

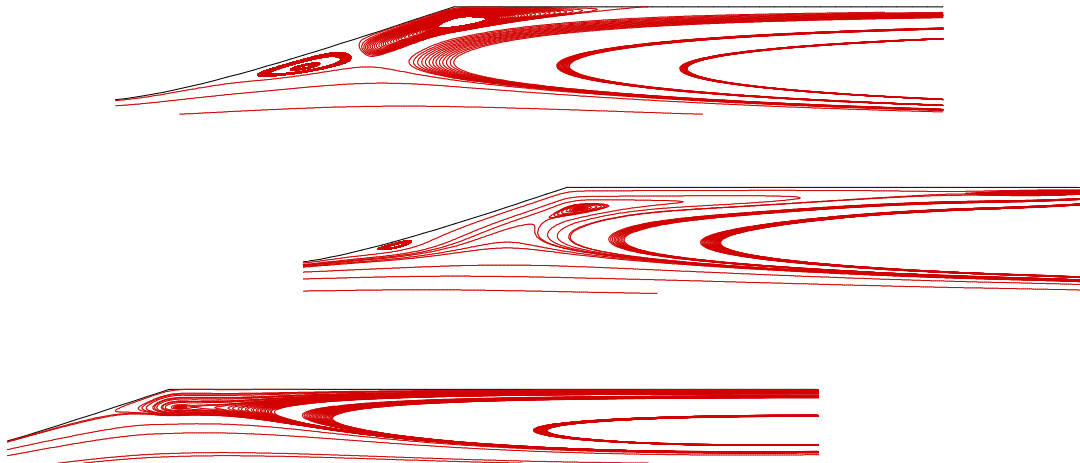


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ**  
**ΠΕΔΙΩΝ ΡΟΗΣ**  
**ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ**  
**ΣΕ ΑΞΟΝΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ**

**ΙΑΣΟΝΑΣ ΖΗΣΗΣ**



επιβλέπων  
**Δ.Σ. ΜΑΘΙΟΥΛΑΚΗΣ**  
αναπληρωτής καθηγητής

**ΑΘΗΝΑ 2010**

**ΙΑΣΟΝΑΣ ΖΗΣΗΣ**  
Αθήνα, Ιούλιος 2010

---

Επιτρέπεται η ανατύπωση και αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων και των διαγραμμάτων της μελέτης αυτής, με μόνες προϋποθέσεις τη μη εμπορευματοποίησή τους και την αναφορά της προέλευσής τους. Ο συγγραφέας επιφυλλάσσει για τη συμφωνία με τα συμπεράσματα και τις θέσεις που θα προκύψουν από τη χρήση τους.

*οι μεγάλοι είναι μεγάλοι,  
γιατί εμείς είμαστε γονατιστοί...*

*αφιερώνεται  
σε όσους μου έδειξαν  
να αναζητώ και να μαθαίνω...*

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εξετάζοντας το θέμα, αυτής της εργασίας, από την πλευρά της κλασικής ρευστομηχανικής, δεν αποτελεί παρά τη μελέτη στρωτής ασυμπίεστης ροής σε συγκλίνον – αποκλίνον ακροφύσιο. Όμως, η μελέτη των ροϊκών φαινομένων σε στενωμένους αγωγούς, έλκει το ενδιαφέρον της από τη στένωση των αρτηριών του ανθρώπινου οργανισμού και τις σοβαρότατες επιπτώσεις που έχει στην καλή λειτουργία του.

Αντιλαμβανόμενος τον βιοϊατρικό χαρακτήρα του θέματος, υπήρξα δύσπιστος για το κατά πόσο ένας μηχανικός, είναι δυνατόν να διαπραγματευτεί ένα καθαρά ιατρικό θέμα, περιγραφόμενο από ιατρικούς όρους και δομημένο πάνω στην ιατρική αντίληψη, με τρόπο τέτοιο, ώστε να γίνεται ταυτόχρονα κατανοητός από φορείς των δύο διαφορετικών τρόπων σκέψης: των γιατρών και των μηχανικών.

Θα μπορούσαμε να φανταστούμε τη σχέση τους σαν δύο διαφορετικές γλώσσες, για τις οποίες δεν υπάρχει απευθείας αντιστοίχιση λέξεων και καθένας θα πρέπει να αντιληφθεί τις έννοιες με βάση τις γνώσεις που έχει σε καθεμία γλώσσα. Αυτό, βέβαια, δεν απέχει κατά πολύ από την πραγματικότητα, και αντικατοπτρίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία, όπου οι εργασίες από την ρευστομηχανική οπτική γωνία δυσκολεύονται να εισάγουν τα μετρούμενα μεγέθη στην επεξήγηση των βιοϊατρικών μηχανισμών, ενώ οι βιοϊατρικές εργασίες αδέξια, πολλές φορές, προσπαθούν να γενικεύσουν ρευστομηχανικές παρατηρήσεις.

Το στοιχείο, που φέρνει κοντά τους δύο τρόπους σκέψης, είναι ένας κοινός ακρογωνιαίος λίθος τους: *και οι δύο είναι καταδικασμένοι να απαιτούν αποτέλεσμα, πρακτικό και άμεσα εφαρμόσιμο...*

Μέσα από αυτό το πρίσμα, τα βιοϊατρικά ερωτήματα θα παράγουν ρευστομηχανικές μελέτες, που θα προσπαθούν να τα απαντήσουν με τις μεθόδους τους, ενώ οι ρευστομηχανικές παρατηρήσεις θα ανατροφοδοτούν τις βιοϊατρικές θεωρήσεις και απορίες.

Για το λόγο αυτό, δε θα προσπαθήσουμε να μιλήσουμε στην «ιατρική γλώσσα», που δε γνωρίζουμε, αλλά θα διαπιστώσουμε κάποια ερωτήματα της βιοϊατρικής και έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της ρευστομηχανικής για να μελετήσουμε και να προτυποποιήσουμε το πρόβλημα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα κάνουμε μία εισαγωγή στον τρόπο σύνδεσης των ρευστομηχανικών μεγεθών με τη φυσιολογία και την παθολογία του κυκλοφορικού συστήματος. Θα αναφέρουμε τις νέες αντιλήψεις για την έναρξη του σχηματισμού

στενώσεων και θα διαπιστώσουμε λόγους που κάνουν τις στενωμένες περιοχές άξιες μελέτης από βιοϊατρική σκοπιά. Συνοψίζοντάς τους θα λέγαμε ότι είναι περιοχές:

- υψηλού κινδύνου για αποκόλληση της αθηρωματικής πλάκας και δημιουργία θρόμβων
- υψηλής πιθανότητας αύξησης του βαθμού στένωσης
- υψηλού ενδιαφέροντος, καθώς νέες μελέτες δίνουν ενδείξεις για ενεργοποίηση βιοχημικών μηχανισμών μέσω των ροϊκών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε αυτές

Θα εξηγήσουμε τη σημασία των διατμητικών τάσεων στο αγγειακό τοίχωμα και τη μεγάλη επίδραση που έχει στις τιμές τους, το ιξώδες του αίματος, καθιστώντας τα μη νευτώνεια μοντέλα ρευστών επιβεβλημένα σε πολλές περιπτώσεις μελέτης της ροής του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα αναλύσουμε τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στην προτυποποίηση της ροής του αίματος μέσα στα αγγεία. Μέσα από αναφορές σε διάφορες, πειραματικές και υπολογιστικές, μελέτες προτυποποίησης αντίστοιχων προβλημάτων, θα δούμε την ισχύ, σε σχέση με την πραγματικότητα, των δικών μας θεωρήσεων για το μοντέλο αγωγού και αίματος.

Το τρίτο κεφάλαιο, περιλαμβάνει την παρουσίαση της μαθηματικής θεμελίωσης του προβλήματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα αναφέρουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, εξηγώντας τον τρόπο με τον οποίο το πακέτο υπολογιστικής ρευστομηχανικής, που χρησιμοποιήσαμε, επέλυσε τις εξισώσεις ροής, στις οποίες είχαμε καταλήξει στο τρίτο κεφάλαιο.

Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας, τη σύγκρισή τους με αυτά άλλων, αριθμητικών και πειραματικών, μελετών, ενώ παράλληλα θα σχολιάζουμε τα ευρήματά μας.

Τέλος, παραθέτουμε τα γενικά συμπεράσματα της μελέτης μας στο έκτο κεφάλαιο, τις βιβλιογραφικές αναφορές με τη σειρά εμφάνισής τους στο κείμενο, περίληψη της μελέτης στην ελληνική και αγγλική γλώσσα, ενώ στο παράτημα παραθέτουμε τα προγράμματα η/υ που αναπτύξαμε για τους σκοπούς της μελέτης αυτής.

---

*Από το εργαστήριο Αεροδυναμικής, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής, Δ.Σ. Μαθιουλάκη, για όλες τις φορές που βρήκα την πόρτα του εργαστηρίου ανοιχτή, ακόμα και για τις πιο ανούσιες απορίες μου, αλλά και για το πολύτιμο υπόβαθρο γνώσεων ρευστομηχανικής, που αποκόμισα από τις συζητήσεις μας.*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	4
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ I: από τα βιοϊατρικά φαινόμενα στα ρευστομηχανικά μεγέθη.....	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: φυσική προτυποποίησηση	
θεωρήσεις για τη ροή.....	13
θεωρήσεις για το τοίχωμα.....	16
θεωρήσεις για το μέσο.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: μαθηματική προτυποποίησηση	
γενική τοποθέτηση του προβλήματος.....	26
κατηγοριοποίηση των ρευστών.....	27
επιλυσιμότητα του συστήματος εξισώσεων.....	30
εξισώσεις ροής των μελετούμενων ρευστών.....	31
οριακές συνθήκες.....	38
εξισώσεις της πλήρως διαμορφωμένης ροής.....	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: αριθμητική επίλυση	
μέθοδος επίλυσης.....	42
εισαγωγή των οριακών συνθηκών.....	50
υπολογιστικό πλέγμα.....	51
ακρίβεια σύγκλισης υπολογισμών.....	53
ανεξαρτησία αποτελεσμάτων από τη διαδικασία επίλυσης.....	54
ταυτότητα υπολογισμών.....	61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: αποτελέσματα & συζήτηση	
§1 μόνιμα πεδία ροής	
§1α ευθύγραμμος αγωγός	
μήκος διαμόρφωσης.....	67
λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής.....	73
κατανομές ταχυτήτων.....	75
διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.....	79
πτώση στατικής πίεσης.....	81
§1β στενωμένος αγωγός	
γραμμές ροής & ιξώδες.....	85
περιοχή ανακυκλοφορίας.....	91

κατανομές αξονικών ταχυτήτων στο λαιμό και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας.....	95
διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.....	100
στατική πίεση.....	103
<b>§2 μη μόνιμα πεδία ροής</b>	
γραμμές ροής.....	110
διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.....	136
στατική πίεση.....	148
κατανομές ταχυτήτων στο ανάντι της στένωσης ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού.....	159
ροϊκά φαινόμενα και μεταβολές των μεγεθών.....	164
μήκη πειοχών ανακυκλοφορίας.....	175
ταχύτητες δινών.....	178
 <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: συμπεράσματα</b>	
διαδικασία επίλυσης.....	182
μόνιμη ροή – ευθύγραμμος αγωγός.....	183
μόνιμη ροή – στενωμένος αγωγός.....	184
μη μόνιμη ροή.....	184
γενικό συμπέρασμα.....	185
 <b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b>	
ελληνική.....	186
αγγλική.....	187
 <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	
	188
 <b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</b>	
	193

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

## από τα βιοϊατρικά φαινόμενα στα ρευστομηχανικά μεγέθη

Η θεμελιώδης θεώρηση, πάνω στην οποία οικοδομείται η βιορρευστομηχανική μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος των θηλαστικών, είναι ότι μπορούμε να το εκλάβουμε ως ένα δίκτυο σωληνώσεων, μέσα στο οποίο ρέει το αίμα, με την καρδιά να παίζει το ρόλο της αντλίας. [1]

Το *κυκλοφορικό σύστημα* είναι το κλειστό σύστημα μεταφοράς του αίματος μέσα από ελαστικούς αγωγούς, με το οποίο οξυγόνο, διοξείδιο του άνθρακα και θρεπτικές ουσίες μεταφέρονται από και προς τα διάφορα όργανα και μύες. Εκτός από την καρδιά, περιλαμβάνει τους πνεύμονες και τα *αγγεία*, που χωρίζονται σε δύο ομάδες:

- αρτηρίες, αρτηρίδια (μικρές αρτηρίες) και τριχοειδή αγγεία (μικροσκοπικοί αγωγοί αίματος), μεταφέρουν αίμα οξυγονομένο και πλούσιο σε θρεπτικά συστατικά ενώ
- φλέβες και φλεβίδια (μικρές φλέβες) επιστρέφουν το αίμα στην καρδιά [1,2,3,4,5]

Η *καρδιά* είναι όργανο, ικανό να συστέλλεται και να διαστέλλεται, προσφέροντας την απαραίτητη πίεση εξώθησης του αίματος, τέτοια ώστε όχι μόνο να εκπληρώνεται η υδραυλική απαίτηση για υπερνίκηση των απωλειών πίεσης του δαιδαλώδους δικτύου αρτηριών και φλεβών, αλλά επιπλέον, να παρέχεται αίμα στα υπόλοιπα όργανα και να εξασφαλίζεται η διέλευση των θρεπτικών συστατικών, από το αίμα, έξω από τις αρτηρίες, στους ιστούς. [4,5]

Η πίεση προσδίδεται υπό μορφή παλμού που διαδίδεται λόγω της ελαστικότητας των αγγείων. Αν τα τοιχώματα ήταν πλήρως ανελαστικά, τότε η απαιτούμενη πίεση θα ήταν κατά πολύ μεγαλύτερη.

Αναγνωρίζοντας, τις δύο βασικότερες ροϊκές λειτουργίες, που επιτελούν οι αρτηρίες, παίζοντας το ρόλο του μέσου στο οποίο ρέει το αίμα, αλλά και του μέσου διατήρησης της πίεσής του [6], αντιλαμβανόμαστε τη μεγάλη σημασία που έχει η ομαλή ροή του αίματος σε αυτές, για τη σωστή λειτουργία του κυκλοφορικού συστήματος. Η μελέτη της ροής του αίματος μέσα στα αγγεία, ονομάζεται *αιμοδυναμική*.

Κατά την παθολογική λειτουργία των αρτηριών, όπου η γεωμετρία τους μεταβάλλεται, προκαλούνται προβλήματα στην αιμάτωση οργάνων και μυών του οργανισμού. Αυτές είναι η *στένωση* και το *ανεύρυσμα*.

Η μεν στένωση, αφορά στη *μείωση της διατομής ενός αγγείου*, ενώ η δεύτερη στη *δημιουργία μίας τοπικής αύξησης της διατομής ενός αγγείου*.



Οι παθολογικές καταστάσεις αυτές, προκαλούν το έμφραγμα του μυοκαρδίου, τα ισχαιμικά επεισόδια, το εγκεφαλικό και τα διάφορα ανευρύσματα (κοιλιακής αορτής κλπ), που ως γνωστό αποτελούν πολύ συχνές αιτίες θανάτου ή δημιουργούν χρόνια προβλήματα, σαν την περιφερειακή αγγειοπάθεια και τη στηθάγχη. [3]

Όμοια με οποιοδήποτε δίκτυο αγωγών, όπου τα τοπικά χαρακτηριστικά των αγωγών επηρεάζουν άμεσα τα επικρατόντα ρευστομηχανικά μεγέθη, η γεωμετρία των αρτηριών – αγωγών του κυκλοφορικού συστήματος – αποτελεί καίριο παράγοντα διαμόρφωσης της ροής του αίματος· πολύ περισσότερο όταν γνωρίζουμε, ότι το συγκεκριμένο σύστημα διαθέτει πλήθος μηχανισμών ανάδρασης και αυτορρύθμισης, βασιζόμενους σε μεταβολές αυτών των μεγεθών. [1]

Συνεπώς, παρότι η στένωση και τα ανεύρυσματα των αρτηριών, αποτελούν τα γνωστά και μελετημένα, τυπικά ρευστομηχανικά προβλήματα, ροής σε συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο και σε απότομα διευρυνόμενο αγωγό, αντίστοιχα, ανάγονται σε κομβικό πεδίο πολυπαραμετρικής μελέτης, για την αποκάλυψη των μηχανισμών έναρξης και εξέλιξης σημαντικότερων ιατρικών περιστατικών.

Η κατάρρευση της ομαλής δομής των αρτηριών και η δημιουργία στενώσεων, οφείλεται σε μία διαδικασία που αναφέρεται ως *αρτηριοσκλήρυνση*.

Η αρτηριοσκλήρυνση είναι μία ασθένεια, κατά την οποία στο εσωτερικό του τοιχώματος των αρτηριών εναποτίθενται λιπαρές ουσίες, χοληστερόλη, κυτταρικά προϊόντα, ασβέστιο και άλλες ουσίες, δημιουργώντας ένα σχηματισμό που ονομάζεται *αθηρωματική πλάκα*. Είναι μια χρόνια εξελισσόμενη ασθένεια, που ξεκινά από την παιδική ηλικία και δεν εκφράζεται παρά στη μέση ηλικία ή και αργότερα. Συνδέεται με διάφορους παράγοντες, όπως τα υψηλά επίπεδα χοληστερόλης και τριγλυκεριδίων στον οργανισμό, την υψηλή αρτηριακή πίεση και το κάπνισμα, συνδυασμένους με το κατάλληλο γενετικό υπόβαθρο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ότι αναφέρεται και ως μία διαδικασία, που ίσως είναι φυσιολογική συνέπεια της αύξησης της ηλικίας όπως άλλες σωματικές μεταβολές που συμβαίνουν σε άλλα όργανα του σώματος. [6,3,2,4,5]

Όλες οι θεωρίες ανάπτυξης της αρτηριοσκλήρυνσης, ήδη από το 1852, με την *incrustation theory – θεωρία εσχαροποίησης*, του *Rokitansky* και έξι χρόνια αργότερα, με την πρόταση, του πρωτοπόρου φυσιολόγου *Virchow*, για την εισχώρηση λιπιδίων στο αρτηριακό τοίχωμα, σαν το αρχικό γεγονός της αρτηριοσκλήρυνσης [7], βασίζονται στην αδυναμία του αγγειακού τοιχώματος να εκτελέσει σωστά μία από τις φυσιολογικές λειτουργίες του.

Το 1973, οι *Ross* και *Glomset* αναλύοντας διάφορες παρατηρήσεις, καταλήγουν να προτείνουν ότι, *το πρώτο βήμα της αθηρογένεσης είναι ο τραυματισμός του ενδοθηλίου* (το εσωτερικό στρώμα του αγγειακού τοιχώματος, που έρχεται σε επαφή με το αίμα) και η ανταπόκρισή του σε αυτόν, που μεταβάλλει τις κανονικές αιμοστατικές ιδιότητες του αγγείου. Αυτή η πρόταση, λίγα χρόνια αργότερα, γενικεύτηκε, έγινε γνωστή ως *response to injury hypothesis – υπόθεση ανταπόκρισης στον τραυματισμό* και η βασική θεωρία μελέτης [6,7].

Ζητούμενο, πλέον, είναι να αποκαλυφθούν τα αίτια που το αρτηριακό τοίχωμα αντιλαμβάνεται τον τραυματισμό και οι βιολογικοί μηχανισμοί τα εκκινούν.

Έτσι, άλλοι θεωρούν τα αίτια αυτά ως καθαρά ρευστομηχανικά [6], άλλοι καθαρά βιοχημικά [7] και τέλος άλλοι κατευθύνονται προς μία σύνδεση και των δύο παραγόντων [8].

Πάντως, όλες οι παραπάνω θεωρίες συγκλίνουν στο ότι, μία ήδη στενωμένη περιοχή, είναι περιοχή υψηλής πιθανότητας περαιτέρω μείωσης της διατομής του αγγείου.

Όσον αφορά στη σχέση αρτηριοσκλήρυνσης και ρευστομηχανικών μεγεθών, ιατρικά δεδομένα αποδεικνύουν την επιλεκτική επικάθιση λιπιδίων και κυτταρικών συσσωματώσεων σε περιοχές διακλαδώσεων του αρτηριακού δικτύου και σε καμπύλα τμήματα αρτηριών [6,9,10].

Αυτό αποτέλεσε πρώτη ένδειξη για τη σχέση αρτηριακής γεωμετρίας και έναρξης της αρτηριοσκλήρυνσης, ήδη από τα μέσα του 20<sup>ου</sup> αιώνα [11,12,13].

Από ρευστομηχανική άποψη, αυτές οι περιοχές παρουσιάζουν ενδιαφέρον γιατί εκεί εντοπίζονται σημαντικές διαφορές της στατικής πίεσης και των *διατμητικών τάσεων στο τοίχωμα (WSS)*, σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη στα ευθύγραμμα τμήματα.

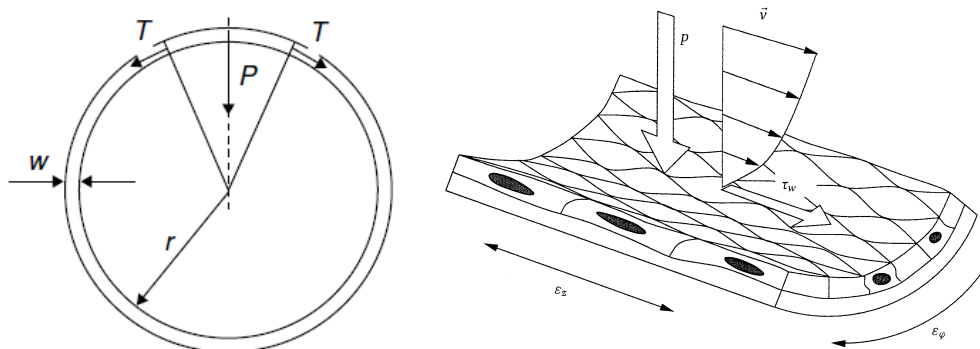
Επέρχεται έτσι, μηχανική κόπωση του αγγείου, που με τα χρόνια επηρεάζει τη δομή του αρτηριακού τοιχώματος, οδηγώντας ορισμένους μελετητές να τη θεωρούν ως την αποκλειστική αιτία έναρξης των βιοχημικών μηχανισμών της αθηρογένεσης. [6]

Συγκεκριμένα, για τις τάσεις που φορτίζουν το αρτηριακό τοίχωμα παρατηρούνται τα παρακάτω.

Από τη στατική πίεση (PS – *Static Pressure*) του ρέοντος αίματος, το τοίχωμα φορτίζεται με ορθές τάσεις  $P$  (δηλαδή κατά την ακτινική διεύθυνσή του), οι οποίες μεταφέρονται στην περιφέρεια σαν εφαπτομενικές  $T$  της κυκλικής διατομής και προσεγγίζονται από το νόμο του *Laplace* ως:  $T = \frac{r}{w} P$ , συναρτήσει της ακτίνας του αγγείου  $r$  και του πάχους του  $w$ .

Αυτή η αντιστρόφως ανάλογη εξάρτηση της πίεσης από την ακτίνα  $r$ , αποτελεί ένδειξη, γιατί μία αύξηση στη διατομή ενός αγγείου, όταν εκδηλωθεί, είναι εύκολο να εξελιχθεί σε ανεύρυσμα. Ένα πρακτικό ανάλογο περιγράφεται από το μπαλόνη, που γίνεται ευκολότερο να φουσκώνουμε καθώς αυξάνεται το μεγεθός του (Σχ1.1) [2].

Τυπικές τιμές PS, ανθρώπου σε ηρεμία, είναι: 120mmHg για τη μέγιστη εμφανιζόμενη στον καρδιακό παλμό – συστολική πίεση – και 80mmHg για την ελάχιστη εμφανιζόμενη – διαστολική πίεση. [4,5]



Σχ. 1.1 – η ορθή και διατμητική φόρτιση του αγγειακού τοιχώματος [23]

Η αντίσταση στη ροή του αίματος, παράγει διατμητικές τάσεις πάνω στο τοίχωμα (Wall Shear Stresses – WSS)  $\tau_w$ , με διεύθυνση αυτή του διαμήκους άξονα του αγγείου. Αυτές είναι ανάλογες του ρυθμού παραμόρφωσης  $\gamma$  του τοιχώματος (σχετίζεται με τις χωρικές μεταβολές της ταχύτητας του ρευστού κοντά στο τοίχωμα) και του ιξώδους  $\mu$  του αίματος. Σε πρώτη προσέγγιση της *διδιάστατης ροής*, με τη θεωρία του *Newton*, σχετίζονται γραμμικά με το ρυθμό παραμόρφωσης ως:

$$\tau_w = \mu \gamma = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Η επίδρασή της κυρίως εμφανίζεται πάνω στα κύτταρα του ενδοθηλίου, αφού αυτά έρχονται σε άμεση επαφή με το ρέον αίμα.

Μέχρι πρόσφατα, η χρονικά μέση τιμή των WSS για τις ανθρώπινες αρτηρίες θεωρούνταν ότι παραμένει σταθερή σε όλα τα αγγεία με αυτορρυθμιση της διαμέτρου τους, ανεξαρτήτως θέσης και λειτουργίας τους [14].

Όμως νεότερες *in vivo* πειραματικές μελέτες, δίνουν τις παρακάτω τιμές  $\tau_w$  για διάφορες αρτηρίες: καρωτιδική – 1.1-1.3Pa, βραχιόνειος – 0.4-0.5Pa, μηριαία – 0.3-0.5Pa. [15]

Χαμηλές και περιοδικές τιμές τους συνδέονται με την έναρξη της αρτηριοσκλήρυνσης και την αύξηση της στένωσης, στα σημεία που έχει ήδη εμφανιστεί. Οι θεωρίες που σχετίζουν την έναρξη της αρτηριοσκλήρυνσης με τη συνδυασμένη επίδραση βιοχημικών μηχανισμών και ρευστομηχανικών μεγεθών, βασίζονται ακριβώς στις μεταβολές των τιμών των WSS. [8,16]

Οι WSS θεωρούνται θεμελιώδους σημασίας για τη αγγειακή λειτουργία, λόγω της μέγιστης επίδρασης που έχουν στο τοίχωμα, επειδή ρυθμίζουν τη διάμετρο του αγγείου, μεταβάλλοντας την παραγωγή αγγειοσυσταλτικών και αγγειοδιασταλτικών ουσιών, ενώ μαζί με την περιφερειακή και ακτινική ένταση του αγγείου καθορίζουν την έκφραση των ενδοθηλιακών γονιδίων, ελέγχουν, δηλαδή, τα τοπικά χαρακτηριστικά των κυττάρων του και τον πολλαπλασιασμό τους. [16]

Αυτό μας οδηγεί να μελετήσουμε τις WSS, που φορτίζουν το αρτηριακό τοίχωμα, παραμετρικά ως προς όλους τους παράγοντες που καθορίζουν την τιμή τους, δηλαδή την αρτηριακή γεωμετρία (μέσω των χωρικών κλίσεων της ταχύτητας) και το *ιξώδες* του αίματος.

Το *αίμα* είναι ένα διάλυμα κυτταρικών ελαστικών σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό, γνωστό ως *πλάσμα*, που αποτελεί το συνεχές μέσο, το οποίο δίνει το χαρακτήρα του ρευστού στο αίμα. Το μεγαλύτερο ποσοστό διαλυμένων σωματιδίων, μέσα στο πλάσμα, κατέχουν τα *ερυθρά αιμοσφαίρια*, τα οποία έχουν δισκοειδή μορφή, μεγάλη ικανότητα παραμόρφωσης και όταν βρίσκονται σε ηρεμία τείνουν να σχηματίσουν συσσωματώματα μεταξύ τους. Μέσα στο διάλυμα υπάρχουν ακόμα, τα *λευκά αιμοσφαίρια* και τα *αιμοπετάλια*. [17,18]

Η δυνατότητα των ερυθρών αιμοφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες (*rouleaux forming*) κυττάρων, παίζει μεγάλο ρόλο στη συμπεριφορά του αίματος και η συστηματική μελέτη της άρχισε ήδη από τις αρχές του 20<sup>ου</sup> [19]. Αποδεικνύεται ότι μεταβάλλεται από διάφορους παράγοντες:

- αυξάνεται με την αύξηση της ποσοστιαίας συγκέντρωσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε ένα δείγμα αίματος (*αιματοκρίτης*)
- μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας
- αυξάνεται κατακόρυφα, καθώς μειώνεται ο ρυθμός με τον οποίο παραμορφώνονται. [18,20,21]

[ Κατά το φαινόμενο *Fahraus– Lindqvist*, παρουσιάζεται μείωση στο μετρούμενο ιξώδες του αίματος και όταν αυτό ρεεί σε αγγεία διαμέτρου 10-300μm [22], αλλά αυτό δε θα μας απασχολήσει ακόμα]

Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση, κατά τη ροή τους μέσα στα αγγεία, ο ρυθμός παραμόρφωσής τους, εξαρτάται άμεσα από τις συνθήκες ροής, τις επικρατούσες ταχύτητες και τάσεις. [17,18]

Υπό αυτό το πρίσμα, όταν το αίμα βρίσκεται σε σημεία χαμηλών ρυθμών παραμόρφωσης ενός πεδίου ροής, θα εμφανίζεται μεγάλη δυσκολία για να αποκολληθούν τα, προσκολλημένα μεταξύ τους, ερυθρά αιμοσφαίρια. Συνεπώς θα παρουσιάζεται υψηλότετος λόγος διατμητικών τάσεων προς το ρυθμό παραμόρφωσης που τις προκαλεί, δηλαδή θα παρατηρούνται διαφορές στο ιξώδες του αίματος κατά τη ροή του.

Η μεταβολή του ιξώδους με το ρυθμό παραμόρφωσης των στοιχείων του ρευστού, προτυποποιείται με τα μη νευτώνεια μοντέλα ρευστών.

Αυτός είναι ο τελευταίος συνδετικός κρίκος της προηγούμενης συζήτησης με το σκοπό της εργασίας: να μελετηθούν τα διαφορετικά ροϊκά χαρακτηριστικά, που παρουσιάζουν ορισμένα από τα πλέον χρησιμοποιούμενα, για την προτυποποίηση του ιξώδους του αίματος, μοντέλα ρευστών.

Επειδή η συμπεριφορά τους, ακόμα και για απλές περιπτώσεις ροών είναι πρακτικά άγνωστη, διεξάγουμε μία ενδελεχή μελέτη της ροής τους σε αξονικά συμμετρικούς, στενωμένους και ευθύγραμμους αγωγούς.

Μελετούμε ορισμένες περιπτώσεις φυσιολογικών μόνιμων ροών, αλλά η έρευνά μας στις μη μόνιμες περιπτώσεις ροών δεν περιορίζεται εκεί.

Θα παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά των μοντέλων αυτών και σε άλλες περισσότερο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις ροών, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους που ελέγχουν το πρόβλημα και κάνοντας συγκρίσεις με τη νευτώνεια συμπεριφορά.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

## φυσική προτυποποίηση

### i} θεωρήσεις για τη ροή

#### μονιμότητα

Η επιλογή της *μόνιμης ροής* (*steady flow*) του αίματος, δηλαδή μίας ροής με σταθερά, αμετάβλητα χαρακτηριστικά, όπως διευκρινίζεται ήδη από τις πρώτες μελέτες του θέματος [24], γίνεται για να έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε μία περίπτωση ροής αρκετά απλούστερη από τη φυσιολογική του αίματος.

Στην περίπτωση αυτή, το πεδίο ροής καθορίζεται από ένα βαθμό ελευθερίας, τον αριθμό *Reynolds* (*Re*).

Με τον τρόπο αυτό, θα έχουμε τη δυνατότητα να εστιάσουμε την – περισσότερο δύσκολη στην επίλυσή της και με δύο βαθμούς ελευθερίας – περίπτωση μη μόνιμης ροής (*unsteady flow*), σε χαρακτηριστικά που παρουσίασαν ενδιαφέρον στη μόνιμη ροή.

Έτσι, με τη θεώρηση της μόνιμης ροής, είναι δυνατόν να λάβουμε ορισμένα αντιπροσωπευτικά μεγέθη για τη ροή του αίματος.

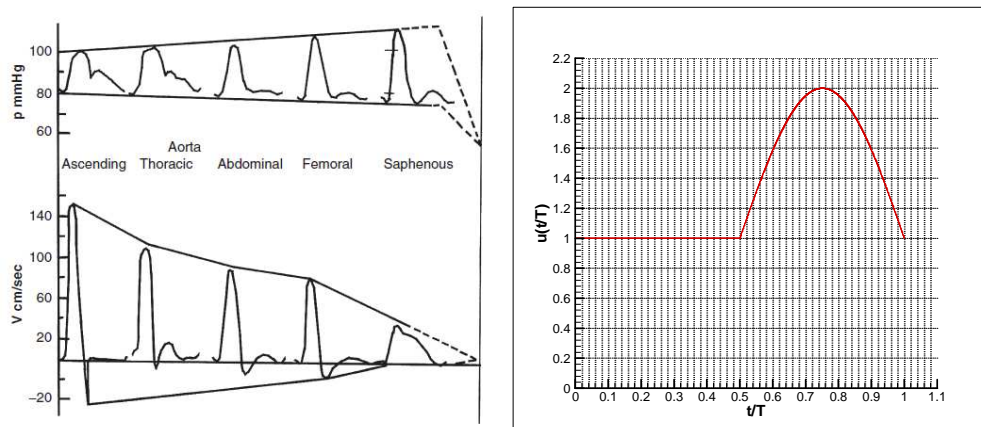
Σημείο τομής για την προτυποποίηση των μη μόνιμων φαινομένων στη ροή του αίματος, αποτέλεσαν δύο εργασίες του *J.R.Womersley* το 1955, στις οποίες μελετήθηκε *in vivo* η διαμόρφωση της ταχύτητας σε μηριαία αρτηρία σκύλου [25] και οικοδομήθηκε μία ημιαναλυτική μαθηματική προσέγγιση του φαινομένου [26].

Η μαθηματική επίλυση αφορούσε πλήρως ημιτονοειδή μεταβολή της ταχύτητας στο χρόνο και άκαμπτο, ευθύγραμμο αγωγό. Παρά τις πολλές και «χονδροειδείς» παραδοχές που γίνονταν, πολλά μη μόνιμα φαινόμενα του πειράματος εξηγήθηκαν. Η μεταβλητότητα των κατανομών της ταχύτητας σε ευθύ αγωγό, σχετίστηκε με ένα αδιάστατο αριθμό  $a = R\sqrt{2\pi f} / \nu$ , όπου *R*: ακτίνα αγωγού, *ν*: κινηματικό ιξώδες, *f*: συχνότητα περιοδικής συνάρτησης.

Πάντως, η θεώρηση της μόνιμης ροής, δεν είναι αβάσιμη.

Στο Σχ2.1, βλέπουμε ότι η μεταβολή της παροχής του αίματος, καθώς απομακρυνόμαστε από την καρδιά μειώνεται και οριακά σε μικρά αγγεία πολύ μακριά από αυτή, θα εμφανίζεται σχεδόν σθενή παροχή.

Σταθερή παροχή, μεταφράζεται σε *μόνιμο πεδίο ροής*.



Σχ2.1 – η κυματομορφή της στατικής πίεσης  $p$  σε αντιδιαστολή με αυτή της ταχύτητας του αίματος  $V$  σε αγγεία, καθώς απομακρυνόμαστε από την καρδιά (τρία τμήματα της αορτής – aorta, μηριαία – femoral, σαφήνη φλέβα – saphenous) [6] και η κυματομορφή της ταχύτητας που θα μελετήσουμε στη μη μόνιμη ροή

Από ρευστομηχανική σκοπιά, θα λέγαμε ότι τα φαινόμενα μη μονιμότητας της ροής στις φυσιολογικές περιπτώσεις ροών σε μικρές αρτηρίες και αρτηρίδια, έχουν μικρή επίδραση σε σχέση με την αδράνεια της ροής του αίματος.

Παρατηρούνται δηλαδή ροές χαμηλών αριθμών *Strouhal*,  $Str = O(10^{-2})$ , όπου

$$Str = \frac{d}{TU_m} \text{ και } d: \text{ διάμετρος αγωγού, } U_m: \text{ μέση ταχύτητα ροής, } T: \text{ περίοδος}$$

καρδιακού κύκλου.

Αποτέλεσμα αυτού είναι να μπορούμε να παραλείψουμε τους μη μόνιμους όρους των εξισώσεων ροής και να μελετήσουμε μόνιμα πεδία ροής. Το έλλειμα πληροφορίας, που θα έχουμε για τα πεδία ροής στην περίπτωση αποκοπής των μη μόνιμων όρων, είναι μεγάλο και κρίνουμε ότι έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε τέτοιες ροές.

Θέλοντας, λοιπόν, να προτυποποιήσουμε τη μεταβολή της παροχής κατά τον καρδιακό κύκλο, με όσο το δυνατόν απλούστερο τρόπο, επιλέγουμε μία συνάρτηση ταχύτητας με περίοδο  $T$ , η οποία για  $\tau = [0, T/2]$  παρουσιάζει σταθερή παροχή και για  $\tau = [T/2, T]$  εμφανίζει παροχή ημιτονοειδούς μεταβολής.

Παράλληλα, σε δύο τουλάχιστον εργασίες όπου μελετούνται μη νευτώνεια ρευστά [27,28], στη μη μόνιμη ροή εφαρμόζεται παρόμοια κυματομορφή ταχύτητας, δίνοντάς μας ευκαιρία για άμεσες συγκρίσεις.

Η ροή θα μελετηθεί, τόσο για μόνιμα πεδία ροής, όσο και για μη μόνιμα.

## δομή

Διαταραχές στη ροή, δημιουργούμενες από τη γεωμετρία του αγωγού, υπό κατάλληλες συνθήκες υψηλών  $Re$ , μπορούν να προκαλέσουν μετάβαση από *στρωτή ροή* σε *τυρβώδη*. Τα πεδία ροής αλλάζουν χαρακτήρα και οι χαοτικές δομές που δημιουργούνται, θα μας ανάγκαζαν να χρησιμοποιήσουμε άλλες μεθόδους για τη μελέτη τους.

Ακόμα η *τύρβη*, παίζει ρόλο στη φυσιολογική λειτουργία του αγγείου, αφού είναι δυνατόν να του προκαλεί *δονήσεις*, ενώ αυξάνονται οι τάσεις πάνω στο αγγειακό τοίχωμα. [29]

Η γνώση των οριακών  $Re$ , πάνω από τους οποίους σχηματίζονται *τυρβώδεις* δομές, σε στενωμένους αγωγούς, είναι κυρίαρχης σημασίας στη μελέτη μας.

Στη βιβλιογραφία, πλήθος είναι τα στοιχεία που μπορούν να βρεθούν για το θέμα αυτό, στην περίπτωση του νευτώνειου ρευστού, δε βρέθηκαν όμως στοιχεία για τα μη νευτώνεια ρευστά.

Πειραματικές εργασίες [29,30] δείχνουν ότι ακόμα και σε περιπτώσεις με έντονη γεωμετρία στένωσης (αναβαθμός) και μείωση διαμέτρου 50%, φαινόμενα *τύρβης* δεν εμφανίζονται για ροές  $Re < 800$  (βασισμένοι στη μέση ταχύτητα ροής).

Τα αποτελέσματα αυτά αποτυπώνονται και σε υπολογιστικές μελέτες [31,32], για ομαλότερες γεωμετρίες στένωσης.

Σε αυτές υιοθετούνται μοντέλα *τύρβης* για την επίλυση των πεδίων ροής, τα αποτελέσματά τους συγκρίνονται με αυτά για *στρωτές* ροές και από την ύπαρξη ή όχι διαφορών διαπιστώνεται η παρουσία *τύρβης*.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματά τους, αποκλείεται η εμφάνιση *τύρβης* για  $Re < 500$  σε στένωση με 50% μείωση διαμέτρου.

Μπορούμε, με ασφάλεια, να θεωρήσουμε *τη ροή σε στενωμένο αγωγό με μέγιστη μείωση 50% της διαμέτρου του, στρωτή, για  $Re < 500$ .*

## θερμότητα

Η κυκλοφορία του αίματος, εκτός από τη μεταφορά οξυγόνου και θρεπτικών συστατικών, διατηρεί και σταθερή θερμοκρασία του οργανισμού. Η διαπίστωση αυτή, συνεπάγεται μεταφορά θερμότητας κατά τη ροή του αίματος στα αγγεία. Παραταύτα, σε αγγεία όπως οι αρτηρίες και τα αρτηρίδια, που βρίσκονται σε αρκετή απόσταση από το δέρμα, η θεώρηση της *ισόθερμης* ροής είναι λογική συνεπαγωγή.

Σημαντική όμως, γίνεται η επίδραση της θερμότητας για την κατανομή των θερμοκρασιών στο τοίχωμα του αγγείου, αν θεωρήσουμε ότι η στενωμένη περιοχή, παρουσιάζει αυξημένη θερμοκρασία σε σχέση με το ρέον αίμα, λόγω των αυξημένων μηχανικών φορτίων.

Το φαινόμενο αυτό, δε σχετίζεται με το σκοπό της μελέτης μας και δεν θα συμπεριληφθεί στην προτυποποίηση του προβλήματος, θεωρώντας *τη ροή του αίματος ισόθερμη*.

## ii} θεωρήσεις για το μέσο ροής

### γεωμετρία

Η κυκλική διαμόρφωση της διατομής των αγγείων, αποτελεί εξαιρετική ευκαιρία για τη μετάβαση από τριδιάστατη (3-D) περιγραφή του πεδίου ροής σε διδιάστατη (2-D).

Τα πλεονεκτήματα για μία υπολογιστική μελέτη είναι προφανή.

Το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από λιγότερους υπολογιστικούς κόμβους και οι εξισώσεις προς επίλυση είναι κατά μία λιγότερες, οδηγώντας σε κατακόρυφη μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

Από την άλλη πλευρά, όμως, η χρήση των μη νευτώνειων μοντέλων, για τη συμπεριφορά των οποίων δε γνωρίζουμε αρκετά, προκαλεί ερωτήματα για πιθανές ασυμμετρίες ή δευτερεύουσες ροές, που θα εμφανιστούν μόνο σε 3-D περιγραφή.

Στο ερώτημα αυτό, απαντούν αρνητικά τα αποτελέσματα της [33], εξασφαλίζοντάς μας το δικαίωμα να μεταβούμε σε 2-D περιγραφή των πεδίων ροής.

Έτσι, έχουμε την ευκαιρία να αυξήσουμε την πυκνότητα του υπολογιστικού πλέγματος σε περιοχές που θεωρούμε σημαντικές για τη μελέτη ορισμένων μεγεθών, ενώ παρατηρούμε απλούστερες εκδοχές των ροϊκών φαινομένων, κάτι που μας βοηθά στην αποκάλυψη των άγνωστων μηχανισμών παραγωγής τους.

Βελτιστοποίηση της διάταξης των υπολογιστικών κόμβων επιτυγχάνεται, θεωρώντας και αξονική συμμετρία στον αγωγό, οδηγώντας μας σε μελέτη μόνο του μισού αγωγού με τον ίδιο αριθμό υπολογιστικών κόμβων.

Τα αγγειακά τοιχώματα, σίγουρα δεν είναι τέλειοι κυλινδρικοί και προφανώς οι αναπτυσσόμενες στενώσεις δεν είναι αξονικά συμμετρικές. Η προτυποποίηση αυτή, όμως, μας δίνει μία καλή αναπαράσταση της απλής εκδοχής των ροϊκών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα αγγείο.

Μελέτες που υιοθετούν 3-D περιγραφή των πεδίων ροής [34-37], συνήθως έχουν ως στόχο την προσπάθεια ανάπτυξης μεθόδων μοντελοποίησης της συγκεκριμένης γεωμετρίας μίας αγγειακής ανωμαλίας που εμφανίζεται σε ένα ασθενή.

Η δική μας μελέτη, μη έχοντας τέτοιο σκοπό, εμπνεόμενη από τα ροϊκά φαινόμενα στις στενωμένες περιοχές και τις επιδράσεις που έχει το μεταβλητό ιξώδες του αίματος, προσπαθεί να διαπιστώσει σχέσεις και να υποδείξει ενδιαφέρουσες περιοχές προς μελέτη, από την καθαρά ρευστομηχανική πλευρά.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε τους αγωγούς *αξονικά συμμετρικούς*.

### παραμόρφωση

Τα κύτταρα των αγγείων, για να υπάρχει η δυνατότητα αγγειοσυστολής και αγγειοδιαστολής, που απαιτείται στη μετάδοση του καρδιακού παλμού, σε όλο το κυκλοφορικό σύστημα, έχουν ελαστικές ιδιότητες, που τους επιτρέπουν να παραμορφώνονται κατά την ακτινική και την αξονική κατεύθυνση.

Συνεπώς, μία προσέγγιση κατά την οποία το τοίχωμα θεωρείται απαραμόρφωτο, ακίνητο και άκαμπτο, δεν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα.



Οι ελαστικές ιδιότητες των αγγείων μελετούνται σε συνδυασμό με τη ροή του αίματος σε αυτά, υπολογιστικά [39-41], από μαθηματική σκοπιά [42], είτε και πειραματικά [43], κάνοντας την *αλληλεπίδραση ρευστού και μέσου (fluid-structure interaction)* πεδίο αιχμής.

Αποδεικνύεται ότι η αλληλεπίδραση αυτή είναι σημαντική, προκαλώντας αύξηση της μέσης χρονικά πτώσης πίεσης στον αγωγό και μείωση της μέγιστης τάσης στο τοίχωμα.

Στη δική μας μελέτη, καθώς θεωρούμε ότι δεν έχουν αποσαφηνιστεί πλήρως οι σωστές μέθοδοι επίλυσης του συνδυασμένου συστήματος εξισώσεων ρευστού και παραμόρφουμένου τοιχώματος, ιδιαίτερα στα εμπορικά πακέτα επιλυτών, αλλά κυριότερα επειδή θέλουμε να παρακολουθήσουμε καθαρά την επίδραση των μη νευτώνειων χαρακτηριστικών του αίματος, στη ροή του μέσα στα αγγεία, υιοθετούμε τη στοιχειώδη θεώρηση του *απαραμόρφωτου, άκαμπτου και ακίνητου τοιχώματος*.

### **διαπερατότητα**

Τα αγγειακά τοιχώματα είναι διαπερατά, έτσι ώστε να γίνεται η ανταλλαγή οξυγόνου – διοξειδίου του άνθρακα και η πρόσδοση θρεπτικών συστατικών στους μυς. Μελέτες συσχέτισης των ρευστομηχανικών μεγεθών με τη διαπερατότητα του τοιχώματος έχουν γίνει, όπως η [44].

Θεωρώντας όμως, την κλίμακα μελέτης του φαινομένου πολύ μεγαλύτερη από τη μοριακή, καθώς ασχολούμαστε με κύτταρα διαλυμμένα στο πλάσμα, αντιλαμβανόμαστε ότι η διαπερατότητα του τοιχώματος δεν τίθεται υπό συζήτηση.

Το *αγγειακό τοίχωμα* θεωρείται *αδιαπέρατο*.

### **iii } θεωρήσεις για το ρευστό**

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι το αίμα, για σταθερή τιμή αιματοκρίτη και θερμοκρασία, παρουσιάζει μεταβλητό ιξώδες. Η συμπεριφορά αυτή, σε πρώτη προσέγγιση, ορίζεται ως *μη νευτώνεια συμπεριφορά ρευστού*, δηλαδή ξεφεύγει από τη γραμμική σχέση διατμητικών τάσεων και ρυθμού παραμόρφωσης, του νευτώνειου ρευστού.

Ας δούμε την έννοια των δύο κατηγοριών σε επίπεδο φυσικής.

Η ροή των ρευστών, καθορίζεται κυρίως από τη δράση δύο κατηγοριών δυνάμεων τις δυνάμεις που οφείλονται στην εξωτερικά ασκούμενη πίεση στο ρευστό (*δυνάμεις πίεσης – ορθές τάσεις*) και αυτές που ασκούνται σε ένα στρώμα του ρευστού, λόγω επαφής με άλλα επίπεδα του ρευστού (*δυνάμεις συνεκτικότητας – διατμητικές τάσεις*). Είναι φυσικό λοιπόν, λόγω αυτών των δύο ειδών δυνάμεων να κατηγοριοποιούμε τα ρευστά ανάλογα με το αποτέλεσμα που έχουν οι δυνάμεις πάνω σε αυτά.

Για τις *δυνάμεις πίεσης*, όταν αυτές έχουν τη δυνατότητα να μεταβάλλουν την πυκνότητα ενός στοιχείου του ρευστού, μιλάμε για *συμπιεστό ρευστό* και όταν αυτό είναι πρακτικά αμελητέο, για *ασυμπίεστο ρευστό*.

Ρευστά που μπορούμε να πούμε ότι πρακτικά δε μεταβάλλουν την πυκνότητά τους είναι το νερό και τα λάδια, ενώ ο αέρας είναι συμπιεστό ρευστό.

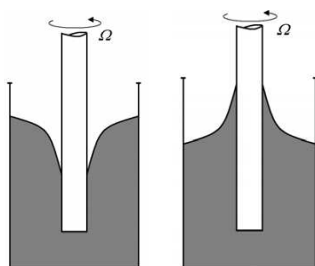
Από τα παραπάνω προκύπτουν τελικά δύο βασικές ομάδες των ρευστών σε σχέση με το πως παραμορφώνονται τα στοιχεία τους. Όταν οι παραμορφώσεις αυτές είναι πρακτικά αμελητέες, σε σχέση πάντα με τις παραμορφώσεις εξαιτίας των δυνάμεων πίεσης, έχουμε το *μη συνεκτικό ρευστό*. Σε κάθε άλλη περίπτωση ασχολούμαστε με το *συνεκτικό ρευστό*. Στην κατηγορία του συνεκτικού ρευστού, αν οι παραμορφώσεις είναι γραμμική σχέση των δυνάμεων συνεκτικότητας, τότε προκύπτει η μεγάλη ομάδαποίηση *νευτώνειο ρευστό*, ενώ αν η σχέση είναι μη γραμμική, λαμβάνουμε το *μη νευτώνειο ρευστό*.

Στο συνεκτικό ρευστό, ο λόγος των διατμητικών τάσεων προς το μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης που τους επιβάλλεται, είναι η *δυναμική συνεκτικότητα* ή *ιζώδες*.

Ας παρατηρήσουμε τις διαφορές στη συμπεριφορά μεταξύ νευτώνειου και κάποιων μη νευτώνειων ρευστών, μέσα από κλασικά πειράματα.

#### αναρρίχιση σε ράβδο (Weissenberg effect):

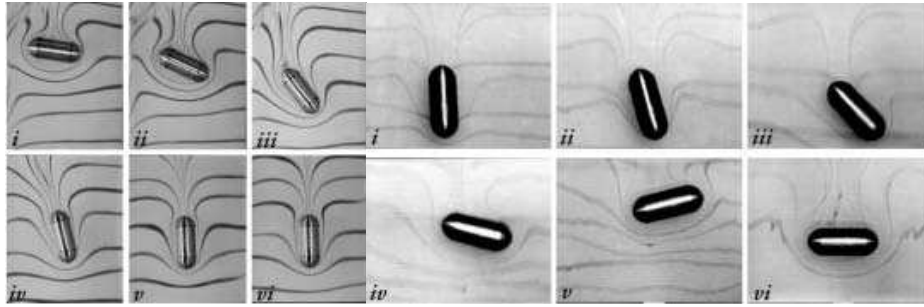
Σε κατακόρυφο, μακρόστενο δοχείο γεμάτο με υγρό, μια κυλινδρική ράβδος τοποθετείται αξονοσυμμετρικά στο εσωτερικό του δοχείου και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Για τη συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας, στην περίπτωση που το υγρό είναι νευτώνειο (πχ νερό), το υγρό θα εισχωρήσει πιο βαθιά στο δοχείο, ενώ αν το υγρό έχει ορισμένα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά (πχ υγρό σαπούνι), θα αναρριχθεί πάνω στη ράβδο (Σχ2.2). Επίσης, με την αύξηση της  $\Omega$  στο μη νευτώνειο υγρό, θα αρχίσει μια ταλάντωση της ελεύθερης επιφάνειας. Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα, είναι η ανάδευση των πλαστικών χρωμάτων. [45,46]



Σχ2.2 – νευτώνεια (αριστερή εικόνα) και μη νευτώνεια (δεξιά εικόνα) συμπεριφορά κατά το πείραμα αναρρίχισης σε ράβδο [46]

#### καθίζηση συμμετρικών απαραμόρφωτων σωματιδίων:

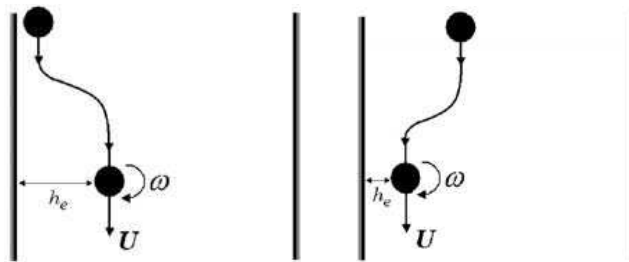
Στερεά κυλινδρικά σωματίδια αφήνονται να πέσουν μέσα σε κατακόρυφο, μακρόστενο δοχείο, που περιέχει υγρό. Σε κάθε περίπτωση, θα λάβουν ένα σταθερο προσανατολισμό, ανεξαρτήτως του πως έπεσαν (θεωρώντας ότι ο χαρακτηριστικός αριθμός Reynolds της ροής δεν είναι πολύ μεγάλος). Για ένα νευτώνειο υγρό, ο προσανατολισμός των σωματιδίων θα είναι με τον άξονα συμμετρίας τους κάθετο στην κατεύθυνση της βαρυτικής επιτάχυνσης, ενώ σε ορισμένα μη νευτώνεια υγρά, θα είναι παράλληλος με αυτή (Σχ2.3). [46]



Σχ2.3 – νευτώνεια (αριστερή εικόνα) και μη νευτώνεια (δεξιά εικόνα) συμπεριφορά κατά το πείραμα καθίζησης συμμετρικών απαραμόρφωτων σωματιδίων [46]

καθίζηση ομογενών σφαιριδίων, στην περιοχή απαραμόρφωτων τοιχωμάτων:

Μια σφαίρα αφήνεται να πέσει μέσα σε κατακόρυφο, μακρόστενο δοχείο, που περιέχει υγρό, σε «αρκετά κοντινή» απόσταση από το ένα τοίχωμα, έτσι ώστε η επίδραση του του τοιχώματος (*wall-effect*) στις κλίσεις της ταχύτητας να είναι ικανοποιητική. Αν το υγρό είναι νευτώνειο, τότε οι σφαίρες θα μετακινηθούν προς τον άξονα του δοχείου καθώς κατέρχονται, ενώ για ορισμένα μη νευτώνεια, θα παρατηρηθεί μείωση της απόστασης  $h_e$  μεταξύ τοιχώματος και σφαίρας. Τελικά, η απόσταση  $h_e$ , που θα παρατηρηθεί στην κατάσταση ισορροπίας, εξαρτάται τόσο από τα φυσικά χαρακτηριστικά της σφαίρας, όσο και του υγρού (Σχ2.4). [46]



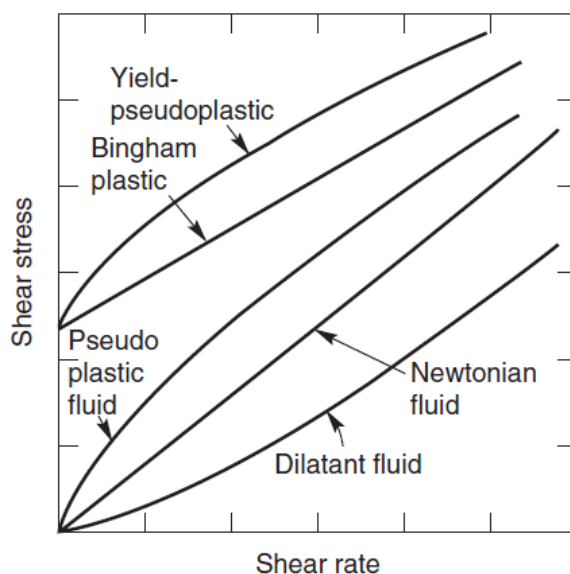
Σχ2.4 – νευτώνεια (αριστερή εικόνα) και μη νευτώνεια (δεξιά εικόνα) συμπεριφορά κατά το πείραμα καθίζησης συμμετρικών απαραμόρφωτων σωματιδίων [46]

Τα μη νευτώνεια, είναι κατηγορία των συνεκτικών ρευστών, και περιλαμβάνουν κάθε ρευστό, που το ιξώδες του εξαρτάται από το ρυθμό παραμόρφωσής του. [45]

Σημειώνουμε ότι για *διδιάστατη ροή*, αρκετά μακριά από την είσοδο (*πλήρως διαμορφωμένη ροή*) *ευθύγραμμου αγωγού*, ο *ρυθμός παραμόρφωσης (strain rate)* συμπίπτει με το *ρυθμό διάτμησης (shear rate)*, που εμφανίζεται σε πολλά από τα παρακάτω διαγράμματα.

- *συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου (time-independent)*

Το ιξώδες τους καθορίζεται αποκλειστικά από το ρυθμό παραμόρφωσης που τους επιβάλλεται τη στιγμή που μελετούμε και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την καμπύλη ρυθμού παραμόρφωσης – διατμητικής τάσης (Σχ2.5) ως εξής.



Σχ2.5– καμπύλες ρυθμού διάτμησης (shear rate) και διατμητικής τάσης (shear stress) στα ρευστά συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου [45]

#### shear-thinning (pseudoplastic/ψευδοπλαστικά)

Είναι η περισσότερο απαντούμενη μη νευτώνεια συμπεριφορά, κατά την οποία σε χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης εμφανίζονται μεγάλες τιμές ιξώδους

Η έννοια ψευδοπλαστικότητας γίνεται αντιληπτή από το γεγονός ότι για ρυθμούς παραμόρφωσης που προσεγγίζουν το μηδέν εμφανίζεται «άπειρη» συνεκτικότητα και συνεπώς είναι σαν να εμφανίζουν την πλαστική συμπεριφορά των στερεών.

Ρευστά που έχουν αυτή τη συμπεριφορά είναι το γιαούρτι, η μαγιονέζα, η σοκολάτα, οι υψηλής συμπύκνωσης χυμοί φρούτων. [45]

#### viscoplastic (ιξωδοπλαστικά)

Στα ρευστά αυτά, πρέπει να ασκηθεί διατμητική τάση μεγαλύτερη από μία ελάχιστη τιμή, ώστε να ξεκινήσει η ροή τους. Ξεπρνώντας αυτό το όριο συνήθως συμπεριφέρονται όπως τα shear-thinning (ψευδοπλαστικά) ρευστά (yield-pseudoplastic) ή το νευτώνειο (Bingham plastic).

Η ιξωδοπλαστικότητα, δείχνει την αντιστοίχιση με το όριο των στερεών, τα οποία πάνω από μία τιμή έντασης περνούν από την ελαστική στην πλαστική συμπεριφορά. [47].

Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται η οδοντόπαστα, ορισμένα γαλακτόματα και τα υψηλής συγκέντρωσης διαλύματα σωματιδίων. [45]

#### shear-thickening/dilatant (διασταλά)

Έχουν ακριβώς την αντίστροφη συμπεριφορά από τα shear-thinning (ψευδοπλαστικά) ρευστά, με το ιξώδες τους να αυξάνει καθώς αυξάνει ο ρυθμός παραμόρφωσής τους

Χαρακτηριστικά ρευστά με την ιδιότητα αυτή είναι τα συμπυκνωμένα υδατικά διαλύματα αλευριού ή διοξειδίου του τιτανίου. [45]

- συμπεριφοράς χρονικά εξαρτημένης (*time-dependent*)

Είναι περισσότερο πολύπλοκα ρευστά, που εμφανίζουν εξάρτηση από την ιστορία έντασής τους, δηλαδή το ιξώδες τους σε μία στιγμή εξαρτάται και από το ρυθμό παραμόρφωσής τους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές.

#### thixotropic

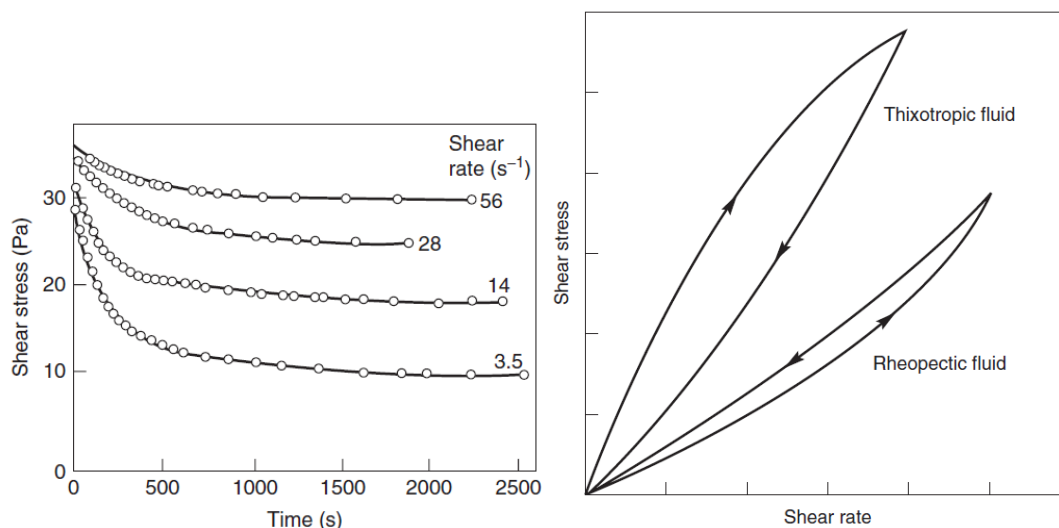
Το ιξώδες που εμφανίζουν κάθε στιγμή, μειώνεται με το χρόνο κατά τον οποίο υποβάλλονται στην παραμόρφωση. Αν αυτή η παραμόρφωση παύσει, τότε παρουσιάζεται μία χρονική υστέρηση για την επαναφορά των διατμητικών τάσεων μεταξύ των επιπέδων του ρευστού στο μηδέν (Σχ2.6)

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το *τσιμέντο* και διάφορα *χωμάτινα διαλύματα*. [45]

#### rheopectic

Αντίστροφα από τα προηγούμενα, το ιξώδες που εμφανίζουν, αυξάνεται με το χρόνο κατά τον οποίο βρίσκονται υπό παραμόρφωση. Η καμπύλη υστέρησής τους είναι διαφορετική από αυτή των thixotropic, κατά το Σχ2.6

Αυτή η συμπεριφορά είναι αρκετά σπάνια στη φύση, αλλά παραδείγματα είναι το *υδατικό διάλυμα γύψου* και διάφορα *κολλώδη διαλύματα*. [45]



Σχ2.6 – η μείωση του ιξώδους στα thixotropic ρευστά και η καμπύλη υστέρησης στα thixotropic και rheopectic ρευστά [45]

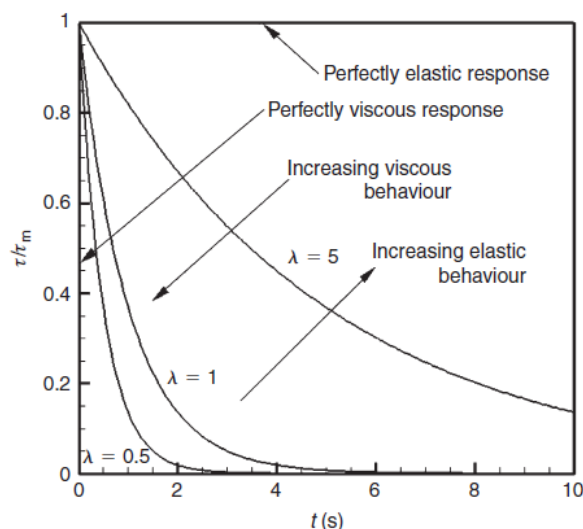
- *ιξωδοελαστικά ρευστά (viscoelastic)*

Είναι ουσίες που παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ρευστών συνοδευόμενα από ελαστικές ιδιότητες, εμφανίζοντας επαναφορά στην κατάσταση ισορροπίας τους μετά από κάποια παραμόρφωσή τους. Αποθηκεύουν την ενέργεια που τους προσφέρεται μέσω της παραμόρφωσης, δεν την απελευθερώνουν ως θερμότητα κατά τη ροή τους, όπως τα προηγούμενα ρευστά και μπορούν ένα ποσοστό της να το ανακτήσουν μέσω ακριβώς της ελαστικής τους συμπεριφοράς.

Σε αυτά τα ρευστά, είναι δυνατόν να εμφανιστούν ορθές τάσεις, πέρα από αυτές που παράγονται από τη στατική πίεση. [45]

Η ελαστικότητα κάθε τέτοιου ρευστού καθορίζεται από ένα *συντελεστή χαλάρωσης*  $\lambda$ , ο οποίος αυξανόμενος αυξάνει την ελαστική συμπεριφορά του ρευστού, ενώ μειώσή του σημαίνει τάση του ρευστού για καθαρά συνεκτική συμπεριφορά (Σχ2.7).

Ρευστά με ιξωδοελαστική συμπεριφορά είναι κυρίως τα *τήγματα πολυμερών* και τα *υδατικά διαλύματά τους*, αλλά και απλούστερα ρευστά, όπως το *σαπουνόνερο*. [45]



Σχ2.7 – διαφορετικές συμπεριφορές στα ιξωδοπλαστικά ρευστά παραμετρικά του  $\lambda$  συντελεστή χαλάρωσης, για τις τιμές διατμητικής τάσης που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια του χρόνου προς τη μέγιστη  $\tau_m$  που του ασκήθηκε [45]

Πολλά από τα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά απαντώνται ταυτόχρονα στα ρευστά κάνοντας την επίδραση της κάθε ιδιότητας δυσδιάκριτη. Συνήθως, όμως, υπάρχει μία κυρίαρχη μη νευτώνεια ιδιότητα που εκφράζεται στη συμπεριφορά του ρευστού. [45]

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα ρευστών, δεν αναφεραμε πουθενά το αίμα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά που αποδίδονται στο αίμα, σχετίζονται με πολλές από τις κατηγορίες ρευστών που αναφέραμε.

Τέσσερις είναι οι μη νευτώνειες ιδιότητες που αποδίδονται στο αίμα, κάνοντας τη μελέτη των ροών του αίματος πολυσύνθετο πρόβλημα. Όλες, σχετίζονται με τη δυνατότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες (*rouleaux forming*) κυττάρων.

#### ψευδοπλαστικότητα:

Κατά τη ροή των ερυθρών αιμοσφαιρίων μέσα στα αγγεία, ο ρυθμός παραμόρφωσής τους, εξαρτάται άμεσα από τις συνθήκες ροής, δηλαδή τις επικρατούσες ταχύτητες του αίματος.

Υπό αυτό το πρίσμα, όταν το αίμα βρίσκεται σε σημεία χαμηλών ρυθμών παραμόρφωσης ενός πεδίου ροής, θα εμφανίζεται μεγάλη δυσκολία για να αποκολληθούν τα, προσκολλημένα μεταξύ τους, ερυθρά αιμοσφαίρια και συνεπώς υψηλότατος λόγος διατμητικών τάσεων προς το ρυθμό παραμόρφωσης που τις προκαλεί. [18,48].

Η ιδιότητα αυτή, αναμένεται να είναι περισσότερο εμφανής στην περιοχή γύρω από τον άξονα συμμετρίας του αγγείου, όπου λόγω των μικρών κλίσεων ταχύτητας ο ρυθμός παραμόρφωσης παραμένει σε χαμηλές τιμές και το ιξώδες των μη νευτώνειων shear-thinning ρευστών θα λαμβάνει μεγάλες τιμές.

#### Ιξωδοπλαστικότητα:

Η δυνατότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες (*rouleaux forming*) κυττάρων, αυξάνεται κατακόρυφα, καθώς μειώνεται ο ρυθμός με τον οποίο παραμορφώνονται. Το φαινόμενο αυτό, μας αναγκάζει από θεωρητική πλευρά να θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποια αρχική τάση – μικρή μεν, αλλά υπαρκτή – που απαιτείται να ξεπεραστεί, ώστε το αίμα να αρχίσει να ρέει. Το θέμα αυτό συζητείται εκτενώς στις [18,48]

#### Ιξωδοελαστικότητα:

Σύμφωνα με τις μελέτες του *Thurston* [49,50], σε ρυθμούς παραμόρφωσης τάξης μεγέθους  $O(1s^{-1})$ , οι ελαστικές ιδιότητες του αίματος είναι ιδιαίτερα σημαντικές και οι παραγόμενες δυνάμεις, συγκρίσιμες με τις οφειλόμενες στα συνεκτικά φαινόμενα. Η συμπεριφορά αυτή, άμεσα εξαρτημένη από τα μεταβλητά στο χρόνο φαινόμενα, εμφανίζεται στη μη μόνιμη φυσιολογική ροή του αίματος και οφείλεται στη μεγάλη ικανότητα ελαστικής παραμόρφωσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων, με την οποία αποθηκεύουν ποσά ενέργειας.

Σύμφωνα με το φαινόμενο *Fahraus– Lindqvist*, παρουσιάζεται μείωση στο μετρούμενο ιξώδες του αίματος, όταν αυτό ρέει σε αγγεία διαμέτρου 10-300μm, αφού τα ερυθρά αιμοσφαίρια τείνουν να λάβουν θέσεις γύρω από τον άξονα συμμετρίας του αγγείου, ενώ το πλάσμα καλύπτει τα στρώματα του ρευστού κοντά στο τοίχωμα [22].

Το γεγονός αυτό οδηγεί πολλούς μελετητές να δημιουργήσουν μοντέλα ρευστού δύο φάσεων για να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά του αίματος και για λίγο μεγαλύτερα αγγεία.

Υπολογιστικές μελέτες, που προσομοιώνουν το αίμα ως ρευστό δύο φάσεων, με την εξωτερική να είναι νευτώνειο ρευστό και την εσωτερική να προτυποποιείται με μη νευτώνειο ρευστό, έδειξαν διαφορές στην κατανομή του ιξώδους και τα shear-thinning φαινόμενα να είναι σημαντικότερα. [51,52]

Στη μελέτη αυτή, θα επιλέξουμε *μονοφασικά* μοντέλα ρευστών μη νευτώνειας συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου, αφού αυτή δείχνει να είναι η κυρίαρχη μη νευτώνεια ιδιότητά του στο κυριότερο μέρος της ροής του.

Πολλά είναι τα μη νευτώνεια μοντέλα, συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου, οι παράμετροι των οποίων προσαρμόζονται πάνω σε πειραματικά *in vitro* δεδομένα για το ιξώδες του αίματος. Αναφέρουμε ονομαστικά:

- Εκθετικού Νόμου
- Bingham
- Herschel-Bulkley
- Carreau και Carreau-Yasuda

- Cross
- Ellis
- Walburn-Schneck (βασισμένο στο μοντέλο Εκθετικού Νόμου)
- Casson
- Quemada

[ Πολλές πληροφορίες, υποδείξεις για την καταλληλότητα χρήσης τους και τιμές παραμέτρων, για τα παραπάνω μοντέλα, περιέχονται στην πολύ καλή και εκτενή, επί του θέματος, βιβλιογραφική επισκόπηση των F.Yilmaz και M.Y.Gundogdu, *A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions*, του 2008 ([17]). ]

Παράλληλα, επειδή το ιξώδες του αίματος είναι και συνάρτηση του αιματοκρίτη, φροντίζουμε, για λόγους άμεσων συγκρίσεων μεταξύ των μοντέλων, οι παράμετροι όλων των μοντέλων μας να αφορούν τιμές αιματοκρίτη μεταξύ των τιμών 40% και 45%.

Οι διατμητικές τάσεις  $\tau$  που παράγονται στα υιοθετούμενα μοντέλα, συναρτήσει του ρυθμού παραμόρφωσης  $\gamma$  είναι:

**Walburn-Schneck:**  $\mu = C_1 \exp\{C_2 H + (C_4 TPMA / H^2)\} (\dot{\gamma})^{-C_3 H}$  shear-thinning

$H$ : αιματοκρίτης

$TPMA$ : άθροισμα συγκεντρώσεων κάποιων συστατικών του αίματος

$C_1, C_2, C_3, C_4$ : σταθερές εξαρτώμενες από  $H$  και  $TPMA$

Το μοντέλο αυτό αποτελεί εξειδίκευση του μοντέλου εκθετικού νόμου  $\tau = k\gamma^n$ , συγκεκριμένα για το αίμα από τους Walburn-Schneck και στα επόμενα θα το χρησιμοποιούμε στη γενικότερη έκφρασή του, με υπολογισμένα τα  $k, \gamma$  για αιματοκρίτη 45%. [27,17,45]

**Herschel-Bulkley:**  $\tau > \tau_0 \Rightarrow \tau = \frac{\tau_0}{\gamma} + k\gamma^n$  viscoplastic, shear-thinning  
 $\tau < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$

Είναι ένα από τα δύο ιξωδοπλαστικά μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε και συνδυάζει την ύπαρξη αρχικής τάσης με τον εκθετικό νόμο. [17,45]

**Quemada:**  $\tau = \mu_F \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \phi \right)^{-2}$  shear-thinning

$k_0, k_\infty$ : συντελεστές προσαρμογής σε πειραματικά δεδομένα για το αίμα

$\gamma_c$ : κρίσιμη τιμή ρυθμού παραμόρφωσης

$\phi$ : αιματοκρίτης

Αυτό το μοντέλο αναπτύχθηκε από τον Quemada με λεπτομέρειες αναφερόμενες στη [53] και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις τιμές παραμέτρων για αιματοκρίτη 45% [27,54,17].



**Casson:**

$$\tau > \tau_0 \Rightarrow \tau = \left( \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2 \gamma \quad \text{viscoplastic, shear-thinning}$$

$$\tau < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$\mu_\infty$ : ασύμπτωτη τιμή συνεκτικότητας σε μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης

Ένα ακόμα ευρέως χρησιμοποιούμενο ιξωδοπλαστικό μοντέλο, με τους συντελεστές του οποίου έχουν γίνει διάφορες προσαρμογές πειραματικών δεδομένων για το ιξώδες του αίματος. [17,45]

όπου  $n$ : συντελεστής μη νευτώνειας συμπεριφοράς,  $k$ : φαινόμενη συνεκτικότητα,  $\tau_0$ : απαιτούμενη αρχική τάση για ροή του ρευστού

Τα πεδία ροής που θα επιλέξουμε για τη μελέτη των μοντέλων αυτών, θέλουμε να είναι τέτοια ώστε οι ψευδοπλαστικές τους ιδιότητες να γίνονται σημαντικές.

Τα μοντέλα αυτά εμφανίζουν μεγάλες διαφορές με το νευτώνειο στους χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης, δηλαδή ροές με μικρές χωρικές κλίσεις της ταχύτητας.

Το στοιχείο αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση ροών χαμηλών ταχυτήτων και μικρό βαθμό στένωσης.

Επιλέξαμε τελικά, τη μελέτη ροών σε την περιοχή  $25 \leq Re \leq 150$ , σε στένωση 50% κατά ακτίνα (75% απόφραξη διατομής), σύμφωνα με το παρακάτω σκεπτικό.

- διάμετρος στεφανιαίας αρτηρίας:  $d = 0.004\text{m}$  [4]
- μέση ταχύτητα του αίματος σε αυτή:  $U_0 \approx 0.1\text{m/s}$  [4]
- πυκνότητα αίματος:  $\rho = 1050\text{kg/m}^3$
- ιξώδες αίματος (νευτώνεια προσέγγιση):  $\mu = 0.0035\text{ Pa}\cdot\text{s}$

Και τελικά λαμβάνουμε:  $Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu} = O(10^2)$ .

Αν ακόμα θεωρήσουμε μία φυσιολογική κυκλοφορία, συχνότητας καρδιακού κύκλου  $f=1/T = 80$  παλμοί/min, λαμβάνουμε  $Str = \frac{d}{TU_0} = O(5 \cdot 10^{-2})$ .

Η ροή  $Re = 100 - Str = 0.05$ , που θα μελετήσουμε αποτελεί φυσιολογική περίπτωση ροής αίματος σε στεφανιαία αρτηρία.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

## μαθηματική προτυποποίηση

### i} γενική τοποθέτηση του προβλήματος

Η κατάστροψη των εξισώσεων κίνησης των ρευστών εκκινεί από την έννοια του *συνεχούς μέσου*, δηλαδή τη μακροσκοπική θεώρηση ότι μεγέθη όπως η μάζα, η ορμή κλπ, είναι συνεχώς κατανομημένα στον όγκο του ρευστού και όχι συγκεντρωμένα σε μικρά τμήματά του (πχ μόρια ή άτομα). [55]

Για να παρατηρήσουμε την κίνηση του ρευστού, αναγκαίο είναι να θεωρήσουμε ότι, το συνεχές αυτό μέσο, αποτελείται από ένα σύνολο *σωματιδίων*, δηλαδή μικρά τμήματα του ρευστού που περικλείονται, κάποια χρονική στιγμή, σε απειροστή περιοχή ενός σημείου του χώρου, που καταλαμβάνει το ρευστό. [55]

Ας θεωρήσουμε το χώρο κίνησης των ρευστοστοιχείων *ένα κλειστό χωρίο  $\Omega$  του ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$* .

Θα περιγράψουμε την κίνηση των σωματιδίων, από τη θέση του παρατηρητή, που κινείται μαζί με αυτά. Αυτή είναι μία *υλική περιγραφή* (περιγραφή κατά *Lagrange*) του πεδίου ροής, η οποία έχει το πλεονέκτημα της άμεσης αποτύπωσης των μεγεθών του πεδίου ροής και όχι της έμμεσης σχετικά με ένα άλλο ακίνητο παρατηρητή.

Θεωρώντας ροή χωρίς μεταφορά θερμότητας (*ισόθερμη ροή*) και την *επίδραση του πεδίου βαρύτητας αμελητέα*, οι εξισώσεις κίνησης, προκύπτουν από δύο βασικές αρχές της φυσικής και για τη γενικότερη έκφρασή τους και σε διανυσματική μορφή, γράφονται:

$$\text{αρχή διατήρησης μάζας:} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{αρχή διατήρησης ορμής:} \quad \rho \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} \quad (2.2)$$

$\rho$ : πυκνότητα

$\bar{\mathbf{u}}$ : διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων

$\bar{\mathbf{T}}$ : τανυστής των τάσεων

$\frac{D[\ ]}{Dt}$ : υλική παράγωγος

$\nabla$ : απόκλιση διανυσματικού πεδίου

Η μεν (2.1) εκφράζει το γεγονός ότι η μάζα σε κάθε τμήμα του ρευστού παραμένει σταθερή, δηλαδή δεν παράγεται, ούτε καταναλώνεται, ενώ η (2.2) είναι η ισορροπία των δυνάμεων σε ένα ρευστοστοιχείο, που εκφράζει ο 2<sup>ος</sup> Νόμος του *Newton*. [46,56]

Θεωρώντας το ρευστό *ισότροπο*, δηλαδή να παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες έντασης και παραμόρφωσης προς όλες τις κατευθύνσεις του  $\mathbb{R}^3$ , προκύπτει συμμετρικός τανυστής τάσεων  $\vec{\mathbf{T}}$ . [45,56]

Με την υπόθεση συμπεριφοράς του ως *υλικό Stokes*, ακολουθεί τη συγκεκριμένη έκφραση του τανυστή τάσεων *Cauchy*:

$$\vec{\mathbf{T}} = -p\vec{\mathbf{I}} + \vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}}) \quad (2.3)$$

$p$ : η ασκούμενη στατική πίεση

όπου ο τανυστής  $\vec{\mathfrak{s}}$  είναι συμμετρικός και συνάρτηση του τανυστή παραμορφώσεων

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\mathbf{u}} + (\nabla\vec{\mathbf{u}})^T) \quad (2.4)$$

## ii} κατηγοριοποίηση των ρευστών

Στο σημείο αυτό, ας δούμε πως οι εκφράσεις αυτές αντιστοιχούν σε ορισμένες γνωστές κατηγορίες ρευστών:

- *μη συνεκτικό ρευστό (inviscid)*:  $\vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}}) = 0$   
σε αυτό, εφαρμόζονται μόνο τάσεις προερχόμενες από τη στατική πίεση
- *συνεκτικό ρευστό (viscous)*:  $\vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}}) \neq 0$ 
  - *συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου (time independent)*:  $\vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}}) := \vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}})$

Σε αυτή την κατηγορία μη νευτώνειων ρευστών, οι παραγόμενες τάσεις είναι συνάρτηση αποκλειστικά του ρυθμού παραμόρφωσης  $\vec{\mathbf{D}}$  τη στιγμή που τα εξετάζουμε.

Η γενικότερη φυσικώς αποδεκτή σχέση, γράφεται:

$$\vec{\mathfrak{s}}(\vec{\mathbf{D}}) = h_0\vec{\mathbf{I}} + h_1\vec{\mathbf{D}} + h_2\vec{\mathbf{D}}^2 \quad (2.5)$$

όπου  $h_i = h_i(\vec{\mathbf{D}})$ ,  $i=0,1,2$

Πολλά είναι τα μοντέλα ρευστών, τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν με μεταβολή των συναρτήσεων  $h_i$ ,  $i = 0,1,2$ , αλλά και πάλι μόνο μερικά από αυτά ανταποκρίνονται σε αυτά που συναντούμε στη φύση.

Μία παραδοχή στην παραπάνω εξίσωση, με την οποία εξασφαλίζεται η *αρχή της υλικής ανεξαρτησίας*, δηλαδή οι ιδιότητες του υλικού να είναι ανεξάρτητες της θέσης του παρατηρητή, είναι η εξάρτηση των  $h_i$ ,  $i=0,1,2$  από τις *βασικές αναλλοίωτες του τανυστή παραμορφώσεων  $\vec{\mathbf{D}}$* . [46]

Αυτές, για *σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων*  $(\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\phi)$ , γράφονται:

$$I_D = \text{tr } \vec{\mathbf{D}} = D_{xx} + D_{rr} + D_{\varphi\varphi}$$

$$II_D = \frac{1}{2} (I_D^2 - \text{tr } \vec{\mathbf{D}}^2) = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xr} \\ D_{rx} & D_{rr} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{x\varphi} \\ D_{\varphi x} & D_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{rr} & D_{r\varphi} \\ D_{\varphi r} & D_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}$$

$$III_D = \det \vec{\mathbf{D}} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xr} & D_{x\varphi} \\ D_{rx} & D_{rr} & D_{r\varphi} \\ D_{\varphi x} & D_{\varphi r} & D_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}$$

$$\text{και το μέτρο του: } |\vec{\mathbf{D}}| = \sqrt{\frac{1}{2} (II_D)}$$

όπου  $D_{ij}$  το στοιχείο του τανυστή  $\vec{\mathbf{D}}$  για  $i, j = x, r, \varphi$

Μετά την παραδοχή αυτή, εμφανίζεται η σημαντικότερη κατηγορία ρευστών, το *νευτώνειο ρευστό (newtonian)*:

$$\vec{\sigma}(\vec{\mathbf{D}}) = 2\mu\vec{\mathbf{D}} + \mu' \text{tr } \vec{\mathbf{D}} \Leftrightarrow h_0 = \mu' I_D, \quad h_1 = 2\mu, \quad h_2 = 0 \quad (2.6)$$

όπου  $\mu$  είναι το γνωστό και σταθερό ιξώδες και  $\mu'$  το ιξώδες όγκου, εμφανιζόμενο μόνο στις συμπιεστές ροές, όπου  $\text{tr } \vec{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} \neq 0$ .

Χαρακτηριστικό, αυτού του ρευστού, είναι η γραμμική σχέση των  $\vec{\mathbf{T}}$  και  $\vec{\mathbf{D}}$ .

Όσα ρευστά δεν εμπίπτουν στην παραπάνω κατηγορία, ονομάζονται *μη νευτώνεια*, ανεξαρτήτως της μαθηματικής κατηγοριοποίησης.

Οι υποκατηγορίες των *μη νευτώνειων συμπεριφορών ανεξάρτητης χρόνου* είναι οι εξής.

Το σύνολο των ασυμπίεστων ρευστών ( $\text{tr } \vec{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ ), στα οποία  $h_0 = 0$ , ονομάζονται *ρευστά Reiner–Rivlin* και οι  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  είναι συναρτήσεις μόνο των

$$III_D = \det \vec{\mathbf{D}} \quad \text{και} \quad II_D = \frac{1}{2} (I_D^2 - \text{tr } \vec{\mathbf{D}}^2). \quad [46]$$

Αν εισάγουμε τη συνθήκη  $h_0 = 0$  στη (2.5), βλέπουμε τη σημασία της: *δεν εμφανίζονται ορθές τάσεις, εκτός από αυτές που δημιουργεί η στατική πίεση.*

Οδηγούμαστε πιο κοντά στην υποκατηγορία μη νευτώνειων που αντιστοιχεί στα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά του αίματος.

Οι επιπρόσθετες παραδοχές που πρέπει να γίνουν για το σκοπό αυτό στα ρευστά *Reiner–Rilvin* είναι οι παρακάτω:

$h_2 = 0$ , πειραματικά στοιχεία έχουν δείξει ότι η υπόθεση  $h_2 = \text{σταθερά} \neq 0$  έρχεται σε αντίθεση με το 2<sup>ο</sup> *Θερμοδυναμικό Αξίωμα*

$$h_1 = h_1(II_D)$$

Και τελικά:

$$\vec{\sigma}(\vec{\mathbf{D}}) = h_1(II_D)\vec{\mathbf{D}} \quad (2.7)$$

Δημιουργείται έτσι, μία νέα υποκατηγορία μη νευτώνειων ρευστών, τα *γενικευμένα νευτώνεια*, που είναι και η περισσότερο διαδεδομένη για μοντελοποίηση μη νευτώνειας συμπεριφοράς, για λόγους που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Δύο εκπρόσωποι της υποκατηγορίας αυτής είναι τα:

*Εκθετικού Νόμου* ή *Ostwald de Waelle*:  $h_1 = 2\mu_1 (II_D)^{q-2}$ ,  $\mu_1 > 0$ ,  $q > 1$  και

*Carreau*:  $h_1 = \mu_0 + \mu_1 (\mu_2 + (II_D)^2)^{\frac{q-2}{2}}$   $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . [46]

- συμπεριφοράς χρονικά εξάρτημένης (time dependent)

Η συμπεριφορά των ρευστών αυτών, εξαρτάται και από την «ιστορία» έντασής τους, ως  $\vec{\sigma}(\vec{D}) = \vec{\sigma}(\vec{D}, \dot{\vec{D}}, \ddot{\vec{D}}, \dots)$ . Δηλαδή όχι μόνο από τις μεταβολές που δέχονται κάθε στιγμή, αλλά και τις μεταβολές που δέχεται ο ρυθμός παραμόρφωσής τους.

Ένα σύνηθες μοντέλο της κατηγορίας αυτής είναι το *ρευστό δεύτερης τάξης*, με  $a_i =$  σταθερές,  $i = 0, 1, 2$

$$\vec{\sigma}(\vec{D}) = a_0 \vec{\bar{A}}_1 + a_1 \vec{\bar{A}}_2 + a_2 \vec{\bar{A}}_1^2$$

όπου  $\vec{\bar{A}}_1 = 2\vec{D}$ ,  $\vec{\bar{A}}_2 = \frac{\partial \vec{\bar{A}}_1}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\bar{A}}_1 + \vec{\bar{A}}_1 \cdot (\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u} \cdot \vec{\bar{A}}_1$  και προφανώς  $a_0 = \mu$  το μετρούμενο ιξώδες σε μόνιμη κατάσταση.

- ιξωδοελαστικά ρευστά (viscoelastic)

Τα μοντέλα αυτά βασίζονται στις ελαστικές ιδιότητες που παρουσιάζουν ορισμένα ρευστά και εντέλει η διαφορική εξίσωση που υπεισέρχεται σε αυτά πρέπει να λυθεί μαζί, ως σύστημα, με τις εξισώσεις διατήρησης (2.1) και (2.2).

Ένα γνωστό τέτοιο μοντέλο είναι το *ρευστό Olroyd-B* (το οποίο αποτελεί και βάση για τα γενικότερης διατύπωσης ιξωδοελαστικά μοντέλα *Maxwell*):

$$\vec{\sigma}(\vec{D}) = 2\mu_\infty \vec{D} + \vec{\tau}$$

με τον τανυστή  $\vec{\tau}$  να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot (\nabla \vec{u})^T - \nabla \vec{u} \cdot \vec{\tau} \right) + \vec{\tau} = 2(\mu_0 - \mu_\infty) \vec{D}$$

τα  $\lambda_1$ ,  $\mu_0$  και  $\mu_\infty$  είναι θετικές σταθερές του περιγραφόμενου υλικού, με  $\mu_\infty < \mu_0$ .

Η σταθερά  $\lambda_1$ , είναι *συντελεστής χαλάρωσης του υλικού* και ας παρατηρήσουμε ότι αν  $\lambda_1 = 0$ , τότε επιστρέφουμε στο νευτώνειο μοντέλο με  $\mu \equiv \mu_0$ . [46]

Με τα ιξωδοελαστικά μοντέλα, είναι δυνατόν να προτυποποιηθούν οι ορθές τάσεις, που εμφανίζονται σε ορισμένα μη νευτώνεια, πέρα από τις οφειλόμενες στη στατική πίεση. [45]

### iii} επιλυσιμότητα του συστήματος εξισώσεων

Είδαμε ότι στην κατηγορία ρευστών που θα μας απασχολήσει, τα γενικευμένα νευτώνεια, ο τανυστής των τάσεων τους γράφεται:

$$\bar{\mathbf{T}} = -p\mathbf{I} + h_1(H_D)\bar{\mathbf{D}} \quad (2.8)$$

Ο ορισμός τους, ως γενικευμένα νευτώνεια, γίνεται άμεσα αντιληπτός, συγκρίνοντας με τον τανυστή των τάσεων για το νευτώνειο, ασυμπίεστο, ρευστό  $h_1 = 2\mu$ .

Με τις σχέσεις αυτές για τον τανυστή παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{T}}$  ενός υλικού *Stokes*, καθορίζεται πλήρως το σύστημα εξισώσεων (2.1) και (2.2), που περιγράφει τη ροή ενός ρευστού, επιτρέποντάς μας πλέον να τις αναφέρουμε ως εξισώσεις *Navier-Stokes* (*N-S*):

Ας τις γράψουμε, συγκεκριμένα πλέον, για το ασυμπίεστο ρευστό:

$$\text{διατήρηση μάζας:} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{διατήρηση ορμής:} \quad \rho \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} \quad (2.10)$$

Το σύστημα αυτών των μερικών διαφορικών εξισώσεων δεν έχει λύση σε κάθε περίπτωση και αν η λύση υπάρχει δεν είναι σίγουρα και η μοναδική, κάνοντας τη μελέτη της παγκόσμιας ύπαρξής της (*global existence – ύπαρξη και μοναδικότητα*), της ευστάθειας και της ομαλότητας (*smoothness*) αυτής, πεδίο αιχμής για τη μαθηματική σκοπιά του ζητήματος.

*Λύση (solution)* του προβλήματος, αποτελεί κάθε σύστημα συναρτήσεων που επαληθεύουν τις εξισώσεις του προβλήματος.

*Μοναδικότητα (uniqueness)* μιας λύσης, σημαίνει ότι δεδομένης μιας κατάστασης του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή, το σύστημα είναι μονοσήμαντα ορισμένο για τις επόμενες χρονικές στιγμές.

*Ευστάθεια (stability)*, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε σε κάποιες λύσεις, όταν υπάρχει συνεχής εξάρτηση από τις οριακές τιμές και συνεπώς, μικρές διαταραχές στα αρχικά δεδομένα οδηγούν και σε προβλέψιμες μικρές μετατοπίσεις της αντίστοιχης λύσης.

*Ομαλή ή λεία (smooth)* συνάρτηση, ονομάζεται αυτή που οι παράγωγοί της, κάθε τάξης, υπάρχουν και είναι συνεχείς. [57]

Εδώ, απλώς, θα καταγράψουμε ορισμένα συμπεράσματα της μαθηματικής θεωρίας για το θέμα αυτό.

Επίλυση του συστήματος αυτού, συνεπάγεται την εύρεση του πεδίου ταχυτήτων  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_i \in \mathcal{R}^3 \times [0, \infty)$ ,  $i=1,2,3$  και της συνάρτησης πίεσης  $p \in \mathcal{R}^3 \times [0, \infty)$ , σε κάθε χρονική στιγμή  $t \in [0, \infty)$  σε χωρίο  $\Omega$ , με κλειστό ή ανοιχτό όριο το  $\partial\Omega$ , του ευκλείδειου τριδιάστατου χώρου  $\mathcal{R}^3$ .

Το σύστημα των (2.9) και (2.10), συνοδευόμενο από κατάλληλες οριακές συνθήκες και την προϋπόθεση για τις συνοριακές συνθήκες, ότι το άθροισμα των ταχυτήτων που είναι κάθετες στο κάθετο διάνυσμα του ορίου  $\partial\Omega$ , σε κάθε θέση, είναι μηδενικό, επιδέχεται λύση, μοναδική και ομαλή:

(στην περίπτωση μας ισχύει, αφού η εισερχόμενη παροχή μάζας ισούται με την εξερχόμενη και στο τοίχωμα η ταχύτητα είναι μηδενική)

#### νευτώνειο ρευστό

- υπάρχει κάποιου είδους συμμετρία στο χώρο και τελικά από μελέτη στον  $\mathbb{R}^3$  καταλήγουμε σε μελέτη στον  $\mathbb{R}^2$ , δηλαδή αξονικά συμμετρικές ή διδιάστατες (2-D) ροές
- η αρχική λύση ταχυτήτων είναι αρκετά μικρή
- η αρχική λύση παρουσιάζει πολύ ταλαντωτική συμπεριφορά [46,58-60]

#### γενικευμένα νευτώνεια ρευστά

- υπάρχει κάποιου είδους συμμετρία στο χώρο και τελικά από μελέτη στον  $\mathbb{R}^3$  καταλήγουμε σε μελέτη στον  $\mathbb{R}^2$ , δηλαδή αξονικά συμμετρικές ή διδιάστατες (2-D) ροές
- σε κάθε κλειστό χωρίο  $\Omega$ , για  $h_1 = \mu_0 + \mu_1 (II_D)^{q-2}$ ,  $q > 2$  [46]
- μόνο το πρόβλημα συνοριακών τιμών για  $h_1 = \kappa + h(II_D)$ , υπό προϋποθέσεις που τίθενται στην [46]

Οι περισσότερες από τις αποδείξεις αυτές, οφείλονται στην *O.A.Ladyzhenskaya* τη δεκαετία του 1960 και σήμερα η μαθηματική κοινότητα κινείται σε τροχιά γενίκευσης των αποτελεσμάτων αυτών.

Αξιοσημείωτο είναι πως παρότι κάποια ζητήματα αποδείξεων είναι ακόμα ανοιχτά για το νευτώνειο, στα γενικευμένα νευτώνεια είναι ήδη λυμένα. [46]

### iv } εξισώσεις ροής των μελετούμενων ρευστών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, καταλήξαμε σε ένα μοντέλο αγωγού, διδιάστατο, αξονικά συμμετρικό, άκαμπτο και αδιαπέραστο.

Επίσης, θεωρήσαμε ότι δεν υπάρχουν διαφορές στη θερμοκρασία τοιχωμάτων αγωγού και ρευστού, ούτε διαφορές θερμοκρασίας στο ρευστό, κάτι που μας οδηγεί σε *ισόθερμη ροή*. Ενώ η επίδραση της βαρύτητας θεωρείται αμελητέα.

Τέλος, το μελετούμενο ρευστό διατηρεί την πυκνότητά του σταθερή, ανεξάρτητη της πίεσης, οδηγώντας μας σε ροή *ασυμπίεστου ρευστού*.

Με τις παραδοχές αυτές, το πεδίο ταχυτήτων και πιέσεων ρευστού, που ρέει μέσα σε έναν τέτοιο αγωγό, περιγράφεται από τις εξισώσεις *Navier – Stokes*, εκφρασμένες σε δύο διαστάσεων, κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Για τέτοιας μορφής πεδίο ροής, μόνιμο ή μη, όπως είδαμε πιο πάνω, η ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα των πεδίων ταχύτητας, που το επαληθεύουν, είναι αποδεδειγμένη και αδιαμφισβήτητη.

Ο μόνος λόγος για τον οποίο υπάρχει πιθανότητα να λαμβάνουμε διαφορετικές λύσεις από τις πραγματικές, για τα συγκεκριμένα πεδία ροής, είναι η ακολουθούμενη διαδικασία προσέγγισης της λύσης, με την οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Στα γενικευμένα νευτώνεια ρευστά, ρευστά δηλαδή, όπου οι τάσεις τους σχετίζονται με την παραμόρφωσή τους με μία σχέση της μορφής:

$$\vec{\sigma}(\vec{\mathbf{D}}) = h_1(H_D)\vec{\mathbf{D}} \quad (2.11)$$

σε σύστημα δύο διαστάσεων  $(\vec{e}_x, \vec{e}_r)$  ο ταυσιτής των παραμορφώσεών τους γράφεται:

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) & \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

και το μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης, (για δύο διαστάσεις  $\det \vec{\mathbf{D}} = H_D$ ):

$$\gamma = |\vec{\mathbf{D}}| = \sqrt{\frac{1}{2}|\det \vec{\mathbf{D}}|} = \sqrt{\left|\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right]^2\right|} \quad (2.13)$$

Η μορφή της  $h_1(|\vec{\mathbf{D}}|)$  συνάρτησης των ρευστών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

**νευτώνειο:**  $\vec{\sigma} = 2\mu\vec{\mathbf{D}}$  (σταθερή:  $h_1 = \mu_0$ )

**Walburn-Schneck:**  $\vec{\sigma} = (k\gamma^n)\vec{\mathbf{D}}$  (εκθετικού νόμου:  $h_1 = \mu_1|\vec{\mathbf{D}}|^{q-2}$ )

**Herchel-Bulkley:**

$$|\vec{\sigma}| > \tau_0 \Rightarrow \vec{\sigma} = \left(\frac{\tau_0}{\gamma} + k\gamma^n\right)\vec{\mathbf{D}}$$

$$|\vec{\sigma}| < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$



**Quemada:** 
$$\vec{\sigma} = \mu_F \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \phi \right)^{-2} \vec{D}$$

**Casson:** 
$$|\vec{\sigma}| > \tau_0 \Rightarrow \vec{\sigma} = \left( \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2 \vec{D}$$

$$|\vec{\sigma}| < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Γράφουμε τις εξισώσεις (2.9) και (2.10) σε βαθμωτή μορφή, συμβολίζοντας:

$u_x$  : αξονική συνιστώσα της ταχύτητας

$u_r$  : ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας

$\sigma_{ij}$  : το στοιχείο  $ij$  του ταυυστή  $\vec{\sigma}$  όπου  $i$  και  $j = x, r$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left( \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right)$$

Αντικαθιστώντας τις διατμητικές τάσεις, ως  $\sigma_{ij} = \mu(\gamma) D_{ij}$ , για κάθε στοιχείο των ταυυστών  $\vec{\sigma}$  και  $\vec{D}$ ,  $i$  και  $j = x, r$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \left( \mu(\gamma) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \mu(\gamma) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left( \frac{\partial \left( \mu(\gamma) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \mu(\gamma) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)}{\partial r} \right)$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η τελευταία μορφή είναι αυτή την οποία ο επιλυτής FLUENT ολοκληρώνει και τελικά επιλύει.

Μάλιστα, η συγκεκριμένη τοποθέτηση του ιξώδους  $\mu(\gamma)$  ανταποκρίνεται και στη μέθοδο επίλυσης, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, αφού πρώτα υπολογίζεται το ιξώδες από κάποια πρόβλεψη του πεδίου ταχυτήτων, εισάγεται στις εξισώσεις και στο τέλος επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων.

Προχωρούμε στην αδιαστατοποίηση του παραπάνω συστήματος, με σκοπό να αποκαλυφθούν οι παράμετροι που καθορίζουν το πρόβλημα.

Στη γενικότητά του, μπορούμε να γράψουμε  $\mu(\gamma) = \mu_{eff} f(\gamma^*)$ , όπου  $\mu_{eff}$  μία σταθερή χαρακτηριστική τιμή ιξώδους για κάθε μοντέλο και  $f(\gamma^*)$  μία αδιάστατη συνάρτηση του αδιάστατου μέτρου του ρυθμού παραμόρφωσης,  $\gamma^* = \gamma d/U_0$ , όπως θα προκύψει από τις πιο κάτω αδιαστατοποιήσεις.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{eff} \left( \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_{eff} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)}{\partial r} \right)$$

τα αδιάστατα μεγέθη θα παρουσιαστούν με αστερίσκο (\*) και αδιαστατοποιούμε ως :

αξονική απόσταση:  $x^* = \frac{x}{d}$ , ακτινική απόσταση:  $r^* = \frac{r}{d}$ , ταχύτητα:  $u_i^* = \frac{u_i}{U_m}$ ,

χρόνος:  $\tau = \frac{t}{T}$ , στατική πίεση:  $p^* = \frac{P}{\rho U_m^2}$ , όπου  $d$ : διάμετρος αγωγού,  $T$ : περίοδος

περιοδικής συνάρτησης ταχύτητας,  $U_m = U_0 = \frac{Q}{\pi R^2} = \left( \int_0^R 2\pi r u(r) dr \right) / \pi R^2$ : μέση

ταχύτητα διατομής, βασισμένη στην παροχή εισόδου του αγωγού, όπου εισέρχεται ελεύθερο ρεύμα ρευστού ταχύτητας  $U_0$ .

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} = 0$$

$$Str \frac{\partial u_x^*}{\partial \tau} + u_x^* \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + u_r^* \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \right)}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} \right) \right)}{\partial r^*} \right)$$

$$Str \underbrace{\frac{\partial u_r^*}{\partial \tau}}_{\text{μη μόνιμος όρος}} + \underbrace{u_x^* \frac{\partial u_r^*}{\partial x^*} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*}}_{\text{μεταφορικοί όροι}} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} \right) \right)}{\partial x^*} + \frac{\partial \left( f(\gamma^*) \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} \right)}{\partial r^*} \right)$$

$\text{DT}$

και εμφανίζονται οι αδιάστατοι παράμετροι της ροής:

$$\text{αριθμός Reynolds: } Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$$

εκφράζει τη σημαντικότητα των συνεκτικών φαινομένων σχετικά με την αδράνεια που παρουσιάζει η ροή

$$\text{αριθμός Strouhal: } Str = \frac{d}{TU_0}$$

εκφράζει τη σημαντικότητα των μη μόνιμων φαινομένων σχετικά με την αδράνεια που παρουσιάζει η ροή

Σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιείται ως αριθμός ομοιότητας της ροής, ο αριθμός

$$\text{Womersley [26]: } a = R\sqrt{\frac{2\pi f}{\nu}}, \text{ για } \nu = \mu/\rho, R = d/2, f = 1/T \text{ προκύπτει } a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Re \cdot Str.$$

Θεωρούμε ότι ο αριθμός αυτός, δεν προκύπτει άμεσα από αδιαστατοποίηση των τριών εξισώσεων, παρά εμφανίζεται υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις στις εξισώσεις κίνησης ρευστού σε ευθύγραμμο αγωγό και πλήρως διαμορφωμένη κατάσταση. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε περισσότερο ακριβές, μαθηματικά, να διατυπωθούν οι εξισώσεις με τους αδιάστατους αριθμούς που προκύπτουν άμεσα από την αδιαστατοποίηση.

Στα δύο ιξωδοπλαστικά ρευστά, H-B και Casson, από τη διαδικασία αδιαστατοποίησης, προκύπτει ακόμα ένας αδιάστατος αριθμός, για την περιγραφή της ροής τους.

*αριθμός Bingham (Bi): εκφράζει τη σημαντικότητα της αρχικής τάσης, που απαιτείται για την έναρξη της ροής του ρευστού, σχετικά με την επίδραση των συνεκτικών τάσεων.*

Παραθέτουμε τις συναρτήσεις  $\mu(\gamma) = \mu_{eff} f(\gamma^*)$  για κάθε μοντέλο:

**νευτώνειο:**  $\mu(\gamma) = \mu_0, f(\gamma^*) = 2, \mu_{eff} = \mu_0 = 0.0032 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

**Walburn-Schneck:**  $\mu(\gamma) = k\gamma^{n-1}, f(\gamma^*) = \gamma^{*n-1}, \mu_{eff} = k\left(\frac{d}{U_0}\right)^{1-n}$

$$n = 0.7755, k = 0.01467 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.7755}$$

[ Η χρήση του W-S στο FLUENT, λόγω της υπερβολικής συνάρτησης ορισμού του, απαιτεί τον καθορισμό ενός κατώτατου ορίου ιξώδους  $\mu_{\min}$  και ενός ανώτατου  $\mu_{\max}$ . Τα όρια αυτά, αν τοποθετηθούν «αρκετά μακριά» από τις τιμές ιξώδους που εντέλει θα προκύψουν, δε θα έχουν επηρεάσει τη λύση μας.

Για να διατηρήσουμε τα αποτελέσματά μας ανεξάρτητα αυτών των ορίων, μετά από συστηματικές δοκιμές στο FLUENT, βρήκαμε πως η βέλτιστη θέσπισή τους ήταν:

$$\mu_{\min} = 0.0001 \text{ Pa}\cdot\text{s} \text{ και } \mu_{\max} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s} ]$$

**Herschel-Bulkley:**  $\mu(\gamma) = \frac{\tau_0}{\gamma} + k\gamma^{n-1}, f(\gamma^*) = \frac{Bi}{\gamma^*} + \gamma^{*n-1}, \mu_{eff} = k\left(\frac{d}{U_0}\right)^{1-n}$

$$n = 0.8601, k = 0.0089721 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.8601}, \tau_0 = 0.0175 \text{ Pa}, Bi = (\tau_0 / k)\left(\frac{d}{U_0}\right)^n$$

Για να καλυφθεί η ασυνέχεια του H-B, το οποίο για  $\tau_0 < 0$ , ουσιαστικά παρουσιάζει άπειρη συνεκτικότητα, η συνάρτηση ορισμού του στο FLUENT είναι:

$$\mu(\gamma) = \frac{\tau_0 + k[\gamma^n - (\tau_0/\mu_0)^n]}{\gamma}$$
, όπου  $\mu_0$  είναι η τιμή της συνεκτικότητας, όταν ασκηθεί η τάση αυτή.

Για να είμαστε συνεπείς με την αδιαστατοποίηση που κάναμε, θα πρέπει ο όρος  $\eta = (\tau_0/\mu_0)$  να εξαλειφθεί. Έτσι, έχοντας ως δεδομένη την τιμή  $\tau_0 = 0.0175$  Pa, από πειραματικές μετρήσεις, θα πρέπει να επιλέξουμε μία τιμή για το  $\mu_0 > 1$ , τέτοια ώστε πρακτικά ο όρος  $\eta$  να μηδενίζεται.

Θεωρώντας ότι αν  $\eta = O(10^{-3})$ , τότε πρακτικά είναι αμελητέος εισάγουμε:  $\mu_0 = 10$  Pa·s

Με την τιμή αυτή, εξασφαλίζεται η ομοιότητα των αποτελεσμάτων μας, ως προς τους αδιάστατους αριθμούς  $Bi$  και  $Re$ , κάτι που άλλωστε φαίνεται από δοκιμές που έγιναν και παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

**Quemada** : 
$$\mu(\gamma) = \mu_F \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \phi \right)^{-2}$$

$$f(\gamma^*) = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \phi \right)^{-2}, \mu_{eff} = \mu_F$$

$\mu_F = \mu_{plasma} = 0.0012$  Pa·s ,  $\gamma_c = 1.88s^{-1}$  ,  $k_0 = 4.33$  ,  $k_\infty = 2.07$  ,  $\phi = 0.45$  η τιμή του αιματοκρίτη

**Casson** : 
$$\mu(\gamma) = \left( \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2$$
 , 
$$f(\gamma^*) = \left( \sqrt{\frac{Bi}{\gamma^*}} + 1 \right)^2$$
 ,  $\mu_{eff} = \mu_\infty = 0.0031$  Pa·s ,

$$\tau_0 = 0.01082 \text{ Pa}, Bi = (\tau_0/\mu_\infty) \left( \frac{d}{U_0} \right)$$

Η ασυνέχεια που υπάρχει στη συνάρτηση ορισμού του ιξώδους στο ρευστό Casson, το οποίο για  $\tau_0 < 0$  ουσιαστικά παρουσιάζει άπειρη συνεκτικότητα, παρακάμπτεται, αν γραφεί στη συνεχή μορφή κατά *Papanastasiou*, η οποία υιοθετείται και από άλλους μελετητές [27]:

$$\mu(\gamma) = \left( \sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} \left( 1 - e^{-\sqrt{m\gamma}} \right) \right)^2$$
 και θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει με επιτυχία την εξίσωση Casson, για  $m > 100$ .

Σε αδιάστατη μορφή γράφεται: 
$$\mu(\gamma) = \mu_\infty \left( 1 + \sqrt{\frac{Bi}{\gamma^*}} \left( 1 - e^{-\sqrt{\left(\frac{mU_0}{d}\right)\gamma^*}} \right) \right)^2$$

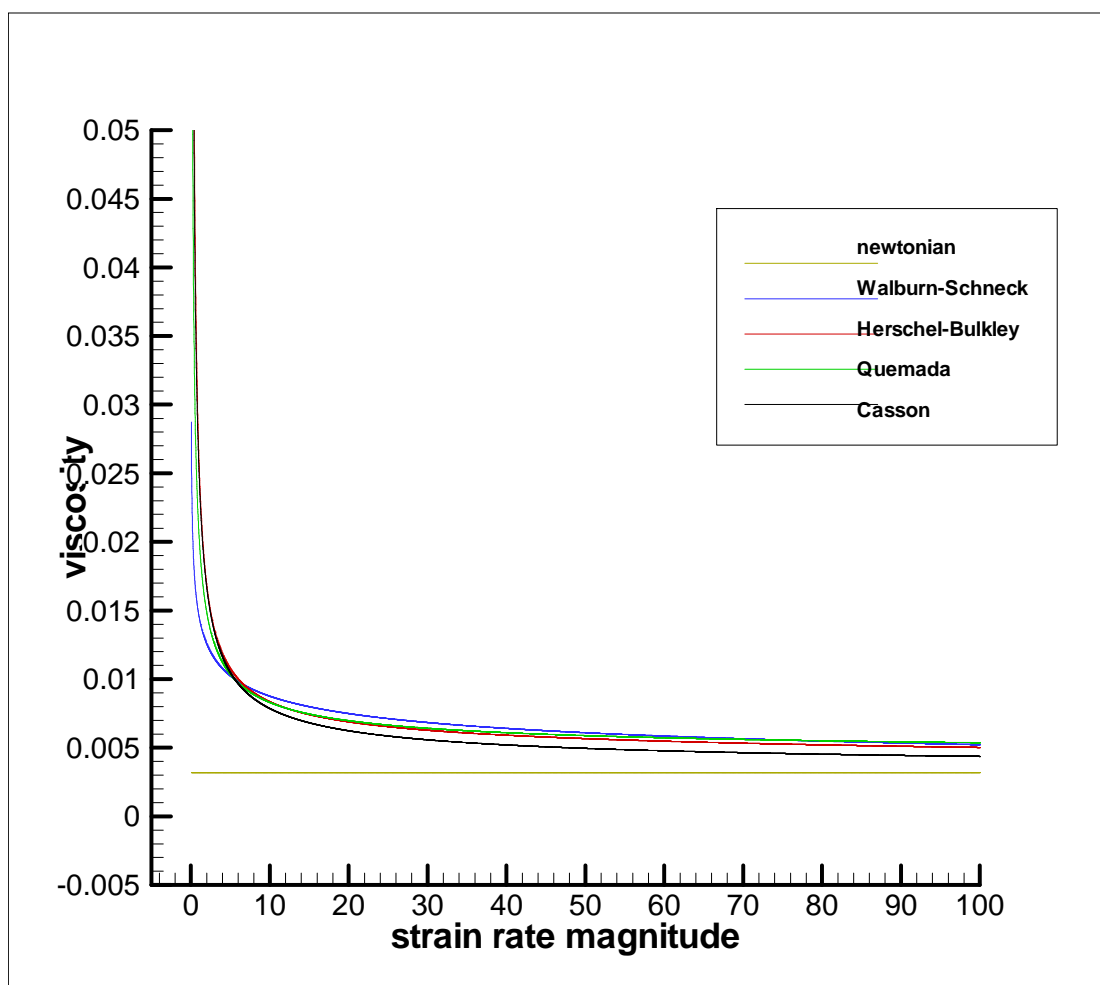
Στη συνάρτηση ορισμού του μοντέλου Casson, θεωρήσαμε  $m = 500$ .

Ένα ακόμα στοιχείο μας προβλημάτισε στην εισαγωγή της συνάρτησης ορισμού του μοντέλου Casson στο FLUENT.

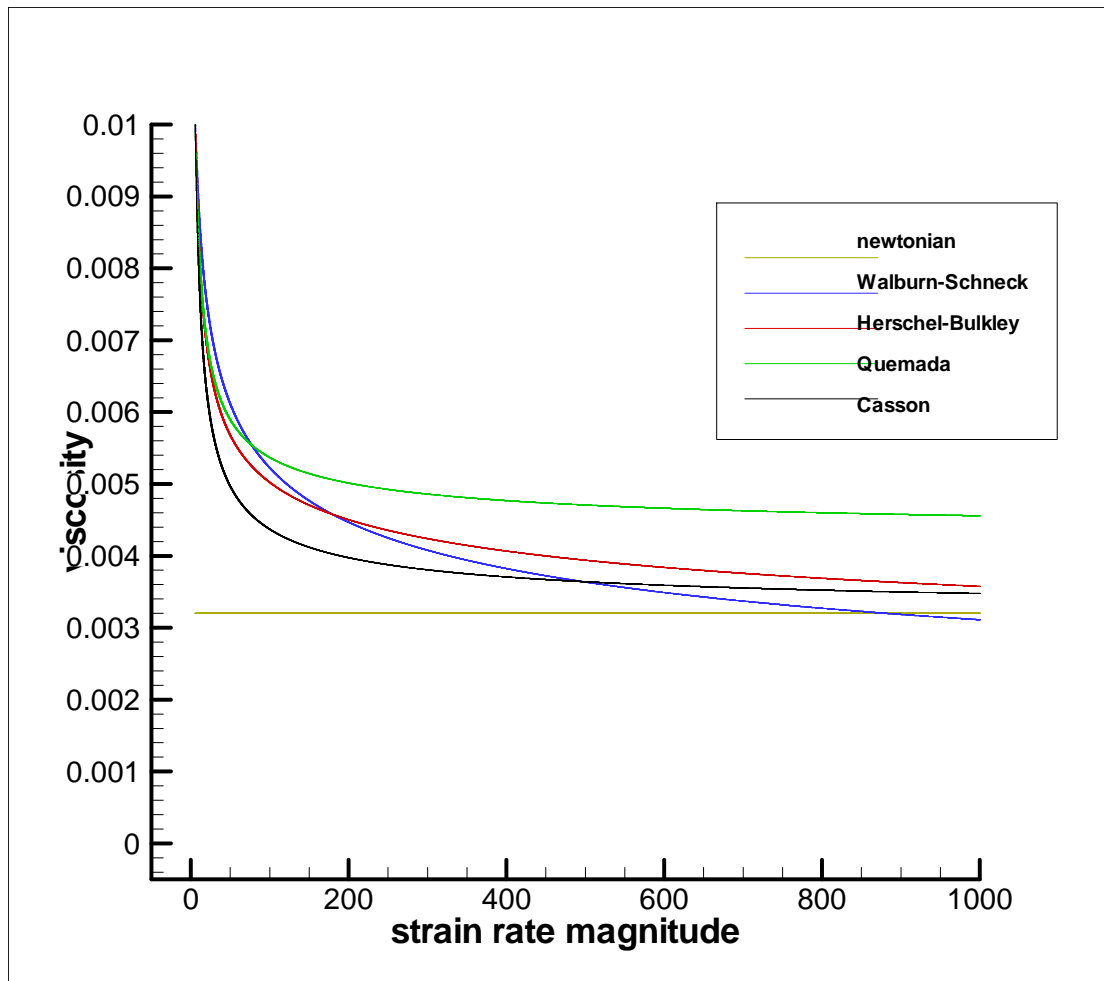
Ακριβώς λόγω της ανυπαρξίας ορίου στις τιμές του λόγου  $\eta = (\tau_0/\mu_0)$ , όπως αντίστοιχα συμβαίνει με τη θέσπιση ορίου στο H-B μοντέλο, παρουσιάζονταν σφάλμα υπερχειλίσσης (εμφανίζονταν αριθμοί πολύ μεγαλύτεροι από αυτούς που μπορεί να διαχειριστεί το πρόγραμμα και γενικότερα ο υπολογιστής). Για να ξεπαράσουμε τη δυσκολία αυτή, προσθέσαμε μία πολύ μικρή ποσότητα ( $10^{-9}$ ) στο μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης:  $\gamma = \gamma + 10^{-9}$

Στα Δ3.1 και Δ3.2 παρουσιάζεται η καμπύλη ιξώδους  $\mu(\gamma)$  σε δύο διαφορετικές κλιμακες του μέτρου του ρυθμού παραμόρφωσης (*strain rate magnitude*)  $\gamma$ , σε διαστατά μεγέθη SI, για όλα τα μοντέλα.

Διαπιστώνουμε τις μεγάλες τιμές ιξώδους για ρυθμούς παραμόρφωσης  $\gamma < 100 \text{ s}^{-1}$ , μακριά από τη νευτώνεια σταθερή τιμή, ενώ η αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης δείχνει την ασυμπτωτική τάση κάθε μοντέλου να φτάσει σε κάποια σταθερή τιμή ιξώδους και άρα να προσεγγίσει τα νευτώνεια χαρακτηριστικά.



Δ3.1 – το ιξώδες (viscosity) κάθε μοντέλου, συναρτήσει του μέτρου του ρυθμού παραμόρφωσης (strain rate) στην κλίμακα  $0 < \gamma < 100 \text{ s}^{-1}$  (μονάδες SI)



Δ3.2 – το ιξώδες (viscosity) κάθε μοντέλου, συναρτήσει του μέτρου του ρυθμού παραμόρφωσης (strain rate) στην κλίμακα  $0 < \dot{\gamma} < 1000 \text{ s}^{-1}$  (μονάδες SI)

## v} οριακές συνθήκες

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, που καταστρώσαμε για την επίλυση των πεδίων ροής, χρειάζεται ορισμένες οριακές συνθήκες, για να μπορεί να μας δώσει το πεδίο ταχυτήτων και πιέσεων της ροής.

[ Η καμπύλη της στένωσης, των αγωγών που αναπτύχθηκαν στο πρόγραμμα GAMBIT, δεν έχει εμφανή μαθηματική έκφραση, αφού δημιουργείται ως προσαρμογή μίας καμπύλης με δεδομένο βαθμό καμπυλότητας σε τρία σημεία που υποδεικνύει ο χρήστης.

Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι το τοίχωμα, στην περιοχή της στένωσης προσεγγίζεται από την αρμονική καμπύλη που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω. ]

Οι οριακές συνθήκες αφορούν το σύνορο  $\partial\Omega$  του χωρίου  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  ευκλείδειου χώρου, όπου ρέει το ρευστό. Το σύνορο αυτό, αποτελείται από τοίχωμα, άξονα συμμετρίας, είσοδο και έξοδο:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_w + \partial\Omega_{ax} + \partial\Omega_{in} + \partial\Omega_{out}$$

Για τους τρεις αγωγούς που μελετούμε, γράφουμε :

ευθύγραμμος:  $\partial\Omega_w : r^* = 0.5 \forall x^* \in [0,20]$

$$\partial\Omega_{ax} : r^* = 0 \forall x^* \in [0,20]$$

$$\partial\Omega_{in} : x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 20$$

στενωμένος:  $\partial\Omega_w : r^* = 0.5 \forall x^* \in [0,0.5] \cup [2.5,12.5],$

$$r^* = 0.5 - 0.125(1 + \cos(\pi(x^* - 1.5))) \forall x^* \in [0.5,2.5]$$

$$\partial\Omega_{ax} : r^* = 0 \forall x^* \in [0,12.5]$$

$$\partial\Omega_{in} : x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 12.5$$

συνδυσμασμένος:  $\partial\Omega_w : r^* = 0.5 \forall x^* \in [0,10] \cup [12,24],$

$$r^* = 0.5 - 0.125(1 + \cos(\pi(x^* - 11))) \forall x^* \in [10,12]$$

$$\partial\Omega_{ax} : r^* = 0 \forall x^* \in [0,24]$$

$$\partial\Omega_{in} : x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 24$$

και επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$\partial\Omega_w : \text{μη ολίσθησης} \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega_w} = 0 \quad (\text{τύπου Dirichlet})$$

$$\partial\Omega_{ax} : \text{μηδενισμός παραγώγων στην ακτινική κατεύθυνση} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_{ax}} = 0$$

(τύπου Neumann)

$$\partial\Omega_{in} : \text{δεδομένη κατανομή ταχυτητών} \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega_{in}} = u(r) \quad (\text{τύπου Dirichlet})$$

Στην έξοδο των αγωγών, έχει ιδιαίτερη σημασία η επιλογή της συνοριακής συνθήκης, καθώς στη διατομή αυτή δεν είμαστε απόλυτα βέβαιοι για τις ταχύτητες και τις πιέσεις, παρά τις γνωρίζουμε μόνο αφού επιλυθεί το πεδίο.

Ένας τρόπος να βγούμε από το αδιέξοδο, θα ήταν να θεωρήσουμε συνθήκη τύπου

$$\text{Neumann με μηδενισμό παραγώγων στην ακτινική κατεύθυνση} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\partial\Omega_{out}} = 0 .$$

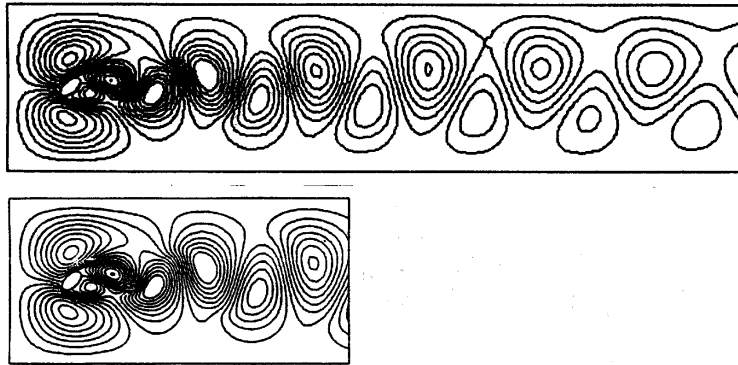
Κάτι τέτοιο θα ήταν εσφαλμένο ιδίως για την περίπτωση της μη μόνιμης ροής, όπου αναμένονται μετατοπιζόμενες δίνες.

Συνθήκη, που αποδεικνύεται ενδεδειγμένη για την περίπτωση αυτή είναι η συνθήκη *απρόσκοπτης εξόδου*, γνωστή ως *free outstream* ή *do-nothing* [61,62].

Σύμφωνα με τις μελέτες αυτές, η συνθήκη αυτή δεν επηρεάζει το πεδίο ανάντι της εξόδου, εφαρμοζόμενη ως:  $\left( v \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - p \bar{e}_r \right) \Big|_{\partial \Omega_{out}} = 0$ .

Παράλληλα, όπως αποδεικνύουν μαθηματικά, σε πολλές περιπτώσεις εμπεριέχει τη συνθήκη τύπου *Neumann* για το όριο αυτό, δηλαδή εκφράζει απόλυτα τη συνθήκη πλήρως ανεπτυγμένης ροής.

Η σύμπτωση αυτή, αυξάνει όσο περισσότερο κατάντι των διαταραχών της ροής τοποθετείται η συνθήκη αυτή (Σχ2.1).



Σχ3.1 – ισοσταθμικές της στατικής πίεσης, κατά τη ροή γύρω από σώμα, με την εφαρμογή της συνθήκης *free outstream* σε δύο διαφορετικές θέσεις [61]

Τέλος, αναφέρεται ότι είναι συμβατή με την καλή τοποθέτηση του προβλήματος που μελετούμε. [61,62]

Μία διαφοροποίηση προκύπτει στον επιλυτή FLUENT, όπου δε χρησιμοποιείται η συνθήκη αυτή, ακριβώς με τον περιγραφόμενο τρόπο, αλλά θεωρείται μηδενική η ροή των όρων διάχυσης (*zero diffusion flux condition*). Έτσι, καταλήγουμε για την έξοδο των αγωγών.

$$\partial \Omega_{out} : \text{μηδενισμός ροής όρων διάχυσης στην αξονική κατεύθυνση} \Leftrightarrow \frac{\partial(\mathbf{DT})}{\partial x} \Big|_{\partial \Omega_{out}} = 0$$

Στη μη μόνιμη ροή, απαραίτητη είναι και μία αρχική συνθήκη σε ένα από τα όρια του  $\partial \Omega$ , την οποία προσφέρουμε στην είσοδο, συνδυασμένη με τη συνοριακή συνθήκη.

$$\partial \Omega_{in} : \text{δεδομένη κατανομή ταχυτητών κάθε χρονική στιγμή} \Leftrightarrow u(t) \Big|_{\partial \Omega_{in}} = u(\mathbf{r}, t)$$



## vi} εξισώσεις της πλήρως διαμορφωμένης ροής

Ας δούμε πως μετασχηματίζονται στην περίπτωση της μόνιμης, πλήρως διαμορφωμένης ροής, σε ευθύγραμμο αγωγό.

Στην περίπτωση αυτή μπορούν να γίνουν οι παρακάτω παραδοχές [55]:

- οι παράγωγοι ταχύτητας κατά την αξονική κατεύθυνση μηδενίζονται:  $\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} = 0$

- δεν υφίσταται ακτινική ταχύτητα:  $u_r^* = 0$

Έτσι, από την εξίσωση συνέχειας:  $\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} = \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} = 0$

και από την ακτινική κατεύθυνση για την ορμή:  $\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow p^* = p^*(x^*)$

Εντέλει το σύστημα μεταπίπτει στην παρακάτω μορφή:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{Re} f(\gamma) \frac{du_x^*}{dr^*}$$

Είναι ροή σε μία κατεύθυνση, με αποτέλεσμα να έχουμε παραμορφώσεις του ρευστού σε μία μοναδική κατεύθυνση (*uniaxial flow*). [45]

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{\mathbf{u}} + (\nabla \vec{\mathbf{u}})^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \text{ και το μέτρο του } \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} |\det \vec{\mathbf{D}}|} = \frac{1}{2} \left| \frac{du_x}{dr} \right|$$

Οι απλοποιήσεις αυτές, κάνουν δυνατή την αναλυτική επίλυση του συστήματος, για το νευτώνειο και τα W-S, H-B μη νευτώνεια ρευστά. [45]

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

## αριθμητική επίλυση

### i} μέθοδος επίλυσης

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής επιλέχθηκε ένα από τα ευρέως χρησιμοποιούμενα υπολογιστικά πακέτα ρευστομηχανικών προβλημάτων, το FLUENT, το οποίο διαθέτει πλήθος επιλογών για την επίλυση πεδίων ροής.

Το FLUENT υιοθετεί τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (*finite volume method - FVM*) για να επιλυσει τα πεδία ροής [63].

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, ολοκληρώνονται στους *όγκους ελέγχου* (*control volumes - CV*). Στους στοιχειώδεις όγκους (υπολογιστικά κελιά) δηλαδή, στους οποίους έχουμε χωρίσει το υπό μελέτη πεδίο ροής.

Διακριτοποιώντας τις εξισώσεις αυτές, θα προκύψει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο εντέλει θα επιλυθεί αριθμητικά. [64,65]

Οι επιλογές στις μεθόδους διακριτοποίησης και επίλυσης είναι πολλές, εξαρτώμενες από το είδος του πεδίου ροής, το ρευστό, την τάξη ακρίβειας που απαιτείται και άλλες παραμέτρους. Το FLUENT, δίνει την ευκαιρία στο χρήστη να επιλέξει ορισμένες από αυτές.

Εδώ, θα δώσουμε μερικά στοιχεία για τη διαδικασία διακριτοποίησης στις επιλογές που κάναμε για να επιλύσουμε τα πεδία ροής που μελετήσαμε.

Η μη μόνιμη εξίσωση μεταφοράς του βαθμωτού μεγέθους  $\Phi$ , με το μη μόνιμο όρο και τους όρους συναγωγής (*convection*), διάχυσης (*diffusion*) και πηγής (*source*) αντίστοιχα:

$$\int \underbrace{\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}}_{\text{μη-μόνιμος-όρος}} dV + \int \underbrace{\rho \Phi \vec{u}}_{\text{συναγωγή}} \cdot d\vec{A} = \int \underbrace{\Gamma_{\Phi} \nabla \Phi \cdot d\vec{A}}_{\text{διάχυση}} + \int \underbrace{S_{\Phi}}_{\text{πηγές}} dV \quad (4.1)$$

$\rho$ : πυκνότητα

$\vec{u}$ : διάνυσμα της ταχύτητας

$\vec{A}$ : διάνυσμα επιφάνειας

$\Gamma_{\Phi}$ : συντελεστής διάχυσης του μεγέθους  $\Phi$

$\nabla \Phi$ : παράγωγος κατά κατεύθυνση του  $\Phi$

$S_{\Phi}$ : πηγές του μεγέθους  $\Phi$  μέσα στο CV

μετασχηματίζεται στην παρακάτω διακριτοποιημένη εξίσωση, για κάθε ένα από τα κελιά του αριθμητικού πλέγματος [63]:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} V + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{u}_f \phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_{\Phi} \nabla \phi_f \cdot \vec{A}_f + S_{\Phi} V \quad (4.2)$$

$\phi$ : τιμή του μεγέθους στο κέντρο του CV

$N_f$ : αριθμός πλευρών που περικλείουν το CV

$\phi_f$ : ποσότητα του  $\Phi$  που περνά από την επιφάνεια  $f$

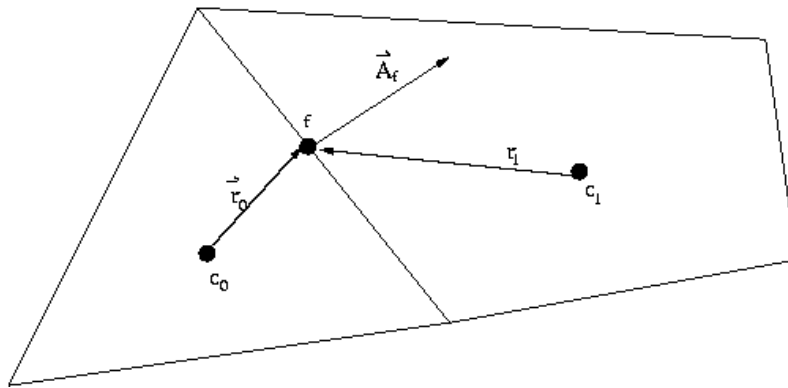
$\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f$ : παροχή μάζας διαμέσου της επιφάνειας  $f$

$\vec{A}_f$ : προσημασμένο έμβασμό της επιφάνειας  $f$

$\nabla \phi_f$ : παράγωγος κατά κατεύθυνση του  $\Phi$  στην επιφάνεια  $f$

$V$ : όγκος CV

(οι όροι επιφάνεια, έμβασμό και όγκος είναι σχετικοί και αφορούν τριδιάστατες γεωμετρίες, σε γεωμετρία διδιάστατη μεταπίπτουν σε ακμή, μήκος και έμβασμό αντίστοιχα)



Σχ.4.1 – δύο γειτονικά κελιά ενός διδιάστατου αριθμητικού πλέγματος και τα κέντρα τους  $c_0$  και  $c_1$  [63]

Μετά τη γραμμικοποίησή των εξισώσεων που προκύπτουν σε κάθε CV, σε μια μορφή όπως η παρακάτω,

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (4.3)$$

$a_p, a_{nb}$ : γραμμικοποιημένοι συντελεστές

το γραμμικό, πλέον, σύστημα επιλύεται με χρήση του αλγορίθμου Gauss-Seidel [63].

Το ζητούμενο για να περάσουμε από την (4.2) στη γραμμική (4.3), όμως είναι, πώς θα σχετιστούν οι τιμές του μεγέθους  $\phi$  στα κέντρα των CV, που χρειάζονται στην αριθμητική προσέγγιση και αποθηκεύει το FLUENT, με τις τιμές του μεγέθους στις επιφάνειες του όγκου αναφοράς  $\phi_f$ , που απαιτούνται από τις εξισώσεις. [62,63]

Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορα σχήματα υπολογισμού, έτσι ώστε οι τιμές στις επιφάνειες του CV να εξάγονται:

- από τιμές στα κέντρα κελιών που βρίσκονται πίσω από το εξεταζόμενο σχετικά με την ταχύτητα του ρευστού – *πίσω σχήμα, ανάντι υπολογισμός (Upwind Differencing Scheme - UDS)*

$$1^{\text{ης}} \text{ τάξης ακρίβειας : } \quad \phi_f = \phi_{UP} \quad (4.4)$$

$$2^{\text{ης}} \text{ τάξης ακρίβειας: } \quad \phi_f = \phi + \nabla\phi \cdot \vec{r} \quad (4.5)$$

$\phi_{UP}$ : τιμή του μεγέθους στο κέντρο του κελιού ανάντι του εξεταζόμενου

Το σχήμα αυτό επιδέχεται πολλές εκφράσεις, δίνοντάς μας τη δυνατότητα να επιλέξουμε την τάξη ακρίβειας των υπολογισμών που θέλουμε να κάνουμε. Έτσι, έχουμε το πρώτης τάξης ακρίβειας  $1^{\text{st}} \text{ Order UDS}$  και το δεύτερης τάξης ακρίβειας  $2^{\text{nd}} \text{ Order UDS}$ . Το μεγάλο πλεονέκτημα του σχήματος αυτού είναι ότι δε θα παρουσιάσει ταλαντωτική συμπεριφορά κατά την προσέγγιση της λύσης.

- από τιμές στα κέντρα κελιών που βρίσκονται πιο πίσω και άλλα εμπρός από το εξεταζόμενο, σχετικά με την ταχύτητα του ρευστού – *κεντρικό σχήμα (Central Differencing Scheme - CDS)*

$$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_0 \cdot \vec{r}_0 + \nabla\phi_1 \cdot \vec{r}_1) \quad (4.6)$$

Το σχήμα αυτό, οδηγεί πάντα σε δεύτερης τάξης ακρίβεια, αλλά μπορεί εύκολα να δώσει ταλαντωση γύρω από τη λύση [63,64]. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται μία άλλη προσέγγισή του ως:

$$\phi_f = \phi_{f,UP} + (\phi_{f,CD} - \phi_{f,UP}) \quad (4.7)$$

$\phi_{f,UP}$ : η τιμή του μεγέθους που προκύπτει από ανάντι σχήμα υπολογισμού

$\phi_{f,CD}$ : η τιμή του μεγέθους που προκύπτει από κεντρικό σχήμα υπολογισμού

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι βελτιώσεις ή ανάμιξη των πιο πάνω μεθόδων, μπορεί να οδηγήσει σε υψηλότερης τάξης ακρίβειας σχήματα ή σχήματα που δε θα έχουν τα μειονεκτήματα αυτών από τα οποία προέρχονται. Ενδεικτικά, τα *QUICK* και *MUSCL*, δεύτερης και τρίτης τάξης ακρίβειας αντίστοιχα, που βρίσκονται στις προσφερόμενες επιλογές του FLUENT.

Για τους όρους διάχυσης, το FLUENT χρησιμοποιεί πάντα *κεντρικό σχήμα υπολογισμού (CDS)* και συνεπώς δεύτερης τάξης ακρίβεια, ενώ για τους όρους συναγωγής υπάρχει δυνατότητα επιλογής. [63]

Με σκοπό την ευστάθεια του αλγόριθμου και την απαίτηση για μεγαλύτερη ακρίβεια, λόγω της καμπυλότητας του αγωγού, αλλά και τις ιδιαιτερότητες των υιοθετούμενων μοντέλων ρευστού, διατηρήσαμε τη δεύτερη τάξη ακρίβειας και στους συναγωγικούς όρους, επιλέγοντας  $2^{\text{ης}}$  τάξης *πίσω σχήμα υπολογισμού (2<sup>nd</sup> Order UDS)*.

Η χρήση μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας, κρίθηκε περιττή, απόφαση που ευνοείται και από τις ταλαντωτικές συμπεριφορές γύρω από τη λύση, στις οποίες μπορεί να οδηγήσει επιλύοντας τις ροές των, μη συμβατικών, μη νευτώνων ρευστών.

Ο υπολογισμός των παραγώγων και των παραγώγων κατά κατεύθυνση στο κέντρο του CV, γίνεται με βάση το θεώρημα Green-Gauss, ως:

$$(\nabla\Phi)_{c_0} = \sum_f \bar{\Phi}_f \vec{A}_f \quad (4.8)$$

$(\nabla\Phi)_{c_0}$  : τιμή της παραγώγου κατά κατεύθυνση του  $\Phi$  στο κέντρο  $c_0$  του CV

$\bar{\Phi}_f$  : τιμή του  $\Phi$  στην επιφάνεια  $f$

$\vec{A}_f$  : προσημασμένο έμβαδό της επιφάνειας  $f$

Θεωρώντας το  $\bar{\Phi}_f$  ως ένα μέσο όρο των τιμών που λαμβάνει το μέγεθος  $\Phi$  στα κέντρα των γειτονικών CV,  $\bar{\Phi}_f = \frac{\Phi_{c_0} + \Phi_{c_1}}{2}$  (βλ. Σχ3.1), προκύπτει η διακριτοποίηση της παραγώγου κατά κατεύθυνση. [63]

Στο FLUENT, αναφέρεται ως *Green-Gauss theorem – cell based* και την επιλέγουμε σε κάθε περίπτωση πεδίων που επιλύσαμε.

Διαθέσιμες είναι και άλλες μέθοδοι, που προδίδουν πιο αντιπροσωπευτικές τιμές στο  $\bar{\Phi}_f$ , θεωρείται, όμως, επαρκής για το είδος του πλέγματος που χρησιμοποιήσαμε (δομημένο, όπως θα το περιγράψουμε πιο κάτω).

Από το σημείο αυτό και μετά, το FLUENT μας δίνει τη δυνατότητα να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικές διαδικασίες για την επίλυση των εξισώσεων, δύο διαφορετικούς επιλυτές.

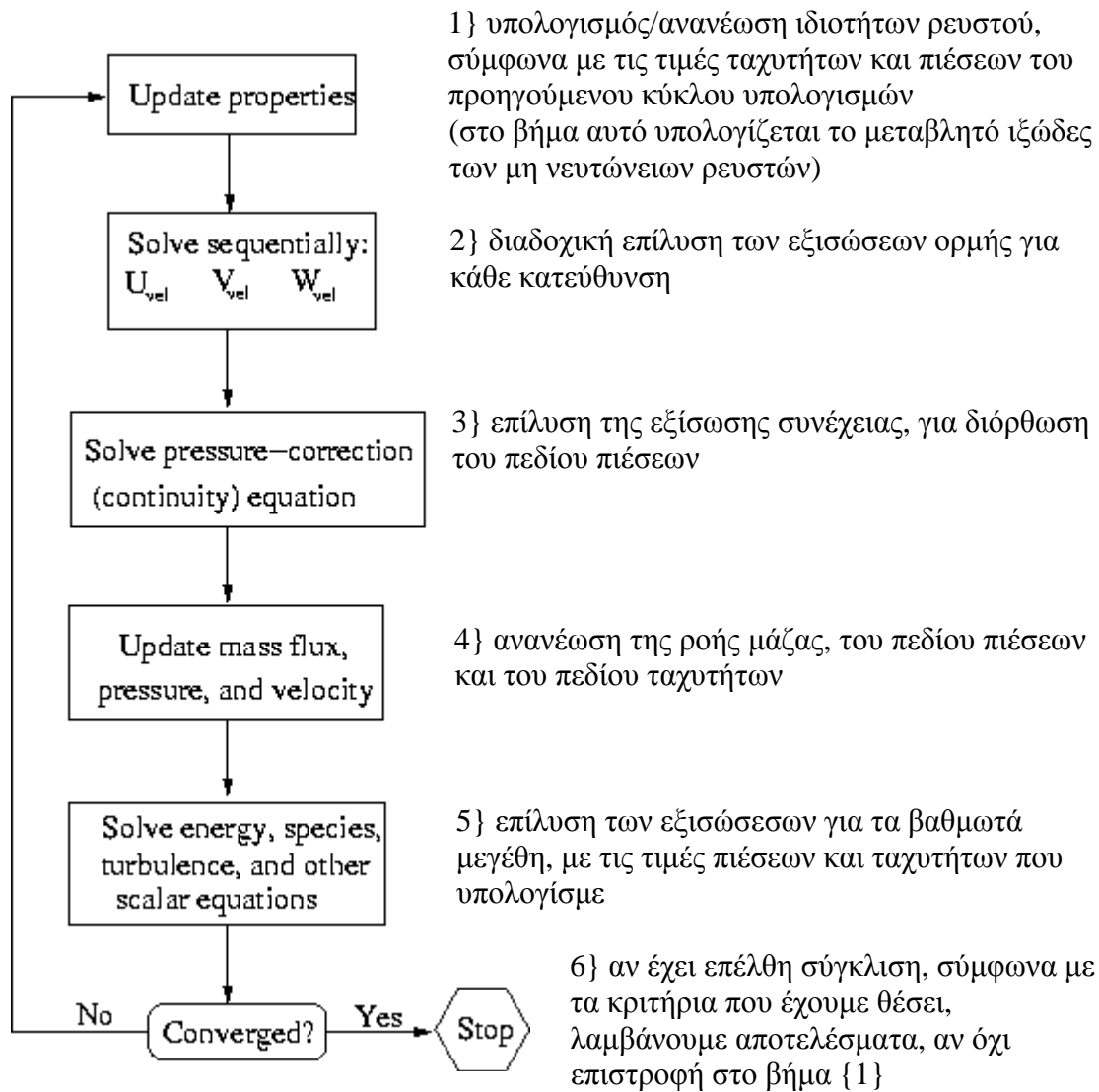
Τον *Pressure-Based Solver*, αναπτυγμένο για ασυμπίεστες και ελαφρώς συμπιεστές ροές και τον *Density-Based Solver*, που ενδείκνεται σε ροές έντονης συμπίεστικότητας.

Στον *Density-Based Solver*, οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή (συνέχειας, ορμής και ενέργειας), επιλύονται ταυτόχρονα ως σύστημα και μόνο οι πρόσθετες εξισώσεις (πχ μοντέλο τύρβης) επιλύονται διαδοχικά μετά τα αποτελέσματα των πρώτων.

Αντίθετη, αντιμετώπιση έχουν οι βασικές εξισώσεις στην κύρια επιλογή (*Segregated*) του *Pressure-Based Solver*, όπου επιλύονται διαδοχικά και οι τιμές των μεγεθών από τη μία εισάγονται στην επόμενη.

Σε μία άλλη εκδοχή αυτού του επιλύτη (επιλογή *Coupled*), δίνεται η δυνατότητα διαδοχικής επίλυσης.

Είναι φανερό ότι στις περιπτώσεις ροών που μελετούμε, ενδείκνεται η χρήση του *Pressure-Based Solver*, του οποίου τη διαδικασία επίλυσης σκιαγραφούμε με τη βοήθεια του Σχ4.2.



Σχ4.2 – το λογικό διάγραμμα του *Pressure-Based Solver* στην κύρια επιλογή του, διαδοχικής επίλυσης των εξισώσεων [63]

Αν στην (4.1), στη θέση του βαθμωτού μεγέθους  $\Phi$ , θεωρήσουμε μία συνιστώσα της ταχύτητας, έστω την αξονική  $u_x$ , τότε προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά τη  $x$  κατεύθυνση.

Μετά τη γραμμικοποίησή της, θα έρθει στη μορφή της (4.4) ως:

$$a_p u_x = \sum_{nb} a_{nb} u_{x,nb} + \sum_f p_f A + S \quad (4.9)$$

$u_x$ : ταχύτητα στο κέντρο του CV  
 $u_{x,nb}$ : ταχύτητα στα γειτονικά CV  
 $p_f$ : πίεση στο κέντρο της επιφάνειας  
 $A$ : εμβαδό της επιφάνειας

απαιτώντας τη γνώση της πίεσης σε κάθε επιφάνεια του CV για την επίλυση του συστήματος

Ο υπολογισμός της πίεσης, γίνεται με προσέγγισή της από τις τιμές που λαμβάνει στα κέντρα των γειτονικών CV, με διάφορες μεθόδους.

Η απλούστερη, που αναφέρεται ως *Standard* στο FLUENT, τη σχετίζει με τις σταθμισμένες τιμές πίεσης στο εξεταζόμενο CV και ακόμα ένα γειτονικό του.

$$p_f = \frac{\frac{p_{c0}}{a_{p_{c0}}} + \frac{p_{c1}}{a_{p_{c1}}}}{\frac{1}{a_{p_{c0}}} + \frac{1}{a_{p_{c1}}}} \quad (4.10)$$

Ακόμα μία συσχέτιση, *Linear* στο FLUENT, προκύπτει αν θεωρήσουμε την  $p_f$  σαν το μέσο όρο των πιέσεων στα κέντρα των συνολικά  $N$  γειτονικών CV.

$$p_f = \frac{1}{N} \sum_{nb} p_{C_{nb}} \quad (4.11)$$

Σφάλματα παρουσιάζονται για ροές με μεγάλες μεταβολές πίεσης και συσχετίσεις μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας είναι απαραίτητες.

Έτσι, κατά τα πρότυπα του χρησιμοποιούμενου κεντρικού σχήματος – *CDS* στους όρους διάχυσης, δημιουργείται και το δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήμα υπολογισμού της πίεσης (*Second Order Scheme*), του οποίου την ακρίβεια χρειαζόμαστε και υιοθετούμε στην επίλυση των μη μόνιμων πεδίων ροής.

Εκτός από τις εξισώσεις ορμής κατά κατεύθυνση, στις εξισώσεις της ροής υπάρχει και η εξίσωση συνέχειας, η οποία εκφρασμένη σε ένα CV διακριτοποιείται ως:

$$\sum_f J_f A_f = 0 \quad (4.12)$$

με  $J_f = \rho u_n$  τη ροή μάζας από την επιφάνεια  $A$ , λόγω της  $u_n$  κάθετης σε αυτή ταχύτητας.

Η ταχύτητα  $u_n$  νοείται στην επιφάνεια και σχήμα συσχέτισης με τιμές στο κέντρο του εξεταζόμενου και των γειτονικών του CV πρέπει να χρησιμοποιηθεί.

$$J_f = \rho_f \frac{a_{p_{c0}} u_{n,c0} + a_{p_{c1}} u_{n,c1}}{a_{p_{c0}} + a_{p_{c1}}} + d_f \left( (p_{c0} + (\nabla p)_{c0} \vec{r}_0) - (p_{c1} + (\nabla p)_{c1} \vec{r}_1) \right) \quad (4.13)$$

$p_{c0}$ ,  $p_{c1}$  και  $u_{n,c0}$ ,  $u_{n,c1}$  είναι οι πιέσεις και οι κάθετες ταχύτητες αντίστοιχα, στα κέντρα των δύο CV σε κάθε πλευρά της επιφάνειας  $f$  και  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_1$  οι προσημασμένες αποστάσεις (για αυτό το λόγο και η διανυσματική μορφή) της επιφάνειας από το κέντρο των κελιών (Σχ4.1). Ο συντελεστής  $d_f$  είναι συνάρτηση του μέσου όρου των  $a_{p_{c0}}$ ,  $a_{p_{c1}}$ . [63]

Πλέον, μένει το τελευταίο βήμα για την αριθμητική διαδικασία.

Στον επιλυτή *Pressure-Based Solver*, που χρησιμοποιήσαμε, αναφέραμε ότι οι εξισώσεις επιλύονται διαδοχικά.

Με κάποιο τρόπο, πρέπει η πρόβλεψη της ταχύτητας, που προκύπτει από τις εξισώσεις ορμής, κατάλληλα διορθωμένη με *συντελεστές χαλάρωσης (Under-Relaxation Factors)*, να εισαχθεί στο σύστημα εξισώσεων, να δώσει μία νέα πρόβλεψη για την ταχύτητα και έτσι να συνεχιστεί ο κύκλος επαναλήψεων που θα προσεγγίσει τη λύση του πεδίου ταχυτήτων και πιέσεων.

Το ρόλο αυτό αναλαμβάνει ο αλγόριθμος που θα συνδέει την πρόβλεψη της ταχύτητας με την πίεση (*Pressure-Velocity Coupling*).

Και πάλι το FLUENT παρέχει πληθώρα επιλογών, προσφέροντας διάφορους γνωστούς αλγορίθμους, τους *SIMPLE*, *SIMPLEC*, *PISO* και *Fractional-Step Method (FSM)*.

Ο ευρύτερα χρησιμοποιούμενος σε προβλήματα της μορφής που θέλουμε να επιλύσουμε είναι ο *SIMPLE*, τον οποίο και υιοθετήσαμε.

Για τις λεπτομέρειες, που αφορούν στις ακολουθούμενες διαδικασίες στον αλγόριθμο αυτό, υπάρχει πληθώρα αναφορών στη βιβλιογραφία [64,65] και δε θα προσθέσουμε, παρά την κεντρική ιδέα πίσω από αυτόν.

Χρησιμοποιεί, λοιπόν, μία σχέση μεταξύ των διορθωμένων τιμών ταχύτητας και πίεσης για να επιβάλλει τη διατήρηση της μάζας και να λάβει το πεδίο πιέσεων. [63]

Στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής που εξετάσαμε, είναι απαραίτητη και η διακριτοποίηση στο χρόνο.

Επιλέγουμε *1<sup>ης</sup> τάξης ακρίβεια στο χρόνο (1<sup>st</sup> Order in Time)*, αφού έτσι, όχι μόνο θα περιοριστεί ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος, αλλά κυρίως γιατί μία τέτοια διακριτοποίηση δίνει περισσότερο ευσταθή σχήματα υπολογισμών.

Η μέθοδος που ακολουθείται είναι η *άρρητη (implicit)*, δηλαδή οι χωρική διακριτοποίηση αναφέρεται στη χρονική στιγμή που θέλουμε να υπολογίσουμε,  $\phi^{n+1}$ . [στον *Pressure-Based Solver* το FLUENT δε δίνει επιλογή (*ρητής – explicit*) μεθόδου]

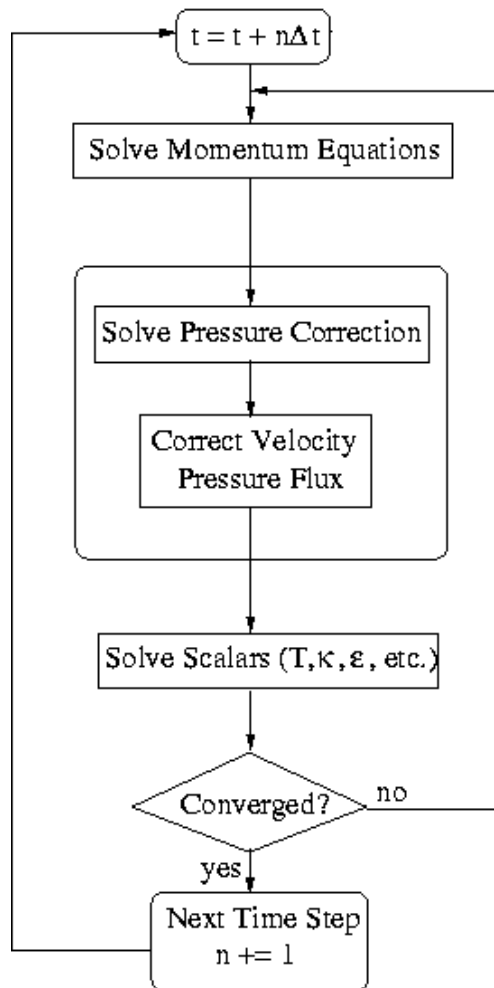
Καταλήγουμε στο παρακάτω, όπου  $F(\phi^{n+1})$  είναι το σύνολο των όρων της χωρικής διακριτοποίησης.

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = F(\phi^{n+1}) \quad (4.14)$$

Επίσης, πρέπει να γίνει επιλογή του σχήματος μετάβασης στο επόμενο χρονικό βήμα.

Επιλέξαμε επαναληπτικό σχήμα χρονικής μετάβασης (*Iterative Time-Advancement Scheme*), σύμφωνα με το οποίο πρώτα λαμβάνουμε συγκεκριμένη λύση του πεδίου ταχυτήτων και του πεδίου πιέσεων για κάθε χρονικό βήμα, όπως περιγράφεται στο Σχ4.3, και έπειτα προχωρούμε στο επόμενο.





1) μετάβαση στο επόμενο χρονικό σημείο

Outer Iterations

2) εύρεση του πεδίου ταχυτήτων και του πεδίου πιέσεων, κατά τα πρότυπα του Σχ4.2

3) αν έχει επέλθει σύγκλιση, σύμφωνα με τα κριτήρια που έχουμε θέσει, λαμβάνουμε αποτελέσματα για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, και προχωρούμε στην επόμενη, αν όχι επιστροφή στο βήμα {2}

Σχ4.3 – το λογικό διάγραμμα του *Pressure-Based Solver* στην κύρια επιλογή του, διαδοχικής επίλυσης των εξισώσεων, για [63]

Συνοψίζοντας, καταγράφουμε τις επιλογές που έγιναν στον επιλύτη FLUENT για την επίλυση των πεδίων ροής στον Π4.1.

	μόνιμη ροή	μη μόνιμη ροή
Solver		
Solver	<b>Pressure Based</b>	
Formulation	<b>Implicit</b>	
Space	<b>Axisymmetric</b>	
Time	<b>Steady</b>	<b>Unsteady</b>
Gradient Option	<b>Green-Gauss theorem – Cell Based</b>	
Solution Controls		
Discretization		
Pressure	<b>Standard</b>	<b>Second Order Upwind</b>
Momentum	<b>Second Order Upwind</b>	
Velocity-Pressure Coupling	<b>SIMPLE</b>	
Under-Relaxation Factors		
Pressure	<b>0.3</b>	
Density	<b>1</b>	
Body Forces	<b>1</b>	
Momentum	<b>0.7</b>	

Π4.1 – οι επιλογές στον επιλύτη FLUENT για τα επιλυόμενα πεδία ροής

## ii} εισαγωγή των οριακών συνθηκών

- τοίχωμα: *wall* – συνθήκη μη ολίσθησης, μηδενισμός ταχύτητας
- άξονας συμμετρίας: *axis* – μηδενισμός παραγώγων στην ακτινική κατεύθυνση
- είσοδος αγωγού: *velocity inlet* – κατανομή ταχύτητας εισάγεται από το χρήστη

### ευθύγραμμος αγωγός:

εισάγουμε το μέτρο της ταχύτητας του ελεύθερου ρεύματος  $U_0$ , με κατεύθυνση κάθετη στη διατομή εισόδου

### στενωμένος αγωγός:

εισάγουμε τις κατανομές ταχύτητας (*Read* → *Profiles*), που προέκυψαν από στην έξοδο του ευθύγραμμου αγωγού στον αντίστοιχο  $Re$ , δηλαδή τις κατανομές κάθε μοντέλου στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

### συνδυασμένος αγωγός:

εισάγουμε το μέτρο της ταχύτητας του ελεύθερου ρεύματος  $U_0$ , με κατεύθυνση κάθετη στη διατομή εισόδου

- έξοδος αγωγού: *outflow* – μηδενισμός ροής όρων διάχυσης στην αξονική κατεύθυνση

### iii} υπολογιστικό πλέγμα

Για την επίλυση των πεδίων ροής με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε, απαραίτητα ήταν ορισμένα υπολογιστικά πλέγματα, που θα μοντελοποιούν τους διδιάστατους, αξονικά συμμετρικούς αγωγούς.

Σύγχρονα δεδομένα για την πυκνότητα πλέγματος (2D και 3D), ικανού να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις των υπολογισμών μας, αντλήσαμε από τις [27,66-68].

Αναπτύξαμε τρία είδη διδιάστατων ( $x$ - $y$  συντεταγμένες) υπολογιστικών πλεγμάτων με το υπολογιστικό πακέτο GAMBIT 2.3.16.

Όλα αποτελούνταν από τέσσερις πλευρές, που αντιστοιχούν στις τέσσερις οριακές συνθήκες: τοίχωμα και άξονας συμμετρίας παράλληλες στο  $x$  άξονα και είσοδος, έξοδος παράλληλες στον  $y$  άξονα.

Προσοχή δόθηκε ώστε οι γραμμές που θα προέκυπταν από τη διαμέριση, να ακολουθούν τις γραμμές ροής σε μία ιδεατή, χωρίς αποκόλληση, ροή του ρευστού, διαμέσου του αντίστοιχου αγωγού.

Θέλοντας να έχουμε μεγαλύτερη υπολογιστική λεπτομέρεια στην περιοχή της στένωσης κάθε αγωγού, θεωρήσαμε τρία διαφορετικά τμήματα στον αγωγό και διαμερίσαμε τις κατά  $x$  πλευρές με διαφορετικό αριθμό σημείων. Έτσι, δημιουργήθηκε πλέγμα μεγαλύτερης πυκνότητας σε υπολογιστικά κελιά στη στένωση.

Επίσης, επειδή τα μεγέθη στο τοίχωμα του αγωγού ήταν υψηλού ενδιαφέροντος (πχ τάσεις στο τοίχωμα), το πλέγμα, από τον άξονα συμμετρίας προς το τοίχωμα ήταν προοδευτικά πυκνότερο.

Οι πλευρές παράλληλες στη  $x$  κατεύθυνση χωρίστηκαν σε  $N_{x1}$ ,  $N_{x2}$ ,  $N_{x3}$  τμήματα και οι παράλληλες στην  $y$  από  $N_y$ , δίνοντας τμήματα σταθερού μήκους  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta x_3$  κατά  $x$  και μεταβλητού μήκους  $\delta y(y)$  κατά  $y$ .

Ο λόγος πυκνότητας  $\lambda$ , εκφράζει το πόσο πυκνότερη η διαμέριση κοντά στο τοίχωμα απότι κοντά στον άξονα.

Σε κάθε υπολογιστικό κελί, διατηρούνταν η αναλογία:  $5 < \delta x / \delta y < 15$ , με τους μέγιστους λόγους να εμφανίζονται στα κελιά των ευθύγραμμων κομματιών, κοντά στο τοίχωμα, ακριβώς λόγω της πυκνότερης διμέρισης κοντά στο τοίχωμα (λόγος  $\lambda$ ).

Το συνολικό πλήθος υπολογιστικών κελιών:  $N_{CV} = (N_{x1} + N_{x2} + N_{x3}) \cdot N_y$

Τα πλέγματα που προέκυψαν, μετά την επεξεργασία της διαμέρισης που καθορίσαμε, από το GAMBIT ήταν *διδιάστατα, δομημένα, μεταβλητής διαμέρισης (2D, structured, variable allocation)*, αποτελούμενα από *τετράπλευρα (quadrilateral)* υπολογιστικά χωρία.

(δομημένα, δηλαδή σε καμία περίπτωση οι κατά τη  $x$  κατεύθυνση γραμμές κάθε τμήματος, δεν τέμνονταν μεταξύ τους και έτεμναν αυτές κατά την  $y$  κατεύθυνση μόνο μία φορά [64].)

Η γεωμετρία κάθε αγωγού εμφανίζεται στο Σχ.4.4.

- *ευθύγραμμος αγωγός (straight)*

Χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς μόνιμων πεδίων και τη μελέτη της συμπεριφοράς των μη νευτώνειων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή.

$$N_x = 400$$

$$N_y = 40, \lambda = 1.02$$

$$N_{CV} = 16 \cdot 10^3$$

- *στενωμένος αγωγός (stenosed)*

Οι κατανομές των ταχυτήτων που προέκυψαν από τον ευθύγραμμο αγωγό, εισάχθηκαν ως οριακή συνθήκη εισόδου σε αυτό το πλέγμα, για τον υπολογισμό μόνιμων πεδίων ταχύτητας σε ένα στενωμένο αγωγό. Με το πλέγμα αυτό, γίνεται η προτυποποίηση της αμετάβλητης παροχής αίματος, σε ένα στενωμένο αγγείο.

$$N_{x1} = 10, N_{x2} = 120, N_{x3} = 380,$$

$$N_y = 80, \lambda = 1.02$$

$$N_{CV} = 48,8 \cdot 10^3$$

- *συνδυασμένος αγωγός (combined)*

Για τη μη μόνιμη παροχή, θα έπρεπε να αναπτύξουμε μία συνάρτηση για κάθε ρευστό, που να περιγράφει τη μεταβολή των κατανομών ταχύτητας στην είσοδο του αγωγού, σε κάθε χρονική στιγμή. Το πρόβλημα αυτό, ξεπεράστηκε, λαμβάνοντας μήκος αγωγού αρκετά μεγάλο, ώστε να έχει δοθεί στο ρευστό μήκος αρκετό για να διαμορφώσει τη ροή του.

Άλλωστε, λόγω του παραβολικού πεδίου ροής, η ροή χρειάζεται μικρότερο μήκος για να διαμορφωθεί, αφού αυξανόμενης της σημαντικότητας των μη μόνιμων φαινομένων (αύξηση  $Str$ ), η πληροφορία της μεταβολής της ταχύτητας στην είσοδο του αγωγού, ταξιδεύει γρηγορότερα.

$$N_{x1} = 250, N_{x2} = 60, N_{x3} = 300,$$

$$N_y = 60, \lambda = 1.02$$

$$N_{CV} = 36,6 \cdot 10^3$$

Ο έλεγχος των πλεγμάτων δεν έδειξε ασυνέχειες ή ξεπέρασμα (*overlapping* [64]) του αγωγού, από τις γραμμές του πλέγματος, στην καμπύλη περιοχή της στένωσης.

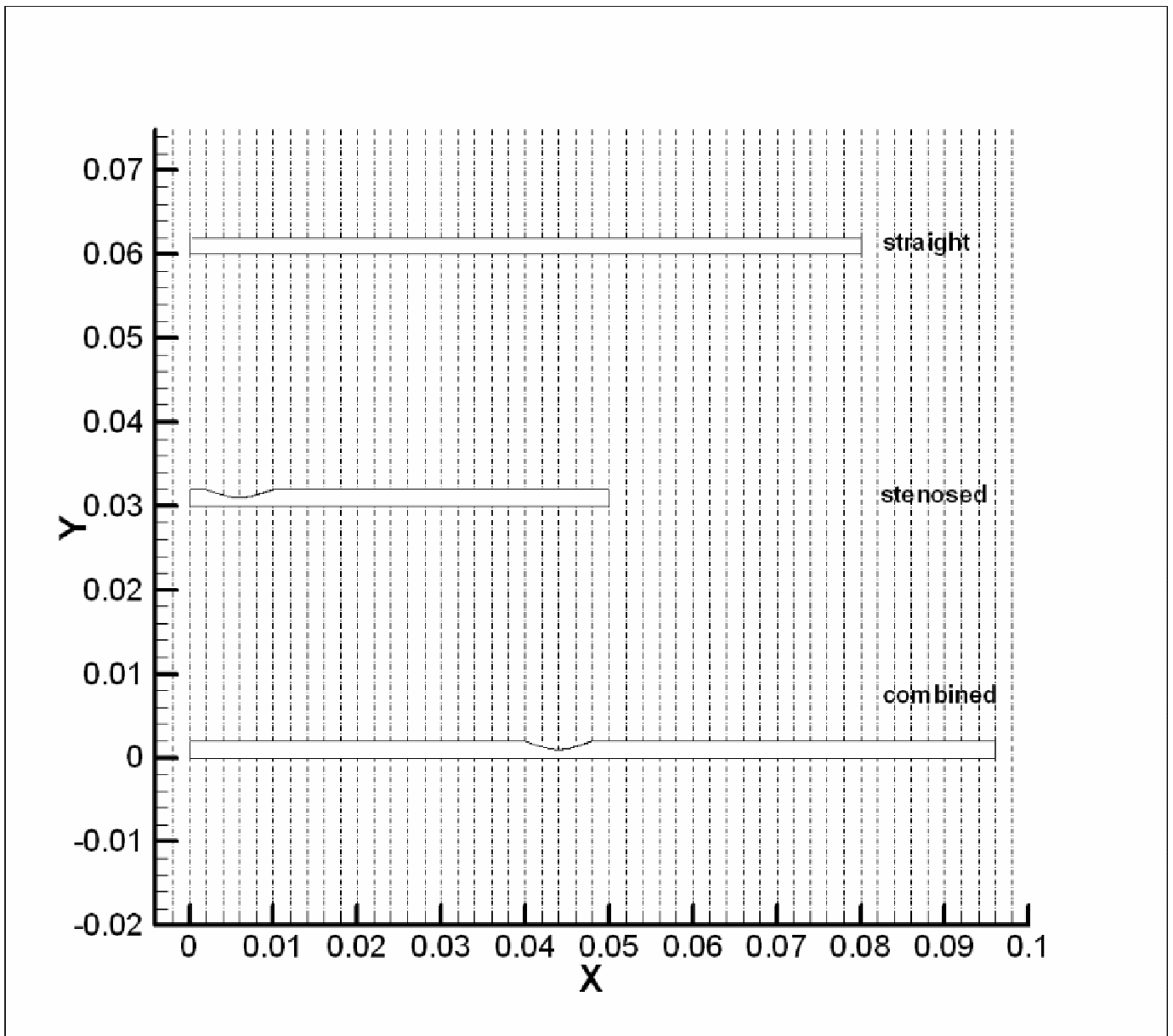
Σε διάφορες εκδοχές του καθενός, χωρίστηκαν σε διαφορετικό αριθμό υπολογιστικών κελιών, με αλλαγή της εκάστοτε διαμέρισης κατά τις δύο κατευθύνσεις.

Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος:

ευθύγραμμος αγωγός:  $N_{CV} = 2.5 \cdot 10^3$

στενωμένος αγωγός:  $N_{CV} = 122 \cdot 10^3$

συνδυασμένος:  $N_{CV} = 25 \cdot 10^3, N_{CV} = 79 \cdot 10^3$



Σχ4.4– η γεωμετρία των τριών αγωγών, στις διαστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν (μονάδες μέτρησης SI – m)

#### iv} ακρίβεια σύγκλισης υπολογισμών

Το απόλυτο κριτήριο σύγκλισης για τις εξισώσεις ορμής  $R^m$ , προκύπτει από την (4.15), όπου υπονοείται άθροισμα για όλα τα κελιά  $P$  του πλέγματος.

$$R^m = \sum_{cells-P} \left| \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b - a_P u_P \right|, \quad R^c = \sum_{cells-P} |q_P| \quad (4.15)$$

Για την εξίσωση συνέχειας εξαρτάται από τον  $q_P$  ρυθμό παραγωγής μάζας στο κελί  $P$ .

Η ακρίβεια σύγκλισης υπολογισμών τέθηκε στα  $\delta r = 10^{-6}$  κατά απόλυτες τιμές (*residuals – absolute criteria*).

Αυτό σημαίνει ότι τα μεγέθη του πεδίου ροής θεωρούνταν υπολογισμένα, αν σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις στις εξισώσεις ορμής κατά κατεύθυνση και στην εξίσωση συνέχειας εμφανιζόταν διαφορά  $\delta r < 10^{-6}$ .

Μετά από δοκιμές στα αρχικά στάδια της μελέτης της μόνιμης ροής στο στενωμένο αγωγό, παρατήρηθηκε ότι η ακρίβεια  $\delta r = 10^{-4}$  δεν έδινε ικανοποιητικά αποτελέσματα στις γραμμές ροής του πεδίου, με αυτές να εμφανίζουν προσκολλημένη ροή μέσα σε περιοχές ανακυκλοφορίας.

Αντίθετα, στον ευθύγραμμο αγωγό τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά και με ακρίβεια  $\delta r = 10^{-3}$ .

Κρίθηκε αναγκαίο να αυξηθεί η ακρίβεια και συνεπώς να μειωθεί το απαιτούμενο όριο σύγκλισης σε  $\delta r = 10^{-6}$ , για όλους τους υπολογισμούς.

Μία καλή πρακτική είναι να θεωρήσουμε συγκεκριμένες τις λύσεις, όταν τα μεγέθη μας έχουν προσεγγιστεί με ακρίβεια χιλιοστού, δηλαδή έχουν φτάσει 3 τάξεις μεγέθους πιο κάτω από το μικρότερο μήκος που εισάγεται. Αναλογιζόμενοι ότι στο FLUENT επιλύονται διαστατές εξισώσεις σε μονάδες SI, στις οποίες εισάγεται ένα πλέγμα με μεγέθη  $O(10^{-3} \text{ m})$ , αυτό εξασφαλίζεται με ακρίβεια  $\delta r = 10^{-6}$  κατά απόλυτες τιμές.

Ας αναφέρουμε τέλος, μία απόκλιση. Στη μη μόνιμη ροή, το H-B μοντέλο παρουσίασε μεγαλύτερη δυσκολία σύγκλισης σχετικά με το νευτώνειο, αλλά και το W-S, απαιτώντας περισσότερες επαναλήψεις ανά χρονικό βήμα για να φτάσει το κριτήριο σύγκλισης  $\delta r = 10^{-6}$ . Σε κάποια, μάλιστα χρονικά βήματα, ορισμένων ροών, οι 200 επαναλήψεις ανά χρονικό βήμα δεν ήταν αρκετές και κατάφερε να φτάσει μόνο στο  $5 \cdot 10^{-6} > \delta r > 10^{-6}$ . Στα αποτελέσματα, πάντως, δεν φάνηκαν λάθη, οπότε χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη.

## v} ανεξαρτησία αποτελεσμάτων από τη διαδικασία επίλυσης

Η ανάδειξη της ανεξαρτησίας των αποτελεσμάτων μας από τη διαδικασία επίλυσης, θα γίνει με ένα από τα μεγέθη υψηλού ενδιαφέροντος της μελέτης αυτή, τις διαστατές διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα  $\tau_w$ , όπως προέκυψαν στα δοκιμαστικά δεδομένα.

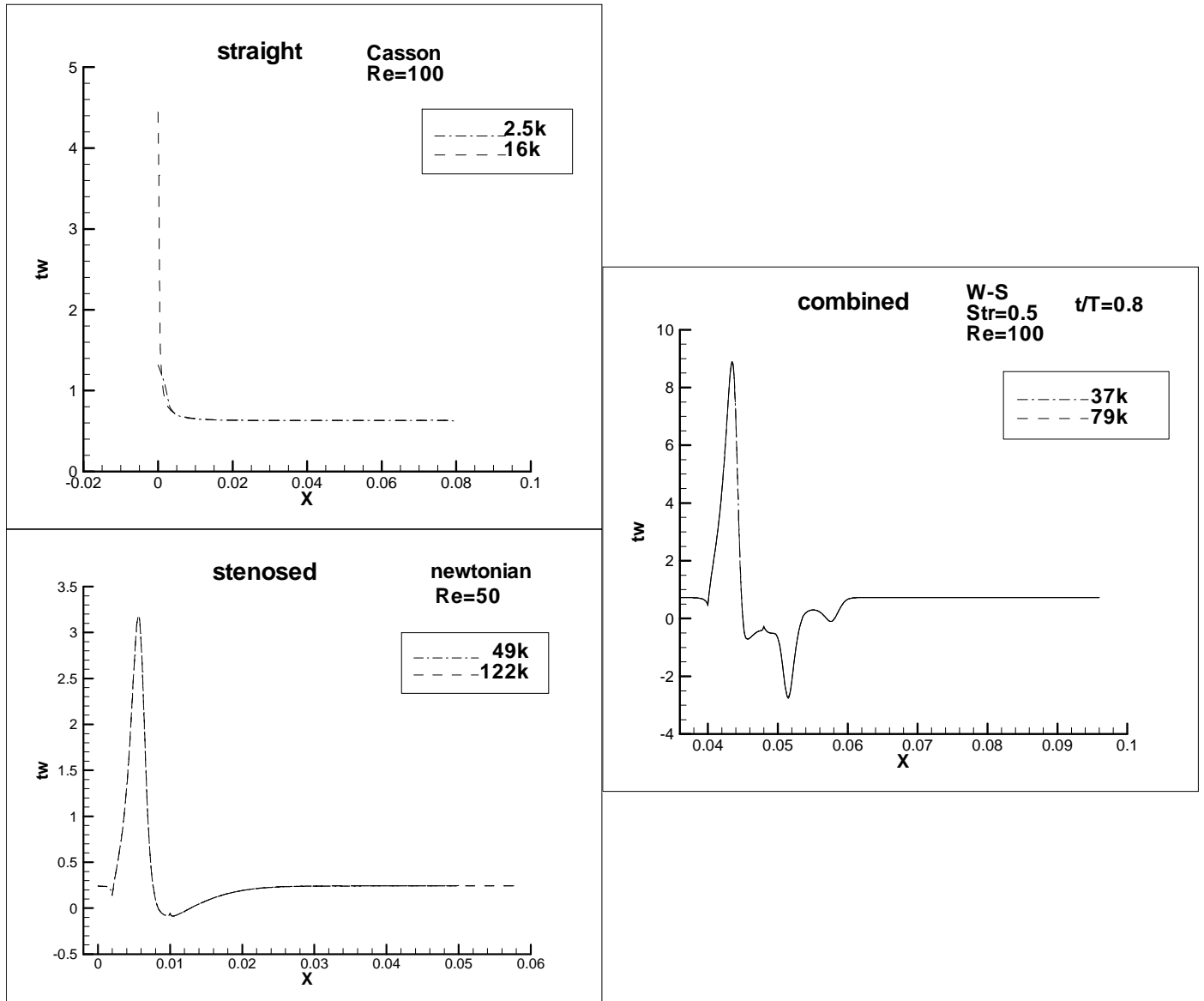
Το μέγεθος αυτό, δεν προκύπτει ως μέγεθος απευθείας από την επίλυση του πεδίου ροής, αλλά υπολογίζεται έμμεσα από παραγώγους της ταχύτητας και το μεταβλητό ιξώδες στα μη νευτώνεια.

Αυτό σημαίνει ότι τα όποια σφάλματα ή διαταραχές της διαδικασίας επίλυσης θα εμφανιστούν ενισχυμένα και οι προκύπτουσες αποκλίσεις των συγκρινόμενων μεγεθών θα είναι περισσότερο ευδιάκριτες.

### **χωρική διαμέριση**

Επειδή η ανάπτυξη του πλέγματος βασίστηκε σε πυκνότητες πλεγμάτων που υπάρχουν στη βιβλιογραφία [27,66-68], δεν τέθηκε θέμα σύγκρισης με πολλά

πλέγματα διαφορετικών πυκνοτήτων. Ο αριθμός των υπολογιστικών κελιών που αναγράφεται, αναφέρεται σε  $k = 10^3$  υπολογιστικά κελιά. Η μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος εμφανίζεται στο Σχ4.5.



Σχ4.5 – μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

### χρονική διαμέριση

Η διαμέριση του χώρου έγινε με το υπολογιστικό πλέγμα, στη μη μόνιμη ροή υποχρεούμαστε να διαμερίσουμε την περίοδο σε  $N_\beta$  βήματα υπολογισμού.

Η συνθήκη, που υιοθετήσαμε, για μία πρώτη πρόβλεψη του κατάλληλου χρονικού βήματος  $\delta t$ , ήταν ότι στο μικρότερης αξονικής διάστασης κελί, η ροή μάζας  $J$  που περνά από αυτό, δε θα πρέπει να εξέρχεται πριν το πέρασμα του χρόνου  $\delta t$ .

$$\delta t_{\max} = \frac{\delta x_{\min}}{2U_0} \quad (4.16)$$

Όμως, το κελί στο οποίο βρίσκεται το  $\delta x_{\min}$ , είναι στην περιοχή του λαιμού (αφού εκεί είναι πυκνότερο το πλέγμα), όπου οι αξονικές ταχύτητες αυξάνονται ραγδαία. Επίσης, είναι άγνωστο τι συμβαίνει κατά την επιβράδυνση του ρευστού.

Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούσαμε πάντα:  $\delta t < \frac{\delta t_{\max}}{3}$

Στο σημείο αυτό, ας κάνουμε μία παρένθεση για να δούμε μία σχέση γενικότερη της (4.15), που ποιοτικά θα αποδειχθεί παρακάτω. Αδιαστατοποιώντας την (3.15):

$$\delta t_{\max} = \frac{\delta x_{\min}}{2U_0} \Leftrightarrow T\delta t_{\max}^* = \frac{d}{2U_0} \delta x_{\min}^* \Leftrightarrow \delta t_{\max}^* = \frac{Str}{2} \delta x_{\min}^* \Rightarrow N_{\beta} = \frac{2}{Str \cdot \delta x_{\min}^*} \quad (4.17)$$

$$\text{όπου } N_{\beta} \delta t_{\max}^* = T \Leftrightarrow N_{\beta} \delta t_{\max}^* = 1 \Leftrightarrow \delta t_{\max}^* = 1/N_{\beta}$$

Από την (3.16), προκύπτει ότι:

- ο απαιτούμενος αριθμός βημάτων, για δεδομένο υπολογιστικό πλέγμα, σύμφωνα με τη συνθήκη που θέσαμε, είναι αποκλειστικά συνάρτηση του  $Str$  και μάλιστα αντιστρόφως ανάλογος προς αυτόν.

Αφού υπολογίσαμε το  $\delta x_{\min}^*$  στο πλέγμα του συνδυασμένου αγωγού, ο έλεγχος της επάρκειας του  $N_{\beta}$ , γίνεται αυτόματα στο πρόγραμμα υπολογισμού των παραμέτρων της ροής, που παρουσιάζεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Παράλληλα, διενεργήσαμε και μελέτη ανεξαρτησίας αποτελεσμάτων από το χρονικό βήμα, την οποία παρουσιάζουμε στο Σχ4.6.

Συγκρίναμε σε κάποιο στιγμιότυπο  $\tau$  του πρώτου κύκλου επαναλήψης της περιόδου, τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την ίδια ροή, με διαφορες τιμές  $N_{\beta}$ .

Λόγω της σταθερής παροχής στο πρώτο μισό της περιόδου, θεωρήθηκε αναγκαίο η σύγκριση να γίνει σε κάποια στιγμή του δεύτερου μισού, ιδίως στις ροές υψηλών  $Str$ .

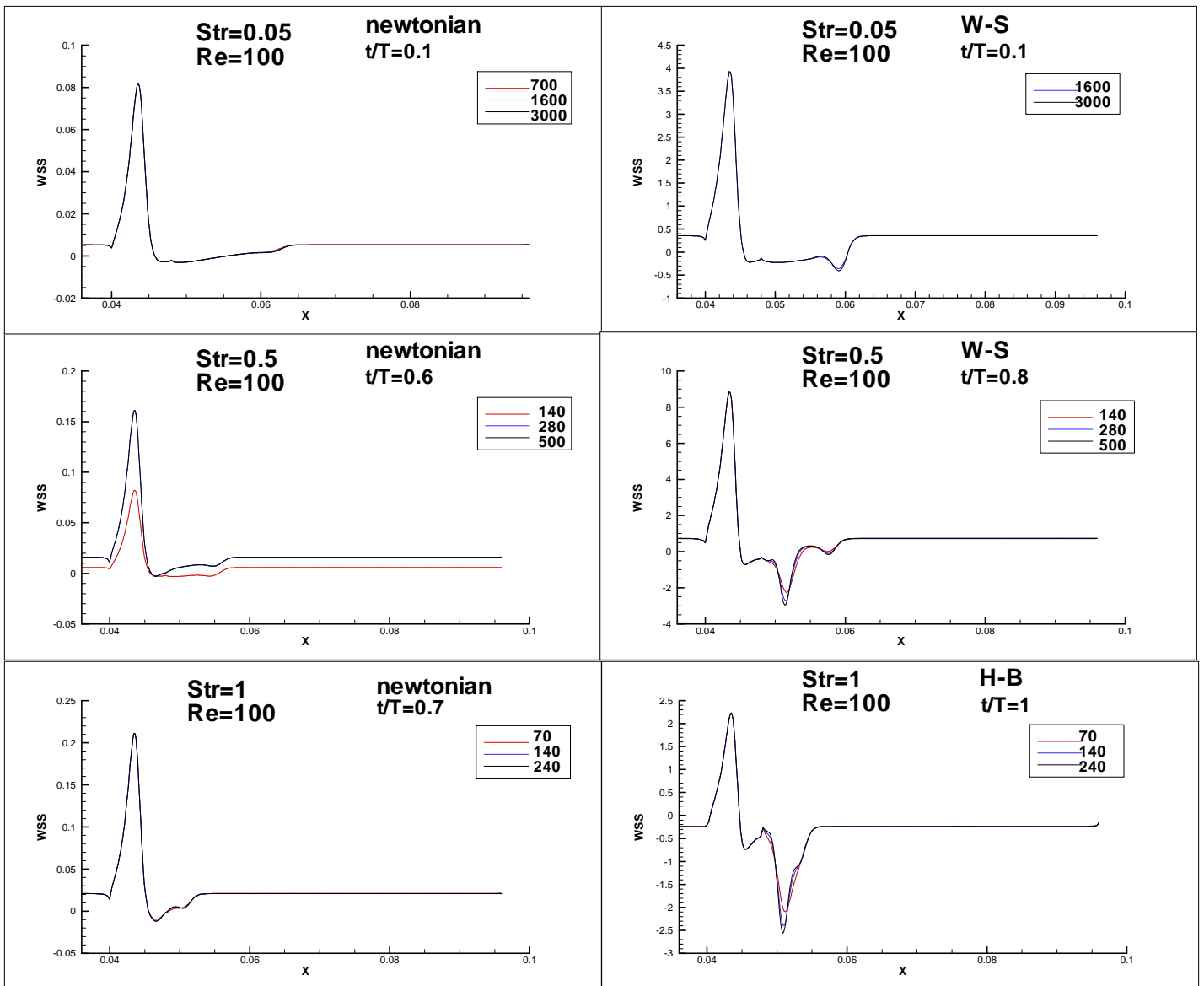
Από το Σχ4.6 επαληθεύεται το προηγούμενό μας, θεωρητικό συμπέρασμα της αντιστροφής σχέσης του απαιτούμενου αριθμού βημάτων για σύγκλιση και του  $Str$ , αφού:

- ο απαιτούμενος αριθμός βημάτων για σωστή σύγκλιση, είναι συνάρτηση αποκλειστικά του  $Str$  και μάλιστα αυξανόμενου του  $Str$ , ο αριθμός βημάτων μειώνεται

Τελικά, χρησιμοποιήσαμε τους παρακάτω αριθμούς βημάτων για τη χρονική διακριτοποίηση της περιόδου κάθε ροής χαρακτηριζόμενης από αριθμό  $Str$ :

$$Str = 0.05 \rightarrow N_{\beta} = 1600, \quad Str = 0.5 \rightarrow N_{\beta} = 280, \quad Str = 1 \rightarrow N_{\beta} = 140$$



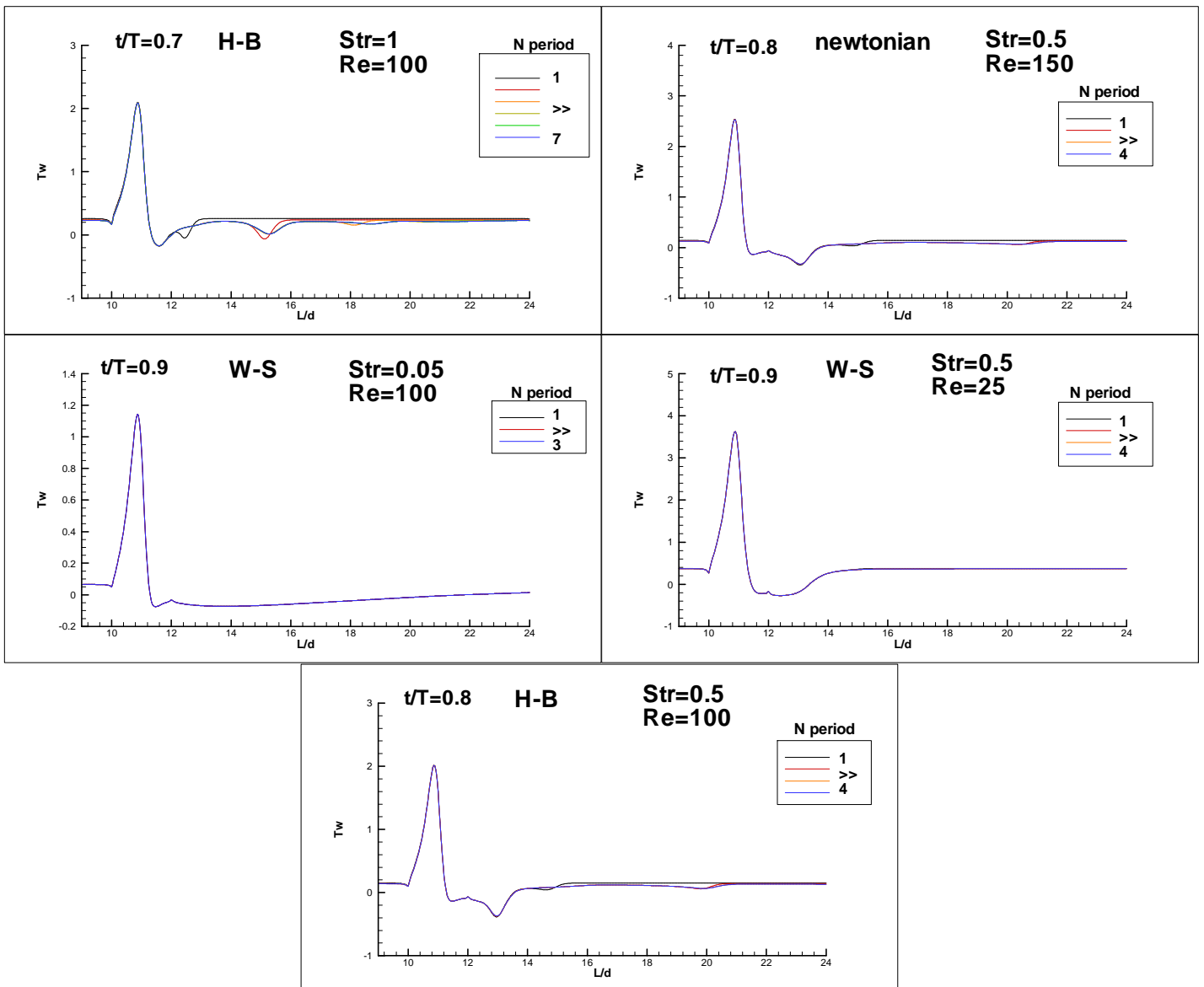


Σχ4.6 – μελέτη ανεξαρτησίας χρονικού βήματος

Πλήθος υποδείξεων και στοιχείων για τον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων της περιόδου για την επίτευξη ανεξαρτησίας αποτελεσμάτων ως προς την περίοδο, και τα χρονικά βήματα, βρήκαμε σε αντίστοιχη μελέτη του *Rosenfeld* [28], για το νευτώνειο ρευστό.

Η μελέτη ανεξαρτησίας αποτελεσμάτων από τον κύκλο επανάληψης της περιόδου, έγινε σε κάποια στιγμή του δεύτερου μισού της περιόδου, όπου το πεδίο ροής μεταβάλλεται εντονότερα.

$N_P$ : αριθμός επανάληψης περιοδικής μελέτης του φαινομένου, ώστε για  $N > N_P$  να λαμβάνουμε ταυτόσημα αποτελέσματα.



Σχ4.5 – αριθμός περιόδων  $N_p$  για αποτελέσματα ανεξάρτητα κύκλου υπολογισμών

- όπως φαίνεται από το διάγραμμα, η ανεξαρτησία αποτελεσμάτων, ως προς τον  $N_p$ , είναι συνάρτηση αποκλειστικά του  $Str$ , επιβεβαιώνοντας απόλυτα τον ισχυρισμό του *Rosenfeld* στην [28]

Παραταύτα, οι διαφορές μεταξύ των επαναλήψεων, είναι μικρότερες καθώς μειώνεται ο  $Re$ .

- ο  $N_p$  είναι ανεξάρτητος του χρησιμοποιούμενου μοντέλου ρευστού, επιβεβαιώνοντας με τη χρήση υπολογιστικού πακέτου, το αποτέλεσμα που προκύπτει με χρήση κώδικα, αλλά δεν αναφέρεται ρητά στην [27]

Τα παρουσιαζόμενα διαγράμματα και μεγέθη της μη μόνιμης ροής στο αποτελέσματά μας, για το  $Str$  στον οποίο αναφέρονται, αφορούν αριθμό περιόδων:

$$Str = 0.05 \rightarrow N_p = 2, \quad Str = 0.5 \rightarrow N_p = 3, \quad Str = 1 \rightarrow N_p = 5$$

Στο σημείο αυτό, ας αναφέρουμε και ορισμένες προσπάθειες υπολογισμών, στις οποίες, αν και μειώσαμε το χρονικό βήμα  $\Delta t$  σε πολύ μικρές τιμές, δεν επιτύχαμε σύγκλιση.

Σημαντική περίπτωση, που μας απασχόλησε, ήταν ο υπολογισμός των κατανομών ταχύτητας περιοδικής ροής μη νευτώνειων ρευστών σε ευθύγραμμο αγωγό, για διάφορες στιγμές της περιόδου.

Θεωρώντας πλήρως ημιτονοειδή καμπύλη παροχής και μηδενική μέση τιμή αυτής, το εγχείρημα αυτό, θα αντιστοιχούσε στις κατανομές ταχυτήτων που παρουσιάστηκαν από τον *Womersley* [26], για το νευτώνειο ρευστό.

Το πρόβλημα που προέκυπτε ήταν η μη σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου τη στιγμή της ολοκλήρωσης της περιόδου  $\tau = 1.0$ , όταν δηλαδή τα φαινόμενα οπισθοροής (*backflow*) μεγιστοποιούνταν.

Οι υπολογισμοί, στην περίπτωση ροής  $Str = 0.05 - Re = 100$  δεν έφταναν σε  $\Delta t < 10^{-4}$ , κριτήριο που ίσως μπορούσαμε να θεωρήσουμε επαρκές για καλά αποτελέσματα.

Οι μελέτες έγιναν για  $N_\beta \leq 2000$ , με το υπολογιστικό πλέγμα του ευθύγραμμου αγωγού που παρουσιάσαμε πιο πάνω.

Μετά από διάφορες προσπάθειες, με διαφορετικό πλήθος βημάτων ανά περίοδο κάθε φορά, καταλήξαμε ότι η αδυναμία σύγκλισης οφειλόταν στις αρνητικές ταχύτητες που εμφανίζονταν σε όλα κελιά της εξόδου του αγωγού.

Είναι πολύ πιθανόν, η οριακή συνθήκη *outflow*, να μην είναι συμβατή με το πρόβλημα και να προκύπτει *κακώς τοποθετημένο πρόβλημα οριακών συνθηκών*.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι η αύξηση της αδυναμίας σύγκλισης με τη μείωση του *Str*.

### **διαστατές συνθήκες ροής και ομοιότητα αποτελεσμάτων**

Ένα ζήτημα που μας απασχόλησε, ήδη από τα πρώτα στάδια της μελέτης, ήταν η ικανότητα του FLUENT να παρέχει ταυτόσημες τιμές μεγεθών, όταν μεταβάλλεται ένα από τα διαστατά μεγέθη που εισάγουμε, αλλά οι αριθμοί ομοιότητας της ροής, παρέμειναν σταθεροί.

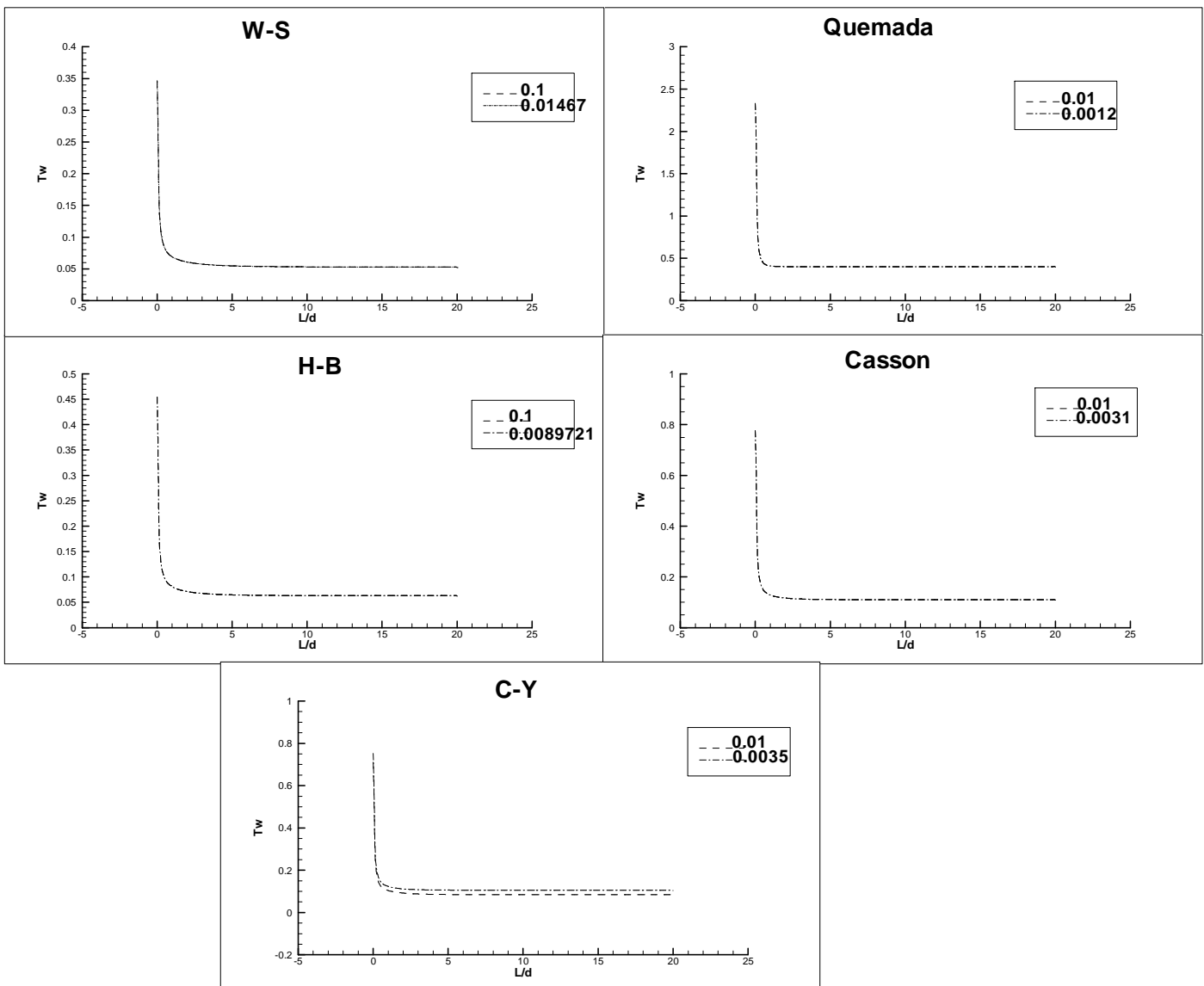
Η ικανότητα αυτή του FLUENT θεωρείται αδιαμφισβήτητη για υπολογισμούς πεδίων ροής νευτώνειων ρευστών, μπορούμε όμως, να είμαστε βέβαιοι για το τι συμβαίνει, όταν υπεισέρχονται πολύπλοκα μη νευτώνεια ρευστά;

Εκτελέστηκαν δοκιμές για ροή, όλων των μη νευτώνειων μοντέλων στον ευθύγραμμο αγωγό, για δύο περιπτώσεις, όπου ο  $Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$  παρέμενε σταθερός, αλλά άλλαζε η αποτελεσματική συνεκτικότητα  $\mu_{eff} = k \left( \frac{d}{U_0} \right)^{1-n}$ , (μέσω μεταβολής της φαινόμενης συνεκτικότητας  $k$ ) και η ταχύτητα εισόδου στον αγωγό  $U_0$ .

Στο Σχ4.5, παρουσιάζουμε τις αδιάστατες τάσεις στο τοίχωμα  $T_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2 / 2}$  για ροή

των μη νευτώνειων ρευστών στον ευθύγραμμο αγωγό, με αριθμό ομοιότητας  $Re = 100$  και δύο τιμές της φαινόμενης συνεκτικότητας  $k$ , εκ των οποίων μία φυσιολογική και χρησιμοποιούμενη σε όλους τους υπολογισμούς.

Παρατηρούμε την άριστη σύμπτωση για όλα τα μοντέλα, εκτός από το Carreau-Yasuda (C-Y), το οποίο και τελικά δεν επιλέχθηκε για το υπόλοιπο των μελετών.



Σχ4.5 – η ανεξαρτησία των αδιάστατων μεγεθών, από τα εισαγόμενα στο FLUENT διαστατά μεγέθη: οι  $T_w$  για  $Re = 100$  και δύο τιμές της φαινόμενης συνεκτικότητας  $k$

## παράμετροι υπολογισμού των μη νευτώνειων μοντέλων στο FLUENT

### W-S

Consistency Index:  $k = 0.01467 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.7755}$

Power-Law Index:  $n = 0.7755$

Reference Temperature:  $T_0 = 0$  (η εξίσωση ενέργειας αμελείται)

Minimum Viscosity Limit:  $\mu_{\min} = 0.0001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Maximum Viscosity Limit  $\mu_{\max} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

### H-B

Consistency Index:  $k = 0.0089721 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.8601}$

Power-Law Index:  $n = 0.8601$  , , ,

Yield Stress Threshold:  $\tau_0 = 0.0175 \text{ Pa}$

Yielding Viscosity:  $\mu_0 = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

### Quemada

Η χρήση του ρευστού Quemada στο FLUENT, απαιτεί να εισάγουμε τη συνάρτηση ορισμού του μέσω *header file* γλώσσας προγραμματισμού C. Αυτό παρουσιάζεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

$k_0 \rightarrow k_0 = 4.33$

$k_\infty \rightarrow k_\infty = 2.07$

$\mu_F \rightarrow \mu_F = 0.0012$

$\gamma_c \rightarrow \gamma_c = 1.88$

$\phi \rightarrow \phi = 0.45$

### Casson :

Η συνάρτηση ορισμού του μοντέλου Casson, εισάγεται με *header file* γλώσσας προγραμματισμού C (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ).

$\mu_\infty \rightarrow \mu_\infty = 0.0031$

$\tau_0 \rightarrow \tau_0 = 0.01082$

$m \rightarrow m = 500$

## νί} ταυτότητα υπολογισμών

- υπολογιστικό σύστημα: INTEL Pentium 4 CPU 3.00GHz, 1.50GB of RAM
- λειτουργικό σύστημα: Microsoft WINDOWS XP Professional 2002 Version
- υπολογιστικό πακέτο: FLUENT 6.1.22, Fluent Inc.
- υπολογιστικοί χρόνοι:

Θα αναφέρουμε την τάξη μεγέθους ορισμένων, χαρακτηριστικών υπολογιστικών χρόνων, που απαιτήθηκαν για την επίλυση των πεδίων ροής.

Κατά τους υπολογισμούς κάθε πεδίου, το λειτουργικό σύστημα, δεν επέτρεπε τη χρήση υπολογιστικής ισχύος μεγαλύτερης του 50% της ονομαστικής, για κάθε ενεργή εφαρμογή του FLUENT. Οι απαιτήσεις μνήμης RAM έφταναν το 30% της ονομαστικής, ανά ενεργή εφαρμογή του FLUENT.

Προφανώς, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτούσε η επίλυση κάθε πεδίου ήταν αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του χρησιμοποιούμενου υπολογιστικού πλέγματος. Εκτός από το πλέγμα, καταγράφουμε την επίδραση που είχαν διάφορες άλλες παράμετροι στον υπολογιστικό χρόνο.

Διάφορες μεταβολές των συντελεστών χαλάρωσης, δεν έδειξαν να προσφέρουν σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

Σημαντικότερη ήταν η επίδραση των μη νευτώνειων μοντέλων, των οποίων η χρήση, αύξανε τον υπολογιστικό χρόνο. Στα μοντέλα αυτά, οι δυσκολίες σύγκλισης ήταν μεγαλύτερες, ιδιαίτερα σε αυτά για τα οποία εμείς εισάγαμε την εξίσωση ιξώδους, μέσω κώδικα γλώσσας προγραμματισμού C (μοντέλα Quemada και Casson).

Παραθέτουμε μερικούς χαρακτηριστικούς υπολογιστικούς χρόνους.

#### μόνιμα πεδία ροής

ευθύγραμμος αγωγός –  $16 \cdot 10^3$  CV, όλα τα ρευστά :  $O(10^0 \text{ min})$

στενωμένος αγωγός –  $49 \cdot 10^3$  CV, νευτώνειο ρευστό:  $O(10^1 \text{ min})$

στενωμένος αγωγός –  $49 \cdot 10^3$  CV, ρευστό Casson:  $O(2 \cdot 10^1 \text{ min})$

#### μη μόνιμα πεδία ροής

Απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση του πεδίου σε μία πλήρη περίοδο, αποτελούμενη από  $N_\beta$  χρονικά βήματα (time steps/period – ts/p).

Str = 0.05

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, νευτώνειο ρευστό, 1600 ts/p:  $O(1.5 \cdot 10^2 \text{ min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, W-S ρευστό, 1600 ts/p:  $O(2.5 \cdot 10^2 \text{ min})$

Str = 0.5

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, νευτώνειο ρευστό, 140 ts/p:  $O(3 \cdot 10^1 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, νευτώνειο ρευστό, 500 ts/p:  $O(1 \cdot 10^2 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, W-S ρευστό, 500 ts/p:  $O(1.5 \cdot 10^2 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $79 \cdot 10^3$  CV, W-S ρευστό, 280 ts/p:  $O(1.8 \cdot 10^2 \text{min})$

Str = 1

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, νευτώνειο ρευστό, 240 ts/p:  $O(7 \cdot 10^1 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, H-B ρευστό, 240 ts/p:  $O(1 \cdot 10^2 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $25 \cdot 10^3$  CV, H-B ρευστό, 140 ts/p:  $O(4 \cdot 10^1 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $25 \cdot 10^3$  CV, W-S ρευστό, 140 ts/p:  $O(3 \cdot 10^1 \text{min})$

συνδυασμένος αγωγός –  $37 \cdot 10^3$  CV, H-B ρευστό, 70 ts/p:  $O(2 \cdot 10^1 \text{min})$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

## αποτελέσματα & συζήτηση

### §1. μόνιμα πεδία ροής

Μετρήθηκαν οι ροές των μη νευτώνειων ρευστών Walburn-Schneck, Herschel-Bulkley, Quemada, Casson και του νευτώνειου, για  $Re = 25, 50, 75, 100, 125, 150$ .

Οι διαφορετικοί, ανά μοντέλο, ορισμοί του αποτελεσματικού ιξώδους  $\mu_{eff}$ , που υπεισέρχεται στον αδιάστατο αριθμό ομοιότητας της ροής  $Re$ , οδηγούν στην εισαγωγή διαφορετικής ταχύτητας αναφοράς  $U_{ref} = U_0$  για τους υπολογισμούς σε κάθε μοντέλο.

$$Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$$

Έτσι, οι υπολογισμοί έγιναν για τα παρακάτω διαστατά μεγέθη σε μονάδες SI.

διάμετρος αγωγού:  $d = 0.004$  m

πυκνότητα:  $\rho = 1050$  kg/m<sup>3</sup>

αποτελεσματική συνεκτικότητα:

νευτώνειο:  $\mu_{eff} = \mu_{blood} = 0.0032$  Pa·s

$$\text{W-S : } \mu_{eff} = k \left( \frac{d}{U_0} \right)^{1-n} \quad (n = 0.7755, k = 0.01467 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.7755})$$

$$\text{H-B : } \mu_{eff} = k \left( \frac{d}{U_0} \right)^{1-n} \quad (n = 0.8601, k = 0.0089721 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.8601})$$

Quemada :  $\mu_{eff} = \mu_{plasma} = 0.0012$  Pa·s

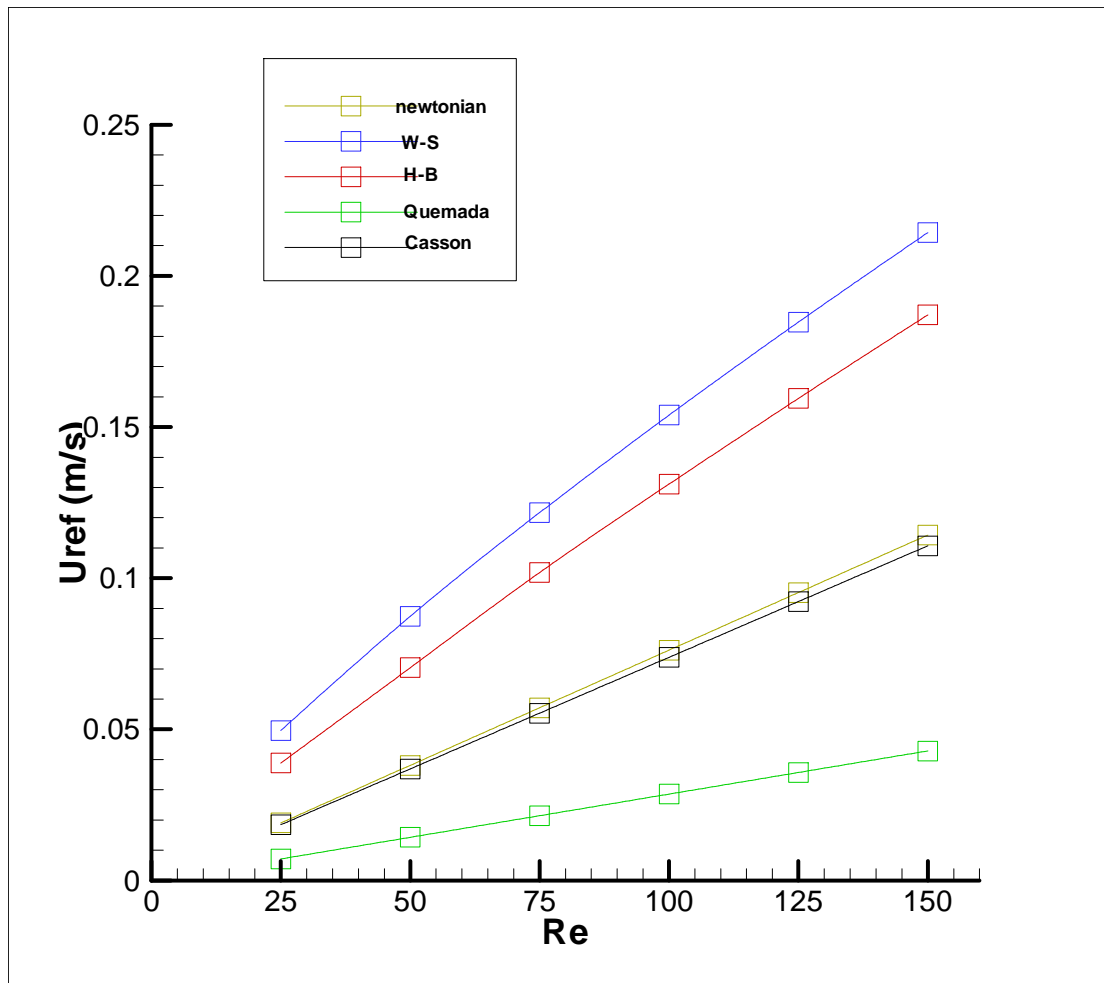
Casson :  $\mu_{eff} = \mu_0 = 0.0031$  Pa·s

όπου  $n$  : συντελεστής μη νευτώνειας συμπεριφοράς και

$k$  : φαινόμενη συνεκτικότητα

Στο διάγραμμα Δ5.1 παρουσιάζουμε αυτή τη σχέση  $U_{ref} - Re$ , που είναι γραμμική για το νευτώνειο και τα μοντέλα Quemada και Casson, όχι όμως για τα W-S και H-B.





Δ5.1 – η ταχύτητα αναφοράς  $U_{ref}$ , ως συνάρτηση του  $Re$  σε κάθε μοντέλο

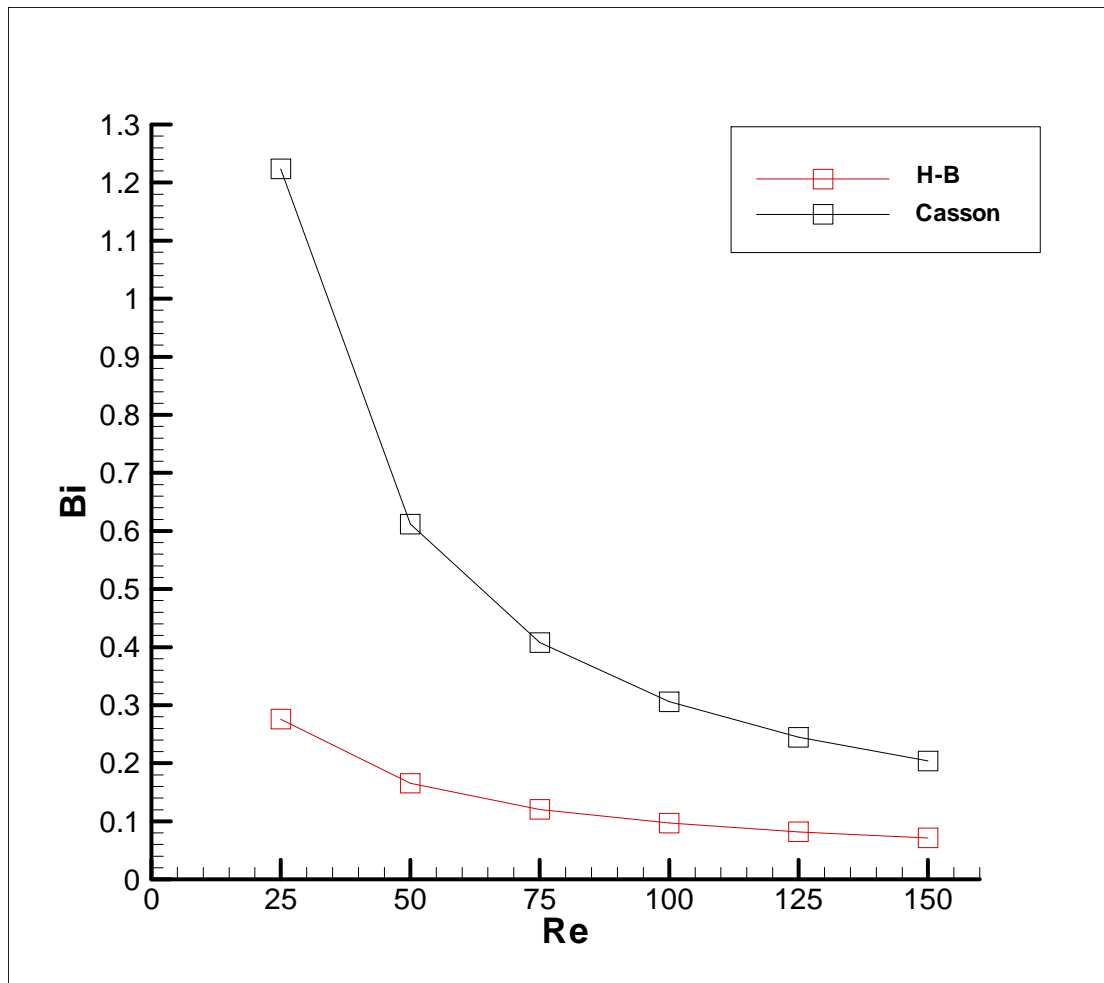
Μεγάλη διαφορά παρουσιάζει το ρευστό Quemada, αλλά δε θα πρέπει να ξεχνάμε τη μικρή τιμή του  $\mu_{eff}$ , που προκαλεί μείωση της  $U_{ref}$  για τη διατήρηση του  $Re$ .

Στα δύο ιξωδοπλαστικά μοντέλα, H-B και Casson, απαραίτητος είναι και ο προσδιορισμός ενός ακόμα αδιάστατου αριθμού, του αριθμού  $Bi$ , που υποδεικνύει τη σημαντικότητα της αρχικής τάσης για ροή του ρευστού, σχετικά με τις συνεκτικές δυνάμεις.

Η εμπειρική σχέση ορισμού που δώσαμε, αναλύοντας διαστατικά, είναι:

$$Bi = (\tau_0 / k) \left( \frac{d}{U_0} \right)^n$$

(αργότερα, βρήκαμε να χρησιμοποιείται και από άλλους μελετητές [27,69,70]), αλλά αυτό που μας ενδιαφέρει ακόμα περισσότερο, είναι η σχέση του με τον αριθμό  $Re$  της ροής, που παρουσιάζεται στο Δ5.2.



Δ5.2 – σχέση των αδιάστατων αριθμών  $Re$  και  $Bi$  στα ιξωδοπλαστικά μοντέλα

## §1α. ευθύγραμμος αγωγός

Στον ευθύγραμμο αξονικά συμμετρικό αγωγό, ελεύθερο ρεύμα ρευστού, ταχύτητας  $U_0$ , παράλληλης στον άξονα συμμετρίας, εισέρχεται στο σημείο  $L_{in} = 0$  και εξέρχεται στο  $L_{out} = 20d$

Πρόκειται για ροή *Poiseuille* και οι τάσεις που ασκούνται στον αγωγό, μειώνονται μέχρι μία ελάχιστη τιμή  $\tau_{w,final}$ , η οποία διατηρείται από το σημείο εκείνο και κατάντι, μαζί με την ακτινική κατανομή της ταχύτητας.

Σημαντικά χαρακτηριστικά, που μας δίνουν αρκετά καλή πληροφορία για τη συμπεριφορά κάθε μοντέλου, είναι το απαιτούμενο μήκος αγωγού για να επέλθει πλήρως αναπτυγμένη ροή, η ακτινική κατανομή των ταχυτήτων στην κατάσταση αυτή και οι τάσεις που ασκεί στον αγωγό.

Επίσης, αποτελούν μεγέθη με τα οποία, μπορούμε να κάνουμε άμεση σύγκριση με άλλες πειραματικές ή αριθμητικές μελέτες, διαπιστώνοντας την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας.

Για τους υπολογισμούς των μη νευτώνειων ρευστών, λίγα είναι τα πειραματικά αποτελέσματα, που έχουμε στη διάθεσή μας για σύγκριση, ιδιαίτερα για τις ροές χαμηλών  $Re$ , που μελετούμε. Συγκεκριμένα, μόνο για τα μοντέλα Εκθετικού Νόμου (W-S) και H-B, βρήκαμε στοιχεία.

Για την μελέτη και κατανόηση της ροής στον ευθύγραμμο αγωγό επικεντρώθήκαμε στα παρακάτω μεγέθη:

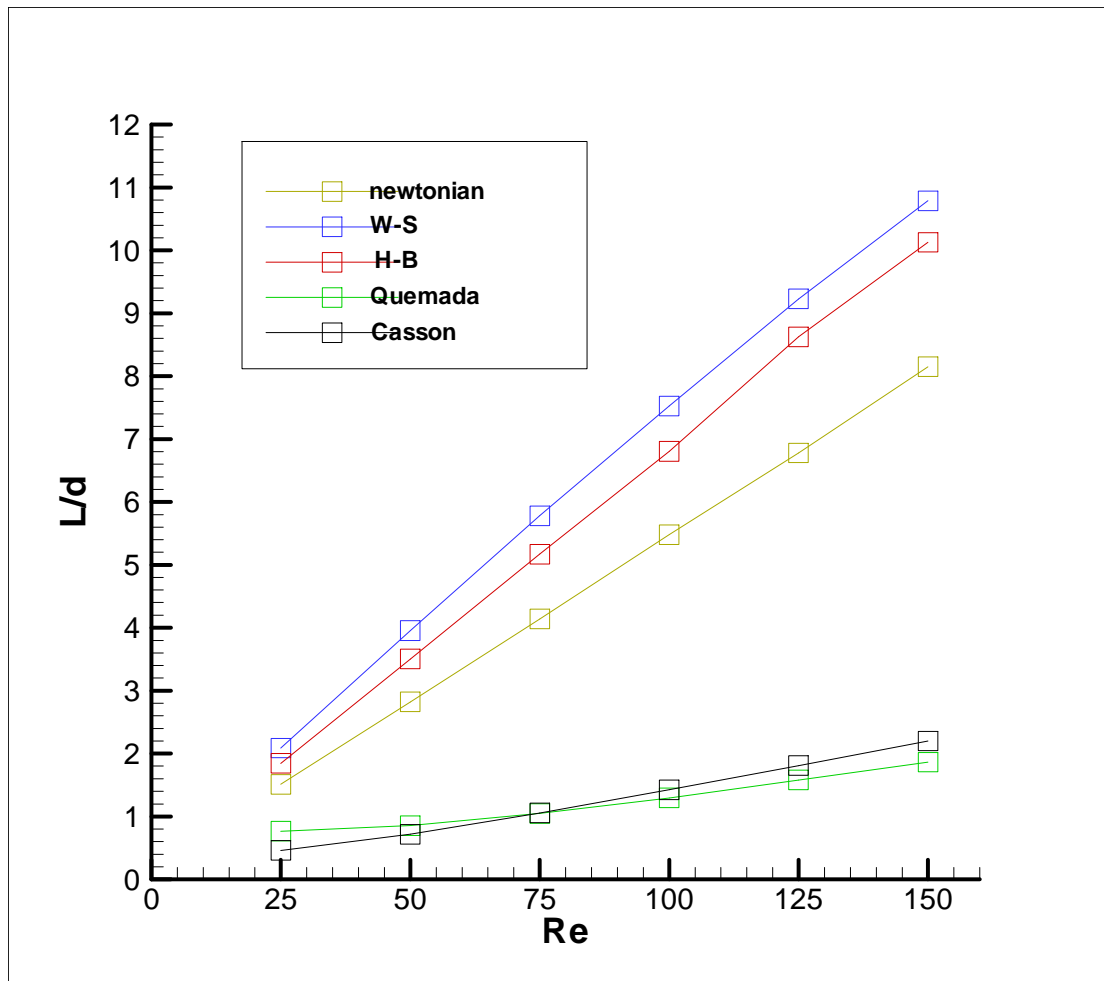
- i} μήκος διαμόρφωσης
- ii} λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής
- iii} κατανομές ταχυτήτων
- iv} διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα
- v} πτώση στατικής πίεσης

### i} μήκος διαμόρφωσης

Το *μήκος διαμόρφωσης* (*entrance length*) είναι το απαιτούμενο μήκος αγωγού από την είσοδο, που πρέπει να καλύψει το εισερχόμενο ρευστό, για να καταστεί πλήρως διαμορφωμένη η ροή του. Θεωρούμε ότι το ρευστό φτάνει σε κατάσταση πλήρως διαμορφωμένης ροής, στην αξονική θέση  $L_D$  στην οποία, η τιμή των τάσεων, που ασκεί στον αγωγό  $\tau_w(L_D)$ , φτάνει το 101% της τελικής τους τιμής  $\tau_{w,final}$  :

$$\tau_w(L_D) = 1.01\tau_{w,final}$$

Το μήκος αυτό  $x_f = \frac{L_D}{d}$  παρουσιάζουμε, αδιαστατοποιημένο με τη διάμετρο του αγωγού  $d$ , στο Δ5.3.



Δ5.3 – απαιτούμενο αδιάστατο μήκος διαμόρφωσης  $x_f$

Για το νευτώνειο ρευστό, η σχέση  $x_f = 0.06Re$ , φαίνεται να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, για ροές μακριά από συνθήκες ερπυσμού ( $Re > 20$  αναφέρεται στις [71,72]), ενώ πολυπλοκότερες σχέσεις αναπτύχθηκαν για να συμπεριλάβουν και αυτές τις περιπτώσεις [71].

Τα πειραματικά αποτελέσματα, για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου, σπανίζουν και μόνο αριθμητικές μελέτες (ή αναλυτικές προσεγγίσεις, όπως η [73]) έχουμε στη διάθεσή μας, για σύγκριση [74–77].

Στην [78] παρουσιάζεται όλο αυτό το πλήθος σχέσεων  $x_f = f(Re)$  για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου και με βάση το  $Re$  που έχουμε ορίσει:  $0.05Re < x_f < 0.09Re$ .

Οι τιμές που προκύπτουν στη μελέτη μας για το νευτώνειο ρευστό, επαληθεύονται από την προαναφερθείσα σχέση στους χαμηλούς  $Re$ , αλλά καθώς αυτός αυξάνεται, αποκλίνουν, εμφανίζοντας μικρότερα  $x_f$  από τα αναμενόμενα, με μέγιστο σφάλμα κάτω από 10%.

Στο W-S, μοντέλο Εκθετικού Νόμου, οι τιμές μας βρίσκονται στα πλαίσια που αναφέρουν οι άλλες αριθμητικές μελέτες.

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος, που αποτελεί και ένδειξη συμφωνίας με τα παραπάνω μοντέλα, είναι ότι στην περιοχή των αριθμών  $Re$ , που μελετούμε, μπορούμε να εφαρμόσουμε απλή γραμμική σχέση μεταξύ  $Re$  και  $x_f$ , με καλή ακρίβεια σε κάθε μοντέλο.

Η κλίση της ευθείας που θα προκύψει (ρυθμός αύξησης του  $x_f$  με το  $Re$ ) είναι και πάλι, πολύ διαφορετική για κάθε μοντέλο.

Μεγάλες είναι οι αποκλίσεις μεταξύ των μοντέλων, με τα W-S και H-B να χρειάζονται ακόμα και 10 μήκη αγωγού, περισσότερο από τα Quemada και Casson, για να διαμορφώσουν πλήρως τη ροή τους

Το νευτώνειο βρίσκεται σε ενδιάμεση κατάσταση, ακολουθώντας την τάση των W-S και H-B, να αυξήσουν τη διαφορά τους από τα Quemada και Casson, αυξανόμενου του  $Re$ .

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι τα W-S και H-B συμπεριφέρονται ως λεπτόρρευστα, σχετικά με το νευτώνειο, σε αντίθεση με τα παχύρρευστα Quemada και Casson.

Ποιά είναι, όμως, η έννοια του παχύρρευστου και λεπτόρρευστου σε ρευστά με μεταβλητό ιξώδες;

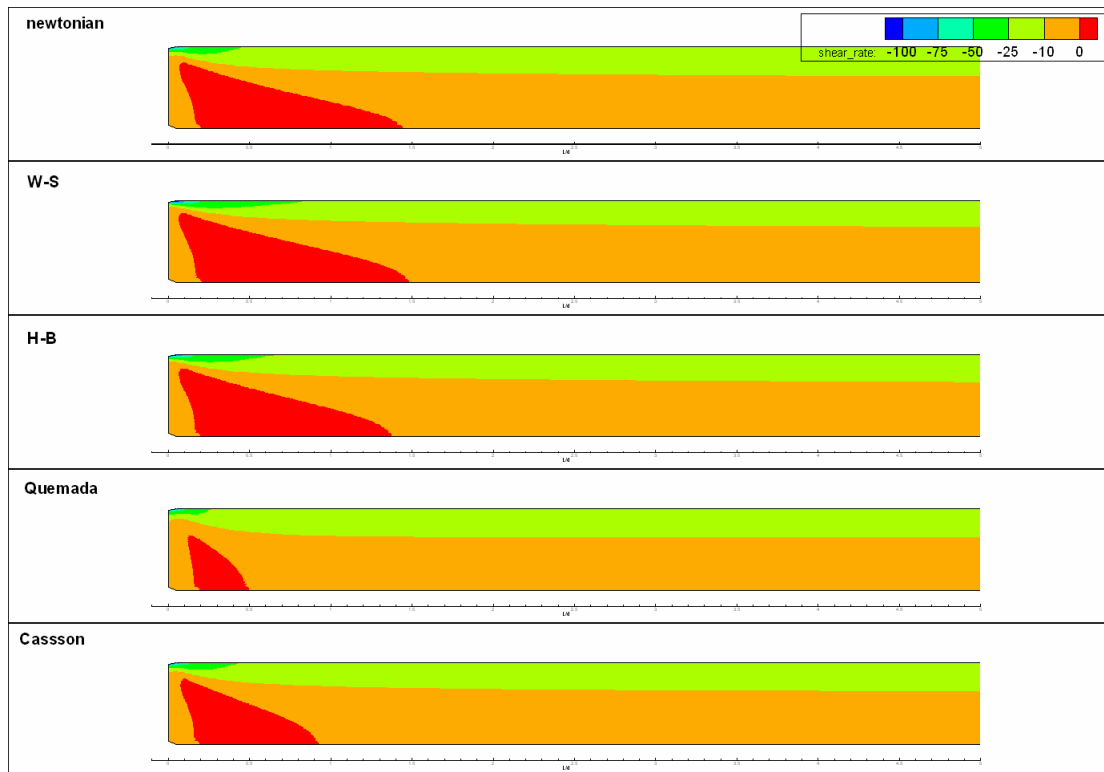
Για τις παρατηρούμενες διαφορές, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε εξήγηση, λαμβάνοντας ως παράδειγμα την περίπτωση ροής  $Re = 100$ .

Παρουσιάζουμε στο Δ5.4 τις ισοσταθμικές του ρυθμού διάτμησης (*shear rate*)

$$\dot{\gamma}_{xr} = \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}, \text{ ο οποίος θα μας δώσει πληροφορία για τα αναπτυσσόμενα οριακά}$$

στρώματα κατά την είσοδο του ρευστού στον αγωγό, που εντέλει η ανάπτυξή τους καθορίζει τη διαμόρφωση της ροής. Η αξονική παράγωγος της ταχύτητας, δεν έχει μηδενιστεί κατά τα πρώτα βήματα του ρευστού στον αγωγό, κάτι που θα συμβεί όταν επέλθει πλήρως διαμορφωμένη ροή.

$$\text{Αδιαστατοποιούμε ως } \dot{\gamma}_{xr}^* = \dot{\gamma}_{xr} \frac{d}{U_0}.$$



Δ5.4 – ισοσταθμικές του ρυθμού διάτμησης  $\dot{\gamma}_{xr}^*$  στην είσοδο του αγωγού,  $Re=100$

Συγκρίνοντας στο Δ5.4 τα αναπτυσσόμενα οριακά στρώματα στην είσοδο του αγωγού, έχουν της ίδιας τάξης μεγέθους πάχος σε όλα τα μοντέλα.

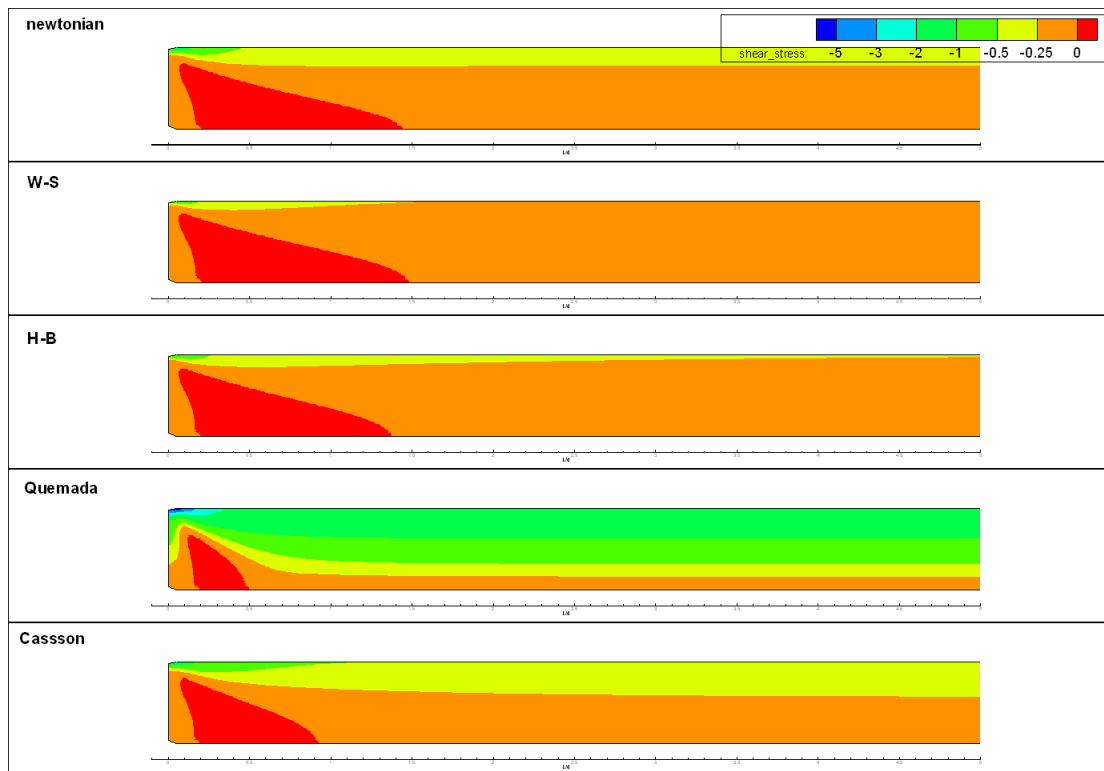
Δύο νευτώνεια ρευστά, ρέοντας με ίδιο  $Re$ , αναμένουμε να εμφανίσουν ίδιου πάχους οριακά στρώματα, που οδηγούν σε πλήρη διαμόρφωση της ροής στο ίδιο  $x_f$ .

Γιατί τότε, υπάρχει τόση μεγάλη διαφορά στο απαιτούμενο μήκος για πλήρως διαμορφωμένη ροή, μεταξύ των μοντέλων;

Η απάντηση μπορεί να δοθεί, μέσω των διατμητικών τάσεων (*shear stresses*)  $\tau_{xr} = \mu_{(\gamma)} \dot{\gamma}_{xr}$ , που εμφανίζονται στο ρευστό και εξαρτώνται από το μέτρο του ρυθμού

$$\text{παραμόρφωσης } \dot{\gamma} = \sqrt{\left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]^2 \right|}.$$

Στο Δ5.5, εμφανίζονται οι ισοσταθμικές των διατμητικών τάσεων  $\tau_{xr}^*$ , αδιαστατοποιημένες με τη δυναμική πίεση  $p_d = \rho U_0^2 / 2$  στην είσοδο του αγωγού.



#### Δ5.5 – ισοσταθμικές των διατμητικών τάσεων $\tau_{xr}$ \* στην είσοδο του αγωγού, $Re=100$

Οι διαφορές της κατανομής των  $\tau_{xr}$ , ανάμεσα στα μοντέλα είναι τεράστιες, δίνοντάς μας το στοιχείο που χρειαζόμαστε, για να εξηγήσουμε τη μεγάλη διαφορά στα μήκη  $x_f$ .

Έτσι, τα μοντέλα στα οποία αναπτύσσονται οι παχύτερες περιοχές αυξημένων τάσεων, απαιτούν πολύ μικρότερο μήκος αγωγού, για να φτάσουν σε πλήρως διαμορφωμένη ροή.

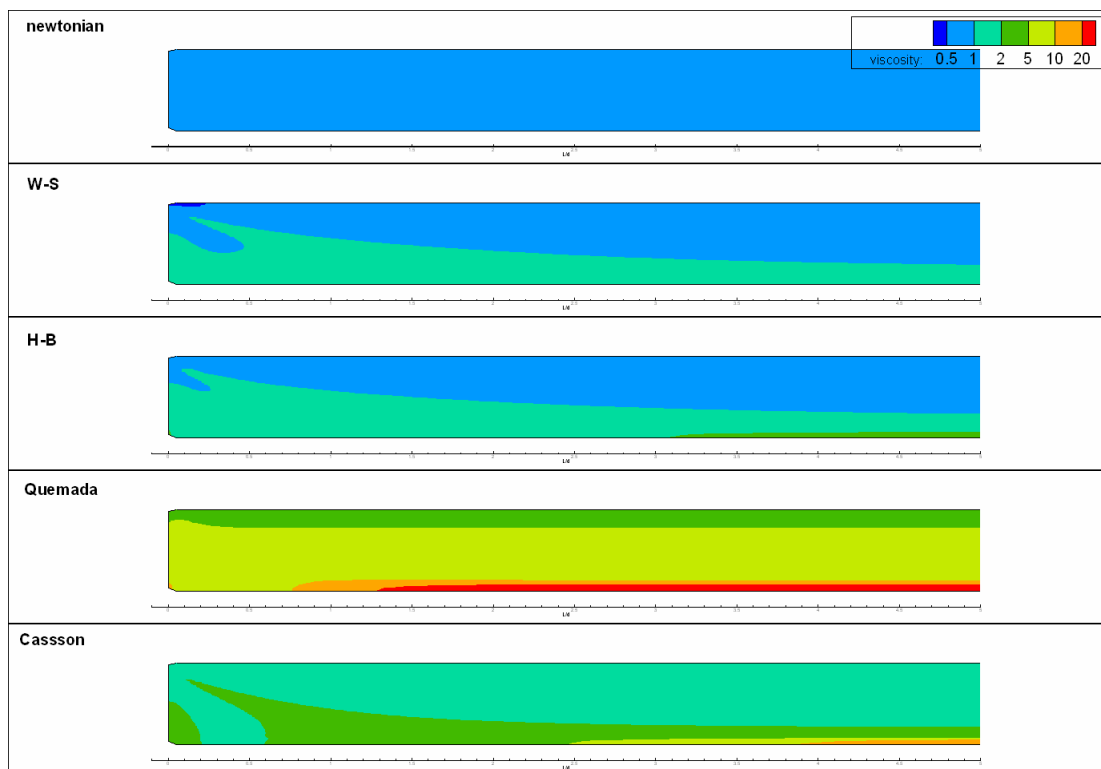
Κατά συνέπεια, το Quemada, που απαιτεί το μικρότερο μήκος  $x_f$ , έχει δημιουργήσει μία περιοχή εμφάνισης ισχυρότατων διατμητικών τάσεων, κατά πολύ μεγαλύτερη σε πάχος από αυτή του νευτώνειου.

Αντίθετα, τα W-S και H-B, σχηματίζουν πολύ λεπτότερες περιοχές, οδηγώντας σε μεγαλύτερα  $x_f$ .

Η παρατήρηση αυτή, θα μπορούσε να αποτελέσει έναυσμα, για ένα διαφορετικό ορισμό των οριακών στρωμάτων στα μη νευτώνεια ρευστά, θεωρώντας το οριακό στρώμα, σαν περιοχή ανάπτυξης μεγάλων τιμών στις διατμητικές τάσεις.

Ας δούμε και τη συμπεριφορά του ιξώδους, στην ίδια περιοχή, αδιαστατοποιώντας ως  $\mu^* = \mu_{(\gamma)} / \mu_{eff}$ , στο Δ5.6.

Η βασικότερη παρατήρηση σε αυτό, είναι η δυνατότητα του Quemada να αυξάνει κατά πολλές φορές το ιξώδες του, περισσότερο από κάθε άλλο μοντέλο.



Δ5.6 – ισοσταθμικές του ιξώδους  $\mu^*$  στην είσοδο του αγωγού,  $Re=100$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ ιξώδους και πεδίου ταχυτήτων, αποτυπώνεται στις εξισώσεις *Navier – Stokes* για τα μη νευτώνεια ρευστά.

Ποιο από τα δύο μεγέθη, όμως, τροφοδοτεί τη μεταβολή του άλλου;

Ή καλύτερα, επειδή η επίδραση είναι συνεχής και αμφίδρομη, ποιός από τους δύο παράγοντες επιδρά πάνω στον άλλο ισχυρότερα;

Αναλύοντας τα δεδομένα του Δ5.4, θα λέγαμε ότι το μεταβλητό ιξώδες, μικρή επίδραση έχει στις κατανομές των ταχυτήτων, ακόμα και στην αδιαμόρφωτη ροή.

Ένα τέτοιο συμπέρασμα, θα ήταν εσφαλμένο και βιαστικό, αν θεωρούσαμε ότι εφόσον οι παρατηρούμενες κλίσεις ταχύτητας είναι παρόμοιες σε όλα τα ρευστά, ισχυρότερο ρόλο παίζει το πεδίο ταχυτήτων στον καθορισμό του ιξώδους.

Θα ξεχνούσαμε να λάβουμε υπόψη μας αυτό που συμβαίνει στις διαφορετικές κατανομές ταχυτήτων, που παράγει η μεταβολή των συντελεστών μη νευτώνειας συμπεριφοράς ή του  $Bi$  (θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε αμέσως πιο κάτω).



Έτσι, η απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε, είναι σχετική με τις συνθήκες ροής, απαιτώντας ενδελεχή μελέτη των οριακών στρωμάτων στα μη νευτώνεια, για διάφορους συντελεστές και συνθήκες ροής.

Οι συλλογισμοί αυτοί, δεν είναι απλά φιλοσοφική συζήτηση περί ρευστομηχανικής, αλλά έχουν άμεσο αντίκτυπο στη στρατηγική που ακολουθείται για την ανάπτυξη μεθόδων αριθμητικής προσέγγισης των πεδίων ροής των μη νευτώνειων.

## ii} λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

Συνεχίζουμε με το λόγο  $w = \left( \frac{U_a}{U_m} \right)$  ταχύτητας στον άξονα του αγωγού στην πλήρως διαμορφωμένη ροή και μέσης ταχύτητας στη διατομή, που προέκυψε στα αποτελέσματά μας για κάθε  $Re$  και μοντέλο εμφανίζεται στο Δ5.7.

Για το νευτώνειο και το W-S, αναμένονται οι θεωρητικές τιμές, σταθερές σε κάθε ροή,  $w = 2$  και  $w = \frac{3n+1}{n+1} = 1.874$ , αντίστοιχα [45].

Ο θεωρητικός  $w = \left( \frac{U_a}{U_m} \right) = \left( \frac{U_c}{U} \right)$  για το H-B, δίνεται σε μορφή διαγράμματος στο Σχ5.1 από τη [2], ως συνάρτηση του αριθμού  $B = Bi$ .

Στο βιβλίο *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology* [45] και σε πρόσφατη μελέτη [69], παρουσιάζονται αποτελέσματα για το λόγο ταχυτήτων άξονα συμμετρίας και μέσης ταχύτητας στη διατομή,  $w = \left( \frac{U_a}{U_m} \right)$ , καθώς και για το συντελεστή τριβής  $f$ , στα μοντέλα Εκθετικού Νόμου (W-S) και H-B.

Ας επισημάνουμε ότι στις ροές που μελετήσαμε,  $U_0 = U_m$ , επειδή  $Q = \pi R^2 U_0$  στην είσοδο του αγωγού και  $U_m = \frac{Q}{\pi R^2}$  η μέση ταχύτητα σε κάθε διατομή, με βάση την παροχή ρευστού  $Q = \int_0^R 2\pi r u dr$  που περνά τη διατομή.

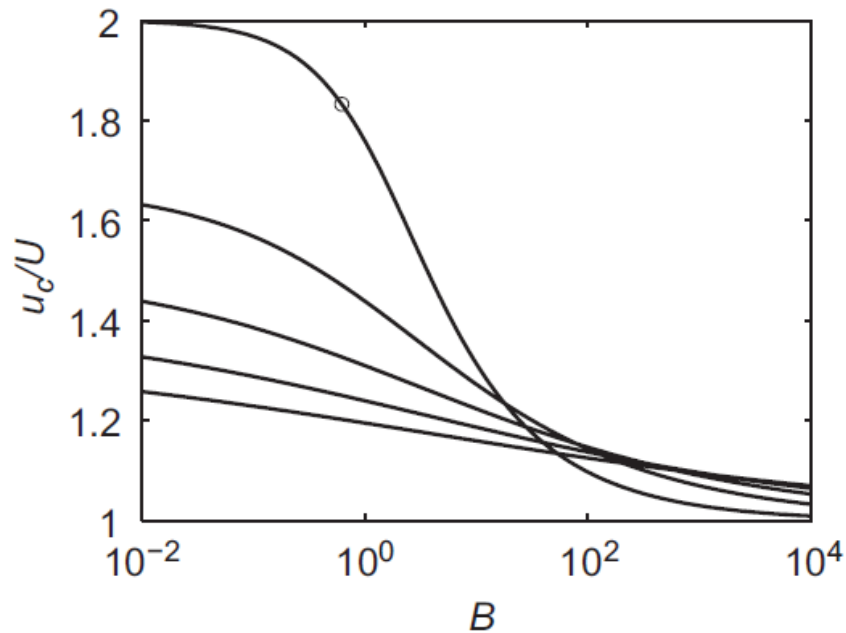
Επίσης, στην [70] υπάρχουν στοιχεία για τις ταχύτητες και τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται στη ροή H-B ρευστού, αλλά αφορούν πολύ διαφορετικές συνθήκες από τις δικές μας, κάνοντας τη σύγκριση αδύνατη.

Στο Δ5.7 θα πρέπει να παρατηρήσουμε την καλή σύμπτωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, με αυτά που αναμένονται από τη θεωρία και έχουν επαληθευτεί πειραματικά.

Για το μεν νευτώνειο σε κάθε περίπτωση  $w_{num} = 1.998$ , δηλαδή απόκλιση 0.1%, ενώ για το W-S η απόκλιση κυμαίνεται στο 0.2 – 0.4% .

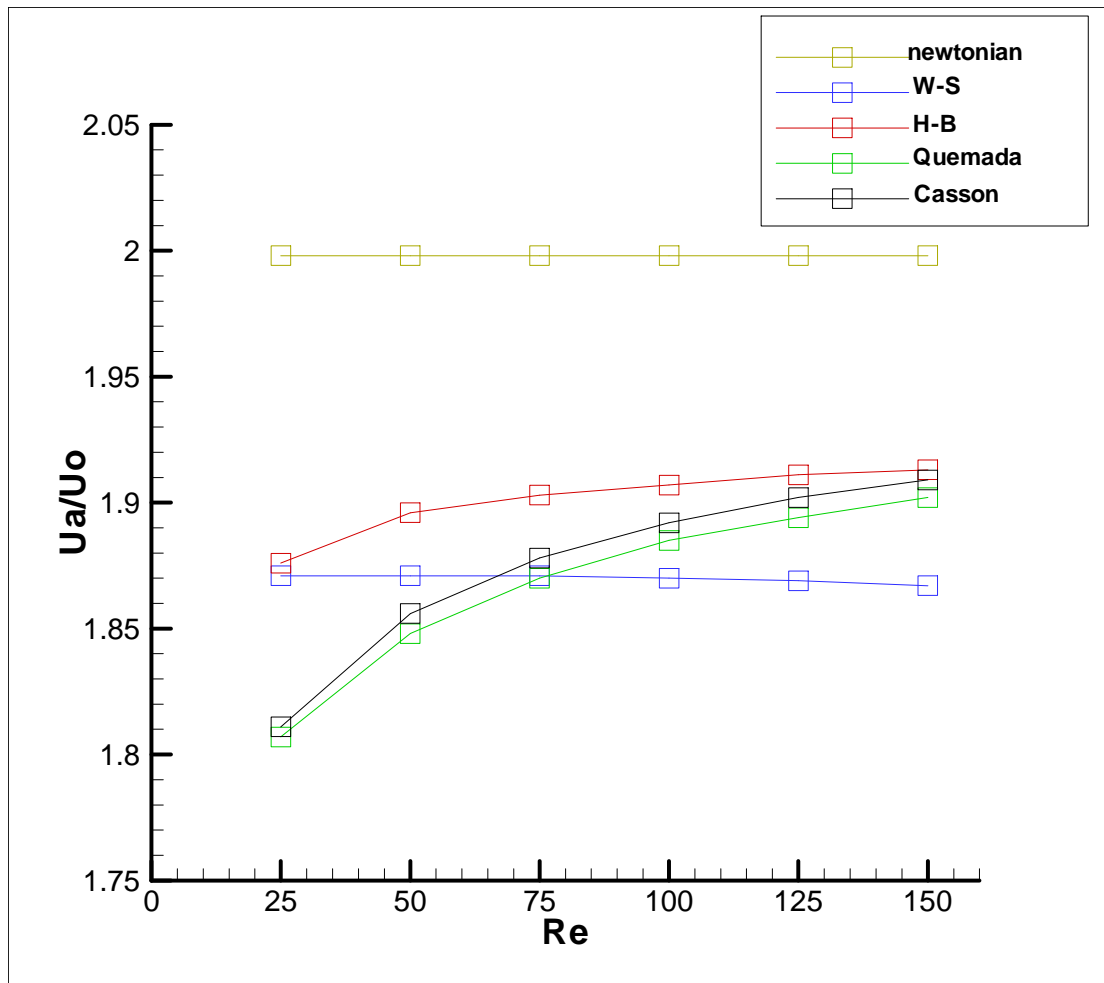
Τέλος, για το H-B, αφού συσχετίσουμε τον  $Re$  με τον  $Bi$  από το Δ5.2, μπορούμε να διακρίνουμε στο Σχ5.1 την πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων μας, με τα υπολογισμένα στη [69].

Πχ για  $Re = 100$ , συνεπώς  $Bi = 0.1$ , αριθμητικά υπολογίζουμε  $w = 1.907$ , ενώ θεωρητικά από το Σχ1.1 αναμένεται τιμή οριακά μεγαλύτερη.



Σχ5.1 – ο λόγος  $w$  ως συνάρτηση του  $Bi$  στο H-B [69], οι παραμετρικές καμπύλες αφορούν, τον αντίστροφο συντελεστή μη νευτώνειας συμπεριφοράς  $m = 1/n$ , όπου  $m = 1.16$  στην περίπτωσή μας, και η προσημασμένη καμπύλη, αφορά την τιμή  $m = 1$ , με τις καμπύλες για  $m = [2, 3, 4, 5]$  να ακολουθούν.

Αριθμητικά δεδομένα για την ταχύτητα στον άξονα της ροής του μοντέλου Casson, παρουσιάζονται στην [79], όμως οι διαφορετικοί συντελεστές και ο διαφορετικός ορισμός του  $Re$  που υιοθετείται εκεί, για το ρευστό αυτό, κάνουν αδύνατη τη σύγκριση.



Δ5.7 – ο λόγος  $w$  στα αριθμητικά μας αποτελέσματα

### iii} κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

Λόγω της πλήρως διαμορφωμένης ροής, στις διατομές κατάντι της διατομής που αυτή επιτυγχάνεται, έχουμε μόνο αξονική ταχύτητα και αδιαστατοποιώντας με την ταχύτητα στον άξονα  $U_a$ , κάθε μοντέλου, στον εκάστοτε  $Re$ , προκύπτουν οι

κατανομές (*velocity profiles*)  $a = \frac{u(r)}{U_a}$ , για διάφορους  $Re$ , στα Δ5.8 και Δ5.9.

Στα Δ5.8 και Δ5.9, το πρώτο που μπορούμε να διακρίνουμε είναι οι περισσότερο πεπλατυσμένες κατανομές στην περιοχή του άξονα, στα μη νευτώνεια σε σχέση με αυτή του νευτώνειου.

Το φαινόμενο δείχνει περισσότερο έντονο στους χαμηλότερους  $Re$ , καταδεικνύοντας την αυξανόμενη αναγκαιότητα χρήσης μη νευτώνειων μοντέλων στις μελέτες ροών αίματος μειωμένου  $Re$ .

Οι διαφορές είναι έντονες στον άξονα συμμετρίας και για μεγαλύτερους  $Re$ . Στην περιοχή του άξονα, οι χαμηλοί ρυθμοί παραμόρφωσης, οφειλόμενοι στη μικρή ακτινική κλίση ταχύτητας, προκαλούν αύξηση του ιξώδους. Έτσι, προκαλείται

πλάτυνση της κατανομής ταχυτήτων μη νευτώνειων ρευστών, στο κέντρο του αγωγού.

Ακόμα μία φορά, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά των Quemada και Casson μοντέλων, τείνει να προσεγγίσει αυτή των άλλων μοντέλων σε μεγαλύτερους  $Re$ , ενισχύοντας την πεποίθησή μας, πως είναι κατάλληλα για περιγραφή ροών αίματος υψηλότερων  $Re$ .

Διαφορές παρατηρούνται και στη ροή των δύο ιξωδοπλαστικών μοντέλων, H-B και Casson.

Και στα δύο, η αρχική τάση που απαιτείται για ροή τους, προκαλεί μεγάλη αντίσταση στην περιοχή του άξονα, με αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας επί του άξονα.

Ο πολύ μεγαλύτερος αριθμός  $Bi$ , που συναντάμε στις ροές χαμηλών  $Re$  του Casson, δεν επιτρέπει στα διάφορα ακτινικά επίπεδα να αναπτύξουν εύκολα ταχύτητες διαφορετικές των γειτονικών τους. Αυτό, σημαίνει, διατήρηση της ακτινικής κλίσης ταχύτητας  $\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)$  σε χαμηλές τιμές.

Η ακτινική κλίση ταχύτητας, όμως, στη ροή στον ευθύγραμμο αξονικά συμμετρικό αγωγό, καθορίζει τον ρυθμό παραμόρφωσης.

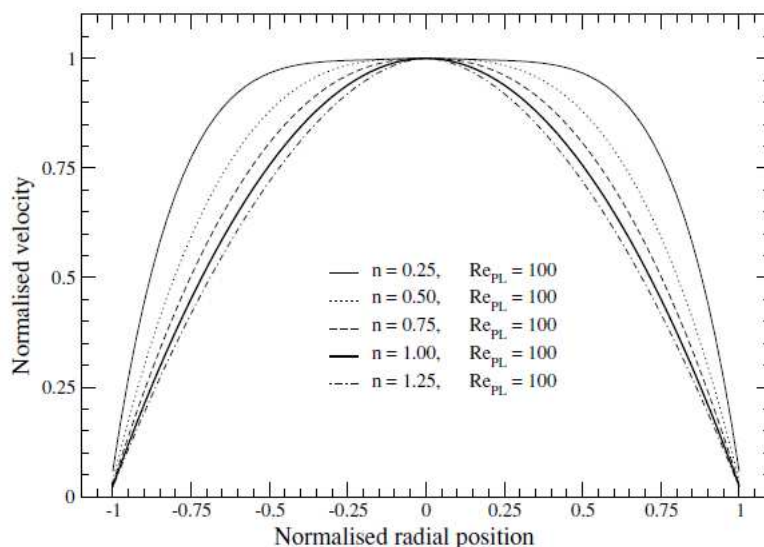
Ο τελευταίος, με τις μικρές τιμές του, εξακοντίζει το ιξώδες, δίνοντας την αίσθηση ενός περισσότερο παχύρρευστου υλικού στο κέντρο του αγωγού.

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε αυξανόμενες διαφορές στις κατανομές ταχυτήτων των δύο υλικών, αφού ο  $Re$  ελλατώνεται και αντίστροφα, ο  $Bi$  αυξάνεται.

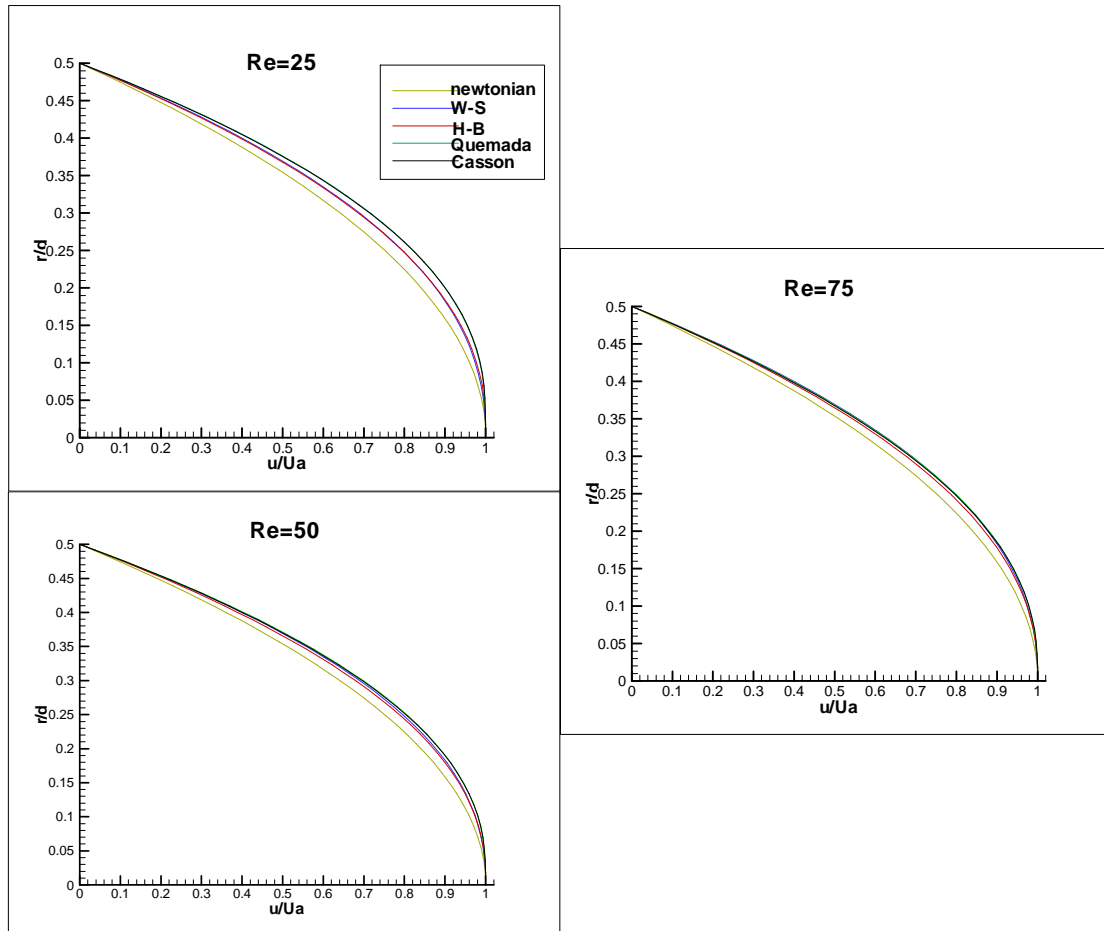
Στο Σχ5.2, εμφανίζονται οι κατανομές ταχυτήτων για ρευστό Εκθετικού Νόμου, διαφόρων συντελεστών  $n$  μη νευτώνειας συμπεριφοράς, όπως έχουν προκύψει στα αριθμητικά αποτελέσματα της [79].

Ο αναφερόμενος  $Re_{PL}$  ταυτίζεται με το γενικευμένο  $Re$ , που εμείς έχουμε ορίσει.  $Re_{PL} = Re = 100$ .

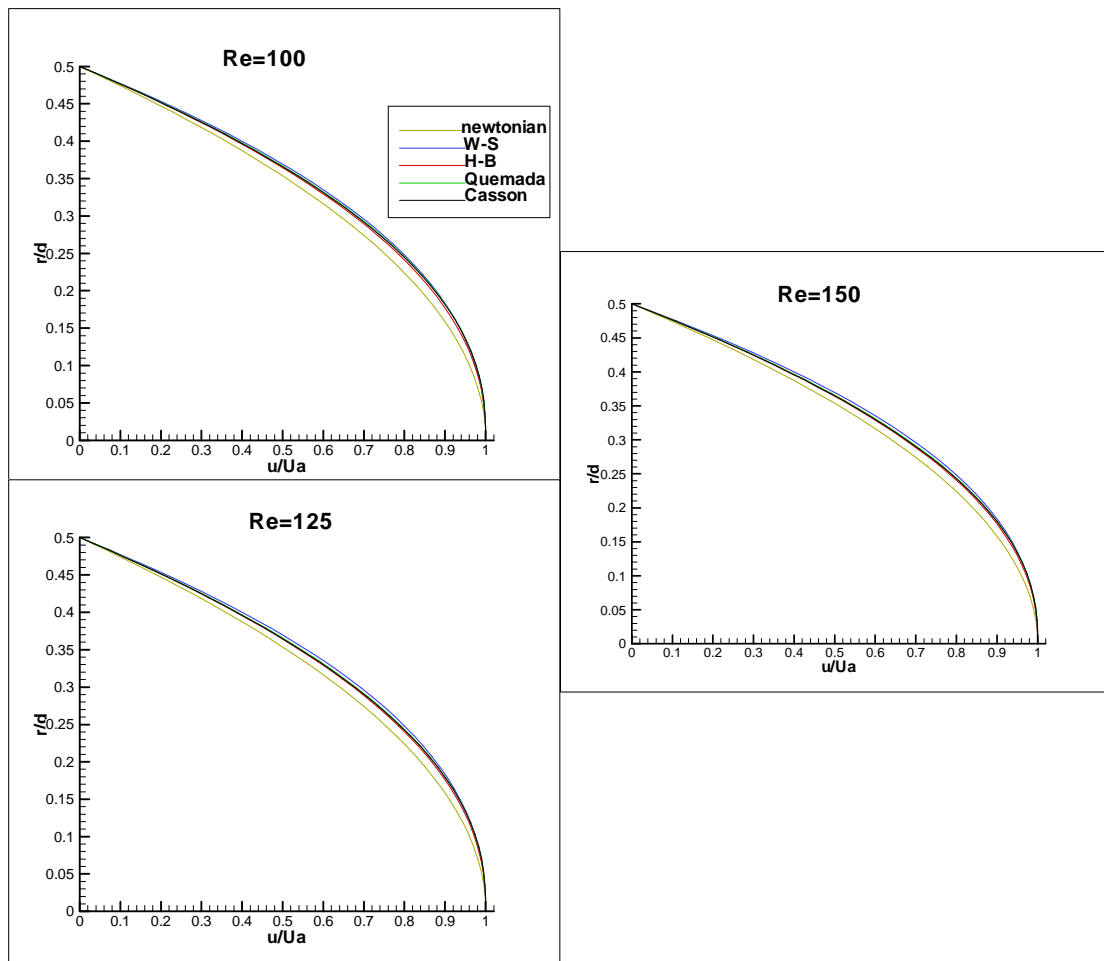
Η συμφωνία των αποτελεσμάτων διαπιστώνεται για  $n = 0.75$ , τιμή πολύ κοντά στην  $n = 0.7755$  του δικού μας μοντέλου W-S.



Σχ5.2 – κατανομές ταχυτήτων για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου, από τα αριθμητικά αποτελέσματα της [79]



Δ5.8 – κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή



Δ5.9 – κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

## iv} διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα

Στο διάγραμμα των τάσεων Δ5.10, αδιαστατοποιούμε τις διατμητικές τάσεις (*Wall Shear Stresses*) με τη δυναμική πίεση στην είσοδο του αγωγού, ως:

$$T_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2 / 2}$$

Ουσιαστικά, το μέγεθος  $T_w$ , δεν είναι κάτι διαφορετικό από το συντελεστή τριβής  $f$ .

Στο νευτώνειο ρευστό, είναι γνωστό πως  $f = \frac{16}{Re}$ .

Στην ανάλυση που γίνεται, στην [45], υποστηρίζεται ότι  $f = \frac{16}{Re^*}$ , όπου

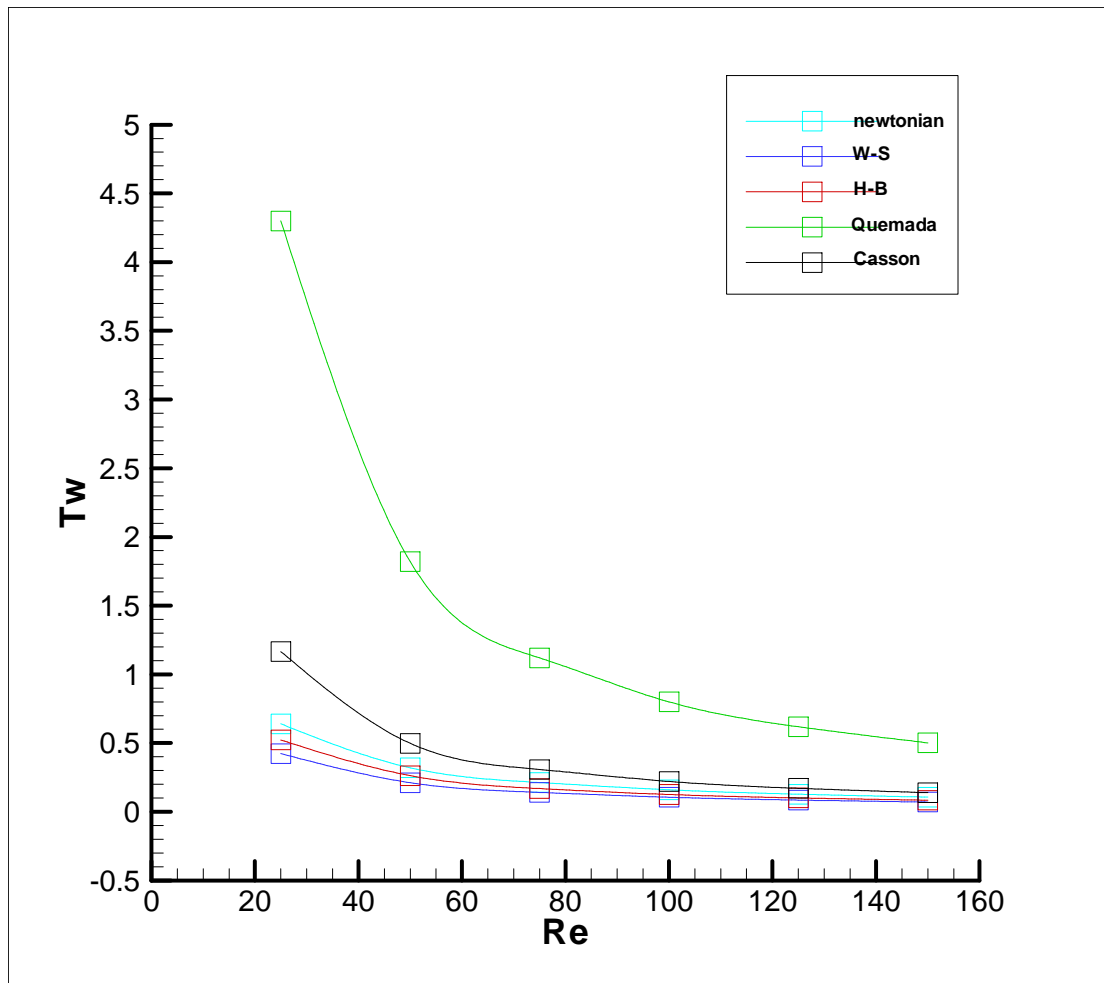
$Re^* = \frac{\rho U_0^{2-n} D^n}{8^{n-1} k \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n}$  ένας γενικευμένος αριθμός  $Re$ , υπολογιζόμενος για τα ρευστά

Εκθετικού Νόμου και Η-Β.

Κάνοντας τους υπολογισμούς αυτούς, προκύπτουν τα διαγράμματα  $f_{theory} - Re$ , τα οποία και παρουσιάζουμε στο Δ5.11, μαζί με τις δικές μας, αριθμητικά υπολογισμένες,  $T_w$ .

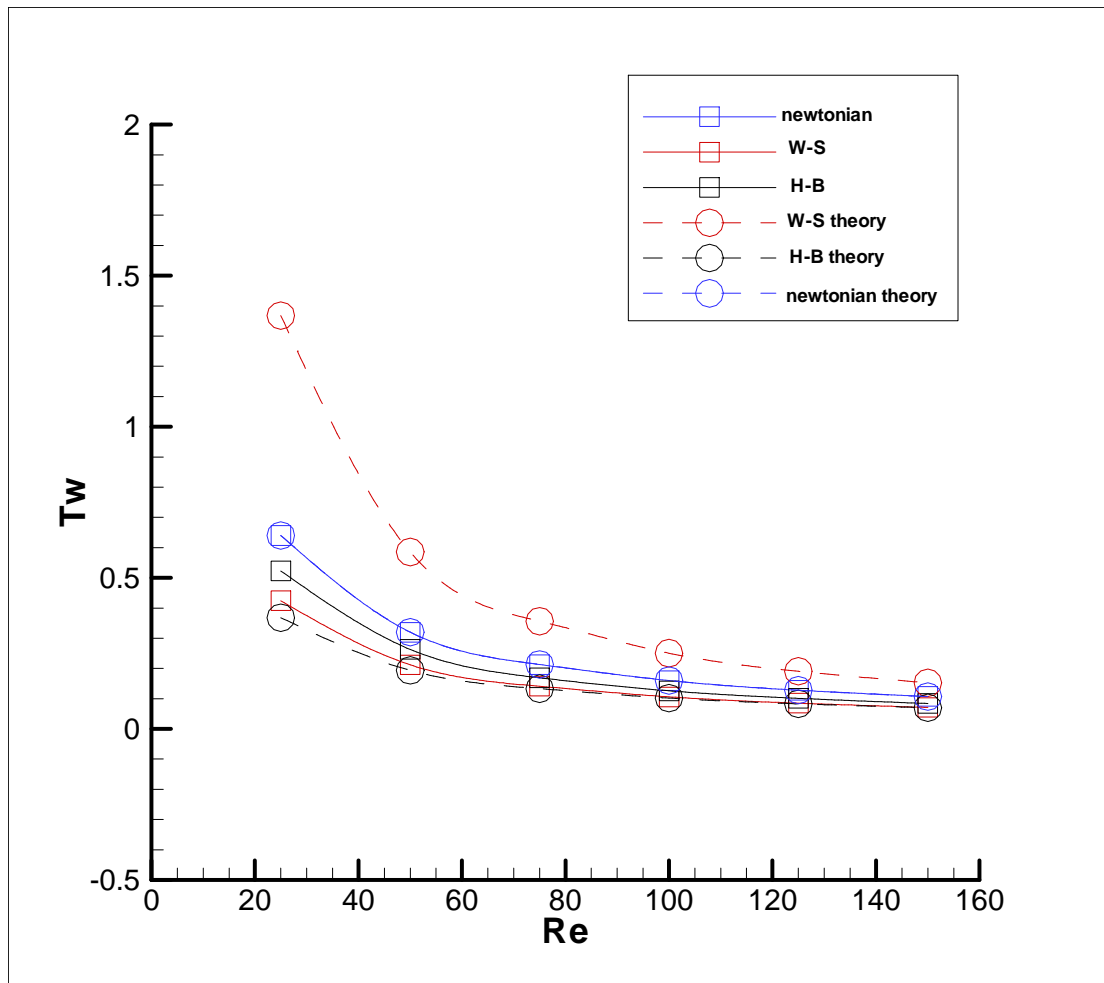
Στο Δ5.11 παρατηρείται μεγάλη απόκλιση του W-S από τις θεωρητικές προβλέψεις, η οποία μειώνεται με την αύξηση του  $Re$  και προσεγγίζει παραπάνω από ικανοποιητικά τις θεωρητικές τιμές.

Η σύμπτωση θεωρίας – αριθμητικών υπολογισμών είναι καλύτερη για το Η-Β, ακόμα και στους χαμηλούς  $Re$ , ενώ για το νευτώνειο ρευστό η σύμπτωση είναι άριστη.



Δ5.10 – τάσεις  $T_w$  που ασκούν τα ρευστά στον αγωγό σε πλήρως διαμορφωμένη ροή, όπως υπολογίστηκαν αριθμητικά





Δ5.11 – σύγκριση θεωρητικών και αριθμητικά υπολογισμένων τάσεων  $T_w$  που ασκούν τα ρευστά στον αγωγό σε πλήρως διαμορφωμένη ροή

### v} πτώση στατικής πίεσης

Ακολουθεί η πτώση στατικής πίεσης, στα Δ5.12 και Δ5.13, όπου παρουσιάζουμε τις τιμές της διαφοράς στατικής πίεσης ( $p_{static}$ ) σε κάθε θέση από την είσοδο, αδιαστατοποιημένες ( $Dp$ ) με τη δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ρευστού, στη μόνιμη ροή, δηλαδή:

$$Dp = \frac{P_{static}}{\rho U_0^2 / 2}$$

Το ιξώδες υπεισέρχεται έμμεσα στην  $p_d$ , μέσω της ταχύτητας  $U_0$ , που έχει προκύψει για δεδομένο  $Re$  και άρα εξαρτάται από το  $\mu_{eff}$  που παρουσιάζει κάθε μοντέλο στον εκάστοτε  $Re$ .

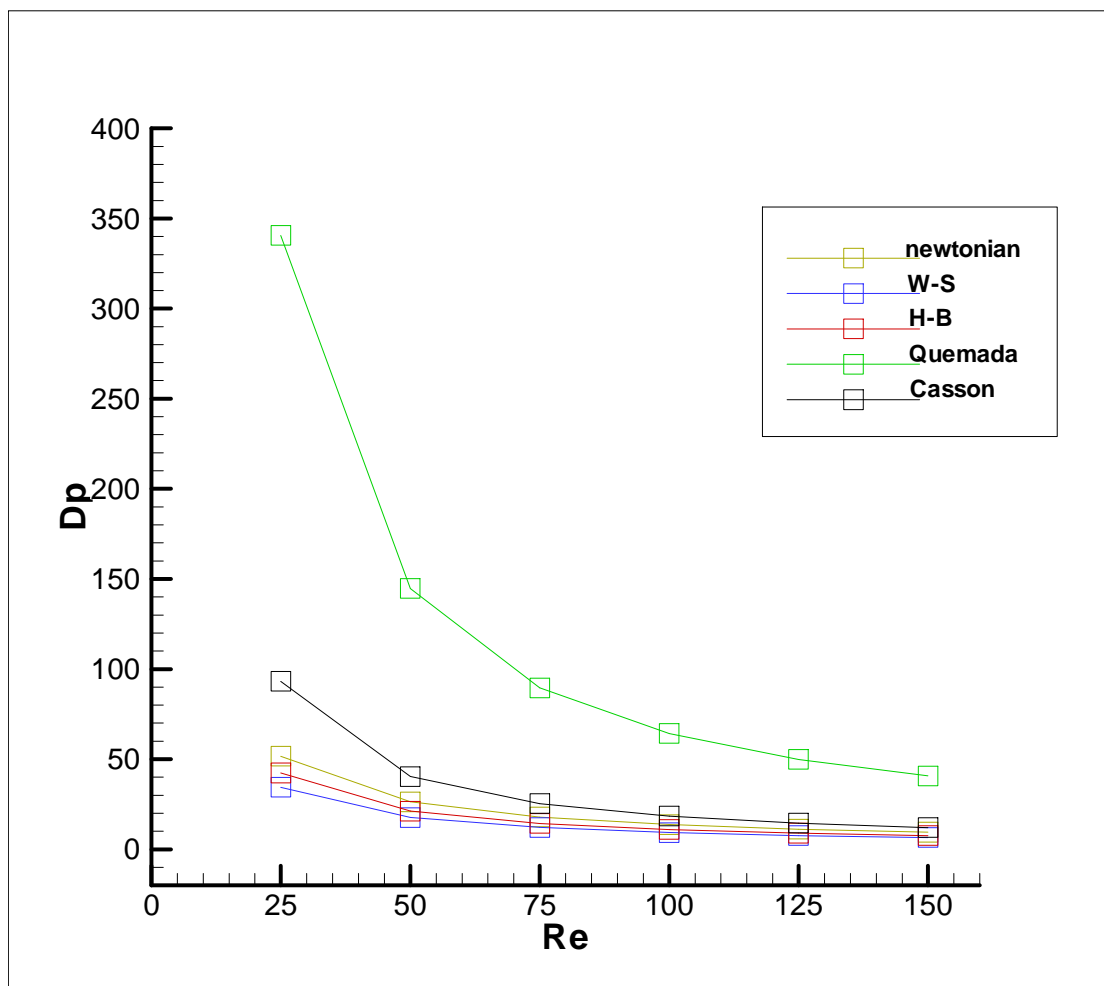
Στο Δ5.12, εμφανίζουμε την πτώση πίεσης  $Dp_f = |p_{out} - p_{in}|$ , από την είσοδο στην έξοδο του αγωγού, όταν το ρευστό έχει προχωρήσει κατά μήκος  $L_{total} = 20d$ .

Το ρευστό Quemada, με τη δυνατότητά του να πολλαπλασιάζει κατά πολύ το ιξώδες του, μας δίνει την εντύπωση ενός παχύρρευστου υλικού (ρευστό με υψηλό ιξώδες).

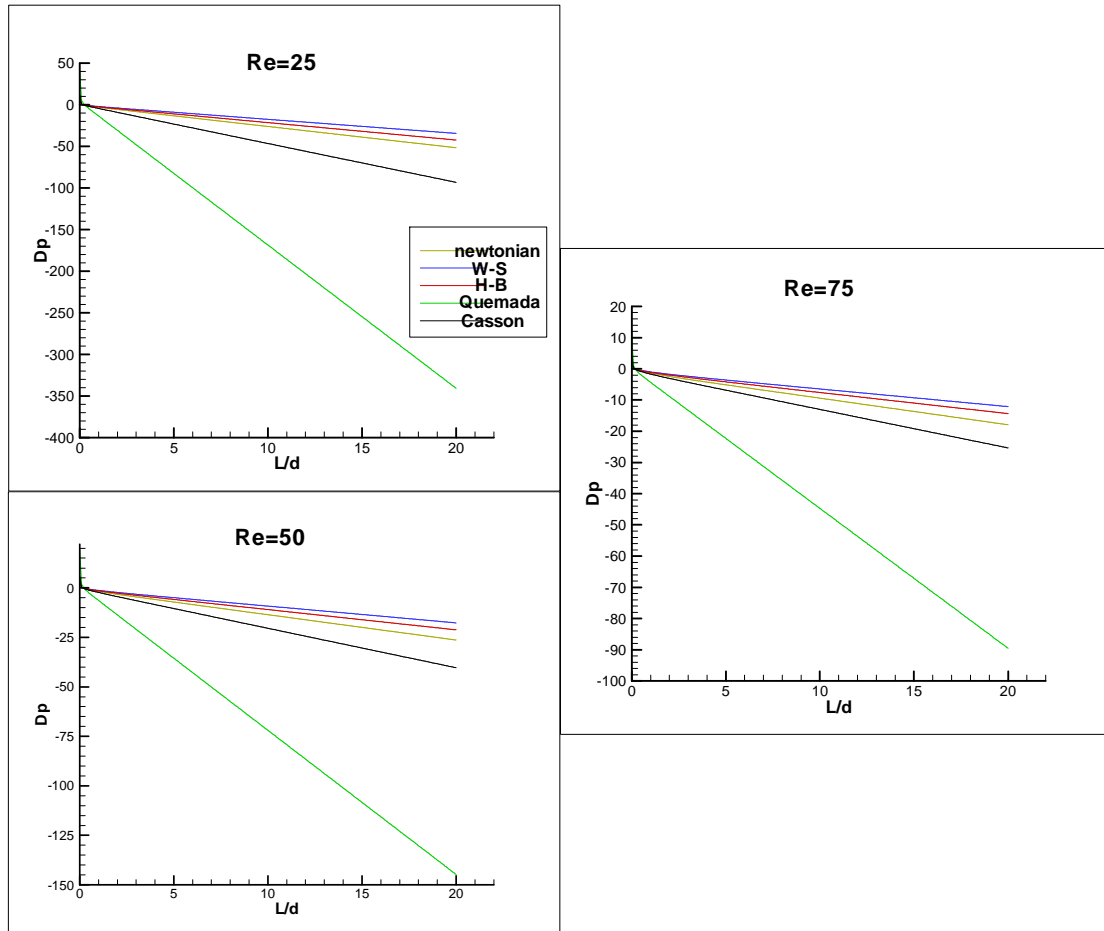
Αυτή η ιδιότητά του, αποτυπώνεται και στο διάγραμμα της πίεσης, αφού απαιτεί πολύ μεγαλύτερη διαφορά πίεσης για να ρεύσει στον αγωγό μας.

Η καμπύλη πτώσης πίεσης  $Dp_f - Re$ , για όλα τα μοντέλα, διατηρεί τη μορφή υπερβολής που έχει για το νευτώνειο.

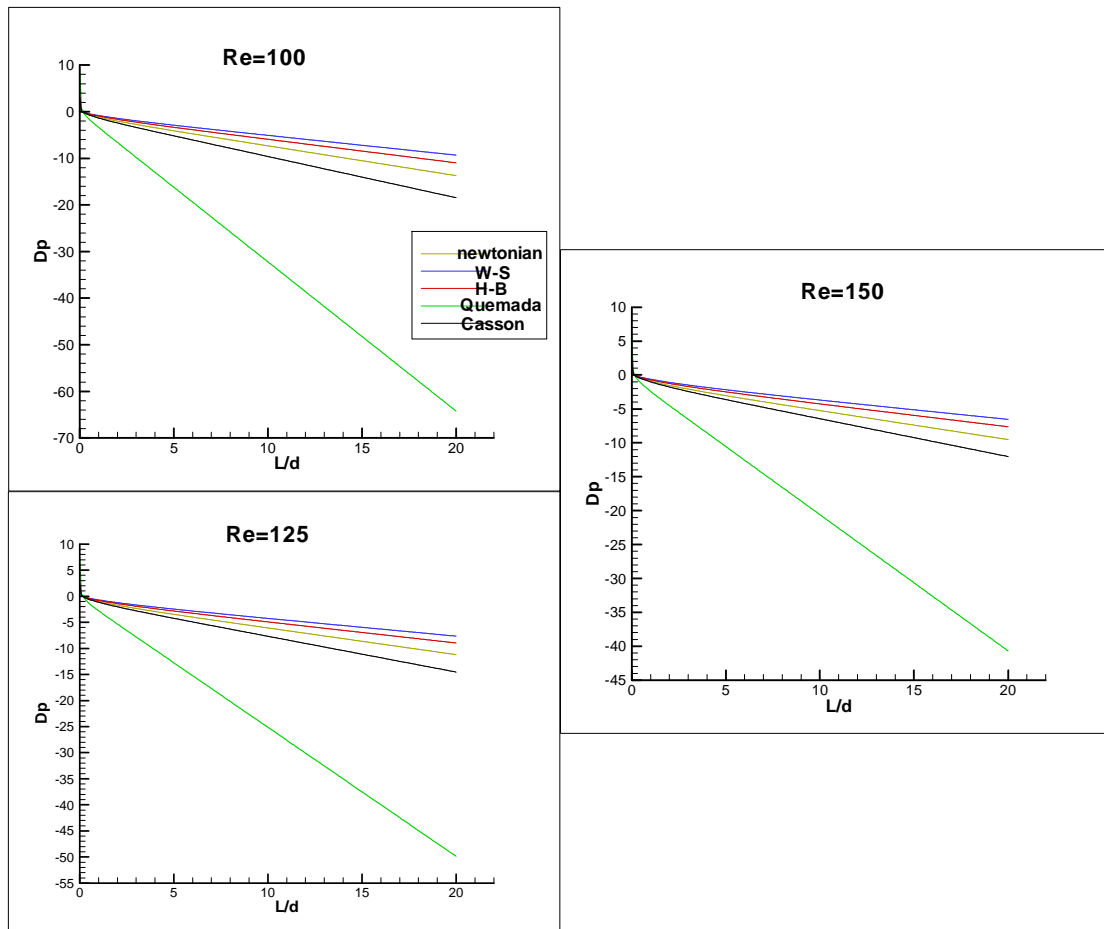
Η σειρά με την οποία τα μοντέλα τοποθετούνται κατά σειρά αυξανόμενης  $Dp$ , είναι ίδια με αυτή των αδιάστατων τάσεων στο τοίχωμα του ευθύγραμμου αγωγού,  $T_w$ .



Δ5.12 – αδιάστατη πτώση πίεσης  $Dp_f$  στην έξοδο του αγωγού, σε απόσταση  $L = 20d$  κατάντι της εισόδου



Δ5.13 – αδιάστατη πτώση πίεσης σε όλο το μήκος  $L_{out} = 20d$  του αγωγού



Δ5.14 – αδιάστατη πτώση πίεσης σε όλο το μήκος  $L_{out} = 20d$  του αγωγού

## §1β. στενωμένος αγωγός

Ας υπενθυμίσουμε τις λεπτομέρειες της στενωτικής γεωμετρίας που δημιουργήσαμε, καθώς θα μας χρειαστεί για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με αυτά άλλων μελετητών.

Η στένωση ξεκινά στη θέση  $L_{start} = 0.5d$ , όπου  $d$  η διάμετρος του αγωγού.

Ο λαιμός της βρίσκεται στη θέση  $L_{throat} = 1.5d$ .

Και το ευθύγραμμο κομμάτι του αγωγού ξεκινά για  $L_{end} = 2.5d$ .

Συνεπώς  $\Delta L = L_{throat} - L_{start} = L_{end} - L_{throat} = 1d$ .

Η διάμετρος της διατομής στη θέση του λαιμού είναι:  $d_{throat} = 0.5d$ .

Προκύπτει βαθμός μείωσης διαμέτρου,  $\beta = 0.5$ , και κατά εμβαδόν διατομής, βαθμός στένωσης  $E = 75\%$ .

Από την είσοδο του αγωγού  $L_{in} = 0$ , εισέρχεται το ρευστό με την πλήρως διαμορφωμένη κατανομή, που υπολογίσαμε στον ευθύγραμμο αγωγό και εξέρχεται για  $L_{out} = 12.5d$ .

Το μήκος  $\Delta L = L_{out} - L_{end} = 10d$ , κρίνεται επαρκές για την επίτευξη πλήρως διαμορφωμένης ροής και στην έξοδο του αγωγού σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας στον ευθύγραμμο αγωγό (Δ.1.3), που εξασφαλίζεται και από την οριακή συνθήκη στην έξοδο, μηδενισμού της ροής των όρων διάχυσης (*outflow condition*).

Για τη μελέτη της ροής, θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο κάτω χαρακτηριστικά και μεγέθη:

- i} γραμμές ροής & ιζώδες
- ii} περιοχή ανακυκλοφορίας
- iii} κατανομές αξονικών ταχυτήτων στο λαιμό και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας
- iv} διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα
- v} στατική πίεση

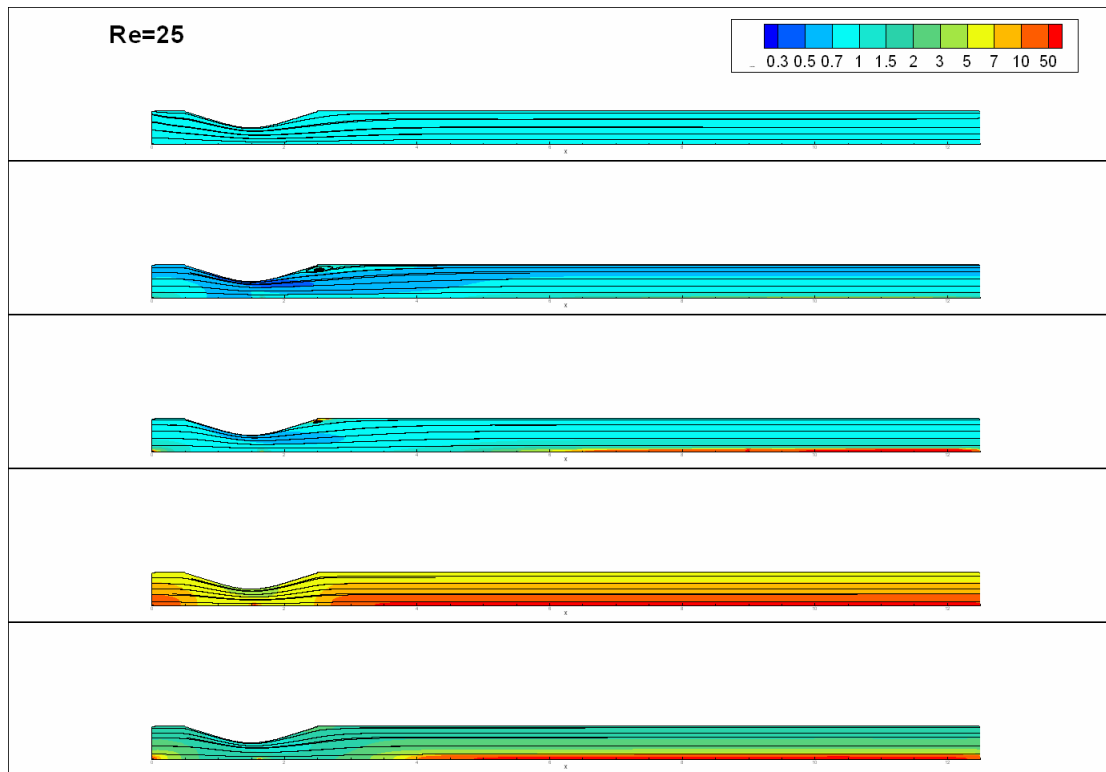
### i} γραμμές ροής & ιζώδες

Οι γραμμές ροής, αποτελούν άριστο εποπτικό εργαλείο για διδιάστατες (αξονικά συμμετρικές και μη) ροές ασυμπίεστου ρευστού και θέλοντας να διαπιστώσουμε τη σχέση του μεταβλητού ιζώδους των μη νευτώνειων ρευστών με τη μορφή της ροής, τις παρουσιάζουμε μαζί με τις ισοσταθμικές του ιζώδους.

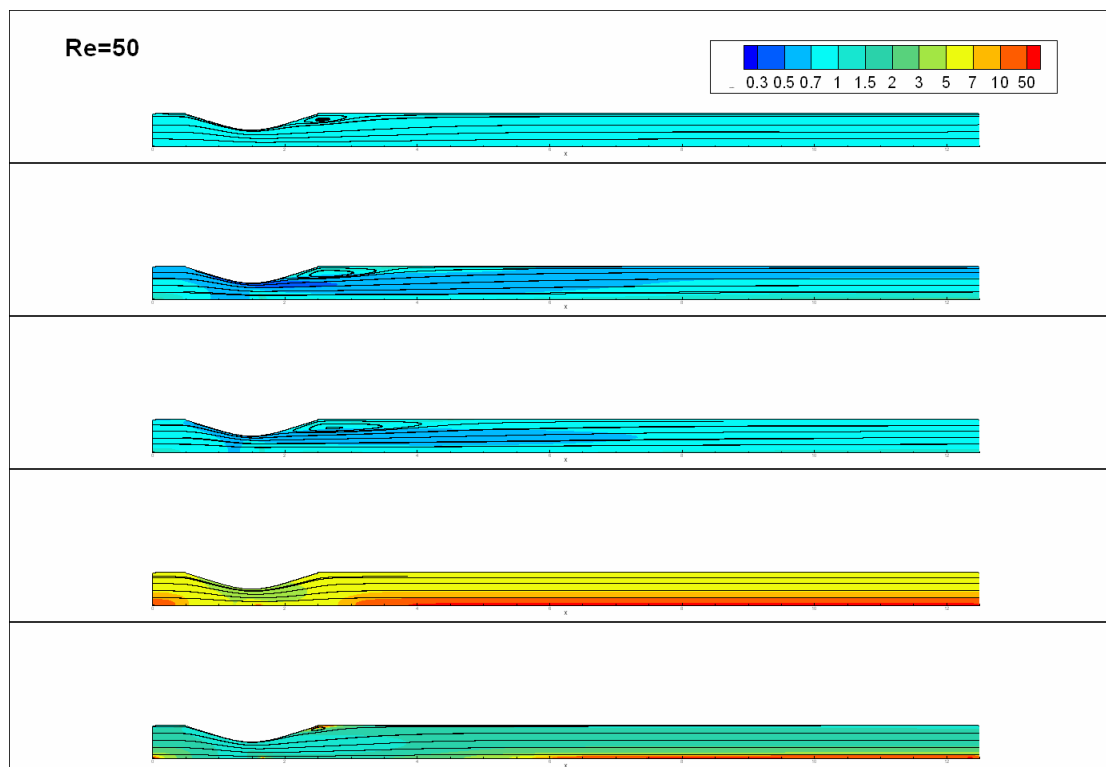
Για να διατηρήσουμε τη γενικότητα της μεθόδου και θέλοντας να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη μορφή της καμπύλης ιζώδους – ρυθμού παραμόρφωσης και όχι στις τιμές που λαμβάνει το ιζώδες, αδιαστατοποιούμε το ιζώδες σε όλο το πεδίο ροής με ένα ιζώδες αναφοράς  $\mu_{ref}$  σε κάθε μοντέλο.

Ιζώδες αναφοράς θεωρούμε την αποτελεσματική συνεκτικότητα κάθε μοντέλου,  $\mu_{ref} = \mu_{eff}$ , μέσω της οποίας υπολογίστηκε ο  $Re$  στο καθένα.

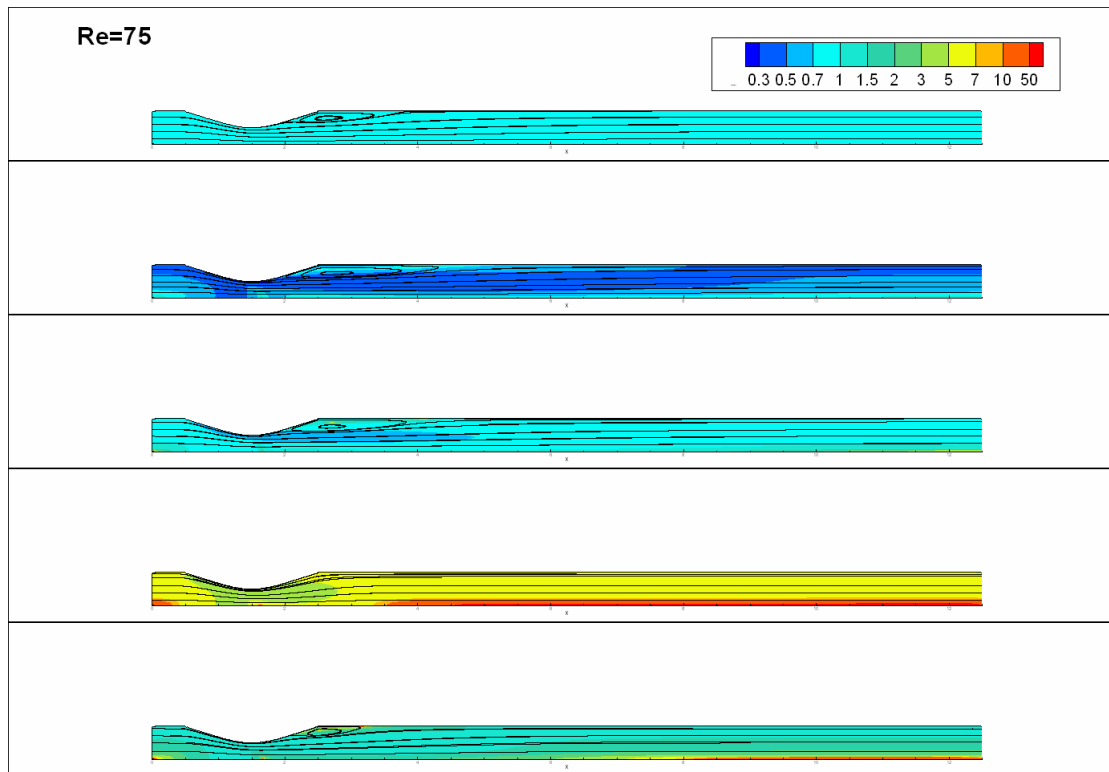
Στα Δ5.15 – Δ5.20, παρατηρούμε τις μεταβολές του ιζώδους μέσα στο στενωμένο αγωγό.



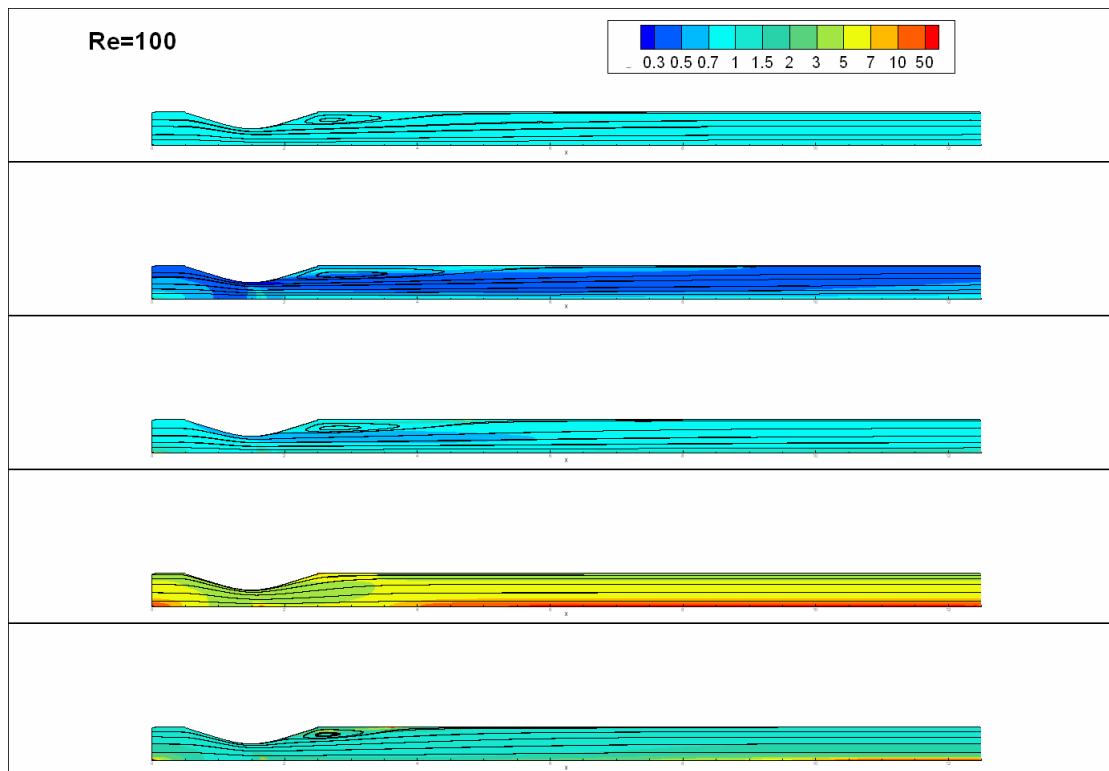
Δ5.15 –  $Re = 25$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



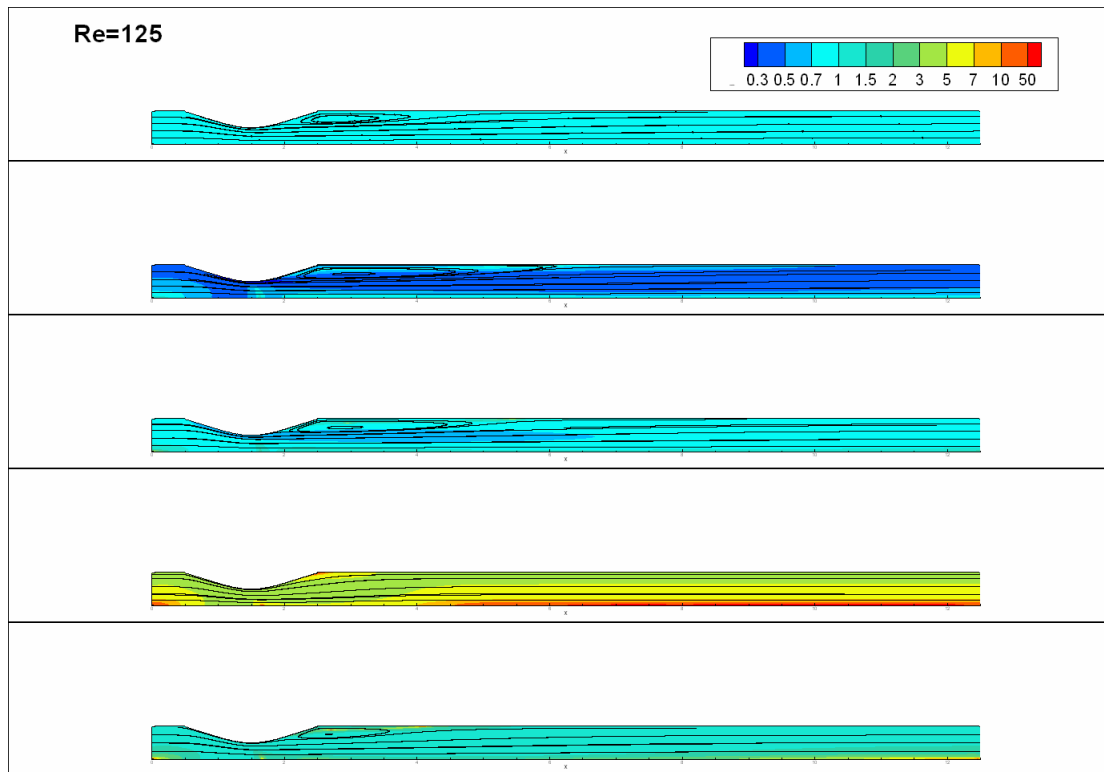
Δ5.16 –  $Re = 50$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



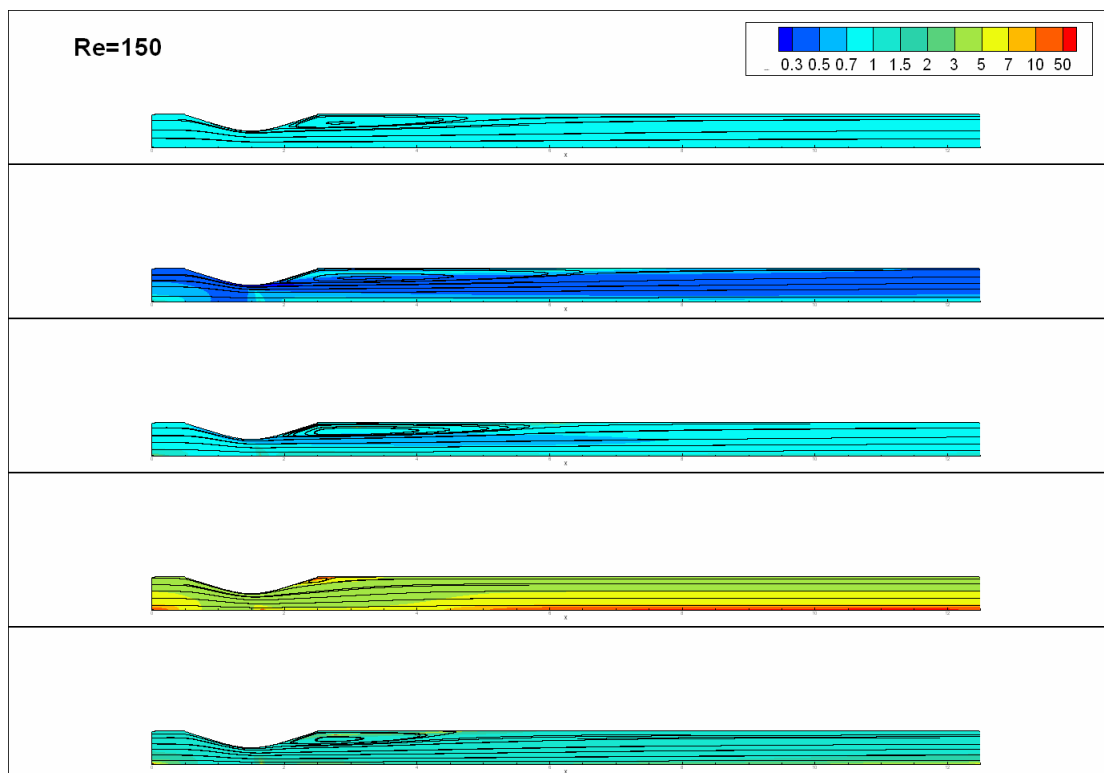
Δ5.17 –  $Re = 75$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



Δ5.18 –  $Re = 100$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



Δ5.19 –  $Re = 125$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



Δ5.20 –  $Re = 150$ , γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:  
νευτώνειο, W-S, H-B, Quemada, Casson



Σχετικά με την πρόβλεψη της κατανομής του ιξώδους, μία παράμετρος της μη νευτώνειας συμπεριφοράς του αίματος είναι η ύπαρξη ενός στρώματος πλάσματος κοντά στο όριο του αγγείου και εσωτερικά αυτού το μίγμα πλάσματος – έμμορφων συστατικών.

Για την αντιπαράθεση με τη νευτώνεια συμπεριφορά, ορισμένες φορές, στη βιβλιογραφία [37,80,81], χρησιμοποιούνται οι λόγοι (ή αντίστοιχοι αυτών):

$$I_L = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad \text{και} \quad I_G = \frac{1}{N} \frac{\left[ \sum_N (\mu - \mu_\infty)^2 \right]^{1/2}}{\mu_\infty} \times 100,$$

όπου  $N$  το σύνολο των κόμβων του αριθμητικού σχήματος της επιφάνειας του αγωγού,  $\mu$  το τοπικό ιξώδες και  $\mu_\infty$  τυπική τιμή ιξώδους του αίματος.

Αυτοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την ανάδειξη των περιοχών που τα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά γίνονται σημαντικά, όταν τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε διαστατή μορφή. Θεωρούμε ότι είναι μία προσέγγιση βιοϊατρική και ξεφεύγει από τη γενικότητα που προσφέρουν οι μέθοδοι της ρευστομηχανικής.

Για το λόγο αυτό, πρώτα αδιαστατοποιούμε με το ιξώδες αναφοράς  $\mu_{ref} = \mu_{eff}$  και έπειτα, μέσω των ισοσταθμικών κάνουμε τις οποιεσδήποτε συγκρίσεις.

Σε ότι αφορά την πρόβλεψη κάθε μοντέλου για την κατανομή του ιξώδους του αίματος, ας ορίσουμε το λόγο  $J = \frac{\mu_{axis}}{\mu_{flow}}$ , ως το λόγο της τιμής που λαμβάνει το

ιξώδες στην περιοχή γύρω από τον άξονα, προς αυτή που λαμβάνει στα εξωτερικά, κοντά στο τοίχωμα, στρώματα.

Ας ξεκινήσουμε με μερικές γενικές παρατηρήσεις.

- μείωση του  $Re$ , οδηγεί σε αυξημένους λόγους  $J$ , υποδηλώνοντας την αυξανόμενη σημαντικότητα της μη νευτώνειας συμπεριφοράς στους χαμηλούς  $Re$

Αντίθετα, αύξηση του  $Re$ , κάνει εμφανή την τάση προσέγγισης ορισμένων μη νευτώνειων στη νευτώνεια συμπεριφορά του ενιαίου ιξώδους. Χαρακτηριστικά είναι το H-B και το Casson.

- εμφανίζεται μία περιοχή χαμηλού ιξώδους, αμέσως μετά τη στένωση. Αυτή έχει τη μορφή ροής μιας δέσμης (*jet flow*) και ακολουθεί τους μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης, που αναπτύσσονται στην περιοχή της στένωσης

- σε κάθε περίπτωση, που παρατηρείται μικρή δίνη (προοίμιο περιοχής ανακυκλοφορίας σε μεγαλύτερους  $Re$ ), το κέντρο της είναι σημείο αυξημένου ιξώδους

Το φαινόμενο αυτό, γίνεται άμεσα αντιληπτό στις ροές του H-B για  $Re = 25$ , του Casson για  $Re = 50$  και του Quemada για  $Re = 150$ . Χαρακτηριστικό είναι ότι, για κάθε μοντέλο, οι ροές αυτές αφορούν οριακά  $Re > Re_{critical}$  (αναλύεται αμέσως παρακάτω και ορίζεται ως ο ελάχιστος και κρίσιμος  $Re$ , για τον οποίο εμφανίζεται αποκόλληση της ροής, σε κάθε μοντέλο).

Παρατηρώντας και τις περιπτώσεις ροής του Quemada για  $Re = 125$ , θα αναφέραμε, ότι για ροές κοντά στον  $Re_{critical}$ , στις θέσεις εμφάνισης δινών, παρατηρείται αυξημένο ιξώδες.

- οι περιοχές ανακυκλοφορίας δεν ταυτίζονται με περιοχές διαφορετικού ιξώδους από την κύρια ροή

Η προηγούμενη παρατήρηση, που σχετίζει τις μικρές δίνες με σημεία αυξημένου ιξώδους, δε γενικεύεται για τις αναπτυγμένες μεγάλες περιοχές ανακυκλοφορίας.

Οφείλουμε να παρατηρήσουμε, όμως, ότι στην περιοχή ανακυκλοφορίας, κοντά στο τοίχωμα, σε πολλές ροές, υπάρχουν επίπεδα ρευστού με υψηλό ιξώδες, ενώ κάτω από αυτές βρίσκεται η δέσμη χαμηλού ιξώδους που προαναφέραμε.

Σχετικά με αυτό, θα παρατηρήσουμε τα παρακάτω.

Το W-S, δείχνει να διατηρεί το λόγο  $J \approx 3$  για όλους τους αριθμούς  $Re$ , με μόνη διαφορά το πάχος των περιοχών που λαμβάνουν τις τιμές αυτές.

Το H-B, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά με το W-S στους μεσαίους  $Re$ , προσεγγίζοντας τη νευτώνεια συμπεριφορά καθώς αυτός αυξάνεται.

Για  $Re = 25$ , στο H-B παρατηρείται  $J > 10$ .

Στο Quemada, ο λόγος  $J$  λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές, για όλη τη μελετούμενη περιοχή  $25 \leq Re \leq 150$ .

Κοινή συμπεριφορά έχει και το Casson, το οποίο για  $Re < 100$ , παρουσιάζει μεγάλους λόγους  $J$ . Για ροές  $Re > 125$ , όμως, παρουσιάζει την τάση να προσεγγίσει τη νευτώνεια συμπεριφορά.

Ας εξετάσουμε τους λόγους  $J$ , που προβλέπει κάθε μοντέλο, από τη βιοϊατρική οπτική γωνία.

Η συνεκτικότητα του αίματος, μεταβάλλεται με την αύξηση της συγκέντρωσης των έμμορφων συστατικών (αύξηση του αιματοκρίτη) σε αυτό [18,20,21].

Η αυξημένη συγκέντρωση έμμορφων συστατικών στο κέντρο ενός, μικρής διατομής, αγγείου, όπως εκφράζεται στο φαινόμενο *Farehaus-Linqvist* [22], είναι πιθανό να προκαλέσει τους μεγάλους λόγους  $J$ , που παρατηρούνται στις ροές χαμηλών  $Re$  των Quemada και Casson, κάνοντας τις κατανομές ιξώδους τους πραγματική κατάσταση.

Από μία άλλη οπτική, όμως, τα δεδομένα στα οποία βασίζονται όλα τα μοντέλα αυτά, αφορούν *in vitro* μελέτες του αίματος, και υπό την αδυναμία λήψης *in vivo* πειραματικών δεδομένων, δε μπορούμε να γνωρίζουμε με ακρίβεια τι συμβαίνει στις φυσιολογικές αιματικές ροές.

Έτσι, ίσως η πραγματική συμπεριφορά του αίματος να αντιπροσωπεύεται καλύτερα από τα W-S και H-B, που δείχνουν να προσεγγίζουν σε πολύ μικρότερους  $Re$  ομογενείς κατανομές ιξώδους.

### iii) περιοχή ανακυκλοφορίας

Είναι γνωστό ότι για αγωγό, που παρουσιάζει στένωση, μετά από ένα συγκεκριμένο  $Re$  εμφανίζεται μία περιοχή ανακυκλοφορίας ακριβώς κατάντι της στένωσης, που αυξανομένου του  $Re$  επιμηκώνεται.

Μελετήθηκε ο ελάχιστος και κρίσιμος  $Re_{critical}$ , για τον οποίο εμφανίζεται αποκόλληση της ροής, σε κάθε μοντέλο.

Η διαδικασία προσδιορισμού ήταν η εξής:

- με τα αποτελέσματα για τις ροές  $Re = [25, 50, 75, 100, 125, 150]$ , μελετούμε σε ποιά από αυτές εμφανίζει κάθε μοντέλο αποκόλληση.

- κάθε ένα εμφανίζει αποκόλληση σε έναν ελάχιστο  $Re$  από αυτούς,  $Re_{min}$

- με βήμα  $\delta(Re) = 5$ , υπολογίζουμε το πεδίο ροής, διαδοχικά, για ελαττούμενο  $Re = Re_{min} - \delta(Re) < Re_{min}$  και σχηματίζοντας τις γραμμές ροής ερευνούμε αν υπάρχει αποκόλληση της ροής

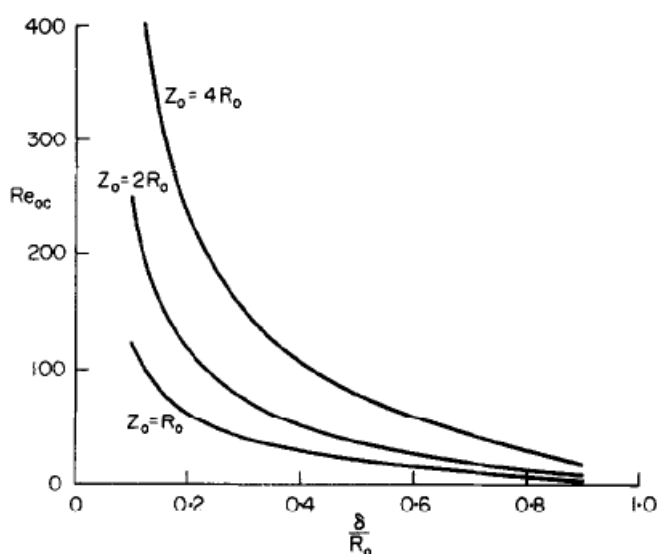
- μειώνοντας τον  $Re$  διαδοχικά, εμφανίζεται μη αποκολλημένη ροή για κάποιον  $Re^*$

- εντέλει γράφουμε,  $Re_{critical} = Re^* + \delta(Re)$

Προέκυψε τελικά ο παρακάτω πίνακας Π5.1:

	newtonian	W-S	H-B	Quemada	Casson
$Re_{critical}$	<b>25</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>125</b>	<b>40</b>

Π5.1 – ο κρίσιμος αριθμός  $Re_{critical}$  πάνω από τον οποίο εμφανίζεται ανακυκλοφορία



Σχ5.3 – θεωρητικό μοντέλο πρόβλεψης  $Re_{critical}$ , νευτώνειου ρευστού, για διάφορες γεωμετρίες στένωσης [82]

Σύμφωνα με τη θεωρία των *Forrester & Young* [82], αποκόλληση της ροής νευτώνειου ρευστού, σε στενωμένο αγωγό με τη δική μας γεωμετρία αναμένεται για  $Re_{critical} \approx 35$  από το Σχ5.3.

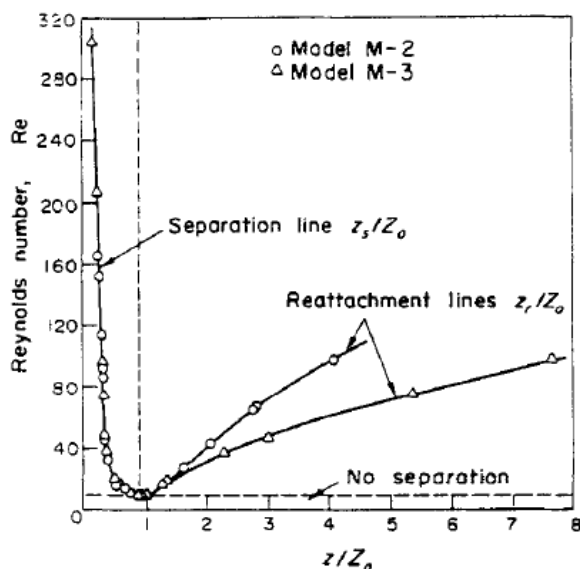
Οι αντιστοιχίσεις συμβολισμών, για τη δική μας γεωμετρία, έχουν ως εξής:

$\delta = d_{throat} / 2$ ,  $R_0 = D / 2$  και  $Z_0 = \Delta l$ , όποτε προκύπτουν:

$$\delta / Z_0 = 0.25, \delta / R_0 = 0.5, Z_0 / R_0 = 2$$

Δε θα πρέπει να ξεχνάμε, ότι αυτή η προσεγγιστική θεωρία προκύπτει μετά από πολλές παραδοχές, με κυριότερη αυτή της μέτριας στένωσης, δηλαδή  $\delta / Z_0 \ll 1$  και  $\delta / R_0 \ll 1$ , προϋποθέσεις ανίσχυρες στη γεωμετρία μας.

Συνεπώς, οποιαδήποτε σύγκριση με τα αποτελέσματά μας έχει ποιοτική σημασία.



Σχ5.4 – πειραματικά αποτελέσματα των *Young & Tsai* [24]

Η πειραματική μελέτη των *Young & Tsai* [24], αφορά γεωμετρίες διαφορετικές από τη δική μας, καταδεικνύει, όμως, τον κυρίαρχο ρόλο στον καθορισμό των σημείων αποκόλλησης – επανακόλλησης της ροής, που παίζει ο βαθμός στένωσης  $E$ .

Συγκεκριμένα, ας δουμε τη γεωμετρία M-3 με  $\delta / Z_0 = 0.25$ , όπως και η δική μας, αλλά με βαθμό στένωσης  $E = 89\%$ .

Η αποκόλληση της ροής ξεκινά για  $Re = 15$  και σε κάθε περίπτωση ροής, προκύπτει πολλαπλάσιο μήκος ανακυκλοφορίας, 2.5 – 3 φορές μεγαλύτερο, από αυτό που έχουμε υπολογίσει εμείς για το νευτώνειο ρευστό.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού αυξανόμενη απόφραξη του αγωγού, προκαλεί μεγένθυση του μήκους της περιοχής ανακυκλοφορίας.

Επίσης στην [82], παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα αποκόλλησης της ροής σε στενωτική γεωμετρία, νερού και δύο βιορρευστών (αίμα ανθρώπινο και

βοοειδούς) αλλά, η σύγκριση με τα αποτελέσματά μας είναι αδύνατη, καθώς αφορούν γεωμετρία  $\delta/Z_0 = 0.125$  και  $E = 56\%$ .

Χαρακτηριστικά, θα αναφέρουμε ότι παρατηρήθηκε αποκόλληση της ροής για  $Re > 200$  και τα αποτελέσματα για τα τρία ρευστά συμπίπτουν στο διάστημα  $200 < Re < 400$ .

Σε μία άλλη, πιο πρόσφατη, πειραματική και υπολογιστική μελέτη [83], που γνωρίζουμε, γίνεται μελέτη στένωσης βαθμού  $E = 84\%$ , αλλά περισσότερο ομαλής γεωμετρίας,  $\Delta l = 2d$  και μάλιστα για  $Re = 300$ . Προβλέπεται περιοχή ανακυκλοφορίας μήκους  $L_r \approx 3d$ .

Ακόμα, στα αριθμητικά αποτελέσματα των *Tu & Deville* [84], για ροή ρευστών σε συνθήκες παροχής και πτώσης πίεσης, που αντιστοιχούν σε  $Re = 67$ , ορισμένο για το νευτώνειο, των μοντέλων Bingham, H-B ( $n = 0.9$ ,  $\tau_0 = 0.2$ ) και W-S ( $n = 0.8$ ).

Η στένωση είναι βαθμού  $E = 75\%$ , επαληθεύοντας την τάξη μεγέθους των αποτελεσμάτων μας, στην περιοχή  $Re = [50, 75]$ .

Για το νευτώνειο βρίσκουν  $L_r > 1d$ , αλλά για τα μη νευτώνεια οι συγκρίσεις για το διαφορετικά ορισμένο  $Re^* < Re$ , μόνο εποπτικές μπορεί να είναι, παρά την ύπαρξη ίδιας τάξης μεγέθους συντελεστών. Έτσι, όπως αναμένεται, παρουσιάζονται μικρότερες περιοχές ανακυκλοφορίας, λόγω του μειωμένου  $Re$ .

Τέλος, για τα αποτελέσματα στο νευτώνειο ρευστό, σύγκριση δεν μπορεί να γίνει με τα πειραματικά αποτελέσματα της [38], αφού μελετάται μεν στένωση ίδιου  $E = 75\%$ , αλλά με πολύ πιο απότομη στενωτική γεωμετρία (αναβαθμός – *step* – αντί για ομαλά συγκλίνουσα και αποκλίνουσα στένωσης).

Έτσι, τόσο η μορφή των περιοχών ανακυκλοφορίας, αλλά και των μηκών τους είναι πολύ διαφορετικά.

Το μοναδικό πρόσφατο, στοιχείο επαλήθευσης που γνωρίζουμε για ρευστό εκτός του νευτώνειου στους μελετούμενους  $Re$ , προέρχεται από τα αριθμητικά αποτελέσματα των *Neofytou & Tsangaris* [33], για το μοντέλο Casson.

Αφορά τη ροή για  $Re = 100$  και το μήκος της περιοχής ανακυκλοφορίας που σχηματίζεται σε στενωτική γεωμετρία βαθμού  $\beta = 0.5$ .

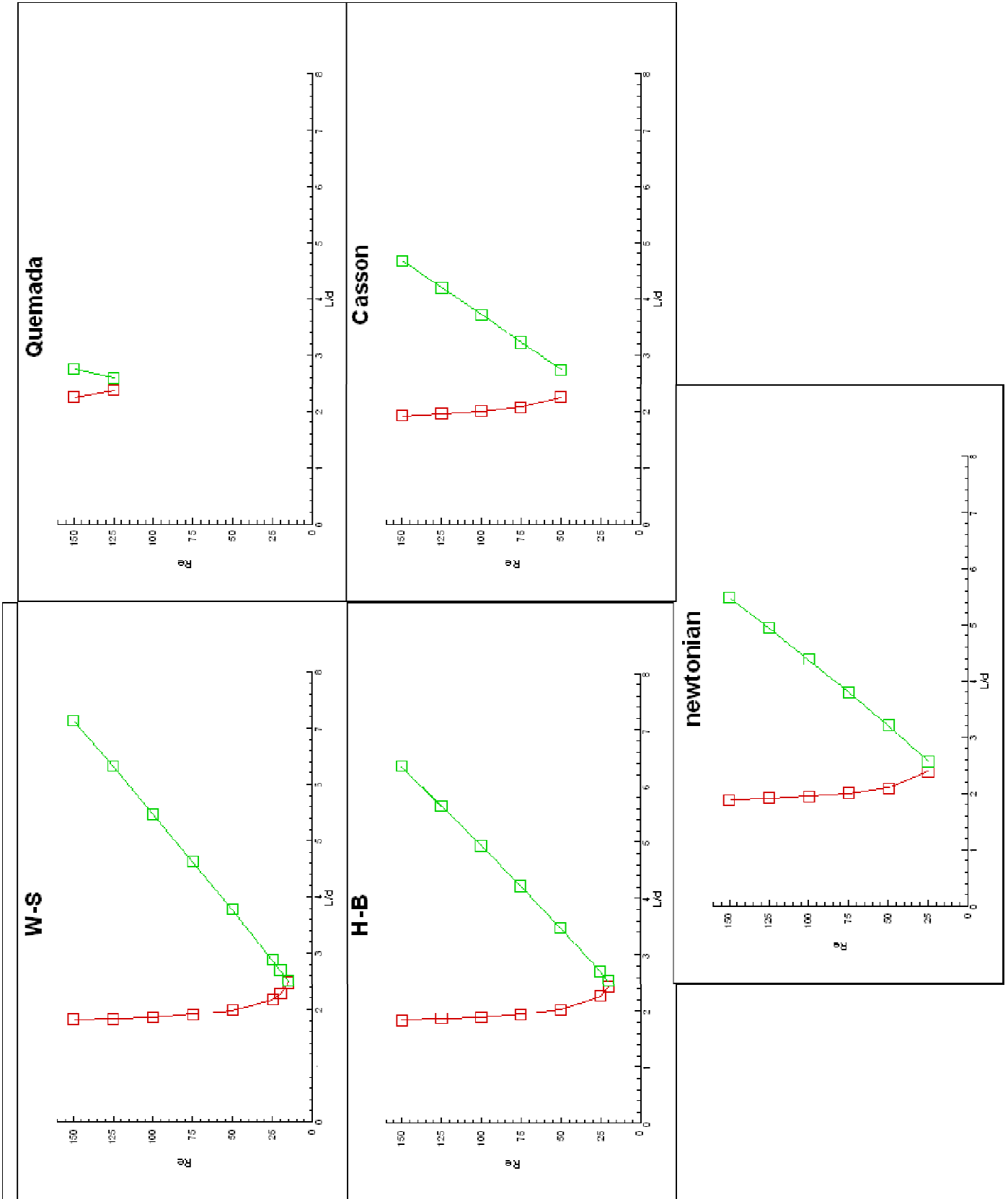
Στα αποτελέσματά τους, με παραμέτρους μοντέλου, ίδιους με τους δικούς μας, αλλά για τρισδιάστατη ροή, προκύπτει μήκος ανακυκλοφορίας  $L_r = 1.3D$ .

Κατά τη δική μας προσομοίωση, βρέθηκε  $L_r = 1.6D$ , μία διαφορά που προσεγγίζει το 20% και μπορεί να οφείλεται στην τρισδιάστατη επίλυση του πεδίου.

Για τις ροές που μελετήσαμε, παρουσιάζουμε στο Δ5.21 την αξονική θέση αποκόλλησης (κόκκινο χρώμα) και επανακόλλησης (πράσινο χρώμα) της ροής.

Το μήκος της περιοχής ανακυκλοφορίας είναι αύξουσα συνάρτηση του  $Re$  για όλα τα μοντέλα.

- η θέση του σημείου αποκόλλησης της ροής, δε μεταβάλλεται έντονα για κανένα μοντέλο, όταν έχουμε περάσει σε  $Re > Re_{critical}$ .
- η θέση του σημείου επανακόλλησης της ροής, είναι, με καλή ακρίβεια, γραμμική συνάρτηση του  $Re$  για κάθε μοντέλο, στην περιοχή των  $Re$  που μελετήσαμε
- τα μήκη ανακυκλοφορίας σχετίζονται με τη δυνατότητα, κάθε μοντέλου, να αναπτύσσει διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα και όσο μικρότερες αυτές είναι, τόσο μεγαλύτερες είναι οι περιοχές ανακυκλοφορίας.



Δ2.21 – σημεία αποκόλλησης και επανακόλλησης της ροής στο στενωμένο αγωγό

### iii) κατανομές αξονικών ταχυτήτων στο λαιμό και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας

Στο Δ5.22, είναι σχεδιασμένες οι κατανομές  $a_{throat} = \frac{u_x(r)}{U_a} \Big|_{x=1.5}$ , των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του λαιμού της στένωσης.

- καθώς ο  $Re$  αυξάνεται, οι διαφορές που παρατηρούνται στην ταχύτητα επί του άξονα, στο λαιμό της στένωσης, μειώνονται

Έτσι, για να παραμείνει αμετάβλητη η παροχή ρευστού από τη διατομή του λαιμού, αυξανόμενου του  $Re$ , οι κατανομές της αξονικής ταχύτητας στη στένωση, λαμβάνουν όλο και περισσότερο πεπλατυσμένες κατανομές (*plug profiles*).

Αυτό, έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μεγάλων κλίσεων ταχύτητας κοντά στο τοίχωμα, που τελικά μεταφράζονται σε αυξημένες τιμές  $T_w$  στην περιοχή του λαιμού.

- το φαινόμενο αυτό, δείχνει να έχει ένα όριο, δηλαδή, αυξανόμενου του  $Re$ , όπως βλέπουμε και στο Δ5.22, καταλήγουμε σε παρόμοιες κατανομές ταχυτήτων στο λαιμό της στένωσης

Στο Δ5.23, εμφανίζεται η μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα  $w = \frac{U_a(x)}{U_0} \Big|_{r=0}$  κατά

μήκος του αγωγού, αδιαστατοποιημένη με την ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος  $U_0$ , που προκύπτει για τον εκάστοτε  $Re$ .

- το σημείο εμφάνισης της μέγιστης αξονικής ταχύτητας, βρίσκεται ελαφρώς κατάντι της διατομής του λαιμού, περίπου  $0.1d$

Τη μετατόπιση του σημείου αυτού, καταγράφουμε για κάθε μοντέλο σχετικά με το  $Re$ , στο Δ5.24.

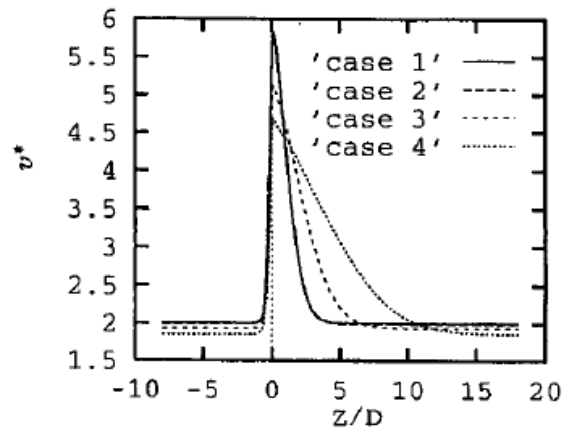
Το συμπέρασμα αυτό, προκύπτει και από τα αντίστοιχα διαγράμματα στην [84], Σχ5.5. Οι ποσοτικές συγκρίσεις είναι αδύνατες, αλλά το σημαντικότερο είναι η παρατήρηση του φαινομένου.

- η μετακίνηση αυτή, δείχνει να σχετίζεται με τις συνεκτικές δυνάμεις, αφού όχι μόνο μεταβάλλεται με το  $Re$ , αλλά και με το υιοθετούμενο μοντέλο

Πολύ πιθανόν, να υπάρχει συσχέτιση με το φαινόμενο *vena contracta*, όπου οι δημιουργούμενες δίνες κατάντι της στένωσης ενισχύουν την επιτάχυνση του ρευστού, ακόμα και μετά τη θέση του λαιμού. Έτσι, η εμφάνιση της μέγιστης ταχύτητας δε συμπίπτει με αυτή που θα προβλεπόταν από απλή εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας μεταξύ διατομής του αγωγού και λαιμού.

Όμως, η μετατόπιση παρατηρείται και σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει ανακυκλοφορία (πχ  $Re < 125$  για το ρευστό Quemada), αναγκάζοντάς μας να

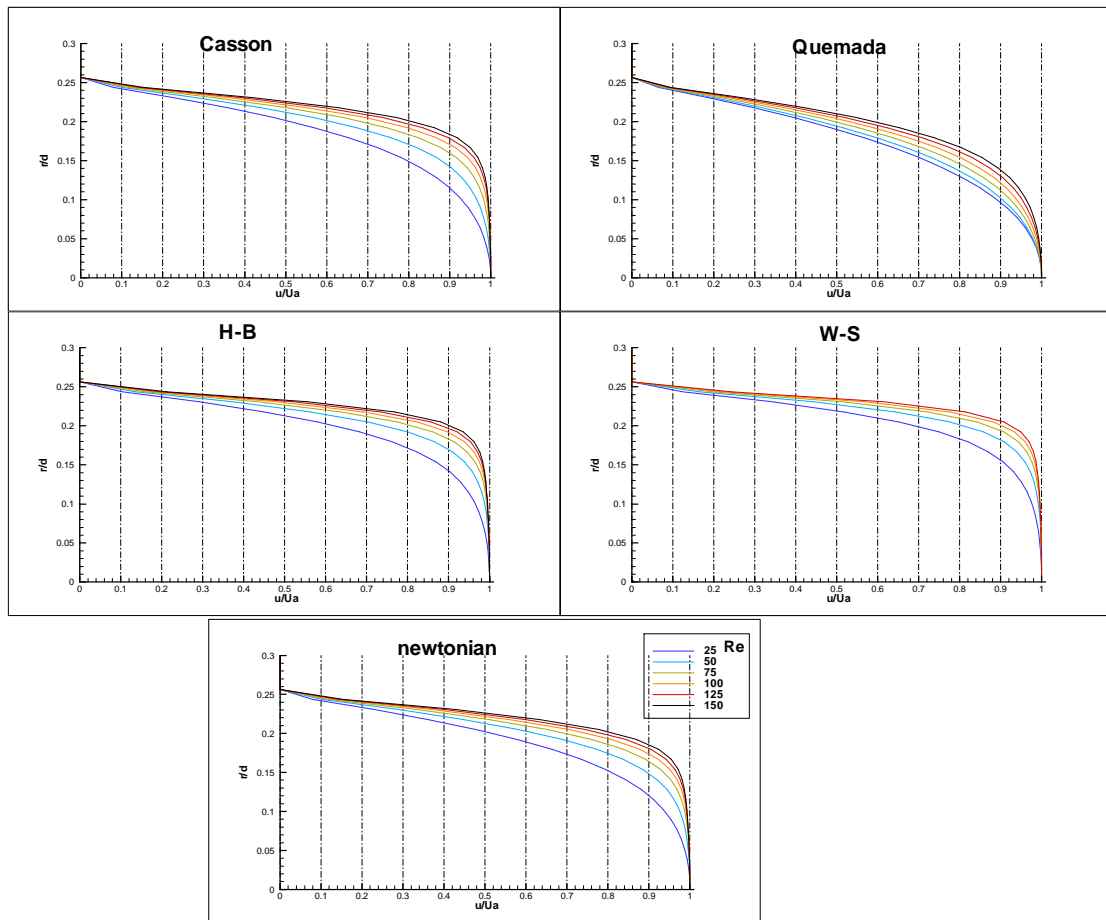
υποπτευθούμε ότι η αυξημένη στροβιλότητα της περιοχής είναι η γεννεσιουργός αιτία.



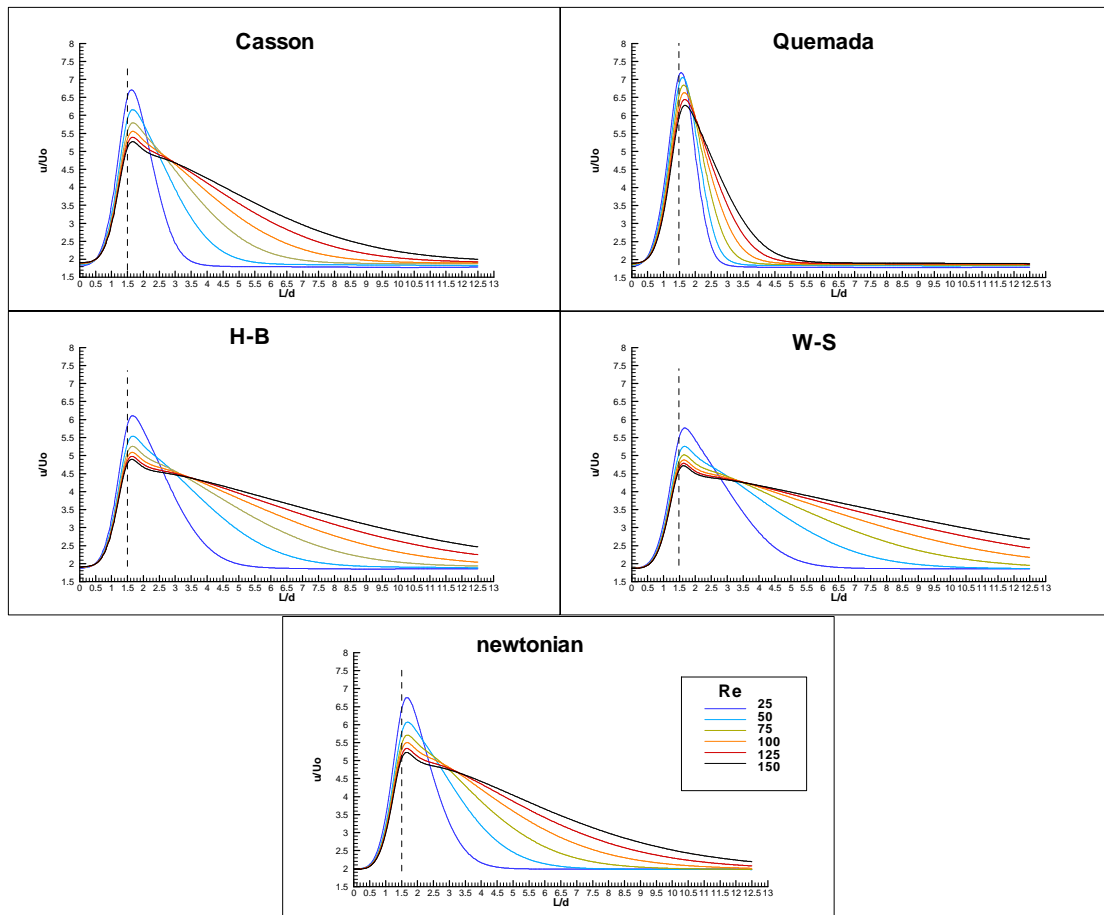
Σχ5.5 – η μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα, στη στενωτική γεωμετρία της [84],  
case 1,2,3,4: νευτόνιο, Bingham, H-B, Εκθετικού Νόμου

- παρατηρούμε, στο Δ5.24, ότι το σημείο εμφάνισης της μέγιστης αξονικής ταχύτητας τείνει να σταθεροποιηθεί, αυξανόμενου του  $Re$ , αλλά για το περιορισμένο εύρος  $Re$  που μελετούμε δε μπορούμε να εξάγουμε ασφαλές συμπέρασμα

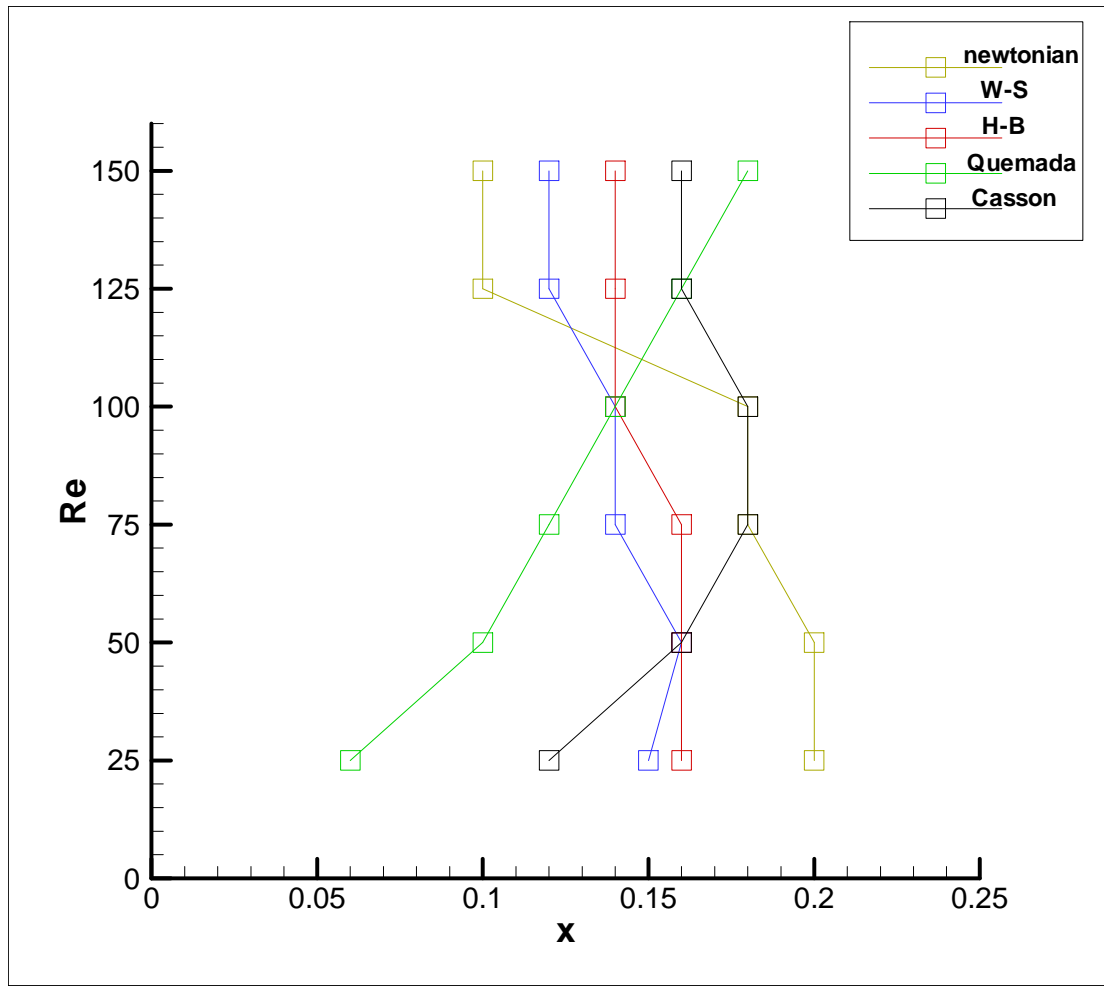




Δ5.22 – οι κατανομές αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του λαιμού



Δ5.23 – η ταχύτητα  $U_a(x)$  στον άξονα του αγωγού, με την ευθεία να βρίσκεται στην αξονική θέση του λαιμού  $L_{throat} = 1.5d$



Δ5.24 – η κατάντι αδιάστατη μετακίνηση  $x$  του σημείου εμφάνισης της μέγιστης αξονικής ταχύτητας  $U_{a,max}$  (ο λαϊμός βρίσκεται στο  $x = 0$ )

#### iv) διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα

Στα Δ5.25 και Δ5.26, παρουσιάζονται οι διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα (*Wall Shear Stresses*)  $T_w$ , αδιαστατοποιημένες και πάλι με με την εκάστοτε δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ταχύτητας  $U_0$ .

- οι τάσεις  $T_{w,max}$ , μέγιστες παρατηρούμενες  $T_w$ , στην περιοχή του λαιμού της στένωσης είναι κατά πολύ μεγαλύτερες στο Quemada, σχετικά με τα άλλα ρευστά, η διαφορά, όμως, δείχνει να μειώνεται καθώς ο  $Re$  ελλαττώνεται
- με την αύξηση του  $Re$ , οι  $T_{w,throat}$ , κάθε μοντέλου, δείχνουν να μειώνονται με μικρότερο ρυθμό, ωθώντας μας να σκεφτούμε ότι τείνουν ασυμπτωτικά σε μία οριακή τιμή, αντίστοιχα με τη συμπεριφορά της ταχύτητας στον άξονα στη θέση του λαιμού και των κατανομών της αξονικής ταχύτητας εκεί.
- οι  $T_{w,max}$ , δεν εμφανίζονται στη θέση του λαιμού της στένωσης, αλλά περίπου  $\delta l = 0.1d$  ανάντι αυτής

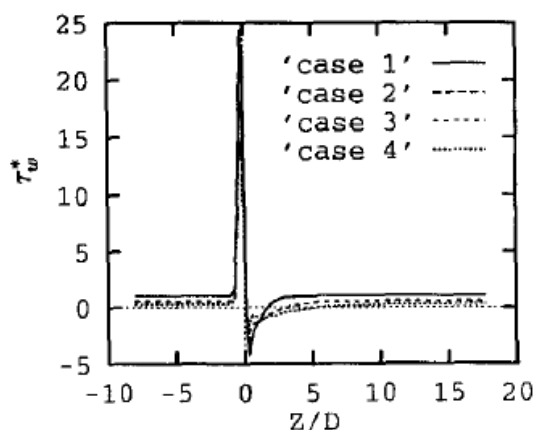
Το φαινόμενο αυτό αναφέρουν και στην [84], από τα αποτελέσματα του διαγράμματός Σχ5.6, χωρίς να το σχολιάζουν περισσότερο. Η παράθεσή του έχει εποπτικό ρόλο, καθώς χρησιμοποιούν διαφορετικό από το δικό μας ορισμό του  $Re$  στα μη νευτώνεια ρευστά.

Κατά την ανάλυση των δεδομένων, φάνηκαν διαφορές στη θέση του σημείου εμφάνισης των  $T_{w,max}$ , σε κάθε μοντέλο και  $Re$ .

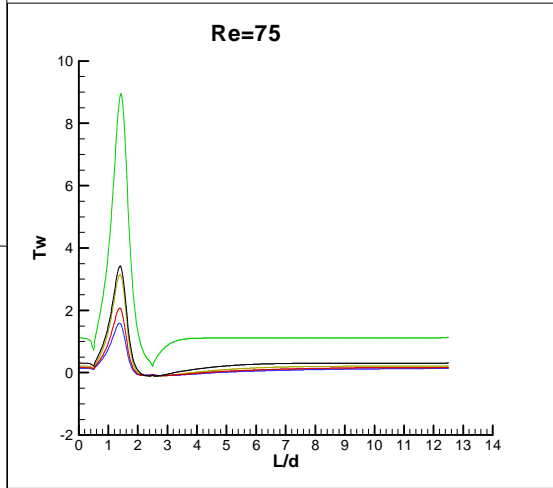
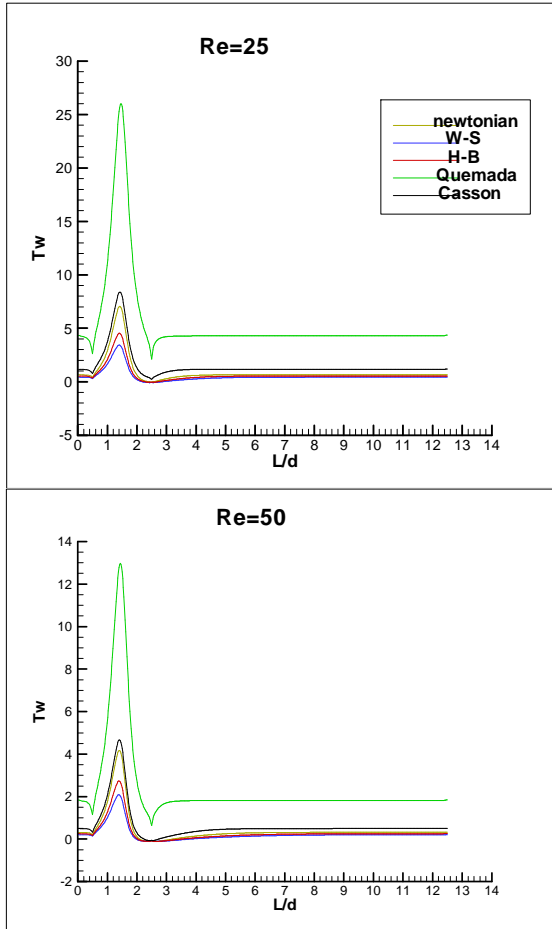
Παρατηρούμε το αντίθετο φαινόμενο από αυτό που είδαμε στην αξονική ταχύτητα, όπου το σημείο εμφάνισης της μέγιστης αξονικής ταχύτητας, βρισκόταν κατάντι της διατομής του λαιμού.

Μία τέτοια μετατόπιση, θα μπορούσε να εξηγηθεί θεωρητικά, αφού λόγω της διαφοράς του ιξώδους και του ρυθμού διάτμησης στο τοίχωμα  $\gamma_{x,w}$  που παρουσιάζει το κάθε μοντέλο, είναι πιθανό η μεγιστοποίηση των  $\tau_w$  να εμφανίζεται σε διαφορετικό σημείο.

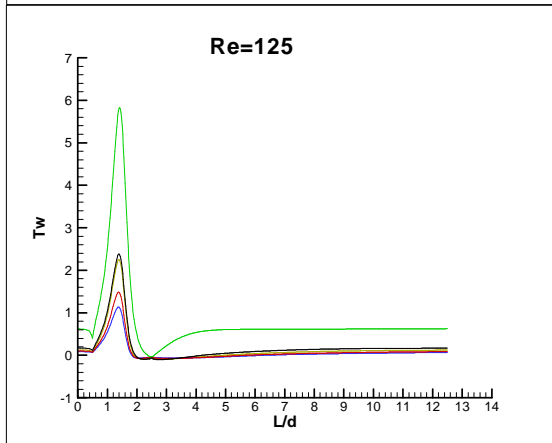
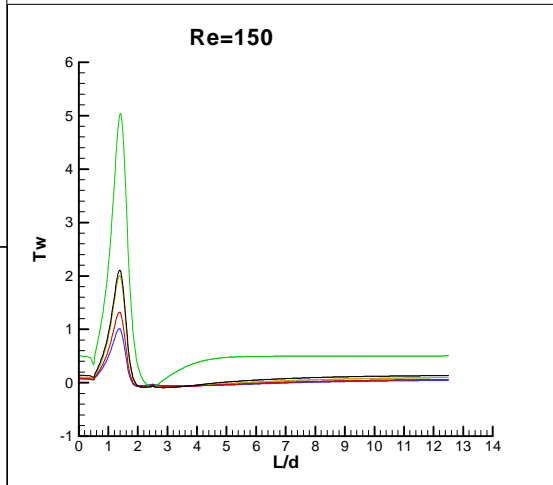
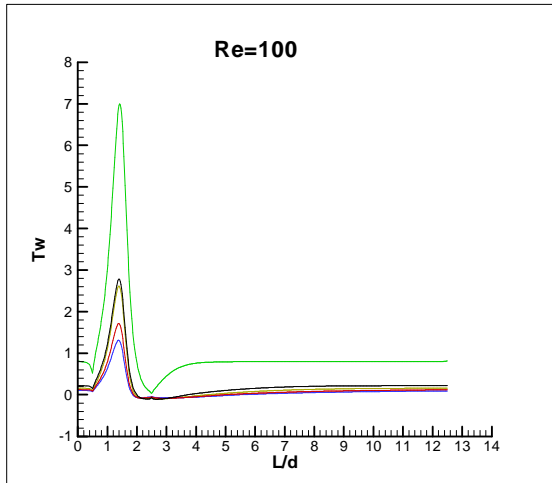
Πάντως, οι μετατοπίσεις είναι πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες στην αξονική ταχύτητα και η τάξη μεγέθους τους είναι  $\delta x < 0.01d$ , κάνοντάς τις δυσδιάκριτες.



Σχ5.6 – οι τάσεις στο τοίχωμα, στη στενωτική γεωμετρία της [84], case 1,2,3,4: νευτώνειο, Bingham, H-B, Εκθετικού Νόμου



Δ5.25 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του στενωμένου αγωγού, WSS



Δ2.26 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του στενωμένου αγωγού, WSS

## v } στατική πίεση

Ακολουθούν τα διαγράμματα πτώσης στατικής πίεσης στο τοίχωμα του αγωγού (Δ5.27 και Δ5.28), αφού είναι το πιο άμεσα μετρούμενο μέγεθος σε μία πειραματική διάταξη, και έτσι κρίνεται σκόπιμο να μελετήσουμε την πίεση σε αυτό το όριο. Εμφανίζονται αδιαστατοποιημένα, με την εκάστοτε δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ταχύτητας  $U_0$ , που υιοθετήσαμε και στον ευθύγραμμο αγωγό.

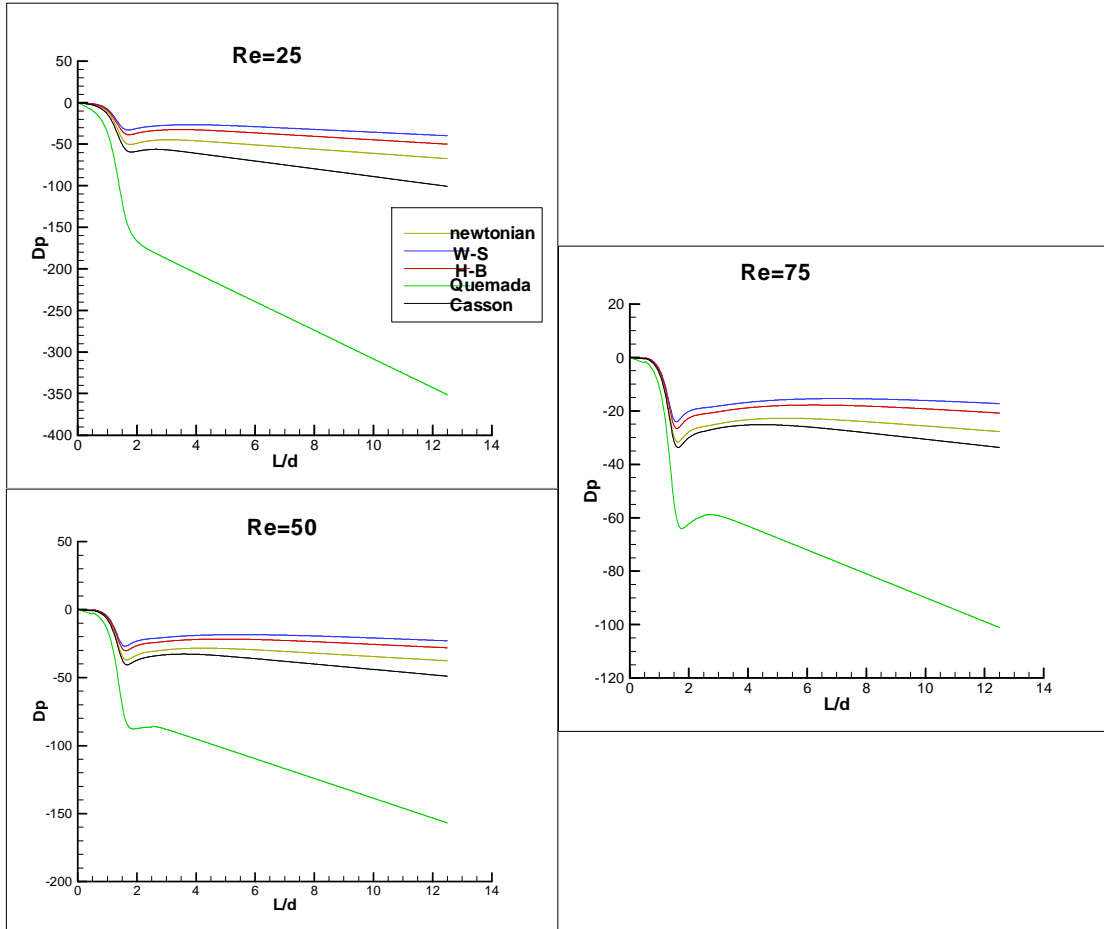
Σχολιάζοντας το μέγεθος της πίεσης (στο ασυμπιεστο ρευστό) και την πληροφορία για τη ροή, που μπορούμε να λάβουμε από αυτό, θα λέγαμε ότι είναι ένα «χονδροειδές» μέγεθος, το οποίο δε μας δίνει δεδομένα για τη μικροκλίμακα του ρευστού, όπως πχ οι WSS ή το ιξώδες, που έχει να κάνει με τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις σε μοριακή κλίμακα, αλλά αποτελεί άριστο εργαλείο για μία πρώτη αντίληψη της συμπεριφοράς του ρευστού.

Η ανάκτηση της στατικής πίεσης, μετά τη στένωση, είναι καλύτερη για το W-S, με τη σειρά βέλτιστης ανάκτησης πίεσης να ταυτίζεται με αυτή της μικρότερης πτώσης πίεσης στον ευθύγραμμο αγωγό.

Χαρακτηριστικό είναι ότι η ύπαρξη περιοχών ανακυκλοφορίας, μειώνει τις απώλειες στατικής πίεσης, που δημιουργούνται λόγω της στένωσης.

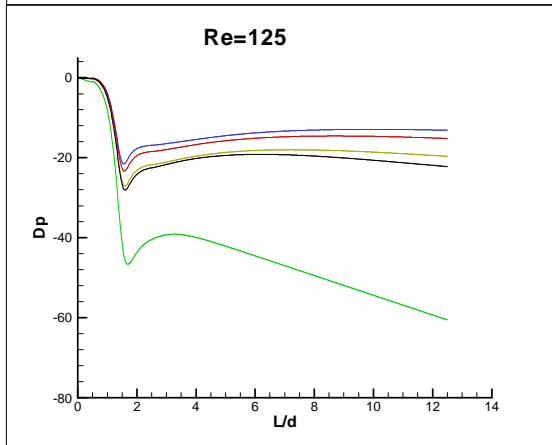
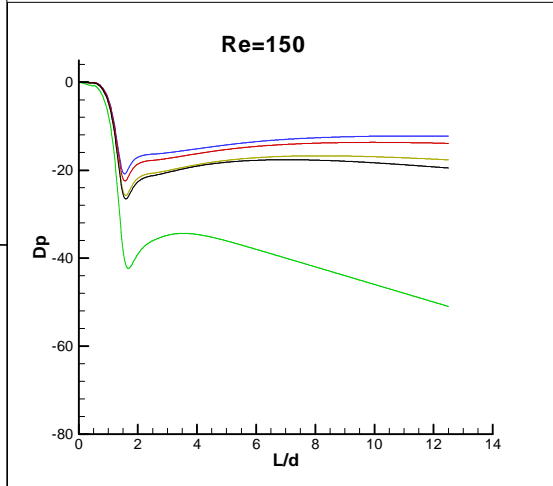
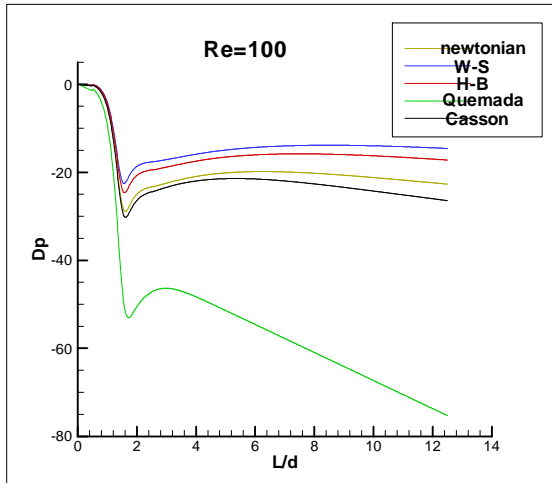
Ας δώσουμε μία εξήγηση για αυτό.

Οι περιοχές ανακυκλοφορίας, είναι περιοχές, όπου οι ταχύτητες του ρευστού λαμβάνουν μικρές τιμές. Εκεί λοιπόν, η στατική πίεση δε μετατρέπεται σε δυναμική πίεση, στον ίδιο βαθμό που θα μετατρεπόταν χωρίς την ύπαρξη της ανακυκλοφορίας, δηλαδή με το ρευστό να επιταχύνεται απρόσκοπτα.



Δ5.27 – στατική πίεση στο στενωμένο αγωγό





Δ5.28 – στατική πίεση στο στενωμένο αγωγό

## §2. μη μόνιμα πεδία ροής

Το νευτώνειο και μη νευτώνεια ρευστά W-S και H-B ήταν τα μόνα ρευστά, για τα οποία είχαμε τη δυνατότητα να επαληθεύσουμε την αξιοπιστία ορισμένων βασικών μας αποτελεσμάτων στη μόνιμη ροή, με πειραματικά ή θεωρητικά δεδομένα..

Οι διαφορετικοί, ανά μοντέλο, ορισμοί του αποτελεσματικού ιξώδους  $\mu_{eff}$ , που υπεισέρχεται στον αδιάστατο αριθμό ομοιότητας της ροής  $Re$ , οδηγούν στην εισαγωγή διαφορετικής ταχύτητας αναφοράς  $U_{ref}$  για τους υπολογισμούς σε κάθε μοντέλο.

$$Re = \frac{\rho U_{ref} d}{\mu_{eff}}$$

Με την ταχύτητα σταθερή, στη μισή διάρκεια της περιόδου και μεταβαλλόμενη στην υπόλοιπη, ανακύπτει ζήτημα για την καταλληλότερη ταχύτητα  $U_{ref}$ .

Θεωρήσαμε την ταχύτητα στη φάση μόνιμης παροχής  $U_0$ , ως την πιο χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής και με βάση αυτή καθορίζονται οι αριθμοί ομοιότητας της ροής και γίνονται οι αδιαστατοποιήσεις στα παρακάτω.

Έχοντας αποδείξει την ικανότητα του FLUENT να εξάγει ταυτόσημα αποτελέσματα για ροές χαρακτηριζόμενες από τον ίδιο  $Re$ , δεν κρίθηκε σκόπιμο να παραμείνουν ίδια τα διαστατά μεγέθη που εισάγουμε σε αυτό. Τα μη νευτώνεια μοντέλα, διατηρήθηκαν αμετάβλητα, αφού στην αντίθετη περίπτωση τα όρια ιξώδους που απαιτούν οι συναρτήσεις ορισμού τους στο FLUENT (βλ. ΚεφIII), θα μεταβάλλονταν και νέα μελέτη θα έπρεπε να διεξαχθεί για το σωστό καθορισμό τους.

Οι υπολογισμοί έγιναν για τα παρακάτω διαστατά μεγέθη σε μονάδες SI.

διάμετρος αγωγού:  $d = 0.004$  m

πυκνότητα:  $\rho = 10000$  kg/m<sup>3</sup>

αποτελεσματική συνεκτικότητα:

νευτώνειο:  $\mu_{eff} = 0.001$  Pa·s

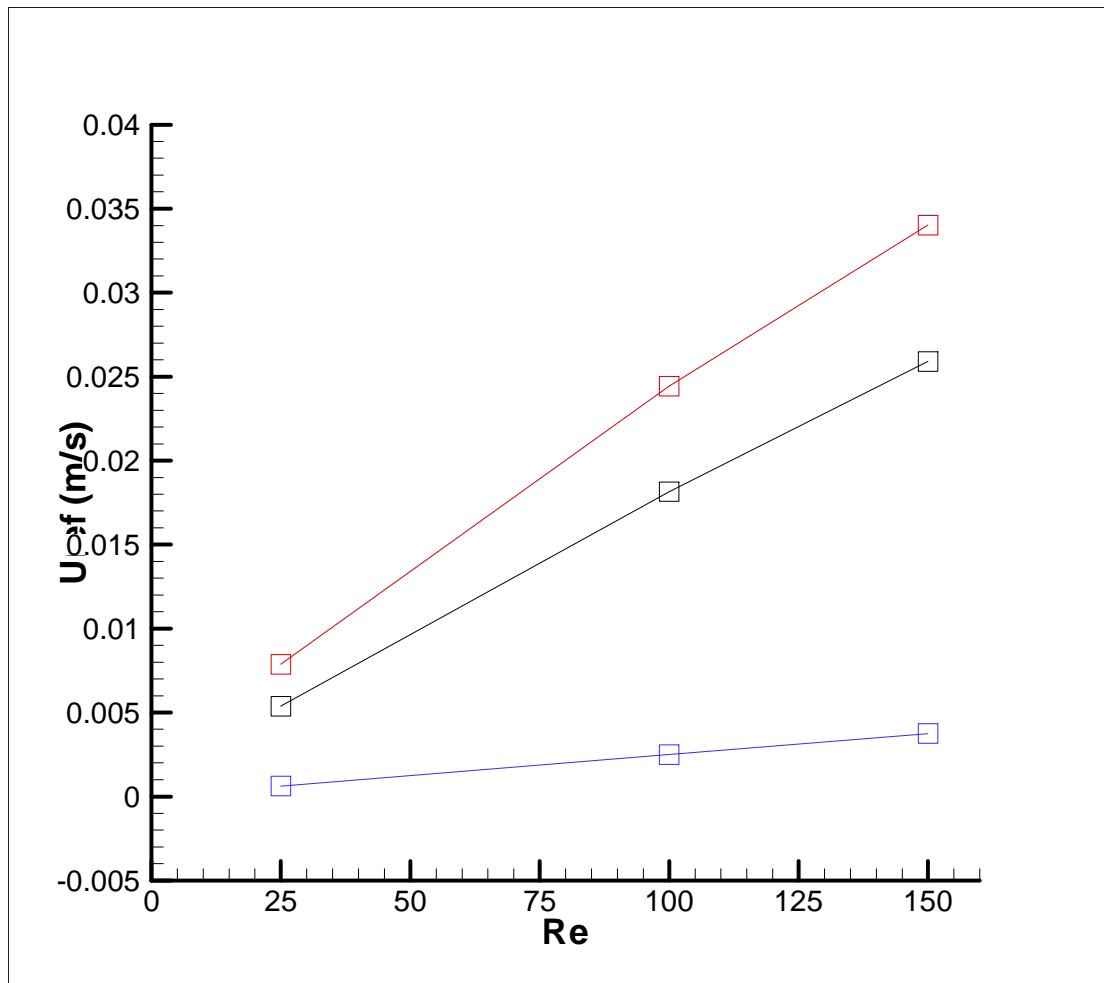
$$\text{W-S : } \mu_{eff} = k \left( \frac{d}{U_0} \right)^{1-n} \quad (n = 0.7755, k = 0.01467 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.7755})$$

$$\text{H-B : } \mu_{eff} = k \left( \frac{d}{U_0} \right)^{1-n} \quad (n = 0.8601, k = 0.0089721 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0.8601})$$

όπου  $n$  : συντελεστής μη νευτώνειας συμπεριφοράς και

$k$  : φαινόμενη συνεκτικότητα

Στο διάγραμμα Δ5.29 παρουσιάζουμε αυτή τη σχέση  $U_{ref} - Re$ .



Δ5.29 – η ταχύτητα αναφοράς  $U_{ref}$ , ως συνάρτηση του  $Re$  υπολογισμένου στη φάση σταθερής παροχής

Για το νευτώνειο, η σχέση  $U_{ref} - Re$  είναι γραμμική, όχι όμως για τα W-S και H-B.

Στο ιξωδοπλαστικό μοντέλο H-B, απαραίτητος είναι και ο προσδιορισμός του αριθμού *Bingham* ( $Bi$ ), που υποδεικνυεί τη σημαντικότητα της αρχικής τάσης για ροή του ρευστού, σχετικά με τις συνεκτικές δυνάμεις.

$$Bi = (\tau_0 / k) \left( \frac{d}{U_0} \right)^n$$

Ο αριθμός  $Bi$ , του H-B, δεν κρίθηκε σκόπιμο να μείνει αμετάβλητος σχετικά με τη μόνιμη ροή, αφού πλέον η ανάλυσή μας δεν έχει σκοπό τη σύγκριση ιξωδοπλαστικών μοντέλων και έχει περισσότερο το χαρακτήρα ανάλυσης των παρατηρούμενων φαινομένων. Η ένα προς ένα αντιστοιχία για τις ροές που μελετήσαμε είναι:

$$Re = [25, 100, 150] \rightarrow Bi = [1.512, 0.531, 0.391].$$

Η περιοδική συνάρτηση της ταχύτητας εισόδου του ρευστού στον αγωγό είναι παλμικής μορφής και για χρόνο μίας περιόδου γράφεται:

$$u(t) = U_0 \quad t = [0, T/2)$$

$$u(t) = U_0(1 - \sin(2\pi f \cdot t)) \quad t = [T/2, T]$$

και αδιαστατοποιημένη με βάση την ταχύτητα  $U_{ref} = U_0$ , κάθε μοντέλου στον εκάστοτε  $Re$ , παρουσιάζεται στο Δ5.30.

Μελετήθηκαν περιπτώσεις ροών του νευτώνειου ρευστού και των μη νευτώνειων W-S και H-B, χαρακτηριζόμενες από τους αριθμούς ομοιότητας ροής,  $Str$  και  $Re$ .

Και οι δύο αριθμοί είναι υπολογισμένοι με βάση την ταχύτητα  $U_0$  στη φάση σταθερής παροχής της ροής.

Σε παρένθεση, για λόγους σύγκρισης, αναφέρεται ο αριθμός Womersley,  $a$ , που προκύπτει ως συνάρτηση των παραπάνω:  $a = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re \cdot Str}$ .

μεταβλητός  $Str$ , σταθερός  $Re$

$$Str = 0.05 - Re = 100 \quad (\alpha = 2.80)$$

$$Str = 0.5 - Re = 100 \quad (\alpha = 7.07)$$

$$Str = 1 - Re = 100 \quad (\alpha = 12.53)$$

σταθερός  $Str$ , μεταβλητός  $Re$

$$Str = 0.5 - Re = 25 \quad (\alpha = 4.43)$$

$$Str = 0.5 - Re = 150 \quad (\alpha = 10.85)$$

Δύο από τις περιπτώσεις των ροών, επιτελούν συγκεκριμένο ρολό :

φυσιολογική περίπτωση ροής αίματος σε αγγείο  $d = 0.004\text{m}$ :  $Str = 0.05 - Re = 100$

βασική περίπτωση ροής, μέτρο σύγκρισης για τις υπόλοιπες, έχοντας κοινό ένα από τους δύο αριθμούς με οποιαδήποτε άλλη περίπτωση:  $Str = 0.5 - Re = 100$

Ας υπενθυμίσουμε κάποια στοιχεία για τον αγωγό, στον οποίο έγινε η επίλυση των πεδίων ροής.

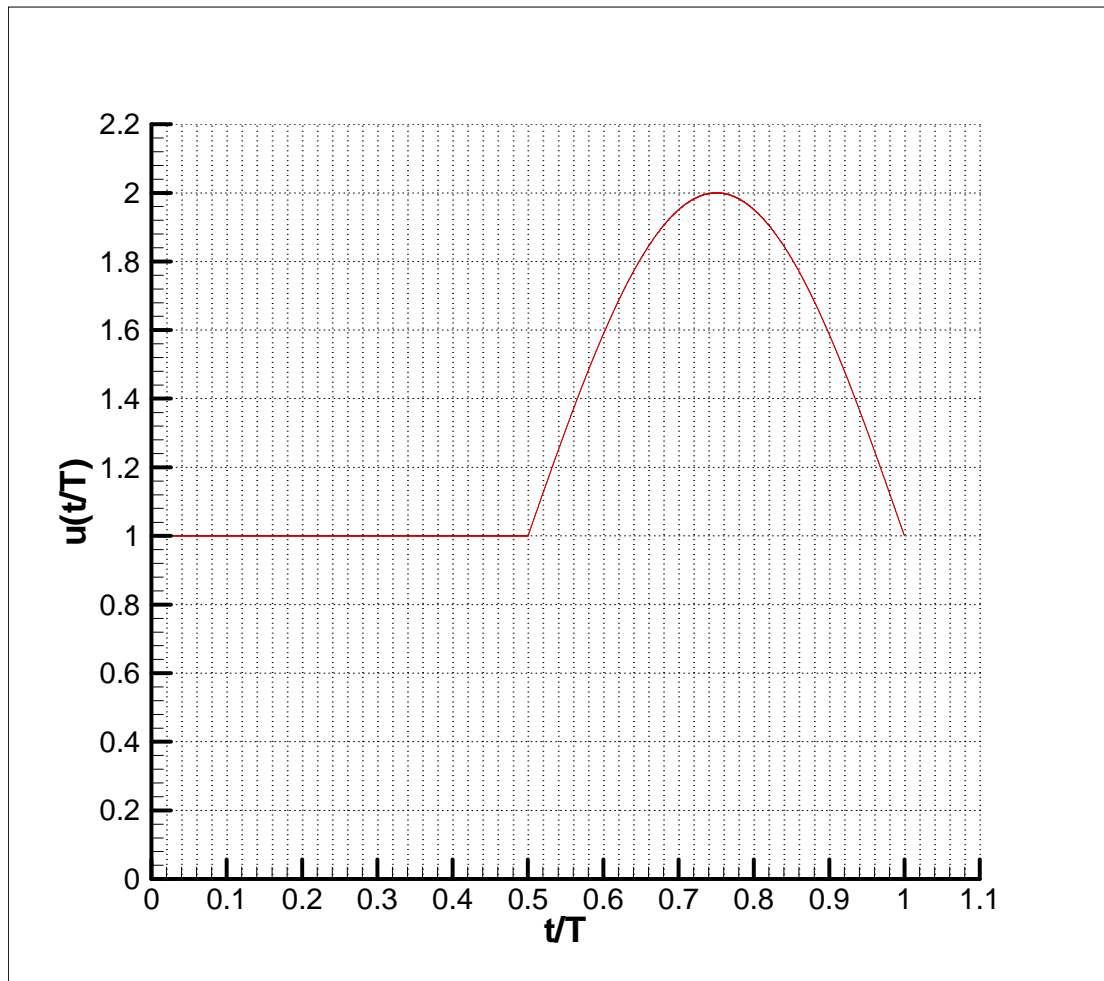
Ελεύθερο ρεύμα ρευστού στιγμιαίας ταχύτητας  $u(t)$ , εισέρχεται στον αγωγό.

Η στένωση ξεκινά σε απόσταση  $L_s = 10d$ , από την είσοδο του αγωγού, δίνοντας αρκετό μήκος για τη διαμόρφωση των κατανομών της ταχύτητας.

Ο λαιμός της στένωσης βρίσκεται στο  $L_{throat} = 11d$  και το τέλος του αποκλίνοντος τμήματός της, στο  $L_e = 12d$ .

Το μήκος του αγωγού κατάντι αυτού του σημείου και μέχρι τη έξοδο, είναι:  $\Delta L_{e-out} = L_e - L_{throat} = 12$ , δίνοντάς και πάλι αρκετό μήκος για διαμόρφωση της ροής

Συνολικό μήκος αγωγού  $L_{total} = 24d$ .



Δ5.30 – η αδιάστατη ταχύτητα στην είσοδο του αγωγού  $u(t/T)$

Μελετούμε τη μη μόνιμη ροή, με τα παρακάτω χαρακτηριστικά και μεγέθη:

- i} γραμμές ροής
- ii} διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα
- iii} στατική πίεση
- iv} κατανομές ταχυτήτων στο ανάντι της στένωσης ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού
- v} ροϊκά φαινόμενα και μεταβολές των μεγεθών
- vi} μήκη περιοχών ανακυκλοφορίας
- vii} ταχύτητες δινών

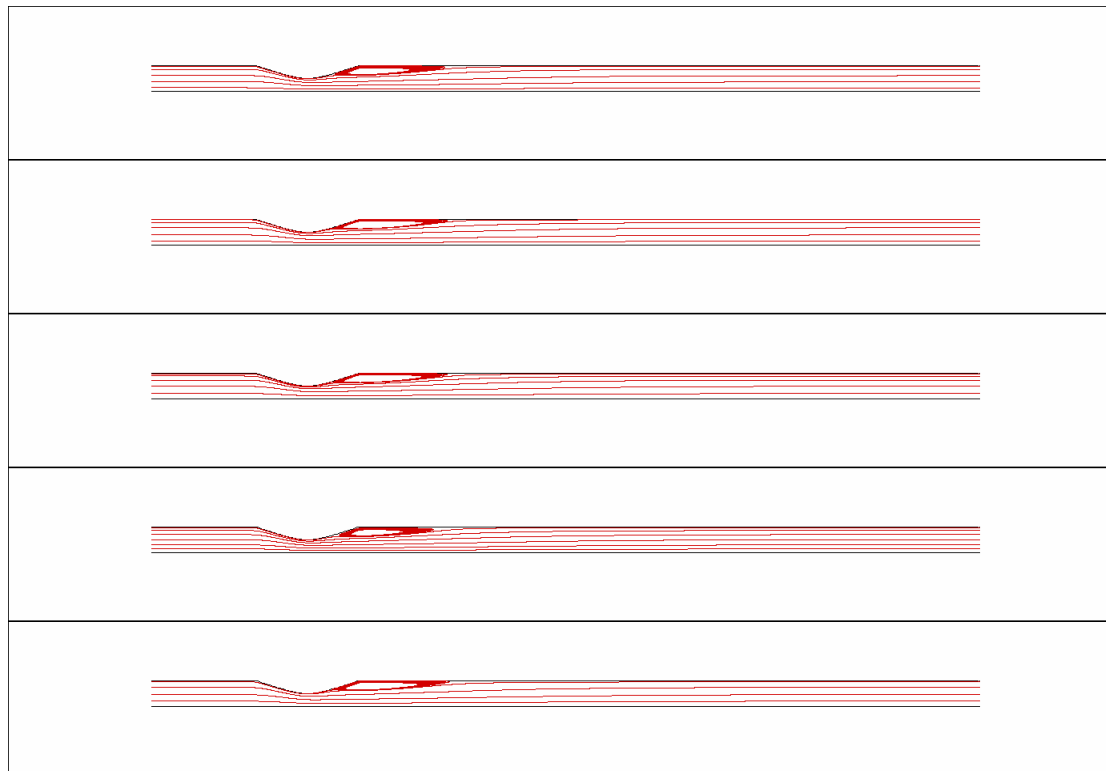
## i} γραμμές ροής

Κατά τη μελέτη των γραμμών ροής, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι, λόγω του αξονικά συμμετρικού μοντέλου μας, οι παρατηρούμενες δίνες σε πραγματικές συνθήκες τριδιάστατου (3-D) αγωγού, αποτελούν τομές αυτών.

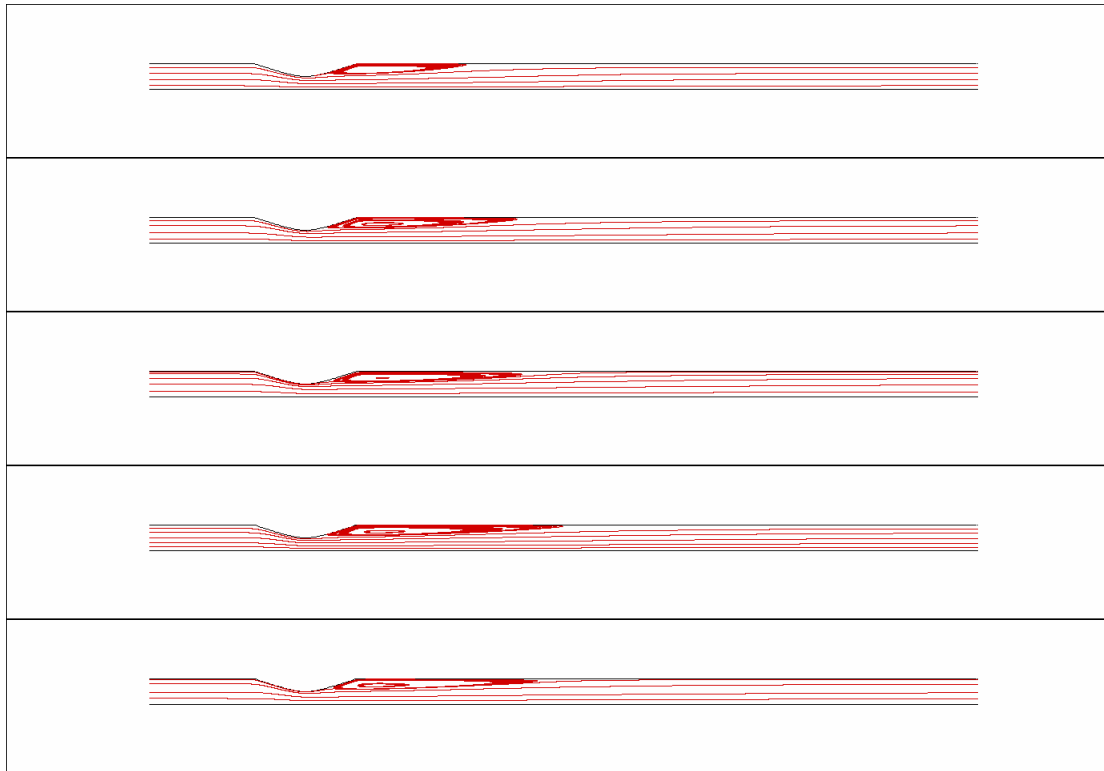
Επίσης, βασιζόμενοι στα αριθμητικά αποτελέσματα των *Neofytou & Tsangaris* [33], σύμφωνα με τα οποία, σε 3-D κυκλικής διατομής αγωγό δεν αποκαλύφθηκαν ασυμμετρίες ή δευτερεύουσες ροές, θεωρούμε ότι οι δίνες και οι περιοχές ανακυκλοφορίας, που συζητούμε εδώ, σχηματίζουν τις πραγματικές με μία απλή κυκλική περιστροφή περί τον άξονα συμμετρίας.

Παρουσιάζουμε τις γραμμές ροής, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στα φαινόμενα μετά τη στένωση, αφού μάλιστα, δεν παρατηρήθηκαν διαταραχές στη ροή ανάντι αυτής,

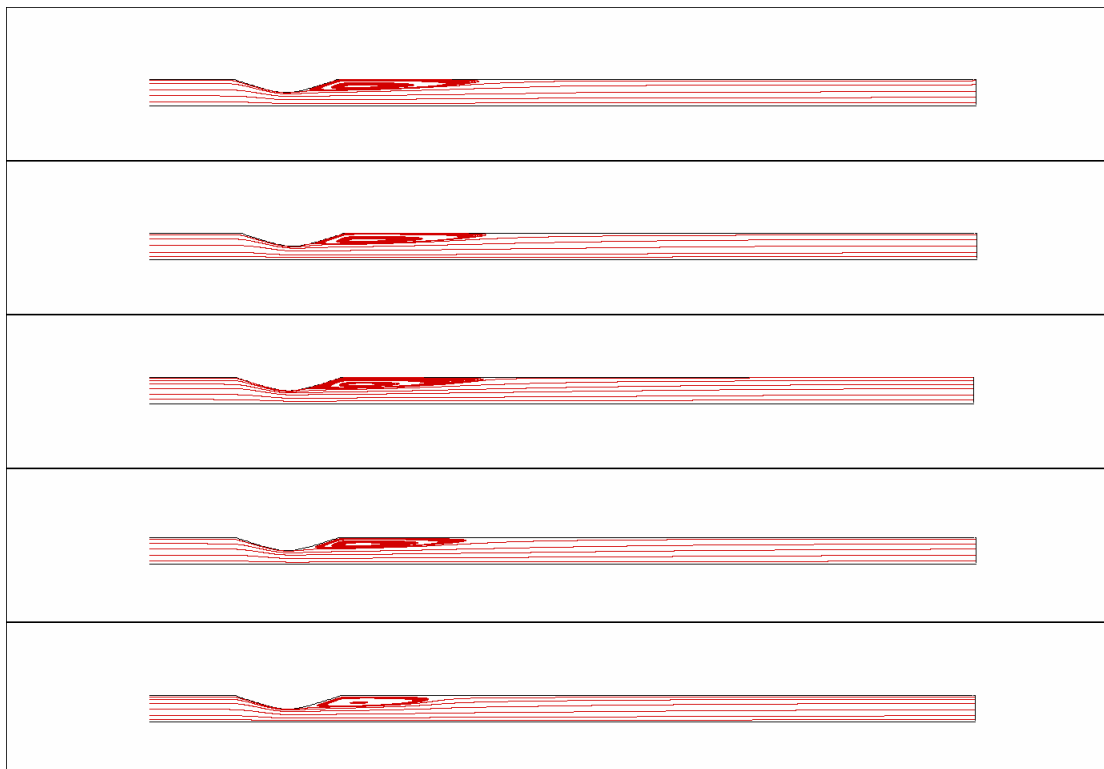
- **Str=0.05 – Re=100**



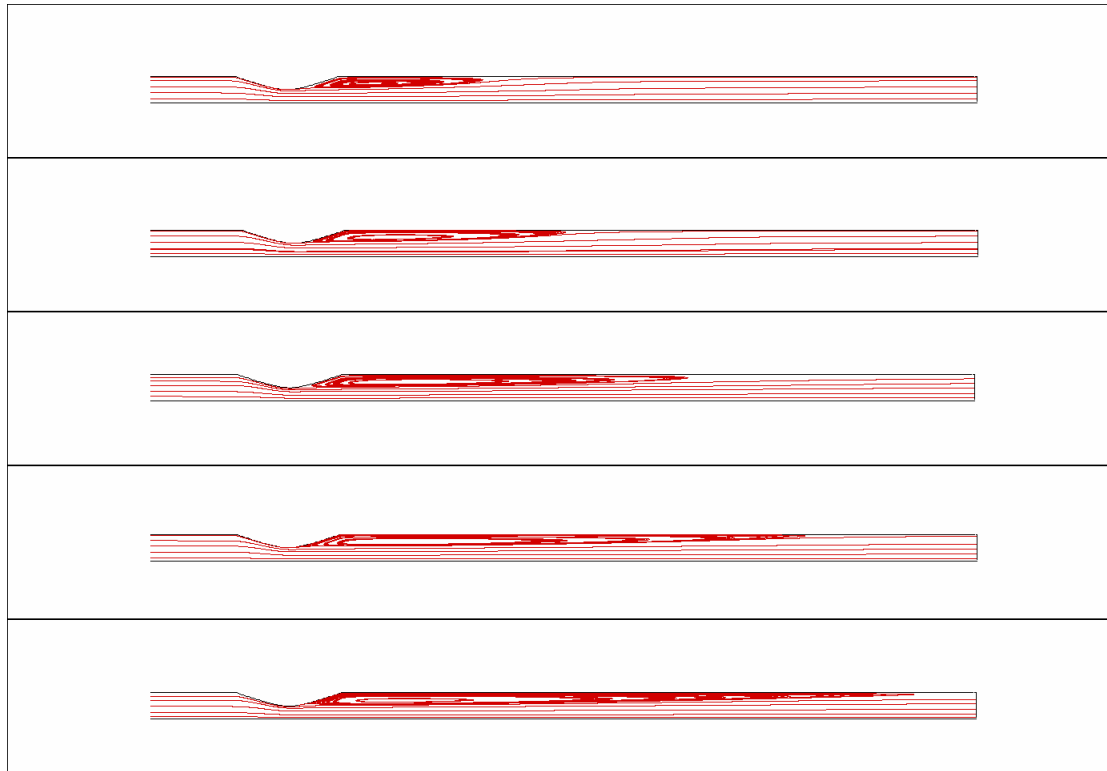
Δ5.31 – γραμμές ροής: νευτώνειο  $Str = 0.05 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



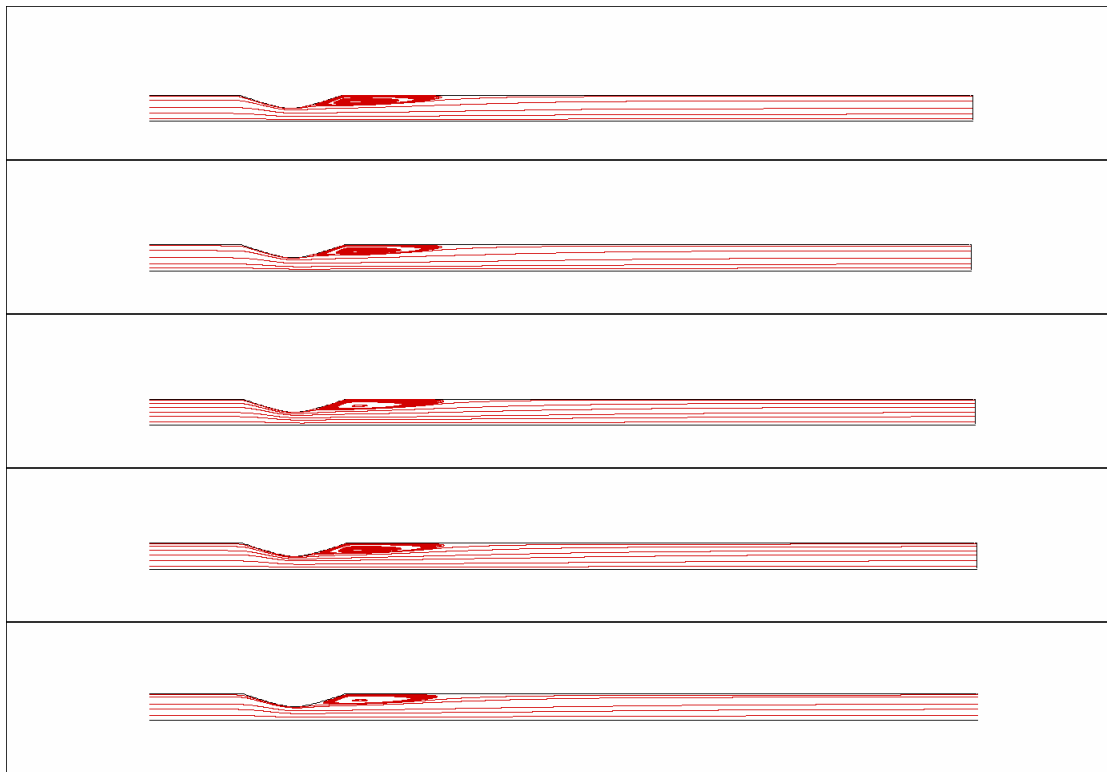
Δ5.32 – γραμμές ροής: νευτώνειο  $Str = 0.05 - Re = 100, \tau = [0.6, 1]$



Δ5.33 – γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.05 - Re = 100, \tau = [0.1, 0.5]$

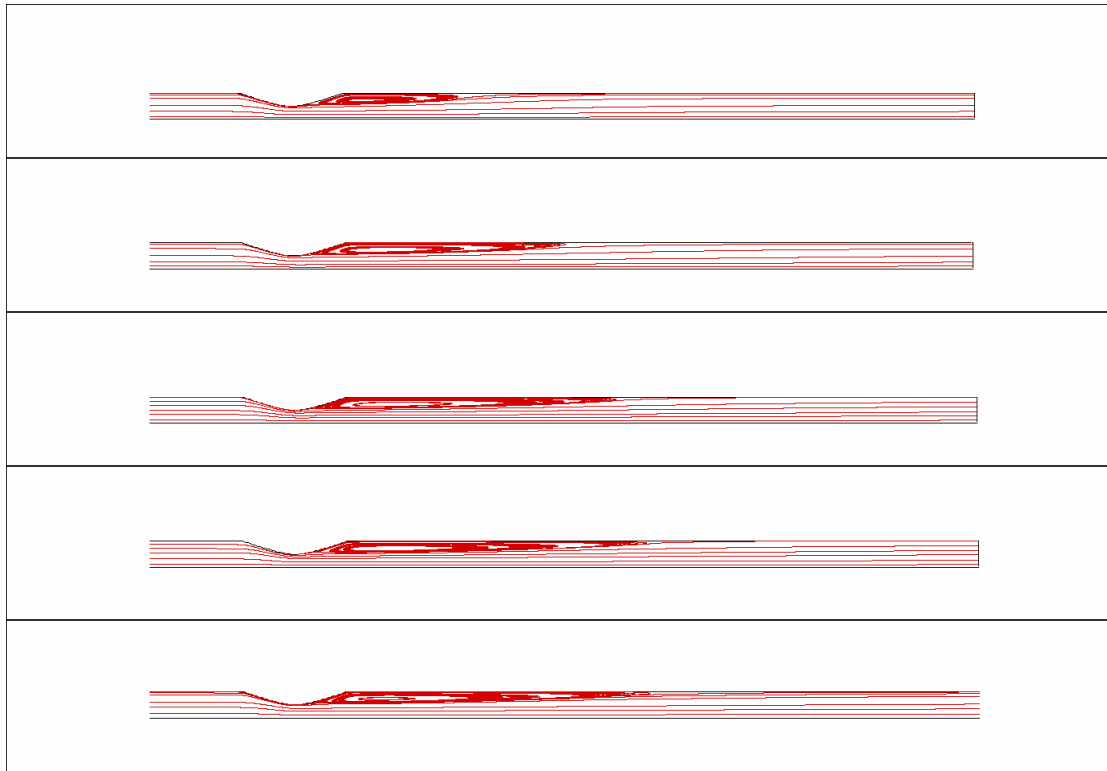


Δ5.34– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.05 - Re = 100, \tau = [0.6, 1]$



Δ5.35 – γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.05 - Re = 100, \tau = [0.1, 0.5]$





Δ5.36– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.05 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$

Η μορφή των γραμμών ροής, σε κάθε στιγμιότυπο της ροής  $Str = 0.05 - Re = 100$ , παρουσιάζει κοινά χαρακτηριστικά για τα τρία μοντέλα ρευστού.

Η σχηματισμένη περιοχή ανακυκλοφορίας δεν αποσβέννεται ποτέ κατά τη διάρκεια της περιόδου, κάτι που προφανώς οφείλεται στον υψηλό αριθμό  $Re = 100$  της ροής, ο οποίος είναι τουλάχιστον τέσσερις φορές μεγαλύτερος από τον απαιτούμενο κάθε μοντέλου, για δημιουργία ανακυκλοφορίας στη μόνιμη ροή (ελάχιστος  $Re_{critical} = 25$  στο νευτώνειο).

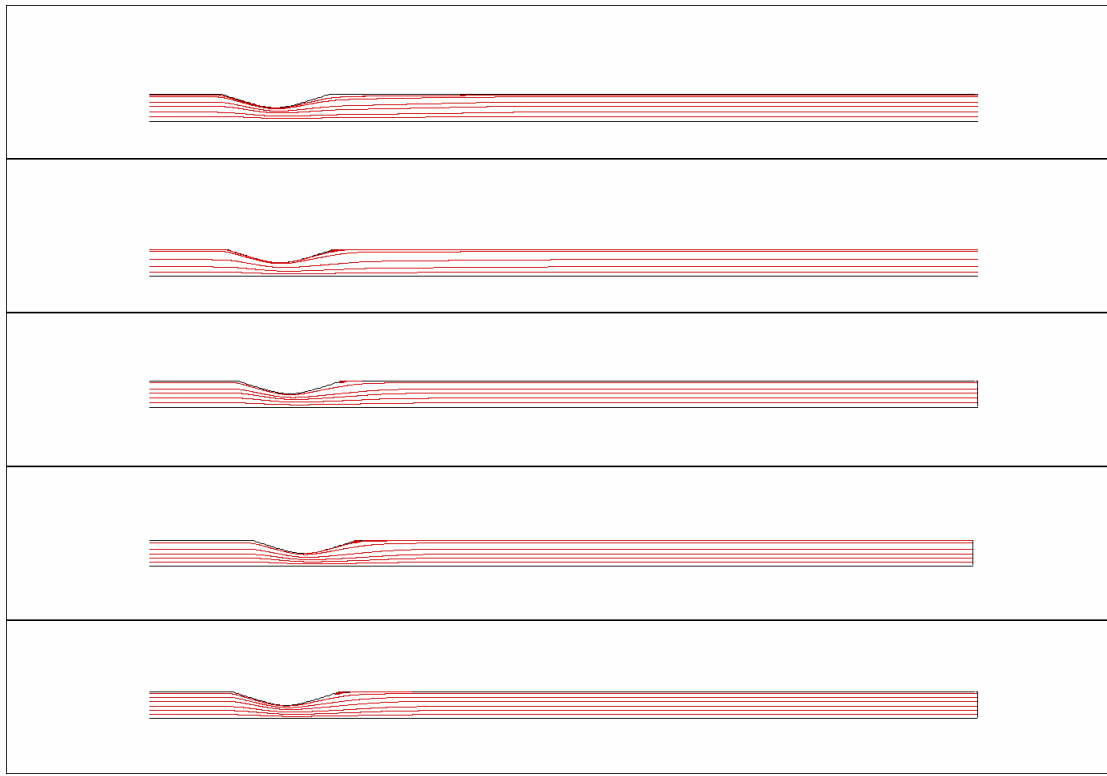
Στη φάση σταθερής παροχής, το μήκος της περιοχής ανακυκλοφορίας παραμένει αμετάβλητο για το διάστημα  $\tau = 0.1 - 0.4$  και είναι ίσο με το μετρούμενο στην μόνιμη ροή  $Re = 100$  (στην περίπτωση του H-B υπάρχει μείωση 20%, οφειλόμενη προφανώς στον αυξημένο  $Bi$ ).

Κατά τη φάση σταθερής παροχής λοιπόν, εμφανίζεται η τάση επαναφοράς στις ίδιες συνθήκες που είδαμε για  $Re = 100$ .

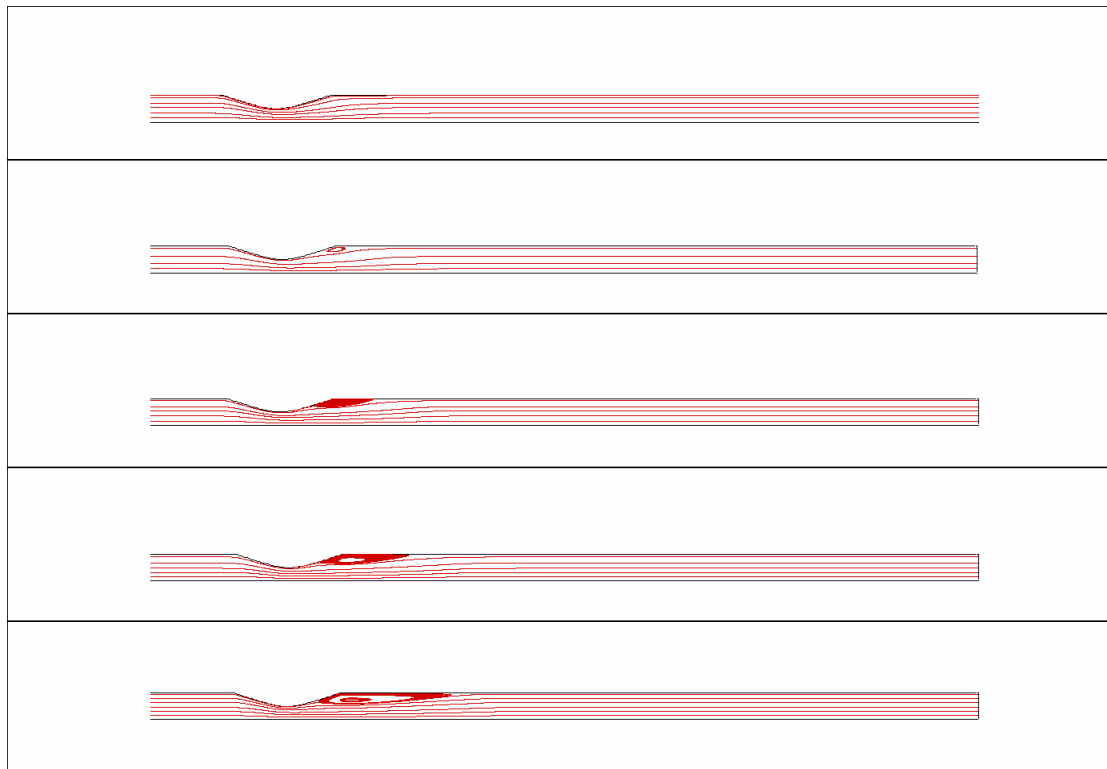
Καθώς εισερχόμαστε στο τμήμα επιτάχυνσης της ροής,  $\tau = 0.5 - 0.75$ , παρατηρούμε επιμήκυνση της περιοχής ανακυκλοφορίας. Ο χαμηλός  $Str = 0.05$ , δεν επιτρέπει στα μη μόνιμα φαινόμενα να επιδράσουν και να μεταβάλλουν τη μορφή αυτής της περιοχής. Έτσι, δεν θα έχουμε επανακόλληση της ροής (κάτι που θα διαπιστώσουμε παρακάτω για  $Str = 0.5$  και  $Str = 1$ ) την  $\tau = 0.6$ .

Κατά την επιβράδυνση της ροής,  $\tau = 0.75 - 1.0$ , η περιοχή ανακυκλοφορίας συνεχίζει να αυξάνει, μέχρι το μέγιστο μήκος της να εμφανιστεί για  $\tau = 1.0$ , σε όλα τα μοντέλα. Με την είσοδο στη νέα περίοδο  $\tau = 0.1$ , η μείωση του μήκους της περιοχής ανακυκλοφορίας είναι απότομη, καθώς επανέρχεται στο αρχικό μέγεθος μέσα σε χρόνο πέντε φορές μικρότερο από αυτόν που απαιτήθηκε για την αύξησή της ( $\tau = 0.5 - 1.0$ ).

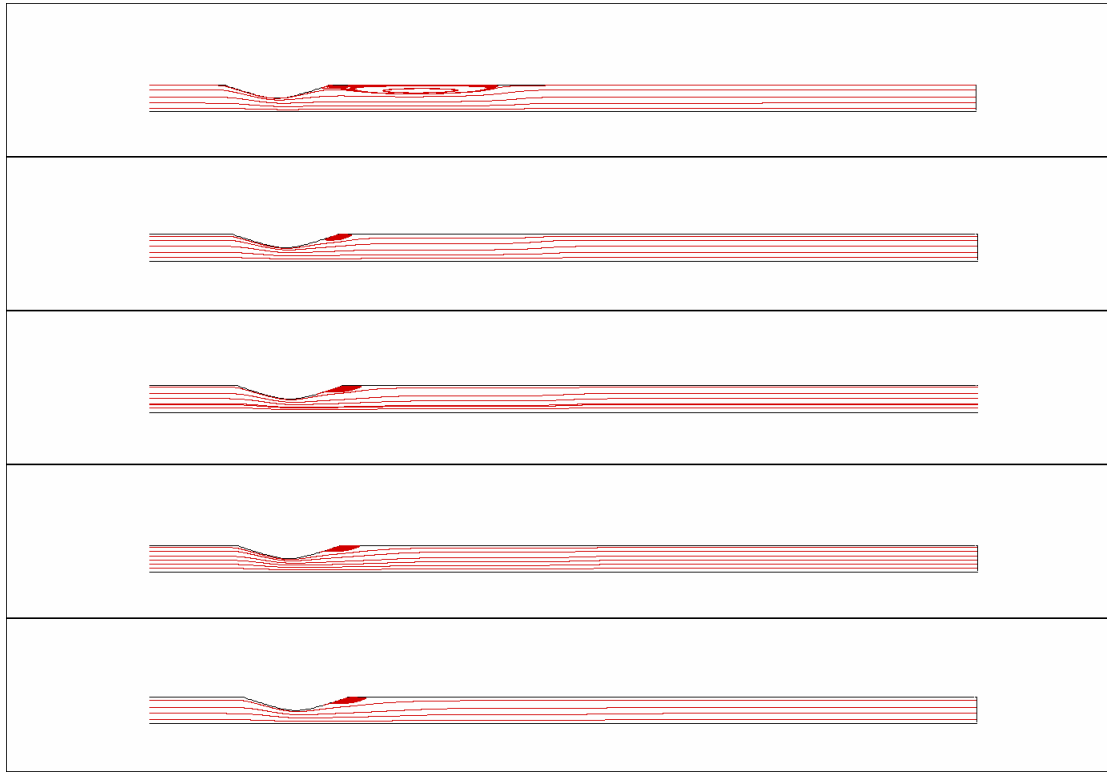
- **Str=0.5 – Re=25**



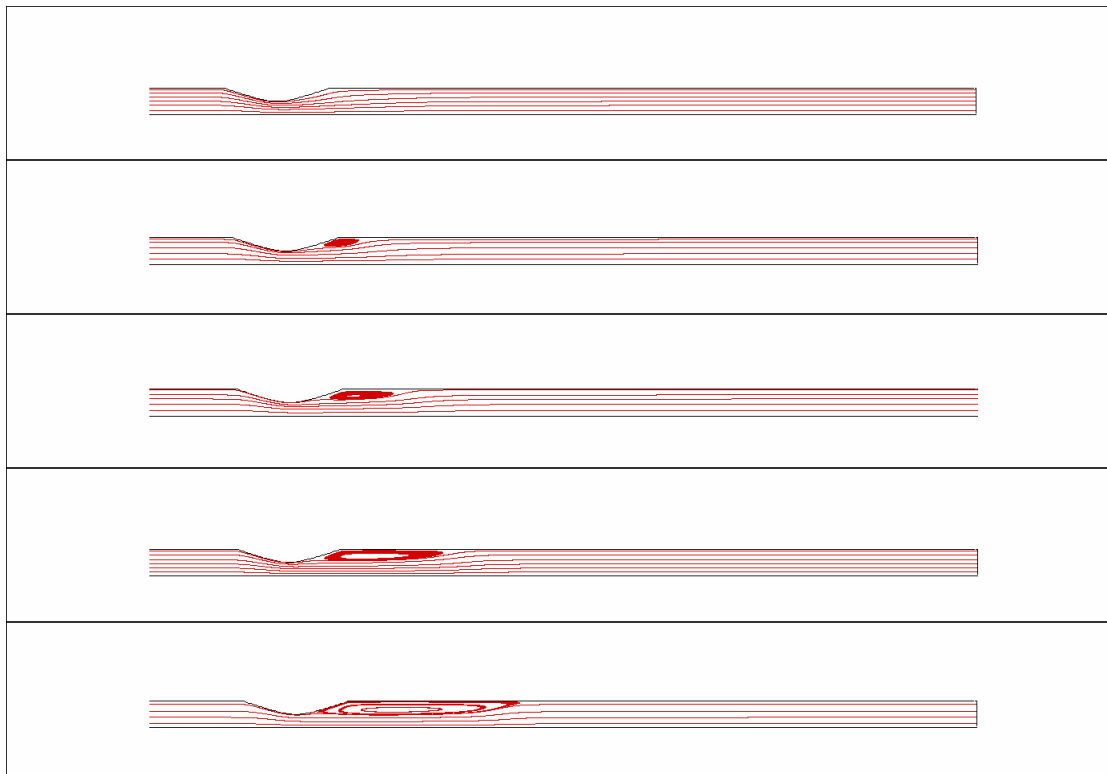
Δ5.37– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 25$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



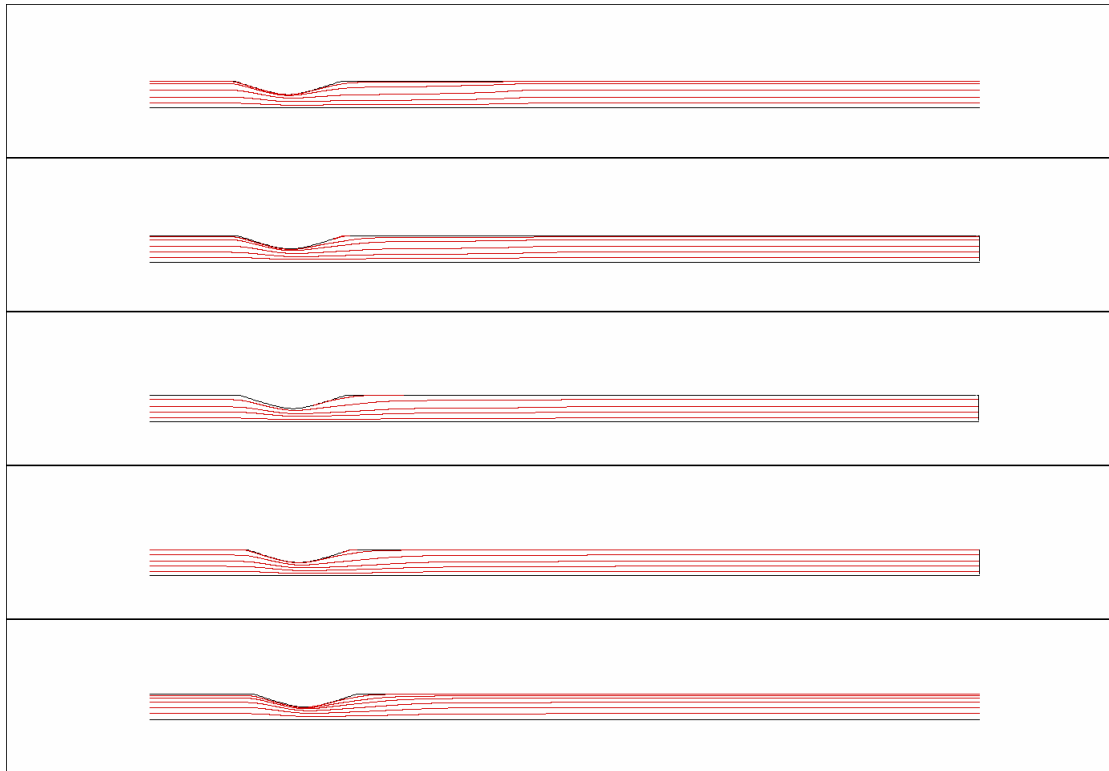
Δ5.38– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 25$ ,  $\tau = [0.6, 1]$



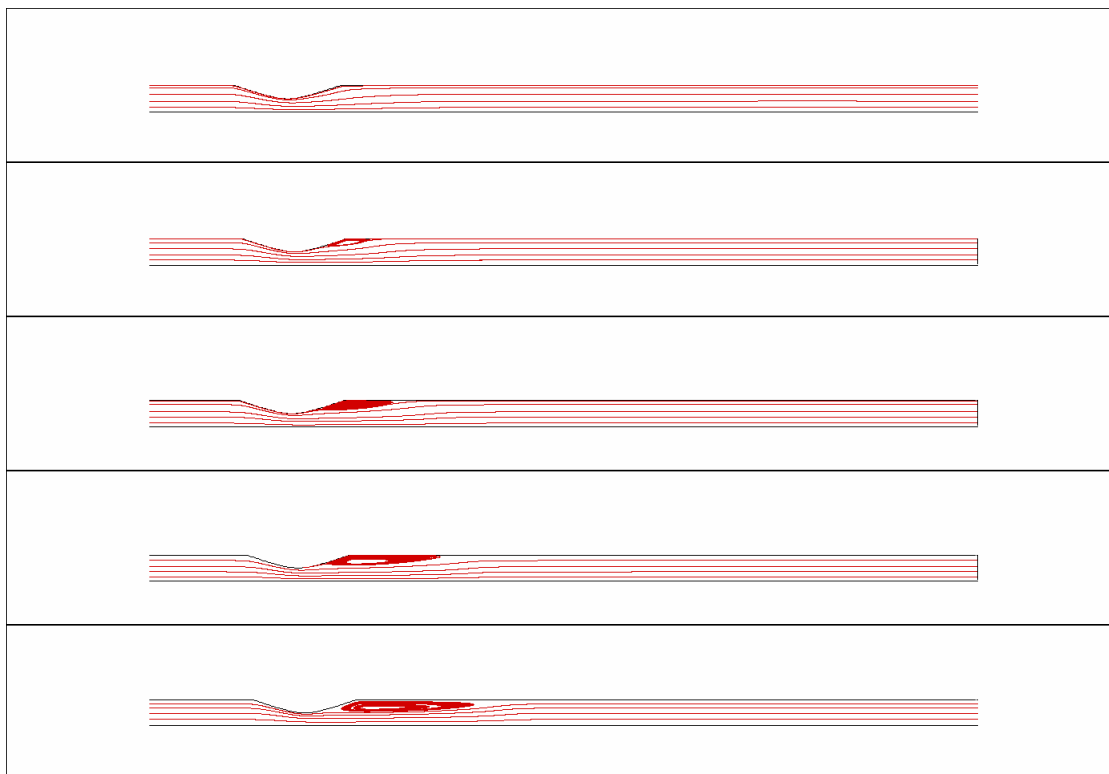
Δ5.39– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.5 - Re = 25, \tau = [0.1, 0.5]$



Δ5.40– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.6 - Re = 25, \tau = [0.6, 1]$



Δ5.41– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 25$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$

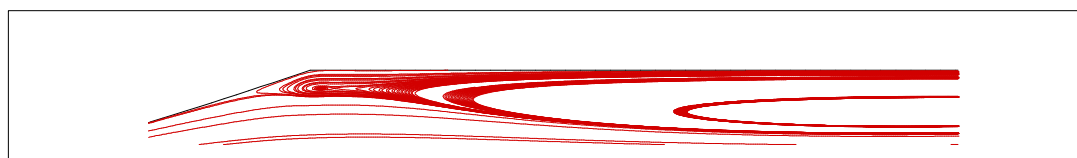


Δ5.42– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 25$ ,  $\tau = [0.6, 1]$

Μικρές διαφορές παρατηρούνται στη ροϊκή συμπεριφορά των τριών μοντέλων για  $Str = 0.5 - Re = 25$ .

Στην αρχή της νέας περιόδου ( $\tau = 0.1$ ), μόνο στο W-S μοντέλο εμφανίζεται να παραμένει μια μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας από την προηγούμενη περίοδο.

Παρατηρώντας με μεγαλύτερη προσοχή, στο ίδιο μοντέλο, την ίδια χρονική στιγμή, η μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας εγκολπώνει μία ακόμα δίνη, μεταξύ του αποκλίνοντος τμήματος της στένωσης και της μεγάλης δίνης (Σχ5.7).



Σχ.5.7 – περιοχή ανακυκλοφορίας με δύο δίνες στο W-S, το στιγμιότυπο  $\tau=0.1$

Η μικρή αυτή δίνη, στο αμέσως επόμενο στιγμιότυπο,  $\tau = 0.2$ , είναι το κυρίαρχο ροϊκό χαρακτηριστικό, μετά την απόσβεση της μεγάλης περιοχής ανακυκλοφορίας, λόγω της εισόδου στη φάση σταθερής παροχής και το μηδενισμό στην είσοδο του αγωγού, των χρονικών παραγώγων πίεσης και ταχύτητας.

Η δίνη αυτή, αμετάβλητη σε μέγεθος, θα παραμείνει στη θέση αυτή μέχρι την επιτάχυνση της ροής.

Στα άλλα μοντέλα, με την έναρξη της νέας περιόδου, κάθε ίχνος ανακυκλοφορίας, προερχόμενης από την προηγούμενη περίοδο, έχει εξαλειφθεί.

Για το νευτώνειο, στο επόμενο στιγμιότυπο ( $\tau = 0.2$ ), δημιουργείται μία οριακά ανιχνεύσιμη δίνη, στην ένωση αποκλίνοντος τμήματος και ευθύγραμμου αγωγού, ακριβώς όπως υπαγορεύεται από την περίπτωση πλήρως μόνιμης ροής, όπου έχουμε εμφάνιση ανακυκλοφορίας για  $Re \geq 25$ .

Η δίνη αυτή, αμετάβλητη σε μέγεθος, θα παραμείνει στη θέση αυτή μέχρι την επιτάχυνση της ροής, όπως και στο W-S μοντέλο.

Αντίθετα, για το H-B μοντέλο, παρότι στην περίπτωση της μόνιμης ροής εμφανίζει ανακυκλοφορία για  $Re \geq 20$ , δεν παρουσιάζει καμία περιοχή ανακυκλοφορίας μέχρι την επιτάχυνση της ροής (και πάλι βλέπουμε την επίδραση του 3 φορές μεγαλύτερου  $Bi \approx 1.5$ , σχετικά με αυτόν στη μόνιμη ροή  $Bi = 0.5$ , δίνοντάς μας το στοιχείο της αύξησης του οριακού  $Re_{critical}$ , πάνω από τον οποίο έχουμε αποκόλληση της ροής με την αύξηση του  $Bi$ ).

Στη φάση επιτάχυνσης, η μικρή δίνη στο νευτώνειο και το W-S αποσβένεται και καμία δίνη δεν παρατηρείται για  $\tau = 0.6$ .

Νέες δίνες σχηματίζονται για  $\tau = 0.7$  σε όλα τα μοντέλα, αυξανόμενες σε μήκος έως και την ολοκλήρωση της περιόδου ( $\tau = 1.0$ ).

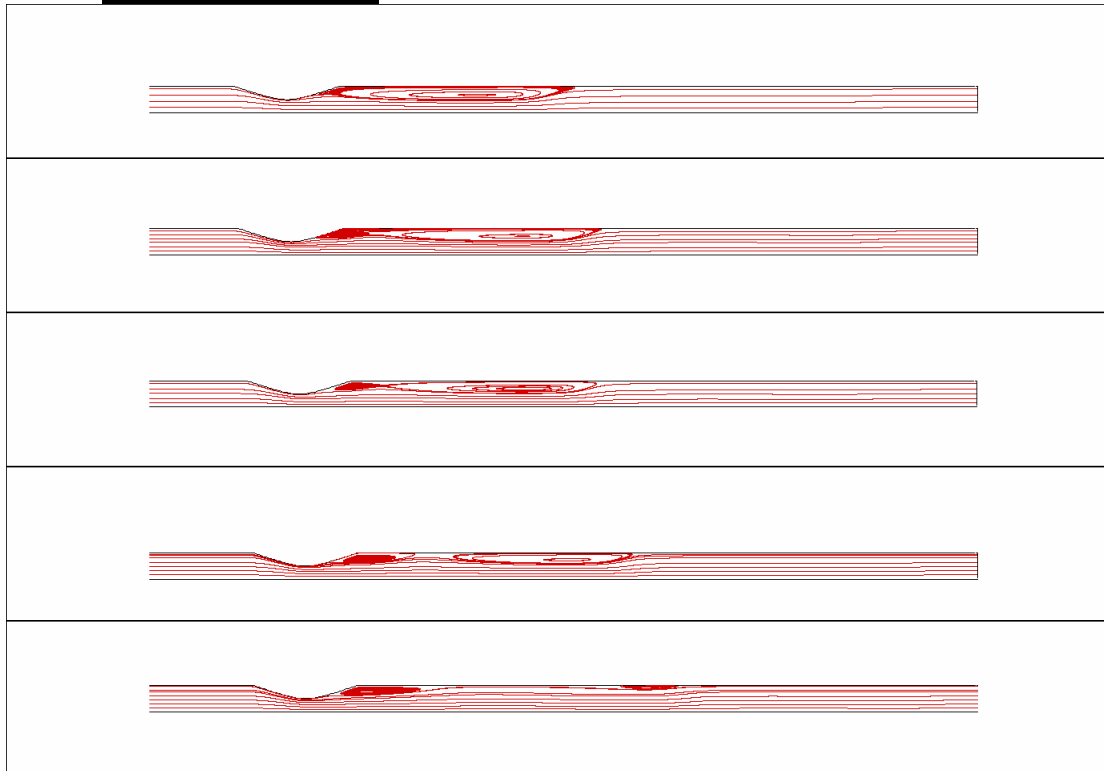
Η συμπεριφορά των ρευστών είναι διαφορετική από αυτή στην περίπτωση  $Str = 0.05 - Re = 100$ , καθώς οι περιοχές ανακυκλοφορίας είναι σημαντικά μικρότερες, λόγω του μειωμένου  $Re$ , ενώ ο αυξημένος  $Str$  φαίνεται να ευνοεί τα μη μόνιμα φαινόμενα και τη «γρηγορότερη» ανταπόκριση του ρευστού στις μεταβολές της ταχύτητας.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, παρά την κοινή τάξη μεγέθους του αριθμού Womersley  $\alpha = 2.80$  και  $\alpha = 4.43$  αντίστοιχα στις δύο περιπτώσεις ροής  $Str = 0.05 - Re = 100$  και

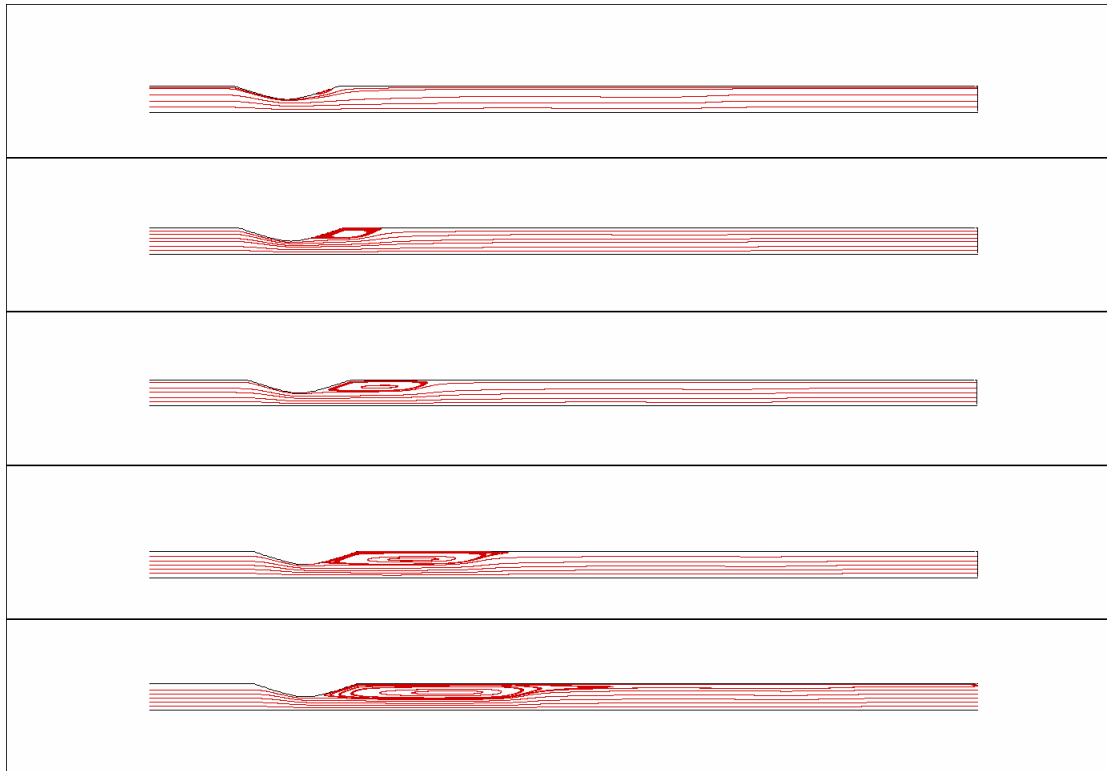
$Str = 0.5 - Re = 25$ , τα ροϊκά φαινόμενα είναι διαφορετικά και σχετιζόμενα με τον αριθμούς  $Re$  και  $Str$ .

Στην πρώτη περίπτωση, ο χαμηλός  $Str = 0.05$  υπογραμμίζει τη σημαντικότητα των φαινομένων αδράνειας, εκφραζόμενη με τη μη απόσβεση των περιοχών ανακυκλοφορίας, ενώ στη δεύτερη, ο υψηλότερος  $Str = 0.5$  με ενίσχυση των φαινομένων μη μονιμότητας, αυξάνει τη μεταβλητότητα του μήκους ανακυκλοφορίας (το αναγκάζει να αυξηθεί έως και 10 φορές από αυτό της μόνιμης ροής στο νευτώνειο, όπως θα δούμε και σε άλλη παράγραφο).

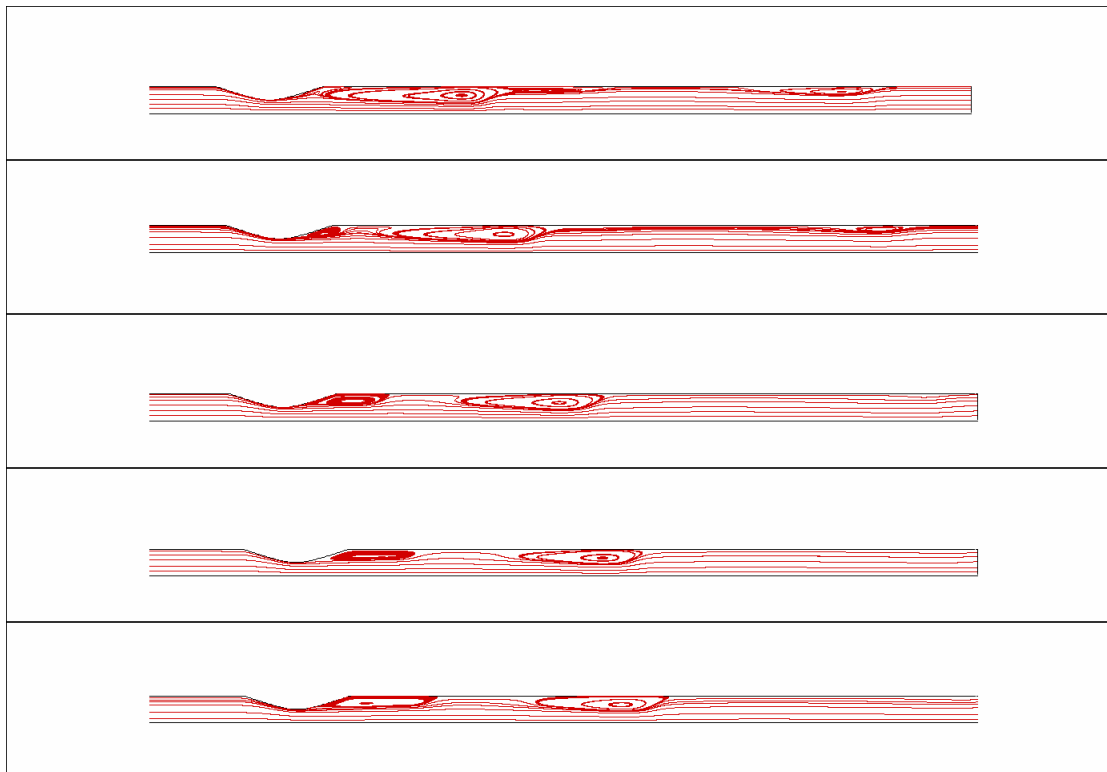
- **Str=0.5 – Re=100**



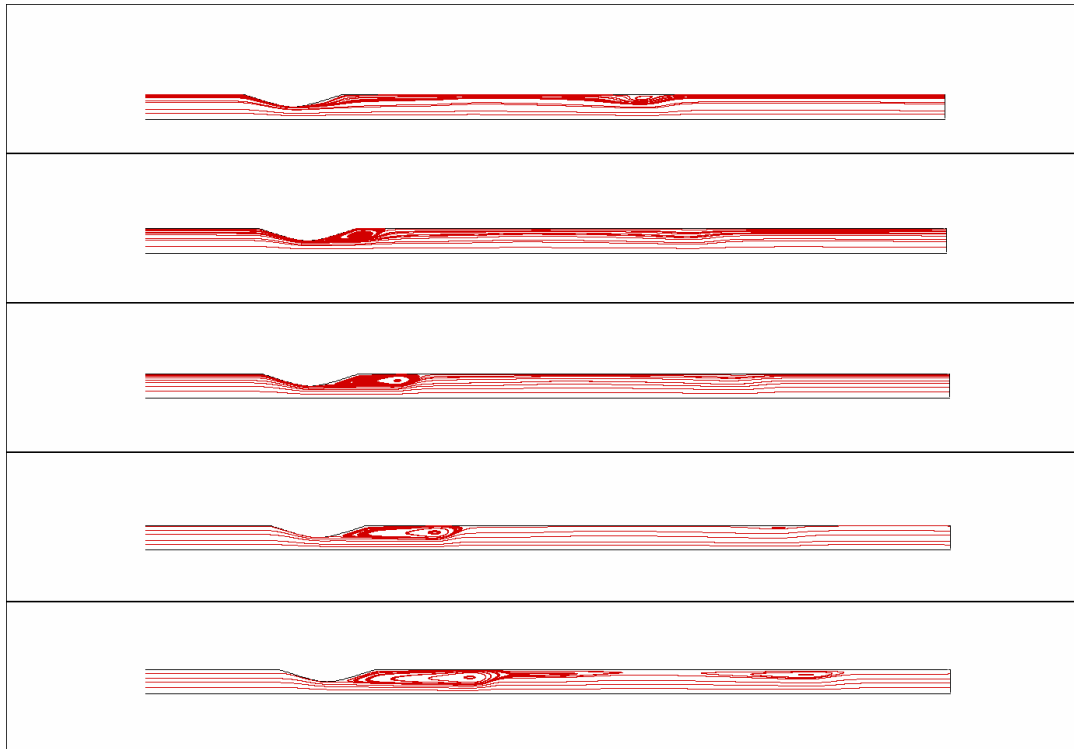
Δ5.43– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



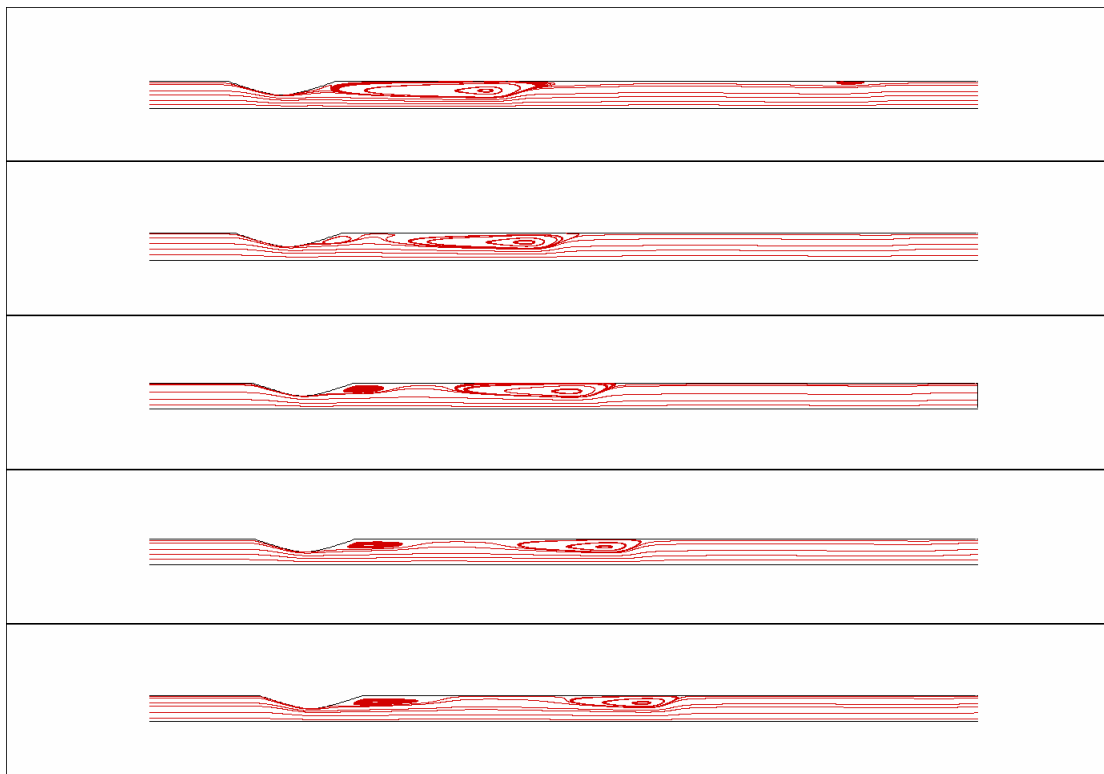
Δ5.44– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$



Δ5.45– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$

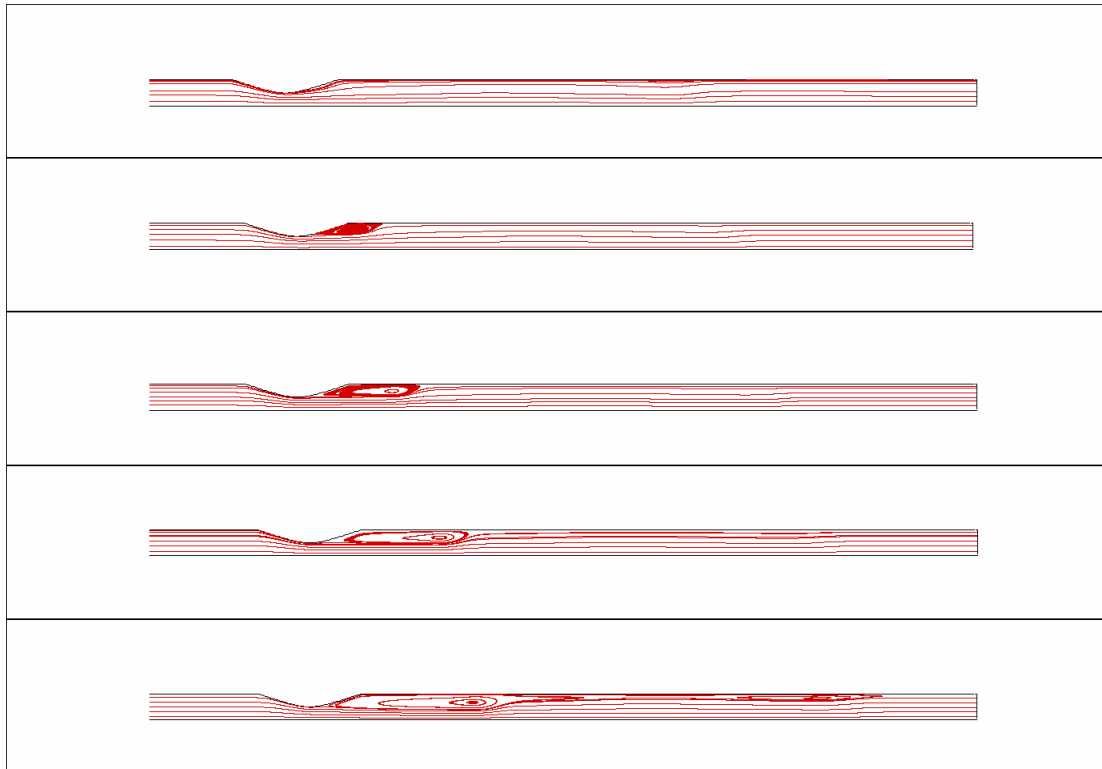


Δ5.46– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$



Δ5.47– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$





Δ5.48– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$

[ Στην περίπτωση αυτή,  $Str = 0.5 - Re = 100$ , και στις επόμενες ροές, έχουμε την έκλυση αρκετών δινών, διαφορετικού αριθμού σε κάθε μοντέλο, και με δυσκολία μπορούμε να διατήρησουμε κοινή σειρά ονομασίας των δινών μεταξύ των μοντέλων.

Για το λόγο αυτό, το γράμμα των δινών θα εμφανίζεται μαζί με το όνομα του μοντέλου.

Η ονομασία των δινών σχετίζεται τόσο με τον τόπο εμφάνισής τους, όσο και με το χρόνο εμφάνισής τους.

Γενικά, για δύο δίνες του ίδιου μοντέλου, η απόσταση τους από τη στένωση είναι αύξουσα συνάρτηση του αύξοντα αριθμού του γράμματος ονομασίας τους ( $A, B$  κλπ), αν αυτές εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Έτσι, πχ μία δίνη  $A$  ενός μοντέλου, βρίσκεται ανάντι της δίνης  $B$  του μοντέλου αυτού, όταν αυτές εμφανίζονται ταυτόχρονα. Και αυτό συμβαίνει, γιατί μπορεί η  $B$  να ξεκίνησε από τη θέση που βρίσκεται η  $A$  στη στιγμή που εξετάζουμε, αλλά να ταξίδεψε μέχρι τη μελετούμενη θέση, όσο η  $A$  δεν είχε σχηματιστεί.

[ Όσες δίνες δε μετατοπίζονται, δεν ονομάζονται, απλώς αναφέρονται. ]

Η νέα περίοδος ξεκινά ( $\tau = 0.1$ ) με την παρουσία, σε όλα τα μοντέλα, μίας μεγάλης περιοχής ανακυκλοφορίας ( $B-n$ ,  $C-ws$  και  $B-hb$ ) κατάντι της στένωσης.

Παρατηρώντας σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια, διαπιστώνουμε μερικές διαφορές στα τρία μοντέλα.

Στα δύο μη νευτώνεια ρευστά, ακριβώς στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης, έχει ήδη δημιουργηθεί μία μικρή δίνη ( $A-ws$  και  $A-hb$ ), η οποία στα επόμενα χρονικά βήματα θα μεγενθυνθεί.

Ακόμα μία δίνη ( $D-ws$  και  $C-hb$ ), που προφανώς έχει απομείνει από την προηγούμενη περίοδο, μετακινείται κατά την κατεύθυνση της ροής, περίπου 10 διαμέτρους κατάντι της στένωσης. Αυτή στο W-S είναι σημαντικά μεγαλύτερη (περίπου 4 φορές) από την αντίστοιχη στο H-B μοντέλο.

Στο W-S επίσης, χαρακτηριστική είναι και μία ακόμα δίνη, αντίστροφης φοράς από τις υπόλοιπες (στρέφεται αντιωρολογιακά), στο χώρο μεταξύ της πρόσφατα σχηματισμένης μικρής δίνης και της μεγάλης περιοχής ανακυκλοφορίας.

Η αντίστροφη αυτή δίνη αποσβέννεται στο αμέσως επόμενο στιγμιότυπο,  $\tau = 0.2$ .

Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στο νευτώνειο ή το H-B μη νευτώνειο ρευστό για αυτές τις συνθήκες ροής, αλλά θα το συναντήσουμε σε επόμενες περιπτώσεις ροής και για αυτά τα μοντέλα.

Προχωρώντας στο επόμενο χρονικό βήμα,  $\tau = 0.2$ , η συμπεριφορά των μη νευτώνειων ρευστών γίνεται παρόμοια, καθώς η μικρή δίνη στη στένωση ( $A-ws$  και  $A-hb$ ) μεγενθύνεται και πλέον εκτός από το αποκλίνον τμήμα της στένωσης φτάνει και στο ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού.

Η δε μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας ( $B-n$ ,  $C-ws$  και  $B-hb$ ) συνεχίζει ελλειπτική το ταξίδι της κατά την κατεύθυνση της ροής. Το ίδιο συμβαίνει και με τη δίνη μακριά από τη στένωση ( $D-ws$ ), στο W-S, ενώ στο H-B η  $C-hb$  προλαβαίνει και αποσβέννεται πριν φτάσει στην έξοδο του αγωγού, προφανώς υπό την επίδραση της σταθερής παροχής.

Στο νευτώνειο, έχουμε τη δημιουργία δύο δινών ( $A-n$  &  $B-n$ ), που προκύπτουν στο εσωτερικό της προηγούμενης ενιαίας  $B-n$  μεγάλης περιοχής ανακυκλοφορίας του στιγμιότυπου  $\tau = 0.1$ .

Για τη στιγμή  $\tau = 0.3$ , τα ροϊκά χαρακτηριστικά φαίνονται ίδια σε όλα τα μοντέλα, αλλά δε θα πρέπει να ξεχνάμε ότι τα αίτια δημιουργίας τους είναι διαφορετικά.

Έτσι, έχουμε την προέλαση, κατά την κατεύθυνση της ροής, των  $B-n$ ,  $C-ws$  και  $B-hb$ , σε όλα τα μοντέλα, αφού πλέον και στο νευτώνειο υπάρχει πλήρης διαχωρισμός των δύο δινών. Τέλος, στο W-S, η  $D-ws$  συνεχίζει να κατευθύνεται εκτός του αγωγού, σμικρυνόμενη.

Η  $D-ws$ , οριακά εμφανίζεται και στο χρόνο  $\tau = 0.4$ , ενώ τα υπόλοιπα ροϊκά χαρακτηριστικά παραμένουν ίδια, με τις  $A$  δίνες να αυξάνουν το μήκος τους και τις  $B-n$ ,  $C-ws$ ,  $B-hb$  να κινούνται ελλειπτικές στην κατεύθυνση ροής.

Στο τέλος της φάσης μόνιμης ροής ( $\tau = 0.5$ ) και πριν τα φαινόμενα μη μονιμότητας αρχίσουν να επιδρούν σημαντικά στη ροή, στο νευτώνειο ρευστό η  $B-n$  έχει σχεδόν αποσβεστεί, ενώ στα μη νευτώνεια οι αντίστοιχες  $C-ws$  και  $B-hb$ , συνεχίζουν να υπάρχουν. Η περιοχή ανακυκλοφορίας που περιλαμβάνει την  $A-ws$ , αποκτά και δεύτερο κέντρο την  $B-ws$ .

Στο W-S, το μέγεθός της  $C-ws$  είναι αρκετά σημαντικό και παρόμοιο με αυτό της δίνης  $A$ , την ίδια στιγμή.

Αμέσως μετά την αλλαγή της παροχής, αξίζει να αναλύσουμε τι συμβαίνει σε χρόνο  $\tau = 0.55$ , αφού τα φαινόμενα μεταβάλλονται γρήγορα.

Με την επιτάχυνση της ροής, υπάρχει η τάση απόσβεσης κάθε ροϊκού χαρακτηριστικού των προηγούμενων στιγμών. Έτσι, σε όλα τα μοντέλα, εξαλείφονται όλες οι  $A$  δίνες στην περιοχή της στένωσης.

Στα μη νευτώνεια μοντέλα, η στροβιλότητα της ροής στην περιοχή των *C-ws* και *B-hb* δινών εξακολουθεί να είναι σημαντική, με αποτέλεσμα η μεν *C-ws* δίνη να υφίσταται ακόμη, η δε *B-hb* οριακά να έχει αποσβεστεί.

Τη στιγμή  $\tau = 0.6$ , σε όλα τα μοντέλα επαναδημιουργούνται οι δίνες στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης (*A* δίνες).

Στα μη νευτώνεια η στροβιλότητα στο ευθύγραμμο τμήμα μειώνεται, με αποτέλεσμα την περαιτέρω μείωση του μεγέθους της *C-ws*.

Κατά την τελευταία φάση επιτάχυνσης της ροής, την  $\tau = 0.7$ , κάθε δίνη στο ευθύγραμμο κομμάτι του αγωγού έχει εξαλειφθεί και οι *A* δίνες, σε όλα τα μοντέλα, μεγενθύνονται σχηματίζοντας μεγάλες περιοχές ανακυκλοφορίας.

Η έναρξη της επιβράδυνσης της ροής ( $\tau = 0.75$ ), δε φαίνεται να επηρεάζει την τάση αύξησης των περιοχών ανακυκλοφορίας, ούτε προκαλεί την εμφάνιση άλλων δινών την  $\tau = 0.8$ .

Όσον αφορά τις περιοχές ανακυκλοφορίας, η μεγένθυσή τους συνεχίζεται και στην  $\tau = 0.9$  χρονική στιγμή, όμως στα μη νευτώνεια μοντέλα, επανεμφανίζονται οι *D-ws* και *C-hb* δίνες, περίπου 10 διαμέτρους κατάντι της στένωσης.

Στη λήξη της περιόδου ( $\tau = 1.0$ ), οι *A* δίνες των μη νευτώνειων και οι *D-ws*, *C-hb* επιμηκνόμενες υπό την επίδραση της αναρρόφησης, που επιβάλλει η επιβράδυνση της ροής, τείνουν να ενωθούν. Ακριβώς για τον ίδιο λόγο, σε όλα τα μοντέλα εμφανίζεται μία δίνη κοντά στην έξοδο, χωρίς να επανέρχεται στο πεδίο ροής, σε κανένα άλλο στιγμιότυπο της περιόδου.

Με την αρχή της επόμενης περιόδου, είμαστε αναγκασμένοι να μετονομάσουμε την *A-ws* σε *C-ws* και τις *A-n* και *A-hb* σε *B-n* και *B-hb*, αφού αυτές θα παραμείνουν μετατοπιζόμενες στον αγωγό, ενώ οι αντικαθιστούμενες εξαφανίζονται.

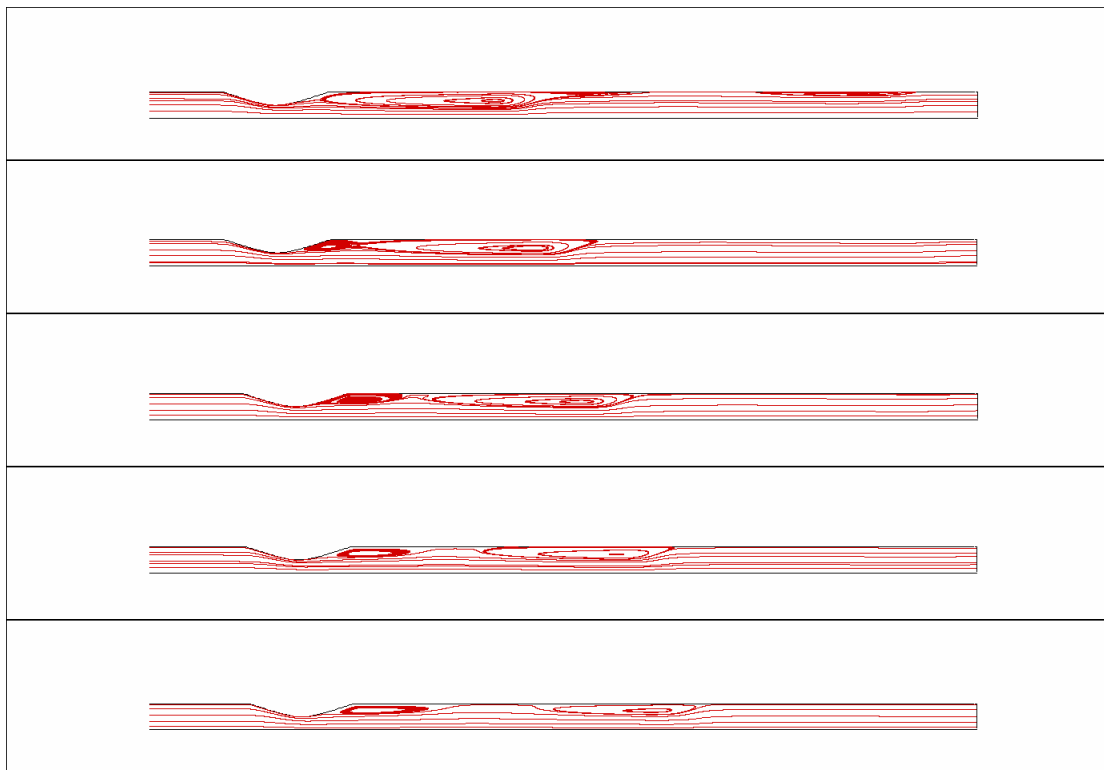
Σε αυτή την περίπτωση της ροής, βλέπουμε ότι τα μεγέθη των δινών είναι πολύ μεγαλύτερα σχετικά με αυτά που παρατηρούνταν στη ροή για  $Str = 0.5 - Re = 25$ , αλλά διατηρείται η έντονη μεταβλητότητα των ροϊκών χαρακτηριστικών, ιδίως στη μη μόνιμη φάση της ροής.

Στον αντίποδα, βρίσκεται η περίπτωση ροής  $Str = 0.05 - Re = 100$ , όπου η μορφή της ροής είναι αμετάβλητη (μοναδική περιοχή ανακυκλοφορίας κατάντι της στένωσης, καθόλη τη διάρκεια της περιόδου), αλλά τα μήκη της περιοχής ανακυκλοφορίας είναι συγκρίσιμα με τη ροή που εξετάζουμε.

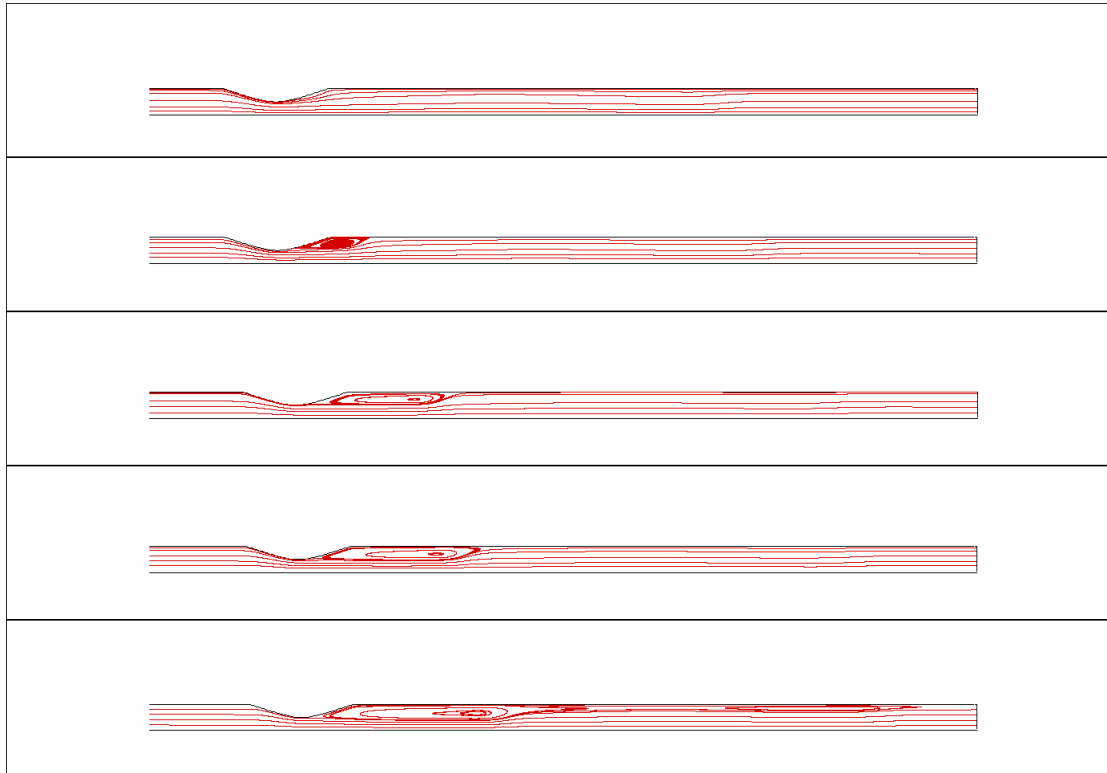
$Str = 0.5 - Re = 100$											
$\tau$	$A-n$	$B-n$		$A-ws$	$B-ws$	$C-ws$	$D-ws$		$A-hb$	$B-hb$	$C-hb$
0.10	0	√		√	0	√	√		√	√	√
0.20	√	√		√	0	√	√		√	√	0
0.30	√	√		√	0	√	√		√	√	0
0.40	√	√		√	0	√	√		√	√	0
0.50	√	√		√	√	√	0		√	√	0
0.60	√	0		√	0	√	0		√	0	0
0.70	√	0		√	0	0	0		√	0	0
0.80	√	0		√	0	0	0		√	0	0
0.90	√	0		√	0	√	0		√	0	√
1.00	√	√		√	0	√	0		√	0	√

Π5.2 – συγκετρωτικός πίνακας εμφάνισης δινών στη ροή  $Str = 0.5 - Re = 100$

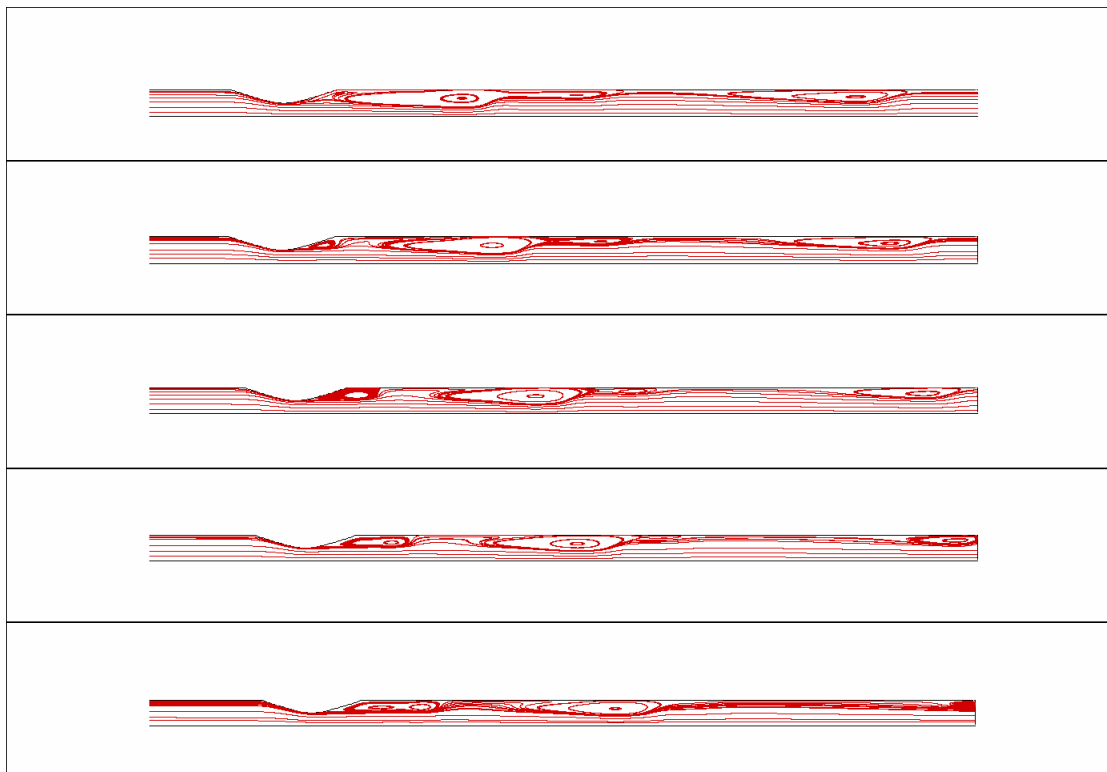
• **Str=0.5 – Re=150**



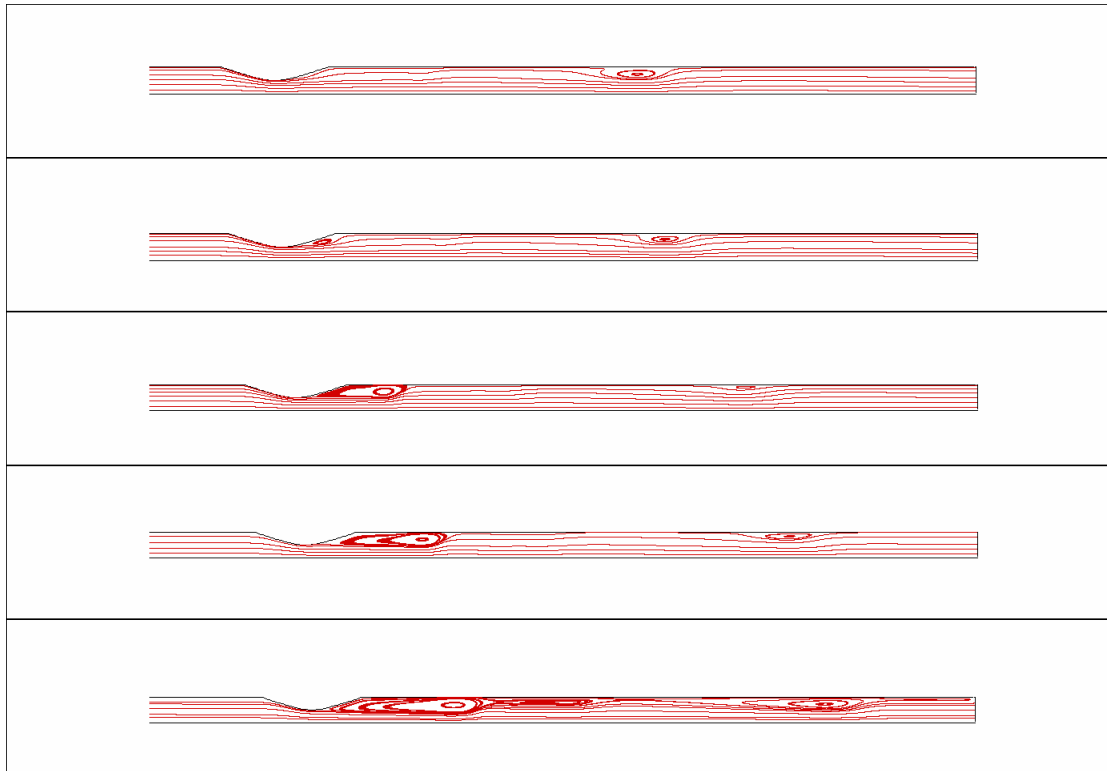
Δ5.49– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 150$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



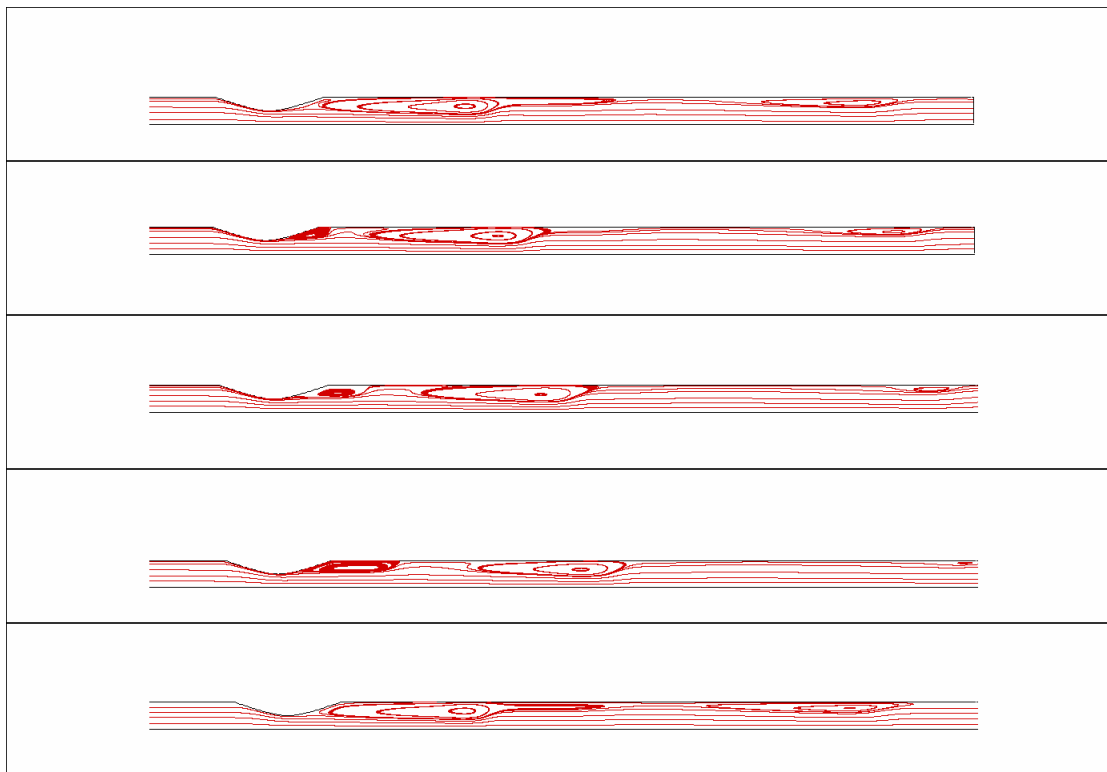
Δ5.50– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 150, \tau = [0.6, 1]$



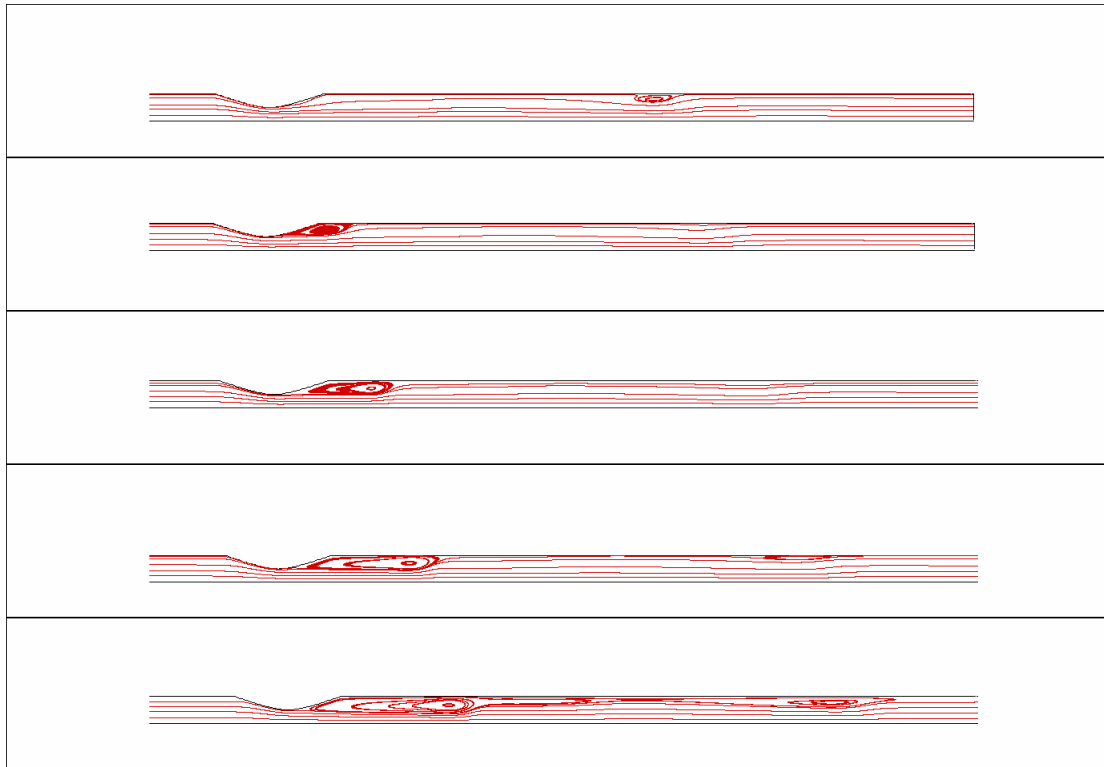
Δ5.51– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.5 - Re = 150, \tau = [0.1, 0.5]$



Δ5.52– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 0.5 - Re = 150, \tau = [0.6, 1]$



Δ5.53– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 150, \tau = [0.1, 0.5]$

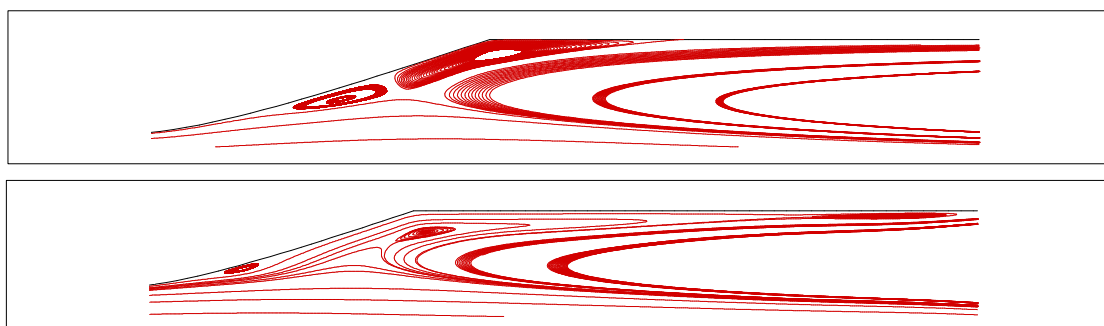


Δ5.54– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 0.5 - Re = 150$ ,  $\tau = [0.6, 1]$

Με την εκκίνηση της νέας περιόδου παρατηρούμε την τάση του W-S μοντέλου να δημιουργεί περισσότερες δίνες σχετικά με τα άλλα.

Για  $\tau = 0.1$ , όλα τα ρευστά εμφανίζουν τη δομή που πρωτοπαρουσιάστηκε στην προηγούμενη ροή, την ίδια στιγμή, μόνο στο W-S.

Αυτή αποτελείται από μία μικρή σχηματιζόμενη δίνη στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης (*A-n*, *B-ws* και *B-hb*), μία μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας και μία αντίστροφα στρεφόμενη περιοχή ανακυκλοφορίας (στρέφεται ωρολογιακά και αντίθετα από τις άλλες). Χαρακτηριστικά στο W-S, η περιοχή αυτή εσωκλείει δύο δίνες (Σχ5.8).



Σχ.5.8 – περιοχές ανακυκλοφορίας με αντίστροφα στρεφόμενες δίνες, στο νευτώνειο και στο W-S, το στιγμιότυπο  $\tau=0.1$

Η μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας στο W-S, περιέχει δύο κέντρα δινών (*D-ws* & *E-ws*), σε αντίθεση με τα άλλα, στα οποία εμφανίζεται με μοναδικό κέντρο (*B-n* και *C-hb*).

Σε όλα τα μοντέλα, δίνες υπάρχουν και στον ευθύγραμμο αγωγό κατάντι της στένωσης, οι *C-n*, *D-hb*, *F-ws*, *G-ws*.

Στο επόμενο βήμα,  $\tau = 0.2$ , στα δύο μη νευτώνεια ρευστά οι αντίστροφα στρεφόμενες περιοχές έχουν αποσβεστεί, με ταυτόχρονη μετατόπιση των μεγάλων περιοχών ανακυκλοφορίας *C-ws* & *D-ws* και *C-hb* και αύξηση του μεγέθους των *B-ws* και *B-hb*.

Στο νευτώνειο ρευστό, όμως, η αντίθετα στρεφόμενη περιοχή ανακυκλοφορίας αυτονομείται μετακινούμενη στο τοίχωμα του αγωγού και οι δύο δίνες *A-n* και *B-n* τείνουν να ενωθούν.

Οι δίνες *E-hb* και *F-ws* μετακινούνται κατά την κατεύθυνση της ροής, ενώ η *C-n* στο νευτώνειο ρευστό αποσβέννεται.

Για  $\tau = 0.3$ , τα ροϊκά χαρακτηριστικά των τριών ρευστών διαφέρουν σημαντικά.

Στο νευτώνειο πλέον υπάρχουν μόνο οι *A-n* και *B-n*.

Στο H-B, η μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας μακριά από τη στένωση διαθέτει μοναδική δίνη την *C-hb*, αλλά και η *E-hb*, σμικρυνόμενη, ταξιδεύει προς την έξοδο του αγωγού.

Στο W-S, τέλος, όλες οι δίνες που υπήρχαν την προηγούμενη στιγμή εξακολουθούν να υπάρχουν.

Την  $\tau = 0.4$ , τα χαρακτηριστικά κάθε μοντέλου συνεχίζουν με την ίδια συμπεριφορά όπως προηγουμένως.

Στο μισό της περιόδου,  $\tau = 0.5$ , το νευτώνειο δεν παρουσιάζει καμία μεταβολή.

Στα μη νευτώνεια, όμως, έχουμε την παραγωγή νέας δίνης.

Παράγονται οι *A-ws* και *A-hb*, μετά από διάσπαση του κέντρου των *B-ws* και *B-hb*, που συνεχίζουν να υπάρχουν.

Η *E-ws*, μετατοπίζεται προς την έξοδο του αγωγού, ενώ η *E-hb* αποσβέννεται.

Η επίδραση της επιτάχυνσης της ροής γίνεται φανερή στο στιγμιότυπο  $\tau = 0.55$ , όπου κάθε δίνη στην περιοχή της στένωσης αποσβέννεται και μόνο οι *D-ws* και *C-hb*, ευρισκόμενες ήδη αρκετά μακριά από τη στένωση «επιβιώνουν».

Για  $\tau = 0.6$ , επανεμφανίζεται η δίνη στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης σε όλα τα μοντέλα (*A* δίνες), ενώ στα μη νευτώνεια η αυξανόμενη παροχή ελαττώνει το μέγεθος των *D-ws* και *C-hb*.

Στο επόμενο χρονικό βήμα,  $\tau = 0.7$ , οι *A* δίνες μεγενθύνονται, ενώ οι διαταραχές των γραμμών ροής στο ευθύγραμμο τμήμα κατάντι της στένωσης ομαλοποιούνται, λόγω της συνεχιζόμενης επιτάχυνσης, με αποτέλεσμα την απόσβεση της *C-hb* και τη σημαντική μείωση του μεγέθους της *D-ws*.

Στην πρώτη φάση επιβράδυνσης της ροής, τα σχετιζόμενα με αυτή φαινόμενα δεν εμφανίζονται για  $\tau = 0.8$ , και η μορφή της ροής είναι ίδια με αυτή της προηγούμενης στιγμής, για όλα τα μοντέλα.

Η αυξημένη στροβιλότητα, αρκετά μακριά της στένωσης, με τη βοήθεια της επιβράδυνσης της ροής, δημιουργεί, τη στιγμή  $\tau = 0.9$ , τις *C-n*, *B-ws* και *C-ws*, *D-hb*. Πέρα από αυτές, οι *A* δίνες μεγενθύνονται.



Με την ολοκλήρωση της περιόδου,  $\tau = 1.0$ , η οξεία μείωση της ταχύτητας, δημιουργεί τις *B-n* και *C-n* στο νευτόνιο και τις *E-hb* και *E-ws*. Στο *W-S*, η *B-ws* συσσωματώνεται με την *C-ws*.

Για την ενιαιότητα της ονοματολογίας, μετονομάζουμε τις παρακάτω δίνες και προχωρούμε στην επόμενη περίοδο.

*A-n* και *B-n* σε *B-n* και *C-n* αντίστοιχα.

*A-ws*, *C-ws*, *D-ws* και *E-ws* σε *D-ws*, *E-ws*, *F-ws* και *G-ws*.

*A-hb* σε *C-hb*.

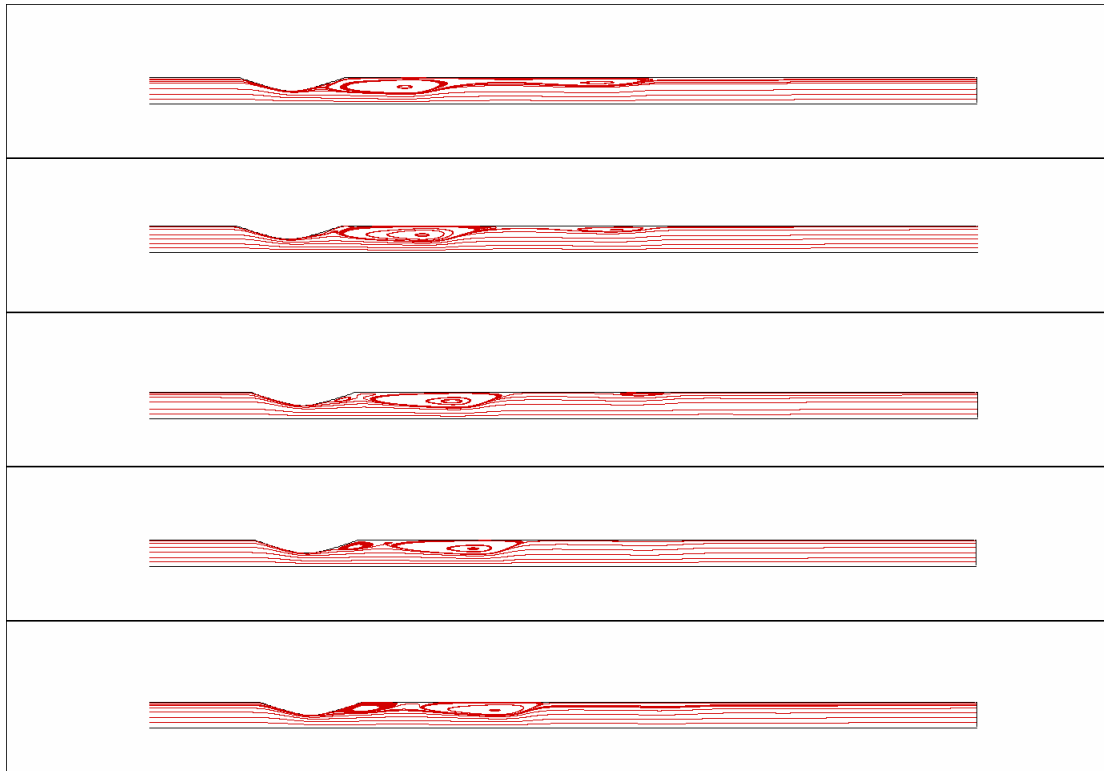
Υπό τις συνθήκες αυτές και συγκρίνοντας με τη βασική περίπτωση ροής, για  $Str = 0.5$  –  $Re = 100$ , παρατηρούμε τη μεγαλύτερη ευκολία στη δημιουργία δινών, που και θεωρητικά ευνοείται από τη μεγαλύτερη αδράνεια που παρουσιάζουν οι ροές υψηλότερων  $Re$ .

Αντίθετα, στη βασική περίπτωση είναι πολύ πιο εύκολη η απόσβεση των δινών, όπως αναμένεται πχ σε ροές υψηλού ιξώδους.

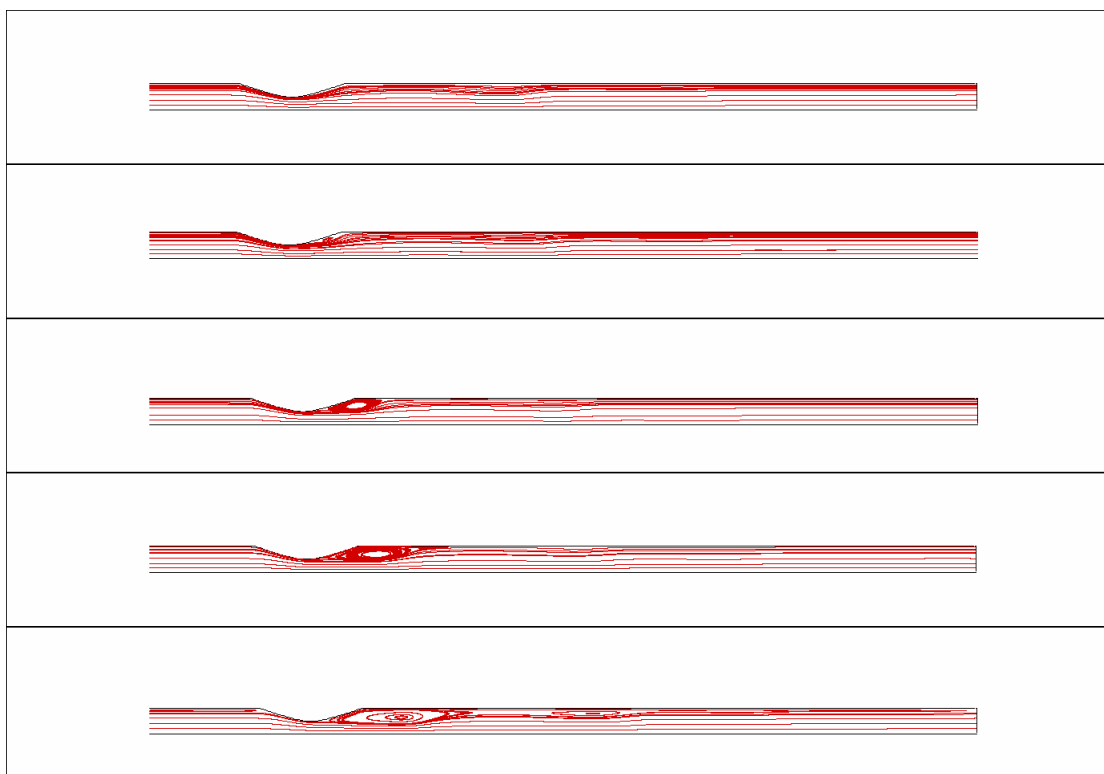
<i>Str = 0.5 – Re = 150</i>															
$\tau$	<b>A-n</b>	<b>B-n</b>	<b>C-n</b>	<b>A-ws</b>	<b>B-ws</b>	<b>C-ws</b>	<b>D-ws</b>	<b>E-ws</b>	<b>F-ws</b>	<b>G-ws</b>	<b>A-hb</b>	<b>B-hb</b>	<b>C-hb</b>	<b>D-hb</b>	<b>E-hb</b>
0.10	√	√	√	0	√	0	√	√	√	0	0	√	√	√	0
0.20	√	√	0	0	√	0	√	√	√	0	0	√	√	√	0
0.30	√	√	0	0	√	0	√	√	√	0	0	√	√	√	0
0.40	√	√	0	0	√	0	√	√	√	0	0	√	√	√	0
0.50	√	√	0	√	√	0	√	0	√	0	√	√	√	0	0
0.60	0	√	0	√	0	0	√	0	0	0	√	0	√	0	0
0.70	0	√	0	√	0	0	√	0	0	0	√	0	0	0	0
0.80	0	√	0	√	0	0	√	0	0	0	√	0	0	0	0
0.90	0	√	√	√	√	√	√	0	0	0	√	0	0	√	0
1.00	0	√	√	√	0	√	√	√	0	0	√	0	0	√	√

Π5.3 – συγκεντρωτικός πίνακας εμφάνισης δινών στη ροή  $Str = 0.5 – Re = 150$

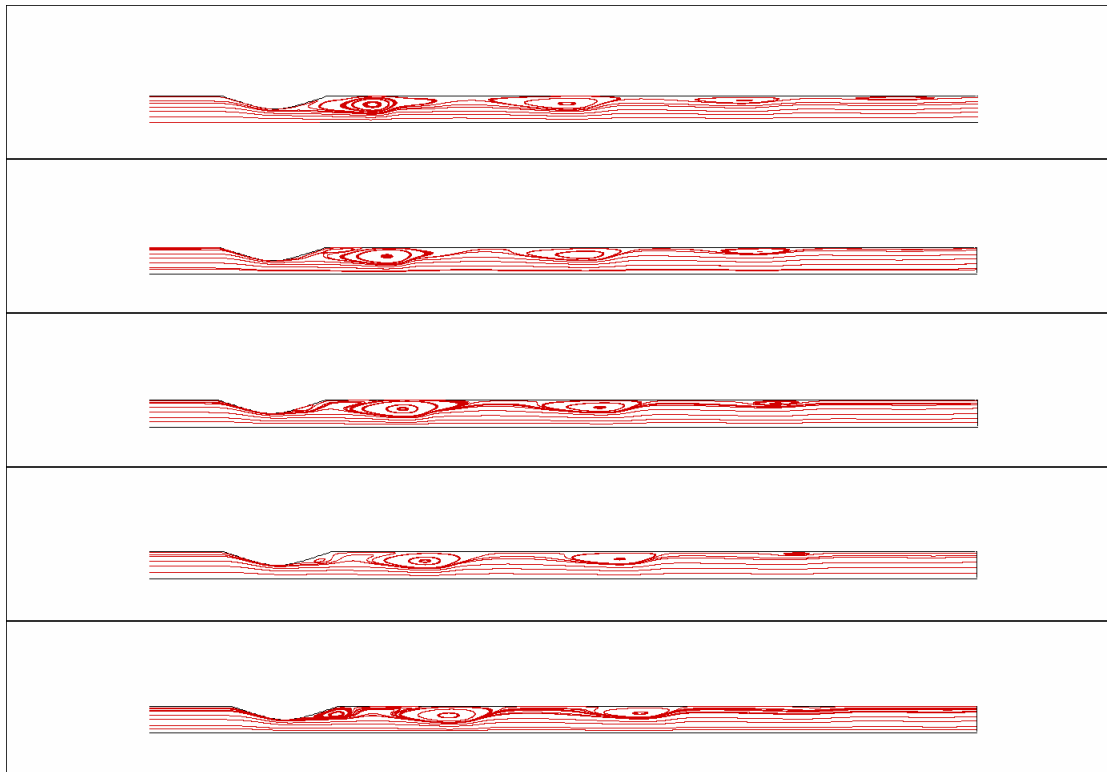
- **Str=1 – Re=100**



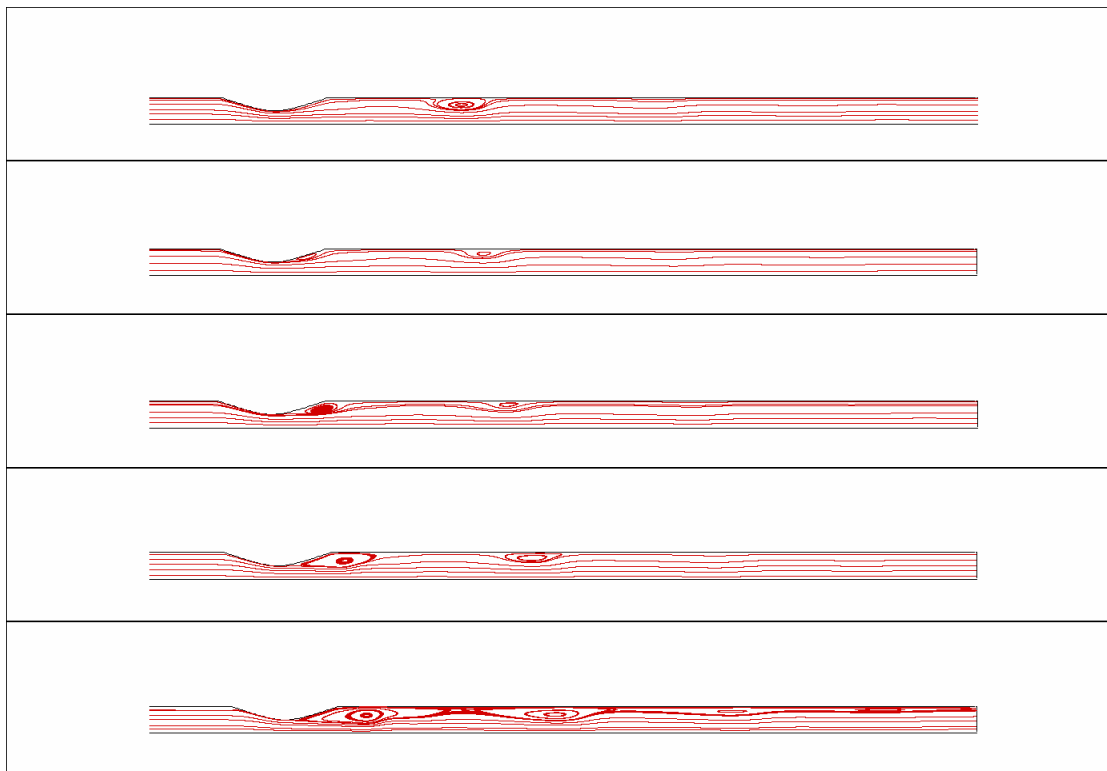
Δ5.55– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



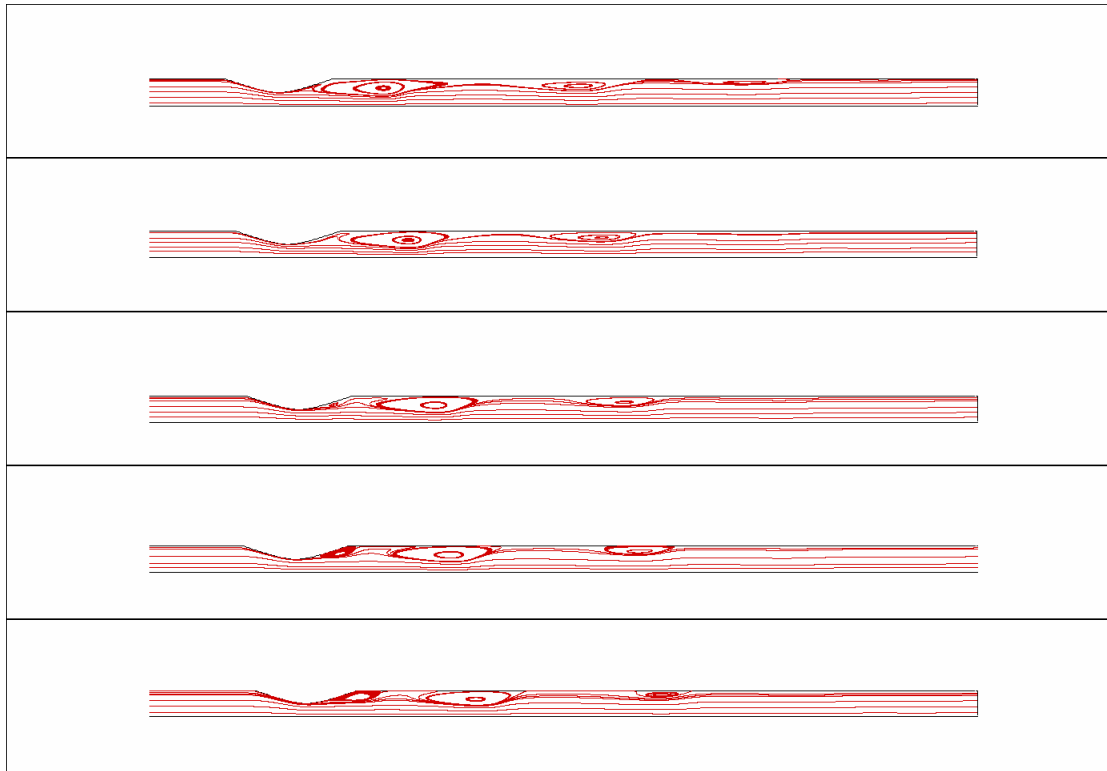
Δ5.56– γραμμές ροής: νευτώνειο,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$



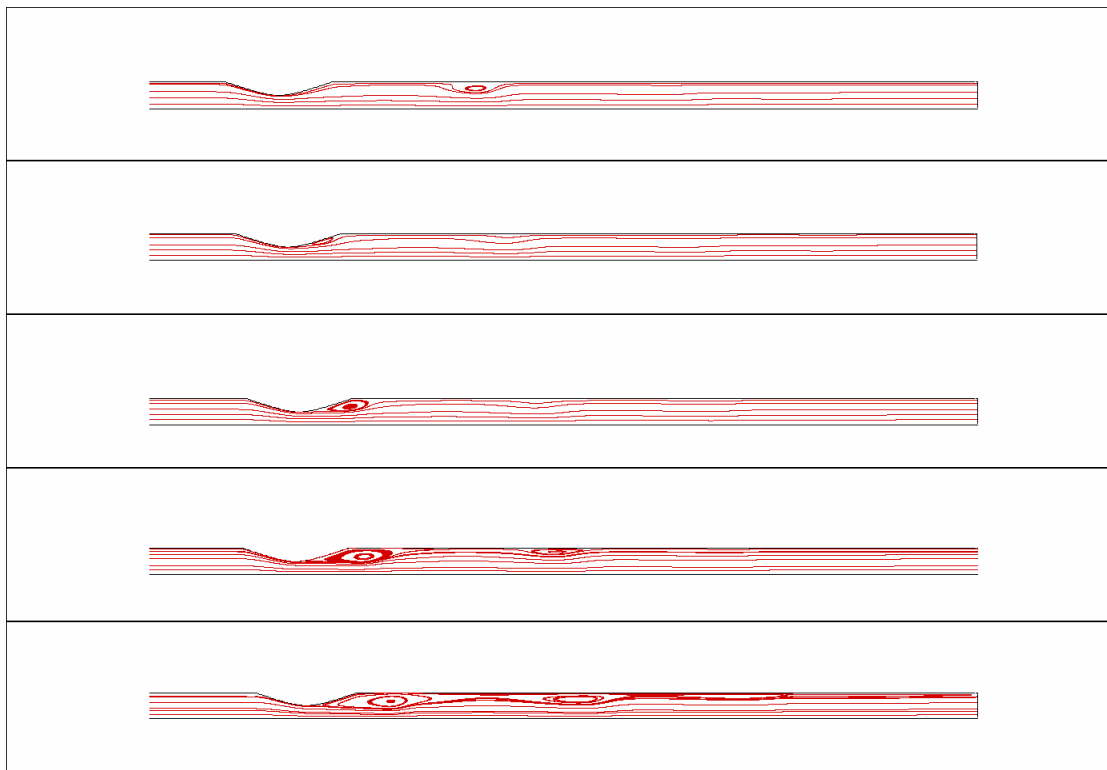
Δ5.57– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



Δ5.58– γραμμές ροής: W-S,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$



Δ5.59– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.1, 0.5]$



Δ5.60– γραμμές ροής: H-B,  $Str = 1 - Re = 100$ ,  $\tau = [0.6, 1]$

Στην αρχή της περιόδου,  $\tau = 0.1$ , παρατηρείται παρόμοια δομή με την αντίστοιχη για  $Str = 0.5 - Re = 150$ , δηλαδή εμφανίζεται μία μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας ( $B$  περιοχές ανακυκλοφορίας, για όλα τα μοντέλα) και μία αντίστροφα στρεφόμενη δίνη (στρέφεται ωρολογιακά).

Η βασική διαφορά είναι, ότι δεν υπάρχει ακόμα δίνη στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης.

Αυτή θα εμφανιστεί στο αμέσως επόμενο βήμα,  $\tau = 0.2$ , στο νευτώνειο ( $A-n$ ) και ενώ η αντίστροφη δίνη στιγμιαία αποσβένεται. Ενδιαφέρον είναι ότι, η αντίστροφη δίνη επανεμφανίζεται τη χρονική στιγμή  $\tau = 0.3$ .

Σε κανένα από τα μη νευτώνεια ρευστά, δεν αναπτύσσεται την  $\tau = 0.2$  η δίνη στο αποκλίνον τμήμα της στένωσης, ενώ η αντίστροφη δίνη αποσβένεται στο H-B, όχι όμως και στο W-S.

Κατά το χρονικό αυτό διάστημα, κατάντι των  $B$  περιοχών ανακυκλοφορίας, που μετατοπίζονται κατά την κατεύθυνση της ροής, αναπτύσσεται ένας αριθμός δινών, διαφορετικός σε κάθε μοντέλο.

Οι  $C$  σε όλα τα μοντέλα και στα μη νευτώνεια οι  $D-ws$  και οι  $D-hb$ ,  $E-ws$  που αποσβένονται την  $\tau = 0.2$ .

Φτάνοντας στην  $\tau = 0.3$ , το W-S παρουσιάζει ίδια ροϊκά χαρακτηριστικά στην περιοχή της στένωσης με το νευτώνειο, αφού εμφανίζεται και σε αυτό η  $A$  δίνη. Κατάντι αυτών, οι δίνες που εμφανίζονταν την προηγούμενη χρονική στιγμή μετατοπίζονται και μικραίνουν.

Την  $\tau = 0.4$ , η αντίστροφη δίνη οριακά υπάρχει ακόμα μόνο στο νευτώνειο, ενώ στο W-S αποσβένεται.

Στο νευτώνειο, όμως, αποσβένεται η  $C-n$ , σε αντίθεση με τις  $C$  δίνες των άλλων μοντέλων και την  $D-ws$ .

Στην αρχή της μη μόνιμης ροής,  $\tau = 0.5$ , σε όλα τα μοντέλα, στην περιοχή κατάντι της στένωσης, τα χαρακτηριστικά της ροής είναι ίδια.

Αυτό που αλλάζει είναι ο αριθμός των δινών κατάντι της  $B$  δίνης. Έτσι, στο W-S έχουμε δύο ακόμα δίνες ( $C-ws$  και  $D-ws$ ), στο H-B μία ( $C-hb$ ) και στο νευτώνειο καμία.

Η εικόνα των γραμμών ροής μεταξύ των στιγμών  $\tau = 0.55$  και  $\tau = 0.6$  δε μεταβάλλεται στα μη νευτώνεια, αφού όλες οι δίνες πλην των  $B$  αποσβένονται άμεσα, υπό την αύξηση της παροχής.

Στο νευτώνειο, η  $B-n$  παραμένει μετά την  $\tau = 0.55$ , αλλά την  $\tau = 0.6$  έχει αποσβεστεί.

Στην τελευταία φάση επιτάχυνσης,  $\tau = 0.7$ , έχουν ήδη δημιουργηθεί σε όλα τα μοντέλα οι  $A$  δίνες κατάντι του λαιμού και στο H-B η  $B-hb$  αποσβένεται.

Με την επιβράδυνση της ροής και τη στροβιλότητα να παραμένει αυξημένη στον ευθύγραμμο αγωγό, η  $B-hb$  επανεμφανίζεται την  $\tau = 0.8$ , ενώ στα άλλα μοντέλα οι ήδη υπάρχουσες δίνες μεγενθύνονται.

Την  $\tau = 0.9$  έχουμε την εμφάνιση και πάλι των  $C-ws$  και  $B-n$ , χωρίς καμία άλλη μεταβολή στη μορφή της ροής.

Στην ολοκλήρωση της περιόδου,  $\tau = 1.0$ , οι δίνες αυξάνονται και εντέλει έχουμε τις  $A, B, C$  σε όλα τα μοντέλα καθώς και τις  $D$  στα μη νευτώνεια.

Με τη νέα περίοδο, είμαστε αναγκασμένοι να μετονομάσουμε τις υφιστάμενες  $A, B, C, D$  σε  $B, C, D, E$  αντίστοιχα, ώστε να συνεχιστεί η ενιαιότητα των ονομασιών.

Η κύρια παρατήρηση, για την περίπτωση αυτής της ροής σε σχέση με τη βασική των  $Str = 0.5 - Re = 100$ , είναι η αυξημένη έκλυση δινών σε όλα τα μοντέλα, οφειλόμενη προφανώς στον αυξημένο  $Str$ .

Ο αυξημένος  $Str = 1$ , επηρεάζει και το μέγεθος των δινών, μειώνοντάς το, αφού πλέον οι δίνες μετατοπίζονται γρηγορότερα και δεν έχουν τον απαιτούμενο χρόνο να σχηματισθούν πλήρως, δημιουργώντας.

$Str = 1 - Re = 100$																
$\tau$	A- n	B- n	C- n	D- n		A- ws	B- ws	C- ws	D- ws	E- ws		A- hb	B- hb	C- hb	D- hb	E- hb
0.10	0	√	√	√		0	√	√	√	√		0	√	√	√	0
0.20	√	√	√	0		√	√	√	√	0		0	√	√	0	0
0.30	√	√	√	0		√	√	√	√	0		√	√	√	0	0
0.40	√	√	0	0		√	√	√	√	0		√	√	√	0	0
0.50	√	√	0	0		√	√	√	√	0		√	√	√	0	0
0.60	0	0	0	0		0	√	0	0	0		0	√	0	0	0
0.70	0	√	0	0		√	√	0	0	0		√	0	0	0	0
0.80	0	√	0	0		√	√	0	0	0		√	√	0	0	0
0.90	0	√	√	0		√	√	√	0	0		√	√	0	0	0
1.00	0	√	√	√		√	√	√	√	0		√	√	√	√	0

Π15.4 – συγκεντρωτικός πίνακας εμφάνισης δινών στη ροή  $Str = 1 - Re = 100$

#### συμπεράσματα

- οι μεταβολές στη μορφή του πεδίου ροής, σχετίζονται άμεσα με τον αριθμό  $Str$  και η ευκολία μεταβολής του πεδίου αυξάνει με την αύξηση του  $Str$

Στο ίδιο συμπέρασμα, κατέληξε και η υπολογιστική μελέτη του *Rosenfeld* [28] για το νευτώνειο ρευστό, όπου χαρακτηριστικά δηλώνεται ότι «το πεδίο ροής βρέθηκε να είναι πιο ευαίσθητο στον  $Str$ , από ότι στον  $Re$ ».

Προσπαθώντας να δώσουμε και μία ποσοτική χροιά στο προηγούμενο συμπέρασμα, φαίνεται ότι για όλα τα μοντέλα, αύξηση του αριθμού  $Str$  μεταφράζεται σε αύξηση των παρατηρούμενων δινών σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ αύξηση του  $Re$  σε αύξηση των μηκών των περιοχών ανακυκλοφορίας και του μεγέθους των δινών.

Παράλληλα και όπως πάλι παρατηρείται από τον *Rosenfeld* [28], ο  $Str$  αυξανόμενος μειώνει το μέγεθος των δινών.

- η μείωση του  $Re$  επιδρά ευεργετικά στη διαδικασία απόσβεσης των δινών, κάνοντάς τη ευκολότερη, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται για όλα τα μοντέλα στη βασική περίπτωση ροής  $Str = 0.5 - Re = 100$  και σε αυτή για  $Str = 0.5 - Re = 150$

Αυτό είναι αναμενόμενο, αναλογιζόμενοι ότι ροές χαμηλότερων  $Re$ , είναι ροές με μεγαλύτερη επίδραση των συνεκτικών δυνάμεων.

- εξετάζοντας τις διάφορες περιπτώσεις ροών ενός μοντέλου, τα χαρακτηριστικά του πεδίου κατάντι της στένωσης, εξαρτώνται από δύο παραμέτρους, τους αριθμούς  $Re$  και  $Str$

Καθώς διαφαίνεται, αυτά έχουν δύο βαθμούς ελευθερίας, τους δύο αδιάστατους αριθμούς  $Str$  και  $Re$ , που υπεισέρχονται και στις εξισώσεις *Navier – Stokes*. Εξαρτώνται, δηλαδή, από την τιμή και των δύο και όχι από κάποια μεταξύ τους

σχέση, όπως ο αριθμός  $a = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re \cdot Str}$ .

- βασιζόμενοι στη σύγκριση των πεδίων ροής νευτώνειου και μη νευτώνειων μοντέλων, από τα αποτελέσματά μας, θα λέγαμε ότι ο μη νευτώνειος χαρακτήρας του ρευστού, στην περίπτωση των μοντέλων όπου το ιξώδες μειώνεται αυξανόμενου του ρυθμού διάτμησης (*shear-thinning*), αυξάνει χαρακτηριστικά την ευκολία μεταβολής της μορφής του πεδίου ροής

Πιο συγκεκριμένα, το W-S παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία στις μεταβολές αυτές σε σχέση με το H-B μοντέλο (τουλάχιστον για τους αριθμούς  $Bi$  που προέκυψαν στις εξεταζόμενες ροές).

Η διαφορά αυτή, πολύ πιθανόν να οφείλεται στη δυνατότητα του W-S να αναπτύσσει μικρότερες τάσεις στο τοίχωμα, όπως παρατηρήθηκε και στην περίπτωση της μόνιμης ροής.

- όσον αφορά στην ευαισθησία κάθε μοντέλου στις μεταβολές της παροχής, μπορούμε να δούμε ότι το νευτώνειο ρευστό ανταποκρίνεται καλύτερα στην απόσβεση των δινών, ενώ επίσης, στο πεδίο του εκλύονται λιγότερες δίνες

Από τα δύο τελευταία συμπεράσματα, αποδεικνύεται ότι το πεδίο ροής εξαρτάται άμεσα και από το υιοθετούμενο μοντέλο ρευστού, υπό την έννοια του διαφορετικού αριθμού δινών που αναπτύσσει κάθε μοντέλο για τις ίδιες συνθήκες ροής.

- από την περιγραφή των ροϊκών χαρακτηριστικών, παρατηρούμε την παρακάτω γενική μορφή της ροής κατά τη διάρκεια της περιόδου, σε όλα τα μοντέλα, για τις ροές  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $Str = 0.5 - Re = 150$  και  $Str = 1 - Re = 100$ :

Με την έναρξη της φάσης επιτάχυνσης, η ροή στην περιοχή της στένωσης επανακολλάται και οι κατάντι δίνες αποσβέννονται, προφανώς υπό την ισχυρή επίδραση της θετικής κλίσης της ημιτονοειδούς μορφής συνάρτησης ταχύτητας εισόδου.

Η επιτάχυνση αυτή επίσης, εξομαλύνει τις διαταραχές της ροής (μείωση στροβιλότητας της ροής) στο ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού, με αποτέλεσμα να «επιβιώνουν» μόνο δίνες που βρίσκονται αρκετά μακριά και η «πληροφορία», στο παραβολικό πεδίο που μελετούμε, δε φτάνει αρκετά ισχυρή. Αυτές, συνεχίζουν το ταξίδι τους προς την έξοδο του αγωγού σμικρυνόμενες.

Η συνεχιζόμενη, με μικρότερο ρυθμό, μεταβολή της ταχύτητας, δημιουργεί δίνες πάνω στο τοίχωμα, κατάντι του λαιμού, ενώ η αρνητική κλίση ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε συνθήκες αναρρόφησης, δημιουργεί οπισθοροή (*backflow*) στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα με άμεση συνέπεια την αύξηση των ήδη σχηματισμένων μηκών ανακυκλοφορίας και τη μεγένθυση των δινών.

Εισερχόμενοι στη φάση συνεχούς παροχής, παρατηρούμε μία τάση επαναφοράς στη ροϊκή κατάσταση που παρατηρήθηκε στη μόνιμη ροή.

Έτσι, δίνες που σχηματίστηκαν, τώρα αποσβέννονται, άλλες ενώνονται μεταξύ τους ή τέλος μεγάλες περιοχές ανακυκλοφορίας, αυξανόμενες σε μήκος αποκτούν δύο κέντρα.

Όλες αυτές είναι κοινές παρατηρήσεις σε αντίστοιχες μελέτες του νευτώνειου[28], αλλά και μη νευτώνειων ρευστών [27].

## ii} διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του αγωγού

Οι διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του αγωγού (*Wall Shear Stresses*) είναι το πιο ενδιαφέρον μέγεθος, από τη βιοϊατρική σκοπιά του θέματος, καθώς, όπως έχουμε παρατηρήσει και στα προηγούμενα, μεταβολή αυτών, επηρεάζει τη φυσιολογική λειτουργία του αγγειακού τοιχώματος. Από ρευστομηχανική άποψη, αποτελούν εργαλείο μελέτης των εκλυομένων δινών και των περιοχών ανακυκλοφορίας.

Στα διαγράμματα, παρουσιάζουμε τις τιμές των WSS, που προέκυψαν κατά την προσομοίωση διαφόρων περιπτώσεων ροής ( $\tau_w$ ), αδιαστατοποιημένες ( $T_w$ ) με τη δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ρευστού, στη μόνιμη ροή, δηλαδή:

$$\tau_w = -\mu(|\dot{\gamma}|) \cdot |\dot{\gamma}| \quad \text{και} \quad T_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2 / 2}$$

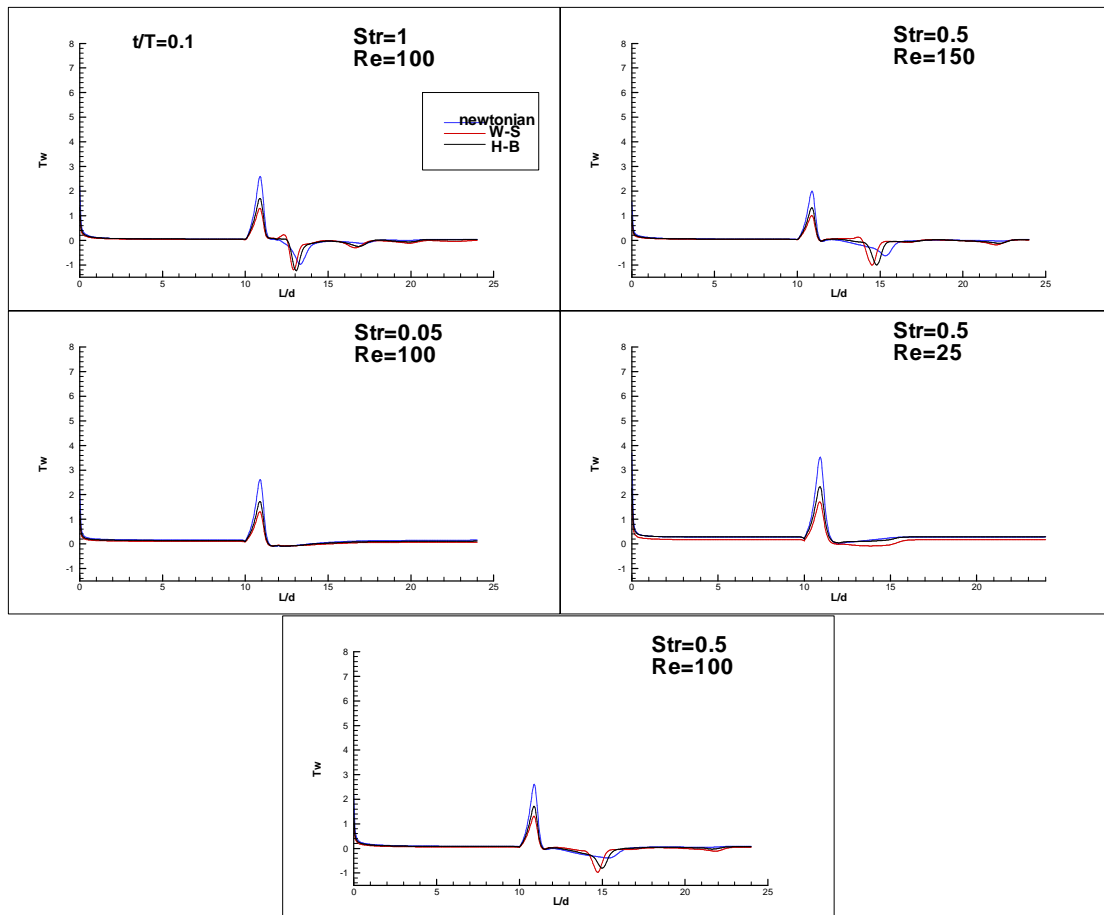
Η παρουσίαση των διαγραμμάτων γίνεται με τρόπο τέτοιο, ώστε να είναι άμεση η σύγκριση σε κάθε χρονική στιγμή  $\tau = t/T$ , των διαφόρων περιπτώσεων ροής.

Έτσι, στο αριστερό μέρος, τοποθετούνται τα διαγράμματα για σταθερό  $Re = 100$  και μεταβλητό  $Str = [0.05, 0.5, 1]$  και στο δεξί μέρος τα διαγράμματα με  $Str = 0.5$  αμετάβλητο και  $Re = [25, 100, 150]$ .

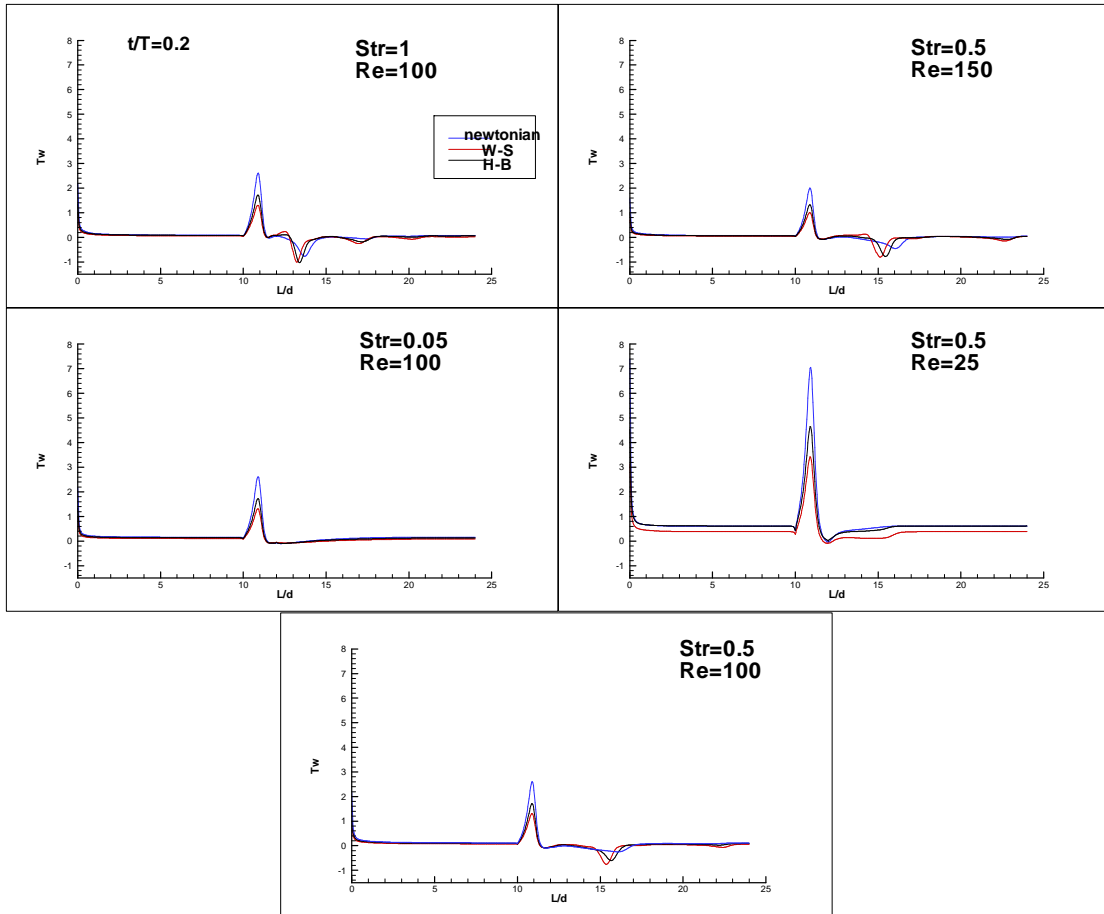
Στο κάτω μέρος βρίσκεται η βασική περίπτωση ροής  $Str = 0.5 - Re = 100$ .

Προσπάθεια έγινε, ώστε το εύρος τιμών στα διαγράμματα να παραμένει σταθερή για όλες τις περιπτώσεις, σε κάθε χρονική στιγμή. Στη μοναδική περίπτωση,  $Str = 0.5 - Re = 25$ , που αυτό δεν ήταν δυνατό, αυξήθηκε κατά 10 μονάδες, για τις χρονικές στιγμές  $\tau = [0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$ .

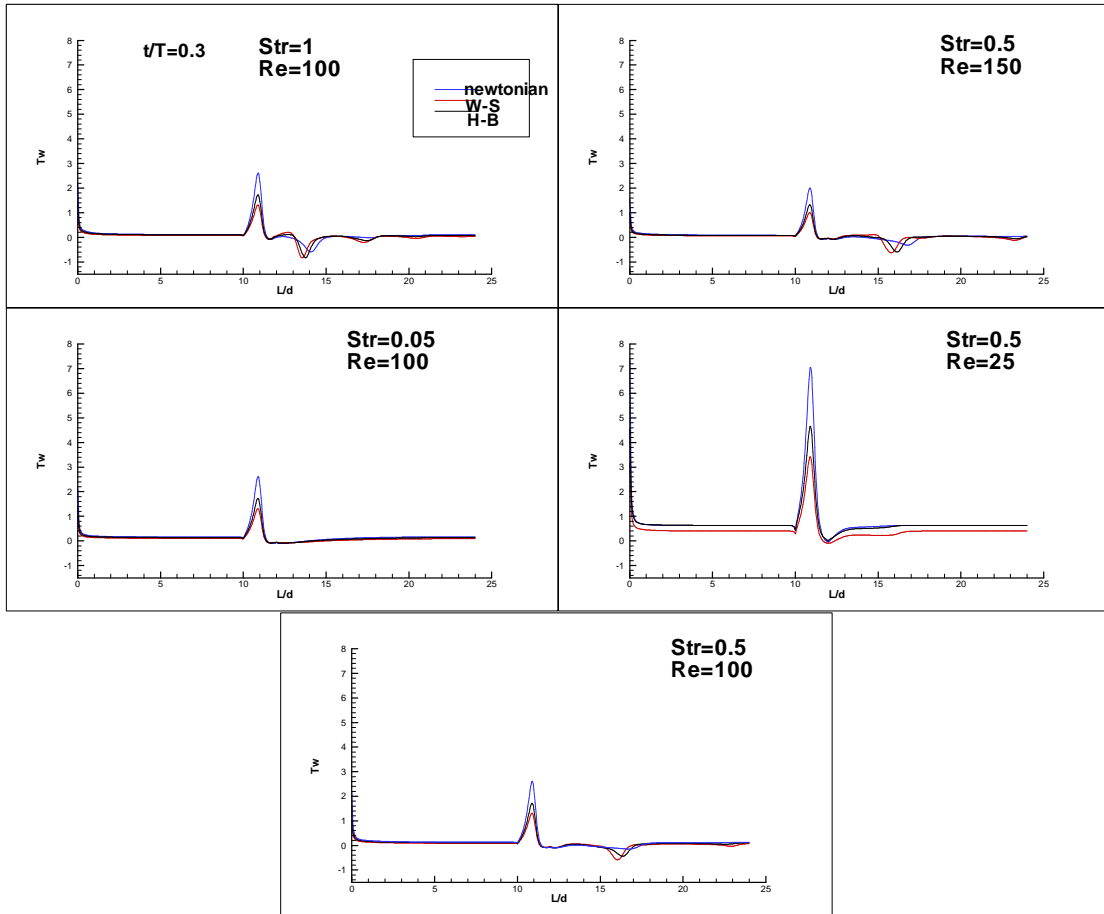




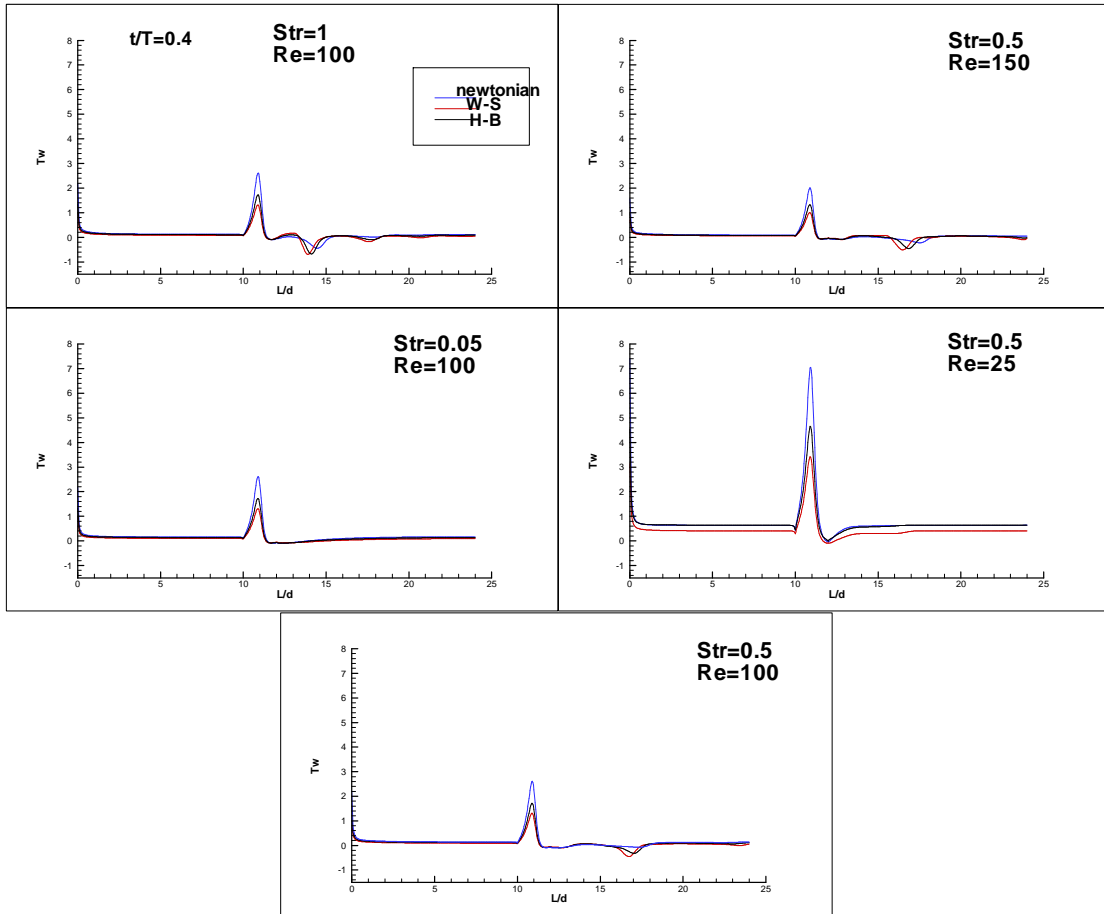
$\Delta 5.61$  – διαμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.1$



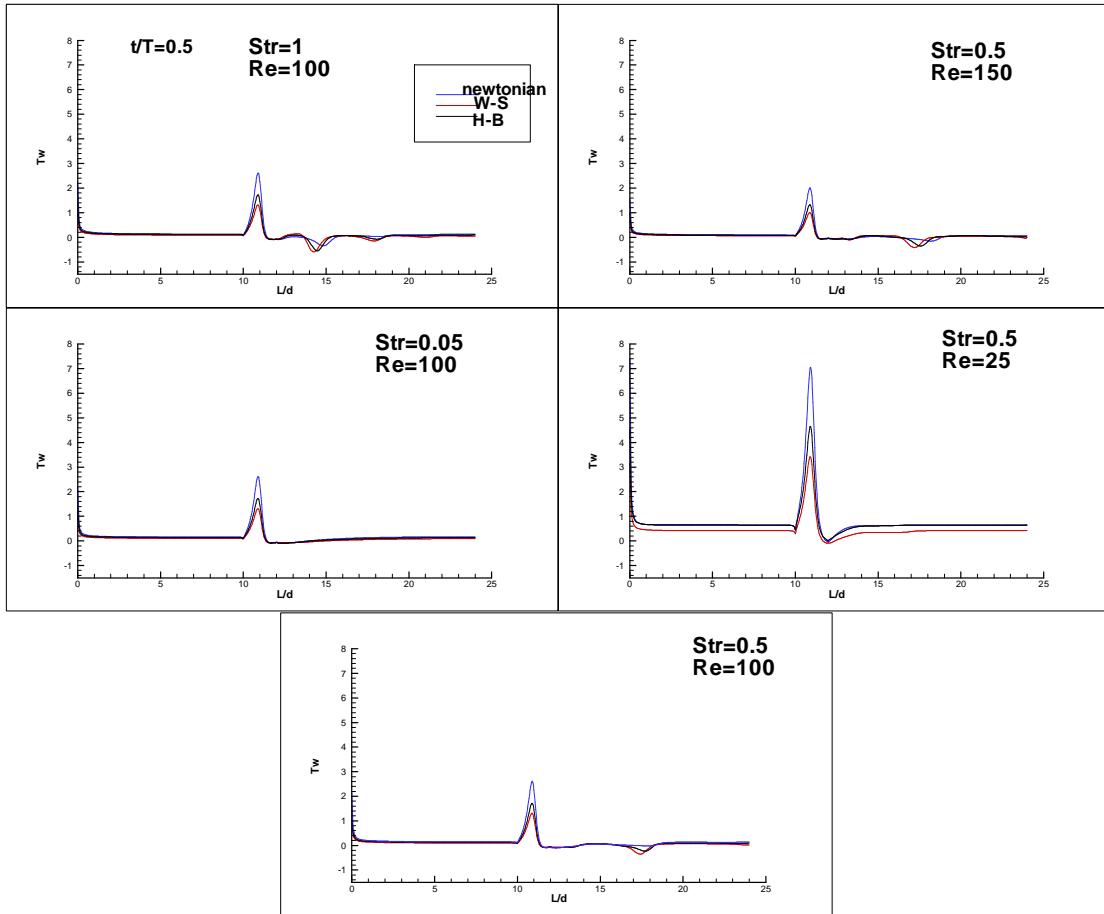
Δ5.62 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.2$



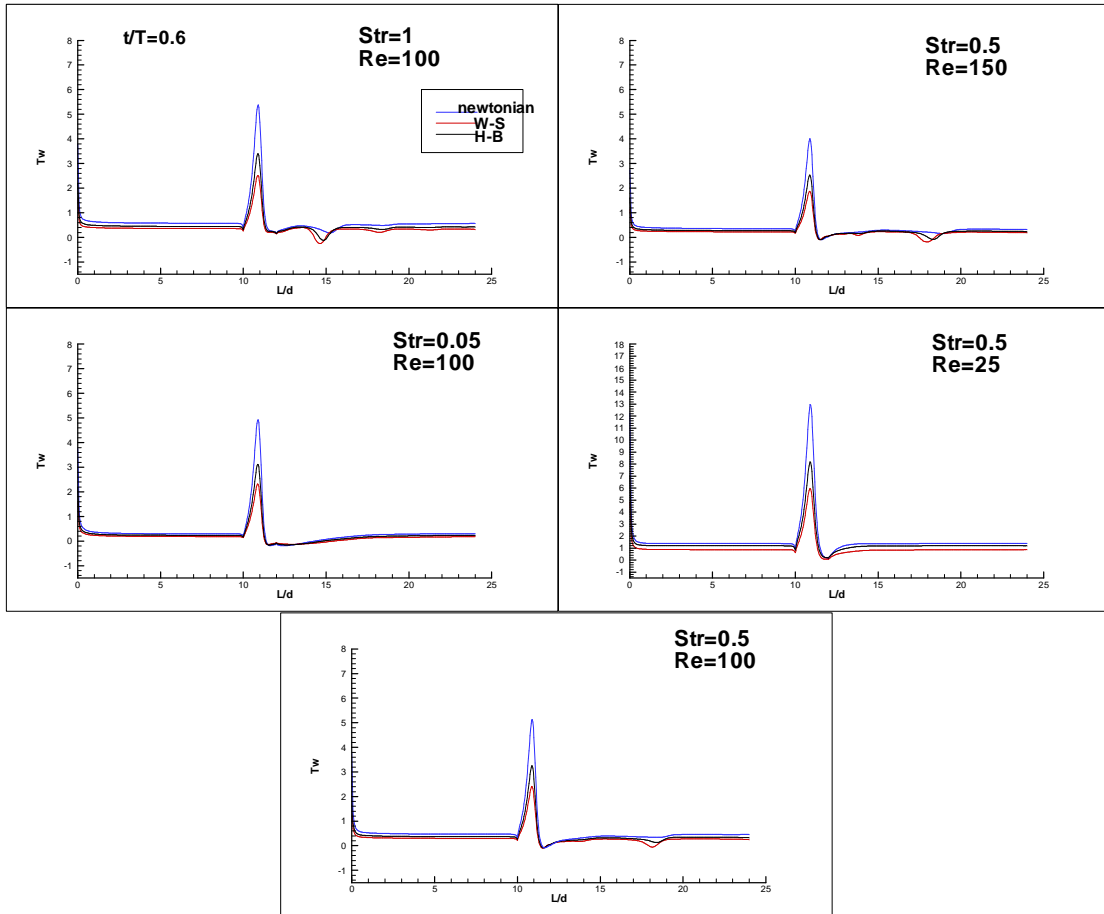
Δ5.63 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.3$



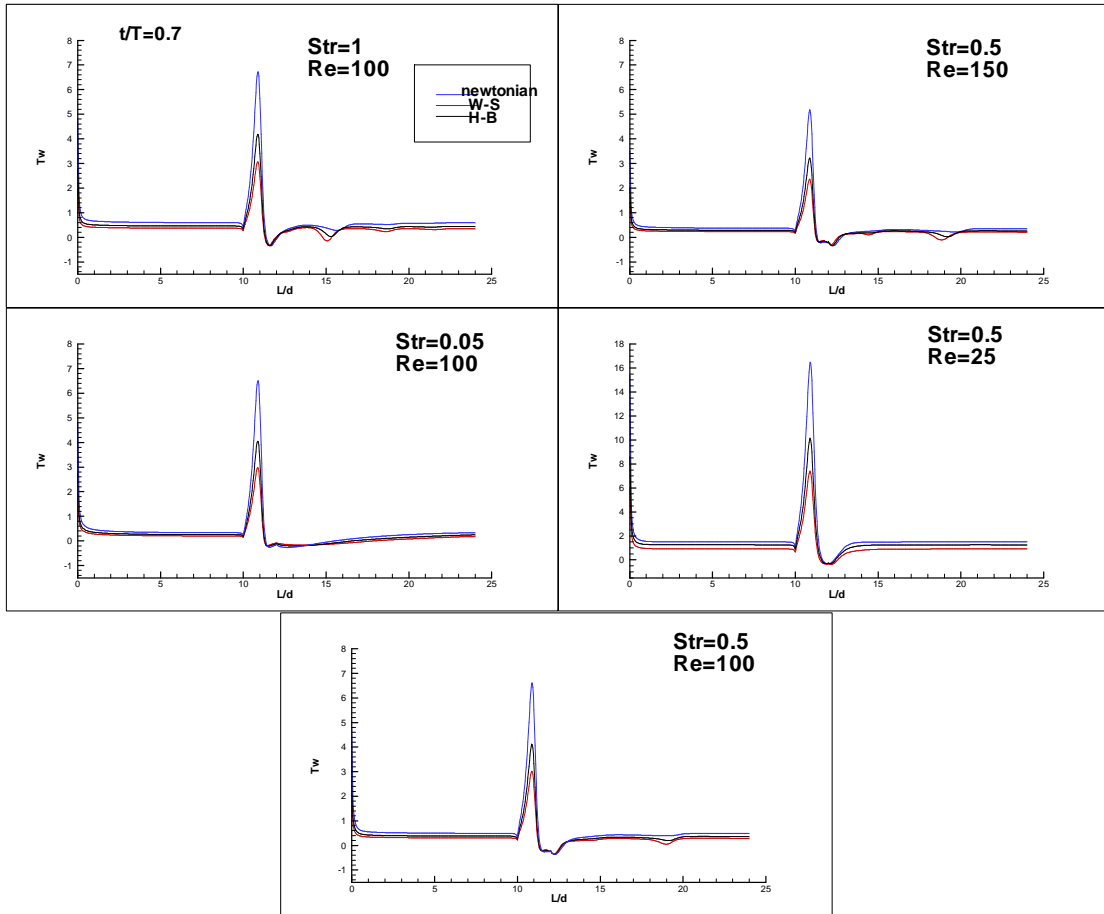
Δ5.64 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.4$



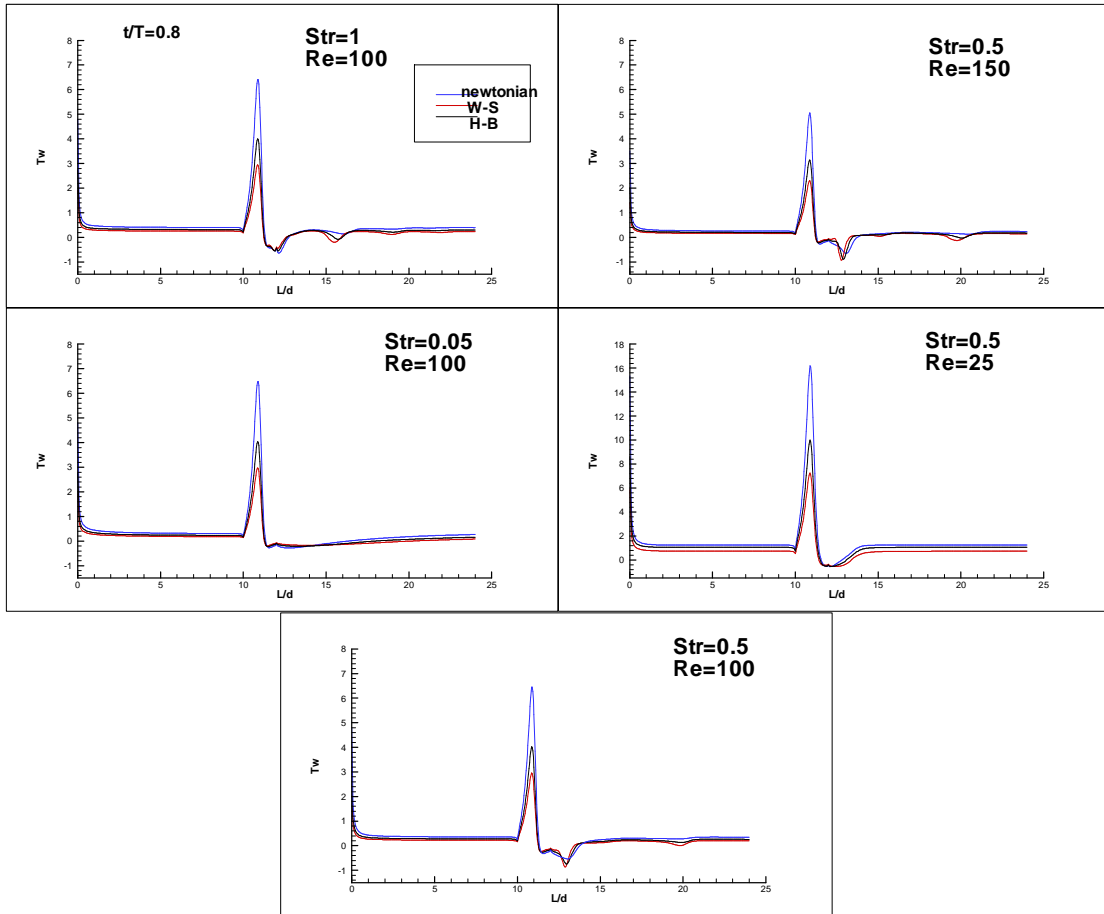
Δ5.65 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.5$



$\Delta 5.66$  – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.6$

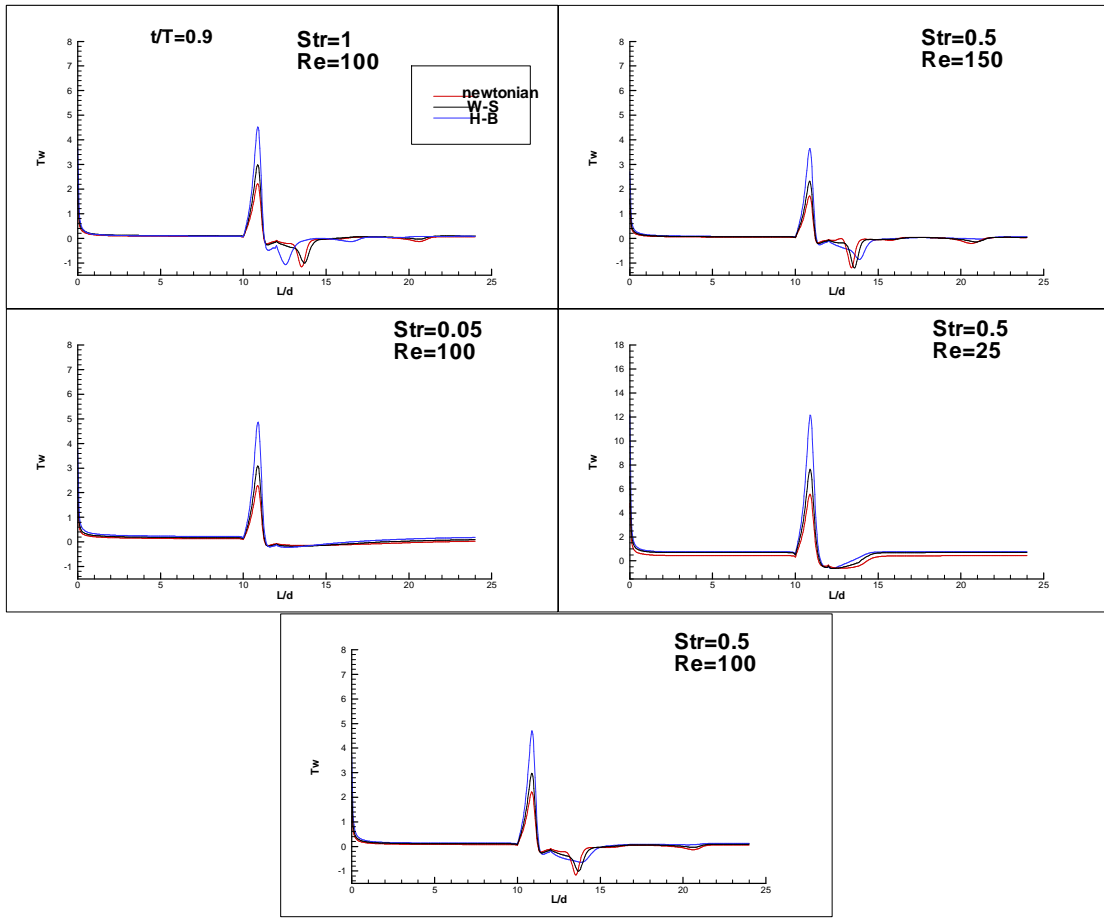


Δ5.67 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.7$

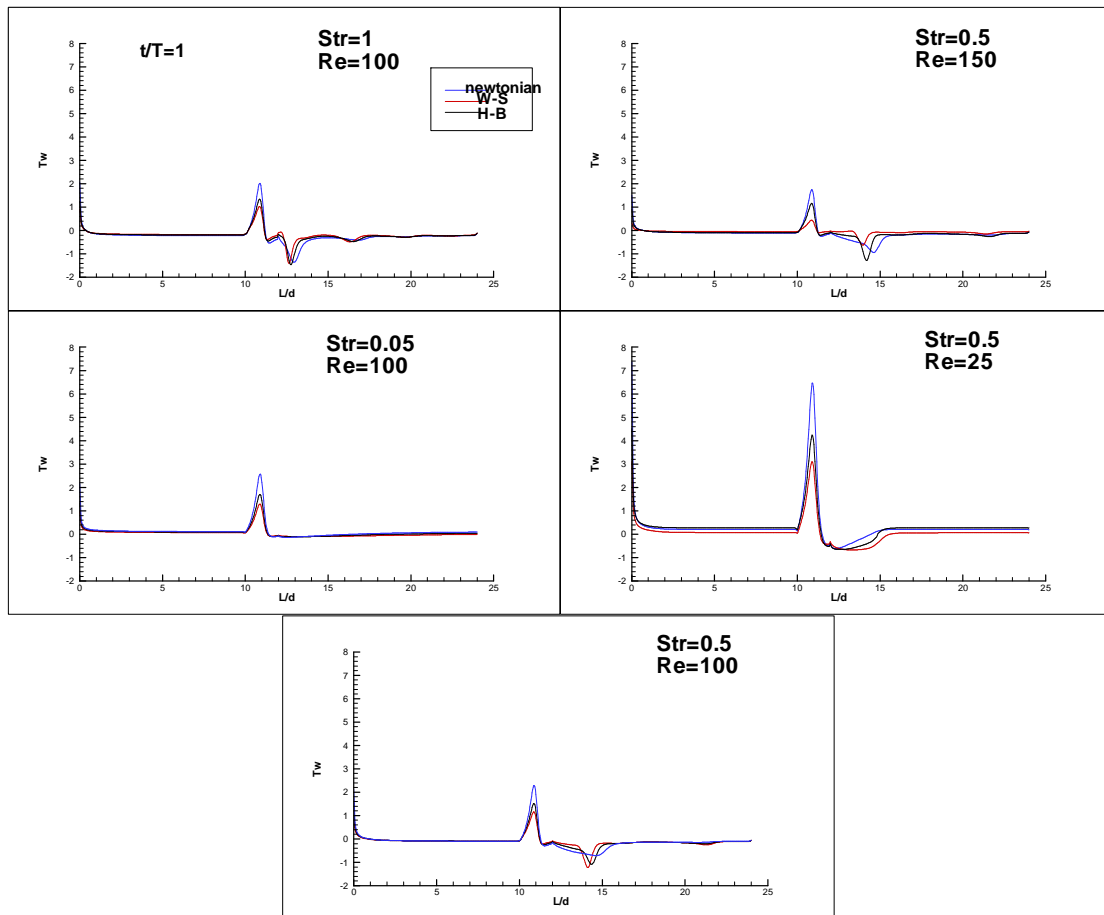


Δ5.68 – διαμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.8$





Δ5.69 – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 0.9$



$\Delta 5.70$  – διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα: WSS,  $\tau = 1$

## συμπεράσματα

Από τη μελέτη των διαγραμμάτων προκύπτουν ορισμένες παρατηρήσεις, οδηγώντας μας σε συμπεράσματα για τη σχέση των WSS, με τους αδιάστατους αριθμούς  $Re$  και  $Str$ , αλλά και σχετικά με τα εξεταζόμενα ρευστά.

Θα ξεκινήσουμε με τις περισσότερες προφανείς και προχωρώντας θα δοκιμάσουμε να αιτιολογήσουμε κάποιες παρατηρούμενες μεταβολές, συνδέοντάς τις με τα παρατηρούμενα ροϊκά φαινόμενα, όπως αποτυπώνονται στις γραμμές ροής.

- η WSS στο λαιμό του αγωγού είναι ανεξάρτητη του αριθμού  $Str$ , αφού οι τιμές των WSS στα διαγράμματα κάθε χρονικής στιγμής, δεν αλλάζουν με μεταβολή αυτού.

Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται και από τα διαγράμματα WSS των *Neofytou & Drikakis* [27], σε δύο περιπτώσεις ροής για ίδιο  $Re = 360$  και  $Str = [0.05, 0.368]$ , όπου η τιμή των αδιάστατων WSS στο λαιμό είναι σταθερή.

- η μέγιστη WSS σε κάθε χρονική στιγμή, που πάντα εμφανίζεται στο λαιμό του αγωγού, αυξάνεται, καθώς ο  $Re$  μειώνεται, για όλα τα μοντέλα

Θα λέγαμε, ότι ενισχύεται η δράση της συνεκτικότητας και το ρευστό προβάλλει μεγαλύτερη αντίσταση στη μεταβολή της ροής του, που προκαλεί η στένωση.

- η μέγιστη WSS στην περιοχή του λαιμού ( $T_{w,max}$ ), κάθε χρονική στιγμή, εμφανίζεται στο νευτώνειο ρευστό και κατά φθίνουσα σειρά στα H-B και W-S.

$$T_{w,max, newtonian} > T_{w,max, hb} > T_{w,max, ws}$$

Η παρατήρηση αυτή, είναι συνεπής και με τα αποτελέσματα του πεδίου μόνιμης ροής.

- το αντίθετο συμβαίνει στις περιοχές των δινών, όπου τα μη νευτώνεια μοντέλα, εμφανίζουν υψηλότερες, κατά απόλυτη τιμή, WSS και μάλιστα με τη σειρά που αναφέραμε για τις  $T_{w,max}$  ανεστραμμένη.

Καθώς αναμένεται, τα μη νευτώνεια ρευστά έχουν τη δυνατότητα να αυξήσουν το ιξώδες τους πάνω από τη σταθερή τιμή του νευτώνειου.

Στο λαιμό του αγωγού κάτι τέτοιο δε φαίνεται να συμβαίνει, ακριβώς γιατί στην περιοχή αυτή εμφανίζονται υψηλότεροι ρυθμοί παραμόρφωσης και συνεπώς το μεταβλητό ιξώδες των μη νευτώνειων δε λαμβάνει υψηλές τιμές που θα αυξήσουν τις WSS. Οι χαμηλότερες τιμές WSS στη στένωση των W-S και H-B, σε σχέση με αυτές του νευτώνειου, εμφανίστηκαν και στη μόνιμη ροή.

Αντίθετα, στην περιοχή των δινών, λόγω των μικρών χωρικών κλίσεων της ταχύτητας και άρα και του ρυθμού παραμόρφωσης, το ιξώδες των μη νευτώνειων αυξάνεται, παράγοντας WSS υψηλότερες του νευτώνειου, κατά απόλυτη τιμή.

- οι WSS στο λαιμό «ανταποκρίνονται» αυξανόμενες στην αύξηση της παροχής, κατά την επιτάχυνση του ρευστού και μειούμενες στην επιβράδυνσή του.
- οι μέγιστες WSS στην περιοχή του λαιμού ( $T_{w,max}$ ), δεν εμφανίζονται στη διατομή του λαιμού, αλλά είναι μετατοπισμένες ανάντι της διατομής αυτής κατά  $0.1d < \delta l < 0.2d$  σε όλες τις χρονικές στιγμές.

Ας θυμίσουμε, ότι η αντίστοιχη μετατόπιση στη μόνιμη ροή ήταν  $\delta l = 0.01d$ .

- δεν υπάρχει κάποια άμεση σχέση των ροϊκών φαινομένων στην περιοχή της στένωσης, με τις τιμές που λαμβάνουν οι WSS στο λαιμό του αγωγού.

Το πεδίο ροής διατηρεί τον παραβολικό του χαρακτήρα και παρά την ύπαρξη δινών κατάντι της στένωσης, που θα μπορούσαν να μεταδώσουν «πληροφορία» ανάντι, δεν έχουμε μεταφορά «πληροφορίας» αντίθετα στην κατεύθυνση της ροής.

### iii} στατική πίεση

Η στατική πίεση στο τοίχωμα του αγωγού είναι το πιο άμεσα μετρούμενο μέγεθος σε μία πειραματική μελέτη, για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάσουμε τα διαγράμματα που προέκυψαν κατά την προσομοίωση των ροών.

Παρουσιάζουμε τις τιμές της διαφοράς στατικής πίεσης σε κάθε θέση από την είσοδο, που προέκυψαν κατά την προσομοίωση διαφόρων περιπτώσεων ροής ( $p_{static}$ ), αδιαστατοποιημένες ( $Dp$ ) με τη δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ρευστού, στη μόνιμη ροή, δηλαδή:

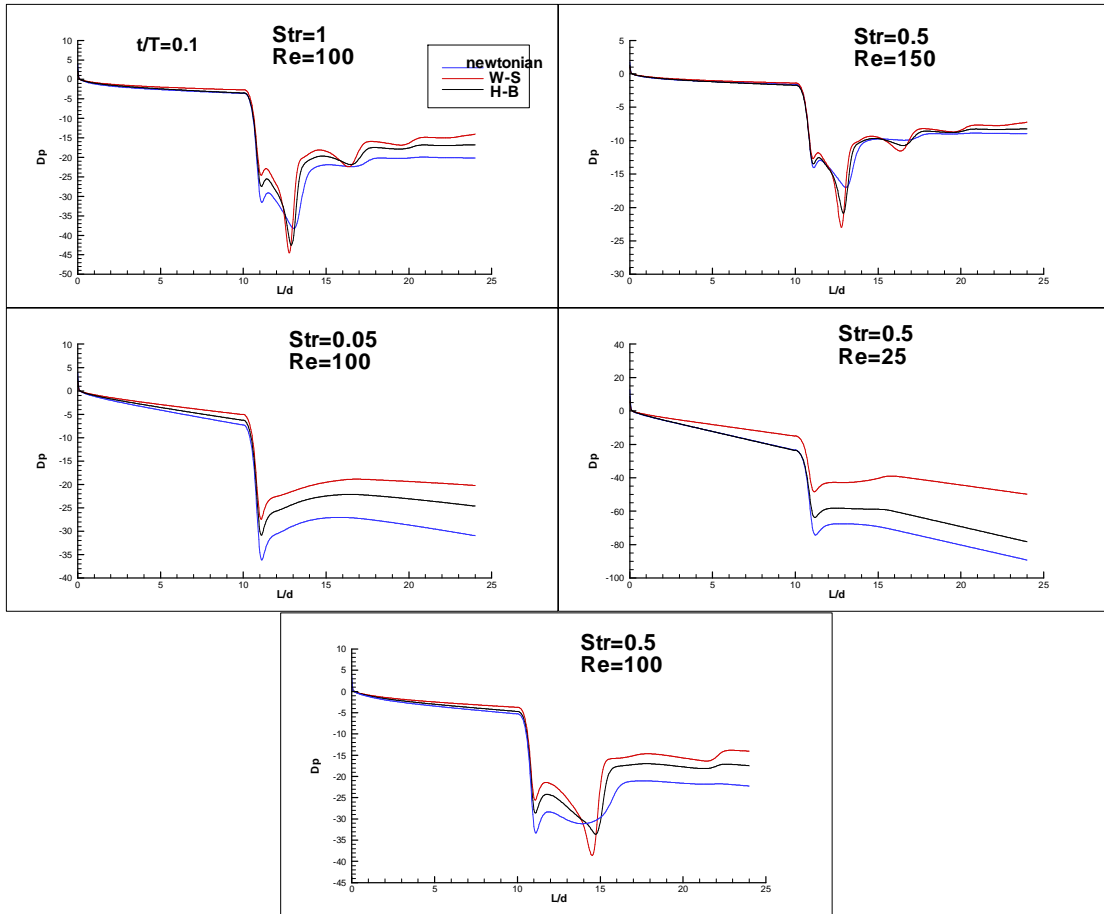
$$Dp = \frac{P_{static}}{\rho U_0^2 / 2}$$

Η παρουσίαση των διαγραμμάτων γίνεται με τρόπο τέτοιο, ώστε να είναι άμεση η σύγκριση σε κάθε χρονική στιγμή  $\tau = t/T$ , των διαφόρων περιπτώσεων ροής.

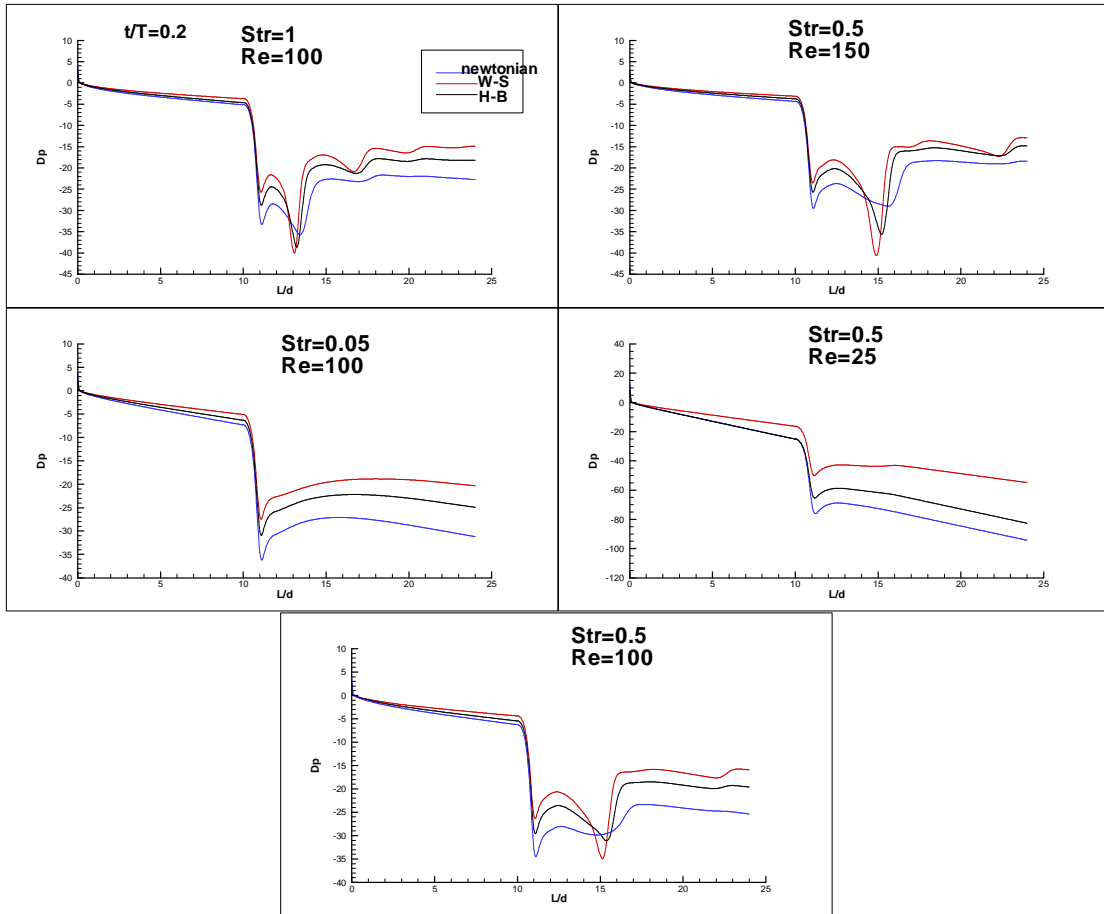
Έτσι, στο αριστερό μέρος, τοποθετούνται τα διαγράμματα για σταθερό  $Re = 100$  και μεταβλητό  $Str = [0.05, 0.5, 1]$  και στο δεξί μέρος τα διαγράμματα με  $Str = 0.5$  αμετάβλητο και  $Re = [25, 100, 150]$ .

Στο κάτω μέρος βρίσκεται η βασική περίπτωση ροής  $Str = 0.5 - Re = 100$ .

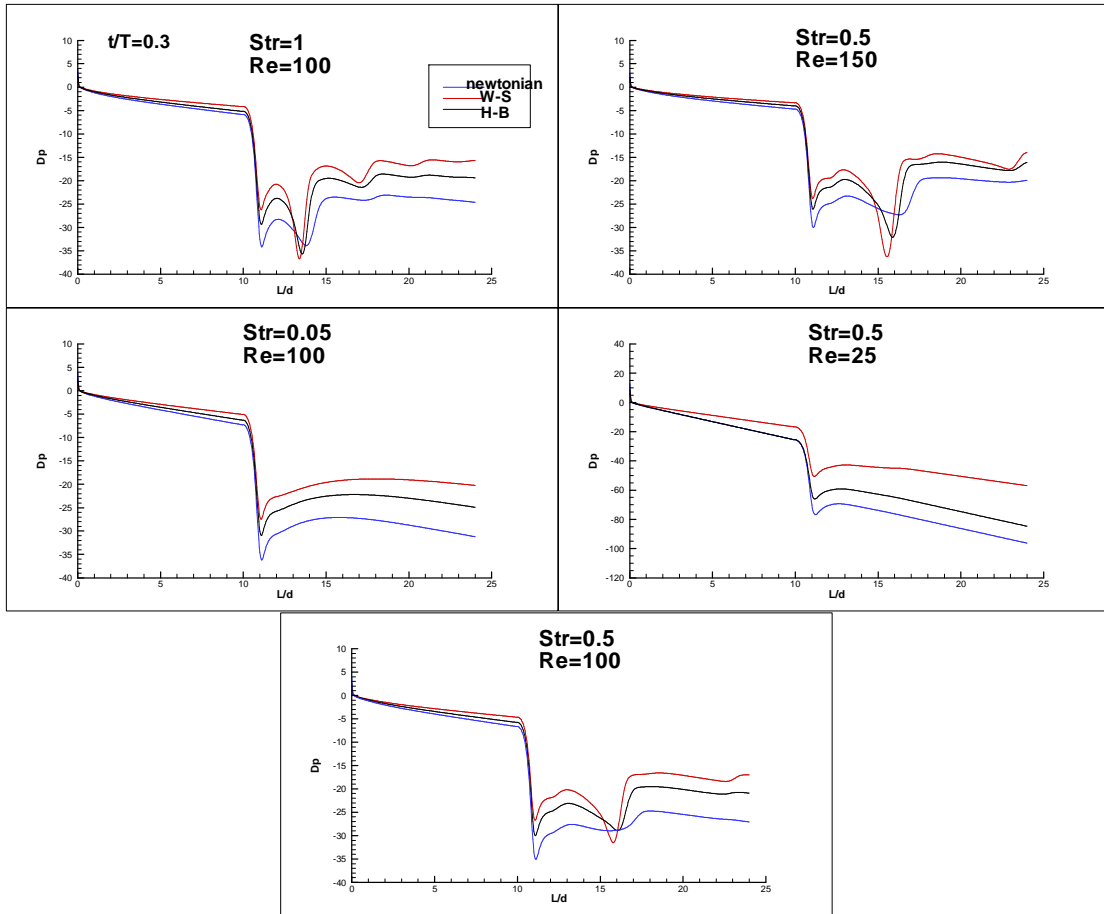
Δυστυχώς, οι μεγάλες διαφορές στο εύρος τιμών κάθε περίπτωσης, δεν καθιστούν δυνατή την εφαρμογή σταθερού εύρους, που θα διευκόλυνε τη σύγκριση των τιμών.



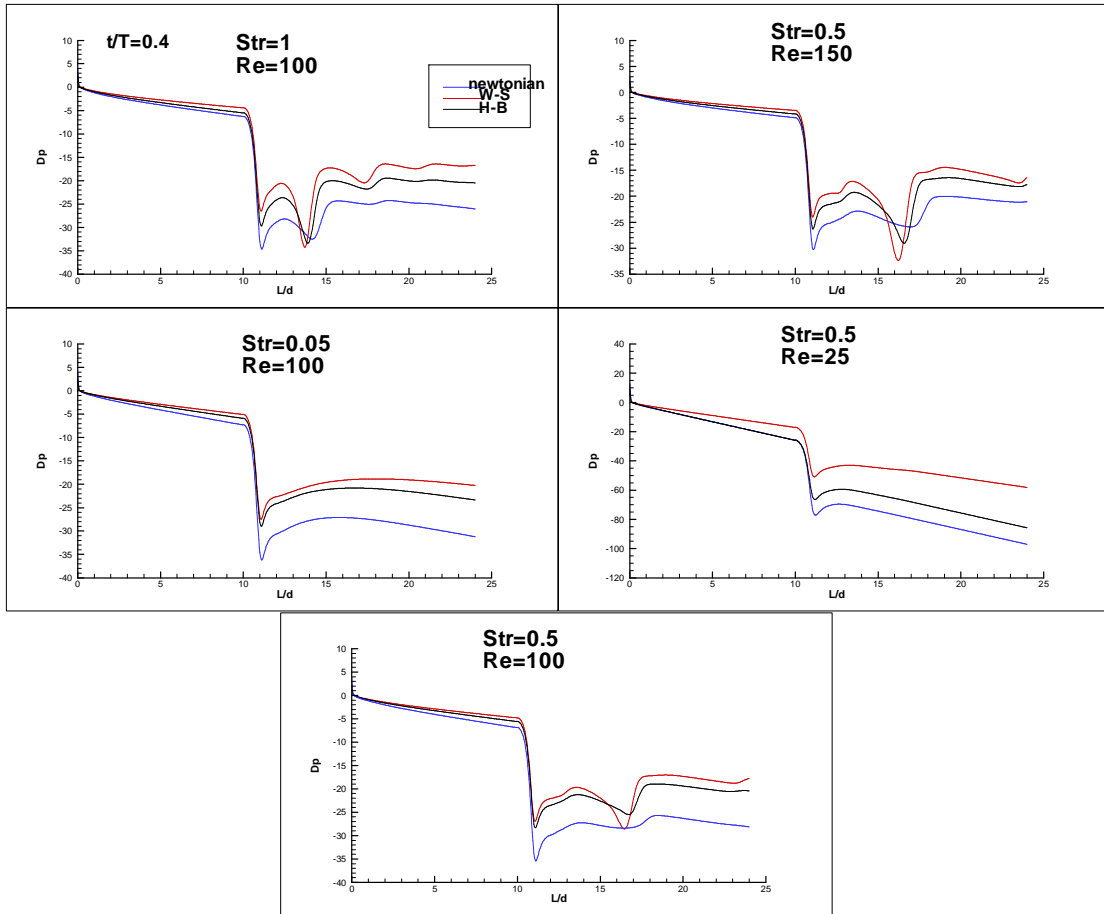
$\Delta 5.71$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.1$



$\Delta 5.72$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.2$

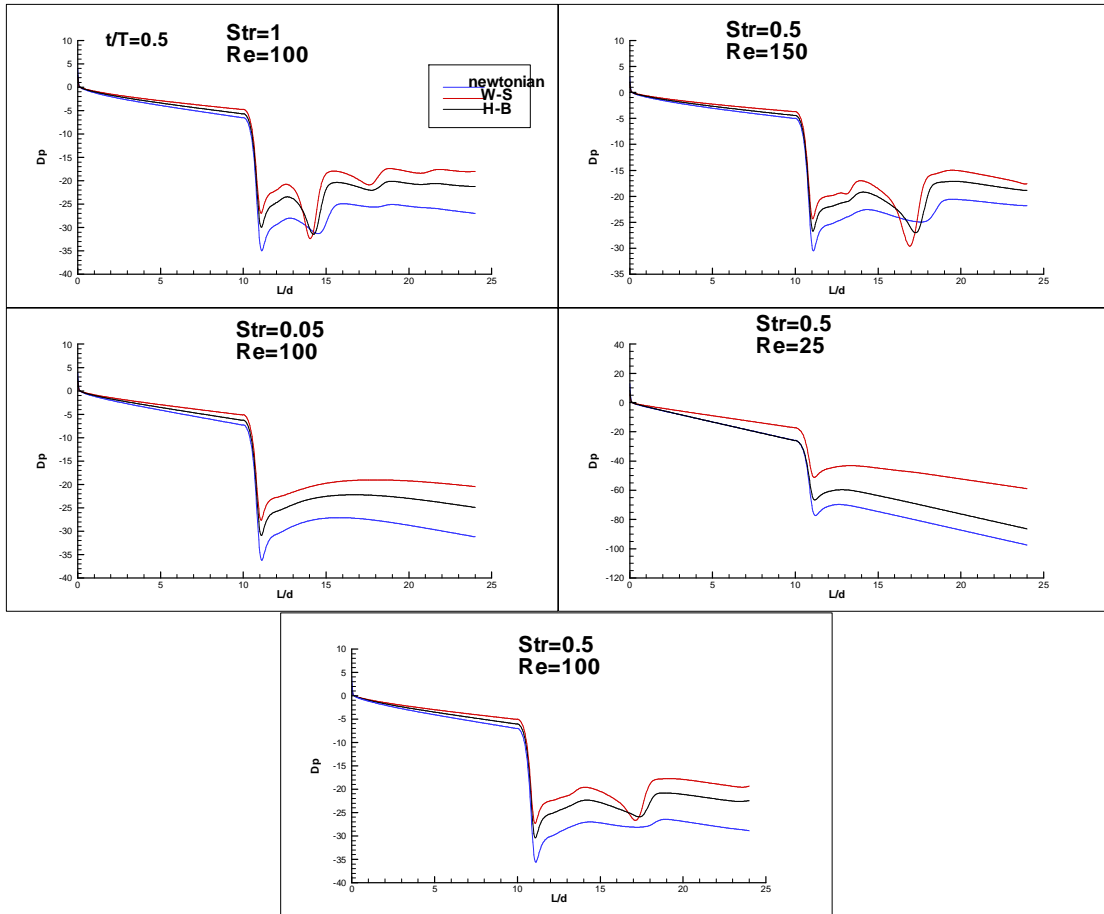


$\Delta 5.73$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.3$

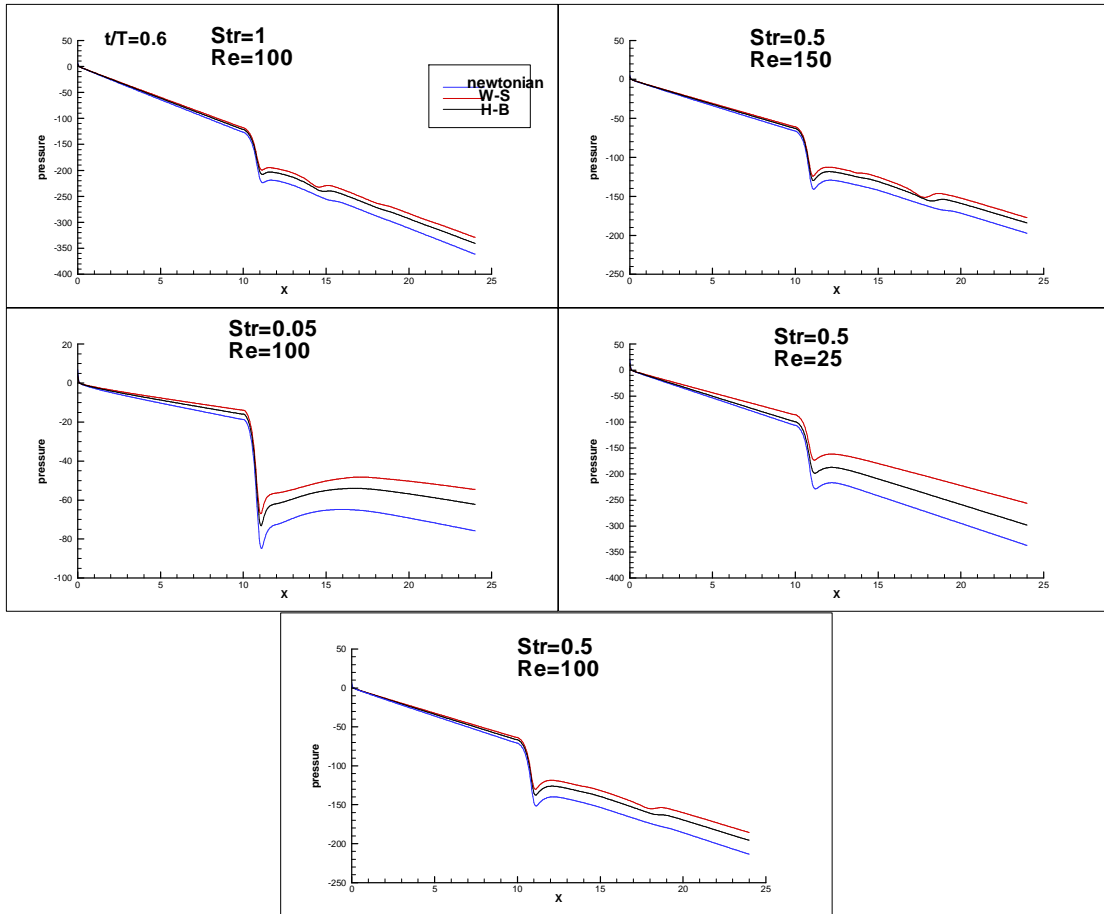


$\Delta 5.74$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.4$

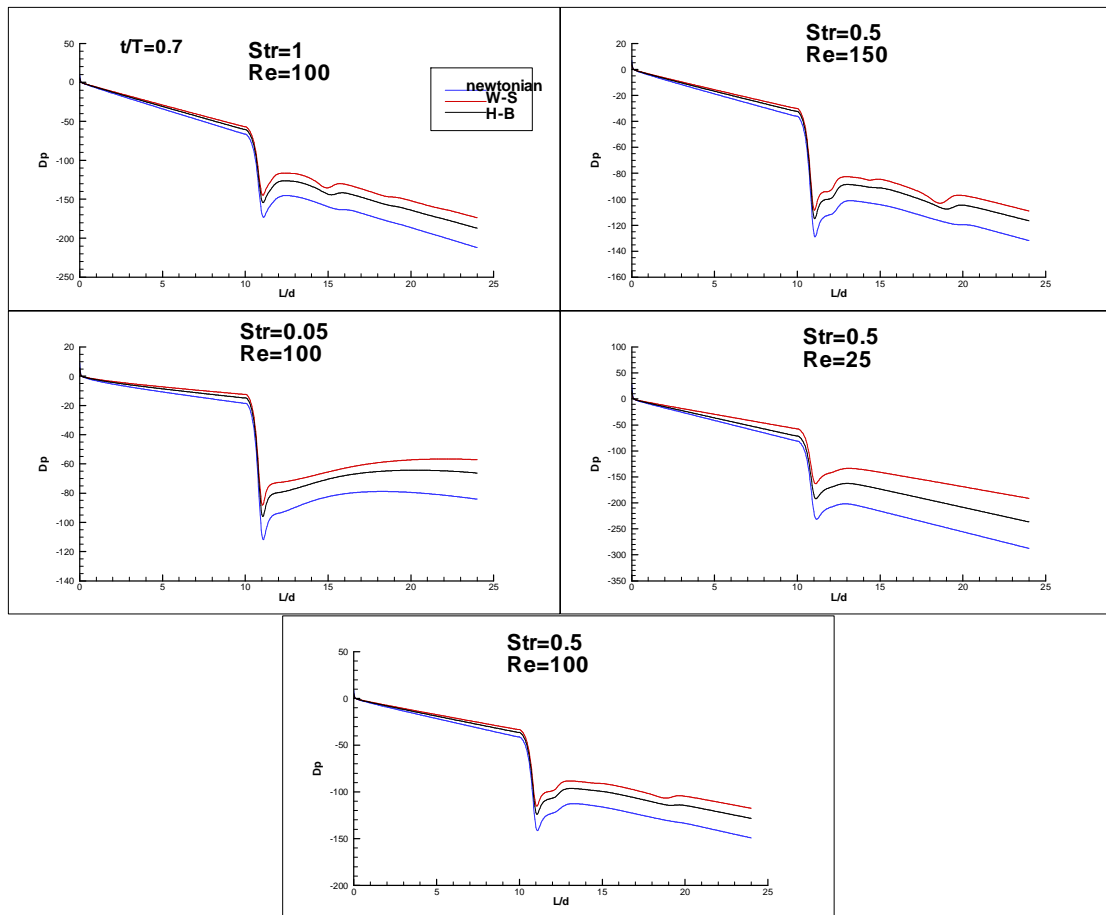




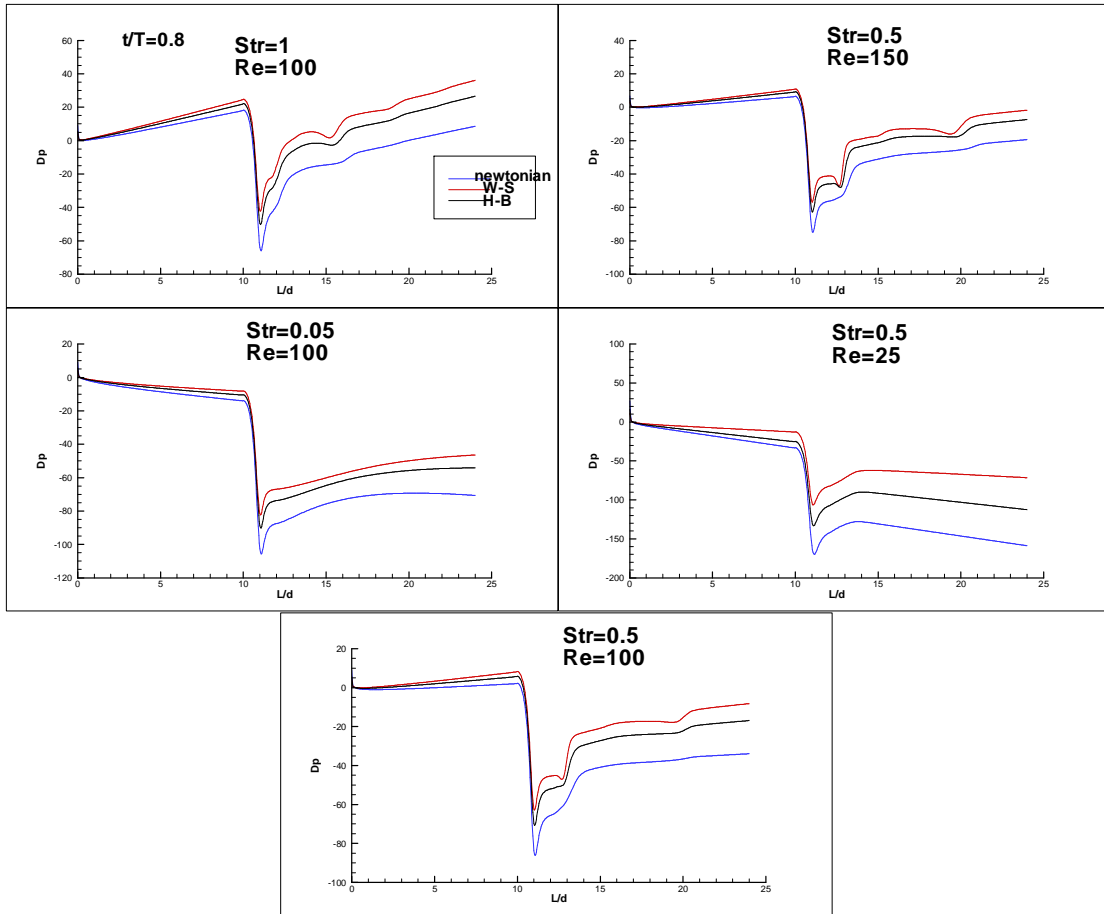
$\Delta 5.75$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.5$



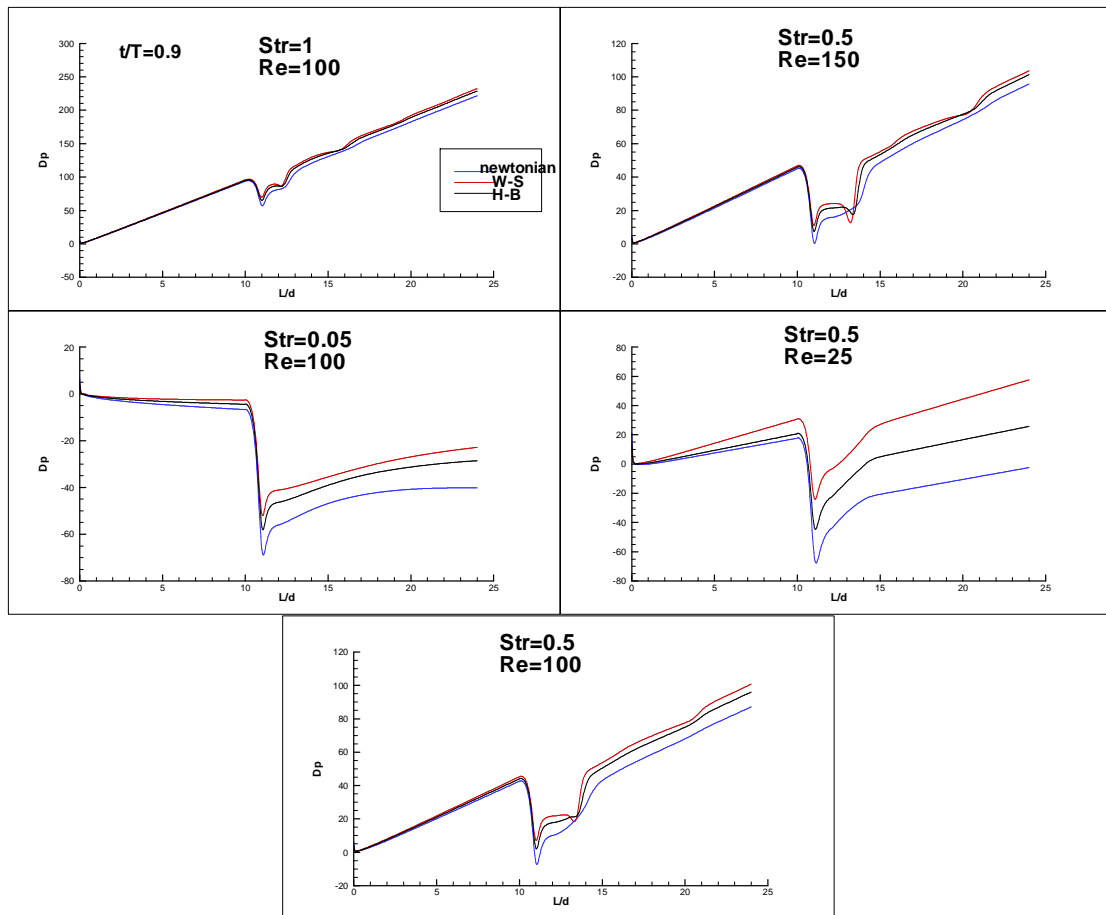
$\Delta 5.76$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.6$



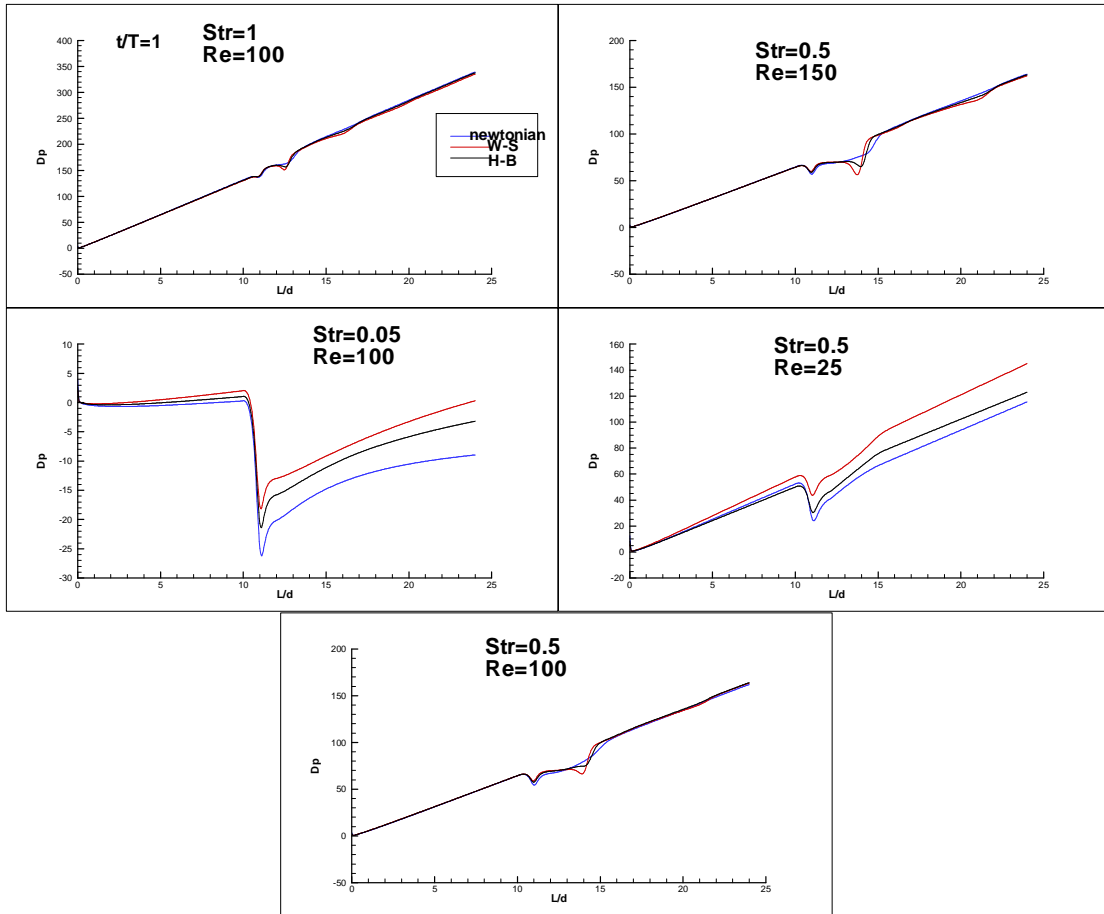
$\Delta 5.77$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.7$



$\Delta 5.78$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.8$



Δ5.79 – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 0.9$



$\Delta 5.80$  – στατική πίεση στο τοίχωμα:  $p_{static}$ ,  $\tau = 1$

## συμπεράσματα

- η πτώση πίεσης στη φάση μόνιμης ροής ( $\tau = 0.1 - 0.5$ ) επηρεάζεται ισχυρά από το  $Re$ , καθώς αύξησή του, μεταφράζεται σε μείωση των τιμών πίεσης σε κάθε θέση στον αγωγό.
- μικρότερη επίδραση δείχνει να έχει ο  $Str$  στην επικρατούσα πίεση σε κάθε θέση του αγωγού, όμως στη μη μόνιμη φάση ροής, χαμηλός  $Str$  ευνοεί την ομαλότερη ανάκτηση πίεσης.
- οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις, μας οδηγούν να υποθέσουμε ότι πολύ πιθανόν υπάρχει σχέση της κλίσης πίεσης στο χρόνο, με τον αριθμό Womersley  $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Re \cdot Str$ , αν μάλιστα παρατηρήσουμε στα διαγράμματα, ότι αυξανόμενου του  $a$ , το ρευστό «αντιλαμβάνεται» λιγότερο τη στένωση, ο συλλογισμός μας ισχυροποιείται.
- χαρακτηριστικό των ροών υψηλού  $a$  είναι ότι η στένωση, σε πολλά στιγμιότυπα, επηρεάζει λιγότερο τη διαφορά πίεσης, σε σχέση με τις εκλυόμενες δίνες του πεδίου.
- αυξανόμενου του  $a$ , ο μη νευτώνειος χαρακτήρας των ρευστών φαίνεται να επηρεάζει όλο και λιγότερο τα διαγράμματα πίεσης και οι μόνες διαφοροποιήσεις στους μεγάλους  $a$  οφείλονται στις διαφορετικές δίνες που εκλύονται σε κάθε μοντέλο.

Άλλωστε, η φθίνουσα σειρά της διαφοράς της στατικής πίεσης σε κάθε θέση από την είσοδο, που συναντήσαμε στην αυστηρά μόνιμη ροή των τριών μοντέλων, εμφανίζεται και εδώ:

$$Dp_{ws} > Dp_{hb} > Dp_{newtonian}$$

## iv } κατανομές ταχυτήτων στο ανάντι της στένωσης ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού

Παρουσιάζουμε τις κατανομές ταχυτήτων  $a = \frac{u_x(r)}{U_a} \Big|_{\tau=\tau_0}$  των τριών ρευστών σε

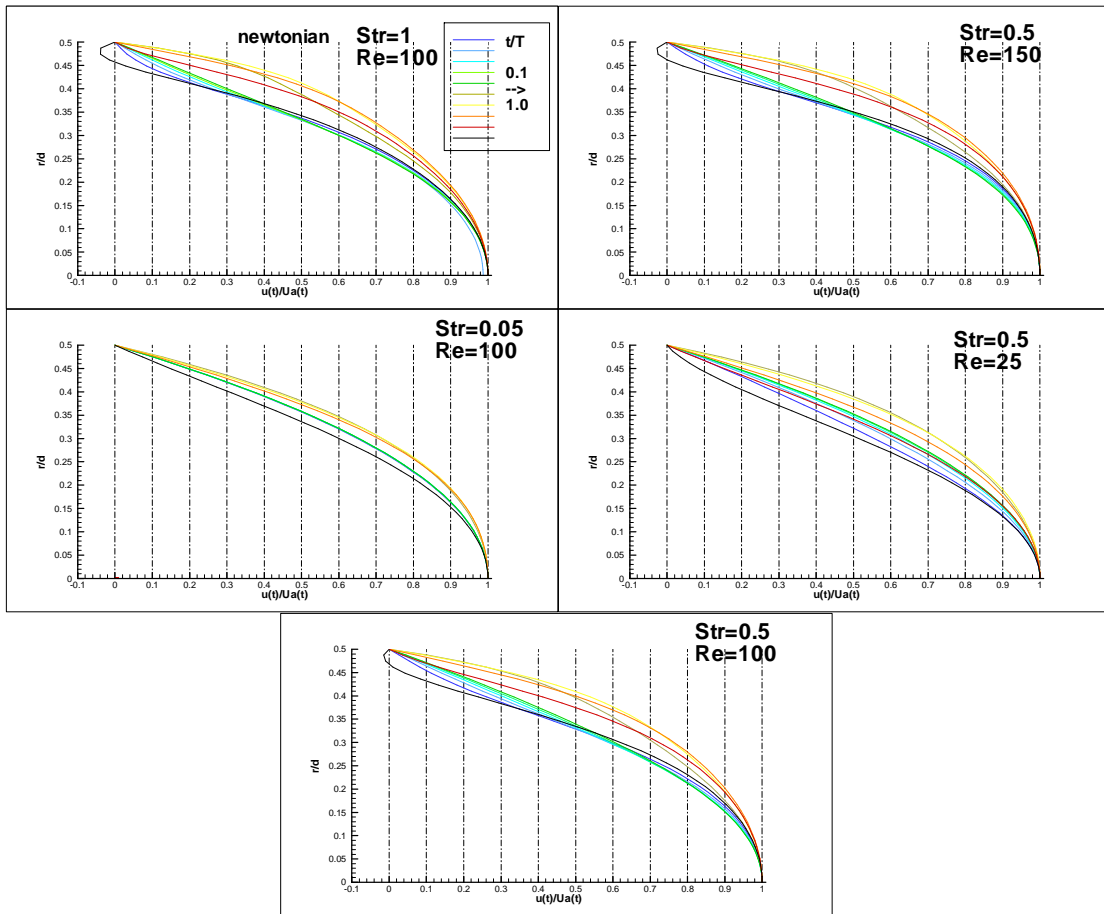
διατομή του ευθύγραμμου τμήματος του αγωγού, ανάντι της στένωσης, για όλες τις στιγμές  $\tau = t/T = \tau_0$ .

Στο τμήμα αυτό του αγωγού, δεν παρατηρήθηκαν δίνες ή φαινόμενα που να μη μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε ότι οι κατανομές αυτές δεν είναι καλά διαμορφωμένες.

Η απόσταση της διατομής από την είσοδο του αγωγού είναι  $L_0 = 5d$  και μας εξασφαλίζει την καλή διαμόρφωση της ροής, τόσο σχετικά με την είσοδο του αγωγού, όσο και με τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στη στένωση, η οποία ξεκινά σε απόσταση  $L_s = 10d$  και συνεπώς, από το σημείο μετρήσεων απέχει  $|L_s - L_0| = L_0 = 5d$ .

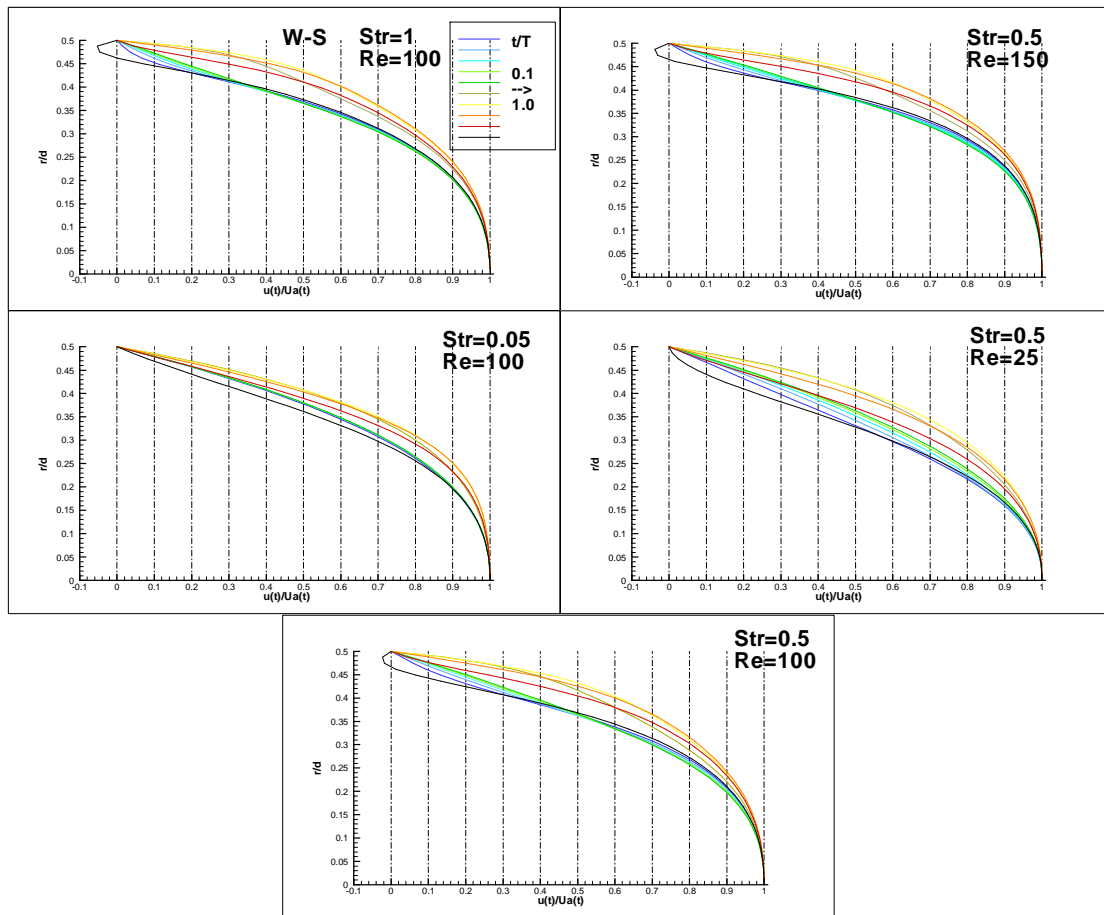
Σημειώνουμε, ότι το μήκος αυτό είναι μικρότερο του απαιτούμενου για πλήρη διαμόρφωση της ροής στη μόνιμη κατάσταση, όπως το υπολογίσαμε, αλλά σύμφωνα με μετρήσεις της ακτινικής ταχύτητας στην περιοχή:  $\frac{u_r(L_0/d=5)}{U_0} < 1\%$  σε κάθε

στιγμή της περιόδου, για κάθε μοντέλο.

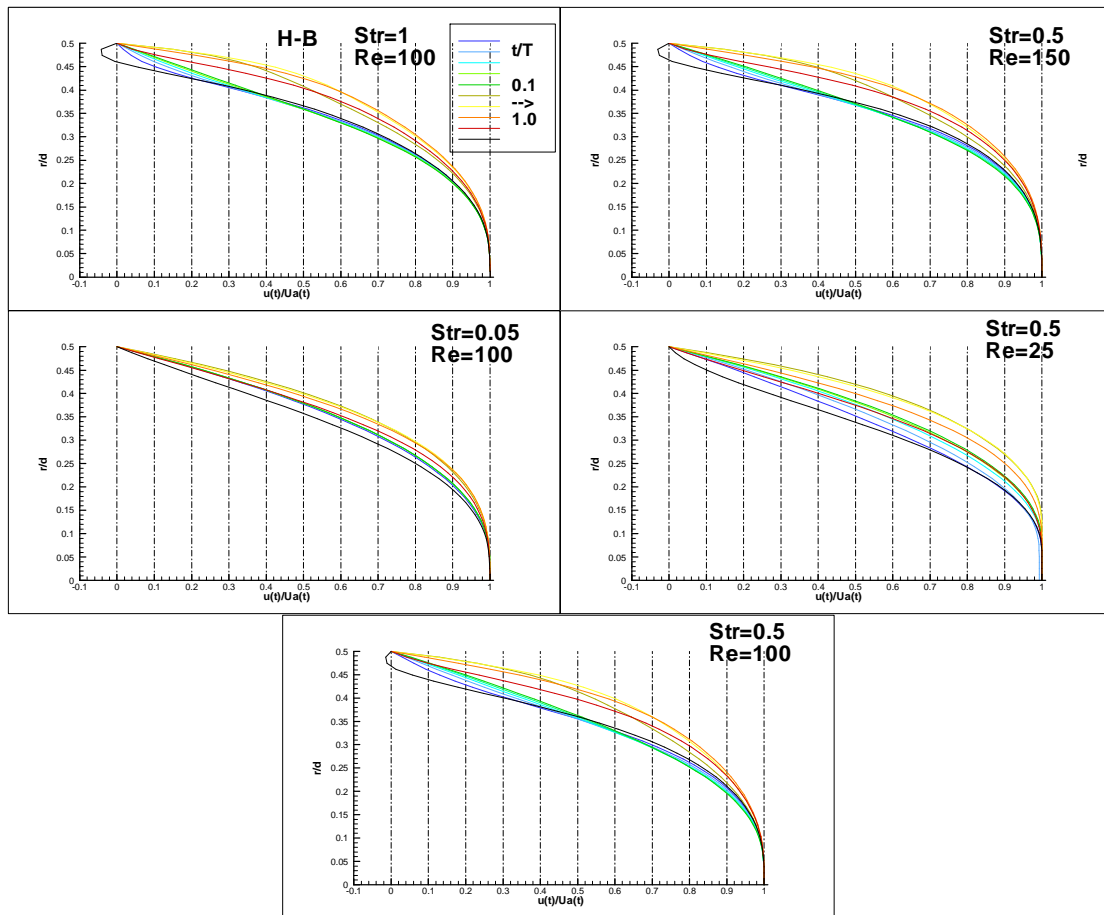


Δ5.81 – κατανομές ταχυτήτων του νευτώνειου, σε απόσταση  $L_0 = 5d$  από την είσοδο του αγωγού





Δ5.82 – κατανομές ταχυτήτων του W-S, σε απόσταση  $L_0 = 5d$  από την είσοδο του αγωγού



Δ5.83 – κατανομές ταχυτήτων του H-B, σε απόσταση  $L_0 = 5d$  από την είσοδο του αγωγού

## συμπεράσματα

- οι κατανομές των ταχυτήτων δείχνουν να επηρεάζονται από μία σχέση των  $Re$  και  $Str$ , καθώς, αύξηση και των δύο παράγει αύξηση της οπισθοροής αλλά και της διαφοράς των κατανομών μίας περιόδου

Σε όλα τα μοντέλα, παρουσιάζεται τάση προς δημιουργία περισσότερο πεπλατυσμένων κατανομών (*plug profiles*) στην περιοχή του άξονα, αυξανόμενου του  $Re$ . Θα λέγαμε, λοιπόν, ότι η μορφή της κατανομής στην περιοχή του άξονα, σχετίζεται με το  $Re$  (εξαιρέση, προφανώς, αποτελεί η ροή του H-B για  $Re = 25 - Str = 0.5$ , αφού ο χαμηλός  $Re$  εξακοντίζει το  $Bi$ ).

Καθώς ο  $Str$  αυξάνεται και τα μη μόνιμα φαινόμενα γίνονται ολοένα και πιο σημαντικά, δε δίνεται ο «απαιτούμενος χρόνος» στις συνεκτικές δυνάμεις να δράσουν και να μην επιτρέψουν τη μεταβολή της κατανομής, κατά τη διάρκεια της περιόδου.

Αντίστοιχα, αυξανόμενου του  $Re$ , οι συνεκτικές δυνάμεις εξασθενούν, αφήνοντας το ρευστό «έρμαιο στις προσταγές των μεταβολών της ταχύτητας».

Στην [26], ο αριθμός  $\alpha$  (Womersley), αντιστοιχώντας στις δικές μας παραμέτρους

γράφεται  $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re \cdot Str}$ , εισάγεται ως μοναδική παράμετρος της μορφής των

κατανομών ταχύτητας σε ευθύγραμμο αγωγό, υπό πλήρως ημιτονοειδή συνάρτηση ταχύτητας εισόδου. Εκεί, αναφέρεται ότι η επίδραση της αύξησης του  $\alpha$  είναι η πλάτυνση των κατανομών στην περιοχή του άξονα και η αύξηση της οπισθοροής (*backflow*).

Αυτό, αποτελεί ένδειξη της ισχύος του αριθμού  $\alpha$ , ως μοναδικού δείκτη της συμπεριφοράς των κατανομών ταχύτητας μέσα σε μία περίοδο, ακόμα και στη δική μας παλμική συνάρτηση της ταχύτητας εισόδου. Απόδειξη της σχέσης αυτής, δυστυχώς, δεν είμαστε να δώσουμε μέσα από τα αποτελέσματά μας.

- οι διαφορές στις κατανομές νευτώνειου και μη νευτώνειων, αυξάνουν με τον ίδιο μηχανισμό που περιγράψαμε παραπάνω

Ένα τέτοιο στοιχείο, μπορεί θεωρηθεί επιβεβαίωση για τον ισχυρισμό που περιγράφεται στην [85] και θέλει το μειωμένο  $\alpha$ , δείκτη της σημαντικότητας των μη νευτώνειων χαρακτηριστικών.

- το W-S παρουσιάζει μεγαλύτερη ταχύτητα οπισθοροής και σε αυτή εμπλέκονται περισσότερα στρώματα ρευστού.

Αυτή η συμπεριφορά σχετίζεται άμεσα με τα μεγάλα μήκη ανακυκλοφορίας και μήκη αγωγού για επίτευξη πλήρως αναπτυγμένης ροής, που παρατηρήσαμε και σχολιάσαμε, στη μόνιμη ροή.

- η ροή του H-B έχει την περισσότερο πεπλατυσμένη μορφή, υπό την επίδραση του υψηλότερου  $Bi = 1.512$

Αν, μάλιστα, συγκρίνουμε τις κατανομές της σταθερής φάσης, με την κατανομή που προέκυψε στον ευθύγραμμο σωλήνα για  $Re = 25$ , αλλά  $Bi = 0.276$ , θα διαπιστώσουμε ότι είναι περισσότερο απότομες, δίνοντάς μας αντίληψη της ισχυρότατης επίδρασης του αριθμού αυτού στη ροή του H-B. Πάντως, όπως και στη μόνιμη ροή, στους αυξημένους  $Re$ , δηλαδή όταν έχει μειωθεί η επίδραση του  $Bi$ , τείνει να προσεγγίσει καλύτερα τη νευτώνεια συμπεριφορά σε σχέση με το W-S.

## ν} ροϊκά φαινόμενα και μεταβολές των μεγεθών

Κατά τη μελέτη αυτών των ροών, έγινε σαφές ότι νέα εργαλεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν, για την αποκάλυψη της σχέσης των ροϊκών χαρακτηριστικών με τα διάφορα μεγέθη.

Παρακάτω, λοιπόν, προσπαθούμε να κάνουμε μία τέτοια συσχέτιση, απεικονίζοντας τη μεταβολή τεσσάρων μεγεθών, κατάλληλα αδιαστατοποιημένων, σε θέσεις του αγωγού και χρονικές στιγμές, που κρίθηκαν ενδιαφέρουσες.

### ιξώδες (viscosity)

Μελετώνται οι ισοσταθμικές καμπύλες, που σχηματίζει στον αγωγό και η αδιαστατοποίηση γίνεται με ένα ιξώδες αναφοράς  $\mu_{ref} = \mu_{eff}$ , το αποτελεσματικό ιξώδες για κάθε μοντέλο.

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_{eff}}$$

Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να αποκαλυφθεί μία πιθανή σχέση μεταβολών στο ιξώδες και τα σημεία εμφάνισης των δινών.

### μέτρο ρυθμού παραμόρφωσης στον άξονα ( strain rate on axis)

Παρουσιάζεται σε κάθε αξονική θέση του αγωγού, αφού πάνω στον άξονα αναμένεται να λαμβάνει τις χαμηλότερες τιμές, εφόσον εκεί έχουμε μικρή ακτινική μεταβολή των ταχυτήτων. Έτσι, ο άξονας συμμετρίας, υποδεικνύονται ως περιοχή έντονων μεταβολών στο ιξώδες των μη νευτώνειων ρευστών και άρα άξια μελέτης.

Αδιαστατοποίησή του γίνεται με τη διάμετρο  $d$  του αγωγού και την ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος κάθε ρευστού  $U_0$ .

Για τη ροή στον αξονικά συμμετρικό, στενωμένο αγωγό, δηλαδή μία ροή που εμφανίζει γωνιακή παραμόρφωση σε δύο κατευθύνσεις (*bidirectional flow*), όπως έχουμε δείξει, το μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης  $\gamma$  είναι μία σύνθετη συνάρτηση των παραγώγων των ταχυτήτων προς κάθε κατεύθυνση:

$$\gamma = \sqrt{\left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]^2 \right|} \quad \text{και τελικά} \quad \gamma^* = \frac{\gamma d}{U_0}$$

### μέτρο στροβιλότητας στο τοίχωμα (vorticity at wall)

Το μέτρο της στροβιλότητας είναι το μέγεθος, που αναδεικνύει τις διαταραχές που υπάρχουν στη ροή, αποκαλύπτοντας εκλυόμενες δίνες.

Οι δίνες στις αξονικά συμμετρικές ροές μας, βρίσκονται αποκλειστικά στην περιοχή του τοιχώματος. Αυτό, κάνει ιδιαίτερα ελκυστική μία παρουσίαση της μεταβολής της στην περιοχή αυτή, με απώτερο στόχο την εύρεση της συνθήκης που θα μας υποδείκνυει τη θέση των δινών.

Η αδιαστατοποίησή της γίνεται και πάλι με χρήση της διαμέτρου  $d$  του αγωγού και της ταχύτητας του ελεύθερου ρεύματος κάθε ρευστού  $U_0$ .

$$|\omega| = \left| \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right| \quad \text{και τελικά} \quad \omega^* = \frac{|\omega| d}{U_0}$$

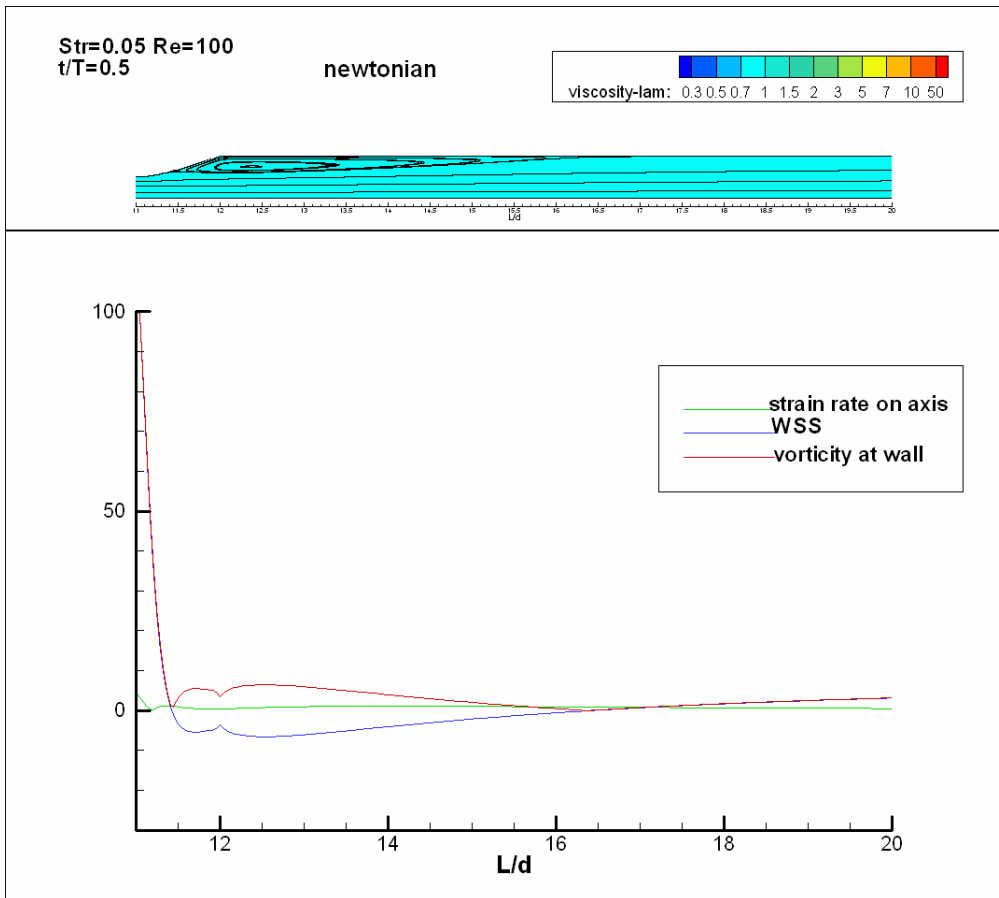
### διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα (WSS)

Στις WSS, έχουμε ήδη αναφερθεί εκτενώς, θα τις δούμε εδώ, όμως, υπό νέο πρίσμα, καθώς θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετική αδιαστατοποίηση.

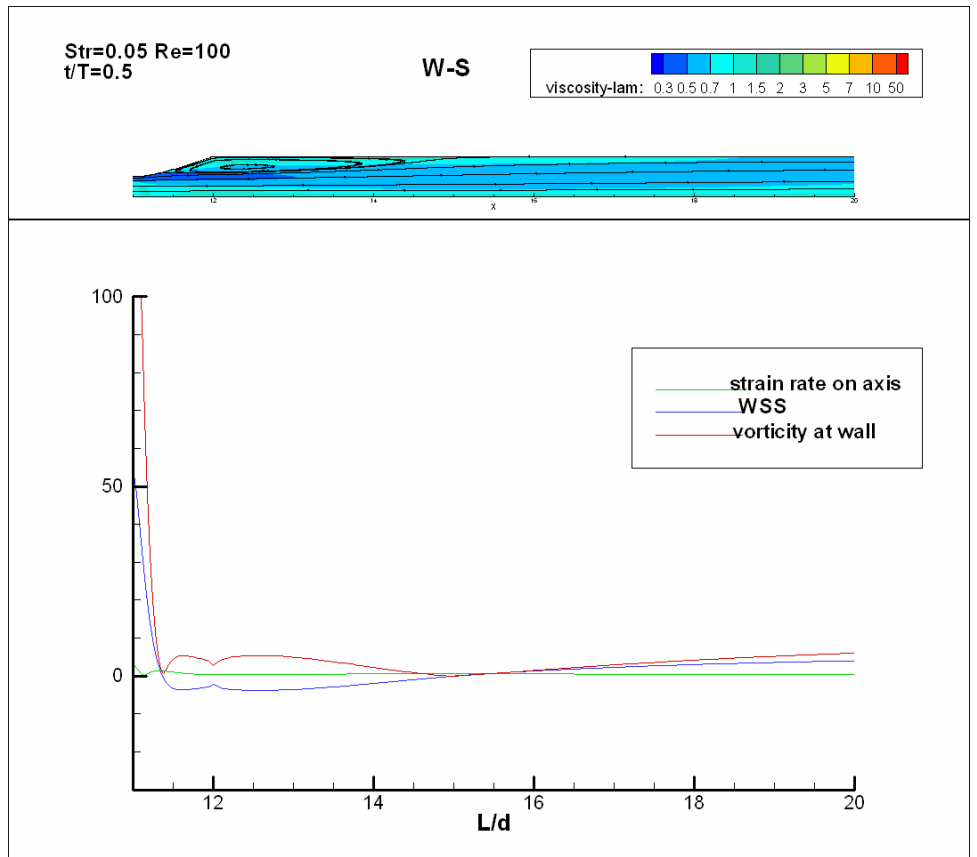
Οι WSS είναι το γινόμενο του ιξώδους και του ρυθμού παραμόρφωσης, μετρημένων στο τοίχωμα και με αυτό το σκεπτικό, αδιαστατοποιούμε ξεχωριστά το ιξώδες και τον ρυθμό παραμόρφωσης.

$$\tau_w = -\mu(\gamma) \cdot \gamma \quad \text{και τελικά} \quad T_w = -\frac{\mu}{\mu_{ref}} \cdot \frac{\gamma d}{U_0}$$

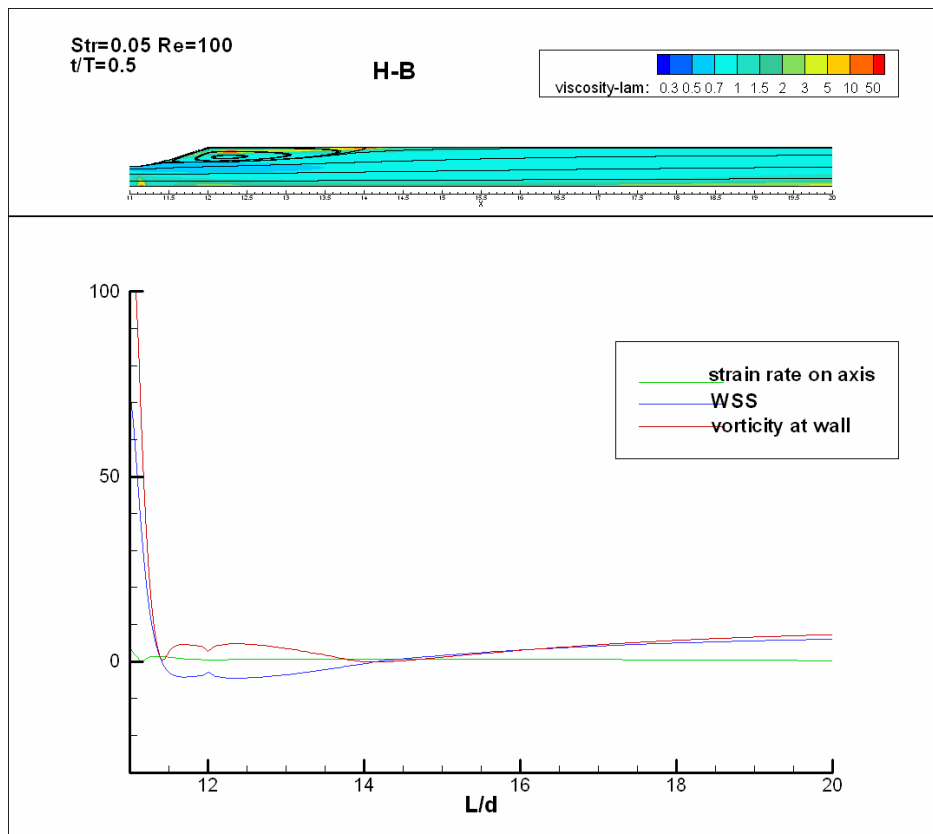
- **Str=0.05 – Re=100,  $\tau = 0.5$**



Δ5.84– νευτώνειο,  $Str = 0.05 - Re = 100, \tau = 0.5$



$\Delta 5.85$ – W-S,  $Str = 0.05$  –  $Re = 100$ ,  $\tau = 0.5$



$\Delta 5.86$ – H-B,  $Str = 0.05$  –  $Re = 100$ ,  $\tau = 0.5$

Σε όλα τα διαγράμματα Δ5.84-Δ5.86, η περιοχή ανακυκλοφορίας εκτείνεται μεταξύ των δύο σημείων τομής των καμπυλών  $\omega$  και WSS.

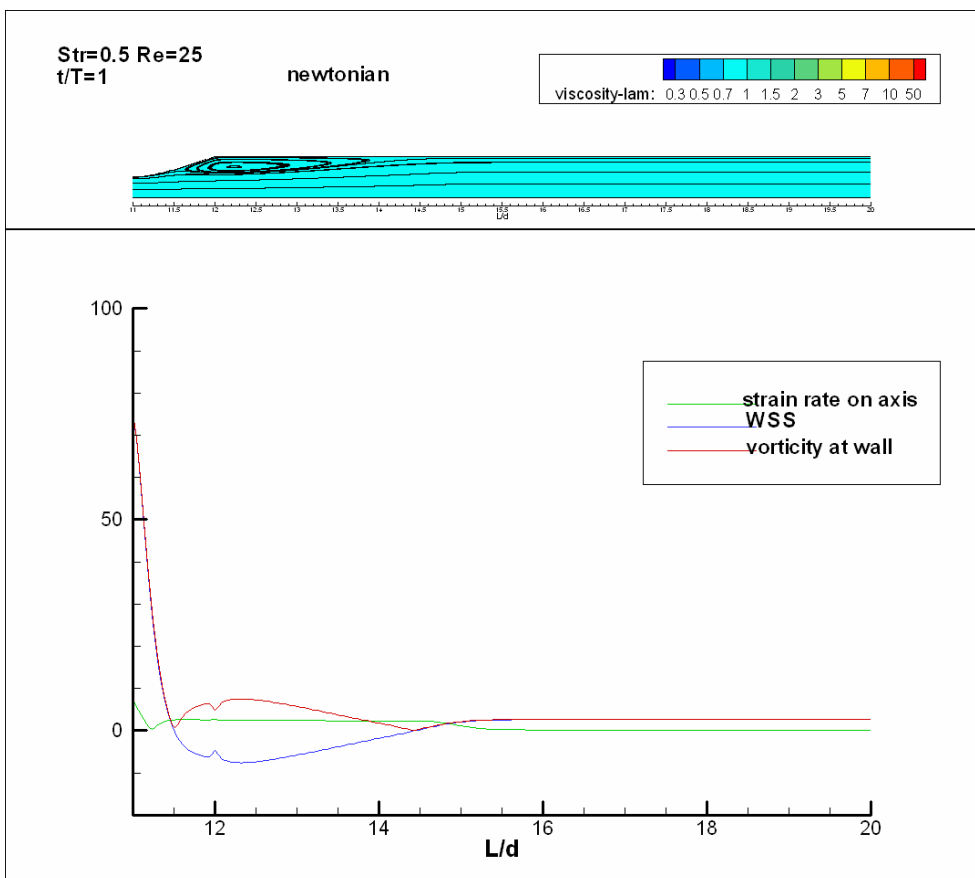
Παρατηρώντας, στα διαγράμματα φαίνεται με πολύ καλή ακρίβεια, τα σημεία μηδενισμού των τάσεων, να είναι τα σημεία μηδενισμού του μέτρου της στροβιλότητας  $\omega$ .

Ο ρυθμός παραμόρφωσης στον άξονα παρουσιάζει μικρές μεταβολές, σχηματίζοντας συνθήκες σταθερού ιξώδους

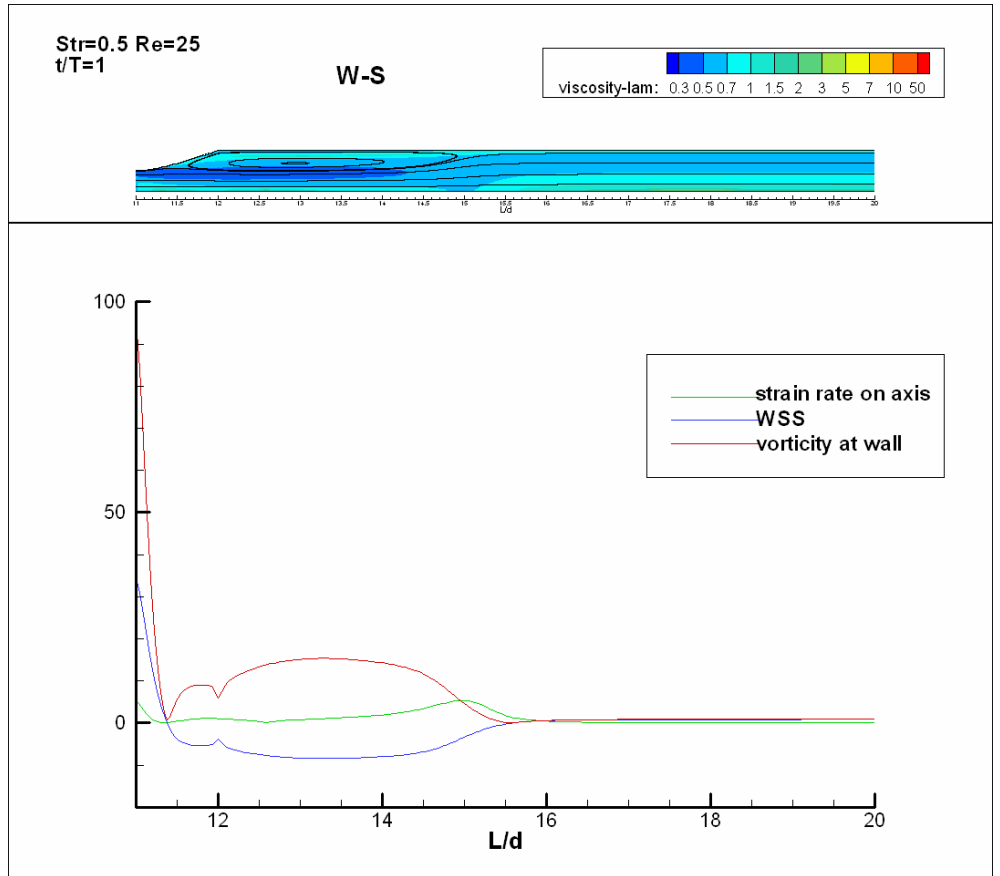
Το ιξώδες των μη νευτώνειων ρευστών, μεταβάλλεται έντονα στο περίγραμμα των δινών, ενώ στην περιοχή του άξονα, όπως και στην περίπτωση μόνιμης ροής, σχηματίζεται μία ζώνη με σταθερό ιξώδες

Οι διαφορές στα δύο μη νευτώνεια μοντέλα είναι σημαντικές, καθώς στο H-B το ιξώδες τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του  $\mu_{ref}$ , ενώ στο W-S το ιξώδες είναι μικρότερο και μόνο οριακά στην περιοχή του άξονα φτάνει την τιμή του αντίστοιχου  $\mu_{ref}$ .

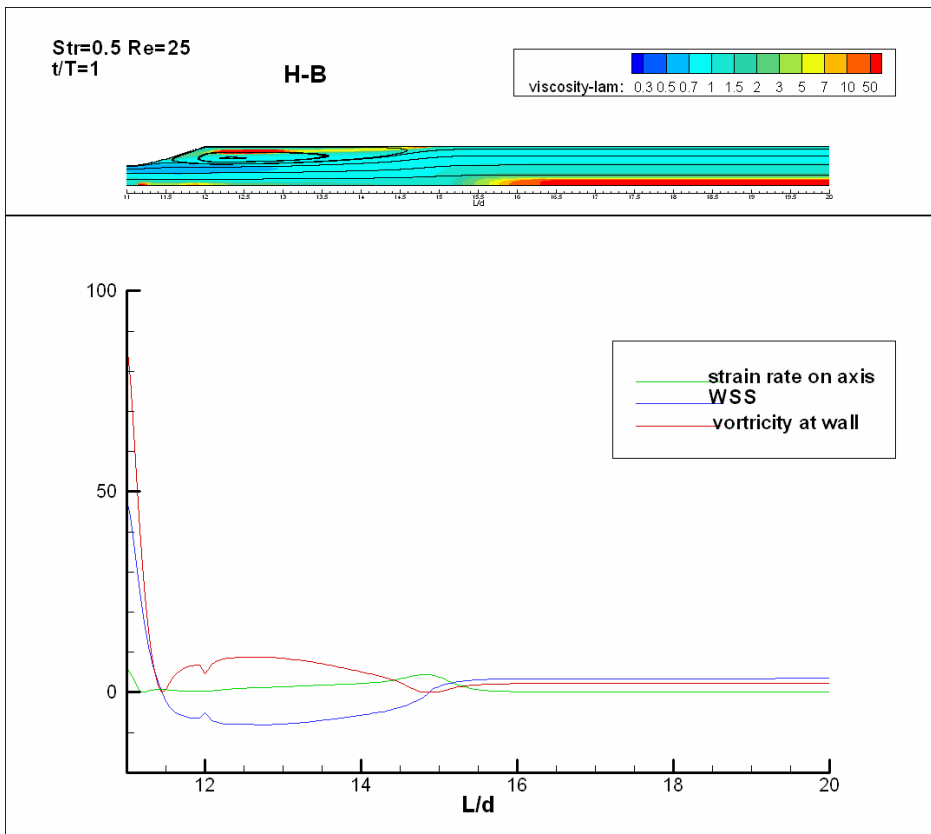
- **Str=0.5 – Re=25,  $\tau = 1$**



Δ5.87– νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 25, \tau = 1$



$\Delta 5.88$ – W-S,  $Str = 0.5 - Re = 25, \tau = 1$



$\Delta 5.89$ – H-B,  $Str = 0.5 - Re = 25, \tau = 1$



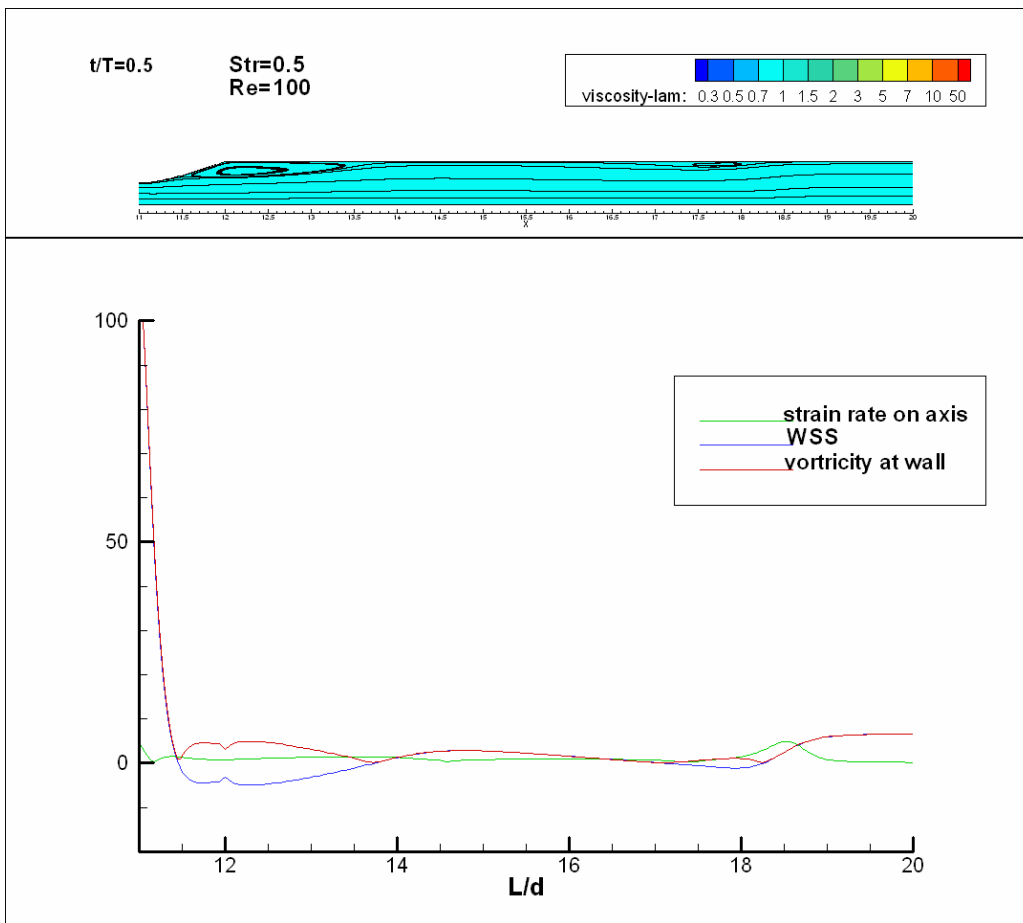
Το σημείο μηδενισμού των τάσεων, συμπίπτει με το σημείο μηδενισμού του μέτρου της στροβιλότητας  $\omega$ , με την περιοχή ανακυκλοφορίας να εκτείνεται ανάμεσα στα δύο κοινά σημεία μηδενισμού. Παρατήρηση κοινή και στην προηγούμενη ροή  $Str = 0.05 - Re = 100$  την  $\tau = 0.5$ .

Ο ρυθμός παραμόρφωσης στον άξονα παρουσιάζει αύξηση στην περιοχή του σημείου επανακόλλησης της ροής.

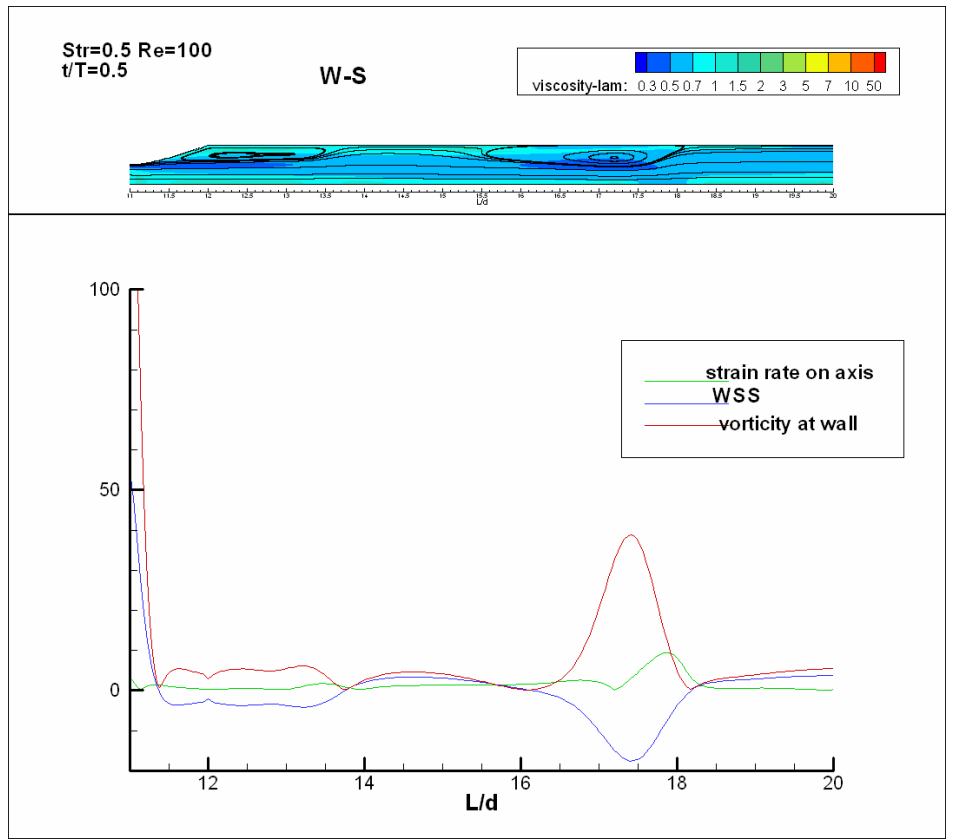
Το ιξώδες στο H-B εξακοντίζεται, φτάνοντας τιμές δεκαπλάσιες του  $\mu_{eff}$  στην περιοχή γύρω από τον άξονα, ενώ στο W-S στα ίδια σημεία εξισώνεται με το  $\mu_{eff}$ .

Το φαινόμενο αυτό, προφανώς σχετίζεται με το μειωμένο  $Re$ , σύμφωνα και με τα αποτελέσματα της μόνιμης ροής.

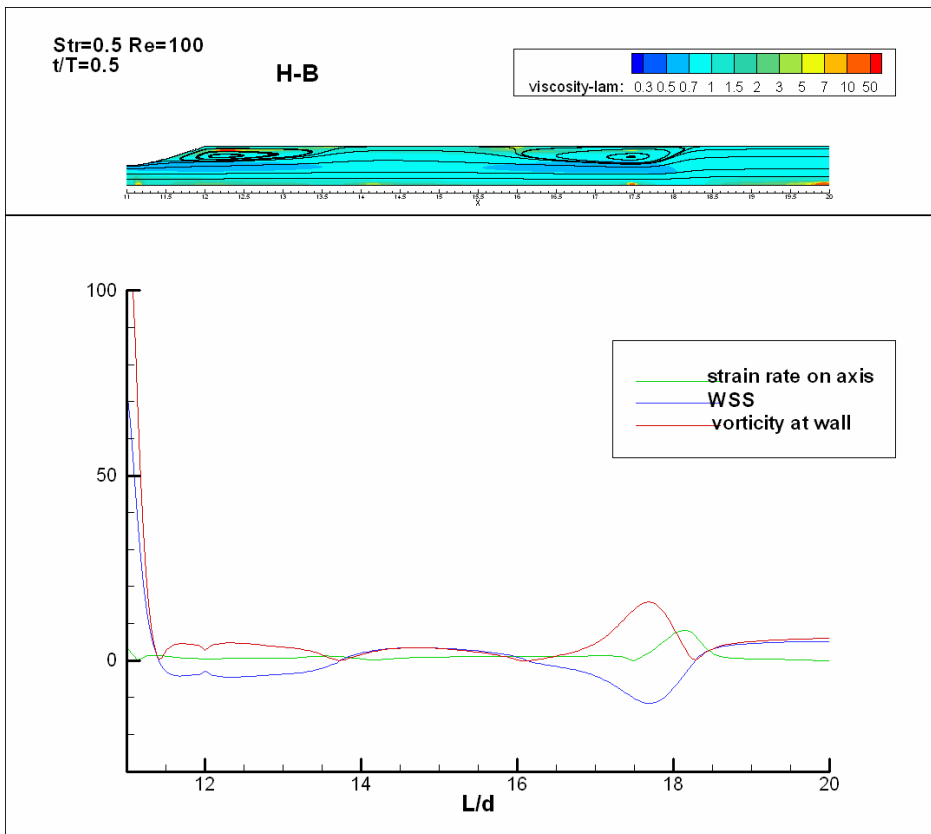
• **Str=0.5 – Re=100 και Str=0.5 – Re=150,  $\tau = 0.5$**



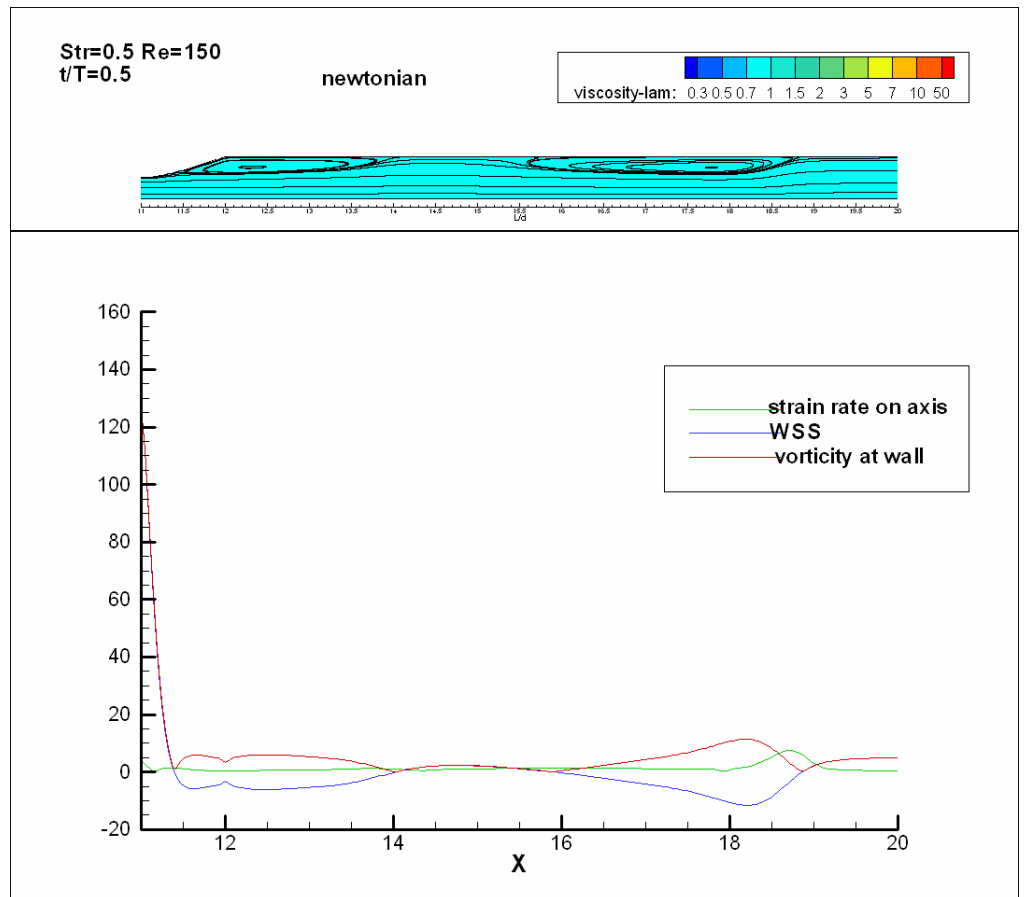
Δ5.90– νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $\tau = 0.5$



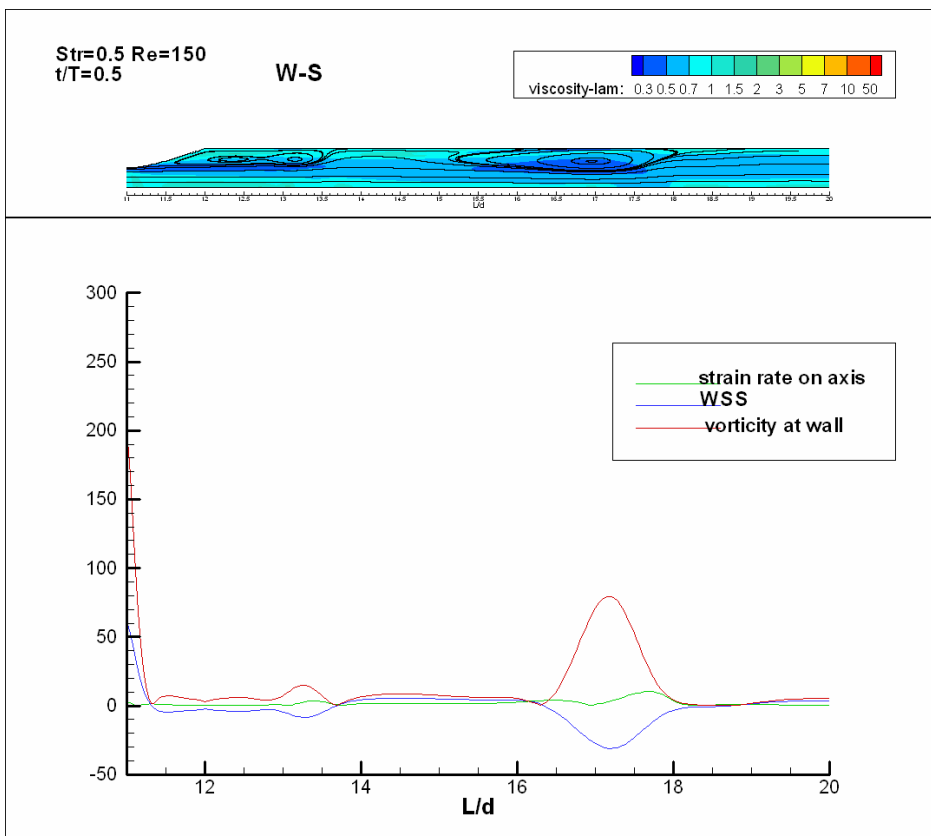
$\Delta 5.91$ – W-S,  $Str = 0.5$  –  $Re = 100$ ,  $\tau = 0.5$



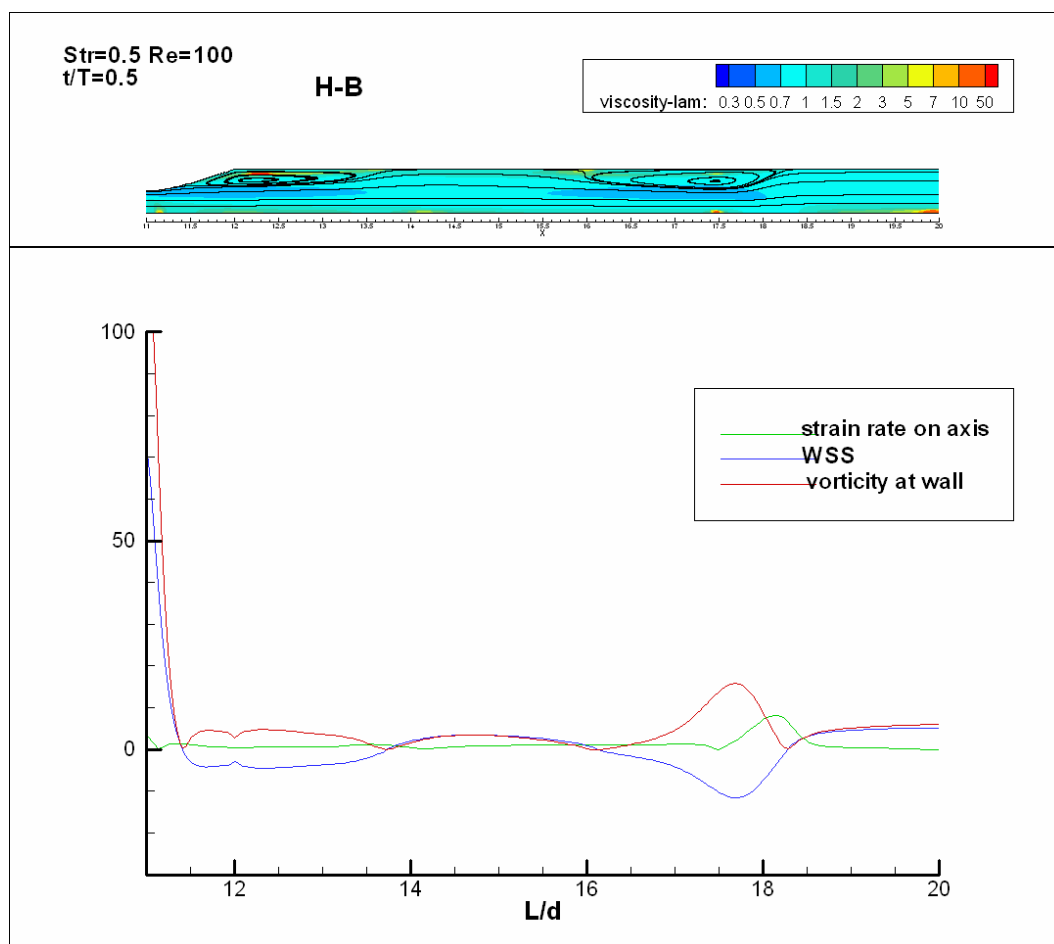
$\Delta 5.92$ – H-B,  $Str = 0.5$  –  $Re = 100$ ,  $\tau = 0.5$



$\Delta 5.93$ – νευτώνειο,  $Str = 0.5 - Re = 150$ ,  $\tau = 0.5$



$\Delta 5.94$ – W-S,  $Str = 0.5 - Re = 150$ ,  $\tau = 0.5$



Δ5.95– H-B,  $Str = 0.5 - Re = 150, \tau = 0.5$

Στην περιοχή εμφάνισης του κέντρου της δίνης, έχουμε την εμφάνιση τοπικού μεγίστου στο διάγραμμα της στροβιλότητας και στην περιοχή επανακόλλησης της ροής, κατάντι του κέντρου της εμφανιζόμενης δίνης, ο ρυθμός παραμόρφωσης στον άξονα αυξάνεται.

Κάτω από τις περιοχές ανακυκλοφορίας, το ιζώδες εμφανίζεται να δημιουργεί περιοχές με μικρότερες τιμές.

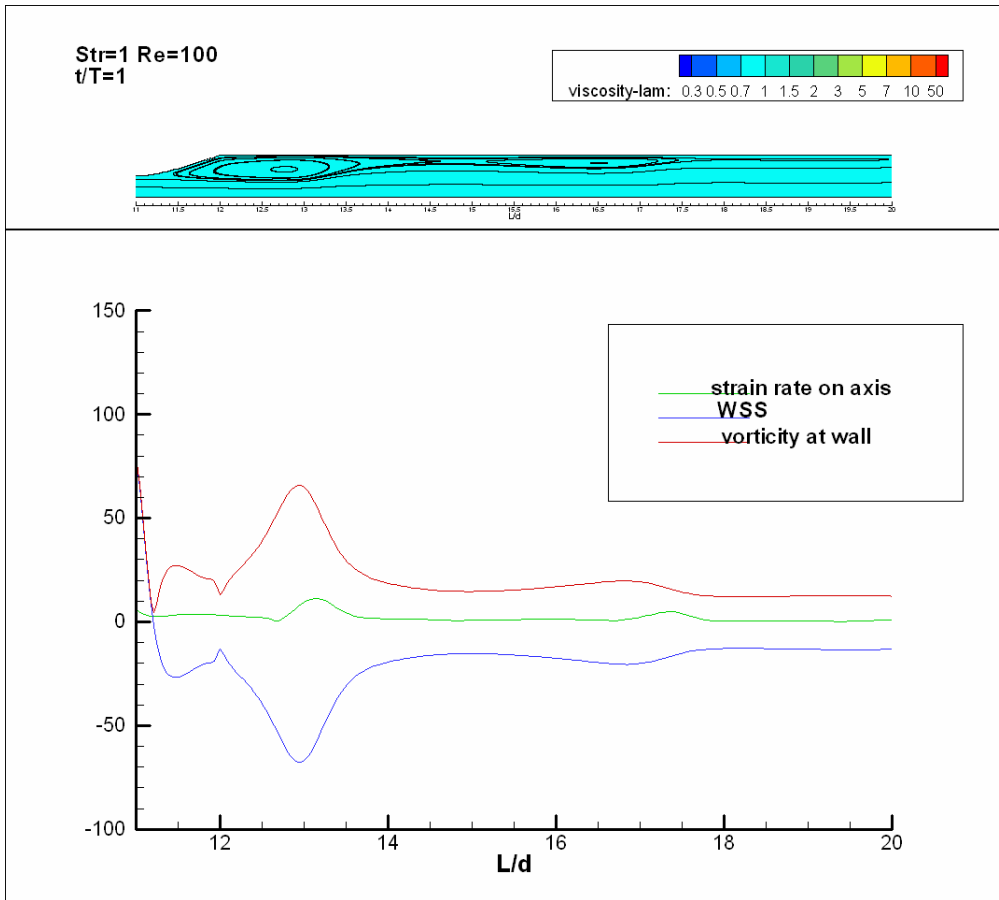
Τέλος, ιδιαίτερα χαρακτηριστική είναι η πληροφορία για το κέντρο της δίνης, που λαμβάνουμε από το ρυθμό παραμόρφωσης στον άξονα.

Η αξονική θέση του κέντρου της δίνης, συμπίπτει με τη μείωση του ρυθμού παραμόρφωσης και την αύξηση του ιζώδους στη θέση αυτή.

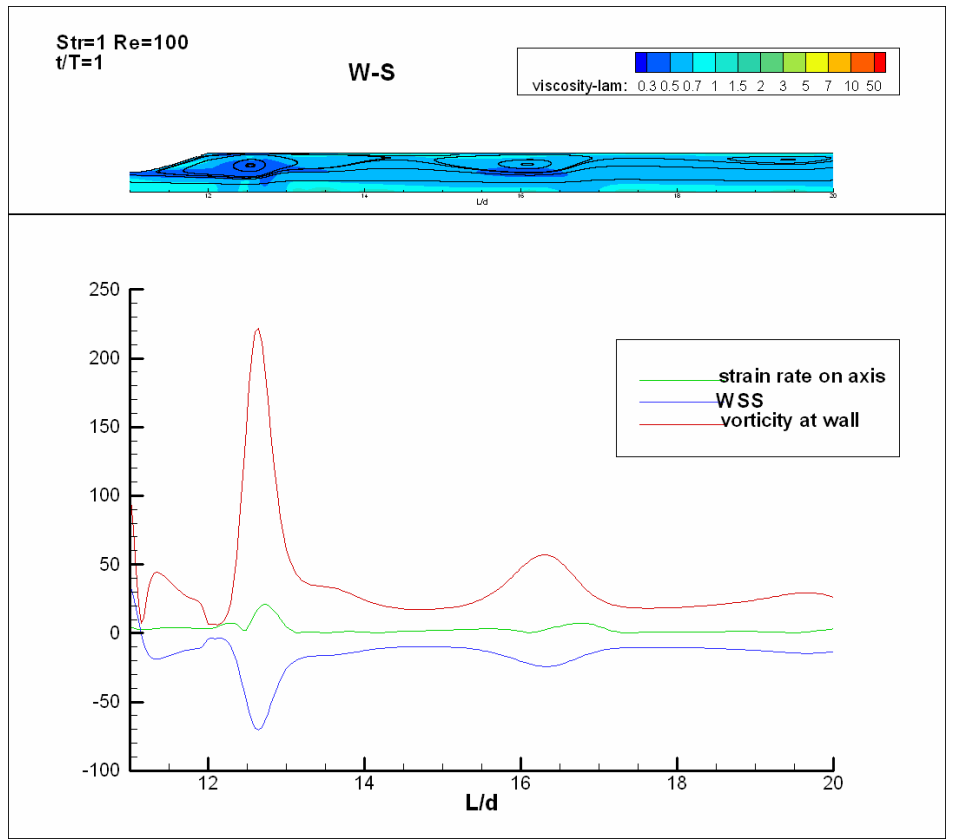
Όπως φαίνεται από τις ισοσταθμικές του ιζώδους, στην ίδια αξονική θέση με το κέντρο της δίνης, αλλά πάνω στον άξονα συμμετρίας, δημιουργείται μία πολύ μικρή κυκλική περιοχή με αυξημένο ιζώδες και στα δύο μη νευτώνεια. Η περιοχή αυτή οφείλει τις υψηλές τιμές ιζώδους, ακριβώς στο μειωμένο ρυθμό παραμόρφωσης που εμφανίζεται εκεί.

Και στη δεύτερη δίνη, το σημείο τομής των καμπυλών μέτρου στροβιλότητας και WSS υποδεικνύει τα ακραία σημεία της δίνης.

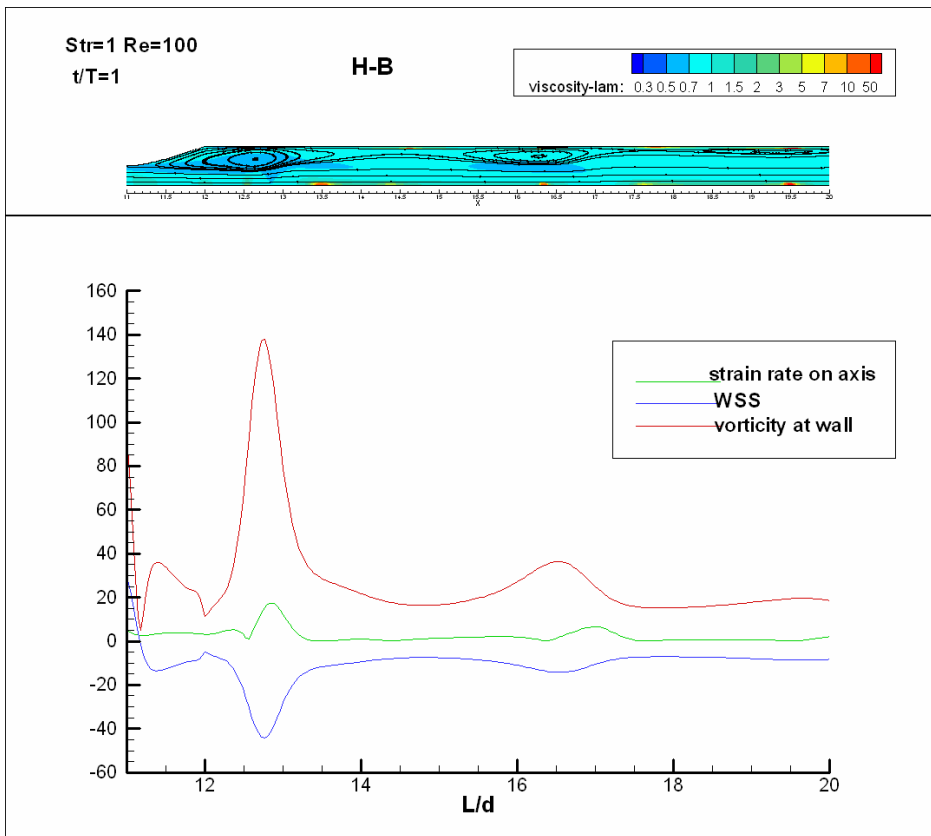
- **Str=1 – Re=100**



Δ5.96– νευτώνειο,  $Str = 1 - Re = 100, \tau = 1$



$\Delta 5.97$ – W-S,  $Str = 1 - Re = 100, \tau = 1$



$\Delta 5.98$ – H-B,  $Str = 1 - Re = 100, \tau = 1$

Η υπόθεσή μας, για εμφάνιση των ακραίων σημείων μιας δίνης, στα σημεία τομής των καμπυλών μέτρου στροβιλότητας και WSS, καταρρέει και δεν μπορούμε παρά να θεωρήσουμε ότι αυτό οφείλεται στην αύξηση του  $Str$  και την ισχυρή επίδραση της μη μονιμότητας.

Οι δύο άλλες παρατηρήσεις, όμως, εξακολουθούν να έχουν ισχύ:

Έτσι, και πάλι επί του άξονα, σε αξονική θέση, ίδια με αυτή του κέντρου δινών, μακριά από τη στένωση, εμφανίζονται τόποι με αυξημένο ιξώδες. Αυτό, είναι εμφανές κυρίως στο H-B ρευστό, αλλά παρατηρώντας προσεκτικά φαίνεται και για το W-S. Η συμπεριφορά αυτή, προκαλείται από τις παρατηρούμενες πτώσεις στην τιμή του ρυθμού παραμόρφωσης επί του άξονα, στις αντίστοιχες θέσεις, οι οποίες είναι κοινές και για το νευτώνειο.

Τα κέντρα των δινών είναι περιοχές εμφάνισης τοπικού μεγίστου στο μέτρο της στροβιλότητας στο τοίχωμα.

### συμπεράσματα

- πληροφορία για το κέντρο μιας δίνης είναι δυνατόν να λάβουμε από ρευστομηχανικά μεγέθη στον άξονα

Συγκεκριμένα, είδαμε την αξονική θέση μίας δίνης να συμπίπτει με σημείο καμψής του ρυθμού παραμόρφωσης στον άξονα, κάτι που στα μη νευτώνεια ρευστά μεταφράστηκε σε μικρή περιοχή αύξησης του ιξώδους.

Η μικρή περιοχή αυξημένου ιξώδους, μας θυμίζει το αυξημένο ιξώδες στο κέντρο της δίνης, που είχαμε παρατηρήσει στη μόνιμη ροή, για  $Re$  κοντά στον  $Re_{critical}$  (για  $Re \geq Re_{critical}$  έχουμε αποκόλληση της ροής).

Στο τέλος της περιοχής ανακυκλοφορίας, ο ρυθμός παραμόρφωσης παρουσιάζει αυξητική τάση.

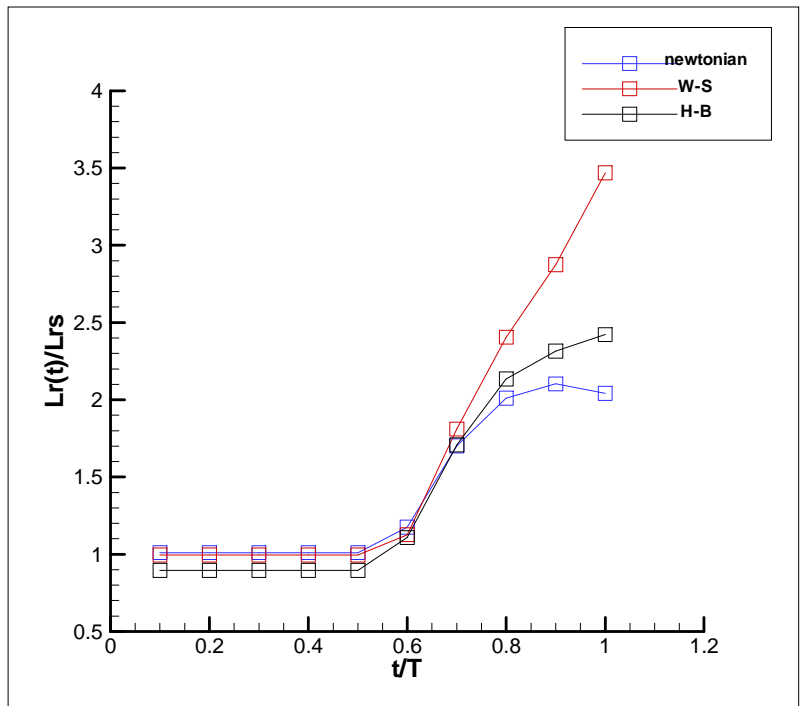
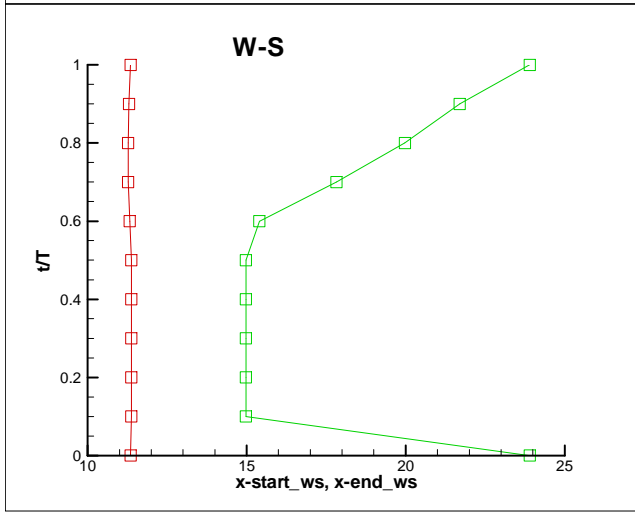
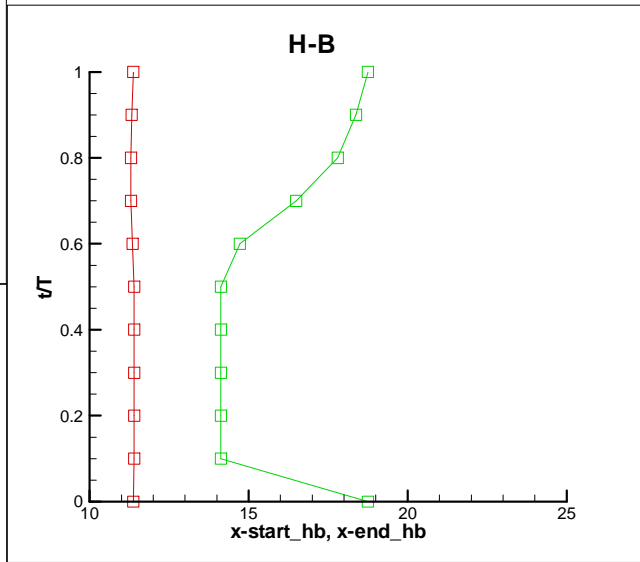
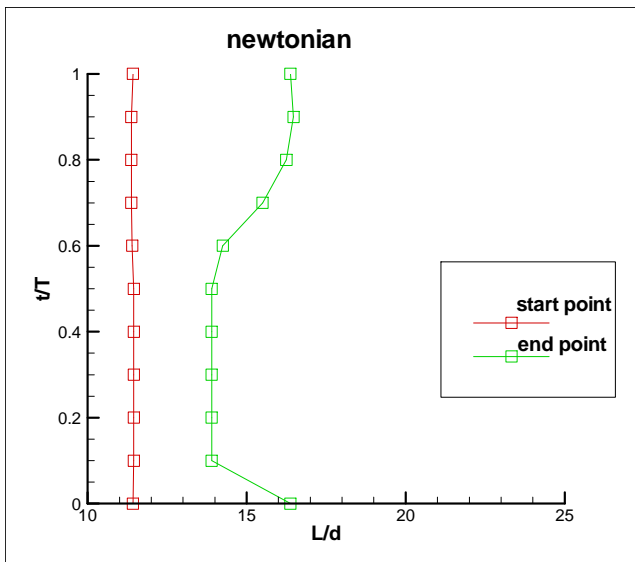
- η περιοχή που συναντούμε το κέντρο κάποιας δίνης είναι περιοχή εμφάνισης τοπικού μεγίστου του μέτρου της στροβιλότητας στο τοίχωμα
- το ιξώδες των μη νευτώνειων ρευστών εμφανίζει αρκετές μεταβολές, με κυριότερες τη ζώνη σταθερού, και υψηλότερου από την υπόλοιπη ροή, ιξώδους επί του άξονα συμμετρίας
- οι καμπύλες μέτρου στροβιλότητας και WSS στο νευτώνειο ρευστό, είτε ταυτίζονται, είτε είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα

Συμμετρικές είναι στις περιοχές ανακυκλοφορίας, ενώ στη ροή στον ευθύγραμμο αγωγό ταυτίζονται. Κάτι τέτοιο, δεν παρατηρείται στα μη νευτώνειο ρευστά, προφανώς λόγω του μεταβλητού ιξώδους.

### $\nu_i$ } μήκη περιοχών ανακυκλοφορίας

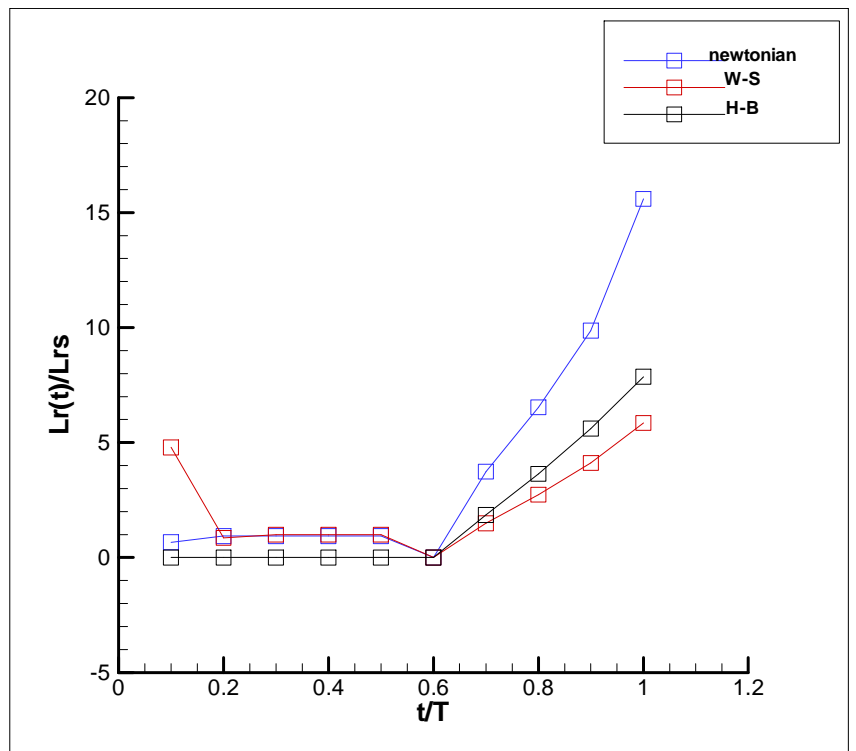
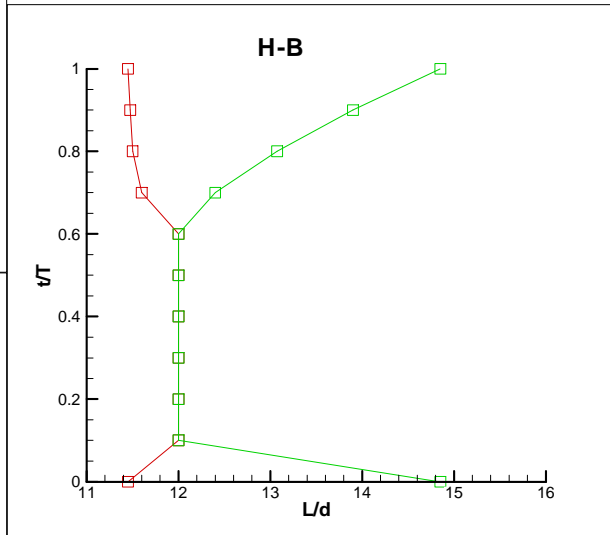
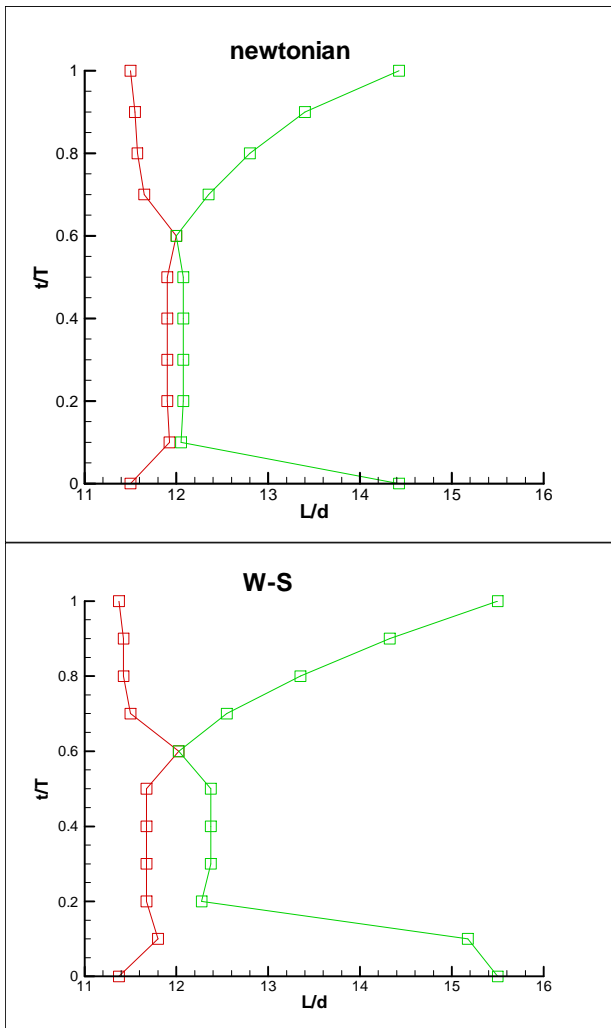
Για τις δύο περιπτώσεις ροών, που δεν παρατηρήθηκαν δίνες, παρά μόνο περιοχές ανακυκλοφορίας ακριβώς κατάντι της στένωσης, παρουσιάζουμε τα σημεία αποκόλλησης (κόκκινο χρώμα) και επανακόλλησης (πράσινο χρώμα) της ροής, κατά τη διάρκεια της περιόδου. Αδιαστατοποιούμε με τη διάμετρο του αγωγού  $d$ . Τα σημεία συμπίπτουν όταν οι περιοχές ανακυκλοφορίας αποσβέννονται.

Επίσης, σχεδιάζουμε και τα διαγράμματα  $L_r(t)/L_{rs} - \tau$ , θέλοντας να συγκρίνουμε τα μήκη ανακυκλοφορίας κάθε στιγμή της μη μόνιμης ροής  $L_r(t)$ , με το παρατηρούμενο στη μόνιμη ροή  $L_{rs}$ , για τον ίδιο  $Re$ . ( $\Delta 5.99$  και  $\Delta 5.100$ )



Δ5.99– οι ανακυκλοφορίες στη ροή  $Str = 0.05 - Re = 100$





Δ5.100– οι ανακυκλώσεις στη ροή  $Str = 0.5 - Re = 25$

## συμπεράσματα

- το σημείο αποκόλλησης της ροής δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από την επιτάχυνση ή την επιβράδυνση της ροής σε κανένα μοντέλο, όπως στη μελέτη της μόνιμης ροή δε μετατοπιζόταν ιδιαίτερα για μεταβολή του  $Re$
- το σημείο επανακόλλησης, αυξάνεται προοδευτικά με την επιτάχυνση της ροής, αλλά απότομα με την επιβράδυνσή της, δίνοντάς μας την εντύπωση ότι η δημιουργούμενη αναρρόφηση επιδρά πολύ ισχυρότερα στο ρευστό, από την εξώθησή του στη φάση επιτάχυνσης
- τα μήκη ανακυκλοφορίας στη φάση μόνιμης παροχής είναι ίδια με αυτά στο μόνιμο πεδίο ροής, ενώ στη φάση μη μόνιμης παροχής πολλαπλασιάζονται αρκετές φορές, ανάλογα με το μοντέλο και τις συνθήκες ροής

Το H-B, που εμφανίζει κατά 10% μικρότερες περιοχές ανακυκλοφορίας, δεν αποτελεί εξαίρεση στον κανόνα, αφού ο  $Bi$ , για τον οποίο έγιναν οι υπολογισμοί του μη μόνιμου πεδίου ήταν 5 φορές μεγαλύτερος. Έμμεσα, λοιπόν, βλέπουμε τη σημαντικότητα του  $Bi$  στη συμπεριφορά του H-B.

- το W-S, όχι μόνο σχηματίζει μεγαλύτερα μήκη ανακυκλοφορίας, αλλά τα αυξάνει και πολύ ευκολότερα, σε σχέση με τα άλλα μοντέλα
- οι εντονότερες μεταβολές που επιβάλλει ο υψηλότερος  $Str$ , αναγκάζουν τα ρευστά να πολλαπλασιάσουν κατά πολύ το μήκος ανακυκλοφορίας που έχουν στη μόνιμη ροή, ενώ οι υψηλές συνεκτικές δυνάμεις για αυτή τη ροή χαμηλού  $Re$ , δεν επιτρέπουν την ανάπτυξη ανακυκλοφορίας στη μόνιμη φάση

Προφανώς, τα μη νευτώνεια αντισταθμίζουν τα ισχυρά μη μόνιμα στοιχεία της ροής, με αύξηση του ιξώδους τους, που τελικά οδηγεί σε μεγαλύτερες συνεκτικές δυνάμεις, μη επιτρέποντας την αύξηση της ανακυκλοφορίας.

## vii} ταχύτητες δινών

Η κατά *Lagrange*, υλική, περιγραφή του πεδίου ροής, που υιοθετήσαμε, μας δίνει τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε την κίνηση των δινών, σαν να κινούμαστε μαζί με αυτές.

Μετρώντας τη μετακίνησή τους σε σχέση με κάποιο ακίνητο όριο του αγωγού, μπορούμε να υπολογίσουμε, άμεσα, τη σχετική ταχύτητά τους με αυτό και τελικά με εμάς, τον ακίνητο παρατηρητή.

Αυτό είναι και ένα βασικότατο πλεονέκτημα μίας υπολογιστικής μελέτης, σε σχέση με μία πειραματική, αφού στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να γίνει έμμεσος υπολογισμός της ταχύτητάς τους.

Ο υπολογισμός γίνεται με κεντρικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών της μετατόπισής τους στο χρόνο, που αναπτύχθηκε σε πρόγραμμα υπολογιστή και παρατίθεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Παρουσιάζουμε ( $\Delta 5.101$ - $\Delta 5.103$ ) την αξονική ταχύτητα του κέντρου μίας δίνης τη στιγμή  $t_n$ ,

$$u_{vortex}(t_n) = \frac{x_{vortex}(t_{n+1}) - x_{vortex}(t_{n-1})}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

ως τη μετατόπιση της αξονικής θέσης του κέντρου μίας δίνης μεταξύ δύο στιγμών,  $\tau_{n-1}$  και  $\tau_{n+1} = \tau_{n-1} + \Delta\tau$ , προς το χρόνο αυτό.  $\Delta\tau = 0.05$  σταθερό.

Οι θέσεις μετρήθηκαν από τα δεδομένα μας, με αρχή μετρήσεων την είσοδο του αγωγού, αλλά λόγω του υπολογισμού μετατοπίσεων και όχι απόλυτων τιμών, μικρή σημασία έχει.

Επειδή οι δίνες αποσβέννονται και επαναδημιουργούνται, θεωρούμε ότι αν μία δίνη δεν εμφανίζεται σε μία στιγμή  $t_n$ , τότε η μετατόπισή της λαμβάνει την τιμή  $x(t_n) = 0$ .

Επίσης, για να αποφύγουμε το φαινόμενο να υπολογίζουμε την ταχύτητα μίας δίνης ως μετατόπισή της από ή προς την αρχή των μετρήσεων  $x = 0$ , που θα προέκυπτε από την προηγούμενη συνθήκη, θεωρούμε την ταχύτητα της δίνης  $u(t_n) = 0$ , αν σε κάποια στιγμή από τις  $t_{n+1}$  ή  $t_{n-1}$  έχουμε  $x(t_{n+1}) = 0$  ή  $x(t_{n-1}) = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα μετατόπισής της υπολογίζεται μετά την πρώτη στιγμή εμφάνισής της και προφανώς δίνες που εμφανίζονται μόνο για μία χρονική στιγμή, δεν έχουν ταχύτητα μετακίνησης.

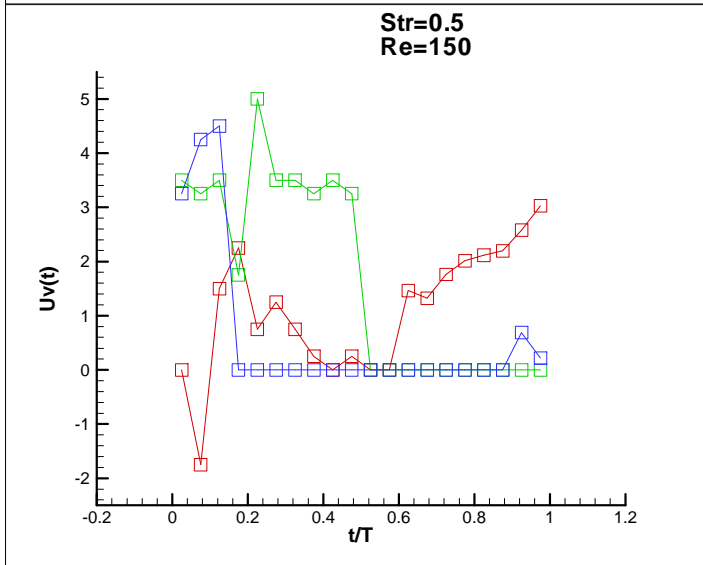
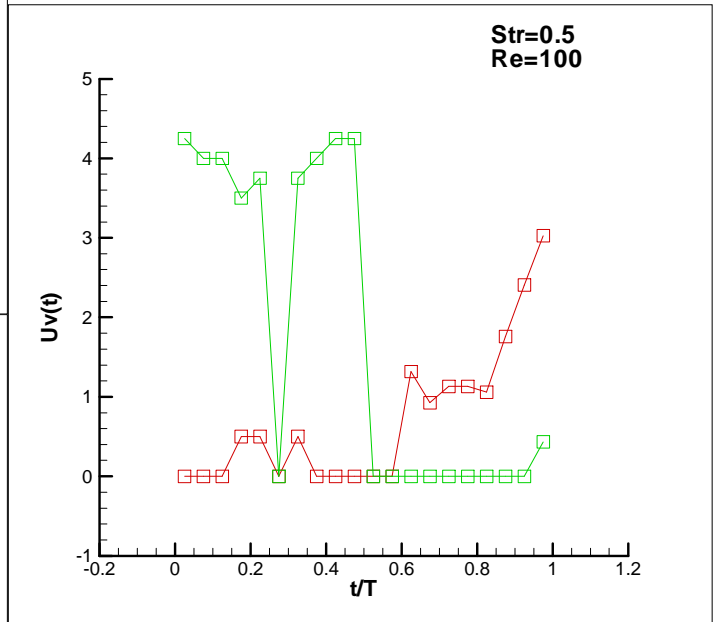
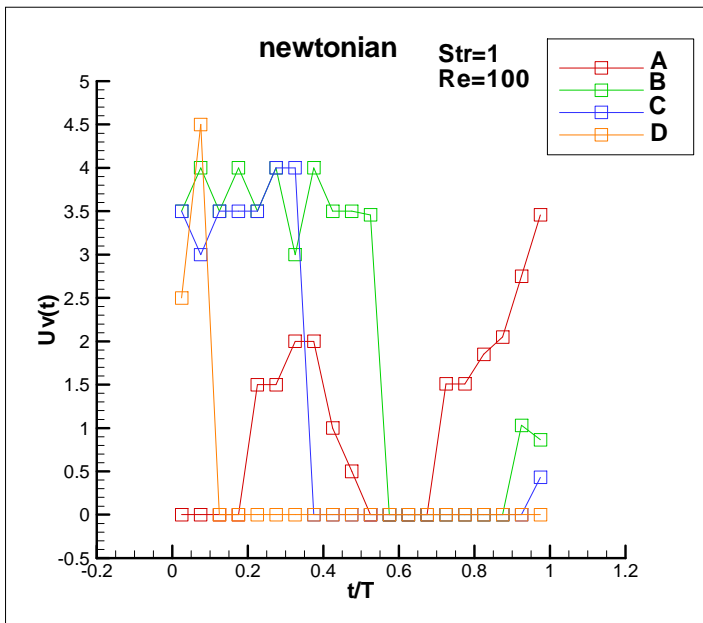
Αδιαστατοποίησή της, γίνεται με την ταχύτητα του ρευστού στην είσοδο του αγωγού, την ίδια στιγμή, ως

$$u_v^*(\tau_n) = \frac{u_{vortex}(\tau_n)}{u(\tau_n)}$$

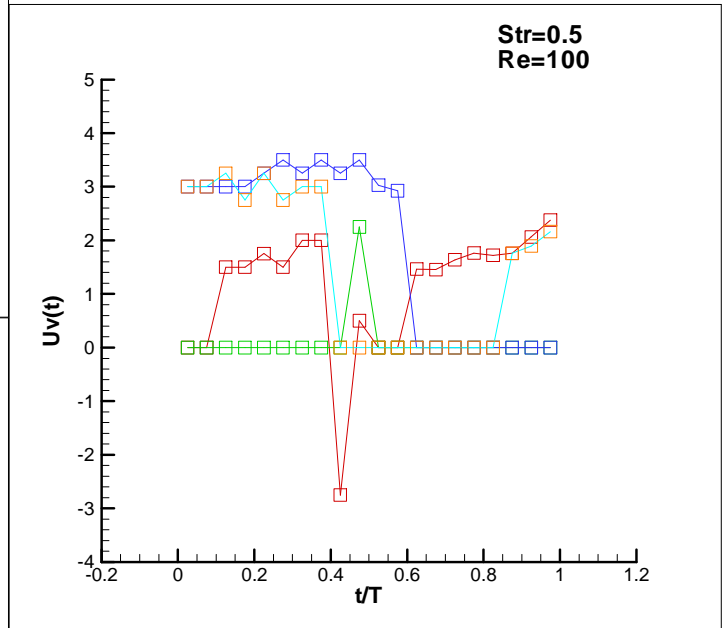
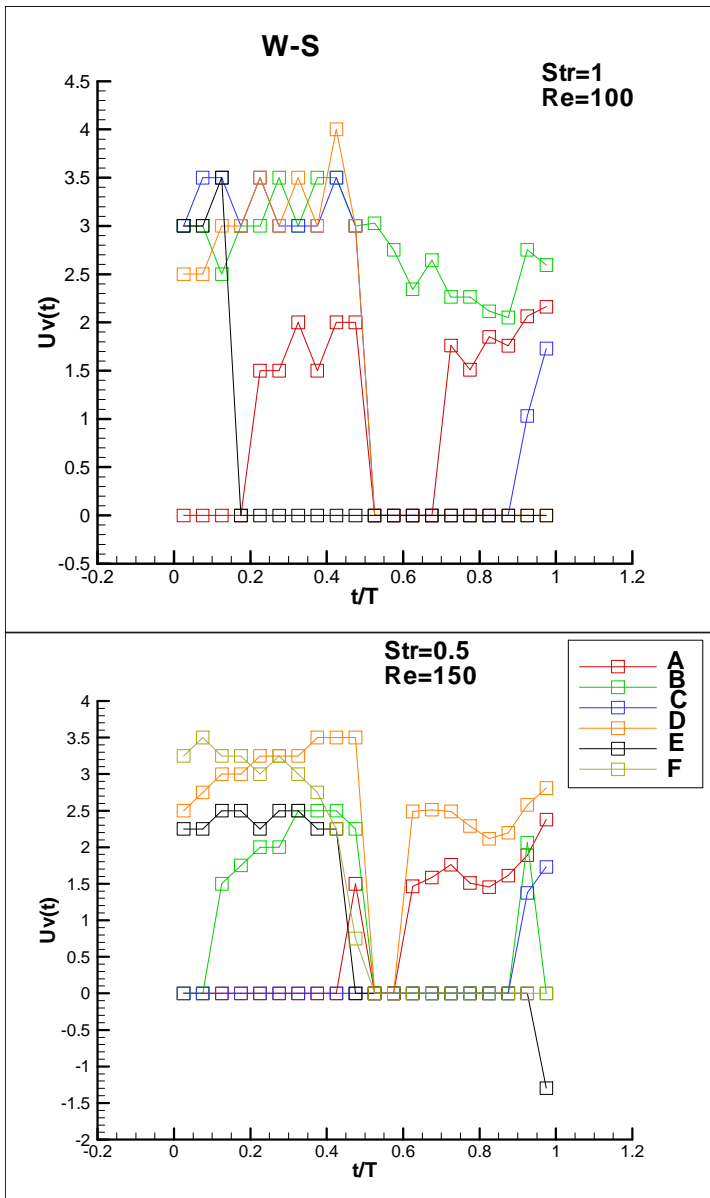
Με την αδιαστατοποίηση αυτή, έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε τη σχετική κίνηση των δινών, ως προς την κύρια ροή. Έτσι, πιθανές αρνητικές ταχύτητες  $u_v^*(\tau_n)$ , σημαίνουν κίνηση της δίνης αντίθετα από την επιβαλλόμενη ροή στην είσοδο του αγωγού την  $\tau_n$ .

### συμπεράσματα

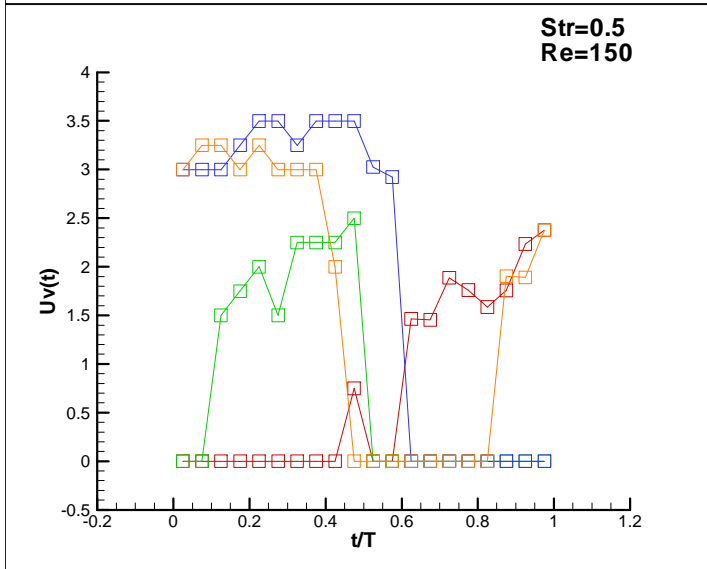
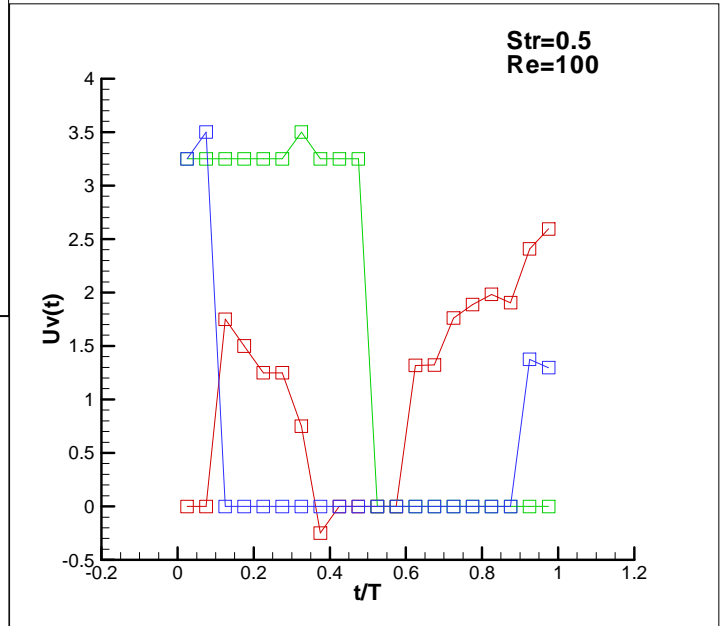
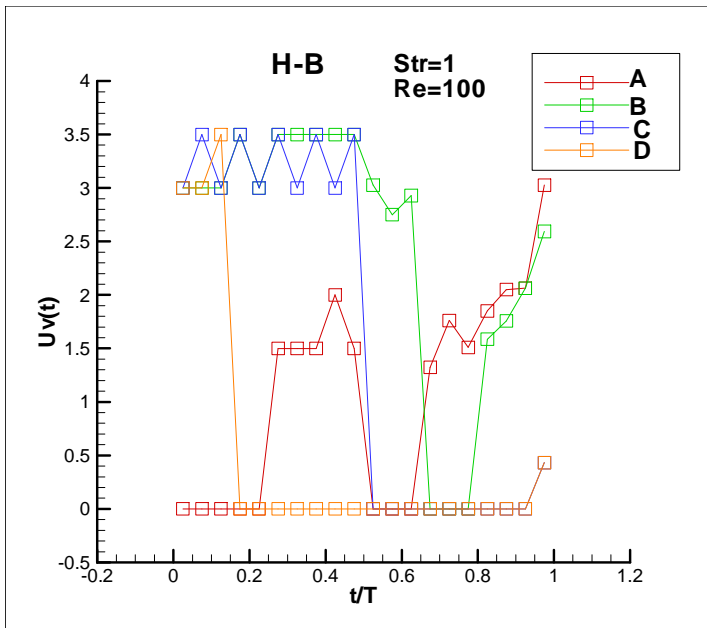
- οι δίνες εμφανίζουν ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτή της ροής 1.5 με 3.5 φορές κατά μέσο όρο και όχι πάνω από 5 φορές
- οι ταχύτητες των δινών και η μεταβολή τους, εξαρτώνται από το υιοθετούμενο μοντέλο ρευστού
- επηρεάζονται από την ταχύτητα της κύριας ροής άμεσα, αφού επιταχύνονται και επιβραδύνονται μαζί της
- ελάχιστες αρνητικές τιμές παρατηρούνται, δηλαδή κίνηση των δινών αντίθετα από τη στιγμιαία ροή στη είσοδο, και μόνο σε χαμηλούς  $Str$
- ίσως υπάρχει σχέση μεταξύ του αριθμού των δινών που εμφανίζονται στον αγωγό δεδομένη χρονική στιγμή («πυκνότητα» δινών θα λέγαμε) και της ταχύτητας που αυτές λαμβάνουν, αφού στο W-S οι πολλές ταυτόχρονα μετακινούμενες δίνες, δείχνουν να μη φτάνουν τις ταχύτητες των δινών στα άλλα μοντέλα



Δ5.101– οι ταχύτητες των δινών στο νευτώνειο ρευστό



Δ5.102– οι ταχύτητες των δινών στο W-S ρευστό



Δ5.103– οι ταχύτητες των δινών στο H-B ρευστό

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

## συμπεράσματα

Με τις συνθήκες και περιορισμούς που διεξάχθηκε η μελέτη, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

### i} διαδικασία επίλυσης

- στην επίλυση των μη μόνιμων πεδίων ροής, ο αριθμός βημάτων που απαιτείται για τη διαμέριση της περιόδου του φαινομένου, σε δεδομένο υπολογιστικό πλέγμα, είναι συνάρτηση του  $Str$  και μάλιστα μεταβάλλεται αντίστροφα προς αυτόν. Αυτό ισχύει τόσο για το νευτώνειο, όσο και για τα μη νευτώνεια ρευστά.
- ο αριθμός επαναλήψεων της περιόδου του φαινομένου, που απαιτείται για να λάβουμε αποτελέσματα περιοδικώς ανεξάρτητα, είναι συνάρτηση αποκλειστικά του  $Str$ . Παραταύτα, οι διαφορές μεταξύ των επαναλήψεων, είναι μικρότερες καθώς μειώνεται ο  $Re$ . Επίσης, ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος του χρησιμοποιούμενου μοντέλου ρευστού.

- ο αδιάστατος αριθμός  $Re$  της ροής, στη γενικευμένη μορφή  $Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$ ,

όπου  $\mu_{eff}$  διαφορετική συνάρτηση για κάθε μοντέλο ρευστού, είναι δυνατόν να αποτελέσει αριθμό ομοιότητας της ροής για τα μοντέλα ρευστών Εκθετικού Νόμου – Walburn-Schneck (W-S) στη μελέτη μας – , Herschel-Bulkley (H-B), Quemada (Q) και Casson (C), καθιστώντας τον πολύτιμο εργαλείο για τις συγκρίσεις αδιάστατων μεγεθών μεταξύ διαφορετικών μοντέλων.

### ii} μόνιμη ροή – ευθύγραμμος αγωγός

- μεγάλες αποκλίσεις διαπιστώθηκαν στο μήκος διαμόρφωσης των μοντέλων, με τα W-S και H-B να χρειάζονται περισσότερο μήκος αγωγού για να αναπτυχθούν πλήρως, σχετικά με τα Q και C ρευστά
- οι διαφορές που παρουσιάζονται στο μήκος διαμόρφωσης των μοντέλων, δε μπορούν να σχετισθούν με τους ρυθμούς διάτμησης  $\dot{\gamma}_{xr} = \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}$  στην είσοδο του αγωγού, αφού είναι ίδιας τάξης για όλα τα μοντέλα, αλλά

οφείλονται στο διαφορετικό πεδίο διατμητικών τάσεων που αναπτύσσει κάθε μοντέλο στην περιοχή της εισόδου του αγωγού. Έτσι, μπορεί το πάχος των οριακών στρωμάτων όλων των μοντέλων να είναι ίδιο, αλλά το διαφορετικό ιξώδες αναγκάζει κάποια να διαμορφωθούν πλήρως πολύ «νωριτερα» μέσα στον αγωγό.

- τα ρευστά που αναπτύσσουν τις μεγαλύτερες τάσεις κατά την είσοδό τους στον αγωγό, αναπτύσσουν και τις μεγαλύτερες διατμητικές τάσεις κατά τη διάρκεια της πλήρως αναπτυγμένης ροής τους

### iii} μόνιμη ροή – στενωμένος αγωγός

- κατάντι της στένωσης, δημιουργείται μία περιοχή χαμηλού ιξώδους σε όλα τα μη νευτώνεια μοντέλα (έχει τη μορφή ροής δέσμης), λόγω των μεγάλων παραμορφώσεων στα στοιχεία του ρευστού που προκαλεί η καμπύλη γεωμετρία της περιοχής
- μεγάλες διαφορές παρατηρήθηκαν στον ελάχιστο απαιτούμενο  $Re$  για αποκόλληση της ροής κατάντι της στένωσης. Στο Q η αποκόλληση ξεκινά για  $Re \geq 125$ , στο C για  $Re \geq 40$  ενώ για το νευτώνειο, H-B, W-S για  $Re$  στην περιοχή του 25.
- οι περιοχές ανακυκλοφορίας επιμηκύνονται γραμμικά με την αύξηση του  $Re$ , σε όλα τα μοντέλα, ενώ επίσης σε κανένα το σημείο αποκόλλησης της ροής δε μετακινείται ιδιαίτερα με την αύξηση του  $Re$ .
- οι περιοχές ανακυκλοφορίας των W-S και H-B είναι περίπου 1.5 φορές μεγαλύτερες από αυτές του νευτώνειου ρευστού.
- η διατομή όπου εμφανίζεται η μέγιστη αξονική ταχύτητα, βρίσκεται περίπου 10% της διαμέτρου φορές κατάντι του λαιμού και η θέση της μεταβάλλεται με το  $Re$  και το μοντέλο
- η αξονική θέση μεγιστοποίησης των διατμητικών τάσεων στο τοίχωμα, βρίσκεται 1% της διαμέτρου ανάντι της θέσης του λαιμού
- η σημαντικότητα των μη νευτώνειων ρευστών αυξάνει κατακόρυφα με τη μείωση του  $Re$
- το νευτώνειο ρευστό, δεν έχει τη δυνατότητα να μας περιγράψει ακριβώς την κατανομή του ιξώδους κατά τη ροή του αίματος μέσα στα αγγεία, άλλα μπορεί να μας δώσει καλές αντιπροσωπευτικές τιμές, ιδιαίτερα σε τιμές  $Re > 100$ , όπου παρατηρούμε τάση σύμπτωσης των H-B και C με τη νευτώνεια συμπεριφορά

### iv} μη μόνιμη ροή

- η μορφή του πεδίου ροής είναι συνάρτηση των αδιάστατων χαρακτηριστικών αριθμών της ροής  $Re$  και  $Str$ , αλλά επηρεάζεται και από το υιοθετούμενο μοντέλο ρευστού
- αύξηση του  $Str$ , αυξάνει τον αριθμό των παρατηρούμενων δινών σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ αυξημένος  $Re$  παράγει μεγαλύτερες περιοχές ανακυκλοφορίας και μεγαλύτερες δίνες.
- η μη νευτώνεια συμπεριφορά, λόγω του ψευδοπλαστικού (shear-thinning) χαρακτήρα των μοντέλων που χρησιμοποιήσαμε, δείχνει να ευνοεί την εύκολη μεταβολή του πεδίου ροής



- η παρακάτω γενική μορφή της ροής κατά τη διάρκεια της περιόδου παρατηρήθηκε, σε όλα τα μοντέλα, για τις ροές  $Str = 0.5 - Re = 100$ ,  $Str = 0.5 - Re = 150$  και  $Str = 1 - Re = 100$ :

Με την έναρξη της φάσης επιτάχυνσης, η ροή στην περιοχή της στένωσης επανακολλάται και οι κατάντι δίνες αποσβέννονται, προφανώς υπό την ισχυρή επίδραση της θετικής κλίσης της ημιτονοειδούς μορφής συνάρτησης ταχύτητας εισόδου.

Η επιτάχυνση αυτή επίσης, εξομαλύνει τις διαταραχές της ροής (μείωση στροβιλότητας της ροής) στο ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού, με αποτέλεσμα να «επιβιώνουν» μόνο δίνες που βρίσκονται αρκετά μακριά και η «πληροφορία», στο παραβολικό πεδίο που μελετούμε, δε φτάνει αρκετά ισχυρή. Αυτές, συνεχίζουν το ταξίδι τους προς την έξοδο του αγωγού σμικρυνόμενες.

Η συνεχιζόμενη, με μικρότερο ρυθμό, μεταβολή της ταχύτητας, δημιουργεί δίνες πάνω στο τοίχωμα, κατάντι του λαιμού, ενώ η αρνητική κλίση ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε συνθήκες αναρρόφησης, δημιουργεί οπισθοροή (*backflow*) στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα με άμεση συνέπεια την αύξηση των ήδη σχηματισμένων μηκών ανακυκλοφορίας και τη μεγένθυση των δινών.

Εισερχόμενοι στη φάση συνεχούς παροχής, παρατηρούμε μία τάση επαναφοράς στη ροϊκή κατάσταση που παρατηρήθηκε στη μόνιμη ροή.

Έτσι, δίνες που σχηματίστηκαν, τώρα αποσβέννονται, άλλες ενώνονται μεταξύ τους ή τέλος μεγάλες περιοχές ανακυκλοφορίας, αυξανόμενες σε μήκος αποκτούν δύο κέντρα.

- σε κάθε ρευστό, οι τιμές των WSS στο λαιμό αυξάνουν με την αύξηση της παροχής, ενώ είναι ανεξάρτητες του  $Str$  και αυξάνονται καθώς ο  $Re$  μειώνεται
- για τις ίδιες συνθήκες ροής, το νευτώνειο ρευστό παρουσιάζει τις μεγαλύτερες τιμές WSS στη στένωση και το W-S τις μικρότερες, ενώ το αντίθετο παρατηρείται στην περιοχή εμφάνισης δινών.
- οι αξονικές θέσεις των δινών, συμπίπτουν με ένα τοπικό μέγιστο της στροβιλότητας στο τοίχωμα, ενώ οι εμφανιζόμενες δίνες κινούνται μαζί με την κύρια ροή και με ταχύτητες 1.5 – 3.5 φορές μεγαλύτερες της στιγμιαίας στην είσοδο του αγωγού

## v} γενικό συμπέρασμα

Το γενικό συμπέρασμα, που συνάγεται από τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης, είναι ότι, οι παρατηρούμενες μεγάλες διαφορές στη συμπεριφορά των μη νευτώνειων ρευστών, σε ευθείς και στενωμένους αγωγούς, καθιστά επιβεβλημένη την πιστοποίησή τους και από πειραματικές μελέτες.

Αυτές, θα βοηθήσουν στην πληρέστερη κατανόηση των ροϊκών χαρακτηριστικών των μη νευτώνειων ρευστών στη μικρή κλίμακα που απαιτούν οι βιοϊατρικές εφαρμογές.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

## Υπολογιστική Μελέτη Πεδίων Ροής Μη Νευτώνειων Ρευστών σε Αξονικά Συμμετρική Στένωση

Διπλωματική Εργασία

του

Ιάσωνα Ζήση

Πολλά μοντέλα ρευστών έχουν αναπτύχθει για να προσεγγίσουν δεδομένα που φανερώνουν τη μη νευτώνεια ψευδοπλαστική (shear thinning) συμπεριφορά του αίματος και έχουν χρησιμοποιηθεί σε πλήθος αριθμητικών προσομοιώσεων της ροής του αίματος. Εκτός από κάποιες εργασίες προσανατολιζόμενες στη μαθηματική πλευρά του θέματος, δεν έχει δοθεί μεγάλη προσοχή σε στοιχειώδεις ροές αυτών των μοντέλων. Για να αποκαλύψουμε μερικές από τις βασικές ροϊκές τους ιδιότητες, διεξάγαμε μία υπολογιστική μελέτη, για τέσσερα από τα μοντέλα που συνήθως χρησιμοποιούνται στην περιγραφή των ψευδοπλαστικών χαρακτηριστικών του αίματος και συγκεκριμένα τα: Walburn-Schneck (W-S), Herschel-Bulkley (H-B), Quemada (Q) and Casson (C).

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας σε πρωτόλειες ροϊκές τους ιδιότητες, μελετήθηκαν οι μόνιμες και μη μόνιμες ροές τους σε 2-D αξονικά συμμετρικούς αγωγούς, χρησιμοποιώντας ένα πακέτο υπολογιστικής ρευστομηχανικής του εμπορίου, μαζί με τις αντίστοιχες ροές του νευτώνειου ρευστού.

Επειδή οι ψευδοπλαστικές ιδιότητες του αίματος, αναμένεται να εμφανίζονται σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds (Re), εξετάσαμε το εύρος 25 ως 150. Όσον αφορά στη μη μόνιμη ροή, θελήσαμε να μελετήσουμε την ψευδοπλαστική συμπεριφορά και σε άλλες περιπτώσεις ροών, πέρα από τη φυσιολογική.

Τα αποτελέσματά μας, στις περιπτώσεις μόνιμων ροών, κατέδειξαν κατακόρυφη αύξηση της σημαντικότητας της μη νευτώνειας ψευδοπλαστικής συμπεριφοράς, καθώς ο αριθμός Re μειώνεται. Το μήκος διαμόρφωσης των W-S και H-B βρέθηκε να είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό των Q και C μοντέλων. Το μέγιστο της αξονικής ταχύτητας, επί του άξονα του στενωμένου αγωγού, εμφανίζεται κατάντι του λαιμού για όλα τα μοντέλα, σε αντίθεση με την ανάντι μεγιστοποίηση των διατμητικών τάσεων στο τοίχωμα (WSS). Μεγάλες διαφορές μεταξύ των μοντέλων παρατηρήθηκαν στην κατανομή του ιξώδους, τόσο στον ευθύ, όσο και στο στενωμένο αγωγό.

Η μορφή του πεδίου ροής στις μη μόνιμες ροές σχετίζεται με τους δύο αριθμούς, Re και Strouhal (Str), αλλά και το υιοθετούμενο μοντέλο. Οι τιμές των WSS μεταβάλλονται στο χρόνο, ακολουθώντας την κλίση της παροχής και είναι ανεξάρτητες του Str. Αντίθετα, αυξάνονται με τη μείωση του Re. Σχετικά με την επίδραση του μοντέλου στις WSS, το W-S φαίνεται να παράγει τις μικρότερες τιμές στην περιοχή, ενώ το νευτώνειο τις μεγαλύτερες. Αντίθετες συνθήκες δείχνουν να επικρατούν στις περιοχές εμφάνισης των δινών.

λέξεις κλειδιά: μη νευτώνειο, αξονοσυμμετρική, στένωση, CFD, ροή αίματος

## Summary

### **Numerical Study of Non Newtonian Fluid Flow Through Axisymmetric Stenosis**

Diploma Thesis  
by  
Jason Zissis

Several fluid models have been developed to fit experimental data showing blood's non-newtonian shear-thinning fluid behaviour and were incorporated in many numerical simulations of blood flow. Apart from some mathematic-oriented works, little attention has been given to arbitrary flows of these models. In order to unveil some of their basic fluid properties, we conducted a numerical study, involving four of the most commonly used models to describe blood's shear-thinning characteristics, namely: Walburn-Schneck (W-S), Herschel-Bulkley (H-B), Quemada (Q) and Casson (C).

Focusing on elemental fluid properties, their steady and unsteady flows through 2-D axisymmetric, straight and stenosed ducts, were studied using a commercial CFD package, along with the corresponding flows of the newtonian fluid.

Shear-thinning properties of blood are expected to appear in low Reynolds (Re) numbers, therefore the range studied was 25 to 150. As far as the unsteady case is concerned, not only were we interested in physiologic flow conditions, but we were eager to study shear-thinning behavior in other flow regimes, too.

Our results in steady flow cases, showed rapidly increasing significance of non newtonian shear-thinning behaviour, as Reynolds number decreases. The entrance length for W-S and H-B was found much greater than those of Q and C models. The peak of the axial velocity on the axis of the stenosed tube located downstream of the neck for all models, in contrast to the upstream peaking of wall shear stresses (WSS) values. Great differences among models were observed for the viscosity distribution in the straight and the stenosed tube.

The pattern of the flow field in unsteady flows is related to both Re and Strouhal (Str) numbers, as well as the employed model. The WSS in the neck region vary in time according to the flow rate, being independent of Str. On the contrary, they increase as Re is reduced. With regard to the influence of the fluid model on WSS, it appears that W-S generates the smallest WSS in this area, while the newtonian the highest. An inverse tendency appears in the regions where vortices are located.

keywords: *non newtonian, axisymmetric, stenosis, CFD, blood flow*

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] J.T. Ottesen, M.S. Olufsen, J.K. Larsen, *Applied Mathematical Models in Human Physiology*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004
- [2] R. Fitridge, M. Thompson, *Mechanisms of Vascular Disease: A Textbook for Vascular Surgeons*, Cambridge University Press 2006
- [3] *Heart and Stroke Facts*, American Heart Association, 2003
- [4] Β.Αγγελόπουλου, *Κλινική Παθολογική Φυσιολογία, «Λειτουργική Παθολογία», τόμος β*, Αθήναι 1971
- [5] Χ.Μαλτέζου, Ι.Χατζημηνά, *Σημειώσεις Φυσιολογίας, τεύχος ΙΙ, Κυκλοφορία – Λέμφος*, εν Αθήναις 1971
- [6] M.J. Thubrikar, *Vascular Mechanics and Pathology*, 2007 Springer Science+Business Media, LLC
- [7] C.A.Demopoulos, H.C.Karantonis, S.Antonopoulou, *Platelet activating factor – a molecular link between atherosclerosis theories*, European Journal of Lipid Science and Technology, 105 (2003) 705-716
- [8] Z.M.Ruggeri, *Von Willebrand Factor, Platelets and Endothelial Cell Interactions*, Journal of Thrombosis and Haemostasis, volume 1, number 7, July 2003
- [9] R.DeCaterina, P. Libby, *Endothelial Dysfunctions and Vascular Disease*, 2007 by Blackwell Publishing
- [10] A.Wahle, J.J.Lopez, M.E.Olszewski, S.C.Vigmostad, K.B.Chandran, J.D.Rossen, M.Sonka, *Plaque development, vessel curvature, and wall shear stress in coronary arteries assessed by X-ray angiography and intravascular ultrasound*, Med Image Anal., 2006 August; 10(4): 615–631
- [11] C.G.Caro, J.M.Fitz-Gerald, R.C.Schroter, *Arterial Wall Shear and Distribution of Early Atheroma in Man*, Nature vol.223 – 1969
- [12] Fry D.L., *Acute Vascular Endothelial Changes Associated with Increased Blood Velocity Gradients*, Circulation Res. 22,165 (1968)
- [13] G.C.Willis, *Localizing Factors in Atherosclerosis*, Canadian Medical Association, 70:1-9, 1954
- [14] S.K.Samijo, J.M.Willigers, R.Barkhuysen, P.J.E.H.M. Kitslaar, R.S.Reneman, P.J.Brands, A.P.G. Hoeks, *Wall shear stress in the human common carotid artery as function of age and gender*, Cardiovascular Research 39 (1998) 515–522
- [15] Robert S. Reneman Z Arnold P. G. Hoeks, *Wall shear stress as measured in vivo: consequences for the design of the arterial system*, Med Biol Eng Comput (2008) 46:499–507
- [16] Ι.Ε. Γεωργούλης, *Αιματολογία, διαγνωστικές προσεγγίσεις*, 2<sup>η</sup> έκδοση
- [17] F.Yilmaz, M.Y.Gundogdu, *A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions*, Korea-Australia Rheology Journal, Vol. 20, No. 4, December 2008 pp. 197-211.
- [18] C.Picart, J.-M.Piau, H.Galliard, P.Carpentier, *Human blood shear yield stress and its hematocrit dependence*, J. Rheol. 42(1), January/February 1998.
- [19] J.W. Trevan, *The Viscosity of Blood*, 1917
- [20] G. E. Burgh and N. P. DePascuale, *Hematocrit, Viscosity and Coronary Blood Flow*, Dis Chest 1965;48;225-232
- [21] J. P. Woodcock, *Physical properties of blood and their influence on blood-flow measurement*, 1976 Rep. Prog. Phys. 39 65

- [22] Fahraus, T. Lindqvist, *Viscosity of Blood in Narrow Capillary Tubes*, Am. J. Physiol., 96 :562, 1931
- [23] Frank Gijen, *Modeling of Wall Shear Stress in Large Arteries*, PhD Thesis, Eindhoven 1998
- [24] D.F.Young, F.Y.Tsai, *Flow Characteristics in Models of Arterial Stenoses I: Steady Flow*, 1. Biomechanics 1973. Vol 6, pp. 395-410
- [25] J.F.Hale, D.A.McDonald, J.R.Womersley, *Velocity Profiles of Oscillating Arterial Flow, With Some Calculations of Viscous Drag and the Reynolds Number*, Journal of Physiology (1955) 128, 629-640
- [26] J.R.Womersley, *Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when the Pressure gradient Is Known*, Journal of Physiology (1955) 127, 553-563
- [27] P.Neofytou, D.Drikakis, *Effects of blood models on flows through a stenosis*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 43:597–635
- [28] M. Rosenfeld, *A numerical study of pulsating flow behind a constriction*, J. Fluid Mech. (1995), vol. 301, p p . 203-223
- [29] F.Ghalichi, X.Deng, A.DeChamplain, Y.Douville, M.King, R.Guidoin, *Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses*, Biorheology 35:4,5 (1998) 281–294
- [30] B.M.Kim,W.H.Corcoran, *Experimental Measurements of Turbulence Spectra Distal to Stenoses*, Journal of Biomechanics 1974, vol. 7, pp335-342
- [31] S.S.Varghese, S.H.Frankel, P.F.Fischer, *Direct numerical simulation of stenotic flows*, under consideration for publication in Journal of Fluid Mechanics, 2005
- [32] F.Ghalichi, X.Deng, A.DeChamplain, Y.Douville, M.King, R.Guidoin, *Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses*, Biorheology 35:4,5 (1998) 281–294
- [33] P.Neofytou, S.Tsangaris, *Flow effects of blood constitutive equations in 3D models of vascular anomalies*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 2006; 51:489–510
- [34] H.Baek, M.V.Jayaraman, P.D.Richardson, G.E.Karniadakis, *Flow instability and wall shear stress variation in intracranial aneurysms*, Journal of the Royal Society Interface, published online 18 December 2009
- [35] B.Quatember, M.Mayr, W.Recheis, *Image-based Simulation of the Three-dimensional Coronary Blood Flow*, 2007
- [36] E.Boutsianis, H.Daveb, T.Frauenfelderc, D.Poulikakos, S.Wildermuthc, M.Turinab, Y.Ventikosa, G.Zund, *Computational simulation of intracoronary flow based on real coronary geometry*, European Journal of Cardio-thoracic Surgery 26 (2004) 248–256
- [37] B.M.Johnston, P.R.Johnston, S.Corneyb, D.Kilpatrick, *Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries:Transient simulations*, Journal of Biomechanics 39 (2006) 1116–1128
- [38] H.M.Gach, I.J.Lowe, *Measuring Flow Reattachment Lengths Downstream of a Stenosis Using MRI*, Journal of Magnetic Resonance Imaging, 12:939–948 (2000)
- [39] M.S. Moayeri, G.R. Zendehebudi, *Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses Effects*, Journal of Biomechanics 36 (2003) 525–535
- [40] N.M. Maurits, G.E. Loots, A.E.P. Veldman, *The influence of vessel wall elasticity and peripheral resistance on the carotid artery flow wave form: A CFD model compared to in vivo ultrasound measurements*, Journal of Biomechanics 40 (2007) 427–436

- [41] M.X. Li, J.J. Beech-Brandt, L.R. John, P.R. Hoskins, W.J. Easson, *Numerical analysis of pulsatile blood flow and vessel wall mechanics in different degrees of stenoses*, Journal of Biomechanics 40 (2007) 3715–3724
- [42] S. L. Waters, T. J. Pedley, *Oscillatory flow in a tube of time-dependent curvature. Part 1. Perturbation to flow in a stationary curved tube*, J. Fluid Mech. (1999), vol. 383, pp. 327–352. Printed in the United Kingdom
- [43] J. Zhou, Y. C. Fung, *The degree of nonlinearity and anisotropy of blood vessel elasticity*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 94, pp. 14255–14260, December 1997
- Engineering
- [44] M.H. Friedman, D.L. Fry, *Arterial permeability dynamics and vascular disease*, Atherosclerosis IO4 (1993) 189–194
- [45] R.P. Chhabra, J.F. Richardson, *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology - 2<sup>nd</sup> ed*, Institute of Chemical Engineering, 2008
- [46] G.P. Galdi, *Mathematical Problems in Fluid Mechanics*, Birkhauser–Verlag, Basel, Switzerland, 2008
- [47] H.A. Barnes, *The yield stress—a review or ‘παντα ρει’—everything flows?*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 81 (1999) 133–178
- [48] N. Sun and D. DeKee, *Simple Shear, Hysteresis and Yield Stress in Biofluids*, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Volume 79, February 2001
- [49] G.B. Thurston, Nancy M. Henderson, *Effects of flow geometry on blood viscoelasticity*, Biorheology 43 (2006) 729–746
- [50] G.B. Thurston, *Viscoelasticity of Human Blood*, Biophysical Journal Volume 12 1972
- [51] J. Jung, R.W. Lyczkowskib, C.B. Panchal, A. Hassanein, *Multiphase hemodynamic simulation of pulsatile flow in a coronary artery*, Journal of Biomechanics 39 (2006) 2064–2073
- [52] J. Huang, R.W. Lyczkowski, D. Gidaspow, *Pulsatile flow in a coronary artery using multiphase kinetic theory*, Journal of Biomechanics 42 (2009) 743–754
- [53] D. Quemada, *Rheology of concentrated disperse systems III. General features of the proposed non-newtonian model. Comparison with experimental data*, Rheol. Acta 17, 643–653 (1978)
- [54] P. Neofytou, *Comparison of blood rheological models for physiological flow simulation*, Biorheology 41 (2004) 693–714
- [55] Σ. Τσαγγάρης, *Μηχανική των Ρευστών*, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2005
- [56] A. Rutherford, *Vectors, Tensors, And The Basic Equations Of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York, 1989
- [57] Ν.Μ. Σταυρακάκης, *Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων για τις Επιστήμες και την Τεχνολογία*, Αθήνα Ιανουάριος 2002
- [58] C.L. Fefferman, *Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, Princeton University, Department of Mathematics, Princeton, NJ 08544-1000 - May 1, 2000
- [59] P. Constantin, *Some open problems and research directions in the mathematical study of uid dynamics*, Department of Mathematics, The University of Chicago
- [60] O.A. Ladyzhenskaya, *Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2<sup>nd</sup> English Edition, Gordon and Breach Science Publishers, 1969
- [61] R. Rannacher, *Methods for Numerical Flow Simulation*, Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg, 2007
- [62] J.G. Heywood, R. Rannacher, S. Turek, *Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 22, 325–352 (1996)

- [63] Fluent Inc., *Fluent 6.3 Release Notes*, 2006
- [64] J.Ferziger, M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed., Springer 2002
- [65] T.Chung, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2002
- [66] L.Goubergrits, E.Wellnhofer, U.Kertzsch, *Choice and Impact of a Non-Newtonian Blood Model for Wall Shear Stress Profiling of Coronary Arteries*, NBC 2008, Proceedings 20, pp. 111–114, 2008
- [67] J.Boyd, J.Buick, J.A.Cosgrove, P.Stansell, *Application of the lattice Boltzmann model to simulated stenosis growth in a two-dimensional carotid artery*, Phys. Med. Biol. 50 4783, 2005
- [68] J.Boyd, J.Buick, *Comparison of Newtonian and non-Newtonian flows in a two-dimensional carotid artery model using the lattice Boltzmann method*, 2007 Phys. Med. Biol. 52 6215
- [69] B.Guzel, I.Frigaarda, D.M.Martinez, *Predicting laminar–turbulent transition in Poiseuille pipe flow for non-Newtonian fluids*, Chemical Engineering Science 64 (2009) 254–264
- [70] R.C.Gupta, *Herschel-Bulkley Fluid Flow Development in a Channel*, Polymer-Plastics Technology and Engineering, 34: 3, 475 – 492, 1995
- [71] Durst, F., Ray, S., Unsal, B., and Bayoumi, O. A., 2005, *The Development Lengths of Laminar Pipe and Channel Flows*, Journal of Fluids Engineering, 127, pp. 1154–1160.
- [72] R.J.Poole, B.S.Ridley, *Development-Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Inelastic Non-Newtonian Liquids*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 129 / 1281, 2007
- [73] M.Collins, W.R.Schowalter, *Behaviour of Non-Newtonian Fluids in the Inlet Region of a Channel* AIChE J., 9, pp. 98–102, 1963
- [74] Z.Matros, Z.Nowak, *Laminar Entry Length Problem for Power Law Fluids*, Acta Mech., 48, pp. 81–90, 1983
- [75] A.K.Mehrota, G.S.Patience, *Unified Entry Length for Newtonian and Power Law Fluids in Laminar Pipe Flow* Can. J. Chem. Eng., 68, pp. 529–533, 1990
- [76] S.Ookawara, K.Ogawa, N.Dombrowski, E.Amoioe-Foumeny, A.Riza, *Unified Entry Length Correlation for Newtonian, Power Law and Bingham Fluids in Laminar Pipe Flow at Low Reynolds Number*, J. Chem.Eng. Jpn., 33, pp. 675–678, 2000
- [77] R.C.Gupta, *On Developing Laminar Non-Newtonian Flow in Pipes and Channels*, Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2, pp. 171–193, 2001
- [78] R.J.Poole, B.S.Ridley, *Development-Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Inelastic Non-Newtonian Liquids*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 129 / 1281, 2007
- [79] J.Boyd, J.M. Buick, S.Green, *Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method*, Physics of Fluids 19, 093103, 2007
- [80] P.D.Ballyk, D.A.Steinman, C.R.Ethier, *Simulation of non-Newtonian blood flow in an end-to-end anastomosis*. Biorheology 31 (5), 565–586. 1994
- [81] H.Baek, M.V.Jayaraman, P.D.Richardson, G.E. Karniadakis, *Flow instability and wall shear stress variation in intracranial aneurysms*, Journal of the Royal Society Interface, published online 18 December 2009
- [82] J.H.Forrester, D.F.Young, *Flow Through a Converging-Diverging Tube and its Implications in Occlusive Vascular Disease II: theoretical and experimental results and their implications*, Journal of Biomechanics vol.3 pp297-305, 1970

- [83] D.Bluestein, L.Niu, R.T.Schoephoerster, M.K.Dewanjee, *Fluid Mechanics of Arterial Stenosis: Relationship to the development of Mural Thrombus*, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 25, pp. 344-356, 1997
- [84] C.Tu, M.Deville, *Pulsatile Flow of Non-Newtonian Fluids Through Arterial Stenoses*, Journal of Biomechanics, Vol. 29, No. 7, pp. 899-908, 1996
- [85] K.Rohlf, G.Tenti, *The role of the Womersley number in pulsatile blood flow\_a theoretical study of the Casson model*, Journal of Biomechanics 34 (2001) 141-148



# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- C header files

## συνάρτηση ορισμού του μοντέλου ρευστού Quemada

```

/*****
          UDF for specifying quemada blood model viscosity
*****/

#include "udf.h"

double k0=4.33;
double koo=2.07;
double g=1.88;
double h=0.45;
double mf=0.0012;

DEFINE_PROPERTY(quemada_viscosity, cell, thread)
{

double x = C_STRAIN_RATE_MAG(cell,thread);

double strain = fabs(x);

double a = sqrt(strain/g);
double b = 0.5*(k0 + koo*a)*h/(1+a);

double mu_lam = mf*pow( 1.-b , -2. );

return mu_lam;
}

```

## συνάρτηση ορισμού του μοντέλου ρευστού Casson

```

/*****
          UDF for specifying casson blood model viscosity
*****/

#include "udf.h"

DEFINE_PROPERTY(casson_viscosity, cell, thread)
{

double m0=0.0031;
double t0=0.01082;
int k=500;

double x = C_STRAIN_RATE_MAG(cell,thread);

double strain = fabs(x) + 0.000000001;

double a= pow( (t0/strain) , 0.5 );

```

```

double b= 1. - exp(-pow((k*strain),0.5));

double c = pow(m0, 0.5) + (b*a);

double mu_lam = pow( c , 2.);

return mu_lam;
}

```

### συνάρτηση περιοδικής ταχύτητας $u(t)$ στην είσοδο του αγωγού

```

/*****
                                UDF for specifying unsteady velocity
*****/

DEFINE_PROFILE(unsteady_velocity, thread, position)
{
    face_t f;
    double uo=0.077694;
    double t = CURRENT_TIME;
    double pi = 4.*atan(1.);
    double hz = 1.;
    double w = 2.*pi*hz;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_PROFILE(f, thread, position) = uo*( 0.95 + sin(w*t));
    }
    end_f_loop(f, thread)
}

```

- FORTRAN 77 computer programmes

### αδιαστατοποιήσεις

Με το πρόγραμμα αυτό, υπολογίζονταν τα διαστατά μεγέθη που ήταν απαραίτητο να εισαχθούν, για να προκύψουν ροές με τους αριθμούς ομοιότητας Reynolds και Strouhal, που εμείς επιλέγαμε.

Επίσης, πραγματοποιεί έλεγχο επάρκειας του αριθμού χρονικών βημάτων, με τα οποία χωρίζαμε την περίοδο, σχετικά με το μικρότερο υπολογιστικό χωρίο του πέγματος που χρησιμοποιούσαμε.

```

program nondimensionalization
c
    implicit double precision (a-h,o-z)
c
c   parameter input, d = diameter of tube,
c   xmin: length of the smallest computational cell
c
c   parameter(d=0.004 , xmin=0.00012)
c
c
c   1   write(*,*) 'Reynolds number ?'
c       read(*,*) re
c
c       write(*,*) 'density ?'

```

```

read(*,*) dens
c
write(*,*) 'effective viscosity ?'
read(*,*) hm
c
write(*,*) 'non-newtonian model parameter ?'
read(*,*) an
c
um= ((re*hm/dens)/(d**an))**(1./(2.-an))
c
write(*,*) 'yielding stress ?'
read(*,*) t0
c
bi= ((d/um)**an)*t0/hm
c
write(*,*) 'Strouhal number ?'
read(*,*) st
c
t=d/(um*st)
c
write(*,*) 'number of periods ? '
read(*,*) w
write(*,*) 'time steps for the discretarisation of a period ?'
read(*,*) k
dt=t/k
write(*,*) ' '
c
u0= um
c
dtmax=xmin/u0
c

write(*,*) '#####'
write(*,*) '          flow conditions          '
write(*,*) '===== '
write(*,*) '      Reynolds =', re
write(*,*) '      Bingham  =', bi
write(*,*) '      Strouhal =', st
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' '
write(*,*) ' '
write(*,*) ' '
write(*,*) '#####'
write(*,*) '          solver inputs          '
write(*,*) '===== '
write(*,*) '      velocity factor =', u0
write(*,*) '      frequency =', 1./t
write(*,*) '      time step duration =', dt
write(*,*) '      number of time steps =', w*k
write(*,*) '#####'
c
write(*,*) ' '
c
if (dt .gt. dtmax) then
  write(*,*) '???????????????????????????????????????????????????????????? '
  write(*,*) '          dtmax=',dtmax
  write(*,*) ' CHECK TIME STEP SIZE --> decrease it !!! '
  write(*,*) '???????????????????????????????????????????????????????????? '
else
  write(*,*) '???????????????????????????????????????????????????????????? '
  write(*,*) '          dtmax=',dtmax
  write(*,*) '          SUFFICIENT TIME STEP SIZE          '
  write(*,*) '???????????????????????????????????????????????????????????? '
  goto 2
endif
c
2
write(*,*) ' '
write(*,*) ' '

```

```

c
    write(*,*) 'for another calculation press --> 0'
    read(*,*) m
    if (m .eq. 0) goto 1
c
    stop
    end

```

Με το παρακάτω πρόγραμμα, υπολογίζονταν οι ταχύτητες και το μεταβλητό ιξώδες αναφοράς των μη νευτώνειων μοντέλων ρευστών W-S και H-B.

```

program v_calculation
c
    implicit double precision (a-h,o-z)
c
    parameter(d=0.004)
c
1  write(*,*) 'Reynolds number ?'
   read(*,*) re
c
   write(*,*) 'density ?'
   read(*,*) dens
c
   write(*,*) 'effective viscosity ?'
   read(*,*) hm
c
   write(*,*) 'non-newtonian model parameter ?'
   read(*,*) an
c
   um= ((re*hm/dens)/(d**an))**(1./(2.-an))
c
   hmref=hm*((um/d)**(an-1.))
c
   write(*,*) '#####'
   write(*,*) '                reference values                '
   write(*,*) '===== '
   write(*,*) '                viscosity reference =', hmref
   write(*,*) '                velocity reference =', um
   write(*,*) '#####'
c
   write(*,*) ' '
c
   write(*,*) 'for another calculation press --> 0'
   read(*,*) m
   if (m .eq. 0) goto 1
c
   stop
   end

```

### ταχύτητες δινών

Στο πρόγραμμα αυτό, εισάγεται ένα αρχείο  $i$  γραμμών και  $j$  στηλών, όπου  $i = 20$  χρονικές στιγμές μέτρησης της αξονικής θέσης του κέντρου κάθε δίνης σε μία περίοδο και  $j$  : αριθμός δινών που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μίας περιόδου στη ροή ενός ρευστού.

Εξάγονται δύο αρχεία, ένα με τις απόλυτες ταχύτητες του κέντρου κάθε δίνης και ένα με τις αδιάστατες, όπως περιγράφεται στη μελέτη των ταχυτήτων των δινών.

Να σημειώσουμε ότι ο αριθμός των μεταβλητών του προγράμματος, εξαρτάται από τον αριθμό των δινών στην εκάστοτε ροή κάθε ρευστού.

Εδώ, παρουσιάζεται στη μορφή που πήρε για τους υπολογισμούς στη ροή  $Str = 0.5 - Re = 150$ , του W-S.

```

program vortex
c
    implicit double precision (a-h,o-z)
c
    open(1,file='vortex position.dat')
    open(2,file='vortex velocity.dat')
    open(3,file='vortex velocity dedim.dat')
c
    pi=4.*atan(1.)
    read(1,*) nts
    read(1,*) dt
    read(1,*) uo
c
    read(1,*) t1,xa1,xb1,xc1,xd1,xel,xf1,xg1
c
    do 100 i=1,20
c
    read(1,*) t2,xa2,xb2,xc2,xd2,xe2,xf2,xg2
    t=(t2+t1)/2.
    dxa=xa2-xa1
    dxb=xb2-xb1
    dxc=xc2-xc1
    dxd=xd2-xd1
    dxe=xe2-xe1
    dxf=xf2-xf1
    dxg=xg2-xg1
c
    if ((xa1 .eq. 0.) .or. (xa2 .eq. 0.)) then
        ua=0.
    else
        ua= dxa/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xb1 .eq. 0.) .or. (xb2 .eq. 0.)) then
        ub=0.
    else
        ub= dxb/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xc1 .eq. 0.) .or. (xc2 .eq. 0.)) then
        uc=0.
    else
        uc= dxc/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xd1 .eq. 0.) .or. (xd2 .eq. 0.)) then
        ud=0.
    else
        ud= dxd/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xel .eq. 0.) .or. (xe2 .eq. 0.)) then
        ue=0.
    else
        ue= dxe/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xf1 .eq. 0.) .or. (xf2 .eq. 0.)) then
        uf=0.
    else
        uf= dxf/((nts/2.)*dt)
    endif
    if ((xg1 .eq. 0.) .or. (xg2 .eq. 0.)) then
        ug=0.
    else
        ug= dxg/((nts/2.)*dt)
    endif
c
    if (t .le. 0.5) then
        ut=uo
    else
        ut=uo*(1.-sin(2.*pi*t))
    endif
endif

```

```
c
  t1=t2
  xal=xa2
  xbl=xb2
  xc1=xc2
  xd1=xd2
  xe1=xe2
  xf1=xf2
  xg1=xg2
  write(2,*)t,ua,ub,uc,ud,ue,uf,ug
  write(3,*) t,ua/ut,ub/ut,uc/ut,ud/ut,ue/ut,uf/ut,ug/ut
c
100  continue
c
  stop
  end
```



