



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ
ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ SURF-RIDING

ΣΕ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝΤΕΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

ΡΕΜΙΓΙΑΚΗΣ ΑΛΕΞΙΟΣ-ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2010

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Κ. Σπύρου για τη στενή συνεργασία που είχαμε, τη βοήθειά του όπου και οποτεδήποτε χρειάστηκε και για τις χρήσιμες συμβουλές και κατευθύνσεις του. Επίσης τον διδάκτορα Ι. Τίγκα για τη πολύτιμη βοήθειά του σε διάφορα προβλήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Πίνακας Περιεχομένων

1.Εισαγωγή.....	5
2. Βασική Θεωρία Γραμμικών Κυματισμών.....	6
2.1 Εισαγωγή.....	6
2.2 Γραμμική Θεωρία Κυμάτων-Κύματα Airy.....	7
2.3 Δύναμη Froude-Krylov Λόγω Γραμμικών Κυματισμών.....	11
3. Τα 2 ^{ης} Τάξης Μη Γραμμικά κύματα Κατά Stokes	14
3.1 Εισαγωγή.....	14
3.2 Μορφή Θεωρούμενου Κύματος	15
3.3 Δύναμη Froude-Krylov στα 2 ^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικά κύματα	17
4. Μαθηματικό Μοντέλο Κίνησης πλοίου κατά το διάμηκες.....	19
4.1 Εξίσωση Κίνησης κατά τη διεύθυνση του surge	19
4.2 Κίνηση σε αρμονικούς κυματισμούς	21
4.3 Κίνηση σε κύματα 2 ^{ης} τάξης κατά Stokes.....	22
5. Μη Γραμμική Δυναμική Συμπεριφορά.....	23
5.1. Εισαγωγή.....	23
5.2 Μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά.....	23
5.3 Μέθοδος «Αριθμητικής Συνέχισης» (Numerical Continuation)	27
5.3.1 Μαθηματική διατύπωση αλγορίθμου Συνέχισης.....	27
5.4 Περιγραφή του μη γραμμικού φαινομένου surf-riding των πλοίων	28
5.4.1. Δυναμική του φαινομένου	29
5.4.2. Δυναμική της μετάβασης.....	32
6. Παρουσίαση Αναπτυσσόμενης Μεθοδολογίας Υπολογισμού Της Δύναμης Froude-Krylov. 34	
6.1 Εισαγωγή-Στοχοι	34
6.2 Το υπό μελέτη πλοίο	34
6.3 Ισορροπία του πλοίου.....	35
6.3.1 Εξισώσεις Ισορροπίας	35
6.3.2 Διαδικασία υπολογισμού εμβαδόν νομέων	36
6.3.3 Υπολογισμός του βυθίσματος σε κάθε θεωρητικό νομέα	37
6.4 Υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylov.....	39
6.5 Δύναμη Froude-Krylov συναρτήσει ύψους κύματος H για σταθερό βάθος νερού.....	45

6.6 Δύναμη Froude-Krylov συναρτήσει βάθους νερού για σταθερό ύψος κύματος.....	47
7. Διερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς surge σε γραμμικό κυματισμό και σε κυματισμό Stokes 2 nd τάξης.....	50
7.1 Προσέγγιση της δύναμης Froude-Krylov συναρτήσει του ύψους.....	51
7.2 Προσέγγιση της δύναμης Froude-Krylov συναρτήσει του βάθους.....	54
7.3 C_L MATCONT	57
7.4 Αποτελέσματα.....	60
7.4.1. Προσομοιώσεις (Simulations).....	60
7.4.2 Διερεύνηση των στάσιμων αποκρίσεων.....	62
7.4.2.α Αριθμητική συνέχιση σταθερού ύψους κύματος και βάθους d	62
7.4.2β Αριθμητική συνέχιση σταθερού αριθμού F_n και βάθους d	67
7.4.2γ. Αριθμητική συνέχιση σταθερού αριθμού F_n και ύψους κύματος.....	70
7.4.3 Όρια του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων.	72
7.4.3.α Εύρεση των ορίων του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων F_n, H	73
7.4.3.β. Εύρεση των ορίων του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων F_n, d	76
7.5 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις δύο θεωρίες -Συμπεράσματα	78
8. Τελικές Παρατηρήσεις	83
Βιβλιογραφία	84
Παράρτημα - Αριθμητική εφαρμογή προγράμματος υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylov	86

1.Εισαγωγή

Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα είχε γίνει γνωστό ότι ένα κατευθυντικά ευσταθές πλοίο σε ήρεμο νερό, μπορούσε να γίνει ασταθές σε «πρυμνίες θάλασσες» [Davidson, 1948]. Παράλληλα έχει παρατηρηθεί από πολλούς ερευνητές ότι για απότομα, μεγάλου μήκους ακολουθούντα κύματα το πλοίο συχνά «προτιμάει» να ξοδέψει περισσότερο χρόνο στη κορυφή παρά στη κοιλάδα του κύματος. Εξαιτίας λοιπόν του γεγονότος ότι η μετάβαση του πλοίου από τη κορυφή στη κοιλάδα είναι παρατεταμένη κάποιοι ερευνητές περιέγραφαν αυτή τη συμπεριφορά του πλοίου με την φράση «riding on a wave crest». Το φαινόμενο αυτό που αναφέρεται πλέον ως surf riding ερευνήθηκε αρχικά από τον Grim (1951) ο οποίος κατέληξε ότι ένα πλοίο μπορεί να «κολλήσει» στη κοιλάδα ενός κύματος και να ταξιδέψει με την ταχύτητα φάσης του. Το 1962 οι Du Cane και Goodrich ανέφεραν τη διασύνδεση αυτού του φαινομένου με την κατευθυντική αστάθεια ενός πλοίου, φαινόμενο γνωστό σαν broaching και αργότερα οι Wahab και Swaan (1964), ερευνώντας την δυναμική συμπεριφορά του πλοίου σε ακολουθούντες κυματισμούς συμπέραναν ότι το πλοίο μπορεί να γίνει ασταθές όταν βρίσκεται στη κατωφέρεια ενός κύματος.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έγινε κατανοητό στη επιστημονική κοινότητα η μεγάλη σημασία της περαιτέρω μελέτης του surf riding, καθώς αυτή η συμπεριφορά είναι δυνατόν να οδηγήσει στο ιδιαίτερα επικίνδυνο broaching, το οποίο με τη σειρά του μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλες εγκάρσιες κλίσεις και τελικά στην ανατροπή του πλοίου (capsizing).

Η διαμήκη συμπεριφορά του πλοίου ερευνήθηκε διεξοδικά από τον Kan (1990), ο οποίος κατέληξε στη συνύπαρξη διαφορετικών ισορροπιών αναλόγως των αρχικών συνθηκών, όπως για παράδειγμα, της διαμήκης θέσης του πλοίου πάνω στο κύμα.

Μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη της συμπεριφοράς του πλοίου πριν και κατά τη διάρκεια του broaching παρουσιάστηκε από τον Σπύρου (1995b,1996a,1996b και 1996c), στην οποία η τοπολογική μελέτη του φαινομένου έδωσε μια ποιοτική εξήγηση για το τι συμβαίνει κατά τη μετάβαση από τη διαμήκη περιοδική κίνηση του πλοίου (surging) στο surf riding. Η συνύπαρξη του surf riding και της ασύμμετρης περιοδικής κίνηση του πλοίου κατά το διάμηκες ερευνήθηκε εκτενώς από τον Σπύρου (2006).

Η σημασία του surf riding οδήγησε τέλος τον Διεθνή Ναυτιλιακό Οργανισμό (International Maritime Organization) στην έκδοση μιας οδηγίας προς τον πλοίαρχο (IMO, MSC.1/Circ1228), προτείνοντας σειρά λειτουργικών μέτρων που πρέπει να λάβει ώστε να αποφύγει την εμπλοκή με τέτοιου είδους φαινόμενα.

Οι μέχρι τώρα μελέτες της συμπεριφοράς του πλοίου σε ακολουθούντες κυματισμούς συνήθως αφορούσαν κανονικά κύματα ημιτονοειδούς μορφής της γραμμικής θεωρίας. Στη παρούσα εργασία γίνεται μία προσέγγιση των φαινομένων αυτών θεωρώντας κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes προσπαθώντας με αυτόν τον τρόπο να έχουμε μία πιο ρεαλιστική περιγραφή των ακραίων κυματικών καταστάσεων που εμφανίζονται αυτά τα φαινόμενα.

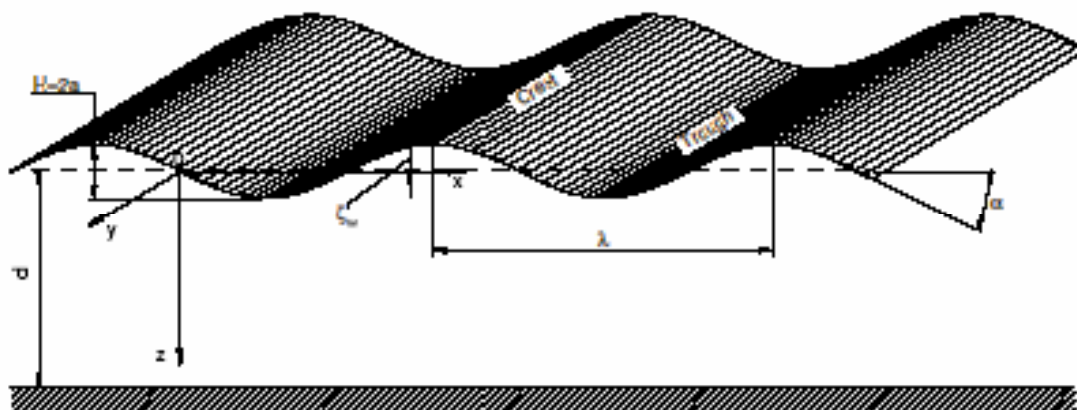
2. Βασική Θεωρία Γραμμικών Κυματισμών

2.1 Εισαγωγή

Ο όρος **κύμα** προέρχεται από το αρχαίο ελληνικό ρήμα ("κύω" = φουσκώνομαι) και χαρακτηρίζει τη μεταφορά μια διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός μέσου. Τα θαλάσσια κύματα είναι διαταραχές της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, και η διαταραχή αυτή εμφανίζεται με την παρουσία οριζόντιων και κάθετων κινήσεων μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων του νερού.

Υπάρχουν πολλά είδη κυμάτων και μπορούν να κατηγοριοποιηθούν συναρτήσει της κύριας δύναμης του φαινομένου. Τα **τριχοειδή** (capillary) κύματα, η δυναμική των οποίων «εξουσιάζεται» από την επίδραση της επιφανειακής τάσης. Τα μόρια στην επιφάνεια των υγρών φέρονται ως μη δεκτικά εξωτερικών δυνάμεων, από υπερκείμενα μόρια, με συνέπεια να έλκονται μεταξύ τους και προς το εσωτερικό της υγρής μάζας, από δυνάμεις συνοχής, και να δημιουργείται μια συνισταμένη δύναμη, τάση, που ονομάζεται επιφανειακή τάση. Τα **ελαστικά** (elastic) κύματα, η δυναμική των οποίων οφείλεται στην ελαστικότητα του μέσου διάδοσης (ρευστού) και τα **κύματα βαρύτητας** (gravitational) που δημιουργούνται σε ρευστά λόγω της δύναμης του βάρους. Η τελευταία κατηγορία κυμάτων είναι αυτή που μας απασχολεί στην παρούσα μελέτη.

Η αρχική διαταραχή που είναι απαραίτητη για τη δημιουργία ενός θαλάσσιου κυματισμού, είναι ο άνεμος και όπως είναι φυσικό η πραγματική θάλασσα είναι συνδυασμός πολλών και διαφορετικών-με την έννοια των χαρακτηριστικών τους- κυμάτων. Στη παρούσα μελέτη θα προσεγγίσουμε την μορφή της επιφάνειας της θάλασσας με ντετερμινιστικό τρόπο κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις. Όπως είναι γνωστό κύματα δύο διαστάσεων, με χαρακτηριστικά που επαναλαμβάνονται περιοδικά στον χώρο και στο χρόνο (regular 2-dimensional waves) θεωρούνται τα απλούστερα που μπορούν να περιγραφούν.



Σχ.2.1- Χαρακτηριστικά κανονικού κύματος

Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτών των κυμάτων φαίνονται στο Σχ.2.1 και είναι:

ζ_w , η κατακόρυφη συντεταγμένη του προφίλ του κύματος μετρούμενη από το ήρεμο νερό

λ , το μήκος του κύματος

H , το ύψος του κύματος

A , το πλάτος του κύματος ($A = H/2$)

T , η περίοδος του κύματος

c , η ταχύτητα φάσης του κύματος ($c = \lambda/T$)

Άλλα σημαντικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός κύματος είναι ο κυματικός αριθμός $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$, η κλίση του κύματος Ak και ο λόγος H/λ (wave steepness).

Επεκτείνοντας τις παραδοχές μας και τις απλοποιήσεις μας υποθέτουμε ημιτονοειδή κύματα. Χάρη στην υπόθεση αυτή μπορούμε να περιγράψουμε τα δισδιάστατα κύματα με απλές μαθηματικές εκφράσεις. Η θεωρία του ημιτονοειδούς φάσματος αναπτύχθηκε από τον Airy [Lamb,1932], για μικρού πλάτους κυματισμούς και η θεωρία του συχνά αναφέρεται και ως «γραμμική θεωρία κυμάτων». Αυτή βασίζεται στην υπόθεση ότι η ροή είναι **μη συνεκτική, ασυμπίεστη και αστρόβιλη**.

2.2 Γραμμική θεωρία Κυμάτων-Κύματα Airy

Το απλοποιημένο δυναμικό ταχύτητας που περιγράφει τη ροή σε αρμονικό κυματισμό δίνεται από την εξ.(2.1.1)

$$\phi = -\bar{\zeta} \cdot c \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\sinh(k \cdot d)} \cdot \sin k(x - c \cdot t) \quad (2.2.1)$$

,όπου

$\bar{\zeta}$, πλάτος του κύματος

c , ταχύτητα διάδοσης του κύματος

k , κυματαριθμός

z , κατακόρυφη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια ήρεμου νερού

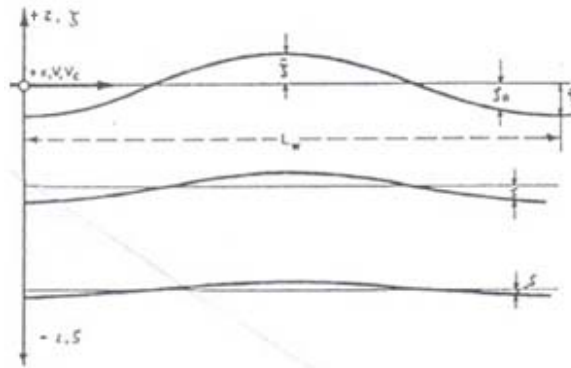
d , βάθος νερού

t , χρόνος

Η πίεση που δέχεται ένα βυθισμένο σώμα, υποθέτοντας μη συνεκτική και αστρόβιλη ροή, μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση του Bernoulli, εξ.(2.2.2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz' + \frac{P}{\rho} = 0 \quad (2.2.2)$$

Σε ήρεμο νερό η πίεση σε οποιοδήποτε βάθος (z) είναι σταθερή ($P = -\rho \cdot g \cdot z$) και αν θέλαμε να παραστήσουμε τη καμπύλη σταθερής πίεσης, αυτή θα ήταν μια οριζόντια ευθεία γραμμή στο βάθος αυτό ($z' = z$). Κάτω όμως από αρμονικό κύμα η καμπύλη σταθερής πίεσης διαστρεβλώνεται και η πίεση δεν είναι ίδια σε όλα τα σημεία για συγκεκριμένο βάθος (z) αλλά εξαρτάται από τη διαμήκη θέση των σημείων αυτών, όπως φαίνεται και στο Σχ.2.2.



Σχ.2.2 Σταθερές καμπύλες πίεσης σε κανονικό κύμα (P.N.A., 1989)

Η απόσταση που «αντιλαμβάνεται» ένα τυχαίο σημείο από την ελεύθερη επιφάνεια ήρεμου νερού δεν είναι πλέον (z) αλλά

$$z' = z + \zeta_p(x) \text{ (m)} \quad (2.2.3)$$

όπου $\zeta_p(x)$ η απόκλιση από τις οριζόντιες γραμμές σταθερής πίεσης για ήρεμο νερό ($z' = z$) λαμβάνεται από την σχέση:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g \zeta_p = 0 \quad (2.2.4)$$

Η σχέση αυτή εξάγεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Bernoulli, υποθέτοντας ότι οι ταχύτητες είναι μικρές ή ισοδύναμα ότι το πλάτος του κύματος είναι μικρό σε σύγκριση με το μήκος του.

Επιλύοντας την εξ.(2.2.4) ως προς ζ_p έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g \zeta_p = 0 \Rightarrow \zeta_p = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z'=z+\zeta_p}, \text{ και αφού το } \zeta_p \text{ είναι μικρό έχουμε}$$

τελικά :

$$\zeta_p = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z'=z} \quad (2.2.5)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του δυναμικού ταχύτητας εξ.(2.2.1) στην εξ.(2.2.5) , λαμβάνουμε την έκφραση αυτών των περιγραμμάτων σταθερής πίεσης σε ένα βάθος z , μετρούμενο από την ελεύθερη επιφάνεια ήρεμου νερού. Προκύπτει:

$$\zeta_p = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{\mathcal{G}\phi}{\mathcal{G}t} \right)_{z'=z} \Rightarrow \zeta_p = \frac{1}{g} \cdot \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}t} \left(-\bar{\zeta} \cdot c \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z+d))}{\sinh(k \cdot d)} \cdot \sin(k(x-c \cdot t)) \right) \Rightarrow$$

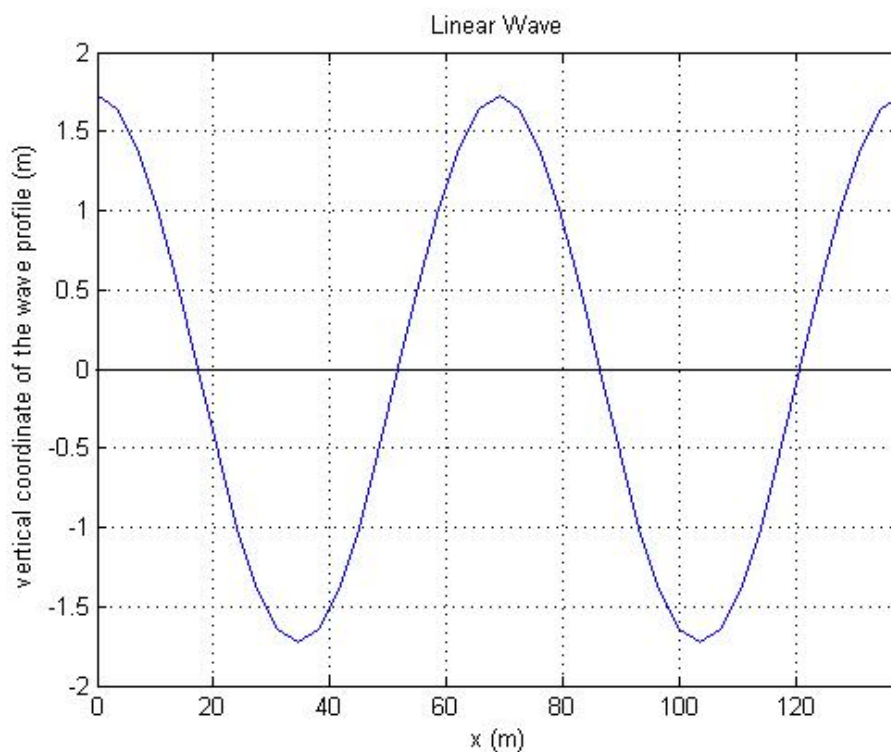
$$\zeta_p = \frac{1}{g} \cdot \left(\bar{\zeta} \cdot k \cdot c^2 \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z+d))}{\sinh(k \cdot d)} \cdot \cos(k(x-c \cdot t)) \right) \Rightarrow$$

$$\zeta_p = \frac{\bar{\zeta} \cdot k \cdot c^2}{g} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z+d))}{\sinh(k \cdot d)} \cdot \cos(k(x-c \cdot t)) \quad \overset{c^2 = \frac{g}{k} \cdot \tanh(k \cdot d)}{\Rightarrow}$$

$$\zeta_p = \bar{\zeta} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z+d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \cos(k(x-c \cdot t)) \quad (2.2.6)$$

Για $z = 0$, λαμβάνουμε την εξίσωση που περιγράφει το προφίλ του κύματος, Σχ.2.3

$$\zeta_0 = \bar{\zeta} \cdot \cos(k(x-c \cdot t)) \quad (2.2.7)$$



Σχ.2.3 Προφίλ αρμονικού κύματος ($H=3.45m, \lambda=69m$)

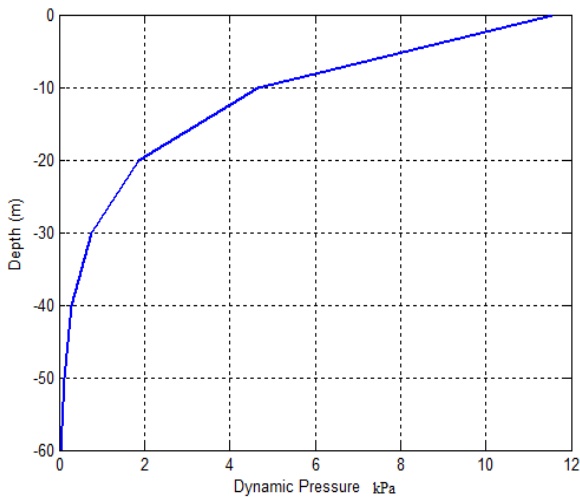
Πίεση

Σε ένα συγκεκριμένο βάθος λοιπόν, λόγω της παρουσίας του κύματος εκτός από τον υδροστατικό όρο έχουμε και την εμφάνιση ενός δυναμικού όρου στη πίεση. Σε ένα οποιοδήποτε σημείο έχουμε:

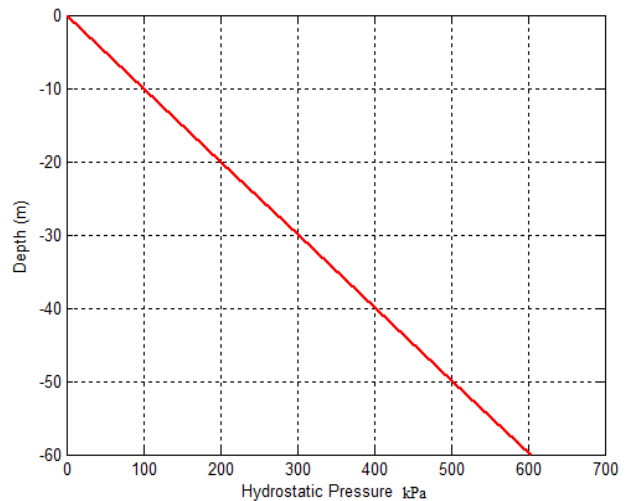
$$\begin{aligned}
 P &= \rho \cdot g \cdot z' = \rho \cdot g \cdot (-z + \zeta_p) = \underbrace{-\rho \cdot g \cdot z}_{\text{Υδροστατική Πίεση}} + \underbrace{\rho \cdot g \zeta_p}_{\text{Δυναμική Πίεση}} = \\
 &= -\rho \cdot g \cdot z + \rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \cos(k(x - c \cdot t)) \quad (2.2.8)
 \end{aligned}$$

Η διαφορά που παρατηρείται από μια πίεση που θα ήταν ευθέως ανάλογη της απόστασης (z) από την ελεύθερη επιφάνεια οφείλεται στον **δυναμικό** όρο της πίεσης και αντιπροσωπεύει το φαινόμενο που είναι γνωστό σαν Smith effect. Σύμφωνα με αυτό η πίεση κάτω από μία κορυφή του κύματος είναι μειωμένη, ενώ κάτω από μία κοιλάδα αυξημένη λόγω του Smith effect (P.N.A, 1989)

Να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι ο όρος $\frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)}$ που εμφανίζεται στο δυναμικό όρο της εξίσωσης για μεγάλο βάθος ($d > \lambda/2$) προσεγγίζει το e^{-kd} , γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι καθώς το βάθος αυξάνεται, η δυναμική πίεση μειώνεται εκθετικά (Σχ. 2.4.α). Αντιθέτως η υδροστατική πίεση ακολουθεί γραμμικά την αύξηση του βάθους (Σχ.2.4.β).



Σχ.2.4.α Δυναμική πίεση συναρτήσει του βάθους



Σχ.2.4.β Υδροστατική πίεση συναρτήσει του βάθους

2.3 Δύναμη Froude-Krylov Λόγω Γραμμικών Κυματισμών

Οι δυνάμεις Froude-Krylov, είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στο πλοίο εξαιτίας του προσπίπτοντος κυματισμού, υποθέτοντας ότι το πεδίο πιέσεων παραμένει αμετάβλητο από την παρουσία του πλοίου. Ο υπολογισμός αυτών των δυνάμεων απαιτεί την ολοκλήρωση των πιέσεων πάνω στο βυθισμένο τμήμα της γάστρας σύμφωνα με την παρακάτω σχέση (2.3.1)

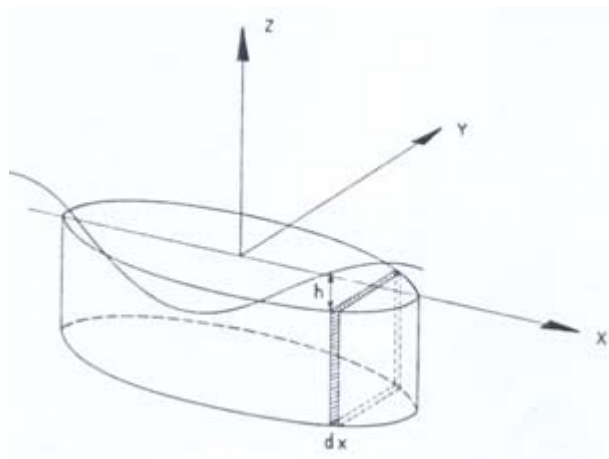
$$F_{FK_j} = -\rho \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \bar{n}_j ds = \iint_S p(x,t) \cdot \bar{n}_j ds \quad , \text{για } j = 1,2,3 \quad (2.3.1)$$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ οι τρεις συνιστώσες του κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος \mathbf{n} . Η φορά του διανύσματος είναι προς τη γάστρα.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως η υδροδυναμική πίεση που γίνεται «αισθητή» από έναν νομέα πλοίου το οποίο ταξιδεύει με μία ταχύτητα (U_s) σε ακολουθούντες κυματισμούς είναι σύμφωνα με την εξ.(2.2.8)

$$p = -\rho \cdot g \cdot z + \rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \cos(k(x + x_s)) .$$

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία λωρίδων (strip theory) ,η οποία εισήχθη στη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου από τον Korvin-Kroukonsky (1955), οι συνολικές σε ολόκληρο το πλοίο, αναπτυσσόμενες υδροδυναμικές δυνάμεις παράγονται με ολοκλήρωση, κατά μήκος του πλοίου, των συνολικών υδροδυναμικών δυνάμεων που αναπτύσσονται ανά λωρίδα (νομέα) του πλοίου, παραλείποντας τις αλληλεπιδράσεις της ροής μεταξύ των διαφόρων λωρίδων. Δηλαδή, ολοκληρώνουμε κατά μήκος του πλοίου υδροδυναμικά μεγέθη, που προκύπτουν από τη λύση δισδιάστατων προβλημάτων.



Σχ. 2.5. Υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylov κατά τη διεύθυνση του surge. (Resistance, propulsion and steering of ships, 1962)

Σύμφωνα με τον Hamamoto (1991) μπορούμε να ορίσουμε τη παράγωγο της πίεσης στη κατεύθυνση του surge ως ακολούθως

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \sin(k(x + x_s)) \quad (2.3.2)$$

Επομένως, και σύμφωνα πάντα με τη μεθοδολογία που ανέπτυξε ο Hamamoto (1991), χρησιμοποιώντας τη παράγωγο της πίεσης στην κατεύθυνση x και το θεώρημα του Gauss, η δύναμη Froude-Krylov (X_{FK}) στη διεύθυνση του surge μπορεί να οριστεί σαν ένα ολοκλήρωμα όγκου της μορφής

$$X_{FK} = -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (2.3.3)$$

Τελικά η δύναμη Froude-Krylov στη κατεύθυνση του surge και για ακολουθούντες κυματισμούς μπορεί να περιγραφεί από την εξ.(2.3.4)

$$X_{FK} = -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot (x + x_s)) dx_s \quad (2.3.4)$$

με:

ρ , πυκνότητα

g , επιτάχυνση της βαρύτητας

L , μήκος πλοίου

x_s , απόσταση του νομέα από την μέση τομή

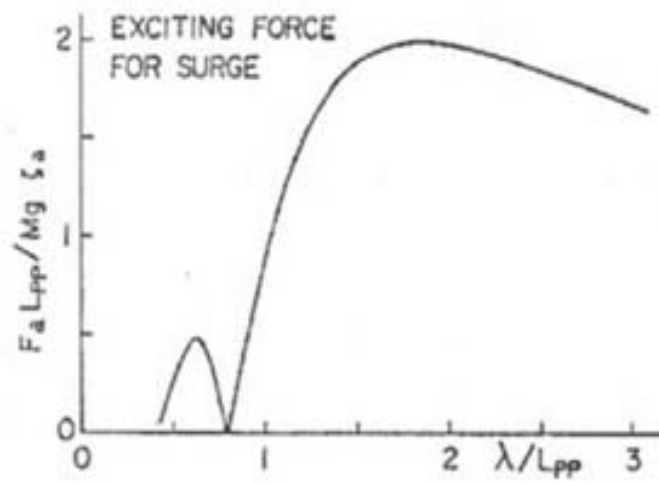
$z(x_s)$, το κέντρο πίεσης πάνω στον νομέα x_s

$S(x_s)$, το εμβαδό του νομέα x_s , το οποίο εξαρτάται από τη τοπική ανύψωση του κύματος στη θέσης x_s .

Περαιτέρω ανάπτυξη της εξ.(2.3.4) μας δίνει:

$$\begin{aligned} X_{FK} &= -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \sin(k \cdot x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \cos(k \cdot x_s) dx_s - \\ &\quad \rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \cos(k \cdot x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot x_s) dx_s \\ &= -f_s \sin(k \cdot x) - f_c \cos(k \cdot x) = -f \cdot \sin(k(x - \theta)) = -f \cdot \sin(k \cdot x^*) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Η δύναμη Froude-Krylov συναρτήσει του μήκους του κύματος στη διεύθυνση του surge για ένα μικρό αλιευτικό σκάφος παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα (Kan,1990) (Σχ.2.6):

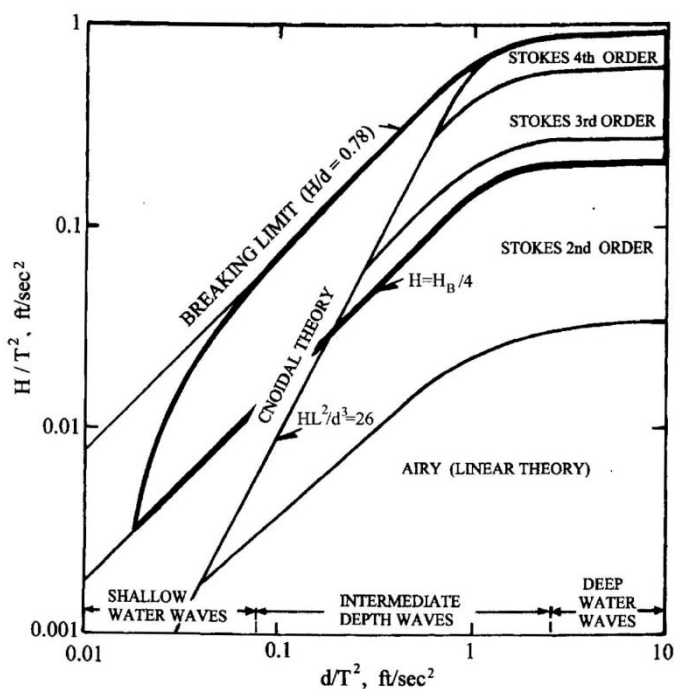


Σχ.2.6 Δύναμη Froude-Krylov στη διεύθυνση του surge (Kan, 1990)

3. Τα 2^{ης} Τάξης Μη Γραμμικά κύματα Κατά Stokes

3.1 Εισαγωγή

Ένα ερώτημα που συχνά γεννάται είναι το κατά πόσο μία επιλεγμένη θεωρία κυμάτων, είναι αυτή που αντικατοπτρίζει καλύτερα τη πραγματικότητα. Με άλλα λόγια ποιά είναι τα κριτήρια με τα οποία θα καταλήξουμε στην εφαρμογή μιας θεωρίας. Ο Le Mehaute (1976) μελετώντας το πρόβλημα αυτό κατέληξε ότι η χρησιμότητα μιας θεωρίας εξαρτάται από το εκάστοτε θαλάσσιο περιβάλλον (Σχ.3.1)



Σχ. 3.1 Όρια κυματικών θεωριών (Le Mehaute 1976)

Οι ως τώρα έρευνες πάνω στα φαινόμενα που εμφανίζονται στο πλοίο όταν ταξιδεύει σε ακολουθούσες θάλασσες, προσομοιάζουν την θαλάσσια επιφάνεια με αρμονικά κύματα της γραμμικής θεωρίας. Αμέσως γίνεται κατανοητό ότι η ελεύθερη επιφάνεια των αρμονικών κυματισμών διαφέρει πολύ από τη πραγματική επιφάνεια της θάλασσας. Εύλογα λοιπόν γεννάται το ερώτημα κατά πόσο μια διαφορετική θεώρηση των κυμάτων θα επηρεάσει τα έως τώρα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του πλοίου. Στα παραπάνω έρχεται να προστεθεί και το συμπέρασμα του Kan (1990) ότι το φαινόμενο του surf-riding εμφανίζεται πιο εύκολα σε ρηχά νερά.

Στη προσπάθειά μας για μία πιο ρεαλιστική περιγραφή της θάλασσας, εισάγουμε τα **2^{ης} τάξης μη γραμμικά κύματα** της θεωρίας του Stokes το προφίλ των οποίων εξαρτάται από το βάθος της θάλασσας (σε αντίθεση με τα αρμονικά) (Stokes, 1847). Στόχος μας είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πλοίου σε αυτό το περιβάλλον, με απώτερο σκοπό να εξακριβώσουμε το κατά πόσο μια γραμμική θεώρηση των κυμάτων είναι επαρκής για πρακτικές εφαρμογές.

3.2 Μορφή Θεωρούμενου Κύματος

Δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ενός μικρού πλάτους κυματισμού στη γραμμική θεωρία είναι η ημιτονοειδής μορφή του προφίλ της επιφάνειας καθώς και κυκλική τροχιά των μορίων του νερού. Αυτά τα δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα της γραμμικής θεωρίας δεν συνυπάρχουν σε κύματα πεπερασμένου πλάτους σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία (Stokes, 1847).

Η βασική υπόθεση στη θεωρία κυμάτων με πεπερασμένο πλάτος είναι η αστρόβιλη ροή. Αυτή η υπόθεση μπορεί να δικαιολογηθεί εάν η συνεκτικότητα του ρευστού είναι εξαιρετικά μικρή. Στη θεωρία του **Stokes** εκτός των προαναφερθέντων υποθέτουμε επίσης ότι $H/\lambda \ll 1$.

Η ανάλυση που ακολουθεί βρίσκεται σε αντιστοιχία με αυτή που αναπτύσσεται στη παράγραφο 2.2. για αρμονικά κύματα. Το δυναμικό ταχύτητας που περιγράφει τη ροή σε κύματα 2^{ης} τάξης δίνεται από την εξ.(3.2.1)

$$\phi = -\bar{\zeta} \cdot \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\sinh(k \cdot d)} \cdot \sin(k(x - c \cdot t)) - \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot T} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot \frac{\cosh[2 \cdot k \cdot (z + d)]}{\sinh^4(k \cdot d)} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot (x - c \cdot t)) \quad (3.2.1)$$

,όπου:

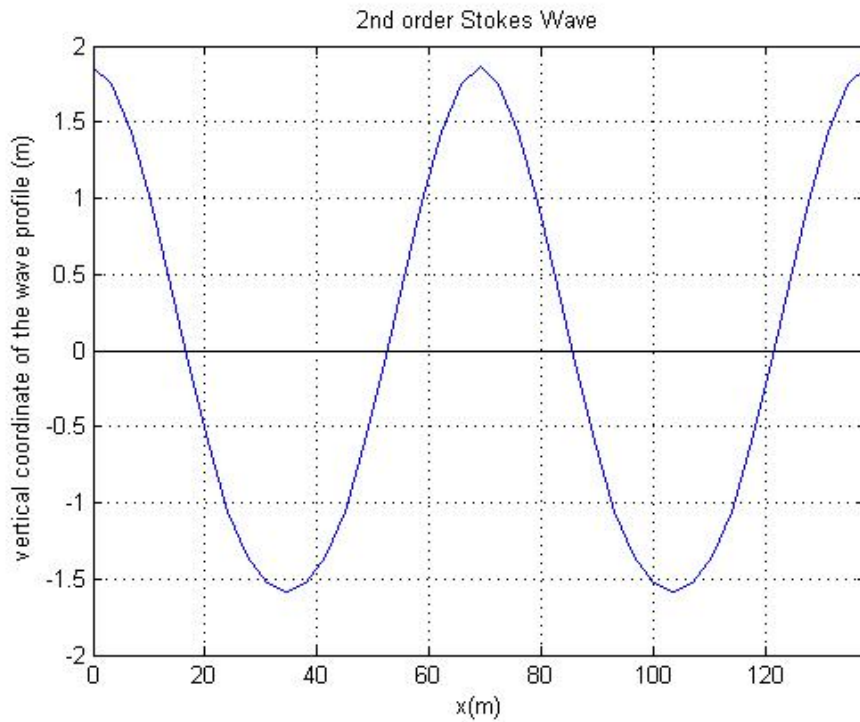
- $\bar{\zeta}$, πλάτος κύματος
- H , ύψος του κύματος
- λ , μήκος κύματος
- T , περίοδος
- c , ταχύτητα διάδοσης του κύματος
- k , κυματαριθμός
- z , κατακόρυφη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια ήρεμου νερού
- d , βάθος νερού
- t , χρόνος

Το προφίλ του κύματος δίνεται από την εξ.(3.2.2) . Στο σχήμα (Σχ.3.2) παρουσιάζεται το προφίλ κύματος ύψους $H = 3.45 m$ το οποίο διαδίδεται σε βαθιά θάλασσα.

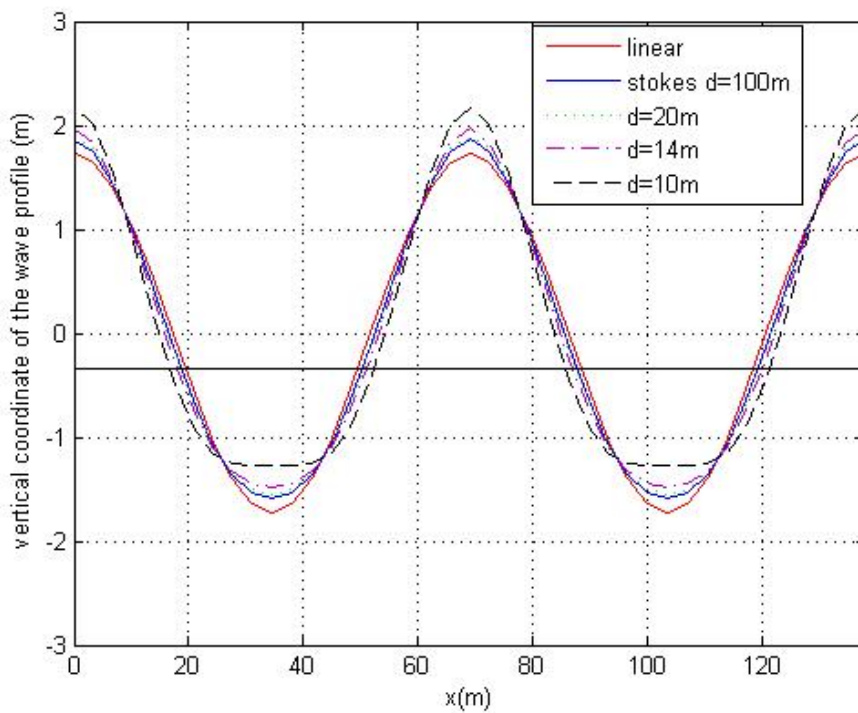
$$\zeta_0 = \bar{\zeta} \cdot \cos(k(x - c \cdot t)) + \frac{\pi}{2 \cdot \lambda} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot [2 + \cosh(2 \cdot k \cdot d)] \cdot \frac{\cosh(k \cdot d)}{\sinh^3(k \cdot d)} \cdot \cos(2 \cdot k \cdot (x - c \cdot t)) \quad (3.2.2)$$

Από την εξίσωση 3.2.2 παρατηρούμε ότι το προφίλ του κύματος εξαρτάται από το βάθος του νερού d , κάτι το οποίο δεν συμβαίνει στα αρμονικά κύματα της γραμμικής θεωρίας. Συγκρίνοντας τα δύο κύματα παρατηρούμε ότι στα μη γραμμικά οι κορυφές είναι πιο απότομες, ενώ οι κοιλάδες είναι αρκετά πεπλατυσμένες, σε σχέση με τα γραμμικά. Αυτή μάλιστα η ποιοτική τους διαφορά, γίνεται πιο έντονη καθώς μειώνεται το βάθος του

νερού, όπως φαίνεται από το σχήμα (Σχ.3.3) για κύματα ύψους $H = 3.45\text{ m}$ και μήκους κύματος $\lambda = 69\text{ m}$.



Σχ.3.2 Προφίλ μη γραμμικού 2^{ης} τάξης κατά Stokes κύματος, Deep water, ($H = 3.45\text{ m}$, $\lambda = 69\text{ m}$)



Σχ.3.3 Προφίλ κυμάτων για διάφορα βάθη νερού ($H = 3.45\text{ m}$, $\lambda = 69\text{ m}$)

Πίεση

Όπως και στα αρμονικά κύματα η συνολική πίεση σε κάποιο σημείο είναι το άθροισμα της υδροστατικής ($P_{hydrostatic}$) και δυναμικής πίεσης ($P_{dynamic}$)

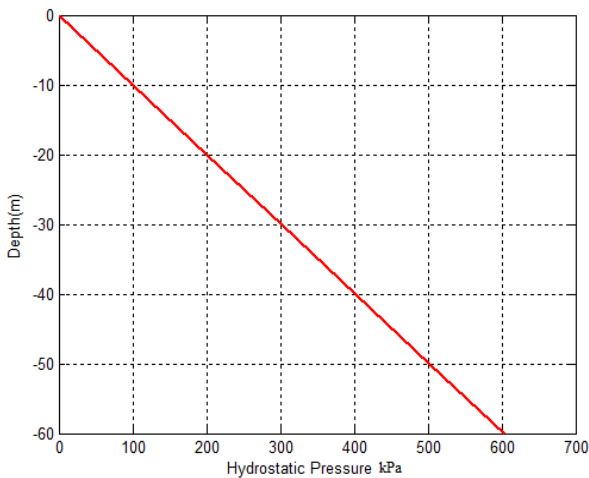
$$P_{tot} = P_{hydrostatic} + P_{dynamic} \quad (3.2.3)$$

Για τα 2^{ης} τάξης κύματα κατά Stokes έχουμε ότι:

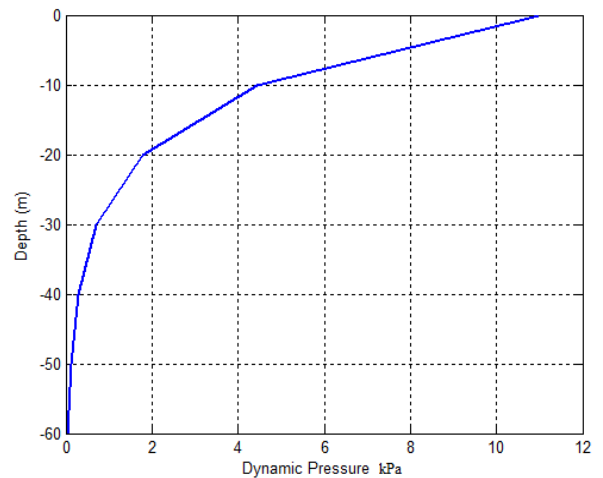
$$P_{hydrostatic} = -\rho \cdot g \cdot z - \frac{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot H^2}{4 \cdot \lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \{\cosh[2 \cdot k \cdot (z + d)] - 1\} \quad (3.2.4\alpha)$$

$$P_{dynamic} = \frac{\rho \cdot g \cdot H}{2} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \cos(k \cdot (x - c \cdot t)) + \frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g \cdot H^2}{4 \cdot \lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \cos[2 \cdot k \cdot (x - c \cdot t)] \quad (3.2.4\beta)$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα πίεσης-βάθους παρουσιάζονται στα σχήματα Σχ. 3.4.α και Σχ.3.4.β.



Σχ.3.4.α Υδροστατική πίεση συναρτήσει βάθους



Σχ.3.4.β Δυναμική πίεση συναρτήσει βάθους

3.3 Δύναμη Froude-Krylon στα 2^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικά κύματα

Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε στη παράγραφο 2.3 για τα αρμονικά κύματα, η δύναμη Froude-Krylon (X_{FK}) στη διεύθυνση του surge μπορεί να οριστεί σαν ένα ολοκλήρωμα όγκου της μορφής

$$X_{FK} = -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (3.3.1)$$

Η παράγωγος της πίεσης ορίζεται με τη βοήθεια της εξ. 3.2.4 ως εξής:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_{hydrostatic}}{\partial x} + \frac{\partial p_{dynamic}}{\partial x} = \frac{\partial p_{dynamic}}{\partial x}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την 3.2.4β έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p_{dynamic}}{\partial x} = -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot \sin(k(x - c \cdot t)) - \\ &\frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g}{\lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot 2 \cdot k \cdot \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \sin[2 \cdot k(x - c \cdot t)] \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτή της παραγράφου 2.3 , η εξ 3.3.1 γίνεται:

$$\begin{aligned} X_{FK} &= -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot (x + x_s)) dx_s - \\ &\frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g}{\lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot 2 \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \sin[2 \cdot k(x + x_s)] dx_s \quad (3.3.3) \end{aligned}$$

,περαιτέρω ανάπτυξη της οποίας δίνει

$$\begin{aligned} X_{FK} &= -\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \cos(k \cdot x_s) dx_s - \\ &\rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot x_s) dx_s - \\ &\frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g}{\lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot 2 \cdot k \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \cos(2 \cdot k \cdot x_s) dx_s - \\ &\frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g}{\lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot 2 \cdot k \cdot \cos(2 \cdot k \cdot x) \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x_s) dx_s \end{aligned}$$

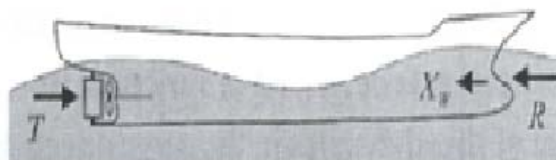
Καταλήγουμε λοιπόν σε μια έκφραση της μορφής

$$\begin{aligned} X_{FK} &= -f_{1s} \sin(k \cdot x) - f_{1c} \cos(k \cdot x) - f_{2s} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) - f_{2c} \cdot \cos(2 \cdot k \cdot x) \Rightarrow (3.3.4) \\ X_{FK} &= -f_1 \cdot \sin(k \cdot x^*) - f_2 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x^*) \end{aligned}$$

4. Μαθηματικό Μοντέλο Κίνησης πλοίου κατά το διάμηκες

4.1 Εξίσωση Κίνησης κατά τη διεύθυνση του surge

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του πλοίου κατά τη διεύθυνση του surge σε ακολουθούντες κυματισμούς λαμβάνεται απ' ευθείας από τον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα ως εξής:



Σχ.4.1 Κύριες δυνάμεις στη διαμήκη διεύθυνση (Σπύρου, 2006)

$$[m - X_{\dot{u}}(U; \lambda)] \cdot \dot{U} = [T(x, U; n, Ak, \lambda) - R(x, U; Ak, \lambda)] - X_w(x; Ak, \lambda) \quad (4.1.1)$$

όπου:

m , η μάζα του πλοίου

$X_{\dot{u}}$, η πρόσθετη μάζα κατά τη διαμήκη διεύθυνση

U , η στιγμιαία ταχύτητα του πλοίου κατά τη διαμήκη διεύθυνση

T , η δύναμη της ώσης κατά τη διαμήκη διεύθυνση

R , η αντίσταση κατά τη διαμήκη διεύθυνση

x , η απόσταση, κατά τη διεύθυνση του κύματος, του διαμήκους κέντρου βάρους του πλοίου από ένα σημείο αναφοράς στη κοιλάδα του κύματος

n , ο αριθμός των στροφών της προπέλας

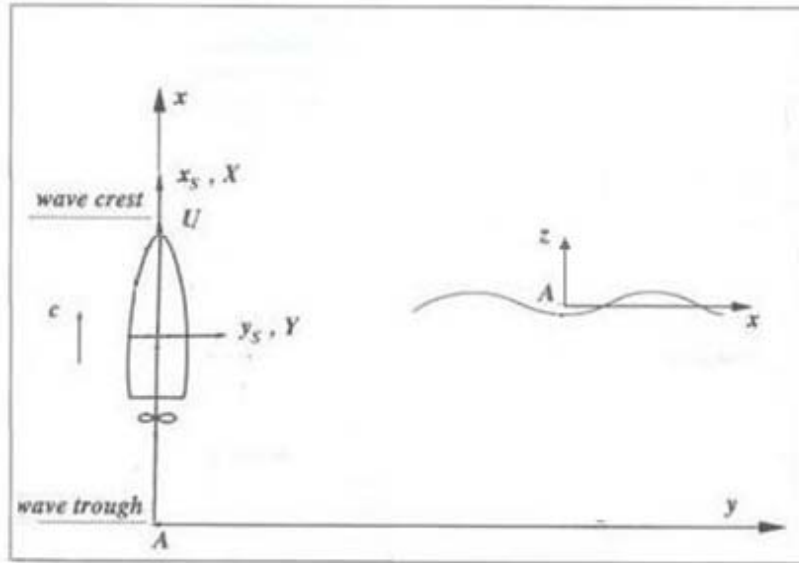
A , το πλάτος του κύματος

k , ο κυματαριθμός

Ak , η κλίση του κύματος

X_w , η εξαρτώμενη από τη θέση δύναμη του κύματος κατά το διαμήκη άξονα του πλοίου.

Το σύστημα αξόνων που υιοθετούμε φαίνεται στο Σχ.4.2. Στο σύστημα αυτό η θέση του πλοίου προσδιορίζεται από τη σχέση $x = \xi - c \cdot t$, όπου ξ είναι η διαμήκης θέση του πλοίου ως προς ένα ακίνητο σύστημα αξόνων πάνω στη γη.



Σχ.4.2. Σύστημα συντεταγμένων

Προσδιορισμός Δυνάμεων

Η αντίσταση μπορεί να εκφρασθεί σαν συνάρτηση μόνο της ταχύτητας U , και να προσεγγιστεί από ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού :

$$R(U) = r_1 \cdot U + r_2 \cdot U^2 + r_3 \cdot U^3 \quad (4.1.2)$$

όπου $r_i (i = 1,2,3)$ κατάλληλοι συντελεστές.

Η ώση της προπέλας εκφράζεται από την εξίσωση (4.1.3).

$$T(u;n) = (1 - t_p) \cdot \rho \cdot n^2 D_p^4 K_T(u;n) \quad (4.1.3)$$

όπου t_p , ρ , n , D_p και K_T , ο συντελεστής μείωσης ώσης, η πυκνότητα, ο αριθμός στροφών, η διάμετρος της έλικας και ο συντελεστής ώσης αντίστοιχα.

Ο συντελεστής K_T προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού συναρτήσει του συντελεστή προχώρησης J , ως εξής:

$$K_T = \kappa_0 + \kappa_1 \cdot J(u;n) + \kappa_2 \cdot J^2(u;n) \quad (4.1.4)$$

Στην εξίσωση (4.1.4) τα $\kappa_i, (i = 1,2,3)$ είναι κατάλληλοι συντελεστές και ο συντελεστής προχώρησης δίνεται από την εξίσωση (4.1.5)

$$J(u;n) = \frac{u \cdot (1 - w_p)}{n \cdot D_p} \quad , \quad w_p \text{ συντελεστής ομόρου} \quad (4.1.5)$$

Πρέπει να αναφέρουμε ότι οι συντελεστές t_p και w_p αναφέρονται σε ήρεμο νερό. Αντικαθιστώντας την εξ.(4.1.5) και την εξ.(4.1.4) στην εξ.(4.1.3) έχουμε:

$$T(u; n) = \tau_2 \cdot u^2 + \tau_1 \cdot u \cdot n + \tau_0 \cdot n^2 \quad (4.1.6)$$

όπου,

$$\tau_2 = \kappa_2 \cdot (1-t_p) \cdot (1-w_p)^2 \cdot \rho \cdot D_p^2, \quad \tau_1 = \kappa_1 \cdot (1-t_p) \cdot (1-w_p) \cdot \rho \cdot D_p^3,$$

$$\tau_0 = \kappa_0 \cdot (1-t_p) \cdot \rho \cdot D_p^4$$

Στη μελέτη των De Kat και Paulling (1989) αποδείχτηκε πειραματικά ότι σε καταστάσεις που οδηγούν σε broaching (όπως το surf-riding), στη δύναμη διέγερσης του κύματος κυρίαρχο ρόλο έχουν οι δυνάμεις Froude-Krylov.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι οι εξισώσεις κίνησης του πλοίου σε αρμονικούς κυματισμούς και σε κυματισμούς 2^{ης} τάξης κατά Stokes διαφέρουν μόνο στην έκφραση της δύναμης Froude-Krylov.

4.2 Κίνηση σε αρμονικούς κυματισμούς

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (2.3.5) η δύναμη Froude-Krylov κατά τη διεύθυνση του surge εκφράζεται ως ακολούθως:

$$X_w = f \cdot \sin(k \cdot x) \quad (4.2.1)$$

Να σημειώσουμε ότι είναι προτιμότερο να μετράμε την ταχύτητα στη διεύθυνση του surge, όχι ως προς ένα ακίνητο σύστημα αξόνων αλλά ως προς ένα κινούμενο σύστημα το οποίο κινείται με την ταχύτητα του κύματος. Η σχετική ταχύτητα \dot{x} , εκφράζεται από τη σχέση $\dot{x} = u - c$. Αντικαθιστώντας τις εξ.(4.1.2)-εξ.(4.1.6) και την εξ. (4.2.1) στην εξ.(4.1.1) και εκφράζοντας τα πάντα ως προς x έχουμε:

$$(m - X_{\ddot{u}}) \cdot \ddot{x} + \left[\underbrace{(3r_3 \cdot c^2 + 2 \cdot (r_2 - \tau_2) \cdot c + r_1)}_{A_1} - \tau_1 \cdot n \right] \cdot \dot{x}$$

$$+ \underbrace{[3 \cdot r_3 \cdot c + (r_2 - \tau_2)]}_{A_2} \cdot \dot{x}^2 + \underbrace{r_3}_{A_3} \cdot \dot{x}^3 + f \cdot \sin(k \cdot x)$$

$$= \underbrace{(\tau_2 \cdot c^2 + \tau_1 \cdot c \cdot n + \tau_0 \cdot n^2)}_T - \underbrace{(r_1 \cdot c + r_2 \cdot c^2 + r_3 \cdot c^3)}_R \quad (4.2.2)$$

4.3 Κίνηση σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes

Κατ' αντιστοιχία η σχέση 3.3.4 δίνει:

$$\begin{aligned} X_{FK} &= f_{1S} \sin(k \cdot x) + f_{1C} \cos(k \cdot x) + f_{2S} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) + f_{2C} \cdot \cos(2 \cdot k \cdot x) \Rightarrow \\ X_{FK} &= f_1 \cdot \sin(k \cdot x^*) + f_2 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x^*) \end{aligned}$$

(4.3.1)

οπότε η εξίσωση κίνησης του πλοίου στη περίπτωση μη γραμμικών κυμάτων 2^{ης} τάξης γίνεται:

$$\begin{aligned} (m - X_{\ddot{u}}) \cdot \ddot{x} + \left[\underbrace{(3r_3 \cdot c^2 + 2 \cdot (r_2 - \tau_2) \cdot c + r_1)}_{A_1} - \tau_1 \cdot n \right] \cdot \dot{x} \\ + \underbrace{[3 \cdot r_3 \cdot c + (r_2 - \tau_2)]}_{A_2} \cdot \dot{x}^2 + \underbrace{r_3}_{A_3} \cdot \dot{x}^3 + f_1 \cdot \sin(k \cdot x) + f_2 \sin(2 \cdot k \cdot x) \end{aligned}$$

(4.3.2)

$$= \underbrace{(\tau_2 \cdot c^2 + \tau_1 \cdot c \cdot n + \tau_0 \cdot n^2)}_T - \underbrace{(r_1 \cdot c + r_2 \cdot c^2 + r_3 \cdot c^3)}_R$$

5. Μη Γραμμική Δυναμική Συμπεριφορά

5.1. Εισαγωγή

Μελετώντας τις εξισώσεις κίνησης του πλοίου (4.2.2 και 4.3.2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παρόμοιες με αυτή που περιγράφει την κίνηση ενός εκκρεμούς μη γραμμικής απόσβεσης κινούμενο από μια σταθερή εξωτερική δύναμη (Σπύρου, 2000). Ο όρος της απόσβεσης είναι εκφρασμένος συναρτήσει της Ώσης και της Αντίστασης και παρότι δεν είναι απαραίτητα μικρός, η μη γραμμικότητα του ασθενής. Εάν ληφθεί υπόψη και το γεγονός ότι για μικρό πλάτος της δύναμης Froude-Krylov η μη γραμμικότητα του όρου είναι πρακτικά ασήμαντη, τότε η συμπεριφορά του πλοίου θα είναι κατά βάση γραμμική. Ο μη γραμμικός χαρακτήρας της εξίσωσης κίνησης βρίσκεται και στον όρο της αδράνειας, καθώς η επιτάχυνση πολλαπλασιάζεται με την πρόσθετη μάζα, η οποία εξαρτάται από τη συχνότητα συνάντησης και άρα από την στιγμιαία ταχύτητα (Σπύρου, 1996)

Εάν το κύμα γίνει πιο απότομο, η μη γραμμική φύση των εξισώσεων αρχίζει και λαμβάνει κυρίαρχο ρόλο. Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της απόκρισης σε ένα τέτοιο κυματικό καθεστώς είναι ότι εμφανίζονται ανώτερης τάξης αρμονικές και η απόκριση χάνει τη συμμετρικότητα της (Σπύρου, 2000). Ένα ζεύγος σημείων ισορροπίας που αντιπροσωπεύουν τη κατάσταση του surf-riding δημιουργείται και συνυπάρχει με την περιοδική κίνηση που αντιπροσωπεύει το surging.

Ας σκεφτούμε λίγο το εκκρεμές. Αναλόγως των αρχικών συνθηκών και του μεγέθους της σταθερής εξωτερικής στρεπτικής ροπής, το εκκρεμές είτε θα εκτελεί πλήρεις περιστροφές είτε θα ισορροπήσει σε κάποια θέση. Αυτού του τύπου συμπεριφορά εμφανίζεται σε ζευγάρια σημείων που βρίσκονται συμμετρικά της οριζόντιας γραμμής που περνάει από το κέντρο του εκκρεμούς (ή γύρω από το μέσο της κατωφέρειας του κύματος, αν σκεφτούμε τη δυναμική του πλοίου). Μόνο όμως στο χαμηλό σημείο, το οποίο όπως θα δούμε αργότερα αντιστοιχεί στη κοιλάδα, έχουμε ευσταθή ισορροπία.

5.2 Μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε σε αυτή την εργασία καθώς και οι λύσεις αυτών βασίζονται στην ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων. Τα θεμέλια της μη γραμμικής θεωρίας δυναμικών συστημάτων εισήχθησαν από τον Henry Poincare, πριν από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, ο οποίος προσπαθώντας να περιγράψει την πλανητική κίνηση κατέληξε στη μεγάλη σημασία που έχει η ποιοτική μελέτη ενός δυναμικού συστήματος και παρατήρησε ότι η συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι απρόβλεπτη παρά τον αιτιοκρατικό (deterministic) χαρακτήρα των ίδιων των εξισώσεων που αποτελούν το σύστημα (Strogatz, 1994).

Ο Van der Pol το 1920 μελετώντας θεωρητικά και πειραματικά την συμπεριφορά των ηλεκτρικών κυκλωμάτων παρατήρησε τη τάση των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων να παράγουν διαφορετικές σταθερές-μόνιμες αποκρίσεις αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Ο Lorentz στις αρχές της δεκαετίας του 1960 με πειράματα έδειξε ότι ένα σύστημα μπορεί να μην ισορροπήσει ποτέ και αντιθέτως να ακολουθήσει μία μη περιοδική

ακανόνιστη συμπεριφορά. Η σημασία των αρχικών συνθηκών στο τελικό αποτέλεσμα, αναδείχθηκε ως η κρίσιμη παράμετρος για μια τέτοια χαοτική συμπεριφορά.

Όσον αφορά την ναυπηγική κοινότητα, η έρευνα της μη γραμμικής συμπεριφοράς του πλοίου ξεκίνησε το 1970 και από τότε αναπτύχθηκαν πολλές θεωρίες για την εις βάθος ανάλυση των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής δύναμης (1980 και 1990) αποτέλεσε ένα ισχυρό κίνητρο για την ανάλυση ενός μεγάλου αριθμού προβλημάτων που παρατηρούνται στη κίνηση του πλοίου.

Η βασική ιδέα για την αντιμετώπιση των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι η εξαγωγή της λύσης-πληροφορίας που χρειαζόμαστε χωρίς να επιλύσουμε τα συστήματα που εμφανίζονται. Μια λύση ενός δυναμικού συστήματος είναι ένα ζευγάρι συναρτήσεων $x_1(t)$, $x_2(t)$ που αντιπροσωπεύει, για παράδειγμα, τη θέση και την ταχύτητα του συστήματος. Αν θέλαμε να παρουσιάσουμε τη λύση σε ένα αφηρημένο χώρο με συντεταγμένες x_1, x_2 , αυτή θα αντιστοιχούσε σε ένα σημείο κινούμενο κατά μήκος μίας καμπύλης-τροχιάς (trajectory) στο χώρο αυτό (phase space). Ο χώρος αυτό είναι γεμάτος τροχιές αφού κάθε σημείο του θα μπορούσε να αποτελεί την αρχική συνθήκη του συστήματος.

Στα μη αυτόνομα συστήματα, σε αυτά δηλαδή που το σύστημα εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, κάνοντας έναν απλό μετασχηματισμό του τύπου $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ και ορίζοντας την $x_3 = t$, με $\dot{x}_3 = 1$ το δισδιάστατο χρονικά εξαρτημένο σύστημα μετατρέπεται σε τρισδιάστατο αυτόνομο, επιτρέποντας μας να «παγώνουμε» τις τροχιές.

Ένα σύστημα n εξισώσεων 1^{ης} τάξης ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Για $n=1$ έχουμε μία απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και η σχέση (2.4.1) δίνει :

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2.2)$$

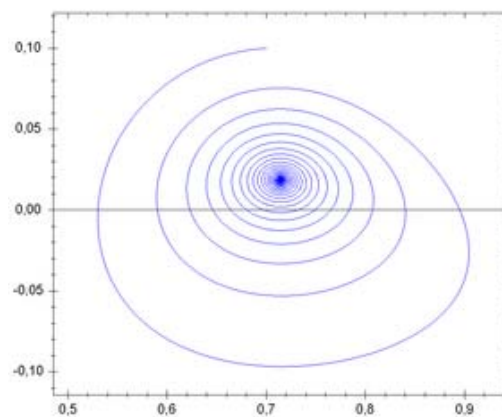
Το διανυσματικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα υγρό που ρέει σταθερά κατά μήκος του άξονα x , με ταχύτητα που ποικίλει από σημείο σε σημείο, σύμφωνα με το $f(x)$. Στα σημεία με $\dot{x} = 0$, δεν υπάρχει ροή και λέγονται σημεία ισορροπίας (fixed points). Υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη τέτοιων σημείων. Τα ευσταθή (attractors) και τα ασταθή (repellers). Για να βρούμε τη λύση της (5.2.2), αρχίζοντας από ένα τυχαίο σημείο x_0 , τοποθετούμε ένα φανταστικό σωματίδιο (γνωστό σαν phase point) στο x_0 και παρατηρούμε πως φέρεται κατά μήκος της ροής.

Τα σημεία ισορροπίας έχουν ένα πολύ ιδιαίτερο χαρακτηριστικό. Μπορούν να καταστραφούν, να δημιουργηθούν ή να αλλάξουν από ευσταθή σε ασταθή και το αντίθετο. Αυτή η ποιοτική αλλαγή της δυναμικής τους ονομάζεται, στη διεθνή βιβλιογραφία, bifurcation, και η τιμή των παραμέτρων στην οποία εμφανίζεται bifurcation point.

Για $n=2$ έχουμε ένα σύστημα $2^{\text{ης}}$ τάξης και η σχέση (5.2.1) δίνει:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Οι λύσεις του συστήματος (5.2.3) μπορούν να απεικονιστούν σαν τροχιές στο επίπεδο x_1, x_2 το οποίο καλείται phase plain (Σχ.5.1).



Σχ.5.1. Πορτραίτο Φάσης

Ας πάρουμε ως παράδειγμα την κίνηση μίας μάζας η οποία κρέμεται από ένα γραμμικό ελατήριο:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad (5.2.4)$$

m η μάζα, k η σταθερά του ελατηρίου και x η απόσταση της μάζας από την θέση ισορροπίας. Αν ξέρουμε την αρχική θέση x και ταχύτητα v του συστήματος μπορούμε να προσδιορίσουμε την τελική κατάσταση του συστήματος. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$\omega^2 = \frac{k}{m}$, ξαναγράφουμε την εξ.(5.2.4) με όρους την θέση x και την ταχύτητα v :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \cdot x \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Ας φανταστούμε λοιπόν πάλι ένα υγρό το οποίο ρέει σταθερά στο phase plain με τοπική ταχύτητα που δίνεται από την σχέση (5.2.5). Για να βρούμε την τροχιά που ξεκινάει από το (x_0, v_0) , τοποθετούμε το φανταστικό σωματίδιο στο σημείο αυτό και παρατηρούμε πως φέρεται κατά μήκος της ροής. Η ροή στροβιλίζεται γύρω από το σημείο $(0,0)$, το οποίο είναι πάντα ένα σημείο ισορροπίας. Ένα σωματίδιο που ξεκινάει από οποιοδήποτε άλλο

σημείο πλησιάζει ασυμπτωτικά την αρχή $(0,0)$, η τροχιά γίνεται κλειστή καμπύλη (closed orbit), και η λύση είναι ένας οριακός κύκλος (limit cycle) που αντιπροσωπεύει μια περιοδική απόκριση του συστήματος (5.2.5). Εάν οι γειτονικές τροχιές πλησιάζουν τον οριακό κύκλο, λέμε ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Στην αντίθετη περίπτωση ασταθής.

Γενικότερα αν το πορτρέτο φάσης (phase portrait) αλλάζει την τοπολογική δομή του καθώς μια παράμετρος μεταβάλλεται, λέμε ότι εμφανίζεται μια διακλάδωση (bifurcation). Το είδος ενός bifurcation εξαρτάται από τη φύση του συστήματος διαφορετικών εξισώσεων και τα σημαντικότερα είναι:

Saddle-node: Το πιο απλό bifurcation, γνωστό και σαν limit point ή turning point. Δημιουργείται όταν δύο διαφορετικές σταθερές συνυπάρχουσες λύσεις, μία ασταθής (saddle) και μια ευσταθής (node), «συγχωνεύονται» καθώς μια παράμετρος του συστήματος μεταβάλλεται. Θεωρείται καταστροφικός γιατί μετά την εμφάνισή του δεν υπάρχει άλλη λύση στη γειτονιά του.

Pitchfork: Στην supercritical μορφή του, μια σταθερή και ευσταθής λύση μετατρέπεται σε ασταθής, με την ταυτόχρονη «γέννηση» ενός συμμετρικού ζευγαριού ευσταθών λύσεων. Στη περίπτωση που το ζευγάρι είναι ασταθές έχουμε την subcritical μορφή της διακλάδωσης. Η δεύτερη μορφή είναι πιο επικίνδυνη γιατί εμφανίζονται φαινόμενα υστέρησης ή αλμάτων.

Hopf: Παρατηρείται όταν μία στάσιμη λύση γίνεται περιοδική ή το αντίθετο. Στην supercritical μορφή του ένας ευσταθής οριακός κύκλος γεννιέται και συνυπάρχει με την σταθερή μη ευσταθή πλέον λύση. Στη subcritical μορφή ο κύκλος είναι ασταθής και περικλείει τη στάσιμη ευσταθή λύση. Το δραματικό «άλμα» σε έναν απομακρυσμένο ελκυστή (attractor) καθώς και φαινόμενα υστέρησης είναι στενά συνδεδεμένα με την παρουσία του συγκεκριμένου bifurcation.

Homoclinic connection: Στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως ένα είδος “global bifurcation”. Η ομοκλινική σύνδεση είναι ουσιαστικά ένας πιθανός τρόπος δημιουργίας ή καταστροφής ενός οριακού κύκλου. Καθώς μεταβάλλεται μια παράμετρος, ένας οριακός κύκλος πλησιάζει ένα saddle point και τείνει να ευθυγραμμιστεί με τα ιδιοδιανύσματα του saddle. Τελικά ο οριακός κύκλος «ακουμπάει» το saddle point για κάποια τιμή της παραμέτρου, δημιουργώντας έτσι ομοκλινική σύνδεση. Η τροχιά αυτής της λύσης «αφήνει» το saddle point προς την διεύθυνση του ενός ιδιοδιανύσματος και «γυρνάει» πάλι πίσω σε αυτό με την διεύθυνση του άλλου ιδιοδιανύσματος. Αυτή η σύνδεση δεν εμμένει στη περίπτωση περαιτέρω μεταβολής της παραμέτρου, αλλά ο οριακός κύκλος έχει εξαφανιστεί.

5.3 Μέθοδος «Αριθμητικής Συνέχισης» (Numerical Continuation)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι εξισώσεις κίνησης του πλοίου κατά το διάμηκες δεν επιδέχονται αναλυτική λύση. Υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί τρόποι να προσεγγίσουμε τη λύση τους αριθμητικά. Σε αυτή την εργασία για τους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε το MATCONT ένα toolbox του MATLABTM, το οποίο αναπτύχθηκε με τη συνεργασία των Πανεπιστημίων της Γάνδης (Βέλγιο) και της Ουτρέχτης (Ολλανδία).

Η «αριθμητική συνέχιση» αποτελεί μια τεχνική βασισμένη σε αριθμητικές μεθόδους, η οποία στοχεύει στην εύρεση των μόνιμων αποκρίσεων ενός δυναμικού συστήματος μεταβάλλοντας κάποια ή κάποιες από τις παραμέτρους του συγκεκριμένου συστήματος. Στη συγκεκριμένη τεχνική, εισάγεται ως δεδομένο μία μόνιμη απόκριση του συστήματος, η οποία προσδιορίζεται συνήθως από αριθμητική προσομοίωση του δυναμικού συστήματος για κάποιες συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του καθώς και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Ο αλγόριθμος συνέχισης υπολογίζει κατευθείαν τις νέες μόνιμες αποκρίσεις του συστήματος μεταβάλλοντας την ή τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν. Επιπλέον μέσω ειδικών συναρτήσεων ελέγχου, έχει τη δυνατότητα να προσδιορίζει σημεία διακλαδώσεων (bifurcation points) και να ελέγχει την ευστάθεια του συστήματος μετά από τα συγκεκριμένα σημεία. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιασθούν οι μαθηματικές διατυπώσεις των βασικών αρχών του αλγορίθμου που μας ενδιαφέρουν

5.3.1 Μαθηματική διατύπωση αλγορίθμου Συνέχισης

Έστω λεία συνάρτηση $F : R^{n+1} \rightarrow R^n$. Ο αλγόριθμος προσπαθεί να υπολογίσει την καμπύλη που αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης $F(x) = 0$. Η αριθμητική συνέχιση (numerical continuation) είναι η τεχνική υπολογισμού διαδοχικών σημείων που προσεγγίζουν τη συγκεκριμένη καμπύλη. Όπως και οι περισσότεροι αντίστοιχοι αλγόριθμοι, το MATCONT χρησιμοποιεί μια διαδικασία πρόβλεψης και διόρθωσης. Σκοπός της μεθόδου είναι να δημιουργήσει μια σειρά σημείων $x_i, i=1,2,\dots,n$ κοντά στην πραγματική καμπύλη. Τα σημεία αυτά πρέπει να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες ανοχών:

Για καθορισμένα $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$ έχουμε ότι $\|F(x_i)\| < \varepsilon$ και $\|\delta(x_i)\| < \varepsilon'$, όπου $\delta(x_i)$ είναι η τελευταία διόρθωση Newton. Για να ξεκινήσει η μέθοδος πρέπει να έχουμε προσδιορίσει ένα αρχικό σημείο x_i πάνω στην καμπύλη. Έστω επίσης ότι έχουμε προσδιορίσει ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα v_i εφαπτόμενο στην ζητούμενη καμπύλη στο σημείο x_i . Δηλαδή, θα ισχύει:

$$F(x_i)v_i = 0, \langle v_i, v_i \rangle = 1$$

Για να υπολογίσουμε το επόμενο σημείο x_{i+1} θα πρέπει να προχωρήσουμε σε πρόβλεψη του σημείου και έπειτα διόρθωση της συγκεκριμένης πρόβλεψης.

Πρόβλεψη

Εάν θεωρήσουμε ως $h>0$ το βήμα, τότε μπορούμε να έχουμε μία αρχική πρόβλεψη σύμφωνα με τη σχέση: $X^0 = x_i + hn_i$

Διόρθωση

Θεωρούμε ότι το X_0 βρίσκεται αρκετά κοντά στη ζητούμενη καμπύλη. Για να υπολογίσουμε το σημείο x_{i+1} θα εισάγουμε μια παρόμοια με τη Newton μέθοδο. Σημειώνεται ότι στη μέθοδο Newton χρειαζόμαστε ίδιο αριθμό αγνώστων και συναρτήσεων, οπότε αναζητούμε κατάλληλη συνάρτηση $g(x)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται το σύστημα:

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης $g(x)=0$ το MATCONT χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο του Moore-Penrose, που είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Newton. Για περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά τις λεπτομέρειες του κώδικα MATCONT, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο εγχειρίδιο χρήσης του κώδικα (Dhooge, Govaerts, Kuznetsov, Mestrom, Riet and Sautois, 2006)

5.4 Περιγραφή του μη γραμμικού φαινομένου surf-riding των πλοίων

Ο Kan (1990) στη μελέτη του κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, η συμπεριφορά ενός πλοίου σε ακολουθούντες κανονικούς κυματισμούς χαρακτηρίζεται από την συνύπαρξη διαφορετικών αποκρίσεων. Το πλοίο μπορεί να εκτελεί είτε περιοδική ταλαντωτική κίνηση αν τα κύματα το προσπερνάνε, είτε να παγιδευτεί σε μια στάσιμη (με την έννοια ότι η σχετική ταχύτητα του πλοίου ως προς αυτή του κύματος είναι μηδενική) κατάσταση – surf-riding. Η απόκριση του πλοίου εξαρτάται από τον συνδυασμό κάποιων παραμέτρων του πλοίου και του περιβάλλοντος, όπως είναι η μορφή της γάστρας και τα χαρακτηριστικά του κύματος.

Η περιοδική διαμήκης κίνηση, surging, γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας του πλοίου, από φυσικής άποψης εμφανίζεται όταν το κύμα προσπερνάει το πλοίο. Το κύμα καθώς πλησιάζει «σπρώχνει» το πλοίο, αυξάνοντάς του τη στιγμιαία ταχύτητα, και καθώς το προσπερνάει, αυτό ανακτά την αρχική του ταχύτητα. Αυτή ακριβώς η συμπεριφορά του πλοίου (surging) είναι η περιοδική λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης του πλοίου (4.1.1) κατά το διάμηκες.

Η σταθερή στάσιμη λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης του πλοίου κατά το διάμηκες αντιστοιχεί στο surf-riding σύμφωνα με το οποίο: όταν ένα πλοίο βρίσκεται στη κατωφέρεια ενός κύματος, με τη πλώρα του να «ακουμπάει» σχεδόν την ανωφέρεια του, τείνει να ταξιδεύει με την ταχύτητα φάσης του κύματος και δίνει την εντύπωση, ενός εγκλωβισμένου στο σημείο αυτό, πλοίου.

Η επικινδυνότητα αυτής της συμπεριφοράς μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η αποτελεσματικότητα του πηδαλίου επιδεινώνεται δραστικά εξαιτίας της μειωμένης ταχύτητας της εισερχόμενης ροής προς αυτό, κάνοντας το πλοίο διευθυντικά ασταθές (Kan, 1990).

Η φύση των φαινομένων μελετήθηκε από τον Grim ο οποίος επισήμανε την ομοιότητα, από δυναμικής σκοπιάς, της κίνησης ενός πλοίου σε ακολουθούσες θάλασσες, με αυτή ενός περιστρεφόμενου εκκρεμούς (Grim, 1951).

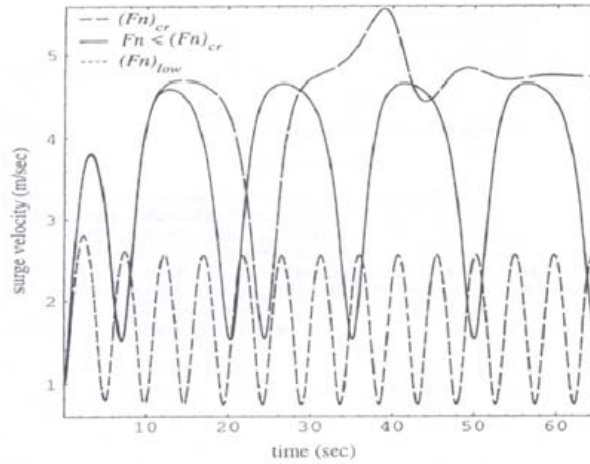
5.4.1. Δυναμική του φαινομένου

Η συνύπαρξη αυτών των αποκρίσεων που παρατήρησε ο Kan, εξηγήθηκαν σε θεωρητικό επίπεδο με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων ανάλυσης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων (Σπύρου, 1996a), από την οποία ανάλυση έγινε κατανοητός ο «μηχανισμός» της μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη.

Ο Kan εισάγοντας τη διαφορική εξίσωση κίνησης του πλοίου κατά το διάμηκες, ερεύνησε τις συνθήκες της ξαφνικής εξαφάνισης της περιοδικής συμπεριφοράς (global surf-riding) και κατέληξε ότι το φαινόμενο εμφανίζεται όταν η μέγιστη ταχύτητα του ασύμμετρου surging πάρει οριακά την τιμή της ταχύτητας φάσης του κύματος (Kan, 1990).

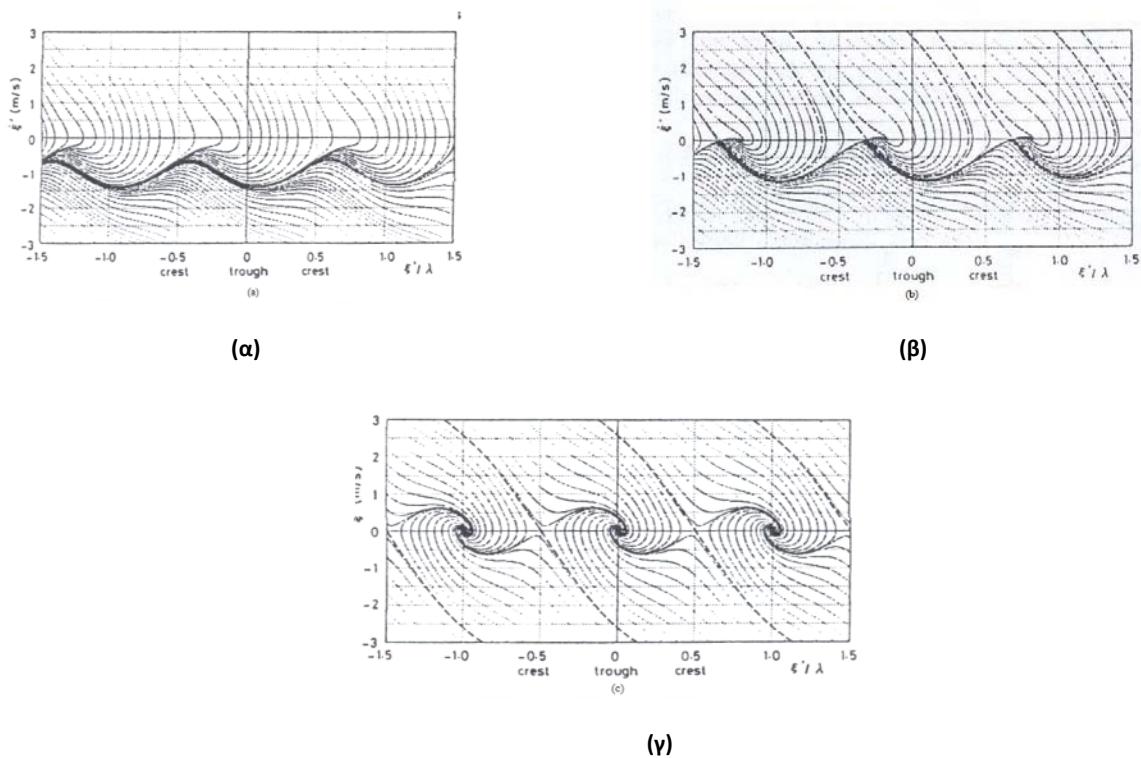
Σημείωσε επίσης ότι το surf riding μπορεί να είναι τοπικό, για κάποιες μόνο αρχικές συνθήκες ή καθολικό, να οδηγούμαστε δηλαδή σε αυτό ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών. Η ταχύτητα από την οποία έχουμε καθολικό surf-riding μπορεί να προβλεφτεί εάν οπτικοποιήσουμε την ταλαντωτική κίνηση του πλοίου στη διεύθυνση του surge. Όταν το μέγιστο πλάτος της ταλαντούμενης ταχύτητας φτάσει την τιμή της ταχύτητας του κύματος $c^2 = \frac{g}{k} \cdot \tanh(kd)$, έχουμε την μετάβαση από την κατάσταση του surging, σε αυτή του surf-riding. Η εξαφάνιση της περιοδικής απόκρισης του πλοίου αποτελεί ένα ιδιαίτερα, από δυναμικής άποψης, ενδιαφέρον φαινόμενο. Η προπέλα παράγει αρκετή ώση, ώστε εάν προστεθεί στη διαμήκη δύναμη του κύματος, το πλοίο ακόμα και για τις πιο δυσμενείς αρχικές συνθήκες (στη κορυφή του κύματος με μηδενική ταχύτητα), θα οδηγείται στο surf-riding (Σπύρου, 1996a).

Στο σχήμα (Σχ.5.2) που ακολουθεί παρατηρούμε την απόκριση ενός πλοίου για διαφορετικές ταχύτητες (F_n). Πρέπει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι ως F_n (nominal Froude number) αναφέρεται ο αριθμός Froude που επιτυγχάνεται σε ήρεμο νερό, για τις επιλεγμένες στροφές της έλικας. Ως $F_{n_{cr}}$ αναφέρουμε εκείνο τον αριθμό Froude πέρα από τον οποίο έχουμε μόνο surf-riding. Παρατηρώντας το σχήμα η προσοχή μας πρέπει να επικεντρωθεί σε δύο κυρίως θέματα. Πρώτον ότι καθώς αυξάνεται η ταχύτητα, η απόκριση του συστήματος χάνει τη συμμετρικότητά της και δεύτερον ότι για $F_n = F_{n_{cr}}$ η μεταβολή από περιοδική σε στάσιμη είναι ξαφνική και ασυνεχής, με την ταχύτητα να υποβάλλεται σε μία απότομη αύξηση, πριν αποκτήσει την τιμή της ταχύτητας του κύματος (Kan, 1990).



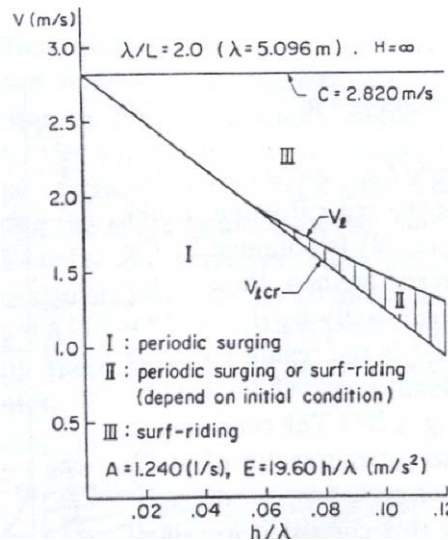
Σχ.5.2. Μετάβαση στο surf-riding (Σπύρου, 1996)

Στο χώρο των φάσεων αυτές οι διαφορετικές αποκρίσεις του συστήματος γίνονται ορατές στα επόμενα σχήματα (Kan, 1990), τα οποία αφορούν μικρό αλιευτικό σκάφος. Στο Σχ.(α) έχουμε τη περίπτωση χαμηλής ταχύτητας στην οποία φαίνεται ότι ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών το πλοίο οδηγείται σε surging, αφού όλες οι τροχιές έλκονται από τον περιοδικό ελκυστή (σκούρα γραμμή). Στη περίπτωση μεσαίων ταχυτήτων (Σχ. β) παρατηρούμε ότι το πορτραίτο φάσεων είναι χωρισμένο σε δύο ελκτικά χωρία. Οι αρχικές συνθήκες στο χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις διακεκομμένες γραμμές οδηγούν σε surf-riding καθώς κάθε τροχιά στο χωρίο αυτό καταλήγει σε ένα σημείο ισορροπίας. Από την άλλη, αρχικές συνθήκες που βρίσκονται έξω από αυτό οδηγούν σε surging. Για ακόμα μεγαλύτερες ταχύτητες όλες οι αρχικές συνθήκες οδηγούν σε surf-riding(Σχ.γ).



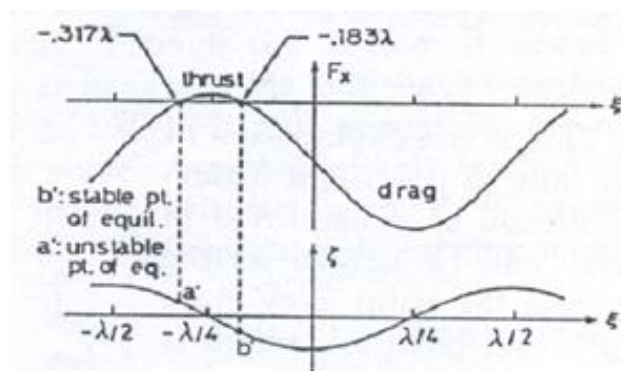
Σχ.5.3 Πορτραίτα φάσεων για μικρούς (α), μεσαίους (β) και μεγάλους (γ) αριθμούς F_n (Kan, 1990)

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι υπάρχουν δύο κρίσιμες ταχύτητες. Για ταχύτητες χαμηλότερες της V_{lcr} , το φαινόμενο του surf-riding δεν εμφανίζεται ποτέ. Για ταχύτητες μεγαλύτερες της V_l χάνεται η περιοδική συμπεριφορά και έχουμε μόνο surf-riding, ενώ για ταχύτητες μεταξύ των δύο κρίσιμων τιμών έχουμε τη συνύπαρξη των αποκρίσεων (Σχ.5.4)



Σχ. 5.4.Κρίσιμη ταχύτητα συναρτήσει ύψους κύματος μικρού αλιευτικού σκάφους (Kan, 1990)

Εφαρμόζοντας αριθμητικές μεθόδους ανάλυσης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι εκτός της περιοδικής μόνιμης λύσης, υπάρχουν δύο στάσιμα σημεία ισορροπίας (equilibrium points), εκ των οποίων το ένα είναι ευσταθές και το άλλο ασταθές, και βρίσκονται κοντά στη κοιλάδα και στη κορυφή του κύματος αντίστοιχα (Kan, 1990 , Σπύρου, 1996a). Το ευσταθές σημείο βρίσκεται στη περιοχή $-\lambda/4$ και $\lambda/4$ από τη κοιλάδα του αρμονικού κύματος (Σχ.5.5).

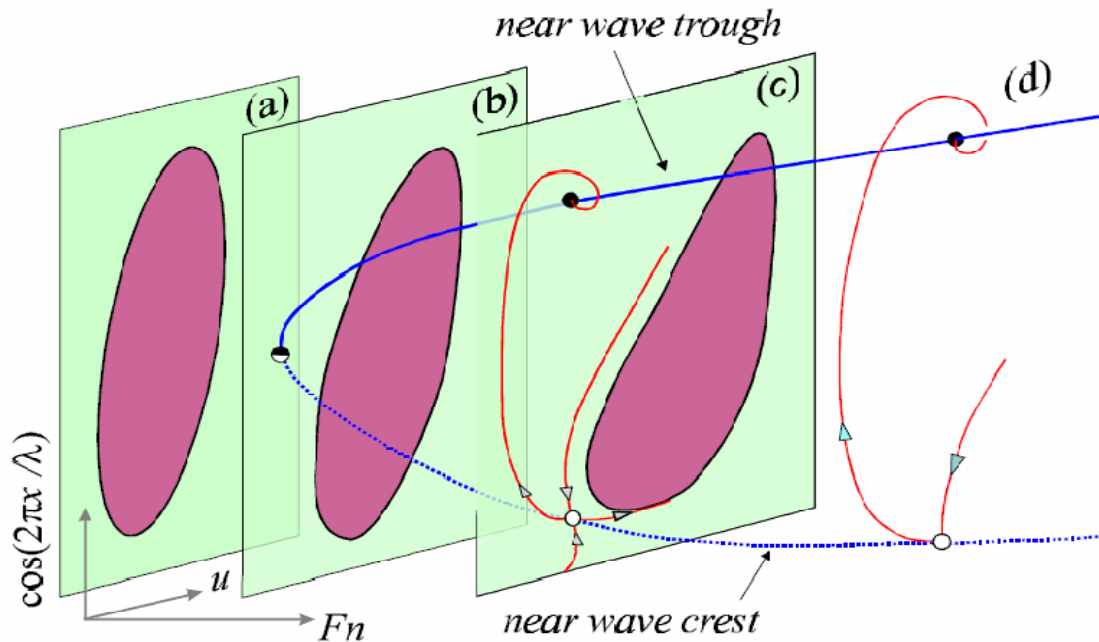


Σχ.5.5. Σημεία ισορροπίας (Kan, 1990)

Από φυσικής άποψης η εφικτή –ευσταθή εκδοχή του φαινομένου απεικονίζει την παγίδευση του πλοίου στη κοιλάδα ενός μεγάλου κανονικού κύματος. Αυτή η παγίδευση είναι αποτέλεσμα της υδροδυναμικής ισορροπίας που συμβαίνει όταν το άθροισμα της διαμήκου δύναμης του κύματος και της ώσης της προπέλας είναι ίσο με την αντίσταση του πλοίου σε ταχύτητα ίση με τη ταχύτητα φάσης του κύματος (Σπύρου, 1996).

5.4.2. Δυναμική της μετάβασης

Τα τρία αυτά σενάρια απόκρισης ενός πλοίου το οποίο ταξιδεύει σε ακολουθούντες κυματισμούς μεγάλου πλάτους, φαίνονται στο Σχ.5.6. Οι τομείς a,b,c,d διαφέρουν μόνο ως προς την ταχύτητα.

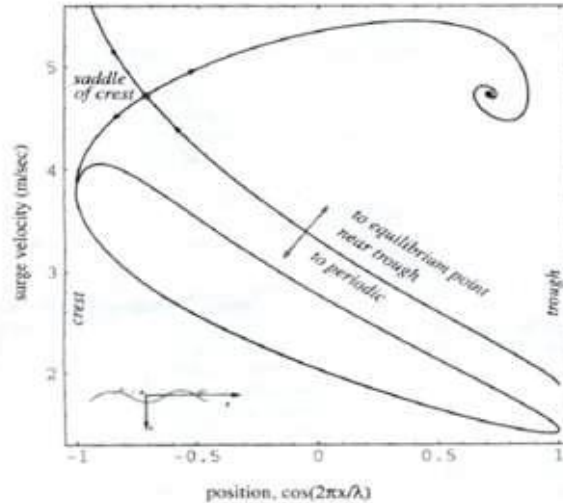


Σχ.5.6. Ποιοτική περιγραφή της εξαφάνισης της περιοδικής απόκρισης (Σπύρου, 1996α)

Στον τομέα (a) επικρατεί η περιοδική κίνηση του πλοίου, αφού η μικρή ταχύτητα του, δεν επιτρέπει την ύπαρξη στάσιμων σημείων ισορροπίας. Σε αυτή τη κατάσταση τα κύματα προσπερνάνε το πλοίο. Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα, έχουμε τη γέννηση ενός σημείου ισορροπίας(b) και τελικά (c) τη συνύπαρξη τριών διαφορετικών καταστάσεων. Δύο σημείων στατικής ευστάθειας που βρίσκονται συμμετρικά γύρω από τον κόμβο (node) της κατωφέρειας του κύματος και έναν οριακό κύκλο που περιγράφει την περιοδική κίνηση.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι καθώς αυξάνεται την ταχύτητα, ο οριακός κύκλος διαστρεβλώνεται και τείνει να «πέσει» πάνω στο ασταθές σημείο ισορροπίας (repeller) , το οποίο βρίσκεται κοντά στη κορυφή του κύματος (Σπύρου, 1995b).

Εξαιτίας της ύπαρξης των διαφορετικών ελκυστών-λύσεων, είναι λογικό το πεδίο φάσεων να είναι διαιρεμένο σε δύο διαφορετικά ελκτικά χωρία. Η ευσταθής τροχιά (inset) του ασταθούς σημείου ισορροπίας (κοντά στη κορυφή του κύματος), αποτελεί το όριο (separatrix) των δύο αυτών χωρίων (Σχ.5.7). Οποιαδήποτε αρχική συνθήκη βρίσκεται κάτω από το inset (ευσταθής τροχιά) οδηγεί σε περιοδική κίνηση, ενώ μια αρχική συνθήκη που βρίσκεται από πάνω οδηγεί στο στάσιμο σημείο-ελκυστή, άρα σε surf-riding.



Σχ.5.7 Πεδίο φάσεων (Σπύρου, 1996)

Το κρίσιμο σημείο εμφανίζεται για κάποια συγκεκριμένη τιμή της ταχύτητας όπου ο οριακός κύκλος «ακουμπάει» το ασταθές σημείο (saddle point) με αποτέλεσμα την εμφάνιση ομοκλινικής σύνδεσης (homoclinic connection), η οποία είναι μια συνηθισμένη μορφή καθολικής διακλάδωσης (global bifurcation) που απαντάται στη μη γραμμικά δυναμικά συστήματα (Thompson & Stewart, 2002).

Το κυριότερο χαρακτηριστικό ενός global bifurcation, είναι ότι σε αντίθεση με κάποια τοπική διακλάδωση (local bifurcation) όπως είναι το Hopf bifurcation, η πληροφορία δεν μπορεί να εξαχθεί από μία «τοπική ανάλυση» (Guckenheimer & Holmes 1983). Το ασταθές σημείο έρχεται τόσο κοντά με τον οριακό κύκλο, με αποτέλεσμα ο ένας κλάδος της τροχιάς που απομακρύνεται από το ασταθές saddle point (outset) , μαζί με έναν κλάδο της τροχιάς που πλησιάζει το saddle point (inset) να συμπιέτουν με τον οριακό κύκλο. Επειδή η ευσταθής τροχιά (inset) πλησιάζει το ασταθές σημείο σε άπειρο χρόνο, οι τροχιές που περνάνε γειτονικά από το saddle point επιβραδύνονται, δίνοντας την εντύπωση ότι το σύστημα έχει πολύ χαμηλή συχνότητα. Αυτή ακριβώς η οριακή συμπεριφορά ενός πλοίου ονομάζεται «μεγάλου πλάτους περιοδική διαμήκης κίνηση».

Ένα άλλο αξιοσημείωτο γεγονός είναι η δυσκολία και η μη ομαλότητα που συναντάμε κατά τη μετάβαση από το surf riding στο surging , μειώνοντας για παράδειγμα την ταχύτητα. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό κρύβεται στο γεγονός ότι μια ομοκλινική σύνδεση είναι στενά συνδεδεμένη με φαινόμενα υστέρησης. Αυτή η υστέρηση και ασυνέχεια της μετάβασης από το surf-riding στο surging είναι στενά συνδεδεμένη με την εμφάνιση του broaching.

6. Παρουσίαση Αναπτυσσόμενης Μεθοδολογίας Υπολογισμού Της Δύναμης Froude-Krylov.

6.1 Εισαγωγή-Στοχοι

Η δύναμη Froude-Krylov υπολογίζεται από τις σχέσεις 2.3.4 και 3.3.3. στη περίπτωση αρμονικού κύματος και κύματος 2^{ης} τάξης κατά Stokes αντίστοιχα. Η διαδικασία εύρεσης των πλατών f και f_1, f_2 που εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης 2.3.5 και 3.3.4 αντίστοιχα, για ένα συγκεκριμένο κύμα μπορεί να περιγραφεί από τα εξής βήματα

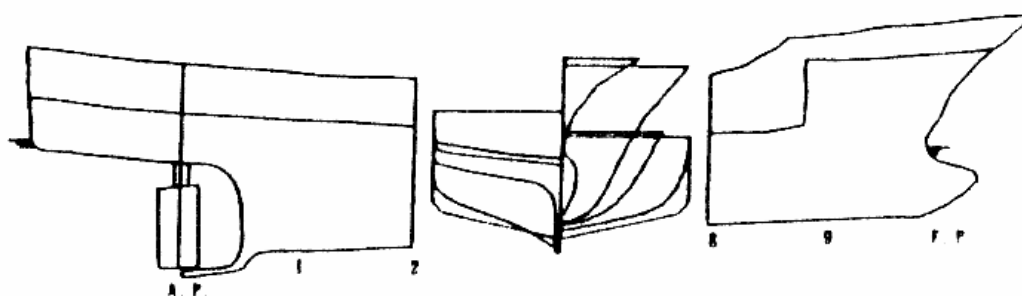
1. Σε οποιαδήποτε θέση (x) πάνω σε κύμα με χαρακτηριστικά H, λ και θάλασσα βάθους (d) προσδιορίζεται η θέση ισορροπίας του πλοίου.
2. Υπολογισμός στη θέση αυτή της δύναμης X_{FK}
3. Δημιουργία ζευγών (x, X_{FK})
4. Με κατάλληλο fit στα ζεύγη (x, X_{FK}) προσδιορίζεται το πλάτος f στη περίπτωση αρμονικού κύματος ή τα πλάτη f_1, f_2 στη περίπτωση κύματος 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

Τα πλάτη f, f_1, f_2 εξαρτώνται από το ύψος του κύματος H , το μήκος του λ και το βάθος του νερού (d). Στη παρούσα εργασία το μήκος του κύματος λ επιλέγεται να είναι ίσο με το διπλάσιο του μήκους του πλοίου, $\lambda = 69m$, οπότε πλέον τα πλάτη εκφράζονται ως συναρτήσεις του ύψους και του βάθους $f(H, d; \lambda = 69m)$.

6.2 Το υπό μελέτη πλοίο

Το υπό μελέτη πλοίο είναι ένα μικρό Ιαπωνικό αλιευτικό σκάφος ('purse-seiner') το οποίο έχει μελετηθεί σχετικά πρόσφατα από τον ΙΠΤΣ. Οι γραμμές του αλιευτικού καθώς και τα κύρια χαρακτηριστικά του φαίνονται στο Σχ.6.1 και στον Πίνακα 1 αντίστοιχα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτού του τύπου σκάφη έχουν σχεδιαστεί για να ταξιδεύουν σε ακραίες περιβαλλοντολογικές συνθήκες.



Σχ.6.1 Γραμμές του αλιευτικού «Purse-Seiner» (Umeda, 1995b)

$L_{PP} = 34.5m$
$B = 7.6 m$
$D = 3.07 m$
$T_{fore} = 2.84m$
$T_{aft} = 3.14 m$
$T_{mean} = 2.99m$
$C_b = 0.652m$
$GM = 0.755m$

Πίνακας 1 Κύρια χαρακτηριστικά του «Purse-Seiner»

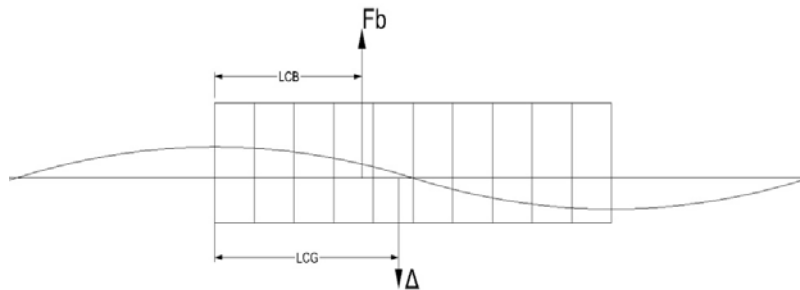
6.3 Ισορροπία του πλοίου

6.3.1 Εξισώσεις Ισορροπίας

Αυτό που πρέπει να εξασφαλιστεί είναι η ισορροπία του πλοίου σε οποιαδήποτε θέση πάνω στο κύμα. Απαιτείται δηλαδή η διαμήκης ροπή του πλοίου να είναι μηδενική και η άντωση να ισούται με το εκτόπισμα του πλοίου.

$$\begin{cases} \Delta = F_B \\ \Delta \cdot LCG = F_B \cdot LCB \end{cases} \quad (6.3.1)$$

Η προσπάθειά μας αυτή περιορίστηκε αρχικά στη μελέτη ενός ορθογώνιου κουτιού (Σχ.6.2) με διαστάσεις ίσες με το μήκος και το πλάτος του υπό μελέτη πλοίου.



Σχ.6.2 Δυνάμεις ισορροπίας

Από την ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων έχουμε:

$$F_B = \Delta = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \iiint_V dx dy dz = \gamma \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dx \iint_S dy dz = \gamma \cdot \int_{-L/2}^{L/2} S(x) dx \quad (6.3.2)$$

,όπου $S(x)$ το εμβαδόν ενός νομέα μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια.

Στη περίπτωση ήρεμης θάλασσας το εμβαδό ενός νομέα είναι $B \cdot T$, όπου T το βύθισμα και B το πλάτος του κουτιού, και η παραπάνω εξίσωση (εξ.6.3.2) μας δίνει

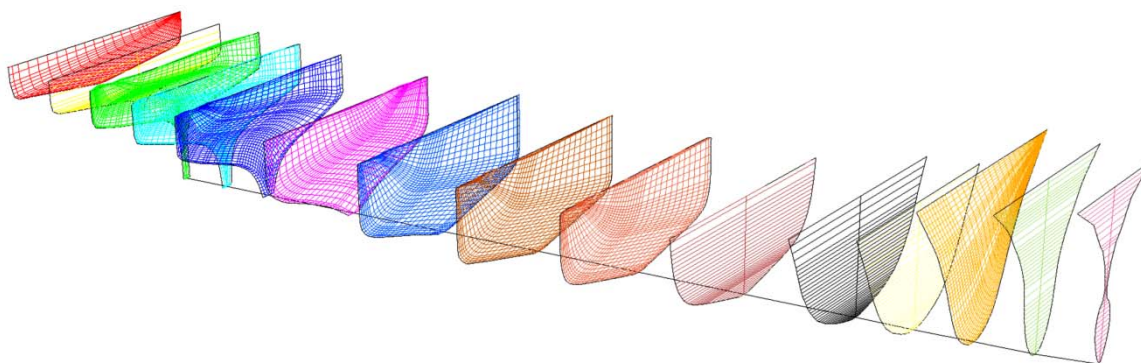
$$F_B = \gamma \cdot \int_{-L/2}^{L/2} B \cdot T dx = \gamma \cdot L \cdot B \cdot T.$$

Στη περίπτωση όμως κυματισμών το βύθισμα δεν είναι το ίδιο για κάθε νομέα, αλλά εξαρτάται από τη διαμήκη θέση του. Λόγω της ύπαρξης του κύματος, στη νέα θέση ισορροπίας θα έχουμε μία κατακόρυφη ανύψωση (heave) και μία διαγωγή (trim) του κουτιού. Στη δυσκολία αυτή έρχεται να προστεθεί και το γεγονός ότι εισάγοντας το πλοίο, το πλάτος B του πλοίου λόγω της μορφής των νομέων εξαρτάται τόσο από τη διαμήκη θέση του νομέα αυτού, όσο και από το τοπικό του βύθισμα ($B(x, z)$) με αποτέλεσμα ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος να καθίσταται περίπλοκος αφού η εξ.6.3.2

γίνεται $F_B = \Delta = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \int_{-L/2}^{L/2} S(x, T_x) dx$, και το εμβαδόν $S(x, T_x)$ εξαρτάται από τη

διαμήκη θέση x και από το βύθισμα του πλοίου στη θέση αυτή.

Λύση σε αυτά τα προβλήματα μας δίνουν οι αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων όπως είναι η μέθοδος Simpson, η οποία χρησιμοποιείται και στη παρούσα εργασία. Σύμφωνα με αυτή διαιρούμε το πλοίο σε άρτιο αριθμό τμημάτων εισάγοντας κάποιους θεωρητικούς νομείς (Σχ.6.3). Ο συνολικός όγκος του πλοίου χωρίζεται σε τμήματα, ο όγκος των οποίων προσεγγίζεται σαν πρίσματα με βάση το πρώτο νομέα του τμήματος και ύψος απόσταση του έως τον επόμενο.



Σχ.6.3 Θεωρητικοί νομείς αλιευτικού σκάφους «Purse-Seiner»

6.3.2 Διαδικασία υπολογισμού εμβαδόν νομέων

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι για να λύσουμε το σύστημα 4.3.1 πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε το εμβαδόν των νομέων συναρτήσει του τοπικού βυθίσματος, αφού κάθε νομέας μπορεί να έχει οποιοδήποτε βύθισμα αναλόγως του κύματος και της θέσης του πλοίου πάνω σε αυτό.

Στο υπό μελέτη πλοίο εισάγαμε 15 θεωρητικούς νομείς, η θέση των οποίων φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.2).

Νομέας (No)	Θέση (x_s)
0	-17,25
$\frac{1}{2}$	-15,525
1	-13,8
$1\frac{1}{2}$	-12,075
2	-10,35
3	-6,9
4	-3,45
5	0
6	3,45
7	6,9
8	10,35
$8\frac{1}{2}$	12,075
9	13,8
$9\frac{1}{2}$	15,525
10	17,25

Πίνακας 2 Θέση θεωρητικών νομέων

Για κάθε νομέα ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

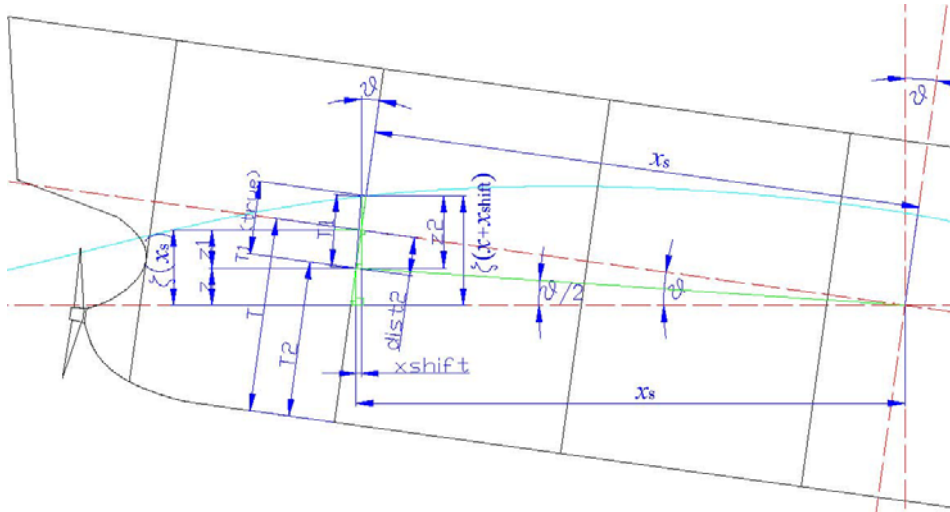
1. Εισαγωγή του νομέα στο πρόγραμμα Rhinoceros©
2. Υποδιαίρεση του νομέα σε n ισάλους
3. Εμβαδομέτρηση μέχρι κάθε ίσαλο
4. Δημιουργία ζευγών $(T, S(T))$
5. Δημιουργία κατάλληλων πολυωνύμων παρεμβολής των σημείων αυτών (fit).

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η ακρίβεια των πολυωνύμων ξεπερνάει, για όλους τους νομείς το 99.998%.

6.3.3 Υπολογισμός του βυθίσματος σε κάθε θεωρητικό νομέα

Ο τρόπος υπολογισμού του βυθίσματος για κάθε νομέα αναπτύχθηκε από τον Τίγκα (2009).

Έχοντας εκφράσει το εμβαδό κάθε νομέα συναρτήσεως του βυθίσματός του, σειρά έχει ο υπολογισμός αυτού του τοπικού βυθίσματος. Η δυσκολία στον υπολογισμό του βυθίσματος κάθε νομέα οφείλεται όπως είπαμε προηγουμένως στο γεγονός ότι αυτό εξαρτάται από τη τοπική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στο σημείο αυτό (προφίλ του κύματος), τη κατακόρυφη ανύψωση και τη γωνία διαγωγής του πλοίου στη θέση ισορροπίας του. Η διαγωγή του πλοίου προκαλεί μία μετατόπιση του προφίλ του κύματος κατά το διάμηκες (κατεύθυνση του x). Το ακόλουθο σχήμα θα μας φανεί χρήσιμο (Σχ.6.4) Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι το βύθισμα που προσπαθούμε να υπολογίσουμε είναι ίσο με $T_{total} = T_{1,true} + T_2 + T_3$, όπου T_3 η κατακόρυφη ανύψωση.



Σχ.6.4 Υπολογισμός βυθίσματος πάνω σε κύμα (Τίγκας, 2009)

$$\text{Έστω } z = x_s \cdot \tan \frac{\theta}{2}.$$

Τότε έχουμε ότι $z_1 = \zeta(x_s) - z$, με θ τη γωνία διαγωγής, x_s την απόσταση του νομέα από την μέση τομή και $\zeta(x_s)$ η ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας στο σημείο αυτό (x_s). Η μετακίνηση κατά το διάμηκες μπορεί προσεγγιστεί με μεγάλη ακρίβεια από τη σχέση $x_{shift} = -z_1 \cdot \tan(\theta)$. Αυτή η μετακίνηση οφείλεται στη περιστροφή του πλοίου εξαιτίας της διαγωγής. Συμπεραίνουμε λοιπόν πώς όταν ένας νομέας περιστρέφεται «αισθάνεται» ένα διαφορετικό προφίλ κύματος σε σχέση με τον αρχικό. Η διαφορά της πραγματικής μετακίνησης από την ως άνω προσεγγιστική είναι μεγάλη μόνο για ακραίες τιμές διαγωγής, καταστάσεις δηλαδή που είναι μη ρεαλιστικές.

Παρατηρώντας το σχήμα έχουμε $z_2 = \zeta(x_s + x_{shift}) - z$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα καταλήγουμε ότι $T_1 = \pm \sqrt{x_{shift}^2 + z_2^2}$ (Το «-» αφορά τη περίπτωση που το z_2 είναι αρνητικό). Η μικρή διαφορά από το πραγματικό T_1 έχει αμελητέα επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα.

Από το σχήμα $dist_2 = x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, οπότε $T_2 = T - dist_2$, όπου T το βύθισμα σε ήρεμο νερό.

Καταλήγουμε τελικά ότι το συνολικό βύθισμα ενός νομέα που βρίσκεται στη θέση x_s συμπεριλαμβάνοντας και την κατακόρυφη ανύψωση (T_3) είναι:

$$T_{total} = T_1 + T_2 + T_3 \quad \text{ή}$$

$$T_{total} = \pm \sqrt{\left[(x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \zeta(x_s)) \tan(\theta) \right]^2 + \left[\zeta(x_s + x_{shift}) - x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2} + \left[T - x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + T_3 \quad (6.3.3)$$

Από τα παραπάνω και με χρήση της μεθόδου Simpson λύνουμε το σύστημα 6.3.1 για οποιαδήποτε τυχαία θέση πάνω στο κύμα, προσδιορίζοντας τα βυθίσματα όλων των νομέων και ουσιαστικά την θέση ισορροπίας του πλοίου.

6.4 Υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylov

Γνωρίζοντας πλέον τα τοπικά βυθίσματα κάθε νομέα ώστε να έχουμε ισορροπία του πλοίου πάνω στο κύμα, επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylov η οποία αναλόγως της μορφής του κύματος ισούται με:

Αρμονικό κύμα

$$X_{FK} = \rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot (x + x_s)) dx_s$$

ή

$$X_{FK} = f_s \sin(k \cdot x) + f_c \cos(k \cdot x) = f \cdot \sin(k(x - \theta)) = f \cdot \sin(k \cdot x^*) \quad (6.4.1)$$

2^{ης} τάξης Stokes

$$X_{FK} = \rho \cdot g \cdot \bar{\zeta} \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)} \cdot S(x_s) \cdot \sin(k \cdot (x + x_s)) dx_s +$$

$$\frac{3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g}{\lambda \cdot \sinh(2 \cdot k \cdot d)} \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot 2 \cdot k \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right] \cdot \sin[2 \cdot k(x + x_s)] dx_s$$

ή

$$X_{FK} = f_{1S} \sin(k \cdot x) + f_{1C} \cos(k \cdot x) + f_{2S} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) + f_{2C} \cdot \cos(2 \cdot k \cdot x) \Rightarrow$$

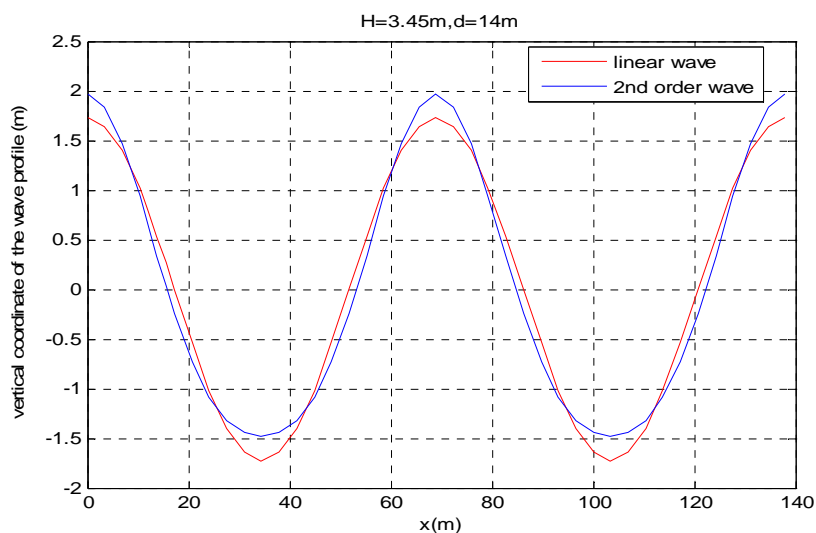
$$X_{FK} = f_1 \cdot \sin(k \cdot x^*) + f_2 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x^*) \quad (6.4.2)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις υπολογίστηκαν και αυτά με τη μέθοδο Simpson, αφού πρώτα προσδιορίστηκε για κάθε νομέα το κέντρο επιφανείας $z(x_s)$ του βρεχόμενου του τμήματος.

Ο υπολογισμός της θέσης ισορροπίας του πλοίου για οποιοδήποτε κύμα, και θέση του πάνω σε αυτό, όπως επίσης και της δύναμης Froude-Krylov, κατέστη δυνατός με τη δημιουργία ενός προγράμματος στο EXCEL (Παράρτημα). Στο πρόγραμμα αυτό εισάγοντας τη θέση του πλοίου πάνω στο κύμα x , τη μορφή του κύματος, το ύψος του H , το μήκος του λ και το βάθος του νερού d , υπολογίζουμε τη δύναμη X_{FK} σε αυτή τη θέση. Αλλάζοντας την θέση του πλοίου πάνω στο κύμα υπολογίζουμε τη δύναμη Froude-Krylov που ασκείται στο πλοίο κατά μήκος του κύματος δημιουργώντας ζεύγη (x, X_{FK}) .

Γνωρίζοντας τη μορφή της δύναμης (εξ.6.4.1 και εξ.6.4.2) και με τη βοήθεια του προγράμματος MATLABTM κάνουμε το κατάλληλο fit με σκοπό να προσδιορίσουμε το πλάτος f αν το θεωρούμενο κύμα είναι αρμονικό ή τα πλάτη f_1, f_2 αν το κύμα είναι 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα αρμονικό κύμα ύψους $H = 3.45m$ και μήκους $\lambda = 69m$ και ένα μη γραμμικό 2^{ης} τάξης κατά Stokes με ίδιο ύψος και μήκος. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι και οι δύο κυματισμοί διαδίδονται σε θάλασσα βάθους $d = 14m$. Το προφίλ των κυμάτων φαίνεται στο Σχ.6.5

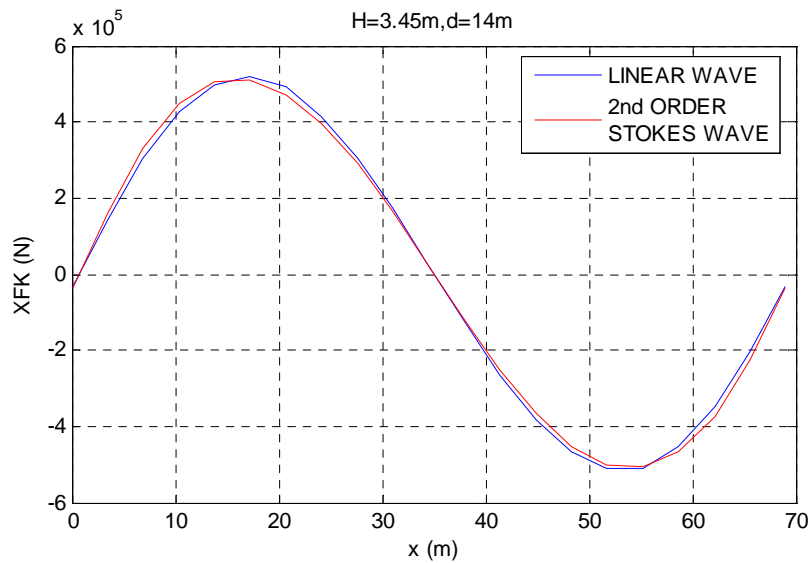


Σχ.6.5 Προφίλ αρμονικού και 2^{ης} τάξης μη γραμμικού κύματος ($H=3.45m, d=14m, \lambda=69m$)

Το πρόγραμμα που σχεδιάσαμε δίνει τα ζεύγη (x, X_{FK}) που παρουσιάζονται στον πίνακα (Πινάκας 6.3) και στο σχήμα Σχ.6.6.

x	ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ	2ης ΤΑΞΗΣ ΚΑΤΑ STOKES
0,00	-32749,63	-37447,86
3,45	143794,08	159393,42
6,90	302528,54	329256,45
10,35	424953,95	447137,32
13,80	499208,37	505611,29
17,25	520575,08	510163,63
20,70	490646,63	471102,21
24,15	416045,02	396531,33
27,60	306272,87	292116,77
31,05	171885,05	164659,18
34,50	24179,95	23802,88
37,95	-125412,14	-119268,99
41,40	-265098,65	-253106,13
44,85	-382949,39	-366753,42
48,30	-468416,88	-451475,38
51,75	-512404,92	-500457,52
55,20	-508640,96	-507790,83
58,65	-454162,23	-467440,83
62,10	-350279,39	-373660,44
65,55	-204570,35	-225587,60
69,00	-32749,63	-37447,86

Πινάκας 3 Αποτελέσματα προγράμματος υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylov για κύματα ύψους $H=3.45m$ μήκους $\lambda=69m$ και βάθος νερού $d=14m$.



Σχ.6.6 Δύναμη Froude-Krylon αρμονικού και 2^{ης} τάξης μη γραμμικού κύματος
($H=3.45m, d=14m, \lambda=69m$)

Γνωρίζοντας τις μορφές των καμπυλών $X_{FK} - x$, με τη βοήθεια του MATLABTM κάνουμε fit των σημείων αυτών με εξισώσεις της μορφής:

$a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ με $b = k = 2 \cdot \pi / \lambda$, για τον αρμονικό κυματισμό και

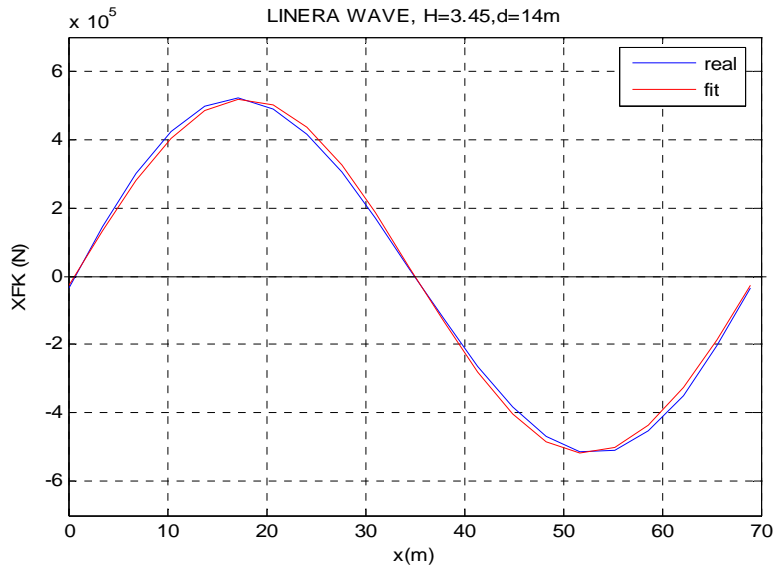
$a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot x + c_1) + a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot x + c_2)$ με $b_1 = k$ και $b_2 = 2 \cdot k$ για κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση για τα κύματα του σχήματος έχουμε:

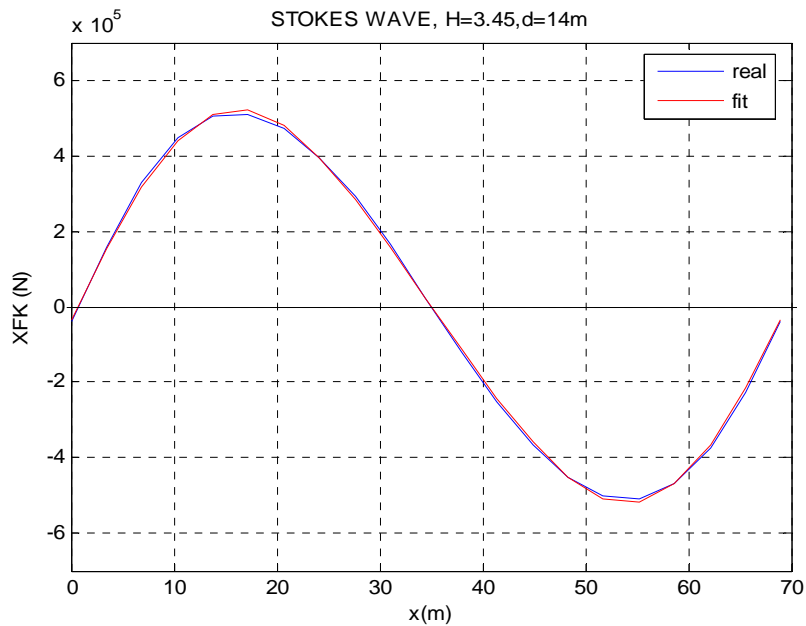
$$\left. \begin{array}{l} a = f = 518800 \\ c = -0.05435 \end{array} \right\} \text{Αρμονικό κύμα}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = f_1 = 515700 \\ c_1 = -0.05330 \\ a_2 = f_2 = 41140 \\ c_2 = -0.1528 \end{array} \right\} \text{2^{ης} τάξης Stokes}$$

Τα παραπάνω fit μας δίνουν «συντελεστή προσδιορισμού» (coefficient of determination) $R^2 = 0.99824$ για το αρμονικό κύμα και $R^2 = 0.99957$ για το κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes. Στο Σχ.6.7.α και Σχ.6.7.β. παρουσιάζονται οι πραγματικές καμπύλες $X_{FK} - x$ και οι καμπύλες που προκύπτουν από τα fit για τα συγκεκριμένα κύματα, αντίστοιχα.



Σχ.6.7.α Δύναμη F-K σε αρμονικό κυματισμό ($H=3.45m, d=14m, \lambda=69m$)

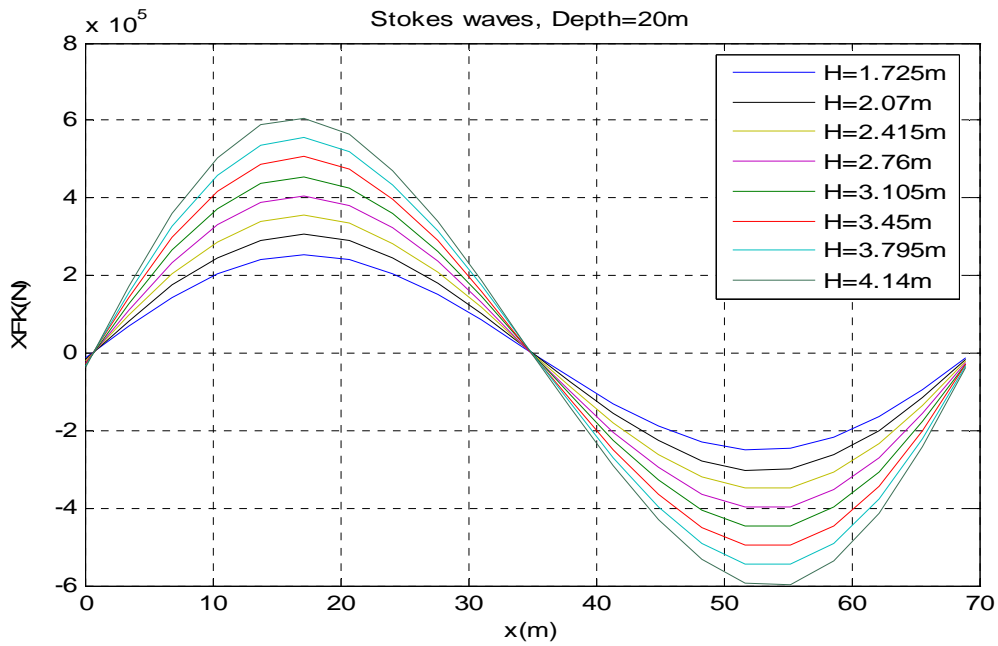


Σχ.6.7.β Δύναμη F-K σε 2^{ης} τάξης κατά Stokes κυματισμό ($H=3.45, d=14m, \lambda=69m$)

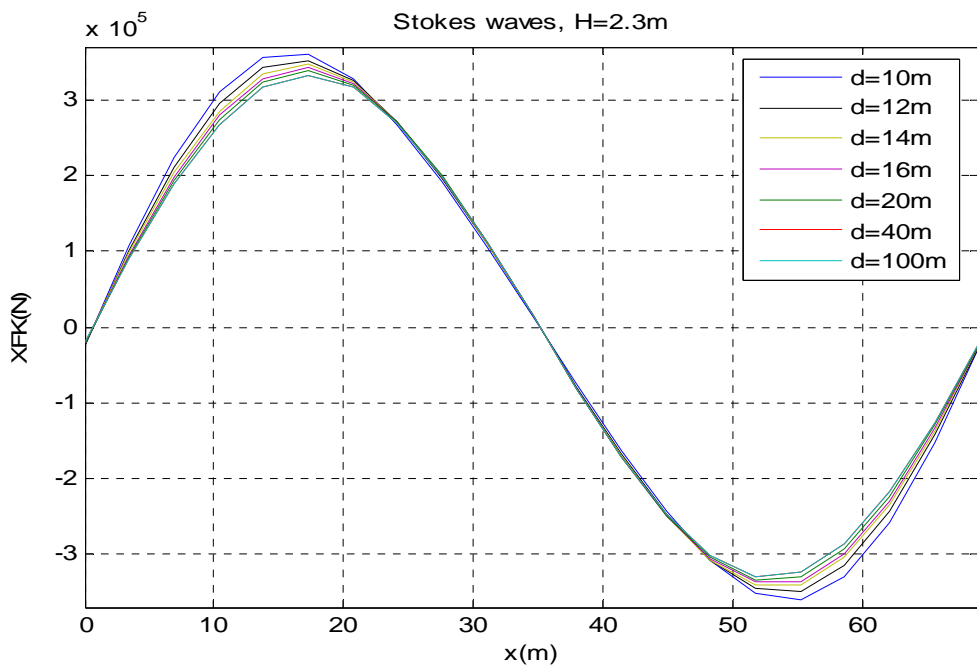
Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε για μεγάλο αριθμό διαφορετικών κυμάτων. Για κάθε εξεταζόμενο κύμα υπολογίσαμε τα πλάτη της δύναμης (f ή f_1, f_2) όπως επίσης και τις φάσεις (c ή c_1, c_2).

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό τα εξής διαγράμματα για κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes:

1. Σχ.6.8.α. fit Δύναμης Froude-Krylov συναρτήσει θέσεως για διαφορετικά ύψη H , με σταθερό βάθος νερού $d = 20m$
2. Σχ. 6.8.β. fit Δύναμης Froude-Krylov συναρτήσει θέσεως για κύμα ύψους $H = 2.3m$, σε διαφορετικά βάθη νερού d

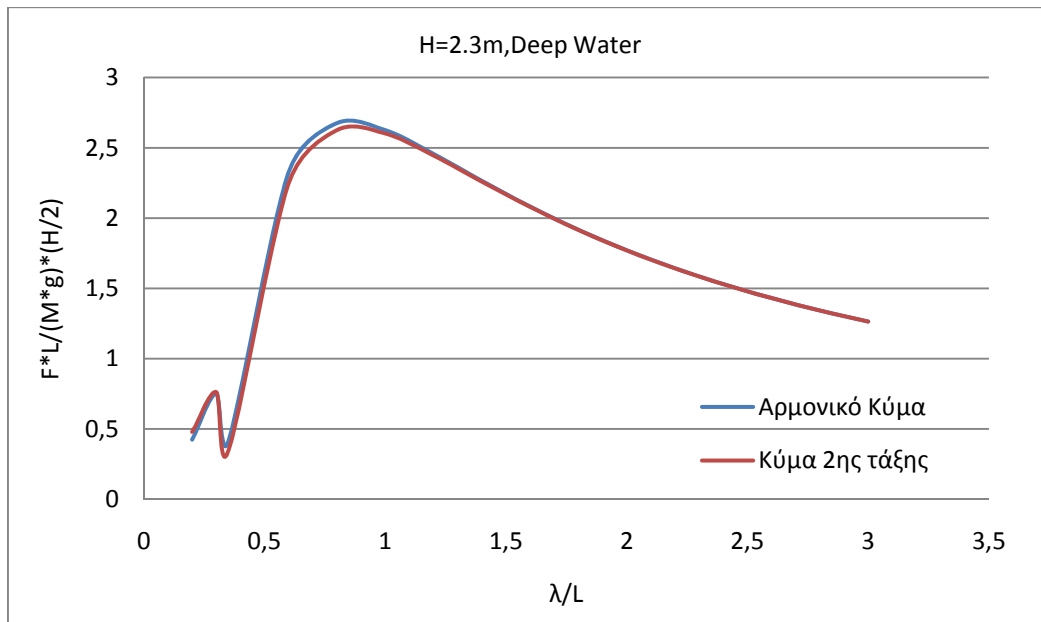


Σχ.6.8.α Δύναμη Froude-Krylov για διάφορα ύψη κύματος ($d=20m, \lambda=69m$)

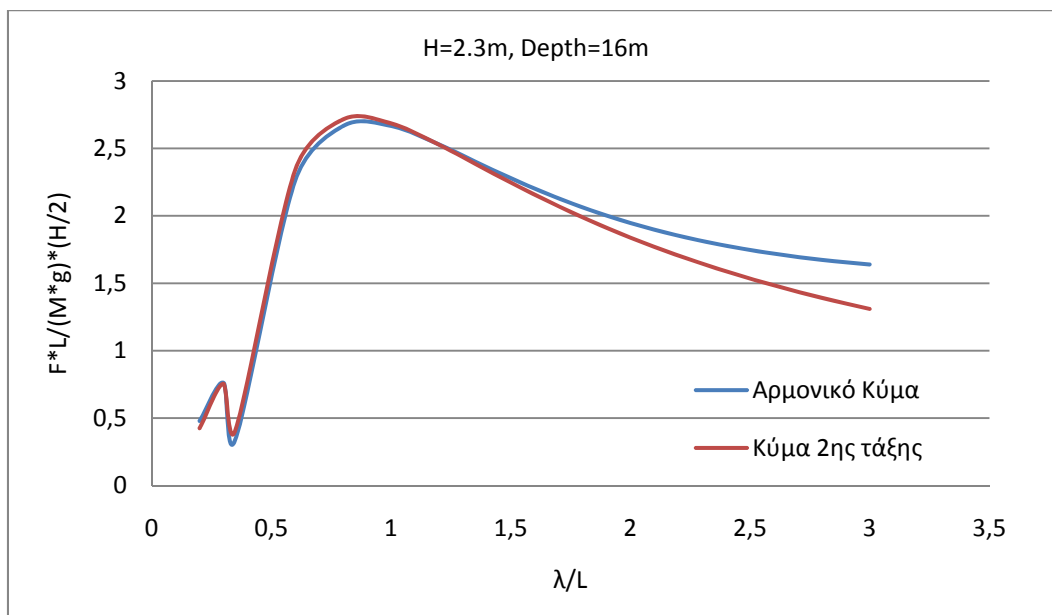


Σχ.6.8.β. Δύναμη Froude-Krylov για διάφορα βάθη νερού ($H=2.3m, \lambda=69m$)

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα δύο ακόλουθα διαγράμματα τα οποία εξήχθησαν με τη βοήθεια του προγράμματος που αναπτύξαμε στο EXCEL. Το Σχ.6.9.α αναφέρεται σε θάλασσα μεγάλου βάθους και ύψος κύματος $H = 2.3m$ ενώ το Σχ.6.9.β. σε ρηγή θάλασσα βάθους $d=14m$ και ίδιο ύψος. Η ομοιότητα των δύο διαγραμμάτων με αυτό που παρουσιάζεται στην εργασία του Kan (1990) για μικρό αλιευτικό σκάφος (Σχ.2.6) είναι εμφανής.

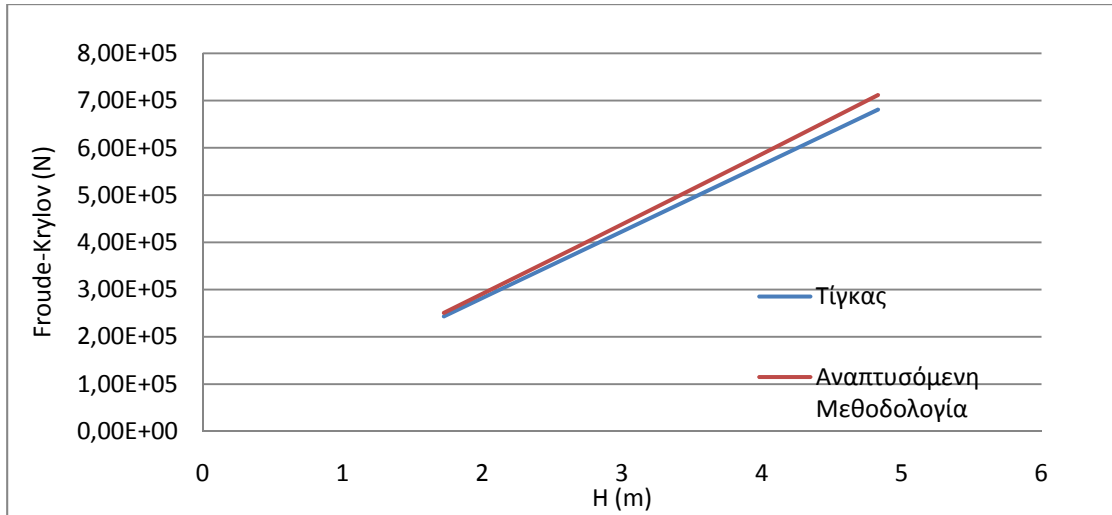


Σχ.6.9.α. Δύναμη Froude-Krylov στη διεύθυνση του surge ($H=2.3m$ και $d=100m$)



Σχ.6.9.β. Δύναμη Froude-Krylov στη διεύθυνση του surge ($H=2.3m$ και $d=16m$)

Να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι ο Τίγκας στη διδακτορική διατριβή του (2009) ασχολήθηκε με το ίδιο πλοίο. Ενδεικτικά στο διάγραμμα που ακολουθεί της δύναμης Froude-Krylov, συναρτήσε του ύψους κύματος, για την περίπτωση αρμονικών κυματισμών μεγάλου βάθους, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ως άνω αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας και αυτά που κατέληξε ο Τίγκας. Η μικρή διαφορά (της τάξης του 3%) που προκύπτει στα αποτελέσματα οφείλεται στο ότι ο Τίγκας θεωρεί πως η μέση δύναμη Froude-Krylov που ασκείται σε έναν νομέα, είναι ίση με τη δύναμη στο μέσο του νομέα αυτού, και όχι στο κέντρο επιφάνειας του νομέα.



Σχ.6.10 Συγκριτικό διάγραμμα δύναμης F-K. Αρμονικό κύμα ύψους $H=3.45m$ μήκους $\lambda=69m$, βαθύ νερό

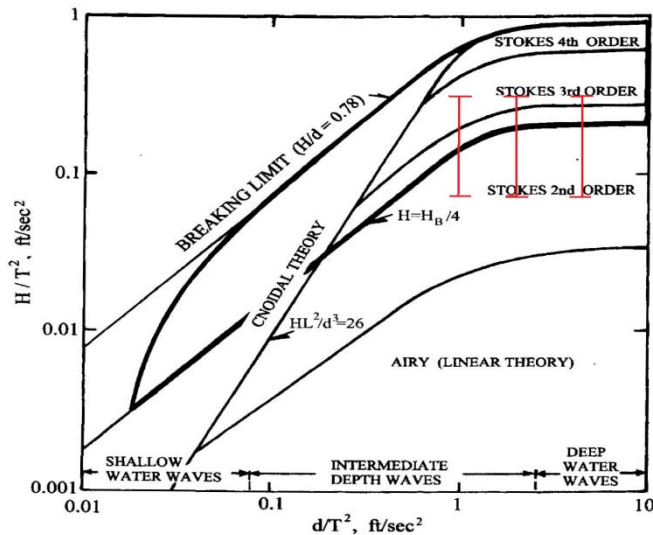
6.5 Δύναμη Froude-Krylon συναρτήσει ύψους κύματος H για σταθερό βάθος νερού.

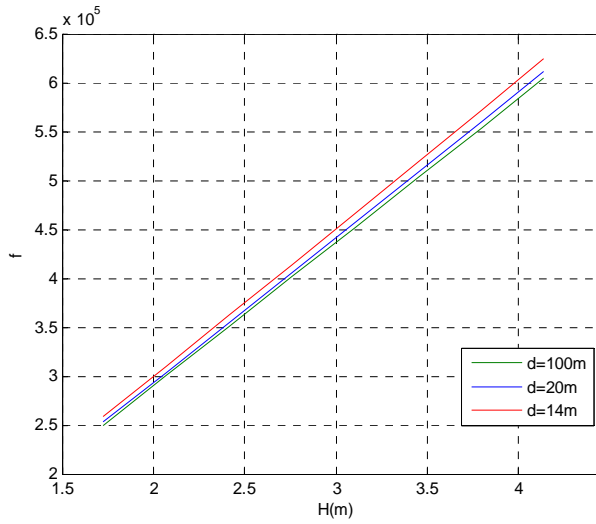
Από την έως τώρα ανάλυση για οποιοδήποτε κύμα ύψους H που διαδίδεται σε νερό βάθους d λαμβάνουμε το πλάτος της δύναμης Froude-Krylon καθώς και τη φάση της δύναμης αυτής:

Αρμονικό κύμα: $(H, d) \rightarrow (f, c)$

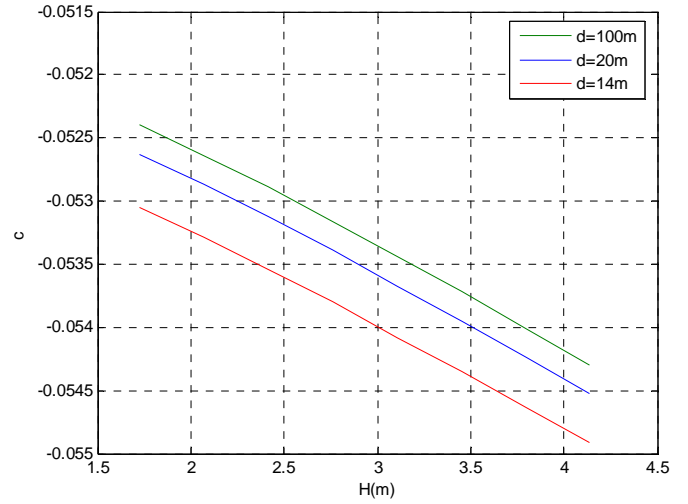
Κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes: $(H, d) \rightarrow (f_1, f_2, c_1, c_2)$

Διατηρώντας σταθερό το βάθος του νερού και θεωρώντας αρμονικό κύμα μήκους $\lambda = 69m$, το πλάτος και η φάση της δύναμης Froude-Krylon μεταβάλλονται συναρτήσει του ύψους H όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα (Σχ.6.11α και Σχ.6.11β αντίστοιχα). Τα βάθη που επιλέχθηκαν να εξεταστούν είναι 100m, 20m και 14m και το εύρος των εξεταζόμενων κυμάτων φαίνονται παρακάτω:



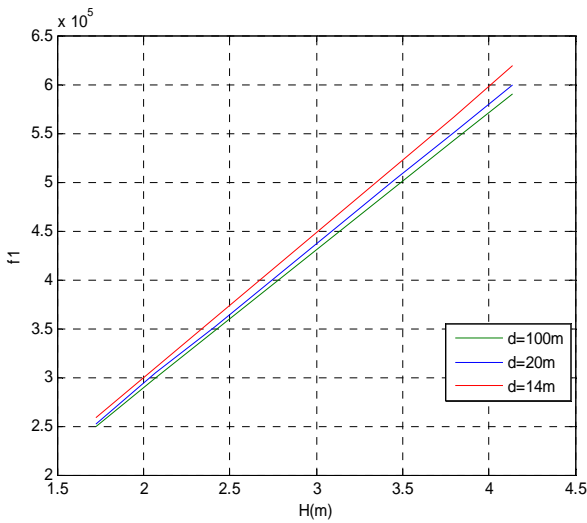


Σχ.6.11.α Διάγραμμα πλάτους f της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.

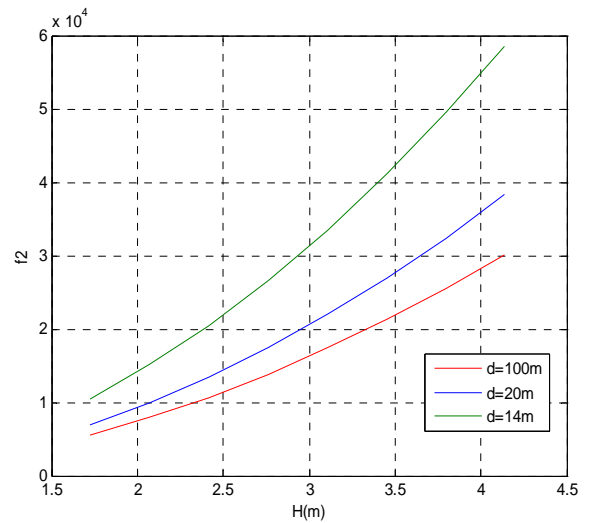


Σχ.6.11.β Διάγραμμα φάσης c της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.

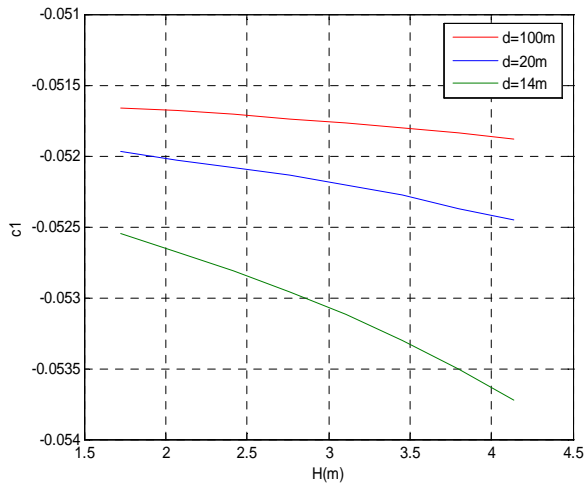
Τα αντίστοιχα διαγράμματα για κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes μήκους $\lambda = 69\text{m}$ για τα πλάτη f_1, f_2 και τις φάσεις c_1, c_2 παρουσιάζονται στα Σχ.6.12.(α), (β), (γ), (δ) αντίστοιχα.



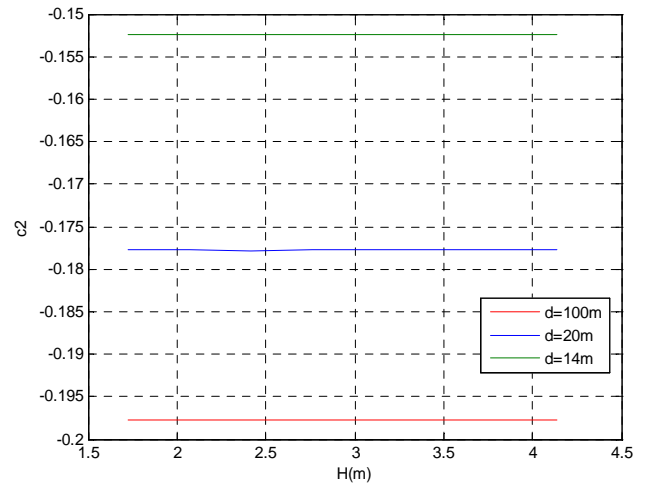
Σχ.6.12.α Διάγραμμα πλάτους f_1 της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.



Σχ.6.12.β Διάγραμμα πλάτους f_2 της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.



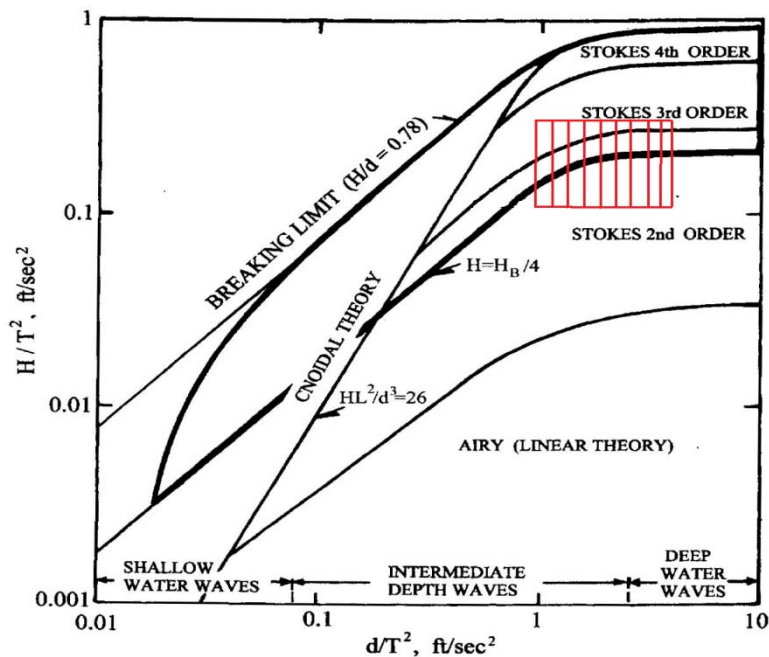
Σχ.6.12.γ Διάγραμμα φάσης c_1 της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.



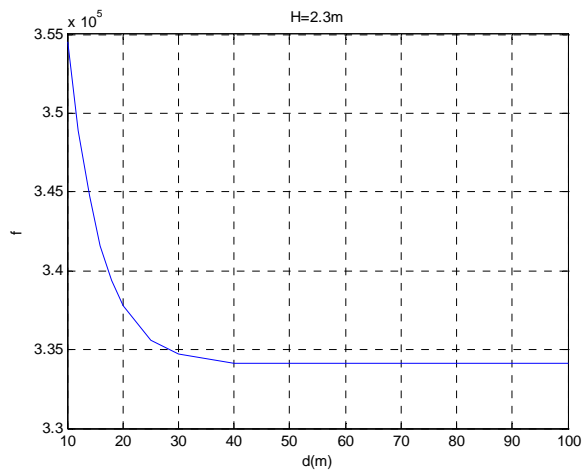
Σχ.6.12.δ Διάγραμμα φάσης c_2 της δύναμης F-K συναρτήσει του ύψους κύματος.

6.6 Δύναμη Froude-Krylon συναρτήσει βάθους νερού για σταθερό ύψος κύματος.

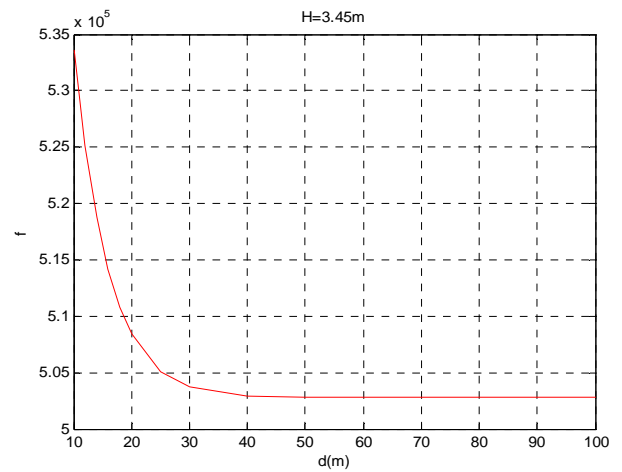
Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε την μεταβολή της δύναμης Froude-Krylon συναρτήσει του βάθους του νερού, διατηρώντας σταθερό το ύψος του κύματος. Τα κύματα που επιλέχθηκαν να μελετηθούν έχουν ύψος $H = \frac{\lambda}{30} = 2.3m$ και $H = \frac{\lambda}{20} = 3.45m$. Τα αντίστοιχα εξεταζόμενα κύματα φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Τα διαγράμματα που προέκυψαν παρατίθενται στις επόμενες σελίδες.



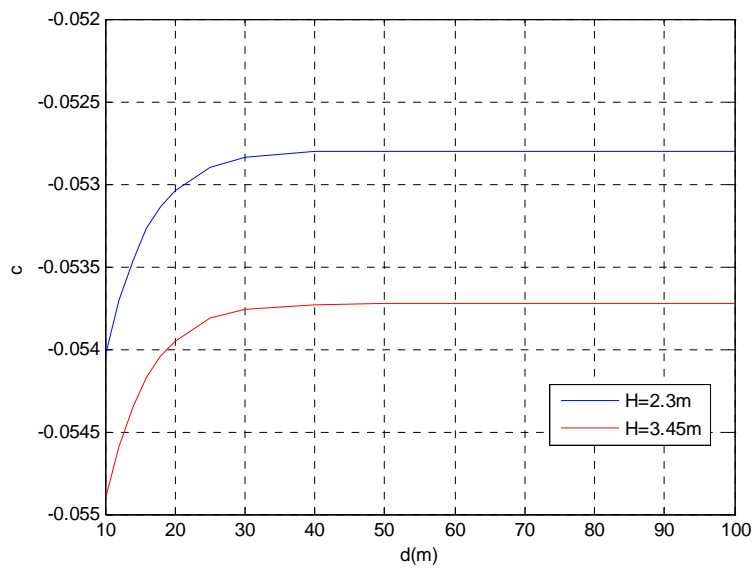
Αρμονικό Κύμα



Σχ.6.13.α Διάγραμμα πλάτους f της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=2.3m$)

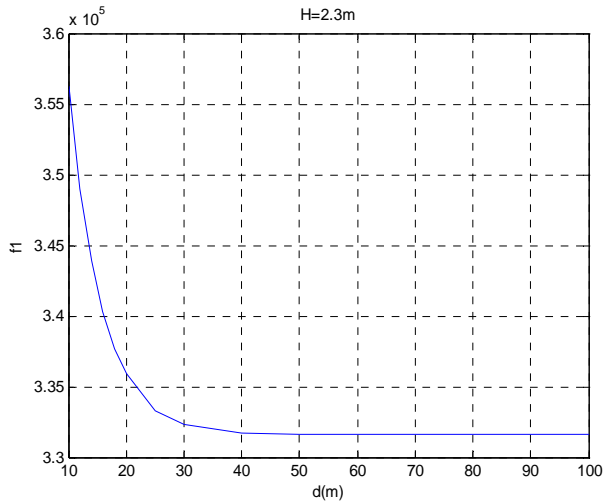


Σχ.6.13.β Διάγραμμα πλάτους f της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=3.45m$).

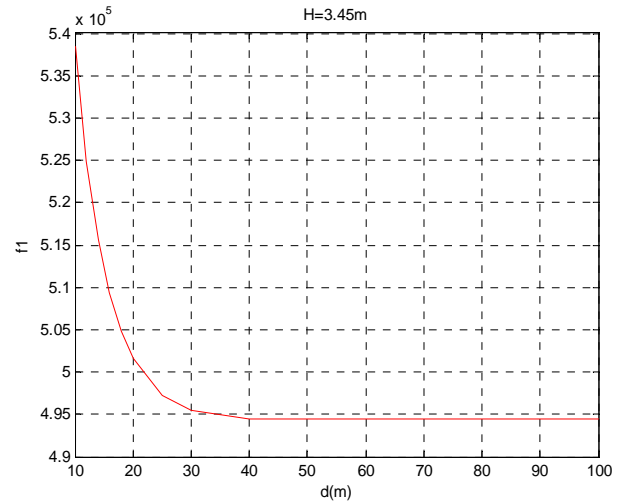


Σχ.6.14 Διάγραμμα φάσης c της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού

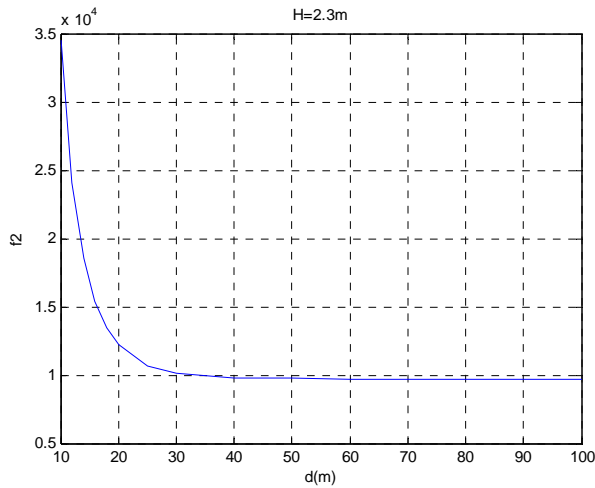
2^η τάξης κατά Stokes



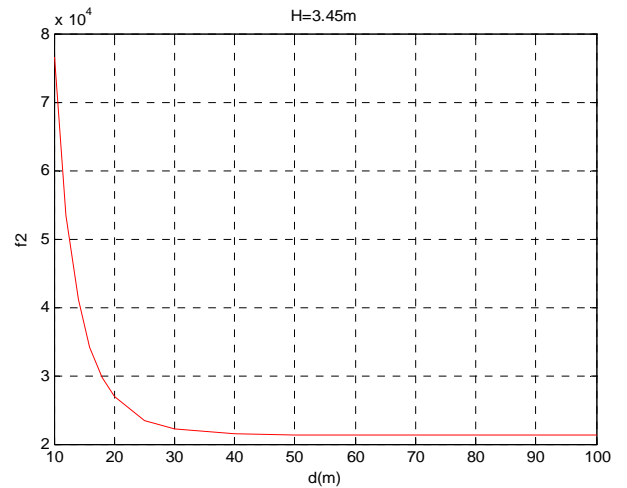
Σχ.6.15.α Διάγραμμα πλάτους f_1 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=2.3m$)



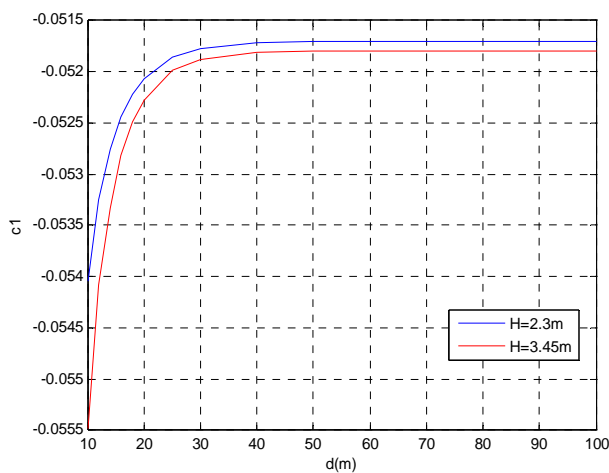
Σχ.6.15.β Διάγραμμα πλάτους f_1 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=3.45m$).



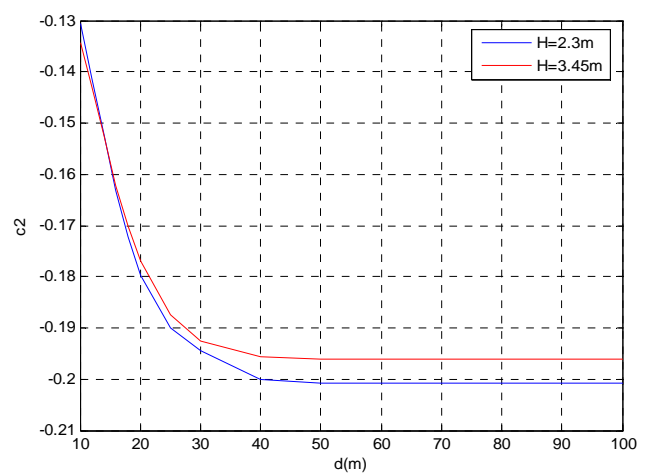
Σχ.6.16.α Διάγραμμα πλάτους f_2 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=2.3m$)



Σχ.6.16.β Διάγραμμα πλάτους f_2 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού ($H=3.45m$).



Σχ.6.17.α Διάγραμμα φάσης c_1 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού



Σχ.6.17.β Διάγραμμα φάσης c_2 της δύναμης F-K συναρτήσει του βάθους νερού

7.Διερεύνηση δυναμικής συμπεριφοράς surge σε γραμμικό κυματισμό και σε κυματισμό Stokes 2nd τάξης

Η εξίσωση κίνησης κατά το διάμηκες όπως αναφέρθηκε προηγουμένως είναι:

Αρμονικό κύμα

$$\begin{aligned} (m - X_{\ddot{u}}) \cdot \ddot{x} + [A_1(c) - \tau_1 \cdot n] \cdot \dot{x} + A_2(c) \cdot \dot{x}^2 + A_3(c) \cdot \dot{x}^3 + f \cdot \sin(k \cdot x + c) = \\ = T(c, n) - R(c) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes

$$\begin{aligned} (m - X_{\ddot{u}}) \cdot \ddot{x} + [A_1(c) - \tau_1 \cdot n] \cdot \dot{x} + A_2(c) \cdot \dot{x}^2 + A_3(c) \cdot \dot{x}^3 + \\ + f_1 \cdot \sin(k \cdot x + c_1) + f_2 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x + c_2) = T(c, n) - R(c) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Για το υπό μελέτη πλοίο έχουμε:

$$(m - X_{\ddot{u}}) = 557898.4$$

$$A_1(c) = 1829.34 \cdot c^2 - 3601.81 \cdot c + 5950.96$$

$$A_2(c) = 1829.34 \cdot c - 1800.91$$

$$A_3(c) = 609.78$$

$$T(c, n) = -5333.343 \cdot c^2 - 2751.7 \cdot c \cdot n + 12885.58 \cdot n^2$$

$$R(c) = 5950.96 \cdot c - 2334.25 \cdot c^2 + 609.78 \cdot c^3$$

όπου n , ο αριθμός στροφών της έλικας, που για το συγκεκριμένο πλοίο δίνεται από τη σχέση : $n = 16.064574 \cdot f_n^2 + 4.30072 \cdot f_n + 0.417978$, με f_n ο αριθμός Froude που επιτυγχάνεται σε ήρεμο νερό.

Σκοπός μας είναι η δημιουργία κατάλληλων πολυωνύμων που περιγράφουν τα πλάτη f, f_1, f_2 και τις φάσεις c, c_1, c_2 των σχέσεων 7.1 και 7.2 για :

1. Δεδομένο βάθος νερού (d) συναρτήσει του ύψους κύματος H , $f = f(H; \lambda = 69, d)$. Τα βάθη τα οποία θα μελετήσουμε είναι $d = 100m$, $d = 20m$, $d = 14m$
2. Δεδομένο ύψος κύματος H συναρτήσει του βάθους (d), $f = f(d; \lambda = 69, H)$. Τα κύματα σε αυτή τη περίπτωση θα έχουν ύψος $H = 2.3m = \lambda/20$ και $H = 3.45m = \lambda/10$

7.1 Προσέγγιση της δύναμης Froude-Krylon συναρτήσει του ύψους

Στη παράγραφο 6.5 καταλήξαμε σε διαγράμματα που παρουσιάζουν τη μεταβολή των πλατών της δύναμης Froude-Krylon (f, f_1, f_2) και των φάσεων (c, c_1, c_2) συναρτήσει του ύψους κύματος για σταθερά βάθη $d = 100, 20$ και $14m$. Με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB™ τα fit των πλατών και των φάσεων προσεγγίζονται με πολυώνυμο της μορφής :

$$\begin{aligned} f_i(H) &= a_1 \cdot H^n + a_2 \cdot H^{n-1} + \dots + a_{n+1} \\ c_i(H) &= b_1 \cdot H^n + b_2 \cdot H^{n-1} + \dots + b_{n+1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Οι συντελεστές των πολυωνύμων (7.3) παρατίθενται στους πίνακες που ακολουθούν (Πίνακας 4 και Πίνακας 5) για αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes, αντίστοιχα.

		f			
		a ₁	a ₂	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)	
d=100m	n=1	1.47e+05	-3965	0.99999375	
d=20m	n=1	1.485e+05	-3554	0.99999017	
d=14m	n=1	1.515e+05	-3673	0.99998857	

Πίνακας 4α Συντελεστές πολυωνύμων πλάτους στη περίπτωση αρμονικών κυματισμών

		c					
		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
d=100m	n=4	-0,00004813	0,0006199	-0,002968	0,005442	-0,05581	0.999939641
d=20m	n=4	0,000003342	-0,0000226	-1,12E-05	-0,0004951	-0,05166	0.999993441
d=14m	n=4	0,000008021	-0,00007933	0,0002428	-0,0009786	-0,05175	0.999977422

Πίνακας 4β Συντελεστές πολυωνύμων φάσης στη περίπτωση αρμονικών κυματισμών

Κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes:

		f ₁			
		a ₁	a ₂	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)	
d=100m	n=1	1.413e+05	6321	0.999999794	
d=20m	n=1	1.437e+05	5661	0.999981706	
d=14m	n=1	1.493e+05	435.7	0.999999986	

Πίνακας 5α Συντελεστές πολυωνύμων πλατών f₁ στη περίπτωση 2ης τάξης μη γραμμικών κυματισμών κατά Stokes

		f ₂				
		a1	a2	a3	R2(Συντελεστής προσδιορισμού)	
d=100m	f2(H)	n=2	1548	1116	-1011	0.999994647
d=20m	f2(H)	n=2	2011	1187	1094	0.999999264
d=14m	f2(H)	n=2	3126	1565	-1517	0.999999480

Πίνακας 5β Συντελεστές πολυωνύμων πλατών f₂ στη περίπτωση 2ης τάξης μη γραμμικών κυματισμών κατά Stokes

		c ₁				
		b1	b2	b3	b4	R2(Συντελεστής προσδιορισμού)
d=100m	n=4	-0,00000246	0,00001264	-1,12464E-05	-0,05152	0.997213637
d=20m	n=4	0,000003075	-0,00005356	0,00002022	-0,05188	0.997110646
d=14m	n=4	-0,00001107	0,00003037	-0,00003607	-0,05196	0.999984754

Πίνακας 5γ Συντελεστές πολυωνύμων φάσης c₁ στη περίπτωση 2ης τάξης μη γραμμικών κυματισμών κατά Stokes

Η φάση c_2 όπως φαίνεται και από το Σχ.6.11δ παραμένει σχεδόν σταθερή με αποτέλεσμα να επιλέξουμε τον μέσο όρο σε κάθε περίπτωση:

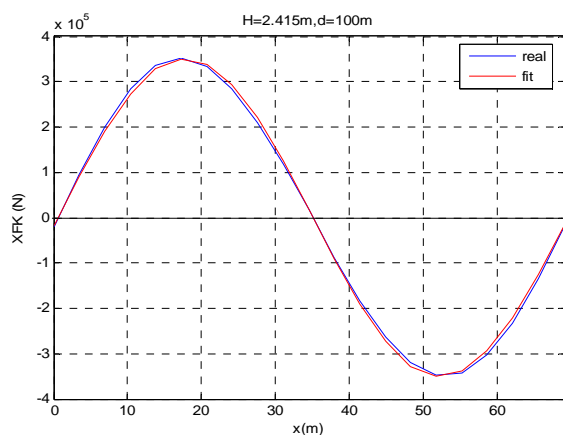
$$d = 100m \rightarrow c_2 = -0.19773$$

$$d = 20m \rightarrow c_2 = -0.17777$$

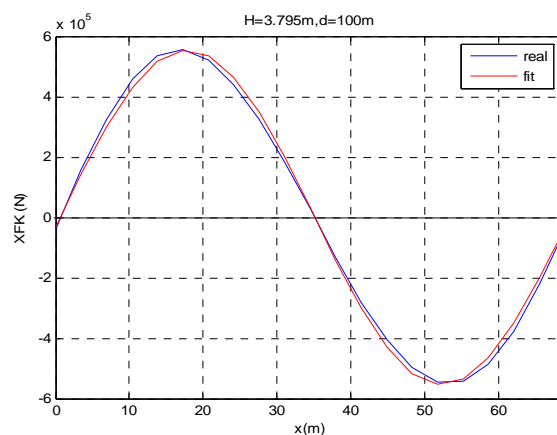
$$d = 14m \rightarrow c_2 = -0.15246$$

Για να δούμε την «αξιοπιστία» των παραπάνω πολυωνύμων, στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται ενδεικτικά για ορισμένα κύματα η δύναμη Froude-Krylon που υπολογίζεται με χρήση των παραπάνω πολυωνύμων και η πραγματική που υπολογίζεται από το πρόγραμμα που αναπτύξαμε στο EXCEL.

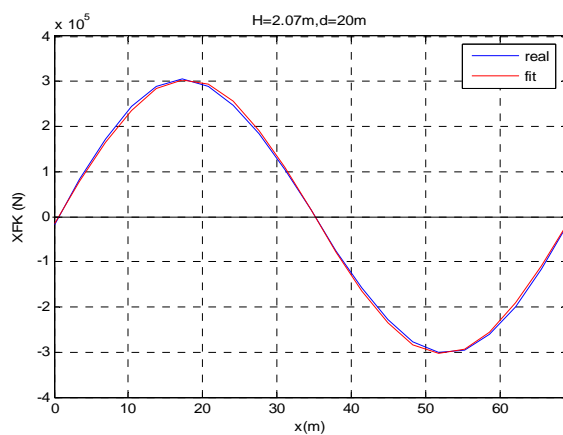
Αρμονικό κύμα



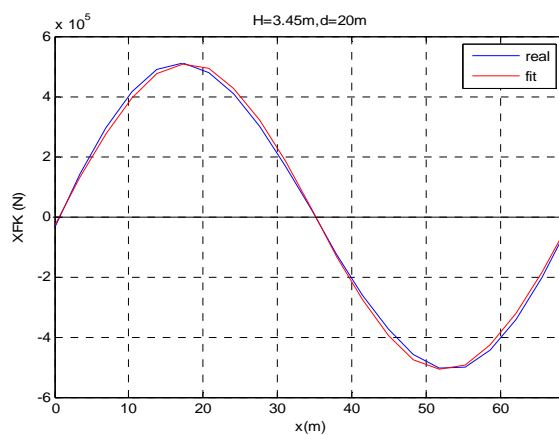
Σχ.7.1α. $H=2.415m, d=100m$



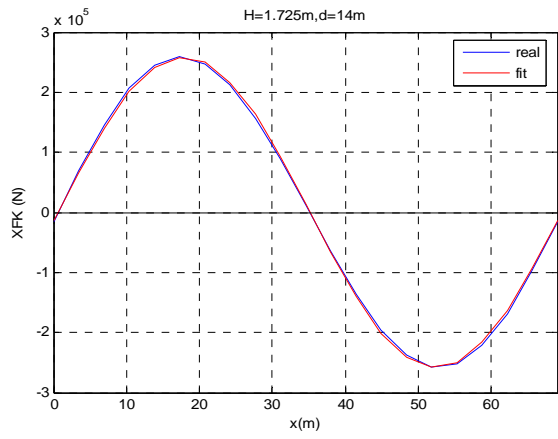
Σχ.7.1β. $H=3.795m, d=100m$



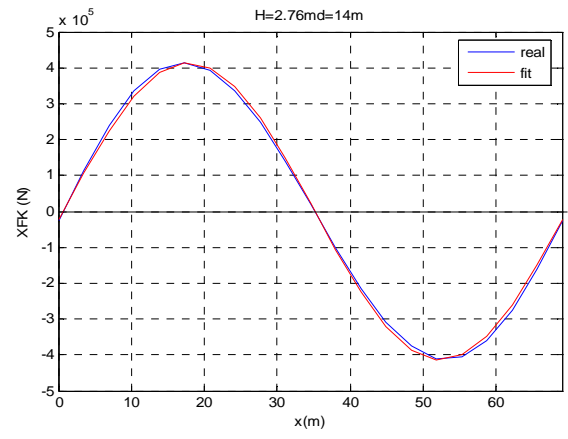
Σχ.7.1γ. $H=2.07m, d=20m$



Σχ.7.1δ. $H=3.45m, d=20m$

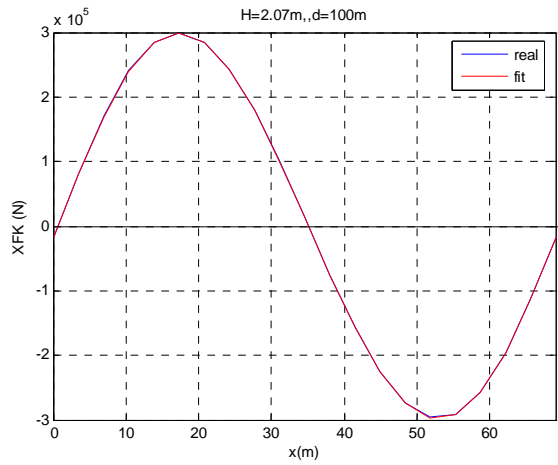


Σχ.7.1ε. $H=1.725m, d=14m$

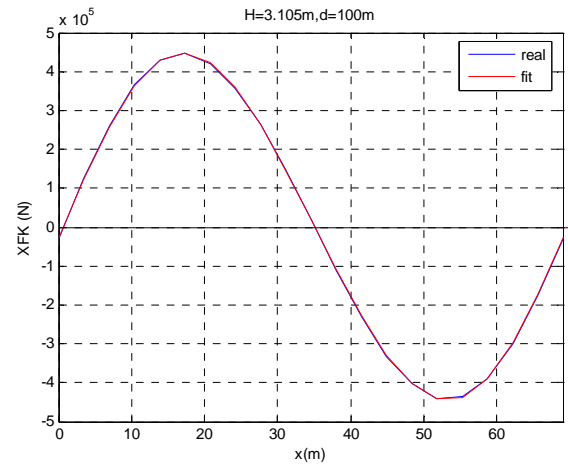


Σχ.7.1στ. $H=2.76m, d=14m$

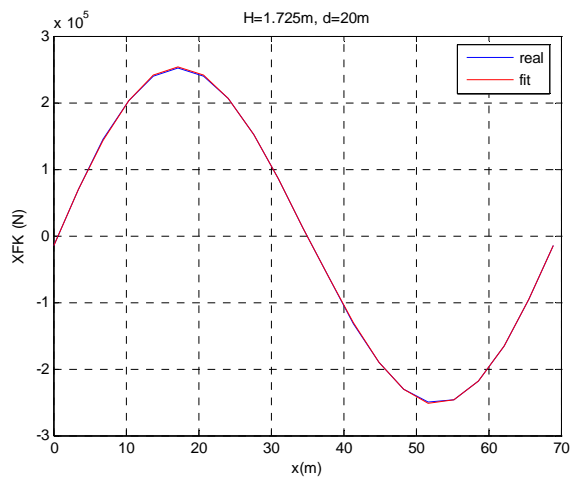
Κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes



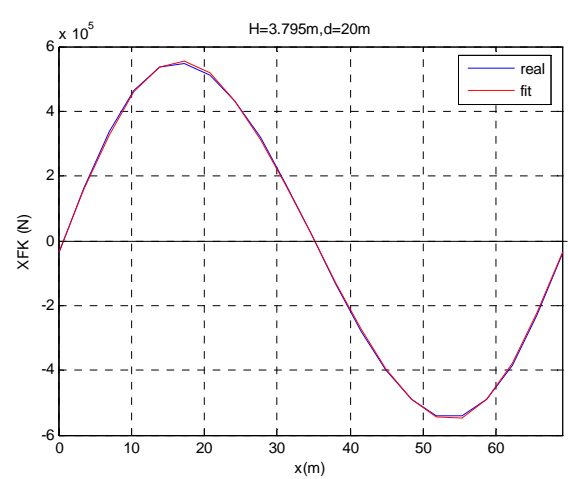
Σχ.7.2α. $H=2.07m, d=100m$



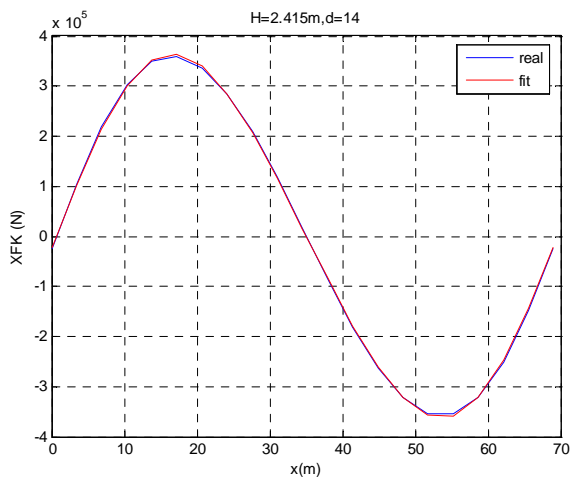
Σχ.7.2β. $H=3.105m, d=100m$



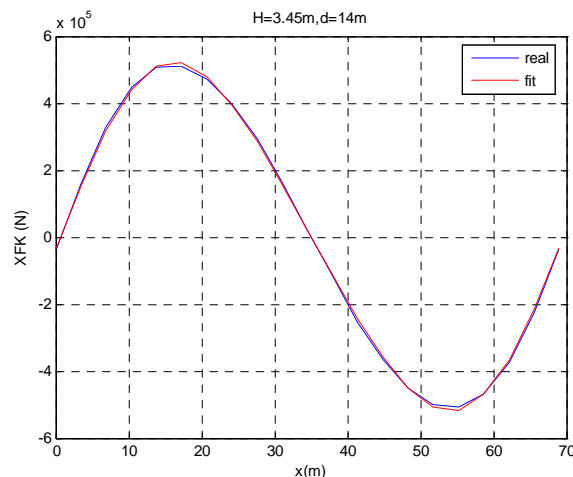
Σχ.7.2γ. $H=1.725m, d=20m$



Σχ.7.2δ. $H=3.795m, d=20m$



Σχ.7.2ε. $H=2.415m, d=14m$



Σχ.7.2στ. $H=3.45m, d=14m$

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε:

- Τα πολυώνυμα δίνουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια την πραγματική δύναμη σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο πάνω σε ένα κύμα
- Όσο αυξάνεται το ύψος κύματος το σφάλμα αυξάνεται
- Το σφάλμα των πολυωνύμων για κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes είναι μικρότερο του αντίστοιχου για αρμονικά κύματα.
- Ακόμα και για ακραία ύψη κύματος ($H>4m$) η απόκλιση από την πραγματική δύναμη σε οποιαδήποτε θέση πάνω στο κύμα είναι μικρότερο του 6%.

7.2 Προσέγγιση της δύναμης Froude-Krylov συναρτήσει του βάθους

Στη παράγραφο 6.6 καταλήξαμε σε διαγράμματα που παρουσιάζουν τη μεταβολή των πλατών της δύναμης Froude-Krylov (f, f_1, f_2) και των φάσεων (c, c_1, c_2) συναρτήσει του βάθους της θάλασσας για κύματα συγκεκριμένου ύψους $H = 2.3m$ και $H = 3.45m$. Με τη βοήθεια του προγράμματος MATLABTM τα fit των πλατών και των φάσεων προσεγγίζονται με πολυώνυμα της μορφής :

$$\begin{aligned}
 f(d) &= a_1 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_2}{c_2}\right)^2} + a_3 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_3}{c_3}\right)^2} \\
 f_1(d) &= a_1 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_2}{c_2}\right)^2} + a_3 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_3}{c_3}\right)^2} \\
 f_2(d) &= a_1 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_2}{c_2}\right)^2} + a_3 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_3}{c_3}\right)^2} + a_4 \cdot e^{-\left(\frac{d-b_4}{c_4}\right)^2} \quad (7.4) \\
 c(d) &= \frac{a_1 \cdot d^3 + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d + a_4}{d^3 + b_1 \cdot d^2 + b_2 \cdot d + b_3} \\
 c_1(d) &= \frac{a_1 \cdot d^3 + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d + a_4}{d^3 + b_1 \cdot d^2 + b_2 \cdot d + b_3} \\
 c_2(d) &= \frac{a_1 \cdot d^2 + a_2 \cdot d + a_3}{d^2 + b_1 \cdot d + b_2}
 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές των πολωνύμων (7.4) παρατίθενται στους πίνακες που ακολουθούν για αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

Αρμονικό κύμα

H=2.3m										
	a ₁	b ₁	c ₁	a ₂	b ₂	c ₂	a ₃	b ₃	c ₃	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
f(d)	544300	-30,94	21,34	340500	15670	112900	221700	-50,55	32,42	0.999987265
H=3.45m										
f(d)	829200	-30,8	21,34	513200	37070	257900	215000	-46,22	31,77	0.999996997

Πίνακας 6α Συντελεστές πολωνύμων πλατών για αρμονικούς κυματισμούς

H=2.3m								
	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	b ₁	b ₂	b ₃	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
c(d)	-0,05286	-0,05803	-0,3261	0,7422	1,271	0,3862	0,7231	0.998889273
H=3.45m								
c(d)	-0,05378	-0,03665	-0,3346	0,7837	0,8489	0,7356	0,4204	0.998237268

Πίνακας 6β Συντελεστές πολωνύμων φάσεων για αρμονικούς κυματισμούς

Κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes

H=2.3m										
	a ₁	b ₁	c ₁	a ₂	b ₂	c ₂	a ₃	b ₃	c ₃	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
f ₁ (d)	103900	-6,3320	11,070	331700	173,8	14610	22350	-2,656	17,16	0.999984894
H=3.45m										
f ₁ (d)	106000	0,3344	8,2880	498700	1899000	20610000	16920	9,0460	11,5900	0.999874256

Πίνακας 7α Συντελεστές πολωνύμων πλάτους f₁

H=2.3m													
	a ₁	b ₁	c ₁	a ₂	b ₂	c ₂	a ₃	b ₃	c ₃	a ₄	b ₄	c ₄	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
f ₂ (H)	23530	6,947	3,412	5398	9,789	5,248	19140	-5,516	17,690	83720	3904000	2662000	0.999995508
H=3.45m													
f ₂ (H)	52320	6,8840	3,4370	12320	9,6620	5,2850	43630	-5,6340	17,7200	80170	3394000	2950000	0.999995121

Πίνακας 7β Συντελεστές πολωνύμων πλάτους f₂

H=2.3m								
	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	b ₁	b ₂	b ₃	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
c ₁ (H)	-0,05186	-0,02927	-0,4965	0,6376	0,9114	0,2026	0,5985	0.99995468
H=3.45m								
c ₁ (H)	-0,0521	-0,01588	-0,7946	0,6833	0,9228	0,6902	0,0882	0.999461439

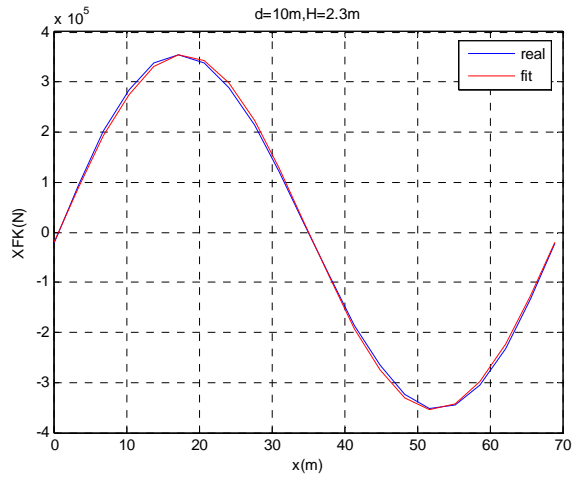
Πίνακας 7γ Συντελεστές πολωνύμων φάσης c₁

H=2.3m						
	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	R ² (Συντελεστής προσδιορισμού)
c ₂ (H)	-0,1998	2,881	-22,83	-15,41	161,4	0.999984894
H=3.45m						
c ₂ (H)	-0,1929	3,262	-29,45	-18,61	206	0.999874256

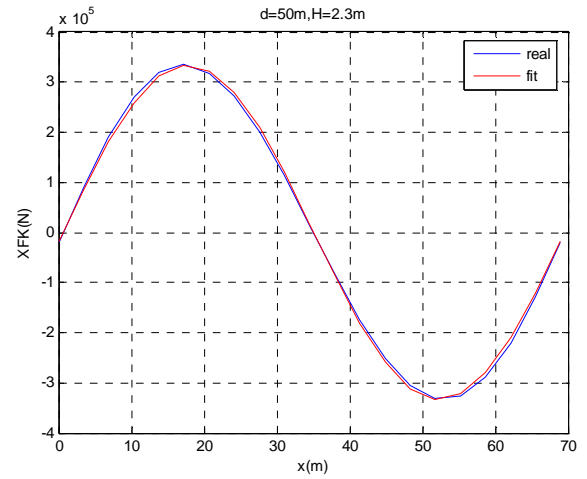
Πίνακας 7δ Συντελεστές πολωνύμων φάσης c₂

Ενδεικτικά στα επόμενα σχήματα παρουσιάζεται η δύναμη Froude-Krylov που υπολογίζεται με χρήση των παραπάνω πολωνύμων και η πραγματική που υπολογίζεται από το πρόγραμμα που αναπτύξαμε στο EXCEL.

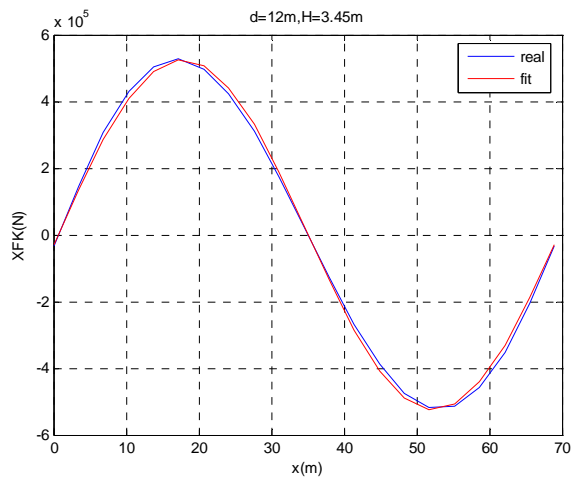
Αρμονικό Κύμα



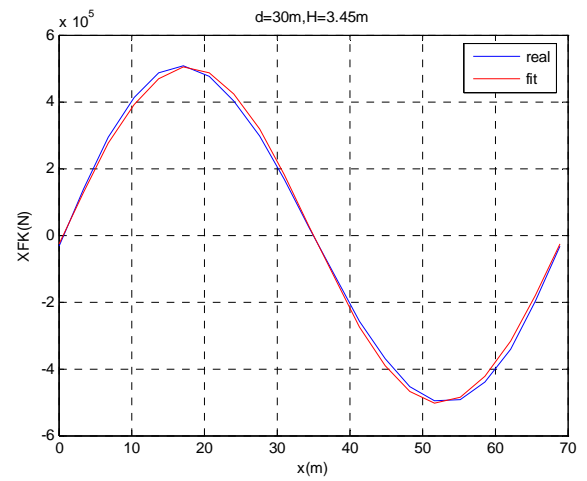
Σχ.7.3α $H=2.3m$, $d=10m$



Σχ.7.3β $H=2.3m$, $d=60m$

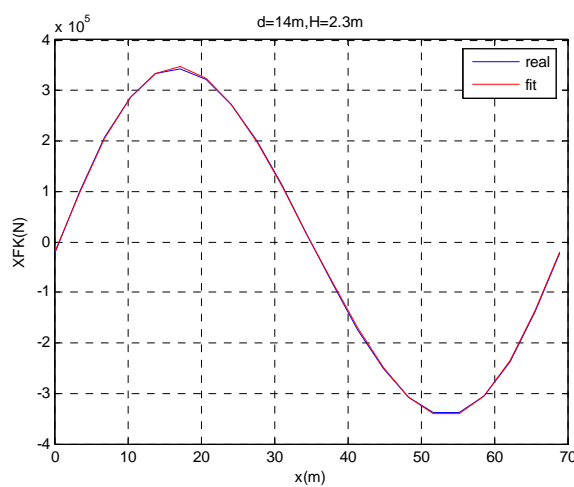


Σχ.7.4α $H=3.45m$, $d=12m$

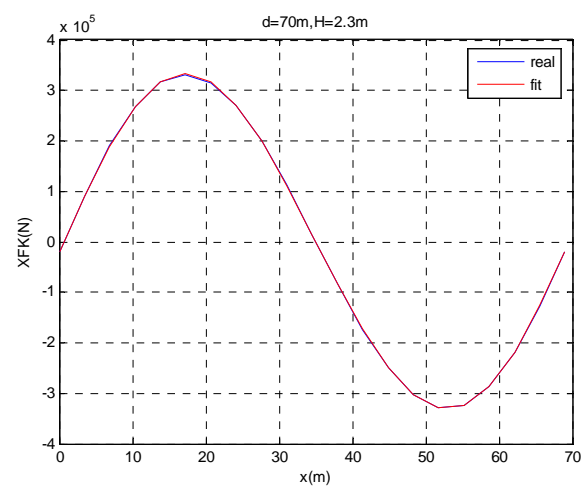


Σχ.7.4β $H=3.45m$, $d=30m$

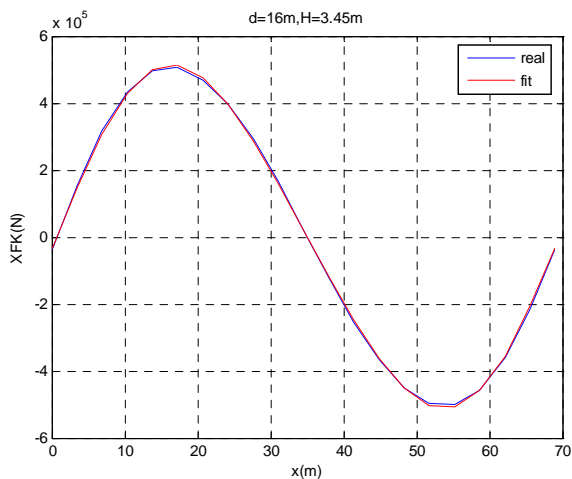
Κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes



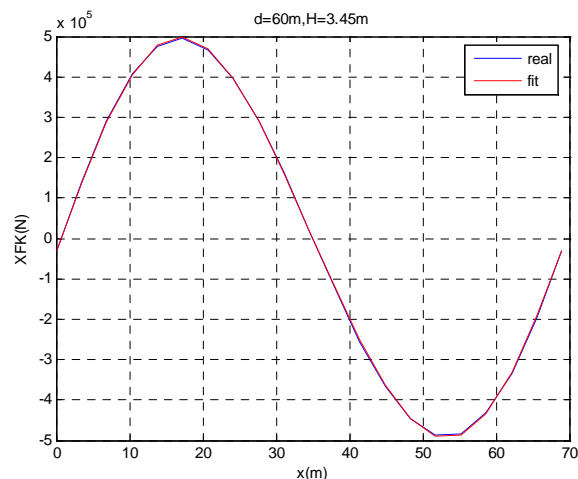
Σχ.7.5α $H=2.3m$, $d=14m$



Σχ.7.5β $H=2.3m$, $d=70m$



Σχ.7.6α $H=3.45m, d=16m$



Σχ.7.6β $H=3.45m, d=60m$

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε:

- Τα πολυώνυμα δίνουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια την πραγματική δύναμη σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο πάνω σε ένα κύμα
- Όσο μειώνεται το βάθος νερού το σφάλμα αυξάνεται χωρίς όμως να ξεπερνάει το 5.5% (για μικρά βάθη νερού).
- Το σφάλμα των πολυωνύμων για κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes είναι μικρότερο του αντίστοιχου για αρμονικά κύματα.

7.3 C_L MATCONT

Για να εισάγουμε τις εξισώσεις κίνησης (7.1, 7.2) κατά τη διεύθυνση του surge στο πρόγραμμα πρέπει να τις μετατρέψουμε σε ισοδύναμα συστήματα διαφορικών εξισώσεων Α' τάξης ως εξής:

Αρμονικό Κύμα

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{u} = r - p_1 \cdot \dot{x} - p_2 \cdot \dot{x}^2 - p_3 \cdot \dot{x}^3 - p_4 \cdot \sin(k \cdot x + c) \end{array} \right\} \quad (7.5)$$

$$\text{με } p_1 = \frac{A_1}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_2 = \frac{A_2}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_3 = \frac{A_3}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_4 = \frac{f}{(m - X_{\dot{u}})} \text{ και}$$

$$r = \frac{T - R}{(m - X_{\dot{u}})}$$

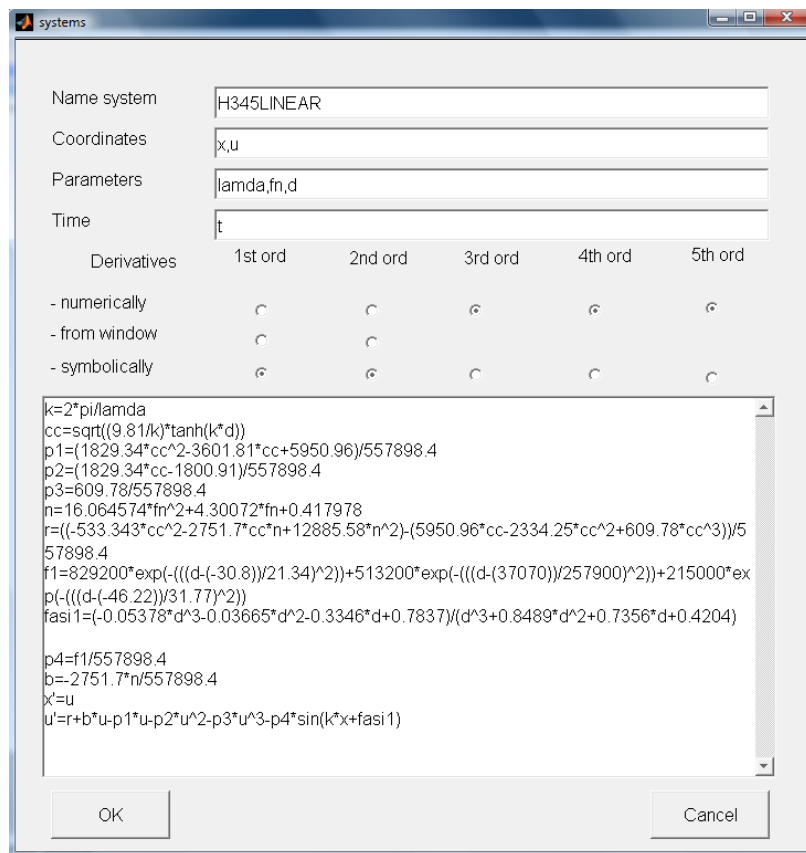
Κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{u} = r - p_1 \cdot \dot{x} - p_2 \cdot \dot{x}^2 - p_3 \cdot \dot{x}^3 - p_4 \cdot \sin(k \cdot x + c_1) - p_5 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x + c_2) \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

$$\mu\epsilon \quad p_1 = \frac{A_1}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_2 = \frac{A_2}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_3 = \frac{A_3}{(m - X_{\dot{u}})}, \quad p_4 = \frac{f_1}{(m - X_{\dot{u}})},$$

$$p_5 = \frac{f_2}{(m - X_{\dot{u}})} \text{ και } r = \frac{T - R}{(m - X_{\dot{u}})}$$

Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εισάγουμε τα συστήματα 7.5 και 7.6 αν θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση του βάθους στη συμπεριφορά του πλοίου για αρμονικό κύμα ύψους $H=3.45\text{m}$ Σχ.7.7α και την επίδραση του ύψους κύματος στη συμπεριφορά του πλοίου για κύμα 2^{ης} τάξης που διαδίδεται σε θάλασσα βάθους 14m αντίστοιχα Σχ.7.7β



Σχ.7.7α Πρόγραμμα «σταθερού ύψους κύματος $H=3.45\text{m}$, Αρμονικά κύματα»

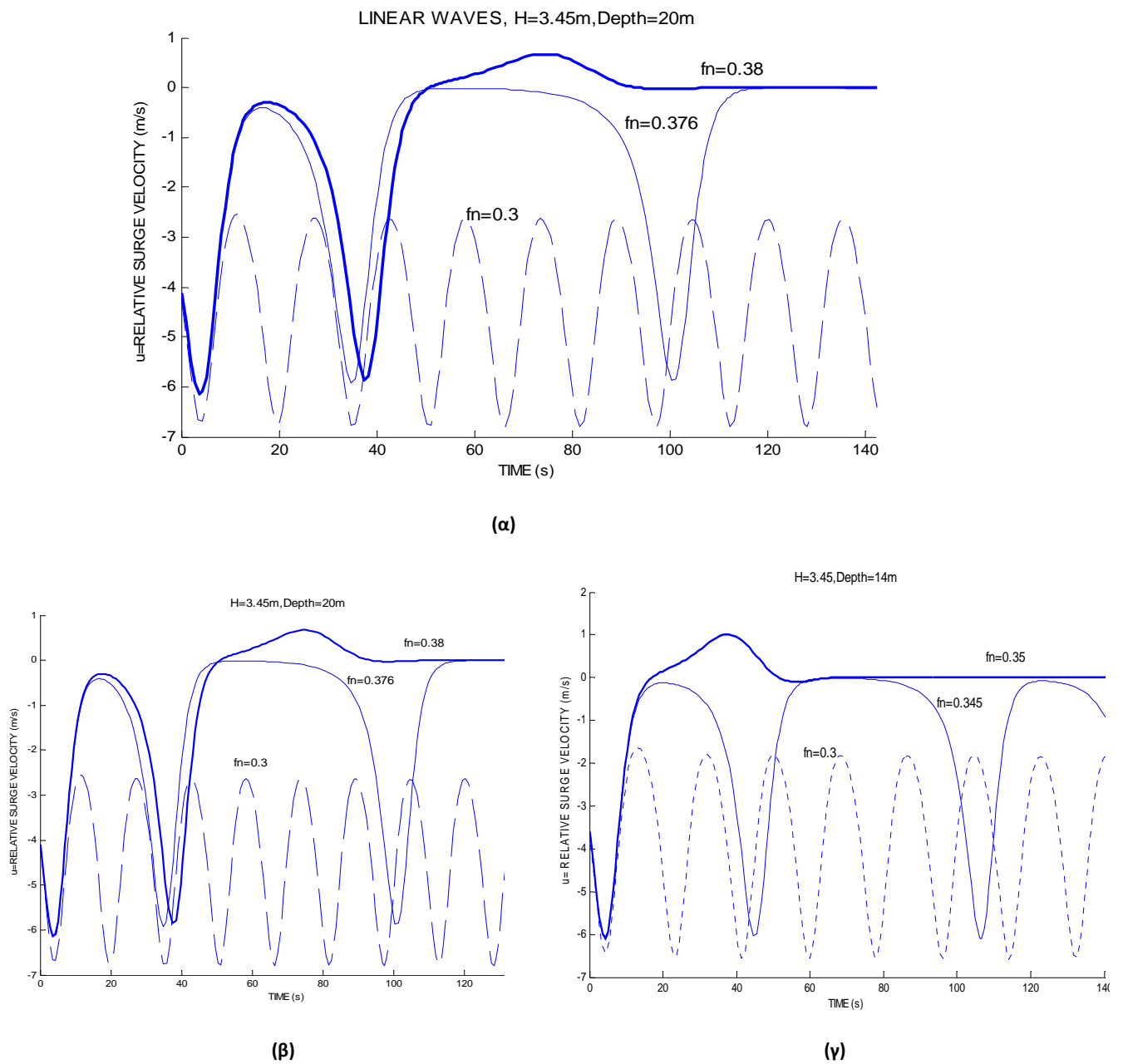


Σχ.7.7β Πρόγραμμα «σταθερού βάθους νερού $d=14m$, 2^{ης} τάξης κύματα»

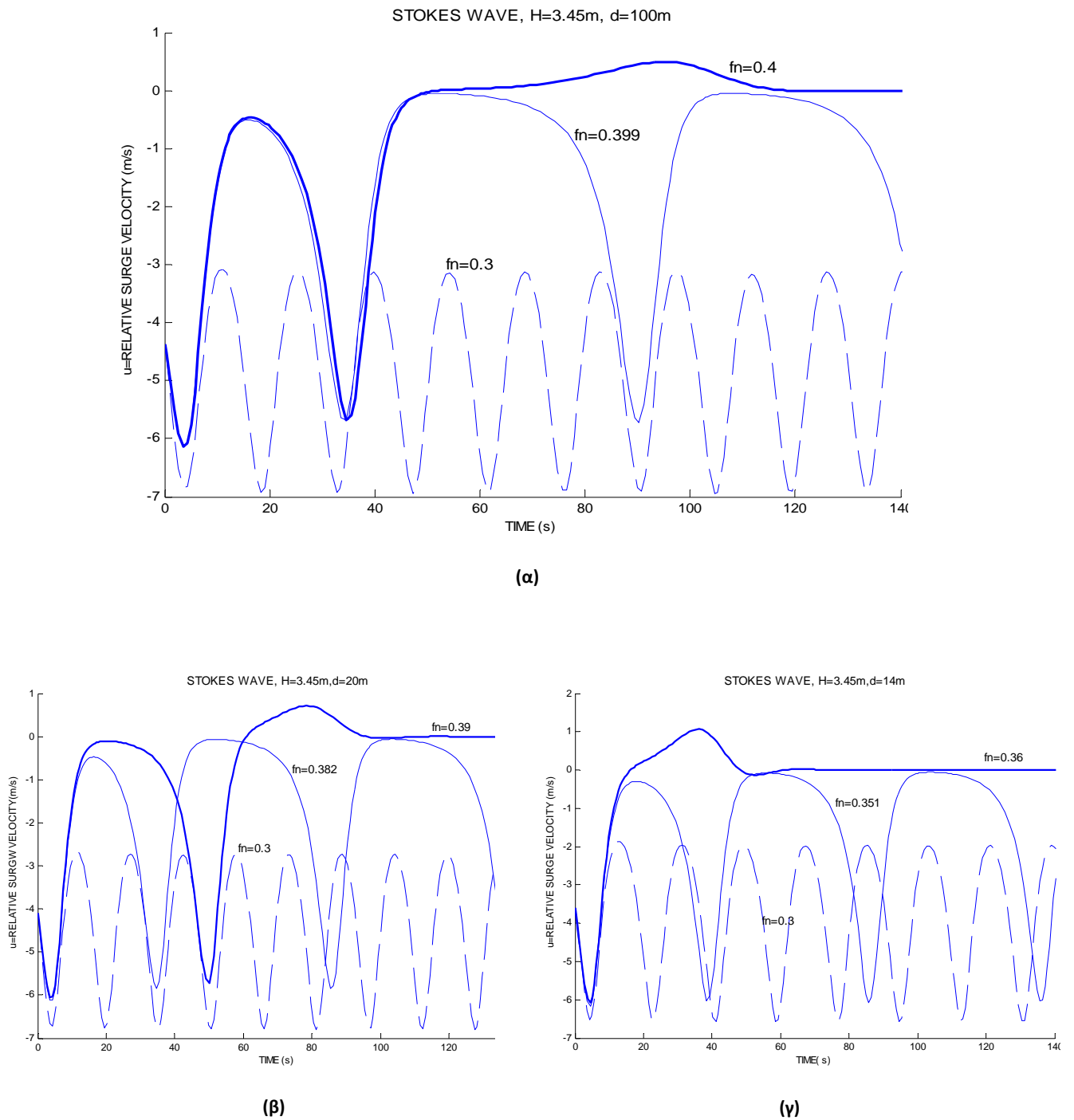
7.4 Αποτελέσματα

7.4.1. Προσομοιώσεις (Simulations)

Στα σχήματα Σχ7.8 (α),(β),(γ) παρουσιάζεται για θάλασσες βάθους 100m, 20m και 14m αντίστοιχα η πρόβλεψη της σχετικής ταχύτητας του πλοίου ως προς αυτή ενός αρμονικού κύματος ύψους $H = 3.45m$. Θεωρούμε ότι το πλοίο ταξιδεύει αρχικά με ταχύτητα $U = 6m/s$, και ότι βρίσκεται στη κορυφή του κύματος. Τα αντίστοιχα διαγράμματα για την περίπτωση κύματος ύψους $H = 3.45m$ της μη γραμμικής θεωρίας φαίνονται στα Σχ7.9 (α),(β),(γ)



Σχ.7.8 Προσομοίωση σχετικής ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του surge στη περίπτωση αρμονικών κυμάτων. Βάθος νερού $d=100m$ (α), $20m$ (β) και $14m$ (γ)

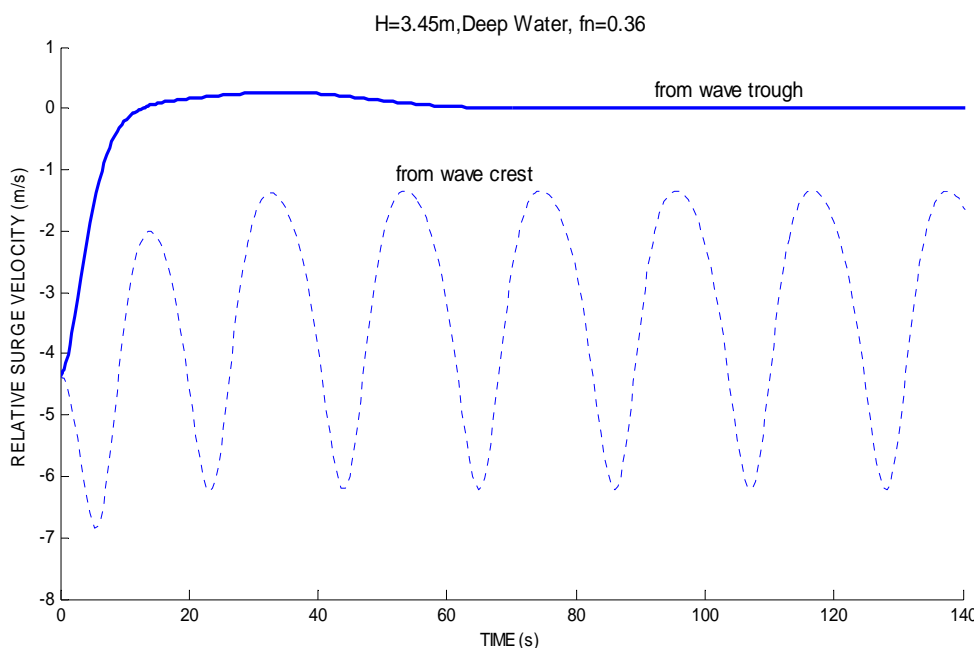


Σχ.7.9 Προσομοίωση σχετικής ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του surge στη περίπτωση κυμάτων 2^{ης} τάξης κατά Stokes. Βάθος νερού $d=100m$ (α), $20m$ (β) και $14m$ (γ)

Τα παραπάνω διαγράμματα έρχονται ,όπως παρατηρούμε σε απόλυτη συμφωνία με το Σχ.5.2. Για σχετικά μικρές ταχύτητες η απόκριση του πλοίου είναι περιοδική. Για τιμές αριθμού Froude αρκετά κοντά στη ταχύτητα του κύματος ο μη γραμμικός χαρακτήρας της απόκρισης εμφανίζεται υπό την μορφή της ασύμμετρης περιοδικής κίνησης του πλοίου. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, περαιτέρω μικρές μεταβολές του Fn , οδηγούν στη δραματική αύξηση της περιόδου των ταλαντώσεων, φαινόμενο που προμηνύει την ύπαρξη ομοκλινικής σύνδεσης. Όταν ο αριθμός Froude ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή τότε η ταχύτητα κατά το διάμηκες αυξάνεται απότομα αρκετά πάνω από την ταχύτητα φάσης του κύματος και μετά από μία μεταβατική συμπεριφορά σταθεροποιείται σε αυτή (surf-riding).

Όπως παρατηρούμε στα παραπάνω διαγράμματα ανεξαρτήτως της μορφής του θεωρούμενου κύματος καθώς το βάθος του νερού μειώνεται η κρίσιμη τιμή του αριθμού Froude μικραίνει, αφού αντίστοιχα η ταχύτητα του κύματος μικραίνει .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το γεγονός ότι για ίδιες αρχικές συνθήκες, η αρχική διαμήκη θέση του πλοίου πάνω στο κύμα έχει σημαντικό ρόλο στην απόκριση του πλοίου. Στο Σχ.7.10 παρατηρούμε ότι για αρχική ταχύτητα πλοίου $U = 6\text{ m/s}$, αριθμό Froude $fn = 0.36$,βάθος νερού $d = 100\text{ m}$ και αρμονικό κύμα, όταν αρχίζουμε από μία κορυφή το πλοίο εκτελεί περιοδική κίνηση ενώ όταν αρχίζουμε από μία κοιλάδα το πλοίο εγκλωβίζεται σε αυτή και πραγματοποιεί surf-riding.

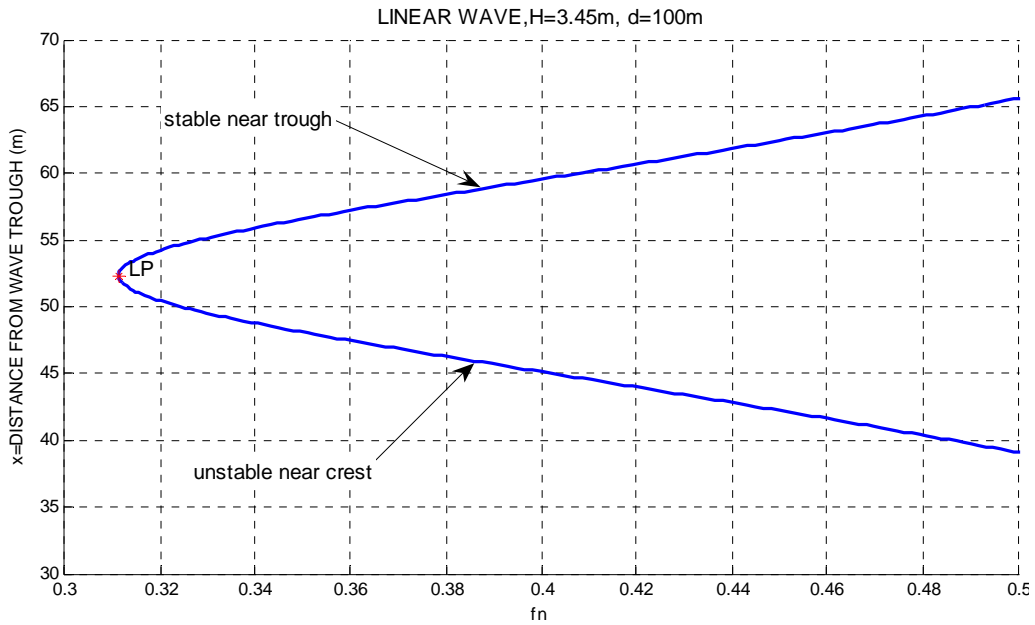


Σχ.7.10 Προσομοίωση σχετικής ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του surge, για διαφορετική αρχική διαμήκη θέση του πλοίου πάνω σε αρμονικό κύμα $H=3.45\text{ m}$ $fn=0.36$

7.4.2 Διερεύνηση των στάσιμων αποκρίσεων

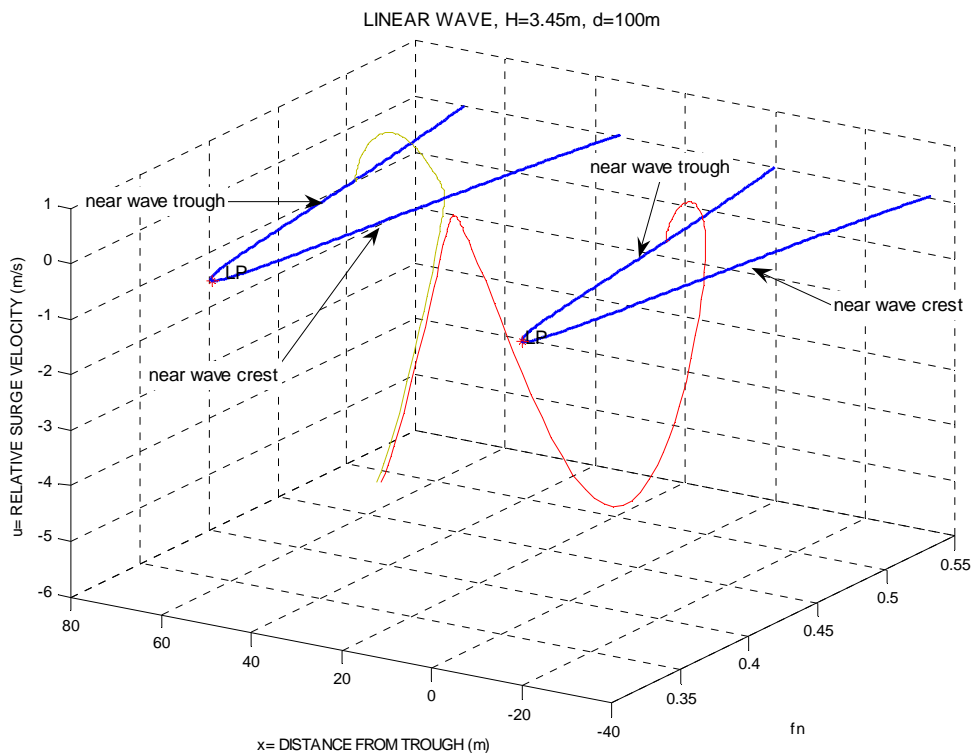
7.4.2.α Αριθμητική συνέχιση σταθερού ύψους κύματος και βάθους d

Αρχικά επικεντρωνόμαστε στις στάσιμες αποκρίσεις του surf-riding και ερευνούμε την συμπεριφορά του πλοίου για ένα μεγάλο εύρος αριθμών Fn . Στόχος μας είναι να παρατηρήσουμε πως εξελίσσονται οι κλάδοι της ευστάθειας για σταθερό ύψος κύματος H και βάθος d , μεταβάλλοντας τον αριθμό Fn και να αποφανθούμε πότε η ευστάθεια είναι ευσταθής ή ασταθής. Με την μέθοδο της αριθμητικής συνέχισης και ξεκινώντας από ένα στάσιμο σημείο ισορροπίας που προσδιορίζεται από simulation, κατασκευάζουμε τους κλάδους ευστάθειας που φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί για αρμονικό κύμα ύψους $H = 3.45\text{ m}$ το οποίο διαδίδεται σε θάλασσα βάθους 100m (Σχ.7.11).



Σχ.7.11 Στάσιμες αποκρίσεις-surf-riding, συναρτήσει του αριθμού F_n , σε αρμονικό κύμα ύψους $H=3.45m$ και βαθύ νερό

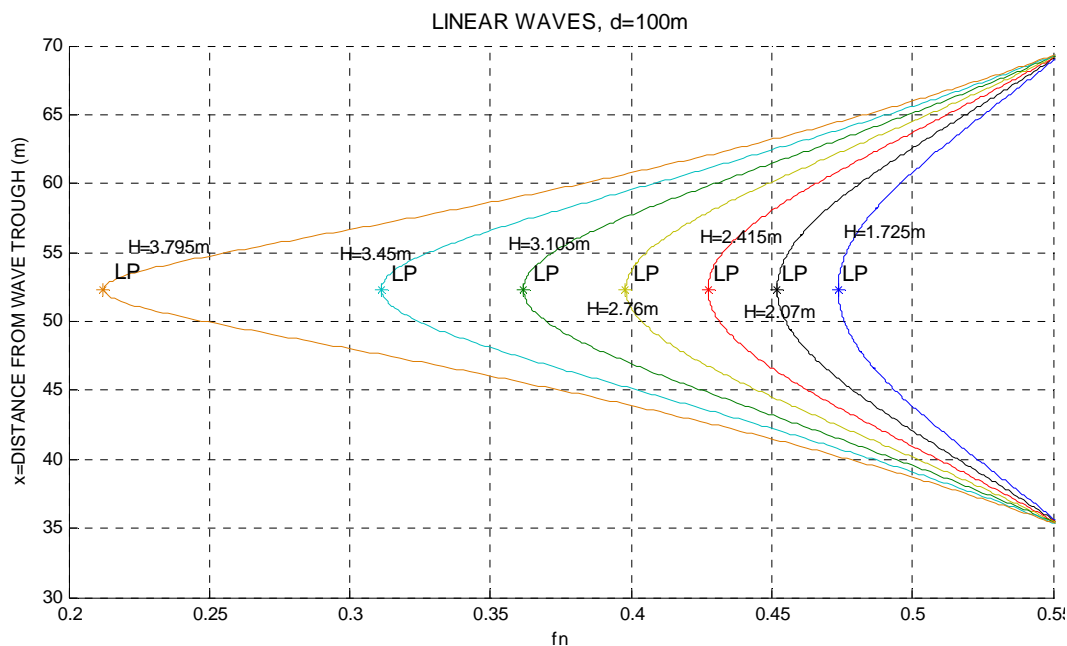
Όπως παρατηρούμε ο ευσταθής κλάδος ξεκινάει λίγο μετά την κορυφή του κύματος επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι το πλοίο κινδυνεύει να κάνει surf-riding όταν αυτό βρίσκεται στη κατωφέρεια του κύματος. Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι για το συγκεκριμένο κύμα, το surf-riding εμφανίζεται για αριθμούς $F_n > 0.3112$. Οι ασταθείς λύσεις βρίσκονται στην ανωφέρεια του κύματος κοντά στη κορυφή. Το επόμενο σχήμα (Σχ.7.12) θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τον ακριβή ρόλο του ασταθούς κλάδου..



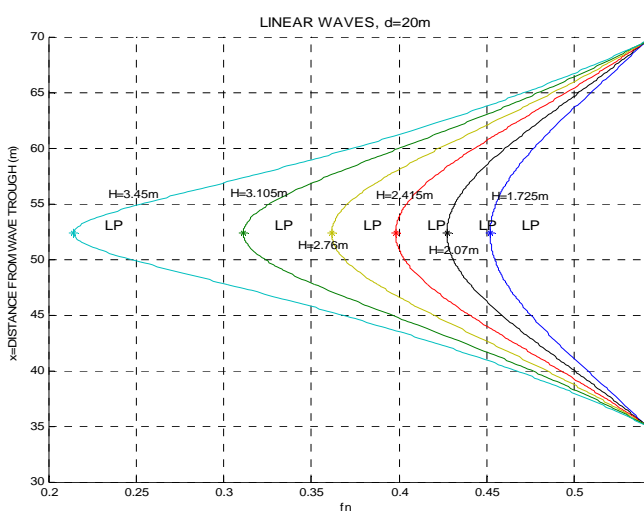
Σχ.7.12 Τρισδιάστατη απεικόνιση των τροχιών των λύσεων για διαφορετική αρχική διαμήκη θέση του πλοίου πάνω σε αρμονικό κύμα ύψους $H=3.45m$. (Κίτρινη γραμμή $x_0=58m$, κόκκινη γραμμή $x_0=57m$)

Θεωρώντας ότι το πλοίο ταξιδεύει με αρχική ταχύτητα $U = 5\text{ m/s}$ και $fn = 0.36$, σε θάλασσα βάθους $d = 100\text{ m}$, συναντάει αρμονικό κύμα ύψους $H = 3.45\text{ m}$. Αν το πλοίο βρίσκεται 58m από την κοιλάδα αναφοράς του κύματος, το κύμα «σπρώχνει» το πλοίο αυξάνοντας του την ταχύτητα και αυτό με τη σειρά του ισορροπεί στα 62.45m από αυτή. Αντιθέτως αν το πλοίο βρίσκεται αρχικά 57m από την κοιλάδα αναφοράς του κύματος, το κύμα προσπερνάει το πλοίο, μέχρις ότου το πλοίο να ισορροπήσει 6.55m πίσω από την κοιλάδα αναφοράς

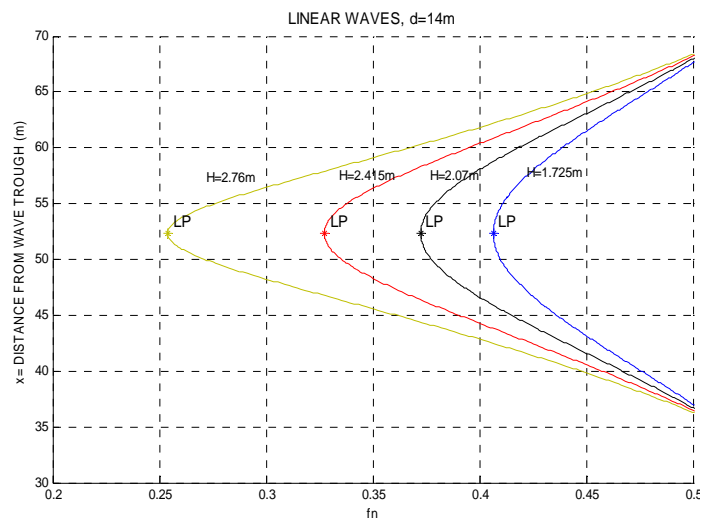
Στο διαγράμματα που ακολουθούν (Σχ. 7.13α,β,γ και Σχ. 7.14α,β,γ) παρουσιάζονται οι κλάδοι ευστάθειας που προκύπτουν για θάλασσες βάθους 100m, 20m και 14m στις οποίες αναπτύσσονται αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes αντίστοιχα, συναρτήσει του αριθμού F_n για διάφορα ύψη κύματος H .



(α)

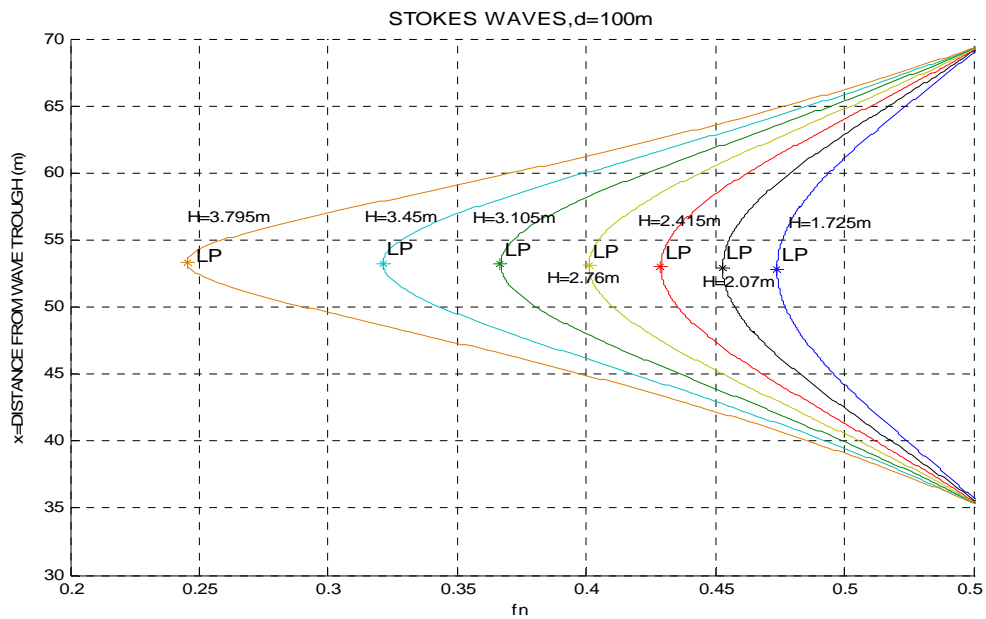


(β)

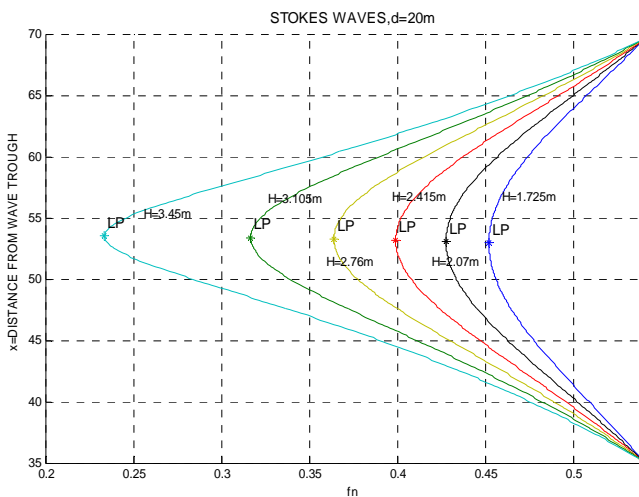


(γ)

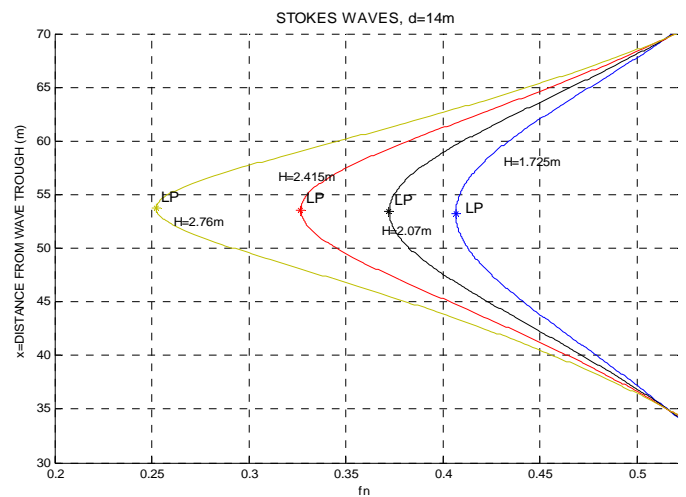
Σχ.7.13 Στάσιμες αποκρίσεις-surf-riding για διάφορα ύψη κύματος, συναρτήσει του αριθμού F_n , σε αρμονικά κύματα και βάθος νερού $d=100\text{ m}$ (α), 20 m (β) και 14 m (γ)



(α)



(β)



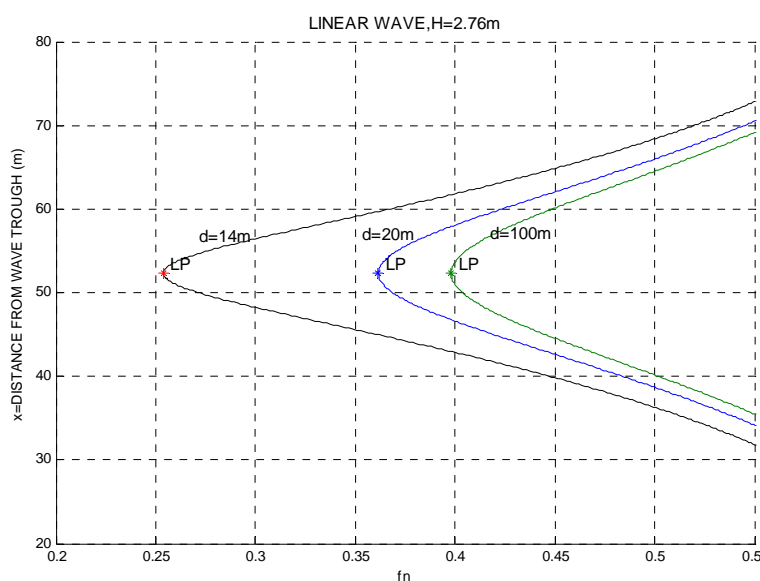
(γ)

Σχ.7.14 Στάσιμες αποκρίσεις-surf-riding για διάφορα ύψη κύματος, συνάρτησι του αριθμού Fn , σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes και βάθος νερού $d=100m$ (α), $20m$ (β) και $14m$ (γ)

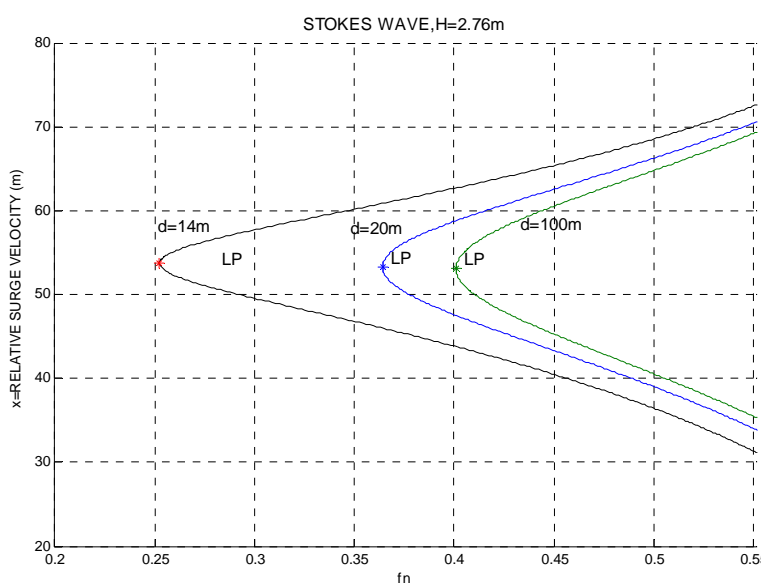
Από τα παραπάνω διαγράμματα (Σχ.7.13, Σχ.7.14) εκτός της θέσης που ισορροπεί το πλοίο για έναν συγκεκριμένο κύμα και αριθμό Froude, μπορούμε να προσδιορίσουμε και τον μικρότερο αριθμό Fn_{min} για τον οποίο, για κάποιες αρχικές συνθήκες, εμφανίζεται το φαινόμενο του surf-riding. Για τιμές μικρότερες του Fn_{min} έχουμε πάντα περιοδική απόκριση, ενώ για τιμές μεγαλύτερες έχουμε συνύπαρξη των αποκρίσεων αναλόγως των αρχικών συνθηκών ή και global surf-riding ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών, για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του αριθμού Fn . Παρατηρούμε ότι και για τις δύο κυματικές θεωρίες καθώς αυξάνεται το ύψος κύματος αυτός ο αριθμός Fn_{min} μειώνεται. Σε αυτό οφείλεται το γεγονός, ότι στο διάγραμμα που αναφέρεται σε ρηχό νερό βάθους $d=14m$, δεν παρουσιάζονται, για παράδειγμα, τα κύματα ύψους $H = 3.45m, H = 3.795m$, καθώς αυτά ακόμα και για πολύ μικρό αριθμό Fn , μπορούν να οδηγήσουν και στις δύο

αποκρίσεις αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Με άλλα λόγια στη περίπτωση αυτού του κύματος και βάθους νερού χάνεται το καθολικό, με την έννοια της ανεξαρτησίας από τις αρχικές συνθήκες, surging.

Από τα διαγράμματα φαίνεται επίσης πόσο σημαντικό ρόλο στη δυναμική συμπεριφορά του πλοίου έχει το βάθος της θάλασσας. Ο ρόλος του βάθους μελετάται αναλυτικότερα στην παράγραφο 7.4.2.γ, ενδεικτικά όμως από την έως τώρα ανάλυση, η σημασία του βάθους φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν. Το Σχ.7.15. αφορά αρμονικό κυματισμό ύψους $H = 2.76\text{ m}$, ενώ το Σχ.7.16 κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ίδιου ύψους. Τα διαγράμματα επιβεβαιώνουν την είδη υπάρχουσα αντίληψη ότι το φαινόμενο του surf-riding εμφανίζεται πιο εύκολα σε ρηχά νερά, αφού όπως φαίνεται η μείωση του βάθους οδηγεί σε μείωση τις κρίσιμης τιμής Fn_{\min} , πέρα από την οποία μπορεί να συμβεί surf-riding.



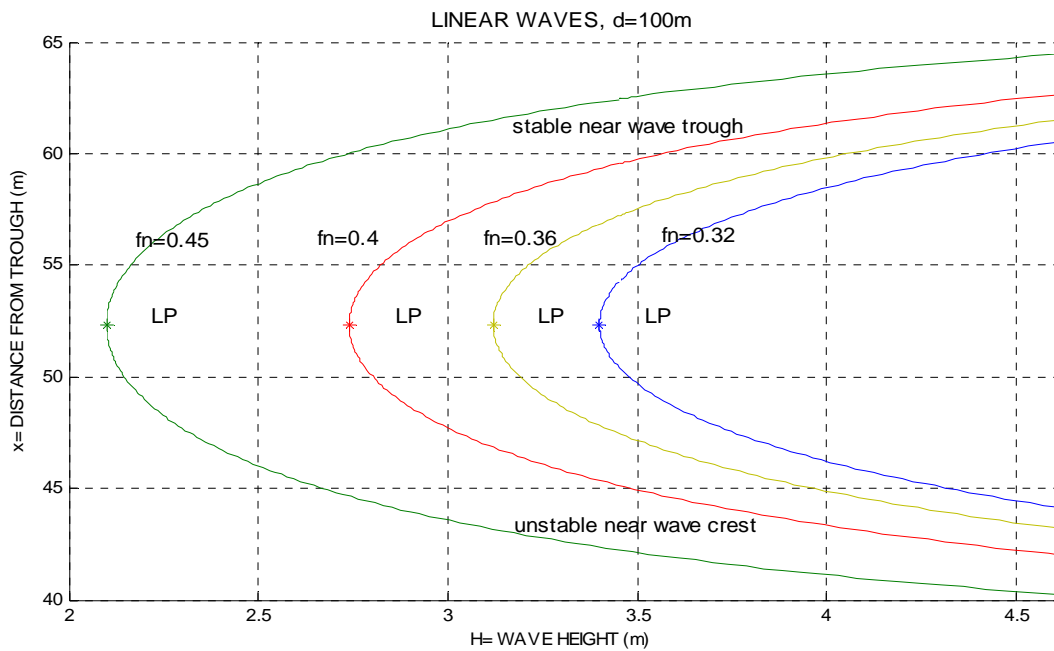
Σχ.7.15 Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορα βάθη νερού, σε αρμονικό κύμα ύψους $H=2.76\text{ m}$ συναρτήσει του αριθμού Fn



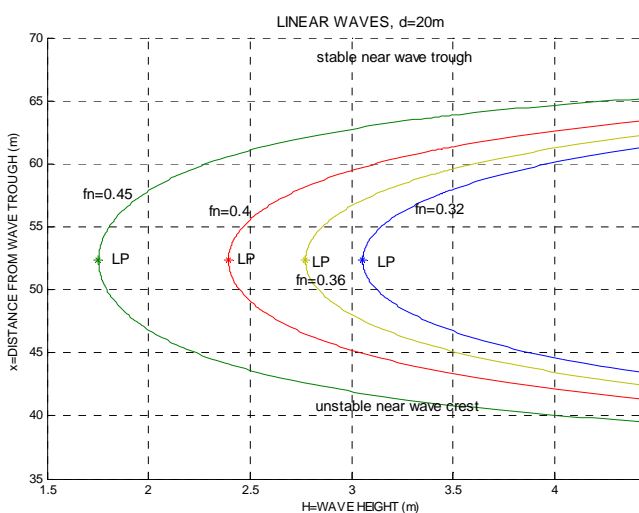
Σχ.7.16 Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορα βάθη νερού σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ύψους $H=2.76\text{ m}$, συναρτήσει του αριθμού Fn

7.4.2β Αριθμητική συνέχιση σταθερού αριθμού F_n και βάθους d .

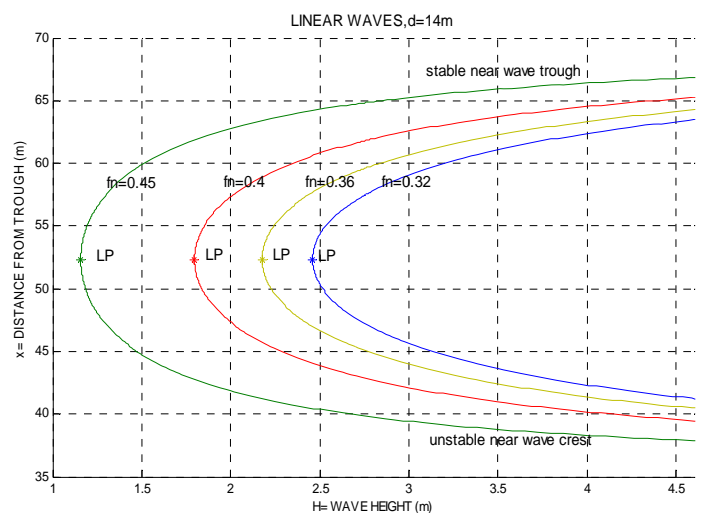
Στόχος μας είναι να παρατηρήσουμε πως εξελίσσονται οι κλάδοι της ευστάθειας για σταθερό αριθμό F_n και βάθος d , μεταβάλλοντας το ύψος κύματος H και να αποφανθούμε πότε η ευστάθεια είναι ευσταθής ή ασταθής. Με την μέθοδο της αριθμητικής συνέχισης και ξεκινώντας από ένα στάσιμο σημείο ισορροπίας που προσδιορίζεται από simulation, κατασκευάζουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα $(x-H)$ για τους κλάδους ευστάθειας. Στα σχήματα Σχ.7.17a,b,c και Σχ.7.18a,b,c που ακολουθούν παρουσιάζονται οι κλάδοι ευστάθειας που προκύπτουν για θάλασσες βάθους 100m, 20m και 14m στις οποίες αναπτύσσονται αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes αντίστοιχα συναρτήσει του ύψους κύματος H , για διαφορετικούς αριθμούς F_n .



(α)

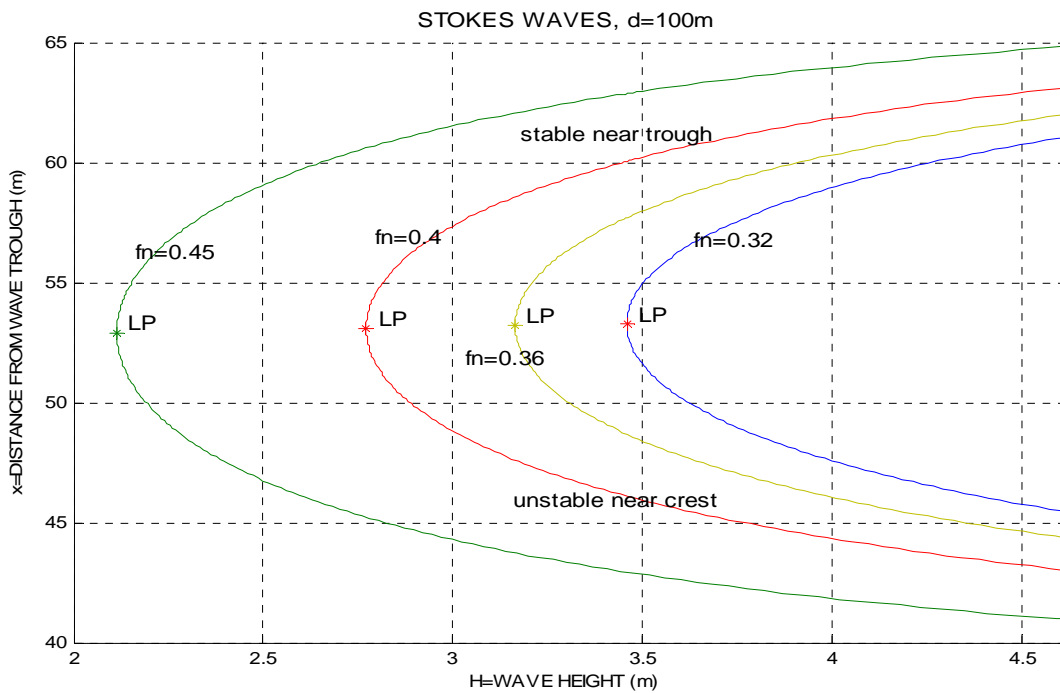


(β)

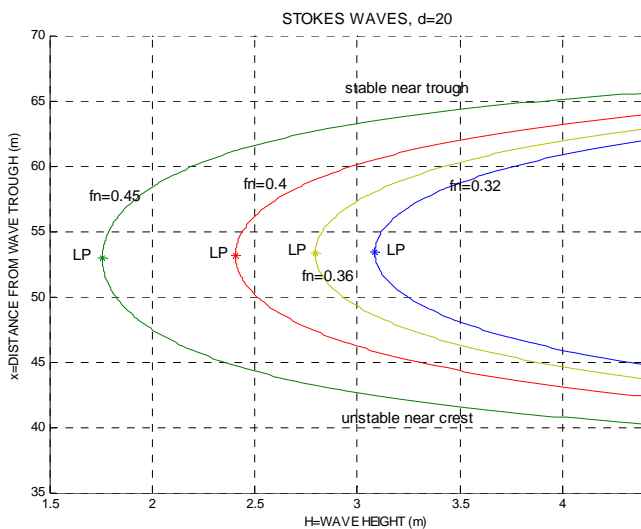


(γ)

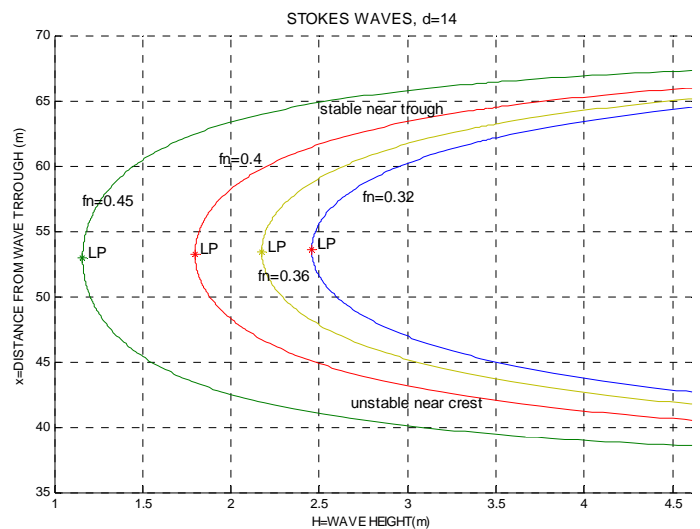
Σχ.7.17 Στάσιμες αποκρίσεις-surf-riding για διάφορους αριθμούς F_n , συναρτήσει του ύψους κύματος H , σε αρμονικά κύματα και βάθος νερού $d=100m$ (α), $20m$ (β) και $14m$ (γ)



(α)



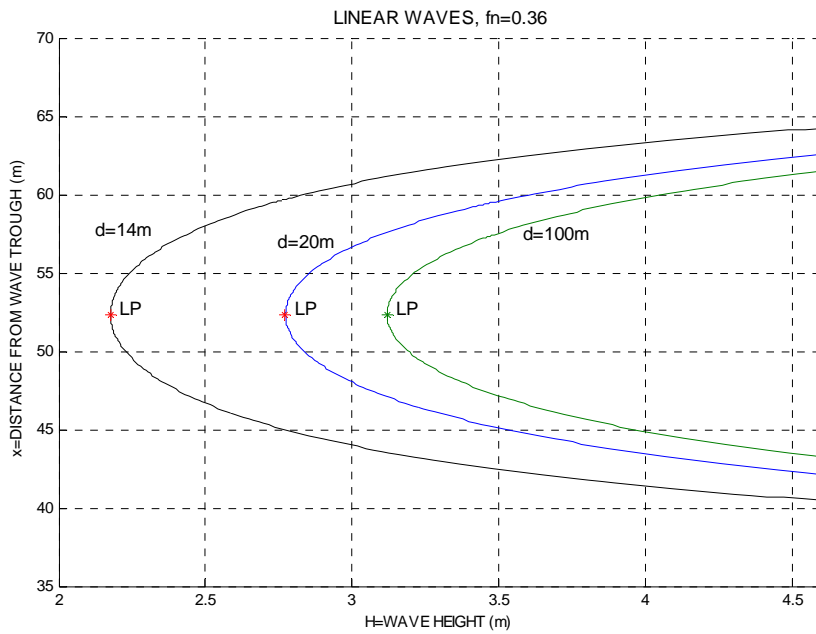
(β)



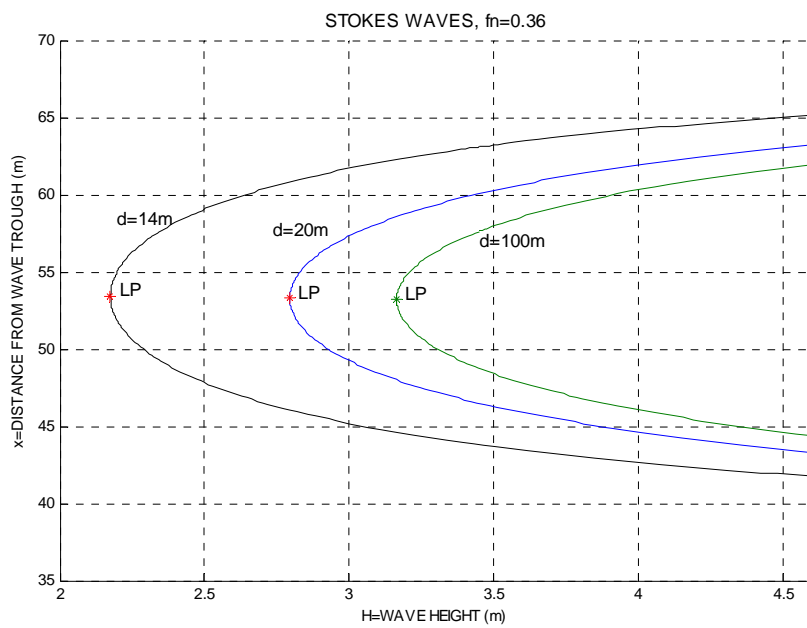
(γ)

Σχ.7.18 Στάσιμες αποκρίσεις-surf-riding για διάφορους αριθμούς F_n , συναρτήσει του ύψους κύματος H , σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes και βάθος νερού $d=100m$ (α), $20m$ (β) και $14m$ (γ)

Σε πλήρη συμφωνία με τα προηγούμενα, από τα διαγράμματα αυτά συμπεράνουμε ότι αύξηση του αριθμού F_n οδηγεί στη μείωση του απαιτούμενου ύψους κύματος, το οποίο θα προκαλέσει την εμφάνιση του φαινομένου surf-riding. Όπως φαίνεται και στα σχήματα Σχ.7.19, Σχ.7.20, για αρμονικό κύμα και κύμα 2^{ης} τάξης αντίστοιχα, το βάθος επηρεάζει κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο τη δυναμική συμπεριφορά του πλοίου. Για παράδειγμα στη περίπτωση αρμονικών κυμάτων, για $F_n = 0.36m$, κύμα ύψους $H = 3m$ το οποίο διαδίδεται σε θάλασσα βάθους $100m$ δεν μπορεί να οδηγήσει το πλοίο σε surf-riding, ενώ εάν διαδίδεται σε θάλασσα βάθους $20m$, το πλοίο, για κάποιες αρχικές συνθήκες μπορεί να κάνει surf-riding.



Σχ.7.19 Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορα βάθη νερού, και αριθμό $Fn=0.36$, σε αρμονικό κύμα συναρτήσει του ύψους κύματος



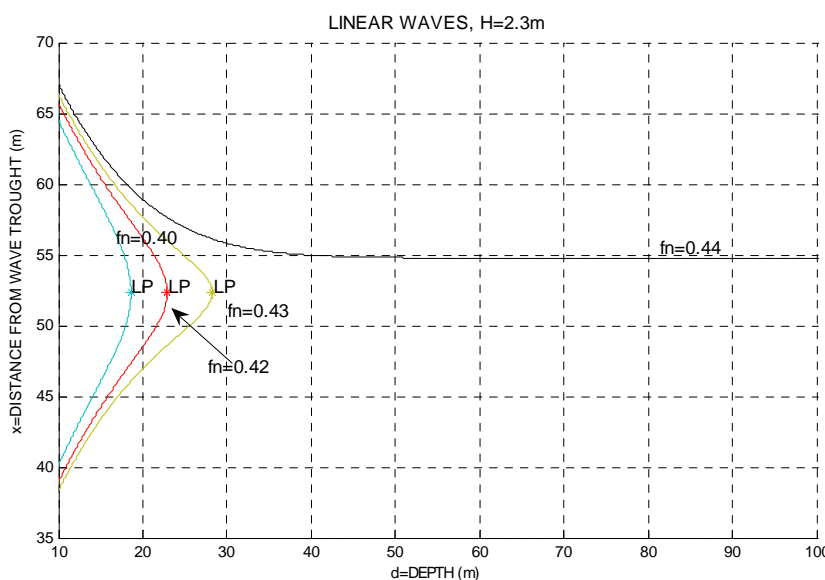
Σχ.7.20 Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορα βάθη νερού, και αριθμό $Fn=0.36$, σε κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes συναρτήσει του ύψους κύματος

7.4.2γ. Αριθμητική συνέχιση σταθερού αριθμού F_n και ύψους κύματος.

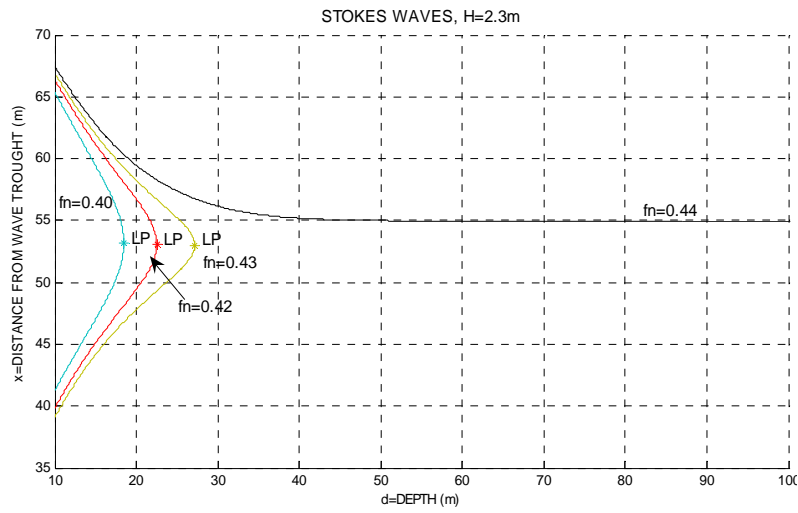
Στη περίπτωση αυτή διατηρώντας σταθερό το ύψος κύματος και τον αριθμό F_n μεταβάλλουμε το βάθος νερού d και με την μέθοδο της αριθμητικής συνέχισης ξεκινώντας από ένα στάσιμο σημείο ισορροπίας που προσδιορίζεται από simulation, κατασκευάζουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα $(x-d)$ για τους κλάδους ευστάθειας. Στη παρούσα εργασία τα δύο ύψη κύματος για τα οποία θα μελετήσουμε την επίδραση του βάθους του νερού είναι τα εξής:

$$H = \lambda/30 = 2.3m \quad \text{και} \quad H = \lambda/20 = 3.45m$$

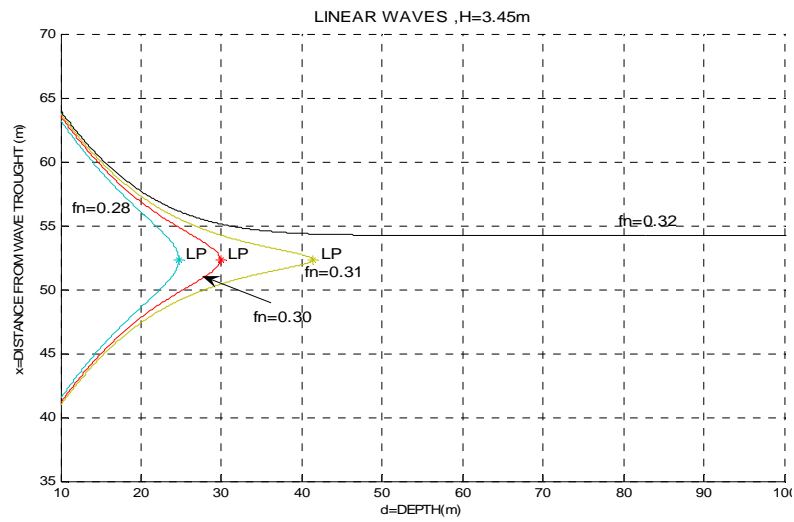
Στα σχήματα Σχ. 7.21α,β που ακολουθούν παρουσιάζονται οι κλάδοι ευστάθειας που προκύπτουν για κύμα ύψους $H = 2.3m$ στη περίπτωση αρμονικού και 2^{ης} τάξης κατά Stokes κυματισμού, αντίστοιχα για διάφορους αριθμούς F_n . Τα σχήματα Σχ.7.22α,β παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα στη περίπτωση που το ύψος κύματος είναι $H = 3.45m$.



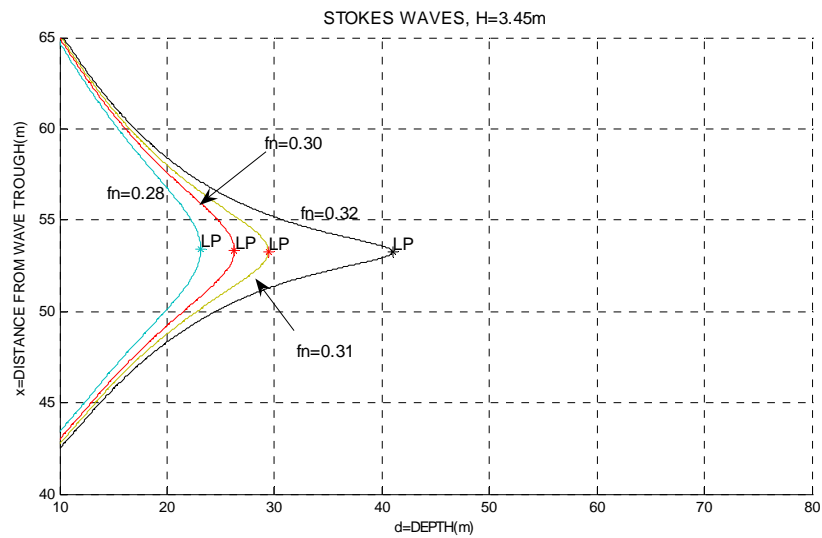
Σχ.7.21α Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορους αριθμούς F_n , σε αρμονικά κύματα ύψους $H=2.3m$, συναρτήσει του βάθους d .



Σχ.7.21β Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορους αριθμούς F_n , σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ύψους $H=2.3m$, συναρτήσει του βάθους d .



Σχ.7.22α Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορους αριθμούς F_n , σε αρμονικά κύματα ύψους $H=3.45m$, συναρτήσει του βάθους d .



Σχ.7.22β Στάσιμες αποκρίσεις για διάφορους αριθμούς F_n , σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ύψους $H=3.45m$, συναρτήσει του βάθους d .

Τα διαγράμματα αυτά προσδιορίζουν ουσιαστικά το απαιτούμενο βάθος που χρειάζεται να έχει η θάλασσα, ώστε για έναν συγκεκριμένο αριθμό F_n το πλοίο για κάποιες αρχικές συνθήκες να εμφανίζει surf-riding. Αν, για παράδειγμα, το πλοίο ταξιδεύει πάνω σε κύμα 2^{ης} τάξης ύψους $H = 2.3m$ (Σχ.7.21β) με ταχύτητα αριθμού $F_n = 0.43$ μπορεί να παρουσιάσει surf-riding σε θάλασσες βάθους μικρότερες του $d_{cr} = 27.2m$. Αντιθέτως όπως φαίνεται από το ίδιο διάγραμμα αυτός ο περιορισμός δεν υφίσταται στη περίπτωση που το πλοίο ταξιδεύει με ταχύτητα $F_n = 0.44$, αφού ο κλάδος ευσταθούς ισορροπίας δεν εμφανίζει κάποιο οριακό σημείο.

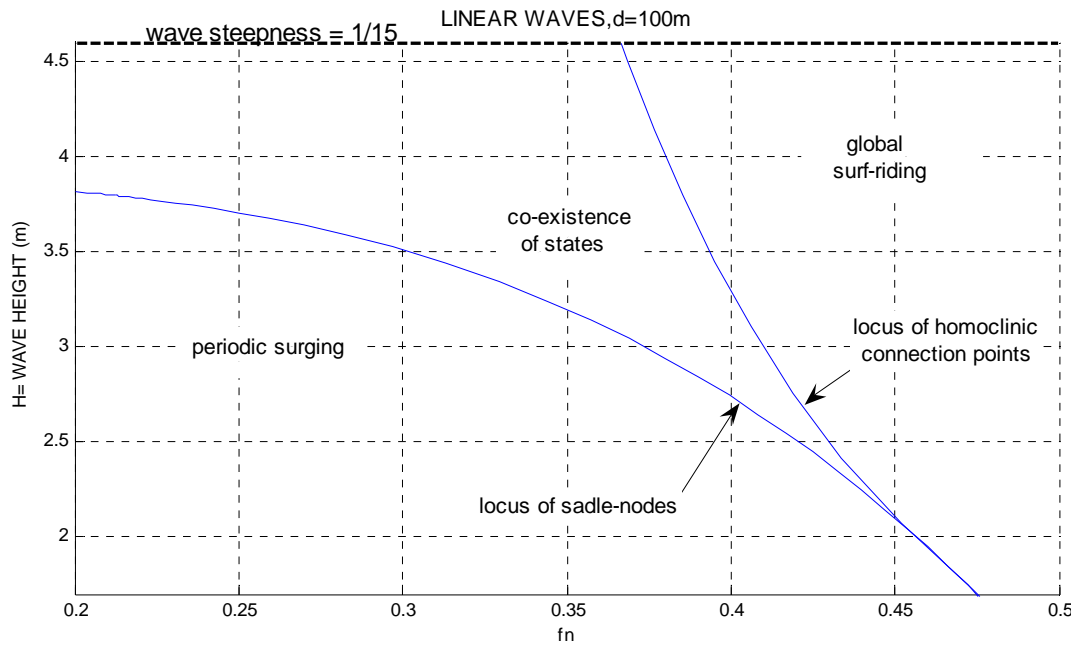
7.4.3 Όρια του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πώς οι παράμετροι F_n, H και F_n, d σχετίζονται μεταξύ τους, σχηματίζοντας τα όρια των τριών διαφορετικών αποκρίσεων του πλοίου. Το χαμηλό όριο του surf-riding κατασκευάζεται με τη μέθοδο αριθμητικής συνέχισης δύο παραμέτρων (συνέχιση συνδιάστασης-2). Ξεκινώντας από ένα limit point (LP) μεταβάλλουμε ταυτόχρονα τις παραμέτρους του συστήματος. Το άνω όριο, πάνω από το οποίο η κίνηση γίνεται στάσιμη και το surf-riding πραγματοποιείται πάντα ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών (global surf-riding), θα μπορούσε να κατασκευαστεί με αριθμητική συνέχιση των ομοκλινικών λύσεων. Δυστυχώς αυτού του είδους η συνέχιση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον αλγόριθμο συνέχισης MATCONT, και το όριο αυτό υπολογίστηκε από μεγάλο αριθμό simulation. Τα simulations αυτά πραγματοποιήθηκαν με τις δυσμενέστερες για surf-riding αρχικές συνθήκες (πλοίο στη κορυφή του κύματος με πολύ μικρή ταχύτητα).

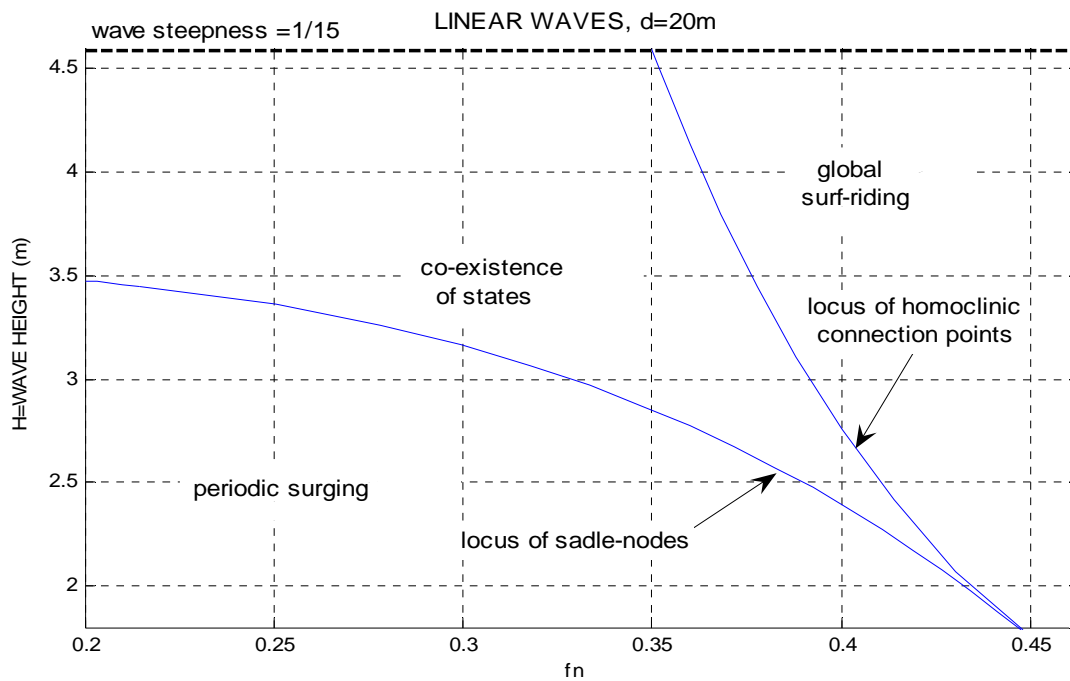
Πρέπει να αναφέρουμε ότι τέτοιου είδους διαγράμματα είναι πολύ σημαντικά, αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον πλοίαρχο σαν λειτουργική οδηγία για την αποφυγή του surf-riding. Υπό αυτή την έννοια ο πλοίαρχος μπορεί ανά πάσα στιγμή να γνωρίζει πότε το πλοίο βρίσκεται στην επικίνδυνη ζώνη της συνύπαρξης των αποκρίσεων (co-existence of states) και μειώνοντας την ταχύτητα του να εισέρχεται στην πιο ασφαλή περιοχή της περιοδικής κίνησης, στην οποία τα κύματα προσπερνάνε το πλοίο, εξαλείφοντας την όποια πιθανότητα εμφάνισης του surf-riding.

7.4.3.α Εύρεση των ορίων του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων F_n, H .

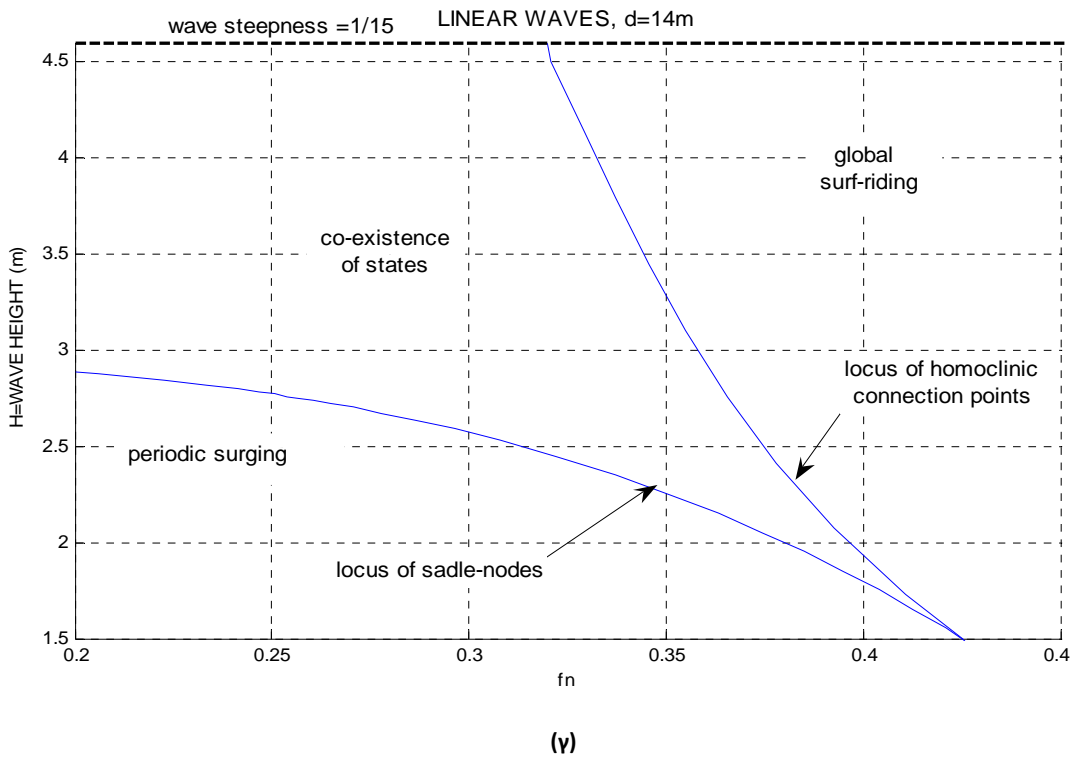
Στα σχήματα Σχ.7.23α,β,γ και Σχ.7.24α,β,γ παρουσιάζονται για βάθος νερού 100m, 20m και 14m αντίστοιχα τα όρια των καταστάσεων στη περίπτωση που το πλοίο ταξιδεύει πάνω σε αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes αντίστοιχα.



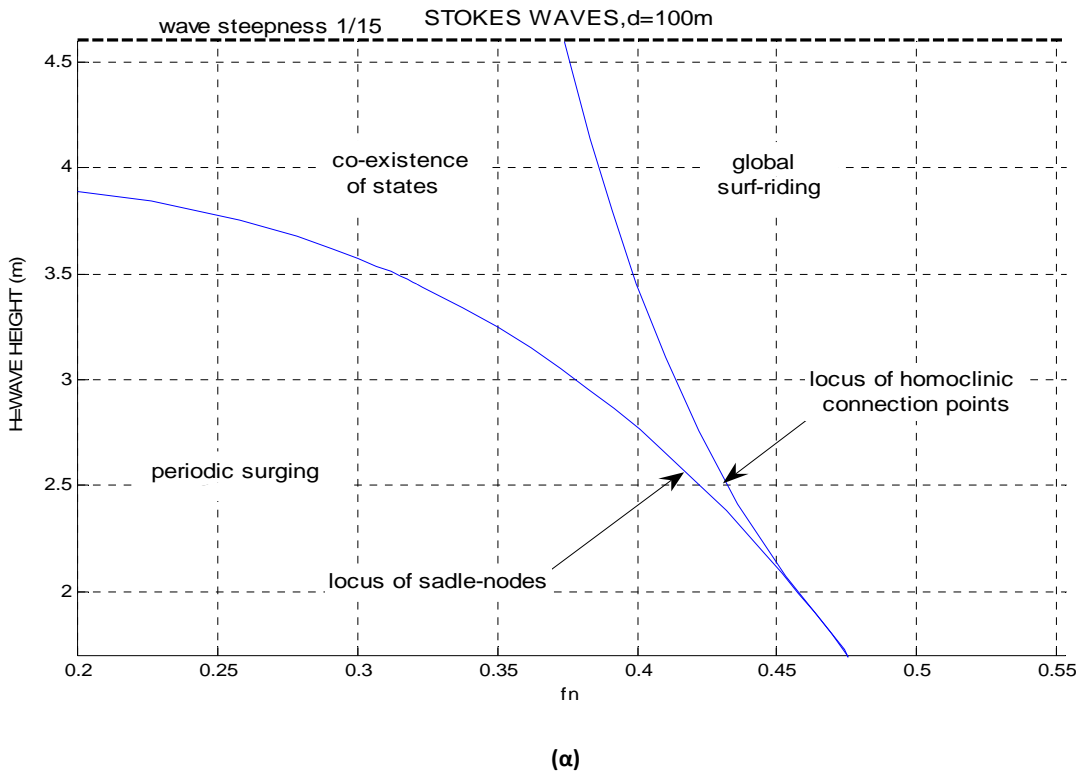
(α)

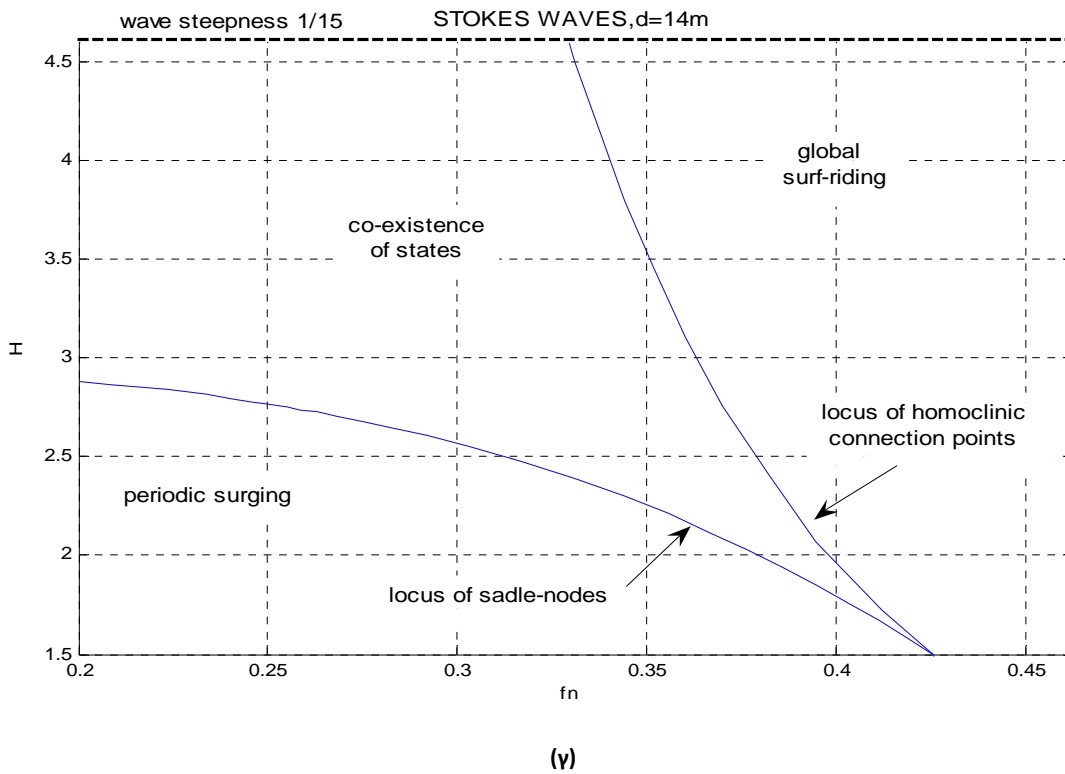
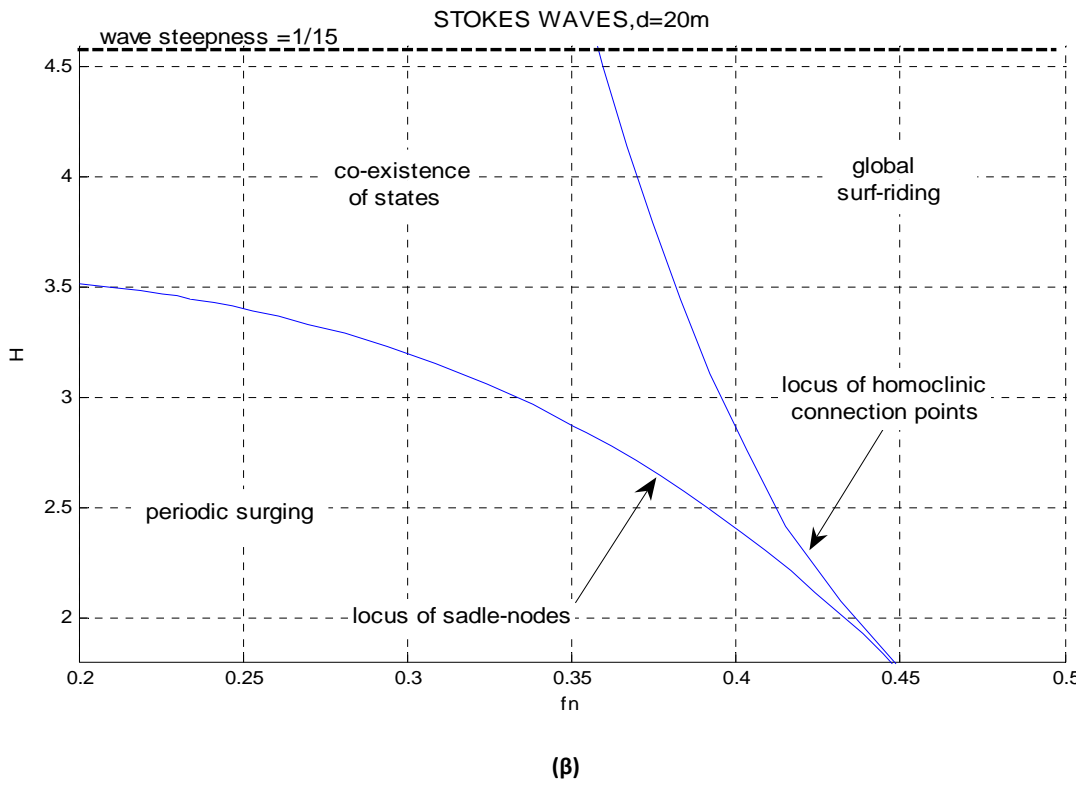


(β)



Σχ.7.23 Αριθμητική συνέχιση δύο παραμέτρων -Όρια των αποκρίσεων του πλοίου σε αρμονικά κύματα ($\lambda=69m$) και βάθος νερού $d=100m$ (α), $d=20m$ (β) και $d=14m$ (γ)

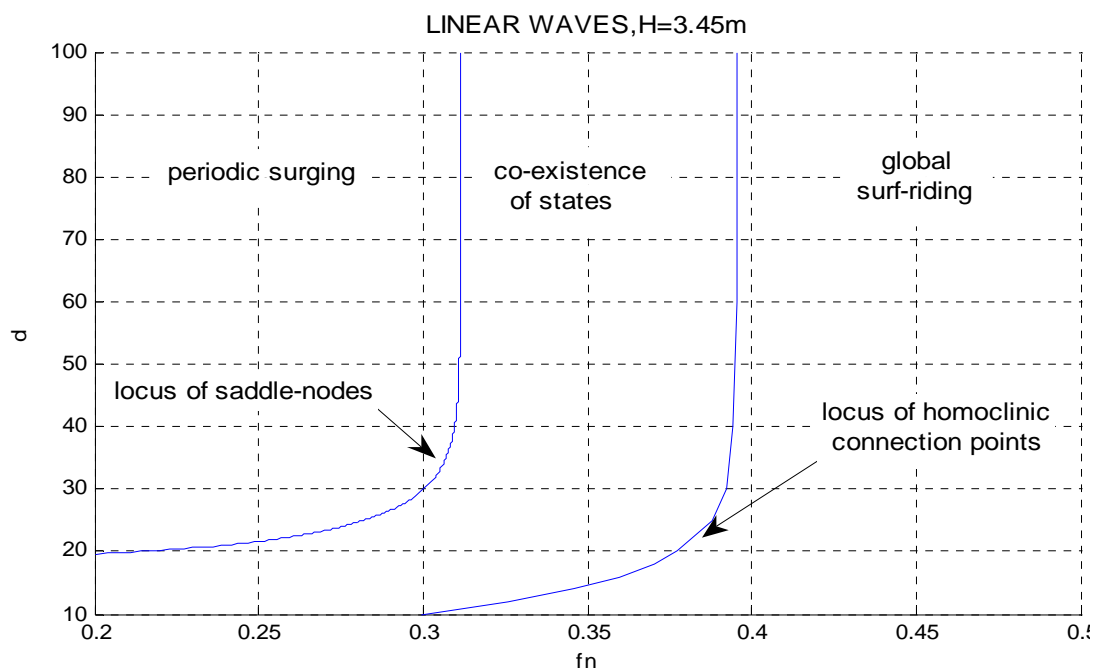




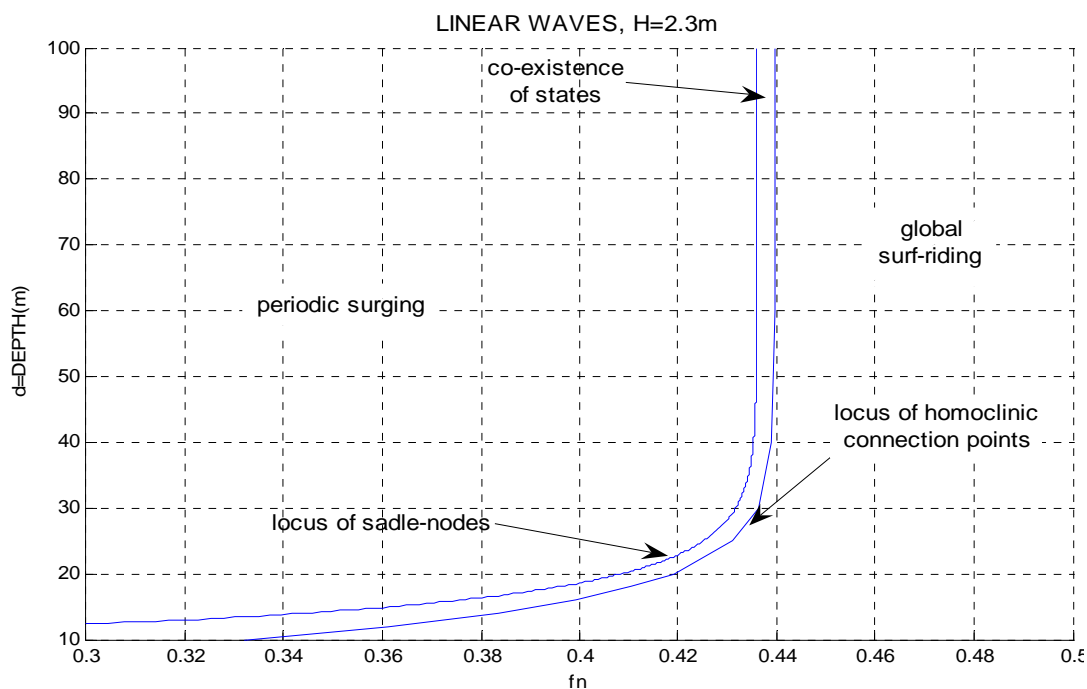
Σχ.7.24 Αριθμητική συνέχιση δύο παραμέτρων –Όρια των αποκρίσεων του πλοίου σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ($\lambda=69m$) και βάθος νερού $d=100m$ (α), $d=20m$ (β) και $d=14m$ (γ)

7.4.3.β. Εύρεση των ορίων του surf-riding στο επίπεδο των παραμέτρων F_n, d .

Στα σχήματα Σχ.7.25α,β και Σχ.7.26α,β παρουσιάζονται για ύψος κύματος $H = 3.45m$ και $H = 2.3m$, αντίστοιχα, τα όρια των καταστάσεων στη περίπτωση που το πλοίο ταξιδεύει πάνω σε αρμονικά κύματα και κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

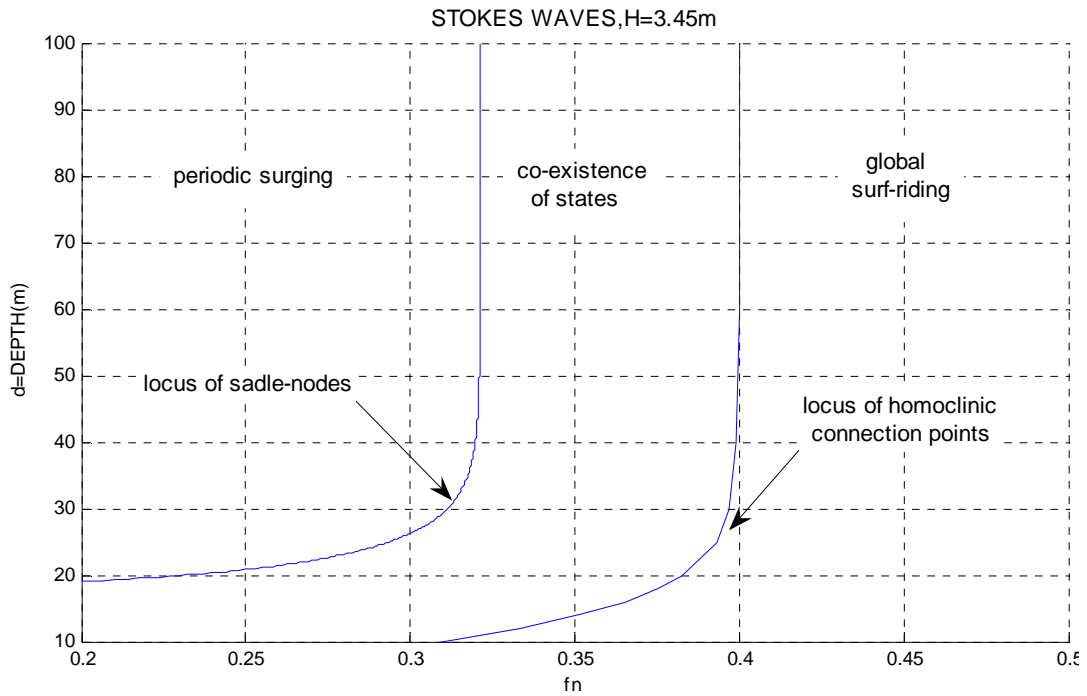


(α)

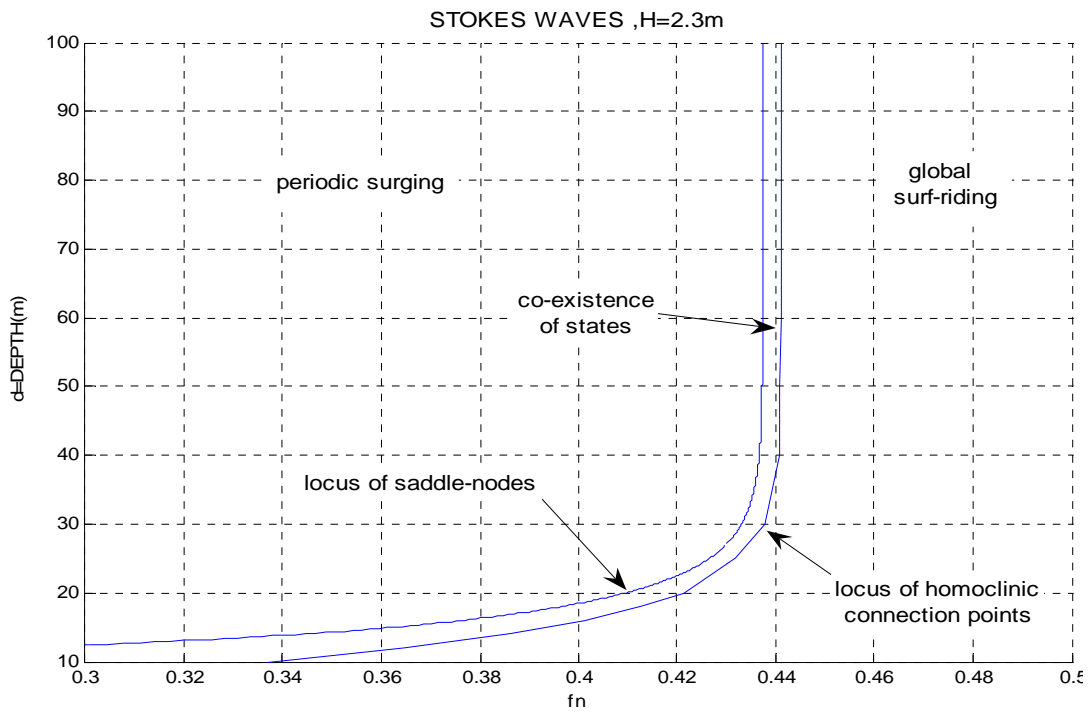


(β)

Σχ.7.25 Αριθμητική συνέχιση δύο παραμέτρων -Όρια των αποκρίσεων του πλοίου σε αρμονικά κύματα ($\lambda=69m$) ύψους $H=3.45m$ (α) και $H=2.3m$ (β).



(α)

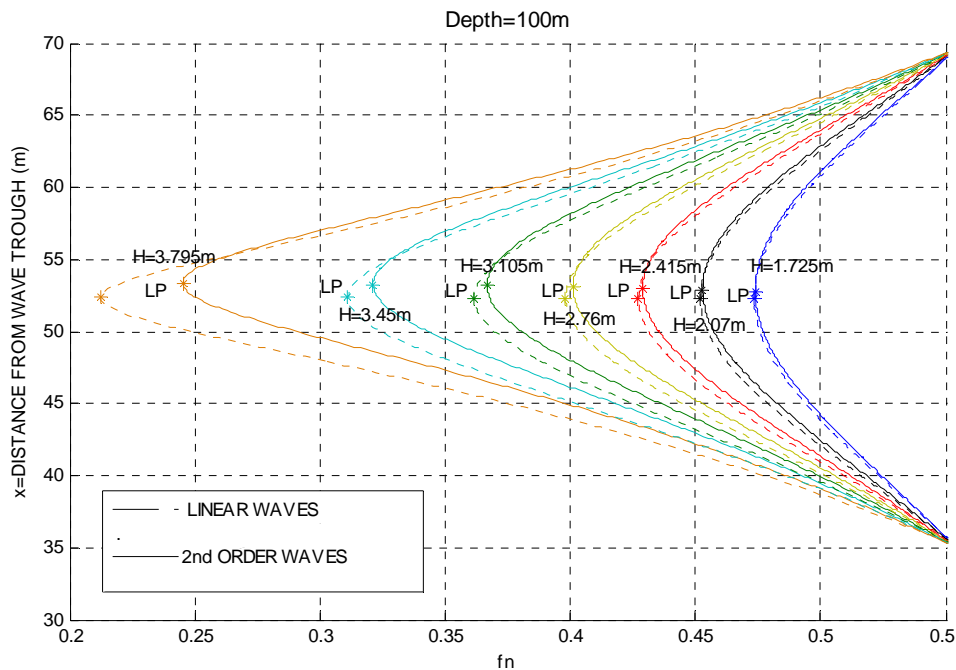


(β)

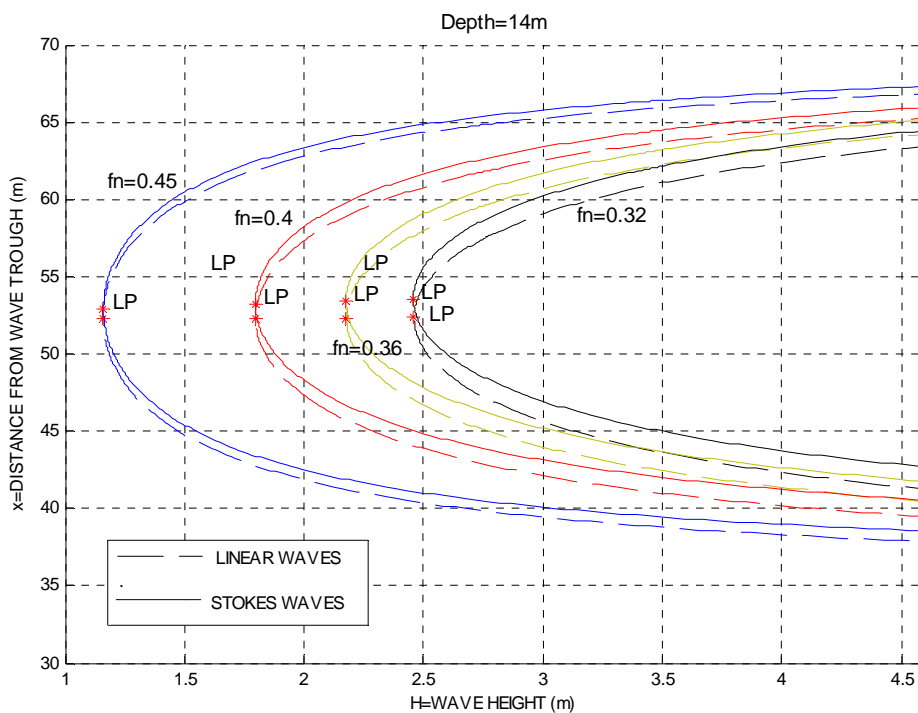
Σχ.7.26 Αριθμητική συνέχιση δύο παραμέτρων –Όρια των αποκρίσεων του πλοίου σε κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ($\lambda=69m$) ύψους $H=3.45m$ (α) και $H=2.3m$ (β).

7.5 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις δύο θεωρίες -Συμπεράσματα

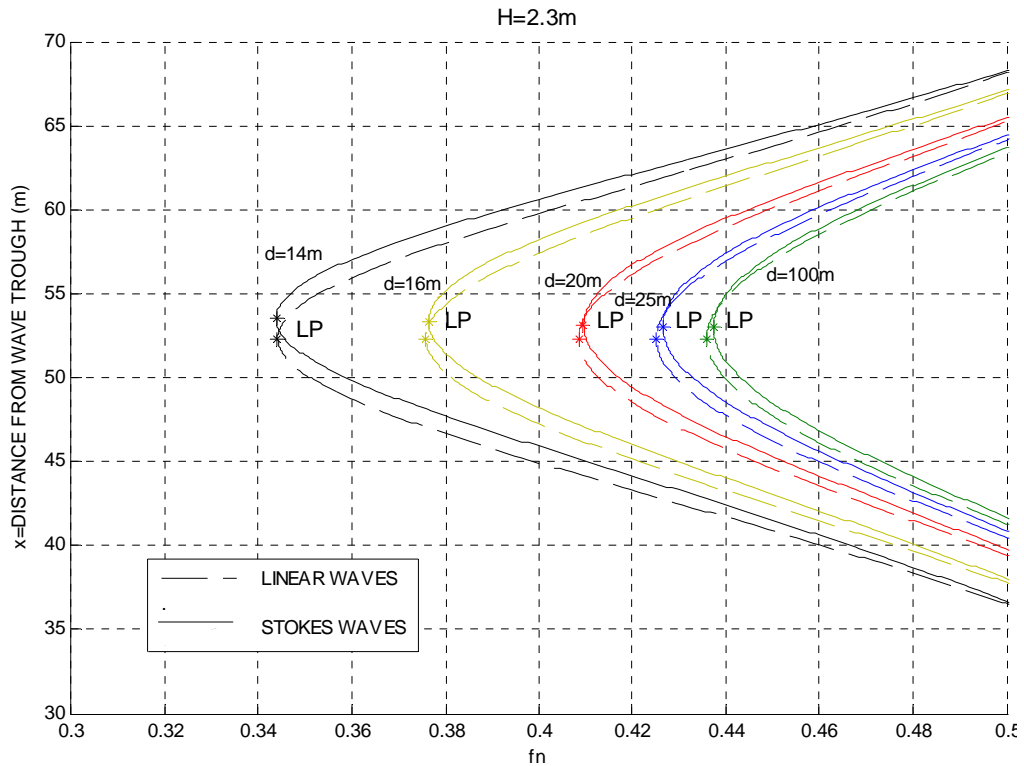
Όπως έγινε αντιληπτό από την μέχρι τώρα ανάλυση δεν παρατηρείται ποιοτική διαφορά στις αποκρίσεις του πλοίου όταν αυτό ταξιδεύει πάνω σε κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes ή σε αρμονικό κύμα. Για να μελετήσουμε όμως τις διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στις δύο θεωρήσεις χρήσιμα είναι κάποια συγκριτικά διαγράμματα που προέκυψαν.



Σχ.7.27 Κλάδοι ευστάθειας (surf-riding) διαφόρων κυμάτων ($\lambda=69m$) της αρμονικής και 2^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικής θεωρίας, για βάθος νερού $d=100m$, συναρτήσει του αριθμού F_n .



Σχ.7.28 Κλάδοι ευστάθειας (surf-riding) διαφόρων κυμάτων ($\lambda=69m$) της αρμονικής και 2^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικής θεωρίας, για βάθος νερού $d=14m$, συναρτήσει του αριθμού ύψους κύματος H .

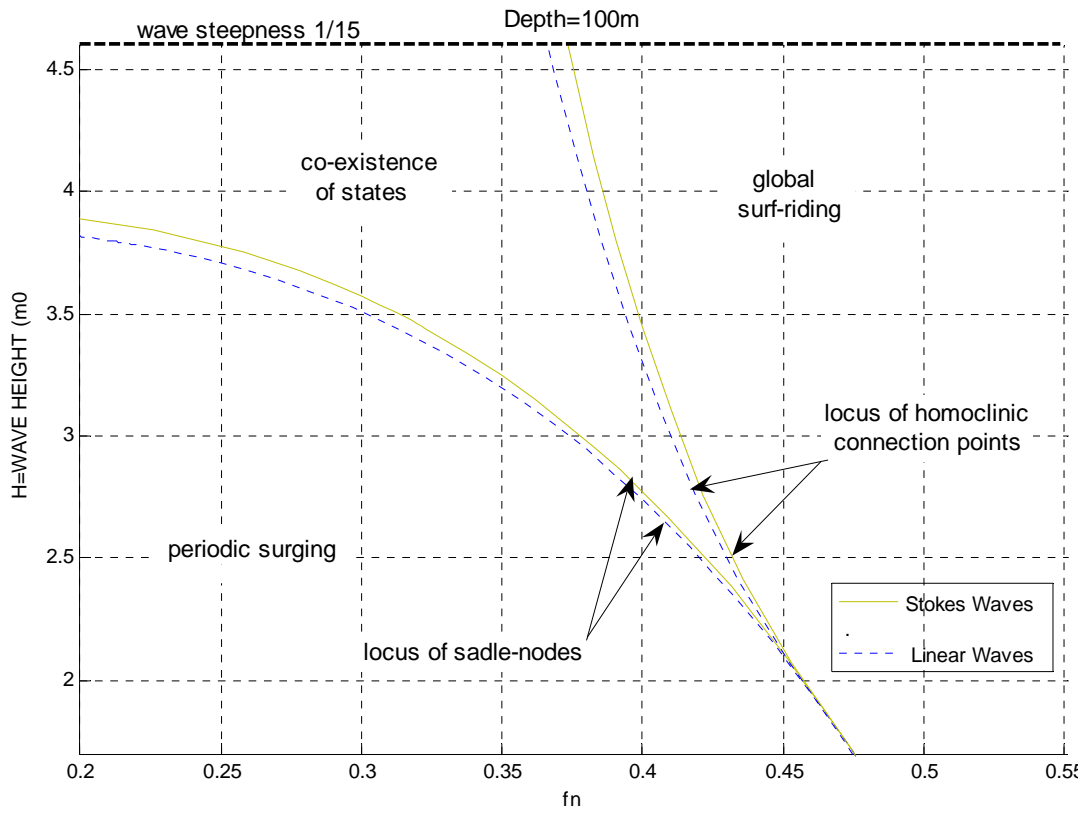


Σχ.7.29 Κλάδοι ευστάθειας (surf-riding) διαφόρων κυμάτων ($\lambda=69m$) της αρμονικής και 2^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικής θεωρίας, ύψους $H=2.3m$ ($\lambda/30$), συναρτήσει του αριθμού Fn .

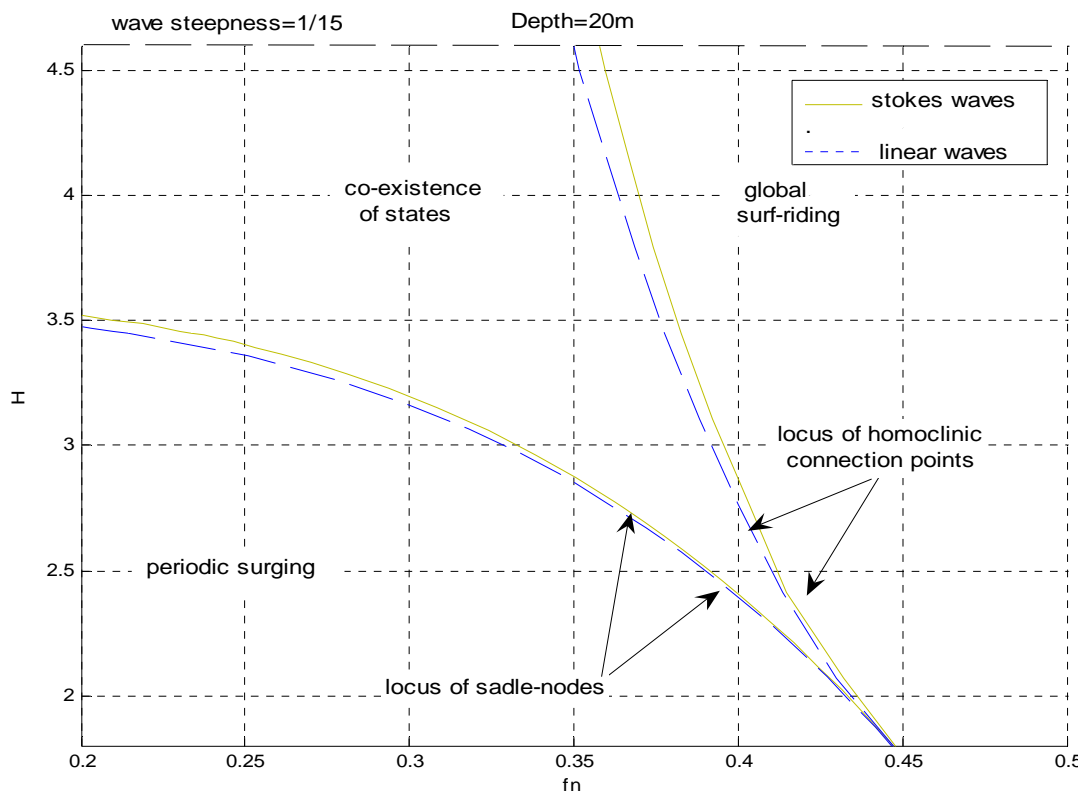
Από τα παραπάνω ενδεικτικά διαγράμματα παρατηρούμε:

- Για ίδιου βάθους θάλασσες, στα 2^{ης} τάξης κατά Stokes μη γραμμικά κύματα ο ελάχιστος αριθμός Fn_{min} είναι μεγαλύτερος του αντίστοιχου για αρμονικά κύματα. Με άλλα λόγια η περιοχή της περιοδικής κίνησης (periodic surging) στα 2^{ης} τάξης κύματα είναι μεγαλύτερη εις βάρος της περιοχής του καθολικού surf-riding.
- Για κύματα μικρού ύψους η διαφορά αυτή εξασθενεί και τα όρια των αποκρίσεων του πλοίου ουσιαστικά συμπίπτουν.
- Καθώς μεταβαίνουμε σε πιο ρηγά νερά παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αριθμός Fn_{min} , και κατά συνέπεια το όριο της περιοδικής κίνησης, παραμένει ουσιαστικά σταθερό, ενώ ο κρίσιμος αριθμός Fn_{cr} εμφανίζεται σε μεγαλύτερες τιμές και κατά συνέπεια η περιοχή του global surf-riding μικραίνει εις βάρος της περιοχής συνύπαρξης των αποκρίσεων.

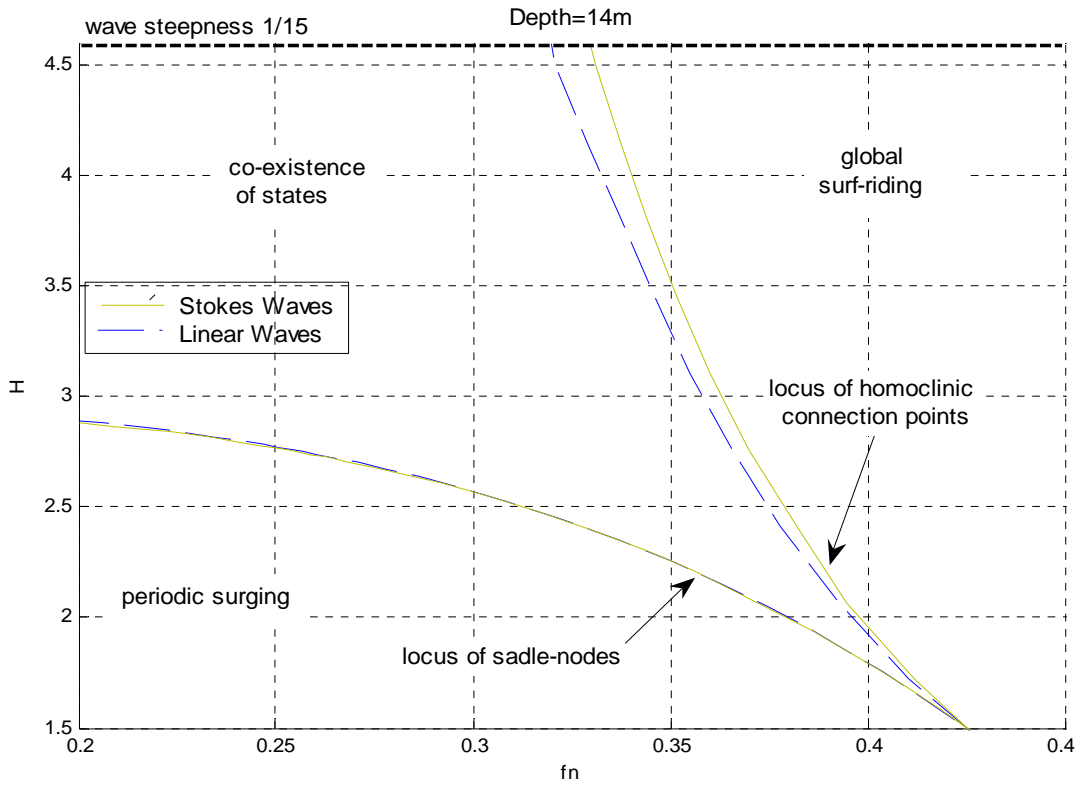
Τα παραπάνω συμπεράσματα παρουσιάζονται στα παρακάτω συγκριτικά διαγράμματα (Σχ.7.30-Σχ.7.34)



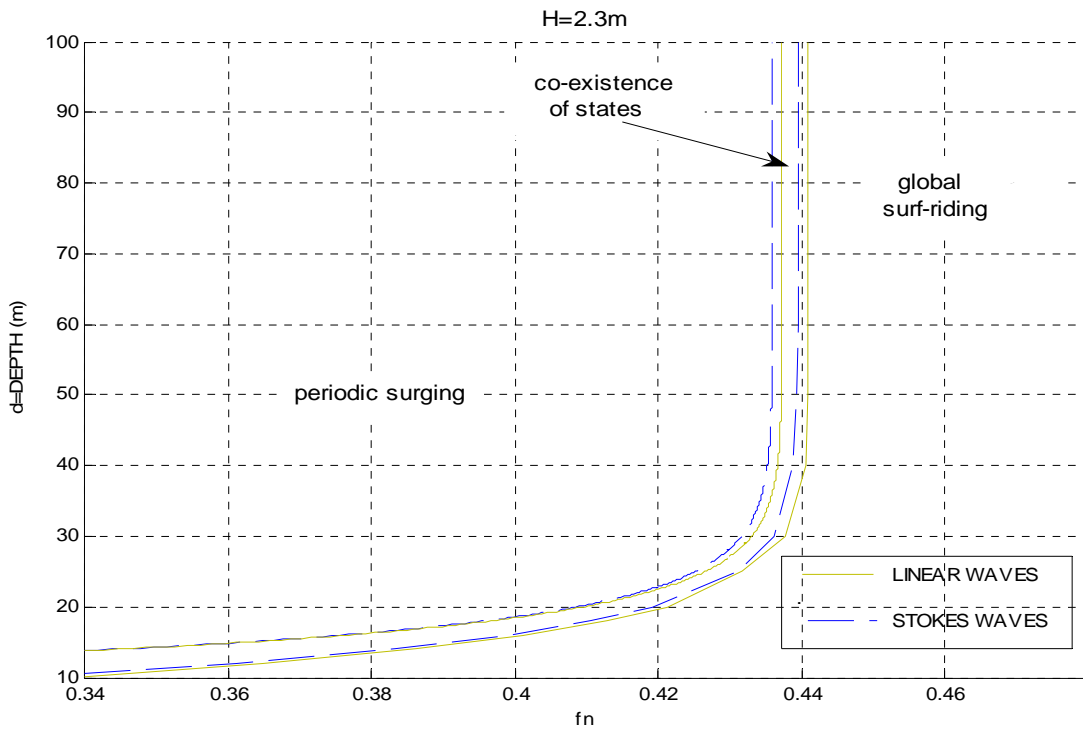
Σχ.7.30 Όρια των αποκρίσεων του πλοίου για κύματα μήκους $\lambda=69m$ για θάλασσες βάθους $d=100m$.



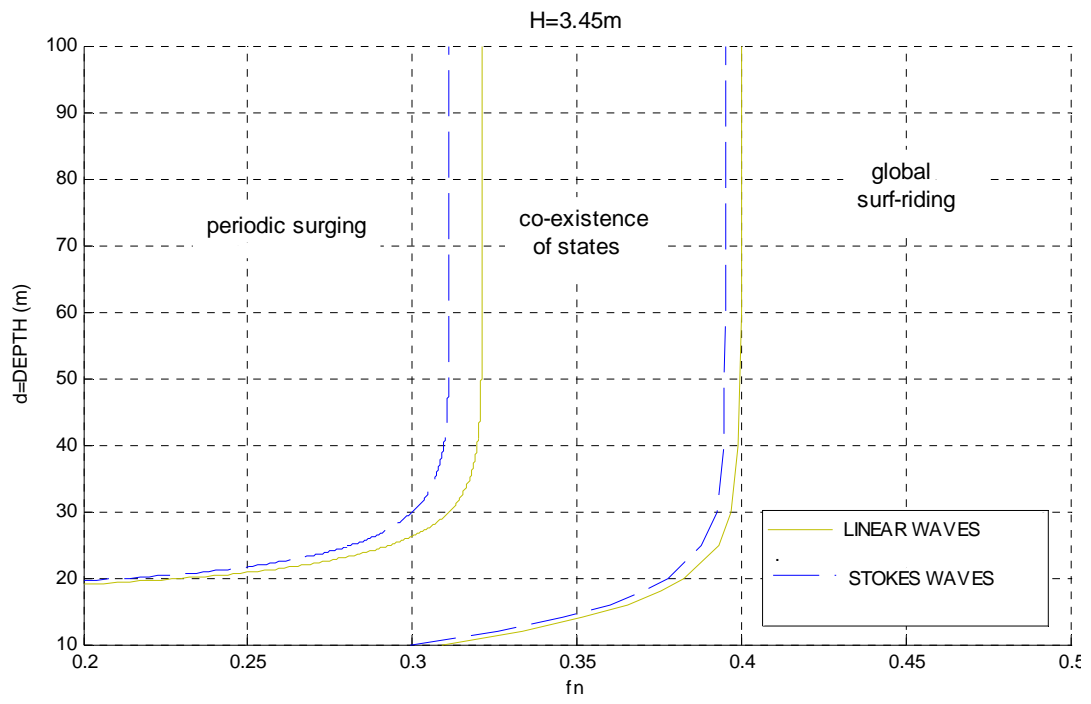
Σχ.7.31 Όρια των αποκρίσεων του πλοίου για κύματα μήκους $\lambda=69m$ για θάλασσες βάθους $d=20m$.



Σχ.7.32 Όρια των αποκρίσεων του πλοίου για κύματα μήκους $\lambda=69m$ για θάλασσες βάθους $d=14m$.



Σχ.7.30 Όρια των αποκρίσεων του πλοίου για κύματα μήκους $\lambda=69m$ και ύψους $H=3.45m$



Σχ.7.30 Όρια των αποκρίσεων του πλοίου για κύματα μήκους $\lambda=69m$ και ύψους $H=3.45m$

8. Τελικές Παρατηρήσεις

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η προσέγγιση του φαινομένου surf-riding θεωρώντας, εκτός των συνήθως προτιμώμενων αρμονικών κυματισμών, κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes προσπαθώντας με αυτόν τον τρόπο να έχουμε μία πιο ρεαλιστική περιγραφή των ακραίων κυματικών καταστάσεων στις οποίες εμφανίζονται αυτά τα φαινόμενα. Χρησιμοποιήθηκε το ήδη υπάρχον μαθηματικό μοντέλο κίνησης του πλοίου σε αρμονικά κύματα κατά το διάμηκες, αφού έγιναν οι κατάλληλες τροποποιήσεις για την θεωρούμενη μορφή των κυμάτων της μη γραμμικής θεωρίας.

Η προσπάθεια για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης, επικεντρώθηκε στη μελέτη των δυνάμεων Froude-Krylov που αναπτύσσονται στα μη γραμμικά κύματα 2^{ης} τάξης κατά Stokes, όπου και αναπτύχθηκε μέθοδος υπολογισμού των δυνάμεων αυτών.

Για την πιο ολοκληρωμένη μελέτη του φαινομένου δημιουργήθηκαν δέκα (10) διαφορετικά μοντέλα-προγράμματα τα οποία αντιστοιχούν σε ίδιου αριθμού διαφορετικές θάλασσες ώστε να εξεταστεί η επίδραση του βάθους του νερού και του ύψους των κυμάτων στις αποκρίσεις του μικρού αλιευτικού σκάφους «Purse-Seiner».

Από τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μελέτης συμπεραίνουμε ότι η αρμονική θεώρηση των κυμάτων είναι κατά κανόνα πιο αυστηρή από την 2^{ης} τάξης μη γραμμική θεώρηση, όσον αφορά τα όρια των αποκρίσεων.

Πιο συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι το surf-riding σε θάλασσες που περιγράφονται από τους μη γραμμικούς κυματισμούς 2^{ης} τάξης εμφανίζεται σε μεγαλύτερες ταχύτητες σε σχέση με τις αντίστοιχες για αρμονικούς κυματισμούς. Καθώς όμως μεταβαίνουμε σε πιο ρηχές θάλασσες η διαφορά αυτή μειώνεται και το κάτω όριο του surf-riding των δύο θεωρήσεων είναι σχεδόν το ίδιο.

Όσον αφορά το άνω όριο του surf-riding (global), και αυτό εμφανίζεται σε μεγαλύτερες ταχύτητες στη μη γραμμική θεώρηση σε σχέση με την αρμονική, με την διαφορά όμως ότι καθώς μεταβαίνουμε σε πιο ρηχά νερά η διαφορά αυτή μεγαλώνει.

Εξ' αιτίας αυτών των διαφορών και για μία πιο ολοκληρωμένη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός πλοίου σε μη γραμμικούς κυματισμούς προτείνεται:

- Μελέτη των αποκρίσεων του πλοίου σε συζευγμένες κινήσεις σε περιβάλλον που περιγράφεται από τους 2^{ης} τάξης μη γραμμικούς κυματισμούς κατά Stokes
- Πειραματική μελέτη, ώστε να αποφανθούμε για το κατά πόσο τα αποτελέσματα της 2^{ης} τάξης θεώρησης πλησιάζουν τις πραγματικές αποκρίσεις του πλοίου.
- Πρόβλεψη του άνω ορίου (ομοκλινική σύνδεση) του surf-riding αναλυτικά, με χρήση τη μεθόδου του Melnikov.
- Επέκταση του μοντέλου 2^{ης} τάξης, για κύματα ανώτερης τάξης.

Βιβλιογραφία

Davidson K. S. M. (1948): A Note on the Steering of Ships in Following Seas 7th *International Congress of Applied Mechanics, London, England.*

De Kat J. O. and Paulling J.R. (1989): The Simulation of Ship Motions and Capsizing in Severe Seas, *SNAME Annual Meeting, Presentation, No. 5.*

Dhooge, Govaerts, Kuznetsov, Mestrom, Riet, Sautois.(2006) MATCONT and CL_MATCONT: *Continuation toolboxes in MATLAB.*

Du Cane P. and Goodrich G. J. (1961): The Following Sea, Broaching and Surging, *RINA Transactions.*

Grim O. (1959): *Oscillation of Buoyant Two Dimensional Bodies and the Calculation of the Hydrodynamic Forces*, H.S.V. Report 1171.

Guckenheimer J. and Holmes P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd Edition, Spinger.

Hamamoto M. and Uwatoko K. (1991): Study on Ship Motions and Capsizing in Following Seas: Final Report, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, Vol. 170, 173-182.

Kan M. (1990): Surging of Large Amplitude and Surf-riding of Ships in Following Seas, *Naval Architecture and Ocean Engineering*, The Society of Naval Architects of Japan, Vol.28.

Korvin -Kroukovsky B. V. (1955): Investigation of Ship Motions in Regular Waves, *SNAME Transactions*, Vol.63, 386-435.

Le Mehaute B.(1976): *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*, Springer-Verlag, Dusseldorf.

Muga J. Bruce (2003): *Deterministic Descriptions of Offshore Waves*, John Wiley and Sons, Ins, Hoboken PP. 61-83.

Principles of Naval Architecture (P.N.A) Second Revision (1989) Published by the Society of Naval Architects and Marine Engineers.

Spyrou K. (1995b): Surf-Riding, Yaw Instability and Large Heeling of Ships in Following/Quartering Waves. *Ship Technology Research*, Vol. 42, 103-112.

Spyrou K. J. (1996a): Dynamic Instability in Quartering Seas: The Behaviour of a Ship During Broaching, *Journal of Ship Research*, Vol. 40, No. 1, 46-59.

Spyrou K. J. (2000): On the Parametric Rolling of Ships in a Following Sea Under Simultaneous Nonlinear Periodic Surging. *Philosophical Transactions*, Royal Society, London, A 358. 1813-1834.

Spyrou K. J. (2006): Asymmetric Surging of Ships in Following Seas and its Repercussions for Safety, *Journal of nonlinear Dynamics*, Vol. 43, 149-172.

Spyrou K. J. and Thompson J. M. T. (2000): the Nonlinear Dynamics of Ship Motions: A Field Overview and some recent Developments, *Philosophical Transactions*, Royal Society, London, 1735-1760.

Stokes G. G. (1847): On the Theory of Oscillatory Waves, *Transactions*, Cambridge Philosophical Society 8.

Strogatz S. H. (2000): *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Publishing Company.

Thompson J.M.T. and Stewart H.B. (2002): *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc

Tigkas I.G. (2009): *Nonlinear Dynamic Analysis of the Course Instability of Ships in Wind and Waves*, PhD Thesis, School of Naval Architecture and Marine Engineering, National Technical University of Athens, Greece.

Vossers Ir. G. (1962): *Resistance Propulsion and Steering of Ships: Behaviour of Ships in Waves*

Wahab R and Swaan W.A. (1964): Coursekeeping and Broaching of Ships in Following Seas, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 7, No. 4, 293-301.

Παράρτημα - Αριθμητική εφαρμογή προγράμματος υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylov

Στο πρόγραμμα αυτό, εισάγοντας σαν δεδομένα τα κύρια χαρακτηριστικά του κύματος (H, λ) και τη θέση του πλοίου πάνω σε αυτό, λαμβάνουμε την τιμή της δύναμης που ασκείται στο πλοίο από το κύμα. Κρατώντας σταθερό το κύμα και μετακινώντας το πλοίο υπολογίσαμε ζεύγη $(x, X_{FK}(x))$, και με το κατάλληλο fit (γνωρίζοντας τη μορφή της δύναμης) υπολογίσαμε τα πλάτη f, f_1, f_2

Το κύμα

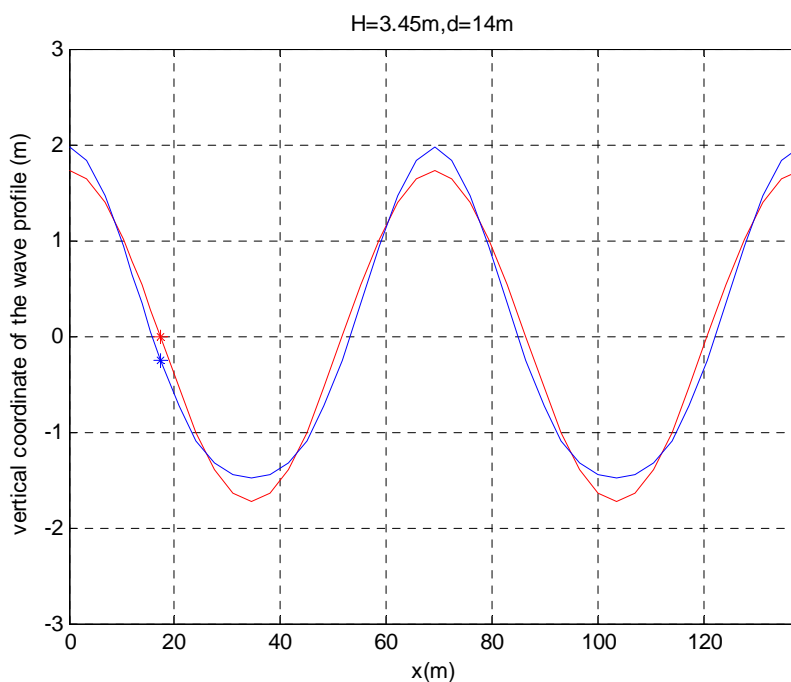
Στην εφαρμογή που ακολουθεί παρουσιάζεται η διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 6 για κύμα με χαρακτηριστικά $H=3.45m$, $\lambda=69m$ και βάθος νερού $d=14m$. Το πλοίο τοποθετήθηκε στη μέση της κατωφύρειας του κύματος. Το προφίλ των κυμάτων φαίνεται στο Σχήμα 1 και δίνεται από της παρακάτω σχέσεις:

Αρμονικός κυματισμός:

$$\bar{\zeta} = \frac{3.45}{2} \cdot \cos(k \cdot (17.25 + x_s))$$

2^{ης} τάξης μη γραμμικός κυματισμός:

$$\bar{\zeta} = \frac{3.45}{2} \cdot \cos(k \cdot (17.25 + x_s)) + \frac{3.45^2 \cdot \pi}{8 \cdot \lambda} \cdot \frac{\cosh(k \cdot 14)}{\sinh(k \cdot 14)^3} \cdot [2 + \cos(2 \cdot k \cdot 14)] \cdot \cos(2 \cdot k \cdot (17.25 + x_s))$$



Σχ.1 Προφίλ κυμάτων. $H=3.45m$, $\lambda=69m$, $d=14m$

Υπολογισμός βυθισμάτων

Οι υπολογισμοί παρατίθενται σε πινακοποιημένη μορφή, όπως ακριβώς έγιναν στο EXCEL. Ο Πίνακας 1 αναφέρεται στο αρμονικό κύμα της παραγράφου και ο Πίνακας 2 στο μη γραμμικό κύμα.

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ship particulars														
2	L	34,5	ST	distance	To	ζ	x cor	real ζ	T	A	A*distance	SIMPSON	A*SIMPSON	A*distance*simpson	
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	1,725	0,0000	1,7250	4,8650	12,5467	-216,4298	0,5	6,2733	-108,2149	
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	1,70376	0,0000	1,7038	4,8287	0,1677	-2,6035	2	0,3354	-5,2071	
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	1,64057	0,0000	1,6406	4,7504	54,6027	-753,5169	1	54,6027	-753,5169	
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	1,53699	0,0000	1,5370	4,6318	40,1514	-484,8285	2	80,3029	-969,6570	
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	1,39555	0,0000	1,3956	4,4753	55,5643	-575,0903	1,5	83,3464	-862,6355	
8	λ	69	3	-6,9	3,050	1,01393	0,0000	1,0139	4,0635	31,3422	-216,2610	4	125,3687	-865,0439	
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	0,53305	0,0000	0,5331	3,5525	25,1288	-86,6944	2	50,2576	-173,3887	
10	Δ	515980	5	0	2,989	1,1E-16	0,0000	0,0000	2,9894	20,4275	0,0000	4	81,7101	0,0000	
11	Ισαπόσταση νομίων=	3,45	6	3,45	2,959	-0,53305	0,0000	-0,5331	2,4262	15,2601	52,6473	2	30,5202	105,2946	
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	-1,01393	0,0000	-1,0139	1,9152	9,7759	67,4534	4	39,1034	269,8135	
13	TRIM	0	8	10,35	2,899	-1,39555	0,0000	-1,3956	1,5035	5,6925	58,9178	1,5	8,5388	88,3767	
14	HEAVE	0	8,5	12,075	2,884	-1,53699	0,0000	-1,5370	1,3470	3,5276	42,5956	2	7,0552	85,1911	
15		0	9	13,8	2,869	-1,64057	0,0000	-1,6406	1,2283	2,1266	29,3469	1	2,1266	29,3469	
16			9,5	15,525	2,854	-1,70376	0,0000	-1,7038	1,1501	0,8396	13,0343	2	1,6791	26,0686	
17			10	17,25	2,839	-1,725	0,0000	-1,7250	1,1138	0,3859	6,6572	0,5	0,1930	3,3286	
18															
19															
20															
21															
22													571,413341	-3130,243868	
23															
24												V=	657,1253427	-3599,780449	
25												Fb=	673553,4763	-36196692,36	Fb*LCB
26												Δ=	-515980	3059836,217	Δ*LCG
27												ΔΙΑΦΟΡΑ=	1,5757E+05	-3,3137E+07	ΔΙΑΦΟΡΑ

Πίνακας 1 Πλοίο πάνω σε αρμονικό κύμα χωρίς ισορροπία .

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ship particulars														
2	L	34,5	ST	distance	To	ζ	x cor	real ζ	T	A	A*distance	SIMPSON	A*SIMPSON	A*distance*simpson	
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	1,9708	0	1,9708	5,1108	9,3952	-162,0672	0,5	4,6976	-81,0836	
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	1,93753	0	1,9375	5,0625	-15,9861	248,1845	2	-31,9722	496,3690	
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	1,83943	0	1,8394	4,9493	81,1066	-1119,2709	1	81,1066	-1119,2709	
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	1,68146	0	1,6815	4,7763	48,4822	-585,4222	2	96,9643	-1170,8444	
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	1,47151	0	1,4715	4,5512	63,4687	-656,9006	1,5	95,2030	-985,3508	
8	λ	69	3	-6,9	3,050	0,93797	0	0,938	3,9876	29,8739	-206,1300	4	119,4956	-824,5198	
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	0,3342	0	0,3342	3,3537	22,9295	-79,1069	2	45,8591	-158,2137	
10	Δ	515980	5	0	2,989	-0,2458	0	-0,246	2,7436	18,5652	0,0000	4	74,2607	0,0000	
11	Ισαπόσταση νομίων=	3,45	6	3,45	2,959	-0,73191	0	-0,732	2,2273	13,7482	47,4311	2	27,4963	94,8623	
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	-1,08989	0	-1,09	1,8392	9,2400	63,7558	4	36,9599	255,0231	
13	TRIM	0	8	10,35	2,899	-1,3196	0	-1,32	1,5794	6,1225	63,3674	1,5	9,1837	95,0512	
14	HEAVE	0	8,5	12,075	2,884	-1,39251	0	-1,393	1,4914	4,1349	49,9284	2	8,2697	99,8568	
15			9	13,8	2,869	-1,44172	0	-1,442	1,4272	2,6936	37,1713	1	2,6936	37,1713	
16			9,5	15,525	2,854	-1,46999	0	-1,47	1,3838	1,1222	17,4228	2	2,2445	34,8456	
17			10	17,25	2,839	-1,4792	0	-1,479	1,3596	0,5484	9,4604	0,5	0,2742	4,7302	
18															
19															
20															
21															
22													572,736493	-3221,324086	
23															
24												V=	658,6469675	-3704,522699	
25												Fb=	675113,1417	-37249901,87	Fb*LCB
26												Δ=	-515980	3059836,217	Δ*LCG
27												ΔΙΑΦΟΡΑ=	1,5913E+05	-3,4190E+07	ΔΙΑΦΟΡΑ

Πίνακας 2 Πλοίο πάνω σε κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes χωρίς ισορροπία .

Ακολουθεί επεξήγηση των κελιών:

- Τα κελιά B6, B7, B8 και B12 αντιστοιχούν στη θέση του πλοίου πάνω στο κύμα, στο ύψος του κύματος, στο μήκος του κύματος και στο βάθος του νερού αντίστοιχα.
- Στη στήλη E και στη στήλη F αναφέρεται το όνομα κάθε θεωρητικού νομέα και η απόστασή του από τη μέση τομή.
- Η στήλη G περιέχει τα αρχικά βυθισμάτων των αντίστοιχων νομέων, στη περίπτωση ήρεμης θάλασσας
- Η στήλη H περιέχει την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, λόγω της παρουσίας του κύματος με χαρακτηριστικά που αναφέρονται στα κελιά B6, B7 και B12. Με άλλα λόγια το προφίλ του εκάστοτε κύματος.
- Στη στήλη I υπολογίζεται η μετακίνηση x_{shift} λόγω περιστροφής του πλοίου
(παράγραφος 6.3.3):
$$x_{shift} = -z_1 \cdot \tan(\theta) = -\left(\zeta(x_s) - x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot \tan(\theta)$$
- Στη στήλη J υπολογίζεται το z_2 (παράγραφος 4.3):
$$z_2 = \zeta(x_s + x_{shift}) - x_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
- Στη στήλη K υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση 6.3.3, το νέο βύθισμα κάθε νομέα ώστε το πλοίο να ισορροπεί.
- Η στήλη L υπολογίζει το εμβαδό κάθε νομέα μέχρι το βύθισμα της στήλης K, σύμφωνα με τα πολυώνυμα παρεμβολής που βρέθηκαν από τη διαδικασία που περιγράφεται στη παράγραφο 6.3.2
- Στις στήλες N,O εφαρμόζεται ο κανόνας του Simpson, οι συντελεστές εισάγονται στη στήλη M, για την ολοκλήρωση του όγκου και της ροπής αντίστοιχα
- Στα κελιά O25 και P25 υπολογίζετε η δύναμη της άντωσης και η διαμήκη ροπή της αντίστοιχα. Η διαφορά αυτών από το εκτόπισμα(O26) και τη διαμήκη ροπή του (P26) υπολογίζεται στα κελιά O27 και P27 αντίστοιχα.
- Τα κελιά B13 και B14 είναι τα κελιά που υπολογίζουν το trim και την κατακόρυφη ανύψωση του πλοίου, είναι δηλαδή τα κελιά που προσδιορίζουν την θέση ισορροπίας του πλοίου.

Τοποθετούμε το πλοίο μας πάνω στο κύμα στο μέσο της κατωφέρειας του ($x=17.25m$). Σε αυτό ασκείτε μία δύναμη (άντωση) και αναπτύσσεται μία διαμήκης ροπή. Για να ισορροπήσει το πλοίο πρέπει η υπολογιζόμενη δύναμη (κελί O25) να είναι ίση με το εκτόπισμα Δ του πλοίου και η ροπή του να είναι ίση με τη ροπή $\Delta \cdot LCG$ ή με άλλα λόγια το $LCB=LCG$. Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 1 (αρμονικό κύμα) και στον Πίνακα 2 (2^{ης} τάξης μη γραμμικό κύμα) για μηδενική διαγωγή και ανύψωση (B13=0 και B14=0) το πλοίο δεν ισορροπεί αφού η αναπτυσσόμενη δύναμη και ροπή είναι πολύ μεγαλύτερη από τις απαιτούμενες για να επέλθει ισορροπία (O25≠O26 και P25≠P26). Για να υπολογίσουμε το trim και το heave του πλοίου χρησιμοποιούμε την εφαρμογή “solver” του EXCEL μια μέθοδο δηλαδή δοκιμών η οποία λήγει όταν η άντωση γίνει ίση με το εκτόπισμα και η διαμήκης θέση του κέντρου βάρους (LCG) συμπίπτει με την διαμήκη θέση του κέντρου άντωσης(LCB).

Στο παράθυρο του solver ως κελί στόχο ορίζουμε αυτό που υπολογίζει τη δύναμη της άντωσης (O21), αλλάζοντας την τιμή της διαγωγής και της κατακόρυφης ανύψωσης (B13 και B14 αντίστοιχα), απαιτώντας ταυτόχρονα τα βυθίσματα να έχουν θετικές τιμές και η διαφορά της διαμήκης ροπής άντωσης και της διαμήκης ροπής του εκτοπίσματος να είναι ίση με το μηδέν.

Το αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας παρουσιάζεται στους πίνακες 3 και 4 για το αρμονικό κύμα και το 2^{ης} τάξης μη γραμμικό αντίστοιχα.

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ship particulars														
2	L	34,5	ST	distance	To	ζ	x cor	real ζ	T	A	A*distance	SIMPSON	A*SIMPSON	A*distance*simpson	
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	1,725	0,081	0,6474	2,7325	0,7102	-12,2510	0,5	0,3551	-6,1255	
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	1,70376	0,092	0,7317	2,9101	7,2759	-112,9585	2	14,5518	-225,9169	
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	1,64057	0,098	0,7738	3,0453	7,3691	-101,6934	1	7,3691	-101,6934	
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	1,53699	0,098	0,7757	3,1399	12,1320	-146,4934	2	24,2639	-292,9868	
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	1,39555	0,094	0,7403	3,1970	14,7146	-152,2965	1,5	22,0720	-228,4447	
8	λ	69	3	-6,9	3,050	1,01393	0,073	0,5736	3,2144	20,7187	-142,9590	4	82,8748	-571,8361	
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	0,53305	0,04	0,3116	3,1356	20,9338	-72,2217	2	41,8676	-144,4433	
10	Δ	515980	5	0	2,989	1,1E-16	1E-17	1E-16	3,0069	20,5601	0,0000	4	82,2404	0,0000	
11	Ισαπόσταση νομέων=	3,45	6	3,45	2,959	-0,53305	-0,04	-0,312	2,8781	18,6890	64,4772	2	37,3781	128,9543	
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	-1,01393	-0,073	-0,574	2,7994	16,2540	112,1528	4	65,0161	448,6112	
13	TRIM	-0,1248	8	10,35	2,899	-1,39555	-0,094	-0,74	2,8168	13,9053	143,9194	1,5	20,8579	215,8792	
14	HEAVE	0,0175	8,5	12,075	2,884	-1,53699	-0,098	-0,776	2,8739	11,1476	134,6078	2	22,2953	269,2156	
15			9	13,8	2,869	-1,64057	-0,098	-0,774	2,9685	8,4079	116,0288	1	8,4079	116,0288	
16			9,5	15,525	2,854	-1,70376	-0,092	-0,732	3,1036	3,7804	58,6909	2	7,5608	117,3818	
17			10	17,25	2,839	-1,725	-0,081	-0,647	3,2813	1,2481	21,5305	0,5	0,6241	10,7653	
18															
19															
20															
21															
22													437,734889	-264,610740	
23															
24												V=	503,395122	-304,3023512	
25												Fb=	515980	-3059836,217	Fb*LCB
26												Δ=	-515980	3059836,217	Δ*LCG
27												ΔΙΑΦΟΡΑ=	-1,9209E-09	0,0000E+00	ΔΙΑΦΟΡΑ

Πίνακας 3 Πλοίο σε ισορροπία πάνω σε αρμονικό κύμα.

Παρατηρούμε ότι για το αρμονικό κύμα η ισορροπία επέρχεται αν έχουμε κατακόρυφη ανύψωση $heave = 0.0175m$ και διαγωγή $trim = -0.1248rad$.

Αντίστοιχα στη περίπτωση 2^{ης} τάξης μη γραμμικού κυματισμού ότι η ισορροπία επέρχεται εάν έχουμε κατακόρυφη ανύψωση $heave = 0.0477m$ και διαγωγή $trim = -0.1285rad$. Τα βυθίσματα ισορροπίας του πλοίου στη θέση αυτή (μέσο της κατωφέρειας) παρουσιάζονται στον πίνακα 5.

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ship particulars														
2	L	34,5	ST	distance	To	ζ	x cor	real ζ	T	A	A*distance	SIMPSON	A*SIMPSON	A*distance*simpson	
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	1,9708	0,111	0,8603	2,9448	2,0103	-34,6771	0,5	1,0051	-17,3386	
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	1,93753	0,121	0,9334	3,1146	8,8213	-136,9514	2	17,6427	-273,9029	
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	1,83943	0,123	0,9418	3,2191	8,6847	-119,8485	1	8,6847	-119,8485	
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	1,68146	0,117	0,8915	3,2644	13,0545	-157,6331	2	26,1090	-315,2662	
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	1,47151	0,104	0,7912	3,2593	15,1763	-157,0747	1,5	22,7644	-235,6120	
8	λ	69	3	-6,9	3,050	0,93797	0,064	0,483	3,1404	20,1221	-138,8425	4	80,4884	-555,3702	
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	0,3342	0,014	0,1096	2,9557	19,4716	-67,1770	2	38,9432	-134,3539	
10	Δ	515980	5	0	2,989	-0,2458	-0,032	-0,241	2,7942	18,9491	0,0000	4	75,7962	0,0000	
11	Ισαπόσταση νομέων=	3,45	6	3,45	2,959	-0,73191	-0,066	-0,502	2,7230	17,5132	60,4205	2	35,0264	120,8410	
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	-1,08989	-0,083	-0,639	2,7769	16,0843	110,9820	4	64,3374	443,9279	
13	TRIM	-0,12856	8	10,35	2,899	-1,3196	-0,084	-0,649	2,9583	14,8900	154,1119	1,5	22,3351	231,1678	
14	HEAVE	0,04774	8,5	12,075	2,884	-1,39251	-0,08	-0,612	3,0913	12,4520	150,3576	2	24,9039	300,7151	
15			9	13,8	2,869	-1,44172	-0,072	-0,552	3,2485	9,7391	134,3990	1	9,7391	134,3990	
16			9,5	15,525	2,854	-1,46999	-0,061	-0,47	3,4269	4,5703	70,9543	2	9,1406	141,9086	
17			10	17,25	2,839	-1,4792	-0,048	-0,369	3,6249	1,6373	28,2442	0,5	0,8187	14,1221	
18															
19															
20															
21															
22													437,734889	-264,610740	
23															
24												V=	503,395122	-304,3023512	
25												Fb=	515980	-3059836,217	Fb*LCB
26												Δ=	-515980	3059836,217	Δ*LCG
27												ΛΙΑΦΟΡΑ=	1 2806F-09	-2 1141F-07	ΛΙΑΦΟΡΑ

Πίνακας 4 Πλοίο σε ισοροπία πάνω σε κύμα 2^{ης} τάξης κατά Stokes.

ST	T(m)	
	Αρμονικό κύμα	2ης τάξης κατά Stokes
0	2,732	2,945
0,5	2,91	3,115
1	3,045	3,219
1,5	3,14	3,264
2	3,197	3,259
3	3,214	3,14
4	3,136	2,956
5	3,007	2,794
6	2,878	2,723
7	2,799	2,777
8	2,817	2,958
8,5	2,874	3,091
9	2,969	3,248
9,5	3,104	3,427
10	3,281	3,625

Πίνακας 5 Βυθίσματα Ισοροπίας

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της δύναμης Froude-Krylov πρέπει να προσδιορίσουμε και τα κέντρα πίεσεων των νομέων.

Υπολογισμός κέντρων πιέσεων

Το κέντρο πίεσης ενός νομέα βρίσκεται από τη σχέση:

$$\bar{z}_p = \frac{\int (p \cdot z) dz}{\int p dz}$$

Στον Πίνακα 6 και Πίνακα 7 φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού του κέντρου πίεσης του νομέα Νο1.5 για απλό αρμονικό κυματισμό και 2^{ης} τάξης μη γραμμικό αντίστοιχα. Η υδροδυναμική πίεση και η υδροστατική υπολογίζεται αντίστοιχα στις στήλες Β και C. Στη στήλη D υπολογίζεται η ολική πίεση για το αντίστοιχο βάθος που φαίνεται στη στήλη Α. Οι στήλες Ε-Η είναι ο κανόνας του Simpson. Η θέση του κέντρου πίεσης υπολογίζεται τελικά στο κελί K19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΟΥ ΠΙΕΣΗΣ									
2										
3	WL	P _{dynamic}	P _{hydrostatic}	P(z)	Simpson		Βραχίονες		ΣΤΑΘΜΟΣ Νο1.5	
4										
5	[1]	[2]	[3]	[4] = [2]+[3]	[5]	[6] = [4]·[5]	[7]	[8] = [6]·[7]		
6	0	15,45478	0	15,4548	1	15,455	0	0,000	Ισαπόσταση Ισάλων	
7	-0,309	15,08844	3,111898	18,2003	4	72,801	1	72,801	-0,3095	
8	-0,619	14,73408	6,223796	20,9579	2	41,916	2	83,831	Υπολογισμός κέντρου	
9	-0,928	14,39142	9,335693	23,7271	4	94,908	3	284,725	πίεσης ως T = 3.095 m	
10	-1,238	14,0602	12,44759	26,5078	2	53,016	4	212,062		
11	-1,547	13,74014	15,55949	29,2996	4	117,198	5	585,992	½·h·f(p) =	
12	-1,857	13,43099	18,67139	32,1024	2	64,205	6	385,229	-90,817	
13	-2,166	13,13251	21,78328	34,9158	4	139,663	7	977,642		
14	-2,476	12,84446	24,89518	37,7396	2	75,479	8	603,834		
15	-2,785	12,56662	28,00708	40,5737	4	162,295	9	1460,653		
16	-3,095	12,29875	31,11898	43,4177	1	43,418	10	434,177		
17										
18									¾·h ² ·f(M) =	
19						f(') = 880,354		f(') = 5100,948	162,853	kedro pieshs -1,7931886

Πίνακας 6 Κέντρο πίεσης Νομέα Νο1.5 (Αρμονικό κύμα)

- Στήλη Β: $P_{dynamic}$
- Στήλη C: $P_{hydrostatic}$
- Στήλη D: P_{tot} (Σχ.2.2.80)
- Στήλες Ε-Η: Κανόνας Simpson
- Κελί J19: Κατακόρυφο κέντρο πίεσης

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΟΥ ΠΙΕΣΗΣ									
2										ΣΤΑΘΜΟΣ Νο1.5
3	WL	$P_{dynamic}$	$P_{hydrostatic}$	$P(z)$	Simpson	Συνάρτηση μιτεταγμένου	Βραχίονες	Συνάρτηση Κατακ. Ροπών		
4	[1]	[2]	[3]	[4] = [2]+[3]	[5]	[6] = [4]-[5]	[7]	[8] = [6]-[7]		
5	0	15,64679	0,3918	16,0386	1	16,039	0	0,000	Ισαπόσταση Ισάλων	
6	-0,309	15,26835	3,4967	18,7650	4	75,060	1	75,060	-0,3095	
7	-0,619	14,90257	6,6010	21,5036	2	43,007	2	86,014	Υπολογισμός κέντρου πίεσης ως T = 3.095 m	
8	-0,928	14,54913	9,7049	24,2540	4	97,016	3	291,048		
9	-1,238	14,20772	12,8082	27,0159	2	54,032	4	216,127		
10	-1,547	13,87804	15,9111	29,7891	4	119,156	5	595,782	$p_x = \frac{1}{2} \cdot h \cdot f(p) =$	
11	-1,857	13,55981	19,0135	32,5733	2	65,147	6	390,880		
12	-2,166	13,25276	22,1155	35,3683	4	141,473	7	990,312	-92,333	
13	-2,476	12,95663	25,2172	38,1738	2	76,348	8	610,781		
14	-2,785	12,67115	28,3185	40,9896	4	163,958	9	1475,626		
15	-3,095	12,39609	31,4195	43,8156	1	43,816	10	438,156		
16										
17									$M_{vx} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot f(M) =$	
18										kedro pieshs
19						$f(p) = 895,051$		$f(M) = 5169,786$	165,050	-1,787545

Πίνακας 7 Κέντρο πίεσης Νομέα Νο1.5 (2^{ης} τάξης κύμα)

- Στήλη B: $P_{dynamic}$ Σχέση (3.2.5β)
- Στήλη C: $P_{hydrostatic}$ Σχέση (3.2.5α)
- Στήλη D: P_{tot} Σχέση(3.2.4)
- Στήλες E-F: Κανόνας Simpson
- Κελί J19: Κατακόρυφο κέντρο πίεσης

Υπολογισμός Δύναμης Froude-Krylon

Τέλος ο υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylon στο μέσο της κατωφέρειας παρουσιάζεται στους πίνακες 8 και 9, για αρμονικούς και μη γραμμικούς 2^{ης} τάξης κυματισμούς αντίστοιχα.

	A	B	E	F	G	L	N	P	Q	R
1	Ship particulars								$\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$	Υπολογισμος
2	L	34,5	ST	distance	To	A	SIMPSON	kedro pieshs(z)	$\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$	ολοκλιροματος
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	0,710203333	0,5	-1,80450	0,872387193	0,002290769
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	7,275907499	2	-1,79701	0,872866354	2,092092172
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	7,369088701	1	-1,79316	0,873112229	2,042558438
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	12,13196057	2	-1,79319	0,873110534	9,786179107
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	14,71463337	1,5	-1,79752	0,872833505	11,45667856
8	λ	69	3	-6,9	3,050	20,71870093	4	-1,82230	0,871251307	58,69614412
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	20,93381757	2	-1,87873	0,867664726	34,58958123
10	Δ	515980	5	0	2,989	20,56010728	4	-1,99291	0,860477468	70,76603617
11	Ισαπόσταση νομμένων=	3,45	6	3,45	2,959	18,68903553	2	-2,14058	0,851320282	30,29875592
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	16,25402876	4	-2,26951	0,843451538	44,57842976
13	TRIM	-0,1248	8	10,35	2,899	13,90525994	1,5	-2,34998	0,838598887	10,40186631
14	HEAVE	0,0175	8,5	12,075	2,884	11,14764501	2	-2,38599	0,836442284	8,614539207
15			9	13,8	2,869	8,407883734	1	-2,40951	0,835038163	2,228864448
16			9,5	15,525	2,854	3,780410678	2	-2,40970	0,835026684	1,039884792
17			10	17,25	2,839	1,248146037	0,5	-2,40314	0,835418057	0,003855304
18										
19										286,5977563
20										329,5874197
21										F= 520575,0821

Πίνακας 8. Δύναμη F-K (Αρμονικό Κύμα)

Στον Πίνακα 8 έχουμε:

- Στήλη P: Κέντρα πιέσεων κάθε νομέα όπως υπολογίζονται από πίνακες όμοιους με τον πίνακα 6
- Στήλη Q: $\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$
- Κελί R20: Υπολογισμός ολοκληρώματος σχέσης (2.3.4) κατά Simpson.
- Κελί R21: Υπολογισμός δύναμης Froude-Krylon (2.3.4)

	A	B	E	F	G	L	N	P	Q	R	S	T
1	Ship particulars								$\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$	Υπολογισμος 1ου	$\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3}$	Υπολογισμος 2ου
2	L	34,5	ST	distance	To	A	SIMPSON	kedro pieshs(z)	$\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$	ολοκλιροματος	$\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3}$	ολοκλιροματος
3	B	7,6	0	-17,25	3,140	2,0103	0,5	-1,7981	0,872797615	0	1,382676313	0
4	Tm	2,99	0,5	-15,525	3,125	8,8213	2	-1,7907	0,873270008	2,41016055	1,384932391	7,55050369
5	LCG	-0,6045	1	-13,8	3,110	8,6847	1	-1,7871	0,873499279	2,344220254	1,386027792	7,07528801
6	x	17,25	1,5	-12,075	3,095	13,0545	2	-1,7875	0,873471679	10,35346931	1,385895912	29,2737639
7	H	3,45	2	-10,35	3,080	15,1763	1,5	-1,7924	0,873160304	11,68341438	1,384408349	29,97282286
8	λ	69	3	-6,9	3,050	20,1221	4	-1,8185	0,871490511	56,7484173	1,376440143	105,3651772
9	k	0,09106	4	-3,45	3,019	19,4716	2	-1,8763	0,867816321	32,14143967	1,358960705	31,10690273
10	Δ	515980	5	0	2,989	18,9491	4	-1,9904	0,860634672	65,23285792	1,325008277	1,23042E-14
11	Ισαπόσταση νομμένων=	3,45	6	3,45	2,959	17,5132	2	-2,1358	0,851614532	28,36902862	1,282763813	-26,40951717
12	Βάθος νερού d=	14	7	6,9	2,929	16,0843	4	-2,2629	0,843850948	43,92246744	1,246760641	-76,28738902
13	TRIM	-0,12856	8	10,35	2,899	14,8900	1,5	-2,3373	0,839359254	11,01928932	1,22608123	-26,04429388
14	HEAVE	0,04774	8,5	12,075	2,884	12,4520	2	-2,3663	0,837618853	9,470247302	1,218098226	-24,54189349
15			9	13,8	2,869	9,7391	1	-2,3942	0,835953084	2,515830438	1,210473073	-6,929324772
16			9,5	15,525	2,854	4,5703	2	2,3982	0,835712533	1,194995789	1,209373192	-3,416014611
17			10	17,25	2,839	1,6373	0,5	-2,3906	0,836164385	8,38669E-17	1,211439473	-2,43014E-16
18												
19										277,4058383		46,71602545
20										319,0167141		53,72342927
21												
22								F1=		503878,9169	F2=	6284,708804
23												
24											F=	510163,6257

Πίνακας 9. Δύναμη F-K (2^{ης} τάξης Κύμα)

Στον Πίνακα 9 έχουμε:

- Στήλη P: Κέντρα πιέσεων κάθε νομέα όπως υπολογίζονται από πίνακες όμοιους με τον πίνακα 7
- Στήλη Q: $\frac{\cosh(k \cdot (z(x_s) + d))}{\cosh(k \cdot d)}$
- Κελί R20: Υπολογισμός 1^{ου} ολοκληρώματος σχέσης (3.3.3) κατά Simpson.
- Κελί R21: Υπολογισμός 1^{ου} όρου δύναμης Froude-Krylov (3.3.3).
- Στήλη S: $\left[\frac{\cosh(2 \cdot k \cdot (z + d))}{\sinh^2(k \cdot d)} - \frac{1}{3} \right]$
- Κελί T20: Υπολογισμός 2^{ου} ολοκληρώματος σχέσης (3.3.3) κατά Simpson.
- Κελί T21: Υπολογισμός 2^{ου} όρου δύναμης Froude-Krylov (3.3.3).

Από τους παραπάνω πίνακες (8 και 9) καταλήξαμε ότι η δύναμη Froude-Krylov που ασκεί αρμονικό κύμα ύψους $H=3.45\text{m}$ στο πλοίο όταν αυτό βρίσκεται στο μέσο της κατωφέρειάς του είναι **F=520.575kN**. Η αντίστοιχη τιμή για 2^{ης} τάξης μη γραμμικό κυματισμό κατά Stokes είναι **F=510.163kN**.