



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

**Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις
στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών
πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου**

Διδακτορική Διατριβή

ΘΩΜΑΣ ΖΕΡΒΟΓΙΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2011

Ευχαριστίες

Με το πέρας της διδακτορικής αυτής διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνειτέλεσαν στην επιτυχημένη ολοκλήρωσή της.

Αρχικά, ευχαριστώ τον επιβλέποντα Καθηγητή Κ. Γιαννάκογλου, που μου ανέθεσε το πολύ ενδιαφέρον θέμα που πραγματεύεται η διατριβή και να χρησιμοποιήσω τις υπολογιστικές υποδομές του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, χωρίς τις οποίες η ολοκλήρωσή της θα ήταν αδύνατη. Οι υποδείξεις και συμβουλές του πάνω στα θέματα που αντιμετωπίζει η διατριβή καθόρισαν/διαμόρφωσαν σε μεγάλο βαθμό την πορεία αυτής και το τελικό αποτέλεσμα.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαίτερα τα δύο μέλη της συμβουλευτικής τριμελούς επιτροπής, τους Καθηγητές Κ. Παπαηλιού και Κ. Μαθιουδάκη, για τις υποδείξεις τους στην παρουσίαση και το κείμενο της διατριβής. Ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής για την τιμή της συμμετοχής τους στη διαδικασία της τελικής παρουσίασής της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Καθηγητή Ι. Αικατερινάρη, για τις γνώσεις που μοιράστηκε μαζί μου πάνω σε θέματα αεροδυναμικής αεροσκαφών και διάσπασης της κύριας δίνης αυτών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ, για τις γνώσεις που μοιράστηκαν μαζί μου, τη μεταξύ μας συνεργασία και το κλίμα φιλικότητας που διαμόρφωσαν στο χώρο εργασίας μας (και όχι μόνο). Κατ' αρχήν, τους Δρ. Δ. Παπαδημητρίου και Α. Ζυμάρη για τη συνεργασία μας πάνω σε θέματα συζυγών μεθόδων. Τους Δρ. Π. Λιακόπουλο και Ι. Καμπόλη για τις συμβουλές τους πάνω σε θέματα προγραμματισμού και γενικότερα υπολογιστών, καθώς και για τη συντήρηση του υπολογιστικού συστήματος του εργαστηρίου, την οποία αναλάμβαναν σε βάρος του ωφέλιμου ως προς το διδακτορικό τους χρόνου. Την Δρ. Β. Ασούτη για τη μεταξύ μας συνεργασία στον προγραμματισμό του βασικού επιλύτη ροής του εργαστηρίου. Επίσης, ευχαριστώ την Δρ. Χ. Γεωργοπούλου και τους υπ. Δρ. Ε. Κοντολέοντος, Ξ. Τρομπούκη, Σ. Κυριάκου και Ε. Παπουτσή-Κιαχαγιά για τη φιλία τους και τις απολαυστικές συζητήσεις που είχαμε πάνω σε θέματα επιστημονικά και μη.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών, το οποίο υποστήριξε οικονομικά τμήμα της διατριβής με την υποτροφία που μου παρείχε.

Περίληψη

Η διδακτορική αυτή διατριβή ασχολείται με την ανάπτυξη, τον προγραμματισμό και την εφαρμογή μεθόδων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που αφορούν στην πρόλεξη πεδίων ροής και στη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών με αιτιοκρατικές μεθόδους και τη χρήση του ακριβούς εσσιανού μητρώου της συνάρτησης στόχου και των περιορισμών. Έμφαση δίνεται στον τρόπο που τα παραπάνω υλοποιούνται με ενιαία διατύπωσή σε υβριδικά 2Δ και 3Δ πλέγματα, τα οποία ως γνωστόν έχουν πλεονεκτήματα ως προς το υπολογιστικό κόστος, την πιστότητα των αποτελεσμάτων και τις απαιτήσεις σε μνήμη. Η διατριβή χωρίζεται σε δύο βασικά τμήματα. Το πρώτο καλύπτει την επίλυση του ευθέως προβλήματος (δηλαδή προβλήματος ροής) και περιλαμβάνει τη διατύπωση των εξισώσεων που μοντελοποιούν τη ροή συμπίεστων ρευστών, τη διακριτοποίησή τους σε υβριδικά πλέγματα και την αριθμητική επίλυση τους. Το δεύτερο είναι η διατύπωση του διακριτού συζυγούς προβλήματος για την εύρεση παραγώγων ευαισθησίας πρώτης και δεύτερης τάξης, καθώς και του αλγόριθμου που θα εκμεταλλευτεί τη γνώση του συζυγούς πεδίου είτε σε μεθόδους βελτιστοποίησης είτε σε μεθόδους ανάλυσης σφάλματος για την ακριβέστερη πρόλεξη συναρτησιακών με πρακτικό ενδιαφέρον.

Στο πεδίο της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, η παρούσα διατριβή συνεισφέρει στη διατύπωση μιας ολοκληρωμένης μεθοδολογίας για την επίλυση τυρβωδών ροών σε υβριδικά διδιάστατα και τριδιάστατα πλέγματα. Αυτό περιλαμβάνει την κατασκευή κατάλληλης δομής δεδομένων για το πλέγμα και τη μαθηματική διατύπωση του σχήματος διακριτοποίησης. Η μεθοδολογία αυτή πιστοποιείται σε ένα σύνολο 2Δ και 3Δ εφαρμογών εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Στο σχήμα που παρουσιάζεται υπάρχουν καινοτομίες οι οποίες εντοπίζονται κυρίως στην παρεμβολή κομβικών μεγεθών στους όγκους ελέγχου και στον τρόπο με τον οποίο αυτά συνεισφέρουν στα διανύσματα ροής. Επιπλέον, προγραμματίστηκε μέθοδος προσαρμογής διδιάστατων υβριδικών πλεγμάτων, η οποία είτε λαμβάνει πληροφορίες από την υπό εξέλιξη λύση είτε χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τη συζυγή μέθοδο για τη μείωση του σφάλματος στον υπολογισμό συναρτησιακών όπως η άνωση, η οπισθέλκουσα ή οι απώλειες πτερύγωσης στροβιλομηχανής λόγω συνεκτικότητας.

Στο πεδίο της βελτιστοποίησης, η πρωτοτυπία της διδακτορικής διατριβής έγκειται στην ανάπτυξη μίας διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης συναρτησιακών που καλύπτουν εφαρμογές αντίστροφου σχεδιασμού αλλά και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών υπό γεωμετρικούς και ροϊκούς περιορισμούς. Το λογισμικό που προγραμματίστηκε για την υλοποίηση της μεθόδου αυτής αποφεύγει τη χρήση λογισμικού αυτόματης διαφόρισης, η οποία συνηθίζεται στη βιβλιογραφία, και ως εκ τούτου είναι πολύ αποδοτικό ως προς την ταχύτητα εκτέλεσης και τη διαχείριση μνήμης. Στο πλαίσιο της εργασίας εφαρμόστηκε μέθοδος Newton η οποία εκμεταλλεύεται τη δυνατότητα υπολογισμού του ακριβούς εσσιανού μητρώου για τον ταχύτερο υπολογισμό του ακρότατου. Επιπλέον, μελετήθηκε ο έξυπνος συνδυασμός της μεθόδου Newton με μεθόδους

quasi-Newton για την ταχύτερη ολοκλήρωση των αλγόριθμων βελτιστοποίησης.

Ως προς τις συζυγείς μεθόδους, επιπλέον των μεθόδων Newton αναπτύχθηκε τεχνική a posteriori ανάλυσης σφάλματος για υβριδικά πλέγματα, η οποία συνδυάζει τη διακριτή συζυγή μέθοδο με την προσαρμογή πλέγματος, που προγραμματίστηκαν στο πλαίσιο της διατριβής, για την ακριβέστερη πρόλεξη ποσοτήτων που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον, όπως η άνωση, οι απώλειες ολικής πίεσης ή η παραγωγή εντροπίας στο πεδίο ροής.

**Optimization methods in aerodynamics and turbomachinery
based on the adjoint technique, hybrid grids and the exact
hessian matrix**

THOMAS ZERVOGIANNIS

Ph.D. Thesis

National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Laboratory of Thermal Turbomachines

Supervisor: KYRIAKOS C. GIANNAKOGLU, Professor N.T.U.A.

Athens, 2011

Abstract

This Ph.D. thesis deals with the development, programming and application of Computational Fluid Dynamics (CFD) methods for the numerical prediction of flow fields and the optimization of aerodynamic shapes using deterministic methods and the exact hessian matrix of the cost function and the constraints. Emphasis is put on the suitable formulation of the above on hybrid grids. The thesis is structured in two basic parts. The first part covers the solution of the state problem and consists of the mathematical formulation of the flow equations for turbulent compressible flows, the discretization of the aforementioned equations on hybrid grids and the iterative schemes used for their solution. The second part presents the mathematical formulation of the discrete adjoint problem for the computation of the first- and second-order sensitivities, as well as the necessary tools which use the computed adjoint field in the context of inverse design/optimization and the a posteriori error analysis for computing functionals with arbitrary accuracy.

In the field of CFD, the thesis' contribution is a complete methodology for solving turbulent flows on 2D and 3D hybrid grids. The methodology comprises the grid data structure and the formulation of appropriate discretization schemes. The method is validated through an adequate set of 2D and 3D case studies of internal and external aerodynamics. Proposed numerical schemes, the interpolation of nodal values to the finite volume edges and their contribution to the numerical fluxes must be reported. In addition, a hybrid grid refinement

strategy was also developed; this can be used either as a traditional grid adaptation or in conjunction with discrete adjoint methods for reducing the error in the computation of quantities such as the lift, the drag or the total pressure losses of turbomachinery cascades.

In the field of optimization, a novel method for computing first- and second-order sensitivities using the discrete adjoint method is proposed. The method covers functionals used in inverse design and total pressure losses minimization problems and utilizes their so-computed sensitivities in designing optimal geometries subject to geometric and flow constraints using deterministic optimization methods. The developed software comprises only hand-differentiated routines, in order to achieve maximized efficiency and memory savings, in contrast to other works which almost exclusively depend on automatic differentiation. A Newton method was implemented, which uses the exactly computed Hessian matrix to rapidly locate the optimum in inverse design and total pressure losses optimization problems. Furthermore, the hybridization of the Newton method with quasi-Newton methods was also explored, to further increase the efficiency of the optimization algorithm.

In addition to the aforementioned Newton methods, the a posteriori error analysis method for hybrid grids was also developed, which combines the discrete adjoint method and the refinement technique developed in this thesis, to accurately predict quantities with practical interest, such as the lift, the total pressure losses or the entropy generation in the flow field.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΑΔ	Αυτόματη Διαφόριση
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ΣΜΔΕ	Σύστημα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
NTUA	National Technical University of Athens
AVDR	Axial Velocity-Density Ratio
MF	Mean Flow
SA	Spalart-Allmaras
APEA	A Posteriori Error Analysis
DD	Direct Differentiation
AV	Adjoint Variables
FD	Finite Differences
SQP	Sequential Quadratic Programming
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
SR1	Symmetric Rank 1



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις
στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών
πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου

Διδακτορική Διατριβή

ΘΩΜΑΣ ΖΕΡΒΟΓΙΑΝΝΗΣ

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή: Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

- | | |
|---|---|
| 1. Γιαννάκογλου Κυριάκος
(επιβλέπων)
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών | 1. Γιαννάκογλου Κυριάκος
(επιβλέπων)
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών |
| 2. Μαθιουδάκης Κωνσταντίνος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών | 2. Μαθιουδάκης Κωνσταντίνος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών |
| 3. Παπαηλιού Κυριάκος
Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών | 3. Μπεργελές Γεώργιος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών |
| | 4. Μπουντουβής Ανδρέας
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Χημικών Μηχανικών |
| | 5. Τζαμπίρας Γεώργιος
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων
Μηχανικών |
| | 6. Τσαγγάρης Σωκράτης
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών |
| | 7. Αρετάκης Νικόλαος
Λέκτορας ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών |

Αθήνα, 2011

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	xi
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Στόχοι της διατριβής και τοποθέτηση σε σχέση με τις δραστηριότητες του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών	1
1.2 Μέθοδοι επίλυσης ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων	3
1.3 Συζυγείς μέθοδοι – εύρεση του εσοιανού μητρώου	6
1.4 A posteriori ανάλυση σφάλματος	10
1.5 Δομή της διατριβής	11
2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ ΣΕ ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ	15
2.1 Οι εξισώσεις Navier–Stokes	16
2.1.1 Διατύπωση των 3Δ εξισώσεων ροής	16
2.1.2 Διατύπωση των 2Δ εξισώσεων με μεταβλητό πάχος του σωλήνα ροής	17
2.2 Μοντελοποίηση της τύρβης – Το μοντέλο Spalart–Allmaras	18
2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	20
2.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής	22
2.4.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων – Ορισμός των κυψελών ελέγχου	22
2.4.2 Παρεμβολή κομβικών τιμών στο εσωτερικό και τα όρια των στοιχείων του πλέγματος	25
2.4.3 Διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς	36
2.4.4 Διακριτοποίηση των όρων διάχυσης	48
2.4.5 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης	50
2.4.6 Διακριτοποίηση του χρονικού όρου και επιλογή του χρονικού βήματος	52
2.4.7 Οριακές συνθήκες	53
2.5 Επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων	58
2.5.1 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης	58
2.5.2 Αριστερό μέλος του όρου μεταφοράς	59
2.5.3 Αριστερό μέλος του όρου διάχυσης	60
2.5.4 Αριστερό μέλος του μοντέλου τύρβης	62
2.5.5 Αριστερό μέλος των οριακών συνθηκών	63
2.6 Προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση	63

2.6.1	Κριτήριο προσαρμογής	64
2.6.2	Κανόνες προσαρμογής	65
2.7	Παραλληλοποίηση	66
2.8	Ανακεφαλαίωση	74
3	ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΡΟΗΣ	75
3.1	Ροή γύρω από την αεροτομή RAE 2822	75
3.1.1	Περίπτωση R6	76
3.1.2	Περίπτωση R9	83
3.2	Ροή στη 2Δ πτερύγωση του συμπιεστή MAN GHH 1-S1	86
3.2.1	Πρόλεξη της ροής στο σημείο σχεδιασμού	89
3.2.2	Πρόλεξη της ροής για $\alpha^{in} = 52^\circ$	89
3.2.3	Πρόλεξη της ροής για $\alpha^{in} = 43^\circ$ και $\alpha^{in} = 40^\circ$	92
3.3	Ροή στην 2Δ πτερύγωση συμπιεστή του Shreeve	94
3.3.1	Ροή στο σημείο σχεδιασμού	98
3.3.2	Ροή εκτός σημείου σχεδιασμού	99
3.3.3	Ροή κοντά στο όριο απώλειας στήριξης	101
3.4	Μελέτη της διάσπασης της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους	103
3.4.1	1η γεωμετρία αεροσκάφους	104
3.4.2	2η γεωμετρία αεροσκάφους	110
3.4.3	3η γεωμετρία αεροσκάφους	116
3.5	Υπολογισμός πολικού γραφήματος πλήρους αεροσκάφους	123
3.6	Ανακεφαλαίωση	126
4	ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ	137
4.1	Πρόβλημα Αντίστροφου σχεδιασμού – Η μέθοδος Newton	137
4.2	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό περιορισμούς – η μέθοδος διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού	141
5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΣΣΙΑΝΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ	149
5.1	Υπολογισμός των παραγώνων ευαισθησίας πρώτης τάξης	150
5.2	Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων	152
5.2.1	Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης	152
5.2.2	Διαχείριση του όρου μεταφοράς	153
5.2.3	Διαχείριση του όρου διάχυσης	156
5.2.4	Διαχείριση των όρων του μοντέλου τύρβης	159
5.2.5	Όροι που προκύπτουν από διαφόριση του συναρτησιακού	162
5.2.6	Πιστοποίηση των υπολογιζόμενων παραγώνων ευαισθησίας πρώτης τάξης	164
5.3	Υπολογισμός του εσσιανού μητρώου	165
5.3.1	Μέθοδοι υπολογισμού του εσσιανού μητρώου	165

5.3.2	Πιστοποίηση του υπολογιζόμενου εσσιανού μητρώου	172
5.4	Αξιολόγηση των όρων που εμφανίζονται στο εσσιανό μητρώο	173
5.4.1	Όροι 'h1' και 'h2'	173
5.4.2	Όρος 'h3'	175
5.4.3	Όροι 'h4' και 'h5'	177
5.4.4	Όρος 'h6'	179
5.4.5	Συμπεράσματα από την ανάλυση των όρων του εσσιανού μητρώου	182
5.5	Ανακεφαλαίωση	182
6	ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΣΣΙΑΝΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ	183
6.1	Αντίστροφος σχεδιασμός της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1 .	184
6.2	Αντίστροφος σχεδιασμός της πτερύγωσης συμπιεστή του Shreeve	187
6.3	Αντίστροφος σχεδιασμός της αεροτομής RAE 2822	189
6.4	Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης πτερύγωσης σε στρωτή ροή	192
6.5	Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1	197
6.6	Ανακεφαλαίωση	199
7	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ A POSTERIORI ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ	203
7.1	Θεωρία της a posteriori ανάλυσης σφάλματος	203
7.2	Εφαρμογές	207
7.2.1	Πρόλεξη της τιμής του συντελεστή άνωσης και οπισθέλκουσας της αεροτομής RAE 2822	207
7.2.2	Πρόλεξη των απωλειών της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1	208
7.3	Ανακεφαλαίωση	210
8	ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	215
8.1	Σχετικά με τη χρήση υβριδικών πλεγμάτων για την επίλυση του προβλήματος ροής	216
8.2	Σχετικά με τη διακριτή συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου και την a posteriori ανάλυση σφάλματος	218
8.3	Σύγκριση των παραγώνων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο	220
8.4	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	220
8.5	Δημοσιεύσεις	222
	Βιβλιογραφία	223

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Στόχοι της διατριβής και τοποθέτηση σε σχέση με τις δραστηριότητες του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών

Οι υπολογιστικές μέθοδοι επίλυσης πεδίων ροής έχουν φτάσει σε επαρκές επίπεδο ωριμότητας ώστε να μπορούν να προλέγουν πρακτικά αξιοποιήσιμα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά (όπως δυνάμεις άνωσης και οπισθέλκουσας, απώλειες ολικής πίεσης, ροπές) με πολύ καλή ακρίβεια. Ταυτόχρονα, η εκρηκτική αύξηση των δυνατοτήτων των υπολογιστικών συστημάτων επιτρέπει πλέον τη χρήση των μεθόδων αυτών σε διαδικασίες σχεδιασμού και βελτιστοποίησης στη βιομηχανία. Μία τέτοια διαδικασία σχεδιασμού-βελτιστοποίησης εμπλέκει πολλές συνιστώσες (παραμετροποίηση, γένεση πλέγματος, επίλυση ροής, υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας, αλγόριθμο βελτιστοποίησης), καθεμία από τις οποίες επιδέχεται βελτιώσεις ως προς την αποδοτικότητα και την πιστότητα-ακρίβεια. Στο πλαίσιο καθεμίας από τις συνιστώσες αυτές αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι, οι οποίες αλληλοσυμπληρώνονται, καλύπτοντας διαφορετικές ανάγκες ή εφαρμογές.

Η παρούσα διατριβή στοχεύει στην ανάπτυξη μεθόδων αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης και αντίστροφου σχεδιασμού στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου της συνάρτησης στόχου. Σχετικά με την επίλυση της ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων, διατυπώνεται μία κεντροκομβική μέθοδος πεπερασμένων όγκων, για μία ποικιλία σχημάτων διακριτοποίησης που διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο υπολογισμού των χωρικών κλίσεων των μεταβλητών ροής και τους περιοριστές¹. Βασικό πρωτότυπο χαρακτηριστικό της μεθόδου που παρουσιάζεται είναι η ικανότητα να αντιμετωπίζει ενιαία όλα τα είδη πλεγματικών στοιχείων χωρίς να απαιτεί παραδοχές που μειώνουν την ακρίβεια των σχημάτων διακριτοποίησης. Το λογισμικό που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής περιλαμβάνει αρκετά μοντέλα τύρβης μίας και δύο εξισώσεων, από τα οποία εδώ δίνεται έμφαση

¹limiters

αποκλειστικά στο μοντέλο τύρβης των Spalart–Allmaras, το οποίο είναι ιδιαίτερα ελκυστικό για εφαρμογή σε διαδικασίες βελτιστοποίησης λόγω των σχετικά χαμηλών υπολογιστικών απαιτήσεων του. Δεδομένου ότι μέσα από ολοκληρωμένες διατριβές του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΕΘΣ) υπήρχε ήδη κώδικας επίλυσης συμπιεστών ροών που διέπονται από τις εξισώσεις Navier–Stokes για μη-δομημένα 2Δ και 3Δ πλέγματα τριγωνικών και τετραεδρικών στοιχείων αντίστοιχα, [1], [2], εναρκτήριο σημείο της μεθόδου που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή αποτέλεσαν οι εργασίες αυτές. Η προσθήκη της ικανότητας διαχείρισης υβριδικών πλεγμάτων είναι πλεονεκτική διότι αυξάνει την πιστότητα και την αποδοτικότητα της μεθόδου στην οποία βασίστηκε, λόγω της ικανότητας του παραγόμενου λογισμικού να διαχειριστεί διάφορους τύπους πλεγμάτων στοιχείων, καθένας από τους οποίους είναι αποδοτικός σε συγκεκριμένες περιοχές του πεδίου ροής. Για παράδειγμα, κοντά στο στερεό όριο θέλουμε στοιχεία με ακμές κατά το δυνατόν κάθετες ως προς αυτό, ώστε να μειωθεί η αριθμητική διάχυση, ενώ μακριά από αυτό θέλουμε στοιχεία των οποίων το μέγεθος αυξάνει γρήγορα για μείωση του υπολογιστικού κόστους και του κόστους αποθήκευσης. Επιπλέον, η ικανότητα χρήσης υβριδικών πλεγμάτων από τον εν λόγω επιλύτη τον καθιστά ιδιαίτερα ευέλικτο, αφού είναι δυνατό να διαχειριστεί πλέγματα που παράγονται από μεγάλη ποικιλία γενετών πλεγμάτων (δομημένων, [3], και μη-δομημένων, [4], [5]) που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο άλλων διδακτορικών διατριβών του ΕΘΣ. Βασικό μέλημα της διατριβής ήταν και η παραλληλοποίηση του κώδικα, ενώ η προσθήκη τεχνικών προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach² και δυνατοτήτων επίλυσης μη-μόνιμων πεδίων ροής πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής της Β. Ασούτη, [6].

Ο παραπάνω επιλύτης εντάσσεται στη διαδικασία του σχεδιασμού–βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών με χρήση της μεθόδου Newton και των ακριβών παραγώνων ευαισθησίας δεύτερης τάξης (δηλαδή του εσσιανού μητρώου), που υλοποιείται στην παρούσα διατριβή με εφαρμογή της διακριτής συζυγούς μεθόδου³, κατά την οποία οι ήδη διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής (ευθύ πρόβλημα) χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος. Πρωτοτυπίες σε σχέση με αντίστοιχες μελέτες της βιβλιογραφίας εισάγονται στο στάδιο υπολογισμού του ακριβούς εσσιανού μητρώου, όπου η περιορισμένη χρήση λογισμικού αυτόματης διαφορίσης⁴ (ΑΔ) επιτρέπει την ταυτοποίηση και διαγραφή αμελητέων όρων, καθώς και στον τομέα των εφαρμογών, όπου για πρώτη φορά η μέθοδος Newton με χρήση του ακριβούς εσσιανού μητρώου χρησιμοποιείται για συναρτησιακά εσωτερικής αεροδυναμικής, και μάλιστα σε προβλήματα βελτιστοποίησης με ροϊκούς περιορισμούς. Ως γνωστόν, η εναλλακτική προσέγγιση της διακριτής συζυγούς μεθόδου είναι η συνεχής συζυγής μέθοδος⁵, στην οποία το συζυγές πρόβλημα διατυπώνεται πρώτα με αναλυτικό τρόπο, οδηγώντας στις συζυγείς μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), οι οποίες κατόπιν

²low Mach preconditioning

³discrete adjoint method

⁴automatic differentiation

⁵continuous adjoint method

διακριτοποιούνται και επιλύονται αριθμητικά. Διακριτές και συνεχείς συζυγείς μέθοδοι για δομημένα πλέγματα έχουν αναπτυχθεί στο ΕΘΣ επίσης από τους Δ. Παπαδημητρίου, [3] και Β. Ασούτη, [6] καθώς και πιο πρόσφατα στη διατριβή του Α. Ζυμάρη, [7], όπου αναπτύχθηκαν διατυπώσεις για το συζυγές πρόβλημα όταν στο ευθύ πρόβλημα χρησιμοποιούνται μοντέλα τύρβης με συναρτήσεις τοίχου, καθώς και για εφαρμογές με τεχνικές ενεργού ελέγχου ροής. Στις παραπάνω διατριβές δόθηκε βάση μόνο στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης (δηλαδή την κλίση της συνάρτησης). Αντιθέτως, η παρούσα διατριβή επικεντρώνεται στον υπολογισμό του *ακριβούς εσσιανού μητρώου* με χρήση *διακριτών συζυγών μεθόδων* και *υβριδικών πλεγμάτων*. Εξάλλου, η παρούσα διατριβή ασχολείται με τη διακριτή μέθοδο, ενώ οι προηγούμενες διατριβές (με εξαίρεση ένα τμήμα της [3]) αφορούσαν αποκλειστικά στη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Εκτός από τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, η δυνατότητα διατύπωσης του συζυγούς προβλήματος και η διαθεσιμότητα σχετικού λογισμικού βοηθά και σε προβλήματα ανάλυσης πεδίων ροής, αφού επιτρέπει την εφαρμογή μεθόδων *a posteriori* ανάλυσης σφάλματος, για την προσαρμογή πλέγματος και την επιβολή διορθώσεων ούτως ώστε ποσότητες που ενδιαφέρουν το μηχανικό να υπολογίζονται με δεδομένη από το χρήστη ακρίβεια, ή ακόμη στην κατασκευή χαρτών παραγώγων ευαισθησίας⁶, [7], [8]. Εφαρμογές της *a posteriori* ανάλυσης σφάλματος στην εξωτερική αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου συμπεριλαμβάνονται στο τέλος της διατριβής.

1.2 Μέθοδοι επίλυσης ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων

Η ανάγκη για χρήση υβριδικών πλεγμάτων κατά την επίλυση της ροής αντανάκλα τις διαφορετικές απαιτήσεις που επιβάλλονται ως προς τα χαρακτηριστικά του πλέγματος σε διαφορετικές περιοχές του μελετώμενου πεδίου ροής. Έτσι, κοντά στα στερεά τοιχώματα απαντώνται περιοχές στις οποίες η μεταβολή της κατάστασης του ρευστού έχει έντονα κατευθυντικό χαρακτήρα και η πρόλεξη ευνοείται από τη χρήση ανισότροπων πλεγματοικών στοιχείων των οποίων οι ακμές είναι κάθετες στο στερεό όριο. Αντίθετα, μακριά από αυτά είναι επιθυμητή η ταχεία αύξηση του μεγέθους των πλεγματοικών στοιχείων, ώστε να επιτυγχάνεται οικονομία κατά την επίλυση. Η χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων με τριγωνικά (σε 2Δ) και τετραεδρικά (σε 3Δ) στοιχεία αποτελεί συμβιβασμό ο οποίος χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον στο παρελθόν για την πρόλεξη ατρίβων και συνεκτικών ροών, [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [2]. Για την ακριβέστερη προσομοίωση των συνεκτικών φαινομένων στις παραπάνω αναφορές δημιουργείται κοντά στο στερεό όριο ένα δομημένο πλέγμα από τετραγωνικά (σε 2Δ) ή εξαεδρικά/πρισματικά στοιχεία (σε 3Δ), τα οποία στη συνέχεια διασπώνται σε τρίγωνα ή τετράεδρα αντίστοιχα. Αυτή η προσέγγιση έχει τρία βασικά μειονεκτήματα :

⁶sensitivity maps

- Η διάσπαση εισάγει πολλές επιπλέον ακμές, οι οποίες αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος και τις απαιτήσεις σε μνήμη του επιλύτη.
- Οι ακμές αυτές εισάγουν επιπλέον αριθμητική διάχυση, μειώνοντας έτσι την ποιότητα της μεθόδου, ειδικά αν ληφθεί υπόψη ότι τα τρίγωνα/τετράεδρα που δημιουργούνται από τη διάσπαση έχουν πολύ μεγάλο βαθμό ανισοτροπίας.
- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διάσπαση σε τρίγωνα ή τετράεδρα είναι αδύνατη χωρίς την εισαγωγή επιπλέον κόμβων.

Οι παραπάνω λόγοι αποτελούν σημαντικό κίνητρο για την ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης ικανών να χειριστούν πρισματικά ή/και εξαεδρικά στοιχεία ταυτόχρονα με τετραεδρικά, τα οποία πληρούν το υπολογιστικό χωρίο μακριά από το στερεό όριο, ενδεχομένως δε και πυραμίδων τετραπλευρικής βάσης, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διασύνδεση των τετραπλευρικών εδρών των πρισμάτων/εξάεδρων με τα τετράεδρα. Μία εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με τις μεθόδους γένεσης μη-δομημένων και υβριδικών πλεγμάτων περιέχεται σε πρόσφατη διατριβή του ΕΘΣ, [4].

Στην κατηγορία των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων έχουν παρουσιαστεί μέθοδοι επίλυσης της ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων, λ.χ. [19], [20], [21]. Ιδιαίτερα στην τελευταία αναφορά, ορίζεται σύστημα τοπικών συντεταγμένων και χρησιμοποιούνται κατάλληλοι μετασχηματισμοί οι οποίοι απεικονίζουν τις μεταβλητές από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι διαφορετικοί για κάθε τύπο πλεγματοειδούς στοιχείου, οπότε μία τέτοια μέθοδος δεν αντιμετωπίζει τα στοιχεία του υβριδικού πλέγματος με ενιαίο τρόπο. Η παρούσα διατριβή 'χτίζει' το μοντέλο παρεμβολής των μεταβλητών στο εσωτερικό των στοιχείων βασιζόμενη στην ιδέα αυτή, αλλά χρησιμοποιεί διγραμμικούς και τριγραμμικούς μετασχηματισμούς, με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθηματικές εκφράσεις των αλγορίθμων που χρησιμοποιούν την παρεμβολή αυτή να είναι *ενιαίες* για όλους τους τύπους των πλεγματοειδών στοιχείων.

Στην κατηγορία των μεθόδων πεπερασμένων όγκων, αναφέρεται η συμβολή της ερευνητικής ομάδας του Kallinderis, η οποία χρησιμοποίησε κατά κόρον την έννοια του δυαδικού όγκου γύρω από τις ακμές του πλέγματος⁷, όπως αρχικά παρουσιάστηκε κατά την ανάπτυξη μίας μεθόδου επίλυσης της ροής σε μη-δομημένα 2D πλέγματα τετραπλευρικών στοιχείων, [22]. Η μέθοδος αυτή επεκτάθηκε για τον χειρισμό υβριδικών 3D πλεγμάτων αποτελούμενων από πρίσματα τριγωνικής βάσης και τετράεδρα, για στρωτές, [23], και τυρβώδεις, [24], ροές. Προκειμένου να χρησιμοποιηθούν οικονομικές δομές δεδομένων για την αποθήκευση των τοπολογικών πληροφοριών του πλέγματος, η συγκεκριμένη μέθοδος εκμεταλλεύεται τη δομημένη φύση των διαστρωματώσεων των πρισματικών στοιχείων κοντά στο στερεό όριο, γεγονός που εισάγει μία 'ψευδοδομή' στη διαχείριση των στοιχείων. Ασυμπίεστες, μη-μόνιμες ροές, εφαρμογές με μεταβλητά όρια του πεδίου ροής και εφαρμογές με αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής⁸

⁷edge dual

⁸flow-structure interaction

αντιμετωπίζονται στα [25] και [26]. Τέλος, η μέθοδος αυτή επεκτείνεται ώστε να χειρίζεται εξάεδρα και πυραμίδες τετραπλευρικής βάσης, [27]. Στις παραπάνω εργασίες, καθώς και στις [28] και [29] αντιμετωπίζονται και θέματα όπως η προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση, η διατύπωση κατάλληλων εκφράσεων ψευδοχρονικού βήματος για υβριδικά πλέγματα, η γένεση υβριδικών πλεγμάτων, η παραλληλοποίηση της μεθόδου και λεπτομέρειες σχετικά με τις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούνται. Από την άλλη πλευρά, ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η αύξηση σε απαιτήσεις μνήμης που επιβάλλει η δομή δεδομένων που αποθηκεύει τα στοιχεία γύρω από κάθε ακμή του πλέγματος, και η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των διανυσμάτων συνεκτικής ροής.

Μία αρκετά διαφορετική προσέγγιση ακολουθείται στα [30], [31] και [32]. Στις εν λόγω εργασίες δίνεται έμφαση στην επέκταση ήδη υπάρχοντων τεχνικών πολυπλέγματος και προσαρμογής πλέγματος αντίστοιχης μεθόδου μη-δομημένων τριγωνικών και τετραεδρικών πλεγμάτων, [33], σε υβριδικά πλέγματα με τριγωνικά-τετραγωνικά (2Δ) και τετραεδρικά-πυραμιδικά-πρισματικά-εξαεδρικά (σε 3Δ) στοιχεία. Γίνεται αναφορά στις συνθήκες που πρέπει να πληροί ένα αριθμητικό σχήμα για να διατηρείται ακρίβεια δεύτερης τάξης, ακόμα και αν το πλέγμα έχει πολύ ανισότροπα στοιχεία, και εκφράζεται σχήμα που να ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες για 2Δ, όχι όμως για 3Δ πλέγματα. Στην τελευταία περίπτωση, επιλέγεται η απλοποίηση του σχήματος παρεμβολής στους μεσόκομβους των ακμών, που είναι υπεύθυνο για την αύξηση της τάξης ακρίβειας, προκειμένου να μειωθούν οι απαιτήσεις σε μνήμη. Η παρούσα διατριβή δανείζεται και επεκτείνει στοιχεία των παραπάνω εργασιών, όπως θα φανεί στο οικείο κεφάλαιο, διατυπώνει δε σχήματα που διατηρούν την ακρίβεια δεύτερης τάξης και σε 3Δ πεδία ροής.

Μία τρίτη προσέγγιση, η οποία ακολουθείται από την ερευνητική ομάδα του Haselbacher, [34], [35], εντείνει την προσοχή της στην ανάπτυξη μίας μεθόδου η οποία είναι αγνωστική ως προς τον τύπο των κελιών του πλέγματος σε όλα τα στάδια επίλυσης της ροής εκτός του σταδίου προεπεξεργασίας και μετεπεξεργασίας⁹. Η προσέγγιση αυτή φροντίζει να ικανοποιούνται για τον τελεστή διακριτοποίησης του όρου διάχυσης οι συνθήκες ευστάθειας και ακρίβειας δεύτερης τάξης που διατυπώνονται για 2Δ σχήματα στο [36] (αντίστοιχες συνθήκες για 3Δ πλέγματα εξαεδρικών στοιχείων αναπτύχθηκαν σε μελλοντική εργασία, [37]). Προκειμένου ο χειρισμός των διαφόρων πλεγματικών στοιχείων να γίνει με ενιαίο τρόπο για όλους τους τύπους πλεγματικών στοιχείων, ο υπολογισμός των χωρικών κλίσεων των μεταβλητών ροής στους κόμβους του πλέγματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Επίσης, προκειμένου να μην εμφανιστεί κατά τον υπολογισμό των συνεκτικών διανυσμάτων ροής το φαινόμενο απεμπλοκής των πρώτων γειτόνων ενός κόμβου από το αντίστοιχο υπολογιστικό 'stencil', διατυπώνεται μαθηματική έκφραση η οποία αντικαθιστά τις συνεισφορές στη χωρική κλίση των μεταβλητών κατά την κατεύθυνση της ακμής του πλέγματος με μία ισοδύναμη έκφραση που προκύπτει από κεντρικές διαφορές. Η παρούσα

⁹grid transparency

διατριβή χρησιμοποιεί στοιχεία της μεθοδολογίας αυτής, προσθέτει δε τη δυνατότητα χρήσης και άλλων μεθόδων, πέραν αυτής των ελαχίστων τετραγώνων, για τον υπολογισμό χωρικών κλίσεων σε 2Δ και 3Δ υβριδικά πλέγματα.

Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλες μέθοδοι, οι οποίες διαχειρίζονται υβριδικά πλέγματα, χρησιμοποιώντας υβριδισμό των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων, [38], [39], ή δομημένων/μη-δομημένων και καρτεσιανών πλεγμάτων, [40], [41], κεντροκυβελικές διατυπώσεις και πολυώνυμα παρεμβολής, [42], και διάσπαση των (στη γενική περίπτωση μη-συνεπίπεδων) τετραπλευρικών επιφανειών σε τριγωνικές, [43]. Καμία από τις παραπάνω μεθόδους δεν αντιμετωπίζει με ενιαίο τρόπο τους τύπους των πλεγματικών στοιχείων που διαχειρίζεται.

1.3 Συζυγείς μέθοδοι – εύρεση του εσσιανού μητρώου

Σημαντικό τμήμα της πρόσφατης ερευνητικής δραστηριότητας του ΕΘΣ προσανατολίζεται στην ανάπτυξη συζυγών μεθόδων, συνεχών και διακριτών, [44], [45], [46], [47], [48], [49]. Οι μέθοδοι αυτές υπολογίζουν την κλίση των συναρτήσεων στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού με υπολογιστικό κόστος ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Δεδομένου ότι σχεδόν πάντοτε τα προβλήματα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) είναι προβλήματα με μικρό αριθμό συναρτήσεων στόχου και μεγάλο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, οι συζυγείς μέθοδοι υπερέχουν κατά πολύ σε σχέση με άλλες μεθόδους υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας (λ.χ. ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής).

Οι συνεχείς συζυγείς μέθοδοι εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά στην ΥΡΔ και σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού από τον Pironneau, [50], για πρότυπα ροής ελλειπτικών εξισώσεων και αργότερα από τον Jameson, [51], [52], [53], για ατριβείς διηχητικές ροές που διέπονται από τις εξισώσεις δυναμικού και τις εξισώσεις Euler. Η μέθοδος αυτή επεκτάθηκε για συνεκτικές ροές και εφαρμόστηκε σε 3Δ γεωμετρίες πτερύγων αλλά και αεροσκαφών στα [54], [55]. Στις εργασίες αυτές επισημαίνεται ότι η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει δεν έχει απαραίτητα καλές επιδόσεις αν οι συνθήκες ροής αλλάξουν, τονίζοντας την χρησιμότητα του στίβαρου σχεδιασμού. Όλες οι παραπάνω εργασίες βασίζονταν σε εκφράσεις των συζυγών εξισώσεων οι οποίες περιείχαν και χωρικά ολοκληρώματα. Σε μετέπειτα εργασίες αναπτύχθηκαν συνεχείς συζυγείς μέθοδοι για ατριβείς, [56], [57] και συνεκτικές, [44], [58], συμπιεστές και ασυμπιεστές ροές, στις οποίες οι όροι που απαρτίζουν τις συζυγείς εξισώσεις και τις παραγώγους ευαισθησίας δεν περιλαμβάνουν χωρικά ολοκληρώματα. Η συνεχής συζυγής μέθοδος έχει εφαρμοστεί και σε προβλήματα ελαχιστοποίησης του ηχητικού κρότου¹⁰ υπερηχητικών αεροσκαφών, [59], [60], [61], [62]. Για μία πληρέστερη βιβλιογραφική ανασκόπηση στις συνεχείς συζυγείς μεθόδους, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις σχετικές με το αντικείμενο

¹⁰sonic boom

ολοκληρωθείσες διατριβές του ΕΘΣ, [3], [6], [7]. Αξίζει να αναφερθούν στο σημείο αυτό και οι μέθοδοι one-shot, [63], [64], [65], [66], στις οποίες οι μεταβλητές σχεδιασμού, οι μεταβλητές ροής και οι συζυγείς μεταβλητές ανανεώνονται ταυτόχρονα.

Αναφορικά με τις διακριτές συζυγείς μεθόδους, οι Elliot και Peraire παρουσίασαν εργασίες οι οποίες ασχολούνται με τον αντίστροφο σχεδιασμό 2Δ και 3Δ μορφών σε ατριβείς ροές, [67], και στρωτές ροές, [68], [69]. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε στις εργασίες αυτές προγραμματίστηκε για περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας στο [70], ενώ στο [71] αντιμετωπίζονται πιο ρεαλιστικά προβλήματα σιβαρού σχεδιασμού υπό περιορισμούς. Στις εργασίες αυτές δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διατύπωση των συνθηκών που εξασφαλίζουν τη δημιουργία TVD¹¹ σχημάτων για τις εξισώσεις ροής και τις συζυγείς εξισώσεις ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση μέχρι ακρίβειας μηχανής¹².

Στην [72], ο Anderson παρουσιάζει μία αντίστοιχη μέθοδο για τυρβώδεις ροές, όπου διερευνώνται και τελικώς απορρίπτονται παραδοχές κατά τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, όπως το να αμεληθεί η παράγωγος του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, των όρων δεύτερης τάξης ή των παραγώγων ευαισθησίας πλεγματοκτών ποσοτήτων¹³. Οι παραγωγίσεις στην εργασία αυτή πραγματοποιούνται χωρίς τη χρήση λογισμικού ΑΔ. Ίδια τακτική ακολουθείται στο [73], και επίσης στο [74], όπου η μέθοδος παραλληλοποιείται. Στο [75] διερευνώνται διάφορες στρατηγικές μετακίνησης/προσαρμογής του πλέγματος στη μεταβαλλόμενη κατά το σχεδιασμό γεωμετρία, ενώ στο [76] παρουσιάζεται μία συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας πλεγματοκτών ποσοτήτων.

Η ερευνητική ομάδα του Giles αναπτύσσει επίσης διακριτές συζυγείς μεθόδους στα [77], [78] και [79] γράφοντας ισοδύναμες εκφράσεις για το συναρτησιακό, συναρτήσει είτε των μεταβλητών ροής είτε των συζυγών μεταβλητών. Μάλιστα, οι μέθοδοι επαναληπτικής επίλυσης του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος που παρουσιάζονται στις εργασίες αυτές δίνουν σε κάθε ψευδοχρονική επανάληψη την ίδια ακριβώς τιμή για το συναρτησιακό, βάσει των δύο αυτών ισοδύναμων εκφράσεων. Στα [80] και [81] παρουσιάζεται η αναλυτική λύση των συζυγών εξισώσεων για το 1Δ πρόβλημα παρουσία κυμάτων κρούσης και συγκρίνεται με τη διακριτή συζυγή μέθοδο. Τα [82], [83] και [84] εφαρμόζουν τη μέθοδο σε μη-μόνιμες ροές στροβιλομηχανών. Στα [78], [82], [83], και [84] δίνεται έμφαση στην ακριβή διατύπωση των διακριτών συζυγών οριακών συνθηκών στο στερεό όριο για συνεκτικές ροές.

Τη διακριτή συζυγή μέθοδο σε μη-μόνιμες ροές εφάρμοσε και ο Jameson στα [85], [86], [87] και [88], ενώ στο [89] αντιμετωπίζονται 2Δ υπερηχητικές ροές στις οποίες το εμπλεκόμενο συναρτησιακό εκφράζεται σε τμήμα του ορίου του πεδίου διαφορετικό από αυτό που ελέγχουν οι μεταβλητές σχεδιασμού. Αντίστοιχα προβλήματα ‘απομακρυσμένων’ παραγώγων ευαισθησίας¹⁴ αντιμετωπίζονται και σε

¹¹Total Variation Diminishing

¹²machine accuracy

¹³grid sensitivities

¹⁴remote sensitivities

εργασίες του ΕΘΣ για μόνιμες ροές στις στροβιλομηχανές, [90], [91], και συγκεκριμένα για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης, και από άλλες ερευνητικές ομάδες στα [92] και [93] για την ελαχιστοποίηση του ηχητικού κρότου υπερηχητικών αεροσκαφών, ενώ στα [94] και [95] αντιμετωπίζονται προβλήματα αλληλεπίδρασης ρευστού-κατασκευής¹⁵.

Τέλος, αναφέρονται και οι μέθοδοι προοδευτικής βελτιστοποίησης¹⁶, [96] και [97], όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού ανανεώνονται χωρίς να έχει επέλθει σύγκλιση των εξισώσεων του ευθέος και συζυγούς προβλήματος, με ταυτόχρονη σταδιακή πύκνωση του αρχικά αραιού πλέγματος.

Εκτενείς συγκρίσεις των δύο προσεγγίσεων (συνεχούς και διακριτής) έχουν γίνει στα [98], [99], [100] και [101]. Στις δύο τελευταίες εργασίες παρουσιάζονται προτάσεις για υβριδισμό των προσεγγίσεων προκειμένου να υπάρξει πλήρης εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων τους. Όλες οι παραπάνω εργασίες καταλήγουν στο κοινό συμπέρασμα ότι με τη συνεχή συζυγή μέθοδο επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση των όρων που υπεισέρχονται στη μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων και υπάρχει σχετική ευελιξία ως προς την επιλογή του σχήματος και της μεθόδου επίλυσης. Από την άλλη πλευρά, η διακριτή συζυγής μέθοδος εφαρμόζεται πιο άμεσα, αφού η μαθηματική της διατύπωση είναι αρκετά πιο απλή και η ανάπτυξη του σχετικού λογισμικού μπορεί να επιταχυνθεί σημαντικά με τη χρήση τεχνικών ΑΔ, [102], [103], [104], [105]. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι στη διακριτή συζυγή μέθοδο είναι πιο συμβατός και άρα ακριβέστερος ο έλεγχος της υλοποίησης της μεθόδου μέσω της σύγκρισης των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας με άλλες μεθόδους (λ.χ. πεπερασμένες διαφορές, [106], [107], ή μεθόδους που υπολογίζουν τις παραγώγους ευαισθησίας με χρήση μιγαδικών μεταβλητών, [108], [109]). Παρόλα αυτά, η υλοποίηση σε επίπεδο προγραμματισμού μίας διακριτής συζυγούς μεθόδου αποδοτικής από πλευράς μνήμης και κόστους επεξεργαστή τονίζεται ότι είναι δυσκολότερη.

Οι μέχρι τώρα αναφερθείσες εργασίες καλύπτουν μόνο τον υπολογισμό της κλίσης του συναρτησιακού ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και την χρήση της σε μεθόδους αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης που είτε δε χρησιμοποιούν το εσσιανό μητρώο (λ.χ. μέθοδος απότομης καθόδου¹⁷) είτε χρησιμοποιούν μία προσέγγιση αυτού (λ.χ. προσεγγιστικές μέθοδοι Newton¹⁸). Ο υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου και η χρήση του σε μία ακριβή μέθοδο Newton επιταχύνει υπό προϋποθέσεις σημαντικά τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, ιδιαίτερα σε προβλήματα που ο αριθμός κατάστασης του ακριβούς εσσιανού μητρώου είναι σχετικά μεγάλος, οπότε η κατεύθυνση που δίνει μία μέθοδος απότομης καθόδου είναι κακή, [110], ή σε προβλήματα με μεγάλο αριθμό μεταβλητών, όπου μία προσεγγιστική μέθοδος Newton παρουσιάζει μειωμένη αποδοτικότητα ή/και αποτελεσματικότητα, [111], [112], [113]. Συνεπώς, η διαθεσιμότητα μίας μεθόδου για τον αποτελεσματικό υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου είναι επιθυμητή.

¹⁵fluid-structure interaction

¹⁶progressive optimization

¹⁷steepest descent

¹⁸quasi-Newton

Σχετικά με τον ακριβή υπολογισμό του εσσιανού μητρώου οι εργασίες που έχουν δημοσιευτεί είναι ιδιαίτερα ολιγάριθμες, ακόμα και σε επιστημονικά πεδία εκτός της ΥΡΔ. Στα [111], [112] και [113] γίνεται χρήση ανάλυσης Fourier προκειμένου να εκτιμηθεί μία προσέγγιση η οποία να είναι καλύτερη από αυτή των προσεγγιστικών μεθόδων Newton και της οποίας η ακρίβεια να μην επηρεάζεται αρνητικά από τη διάσταση του χώρου σχεδιασμού. Η μέθοδος χρησιμοποιείται για τον αντίστροφο σχεδιασμό μορφών σε 2Δ και 3Δ, για ροές που διέπονται από τις εξισώσεις δυναμικού ή τις εξισώσεις Euler, προϋποθέτει δε ότι το σημείο εκκίνησης δε θα είναι πολύ μακριά από το βέλτιστο. Επιπλέον, στις εργασίες αυτές παρουσιάζονται τεχνικές προσταθεροποίησης της μεθόδου βελτιστοποίησης. Στο [114] υπολογίζεται αναλυτικά το εσσιανό μητρώο για 1Δ ροές με κύμα κρούσης, έχοντας ως βάση την προαναφερθείσα εργασία του Giles, [81], στην οποία παρουσιαζόταν η αναλυτική λύση των συζυγών εξισώσεων σε 1Δ προβλήματα. Στο [115], το εσσιανό μητρώο υπολογίζεται για τους συντελεστές άνωσης, οπισθέλκουσας και ροπής ως προς τη γεωμετρία και ως προς τις συνθήκες ροής (γωνία επ' άπειρο ροής, αριθμός Reynolds και αριθμός Mach) χρησιμοποιώντας συνδυασμό της ευθείας διαφορίσης των εξισώσεων ροής και της διακριτής συζυγούς τεχνικής, επεκτείνοντας αντίστοιχη μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης, [116]. Για την ανάπτυξη της μεθόδου χρησιμοποιούνται τεχνικές ευθείας ΑΔ¹⁹ και γίνεται εκτενής σχολιασμός των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της ΑΔ, ανάλογα με την έκταση της χρήσης της και την επιλογή των σημείων του πηγαίου κώδικα που καλείται να διαφορίσει. Ακολούθως, η μέθοδος επεκτείνεται σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας, [117], και στο [118] χρησιμοποιούνται τεχνικές αντίστροφης ΑΔ²⁰, προκειμένου να αρθούν αρκετά από τα μειονεκτήματα της προηγούμενης μεθόδου. Αντίστοιχες μέθοδοι ακολουθήθηκαν και σε εργασίες άλλων ερευνητικών ομάδων, [119], [120] και [121]. Πέραν της ΥΡΔ απαντώνται εργασίες για υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου σε εφαρμογές μηχανικής στερεών και δυναμικής μηχανών, [122], [123], [124], [125], μεταφοράς θερμότητας, [126], ελέγχου ατμοσφαιρικής ρύπανσης, [127], στη βελτιστοποίηση ηλεκτρονικών φίλτρων, [128] και σε προβλήματα ρύθμισης εναέριας κυκλοφορίας, [129]. Η χρησιμότητα του υπολογιζόμενου εσσιανού μητρώου φαίνεται ιδιαίτερα στις μεθόδους σιβαρού σχεδιασμού, όπου εμπλέκεται στην ποσοτικοποίηση της τυπικής απόκλισης της συνάρτησης στόχου σε εφαρμογές όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού ή οι συνθήκες ροής μεταβάλλονται σύμφωνα με κάποια πιθανοτική κατανομή, [130], [121]. Σημειώνεται ότι στην πλειονότητα των εφαρμογών σιβαρού σχεδιασμού της βιβλιογραφίας ο υπολογισμός του εσσιανού μητρώου είτε αποφεύγεται πραγματοποιώντας ταυτόχρονη βελτιστοποίηση για διαφορετικές συνθήκες²¹ και χρησιμοποιώντας κατάλληλα επιλεγμένα βάρη, [71], [131], [131], [132], [133], [86], [134], [135], ή εκτιμάται με υπολογιστικά δαπανηρές μεθόδους που βασίζονται σε δειγματοληψίες (λ.χ. μέθοδος Monte Carlo), [136], [137], [138], [139], [140].

¹⁹tangent mode automatic differentiation

²⁰reverse mode automatic differentiation

²¹ multipoint design

Το ΕΘΣ συνείσφερε στο πεδίο αυτό με μία σειρά πρόσφατων δημοσιεύσεων, [141], [46], [48], [47], οι οποίες παρουσιάζουν τέσσερις διαφορετικές μεθόδους για τον ακριβή υπολογισμό του εσσιανού μητρώου συνδυάζοντας τη μέθοδο ευθείας διαφόρισης με τη συνεχή ή τη διακριτή συζυγή τεχνική σε δομημένα πλέγματα, και η οικονομικότερη εξ' αυτών χρησιμοποιείται σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού. Στις εργασίες αυτές αρκετοί όροι, οι οποίοι μάλιστα είναι αρκετά δαπανηροί και μαθηματικά περίπλοκοι, θεωρήθηκαν αμελητέοι και απαλείφθηκαν από την ακριβή έκφραση του εσσιανού μητρώου. Η παρούσα διατριβή εφαρμόζει τη μεθοδολογία των εργασιών αυτών, χρησιμοποιώντας τη διακριτή συζυγή τεχνική για υβριδικά πλέγματα, σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό περιορισμούς. Η σχετική μέθοδος έχει δημοσιευτεί στις εργασίες του ΕΘΣ [142] και [143]. Στην τελευταία περίπτωση ειδικά αποδεικνύεται ότι οι όροι που είχαν απαλειφθεί σε παλαιότερες εργασίες είναι πλέον σημαντικοί, οπότε συμπεριλαμβάνονται στην τελική έκφραση του εσσιανού μητρώου. Επιπλέον, πραγματοποιείται ενδελεχής έρευνα της σημαντικότητας όλων των όρων που συμμετέχουν στην πλήρη έκφραση του εσσιανού μητρώου, ώστε να διαπιστωθούν εναλλακτικές απλουστεύσεις, οι οποίες μειώνουν το υπολογιστικό κόστος χωρίς να ζημιώνουν την ακρίβεια του υπολογιζόμενου εσσιανού μητρώου.

1.4 A posteriori ανάλυση σφάλματος

Ένα τελευταίο πεδίο που καλύπτεται στη διατριβή είναι αυτό της a posteriori ανάλυσης σφάλματος (APEA²²) με χρήση συζυγών τεχνικών. Στη μέθοδο αυτή πραγματοποιείται συσχέτιση του αριθμητικού σφάλματος κατά τον υπολογισμό ενός συναρτησιακού (συνήθως, αλλά όχι απαραίτητα, ολοκληρωματικής ποσότητας) με το συζυγές πεδίο και η εκμετάλλευση της συσχέτισης αυτής με την επιβολή διορθώσεων στην τιμή του συναρτησιακού ή/και την διαδοχική προσαρμογή του πλέγματος για περαιτέρω μείωση του σφάλματος. Η μέθοδος αυτή ανταγωνίζεται κλασικές μεθόδους προσαρμογής πλέγματος, οι οποίες βασίζονται στην κλίση κάποιου μεγέθους της ροής, και οι οποίες δεν είναι πάντα κατάλληλες για την ακριβέστερη πρόλεξη του συναρτησιακού, ενίοτε δε οδηγούν σε λάθος εκτίμηση, [144]. Πρακτικό κέρδος από τη μέθοδο αυτή είναι η αποφυγή επίλυσης των εξισώσεων ροής σε ένα εξαρχής πυκνό πλέγμα, η οποία υποκαθίσταται από την οικονομικότερη επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων σε ένα αραιότερο πλέγμα.

Μία σειρά εργασιών σχετικά με τη μέθοδο APEA έχει δημοσιευτεί από την ερευνητική ομάδα του Oden για μαθηματικά προβλήματα που περιλαμβάνουν συστήματα ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, [145], [146], [147], [148], για προβλήματα ΥΡΔ, [149] και για προβλήματα μηχανικής στερεών, [150]. Στις εργασίες αυτές, οι οποίες αφορούν στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπως η πλειονότητα των εργασιών που έχουν ολοκληρωθεί άλλωστε στο πεδίο αυτό,

²²a posteriori error analysis

στόχος δεν είναι η βελτίωση του υπολογισμού κάποιου συναρτησιακού, αλλά της λύσης των εξισώσεων ροής γενικότερα. Με την ανάγκη του ακριβούς υπολογισμού ενός συναρτησιακού με πρακτική σημασία ασχολήθηκε ο Rannacher σε προβλήματα ΥΡΔ, [151], [152], [153], [154], και ο Patera στα [155] και [156]. Σχεδόν ταυτόχρονα ο Giles παρουσίασε μία μέθοδο ΑΡΕΑ η οποία, παρότι εφαρμόστηκε αρχικά σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων με χρήση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής, [157], [158], επεκτείνεται και σε μεθόδους πεπερασμένων όγκων, [159], [160], [161]. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δυνατότητα συνδυασμού της μεθόδου με άλλες μεθόδους μείωσης του αριθμητικού σφάλματος, [162], [163], [164], [165].

Μία αντίστοιχη μεθοδολογία η οποία βασίζεται στη χρήση διακριτών συζυγών τεχνικών και στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων αναπτύχθηκε από τον Darmofal για ατριβείς συμπιεστές ροές σε 1Δ, [166], [167], και 2Δ, [168], [169]. Στα [170], [171] και [172] αντιμετωπίζονται 2Δ τυρβώδεις ροές, ενώ τη διαδικασία προσαρμογής συνεπικουρούν μέθοδοι με αισθητήρια βασισμένα στη δεύτερη παράγωγο ροϊκών μεγεθών²³. Η εν λόγω μέθοδος επεκτάθηκε από τον Park σε 3Δ ατριβείς, [173], και τυρβώδεις, [174], ροές.

Το ΕΘΣ εφάρμοσε μία παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου σε 2Δ περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής, [175], [176]. Ιδιαίτερα στην τελευταία εργασία, η μέθοδος εφαρμόστηκε για συναρτησιακά που ποσοτικοποιούν τις απώλειες του πεδίου ροής και υπολογίζονται με ολοκλήρωση σε όρια απομακρυσμένα από τη γεωμετρία (όπως οι απώλειες ολικής πίεσης) και με ολοκλήρωση στο σύνολο του πεδίου ροής (παραγωγή εντροπίας). Επιπλέον, μελετήθηκε η επίδραση της εφαρμογής τεχνικών εξομάλυνσης²⁴, [177], και προσαρμογής μέσω μετακίνησης των κόμβων του πλέγματος²⁵, προκειμένου να μειωθούν οι απαιτήσεις της μεθόδου σε μνήμη υπολογιστή.

Σε πιο πρόσφατες εργασίες, όπως η [178], η μέθοδος ΑΡΕΑ εφαρμόζεται χωρίς πρωθύστερη γνώση του αριθμητικού σχήματος που χρησιμοποιήθηκε στο ευθύ πρόβλημα. Αναφέρεται επίσης η [179], η οποία αφορά στην εφαρμογή της μεθόδου για προβλήματα μεταφοράς-διάχυσης-αντίδρασης και προβλήματα που διέπονται από τις εξισώσεις Stokes, και οι [180] και [181], όπου η μέθοδος εφαρμόζεται για πεπερασμένα στοιχεία με σχήματα τύπου discontinuous Galerkin. Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί σχετικά πρόσφατα και σε επιστημονικά πεδία όπως η μεταφορά θερμότητας, [182], και ο ηλεκτρομαγνητισμός, [183].

1.5 Δομή της διατριβής

Δεδομένου ότι σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η παρουσίαση μίας ολοκληρωμένης μεθοδολογίας η οποία θα αντιμετωπίζει την ανάλυση και τον αντίστροφο σχεδιασμό/βελτιστοποίηση με χρήση *υβριδικών πλεγμάτων, διακριτών*

²³Hessian-based anisotropic grid adaptation

²⁴smoothing

²⁵ Γ -adaptation

συζυγών τεχνικών και του εσσιανού μητρώου, η διατριβή χωρίζεται σε τρία βασικά τμήματα, τα οποία αντιστοιχούν στα τρία ερευνητικά πεδία που κάλυψαν οι προηγούμενες ενότητες. Τα τμήματα αυτά αφορούν:

- στην επίλυση του ευθέως προβλήματος (εξισώσεις ροής) με χρήση υβριδικών πλεγμάτων και ενιαία διατύπωση για όλους τους τύπους πλεγματοειδών στοιχείων
- στην προτεινόμενη μέθοδο υπολογισμού του εσσιανού μητρώου και τη χρήση του σε διαδικασίες αντίστροφου σχεδιασμού/βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, μέσω ακριβών και προσεγγιστικών μεθόδων Newton
- στην *a posteriori* ανάλυση σφάλματος για βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από τις μεθόδους που αναλύονται στο πρώτο τμήμα, χρησιμοποιώντας τις συζυγείς τεχνικές που αναπτύσσονται στο δεύτερο τμήμα

Για κάθε τμήμα, πρώτα παρουσιάζεται η σχετική θεωρία και ακολουθεί ένα σύνολο εφαρμογών που πιστοποιούν την ορθή υλοποίηση της μεθόδου. Έτσι, η διατριβή διαρθρώνεται ως εξής:

- **Κεφ. 2 και 3:** Παρουσιάζεται η μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων ροής (ευθύ πρόβλημα) με χρήση υβριδικών πλεγμάτων σε 2D και 3D. Δεδομένου ότι βάση της μεθόδου αποτελούν εργασίες οι οποίες έχουν ήδη ολοκληρωθεί στο ΕΘΣ για 2D και 3D πλέγματα τριγωνικών/τετραεδρικών στοιχείων, γίνεται μία σύντομη παρουσίαση της μεθόδου που αναπτύσσεται σε αυτές και περιγράφονται εκτενώς οι αναγκαίες επεκτάσεις ή αλλαγές για την επιπρόσθετη δυνατότητα χειρισμού μικτών πλεγματοειδών στοιχείων με ενιαίο τρόπο. Παράλληλα, πραγματοποιούνται συγκρίσεις σε κάθε υπο-ενότητα (διακριτοποίηση των εξισώσεων, επίλυση της διακριτοποιημένης έκφρασης, παραλληλοποίηση, προσαρμογή πλέγματος) με αντίστοιχες μεθόδους της σχετικής βιβλιογραφίας. Τέλος, η μέθοδος επίλυσης πιστοποιείται σε 2D και 3D εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής με την πραγματοποίηση προσομοιώσεων, τη συλλογή των αποτελεσμάτων και τη σύγκρισή τους με διαθέσιμα πειραματικά ή αριθμητικά δεδομένα.
- **Κεφ. 4, 5 και 6:** Παρουσιάζεται η διακριτή συζυγής μέθοδος και οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να συνεισφέρει στον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου. Μελετώνται απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες επιταχύνουν αισθητά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας χωρίς να ζημιώνουν στην ακρίβεια αυτών. Επίσης, παρουσιάζονται εν συντομία οι μέθοδοι βελτιστοποίησης Newton και quasi-Newton, καθώς και δυνατότητες συνδυασμού αυτών. Οι μέθοδοι αυτές συγκρίνονται ως προς την αποδοτικότητά τους σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης 2D αεροτομών και πτερυγώσεων υπό γεωμετρικούς και ροϊκούς περιορισμούς.

- **Κεφ. 7:** Παρουσιάζεται η μέθοδος a posteriori ανάλυσης σφάλματος, η οποία βασίζεται στην προσαρμογή υβριδικών πλεγμάτων που παρουσιάζεται στο κεφ. 2 και τη διακριτή συζυγή μέθοδο που παρουσιάζεται στο κεφ. 5. Η πιστοποίηση της μεθόδου πραγματοποιείται με την εφαρμογή της στις 2Δ περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο κεφ. 3.
- **Κεφ. 8:** Παρουσιάζεται μία σύντομη ανακεφαλαίωση της διατριβής, απαριθμούνται τα πρωτότυπα στοιχεία αυτής και τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τα σχετικά αποτελέσματα και προτείνονται πεδία για μελλοντική έρευνα.

Το λογισμικό που αναπτύχθηκε για την υλοποίηση των παραπάνω μεθόδων έχει παραλληλισθεί με χρήση των πρωτοκόλλων PVM και MPI (για το πρόβλημα επίλυσης της ροής) και της διεπαφής προγραμματισμού εφαρμογών²⁶ OpenMP για τη μέθοδο εύρεσης του ακριβούς εσσιανού μητρώου. Η πιστοποίηση και οι εφαρμογές των μεθόδων που περιγράφονται εκτελέστηκαν στο υπολογιστικό κέντρο του ΕΘΣ, σχ. 1.1, το οποίο αποτελείται από δύο ετερογενείς συστοιχίες Beowulf και ένα υπερυπολογιστικό σύστημα²⁷ με τα εξής χαρακτηριστικά :

- Η πρώτη συστοιχία αποτελείται από 22 κόμβους (32bit, 35 πυρήνες συνολικά). με συνολική μνήμη RAM 20GB.
- Η δεύτερη συστοιχία αποτελείται από 30 κόμβους (64bit, 80 πυρήνες συνολικά). με συνολική μνήμη RAM 100GB.
- Το υπερυπολογιστικό σύστημα αποτελείται από 40 Dell Poweredge blades με δύο τετραπύρηνους επεξεργαστές Xeon έκαστη (64bit, 320 πυρήνες συνολικά) και συνολική μνήμη RAM 512GB



²⁶application process interface, API

²⁷high performance computer, HPC

Κεφάλαιο 2

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ ΣΕ ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο διατυπώνονται οι εξισώσεις Navier–Stokes για το συμπιεστό ρευστό, οι οποίες μοντελοποιούν το λεγόμενο ευθύ πρόβλημα¹ και επιλύονται αριθμητικά για τον υπολογισμό του πεδίου ροής στις περιπτώσεις ανάλυσης και βελτιστοποίησης που εξετάζονται. Οι εξισώσεις αυτές συμπληρώνονται με το μοντέλο τύρβης μίας εξίσωσης των Spalart–Allmaras, [184]. Η μέθοδος που περιγράφεται στο κεφάλαιο αυτό αποτελεί επέκταση της μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων ροής για μη–δομημένα πλέγματα τριγωνικών (2Δ) και τετραεδρικών (3Δ) στοιχείων που αναπτύχθηκε σε παλαιότερες δημοσιευμένες εργασίες και διδακτορικές διατριβές του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, [185], [1], [2], προκειμένου να προστεθεί η δυνατότητα χρήσης υβριδικών 2Δ και 3Δ πλεγμάτων.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται εδώ, κατά τη διακριτοποίηση των εξισώσεων, παρουσιάζει πλεονεκτήματα/καινοτομίες σε σύγκριση με αντίστοιχες εργασίες στη σχετική βιβλιογραφία στα εξής σημεία :

- Αντιμετωπίζει με ενιαίο και αποδοτικό τρόπο όλα τα είδη των πλεγματικών στοιχείων που απαντώνται στα υβριδικά πλέγματα και μάλιστα για *μία ποικιλία σχημάτων διακριτοποίησης*. Το κέρδος από την ενιαία αντιμετώπιση αντανακλά στον έλεγχο αποδοχής των πλεγματικών στοιχείων, τον υπολογισμό του όγκου τους και τον υπολογισμό των κλίσεων μεγεθών σε αυτά.
- Αναπτύσσονται δύο τρόποι αποθήκευσης των βαρών που συμμετέχουν στον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων μεγεθών, κατά ακμές και κατά κόμβους στοιχείων, μεταξύ των οποίων επιλέγεται ο κατά περίπτωση αποδοτικότερος ως προς το κόστος μνήμης.
- Εκφράζεται τύπος υπολογισμού του ψευδοχρονικού βήματος κατάλληλος για υβριδικά πλέγματα, και ο οποίος λαμβάνει επιπλέον υπόψη την επίδραση του μοντέλου τύρβης στην ευστάθεια του σχήματος.

¹direct problem

Εκτενής ανάλυση γίνεται και ως προς τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων ροής, δεδομένου ότι πολλά από τα στοιχεία της βρίσκουν άμεση εφαρμογή κατά την ανάπτυξη της διακριτής συζυγούς μεθόδου που θα παρουσιαστεί σε επόμενα κεφάλαια.

2.1 Οι εξισώσεις Navier–Stokes

2.1.1 Διατύπωση των 3Δ εξισώσεων ροής

Οι εξισώσεις που επιλύονται είναι οι εξισώσεις Navier–Stokes, σε αδιάστατη συντηρητική μορφή, για χρονικά μόνιμη ροή συμπιεστού ρευστού, απουσία δυνάμεων βαρύτητας, στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial x_r} = 0 \quad (2.1\alpha')$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho u_r u_i + p \delta_{ri}) = \frac{\partial \tau_{ri}}{\partial x_r} \quad (2.1\beta')$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} [u_r (\rho E + p)] = \frac{\partial(u_j \tau_{jr})}{\partial x_r} + \frac{\partial q_r}{\partial x_r} \quad (2.1\gamma')$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, u_r και q_r η συνιστώσα της ταχύτητας και της ροής θερμότητας, αντίστοιχα, κατά την κατεύθυνση x_r , $E = e + \frac{1}{2}u_r u_r$ η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, p η πίεση του ρευστού, και τ_{ij} ο τανυστής των τάσεων. Εφεξής, με τους επαναλαμβανόμενους δείκτες θα νοείται άθροιση σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein, εκτός αν δηλώνεται ρητά το αντίθετο.

Αν οριστεί το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}$$

καθώς και τα διανύσματα μη-συνεκτικής και συνεκτικής ροής κατά την κατεύθυνση x_r

$$\vec{F}_r^{inv} = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_1 u_r + p \delta_{1r} \\ \rho u_2 u_r + p \delta_{2r} \\ \rho u_3 u_r + p \delta_{3r} \\ u_r (\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_r^{vis} = \frac{1}{Re_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1r} \\ \tau_{2r} \\ \tau_{3r} \\ u_j \tau_{jr} + q_r \end{bmatrix}$$

οι εξ. 2.1 μπορούν να συμπυχθούν στην παρακάτω διανυσματική γραφή

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_r^{inv}}{\partial x_r} - \frac{\partial \vec{F}_r^{vis}}{\partial x_r} = 0 \quad (2.2)$$

Οι εξισώσεις Euler προκύπτουν με διαγραφή των διανυσμάτων συνεκτικής ροής από τις εξ. 2.2.

Υποθέτοντας ότι τα υπό μελέτη ρευστά είναι ισότροπα νευτώνεια και ότι ισχύει η υπόθεση του Stokes για τη συνεκτικότητα, [186], ο τανυστής των τάσεων δίνεται από την εξής σχέση

$$\tau_{ij} = \frac{\mu_{eff}}{Re_0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right)$$

όπου $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ είναι το άθροισμα μοριακής και τυρβώδους δυναμικής συνεκτικότητας και δ_{ij} το δέλτα του Kronecker.

Η αδιαστατοποιημένη ροή θερμότητας μοντελοποιείται σύμφωνα με το νόμο του Fourier

$$q_r = \frac{c_p \mu_{eff}}{Re_0 Pr} \frac{\partial T}{\partial x_r}$$

Ο αριθμός Reynolds εμφανίζεται ως συνέπεια της αδιαστατοποίησης των εξ. 2.2 και εκφράζεται συναρτήσει των μεγεθών αδιαστατοποίησης ρ_o , u_o , l_o και μ_o (πυκνότητα, ταχύτητα, μήκος και συνεκτικότητα αδιαστατοποίησης, αντίστοιχα) ως εξής

$$Re_0 = \frac{\rho_o u_o l_o}{\mu_o}$$

ενώ ο αδιάστατος αριθμός Prandtl εκφράζει το λόγο του ρυθμού διάχυσης της ορμής ως προς το ρυθμό διάχυσης της θερμότητας και γράφεται

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (2.3)$$

Το ‘κλείσιμο’ του συστήματος των εξισώσεων πραγματοποιείται με την υπόθεση ότι το εργαζόμενο μέσο ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

Στις εξ. 2.3 και 2.4, c_p είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα του αερίου, R η σταθερά του αερίου και k η θερμική αγωγιμότητα.

2.1.2 Διατύπωση των 2Δ εξισώσεων με μεταβλητό πάχος του σωλήνα ροής

Για τη μοντελοποίηση ροών σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών υπό τη θεώρηση ψευδο-3Δ ροής που διαμορφώνεται επιτρέποντας μεταβολή του πάχους του σωλήνα ροής (ο οποίος υπερτίθεται στο 2Δ χωρίο) κατά την αξονική κατεύθυνση x_1 , με συνέπεια την ταυτόχρονη μεταβολή του λόγου της αξονικής ταχύτητας επί την πυκνότητα², χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ροής μεταβλητού πάχους $h(x_1)$

$$\frac{\partial(h\vec{U})}{\partial t} + \frac{\partial(h\vec{F}_r^{inv})}{\partial x_r} - \frac{\partial(h\vec{F}_r^{vis})}{\partial x_r} = \vec{S}_h \quad (2.5)$$

²AVDR, Axial Velocity–Density Ratio

όπου

$$\vec{S}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dh}{dx} (p - \tau_{33}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι τάσεις που εμφανίζονται στα διανύσματα συνεκτικής ροής και στον όρο πηγής \vec{S}_h δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{\mu_{eff}}{Re_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} + \frac{u_1}{h} \frac{dh}{dx} \right) \right], \quad i, j = 1, 2 \\ \tau_{33} &= \frac{2}{3} \frac{\mu_{eff}}{Re_0} \left(2 \frac{u_1}{h} \frac{dh}{dx} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Οι εξ. 2.5 προκύπτουν ολοκληρώνοντας τις εξ. 2.2 κατά τη μία κατεύθυνση (εδώ τον άξονα εγκάρσια στο επίπεδο (x_1, x_2) της ροής) και χρησιμοποιώντας τύπους από τη θεωρία των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, [187].

2.2 Μοντελοποίηση της τύρβης – Το μοντέλο Spalart–Allmaras

Για τη μοντελοποίηση της τύρβης επελέγη το μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart–Allmaras, [184], προσαρμοσμένο σε συμπιεστές ροές, [1], [188], [189]. Η προσέγγιση που ακολουθείται στις δύο πρώτες αναφορές χρησιμοποιείται και στην παρούσα διατριβή. Το μοντέλο των Spalart–Allmaras προσομοιώνει τη μεταφορά, παραγωγή και διάχυση της ποσότητας $\tilde{\mu}$, η οποία σχετίζεται άμεσα με το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, μ_t , θεωρώντας ότι ισχύει η υπόθεση του Boussinesq, δηλαδή ότι οι τάσεις Reynolds μοντελοποιούνται κατά τρόπο αντίστοιχο με αυτόν των μοριακών τάσεων

$$\tau_{ij}^t = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \frac{\mu_t}{Re_0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right)$$

Σε αδιάστατη μορφή, η εξίσωση του μοντέλου για συμπιεστές ροές δίνεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\tilde{\mu})}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_r \tilde{\mu})}{\partial x_r}}_C &= \underbrace{c_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\mu} - \frac{1}{Re_0} \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\mu}}{d} \right)^2}_S + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re_0} \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_r} \left[(\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right] - \frac{1}{Re_0} \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)}_D + \\ &+ \underbrace{Re_0 \rho^2 f_{t1} \Delta \vec{u}^2}_T \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου ο όρος ‘ C ’ μοντελοποιεί τη μεταφορά της ποσότητας ‘ $\rho\tilde{\mu}$ ’, ο όρος πηγής ‘ S ’ την παραγωγή και καταστροφή αυτής, ο όρος ‘ D ’ τη διάχυση ενώ ο όρος ‘ T ’ ενεργοποιείται προαιρετικά και μόνο όταν επιθυμείται η προσομοίωση μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή, σε θέση η οποία είτε καθορίζεται από το χρήστη (trip) ή υπολογίζεται από χωριστό μοντέλο μετάβασης. Η παραπάνω εξίσωση επιλύεται ως προς το $\tilde{\mu}$, το οποίο στη συνέχεια θα δώσει το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t . Οι ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \\
\chi &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \\
\tilde{\nu} &= \frac{\tilde{\mu}}{\rho} \tilde{f}_{v2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^3} \\
\tilde{f}_{v3} &= \frac{1}{\chi} (1 + \chi f_{v1}) (1 - \tilde{f}_{v2}) \\
\tilde{S} &= \tilde{f}_{v3} S + \frac{1}{Re_0} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} \tilde{f}_{v2} \\
S &= |\vec{\omega}| \\
f_w &= g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} \\
g &= r + c_{w2} (r^6 - r) \\
r &= \frac{1}{Re_0} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \\
f_{t1} &= c_{t1} g_t \exp \left[-c_{t2} \frac{|\vec{\omega}^t|}{\Delta U^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2) \right] \\
g_t &= \min \left(0.1, \frac{\Delta U}{\omega^t \Delta x} \right) \\
f_{t2} &= c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \\
\Delta U &= |\vec{u}| - |\vec{u}^t| \\
d_t &= |\vec{x} - \vec{x}^t|
\end{aligned} \tag{2.7}$$

όπου \vec{x}^t , \vec{u}^t και $\vec{\omega}^t$ είναι το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα και η στροβιλότητα αντίστοιχα στο σημείο μετάβασης, το οποίο συμβολίζεται με τον εκθέτη t , ενώ Δx είναι το μήκος που χαρακτηρίζει το μέγεθος των στοιχείων του πλέγματος στο σημείο αυτό και d , d_t είναι οι αποστάσεις από τον τοίχο και το σημείο μετάβασης, αντίστοιχα. Τέλος, η τυρβώδης δυναμική συνεκτικότητα υπολογίζεται ως εξής

$$\mu_t = \chi f_{v1}$$

Οι σταθερές στην εξ. 2.6 και στις ποσότητες που εμπεριέχει λαμβάνουν τις εξής τιμές, [184]: $\sigma = \frac{2}{3}$, $\kappa = 0.41$, $c_{v1} = 0.71$, $c_{v2} = 5$, $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$,

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2, c_{t1} = 1, c_{t2} = 2, c_{t3} = 1.2 \text{ και } c_{t4} = 0.5.$$

Το συγκεκριμένο μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά σε πρακτικό επίπεδο τα τυρβώδη φαινόμενα σε ένα μεγάλο εύρος περιπτώσεων ροής, συμπεριλαμβανομένων των τμημάτων της ροής κοντά σε στερεά τοιχώματα για σχετικά υψηλούς αριθμούς Reynolds (thin shear layer flows) και της ροής στον ομόρου των πτερυγίων (free shear flows), [184], που ως επί το πλείστον καλύπτουν τις εφαρμογές που μελετώνται στην παρούσα διατριβή. Σε σύγκριση με άλλα μοντέλα τύρβης, παρουσιάζει καλές ιδιότητες ευστάθειας και σύγκλισης, οι οριακές συνθήκες του επιβάλλονται άμεσα και δεν απαιτεί πολύ πυκνά υπολογιστικά πλέγματα. Ιδιαίτερα σε σχέση με τα μοντέλα τύρβης δύο εξισώσεων, δεν παρουσιάζει το πρόβλημα της υπερβολικής παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας στο σημείο ανακοπής της ακμής πρόπτωσης και τις ανακρίβειες που αυτό εισάγει. Επιπλέον, το μοντέλο αυτό έχει σχετικά μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις (άρα αποτελεί ελκυστική επιλογή για εφαρμογή σε μεθόδους βελτιστοποίησης) και έχει ‘τοπικό’ χαρακτήρα, δηλαδή οι εξισώσεις σε κάθε κόμβο του πλέγματος δεν εμπλέκουν μεγέθη άλλων κόμβων πέραν των πρώτων γειτόνων (αυτών δηλαδή που συνδέονται με τον εν λόγω κόμβο μέσω πλεγματικής ακμής), γεγονός που το καθιστά κατάλληλο για εφαρμογές σε μη-δομημένα πλέγματα. Τα σημαντικότερα μειονεκτήματα του είναι η μειωμένη ακρίβεια στην πρόλεξη φαινομένων που σχετίζονται με την τύρβη σε αζονοσυμμετρικές ροές και σε ροές με μαζική αποκόλληση, [184], η έλλειψη μηχανισμού για αυτόματο εντοπισμό της θέσης μετάβασης, ενώ είναι σχετικά ανακριβές (στην πρωτόλεια τουλάχιστον μορφή) για περιπτώσεις ροής με σημαντική τιμή έντασης της τύρβης στην είσοδο του πεδίου ροής. Για το τελευταίο, παλαιότερη έρευνα στο ΕΘΣ οδήγησε σε πρόταση μετατροπών του μοντέλου-βάσης, [190], ώστε να αντιμετωπίζονται ροές εσωτερικής αεροδυναμικής αυτού του τύπου.

2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων, η οποία προηγείται της διακριτοποίησης και επίλυσής τους, χρησιμοποιούνται μεγέθη αδιαστατοποίησης που η επιλογή τους καθορίζεται από το είδος ροής που μελετάται (εσωτερικής ή εξωτερικής αεροδυναμικής). Βάσει των μεγεθών αδιαστατοποίησης προκύπτουν, όπως προαναφέρθηκε και στην παρ. 2.1.1, οι τιμές του αδιάστατου αριθμού Re_0 (Reynolds). Στην περιγραφή που ακολουθεί, για ένα μέγεθος U που εμφανίζεται αδιάστατο στις εξ. 2.2, 2.5 και 2.6, με \hat{U} θα συμβολίζεται η διαστατή τιμή του και με U_o θα συμβολίζεται το αντίστοιχο μέγεθος αδιαστατοποίησης, οπότε θα ισχύει

$$U = \frac{\hat{U}}{U_o} \quad (2.8)$$

Αναλυτικότερα, σε περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής, δεδομένου ότι συνήθως δίνονται στην είσοδο η ολική πίεση \hat{p}_t^{in} και η ολική θερμοκρασία \hat{T}_t^{in} , επιλέγεται να ισχύει $p_t^{in} = 1$ και $T_t^{in} = 1$ οπότε, από την εξ. 2.8, συνάγεται ότι

$$p_o = \hat{p}_t^{in}, \quad T_o = \hat{T}_t^{in}$$

Επίσης, επιλέγεται $R = \gamma - 1$ και $c_p = \gamma$ οπότε

$$R_o = \frac{\hat{c}_p}{\gamma} \quad (2.9a')$$

$$c_{p_o} = \frac{\hat{R}}{\gamma - 1} \quad (2.9b')$$

ενώ, από την απαίτηση η αδιαστατοποιημένη καταστατική εξίσωση, 2.4, να γράφεται σε όμοια μορφή με τη διαστατή, προκύπτει ότι

$$\rho_o = \frac{p_o}{R_o T_o} \quad (2.10)$$

Δεδομένου ότι η αδιάστατη ταχύτητα θέλουμε να συσχετίζεται με τα αδιαστατοποιημένα μεγέθη θερμοκρασίας μέσω της σχέσης $T_t = T + \frac{|\vec{u}|^2}{2c_p}$, η οποία είναι και πάλι όμοια με την αντίστοιχη διαστατή, η ταχύτητα αδιαστατοποίησης είναι

$$u_o = \sqrt{R_o T_o} \quad (2.11)$$

ενώ η σχέση $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ εξακολουθεί να ισχύει, όπως και στη διαστατή της μορφή, αρκεί να τεθεί $c_v = 1$, που προκύπτει αν

$$c_{v_o} = \frac{\hat{R}}{\gamma - 1}$$

Τέλος, η αδιάστατη μοριακή συνεκτικότητα επιλέγεται να είναι $\mu = 1$, οπότε το αντίστοιχο μέγεθος αδιαστατοποίησης είναι $\mu_o = \hat{\mu}$, ενώ η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας αδιαστατοποιείται με την ποσότητα $E_o = u_o^2$. Οι υπόλοιπες ποσότητες αδιαστατοποιούνται χρησιμοποιώντας παράγωγα των ήδη επιλεγμένων μεγεθών αδιαστατοποίησης.

Στις περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής ακολουθείται μία ελαφρώς διαφορετική προσέγγιση, αφού συνήθως δίνονται η στατική πυκνότητα $\hat{\rho}^\infty$ και η ταχύτητα $|\hat{u}|^\infty$ στο επ' άπειρο όριο, οπότε επιλέγεται να ισχύει $\rho^\infty = 1$ και $|\vec{u}|^\infty = 1$. Η απαίτηση αυτή δίνει

$$\rho_o = \hat{\rho}^\infty, \quad u_o = |\hat{u}|^\infty$$

ενώ, από τις εξ. 2.9a', 2.10 και 2.11, προκύπτει η πίεση και η θερμοκρασία αδιαστατοποίησης

$$T_o = u_o^2 R_o, \quad p_o = \rho_o R_o T_o$$

Τα υπόλοιπα μεγέθη αδιαστατοποιούνται όπως και στις περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής.

2.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής

Ακολουθεί η περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική αποθήκευση για τη διακριτοποίηση των εξ. 2.2 και 2.6. Έμφαση δίνεται στα εξής σημεία :

- Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι συνεπείς με το αναλυτικό μοντέλο (δηλαδή να συμπίπτουν με αυτό όταν οι διαστάσεις των στοιχείων του πλέγματος γίνουν απειροστές), [191].
- Οι τελεστές ολοκλήρωσης, διαφορίσης, υπολογισμού κλίσεων κλπ. που χρησιμοποιούνται να είναι ακριβείς για μεγέθη που μεταβάλλονται γραμμικά μέσα στον πεπερασμένο όγκο, ώστε να εξασφαλίζεται ακρίβεια δεύτερης τάξης, [30], [31].
- Κατά την επίλυση, η μέθοδος να μη χρειάζεται πληροφορίες ως προς το είδος των πλεγματοικών στοιχείων, (grid transparency, [34], [35]), γεγονός που θα αύξανε τις απαιτήσεις σε μνήμη και την πολυπλοκότητα του προγραμματισμού. Οι διαφορές στη διαχείριση κάθε είδους πλεγματοικού στοιχείου είναι επιθυμητό να περιορίζονται μόνο σε προεπεξεργαστικό (δομή δεδομένων) και μετεπεργαστικό επίπεδο (επεξεργασία αποτελεσμάτων). Με τον όρο πλεγματοικά στοιχεία από εδώ και στο εξής θα εννοούμε τα τρίγωνα/τετράπλευρα σε 2Δ και τα τετράεδρα/πυραμίδες τετραπλευρικής βάσης/πρίσματα τριγωνικής βάσης/εξάεδρα σε 3Δ πλέγματα.

2.4.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων – Ορισμός των κυψελών ελέγχου

Για τη διακριτοποίηση των εξ. 2.2 και 2.6 χρησιμοποιείται η κεντροκομβική παραλλαγή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων. Η μέθοδος αυτή προϋποθέτει τον ορισμό κυψελών ελέγχου γύρω από τους κόμβους του πλέγματος (στους οποίους αποκλειστικά αποθηκεύονται όλες οι μεταβλητές της ροής), οι οποίες πρέπει αφενός να καλύπτουν όλο το υπολογιστικό χωρίο και αφετέρου να μην αλληλοκαλύπτονται.

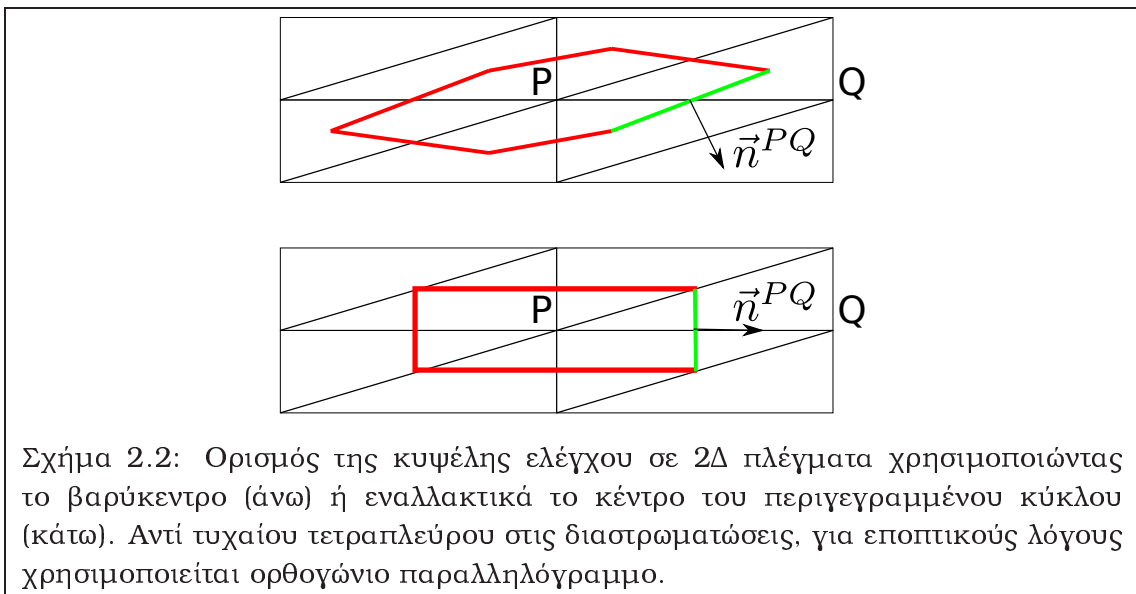
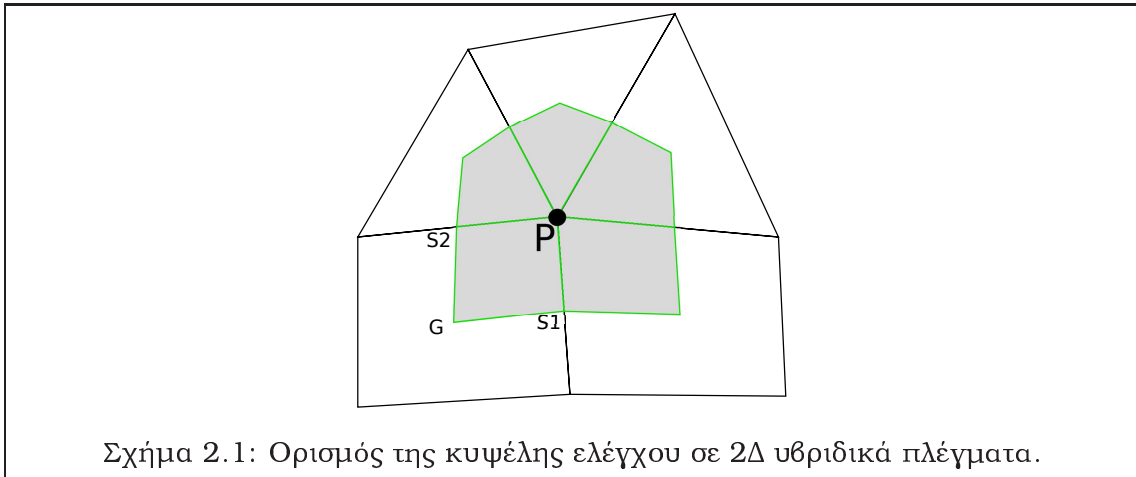
Τα αθροιστικά όρια των κυψελών ελέγχου στα 2Δ πλέγματα ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται ενώνοντας τα μέσα των ακμών του πλέγματος με το κέντρο βάρους των κόμβων των εκατέρωθεν κάθε ακμής πλεγματοικών στοιχείων, σχ. 2.1. Το διάνυσμα θέσης του κέντρου βάρους των κόμβων ενός στοιχείου καθορίζεται ως εξής

$$x_i^G = \frac{\sum_{k \in N} x_i^k}{N}$$

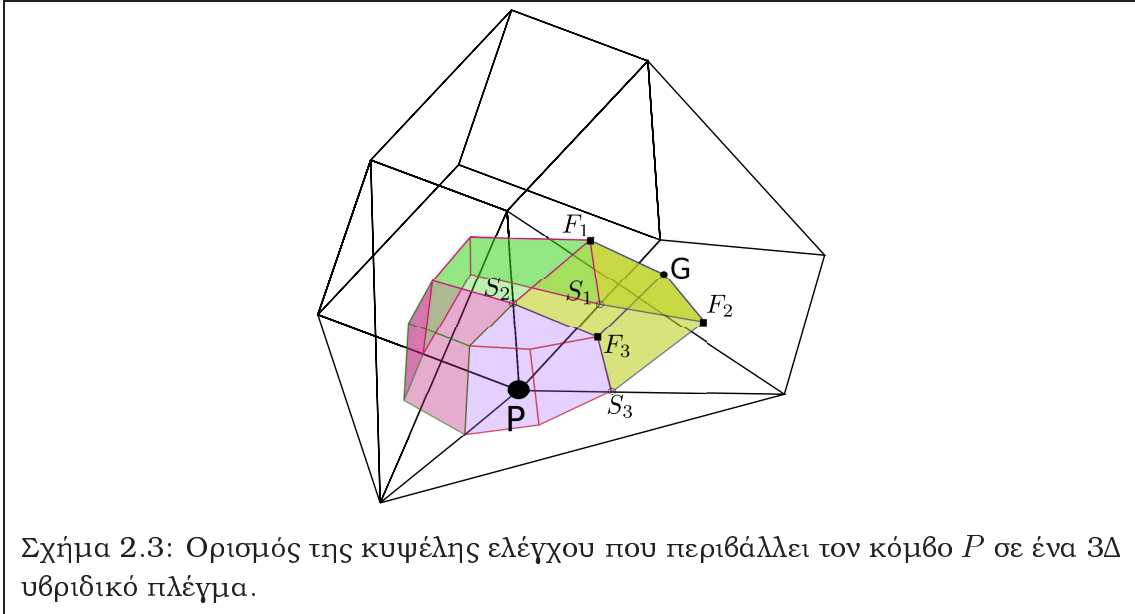
όπου N οι κόμβοι του εν λόγω στοιχείου.

Επειδή κοντά στα στερεά όρια είναι σύνηθες να απαντώνται διαστρωματώσεις στοιχείων με μεγάλο βαθμό ανισοτροπίας για την καλύτερη πρόλεξη των συνεκτικών

φαινομένων, στην περίπτωση πλεγμάτων με αποκλειστικά τριγωνικά στοιχεία εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, αντί του βαρύκεντρου, σχ. 2.2. Όταν αυτό βρίσκεται έξω από το εν λόγω στοιχείο, δηλαδή όταν έχουμε αμβλυγώνια τρίγωνα, αντικαθίσταται από το μέσο της ακμής που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία. Βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η ακριβέστερη πρόλεξη των συνεκτικών φαινομένων κοντά στο τοίχωμα και η μείωση της αριθμητικής διάχυσης στα ‘κακής ποιότητας’ τρίγωνα, [15], [192]. Ελάττωση της αριθμητικής διάχυσης επιτυγχάνεται και για τους όρους μεταφοράς, αφού τα διανύσματα ατρίβους ροής υπολογίζονται κατά την κατεύθυνση του διανύσματος \vec{n} , σχ. 2.2, και, με την εναλλακτική διατύπωση, η γωνία του \vec{n} ως προς την ακμή PQ είναι μικρότερη. Η χρήση υβριδικών πλεγμάτων, προφανώς, βοηθά σημαντικά στην εξάλειψη αυτών των προβλημάτων και αυξάνει την πιστότητα του σχήματος διακριτοποίησης, [34].



Στα 3D υβριδικά πλέγματα, ο όγκος με τον οποίο συνεισφέρει ένα οποιοδήποτε τύπου πλεγματοειδές στοιχείο στον πεπερασμένο όγκο που ορίζεται με κέντρο έναν κόμβο του (λ.χ. τον κόμβο P του σχ. 2.3) προκύπτει αν οι μεσόκομβοι κάθε ακμής του στοιχείου που συνιρέχει στον κόμβο αυτό (λ.χ. οι μεσόκομβοι S_1 , S_2 και S_3 , στο ίδιο σχήμα) συνδεθούν με τα κέντρα βάρους των κόμβων των δύο πλευρών του στοιχείου που έχουν κοινή την ακμή αυτή (λ.χ. τα F_1 και F_2 με τον S_1) και με το κέντρο βάρους G των κόμβων του στοιχείου. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα τέσσερα σημεία που ορίζουν κάθε επιμέρους τετραπλευρική επιφάνεια (λ.χ. S_1 , F_1 , F_2 και G) του πεπερασμένου όγκου δεν είναι απαραίτητα συνεπίπεδα (αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση των τετράεδρων, [193]). Ως εκ τούτου πρέπει να βρεθεί μονοσήμαντος τρόπος για τη μαθηματική έκφραση και διαχείριση των επιφανειών αυτών ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της μη-αλληλοκάλυψης των όγκων ελέγχου. Το θέμα επανεξετάζεται στην επόμενη ενότητα.



Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων περιλαμβάνει την ολοκλήρωση των εξ. 2.2 και 2.6 στους όγκους ελέγχου που ορίστηκαν με αυτόν τον τρόπο. Στην περίπτωση 3D ροών, η ολοκλήρωση των εξ. 2.2 στην κυψέλη ελέγχου ενός κόμβου P δίνει

$$\iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV + \iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{F}_r^{inv}}{\partial x_r} dV - \iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{F}_r^{vis}}{\partial x_r} dV = 0$$

ή, με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης, ισοδύναμα

$$\iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV + \iint_{\partial V^P} \vec{F}_r^{inv} n_r d(\partial V) - \iint_{\partial V^P} \vec{F}_r^{vis} n_r d(\partial V) = 0 \quad (2.12)$$

όπου V^P είναι ο όγκος της κυψέλης ελέγχου και ∂V^P η οριακή επιφάνεια αυτής.

Αντίστοιχα, ολοκλήρωση της εξ. 2.6 δίνει

$$\begin{aligned}
& \iiint_{V^P} \frac{\partial(\rho\tilde{\mu})}{\partial t} dV + \iint_{\partial V^P} \rho u_r n_r \tilde{\mu} d(\partial V) = \\
& = \iiint_{V^P} \left[c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\mu} - \frac{1}{Re_0} \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\mu}}{d} \right)^2 \right] dV + \\
& + \frac{1}{Re_0} \iint_{\partial V^P} \left[\frac{1 + c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} n_r \right] d(\partial V) - \frac{1}{Re_0} \iiint_{V^P} \left[\frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right) \right] dV + \\
& + \iiint_{V^P} Re_0 \rho^2 f_{t1} \Delta \vec{u}^2 dV
\end{aligned}$$

2.4.2 Παρεμβολή κομβικών τιμών στο εσωτερικό και τα όρια των στοιχείων του πλέγματος

Στη συνέχεια γίνεται μία υπόθεση για την παρεμβολή των φυσικών μεγεθών στο εσωτερικό των στοιχείων του πλέγματος από τις κομβικές τιμές τους. Μία τέτοια παρεμβολή θα χρησιμεύσει αφενός στον καθορισμό της διεπιφάνειας μεταξύ των στοιχείων (οι τοπολογικοί πίνακες της δομής δεδομένων δεν εμπεριέχουν πληροφορίες επί αυτού) χρησιμοποιώντας την έννοια των ισοπαραμετρικών στοιχείων, [194], και αφετέρου είναι απαραίτητη για την τέλεση πράξεων σε αυτά (λ.χ. την ολοκλήρωση στα όρια των κυψελών ελέγχου ή την εύρεση του όγκου των πλεγματικών στοιχείων). Για την ενιαία εφαρμογή των διαδικασιών που περιγράφονται παρακάτω σε οποιοδήποτε πλεγματικό στοιχείο, η ανάλυση που ακολουθεί γίνεται πρώτα για τετράπλευρα (2Δ) και εξάεδρα (3Δ) και, κατόπιν, επεκτείνεται και στα υπόλοιπα είδη στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν.

Η διγραμμική παρεμβολή σε 2Δ υβριδικά πλέγματα

Για τα 2Δ πλέγματα, επιδιώκοντας την ενιαία περιγραφή των στοιχείων τους, ορίζεται μετασχηματισμός σε τοπικές συντεταγμένες (r, s) , σχ. 2.4. Υιοθετείται διγραμμική παρεμβολή, [194], για την απεικόνιση οποιουδήποτε μεγέθους στα επίπεδα (x, y) και (r, s) συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών στους τέσσερις κόμβους. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) η διγραμμική παρεμβολή γράφεται ως

$$U(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \quad (2.13)$$

με τους συντελεστές a_1, a_2, a_3 και a_4 να προκύπτουν από την απαίτηση η παραπάνω σχέση να ικανοποιεί τις γνωστές τιμές του μεγέθους U στους τέσσερις κόμβους. Στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, η ίδια παρεμβολή γράφεται ισοδύναμα ως

$$U(r, s) = N_i(r, s) U_i \quad (2.14a')$$

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + rr_i) (1 + ss_i) \quad (2.146')$$

Αντικατάσταση των τοπικών συντεταγμένων των κόμβων στην εξ. 2.146' σύμφωνα με το σχ. 2.4 δίνει για τους συντελεστές μορφής $N_i(r, s)$

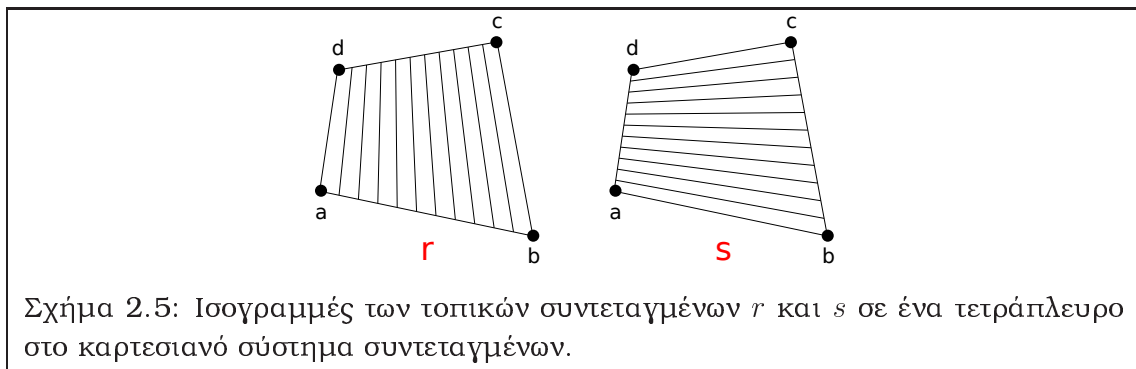
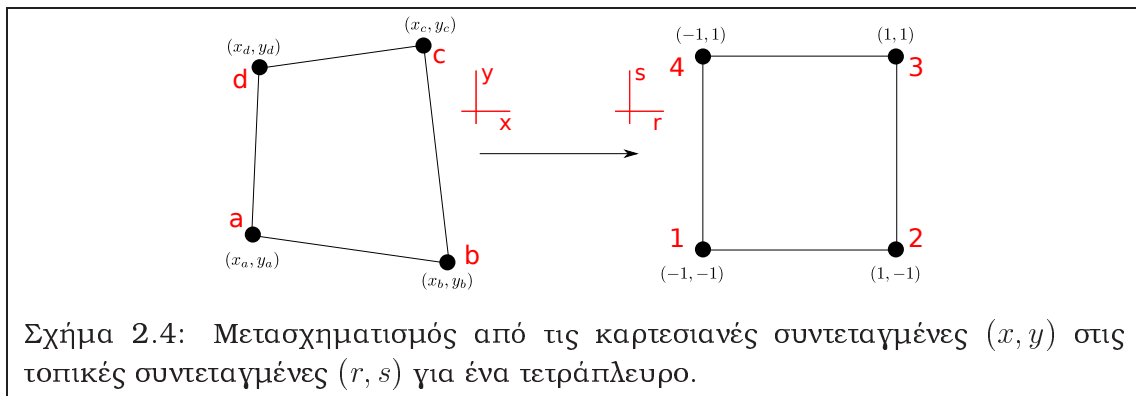
$$N_a = N_1(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s)$$

$$N_b = N_2(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s)$$

$$N_c = N_3(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s)$$

$$N_d = N_4(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s)$$

Στο σχ. 2.5 φαίνονται οι ισογραμμές των παραμέτρων r και s (τοπικές συντεταγμένες) σε ένα τετράπλευρο στο καρτεσιανό σύστημα. Τα στοιχεία, των

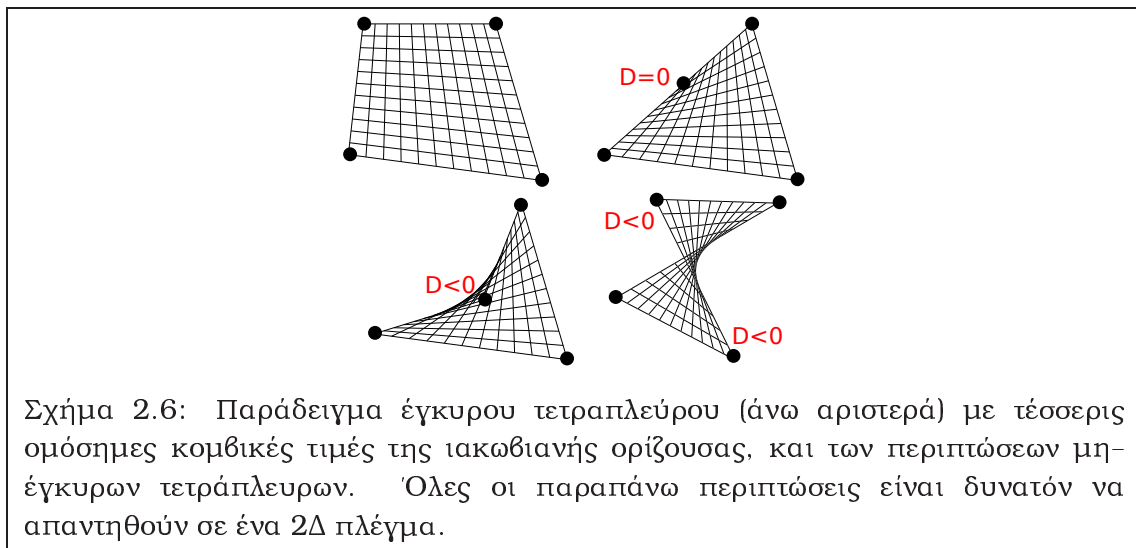


οποίων το σχήμα επίσης καθορίζεται με χρήση των παραπάνω σχέσεων, στα οποία δηλαδή οι καρτεσιανές συντεταγμένες σε οποιοδήποτε σημείο συσχετίζονται με τις τιμές στους κόμβους και με τις τοπικές συντεταγμένες με τις ίδιες συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται για τα υπόλοιπα (λ.χ. τα ροϊκά) μεγέθη, ονομάζονται ισοπαραμετρικά, [194].

Η ιακωβιανή του μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στις τοπικές συντεταγμένες δίνεται παρακάτω

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}$$

Η ιακωβιανή πρέπει να είναι ομόσημη σε όλη την επιφάνεια του τετραπλεύρου, ώστε ο μετασχηματισμός από τις καρτεσιανές στις τοπικές συντεταγμένες να είναι ένα-προς-ένα. Η απαίτηση αυτή εξασφαλίζεται με έλεγχο της κυρτότητας του τετραπλεύρου μέσω του πρόσημου της ιακωβιανής στους τέσσερις κόμβους, [195]. Το σχ. 2.6 απεικονίζει όλες τις πιθανές περιπτώσεις (έγκυρες και μη) τετράπλευρων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η δεύτερη περίπτωση (μία ιακωβιανή μόνο ίση με το μηδέν, εκφυλισμός σε τρίγωνο) είναι πρακτικά εκμεταλλεύσιμη, αλλά έχει αρνητικές επιπτώσεις στην ακρίβεια των υπολογισμών, [196], και επιπλέον δημιουργεί προβλήματα στον υπολογισμό των κλίσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπως θα δειχθεί στην παρ. 2.4.3. Δεδομένου ότι τα τέσσερα σημεία του



τετραπλεύρου είναι συνεπίεδα (2Δ πλέγμα), το εμβαδόν του βρίσκεται εύκολα από τον τύπο $A_{abcd} = \frac{1}{2} \vec{x}_{ac} \times \vec{x}_{bd}$, όπου με \vec{x} συμβολίζονται τα διανύσματα θέσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ο μετασχηματισμός της εξ. 2.14α' μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση τριγωνικών στοιχείων, σχ. 2.7 και 2.8, χρησιμοποιώντας τα μεγέθη του κόμβου c στις συναρτήσεις βάσης N_3 και N_4 της εξ. 2.14β' (υπερθέτωνιας, δηλαδή, δύο κόμβους του τετραπλεύρου στο επίπεδο (r, s) κατά την αντιστοίχησή τους με τον κόμβο c). Σε

αυτήν την περίπτωση, ο μετασχηματισμός γράφεται

$$N_a = N_1(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_b = N_2(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_c = N_3(r, s) + N_4(r, s) = \frac{1}{2}(1+s)$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός ισοδυναμεί με την έκφραση του P1-γραμμικού στοιχείου, στο οποίο ένα μέγεθος U σε κάθε εσωτερικό σημείο του στοιχείου υπολογίζεται συναρτήσει των τιμών του μεγέθους αυτού στους κόμβους του στοιχείου, σύμφωνα με τις σχέσεις

$$U(x, y) = N_i(x, y)U_i$$

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_j - x_k$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τριγωνικού στοιχείου, ενώ οι κάτω δείκτες (i, j, k) αντιστοιχούν σε θετική μετάθεση των κορυφών $(1, 2, 3)$ του στοιχείου. Αποτέλεσμα της παραπάνω γραμμικής κατανομής είναι η σταθερή κλίση του μεγέθους U στο εσωτερικό του τριγώνου, που εξάλλου χαρακτηρίζει την παραδοχή των P1-γραμμικών στοιχείων στην ορολογία των πεπερασμένων στοιχείων. Η σταθερή τιμή της κλίσης δίνεται παρακάτω

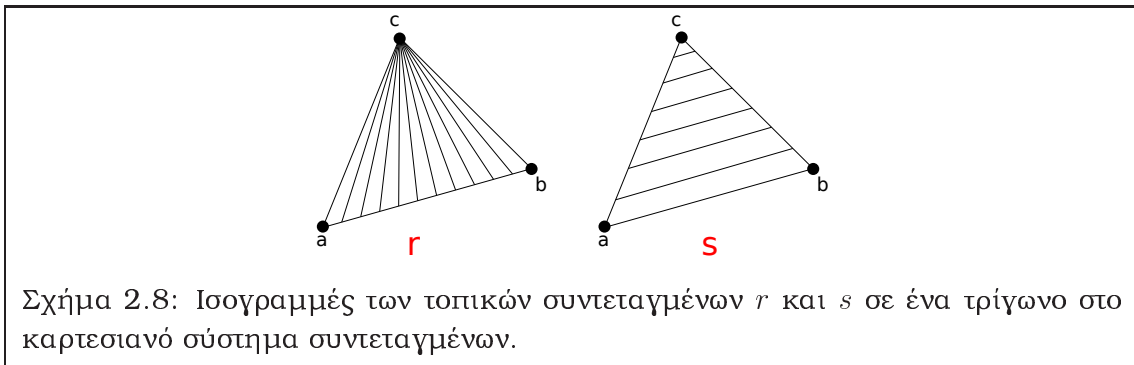
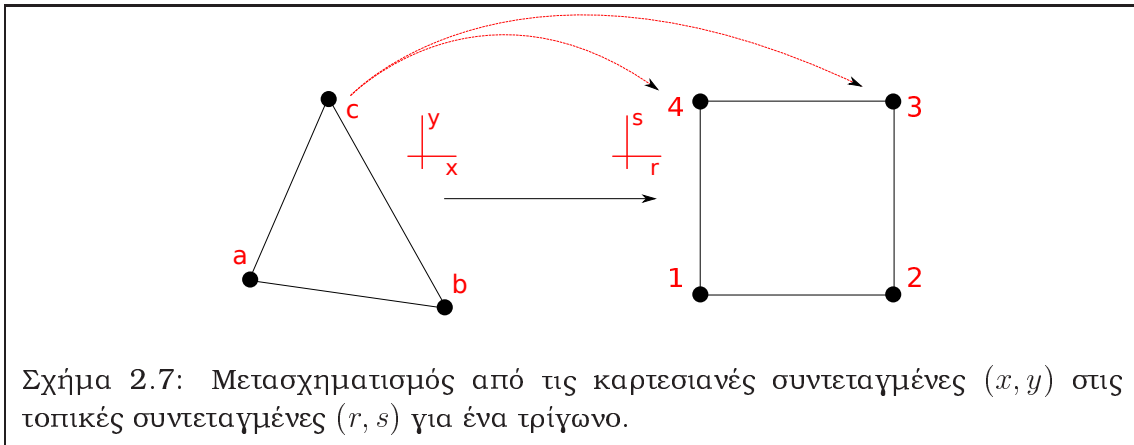
$$\nabla U = \vec{n}_i U_i$$

$$\vec{n}_i = (y_j - y_k, x_k - x_j)$$

Μια παραλλαγή της παραπάνω προσέγγισης (της χρήσης, δηλαδή, ενός διγραμμικού μετασχηματισμού) συναντάται και στη βιβλιογραφία, [21], στο πλαίσιο των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων, με ενδιάμεση χρήση όμως των εκεί επονομαζόμενων ‘καρτεσιανών’ συντεταγμένων και κάποιων επιπρόσθετων μετασχηματισμών, χωρίς η συγκεκριμένη αναφορά να καταλήγει σε εκφράσεις ανεξάρτητες του είδους των πλεγματοειδών στοιχείων. Βασικό πλεονέκτημα της μεθοδολογίας που παρουσιάζεται στη διατριβή αυτή είναι η ανάπτυξη τελεστών και αλγορίθμων οι οποίοι εφαρμόζονται με ενιαίο και άμεσο τρόπο σε όλους τους τύπους στοιχείων ενός υβριδικού πλέγματος. Αυτό θα γίνει ιδιαίτερα εμφανές στην παρουσίαση της αντίστοιχης μεθοδολογίας για τα 3D πλέγματα, όπου και οι μαθηματικές εκφράσεις είναι πιο πολύπλοκες και οι τύποι των στοιχείων περισσότεροι.

Η τριγραμμική παρεμβολή σε 3D υβριδικά πλέγματα

Κατ’ αντιστοιχία, για την ενιαία περιγραφή των στοιχείων στα 3D πλέγματα χρησιμοποιείται τριγραμμική παρεμβολή, σχ. 2.9, η οποία στο καρτεσιανό



σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως

$$U(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7xz + a_8xyz \quad (2.15)$$

Οι συντελεστές $a_i, i = 1, \dots, 8$ της εξ. 2.15 δίνονται στη βιβλιογραφία συναρτήσει των τιμών του U στους κόμβους, [197]. Η τριγραμμική παρεμβολή γράφεται, ισοδύναμα, στο σύστημα τοπικών συντεταγμένων (r, s, t) ως

$$U(r, s, t) = N_i(r, s, t)U_i \quad (2.16a')$$

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + rr_i) (1 + ss_i) (1 + tt_i) \quad (2.16b')$$

Αντικατάσταση των τοπικών συντεταγμένων των κόμβων στην εξ. 2.166' δίνει

$$N_a = N_1(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_b = N_2(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_c = N_3(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 + s) (1 - t)$$

$$N_d = N_4(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 + s) (1 - t)$$

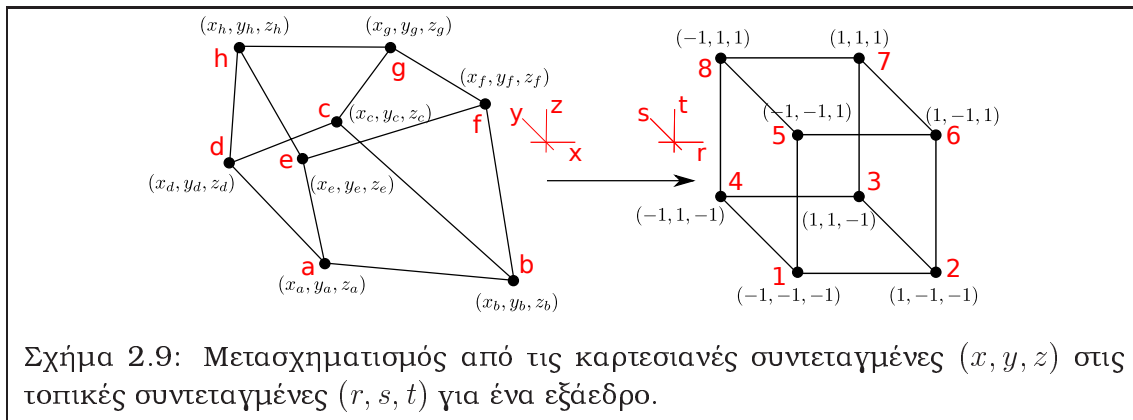
$$N_e = N_5(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 + t)$$

$$N_f = N_6(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 + t)$$

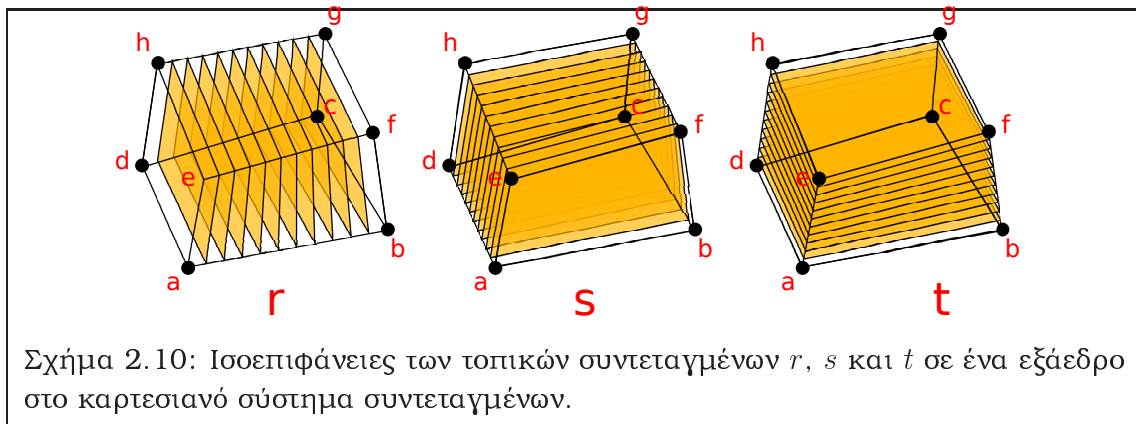
$$N_g = N_7(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 + s) (1 + t)$$

$$N_h = N_8(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 + s) (1 + t)$$

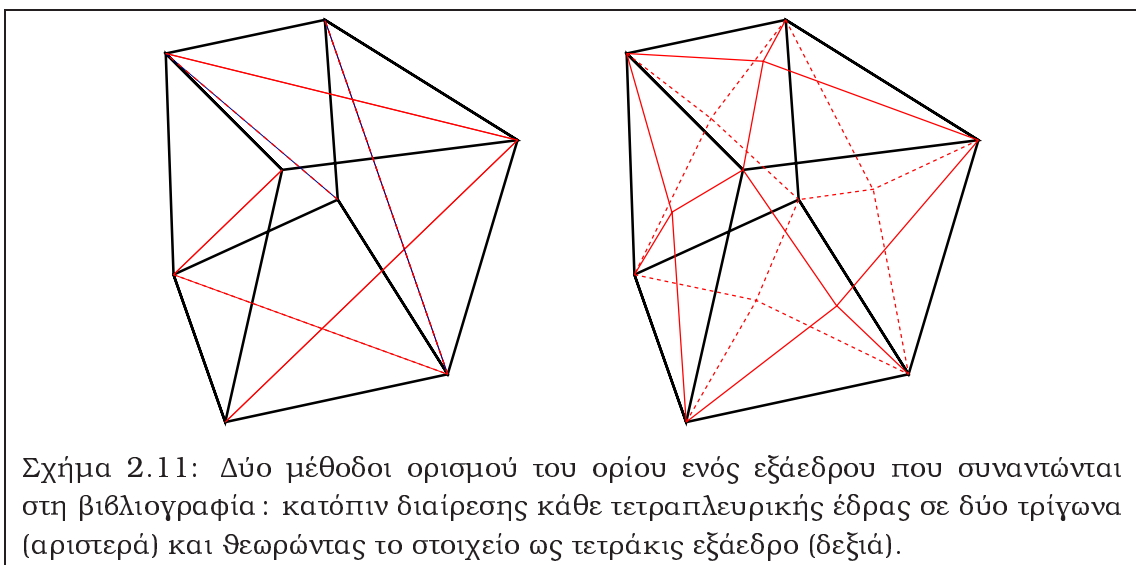
Στο σχ. 2.10 φαίνονται οι ισοεπιφάνειες των τοπικών συντεταγμένων σε ένα εξάεδρο στο καρτεσιανό σύστημα.



Οι τέσσερις κόμβοι κάθε έδρας ενός ισοπαραμετρικού εξάεδρου δεν είναι απαραίτητα συνεπίπεδοι. Ως εκ τούτου, η διατύπωση τελεστών ολοκλήρωσης στα όρια πρέπει να λαμβάνει υπόψη την ακριβή έκφραση της εξ. 2.16α'. Υπάρχουν αναφορές οι οποίες είτε χειρίζονται τις μη-επίπεδες τετραπλευρικές έδρες χωρίζοντας κάθε μία από αυτές σε δύο τριγωνικές, [198], [43] (σχ. 2.11 αριστερά), είτε αντιμετωπίζουν τα εξάεδρα ως τετράκις εξάεδρα, [199], χωρίζοντας κάθε τετραπλευρική έδρα σε τέσσερα τρίγωνα με εισαγωγή ενός 'νοητού' κόμβου στο κέντρο βάρους των κόμβων της τετραπλευρικής έδρας, σχ. 2.11 δεξιά. Η πρώτη προσέγγιση χρειάζεται αποθήκευση της ακμής διαχωρισμού για κάθε τέτοια έδρα, αυξάνοντας το κόστος μνήμης. Επιπρόσθετη δυσκολία αποτελεί η απαίτηση συμβατότητας της διάσπασης της έδρας από τα δύο πλεγματικά στοιχεία εκατέρωθεν αυτής. Αυτό πραγματοποιείται είτε με χρήση πληροφοριών από το



λογισμικό γένεσης πλεγμάτων, [43], γεγονός που μειώνει την ευελιξία της μεθόδου (λ.χ. όταν είναι διαθέσιμο μόνο το πλέγμα και όχι ο γενετής πλέγματος), είτε αν υποθεθεί ότι οι τετραπλευρικές έδρες διασπώνται πάντα κατά τη μεγαλύτερη διαγώνιο. Στην περιγραφή και των δύο προσεγγίσεων στη σχετική βιβλιογραφία δε γίνεται μνεία για τη συμβατότητα του σχήματος της διεπιφάνειας με τη μέθοδο παρεμβολής που χρησιμοποιείται στον αντίστοιχο επιλύτη, προκειμένου να διατηρηθεί η ακρίβεια τάξης του σχήματος επίλυσης ακόμα και σε περιοχές του πλέγματος όπου τα στοιχεία είναι πολύ επιμήκη και στρεβλά, [30]. Η παρούσα εργασία θεωρεί, μέσω της υπόθεσης ισοπαραμετρικών στοιχείων, τριγραμμικές διεπιφάνειες οι οποίες δίνονται από τις εξ. 2.16α' εκφρασμένες για τις συντεταγμένες x , y , και z για τις οριακές τιμές των τοπικών συντεταγμένων r , s και t . Οι τελεστές που θα αναπτυχθούν στις επόμενες ενότητες, βάσει του τριγραμμικού μετασχηματισμού, είναι συμβατοί με τη θεώρηση αυτή.



Η ιακωβιανή του μετασχηματισμού δίνεται παρακάτω

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

και είναι επιθυμητό να είναι ομόσημη σε όλο τον όγκο του εξάεδρου, ώστε ο τριγραμμικός μετασχηματισμός να είναι ένα-προς-ένα. Οι συνθήκες που διατυπώνονται, προκειμένου η ιακωβιανή να είναι ομόσημη, είναι αρκετά πιο σύνθετες στην 3D περίπτωση και δίνονται στη βιβλιογραφία, [197], [200]. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες που δίνονται στην εργασία αυτή είναι ικανές, όχι όμως και αναγκαίες. Ένας πρακτικός αλγόριθμος για την ικανοποίηση των συνθηκών αυτών είναι ο έλεγχος των υποτετραέδρων, [201], που περιλαμβάνει τον έλεγχο του πρόσημου των ιακωβιανών 32 υποτετραέδρων που σχηματίζονται από τους κόμβους του εξάεδρου. Οι ιακωβιανές που απαιτείται να είναι θετικές είναι οι παρακάτω

$$\begin{aligned} & J_{1237}, J_{2348}, J_{3415}, J_{4126}, \\ & J_{5837}, J_{8762}, J_{7651}, J_{6584}, \\ & J_{2158}, J_{4376}, J_{1487}, J_{3265}, \\ & J_{1235}, J_{2346}, J_{3417}, J_{4128}, \\ & J_{5871}, J_{8764}, J_{7653}, J_{6582}, \\ & J_{5146}, J_{3782}, J_{4853}, J_{2671}, \\ & J_{1245}, J_{2316}, J_{3427}, J_{4138}, \\ & J_{5861}, J_{6572}, J_{7683}, J_{8754} \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου

$$J_{ijkl} = (\vec{x}_{ij} \times \vec{x}_{ik}), \quad \vec{x}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$$

και \vec{x}_i το διάνυσμα θέσης του κόμβου i στο καρτεσιανό σύστημα.

Η εύρεση του όγκου ενός εξάεδρου πραγματοποιείται με ολοκλήρωση στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(J) dr ds dt = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \left(\frac{\partial N_j}{\partial s} \frac{\partial N_k}{\partial t} - \frac{\partial N_k}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\partial N_j}{\partial r} \left(\frac{\partial N_k}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_k}{\partial t} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_k}{\partial r} \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_j}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) \right] x_i y_j z_k dr ds dt \end{aligned}$$

όπου όπως έχει αναφερθεί στους δείκτες i, j και k υπονοείται άθροιση στους οκτώ κόμβους του εξάεδρου. Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Η τελική σχέση υπολογισμού του όγκου του εξάεδρου συναρτήσει των συντεταγμένων του αποδεικνύεται, τελικά, ότι είναι ίδια με τον τύπο του Grandy, [199], ο οποίος όμως είχε κάνει εντελώς διαφορετική υπόθεση για το σχήμα των εξάεδρων, και είναι η παρακάτω

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{12} & ([\vec{x}_g - \vec{x}_b + \vec{x}_h - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_d, \vec{x}_c - \vec{x}_a] + \\ & + [\vec{x}_h - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_d + \vec{x}_f - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_e] + \\ & + [\vec{x}_g - \vec{x}_b, \vec{x}_f - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_e + \vec{x}_c - \vec{x}_a]) \end{aligned} \quad (2.19)$$

όπου

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Οι παραπάνω αλγόριθμοι (έλεγχος υποτετραέδρων και υπολογισμός όγκου) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τα υπόλοιπα στοιχεία του υβριδικού πλέγματος. Συγκεκριμένα :

- Για τα πρίσματα τριγωνικής βάσης (στα οποία θα αναφερόμαστε εφεξής απλά ως πρίσματα), σχ. 2.12 και 2.13, χρησιμοποιούνται τα μεγέθη του κόμβου c στις συναρτήσεις βάσης N_3 και N_4 και τα μεγέθη του κόμβου f στις συναρτήσεις βάσης N_7 και N_8 . Σε αυτήν την περίπτωση ο τριγραμμικός μετασχηματισμός γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} N_a &= N_1(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 - t) \\ N_b &= N_2(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 - t) \\ N_c &= N_3(r, s, t) + N_4(r, s, t) = \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t) \\ N_d &= N_5(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 + t) \\ N_e &= N_6(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 + t) \\ N_f &= N_7(r, s, t) + N_8(r, s, t) = \frac{1}{4} (1 + s) (1 + t) \end{aligned}$$

Επίσης, ο έλεγχος των υποτετραέδρων γίνεται απλούστερος αφού, λόγω σύμπτωσης των δεικτών, οι παρακάτω ιακωβιανές μηδενίζονται

$$\begin{aligned} & J_{2348}, J_{3415}, J_{5837}, J_{8762}, \\ & J_{4376}, J_{1487}, J_{2346}, J_{3417}, \\ & J_{5871}, J_{8764}, J_{3782}, J_{4853}, \\ & J_{3427}, J_{4138}, J_{7683}, J_{8754} \end{aligned}$$

ενώ οι παρακάτω ιακωβιανές είναι ίσες ανά ζεύγη

$$J_{1237} = J_{4128}$$

$$J_{1235} = J_{1245}$$

$$J_{7653} = J_{6584}$$

$$J_{4126} = J_{2316}$$

$$J_{7165} = J_{5861}$$

$$J_{6582} = J_{6572}$$

Τελικά, οι ιακωβιανές που πρέπει να ελεγχθούν είναι οι

$$J_{1237}, J_{1235}, J_{7653}, J_{4126},$$

$$J_{7165}, J_{6582}, J_{2158}, J_{3265},$$

$$J_{5146}, J_{2671}$$

Αντίστοιχα, ο τύπος για τον υπολογισμό του όγκου ενός πρίσματος δίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{12} ([\vec{x}_f - \vec{x}_c + \vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_c - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_b] + \\ & + [\vec{x}_e - \vec{x}_c, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_a] + \\ & + [\vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_b]) \end{aligned}$$

- Για τις πυραμίδες τετραεδρικής βάσης (που θα αναφέρονται από εδώ και στο εξής απλά ως πυραμίδες), σχ. 2.14 και 2.15, χρησιμοποιούνται τα μεγέθη του κόμβου e στις συναρτήσεις βάσης N_5, N_6, N_7 και N_8 . Σε αυτήν την περίπτωση ο τριγραμμικός μετασχηματισμός γράφεται ως εξής

$$N_a = N_1(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_b = N_2(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_c = N_3(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 + s) (1 - t)$$

$$N_d = N_4(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 + s) (1 - t)$$

$$N_e = N_5(r, s, t) + N_6(r, s, t) + N_7(r, s, t) + N_8(r, s, t) = \frac{1}{2} (1 + t)$$

Πάλι, λόγω σύμπτυξης των δεικτών, πολλές ιακωβιανές μηδενίζονται ή εξισώνονται μεταξύ τους, ώστε τελικώς να χρειάζεται να υπολογιστούν μόλις οι τέσσερις παρακάτω ιακωβιανές, προκειμένου να ελεγχθεί το στοιχείο

$$J_{1235}, J_{2345}, J_{3415}, J_{4125}$$

Αντίστοιχα, ο τύπος για τον υπολογισμό του όγκου μίας πυραμίδας δίνεται παρακάτω

$$V = \frac{1}{12} ([\vec{x}_f - \vec{x}_c + \vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_c - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_b] + [\vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_b])$$

- Για τα τετράεδρα, σχ. 2.16 και 2.17, χρησιμοποιούνται τα μεγέθη του κόμβου c στις συναρτήσεις βάσης N_3 και N_4 και του κόμβου d στις συναρτήσεις βάσης N_5 , N_6 , N_7 και N_8 . Σε αυτή την περίπτωση ο τριγραμμικός μετασχηματισμός γράφεται ως εξής

$$N_a = N_1(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 - r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_b = N_2(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r) (1 - s) (1 - t)$$

$$N_c = N_3(r, s, t) + N_4(r, s, t) = \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t)$$

$$N_d = N_5(r, s, t) + N_6(r, s, t) + N_7(r, s, t) + N_8(r, s, t) = \frac{1}{2} (1 + t)$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός ισοδυναμεί και πάλι με την έκφραση του $P1$ -γραμμικού τετραέδρου, στο οποίο ένα μέγεθος U σε κάθε εσωτερικό σημείο του στοιχείου υπολογίζεται συναρτήσει των κομβικών τιμών του μεγέθους σύμφωνα με τη σχέση

$$U(x, y) = L_i(x, y)U_i$$

όπου $L_i(x, y)$ οι φυσικές συντεταγμένες, [194], οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

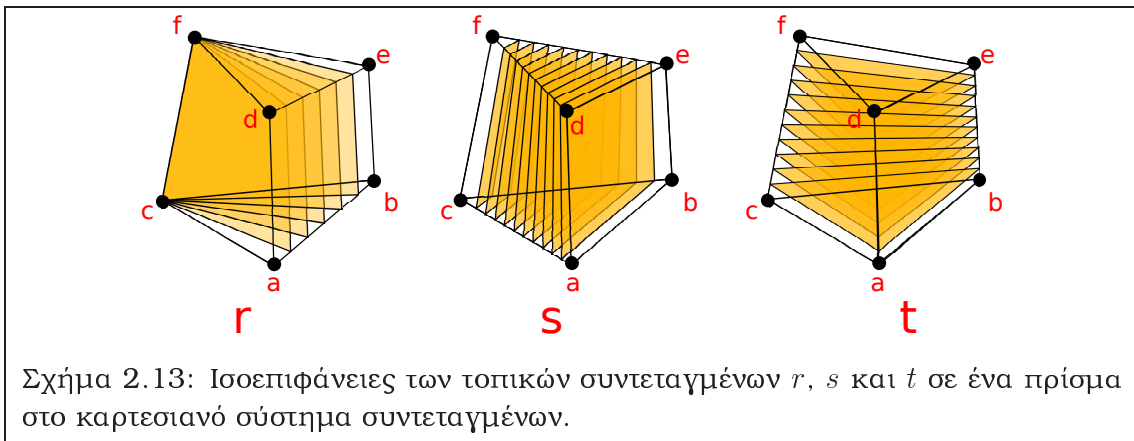
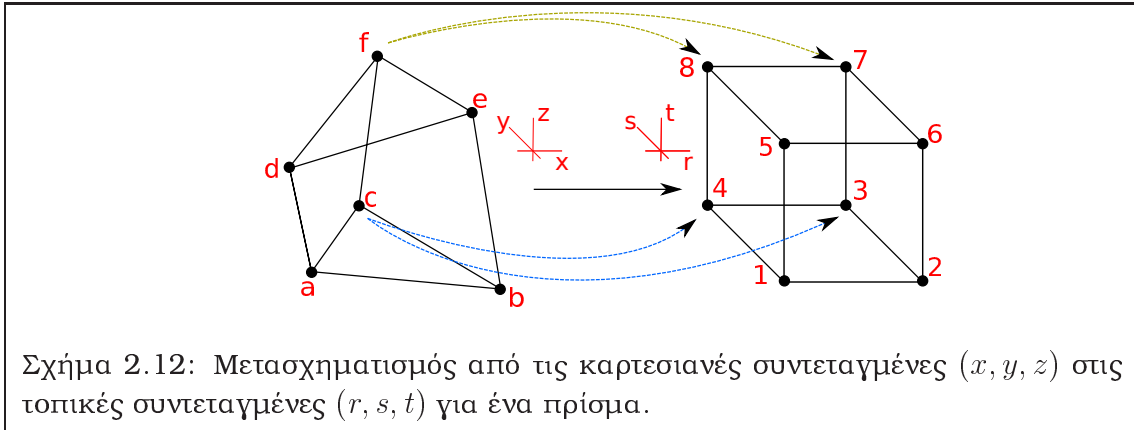
Στην παραπάνω σχέση, ο όγκος V του τετραέδρου και οι συντελεστές a_i , b_i , c_i και d_i υπολογίζονται ως εξής

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \quad d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

Οι δείκτες (i, j, k, l) αντιστοιχούν σε θετική μετάθεση των κορυφών $(1, 2, 3, 4)$ του τετραέδρου.



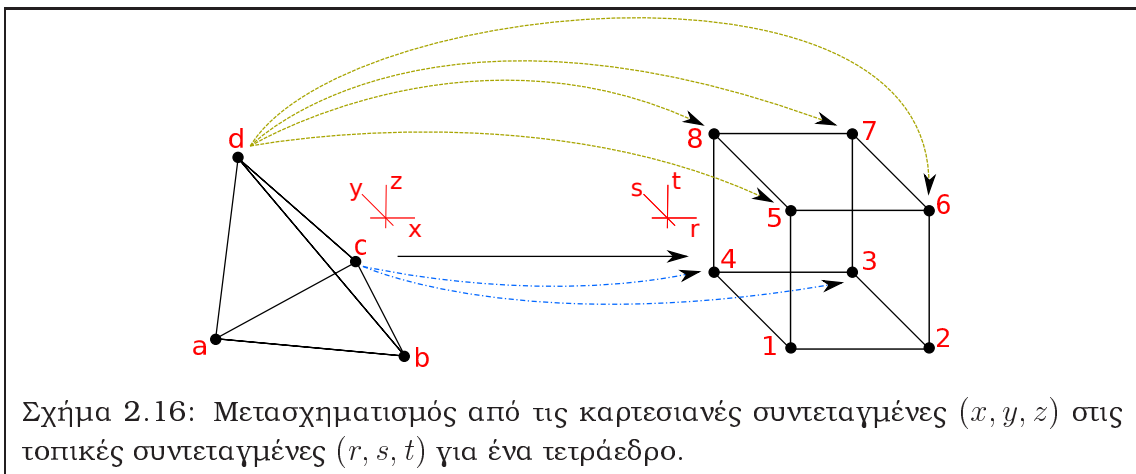
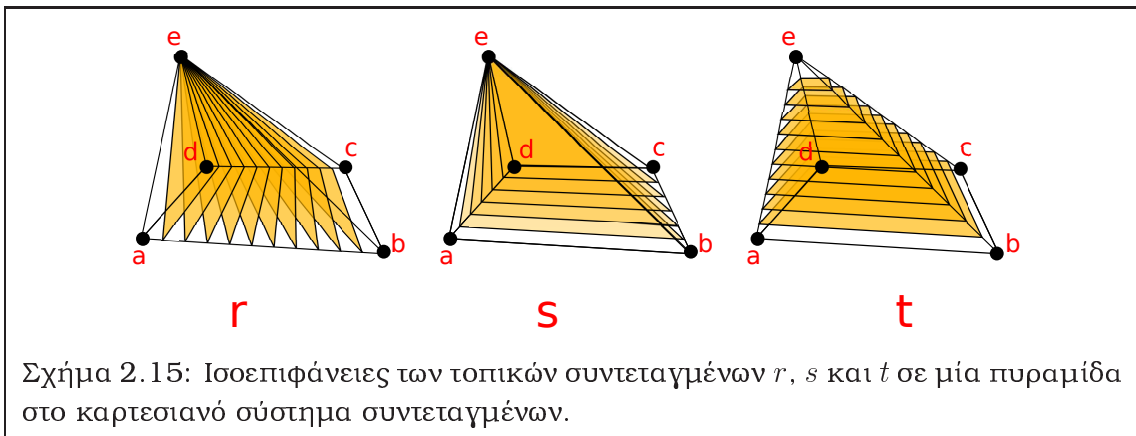
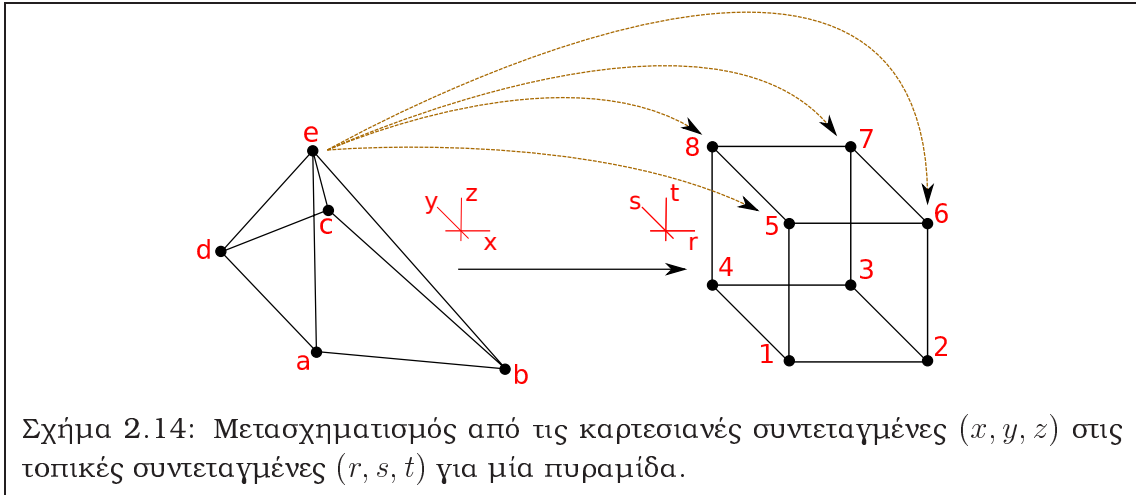
2.4.3 Διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς

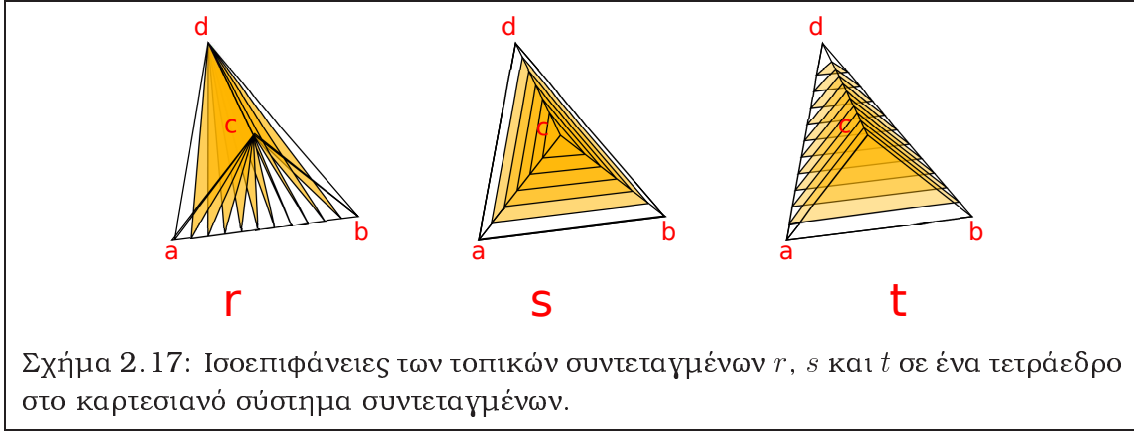
Διακριτή έκφραση των διανυσμάτων ατριβούς ροής – Το σχήμα MUSCL

Το σχήμα που χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς είναι ένα ανάντι σχήμα δεύτερης τάξης με χρήση περιοριστών (σχήμα MUSCL), [17]. Η διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς για την εξ. 2.12 στον πεπερασμένο όγκο που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο P πραγματοποιείται στους μεσόκομβους όλων των ακμών του πλέγματος που ενώνουν τον κόμβο αυτό με τους πρώτους γείτονες του. Έστω \mathcal{K}_P το σύνολο των πρώτων γειτόνων του P , τότε

$$\iint_{\partial V^P} \vec{F}_r^{inv} n_r d(\partial V) = \sum_{Q \in \mathcal{K}_P} \vec{F}_r^{PQ, inv} n_r^{PQ}$$

όπου το διάνυσμα n_r^{PQ} είναι το κάθετο διάνυσμα στο τμήμα του ορίου του πεπερασμένου όγκου όπου εκφράζεται η συνεισφορά, σχ. 2.18, και έχει μέτρο ίσο





με την επιφάνεια του τμήματος αυτού. Επειδή κάθε ακμή PQ συνεισφέρει με το ίδιο διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}^{PQ,inv} = \vec{F}_r^{PQ,inv} n_r^{PQ}$ (με απλή αντιστροφή πρόσημου) στους δύο κόμβους της, είναι αποδοτικότερη η σάρωση κατά ακμές. Το διάνυσμα ατρίβους ροής υπολογίζεται θεωρώντας ένα 1Δ πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων L και R εκατέρωθεν του μεσόκομβου M , σχ. 2.18, και χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό επιλύτη του προβλήματος Riemann κατά Roe, [202], ο οποίος επελέγη επειδή προλέγει αρκετά καλά περιοχές ροής με κύμα κρούσης. Το διάνυσμα ροής που αντιστοιχεί σε μία ακμή γράφεται ως εξής

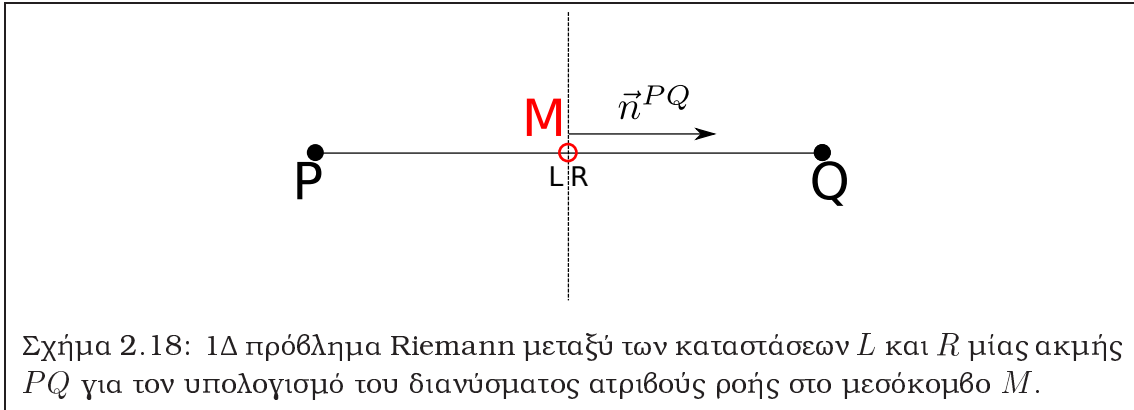
$$\begin{aligned} \vec{\Phi}^{PQ,inv} &= \vec{\Phi}^L + \vec{\Phi}^R - \frac{1}{2} |\tilde{A}^{PQ}| (\vec{U}^R - \vec{U}^L) = \\ &= \frac{1}{2} (A^L + |\tilde{A}^{PQ}|) \vec{U}^L + \frac{1}{2} (A^R - |\tilde{A}^{PQ}|) \vec{U}^R = \\ &= \mathcal{A}^L \vec{U}^L + \mathcal{A}^R \vec{U}^R \end{aligned} \quad (2.20)$$

όπου $\vec{\Phi}^L = A^L \vec{U}^L$, $\vec{\Phi}^R = A^R \vec{U}^R$, $A^L = A(\vec{U}^L)$, $A^R = A(\vec{U}^R)$, $\mathcal{A}^L = \frac{1}{2} (A^L + |\tilde{A}^{PQ}|)$, $\mathcal{A}^R = \frac{1}{2} (A^R - |\tilde{A}^{PQ}|)$, και $A = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{U}}$ είναι η ιακωβιανή των διανυσμάτων ατρίβους ροής, ενώ η περισιπωμένη υποδηλώνει ότι τα μεγέθη

υπολογίζονται κατά Roe, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}\vec{U} &= [\tilde{\rho} \quad \tilde{\rho}\tilde{u}_1 \quad \tilde{\rho}\tilde{u}_2 \quad \tilde{\rho}\tilde{u}_3 \quad \tilde{\rho}\tilde{E}]^T = \\ &= [\tilde{\rho} \quad \tilde{\rho}\tilde{u} \quad \tilde{\rho}\tilde{v} \quad \tilde{\rho}\tilde{w} \quad \tilde{\rho}\tilde{E}]^T \\ \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho^L \rho^R} \\ \tilde{u} &= \frac{u^L \sqrt{\rho^L} + u^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ \tilde{v} &= \frac{v^L \sqrt{\rho^L} + v^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ \tilde{w} &= \frac{w^L \sqrt{\rho^L} + w^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H^L \sqrt{\rho^L} + H^R \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}\end{aligned}$$

όπου H είναι η ολική ενθαλπία ανά μονάδα μάζας.



Οι μεταβλητές \vec{U}^L και \vec{U}^R εκατέρωθεν του μεσόκομβου M υπολογίζονται με προεκβολή των τιμών στους κόμβους P και Q αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor,

$$\vec{U}^L = \vec{U}^P - \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^P \Pi^P \quad (2.21a')$$

$$\vec{U}^R = \vec{U}^Q + \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^Q \Pi^Q \quad (2.21b')$$

όπου $x_r^{PQ} = x_r^P - x_r^Q$, ενώ οι ποσότητες Π^P και Π^Q είναι περιοριστές οι οποίοι εξασφαλίζουν ότι η προεκβολή κατά Taylor δεν θα δημιουργεί τοπικά ακρότατα στο πεδίο ροής πέραν αυτών που ορίζουν οι τιμές των μεταβλητών ροής στους κόμβους και χρησιμοποιούνται προαιρετικά και κατά περίπτωση. Οι περιοριστές τείνουν να

εξαλείψουν αφύσικες ταλαντώσεις των μεγεθών του πεδίου στις περιοχές που εμφανίζονται μεγάλες κλίσεις (λ.χ. κοντά σε ασυνέχειες όπως κύματα κρούσης), [203], [204]. Επίσης, οι περιοριστές επιθυμείται να παίρνουν τιμές κοντά στη μονάδα (δηλαδή να απενεργοποιούνται αυτόματα) σε περιοχές όπου δεν παρουσιάζονται έντονες μεταβολές στις μεταβλητές του πεδίου ροής, ώστε να μη διαταράσσουν την ακρίβεια και τις ιδιότητες σύγκλισης του σχήματος. Οι περιοριστές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή περιγράφονται αναλυτικότερα στην παρ. 2.4.3.

Υπολογισμός κλίσεων των μεγεθών ροής στα υβριδικά πλέγματα

Οι κλίσεις των μεταβλητών που υπεισέρχονται στις εξ. 2.21α' και 2.21β', καθώς και σε όρους του μοντέλου τύρβης, πρέπει να υπολογιστούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι τελεστές που συναρτώνται των κλίσεων να είναι ακριβείς για γραμμικές μεταβολές. Η απαίτηση αυτή εξασφαλίζει διατήρηση της τάξης ακρίβειας δευτέρου βαθμού του σχήματος, ακόμη και σε πλέγματα με στοιχεία μεγάλου λόγου επιμήκους, [31]. Σημειώνεται ότι ο όρος 'γραμμικός' εδώ χρησιμοποιείται καταχρηστικά περιλαμβάνοντας και διγραμμικούς ή τριγραμμικούς όρους, όχι όμως όρους που περιλαμβάνουν τετραγωνικές ή ανώτερες δυνάμεις. Στην παρούσα διατριβή δοκιμάστηκαν δύο μέθοδοι οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση για τον υπολογισμό των κλίσεων, ο υπολογισμός με ολοκλήρωση κατ' όγκο και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Υπολογισμός της κλίσης με ολοκλήρωση κατ' όγκο, 2Δ πλέγματα: Η μέθοδος αυτή υπολογίζει την τιμή της κλίσης ενός μεγέθους σε έναν κόμβο P κατόπιν ολοκλήρωσης στον αντίστοιχο όγκο ελέγχου ως εξής

$$\nabla U^P = \frac{1}{V^P} \iiint_{V^P} \nabla U dV = \frac{1}{V^P} \int_{\partial V^P} U \vec{n} dS \quad (2.22)$$

Για πλέγματα που αποτελούνται μόνο από τρίγωνα ο πιο αποτελεσματικός τρόπος υπολογισμού του παραπάνω ολοκληρώματος είναι η σάρωση κατά ακμές και η απόδοση αντισυμμετρικών συνεισφορών (δηλαδή συνεισφορών ίδιου μέτρου και αντίθετου πρόσημου) στους κόμβους P και Q της κάθε ακμής PQ , [16]

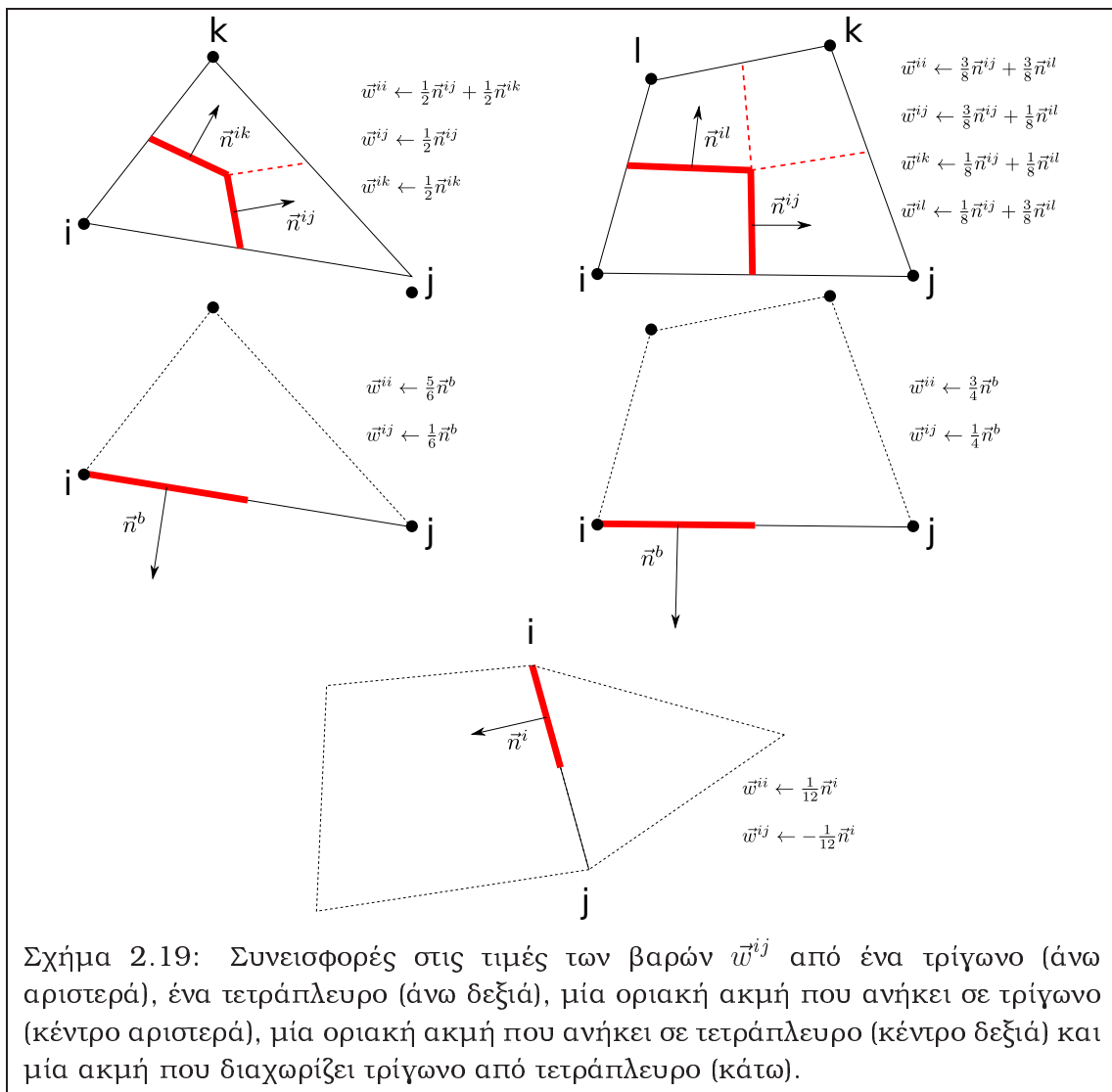
$$\int_{\partial V^P} U \vec{n} dS \leftarrow \frac{1}{2} \vec{n}^{PQ} (U^P + U^Q)$$

$$\int_{\partial V^Q} U \vec{n} dS \leftarrow -\frac{1}{2} \vec{n}^{PQ} (U^P + U^Q)$$

Προσοχή πρέπει να δοθεί στις οριακές ακμές για το σωστό 'κλείσιμο' του ολοκληρώματος, σχ. 2.19.

Στα πλέγματα που περιέχουν και τετράπλευρα, αυτή η σάρωση δεν επαρκεί αφού πλέον υπάρχουν συμμετρικές (ίδιου μέτρου και πρόσημου) και

αντισυμμετρικές συνεισφορές, [30]. Επιπλέον είναι απαραίτητη η εισαγωγή των διαγωνίων των τετράπλευρων ως ‘εικονικών’ ακμών³, αφού κάθε κόμβος συνεισφέρει στην κλίση των μεγεθών στον διαγώνιο ως προς αυτόν κόμβο. Για αυτούς τους λόγους, και για να είναι πιο αποδοτική η μέθοδος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, έγινε εξ’ αρχής η επιλογή να υπολογίζονται μία φορά στην αρχή του επιλύτη και να αποθηκεύονται οι τιμές των βαρών w_i^{PQ} με τις οποίες κάθε κόμβος Q γειτονικός του P συνεισφέρει στην κλίση ∇U^P . Ο υπολογισμός και η αποθήκευση των βαρών γίνεται με σάρωση στοιχείων, σχ. 2.19, ενώ ιδιαίτερη προσοχή κατά τον υπολογισμό τους απαιτούν οι συνεισφορές των οριακών ακμών καθώς και των ακμών μεταξύ τριγώνων και τετράπλευρων. Η



παραπάνω ανάλυση προϋποθέτει ότι η αποθήκευση των τιμών των βαρών γίνεται επίσης κατά ακμές. Από τη θεωρία των γραφών, οι εξισώσεις του Euler, [16], για

³virtual edges

υβριδικά πλέγματα με τρίγωνα και τετράπλευρα γράφονται ως εξής

$$n_f^{tri} + n_f^{quad} = n_e - n_v + 1$$

$$2n_{ie} + n_{be} = 3n_f^{tri} + 4n_f^{quad}$$

όπου n_f^{tri} , n_f^{quad} είναι ο αριθμός των τριγώνων και τετράπλευρων αντίστοιχα⁴, n_e είναι ο αριθμός των ακμών⁵, n_{ie} και n_{be} είναι οι εσωτερικές και οι οριακές ακμές αντίστοιχα⁶, και n_v είναι ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος⁷. Αγνοώντας την επίδραση των ορίων και της διεπιφάνειας μεταξύ των τριγώνων και των τετράπλευρων, ο συνδυασμός των παραπάνω εξισώσεων εκφρασμένος χωριστά για τα τμήματα του πλέγματος με τρίγωνα και τετράπλευρα δίνει

$$n_f^{tri} \approx 2n_v^{tri} \quad (2.24\alpha')$$

$$n_e^{tri} \approx 3n_v^{tri} \quad (2.24\beta')$$

$$n_f^{quad} \approx n_v^{quad} \quad (2.24\gamma')$$

$$n_e^{quad} \approx 2n_v^{quad} \quad (2.24\delta')$$

Συνυπολογίζοντας το κόστος αποθήκευσης των βαρών, σχ. 2.19, στις 'εικονικές' ακμές, $n_{ve} = 2n_f^{quad}$, το κόστος αποθήκευσης είναι ανάλογο του $3n_v^{tri} + 4n_v^{quad}$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί αναλυτικά το ολοκλήρωμα $\iint_{V^P} \nabla U dA$

ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις της διγραμμικής παρεμβολής και να αποθηκευτούν αντίστοιχα βάρη στους κόμβους των στοιχείων. Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξ. 2.24 υποδεικνύουν ότι το κόστος είναι ανάλογο του $6n_v^{tri} + 4n_v^{quad} > 3n_v^{tri} + 4n_v^{quad}$. Άρα, η αποθήκευση κατά ακμές είναι προτιμότερη.

Υπολογισμός της κλίσης με ολοκλήρωση κατ' όγκο, 3Δ πλέγματα: Αντίστοιχα με την περίπτωση των 2Δ πλεγμάτων, η κλίση ενός μεγέθους U σε έναν κόμβο P μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\nabla U^P = \frac{1}{V^P} \iiint_{V^P} \nabla U dV \quad (2.25)$$

Στην περίπτωση 3Δ υβριδικών πλεγμάτων, οι 'εικονικές' διαγώνιες ακμές που πρέπει να εισαχθούν είναι πάρα πολλές (16 ανά εξάεδρο, 6 ανά πρίσμα και 2 ανά πυραμίδα). Συνεπώς, ακολουθείται η παρακάτω τακτική:

⁴f=face

⁵e=edge

⁶ie=internal edges, be=boundary edges

⁷v=vertex

- Σε πλέγματα που περιέχουν πολλά εξάεδρα και πρίσματα (δηλαδή εν γένει σε πλέγματα που δημιουργήθηκαν για την προσομοίωση συνεκτικών ροών, οι οποίες είναι και οι πλέον απαιτητικές σε υπολογιστικούς πόρους) συμφέρει η αποθήκευση των βαρών στους κόμβους των στοιχείων.
- Σε πλέγματα που περιέχουν, ως επί το πλείστον, τετράεδρα (κυρίως δηλαδή πλέγματα που κατασκευάστηκαν για την προσομοίωση ατρίβων ροών) συμφέρει η αποθήκευση των βαρών στις ακμές του πλέγματος.

Στην εξ. 2.25, το ολοκλήρωμα $\iiint_{V^P} \nabla U dV$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την υπόθεση της τριγραμμικής κατανομής, εξ. 2.16α', με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του υπολογισμού του όγκου των στοιχείων. Έχουμε

$$\iiint_{V^P} \nabla U dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} \nabla_{rst} U \det(J) dr ds dt \quad (2.26)$$

όπου η αντίστροφη ιακωβιανή δίνεται από τη σχέση

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Αντικαθιστώντας τις εξ. 2.17 και 2.27 στην εξ. 2.26 προκύπτει λ.χ. για τη χωρική παράγωγο κατά x ότι

$$\begin{aligned} \iiint_{V^P} \frac{\partial U}{\partial x} dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_k}{\partial r} \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_k}{\partial s} \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial r} - \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_k}{\partial t} \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial s} - \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] y_i z_j U_k \end{aligned}$$

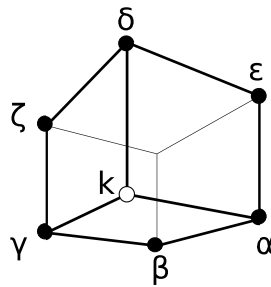
Για τους δείκτες i , j και k υπονοείται άθροιση στους κόμβους του στοιχείου, θεωρώντας και πάλι πολλαπλούς κόμβους στην περίπτωση πρισματών, πυραμίδων και τετράεδρων ώστε ο παραπάνω τύπος να είναι ενιαίος για όλα τα πλεγματικά στοιχεία. Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί μετά την τέλεση των πράξεων στην παρακάτω πρακτική, σε προγραμματιστικό επίπεδο, μορφή

$$\iiint_{V^P} \frac{\partial U}{\partial x} dV = L_k U_k$$

όπου

$$L_k = \frac{1}{12} [y_\alpha (-z_\beta - z_\gamma + z_\delta + z_\epsilon) + y_\beta (z_\alpha - z_\gamma) + y_\gamma (z_\alpha + z_\beta - z_\delta - z_\zeta) + y_\delta (-z_\alpha + z_\gamma - z_\epsilon + z_\zeta) + y_\epsilon (-z_\alpha + z_\delta) + y_\zeta (z_\gamma - z_\delta)]$$

Οι δείκτες και οι κόμβοι στους οποίους αντιστοιχούν φαίνονται στο σχ. 2.20. Παρόμοιοι τύποι γράφονται και για τις άλλες δύο διαστάσεις, με την προφανή εναλλαγή δεικτών και συντεταγμένων.



Σχήμα 2.20: Υπόμνημα για τους κόμβους που συμμετέχουν στην έκφραση του συντελεστή μορφής L_k ενός κόμβου k ενός εξάεδρου

Υπολογισμός της κλίσης με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων:

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων βασίζεται στην παραδοχή ότι η μεταβολή ενός οποιουδήποτε μεγέθους από τον κόμβο P σε κάθε κόμβο k , συνδεδεμένο με αυτόν μέσω πλεγματικής ακμής, είναι γραμμική, οπότε

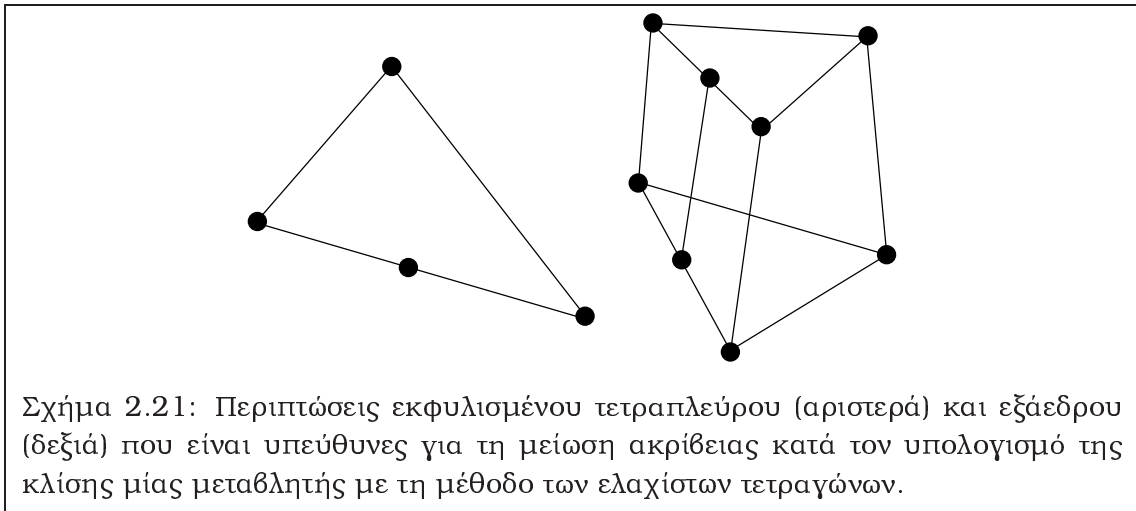
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^P \Delta x_i^k &= \Delta U^k \\ \Delta x_i^k &= (x_i^k - x_i^P) \\ \Delta U^k &= U^k - U^P \end{aligned}$$

Η μέθοδος επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει το σφάλμα προσέγγισης που εισάγει η παραδοχή αυτή, αν εκφραστεί για τους $k = 1, \dots, n$ κόμβους που ενώνονται με τον κόμβο P μέσω πλεγματικής ακμής. Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτει σύστημα το οποίο είναι υπερρορισμένο στη γενική περίπτωση όπου $n > 3$. Πολλαπλασιασμός και των δύο μελών με Δx_j^k δίνει

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^P \Delta x_i^k \Delta x_j^k = \Delta U^k \Delta x_j^k \quad (2.28)$$

Το παραπάνω σύστημα επιδέχεται λύση αν η ορίζουσα του τανυστή $l_{ij} = \Delta x_i^k \Delta x_j^k$ είναι μη-μηδενική. Αυτός είναι και ο λόγος που εκφυλισμένα στοιχεία (λ.χ. τετράγωνα που έχουν εκφυλιστεί σε τρίγωνα ή εξάεδρα που έχουν εκφυλιστεί σε

πρίσματα, σχ. 2.21) δημιουργούν προβλήματα, λόγω διαίρεσης με τη μηδενική ορίζουσα. Αυτό παρακάμπτεται με μείωση της διάστασης του προβλήματος στις εν λόγω περιπτώσεις, λύνοντας δηλαδή 2Δ πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων σε 3Δ περιπτώσεις με αντίστοιχο μηδενισμό της παραγώγου κατά τη διεύθυνση κάθετα στην εκφυλισμένη επιφάνεια και 1Δ πρόβλημα σε 2Δ περιπτώσεις αντίστοιχα. Ο μηδενισμός όμως της παραγώγου κατά τη μία διεύθυνση ενώ αυτή έχει μη-μηδενική τιμή συνεπάγεται μείωση της ακρίβειας της μεθόδου.



Σχήμα 2.21: Περιπτώσεις εκφυλισμένου τετραπλεύρου (αριστερά) και εξάεδρου (δεξιά) που είναι υπεύθυνες για τη μείωση ακρίβειας κατά τον υπολογισμό της κλίσης μίας μεταβλητής με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζει κλίσεις με ελάχιστη ευαισθησία σε θόρυβο Gauss, [16], γεγονός που ευνοεί την εφαρμογή της σε πλέγματα με μεγάλο λόγο επιμήκους. Επίσης, η εφαρμογή της σε υβριδικά πλέγματα με κυρτά, μη-εκφυλισμένα στοιχεία είναι άμεση, χωρίς να απαιτείται ουδεμία μεταβολή στις αντίστοιχες υπορουτίνες του πηγαίου κώδικα. Σε πλέγματα που περιέχουν στοιχεία με μεγάλο λόγο επιμήκους θεωρείται ότι υποεκτιμά τις κλίσεις των μεγεθών στις περιοχές του στερεού ορίου με μεγάλη καμπυλότητα, [17], [205]. Παρόλα αυτά, τα πεδία ροής που προκύπτουν θεωρούνται αντίστοιχης πιστότητας με αυτά που προκύπτουν αν οι κλίσεις υπολογιστούν με ολοκλήρωση κατ' όγκο, αφού οι υποεκτιμήσεις αυτές τελικά υπερκαλύπτονται από τη δράση των περιορισμών στις περιοχές αυτές. Επιπλέον, η πιστότητά τους μπορεί να αυξηθεί με τη χρήση βαρών ή με ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt.

Περιοριστές

Οι περιοριστές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή είναι αυτός του Van Albada, [206], των Barth και Jespersen, [14], και του Venkatakrisnan, [207]. Αναλυτικότερα:

Περιοριστής των Van Leer-Van Albada, [206]: Πρόκειται για τροποποίηση του αρχικού περιοριστή του Van Leer, [208], ώστε να παίρνει τιμές πλησιέστερες στη μονάδα στις περιοχές μικρής κλίσης, δηλαδή να επεμβαίνει κατά το δυνατό λιγότερο στην υπολογισμένη κατά Taylor προεκβολή σε περιοχές που δεν υπάρχει

λόγος περιορισμού της κλίσης, [204]. Είναι ένας από τους πρώτους και απλούστερους περιοριστές που αναπτύχθηκαν, είναι απλός στην εφαρμογή του και δεν εμποδίζει ιδιαίτερα τη σύγκλιση της $L2$ νόρμας του υπολοίπου των εξισώσεων που επιλύονται. Τα βασικότερα μειονεκτήματα του είναι ο 1D χαρακτήρας του (η εξάλειψη των ταλαντώσεων δηλαδή γίνεται μόνο κατά την κατεύθυνση της προεκβολής, δηλαδή αυτήν της ακμής στην οποία υπολογίζεται το διάνυσμα ροής) και η έλλειψη μαθηματικού μηχανισμού απενεργοποίησης του σε περιοχές που δεν είναι απαραίτητος (λ.χ. περιοχές ελεύθερης ροής) ενώ μπορεί να μειώσει την τάξη ακρίβειας της λύσης σε περιοχές του πεδίου όπου υπάρχουν ακρότατα στη λύση. Με χρήση του περιοριστή των Van Leer-Van Albada, οι καταστάσεις L και R εκατέρωθεν του μεσόκομβου, 2.18, δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\vec{U}^L &= \vec{U}^P + \frac{1}{2}LIM \left[\left(2 \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^P x_r^{PQ} - \Delta \vec{U}^{PQ} \right), \Delta \vec{U}^{PQ} \right] \\ \vec{U}^R &= \vec{U}^Q - \frac{1}{2}LIM \left[\left(2 \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^Q x_r^{PQ} - \Delta \vec{U}^{PQ} \right), \Delta \vec{U}^{PQ} \right] \\ \Delta \vec{U}^{PQ} &= \vec{U}^Q - \vec{U}^P \\ LIM(a, b) &= \begin{cases} \frac{(a^2 + \eta)b + (b^2 + \eta)a}{a^2 + b^2 + 2\eta}, & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

όπου η ποσότητα η επιλέγεται να είναι πολύ μικρή και θετική, για να αποφευχθεί πιθανή διαίρεση με το μηδέν.

Περιοριστής των Barth-Jespersen, [14]: Πρόκειται για πολυδιάστατο περιοριστή, ο οποίος δίνει λύσεις χωρίς αφύσικες ταλαντώσεις ακόμα και σε πλέγματα με στοιχεία που παρουσιάζουν έντονη ανισοτροπία. Ενδέχεται όμως να εμποδίσει τη σύγκλιση της $L2$ νόρμας του υπολοίπου των εξισώσεων, οπότε απαιτείται παρακολούθηση κάποιου άλλου μεγέθους (λ.χ. του συντελεστή άνωσης) προκειμένου ο χρήστης να αντιληφθεί ότι η επίλυση των εξισώσεων έχει πρακτικά συγκλίνει.

Η τιμή του περιοριστή Π_j^P για τη j μεταβλητή ενός κόμβου P υπολογίζεται σε δύο στάδια. Πρώτα υπολογίζεται η ποσότητα Π_j^{PQ} για όλες τις ακμές του πλέγματος που συντρέχουν στον κόμβο ως εξής

$$\Pi_j^{PQ} = \begin{cases} \min \left(1, \frac{\Delta_j^{1,max}}{\Delta_j^2} \right), & \Delta_j^2 > \epsilon \\ \min \left(1, \frac{\Delta_j^{1,min}}{\Delta_j^2} \right), & \Delta_j^2 < -\epsilon \\ 1, & |\Delta_j^2| < \epsilon \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned}\Delta_j^2 &= U_j^{rec,L} - U_j^P \\ \Delta_j^{1,max} &= U_j^{max} - U_j^P \\ \Delta_j^{1,min} &= U_j^{min} - U_j^P \\ U_j^{rec,L} &= U_j^P + \frac{1}{2} \vec{x}^{PQ} \nabla U_j^P\end{aligned}$$

και ϵ μία πολύ μικρή και θετική ποσότητα. Οι ποσότητες U_j^{max} και U_j^{min} είναι οι μέγιστες και ελάχιστες ποσότητες της εν λόγω μεταβλητής μεταξύ του κόμβου P και του συνόλου των πρώτων γειτόνων του, δηλαδή των κόμβων που ενώνονται με αυτόν μέσω ακμής.

Τέλος, η τιμή του περιοριστή λαμβάνεται ως η ελάχιστη όλων των τιμών Π_j^{PQ} και η κατάσταση L προεκβάλλεται από την κομβική τιμή P μέσω της εξ. 2.21α'.

Περιοριστής του Venkatakrishnan, [207]: Ο περιοριστής του Venkatakrishnan αναπτύχθηκε με βάση τον περιοριστή των Barth-Jespersen. Παρουσιάζει όπως και εκείνος πολυδιάστατο χαρακτήρα, ενώ το βασικό του πλεονέκτημα είναι η ομαλή απενεργοποίηση του σε περιοχές όπου ο περιορισμός της κλίσης των μεγεθών δεν κρίνεται αναγκαίος. Ο περιοριστής του Venkatakrishnan δεν ικανοποιεί αυστηρά τα κριτήρια μονοτονίας της λύσης, [209], προκειμένου το σχήμα να ικανοποιεί τις συνθήκες για ακρίβεια δεύτερης τάξης, ακόμα και σε περιοχές όπου υπάρχουν ακρότατα στη λύση, [207]. Υπολογίζεται πάλι σε δύο στάδια (πρώτα υπολογίζεται στις ακμές που συντρέχουν στον κόμβο και έπειτα επιλέγεται η ελάχιστη από αυτές τις τιμές). Η τιμή στις ακμές υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\Pi_j^{PQ} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_j} \frac{(\Delta_{j,m}^2 + \eta^2) \Delta_j + 2\Delta_j^2 \Delta_{j,m}}{\Delta_j^2 \Delta_{j,m}^2 + 2\Delta_j^2 + \Delta_{j,m} \Delta_j + \eta^2}, & |\Delta_j| > \epsilon \\ 1, & |\Delta_j| < \epsilon \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \frac{1}{2} \vec{x}^{PQ} \cdot \nabla U_j^P \\ \Delta_{j,m} &= \begin{cases} \Delta_{j,max}, & \Delta_j > 0 \\ \Delta_{j,min}, & \Delta_j < 0 \end{cases} \\ \Delta_{j,max} &= U_{j,max} - U_j^P \\ \Delta_{j,min} &= U_{j,min} - U_j^P\end{aligned}$$

και ϵ είναι, όπως και προηγουμένως, μία πολύ μικρή και θετική ποσότητα. Οι ποσότητες $U_{j,max}$ και $U_{j,min}$ είναι πάλι οι μέγιστες και ελάχιστες ποσότητες αντίστοιχα της j μεταβλητής μεταξύ του κόμβου P και του συνόλου των πρώτων γειτόνων του. Η ποσότητα η υπολογίζεται συναρτήσει μεγεθών που εξαρτώνται από γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων του πλέγματος, [207].

2.4.4 Διακριτοποίηση των όρων διάχυσης

Σχήμα σάρωσης στοιχείων

Το πρώτο σενάριο διακριτοποίησης των διανυσμάτων συνεκτικής ροής που διασχίζουν τα όρια του κεντροκομβικού πεπερασμένου όγκου υποθέτει $P1$ -γραμμικά στοιχεία, στα οποία οι κλίσεις των ταχυτήτων, και, συνεπώς, τα στοιχεία του τανυστή των τάσεων, είναι σταθερά. Η διακριτοποίηση πραγματοποιείται με σάρωση πλεγματικών στοιχείων και απόδοση συνεισφορών από τα διανύσματα συνεκτικής ροής στους κόμβους τους. Έτσι, αν \mathcal{T}_P το σύνολο των πλεγματικών στοιχείων που περιβάλλουν τον κόμβο P (βλέπε σχ. 2.22), τότε τα διανύσματα συνεκτικής ροής που διέρχονται από τα όρια του όγκου ελέγχου του P γράφονται

$$\iint_{\partial V^P} \vec{F}_r^{vis} n_r d(\partial V) = \sum_{T \in \mathcal{T}_P} \vec{\Phi}^{T,vis}$$

όπου

$$\vec{\Phi}^{T,vis} = \vec{F}_r^{T,vis} n_r^G = \begin{bmatrix} 0 \\ n_r^G \tau_{r1}^G \\ n_r^G \tau_{r2}^G \\ n_r^G \tau_{r3}^G \\ n_r^G (u_j^G \tau_{jr}^G + q_r^G) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

και

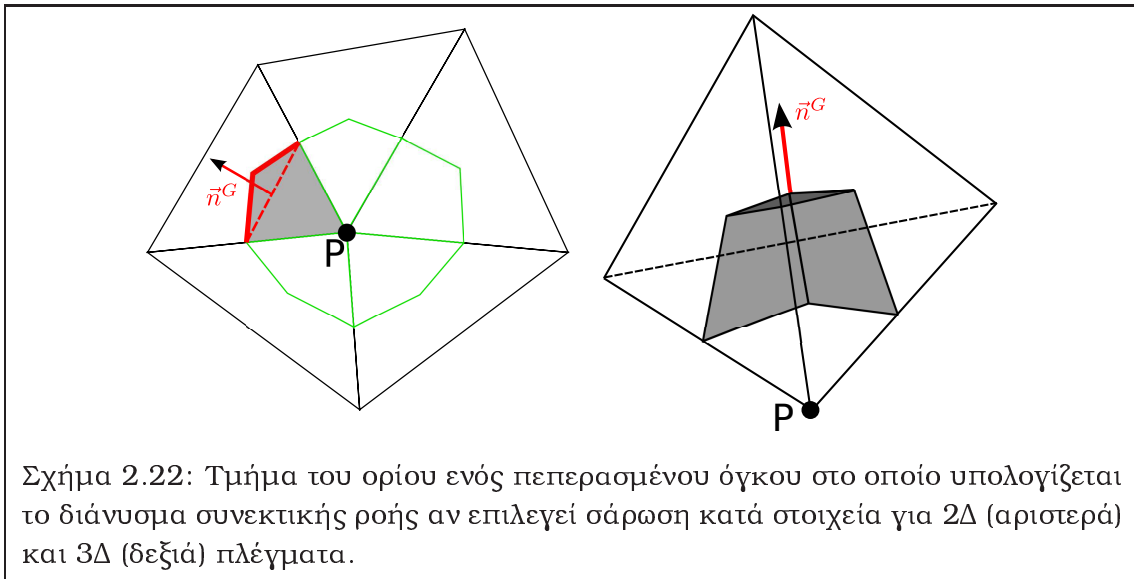
$$\tau_{ij}^G = \frac{\mu_{eff}^G}{Re_0} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^G + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^G - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right)^G \delta_{ij} \right] \quad (2.30a')$$

$$q_r^G = \frac{c_p \mu_{eff}^G}{Re_0 Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial x_r} \right)^G \quad (2.30b')$$

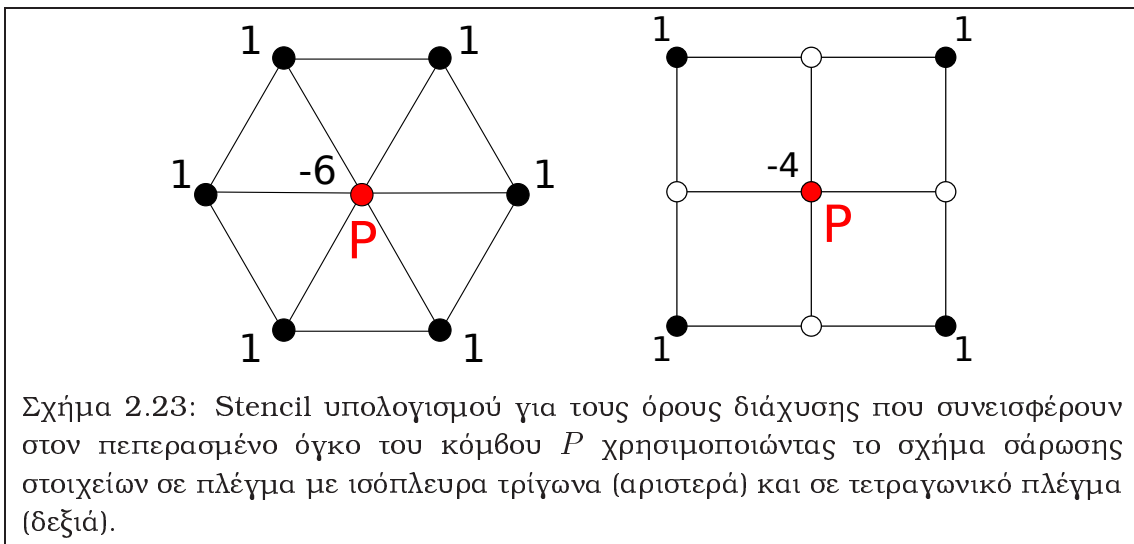
Το διάνυσμα n_r^G είναι πάλι το κάθετο διάνυσμα στο τμήμα του ορίου του πεπερασμένου όγκου όπου εκφράζεται η συνεισφορά, σχ. 2.18, και έχει μέτρο ίσο με την επιφάνεια του τμήματος αυτού. Ο άνω δείκτης G υποδηλώνει μεγέθη στο βαρύκεντρο του στοιχείου, τα οποία εν γένει βρίσκονται ως ο αριθμητικός μέσος όρος των αντίστοιχων τιμών στους κόμβους του στοιχείου. Η κλίση ενός οποιουδήποτε μεγέθους $\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^G$ εκφράζεται, μέσω της παραδοχής $P1$ στοιχείων, ως εξής

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^G = \frac{\partial N_k}{\partial x_i} W_k \quad (2.31)$$

όπου N_k είναι οι συντελεστές μορφής του στοιχείου. Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των κλίσεων ταχυτήτων που εμπεριέχονται στον τανυστή των τάσεων καθώς και της κλίσης της θερμοκρασίας.



Το σχήμα αυτό λειτουργεί σε πλέγματα μόνο με τρίγωνα (σε 2Δ) ή τετράεδρα (σε 3Δ). Επέκτασή του σε υβριδικά πλέγματα με χρήση κατάλληλων συντελεστών μορφής οδηγεί στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων σε σχήματα τα οποία απειπλέκουν τους πρώτους γείτονες του κόμβου P , σχ. 2.23, και τα οποία είναι ασταθή, [34], [35].



Σχήμα σάρωσης ακμών

Το δεύτερο σενάριο διακριτοποιεί τα διανύσματα συνεκτικής ροής στους μεσόκομβους των ακμών, όπως και στην περίπτωση του όρου μεταφοράς, σχ. 2.18.

Αν \mathcal{K}_P το σύνολο των πρώτων γειτόνων Q του κόμβου P , τότε

$$\iint_{\partial V^P} \vec{F}_r^{vis} n_r d(\partial V) = \sum_{T \in \mathcal{K}_P} \vec{\Phi}^{PQ,vis}$$

όπου το διάνυσμα $\vec{\Phi}^{PQ,vis} = \vec{F}_r^{PQ,vis} n_r^{PQ}$ μπορεί πάλι να υπολογιστεί από την εξ. 2.29 αν τα μεγέθη με εκθέτη G εκφραστούν στο μεσόκομβο M της ακμής PQ (δηλαδή ως αριθμητικοί μέσοι όροι των αντίστοιχων τιμών στους κόμβους P και Q). Η κλίση ενός οποιουδήποτε μεγέθους W στο μεσόκομβο θα μπορούσε επίσης να θεωρηθεί ίση με το μέσο όρο των κλίσεων στους κόμβους P και Q . Αυτή η προσέγγιση όμως οδηγεί πάλι σε ασταθή σχήματα λόγω απειμπλοκής των πρώτων γειτόνων, σχ. 2.24, [34], [35]. Αντί αυτού, χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση, [210]

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^G = \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^M} - \left[\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial x_r}\right)^M} \hat{x}_r^{PQ} - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^M \right] \hat{x}_i^{PQ} \quad (2.32)$$

όπου

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^M} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^P + \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^Q \right] \quad (2.33a')$$

$$\hat{x}^{PQ} = \frac{\vec{x}^Q - \vec{x}^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \quad (2.33b')$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^M = \frac{W^Q - W^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \quad (2.33\gamma')$$

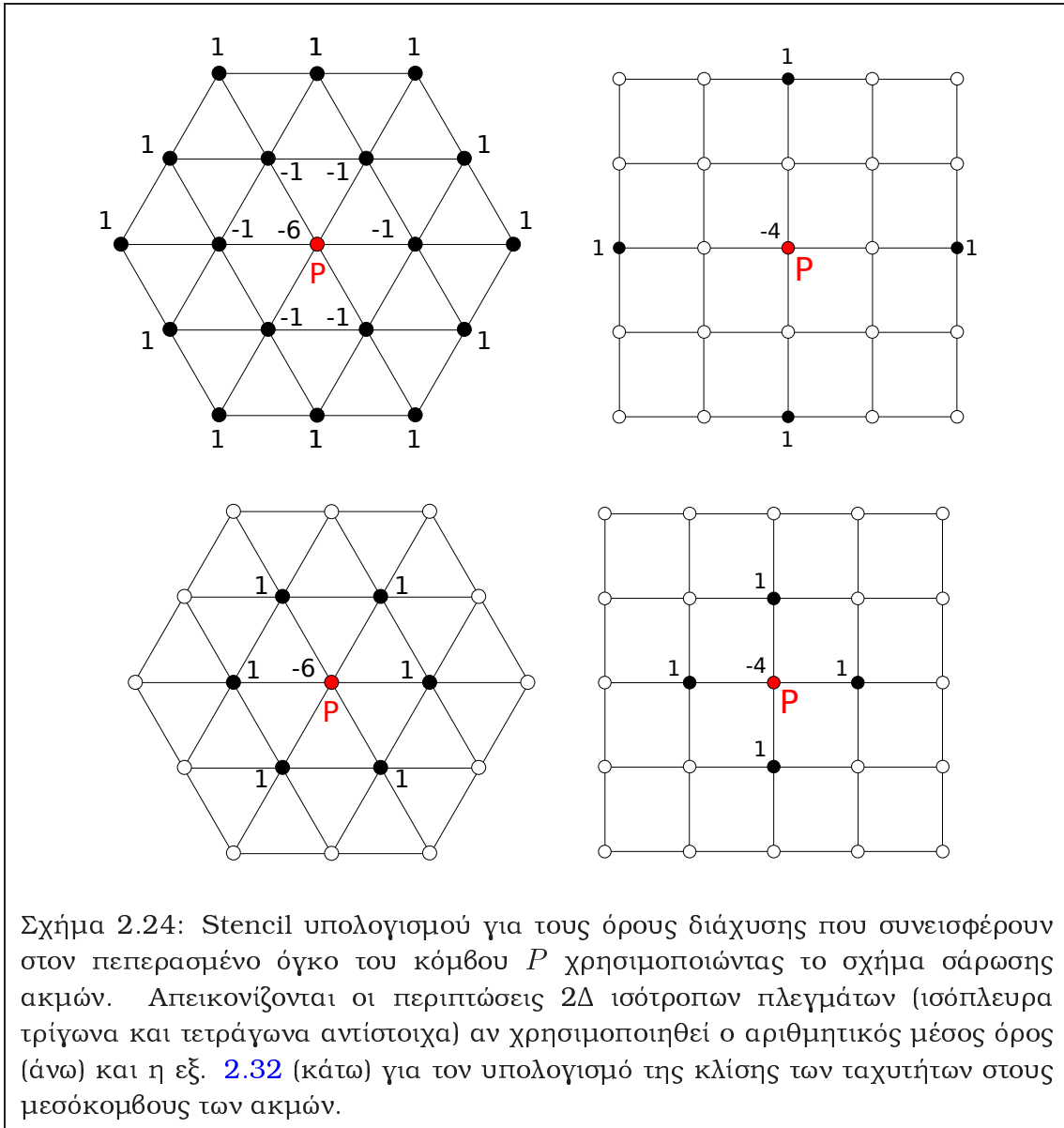
2.4.5 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης

Όρος μεταφοράς

Για τη διακριτοποίηση του όρου μεταφοράς του μοντέλου τύρβης χρησιμοποιείται ανάντι σχήμα, το οποίο για έναν κόμβο P γράφεται, σχ. 2.18

$$\iint_{\partial V^P} \rho u_r n_r \tilde{\mu} d(\partial V) = \sum_{Q \in \mathcal{K}_P} u_r^M n_r^{PQ} (\rho \tilde{\mu})^M \quad (2.34)$$

όπου η μεταβλητή $(\rho \tilde{\mu})^M$ λαμβάνει την τιμή ενός εκ των δύο κόμβων, [1], [17], έτσι ώστε η πληροφορία να μεταφέρεται πάντα κατάντι. Οι συνεισφορές αποδίδονται κατά τα γνωστά με σάρωση ακμών. Το σχήμα αυτό επιλέγεται για λόγους ευστάθειας.



Όρος διάχυσης

Σχήμα σάρωσης στοιχείων: Όπως και στην περίπτωση των εξισώσεων μέσης ροής, η διακριτοποίηση του όρου διάχυσης του μοντέλου τύρβης μπορεί να γίνει υπό την υπόθεση $P1$ γραμμικών στοιχείων. Οι περιορισμοί και τα συμπεράσματα της παρ. 2.4.4 ισχύουν και εδώ. Για έναν κόμβο P

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re_0} \iint_{\partial V^P} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} n_r \right] d(\partial V) - \frac{1}{Re_0} \iiint_{V^P} \left[\frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right) \right] dV = \\ & = \frac{1}{Re_0} \sum_{T \in \mathcal{T}_P} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^G) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G \right] n_r^G \end{aligned} \quad (2.35)$$

όπου πάλι τα μεγέθη με εκθέτη G εκφράζονται στο βαρύκεντρο του εκάστοτε στοιχείου και η κλίση $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}^G$ υπολογίζεται με χρήση των συντελεστών μορφής, εξ. 2.31.

Σχήμα σάρωσης ακμών: Το σχήμα σάρωσης ακμών είναι, όπως αναφέρθηκε και στην παρ. 2.4.4, κατάλληλο για εφαρμογή σε υβριδικά πλέγματα. Έτσι, για έναν κόμβο P , ισχύει

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re_0} \iint_{\partial V^P} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} n_r \right] d(\partial V) - \frac{1}{Re_0} \iiint_{V^P} \left[\frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right) \right] dV = \\ & = \frac{1}{Re_0} \sum_{Q \in \mathcal{K}_P} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^M) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G \right] n_r^{PQ} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Οι ποσότητες με άνω δείκτη M υποδηλώνουν μεγέθη στο μεσόκομβο της ακμής PQ , ενώ η κλίση $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}^G$ υπολογίζεται με χρήση της εξ. 2.32.

Όροι πηγής

Οι όροι πηγής (παραγωγής, καταστροφής και μετάβασης) υπολογίζονται με ολοκλήρωση στις αντίστοιχες κυψέλες ελέγχου χρησιμοποιώντας την κομβική τιμή των μεγεθών σε κάθε στοιχείο. Η απόδοση των αντίστοιχων συνεισφορών γίνεται με σάρωση κόμβων.

2.4.6 Διακριτοποίηση του χρονικού όρου και επιλογή του χρονικού βήματος

Η παρούσα εργασία ασχολείται αποκλειστικά με χρονικά μόνιμες ροές. Ο χρονικός όρος διατηρείται και χρησιμοποιείται για διευκόλυνση της σύγκλισης των εξισώσεων,

σύμφωνα με την τεχνική της χρονοπροέλασης⁸. Η διακριτοποίησή του γίνεται μέσω του πρώτης τάξης σχήματος ανάντι διαφόρισης του Euler

$$\iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV = \frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta \vec{U}^P \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

όπου $\Delta \vec{U}^P = (\vec{U}^P)^{n+1} - (\vec{U}^P)^n$ (ο εκθέτης n αντιστοιχίζεται στο τρέχον χρονικό βήμα). Για επιτάχυνση της σύγκλισης εφαρμόζεται η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος, [211]. Για υβριδικά πλέγματα, η τεχνική αυτή έχει εφαρμοστεί στη βιβλιογραφία σε ασυμπίεστες ροές, [25], [26], [27], και συμπιεστές ροές, [212], αγνοώντας όμως την επίδραση της συμπιεστότητας και της τύρβης στο χρονικό βήμα. Ο αντίστοιχος τύπος για τυρβώδεις συμπιεστές ροές δίνεται παρακάτω

$$\Delta t^P = CFL \frac{V^P}{C + D}$$

όπου

$$D = \frac{2}{\rho^P} \frac{V^P}{\sum_{i=1}^3 S_i^P} \max \left[\frac{c_p (\mu + \mu_t^P)}{Re_0 Pr}, \frac{\mu + \mu_t^P}{Re_0} \right]$$

και

$$C = (|u_r^P| + c^P) S_r^P$$

Στις παραπάνω σχέσεις, S_i^P είναι η προβολή των τμημάτων που απαρτίζουν τα όρια της κυψέλης ελέγχου του κόμβου P κατά την κατεύθυνση i , δηλαδή

$$S_r^P = \frac{1}{2} \sum_{Q \in \mathcal{K}_P} |n_r^{PQ}|$$

Στην έκφραση του D υπεισέρχεται ο συντελεστής διάχυσης με τη μεγαλύτερη τιμή, [12].

Ο χρονικός όρος του μοντέλου τύρβης διακριτοποιείται με το ίδιο χρονικό βήμα

$$\iiint_{V^P} \frac{\partial (\rho \tilde{\mu})}{\partial t} dV = \frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta (\rho \tilde{\mu})^P$$

όπου $\Delta (\rho \tilde{\mu})^P = (\rho \tilde{\mu})^{n+1} - (\rho \tilde{\mu})^n$, δίνοντας ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης.

2.4.7 Οριακές συνθήκες

Στερεά τοιχώματα

Η οριακή συνθήκη που επιβάλλεται στα στερεά τοιχώματα εξαρτάται από το είδος των εξισώσεων που επιλύονται. Έτσι, σε προλέξεις ατριβών ροών (εξισώσεις Euler) ή

⁸time marching

τυρβωδών ροών με χρήση συναρτήσεων τοίχου⁹, επιβάλλεται στην παρούσα διατριβή η συνθήκη μη-εισχώρησης ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$). Η επιβολή γίνεται με ασθενή διατύπωση, δηλαδή με εισαγωγή της συνθήκης στα διανύσματα ατρισούς ροής, τα οποία κατά μήκος των στερεών τοιχωμάτων λαμβάνουν τη μορφή

$$\vec{\Phi}^{inv} = \vec{F}_r^{inv} n_r = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ pn_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Σε περιπτώσεις στρωτής ροής ή τυρβώδους ροής χωρίς χρήση συναρτήσεων τοίχου επιβάλλεται η συνθήκη μη-ολίσθησης ($\vec{u} = \vec{u}^{wall}$) άμεσα ως συνθήκη Dirichlet, με ταυτόχρονο μηδενισμό του αριστερού μέλους για τους κόμβους του στερεού ορίου.

Επιπλέον, για τη θερμοκρασία επιβάλλεται είτε δεδομένη κατανομή τιμών επάνω στο στερεό όριο (συνθήκη Dirichlet) είτε δεδομένη θερμοροή $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ (συνθήκη Neumann, λ.χ. μηδενική για αδιαβατικές ροές). Η συνθήκη Neumann υπεισέρχεται έμμεσα μέσω των διανυσμάτων συνεκτικής ροής (εξ. 2.29).

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης εξαρτώνται από τη χρήση ή μη των συναρτήσεων τοίχου. Αν δε χρησιμοποιούνται συναρτήσεις τοίχου (μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds), επιβάλλεται η Dirichlet συνθήκη $\tilde{\mu} = 0$, απαιτούνται δε πλέγματα τα οποία είναι επαρκώς πυκνά κοντά στο στερεό όριο (ένα τυπικό κριτήριο είναι να ισχύει για τον πρώτο από τον τοίχο κόμβο $y^+ \leq 1$). Στην περίπτωση που εφαρμόζονται οριακές συνθήκες μέσω συναρτήσεων τοίχου (μοντέλο τύρβης υψηλών αριθμών Reynolds), μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο αραιά πλέγματα. Στην παρούσα εργασία επελέγη τύπος συνάρτησης τοίχου ο οποίος αντιμετωπίζει με ενιαία μαθηματική έκφραση το στρωτό οριακό υπόστρωμα, την ενδιάμεση ζώνη και τη λογαριθμική περιοχή, [18]. Αν y^+ είναι η αδιάστατη χαρακτηριστική απόσταση και u^+ η αδιάστατη χαρακτηριστική ταχύτητα, η σχέση που τις συνδέει δίνεται παρακάτω

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (2.40)$$

όπου

$$y^+ = \frac{Re_0 \rho^w u_\tau \Delta}{\mu^w}$$

$$u^+ = \frac{u_{\tau \text{ tang}}^w}{u_\tau}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, Δ είναι η απόσταση του οριακού κόμβου από το πραγματικό στερεό όριο (η οποία δίνεται από τον χρήστη) και u_τ είναι η ταχύτητα τριβής, ενώ ο

⁹wall functions

εκθέτης w υποδηλώνει μεγέθη στον οριακό κόμβο. Οι σταθερές λαμβάνουν τις τιμές $\kappa = 0.41$ και $B = 5.5$. Η εξ. 2.40 λύνεται αριθμητικά (λ.χ. με μέθοδο Newton-Raphson) ως προς την ποσότητα u^+ , η οποία δίνει την ταχύτητα τριβής. Η ταχύτητα τριβής χρησιμοποιείται κατόπιν για τον υπολογισμό της τάσης που αναπτύσσεται στο στερεό όριο μέσω της σχέσης

$$\tau^w = \rho^w u_\tau^2$$

και η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των διανυσμάτων συνεκτικής ροής που διέρχονται από τις οριακές ακμές του χωρίου στις εξισώσεις της μέσης ροής. Η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται μέσω της παρακάτω σχέσης

$$\mu_t = \mu \kappa e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} \right]$$

Επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} \mu_t &= f_{v1} \tilde{\mu} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \chi \mu \\ \chi &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση επιλύεται με τη μέθοδο Newton-Raphson ως προς το χ , το οποίο με τη σειρά του δίνει τη Dirichlet συνθήκη για τη μεταβλητή $\rho \tilde{\mu}$ στον οριακό κόμβο.

Είσοδος και έξοδος της ροής

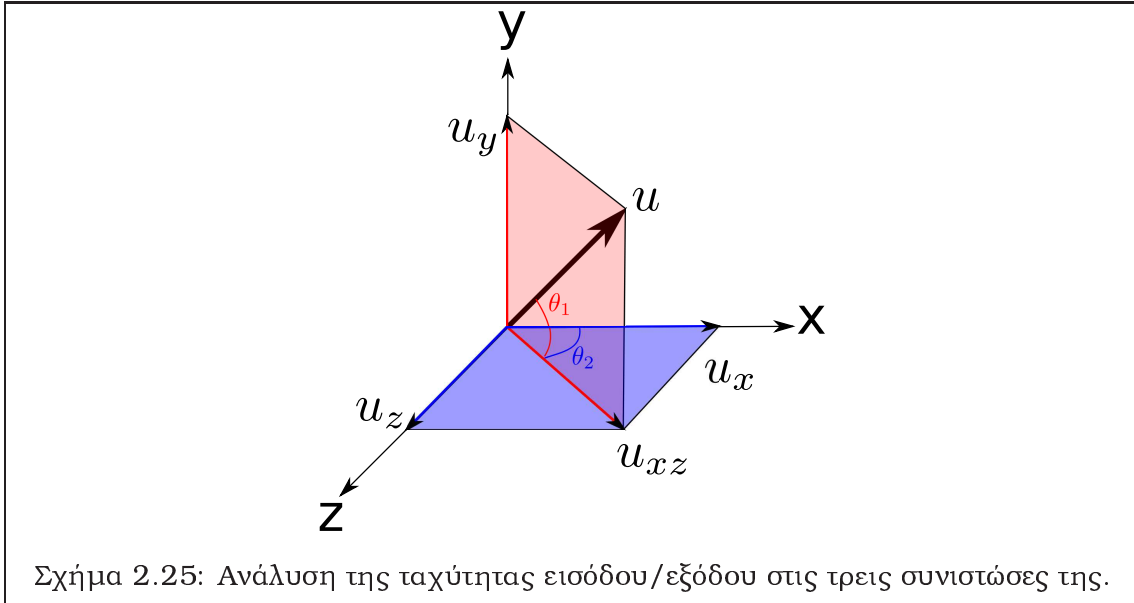
Οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο του υπολογιστικού χωρίου επιβάλλονται μέσω των διανυσμάτων ατριβούς ροής που διέρχονται από τα αντίστοιχα τμήματα του ορίου, και τα οποία λαμβάνουν υπόψη την κατάσταση του ρευστού σε αυτό, ενώ τα διανύσματα συνεκτικής ροής εκεί αμελούνται. Συγκεκριμένα, τα διανύσματα ατριβούς ροής υπολογίζονται μέσω του ανάντι σχήματος των Steger-Warming, [213], το οποίο για έναν οριακό κόμβο P γράφεται

$$\vec{\Phi}^{P,out} = \vec{A}^+ (\vec{U}^P) \vec{U}^P + \vec{A}^- (\vec{U}^P) \vec{U}^{out} \quad (2.41)$$

όπου \vec{A}^+ και \vec{A}^- οι ιακωβιανές των διανυσμάτων ροής που αντιστοιχούν στις θετικές και τις αρνητικές ιδιοτιμές αντίστοιχα, [204]. Ο ορισμός της οριακής κατάστασης \vec{U}^{out} εξαρτάται από την περίπτωση που μελετάται.

Περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής: Σε περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής δίνονται ως οριακές συνθήκες ο επί άπειρον αριθμός Mach, η πυκνότητα ρ^{out} , το μέτρο $|\vec{u}^{out}|$ και οι γωνίες θ_1 και θ_2 της επί άπειρον ταχύτητας, σχ. 2.25. Τα μεγέθη αυτά επαρκούν για τον πλήρη καθορισμό της κατάστασης \vec{U}^{out} .

Περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής: Στις περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής, ο αριθμός των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται εξαρτάται από



Σχήμα 2.25: Ανάλυση της ταχύτητας εισόδου/εξόδου στις τρεις συνιστώσες της.

τον αριθμό Mach εκφρασμένο βάσει της κάθετης στο όριο συνιστώσας της ταχύτητας (συνήθως της αξονικής). Έτσι, αν και στην είσοδο και στην έξοδο η συνιστώσα αυτή είναι υποηχητική, τότε για την είσοδο δίνονται η ολική πίεση p_T^{out} , η ολική θερμοκρασία T_t^{out} και οι γωνίες ροής θ_1 και θ_2 , ενώ στην έξοδο δίνεται η στατική πίεση p^{out} . Από τις σχέσεις της ισεντροπικής ροής, [214], στην είσοδο

$$\begin{aligned}
 p^{out} &= p^P \\
 T^{out} &= T_t \left(\frac{p^P}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
 \rho^{out} &= \frac{p^P}{RT^{out}} \\
 T^{out} &= T_t \left(\frac{p^P}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
 |\vec{u}^{out}| &= \sqrt{2c_p (T_t - T^{out})} \\
 u^{out} &= |\vec{u}^{out}| \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
 v^{out} &= |\vec{u}^{out}| \sin \theta_1 \\
 w^{out} &= |\vec{u}^{out}| \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\
 (\rho E)^{out} &= \frac{p^{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho^{out} |\vec{u}^{out}|^2
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να παρεκβληθεί από το εσωτερικό του πεδίου η αρνητική

αναλλοίωτη Riemann αντί για τη στατική πίεση, οπότε

$$\begin{aligned}
 p^{out} &= p^P \\
 T^{out} &= T_t \left(\frac{p^P}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
 \rho^{out} &= \frac{p^P}{RT^{out}} \\
 R^- &= |\vec{u}^P| - \frac{2\sqrt{\gamma} \frac{p^P}{\rho^P}}{\gamma-1} \\
 \vec{u}^{out} &= \frac{(\gamma-1)R^- + \sqrt{4(\gamma+1)c_p T_t - 2(\gamma-1)(R^-)^2}}{\gamma+1} \\
 u^{out} &= |\vec{u}^{out}| \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
 v^{out} &= |\vec{u}^{out}| \sin \theta_1 \\
 w^{out} &= |\vec{u}^{out}| \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\
 (\rho E)^{out} &= \frac{p^{out}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho^{out} |\vec{u}^{out}|^2
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η κάθετη στο όριο συνιστώσα της ταχύτητας είναι υπερηχητική τόσο στην είσοδο όσο και στην έξοδο, τότε στην είσοδο δίνεται επιπλέον η στατική πίεση p^{out} ως οριακή συνθήκη ενώ, αντίστοιχα, στην έξοδο η στατική πίεση προεκβάλλεται από το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή $p^{out} = p^P$.

Τέλος, αν στην είσοδο η αξονική ταχύτητα είναι υπερηχητική ενώ στην έξοδο είναι υποηχητική, ισχύει ο περιορισμός της μοναδικής γωνίας πρόσπτωσης, δηλαδή η γωνία εισόδου της ροής καθορίζεται μονοσήμαντα από τη γεωμετρία του περυγίου και τον αριθμό Mach, ενώ οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται όπως αναλύθηκε παραπάνω.

Σχετικά με τις οριακές συνθήκες του μοντέλου τύρβης στα όρια αυτά, αναφέρεται ότι στην είσοδο επιβάλλεται Dirichlet συνθήκη της μεταβλητής $\rho\tilde{\mu}$, ενώ από την έξοδο εξέρχονται τα αντίστοιχα διανύσματα ροής λόγω μεταφοράς σύμφωνα πάντα με το ανάντι σχήμα της εξ. 2.34.

Όρια συμμετρίας και περιοδικά όρια

Στα όρια συμμετρίας επιβάλλεται η συνθήκη μη-εισχώρησης, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που επιβάλλεται στα στερεά όρια στην περίπτωση ατρίβους ροής. Προαιρετικά μπορούν να μηδενιστούν και οι κλίσεις των μεταβλητών ροής, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην κατά Taylor προεκβολή, εξ. 2.21, στη διεύθυνση κάθετα στο όριο. Αυτό διευκολύνει ελαφρώς τη σύγκλιση αλλά δημιουργεί δυσκολίες στη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων.

Στα περιοδικά όρια των 2D ροών, καθώς και στις περιπτώσεις 3D ροών που εξομοιώνουν γραμμικές περυγώσεις, εξασφαλίζεται η εξίσωση των μεταβλητών

εκατέρωθεν του περιοδικού ορίου μέσω της εξίσωσης των αντίστοιχων δεξιών και αριστερών μελών, ώστε η ανανέωσή τους να γίνεται με ταυτόσημο τρόπο. Στις 3Δ περιφερειακές πτερυγώσεις, οι διανυσματικές ποσότητες εξισώνονται στους περιοδικούς κόμβους αφού υποστούν στροφή κατά το βήμα της πτερύγωσης, ενώ για τις βαθμωτές ποσότητες επιβάλλεται να είναι ταυτόσημες.

2.5 Επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων

2.5.1 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφτούν με χρήση των τελεστών υπολοίπου \vec{R} και R_{SA} στην παρακάτω μορφή

$$\frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta \vec{U}^P + \vec{R}^{P,m} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta (\rho \tilde{\mu})^P + R_{SA}^{P,m} = 0 \quad (2.43)$$

Η ανανέωση των μεταβλητών σε κάθε ψευδοχρονικό βήμα γίνεται με τη χρήση είτε της μεθόδου Runge-Kutta (θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση $m = n$, όπου n το παρόν χρονικό βήμα) είτε πεπλεγμένου σχήματος και εσωτερικών επαναλήψεων του σημειακά πεπλεγμένου επιλύτη Jacobi (θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση $m = n+1$).

Μέθοδος Runge-Kutta: Ο γενικός αλγόριθμος μίας μεθόδου Runge-Kutta k_{max} βημάτων δίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \vec{U}_0^P &= \vec{U}^{P,n} \\ \vec{U}_k^P &= \vec{U}^{P,n} - a_k \frac{\Delta t^P}{A^P} \vec{R}_{k-1}^P, \quad k = 1, \dots, k_{max} \\ \vec{U}^{P,n+1} &= \vec{U}_{k_{max}}^P \end{aligned} \quad (2.44)$$

όπου \vec{R}_{k-1}^P είναι ο τελεστής υπολοίπου υπολογισμένος με χρήση των μεταβλητών ροής στο $k - 1$ βήμα. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μέθοδος Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων με συντελεστές $a_1 = 0.11$, $a_2 = 0.2766$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 1.0$, [215].

Μέθοδος Jacobi: Με γραμμικοποίηση του τελεστή υπολοίπου \vec{R} προκύπτει το παρακάτω σχήμα για τη νέα επανάληψη του ψευδοχρονικού βήματος

$$\left[\frac{V^P}{\Delta t^P} I + \frac{\partial \vec{R}^P}{\partial \vec{U}^P} \right] \Delta \vec{U}^P + \sum_{Q \in \mathcal{K}_P} \left(\frac{\partial \vec{R}^P}{\partial \vec{U}^Q} \right) \Delta \vec{U}^Q = -\vec{R}^P$$

ή εναλλακτικά, σε τανυστική γραφή

$$\left[\frac{V^P}{\Delta t^P} \delta_{nk} \delta_{PK} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right] \Delta U_k^K = -R_n^P \quad (2.45)$$

όπου K είναι όλοι οι κόμβοι που συμμετέχουν στην εξίσωση του P συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου. Το παραπάνω γραμμικοποιημένο σύστημα επιλύεται με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi. Η επιλογή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι η μέθοδος επωφελείται από τη διαγώνια κυριαρχία που παρέχει το ανάντι σχήμα διακριτοποίησης, [216], και από το γεγονός ότι προσφέρεται για παραλληλοποίηση. Η γραμμικοποίηση που χρησιμοποιείται αποτελεί προσέγγιση της ακριβούς και επιλέγεται έτσι ώστε να ενισχύεται η διαγώνια κυριαρχία, προκειμένου να διευκολυνθεί η σύγκλιση της μεθόδου και να μην αυξηθούν υπερβολικά οι απαιτήσεις σε μνήμη υπολογιστή, [116]. Τα παραπάνω επιτυγχάνονται αν δε ληφθούν οι μη-διαγώνιες συνεισφορές όλων των κόμβων πέρα από τους πρώτους γείτονες (οι μη-διαγώνιες συνεισφορές πρώτων γειτόνων αποθηκεύονται στις ακμές του πλέγματος).

Κατά την επίλυση, οι εξισώσεις μέσης ροής και η εξίσωση του μοντέλου τύρβης θεωρούνται μη-πεπλεγμένες. Συνεπώς, σε κάθε ψευδοχρονική επανάληψη λύνονται διαδοχικά οι εξισώσεις μέσης ροής και η εξίσωση του μοντέλου τύρβης με ένα από τα δύο παραπάνω σχήματα, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο διάνυσμα μεταβλητών $\Delta \vec{U}$ και τον αντίστοιχο τελεστή υπολοίπου \vec{R} .

Στη συνέχεια θα αναλυθεί η διαδικασία υπολογισμού του αριστερού μέλους των εξ. 2.45 για τη μέθοδο Jacobi, η οποία περιλαμβάνει τη διαφόριση του τελεστή υπολοίπου των εξισώσεων ροής και του μοντέλου τύρβης ως προς τις μεταβλητές ροής, υπό τις παραδοχές/απλοποιήσεις που μόλις αναφέραμε.

2.5.2 Αριστερό μέλος του όρου μεταφοράς

Η διαφόριση ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές του διανύσματος ατρίβους ροής, εξ. 2.20, με το οποίο συνεισφέρει μία ακμή PQ δίνει την παρακάτω έκφραση

$$\frac{\partial \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_k^K} = \mathcal{A}_{nj}^L \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^R \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L U_j^L}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R U_j^R}{\partial U_k^K} \quad (2.46)$$

Ως προς τα διανύσματα ατρίβους ροής, το αριστερό μέλος των εξ. 2.45 διαμορφώνεται υπό τις εξής δύο παραδοχές:

- Οι όροι $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L U_j^L}{\partial U_k^K}$ και $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R U_j^R}{\partial U_k^K}$ θεωρούνται πρακτικά αμελητέοι. Η παραδοχή αυτή επιβάλλεται για μείωση του υπολογιστικού κόστους, φαίνεται δε ότι είναι αρκετά ρεαλιστική, όπως υποδεικνύουν δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν και θα παρουσιαστούν στο πλαίσιο της εφαρμογής των συζυγών μεθόδων.
- Χρησιμοποιείται σχήμα πρώτης τάξης. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η αποθήκευση μη-διαγώνιων όρων που προκύπτουν από συνεισφορές κόμβων που δεν είναι πρώτοι γείτονες του P και ενισχύεται η διαγώνια κυριαρχία του αριστερού μέλους.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξ. 2.46 λαμβάνουν την παρακάτω μορφή

$$\frac{\partial \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_k^K} = \mathcal{A}_{nj}^L \frac{\partial U_j^P}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^R \frac{\partial U_j^Q}{\partial U_k^K} \quad (2.47)$$

2.5.3 Αριστερό μέλος του όρου διάχυσης

Η τακτική που ακολουθείται κατά τη διαχείριση των όρων διάχυσης εξαρτάται από τον τρόπο σάρωσης και απόδοσης συνεισφορών των αντίστοιχων διανυσμάτων ροής. Αντικατάσταση των εξ. 2.30α' και 2.30β' στην 2.29 δίνει μία ισοδύναμη έκφραση που συνδέει τη συνεισφορά ενός διανύσματος συνεκτικής ροής με την κλίση του διανύσματος των μη-συντηρητικών μεταβλητών $\vec{W} = [\rho \ u \ v \ w \ T]^T$ στο σημείο G (που είναι το βαρύκεντρο του εκάστοτε στοιχείου για το σχήμα σάρωσης στοιχείων και ο μεσόκομβος M της κάθε ακμής για το σχήμα σάρωσης ακμών). Ομαδοποιώντας τους συντελεστές της κλίσης $\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r}\right)^G$ μπορεί κανείς να γράψει

$$\Phi_n^{G,vis} = \frac{\mu_{eff}^G}{Re_0} (D_r)_{nj}^G \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r}\right)^G \quad (2.48)$$

όπου

$$D_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}n_z & 0 & n_x & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}(2un_x - vn_y - wn_z) & vn_x + un_y & wn_x + un_z & \frac{c_p}{Pr}n_x \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & -\frac{2}{3}n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_x & \frac{4}{3}n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}n_z & n_y & 0 \\ 0 & un_y + vn_x & \frac{2}{3}(-un_x + 2vn_y - wn_z) & wn_y + vn_z & \frac{c_p}{Pr}n_y \end{bmatrix}$$

$$D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_z & 0 & -\frac{2}{3}n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_z & -\frac{2}{3}n_y & 0 \\ 0 & n_x & n_y & \frac{4}{3}n_z & 0 \\ 0 & wn_x + un_z & wn_y + vn_z & \frac{2}{3}(-un_x - vn_y + 2wn_z) & \frac{c_p}{Pr}n_z \end{bmatrix}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\vec{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ είναι το διάνυσμα που διακριτοποιεί το όριο από το οποίο διέρχεται το διάνυσμα ροής (είναι δηλαδή $\vec{n} = \vec{n}^G$ για σάρωση στοιχείων και $\vec{n} = \vec{n}^{PQ}$ για σάρωση ακμών). Διαφόριση της παραπάνω σχέσης ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} δίνει

$$\frac{\partial \Phi_n^{G,vis}}{\partial U_k^K} = \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re_0} \frac{\partial (D_r)_{nj}^G}{\partial W_l^K} \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G}_A + \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re_0} (D_r)_{nj}^G \frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K}}_B \quad (2.49)$$

με χρήση της ιακωβιανής των μη-συντηρητικών ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left[-T + \frac{\gamma-1}{2R} (u^2 + v^2 + w^2) \right] & -\frac{\gamma-1}{R} \frac{u}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{R} \frac{v}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{R} \frac{w}{\rho} & \frac{\gamma-1}{R} \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

Ο όρος A της εξ. 2.49 δίνει διαγώνιους και μη-διαγώνιους όρους πρώτων γειτόνων, ανεξάρτητα από το σχήμα σάρωσης (στοιχείων ή ακμών). Στον όρο B , η ποσότητα $\frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G$ αντιμετωπίζεται διαφορετικά σε καθένα από τα σχήματα σάρωσης.

Στο σχήμα σάρωσης στοιχείων, η κλίση $\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G$ λαμβάνεται από την εξ. 2.31, η οποία εμπλέκει για κάθε κόμβο μόνο τους πρώτους γείτονες, άρα διαφορίζεται ακριβώς. Στο σχήμα σάρωσης ακμών, εξ. 2.32 και 2.33, η κλίση εμπλέκει και άλλους κόμβους πέραν των πρώτων γειτόνων, μέσω της ποσότητας $\overline{\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^M}$. Για να αποφευχθεί αυτό, η κλίση στο μεσόκομβο προσεγγίζεται από την προβολή της στο

διάνυσμα \hat{x}^{PQ} , δηλαδή

$$\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r}\right)^G \approx \left(\frac{\partial W_j}{\partial n}\right)^M \hat{x}_r^{PQ} = \frac{W_j^Q - W_j^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \hat{x}_r^{PQ}$$

η οποία διαφορίζεται δίνοντας πάλι διαγώνιες και μη-διαγώνιες συνεισφορές πρώτων γειτόνων.

2.5.4 Αριστερό μέλος του μοντέλου τύρβης

Η γραμμικοποίηση του μοντέλου τύρβης πραγματοποιείται με την απαίτηση το προκύπτον σχήμα να είναι ευσταθές και να υπολογίζει σε κάθε επανάληψη θετικό πεδίο της μεταβλητής $\rho\tilde{\mu}$. Ο τελεστής υπολοίπου του μοντέλου τύρβης, R_{SA} , γράφεται συμβολικά στην παρακάτω μορφή

$$R_{SA} = C(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} + D(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} + S(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} + T$$

όπου, όπως και στην εξ. 2.6, ο όρος $C(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}$ μοντελοποιεί τη μεταφορά της τύρβης, ο όρος $D(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}$ τη διάχυση αυτής, ο όρος $S(\rho\tilde{\mu})\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}$ την παραγωγή και καταστροφή αυτής ενώ T είναι ο όρος μετάβασης, αν χρησιμοποιείται. Το διάνυσμα $\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}$ είναι συμβολικά το πεδίο της ποσότητας $\rho\tilde{\mu}$. Απαιτείται οι αντίστοιχοι τελεστές

γραμμικοποίησης, $\frac{\partial C\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})}$, $\frac{\partial D\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})}$, $\frac{\partial S\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})}$ να είναι M -πίνακες, [184], και επιπλέον να ισχύει

$$\begin{aligned} \left[C - \frac{\partial C\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})} \right] \vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} &\geq 0 \\ \left[D - \frac{\partial D\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})} \right] \vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} &\geq 0 \\ \left[S - \frac{\partial S\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}}}{\partial(\rho\tilde{\mu})} \right] \vec{U}_{\rho\tilde{\mu}} &\geq 0 \end{aligned}$$

Όρος μεταφοράς: Διαφόριση του τελεστή μεταφοράς, εξ. 2.34, ως προς τις μεταβλητές ροής ικανοποιεί τις συνθήκες που έχουν τεθεί.

Όρος διάχυσης: Διαφόριση του τελεστή διάχυσης ως προς τις μεταβλητές ροής δίνει και στα δύο σχήματα που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία (σχήμα σάρωσης στοιχείων, εξ. 2.35, και σχήμα σάρωσης ακμών, εξ. 2.36) θετικούς τελεστές που δεν διαταράσσουν την ευστάθεια του επιλύτη. Υπενθυμίζεται ότι η κατάλληλη προσέγγιση για υβριδικά πλέγματα είναι αυτή της σάρωσης ακμών.

Αυτή περιλαμβάνει τη διαφορίση της ποσότητας $\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^G$, η οποία, όπως και στη διαχείριση των όρων διάχυσης για τις εξισώσεις μέσης ροής, δίνει μη-διαγώνιες

συνεισφορές που, χάριν οικονομίας μνήμης, είναι καλό να αγνοηθούν. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση της παρακάτω προσέγγισης στη θέση της ακριβούς έκφρασης

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^G \approx \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial n}\right)^M \hat{x}_r^{PQ} = \frac{\tilde{\mu}^Q - \tilde{\mu}^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \hat{x}_r^{PQ}$$

Όρος πηγής: Ως γραμμικοποίηση των όρων πηγής, η οποία δίνει θετικούς τελεστές και ευσταθείς λύσεις, προτείνεται στη βιβλιογραφία το απόλυτο της ακριβούς διαφορίσης των όρων πηγής, δηλαδή

$$\overline{\frac{\partial(S\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}})}{\partial(\rho\tilde{\mu})}} = \max \left[\frac{\partial(S\vec{U}_{\rho\tilde{\mu}})}{\partial(\rho\tilde{\mu})}, 0 \right]$$

Η ακριβής διαφορίση πραγματοποιείται με διαδοχική χρήση του κανόνα της αλυσίδας, αναλυτικά δε περιέχεται σε παλαιότερη διπλωματική εργασία του ΕΘΣ, [217].

2.5.5 Αριστερό μέλος των οριακών συνθηκών

Αντίστοιχα με τους όρους μεταφοράς γραμμικοποιούνται τα διανύσματα ατρίβους ροής στα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου. Διαφορίση της σχέσης 2.41 δίνει

$$\frac{\partial \Phi_n^{P,out}}{\partial U_m^P} = A_{ni}^+ + A_{nj}^- \frac{\partial U_j^{out}}{\partial U_m^P}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει μόνο διαγώνιες συνεισφορές στον οριακό κόμβο P . Αντίστοιχα διαφορίζεται η σχέση 2.39, δίνοντας διαγώνιες συνεισφορές στους οριακούς κόμβους του ορίου συμμετρίας καθώς και του στερεού ορίου για τις περιπτώσεις ατρίβων ροών (στις συνεκτικές ροές οι αντίστοιχες συνθήκες είναι Dirichlet).

Στην περίπτωση που επιλύονται τυρβώδεις ροές με χρήση συναρτήσεων τοίχου, οι συνεισφορές του στερεού ορίου στο αριστερό μέλος αμελούνται, χωρίς να βλάπτεται η ταχύτητα σύγκλισης του επιλύτη.

2.6 Προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση

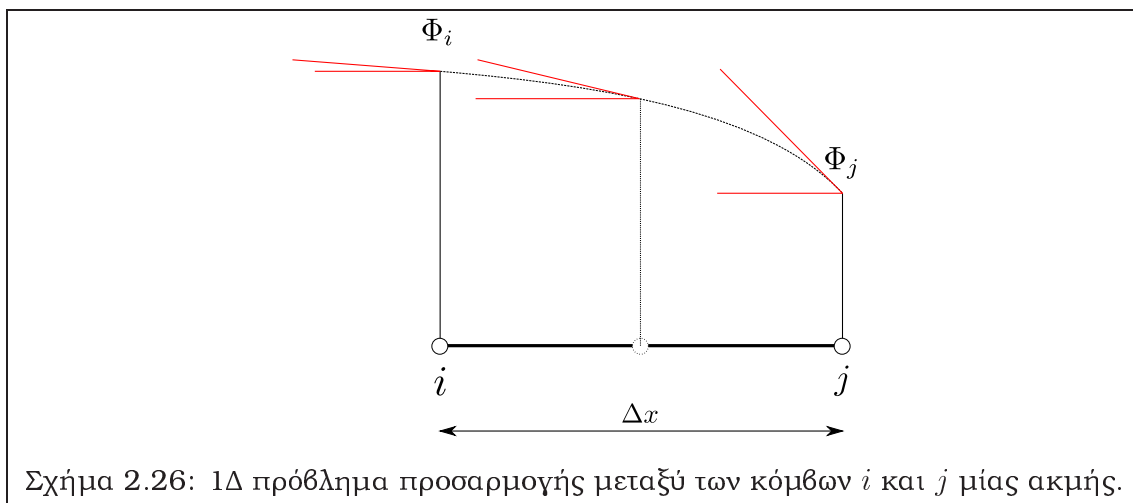
Στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής επεκτάθηκε προϋπάρχουσα μέθοδος προσαρμογής πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, [1], [4], σε 2D υβριδικά πλέγματα. Η μέθοδος περιλαμβάνει μόνο εμπλουτισμό με εισαγωγή επιπλέον κόμβων στο υπολογιστικό πλέγμα (δε λαμβάνει χώρα δηλαδή απεμπλουτισμός, τα οφέλη του οποίου θεωρήθηκε ότι υστερούν ως προς τις αυξημένες απαιτήσεις μνήμης και την πολυπλοκότητα προγραμματισμού, [1]). Πρόκειται για μέθοδο προσαρμογής, η

οποία διατηρεί τις γενικές αρχές τοπολογίας και την αρχική φυσιογνωμία του πλέγματος.

Η ανάπτυξη μιας μεθόδου προσαρμογής πλέγματος μπορεί να χωριστεί σε δύο βήματα. Αρχικά, ορίζεται το κριτήριο προσαρμογής και υπολογίζονται τα μεγέθη που εμπλέκονται σε αυτό στις ακμές του πλέγματος, έτσι ώστε να εντοπιστούν οι ακμές που είναι υποψήφιες για διάσπαση. Το δεύτερο βήμα περιλαμβάνει την εισαγωγή των νέων κόμβων και την παρεμβολή των ροϊκών μεγεθών από τους αρχικούς κόμβους στους νέους καθώς και τη δημιουργία των νέων πλεγματικών στοιχείων και την εισαγωγή τους στην υπάρχουσα δομή δεδομένων. Σχετικά με τα κριτήρια προσαρμογής, στην παρούσα διατριβή μελετώνται δύο κατηγορίες κριτηρίων. Η πρώτη κατηγορία αφορά σε μεθόδους προσαρμογής πλεγμάτων στην υπό εξέλιξη λύση βάσει των τιμών που λαμβάνουν οι κλίσεις των ροϊκών μεγεθών και θα παρουσιαστεί στο παρόν κεφάλαιο ενώ η δεύτερη εντάσσεται στο πλαίσιο της *a posteriori* ανάλυσης σφάλματος και των συζυγών μεθόδων, οπότε η περιγραφή της θα ακολουθήσει μετά από την παρουσίαση της σχετικής θεωρίας.

2.6.1 Κριτήριο προσαρμογής

Για την αξιολόγηση των υποψήφιων για διάσπαση ακμών επιλέγεται αρχικά ένα ροϊκό μέγεθος Φ ως αισθητήριο (λ.χ. ο αριθμός Mach), που να σχετίζεται με το φαινόμενο το οποίο επιθυμούμε να υπολογίσουμε ακριβέστερα (λ.χ. κύμα κρούσης), μία συνάρτηση κρίσης S η οποία χρησιμοποιεί το αισθητήριο για να βαθμολογήσει τις ακμές και ένα κατώφλι εμπλουτισμού T . Όλα αυτά μπορούν να συνοψιστούν σε ένα 1D πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ των δύο κόμβων i και j μιας ακμής, σχ. 2.26.



Σχήμα 2.26: 1D πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ των κόμβων i και j μιας ακμής.

Η συνάρτηση κρίσης μπορεί να εκφραστεί είτε ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ των τιμών του αισθητηρίου στους δύο κόμβους, $S = |\Phi_i - \Phi_j|$ είτε συναρτήσει της κλίσης του αισθητηρίου, $S = \left| \frac{\Phi_i - \Phi_j}{\Delta x} \right|$. Η πρώτη έκφραση λαμβάνει υπόψη

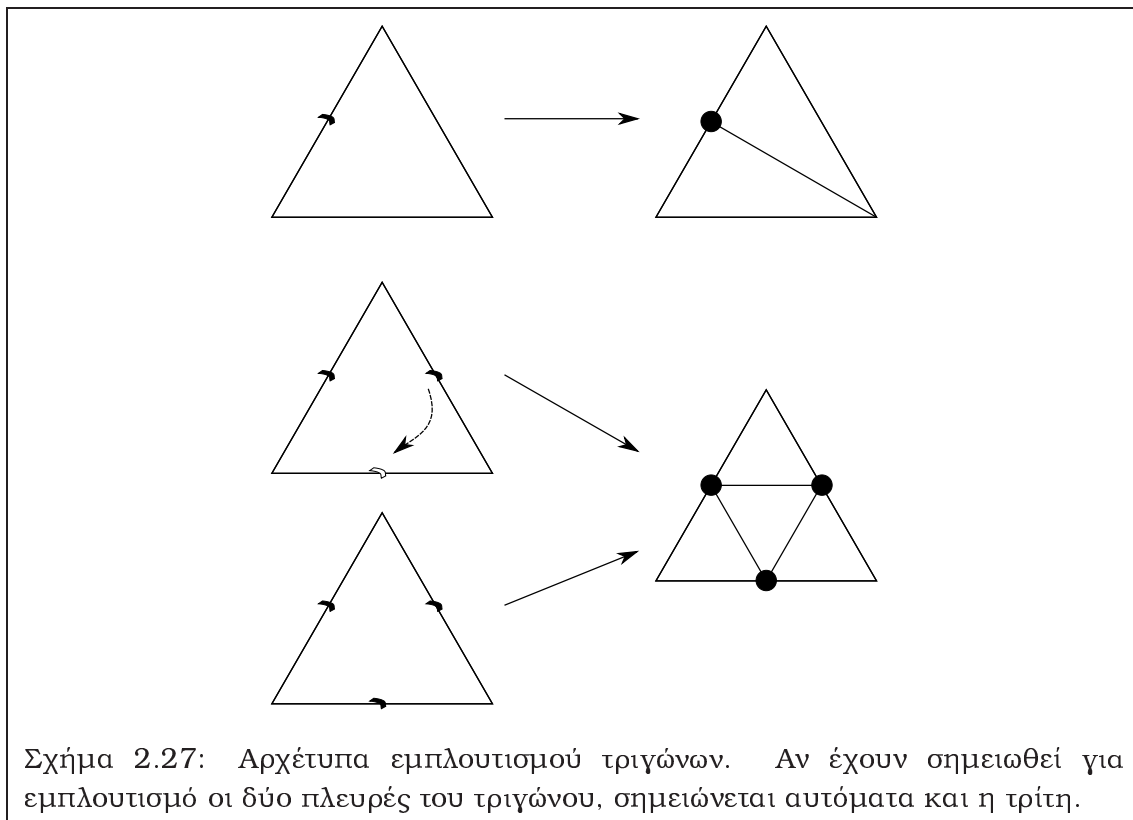
συγχρόνως την απόλυτη διαφορά της τιμής του αισθητηρίου, εμπλουτίζοντας με αυτό τον τρόπο και ακμές μεγάλου μήκους στις οποίες παρουσιάζεται γραμμική κατανομή του αισθητηρίου. Η δεύτερη έκφραση τείνει να εγκλωβίσει την προσαρμογή σε περιοχές με μεγάλη κλίση της συνάρτησης του αισθητηρίου και ενεργοποιείται συνήθως σε ακμές στις οποίες το αισθητήριο παρουσιάζει έντονη μη-γραμμικότητα, εμπλουτίζοντάς τις επ' άπειρο. Ο επ' άπειρο εμπλουτισμός γενικά δεν είναι επιθυμητός και αποφεύγεται θέτοντας περιορισμούς ως προς το ελάχιστο μήκος ακμής, [218]. Ο υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης κρίσης ακολουθείται από σύγκρισή της με ένα κατώφλι εμπλουτισμού που ορίζεται από το χρήστη και το αποτέλεσμα αποθηκεύεται σε ένα λογικό δείκτη ($S \geq T: 1, S < T: 0$) που υποδεικνύει τις υποψήφιες για διάσπαση ακμές.

2.6.2 Κανόνες προσαρμογής

Το κριτήριο προσαρμογής συμπληρώνεται με ένα σύνολο κανόνων οι οποίοι διασφαλίζουν τη διατήρηση της αρχικής μορφής και ποιότητας του πλέγματος έτσι ώστε η διαδικασία να μην απαιτεί επέμβαση στο σχήμα επίλυσης της ροής. Η ποιότητα των στοιχείων του πλέγματος ποσοτικοποιείται συνήθως μέσω μετρικών που εκτιμούν την απόκλιση του σχήματος των πλεγματικών στοιχείων (γωνίες, λόγος επιμήκους κλπ.) από ένα στοιχείο αναφοράς, [219], που συνήθως είναι το ισόπλευρο τρίγωνο/τετράγωνο σε 2D πλέγματα και το πλατωνικό τετράεδρο/κύβος σε 3D. Συγκεκριμένα :

- Ορίζονται αρχέτυπα εμπλουτισμού ενός γονικού στοιχείου σε δύο ή περισσότερα, για τα τρίγωνα (σχ. 2.27) και για τα τετράπλευρα (σχ. 2.28), ανάλογα με τις σημειωμένες για εμπλουτισμό πλευρές τους.
- Αν σημειωθούν δύο πλευρές ενός τριγώνου για προσαρμογή, τότε σημειώνεται αυτόματα και η τρίτη, σχ. 2.27.
- Κάθε νέος κόμβος εισάγεται στο μέσο της εκάστοτε σημειωμένης ακμής, εκτός αν αυτή βρίσκεται στο στερεό όριο. Σε αυτήν την περίπτωση, το στερεό όριο προσεγγίζεται με κάποια παραμετρικοποίηση (λ.χ. κυβική καμπύλη Spline) και ο κόμβος εισάγεται στη θέση που υποδεικνύει η καμπύλη, σχ. 2.29. Προσοχή πρέπει να δοθεί σε περιπτώσεις που ο πρώτος εσωτερικός κόμβος βρίσκεται πολύ κοντά στο στερεό όριο (λ.χ. προλέξεις τυρβωδών ροών) διότι η προσαρμογή μπορεί να δώσει άκυρα πλεγματικά στοιχεία, σχ. 2.29 κάτω.
- Προκειμένου να διατηρηθεί η αρχική δομή του πλέγματος, δεν επιτρέπεται η ύπαρξη περισσότερων των δύο κόμβων σε μία ακμή. Αυτό σημαίνει ότι όταν σημειωθεί μία ακμή για διάσπαση, διασπώνται πάντοτε και τα δύο εκατέρωθεν στοιχεία, σχ. 2.30. Ο αντίστοιχος κανόνας για τα περιοδικά όρια μεταφράζεται στο να σημειωθεί αυτόματα για διάσπαση μία ακμή, αν έχει ήδη σημειωθεί η αντίστοιχη περιοδική της, σχ. 2.31.

- Για να μην υπάρχει συνεχής υποβάθμιση της ποιότητας των στοιχείων του πλέγματος, τα στοιχεία πρέπει να διασπώνται κατά το δυνατόν ισότροπα.

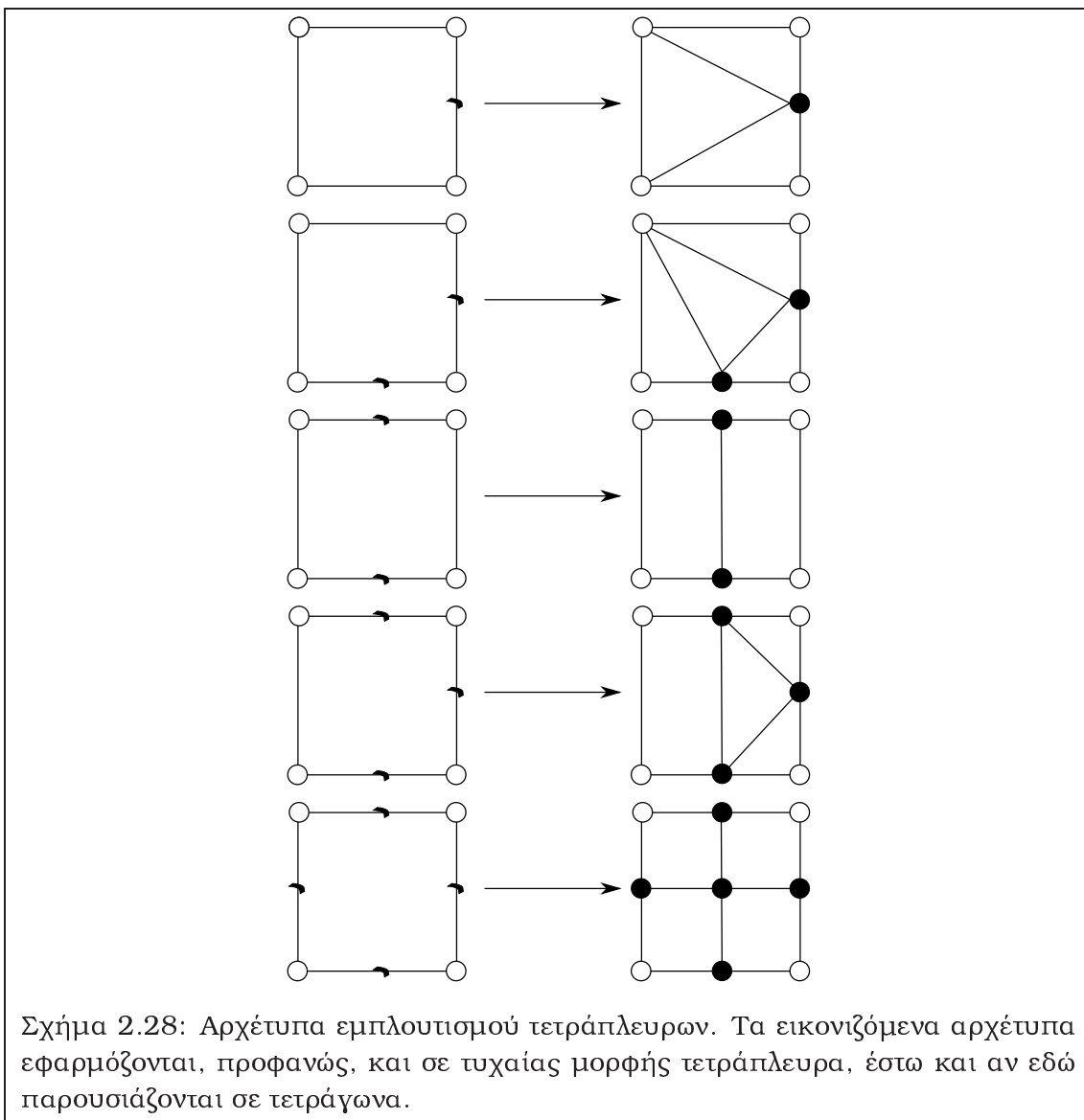


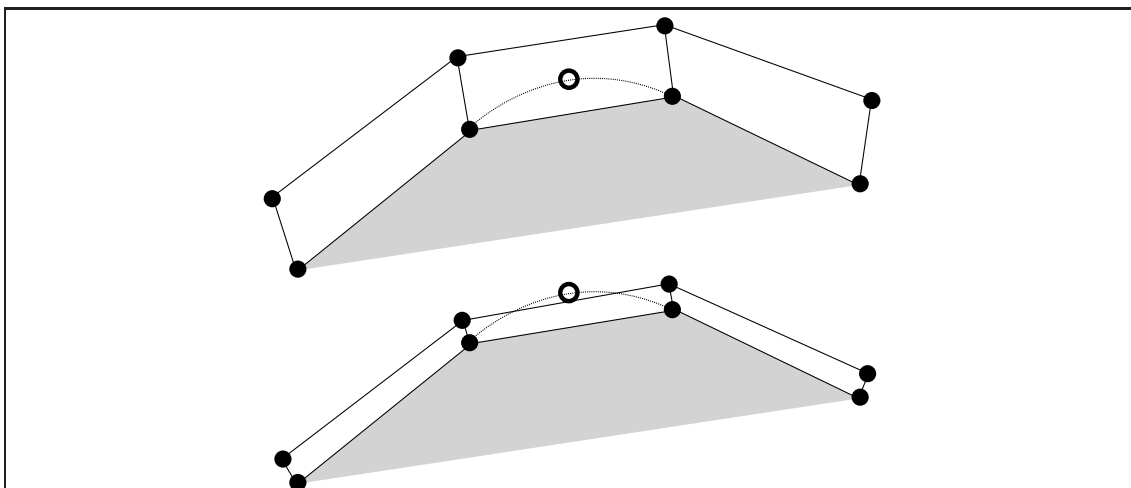
Σχήμα 2.27: Αρχέτυπα εμπλουτισμού τριγώνων. Αν έχουν σημειωθεί για εμπλουτισμό οι δύο πλευρές του τριγώνου, σημειώνεται αυτόματα και η τρίτη.

Το τελευταίο σημείο αξίζει λεπτομερέστερη περιγραφή. Τα στοιχεία που προέρχονται από ένα γονικό στοιχείο αποθηκεύονται σε ένα γενεαλογικό πίνακα δύο επιπέδων (γονέων-παιδιών). Αν σημειωθεί σε κάποιο από τα στοιχεία αυτά μία ακμή η οποία ανήκε στο γονικό στοιχείο, τότε έχουμε απλή μετάπτωση σε κάποιο από τα άλλα αρχέτυπα του γονικού στοιχείου. Δηλαδή, διαγράφονται όλα τα στοιχεία που προέρχονται από το γονικό, χωρίς όμως να διαγράφονται οι κόμβοι τους, εισάγονται οι νέοι κόμβοι στις σημειωμένες πλευρές και, τελικώς, διασπάται το γονικό στοιχείο με τρόπο που υποδεικνύεται από τους εισαχθέντες κόμβους. Αν έχει σημειωθεί κάποια ακμή που δεν ανήκει στο γονικό στοιχείο, τότε πρώτα λαμβάνει χώρα ισότροπη διάσπαση του γονικού στοιχείου και έπειτα, αν η σημειωμένη ακμή συνεχίζει να υφίσταται ως ενιαία, λαμβάνει χώρα επιπλέον διάσπασή της. Παραδείγματα των παραπάνω φαίνονται στο σχ. 2.32 για τρίγωνα και στο σχ. 2.33 για τετράπλευρα.

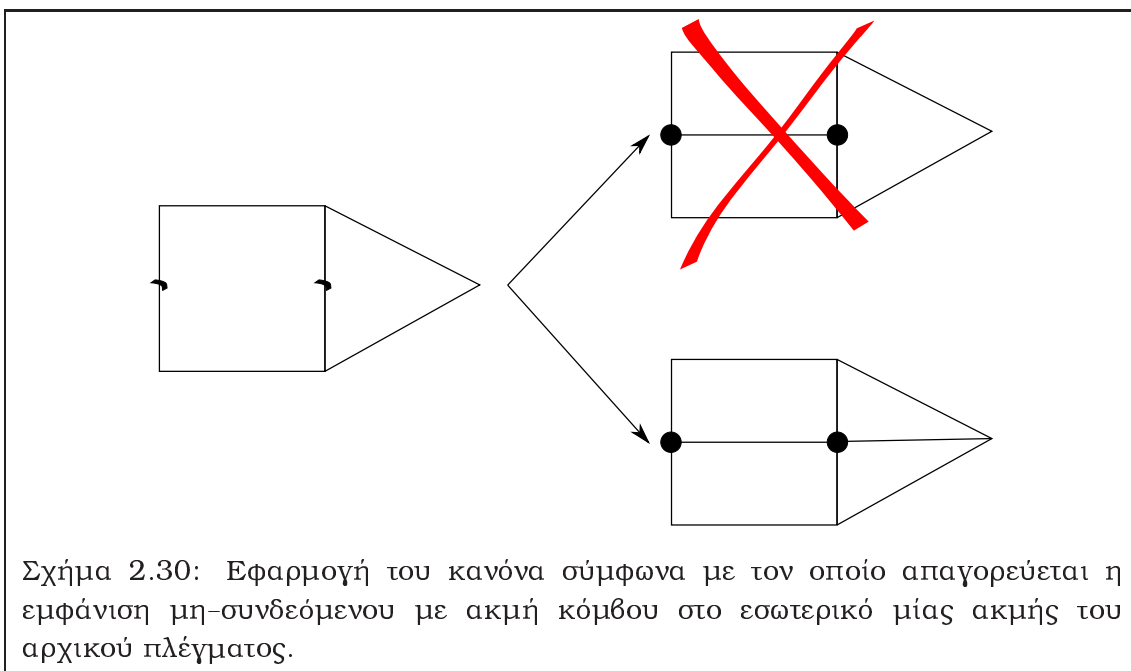
2.7 Παραλληλοποίηση

Η μέθοδος επίλυσης ροής που αναλύθηκε προγραμματίστηκε για παράλληλα υπολογιστικά συστήματα κατανεμημένης μνήμης, όπως αυτό του ΕΘΣ που

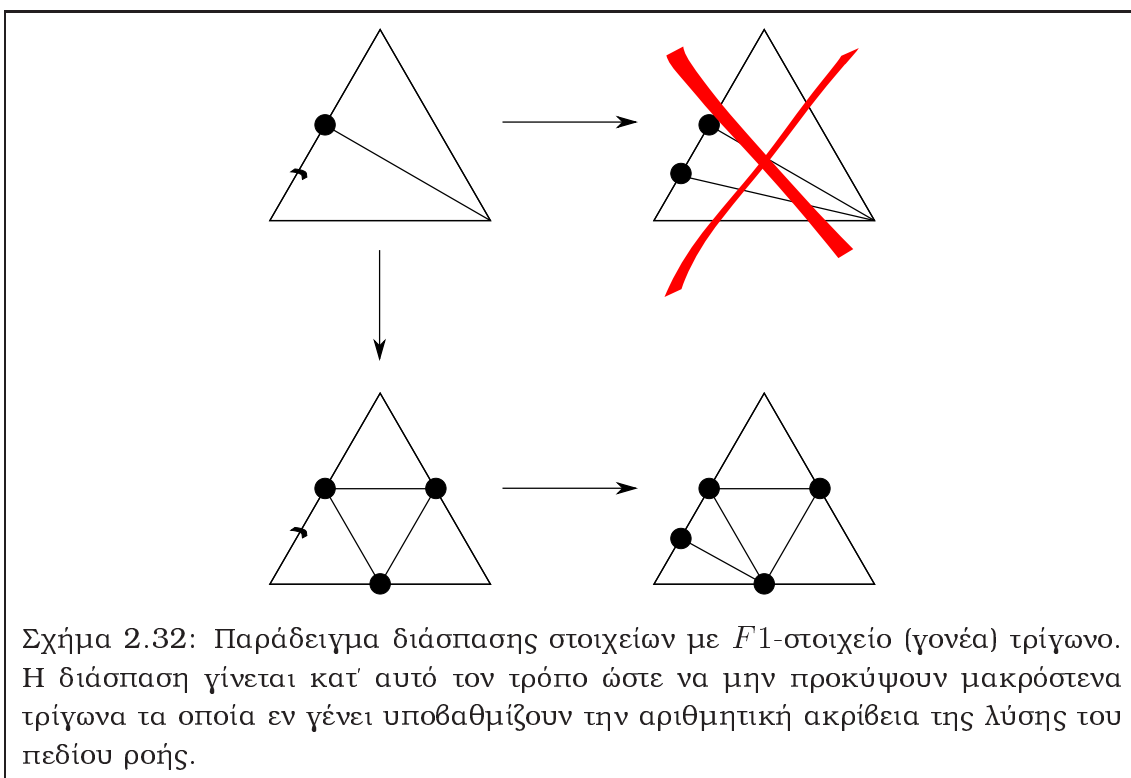
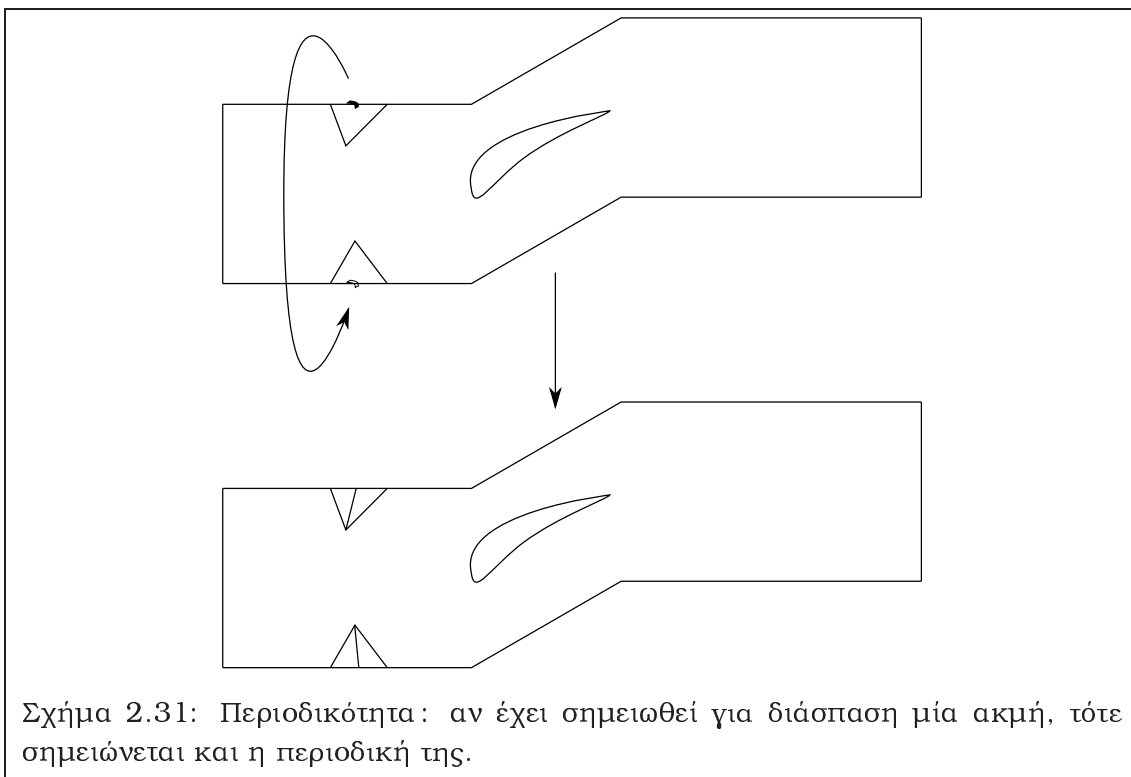


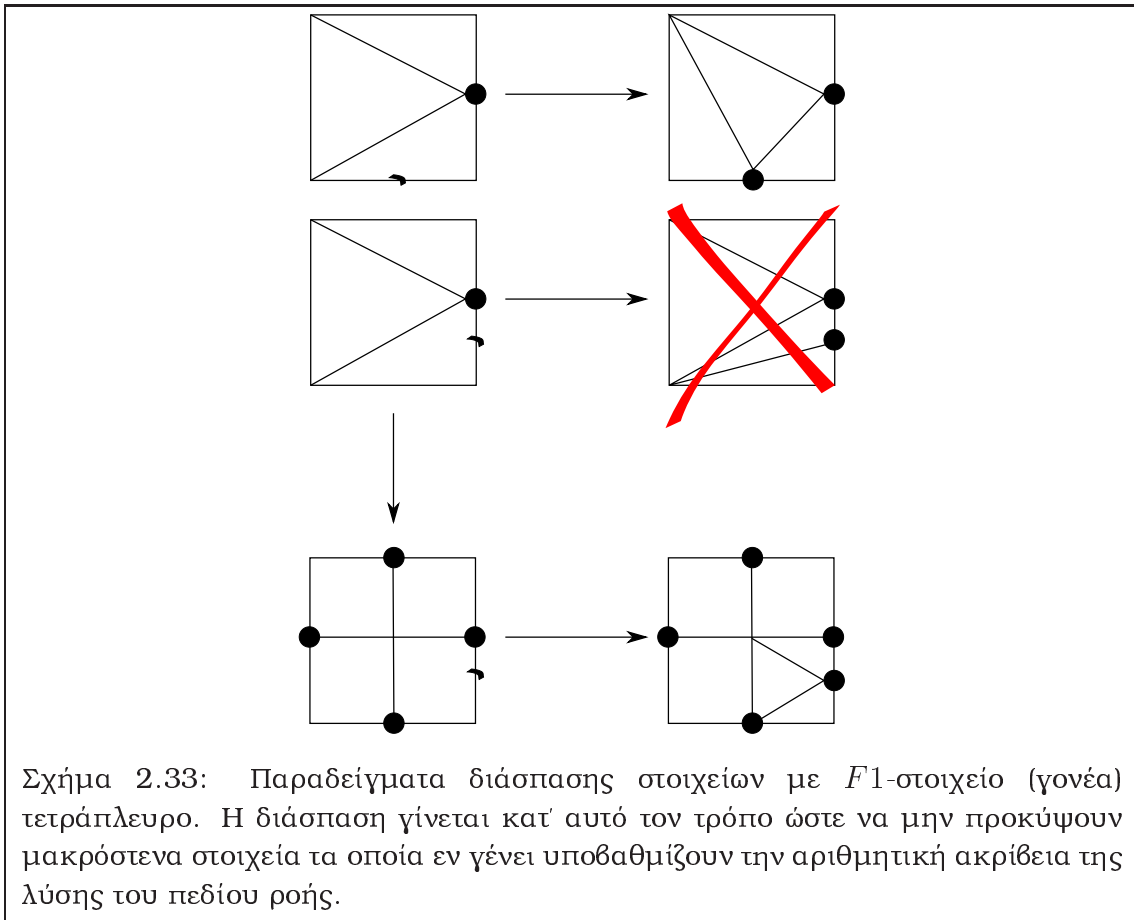


Σχήμα 2.29: Εισαγωγή νέου κόμβου στο στερεό όριο με προσέγγιση της καμπύλης λ.χ. ως κυβικής Spline. Παράδειγμα αποδεκτής προσαρμογής (άνω) και μη-αποδεκτής προσαρμογής λόγω μεγάλης ανισοτροπίας του πλέγματος σε συνδυασμό με τη μεγάλη καμπυλότητα του ορίου (κάτω). Προκειμένου να μην προκύψει τέτοιου είδους μη-αποδεκτή προσαρμογή φροντίζεται ο λόγος επιμήκους της πρώτης διαστρωμάτωσης σε αυτές τις περιοχές του ορίου να είναι αρκούτως μικρός, ενδεχομένως με την εισαγωγή περισσότερων κόμβων πάνω στο όριο πριν την κατασκευή του πλέγματος.



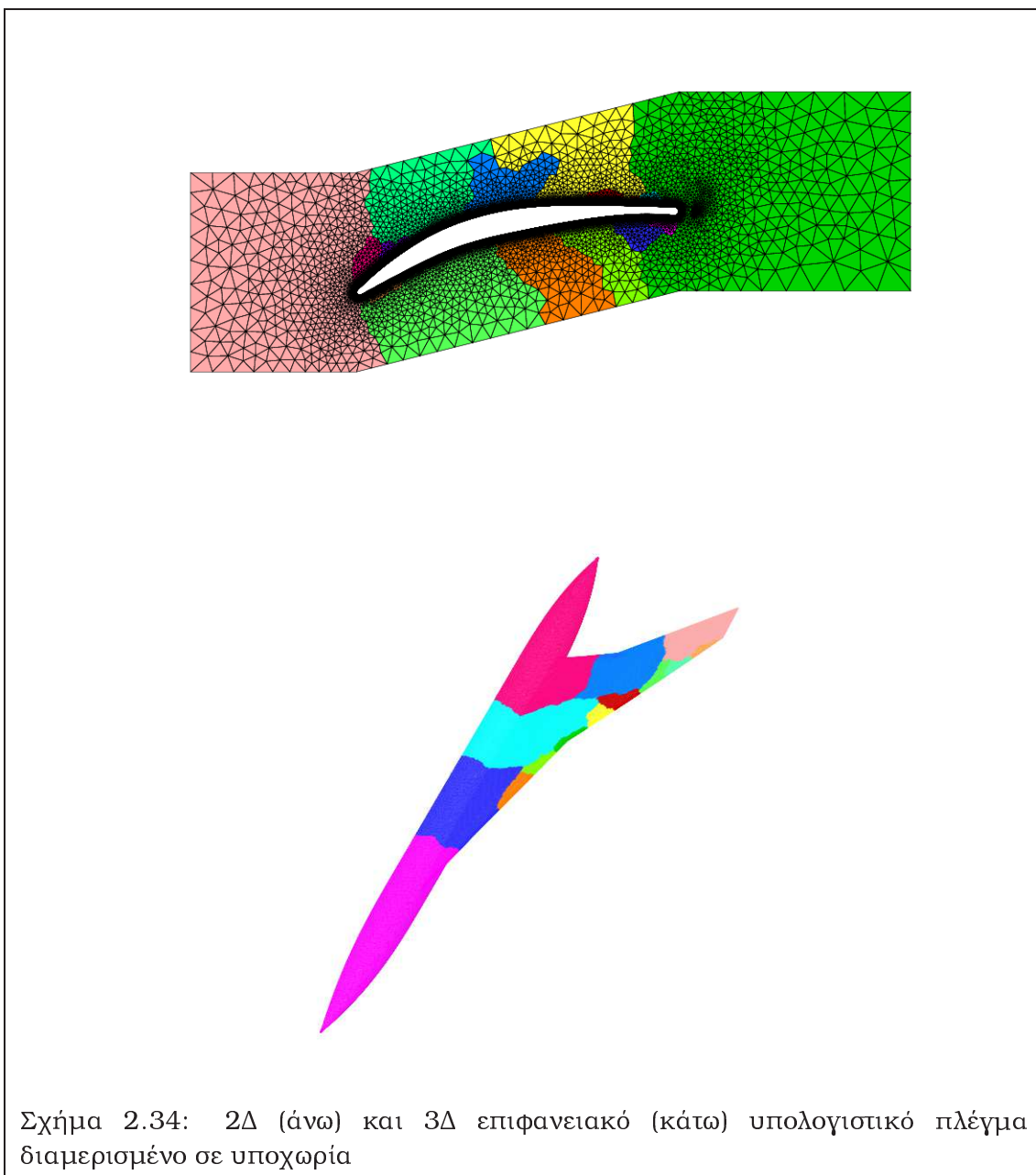
Σχήμα 2.30: Εφαρμογή του κανόνα σύμφωνα με τον οποίο απαγορεύεται η εμφάνιση μη-συνδεόμενου με ακμή κόμβου στο εσωτερικό μίας ακμής του αρχικού πλέγματος.





παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.5, με χρήση των πρωτοκόλλων ανταλλαγής μηνυμάτων PVM και MPI και την τεχνική των πολλαπλών υποχωρίων. Το υπολογιστικό πλέγμα χωρίζεται σε N μη-αλληλοκαλυπτόμενα υποχωρία, όπου N είναι οι διαθέσιμοι επεξεργαστές, σχ. 2.34. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται μείωση του συνολικά απαιτούμενου χρόνου από T_s , που είναι ο χρόνος για μία σειριακή προσομοίωση, σε $T_p = T_s \frac{1}{(1-P) + \frac{P}{N}} + \tau$ σύμφωνα με το νόμο του Amdahl, όπου N ο αριθμός των επεξεργαστών, P το ποσοστό παραλληλοποίησης του επιλύτη και τ ένας συντελεστής που λαμβάνει υπόψη το κόστος επικοινωνίας και την ανομοιογένεια σε υπολογιστική ισχύ του παράλληλου συστήματος, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη περιόδων αδράνειας των ισχυρότερων υπολογιστικών μονάδων.

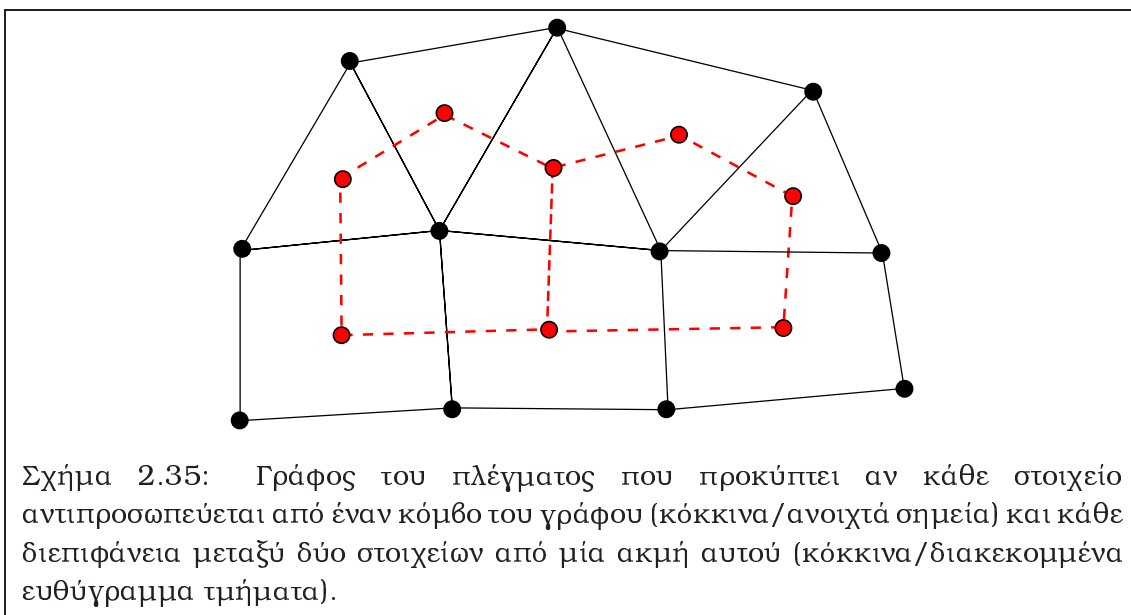
Ο διαμερισμός του πλέγματος αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα διαμερισμού του γράφου στον οποίο αντιστοιχίζεται το πλέγμα. Συνήθης τρόπος αντιστοίχισης είναι αυτός κατά τον οποίο υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοίχιση κάθε κόμβου του γράφου με ένα πλεγματοεικό στοιχείο, σχ. 2.35. Ο διαμερισμός γίνεται υπό την απαίτηση ίσης κατανομής στοιχείων (ώστε να ισομοιράζεται το υπολογιστικό φορτίο και οι απαιτήσεις μνήμης στους διαθέσιμους επεξεργαστές) και ελαχιστοποίησης της διεπιφάνειας μεταξύ των υποχωρίων (προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος



επικοινωνίας). Οι δύο απαιτήσεις αυτές συγκεράζονται στην παρακάτω συνάρτηση στόχου, λ.χ. για διχοτόμηση ενός τμήματος του υπολογιστικού χωρίου

$$F(N_1, N_2, N_{ce}) = \frac{\|N_1 - N_2\|}{\sqrt{N_1 N_2}} + w \frac{N_{ce}}{N_e}$$

όπου N_1 , N_2 τα στοιχεία των δύο διαμερίσεων που θα προκύψουν από τη διχοτόμηση, N_{ce} οι ακμές της μεταξύ τους διεπιφάνειας, N_e το σύνολο των ακμών του πλέγματος και w μία παράμετρος που επιλέγεται από τον χρήστη. Ο διαμερισμός του γράφου μοντελοποιείται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της παραπάνω συνάρτησης στόχου, το οποίο επιλύεται με μία μέθοδο που βασίζεται στη θεωρία των εξελικτικών αλγορίθμων, [220], [221], [222] και έχει αναπτυχθεί στο ΕΘΣ. Η παραπάνω μέθοδος διαμερίζει το υπολογιστικό χωρίο σε 2^N τμήματα πραγματοποιώντας διαδοχικές διχοτομήσεις, σε κάθε μία από τις οποίες ικανοποιούνται οι προαναφερθείσες απαιτήσεις ως προς την ίση κατανομή των στοιχείων και της ελαχιστοποίησης της διεπιφάνειας μεταξύ των υποχωρίων. Στην [220] προτείνεται η παράμετρος w να λαμβάνει τιμές από 10 έως 30.



Η μέθοδος των [220], [221], [222] αναπτύχθηκε για τριγωνικά (2Δ) και τετραεδρικά (3Δ) πλέγματα αλλά χρησιμοποιείται για το διαμερισμό υβριδικών πλεγμάτων χωρίς τροποποίηση. Η χρήση της μεθόδου αυτής, στην πρωτότυπη μορφή της, δε λαμβάνει υπόψη το διαφορετικό υπολογιστικό κόστος που επιφέρει κάθε τύπος πλεγματοειδούς στοιχείου κατά την επίλυση λόγω του διαφορετικού αριθμού ακμών (πραγματικών και εικονικών). Βελτίωση της μεθόδου θα μπορούσε να είναι η ανάθεση βαρών ανάλογων με το υπολογιστικό κόστος κάθε τύπου πλεγματοειδούς στοιχείου, κάτι τέτοιο όμως θα απαιτούσε επέμβαση σε λογισμικό που λαμβάνεται 'ως έχει' και ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας διατριβής.

Ο παράλληλος αλγόριθμος λειτουργεί σύμφωνα με το μοντέλο συντονιστή-εργάτη. Μία διεργασία, σε ανώτερο επίπεδο (διεργασία-συντονιστής),

υπολογίζει και αποθηκεύει τη δομή δεδομένων του συνολικού πλέγματος καθώς και τις απαραίτητες πληροφορίες για τις γειτνιάσεις των υποχωρίων και τους ενδοσυνοριακούς κόμβους και ακμές που εμπλέκονται στις επικοινωνίες. Οι διεργασίες-εργάτες πραγματοποιούν την επίλυση των εξισώσεων στα υποχωρία. Πακέτα πληροφοριών αποστέλλονται περιοδικά (κατά τη διάρκεια του επαναληπτικού σχήματος επίλυσης) από τους εργάτες στη διεργασία-συντονιστή, η οποία αναλαμβάνει τη συλλογή και εγγραφή των αποτελεσμάτων καθώς και τον έλεγχο του κριτηρίου σύγκλισης και τον τερματισμό της επίλυσης. Οι επικοινωνίες μεταξύ των εργατών είναι σύγχρονες (τα σημεία επικοινωνίας δηλαδή είναι και σημεία συγχρονισμού των επεξεργασιών) και ακολουθούν την τεχνική της διανομής/συλλογής μηνυμάτων¹⁰ κατά την οποία στα σημεία επικοινωνίας κάθε εργάτης αποστέλλει ταυτόχρονα τα πακέτα επικοινωνίας σε όλα τα γειτονικά υποχωρία. Έπειτα, συλλέγει από αυτά ταυτόχρονα τα αντίστοιχα πακέτα που προορίζονται για αυτόν, τα επεξεργάζεται και συνεχίζει την επίλυση. Η τεχνική αυτή είναι αποδοτικότερη από την τεχνική ανταλλαγής μηνυμάτων¹¹ κατά την οποία η αποστολή και συλλογή των πακέτων επικοινωνίας από και προς ένα γειτονικό υποχωρίο πρέπει να ολοκληρωθεί πριν προωθηθεί η επικοινωνία με άλλο υποχωρίο, [223], [1].

Ένα ακόμα πλεονέκτημα της τεχνικής των πολλαπλών υποχωρίων, πέραν της επιτάχυνσης του αλγόριθμου επίλυσης, είναι η δυνατότητα που προσφέρει να εκτελούνται προσομοιώσεις ιδιαίτερα απαιτητικές σε μνήμη. Αυτό οφείλεται στο ότι η συνολική μνήμη του παράλληλου υπολογιστικού συστήματος είναι ίση με το άθροισμα της μνήμης των επιμέρους πόρων (πάλι υπάρχει ένας συντελεστής ο οποίος λαμβάνει υπόψη τις απαιτήσεις σε μνήμη της διεργασίας-συντονιστή καθώς και επιπλέον απαιτήσεων που επιβάλλει η παραλληλοποίηση στις διεργασίες-εργάτες).

Κατά την παραλληλοποίηση του επιλύτη δόθηκε έμφαση στην ισοδυναμία της διαδικασίας επίλυσης στο σειριακό και στον παράλληλο αλγόριθμο. Η ισοδυναμία αυτή πιστοποιήθηκε με σύγκριση των τελικών αποτελεσμάτων και του ρυθμού σύγκλισης που προκύπτουν από τις αντίστοιχες σειριακές και παράλληλες προσομοιώσεις. Τα βασικά σημεία επικοινωνίας/συγχρονισμού είναι:

- στον υπολογισμό διαφόρων γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως εμβαδών/όγκων ή συντελεστών μορφής, κατά τον υπολογισμό των επιμέρους δομών δεδομένων των υποχωρίων
- στον υπολογισμό του χρονικού βήματος, εξ. 2.38, όπου απαιτείται άθροιση των προβολών του ορίου των κυψελών ελέγχου από κάθε υποχωρίο στους κόμβους επικοινωνίας
- στον υπολογισμό κλίσεων μεταβλητών, εξ. 2.22, 2.25 και 2.28 όπου πραγματοποιείται άθροιση των συνεισφορών από κάθε υποχωρίο στους κόμβους επικοινωνίας

¹⁰distribution/collection of messages

¹¹message exchange

- στην άθροιση των συνεισφορών που έχουν υπολογιστεί για το δεξί μέλος των επιλυόμενων εξισώσεων στους κόμβους επικοινωνίας
- στην άθροιση των επιμέρους αθροισμάτων που υπολογίζονται ανά υποχωρίο σε κάθε επανάληψη Jacobi (προφανώς αν χρησιμοποιείται μέθοδος Runge–Kutta αυτό το σημείο επικοινωνίας δεν υφίσταται) στους κόμβους επικοινωνίας (οι επικοινωνίες ουσιαστικά εξισώνουν/συμπληρώνουν το αριστερό μέλος των εξισώσεων στους κόμβους αυτούς για όλα τα υποχωρία)

2.8 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μέθοδος επίλυσης τυρβωδών ροών με χρήση υβριδικών πλεγμάτων που αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής. Η μέθοδος βασίζεται στην υπόθεση ισοπαραμετρικών πλεγματικών στοιχείων και της διγραμμικής (σε 2Δ) και τριγραμμικής (σε 3Δ) κατανομής των μεταβλητών σε αυτά. Οι κατανομές αυτές δίνουν αλγόριθμους και εκφράσεις για τον υπολογισμό του όγκου, τον έλεγχο κυρτότητας των στοιχείων, τον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων των μεταβλητών ροής και τον υπολογισμό του ψευδοχρονικού βήματος που αντιμετωπίζουν με ενιαίο τρόπο τα ετερογενή στοιχεία του υπολογιστικού πλέγματος (τρίγωνα/τετράπλευρα σε 2Δ και τετράεδρα/πυραμίδες/πρίσματα/εξάεδρα σε 3Δ) κατά τη διάρκεια της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων και στο μεγαλύτερο μέρος της προεπεξεργασίας/μετεπεξεργασίας. Επίσης, οι κατανομές αυτές χρησιμοποιούνται για τον ορισμό λείων διεπιφανειών μεταξύ των πλεγματικών στοιχείων, οπότε αποφεύγονται κάθε είδους παραδοχές που τυπικά συναντώνται σε αντίστοιχες μεθόδους της βιβλιογραφίας (όπως λ.χ. ‘σπάσιμο’ των μη-συνεπίπεδων τετραπλευρικών εδρών των πλεγματικών στοιχείων σε δύο τριγωνικές, απλοποιητικές/αφαιρετικές παραδοχές στους όρους διάχυσης ή/και στις εκφράσεις υπολογισμού των χωρικών κλίσεων) και οι οποίες μειώνουν κατά περίπτωση την τάξη ακρίβειας δευτέρου βαθμού του σχήματος. Τα βάρη που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων αποθηκεύονται κατά ακμές (σε 2Δ) και κατά κόμβους στοιχείων (σε 3Δ), ώστε να επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη δυνατή εξοικονόμηση μνήμης. Η μέθοδος που παρουσιάζεται έχει παραλληλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τα πρωτόκολλα PVM και MPI και περιλαμβάνει τεχνικές προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων.

Κεφάλαιο 3

ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΡΟΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο πιστοποιείται η μέθοδος επίλυσης ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων που παρουσιάστηκε και αναλύθηκε στο κεφ. 2. Οι περιπτώσεις ροών που μελετώνται είναι 2Δ και 3Δ ροές συμπιεστού ρευστού εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Όλες οι περιπτώσεις μελετώνται υπό την παραδοχή ότι η ροή είναι πλήρως τυρβώδης, εκτός μίας, στην οποία θεωρείται ατριβής ροή. Ιδιαίτερα στις 2Δ περιπτώσεις γίνεται εκτενής μελέτη της επίδρασης που έχει στην τελική λύση και στην ταχύτητα του αλγόριθμου η επιλογή διάφορων παραμέτρων του επιλύτη (λ.χ. η μέθοδος υπολογισμού των κλίσεων των ροϊκών μεγεθών, το σχήμα διακριτοποίησης των όρων διάχυσης, ο περιοριστής, η χρήση τεχνικών προσαρμογής πλέγματος), ο τύπος του πλέγματος (πλέγμα αποκλειστικά με τριγωνικά στοιχεία, το οποίο θα αναφέρεται εφεξής ως 'τριγωνικό' πλέγμα, ή υβριδικό πλέγμα) και ο τρόπος ορισμού της κυψέλης ελέγχου. Ειδικά για το τελευταίο σημείο και χάριν συντομίας, από εδώ και πέρα το κατά περίπτωση τριγωνικό πλέγμα θα συμβολίζεται με 'B' αν οι πεπερασμένοι όγκοι σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τα βαρύκεντρα των τριγώνων και με 'Π' αν χρησιμοποιούνται τα περίκεντρα αυτών. Τα προηγούμενα γενικεύονται και για 3Δ πλέγματα.

Σε όλες τις εφαρμογές που θα μελετηθούν στη συνέχεια, για τα μεγέθη που περιγράφουν το εργαζόμενο μέσο (αέρας, τέλειο αέριο) λαμβάνονται οι εξής διαστατές τυπικές τιμές: $\hat{c}_p = 1004.64 \text{m}^2/\text{s}^2 \text{K}$, $\hat{R} = 287.04 \text{m}^2/\text{s}^2 \text{K}$, $\hat{\mu} = 1.8 \times 10^{-5} \text{kg/m s}$, $\hat{k} = 0.0243 \text{W/m K}$, και $Pr = 0.72$.

3.1 Ροή γύρω από την αεροτομή RAE 2822

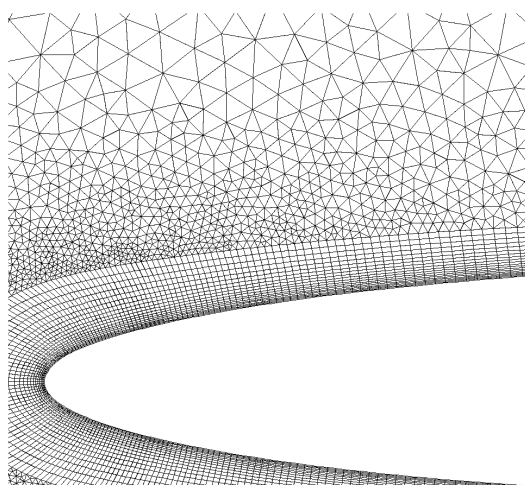
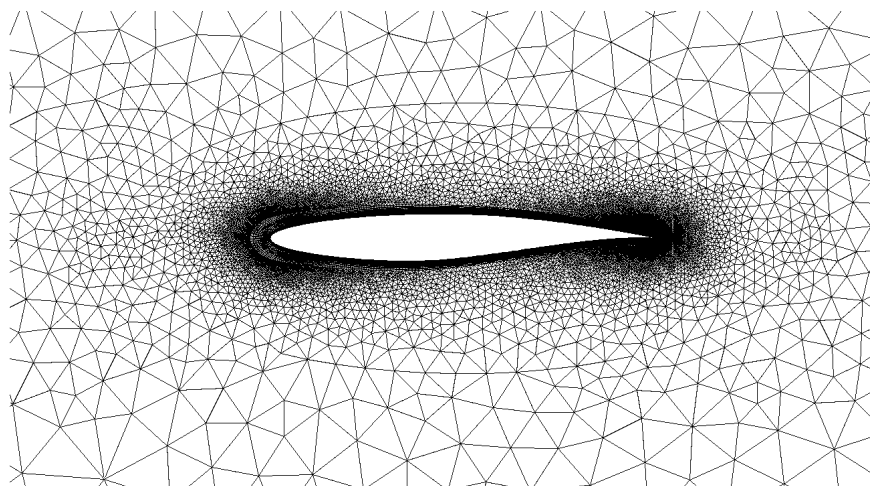
Για τη ροή γύρω από την αεροτομή RAE 2822 υπάρχουν στη βιβλιογραφία πειραματικές μετρήσεις, [224], και αριθμητικές προλέξεις, [225], για μία πληθώρα περιπτώσεων, οι οποίες ποικίλλουν από πλήρως υποηχητικές έως διηχητικές με ισχυρό κάθετο κύμα κρούσης και αλληλεπίδραση αυτού με το οριακό στρώμα. Δύο από αυτές τις περιπτώσεις (συγκεκριμένα οι περιπτώσεις R6 και R9) επελέγησαν

και παρουσιάζονται στη συνέχεια. Στα αντίστοιχα πειράματα προκαλείται μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη κοντά στην ακμή πρόσπτωσης ($x/c = 0.03$ για τις περιπτώσεις R6 και R9). Στις αριθμητικές προσομοιώσεις που παρουσιάζονται εδώ, όπως προαναφέρθηκε, η ροή θεωρείται πλήρως τυρβώδης, ενώ για το κλείσιμο των οριακών συνθηκών στο στερεό όριο χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις τοίχου που περιγράφονται στην ενότητα 2.4.7. Στο σχ. 3.1 απεικονίζεται το υβριδικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε και στις δύο περιπτώσεις, και το οποίο κατασκευάστηκε με συνδυασμό μίας μεθόδου γένεσης δομημένων πλεγμάτων που βασίζεται στη χρήση υπερβολικών καμπυλών, [226], για την κατασκευή του πλέγματος κοντά στο στερεό τοίχωμα και μίας μεθόδου προελαύνοντος μετώπου για την κατασκευή τριγωνικού πλέγματος στο υπόλοιπο υπολογιστικό χωρίο μέχρι το επ' άπειρο όριό του, αποτελείται δε από 25,637 στοιχεία (15,795 τρίγωνα και 9,842 τετράπλευρα) και 17,990 κόμβους. Το αντίστοιχο, αμιγώς τριγωνικό, πλέγμα προκύπτει με απλή διάσπαση κάθε τετράπλευρου στοιχείου του υβριδικού πλέγματος σε δύο τρίγωνα. Στο σχ. 3.1 συμπεριλαμβάνεται και κοντινή άποψη του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν περιλαμβάνουν συγκρίσεις των κατανομών του συντελεστή πίεσης και τριβής με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, [224].

3.1.1 Περίπτωση R6

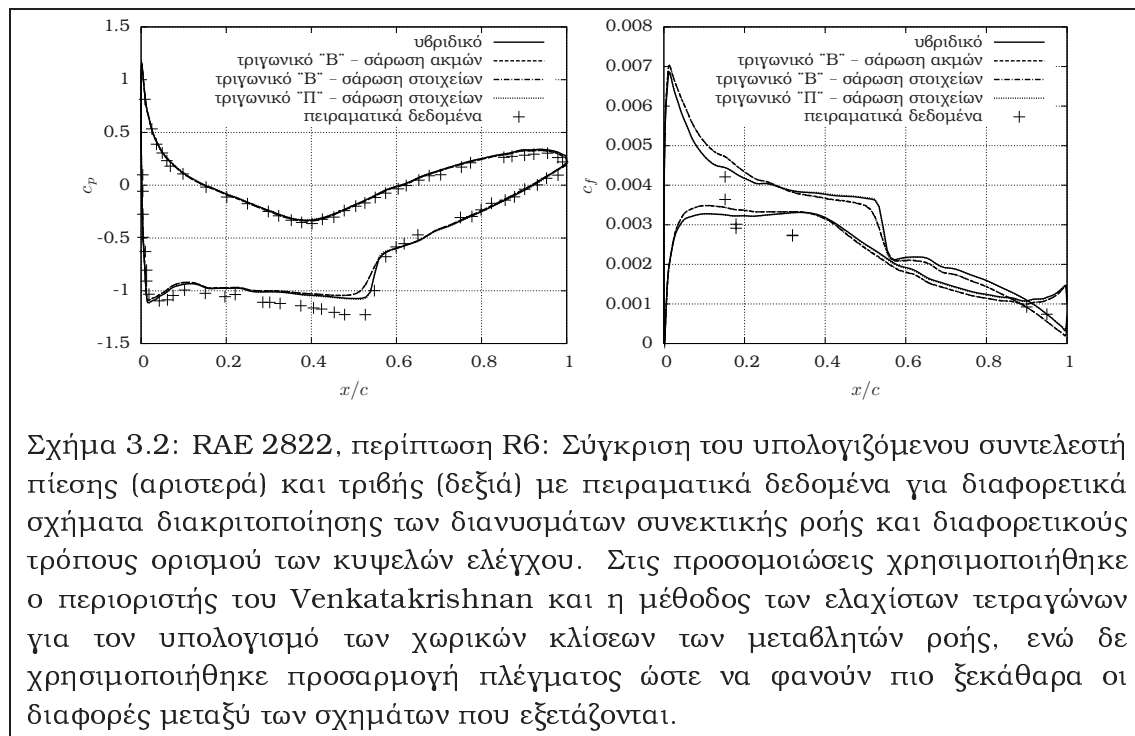
Οι συνθήκες της επ' άπειρο ροής για την περίπτωση R6 είναι $M^\infty = 0.725$ και $\alpha^\infty = 2.92^\circ$. Η συνιστώμενη διορθωμένη γωνία, η οποία λαμβάνει υπόψη την επίδραση των τοιχωμάτων της αεροσήραγγας (και η οποία τελικώς χρησιμοποιείται) είναι $\alpha^{corr} = 2.60^\circ$ ενώ ο αριθμός Reynolds που βασίζεται στη χορδή είναι $Re_c = 6.5 \times 10^6$.

Στα σχ. 3.2, 3.3 και 3.4 παρουσιάζονται συγκρίσεις της υπολογιζόμενης από τον επιλύτη κατανομής του συντελεστή πίεσης και τριβής με τις δεδομένες πειραματικές καμπύλες, προκειμένου να φανεί η επίδραση του σχήματος διακριτοποίησης των όρων διάχυσης, του επιλεγμένου περιοριστή και της μεθόδου υπολογισμού των κλίσεων που χρησιμοποιούνται στο σχήμα MUSCL, αντίστοιχα (τα ζεύγη πειραματικών τιμών του συντελεστή τριβής που δίνονται σε κάποιες θέσεις x/c αντιστοιχούν σε μετρήσεις που έγιναν στην αεροδυναμική σήραγγα σε διαφορετικές κατά πλάτος θέσεις). Τα σχήματα αυτά προκύπτουν από προσομοιώσεις στις οποίες σκόπιμα δεν εφαρμόστηκε προσαρμογή πλέγματος, για να φανεί ξεκάθαρα η επίδραση κάθε παραμέτρου στο τελικό αποτέλεσμα. Στο σχ. 3.2 παρατηρείται ότι το υβριδικό πλέγμα και το τριγωνικό 'Π' πλέγμα προλέγουν ακριβέστερα τη θέση του κύματος κρούσης. Αυτό οφείλεται στη μείωση της αριθμητικής διάχυσης τόσο στους συνεκτικούς όσο και στους μη-συνεκτικούς όρους κοντά στην περιοχή του κύματος. Επίσης, οι περιοριστές των Barth-Jespersen και Venkatakrishnan, λόγω του πολυδιάστατου χαρακτήρα τους, δίνουν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα από την απλούστερη συνάρτηση των Van Leer-Van Albada στην άνω πλευρά της αεροτομής, σχ. 3.3. Αντιθέτως, η επιλογή της μεθόδου υπολογισμού των κλίσεων των μεταβλητών στο σχήμα MUSCL φαίνεται να μην επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα, σχ. 3.4. Η επιλογή του σχήματος σάρωσης στοιχείων, αντί αυτού της σάρωσης ακμών, στο τριγωνικό πλέγμα επίσης έχει



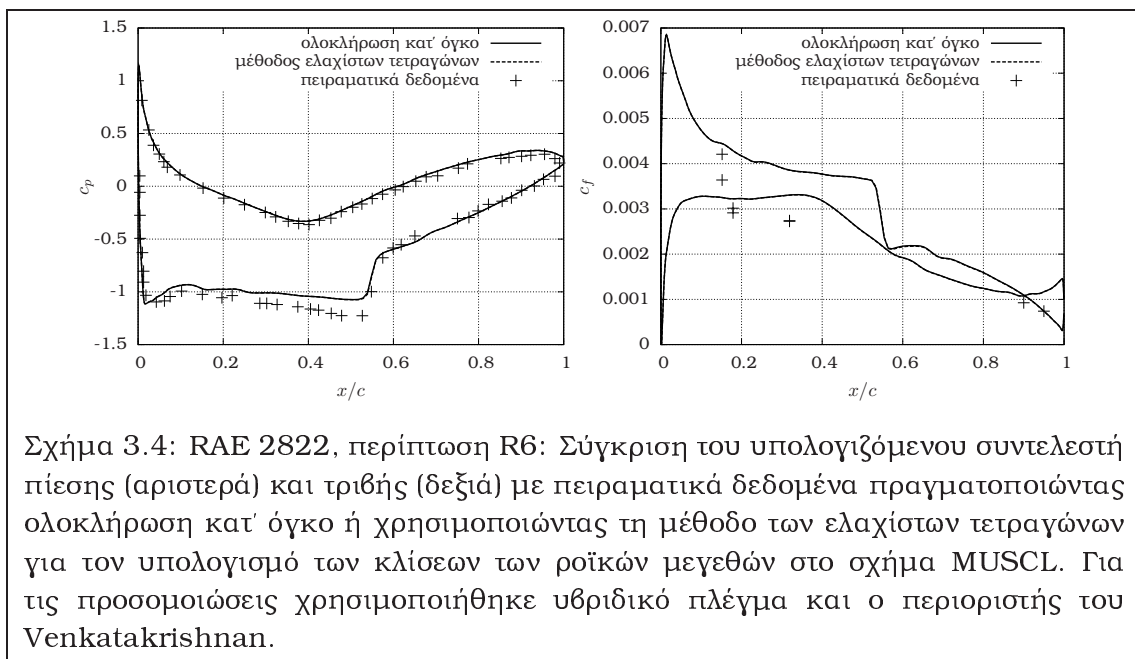
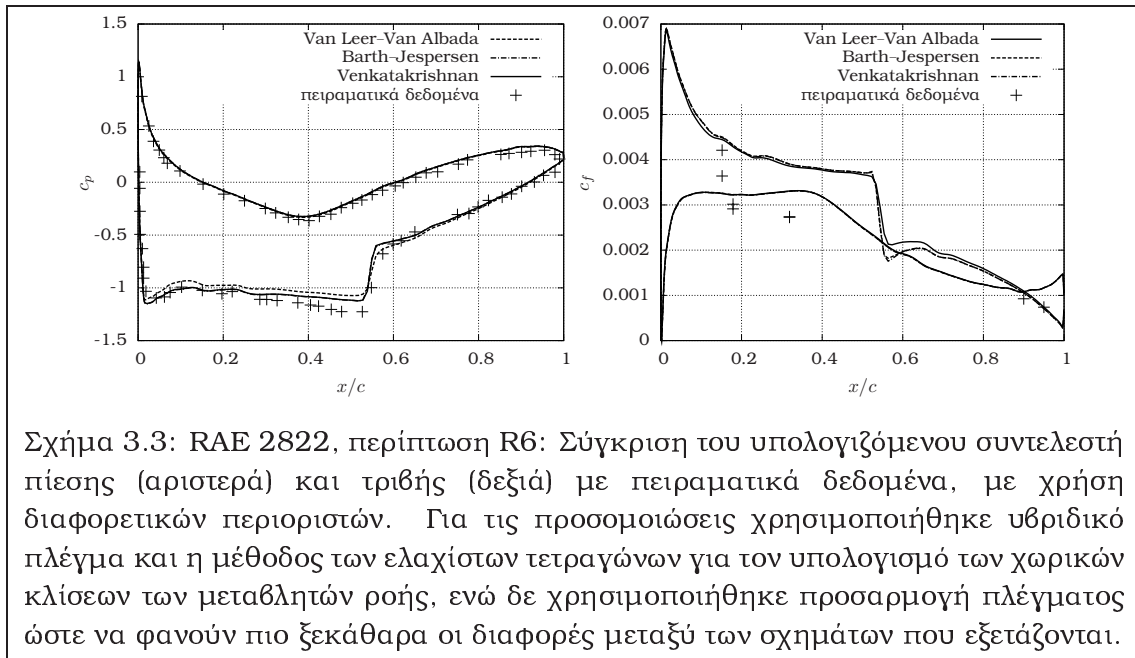
Σχήμα 3.1: Υβριδικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη τυρβώδους διηχητικής ροής γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή RAE 2822 (άνω) και λεπτομέρεια αυτού κοντά στην αεροτομή (κάτω).

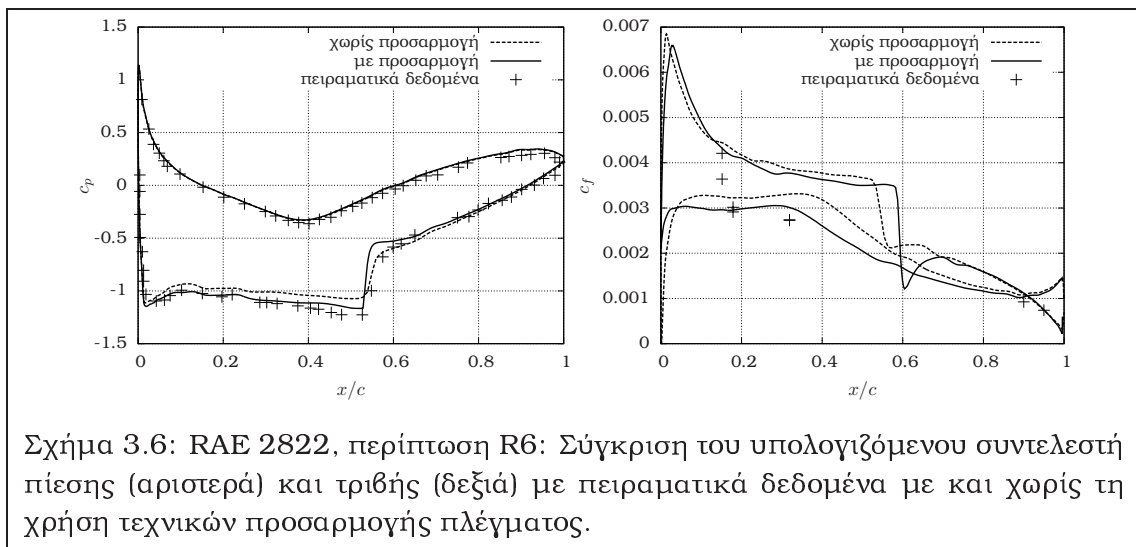
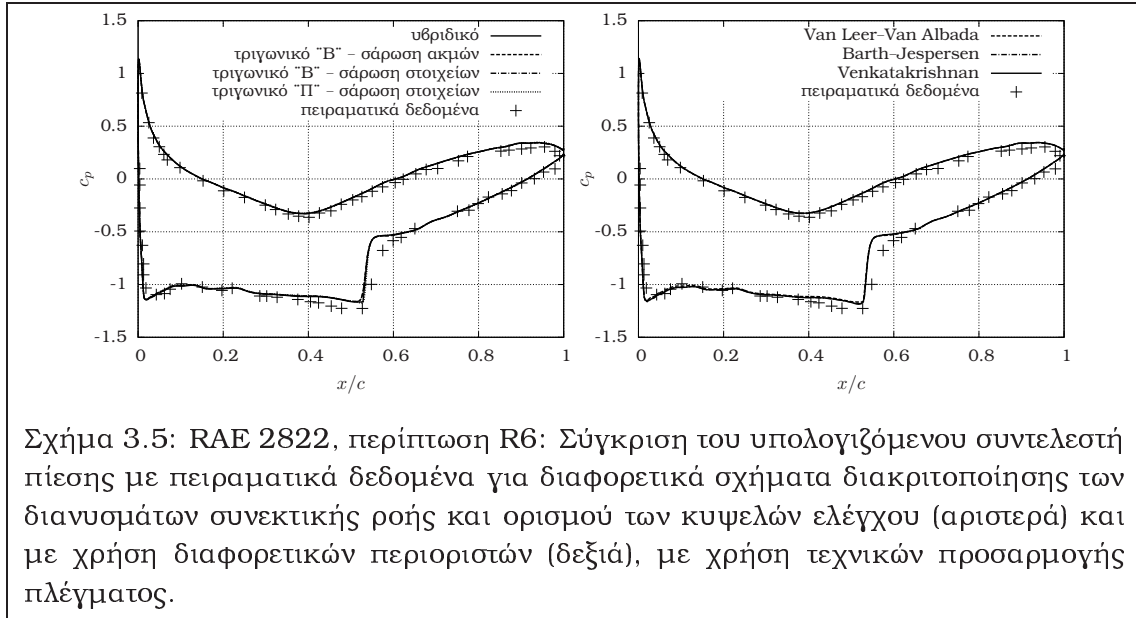
αμελητέα επίδραση, όπως φαίνεται από το σχ. 3.2.

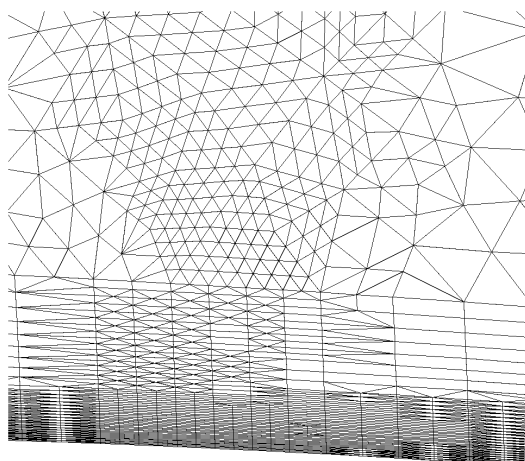
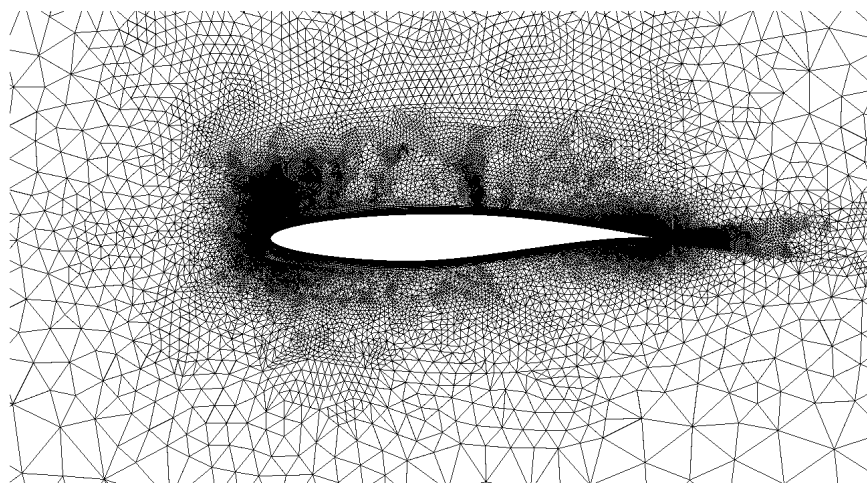


Στο σχ. 3.5 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες συγκρίσεις του συντελεστή κατανομής πίεσης με επιπλέον εφαρμογή τεχνικών προσαρμογής στο πλέγμα. Ως αισθητήριο για την προσαρμογή ορίστηκε η κλίση του αριθμού Mach, με κύριο στόχο να βελτιώσει τη διακριτότητα του πλέγματος στην περιοχή του κύματος κρούσης της άνω πλευράς της αεροτομής. Σε αυτήν την περίπτωση, οι διαφορές μεταξύ των σεναρίων διακριτοποίησης ουσιαστικά εξαλείφονται. Στο σχ. 3.6 (σύγκριση των αποτελεσμάτων χωρίς και με την εφαρμογή τεχνικών προσαρμογής) είναι εμφανής η βελτίωση της εικόνας των αποτελεσμάτων κατόπιν της προσαρμογής, ενώ στο σχ. 3.7 παρουσιάζεται το πλέγμα μετά την προσαρμογή. Το πεδίο του αριθμού Mach πριν και μετά την προσαρμογή απεικονίζεται στο σχ. 3.8, όπου φαίνεται ότι το ασθενές κύμα κρούσης στην άνω πλευρά της αεροτομής είναι πιο ευδιάκριτο μετά την προσαρμογή.

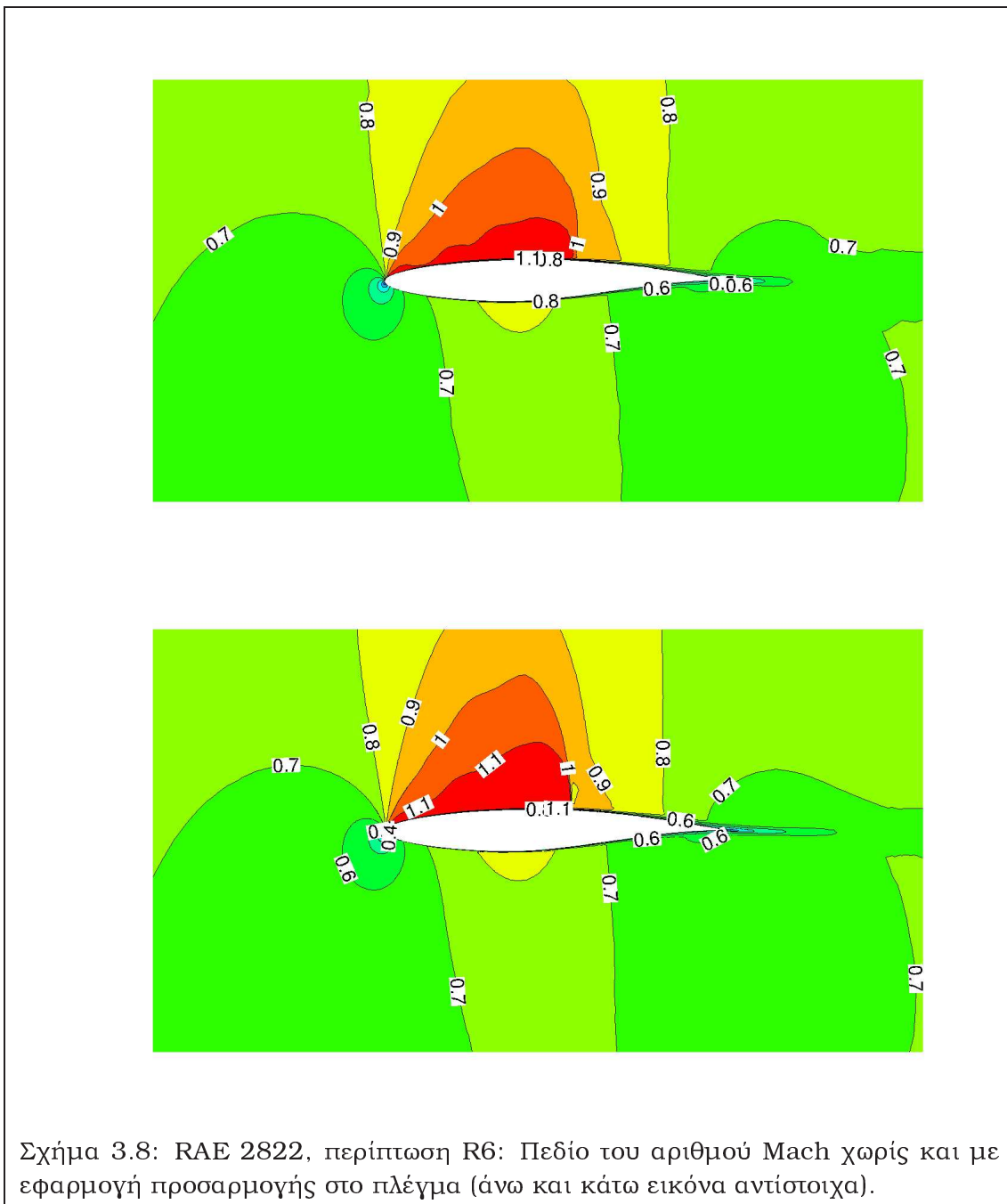
Το σχ. 3.9 δείχνει το ρυθμό σύγκλισης του αλγόριθμου για τα διάφορα σενάρια διακριτοποίησης των συνεκτικών όρων και ορισμού των κυψελών ελέγχου. Γενικά, κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων, παρατηρήθηκε ότι ο ρυθμός σύγκλισης ήταν ελαφρώς καλύτερος όταν γινόταν χρήση υβριδικών πλεγμάτων. Αν ληφθεί επιπλέον υπόψη ότι τα υβριδικά πλέγματα για τον ίδιο αριθμό κόμβων έχουν μικρότερο αριθμό ακμών (δηλαδή λιγότερες πράξεις κινητής υποδιαστολής ανά ψευδοχρονικό βήμα), η διαφορά στην ταχύτητα εκτέλεσης μίας προσομοίωσης αυξάνει. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για την προσομοίωση με χρήση υβριδικού πλέγματος σε 6 πυρήνες ενός οκταπύρηνου 64bit DELL Poweredge blade server απαιτήθηκαν 14min 2s έναντι 31min 44s του αντίστοιχου τριγωνικού πλέγματος.



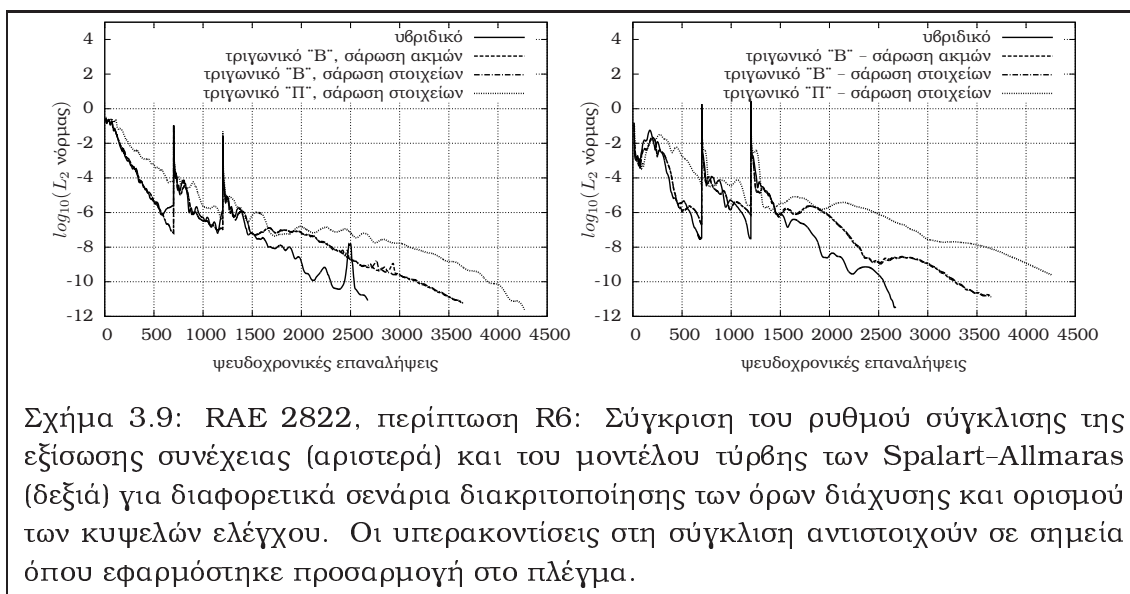




Σχήμα 3.7: RAE 2822, περίπτωση R6: Υβριδικό πλέγμα μετά την προσαρμογή (άνω) και λεπτομέρεια κοντά στην περιοχή όπου εμφανίζεται το κύμα κρούσης (κάτω).



Σχήμα 3.8: RAE 2822, περίπτωση R6: Πεδίο του αριθμού Mach χωρίς και με εφαρμογή προσαρμογής στο πλέγμα (άνω και κάτω εικόνα αντίστοιχα).



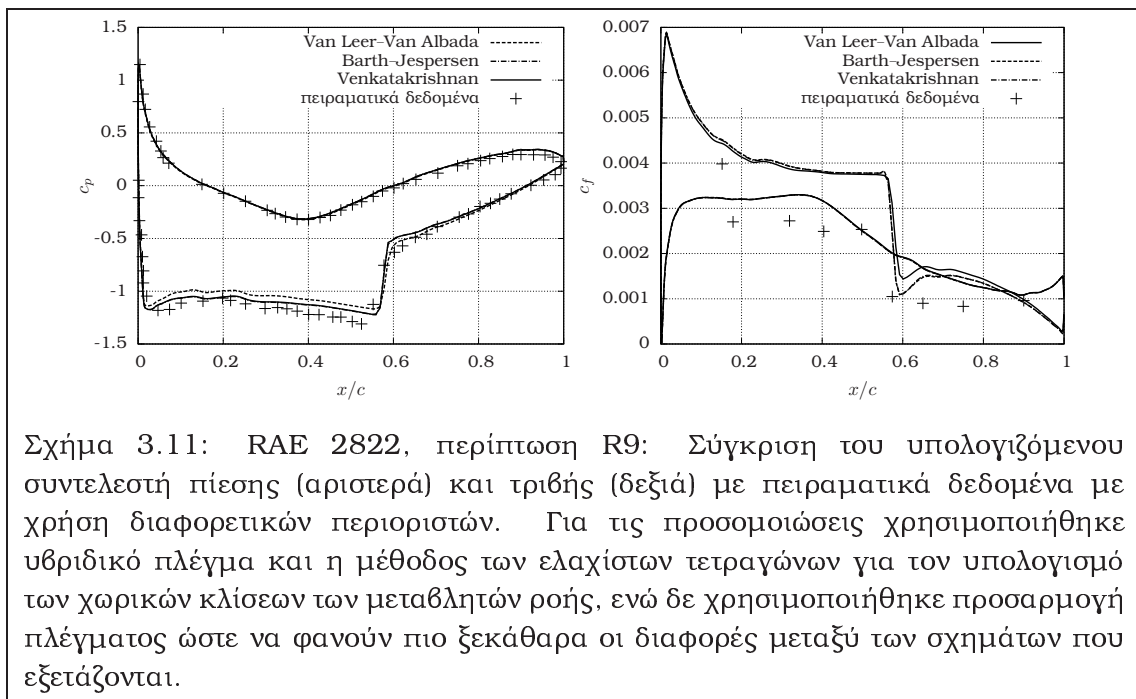
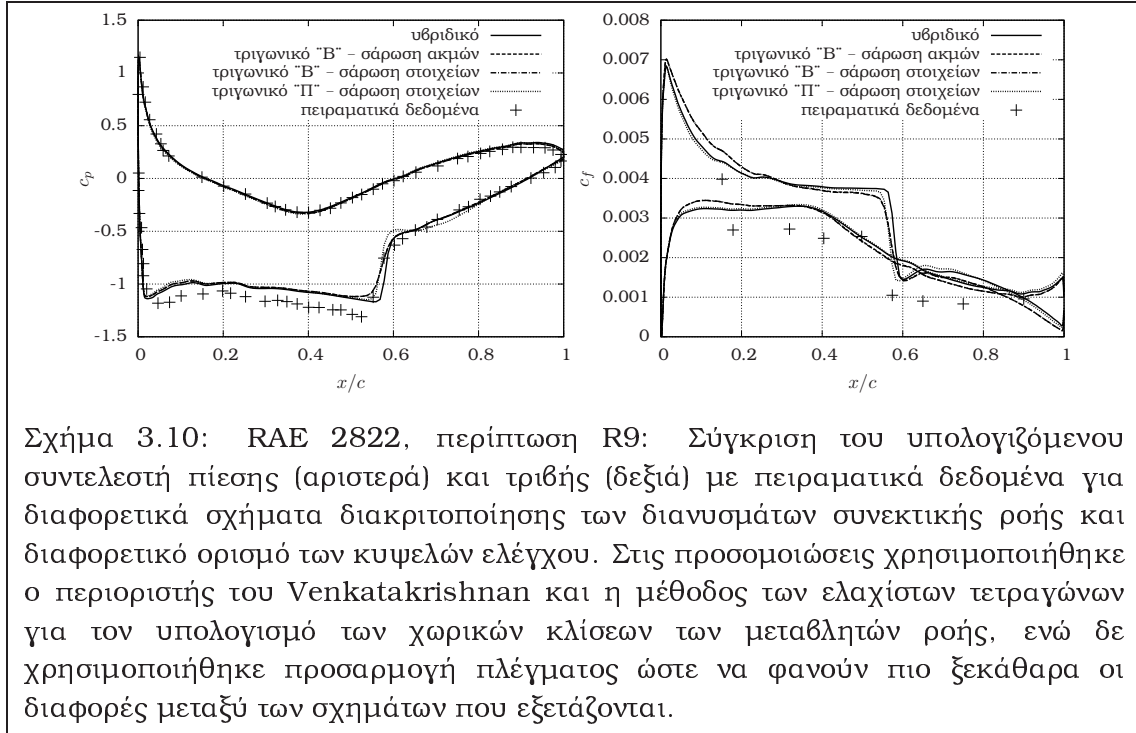
Σχήμα 3.9: RAE 2822, περίπτωση R6: Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras (δεξιά) για διαφορετικά σενάρια διακριτοποίησης των όρων διάχυσης και ορισμού των κυψελών ελέγχου. Οι υπερακοντίσεις στη σύγκλιση αντιστοιχούν σε σημεία όπου εφαρμόστηκε προσαρμογή στο πλέγμα.

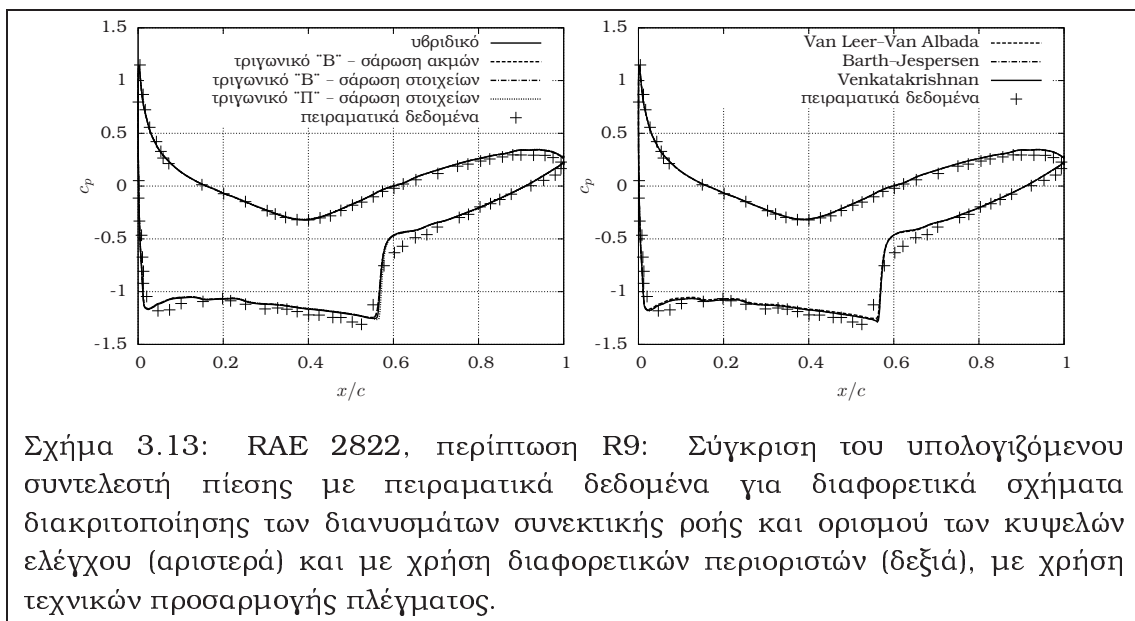
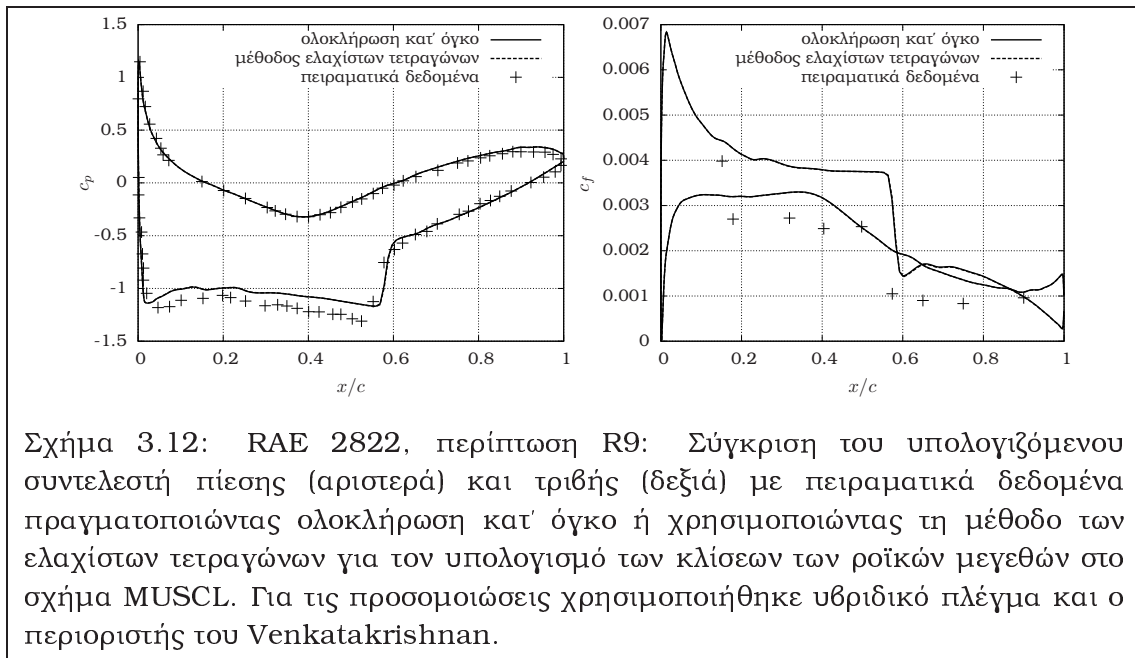
3.1.2 Περίπτωση R9

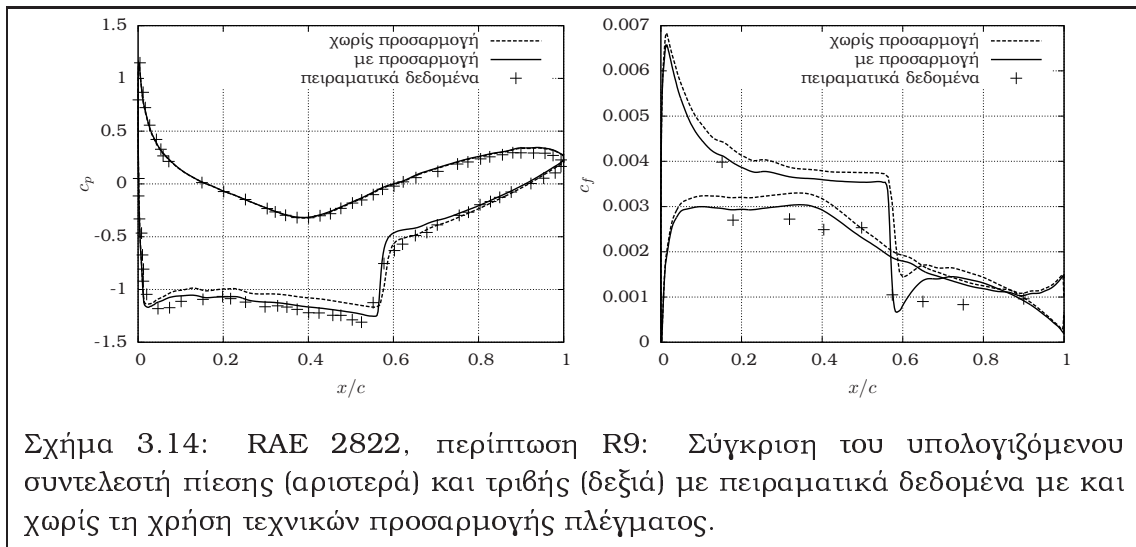
Η περίπτωση R9 έχει διαφορετικές συνθήκες ροής από την R6 ($M^\infty = 0.725$, $\alpha^\infty = 3.19^\circ$, $\alpha^{corr} = 2.8^\circ$ και $Re_c = 6.5 \times 10^6$). Η σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης και τριβής μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στα σχ. 3.10, 3.11 και 3.12, όπου και πάλι στις προσομοιώσεις μεταβαλλόταν το σχήμα διακριτοποίησης των όρων διάχυσης, ο επιλεγμένος περιοριστής και η μέθοδος υπολογισμού των κλίσεων αντίστοιχα, χωρίς να πραγματοποιηθεί προσαρμογή στο πλέγμα. Πάλι παρατηρείται μία υπεροχή του υβριδικού και του τριγωνικού 'Π' πλέγματος έναντι του τριγωνικού 'B' πλέγματος, σχ. 3.10, καθώς και των περιοριστών των Barth-Jespersen και Venkatakrishnan έναντι αυτής των Van Leer-Van Albada, σχ. 3.11, ενώ η επιλογή της μεθόδου υπολογισμού των κλίσεων φαίνεται να μην επηρεάζει τις υπολογισμένες κατανομές, σχ. 3.12.

Αν εφαρμοστεί προσαρμογή στο πλέγμα, οι παραπάνω διαφορές ουσιαστικά εξαλείφονται, σχ. 3.13. Στα σχ. 3.14, 3.15 και 3.16 παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης, το προσαρμοσμένο πλέγμα και το πεδίο του αριθμού Mach χωρίς και με προσαρμογή στο χρησιμοποιούμενο πλέγμα, ώστε να εκτιμηθεί η βελτίωση που επιτυγχάνεται στην εικόνα των αποτελεσμάτων. Η λύση βελτιώνεται αισθητά, ιδιαίτερα στην άνω πλευρά της αεροτομής, στην περιοχή πριν το κύμα κρούσης.

Οι αντίστοιχοι ρυθμοί σύγκλισης, σχ. 3.17, αποκαλύπτουν πάλι την υπεροχή της προσομοίωσης με υβριδικό πλέγμα έναντι αυτών που πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας τριγωνικά πλέγματα. Ο χρόνος εκτέλεσης στην περίπτωση του υβριδικού πλέγματος είναι 20min 7s έναντι 27min 59s για το αντίστοιχο τριγωνικό (οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν πάλι σε 6 πυρήνες ενός οκταπύρηνου 64bit DELL Powered blade server).



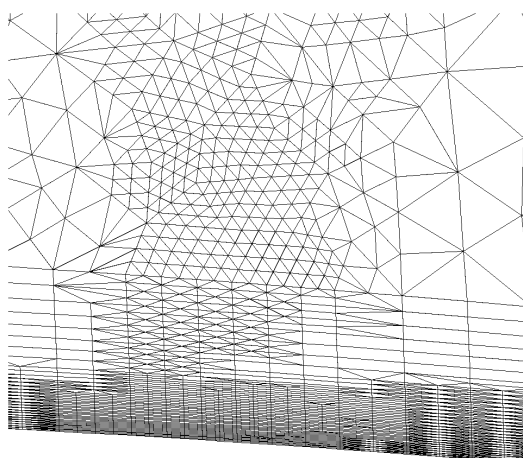
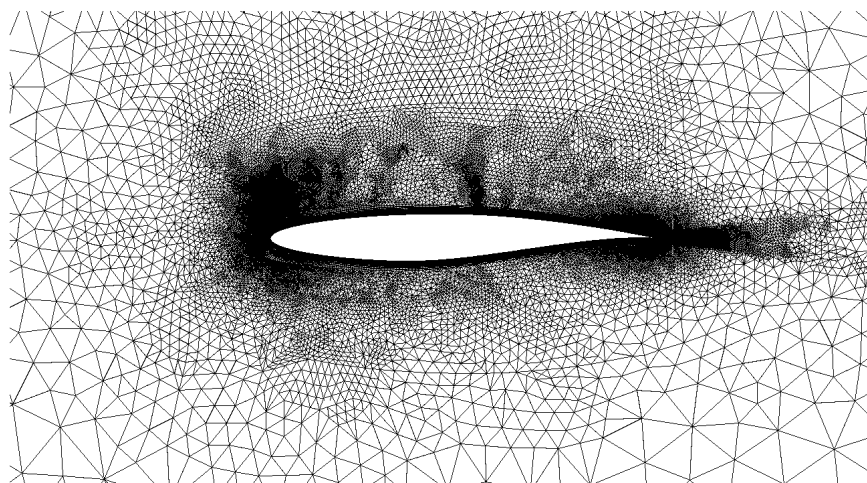




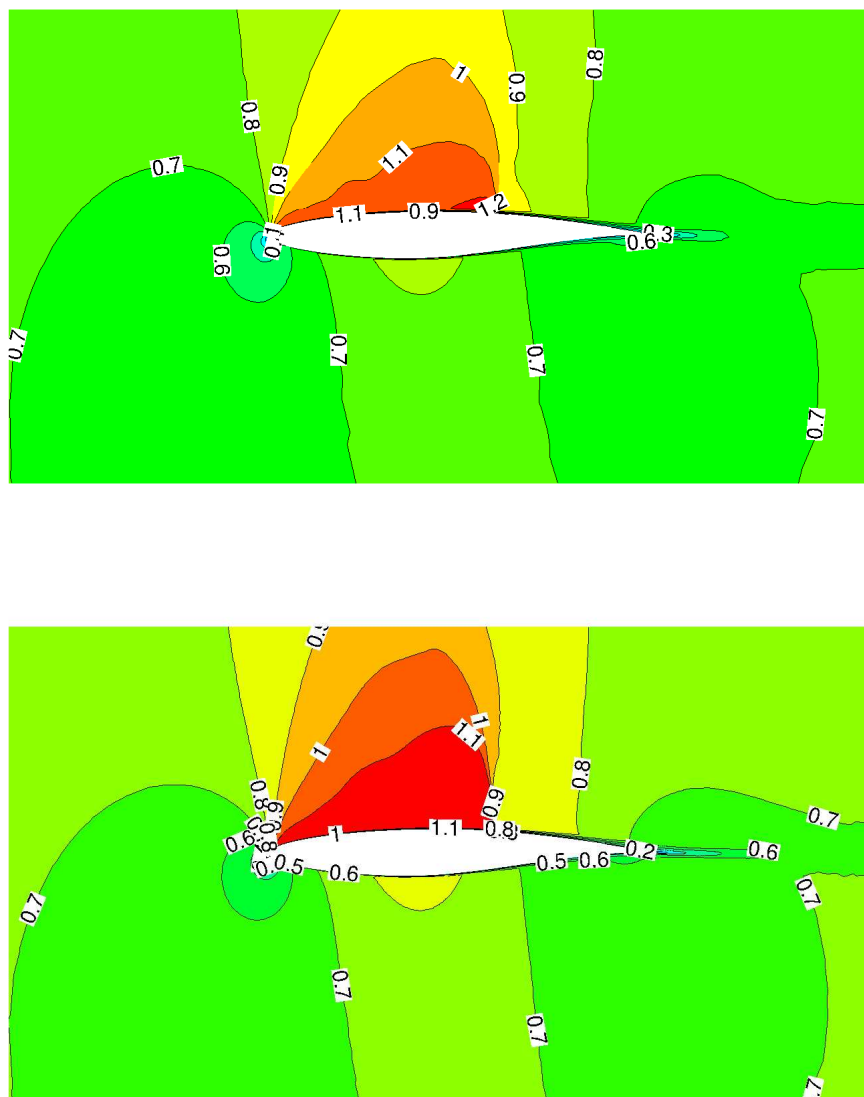
Σχήμα 3.14: RAE 2822, περίπτωση R9: Σύγκριση του υπολογιζόμενου συντελεστή πίεσης (αριστερά) και τριβής (δεξιά) με πειραματικά δεδομένα με και χωρίς τη χρήση τεχνικών προσαρμογής πλέγματος.

3.2 Ροή στη 2Δ πτερύγωση του συμπιεστή MAN GHH 1-S1

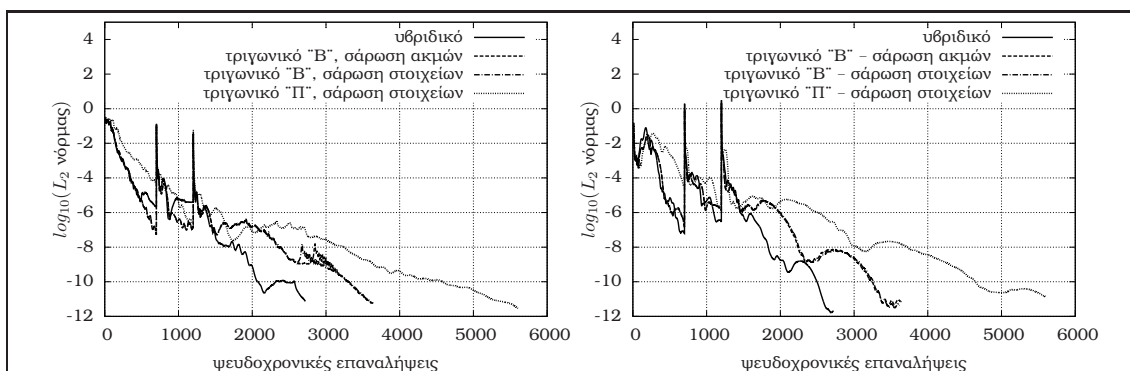
Η περίπτωση αφορά στην ανάλυση πτερύγωσης συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης, ο οποίος θεωρείται αντιπροσωπευτικός του ποδός της κινητής πτερύγωσης της πρώτης βαθμίδας βιομηχανικού συμπιεστή, [227]. Η γωνία κλίσης του πτερυγίου είναι 30° , η χορδή $c = 0.07\text{m}$ και ο λόγος βήματος προς τη χορδή $t/c = 0.68$. Η πτερύγωση είναι έτσι σχεδιασμένη ώστε να λειτουργεί σε ένα σχετικά μεγάλο εύρος συνθηκών χωρίς να αυξάνεται υπερβολικά ο συντελεστής απωλειών. Η ροή στο σημείο σχεδιασμού είναι πλήρως υποηχητική, ενώ μελετώνται εδώ και περιπτώσεις με μεγαλύτερη και μικρότερη γωνία πρόσπτωσης από την ονομαστική. Η ολική πίεση εισόδου σε όλες τις περιπτώσεις είναι $\hat{P}_t^{in} = 125000\text{Pa}$, η ολική θερμοκρασία $\hat{T}_t^{in} = 288\text{K}$ και η πυκνότητα $\hat{\rho}^{in} \approx 1.26\text{kg/m}^3$. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε και στις τέσσερις περιπτώσεις, και το οποίο αποτελείται από 44,569 στοιχεία (32,360 τρίγωνα και 12,209 τετράγωνα) και 28,820 κόμβους, φαίνεται στο σχ. 3.18, ενώ πάλι το αντίστοιχο τριγωνικό πλέγμα προκύπτει με απλή διάσπαση κάθε τετράπλευρου σε δύο τρίγωνα. Στο ίδιο σχήμα συμπεριλαμβάνεται και μία λεπτομερέστερη άποψη του πλέγματος κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Για τις οριακές συνθήκες του μοντέλου τύρβης εδώ χρησιμοποιήθηκε μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds αφού το πεδίο περιλαμβάνει περιοχές με αποκολλημένη ροή, στις οποίες η χρήση συναρτήσεων τοίχου θα έδινε λανθασμένα αποτελέσματα. Η μεταβολή του λόγου της αξονικής ταχύτητας επί την πυκνότητα ($AVDR$) επιτυγχάνεται με γραμμική μεταβολή της κατανομής πάχους $h(x_1)$, εξ. 2.5, από το σημείο πρόσπτωσης ως το σημείο εκφυγής, κατά την τιμή $AVDR$ που δίνεται από το πείραμα σε κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν περιλαμβάνουν συγκρίσεις των κατανομών του ισηντροπικού αριθμού Mach με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα στο σημείο σχεδιασμού καθώς και σε μία περίπτωση θετικής και δύο περιπτώσεων αρνητικής απόκλισης της γωνίας εισόδου



Σχήμα 3.15: RAE 2822, περίπτωση R9: Υβριδικό πλέγμα μετά την προσαρμογή (άνω) και λεπτομέρεια κοντά στην περιοχή όπου εμφανίζεται το κύμα κρούσης (κάτω).



Σχήμα 3.16: RAE 2822, περίπτωση R9: Πεδίο του αριθμού Mach χωρίς και με εφαρμογή προσαρμογής στο πλέγμα (άνω και κάτω εικόνα, αντίστοιχα).



Σχήμα 3.17: RAE 2822, περίπτωση R9: Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras (δεξιά) για διαφορετικά σενάρια διακριτοποίησης των όρων διάχυσης και ορισμού των κυψελών ελέγχου. Οι υπερακοντίσεις στη σύγκλιση αντιστοιχούν σε σημεία όπου εφαρμόστηκε προσαρμογή στο πλέγμα.

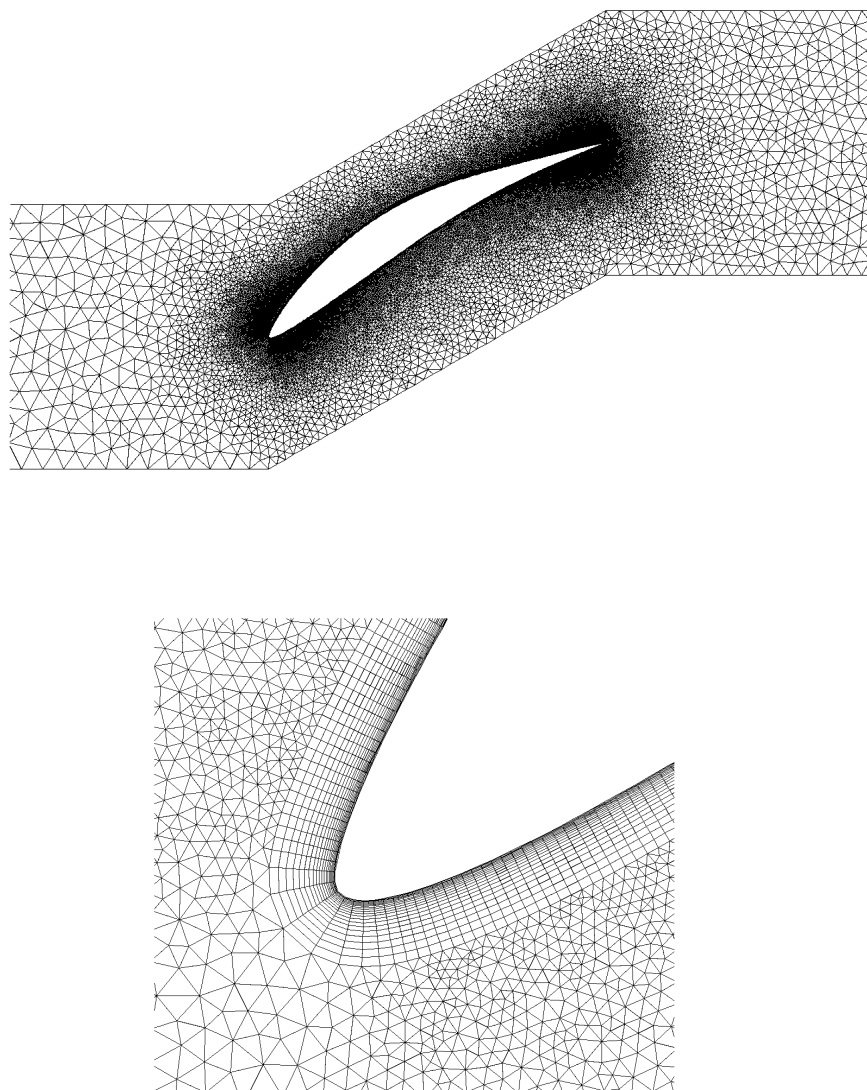
της ροής από αυτό.

3.2.1 Πρόλεξη της ροής στο σημείο σχεδιασμού

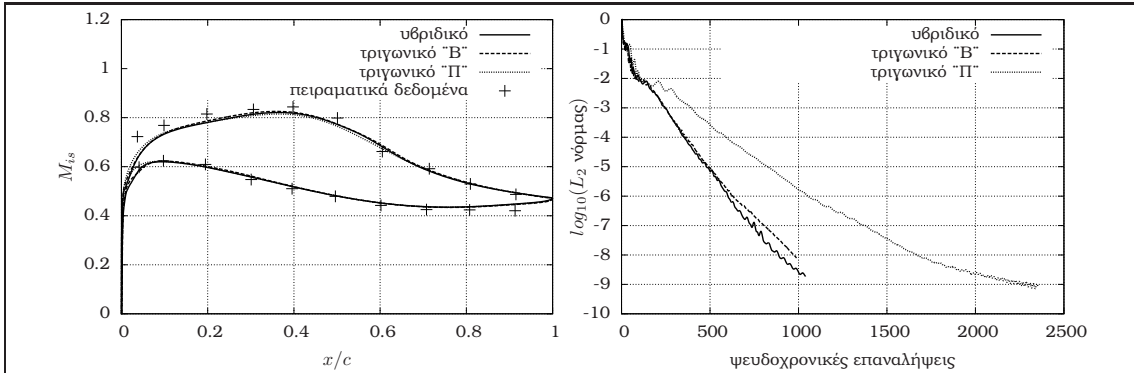
Οι συνθήκες εισόδου στο σημείο σχεδιασμού είναι $\alpha^{in} = 47^\circ$ και $|\hat{u}^{in}| = 202.6\text{m/s}$, ο λόγος $AVDR \approx 0.9074$, ο αριθμός Reynolds βάσει της χορδής $Re_c = 8.41 \times 10^{-5}$ και ο ισεντροπικός Mach εξόδου $M_{is}^{out} = 0.4557$. Στο σχ. 3.19 απεικονίζεται η σύγκριση με πειραματικά δεδομένα της κατανομής του ισεντροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή, που έδωσαν οι προσομοιώσεις με το υβριδικό και το τριγωνικό πλέγμα, καθώς και οι αντίστοιχοι ρυθμοί σύγκλισης, ενώ στο σχ. 3.20 φαίνεται το υπολογιζόμενο πεδίο του αριθμού Mach κοντά στην αεροτομή. Σε αυτή την περίπτωση, το υβριδικό και το τριγωνικό πλέγμα έδωσαν τα ίδια αποτελέσματα, με το υβριδικό πλέγμα να υπερέχει ελαφρώς ως προς τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης (3min 21s για το υβριδικό πλέγμα έναντι 3min 32s για το τριγωνικό πλέγμα σε 6 πυρήνες ενός οκταπύρηνου 64bit DELL Poweredge blade server).

3.2.2 Πρόλεξη της ροής για $\alpha^{in} = 52^\circ$

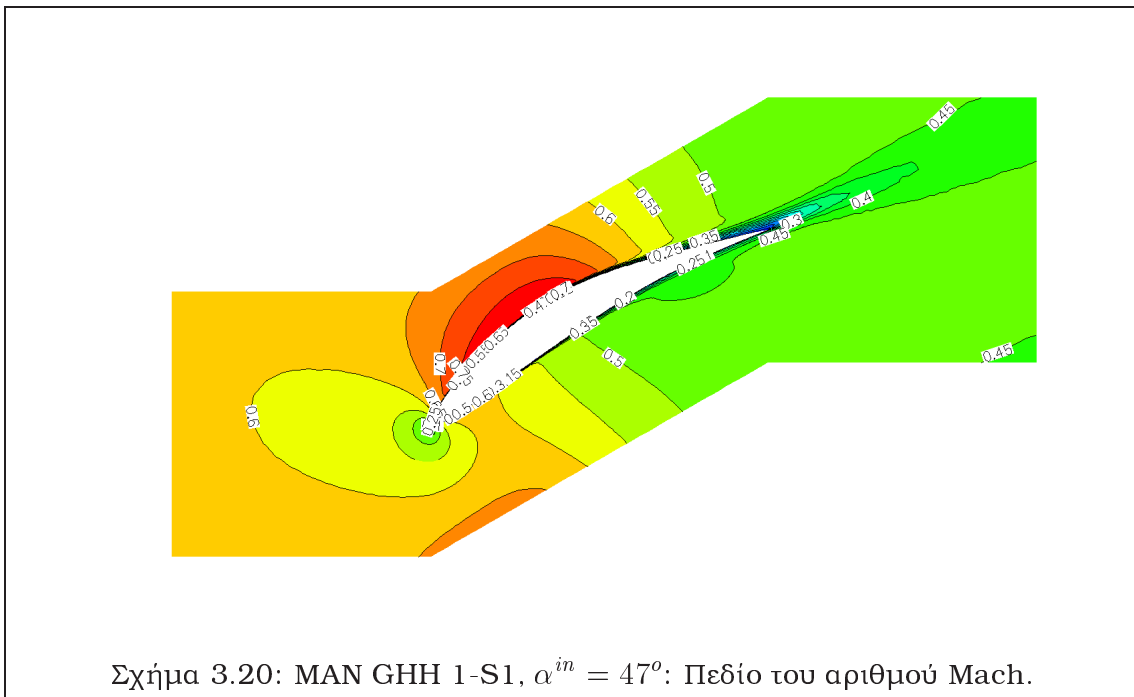
Στη συνέχεια μελετάται η ροή για θετική απόκλιση της γωνίας εισόδου της ροής από το σημείο σχεδιασμού, $\alpha^{in} = 52^\circ$. Η ταχύτητα στην είσοδο δίνεται ίση με $|\hat{u}^{in}| = 203.7\text{m/s}$, ο λόγος $AVDR \approx 0.9065$, ο αριθμός Reynolds βάσει της χορδής $Re_c = 7.63 \times 10^{-5}$ και ο ισεντροπικός Mach εξόδου $M_{is}^{out} = 0.425$. Στις συνθήκες αυτές παρατηρείται ισχυρή αποκόλληση της ροής, σχ. 3.22. Το σχ. 3.21 απεικονίζει συγκρίσεις του ισεντροπικού αριθμού Mach στο στερεό όριο με τα πειραματικά δεδομένα, καθώς και τους αντίστοιχους ρυθμούς σύγκλισης, για το υβριδικό και το τριγωνικό πλέγμα. Το υβριδικό πλέγμα και το τριγωνικό 'Π' πλέγμα



Σχήμα 3.18: Υβριδικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη τυρβώδους ροής στην περύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης MAN GHH 1-S1 (άνω) και λεπτομέρεια αυτού κοντά στην ακμή πρόπτωσης (κάτω).

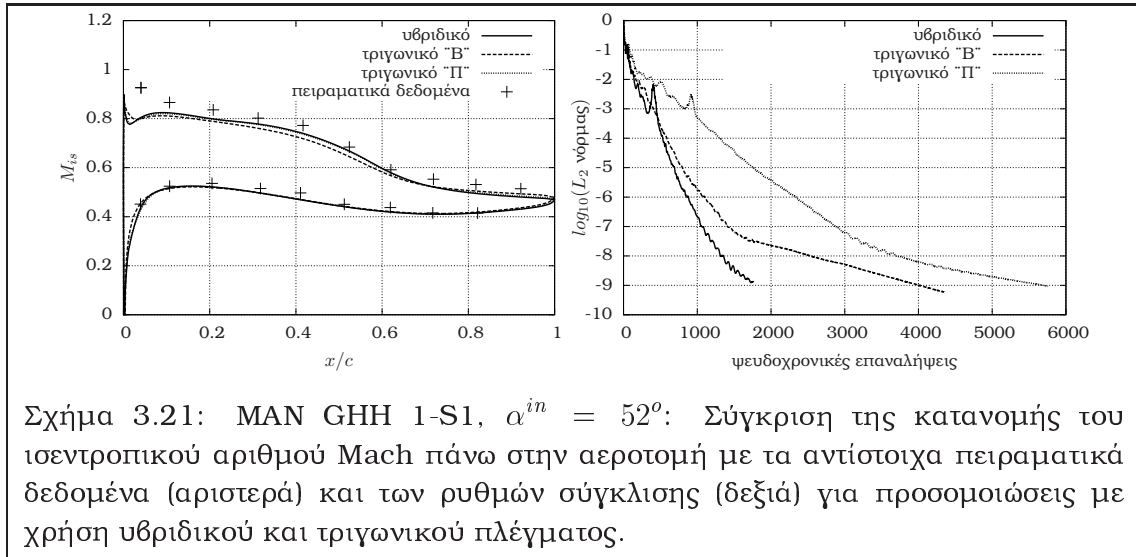


Σχήμα 3.19: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 47^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του ισητροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού και τριγωνικού πλέγματος.



Σχήμα 3.20: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 47^\circ$: Πεδίο του αριθμού Mach.

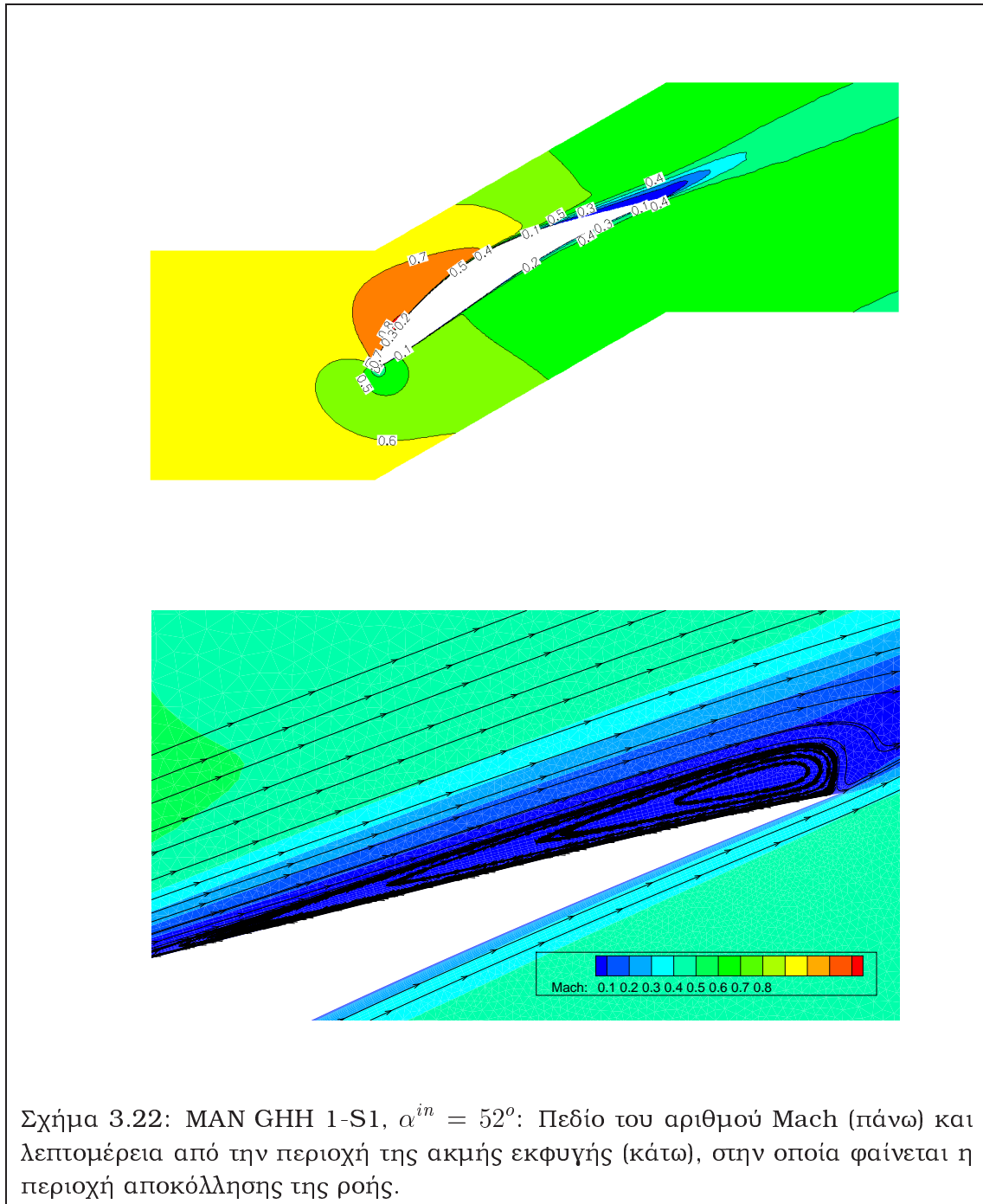
δίνουν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα από το τριγωνικό 'B' πλέγμα. Επιπλέον, η υπεροχή του υβριδικού πλέγματος ως προς την ταχύτητα σύγκλισης είναι προφανής (2min 22s για το υβριδικό πλέγμα έναντι 5min 48s για το τριγωνικό πλέγμα σε 6 πυρήνες ενός οκταπύρηνου 64bit DELL Poweredge blade server).



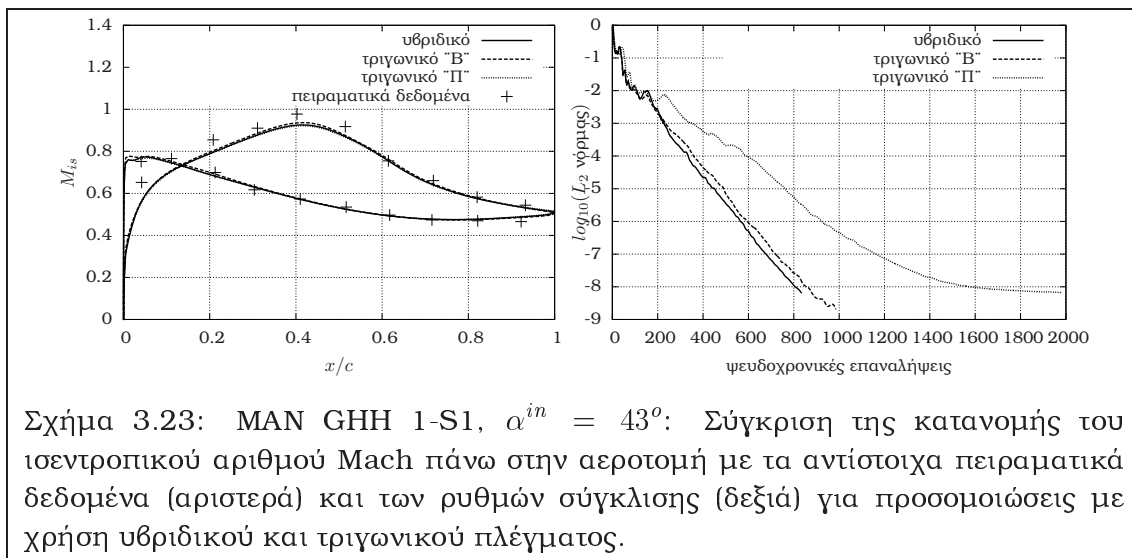
Σχήμα 3.21: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 52^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του ισοτροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού και τριγωνικού πλέγματος.

3.2.3 Πρόλεξη της ροής για $\alpha^{in} = 43^\circ$ και $\alpha^{in} = 40^\circ$

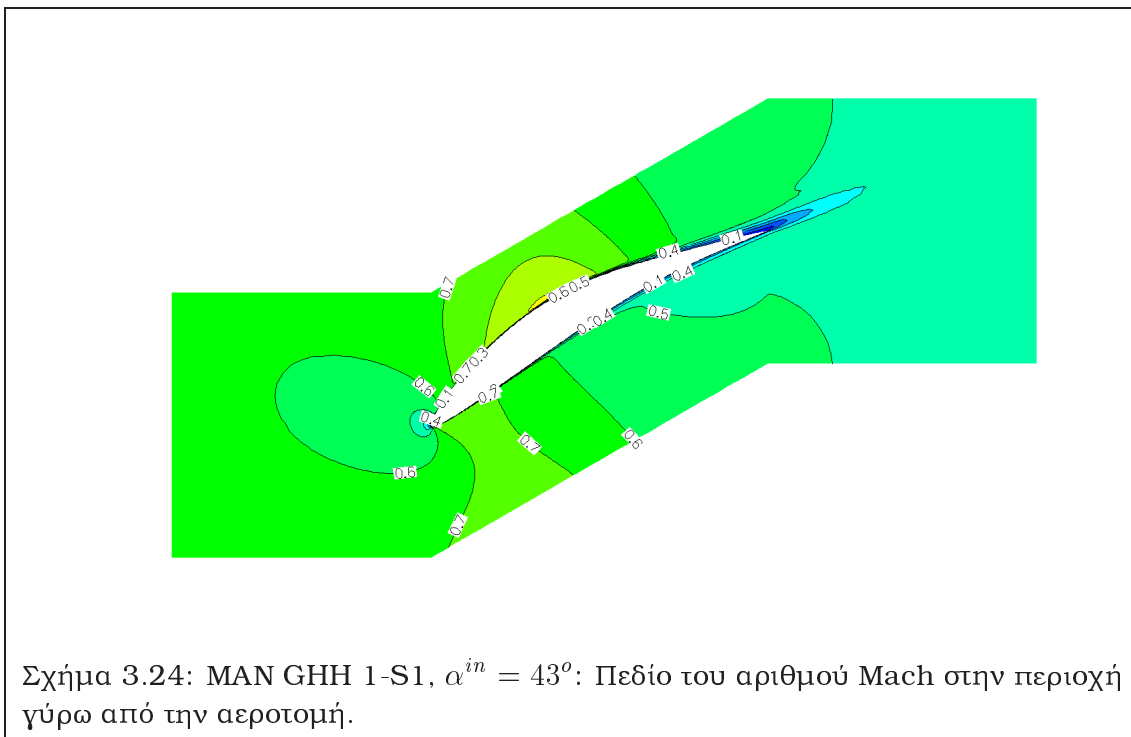
Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις αρνητικής απόκλισης της γωνίας εισόδου της ροής από το σημείο σχεδιασμού. Στην πρώτη περίπτωση οι συνθήκες είναι $\alpha^{in} = 43^\circ$, $|\hat{u}|^{in} = 202.8\text{m/s}$, $AVDR \approx 0.9167$, $Re_c = 8.59 \times 10^{-5}$ και $M_{is}^{out} = 0.4949$. Η δεύτερη περίπτωση αφορά σε λειτουργία της περύγωσης κοντά στο σημείο ηχητικού στραγγαλισμού της ροής, με συνθήκες $\alpha^{in} = 40^\circ$, $|\hat{u}|^{in} = 204.1\text{m/s}$, $AVDR \approx 0.922$, $Re_c = 8.61 \times 10^{-5}$ και $M_{is}^{out} = 0.54437$. Τα σχ. 3.23 και 3.25 δείχνουν τις συγκρίσεις του ισοτροπικού αριθμού Mach με τα πειραματικά δεδομένα και τις καμπύλες σύγκλισης. Στην πρώτη περίπτωση, η χρήση υβριδικού πλέγματος είναι αποδοτικότερη (4min 47s για το υβριδικό πλέγμα έναντι 5min 16s για το τριγωνικό πλέγμα σε 6 πυρήνες ενός οκταπύρηνου 64bit DELL Poweredge blade server). Στη δεύτερη περίπτωση, παρότι παρατηρήθηκε ταχύτερη σύγκλιση στο τριγωνικό 'Π' πλέγμα σε σχέση με το υβριδικό, η πραγματική διαφορά στο συνολικό υπολογιστικό κόστος είναι μικρότερη από αυτήν που υπονοεί το αντίστοιχο σχήμα δεδομένου ότι το ανά ψευδοχρονικό βήμα υπολογιστικό κόστος είναι μικρότερο για το υβριδικό πλέγμα λόγω του μειωμένου αριθμού ακμών (συγκεκριμένα, σε 8 πυρήνες η προσομοίωση χρειάστηκε 3min 34s για το υβριδικό και 3min 6s για το τριγωνικό 'Π' πλέγμα). Τέλος, στα σχ. 3.24 και 3.26 φαίνονται τα πεδία του αριθμού Mach για τις δύο γωνίες πρόσπτωσης (ιδιαίτερα στη δεύτερη περίπτωση παρατηρεί κανείς την περιοχή διηχητικής ροής,



ενώ απεικονίζεται με περισσότερη λεπτομέρεια και η ακμή εκφυγής του περυγίου, όπου λαμβάνει χώρα αποκόλληση της ροής).



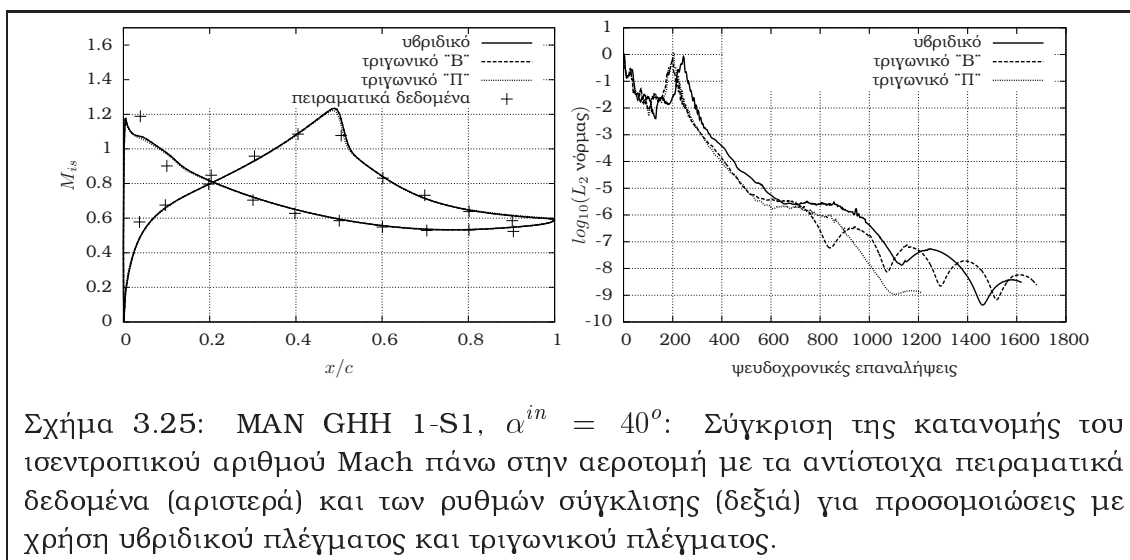
Σχήμα 3.23: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 43^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του ισοτροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού και τριγωνικού πλέγματος.



Σχήμα 3.24: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 43^\circ$: Πεδίο του αριθμού Mach στην περιοχή γύρω από την αεροτομή.

3.3 Ροή στην 2D περύγωση συμπιεστή του Shreeve

Η τελευταία περίπτωση 2D ροής που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο είναι η ροή σε περύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης, ο οποίος έχει σχεδιαστεί ώστε να



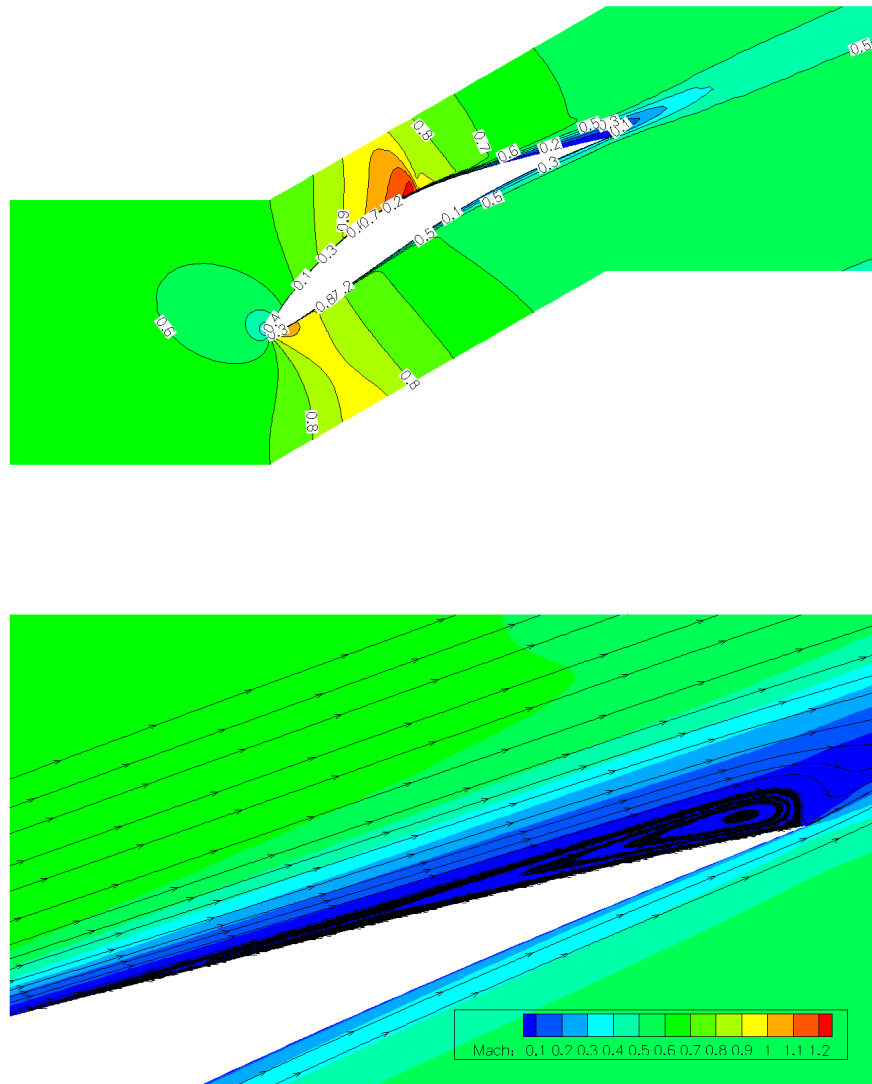
Σχήμα 3.25: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 40^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του ισοεντροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού πλέγματος και τριγωνικού πλέγματος.

Λειτουργεί υπό υψηλή φόρτιση σε μεγάλο εύρος συνθηκών χωρίς απώλεια στήριξης. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στη φυσική της ροής είναι η ύπαρξη φουσαλίδας στρωτής αποκόλλησης στην ακμή πρόσπτωσης ακόμη και στις συνθήκες σχεδιασμού, με μετάβαση της ροής σε τυρβώδη στο σημείο επανακόλλησης, και ταυτόχρονα η απουσία αποκόλλησης στην περιοχή του σημείου εκφυγής, ακόμα και σε συνθήκες εκτός σχεδιασμού. Η πτερύγωση μελετήθηκε αρχικά με πειραματικές μεθόδους για τρεις διαφορετικές γωνίες εισόδου της ροής, [228], [229], από τους Shreeve, Sanger και Elazar (για αυτό τον λόγο αναφερόμαστε στη συγκεκριμένη γεωμετρία ως 'πτερύγωση συμπιεστή του Shreeve', προκειμένου να τη διακρίνουμε από την προηγούμενη περίπτωση, η οποία επίσης αφορούσε σε πτερύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης) και τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια από διάφορες ερευνητικές ομάδες ως σημείο αναφοράς κυρίως για την αξιολόγηση της πιστότητας των χρησιμοποιούμενων μοντέλων τύρβης στην εκάστοτε αριθμητική μέθοδο πρόλεξης, [230], [231], [232], [233], [234], [235], [236], [236], [188].

Η γεωμετρία της αεροτομής δίνεται στην εργασία [229]. Η χορδή της είναι ίση με $c = 0.1273\text{m}$ και το βήμα $t = 0.0762\text{m}$. Η γωνία κλίσης της αεροτομής δίνεται ίση με 14.4° . Στην ίδια εργασία προτείνεται για τις αριθμητικές προσομοιώσεις η χρήση λόγου $AVDR$ μεταξύ των τιμών 0.9434 και 0.9615 προκειμένου να ληφθεί υπόψη η επίδραση των τοιχωμάτων της πειραματικής διάταξης.

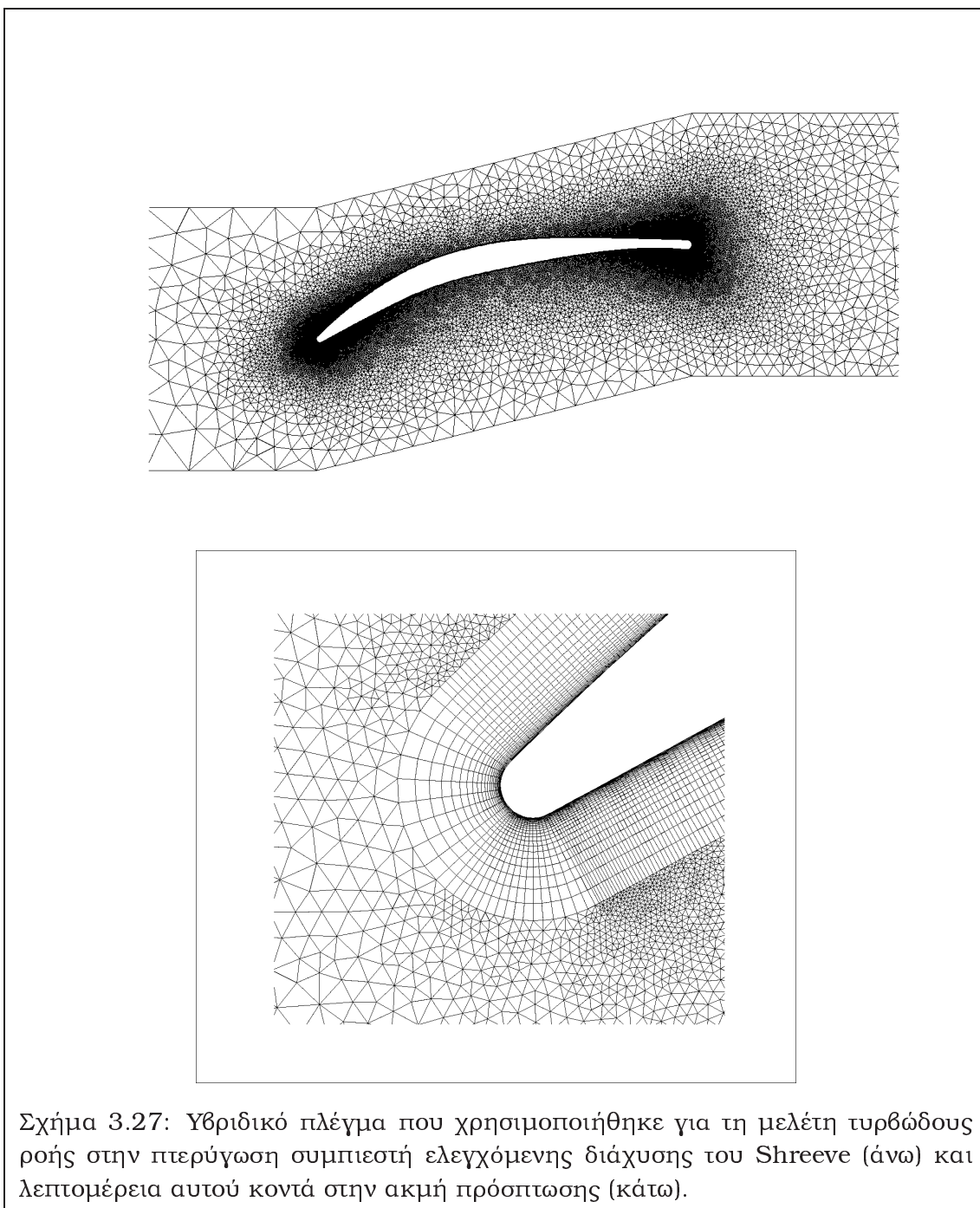
Και στις τρεις περιπτώσεις που μελετώνται εδώ, ο αέρας εισέρχεται με ταχύτητα $|\hat{u}|^{in} = 85\text{m/s}$, που αντιστοιχεί σε αριθμό Mach ίσο με 0.25. Ο αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή είναι $Re_c = 7 \times 10^5$. Η ολική πίεση εισόδου είναι $\hat{P}_t^{in} = 104365\text{Pa}$ και η ολική θερμοκρασία $\hat{T}_t^{in} = 294\text{K}$.

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις αριθμητικές προσομοιώσεις αποτελείται από 34,907 στοιχεία (19,307 τρίγωνα και 15,600 τετράπλευρα) και 25,642 κόμβους, φαίνεται δε στο σχ. 3.27, ενώ το αντίστοιχο τριγωνικό προκύπτει πάλι με απλή διάσπαση κάθε τετραπλεύρου σε δύο τρίγωνα. Τα αποτελέσματα που



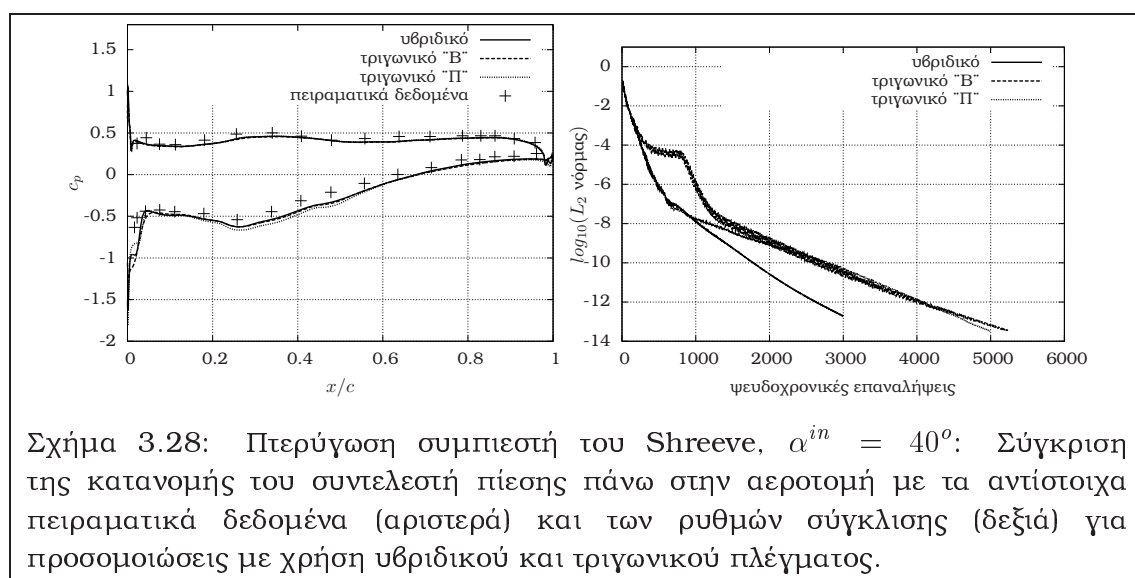
Σχήμα 3.26: MAN GHH 1-S1, $\alpha^{in} = 40^\circ$: Πεδίο του αριθμού Mach (πάνω) και λεπτομέρεια από την περιοχή της ακμής εκφυγής (κάτω), στην οποία φαίνεται η περιοχή αποκόλλησης της ροής.

ακολουθούν περιλαμβάνουν συγκρίσεις της κατανομής του συντελεστή πίεσης επάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.



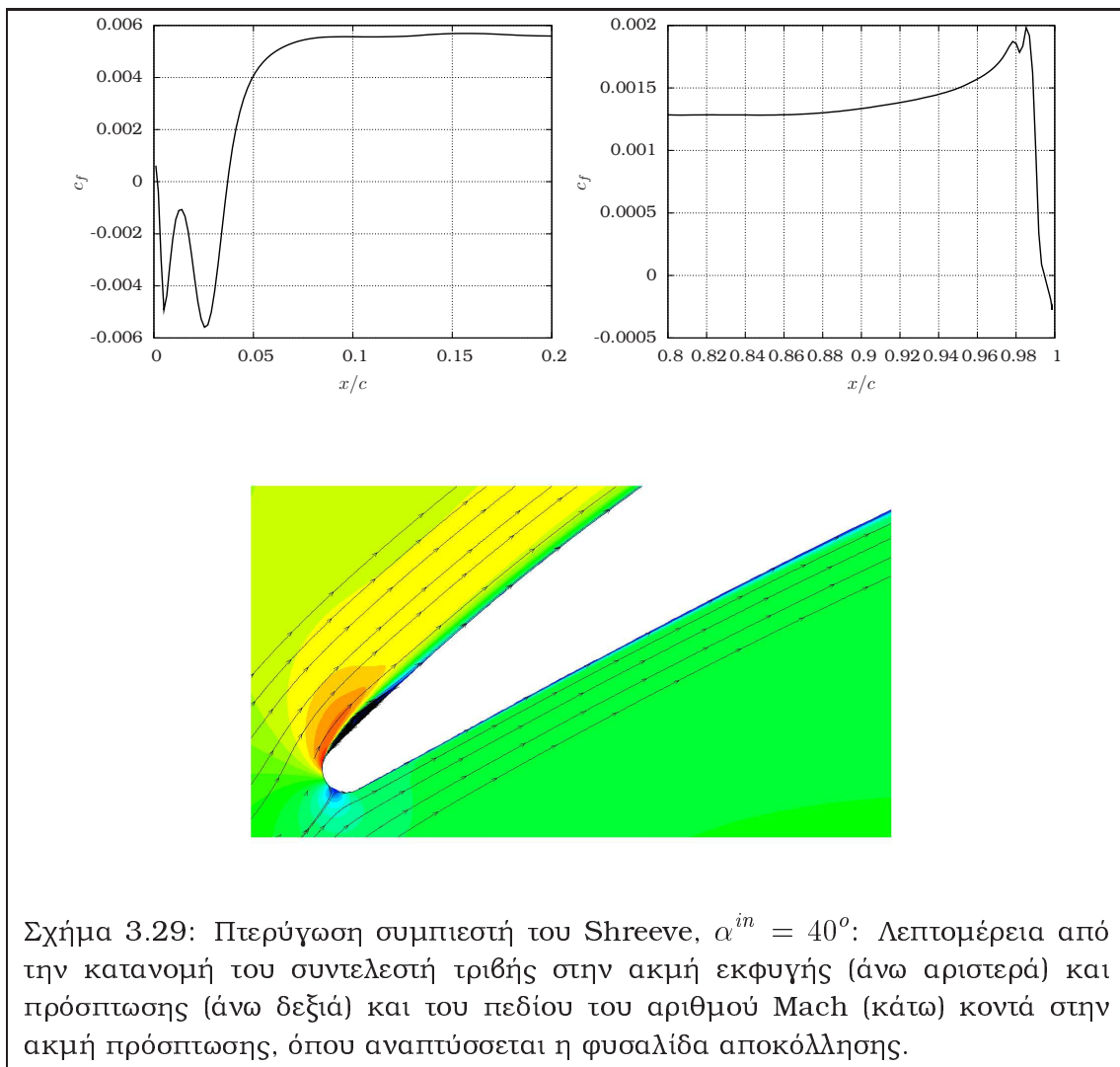
3.3.1 Ροή στο σημείο σχεδιασμού

Στο σημείο σχεδιασμού, η γωνία εισόδου της ροής στην πτερύγωση είναι ίση με 40° . Στο σχ. 3.28 παρουσιάζονται συγκρίσεις της αριθμητικά υπολογισμένης κατανομής πίεσης επάνω στην αεροτομή της πτερύγωσης με τα πειραματικά δεδομένα, [229], καθώς και οι αντίστοιχοι ρυθμοί σύγκλισης. Σε αυτήν την περίπτωση όλες οι προσομοιώσεις υπολόγισαν όμοιες κατανομές πίεσης, αλλά η προσομοίωση με χρήση υβριδικού πλέγματος είναι αποδοτικότερη και από πλευράς συνολικού χρόνου εκτέλεσης (4min 41s για το υβριδικό έναντι 8min 21s για το τριγωνικό 'Π' πλέγμα σε 8 πυρήνες ενός 64bit DELL Poweredge blade server) και από πλευράς απαιτήσεων μνήμης.



Σχήμα 3.28: Πτερύγωση συμπιεστή του Shreeve, $\alpha^{in} = 40^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού και τριγωνικού πλέγματος.

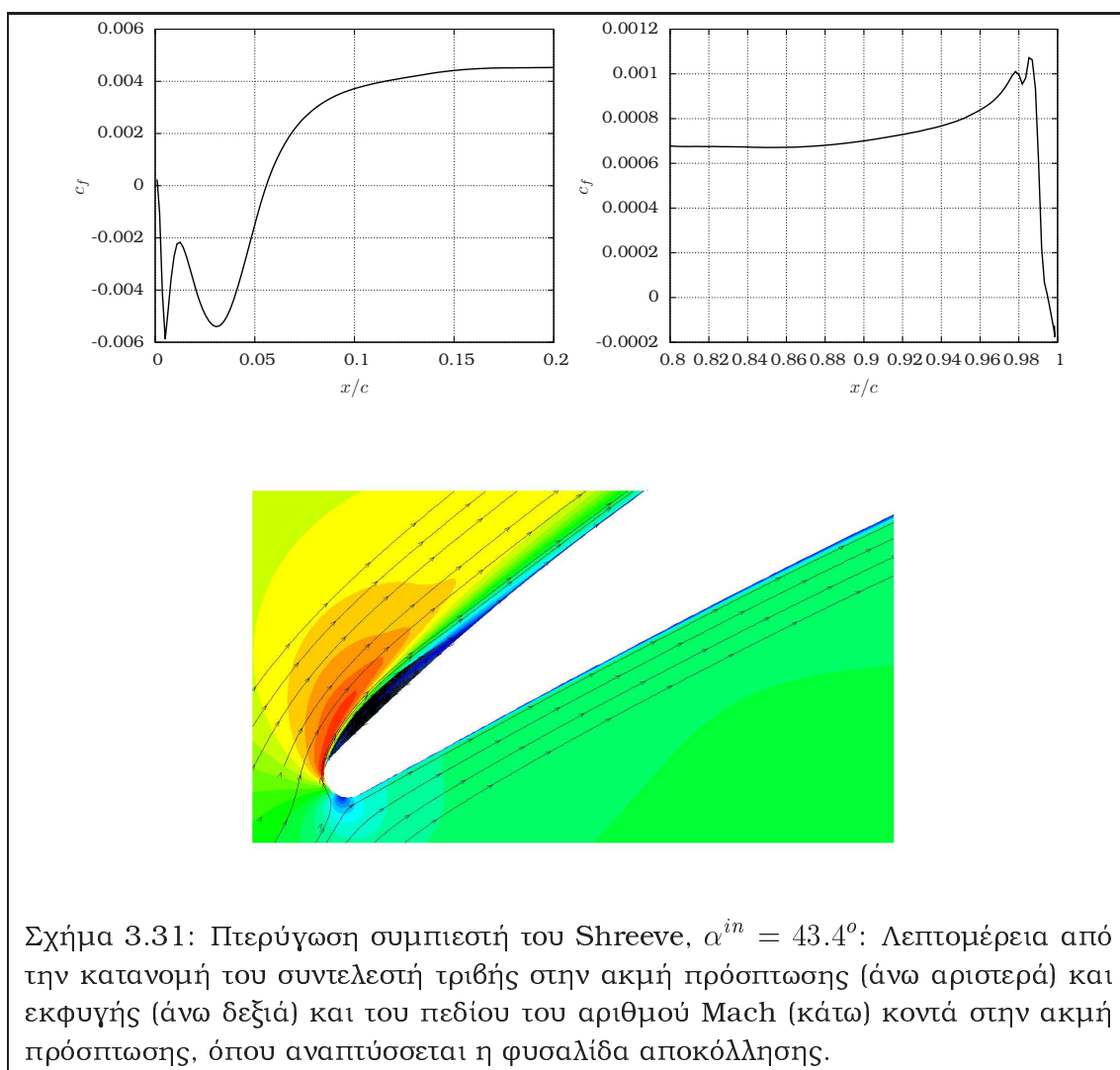
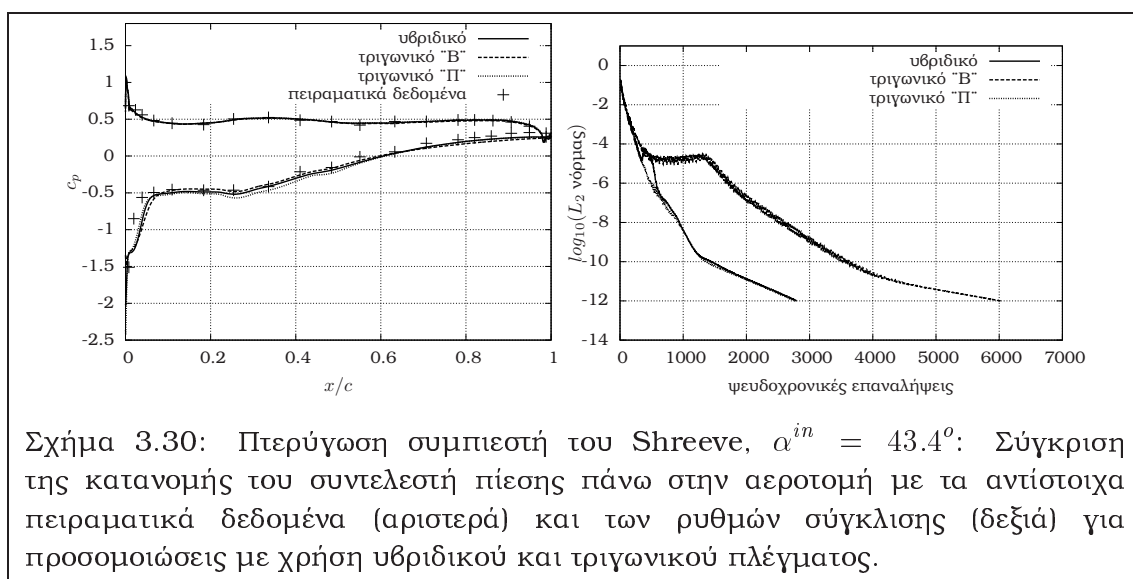
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περιοχή κοντά στο σημείο πρόσπτωσης, σχ. 3.29, όπου αναπτύσσεται η φουσαλίδα αποκόλλησης. Η επανακόλληση της ροής προβλέπεται από την προσομοίωση στο 0.036% της χορδής, όπως φαίνεται και από την κατανομή του συντελεστή τριβής στο ίδιο σχήμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη φουσαλίδας αποκόλλησης έχει επαληθευτεί με δύο διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, [228], [229]. Παρόλα αυτά το ακριβές της μέγεθος δεν είναι γνωστό. Υπάρχουν εργασίες στην αντίστοιχη βιβλιογραφία (λ.χ. [230], [234]) οι οποίες αποτυγχάνουν να υπολογίσουν τη φουσαλίδα, με άμεση συνέπεια τη μείωση του πάχους του υπολογιζόμενου οριακού στρώματος κατάντι. Η αδυναμία αυτή αποδίδεται στην αφύσικη παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας των χρησιμοποιούμενων μοντέλων τύρβης κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Το μοντέλο των Spalart-Allmaras δεν παρουσιάζει αυτό το πρόβλημα, αφού δεν υπολογίζει άμεσα την ποσότητα αυτή, όπως έχει διαπιστωθεί και σε παλαιότερη σχετική εργασία του ΕΘΣ, [188].



3.3.2 Ροή εκτός σημείου σχεδιασμού

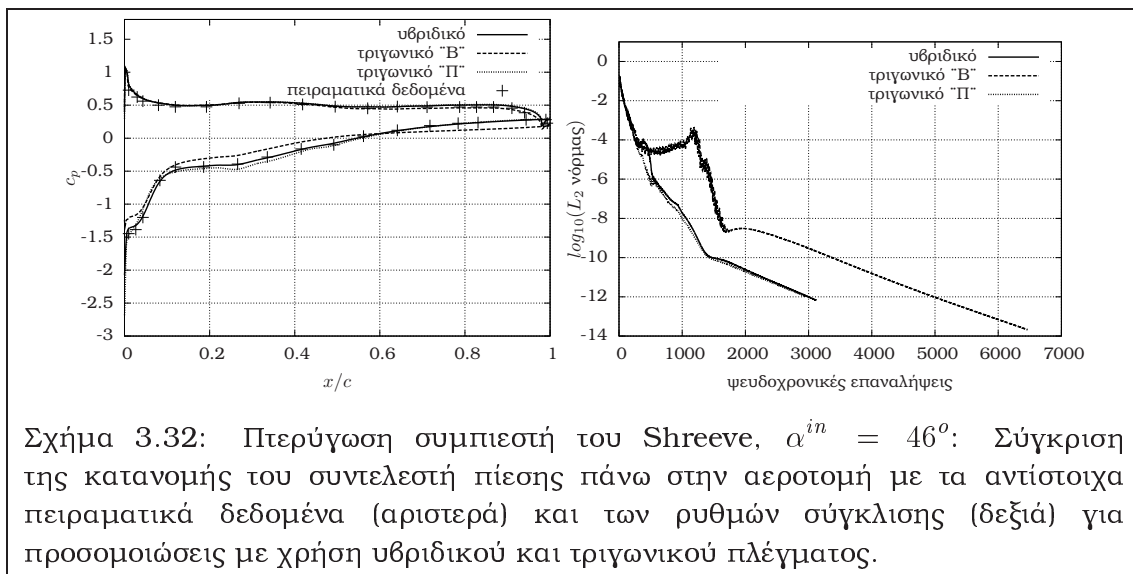
Για γωνία εισόδου της ροής ίση με 43.4° , οι κατανομές του συντελεστή πίεσης των αριθμητικών προσομοιώσεων σε σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα, καθώς και οι αντίστοιχοι ρυθμοί σύγκλισης, δίνονται στο σχ. 3.30. Πάλι, οι προσομοιώσεις έδωσαν όμοια αποτελέσματα, ενώ η χρήση υβριδικού πλέγματος είναι πλεονεκτικότερη από πλευράς συνολικού χρόνου εκτέλεσης (3min 44s για το υβριδικό έναντι 4min 40s για το τριγωνικό 'Π' πλέγμα) και απαιτήσεων σε μνήμη.

Ο συντελεστής τριβής και οι γραμμές ροής κοντά στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής φαίνονται στο σχ. 3.31. Η αριθμητική προσομοίωση προβλέπει επανακόλληση της ροής στο 0.056% της χορδής.



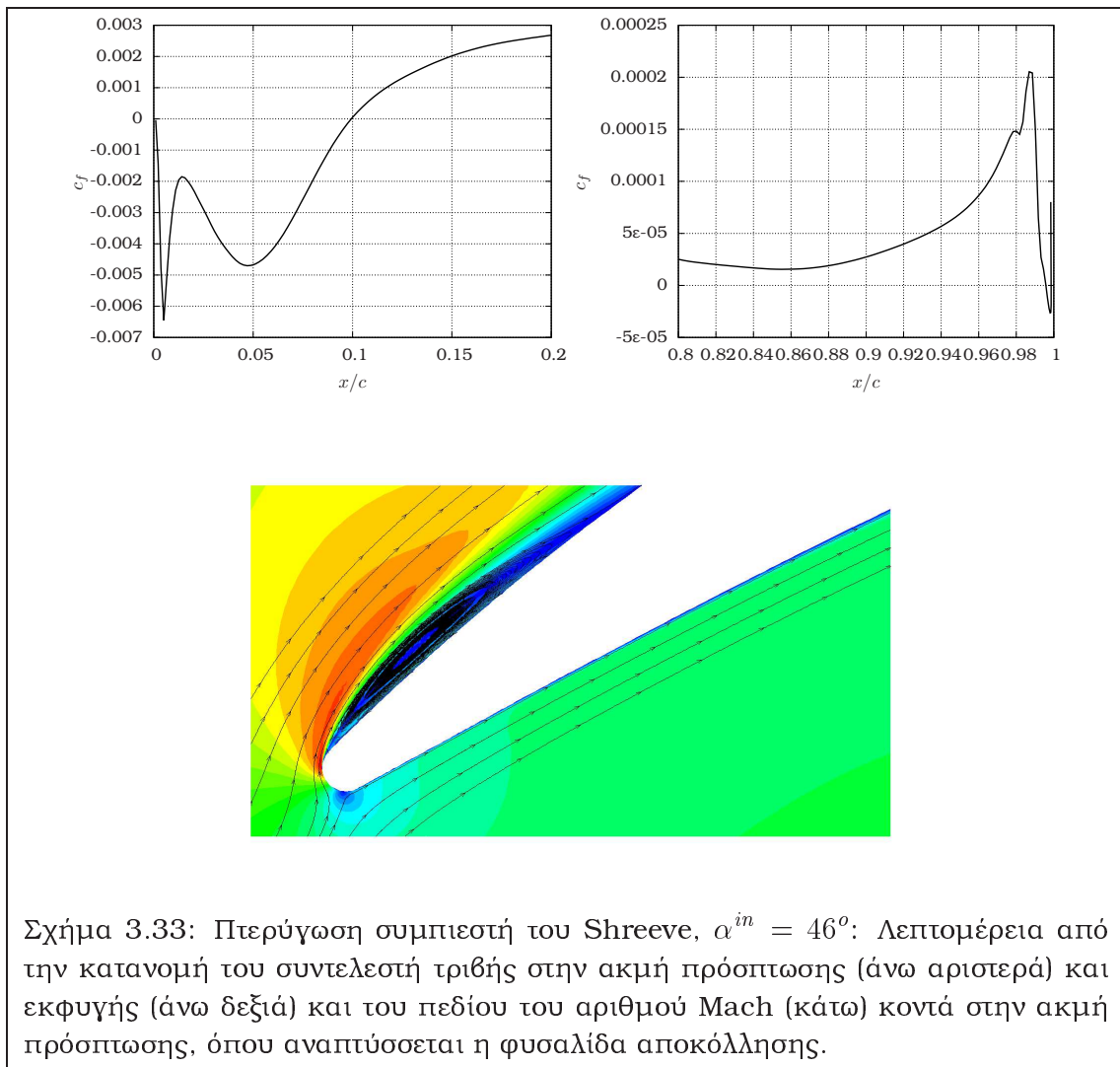
3.3.3 Ροή κοντά στο όριο απώλειας στήριξης

Στην τελευταία περίπτωση για την οποία υπάρχουν πειραματικά δεδομένα η γωνία εισόδου της ροής είναι 46° . Πρόκειται για την πιο απαιτητική από τις τρεις περιπτώσεις που μελετώνται εδώ, με την περύγωση να λειτουργεί κοντά στο όριο απώλειας στήριξης. Η σύγκριση της υπολογισμένης κατανομής του συντελεστή πίεσης με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, ιδιαίτερα στην περίπτωση που χρησιμοποιείται υβριδικό πλέγμα, είναι άριστη, σχ. 3.32, ενώ το τριγωνικό 'B' πλέγμα δίνει αποτελέσματα αισθητά κατώτερης πιστότητας. Επίσης, η χρήση υβριδικού πλέγματος κατά την προσομοίωση είναι αποδοτικότερη από τη χρήση του αντίστοιχου τριγωνικού (4min 11s για το υβριδικό έναντι 4min 58s για το τριγωνικό 'Π' πλέγμα).



Σχήμα 3.32: Περύγωση συμπίεστή του Shreeve, $\alpha^{in} = 46^\circ$: Σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης πάνω στην αεροτομή με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (αριστερά) και των ρυθμών σύγκλισης (δεξιά) για προσομοιώσεις με χρήση υβριδικού και τριγωνικού πλέγματος.

Η κατανομή του συντελεστή τριβής κοντά στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής, καθώς και η αντίστοιχη εικόνα του πεδίου παρουσιάζονται στο σχ. 3.33. Επανακόλληση της ροής προβλέπεται από την προσομοίωση στο 0.01% της χορδής (όμοιο μέγεθος της φουσαλίδας αποκόλλησης έχει παρατηρηθεί και από άλλους ερευνητές, [235], και σε παλαιότερη πρόλεξη με κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, [188]). Αξίζει να παρατηρηθεί στο σχ. 3.33 ότι μετά το σημείο επανακόλλησης η ροή παραμένει πλήρως προσκολλημένη σε όλη την έκταση της πλευράς υποπίεσης.



3.4 Μελέτη της διάσπασης της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους

Η περίπτωση που μελετάται σε αυτή την ενότητα αφορά στην πρόλεξη της θέσης διάσπασης της κύριας δίνης που αναπτύσσεται πάνω από την πτέρυγα υπερηχητικού πολιτικού αεροσκάφους¹ κατά τη φάση απογείωσης. Η ροή θεωρείται μόνιμη και ατριβής, με σκοπό την εξαγωγή των βασικών χαρακτηριστικών της κύριας δίνης. Μελετώνται τρεις διαφορετικές γεωμετρίες² σε υποηχητικές συνθήκες (επ' άπειρο αριθμός Mach $M^\infty = 0.3$), για δύο διαφορετικές γωνίες πρόνευσης³ ($\alpha^\infty = 15^\circ$ και $\alpha^\infty = 20^\circ$) και σε μηδενική γωνία εκτροπής και κλίσης (yaw angle, roll angle). Ως εκ τούτου, η ροή επιλύεται στο μισό αεροσκάφος, με την επιβολή κατάλληλων οριακών συνθηκών στο επίπεδο συμμετρίας. Κοινά χαρακτηριστικά και των τριών γεωμετριών είναι η απουσία canard και ουράς και η γενικότερη μορφή της πτέρυγας (δελταπτέρυγα αεροσκάφη με τεθλασμένη πτέρυγα⁴), ενώ οι διαφορές των γεωμετριών εντοπίζονται κυρίως στη διαμόρφωση της ακμής πρόσπτωσης της πτέρυγας. Τα αεροσκάφη αυτής της μορφής έχουν πιο ευνοϊκά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά σε υποηχητικές συνθήκες σε σχέση με τα αμιγώς δελταπτέρυγα αεροσκάφη, παρουσιάζουν όμως το φαινόμενο της ανόρθωσης κεφαλής⁵ σε σχετικά χαμηλές γωνίες πρόνευσης, [237]. Για αυτόν το λόγο ενδιαφέρει ιδιαίτερα η πρόλεξη της θέσης διάσπασης της κύριας δίνης, η οποία επηρεάζει άμεσα το φαινόμενο ανόρθωσης κεφαλής καθώς και άλλα βασικά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά, όπως το συντελεστή άνωσης (δεδομένου ότι σημαντικό μέρος της άνωσης στα δελταπτέρυγα αεροσκάφη οφείλεται στη δημιουργία υποπίεσης στην άνω πλευρά της πτέρυγας και στη μετατόπιση του σημείου ανακοπής της πτέρυγας κατάντι και προς την άνω πλευρά χάρη στην ύπαρξη της κύριας δίνης) και την ανάπτυξη αεροκραδασμών⁶. Γνώση των χαρακτηριστικών της κύριας δίνης μπορεί να υποβοηθήσει τη λήψη μέτρων για μείωση των αρνητικών φαινομένων που περιγράφονται παραπάνω, μέσω μηχανισμών ελέγχου της δίνης όπως στροβιλογόνων⁷ ή έγχυσης κατά μήκος του πυρήνα της δίνης, δεδομένου ότι η απουσία ουράς περιορίζει τις δυνατότητες αντιστάθμισης της ροπής πρόνευσης⁸.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν σε συγκρίσεις της θέσης διάσπασης της κύριας δίνης και του υπολογιζόμενου συντελεστή άνωσης μεταξύ των αριθμητικών προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν με το λογισμικό της παρούσας διατριβής και αντίστοιχων αποτελεσμάτων συνεργαζόμενης ερευνητικής

¹supersonic business jet

²Πλέγματα, γεωμετρίες και δεδομένα από συνεργαζόμενη ερευνητική ομάδα, στο πλαίσιο του έργου HISAC, Contract no AIP4CT2005516132, που χρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

³pitch angle

⁴cranked-arrow delta wing

⁵pitch-up

⁶buffeting

⁷vortex generators

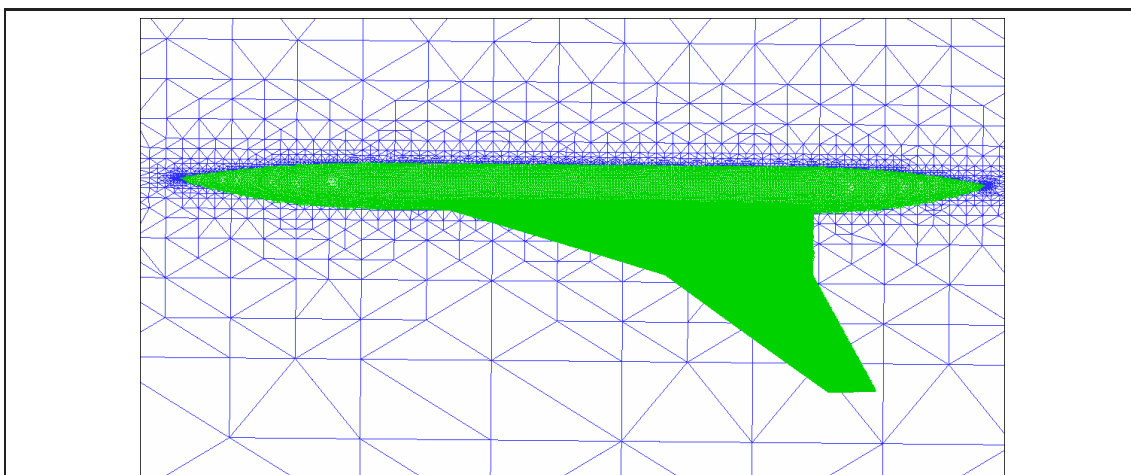
⁸pitching moment

ομάδας, τα οποία ελήφθησαν χρησιμοποιώντας επίσης κώδικα ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και στην κεντροκομβική προσέγγιση. Τα κριτήρια καθορισμού της θέσης διάσπασης της κύριας δίνης (κρίσιμος αριθμός Rossby, κρίσιμος λόγος περιστροφικής προς αξονική ταχύτητα, κρίσιμος ρυθμός αύξησης της διαμέτρου της δίνης κ.α., [238]) δεν έχουν εκφραστεί με σαφήνεια σε άλλες περιπτώσεις ροής πλην αυτής εντός αγωγού και εμπεριέχουν ένα ποσοστό αυθαιρεσίας μέσω των σταθερών που εμπλέκουν. Για αυτόν το λόγο, επελέγη η πιο ‘ελεύθερη’ προσέγγιση αναγνώρισης του σημείου διάσπασης μέσω των φυσικών φαινομένων που το συνοδεύουν (απότομη αλλαγή της κατεύθυνσης του πυρήνα της κύριας δίνης, εμφάνιση σημείου ανακοπής και αντίστοιχα διακοπή του πυρήνα της δίνης, εμφάνιση ζώνης αρνητικής αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας κατά τον άξονα του πυρήνα της δίνης, [238], [239],[240],[241], [242]). Για τον εντοπισμό του πυρήνα της κύριας δίνης υπάρχουν μαθηματικές μέθοδοι στη βιβλιογραφία, [243], [244], οι οποίες χωρίζονται κυρίως σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το μέγεθος που χρησιμοποιούν ως κριτήριο (κριτήριο που επεξεργάζεται τις ισοεπιφάνειες κάποιου βαθμωτού μεγέθους ή απ’ ευθείας εξαγωγή του πυρήνα βάσει των αριθμητικών τιμών κατάλληλου διανυσματικού μεγέθους). Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται η αυτόματη μέθοδος εντοπισμού του εμπορικού προγράμματος TECPLOT η οποία βασίζεται στην ανάλυση του ιδιοπροβλήματος του τανυστή της κλίσης της ταχύτητας, προτιμήθηκε δε έναντι της εναλλακτικής μεθόδου που προσφέρεται από το ίδιο πρόγραμμα (εξαγωγή του πυρήνα με μειωμένη εξαγωγή του διανύσματος στροβιλότητας) λόγω της μικρότερης ευαισθησίας της στο θόρυβο που εισάγουν δίνες μικρότερης έντασης.

3.4.1 1η γεωμετρία αεροσκάφους

Στα σχ. 3.34 και σχ. 3.35 απεικονίζονται απόψεις του πλέγματος γύρω από την πρώτη γεωμετρία που μελετάται. Το πλέγμα αποτελείται από 1,052,806 κόμβους και 5,548,261 τετράεδρα. Ιδιαίτερα στο σχ. 3.35 μπορεί να παρατηρήσει κανείς την αυξημένη διακριτότητα του πλέγματος στην περιοχή που αναμένεται να αναπτυχθεί η κύρια δίνη, προκειμένου να πραγματοποιηθεί καλύτερη πρόλεξη των φαινομένων που σχετίζονται με αυτή. Η κατανομή του αριθμού Mach επάνω στο στερεό όριο απεικονίζεται στο σχ. 3.36. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται οπτικοποίηση του πυρήνα της κύριας δίνης και των γραμμών ροής γύρω από αυτόν, ενώ στο σχ. 3.37 φαίνεται τομή του πεδίου ροής κάθετη στον άξονα της ατράκτου και κοντά στην ακμή εκφυγής του εσωτερικού τμήματος της πτέρυγας, όπου είναι ευδιάκριτη η έκταση της κύριας δίνης.

Για γωνία πρόνευσης $\alpha = 15^\circ$ δεν παρατηρείται διάσπαση της δίνης επάνω από την πτέρυγα του αεροσκάφους, όπως φαίνεται και στα σχ. 3.35 και 3.36. Με αύξηση της γωνίας σε $\alpha = 20^\circ$ υπάρχει πλέον διάσπαση σπειροειδούς μορφής, σχ. 3.38 και 3.39, ενώ το τμήμα του πυρήνα αυτής κοντά στην ακμή εκφυγής μετακινείται ελαφρώς προς το εσωτερικό τμήμα της πτέρυγας. Η αντίστοιχη εικόνα της κάθετης στον άξονα τομής του πεδίου ροής φαίνεται στο σχ. 3.40. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τυπική εικόνα μίας κύριας και μίας δευτερεύουσας δίνης αντίθετης φοράς δεν



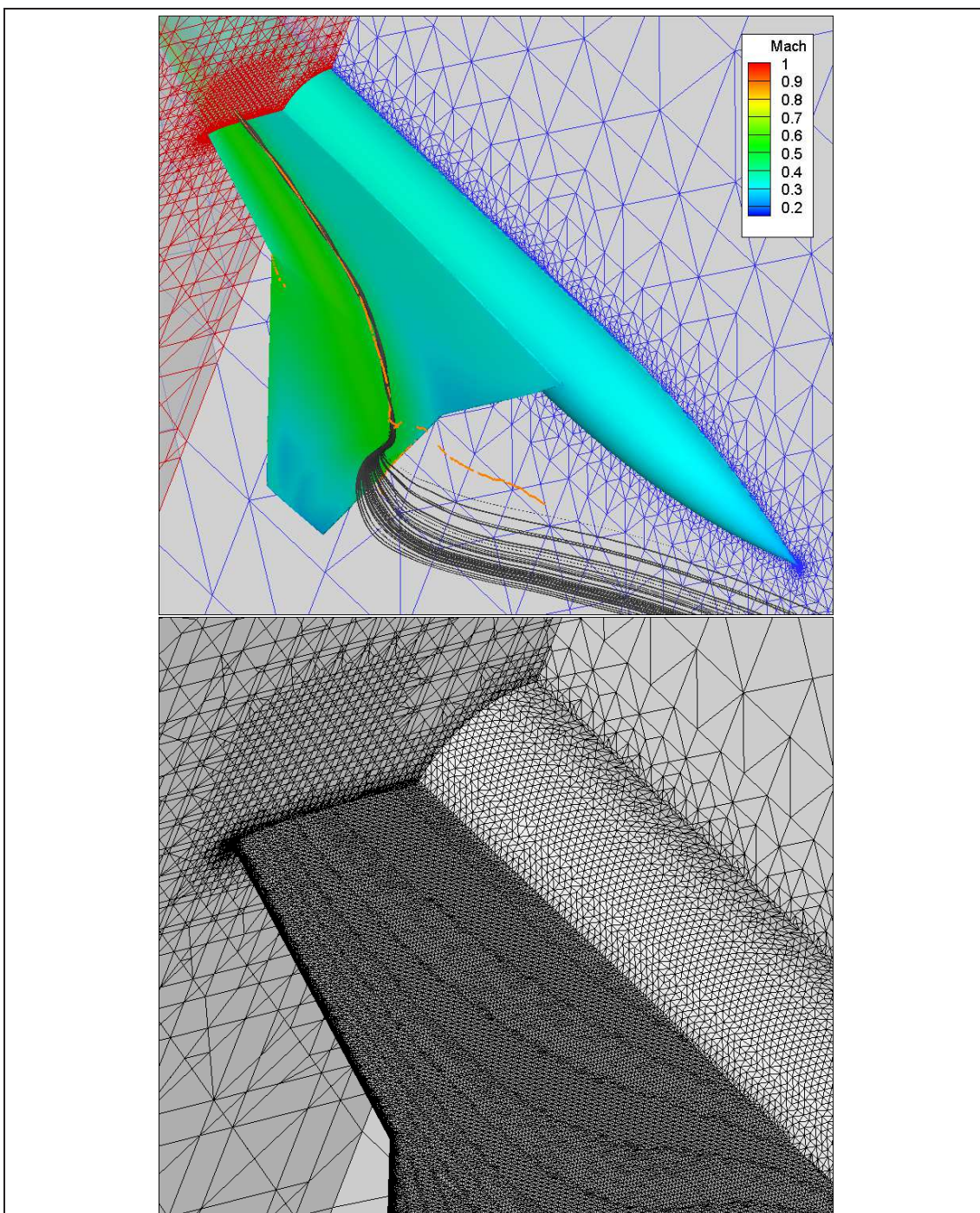
Σχήμα 3.34: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 1η γεωμετρία: Πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος.

	Θέση διάσπασης κύριας δίνης (% αξονική θέση ως προς την εσωτερική χορδή της πτέρυγας)		c_L	
γωνία πρόνευσης ($^\circ$)	15	20	15	20
αριθμητικά αποτελέσματα παρούσας διατριβής	-	92%	0.913	1.063
αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ομάδας	-	94%	0.909	1.100

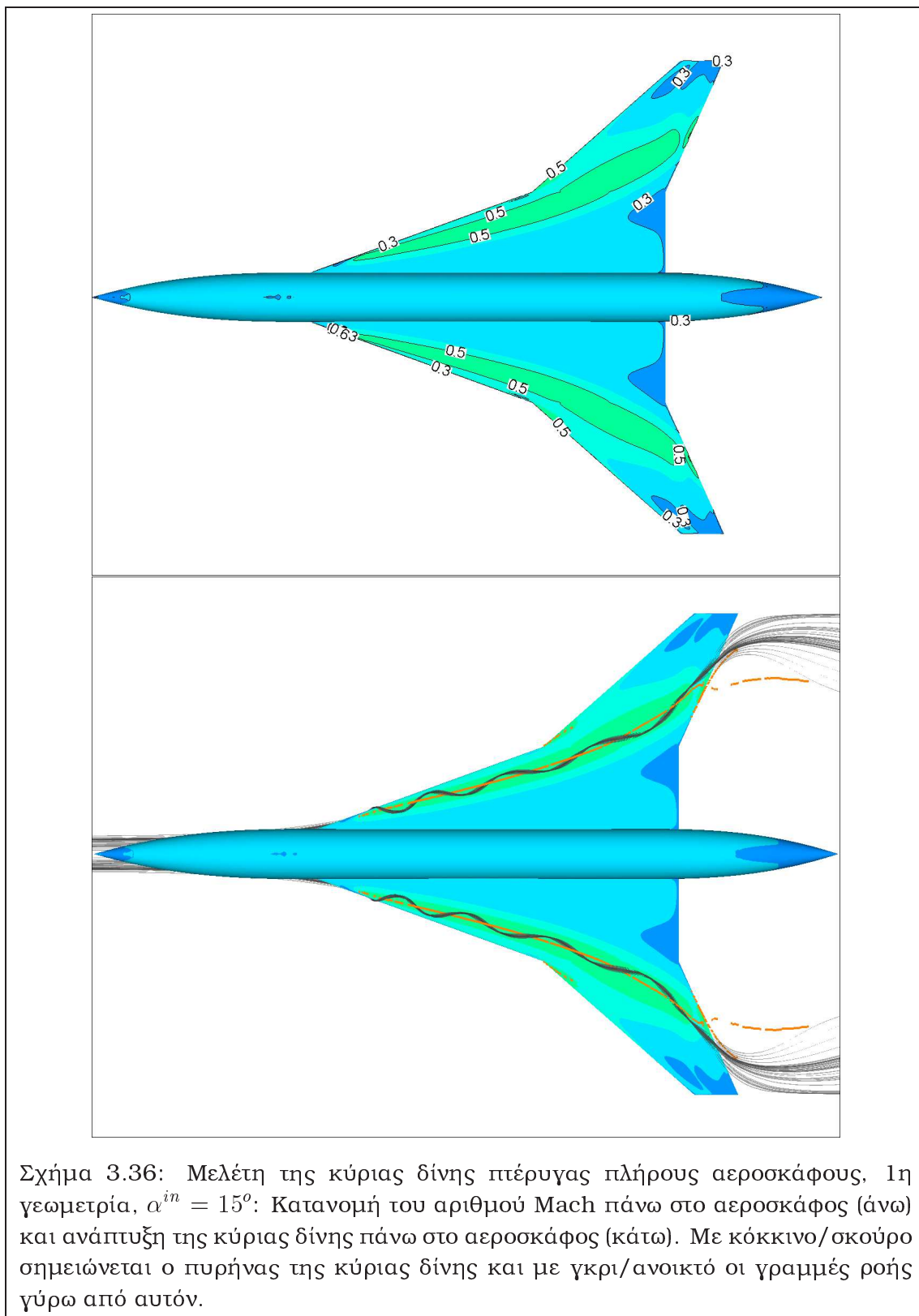
Πίνακας 3.1: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 1η γεωμετρία: Σύγκριση της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας.

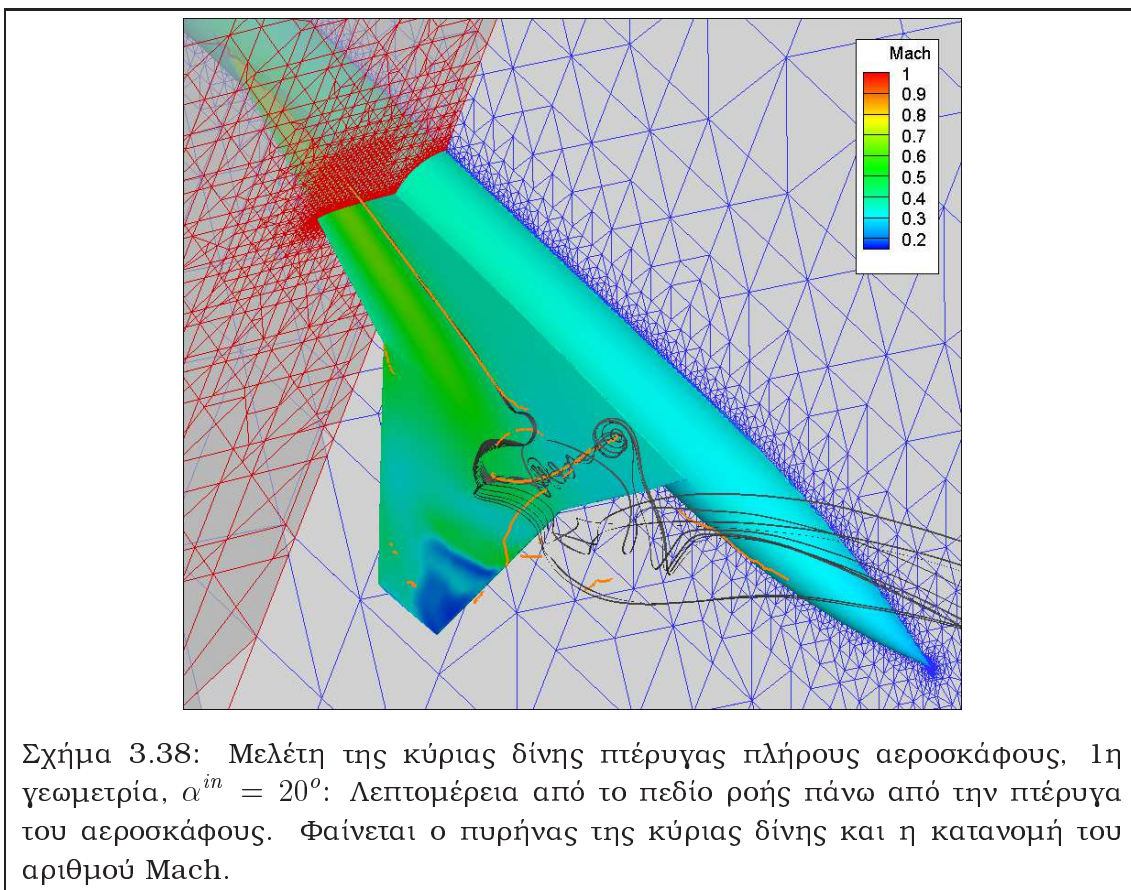
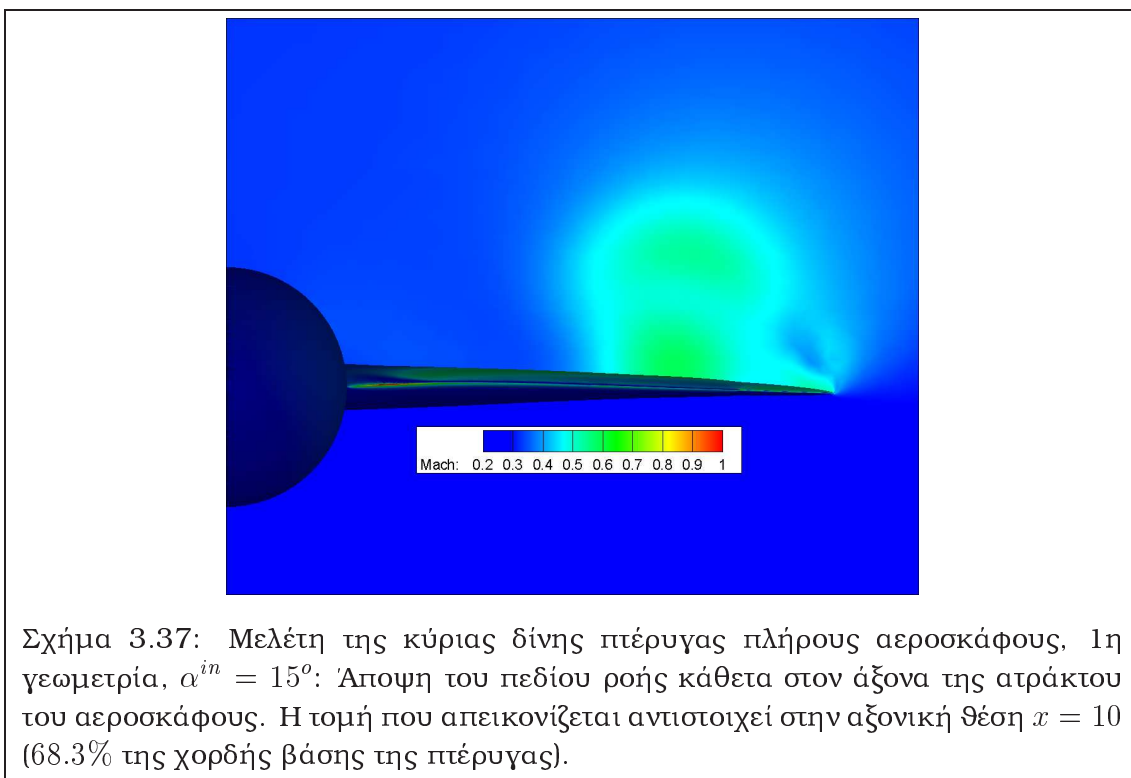
παρατηρείται στα σχ. 3.37 και σχ. 3.40. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού τυπικά η ανάπτυξη της δευτερεύουσας δίνης οφείλεται σε συνεκτικά φαινόμενα.

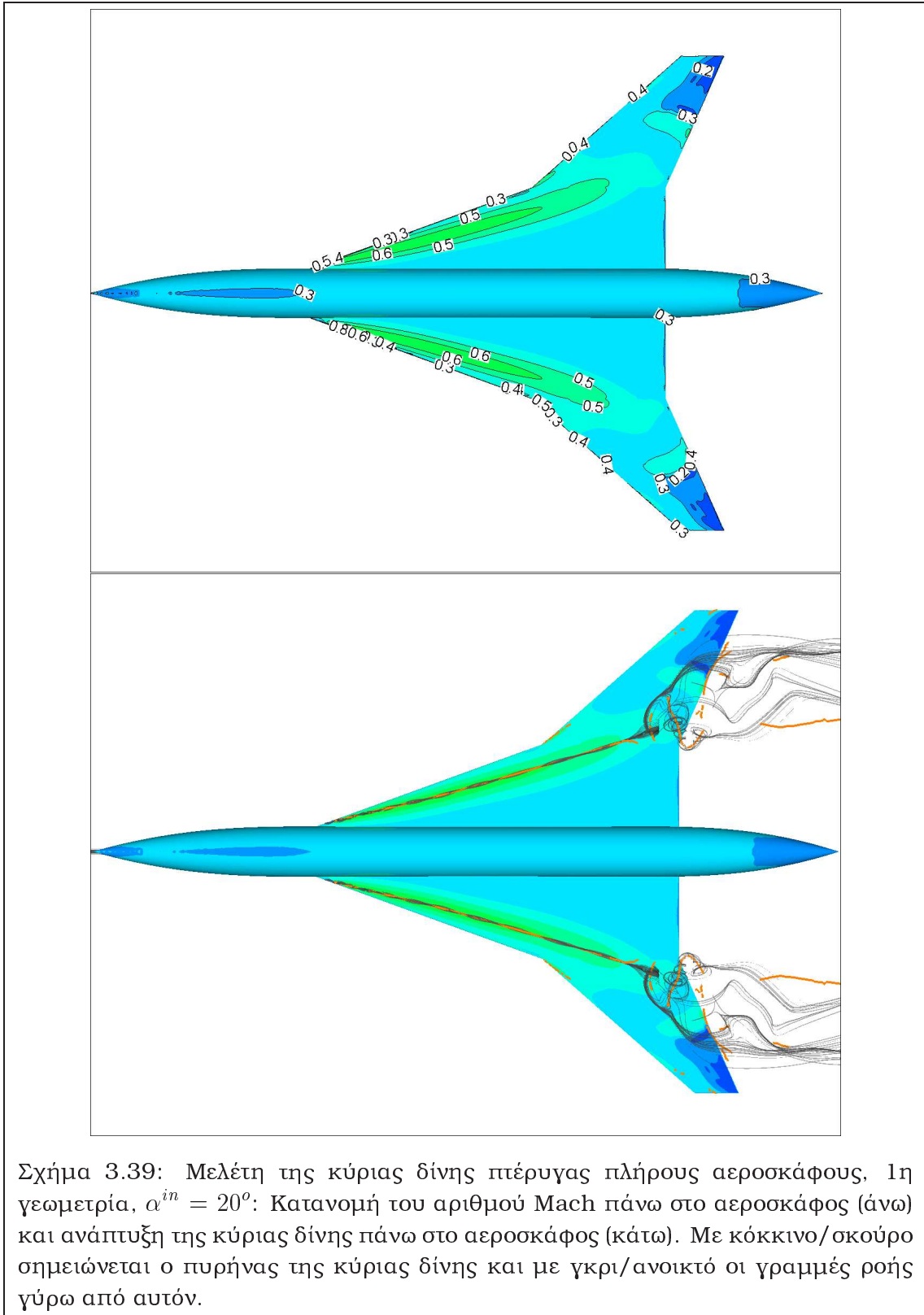
Τέλος, στον πίνακα 3.1 συγκεντρώνονται οι συγκρίσεις της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης (ως επιφάνεια αναφοράς λαμβάνεται η επιφάνεια της πτέρυγας, $A_{ref} = 65.7\text{m}^2$) με τις αντίστοιχες τιμές της συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας, για τις δύο προαναφερθείσες τιμές της γωνίας πρόνευσης.

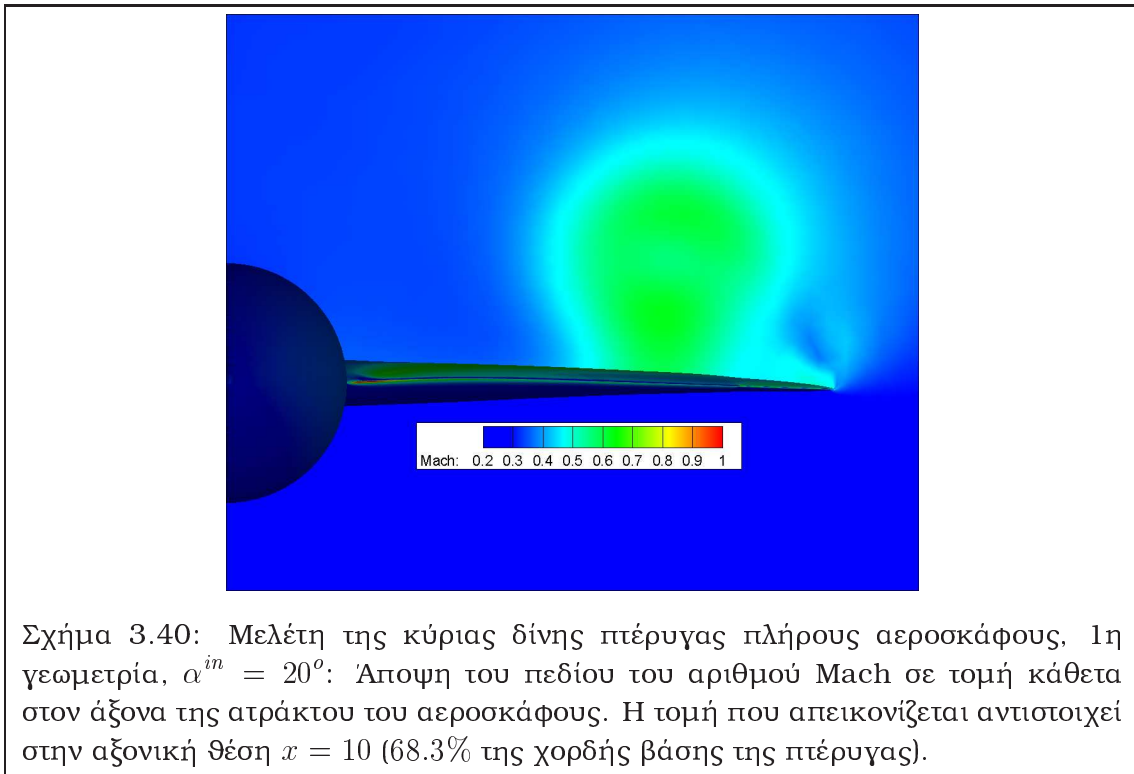


Σχήμα 3.35: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 1η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 15^\circ$: Λεπτομέρεια από το πεδίο ροής πάνω από την πτέρυγα του αεροσκάφους. Φαίνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και η κατανομή του αριθμού Mach (άνω), και τομές του πλέγματος (κάτω), όπου διακρίνεται η τοπικά αυξημένη διακριτότητα του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο και στην περιοχή όπου αναπτύσσεται η κύρια δίνη.







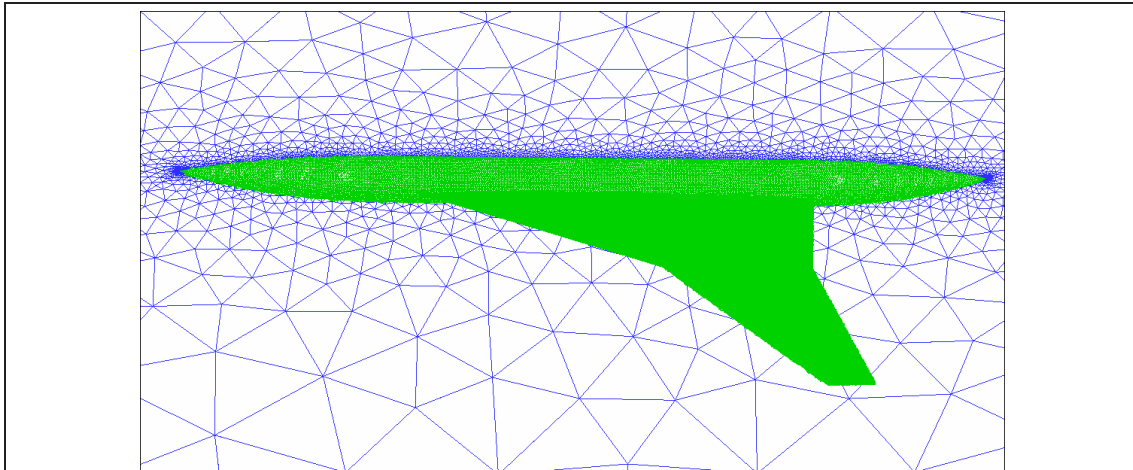


3.4.2 2η γεωμετρία αεροσκάφους

Το πλέγμα γύρω από τη δεύτερη γεωμετρία απεικονίζεται στα σχ. 3.41 και σχ. 3.42, αποτελείται δε από 925,102 κόμβους και 4,865,188 τετράεδρα. Οι περιοχές κοντά στο στερεό όριο και στη γειτονιά όπου αναπτύσσεται η κύρια δίνη παρουσιάζουν και πάλι αυξημένη πυκνότητα. Η κατανομή του αριθμού Mach επάνω στο στερεό όριο, ο πυρήνας της κύριας δίνης και οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν απεικονίζονται στο σχ. 3.43. Στο σχ. 3.44 παρουσιάζεται τομή του πεδίου ροής κάθετη στον άξονα της ατράκτου και κοντά στην ακμή εκφυγής του εσωτερικού 'δέλτα' της πτέρυγας, όπου και πάλι είναι ευδιάκριτη η επίδραση της κύριας δίνης στο πεδίο του αριθμού Mach.

Διάσπαση της δίνης παρατηρείται μόνο στην αυξημένη γωνία πρόνευσης, $\alpha = 20^\circ$, και μάλιστα αρκετά κατάντι, με ταυτόχρονη μετακίνηση του πυρήνα της κύριας δίνης προς την άτρακτο του αεροσκάφους, σχ. 3.45 και 3.46.

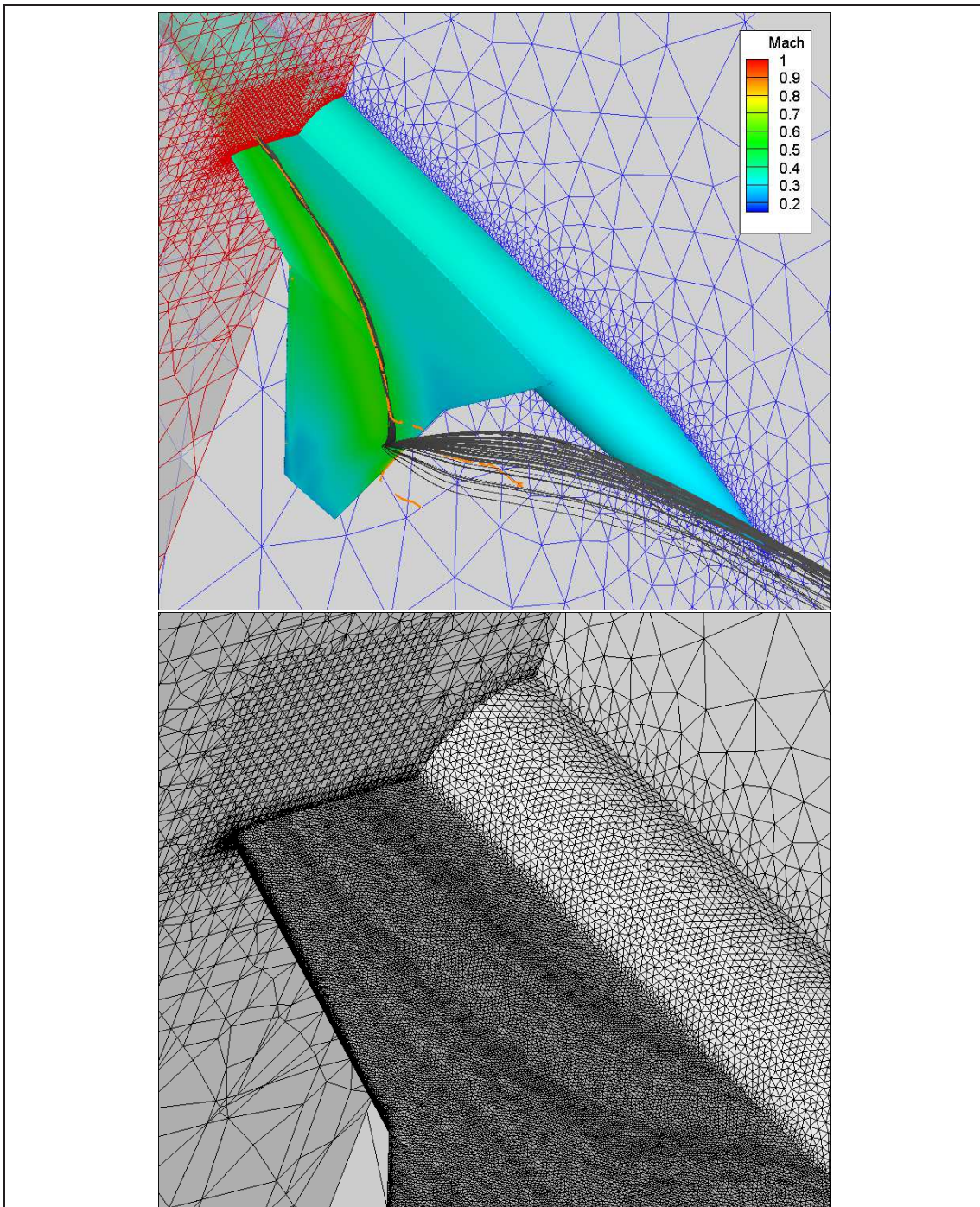
Ο πίνακας 3.2 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις συγκρίσεις της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης με τις αντίστοιχες τιμές της συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας, για τις δύο τιμές της γωνίας πρόνευσης. Η συγκεκριμένη γεωμετρία παρουσιάζει αυξημένη τιμή του συντελεστή άνωσης, η οποία οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην αυξημένη συνοχή που παρουσιάζει η κύρια δίνη και στο γεγονός ότι καθυστερεί η διάσπασή της, σε σχέση με τη δίνη που σχηματίζεται στις άλλες γεωμετρίες.



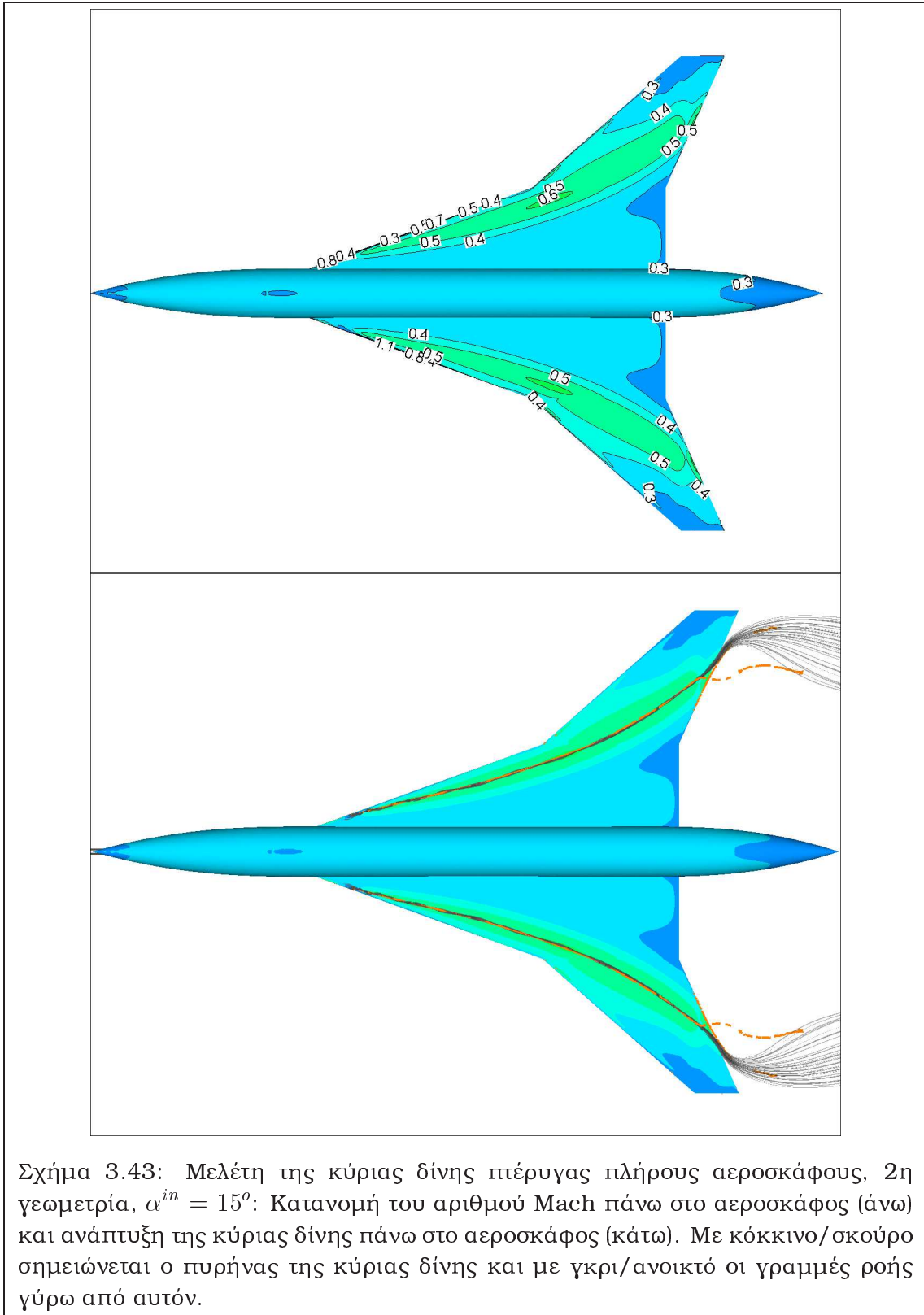
Σχήμα 3.41: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 2η γεωμετρία : Πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος.

	Θέση διάσπασης κύριας δίνης (% αξονική θέση ως προς την εσωτερική χορδή της πτέρυγας)		c_L	
	15	20	15	20
αριθμητικά αποτελέσματα παρούσας διατριβής	-	106%	0.922	1.159
αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ομάδας	-	104%	0.921	1.202

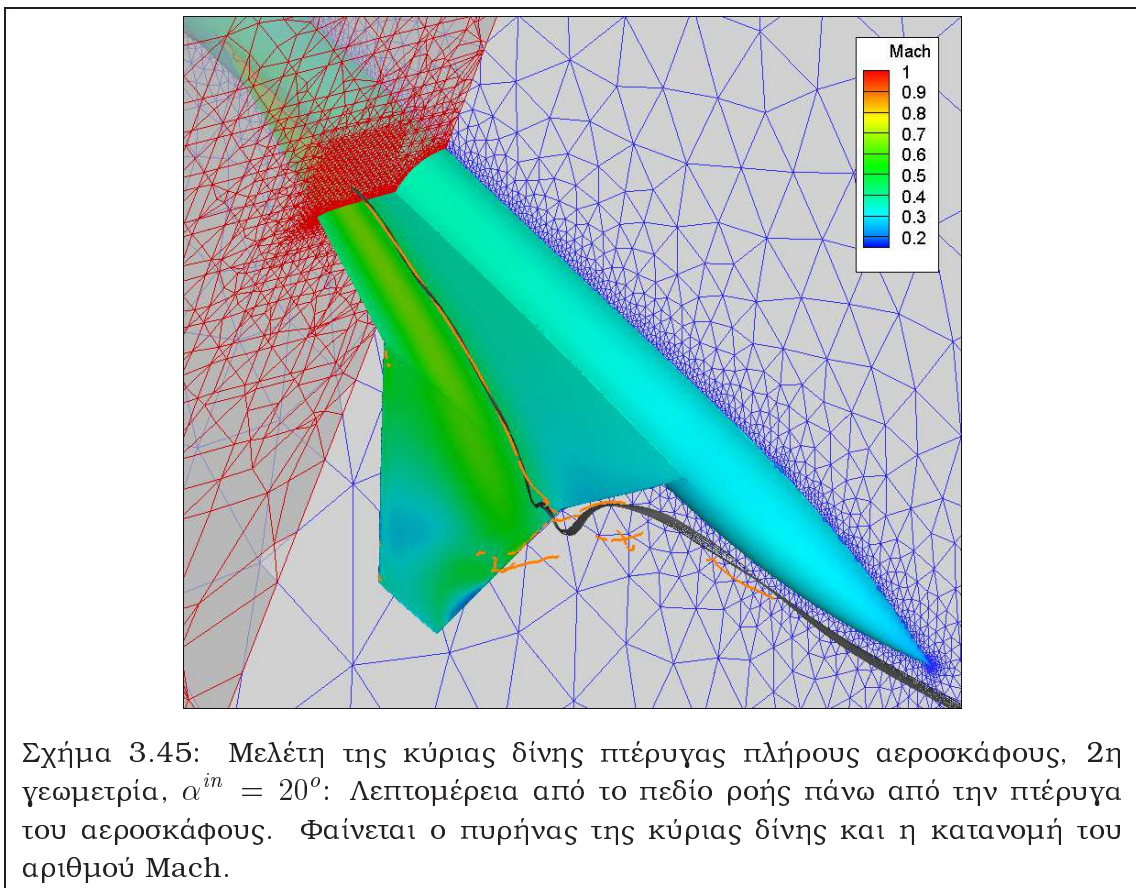
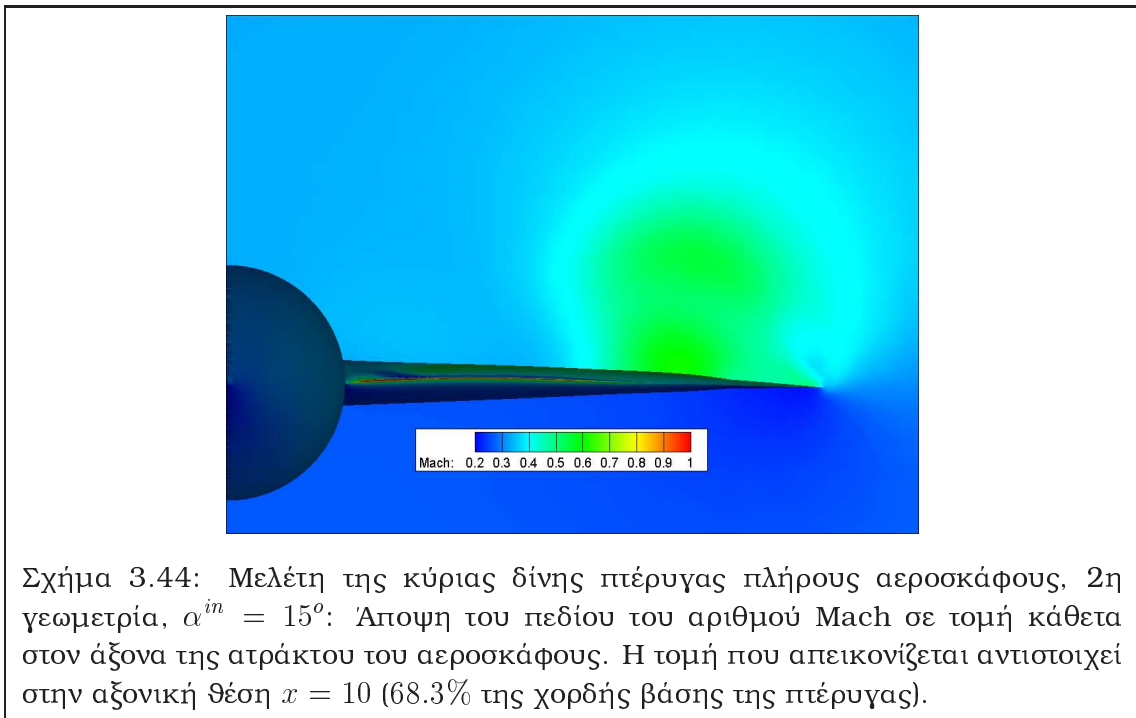
Πίνακας 3.2: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 2η γεωμετρία : Σύγκριση της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας.

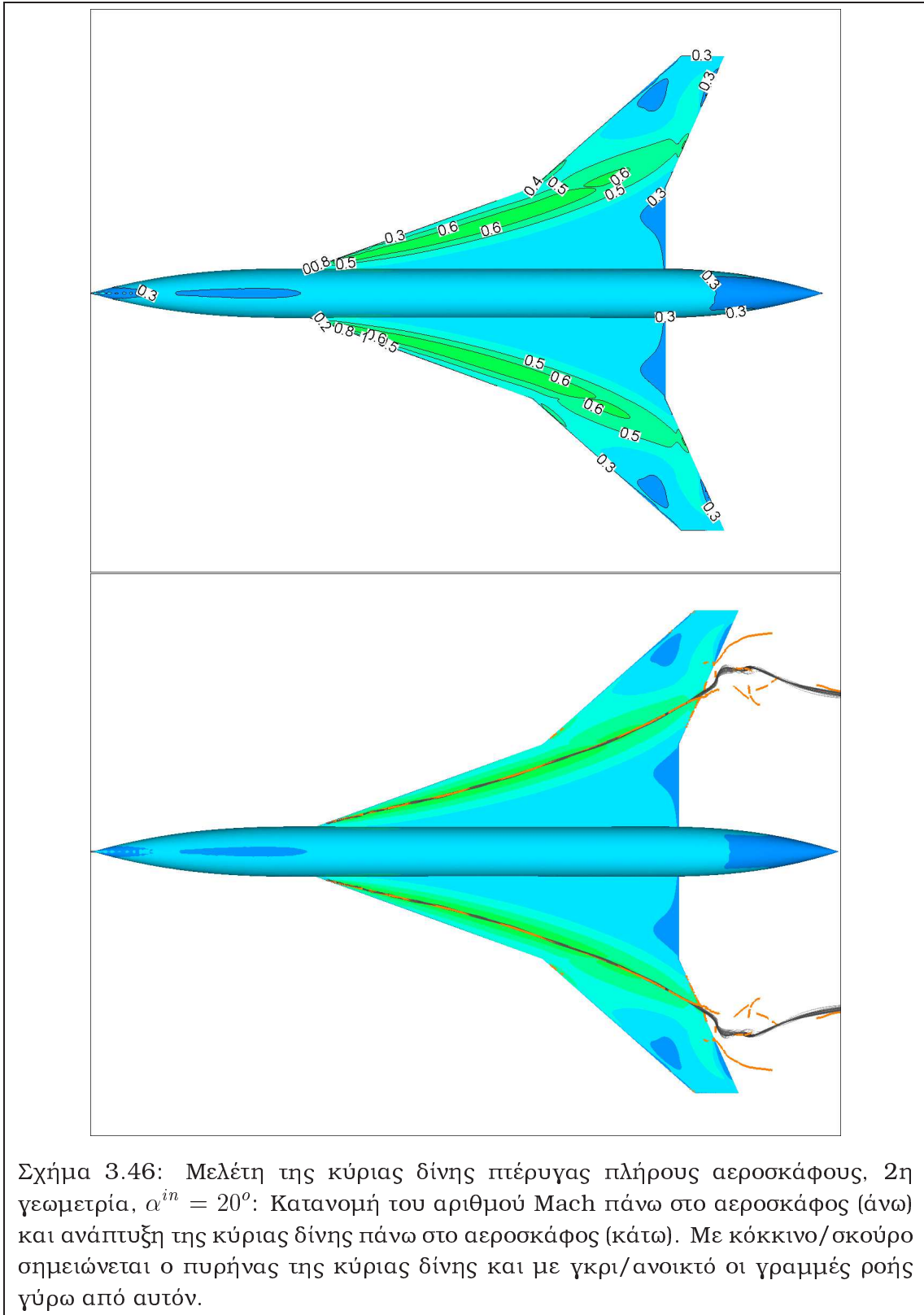


Σχήμα 3.42: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 2η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 15^\circ$: Λεπτομέρεια από το πεδίο ροής πάνω από την πτέρυγα του αεροσκάφους. Φαίνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και η κατανομή του αριθμού Mach (άνω), και τομές του πλέγματος (κάτω), όπου διακρίνεται η τοπικά αυξημένη διακριτότητα του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο και στην περιοχή όπου αναπτύσσεται η κύρια δίνη.

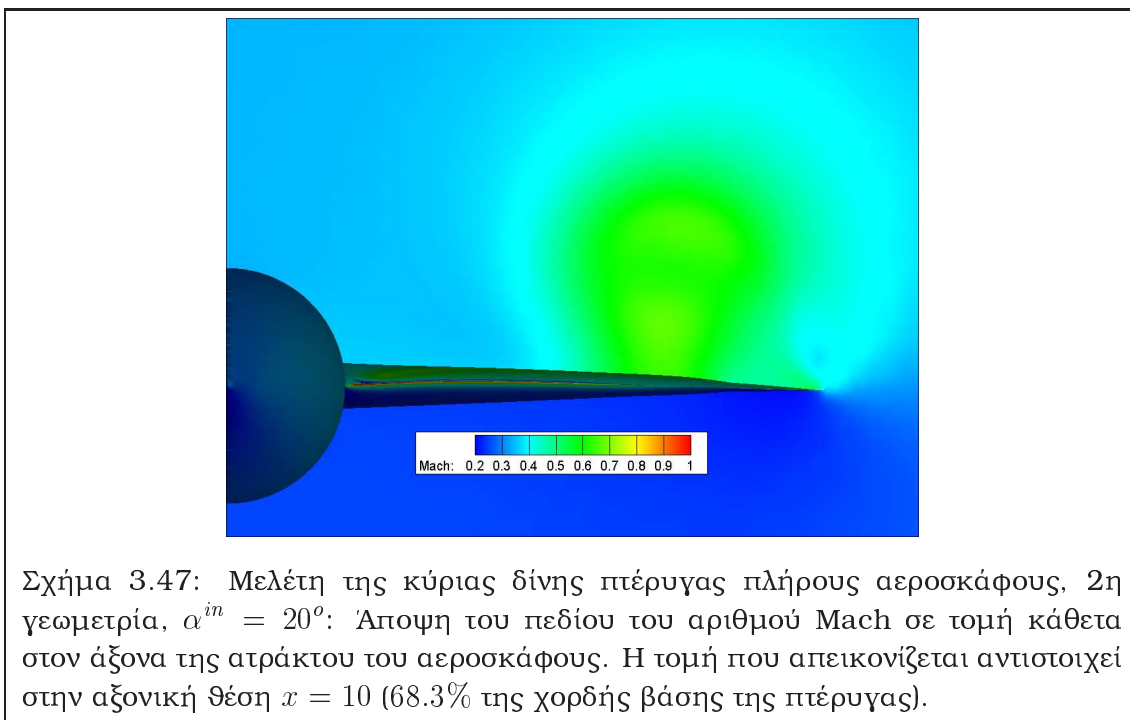


Σχήμα 3.43: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 2η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 15^\circ$: Κατανομή του αριθμού Mach πάνω στο αεροσκάφος (άνω) και ανάπτυξη της κύριας δίνης πάνω στο αεροσκάφος (κάτω). Με κόκκινο/σκούρο σημειώνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και με γκρι/ανοικτό οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν.





Σχήμα 3.46: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 2η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 20^\circ$: Κατανομή του αριθμού Mach πάνω στο αεροσκάφος (άνω) και ανάπτυξη της κύριας δίνης πάνω στο αεροσκάφος (κάτω). Με κόκκινο/σκούρο σημειώνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και με γκρι/ανοικτό οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν.

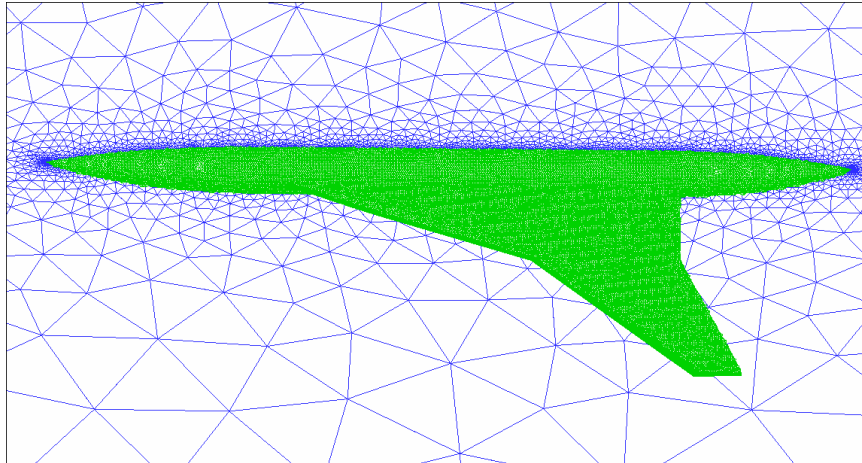


3.4.3 3η γεωμετρία αεροσκάφους

Το πλέγμα γύρω από την τρίτη γεωμετρία αποτελείται από 964,507 κόμβους και 5,081,109 τετράεδρα. Η άποψη του επιφανειακού πλέγματος γύρω από το αεροσκάφος φαίνεται στο σχ. 3.48, ενώ λεπτομέρεια από το επιφανειακό πλέγμα και τη ροή πάνω από την πτέρυγα παρουσιάζεται στο σχ. 3.49. Η κατανομή του αριθμού Mach επάνω στο στερεό όριο, ο πυρήνας της κύριας δίνης και οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν απεικονίζονται στο σχ. 3.50. Η έκταση της δίνης φαίνεται καλύτερα στο σχ. 3.51, όπου παρουσιάζεται η τομή του πεδίου ροής κάθετα στον άξονα της ατράκτου. Στα σχ. 3.49 και 3.51 φαίνεται και η διαμόρφωση της κλίσης της ακμής πρόσπτωσης της πτέρυγας (vortex flap) η οποία είναι εντονότερη από τις άλλες δύο γεωμετρίες, και η οποία τυπικά επιτυγχάνει ανάκτηση της επαγόμενης από τη δίνη άνωσης.

Διάσπαση της κύριας δίνης λαμβάνει χώρα μόνο στην αυξημένη γωνία πρόνευσης και για αυτή τη γεωμετρία, σχ. 3.52 και 3.53.

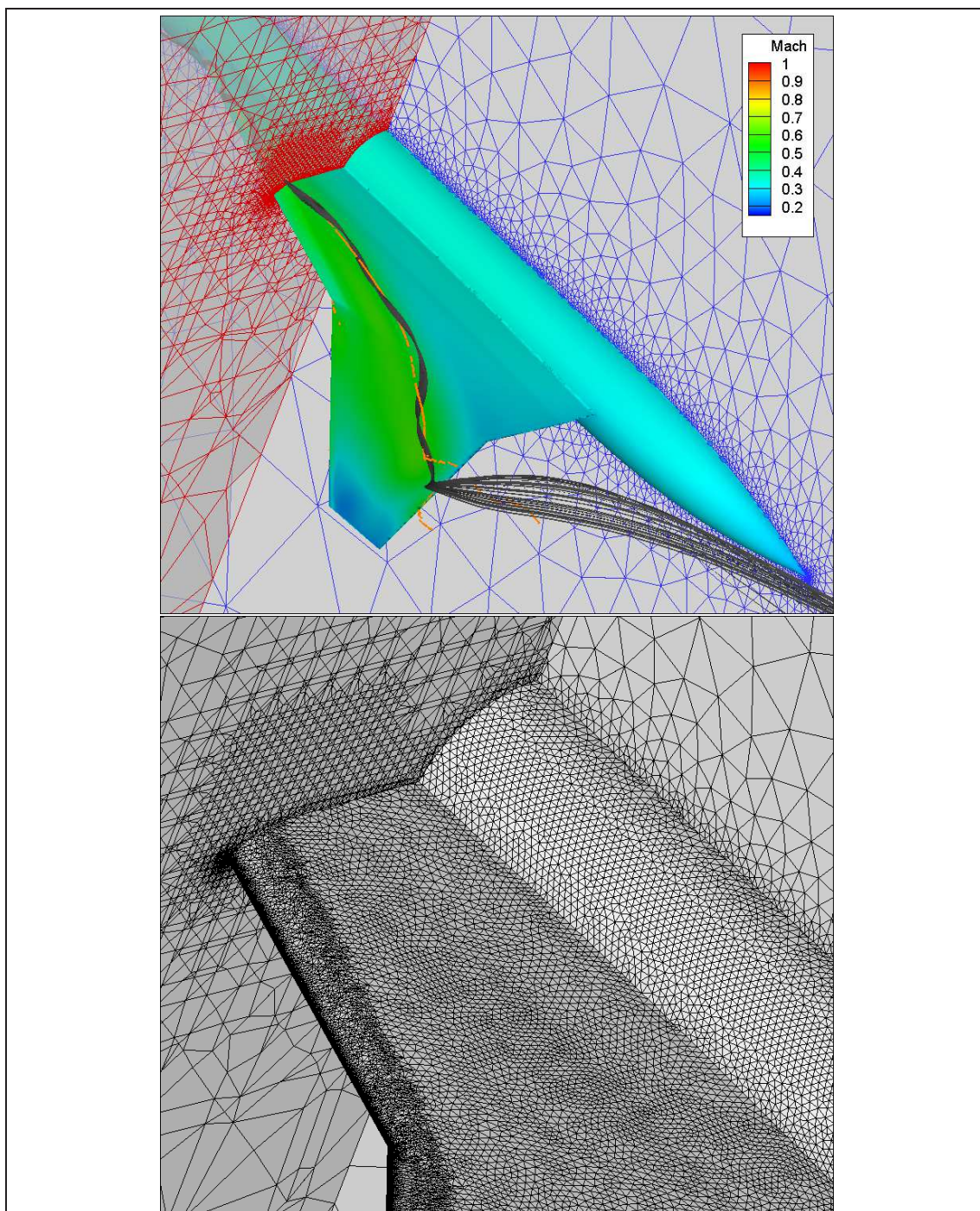
Ο πίνακας 3.3 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις συγκρίσεις της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης της τρίτης γεωμετρίας με τις αντίστοιχες τιμές της συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας, για τις δύο γωνίες πρόνευσης.



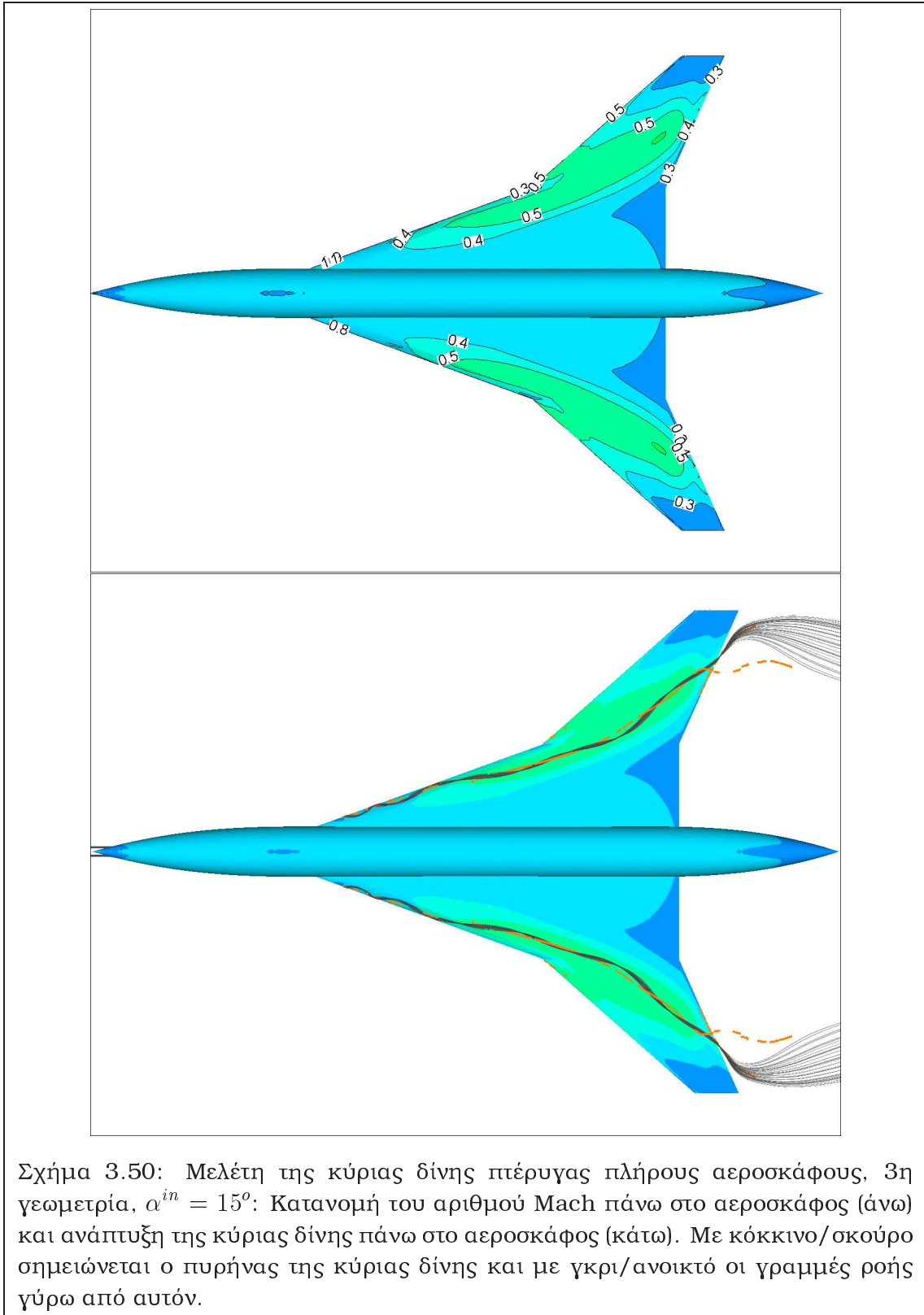
Σχήμα 3.48: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 3η γεωμετρία : Πλέγμα γύρω από το αεροσκάφος.

	Θέση διάσπασης κύριας δίνης (% αξονική θέση ως προς την εσωτερική χορδή της πτέρυγας)		c_L	
	15	20	15	20
αριθμητικά αποτελέσματα παρούσας διατριβής	-	93%	0.961	1.091
αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ομάδας	-	95%	0.937	1.060

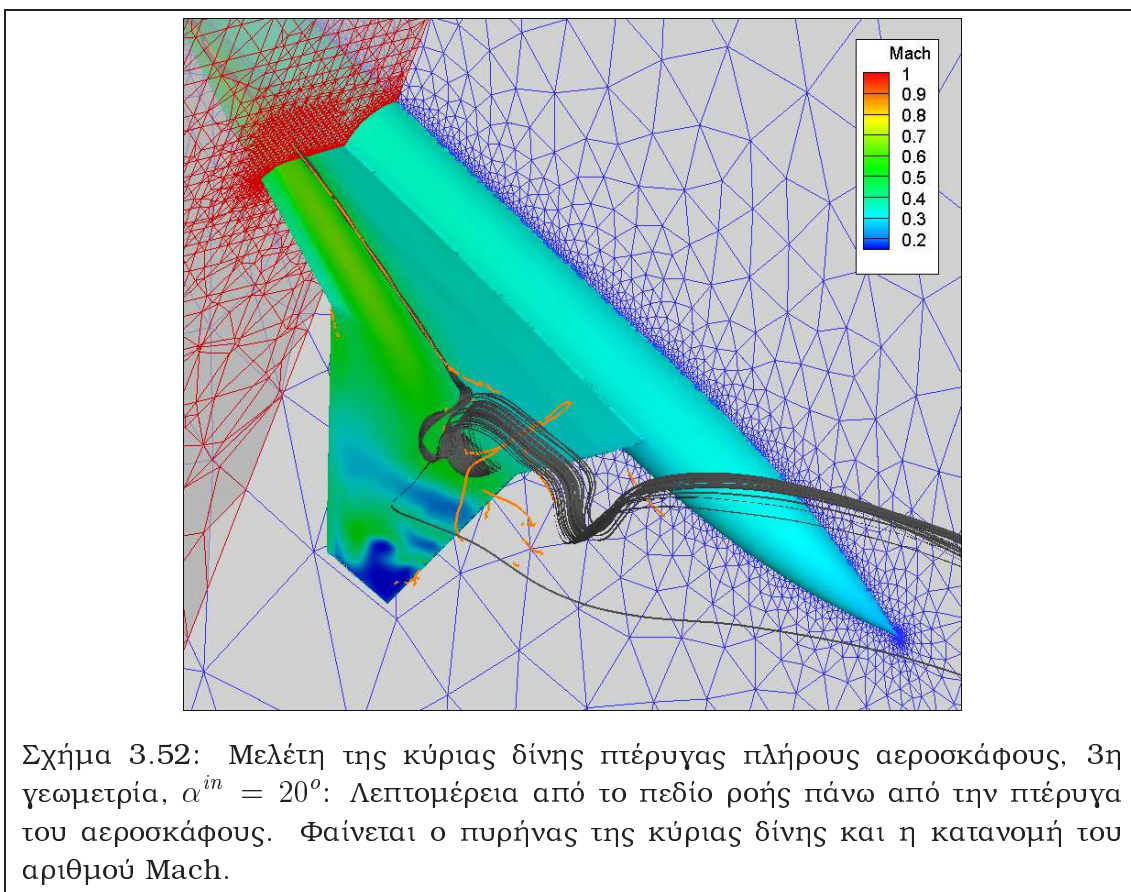
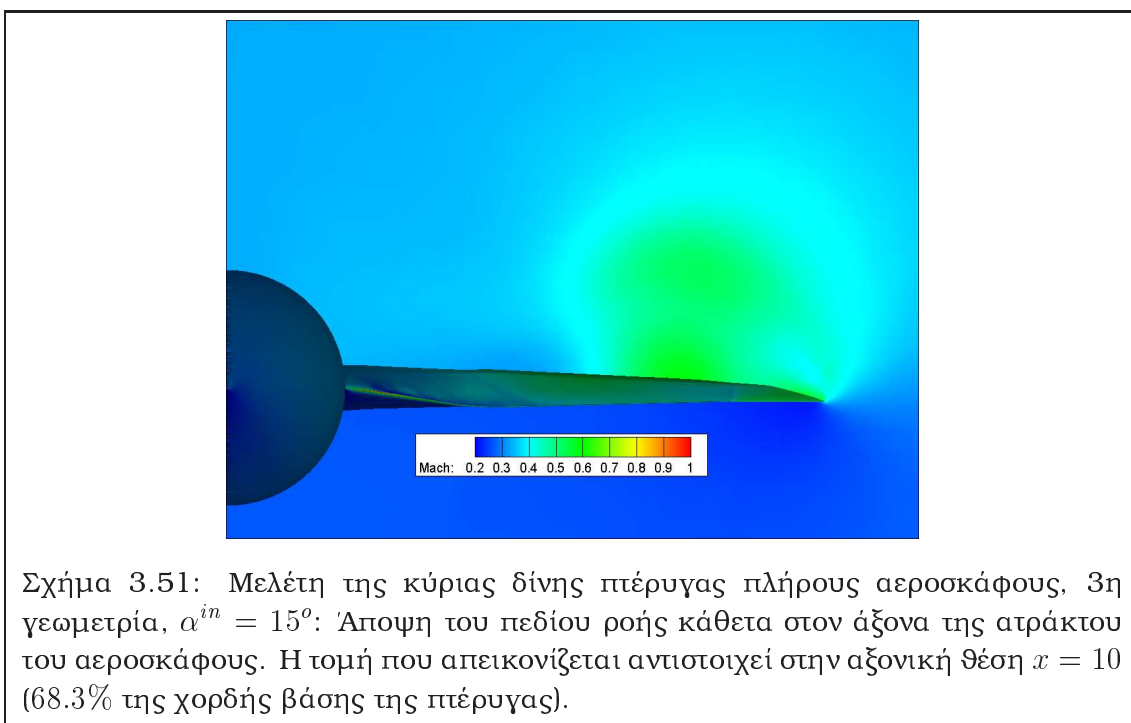
Πίνακας 3.3: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 3η γεωμετρία : Σύγκριση της υπολογισμένης θέσης διάσπασης της δίνης και του συντελεστή άνωσης με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα συνεργαζόμενης ερευνητικής ομάδας.

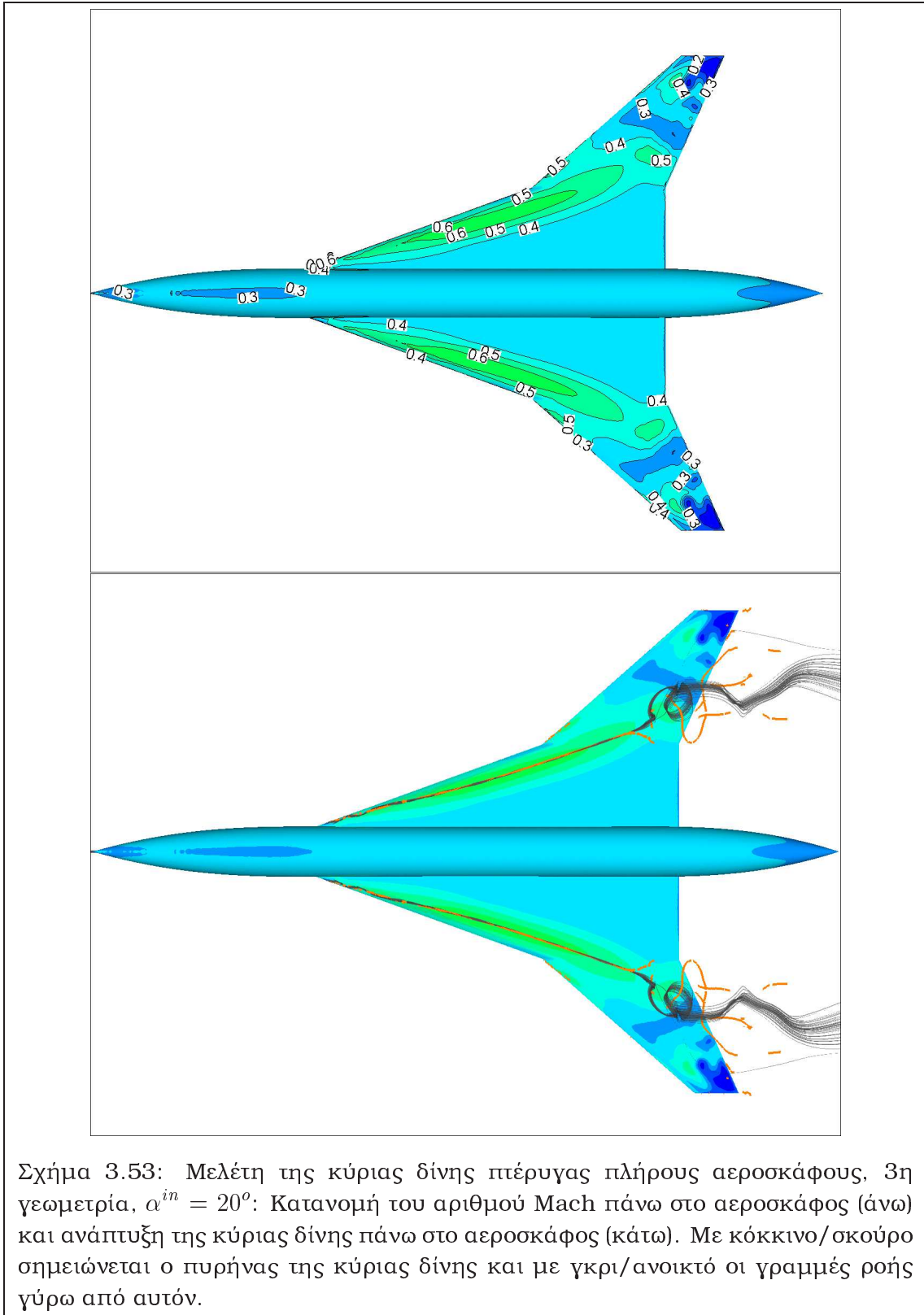


Σχήμα 3.49: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 3η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 15^\circ$: Λεπτομέρεια από το πεδίο ροής πάνω από την πτέρυγα του αεροσκάφους. Φαίνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και η κατανομή του αριθμού Mach (άνω), και τομές του πλέγματος (κάτω), όπου διακρίνεται η τοπικά αυξημένη διακριτότητα του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο και στην περιοχή όπου αναπτύσσεται η κύρια δίνη.

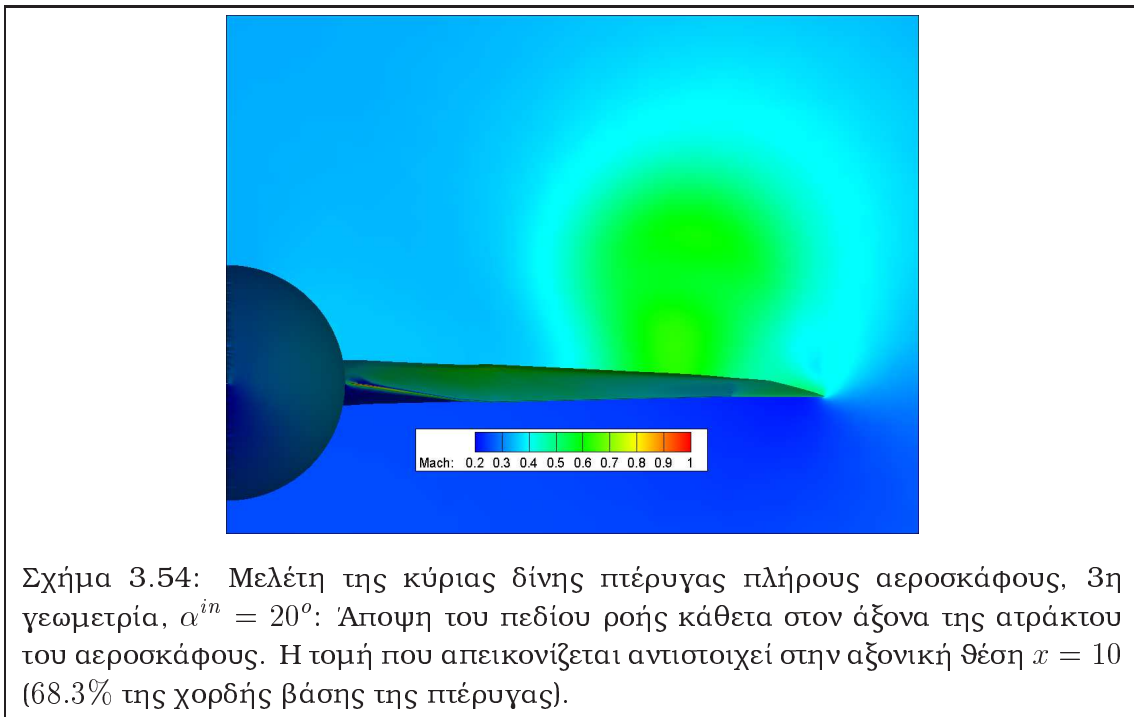


Σχήμα 3.50: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 3η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 15^\circ$: Κατανομή του αριθμού Mach πάνω στο αεροσκάφος (άνω) και ανάπτυξη της κύριας δίνης πάνω στο αεροσκάφος (κάτω). Με κόκκινο/σκούρο σημειώνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και με γκρι/ανοικτό οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν.





Σχήμα 3.53: Μελέτη της κύριας δίνης πτέρυγας πλήρους αεροσκάφους, 3η γεωμετρία, $\alpha^{in} = 20^\circ$: Κατανομή του αριθμού Mach πάνω στο αεροσκάφος (άνω) και ανάπτυξη της κύριας δίνης πάνω στο αεροσκάφος (κάτω). Με κόκκινο/σκούρο σημειώνεται ο πυρήνας της κύριας δίνης και με γκρι/ανοικτό οι γραμμές ροής γύρω από αυτόν.



3.5 Υπολογισμός πολικού γραφήματος πλήρους αεροσκάφους

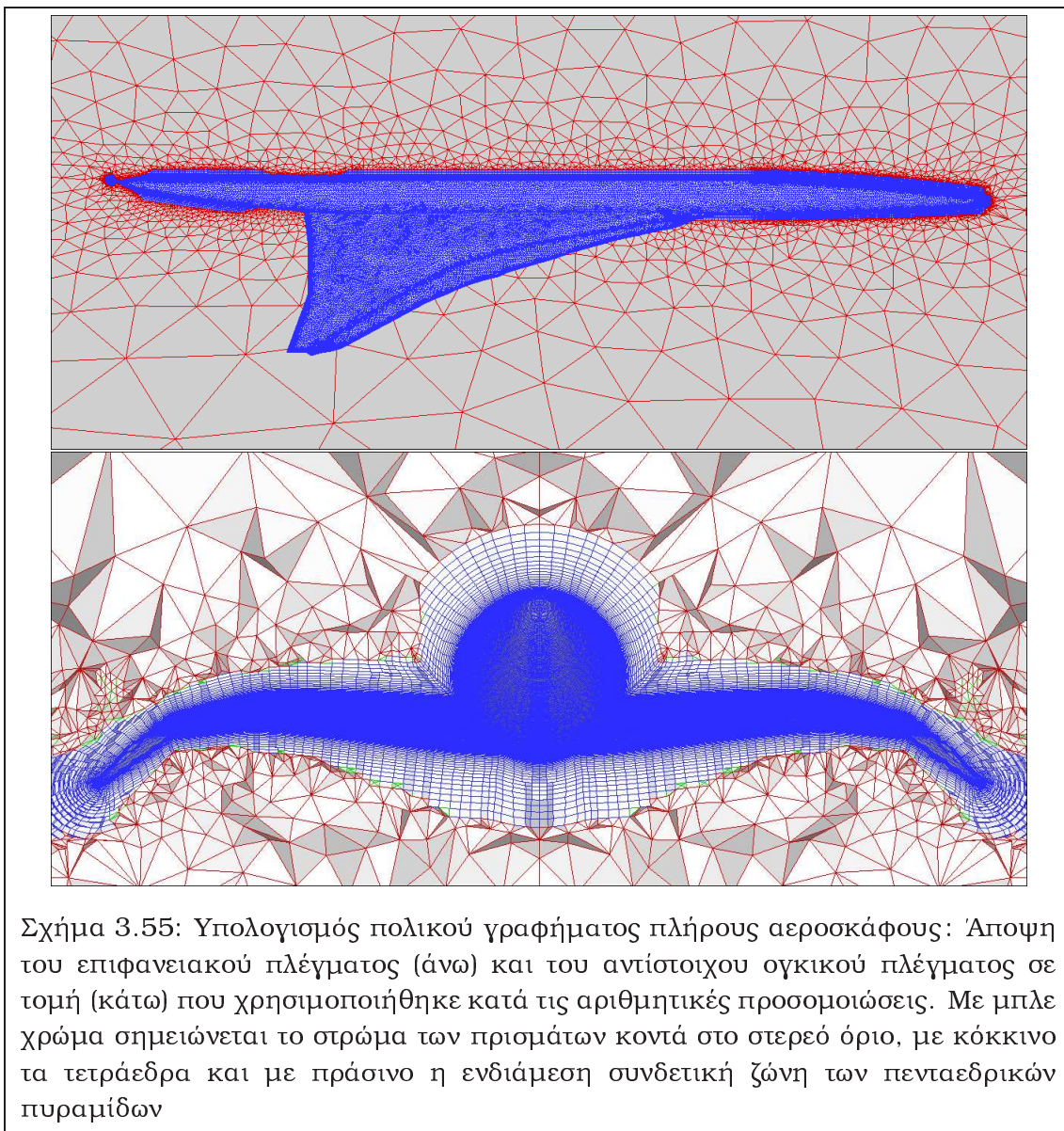
Η τελευταία περίπτωση ροής που μελετάται στο παρόν κεφάλαιο αφορά στον υπολογισμό του πολικού γραφήματος υπερηχητικού δελταπτέρυγου πολιτικού αεροσκάφους με υπεραντωτικές διατάξεις⁹ στην ακμή πρόσπτωσης¹⁰. Η ροή είναι υποηχητική και πλήρως τυρβώδης. Η συγκεκριμένη γεωμετρία είναι αρκετά διαφορετική από τις τρεις γεωμετρίες που μελετήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, και αποτελεί βελτίωση παλαιότερης γεωμετρίας που προτάθηκε στο πλαίσιο ευρωπαϊκού προγράμματος με σκοπό κυρίως τη μείωση της οπισθέλκουσας και των αυξημένων επιπέδων θορύβου που αυτή προκαλεί λόγω των φουσαλίδων αποκόλλησης που δημιουργούνται κυρίως στη ρίζα της πτέρυγας σε χαμηλές ταχύτητες πτήσης και υψηλές τιμές γωνίας πρόνευσης (λ.χ. κατά την απογείωση). Πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για την εν λόγω γεωμετρία υπάρχουν και στο [245]. Το μοντέλο που μελετήθηκε πειραματικά έχει μήκος 4.0465m, ενώ η αεροδυναμική μέση χορδή, η οποία χρησιμοποιείται και ως μήκος αναφοράς για τον υπολογισμό του αριθμού Reynolds, είναι ίση με $l_{ref} = 1.25136m$. Η επιφάνεια αναφοράς για τον υπολογισμό των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας είναι η επιφάνεια της πτέρυγας και δίνεται ίση με $A_{ref} = 1.81281m^2$. Ο αριθμός Reynolds είναι ίσος με $Re = 22.4691 \times 10^6$ και ο επ' άπειρο αριθμός Mach ίσος με $M^\infty = 0.251$. Οι γωνίες εκτροπής και κλίσης είναι και σε αυτή την περίπτωση μηδενικές, γεγονός που επιτρέπει την επίλυση της ροής γύρω από το μισό αεροσκάφος, με την επιβολή κατάλληλων οριακών συνθηκών στο επίπεδο συμμετρίας.

Το σχ. 3.55 απεικονίζει απόψεις του επιφανειακού και του αντίστοιχου υβριδικού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε κατά τις προσομοιώσεις. Το πλέγμα αποτελείται από 1,793,132 κόμβους και 4,025,262 στοιχεία (840,944 τετράεδρα, 3,147,331 πρίσματα και 36,987 πυραμίδες). Για το επιφανειακό πλέγμα του στερεού ορίου αναφέρεται ενδεικτικά ότι αποτελείται από 112,144 τρίγωνα (88,422 πάνω στην πτέρυγα και 23,722 πάνω στην άτρακτο). Το πλέγμα αυτό κρίθηκε επαρκές για προσομοιώσεις με χρήση συναρτήσεων τοίχου, δίνοντας κατά μέσο όρο $y^+ \approx 90$ για τον πρώτο κόμβο από το στερεό όριο. Μελέτη για ανεξαρτησία της λύσης από το πλέγμα δεν πραγματοποιήθηκε, αφού το συγκεκριμένο πλέγμα ήταν το μόνο που διατέθηκε στο ΕΘΣ στο πλαίσιο του προγράμματος, ενδεικτικά όμως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ότι ανεξαρτησία πλέγματος με την αυστηρή έννοια επιτυγχάνεται για τη συγκεκριμένη εφαρμογή από πλέγματα με τουλάχιστον 5,000,000 κόμβους, [245]. Παρόλα αυτά, το διαθέσιμο πλέγμα απέδωσε ικανοποιητικά για τις περισσότερες τιμές της γωνίας πρόνευσης.

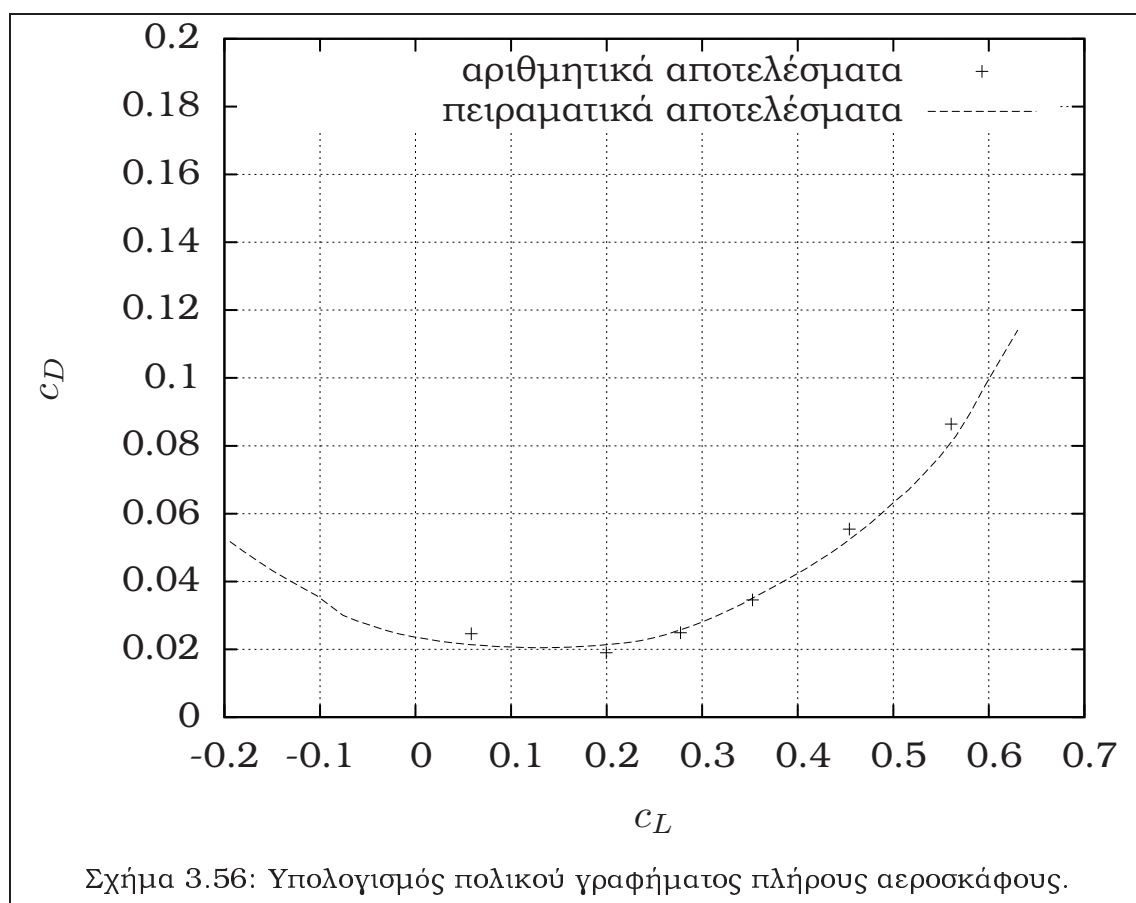
Για τη σχεδίαση του πολικού γραφήματος εκτελέστηκαν έξι αριθμητικές προσομοιώσεις για γωνίες πρόνευσης από σχεδόν μηδενική έως και 13.56° . Τα

⁹high-lift devices

¹⁰Πλέγμα, γεωμετρία και δεδομένα από συνεργαζόμενη ερευνητική ομάδα, στο πλαίσιο του έργου HISAC, Contract no AIP4CT2005516132, που χρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

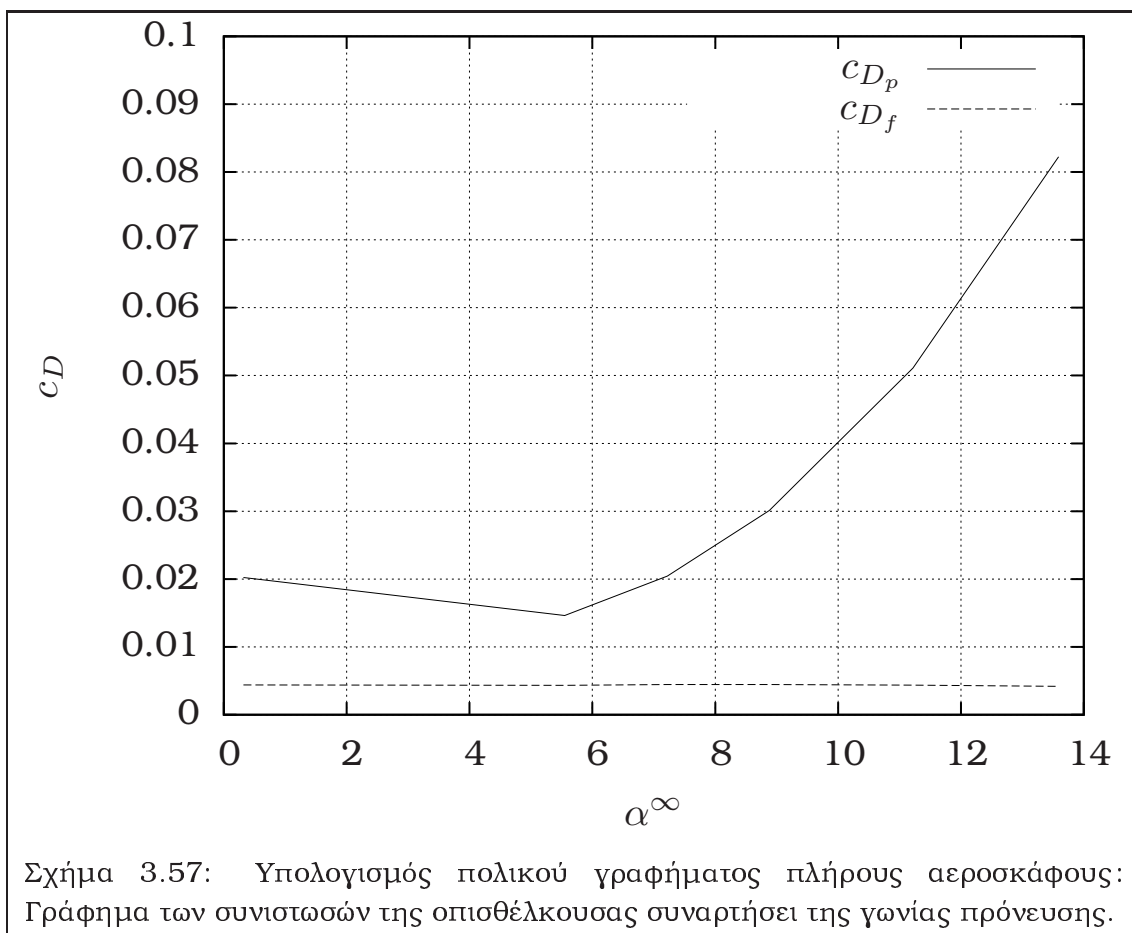


αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά στο σχ. 3.56. Αξίζει να σημειωθεί ότι η οπισθέλκουσα λόγω τριβής σχεδόν δε μεταβάλλεται με τη γωνία πρόνευσης και συμβάλλει λίγο στη συνολική οπισθέλκουσα, σχ. 3.57. Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουν εξαχθεί για τη συγκεκριμένη γεωμετρία στη βιβλιογραφία, [245]. Η απόκλιση της υπολογισμένης οπισθέλκουσας από την πειραματική είναι πάντοτε θετική και μικρότερη από 0.005 (50 drag counts) για όλες τις γωνίες πρόνευσης που μελετήθηκαν εκτός αυτής των 13.59 μοιρών.



Στα σχ. 3.58 έως 3.63 παρουσιάζονται συγκρίσεις των κατανομών πίεσης σε τέσσερις διαφορετικές χορδές κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας για τις γωνίες πρόνευσης που μελετήθηκαν. Οι συγκρίσεις είναι καλές στις περισσότερες περιπτώσεις, ωστόσο, στις μεγαλύτερες γωνίες παρατηρούνται διαφορές, ιδιαίτερα κοντά στην περιοχή του ακροπτερυγίου. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το μοντέλο τύρβης, ιδιαίτερα σε συνδυασμό με συναρτήσεις τοίχου, αδυνατεί να συλλάβει τα συνεκτικά φαινόμενα που συνδέονται με την εμφάνιση περιοχών αποκόλλησης (οι οποίες αναφέρεται ότι εμφανίζονται για γωνία πρόνευσης περί τις 10°). Υπενθυμίζεται ότι το διαθέσιμο πλέγμα δεν είναι αρκετά πυκνό ώστε να πραγματοποιηθούν προσομοιώσεις χωρίς τη χρήση συναρτήσεων τοίχου.

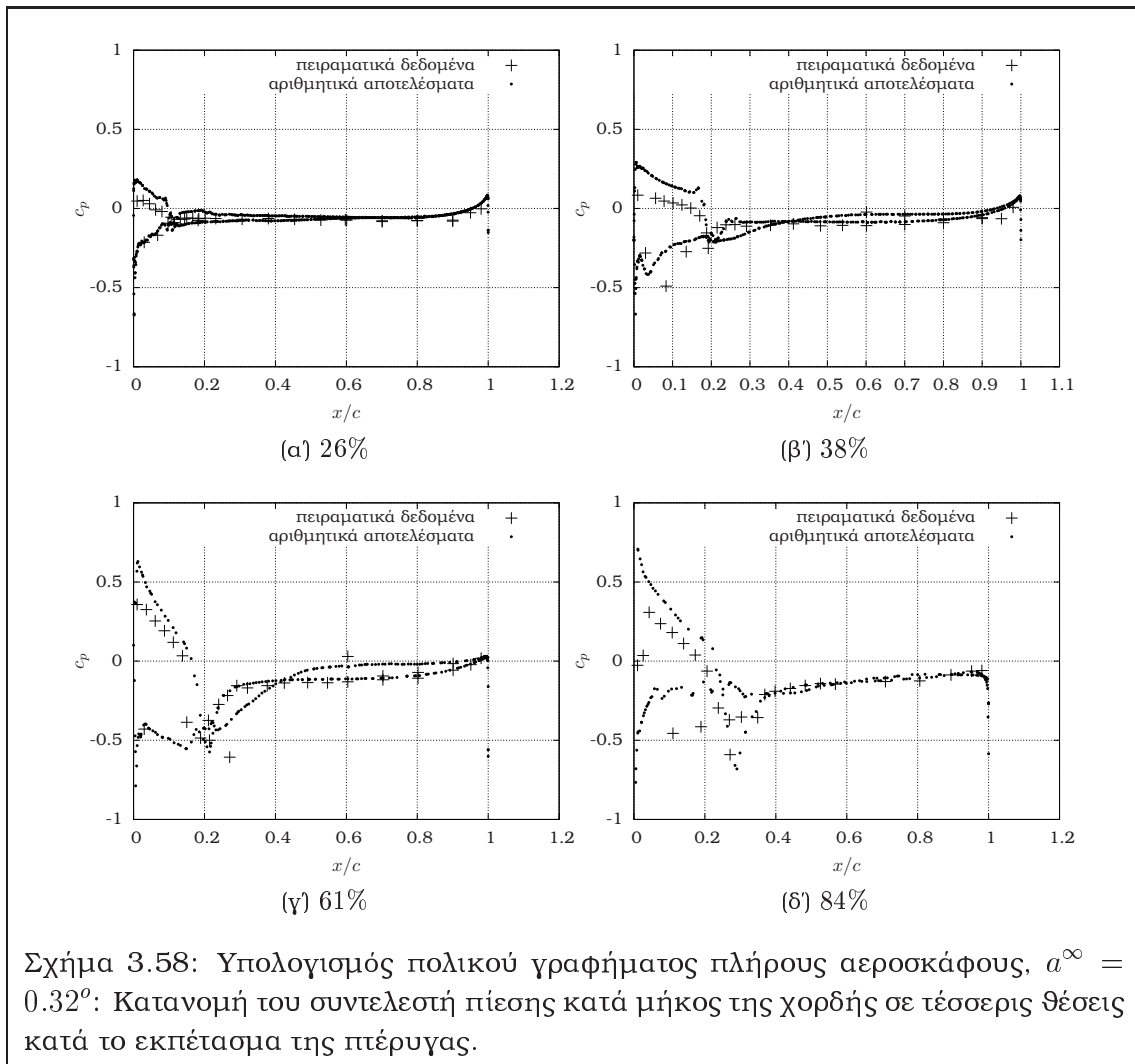
Η εικόνα του πεδίου ροής γύρω από το αεροσκάφος και τα αεροδυναμικά του χαρακτηριστικά διαμορφώνονται σε μεγάλο βαθμό από τη δημιουργία μίας κύριας



και μίας δευτερεύουσας δίνης, καθώς και μίας ζώνης μικρότερων στροβίλων στο ακροπερύγιο. Ιδιαίτερα σε γωνίες μεγαλύτερες των εννέα μοιρών, όπου και σχηματίζεται η δομή των δινών που παρουσιάζεται στο σχ. 3.64 και παρατηρήθηκε στις προσομοιώσεις, σχ. 3.65, εμφανίζεται έντονη ροή προς την κατεύθυνση κάθετα στο επίπεδο συμμετρίας, 3.66. Αυτή η ροή οφείλεται ακριβώς στην εμφάνιση των δινών και δυσκολεύει αρκετά το ρυθμό σύγκλισης των εξισώσεων, λόγω έντονης συσχέτισης μεταξύ των τριών εξισώσεων ορμής, [245].

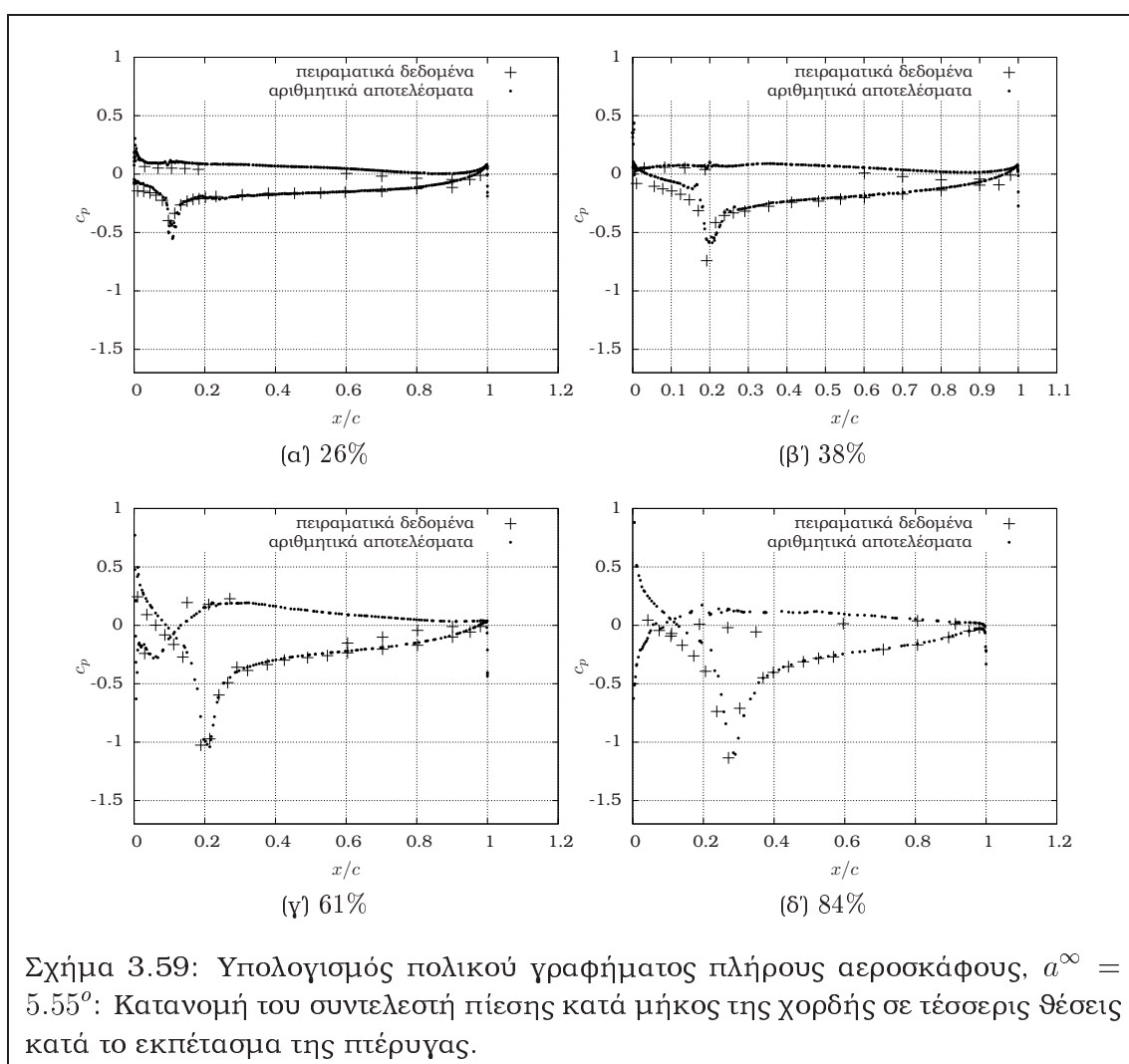
3.6 Ανακεφαλαίωση

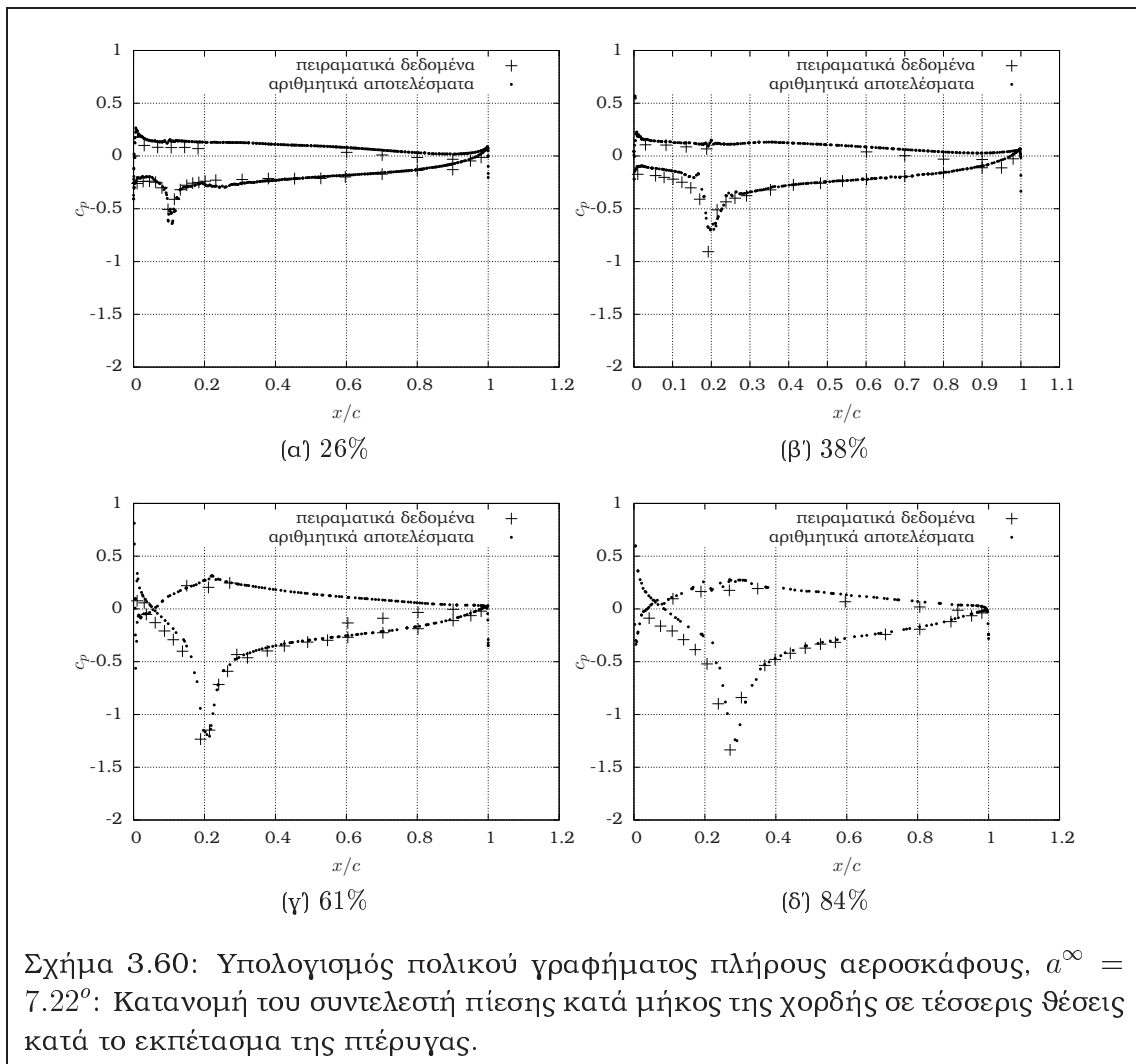
Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε η πιστοποίηση της μεθόδου επίλυσης ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων, η οποία παρουσιάστηκε στο κεφ. 2, σε ένα σύνολο από 2Δ και 3Δ περιπτώσεις συμπιεστής ροής εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με υπάρχοντα πειραματικά (και σε μία εκ των περιπτώσεων αριθμητικά) αποτελέσματα, οι οποίες σε όλες τις περιπτώσεις ήταν πολύ καλές. Αισθητές αποκλίσεις από τα πειραματικά αποτελέσματα παρατηρήθηκαν μόνο στην τελευταία 3Δ περίπτωση (τυρβώδης ροή γύρω από πλήρες αεροσκάφος), και μόνο στη μέγιστη γωνία πρόνευσης, όπου το

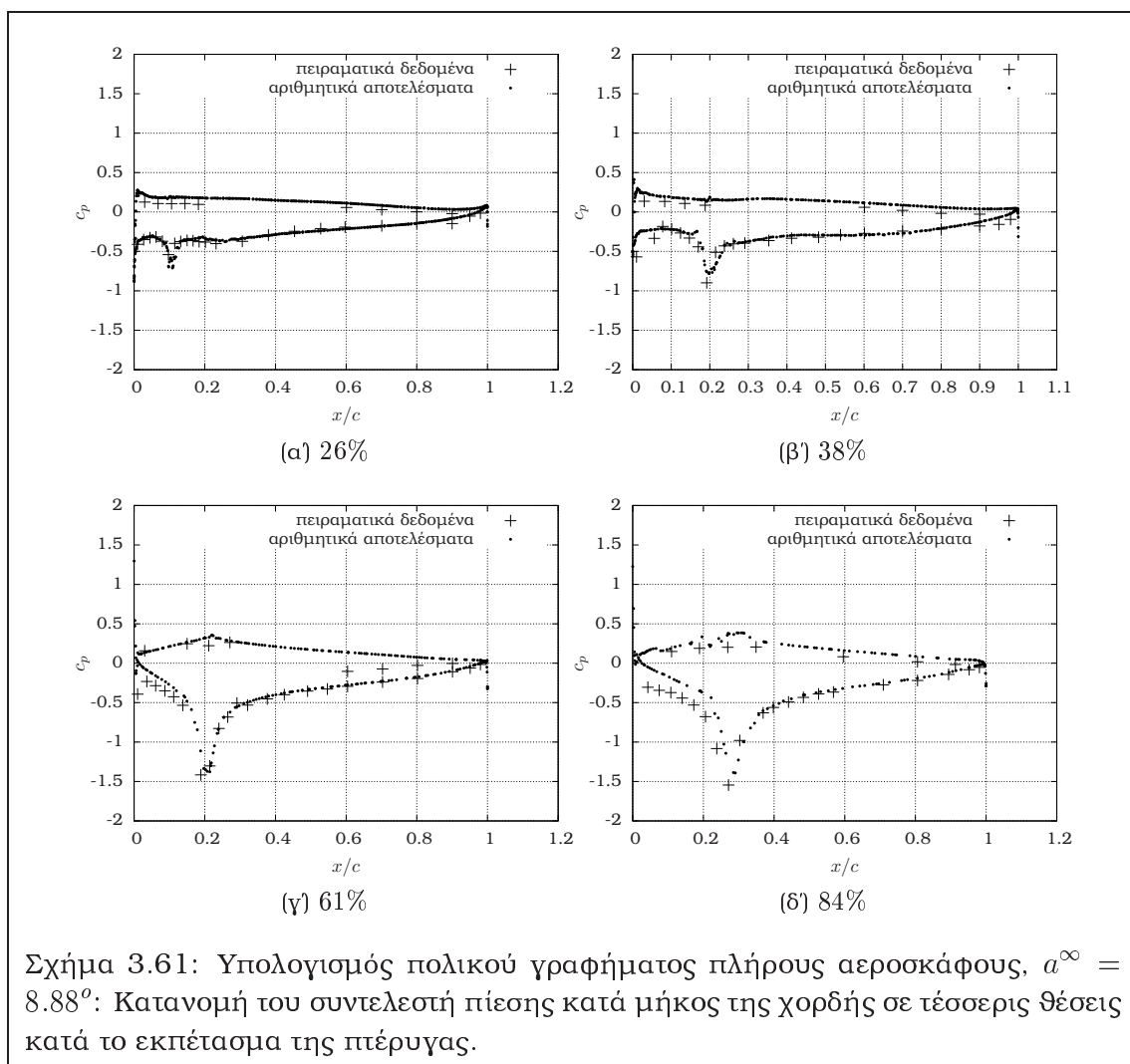


σχετικά αραιό πλέγμα και το χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης είναι εύλογο να δυσκολεύονται να προλέξουν επακριβώς τα συνεκτικά φαινόμενα στην περιοχή του ακροπερυγίου.

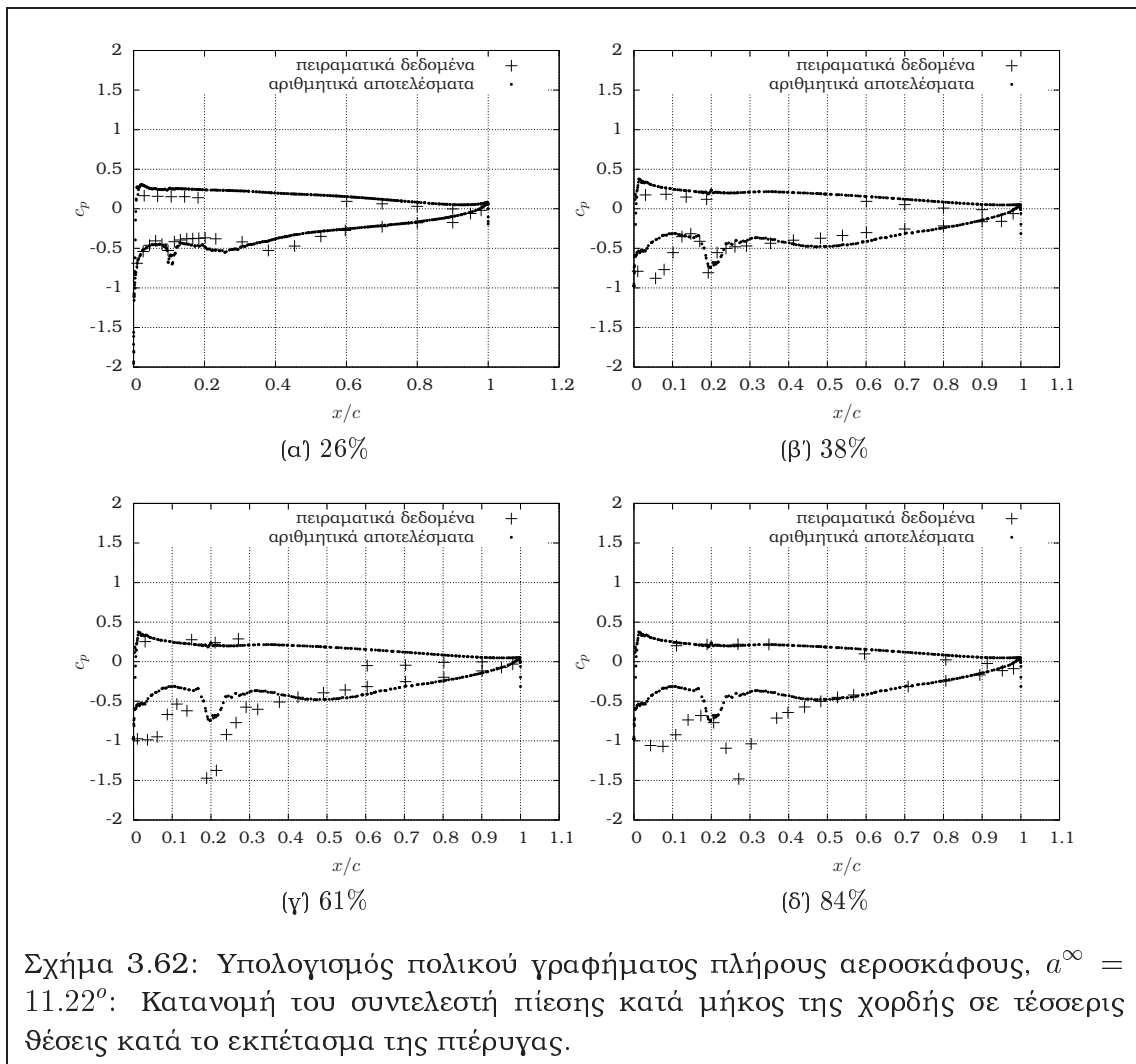
Ιδιαίτερα στις 2Δ περιπτώσεις ροής πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις των προσομοιώσεων που έκαναν χρήση υβριδικών πλεγμάτων και πλεγμάτων με αποκλειστικά τριγωνικά στοιχεία. Σε όλες τις περιπτώσεις επιβεβαιώθηκε η υπεροχή των υβριδικών πλεγμάτων στην ποιότητα των αποτελεσμάτων ή/και την ταχύτητα της προσομοίωσης, αφού παρατηρήθηκε μείωση του απαιτούμενου χρόνου υπολογισμού του πεδίου ροής έως και κατά 50%. Η μείωση στον χρόνο υπολογισμού αποδίδεται στο μικρότερο αριθμό ακμών του υβριδικού πλέγματος σε σύγκριση με το πλέγμα τριγωνικών στοιχείων αντίστοιχης ποιότητας (δηλαδή με το ίδιο σύνολο κόμβων), οπότε ο χρόνος υπολογισμού του αριστερού και δεξιού μέλους των εξισώσεων ροής ανά ψευδοχρονική επανάληψη είναι ελαφρώς μικρότερος, καθώς και στο ότι η λύση στα υβριδικά πλέγματα χρειάζεται λιγότερες ψευδοχρονικές επααλήψεις.

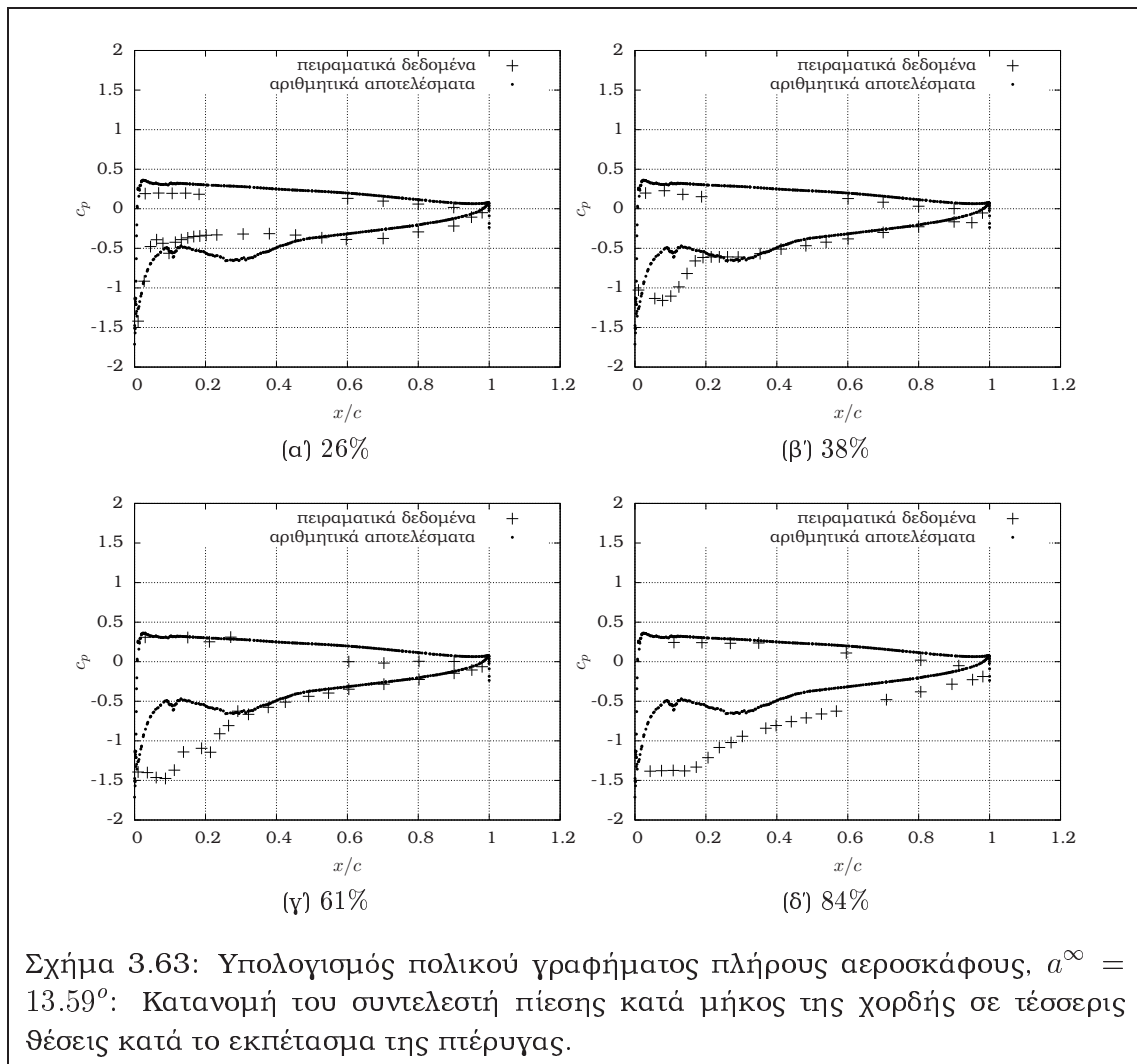




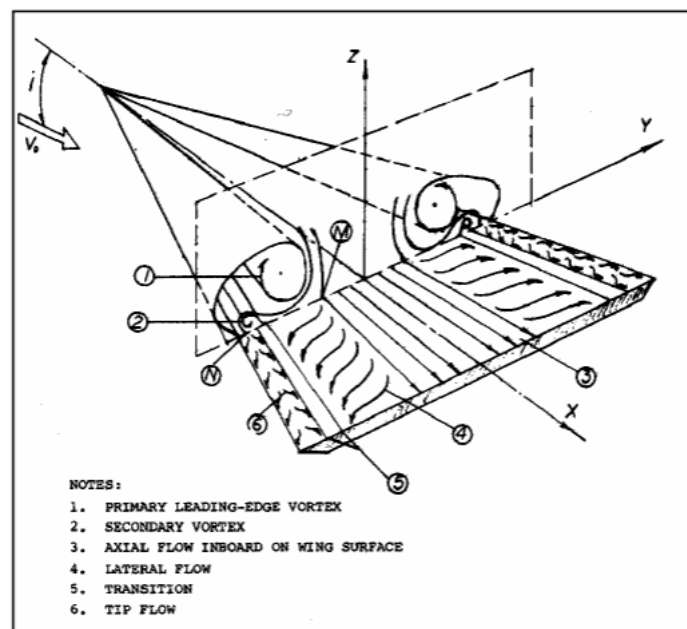


Σχήμα 3.61: Υπολογισμός πολικού γραφήματος πλήρους αεροσκάφους, $\alpha^\infty = 8.88^\circ$: Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής σε τέσσερις θέσεις κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας.

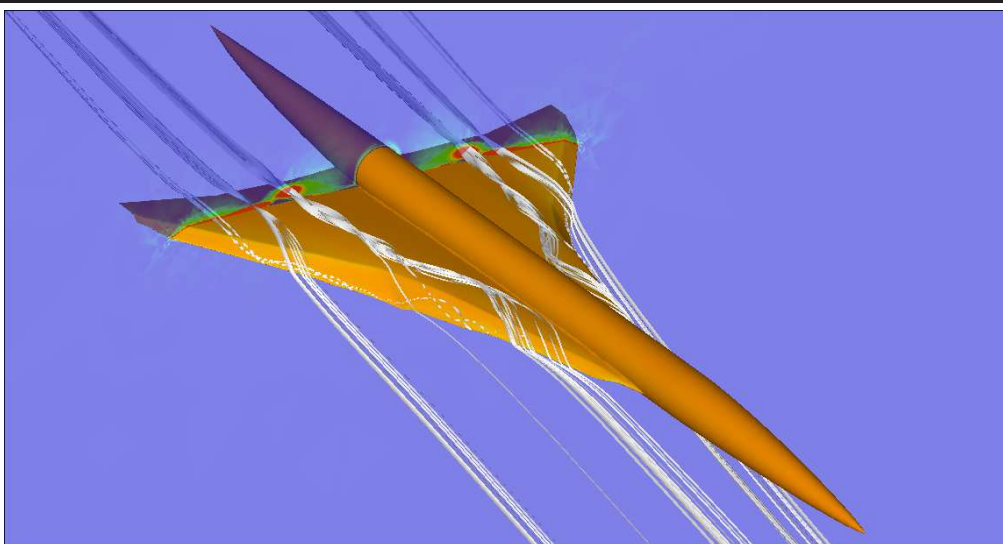




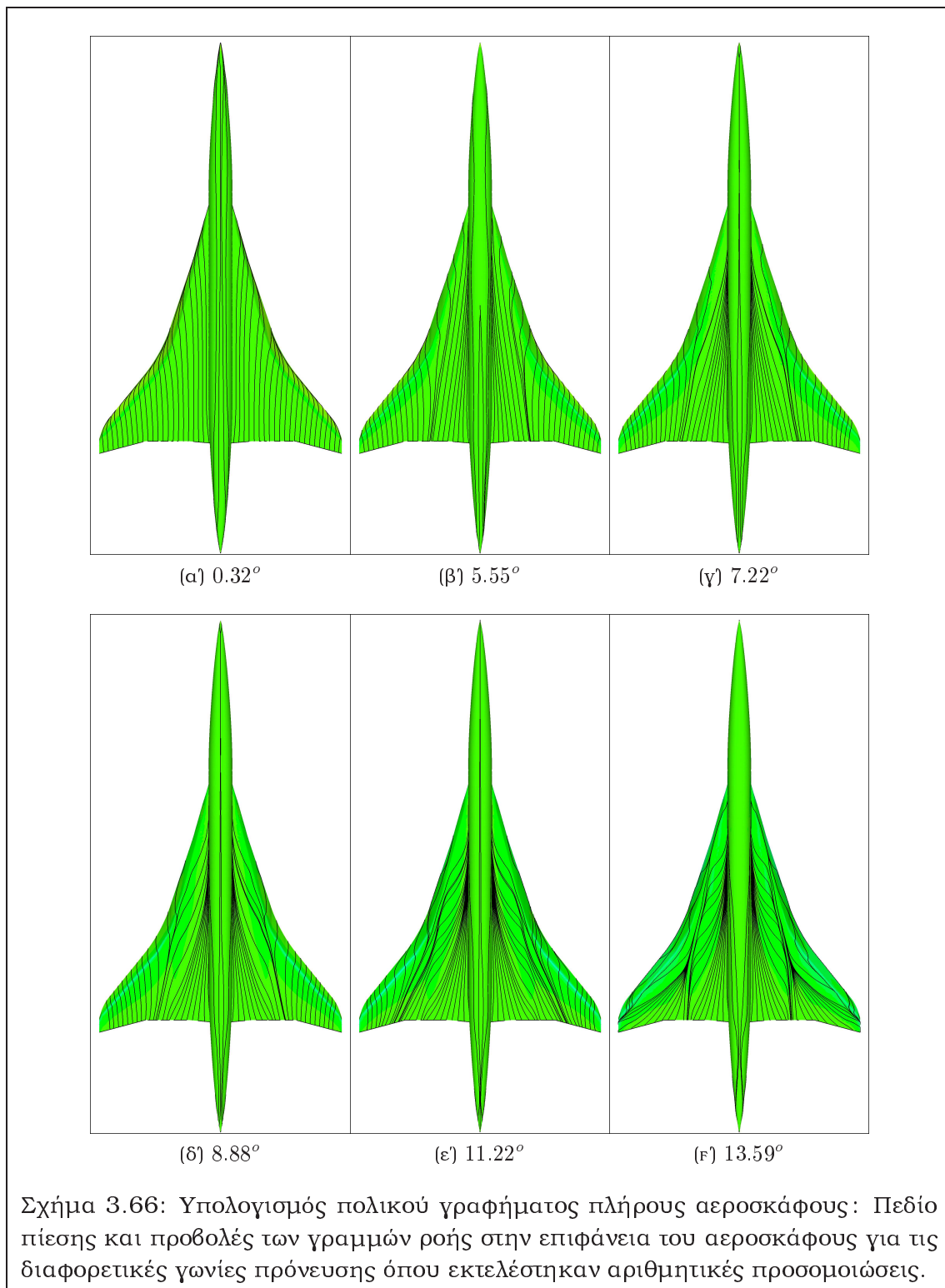
Σχήμα 3.63: Υπολογισμός πολικού γραφήματος πλήρους αεροσκάφους, $a^\infty = 13.59^\circ$: Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής σε τέσσερις θέσεις κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας.



Σχήμα 3.64: Σχηματική απεικόνιση της κύριας και δευτερεύουσας δίνης πάνω από μία πτέρυγα 'δέλτα'. Εικόνα από το βιβλίο των Hoerner και Borst, [246].



Σχήμα 3.65: Υπολογισμός πολικού γραφήματος πλήρους αεροσκάφους: Απεικόνιση των δινών που δημιουργούνται πάνω από την πτέρυγα. Διακρίνονται η κύρια δίνη, η δευτερεύουσα δίνη και οι δίνες που δημιουργούνται στο ακροπερύγιο. Στο επίπεδο κάθετα στην άτρακτο απεικονίζεται το μέτρο της συστροφής ενώ στην επιφάνεια του αεροσκάφους αναπαρίσταται το πεδίο της πίεσης.



Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Το παρόν κεφάλαιο πραγματεύεται μεθόδους βελτιστοποίησης με χρήση του εσσιανού μητρώου. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται είναι προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού γεωμετριών και προβλήματα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης περυγώσεων με περιορισμούς στο ελάχιστο πάχος της γεωμετρίας και με προδιαγεγραμμένη στροφή της ροής.

4.1 Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού – Η ακριβής και η προσεγγιστική μέθοδος Newton

Έστω το παρακάτω πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού

$$\begin{aligned} \min [F(b_i, U_n^P(b_i))] \\ \text{υπό τον περιορισμό} \\ R_m^Q(b_i, U_n^P(b_i)) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου

$$F = \frac{1}{2} \int_{wall} (p - p_{tar})^2 = \frac{1}{2} \sum_{B_w} [(p - p_{tar})^2]^J \Delta s^J \quad (4.2)$$

και $R_m^Q(b_i, U_n^P(b_i))$ είναι οι τελεστές υπολοίπου των εξισωσεων ροής και του μοντέλου τύρβης των Spalart–Allmaras, 2.43, σε ενιαία τανυστική γραφή. Η κατανομή p_{tar} εκφράζει την επιθυμητή κατανομή πίεσης πάνω στην αεροτομή, οι δείκτες P και Q αντιπροσωπεύουν τους κόμβους του πλέγματος, $b_i, i = 1 \dots N$ είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού (λ.χ. οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου Bézier, τα οποία

παραμετρικοποιούν την αεροδυναμική μορφή), U_n^P οι μεταβλητές κατάστασης (μεταβλητές μέσης ροής και μοντέλου τύρβης) στους κόμβους του πλέγματος. Το σύνολο B_w αποτελείται από τις ακμές του πλέγματος που απαρτίζουν το διακριτοποιημένο στερεό όριο, ενώ ο δείκτης J της εξ. 4.2 υποδεικνύει άθροιση στους δύο κόμβους της ακμής. Τέλος, $\Delta s^J = \frac{\Delta s^S}{2}$, όπου Δs^S το μήκος της ακμής. Οι εξισώσεις $R_m^Q(b_i, U_n^P(b_i)) = 0$ εκφράζουν την απαίτηση να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του ευθέως προβλήματος, εξ. 2.2 και 2.6 για οποιοδήποτε σύνολο τιμών b_i και σε οποιονδήποτε κόμβο του πλέγματος.

Εφαρμογή της μεθόδου Newton στο πρόβλημα 4.1 δίνει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\frac{d^2 F}{db_i db_j} \Delta b_j^n = -\frac{dF}{db_i}$$

από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι διορθώσεις Δb_j^n των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού στον n -ιστό κύκλο του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, οπότε αυτές ανανεώνονται σύμφωνα με τον τύπο

$$b_j^{n+1} = b_j^n + \Delta b_j^n \quad (4.3)$$

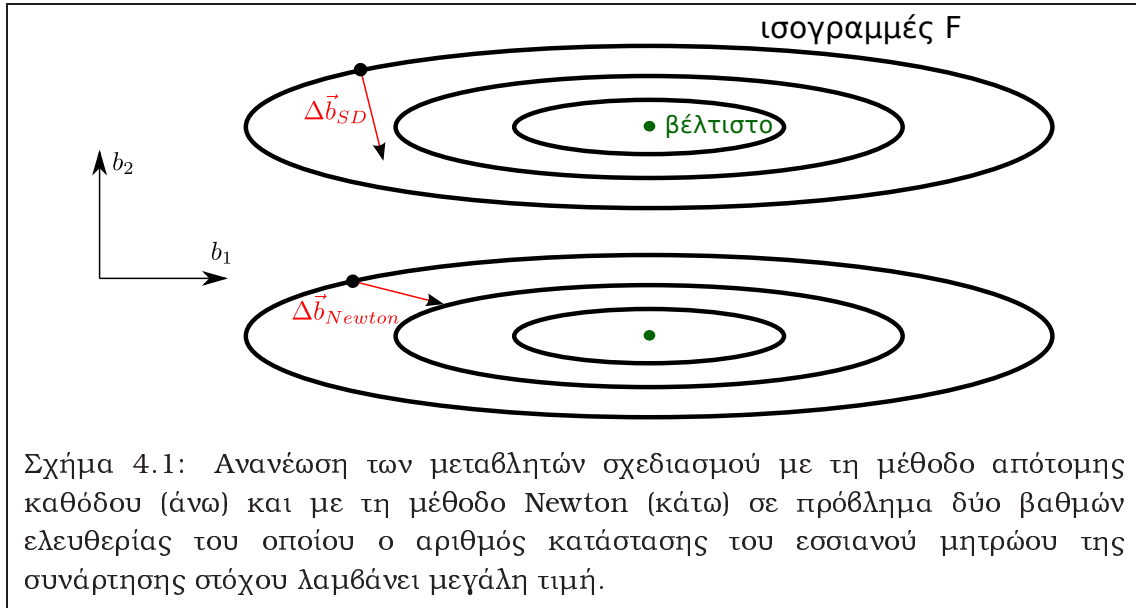
Η μέθοδος Newton είναι κατά πολύ πλεονεκτικότερη ως προς το ρυθμό μείωσης του συναρτησιακού σε σχέση με μεθόδους που χρησιμοποιούν μόνο την κλίση του συναρτησιακού (λ.χ. μεθόδους απότομης καθόδου), αφού δεν επηρεάζεται αρνητικά από μεγάλες τιμές του αριθμού κατάστασης του εσοιανού μητρώου, $H_{ij} = \frac{d^2 F}{db_i db_j}$, [110], σχ. 4.1. Επίσης, εν γένει δεν απαιτεί επικουρική μέθοδο για τον υπολογισμό κάποιου μήκους βήματος η . Η μέθοδος Newton διατυπώνεται υπό την παραδοχή ότι η συνάρτηση στόχου είναι τετραγωνική μορφή του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η παραδοχή αυτή είναι ανακριβής, οπότε ενδέχεται κατά την ανανέωση των τιμών b_j , εξ. 4.3, να μην ικανοποιείται κάποιο προεπιλεγμένο κριτήριο μείωσης (λ.χ. συνθήκες Wolfe ή Goldstein, [110]). Σε αυτές τις (λίγες γενικά) περιπτώσεις, απαιτείται η εισαγωγή μήκους βήματος μικρότερου της μονάδας.

Το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η ανάγκη υπολογισμού του εσοιανού μητρώου που, ανάλογα με το πρόβλημα, μπορεί να αυξήσει ιδιαίτερα το υπολογιστικό κόστος ανά κύκλο βελτιστοποίησης. Για να παρακαμφθεί ο υπολογισμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία προσεγγιστική μέθοδος Newton¹, η οποία υπολογίζει με αναδρομικό τύπο το εσοιανό μητρώο σε έναν κύκλο n βάσει του αντίστοιχου μητρώου του προηγούμενου κύκλου και της διαφοράς των κλίσεων της συνάρτησης στόχου στους κύκλους αυτούς, κάνοντας χρήση της εξίσωσης της τέμνουσας², [247]

$$H_{ij}^n s_j = y_i \quad (4.4)$$

¹quasi-Newton method

²secant equation



η οποία προϋποθέτει ότι επιπλέον ισχύει η ακόλουθη συνθήκη καμπυλότητας

$$s_i y_i > 0 \quad (4.5)$$

Στις εξ. 4.4 και 4.5 χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί

$$s_i = b_i^n - b_i^{n-1}, \quad y_i = \left(\frac{dF}{db_i} \right)^n - \left(\frac{dF}{db_i} \right)^{n-1}$$

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι Newton που χρησιμοποιούνται στη διατριβή είναι οι μέθοδοι BFGS και SR1, [110].

Ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου BFGS για τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου στο n -ιστό κύκλο είναι ο

$$H_{ij}^n = H_{ij}^{n-1} - \frac{H_{im}^{n-1} s_m s_n H_{nj}^{n-1}}{s_k H_{kl}^{n-1} s_l} + \rho y_i y_j \quad (4.6)$$

όπου

$$\rho = \frac{1}{y_i s_i}$$

Ο τύπος 4.6 μπορεί να εκφραστεί απ' ευθείας για τον αντίστροφο του εσσιανού μητρώου, προκειμένου να αποφευχθεί η εκ των υστέρων αντιστροφή του, η οποία σε προβλήματα με πολλές μεταβλητές σχεδιασμού καθίσταται χρονοβόρα

$$B_{ij}^n = (H^n)^{-1} = (\delta_{ik} - \rho s_i y_k) B_{kl}^{n-1} (\delta_{lj} - \rho y_l s_j) + \rho s_i s_j \quad (4.7)$$

Η εξ. 4.7 είναι ισοδύναμη της εξ. 4.6, δεδομένου ότι ισχύει η εξίσωση των Sherman-Morrison

$$(A_{ij} + u_i v_j)^{-1} = A_{ij}^{-1} - \frac{A_{im}^{-1} u_m v_n A_{mj}^{-1}}{1 + v_k A_{kl}^{-1} u_l}$$

Η μέθοδος BFGS θεωρείται η πιο αποδοτική προσεγγιστική μέθοδος Newton, δίνοντας υπεργραμμικούς ρυθμούς σύγκλισης, αν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι κυρτό και χωρίς περιορισμούς, [110]. Με χρήση των εξ. 4.5, 4.6 και 4.7 αποδεικνύεται ότι το μητρώο H_{ij}^n (ή αντίστοιχα το μητρώο B_{ij}^n) θα είναι θετικά ορισμένο, αν είναι θετικά ορισμένο το μητρώο H_{ij}^{n-1} (αντίστοιχα το μητρώο B_{ij}^{n-1}). Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα επιθυμητή σε κυρτά προβλήματα αλλά σε μη-κυρτά προβλήματα, στα οποία η εξ. 4.5 μπορεί να μην ισχύει ή το εσσιανό μητρώο να είναι αρνητικά ορισμένο, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση της απόδοσης της μεθόδου ή ακόμη και σε αστοχία αυτής, [248]. Στη βιβλιογραφία συναντώνται εργασίες οι οποίες τροποποιούν τη μέθοδο BFGS προκειμένου να αντιμετωπίζει μη-κυρτά προβλήματα, [249], [250], [251], δε λαμβάνουν όμως υπόψη τις περιπτώσεις προβλημάτων υπό περιορισμούς. Όταν υπολογίζονται αρνητικά ορισμένα εσσιανά μητρώα ή/και υπάρχουν περιορισμοί, η μέθοδος SR1 είναι πιο αποδοτική, [110], αφού κατά τη διατύπωσή της πραγματοποιούνται λιγότερο ισχυρές παραδοχές σχετικά με την κατάσταση του εσσιανού μητρώου. Ο αναδρομικός τύπος που παρέχει το προσεγγιστικό εσσιανό μητρώο στο n -ιοστό βήμα με τη μέθοδο SR1 δίνεται παρακάτω

$$H_{ij}^n = H_{ij}^{n-1} + \frac{(y_i - H_{ni}^{n-1}s_i)(y_j - H_{mj}^{n-1}s_j)}{(y_l - H_{lk}^{n-1}s_k)s_l} \quad (4.8)$$

ενώ αν είναι επιθυμητός ο υπολογισμός απ' ευθείας του αντίστροφου εσσιανού μητρώου, χρησιμοποιείται ο τύπος

$$B_{ij}^n = B_{ij}^{n-1} + \frac{(s_i - B_{ni}^{n-1}y_i)(s_j - B_{mj}^{n-1}y_j)}{(s_l - B_{lk}^{n-1}y_k)y_l} \quad (4.9)$$

Η μέθοδος SR1 αποτυγχάνει όταν ο παρονομαστής στις εξ. 4.8 και 4.9 πάρει τιμές κοντά στο μηδέν. Επίσης, δεν υπάρχει κάποια γενική απόδειξη για το ρυθμό σύγκλισής της. Παρόλα αυτά, είναι μία πολύ αποδοτική μέθοδος για 'δύσκολα' προβλήματα υπό περιορισμούς και με εσσιανό μητρώο το οποίο είναι αρνητικά ορισμένο σε περιοχές του χώρου σχεδιασμού.

Οι μέθοδοι BFGS και SR1 απαιτούν μία αρχικοποίηση του μητρώου H_{ij}^1 , το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στον αντίστοιχο αναδρομικό τύπο. Στην παρούσα διατριβή δοκιμάζονται δύο παραλλαγές ως προς την αρχικοποίηση. Η πρώτη θέτει $H_{ij}^1 = \delta_{ij}$, όπως συνηθίζεται στη σχετική βιβλιογραφία, και η δεύτερη υπολογίζει το ακριβές εσσιανό μητρώο. Συγκρίσεις ως προς την αποδοτικότητα των παραλλαγών αυτών πραγματοποιούνται στο επόμενο κεφάλαιο. Αξίζει, πάντως, να σημειωθεί ότι οι προσεγγιστικές μέθοδοι Newton παρουσιάζουν μειούμενη απόδοση όσο ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού αυξάνει, [111], [112], [113].

4.2 Πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό περιορισμούς - η μέθοδος διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού

Έστω το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς ισότητας και ανισότητας

$$\begin{aligned} & \min [F(b_i, U_n^P(b_i))] \\ & \text{υπό τους περιορισμούς} \\ & R_m^Q(b_i, U_n^P(b_i)) = 0 \\ & c_r^t(b_i, U_n^P(b_i)) \geq 0 \\ & c^a(b_i, U_n^P(b_i)) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Η συνάρτηση στόχου F δίνεται από το ολοκλήρωμα της ολικής πίεσης στα όρια εισόδου (in) και εξόδου (out) του υπολογιστικού χωρίου

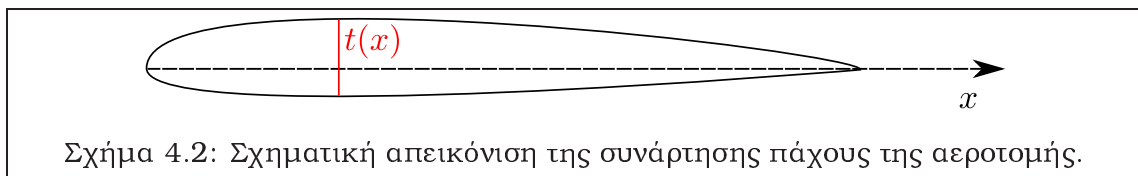
$$F = \int_{in} p_t dS - \int_{out} p_t dS = \sum_{B_i} p_t^J \Delta s^J - \sum_{B_o} p_t^J \Delta s^J \quad (4.11)$$

όπου τα B_i και B_o αναπαριστούν τα σύνολα των ακμών εισόδου και εξόδου του πλέγματος αντίστοιχα, ο δείκτης J αναπαριστά τους δύο κόμβους της κάθε ακμής S και $\Delta s^J = \frac{\Delta s^S}{2}$, όπου Δs^S το μήκος της ακμής. Δεδομένου ότι στα προβλήματα που παρουσιάζονται εδώ η ολική πίεση στην είσοδο λαμβάνει δεδομένη (επιβαλλόμενη μέσω των οριακών συνθηκών) σταθερή τιμή, αρκεί η ελαχιστοποίηση της ποσότητας $-\int_{out} p_t dS$.

Στο παρόν πρόβλημα, οι περιορισμοί ανισότητας c_r^t αναπαριστούν κατασκευαστικούς περιορισμούς υπό τη μορφή κατώτατων αποδεκτών τιμών του πάχους t της αεροτομής σε R προκαθορισμένες θέσεις κατά τη χορδή, σχ. 4.2

$$c_r^t(b_i) = t_r - t_{min,r} \geq 0, \quad t_r = t(x_r), \quad r = 1 \dots R$$

Ένας περιορισμός ανισότητας λέγεται *ενεργός* στην περίπτωση που ικανοποιείται



οριακά στη μορφή $c_r^t = 0$, ενώ σε αντίθετη περίπτωση λέγεται *ανενεργός*. Οι περιορισμοί ανισότητας εδώ εξαρτώνται άμεσα μόνο από τις μεταβλητές σχεδιασμού

b_i , γεγονός που διευκολύνει τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας τους, χωρίς να εμπλέκονται οι μεταβλητές ροής.

Ο μοναδικός περιορισμός ισότητας που επιβάλλεται στις εφαρμογές της διατριβής κατά την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης είναι η επιβολή προκαθορισμένης στροφής της ροής που διέρχεται από το υπολογιστικό χωρίο και εκφράζεται ως εξής

$$c^a = \frac{1}{2} \int_{out} (a - a_{tar})^2 dS = \frac{1}{2} \sum_{B_o} (a^J - a_{tar})^2 \Delta s^J = 0$$

όπου B_o το όριο εξόδου της ροής και a_{tar} η επιθυμητή γωνία εξόδου, δεδομένου ότι η γωνία εισόδου της ροής, η οποία επιβάλλεται μέσω των οριακών συνθηκών, θεωρείται δεδομένη και σταθερή. Και εδώ, ο δείκτης J υποδεικνύει άθροιση στους δύο κόμβους μίας ακμής του ορίου εξόδου B_o , στο οποίο διακριτοποιείται ο περιορισμός.

Οι περιορισμοί ανισότητας και ο περιορισμός ισότητας ενσωματώνονται στη συνάρτηση στόχου μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange λ_r^t και λ^a αντίστοιχα, δίνοντας την παρακάτω προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L} = F - \lambda_r^t c_r^t - \lambda^a c^a \quad (4.12)$$

Δεδομένου ότι οι εκθέτες t και a εκφράζουν τον τύπο του περιορισμού, η επανάληψη αυτών στον ίδιο όρο του παραπάνω τύπου και σε όσους ακολουθούν δεν υπονοεί άθροιση. Η αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σημείο να αποτελεί ακρότατο γράφεται πλέον ως εξής

$$\frac{d\mathcal{L}}{db_i} = 0 \quad (4.13)$$

Επίσης, εισάγεται και το διάνυσμα των βοηθητικών, μη-αρνητικών μεταβλητών³ z_r^t , με το οποίο οι περιορισμοί ανισότητας c_r^t μετατρέπονται σε περιορισμούς ισότητας

$$c_r^t - z_r^t = 0 \quad (4.14)$$

Οι πολλαπλασιαστές λ_r^t , λ^a και οι μεταβλητές z_r^t αποτελούν επιπλέον άγνωστους οι τιμές των οποίων πρέπει να αναζητηθούν παράλληλα με τις επιθυμητές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Επιπλέον, πρέπει να ισχύει $\lambda_r^t \geq 0$, [110]. Ειδικότερα, όταν ο αντίστοιχος περιορισμός ανισότητας είναι ανενεργός, δηλαδή $c_r^t = z_r^t > 0$ οι πολλαπλασιαστές λ_r^t πρέπει να είναι μηδενικοί, ώστε η τιμή της συνάρτησης Lagrange να είναι ταυτοτικά ίση με την τιμή της συνάρτησης στόχου, οπότε διατυπώνεται η παρακάτω συμπληρωματική συνθήκη

$$\lambda_r^t z_r^t = 0 \quad (4.15)$$

Οι εξ. 4.13, 4.14 και 4.15 μαζί με τον περιορισμό ισότητας και την απαίτηση να ισχύει $z_r^t \geq 0$ και $\lambda_r^t \geq 0$ αποτελούν συνολικά τις συνθήκες ΚΚΤ⁴ για το πρόβλημα

³slack variables

⁴Karush-Kuhn-Tucker

4.10 και γράφονται συγκεντρωτικά ως εξής

$$\frac{d\mathcal{L}}{db_i} = 0 \quad (4.16\alpha')$$

$$c_r^t - z_r^t = 0 \quad (4.16\beta')$$

$$c^a = 0 \quad (4.16\gamma')$$

$$\lambda_r^t z_r^t - \sigma \mu^d = 0 \quad (4.16\delta')$$

$$z_r^t \geq 0 \quad (4.16\epsilon')$$

$$\lambda_r^t \geq 0 \quad (4.16\zeta')$$

όπου

$$\begin{aligned} \mu^d &= \frac{1}{R} z_r^t \lambda_r^t \\ \sigma &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Η εξ. 4.16δ' προκύπτει με αφαίρεση του όρου $\sigma \mu^d$ από τη συμπληρωματική συνθήκη 4.15, ώστε οι διορθώσεις στις μεταβλητές σχεδιασμού να μην παγιδέψουν από νωρίς τη διαδικασία βελτιστοποίησης στο σύνολο των εφικτών λύσεων, με συνέπεια τη μείωση της αποτελεσματικότητας του αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Η παράμετρος σ επιλέγεται από τον χρήστη και συνηθίζεται να μειώνεται σταδιακά όσο η διαδικασία σχεδιασμού/βελτιστοποίησης πλησιάζει στη βέλτιστη λύση. Η μέθοδοι που εφαρμόζονται στην παρούσα διατριβή είναι μέθοδοι εσωτερικού σημείου⁵, δηλαδή απαιτείται οι εξ. 4.16ε' και 4.16ζ' να ικανοποιούνται αυστηρά, $z_r^t > 0$, $\lambda_r^t > 0$, [110], [252], [247], δεδομένου ότι το σημείο της ισότητας δεν προσφέρει ουσιαστικά στην ποιότητα της λύσης και δυσχεραίνει ιδιαίτερα την αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

Οι εξ. 4.16α', 4.16β', 4.16γ' και 4.16δ' γράφονται στην παρακάτω διανυσματική μορφή

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{\beta}) = 0 \quad (4.17)$$

όπου

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} b_j \\ \lambda_l^t \\ \lambda^a \\ z_l^t \end{bmatrix}$$

⁵interior point methods

Εφαρμογή της μεθόδου Newton στην εξ. 4.17 δίνει το παρακάτω σύστημα για τις διορθώσεις του διανύσματος των αγνώστων, $\Delta\vec{\beta}$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_k}{d\beta_i d\beta_j} \Delta\beta_j = -\frac{d\mathcal{F}_k}{d\beta_i}$$

ή με αντικατάσταση και τέλεση των πράξεων

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} & -\frac{dc_l^t}{db_i} & -\frac{dc^a}{db_i} & 0 \\ \frac{dc_r^t}{db_j} & 0 & 0 & -\delta_{rl} \\ \frac{dc^a}{db_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_r^t \delta_{rl} & 0 & \lambda_r^t \delta_{rl} \end{bmatrix}}_{\text{μητρώο KKT}} \begin{bmatrix} \Delta b_j \\ \Delta \lambda_l^t \\ \Delta \lambda^a \\ \Delta z_l^t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{d\mathcal{L}}{db_i} \\ c_r^t - z_r^t \\ c^a \\ z_r^t \lambda_r^t - \sigma \mu^d \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

οπότε τα b_i , λ_r^t , λ^a και z_r^t ανανεώνονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} b_j^{n+1} \\ (\lambda_l^t)^{n+1} \\ (\lambda^a)^{n+1} \\ (z_l^t)^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_j^n \\ (\lambda_l^t)^n \\ (\lambda^a)^n \\ (z_l^t)^n \end{bmatrix} + \eta^n \begin{bmatrix} \Delta b_j^n \\ \Delta \lambda_l^t \\ \Delta \lambda^a \\ \Delta z_l^t \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

όπου το μήκος βήματος η^n εισάγεται ως μηχανισμός ο οποίος εξασφαλίζει ότι τα z_r^t και λ_r^t θα είναι πάντοτε θετικά, εξ. 4.16ε' και 4.16φ', λαμβάνοντας τιμές μικρότερες της μονάδας αν η ανανέωση των εν λόγω μεταβλητών οδηγεί σε αρνητικές τιμές. Η μέθοδος, η οποία επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης 4.10 χρησιμοποιώντας τις σχ. 4.18 και 4.19 λέγεται μέθοδος τετραγωνικού προγραμματισμού⁶ Newton-Langrange.

Η απαίτηση να είναι το εσσιανό μητρώο της συνάρτησης Lagrange θετικά ορισμένο, $\frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j}$, και οι περιορισμοί να είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, αποτελούν ικανές συνθήκες, ώστε το μητρώο KKT του συστήματος 4.18 να μην είναι ιδιόμορφο και το σύστημα να έχει λύση. Οι παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζουν επίσης τετραγωνικό ρυθμό μείωσης της συνάρτησης κόστους. Αν το μητρώο $\frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j}$ είναι αρνητικά ορισμένο, το πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν είναι κυρτό, γεγονός που δυσχεραίνει τη μέθοδο Newton και αποτελεί ένδειξη ύπαρξης τοπικών ακρότατων.

⁶quadratic programming

Επίσης, δεν επιτρέπεται ο αριθμός των περιορισμών να είναι μεγαλύτερος του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού, γιατί τότε το μητρώο KKT γίνεται ιδιόμορφο, [110] (πρέπει δηλαδή πάντα να ισχύει $R + 1 \leq N$).

Ο έλεγχος της κατάστασης του μητρώου $\frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j}$ πραγματοποιείται με την εφαρμογή ατελούς παραγοντοποίησης κατά Cholesky⁷ στο μητρώο. Αν η παραγοντοποίηση είναι επιτυχής, τότε το μητρώο είναι θετικά ορισμένο. Σε αντίθετη περίπτωση, προστίθεται μία θετική ποσότητα τ σε όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του μητρώου και η διαδικασία επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου η παραγοντοποίηση στο τροποποιημένο μητρώο να ολοκληρωθεί επιτυχώς, [110]. Η τιμή του προσθετέου τ υπολογίζεται αρχικά σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{αν } \min_i \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_i} > 0 \\ \frac{1}{2} \left\| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right\|_F & \text{αν } \min_i \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_i} \leq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

και ανανεώνεται μετά από κάθε ανεπιτυχή παραγοντοποίηση ως εξής

$$\tau \leftarrow \max \left(2\tau, \frac{1}{2} \left\| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right\|_F \right) \quad (4.21)$$

όπου $\left\| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right\|_F$ είναι η κατά Frobenius νόρμα του μητρώου, η οποία υπολογίζεται ως εξής

$$\left\| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right\|_F = \sqrt{\left| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right| \left| \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} \right|}$$

Η παραπάνω διαδικασία μεταβάλλει ελαφρώς την κατεύθυνση του βήματος βελτιστοποίησης προς αυτήν που θα υποδείκνυε η μέθοδος της απότομης καθόδου, αλλά εγγυάται ότι το σύστημα 4.18 επιδέχεται μοναδική λύση.

Η τιμή της συνάρτησης στόχου στο σημείο $\vec{b} + \Delta \vec{b} = \vec{b} + \vec{d}$ μπορεί να προσεγγιστεί με χρήση του αναπτύγματος Taylor δεύτερης τάξης ως εξής

$$F(\vec{b} + \vec{d}) = F(\vec{b}) + \vec{d}^T \nabla F(\vec{b}) + \frac{1}{2} \vec{d}^T \nabla^2 F(\vec{b}) \vec{d}$$

και οι περιορισμοί να εκφραστούν ως ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης, επίσης γύρω από την τρέχουσα λύση \vec{b} ως εξής

$$\begin{aligned} c_r^t(\vec{b} + \vec{d}) &= c_r^t(\vec{b}) + \nabla c_r^t(\vec{b}) \vec{d} \geq 0 \\ c^a(\vec{b} + \vec{d}) &= c^a(\vec{b}) + \nabla c^a(\vec{b}) \vec{d} = 0 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω διατυπώσεις του συναρτησιακού και των περιορισμών επιτρέπουν την αντικατάσταση του προβλήματος 4.10 με μία σειρά τετραγωνικών υποπροβλημάτων

⁷incomplete Cholesky factorization

της μορφής

$$\min \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} d_i d_j + \frac{dF}{db_i} d_i \right]$$

όταν

$$R_m^Q(b_i, U_n^P(b_i)) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{dc_r^t}{db_i} d_i + c_r^t - \zeta_r^t = 0$$

$$\frac{dc^a}{db_i} d_i + c^a = 0$$

Οι συνθήκες ΚΚΤ για το υποπρόβλημα 4.22, με εισαγωγή πάλι κατάλληλης συνάρτησης Lagrange και των πολλαπλασιαστών μ_r^t και μ^a , καθώς και των μη-αρνητικών μεταβλητών ζ_r^t , δίνονται παρακάτω

$$\frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} d_j + \frac{dF}{db_i} - \frac{dc_r^t}{db_i} \mu_r^t - \frac{dc^a}{db_i} \mu^a = 0 \quad (4.23\alpha)$$

$$\frac{dc_r^t}{db_i} d_i + c_r^t - \zeta_r^t = 0 \quad (4.23\beta)$$

$$\frac{dc^a}{db_i} d_i + c^a = 0 \quad (4.23\gamma)$$

$$\mu_r^t \zeta_r^t - \sigma \mu^d = 0 \quad (4.23\delta)$$

$$\zeta_r^t > 0 \quad (4.23\epsilon)$$

$$\mu_r^t > 0 \quad (4.23\zeta)$$

όπου πάλι

$$\mu^d = \frac{1}{R} \zeta_r^t \mu_r^t$$

Εφαρμογή της μεθόδου Newton στις συνθήκες ΚΚΤ του υποπροβλήματος, δεδομένου πάντα ότι έχει εξασφαλιστεί (λ.χ. μέσω των σχ. 4.20 και 4.21 και της επιτυχούς ατελούς παραγοντοποίησης κατά Cholesky) ότι το μητρώο $\frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j}$ είναι θετικά ορισμένο, δίνει το παρακάτω σύστημα για την ανανέωση των τιμών των d_i , μ_r^t

και μ^a

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} - \frac{dc_i^t}{db_i} - \frac{dc^a}{db_i} & 0 \\ \frac{dc_r^t}{db_j} & 0 & 0 & -\delta_{rl} \\ \frac{dc^a}{db_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_r^t \delta_{rl} & 0 & \mu_r^t \delta_{rl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d_j \\ \Delta \mu_l^t \\ \Delta \mu^a \\ \Delta \zeta_l \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{d^2 \mathcal{L}}{db_i db_j} d_j + \frac{dF}{db_i} - \frac{dc_r^t}{db_i} \mu_r^t - \frac{dc^a}{db_i} \mu^a \\ \frac{dc_r^t}{db_i} d_i + c_r^t - \zeta_r^t \\ \frac{dc^a}{db_i} d_i + c^a \\ \zeta_r^t \mu_r^t - \sigma \mu^d \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Η λύση του υποπροβλήματος επιτρέπει την ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Lagrange για το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, 4.10, με χρήση των σχέσεων

$$\begin{aligned} d_i &= (b_i)^{n+1} - (b_i)^n \\ \mu_i^t &= (\lambda_i^t)^{n+1} \\ \mu^a &= (\lambda^a)^{n+1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι τα ανανεωμένα ζ_r^t και μ_r^t είναι πάντα θετικά, εξ. 4.23ε' και εξ. 4.23φ', πάλι εισάγεται κατά την ανανέωση των τιμών και ένα μήκος βήματος ι^n , το οποίο λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας όταν χρειάζεται, προκειμένου αυτά να μη λάβουν αρνητική τιμή.

Η μέθοδος, η οποία επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης 4.10 χρησιμοποιώντας τις σχ. 4.24 και 4.25 λέγεται μέθοδος διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού⁸. Η μέθοδος διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού λειτουργεί ακόμα και αν το αρχικό σημείο δεν είναι στον χώρο των εφικτών λύσεων. Η χρησιμότητα της έγκειται στο ότι παρουσιάζει καλές ιδιότητες στην επίλυση προβλημάτων με μη-γραμμικούς περιορισμούς ανισότητας, [253].

⁸ sequential quadratic programming, SQP

Κεφάλαιο 5

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΣΣΙΑΝΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο προτείνεται και αναλύεται μία μέθοδος υπολογισμού των ακριβών παραγών ευαισθησίας πρώτης τάξης (κλίση) και δεύτερης τάξης (εσσιανό μητρώο). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί συνδυασμό της ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής και της διακριτής συζυγούς μεθόδου προκειμένου να υπολογιστούν με το ελάχιστο δυνατό κόστος οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας, οι οποίες απαιτούνται για τη βελτιστοποίηση/αντίστροφο σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών με τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο κεφ. 4. Ειδικά το εσσιανό μητρώο μπορεί να εφαρμοστεί (σε μελλοντικές εργασίες) και σε μεθόδους σιβαρού σχεδιασμού¹, όπου η σιβαρότητα² των παραγόμενων μορφών ποσοτικοποιείται μέσω του υπολογισμού της τυπικής απόκλισης της συνάρτησης στόχου, όταν οι συνθήκες ροής θεωρείται ότι μεταβάλλονται σε σχέση με την ονομαστική τιμή τους βάσει κάποιας πιθανοτικής κατανομής, [136], [137], [138], [139], [140], προκειμένου να παραχθούν γεωμετρίες που αποδίδουν καλά όχι μόνο στο σημείο σχεδιασμού αλλά και εκτός αυτού.

Η μέθοδος που αναπτύσσεται σε αυτό το κεφάλαιο διαφοροποιείται από τις εργασίες της, ούτως ή άλλως, περιορισμένης αντίστοιχης βιβλιογραφίας στα εξής σημεία :

- Εφαρμόζεται για πρώτη φορά σε περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής και μάλιστα για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης, όπου το συναρτησιακό παρουσιάζει την ιδιαιτερότητα να μην είναι ολοκλήρωμα στα όρια της σχεδιαζόμενης γεωμετρίας, αφού ορίζεται σε διαφορετικά όρια του χωρίου από τα στερεά τοιχώματα που ελέγχουν οι μεταβλητές σχεδιασμού.
- Για πρώτη φορά το ακριβές εσσιανό μητρώο χρησιμοποιείται σε προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο χειρισμό των περιορισμών που επιβάλλονται σε μεγέθη τα οποία συναρτώνται άμεσα των ροϊκών μεταβλητών (λ.χ. στροφή της ροής), των οποίων οι παράγωγοι

¹robust design

²robustness

ευαισθησίας υπολογίζονται με αποδοτικό τρόπο χρησιμοποιώντας πάλι τη διακριτή συζυγή μέθοδο.

- Γίνεται εκτενής διερεύνηση της σημασίας των επιμέρους όρων που εμφανίζονται στην τελική έκφραση του ακριβούς εσσιανού μητρώου και μελετώνται ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές οι οποίες μειώνουν το υπολογιστικό κόστος.
- Ερευνώνται δυνατότητες συνδυασμού της ακριβούς μεθόδου Newton με προσεγγιστικές μεθόδους Newton, στις οποίες υπολογίζεται ακριβώς το εσσιανό μητρώο μόνο κατά τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, ενώ στους ακόλουθους κύκλους αυτό ανανεώνεται με αναδρομικό τύπο, ο οποίος απαιτεί τον υπολογισμό εκ νέου μόνο της κλίσης της συνάρτησης στόχου και των περιορισμών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, επιταχύνοντας σημαντικά τον αλγόριθμο μέσω της πολύ καλής αρχικοποίησης της προσεγγιστικής μεθόδου Newton.

5.1 Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι τρόποι υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης, με χρήση είτε της μεθόδου ευθείας διαφορίσης των εξισώσεων ροής είτε της διακριτής συζυγούς μεθόδου. Κάθε μέθοδος που προκύπτει αποτιμάται ως προς το κόστος ανά κύκλο βελτιστοποίησης για τα προβλήματα που περιγράφονται στις ενότητες 4.1 και 4.2.

Η κλίση της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει με χρήση του κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{\partial F}{\partial b_i} + \frac{\partial F}{\partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_i} \quad (5.1)$$

όπου $\frac{dF}{db_i}$ η ολική και $\frac{\partial F}{\partial b_i}$ η μερική παράγωγος της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ομοίως και για τα υπόλοιπα μεγέθη. Αντίστοιχη διαφορίση του τελεστή υπολοίπου των εξισώσεων ροής, υπό την απαίτηση αυτές να ικανοποιούνται πάντα, δίνει

$$(R_{DD,i})_n^P = \frac{dR_n^P}{db_i} = \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_i} = 0 \quad (5.2)$$

Η εξ. 5.2 αντιστοιχεί σε N συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΣΜΔΕ) αντίστοιχου κόστους με το ευθύ πρόβλημα, όπου υπενθυμίζεται ότι N είναι ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Η μέθοδος εύρεσης της κλίσης της συνάρτησης στόχου που βασίζεται στην επίλυση των συστημάτων της εξ. 5.2 ως

προς $\frac{dU_k^K}{db_i}$ και αντικατάσταση στην εξ. 5.1 λέγεται μέθοδος ευθείας διαφόρισης (DD³).

Πολλαπλασιασμός των παραγώγων του υπολοίπου των εξισώσεων ροής, $\frac{dR_n^P}{db_i}$, οι οποίες είναι ταυτοτικά μηδενικές, εξ. 5.2, με το πεδίο των συζυγών μεταβλητών, Ψ_n^P , και πρόσθεση του αποτελέσματος στην κλίση της συνάρτησης στόχου F , εξ. 5.1, δίνει την επαυξημένη συνάρτηση στόχου \hat{F} . Ισχύει

$$\frac{d\hat{F}}{db_i} = \frac{dF}{db_i} + \Psi_n^P \frac{dR_n^P}{db_i} = \frac{\partial F}{\partial b_i} + \Psi_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + \frac{dU_k^K}{db_i} \left(\frac{\partial F}{\partial U_k^K} + \Psi_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right)$$

Ο όρος που περιλαμβάνει τις παραγώγους $\frac{dU_k^K}{db_i}$ των μεταβλητών ροής απαλείφεται αν ικανοποιούνται οι συζυγείς εξισώσεις

$$(R_\Psi)_k^K = \frac{\partial F}{\partial U_k^K} + \Psi_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} = 0 \quad (5.3)$$

οπότε η κλίση της F υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{d\hat{F}}{db_i} = \frac{\partial F}{\partial b_i} + \Psi_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} \quad (5.4)$$

Η μέθοδος που υπολογίζει την κλίση μέσω της εξ. 5.4 και της προηγούμενης επίλυσης του ΣΜΔΕ των συζυγών εξισώσεων, εξ. 5.3, ονομάζεται διακριτή συζυγής μέθοδος (AV⁴). Η συζυγής μέθοδος πλεονεκτεί στα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στην παρούσα διατριβή, δεδομένου ότι απαιτεί την επίλυση ενός μόνο ΣΜΔΕ, επιπλέον του κόστους επίλυσης του αρχικού προβλήματος ροής, για τον υπολογισμό της κλίσης ενός συναρτησιακού.

Στην περίπτωση του προβλήματος ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης ενός πεδίου ροής, ενότητα 4.2, αξίζει να σημειωθεί ότι το συναρτησιακό δεν είναι άμεση συνάρτηση της γεωμετρίας, αλλά η τιμή του επηρεάζεται εμμέσως από το πεδίο ροής. Αυτό έχει ως προφανή συνέπεια το μηδενισμό του όρου $\frac{\partial F}{\partial b_i}$, οπότε η εξ.

5.4 γράφεται

$$\frac{d\hat{F}}{db_i} = \Psi_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i}$$

Επίσης, για την επίλυση του συστήματος ΚΚΤ, εξ. 4.24, απαιτείται επιπλέον ο υπολογισμός των κλίσεων των συναρτήσεων περιορισμού. Για τους περιορισμούς του πάχους της παραγόμενης μορφής, c_r^t , έχει ήδη προαναφερθεί ότι οι κλίσεις υπολογίζονται εύκολα με απ' ευθείας παραγωγή των συναρτήσεων που δίνουν τη γεωμετρία (λ.χ. των εξισώσεων των καμπυλών Bézier, οι οποίες παραμετροποιούν

³Direct Differentiation

⁴Adjoint Variables

τη γεωμετρία στην παρούσα διατριβή). Ο υπολογισμός της κλίσης του περιορισμού στροφής της ροής, c^a , ο οποίος επίσης εκφράζεται μακριά από τη σχεδιαζόμενη μορφή και εμπλέκει τα εκεί ροϊκά μεγέθη, μπορεί να επιτευχθεί είτε με τη μέθοδο DD είτε με τη συζυγή μέθοδο. Συγκεκριμένα, η κλίση γράφεται είτε ως

$$\frac{dc^a}{db_i} = \frac{\partial c^a}{\partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_i}$$

και υπολογίζεται εύκολα εφόσον πρώτα έχουν υπολογιστεί οι παράγωγοι $\frac{dU_k^K}{db_i}$ μέσω της εξ. 5.2. Εναλλακτικά, υπολογίζεται ως

$$\frac{dc^a}{db_i} = (\Psi^a)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} \quad (5.5)$$

δεδομένου ότι $\frac{\partial c^a}{\partial b_i} = 0$ (επειδή και πάλι ο περιορισμός αποτελεί συνάρτηση των ροϊκών μεγεθών σε όρια άλλα από αυτά που ελέγχουν οι μεταβλητές σχεδιασμού) οπότε υπολογίζεται αφού πρώτα επιλυθούν οι παρακάτω συζυγείς εξισώσεις για το συναρτησιακό c^a

$$(R_\Psi^a)_k^K = \frac{\partial c^a}{\partial U_k^K} + (\Psi^a)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} = 0 \quad (5.6)$$

Συνεπώς, το κόστος για τον υπολογισμό της κλίσης όλων των εμπλεκόμενων συναρτησιακών ανέρχεται στην επίλυση $N + 1$ ΣΜΔΕ για τη μέθοδο DD (συμπεριλαμβανόμενης και της επίλυσης του ευθέος προβλήματος) ή 3 ΣΜΔΕ για τη συζυγή μέθοδο (ένα για το ευθύ πρόβλημα και δύο για τις συζυγείς εξισώσεις 5.3 και 5.6).

5.2 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων

5.2.1 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Οι εξ. 5.2, 5.3 και 5.6 διατυπώνονται χρησιμοποιώντας όρους από τις ήδη διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής, ενώ για την επίλυση τους χρησιμοποιούνται οι ίδιες επαναληπτικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του ευθέος προβλήματος, εξ. 2.44 και 2.45. Έτσι, για εφαρμογή λ.χ. της σημειακά πεπλεγμένης μεθόδου Jacobi, η εξίσωση που περιγράφει την επαναληπτική διαδικασία για την εξ. 5.2 δίνεται παρακάτω

$$\left[\frac{V^P}{\Delta t^P} \delta_{nk} \delta_{PK} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right] \Delta \left(\frac{dU_k^K}{db_i} \right) = - (R_{DD,i})_n^P \quad (5.7)$$

ενώ οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις εξ. 5.3 και 5.6 είναι

$$\Delta \Psi_n^P \left[\frac{V^K}{\Delta t^K} \delta_{nk} \delta_{PK} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right] = - (R_\Psi)_k^K \quad (5.8a')$$

$$\Delta (\Psi^a)_n^P \left[\frac{V^K}{\Delta t^K} \delta_{nk} \delta_{PK} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right] = - (R_\Psi^a)_k^K \quad (5.8b')$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, ο χρονικός όρος προστίθεται κατά τα γνωστά για ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας. Δεδομένου ότι το αριστερό μέλος στις εξισώσεις αυτές έχει τις ίδιες ιδιοτιμές ανά κόμβο με το αριστερό μέλος της εξ. 2.45, ο ασυμπτωτικός ρυθμός σύγκλισης είναι όμοιος με αυτόν του προβλήματος ροής, [78]. Το ίδιο ισχύει για τις ιδιότητες ευστάθειας των προβλημάτων αυτών. Οι όποιες αποκλίσεις οφείλονται στη χρήση της μεθόδου Jacobi και στο ότι το πρόβλημα ροής είναι μη-γραμμικό ενώ οι εξ. 5.7 και 5.8 είναι γραμμικά συστήματα, καθώς και στο γεγονός ότι οι εξ. 5.7 και 5.8 λύνονται με τις εξισώσεις μέσης ροής και μοντέλου τύρβης σε πεπλεγμένη μορφή.

Μία επιπλέον δυσκολία είναι η απαίτηση για ακριβή υπολογισμό των ποσοτήτων $\frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K}$, οι οποίες πλέον εμφανίζονται στο δεξί μέλος των εξισώσεων 5.7 και 5.8. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί γίνονται λαμβάνοντας το προσεγγιστικό μητρώο που έχει υπολογιστεί για το αριστερό μέλος των εξισώσεων ροής, ενότητα 2.5.1, και προσθέτοντας όλους τους όρους που μέχρι τώρα είχαν απλοποιηθεί. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι κατά την επίλυση του ευθέως προβλήματος οι εξισώσεις της μέσης ροής δε θεωρήθηκαν πεπλεγμένες με αυτήν του μοντέλου τύρβης. Κατά την επίλυση των εξ. 5.2 και 5.3 δεν είναι δυνατόν να γίνει αυτή η παραδοχή, αφού οδηγεί σε ανακριβές δεξί μέλος, [72]. Έτσι, αν $R_n^{P,MF}$, $U_k^{K,MF}$ είναι αντίστοιχα ο τελεστής υπολοίπου και οι μεταβλητές των εξισώσεων μέσης ροής⁵ και $R^{P,SA}$, $U_k^{K,SA}$ οι αντίστοιχες ποσότητες του μοντέλου τύρβης⁶, οι ποσότητες $\frac{\partial R_n^{P,MF}}{\partial U_k^{K,SA}}$ και $\frac{\partial R^{P,SA}}{\partial U_k^{K,MF}}$, οι οποίες δεν υπολογίστηκαν κατά την επίλυση του προβλήματος ροής, πρέπει να ληφθούν υπόψη. Όλοι οι απαραίτητοι υπολογισμοί περιγράφονται αναλυτικά στις ακόλουθες ενότητες. Τονίζεται επίσης ότι οι ποσότητες $\frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K}$, που θα υπολογιστούν για το δεξί μέλος των εξ. 5.7 και 5.8, σχηματίζουν και το αριστερό μέλος των ίδιων εξισώσεων, κατόπιν προσθήκης σε αυτές του χρονικού όρου.

5.2.2 Διαχείριση του όρου μεταφοράς

Στην ενότητα αυτή σχολιάζονται οι απλοποιήσεις που έγιναν κατά τον υπολογισμό των συνεισφορών των όρων μεταφοράς στις ποσότητες $\frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K}$, ενότητα 2.5.2 και διερευνάται ποιοι όροι από αυτούς που παραλείφθηκαν πρέπει πλέον να

⁵MF=mean flow

⁶SA=Spalart-Allmaras

υπολογιστούν για το δεξί μέλος των εξ. 5.7 και 5.8. Η μαθηματική διατύπωση των όρων αυτών επαναλαμβάνεται παρακάτω για διευκόλυνση του αναγνώστη

$$\frac{\partial \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_k^K} = \mathcal{A}_{nj}^L \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^R \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_k^K} U_j^L + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_k^K} U_j^R \quad (2.46)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι οι καταστάσεις L και R λαμβάνονται από τις καταστάσεις στους κόμβους P και Q της εκάστοτε ακμής από τη σχέση

$$\vec{U}^L = \vec{U}^P - \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^P \Pi^P \quad (2.21a')$$

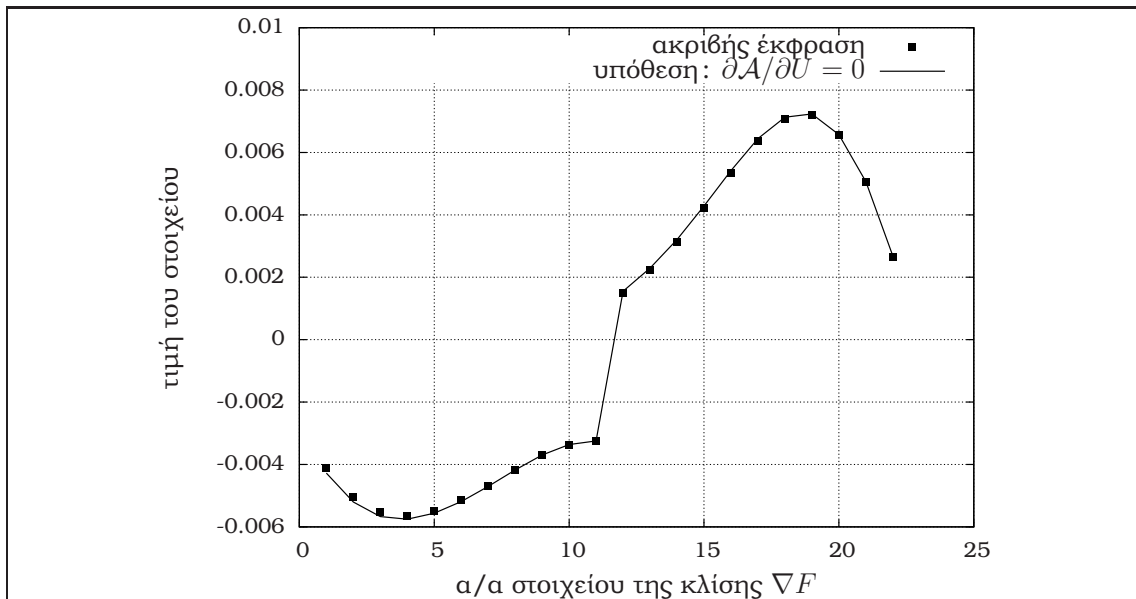
$$\vec{U}^R = \vec{U}^Q + \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_r} \right)^Q \Pi^Q \quad (2.21b')$$

Για τον υπολογισμό των όρων της εξ. 2.46 σχολιάζονται τα εξής:

- Αν χρησιμοποιηθούν περιοριστές Π^P και Π^Q στις εξ. 2.21, οι παράγωγοι ευαισθησίας αυτών αμελούνται. Η παραπάνω προσέγγιση αποτελεί πάγια τακτική στη σχετική βιβλιογραφία αφού οι εν λόγω συναρτήσεις δεν είναι διαφορίσιμες.
- Οι όροι $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_k^K} U_j^L$ και $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_k^K} U_j^R$, εξ. 2.46, οι οποίοι είχαν παραλειφθεί κατά την επίλυση του ευθέως προβλήματος, υπολογίστηκαν με τοπική χρήση του λογισμικού AD TAPENADE, προκειμένου να ελεγχθεί κατά πόσο συνεισφέρουν στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας. [104], [120], [121]. Στα σχ. 5.1 και 5.16 παρουσιάζονται αποτελέσματα από τις υπολογισμένες παραγώγους ευαισθησίας για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμμετρικής αεροτομής του [254], που θα παρουσιαστεί πλήρως στην ενότητα 6.4, με και χωρίς τους εν λόγω όρους. Προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι όροι αυτοί είναι πρακτικά ασήμαντοι και μπορούν να απαλειφθούν από το δεξί μέλος των εξ. 5.7 και 5.8. Αντίστοιχες δοκιμές έγιναν σε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης και αντίστροφου σχεδιασμού που μελετώνται στο επόμενο κεφάλαιο, και οι οποίες επιβεβαίωσαν το συμπέρασμα αυτό. Συνεπώς, η εξ. 2.46 θα γράφεται και κατά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων στην παρακάτω μορφή, εξ. 2.47

$$\frac{\partial \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_k^K} = \mathcal{A}_{nj}^L \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^R \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} \quad (2.47)$$

και, παρά την απλοποίηση, η μέθοδος θα ονομάζεται 'ακριβής'. Η απλοποίηση αυτή μειώνει ελαφρώς το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των εξ. 5.2 και 5.3, ενώ η σημασία διαγραφής των όρων αυτών θα φανεί ιδιαίτερα στις ενότητες που περιγράφουν τον υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου, όπου ενδεχόμενη παραγωγή τους θα έδινε μακροσκελείς και πολυδάπανες εκφράσεις.



Σχήμα 5.1: Υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης στόχου F στην πρώτη επανάληψη της ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της περυγώσης συμμετρικής αεροτομής του [254], με και χωρίς τον υπολογισμό των όρων $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_k^K} U_j^L$ και $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_k^K} U_j^R$. Προκύπτει το συμπέρασμα ότι η παράλειψη των όρων αυτών δε μειώνει την ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας.

- Οι όροι δεύτερης τάξης της εξ. 2.46, σχ. 5.2, που υπεισέρχονται στα διανύσματα ροής μέσω της προεκβολής κατά Taylor, εξ. 2.21, πρέπει να υπολογίζονται, αφού παράλειψή τους οδηγεί σε παραγώγους ευαισθησίας με λάθος τιμή, ενίοτε και με λάθος πρόσημο, [72]. Υπάρχουν τρεις προσεγγίσεις για τον χειρισμό των αντίστοιχων συνεισφορών στη σχετική βιβλιογραφία :
 1. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται μία φορά και αποθηκεύονται, [71]. Αυτό μειώνει πολύ το χρόνο εκτέλεσης αλλά αυξάνει ιδιαίτερα τις απαιτήσεις σε μνήμη, δεδομένου ότι το stencil των κόμβων που σχετίζονται με την ακμή PQ είναι εκτεταμένο, σχ. 5.2. Για αυτόν το λόγο, υπάρχουν εργασίες, στις οποίες η τακτική αυτή ακολουθήθηκε σε 2D, όχι όμως σε 3D, όπου η αύξηση των απαιτήσεων σε μνήμη γίνεται μεγάλη, [67], [70].
 2. Οι προαναφερθέντες όροι υπολογίζονται και πολλαπλασιάζονται σε κάθε επανάληψη με τις ποσότητες $\Delta \left(\frac{dU_k^K}{db_i} \right)$ (αν επιλύονται οι εξ. 5.2) ή $\Delta \Psi_n^P$ (αν επιλύονται οι εξ. 5.3), [72], [73], [99], [78], φροντίζοντας πάντα να πραγματοποιούνται πολλαπλασιασμοί πίνακα με διάνυσμα, ώστε η παραπάνω διαδικασία να έχει το χαμηλότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος. Αυτή η προσέγγιση είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή AD στο

υποπρόγραμμα που υπολογίζει τα διανύσματα ροής $\Phi_n^{PQ,inv}$, εξ. 2.20, [115], [92], [118], [120], [121]. Είναι η πιο οικονομική σε απαιτήσεις μνήμης αλλά και η πιο απαιτητική σε υπολογιστικό κόστος.

3. Η τρίτη προσέγγιση, [68], [69], [255], στηρίζεται στην αντικατάσταση της εξ. 2.21 στην εξ. 2.20, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} \Phi_n^{PQ,inv} = & \mathcal{A}_{nj}^L \left[U_j^P - \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_r} \right)^P \Pi^P \right] + \\ & + \mathcal{A}_{nj}^R \left[U_j^Q + \frac{1}{2} x_r^{PQ} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_r} \right)^Q \Pi^Q \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Υπενθυμίζεται επίσης ότι, σύμφωνα με την ενότητα 2.4.3, οι κλίσεις των συντηρητικών μεταβλητών μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μορφή

$$\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_r} \right)^P = w_r^{Pp} U_j^p, \quad \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_r} \right)^Q = w_r^{Qq} U_j^q \quad (5.11)$$

όπου $p \in \mathcal{K}_P$ και $q \in \mathcal{K}_Q$ τα αντίστοιχα σύνολα των πρώτων γειτόνων των P και Q . Οι ποσότητες \mathcal{A}_{nj}^L και \mathcal{A}_{nj}^R μπορούν να υπολογιστούν στην αρχή της επίλυσης και να αποθηκευτούν στις ακμές του πλέγματος (οι αντίστοιχες θέσεις μνήμης εξάλλου έχουν ήδη δεσμευτεί και χρησιμοποιηθεί κατά την επίλυση των εξισώσεων ροής). Το ίδιο ισχύει και για τις ποσότητες w_r^{Pp} και w_r^{Qq} , οι οποίες αποτελούν γεωμετρικές ποσότητες εξαρτώμενες από το πλέγμα, υπολογισμένες και αποθηκευμένες στις ακμές αυτού. Εισαγωγή της εξ. 5.11 στην εξ. 5.10 και παραγωγή των εκφράσεων που προκύπτουν ως προς U_k^K , λαμβάνοντας υπόψη τις απλοποιήσεις που προαναφέρθηκαν παραπάνω, δίνει

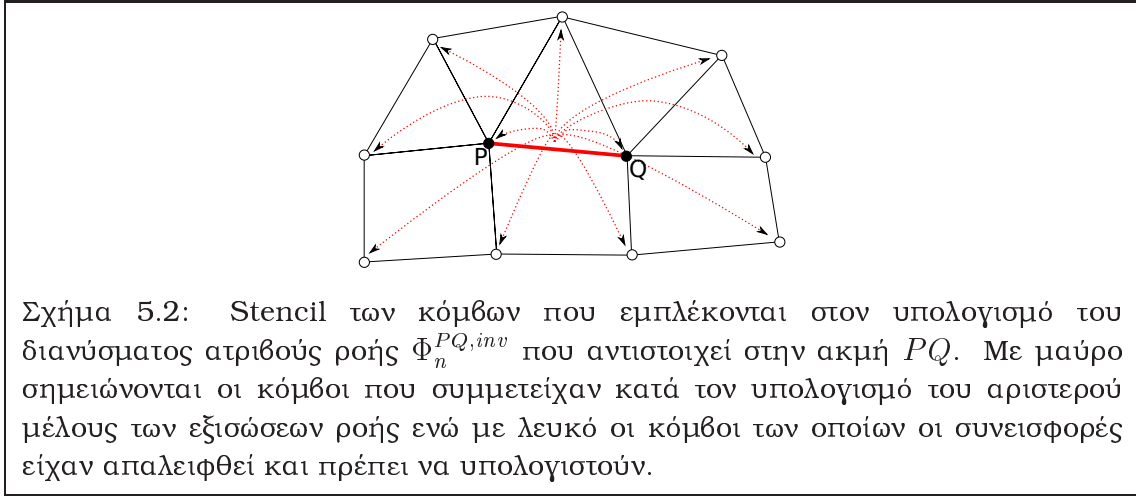
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_k^K} = & \mathcal{A}_{nj}^L \left[\frac{\partial U_j^P}{\partial U_k^K} - \frac{1}{2} x_r^{PQ} w_r^{Pp} \frac{\partial U_j^p}{\partial U_k^K} \Pi^P \right] + \\ & + \mathcal{A}_{nj}^R \left[\frac{\partial U_j^Q}{\partial U_k^K} + \frac{1}{2} x_r^{PQ} w_r^{Qq} \frac{\partial U_j^q}{\partial U_k^K} \Pi^Q \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις προγραμματίστηκαν χωρίς επιπλέον κόστος σε μνήμη υπολογιστή.

Στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής προγραμματίστηκαν και δοκιμάστηκαν και οι τρεις παραπάνω προσεγγίσεις. Τελικά, η δεύτερη απορρίφθηκε, αφού ο χρόνος εκτέλεσής της αυξάνεται έως και τέσσερις φορές σε σχέση με τις άλλες δύο.

5.2.3 Διαχείριση του όρου διάχυσης

Σημείο εκκίνησης για την παραγωγή των όρων διάχυσης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού αποτελεί η εξ. 2.49, στην οποία επιπλέον περιλαμβάνεται και η



διαφόριση του συντελεστή συνεκτικότητας

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n^{G,vis}}{\partial U_k^K} &= \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re} \frac{\partial (D_r)_{nj}^G}{\partial W_l^K} \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G}_A + \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re} (D_r)_{nj}^G \frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K}}_B + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial \mu_{eff}^G}{\partial U_k^K} (D_r)_{nj}^G \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G}_C \end{aligned} \quad (5.13)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το σχήμα σάρωσης στοιχείων, παρ. 2.4.4, οι όροι 'A' και 'B' έχουν διαφοριστεί πλήρως και έχουν αποθηκευτεί στις ακμές κατά την επίλυση του ευθέως προβλήματος. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το σχήμα σάρωσης ακμών, μόνο ο όρος 'A' έχει διαφοριστεί πλήρως, ενώ για την ανάπτυξη της πλήρους έκφρασης του όρου 'B' χρειάζονται οι εξ. 2.32 και 2.33, οι οποίες συνδυαζόμενες δίνουν

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G &= \overline{\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^M} - \left[\overline{\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_b} \right)^M} \hat{x}_b^{PQ} - \left(\frac{\partial W_j}{\partial n} \right)^M \right] \hat{x}_r^{PQ} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^P + \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^Q \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_j}{\partial x_b} \right)^P + \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_b} \right)^Q \right] \hat{x}_b^{PQ} \hat{x}_r^{PQ} + \\ &+ \frac{W_j^Q - W_j^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \hat{x}_r^{PQ} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Με χρήση της παραπάνω έκφρασης, ο όρος 'B' γράφεται

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re} (D_r)_{nj}^G \frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K}}_B = \\ & = \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re} (D_r)_{nj}^G \frac{\hat{x}_r^{PQ}}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \left(\frac{\partial W_j^Q}{\partial W_l^K} - \frac{\partial W_j^P}{\partial W_l^K} \right) \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K}}_{B1} \\ & + \underbrace{\frac{\mu_{eff}^G}{Re} \frac{1}{2} \left[(D_r)_{nj}^G - (D_b)_{nj}^G \hat{x}_b^{PQ} \hat{x}_r^{PQ} \right] \left[\frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^P + \frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^Q \right] \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K}}_{B2} \end{aligned}$$

Ο όρος 'B1' έχει υπολογιστεί και αποθηκευτεί κατά τον υπολογισμό του αριστερού μέλους των εξισώσεων μέσης ροής. Ο όρος 'B2' αποτελεί συνάρτηση των κλίσεων των μεταβλητών στους κόμβους 'P' και 'Q'. Οι συνεισφορές μπορούν είτε να υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη είτε να αποθηκευτούν με κάποια από τις τακτικές που αναλύθηκαν για τους όρους μεταφοράς. Έτσι, αν λ.χ. ληφθεί υπόψη ότι ισχύει η εξ. 5.11, ο όρος 'B2' γράφεται

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{eff}^G}{Re} \frac{1}{2} \left[(D_r)_{nj}^G - (D_b)_{nj}^G \hat{x}_b^{PQ} \hat{x}_r^{PQ} \right] \left[\frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^P + \frac{\partial}{\partial W_l^K} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^Q \right] \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K} = \\ & = \frac{\mu_{eff}^G}{Re} \frac{1}{2} \left[(D_r)_{nj}^G - (D_b)_{nj}^G \hat{x}_b^{PQ} \hat{x}_r^{PQ} \right] \left[w_r^{Pp} \frac{\partial W_j^p}{\partial W_l^K} + w_r^{Qq} \frac{\partial W_j^q}{\partial W_l^K} \right] \frac{\partial W_l^K}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

Οι όροι που συμπεριλαμβάνονται στην παραπάνω εξίσωση μπορούν να αποθηκευτούν στις ακμές του πλέγματος, οδηγώντας σε ένα σχήμα με καλό συνδυασμό οικονομίας μνήμης και αποδοτικότητας.

Ο όρος 'C' γράφεται

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial \mu_{eff}^G}{\partial U_k^K} (D_r)_{nj}^G \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G = \frac{1}{Re} \frac{1}{2} \left(\delta_{PK} \frac{\partial \mu_t^P}{\partial U_k^K} + \delta_{QK} \frac{\partial \mu_t^Q}{\partial U_k^K} \right) (D_r)_{nj}^G \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_r} \right)^G \quad (5.15)$$

Επίσης, από τις εξ. 2.7, ισχύει (παραλείποντας τους δείκτες P και Q χάριν απλότητας)

$$\frac{\partial f_{v1}}{\partial U_k^K} = \frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(\frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \right) = \frac{3}{\chi} f_{v1} [1 - f_{v1}] \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K}$$

οπότε

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial U_k^K} = \frac{\partial (\chi f_{v1})}{\partial U_k^K} = \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} f_{v1} + \chi \frac{\partial f_{v1}}{\partial U_k^K} = f_{v1} (4 - 3f_{v1}) \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K}$$

Δεδομένου ότι $\chi = \frac{\tilde{\mu}}{\mu}$, λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial U_k^K} = \frac{f_{v1}}{\mu} (4 - 3f_{v1}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial U_k^K}$$

Η διατύπωση της παραπάνω σχέσης για τους κόμβους P και Q και η αντικατάσταση αυτών στην εξ. 5.15 δίνει τις συνεισφορές του όρου 'C'.

5.2.4 Διαχείριση των όρων του μοντέλου τύρβης

Παρακάτω αναλύονται οι όροι που υπολείπονται για τη διαφόριση του μοντέλου τύρβης.

Όρος μεταφοράς: Η ευθεία διαφόριση του όρου μεταφοράς του μοντέλου τύρβης, εξ. 2.34, ως προς τις μεταβλητές μέσης ροής δίνει τους υπολειπόμενους όρους.

Όρος διάχυσης, σχήμα σάρωσης στοιχείων: Ξεκινώντας από την εξ. 2.35, γράφουμε τη συνεισφορά ενός τριγώνου $T \in \mathcal{T}_P$ που περιβάλλει τον κόμβο P ως εξής

$$\begin{aligned} D^{P,T} &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^G) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G \right] n_r^G = \\ &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^G) - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \right] \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G n_r^G \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G = \frac{\partial N^J}{\partial x_r} \tilde{\mu}^J$ και $\tilde{\mu}^G = \frac{\sum_J \tilde{\mu}^J}{3}$, όπου J οι τρεις κόμβοι του στοιχείου T , η διαφόριση της παραπάνω συνεισφοράς δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{P,T}}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^G) - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \right] \frac{\partial N^J}{\partial x_r} \delta_{JK} \frac{\partial \tilde{\mu}^K}{\partial U_k^K} n_r^G + \\ &+ \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} \frac{1}{3} \delta_{JK} \frac{\partial \tilde{\mu}^J}{\partial U_k^K} - \frac{c_{b2}}{\sigma} \delta_{PK} \frac{\partial \tilde{\mu}^K}{\partial U_k^K} \right] \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^G n_r^G \end{aligned} \quad (5.16)$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των συνεισφορών που προκύπτουν από τη διαφόριση του όρου διάχυσης ως προς τις μεταβλητές της μέσης ροής.

Όρος διάχυσης, σχήμα σάρωσης ακμών: Η συνεισφορά μίας ακμής PQ στον κόμβο P , εξ. 2.36, γράφεται

$$\begin{aligned} D^{P,PQ} &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^M) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^M - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^M \right] n_r^{PQ} = \\ &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^M) - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \right] \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r} \right)^M n_r^{PQ} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Συνδυασμός των εξ. 2.32 και 2.33, εκπεφρασμένων για το συντελεστή τυρβώδους

συνεκτικότητας, δίνουν

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^M &= \overline{\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^M} - \left[\overline{\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_b}\right)^M} \hat{x}_b^{PQ} - \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial n}\right)^M \right] \hat{x}_r^{PQ} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^P + \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^Q \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_b}\right)^P + \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_b}\right)^Q \right] \hat{x}_b^{PQ} \hat{x}_r^{PQ} + \\ &+ \frac{\tilde{\mu}^Q - \tilde{\mu}^P}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \hat{x}_r^{PQ} \end{aligned}$$

Επίσης, $\tilde{\mu}^M = \frac{1}{2} (\tilde{\mu}^P + \tilde{\mu}^Q)$. Συνεπώς, διαφορίση της εξ. 5.17 δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{P,PQ}}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} \left(\mu + \frac{1}{2} \delta_{JK} \frac{\partial \tilde{\mu}^J}{\partial U_k^K} \right) - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\mu + \delta_{PK} \frac{\partial \tilde{\mu}^K}{\partial U_k^K} \right) \right] \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^M n_r^{PQ} + \\ &+ \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^M) - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \right] \frac{\hat{x}_i^{PQ}}{|\vec{x}^Q - \vec{x}^P|} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}^Q}{\partial U_k^K} - \frac{\partial \tilde{\mu}^P}{\partial U_k^K} \right) n_r^{PQ} + \\ &+ \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1+c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^M) - \frac{c_{b2}}{\sigma} (\mu + \tilde{\mu}^P) \right] \frac{1}{2} \left(n_r^{PQ} - \hat{x}_r^{PQ} \hat{x}_b^{PQ} n_b^{PQ} \right) \\ &\left[\frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^P + \frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_r}\right)^Q \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

όπου $J \in \{P, Q\}$. Η παραπάνω σχέση αντιμετωπίζεται όπως ο όρος διάχυσης των εξισώσεων μέσης ροής, δίνοντας συνεισφορές από διαφορίση ως προς τις μεταβλητές μέσης ροής και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης.

Όροι πηγής: Οι όροι πηγής της εξ. 2.6, ολοκληρωμένοι στον πεπερασμένο όγκο ενός κόμβου P (ο άνω δείκτης P εννοείται και παραλείπεται παρακάτω), ομαδοποιούνται ως εξής

$$S = V \left(\underbrace{c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S}(\rho \tilde{\mu})}_{\mathcal{P}(\rho \tilde{\mu})} - \underbrace{\frac{1}{Re_0} \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\mu}}{d} \right)^2}_{\mathcal{D}(\rho \tilde{\mu})} + \underbrace{Re \rho^2 f_{t1} \Delta U^2}_T \right) \quad (5.19)$$

όπου δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{Re_0} \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \frac{\tilde{\mu}}{\rho d^2} \end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο όρος \mathcal{P} ποσοτικοποιεί την παραγωγή της ποσότητας $\rho \tilde{\mu}$, ο όρος \mathcal{D} την καταστροφή αυτής και ο όρος T μοντελοποιεί τη μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

Διαφορίζοντας τον όρο \mathcal{P} προκύπτει

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial U_k^K} = -c_{b1} \frac{\partial f_{t2}}{\partial U_k^K} \tilde{S} + c_{b1} (1 - f_{t2}) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial U_k^K}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξ. 2.7 προκύπτουν τα εξής για τα διαφορικά που εμπλέκονται στην παραπάνω σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t2}}{\partial U_k^K} &= -2\chi c_{t4} f_{t2} \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial U_k^K} &= S \frac{\partial \tilde{f}_{v3}}{\partial U_k^K} + \tilde{f}_{v3} \frac{\partial S}{\partial U_k^K} + \frac{1}{Re_0} \frac{1}{\kappa^2 d^2} \left(\tilde{f}_{v1} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial U_k^K} + \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{f}_{v2}}{\partial U_k^K} \right) \\ \frac{\partial \tilde{f}_{v3}}{\partial U_k^K} &= -\frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} \frac{1}{\chi} \tilde{f}_{v3} - \frac{(1 + \chi f_{v1})}{\chi} \frac{\partial \tilde{f}_{v2}}{\partial U_k^K} + \frac{1}{\chi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} f_{v1} + \chi \frac{\partial f_{v1}}{\partial U_k^K} \right) (1 - \tilde{f}_{v2}) \\ \frac{\partial \tilde{f}_{v2}}{\partial U_k^K} &= -3 \frac{f_{v2}}{c_{v2} + \chi} \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial f_{v1}}{\partial U_k^K} &= \frac{3}{\chi} f_{v1} (1 - f_{v1}) \frac{\partial \chi}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial U_k^K} - \frac{\tilde{\mu}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

Όλοι οι παραπάνω όροι δίνουν διαγώνιες συνεισφορές εκτός του όρου $\frac{\partial S}{\partial U_k^K}$, ο οποίος εμπλέκει παραγώγους των ταχυτήτων και ως εκ τούτου δίνει και μη-διαγώνιες συνεισφορές.

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται για τον όρο \mathcal{D} , ο οποίος διαφοριζόμενος δίνει

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial U_k^K} = \frac{1}{Re_0} \left(c_{w1} \frac{\partial f_w}{\partial U_k^K} - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} \frac{\partial f_{t2}}{\partial U_k^K} \right) \frac{\tilde{\mu}}{\rho d^2} + \frac{1}{Re_0} \frac{1}{\kappa^2 d^2} \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(\frac{\tilde{\mu}}{\rho d^2} \right)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_w}{\partial U_k^K} &= \frac{\partial g}{\partial U_k^K} f_w \left(\frac{1}{g} - \frac{g^5}{g^6 + c_{w3}^6} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial U_k^K} &= \frac{\partial r}{\partial U_k^K} [1 + c_{w2} (6r^5 - 1)] \\ \frac{\partial r}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{Re_0} \frac{1}{\kappa^2 d^2} \left(\frac{1}{\tilde{S}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial U_k^K} - \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial U_k^K} \right) \\ \frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(\frac{\tilde{\mu}}{\rho d^2} \right) &= \frac{1}{\rho d^2} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial U_k^K} - \frac{\tilde{\mu}}{\rho^2 d^2} \frac{\partial \rho}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

Και εδώ, όλοι οι όροι δίνουν διαγώνιες συνεισφορές, εκτός του όρου $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial U_k^K}$, ο οποίος δίνει και μη-διαγώνιες συνεισφορές.

Ομοίως, διαφόριση του όρου T δίνει

$$\frac{\partial T}{\partial U_k^K} = 2Re\rho \frac{\partial \rho}{\partial U_k^K} f_{t_1} \Delta U^2 + Re\rho^2 \frac{\partial f_{t_1}}{\partial U_k^K} \Delta U^2 + Re\rho^2 f_{t_1} \frac{\partial(\Delta U^2)}{\partial U_k^K}$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t_1}}{\partial U_k^K} &= \frac{\partial g_t}{\partial U_k^K} \frac{1}{g_t} f_{t_1} - f_{t_1} c_{t_2} \omega_t \left[-\frac{1}{\Delta U^4} \frac{\partial(\Delta U^2)}{\partial U_k^K} (d^2 + g_t^2 d_t^2) + \frac{1}{\Delta U^2} 2g_t \frac{\partial g_t}{\partial U_k^K} d_t^2 \right] \\ \frac{\partial g_t}{\partial U_k^K} &= \begin{cases} 0, 0.1 < \frac{\Delta U}{\omega_t \Delta \chi} \\ \frac{1}{\omega_t \Delta \chi} \frac{\partial(\Delta U)}{\partial U_k^K}, 0.1 \geq \frac{\Delta U}{\omega_t \Delta \chi} \end{cases} \\ \frac{\partial(\Delta U)}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{2\Delta U} \frac{\partial(\Delta U^2)}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial(\Delta U^2)}{\partial U_k^K} &= 2(u_i - u_t) \frac{\partial u_i}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

5.2.5 Όροι που προκύπτουν από διαφόριση του συναρτησιακού

Συναρτησιακό αντίστροφου σχεδιασμού: Για τη συνεισφορά μίας ακμής S του στερεού ορίου, $F^S = \frac{1}{2} [(p - p_{tar})^2]^J \Delta s^J$, όπου όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.1 ο δείκτης J αντιστοιχεί στους δύο κόμβους της ακμής, γράφουμε

$$\frac{\partial F^S}{\partial b_i} = \frac{1}{2} [(p - p_{tar})^2]^J \frac{\partial(\Delta s^J)}{\partial b_i} \quad (5.20a')$$

$$\frac{\partial F^S}{\partial U_k^K} = (p - p_{tar})^J \frac{\partial p^J}{\partial U_k^K} \Delta s^J \quad (5.20b')$$

Συναρτησιακό απωλειών ολικής πίεσης: Το συναρτησιακό των απωλειών ολικής πίεσης εκφράζεται ως ολοκλήρωμα στο όριο εξόδου, του οποίου η μορφή είναι ανεξάρτητη από την παραμετρικοποίηση της σχεδιαζόμενης γεωμετρίας, οπότε ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = 0$$

Έστω η συνεισφορά μίας ακμής S του ορίου εξόδου, $F^S = -p_t^J \Delta s^J$. Διαφόριση ως προς τις ροϊκές μεταβλητές δίνει

$$\frac{\partial F^S}{\partial U_k^K} = -\frac{\partial p_t^J}{\partial U_k^K} \Delta s^J$$

Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία για τον υπολογισμό αυτών των συνεισφορών (ο δείκτης J παραλείπονται χάριν απλότητας γραφής). Δεδομένου ότι ισχύουν τα εξής

$$\begin{aligned} p_t &= p \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ T_t &= T + \frac{u_i u_i}{2c_p} \\ T &= \frac{p}{\rho R} \end{aligned}$$

προκύπτει, κατόπιν πράξεων, ότι

$$\frac{\partial p_t}{\partial U_k^K} = \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\partial p}{\partial U_k^K} + p \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{V} \quad (5.21)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k^K &= \frac{\partial \left(\frac{T_t}{T} \right)}{\partial U_k^K} = \frac{u_i}{c_p T} \frac{\partial u_i}{\partial U_k^K} - \frac{u_i u_i}{2c_p T^2} \frac{\partial T}{\partial U_k^K} \\ \frac{\partial T}{\partial U_k^K} &= \frac{1}{R\rho} \frac{\partial p}{\partial U_k^K} - \frac{p}{R\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

Περιορισμός της γωνίας στροφής της ροής: Η συνάρτηση περιορισμού c^a εξαρτάται, όπως και στην περίπτωση των απωλειών ολικής πίεσης, από τη σχεδιαζόμενη γεωμετρία μόνο μέσω των ροϊκών μεταβλητών, οπότε

$$\frac{\partial c^a}{\partial b_i} = 0$$

Δεδομένου ότι η συνεισφορά μίας ακμής S του ορίου εξόδου γράφεται ως $(c^a)^S = \frac{1}{2} \left[(a^J - a_{tar})^2 \right] \Delta s^J$, όπου πάλι ο δείκτης J αντιστοιχεί στους δύο κόμβους της ακμής, διαφόριση ως προς τις μεταβλητές ροής δίνει

$$\frac{\partial (c^a)^S}{\partial U_k^K} = (a^J - a_{tar}) \frac{\partial a^J}{\partial U_k^K} \Delta s^J \quad (5.22)$$

Για τη γωνία εξόδου, όπου, για τις περιπτώσεις που μελετώνται, ισχύει $u \neq 0$

$$a = atan \frac{v}{u}$$

οπότε, παραλείποντας πάλι το δείκτη J

$$\frac{\partial a}{\partial U_k^K} = \frac{\partial}{\partial U_k^K} \left(atan \frac{v}{u} \right) = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial U_k^K} u - v \frac{\partial u}{\partial U_k^K} \right)$$

5.2.6 Πιστοποίηση των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης

Προκειμένου να πιστοποιηθεί η υλοποίηση της διακριτής συζυγούς μεθόδου, υπολογίζονται στη συνέχεια με χρήση της μεθόδου αυτής οι παράγωγοι ευαισθησίας πρώτης τάξης για τα τρία συναρτησιακά που ενδιαφέρουν την παρούσα διατριβή (συνάρτηση κόστους αντίστροφου σχεδιασμού, απώλειες ολικής πίεσης, περιορισμός στροφής της ροής) και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίζονται με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές⁷ (FD),

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{F(b_i + \epsilon) - F(b_i - \epsilon)}{2\epsilon} \quad (5.23)$$

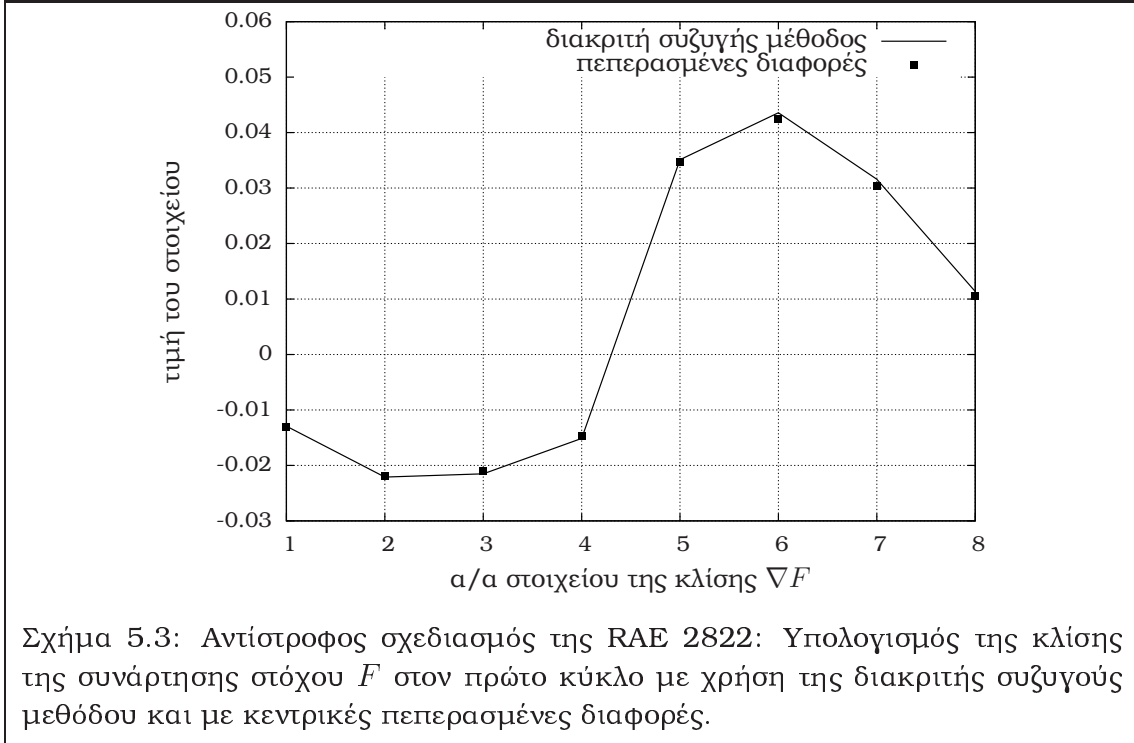
Στην παραπάνω σχέση εξυπακούεται ότι σε κάθε υπολογισμό της παραγώγου $\frac{dF}{db_i}$ ως προς την i -ιοστή μεταβλητή σχεδιασμού οι υπόλοιπες μεταβλητές σχεδιασμού παραμένουν σταθερές. Προσοχή πρέπει να δοθεί στην παράμετρο ϵ , η οποία πρέπει να έχει μία αρκούντως μικρή τιμή. Αρκετά μεγάλη τιμή κινδυνεύει να εισάγει σφάλμα δεδομένου ότι το συναρτησιακό $F(b_i)$ δεν είναι εν γένει γραμμική συνάρτηση, ενώ πολύ μικρή τιμή ενδέχεται να προκαλέσει αριθμητικά σφάλματα λόγω ακρίβειας υπολογιστή⁸. Η βέλτιστη τιμή για την παράμετρο αυτή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή και καθορίζεται δοκιμάζοντας διάφορες τιμές και παρατηρώντας σε ποιο εύρος τιμών οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας παραμένουν σχετικά αμετάβλητες. Στις περιπτώσεις της παρούσας διατριβής, το εύρος τιμών $\epsilon = 10^{-8} - 10^{-6}$ έδινε, ανάλογα με την εφαρμογή, σχετικά αξιόπιστες παραγώγους ευαισθησίας.

Στο σχ. 5.3 παρουσιάζονται συγκρίσεις των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας για το πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού της αεροτομής RAE 2822, η ροή γύρω από την οποία αναλύθηκε στην ενότητα 3.1. Ομοίως, στο σχ. 5.4 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες συγκρίσεις για τη συνάρτηση στόχου και τον περιορισμό στροφής της ροής στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμμετρικής αεροτομής του [254].

Αντίστοιχα πιστοποιείται και η ορθότητα των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης που δίνει η μέθοδος ευθείας διαφόρισης. Η πιστοποίηση και αυτής της μεθόδου χρειάζεται, αφού η μέθοδος θα συνεισφέρει στη συνέχεια κατά τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου, που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα. Ενδεικτικά, στο σχ. 5.5 παρουσιάζονται συγκρίσεις των παραγώγων ευαισθησίας για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

⁷Central Finite Differences

⁸truncation errors



5.3 Υπολογισμός του εσσιανού μητρώου

5.3.1 Μέθοδοι υπολογισμού του εσσιανού μητρώου

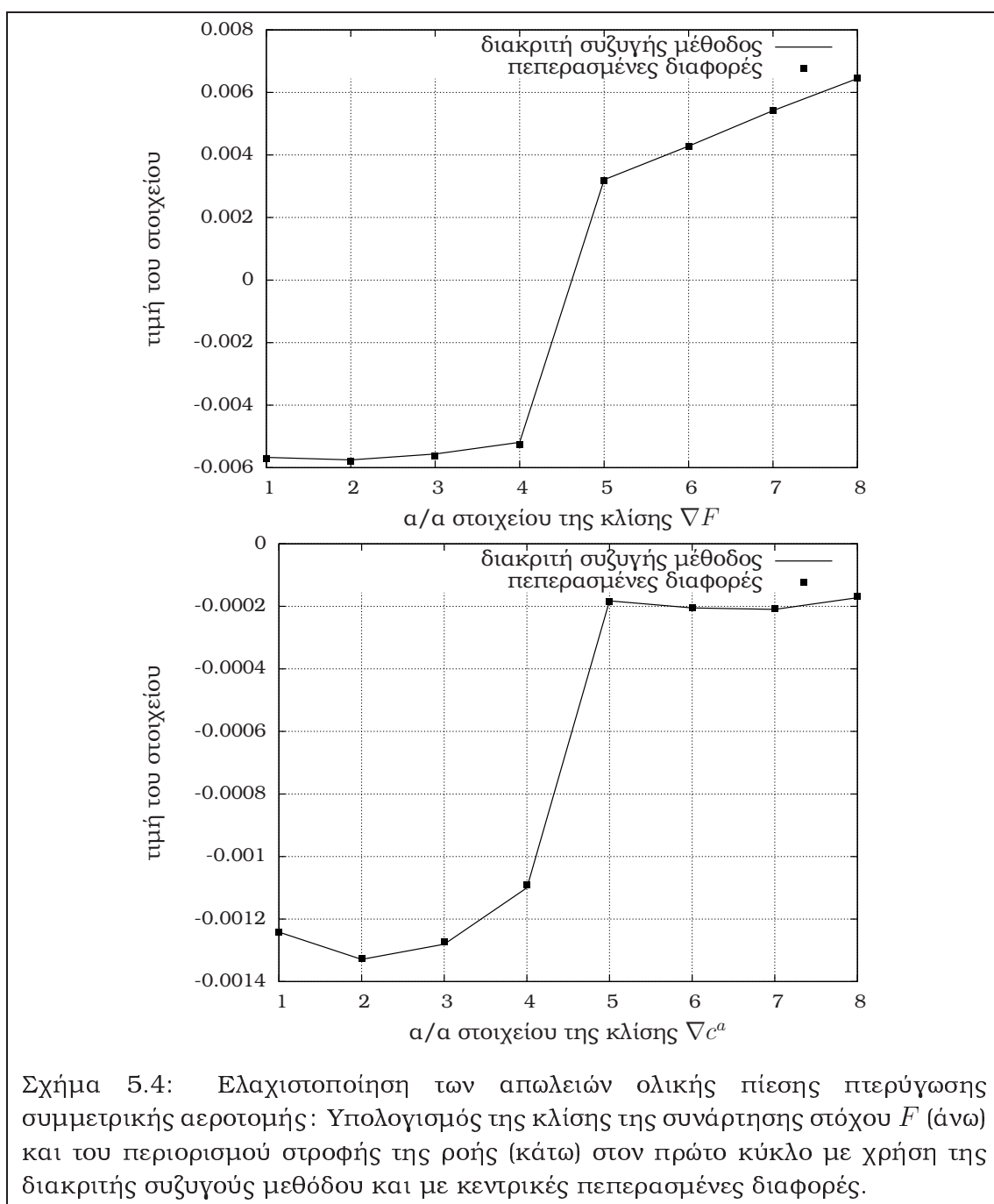
Το εσσιανό μητρώο της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει με διαφορίση είτε της εξ. 5.1 είτε της εξ. 5.4 και χρήση του κανόνα της αλυσίδας, [141], [46], [48], [47]. Στην πρώτη περίπτωση προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{db_i db_j} = & \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} + \\ & + \frac{\partial F}{\partial U_k^K} \frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j} \end{aligned} \quad (5.24)$$

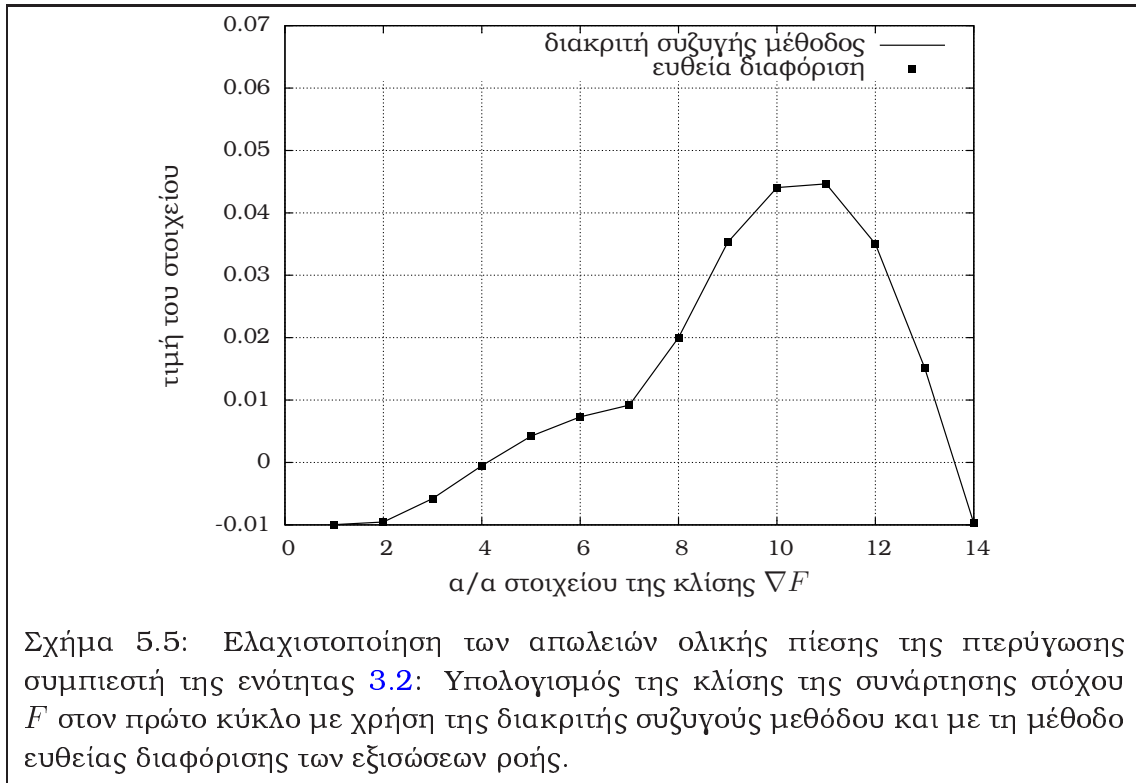
Αντίστοιχη έκφραση λαμβάνεται με μία επιπλέον διαφορίση των παραγώγων του τελεστή υπολοίπου των εξισώσεων ροής, εξ. 5.2

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_n^P}{db_i db_j} = & \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} + \\ & + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

η οποία δίνει τις απαιτούμενες παραγώγους δεύτερης τάξης των μεταβλητών ροής, $\frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$, με κόστος την επίλυση $\frac{N(N+1)}{2}$ ΣΜΔΕ, δεδομένης της συμμετρίας μεταξύ



Σχήμα 5.4: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης περύγωσης συμμετρικής αεροτομής: Υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης στόχου F (άνω) και του περιορισμού στροφής της ροής (κάτω) στον πρώτο κύκλο με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου και με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές.



των δεικτών i και j . Η ποσότητα $\frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$ τελικώς χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του εσσανού μητρώου μέσω της εξ. 5.24. Συνυπολογίζοντας ότι οι εξ. 5.24 και 5.25 προϋποθέτουν τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\frac{dU_k^K}{db_i}$ μέσω των εξ. 5.2 με κόστος N ΣΜΔΕ, καθώς και την επίλυση του ευθέως προβλήματος, το συνολικό κόστος για τον υπολογισμό του εσσανού μητρώου με αυτήν τη μέθοδο ανέρχεται σε $N + 1 + \frac{N(N+1)}{2}$ ΣΜΔΕ, είναι δηλαδή ανάλογο του τετραγώνου του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Θα αναφερόμαστε στη μέθοδο αυτή ως DD-DD, λόγω της ‘διπλής’ ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής.

Αν η εξ. 5.25 πολλαπλασιαστεί με τις συζυγείς μεταβλητές Ψ_n^P και προστεθεί στην

εξ. 5.24 λαμβάνεται μετά από αναδιάταξη των όρων

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} &= \frac{d^2 F}{db_i db_j} + \Psi_n^P \frac{d^2 R_n^P}{db_i db_j} = \\
&= \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j}}_{h1} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j}}_{h2} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i}}_{h3} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h3} + \\
&+ \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j}}_{h4} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j}}_{h5} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i}}_{h5} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h6} + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial U_k^K} + \Psi_n^P \frac{\partial F}{\partial U_k^K} \right) \frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}}_{h7}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Ο όρος ‘h7’ μπορεί να απαλειφθεί, αν ικανοποιούνται οι ίδιες συζυγείς εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της κλίσης, 5.3, παρακάμπτοντας έτσι την ανάγκη υπολογισμού των ποσοτήτων $\frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$, οι οποίες συνδέονται με μεγάλο υπολογιστικό κόστος, οπότε η εξ. 5.26 γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} &= \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j}}_{h1} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j}}_{h2} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i}}_{h3} + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h3} + \\
&+ \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j}}_{h4} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j}}_{h5} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i}}_{h5} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h6}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Η παραπάνω σχέση απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων $\frac{dU_k^K}{db_i}$, οπότε η μέθοδος αυτή, στην οποία θα αναφερόμαστε ως μέθοδο DD-AV, έχει ως κόστος την επίλυση $N + 2$ ΣΜΔΕ (ευθύ πρόβλημα, συζυγές πρόβλημα και υπολογισμός των παραγώγων $\frac{dU_k^K}{db_i}$). Συνεπώς, είναι κατά πολύ πλεονεκτικότερη της μεθόδου DD-DD, λόγω

ακριβώς της απαλοιφής του όρου $\frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$ μέσω της συζυγούς μεθόδου.

Αν αντί της εξ. 5.1 παραγωγιστεί ως προς b_j η εξ. 5.4, λαμβάνεται η παρακάτω σχέση

$$\frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} + \frac{d\Psi_n^P}{db_j} \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + \Psi_n^P \left(\frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} \right) \tag{5.28}$$

η οποία εμπλέκει τις παραγώγους των μεταβλητών ροής και των συζυγών μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, $\frac{dU_k^K}{db_j}$ και $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$. Οι πρώτες υπολογίζονται κατά τα γνωστά με την επίλυση των N ΣΜΔΕ της εξ. 5.2 ενώ για τις παραγώγους $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$ παραγωγίζονται αρχικά οι συζυγείς εξισώσεις, εξ. 5.3, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού

$$\begin{aligned} \frac{d(R_\Psi)_k^K}{db_j} &= \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_m^M}{db_j} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_m^M}{db_j} + \\ &+ \frac{d\Psi_n^P}{db_j} \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

και επιλύονται τα N ΣΜΔΕ που προκύπτουν ως προς τις ζητούμενες ποσότητες $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$. Η μέθοδος αυτή συμβολίζεται ως AV-DD, δεδομένου ότι οι ποσότητες $\frac{dU_k^K}{db_j}$ και $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$ λαμβάνονται με ευθεία διαφόριση (DD) του υπολοίπου των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων αντίστοιχα, το κόστος δε της μεθόδου ανέρχεται στην επίλυση $2N + 2$ ΣΜΔΕ.

Αν αντί της ευθείας διαφόρισης οριστούν νέες συζυγείς μεταβλητές $(Y_i)_n^P$ και $(\Upsilon_i)_n^P$, οι οποίες θα πολλαπλασιαστούν με τις εξ. 5.2 και 5.29 αντίστοιχα, και οι όροι που προκύπτουν προστεθούν στην εξ. 5.28, η τελευταία γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} &= \frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} + (Y_i)_n^P \frac{dR_n^P}{db_j} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{d(R_\Psi)_k^K}{db_j} = \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} + \frac{d\Psi_n^P}{db_j} \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + \Psi_n^P \left(\frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} \right) + \\ &+ (Y_i)_n^P \left(\frac{\partial R_n^P}{\partial b_j} + \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} \right) + \\ &+ (\Upsilon_i)_n^P \left(\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_m^M}{db_j} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} + \right. \\ &\left. + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_m^M}{db_j} + \frac{d\Psi_n^P}{db_j} \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right) \end{aligned}$$

ή μετά από ομαδοποίηση των όρων που περιλαμβάνουν τις ποσότητες $\frac{dU_k^K}{db_j}$ και $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} &= \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + (Y_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_j} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} + (\Upsilon_i)_n^P \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \\ &+ \frac{dU_k^K}{db_j} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} + \right. \\ &+ (Y_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} + (\Upsilon_i)_n^P \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \left. \right) + \\ &+ \frac{d\Psi_n^P}{db_j} \left(\frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Συνεπώς, οι όροι $\frac{dU_k^K}{db_j}$ και $\frac{d\Psi_n^P}{db_j}$ απαλείφονται αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συζυγείς εξισώσεις

$$\frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} = 0 \quad (5.31a')$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} + (Y_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} + (\Upsilon_i)_n^P \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} = 0 \quad (5.31b')$$

οπότε η εξ. 5.30 γράφεται

$$\frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j} + \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + (Y_i)_n^P \frac{\partial R_n^P}{\partial b_j} + (\Upsilon_i)_n^P \frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial b_j} + (\Upsilon_i)_n^P \Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \quad (5.32)$$

Η παραπάνω έκφραση του εσσιανού μητρώου περιγράφει τη μέθοδο AV-AV, δεδομένου ότι ο υπολογισμός παραγώγων των ροϊκών και των συζυγών μεταβλητών αποφεύγεται εξ ολοκλήρου με εισαγωγή των επιπλέον συζυγών μεταβλητών $(Y_i)_n^P$ και $(\Upsilon_i)_n^P$. Το κόστος συνολικά για τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου με τη μέθοδο αυτή είναι $2N + 2$ ΣΜΔΕ (επίλυση ευθέως προβλήματος και υπολογισμός όλων των συζυγών μεταβλητών που υπεισέρχονται στην εξ. 5.32). Η μέθοδος αυτή αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο AV-DD, αν παρατηρηθεί ότι οι εξ.

5.31a' είναι ισοδύναμες με τις εξ. 5.2 (άρα ισχύει $(\Upsilon_i)_n^P = \frac{dU_k^K}{db_i}$) και οι εξ. 5.31b'

είναι ισοδύναμες με τις εξ. 5.29 (άρα ισχύει $(Y_i)_n^P = \frac{d\Psi_n^P}{db_j}$). Συγκεντρωτικά, από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές ότι η μέθοδος DD-AV είναι η πλέον οικονομική.

Ειδικά για την εφαρμογή της μεθόδου Newton στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης, ενότητα 4.2, το συναρτησιακό εκφράζεται μακριά από τη σχεδιαζόμενη μορφή, οπότε η τιμή του επηρεάζεται εμμέσως από το πεδίο ροής.

Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια οι όροι που περιλαμβάνουν τις ποσότητες $\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial b_j}$ και $\frac{\partial^2 F}{\partial b_i \partial U_k^K}$ (λ.χ. 'h1' και 'h2' της εξ. 5.27) να απαλείφονται. Έτσι, η εξ. 5.27 γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{F}}{db_i db_j} = & \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h3} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j}}_{h4} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j}}_{h5} + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i}}_{h5} + \\ & + \underbrace{\Psi_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}}_{h6} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Τα παραπάνω ισχύουν και για τον περιορισμό της γωνίας στροφής της ροής, του οποίου ο υπολογισμός του εσοιανού μητρώου μπορεί να πραγματοποιηθεί με μαθηματική ανάλυση αντίστοιχη αυτής των απωλειών ολικής πίεσης. Αναλυτικότερα :

- Το εσοιανό μητρώο της συνάρτησης περιορισμού c^a μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της μεθόδου DD-DD, με την παρακάτω σχέση, η οποία είναι αντίστοιχη της εξ. 5.24, εκφρασμένη για τη συνάρτηση c^a και αφού απαλειφθούν οι μηδενικοί όροι

$$\frac{d^2 c^a}{db_i db_j} = \frac{\partial^2 c^a}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} + \frac{\partial c^a}{\partial U_k^K} \frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$$

Δεδομένου ότι οι ποσότητες $\frac{dU_k^K}{db_i}$ και $\frac{d^2 U_k^K}{db_i db_j}$ είναι ήδη γνωστές από τον υπολογισμό του εσοιανού μητρώου της συνάρτησης στόχου, η παραπάνω σχέση δεν επιβαρύνει πρόσθετα τη βελτιστοποίηση. Συνεπώς, ως κόστος της μεθόδου παραμένει η επίλυση $N + 1 + \frac{N(N+1)}{2}$ ΣΜΔΕ.

- Αν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος DD-AV, η αντίστοιχη έκφραση της εξ. 5.33 για την συνάρτηση περιορισμού γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{c}^a}{db_i db_j} = & \frac{\partial^2 c^a}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} + (\Psi^a)_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + (\Psi^a)_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} + \\ & + (\Psi^a)_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial b_j} \frac{dU_k^K}{db_i} + (\Psi^a)_n^P \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Η παραπάνω έκφραση απαιτεί, επιπλέον των ποσοτήτων που είναι γνωστές από τον υπολογισμό του εσοιανού μητρώου της συνάρτησης στόχου, τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών $(\Psi^a)_n^P$, οι οποίες προκύπτουν από την

εξ. 5.6. Άρα, ο υπολογισμός του μητρώου $\frac{d^2 \hat{c}^a}{db_i db_j}$ συνεπάγεται την επίλυση ενός επιπλέον ΣΜΔΕ, οπότε το συνολικό κόστος για εφαρμογή της μεθόδου Newton στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $N + 3$ ΣΜΔΕ ανά κύκλο βελτιστοποίησης.

- Χρήση της μεθόδου AV-DD προϋποθέτει πάλι τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών $(\Psi^a)_n^P$, οπότε το εσσιανό μητρώο του περιορισμού υπολογίζεται ξαναγράφοντας την εξ. 5.28 ως εξής

$$\frac{d^2 \hat{c}^a}{db_i db_j} = \frac{d(\Psi^a)_n^P}{db_j} \frac{\partial R_n^P}{\partial b_i} + (\Psi^a)_n^P \left(\frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial b_j} + \frac{\partial^2 R_n^P}{\partial b_i \partial U_k^K} \frac{dU_k^K}{db_j} \right)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι ποσότητες $(\Psi^a)_n^P$ και $\frac{d(\Psi^a)_n^P}{db_j}$ πρέπει να υπολογιστούν, προσθέτοντας στο κόστος της μεθόδου την επίλυση $N + 1$ επιπλέον ΣΜΔΕ, οπότε το συνολικό κόστος της μεθόδου είναι $3N + 3$ ΣΜΔΕ.

Βάσει των παραπάνω, η μέθοδος DD-AV είναι η οικονομικότερη και στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό ροϊκούς περιορισμούς, όπου υπολογίζονται με την εν λόγω μέθοδο τα εσσιανά μητρώα των δύο συναρτησιακών που εμπλέκουν τις μεταβλητές ροής (συνάρτηση στόχου και περιορισμός στροφής της ροής). Συνεπώς, η μέθοδος DD-AV επιλέγεται έναντι των υπολοίπων όποτε χρειάζεται υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου οποιουδήποτε συναρτησιακού εμπλέκει ροϊκές μεταβλητές. Στην παρούσα διατριβή, η μέθοδος DD-AV επιταχύνεται περαιτέρω με χρήση του μοντέλου αδρομερούς παραλληλισμού και της διεπαφής προγραμματισμού εφαρμογών OpenMP για την ταυτόχρονη επίλυση των N συστημάτων των εξ. 5.2 σε N επεξεργαστές.

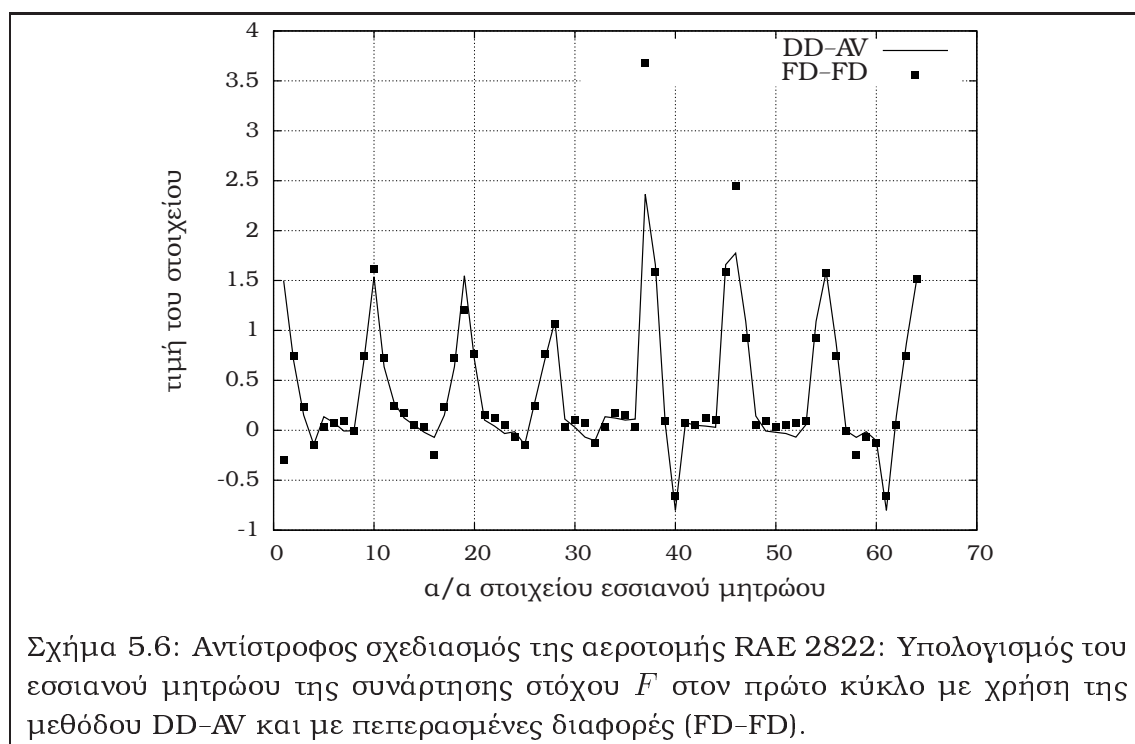
5.3.2 Πιστοποίηση του υπολογιζόμενου εσσιανού μητρώου

Το εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο DD-AV είναι δυνατό να πιστοποιηθεί συγκρίνοντας τις τιμές των στοιχείων του με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίζονται είτε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο DD-DD, είτε με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές (FD-FD). Στην περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών, το εσσιανό μητρώο υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{d^2 F}{db_i db_j} = \begin{cases} \frac{F(b_i + \epsilon) - 2F(b_i) + F(b_i - \epsilon)}{\epsilon^2}, & i = j \\ \frac{F(b_i + \epsilon, b_j + \epsilon) - F(b_i - \epsilon, b_j + \epsilon) - F(b_i + \epsilon, b_j - \epsilon) + F(b_i - \epsilon, b_j - \epsilon)}{4\epsilon^2}, & i \neq j \end{cases} \quad (5.35)$$

Παραδείγματα πιστοποίησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για τη συνάρτηση στόχου αντίστροφου σχεδιασμού και για τον περιορισμό στροφής της ροής δίνονται στα σχ. 5.6 και 5.7. Οι συγκρίσεις αυτές γενικά είναι καλές, ενώ οι οποιεσδήποτε ασυμφωνίες οφείλονται στο ότι η εξ. 5.35 είναι ιδιαίτερα επιρρεπής

σε σφάλματα λόγω ακρίβειας υπολογιστή, [115]. Για το λόγο αυτό ενδείκνυται η πιστοποίηση μέσω της μεθόδου DD-DD. Στο σχ. 5.8 παρουσιάζεται ενδεικτικά η σύγκριση των τιμών που υπολογίζουν οι μέθοδοι DD-AV και DD-DD για το εσσιανό μητρώο των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2. Στο σχήμα αυτό είναι εμφανές ότι η συμφωνία των συγκρινόμενων τιμών των εσσιανών μητρώων είναι άριστη.



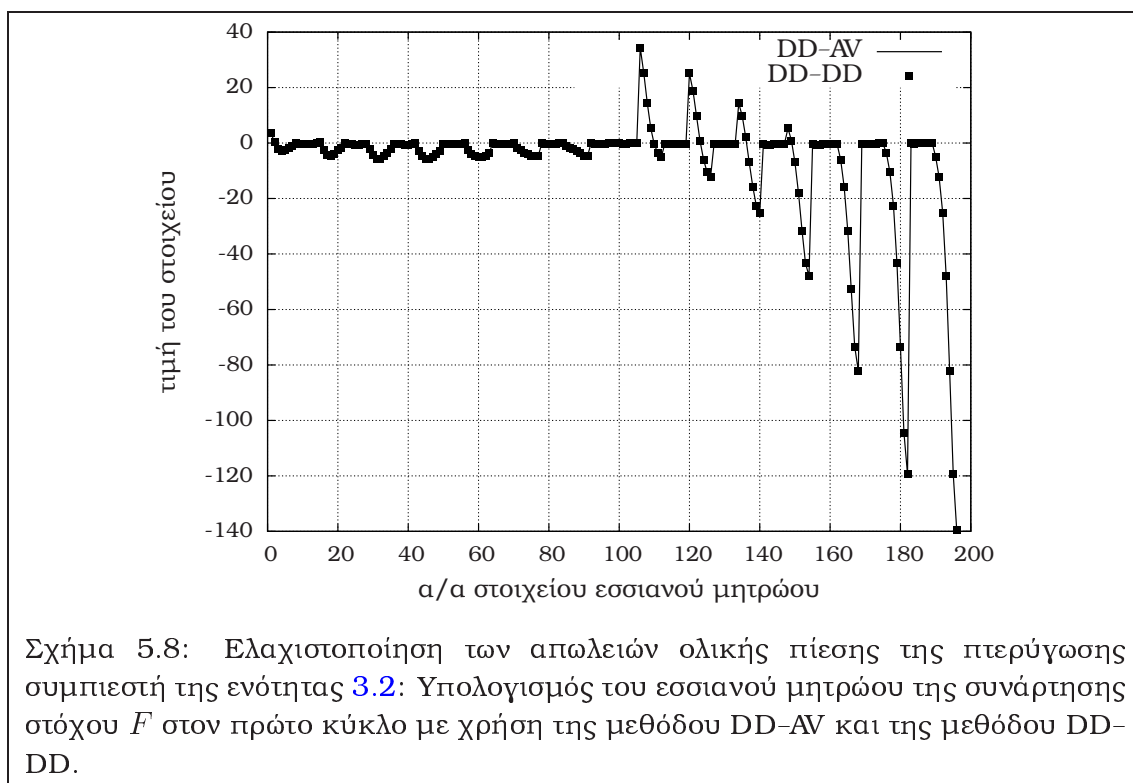
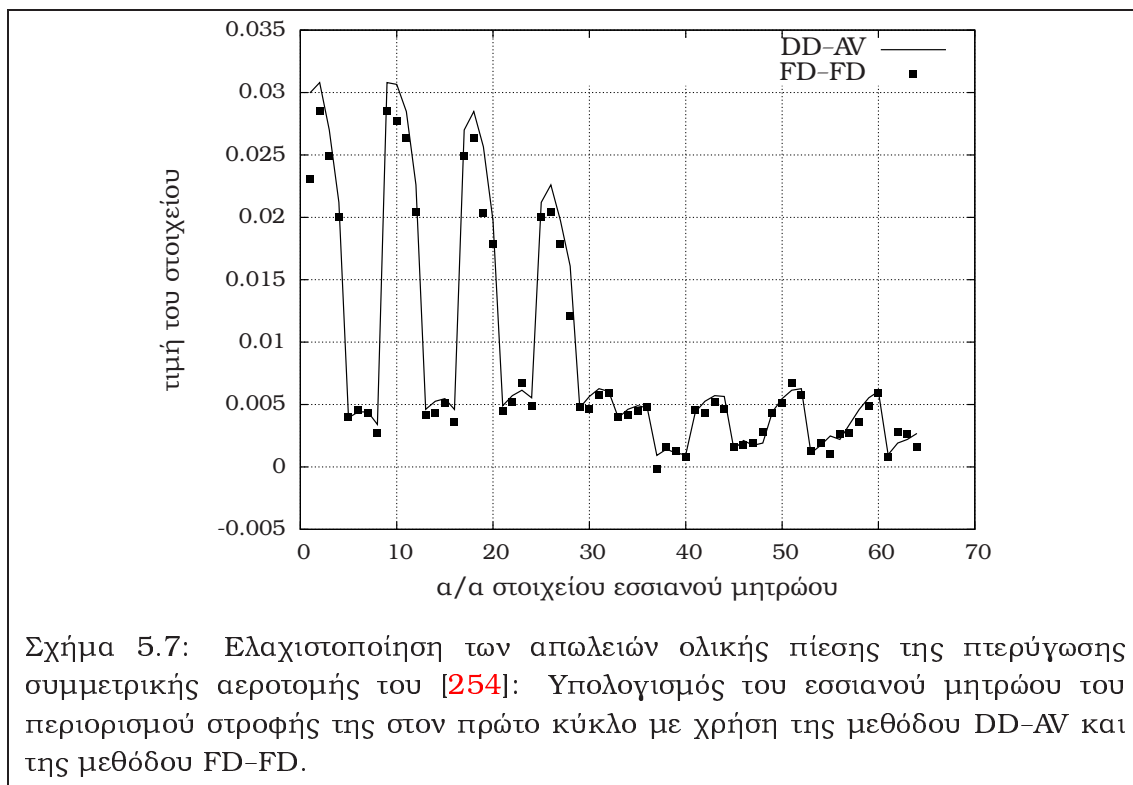
5.4 Αξιολόγηση των όρων που εμφανίζονται στο εσσιανό μητρώο

Παρακάτω περιγράφονται οι όροι που συμμετέχουν στην πλήρη έκφραση του εσσιανού μητρώου, εκτιμάται αν και πόσο συνεισφέρει καθένας στο τελικό αποτέλεσμα και προτείνονται βάσει της μελέτης αυτής απλοποιήσεις προκειμένου να επιταχυνθεί ο υπολογισμός του εσσιανού μητρώου.

5.4.1 Όροι 'h1' και 'h2'

Συνεισφορές από τους όρους 'h1' και 'h2' του εσσιανού μητρώου υπάρχουν μόνο στα προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού. Διαφόριση της εξ. 5.20α' ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού δίνει

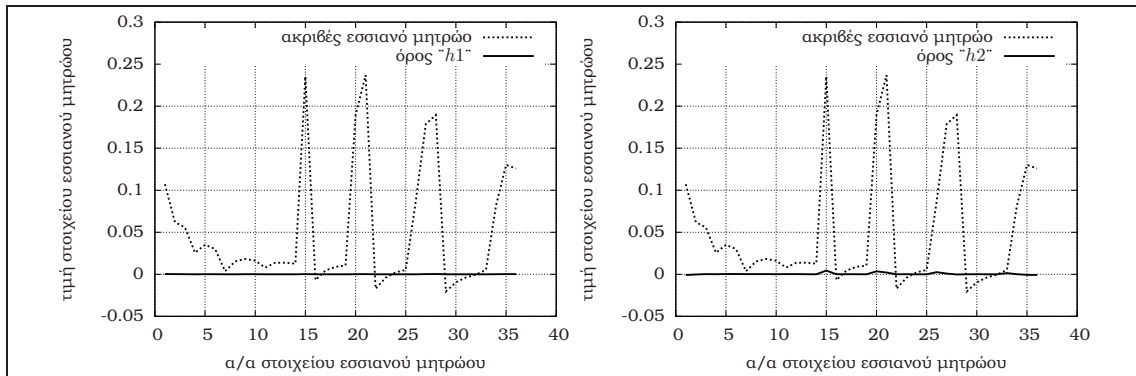
$$\frac{\partial^2 F^S}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{1}{2} (p - p_{tar})^J \frac{\partial^2 (\Delta s^J)}{\partial b_i \partial b_j}$$



ενώ διαφορίση της ίδιας εξίσωσης ως προς τις μεταβλητές ροής δίνει

$$\frac{\partial^2 F^S}{\partial b_i \partial U_k^K} = (p - p_{tar})^J \frac{\partial p^J}{\partial U_k^K} \frac{\partial (\Delta s^J)}{\partial b_i}$$

Η παραπάνω σχέση πολλαπλασιασμένη με $\frac{dU_k^K}{db_j}$ δίνει την πλήρη έκφραση του όρου 'h2'. Σύγκριση της συνεισφοράς των δύο όρων σε σχέση με την τιμή της πλήρους έκφρασης του εσοιανού μητρώου φαίνεται στο σχ. 5.9 για τον αντίστροφο σχεδιασμό της πτερύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2, είναι δε ιδιαίτερα μικρή σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στην παρούσα διατριβή.



Σχήμα 5.9: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h1' (αριστερά) και 'h2' (δεξιά) στο εσοιανό μητρώο για το συναρτησιακό του αντίστροφου σχεδιασμού της πτερύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

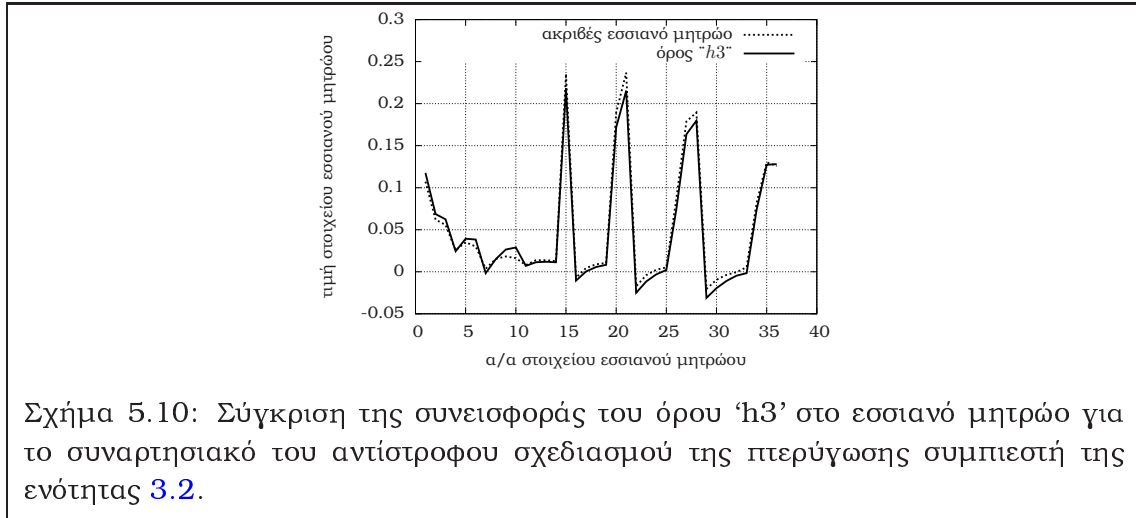
5.4.2 Όρος 'h3'

Συναρτησιακό αντίστροφου σχεδιασμού: Διαφορίση της εξ. 5.206' ως προς τις ροϊκές μεταβλητές δίνει

$$\frac{\partial^2 F^S}{\partial U_k^K \partial U_m^M} = \frac{\partial p^J}{\partial U_k^K} \frac{\partial p^J}{\partial U_m^M} \Delta s^J + (p - p_{tar})^J \frac{\partial^2 p^J}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \Delta s^J$$

Πολλαπλασιασμός του παραπάνω με $\frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}$ δίνει τον όρο 'h3'. Η επίδραση του όρου αυτού στην τελική τιμή του εσοιανού μητρώου για το συγκεκριμένο συναρτησιακό φαίνεται στο σχ. 5.10. Ο όρος αυτός είναι συντριπτικά σημαντικότερος από τους υπόλοιπους σε όλες τις περιπτώσεις αντίστροφου σχεδιασμού που μελετήθηκαν στη διατριβή.

Συναρτησιακό απωλειών ολικής πίεσης: Με διαφορίση της εξ. 5.21 ως προς τις



Σχήμα 5.10: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h3' στο εσσιανό μητρώο για το συναρτησιακό του αντίστροφου σχεδιασμού της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

ροϊκές μεταβλητές προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p_t}{\partial U_k^K \partial U_m^M} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \nu_m^M \frac{\partial p}{\partial U_k^K} + \\
 &+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \nu_k^K \frac{\partial p}{\partial U_m^M} + \\
 &+ \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\partial^2 p}{\partial U_k^K \partial U_m^M} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2 p} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \nu_k^K \nu_m^M + \\
 &+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \nu_{km}^{KM}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

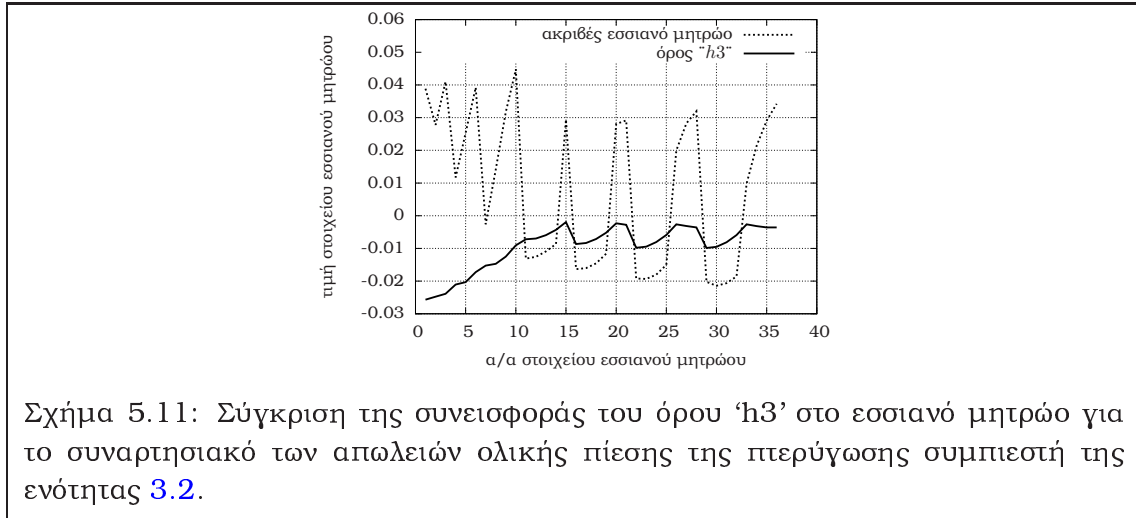
όπου

$$\begin{aligned}
 \nu_{km}^{KM} &= \frac{\partial^2 \left(\frac{T_t}{T} \right)}{\partial U_k^K \partial U_m^M} = \frac{1}{c_p T} \frac{\partial u_i}{\partial U_m^M} \frac{\partial u_i}{\partial U_k^K} + \frac{u_i}{c_p T} \frac{\partial^2 u_i}{\partial U_m^M \partial U_k^K} - \\
 &- \frac{u_i}{c_p T^2} \frac{\partial T}{\partial U_k^K} \frac{\partial u_i}{\partial U_m^M} - \frac{u_i}{c_p T^2} \frac{\partial T}{\partial U_m^M} \frac{\partial u_i}{\partial U_k^K} + \\
 &+ \frac{u_i u_i}{c_p T^3} \frac{\partial T}{\partial U_m^M} \frac{\partial T}{\partial U_k^K} - \frac{u_i u_i}{2 c_p T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial U_m^M \partial U_k^K}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο όρος 'h3' υπολογίζεται με χρήση της εξ. 5.36 ως εξής

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j} = \frac{\partial^2 p_t^J}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \Delta_{S^J} \frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}$$

Στο σχ. 5.11 φαίνεται η σύγκριση της συνεισφοράς του όρου σε σχέση με την τιμή της πλήρους έκφρασης του εσσιανού μητρώου για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.



Σχήμα 5.11: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h3' στο εσσιανό μητρώο για το συναρτησιακό των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

Περιορισμός της γωνίας στροφής της ροής: Διαφόριση της εξ. 5.22 ως προς τις μεταβλητές ροής δίνει

$$\frac{\partial^2 (c^a)^S}{\partial U_k^K \partial U_m^M} = \left[\frac{\partial a^J}{\partial U_k^K} \frac{\partial a^J}{\partial U_m^M} - (a^J - a_{tar}) \frac{\partial^2 a}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \right] \Delta s^J \quad (5.37)$$

όπου, παραλείποντας το δείκτη J

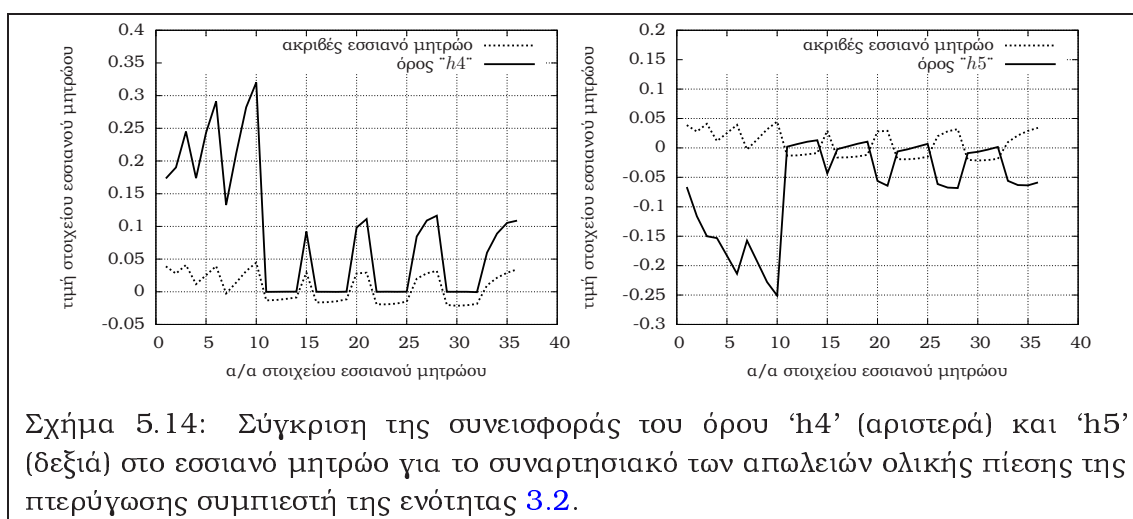
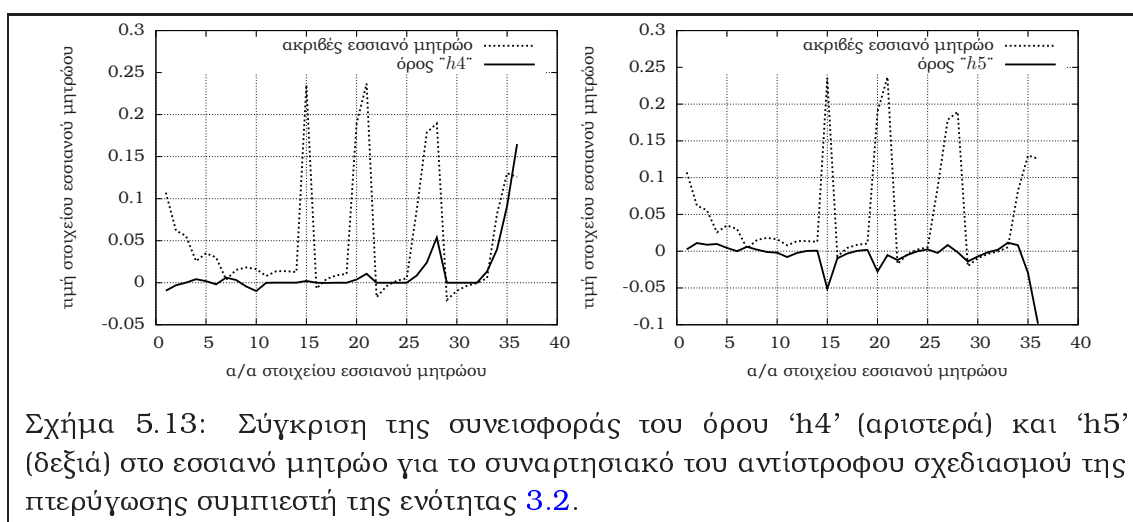
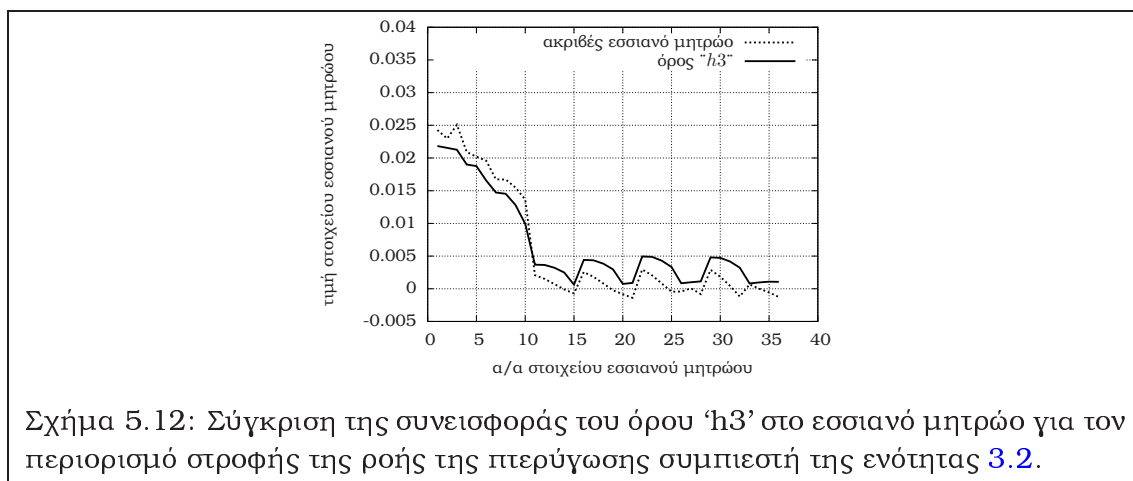
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial U_k^K \partial U_m^M} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} & \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial U_k^K \partial U_m^M} u + \frac{\partial v}{\partial U_k^K} \frac{\partial u}{\partial U_m^M} - (u^2 + v^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial v}{\partial U_m^M} \frac{\partial u}{\partial U_k^K} - v \frac{\partial^2 u}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \right) \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial U_k^K} u - v \frac{\partial u}{\partial U_k^K} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial U_m^M} + v \frac{\partial v}{\partial U_m^M} \right) \right] \end{aligned}$$

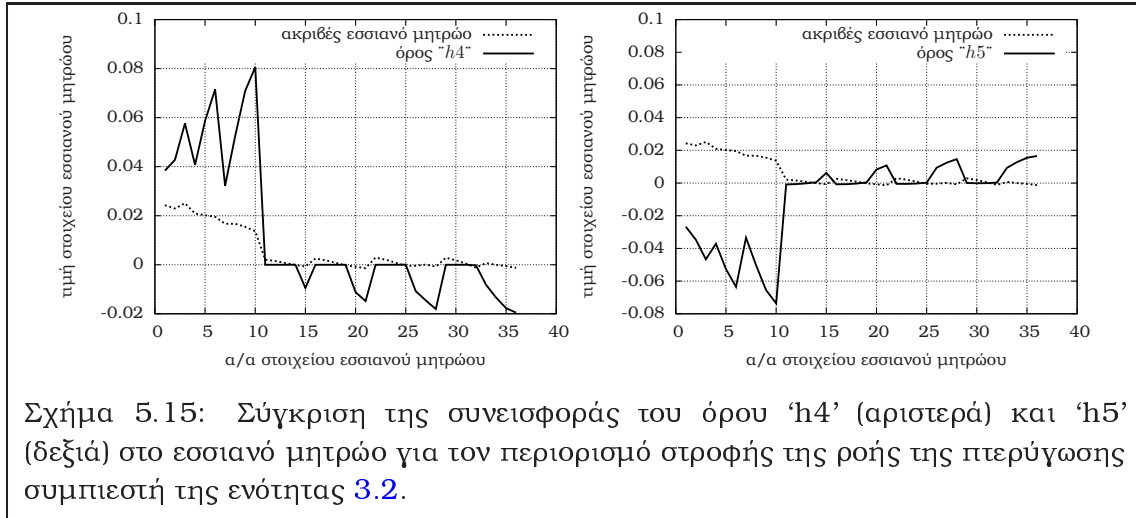
Προφανώς, αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην εξ. 5.37 και πολλαπλασιασμός με $\frac{dU_k^K}{db_i} \frac{dU_m^M}{db_j}$ δίνει τον όρο 'h3'.

Στο σχ. 5.12 φαίνεται η σύγκριση της συνεισφοράς του όρου σε σχέση με την τιμή της πλήρους έκφρασης του εσσιανού μητρώου για τον περιορισμό στροφής της ροής, για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

5.4.3 Όροι 'h4' και 'h5'

Οι όροι 'h4' και 'h5' περιλαμβάνουν διαφορίση του τελεστή υπολοίπου R_n^P και του τελεστή $\frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K}$, που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτό πραγματοποιείται με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Οι αντίστοιχες συνεισφορές στην τελική τιμή του εσσιανού μητρώου παρουσιάζονται στα σχ. 5.13, 5.14 και 5.15.





Σχήμα 5.15: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h4' (αριστερά) και 'h5' (δεξιά) στο εσοιανό μητρώο για τον περιορισμό στροφής της ροής της πτερύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

5.4.4 Όρος 'h6'

Ο σχηματισμός του όρου 'h6' απαιτεί την παραγωγή του όρου $\frac{\partial R_n^P}{\partial U_k^K}$ (άρα κατ' επέκταση των εξ. 5.12, 5.13, 5.16, 5.18 και 5.19) ως προς τις μεταβλητές ροής U_m^M . Ο υπολογισμός των αντίστοιχων διαφορίσεων πραγματοποιήθηκε διαφορίζοντας με το χέρι τους σχετικούς όρους, ώστε να ληφθούν υπόψη τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στην ενότητα 5.2 και να διατηρηθεί η απαλοιφή των μη-σημαντικών όρων (λ.χ. οι όροι $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_k^K} U_j^L$, $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_k^K} U_j^R$ και οι παράγωγοι αυτών) με αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους. Έτσι, αν λ.χ. παραγωγιστεί η εξ. 5.12, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_m^M \partial U_k^K} &= \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^L \frac{\partial^2 U_j^L}{\partial U_k^K \partial U_m^M} + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} + \mathcal{A}_{nj}^R \frac{\partial^2 U_j^R}{\partial U_k^K \partial U_m^M} \end{aligned} \quad (5.38)$$

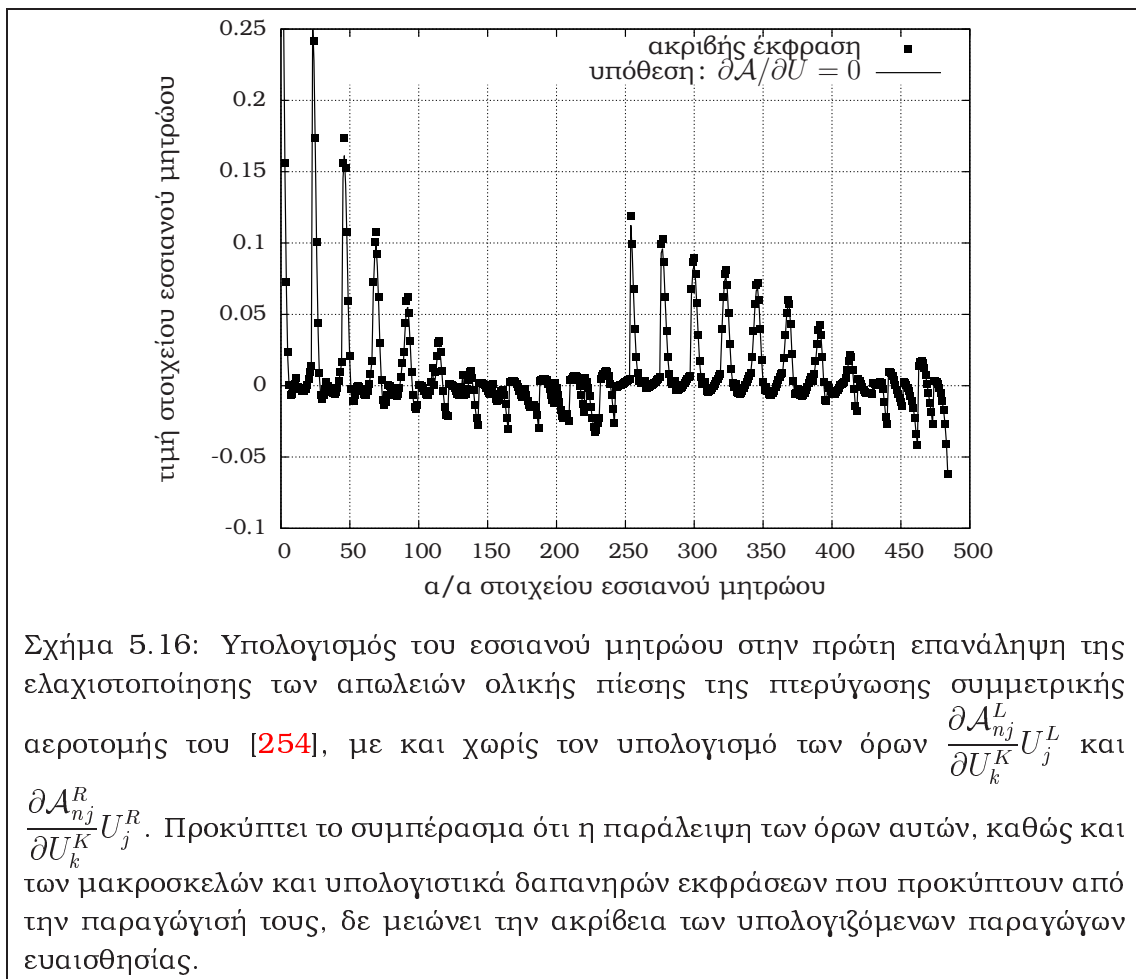
Δεδομένου ότι οι μεταβλητές U_j^L και U_j^R είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών ροής των κόμβων P , Q και των πρώτων γειτόνων τους, η δεύτερη παράγωγος αυτών είναι μηδενική. Συνεπώς, η εξ. 5.38 γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n^{PQ,inv}}{\partial U_m^M \partial U_k^K} &= \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^L}{\partial U_k^K} + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} + \frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M} \frac{\partial U_j^R}{\partial U_k^K} \end{aligned}$$

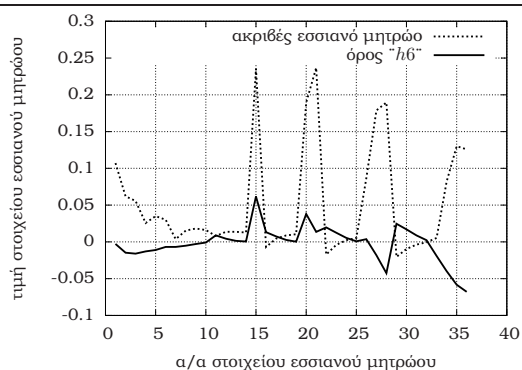
Η απόδοση των συνεισφορών των όρων $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_l^L} \frac{\partial U_l^L}{\partial U_m^M}$ και $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_r^R} \frac{\partial U_r^R}{\partial U_m^M}$ μπορεί να γίνει με σάρωση ακμών, με την τακτική που περιγράφεται

στην ενότητα 5.2.2. Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και αποδίδονται και οι υπόλοιπες συνεισφορές.

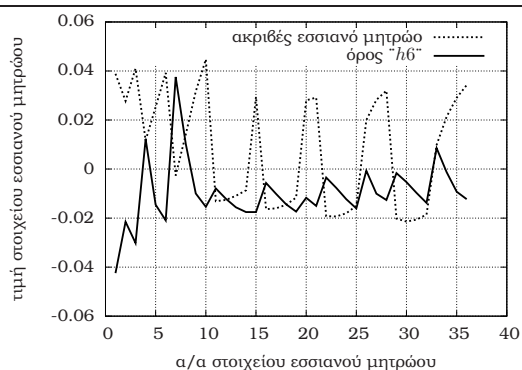
Προκειμένου να πιστοποιηθεί ότι η διαγραφή των όρων $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^L}{\partial U_k^K} U_j^L$ και $\frac{\partial \mathcal{A}_{nj}^R}{\partial U_k^K} U_j^R$ δε μειώνει την πιστότητα του υπολογιζόμενου εσσιανού μητρώου, πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί του εσσιανού μητρώου κατά τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης για τις περιπτώσεις που θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο με και χωρίς τους εν λόγω όρους. Ενδεικτικά, στο σχ. 5.16 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες συγκρίσεις του όρου 'h6' για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμμετρικής αεροτομής του [254], όπου φαίνεται η αμελητέα επίδραση των όρων που προτείνεται να διαγραφούν.



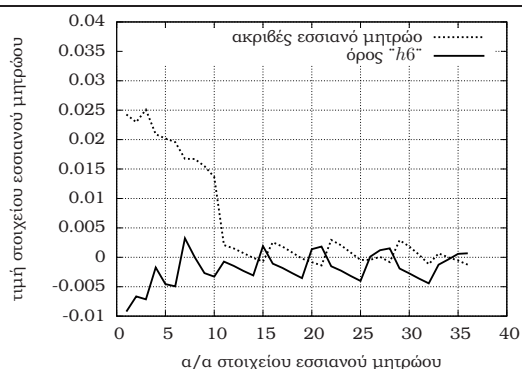
Στα σχ. 5.17, 5.18 και 5.19 φαίνεται η συνεισφορά του όρου 'h6' στην τιμή του εσσιανού μητρώου των μελετώμενων συναρτησιακών.



Σχήμα 5.17: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h6' στο εσοιανό μητρώο για το συναρτησιακό του αντίστροφου σχεδιασμού της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.



Σχήμα 5.18: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h6' στο εσοιανό μητρώο για το συναρτησιακό των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.



Σχήμα 5.19: Σύγκριση της συνεισφοράς του όρου 'h6' στο εσοιανό μητρώο για τον περιορισμό στροφής της ροής της περύγωσης συμπιεστή της ενότητας 3.2.

5.4.5 Συμπεράσματα από την ανάλυση των όρων του εσσιανού μητρώου

Στις περιπτώσεις αντίστροφου σχεδιασμού, ο όρος 'h3' κυριαρχεί έναντι των υπόλοιπων όρων του εσσιανού μητρώου, σχ. 5.10, υποδεικνύοντας ότι οι υπόλοιποι όροι, τουλάχιστον στις πρώτες επαναλήψεις του αλγόριθμου βελτιστοποίησης μπορούν να παραλειφθούν. Παρόμοια τακτική ακολουθήθηκε και σε άλλες εργασίες του ΕΘΣ, [141], [46], [48], [47]. Αυτό δεν ισχύει όμως για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης, με το οποίο επίσης ασχολείται η παρούσα διατριβή, όπου όλοι οι όροι που εμπλέκονται στην τελική έκφραση συνεισφέρουν εξίσου στην τιμή του εσσιανού μητρώου, και άρα πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό είναι λογικό δεδομένου ότι η συνάρτηση στόχου και ο περιορισμός στροφής της ροής εκφράζονται σε όρια διαφορετικά από αυτό που περιγράφουν οι μεταβλητές σχεδιασμού, οπότε οι όροι που εμπλέκουν παραγώγους του τελεστή υπολοίπου συνεισφέρουν σε μεγαλύτερο ποσοστό.

5.5 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μία μέθοδος υπολογισμού της κλίσης και του ακριβούς εσσιανού μητρώου με χρήση της διακριτής συζυγούς τεχνικής και της ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ροής. Αναλύθηκε η διαδικασία επίλυσης των συζυγών εξισώσεων τυρβωδών ροών για τρία συναρτησιακά που καλύπτουν εφαρμογές αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό περιορισμούς όχι μόνο γεωμετρικούς αλλά και ροϊκούς. Η επίλυση των N συστημάτων που προκύπτουν από την ευθεία διαφόριση των εξισώσεων ροής ως προς τις παραγώγους ευαισθησίας των μεταβλητών ροής γίνεται παράλληλα με χρήση της διεπαφής προγραμματισμού OpenMP. Οι διαφορίσεις που εμπλέκονται στην ανάπτυξη και τον προγραμματισμό της μεθόδου επίλυσης των διαφορισμένων εξισώσεων ροής και των διακριτών συζυγών εξισώσεων πραγματοποιήθηκαν χωρίς τη χρήση λογισμικού ΑΔ. Το λογισμικό ΑΔ TAPENADE χρησιμοποιήθηκε επικουρικά και μόνο για την ταυτοποίηση των μη-σημαντικών όρων, οι οποίοι τελικώς αμελήθηκαν. Η χρήση του υπολογισμένου εσσιανού μητρώου εντάσσεται στις προσεγγιστικές και ακριβείς μεθόδους Newton του κεφ. 4, καθώς και σε έξυπνο συνδυασμό αυτών, η εφαρμογή και σύγκριση των οποίων αποτελεί αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Τέλος, παρουσιάστηκε η επιμέρους συνεισφορά του κάθε όρου του εσσιανού μητρώου και μελετήθηκαν απλουστευτικές παραδοχές, οι οποίες κατά περίπτωση μειώνουν το συνολικό χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 6

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΣΣΙΑΝΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται μελέτες βελτιστοποίησης με χρήση του εσσιανού μητρώου, το οποίο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο DD-AV που παρουσιάστηκε στο κεφ. 5. Οι εφαρμογές αφορούν σε περιπτώσεις εξωτερικής και εσωτερικής αεροδυναμικής, στρωτές και τυρβώδεις ροές, προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης και περιορισμούς στο πάχος της γεωμετρίας και στη γωνία στροφής της ροής. Οι περιπτώσεις ροής που μελετώνται είναι οι 2Δ περιπτώσεις που μελετήθηκαν κατά την πιστοποίηση του επιλύτη ροής στο κεφ. 3, καθώς και η περίπτωση 2Δ στρωτής ροής περύγωσης που αναλύεται στο [254]. Σε όλες τις περιπτώσεις πραγματοποιούνται συγκρίσεις ως προς την αποδοτικότητα της ακριβούς μεθόδου Newton με τις προσεγγιστικές μεθόδους Newton, καθώς και με συνδυασμό αυτών, στον οποίο η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού στον πρώτο κύκλο του αλγόριθμου βελτιστοποίησης πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας το ακριβές εσσιανό μητρώο (δηλαδή αυτό που υπολογίζει η μέθοδος DD-AV που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο), ενώ στη συνέχεια το ακριβές εσσιανό μητρώο ανανεώνεται με χρήση του αναδρομικού τύπου BFGS ή SR1. Οι τελευταίες θα ονομάζονται 'ακριβώς αρχικοποιημένες' προσεγγιστικές μέθοδοι Newton. Στις περιπτώσεις ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης πραγματοποιείται επιπλέον μελέτη της επίδρασης της παραμέτρου σ , εξ. 4.24, στην αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα της μεθόδου.

6.1 Αντίστροφος σχεδιασμός της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1

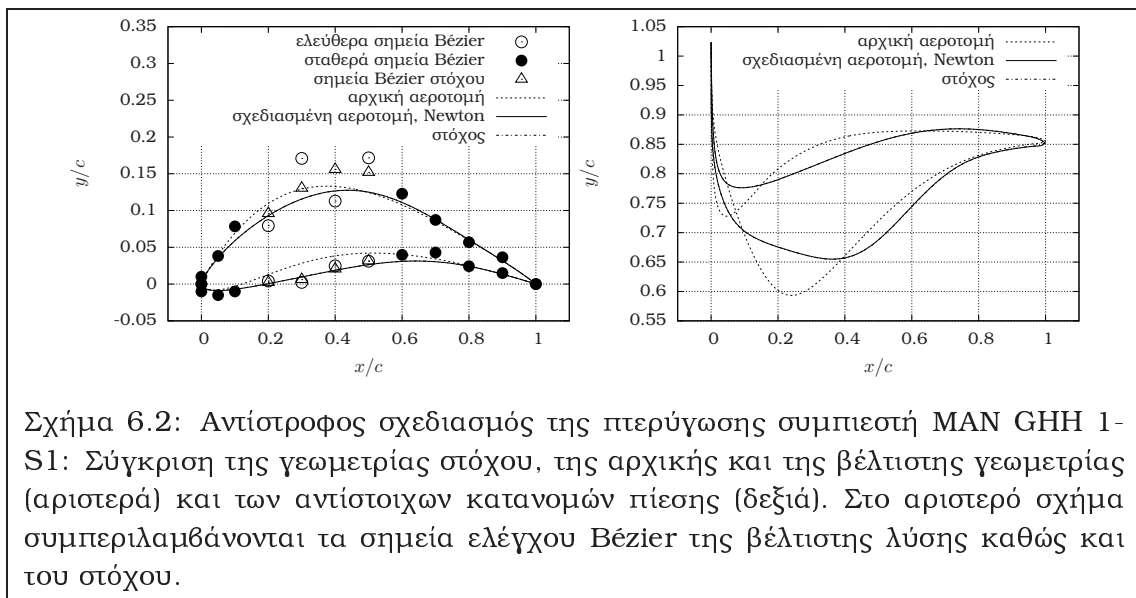
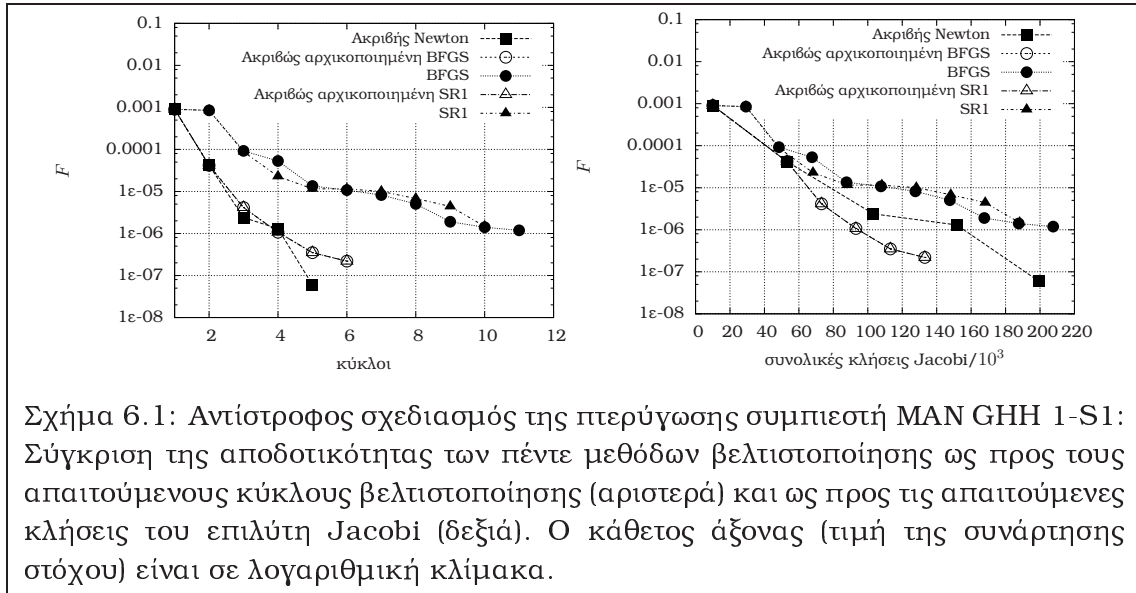
Η πρώτη περίπτωση που μελετάται αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1 στις ονομαστικές συνθήκες, παρ. 3.2 ($\hat{P}_t^{in} = 125000\text{Pa}$, $\hat{T}_t^{in} = 288\text{K}$, $\hat{\rho}^{in} \approx 1.26\text{kg/m}^3$, $\alpha^{in} = 47^\circ$, $|\hat{u}^{in}| = 202.6\text{m/s}$, $AVDR \approx 0.9074$, $Re = 8.41 \times 10^{-5}$, $M_{is}^{out} = 0.4557$). Τέσσερα σημεία ελέγχου Bézier ανά πλευρά (υπερπίεσης/υποπίεσης) είναι ελεύθερα να κινηθούν κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση, οπότε το πρόβλημα έχει 8 βαθμούς ελευθερίας και, συνεπώς, ένας υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου απαιτεί την επίλυση 10 ΣΜΔΕ.

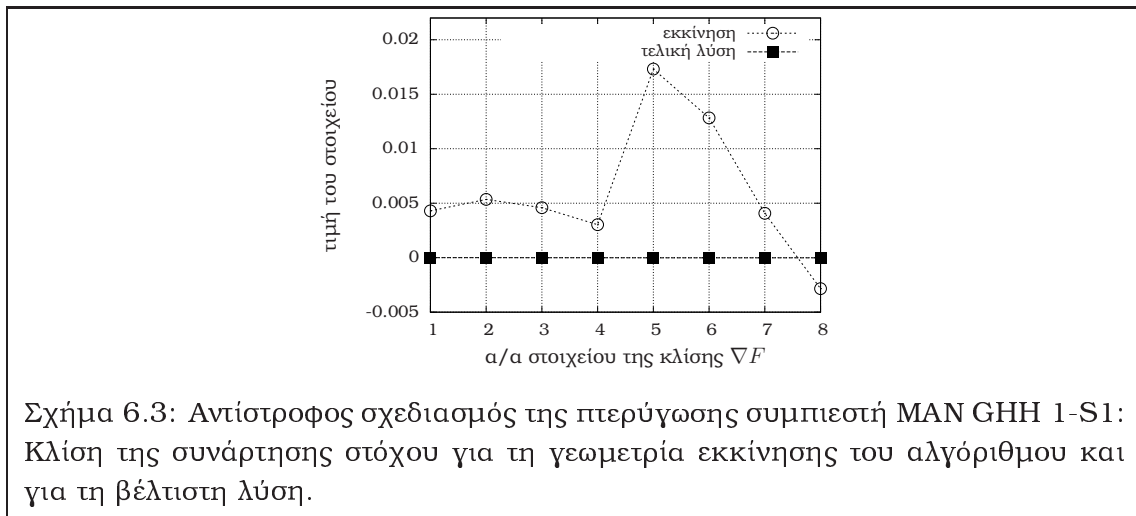
Το σχ. 6.1 απεικονίζει τη μείωση της τιμής της συνάρτησης στόχου σε σχέση με τους κύκλους βελτιστοποίησης και με τις συνολικά απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi, για όλες τις μεθόδους που δοκιμάστηκαν. Στην πρώτη περίπτωση λαμβάνεται μια ιδέα του ρυθμού σύγκλισης της κάθε μεθόδου, ενώ το δεύτερο σχήμα δίνει μία αντικειμενικότερη σύγκριση του συνολικού κόστους και της αποδοτικότητας των μεθόδων. Δύο σημεία χρήζουν προσοχής:

- Η τιμή της συνάρτησης στόχου στο σχ. 6.1 καθώς και στα ακόλουθα σχήματα για τις περιπτώσεις αντίστροφου σχεδιασμού παρουσιάζεται σε λογαριθμική κλίμακα. Παρότι η σύγκλιση είναι αρκετά βαθιά, συνήθως αρκεί για τη συνάρτηση στόχου μία τιμή της τάξης του 10^{-6} με 5×10^{-8} (ανάλογα με την τάξη μεγέθους της αδιαστατοποιημένης πίεσης στην αεροτομή) για να θεωρηθεί ότι η σχεδιαζόμενη γεωμετρία (άρα και η αντίστοιχη κατανομή πίεσης) ταυτίζεται με αυτήν του στόχου.
- Δεδομένου ότι οι εξ. 5.2 είναι γραμμικές συναρτήσεις, και μάλιστα εμπλέκουν μητρώα τα οποία υπολογίζονται μία φορά, αποθηκεύονται και επαναχρησιμοποιούνται, η σύγκριση ως προς τις κλήσεις του επιλύτη Jacobi αδικεί ελαφρώς τη μέθοδο Newton (άρα κατ' επέκταση και τις παραλλαγές αυτής, σε μικρότερο βαθμό). Ακόμα και υπ' αυτές τις συνθήκες, όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα, οι ακριβώς αρχικοποιημένες μέθοδοι quasi-Newton αποδίδουν καλύτερα από τις συμβατικές μεθόδους quasi-Newton.

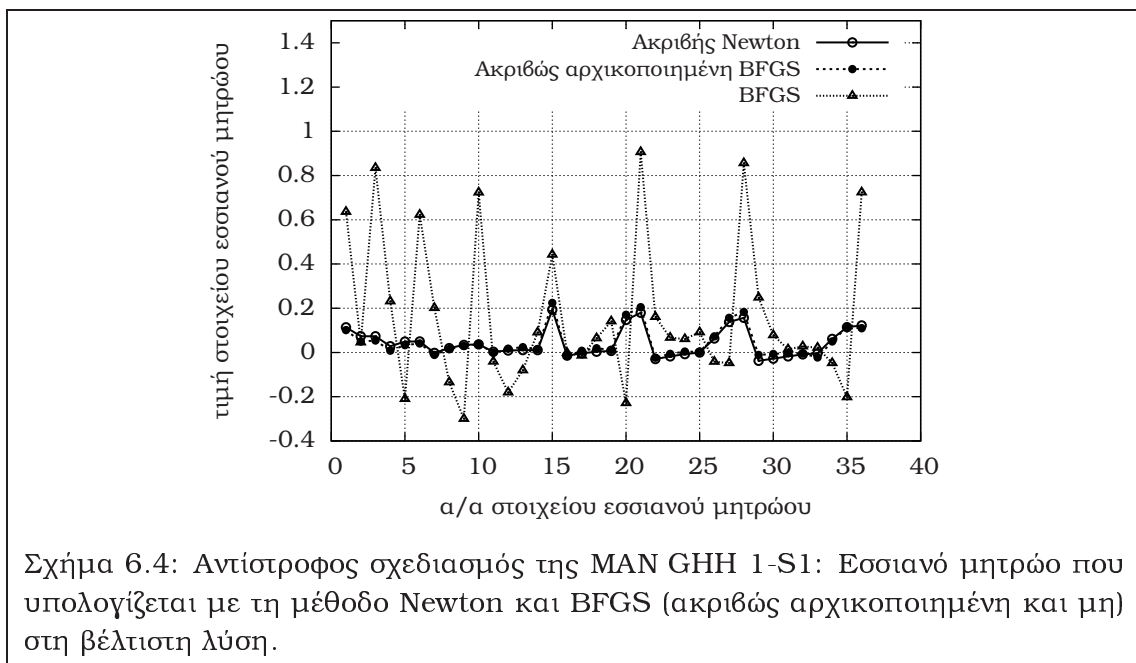
Στο σχ. 6.2 φαίνεται η σύγκριση της αρχικής και της βέλτιστης αεροτομής με την αεροτομή-στόχο, καθώς και οι αντίστοιχες κατανομές πίεσης. Η ταύτιση της βέλτιστης αεροτομής με την αεροτομή-στόχο είναι άριστη. Η ταύτιση μάλιστα επιτυγχάνεται με διαφορετικά σημεία ελέγχου από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την αρχική παραμετρικοποίηση της αεροτομής-στόχου, καταδεικνύοντας μία από τις δυσκολίες ενός τέτοιου σχεδιασμού, που είναι η ύπαρξη τοπικών ακρότατων γύρω από τη λύση.

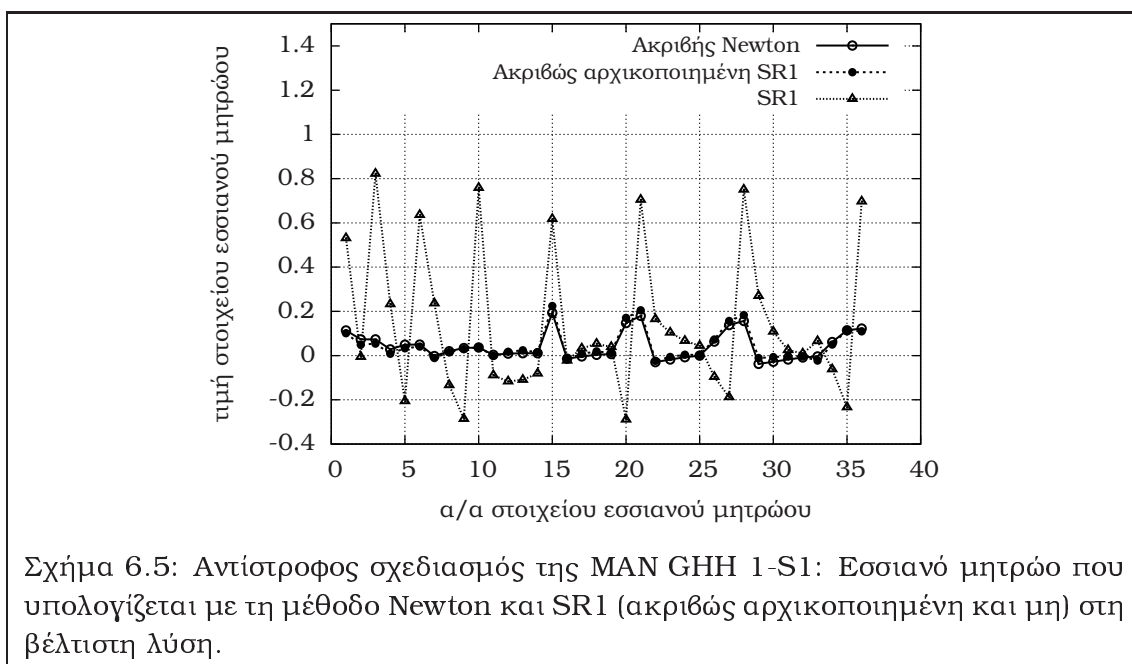
Το σχ. 6.3 απεικονίζει την κλίση της συνάρτησης-στόχου για τη γεωμετρία εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση. Ο μηδενισμός της παραγώγου είναι ουσιαστικά ισοδύναμος με σύγκλιση της μεθόδου στο επιθυμητό αποτέλεσμα.





Στο σχ. 6.4 απεικονίζονται τα εσσιανά μητρώα, όπως υπολογίζονται από τη συμβατική και την ακριβώς αρχικοποιημένη μέθοδο BFGS σε σύγκριση με την ακριβή μέθοδο Newton, κατά τον τελευταίο κύκλο της διαδικασίας αντίστροφου σχεδιασμού. Το εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με την ακριβώς αρχικοποιημένη μέθοδο συμφωνεί πολύ περισσότερο με το ακριβές μητρώο, δικαιολογώντας τις πολύ καλές ιδιότητες σύγκλισης της μεθόδου. Συναφή συμπεράσματα εξάγονται και από το σχ. 6.5, όπου παρουσιάζονται οι αντίστοιχες συγκρίσεις για τη συμβατική και την ακριβώς αρχικοποιημένη μέθοδο SR1.





Σχήμα 6.5: Αντίστροφος σχεδιασμός της MAN GHH 1-S1: Εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο Newton και SR1 (ακριβώς αρχικοποιημένη και μη) στη βέλτιστη λύση.

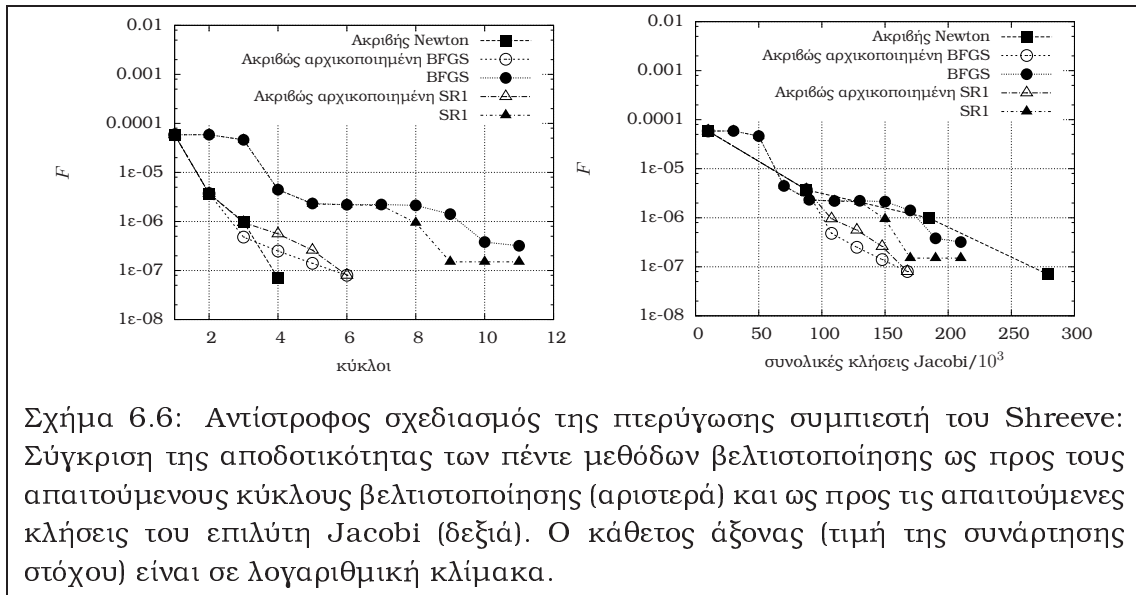
6.2 Αντίστροφος σχεδιασμός της περύγωσης συμπίεσή του Shreeve

Η δεύτερη περίπτωση που μελετάται είναι ο αντίστροφος σχεδιασμός της περύγωσης συμπίεσή του Shreeve στις ονομαστικές συνθήκες, που μελετήθηκε και στην παρ. 3.3 ($\hat{P}_t^{in} = 104365\text{Pa}$, $\hat{T}_t^{in} = 294\text{K}$, $\alpha^{in} = 14.4^\circ$, $|\hat{u}^{in}| = 85\text{m/s}$, $AVDR \approx 0.95$, $Re_c = 7 \times 10^5$, $M_{in} = 0.25$). Τέσσερα σημεία ελέγχου Bézier ανά πλευρά (υπερπίεσης/υποπίεσης) αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση, οπότε το πρόβλημα έχει πάλι 8 βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, ο υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης απαιτεί την επίλυση 10 ΣΜΔΕ.

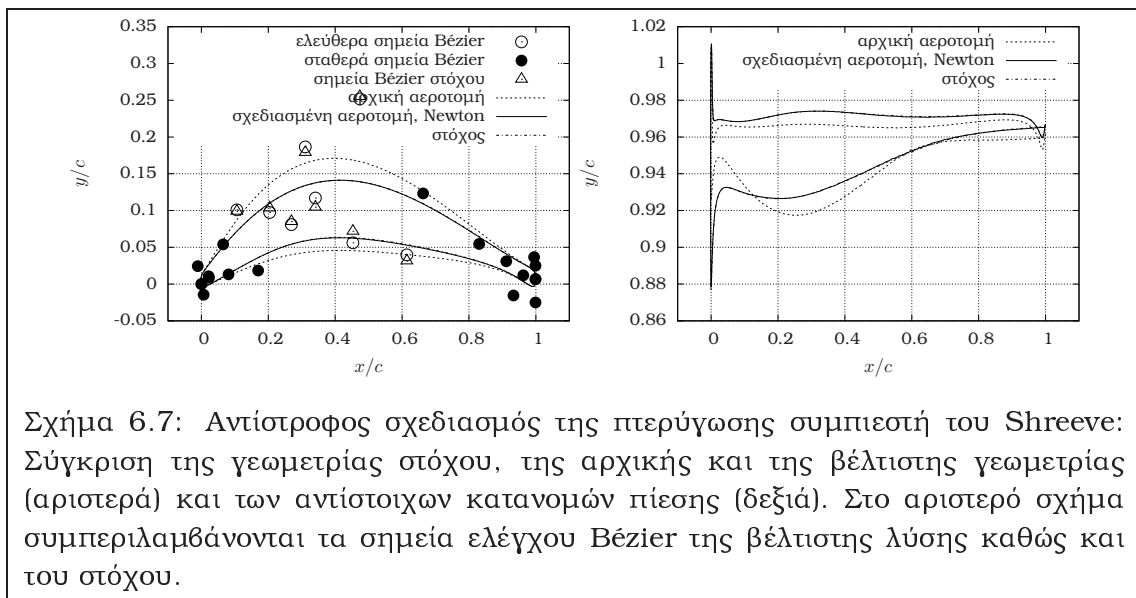
Στο σχ. 6.6 φαίνονται πάλι οι καμπύλες μείωσης της τιμής της συνάρτησης στόχου σε σχέση με τους κύκλους βελτιστοποίησης και με τις απαιτούμενες κλήσεις Jacobi. Οι ακριβώς αρχικοποιημένες μέθοδοι BFGS και SR1 και στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι πλέον αποδοτικές αναφορικά με την ταχύτητα εκτέλεσης του αντίστροφου σχεδιασμού, όπως προκύπτει από τις απαιτούμενες κλήσεις Jacobi των συγκρινόμενων μεθόδων.

Στο σχ. 6.7 φαίνονται συγκρίσεις των αεροτομών (βέλτιστη και στόχου με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου Bézier που τις παραμετροποιούν) καθώς και συγκρίσεις των αντίστοιχων κατανομών πίεσης. Η σχεδιαζόμενη γεωμετρία και η αντίστοιχη κατανομή πίεσης ταυτίζονται με το στόχο, ενώ τα σημεία ελέγχου που προκύπτουν από τη διαδικασία αντίστροφου σχεδιασμού πάλι είναι ελαφρώς διαφορετικά από αυτά του στόχου. Η διαφορά πάντως είναι μικρότερη από αυτή της παρ. 6.1

Στο σχ. 6.8 απεικονίζεται η κλίση της συνάρτησης-στόχου για τη γεωμετρία

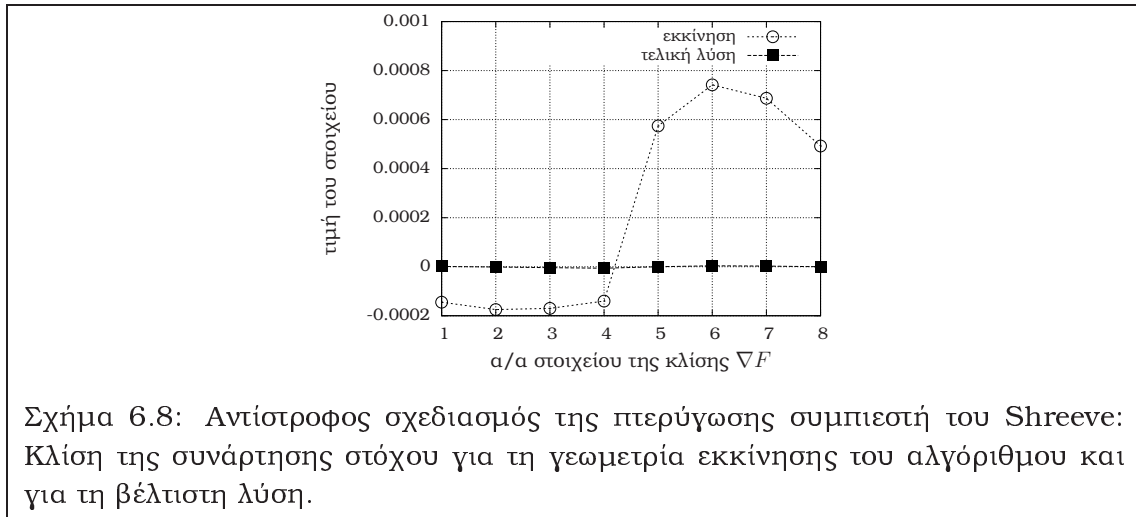


Σχήμα 6.6: Αντίστροφος σχεδιασμός της περύγωσης συμπίεστή του Shreeve: Σύγκριση της αποδοτικότητας των πέντε μεθόδων βελτιστοποίησης ως προς τους απαιτούμενους κύκλους βελτιστοποίησης (αριστερά) και ως προς τις απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi (δεξιά). Ο κάθετος άξονας (τιμή της συνάρτησης στόχου) είναι σε λογαριθμική κλίμακα.



Σχήμα 6.7: Αντίστροφος σχεδιασμός της περύγωσης συμπίεστή του Shreeve: Σύγκριση της γεωμετρίας στόχου, της αρχικής και της βέλτιστης γεωμετρίας (αριστερά) και των αντίστοιχων κατανομών πίεσης (δεξιά). Στο αριστερό σχήμα συμπεριλαμβάνονται τα σημεία ελέγχου Bézier της βέλτιστης λύσης καθώς και του στόχου.

εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση. Ο μηδενισμός της κλίσης πάλι επιβεβαιώνει τη σύγκλιση της μεθόδου.

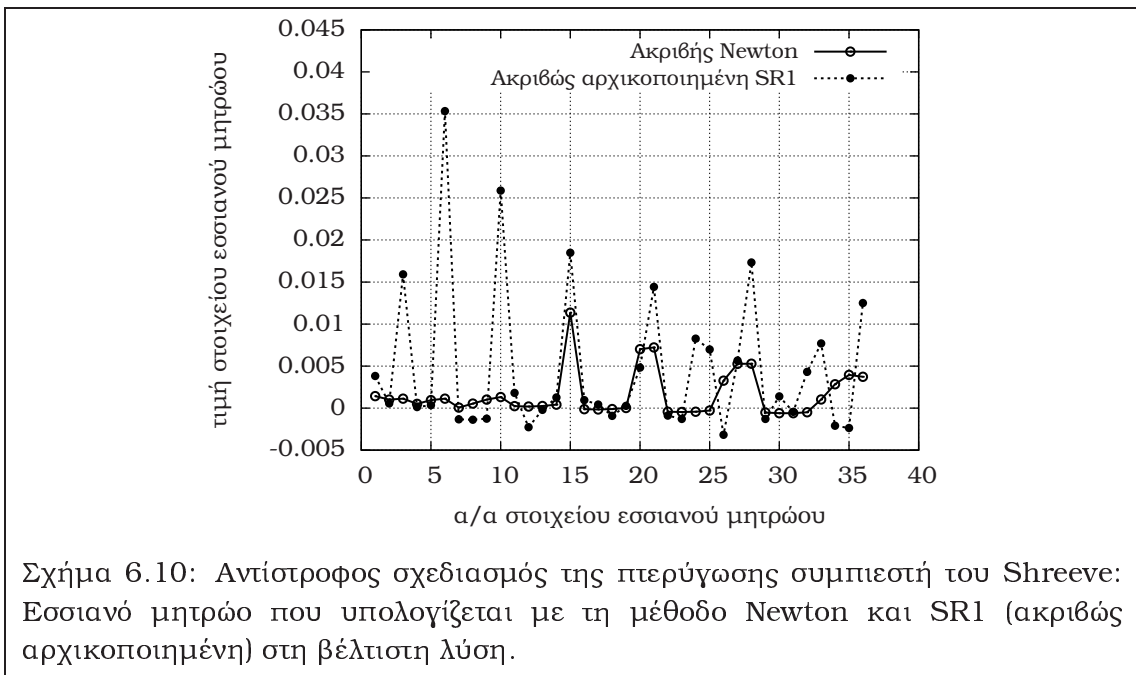
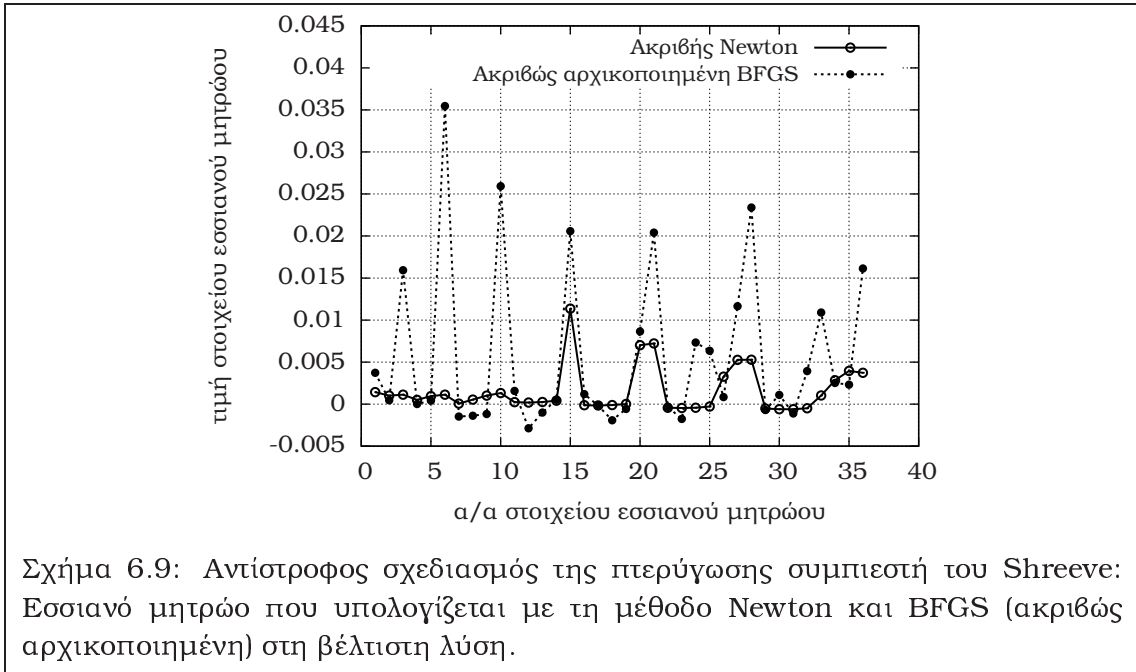


Στα σχ. 6.9 και 6.10 παρουσιάζονται συγκρίσεις των υπολογιζόμενων εσσιανών μητρώων κατά τον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης για την ακριβή μέθοδο Newton και τις ακριβώς αρχικοποιημένες BFGS και SR1 αντίστοιχα. Παρότι δεν υπάρχει ταύτιση των εσσιανών μητρώων, η τάξη μεγέθους και η τάση του μητρώου εκφράζονται ικανοποιητικά από τις ακριβώς αρχικοποιημένες προσεγγιστικές μεθόδους Newton, οπότε και ο ρυθμός μείωσης του συναρτησιακού είναι αρκετά καλός. Στα σχήματα δεν περιλαμβάνονται τα εσσιανά μητρώα που υπολογίζονται από τις συμβατικές μεθόδους BFGS και SR1, δεδομένου ότι οι τιμές των στοιχείων τους είναι κατά δύο τάξεις μεγαλύτερες.

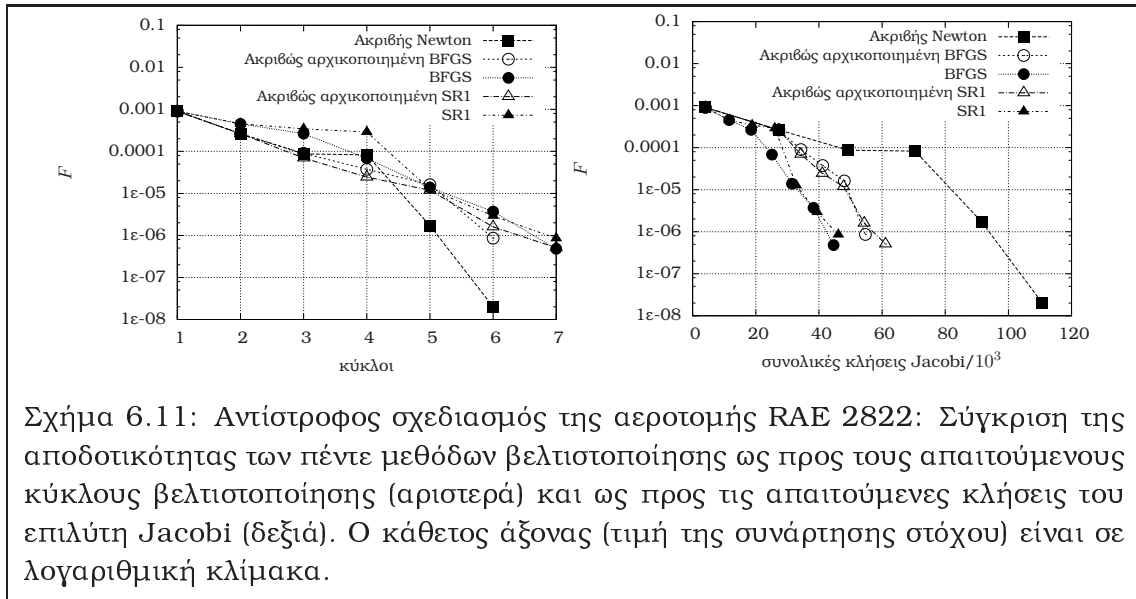
6.3 Αντίστροφος σχεδιασμός της αεροτομής RAE 2822

Η τρίτη περίπτωση που μελετάται είναι η αεροτομή RAE 2822. Οι συνθήκες λαμβάνονται ίσες με αυτές της περίπτωσης R1, [224] ($M^\infty = 0.676$, $\alpha^\infty = 2.4^\circ$, $Re_c = 5.7 \times 10^6$). Η ροή σε αυτή την περίπτωση είναι πλήρως υποχηχητική. Πάλι, τέσσερα σημεία ελέγχου Bézier ανά πλευρά (υπερπίεσης/υποπίεσης) αφήνονται ελεύθερα να μετατοπιστούν κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση, διαμορφώνοντας ένα πρόβλημα με 8 βαθμούς ελευθερίας, στο οποίο κάθε υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου απαιτεί την επίλυση 10 ΣΜΔΕ.

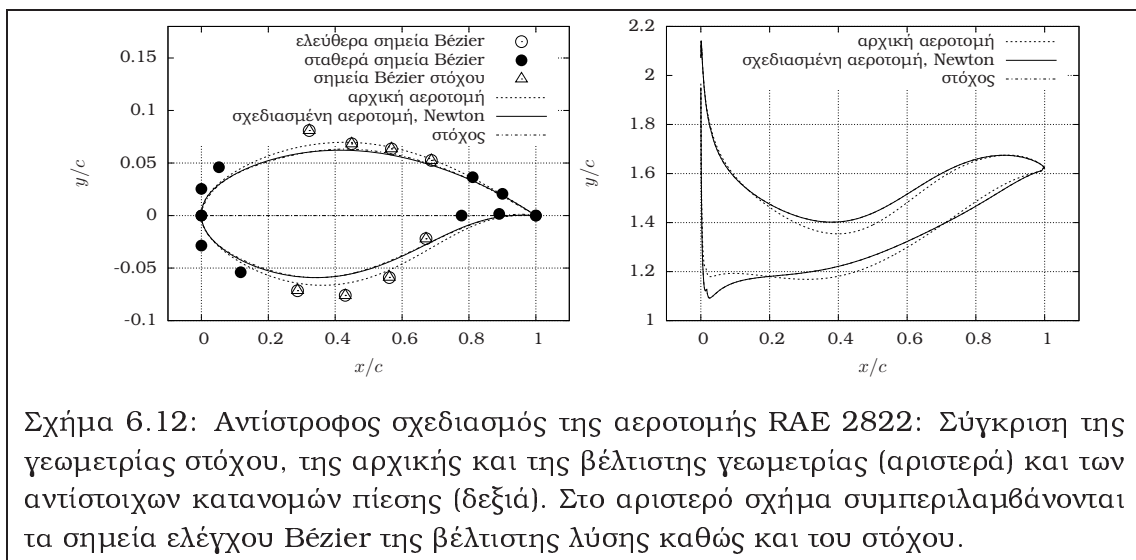
Στο σχ. 6.11 παρουσιάζεται η μείωση της τιμής της συνάρτησης στόχου σε σχέση με τους κύκλους βελτιστοποίησης και με τις συνολικά απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, παρότι η ακριβής μέθοδος Newton και οι ακριβώς αρχικοποιημένες μέθοδοι BFGS και SR1 συγκλίνουν ταχύτερα από τις συμβατικές προσεγγιστικές μεθόδους Newton ως προς τους κύκλους βελτιστοποίησης, το συνολικό κόστος των συμβατικών μεθόδων BFGS και



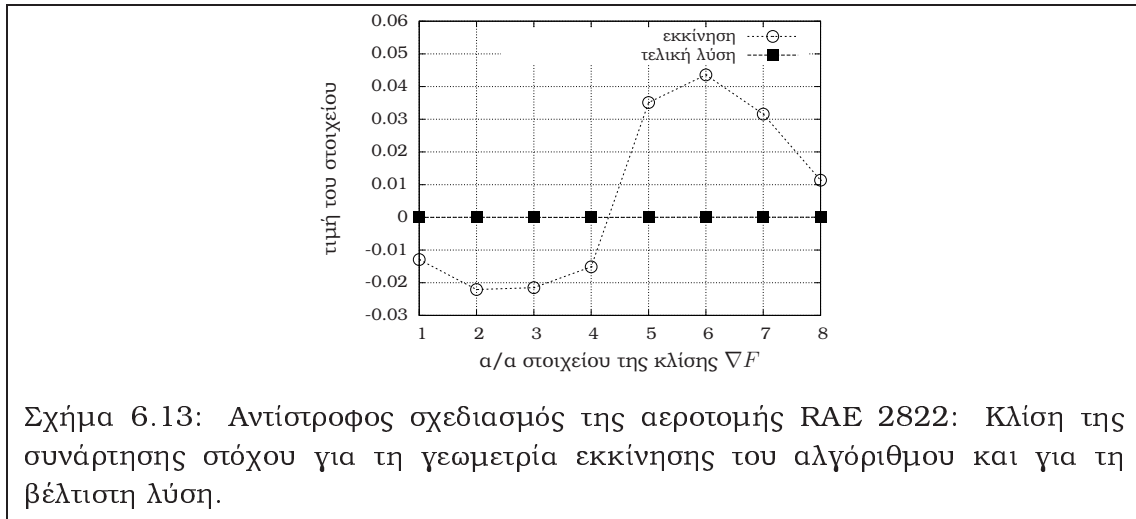
SR1 είναι ελαφρώς μικρότερο, όταν συγκρίνονται ως προς τις απαιτούμενες κλήσεις Jacobi. Υπενθυμίζεται ότι η πραγματική διαφορά στο κόστος των μεθόδων είναι ελαφρώς μικρότερη, δεδομένου ότι τα μητρώα που συμμετέχουν στην επίλυση του συστήματος των εξ. 5.2 δεν επαναυπολογίζονται σε κάθε επανάληψη.



Στο σχ. 6.12 φαίνεται η σύγκριση της βέλτιστης αεροτομής και της αεροτομής στόχου, καθώς και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου Bézier που παραμετροποιούν τις αεροτομές αυτές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα σύνολα των σημείων ελέγχου ταυτίζονται. Στο σχήμα περιλαμβάνεται και η σύγκριση των αντίστοιχων κατανομών πίεσης.



Στο σχ. 6.13 απεικονίζεται η κλίση της συνάρτησης-στόχου για τη γεωμετρία εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση, όπου πάλι αυτή έχει μηδενιστεί.

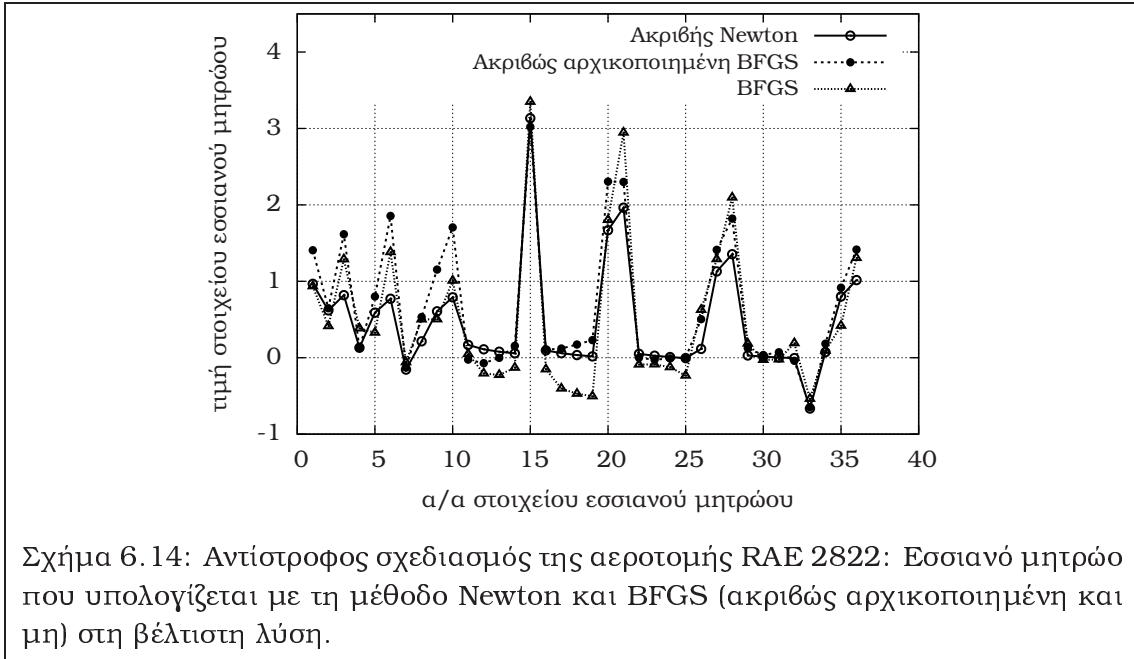


Σχήμα 6.13: Αντίστροφος σχεδιασμός της αεροτομής RAE 2822: Κλίση της συνάρτησης στόχου για τη γεωμετρία εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση.

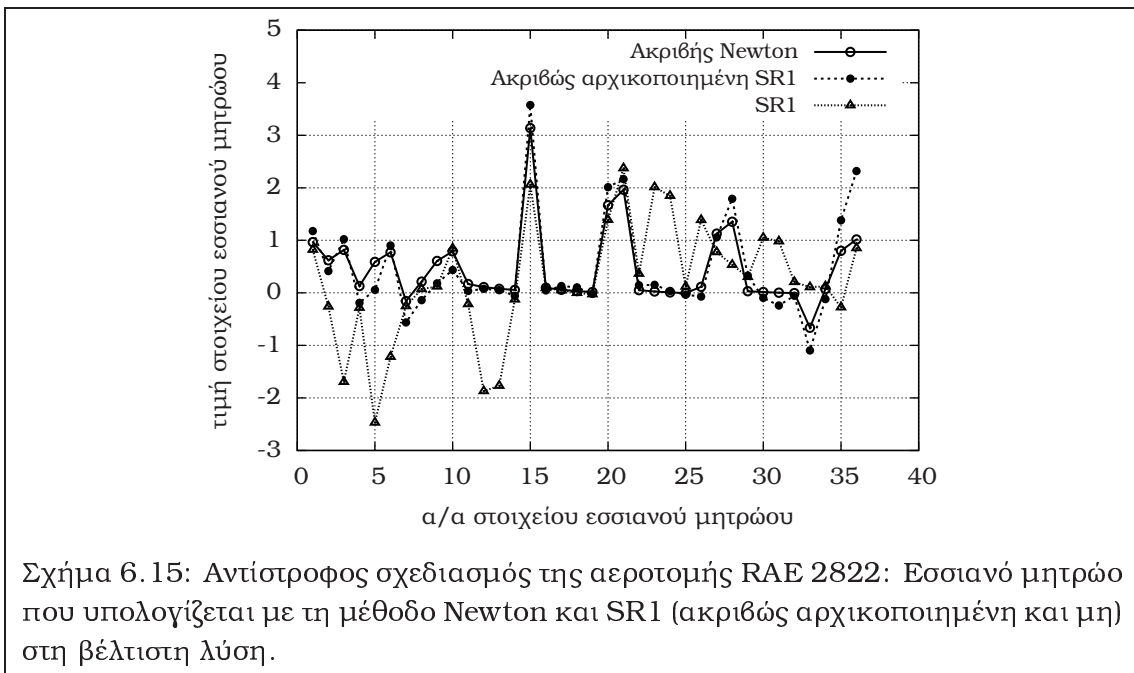
Ο λόγος που στη συγκεκριμένη περίπτωση οι συμβατικές μέθοδοι BFGS και SR1 αποδίδουν άριστα φαίνεται στα σχ. 6.14 και 6.15, όπου παρουσιάζεται η σύγκριση του εσσιανού μητρώου που υπολογίζεται από τις μεθόδους Newton, BFGS και SR1 (συμβατικές και ακριβώς αρχικοποιημένες) κατά την τελευταία επανάληψη των αντίστοιχων διαδικασιών αντίστροφου σχεδιασμού. Η αρχικοποίηση του εσσιανού μητρώου των συμβατικών μεθόδων BFGS και SR1 στη συγκεκριμένη περίπτωση από σύμπτωση διορθώνεται αρκετά γρήγορα από τους αντίστοιχους αναδρομικούς τύπους, οδηγώντας τις μεθόδους αυτές γρήγορα στη λύση, χωρίς να απαιτείται ο πολυέξοδος αρχικός υπολογισμός του ακριβούς μητρώου. Αυτό όμως δεν παρατηρείται συχνά, ούτε είναι γνωστό εκ των προτέρων.

6.4 Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης πτερύγωσης σε στρωτή ροή

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης πτερύγωσης σε στρωτή ροή ($\alpha^{in} = 30^\circ$, $Re_c = 2000$, $M_{out,is} = 0.3$) με τη μέθοδο του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού. Πρόκειται για τη συμμετρική αεροτομή που αναλύεται στο [254], με λόγο βήματος προς τη χορδή $t/c = 0.65$. Η γωνία εξόδου της ροής απαιτείται να είναι ίση με $\alpha^{out} = 35.6^\circ$, ενώ η μείωση του πάχους δεν επιτρέπεται να είναι πάνω από 10% επί της αρχικής τιμής της. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας είναι 18 (9 σημεία ελέγχου Bézier ανά πλευρά αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν κάθετα στη χορδή), οπότε ο υπολογισμός ενός ακριβούς εσσιανού μητρώου για το συναρτησιακό απαιτεί την επίλυση 20 ΣΜΔΕ. Προσμετρώντας το κόστος για τον επιπλέον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου της στροφής της ροής, το οποίο είναι ένα επιπλέον ΣΜΔΕ, παρ. 5.3.1, το συνολικό κόστος για την πραγματοποίηση ενός βήματος με χρήση των ακριβών εσσιανών μητρώων ανέρχεται σε 21 ΣΜΔΕ. Η αύξηση του χώρου



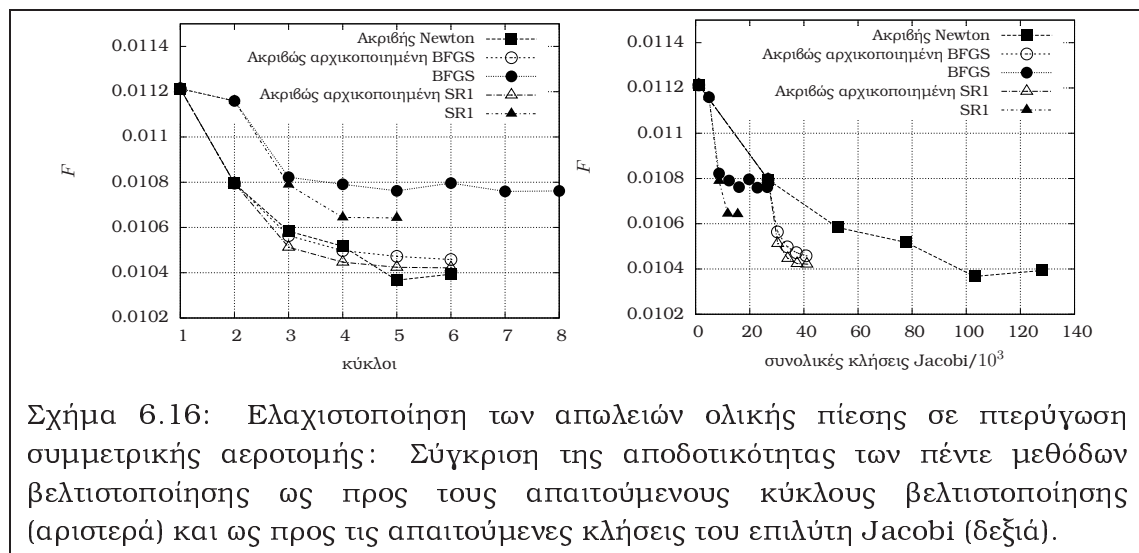
Σχήμα 6.14: Αντίστροφος σχεδιασμός της αεροτομής RAE 2822: Εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο Newton και BFGS (ακριβώς αρχικοποιημένη και μη) στη βέλτιστη λύση.



Σχήμα 6.15: Αντίστροφος σχεδιασμός της αεροτομής RAE 2822: Εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο Newton και SR1 (ακριβώς αρχικοποιημένη και μη) στη βέλτιστη λύση.

σχεδιασμού αποτελεί πρόκληση τόσο για τις συμβατικές μεθόδους Newton, των οποίων η αποδοτικότητα ή αποτελεσματικότητα μειώνεται με αύξηση των βαθμών ελευθερίας, [112], [113], όσο και για τις προτεινόμενες μεθόδους, δεδομένου ότι ο υπολογισμός των ακριβών εσσιανών μητρώων είναι πιο χρονοβόρος.

Στο σχ. 6.16 φαίνονται οι καμπύλες μείωσης της τιμής της συνάρτησης στόχου με τους κύκλους βελτιστοποίησης και με το συνολικό επεξεργαστικό κόστος, που και πάλι αντιπροσωπεύεται από τις απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi. Παρατηρείται ότι οι συμβατικές μέθοδοι BFGS και SR1 παγιδεύονται αρκετά γρήγορα σε τοπικό ακρότατο στο όριο των εφικτών λύσεων (δεν υπάρχει δηλαδή θετικό μήκος βήματος η^n , εξ. 4.19, το οποίο να οδηγεί σε λύση με θετικές τιμές των z_r^t και λ_r^t). Αντιθέτως, οι ακριβώς αρχικοποιημένες μέθοδοι BFGS και SR1, καθώς και η ακριβής μέθοδος Newton, συγκλίνουν σε λύση με σαφώς μικρότερη τιμή για τη συνάρτηση στόχου.

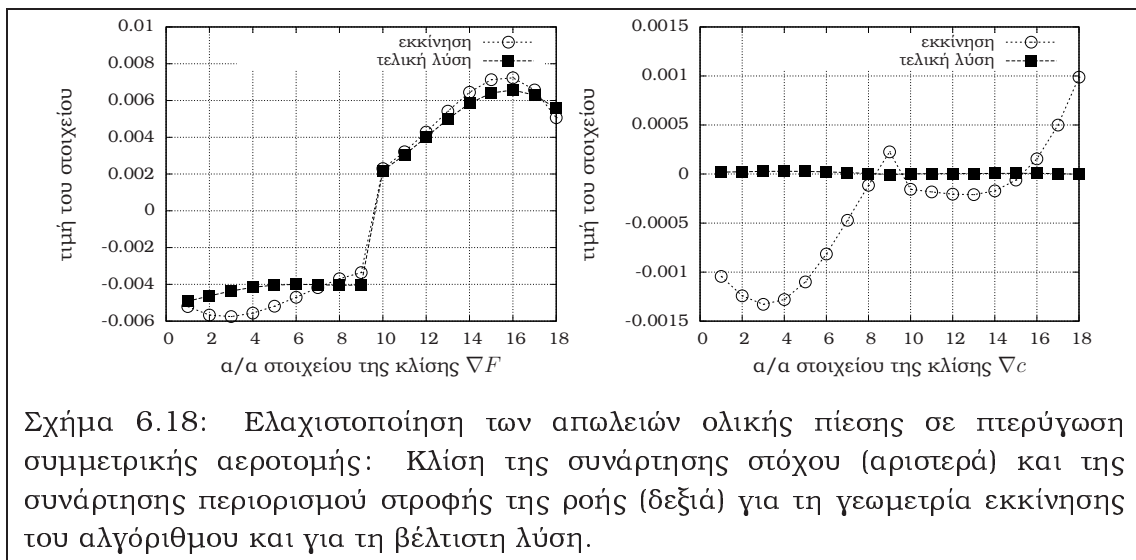
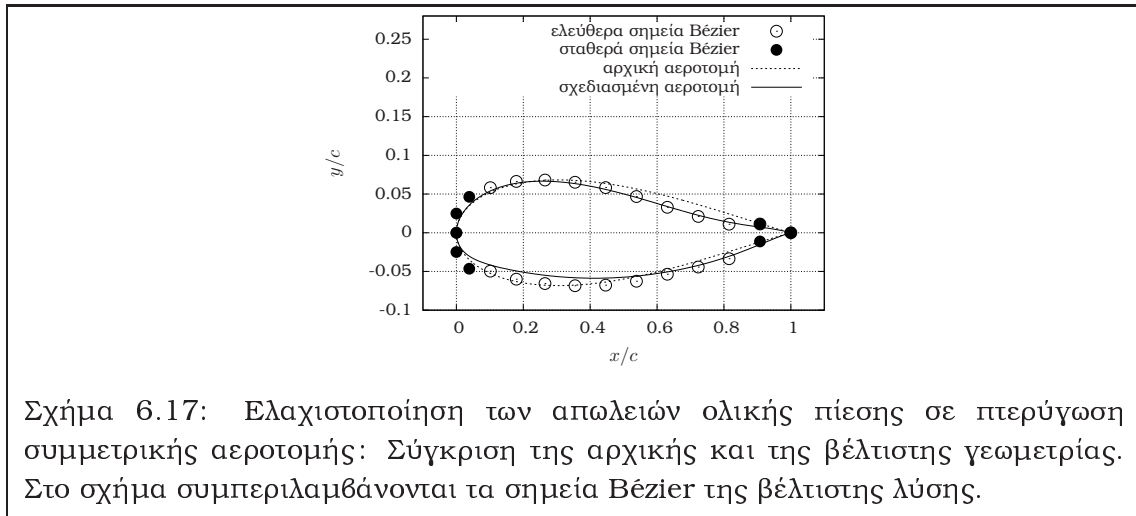


Σχήμα 6.16: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης σε περύγωση συμμετρικής αεροτομής: Σύγκριση της αποδοτικότητας των πέντε μεθόδων βελτιστοποίησης ως προς τους απαιτούμενους κύκλους βελτιστοποίησης (αριστερά) και ως προς τις απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi (δεξιά).

Στο σχ. 6.17 παρουσιάζονται συγκρίσεις της αεροτομής που προκύπτει μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, της αρχικής αεροτομής, καθώς και τα σημεία ελέγχου Bézier της βέλτιστης λύσης. Η απεικόνιση της κλίσης της συνάρτησης στόχου και της συνάρτησης περιορισμού στροφής της ροής για τη γεωμετρία εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση φαίνεται στο σχ. 6.18. Σε αυτή την περίπτωση, η νόρμα της κλίσης της συνάρτησης στόχου δεν είναι δυνατόν να μηδενιστεί λόγω των επιβαλλόμενων περιορισμών. Αντιθέτως, η κλίση της συνάρτησης περιορισμού στροφής της ροής τείνει να μηδενιστεί, όπως είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι ο περιορισμός ικανοποιείται.

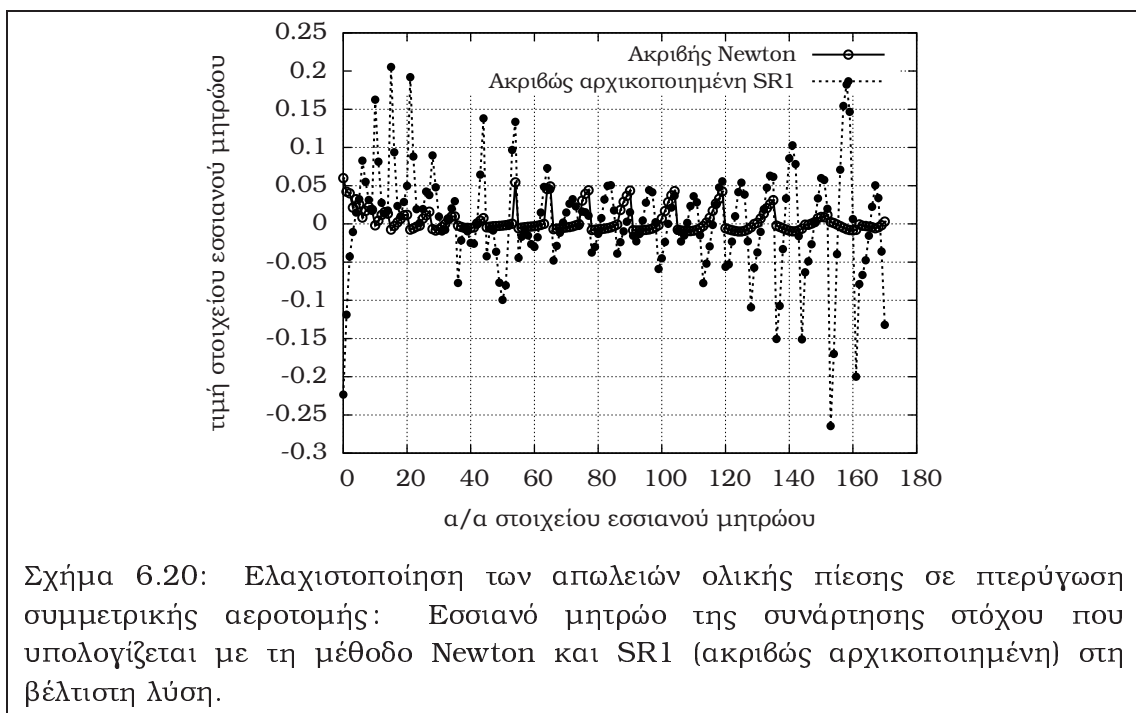
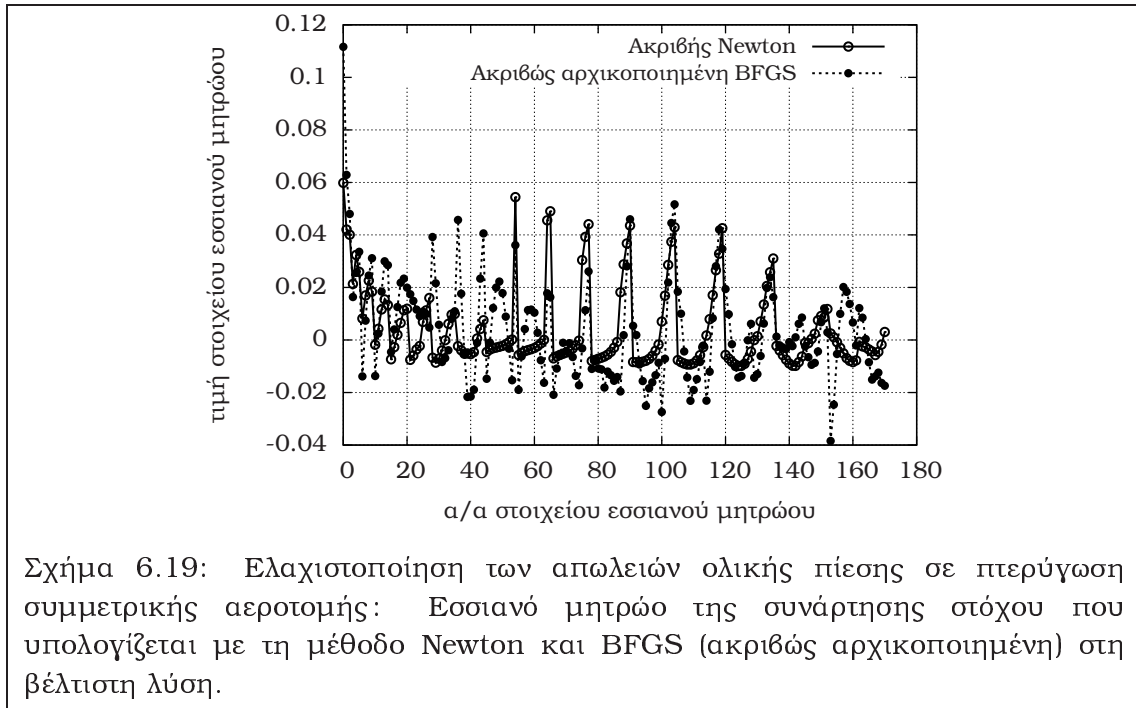
Στα σχ. 6.19 και 6.20, φαίνεται η σχετική σύμπτωση των εσσιανών μητρώων της ακριβούς μεθόδου Newton και των ακριβώς αρχικοποιημένων μεθόδων BFGS και SR1, σε αντίθεση με αυτά των συμβατικών μεθόδων quasi-Newton, των οποίων οι τιμές έχουν διαφορά μίας έως δύο τάξεων μεγέθους, και οι οποίες για το λόγο αυτό δεν περιλαμβάνονται στο σχήμα.

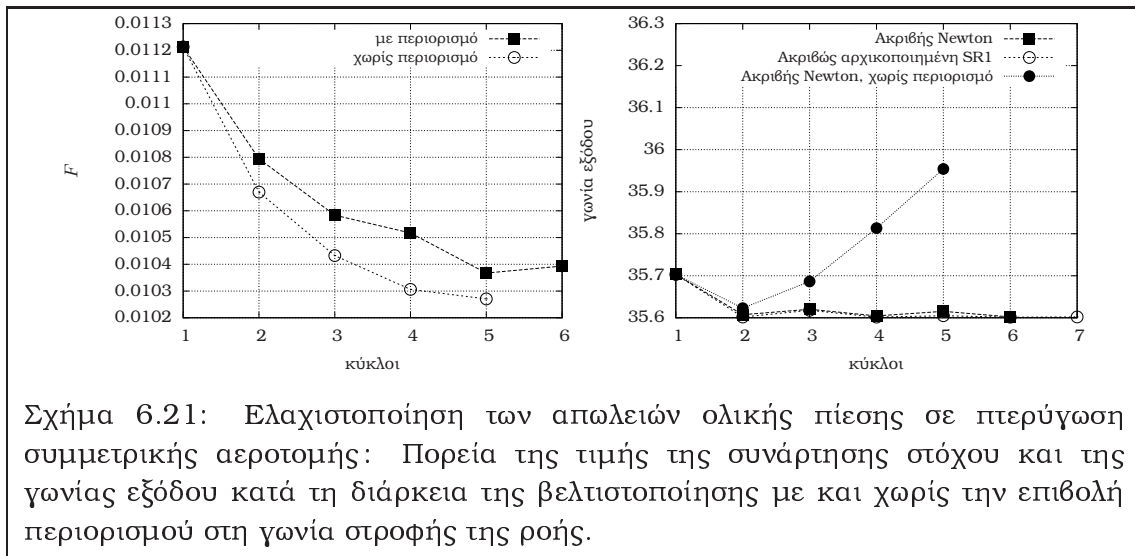
Η πορεία της τιμής της συνάρτησης κόστους και στροφής της ροής φαίνονται



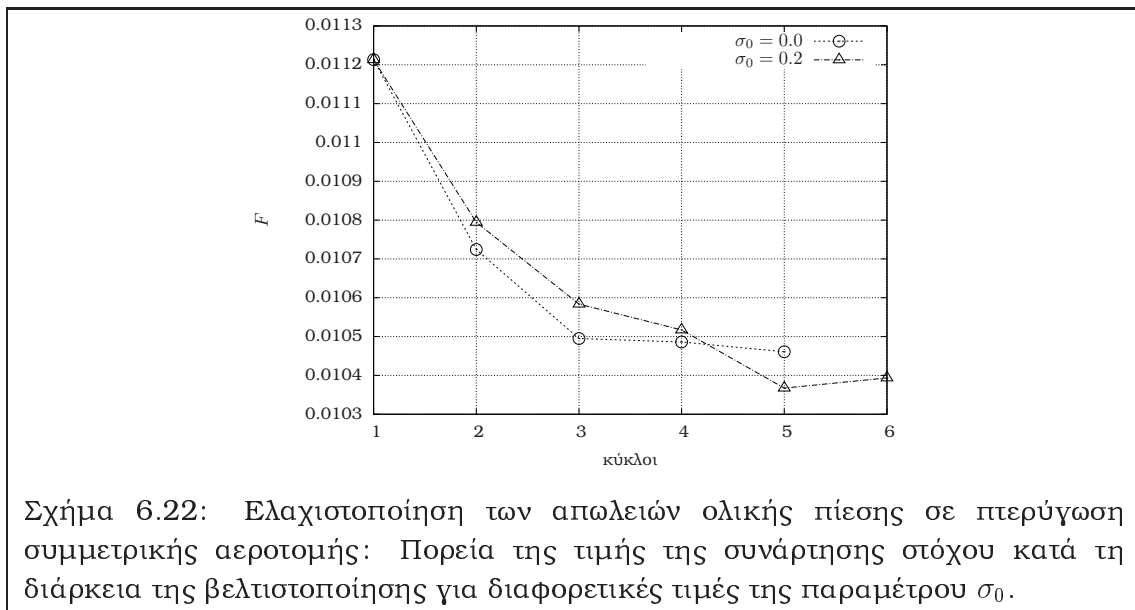
στο σχ. 6.21, με και χωρίς την επιβολή του σχετικού περιορισμού στη στροφή της ροής. Μη επιβολή του περιορισμού αναμενόμενα οδηγεί σε μεγαλύτερη μείωση της συνάρτησης κόστους, αδυνατώντας όμως να συγκρατήσει τη γωνία εξόδου της ροής στην επιθυμητή τιμή.

Τέλος, στο σχ. 6.22 παρουσιάζεται η πορεία μείωσης της συνάρτησης στόχου για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ_0 , εξ. 4.168'. Φαίνεται ότι η απόδοση μη-μηδενικής αρχικής τιμής στην εν λόγω παράμετρο φαινομενικά καθυστερεί στις πρώτες επαναλήψεις τον αλγόριθμο (έχουν παρατηρηθεί και περιπτώσεις που στην αρχή το συναρτησιακό αυξάνει αντί να μειώνεται αν δεν ελεγχθεί με κάποιο κριτήριο μείωσης, λ.χ. συνθήκες Wolfe ή Goldstein, [143]), αλλά μετά μειώνεται ραγδαία και μάλιστα σε ελαφρώς μικρότερη τιμή, δεδομένου ότι, όπως προαναφέρθηκε στην παρ. 4.2, αποφεύγεται η πρόωρη παγίδευση του αλγόριθμου στο όριο των εφικτών λύσεων. Στα προβλήματα που μελετήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, παρατηρήθηκε ότι τιμές ελαφρώς θετικές ($\sigma_0 = 0.1$ έως $\sigma_0 = 0.4$) επιδρούν ευεργετικά στην πορεία του





αλγόριθμου.

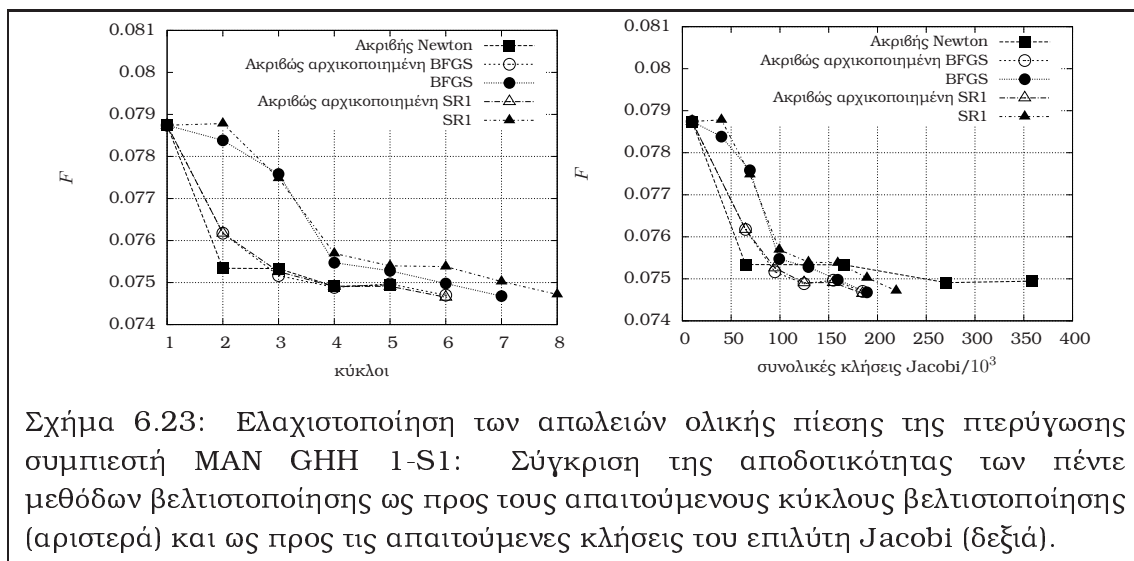


6.5 Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1

Η δεύτερη περίπτωση ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης που μελετάται είναι αυτή της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1, η ροή γύρω από τον οποίο μελετήθηκε στην παρ. 3.2. Η γωνία εξόδου της ροής εδώ απαιτείται να είναι $\alpha^{out} = 23^\circ$, τιμή με διαφορά περίπου τρεις μονάδες από την αρχική, προκειμένου να μελετηθεί η ικανότητα του αλγόριθμου να αντεπεξέλθει στην επιβολή αυστηρών

περιορισμών. Ταυτόχρονα, επιτρέπεται μείωση του πάχους της αεροτομής έως και 10% επί της αρχικής τιμής. Τέσσερα σημεία ελέγχου Bézier ανά πλευρά (υπερπίεσης/υποπίεσης) είναι ελεύθερα να κινηθούν κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση, οπότε το πρόβλημα έχει 8 βαθμούς ελευθερίας και ο υπολογισμός του ακριβούς εσσιανού μητρώου του συναρτησιακού και του περιορισμού στροφής της ροής σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης απαιτεί την επίλυση 11 ΣΜΔΕ.

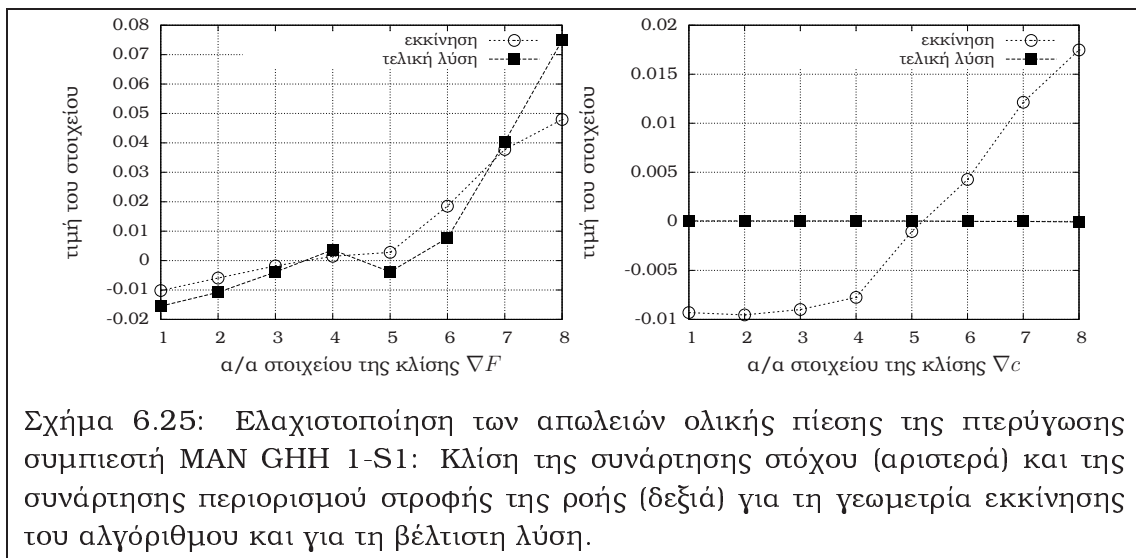
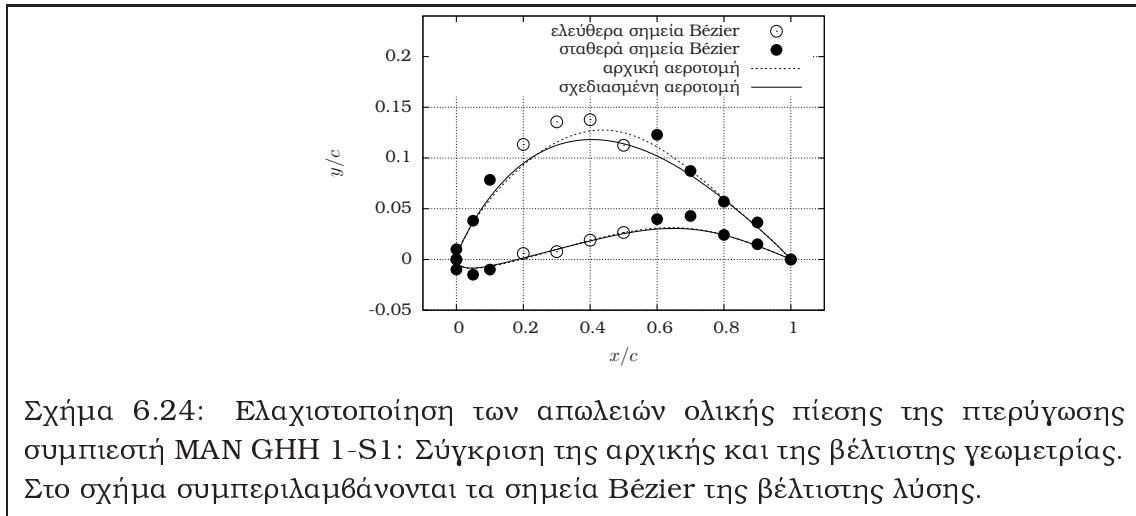
Στο σχ. 6.23 απεικονίζονται οι καμπύλες μείωσης της τιμής της συνάρτησης στόχου με τους κύκλους βελτιστοποίησης και με το συνολικό επεξεργαστικό κόστος (κλήσεις του επιλύτη Jacobi). Η πορεία σύγκλισης της ακριβούς μεθόδου Newton και των ακριβώς αρχικοποιημένων προσεγγιστικών μεθόδων Newton είναι παρόμοια, με τις τελευταίες να είναι πολύ πιο αποδοτικές όσον αφορά το συνολικά απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος. Οι συμβατικές μέθοδοι BFGS και SR1 απαιτούν περισσότερο χρόνο από τις ακριβώς αρχικοποιημένες εκδοχές τους. Επιπλέον, η συμβατική μέθοδος BFGS συγκλίνει σε λύση η οποία παραβιάζει αρκετά τους περιορισμούς πάχους, γεγονός που πιθανότατα οφείλεται στον αριθμό κατάστασης του μητρώου, ο οποίος σε κάποιες επαναλήψεις παίρνει ελαφρώς αρνητικές τιμές).



Σχήμα 6.23: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπίεστη MAN GHH 1-S1: Σύγκριση της αποδοτικότητας των πέντε μεθόδων βελτιστοποίησης ως προς τους απαιτούμενους κύκλους βελτιστοποίησης (αριστερά) και ως προς τις απαιτούμενες κλήσεις του επιλύτη Jacobi (δεξιά).

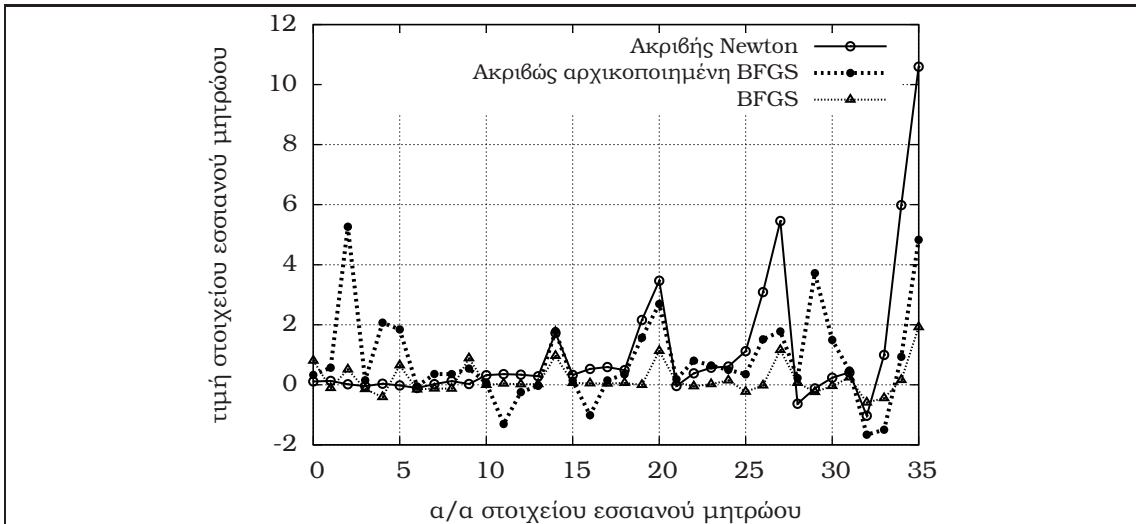
Στο σχ. 6.24 συγκρίνεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία με την αρχική αεροτομή. Στο σχήμα συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία ελέγχου Bézier της βέλτιστης λύσης. Απεικόνιση της κλίσης της συνάρτησης στόχου και της συνάρτησης περιορισμού στροφής της ροής για τη γεωμετρία εκκίνησης του αλγόριθμου και για τη βέλτιστη λύση φαίνεται στο σχ. 6.25. Πάλι, η νόρμα της κλίσης της συνάρτησης στόχου δεν είναι δυνατόν να μηδενιστεί λόγω των επιβαλλόμενων περιορισμών, ενώ η κλίση της συνάρτησης περιορισμού στροφής της ροής τείνει να μηδενιστεί, υποδεικνύοντας ότι ο περιορισμός ικανοποιείται.

Τα σχ. 6.26 και 6.27 περιλαμβάνουν συγκρίσεις των εσσιανών μητρώων της ακριβούς μεθόδου Newton και των μεθόδων BFGS και SR1 αντίστοιχα, ακριβώς αρχικοποιημένων και μη, κατά τον τελευταίο κύκλο της βελτιστοποίησης.

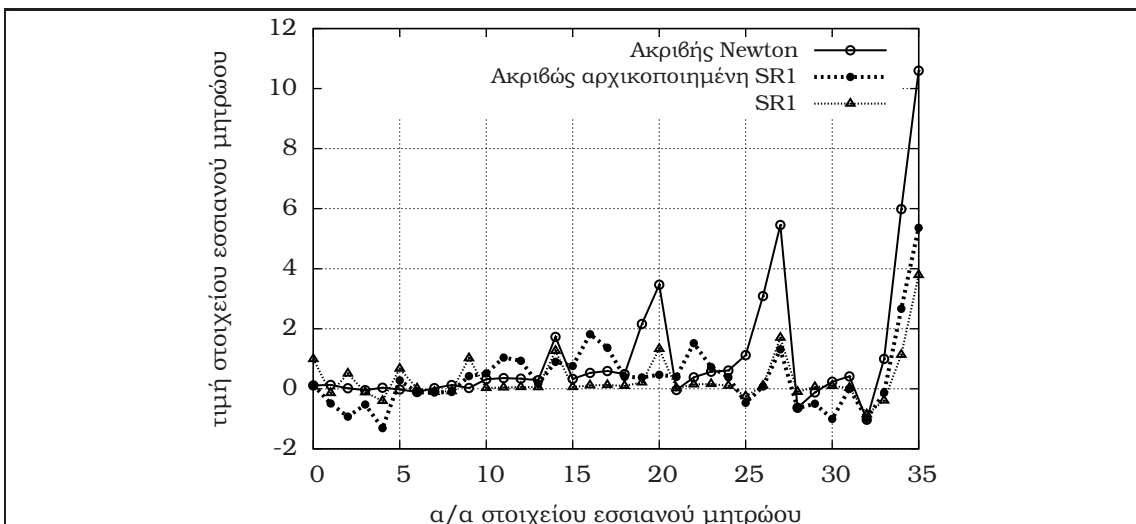


6.6 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν εφαρμογές αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης σε περιπτώσεις εξωτερικής και εσωτερικής αεροδυναμικής με χρήση του ακριβούς εσσανού μητρώου. Στην περίπτωση, μάλιστα, της ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης, επιβλήθηκαν περιορισμοί όχι μόνο γεωμετρικοί (ελάχιστο πάχος της γεωμετρίας) αλλά και ροϊκοί (προδιαγεγραμμένη στροφή της ροής), των οποίων υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας απαιτείται. Πέντε μέθοδοι δοκιμάστηκαν και συγκρίθηκαν ως προς την αποτελεσματικότητα και την αποδοτικότητα: η ακριβής μέθοδος Newton, στην οποία το ακριβές εσσανό μητρώο υπολογίζεται και χρησιμοποιείται σε κάθε κύκλο του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, οι συμβατικές προσεγγιστικές μέθοδοι BFGS και SR1 της βιβλιογραφίας (προσεγγιστικές μέθοδοι Newton που προσεγγίζουν το εσσανό μητρώο μέσω κατάλληλα εκπεφρασμένων



Σχήμα 6.26: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1: Εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο Newton και BFGS (ακριβώς αρχικοποιημένη και μη) στη βέλτιστη λύση.



Σχήμα 6.27: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1: Εσσιανό μητρώο που υπολογίζεται με τη μέθοδο Newton και SR1 (ακριβώς αρχικοποιημένη και μη) στη βέλτιστη λύση.

αναδρομικών τύπων) και οι ακριβώς αρχικοποιημένες παραλλαγές τους, στις οποίες το ακριβές εσσιανό μητρώο υπολογίζεται στον πρώτο κύκλο της βελτιστοποίησης μόνο, και κατόπιν ανανεώνεται με χρήση των αντίστοιχων αναδρομικών τύπων των προσεγγιστικών μεθόδων Newton. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, οι ακριβώς αρχικοποιημένες μέθοδοι αποδείχθηκε ότι είναι πιο αποδοτικές από την ακριβή μέθοδο Newton και από τις αντίστοιχες μεθόδους της βιβλιογραφίας. Μείωση του υπολογιστικού κόστους δεν παρατηρήθηκε μόνο σε μία περίπτωση αντίστροφου σχεδιασμού, όπου από σύμπτωση οι αναδρομικοί τύποι των προσεγγιστικών μεθόδων Newton έδωσαν γρήγορα καλές προσεγγίσεις του πραγματικού εσσιανού μητρώου. Σε προβλήματα βελτιστοποίησης με σχετικά αυξημένο αριθμό μεταβλητών, το υπολογιστικό κόστος των προτεινόμενων μεθόδων αυξάνεται. Ταυτόχρονα όμως παρατηρείται ότι οι μέθοδοι αυτές είναι πιο αποτελεσματικές από τις συμβατικές προσεγγιστικές μεθόδους Newton, οι οποίες επιτυγχάνουν αισθητά μικρότερη μείωση της συνάρτησης στόχου. Επίσης, στις περιπτώσεις ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης υπό περιορισμούς διαπιστώθηκε ότι μία ελαφρώς θετική τιμή της παραμέτρου σ επιδρά θετικά στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Κεφάλαιο 7

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ A POSTERIORI ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει την ανάπτυξη και την εφαρμογή μίας μεθόδου a posteriori ανάλυσης σφάλματος (APEA¹) σε 2Δ περιπτώσεις εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής, η οποία κάνει χρήση της μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων ροής και της τεχνικής προσαρμογής πλέγματος που παρουσιάστηκαν στο κεφ. 2, καθώς και της διακριτής συζυγούς μεθόδου που παρουσιάστηκε στο κεφ. 5. Η μέθοδος αποσκοπεί στον υπολογισμό της τιμής ενός συγκεκριμένου συναρτησιακού με ακρίβεια η οποία καθορίζεται από το χρήστη. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιβολή διορθώσεων στην τιμή του εν λόγω συναρτησιακού καθώς και την προσαρμογή του πλέγματος βάσει ενός αισθητήριου προσαρμογής που 'αισθάνεται' τις πηγές σφάλματος κατά τον υπολογισμό του συναρτησιακού αυτού, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα αισθητήρια που παρουσιάστηκαν στην παρ. 2.6.1, με χρήση του υπολογισμένου συζυγούς πεδίου.

7.1 Θεωρία της a posteriori ανάλυσης σφάλματος

Στόχος της μεθόδου είναι ο υπολογισμός ενός συναρτησιακού $F(U)$ με μία προκαθορισμένη ακρίβεια e_0 και με το ελάχιστο δυνατό κόστος σε επεξεργαστική ισχύ και μνήμη υπολογιστή. Η μέθοδος υπολογίζει το εν λόγω συναρτησιακό με την επιθυμητή ακρίβεια πραγματοποιώντας διαδοχικές προσαρμογές στο αρχικό πλέγμα και επιβάλλοντας διορθώσεις στην τιμή του συναρτησιακού που υπολογίζεται στα προσαρμοσμένα πλέγματα. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιούνται σε κάθε κύκλο της μεθόδου δύο πλέγματα, ένα αραιό πλέγμα H (στο οποίο όλα τα μεγέθη θα φέρουν τον αριστερό εκθέτη H , λ.χ. $^H U$), στο οποίο η επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων δεν επιφέρει μεγάλο επεξεργαστικό κόστος και κόστος αποθήκευσης, αλλά στο οποίο το υπολογιζόμενο συναρτησιακό έχει σχετικά χαμηλή ακρίβεια, και ένα πυκνό πλέγμα h (αντίστοιχα με μεγέθη που φέρουν τον αριστερό εκθέτη h , λ.χ. $^h U$), στο οποίο η επίλυση των

¹a posteriori error analysis

εξιώσεων ροής δίνει πιο ακριβή τιμή για το εν λόγω συναρτησιακό αλλά στο οποίο λόγω κόστους αποφεύγονται επιλύσεις είτε του προβλήματος ροής είτε των συζυγών εξισώσεων. Όποτε κατά την ανάπτυξη της μεθόδου χρειάζονται μεγέθη στο πυκνό πλέγμα, αυτά θα λαμβάνονται από το αραιό πλέγμα μέσω ενός τελεστή προεκβολής² I , οπότε τα αντίστοιχα μεγέθη θα φέρουν τον αριστερό εκθέτη I , λ.χ. ${}^I U$. Έτσι, για το συναρτησιακό του οποίου ο υπολογισμός μας ενδιαφέρει

$$\begin{aligned} {}^H F &= {}^H F({}^H U_i^P) \\ {}^h F &= {}^h F({}^h U_i^P) \\ {}^I F &= {}^h F({}^I U_i^P) \end{aligned}$$

ενώ, αντίστοιχα, για τον τελεστή υπολοίπου των εξισώσεων ροής

$$\begin{aligned} {}^H R_j^Q &= {}^H R_j^Q({}^H U_i^P) \\ {}^h R_j^Q &= {}^h R_j^Q({}^h U_i^P) \\ {}^I R_j^Q &= {}^h R_j^Q({}^I U_i^P) \end{aligned}$$

όπου όπως προαναφέρθηκε

$${}^I U_i^P = I {}^H U_j^Q$$

Στην παρούσα μέθοδο, το πυκνό πλέγμα h προκύπτει με διάσπαση κάθε στοιχείου του αραιού πλέγματος H σε τέσσερα στοιχεία (τρίγωνα ή τετράπλευρα), σαν να είχαν σημειωθεί όλες οι πλευρές του για διάσπαση, σχ. 7.1.

Αν το συναρτησιακό F αναπτυχθεί κατά Taylor γύρω από τη λύση στο πυκνό πλέγμα που λαμβάνεται μέσω της προεκβολής I , ${}^I U$, λαμβάνεται με απαλοιφή των μη-γραμμικών όρων

$${}^h F \approx {}^I F + \frac{\partial {}^I F}{\partial {}^I U_i^P} ({}^h U_i^P - {}^I U_i^P) \quad (7.1)$$

ενώ, αντίστοιχα, για τον τελεστή υπολοίπου των εξισώσεων ροής

$${}^h R_j^Q \approx {}^I R_j^Q + \frac{\partial {}^I R_j^Q}{\partial {}^I U_i^P} ({}^h U_i^P - {}^I U_i^P) = 0 \quad (7.2)$$

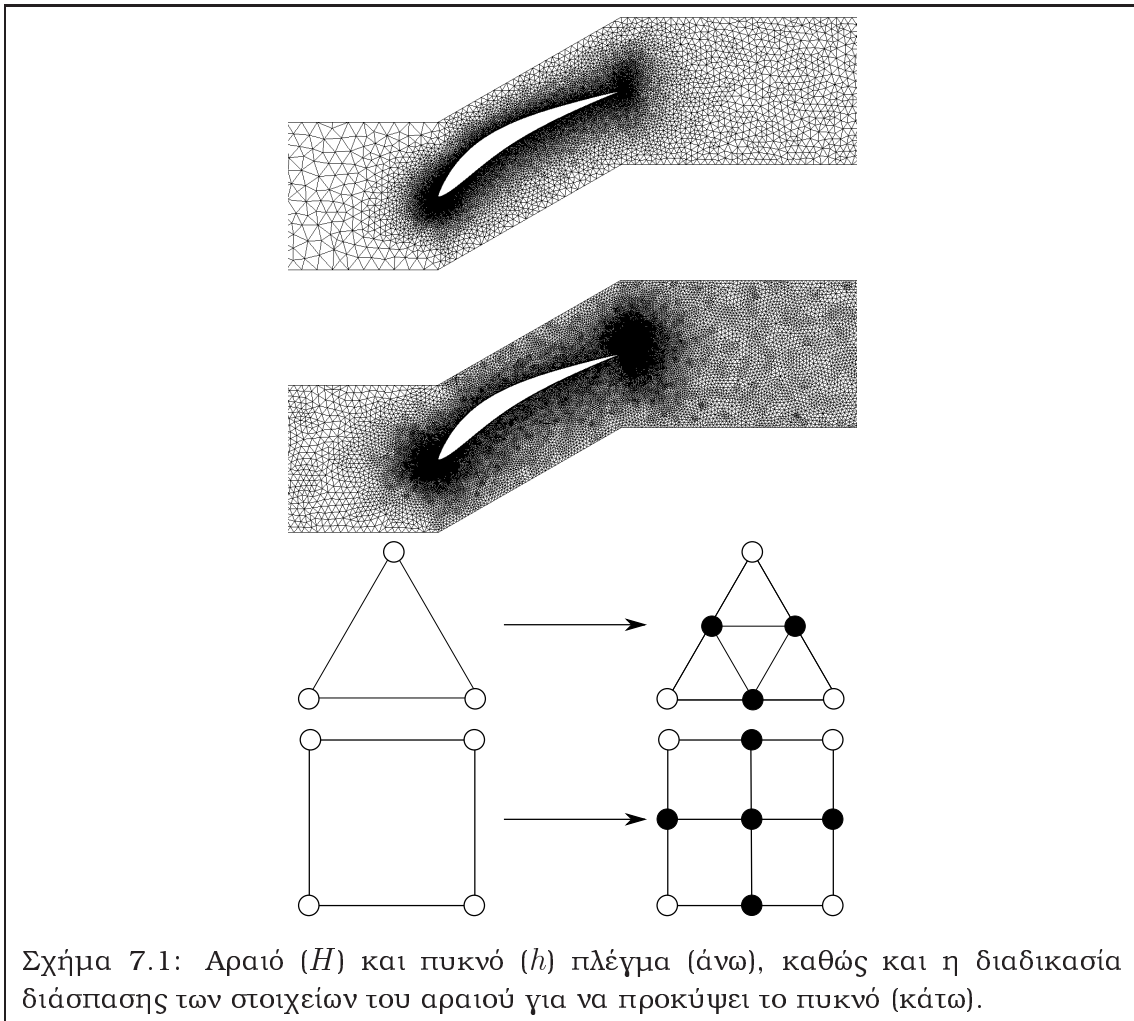
Εισαγωγή της εξ. 7.2 στην εξ. 7.1 δίνει

$${}^h F \approx {}^I F - \frac{\partial {}^I F}{\partial {}^I U_i^P} \left(\frac{\partial {}^I R_j^Q}{\partial {}^I U_i^P} \right)^{-1} {}^I R_j^Q = {}^I F - {}^h \Psi_j^Q {}^I R_j^Q \quad (7.3)$$

όπου το συζυγές πεδίο ${}^h \Psi_j^Q$ λαμβάνεται με επίλυση των παρακάτω συζυγών εξισώσεων στο πυκνό πλέγμα h

$${}^h \Psi_j^Q \frac{\partial {}^I R_j^Q}{\partial {}^I U_i^P} = \frac{\partial {}^I F}{\partial {}^I U_i^P}$$

²extrapolation operator



Σχήμα 7.1: Αραιό (H) και πυκνό (h) πλέγμα (άνω), καθώς και η διαδικασία διάσπασης των στοιχείων του αραιού για να προκύψει το πυκνό (κάτω).

Επειδή είναι επιθυμητό να μην επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις στο πυκνό πλέγμα, αυτές επιλύονται στο αραιό πλέγμα ώστε να υπολογιστούν οι συζυγείς μεταβλητές ${}^H\Psi_j^Q$

$${}^H\Psi_j^Q \frac{\partial {}^H R_j^Q}{\partial {}^H U_i^P} = \frac{\partial {}^H F}{\partial {}^H U_i^P}$$

και λαμβάνεται μία προσέγγιση αυτών στο πυκνό πλέγμα μέσω ενός τελεστή προεκβολής (στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται ο τελεστής I)

$${}^I\Psi_i^P = I {}^H\Psi_j^Q$$

Με χρήση των προεκβελημένων συζυγών μεταβλητών, η εξ. 7.3 γράφεται

$${}^h\tilde{F} \approx {}^I F - \underbrace{{}^I\Psi_j^Q {}^I R_j^Q}_{\text{διόρθωση}}$$

Συνεπώς, η παραπάνω έκφραση για το συναρτησιακό μπορεί να ερμηνευτεί ως το άθροισμα της τιμής του συναρτησιακού που προκύπτει στο πυκνό πλέγμα αν

χρησιμοποιηθούν οι προεκβεβλημένες τιμές των μεταβλητών ροής και μίας διόρθωσης που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες συζυγείς μεταβλητές.

Το σφάλμα που απομένει μετά από την επιβολή της διόρθωσης στο συναρτησιακό προκύπτει αν ξαναγραφεί η εξ. 7.3 ως εξής

$${}^h F - {}^I F = \underbrace{{}^I \Psi_j^Q {}^I R_j^Q}_{\text{διόρθωση}} + \underbrace{({}^h \Psi_j^Q - {}^I \Psi_j^Q) {}^I R_j^Q}_{\text{απομένον σφάλμα}} \quad (7.4)$$

ή εναλλακτικά χρησιμοποιώντας το υπόλοιπο των συζυγών εξισώσεων και των μεταβλητών ροής, [166]

$${}^h F - {}^I F = \underbrace{{}^I \Psi_j^Q {}^I R_j^Q}_{\text{διόρθωση}} + \underbrace{({}^h U_i^Q - {}^I U_i^Q) {}^I (R_\Psi)_j^Q}_{\text{απομένον σφάλμα}} \quad (7.5)$$

όπου

$${}^I (R_\Psi)_j^Q \equiv {}^I \Psi_j^Q \frac{\partial {}^I R_j^Q}{\partial {}^I U_i^P} - \frac{\partial {}^I F}{\partial {}^I U_i^P}$$

Οι δύο εκφράσεις θα ήταν ισοδύναμες μόνο αν τα αναπτύγματα Taylor πρώτης τάξης, εξ. 7.1 και εξ. 7.2, ήταν ακριβή. Δεδομένου ότι αυτό δεν ισχύει, υπάρχει ένα ‘κενό’ δυαδικότητας³ ανάμεσα στις εκφράσεις των εξ. 7.4 και 7.5, [167]. Προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ταυτόχρονα το απομένον σφάλμα και το ‘κενό’ δυαδικότητας, εκφράζεται ένα αισθητήριο προσαρμογής, βάσει των δύο εκφράσεων του απομένοντος σφάλματος, στο μεσόκομβο M κάθε ακμής του πλέγματος.

$$\epsilon_M = \frac{1}{2} \left[\left| ({}^I \Psi_j^M - {}^L \Psi_j^M) {}^L R_j^M \right| + \left| ({}^I U_i^M - {}^L U_i^M) {}^L (R_\Psi)_j^M \right| \right] \quad (7.6)$$

Εδώ, ο τελεστής προεκβολής L συμβολίζει κάποια προεκβολή χαμηλής τάξης στο μεσόκομβο, ενώ ο τελεστής I μία πιο ακριβή προεκβολή (λ.χ. στην παρούσα διατριβή ο τελεστής L αντιπροσωπεύει υπολογισμό της μέσης τιμής στο μεσόκομβο της κάθε ακμής, ενώ ο τελεστής I συμβολίζει προεκβολή με χρήση των χωρικών κλίσεων των εκάστοτε μεγεθών στους ίδιους κόμβους). Ως κατώφλι προσαρμογής τίθεται η τιμή $\bar{\epsilon}_0 = \frac{\epsilon_0}{N}$, όπου N ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος. Συνεπώς, το κριτήριο προσαρμογής για μία ακμή εκφράζεται ως

$$\eta_M = \frac{\epsilon_M}{\bar{\epsilon}_0}$$

και η ακμή διασπάται όταν $\eta_M > 1$.

Συνοψίζοντας, σε έναν κύκλο της μεθόδου εκτελούνται τα παρακάτω βήματα :

- Επιλύονται οι εξισώσεις ροής στο αραιό πλέγμα.
- Επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις στο αραιό πλέγμα.

³duality gap

- Δημιουργείται το πυκνό πλέγμα με διάσπαση των στοιχείων του αραιού πλέγματος και προεκβάλλονται οι μεταβλητές ροής και οι συζυγείς μεταβλητές σε αυτό μέσω του τελεστή προεκβολής I .
- Υπολογίζεται το συναρτησιακό με χρήση των προεκβεβλημένων τιμών των μεταβλητών ροής και επιβάλλεται η διόρθωση σε αυτό, εξ. 7.1.
- Προσαρμόζεται το πλέγμα βάσει του αισθητηρίου της εξ. 7.6

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται στο προσαρμοσμένο πλέγμα μέχρις ότου στο τέλος κάποιου κύκλου να ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$\sum_{M \in N_e} \epsilon_M \leq e_0$$

όπου N_e το σύνολο των ακμών του πυκνού πλέγματος του τρέχοντος κύκλου, που σηματοδοτεί την επίτευξη της προκαθορισμένης ακρίβειας στην τιμή του συναρτησιακού.

7.2 Εφαρμογές

7.2.1 Πρόλεξη της τιμής του συντελεστή άνωσης και οπισθέλκουσας της αεροτομής RAE 2822

Στη συνέχεια υπολογίζεται ο συντελεστής άνωσης και οπισθέλκουσας της αεροτομής RAE 2822 που μελετήθηκε στην ενότητα 3.1 με προκαθορισμένη ακρίβεια $e_0 = 10^{-3}$. Συνεπώς, τα δύο συναρτησιακά που εμπλέκονται είναι τα $F^i = c_i$, $i = 1, 2$, όπου

$$c_i = \begin{bmatrix} c_D \\ c_L \end{bmatrix} = M_{ij} f_j$$

με

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \cos a^\infty & \sin a^\infty \\ -\sin a^\infty & \cos a^\infty \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} f_i &= \int_{wall} (pn_i - \tau_{ij}n_j) ds = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{B}_w} p^J (n_i)^J - (\tau_{ij})^J (n_j)^J \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση, το σύνολο \mathcal{B}_w αποτελείται από τις ακμές του πλέγματος που απαρτίζουν το διακριτοποιημένο στερεό όριο, ενώ ο δείκτης J υποδεικνύει άθροιση στους δύο κόμβους της ακμής. Τέλος, $(n_j)^J$ είναι το κάθετο στην ακμή διάνυσμα με μέτρο $\Delta s^J = \frac{\Delta s^S}{2}$, όπου Δs^S το μήκος της ακμής.

Η τιμή του συναρτησιακού που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου συγκρίνεται με την τιμή που λαμβάνεται από την απ' ευθείας επίλυση των εξισώσεων ροής σε μία διαδοχή πλεγμάτων που λαμβάνονται έχοντας ως εκκίνηση το αρχικό πλέγμα με ισότροπη διάσπαση. Επιπλέον, ορίζεται μία ασυμπτωτική τιμή η οποία υπολογίζεται εφαρμόζοντας προεκβολή κατά Richardson στις τιμές των δύο τελευταίων ομοιόμορφα πυκνομένων πλεγμάτων. Στα σχ. 7.2 και 7.3 απεικονίζονται οι τιμές του συντελεστή άνωσης και οπισθέλκουσας που λαμβάνονται από τη μέθοδο APEA με και χωρίς την επιβολή διόρθωσης, τα ομοιόμορφα προσαρμοσμένα πλέγματα καθώς και η ασυμπτωτική τιμή, συναρτήσει του απαιτούμενου χρόνου επίλυσης και του μεγέθους του πλέγματος. Μάλιστα, προκειμένου οι συγκρίσεις να είναι αντικειμενικές, στα ομοιόμορφα πλέγματα ως απαιτούμενος χρόνος λαμβάνεται ο χρόνος επίλυσης των εξισώσεων χωριστά σε κάθε πλέγμα, ενώ για τη μέθοδο APEA μετράται το σύνολο του απαιτούμενου χρόνου για την επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων σε όλη τη σειρά των πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται. Από τα σχήματα προκύπτει ότι η μέθοδος APEA υπολογίζει το συναρτησιακό με την επιθυμητή ακρίβεια και με μικρότερο κόστος υπολογισμού και μνήμης. Η μέθοδος τείνει να πυκνώσει ιδιαίτερα την περιοχή κοντά στο στερεό όριο και στον ομόρου, σχ. 7.4.

7.2.2 Πρόλεξη των απωλειών της πτερύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1

Στην ενότητα αυτή υπολογίζονται οι απώλειες της ροής της πτερύγωσης συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης MAN GHH 1-S1 που μελετήθηκε στην ενότητα 3.2 για $a^{in} = 47^\circ$. Οι απώλειες εκφράζονται είτε μέσω της παραγόμενης στο υπολογιστικό χωρίο εντροπίας είτε μέσω της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ των διατομών εισόδου και εξόδου της ροής. Τα δύο αυτά συναρτησιακά διαφέρουν ως προς την περιοχή του υπολογιστικού χωρίου όπου πραγματοποιείται η ολοκλήρωση για τον υπολογισμό τους. Η παραγωγή εντροπίας εκφράζεται από το παρακάτω χωρικό ολοκλήρωμα, που καλύπτει όλο το υπολογιστικό χωρίο

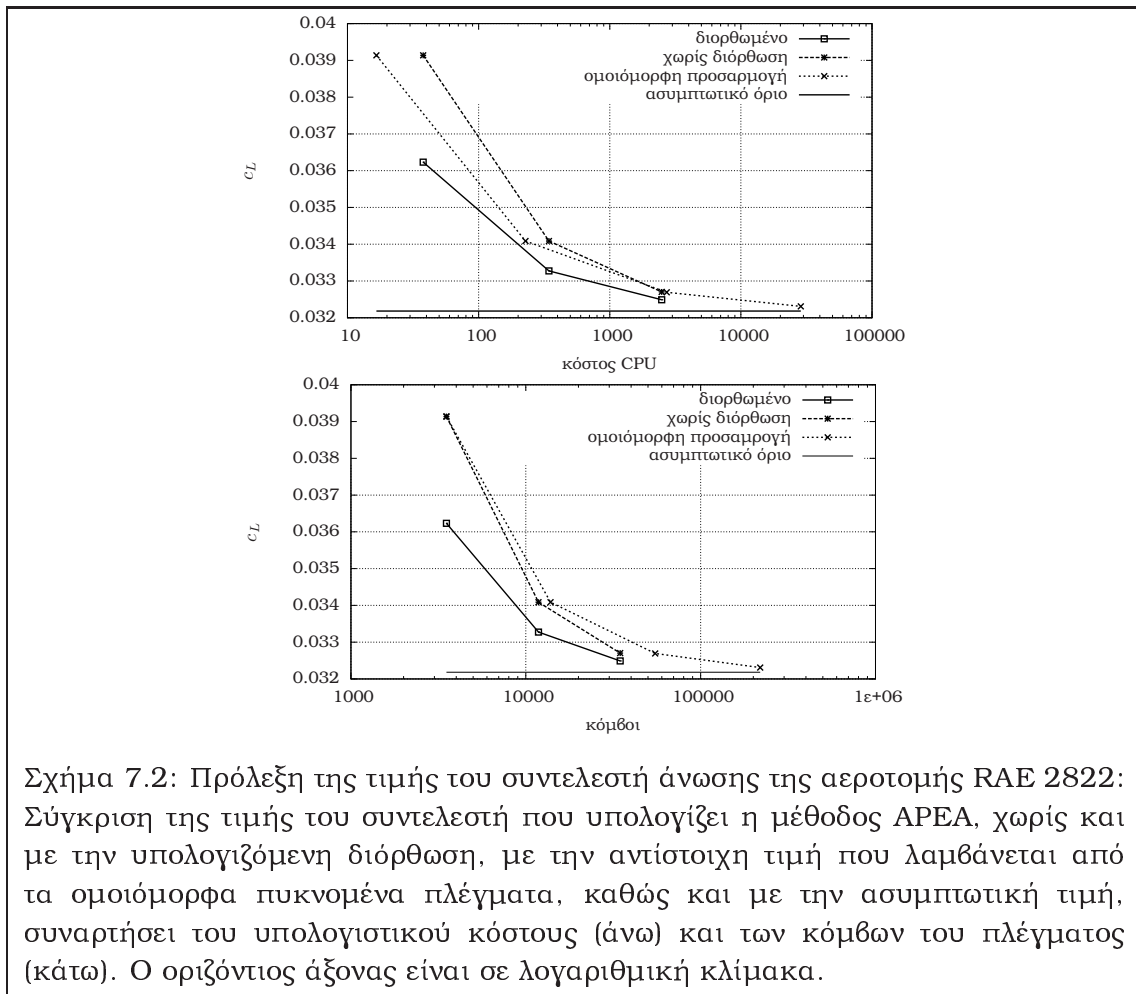
$$F = \int_{\Omega} \rho u_i \frac{\partial s}{\partial x_i} d\Omega$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα, υπό την παραδοχή αδιαβατικών τοιχωμάτων, μπορεί να γραφεί ως εξής, [256]

$$F = \int_{\Omega} \frac{1}{T} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega = \sum_{VP} \frac{1}{T^P} (\tau_{ij})^P \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^P$$

όπου V^P είναι το σύνολο των πεπερασμένων όγκων του πλέγματος.

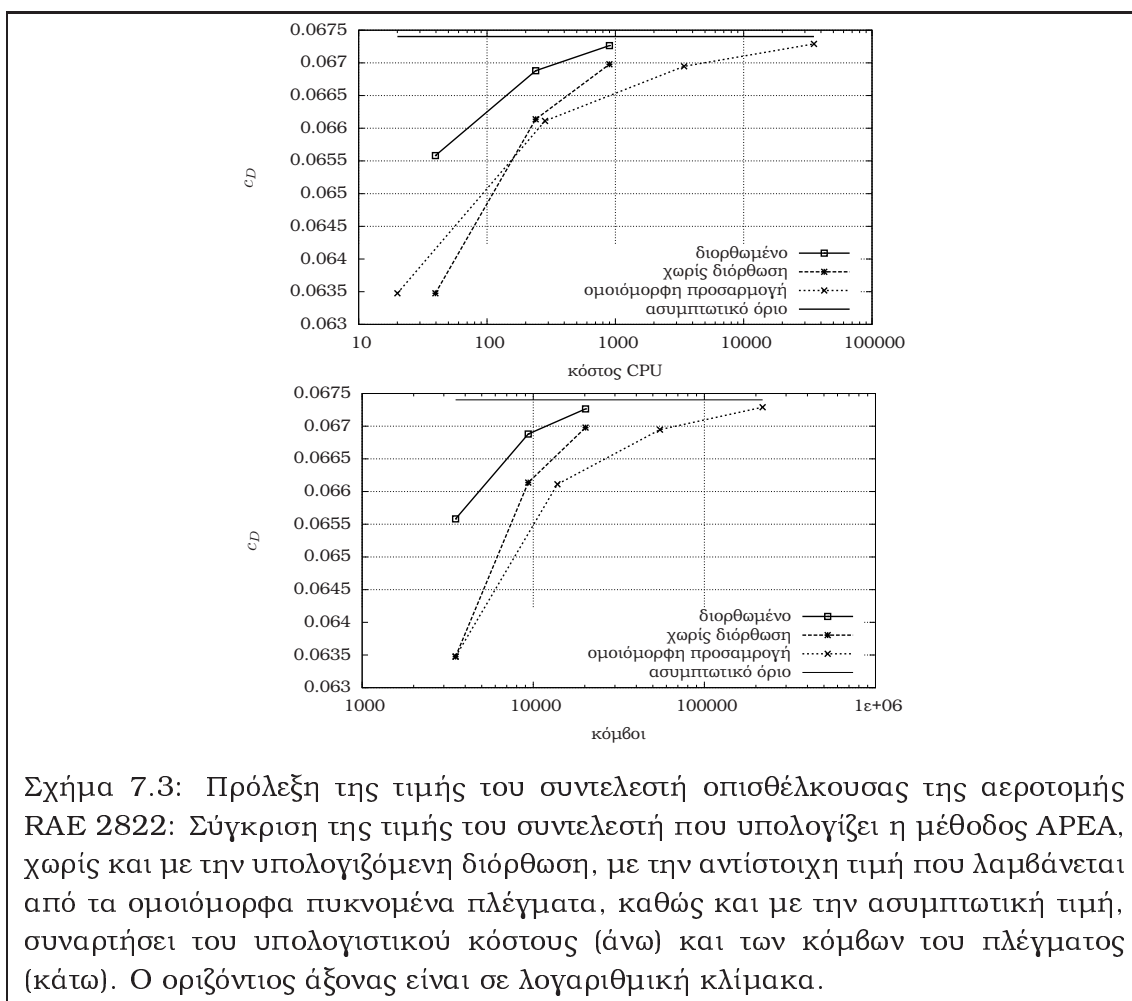
Αντιθέτως, οι απώλειες ολικής πίεσης εκφράζονται στα όρια εισόδου και εξόδου του υπολογιστικού χωρίου από την εξ. 4.11, η οποία επαναλαμβάνεται παρακάτω



χάριν πληρότητας

$$F = \int_{in} p_t dS - \int_{out} p_t dS = \sum_{B_i} p_t^J \Delta s^J - \sum_{B_o} p_t^J \Delta s^J \quad (4.11)$$

Πάλι, ως τιμή αναφοράς θεωρείται αυτή που προκύπτει από την εφαρμογή προεκβολής κατά Richardson στις τιμές του συναρτησιακού που προκύπτουν κατόπιν επίλυσης των εξισώσεων ροής σε μία σειρά ομοιόμορφα πυκνομένων πλεγμάτων, με εκκίνηση το αρχικό πλέγμα που χρησιμοποιείται και στην εφαρμογή της μεθόδου APEA. Η επιθυμητή ακρίβεια τίθεται ίση με $e_0 = 10^{-4}$. Στα σχ. 7.2 και 7.3 απεικονίζονται οι τιμές της παραγωγής εντροπίας και των απωλειών ολικής πίεσης αντίστοιχα, όπως υπολογίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο, με και χωρίς την επιβολή της διόρθωσης, καθώς και από τα ομοιόμορφα προσαρμοσμένα πλέγματα, συναρτήσει του απαιτούμενου χρόνου υπολογισμού και του αριθμού των κόμβων του εκάστοτε πλέγματος. Στα σχήματα συμπεριλαμβάνονται και οι αντίστοιχες ασυμπτωτικές τιμές. Η μέθοδος APEA υπολογίζει και τις δύο εκφράσεις των απωλειών με την επιθυμητή ακρίβεια και με

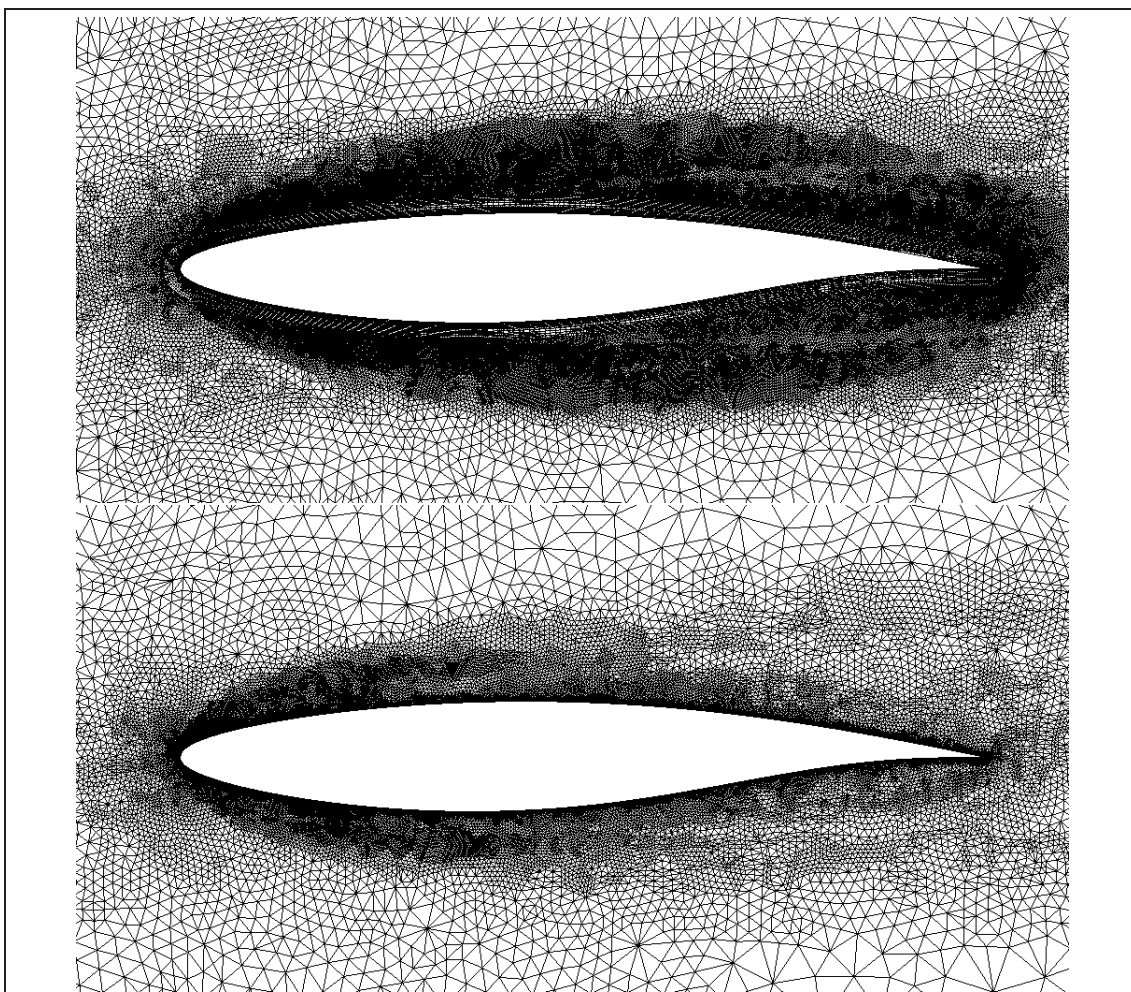


Σχήμα 7.3: Πρόλεξη της τιμής του συντελεστή οπισθέλκουσας της αεροτομής RAE 2822: Σύγκριση της τιμής του συντελεστή που υπολογίζει η μέθοδος APEA, χωρίς και με την υπολογιζόμενη διόρθωση, με την αντίστοιχη τιμή που λαμβάνεται από τα ομοιόμορφα πυκνομένα πλέγματα, καθώς και με την ασυμπτωτική τιμή, συναρτήσει του υπολογιστικού κόστους (άνω) και των κόμβων του πλέγματος (κάτω). Ο οριζόντιος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

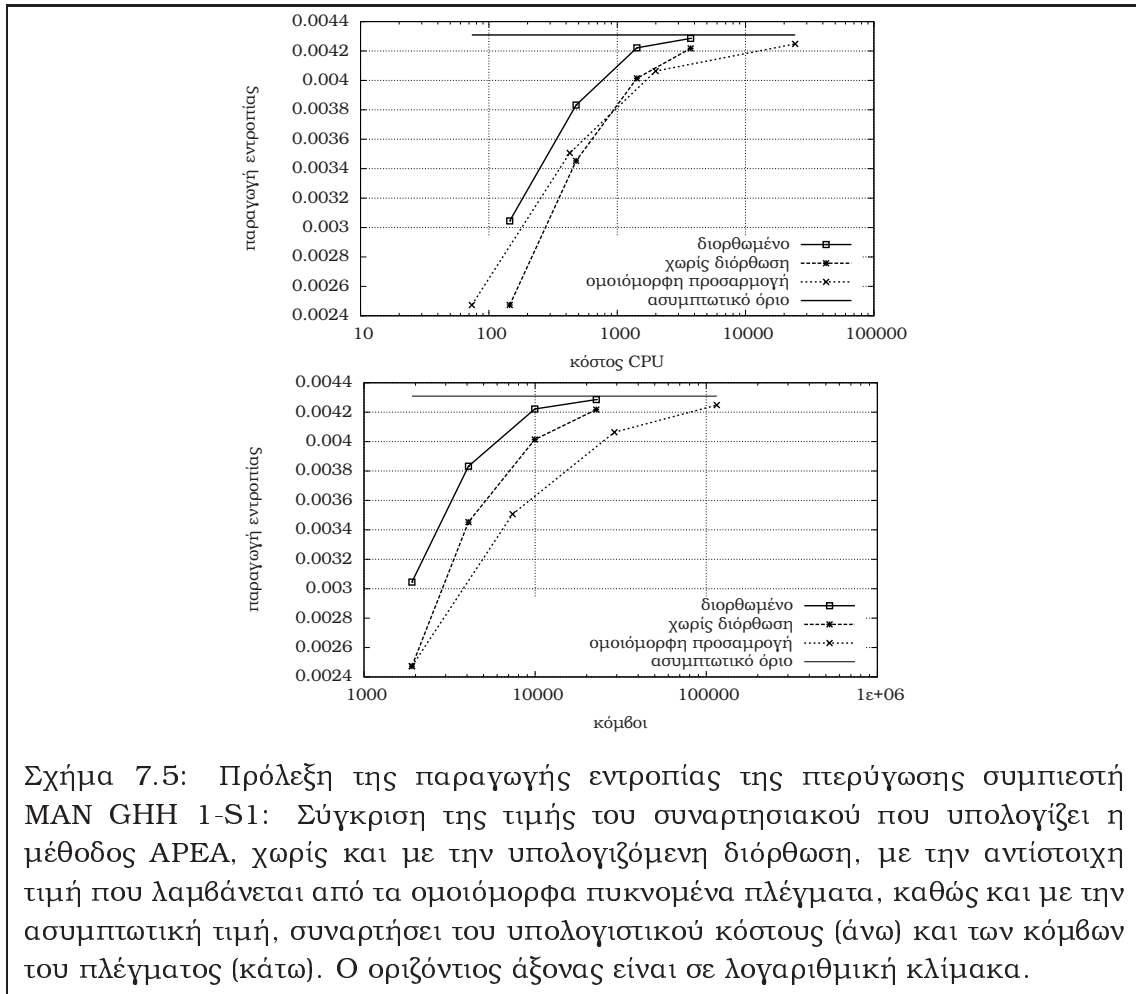
μικρότερο κόστος υπολογισμού και μνήμης. Η προτεινόμενη μέθοδος δίνει και πάλι πλέγμα προσαρμοσμένο κυρίως στην περιοχή του ομόρου και κοντά στο στερεό όριο, σχ. 7.7.

7.3 Ανακεφαλαίωση

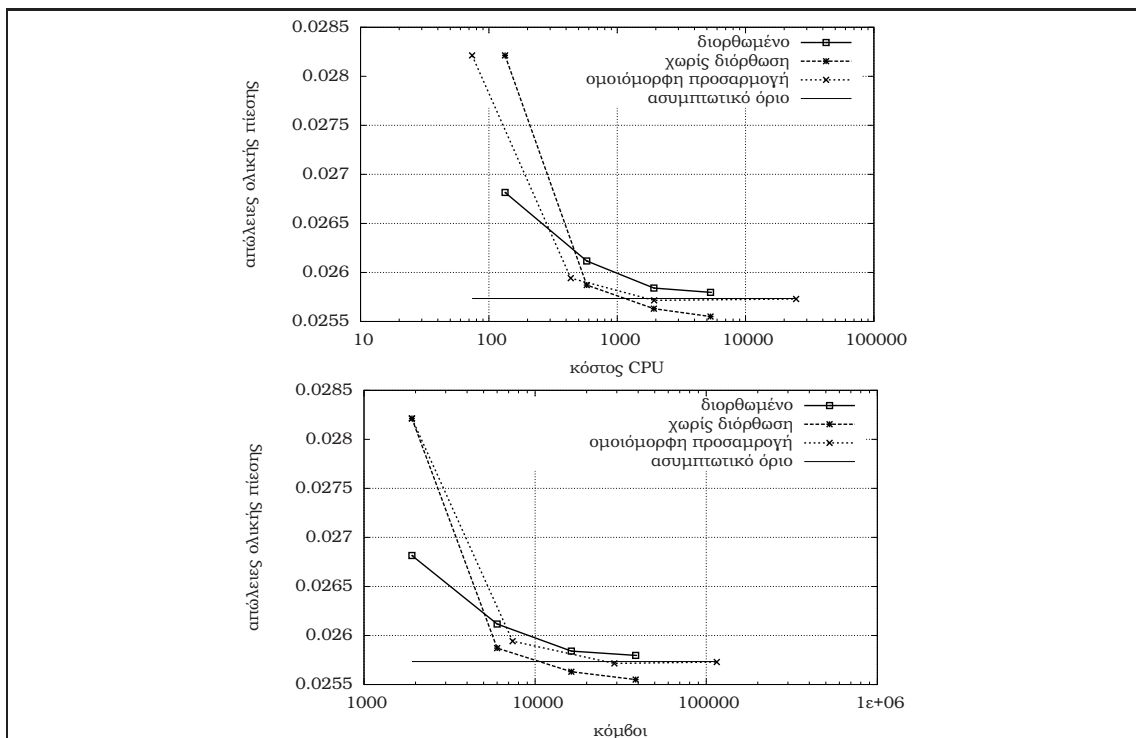
Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία μέθοδος a posteriori ανάλυσης σφάλματος, η οποία αποσκοπεί στον υπολογισμό συναρτησιακών με προκαθορισμένη από τον χρήστη ακρίβεια, χρησιμοποιώντας ένα σχετικά αραιό αρχικό πλέγμα, και με μικρότερο υπολογιστικό και αποθηκευτικό κόστος από αυτό που θα επέφερε η απευθείας επίλυση των εξισώσεων σε ένα αρκετά πιο πυκνό πλέγμα το οποίο θα έδινε την επιθυμητή ακρίβεια. Η μέθοδος αναπτύχθηκε συνδυάζοντας την τεχνική προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων που αναπτύχθηκε στο κεφ. 2 και τη διακριτή συζυγή μέθοδο που αναπτύχθηκε στο κεφ. 5 και εφαρμόστηκε επιτυχώς στην πρόλεξη των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας μίας 2Δ αεροτομής και στην πρόλεξη των απωλειών λόγω συνεκτικότητας μίας 2Δ



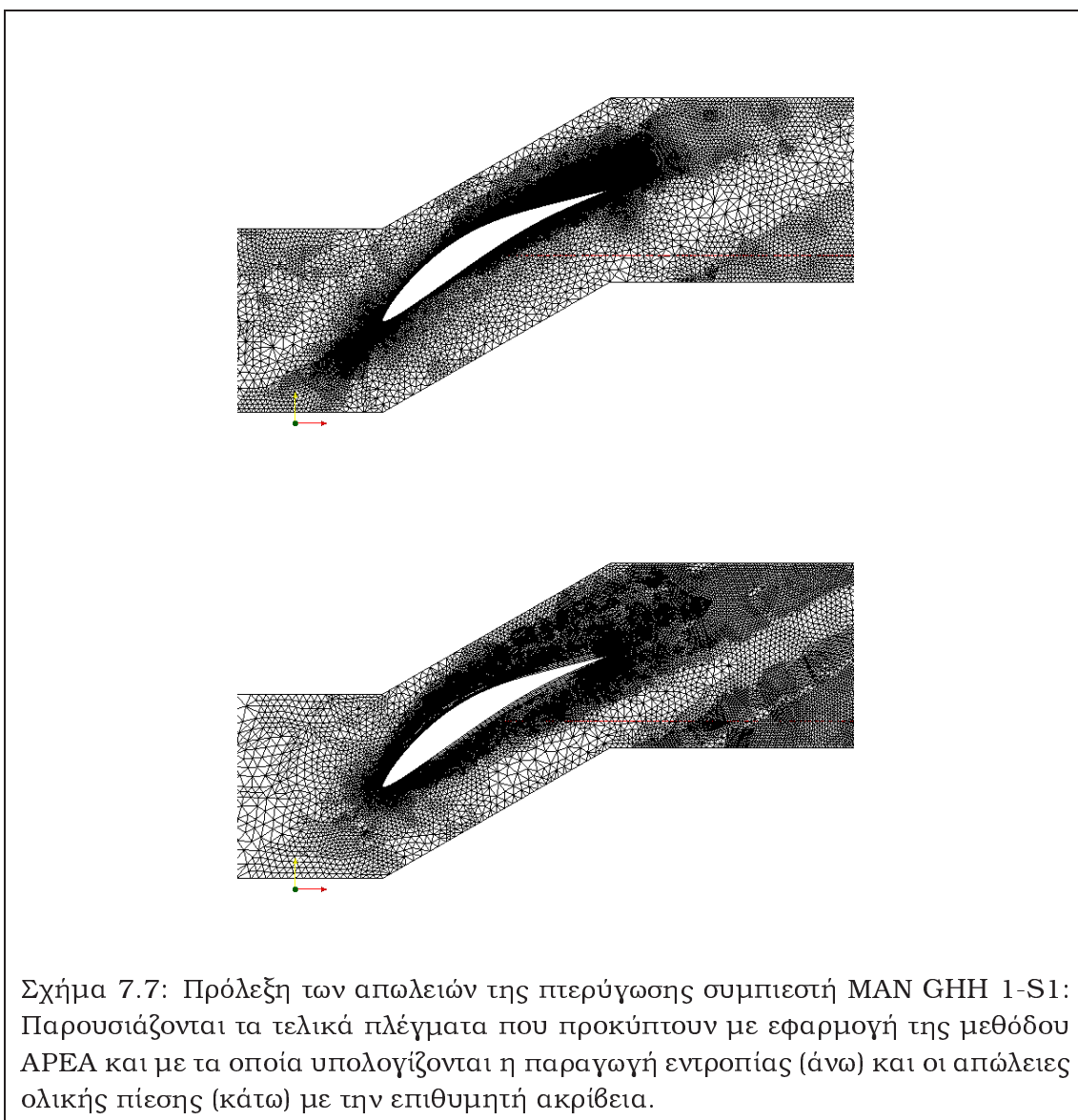
Σχήμα 7.4: Πρόλεξη της τιμής των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας της αεροτομής RAE 2822: Παρουσιάζονται τα τελικά πλέγματα που προκύπτουν με εφαρμογή της μεθόδου APEA και με τα οποία υπολογίζονται οι συντελεστές άνωσης (άνω) και οπισθέλκουσας (κάτω) με την επιθυμητή ακρίβεια.



περύγωσης συμπιεστή.



Σχήμα 7.6: Πρόλεξη των απωλειών ολικής πίεσης της περύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1: Σύγκριση της τιμής των απωλειών που υπολογίζει η μέθοδος APEA, χωρίς και με την υπολογιζόμενη διόρθωση, με την αντίστοιχη τιμή που λαμβάνεται από τα ομοιόμορφα πυκνομένα πλέγματα, καθώς και με την ασυμπτωτική τιμή, συναρτήσει του υπολογιστικού κόστους (άνω) και των κόμβων του πλέγματος (κάτω). Ο οριζόντιος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα.



Σχήμα 7.7: Πρόλεξη των απωλειών της περύγωσης συμπιεστή MAN GHH 1-S1: Παρουσιάζονται τα τελικά πλέγματα που προκύπτουν με εφαρμογή της μεθόδου ΑΡΕΑ και με τα οποία υπολογίζονται η παραγωγή εντροπίας (άνω) και οι απώλειες ολικής πίεσης (κάτω) με την επιθυμητή ακρίβεια.

Κεφάλαιο 8

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανακεφαλαίωση των πεπραγμένων στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής, συνοψίζονται οι καινοτομίες των μεθόδων που παρουσιάστηκαν σε αυτή και τα συμπεράσματα από την ανάπτυξη και την εφαρμογή τους. Στόχος της διατριβής ήταν η ανάπτυξη μίας διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου και η επακόλουθη εφαρμογή του μητρώου αυτού σε διαδικασίες αντίστροφου σχεδιασμού και βελτιστοποίησης. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο και στο υποκείμενο λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων ροής εξαρχής τέθηκε ως στόχος να είναι ικανό να διαχειρίζεται υβριδικά πλέγματα και μάλιστα με ενιαίο τρόπο για όλα τα είδη των πλεγματικών στοιχείων. Η ανάπτυξη της μεθόδου αυτής μπορεί να διακριθεί σε δύο βασικά τμήματα :

- την ανάπτυξη ενός επιλύτη κατάλληλου να διαχειριστεί υβριδικά πλέγματα και την επαρκή πιστοποίηση αυτού
- την ανάπτυξη μίας διακριτής συζυγούς μεθόδου βασισμένης στον επιλύτη αυτό για τον υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου και τη χρήση, στη συνέχεια, του μητρώου αυτού σε εφαρμογές αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης

Αναπτύχθηκε επίσης, κατόπιν συνδυασμού της αναπτυχθείσας συζυγούς μεθόδου και της τεχνικής προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων, μία μέθοδος για την a posteriori ανάλυση σφάλματος, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό συναρτησιακών με μία προκαθορισμένη από τον χρήστη ακρίβεια.

Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν εμπεριέχουν πρωτότυπα στοιχεία σε σχέση με αντίστοιχες μεθόδους της βιβλιογραφίας, τα οποία αντικατοπτρίζονται είτε στην μεγαλύτερη αποδοτικότητα τους (μείωση του κόστους υπολογισμού και του κόστους αποθήκευσης μνήμης, πιο αποτελεσματική μέθοδος βελτιστοποίησης) είτε στο είδος των εφαρμογών (λ.χ. εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά ακριβείς μέθοδοι Newton για βελτιστοποίηση σε περυγώσεις στροβιλομηχανών υπό περιορισμούς). Η σύνοψη οργανώνεται σε δύο ενότητες αντίστοιχες των πεδίων που αντιμετωπίστηκαν (ευθύ πρόβλημα, συζυγές πρόβλημα).

8.1 Σχετικά με τη χρήση υβριδικών πλεγμάτων για την επίλυση του προβλήματος ροής

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε στη διατριβή αντιμετώπισε το πρόβλημα επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes για μόνιμες ροές και για συμπιεστά ρευστά με χρήση υβριδικών πλεγμάτων. Η διατριβή έθεσε εξαρχής στόχους (όπως ενιαία αντιμετώπιση των πλεγματοειδών στοιχείων, ακρίβεια δεύτερης τάξης του σχήματος διακριτοποίησης χωρίς να πραγματοποιούνται/απαιτούνται παραδοχές για τα πλεγματοειδή στοιχεία) που αντιμετωπίστηκαν τμηματικά και με διάφορους τρόπους στην βιβλιογραφία, ποτέ όμως στο σύνολό τους. Συγκεκριμένα, απαιτήθηκαν τα εξής:

- Η αντιμετώπιση όλων των πλεγματοειδών στοιχείων, που συναντώνται σε ένα υβριδικό πλέγμα, από τον επιλύτη να είναι ενιαία. Η διάκριση των στοιχείων στο παραχθέν λογισμικό πραγματοποιείται μόνο σε επίπεδο προεπεξεργασίας (δομή δεδομένων του πλέγματος) και μετεπεξεργασίας. Αυτό έχει ποικίλα πλεονεκτήματα, τα βασικότερα εκ των οποίων είναι ‘καθαρότερος’ πηγαίος κώδικας, ελαφρώς ταχύτερη εκτέλεση και ευκολότερη επεκτασιμότητα αυτού. Λ.χ. σε 3D πλέγματα μπορούν εύκολα να προστεθούν επτακομβικά ‘σφηνοειδή’ στοιχεία, τα οποία συναντώνται σε κάποιους επιλύτες/γενέτες πλέγματος, με αλλαγή μόνο στο προεπεξεργαστικό (δομή δεδομένων) και μετεπεξεργαστικό (αποτελέσματα) στάδιο του πηγαίου κώδικα της μεθόδου επίλυσης. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στις εφαρμογές της διατριβής ήταν τρίγωνα/τετράπλευρα σε 2D και τετράεδρα/πεντακομβικές πυραμίδες/πρίσματα με τριγωνική βάση/εξάεδρα σε 3D.
- Η μέθοδος να επιδέχεται διάφορους τρόπους για τον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων των μεταβλητών ροής (οι χωρικές κλίσεις απαιτούνται κατά την εφαρμογή του σχήματος MUSCL και τον υπολογισμό των διανυσμάτων συνεκτικής ροής), με τέτοιο τρόπο ώστε να μη μειώνεται η ακρίβεια της τάξης του σχήματος. Στην παρούσα διατριβή, για τον υπολογισμό των κλίσεων δοκιμάστηκαν η ολοκλήρωση κατ’ όγκο και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Η προτίμηση της μίας ή της άλλης μεθόδου εξαρτάται από το πρόβλημα και ουσιαστικά υποδεικνύεται από τη μορφή του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο, [205], οπότε είναι επιθυμητή η ευελιξία στην επιλογή της μεθόδου υπολογισμού των κλίσεων. Επισημαίνεται ότι στη βιβλιογραφία όλα τα σχήματα χρησιμοποιούν είτε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (λ.χ. [34], [35]) είτε κάποια άλλη τακτική που ενίοτε μειώνει την τάξη ακρίβειας του σχήματος διακριτοποίησης.

Η προτεινόμενη μέθοδος ‘δανείστηκε’ ιδέες από αντίστοιχη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, [21], εφαρμόζοντάς τις όμως σε σχήματα που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε η διαχείριση του εκάστοτε πλεγματοειδούς στοιχείου να μην εξαρτάται από τον τύπο του, ικανοποιώντας έτσι την πρώτη απαίτηση. Επιπλέον, η διαχείριση των

τετραπλευρικών διεπιφανειών μεταξύ των στοιχείων, οι οποίες είναι στη γενική περίπτωση στρεβλές (τα τέσσερα σημεία που τις ορίζουν δεν είναι συνεπίπεδα), έγινε με τρόπο που να μη μειώνει την τάξη ακρίβειας, αφού δεν πραγματοποιήθηκε λ.χ. διάσπαση αυτών σε δύο τριγωνικές (όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία, [43]). Αντιθέτως, η χρήση τριγραμμικών εκφράσεων για τις επιφάνειες αυτές (διγραμμικών αν αναφερόμαστε σε 2D) επέτρεψε την ανάπτυξη αλγορίθμων και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε αυτές με τρόπο ο οποίος είναι αποδοτικός και κοινός για όλα τα πλεγματικά στοιχεία, ενώ οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων ήταν ακριβείς για γραμμικά καταναμημένες μεταβλητές (linearity preserving), γεγονός που εξασφάλισε τη μη-υποβάθμιση της τάξης ακρίβειας, [31].

Το λογισμικό που αναπτύχθηκε για την υλοποίηση της μεθόδου στηρίχτηκε σε προϋπάρχον λογισμικό του ΕΘΣ, προϊόν παλαιότερων διδακτορικών διατριβών, για την επίλυση συμπιεστών ροών σε πλέγματα με αποκλειστικά τριγωνικά ή τετραεδρικά στοιχεία, για μία πληθώρα μοντέλων τύρβης μίας και δύο εξίσωσεων, [1], [2], [6]. Παρότι η ανάπτυξη της μεθόδου και οι εφαρμογές αυτής πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης μίας εξίσωσης των Spalart-Allmaras, η επέκταση και στα υπόλοιπα μοντέλα τύρβης είναι άμεση και έχει ήδη ολοκληρωθεί. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε και στη διακριτοποίηση των συνεκτικών όρων του σχήματος, καθώς και των όρων διάχυσης του μοντέλου τύρβης, αφού απλή επέκταση του σχήματος που χρησιμοποιήθηκε στις παλαιότερες διατριβές, [1], [2], σε υβριδικά πλέγματα αποδείχθηκε ότι δημιουργεί αστάθειες κατά την αριθμητική επίλυση. Επιπλέον, η εν λόγω μέθοδος παραλληλοποιήθηκε με χρήση των πρωτοκόλλων PVM και MPI με χρήση μίας κοινής 'wrapper' βιβλιοθήκης.

Η προτεινόμενη μέθοδος πιστοποιήθηκε σε 2D και 3D εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής, πραγματοποιώντας συγκρίσεις με πειραματικά δεδομένα και αριθμητικά δεδομένα άλλων ερευνητών. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου είναι τα παρακάτω :

- Η χρήση υβριδικού πλέγματος έδωσε ακριβέστερα αποτελέσματα από αυτά που προκύπτουν χρησιμοποιώντας πλέγμα με αποκλειστικά τριγωνικά/τετραεδρικά στοιχεία αντίστοιχης ποιότητας. Αυτό επιτεύχθηκε κυρίως λόγω της σημαντικής μείωσης των φαινομένων αριθμητικής διάχυσης στην περιοχή κοντά στο στερεό όριο, αφού σε ένα υβριδικό πλέγμα απουσιάζουν διαγώνιες ακμές που σχηματίζουν μικρή γωνία με το στερεό όριο. Οι ακμές αυτές εμφανίζονται συχνά στα πλέγματα με αμιγώς τριγωνικά/τετραεδρικά στοιχεία, ιδιαίτερα όταν αυτά προκύπτουν από υβριδικά με διάσπαση όλων των τετραπλευρικών στοιχείων σε τρίγωνα (σε 2D) και όλων των μη-τετραεδρικών στοιχείων σε τετράεδρα (σε 3D). Σημειώνεται επιπλέον ότι η διάσπαση αυτή σε 3D δεν είναι πάντα προφανής ή εύκολη.
- Η χρήση υβριδικού πλέγματος επιτάχυνε σημαντικά την επίλυση και ταυτόχρονα μείωσε τις απαιτήσεις μνήμης, ιδιαίτερα σε 3D περιπτώσεις, όπου μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των ακμών του πλέγματος. Αιτία για αυτό

ήταν πάλι η αποφυγή εισαγωγής ακμών στο πλέγμα, οι οποίες να προέρχονται από διάσπαση στοιχείων. Συγκρίσεις μεταξύ του απαιτούμενου χρόνου επίλυσης ενός πεδίου ροής σε υβριδικά πλέγματα και στα αντίστοιχα πλέγματα με τριγωνικά/τετραεδρικά στοιχεία που προέκυψαν από διάσπαση, 'έδειξε' μείωση του υπολογιστικού κόστους έως και κατά 50%.

- Η δυνατότητα χρήσης υβριδικών πλεγμάτων προσδίδει μεγάλη ευελιξία στον αντίστοιχο επιλύτη, αφού μπορεί αδιακρίτως να χειριστεί οποιονδήποτε τύπο μη-αλληλοκαλυπτόμενων πλεγμάτων (λ.χ. δομημένα πλέγματα ή πλέγματα τύπου multiblock).

8.2 Σχετικά με τη διακριτή συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό του ακριβούς εσσιανού μητρώου και την a posteriori ανάλυση σφάλματος

Στην παρούσα διατριβή αναπτύχθηκε μία διακριτή συζυγής μέθοδος για υβριδικά πλέγματα στηριζόμενη στην μέθοδο που αναπτύχθηκε για το ευθύ πρόβλημα, η οποία στόχευε στον υπολογισμό πρώτων και δεύτερων παραγώγων ευαισθησίας και στη συνέχεια τη χρήση αυτών σε μεθόδους βελτιστοποίησης. Η μέθοδος αναπτύχθηκε αποφεύγοντας τη χρήση λογισμικού αυτόματης διαφόρισης, ώστε να είναι δυνατή η διερεύνηση της σημαντικότητας των διαφοριζόμενων όρων σε αρκετά χαμηλό επίπεδο, και να είναι δυνατή η ταυτοποίηση και η διαγραφή των αμελητέων όρων. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύχθηκαν άσκοπες πράξεις και επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί αποθηκευμένων όρων/μητρώων που πραγματοποιούνται από λογισμικό που παράγεται με αυτόματη διαφόριση. Ταυτόχρονα, η διαφόριση των όρων δεύτερης τάξης του σχήματος διακριτοποίησης του ευθέως προβλήματος προγραμματίστηκε με τον πλέον αποδοτικό τρόπο, και ως προς το υπολογιστικό κόστος και ως προς το κόστος αποθήκευσης. Αναπτύχθηκαν τρεις τρόποι για το χειρισμό των όρων αυτών, ένας εκ των οποίων αποδείχτηκε ότι είναι ο πλέον οικονομικός σε απαιτήσεις μνήμης και ταυτόχρονα αρκετά οικονομικός σε υπολογιστικό κόστος.

Παράλληλα με τη διακριτή συζυγή μέθοδο αναπτύχθηκε μέθοδος ευθείας διαφόρισης των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής, η οποία υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας των μεταβλητών ροής. Ο συνδυασμός της με τη συζυγή μέθοδο αποδείχθηκε ότι είναι ο πλέον αποδοτικός τρόπος υπολογισμού του εσσιανού μητρώου για περιπτώσεις όπως αυτές που αντιμετωπίζονται στη διατριβή, όπου τα εμπλεκόμενα συναρτησιακά (συνάρτηση στόχου και ροϊκοί περιορισμοί) είναι λιγότερα από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Τα εσσιανά μητρώα που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο αυτή στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν για τον αντίστροφο σχεδιασμό και την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης αεροδυναμικών μορφών υπό περιορισμούς. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, οι προτεινόμενες μέθοδοι αποδείχθηκαν πιο αποδοτικές ή/και πιο αποτελεσματικές από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν μόνο την κλίση του συναρτησιακού και των

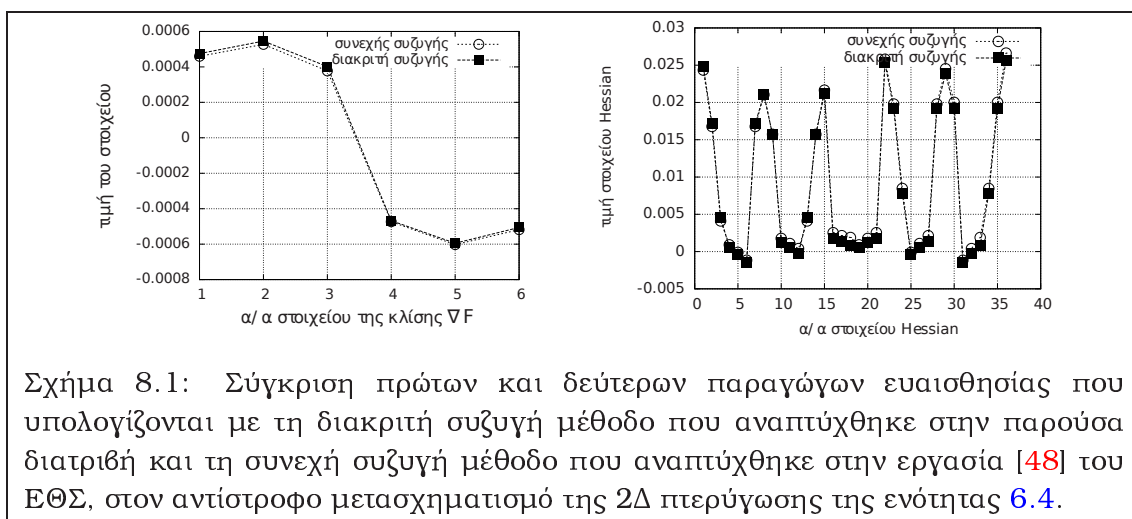
περιορισμών. Ακολουθούν τα στοιχεία πρωτοτυπίας της μεθόδου και τα συμπεράσματα από την εφαρμογή της:

- Διερευνήθηκαν ένας προς έναν όλοι οι όροι που συμμετέχουν στη διαμόρφωση των συζυγών εξισώσεων και του εσσιανού μητρώου ως προς την επίδρασή τους στην τιμή των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας, προκειμένου οι αμελητέοι όροι να απαλειφθούν από τις εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη βελτιστοποίηση. Για τους όρους μεταφοράς δοκιμάστηκαν διάφορες τακτικές, με πλεονεκτήματα είτε ως προς το απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος είτε ως προς την απαιτούμενη μνήμη. Ιδιαίτερα για τους όρους που περιλαμβάνουν παραγώγους των ιακωβιανών των διανυσμάτων ροής, οι όροι αυτοί αποδείχτηκε ότι είναι σημαντικό να διαγραφούν από τις εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης τάξης του υπολοίπου των εξισώσεων ροής, αφού είναι αμελητέοι, ενώ περαιτέρω παραγωγή τους οδηγεί σε πολυδάπανες εκφράσεις για το εσσιανό μητρώο.
- Για πρώτη φορά το ακριβές εσσιανό μητρώο χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς (μέχρι τώρα είχε χρησιμοποιηθεί μόνο σε 1Δ περιπτώσεις ή για τον αντίστροφο σχεδιασμό). Αποδείχτηκε ότι αντίστοιχες μέθοδοι προσέγγισης του μητρώου που συναντώνται στη βιβλιογραφία δεν αρκούν σε προβλήματα, όπου το συναρτησιακό εκφράζεται σε όριο διαφορετικό από αυτό που καθορίζουν οι μεταβλητές σχεδιασμού.
- Προτάθηκε μία νέα μέθοδος συνδυασμού της ακριβούς μεθόδου Newton με τις συμβατικές μεθόδους BFGS και SR1, στην οποία το ακριβές μητρώο υπολογίζεται μόνο στην πρώτη επανάληψη, προκειμένου να επιταχυνθεί η διαδικασία βελτιστοποίησης και να επιτευχθεί μία σχετική ανεξάρτηση αυτής από το μέγεθος του χώρου σχεδιασμού. Η προτεινόμενη μέθοδος επιταχύνει σημαντικά τη διαδικασία βελτιστοποίησης/αντίστροφου σχεδιασμού.

Ως άμεσο προϊόν συνδυασμού της αναπτυχθείσας διακριτής συζυγούς μεθόδου και της τεχνικής προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων, αναπτύχθηκε επιπλέον και εφαρμόστηκε μέθοδος a posteriori ανάλυσης σφάλματος, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό συναρτησιακών με πρακτικό ενδιαφέρον, με προκαθορισμένη από το χρήστη ακρίβεια, μέσω της επιβολής διαδοχικών προσαρμογών στο πλέγμα και διορθώσεων στην τιμή του υπολογιζόμενου συναρτησιακού. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε για μία ποικιλία συναρτησιακών (άνωση, οπισθέλκουσα, παραγωγή εντροπίας και απώλειες ολικής πίεσης) με πρακτικό ενδιαφέρον σε εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής.

8.3 Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Δεδομένου ότι πλέον στο ΕΘΣ είναι διαθέσιμες διακριτές και συνεχείς συζυγείς μέθοδοι για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας πρώτης και δεύτερης τάξης (στο πλαίσιο της παρούσας αλλά και άλλων διατριβών, [3], [7], καθώς και μεταδιδακτορικών εργασιών, [141], [46], [48]), πραγματοποιήθηκε ενδεικτικά σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται από τις δύο μεθόδους στο πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού της 2Δ πτερύγωσης της ενότητας 6.4, σχ. 8.1. Η συμφωνία των παραγώγων που υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους (οι οποίες σημειωτέον χρησιμοποιούν διαφορετικό επιλύτη και πλέγμα) αποτελεί μία επιπλέον επαλήθευση της ορθότητας τους και αποδεικνύει στην πράξη τη σύγκλιση των δύο μεθόδων, όταν το υπολογιστικό πλέγμα είναι αρκούντως πυκνό.



8.4 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Τα παρακάτω πεδία προσφέρονται για επέκταση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή και για περαιτέρω διερεύνηση. Σχετικά με την επίλυση των εξισώσεων ροής με χρήση υβριδικών πλεγμάτων προτείνονται τα εξής:

- Δεδομένου ότι αναπτύχθηκε κατάλληλη διαδικασία για τον υπολογισμό των χωρικών κλίσεων μεγεθών σε υβριδικά πλέγματα και επαρκής γνώση στα σημεία που πρέπει να δοθεί προσοχή όταν μοντελοποιούνται όροι μεταφοράς, διάχυσης και πηγών πάνω σε αυτά, είναι δυνατή πλέον η ενσωμάτωση στη μέθοδο ακριβέστερων μοντέλων τύρβης. Ήδη κατά τη διάρκεια της διδακτορικής διατριβής ολοκληρώθηκε, όπως προαναφέρθηκε, η επέκταση της μεθόδου σε αρκετά μοντέλα τύρβης δύο εξισώσεων $k - \epsilon$ και $k - \omega$, τα

οποία προϋπήρχαν στο υπό επέκταση λογισμικό του ΕΘΣ, και τα οποία πιστοποιήθηκαν σε συγγενή διδακτορική διατριβή, [6]. Επίσης, για αποδοτική εφαρμογή της μεθόδου σε πολυπλοκότερα προβλήματα (τα οποία εν γένει απαιτούν πλέγματα μεγαλύτερου μεγέθους και πιο εξελιγμένα μοντέλα τύρβης), χρειάζονται ταχείς, παραλληλοποιημένοι αλγόριθμοι υπολογισμού επικουρικών μεγεθών όπως η απόσταση από το στερεό όριο (λ.χ. με χρήση κάποιας μεθόδου η οποία επιλύει συστήματα ελλειπτικών εξισώσεων για αυτό το σκοπό), και τεχνικές προσαρμογής 3D πλεγμάτων. Ενδεικτική εφαρμογή με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον είναι η μελέτη περιπτώσεων με έλεγχο ροής¹, με προσαρμογή του πλέγματος βάσει του μέτρου της στροβιλότητας (λ.χ. για καλύτερη πρόλεξη των περιοχών όπου λαμβάνει χώρα αποκόλληση).

- Η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί και να προγραμματιστεί σε γλώσσα κατάλληλη για παραλληλία με άριστη κλιμακωσιμότητα σε μεγάλο αριθμό επεξεργασιών (λ.χ. Co-array FORTRAN) ή σε κάρτες γραφικών (GPGPU), όπου ο αλγόριθμος επίλυσης επιταχύνεται έως και 40 φορές. Έρευνα σε αυτό το πεδίο ήδη βρίσκεται σε εξέλιξη σε τρέχουσα διδακτορική διατριβή του εργαστηρίου, [257], [258], [259].

Αναφορικά με τις συζυγείς μεθόδους στη βελτιστοποίηση και τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου προτείνονται τα εξής:

- Οι όροι που περιλαμβάνουν παραγώγους ευαισθησίας δεύτερης τάξης του πλέγματος είναι συχνά πηγή σφαλμάτων όταν γίνεται χρήση διακριτών συζυγών μεθόδων (στη συνεχή συζυγή μέθοδο ο υπολογισμός των όρων αυτών δεν είναι απαραίτητος), ειδικά στην περίπτωση που η μέθοδος γένεσης πλέγματος, η οποία χρησιμοποιείται δε διαφορίζεται (λ.χ. μέθοδος προελαύνοντος μετώπου). Οι εν λόγω παράγωγοι θα μπορούσαν να υπολογιστούν ακριβέστερα είτε με μεθόδους που κάνουν χρήση μιγαδικών μεταβλητών, [260], [108], [109], είτε με επέκταση της μεθόδου που παρουσιάζεται στο [76] στην οποία επιλύονται συζυγείς εξισώσεις για τον υπολογισμό των παραγώνων ευαισθησίας πλεγματικών ποσοτήτων, είτε με χρήση μεθόδου ελατηρίων κατάλληλης για υβριδικά πλέγματα, προκειμένου να προσαρμόζεται το πλέγμα στη μεταβαλλόμενη κατά το σχεδιασμό/βελτιστοποίηση γεωμετρία, αντί να επανακατασκευάζεται.
- Το κόστος των παρουσιαζόμενων μεθόδων Newton εξαρτάται από το μέγεθος του χώρου σχεδιασμού. Συνδυασμός με μεθόδους Newton με αποκοπή², οι οποίες δεν χρησιμοποιούν το εσσιανό μητρώο αλλά κάποια κατάλληλη προβολή αυτού, θα μπορούσε να άρει αυτό το μειονέκτημα. Ήδη πραγματοποιείται και είναι υπό δημοσίευση σχετική έρευνα στο ΕΘΣ προς αυτή την κατεύθυνση, [261]. Η απεμπλοκή του κόστους της μεθόδου από τον αριθμό των ελεύθερων

¹flow control

²truncated Newton

μεταβλητών θα καταστήσει τη μέθοδο πρακτικά εφαρμόσιμη σε 3D προβλήματα βελτιστοποίησης, τα οποία εν γένει έχουν πολλές μεταβλητές σχεδιασμού.

- Προτείνεται η ανάπτυξη συζυγών διατυπώσεων και άλλων μοντέλων τύρβης, λ.χ. των μοντέλων τύρβης δύο εξισώσεων που ήδη έχουν προγραμματιστεί για το ευθύ πρόβλημα.
- Το ακριβές εσσιανό μητρώο είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί σε μεθόδους στιβαρού σχεδιασμού, [130], [262], [263], για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης.

8.5 Δημοσιεύσεις

Παρατίθενται οι δημοσιεύσεις σε επιστημονικά περιοδικά και οι παρουσιάσεις σε διεθνή συνέδρια που πραγματοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση της διατριβής.

Zervogiannis, T., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades using the exact Hessian*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199:2697–2708, 2010.

Zervogiannis, T., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Computation of second-order sensitivities of the total pressure losses functional in cascade flows*. ISABE Conference, 2009.

Trompoukis, X., Asouti, V. G., Zervogiannis, T., and Giannakoglou, K. C.: *CFD analysis and parametric study-optimization of suction-blowing flow control techniques*. 6th GRACM International Congress on Computational Mechanics, 2008.

Giannakoglou, K. C., Kampolis, I. C., Karakasis, M. K., Papadimitriou, D. I., Asouti, V. G., and Zervogiannis, T.: *Aerodynamic shape optimization methods on multiprocessor platforms*. ParCFD Conference, 2007.

Zervogiannis, T., Liakopoulos, P. I. K. D., Papadimitriou, P. I., and Giannakoglou, K. C.: *A grid enrichment and movement strategy for a posteriori error analysis in viscous flows*. 7th European Conference on Turbomachinery, 2007.

Βιβλιογραφία

- [1] Κουμπογιάννης, Δ. Γ.: *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [2] Λαμπρόπουλος, Ν. Κ.: *Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [3] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με α ποστεριορι εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [4] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [5] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίπεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [6] Ασούτη, Β. Γ.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [7] Ζυμάρης, Α.: *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.
- [8] Othmer, C.: *CFD topology and shape optimization with adjoint methods*. 13 Internationaler Kongress Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, 2006.
- [9] Jameson, A. and Mavriplis, D. J.: *Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh*. AIAA Journal, 24:611–618, 1986.

-
- [10] Jameson, A., Baker, T. J., and Weatherill, N. P.: *Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft*. AIAA-86-0103, 1986.
- [11] Desideri, J. A. and Derivieux, A.: *Compressible flow solvers using unstructured grids*. In *Computational Fluid Dynamics*, volume 2 of *Lecture Series*. von Karman Institute, Rhodes-Saint Genèse, Belgium, 1988.
- [12] Fezoui, L., Lanteri, S., Larrouturou, B., and Olivier, C.: *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire*. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1989.
- [13] D. L. Whitaker, B. Grossman, R. Lohner: *Two-dimensional Euler computations on a triangular mesh using an upwind finite volume scheme*. AIAA-89-0470, 1989.
- [14] Barth, T. J. and Jespersen, D.: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA-89-0366, 1989.
- [15] Hu, X. and Nicolaidis, R. A.: *Covolume techniques for anisotropic media*. Numerical Mathematics, 61:215-234, 1992.
- [16] Barth, T. J.: *Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations*. AGARD Series R 787: Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows, 1992.
- [17] Anderson, W. K. and Bonhaus, D. L.: *An implicit upwind algorithm for computing turbulent flows on unstructured grids*. Computers & Fluids, 23:1-21, 1994.
- [18] Frink, N. T.: *Assessment of an unstructured-grid method for predicting 3-D turbulent viscous flows*. AIAA-96-029, 1996.
- [19] Owen, S. J., Canann, S. A., and Saigal, S.: *Pyramid elements for maintaining tetrahedra to hexahedra conformability*. ASME Applied Mechanics Division, 220:123-130, 1997.
- [20] Jester, W. and Kallinderis, Y.: *Numerical study of incompressible flow about fixed cylinder pairs*. Journal of Fluids and Structures, 17:561-577, 2003.
- [21] Kirby, R. M., Warburton, T. C., Lomtev, I., and Karniadakis, G. E.: *A discontinuous Galerkin spectral/hp method on hybrid grids*. Applied Numerical Mathematics, 33:393-405, 2000.
- [22] Kallinderis, Y.: *A finite volume Navier-Stokes algorithm for adaptive grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 15:193-217, 1992.
- [23] Kallinderis, Y.: *Adaptive hybrid prismatic/tetrahedral grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20:1023-1037, 1995.
- [24] Khawaja, A. and Kallinderis, Y.: *Implementation of adaptive hybrid grids for 3-D turbulent flows*. AIAA-96-0026, 1996.
-

-
- [25] Schulz, K. W. and Kallinderis, Y.: *Unsteady flow structure interaction for incompressible flows using deformable hybrid grids*. Journal of Computational Physics, 143:569–597, 1998.
- [26] Chen, A. and Kallinderis, Y.: *Adaptive hybrid (prismatic-tetrahedral) grids for incompressible flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 26:1085–1105, 1998.
- [27] Kallinderis, Y. and Ahn, H. T.: *Incompressible Navier-Stokes method with general hybrid meshes*. Journal of Computational Physics, 210:75–108, 2005.
- [28] Minyard, T., Kallinderis, Y., and Schulz, K.: *Parallel load balancing for dynamic execution environments*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 189:1295–1309, 2000.
- [29] Khawaja, A., Kallinderis, Y., and McMorris, H.: *Adaptive hybrid grids for diverse industrial applications*. 7th International Meshing Roundtable, 1998.
- [30] Müller, J. D. and Giles, M. B.: *Edge-based multigrid schemes for hybrid grids*. 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, 1998.
- [31] Moinier, P., Müller, J. D., and Giles, M. B.: *Edge-based multigrid and preconditioning for hybrid grids*. AIAA-99-3339, 1999.
- [32] Müller, J. D.: *Anisotropic adaptation and multigrid for hybrid grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 40:445–455, 2002.
- [33] Crumpton, P. I., Moinier, P., and Giles, M. B.: *An unstructured algorithm for high Reynolds number flows on highly-stretched grids*. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, pages 561–572, 1998.
- [34] Haselbacher, A., McGuirk, J. J., and Page, G. J.: *Finite volume discretization aspects for viscous flows on mixed unstructured grids*. AIAA Journal, 37:177–184, 1999.
- [35] Haselbacher, A. and Blazek, J.: *Accurate and efficient discretization of Navier-Stokes equations on mixed grids*. AIAA Journal, 38:2094–2102, 2000.
- [36] Kershaw, D. S.: *Differencing of the diffusion equations in lagrangian hydrodynamics code*. Journal of Computational Physics, 39:375–395, 1981.
- [37] Fatenejad, M. and Moses, G. A.: *Extension of the Kershaw diffusion scheme to hexahedral meshes*. Journal of Computational Physics, 227:2187–2194, 2008.
- [38] Mavriplis, D. J. and Venkatakrisnan, V.: *A unified multigrid solver for the Navier-Stokes equations on mixed element meshes*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 8:247–263, 1997.
-

- [39] Mavriplis, D. J.: *Adaptive meshing techniques for viscous flow calculations on mixed element unstructured grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 34:93-111, 2000.
- [40] Wang, Z. J.: *A fast nested multi-grid viscous flow solver for adaptive cartesian/quad grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 33:657-680, 2000.
- [41] L. P. Zhang, Z. J. Wang: *A block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes*. Computers & Fluids, 33:891-916, 2004.
- [42] Chakravarthy, S.: *A unified-grid finite volume formulation for computational fluid dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 31:309-323, 1999.
- [43] Sorensen, K. A., Hassan, O., Morgan, K., and Weatherill, N. P.: *A multigrid accelerated hybrid unstructured mesh method for 3D compressible turbulent flow*. Computational Mechanics, 31:101-114, 2003.
- [44] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 36:325-341, 2007.
- [45] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades, using a new continuous adjoint formulation*. Power and Energy, 221:865-872, 2007.
- [46] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 56:1929-1943, 2008.
- [47] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Aerodynamic shape optimization using adjoint and direct approaches*. Archives of Computational Methods in Engineering, 15:447-488, 2008.
- [48] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *The continuous direct-adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems*. Computers & Fluids, 38:1539-1548, 2009.
- [49] Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I., Giannakoglou, K. C., and Othmer, C.: *Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows*. Computers & Fluids, 38:1528-1538, 2009.
- [50] Pironneau, O.: *Optimal shape design for elliptic systems*. System Modeling and Optimization, 1982.
- [51] Jameson, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Computing, 3:233-260, 1988.
- [52] Jameson, A.: *Optimum aerodynamic design using CFD and control theory*. AIAA-95-1729, 1995.
-

- [53] Reuther, J. and Jameson, A.: *Aerodynamic shape optimization of wing and wing-body configurations using control theory*. AIAA-95-0213, 1995.
- [54] Jameson, A., Pierce, N., and Martinelli, L.: *Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 10:213-237, 1998.
- [55] Reuther, J., Alonso, J. J., Rimlinger, M. J., and Jameson, A.: *Aerodynamic shape optimization of supersonic aircraft configurations via an adjoint formulation on distributed memory parallel computers*. Computers & Fluids, 28:675-700, 1999.
- [56] Jameson, A. and Kim, S.: *Reduction of the adjoint formula in the continuous limit*. AIAA-2003-0040, 2003.
- [57] Soto, O. and Löhner, R.: *On the computation of flow sensitivities from boundary integrals*. AIAA-2004-0112, 2004.
- [58] Othmer, C.: *A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 58:861-877, 2008.
- [59] Nadarajah, S. K., Jameson, A., and Alonso, J.: *An adjoint method for the calculation of remote sensitivities in supersonic flow*. AIAA-2002-0261, 2002.
- [60] Nadarajah, S. K., Jameson, A., and Alonso, J. J.: *Sonic boom reduction using an adjoint method for wing-body configurations in supersonic flow*. AIAA-2002-5547, 2002.
- [61] Nadarajah, S. K., Jameson, A., and Alonso, J. J.: *Adjoint-based sonic boom reduction for wing-body configurations in supersonic flow*. 50th CASI Annual General Meeting and Conference, 2003.
- [62] Nadarajah, S. K., Kim, S., Jameson, A., and Alonso, J. J.: *Sonic boom reduction using an adjoint method for supersonic transport aircraft configurations*. Fluid Mechanics and its Applications, 73:355-362, 2003.
- [63] G. Kuruvila, S. Ta'asan, M. D. Salas: *Airfoil optimization by the one-shot method*. Technical report, NASA Langley Research Center, 1994.
- [64] Kuruvila, G., Ta'asan, S., and Salas, M. D.: *Airfoil design and optimization by the one-shot method*. AIAA-95-0478, 1995.
- [65] Hazra, S. B. and Jameson, A.: *One-shot pseudo-time method for aerodynamic shape optimization using the Navier-Stokes equations*. AIAA-2007-1470, 2007.
- [66] Hazra, S. B. and Schulz, V.: *Simultaneous pseudo-timestepping for aerodynamic shape optimization problems with state constraints*. SIAM Journal on Scientific Computing, 28:1078-1099, 2007.
- [67] Elliot, J. and Peraire, J.: *Aerodynamic design using unstructured meshes*. AIAA-96-1941, 1996.
-

-
- [68] Elliot, J. and Peraire, J.: *Aerodynamic optimization on unstructured meshes with viscous effects*. AIAA-97-1849, 1997.
- [69] Elliot, J. and Peraire, J.: *Progress towards a 3D aerodynamic shape optimization tool for the compressible, high-Re Navier-Stokes equations discretized on unstructured meshes*. AIAA-98-2897, 1998.
- [70] Elliot, J. and Peraire, J.: *Practical 3D aerodynamic design and optimization using unstructured meshes*. AIAA Journal, 35:35-62, 1997.
- [71] Elliot, J. and Peraire, J.: *Constrained, multipoint shape optimisation for complex 3D configurations*. Aeronautical Journal, 102:365-376, 1998.
- [72] Nielsen, E. J. and Anderson, W. K.: *Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations*. AIAA-98-4809, 1998.
- [73] Anderson, W. K. and Bonhaus, D. L.: *Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows*. AIAA Journal, 37:185-191, 1999.
- [74] Nielsen, E. J., Anderson, W. K., and Kaushik, D. K.: *Implementation of a parallel framework for aerodynamic design optimization on unstructured meshes*. Proceedings of Parallel Computational Fluid Dynamics '99, 1999.
- [75] Nielsen, E. and Anderson, W. K.: *Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes*. AIAA Journal, 40:1155-1163, 2002.
- [76] Nielsen, E. and Park, M.: *Using an adjoint approach to eliminate mesh sensitivities in computational design*. AIAA Journal, 44:194-207, 2006.
- [77] Giles, M. B.: *On the use of Runge-Kutta time marching and multigrid for the solution of steady adjoint equations*. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, 2000.
- [78] Giles, M. B., Duta, M. C., and Müller, J. D.: *Adjoint code developments using the exact discrete approach*. AIAA-2001-2596, 2001.
- [79] Giles, M. B.: *On the iterative solution of adjoint equations*. Automatic differentiation of algorithms: From simulation to optimization, pages 145-151, 2002.
- [80] Giles, M. B.: *Discrete adjoint approximations with shocks*. Conference on Hyperbolic Problems, 2002.
- [81] Giles, M. B. and Pierce, N. A.: *Analytic adjoint solutions for the quasi-one-dimensional Euler equations*. Journal of Fluid Mechanics, 426:327-345, 2001.
- [82] Campobasso, M. S., Duta, M. C., and Giles, M. B.: *Adjoint methods for turbomachinery design*. ISABE Conference, 2001.
- [83] Duta, M. C., Giles, M. B., and Campobasso, M. S.: *The harmonic adjoint approach to unsteady turbomachinery design*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 40:323-332, 2002.
-

-
- [84] Campobasso, M. S., Duta, M. C., and Giles, M. B.: *Adjoint calculation of sensitivities of turbomachinery objective*. Journal of Propulsion and Power, 19:693–703, 2003.
- [85] Nadarajah, S. K. and Jameson, A.: *Optimal control of unsteady flows using a time accurate method*. AIAA 2002-5436, 2002.
- [86] Nadarajah, S. K., McMullen, M. S., and Jameson, A.: *Optimum shape design for unsteady flows using time accurate and non-linear frequency domain methods*. AIAA 2003-3875, 2003.
- [87] Nadarajah, S. K., McMullen, M. S., and Jameson, A.: *Non-linear frequency domain based optimum shape design for unsteady three-dimensional flows*. AIAA 2006-1052, 2006.
- [88] Nadarajah, S. K. and Jameson, A.: *Optimum shape design for unsteady three-dimensional viscous flows using a non-linear frequency domain method*. AIAA 2006-3455, 2006.
- [89] Nadarajah, S. K., Jameson, A., and Alonso, J. J.: *An adjoint method for the calculation of non-collocated sensitivities in supersonic flow*. AIAA 2001-2530, 2001.
- [90] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *A continuous adjoint method for the minimization of losses in cascade viscous flows*. AIAA-2006-0116, 1996.
- [91] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades using a new continuous adjoint formulation*. Journal of Power and Engineering, 221:2041–2967, 2007.
- [92] Hascoët, L., Vázquez, M., and Dervieux, A.: *Automatic differentiation for optimum design, applied to sonic boom reduction*. Lecture Notes in Computer Science, 2003.
- [93] Vázquez, M., Dervieux, A., and Koobus, B.: *Multilevel optimization of a supersonic aircraft*. Finite Elements in Analysis and Design, 40:2101–2124, 2004.
- [94] Martins, J. R. R. A., Alonso, J. J., and Reuther, J.: *Aero-structural wing design optimization using high-fidelity sensitivity analysis*. DGLR Bericht, 5:211–226, 2001.
- [95] Vázquez, M., Dervieux, A., and Koobus, B.: *Aeroelastic coupling in sonic boom optimization of a supersonic aircraft*. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2003.
- [96] Dadone, A. and Grossman, B.: *Progressive optimization of inverse fluid dynamic design problems*. Computers & Fluids, 29:1–32, 2000.
- [97] Dadone, A. and Grossman, B.: *Fast convergence of inviscid fluid dynamic design problems*. Computers & Fluids, 32:607–627, 2003.
-

-
- [98] Nadarajah, S. K. and Jameson, A.: *A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization*. AIAA-2000-0667, 2000.
- [99] Giles, M. B. and Pierce, N. A.: *An introduction to the adjoint approach to design*. Flow, Turbulence and Combustion, 65:393–415, 2000.
- [100] Nadarajah, S. K. and Jameson, A.: *Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization*. AIAA-2001-2530, 2001.
- [101] Li, S. and Petzold, L.: *Adjoint sensitivity analysis for time-dependent partial differential equations with adaptive mesh refinement*. Journal of Computational Physics, 198:310–325, 2004.
- [102] Bischof, C., Carle, A., Khademi, P., and Mauer, A.: *The ADIFOR 2.0 system for the automatic differentiation of FORTRAN 77 programs*. Technical report, Center for Research on Parallel Computation, 1994.
- [103] Griewank, A., Juedes, D., Mitev, H., Utke, J., Vogel, O., and Walther, A.: *ADOL-C: A package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++*. Transactions on Mathematical Software, 22:131–167, 1996.
- [104] Hascoët, L.: *TAPENADE: A tool for automatic differentiation of programs*. ECCOMAS Conference, 2004.
- [105] Straka, C. W.: *ADF95: Tool for automatic differentiation of a FORTRAN code designed for large numbers of independent variables*. Computer Physics Communications, 168:123–139, 2005.
- [106] Hicks, R. M., Murran, E. M., and Vanderplaats, G. N.: *An assessment of airfoil design by numerical optimization*. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, 1974.
- [107] R. M. Hicks and Henne, P. A.: *Wing design by numerical optimization*. Journal of Aircraft, 15:407–412, 1978.
- [108] Nielsen, E. J. and Kleb, W. L.: *Efficient construction of discrete adjoint operators on unstructured grids by using complex variables*. AIAA-2005-0324, 2005.
- [109] Anderson, W. K., Newman, J. C., Whitfield, D. L., and Nielsen, E. J.: *Sensitivity analysis for the Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables*. AIAA-99-3294, 1999.
- [110] Nocedal, J. and Wright, S. J.: *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1999.
- [111] Arian, E.: *Analysis of the Hessian for aeroelastic optimization*. Technical report, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1995.
- [112] Arian, E. and Ta'asan, S.: *Analysis of the Hessian for aerodynamic optimization: Inviscid flow*. Computers & Fluids, 28:853–877, 1999.
-

-
- [113] Arian, E. and Vatsa, V. N.: *A preconditioning method for shape optimization governed by the Euler equations*. Technical report, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1998.
- [114] Arian, E. and Iollo, A.: *Analytic Hessian derivation for the quasi-one-dimensional Euler equations*. Journal of Computational Physics, 228:476–490, 2009.
- [115] Sherman, L., III, A. C. Taylor, Newman, P. A., Hou, G. W., and Korivi, V. M.: *First- and second-order aerodynamic sensitivity derivatives via automatic differentiation with incremental iterative methods*. Journal of Computational Physics, 129:307–331, Dec. 1996.
- [116] Korivi, V. M., III, A. C. Taylor, Newman, P. A., Hou, G. W., and Jones, H. E.: *An approximately factored incremental strategy for calculating consistent discrete aerodynamic sensitivity derivatives*. Journal of Computational Physics, 113:336–346, 1994.
- [117] Oloso, A. O. and III, A. C. Taylor: *Aerodynamic shape-sensitivity analysis and design optimization on the IBM-SP2*. AIAA-97-2273, 1997.
- [118] III, A. C. Taylor, Green, L. L., Newman, P. A., and Putko, M. M.: *Some advanced concepts in discrete aerodynamic sensitivity analysis*. AIAA Journal, 41:1224–1229, 2003.
- [119] Ghate, D. P. and Giles, M. B.: *Efficient Hessian calculation using automatic differentiation*. AIAA-2007-2529, 2007.
- [120] Martinelli, M., Dervieux, A., and Hascoët, L.: *Strategies for computing second-order derivatives in CFD design problems*. West-East High Speed Flow Field Conference, 2007.
- [121] Martinelli, M. and Duvigneau, R.: *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing*. AIAA-2008-2071, 2008.
- [122] Haftka, R. T.: *Second-order sensitivity derivatives in structural analysis*. AIAA Journal, 20:1765–1766, 1982.
- [123] Tortorelli, D. A. and Michaleris, P.: *Design sensitivity analysis: Overview and review*. Inverse Problems in Science and Engineering, 1:71–103, 1994.
- [124] Taroco, E., Buscaglia, G. C., and Feljoo, G. C. R. A.: *Second-order shape sensitivity analysis for nonlinear problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 15:101–113, 1998.
- [125] Ding, J. Y., Pan, Z. K., and Chen, L. Q.: *Second order adjoint sensitivity analysis of multibody systems described by differential algebraic equations*. Multibody System Dynamics, 18:599–617, 2007.
- [126] Hou, G. J. W. and Sheen, J.: *Numerical methods for second-order shape sensitivity analysis with applications to heat conduction problems*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 36:417–435, Feb. 1993.
-

- [127] Sandu, A. and Zhang, L.: *Discrete second order adjoints in atmospheric chemical transport modeling*. Journal of Computational Physics, 227:5949–5983, 2007.
- [128] Sabbagh, M. A. E., Bakr, M. H., and Bandler, J. W.: *Adjoint higher order sensitivities for fast full-wave optimization of microwave filters*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 54:3339–3351, Aug. 2006.
- [129] Raffard, R. L. and Tomlin, C. J.: *Second order adjoint-based optimization of ordinary and partial differential equations with application to air traffic flow*. American Control Conference, 2005.
- [130] Putko, M. M., III, A. C. Taylor, Newman, P. A., and Green, L. L.: *Approach for input uncertainty propagation and robust design in CFD using sensitivity derivatives*. Journal of Fluids Engineering, 124:60–69, 2002.
- [131] Huyse, L. and Lewis, R. M.: *Aerodynamic shape optimization of two-dimensional airfoils under uncertain conditions*. Technical report, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 2001.
- [132] Li, W., Huyse, L., and Padula, S.: *Robust airfoil optimization to achieve drag reduction over a range of Mach numbers*. Struct. Multidisc. Optim., 24:38–50, 2002.
- [133] Löhner, R., Soto, O., and Yang, C.: *An adjoint-based design methodology for CFD optimization problems*. AIAA-2003-0299, 2003.
- [134] Brezillon, J. and Gauger, N. R.: *2D and 3D aerodynamic shape optimization using the adjoint approach*. Aerospace Science and Technology, 8:715–727, 2004.
- [135] Leoviriyakit, K. and Jameson, A.: *Multi-point wing planform optimization via control theory*. AIAA-2005-0450, 2005.
- [136] Duvigneau, R.: *Robust design of a transonic wing with uncertain Mach number*. EUROGEN Conference, 2007.
- [137] Duvigneau, R., Kloczko, T., and Praveen, C.: *A three-level parallelization strategy for robust design in aerodynamics*. ParCFD Conference, 2008.
- [138] Parussini, L., Pediroda, V., and Obayashi, S.: *Design under uncertainties of wings in transonic fields*. JSME International Journal, 48:218–223, 2005.
- [139] Lee, D. S., Gonzalez, L. F., Periaux, J., and Srinivas, K.: *Robust design optimization using multi-objective evolutionary algorithms*. Computers & Fluids, 37:565–583, 2008.
- [140] Lee, D. S., Gonzalez, L. F., Srinivas, K., and Periaux, J.: *Robust evolutionary algorithms for UAV/UCAV aerodynamic and rcs design optimisation*. Computers & Fluids, 37:547–564, 2008.
- [141] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations*. Computers & Fluids, 37:1029–1039, 2008.
-

-
- [142] Zervogiannis, T., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Computation of second-order sensitivities of the total pressure losses functiona in cascade flows*. ISABE Conference, 2009.
- [143] Zervogiannis, T., Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades using the exact Hessian*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199:2697-2708, 2010.
- [144] Warren, G. P., Anderson, W. K., Thomas, J. T., and Krist, S. L.: *Grid convergence for adaptive methods*. AIAA-91-1592, 1991.
- [145] Ainsworth, M. and Oden, J. T.: *A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods*. Numerical Mathematics, 65:23-50, 1993.
- [146] Ainsworth, M. and Oden, J. T.: *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 142:1-88, 1997.
- [147] Prudhomme, S. and Oden, J. T.: *On goal-oriented error estimation for elliptic problems: Application to the control of pointwise errors*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 176:313-331, 1999.
- [148] Oden, J. T. and Prudhomme, S.: *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*. Computers and Mathematics with Applications, 41:735-756, 2001.
- [149] Prudhomme, S. and Oden, J. T.: *A posteriori error estimation and error control for finite element approximations of the time-dependent Navier-Stokes equations*. Finite Elements in Analysis and Design, 33:247-262, 1999.
- [150] Oden, J. T. and Prudhomme, S.: *Estimation of modelling error in computational mechanics*. Journal of Computational Physics, 182:496-515, 2002.
- [151] Becker, R. and Rannacher, R.: *Weighted a posteriori error control in FE methods*. Technical report, Universität Heidelberg, 1994.
- [152] Becker, R. and Rannacher, R.: *A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples*. East-West J. Numer. Math., 4:237-264, 1996.
- [153] Johnson, C., Rannacher, R., and Boman, M.: *Numerics and hydrodynamic stability: Toward error control in computational fluid dynamics*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 32:1058-1079, 1995.
- [154] Becker, R., Kapp, H., and Rannacher, R.: *Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations: Basic concept*. SIAM Journal on Control and Optimization, 39:113-132, 2000.
- [155] Paraschivoiu, M., Peraire, J., and Patera, A. T.: *A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 150:289-312, 1997.
-

-
- [156] Paraschivoiu, M. and Patera, A. T.: *A hierarchical duality approach to bounds for the outputs of partial differential equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 158:389–407, 1998.
- [157] Giles, M. B., Larson, M., Levenstam, M., and Süli, E.: *Adaptive error control for finite element approximations of the lift and drag coefficients in viscous flows*. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, 1997.
- [158] Giles, M. B. and Pierce, N. A.: *Improved lift and drag estimates using adjoint Euler equations*. AIAA-99-3293, 1999.
- [159] Giles, M. B.: *On adjoint equations for error analysis and optimal grid adaptation*. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, 1997.
- [160] Pierce, N. A. and Giles, M. B.: *Adjoint recovery of superconvergent functionals from PDE approximations*. SIAM Review, 42:247–264, 1998.
- [161] Giles, M. B., Duta, M. C., Müller, J. D., and Pierce, N. A.: *Algorithm developments for discrete adjoint methods*. AIAA Journal, 41:198–205, 2003.
- [162] Giles, M. B.: *Defect and adjoint error correction*. International Conference on Computational Fluid Dynamics, 2000.
- [163] Müller, J. D. and Giles, M. B.: *Solution adaptive mesh refinement using adjoint error analysis*. AIAA-2001-2550, 2001.
- [164] Pierce, N. A. and Giles, M. B.: *Adjoint and defect error bounding and correction for functional estimates*. Journal of Computational Physics, 200:769–794, 2004.
- [165] Giles, M. B. and Pierce, N. A.: *Adjoint error correction for integral outputs*. Error Estimation and Adaptive Discretization Methods in Computational Fluid Dynamics, pages 47–96, 2002.
- [166] Venditti, D. A. and Darmofal, D. L.: *A multilevel error estimation and grid adaptive strategy for improving the accuracy of integral outputs*. AIAA-99-3292, 1999.
- [167] Venditti, D. A. and Darmofal, D. L.: *Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs: Application to quasi-one-dimensional flow*. Journal of Computational Physics, 164:204–227, 2000.
- [168] Venditti, D. A. and Darmofal, D. L.: *A grid adaptive methodology for functional outputs of compressible flow simulations*. AIAA-2001-2659, 2001.
- [169] Venditti, D. A. and Darmofal, D. L.: *Grid adaptation for functional outputs: Application to two-dimensional inviscid flows*. Journal of Computational Physics, 176:40–69, 2002.
- [170] Darmofal, D. L. and Venditti, D. A.: *Output-based error estimation and adaptation for aerodynamics*. Fifth World Congress on Computational Mechanics, 2002.
-

- [171] Venditti, D. A. and Darmofal, D. L.: *Anisotropic grid adaptation for functional outputs: Application to two-dimensional viscous flows*. Journal of Computational Physics, 187:22–46, 2003.
- [172] Venditti, D. A.: *Anisotropic grid adaptation for multiple aerodynamic outputs*, 2007.
- [173] Park, M. A.: *Adjoint-based, three-dimensional error prediction and grid adaptation*. AIAA-2002-3286, 2002.
- [174] Park, M. A.: *Three-dimensional turbulent RANS adjoint-based error correction*. AIAA-2003-3849, 2003.
- [175] Gkagkas, K. N. and Giannakoglou, K. C.: *Optimal grid adaptation through a posteriori error analysis*. 5th GRACM International Congress on Computational Mechanics, 2005.
- [176] Zervogiannis, T., Liakopoulos, P. I. K. D., Papadimitriou, P. I., and Giannakoglou, K. C.: *A grid enrichment and movement strategy for a posteriori error analysis in viscous flows*. 7th European Conference on Turbomachinery, 2007.
- [177] Liakopoulos, P. I. K. and Giannakoglou, K. C.: *Unstructured remeshing using an efficient smoothing scheme*. ECCOMAS Conference, 2006.
- [178] Alekseev, A. K. and Navon, I. M.: *A posteriori error estimation by postprocessor independent of method of flowfield calculation*. Computers and Mathematics with Applications, 51:397–404, 2005.
- [179] Formaggia, L., Micheletti, S., and Perotto, S.: *Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics: Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems*. Applied Numerical Mathematics, 51:511–533, 2004.
- [180] Larson, M. G. and Barth, T. J.: *A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin approximations of hyperbolic systems*. Technical report, 1999.
- [181] Houston, P., Senior, B., and Süli, E.: *hp-Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems: Error analysis and adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 40:153–169, 2002.
- [182] Alekseev, A. K.: *An adjoint-based a posteriori estimation of iterative convergence error*. Computers and Mathematics with Applications, 52:1205–1212, 2006.
- [183] Monk, P. and Süli, E.: *The adaptive computation of far-field patterns by a posteriori error estimation of linear functions*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 36:251–274, 1998.
- [184] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA-92-0439, 1992.
- [185] Lambropoulos, N. K., Koubogiannis, D. G., and Giannakoglou, K. C.: *Acceleration of a Navier-Stokes equation solver for unstructured grids using*
-

- agglomeration multigrid and parallel processing*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193:781–803, 2003.
- [186] White, F. M.: *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill International Editions, 1991.
- [187] Vassilopoulos, C.: *Développement d'une méthode de calcul d'un écoulement turbulent tridimensionnel dans une turbomachine en régime haut subsonique*. PhD Thesis. École Centrale de Lyon, École Mécanique, 1996.
- [188] Koubogiannis, D. G., Athanasiadis, A. N., and Giannakoglou, K. C.: *One- and two-equation turbulence models for the prediction of complex cascade flows using unstructured grids*. Computers & Fluids, 32:403–430, 2003.
- [189] Catris, S. and Aupoix, B.: *Density corrections for turbulence models*. Aerospace Science and Technology, 4:1–11, 2000.
- [190] Tsourakis, G. I., Koumbogiannis, D. G., and Giannakoglou, K. C.: *Transition and heat transfer predictions in a turbine cascade at various free-stream turbulence intensities through a one-equation turbulence model*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 38:1091–1110, 2002.
- [191] Μπεργελές, Γ.: *Υπολογιστική ρευστομηχανική*. Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2000.
- [192] Barth, T. J. and Linton, S. W.: *An unstructured mesh newton solver for compressible turbulent flows and its parallel implementation*. AIAA-95-0221, 1995.
- [193] Carey, G. F.: *Hexing the tet*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 18:223–227, 2002.
- [194] Rao, S. S.: *The finite element method in engineering*. Pergamon Press, 1982.
- [195] Frey, A. E., Hall, C. A., and Porsching, T. A.: *Some results on the global inversion of bilinear and quadratic isoparametric finite element transformations*. Mathematics of Computation, 32:725–749, 1978.
- [196] Jamet, P.: *Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 14:925–930, 1977.
- [197] Zhang, S.: *Invertible jacobian for hexahedral finite elements-part 1: Bijectivity*. 2005.
- [198] Vinokur, M. and Kordulla, W.: *Efficient computation of volume in flow predictions*. AIAA Journal, 21:917–918, 1983.
- [199] Grandy, J.: *Efficient computation of volume of hexahedral cells*. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1997.
- [200] Zhang, S.: *Invertible jacobian for hexahedral finite elements-part 2: Global positivity*. 2005.
- [201] Zhang, S.: *Subtetrahedral test for the positive jacobian of hexahedral elements*. 2005.
-

-
- [202] Roe, P. L.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 135:250-258, 1997.
- [203] Harten, A.: *On a class of high-resolution total-variation-stable finite difference schemes*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 21:1-23, 1984.
- [204] Hirsch, C.: *Numerical computation of internal and external flows - Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley and Sons, 1991.
- [205] Mavriplis, D. J.: *Revisiting the least-squares procedure for gradient reconstruction on unstructured meshes*. Technical report, National Institute of Aerospace, 2003.
- [206] van Albada, G. D., van Leer, B., and Roberts, W. W.: *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*. Astronomy and Astrophysics, 108:76-84, 1982.
- [207] Venkatakrisnan, V.: *Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters*. Journal of Computational Physics, 118:120-130, 1995.
- [208] van Leer, B.: *Towards the ultimate conservative difference scheme II: Monotonicity and conservation combined in a second order scheme*. Journal of Computational Physics, 14:361-370, 1974.
- [209] Spekreijse, S.: *Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws*. Mathematics of Computation, 49:135-155, 1987.
- [210] Weiss, J. M., Maruszewski, J. P., and Smith, W. A.: *Implicit solution of preconditioned Navier-Stokes equations using algebraic multigrid*. AIAA Journal, 37:29-36, 1999.
- [211] Pulliam, T. H. and Steger, J. L.: *Recent improvements in efficiency, accuracy and convergence for implicit approximate factorization algorithms*. AIAA-85-0360, 1985.
- [212] Kallinderis, Y.: *A 3-D finite-volume method for the Navier-Stokes equations with adaptive hybrid grids*. Applied Numerical Mathematics, 20:387-406, 1996.
- [213] Steger, P. and Warming, R. F.: *Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to the finite-difference methods*. Journal of Computational Physics, 40:263-293, 1981.
- [214] Anderson, J. D.: *Modern compressible flow*. McGraw-Hill International Editions, 1991.
- [215] Lallemand, M. H.: *Étude de schémas runge-kutta a 4 pas pour la résolution multigrille des équations d'Euler 2-D*. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1988.
-

- [216] Fezoui, L. and Stoufflet, B.: *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*. Journal of Computational Physics, 84:174-206, 1989.
- [217] Αθανασιάδης, Α. Ν.: *Προγραμματισμός και πιστοποίηση μοντέλων τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds σε μη-δομημένα πλέγματα. Εφαρμογή σε μεμονομένες αεροτομές και συμπιεστές ελεγχόμενης διάχυσης για λειτουργία εκτός σημείου σχεδίασης*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [218] Holmes, D. G.: *Unstructured grids and mesh adaptivity for inviscid and viscous flows*. 1994.
- [219] Knupp, P. M.: *Algebraic mesh quality metrics*. SIAM Journal on Scientific Computing, 23:193-218, 2001.
- [220] Giotis, A. P. and Giannakoglou, K. C.: *An unstructured grid partitioning method based on genetic algorithms*. Advances in Engineering Software, 29:129-138, 1998.
- [221] Giotis, A. P., Liakopoulos, P. I. K., and D. G. Koubogiannis, K. C. Giannakoglou: *A fast GA-based data partitioner for use in parallel CFD*. EUROGEN Conference, 2001.
- [222] Γιώτης, Α.: *Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση-αντίστροφη σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2003.
- [223] Roose, D. and Driessche, R. v.: *Distributed memory parallel computers and fluid dynamics*. In *Computational Fluid Dynamics*, volume 4 of *Lecture Series*. von Karman Institute, 1993.
- [224] Cook, P. H., McDonald, M. A., and Firmin, M. C. P.: *Aerofoil RAE-2822 - pressure distributions and boundary layer and wake measurements*. AGARD Series AR 138: Experimental data base for computer program assessment, 1979.
- [225] Holst, T. L.: *Viscous transonic airfoil workshop. Compendium of results*. AIAA-87-1460, 1987.
- [226] Rizzi, A.: *Computational mesh for transonic airfoils*. Numerical methods for the computation of inviscid transonic flows with shock waves, pages 222-263, 1981.
- [227] Steinert, W., Eisenberg, B., and Starcken, H.: *Design and testing of a controlled diffusion airfoil cascade for industrial axial flow compressor application*. Journal of Turbomachinery, 113:583-590, 1991.
- [228] Sanger, N. L. and Shreeve, R. P.: *Comparison of calculated and experimental cascade performance for controlled-diffusion compressor stator blading*. Journal of Turbomachinery, 108:42-50, 1990.
-

- [229] Elazar, Y. and Shreeve, R. P.: *Viscous flow in a controlled diffusion compressor cascade with increasing incidence*. Journal of Turbomachinery, 112:256-266, 1990.
- [230] Chen, W. L., Lien, F. S., and Leschziner, M. A.: *Computational modelling of turbulent flow in a turbomachine passage with low-Re two-equation models*. ECCOMAS Conference, 1994.
- [231] Chen, W. L., Lien, F. S., and Leschziner, M. A.: *Computational modelling of cascade-blade flow with linear and non-linear low-Re eddy-viscosity models*. AGARD Series CP 571: Loss Mechanisms and Unsteady Flows in Turbomachines, 1995.
- [232] Kang, S. H., Lee, J. S., Choi, M. R., and Kim, K. Y.: *Numerical calculations of the turbulent flow through a controlled diffusion cascade*. Journal of Turbomachinery, 117:223-230, 1995.
- [233] Tselepidakis, D. P. and Kim, S. E.: *Modeling and prediction of the laminar leading-edge separation and transition in a blade cascade flow*. 1996.
- [234] Biswas, D., Iwasaki, H., and Ishizuka, M.: *Numerical analysis of two-dimensional compressible viscous flow in turbomachinery cascades using an improved $k-\epsilon$ turbulence model*. ASME 97-GT-417, 1997.
- [235] Chen, W. L., Lien, F. S., and Leschziner, M. A.: *Computational prediction of flow around highly loaded compressor-cascade blades with non-linear eddy-viscosity models*. International Journal of Heat and Fluid Flow, 19:307-319, 1998.
- [236] Hobson, G. V. and Weber, S.: *Prediction of a laminar separation bubble over a controlled-diffusion compressor blade*. ASME 2000-GT-277, 2000.
- [237] Benoliel, A. M.: *Aerodynamic pitch-up of cranked arrow wings: Estimation, trim, and configuration design*. MSc Thesis. Virginia Polytechnic Institute & State University, 2004.
- [238] O. Lucca-Negro, T. O'Doherty: *Vortex breakdown: A review*. Progress in Energy and Combustion Science, 27:431-481, 2001.
- [239] Ekaterinaris, J. A. and Schiff, L. B.: *Numerical prediction of vortical flow over slender delta wings*. Journal of Aircraft, 30:935-942, 1993.
- [240] Ekaterinaris, J. A. and Schiff, L. B.: *Numerical simulation of incidence and sweep effects on delta wing vortex breakdown*. Journal of Aircraft, 31:1043-1048, 1994.
- [241] Ekaterinaris, J. A. and Schiff, L. B.: *Navier-Stokes solutions for an oscillating double-delta wing*. Journal of Aircraft, 32:228-234, 1995.
- [242] Ekaterinaris, J. A., Coutley, R. L., Schiff, L. B., and Platzer, M. F.: *Numerical investigation of high-incidence flow over a double-delta wing*. Journal of Aircraft, 32:457-463, 1995.
-

- [243] Jiang, M., Machiraju, R., and Thompson, D.: *A novel approach to vortex core region detection*. Symposium on Data Visualisation 2002, 2002.
- [244] Banks, D. C. and Singer, B. A.: *A predictor-corrector technique for visualizing unsteady flow*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1:151-163, 1995.
- [245] Herrmann, U., Press, A., Newbold, C., Kaurinkiski, P., Artiles, C., Muijden, J.v., and Carrier, G.: *Validation of european CFD codes for SCT low-speed high-lift computations*. AIAA-2001-2405, 2001.
- [246] Hoerner, S. F. and Borst, H. V.: *Fluid-dynamic lift: Practical information on aerodynamic and hydrodynamic lift*. Mrs. Liselotte A. Hoerner, 1985.
- [247] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική*. Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2006.
- [248] Mascarenhas, W. F.: *The BFGS method with exact line searches fails for non-convex objective functions*. Mathematical Programming, 99:49-61, 2004.
- [249] Li, D. H. and Fukushima, M.: *A modified BFGS method and its global convergence in nonconvex minimization*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 129:15-35, 2001.
- [250] Li, D. H. and Fukushima, M.: *On the global convergence of BFGS method for non-convex unconstrained optimization problems*. SIAM Journal on Optimization, 11:1054-1064, 2001.
- [251] Xiao, Y. X., Sun, H., and Wang, Z.: *A globally convergent BFGS method with nonmonotone line search for non-convex minimization*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 230:95-106, 2009.
- [252] Vanderplaats, G. N.: *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*. McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [253] P. T. Boggs, J. W. Tolle: *Sequential quadratic programming*. Acta Numerica, 4:1-52, 1995.
- [254] Rosenfeld, M. and Wolfshtein, M.: *Numerical calculation of a laminar two dimensional straight cascade flow*. Computers & Fluids, 12:293-310, 1984.
- [255] Mavriplis, D. J.: *A discrete adjoint-based approach for optimization problems on three-dimensional unstructured meshes*. AIAA Journal, 45:740-759, 2007.
- [256] Denton, J. D.: *Loss mechanisms in turbomachines*. Journal of Turbomachinery, 115:621-656, 1993.
- [257] Τρομπούκης, Ε.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, υπό εξέλιξη.
- [258] Kampolis, I. C., Trompoukis, X. S., Asouti, V. G., and Giannakoglou, K. C.: *CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics processing units*. Mechanics and Engineering, 199:712-722, 2010.
-

- [259] V. G. Asouti, X. S. Trompoukis, I. C. Kambolis and Giannakoglou, K. C.: *Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on graphics processing units*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010. DOI: 10.1002/flid.2352.
- [260] Καζαζάκης, Ν.: *Βελτιστοποίηση υπερηχητικού επιβατικού αεροσκάφους με χρήση της μεθόδου μιγαδικών μεταβλητών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [261] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Aerodynamic design using the truncated Newton algorithm and the continuous adjoint approach*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011. to appear.
- [262] Παπουτοής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι για το σιβαρό σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών με υπολογισμό τρίτων παραγώγων. Εφαρμογή σε μονοδιάστατους αγωγούς*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [263] Παπουτοής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς Μέθοδοι Χαμηλού Υπολογιστικού Κόστους για Τυρβώδεις Ροές, στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση*. Διδακτορική Διατριβή. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, υπό εξέλιξη.
-