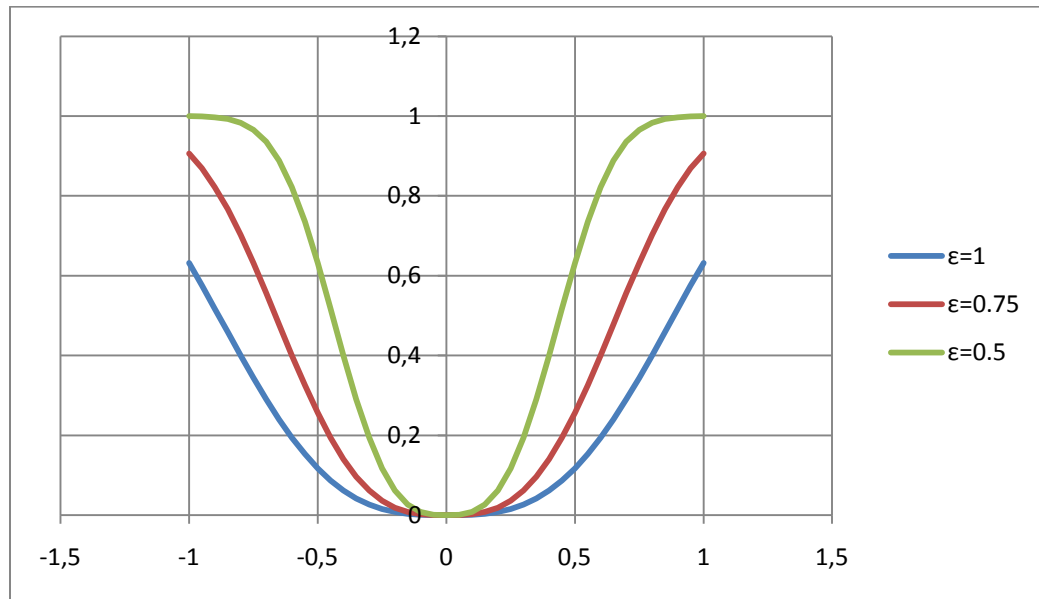
$$\vec{u}(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3}{\epsilon^3}\right)\right) \quad (81)$$

Αντίστοιχα η σχέση (63) γίνεται:

$$\frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3}{\epsilon^3}\right)\right) - 3 \frac{[(\vec{p}_j - \vec{p}_i) \cdot \vec{\Omega}_j][\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)]}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^5} \left[1 - \left(1 + \frac{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3}{\epsilon^3}\right) \exp\left(-\frac{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3}{\epsilon^3}\right)\right] \right) \quad (82)$$

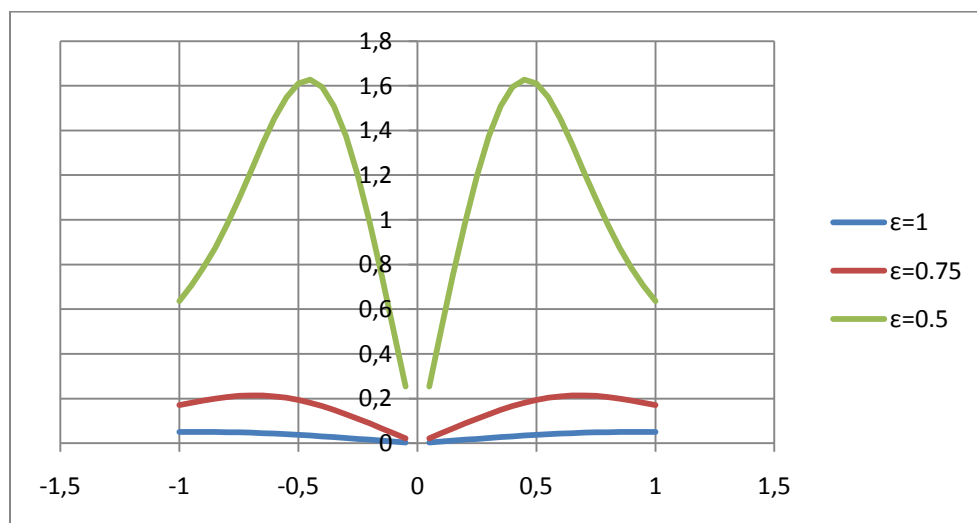
Στο σχήμα 29 φαίνεται η μεταβολή του όρου $\left(1 - e^{-\left(\frac{r^3}{\epsilon^3}\right)}\right)$ συναρτήσει της απόστασης r με παράμετρο το ϵ . Όπως φαίνεται, ο όρος αυτός τείνει στη μονάδα καθώς απομακρυνόμαστε

από το σημείο \vec{p}_j . Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι κάθε όρος που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος των σχέσεων (81), (82) όταν υπολογίζεται σε μακρινές επαγωγές θα ταυτίζεται με το αποτέλεσμα που θα έδινε η μέθοδος σημειακών στοιχείων στροβιλότητας.



Σχήμα 29. Μεταβολή του όρου $(1 - e^{\left(-\frac{r^3}{\epsilon^3}\right)})$ συναρτήσει της r με παράμετρο το ϵ .

Στο σχήμα 30 φαίνεται η επίδραση της συνάρτησης αποκοπής στην κατανομή ταχύτητας στη γειτονιά σταγόνας στροβιλότητας συναρτήσει της ακτίνας της σταγόνας ϵ .



Σχήμα 30. Επίδραση της συνάρτησης αποκοπής στην κατανομή ταχύτητας στη γειτονιά σταγόνας στροβιλότητας.

Τέλος, αν επιλέξουμε την παράμετρο αποκοπής ε να μεταβάλλεται ανάλογα με το στοιχείο που βρισκόμαστε, τότε η μοναδική αλλαγή στις παραπάνω σχέσεις είναι να αντικαταστήσουμε όπου ε το ε_i . Καταλήγουμε έτσι στη μέθοδο μεταβλητής σταγόνας. Για μία πλήρη παρουσίαση και διαφοροποιήσεις της μεθόδου παραπέμπουμε στο (Winckelmans & Leonard, 1993).

Κλείνουμε την παράγραφο με δύο τελευταία σχόλια. Πρώτον, η εμφάνιση του γενικευμένου ολοκληρώματος στη σχέση (79) θα πρέπει να οδηγεί κανονικά σε αριθμητικό υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων όταν το σημείο ελέγχου βρεθεί στην περιοχή στήριξης της συνάρτησης αποκοπής. Κάτι τέτοιο δεν γίνεται κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου. Δεύτερον, στην περίπτωση της ακριβής σχέσης (79), αν υπολογίσουμε την επαγόμενη ταχύτητα στο κέντρο του όγκου αποκοπής (self induced velocity) το αποτέλεσμα βγαίνει μηδέν. Αυτό δικαιολογεί την εξαίρεση του σημείου j από το άθροισμα που εμφανίζεται στη σχέση (81). Επιπλέον ικανοποιείται και από την μορφή της ταχύτητας στη γειτονία σημείου με την εισαγωγή της συνάρτησης αποκοπής, σχήμα 30.

3.2.3 Η Μέθοδος στην Πράξη

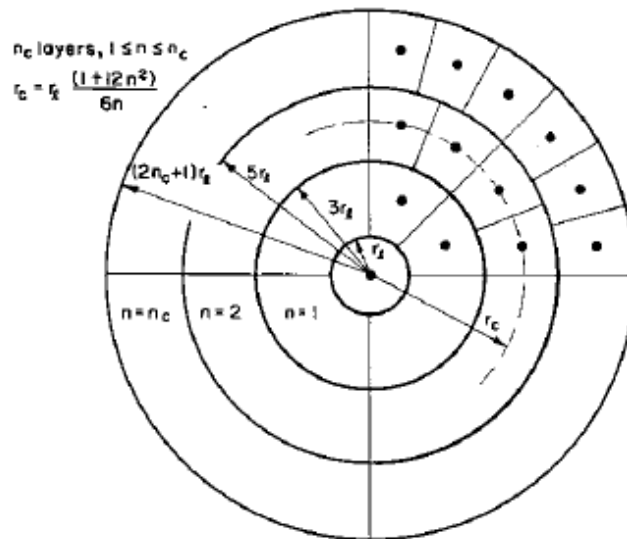
Η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας μπορεί να δώσει πολύ καλά αποτελέσματα για το πρόβλημα που αντιμετωπίζει. Όπως σε κάθε μέθοδο, υπάρχουν συγκεκριμένα σημεία τα οποία απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή για την επιτυχία της μεθόδου. Διευκρινίζουμε ότι όταν αναφερόμαστε σε μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας αναφερόμαστε κατά βάση στην ομαλή εκδοχή της. Ο Rosenhead, όπως είπαμε χρησιμοποίησε την σημειακή εκδοχή της μεθόδου για υπολογισμούς με 12 στοιχεία. Όταν τα στοιχεία είναι τόσο αραιά δεν απαιτείται η εξομάλυνση των δεύτερων μελών των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και στην περίπτωση μακρινών επαγωγών. Στα σύγχρονα προβλήματα δυναμικής κατά κύριο λόγο οι αλληλεπιδράσεις που μας ενδιαφέρουν είναι κοντινές και ο αριθμός των στοιχείων πολύ μεγάλος, οπότε απαιτείται οπωσδήποτε εξομάλυνση. Ας δούμε κάθε βήμα ξεχωριστά.

Το πεδία στροβιλότητας μπορεί είτε να δημιουργούνται μέσα στη ροή από κάποιο στερεό σώμα (όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1) είτε να έχουμε ένα προκαθορισμένο πεδίο στροβιλότητας προς μελέτη. Για την πρώτη περίπτωση παραπέμπουμε στο (Voutsinas, 2006). Ασχολούμαστε εξ' ολοκλήρου με την δεύτερη περίπτωση.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι δίνεται ένα πεδίο στροβιλότητας το οποίο βρίσκεται σε ένα χωρίο V . Το πρώτο βήμα είναι να δημιουργήσουμε ένα παρεμβολικό σχήμα για την συνεχή κατανομή στροβιλότητας. Για το σκοπό αυτό απαραίτητο είναι να ορίσουμε ένα πλέγμα πάνω στο V ώστε να γίνει η διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού(ή του support). Στο πλέγμα θα γίνουν οι απαραίτητες ολοκληρώσεις για να ορίσουμε τις εντάσεις των στοιχείων στροβιλότητας που θα χρησιμοποιηθούν σαν βάση για την δημιουργία παρεμβολικού

σχήματος πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας. Οπότε ο αριθμός των στοιχείων θα είναι συγκεκριμένος. Η παράμετρος ε σε σχέση με τις αποστάσεις των στοιχείων είναι ιδιαίτερα σημαντική. Για την ακρίβεια έχει αποδειχθεί (Cottet & Koumoutsakos, 2000) ότι για την σύγκλιση της μεθόδου πρέπει το παρεμβολικό σχήμα για την στροβιλότητα να είναι τέτοιο, ώστε η στροβιλότητα κάθε στοιχείου να ανακατανέμεται, μέσω των παρεμβολικών συναρτήσεων, με στήριξη τέτοια ώστε να καλύπτει γειτονικά του στοιχεία. Δηλαδή ο λόγος ε/h , όπου h η απόσταση μεταξύ των στοιχείων να είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Επίσης, πρέπει $\varepsilon < 1$ ώστε να προσεγγίζει η συνάρτηση αποκοπής όσο το δυνατόν καλύτερα την Dirac- δ . Για το σκοπό αυτό προτείνουμε η πρώτη απόφαση να είναι αυτή του επιθυμητού αριθμού επικάλυψης των στοιχείων με τα γειτονικά του, δηλαδή ένα στοιχείο πόσα γειτονικά του θα επικαλύπτει. Ο αριθμός αυτός δεν χρειάζεται να είναι σταθερός. Πρακτικά όμως φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερος είναι τόσο καλύτερα είναι τα αποτελέσματα που έχουμε.

Στο παρακάτω σχήμα 31 βλέπουμε τα χωρία V_i σε μία τομή στον πυρήνα μίας δίνης όπως προτείνεται στο (Winckelmans & Leonard, 1993). Η βασική ιδιότητα με την οποία έχει κατασκευαστεί είναι οι όγκοι όλων των στοιχείων να είναι ίσοι. Παρακάτω περιγράφουμε μία γενική μεθοδολογία για την δημιουργία παρόμοιων πλεγμάτων την οποία χρησιμοποιούμε. Η απόφαση περί του ποιος θα είναι ο διαμερισμός που θα χρησιμοποιήσουμε δεν είναι τετριμμένη. Για περισσότερες πληροφορίες για τον διαμερισμό του πεδίου και λύσεις προβλημάτων που εμφανίζονται παραπέμπουμε στο (Cottet & Koumoutsakos, 2000).



Σχήμα 31. Προτεινόμενη διακριτοποίηση πυρήνα δίνης (Winckelmans & Leonard, 1993).

Αφού, λοιπόν, υπολογίσουμε τα \overline{p}_i και $\overline{\Omega}_i$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Προτείνουμε τη λύση του συστήματος με ένα αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta

τετάρτης τάξης και χαμηλών απαιτήσεων σε μνήμη, όπως παρουσιάζεται στο (Hockney & Eastwood, 1981). Καθώς μετακινούνται τα στοιχεία, το αποτέλεσμα είναι η επικάλυψη που επιβάλλαμε όταν κατασκευάσαμε το πεδίο, να μεταβάλεται. Στα πλαίσια της μεταβολής αυτής πιθανό σενάριο είναι και η καταστροφή της επικάλυψης. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται «κενά» στη κατανομή στροβιλότητας και το αριθμητικό σχήμα χάνει τις ιδιότητες σύγκλισης που είχε. Για την αντιμετώπιση του θέματος αυτού απαιτείται σε τακτά χρονικά βήματα η αναδιανομή των στοιχείων ώστε να διατηρείται η επικάλυψη τους. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού αναπτύξαμε ένα σχήμα επανατοποθέτησης των στοιχείων με βάση τις γραμμές στροβιλότητας. Η ανάπτυξη του σχήματος θα γίνει σε επόμενη παράγραφο. Για μεθοδολογίες λύσεων του προβλήματος αναδιανομής των στοιχείων στροβιλότητας που χρησιμοποιούνται επιτυχώς παραπέμπουμε στα (Voutsinas, 2006), (Cottet & Koumoutsakos, 2000).

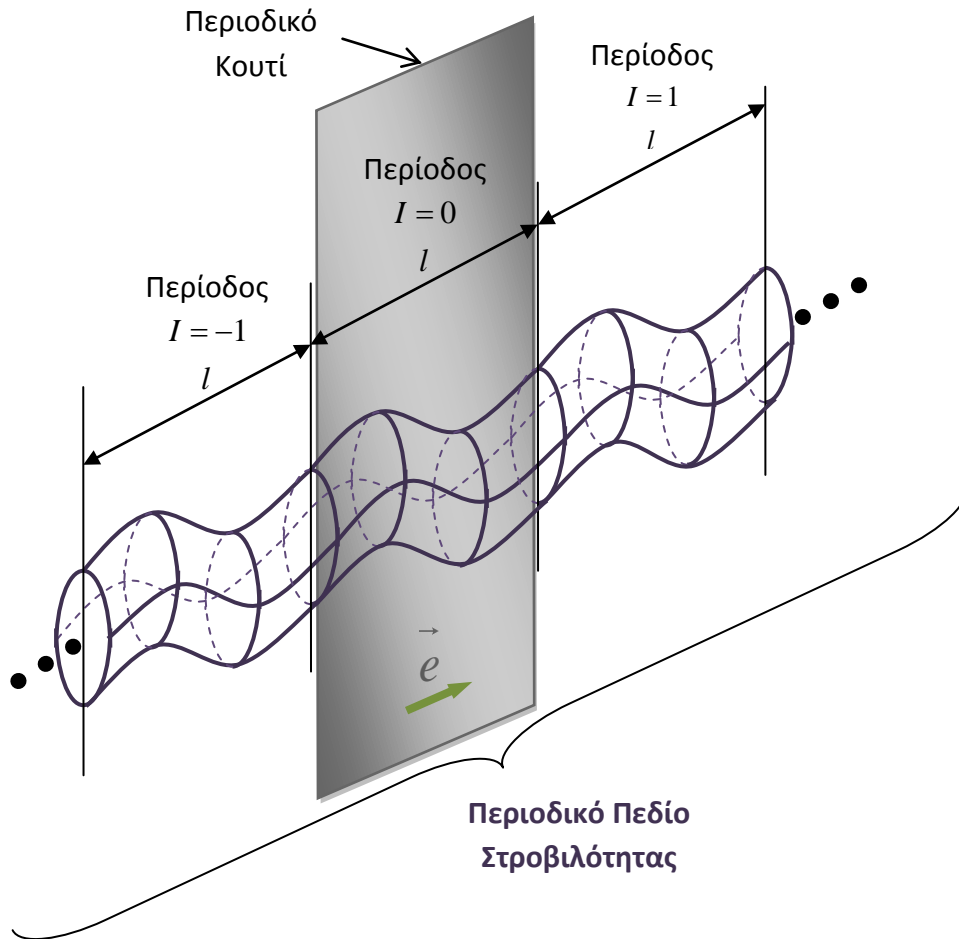
3.3 Η Μέθοδος Στοιχείων Στροβιλότητας για Περιοδικά Πεδία Στροβιλότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις απαραίτητες προσθήκες που κάναμε στη μέθοδο ώστε να είναι δυνατή η επίλυση προβλημάτων δυναμικής περιοδικών πεδίων στροβιλότητας. Ο λόγος για τον οποίο απαιτείται η συγκεκριμένη επέκταση για την μέθοδο είναι ότι τα πεδία ορισμού περιοδικών πεδίων στροβιλότητας εκτείνονται έως το άπειρο. Όπως αναφέρουμε στην προηγούμενη ενότητα, αν το πεδίο ορισμού είναι ανοικτό τότε απαιτούνται άπειρα στοιχεία στροβιλότητας για την εφαρμογή της μεθόδου ή η επιλογή ενός αρκετά μεγάλου support. Η επιλογή του πεπερασμένου support έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση προβλημάτων στα στοιχεία στροβιλότητας που βρίσκονται στα άκρα του support. Τα προβλήματα αυτά έχουν να κάνουν με την λανθασμένη επιλογή μοντελοποίησης αναπαράστασης ενός κατά τα άλλα άπειρου πεδίου με ένα πεπερασμένο. Η επέκταση της μεθόδου αρχίζει χωρίζοντας το ανοικτό πεδίο σε δύο ανοικτά και ένα κλειστό πεδίο. Η επέκταση προτείνει το κλειστό πεδίο να το διαχειριζόμαστε όπως στην προηγούμενη ενότητα, ενώ οι επαγωγές στα δύο ανοικτά πεδία να γίνονται προσεγγιστικά. Όπως θα δούμε παρακάτω, γράφοντας τη σχέση για την επαγόμενη ταχύτητα και το διάνυσμα ρυθμού μεταβολής των τροπών, προκύπτουν αθροίσματα άπειρων όρων, δηλαδή σειρές, τα οποία μπορούμε να διαχειριστούμε προσεγγίζοντας τα ασυμπτωτικά.

3.3.1 Περιοδικά Πεδία Στροβιλότητας

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται ένα πεδίο στροβιλότητας το οποίο είναι περιοδικό κατά μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{e} , δηλαδή το πεδίο επαναλαμβάνεται κατά τη φορά που ορίζει το διάνυσμα \vec{e} . Το πεδίο ορισμού (ή το support) ενός τέτοιου πεδίου στροβιλότητας είναι ανοικτό. Η διαδικασία αρχίζει χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε χωρία τα οποία ονομάζουμε περιόδους. Τα χωρία αυτά επαναλαμβάνονται κατά την κατεύθυνση \vec{e} . Κάθε ένα από αυτά τα χωρία αποτελεί ένα χωρίο V , στο οποίο γίνεται ο διαμερισμός. Σε όλες τις περιόδους κάνουμε τον ίδιο διαμερισμό. Αφού οι περίοδοι επαναλαμβάνονται τα στοιχεία στροβιλότητας θα είναι τα ίδια αλλά μετατοπισμένα παράλληλα κατά την διεύθυνση \vec{e} και απόσταση ίση με το μήκος κύματος ή μήκος περιοδικού κουτιού l . Σε κάθε περίοδο, και άρα σε κάθε χωρίο V , βρίσκουμε τα \vec{p}_i , $\vec{\Omega}_i$ και προσδιορίζουμε τα n στοιχεία στροβιλότητας για κάποια περίοδο. Αντιστοιχούμε σε μία περίοδο τον αριθμό μηδέν. Η περίοδος αυτή θα είναι η βασική περιοχή την οποία και θα παρατηρούμε κατά την εξέλιξη του φαινομένου και την ονομάζουμε περιοδικό χωρίο ή κουτί με μήκος κύματος ή μήκος περιοδικού κουτιού l . Σε κάθε άλλη περίοδο αντιστοιχούμε τον

αριθμό $I \in \mathbb{Z}$ όπως στο σχήμα 32. Αναφερόμαστε στα στοιχεία της περιόδου μηδέν ως \vec{p}_i^0 , $\vec{\Omega}_i^0$, δηλαδή ο κάτω δείκτης αριθμεί τα στοιχεία σε κάθε περίοδο I (εδώ στη μηδέν) και ο πάνω δείκτης την περίοδο.



Σχήμα 32. Περιοδικό πεδίο στροβιλότητας και το περιοδικό χωρίο-κουτί

Επειδή σε κάθε περίοδο έχουμε κάνει τον ίδιο διαμερισμό και το μήκος του περιοδικού κουτιού είναι l η περιοδικότητα του πεδίου στροβιλότητας για την κατανομή στροβιλότητας μπορεί να εκφραστεί από τις δύο παρακάτω σχέσεις.

$$\vec{p}_i^I = \vec{p}_i^0 + eI \quad (83)$$

$$\vec{\Omega}_i^I = \vec{\Omega}_i^0 \quad (84)$$

δηλαδή, οι θέσεις \vec{p}_i^I και τα διανύσματα κατανομής $\vec{\Omega}_i^I$ αλλάζουν όπως τα \vec{p}_i^0 και $\vec{\Omega}_i^0$. Αυτό ισχύει στην περίπτωση που το μήκος του περιοδικού κουτιού παραμένει σταθερό κατά την

εξέλιξη του φαινομένου. Το μήκος του περιοδικού κουτιού ορίζει μια χαρακτηριστική κλίμακα μήκους για το πεδίο στροβιλότητας, η υπόθεση ότι αυτό παραμένει σταθερό αφορά αποκλειστικά την μοντελοποίηση του φαινομένου. Εμείς, δεχόμαστε ότι το μήκος του περιοδικού κουτιού παραμένει σταθερό. Το ίδιο ισχύει και για το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{e} .

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ν περιόδους οπότε ο Biot-Savart γίνεται (η εξομάλυνση του πεδίου θα συμπεριληφθεί αργότερα):

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{I=-\nu}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^I \times (\vec{r} - \vec{p}_i^I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^I|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{I=1}^{\nu} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^I \times (\vec{r} - \vec{p}_i^I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^I|^3} \Rightarrow \\ \vec{u}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{I=-\nu}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{I=1}^{\nu} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I|^3}\end{aligned}\quad (85)$$

Στην πρώτη γραμμή είναι ένα επαναλαμβανόμενο άθροισμα για όλες τις περιόδους ενώ στην δεύτερη γραμμή αντικαταστήσαμε βάσει των σχέσεων (83), (84) που επιβάλλει η περιοδικότητα του πεδίου. Αλλάζοντας τη μεταβλητή στο πρώτο άθροισμα $I \rightarrow -I$, έχουμε:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{I=1}^{\nu} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{I=1}^{\nu} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I|^3}\quad (86)$$

Παρατηρήστε ότι οι αθροίσεις δεν εξαρτώνται του I , οπότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των αθροισμάτων στον πρώτο και τελευταίο όρο:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I)}{|\vec{r} - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I|^3}\quad (87)$$

Ενδιαφερόμαστε για την επαγόμενη ταχύτητα σε ένα σημείο του χωρίου V , δηλαδή στην περίοδο μηδέν:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{p}_j^0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I)}{|\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0 + \vec{e}I|^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0)}{|\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0|^3} + \\ &\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i^0 \times (\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I)}{|\vec{p}_j^0 - \vec{p}_i^0 - \vec{e}I|^3}\end{aligned}\quad (88)$$

Μπορούμε να χωρίσουμε τις επαγωγές ως εξής (πλέον ο εκθέτης μηδέν εννοείται):

- Επαγωγές από τις περιόδους πίσω από την περίοδο μηδέν, δηλαδή επαγωγές από το ανοικτό πεδίο στροβιλότητας «πίσω» από το περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης) στα στοιχεία στροβιλότητας στο περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης):

$$\vec{u}_-(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_i - \vec{p}_i + \vec{e}lI)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i + \vec{e}lI|^3} \quad (89)$$

- Επαγωγές από την περίοδο μηδέν, δηλαδή επαγωγές από το ανοικτό πεδίο στροβιλότητας «πίσω» από το περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης) στα στοιχεία στροβιλότητας στο περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης):

$$\vec{u}_o(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \quad (90)$$

- Επαγωγές από τις περιόδους μπροστά από την περίοδο μηδέν, δηλαδή επαγωγές από το ανοικτό πεδίο στροβιλότητας «μπροστά» από το περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης) στα στοιχεία στροβιλότητας στο περιοδικό κουτί(χωρίς παρατήρησης):

$$\vec{u}_+(\vec{p}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i - \vec{e}lI)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i - \vec{e}lI|^3} \quad (91)$$

Αδιαστατοποιούμε τις σχέσεις (89), (91) βάση των:

$$\vec{p} = \vec{p}_j - \vec{p}_i, c = \frac{|\vec{p}|}{l}, \rho = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{l}, \vec{e}_r = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{p}}{lc} \quad (92)$$

Οπότε έχουμε για τα αθροίσματα μπροστά και πίσω από την περίοδο αντίστοιχα:

$$\sum_{l=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p} + \vec{e}lI)}{|\vec{p} + \vec{e}lI|^3} = \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_r c}{l^2} \sum_{l=1}^{\nu} \frac{1}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{3/2}} + \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}}{l^2} \sum_{l=1}^{\nu} \frac{l}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{3/2}} \quad (93)$$

$$\sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p} + \vec{e}I)}{|\vec{p} + \vec{e}I|^3} = \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_r c}{l^2} \sum_{I=1}^{\nu} \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} - \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}}{l^2} \sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (94)$$

Τελικά η πρώτη διαφορική εξίσωση (88) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{p}_j}{Dt} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} + \\ &\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_r c}{l^2} \left(\sum_{I=1}^{\nu} \frac{1}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}} + \sum_{I=1}^{\nu} \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}}{l^2} \left(\sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}} - \sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (95)$$

Αντίστοιχα, δουλεύουμε και για την εξίσωση της στροβιλότητας και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} - 3 \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i) [\vec{\Omega}_j (\vec{p}_j - \vec{p}_i)]}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{l^3} \sum_{I=1}^{\nu} \left(\frac{1}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}} + \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \right) \right. \\ &- \frac{3\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_r (\vec{\Omega}_j \cdot \vec{e}_r) c^2}{l^3} \sum_{I=1}^{\nu} \left(\frac{1}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{5/2}} + \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}} \right) \\ &- \frac{3\vec{\Omega}_i \times [\vec{e}_r (\vec{\Omega}_j \cdot \vec{e}) + \vec{e} (\vec{\Omega}_j \cdot \vec{e}_r)] c}{l^3} \sum_{I=1}^{\nu} \left(\frac{I}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{5/2}} - \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}} \right) \\ &\left. - \frac{3\vec{\Omega}_i \times \vec{e} (\vec{\Omega}_j \cdot \vec{e})}{l^3} \sum_{I=1}^{\nu} \left(\frac{I^2}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{5/2}} + \frac{I^2}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (96)$$

Ας δούμε την επίδραση που έχει στο αποτέλεσμα η συνάρτηση αποκοπής. Η συνάρτηση αποκοπής για την επαγόμενη ταχύτητα θα έπρεπε να έχει συμπεριληφθεί σε κάθε όρο οπότε γενικά είναι της μορφής:

$$1 - \exp\left(-\frac{|\vec{p}_j - \vec{p}_i + \vec{e}l|}{\varepsilon^3}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{l^3}{\varepsilon^3}(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}\right) \quad (97)$$

Στην περίπτωση που το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο της απόστασης ε , το οποίο γενικά ισχύει, έχουμε:

$$\exp\left(-\frac{l^3}{\varepsilon^3}(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}\right) \rightarrow 0 \quad (98)$$

Οπότε η συνάρτηση αποκοπής πρέπει να συμπεριληφθεί μόνο στις επαγωγές από στοιχεία στην ίδια την περίοδο και οριακά από στοιχεία των περιόδων -1 και 1.

Η ειδική περίπτωση κατά την οποία έχουμε $\rho = \pm c \neq 0$ για κάποια i , στα οποία αναφερόμαστε ως $i = spc1, spc2, \dots, spcn$, πρέπει να εξεταστεί διαφορετικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $|\vec{p}| \cos(\vec{p}, \vec{e}) = \pm |\vec{p}|$ άρα $\vec{p}, \vec{e} = 0$ ή $\vec{p}, \vec{e} = \pi$ οπότε $\vec{p} = \rho \vec{e}$. Άρα:

$$\sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p} + \vec{e}l)}{|\vec{p} + \vec{e}l|^3} = \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\rho + I)\vec{e}l}{(\rho + I)^3 l^3} = \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}}{l^2} \sum_{I=1}^{\nu} \frac{1}{(\rho + I)^2} \quad (99)$$

$$\sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{r} - \vec{e}l)}{|\vec{r} - \vec{e}l|^3} = \sum_{I=1}^{\nu} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\rho - I)\vec{e}l}{(I - \rho)^3 l^3} = -\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}}{l^2} \sum_{I=1}^{\nu} \frac{1}{(I - \rho)^2} \quad (100)$$

Τελικά, η διαφορική εξίσωση (95) γράφεται:

$$\frac{D\vec{p}_j}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=spc1}^{spcn} \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i)}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} - \frac{1}{\pi} \sum_{i=spc1}^{spcn} \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}\rho}{l^2} \sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2} \quad (101)$$

Αντίστοιχα, για την εξίσωση της στροβιλότητας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{i=spc1}^{spcn} \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} - 3 \frac{\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_j - \vec{p}_i) [\vec{\Omega}_j (\vec{p}_j - \vec{p}_i)]}{|\vec{p}_j - \vec{p}_i|^3} \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=spc1}^{spcn} \left(\frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{l^3} - 3 \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}(\vec{\Omega}_j \vec{e})}{l^3} \right) \sum_{l=1}^{\nu} \frac{l(3\rho^2 + l^2)}{(l^2 - \rho^2)^3} \right\} \end{aligned} \quad (102)$$

Τέλος στην περίπτωση όπου $\rho = c = 0$, δηλαδή $i = j$ έχουμε:

$$\frac{D\vec{p}_j}{Dt} = 0 \quad (103)$$

$$\frac{D\vec{\Omega}_j}{Dt} = -\frac{3}{2\pi} \frac{\vec{\Omega}_j \times \vec{e}(\vec{\Omega}_j \vec{e})}{l^3} \sum_{l=1}^{\nu} \left(\frac{1}{l^3} \right) \quad (104)$$

Καταλήξαμε έτσι:

(α) Στα τέσσερα αθροίσματα που πρέπει να υπολογίσουμε για την επαγόμενη ταχύτητα (το άθροισμα ξεκινάει από τον δεύτερο όρο, αφού στις δύο πρώτες περιόδους οι επαγωγές θεωρούνται κοντινές και χρησιμοποιούμε συνάρτηση εξομάλυνσης):

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{3/2}} & \qquad \sum_{l=2}^{\nu} \frac{l}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{3/2}} \\ \sum_{l=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 - 2\rho l + l^2)^{3/2}} & \qquad \sum_{l=2}^{\nu} \frac{l}{(c^2 - 2\rho l + l^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(β) Σε έξι επιπλέον αθροίσματα, που πρέπει να υπολογίσουμε για το ρυθμό μεταβολής της στροβιλότητας:

$$\sum_{l=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{5/2}} \quad \sum_{l=2}^{\nu} \frac{l}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{5/2}} \quad \sum_{l=2}^{\nu} \frac{l^2}{(c^2 + 2\rho l + l^2)^{5/2}}$$

$$\sum_{I=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}} \quad \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}} \quad \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I^2}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{5/2}}$$

(γ) Σε ένα άθροισμα για την εξίσωση της ταχύτητας και ένα για τη στροβιλότητα, για την περίπτωση $\rho = \pm c$:

$$\sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2} \quad \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I(3\rho^2 + I^2)}{(I^2 - \rho^2)^3}$$

(δ) Σε μία σειρά, ανεξάρτητη των παραμέτρων του προβλήματος, για την περίπτωση $\rho = c = 0$:

$$\sum_{I=2}^{\nu} \left(\frac{1}{I^3} \right)$$

Τα παραπάνω αθροίσματα συγκλίνουν όταν ν τείνει στο άπειρο. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το κριτήριο ολοκληρώματος (βλ. (Bartle, 1975)). Η παρουσίαση θα γίνει για μία από τις σειρές που εμφανίζονται στην επαγόμενη ταχύτητα. Η σύγκλιση των υπολοίπων σειρών της επαγόμενης ταχύτητας προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει S τέτοιο ώστε:

$$S = \sum_{I=2}^{\infty} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (105)$$

Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x}{(c^2 - 2\rho x + x^2)^{3/2}} > 0, \quad \forall x > 0 \quad (106)$$

Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \frac{c^2 + \rho x - 2x^2}{(c^2 - 2\rho x + x^2)^{3/2}} \quad (107)$$

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, οπότε ελέγχουμε το πρόσημο του αριθμητή.

Ο αριθμητής έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{\rho \mp 2\sqrt{\rho^2 + 2c^2}}{2} \quad (108)$$

Άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x > x_2$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του γενικευμένου ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η σειρά συγκλίνει αφού:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{\nu} f(x) dx = \frac{\rho}{(c^2 - \rho^2)} - \frac{\rho x_1 - c^2}{(c^2 - \rho^2)(c^2 - 2\rho x_1 + x_1^2)^{1/2}} \quad (109)$$

Ισχύει ότι:

$$\sum_{I=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}} < \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 + 2\rho I + I^2)^{3/2}} < \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (110)$$

$$\sum_{I=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} < \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (111)$$

Χρησιμοποιώντας, το κριτήριο σύγκρισης αποδεικνύεται η σύγκλιση όλων των σειρών για τις επαγόμενες ταχύτητες. Για την απόδειξη σύγκλισης των σειρών για την μεταβολή της στροβιλότητας επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα.

Επειδή όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται από το ν -οστο όρο των αθροισμάτων είναι φθίνουσες μετά από κάποιο x_0 , όπως αποδεικνύεται με απλή παραγωγή, το κριτήριο ολοκληρώματος μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις σειρές. Επίσης, αποδεικνύεται επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα ότι τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική, επειδή το κριτήριο ορίζει άνω και κάτω φράγμα για την ουρά των αθροισμάτων το οποίο θα χρειαστούμε στην επόμενη ενότητα.

Τέλος, τονίζουμε, ότι οι παραπάνω σειρές παρουσιάζουν ιδιαίτερα αργή σύγκλιση. Χαρακτηριστικά παραθέτουμε τους παρακάτω πίνακες, στους οποίους οι υπολογισμοί έγιναν με το Matlab. Στον πρώτο πίνακα 1 βλέπουμε την συμπεριφορά του αθροίσματος:

$$\sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2} \quad (112)$$

για διάφορες τιμές του ρ ($\rho \equiv k$).

Παρατηρήστε ότι το συγκεκριμένο άθροισμα συγκλίνει σε έξι σημαντικά ψηφία μετά από 10^4 όρους και είναι το πιο «γρήγορο» ως προς την σύγκλιση άθροισμα.

Terms Used	k=0.001	k=0.01	k=0.1	k=0.3	k=0.5	k=0.7	k=0.9	k=0.99	k=0.999
10	1.197534 0594919 01e+00	1.197739 3973969 45e+00	1.218576 6959130 04e+00	1.411967 8398016 68e+00	1.995464 8526077 10e+00	4.085502 0298234 47e+00	2.798025 4850678 52e+01	2.525493 4684179 54e+03	2.502504 9523246 47e+05
100	1.202009 4745182 07e+00	1.202214 8164647 03e+00	1.223052 5191621 86e+00	1.416446 9318073 30e+00	1.999950 4962748 44e+00	4.089997 5365070 31e+00	2.798476 3574794 02e+01	2.525497 9841992 15e+03	2.502504 9974899 01e+05
1000	1.202058 4775178 77e+00	1.202263 8194648 60e+00	1.223101 5222108 56e+00	1.416495 9352480 33e+00	1.999999 5004996 25e+00	4.090046 5419079 74e+00	2.798481 2581763 27e+01	2.525498 0332070 21e+03	2.502504 9979799 81e+05
10000	1.202058 9720186 31e+00	1.202264 3139656 15e+00	1.223102 0167116 16e+00	1.416496 4297488 32e+00	1.999999 9950005 07e+00	4.090047 0364089 78e+00	2.798481 3076264 45e+01	2.525498 0337015 03e+03	2.502504 9979847 37e+05
100000	1.202058 9769682 66e+00	1.202264 3189152 49e+00	1.223102 0216612 50e+00	1.416496 4346984 66e+00	1.999999 9999501 41e+00	4.090047 0413575 15e+00	2.798481 3081205 06e+01	2.525498 0337050 24e+03	2.502504 9979847 37e+05
1000000	1.202058 9770088 54e+00	1.202264 3189558 38e+00	1.223102 0217018 38e+00	1.416496 4347390 55e+00	1.999999 9999907 30e+00	4.090047 0413851 12e+00	2.798481 3081205 06e+01	2.525498 0337050 24e+03	2.502504 9979847 37e+05

Πίνακας 1. Συμπεριφορά του αθροίσματος $\sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2}$ για διάφορες τιμές του ρ ($\rho \equiv k$).

Ας δούμε και τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το άθροισμα

$$\sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (113)$$

με $c=0.5$. Η συγκεκριμένη περίπτωση παρουσίασε πολύ αργή σύγκλιση η οποία σίγουρα υπόκειται σε σφάλματα αποκοπής αφού παρατηρούμε ότι ακόμα και μετά από 10^7 όρους το άθροισμα δεν συγκλίνει σε έξι δεκαδικά ψηφία, πίνακας 2. Είναι αδύνατον σε κάθε χρονικό βήμα να γίνονται τόσοι υπολογισμοί για κάθε παράμετρο c και ρ με σκοπό να έχουμε σύγκλιση με έξι δεκαδικά ψηφία. Ακόμα και αν κάποιος αποφάσιζε να εκτελέσει τόσους υπολογισμούς, οι υπορουτίνες πρέπει να είναι ειδικά σχεδιασμένες ώστε να αντιμετωπίζουν πολύ μικρούς όρους οι οποίοι όμως καθώς συσσωρεύονται επιδρούν σημαντικά στο αποτέλεσμα, όπως έγινε φανερό από τα παραπάνω αποτελέσματα.

Terms Used	k=0.299	k=0.29	k=0.2	k=0	k=-0.1	k=-0.2
100	8.774911830 686071e-01	8.863736425 043099e-01	9.865262030 058013e-01	1.321556542 234343e+00	1.595482258 384697e+00	2.016418156 310570e+00
1000	8.863979910 354821e-01	8.952817605 694110e-01	9.954474436 743096e-01	1.330507085 720608e+00	1.604447526 955681e+00	2.025398199 427114e+00
10000	8.872970527 330898e-01	8.961808356 053261e-01	9.963466521 154809e-01	1.331406590 762429e+00	1.605347180 372614e+00	2.026298001 269070e+00
100000	8.873870433 436323e-01	8.962708263 495166e-01	9.964366441 959104e-01	1.331496585 812487e+00	1.605437176 907538e+00	2.026387999 288974e+00
1000000	8.873960432 497725e-01	8.962798262 569991e-01	9.964456441 167074e-01	1.331505585 763014e+00	1.605446176 872883e+00	2.026396999 269296e+00
10000000	8.873969432 485930e-01	8.962807262 558332e-01	9.964465441 156785e-01	1.331506485 761504e+00	1.605447076 871516e+00	2.026397899 276463e+00

Πίνακας 2. Συμπεριφορά του αθροίσματος $\sum_{I=1}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}}$

Για αυτό το λόγο απαιτείται μία διαφορετική αντιμετώπιση. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά αναπτύγματα για την προσέγγιση του αθροίσματος κάθε σειράς. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται γρήγορη σύγκλιση πραγματοποιώντας πολύ λιγότερες πράξεις. Άρα οι υπολογισμοί είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν σχετικά εύκολα σε ένα πρόγραμμα που χρησιμοποιεί τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας για περιοδικά πεδία στροβιλότητας.

3.3.2 Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα Αθροισμάτων για Συγκλίνουσες Σειρές

Τα αθροίσματα που πρέπει να υπολογίσουμε είναι της μορφής $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\nu} f(i; c, \rho)$. Όπου $f(i; c, \rho)$ κάποια από τις συναρτήσεις που ορίζονται από το ν-οστό όρο των αθροισμάτων της προηγούμενης ενότητας, οι παράμετροι δεν θα συμπεριλαμβάνονται πλέον στα παρακάτω αλλά θα υπονοούνται. Ο τύπος αθροίσματος Euler-Maclaurin προσεγγίζει ασυμπτωτικά το άθροισμα που προκύπτει από τους ν πρώτους (Hildebrand, 1974), (Olver, 1974):

$$\sum_{i=a}^{\nu} f(i) = \int_a^{\nu} f(x) dx + \frac{1}{2} (f(\nu) + f(a)) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(\nu) - f^{(2s-1)}(a)] + R_m(\nu) \quad (114)$$

Όπου με B_{2s} συμβολίζουμε τον $2s$ αριθμό Bernoulli.

Ο όρος υπολοίπου ή σφάλματος είναι:

$$R_m(v) = \int_a^v \frac{B_{2m} - B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} f^{(2m)}(x) dx \quad (115)$$

Όπου με $B_{2s}(x)$ συμβολίζουμε παρακάτω το $2s$ πολυώνυμο Bernoulli και με $[x]$ το ακέραιο μέρος του αριθμού. Το άνω φράγμα του υπολοίπου είναι (Olver, 1974):

$$R_m(v) \leq (2 - 2^{1-2m}) \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_a^v |f^{(2m-2)}(x)| dx \quad (116)$$

Για τον υπολογισμό, αποφασίζουμε τον αριθμό των όρων v του αθροίσματος που θα υπολογίσουμε. Έπειτα αποφασίζουμε τον αριθμό των παραγώγων που θα κρατήσουμε m και εκτελούμε τις πράξεις. Ο τύπος (114), όμως, ορίζει μία ασυμπτωτική προσέγγιση του αθροίσματος που προκύπτει από τους v πρώτους όρους. Όπως σε κάθε ασυμπτωτική προσέγγιση πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με την επίδραση που έχει ο όρος του υπολοίπου (βλ. (Olver, 1974)). Οπότε το τελικό βήμα είναι να δώσουμε μία εκτίμηση του φράγματος του υπολοίπου. Στην περίπτωση που δεν εκτιμηθεί το σφάλμα – υπόλοιπο υπάρχει περίπτωση ο παραπάνω τύπος να δώσει λάθος αποτέλεσμα (Olver, 1974). Στην περίπτωση μας, ο υπολογισμός στο άπειρο δίνει για το φράγμα του σφάλματος:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} R_m(v) \leq (2 - 2^{1-2m}) \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_2^{\infty} |f^{(2m-2)}(x)| dx \quad (117)$$

Οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται. Παρατηρούμε ότι ο πυρήνας εξαρτάται από το πόσες παραγώγους θα κρατήσουμε. Για να αποφύγουμε τον τελευταίο υπολογισμό μπορούμε να κάνουμε μετατροπές με τις οποίες το υπόλοιπό θα έχει πιο σαφή όρια καθώς το v τείνει στο άπειρο. Εδώ δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το άνω όριο θα είναι φραγμένο. Η βασική ιδέα είναι να εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα Euler-Maclaurin στην ουρά του αθροίσματος παρά στο ίδιο το άθροισμα. Αφού κάθε σειρά είναι φθίνουσα από το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για την ουρά του αθροίσματος (Bartle, 1975):

$$\int_v^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=v}^{\infty} f(i) \leq \int_{v-1}^{\infty} f(x) dx \quad (118)$$

Η μέθοδος υπολογισμού, λοιπόν, γνωρίζουμε ότι θα συγκλίνει αν εφαρμοστεί στην ουρά του αθροίσματος αφού το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος επιβάλει τα παραπάνω φράγματα στην ουρά.

Εφαρμόζοντας βασικές ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών, ισχύει:

$$\sum_{i=2}^{\infty} f(i) = \sum_{i=2}^{\nu} f(i) + \sum_{i=\nu}^{\infty} f(i) - f(\nu) \quad (119)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο Euler-Maclaurin για τη δεύτερη σειρά στο δεύτερο μέλος έχουμε:

$$\sum_{i=\nu}^{\infty} f(i) = \int_{\nu}^{\infty} f(x)dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(k) + f(\nu)) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(k) - f^{(2s-1)}(\nu)] + \lim_{k \rightarrow \infty} R_m(\kappa) \quad (120)$$

Η σειρά είναι συγκλίνουσα οπότε:

$$\sum_{i=\nu}^{\infty} f(i) = \int_{\nu}^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2} f(\nu) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) + \lim_{k \rightarrow \infty} R_m(\kappa) \quad (121)$$

Και παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση για το υπόλοιπο βάση το κριτήριο ολοκληρώματος:

$$\sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) - \frac{1}{2} f(\nu) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_m(\kappa) \leq \int_{\nu-1}^{\nu} f(x)dx + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) - \frac{1}{2} f(\nu) \quad (122)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σφάλμα αποκλειστικά εξαρτάται από τα ν και m και μάλιστα το παραπάνω αποτέλεσμα συνεπάγεται την σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν για μεγάλα ν . Για να το δούμε αυτό, εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα:

$$\exists x^* \in (\nu-1, \nu): \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) - \frac{1}{2} f(\nu) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_m(\kappa) \leq f(x^*) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) - \frac{1}{2} f(\nu) \quad (123)$$

Πράγματι, λοιπόν, για μεγάλα ν το σφάλμα συγκλίνει στο μηδέν. Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση (121) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) \approx \sum_{i=1}^{\nu} f(i) + \int_{\nu}^{\infty} f(x)dx - \frac{f(\nu)}{2} - \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(\nu) \quad (124)$$

Το οποίο αποτελεί το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα Euler-Maclaurin μιας συγκλίνουσας σειράς. Για τον έλεγχο του, έγιναν αριθμητικές δοκιμές με το Matlab. Αρχικά, θεωρήσαμε ότι η τιμή που συγκλίνει κάθε άθροισμα υπολογίζεται από 10^9 όρους. Έπειτα, χρησιμοποιήσαμε διάφορες τιμές για τα ν και m και εφαρμόσαμε την ασυμπτωτική προσέγγιση που αναπτύξαμε. Βρήκαμε το «ολικό» σφάλμα του σχήματος ανά περίπτωση σειράς, υπολογίζοντας την ευκλείδεια νόρμα των σφαλμάτων για διάφορες τιμές των παραμέτρων $c = c_i, i = 1, 2, \dots, nc$ και $\rho = \rho_i, i = 1, 2, \dots, n\rho$:

$$Tot_Err(f_{m,n}) = \sqrt{Relative_Error_of_ (c,k)_ case^2} \quad (125)$$

Ο παρακάτω πίνακας 3 συγκεντρώνει τα αποτελέσματα για το άθροισμα :

$$\sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}} \quad (126)$$

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα είναι πολύ μικρά ακόμα και για μικρά ν και σίγουρα απαιτούνται πολύ λιγότερες πράξεις από τον ευθύ υπολογισμό. Εμείς χρησιμοποιήσαμε σε όλους τους υπολογισμούς $\nu = 4, m = 5$ αφού παρατηρήσαμε ότι στα περισσότερα αθροίσματα το σφάλμα γίνεται ελάχιστο για αυτές τις τιμές.

m/n	1	5	10	15	20
2	5.303948902 342122e-03	2.523173720 985094e-05	2.069893944 763299e-06	8.285352434 424334e-07	6.604999068 500906e-07
3	1.251587953 437758e-03	5.721031887 145124e-07	5.958693138 761246e-07	6.032680060 251331e-07	6.038061474 588585e-07
4	7.916323945 982636e-04	6.001862605 729033e-07	6.039791342 791719e-07	6.039036294 742868e-07	6.039005561 121702e-07
5	6.761898200 717007e-04	6.046581836 156529e-07	6.038991780 203733e-07	6.039002267 947363e-07	6.039002532 403503e-07
6	1.142004399 461465e-03	6.038196822 058724e-07	6.039002703 621318e-07	6.039002551 374548e-07	6.039002548 355458e-07

Πίνακας 3. Συγκεντρωτικός Πίνακας Σφαλμάτων για το άθροισμα $\sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 - 2\rho I + I^2)^{3/2}}$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω μέθοδος με κάποιες αλλαγές χρησιμοποιείται γενικά για την κατασκευή ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων σειρών, συγκλινουσών ή μη (βλ. (Olver, 1974)). Επίσης, η σειρά είναι ασυμπτωτική αν οι παράγωγοι της συνάρτησης ορίζουν ασυμπτωτική κλίμακα. Συνεχίζουμε με τους απαραίτητους υπολογισμούς για κάθε σειρά που εμφανίζεται στο πρόβλημα.

3.3.3 Εφαρμογή στις Σειρές του Προβλήματος

Χρησιμοποιούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα και κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς.

1. Επαγόμενη Ταχύτητα

Προαποφασίζουμε κάποια τιμή του m , δηλαδή πόσες παραγώγους θα κρατήσουμε και υπολογίζουμε τις σταθερές M_q^i , οι οποίες προκύπτουν από τον αναγωγικό τύπο:

$$\begin{aligned}
M_0^1 &= -1.5 \\
M_0^{2i} &= M_0^{2i-1}(-2i-0.5) \text{ με } i=1, \dots, m+1 \\
M_0^{2i+1} &= M_0^{2i}(-1.5-2i) \text{ με } i=1, \dots, m \\
M_q^{2i} &= M_{q-1}^{2i}(2i-2q+1) + M_q^{2i-1}(-0.5-2i+q) \text{ με } q=1, \dots, i-1 \text{ και } i=2, \dots, m+1 \quad (127) \\
M_q^{2i+1} &= M_{q-1}^{2i}(2i-2q+2) + M_q^{2i}(-1.5-2i+q) \text{ με } q=1, \dots, i-1 \text{ και } i=2, \dots, m \\
M_i^{2i} &= M_{i-1}^{2i-1} \text{ με } i=1, \dots, m+1 \\
M_i^{2i+1} &= M_i^{2i}(-1.5-i) + 2M_{i-1}^{2i} \text{ με } i=1, \dots, m
\end{aligned}$$

Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των σειρών για την επαγόμενη ταχύτητα είναι:

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{1}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{3/2}} &= \sum_{I=2}^v \frac{1}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{3/2}} \\
&+ \frac{1}{c^2 - \rho^2} - \frac{v \pm \rho}{(c^2 - \rho^2)(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{1/2}} \\
&- \frac{1}{2(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{3/2}} \\
&- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} \sum_{q=0}^{s-1} M_q^{2s-1} \frac{2^{2s-q-1}(v \pm \rho)^{2s-2q-1}}{(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{1/2+2s-q}}
\end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{I}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{3/2}} &= \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{3/2}} \\
&\mp \frac{\rho}{c^2 - \rho^2} + \frac{c^2 \pm \rho\nu}{(c^2 - \rho^2)(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{1/2}} \\
&\quad - \frac{\nu}{2(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{3/2}} \\
&\quad - \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} \left[\begin{aligned} &(2s-1) \sum_{q=0}^{s-1} M_q^{2s-2} \frac{2^{2s-q-2} (\nu \pm \rho)^{2s-2q-2}}{(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{-1/2+2s-q}} \\ &+ \nu \sum_{q=0}^{s-1} M_q^{2s-1} \frac{2^{2s-q-1} (\nu \pm \rho)^{2s-2q-1}}{(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{1/2+2s-q}} \end{aligned} \right] \quad (129)
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι οι όροι που συμπεριλαμβάνονται στην ίδια γραμμή προκύπτουν από το ίδιο τμήμα του ασυμπτωτικού αναπτύγματος.

2. Ρυθμός Μεταβολής Στροβιλότητας

Οι σταθερές N_q^i προκύπτουν από τον αναγωγικό τύπο:

$$\begin{aligned}
N_0^1 &= -2.5 \\
N_0^{2i} &= N_0^{2i-1}(-2i-1.5) \text{ με } i=1, \dots, m+1 \\
N_0^{2i+1} &= N_0^{2i}(-2.5-2i) \text{ με } i=1, \dots, m \\
N_q^{2i} &= N_{q-1}^{2i-1}(2i-2q+1) + N_q^{2i-1}(-1.5-2i+q) \text{ με } q=1, \dots, i-1 \text{ και } i=2, \dots, m+1 \quad (130) \\
N_q^{2i+1} &= N_{q-1}^{2i}(2i-2q+2) + N_q^{2i}(-2.5-2i+q) \text{ με } q=1, \dots, i-1 \text{ και } i=2, \dots, m \\
N_i^{2i} &= N_{i-1}^{2i-1} \text{ με } i=1, \dots, m+1 \\
N_i^{2i+1} &= N_i^{2i}(-2.5-i) + 2N_{i-1}^{2i} \text{ με } i=1, \dots, m
\end{aligned}$$

Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των σειρών για την εξίσωση δυναμικής εξέλιξης της στροβιλότητας είναι:

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{1}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} &= \sum_{I=2}^{\nu} \frac{1}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} \\
&+ \frac{2}{3(c^2 - \rho^2)^2} - \frac{(\rho \pm \nu)(4\rho\nu \pm 2\nu^2 \pm 3c^2 \mp \rho^2)}{3(c^2 - \rho^2)^2 (c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{3/2}} \\
&- \frac{1}{2(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{5/2}} \\
&- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} \sum_{q=0}^{s-1} N_q^{2s-1} \frac{2^{2s-q-1} (\nu \pm \rho)^{2s-2q-1}}{(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{3/2+2s-q}}
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{I}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} &= \sum_{I=2}^{\nu} \frac{I}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} \\
&\mp \frac{2\rho}{3(c^2 - \rho^2)^2} + \frac{2\rho(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)(\rho \pm \nu) \mp \rho^3\nu + c^4 - c^2\rho^2 \pm c^2\rho\nu}{3(c^2 - \rho^2)^2 (c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{3/2}} \\
&- \frac{\nu}{2(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{5/2}} \\
&- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} \left[\begin{aligned}
&(2s-1) \sum_{q=0}^{s-1} N_q^{2s-2} \frac{2^{2s-q-2} (\nu \pm \rho)^{2s-2q-2}}{(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{1/2+2s-q}} \\
&+ \nu \sum_{q=0}^{s-1} N_q^{2s-1} \frac{2^{2s-q-1} (\nu \pm \rho)^{2s-2q-1}}{(c^2 \pm 2\rho\nu + \nu^2)^{3/2+2s-q}}
\end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{I^2}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} &= \sum_{I=2}^v \frac{I^2}{(c^2 \pm 2\rho I + I^2)^{5/2}} \\
&+ \frac{c^2 + \rho^2}{3(c^2 - \rho^2)^2} \\
&- \frac{(c^2 \pm 2\rho v + v^2)(\pm \rho^3 \pm c^2 \rho + c^2 v + \rho^2 v) \pm c^4 \rho - c^4 v - 2\rho^4 v \mp c^2 \rho^3 + 3c^2 \rho^2 v}{3(c^2 - \rho^2)^2 (c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{3/2}} \\
&- \frac{v^2}{2(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{5/2}} \\
&- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} \left[\begin{aligned}
&(2s-1)(2s-2) \sum_{q=0}^{s-2} N_q^{2s-3} \frac{2^{2s-q-3} (v \pm \rho)^{2s-2q-3}}{(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{-1/2+2s-q}} \\
&+ 2(2s-1)v \sum_{q=0}^{s-1} N_q^{2s-2} \frac{2^{2s-q-2} (v \pm \rho)^{2s-2q-2}}{(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{1/2+2s-q}} \\
&+ v^2 \sum_{q=0}^{s-1} N_q^{2s-1} \frac{2^{2s-q-1} (v \pm \rho)^{2s-2q-1}}{(c^2 \pm 2\rho v + v^2)^{3/2+2s-q}}
\end{aligned} \right] \tag{133}
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι οι όροι που συμπεριλαμβάνονται στην ίδια γραμμή προκύπτουν από το ίδιο τμήμα του ασυμπτωτικού αναπτύγματος.

3. Η ειδική περίπτωση

$$\sum_{I=2}^{\infty} \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2} = \sum_{I=2}^v \frac{I}{(I^2 - \rho^2)^2} + \frac{v}{2(v^2 - \rho^2)^2} - \frac{1}{2(v^2 - \rho^2)} - \frac{1}{4\rho} \sum_{s=1}^{m-1} B_{2s} \left(\frac{1}{(v-\rho)^{2s+1}} - \frac{1}{(v+\rho)^{2s+1}} \right) \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{I=2}^{\infty} \frac{I(3\rho^2 + I^2)}{(I^2 - \rho^2)^3} &= \sum_{I=2}^v \frac{I(3\rho^2 + I^2)}{(I^2 - \rho^2)^3} + \frac{\rho^2 + v^2}{2(I^2 - \rho^2)^2} - \frac{v(3\rho^2 + v^2)}{2(v^2 - \rho^2)^3} + \\
&\sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}(2s+1)}{4} \left(\frac{1}{(v+\rho)^{2s+2}} + \frac{1}{(v-\rho)^{2s+2}} \right) \tag{135}
\end{aligned}$$

3.3.4 Διορθώσεις Κοντά στις Ειδικές Περιπτώσεις

Παρατηρείστε ότι σε όλες τις παραπάνω σειρές, πέραν αυτών, της ειδικής περίπτωσης εμφανίζεται ο όρος:

$$\frac{1}{c^2 - \rho^2} \quad (136)$$

Επειδή αυτός ο όρος τείνει στο άπειρο καθώς ο παρονομαστής πλησιάζει στο μηδέν, δηλαδή καθώς πλησιάζουμε στην ειδική περίπτωση, εμφανίστηκαν λάθος αποτελέσματα αριθμητικής φύσης σε τέτοιες περιπτώσεις υπολογισμών. Για την αντιμετώπιση αυτού το προβλήματος, έγιναν οι υπολογισμοί στο Matlab και ταυτόχρονα η σύγκριση τους με το αποτέλεσμα που έδινε το πρόγραμμα. Ξεχωρίζουμε με αυτόν τον τρόπο περιπτώσεις στις οποίες απαιτούνται διορθώσεις στις σχέσεις. Υπήρχαν περιπτώσεις που τα αποτελέσματα εμφάνιζαν πολύ άσχημη συμπεριφορά και με αυτό τον τρόπο διορθώθηκε. Για παράδειγμα, στα πρώτα τρεξίματα ελέγχου του προγράμματος, ελέγχαμε τα πεδία ταχυτήτων δύο αστρόβιλων δινών. Ενώ αυτές θα έπρεπε να περιστρέφονται η μία γύρω από την άλλη μετά από κάποιο χρόνο αναπτύσσονταν αστάθειες οι οποίες κατέστρεφαν την λύση. Με τις παρακάτω διορθώσεις αυτές εξαφανίστηκαν. Σημειώνουμε ότι η αντιμετώπιση του προβλήματος δεν είναι ιδιαίτερα κομψή και ελκυστική για χρήση αλλά από τα αποτελέσματα που θα δούμε και στο κεφάλαιο 5 φαίνεται ότι λειτουργεί αρκετά καλά.

1. Επαγόμενη ταχύτητα:

- Για την περίπτωση που υπολογιστεί $|c - \rho| < 10^{-8}$ χρησιμοποιούμε την ειδική περίπτωση όπως παραπάνω.
- Για την περίπτωση που υπολογιστεί $c < 3 \cdot 10^5$ τότε η συνεισφορά στο άθροισμα των επαγόμενων ταχυτήτων είναι:

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{e}\rho}{l^2} 0.2020569031572758 \quad (137)$$

αντί αυτής που θα υπολογιζόταν από τα παραπάνω.

2. Ρυθμός Μεταβολής Στροβιλότητας

- Για την περίπτωση που υπολογιστεί $|c - \rho| < 10^{-8}$ χρησιμοποιούμε την ειδική περίπτωση όπως παραπάνω.
- Ανάλογα με το c που θα υπολογίσουμε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, $c \leq 4 \cdot 10^{-3}$ και $4 \cdot 10^{-3} < c$. Για την πρώτη περίπτωση διακρίνουμε περιπτώσεις διόρθωσης ανάλογα το c , ενώ για την δεύτερη περίπτωση ανάλογα το c προκύπτουν τα όρια $e1$ και $e2$ για το $|c - \rho|$ τα οποία καθορίζουν τις διορθώσεις. Βάση των ορίων αυτών, γίνεται η επιλογή της συνεισφοράς στο άθροισμα για τον ρυθμό μεταβολής της στροβιλότητας. Η συνεισφορά γράφεται και για τις δύο περιπτώσεις:

$$+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \frac{\vec{\Omega}_i \times \vec{\Omega}_j}{l^3} ss \\ - \frac{3\vec{\Omega}_i \times \vec{e}_r (\vec{\Omega}_j \vec{e}_r) c^2}{l^3} ss1 \\ - \frac{3\vec{\Omega}_i \times [\vec{e}_r (\vec{\Omega}_j \vec{e}) + \vec{e} (\vec{\Omega}_j \vec{e}_r)] c}{l^3} ss2 \\ - \frac{3\vec{\Omega}_i \times \vec{e} (\vec{\Omega}_j \vec{e})}{l^3} ss3 \end{pmatrix} \right\} \quad (138)$$

Και επιλέγουμε τα κατάλληλα $ss, ss1, ss2, ss3$.

Περίπτωση 1^η

c		$ss1$	$ss2$	$ss3$
και από	έως			
$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	2·0.3692775514336792	0	2·0.2020569031572758
$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	2·0.3692775514336792	0	Κανονικά
$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	2·0.3692775514336792	κανονικά	Κανονικά

Πίνακας 4.

Σε κάθε περίπτωση $ss = 2 \cdot 0.2020569031572758$

Περίπτωση 2^η

<i>c</i>		<i>e2</i>	<i>e1</i>
και από	έως		
$4 \cdot 10^{-3}$	0.3	10^{-6}	10^{-5}
0.3	0.75	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-5}$
0.75	1	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$

Πίνακας 5.

Αν $e1 < |c - \rho|$ οι υπολογισμοί γίνονται κανονικά χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου.

Αν $e2 < |c - \rho| < e1$ ο υπολογισμός των *ss* και *ss3* γίνεται κανονικά και για τα *ss1* και *ss2* χρησιμοποιούμε τις διορθώσεις:

$$ss1 = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(I + \rho)^5} + \frac{1}{(I - \rho)^5} \quad (139)$$

$$ss2 = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{I}{(I + \rho)^5} - \frac{I}{(I - \rho)^5} \quad (140)$$

με ασυμπτωτικά αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(I \pm \rho)^5} &= \sum_{l=2}^v \frac{1}{(I \pm \rho)^5} + \frac{1}{4(v \pm \rho)^4} - \frac{1}{2(v \pm \rho)^5} \\ &+ \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}(2s+1)(2s+2)(2s+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+4}} \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{I}{(I \pm \rho)^5} &= \sum_{l=2}^v \frac{I}{(I \pm \rho)^5} + \frac{4v \pm \rho}{12(v \pm \rho)^4} - \frac{v}{2(v \pm \rho)^5} \\ &- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}(2s+1)(2s+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left[(2s-1) \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+3}} - v(2s+3) \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+4}} \right] \end{aligned} \quad (142)$$

Αν $10^{-8} < |c - \rho| < e2$ ο υπολογισμός του ss γίνεται κανονικά, για τα $ss1$ και $ss2$ χρησιμοποιούμε τις διορθώσεις της περίπτωσης $e2 < |c - \rho| < e1$ και για το $ss3$ προτείνουμε την:

$$ss3 = \sum_{I=2}^{\infty} \frac{I^2}{(I + \rho)^5} + \frac{I^2}{(I - \rho)^5} \quad (143)$$

με ασυμπτωτικό ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{\infty} \frac{I^2}{(I \pm \rho)^5} &= \sum_{I=2}^v \frac{I^2}{(I \pm \rho)^5} + \frac{1}{12\rho^2} - \frac{v^3(v \pm 4\rho)}{12\rho^2(v \pm \rho)^4} - \frac{v^2}{2(v \pm \rho)^5} - \\ &\sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}(2s+1)(2s+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left[(2s-1) \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+3}} - v(2s+3) \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+3}} \frac{1}{(v \pm \rho)^{2s+4}} \right] \end{aligned} \quad (144)$$

3.3.5 Περιοδικές Οριακές Συνθήκες

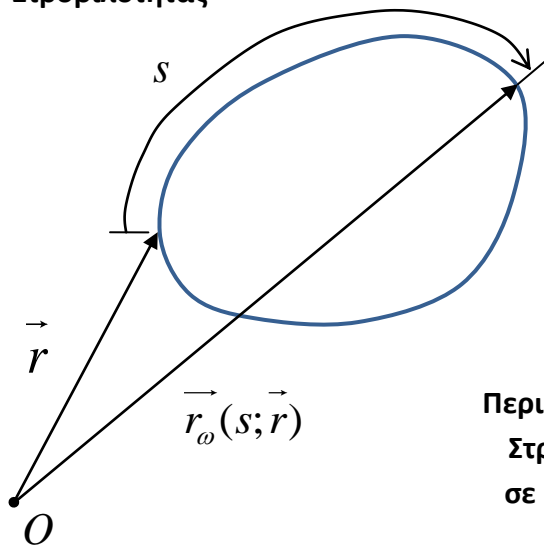
Κατά την μετακίνηση των δινών υπάρχει περίπτωση κάποια δίνη να βγει εκτός περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι η δίνη θα διασχίσει το κάθετο επίπεδο στην κατεύθυνση \vec{e} στην αρχή η στο τέλος της περιόδου. Τα σύνορα που ορίζουν τα δύο κάθετα επίπεδα αποτελούν το περιοδικό χωρίο (περιοδικό «κουτί» - periodic box). Οπότε την ίδια χρονική στιγμή που συμβαίνει αυτό υποχρεώνουμε μία δίνη να εισέλθει από την άλλη μεριά. Με αυτό τον τρόπο επιβάλλουμε περιοδικές οριακές συνθήκες στην περίοδο.

3.4 Το Σχήμα Ανακατανομής των Στοιχείων

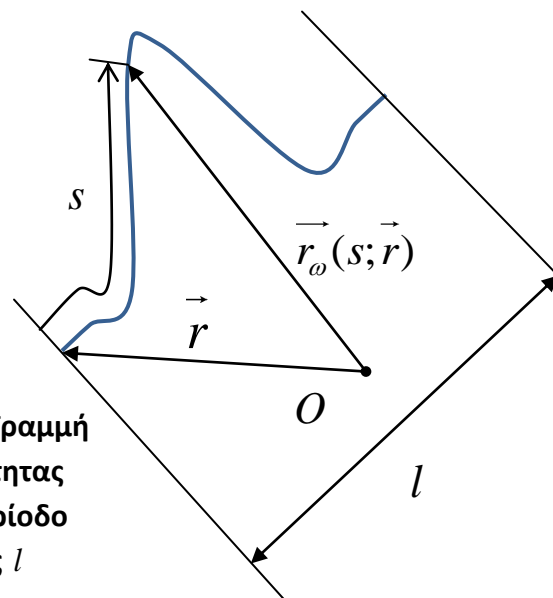
Αναφέραμε προηγουμένως ότι απαιτείται συχνή αναδιανομή των στοιχείων ώστε να εξασφαλίζεται κάθε χρονική στιγμή η επικάλυψη των στοιχείων με τα γειτονικά τους. Οι τεχνικές με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό ονομάζονται τεχνικές επεξεργασίας θέσης (Location Processing Schemes) και πολλές από αυτές παρουσιάζονται στο (Cottet & Koumoutsakos, 2000). Σχεδιάσαμε μία ανακατανομή ανεξάρτητη πλέγματος η οποία όμως απαιτεί να τοποθετούνται αρχικά τα στοιχεία πάνω σε μία γραμμή στροβιλότητας. Η μέθοδος δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αμιγώς μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας αλλά θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως υβριδική μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας και νημάτων στροβιλότητας. Από την μία υπάρχουν τα στοιχεία στροβιλότητας αλλά από την άλλη αρχικοποιούνται ως νήματα στροβιλότητας και όταν απαιτείται η αναδιανομή των στοιχείων συμπεριφέρονται ως νήματα στροβιλότητας.

Αναφερόμαστε σε μία γραμμή στροβιλότητας ως $\vec{r}_\omega(s; \vec{r})$, όπου s η παράμετρος μήκους τόξου της καμπύλης και \vec{r} η θέση από την οποία ξεκινάει. Για μας οι γραμμές στροβιλότητας είναι είτε κλειστές γραμμές, είτε περιοδικές όπως στο σχήμα 33. Στη περίπτωση κατά την οποία είναι περιοδικό το πεδίο στροβιλότητας μπορεί να είναι κλειστές ή ανοικτές οι γραμμές στροβιλότητας. Σε περίπτωση που είναι ανοικτές εκτείνονται έως το άπειρο.

**Κλειστή Γραμμή
Στροβιλότητας**

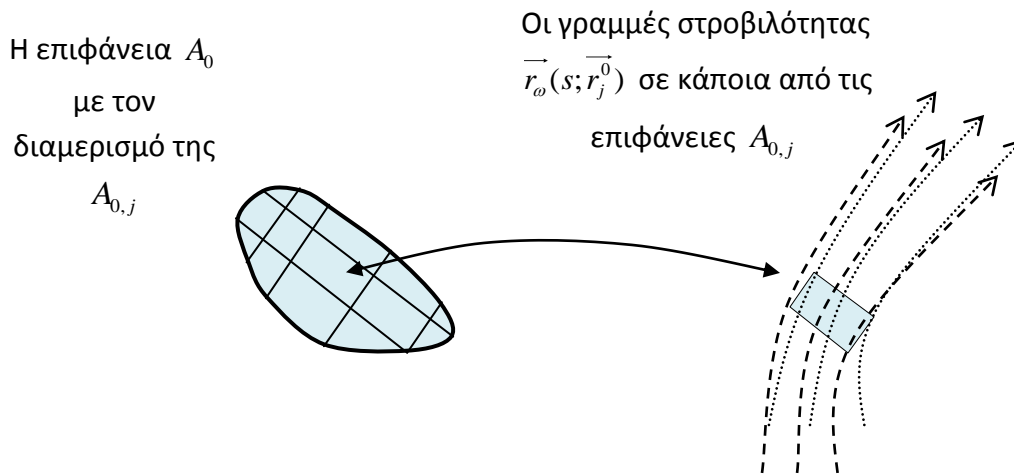


**Περιοδική Γραμμή
Στροβιλότητας
σε μία περίοδο
μήκους l**



Σχήμα 33. Οι γραμμές στροβιλότητας είναι είτε κλειστές γραμμές, είτε περιοδικές.

Η κατασκευή του διαμερισμού του V αρχίζει από μία εσωτερική επιφάνεια A_0 του V . Στην επιφάνεια βρίσκονται τα σημεία $\vec{r} = \vec{r}^0$. Η επιφάνεια πρέπει να μην είναι τμήμα ενός σωλήνα στροβιλότητας, δηλαδή αν το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι $\vec{n}(\vec{r}^0)$, να ισχύει για κάθε σημείο της επιφάνειας $\vec{n}(\vec{r}^0) \cdot \vec{\omega}(\vec{r}^0) \neq 0$. Η επιφάνεια A_0 διαμερίζεται στις επιφάνειες $A_{0,j}$ με $j=1,2,\dots,\nu 1$, σχήμα 34. Για τα σημεία \vec{r}_j^0 που ανήκουν στο σύνορο της $A_{0,j}$, βρίσκουμε τις γραμμές στροβιλότητας. Οι γραμμές στροβιλότητας ξεκινάνε από τα \vec{r}_j^0 και άρα σε αυτές αναφερόμαστε ως $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_j^0)$.

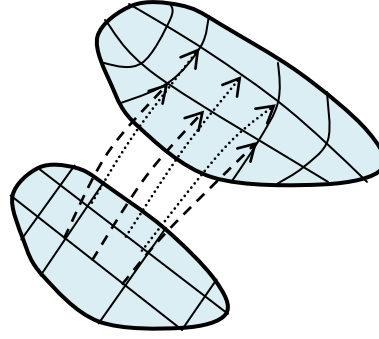


Σχήμα 34.

Αποφασίζω κάποια γειτονική, αλλά αρκετά μακρινή, επιφάνεια A_1 στην οποία βρίσκονται τα σημεία $\vec{r} = \vec{r}^1$ με $\vec{n}(\vec{r}^1) \cdot \vec{\omega}(\vec{r}^1) \neq 0$. Βρίσκουμε την τομή των καμπυλών $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_j^0)$ με την επιφάνεια A_1 . Τα σημεία τομής που προκύπτουν ορίζουν ένα διαμερισμό της A_1 που ονομάζουμε $A_{1,j}$, σχήμα 35. Αντίστοιχα επαναλαμβάνουμε για επόμενες γειτονικές επιφάνειες $A_k, k=1,2,\dots,\nu 2$ και βρίσκουμε τους διαμερισμούς για κάθε μία από αυτές $A_{k,j}$. Κάθε $V_i, i=1,2,\dots,\nu 1 \cdot \nu 2 = n$ ορίζεται με τις επιφάνειες $A_{(k-1),j}, A_{k,j}$ ως βάσεις και παράπλευρη επιφάνεια αυτή που αποτελείται από τις γραμμές στροβιλότητας $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_j^0)$. Οπότε κάθε V_i είναι τμήμα του σωλήνα στροβιλότητας με κυκλοφορία:

$$\Gamma_j = \iint_{A_{0,j}} \vec{\omega} d\vec{A} \quad (145)$$

Η νέα επιφάνεια A_1 με τον
 διαμερισμό της $A_{1,j}$ που
 ορίζεται από τις γραμμές
 στροβιλότητας $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_j^0)$



Σχήμα 35.

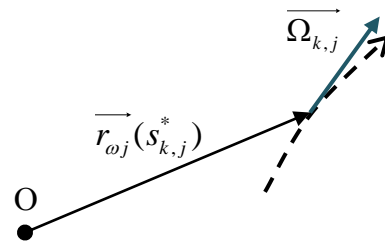
Επιλέγουμε ένα εσωτερικό σημείο \vec{r}_{cj}^* σε κάθε μία επιφάνεια $A_{0,j}$, από το οποίο περνάει η γραμμή στροβιλότητας $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_{cj}^*)$. Η καμπύλη $\vec{r}_\omega(s; \vec{r}_{cj}^*) = \vec{r}_{\omega j}(s)$ συναντάει τις επιφάνειες $A_{k,j}$ όταν το μήκος τόξου γίνεται $s_{k,j}$. Τα στοιχεία στροβιλότητας τοποθετούνται πάνω σε κάθε μία από τις γραμμές στροβιλότητας $\vec{r}_{\omega j}(s)$ στο σημείο $\vec{r}_{\omega j}(s_{k,j}^*)$ και ακολουθούν την κλίση της γραμμής στροβιλότητας στο σημείο που τοποθετούνται. Για το μήκος τόξου $s_{k,j}^*, k \geq 1$ ισχύει:

$$\int_{s_{k-1,j}}^{s_{k,j}^*} \left| \frac{d\vec{r}_{\omega j}(s)}{ds} \right| ds = \frac{1}{2} \int_{s_{k-1,j}}^{s_{k,j}^*} \left| \frac{d\vec{r}_{\omega j}(s)}{ds} \right| ds \quad (146)$$

και η στροβιλότητα που τοποθετείται σε κάθε σημείο $\vec{r}_{\omega j}(s_{k,j}^*)$ είναι:

$$\vec{\Omega}_{k,j} = \iiint_{V_i} \vec{\omega} dV \approx \Gamma_j \frac{d\vec{r}_{\omega j}(s_{k,j}^*)}{ds} \int_{s_{k-1,j}}^{s_{k,j}^*} \left| \frac{d\vec{r}_{\omega j}(s)}{ds} \right| ds \quad (147)$$

Ένα στοιχείο στροβιλότητας τοποθετείται
 πάνω σε μία από τις γραμμές στροβιλότητας
 $\vec{r}_{\omega j}(s)$ στο σημείο $\vec{r}_{\omega j}(s_{k,j}^*)$ και ακολουθεί
 την κλίση της γραμμής στροβιλότητας στο
 σημείο που τοποθετείται.



Σχήμα 36.

Η σύνδεση των στοιχείων ορίζεται από τις γραμμές στροβιλότητας όπου ανήκουν, δηλαδή τον αριθμό k . Οπότε σε κάθε μία από τις $\nu 1$ γραμμές στροβιλότητας $\vec{r}_{\omega_j}(s)$ έχουμε $\nu 2$ στοιχεία στροβιλότητας. Αφού καθορίσαμε πως αρχικοποιούνται τα στοιχεία στροβιλότητας θα συνεχίσουμε αναπτύσσοντας την μέθοδο για την j γραμμή στροβιλότητας.

Η παράμετρος αποκοπής ε_j για την j γραμμή στροβιλότητας καθορίζεται αφού αποφασίσουμε τον αριθμό επικάλυψης, δηλαδή ένα στοιχείο πόσα γειτονικά θα καλύπτει. Αν το συνολικό μήκος της γραμμής είναι L_j τότε για να καλύπτονται ep στοιχεία από κάθε ένα από τα n στοιχεία επιβάλλουμε:

$$\varepsilon_{kj} = ep \cdot \max_{k=1, \dots, s_{k-1,j}}^{s_{k,j}} \left| \frac{d\vec{r}_{\omega_j}(s)}{ds} \right| ds \quad (148)$$

Γενικά, τα στοιχεία τοποθετούνται κάθε χρονική στιγμή σε διαδοχικά ίσα τόξα οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\varepsilon_j = ep \cdot \frac{L_j}{\nu 2} \quad (149)$$

Και

$$\vec{\Omega}_{k,j} = \Gamma_j \frac{d\vec{r}_{\omega_j}(s_{k,j}^*)}{ds} \frac{L_j}{\nu 2} \quad (150)$$

Καθώς μετακινούνται τα στοιχεία το μήκος της καμπύλης μεταβάλλεται. Στην περίπτωση που μικραίνει το μήκος της γραμμής για να διατηρήσουμε τον αριθμό επικάλυψης των στοιχείων πρέπει να μικραίνει ο αριθμός των στοιχείων. Αντίστοιχα, στην περίπτωση που μεγαλώνει το μήκος της καμπύλης για να διατηρείται ο αριθμός επικάλυψης των στοιχείων πρέπει να προσθέτουμε στοιχεία. Ενδιαφερόμαστε για την δεύτερη περίπτωση, αφού σε αυτή σταδιακά θα επικαλύπτονται σταδιακά όλο και λιγότερα στοιχεία οπότε η λύση σταδιακά θα καταστρέφεται. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το μήκος της καμπύλης από L_j έγινε L'_j , αντίστοιχα, ο αριθμός των στοιχείων πρέπει να γίνει $\nu 2'$ και να έχουμε τον ίδιο αριθμό επικάλυψης. Παρατηρούμε ότι όσο αλλάζει το μήκος της γραμμής στροβιλότητας ο όγκος που αντιπροσωπεύει πρέπει να παραμένει σταθερός, ώστε να διατηρείται η κυκλοφορία της γραμμής.

Για να έχουμε την ίδια επικάλυψη πρέπει να ισχύει:

$$ep = \frac{v2 \cdot \varepsilon_j}{L_j} = \frac{v2' \cdot \varepsilon_j}{L'_j} \Rightarrow v2'_j = \left[\begin{pmatrix} L_j \\ L'_j \end{pmatrix} v2 \right] \quad (151)$$

με τις αγκύλες συμβολίζουμε τον πιο κοντινό ακέραιο του αποτελέσματος μέσα στην αγκύλη.

Ο υπολογισμός του μήκους της γραμμής στροβιλότητας δεν είναι προφανής. Αν υποθέσουμε ότι υπολογίζεται καλά από το άθροισμα των αποστάσεων των στοιχείων τότε η καμπυλότητα της γραμμής δεν θα συνέβαλε στο μήκος της γραμμής, ενώ η καμπυλότητα της γραμμής υπάρχει έμμεσα από τις κλίσεις των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Omega_{k,j}}$ και την παράμετρο μήκους τόξου. Με σκοπό η πληροφορία αυτή να διατηρείται και να συμβάλει στο μήκος της γραμμής, αναπαραστήσαμε κάθε γραμμή στροβιλότητας με παραμετρικές καμπύλες Hermite τρίτου βαθμού. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη αυτή ταυτίζεται με την γραμμή στροβιλότητας που θα υπήρχε αν δεν είχε γίνει η διακριτοποίηση του πεδίου στροβιλότητας από στοιχεία στροβιλότητας. Για την καμπύλη χρησιμοποιούμε:

- το μήκος τόξου των στοιχείων πάνω στην καμπύλη που φτιάξαμε κατά την αρχική τοποθέτηση τους ή κάποιου προηγούμενου χρονικού βήματος αφού έγινε η ανακατανομή
- τις θέσεις των στοιχείων στο χρονικό βήμα που ζητάμε το μήκος L'_j
- το διάνυσμα $\frac{\overrightarrow{\Omega_{k,j}} L_j}{\Gamma_j v2}$ ως διάνυσμα κλίσης στην κάθε θέση.

Για κάθε χρονική στιγμή κατασκευάζουμε την καμπύλη Hermite και υπολογίζουμε το μήκος τόξου από το αρχικό έως το τελικό σημείο της. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη αυτή αναπαριστά καλά την γραμμή στροβιλότητας στην νέα χρονική στιγμή καθώς αυτή μετατοπίζεται. Σημειώνουμε, ότι οι γραμμές στροβιλότητας θα είναι είτε κλειστές γραμμές ή περιοδικά επαναλαμβανόμενες ανοικτές γραμμές οπότε συμπεριλαμβάνουμε ένα επιπλέον σημείο ώστε η γραμμή να είναι κλειστή ή περιοδική αντίστοιχα. Το σημείο αυτό θα είναι και στις δύο περιπτώσεις το πρώτο σημείο της γραμμής, κυριολεκτικά αν είμαστε στην πρώτη περίπτωση και το περιοδικά επαναλαμβανόμενο του πρώτου σημείου αν είμαστε στην δεύτερη περίπτωση.

Η αναπαράσταση της καμπύλης από Hermite πολυώνυμα χρησιμοποιείται επίσης, στη περίπτωση όπου απαιτείται να προσθέσουμε στοιχεία. Για την αναδιανομή των στοιχείων, τα σημεία τοποθετούνται στις θέσεις πάνω στην καμπύλη Hermite, οι οποίες χωρίζουν αυτή σε

$v2'_j$ ίσα μεταξύ τους σε μήκος στοιχεία, και βρίσκουμε τις νέες τιμές της παραμέτρου μήκος τόξου $s_{k,j}^*$ πάνω στην νέα καμπύλη $\overrightarrow{r'_{\omega j}}$. Οπότε λύνουμε την εξίσωση:

$$\int_{s_{k-1,j}}^{s_{k,j}^*} \left| \frac{d\overrightarrow{r'_{\omega j}}(s)}{ds} \right| ds = \frac{L'}{v2'_j} \quad (152)$$

και το νέο διάνυσμα κατανομής της στροβιλότητας είναι:

$$\overrightarrow{\Omega}_{k,j} = \Gamma_j \frac{d\overrightarrow{r'_{\omega j}}(s_{k,j}^*)}{ds} \frac{L'}{v2'_j} \quad (153)$$

Σε κάθε χρονικό βήμα επαναλαμβάνουμε την διαδικασία. Με αυτό τον τρόπο τα στοιχεία θα βρίσκονται πάντα στην ίδια γραμμή στροβιλότητας της οποίας το μήκος θα είναι αυτό που ορίζεται από το επόμενο χρονικό βήμα και η κυκλοφορία θα είναι ίδια κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, ο βαθμός επικάλυψης θα είναι πάντα ο ίδιος. Κλείνουμε την παράγραφο συνοψίζοντας τα σημαντικότερα σημεία της διαδικασίας.

1. Ο διαμερισμός του V γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα V_i να αποτελούν σωλήνες στροβιλότητας. Πάντα μπορούμε την χρονική στιγμή μηδέν να κατασκευάσουμε τον διαμερισμό ώστε να ισχύει η παραπάνω πρόταση. Ένας σωλήνας στροβιλότητας όμως, υπάρχει περίπτωση καθώς μετακινείται να σχηματίζει κλειστές γραμμές, οπότε απαιτείται να «σπάσει» σε μικρότερους σωλήνες. Κάτι τέτοιο δεν συμπεριλαμβάνεται στην διαδικασία.
2. Η προσέγγιση της γραμμής στροβιλότητας από μία καμπύλη Hermite είναι αντιπροσωπευτική της γραμμής στροβιλότητας σε κάθε χρονική στιγμή. Τα στοιχεία στροβιλότητας κατά την αναδιανομή τοποθετούνται πάνω στην γραμμή στροβιλότητας χωρίζοντας την γραμμή σε ίσα τμήματα.

3.5 Κατασκευή Διαμερισμών σε Επίπεδη Κυκλική Επιφάνεια με Σταθερό Εμβαδό

Επειδή η πιο συχνή μοντελοποίηση των δινών που συναντήσαμε γίνεται με ένα κυλινδρικό πεδίο στροβιλότητας είναι σημαντικό να έχουμε την δυνατότητα να ελέγχουμε τις διαμερίσεις ώστε να έχουν επιθυμητές ιδιότητες. Διασφαλίζουμε έτσι την ομαλή λειτουργία του σχήματος. Η πιο σημαντική ιδιότητα είναι η επικάλυψη των στοιχείων. Άλλη σημαντική ιδιότητα που παρατηρήσαμε είναι ότι το πεδίο στροβιλότητα πρέπει να αντιπροσωπεύεται από μία παντού αρκετά πυκνή κατανομή. Για αυτούς τους λόγους προτείνουμε η επιλογή του αρχικού διαμερισμού $A_{0,j}$ της επιφάνειας A_0 να γίνεται ώστε κάθε επιφάνεια $A_{0,j}$ να αναπαριστά το ίδιο εμβαδό πάνω στην A_0 . Παρουσιάζουμε πως επιτυγχάνεται αυτό στην περίπτωση που η επιφάνεια A_0 είναι κυκλική επιφάνεια.

Χωρίζουμε την επιφάνεια A_0 , ακτίνας R σε $\nu 1$ διαμερίσεις, οπότε κάθε μία από τις διαμερίσεις θα έχει εμβαδόν:

$$E(A_{0,j}) = \frac{E(A_0)}{\nu 1} = \frac{\pi R^2}{\nu 1} \quad (154)$$

Θα ξεκινήσουμε χωρίζοντας ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας r_0 με κέντρο το κέντρο του A_0 σε n_0 διαμερίσεις. Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\pi r_0^2}{n_0} = \frac{\pi R^2}{\nu 1} \Rightarrow r_0 = R \sqrt{\frac{n_0}{\nu 1}} \quad (155)$$

Πρέπει να συμπληρώσουμε την επιφάνεια A_0 με $\nu 1 - n_0$ ακόμα επιφάνειες. Επιλέγουμε να χωρίσουμε την υπόλοιπη επιφάνεια σε Q ομόκεντρες κυκλικές λωρίδες CS_q και κάθε λωρίδα θα χωριστεί σε $n_q, q=1, 2, \dots, Q$ τμήματα. Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\nu 1 = \sum_{q=0}^Q n_q \quad (156)$$

Η εσωτερική ακτίνα κάθε λωρίδας, $r_{in,q}$ είναι ίση με την εξωτερική ακτίνα της προηγούμενης:

$$r_{in,q} = r_{out,q-1}, q=1, 2, \dots, Q \text{ με } r_{0,out} = r_0$$

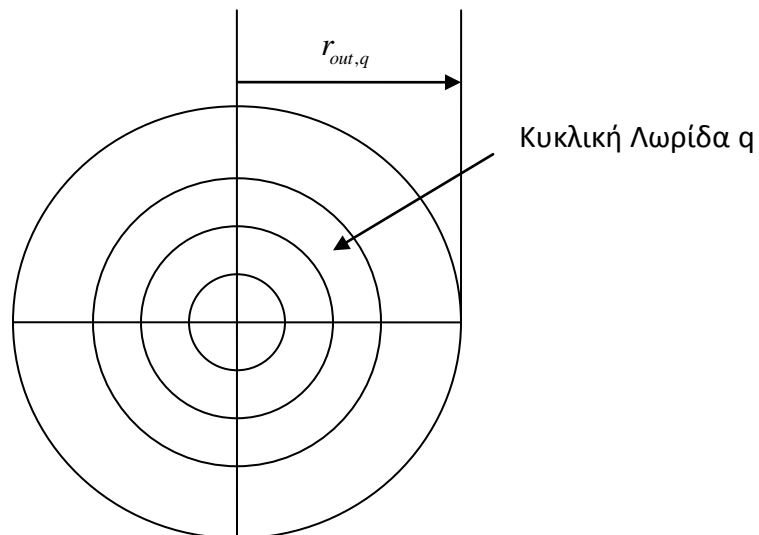
Για την εξωτερική ακτίνα κάθε λωρίδας, $r_{out,q}$ πρέπει να ισχύει:

$$E(CS_q) = n_q \frac{E(A_0)}{\nu_1} \Rightarrow \pi(r_{out,q}^2 - r_{out,q-1}^2) = n_q \frac{\pi R^2}{\nu_1} \Rightarrow r_{out,q} = \sqrt{n_q \frac{R^2}{\nu_1} + r_{out,q-1}^2} \quad (157)$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} q=1: r_{out,1} &= R \sqrt{\frac{n_1 + n_0}{\nu_1}} \\ q=2: r_{out,2} &= R \sqrt{\frac{n_2 + n_1 + n_0}{\nu_1}} \\ &\cdot \\ q &= \cdot \\ &\cdot \\ q: r_{out,q} &= \frac{R}{\sqrt{\nu_1}} \sqrt{\sum_{\lambda=0}^q n_\lambda} \\ &\cdot \\ q &= \cdot \\ &\cdot \\ q=Q: r_{out,q} &= \frac{R}{\sqrt{\nu_1}} \sqrt{\sum_{q=0}^Q n_q} = R \end{aligned} \quad (158)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει το παρακάτω, σχήμα 37:

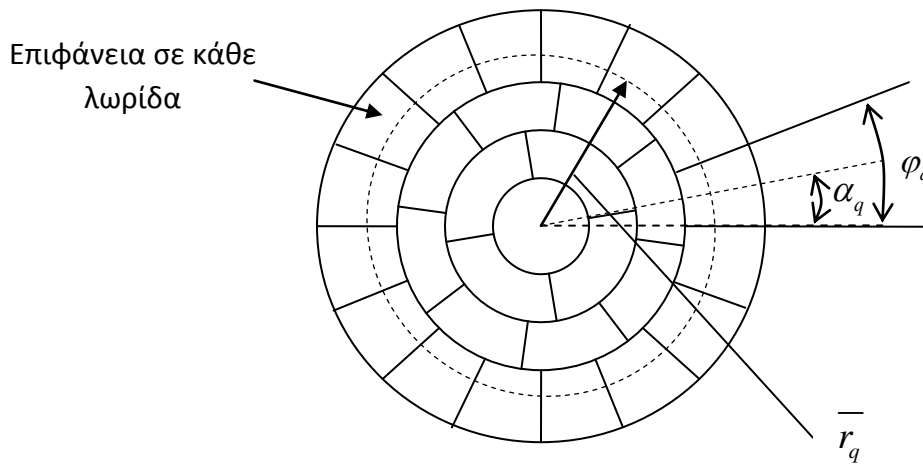


Σχήμα 37. Κυκλικές λωρίδες, οι οποίες θα χωριστούν ώστε να έχουν ίδιο εμβαδόν

Οι γωνίες που πρέπει να σχηματίζει κάθε ένα από τα n_q τμήματα ορίζονται ώστε κάθε τμήμα να έχει ίδιο εμβαδόν με κάθε άλλο τμήμα:

$$\frac{\varphi_q (r_{out,q}^2 - r_{out,q-1}^2)}{2} = \pi r_0^2 \Rightarrow \frac{\varphi_q r_0^2 (\sum_{\lambda=0}^q n_\lambda - \sum_{\lambda=0}^{q-1} n_\lambda)}{2} = \pi r_0^2 \Rightarrow \varphi_q = \frac{2\pi}{n_q} \quad (159)$$

Ο διαμερισμός όπως τον έχουμε κατασκευάσει μέχρι στιγμής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 38:



Σχήμα 38. Ο διαμερισμός του κυκλικού δίσκου

Η γωνία τοποθέτησης α_q των διαμερισμών δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα. Θα προσδιορίσουμε πρώτα τις θέσεις \vec{r}_{ej} από τις οποίες θα περνάνε οι γραμμές στροβιλότητας $\vec{r}_{\omega j}(s)$. Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία στροβιλότητας τοποθετούνται πάνω στις γραμμές στροβιλότητας $\vec{r}_{\omega j}(s)$ όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Επιλέγουμε το σημείο από το οποίο θα περνάνε οι γραμμές στροβιλότητας να είναι το κεντροειδές κάθε διατομής. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα κεντροειδή για κάθε λωρίδα q περνάν από το κέντρο το δίσκου και σχηματίζουν ανά δύο γωνία φ_q ενώ οι απόσταση των κεντροειδών από το κέντρο το κύκλου είναι:

$$\vec{r}_0 = \frac{4}{3} R \sqrt{\frac{n_0}{\nu 1}} \frac{\sin(\varphi_0/2)}{\varphi_0}, \vec{r}_q = \frac{4}{3} \frac{r_{out,q}^2 + r_{out,q} r_{out,q-1} + r_{out,q-1}^2}{r_{out,q} + r_{out,q-1}} \frac{\sin(\varphi_q/2)}{\varphi_q} \quad (160)$$

Η γωνία α_q είναι η γωνία με την οποία τοποθετούνται οι διαμερισμοί. Κάθε ένα από τα n_q στοιχεία της ίδιας λουρίδας θα τοποθετείται σε γωνία:

$$a_q, a_q + \varphi_q, a_q + 2\varphi_q, \dots, a_q + (n_q - 1)\varphi_q \quad (161)$$

Ο πιο άμεσος τρόπος προσδιορισμού της γωνίας είναι, να είναι ίση με μηδέν ή $\varphi_q/2$ ή $-\varphi_q$. Άλλος τρόπος είναι να προσδιοριστεί η α_q ώστε η απόσταση δύο διαδοχικών κεντροειδών πάνω στην ίδια κυκλική λουρίδα να είναι ίση με την απόσταση των δύο πιο κοντινών κεντροειδών σε διαφορετικές λωρίδες. Αν η απόσταση δύο διαδοχικών κεντροειδών προσδιοριστεί πάνω στην λουρίδα $q-1$ τότε έχουμε:

$$\alpha_q = \arccos\left(\frac{\bar{r}_q}{2r_{q-1}} - \frac{\bar{r}_{q-1}}{2r_q} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n_{q-1}}\right)\right)\right) + \alpha_{q-1} \quad (162)$$

Η σχέση αυτή δίνει αποτέλεσμα μόνο την περίπτωση όπου η απόσταση δύο διαδοχικών λωρίδων είναι μικρότερη από την απόσταση δύο διαδοχικών σημείων στην ίδια λωρίδα, δηλαδή μόνο στην περίπτωση που ισχύει:

$$\bar{r}_q - \bar{r}_{q-1} < \bar{r}_{q-1} \sqrt{2(1 - \cos(\varphi_{q-1}))}$$

Η αντίστοιχη σχέση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αν δεν ισχύει η συνθήκη αυτή, αλλά ισχύει η:

$$\bar{r}_q - \bar{r}_{q-1} < \bar{r}_q \sqrt{2(1 - \cos(\varphi_q))}$$

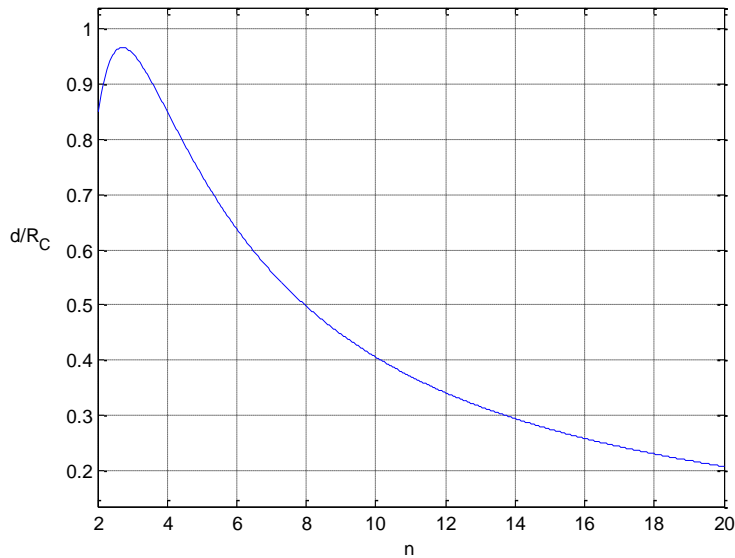
Είναι η:

$$\alpha_q = \arccos\left(\frac{\bar{r}_{q-1}}{2r_q} - \frac{\bar{r}_q}{2r_{q-1}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n_q}\right)\right)\right) + \alpha_{q-1} \quad (163)$$

Σε περίπτωση που δεν ισχύει καμία από τις δύο παραπάνω συνθήκες τότε απλά θέτουμε $\alpha_q = 0$. Ορίζοντας με τον παραπάνω τρόπο τα α_q διασφαλίζουμε την επικάλυψη των στοιχείων σε περίπτωση που επιλέξουμε την παράμετρο αποκοπής ε ως την απόσταση των

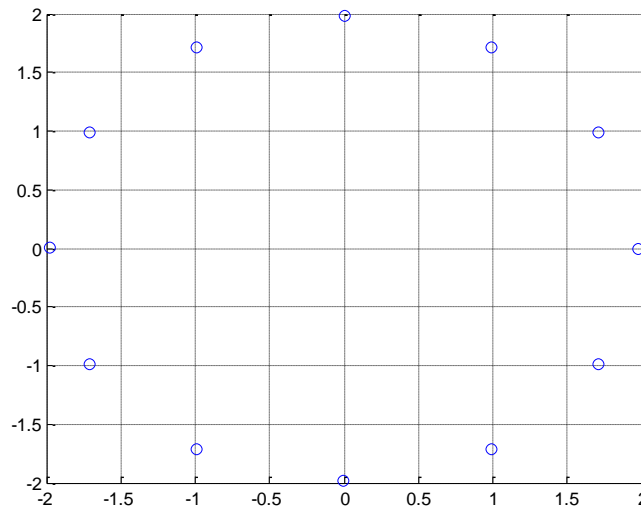
γειτονικών στοιχείων πάνω σε διαφορετικές κυκλικές λωρίδες. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα εφαρμογής της παραπάνω διαδικασία.

Η πιο απλή περίπτωση είναι να χρησιμοποιήσουμε μία λωρίδα. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω διάγραμμα, σχήμα 39, το οποίο μας δίνει τον λόγο απόσταση διαδοχικών σημείων ανά ακτίνα πυρήνα (στο σχήμα R_C) με τον αριθμό των σημείων.



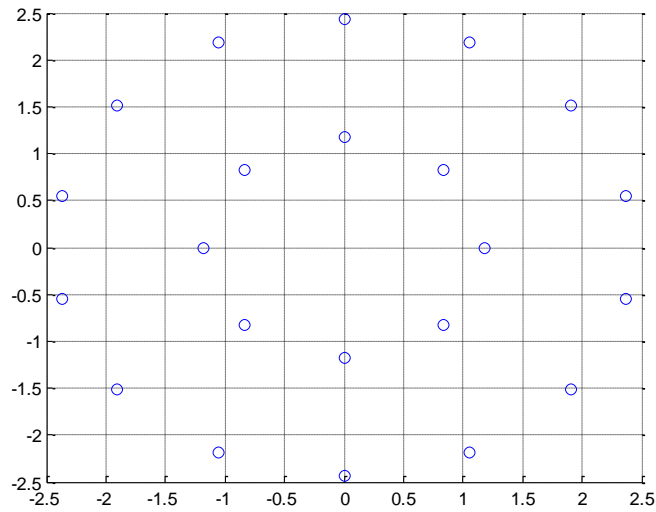
Σχήμα 39.

Για να έχουμε επικάλυψη ενός σημείου με ep γειτονικά του, πρέπει η παράμετρος αποκοπής ε να είναι $\varepsilon = ep \cdot d$. Οπότε αν είναι $R_c = 3$ και αποφασίσουμε $ep = 1$ τότε πρέπει να επιλέξουμε $n_0 = 12$ ώστε να έχουμε οριακά $\varepsilon \approx 1$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 40.



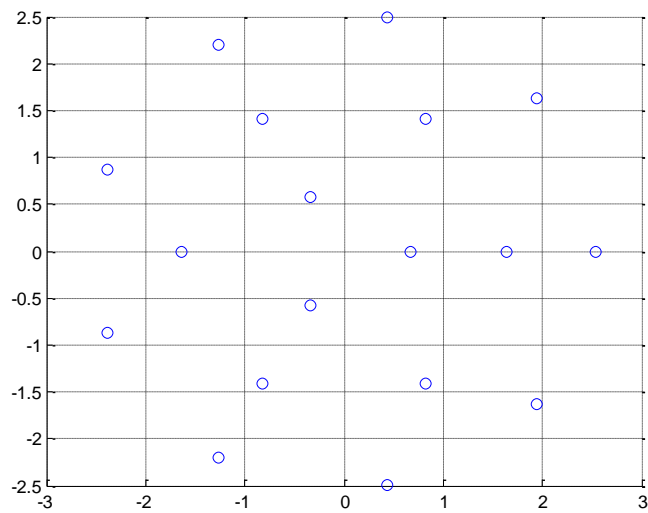
Σχήμα 40.

Αν χρησιμοποιήσουμε δύο λουρίδες τότε η αντίστοιχη οριακή περίπτωση είναι για $n_0 = 8, n_1 = 14$, σχήμα 41.



Σχήμα 41.

Αν χρησιμοποιήσουμε τρεις λουρίδες η οριακή περίπτωση είναι $n_0 = 3, n_1 = 6, n_2 = 9$, σχήμα 42.



Σχήμα 42.

4. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΚΩΔΙΚΑΣ FORTRAN 95/03

Κάθε αριθμητική μέθοδος για την υλοποίηση της, απαιτεί ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Θεωρούμε το κεφάλαιο αυτό απαραίτητο ώστε να είναι πλήρης η παρουσίαση της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας, αφού η θεωρητική ανάπτυξη της είναι απαραίτητα συνδεδεμένη με τον προγραμματισμό της χρησιμοποιώντας τις ιδιαίτερες δυνατότητες μιας σύγχρονης γλώσσας προγραμματισμού. Ένα πρόγραμμα Fortran 95/03, γενικά, αποτελείται από αρθρώματα (modules) και το βασικό πρόγραμμα (main) το οποίο καλεί τα module. Θα παρουσιάσουμε πρώτα τα module του κώδικα που αναπτύξαμε μαζί με συνοπτικές επεξηγήσεις για το καθένα και οδηγίες για την χρήση τους. Οπότε συναντάμε κάποια βασική λεπτομέρεια σε σχέση με την αριθμητική μέθοδο θα κάνουμε σύντομη συζήτηση. Τελευταίο, παρουσιάζουμε το κύριο μέρος του προγράμματος. Σημειώνουμε, ότι σε όλο τον κώδικα προσπαθήσαμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες δυνατότητες της Fortran 95/2003 για αντικειμενοστραφή προγραμματισμό αλλά και τις δυνατότητες διαχείρισης εξαιρέσεων (floating-point exception handling).

4.1 Βασικά MODULES του Προγράμματος

Σε ένα module αποθηκεύονται τοπικά είτε μεταβλητές που χρησιμοποιούνται από το κύριο πρόγραμμα ή άλλα module, είτε υπορουτίνες και συναρτήσεις με τις οποίες προσφέρουμε παραπάνω δυνατότητες στην Fortran (π.χ. πράξεις με διανύσματα). Επίσης, οι συναρτήσεις και υπορουτινές του module είναι δυνατόν να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές που ορίζονται στο module χωρίς να απαιτείται να τις ορίσουμε σε κάθε συνάρτηση ή υπορουτίνα που τις χρησιμοποιεί. Κατά μία έννοια οι μεταβλητές που δηλώνονται στο module είναι διαθέσιμες για όλα τα επιμέρους τμήματα του module, αλλά και σε όσα τμήματα το χρησιμοποιούν. Στην ενότητα θα παρουσιάσουμε τα module του προγράμματος. Σημειώνουμε, ότι όπου αναφερόμαστε σε πραγματικό αριθμό εννοούμε πραγματικό αριθμό διπλής ακρίβειας και με τονισμένα γράμματα αναφερόμαστε σε μεταβλητές που υπάρχουν στον κώδικα.

4.1.1 SPACE3D

Το module συμπληρώνει την πηγαία γλώσσα FORTRAN 95 με νέα αντικείμενα (objects) που διευκολύνουν τον προγραμματισμό της μεθόδου των στοιχείων στροβιλότητας. Δεδομένου ότι οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται έχουν διανυσματική γραφή, τα διανύσματα και οι τελεστές τους είναι αυτά που ορίζονται στα πλαίσια αυτού του module. Να σημειωθεί επίσης ότι η βασική γραφή των unary και binary τελεστών της διανυσματικής άλγεβρας γίνεται με υπερφόρτιση (overloading) των αντίστοιχων τελεστών των πραγματικών αριθμών, πράγμα που επιτρέπει η FORTRAN 95, μέσω της εντολής INTERFACE OPERATOR. Ορίζουμε δηλαδή τα παρακάτω:

1. Ορισμοί Αντικειμένων :
 - Τύπος Σημείο, στο πρόγραμμα αναφέρεται ως point και αποτελείται από τρεις πραγματικούς αριθμούς, x, y, z
 - Τύπος Διάνυσμα, στο πρόγραμμα αναφέρεται ως vector και αποτελείται από τρεις πραγματικούς αριθμούς, vx, vy, vz
2. Σχέσεις ισότητας (=) :
 - σημείο με σημείο
 - διάνυσμα με διάνυσμα
3. Πράξεις σημείου με σημείο :
 - Πρόσθεση (+) με αποτέλεσμα σημείο
 - Αφαίρεση (-) με αποτέλεσμα διάνυσμα
4. Πράξεις διανύσματος με διάνυσμα :
 - Πρόσθεση (+) με αποτέλεσμα διάνυσμα
 - Αφαίρεση (-) με αποτέλεσμα διάνυσμα

- Εσωτερικός πολλαπλασιασμός (*) με αποτέλεσμα πραγματικό αριθμό
 - Εξωτερικός πολλαπλασιασμός (.x.) με αποτέλεσμα διάνυσμα
5. Πράξεις διανύσματος με πραγματικό αριθμό :
 - Πολλαπλασιασμός (*) με αποτέλεσμα διάνυσμα
 - Διάρθρωση (/) με αποτέλεσμα διάνυσμα
 6. Πράξη πραγματικού αριθμού με διάνυσμα :
 - Πολλαπλασιασμός (*) με αποτέλεσμα διάνυσμα
 7. Πράξεις σημείο με διάνυσμα :
 - Πρόσθεση (+) με αποτέλεσμα σημείο
 8. Συναρτήσεις με όρισμα διάνυσμα και αποτέλεσμα πραγματικό αριθμό :
 - Μέτρο(norm) και Μέτρο στο τετράγωνο(norm2)
 9. Συνάρτηση με όρισμα διάνυσμα και αποτέλεσμα διάνυσμα :
 - Μοναδιαίο διάνυσμα (unit)

Το module σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο που μας δίνει την δυνατότητα να ορίζουμε μία μεταβλητή τύπου «σημείο» ή «διανύσματος» και να εκτελούμε όλα τα παραπάνω με τον κλασικό μαθηματικό συμβολισμό, χωρίς να απαιτούνται διαφορετικές συναρτήσεις για την κάθε περίπτωση (πέρα από το μέτρο και το μοναδιαίο) αφού η Fortran έχει πλέον την δυνατότητα να αναγνωρίσει την κάθε περίπτωση (operator overloading).

4.1.2 IMPLIED_DEFS

Εδώ συμπεριλαμβάνονται όλοι οι μαθηματικοί συμβολισμοί που υπονοούνται για μας, αλλά όχι για τον υπολογιστή. Επειδή χρησιμοποιούνται συχνά είναι χρήσιμο να αναφερόμαστε συμβολικά σε αυτά. Έχουμε τον ορισμό του π , των μοναδιαίων διανυσμάτων και του σημείου «Αρχή των αξόνων». Αντίστοιχα συμβολίζονται ως **pi**, τα μοναδιαία **ii**, **jj**, **kk** και τέλος η αρχή των αξόνων **O**.

4.1.3 PERIODIC_PARAMETERS

Στο module PERIODIC_PARAMETERS ορίζονται οι απαραίτητες παράμετροι οι οποίες απαιτούνται για τους περιοδικούς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, όσο αφορά τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα, ορίζονται οι αριθμοί Bernoulli, ο αριθμός των περιόδων (ακέραιος, **ns**) που θα γίνονται κανονικά οι επαγωγές, ο αριθμός των όρων (ακέραιος, **n**) που υπολογίζονται κανονικά στις σειρές, ο αριθμός των παραγώγων (ακέραιος, **m**) που θα συμμετέχουν στους υπολογισμούς των σειρών και οι σταθερές που εμφανίζονται από τις παραγώγους (δηλαδή τα M_q^i και N_q^i). Όσο αφορά το περιοδικό πεδίο ορίζονται, η κατεύθυνση \vec{e} κατά την οποία η

κατανομή είναι περιοδική (διάνυσμα \mathbf{Ie}), το μήκος (πραγματικός \mathbf{II}) του περιοδικού «κουτιού» και το «κέντρο» του (σημείο \mathbf{Rp}). Το σημείο αυτό είναι απαραίτητο ώστε να καθορίζεται το περιοδικό κουτί. Αν ένα στοιχείο μετακινηθεί εκτός του «κουτιού» τότε πρέπει ταυτόχρονα να μετακινηθεί και ένα στοιχείο εντός του κουτιού από την άλλη μεριά. Δηλαδή αν η προβολή της σχετικής θέσης του στοιχείου από το σημείο \mathbf{Rp} είναι μεγαλύτερη από το μισό της περιόδου, τότε αναγκάζουμε την τοποθέτηση ενός ίδιου στοιχείου στην άλλη μεριά, ακριβώς όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο χρήστης του module μπορεί να ορίζει όλα τα παραπάνω ανάλογα με το πρόβλημα προς μελέτη. Στο module συμπεριλαμβάνεται και η υπορουτίνα αρχικοποίησης των M_q^i και N_q^i , **find_M_N**, η οποία πρέπει να καλείται πάντα όταν χρησιμοποιούμε των κώδικα για περιοδικά πεδία στροβιλότητας.

4.1.4 SING_ELEM

Το module SING_ELEM συμπεριλαμβάναμε όλες τις απαραίτητες συναρτήσεις για τον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων και του διανύσματος ρυθμού μεταβολής των τροπών. Το module χρησιμοποιεί (use association) τα module SPACE3D και IMPLIED_DEFS. Ο κώδικας πρέπει να «γνωρίζει» δεδομένα για το κάθε στοιχείο. Κάθε στοιχείο στροβιλότητας, όπως αναφέρουμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από ένα κινούμενο σημείο, ένα διάνυσμα και ένα πραγματικό αριθμό. Το σημείο κινείται, οπότε είναι νοηματικά διαφορετικό από ένα σημείο το οποίο είναι στατικό. Μπορεί να έχουμε κινούμενα σημεία ανεξάρτητα από τα στοιχεία στροβιλότητας. Στο module, λοιπόν, ορίζεται ως μεταβλητή το κινούμενο σημείο και το στοιχείο στροβιλότητας. Επιπλέον, είναι χρήσιμο να έχουμε την δυνατότητα να περνάμε πληροφορίες μεταξύ διαφορετικών κινούμενων σημείων και στοιχείων στροβιλότητας οπότε ορίζουμε και σχέση ισότητας για αυτά. Τα πιο βασικά στοιχεία που περιέχονται στο module είναι τα παρακάτω:

1. Ορισμοί Αντικειμένων:

- Τύπος Κινούμενο Σημείο, στο πρόγραμμα αναφέρεται ως mp (moving point) και αποτελείται από την θέση και την ταχύτητα αντίστοιχα. Στην θέση αναφερόμαστε με το σημείο p και στην ταχύτητα με το διάνυσμα v
- Τύπος Στοιχείο Στροβιλότητας, στο πρόγραμμα αναφέρεται ως nvortex (point vortex) και αποτελείται από ένα κινούμενο σημείο, το διάνυσμα Ω , το διάνυσμα ρυθμού μεταβολής των τροπών, το μήκος τόξου του στοιχείου πάνω στην καμπύλη, την παράμετρο ομαλοποίησης και μία βοηθητική μεταβλητή για την ανακατασκευή της καμπύλης στην περίπτωση περιοδικών επαγωγών για την περίπτωση που οι γραμμές στροβιλότητας δεν είναι κλειστές. Σε αυτά αναφερόμαστε ως, mp, G, dG, u, e_mol και pmove

2. Σχέσεις Ισότητας (=):
 - Κινούμενο Σημείο με Κινούμενο Σημείο
 - Στοιχείο Στροβιλότητας με Στοιχείο Στροβιλότητας
3. Διμερής σχέση απόστασης (.dist.):
 - Κινούμενο Σημείο με Κινούμενο Σημείο
 - Κινούμενο Σημείο με Στοιχείο Στροβιλότητας
 - Στοιχείο Στροβιλότητας με Στοιχείο Στροβιλότητας
 - Στοιχείο Στροβιλότητας με Κινούμενο Σημείο
4. Υπορουτίνες Υπολογισμού Ταχύτητας (indvel και periodic_indvel):
 - Από Στοιχείο Στροβιλότητας σε Κινούμενο Σημείο
 - Από Στοιχείο Στροβιλότητας σε Στοιχείο Στροβιλότητας
5. Υπορουτίνες Υπολογισμού Ρυθμού Μεταβολής Τροπών (ind_G και periodic_ind_G):
 - Από Στοιχείο Στροβιλότητας σε Στοιχείο Στροβιλότητας

Η περίπτωση στην οποία έχουμε πηγές ή και δίπολα ή και επιφανειακά στοιχεία που φέρουν μία κατανεμημένη ιδιότητα, είναι εύκολο να συμπεριληφθεί στο module. Απλά πρέπει να προσθέσουμε υπορουτίνες υπολογισμού της επαγόμενης ταχύτητας και του ρυθμού μεταβολής των τροπών για καθένα από τα αντικείμενα που θα συμπεριλάβουμε. Για παράδειγμα, αν προσθέσουμε πηγές πρέπει να προσθέσουμε μία υπορουτίνα υπολογισμού της ταχύτητας από πηγή σε δίνη και μία υπορουτίνα υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής των τροπών από την επίδραση της πηγής. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις για την επαγωγή ταχυτήτων από πηγές έχουν ήδη συμπεριληφθεί στο κώδικα με σκοπό την μελλοντική επέκταση του, αλλά δεν έχουν συμπεριληφθεί οι σχέσεις υπολογισμού ρυθμού μεταβολής των τροπών.

Οι υπορουτίνες που εκτελούν τους περιοδικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούν τις σχέσεις οι οποίες αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και το module PERIODIC_PARAMETERS. Τέλος, στο module έχουμε συμπεριλάβει και την συνάρτηση **make_vps_help** η οποία χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του περιοδικού κουτιού.

4.1.5 VP_INIT

Εδώ περιέχονται όλες οι απαραίτητες συναρτήσεις για την αρχικοποίηση των στοιχείων στροβιλότητας. Το module VP_INIT χρησιμοποιεί τα module SPACE3D, IMPLIED_DEFS και SING_ELEM. Παρουσιάζουμε τις πιο βασικές συναρτήσεις που περιέχονται στο module.

1. Συνάρτηση **simple_vpline**

Η συνάρτηση τοποθετεί στοιχεία στροβιλότητας σε μία ευθεία γραμμή ώστε αυτά να ισαπέχουν. Η έξοδος είναι ένας πίνακας-στήλη $n \times 1$ τύπου `rvortex`. Κάθε γραμμή του πίνακα αποτελεί και ένα στοιχείο στροβιλότητας. Οπότε έχουμε τα `rvortex(1),rvortex(2),...,rvortex(n)`.

Μία τέτοια κατανομή προκύπτει από ένα κυλινδρικό σωλήνα στροβιλότητας. Ο σωλήνας στροβιλότητας χωρίζεται σε n μικρότερους κυλίνδρους. Κάθε ένας από τους μικρότερους κυλίνδρους ορίζει και ένα στοιχείο στροβιλότητας. Ως δεδομένα εισόδου απαιτούνται (με την παρακάτω σειρά):

- Θέση από την οποία αρχίζει η γραμμή(Σημείο): **r0**
- Κατεύθυνση-μοναδιαίο διάνυσμα στην οποία εκτίνεται ο κύλινδρος(διάνυσμα): **lel**
- Μήκος του κυλίνδρου(πραγματικός αριθμός): **lll**
- Αριθμός στοιχείων (θετικός ακέραιος): **n**
- Κυκλοφορία γύρω από τον κύλινδρο (πραγματικός αριθμός): **GG**
- Αριθμός στοιχείων που επικαλύπτει κάθε στοιχείο (πραγματικός αριθμός): **ovrlp**

Ο αριθμός επικάλυψης καθορίζει την παράμετρο εξομάλυνσης ε , οπότε απαιτείται προσοχή ώστε να έχουμε $\varepsilon < 1$. Ο αριθμός επικάλυψης, επειδή καθορίζει τον αριθμό ε , δεν είναι φυσικός αριθμός. Μπορούμε, για παράδειγμα, να έχουμε **ovrlp=2.5** και υπονοούμε πάλι ότι επικαλύπτονται δύο γειτονικά και ο αριθμός ε είναι μισή φορά μεγαλύτερος από την περίπτωση που έχουμε **ovrlp=2**.

2. Συνάρτηση **set_sin_vp**

Η συνάρτηση τοποθετεί στοιχεία στροβιλότητας σε μία ημιτονοειδή καμπύλη ώστε αυτά να ισαπέχουν. Μία τέτοια κατανομή θεωρούμε ότι προκύπτει από ένα κυλινδρικό σωλήνα στροβιλότητας ο οποίος έχει παραμορφωθεί χρησιμοποιώντας μία περιοδική ημιτονοειδή διαταραχή. Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, ο κύλινδρος χωρίζεται σε μικρότερους κυλίνδρους ίδιας ακτίνας με τον αρχικό και τοποθετείται ένα στοιχείο στο κάθε κυλινδρικό τμήμα. Η συνάρτηση χρησιμοποιεί το module `sin_length_n_stuff` με το οποίο γίνονται οι απαραίτητοι υπολογισμοί μήκους σε μία ημιτονοειδής γραμμή. Η έξοδος είναι ένας πίνακας τύπου "ρνortex", όπως ακριβώς περιγράψαμε παραπάνω. Ως δεδομένα εισόδου απαιτούνται (με την παρακάτω σειρά):

- Θέση από την οποία αρχίζει η γραμμή (Σημείο): **r0**
- Κατεύθυνση-μοναδιαίο διάνυσμα στην οποία εκτίνεται ο κύλινδρος (διάνυσμα): **lel**
- Κατεύθυνση-μοναδιαίο διάνυσμα στην οποία βρίσκεται η διαταραχή (διάνυσμα): **ne**
- Πλάτος διαταραχής (πραγματικός αριθμός): **amp**
- Μήκος κυλίνδρου (πραγματικός αριθμός): **lll**
- Αριθμός στοιχείων (θετικός ακέραιος): **n**
- Κυκλοφορία γύρω από τον κύλινδρο (πραγματικός αριθμός): **GG**
- Αριθμός επικάλυψης (πραγματικός αριθμός): **ovrlp**

3. Συνάρτηση **eq_areq_circ_dstr**

Η συγκεκριμένη συνάρτηση τοποθετεί κινούμενα σημεία “mpoints” σε ένα κυκλικό δίσκο με τον τόπο που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η συνάρτηση χρησιμοποιείται από άλλες συναρτήσεις που ορίζουν τα στοιχεία στροβιλότητας σε ένα κύλινδρο. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από μόνη της σε περίπτωση που για κάποιο λόγο θέλουμε να τοποθετήσουμε σε ένα επίπεδο κάποια κινούμενα σημεία. Η έξοδος της συνάρτησης είναι ένας πίνακας $n \times 1$ τύπου “mpoint”. Ως δεδομένα εισόδου απαιτούνται (με την παρακάτω σειρά):

- Κέντρο δίσκου (Σημείο): **r0**
- Κάθετο διάνυσμα επιπέδου που βρίσκεται ο δίσκος (διάνυσμα): **en**
- Διάνυσμα πάνω στο επίπεδο του δίσκου (διάνυσμα): **er**
- Ακτίνα του δίσκου (πραγματικός): **R**
- Πίνακας στοιχείων ανά λουρίδα, βλ. κεφ. 3 (πίνακας - στήλη ακέραιων): **nq**

4. Συνάρτηση **vp_cyl_rankine** και **vp_cyl_lamb**

Με την βοήθεια των προηγούμενων συναρτήσεων, οι συναρτήσεις **vp_cyl_rankine** και **vp_cyl_lamb** ορίζουν τα στοιχεία στροβιλότητας για ένα κύλινδρο στροβιλότητας του οποίου το πεδίο στροβιλότητας είναι αυτό μίας δίνης Rankine και Lamb αντίστοιχα. Η έξοδος της συνάρτησης είναι ένας πίνακας $(nsllices \cdot \sum nq) \times 1$ τύπου “rvortex”. Ως δεδομένα εισόδου απαιτούνται (με την παρακάτω σειρά):

- Θέση από την οποία αρχίζει ο κύλινδρος (Σημείο): **r0**
- Κατεύθυνση στην οποία εκτίνεται ο κύλινδρος (διάνυσμα): **lel**
- Μήκος του κυλίνδρου (πραγματικός αριθμός): **lll**
- Αριθμός κυκλικών δίσκων (ακέραιος): **nsllices**
- Ακτίνα κυλίνδρου (πραγματικός): **R**
- Διάνυσμα πάνω στο επίπεδο του δίσκου (διάνυσμα): **er**
- Πίνακας στοιχείων ανά λουρίδα, βλ. κεφ. 3 (πίνακας - γραμμή ακέραιων): **nq**
- Κυκλοφορία (πραγματικός): **GG**
- Αριθμός επικάλυψης (πραγματικός αριθμός): **ovrlp**

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι φτιαγμένες ώστε να είναι πιο εύκολη η χρήση τους με το σχήμα ανακατανομής των στοιχείων. Πέρα από αυτές υπάρχουν και άλλες συναρτήσεις οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν πριν την ανακατανομή των στοιχείων. Αυτές εκτελούν κανονικά τις ολοκληρώσεις για να ορίζουν τα στοιχεία στροβιλότητας. Οι ολοκληρώσεις γίνονται σε απλά πλέγματα ώστε να μπορούν να γίνουν αναλυτικά.

4.1.6 VORTWALK

Οι συναρτήσεις που ορίζουν τα στοιχεία στροβιλότητας έχουν ως έξοδο πάντα πίνακες οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία. Το module VORTWALK περιέχει όλες τις απαραίτητες υπορουτίνες, ώστε να εκτελούνται διαδοχικά οι επαγωγές ταχυτήτων και οι υπολογισμοί του ρυθμού μεταβολής των τροπών σε κάθε στοιχείο από κάθε στοιχείο. Επιπλέον, στο module συμπεριλαμβάνεται και η υπορουτίνα με την οποία λύνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο το αριθμητικό σχήμα επίλυσης είναι μία μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης η οποία περιγράφεται αναλυτικά στο (Hockney & Eastwood, 1981). Ο τρόπος με τον οποίο δομείται η μέθοδος δίνει την δυνατότητα να γίνεται οικονομία μνήμης για αυτό και η συγκεκριμένη χαρακτηρίζεται ως χαμηλών απαιτήσεων σε μνήμη (low storage method).

Η υπορουτίνα που λύνει το σύστημα εξισώσεων ονομάζεται **vp_walk** και η αντίστοιχη περιοδική **periodic_vp_walk**. Οι δύο υπορουτίνες χρησιμοποιούν δύο μεταβλητές. Ως είσοδο χρησιμοποιείται ο πίνακας στοιχείων στροβιλότητας και το χρονικό βήμα. Ο καινούργιος πίνακας στοιχείων στροβιλότητας γράφεται πάνω στον παλιό πίνακα, δηλαδή ο πίνακας χρησιμοποιείται και ως μεταβλητή εισόδου και ως μεταβλητή εξόδου²⁰. Οι υπορουτίνες χρησιμοποιούν τις υπορουτίνες **vo2vo_velo** και **vo2vo_G** για τον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων από κάθε στοιχείο στροβιλότητας σε κάθε στοιχείο στροβιλότητας και αντίστοιχα του ρυθμού μεταβολής των τροπών. Η υπορουτίνα για τα περιοδικά πεδία χρησιμοποιεί και τις αντίστοιχες περιοδικές υπορουτίνες **periodic_vo2vo_velo** και **periodic_vo2vo_G**.

Εκτός των παραπάνω υπορουτινών συμπεριλαμβάνονται και οι υπορουτίνες **vo2mp_velo** και **periodic_vo2mp_velo**. Με τις υπορουτίνες μπορούμε να υπολογίσουμε ταχύτητες που επάγονται από στοιχεία στροβιλότητας σε κινούμενα σημεία. Οι συγκεκριμένες υπορουτίνες γράφτηκαν με σκοπό την μελλοντική επέκταση του κώδικα και επιπλέον χρησιμοποιούνται από ένα πρόγραμμα post-processing των αποτελεσμάτων του κώδικα για τον υπολογισμό ταχυτήτων σε ένα πλέγμα. Οι ταχύτητες πάνω στο πλέγμα χρησιμοποιούνται από το Tecplot για τους υπολογισμούς του πεδίου στροβιλότητας. Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε το πεδίο στροβιλότητας που ορίζεται από τα στοιχεία στροβιλότητας.

4.1.7 HERMITIAN_N_STUFF

Στο Κεφάλαιο 3 αναπτύξαμε το σχήμα αναδιανομής που χρησιμοποιήσαμε. Για τον υπολογισμό του μήκους και την επανατοποθέτηση των στοιχείων τονίσαμε ότι πρέπει μεταξύ διαδοχικών σημείων να παρεμβάλουμε μία καμπύλη Hermite. Το module φτιάχτηκε ώστε να εκτελούνται βασικές διαδικασίες της αναδιανομής των στοιχείων, όχι όμως η ίδια η

²⁰ Η περίπτωση αυτή δίνεται με το χαρακτηρισμό μεταβλητής `intent(inout)`

αναδιανομή. Στο module αρχικά ορίζονται τρεις πίνακες-στήλες **point_set**, **vector_set** και **u_set** οι οποίοι αντίστοιχα είναι τύπου σημείο (point), διάνυσμα (vector) και πραγματικός αριθμός (real). Στον πίνακα **point_set** αποθηκεύονται τα της καμπύλης, τα οποία ανανεώνονται σε κάθε χρονικό βήμα. Στον πίνακα **vector_set** αποθηκεύονται τα εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης, τα οποία επίσης ανανεώνονται σε κάθε χρονικό βήμα χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στροβιλότητας σε κάθε σημείο. Τέλος, στον πίνακα **u_set** αποθηκεύονται οι τιμές της παραμέτρου για την αναπαράσταση της καμπύλης. Οι τρεις πίνακες χρησιμοποιούνται από τις συναρτήσεις που ορίζονται στο module.

1. Συναρτήσεις **Hermitian** και **tanHermitian**

Η συνάρτηση **Hermitian** συνθέτει την καμπύλη Hermite μεταξύ των δοσμένων σημείων του πίνακα **point_set** με την σειρά που δίνονται στο πίνακα. Τα εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης στα δοσμένα σημεία είναι αυτά που ορίζονται στον πίνακα **vector_set**. Για την αναπαράσταση της καμπύλης χρησιμοποιούνται οι τιμές του πίνακα **u_set**. Η συνάρτηση έχει ως είσοδο την τιμή της παραμέτρου **u** και ως έξοδο την θέση πάνω στην καμπύλη για την τιμή της παραμέτρου που χρησιμοποιήσαμε ως είσοδο. Αντίστοιχα, η συνάρτηση **tanHermitian** έχει ως έξοδο το εφαπτόμενο διάνυσμα στην θέση όπου η παράμετρος παίρνει την τιμή που δίνουμε στην είσοδο.

2. Συνάρτηση **Hermitian_length**

Η συνάρτηση υπολογίζει το μήκος της καμπύλης μεταξύ δύο σημείων. Για την αριθμητική προσέγγιση του ολοκληρώματος χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο Simpson-1/3. Ως είσοδο η συνάρτηση δέχεται τις παραμέτρους των δύο θέσεων που θέλουμε να υπολογίσουμε και των αριθμό των υποδιαστημάτων για την ολοκλήρωση.

3. Συνάρτηση **adpt_Hermitian_length**

Η συνάρτηση χρησιμοποιεί διαδοχικά την συνάρτηση **Hermitian_length**, για να υπολογίσει το μήκος της καμπύλης μεταξύ δύο σημείων, πυκνώνοντας τον αριθμό των υποδιαστημάτων (μέθοδος Romberg). Η προσαρμόσιμη (adaptive) μέθοδος σταματάει όταν το σφάλμα γίνει μικρότερο από μία δοσμένη τιμή.

4. Υπορουτίνα **Herm_find_u**

Η υπορουτίνα υπολογίζει την θέση-παραμέτρο πάνω στην καμπύλη η οποία απέχει συγκεκριμένη απόσταση μήκος τόξου από μια δεδομένη θέση-παραμέτρο πάνω στην καμπύλη. Για την επίλυση της εξίσωσης που προκύπτει χρησιμοποιείται η μέθοδος της διχοτόμησης. Αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της διχοτόμησης επειδή τα διαδοχικά αποτελέσματα άλλων μεθόδων υπήρχε περίπτωση να βρίσκονται εκτός του πεδίου ορισμού της παραμέτρου της καμπύλης. Με την μέθοδο της διχοτόμησης είμαστε σίγουροι ότι

τα διαδοχικά αποτελέσματα θα βρίσκονται πάντα στο πεδίο ορισμού της καμπύλης. Η υπορουτίνα δέχεται τρεις μεταβλητές. Η πρώτη μεταβλητή είναι η παράμετρος του σημείου πάνω στην καμπύλη από το οποίο ζητάμε το σημείο που θα έχουμε ως απάντηση να απέχει συγκεκριμένη απόσταση. Η δεύτερη μεταβλητή είναι το δεδομένο μήκος τόξου πάνω στην καμπύλη. Τέλος, η τρίτη μεταβλητή είναι η παράμετρος, αρχική υπόθεση, για την εκκίνηση των υπολογισμών και έχει τον χαρακτηρισμό είσοδος-έξοδος, αφού σε αυτή αποθηκεύονται και τα αποτελέσματα έως τη σύγκλιση.

4.1.8 REDISTRIBUTION

Στο module REDISTRIBUTION αποθηκεύονται οι απαραίτητες πληροφορίες και ορίζονται οι υπορουτίνες για την αναδιανομή των στοιχείων. Αρχικά, ορίζονται έξι πίνακες-στήλες μεταβλητών στοιχείων (allocatable arrays) **circulation**, **overlapping**, **particles_at_line**, **totL**, **particles_at_line_new**, **vpshelp**. Οι τρεις πρώτοι πίνακες λαμβάνουν τις αρχικές τους τιμές στο κύριο πρόγραμμα. Σε κάθε γραμμή των πινάκων αποθηκεύεται η απαραίτητη πληροφορία κάθε συνόλου από στοιχεία στροβιλότητας. Κάθε γραμμή, λοιπόν, αντιπροσωπεύει και ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας. Κάθε σύνολο στοιχείων στροβιλότητας ορίζεται με την έννοια ότι τα στοιχεία στροβιλότητας αντιπροσωπεύουν ένα λεπτό σωλήνα στροβιλότητας, όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και χαρακτηρίζεται από την κυκλοφορία του και το συνολικό μήκος της γραμμής των στοιχείων στροβιλότητας. Αντίστοιχα αποθηκεύονται σε μια γραμμή του πίνακα **circulation** και του πίνακα **totL**. Σε κάθε γραμμή ο αριθμός των στοιχείων αποθηκεύεται στον πίνακα **particles_at_line** και σε περίπτωση που απαιτείται αναδιανομή των στοιχείων αποθηκεύεται στο πίνακα **particles_at_line_new**. Στον πίνακα **vpshelp** αποθηκεύονται τα νέα στοιχεία που προκύπτουν από την αναδιανομή. Τέλος, σε κάθε γραμμή του πίνακα **overlapping** είναι αποθηκευμένη η επιθυμητή επικάλυψη των στοιχείων η οποία διατηρείται για κάθε γραμμή. Η υπορουτίνα **rdstr_check_n_do**, η οποία δέχεται ως είσοδο τον πίνακα των στοιχείων στροβιλότητας, εκτελεί την αναδιανομή των στοιχείων για την περίπτωση κατά την οποία το πεδίο στροβιλότητας δεν είναι περιοδικό. Αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε την υπορουτίνα **periodic_rdstr_check_n_do** για την περίπτωση που το πεδίο στροβιλότητας είναι περιοδικό. Η αναδιανομή των στοιχείων γίνεται όπως περιγράψαμε στην αντίστοιχη ενότητα του κεφαλαίου 3.

4.2 Το Κύριο Πρόγραμμα – Παραδείγματα Χρήσης των MODULE

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε το κύριο πρόγραμμα στο οποίο χρησιμοποιούμε τα module με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε δύο παραδείγματα. Στο πρώτο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το module SPACE3D για να εκτελέσουμε πράξεις με διανύσματα. Με αυτό το απλό παράδειγμα υποδεικνύεται η βασική χρήση του module και η γενική μορφή του προγράμματος. Αφού δηλώσουμε την χρήση των module στο κώδικα, υπονοείται για τον κώδικα οτιδήποτε έχει συμπεριληφθεί στο module. Στο δεύτερο παράδειγμα, χρησιμοποιούμε σταδιακά τα module για να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα με το οποίο θα λύνουμε το πρόβλημα δυναμικής πεδίων στροβιλότητας, που άλλωστε είναι και ο σκοπός μας.

4.2.1 Παράδειγμα Πρώτο – Χρήση του module SPACE3D

Ας δούμε ένα παράδειγμα για το module SPACE3D. Θα φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να εκτελεί απλούς υπολογισμούς διανυσμάτων για να βρίσκει το διάνυσμα της προβολής ενός διανύσματος, το οποίο ορίζεται από τα σημεία $p1$ και $p2$, κατά την κατεύθυνση που ορίζει ένα διάνυσμα $v1$, στην οποία θα αποθηκεύεται το αποτέλεσμα, και τέλος θα εμφανίζεται στην οθόνη. Πρώτο βήμα είναι να δηλώσουμε ότι το πρόγραμμα θα χρησιμοποιεί τους τύπους (αντικείμενα σε γλώσσα αντικειμενοστραφή προγραμματισμού), τις σχέσεις ισότητας, τις πράξεις και τις συναρτήσεις που ορίζονται στο module. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε ορίσουμε την μεταβλητή $v1$ ως διάνυσμα και τις μεταβλητές $p1$, $p2$ ως σημεία. Μετά καθορίζουμε τα απαραίτητα δεδομένα και τέλος, εκτελούμε τις πράξεις και τυπώνεται το αποτέλεσμα.

```
program simple_calcs                !Αρχή
use space3d                        !χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στο module
implicit none                      ! καμία μεταβλητή δεν υπονοείται
type(vector) :: v1                ! καθορίζω ότι το v1 είναι διάνυσμα
type(point) :: p1, p2            ! καθορίζω ότι τα p1,p2 είναι σημεία
v1=vector(1d0,2d0,0d0)            ! δίνω συνιστώσες του διανύσματος
p1=point(1d0,1d0,1d0)            ! αντίστοιχα τις συντεταγμένες των
p2=point(1.5d1,0d0,2d-1)         ! σημείων
v1=unit(v1)*(unit(v1)*(p2-p1))    ! πράξεις
print *, v1                       ! Αποτέλεσμα στην οθόνη
end program simple_calcs         ! Τέλος
```

Καταλαβαίνουμε ότι η ευκολία που προσφέρει το παραπάνω module έχει σημαντική πρακτική αξία. Όταν έχουμε να κάνουμε με πολλές διανυσματικές πράξεις, αν γίνουν ανά συνιστώσα,

απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή ώστε να αποφευχθούν λάθη εξαιτίας των πολλών γραμμών κώδικα. Χρησιμοποιώντας το `module`, χρειάζονται μόνο τόσες γραμμές όσες και για να γράψουμε την σχέση στο χαρτί, οπότε και η πιθανότητα να γίνει λάθος μειώνεται. Παρατηρήστε ότι ο κώδικας επιμελείται μόνος του των πράξεων σαν να ήταν ενσωματωμένες στην γλώσσα προγραμματισμού.

4.2.2 Παράδειγμα Δεύτερο - Ένας Κώδικας Επίλυσης του Προβλήματος Δυναμικής Εξέλιξης Περιοδικών Πεδίων Στροβιλότητας με Ανακατανομή των Στοιχείων

Στο δεύτερο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε το `module VP_INIT` για να φτιάξουμε ένα τετράγωνο με μοναδιαίο μήκος πλευράς πάνω στο xy επίπεδο, από στοιχεία στροβιλότητας, χρησιμοποιώντας τέσσερις γραμμές από στοιχεία στροβιλότητας. Το κέντρο του τετραγώνου θα είναι το σημείο `pc` και η κυκλοφορία γύρω από την γραμμή `Gs`, και τα δύο θα ορίζονται στο κώδικα. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση `simple_vpline`. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να φτιάξουμε διαφορετικές αρχικές τοπολογίες στοιχείων στροβιλότητας.

```

program rec_vortex                                !Αρχή
use space3d                                       !χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στα module
use implied_defs
use sing_elem
use vp_init
implicit none                                     ! καμία μεταβλητή δεν υπονοείται
integer, parameter :: nvort=200                 ! αριθμός στοιχείων ανά γραμμή
type(point) :: pc                                ! κέντρο τετραγώνου
real(kind(0.d0)) :: Gs                          ! κυκλοφορία τετραγώνου
type(pvortex), dimension(4*nvort) :: vps       ! πίνακας-στήλη στοιχείων στροβιλότητας
pc=0                                              ! το pc ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων
Gs=10d0                                          ! τιμή της κυκλοφορίας
! -----Δημιουργία πίνακα vps-----
vps(1:nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(2*nvort+1:3*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(3*nvort+1:4*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
!-----
end program rec_vortex                            ! Τέλος

```

Για να γίνει η μετακίνηση των στοιχείων στροβιλότητας αρκεί να χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα το `module VORTWALK`, να δώσουμε το χρονικό βήμα και τον αριθμό των βημάτων και

τέλος, να προσθέσουμε ένα τμήμα επαναλήψεων για την μετακίνηση των στοιχείων στροβιλότητας. Οπότε ο κώδικας θα είναι:

```

program rec_vortex                                !Αρχή
use space3d                                       !χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στα module
use implied_defs
use sing_elem
use vp_init
use vortwalk                                     ! χρήση module για λύση διαφορικών
implicit none                                    ! καμία μεταβλητή δεν υπονοείται
integer,parameter :: nvort=200, tsteps=1000      ! αριθμός στοιχείων ανά γραμμή και θήματα
integer :: i
type(point) :: pc                                ! κέντρο τετραγώνου
real(kind(0.d0)) :: Gs                           ! κυκλοφορία τετραγώνου
real(kind(0.d0)), parameter :: dt = 1d-3        ! χρονικό βήμα
type(rvortex), dimension(4*nvort) :: vps       ! πίνακας-στήλη στοιχείων στροβιλότητας
pc=0                                             !το pc ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων
Gs=10d0
! -----Δημιουργία πίνακα vps-----
vps(1:nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(2*nvort+1:3*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(3*nvort+1:4*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
!-----
time_iterations: do i=1, tsteps                  ! επαναλήψεις για τα χρονικά βήματα
call vrwalk(vps,dt)
end do time_iterations
end program rec_vortex                           ! Τέλος

```

Σε περίπτωση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε και ανακατανομή των δινών τότε αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το module REDISTRIBUTION και να δώσουμε αρχικές τιμές στους τρεις πίνακες-στήλες, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση **simple_vpline** αρχικοποιεί την παράμετρο μήκος τόξου πάνω στην ευθεία σαν να μην υπήρχαν οι άλλες ευθείες πρέπει να προσθέσουμε το μήκος της προηγούμενης ευθείας σε αυτή. Επίσης, πρέπει στο τμήμα επαναλήψεων να προσθέσουμε και την υπορουτίνα αναδιανομής των στοιχείων. Ακολουθεί ο κώδικας.

```

program rec_vortex                                !Αρχή
use space3d                                       !χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στα module
use implied_defs
use sing_elem
use vp_init
use vortwalk                                     ! χρήση module για λύση διαφορικών
use redistribution                               ! χρήση module για ανακατανομή

```

```

implicit none                                ! καμία μεταβλητή δεν υπονοείται
integer,parameter :: nvort=200, tsteps=1000 ! αριθμός στοιχείων ανά γραμμή και βήματα
integer :: i
type(point) :: pc                             ! κέντρο τετραγώνου
real(kind(0.d0)) :: Gs                       ! κυκλοφορία τετραγώνου
real(kind(0.d0)), parameter :: dt = 1d-3    ! χρονικό βήμα
type(pvortex), dimension(:),allocatable :: vps ! πίνακας-στήλη στοιχείων στροβιλότητας
! παρατηρήστε ότι τώρα είναι μεταβλητός
pc=0                                         ! το pc ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων
Gs=10d0
allocate(vps(4*nvort),circulation(4),particles_at_line(4),particles_at_line_new(4),totL(4), &
        Overlapping(4))                    ! καθορίζουμε τις γραμμές των πινάκων
circulation=Gs                             ! καθορίζουμε τις αρχικές τιμές των
particles_at_line=nvort                    ! απαραίτητων για την ανακατανομή
overlapping=3d0                            ! πινάκων
! -----Δημιουργία πίνακα vps-----
vps(1:nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)%u= vps(nvort+1:2*nvort)%u+1 ! προσθέτουμε το μήκος της προηγούμενης καμπύλης
vps(2*nvort+1:3*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(2*nvort+1:3*nvort)%u= vps(2*nvort+1:3*nvort)%u+2
vps(3*nvort+1:4*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(3*nvort+1:4*nvort)%u= vps(3*nvort+1:4*nvort)%u+3
! -----
time_iterations: do i=1, tsteps            ! επαναλήψεις για τα χρονικά βήματα
call vpwalk(vps,dt)
call periodic_rdst_check_n_do(vps)
end do time_iterations
end program rec_vortex                    ! Τέλος

```

Για την περίπτωση περιοδικών πεδίων στροβιλότητας αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το module PERIODIC_PARAMETERS, να καλέσουμε την υπορουτίνα find_M_N και να αλλάξουμε τις υπορουτίνες με τις αντίστοιχες περιοδικές. Σημειώστε ότι το μήκος του περιοδικού κουτιού καθορίζεται από τον χρήστη στο module. Ο κώδικας σε αυτή την περίπτωση γίνεται:

```

program rec_vortex                          ! Αρχή
use space3d                                 ! χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στα module
use implied_defs
use sing_elem
use vp_init
use vortwalk                               ! χρήση module για λύση διαφορικών
use redistribution                         ! χρήση module για ανακατανομή
use periodic_parameters                   ! χρήση module για περιοδικά πεδία
implicit none                              ! καμία μεταβλητή δεν υπονοείται

```

```

integer,parameter :: nvort=200, tsteps=1000 ! αριθμός στοιχείων ανά γραμμή και βήματα
integer :: i
type(point) :: pc ! κέντρο τετραγώνου
real(kind(0.d0)) :: Gs ! κυκλοφορία τετραγώνου
real(kind(0.d0)), parameter :: dt = 1d-3 ! χρονικό βήμα
type(pvortex), dimension(:),allocatable :: vps ! πίνακας-στήλη στοιχείων στροβιλότητας
! παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι μεταβλητός

call find_M_N ! υπολογισμός των σταθερών που εμφανίζονται στις παραγώγους
pc=0 ! το pc ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων
Gs=10d0

allocate(vps(4*nvort),circulation(4),particles_at_line(4),particles_at_line_new(4),totL(4), &
Overlapping(4)) ! καθορίζουμε τις γραμμές των πινάκων
circulation=Gs ! καθορίζουμε τις αρχικές τιμές των
particles_at_line=nvort ! απαραίτητων για την ανακατανομή
overlapping=3d0 ! πινάκων

! -----Δημιουργία πίνακα vps-----
vps(1:nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)%u= vps(nvort+1:2*nvort)%u+1 ! προσθέτουμε το μήκος της προηγούμενης καμπύλης
vps(2*nvort+1:3*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(2*nvort+1:3*nvort)%u= vps(2*nvort+1:3*nvort)%u+2
vps(3*nvort+1:4*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(3*nvort+1:4*nvort)%u= vps(3*nvort+1:4*nvort)%u+3

!-----
time_iterations: do i=1, tsteps ! επαναλήψεις για τα χρονικά βήματα
call periodic_vpwalk(vps,dt)
call periodic_rdsttr_check_n_do(vps)
end do time_iterations
end program rec_vortex ! Τέλος

```

Στα παραπάνω δεν έχουμε συμπεριλάβει εντολές εγγραφής των αποτελεσμάτων σε αρχεία. Είναι απαραίτητο να συμπεριλάβουμε εντολές εγγραφής ώστε να είναι δυνατή η περεταίρω επεξεργασία των αποτελεσμάτων, για παράδειγμα με το Matlab και η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων με το Tecplot. Για να γίνει αυτό αρκεί να προσθέσουμε τα κατάλληλα τμήματα κώδικα, όπως παρακάτω.

```

program rec_vortex !Αρχή
use space3d !χρησιμοποιώ ό,τι έχω ορίσει στα module
use implied_defs
use sing_elem
use vp_init
use vortwalk ! χρήση module για λύση διαφορικών
use redistribution ! χρήση module για ανακατανομή
use periodic_parameters ! χρήση module για περιοδικά πεδία

```



```

implicit none
character(len=*),parameter :: fileext='rec_line' ! βασικό τμήμα ονόματος αρχείου
integer,parameter :: nvort=200, tsteps=1000 ! αριθμός στοιχείων ανά γραμμή και βήματα
integer :: i, j, q, npart
type(point) :: pc ! κέντρο τετραγώνου
real(kind(0.d0)) :: Gs ! κυκλοφορία τετραγώνου
real(kind(0.d0)), parameter :: dt = 1d-3 ! χρονικό βήμα
type(pvortex), dimension(:),allocatable :: vps ! πίνακας-στήλη στοιχείων στροβιλότητας
! παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι μεταβλητός

call find_M_N ! υπολογισμός των σταθερών που εμφανίζονται στις παραγώγους
pc=O ! το pc ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων
Gs=10d0
allocate(vps(4*nvort),circulation(4),particles_at_line(4),particles_at_line_new(4),totL(4), &
Overlapping(4)) ! καθορίζουμε τις γραμμές των πινάκων
circulation=Gs ! καθορίζουμε τις αρχικές τιμές των
particles_at_line=nvort ! απαραίτητων για την ανακατανομή
overlapping=3d0 ! πινάκων
! -----Δημιουργία πίνακα vps-----
vps(1:nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)=simple_vpline(pc+0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(nvort+1:2*nvort)%u= vps(nvort+1:2*nvort)%u+1 ! προσθέτουμε το μήκος της προηγούμενης καμπύλης
vps(2*nvort+1:3*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii-0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(2*nvort+1:3*nvort)%u= vps(2*nvort+1:3*nvort)%u+2
vps(3*nvort+1:4*nvort)=simple_vpline(pc-0.5d0*ii+0.5d0*jj,(-1d0)*jj,1,nvort,Gs,3d0)
vps(3*nvort+1:4*nvort)%u= vps(3*nvort+1:4*nvort)%u+3
!-----
open(9,file=('velo'//fileext//'.txt'))
open(10,file=('pos'//fileext//'.txt'))
open(11,file=('G'//fileext//'.txt'))
open(12,file=('n'//fileext//'.txt'))
open(13,file=('nperline'//fileext//'.txt'))
open(14,file=('totLperline'//fileext//'.txt'))
open(15,file=('tcplot'//fileext//'.txt'))

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
write(9,'(3f30.15)') vps%mp%v
write(10,'(3f30.15)') vps%mp%p
write(11,'(3f30.15)') vps%G
write(12,'(i20)') size(vps)
write(13,'(i20)') particles_at_line
write(14,'(f30.15)') totL
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
write(15,*) 'TITLE ='//fileext
write(15,'(a53)') 'VARIABLES = "x","y","z","vx","vy","vz","wx","wy","wz"'

```

```

npart=0
do i=1,4
  write(15,'(a14,i5,a5,i10,a24,f10.5)') 'ZONE T = "line',i,'" I=',particles_at_line(i),' F=POINT, &
SOLUTIONTIME=',0d0
  do j=1+npart,particles_at_line(i)+npart
    write(15,'(9f30.15)') vps(j)%mp%p,vps(j)%mp%v,vps(j)%G
!write(15,'(9f30.15)') vps(1+npart:particles_at_line(i)+npart)%mp%p
  end do
  npart=particles_at_line(i)+npart
end do
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

time_iterations: do i=1, tsteps           ! επαναλήψεις για τα χρονικά βήματα

call periodic_vpwalk(vps,dt)
  write(9,'(3f30.15)') vps%mp%v
  write(10,'(3f30.15)') vps%mp%p
  write(11,'(3f30.15)') vps%G
  write(12,'(i20)') size(vps)
  write(13,'(i20)') particles_at_line
  write(14,'(f30.15)') totL

call periodic_rdst_r_check_n_do(vps)

npart=0
do q=1,no_of_lines
  write(15,'(a14,i5,a5,i10,a24,f10.5)') 'ZONE T = "line',q,'" I=',particles_at_line(q),' F=POINT,
SOLUTIONTIME=',dt*i
  do j=1+npart,particles_at_line(q)+npart
    write(15,'(9f30.15)') vps(j)%mp%p,vps(j)%mp%v,vps(j)%G
  end do
  npart=particles_at_line(q)+npart
end do

end do time_iterations
end program rec_vortex           ! Τέλος

```

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εξέλιξη του κεφαλαίου γίνεται σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο θα παρουσιάσουμε απλές περιπτώσεις ελέγχου του κώδικα οι οποίες αφορούν περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Σκοπός μας, είναι να αποδείξουμε ότι η μέθοδος που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 3 λειτουργεί όπως αναμένεται να λειτουργήσει σε απλές περιπτώσεις. Στο δεύτερο στάδιο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν με τον κώδικα και θα τα συγκρίνουμε με τα πειραματικά αποτελέσματα του Ortega. Υπενθυμίζουμε ότι στο κεφάλαιο 2 παραθέσαμε μερικά αποτελέσματα από τα πειράματα οπτικοποίησης του Ortega. Στο κεφάλαιο αυτό, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του κώδικα με τα αποτελέσματα των πειραμάτων οπτικοποίησης αλλά και με όσα αριθμητικά αποτελέσματα παρατίθενται στο (Ortega, 2001). Στο τελευταίο στάδιο θα ελέγξουμε την επίδραση του λόγου κυκλοφοριών του ζεύγους δινών και θα παρατηρήσουμε τις αλλαγές που συντελούνται.

5.1 Έλεγχος Προγράμματος σε Απλά Περιοδικά Πεδία

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον κώδικα σε απλά περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε υπολογισμούς ταχυτήτων με τη μέθοδο, την οποία παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3, σε μία δίνη Rankine και μία δίνη Lamb-Oseen. Αρχικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για μία δίνη Lamb-Oseen η οποία μπορεί να προσεγγιστεί από μία γραμμή από στοιχεία στροβιλότητας. Το ενδιαφέρον που παρουσιάζει το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ότι μπορούμε να παράγουμε μία αρκετά καλή αλλά «βεβιασμένη» αναπαράσταση μίας δίνης Lamb-Oseen με πολύ λίγα στοιχεία στροβιλότητας. Για να πετύχουμε το σκοπό μας, συσχετίζουμε την παράμετρο αποκοπής ε με τον πυρήνα της δίνης R_Δ . Έπειτα, θα ελέγχουμε την περίπτωση μία δίνης Lamb-Oseen με περιοδική διαταραχή μικρού πλάτους και μεγάλου μήκους κύματος. Η περίπτωση αυτή είναι μία από τις ελάχιστες που υπάρχει αναλυτική λύση για την ταχύτητα περιστροφής του επιπέδου όπου εξελίσσεται η διαταραχή της δίνης, εξαιτίας των ταχυτήτων που επάγονται σε αυτή λόγω της διαταραχής. Τέλος, παρουσιάζουμε αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το πλέγμα που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3 για δίνη Rankine και Lamb-Oseen. Υπενθυμίζουμε ότι το πλέγμα αναφέρεται στο εγκάρσιο επίπεδο της δίνης. Εξαιτίας αυτού η επικάλυψη των στοιχείων έχει δύο διαφορετικές έννοιες ορισμού. Μία κατά μήκος των γραμμών που τοποθετούνται τα στοιχεία στροβιλότητας και μία κατά το εγκάρσιο επίπεδο. Σε αυτές τις περιπτώσεις ελέγχουμε την επίδραση του βαθμού επικάλυψης κατασκευάζονται διάφορους διαμερισμούς. Σημειώνουμε ότι ενώ αναφερόμαστε στα μεγέθη σε εκατοστά μπορούν να αντικατασταθούν γενικά σε μονάδες μήκους, η επιλογή των εκατοστών έγινε για την άμεση σύγκριση με αποτελέσματα του Ortega.

5.1.1 Αναπαράσταση Πεδίων Στροβιλότητας από μία Γραμμή Στοιχείων Στροβιλότητας

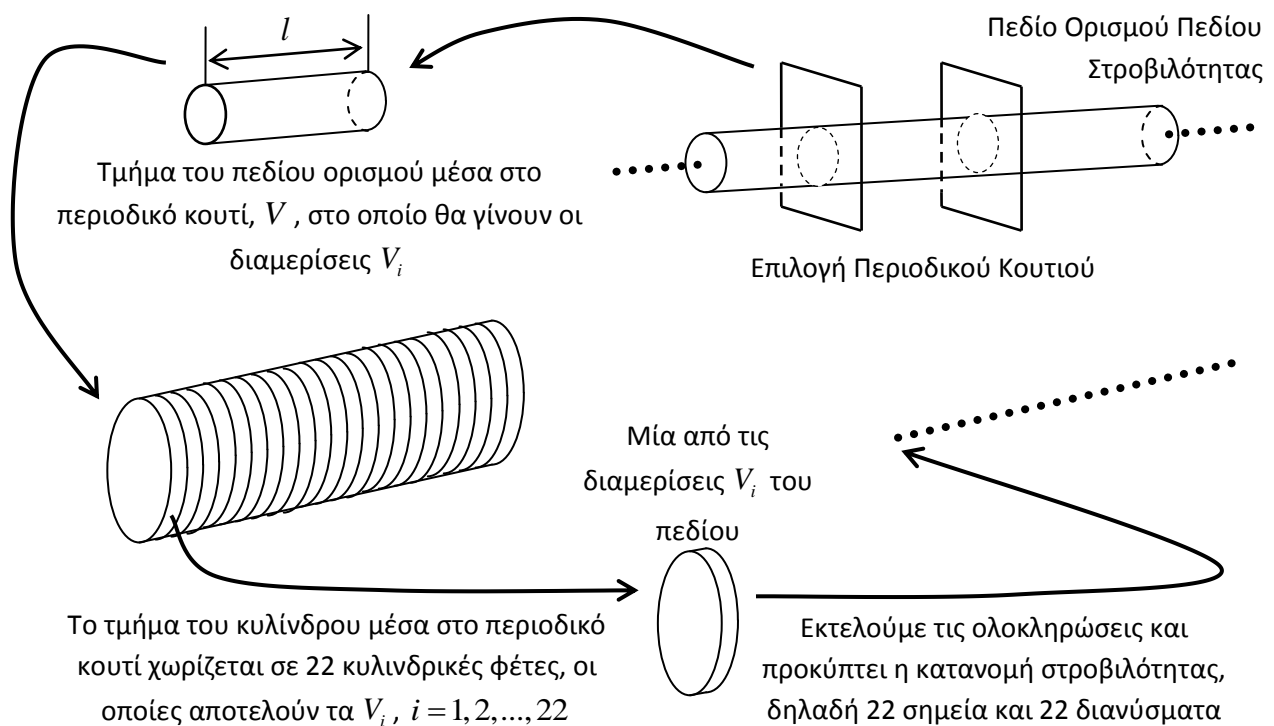
Η πιο απλή περίπτωση ενός περιοδικού πεδίου στροβιλότητας είναι αυτό μία κυλινδρικής δίνης. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τη δίνη Lamb-Oseen. Σε αυτές τις απλές περιπτώσεις το πεδίο εκτείνεται από το μείον άπειρο έως το συν άπειρο και δεν έχουμε κάποια διαταραχή σε αυτό. Η κατεύθυνση \vec{e} κατά την οποία εκτείνεται το πεδίο ταυτίζεται με τον άξονα του κυλινδρικού πεδίου. Η πιο απλή κατανομή στροβιλότητας που μπορεί να προκύψει για τέτοια πεδία στροβιλότητας είναι μία γραμμή από στοιχεία στροβιλότητας. Αποφασίζουμε το περιοδικό κουτί και άρα γνωρίζουμε το μήκος l του κουτιού. Το χωρίο V στο οποίο θα γίνει ο διαμερισμός V_i προσδιορίζεται όταν προσδιορίσουμε το περιοδικό κουτί. Χωρίζουμε το κύλινδρο σε μικρότερα κυλινδρικά χωρία, στα οποία θα αναφερόμαστε ως κυλινδρικές φέτες. Η ακτίνα του κάθε κυλίνδρου εκτείνεται έως το άπειρο. Οι διαδοχικές κυλινδρικές φέτες

αποτελούν τον διαμερισμό V_i . Έπειτα, εκτελούμε τις ολοκληρώσεις (64), (65) για τον προσδιορισμό των στοιχείων, δηλαδή τον προσδιορισμό της θέσης \vec{p}_i και του διανύσματος $\vec{\Omega}_i$ κάθε στοιχείου. Τα αποτελέσματα είναι:

$$\vec{p}_i = \vec{r}_0 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n} \vec{e} \quad (164)$$

$$\vec{\Omega}_i = \frac{\Gamma \cdot l}{n} \quad (165)$$

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα έχουμε χωρίσει το τμήμα του κυλίνδρου που βρίσκεται μέσα στο περιοδικό κουτί σε 22 κυλινδρικές φέτες (μικρότερους κυλίνδρους) και εκτελέσαμε τις ολοκληρώσεις οπότε προέκυψαν 22 στοιχεία στροβιλότητας. Στο σχήμα φαίνονται μόνο τα σημεία της κατανομής και δεν είναι σχεδιασμένα τα διανύσματα $\vec{\Omega}_i$ της κατανομής.



Σχήμα 43. Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας κατασκευής των στοιχείων στροβιλότητας

Κατασκευάζοντας τα στοιχεία στροβιλότητας, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω διαμερισμό, χάνεται η έννοια του πυρήνα της δίνης, επειδή κάθε τμήμα που ολοκληρώνουμε περιέχει όλο τον πυρήνα της δίνης. Οπότε, ενώ στις μακρινές επαγωγές δεν θα έχουμε

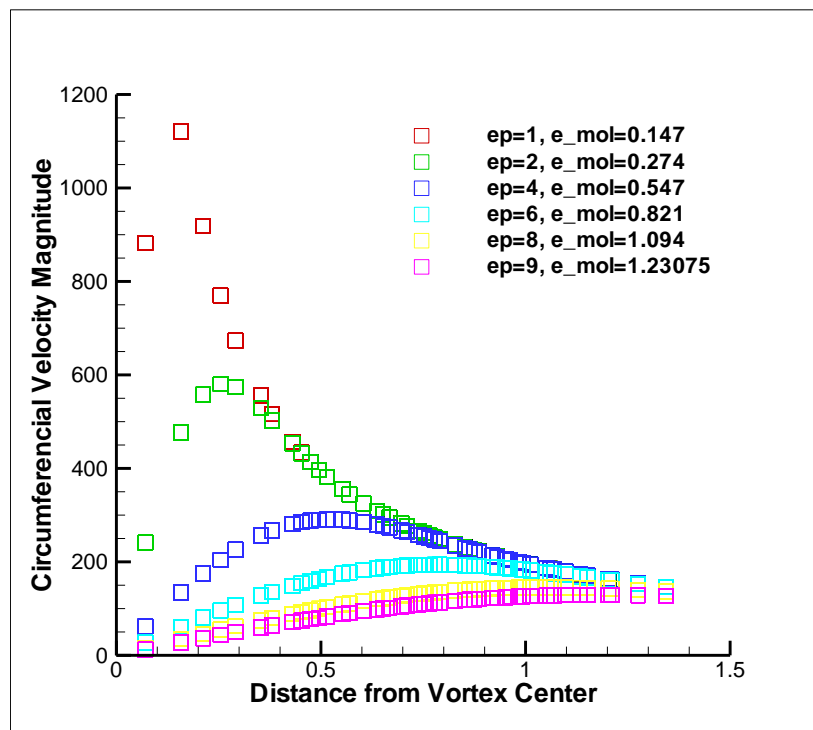
πρόβλημα, οι κοντινές επαγωγές θα είναι λανθασμένες. Οι κοντινές επαγωγές, όμως, εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο αποκοπής ε . Με βάση την τελευταία παρατήρηση, μπορούμε να συσχετίσουμε την παράμετρο αποκοπής με την ακτίνα του πυρήνα της δίνης.

Η συγκεκριμένη υπόθεση μοντελοποίησης είναι σωστή για δίνες με πυρήνες ακτίνας μικρότερες της μονάδας αν θεωρήσουμε ότι η οριακή, αρκετά μικρή, τιμή της παραμέτρου αποκοπής είναι η μονάδα. Αρχικά, θα κάνουμε τους υπολογισμούς για μία δίνη Lamb-Oseen με $\Gamma = 1234 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ και μήκος περιодικού κουτιού $l = 50 \text{ cm}$.

Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε κάνει υπολογισμούς για την περιφερειακή ταχύτητα χρησιμοποιώντας 400 στοιχεία στροβιλότητας και διαφορετικές τιμές της παραμέτρου επικάλυψης, στα διαγράμματα σημειώνεται ως e_mol . Η παράμετρος επικάλυψης ep μπορεί να οριστεί έμμεσα από την σχέση:

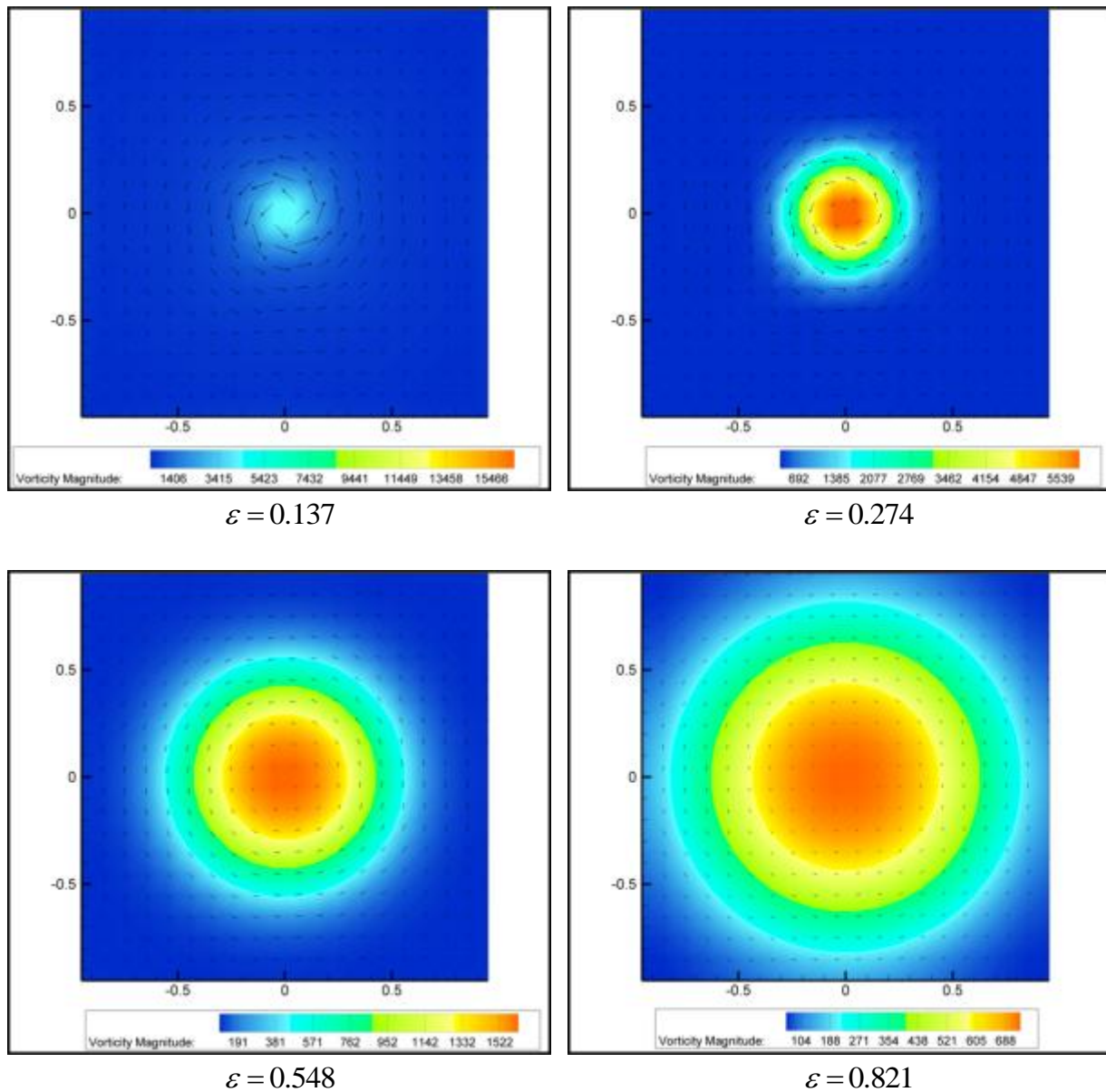
$$\varepsilon = ep \cdot \frac{l}{n} \quad (166)$$

Δηλαδή, για κάθε τιμή της παραμέτρου αποκοπής ε μπορούμε να υπολογίσουμε την επικάλυψη.

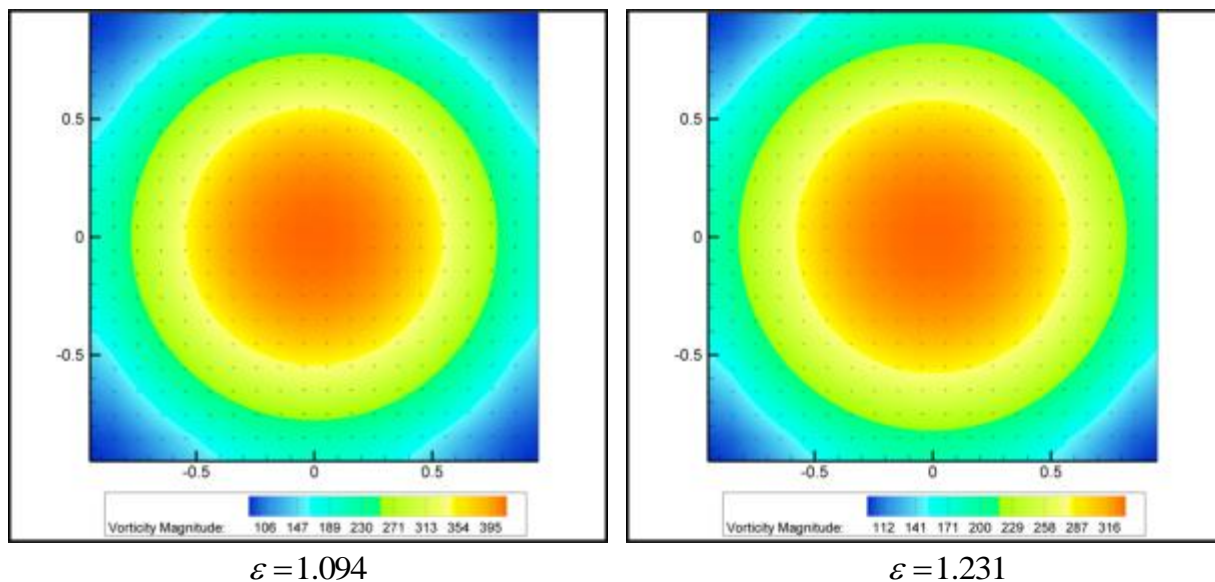


Σχήμα 44. Αποτελέσματα Κώδικα για την Περιφερειακή Ταχύτητα

Με επιτυχία υπολογίζεται η ακτινική ταχύτητα και η αξονική μηδέν. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας μαζί με τις ισούψεις στροβιλότητας όπως υπολογίστηκαν στο ίδιο πλέγμα για όλες τις περιπτώσεις. Παρατηρήστε την επίδραση διαφορετικών παραμέτρων αποκοπής στον πυρήνα της δίνης. Εσωτερικά του πυρήνα της δίνης η ταχύτητα αυξάνεται ενώ εξωτερικά μειώνεται. Οι υπολογισμοί ταχυτήτων έγιναν σε ένα ομοιόμορφο ορθογωνικό πλέγμα $20 \times 20 \times 20$ εντός του περιοδικού κουτιού. Το πεδίο στροβιλότητας υπολογίστηκε από το Tecplot.



Σχήμα 45α. Πεδία ταχυτήτων και πεδία Στροβιλότητας δίνης Lamb-Oseen το οποίο αντιπροσωπεύεται από μία γραμμή στοιχείων στροβιλότητας



Σχήμα 45β. Πεδία ταχυτήτων και πεδία στροβιλότητας δίνης Lamb-Oseen το οποίο αντιπροσωπεύεται από μία γραμμή στοιχείων στροβιλότητας

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του κώδικα για την περιφερειακή ταχύτητα με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα που δίνει μία δίνη Lamb-Oseen, βρήκαμε την αντιστοιχία της παραμέτρου αποκοπής ε με την ακτίνα του πυρήνα μίας δίνης Lamb-Oseen. Η διανομή ταχύτητας που προέκυψε από τον κώδικα $u_\theta = f(r; \varepsilon)$ συγκρίθηκε με την διανομή ταχύτητας μία δίνης Lamb-Oseen $u_{\theta, Lamb} = f(r; R_\Delta)$. Η τιμή που ελαχιστοποιεί το τετράγωνο του σφάλματος μεταξύ των δύο συναρτήσεων βρέθηκε από το Matlab και είναι $R_\Delta = 0.8038\varepsilon$. Στον πίνακα που ακολουθεί συγκεντρώνουμε τα μεγέθη που χρησιμοποιήθηκαν και άλλα αριθμητικά στοιχεία που προέκυψαν.

ep	ε	R_Δ	ω_0 (calculated)	ω_0 (theoretical)
1	0,137	0,105	16872,461	35763,723
2	0,274	0,215	6231,299	8418,947
4	0,547	0,435	1711,738	2095,026
6	0,821	0,655	771,555	904,471
8	1,094	0,874	436,773	516,574
9	1,231	0,985	345,439	404,849

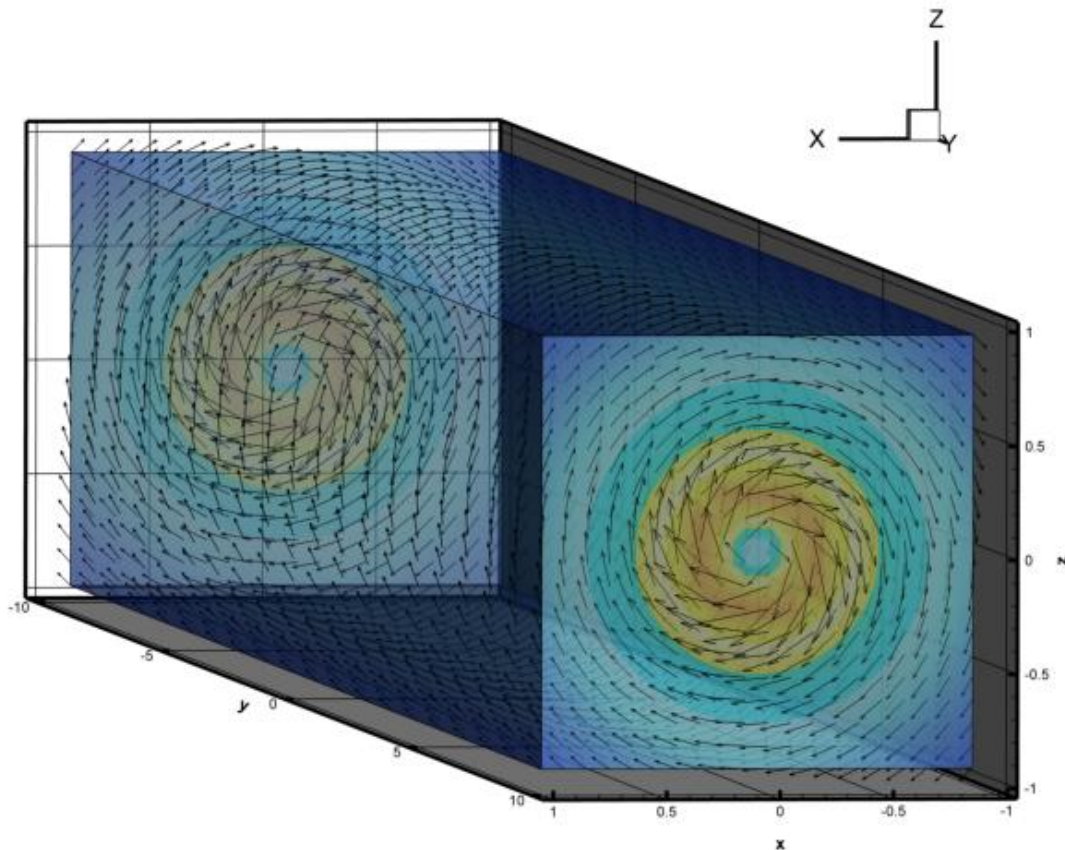
Πίνακας 6. Συγκεντρωτικός Πίνακας Περιπτώσεων και Υπολογισμένων Μεγεθών

Η μέγιστη τιμή της στροβιλότητας προέκυψε από τα αποτελέσματα του Tecplot, ενώ η θεωρητική από την σχέση:

$$\omega_0(t) = \frac{\Gamma_0}{\pi R_{\Delta}^2(t)} \quad (167)$$

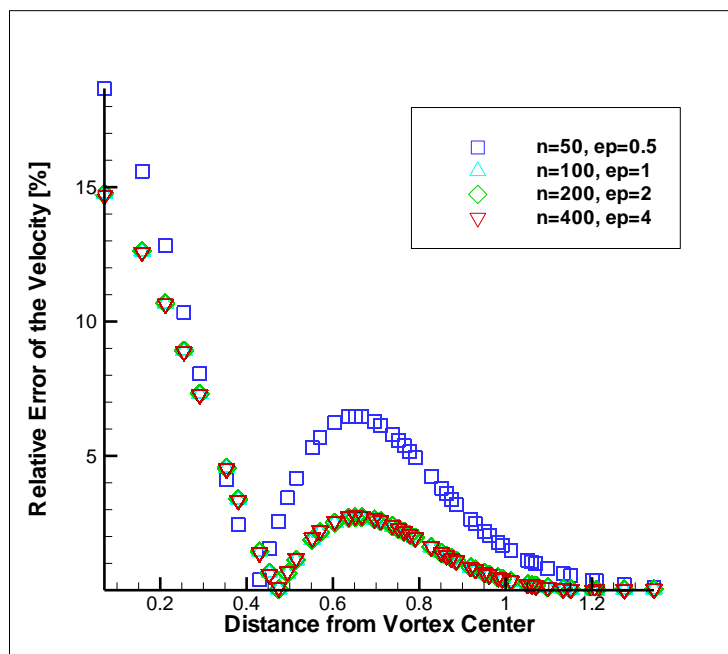
Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της στροβιλότητας είναι διαφορετική από την υπολογιζόμενη. Η διαφορά οφείλεται στο ότι η συσχέτιση μεταξύ των δύο συναρτήσεων γίνεται μόνο μεταξύ των παραμέτρων ε και R_{Δ} . Επιπλέον, το πλέγμα δεν είναι αρκετά πυκνό στο κέντρο της δίνης όπου εμφανίζονται και οι μεγαλύτερες κλίσεις στροβιλότητας. Για τον ίδιο λόγο, οι υπολογισμοί της μέγιστης τιμής της στροβιλότητας, είναι καλύτεροι όταν αυξάνεται η ακτίνα του πυρήνα της δίνης, αφού σε αυτή την περίπτωση το πλέγμα είναι πιο πυκνό στον πυρήνα της δίνης.

Το πλέγμα μαζί με τις ταχύτητες που υπολογίστηκαν από τον κώδικα για την περίπτωση $ep = 2$ φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Αντίστοιχα, διαγράμματα είχαμε και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.



Σχήμα 46. Όρια Πλέγματος και το Πεδίο Ταχύτητας για $ep = 2$

Στα επόμενα αποτελέσματα έλεγχου θα δούμε πως μεταβάλλεται το σφάλμα της ταχύτητας όταν αλλάζουμε τον αριθμό των στοιχείων. Θα ασχοληθούμε με την ίδια περίπτωση όπως παραπάνω. Χρησιμοποιώντας συγκεκριμένο αριθμό επικάλυψης, τέτοιο ώστε η παράμετρος αποκοπής να είναι πάντα ίση με 0.547, θα μεταβάλουμε τον αριθμό των στοιχείων. Με αυτό τον τρόπο, ελέγχουμε την εξάρτηση της περιφερειακής ταχύτητας με την απόσταση από το κέντρο της δίνης και ταυτόχρονα την μεταβολή του σφάλματος καθώς αλλάζουμε τον αριθμό των στοιχείων. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζονται τα σφάλματα που προέκυψαν. Όσο αφορά τις μακρινές επαγωγές, το σφάλμα παρατηρούμε ότι είναι πολύ μικρό. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη, όπως σχολιάσαμε στο κεφάλαιο 3 όπου παρουσιάσαμε την επίδραση της παραμέτρου αποκοπής. Επιπλέον, το αποτέλεσμα δηλώνει ότι οι μακρινές επαγωγές ταυτίζονται με αυτές που έχουμε από μία δίνη Lamb-Oseen. Από την άλλη, για τις κοντινές επαγωγές, παρατηρούμε ότι το σφάλμα γίνεται μεγαλύτερο στα σημεία πολύ κοντά στο κέντρο της δίνης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό έχει να κάνει με το ότι διατηρούμαι την προσέγγιση των μακρινών επαγωγών και για τις κοντινές επαγωγές. Σε περίπτωση που το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπολογίζονταν αναλυτικά θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα θα βελτιωθούν. Τέλος, παρατηρήστε ότι ο αριθμός των στοιχείων δεν επηρεάζει ιδιαίτερα το σφάλμα αλλά ο αριθμός επικάλυψης. Από την στιγμή που ο αριθμός επικάλυψης γίνει μεγαλύτερος της μονάδας τα σφάλματα είναι σχεδόν σταθερά. Το αποτέλεσμα αυτό έχει να κάνει με την συσχέτιση της ταχύτητας που προέκυψε από τον κώδικα με την αντίστοιχη θεωρητική της δίνης Lamb-Oseen. Η συγκεκριμένη συσχέτιση μεταξύ της θεωρητικής ταχύτητας και αυτής που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα έχει ως αποτέλεσμα το σφάλμα της ταχύτητας να έχει την μορφή που παρατηρούμε παρακάτω.



Σχήμα 47. Σφάλμα Ταχύτητας σε Σχέση με την Απόσταση από το Κέντρο της Δίνης

Όπως αναφέρουμε και παραπάνω, χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο διαμερισμό χάνουμε την έννοια του πυρήνα της δίνης και για την μοντελοποίηση του πυρήνα χρησιμοποιήσαμε την παράμετρο αποκοπής. Ενώ στα παραπάνω αποτελέσματα η επίδραση της επικάλυψης των στοιχείων στην δυναμική του προβλήματος εμφανίζεται έμμεσα, στο επόμενο παράδειγμα, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εικόνα για την επίδραση τόσο σε βασικές παραμέτρους που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα όσο και στο τελικό αποτέλεσμα.

Μελετάμε την περίπτωση μίας δίνης Lamb-Oseen η οποία φέρει μία περιοδική διαταραχή που εξελίσσεται πάνω σε ένα επίπεδο. Το πλάτος της διαταραχής και η ακτίνα του πυρήνα της δίνης είναι μικρά σε σχέση με το μήκος κύματος της διαταραχής. Τέτοιες διαταραχές ονομάζονται διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος και σημειώνουμε ότι τέτοιες είναι και οι διαταραχές που εμφανίζονται στα πειράματα του Ortega. Η δίνη αποκτά μία ταχύτητα περιστροφής εξαιτίας των επαγόμενων κοντινών ταχυτήτων. Η Widnall απέδειξε ότι η επίδραση των επαγόμενων ταχυτήτων έχει ως αποτέλεσμα το επίπεδο της διαταραχής να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ενώ το πλάτος της διαταραχής παραμένει σταθερό. Δηλαδή η διαταραχή διατηρεί την γεωμετρική μορφή της κατά την εξέλιξη του φαινομένου και δεν έχει ως αποτέλεσμα την εξέλιξη κάποιας αστάθειας. Συγκεκριμένα, η ταχύτητα περιστροφής $\bar{\omega}$ του επιπέδου είναι:

$$\bar{\omega} = \frac{\Gamma \cdot \kappa^2}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\kappa \cdot R_\Delta} - 0.058 + \ln 2 - \gamma_e \right) \quad (168)$$

Όπου $\kappa = \frac{2\pi}{l}$ ο κυματάριθμος και $\gamma_e = 0.57721$ η σταθερά Euler

Συνεχίζουμε με την ίδια απλή αναπαράσταση της δίνης Lamb-Oseen, στην οποία χρησιμοποιούμε μία γραμμή από στοιχεία στροβιλότητας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα όμως, το πεδίο στροβιλότητας δεν ταυτίζεται με αυτό μιας δίνης Lamb-Oseen, εξαιτίας της διαταραχής. Το αποτέλεσμα που έχει η διαταραχή στο πεδίο στροβιλότητας πρέπει να συμπεριληφθεί στην διαδικασία των υπολογισμών. Η επίδραση της διαταραχής έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή του πεδίου στροβιλότητας. Ενώ λοιπόν το αρχικό πεδίο στροβιλότητας είναι αυτό μιας δίνης Lamb-Oseen, το πεδίο στροβιλότητας που προκύπτει επιβάλλοντας την διαταραχή είναι διαφορετικό. Το αποτέλεσμα είναι μία διαφορετική κατανομή στροβιλότητας η οποία προκύπτει από το νέο πεδίο στροβιλότητας, δηλαδή το πεδίο στροβιλότητας της δίνης Lamb-Oseen με την διαταραχή. Το πρόβλημα που εμφανίζεται εδώ έχει να κάνει με τον τρόπο που θα ορίσουμε το νέο πεδίο στροβιλότητας. Το νέο πεδίο θα πρέπει να είναι σωληνοειδές και να ακολουθεί την διαταραχή που επιβάλλουμε. Παρ' ολ' αυτά, οι δύο τελευταίες συνθήκες δεν είναι ικανές για να οριστεί καλά το νέο πεδίο στροβιλότητας.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος υποθέτουμε ότι η κατανομή στροβιλότητας που προκύπτει για μία δίνη Lamb-Oseen, όπως συζητήσαμε παραπάνω, θα ακολουθεί την διαταραχή που έχουμε επιβάλλει, χωρίς να χρειάζεται να περάσουμε από το πεδίο στροβιλότητας. Η διαταραχή που επιβάλλαμε έχει την μορφή της καμπύλης:

$$\vec{r}_\delta(z) = A \sin(\kappa z) \vec{j} + z \vec{k} \quad (169)$$

Οπότε η διαταραχή εξελίσσεται στο επίπεδο yz. Αφού βρούμε τις θέσεις \vec{p}_i των στοιχείων στροβιλότητας, όπως παρουσιάσαμε παραπάνω για την δίνη Lamb-Oseen, τοποθετούμε κάθε στοιχείο στη νέα θέση:

$$\vec{p}'_i = \vec{p}_i + A \sin(\kappa(\vec{p}_i \cdot \vec{k})) \vec{k} \quad (170)$$

Το διάνυσμα $\vec{\Omega}_i$ ορίζεται έτσι ώστε να ακολουθεί την κλίση της καμπύλης, σχέση 169:

$$\vec{\Omega}_i = \Gamma \frac{L}{n} \frac{d\vec{r}_\delta}{dz} \bigg/ \left| \frac{d\vec{r}_\delta}{dz} \right| \quad (171)$$

Όπου L το μήκος της καμπύλης και n ο αριθμός των στοιχείων.

Σε αυτή την περίπτωση η κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου επικάλυψης και χρονικού βήματος είναι βασική για να πάρουμε σωστά αποτελέσματα. Επιπλέον, η επιλογή της παραμέτρου αποκοπής γίνεται ώστε η δίνη να έχει συγκεκριμένη ακτίνα πυρήνα, όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Συγκρίναμε τα αποτελέσματα του κώδικα με τα αποτελέσματα που δίνει η σχέση της Widhall, σχέση 168, για την επαγόμενη ταχύτητα περιστροφής του επιπέδου της διαταραχής μιας δίνης Lamb-Oseen μικρού πυρήνα και κυματάρηθου k . Συγκεκριμένα, επαναλάβαμε τους υπολογισμούς με τον κώδικα για τον έλεγχο διαφορετικών αριθμών στοιχείων και διαφορετικών παραμέτρων αποκοπής, οπότε διαφορετικών επικαλύψεων. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι παράμετροι επικάλυψης για τις διάφορες περιπτώσεις που έγιναν υπολογισμοί.

ep		Αριθμός Στοιχείων					
		100	200	300	400	500	600
ε	1,0988	2,000	4,000	6,000	8,000	10,000	12,000
	0,5494	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000
	0,3660	0,667	1,333	2,000	2,667	3,333	4,000
	0,2747	0,500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000
	0,2198	0,400	0,800	1,200	1,600	2,000	2,400
	0,1832	0,333	0,667	1,000	1,333	1,667	2,000

Πίνακας 6. Παράμετροι επικάλυψης που χρησιμοποιήθηκαν για διάφορες τιμές της παραμέτρου αποκοπής και αριθμών στοιχείων

Επειδή στο συγκεκριμένο πρόβλημα περιμένουμε η μορφή της διαταραχής να μην αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, η επιλογή του χρονικού βήματος είναι ιδιαίτερα σημαντική. Για την ακρίβεια χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα μεγαλύτερο από αυτό που παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα παρατηρήσαμε ότι η μορφή της διαταραχής άλλαζε πολύ γρήγορα και είχε σαν αποτέλεσμα την καταστροφή της λύσης. Σε πρώτη φάση, λοιπόν, βρέθηκε το οριακό χρονικό βήμα για το οποίο ο κώδικας δίνει αναμενόμενα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση. Μεγαλύτερο χρονικό βήμα από αυτό που δίνεται στον παρακάτω πίνακα έχει ως αποτέλεσμα την καταστροφή της αρχικής γεωμετρίας. Παρατηρήστε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων και μειώνεται η παράμετρος αποκοπής το χρονικό βήμα πρέπει να γίνει μικρότερο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αφού όσο μικρότερη είναι η παράμετρος αποκοπής τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα στην γειτονία του κάθε στοιχείου και άρα απαιτείται μικρότερο χρονικό βήμα για να πετύχουμε σωστές μετακινήσεις των στοιχείων.

Χρονικό Βήμα		Αριθμός Στοιχείων					
		100	200	300	400	500	600
ε	1,0988	0,008000	0,008000	0,008000	0,008000	0,008000	0,008000
	0,5494	0,002000	0,002000	0,002000	0,005000	0,005000	0,005000
	0,3660	0,000900	0,000900	0,000900	0,000900	0,000900	0,000900
	0,2747	0,000700	0,000500	0,000500	0,000500	0,000500	0,000500
	0,2198	0,000700	0,000300	0,000300	0,000300	0,000300	0,000300
	0,1832	0,000700	0,000200	0,000200	0,000200	0,000200	0,000200

Πίνακας 7. Οριακό χρονικό βήμα ανά περίπτωση

Ο έλεγχος του κατά πόσο η διαταραχή διατηρεί την γεωμετρική της μορφή έγινε με επεξεργασία των αποτελεσμάτων με το Matlab. Κάθε χρονική στιγμή υπολογίστηκε η απόσταση του κάθε στοιχείου από τον z-άξονα η οποία βρέθηκε σταθερή για κάθε στοιχείο. Για τον έλεγχο της επιπεδότητας της διαταραχής και τον υπολογισμό της ταχύτητας περιστροφής του επιπέδου στο οποίο εξελισσόταν η διαταραχή ακολουθήσαμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά, βρήκαμε την στρέψη της καμπύλης η οποία ορίζεται από τα στοιχεία στροβιλότητας. Η στρέψη είχε τιμές κοντά στο μηδέν. Έπειτα, υπολογίστηκε το μοναδιαίο διάνυσμα που προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο της θέσης \vec{p}_i κάθε στοιχείου με το αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{\Omega}_i$. Σε κάθε χρονική στιγμή και για κάθε θέση υπολογίσαμε την ταχύτητα περιστροφής αυτού του διανύσματος. Για όλα τα στοιχεία είχε περίπου την ίδια τιμή, όπως φάνηκε από την τυπική απόκλιση του μεγέθους. Η ταχύτητα περιστροφής $\vec{\omega}$ της δίνης βρέθηκε από την μέση τιμή των ταχυτήτων περιστροφής που προέκυψαν. Σημειώνουμε ότι ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία διασφαλίζουμε ότι η διαταραχή διατηρεί την γεωμετρική της μορφή με δύο τρόπους. Πρώτον, ανεξάρτητα της κατανομής στροβιλότητας με τον έλεγχο της στρέψης της καμπύλης όπως αναπαριστάτε από τις θέσεις των στοιχείων στροβιλότητας και δεύτερον από τον υπολογισμό του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο της

διαταραχής με βάση τα διανύσματα $\bar{\Omega}_i$ της κατανομής στροβιλότητας. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική, αφού αν τα διανύσματα της κατανομής στροβιλότητας, για κάποιο λόγο βρίσκονταν, εκτός του επιπέδου της διαταραχής η αναπαράσταση του πεδίου στροβιλότητας θα γινόταν σταδιακά λιγότερο ακριβής και θα είχε ως αποτέλεσμα την καταστροφή της λύσης. Βέβαια, είναι αναμενόμενο να μην συμβαίνει κάτι τέτοιο αφού αυτό ακριβώς προσπαθήσαμε να πετύχουμε με την επιλογή ενός αρκετά μικρού χρονικού βήματος. Στο παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα αποτελέσματα για την ταχύτητα περιστροφής του επιπέδου καθώς και τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίστηκαν από την σχέση της Widnall.

$\bar{\omega}$	Αριθμός Στοιχείων						Widnall
	100	200	300	400	500	600	
1,0988	4,36839	4,36796	4,36794	4,36792	4,36792	4,36792	4,61009
0,5494	5,82035	5,80632	5,80456	5,80550	5,80549	5,80549	6,05286
0,3660	6,74245	6,65134	6,64823	6,64978	6,64858	6,64882	6,90001
0,2747	6,79392	7,26083	7,22859	7,24481	7,24339	7,24537	7,49894
0,2198	6,79936	7,76713	7,71520	7,71260	7,70946	7,71019	7,96488
0,1832	6,79789	8,07510	8,10316	8,09134	8,08697	8,08674	8,34549

Πίνακας 8. Υπολογισμένες ταχύτητες περιστροφής επιπέδου διαταραχής

Η γραμμή εσωτερικά του πίνακα διακρίνει τις περιπτώσεις όπου ο βαθμός επικάλυψης είναι μικρότερος της μονάδας. Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων, για κάθε τιμή της παραμέτρου αποκοπής, τα αποτελέσματα για την ταχύτητα περιστροφής του επιπέδου φαίνονται να συγκλίνουν. Σημειώνουμε ότι αναφερόμαστε σε σύγκλιση σχετικά με την αύξηση των στοιχείων. Επιπλέον, για κάθε στήλη πέρα από αυτή όπου έχουμε 100 στοιχεία τα αποτελέσματα συγκλίνουν καθώς μικραίνει η παράμετρος αποκοπής, δηλαδή καθώς πλησιάζουμε στην θεωρητική περίπτωση χωρίς αποκοπή. Θεωρώντας ως πιο αντιπροσωπευτική τιμή της ταχύτητας περιστροφής για 600 στοιχεία, στον παρακάτω πίνακα συνοψίζεται το σχετικό σφάλμα μαζί με διάφορες τιμές των παραμέτρων.

ε	R_Δ	$\bar{\omega}$ (calculated)	$\bar{\omega}$ (Widnall)	Σχετικό Σφάλμα
3,6600	2,94191	1,90876	2,12470	0,1016
2,7470	2,20804	2,48630	2,71386	0,0839
2,1980	1,76675	2,94028	3,17352	0,0735
1,0988	0,88322	4,36792	4,61009	0,0525
0,5494	0,44161	5,80549	6,05286	0,0409
0,3660	0,29419	6,64882	6,90001	0,0364
0,2747	0,22080	7,24537	7,49894	0,0338
0,2198	0,17664	7,71019	7,96488	0,0320
0,1832	0,14722	8,08674	8,34549	0,0310

Πίνακας 9. Συνοπτικός πίνακας παραμέτρων και αποτελεσμάτων

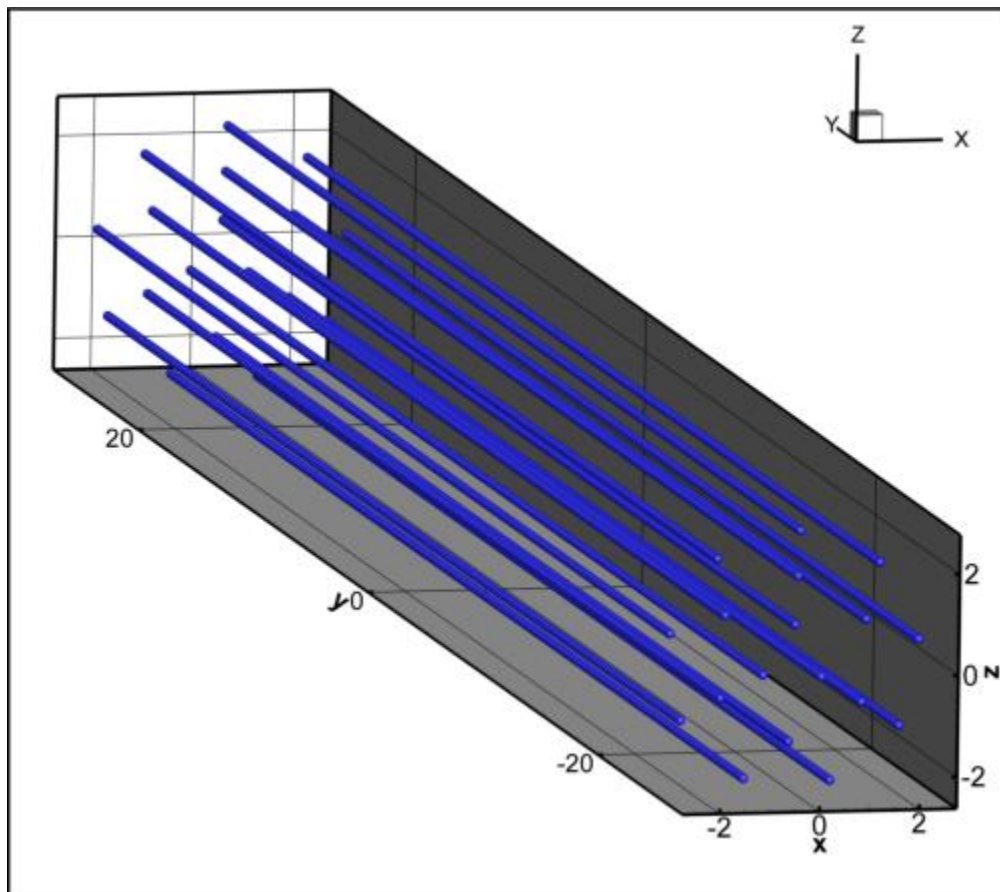
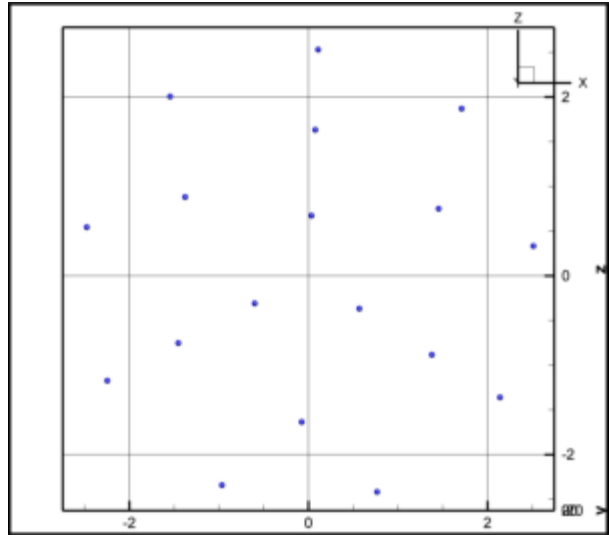
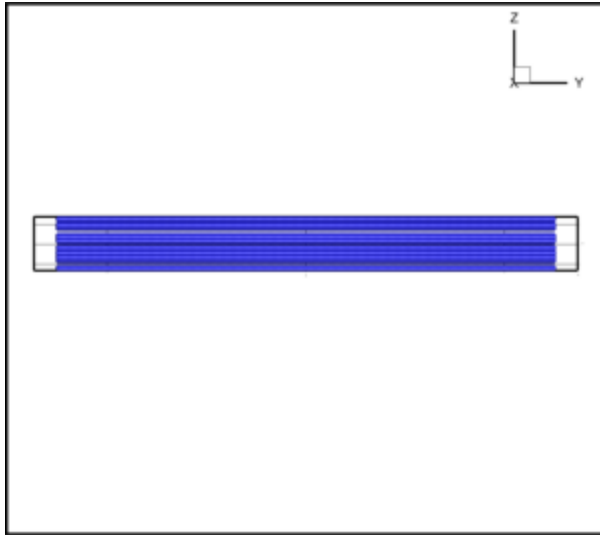
Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν για δίνη Lamb-Oseen με $\Gamma = 1664 \text{ cm}^2/\text{s}^2$, μήκος κύματος(ή περιοδικού κουτιού) $l = 50 \text{ cm}$ και πλάτος διαταραχής $A = 1 \text{ cm}$. Με βάσει τις συγκεκριμένες επιλογές παραμέτρων φαίνεται ότι ο κώδικας προσομοιάζει ικανοποιητικά το πρόβλημα που παρουσιάσαμε.

5.1.2 Αναπαράσταση Δίνης Rankine και Lamb-Oseen από Στοιχεία Στροβιλότητας

Στην επόμενη περίπτωση προσπαθούμε να αναπαραστήσουμε μια δίνη Rankine και μία δίνη Lamb-Oseen χρησιμοποιώντας τα πλέγματα που περιγράψουμε στο κεφάλαιο 3 για την κατασκευή του διαμερισμού. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, από κάθε σημείο του πλέγματος ξεκινάει μία γραμμή στοιχείων στροβιλότητας. Η δίνη έχει ακτίνα πυρήνα $R_\Delta = 3 \text{ cm}$ και κυκλοφορία $\Gamma = 1234 \text{ cm}^2/\text{s}^2$.

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε μία καινούργια έννοια η οποία δεν είναι προφανής σε σχέση με αυτά που συζητήσαμε στο κεφάλαιο 3. Η επικάλυψη των στοιχείων δεν θα είναι παντού ίδια. Θα αναφερόμαστε στην επικάλυψη των στοιχείων κατά μήκος των γραμμών της κατανομής και κατά το εγκάρσιο επίπεδο. Το ενδιαφέρον είναι ότι η τελευταία πρόταση συσχετίζεται άμεσα με τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα έχουμε. Για αυτό τον λόγο θα μελετήσουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση στοιχεία θα είναι επαρκώς πυκνά κατά μήκος των γραμμών της κατανομής στροβιλότητας αλλά οριακά πυκνό κατά το εγκάρσιο επίπεδο της δίνης. Στην δεύτερη περίπτωση θα είναι αρκετά πυκνό και με τις δύο έννοιες. Σημειώνουμε ότι οριακά πυκνό σημαίνει $ep = 1$ και αρκετά πυκνό $ep > 1$.

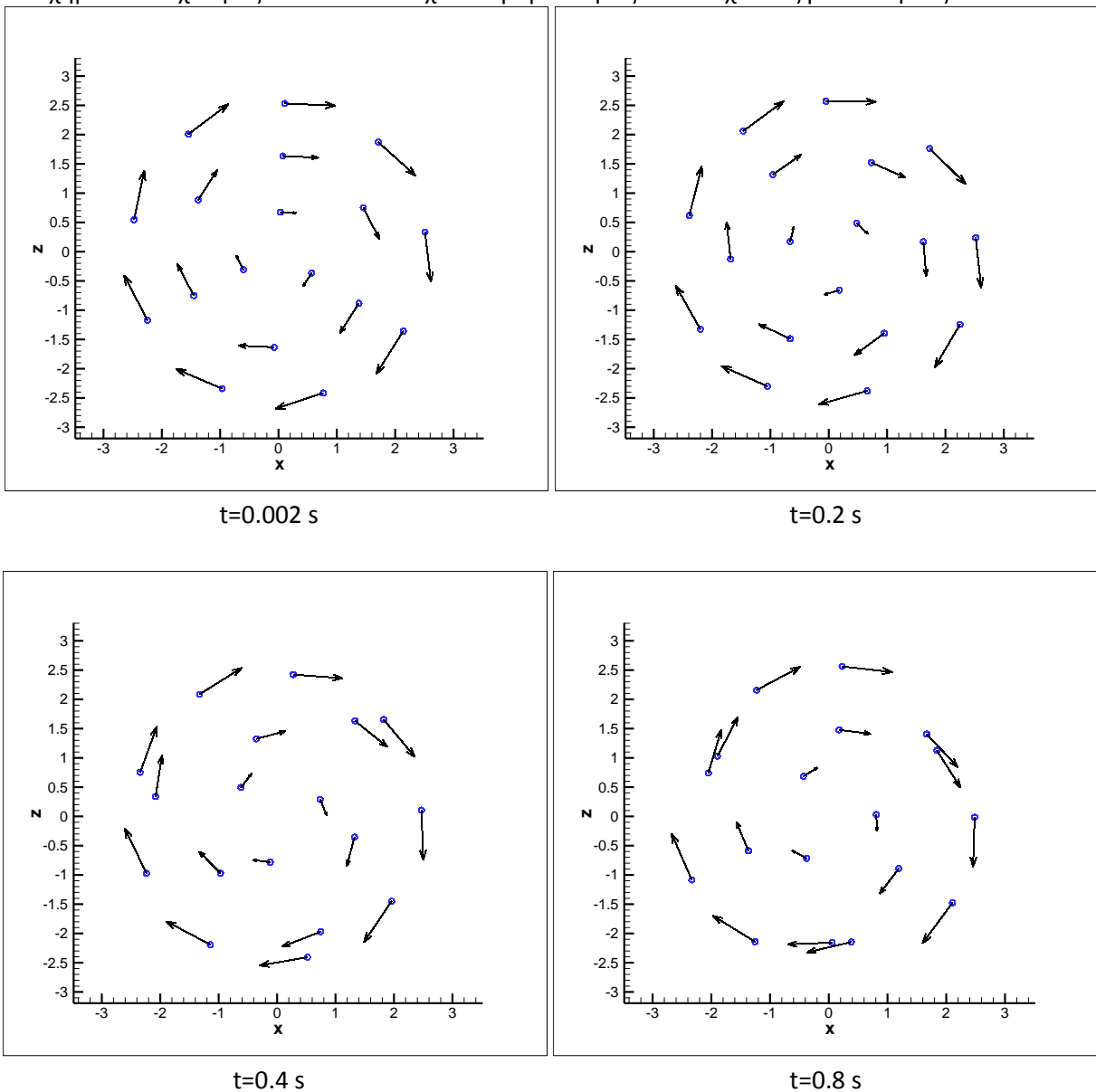
Αρχικά θα κατασκευάσουμε ένα αραιό πλέγμα χρησιμοποιώντας τρεις κυκλικές λουρίδες και στην κάθε μία θα τοποθετήσουμε $n_0 = 3, n_1 = 6, n_2 = 9$ στοιχεία, όπως παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3. Κατά μήκος της κάθε γραμμής έχουμε 200 στοιχεία, οπότε χρησιμοποιώντας την οριακή τιμή της παραμέτρου αποκοπής $\varepsilon = 1$, έχουμε $ep = 4$. Από την άλλη άποψη, το πλέγμα που κατασκευάσαμε για την τοποθέτηση των γραμμών δεν είναι αρκετά πυκνό ώστε κάθε στοιχείο να επικαλύπτει τέσσερα και για την ακρίβεια δεν καλύπτει ούτε ένα γειτονικό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή στροβιλότητας να μην έχει την ίδια μορφή κάθε χρονική στιγμή οπότε και το πεδίο ταχύτητας σταδιακά αλλάζει. Ενώ, λοιπόν, την πρώτη χρονική στιγμή έχουμε την καλύτερη εκπροσώπηση της δίνης από τα στοιχεία στροβιλότητας τις επόμενες χρονικές στιγμές το πεδίο καταστρέφεται. Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε διάφορες απόψεις των στοιχείων στις αρχικές τους θέσεις. Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία πάνω σε κάθε γραμμή είναι πολύ πιο πυκνά σε σχέση με την εγκάρσια διατομή.



Σχήμα 48. Τοποθέτηση των στοιχείων στροβιλότητας στην πρώτη περίπτωση

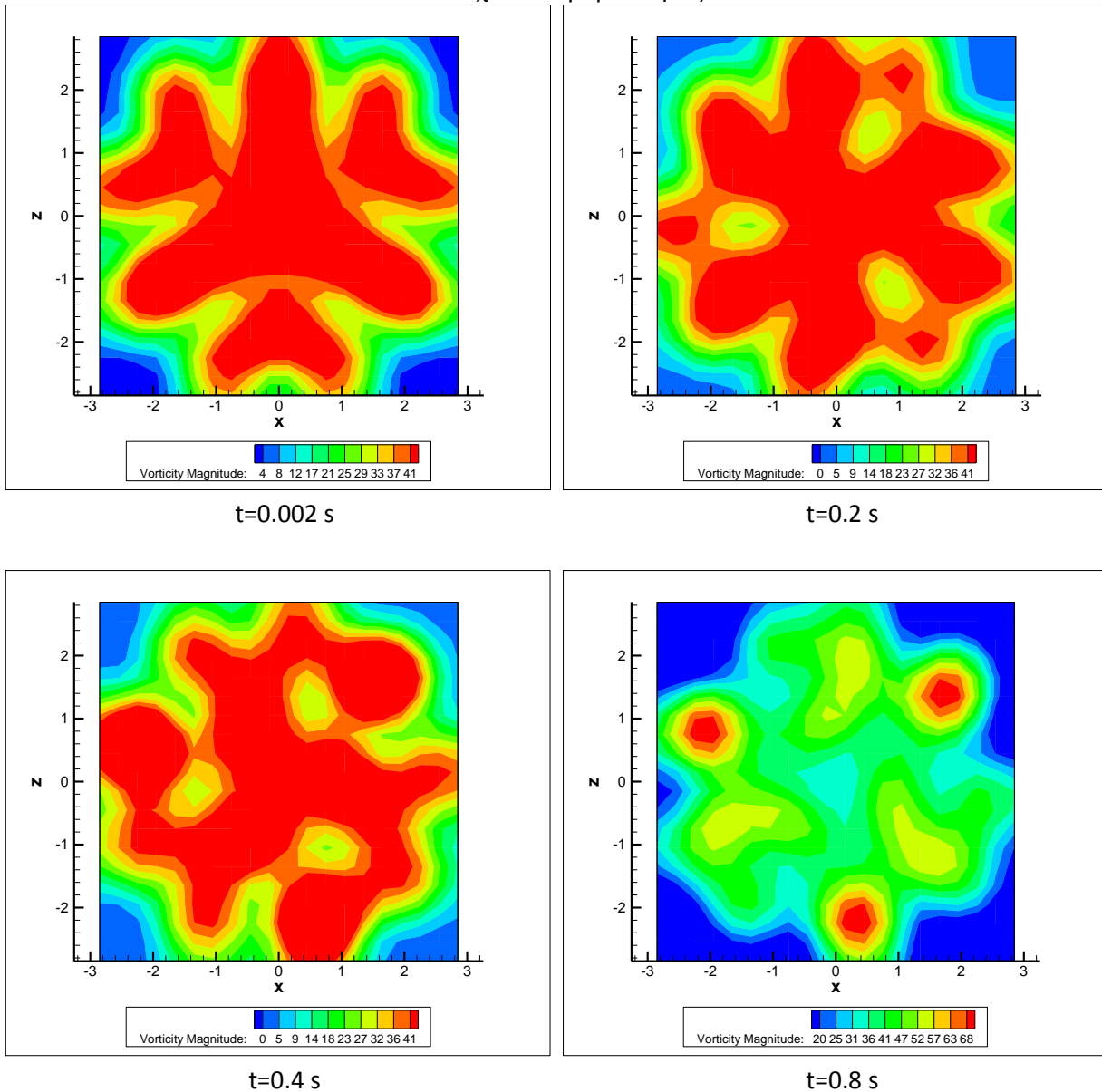
Στα παρακάτω διαγράμματα σχεδιάσαμε τα πεδία ταχύτητας πάνω στα στοιχεία στροβιλότητας για μία δίνη Rankine για διάφορες χρονικές στιγμές. Βλέπουμε τις αλλαγές της κατανομής στροβιλότητας κατά την χρονική διάρκεια μίας πλήρους περιστροφής της δίνης, δηλαδή για 0.8637 s. Η σχετική μετακίνηση των στοιχείων έχει ως αποτέλεσμα την σταδιακή αναδιαμόρφωση του πεδίου στροβιλότητας. Όπως παρατηρούμε, σταδιακά δημιουργούνται περιοχές που συγκεντρώνονται τα στοιχεία στροβιλότητας. Σε εκείνες τις θέσεις περιμένουμε το πεδίο στροβιλότητας να έχει μεγαλύτερες τιμές. Τα αποτελέσματα στα τέσσερα επόμενα διαγράμματα αναφέρονται σε δίνη Rankine αλλά, η ίδια παρατήρηση γίνεται και για την περίπτωση μίας δίνης Lamb-Oseen.

Σχήμα 49. Ταχύτητες πάνω στα στοιχεία στροβιλότητας και οι σχετικές μετακινήσεις των δινών



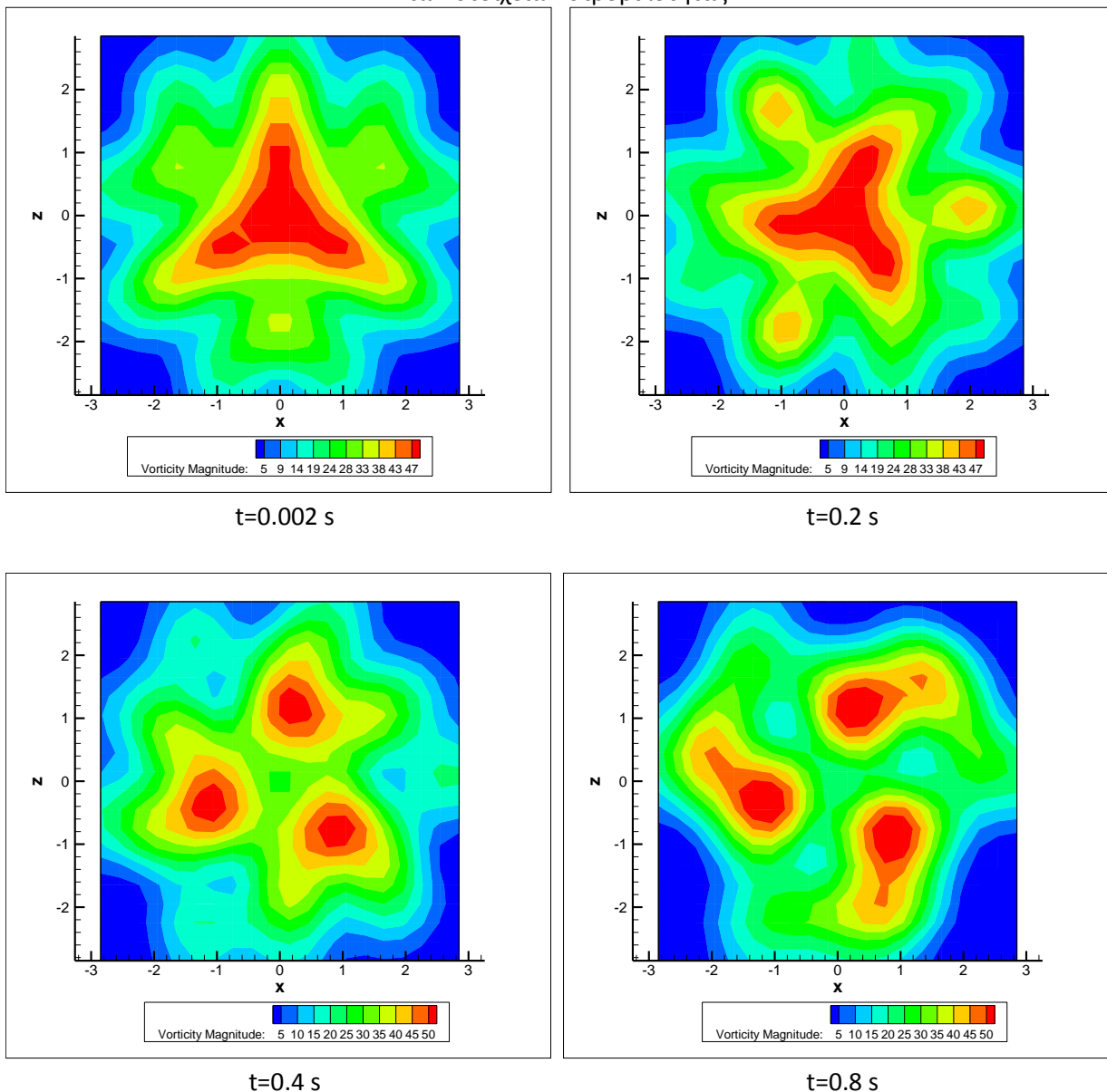
Τα πεδία στροβιλότητας για δίνη Rankine και Lamb-Oseen φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα. Παρατηρήστε ότι ακόμα και για την χρονική στιγμή μηδέν, το πεδίο στροβιλότητας δεν είναι το αναμενόμενο για μία δίνη Rankine και Lamb-Oseen αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα είναι λογικό λόγω του πλέγματος που χρησιμοποιήσαμε κατά το εγκάρσιο επίπεδο για την τοποθέτηση των στοιχείων. Τα πεδία στροβιλότητας προέκυψαν από επεξεργασία του πεδίου ταχύτητας από το Tecplot. Το πεδίο ταχύτητας υπολογίστηκε από τον κώδικα σε ένα ομοιόμορφο ορθογώνιο πλέγμα $20 \times 20 \times 20$.

Σχήμα 50. Πεδίο στροβιλότητας για Δίνη Rankine και η εξέλιξη του λόγω της σχετικής μετακίνησης των στοιχείων στροβιλότητας

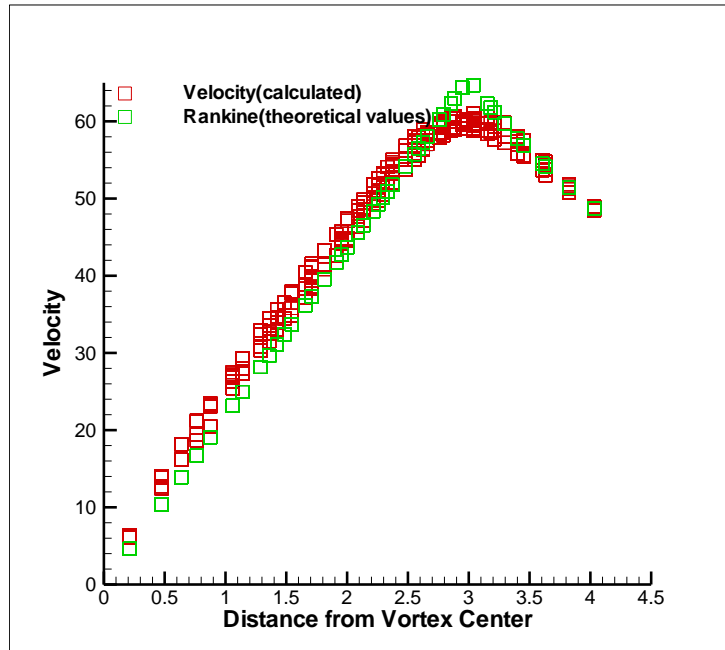


Στα παραπάνω πεδία στροβιλότητας βλέπουμε ότι το μέγιστο της στροβιλότητας είναι κοντά στην θεωρητική μέγιστη τιμή στροβιλότητας $\omega_0 = 43,64 \frac{1}{s^2}$. Τιμές στροβιλότητας μεγαλύτερες από την παραπάνω είναι συγκεντρωμένες κοντά στις περιοχές που συγκεντρώνονται δίνες. Το τελευταίο από τα παραπάνω διαγράμματα ενισχύει την τελευταία πρόταση. Αν συγκρίνουμε το τελευταίο διάγραμμα με τα σχήματα όπου φαίνονται οι σχετικές μετακινήσεις των στοιχείων, βλέπουμε ότι οι πιο υψηλές τιμές στροβιλότητας βρίσκονται κοντά στις θέσεις όπου είναι συγκεντρωμένα τα στοιχεία στροβιλότητας. Ακολουθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα για δίνη Lamb.

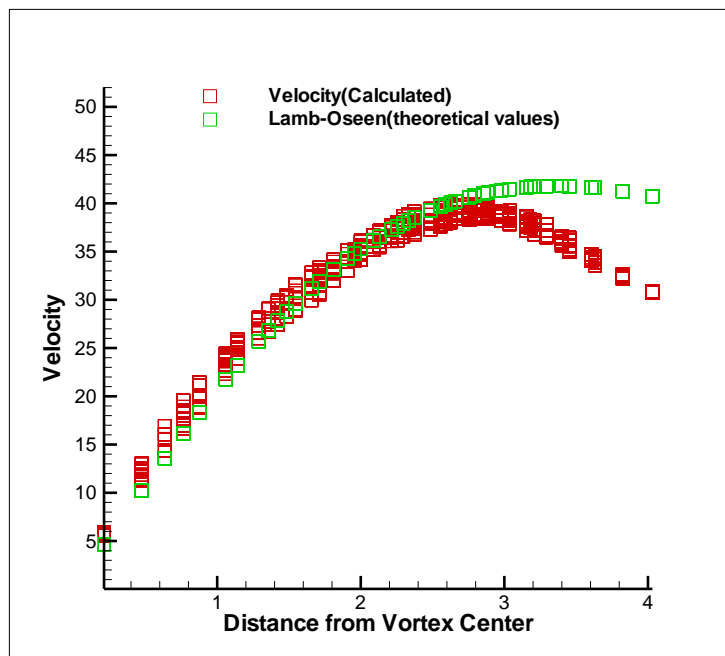
Σχήμα 51. Πεδίο στροβιλότητας για Δίνη Lamb-Oseen και η εξέλιξη του λόγω της σχετικής μετακίνησης των στοιχείων στροβιλότητας



Παρατηρήστε και εδώ τις αλλαγές του πεδίου στροβιλότητας κατά την μετακίνηση των στοιχείων στροβιλότητας. Ενώ το πεδίο στροβιλότητας απέχει αρκετά από το αναμενόμενο για μία δίνη Rankine και μία δίνη Lamb-Oseen αντίστοιχα, το επαγόμενο πεδίο ταχυτήτων είναι αρκετά καλό όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα. Σε αυτά, φαίνεται το μέτρο της ταχύτητας και οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές για τις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα την χρονική στιγμή $t=0$ s καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της δίνης.

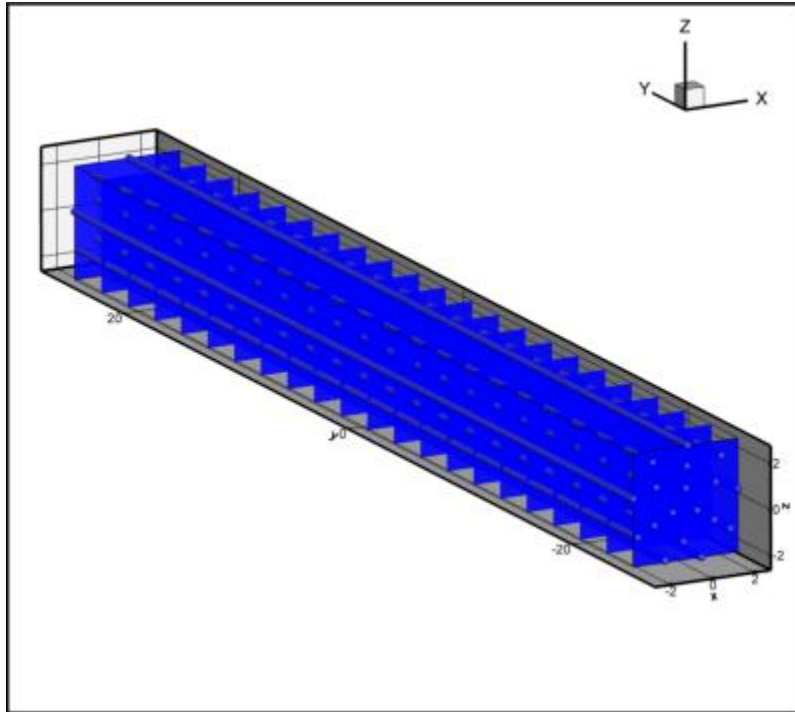


Σχήμα 52. Κατανομή περιφερειακής ταχύτητας για δίνη Rankine



Σχήμα 53. Κατανομή περιφερειακής Ταχύτητας για δίνη Lamb-Oseen

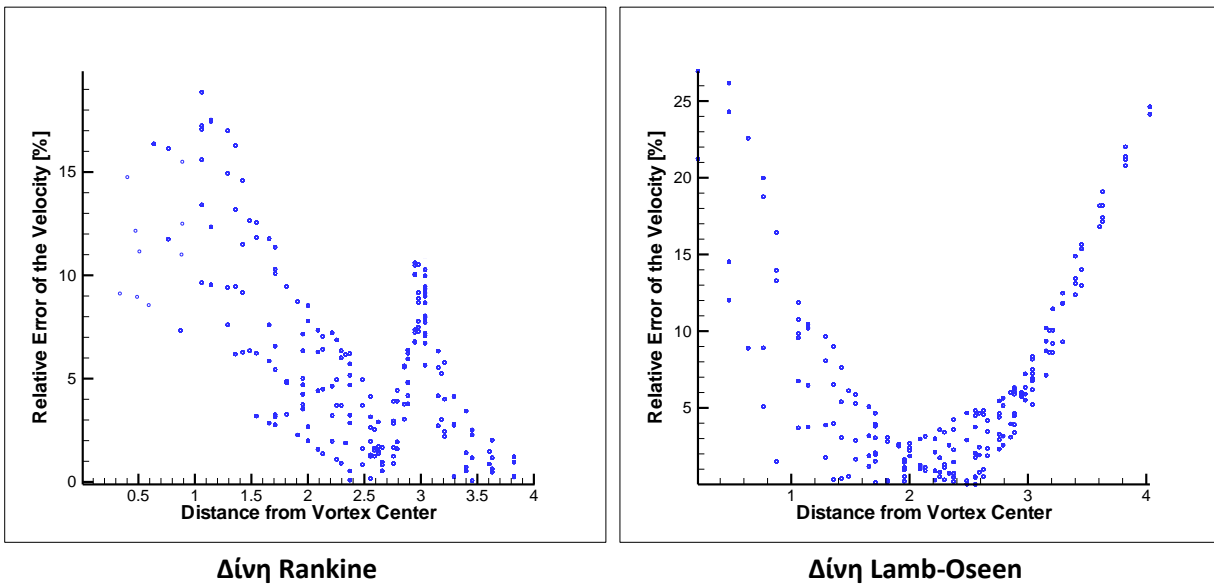
Τα διαγράμματα ταχυτήτων σε σχέση με την απόσταση από τον πυρήνα της δίνης προέκυψαν από αποτελέσματα του κώδικα σε είκοσι διαφορετικά xz επίπεδα, τα οποία βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Για αυτό τον λόγο στα διαγράμματα ταχυτήτων για κάθε απόσταση από το κέντρο της δίνης προκύπτουν τόσα σημεία υπολογισμού όσα είναι xz επίπεδα τα οποία βλέπουμε με κόκκινο χρώμα στα σχήματα 52, 53. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να παρατηρήσουμε την διασπορά των τιμών της ταχύτητας σε διάφορες αποστάσεις κατά μήκος του περιοδικού κουτιού.



Σχήμα 54. Επίπεδα Υπολογισμού Ταχυτήτων

Μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις. Πρώτον, βλέπουμε ότι το πεδίο ταχύτητας που ορίζει η δίνη Rankine αναπαράγεται από τα στοιχεία στροβιλότητας επιτυχώς, τουλάχιστον για την πρώτη χρονική στιγμή. Για τις επόμενες χρονικές στιγμές, θα δούμε παρακάτω πως επηρεάζουν οι σχετικές μετακινήσεις των στοιχείων το μέτρο της ταχύτητας. Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται και από τα σχετικά σφάλματα των ταχυτήτων, τα οποία συνοψίζονται στα παρακάτω διαγράμματα. Επιπλέον, παρατηρούμε την απόκλιση των αποτελεσμάτων από τα θεωρητικά για την δίνη Lamb-Oseen εκτός του πυρήνα της δίνης, δηλαδή για απόσταση από τον πυρήνα μεγαλύτερη από 3 cm. Η συμπεριφορά αυτή δεν είναι τυχαία. Το πεδίο στροβιλότητας της δίνης Lamb-Oseen φθίνει έως την τιμή μηδέν στο άπειρο. Τα στοιχεία στροβιλότητας κατασκευάστηκαν από τον διαμερισμό του support του πεδίου στροβιλότητας, το οποίο αποφασίσαμε να είναι ίδιο με το support της δίνης Rankine για λόγους σύγκρισης. Το αποτέλεσμα δείχνουν ότι εκτός του support αποκλίνουν από την

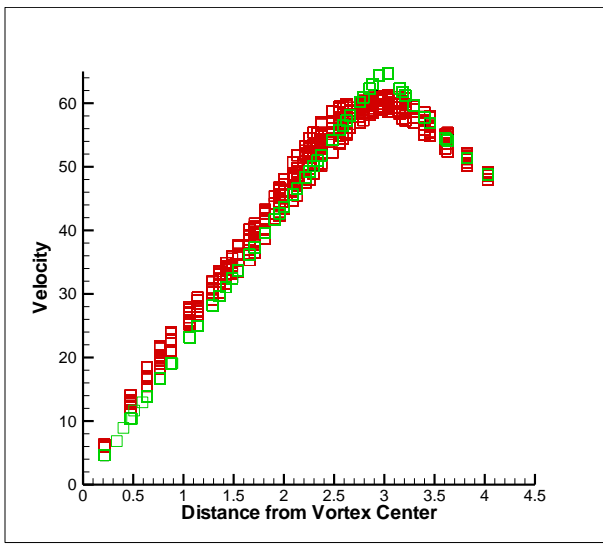
θεωρητική τιμή. Για να παραχθούν καλύτερα αποτελέσματα πρέπει να αυξήσουμε το support με το οποίο θα φτιάξουμε τον διαμερισμό του πεδίου στροβιλότητας.



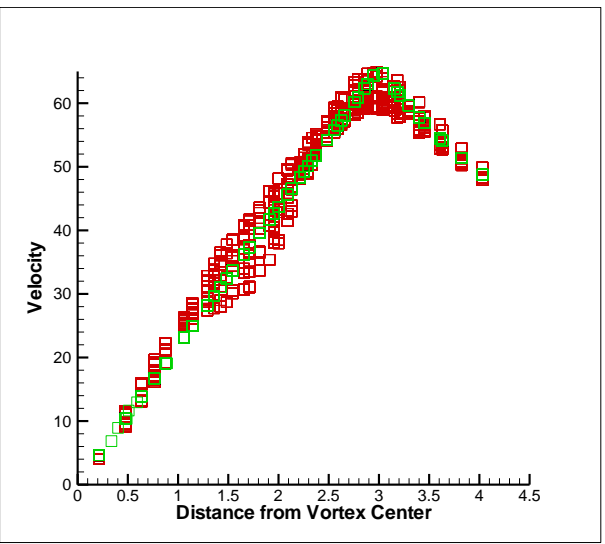
Σχήμα 55. Σχετικά σφάλματα ταχυτήτων σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της δίνης για δίνη Rankine και δίνη Lamb-Oseen

Μία δεύτερη παρατήρηση αφορά την δίνη Rankine, όπου φαίνεται ένα «άλμα» του σφάλματος ακριβώς στην ακτίνα της δίνης. Αυτό οφείλεται στο ότι η δίνη Rankine, παρουσιάζει ασυνέχεια στο πεδίο ταχύτητας σε απόσταση ίση με την ακτίνα του πυρήνα της δίνης. Για να προσεγγίσουμε καλύτερα την ασυνέχεια πρέπει σε αυτές τις θέσεις τα στοιχεία να τοποθετηθούν πυκνότερα. Επίσης, παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις δεν έχουμε μεγάλη βελτίωση του σφάλματος σε σχέση με την προσέγγιση του πεδίου από στοιχεία πάνω σε μια γραμμή. Για την βελτίωση των αποτελεσμάτων μπορούμε είτε να φτιάξουμε πιο πυκνό πλέγμα, όπως θα δούμε και παρακάτω είτε να εκτελούνται οι ολοκληρώσεις για τις κοντινές επαγωγές ταχύτητας υπολογίζονται το τριπλό ολοκλήρωμα όγκου. Η δεύτερη περίπτωση δεν προβλέπεται από τον κώδικα αλλά θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα θα βελτιωθούν χρησιμοποιώντας τον κανονικό υπολογισμό του ολοκληρώματος. Παρ' όλ' αυτά, θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα των επαγόμενων ταχυτήτων είναι ικανοποιητικά.

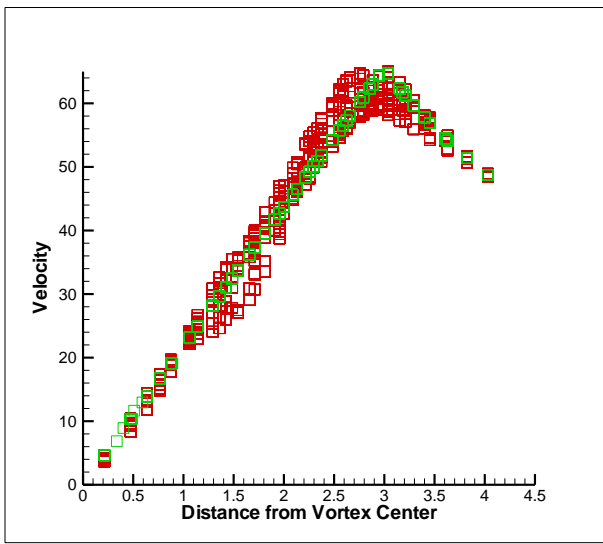
Όπως αναφέραμε, η επίδραση των σχετικών μετακινήσεων των στοιχείων στροβιλότητας έχει σημαντική επίδραση στην ταχύτητα που θα υπολογίσουμε. Η επίδραση αυτή φαίνεται στα διαγράμματα ταχυτήτων για διαφορετικές χρονικές στιγμές. Παρακάτω βλέπουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις δύο περιπτώσεις. Οι σχετικές μετακινήσεις των στοιχείων έχουν ως αποτέλεσμα το πεδίο ταχύτητας να αποκλίνει από το αναμενόμενο και ιδιαίτερα για την δίνη Lamb-Oseen βλέπουμε ότι οι τιμές της ταχύτητας διασκορπίζονται περισσότερο γύρω από την θεωρητική τιμή.



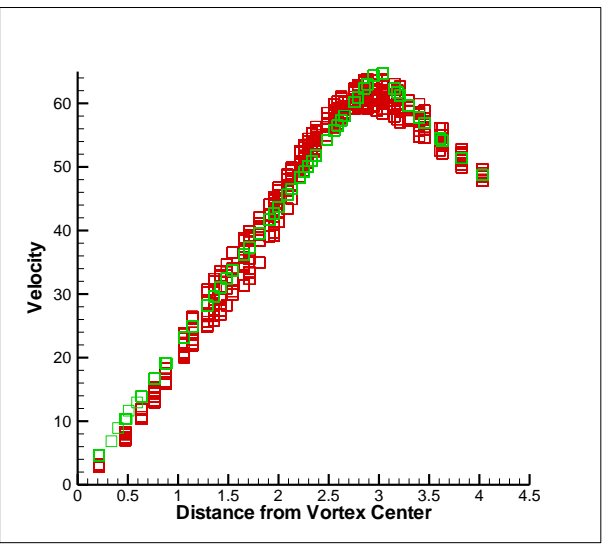
t=0.2 s



t=0.4 s

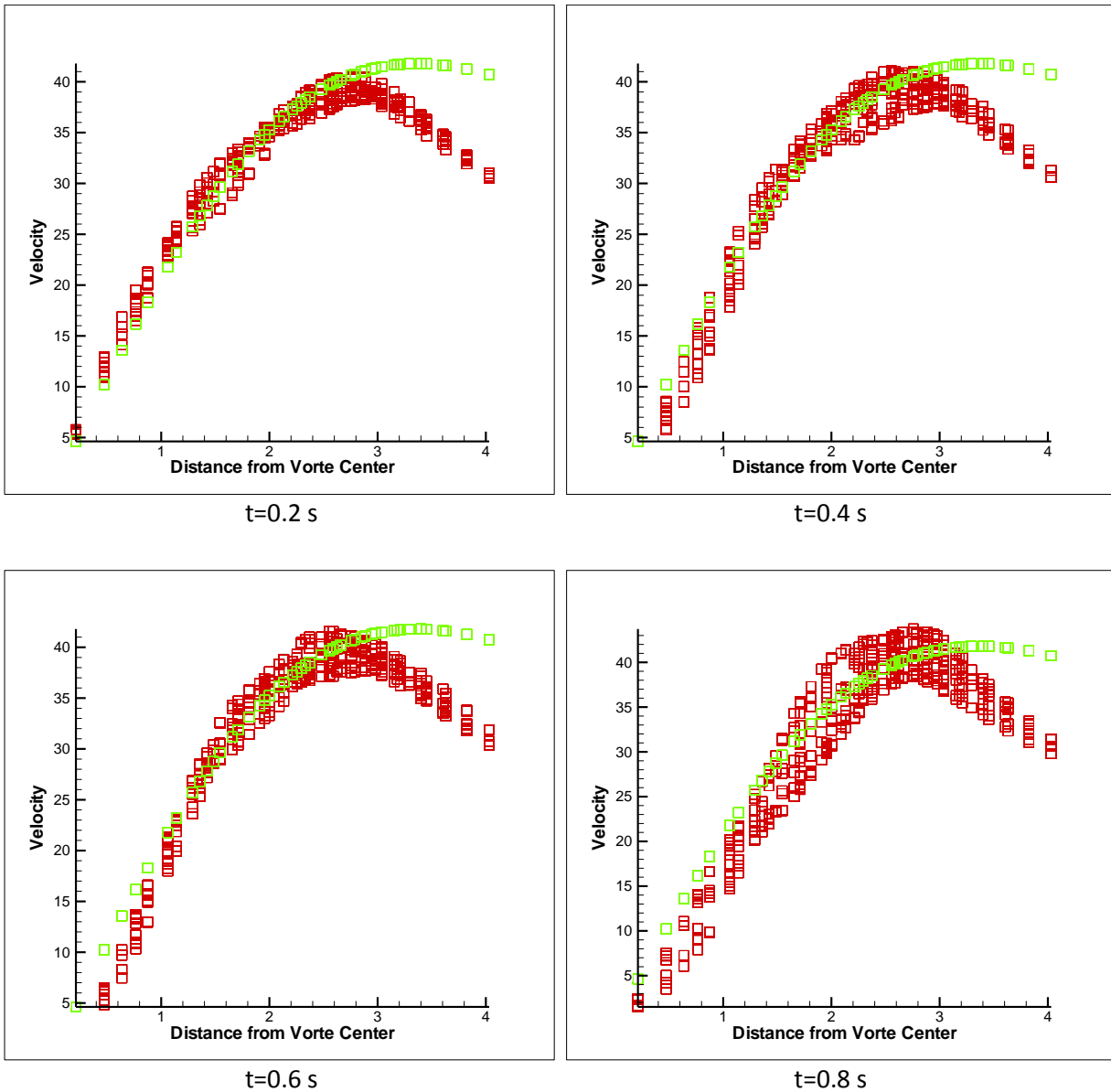


t=0.6 s



t=0.8 s

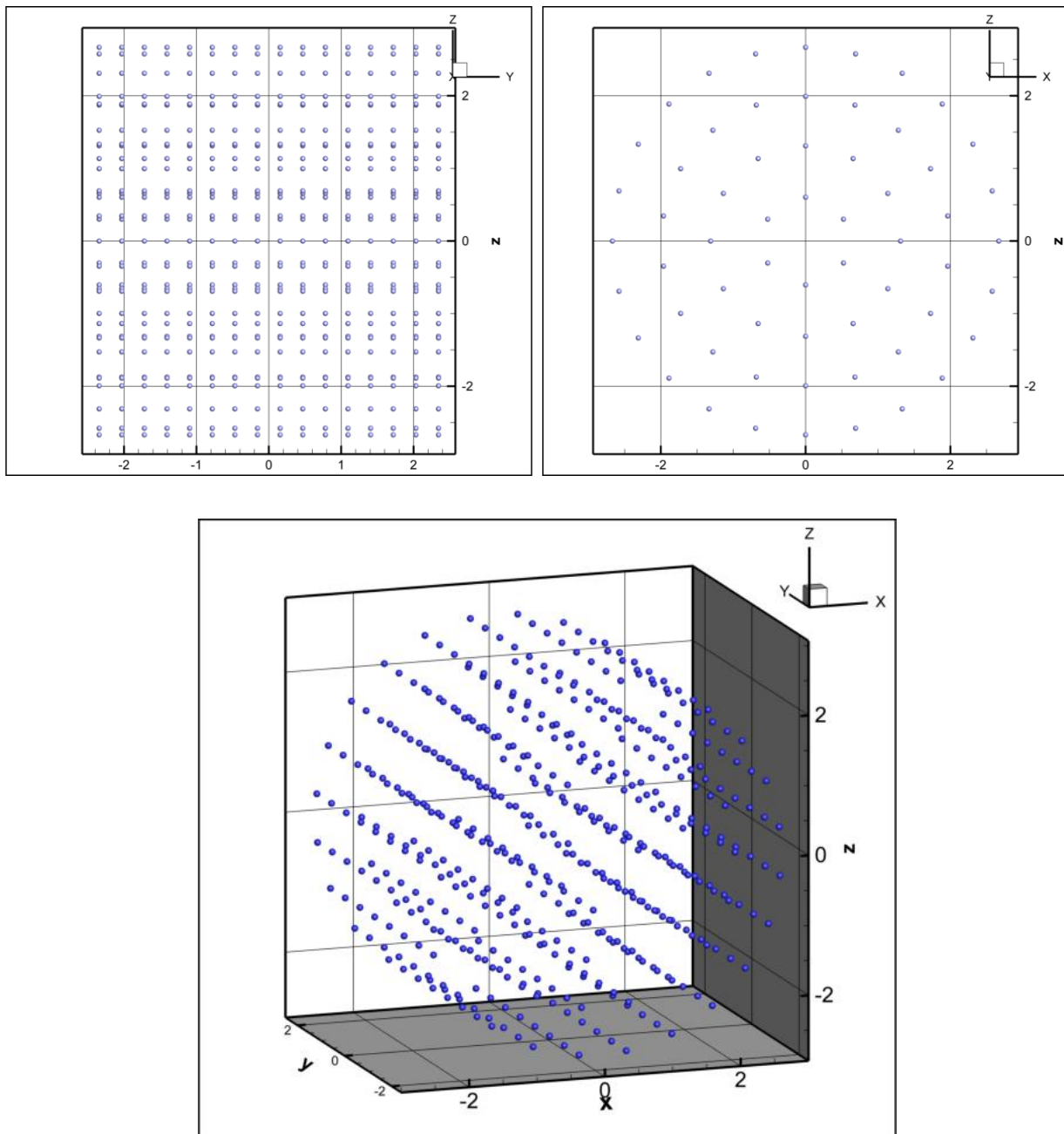
Σχήμα 56. Περιφερειακή ταχύτητα για διαφορετικές χρονικές στιγμές σε δίνη Rankine



Σχήμα 57. Περιφερειακή ταχύτητα για διαφορετικές χρονικές στιγμές σε δίνη Lamb-Oseen

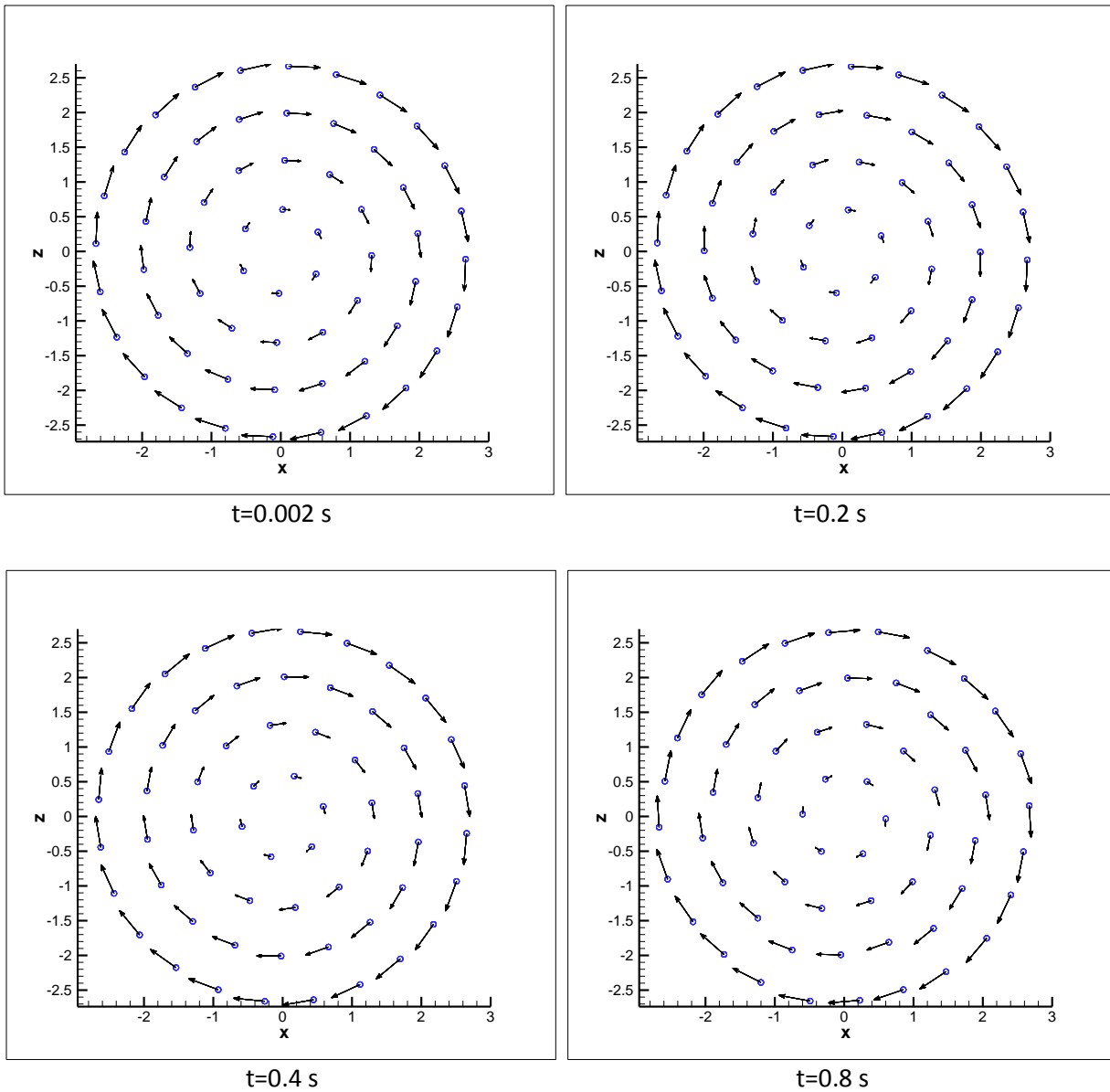
Στο δεύτερο πλέγμα που κατασκευάσαμε, κατά μήκος των γραμμών των στοιχείων στροβιλότητας έχουμε την ίδια πυκνότητα στοιχείων με τα στοιχεία στο κάθετο επίπεδο στον άξονα της δίνης. Η περίπτωση αυτή είναι διαφορετική από την προηγούμενη, αφού στην προηγούμενη τα στοιχεία ήταν πυκνότερα κατά μήκος των γραμμών που όριζαν και δεν ήταν αρκετά πυκνά στο εγκάρσιο επίπεδο (κάθετο επίπεδο στον άξονα της δίνης). Στο πλέγμα αυτό έχουμε χρησιμοποιήσει $er = 2.2$ κατά μήκος των γραμμών των στοιχείων στροβιλότητας, οπότε έχουμε 16 στοιχεία. Η παράμετρος αποκοπής είναι 0.757. Παρατηρήστε ότι το μήκος του περιοδικού κουτιού είναι $l = 5 \text{ cm}$. Η επιλογή του μήκους έγινε για την επίδειξη των αποτελεσμάτων για διαφορετικό μήκος περιοδικού κουτιού. Το μήκος $l = 50 \text{ cm}$ είναι

χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων του Ortega για τα μήκη κύματος των διαταραχών, για αυτό και επιλέχθηκε για τις προηγούμενες περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας μικρότερο μήκος περιοδικού κουτιού μπορούμε να ελέγξουμε τα αποτελέσματα του κώδικα για πολύ πιο πυκνά πλέγματα κατά το εγκάρσιο επίπεδο. Αυτό συμβαίνει επειδή σε ένα μικρότερο περιοδικό κουτί οι πράξεις που πρέπει να εκτελέσει ο κώδικας είναι πολύ λιγότερες, οπότε τα αποτελέσματα είναι δυνατόν να παραχθούν σε λογικούς χρόνους.



Σχήμα 58. Τοποθέτηση των στοιχείων στροβιλότητα στην δεύτερη περίπτωση

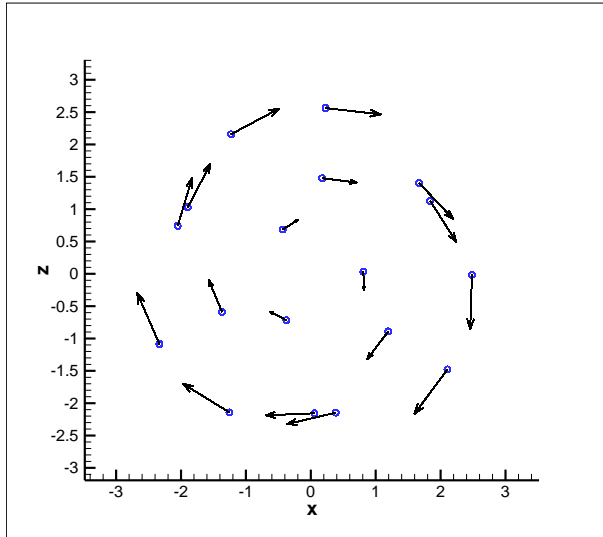
Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έτσι και εδώ, παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής στροβιλότητας μέσα σε μία περίοδο περιστροφής για μία δίνη Rankine. Στα σχήματα βλέπουμε τα στοιχεία στροβιλότητας και τις επαγόμενες ταχύτητες σε αυτά για διάφορες χρονικές στιγμές.



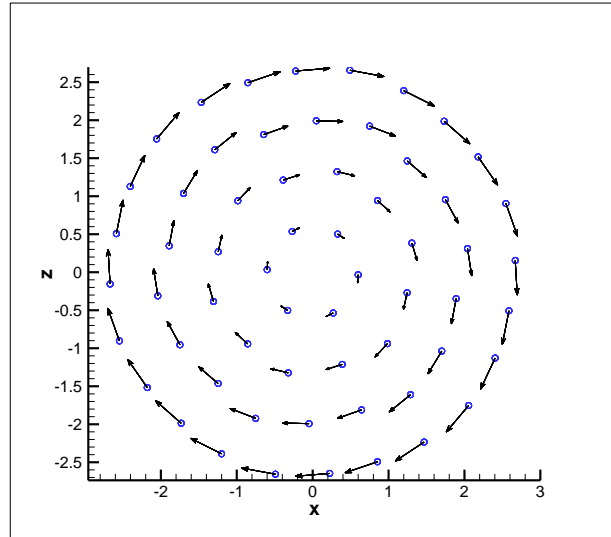
Σχήμα 59. Ταχύτητες στα στοιχεία στροβιλότητας και σχετικές μετακινήσεις των δινών

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι φανερό ότι τα στοιχεία διατηρούν τις σχετικές τους θέσεις. Αυτό οφείλεται στην επίδραση της επικάλυψης των στοιχείων. Αν συγκρίνουμε τις κατανομές στροβιλότητας την τελευταία χρονική στιγμή στα δύο πλέγματα, βλέπουμε ότι στο πλέγμα χωρίς επικάλυψη οι σχετικές θέσεις των στοιχείων απέχουν αρκετά από τις αρχικές και

αυτό γίνεται φανερό και στο πεδίο στροβιλότητας, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω. Στο πλέγμα με μεγαλύτερη επικάλυψη οι σχετικές θέσεις διατηρούνται άρα περιμένουμε το πεδίο στροβιλότητας να αναπαριστάται καλύτερα.



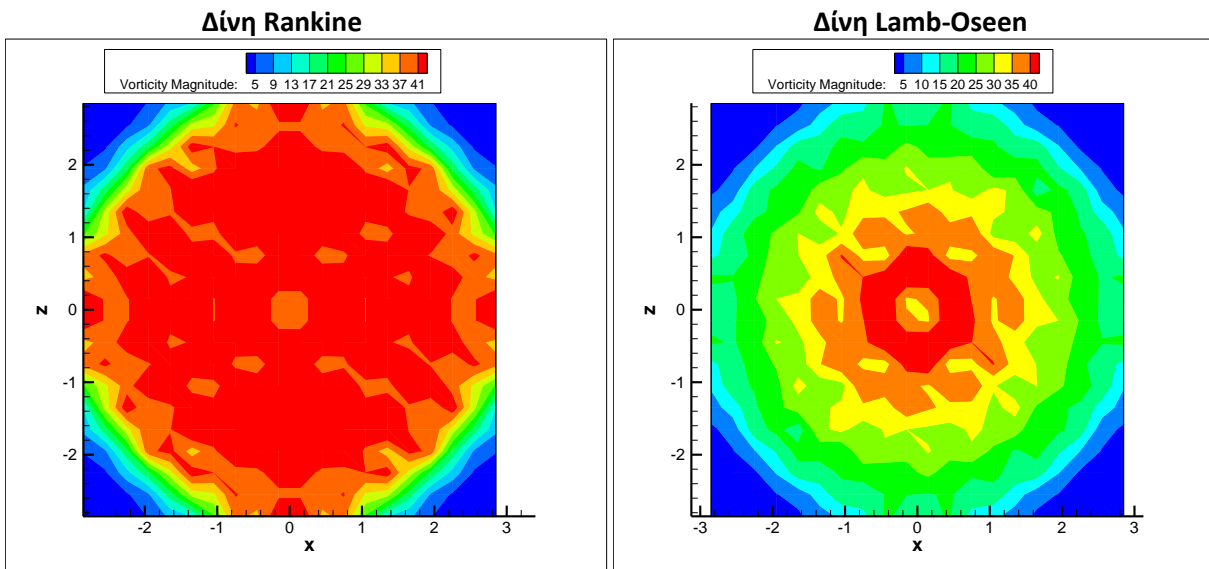
Χωρίς Επικάλυψη εμφανίζονται συγκεντρώσεις στοιχείων στροβιλότητας



Με επικάλυψη, τα στοιχεία διατηρούν τις σχετικές τους θέσεις

Σχήμα 60. Σύγκριση σχετικών μετατοπίσεων στοιχείων στροβιλότητας για δίνη Rankine στις δύο περιπτώσεις

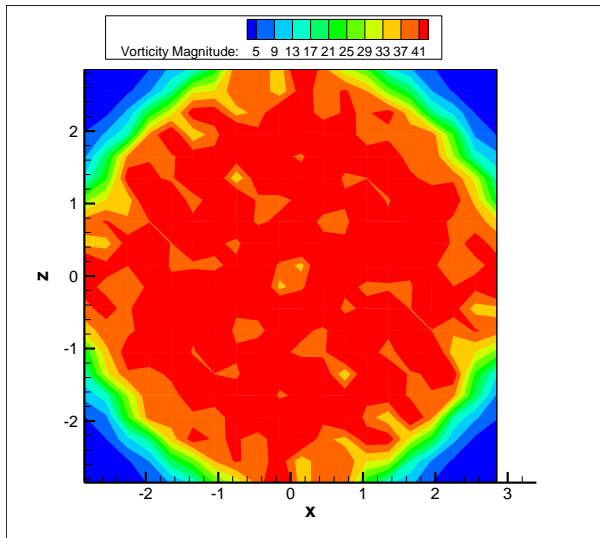
Ακολουθούν τα πεδία στροβιλότητας για τις δύο δίνες.



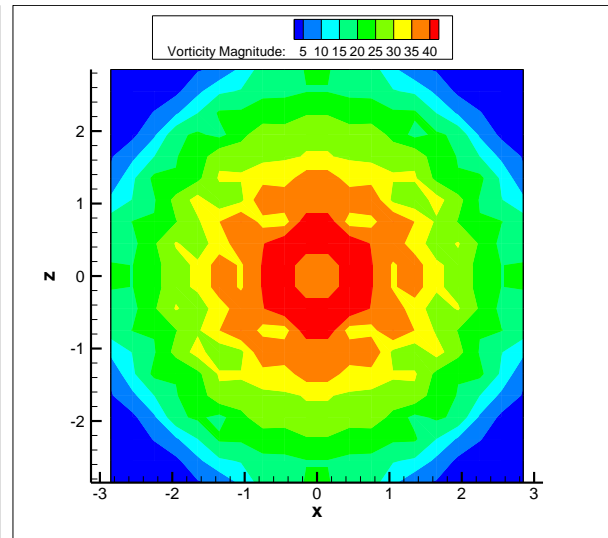
$t=0.002$ s

$t=0.002$ s

Σχήμα 61α. Πεδία στροβιλότητας Δίνης Rankine και Lamb-Oseen για την δεύτερη περίπτωση

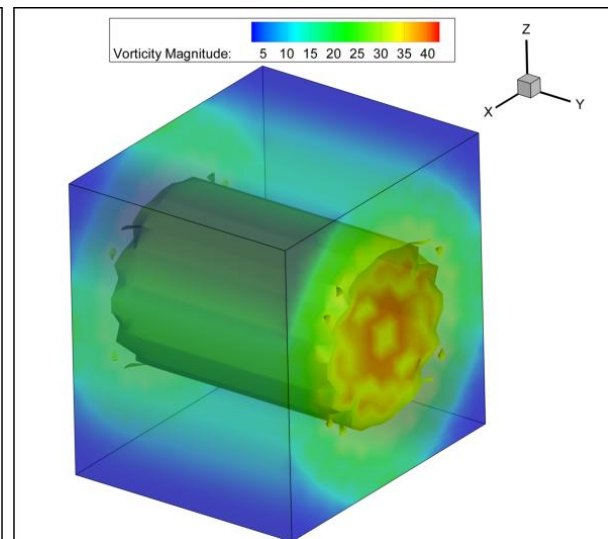
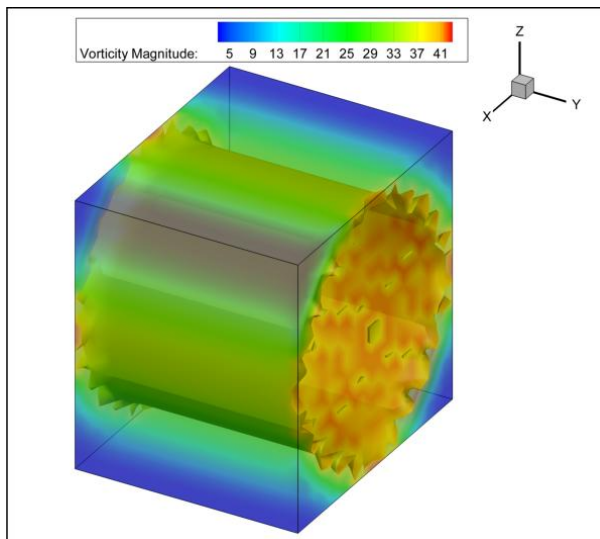


$t=0.8$ s



$t=0.8$ s

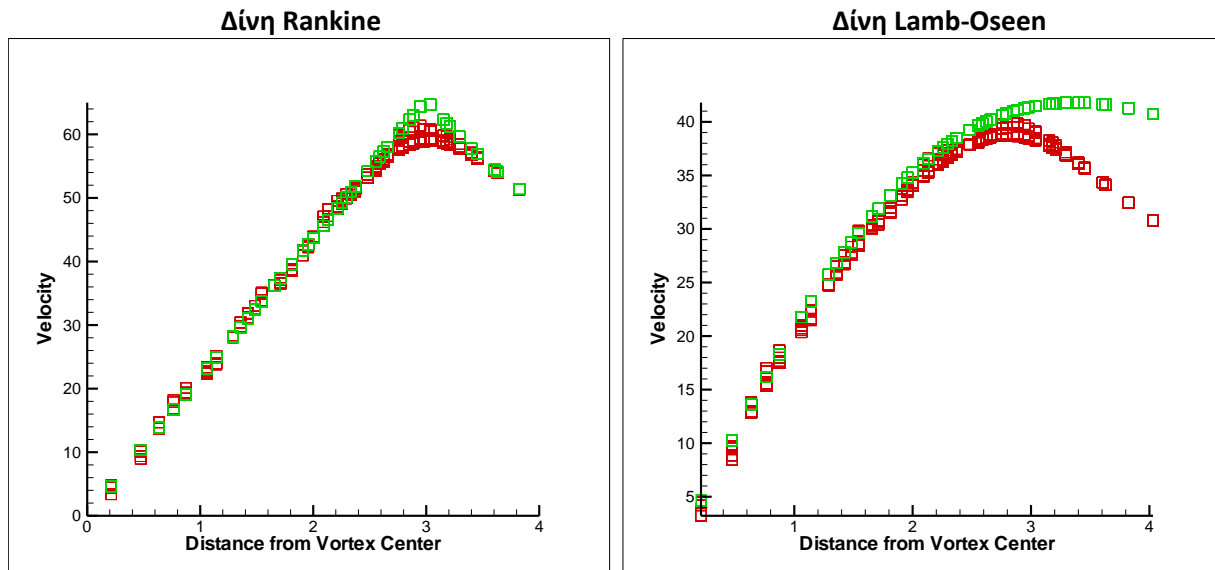
Σχήμα 61β. Πεδία στροβιλότητας Δίνης Rankine και Lamb-Oseen για την δεύτερη περίπτωση



Σχήμα 62. Επιφάνειες ίσης στροβιλότητας για Δίνη Rankine και Lamb-Oseen

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι το πεδίο στροβιλότητας όσο αφορά την μορφή του αλλά και την μέγιστη τιμή του προσεγγίζεται καλύτερα σε σχέση με την περίπτωση όπου έχουμε μικρότερη επικάλυψη κατά το εγκάρσιο επίπεδο. Παρατηρήστε επίσης, ότι τα αποτελέσματα είναι τα ίδια παρόλο που αλλάξαμε το μήκος του περιοδικού κουτιού. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης κατανοητό αφού το αριθμητικό σχήμα, όπως αναλύσαμε στο κεφάλαιο 3, είναι τέτοιο ώστε τα αποτελέσματα των αθροισμάτων υπολογιζόμενα αναλυτικά και η ασυμπτωτική προσέγγισή τους να συμφωνεί σε 6 δεκαδικά ψηφία ανεξάρτητα από το μήκος του περιοδικού κουτιού. Στα τελευταία διαγράμματα είναι φανερή και η επίδραση των ορίων του περιοδικού κουτιού στο πεδίο στροβιλότητας. Σημειώνουμε ότι αυτές οι μικρές

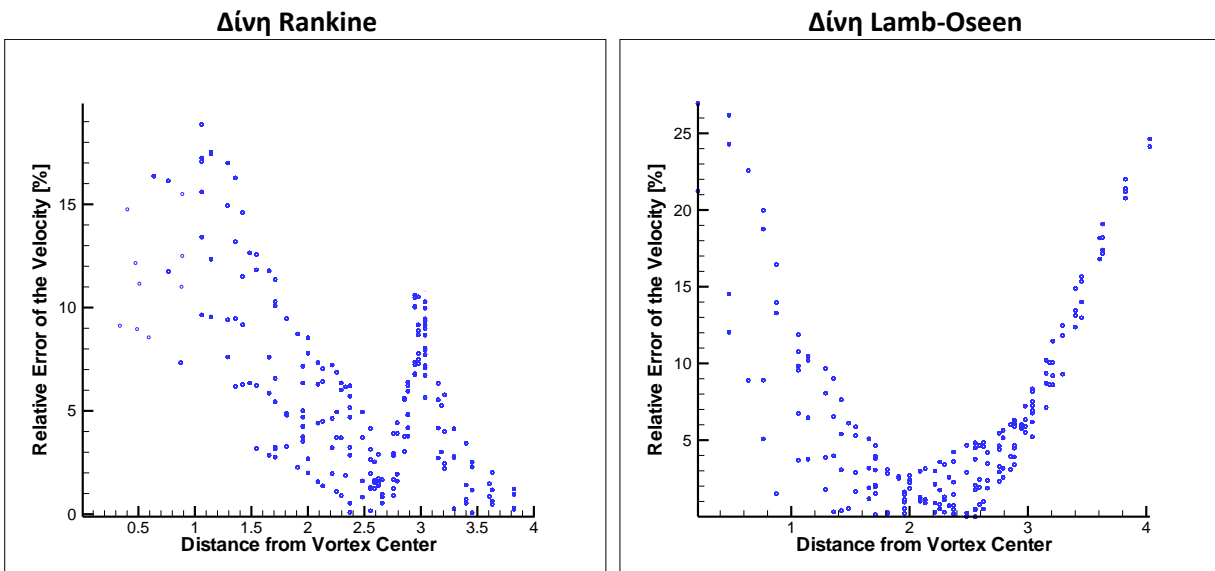
διαταραχές εμφανίζονται επειδή το Tecplot δεν γνωρίζει με κάποιο τρόπο ότι το πεδίο είναι περιοδικό, με αποτέλεσμα κατά την προσέγγιση του πεδίου στροβιλότητας να εμφανίζονται οι μικρές απότομες αλλαγές στην κλίση των επιφανειών. Παρακάτω βλέπουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για την περιφερειακή ταχύτητα για την χρονική στιγμή $t=0.8$ s. Σχετικά με τα προηγούμενα αποτελέσματα βλέπουμε ότι οι τιμές διασκορπίζονται πολύ λιγότερο γύρω από τις θεωρητικές τιμές της ταχύτητας.



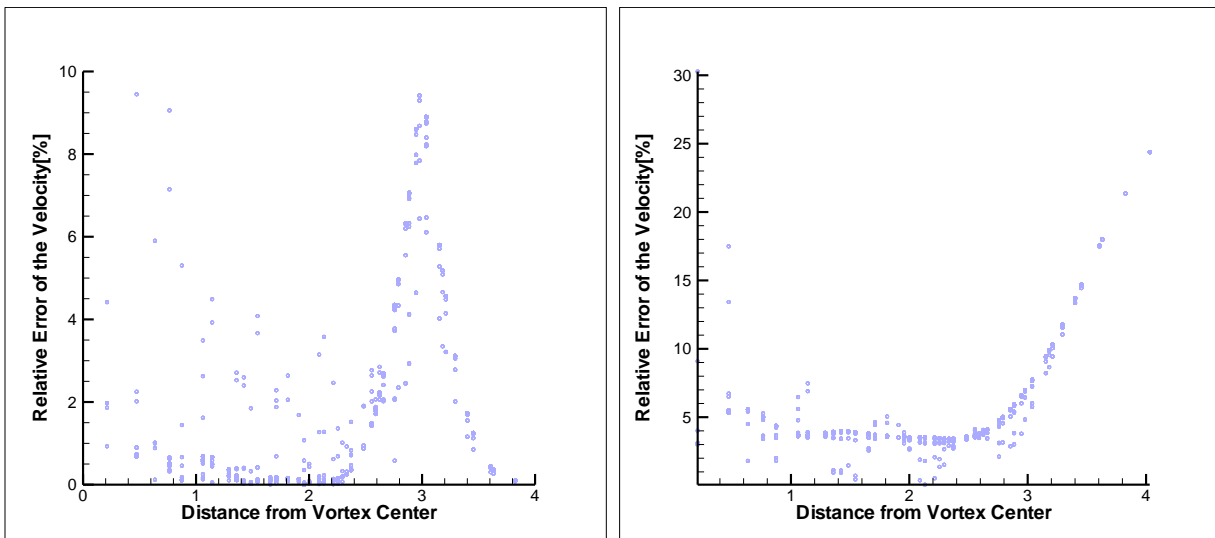
Σχήμα 63. Κατανομή Περιφερειακής Ταχύτητας για δίνη Rankine και Lamb-Oseen αντίστοιχα

Τα αποτελέσματα για την ταχύτητα είναι πολύ καλύτερα σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Το συμπέρασμα είναι ότι η σωστή επιλογή του βαθμού επικάλυψης είναι καθοριστική για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα, όπως φαίνεται και από τις παραπάνω περιπτώσεις. Επίσης, οι απλές αυτές περιπτώσεις ελέγχου αποδεικνύουν ότι ο κώδικας και η επέκταση της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας για περιοδικά πεδία στροβιλότητας λειτουργούν όπως αναμέναμε. Τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται από σφάλματα τα οποία, κατά μέση τιμή, είναι μικρότερα από 5%. Είδαμε δύο περιπτώσεις που τα σφάλματα γίνονται πολύ μεγαλύτερα. Η πρώτη περίπτωση εμφανίζεται σε περιοχές που η απώλεια λειότητας του πεδίου είναι ιδιαίτερα σημαντική, όπως στην δίνη Rankine. Η δεύτερη περίπτωση έχει να κάνει με την επιλογή μικρότερου support, οπότε έχουμε περιοχές που δεν έχουμε αρκετά στοιχεία στροβιλότητας, όπως στην δίνη Lamb-Oseen, ενώ θα έπρεπε. Παρακάτω συνοψίζουμε για τα δύο πλέγματα τα σφάλματα της ταχύτητας για τις δύο περιπτώσεις. Παρατηρήστε την συμπεριφορά του σφάλματος για τις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε παραπάνω αλλά και την μείωση των σφαλμάτων. Τα αποτελέσματα δεν είναι απλά βελτιωμένα όσο αφορά την αρχική στιγμή αλλά και γενικότερα κάθε χρονική στιγμή. Αφού στη δεύτερη περίπτωση τα στοιχεία διατηρούν τις σχετικές τους θέσεις, το πεδίο στροβιλότητας δεν υφίσταται

αλλοιώσεις οπότε το σφάλμα που υπολογίζουμε στην αρχική στιγμή παραμένει ίδιο για κάθε χρονική στιγμή. Αν βέβαια είχαμε συνεχίσει του υπολογισμούς για παραπάνω χρονικά βήματα τα αριθμητικά σφάλματα τελικά θα αλλοιώσουν τις σχετικές θέσεις των στοιχείων και το σφάλμα διαρκώς θα μεγαλώνει. Για αυτό τον λόγο πρέπει να γίνεται τακτική αναδιανομή των στοιχείων.



Διακριτοποίηση χωρίς επικάλυψη των στοιχείων κατά το εγκάρσιο επίπεδο
Περίπτωση 1



Διακριτοποίηση με επικάλυψη των στοιχείων κατά το εγκάρσιο επίπεδο
Περίπτωση 2

Σχήμα 64. Σχετικά Σφάλματα ταχυτήτων σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της δίνης για δίνη Rankine και δίνη Lamb-Oseen για τις δύο περιπτώσεις

5.2 Αστάθειες Δινών Ακροπτερυγίων - Αριθμητική Προσομοίωση και Σύγκριση Πειραματικών Αποτελεσμάτων

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα για τη μελέτη φαινομένων όπου εμφανίζονται αστάθειες στις δίνες ακροπτερυγίων, με σκοπό την σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα. Ο Ortega παρουσιάζει μία θεωρία ευστάθειας του φαινομένου η οποία αναπτύσσεται για τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις επαγωγής ταχυτήτων και ρυθμού μεταβολής των τροπών. Επειδή οι εξισώσεις είναι γραμμικοποιημένες, δεν είναι δυνατόν να διεξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την εξέλιξη των μη γραμμικών φαινομένων, τα οποία είναι κυρίαρχα κατά την εξέλιξη της αστάθειας. Σε πρώτο στάδιο, τα πειραματικά αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να ληφθούν αποφάσεις για τον προσδιορισμό των αρχικών τιμών των παραμέτρων των προσομοιώσεων. Σε δεύτερο στάδιο, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και θα συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των πειραμάτων, όπως αυτά παρουσιάζονται στην εργασία του Ortega. Θα ασχοληθούμε με δύο περιπτώσεις από τα πειράματα του Ortega. Επειδή τα φαινόμενα, που θα παρατηρήσουμε, είναι παρόμοια θα σχολιάσουμε διεξοδικά την εξέλιξη του φαινομένου για την πρώτη περίπτωση. Για τη δεύτερη περίπτωση θα σχολιάσουμε διαφορές που παρατηρήθηκαν σε σχέση με την πρώτη.

5.2.1 Περιπτώσεις προς μελέτη - Πειραματικά Δεδομένα και Βασικές Υποθέσεις Μοντελοποίησης

Σκοπός μας, είναι να συγκρίνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα με αντίστοιχα αποτελέσματα τα οποία παράγονται από τον κώδικα που αναπτύξαμε. Η ενότητα αναπτύσσεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα των μετρήσεων του Ortega και θα επιλέξουμε ορισμένες περιπτώσεις προς μελέτη. Τα δεδομένα εισόδου στον κώδικα για κάθε περίπτωση προκύπτουν από τα αποτελέσματα των μετρήσεων του Ortega. Πέρα από αυτά απαιτούνται και επιπλέον υποθέσεις για τη μοντελοποίηση του φαινομένου για όσα δεδομένα δεν είχαμε αρκετές πληροφορίες. Στο δεύτερο μέρος, λοιπόν, παρουσιάζονται οι υποθέσεις που χρησιμοποιήθηκαν και προσπαθούμε να αιτιολογήσουμε τις αποφάσεις μας.

Οι μετρημένες από τον Ortega παράμετροι είναι οι παρακάτω:

$\bar{\Gamma}_{of}$ και $\bar{\Gamma}_{oi}$, μέση αρχική κυκλοφορία δίνης flap και δίνης tip αντίστοιχα, για το ζεύγος δινών στην αριστερή πλευρά της πτέρυγας

b_0^* , μέση αρχική απόσταση μεταξύ των κεντροειδών στροβιλότητας

a_i και a_f , μέση ακτίνα πυρήνα δίνης tip και δίνης flap αντίστοιχα

d_o , μέση αρχική απόσταση δινών tip και flap

l_{ps} και l_{ss} , μήκος κύματος ασταθειών οι οποίες πρωτοεμφανίζονται στη δίνη flap η οποία αρχίζει από την αριστερή πλευρά της πτέρυγας(port side) και τη δεξιά πλευρά (starboard side) αντίστοιχα.

Το πεδίο ταχύτητας μετρήθηκε με την τεχνική PIV για τρεις επαναλήψεις του κάθε πειράματος. Μετά την επεξεργασία των μετρήσεων προέκυψε ο παρακάτω πίνακας, όπως δίνεται από τον Ortega. Σε αυτόν συνοψίζονται τα αποτελέσματα σε αδιάστατη μορφή.

$\bar{\Gamma}_{of} / \bar{\Gamma}_{ot}$	b_0^* (cm)	a_t / b_0^*	a_t / b_0^*	d_o / b_0^*	l_{ps} / b	l_{ss} / b
-0,37	48,9	0,068	0,036	0,198	0,9	1,3
-0,49	58,3	0,053	0,037	0,154	0,9	1,2
-0,55	58,7	0,051	0,041	0,147	1,1	1,5
-0,40	65	0,053	0,033	0,144	0,7	0,9
-0,57	63,9	0,051	0,038	0,146	1,5	1,3
-0,67	71,4	0,047	0,038	0,127	2,3	1,8
-0,37	48,9	0,068	0,036	0,198	1,1	1,2
-0,40	65	0,053	0,033	0,144	0,6	0,8
-0,49	58,3	0,053	0,037	0,154	1	1,4
-0,57	63,9	0,051	0,038	0,146	1	1
-0,41	48,5	0,069	0,038	0,198	1	1,4
-0,45	54,7	0,063	0,040	0,152	1	1,2
-0,50	54,7	0,055	0,036	0,161	1,2	1
-0,57	65,6	0,050	0,037	0,145	1,1	-
-0,58	58,3	0,054	0,042	0,148	-	1,5
-0,41	48,5	0,069	0,038	0,198	0,9	1
-0,45	54,7	0,063	0,040	0,152	1,1	1
-0,50	54,7	0,055	0,036	0,161	1,2	1,3
-0,57	65,6	0,050	0,037	0,145	1,3	1,3

Πίνακας 10. Συνοπτικός πίνακας μετρημένων μεγεθών στα πειράματα του Ortega

Υπενθυμίζουμε ότι το πλάτος της πτέρυγας είναι $b = 40$ cm. Οι λόγοι κυκλοφορίας κυμαίνονται από 0.37 έως 0.67 και αναφέρονται στο ζεύγος δινών στην αριστερή πλευρά της

πτέρυγας. Τα περισσότερα αποτελέσματα έχουν προκύψει για λόγους κυκλοφορίας κοντά στο 0.5. Όσο αφορά το μήκος κύματος της διαταραχής της δίνης flap, ο Ortega αναφέρει ότι, υπολογίστηκε από τα πειράματα οπτικοποίησης. Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι τα μήκη κύματος είναι διαφορετικά για τις δίνες flap στην αριστερή πλευρά και δεξιά πλευρά, αντίστοιχα, για το ίδιο πείραμα. Ο Ortega σχολιάζει ότι η συμπεριφορά αυτή οφείλεται σε μία μικρή ασυμμετρία στην κατασκευή της πτέρυγας.

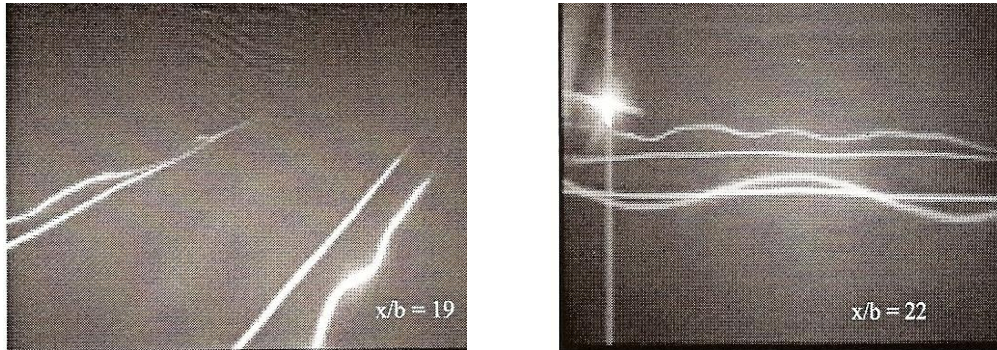
Επιλέξαμε να αναπαράγουμε την πρώτη και τρίτη περίπτωση από τον παραπάνω πίνακα. Η επιλογή αυτή έγινε με βάση τα στοιχεία που διαθέτουμε για σύγκριση. Συγκεκριμένα, για την πρώτη και τρίτη περίπτωση παρατίθενται εικόνες από το πείραμα οπτικοποίησης. Επιπλέον, για την πρώτη περίπτωση παραθέτονται ισοσταθμικές του πεδίου στροβιλότητας (για την ακρίβεια του πεδίου «μέτρο στροβιλότητας»). Οι κυκλοφορίες που μετρήθηκαν, οι ακτίνες των πυρήνων των δινών, καθώς και τα μήκη κύματος της αστάθειας στην δίνη flap για τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε, συνοψίζονται στο επόμενο πίνακα. Σημειώνουμε ότι για αυτές τις περιπτώσεις η ταχύτητα του πτερυγίου είναι 500 cm/s.

$\bar{\Gamma}_{oi}$ (cm ² /s)	$\bar{\Gamma}_{of}$ (cm ² /s)	b_0^* (cm)	a_t (cm)	a_f (cm)	d_o (cm)	l_{ps} (cm)	l_{ss} (cm)
1644	-612	48,9	3,325	1,760	9,682	36	52
1073	-597	58,7	2,994	2,407	8,629	44	60

Πίνακας 11. Μετρημένα μεγέθη για τις περιπτώσεις προσομοίωσης

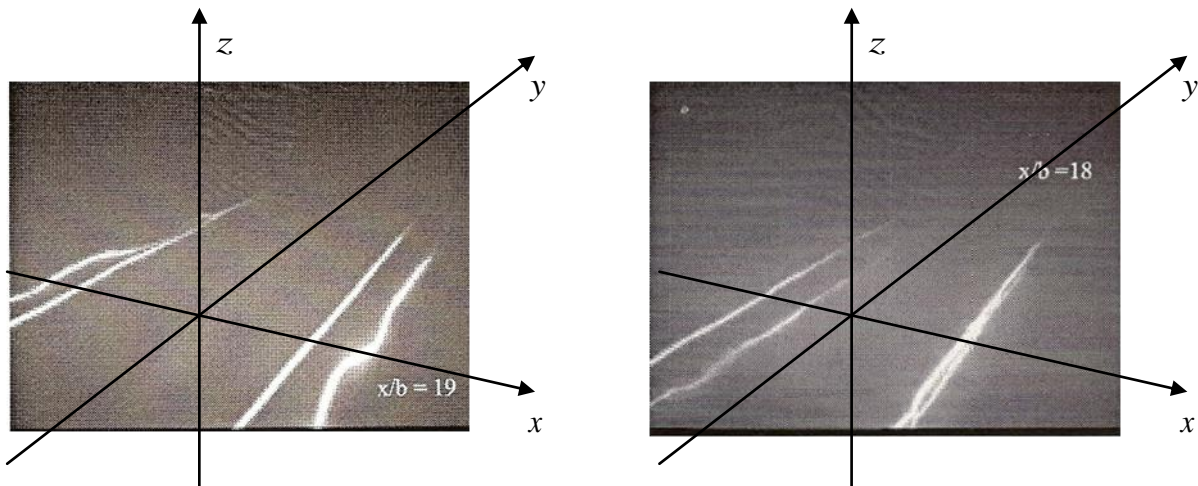
Γνωρίζουμε, λοιπόν, κάποια από τα απαραίτητα δεδομένα εισόδου για τον κώδικα. Από την άλλη, δεν γνωρίζουμε απαραίτητα γεωμετρικά στοιχεία για την αρχική τοποθέτηση των δινών. Πρώτον, δεν γνωρίζουμε ακριβώς τις θέσεις των δινών τη στιγμή που θα αρχίσει η διαταραχή να αναπτύσσεται, δηλαδή τη στιγμή που ο ρυθμός αύξησης του πλάτους γίνει διάφορος του μηδέν. Δεύτερον, δεν δίνονται αποτελέσματα για τα πλάτη της διαταραχής. Οπότε, κάνουμε ορισμένες παραδοχές για την αρχική τοποθέτηση των δινών και τον πλήρη προσδιορισμό της διαταραχής που επιβάλουμε στην δίνη flap. Από τα πειράματα οπτικοποίησης του Ortega, παρατηρούμε ότι στη δίνη flap έχει αρχίσει να αναπτύσσεται μία μικρή διαταραχή, για πρώτη φορά όταν περιστραφεί περίπου 180° γύρω από τη δίνη tip, όσο αφορά την πρώτη από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις. Αντίστοιχα, για τη δεύτερη περίπτωση από τα αποτελέσματα που πειράματος οπτικοποίησης κάνουμε την ίδια παρατήρηση για περιστροφή της δίνης flap κατά 90°. Στις παρακάτω εικόνες βλέπουμε τη διαταραχή της δίνης flap σε δύο κοντινά στιγμιότυπα για την πρώτη περίπτωση και για την δεύτερη περίπτωση αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι το μήκος κύματος της δίνης flap δεξιά και αριστερά είναι διαφορετικό, όπως συζητήσαμε παραπάνω. Επιπλέον, όπως σχολιάζεται από τον Ortega, οι

δίνες στο δεύτερο πείραμα οπτικοποίησης είναι λιγότερο ορατές, αφού στους πυρήνες των δινών παγιδεύεται λιγότερη ποσότητα βαφής. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική, αφού τα πειράματα οπτικοποίησης χρησιμοποιούνται από εμάς τόσο ως αποτελέσματα για τον έλεγχο της μορφής που θα έχουμε, όσο και για την αρχική τοποθέτηση των δινών.



Σχήμα 65. Στιγμιότυπο από πείραμα οπτικοποίησης κατά το οποίο η διαταραχή αναπτύσσεται

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εικόνες ως αναφορά, ορίζουμε το σύστημα συντεταγμένων του επόμενου σχήματος. Το σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται και για τις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 66. Ορισμός συστήματος συντεταγμένων

Υποθέτουμε ότι η διαταραχή της δίνης tip κάθε ζεύγους είναι αμελητέα. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας της δίνης tip κάθε ζεύγους είναι ευθεία γραμμή. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι δίνες tip κάθε ζεύγους είναι παράλληλες μεταξύ τους. Οι ευθείες αυτές ορίζουν το επίπεδο xy . Η χρονική στιγμή για την οποία αρχίζει η προσομοίωση ($t=0$ s) ταυτίζεται με τη στιγμή που η δίνη $flap$ βρίσκεται στις θέσεις που βλέπουμε στο σχήμα 66, για κάθε περίπτωση αντίστοιχα. Εκείνη

τη χρονική στιγμή, μόνο η δίνη flap κάθε ζεύγους έχει διαταραχθεί. Η διαταραχή είναι ημιτονοειδής με μήκος κύματος ίσο με αυτό που υπολογίστηκε από τον Ortega (παραπάνω πίνακας) και υποθέτουμε ότι το πλάτος της διαταραχής είναι ίσο με μία μονάδα μήκους, δηλαδή 1 cm. Η επιλογή του 1 cm για το πλάτος της δίνης έγινε ώστε η διαταραχή να μπορεί να χαρακτηριστεί μεγάλου μήκους κύματος. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη περίπτωση ελέγχου, που συγκρίναμε αποτελέσματα του κώδικα με την σχέση της Widnall, μία τέτοια διαταραχή διατηρεί τη γεωμετρική της μορφή όταν σε αυτή επιδρά μόνο το πεδίο ταχύτητας και ρυθμού μεταβολής των τροπών που ορίζει η ίδια η δίνη. Η καμπύλη της διαταραχής της δίνης flap βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο του yz-επιπέδου, για την πρώτη περίπτωση και παράλληλο του xy-επιπέδου, για την δεύτερη περίπτωση.

Για την τοποθέτηση των δινών σχετικά με το σύστημα συντεταγμένων, κάνουμε τις δύο παρακάτω υποθέσεις. Η απόσταση μεταξύ των δινών του ίδιου ζεύγους είναι ίδια με την αρχική τους απόσταση, δηλαδή d_0 , και η απόσταση των κεντροειδών στροβιλότητας είναι ίδια με την αρχική, δηλαδή b_0^* . Η επιλογή αυτή μπορεί να δικαιολογηθεί θεωρώντας ότι μέσα στη χρονική διάρκεια η οποία ορίζεται από την στιγμή που αρχίζει η ανάπτυξη της διαταραχής έως τη στιγμή που το πλάτος της διαταραχής γίνει 1 cm, δεν θα έχει σημαντική συνεισφορά στην σχετική μετατόπιση των δινών γύρω από το κέντρο στροβιλότητας. Δηλαδή, η αρχική απόσταση των δινών και η απόσταση των κεντροειδών θα είναι περίπου ίδιες με τις αντίστοιχες αποστάσεις την χρονική στιγμή που το πλάτος της διαταραχής της δίνης flap είναι 1 cm. Βέβαια, όσο το πλάτος της διαταραχής αυξάνει η υπόθεση παύει να ισχύει. Οι αρχικές θέσεις των δινών στη δεξιά πλευρά της πτέρυγας σχετικά με το σύστημα συντεταγμένων για την πρώτη περίπτωση με βάση τα παραπάνω είναι:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{iip}(y) &= \vec{r}_{0iip} + y\vec{j} \\ \vec{r}_{flap}(y) &= \vec{r}_{0flap} + y\vec{j} - \sin(\kappa y)\vec{k}\end{aligned}\quad (172)$$

Όπου $\kappa = \frac{2\pi}{l}$ και η ανεξάρτητη μεταβλητή y παίρνει τιμές από και έως τα όρια του περιοδικού κουτιού, $y \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$. Τέλος τα σημεία \vec{r}_{0iip} και \vec{r}_{0flap} είναι:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{0iip} &= \left(\frac{\Gamma_{flap}d_0}{\Gamma_{iip} + \Gamma_{flap}} + \frac{b_0^*}{2}, 0, 0 \right) \\ \vec{r}_{0flap} &= \left(\frac{\Gamma_{iip}d_0}{\Gamma_{iip} + \Gamma_{flap}} + \frac{b_0^*}{2}, 0, 0 \right)\end{aligned}\quad (173)$$

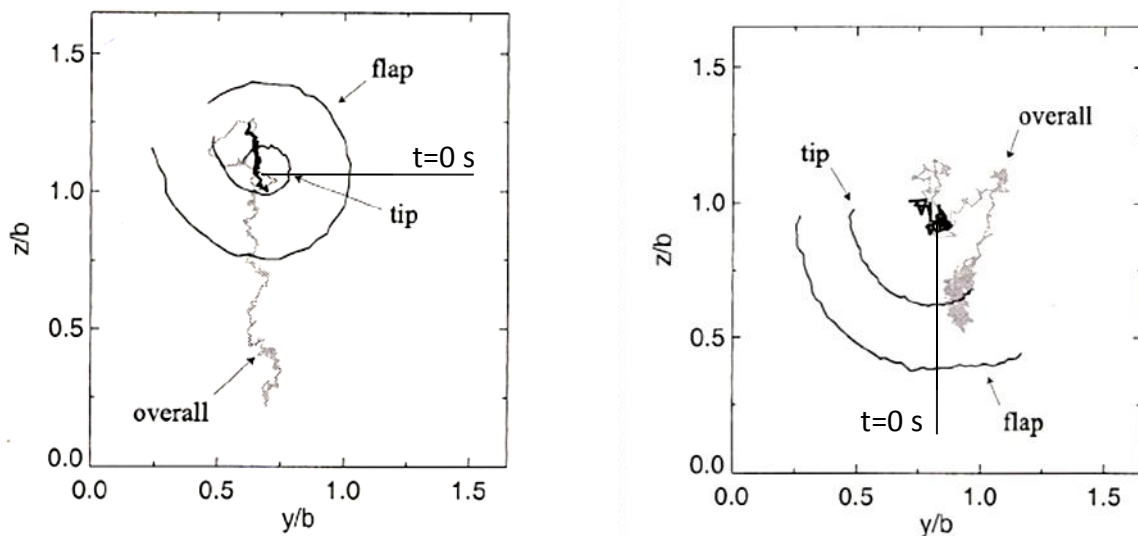
Αντίστοιχα, για την δεύτερη περίπτωση, έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{tip}(y) &= \vec{r}_{0_{tip}} + y\vec{j} \\ \vec{r}_{flap}(y) &= \vec{r}_{0_{flap}} + y\vec{j} - \sin(\kappa y)\vec{i}\end{aligned}\quad (174)$$

με:

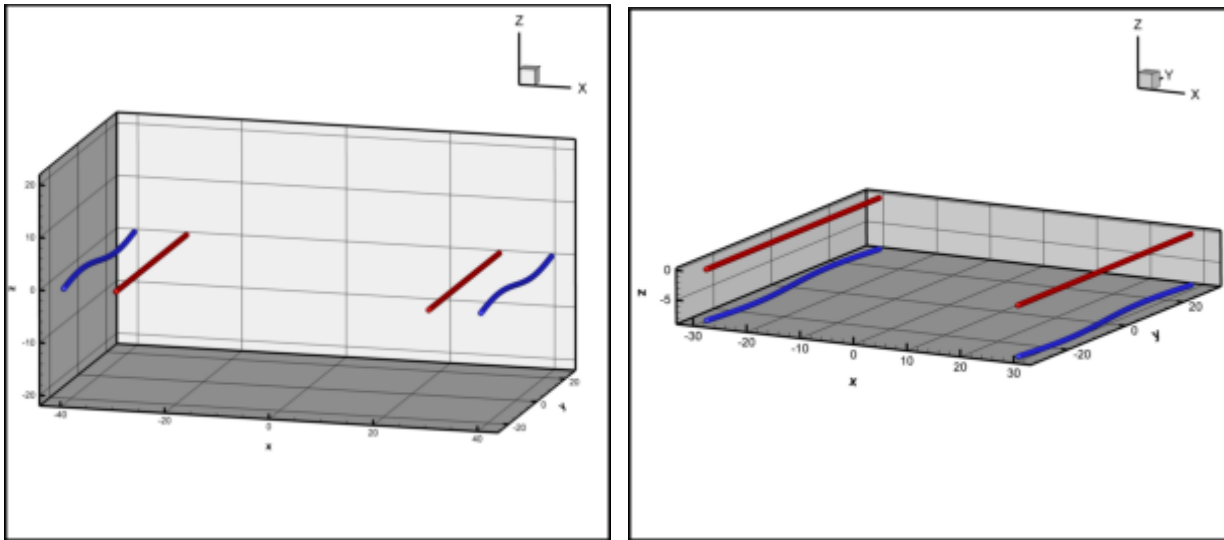
$$\begin{aligned}\vec{r}_{0_{tip}} &= \left(\frac{b_0^*}{2}, 0, \frac{\Gamma_{flap}d_0}{\Gamma_{tip} + \Gamma_{flap}} \right) \\ \vec{r}_{0_{flap}} &= \left(\frac{b_0^*}{2}, 0, \frac{\Gamma_{tip}d_0}{\Gamma_{tip} + \Gamma_{flap}} \right)\end{aligned}\quad (175)$$

Οι παραπάνω υποθέσεις αφορούν την αρχική τοποθέτηση των δινών και ενισχύονται από τις τροχιές των κεντροειδών στροβιλότητας που υπολόγισε ο Ortega στα πειράματα του. Αυτές παραθέτονται στο επόμενο σχήμα. Σε αυτά τα σχήματα, παρατηρούμε ότι οι θέσεις κεντροειδών τη χρονική στιγμή $t=0$ s για τον Ortega είναι διαφορετικές από τις θέσεις που έχουμε ορίσει στην παραπάνω ανάλυση. Τονίζουμε ότι εμείς εξετάζουμε το φαινόμενο από την χρονική στιγμή που έχουν αναπτυχθεί μικρές διαταραχές στις δίνες flap. Εξαιτίας αυτού έχουμε μία χρονική διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων του κώδικα και των πειραματικών περίπου ίση με $t=1,52$ s. Η χρονική στιγμή $t=0$ s για τον κώδικα είναι η χρονική στιγμή $t=1,52$ s για τα αποτελέσματα του Ortega. Η τελευταία παρατήρηση ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις.



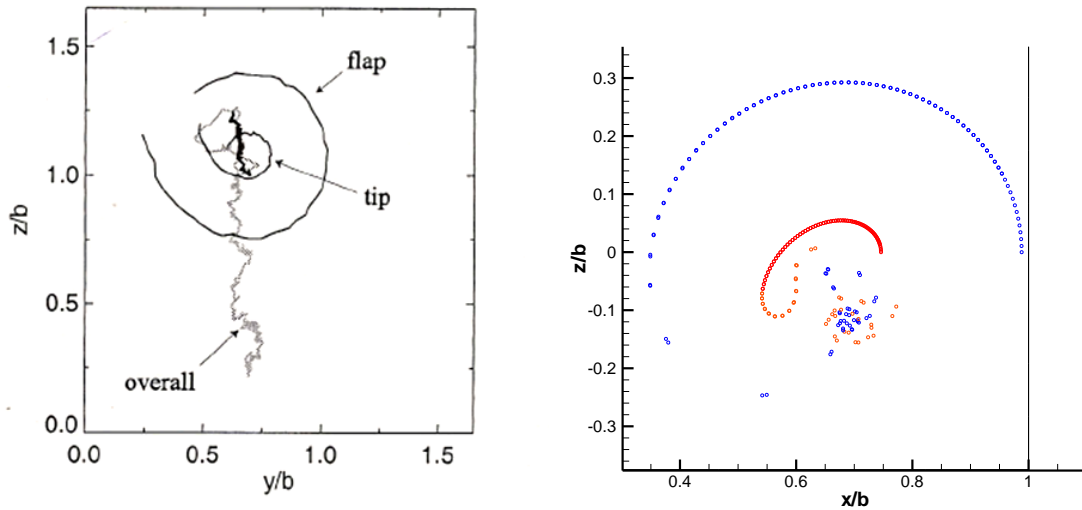
Σχήμα 67. Τροχιές κεντροειδών για την πρώτη και δεύτερη περίπτωση αντίστοιχα και η χρονική στιγμή $t=0$ s για την προσομοίωση

Για την πρώτη περίπτωση, το φαινόμενο μοντελοποιείται ως συμμετρικό ως προς το επίπεδο yz. Κατά τη διάρκεια της εξέλιξης του φαινομένου χάνεται η συμμετρία στα ζεύγη δινών δεξιά και αριστερά της πτέρυγας, όπως παρατηρούμε στα πειράματα οπτικοποίησης και στα μετρημένα μήκη κύματος. Στα αποτελέσματα του κώδικα η συμμετρία, που έχουμε επιβάλει την χρονική στιγμή μηδέν, διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της εξέλιξης του φαινομένου. Άρα οι χρονικές στιγμές στις οποίες τα αποτελέσματα έχουν παρόμοιες γεωμετρικές δομές είναι διαφορετικές. Όσο αφορά τη δεύτερη περίπτωση, για να συμπεριλάβουμε την επίδραση του διαφορετικού μήκους κύματος η διαταραχή των δινών flap δεν είναι συμμετρική ως το επίπεδο yz αλλά είναι ακριβώς η ίδια. Οι τοποθετήσεις των δινών για τη χρονική στιγμή $t=0$ s της προσομοίωσης για τις δύο περιπτώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 68. Αρχική Τοποθέτηση Δινών Tip(κόκκινο) και flap(μπλε) για την πρώτη και δεύτερη περίπτωση

Επιλέγουμε το μήκος κύματος της διαταραχής για τις δίνες flap να είναι το ίδιο με αυτό που υπολόγισε ο Ortega για την δεξιά δίνη flap, οπότε $l \equiv l_{ss}$. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων προέκυψαν με χρονικό βήμα 0.002 s και με αναδιανομή των στοιχείων. Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε τις τροχιές των κεντροειδών των δινών, όπως υπολογίστηκαν στην πρώτη περίπτωση για το δεξιό ζεύγος δινών κατά την προσομοίωση. Με σκοπό την άμεση σύγκριση, παραθέτουμε στο σχήμα το αντίστοιχο αποτέλεσμα του Ortega που είδαμε και στο σχήμα 67. Το αποτέλεσμα ήταν παρόμοιο και για τη δεύτερη περίπτωση.



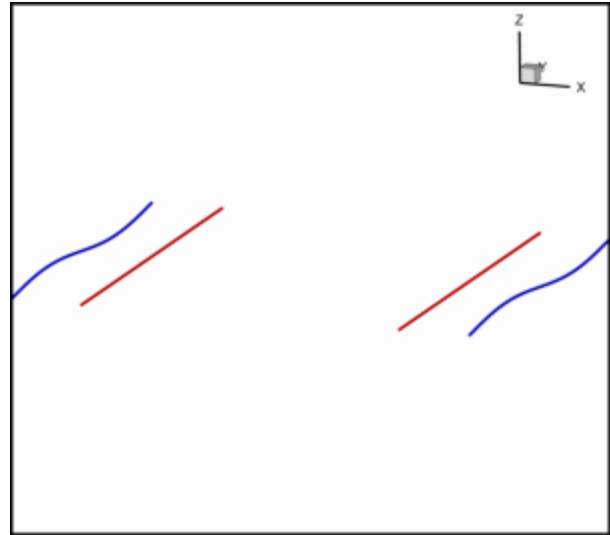
Σχήμα 68. Τροχιά κεντροειδών δινών tip(κόκκινο) και flap(μπλε) για την πρώτη περίπτωση

5.2.2 Περίπτωση Πρώτη - Σύγκριση με τα Πειράματα Οπτικοποίησης

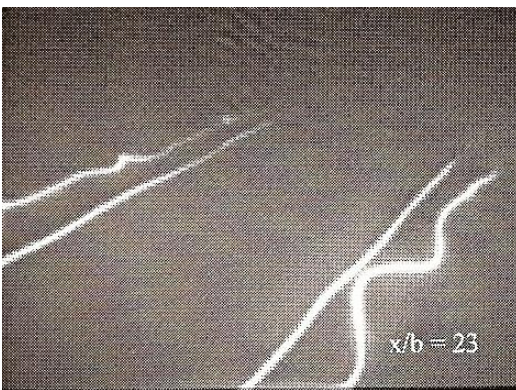
Σε αυτή την παράγραφο συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του πειράματος οπτικοποίησης του Ortega για την πρώτη περίπτωση και με το αποτέλεσμα της προσομοίωσης που πήραμε από τον κώδικα. Θεωρούμε ότι η χρονική στιγμή $t=0$ s του κώδικα ταυτίζεται με τη χρονική στιγμή για την οποία έχουμε $x/b = 19$ ή $t=1,52$ s στα πειράματα του Ortega, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στα παρακάτω σχήματα, παρουσιάζουμε στην πρώτη στήλη στιγμιότυπα των πειραμάτων οπτικοποίησης του Ortega και στη δεύτερη στήλη στιγμιότυπα που προέκυψαν από τον κώδικα. Κάτω από κάθε εικόνα φαίνεται ο χρόνος που αναφέρεται το στιγμιότυπο του Ortega και το στιγμιότυπο του κώδικα αντίστοιχα μετατοπισμένο χρονικά κατά 1,52 s.



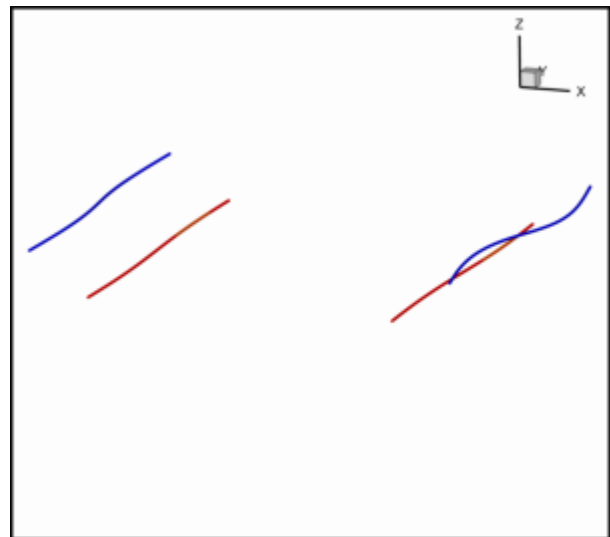
t=1,52 s



t=1,52 s



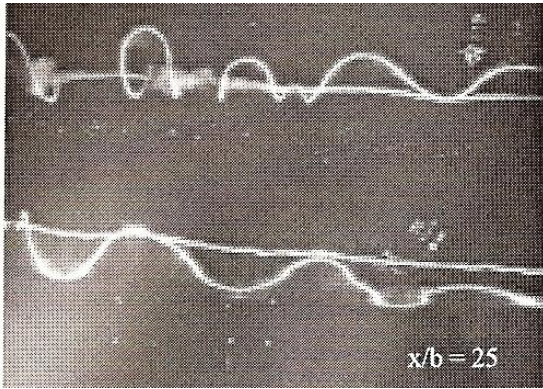
t=1,84 s



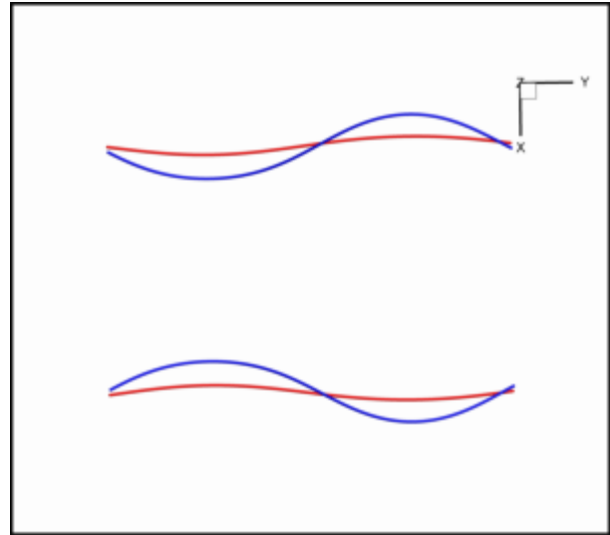
t=1,84 s

Σχήμα 69. Σύγκριση πειράματος οπτικοποίησης με αποτελέσματα του κώδικα

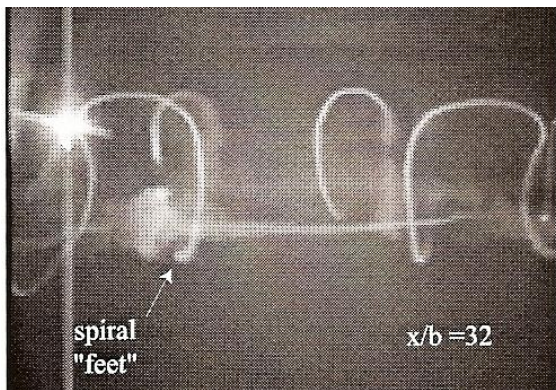
Στα πρώτα στάδια εξέλιξης, η αστάθεια δεν έχει εξελιχθεί πλήρως. Τα αρχικά στάδια εξέλιξης των δινών που παρατηρούμε στα πειραματικά αποτελέσματα συμβαδίζουν με την εξέλιξη που παρατηρούμε στα αποτελέσματα του κώδικα. Στα μετέπειτα στιγμιότυπα όμως, η αρχική διαφορά φάσης 1,52 s, που προκύπτει από την χρονική στιγμή όπου έχουμε αρχίσει να παρακολουθούμε το φαινόμενο, δεν διατηρείται για τις μετέπειτα χρονικές στιγμές. Για αυτό τον λόγο, επιλέξαμε να παρουσιάσουμε διαφορετικές χρονικές στιγμές στις οποίες η μορφή του πειραματικού αποτελέσματος είναι παρόμοια με τη μορφή του αποτελέσματος της προσομοίωσης.



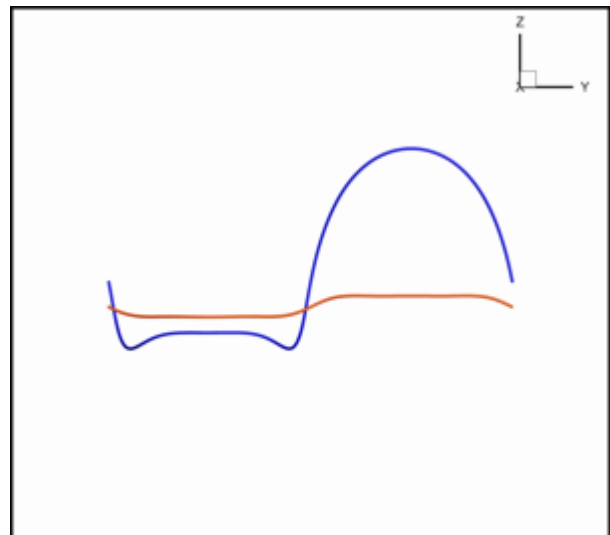
t=2 s



t=2,36 s



t=2,48 s

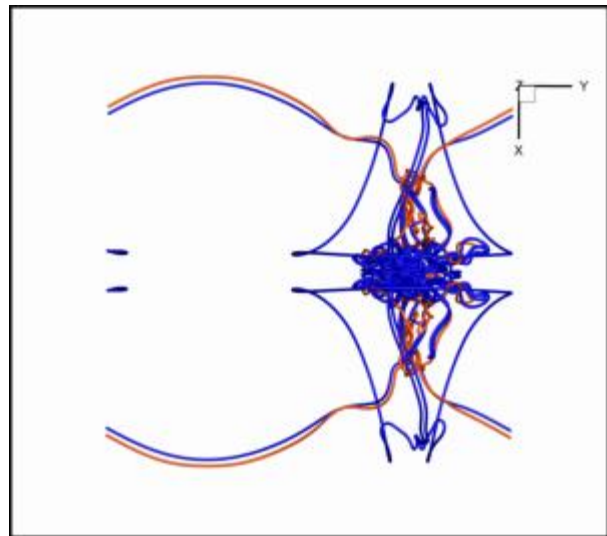


t=2,92 s

Σχήμα 70. Σύγκριση πειράματος οπτικοποίησης με αποτελέσματα του κώδικα



t=3,68 s



t=3,52 s

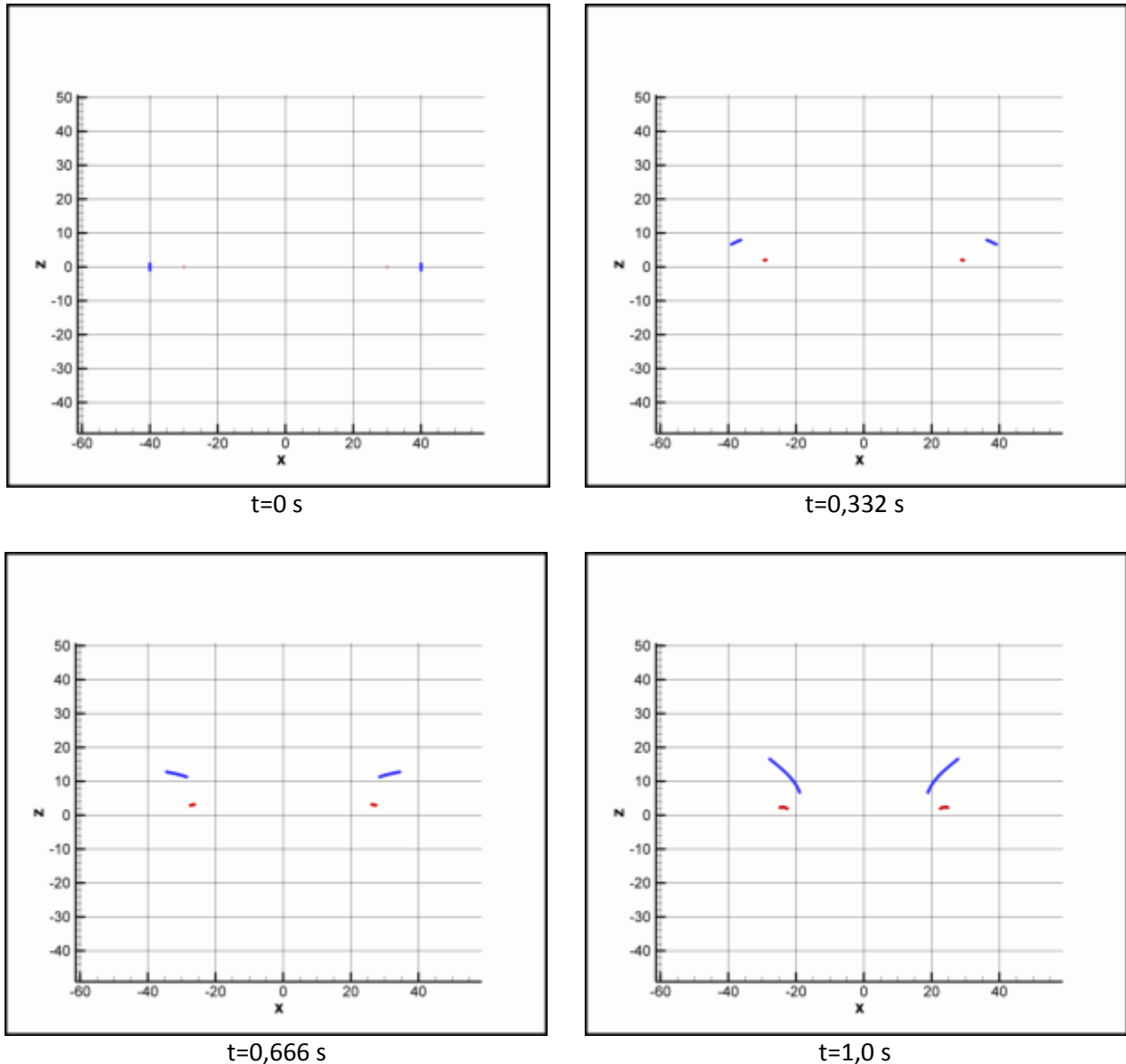
Σχήμα 71. Σύγκριση πειράματος οπτικοποίησης με αποτελέσματα του κώδικα

Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στη συμμετρία που επιβάλλουμε στις διαταραχές των δύο δινών και έπειτα σε όποια σφάλματα εισάγαμε στους υπολογισμούς, εξαιτίας των υποθέσεων για την αρχική γεωμετρική μορφή των δινών. Η επιλογή ίδιου μήκους κύματος για τις δίνες flap είναι αναγκαστική, αφού το μήκος του περιοδικού κουτιού πρέπει να ταυτίζεται με το μήκος κύματος της διαταραχής. Η επιλογή αυτή μπορεί να αμφισβητηθεί από την παρατήρηση ότι σε μία συμμετρική πτέρυγα η συνεκτικότητα σε υψηλούς αριθμούς Reynolds (τυρβώδης ροή), θα μπορούσε να οδηγήσει σε ασύμμετρες διαταραχές που θα εμφανιστούν στις δίνες ακροπερυγίων. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα στα οποία και άλλοι αστάθμητοι παράγοντες, επιπλέον της συνεκτικότητας, επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Συγκρίνοντας τις γεωμετρικές μορφές που παρατηρούμε για την πρώτη περίπτωση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παρόμοιες αλλά εμφανίζονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

5.2.3 Περίπτωση Πρώτη - Στάδια εξέλιξης του Φαινομένου

Στα αρχικά στάδια της εξέλιξης του φαινομένου, με βάση τα αποτελέσματα του κώδικα, παρατηρούμε τις ίδιες αλλαγές στη γεωμετρική μορφή των δινών και στις δύο περιπτώσεις. Αρχικά, δημιουργείται μία διαταραχή μικρού πλάτους στη δίνη tip και ίδιου μήκους κύματος με το μήκος κύματος της δίνης flap. Σταδιακά αυξάνεται το πλάτος της διαταραχής της δίνης flap καθώς αυτή περιστρέφεται γύρω από την δίνη tip. Το πλάτος της διαταραχής της δίνης tip αυξάνεται με πιο αργό ρυθμό απ' ότι αυξάνεται το πλάτος της διαταραχής της δίνης flap. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι αναμενόμενη. Η δίνη tip είναι ισχυρότερη από τη δίνη flap

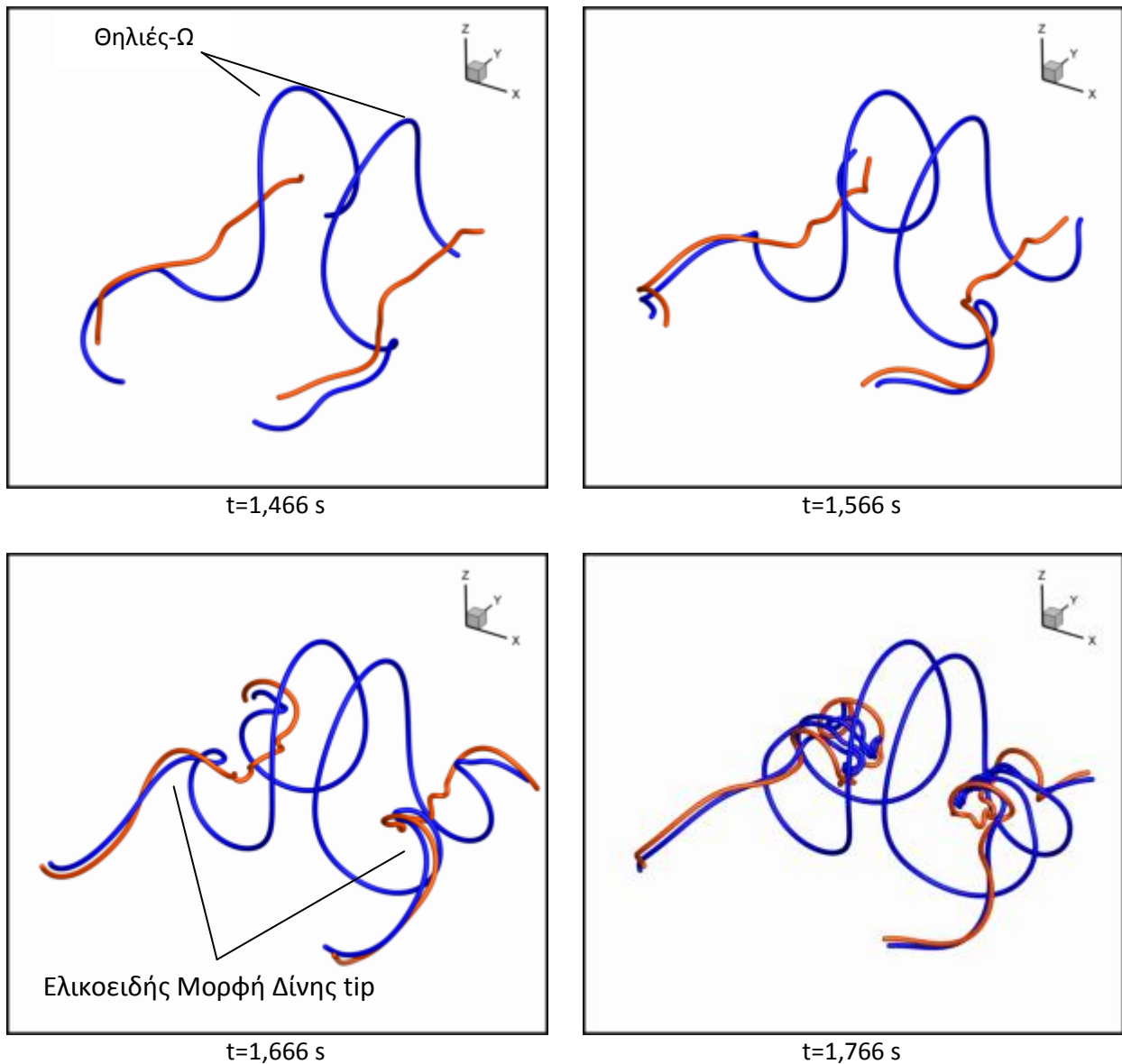
και άρα η ένταση της δίνης tip είναι μεγαλύτερη με αποτέλεσμα το πεδίο μεταβολής των τροπών της δίνης tip να επιβάλλει πιο ραγδαίες μεταβολές στη γεωμετρική μορφή της δίνης flap. Η ρυθμός αύξησης του πλάτους των διαταραχών είναι ιδιαίτερα σημαντικός και δηλώνει ότι αναπτύσσεται κάποια αστάθεια. Τελικά παρατηρούμε δύο περιοχές που εξελίσσονται διαφορετικά στην δίνη flap.



Σχήμα 72. Σταδιακή αύξηση πλάτους της διαταραχής στις δίνες tip και flap

Το ένα τμήμα της δίνης flap βρίσκεται πιο κοντά στη δίνη tip και αρχίζει να τυλίγεται γύρω από τη δίνη tip. Το άλλο τμήμα βρίσκεται πιο μακριά από τη δίνη tip και φαίνεται να μην επηρεάζεται από τη δίνη tip. Στα μετέπειτα στάδια εξέλιξης της αστάθειας το απομακρυσμένο

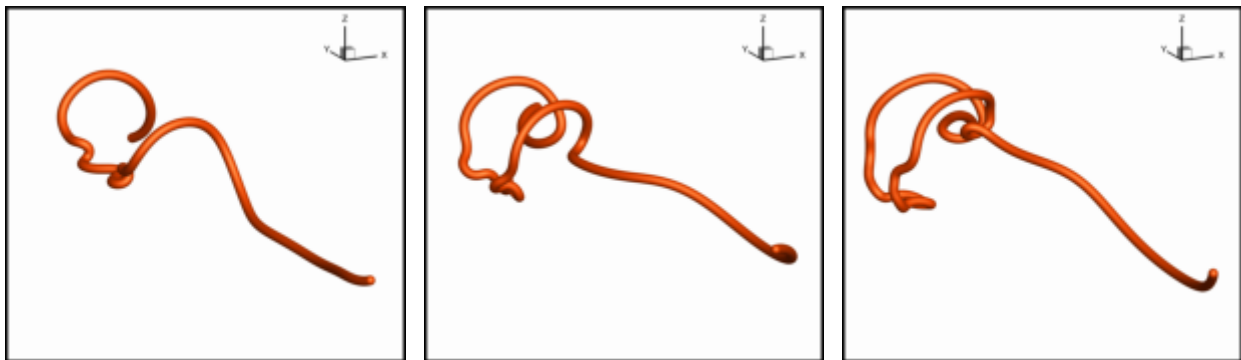
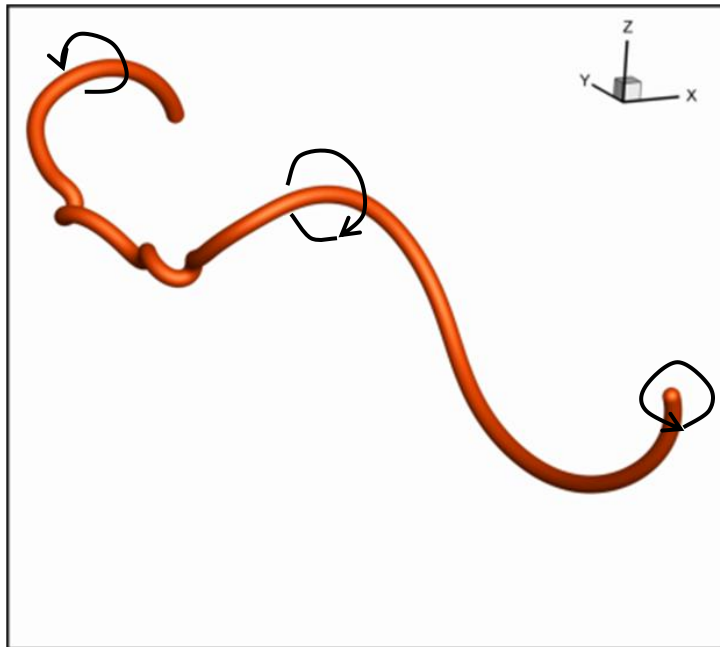
τμήμα της διαταραχής δημιουργεί μία θηλιά, την οποία ο Ortega ονομάζει θηλιά-Ω από τη χαρακτηριστική της μορφή. Το μέρος της δίνης tip που βρίσκεται κοντά στο «πόδι» της θηλιάς-Ω ξεκινάει να τυλίγεται γύρω από τη θηλιά-Ω, ενώ ταυτόχρονα η θηλιά-Ω τυλίγεται γύρω από τη δίνη tip. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα η δίνη tip να αποκτήσει μία ελικοειδή μορφή. Η θηλιά-Ω της δίνης flap και η ελικοειδής δομή της δίνης tip λειτουργούν ως μηχανισμοί συγκέντρωσης των στοιχείων στροβιλότητας στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω.



Σχήμα 73. Η θηλιά-Ω και η συγκέντρωση στοιχείων στροβιλότητας κοντά στο εσωτερικό της

Η λειτουργία του μηχανισμού, ο οποίος προκαλεί τη συγκέντρωση των στοιχείων στροβιλότητας στο εσωτερικό της δίνης, είναι ιδιαίτερα απλή. Θα προσπαθήσουμε να

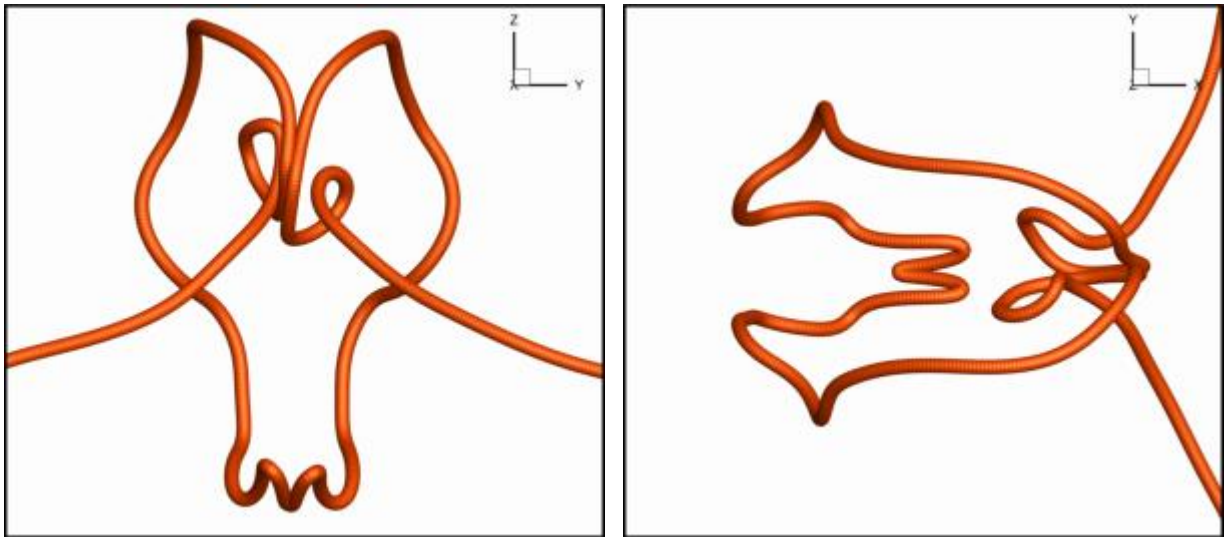
κατανοήσουμε τη λειτουργία του βάσει της ελικοειδής δομής που δημιουργείται στη δίνη tip. Η κυκλοφορία της δίνης tip είναι πάντα ίδια σε όλη την εξέλιξη του φαινομένου και καθορίζει τη φορά περιστροφής των στοιχείων του ρευστού κοντά στη γειτονιά της δίνης. Η φορά περιστροφής των στοιχείων του ρευστού κοντά στη δίνη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ελικοειδής μορφή της δίνης ακροπτερυγίου αναγκάζει τα στοιχεία του ρευστού, και άρα τα στοιχεία στροβιλότητας να κινηθούν προς το κέντρο της θηλιάς-Ω. Αποτέλεσμα του πεδίου ταχύτητας που επάγει η δίνη tip λόγω της ελικοειδής μορφής της, είναι το τμήμα της δίνης tip εξωτερικά της θηλιάς-Ω σταδιακά να επιμηκύνεται και το τμήμα της δίνης tip εσωτερικά της θηλιάς να συγκεντρώνεται κοντά στο κέντρο της θηλιάς-Ω.



Σχήμα 74. Η ελικοειδής μορφή της δίνης tip και η γεωμετρική της μορφή σε μετέπειτα χρονικά βήματα

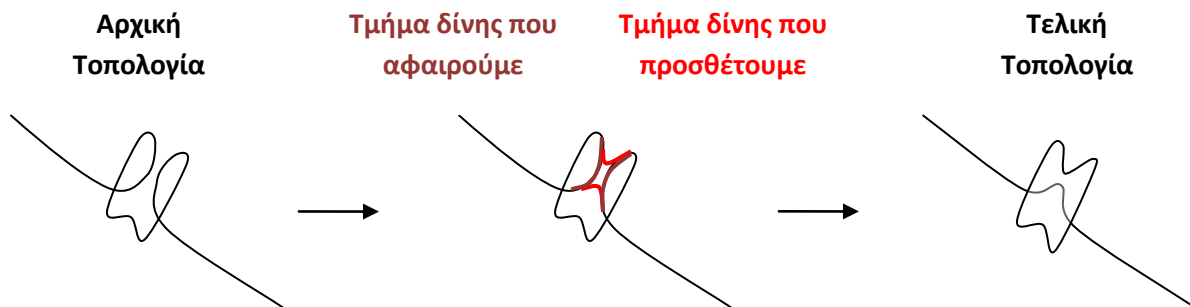
Η γεωμετρική μορφή της δίνης tip, που παρατηρείται κατά την συγκέντρωση των στοιχείων στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αν κοιτάξουμε την τελευταία από τις

εικόνες του σχήματος 74 από διάφορες οπτικές γωνίες, όπως στο σχήμα 75, παρατηρούμε ότι υπάρχουν τμήματα της δίνης tip τα οποία εφάπτονται μεταξύ και είναι σχεδόν παράλληλα.



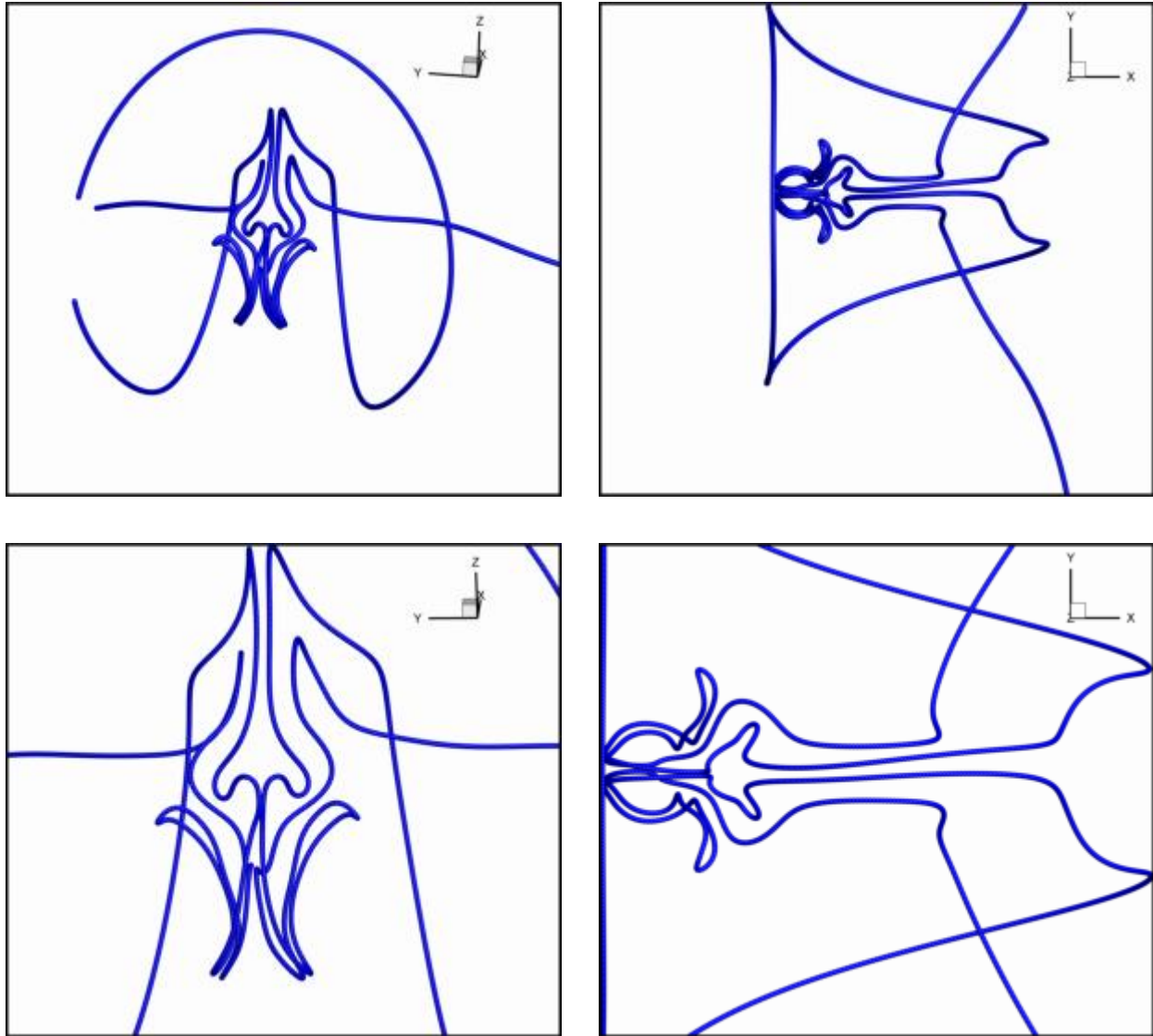
Σχήμα 75. Η δομή της δίνης tip κοντά στην περιοχή της θηλιάς-Ω

Υπολογίζοντας την κυκλοφορία σε μία κλειστή γραμμή, η οποία περιέχει τα δύο τμήμα και βρίσκεται κοντά σε αυτά, το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν. Το πεδίο ταχύτητας που επάγεται από το κάθε τμήμα αναιρεί το πεδίο ταχύτητας του διπλανού τμήματος που ακουμπάει. Τα τμήματα αυτά θα μπορούσαν να αφαιρεθούν χωρίς να αλλάξει κάτι στο αποτέλεσμα, αν ταυτόχρονα ενώσουμε τις δύο άκρες τους με άλλα τμήματα δίνης. Τα τμήματα των νέων δινών θα είναι και αυτά γειτονικά ώστε να αλληλοαναιρούνται. Με αυτό τον τρόπο θα σχηματίζονταν τελικά δύο δίνες οι οποίες προέρχονται από τη δίνη tip. Μία τέτοια διαδικασία δεν έχει συμπεριληφθεί στον κώδικα για αυτό οι περιοχές αυτές εξελίσσονται τελικά όπως οι υπόλοιπες αλλά παραμένουν συνεχώς ενωμένες.



Σχήμα 76. Ένα σχήμα αναδιάταξης των δινών

Χρησιμοποιώντας νοητικά μία τέτοια διαδικασία μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η τοπολογία της δίνης tip θα αλλάξει. Τελικά, θα έχουμε μία σχεδόν ευθύγραμμη δίνη και μία δίνη με δομή που μοιάζει με δακτυλιοειδή δίνη, όπως απλοϊκά αναπαραστήσαμε στο σχήμα 76. Οι δομές αυτές θα σχηματιστούν και στις δύο δίνες tip. Οι δακτυλιοειδείς δίνες θα έχουν αντίθετες κυκλοφορίες. Με αυτό τον τρόπο εξηγείται η τάση, που έχουν οι δύο περιοχές συγκεντρωμένης στροβιλότητας, να προσελκύει η μία την άλλη ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο δακτυλιοειδών δινών.

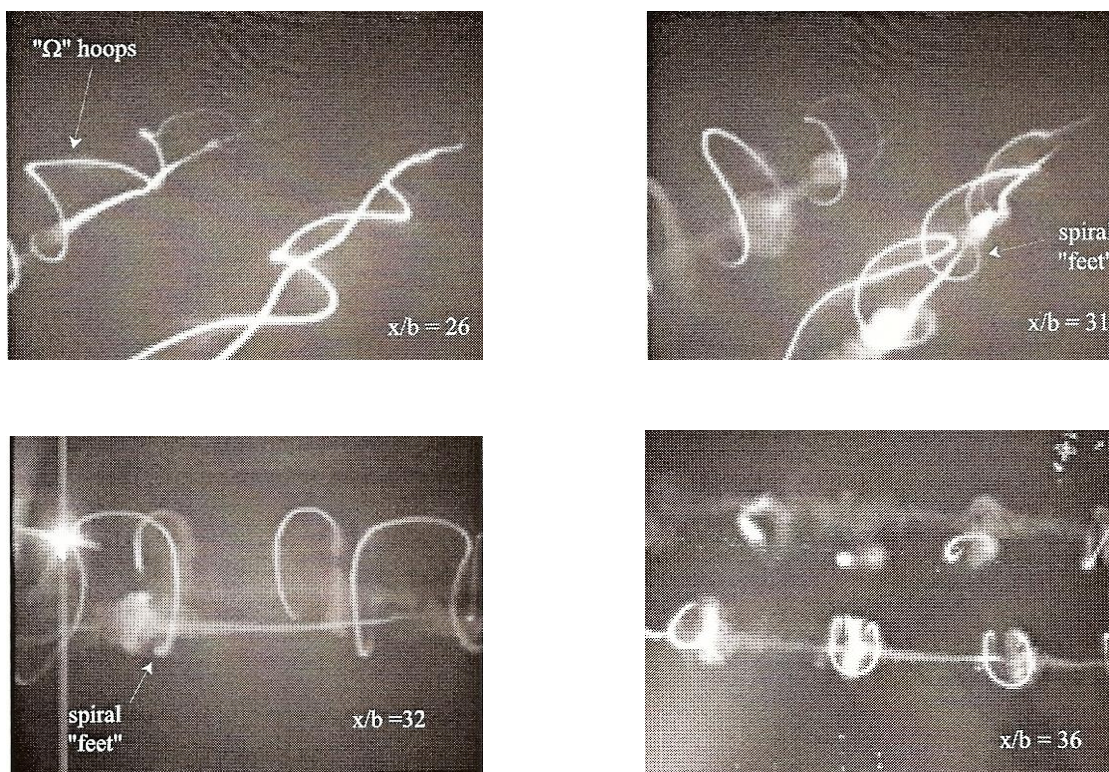


Σχήμα 77. Η δομή εσωτερικά της θηλιάς-Ω την στιγμή που τμήματα της δίνης flap βρίσκονται κοντά

Μία παρόμοια παρατήρηση μπορεί να γίνει και για τη δίνη flap. Καθώς συγκεντρώνεται η δίνη tip εσωτερικά της θηλιάς-Ω, τα πόδια της θηλιάς έρχονται κοντά. Για την περίπτωση της

δίνης flap, παρατηρούμε στο σχήμα 78, ότι βρίσκονται κοντά περισσότερα ζεύγη τμημάτων. Είναι δυνατόν να σχηματίσουμε διαφορετικές δίνες από τη δίνη flap αν κόψουμε τα τμήματα των δινών που εφάπτονται και κολλήσουμε τα άκρα τους, με την έννοια που συζητήσαμε παραπάνω. Σημειώνουμε ότι στο παρακάτω σχήμα, το τμήμα της θηλιάς-Ω που δεν φαίνεται βρίσκεται εκτός του περιοδικού κουτιού και έχει περάσει στην άλλη πλευρά.

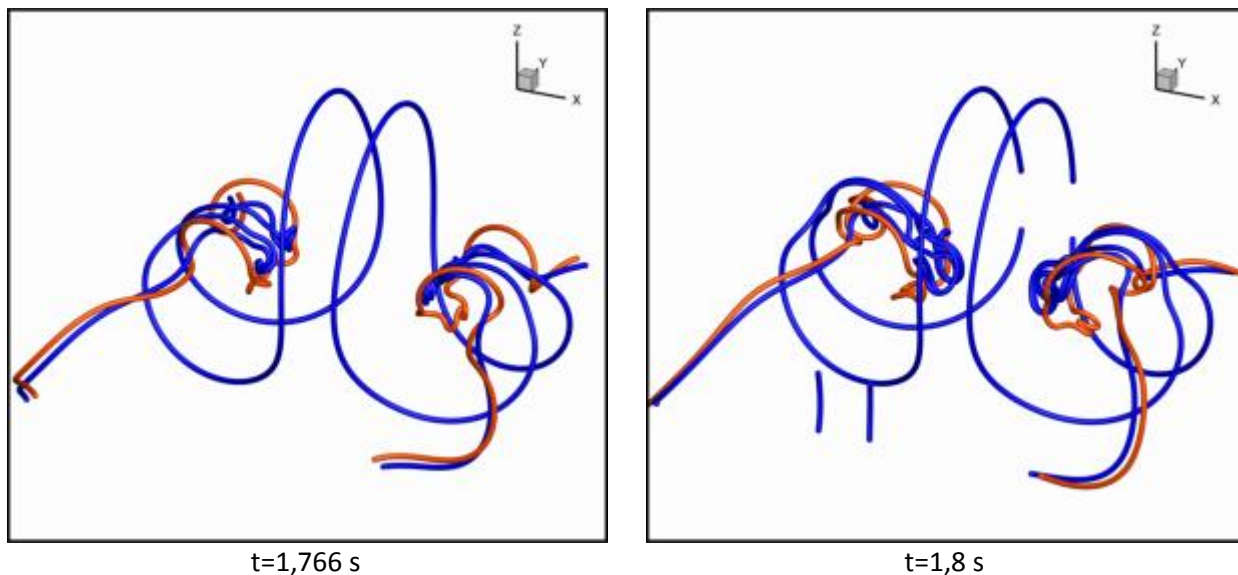
Η θηλιά-Ω παρατηρείται από τον Ortega και προβλέπεται από την αριθμητική προσομοίωση, όπως φαίνεται και από το σχήμα 72. Στα πειράματα του Ortega παρατηρούμε αντίστοιχη συμπεριφορά για τη δημιουργία της θηλιάς-Ω όπως επίσης τις συγκεντρώσεις μιογιάς στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω.



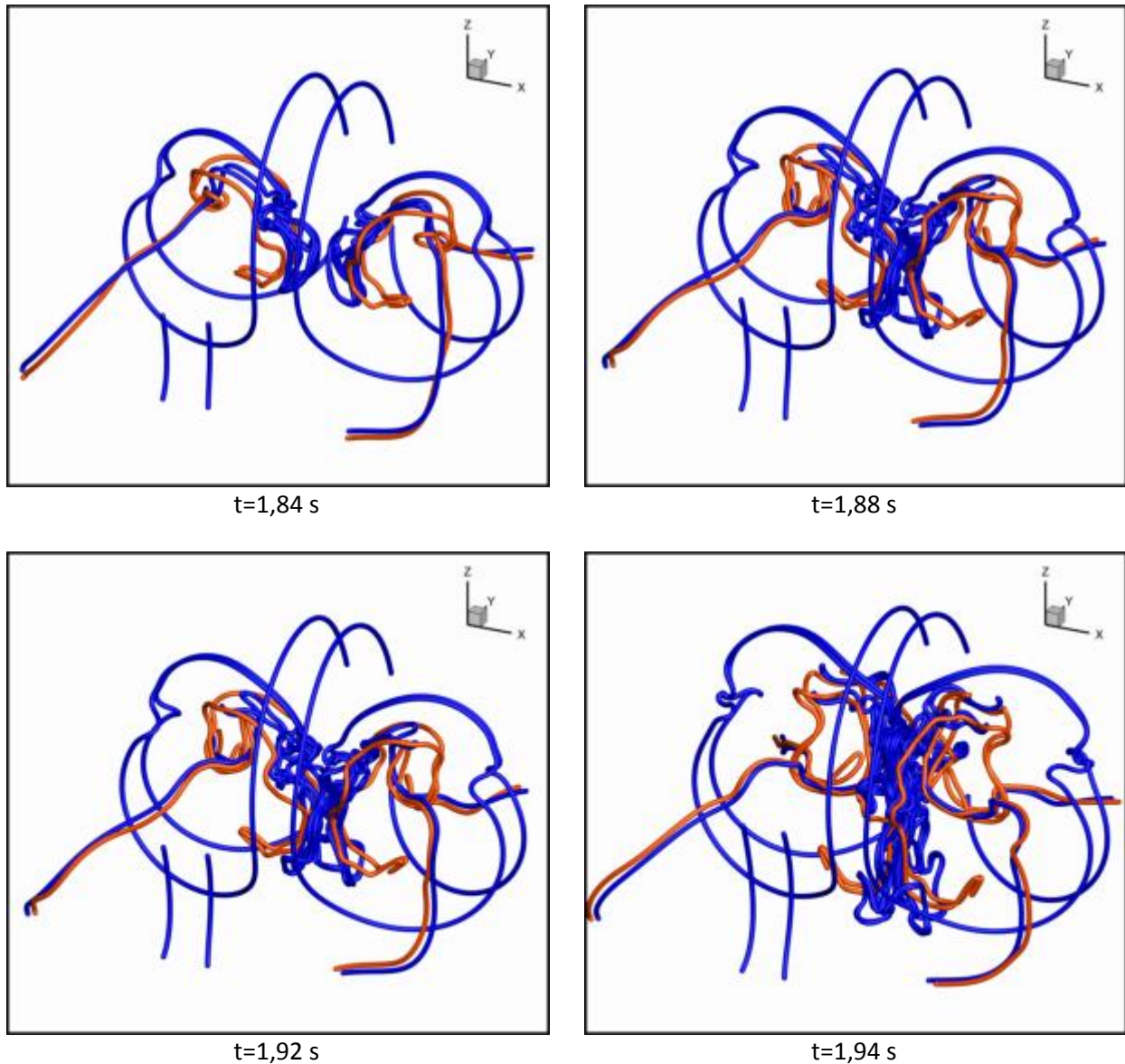
Σχήμα 78. Παρατηρήσεις από τα πειράματα οπτικοποίησης του Ortega για τη θηλιά-Ω και τη συγκέντρωση στροβιλότητας κοντά στο εσωτερικό της

Το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των στοιχείων στροβιλότητας, που βρίσκονται συγκεντρωμένα στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω, παράγει μία ακόμα πιο βίαιη και γρήγορη αλληλεπίδραση από την προηγούμενη. Ο κώδικας δεν είναι εξοπλισμένος ώστε να μοντελοποιείται με κάποιον τρόπο η επίδραση της συνεκτικότητας. Η μη συνεκτική ροή, που εξελίσσεται κατά την προσομοίωση, σε συνδυασμό με το σχήμα αναδιανομής των στοιχείων έχει ως αποτέλεσμα, σε θέσεις όπου έχουμε ιδιαίτερα απότομες κλίσεις του πεδίου ρυθμού μεταβολής των τροπών, να προσθέτονται συνέχεια καινούργια στοιχεία στροβιλότητας. Η

περιοχή όπου συγκεντρώνονται στοιχεία στροβιλότητας, αποτελεί μία περιοχή όπου έχουμε απότομες κλίσεις του πεδίου ρυθμού μεταβολής των τροπών. Τελικά, σχηματίζονται πολύ μικρότερες γεωμετρικές μορφές από αυτές που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν στο πείραμα οπτικοποίησης του Ortega. Οι δομές αυτές δεν γνωρίζουμε προς το παρόν αν έχουν σχέση με το φυσικό φαινόμενο. Επιπλέον, η μπογιά κοντά στο εσωτερικό της θηλιάς είναι τόσο συγκεντρωμένη που ενώ από τη μία δεν παρατηρούμε συγκεκριμένες δομές, από την άλλη η μπογιά βρίσκεται σε αυτά τα σημεία για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα και είναι λογικό να υποθέσουμε ότι σε αυτά τα σημεία υπάρχει συγκεντρωμένη στροβιλότητα. Η αριθμητική προσομοίωση προβλέπει μία δομή της περιοχής αυτής αλλά απαιτούνται πιο λεπτομερή πειράματα κοντά σε αυτές τις περιοχές για την σύγκριση με το αριθμητικό αποτέλεσμα. Με αβεβαιότητα, λοιπόν, όσο αφορά την αξιοπιστία της μεθόδου μας παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την εξέλιξη της συγκέντρωσης του νέφους μπογιάς που παρατηρούμε στα πειράματα οπτικοποίησης του Ortega. Σημειώνουμε ότι τα τμήματα δινών που φαίνονται τη χρονική στιγμή $t=1,8$ s να απουσιάζουν από τη θηλιά-Ω βρίσκονται εκτός του περιοδικού κουτιού και έχουν περάσει στο άλλο σύνορο του κουτιού, όπως φαίνεται και στην αντίστοιχη εικόνα.



Σχήμα 80. Η εξέλιξη των δινών στα τελευταία στάδια του φαινομένου

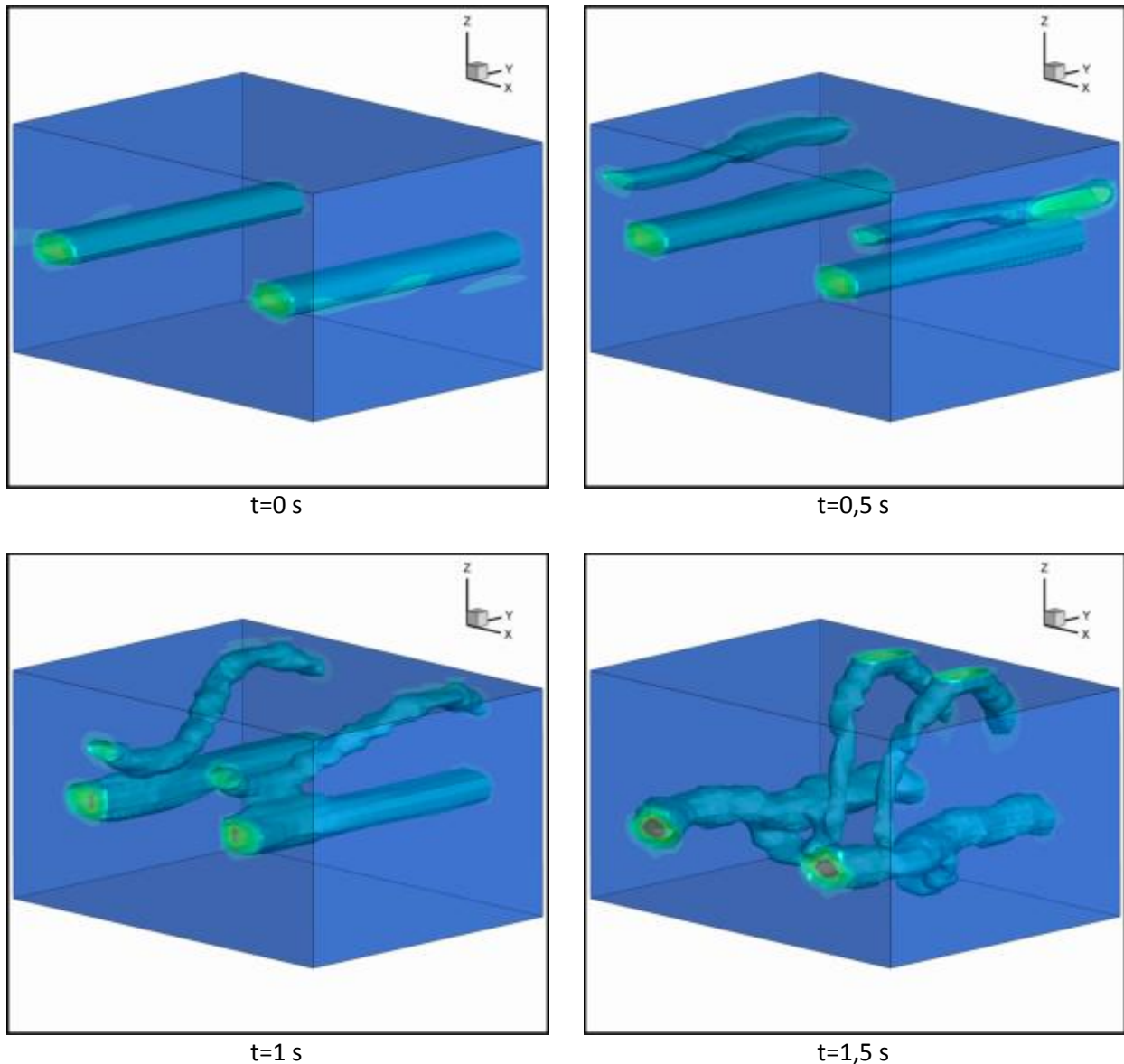


Σχήμα 80. Η εξέλιξη των δινών στα τελευταία στάδια του φαινομένου(συνέχεια)

5.2.4 Επιβεβαίωση των Παρατηρήσεων με βάση το Πεδίο Στροβιλότητας

Το βασικό προτέρημα που έχει το πεδίο στροβιλότητας είναι ότι, οι αλληλεπιδράσεις των κοντινών τμημάτων των δινών που παρατηρήθηκαν παραπάνω, συμπεριλαμβάνονται στους υπολογισμούς ταχυτήτων. Οπότε, η πληροφορία που παρέχει το πεδίο στροβιλότητας είναι, με αυτή την έννοια, πιο συνοπτική αφού δεν θα εμφανιστούν οι μικρότερες δομές που παρατηρήθηκαν παραπάνω. Η τελευταία παρατήρηση δεν συνεπάγεται ότι οι δομές αυτές εξαφανίζονται, αλλά για να εμφανιστούν στο πεδίο στροβιλότητας απαιτείται ένα πολύ πυκνό πλέγμα υπολογισμού ταχυτήτων. Για τον υπολογισμό του πεδίου στροβιλότητας πρώτα

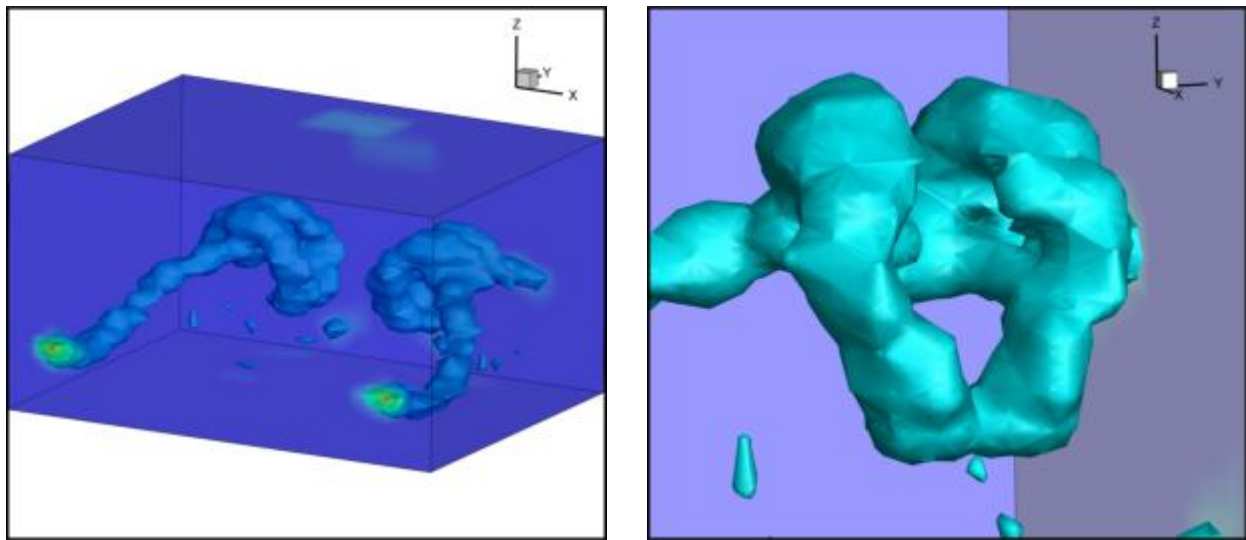
υπολογίστηκε το πεδίο ταχύτητας σε ένα ομοιόμορφο ορθογωνικό πλέγμα $20 \times 20 \times 20$. Το πλέγμα καλύπτει πλήρως την τελική περιοχή όπου ορίζεται από τις δίνες. Έπειτα, ο υπολογισμός του πεδίου στροβιλότητας έγινε από το Tecplot. Οι ισοσταθμικές επιφάνειες που είναι σχεδιασμένες στα επόμενα σχήματα αποτελούν ισοσταθμικές επιφάνειες του πεδίου «μέτρο στροβιλότητας». Οι ισοσταθμικές που παρατηρούμε αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη τιμή του μέτρου της στροβιλότητας την οποία θα αναφέρουμε ανά περίπτωση. Για λόγους σύγκρισης, αναφέρουμε ότι η μέγιστη τιμή στροβιλότητας της δίνης tip είναι $|\vec{\omega}_{0,tip}| = 58 \frac{1}{s}$.



Σχήμα 81. Ισοσταθμική του πεδίου στροβιλότητας στα πρώτα στάδια εξέλιξης του φαινομένου

Ας δούμε, λοιπόν, την εξέλιξη του πεδίου στροβιλότητας στα πρώτα στάδια όπως ακριβώς κάναμε και με τις δίνες. Στο σχήμα 81, βλέπουμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες για $|\vec{\omega}| = 23 \frac{1}{s}$. Αρχικά, βλέπουμε μόνο τη δίνη tip επειδή η δίνη flap βρίσκεται εκτός του πεδίου όπου έγιναν οι υπολογισμοί ταχυτήτων. Αργότερα, η δίνη flap εισέρχεται στο πεδίο υπολογισμού ταχυτήτων. Παρατηρούμε ότι τα δύο πεδία στροβιλότητας έρχονται σε επαφή και τελικά ενώνονται για να δημιουργήσουν μία δίνη, της οποίας η μέγιστη τιμή του μέτρου της στροβιλότητας υπολογίστηκε από το Tecplot περίπου ίση με $|\vec{\omega}_{tot}| = 100 \frac{1}{s}$. Στο ίδιο σχήμα βλέπουμε και το πεδίο στροβιλότητας γύρω από την θηλιά-Ω.

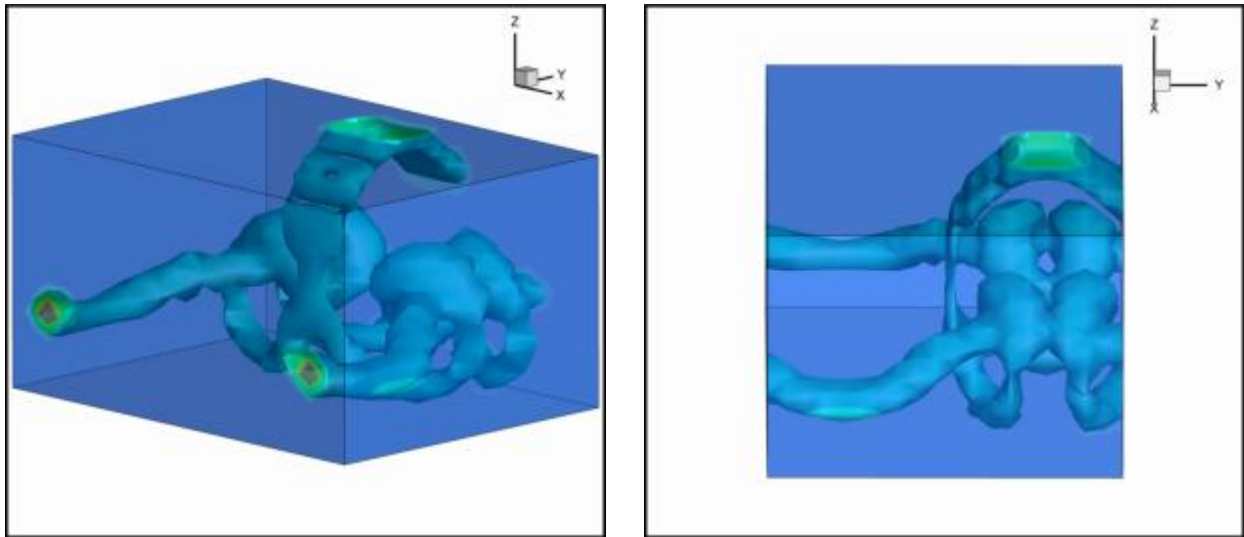
Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τη μορφή των ισοσταθμικών για τη χρονική στιγμή $t=1,8$ s που αντιστοιχούν σε $|\vec{\omega}| = 50 \frac{1}{s}$. Για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή όπως αναφέραμε και προηγουμένως παρατηρούμε τις συγκεντρώσεις των δινών στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω. Η θηλιά-Ω δεν φαίνεται στο σχήμα επειδή η ισοσταθμική που χρησιμοποιούμε αντιπροσωπεύει μεγαλύτερη τιμή του μέτρου της στροβιλότητας. Η μορφή της ισοσταθμικής που παρατηρούμε προβλέπει ότι στις θέσεις αυτές υπάρχει μία δομή που μοιάζει με δακτυλιοειδή δίνη, όπως αναφέραμε και παραπάνω. Η εμφάνιση της δακτυλιοειδούς δίνης παρατηρείται και από τον Ortega στα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα, όπου παρουσιάζονται τα πεδία στροβιλότητας που υπολογίστηκαν από τα μετρημένα πεδία ταχύτητας. Τα συγκεκριμένα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 86.



Σχήμα 82. Ισοσταθμικές Στροβιλότητας σε όλο το πεδίο και μεγέθυνση στο εσωτερικό της θηλιάς-Ω όπου παρατηρούμε τη δημιουργία μίας δακτυλιοειδούς δίνης

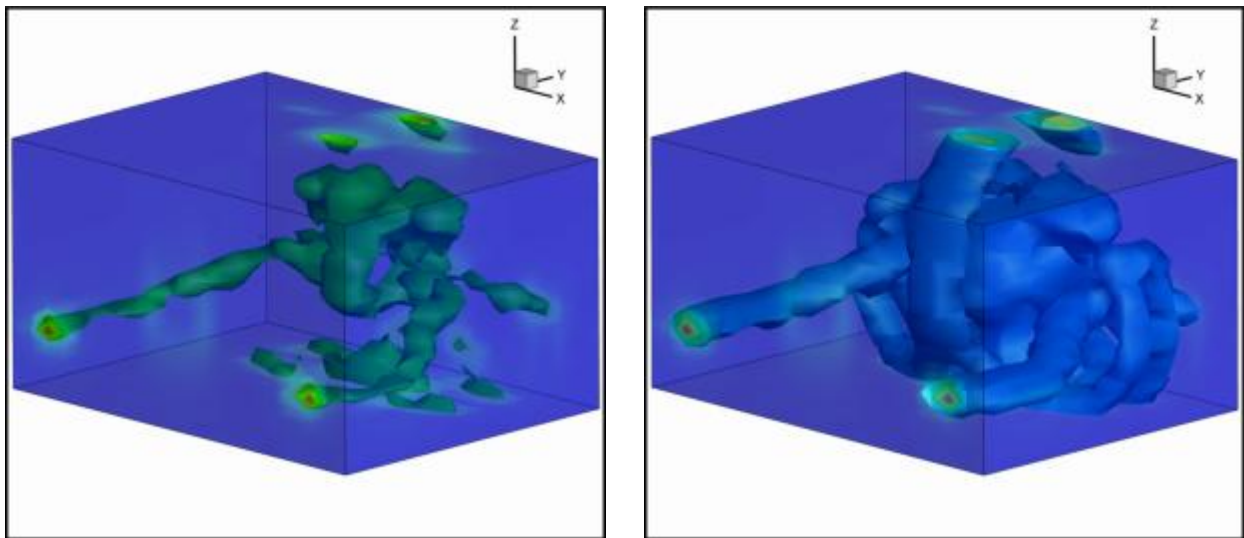
Την ίδια χρονική στιγμή το πεδίο στροβιλότητας της θηλιάς-Ω μπορεί να γίνει ορατό χρησιμοποιώντας μικρότερη τιμή του μέτρου στροβιλότητας για την ισοσταθμική $|\vec{\omega}| = 19 \frac{1}{s}$.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται ότι εκείνη τη χρονική στιγμή οι θηλιές-Ω βρίσκονται κοντά και εξαιτίας αυτού παρατηρούμε την συγκεκριμένη μορφή της ισοσταθμικής επιφάνειας.



Σχήμα 83. Ισοσταθμικές Στροβιλότητας Θηλιών-Ω και ο δακτύλιος στροβιλότητας

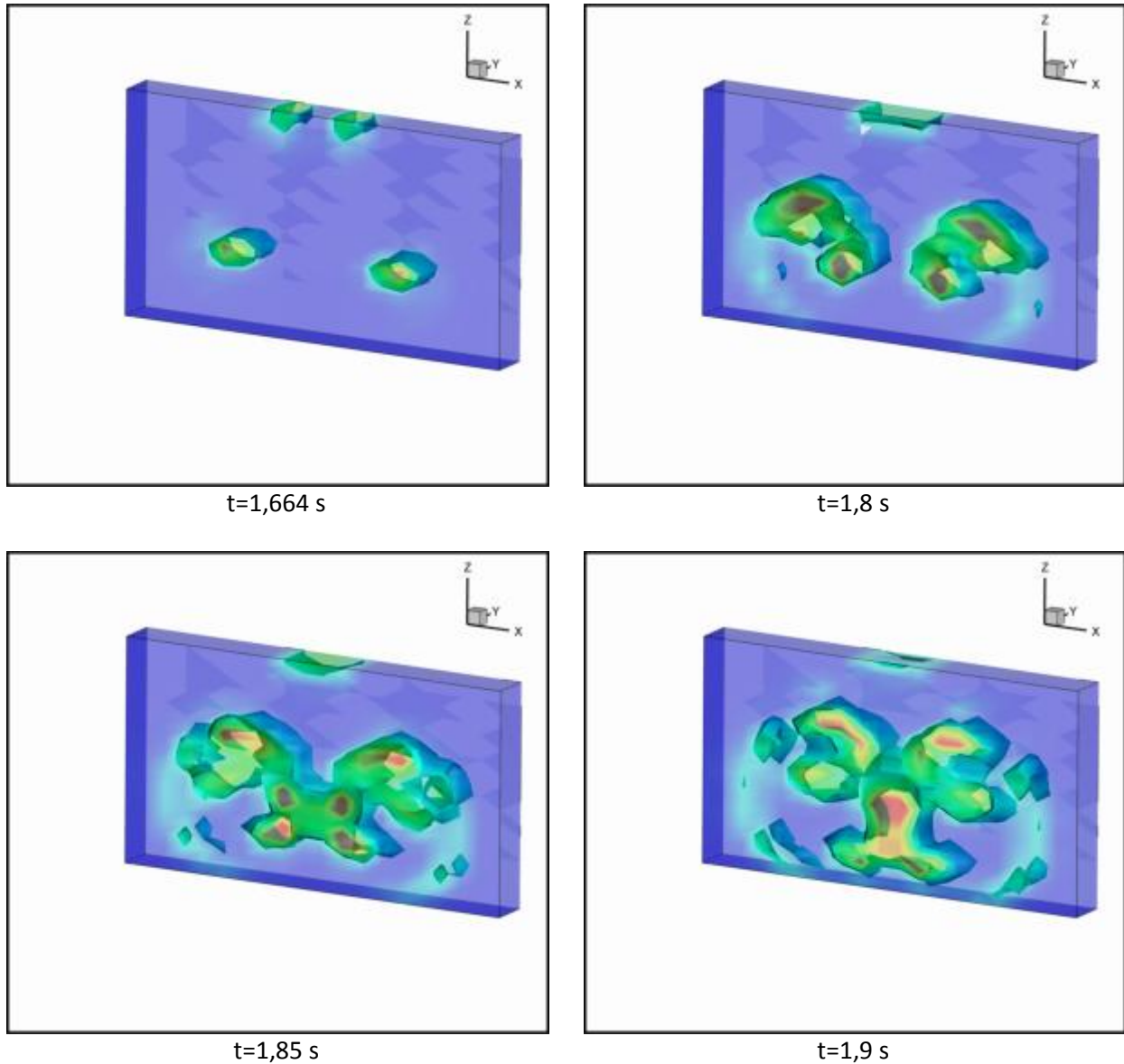
Οι δακτυλιοειδείς δίνες που σχηματίζονται, όπως και οι θηλιές-Ω, συγκρούονται και η τελική εικόνα που έχουμε για το πεδίο στροβιλότητας δείχνει το αποτέλεσμα της σύγκρουσης τους.



Σχήμα 84. Ισοσταθμικές Στροβιλότητας $t=1,94$ s

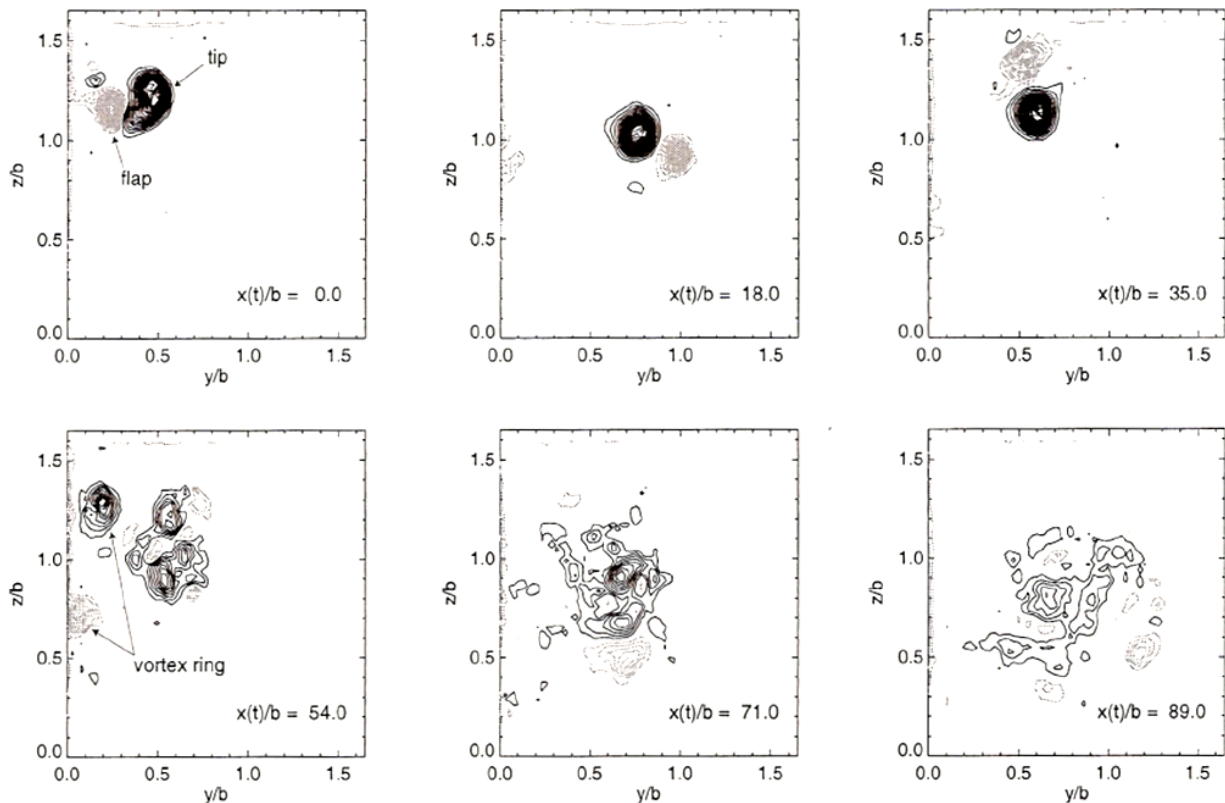
Η εξέλιξη μίας τομής του πεδίου στροβιλότητας στην περιοχή εσωτερικά της θηλιάς-Ω δείχνει το σχηματισμό της δακτυλιοειδούς δίνης που παρατηρήσαμε και τελικά τη σύγκρουση τους. Αποτέλεσμα της σύγκρουσης είναι η συγκέντρωση του πεδίου στροβιλότητας σε περιοχές κάθετες με το επίπεδο yx , οι οποίες απομακρύνονται κατευθυνόμενες κατά τον άξονα z . Στην πρώτη εικόνα του επόμενου σχήματος βλέπουμε ένα τμήμα της ισοσταθμικής ακριβώς πριν το

σχηματισμό της δακτυλιοειδούς δίνης. Μερικά δευτερόλεπτα αργότερα η δακτυλιοειδής δίνη έχει σχηματιστεί. Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης το κάτω μέρος των δινών φαίνεται να χωρίζεται σε δύο μέρη και λίγο αργότερα το ίδιο συμβαίνει και για το πάνω μέρος. Η συμπεριφορά αυτή είναι παρόμοια με την συμπεριφορά μη μετωπικής σύγκρουσης δακτυλιοειδών δινών (Green, 1995).



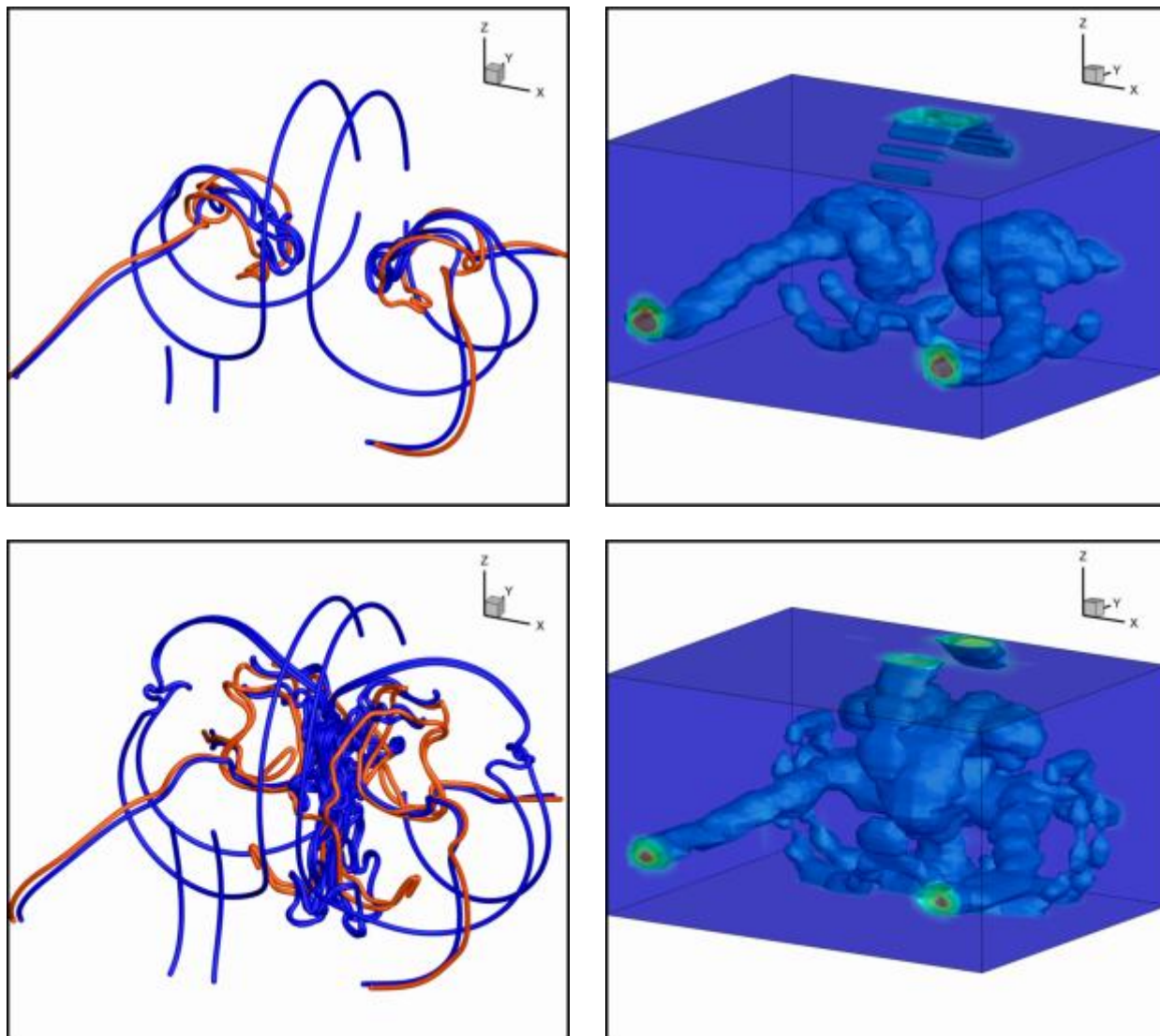
Σχήμα 85. Εξέλιξη τομής στο πεδίο στροβιλότητας κοντά στην περιοχή εσωτερικά της θηλιάς-Ω

Τα πεδία στροβιλότητας που υπολογίστηκαν από τα μετρημένα πεδία ταχύτητας των πειραμάτων του Ortega πάνω σε μία τομή κοντά στην θηλιά-Ω για το δεξί ζεύγος δινών δίνονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 86. Πεδία στροβιλότητας από τα πειραματικά αποτελέσματα του Ortega για την πρώτη περίπτωση

Τέλος, παραθέτουμε τις γραμμές των κατανομών στροβιλότητας και τα αντίστοιχα πεδία στροβιλότητας για τις χρονικές στιγμές $t=1,8$ s και $t=1,942$ s. Από τα σχήματα αυτά παρατηρούμε ότι οι γραμμές κατανομών στροβιλότητας της ίδιας δίνης, όταν αυτές εφάπτονται, δεν εμφανίζονται στο πεδίο στροβιλότητας, όπως αναφέραμε και παραπάνω. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η στροβιλότητα συγκεντρώνεται γύρω από τις γραμμές των κατανομών των στοιχείων στροβιλότητας, όπως είναι αναμενόμενο. Για να γίνει πιο λεπτομερής έλεγχος του πεδίου στροβιλότητας απαιτείται ο υπολογισμός του πεδίου ταχύτητας σε πιο πυκνό πλέγμα από αυτό που χρησιμοποιήσαμε. Τα αποτελέσματα μας δίνουν μία αίσθηση της μορφή του πεδίου στροβιλότητας εξαιτίας της αλληλεπίδρασης των στοιχείων στροβιλότητας και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν μία λεπτομερή αναπαράσταση του πεδίου στροβιλότητας.

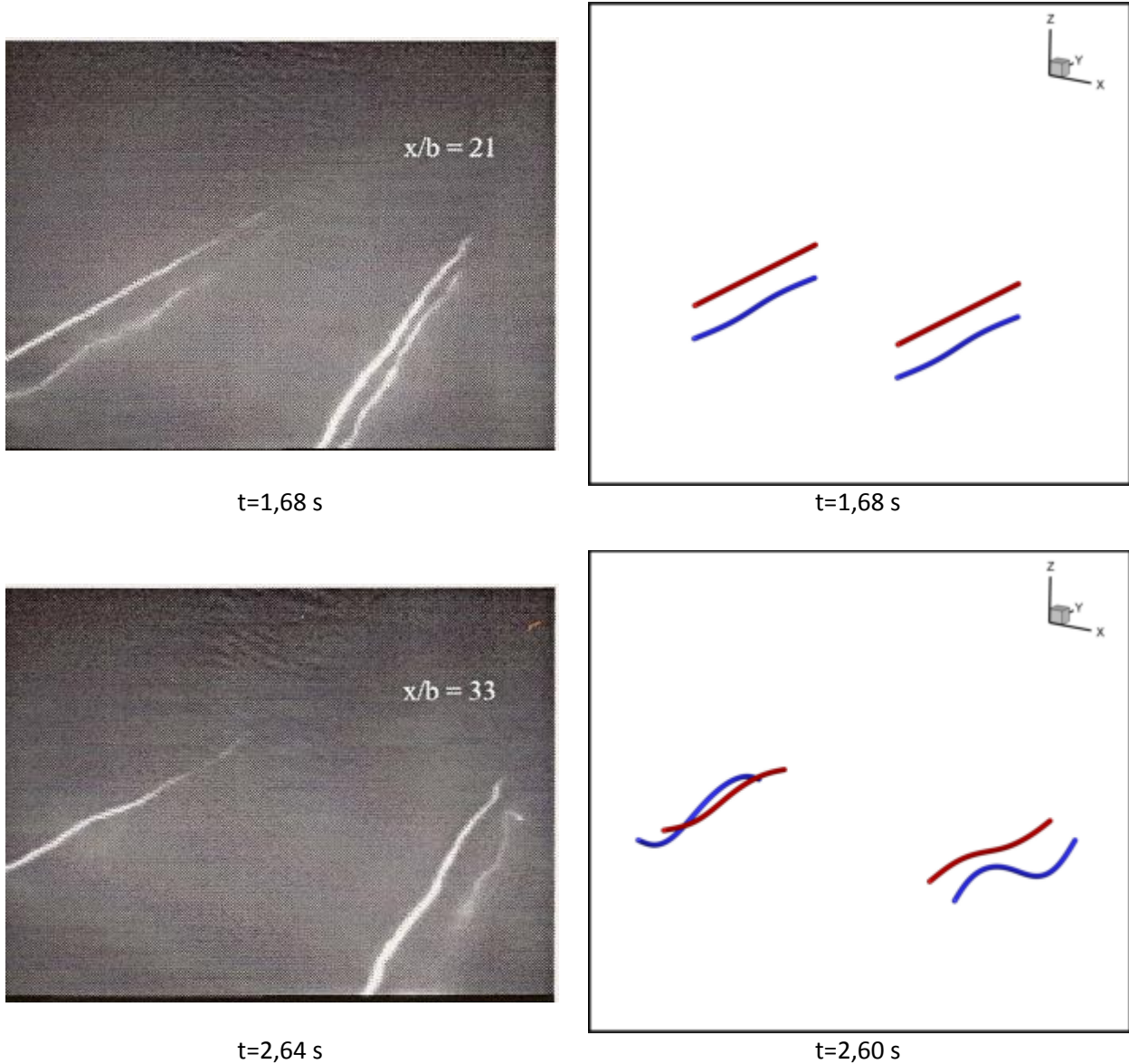


Σχήμα 87. Σύγκριση κατανομών στοιχείων στροβιλότητας και πεδίου στροβιλότητας για δύο χρονικές στιγμές

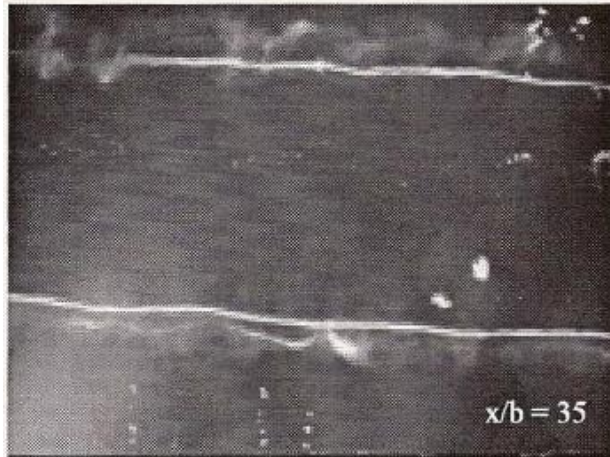
5.2.5 Περίπτωση Δεύτερη – Σύγκριση με τα Πειράματα Οπτικοποίησης

Παραθέτουμε τα αποτελέσματα του πειράματος οπτικοποίησης του Ortega για τη δεύτερη περίπτωση και έπειτα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προσομοίωσης, όπως στην αντίστοιχη ενότητα για την πρώτη περίπτωση. Παρατηρήστε ότι η θηλιά-Ω εμφανίζεται και σε αυτή την περίπτωση αλλά εξελίσσεται διαφορετικά σε σχέση με την πρώτη περίπτωση. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η εξέλιξη του φαινομένου όπως προβλέπεται από την προσομοίωση συμβαδίζει χρονικά με το πειραματικό αποτέλεσμα και δεν καθυστερεί τόσο όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στην άρση της συμμετρίας των κατανομών στο yz επίπεδο που επιβάλλαμε στην προηγούμενη περίπτωση.

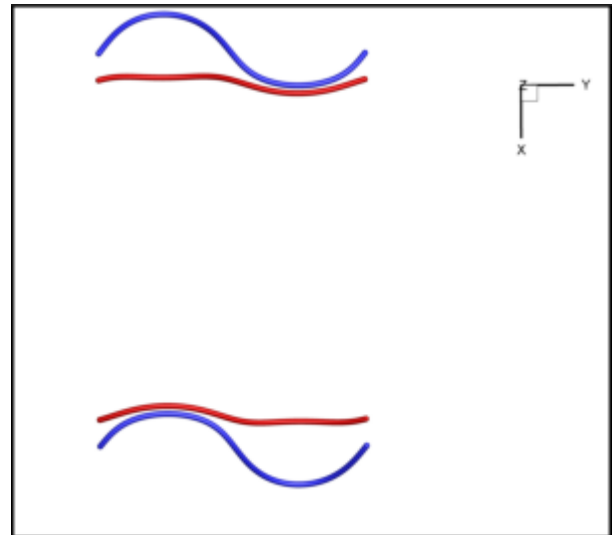
Κάτω από κάθε σχήμα σημειώνεται ο χρόνος των πειραματικών παρατηρήσεων και ο αντίστοιχος χρόνος του κώδικα όπου παρατηρήθηκε παρόμοια γεωμετρική μορφή. Οι χρόνοι κάτω από κάθε στιγμιότυπο της προσομοίωσης είναι μετατοπισμένοι κατά 1,52 s σε σχέση με τους πραγματικούς χρόνους της προσομοίωσης. Σημειώνουμε ότι, η τελευταία παρατήρηση υπάρχει πιθανότητα να είναι λανθασμένη, αφού στα πειραματικά αποτελέσματα η μιογία αραιώνει πολύ πιο γρήγορα σχετικά με την πρώτη περίπτωση.



Σχήμα 88. Σύγκριση πειράματος οπτικοποίησης με αποτελέσματα του κώδικα



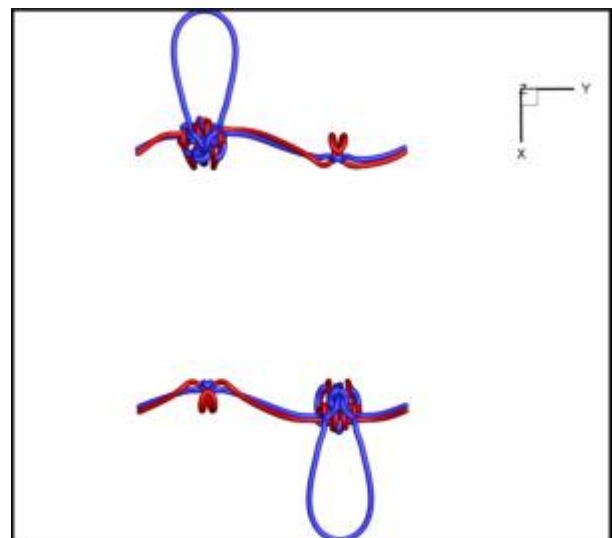
t=2,8 s



t=2,7 s



t=2,48 s

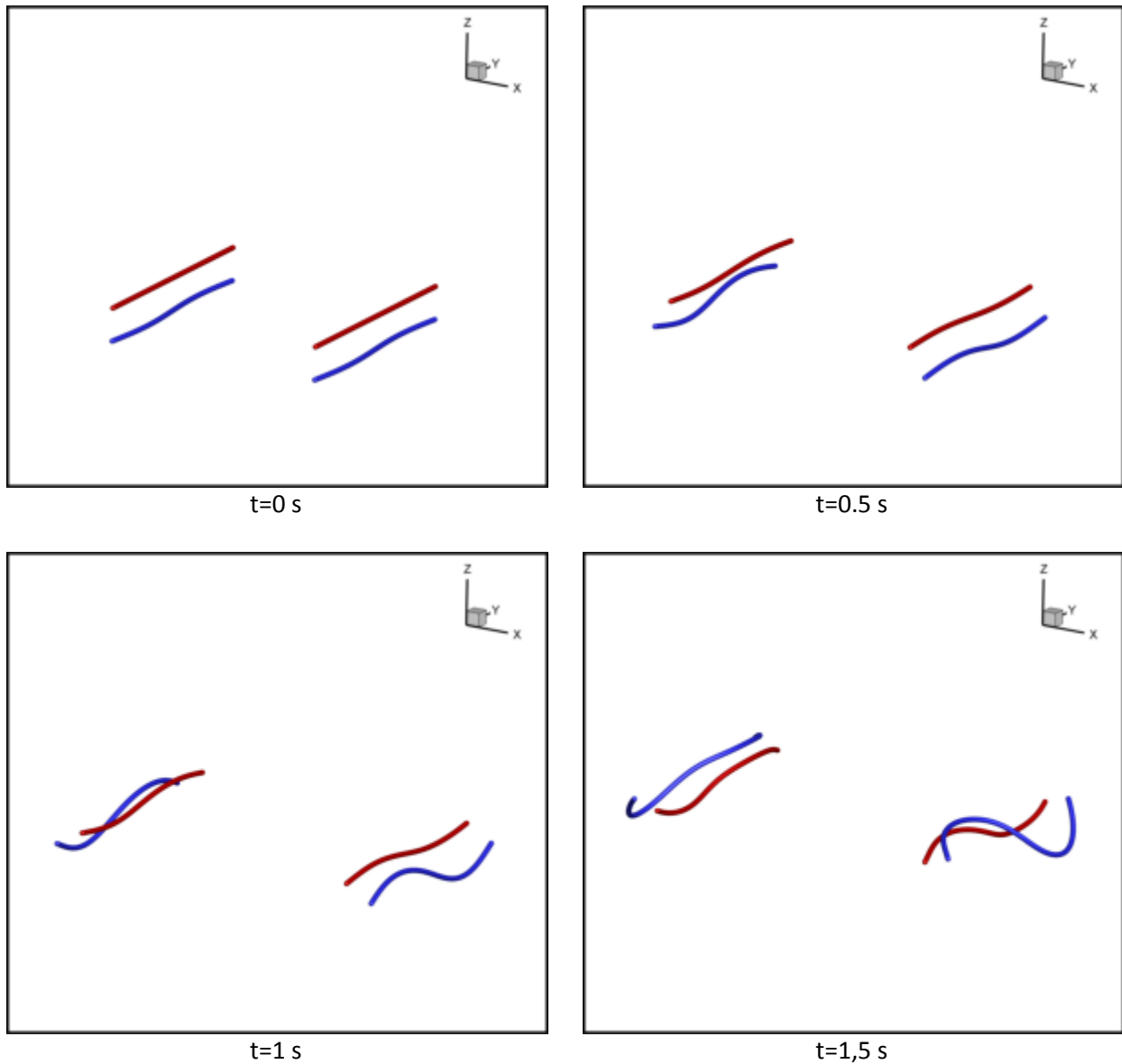


t=2,46 s

Σχήμα 89. Σύγκριση πειραμάτος οπτικοποίησης με αποτελέσματα του κώδικα

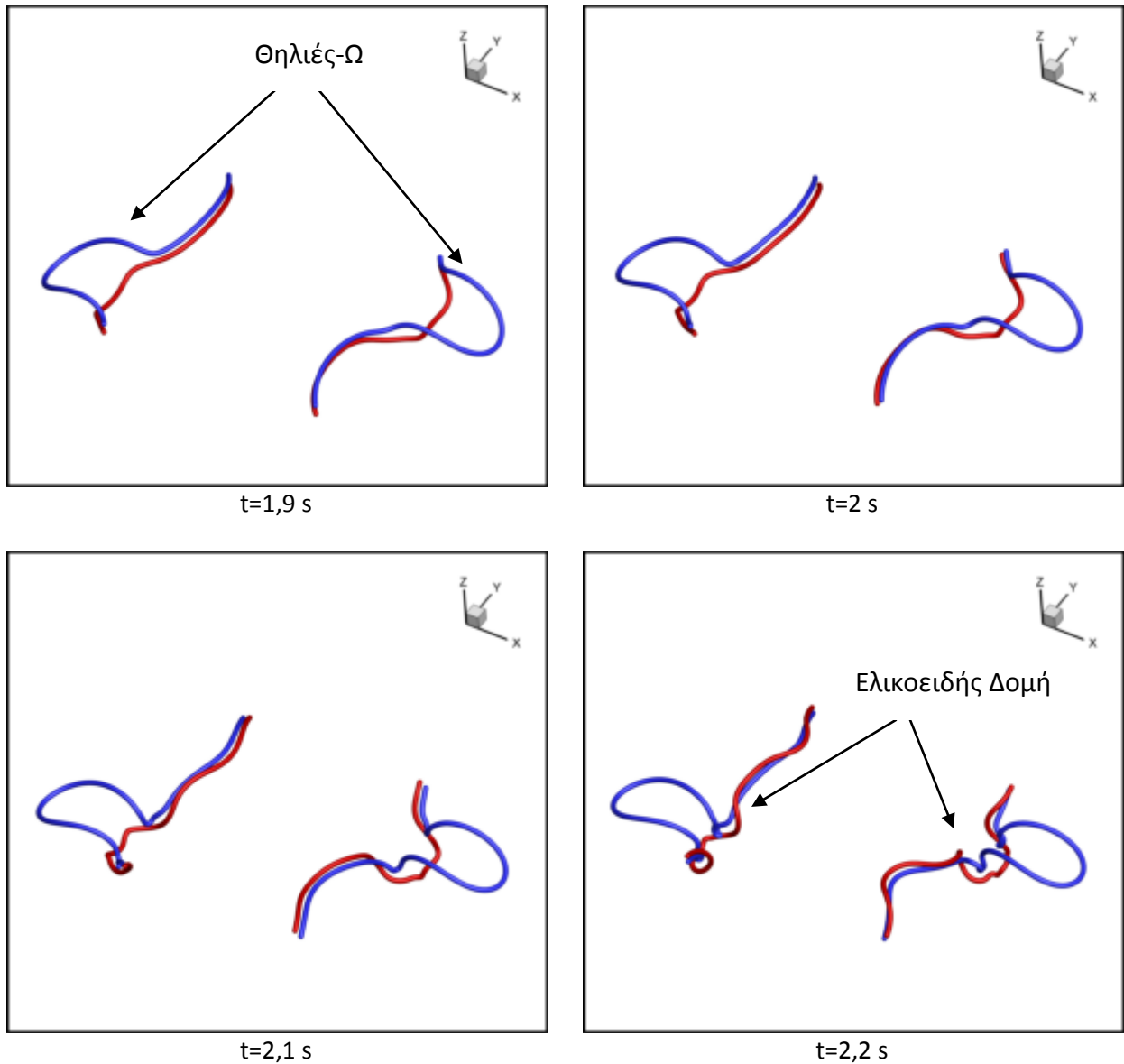
5.2.6 Περίπτωση Δεύτερη – Στάδια Εξέλιξης του Φαινομένου

Το αρχικό στάδιο εξέλιξης του φαινομένου για τη δεύτερη περίπτωση είναι ακριβώς το ίδιο με την πρώτη περίπτωση. Το πλάτος των διαταραχών των δινών flap αυξάνει σταδιακά. Στη δίνη tip παρατηρείται η δημιουργία μίας διαταραχής ίδιου μήκους κύματος με τη διαταραχή της δίνης flap με πλάτος το οποίο σταδιακά αυξάνει. Τελικά ένα τμήμα της δίνης flap θα βρεθεί κοντά στη δίνη tip και ένα άλλο θα μείνει μακριά όπως ακριβώς παρατηρήθηκε ότι συμβαίνει στην προηγούμενη περίπτωση.



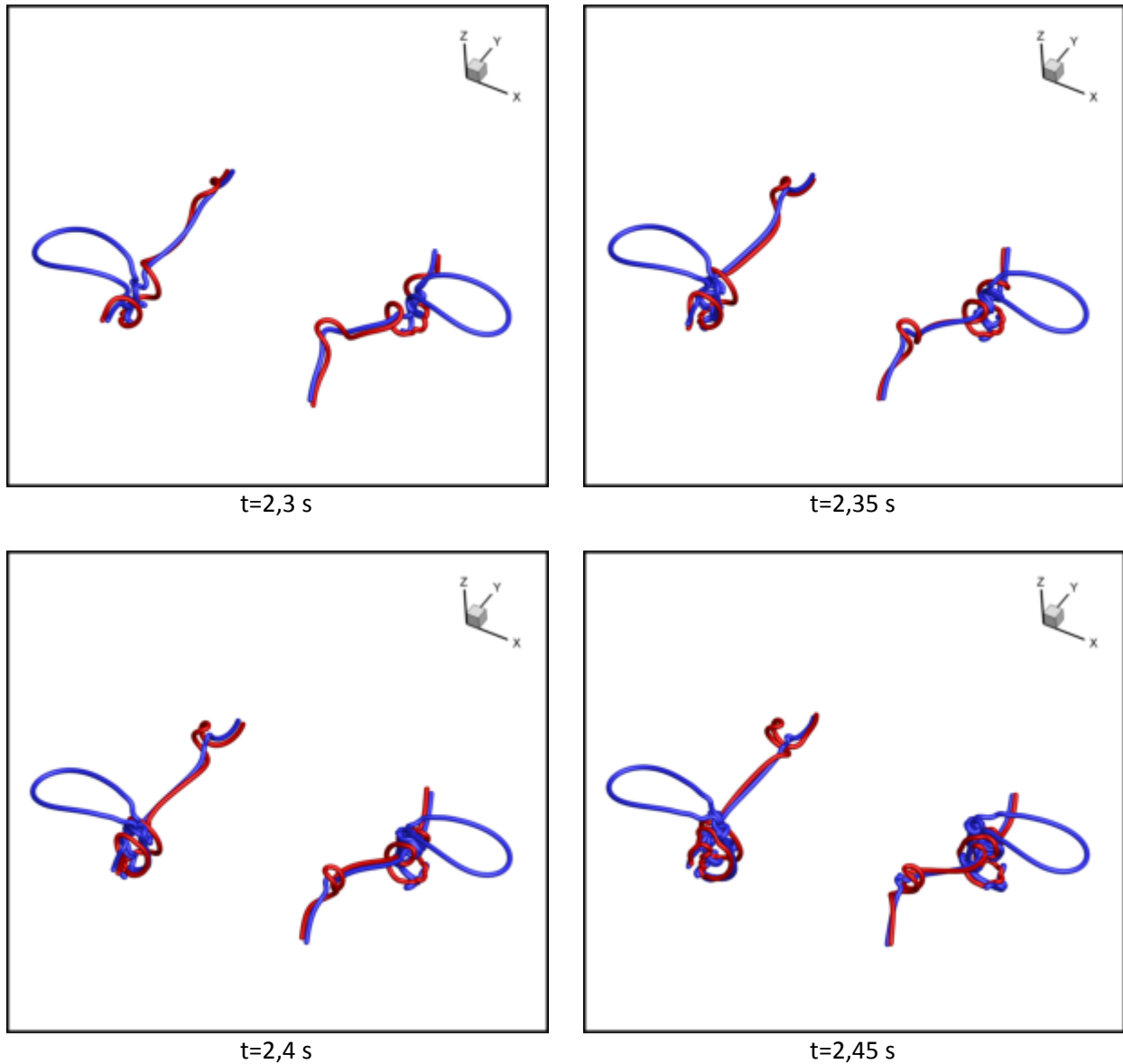
Σχήμα 90. Αρχικό Στάδιο εξέλιξης του φαινομένου

Το τμήμα της δίνης flap που βρίσκεται μακριά από τη δίνη tip θα δημιουργήσει τη θηλιά-Ω. Αντίστοιχα, τα τμήματα των δινών που βρίσκονται κοντά στα δύο ζεύγη δημιουργούν μία παρόμοια ελικοειδή δομή με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης. Το αποτέλεσμα αυτής είναι η σταδιακή συγκέντρωση στοιχείων στροβιλότητας στη θηλιά-Ω. Το υπόλοιπο τμήμα θα δημιουργήσει τη θηλιά-Ω. Σε αυτή τη περίπτωση η έκταση της θηλιάς-Ω της δίνης flap και η ελικοειδής δομή της δίνης tip είναι πολύ μικρότερη. Οι παραπάνω παρατηρήσεις συνοψίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 91. Η θηλιά-Ω και η ελικοειδής δομή της δίνης tip

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που παρατηρήθηκε στην πρώτη περίπτωση, συγκεντρώνεται στροβιλότητα εσωτερικά της θηλιάς-Ω με μία πιο γρήγορη διαδικασία από αυτή της δημιουργίας της θηλιάς-Ω και της ελικοειδούς δομής. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μία δακτυλιοειδής δίνη από τη θηλιά-Ω, η οποία φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Οι περιοχές συγκεντρωμένης στροβιλότητας είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με την πρώτη περίπτωση. Ακόμα μία ενδιαφέρουσα δομή που δημιουργείται αλλά δευτερεύουσας σημασίας είναι μία μικρότερη θηλιά-Ω στη δίνη tip, η οποία φαίνεται στην τελευταία από τις παρακάτω εικόνες.



Σχήμα 91. Το τελικό στάδιο εξέλιξης της δεύτερης περίπτωσης

5.3 Η επίδραση του λόγου κυκλοφοριών του ζεύγους δινών στην εξέλιξη του φαινομένου

Με βάση τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρατηρήσαμε ότι η εξέλιξη του φαινομένου ακολουθεί τα ίδια ακριβώς στάδια και στις δύο περιπτώσεις. Τα στάδια που παρατηρήσαμε έχουν ως εξής:

Στάδιο 1^ο: Αύξηση πλάτους διαταραχών και ταυτόχρονη μείωση της απόστασης των δινών κάθε ζεύγους

Στάδιο 2^ο: Δημιουργία της θηλιάς-Ω στην δίνη tip κάθε ζεύγους και της ελικοειδούς δομής της δίνης tip κάθε ζεύγους

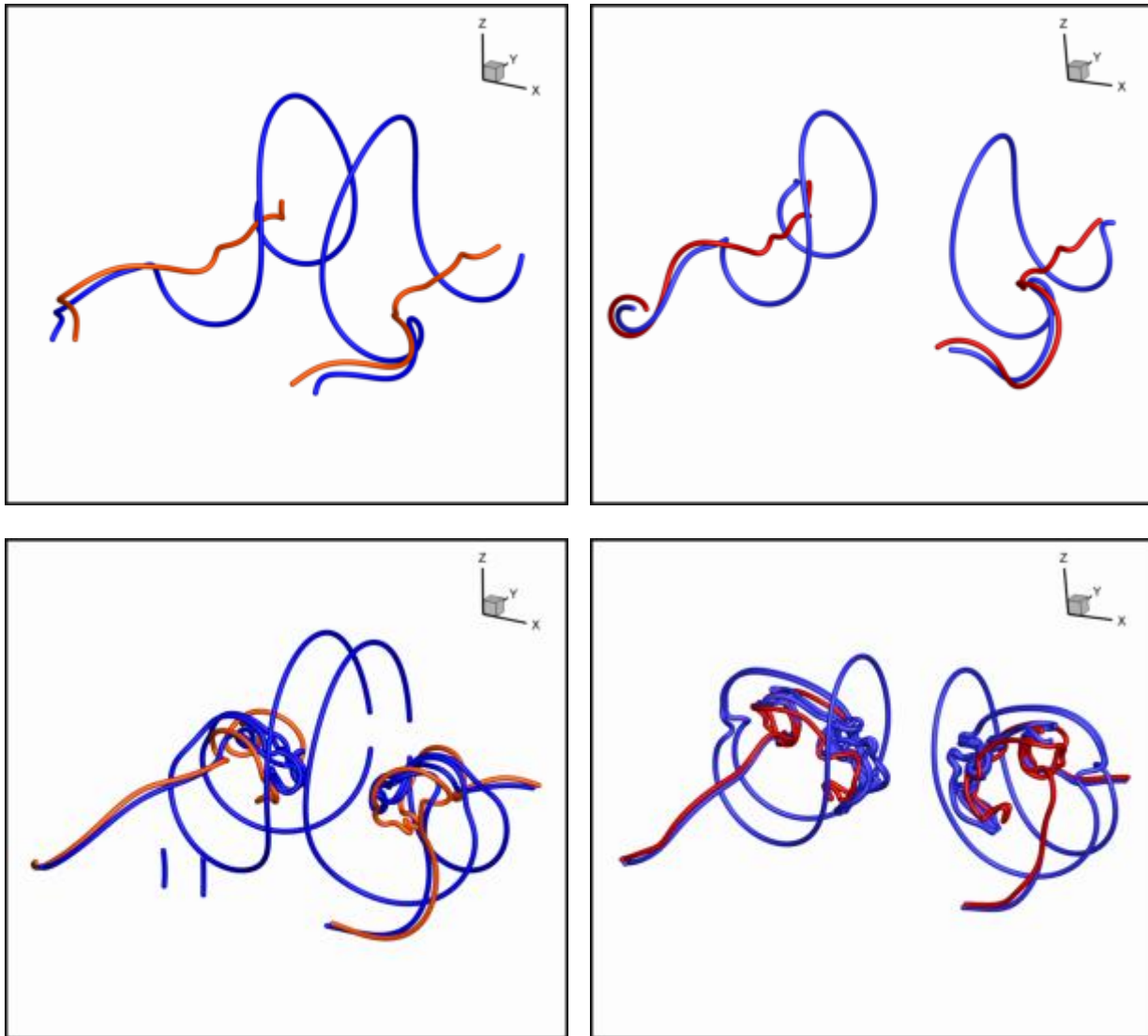
Στάδιο 3^ο: Συγκέντρωση στροβιλότητας στην περιοχή κοντά στην θηλιά-Ω και δημιουργία μικρότερων δομών στις δίνες

Οι αλλαγές στη μορφή των δινών οφείλονται στις ταυτόχρονες αλληλεπιδράσεις του πεδίου ταχύτητας με το πεδίο ρυθμού μεταβολής των τροπών. Η «ένταση» των δύο πεδίων εξαρτάται από την κυκλοφορία των δινών. Μία λογική παρατήρηση με βάση την τελευταία πρόταση είναι ότι η εξέλιξη του φαινομένου θα εξαρτάται από το λόγο κυκλοφοριών των δινών του ζεύγους, δηλαδή το λόγο:

$$\gamma = \left| \frac{\Gamma_{flap}}{\Gamma_{tip}} \right|$$

Η θεωρία ευστάθειας τέτοιων συστημάτων δινών όπως αναπτύσσεται στην εργασία του Ortega (Ortega, 2001) για δύο ζεύγη δινών, αλλά και από τον Saffman (Saffman, 1992) για ένα ζεύγος δινών εξαρτάται και από άλλες παραμέτρους, όπως, τον λόγο των αποστάσεων των δινών του ζεύγους ως προς την απόσταση των κεντροειδών μεταξύ των ζευγών, τον λόγο των πυρήνων των δινών και άλλες παραμέτρους. Από διάφορες περιπτώσεις ελέγχου που εκτελέσαμε για δοκιμές των παραμέτρων, με βάση την τοποθέτηση των δινών της πρώτης περίπτωσης, βρήκαμε ότι οι μεταβολές στην παράμετρο γ επηρεάζουν περισσότερο το φαινόμενο. Στιγμιότυπα από μία από αυτές τις περιπτώσεις βλέπουμε στις εικόνες στο δεξί μέρος του επόμενου σχήματος. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση των κεντροειδών b_0^* είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την πρώτη περίπτωση. Στις αριστερές εικόνες βλέπουμε στιγμιότυπα από την πρώτη περίπτωση για ταυτόχρονες χρονικές στιγμές. Η θηλιά-Ω δημιουργείται κανονικά όπως και η ελικοειδής δομή, αλλά σε αυτή την περίπτωση οι δίνες βρίσκονται πιο μακριά. Οι περιοχές συγκεντρωμένης στροβιλότητας στην ίδια χρονική στιγμή δεν είναι αρκετά κοντά για να αλληλεπιδράσουν. Πέρα από αυτό δεν παρατηρήσαμε κάποια άλλη διαφορά

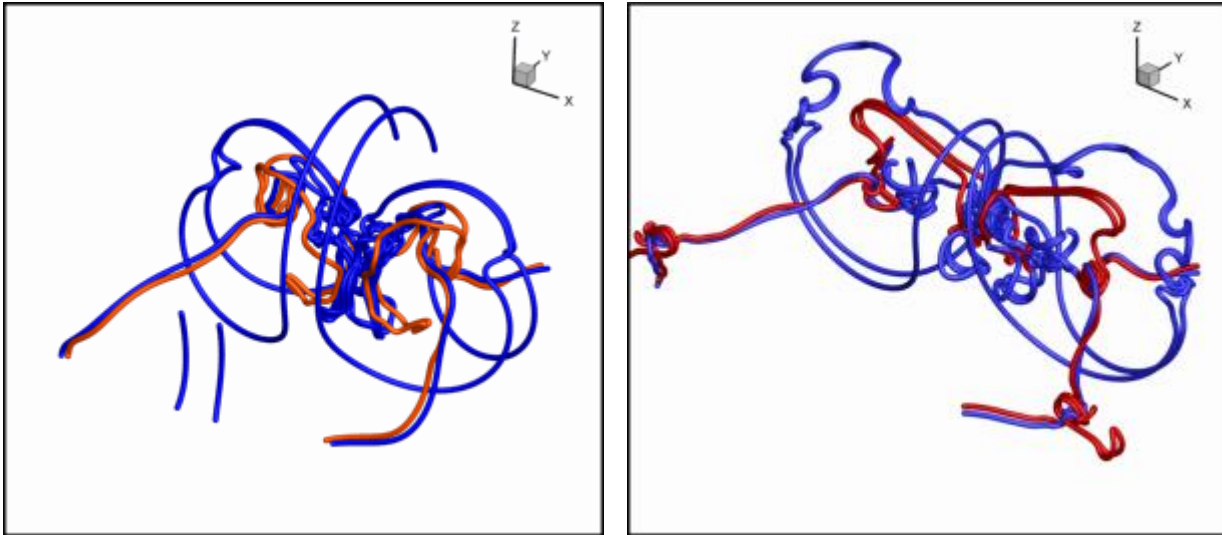
στην εξέλιξη του φαινομένου.



Σχήμα 92. Επίδραση της απόστασης των κεντροειδών στην εξέλιξη της αστάθειας. Αριστερά, στιγμιότυπα από την πρώτη περίπτωση. Δεξιά, στιγμιότυπα με μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των κεντροειδών

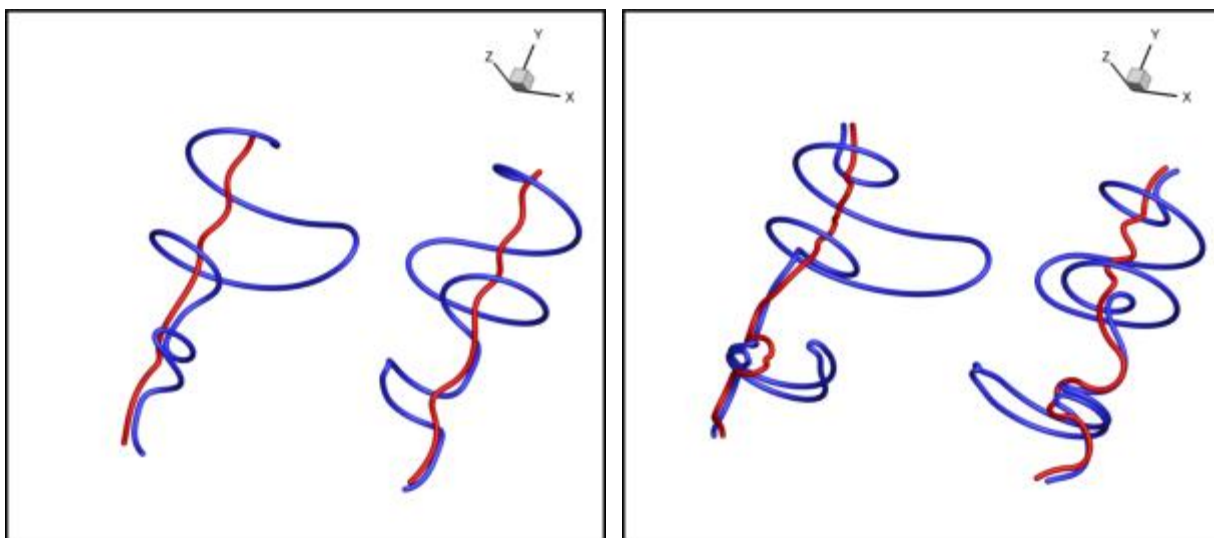
Επαναλαμβάνοντας το ίδιο τρέξιμο με την πρώτη περίπτωση, στο οποίο ο λόγος κυκλοφοριών είναι $\gamma = 0,35$, για λόγο κυκλοφοριών $\gamma = 0,4$, παρατηρούμε μία επιτάχυνση του φαινομένου. Τα στάδια εξέλιξης του φαινομένου είναι τα ίδια αλλά είναι διαφορετική η αλληλεπίδραση μεταξύ των δινών, με τέτοιο τρόπο ώστε να παρατηρούνται διαφορές στο τελικό αποτέλεσμα. Πρώτον, οι δομές που παρατηρούμε είναι μικρότερες σε έκταση σε σχέση με την πρώτη περίπτωση. Αποτέλεσμα αυτού είναι οι περιοχές που συγκεντρώνεται στροβιλότητα να είναι μικρότερες. Επιπλέον, οι περιοχές όπου τμήματα της ίδιας δίνης είναι

κοντά είναι περισσότερες από ότι στην πρώτη περίπτωση. Στο σχήμα 93, βλέπουμε τις αλλαγές στην τελική κατάσταση σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, την οποία παραθέτουμε στο αριστερό σχήμα.



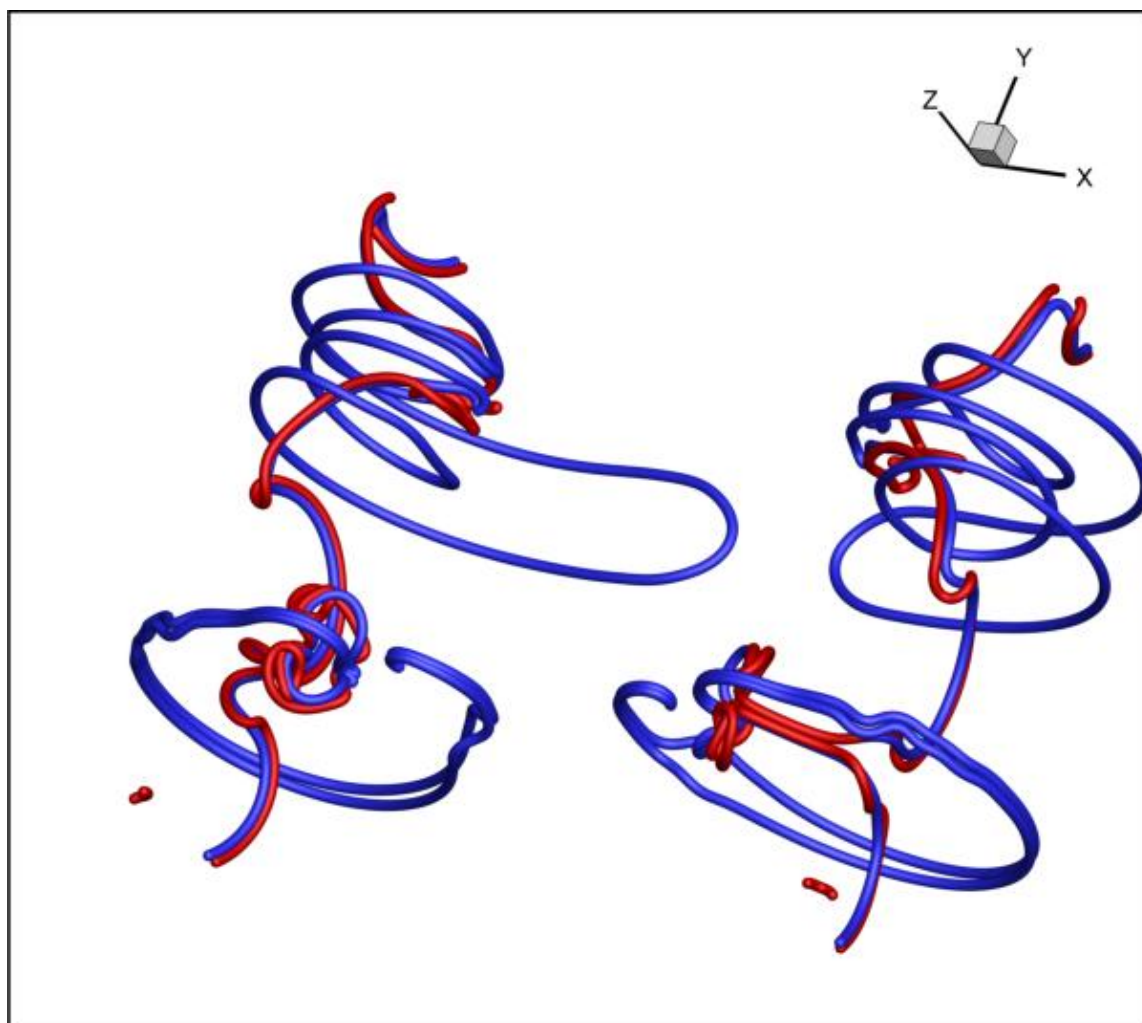
Σχήμα 93. Η εξέλιξη της αστάθειας για $\gamma = 0,4$

Επαναλαμβάνουμε τις προσομοιώσεις για διαφορετικές τιμές του λόγου κυκλοφορίας. Τα αποτελέσματα που πήραμε φαίνονται στα παρακάτω σχήματα. Το βασικό χαρακτηριστικό που παρατηρείται στη μορφή των αποτελεσμάτων, με την αλλαγή του λόγου κυκλοφορίας, είναι η αλλαγή της έκτασης της θηλιάς-Ω της δίνης flap και της ελικοειδούς δομής της δίνης tip. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του λόγου γ παρατηρούμε ότι η ελικοειδής δομή της δίνης tip αλλά και η θηλιά της δίνης flap είναι μικρότερες σε έκταση. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα ορατό στις περιπτώσεις $\gamma = 0,2$ και $\gamma = 0,8$. Στην περίπτωση $\gamma = 0,2$, παρατηρούμε αμέσως τα μεγάλα μεγέθη των δύο διαμορφώσεων ενώ στην περίπτωση $\gamma = 0,8$, δεν παρατηρείται καμία από τις δύο διαμορφώσεις. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση $\gamma = 0,8$ τα στοιχεία στροβιλότητας συγκεντρώνονται σε δύο περιοχές κοντά σε μία δομή που θα μπορούσαμε να πούμε ότι μοιάζει με θηλιά-Ω αλλά δημιουργείται στη δίνη tip αντί της δίνης flap. Μία ακόμα γενική παρατήρηση έχει να κάνει με την ταχύτητα εξέλιξης της αστάθειας. Κάθε προσομοίωση είχε ρυθμιστεί να σταματήσει τη χρονική στιγμή που ο συνολικός αριθμός των στοιχείων θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος με 15 φορές του αρχικού αριθμού στοιχείων. Ο χρόνος που δίνεται στην μεγαλύτερη εικόνα κάθε σχήματος αναφέρεται στην τελική χρονική στιγμή. Με αυτό τον τρόπο, έχουμε μία εικόνα της ταχύτητας που εξελίσσεται η αστάθεια. Παρατηρήθηκε ότι, για μικρότερες τιμές του γ η αστάθεια εξελίσσεται πιο αργά. Συγκεκριμένα, για $\gamma = 0,2$ ο αριθμός των στοιχείων 15πλασιάζεται μέσα σε 2,14 s ενώ για $\gamma = 0,8$ σε 1,1 s. Σημειώνουμε ότι αποτελέσματα για διαφορετικές παρόμοιες τιμές του γ για την περίπτωση ενός ζεύγους δινών υπάρχουν στο (Marshall, Bransher, & Giovannini, 2001).



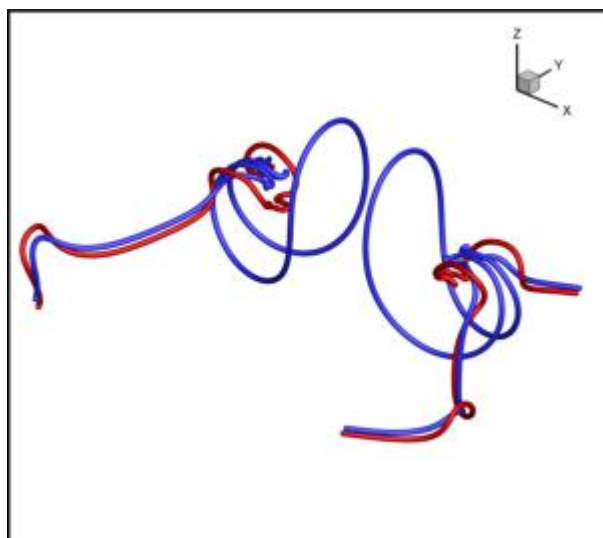
t=1,8 s

t=1,9 s

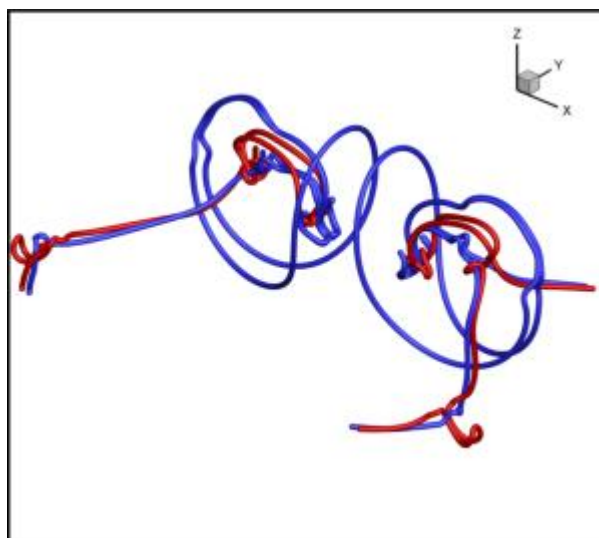


t=2,14 s

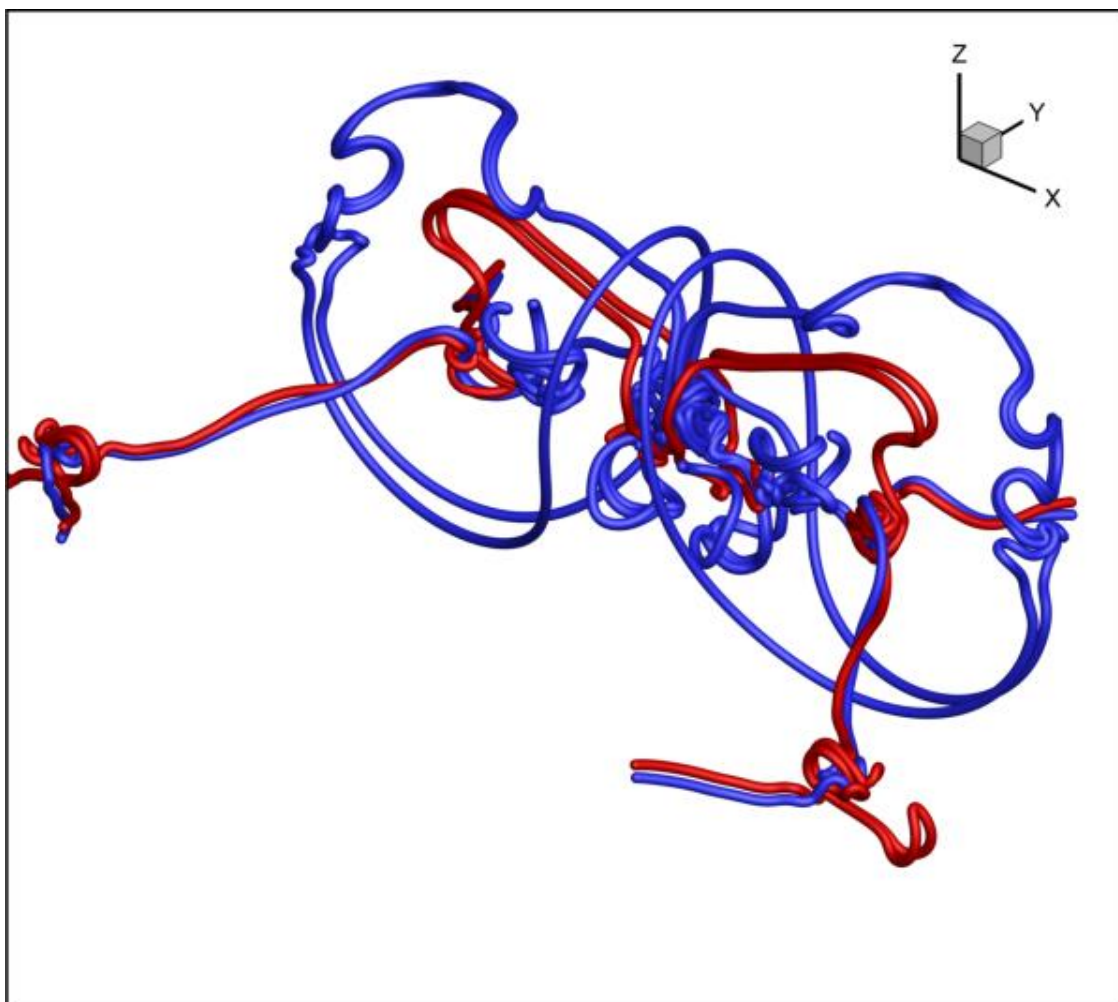
Σχήμα 93. Η εξέλιξη της αστάθειας για $\gamma = 0,2$



t=1,4 s

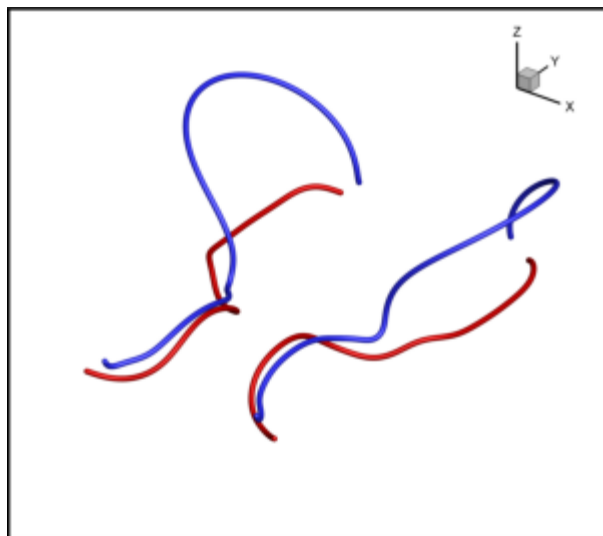


t=1,5 s

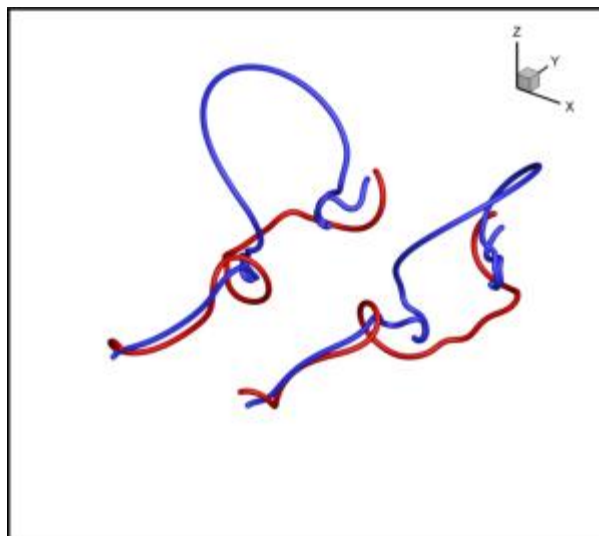


t=1,65 s

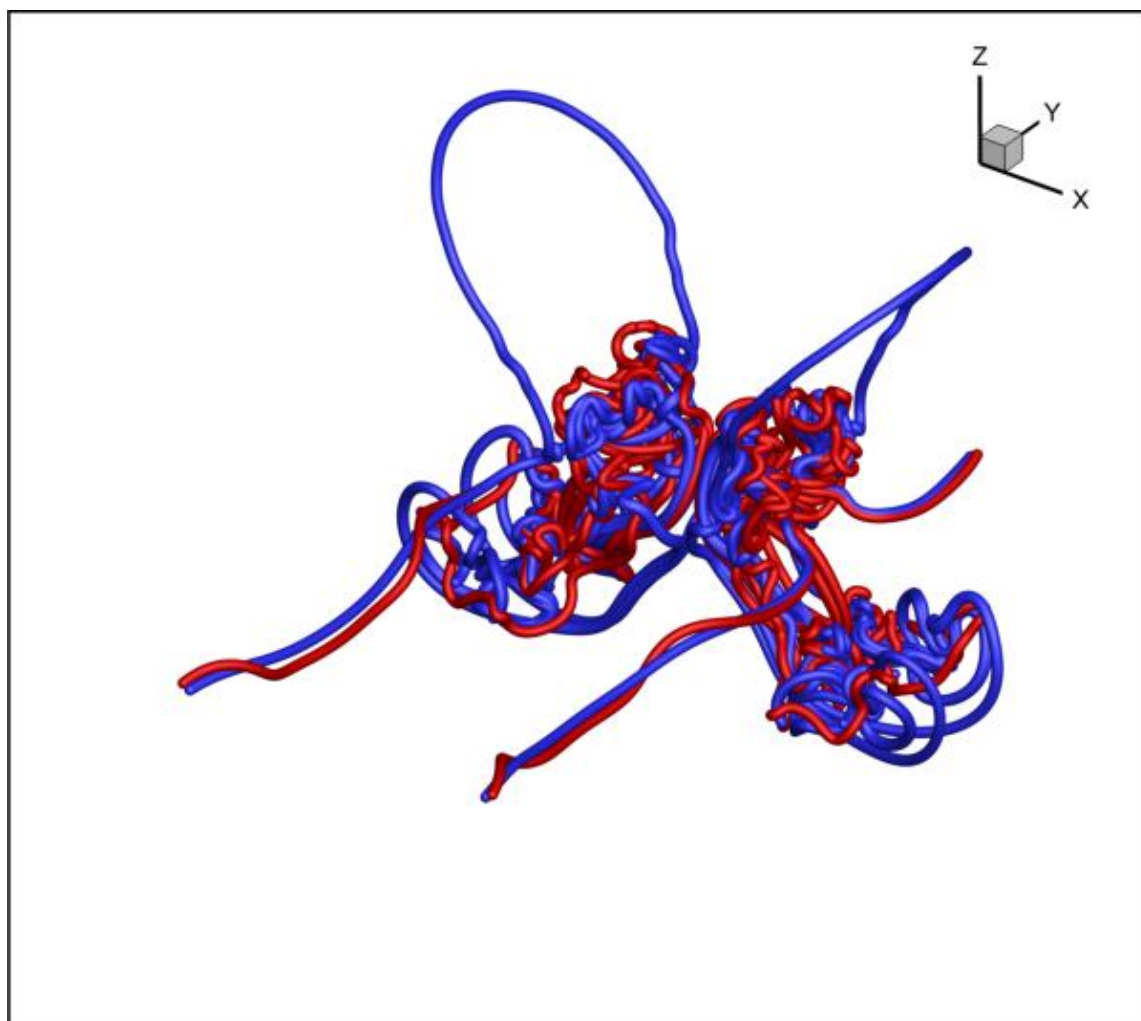
Σχήμα 94. Η εξέλιξη της αστάθειας για $\gamma = 0,4$



t=1,0 s

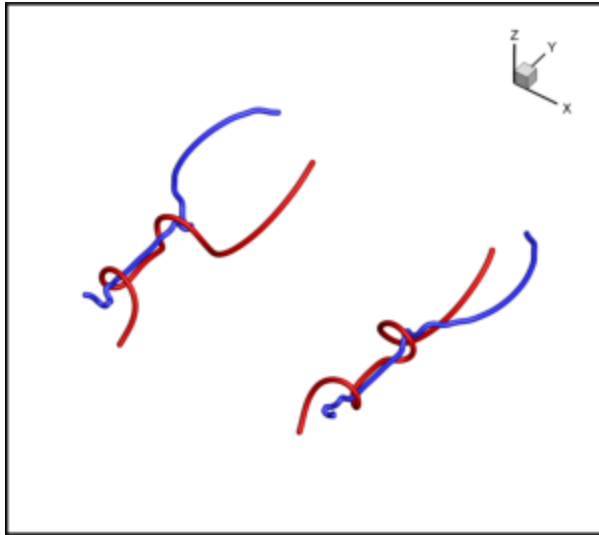


t=1,1 s

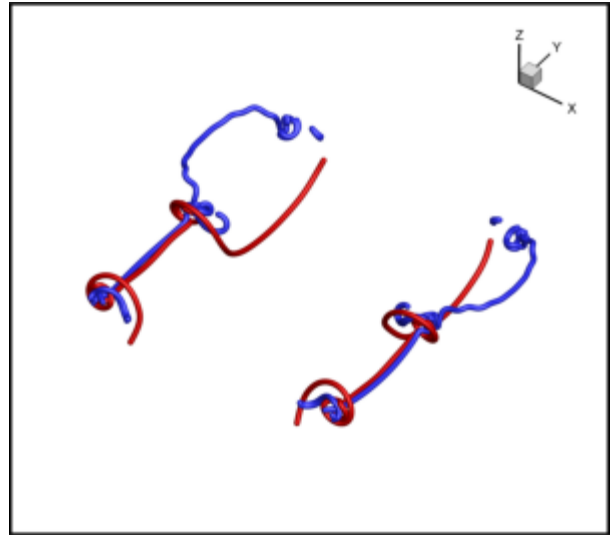


t=1,27 s

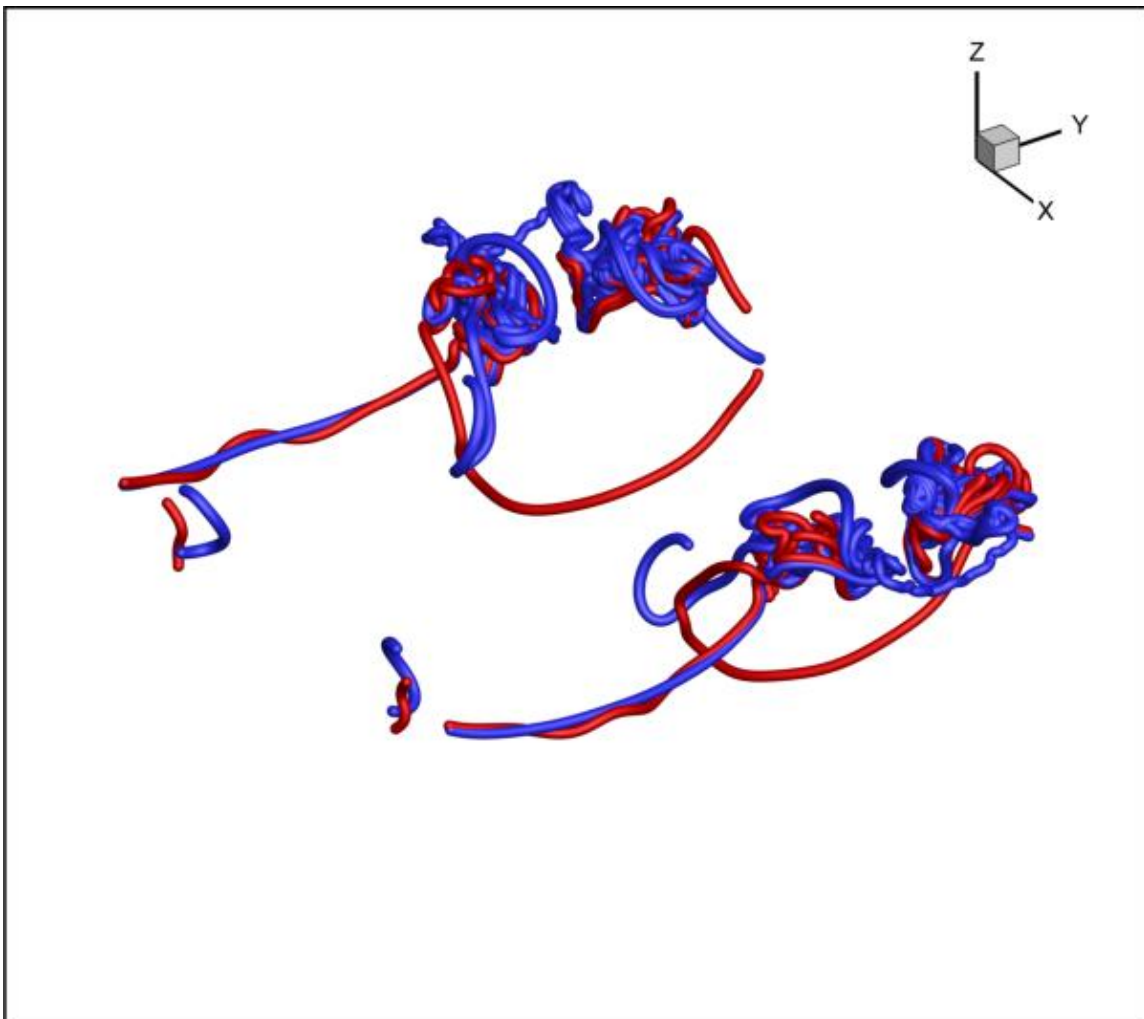
Σχήμα 95. Η εξέλιξη της αστάθειας για $\gamma = 0,6$



t=1,0 s



t=1,05 s



t=1,1 s

Σχήμα 96. Η εξέλιξη της αστάθειας για $\gamma = 0,8$

5.4 Προτάσεις Βελτίωσης και Περεταίρω Ερευνητικής Εργασίας

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του κώδικα προσομοίωσης, χρησιμοποιώντας την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας, με απλές αναλυτικές λύσεις αλλά και με πραγματικά πειράματα ασταθειών φαίνεται ότι η μεθοδολογία μπορεί να οδηγήσει σε επιτυχείς προβλέψεις. Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί, ότι η σχετική διερεύνηση που περιέχεται στην παρούσα εργασία θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως προκαταρκτική. Από την άλλη θεωρούμε σημαντικό η προσπάθεια αυτή να αποτελέσει την αρχή μίας μελέτης που θα αφορά την ανάπτυξη ενός αξιόπιστου εργαλείου για τη μελέτη φαινομένων της Δυναμικής των Ρευστών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όπως αυτά στα οποία η ροή εμφανίζει αστάθειες και τις περισσότερες φορές δεν έχουν γίνει αρκετά πειράματα για τον μηχανισμό εξέλιξης τους.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να τονίσουμε τα αδύναμα σημεία της μεθόδου και του κώδικα που αναπτύχθηκε, προτείνοντας ταυτόχρονα λύσεις μέσω πιθανών ερευνητικών εργασιών. Οι προτεινόμενες βελτιώσεις κινούνται σε δύο επίπεδα. Αρχικά, όσο αφορά το αριθμητικό σχήμα και τον κώδικα που αναπτύχθηκε, και ύστερα προτάσεις μελέτης άλλων φαινομένων που ο κώδικας έχει την ιδιότητα να αναπαράγει.

5.4.1 Προτάσεις Βελτίωσης

Ένα από τα πιο σημαντικά σημεία για την επιτυχημένη αναπαράσταση πεδίων στροβιλότητας από στοιχεία στροβιλότητας είναι το πρώτο στάδιο της διαδικασίας, δηλαδή κατάλληλη αρχικοποίηση των στοιχείων. Ως «κατάλληλη» νοούμε την αρχικοποίηση των στοιχείων ώστε αυτά να έχουν προς όλες τις κατευθύνσεις την ίδια παράμετρο επικάλυψης. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα και δεν υπάρχει κάποια εργασία υπόψη μας η οποία να προτείνει κάποια συστηματική μέθοδο για την επίτευξη του σκοπού αυτού στη γενική περίπτωση, δηλαδή ενός τρισδιάστατου πεδίου στροβιλότητας με τυχαίο πεδίο ορισμού. Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος θα δώσει σημαντική ώθηση στην χρήση υβριδικών μεθόδων. Για παράδειγμα, ένας κώδικας επίλυσης των Navier-Stokes δίνει ως αποτέλεσμα το πεδίο στροβιλότητας και μετά από κάποια χρονική στιγμή το πεδίο στροβιλότητας αναπαριστάται από στοιχεία στροβιλότητας. Εναλλακτικά, η μεθοδολογία των στοιχείων στροβιλότητας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί παράλληλα με μία μέθοδο συνοριακών στοιχείων (Willis, 2006), από την οποία θα προέκυπταν οι αρχικές τιμές του πεδίου στροβιλότητας, σε συνδυασμό με μια κατάλληλη συνθήκη Kutta στο χείλος εκφυγής της πτέρυγας. Σαν αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τις αστάθειες των δινών ακροπτερυγίου για διάφορες γεωμετρίες πτέρυγας.

Επιπλέον, θεωρούμε ότι είναι δυνατόν να βελτιωθούν τα αποτελέσματα που έχουμε για τις κοντινές επαγωγές αν είχαμε τη δυνατότητα να εκτελέσουμε τρισδιάστατες ολοκληρώσεις αναλυτικά. Δηλαδή, όταν ένα στοιχείο είναι γειτονικό (επικαλύπτεται) ενός άλλου στοιχείου

τότε ο κώδικας θα υπολογίζει αριθμητικά τα ολοκληρώματα για τις επαγωγές από το στοιχείο αυτό. Μία τέτοια διαδικασία, είναι ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν θα προκαλέσει ουσιαστικές αλλαγές στην επίδοση του κώδικα, ενώ είναι αναμενόμενο ότι θα επιβαρύνει το χρόνο εκτέλεσης του κώδικα.

Γενικά η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα. Με την ανάπτυξη παράλληλων συστημάτων και ταυτόχρονα κατάλληλων βιβλιοθηκών, όπως το MPI, είναι δυνατόν να σχεδιαστούν παράλληλες υπορουτίνες του κώδικα. Συγκεκριμένα, είναι δυνατόν να γραφτούν παράλληλες υπορουτίνες για τον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων και του ρυθμού μεταβολής στροβιλότητας με αποτέλεσμα την ραγδαία μείωση του χρόνου εκτέλεσης του κώδικα. Εξοπλίζοντας τον κώδικα με παράλληλες υπορουτίνες είναι ταυτόχρονα δυνατόν να μελετάμε πεδία στροβιλότητας με κατανομές στροβιλότητας οι οποίες αποτελούνται από πολύ περισσότερα στοιχεία. Ως αποτέλεσμα οι υπολογισμοί θα είναι πολύ καλύτεροι αφού θα έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε μικρότερες τιμές της παραμέτρου αποκοπής και άρα να πετύχουμε καλύτερες αναπαραστάσεις σε συνδυασμό με την εκτέλεση της ολοκλήρωσης για τις κοντινές επαγωγές όπως συζητήσαμε παραπάνω. Στις μεθοδολογίες παράλληλης επεξεργασίας να σημειωθεί ότι έχει προστεθεί πρόσφατα στο σύγχρονο οπλοστάσιο και η χρήση καρτών γραφικών βασισμένη σε πανίσχυρους επεξεργαστές γραφικών (GPGPU - General Purpose Graphics Processing Units). Η διαδικασία παραλληλοποίησης του κώδικα αποτελεί ένα φυσικό στάδιο εξέλιξης η οποία έχει ήδη συμπεριληφθεί στον κώδικα GENUVP που χρησιμοποιείται με επιτυχία από το εργαστήριο Αεροδυναμικής της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

Μία διαφορετική όψη της μεθοδολογίας με την οποία ασχοληθήκαμε στο κεφάλαιο 3 αλλά μετά αποσιωπήσαμε είναι αυτή της αναδιανομής των στοιχείων. Επειδή το συγκεκριμένο σχήμα αναδιανομής των στοιχείων δεν έχουμε υπόψη μας αν έχει χρησιμοποιηθεί σε κάποια παρόμοια εργασία δεν γνωρίζουμε τις επιδόσεις του σε γενικές περιπτώσεις προσομοίωσης. Η συγκεκριμένη παρατήρηση οδηγεί στην ανάγκη μελλοντικής περαιτέρω διερεύνησης της συγκεκριμένης επιλογής-μας έως ότου καθιερωθεί ως αξιόπιστη. Μία πρόταση για μελέτη κινείται σε αυτό τον άξονα με την μελέτη επιδόσεων του σχήματος αναδιανομής των στοιχείων που αναπτύξαμε. Η εργασία αυτή αποτελεί ιδιαίτερη με την έννοια ότι το σχήμα αναδιανομής που προτείνουμε έχει δύο δυνατά σημεία.

Πρώτον, λειτουργεί με παρεμβολές καμπυλών από τα στοιχεία στροβιλότητας ακολουθώντας την κλίση που ορίζει το διάνυσμα στροβιλότητας του στοιχείου και είναι ανεξάρτητο πλέγματος. Τα περισσότερα σχήματα αναδιανομής που χρησιμοποιούνται επαναπροσδιορίζουν το πεδίο στροβιλότητας και επαναλαμβάνουν την διαδικασία αρχικοποίησης των στοιχείων βάση του νέου πεδίου στροβιλότητας. Αποτέλεσμα αυτού είναι να χρησιμοποιείται, σε μία κατά τα άλλα μέθοδο που χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη πλέγματος, το πλέγμα για τους υπολογισμούς του πεδίου στροβιλότητας. Ακόμα και σε άλλα παρόμοια σχήματα δεν γίνεται η αναδιανομή των στοιχείων πάνω στην καινούργια γραμμή που αυτά

ορίζουν αλλά σε μία ευθεία γραμμή μεταξύ διαδοχικών στοιχείων. Για περισσότερες πληροφορίες σε σχήματα αναδιανομής παραπέμπουμε στα (Cottet & Koumoutsakos, 2000) και (Knio & Ghoniem, 1991). Δεύτερον, σε περίπτωση που οι επιδόσεις του είναι καλές μπορούμε να το εξοπλίσουμε εύκολα με ένα σχήμα επαναπροσδιορισμού της τοπολογίας των δινών. Όπως συζητήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, τα τμήματα της ίδια δίνη που βρίσκονται κοντά έχουν μηδενική συνισταμένη συνεισφορά στο πεδίο στροβιλότητας και όπως φαίνεται αυτά παραμένουν ενωμένα. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τα πορίσματα της θεωρητικής μελέτης για τον επαναπροσδιορισμό της τοπολογίας των δινών (Nazarenko & West, 2003) και της αριθμητικής προσομοίωσης (Marshall, Bransher, & Giovannini, 2001). Αντικαθιστώντας τα τμήματα αυτά με κατάλληλο τρόπο μπορούμε να φτιάξουμε νέες δίνες. Οπότε το θέμα που τίθεται είναι να βρεθούν τα κατάλληλα κριτήρια με τα οποία θα προσδιορίζεται τότε θα αλλάζει η τοπολογία των δινών και με ποιο τρόπο.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που θα μπορούσε να μελετηθεί, ταυτόχρονα ως πρόβλημα αναφοράς για το σχήμα αναδιανομής και επαναπροσδιορισμού της τοπολογίας των δινών, είναι η σύγκρουση και η αλληλεπίδραση δακτυλιοειδών δινών, όπως παρουσιάζεται για ένα σχήμα επαναπροσδιορισμού της τοπολογίας των δινών στο (Kivotides & Leonard, 2003). Γενικά στα προβλήματα δακτυλιοειδών δινών, έχουμε μία προβλέψιμη συμπεριφορά των επιμηκύνσεων των δινών ενώ ταυτόχρονα κατά την σύγκρουση παρατηρείται η ανάπτυξη μικρών διαταραχών, από τις οποίες δημιουργούνται μικρότερες δακτυλιοειδείς δίνες. Πειραματικά αποτελέσματα μπορούν να βρεθούν στο (Green, 1995). Για αυτούς τους λόγους αποτελεί ιδανική περίπτωση για την σύγκριση αποτελεσμάτων τόσο του σχήματος αναδιανομής όσο και του σχήματος επαναπροσδιορισμού της τοπολογίας των δινών με αντίστοιχα πειραματικά.

Τέλος, τα πεδία στροβιλότητας που χρησιμοποιήσαμε στην προσομοίωση φέρουν κάποια διαταραχή. Είναι δύσκολο στην γενική περίπτωση να κατασκευάσουμε πεδία στροβιλότητας τα οποία θα φέρουν κάποια διαταραχή. Το νέο πεδίο στροβιλότητας που θα προκύψει με την επιβολή της διαταραχής θα πρέπει με κάποια έννοια να συσχετίζεται με το πεδίο στροβιλότητας χωρίς τη διαταραχή. Ας πούμε ότι η κυκλοφορία των πεδίων στροβιλότητας πρέπει να είναι ίδια. Πέρα από αυτό το νέο πεδίο πρέπει να είναι σωληνοειδές. Απαιτείται περαιτέρω μελέτη του αν είναι πάντα δυνατόν να φτιάξουμε πεδία με διαταραχές τα οποία είναι συμβατά με αυτές τις συνθήκες και αν δεν είναι πάντα δυνατόν ποιες είναι οι συνθήκες κατασκευής του πεδίου με την διαταραχή. Η δυνατότητα κατασκευής συμβατών, με τις παραπάνω έννοιες, πεδίων στροβιλότητας με διαταραχές είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ώστε να μελετηθεί η επίδραση και άλλων διαταραχών πέρα της ημιτονοειδούς.

5.4.2 Προτάσεις για Μελέτη Περιοδικών Φαινομένων

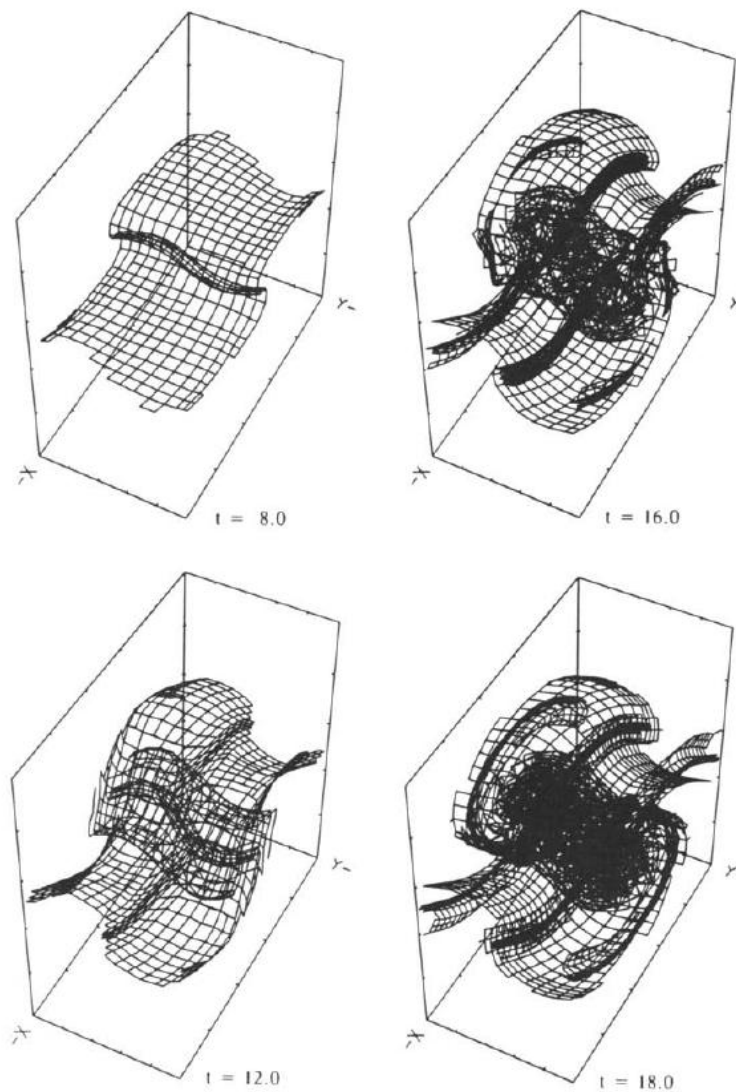
Η ανάλυση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα, χρησιμοποιώντας τις προσομοιώσεις του κώδικα, έδωσε μία ποιοτική εικόνα των μηχανισμών με τους οποίους λειτουργεί το φαινόμενο. Το ζήτημα όμως που παραμένει αναπάντητο αναφέρεται στην πιθανή αξία των αποτελεσμάτων αυτών στην αεροναυπηγική. Η αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων σε καταστάσεις πραγματικής πτήσης ενός αεροσκάφους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί ο ρυθμός με τον οποίο αναπτύσσονται περιοχές οι οποίες πιθανόν να είναι επικίνδυνες για ένα αεροσκάφος που εισέρχεται σε αυτές. Επιπλέον, είναι δυνατή η χρήση του κώδικα για την μοντελοποίηση του μακρινού ομόρου ενός αεροσκάφους και της αλληλεπίδρασης του με ένα αεροσκάφος το οποίο θα βρεθεί σε διάφορες γειτονικές θέσεις προκαλώντας διαφορετικές αλλαγές ανάλογα με την κατεύθυνση συνάντησης τους. Τέλος, είναι δυνατόν να προκύψουν προτάσεις για σχεδίαση πτέρυγας και βοηθητικών επιφανειών. Ένα κριτήριο σχεδίασης, για παράδειγμα, είναι η αλληλεπίδραση των δινών να είναι τέτοια ώστε να υποβαθμίζονται γρήγορα οι περιοχές που η στροβιλότητα είναι συγκεντρωμένη. Δηλαδή να επινοηθεί και να προταθεί κάποια παραλλαγή της γεωμετρίας της πτέρυγας, με την οποία θα υποβαθμίζεται η στροβιλότητα χωρίς παράπλευρα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα μείωση στο βαθμό απόδοσης της πτέρυγας. Ένας απλός μηχανισμός υποβάθμισης της στροβιλότητας προτείνεται ήδη από τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε. Εξαιτίας της επιμήκυνσης των δινών ο πυρήνας σταδιακά μικραίνει και η στροβιλότητα συγκεντρώνεται όλο και περισσότερο στο κέντρο της δίνης. Τελικά, τα φαινόμενα συνεκτικότητας θα προκαλέσουν πιο γρήγορα την καταστροφή της.

Σε θεωρητικό επίπεδο, η θεωρία ευστάθειας, κατά την εφαρμογή της σε συστήματα δινών, προβλέπει αν η διαταραχή που επιβάλλουμε στις δίνες είναι ευσταθής ή ασταθής. Δεν υπάρχει κάποια θεωρία που να προβλέπει τα μήκη κύματος των διαταραχών που αναπτύσσονται. Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού δεν είναι καθόλου προφανής. Από την άλλη μία θεωρία με την οποία να προβλέπεται το μήκος κύματος των διαταραχών θα έδινε σημαντική ώθηση στην πρόβλεψη των φαινομένων που θα αναπτυχθούν. Μέχρι στιγμής, πειραματικά αποτελέσματα είναι η καλύτερη πηγή για την πρόβλεψη του μήκους κύματος των διαταραχών.

Πέρα από τις αστάθειες που εμφανίζονται στις δίνες ακροπτερυγίων υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις στις οποίες τα φαινόμενα μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας περιοδικά πεδία στροβιλότητας. Δύο παραδείγματα που έχουμε υπόψη μας είναι η τρισδιάστατη αστάθεια Kelvin-Helmholtz και το πεδίο στροβιλότητας οριακού στρώματος. Χρησιμοποιώντας τον κώδικα που αναπτύξαμε και συμπεριλαμβάνοντας τις απαραίτητες, ανά περίπτωση, υπορουτίνες είναι δυνατόν να γίνουν προσομοιώσεις τέτοιων φαινομένων.

Η αστάθεια που παρατηρείται κοντά στην διεπιφάνεια που ορίζεται από την παράλληλη ροή ρευστών διαφορετικών πυκνοτήτων και ταχυτήτων ονομάζεται αστάθεια Kelvin-Helmholtz (Kundu, 1990). Τα ρευστά κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες γειτονικά της διεπιφάνειας,

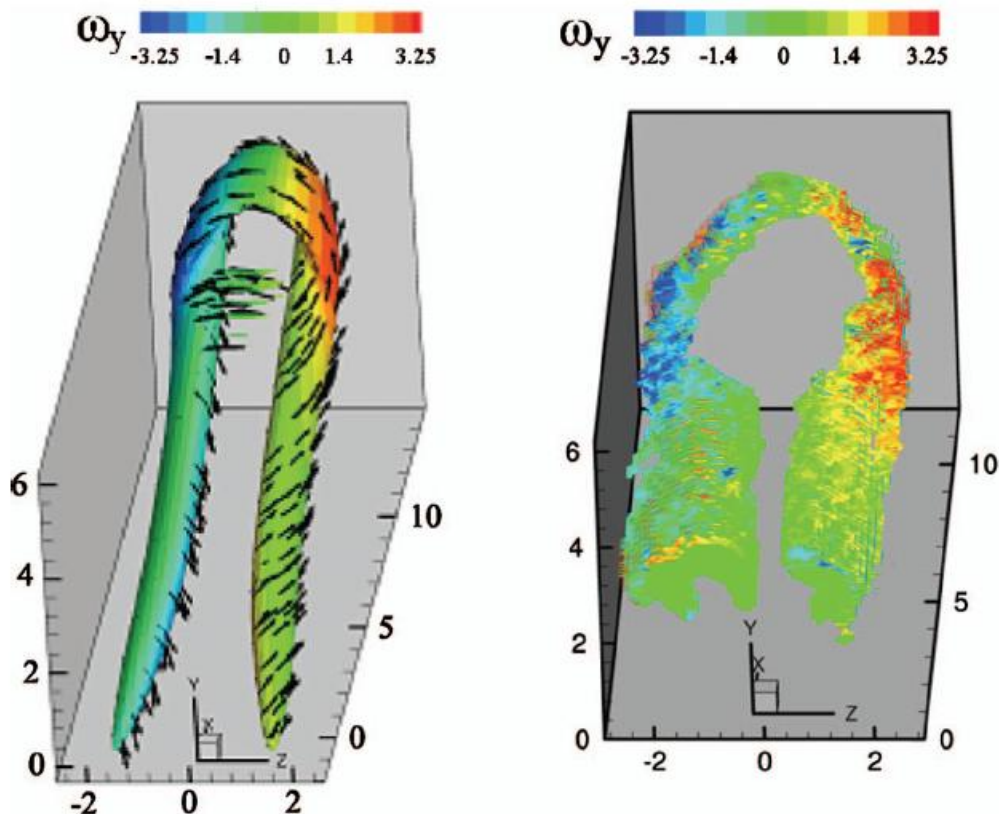
άρα κοντά στην επιφάνεια υπάρχει μία περιοχή μικρού πάχους στην οποία έχουμε κατανομημένη στροβιλότητα και μοντελοποιείται ως ένα φύλλο διάτμησης άπειρης έκτασης. Μία μικρή διαταραχή προκαλεί την αναδίπλωση της περιοχής κοντά στο φύλλο διάτμησης και την ανάπτυξη σπειροειδών δομών οι οποίες παρατηρούνται περιοδικά. Η σπειροειδής δομή είναι η πλέον χαρακτηριστική δομή της αστάθειας. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις δομές αυτές όπως παρατηρούνται πειραματικά. Στις τρεις διαστάσεις παρατηρούνται και άλλες δευτερεύουσες δομές οι οποίες προκαλούνται από αναδιπλώσεις του φύλλου διάτμησης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα από την αριθμητική προσομοίωση με στοιχεία στροβιλότητας που γίνεται στο (Knio & Ghoniem, 1991). Αντίστοιχα αποτελέσματα δίνονται στο (Rogers & Moser, 1992).



Σχήμα 97. Η αστάθεια Kelvin-Helmholtz στις τρεις διαστάσεις

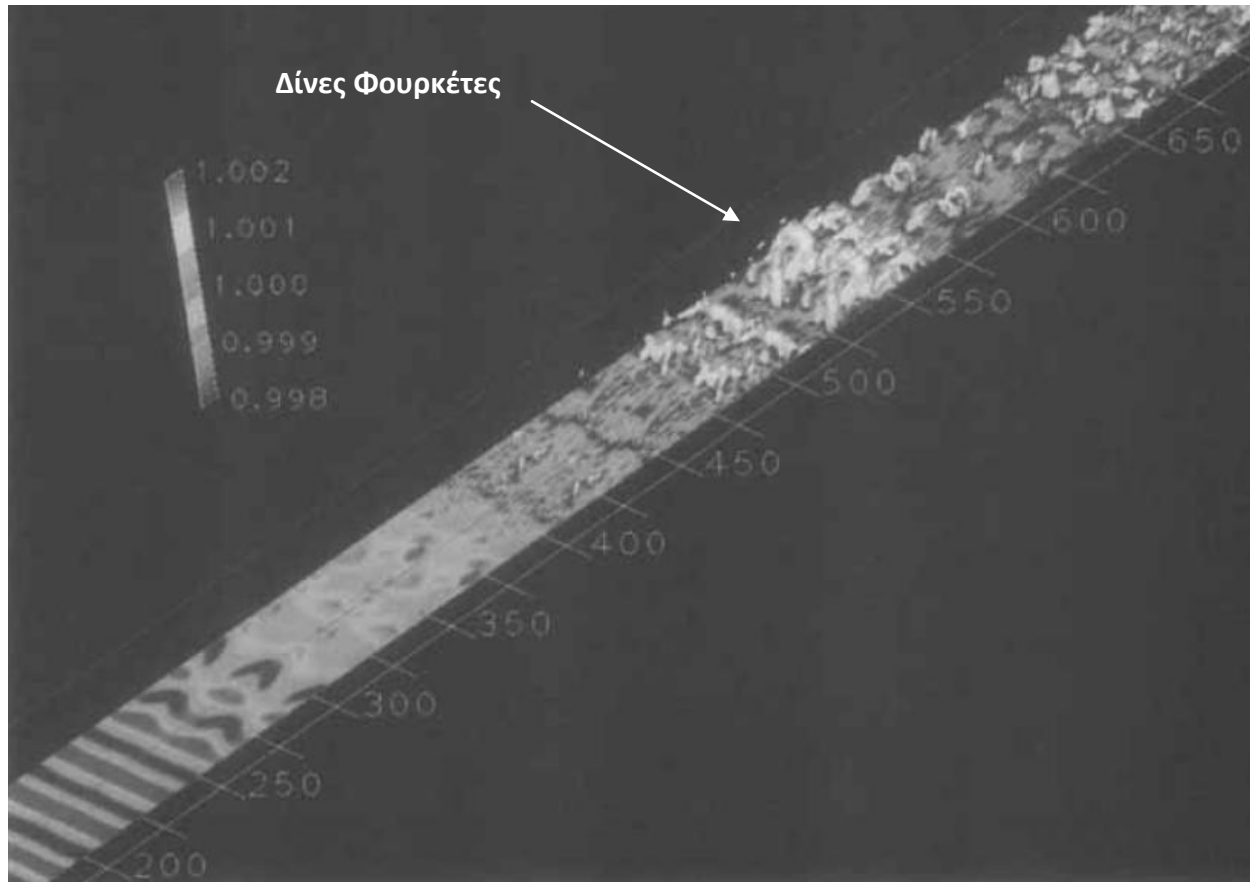
Για την πλήρη αναπαράσταση του φαινομένου πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις αλλαγές του πεδίου πυκνότητας. Προτάσεις για την αντιμετώπιση του τελευταίου προβλήματος βρίσκουμε στα (Κνίο & Ghoniem, 1991) και (Rogers & Moser, 1992). Για παραπάνω πληροφορίες παραπέμπουμε στα, (Kundu, 1990) όσο αφορά την θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος σε δύο διαστάσεις, (Zhdanov, 1995) αντίστοιχα για την θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος για τρεις διαστάσεις και (Funada & Joseph, 2001) για την επίδραση της επιφανειακής τάσης στο φαινόμενο.

Μέσα στο οριακό στρώμα αναπτύσσεται κατανομή στροβιλότητας. Αποτέλεσμα είναι η συνεχόμενη δημιουργία και αλληλεπίδραση δινών με σχήμα φουρκέτας (hairpin vortices). Οι δίνες φουρκέτες παρατηρούνται ότι εξελίσσονται περιοδικά. Οι δίνες φουρκέτες θεωρούνται ως το αρχικό στάδιο δημιουργίας τύρβης (Head & Bandyopadhyay, 1981), (Green, 1995). Η εξέλιξη, λοιπόν, των δινών με δομή φουρκέτας μπορεί να δώσει πληροφορίες για την εξέλιξη της τύρβης. Για την αναπαράσταση του φαινομένου πρέπει να επεκταθεί η αριθμητική μέθοδος αλλά και ο κώδικας με κατάλληλο τρόπο ώστε συμπεριλαμβάνονται οι επιδράσεις των τοιχωμάτων στην ροή, όπως περιγράφεται στο (Cottet & Koumoutsakos, 2000). Μία τέτοια επέκταση του κώδικα, ώστε να συμπεριλαμβάνει τις επιδράσεις των στερεών τοιχωμάτων, αποτελεί από μόνη της μία ξεχωριστή εργασία.



Σχήμα 98. Δίνες Φουρκέτες – Μετρήσεις HPV

Για πειραματικά αποτελέσματα σχετικά με τις δομές που αναπτύσσονται στο οριακό στρώμα, στα οποία παρατηρούνται και οι δίνες φουρκέτες, παραπέμπουμε στα (Svizher & Cohenb, 2006), (Green, 1995), (Head & Bandyopanday, 1981). Για ανάλυση ευστάθειας των σχετικών δομών και υπολογιστικές προσομοιώσεις παραπέμπουμε στα (Suponitsky & Cohen, 2005), (Schorra & Hussain, 2002) και (Ducros, Compte, & Lesieur, 1996). Στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε στιγμιότυπο προσομοίωσης, το οποίο πήραμε από την εργασία (Ducros, Compte, & Lesieur, 1996).



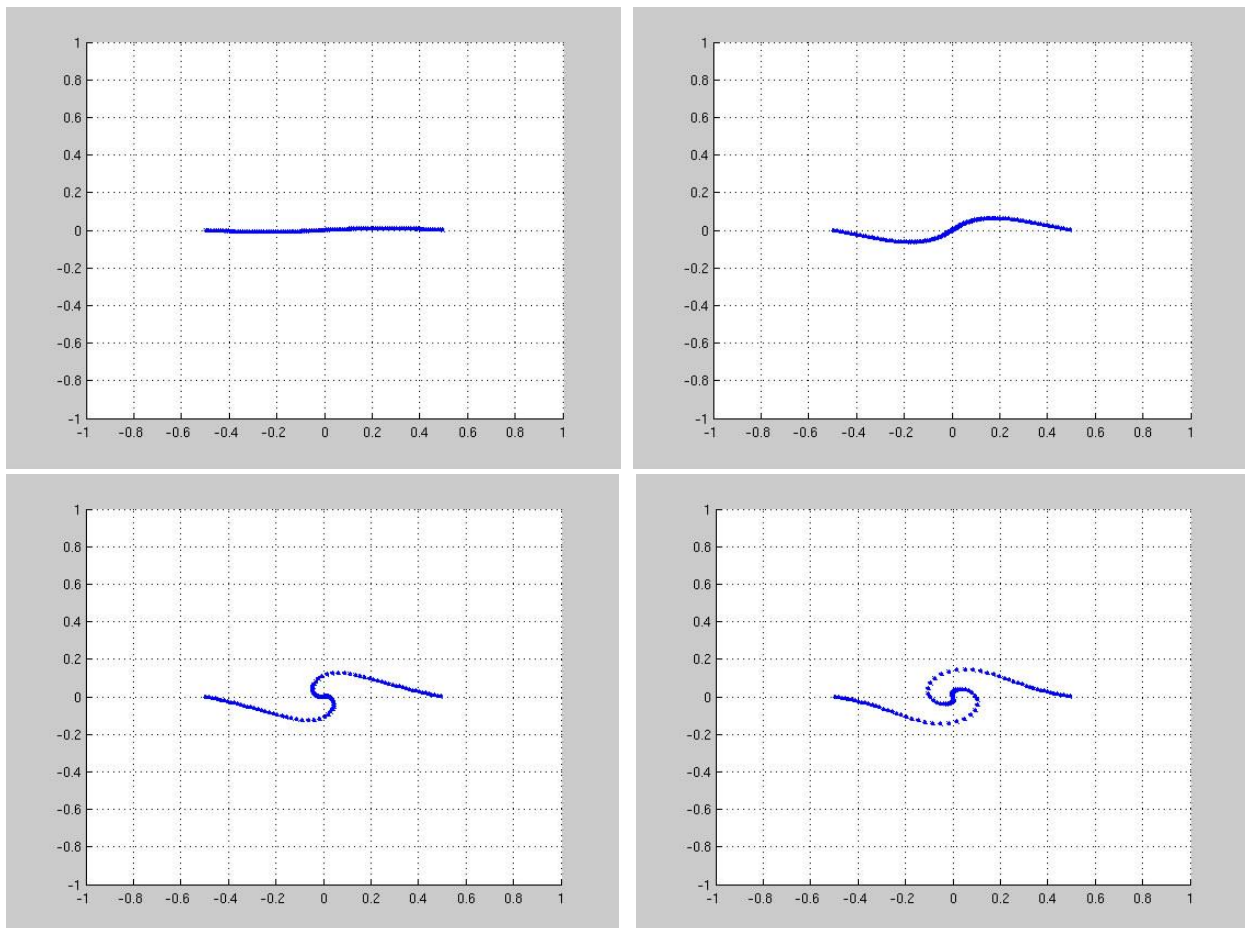
Σχήμα 99. Αριθμητική προσομοίωση οριακού στρώματος και δίνες φουρκέτες

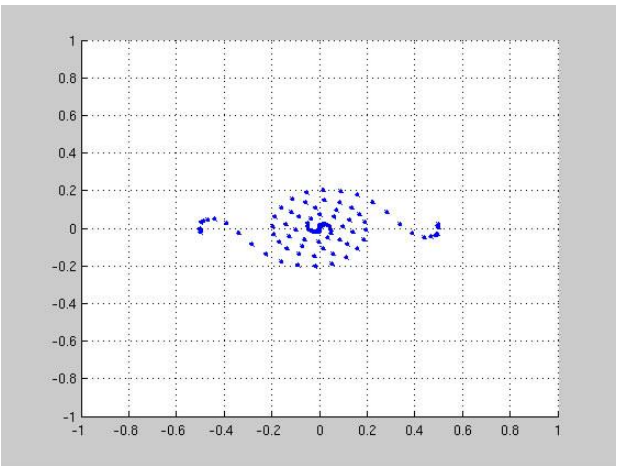
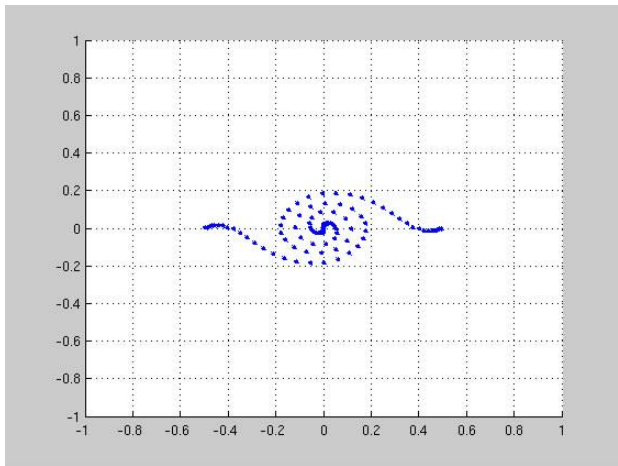
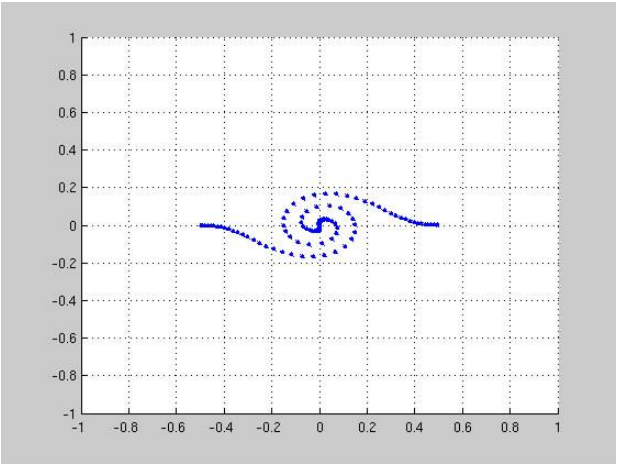
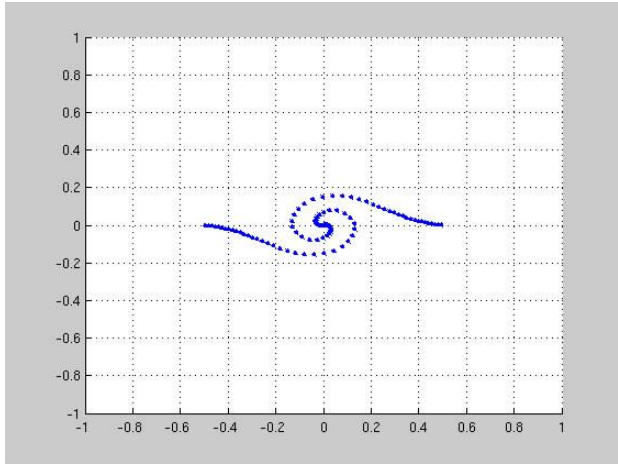
6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΙΔΕΙΞΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΔΙΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε βρίσκονται ακόμα σε πρώιμο στάδιο και απαιτείται περαιτέρω ανάλυση για την διεξαγωγή συμπερασμάτων. Επιπλέον, τα αποτελέσματα έχουν προκύψει χωρίς αναδιανομή των στοιχείων η οποία είναι απαραίτητη.

6.1 Αστάθεια Kelvin-Helmholtz

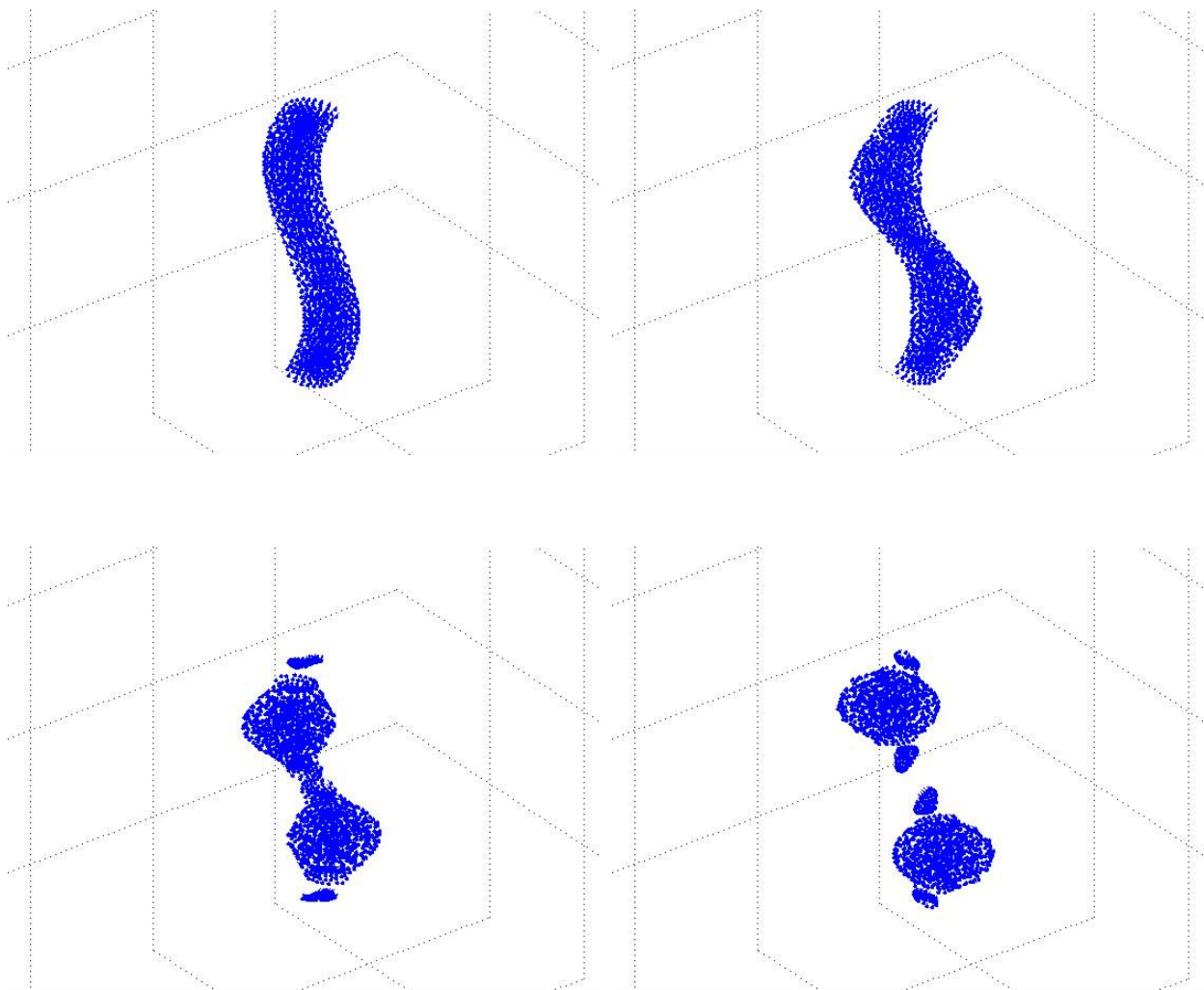
Παρουσιάζουμε αποτελέσματα για την αστάθεια Kelvin-Helmholtz στις δύο διαστάσεις. Τα αθροίσματα που εμφανίζονται στις περιοδικές επαγωγές έχουν παρόμοια μορφή και για τις δύο διαστάσεις. Η ανάλυση για την κατασκευή των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων είναι παρόμοια. Σε αυτή την περίπτωση, η κατανομή στροβιλότητας εκφυλίζεται σε κατανομή κυκλοφορίας. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την εξέλιξη της αστάθειας Kelvin-Helmholtz.

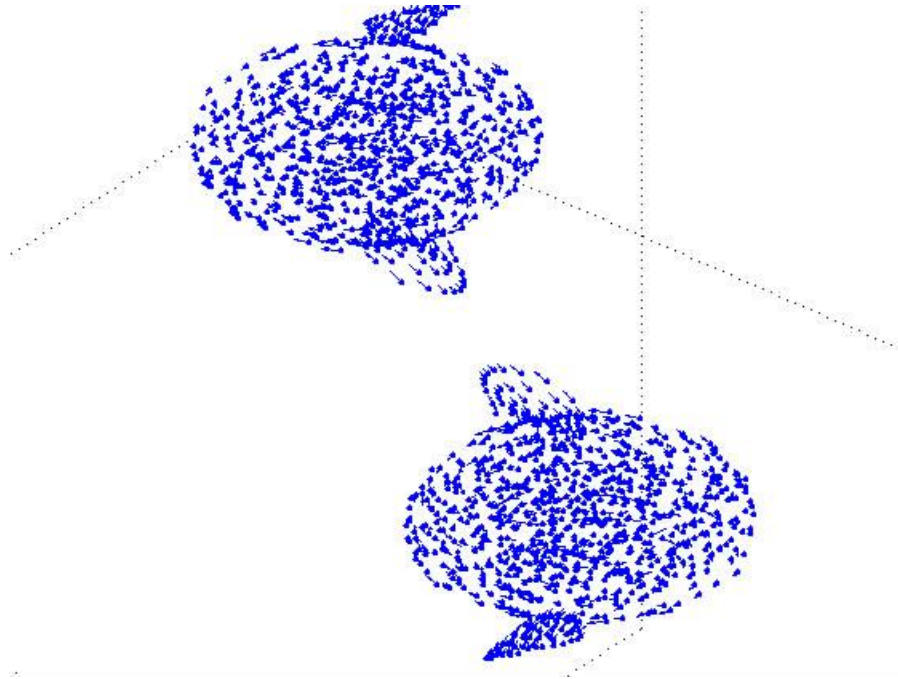




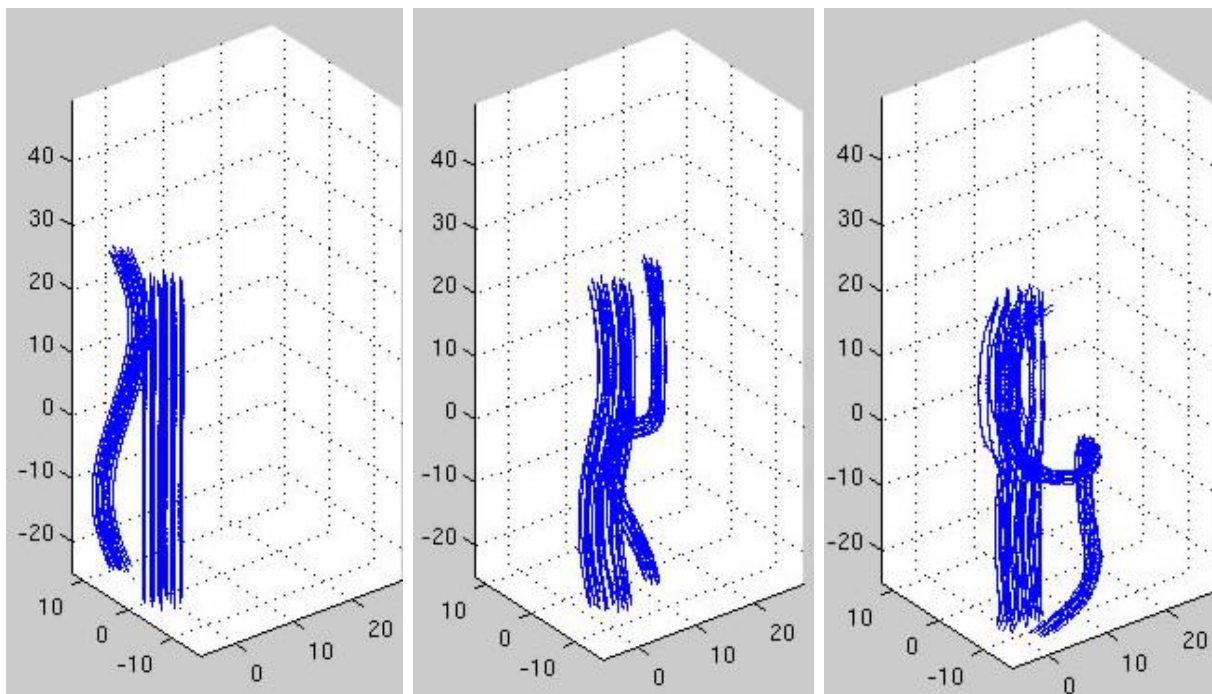
6.2 Δίνες με διαταραχές και κατανομή στοιχείων στροβιλότητας στο πυρήνα της δίνης

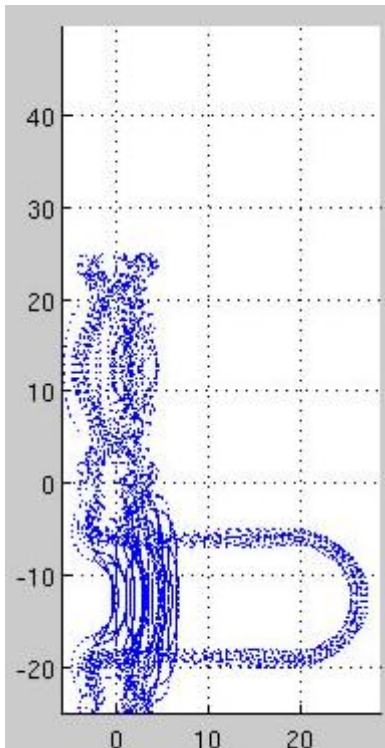
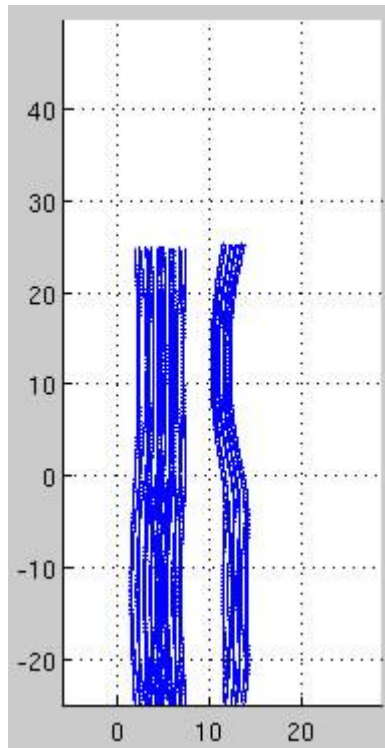
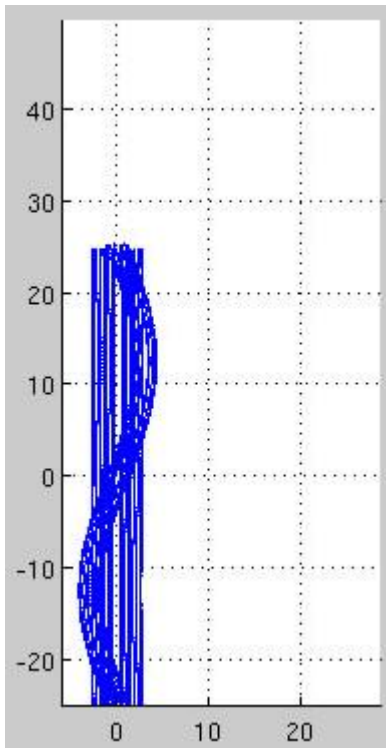
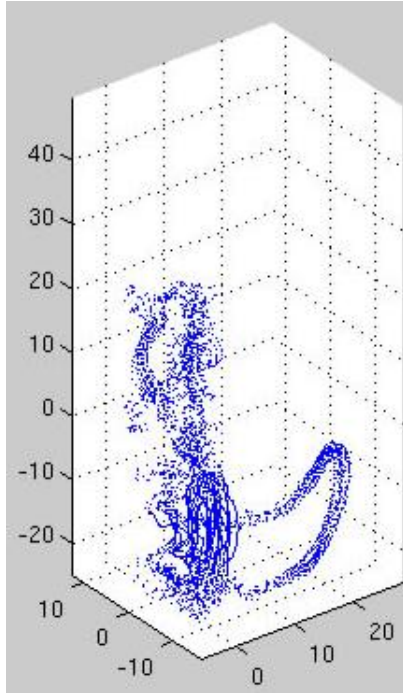
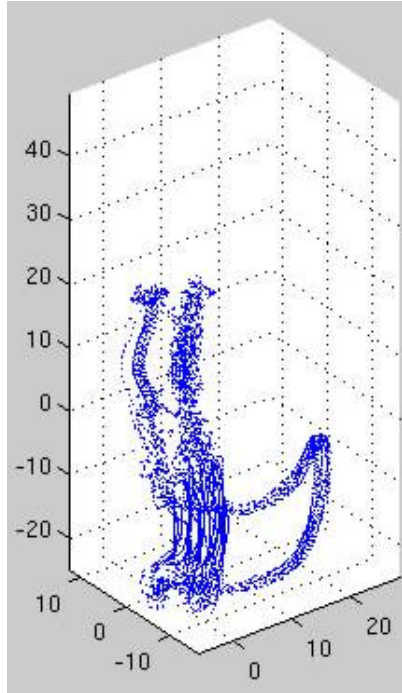
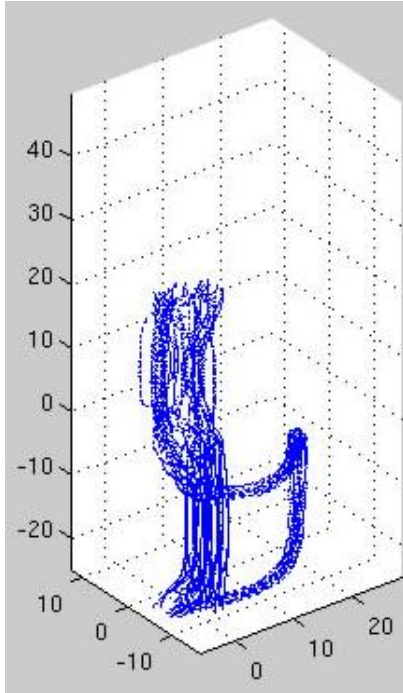
Παρουσιάζουμε την εξέλιξη μίας δίνης Rankine με ημιτονοειδή διαταραχή, χωρίς αναδιανομή των στοιχείων. Η διαταραχή δεν είναι μεγάλου μήκους κύματος και μετά από ορισμένες περιστροφές καταστρέφεται. Παρατηρήσαμε ότι δημιουργούνται δύο περιοχές όπου βρίσκονται συγκεντρωμένα τα στοιχεία στροβιλότητας. Η καταστροφή της δίνης δεν είναι ένδειξη ότι το φαινόμενο είναι ασταθές. Πιθανόν το αποτέλεσμα να οφείλεται στην συγκέντρωση αριθμητικών σφαλμάτων και στο ότι δεν έχουμε αναδιανομή των στοιχείων.





Αντίστοιχα παρουσιάζουμε και μία περίπτωση ενός ζεύγους δινών με $\gamma=0,5$. Τα αποτελέσματα προέκυψαν χωρίς αναδιανομή των στοιχείων.





7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Anderson, C., & Greengard, C. (1985). On Vortex Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis* , 22 (3).
- Bartle, B. (1975). *The Elements of Real Analysis*. Wiley.
- Batchelor, G. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Beale, J., & Majda, A. (1982). Vortex Methods I: Convergence in three dimensions. *Mathematics of Computation* , 39 (159), 1-27.
- Beale, J., & Majda, A. (1982). Vortex Methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions. *Mathematics of Computation* , 39 (159), 29-52.
- Chatelain, P., Curioni, A., Bergdorf, M., Rossinelli, D., Adreon, W., & Koumoutsakos, P. (2008). Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 197 (13-16), 1296-1304.
- Chorin, A., & Bernard, P. S. (1973). Discretization of a vortex sheet with an example of roll-up. *Journal of Computational Physics* , 13 (3), 423-429.
- Chorin, A., & Marsden, J. (1990). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag.
- Christiansen, J. P. (1973). Numerical Solutions of hydrodynamics by the method of point vortices. *Journal of Computational Physics* , 135 (2), 189-197.
- Cottet, G., & Koumoutsakos, P. (2000). *Vortex Methods: Theory and Practise*. Cambridge University Press.
- Couet, B., Buneman, O., & Leonard, A. (1981). Simulation of three-dimensional flows with vortex-in-cell methods. *Journal of Computational Physics* , 39 (2), 305-328.
- Crouch, J. (2005). Airplane trailing Vortices and their Control. *Comptes Rendus Physique* , 6 (4-5), 487-499.
- Crow, C. (1970). Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices. *AIAA Journal* , 8 (12), 2172-2179.
- Dazin, A., Dupont, P., & Stanislas, M. (2006). Experimental characterization of the instability of the vortex ring. Part I: Linear phase. *Experiments in Fluids* , 40 (3), 383-399.

Ducros, F., Comte, P., & Lesieur, M. (1996). Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate. *Journal of Fluid Mechanics* , 326, 1-36.

Edwards, B. (2005). *The Modern airport Terminal*. Routledge.

Funada, T., & Joseph, D. (2001). Viscous potential flow analysis of Kelvin-Helmholtz instability in a channel. *Journal of Fluid Mechanics* , 445, 263-283.

Green, S. (1995). *Fluid Vortices*. Kluwer Academic Publishers.

Günter, M. (1967). *Potential Theory*. Frederick Ungar Publishing .

Head, M., & Bandyopandyay, P. (1981). New Aspects of Turbulent Boundary-Layer structure. *Journal of Fluid Mechanics* , 107, 297-388.

Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw Hill.

Hockney, R. W., & Eastwood, J. W. (1981). *Computer Simulation Using Particles*. New York: McGraw-Hill.

Jinhee, J., & Fazle, H. (1995). On the Identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics* , 285, 69-94.

Kivotides, D., & Leonard, A. (2003). A computational model of Vortex Reconnection. *Europhysics Letters* , 63 (3), 354-360.

Knio, O. M., & Ghoniem, A. F. (1991). Journal of Computational Physics. *Three-Dimensional Simulation of Vortex Rollup and Entering in a Shear Layer* , 97, 172-223.

Krueger, P. S., Dabiri, J. O., & Gharib, M. (2003). The formation number of vortex rings formed in the presence of uniform background co-flow. *Physics of Fluids* , 15 (7).

Kundu, K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press.

Leonard, A. (1980). Vortex methods for flow simulations. *Journal of Computational Physics* , 37 (3), 289-335.

Leweke, T., & H.K., W. (1998). Three-Dimensional Dynamics of a Counterrotating Vortex Pair. Proc: 8th International Symposium of Flow Visualisation.

Marchioro, C., & Pulvirenti, M. (1994). *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Springer-Verlag.

Marshall, J. S., Bransher, P., & Giovannini, A. (2001). Interaction of unequal anti-parallel vortex tubes. *Journal of Fluid Mechanics* , 446, 229-252.

Nazarenko, S., & West, R. (2003). Analytical solution for nonlinear Schrodinger vortex reconnection. *Journal of Low Temperature Physics* , 132.

Nelson, R. (2004). The Trailing Vortex Wake Hazard: Beyond the Takeoff and Landing Cooridors. Rhode Island: AIAA.

Olver, F. (1974). *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press.

Ortega, M. (2001). *Stability Characteristics of Counter-Rotating Vortex Pairs in the Wakes of Triangular-Flapped Airfoils*. Berkley: PhD thesis, University of California .

Panton, R. (2005). *Incompressible flow* . New Jersey: Wiley.

Renardy, M., & Rogers, R. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Rogers, H. J. (1999). *Multivariable Calculus with Vectors*. New Jersey: Prentce Hall.

Rogers, M. M., & Moser, R. D. (1992). The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz rollup. *Journal of Fluid Mechanics* , 243, 183-226.

Rosenhead, L. (1931). The formation of vortices from a surface of discontinuities. *Royal Society of London*, (σ . 170).

Rosenhead, L. (1932). The point vortex approximation of vortex sheets. *Royal Society of London*, (σ . 170-192).

Rossi, M. (2000). Of vortices and vortical layers: an overview. Στο Maurel, & P. Petijeas, *Vortex Structure and Dynamics* . Springer Verlag.

Saffman, P. (1992). *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.

Schoppa, W., & Hussain, F. (2002). Coherent Structure Generation in near-wall turbulence. *Journal of Fluid mechanics* , 453, 57-108.

Suponitsky, V., & Cohen, J. (2005). The generation of streaks and hairpin vortices from a localized vortex disturbance embedded in unbounded uniform shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* , 535, 65-100.

Svizher, A., & Cohenb, J. (2006). Holographic particle image velocimetry measurements of hairpin vortices. *Physics of fluids* .

Thomas, P., & Auerbach, D. (1994). The Observation of the Simultaneous Development of a long- and a short-wave Instability Mode on a Vortex Pair. *Journal of Fluid Mechanics* , 265, 289-302.

Udriste, C. (2000). *Geometric Dynamics*. Kluwer Academic Publishers.

Voutsinas, S. (2006). Vortex methods in aeronautics: how to make things work. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* , 20 (1), 3-18.

Winckelmans, G., & Leonard, A. (1993). Contributions to Vortex Particle Methods for the Computation of Three-Dimensional Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics* , 109 (2), 247-273.

Zhdanov, S. K. (1995). Nonlinear theory of Kelvin-Helmholtz instability. *Physica D* , 87, 375-379.

Πολίτης, Γ. (2003). *Ροές με Άνωση*. Αθήνα: Σημειώσεις Μαθήματος, ΕΜΠ.