



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΧΑΛΑΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ»**

ΡΟΥΣΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

Επιβλέπων: ΒΛΑΣΗΣ Κ. ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Ιανουάριος 2011



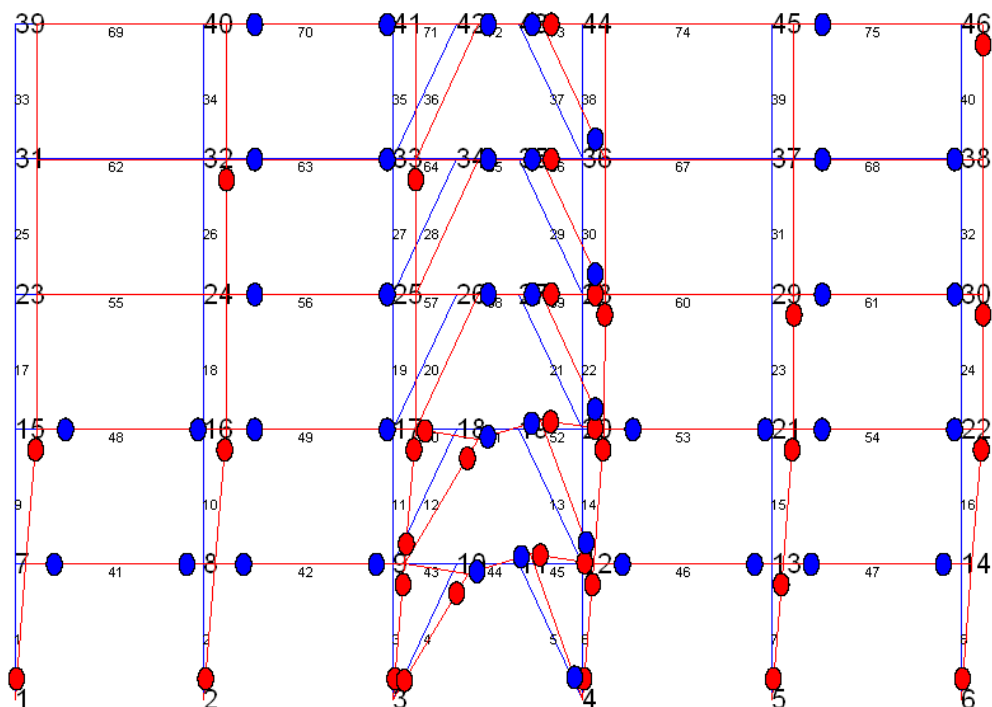
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΧΑΛΑΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ**

ΡΟΥΣΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ



Επιβλέπων: ΒΛΑΣΗΣ Κ. ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Ιανουάριος 2011

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση και συγγραφή της μεταπτυχιακής εργασίας δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη βοήθεια και συνδρομή πλήθους ατόμων. Τους εκφράζω τις ευχαριστίες μου για τη βοήθεια που μου προσέφεραν. Ειδικότερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους:

Την υποψήφια διδάκτορα ΕΜΠ **Μυρτώ Μανωλά** για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράστασή της καθ' όλη την πορεία της εργασίας, σε διάφορα θέματα που απασχόλησαν, είτε θεωρητικού, είτε προγραμματιστικού χαρακτήρα. Οι συμβουλές και οι παρεμβάσεις της έπαιξαν καταλυτικό ρόλο για την επίλυση διαφόρων θεμάτων.

Τον υποψήφιο διδάκτορα ΕΜΠ **Σάββα Τριανταφύλλου** για τη σημαντική του συνεισφορά σε θέματα προγραμματιστικού χαρακτήρα, που βοήθησαν σε μεγάλο βαθμό στην ολοκλήρωση της εργασίας.

Τον Αναπλ. Καθηγητή ΕΜΠ **Κων/νο Σπηλιόπουλο** του εργαστηρίου Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών του Τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών, ο οποίος μέσω των διαλέξεών του σε ζητήματα πλαστικής ανάλυσης, σε προπτυχιακό και σε μεταπτυχιακό επίπεδο, αλλά και των σημειώσεων και δημοσιεύσεών του, βοήθησε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της επιστημονικής μου σκέψης και την αποπεράτωση της συγγραφής της μεταπτυχιακής εργασίας.

Θα ήθελα να **ευχαριστήσω ιδιαίτερα** τον Καθηγητή ΕΜΠ **Βλάση Κουμούση** του Εργαστηρίου Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών του Τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών, επιβλέποντα της Μεταπτυχιακής Εργασίας, για τη συνεχή καθοδήγησή του σε ένα πλήθος επιστημονικών θεμάτων, για τις συμβουλές του κατά τη φάση συγγραφής της εργασίας, για την υπομονή που επέδειξε κατά τη διάρκειά της, και τη βοήθεια που μου προσέφερε στην ανάπτυξη της επιστημονικής μου σκέψης.

Στους γονείς μου (τους οφείλω τα πάντα)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματεύεται την ελαστοπλαστική ανάλυση ραβδωτών φορέων με χαλάρωση υλικού και τη μελέτη της συμπεριφοράς τους.

Συγκεκριμένα, κατ' αρχήν εξετάζονται σε θεωρητικό επίπεδο, οι βασικές αρχές της πλαστικής ανάλυσης και ειδικότερα, ο τρόπος με τον οποίο ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοστεί σε θέματα οριακής ανάλυσης και να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για την εξαγωγή αποτελεσμάτων με μεγάλη ακρίβεια. Η θεωρητική ανάλυση υποστηρίζεται από αριθμητικές εφαρμογές, με χρήση λογιστικών φύλλων Excel αλλά και ανάπτυξη κώδικα στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Σε όλα τα παραδείγματα αυτής της ενότητας, υιοθετείται ελαστική – απόλυτα πλαστική συμπεριφορά υλικού και εξετάζονται πλαισιωτοί φορείς. Μελετάται η καθαρά καμπτική συμπεριφορά των φορέων και επίσης, η επιρροή της αλληλεπίδρασης των αξονικών δυνάμεων, είτε μέσω της ακριβούς μη γραμμικής σχέσης της επιφάνειας διαρροής των Masonet & Save (κατάλληλη για μεταλλικές κατασκευές), είτε με προσεγγιστικά γραμμικοποιημένα μοντέλα.

Στην επόμενη ενότητα της εργασίας, αναλύεται, καταρχήν σε θεωρητικό επίπεδο, η έννοια της γραμμικής συμπληρωματικότητας (Linear Complementarity Problem). Ειδικότερα, επεξηγείται η δομή του προβλήματος, εξετάζεται η μεγάλη σημασία του σε θέματα μαθηματικού προγραμματισμού και παρουσιάζονται ορισμένες από τις σημαντικότερες εφαρμογές του στον τομέα του Πολιτικού Μηχανικού αλλά και των οικονομικών επιστημών. Κατόπιν αναπτύσσεται η θεωρητική έννοια της χαλάρωσης του υλικού (softening) και το πώς μπορεί να επιλυθεί ένα πρόβλημα ελαστοπλαστικής ανάλυσης σε ραβδωτούς φορείς που χαρακτηρίζονται από μια τέτοια συμπεριφορά, με τη χρήση του μαθηματικού προγραμματισμού και κυρίως μέσω της γραμμικής συμπληρωματικότητας.

Με βάση τα ανωτέρω, αναπτύχθηκε κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, ο οποίος μπορεί να διεξάγει μια ελαστοπλαστική ανάλυση σε ραβδωτούς φορείς με χαλάρωση υλικού. Ακολουθούν αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία παρουσιάζουν κλιμακούμενη δυσκολία (από το απλό θεωρητικό παράδειγμα μιας αμφίπακτης δοκού, σε ένα πλαίσιο τριών ανοιγμάτων και πέντε ορόφων με παρουσία έκκεντρων συνδέσμων δυσκαμψίας). Ο στόχος είναι να εξαχθούν διαγράμματα δύναμης – μετατόπισης και να γίνει σύγκριση στις παρακάτω συμπεριφορές της κατασκευής:

- A) Ελαστική – απόλυτα πλαστική συμπεριφορά (elastic – perfectly plastic)
- B) Καθαρά καμπτική συμπεριφορά με χαλάρωση υλικού (pure bending and softening)
- Γ) Αλληλεπίδραση αξονικής δύναμης και χαλάρωση υλικού (interaction and softening)

Στην τελευταία ενότητα της εργασίας, εξετάζονται, αρχικά σε θεωρητικό επίπεδο, οι διαφοροποιήσεις του προβλήματος εάν πρέπει να ληφθεί υπόψη και η γεωμετρική μη γραμμικότητα και τα φαινόμενα 2ας τάξης. Αναπτύχθηκε και πάλι ένας τροποποιημένος κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, ο οποίος προβλέπει και την παρουσία γεωμετρικών μη γραμμικοτήτων. Τα αριθμητικά παραδείγματα που ακολουθούν είναι τα ίδια με αυτά της προηγούμενης ενότητας, ώστε να επιτευχθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων και να διερευνηθεί το μέγεθος της επίδρασης των φαινομένων δευτέρας τάξης στη συνολική συμπεριφορά του φορέα. Η σύγκριση των αναλύσεων γίνεται στη γενική περίπτωση της αλληλεπίδρασης αξονικής δύναμης με χαλάρωση υλικού.

Από τα αποτελέσματα των εφαρμογών σε όλες τις ενότητες της εργασίας, προέκυψαν συμπεράσματα τα οποία αναλύονται στο κείμενο που ακολουθεί, καθώς και σκέψεις για μελλοντική έρευνα που μπορεί να γίνει στο πεδίο αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας.

ABSTRACT

The current master thesis explores the elastoplastic analysis of frame structures with softening and the characteristics of their behavior.

Firstly, the basic principles of plastic analysis are examined and especially the applications of linear programming at limit analysis and how it can become a useful tool for the extraction of highly accurate results. The theoretical presentation is supported through some numeric applications, with the use of EXCEL spreadsheets and also the development of a program code at the programming language MATLAB. In all the examples of that part, an elastic – perfectly plastic behavior is adopted and exclusively frame structures are analyzed. The pure bending behavior and the interaction of axial forces through the exact non – linear relationship of Massonet & Save (suitable for steel structures) or through approximate linearized yield surfaces is examined.

At the next part of this thesis, the theoretical background of linear complementarity problem is explained. More specifically, the thesis focus on the problem's structure (LCP) and its great importance in the field of mathematical programming. In addition, some of the applications of that problem to the science of civil engineer and also to the area of economics are discussed. Finally, the concept of softening is developed and special attention is paid to the formulation of a problem of elastoplastic analysis at softening structures using mathematical programming and the principles of the linear complementarity problem.

Based on the above theoretical analysis, a program code at MATLAB was developed in order to analyze such softening frames. Some numeric applications follow which are categorized by their complexity (beginning from the simple example of a simple double clamped beam and concluding to the more complex application of a three bay and five storey eccentrically braced frame). The target is to extract force – displacement diagrams and to make a comparison to the following structural behaviors:

- A) Elastic – perfectly plastic behavior
- B) Pure bending and softening
- C) Interaction of axial forces and softening

At the last part of the thesis the differentiations of the above problem including second order effects are traced. A verified program code using MATLAB was developed, whose main characteristic is to embody the influence of such geometric non-linearity during the structural analysis. The numeric examples that follow are exactly the same with those of the previous chapter, because it was considered important to compare the results and explore the influence of such phenomena to the overall response of the frames. The comparison of the results takes place at the general case of interaction and softening.

The results of the applications in this thesis lead to some important conclusions that are referred to the last chapter. Finally, some thoughts for future research in the field of this thesis are expressed.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	1
1.1.	Γενικά	3
1.2.	Ελαστοπλαστική συμπεριφορά χάλυβα	3
1.3.	Η έννοια της πλαστικής άρθρωσης	6
1.4.	Η έννοια του πλαστικού σχεδιασμού	7
1.5.	Σύγκριση ελαστικού και πλαστικού σχεδιασμού	7
2.	ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ	9
2.1.	Γενικά	11
2.2.	Γενική περιγραφή του προβλήματος	11
2.2.1.	Προσομοίωση του φορέα	11
2.2.2.	Ισορροπία	13
2.2.3.	Παράδειγμα μόρφωσης μητρώου ισορροπίας B	15
2.2.4.	Μόρφωση περιορισμών αλληλεπίδρασης	19
2.3.	Μόρφωση αρχικού και δυικού προβλήματος στην οριακή ανάλυση	23
2.4.	Φυσικό νόημα δυικού προβλήματος	24
2.5.	Παραδείγματα με χρήση Excel	27
2.6.	Προγραμματισμός σε MATLAB	33
3.	ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (LCP)	49
3.1.	Γενικά	51
3.2.	Γεωμετρική θεώρηση	51
3.3.	Κώνιο προβλήματος συμπληρωματικότητας	53
3.4.	Το πρόβλημα της γραμμικής συμπληρωματικότητας	55
3.5.	Η γενική αριθμητική μέθοδος του LCP	56
3.6.	Εφαρμογή στο γραμμικό προγραμματισμό	57
3.7.	Δευτεροβάθμιος προγραμματισμός	58
3.8.	Αναγκαίες και ικανές συνθήκες βελτίστου για το πρόβλημα του δευτεροβάθμιου προγραμματισμού	59
3.9.	Πρόβλημα δευτεροβάθμιου προγραμματισμού (γεωμετρική θεώρηση)	60
3.10.	Η έννοια της χαλάρωσης (softening)	62
3.11.	Γενικό ολόνομο μοντέλο	64
3.12.	Ολόνομα μοντέλα χαλάρωσης	64
4.	ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΧΑΛΑΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ	69
4.1.	Εισαγωγή	71
4.2.	Γενικό μοντέλο χαλάρωσης υλικού	72
4.3.	Μόρφωση σχέσεων για ελαστοπλαστική ανάλυση	76
4.3.1.	Μη ολόνομη ανάλυση	76
4.3.2.	Ολόνομη ανάλυση	78
4.4.	Αλγόριθμος για ακριβή μη ολόνομη ανάλυση	78
4.5.	Ο αλγόριθμος του Lemke	83
4.6.	Εφαρμογές	87

5.	Επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στη χαλάρωση υλικού	109
5.1.	Εισαγωγή	111
5.2.	Στατική και κινηματική περιγραφή του προβλήματος	111
5.3.	Ελαστικό μοντέλο	113
5.4.	Σύνθεση των παραμορφώσεων	115
5.5.	Μόρφωση υπολογιστικού αλγορίθμου προβλήματος.....	115
5.6.	Εφαρμογές	118
6.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	125
6.1.	Αποτελέσματα εργασίας.....	127
6.2.	Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	128
Π1.	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	131
Π1.1.	Γενικά	133
Π1.2.	Προβλήματα μη γραμμικής συμπληρωματικότητας (Non linear complementarity problems)	133
Π1.3.	Παραμετρικές ανισότητες (Variational Inequalities)	134
Π1.4.	Προβλήματα κάθετης συμπληρωματικότητας (Vertical complementarity problems)	135
Π1.5.	Προβλήματα σημείου σέλας (Saddle point problems)	136
Π1.6.	Μαθηματικός προγραμματισμός με συνθήκες ισορροπίας	138
Π2.	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	139
Π2.1.	Εφαρμογές στο πεδίο του πολιτικού μηχανικού	141
Π2.1.1.	Προβλήματα μηχανικής με επαφή	141
Π2.1.1.1.	Το προσομοίωμα ενός στερεού σώματος υπό δυναμική φόρτιση	142
Π2.1.1.2.	Το πρόβλημα σχεδιασμού φορέων με κριτήρια ελαχίστου βάρους	144
Π2.1.2.	Προβλήματα κυκλοφοριακής ισορροπίας.....	146
Π2.2.	Οικονομικές εφαρμογές	148
Π2.2.1.	Θεωρία παιγνίων	148
Π2.2.2.	Χωρική ισορροπία τιμών	151
Π3.	ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΟΡΩΝ	153
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	163

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1 Γενικά

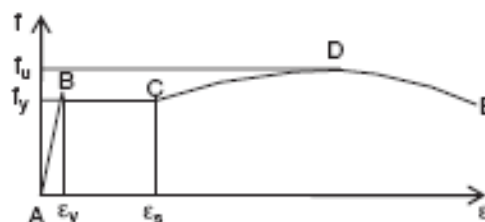
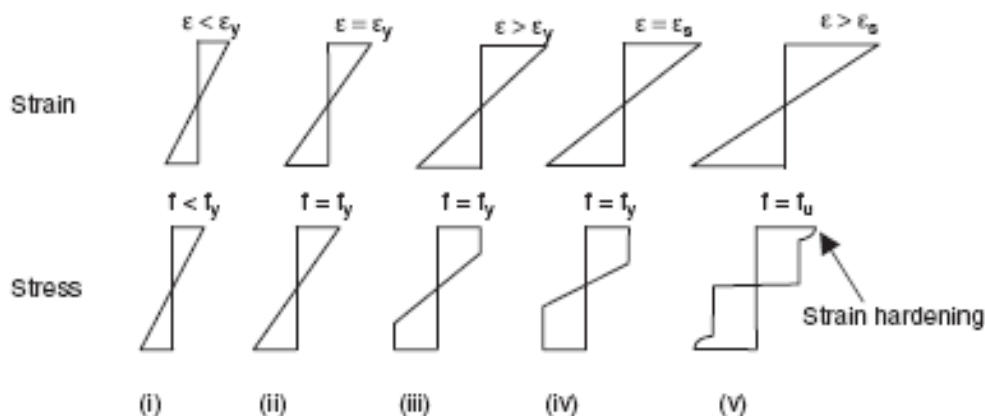
Η πρώτη φορά που μελετήθηκαν και αναπτύχθηκαν προβλήματα πλαστικότητας με μία γενική προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων, ήταν από τους Marcal & King, Yamada & Yoshimura και Zienkewicz. Αυτή η προσέγγιση υιοθετήθηκε επίσης και από τον Ueda για πλαίσιοι κατασκευές. Η προσέγγιση βασίζεται στη θεωρία πλαστικής ροής με ειδική μέριμνα για τις συνθήκες πλαστικοποίησης των στοιχείων. Μια παρόμοια λογική υιοθετήθηκε και από τον Nigam για δυναμικές αναλύσεις. Σε αντίθεση με τις ελαστικές προσεγγίσεις, στο συγκεκριμένο πρόβλημα η δομή του βασίζεται σε μόρφωση μητρώων, χρησιμοποιώντας για τις αναλύσεις μεθόδους δυσκαμψίας, οι οποίες έχουν επεκταθεί και σε ανελαστικό επίπεδο. Η συνολική περιγραφή της συμπεριφοράς της κατασκευής, από την ελαστική ως την πλαστική κατάσταση, αποκαλείται ελαστοπλαστική ανάλυση. Άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιούν μια προσέγγιση δυσκαμψίας για την επίλυση προβλημάτων πλαστικότητας, είναι αυτές των Livesley, Davies και Majid, των οποίων η εργασία επικέντρωνε στη διαρροή αποκλειστικά εξαιτίας κάμψης.

Τα τελευταία χρόνια οι μέθοδοι μαθηματικού προγραμματισμού έχουν γίνει μία σημαντική περιοχή έρευνας στον τομέα της πλαστικότητας. Οι γενικοί μέθοδοι μόρφωσης και επίλυσης που χρησιμοποιούν αυτήν την προσέγγιση, έχουν διερευνηθεί από τους Franchi & Cohn, Maier & Munro, Tin Loi & Pang.

1.2 Ελαστοπλαστική συμπεριφορά χάλυβα

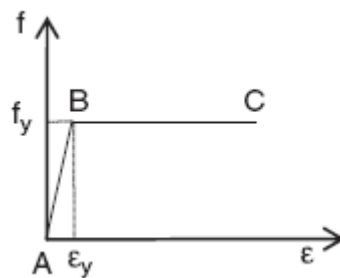
Αρχικά θα περιγραφεί η δομική συμπεριφορά μιας διατομής από την ελαστική κατάσταση σε μία πλήρως πλαστική κατάσταση, υπό αυξανόμενο φορτίο. Έπειτα θα αναλυθεί η γενική ελαστοπλαστική συμπεριφορά μιας κατασκευής και η εφαρμογή της σε μια πλαστική μέθοδο σχεδιασμού, υπό ορισμένους περιορισμούς, συγκρινόμενη με την ελαστική μέθοδο σχεδιασμού.

Τα περισσότερα δομικά υλικά βρίσκονται σε μια ελαστική κατάσταση πριν φθάσουν στην πλαστικοποίηση. Αυτό συμβαίνει και σε επίπεδο διατομής, αλλά και σε επίπεδο κατασκευής. Για μια αμφιέριστη μεταλλική δοκό με μία διατομή συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα υπό αυξανόμενο φορτίο στο μέσον της, οι γενικές μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων από μια πλήρως ελαστική κατάσταση ως τη θραύση, φαίνονται στο σχήμα 1.1.



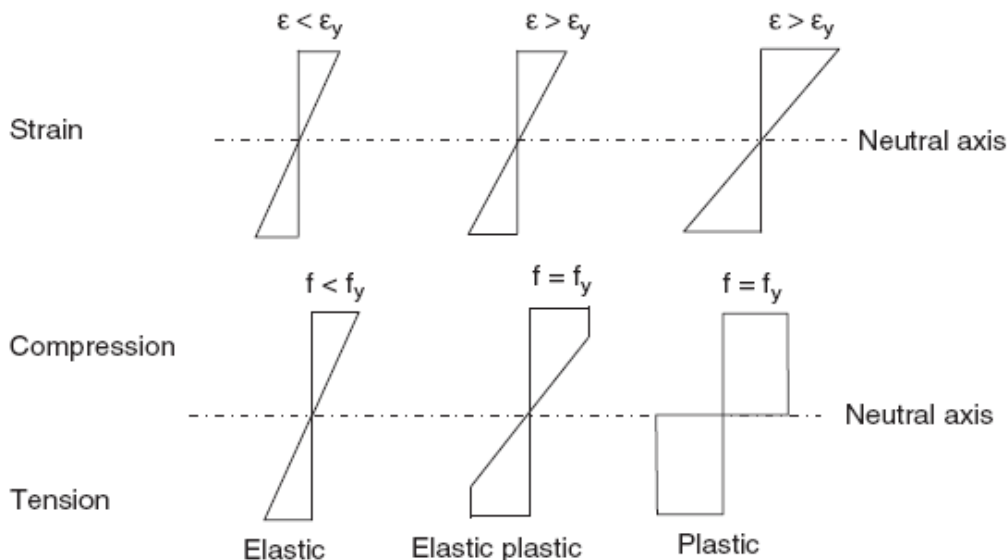
ΣΧΗΜΑ 1.1 Συμπεριφορά τάσεων – παραμορφώσεων διατομής

Η δοκός φορτίζεται αρχικά παράγοντας μια ελαστική τάση $f = f_e$, η οποία αντιστοιχεί σε μια ελαστική παραμόρφωση $\varepsilon = \varepsilon_e$, για φόρτιση μεταξύ των σημείων A και B. Όταν η διατομή φθάνει στο επίπεδο B, οι μέγιστες τάσεις στο άνω και κάτω άκρο της φτάνουν στο όριο της διαρροής, δηλαδή $f = f_y$, που αντιστοιχεί σε παραμόρφωση διαρροής $\varepsilon = \varepsilon_y$. Με την περαιτέρω αύξηση του φορτίου, η διατομή υπόκειται σε μια διαδικασία πλαστικοποίησης, στην οποία η επιφάνεια διαρροής μεγαλώνει συνεχώς και εκτείνεται εσωτερικά προς το κέντρο της διατομής. Αυτή η πλαστικοποίηση, με μια σχετικά σταθερή τάση διαρροής f_y , συμβαίνει μεταξύ του B και του C, εκεί όπου η τάση που αντιστοιχεί στην παραμόρφωση ε_s ξεκινάει να μεγαλώνει ξανά. Από το σημείο C, η διατομή μπαίνει εντός μιας περιοχής κράτυνσης, μέχρι την οριακή τάση f_u στο σημείο D. Από το σημείο D, η τάση ξεκινάει να μειώνεται μέχρι το υλικό να σπάσει στο σημείο E. Η διαδικασία πλαστικοποίησης είναι σημαντική για το χάλυβα στο πλαστικό σχεδιασμό, αφού εξασφαλίζει ότι το υλικό έχει αρκετή πλαστικότητα ώστε η διατομή να αντέξει τη φόρτιση πέραν του ορίου της ελαστικής περιοχής στο B. Για σχεδιαστικούς σκοπούς, συνήθως αγνοείται η επιπλέον δύναμη που παρέχεται εξαιτίας της κράτυνσης, η οποία μάλιστα γίνεται μικρότερη σε μέγεθος όσο η ονομαστική αντοχή του χάλυβα είναι μεγαλύτερη. Γι' αυτό, για λόγους απλότητας, πολλές φορές μπορεί να συναντηθεί στο χάλυβα μια ιδεατή προσομοίωσή του ως ένα υλικό ελαστικό - απολύτως πλαστικό, όπως παρουσιάζεται με μια σχέση τάσεων - παραμορφώσεων στο σχήμα 1.2.



ΣΧΗΜΑ 1.2 Ελαστική - απόλυτα πλαστική συμπεριφορά χάλυβα

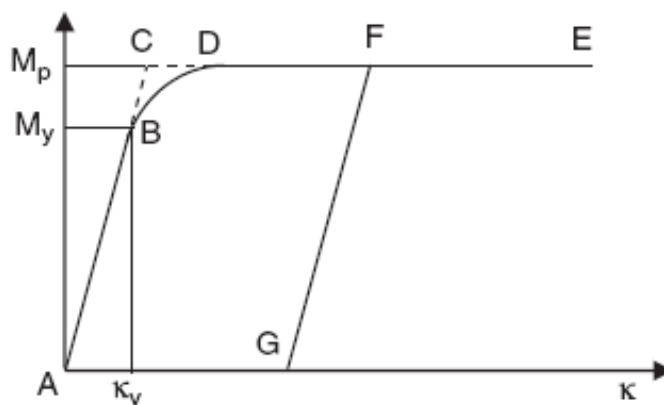
Η αντίστοιχη διαδικασία πλαστικοποίησης μιας συμμετρικής διατομής, φαίνεται στο σχήμα 1.3.



ΣΧΗΜΑ 1.3 Πλαστικοποίηση διατομής

Στο σχήμα 1.2 η σχέση τάσεων - παραμορφώσεων είναι γραμμική για το ελαστικό τμήμα AB και η κλίση της είναι ίση με το μέτρο ελαστικότητας.

Σύμφωνα με την ιδεατή σχέση τάσεων - παραμορφώσεων, η συνεχής πλαστικοποίηση μιας διατομής όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3 υπό αυξανόμενη φόρτιση, συνεπάγεται και συνεχόμενη αύξηση της καμπτικής ροπής στη διατομή. Όταν οι ακραίες ίνες της διατομής, φτάσουν στην παραμόρφωση διαρροής ϵ_y , σε ένα επίπεδο τάσης διαρροής f_y , υπάρχει στη διατομή μια ροπή διαρροής M_y που αντιστοιχεί σε μια καμπυλότητα διαρροής κ_y , όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4.



ΣΧΗΜΑ 1.4 Σχέση ροπής - καμπυλότητας σε μια διατομή

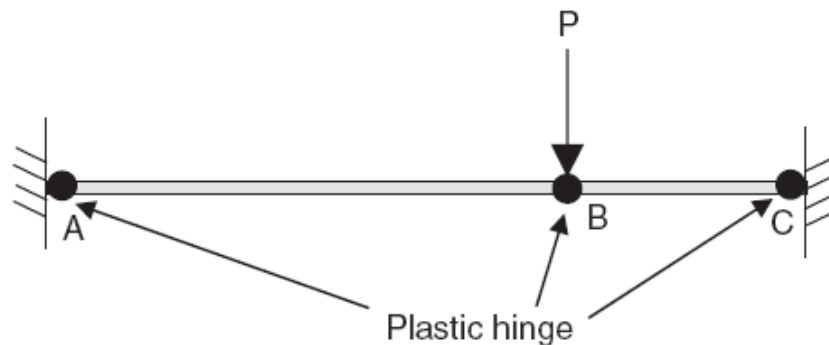
Μια περαιτέρω αύξηση της φόρτισης, προκαλεί μερική πλαστικοποίηση στη διατομή, κάτι που σηματοδοτεί το ξεκίνημα της ελαστοπλαστικής της κατάστασης. Η ελαστοπλαστική κατάσταση αντιστοιχεί σε μια αύξηση της καμπτικής ροπής από το B στο D, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4. Όταν η διατομή πλαστικοποιείται πλήρως στο σημείο D, φτάνει στη μέγιστη καμπτική της ικανότητα, η οποία συμβολίζεται ως M_p . Μια περαιτέρω αύξηση στη φόρτιση αυξάνει τις παραμορφώσεις και συνεπώς, την καμπυλότητα στη διατομή, ενώ η πλαστική ροπή παραμένει αμετάβλητη. Πρέπει να σημειωθεί, ότι η γραμμή DE, στο σχήμα 1.4, δεν είναι απολύτως οριζόντια, και το σημείο D είναι δύσκολο να οριστεί για τα περισσότερα σχήματα διατομών. Εάν η μετατόπιση δεν είναι μια κύρια θεώρηση, για σχεδιαστικούς σκοπούς, το καμπύλο τμήμα BD της σχέσης ροπής-καμπυλότητας, συνήθως αγνοείται και η καμπτική ροπή θεωρείται ότι αυξάνεται με γραμμικό τρόπο από το A ως το C, όπου και φτάνει η μέγιστη πλαστική ροπή. Το ποσοστό της πλαστικής ροπής, ως προς τη ροπή διαρροής, ονομάζεται πλαστιμότητα. Η πλαστιμότητα διαφέρει για κάθε σχήμα και τύπο διατομής.

Θεωρείται επίσης, ότι η αποφόρτιση από ένα πλαστικό στάδιο σε ένα ελαστικό, ακολουθεί ένα δρόμο παράλληλο στην ελαστική καμπύλη. Πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι εξαιτίας αυτής της θεώρησης για την αποφόρτιση, η ελαστική σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων, δεν είναι πλέον μονοσήμαντη, με την έννοια ότι η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να ακολουθήσει οποιαδήποτε ελαστική καμπύλη αν το υλικό αποφορτίζεται από μια πλαστική σε μια ελαστική κατάσταση. Το φαινόμενο της αποφόρτισης απεικονίζεται στο σχήμα 1.4, στο οποίο η διατομή υπόκειται αποφόρτιση στο F και ακολουθεί ένα μονοπάτι FG παράλληλο στον ελαστικό κλάδο AB. Όταν η διατομή αποφορτίζεται πλήρως, υπάρχει απομένουσα παραμόρφωση η οποία αντιστοιχεί σε κάποια καμπυλότητα, στο σημείο G. Γι' αυτό, μια ελαστοπλαστική ανάλυση συνήθως εκτελείται με έναν επαυξητικό τρόπο για μια δεδομένη ιστορία φόρτισης, ώστε να ανιχνευθούν οι μοναδικοί συνδυασμοί ροπής και καμπυλότητας στη διατομή.

1.3 Η έννοια της πλαστικής άρθρωσης

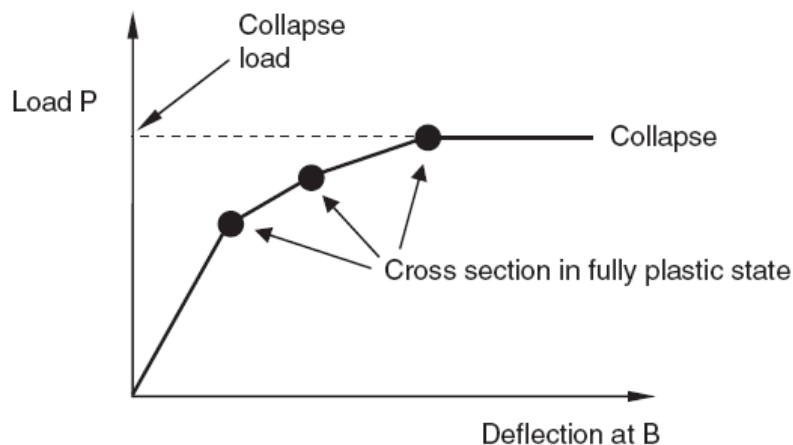
Σύμφωνα με την ιδεατή διγραμμική σχέση ροπής – στροφής, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4, μια διατομή που διατηρεί την πλαστική της ικανότητα αντοχής, υπόκειται σε πλαστική στροφή χωρίς περαιτέρω αύξηση της καμπτικής ροπής. Με άλλα λόγια, η διατομή συμπεριφέρεται σαν μια πραγματική άρθρωση ενώ κατέχει μια πλήρη πλαστική ροπή. Αυτή η συμπεριφορά άρθρωσης, που ονομάζεται πλαστική άρθρωση, καθιστά εφικτό σε μια κατασκευή να αναλυθεί με συνεχή τρόπο με το να εισαχθεί μια πλαστική άρθρωση σε οποιαδήποτε διατομή έχει φτάσει στην πλαστική ροπή. Αυτό είναι και το βασικό θέμα της ελαστοπλαστικής ανάλυσης που διεξάγονται σε κατασκευές με τη μέθοδο βήμα προς βήμα. Στην ανίχνευση του σχηματισμού πλαστικών αρθρώσεων, η κατασκευή γίνεται σταδιακά πιο εύκαμπτη μέχρι η δυσκαμψία της να μειωθεί σε μια τόσο μικρή τιμή όπου θα υπάρξει πλέον κατάρρευση.

Για μια κατασκευή υπό αυξανόμενη φόρτιση, το μέγεθος της αύξησης των φορτίων μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας ότι οι διατομές συγκρατούν την πλαστική τους ροπή. Έστω για παράδειγμα μια αμφίπακτη δοκός, όπως αυτή του σχήματος 1.5. Ο μηχανισμός κατάρρευσης της δοκού απαιτεί το σχηματισμό τριών πλαστικών αρθρώσεων, στο A, B και C.



ΣΧΗΜΑ 1.5 Μηχανισμός κατάρρευσης σε μία αμφίπακτη δοκό

Διεξάγοντας την ελαστοπλαστική ανάλυση για αυτήν τη δοκό, ή για οποιαδήποτε δοκό γενικά, η μείωση της δυσκαμψίας της κατασκευής, μπορεί να απεικονισθεί με το να χαραχτεί σε γράφημα η μεταβολή του φορτίου, σε σχέση με τη μεταβολή της μετατόπισης σε κάποιο σημείο του φορέα. Για την αμφίπακτη δοκό, η μεταβολή του φορτίου P σε σχέση με την κατακόρυφη μετατόπιση στο σημείο B, φαίνεται στο σχήμα 1.6.



ΣΧΗΜΑ 1.6 Καμπύλη φορτίου – μετατόπισης σε αμφίπακτη δοκό

Με το να χαραχθεί η σχέση φορτίου – μετατόπισης, εξάγονται και τα εξής συμπεράσματα:

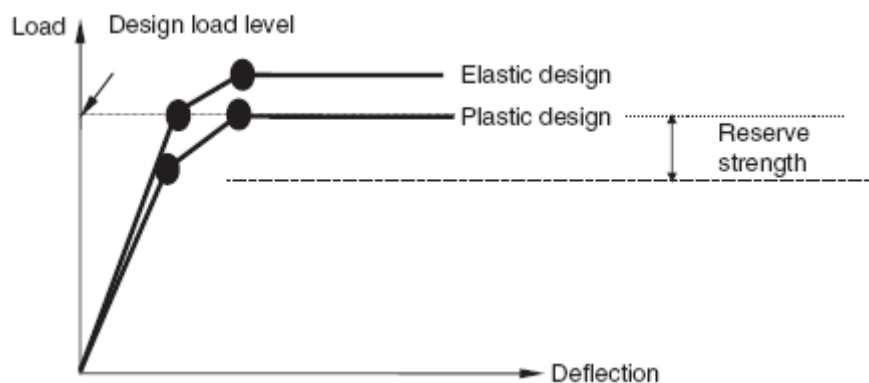
- Κάθε «μαύρη τελεία», αντιπροσωπεύει μια πλαστική άρθρωση σε κάποια διατομή που έχει φτάσει σε πλήρη πλαστικοποίηση. Η πλαστική άρθρωση διατηρεί μια τιμή καμπτικής ροπής, ίση με την πλαστική ροπή της διατομής.
- Η ελαστική κατάσταση μιας κατασκευής αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο φόρτισης που βρίσκεται πιο κάτω από την πρώτη πλαστική άρθρωση. Η ανάλυση σε αυτό το επίπεδο, ονομάζεται ελαστική ανάλυση.
- Η ελαστοπλαστική κατάσταση μιας κατασκευής αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο φόρτισης μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας πλαστικής άρθρωσης. Η ανάλυση σε αυτό το επίπεδο φόρτισης ονομάζεται ελαστοπλαστική.
- Η συμπεριφορά μιας κατασκευής μεταξύ του σχηματισμού διαδοχικών πλαστικών αρθρώσεων είναι ελαστική και μπορεί να αναλυθεί ελαστικά.
- Μια πλήρης πλαστικοποίηση της κατασκευής αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο φόρτισης όπου η κατασκευή καταρρέει. Σε αυτό το επίπεδο φόρτισης η ανάλυση διακόπτεται.
- Η κλίση της καμπύλης δείχνει πόση είναι η σχετική δυσκαμψία της κατασκευής σε κάθε στάδιο. Η δυσκαμψία μειώνεται όσο περισσότερες διατομές γίνονται πλαστικές αρθρώσεις. Στην κατάρρευση, η δυσκαμψία της κατασκευής είναι μηδενική.

1.4 Η έννοια του πλαστικού σχεδιασμού

Ο πλαστικός σχεδιασμός χρησιμοποιεί την απομένουσα δύναμη που απομένει στην κατασκευή μετά το ελαστικό στάδιο. Η απομένουσα δύναμη της κατασκευής, η οποία επιτρέπει στα δομικά μέλη να φορτίζονται χωρίς αστοχία όταν φθάνουν στη μέγιστη καμπτική τους ικανότητα, χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια της ελαστοπλαστικής φάσης, όσο το φορτίο αυξάνεται. Συνεπώς, προκύπτει ένας πιο οικονομικός σχεδιασμός χάρη σε εξοικονόμηση υλικού, αν διεξαχθεί μια πλαστική ανάλυση σχεδιασμού. Ο πλαστικός σχεδιασμός μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέσον, στο οποίο η ικανότητα αναδιανομής της ροπής στις μεταλλικές κατασκευές χρησιμοποιείται όταν οι κατασκευές φορτίζονται πέραν της ελαστικής τους κατάστασης. Μπορεί να σημειωθεί ότι με το να γίνει χρήση μιας διγραμμικής καμπύλης ροπής- καμπυλότητας για το χάλυβα, αγνοείται το ευνοϊκό φαινόμενο της κράτυνσης του υλικού. Γι' αυτό, όσον αφορά την πλαστική ανάλυση, το θεωρητικό φορτίο κατάρρευσης είναι πάντα μικρότερο από το πραγματικό φορτίο και γι' αυτό ο σχεδιασμός που προκύπτει, είναι πάντα λίγο συντηρητικός.

1.5 Σύγκριση ελαστικού και πλαστικού σχεδιασμού

Για τον ελαστικό σχεδιασμό, καθένα από τα μέλη της κατασκευής πρέπει να έχουν μια καμπτική ικανότητα σχεδιασμού (ϕM_s), μεγαλύτερη από τη ροπή σχεδιασμού της ελαστικής ανάλυσης (M^*). Η καμπτική ροπή αντοχής, που βρίσκεται συνυπολογίζοντας το κατάλληλο συντελεστή ικανότητας ϕ και άλλες σχεδιαστικές παραμέτρους, πολύ συχνά αποκαλείται στην πλαστική ανάλυση ως M_p . Υπό το φορτίο σχεδιασμού, αν ένα από τα μέλη συναντά τη σχεδιαστική απαίτηση: $\phi M_s = M^*$, η πρώτη πλαστική άρθρωση συμβαίνει ακριβώς στο επίπεδο φόρτισης σχεδιασμού κατά μήκος της ελαστικής καμπύλης που φαίνεται στο σχήμα 1.7. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η επιλογή της διατομής σε έναν ελαστικό σχεδιασμό οδηγεί σε: $\phi M_s > M^*$, έτσι ώστε η πρώτη πλαστική άρθρωση σε μια κατασκευή πάντα συμβαίνει σε ένα επίπεδο φόρτισης πάνω από το φορτίο σχεδιασμού.



ΣΧΗΜΑ 1.7 Σύγκριση ελαστικού και πλαστικού σχεδιασμού

Αντίθετα, ο πλαστικός σχεδιασμός απαιτεί ότι η τελευταία πλαστική άρθρωση θα συμβεί ακριβώς ή πάνω από το επίπεδο φόρτισης σχεδιασμού. Είναι ξεκάθαρο από το σχήμα 1.7 ότι, αν και η ελαστική και η πλαστική ανάλυση ικανοποιούν το ίδιο φορτίο σχεδιασμού, η μέθοδος πλαστικού σχεδιασμού απαιτεί μια πιο εύκαμπτη κατασκευή με μικρότερο αριθμό μελών, χρησιμοποιώντας την απομένουσα αντοχή της κατασκευής. Σημειώνεται ότι, για μια κατασκευή με υψηλό αριθμό στατικής αοριστίας, η απομένουσα αντοχή είναι μεγάλη. Γι' αυτό, το κέρδος από τη χρήση πλαστικού σχεδιασμού είναι μεγαλύτερο για κατασκευές υψηλού βαθμού στατικής αοριστίας. Παρόλ' αυτά, για ισοστατικούς φορείς, που απαιτούν μόνο μία πλαστική άρθρωση ώστε να επέλθει η κατάρρευση, δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ ελαστικού και πλαστικού σχεδιασμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

2.1 Γενικά

Η οριακή ανάλυση επιπέδων πλαισίων με επικόμβια φόρτιση θεωρώντας το στατικό θεώρημα παρέχει ένα ασφαλές κάτω όριο του οριακού φορτίου του πλαισίου. Το στατικό θεώρημα απαιτεί την ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας και των συνθηκών διαρροής, αδιαφορώντας για την ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Δοκιμάζονται διάφορες στατικά αποδεκτές κατανομές της έντασης, δηλαδή κατανομές που εξ ορισμού ικανοποιούν τις απαιτήσεις ισορροπίας και η καλύτερη από αυτές είναι αυτή που μεγιστοποιεί το συντελεστή της φόρτισης.

Η γενική διατύπωση του προβλήματος της εύρεσης του οριακού φορτίου με βάση το στατικό θεώρημα περιγράφεται από ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο βασίζεται στο μητρώο ισορροπίας του πλαισίου. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να απεικονίσει τη θεωρητική πορεία επίλυσης του προβλήματος και να παρουσιάσει ενδεικτικά παραδείγματα, χρησιμοποιώντας λογιστικά φύλλα Excel καθώς και ανάπτυξη κώδικα σε περιβάλλον Matlab.

Για απλούς φορείς, με μικρό αριθμό μελών και κόμβων, είναι εφικτή η χρήση λογιστικών φύλλων Excel και η εκμετάλλευση της ακολουθίας εντολών του προγράμματος που αφορούν προβλήματα βελτιστοποίησης. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, θα αναλυθούν τρία παραδείγματα, σχετικά απλών φορέων. Οι αναλύσεις θα αφορούν πλαίσια με καθαρά καμπτική συμπεριφορά, ή πλαίσια με περιορισμούς αλληλεπίδρασης. Σε κάθε περίπτωση θα υιοθετηθεί απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Η επιφάνεια αλληλεπίδρασης θα προσομοιωθεί με το γραμμικοποιημένο οκτάγωνο, των οποίων οι εξισώσεις προέκυψαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ταυτόχρονα θα επιχειρηθεί να δοθούν στο πρόγραμμα και μη γραμμικοί περιορισμοί, όπως αυτοί εκφράζονται από την ακριβή σχέση της επιφάνειας αλληλεπίδρασης (σχέση Massonet και Save).

Για κάθε αρχή και πέρας κάθε δοκού ενός πλαισίου θα πρέπει να διατυπωθούν δεκαέξι ($8+8=16$) περιορισμοί, με συνέπεια π.χ. για ένα απλό πλαίσιο με επτά μέλη, να διατυπωθούν συνολικά $16*7=112$ περιορισμοί. Ας σημειωθεί ότι αν το πολύγωνο έχει τρεις ευθείες ανά τεταρτημόριο απαιτούνται 24 περιορισμοί ανά δοκό. Συνεπώς, ο αριθμός των περιορισμών αυξάνεται ραγδαία, αν θελήσουμε να προσομοιώσουμε πιο ρεαλιστικές κατασκευές, όπου υπάρχει μεγάλος αριθμός μελών. Το Excel δεν μπορεί να επιλύσει προβλήματα τέτοιων διαστάσεων, εφόσον δεν μπορεί να λάβει υπόψη πέρα από έναν μέγιστο αριθμό περιορισμών. Άρα, κρίθηκε σκόπιμο να γίνει και προγραμματισμός του προβλήματος και ανάπτυξη κώδικα με χρήση του περιβάλλοντος της Matlab. Θα αναλυθούν επίσης τρία παραδείγματα με χρήση του αλγορίθμου αυτού.

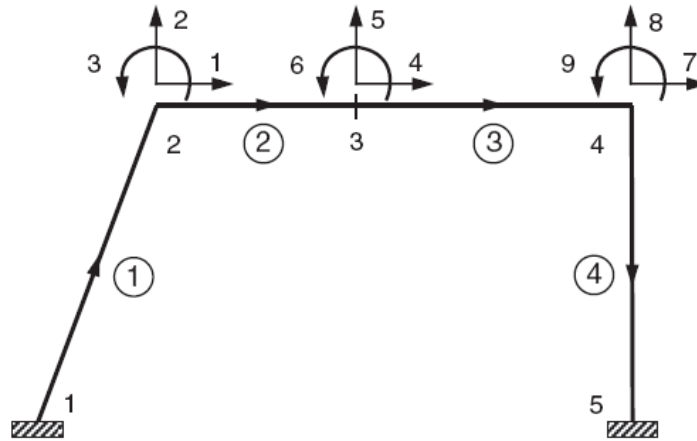
2.2 Γενική περιγραφή του προβλήματος

2.2.1 Προσομοίωμα του φορέα

Γίνονται οι ακόλουθες βασικές παραδοχές:

1. Η κατασκευή είναι επίπεδη και αποτελείται από ευθεία πρισματικά πεπερασμένα στοιχεία που συνδέονται σε κόμβους.
2. Οι πλαστικές παραμορφώσεις θεωρούνται ότι συγκεντρώνονται στα άκρα κάθε στοιχείου ενώ το στοιχείο από μόνο του θεωρείται πως είναι άκαμπτο.
3. Θεωρείται ένα γενικευμένο μοντέλο με πλαστικές αρθρώσεις, το οποίο επεκτείνεται ώστε να περιλάβει και τις επιρροές των αξονικών δυνάμεων.

4. Οι κλασσικές συνθήκες συμπεριφοράς ελαστική – απόλυτα πλαστική, εξασφαλίζουν τις πλαστικές παραμορφώσεις να ακολουθούν το νόμο της κανονικότητας.
5. Οι μετακινήσεις είναι μικρές, άρα οι εξισώσεις ισορροπίας αναφέρονται στην αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία.

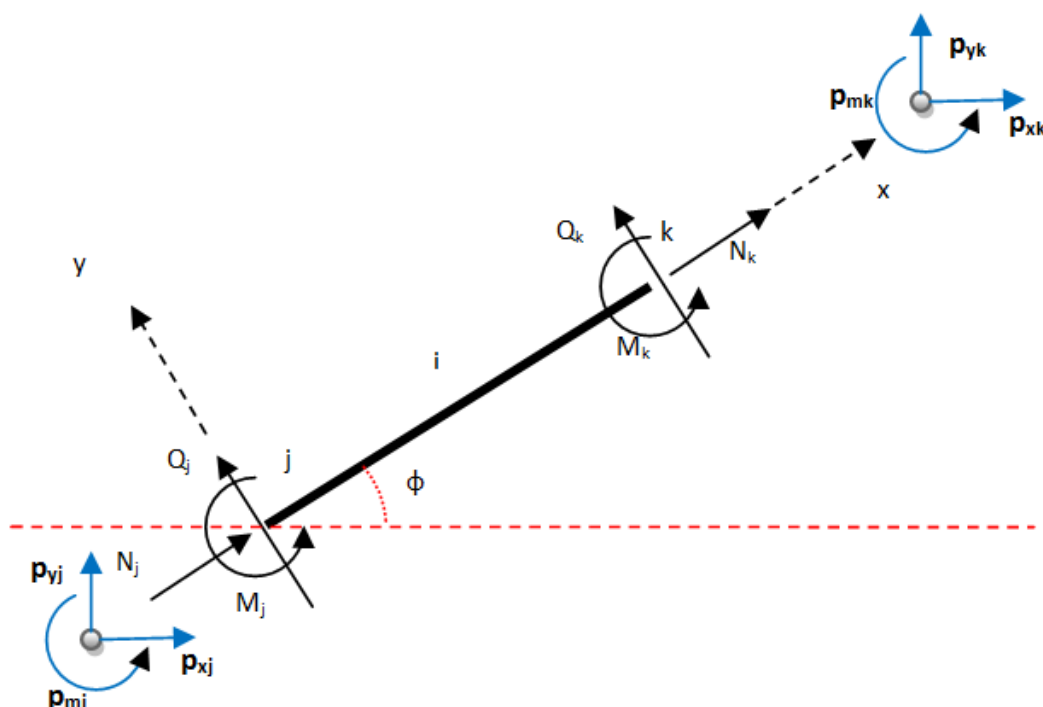


ΣΧΗΜΑ 2.1 Προσομοίωμα ενός επιπέδου πλαισίου

Το ιδεατό μοντέλο είναι ένα σύνολο στοιχείων που συνδέονται εσωτερικά σε έναν συγκεκριμένο αριθμό κόμβων. Η διακριτοποίηση γίνεται με βάση τις πιθανές τοποθεσίες όπου μπορούν να σχηματιστούν πλαστικές αρθρώσεις. Τα μέλη των πλαισίων φορτίζονται με κατανεμημένες φορτίσεις π.χ. ίδιο βάρος, κινητά φορτία κλπ. Η μεταβολή των κατανεμημένων φορτίων κατά μήκος του άξονα των μελών δημιουργεί αβεβαιότητα ως προς την θέση ανάπτυξης ακραίων τιμών των εντατικών μεγεθών και ειδικότερα των καμπτικών ροπών. Ένας τρόπος για τον έλεγχο αυτής της κατάστασης είναι η θεώρηση μόνο επικόμβιων φορτίσεων με αναγκαστική τη πυκνωση των κόμβων του πλαισίου. Έτσι η φόρτιση εισάγεται στον φορέα ως επικόμβια με ακρίβεια που εξαρτάται από την πυκνωση, ακολουθώντας επί της αρχής την ίδια αντιμετώπιση όπως και στα πεπερασμένα στοιχεία.

Για παράδειγμα, το επίπεδο πλαίσιο του σχήματος (2.1) έχει μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας τέσσερα στοιχεία και πέντε κόμβους. Όλες οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν μειωθεί ώστε να δρουν πάνω σε αυτούς τους κόμβους σαν συγκεντρωμένα φορτία. Άρα, για το παραπάνω μοντέλο, το ισοδύναμο διάνυσμα φόρτισης af έχει διαστάσεις (9×1) , το οποίο αντιστοιχεί σε 9 βαθμούς ελευθερίας. Ως συνήθως, το a , είναι ο φορτιστικός πολλαπλασιαστής, και το f είναι γνωστό. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, ορίζουμε $p=af$. Επίσης στο κάθε σχήμα φαίνονται οι τοπικοί άξονες κάθε στοιχείου. Για παράδειγμα, το στοιχείο 1 έχει κατεύθυνση από τον κόμβο 1 προς τον κόμβο 2.

Κάθε πεπερασμένο στοιχείο περιγράφεται σε όρους τριών ανεξάρτητων (ή αλλιώς φυσικών) τάσεων. Η συγκεκριμένη επιλογή για ένα αμφίπακτο στοιχείο φαίνεται στο σχήμα (1.2). Αποτελείται από τρεις γενικευμένες τάσεις: την αξονική δύναμη, την καμπτική ροπή στον κόμβο αρχής j του γενικού i στοιχείου και την καμπτική ροπή του κόμβου τέλους k του στοιχείου. Αυτές οι αδιάστατες γενικευμένες δυνάμεις, συλλέγονται σε ένα διάνυσμα s^i και συμβολίζονται αντίστοιχα ως s^1, s^2, s^3 .



ΣΧΗΜΑ 2.2 Αμφίπακτο στοιχείο – ακραίες δράσεις

Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
 s_1^i &= \frac{n_j}{N_p^i} \\
 s_2^i &= \frac{m_j}{M_p^i} \\
 s_3^i &= \frac{m_k}{M_p^i}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Όπου n είναι η αξονική δύναμη, m η καμπτική ροπή, N_p η καθαρά αξονική πλαστική αντοχή του στοιχείου και M_p , είναι η καθαρά καμπτική πλαστική του αντοχή.

2.2.2 Ισορροπία

Είμαστε αυτή τη στιγμή σε θέση να μορφώσουμε τις συνθήκες ισορροπίας για την κατασκευή. Για αυτό το σκοπό, θεωρούμε το γενικό στοιχείο i με μήκος L^i με γωνία κατεύθυνσης θ ως προς την οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.2). Οι τρεις επιλεγμένες γενικευμένες τάσεις s^i φαίνονται μαζί με τις υπόλοιπες τρεις τάσεις που απαιτούνται για την ισορροπία του στοιχείου. Επίσης φαίνονται και οι απαιτούμενες αναλογίες των ασκούμενων φορτίων στους κόμβους αρχής και τέλους του στοιχείου j και k , οι οποίες συλλέγονται σε ένα διάνυσμα p^i (6×1). Πιο συγκεκριμένα:

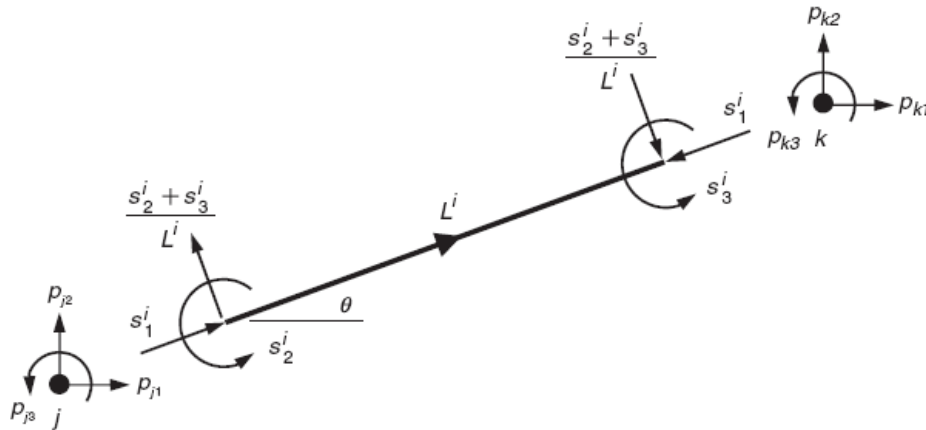
$$p^{iT} = [p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}, p_{k1}, p_{k2}, p_{k3}]
 \tag{2.2}$$

Η ισορροπία σε επίπεδο στοιχείου μπορεί να εξασφαλιστεί με το να διατυπωθούν οι έξι επικόμβιες σχέσεις ισορροπίας. Για τον κόμβο j , οι συνθήκες για οριζόντια, κατακόρυφη και καμπτική ισορροπία, μπορούν να γραφτούν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \sum H = 0 &= p_{j1} - s_1^i \cos\theta + \frac{s_2^i + s_3^i}{L_i} \sin\theta \\ \sum V = 0 &= p_{j2} - s_1^i \sin\theta - \frac{s_2^i + s_3^i}{L_i} \cos\theta \\ \sum M = 0 &= p_{j3} - s_2^i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Αντίστοιχα για τον κόμβο k έχω:

$$\begin{aligned} \sum H = 0 &= p_{k1} - s_1^i \cos\theta + \frac{s_2^i + s_3^i}{L_i} \sin\theta \\ \sum V = 0 &= p_{k2} - s_1^i \sin\theta - \frac{s_2^i + s_3^i}{L_i} \cos\theta \\ \sum M = 0 &= p_{k3} - s_2^i \end{aligned} \quad (2.4)$$



ΣΧΗΜΑ 2.3 Μέλος i σε ισορροπία και αντίστοιχα επικόμβια φορτία

Αυτές οι σχέσεις μπορούν συμπυκνωμένα να γραφούν ως εξής:

$$B^i s^i = p^i \quad (2.5)$$

Όπου B^i είναι το διαστάσεων (6×3) μητρώο ισορροπίας στοιχείου:

$$B^i = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{L_i} & -\frac{\sin\theta}{L_i} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{L_i} & \frac{\cos\theta}{L_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta & \frac{\sin\theta}{L_i} & \frac{\sin\theta}{L_i} \\ -\sin\theta & -\frac{\cos\theta}{L_i} & -\frac{\cos\theta}{L_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Σε αυτό το σημείο είναι εφικτό να εξαχθούν οι σχέσεις ισορροπίας σε επίπεδο κατασκευής. Η γενική σχέση λοιπόν είναι:

$$Bs = p \tag{2.7}$$

Όπου, για μια κατασκευή που διακριτοποιείται σε n στοιχεία και d βαθμούς ελευθερίας, B είναι το μητρώο ισορροπίας της κατασκευής διαστάσεων $(dx3n)$, s είναι το διάνυσμα διαστάσεων $(3n \times 1)$ όλων των γενικευμένων τάσεων σε μια τυπική μορφή: $s^T = [s^{1T} \dots s^{nT}]$ και $p^T = [p_1 \dots p_d]$.

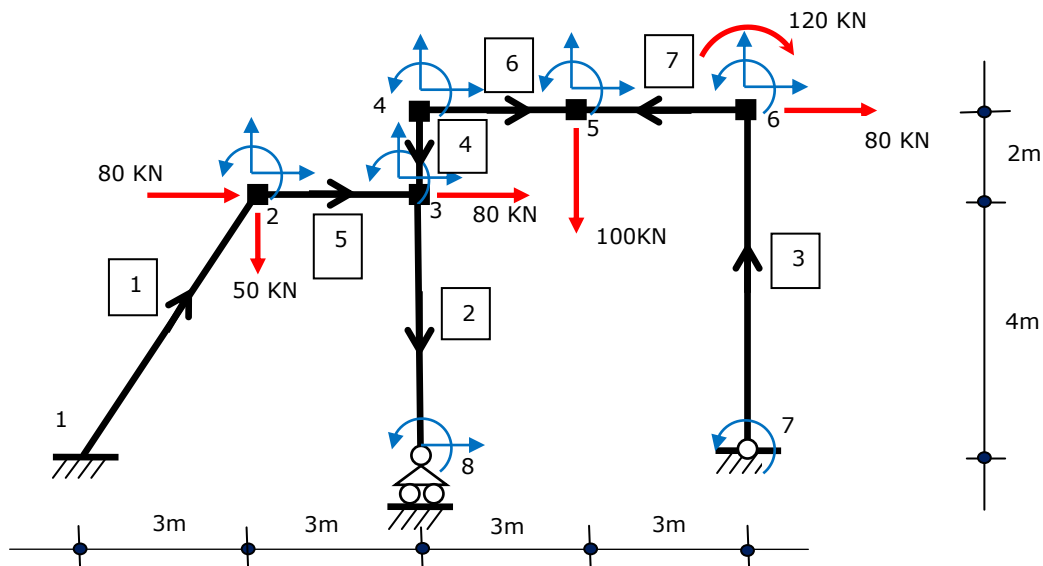
Παρατηρείται ότι το μητρώο $[B]$ μεσολαβεί στις εξισώσεις ισορροπίας και ως εκ τούτου εμπλέκει μόνο γεωμετρικά στοιχεία του μέλους, δηλ. τον προσανατολισμό και το μήκος του. Δεν περιλαμβάνει δηλαδή την δυσκαμψία των μελών η οποία υπεισέρχεται στην ισορροπία των υπερστατικών φορέων μέσω των εξισώσεων συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Το μητρώο B μπορεί να εξαχθεί από τα μητρώα B^i των στοιχείων με μια διαδικασία παρόμοια με τη συγκέντρωση των στοιχείων στα μητρώα δυσκαμψίας. Χρησιμοποιεί διανύσματα τοποθεσίας και ελευθερίας που περιέχουν πληροφορίες σχετικές με το πού τα στοιχεία B^i χρειάζονται να εισέλθουν στο μεγάλο μητρώο B του φορέα. Παραστατικά, θα περιγραφεί η διαδικασία μόρφωσης του μητρώου B με τη χρήση ενός απλού παραδείγματος.

2.2.3 Παράδειγμα μόρφωσης μητρώου ισορροπίας B

Με βάση την ισορροπία κάθε μέλους εξετάζεται η ισορροπία όλων των κόμβων του πλαισίου κατά τη διεύθυνση όλων των δυνατών εξωτερικών δράσεων που συμπίπτουν με τους βαθμούς ελευθερίας του πλαισίου.

Για ένα ολόσωμο επίπεδο πλαίσιο όπως αυτό του σχήματος (1.4) διακρίνονται οι κόμβοι, τα προσανατολισμένα μέλη με αρχή και πέρας και όλες οι δυνατότητες επιβολής καθολικών δράσεων στους κόμβους.



ΣΧΗΜΑ 2.4 Ολόσωμο πλαίσιο με επικόμβια φόρτιση

Με βάση τα στοιχεία αυτά μπορούν να διατυπωθούν αναλυτικά οι εξισώσεις ισορροπίας στους πλήρως ελεύθερους κόμβους 2, 3, 4, 5 και 6 και στους μερικώς ελεύθερους κόμβους 7 και 8 ως εξής:

Ισορροπία κόμβου 2.

$$\begin{Bmatrix} P_x^2 \\ P_y^2 \\ P_m^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 80 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_2^1] \{s^1\} + [B_2^5] \{s^2\} \quad (2.8)$$

Ισορροπία κόμβου 3.

$$\begin{Bmatrix} P_x^3 \\ P_y^3 \\ P_m^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_3^5] \{s^5\} + [B_3^2] \{s^2\} + [B_3^4] \{s^4\}$$

(2.9)

Ισορροπία κόμβου 4.

$$\begin{Bmatrix} P_x^4 \\ P_y^4 \\ P_m^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_4^4] \{s^4\} + [B_4^6] \{s^6\}$$

(2.10)

Ισορροπία κόμβου 5.

$$\begin{Bmatrix} P_x^5 \\ P_y^5 \\ P_m^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B_5^6] \{s^6\} + [B_5^7] \{s^7\}$$

(2.11)

Ισορροπία κόμβου 6.

$$\begin{Bmatrix} P_x^6 \\ P_y^6 \\ P_m^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 80 \\ 0 \\ -120 \end{Bmatrix} = [B_6^7] \{s^7\} + [B_6^3] \{s^3\}$$

(2.12)

Ισορροπία κόμβου 7.

Για την ισορροπία του κόμβου 7 ενδιαφέρει μόνο το άθροισμα των ροπών περί τον κόμβο της αρχής. Έτσι από την αντίστοιχη γραμμή του μητρώου $[B_7^3]$ ενδιαφέρει μόνο η τρίτη γραμμή, οπότε:

$$\{P_m^7\} = \{0\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{s^3\} \quad (2.13)$$

Ισορροπία κόμβου 8.

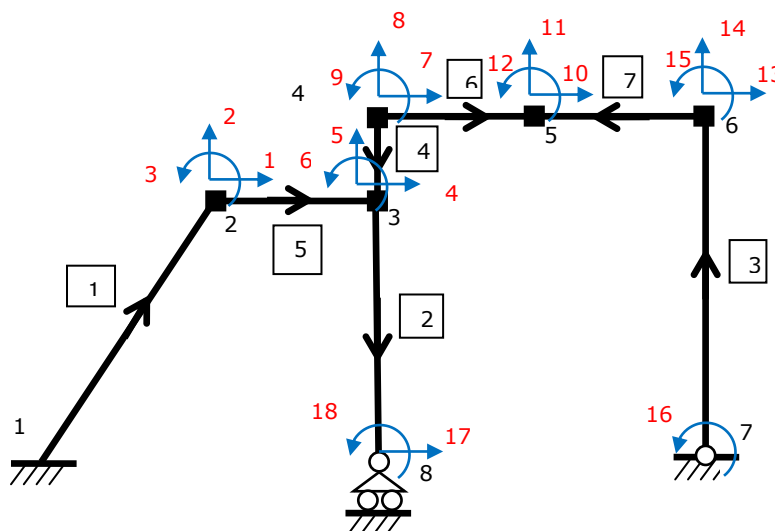
Τέλος, για την ισορροπία του κόμβου 8 ενδιαφέρουν μόνο η ισορροπία κατά τον άξονα x και οι ροπές. Έτσι από τις αντίστοιχες γραμμές του μητρώου $[B_8^2]$ επιλέγονται μόνο η πρώτη και η τρίτη γραμμή, οπότε:

$$\begin{Bmatrix} P_x^8 \\ P_m^8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(270) & \frac{\sin(270)}{L_2} & \frac{\sin(270)}{L_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{s^2\}$$

(2.14)

Παρατήρηση: Οι εξισώσεις ισορροπίας περί τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας δεν προσφέρονται καθόσον είναι άγνωστες οι τιμές των αντιδράσεων που αναπτύσσονται.

Ακολουθεί η αρίθμηση των εξισώσεων ισορροπίας κατά την διεύθυνση των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας, (συνήθως κατά αύξουσα σειρά κόμβου και κυκλική περιγραφή κατά x, y, θ), δηλαδή για το πλαίσιο του σχήματος (2.4), δεκαοκτώ (18) εξισώσεις (σχήμα 2.5).



ΣΧΗΜΑ 2.5 Αρίθμηση βαθμών ελευθερίας πλαισίου

Έτσι το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης $\{P\}$ έχει διαστάσεις $(d \times 1)$, όπου d το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του ολόσωμου πλαισίου. Στη συνέχεια ορίζεται το διάνυσμα των βασικών δράσεων των μελών $\{s\}$, το οποίο έχει διαστάσεις $(3M \times 1)$, όπου M το πλήθος των μελών του πλαισίου. Έτσι το ορθογωνικό μητρώο $[B]$ του πλαισίου χρειάζεται να έχει διαστάσεις $(d \times 3M)$. Η μητρωϊκή σχέση των εξισώσεων ισορροπίας καθορίζεται τότε ως εξής:

$$\{P_i\} = [B_{ij}]\{s_j\}, \text{ όπου } i = 1, 2, \dots, d \quad j = 1, 2, \dots, 3M \quad (2.15)$$

Στον καθορισμό των συντελεστών B_{ij} συμβάλλουν όλα τα συντρέχοντα μέλη σε κάθε κόμβο, γεγονός που απαιτεί την διασύνδεση των βαθμών ελευθερίας i του πλαισίου με τις βασικές δράσεις των μελών j όπως παρακάτω:

		Μέλος #1		
		1	2	3
x	1	-0,279	-0,192	-0,192
	2	0,96	-0,056	-0,056
	3	0	1	0
1	1	0,279	0,192	0,192
	2	-0,96	0,056	0,056
	3	0	0	1

		Μέλος #2		
		4	5	6
1	4	0	0,25	0,25
	5	-1	0	0
	6	0	1	0
17	4	0	-0,25	-0,25
	5	1	0	0
	6	0	0	1

		Μέλος #3		
		7	8	9
x	7	0	-0,167	-0,167
	8	1	0	0
	9	0	1	0
16	7	0	0,167	0,167
	8	-1	0	0
	9	0	0	1

		Μέλος #4		
		10	11	12
7	10	0	0,5	0,5
	11	-1	0	0
	12	0	1	0
4	10	0	-0,5	-0,5
	11	1	0	0
	12	0	0	1

		Μέλος #5		
		13	14	15
1	13	1	0	0
	14	0	0,333	0,333
	15	0	1	0
2	13	-1	0	0
	14	0	-0,333	-0,333
	15	0	0	1

		Μέλος #6		
		16	17	18
7	16	1	0	0
	17	0	0,333	0,333
	18	0	1	0
8	16	-1	0	0
	17	0	-0,333	-0,333
	18	0	0	1

		Μέλος #7		
		19	20	21

13	-1	0	0
14	0	-0,333	-0,333
15	0	1	0
10	1	0	0
11	0	0,333	0,333
12	0	0	1

Με τον τρόπο αυτό τα συμβάλλοντα στοιχεία των μητρώων $[B_{ij}^m]$, όλων των μελών αποκτούν ακριβή διεύθυνση αποστολής στο μητρώο $[B_{ij}]$ της κατασκευής και ισχύει:

$$B_{ij} = \sum_{m=1}^M B_{ij}^m \quad (2.16)$$

Όπου βεβαίως θεωρείται ότι αν ο συντελεστής B_{ij}^m δεν έχει οριστεί είναι μηδενικός.

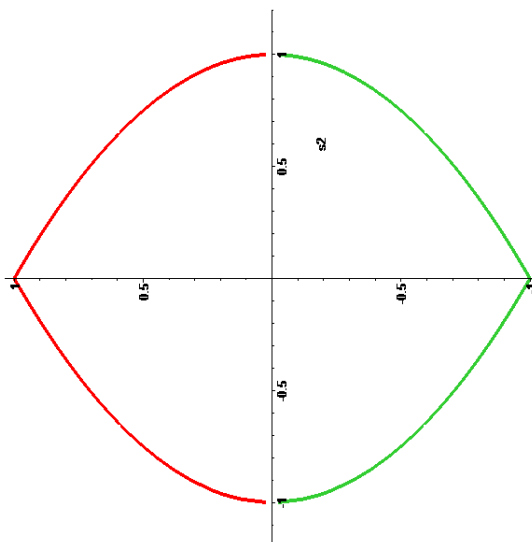
2.2.4 Μόρφωση περιορισμών αλληλεπίδρασης

Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, μια πλαστική άρθρωση μπορεί να σχηματιστεί σε οποιοδήποτε από τα άκρα των μελών. Για το γενικό μέλος i (σχήμα 2.2) μια πλαστική άρθρωση μπορεί να σχηματιστεί στον κόμβο j μέσω της αλληλεπίδρασης αξονικής και ροπής στις γενικευμένες τάσεις (s_1^i, s_2^i) και μια άλλη πλαστική άρθρωση σχηματίζεται στον κόμβο k μέσω της επίδρασης των (s_1^i, s_3^i) . Φυσικά, η περιγραφή που παρουσιάζεται εδώ περιλαμβάνει επίσης, σαν ειδική περίπτωση, την πιο γνωστή και απλούστερη περίπτωση καθαρά καμπτικής συμπεριφοράς.

Η συνθήκη των περιορισμών αλληλεπίδρασης είναι γενικά μη γραμμική. Παρόλ' αυτά, για τους σκοπούς της εργασίας, θα χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλα γραμμικοποιημένη απεικόνιση τέτοιων επιφανειών διαρροής. Αυτό έχει υπολογιστικά πλεονεκτήματα, καθώς το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Για παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση μιας στερεής ορθογωνικής διατομής υπό συνδυασμό αξονικής δύναμης και καμπτικής ροπής. Για τον κόμβο j του στοιχείου i , φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα, μια απλή οκτάγωνη επιφάνεια που πλησιάζει προσεγγιστικά τη γνωστή μη γραμμική συνθήκη των Massonet και Save.

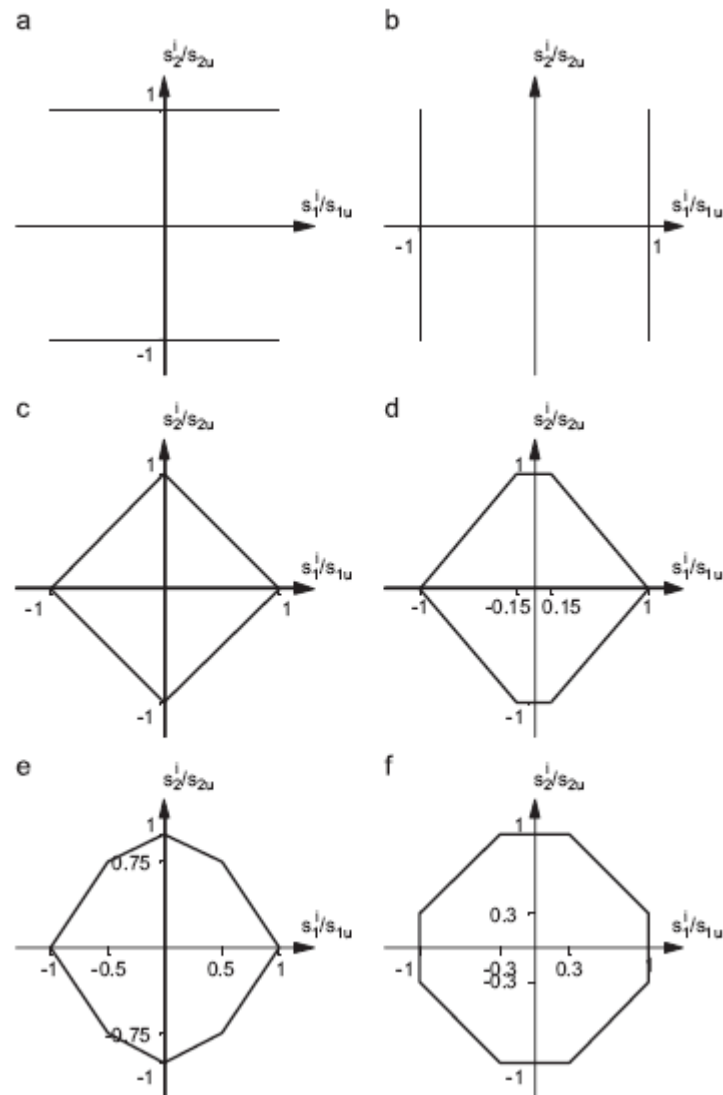
$$(s_1^i)^2 + |s_2^i| \leq 1 \quad (2.17)$$



ΣΧΗΜΑ 2.6 Αλληλεπίδραση ροπής, αξονικής (Massonet και Save)

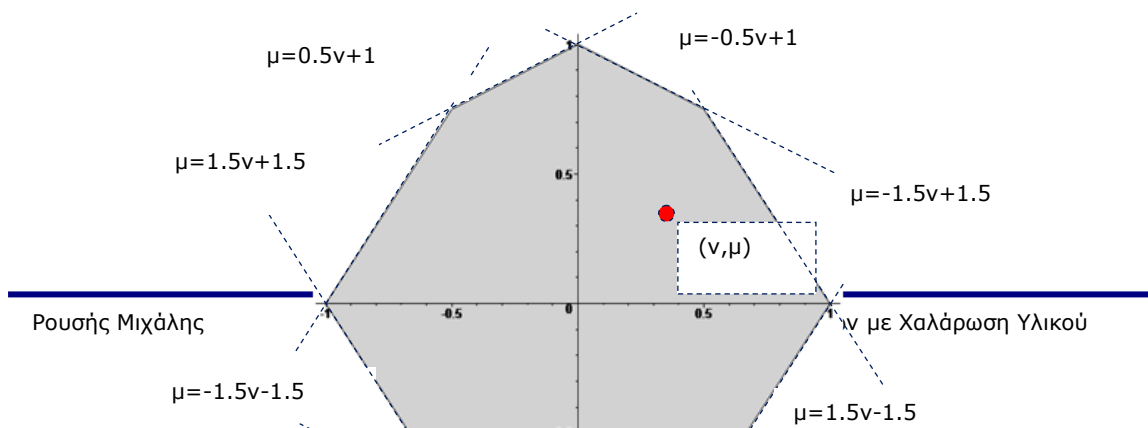
Προσέγγιση της παραπάνω μη γραμμικής καμπύλης μπορεί να γίνει κατά γραμμικό τρόπο με ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο, όπως π.χ το παρακάτω οκτάγωνο με ενδιάμεσα σημεία $(\pm 0.5, \pm 0.75)$, ή με ανώτερης τάξης πολύγωνο ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Μερικά τυπικά γραμμικοποιημένα μοντέλα της επιφάνειας διαρροής για τον κόμβο α του στοιχείου i φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Οι αδιάστατοι άξονες απεικονίζουν την καμπτική ροπή s_2^i / s_{2u} και την αξονική δύναμη s_1^i / s_{1u} , όπου s_{1u}, s_{2u} είναι οι αντίστοιχες ικανότητες διαρροής. Οι ακόλουθες παρατηρήσεις διευκρινίζουν καθένα από τα διαγράμματα του σχήματος 2.7.



ΣΧΗΜΑ 2.7 Παραδείγματα γραμμικοποιημένων επιφανειών διαρροής (α) καθαρά καμπτική συμπεριφορά (β) καθαρά αξονική συμπεριφορά (γ) Ρόμβος (δ) Εξάγωνο (ε),(f) Οκτάγωνο

Για διαρροή που εξαρτάται από μόνο ένα είδος έντασης, η επιφάνεια διαρροής ορίζεται από δύο ευθείες παράλληλες γραμμές με οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση. Πιο περίπλοκα μοντέλα φαίνονται στο σχήμα 2.7 για συνδυασμό γενικευμένων τάσεων και το πώς επηρεάζουν την κατάσταση διαρροής. Το σχήμα της επιφάνειας διαρροής εξαρτάται από την επιφάνεια της διατομής του στοιχείου. Το πιο απλό μοντέλο είναι αυτό του ρόμβου (2.7.c). Ένα μοντέλο ευρέως αποδεκτό για διατομές διπλού ταυ είναι το εξάγωνο του σχήματος (2.7.d). Το μοντέλο του σχήματος (2.7.e) υποδηλώνει τη διαρροή μιας ορθογωνικής διατομής, όπως επίσης και το μοντέλο (2.7.f). Στις επιλύσεις των επόμενων ενοτήτων χρησιμοποιούνται οι επιφάνειες (2.7.e), (2.7.d) ή η καθαρά καμπτική συμπεριφορά (2.7.a).



ΣΧΗΜΑ 2.8 Πολυγωνική προσέγγιση χωρίου αλληλεπίδρασης

Για να εξασφαλιστεί ότι ένα σημείο για κάθε άκρο δοκού βρίσκεται εντός του αντιστοίχου πολυγώνου, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής οκτώ περιορισμοί:

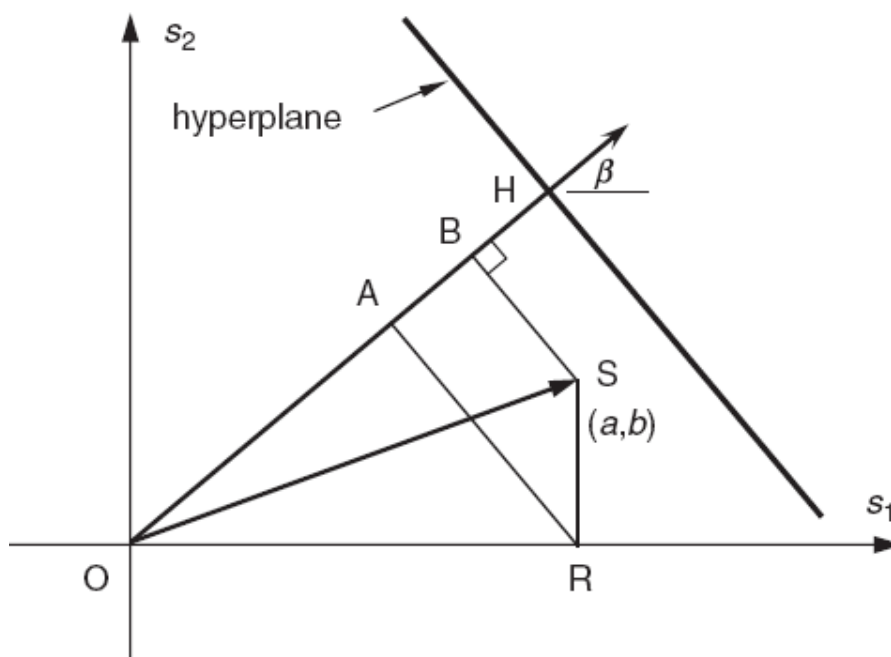
$$\begin{aligned}
 l_1 s_1^i + m_1 s_2^i &\leq r_{j1}^i \\
 l_2 s_1^i + m_2 s_2^i &\leq r_{j2}^i \\
 l_2 s_1^i - m_2 s_2^i &\leq r_{j2}^i \\
 l_1 s_1^i - m_1 s_2^i &\leq r_{j1}^i \\
 -l_1 s_1^i - m_1 s_2^i &\leq r_{j1}^i \\
 -l_2 s_1^i - m_2 s_2^i &\leq r_{j2}^i \\
 -l_2 s_1^i + m_2 s_2^i &\leq r_{j2}^i \\
 -l_1 s_1^i + m_1 s_2^i &\leq r_{j1}^i
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Όπου: $\left(l_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, m_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο 1, $\left(l_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}, m_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο 2, r_{j1}^i είναι η απόσταση του επιπέδου 1 από το κέντρο και r_{j2}^i είναι η απόσταση του επιπέδου 2 από το κέντρο.

Πριν παρουσιαστούν οι παραπάνω σχέσεις σε συμπυκνωμένη μητρική μορφή, θα ήταν αξιόλογο να δοθεί μια γεωμετρική επεξήγηση αυτών των συνθηκών διαρροής. Ας θεωρηθεί ένα επίπεδο έντασης OS με συντεταγμένες (a,b) και ένα απλό επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα (2.9).

Γεωμετρικά, η συνθήκη διαρροής εκφράζεται ως $OB \leq OH$. Άρα, όταν το OB, η προβολή του OS στο OH, είναι μικρότερη από OH, το σημείο της έντασης μέσα στη επιφάνεια διαρροής. Όταν $OB=OH$, το σημείο της έντασης βρίσκεται πάνω στο όριο της επιφάνειας. Επειδή $OB=OA+AB$ και επειδή $OA=acos\beta$, $AB=bsin\beta$, και $OH=r$, τότε η συνθήκη $OB \leq OH$ μπορεί να γραφτεί ως $acos\beta + bsin\beta \leq r$, η οποία είναι ακριβώς η γενική συνθήκη διαρροής για οποιοδήποτε επίπεδο.

Επίσης οι τιμές (cosβ, sinβ) είναι ξεκάθαρα τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο.



ΣΧΗΜΑ 2.9 Γεωμετρική αναπαράσταση της συνθήκης διαρροής ενός επιπέδου

Γενικά, οι συνθήκες διαρροής για τον κόμβο j του στοιχείου i μπορούν να γραφτούν ως:

$$N_j^{iT} s_j^i \leq r_j^i \tag{2.19}$$

Όπου, για την περίπτωση που φαίνεται στο σχήμα (2.7):

$$N_j^{iT} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \\ l_2 & -m_2 \\ l_1 & -m_1 \\ -l_1 & -m_1 \\ -l_2 & -m_2 \\ -l_2 & m_2 \\ -l_1 & m_1 \end{bmatrix}, \quad r_j^i = \begin{bmatrix} r_{j1}^i \\ r_{j2}^i \\ r_{j2}^i \\ r_{j1}^i \\ r_{j1}^i \\ r_{j2}^i \\ r_{j2}^i \\ r_{j1}^i \end{bmatrix}, \quad s_j^i = \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Τώρα μπορούν να συγκεντρωθούν οι σχέσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους j και k ώστε να σχηματιστούν οι συνθήκες διαρροής για ένα στοιχείο i :

$$N^iT s^i \leq r^i \tag{2.21}$$

Μια σχέση που έχει την ίδια μορφή όπως και η (2.19). Τελικά, για το στοιχείο i , στο οποίο μπορούν να σχηματιστούν πλαστικές αρθρώσεις στα άκρα j και k προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$N^{iT} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ l_2 & -m_2 & 0 \\ l_1 & -m_1 & 0 \\ -l_1 & -m_1 & 0 \\ -l_2 & -m_2 & 0 \\ -l_2 & m_2 & 0 \\ -l_1 & m_1 & 0 \\ l_1 & 0 & m_1 \\ l_2 & 0 & m_2 \\ l_2 & 0 & -m_2 \\ l_1 & 0 & -m_1 \\ -l_1 & 0 & -m_1 \\ -l_2 & 0 & -m_2 \\ -l_2 & 0 & m_2 \\ -l_1 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \quad r^i = \begin{bmatrix} r_j^i \\ r_k^i \end{bmatrix}, \quad s^i = \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Τελικά μπορούμε να συγκεντρώσουμε τις συνθήκες διαρροής για ολόκληρη την κατασκευή, σύμφωνα με τη σχέση:

$$N^T s \leq r \quad (2.23)$$

Όπου, όπως συνηθίζεται σε μια μεθολογία πεπερασμένων στοιχείων, οι ποσότητες στα διανύσματα και στα μητρώα αντιπροσωπεύουν τις ασύζευκτες συμμετοχές των εκάστοτε στοιχείων, ως συμπληρωματικά διανύσματα και ως μπλοκ διαγωνίων μητρώων. Συγκεκριμένα: $s^T = [s^{1T} \dots s^{nT}]$, $r^T = [r^{1T} \dots r^{nT}]$ και $N = \text{diag}[N^1 \dots N^n]$. Γενικά, αν η επιφάνεια διαρροής σε ένα κόμβο, έχει γραμμικοποιηθεί σε γ επίπεδα, τότε το μητρώο N είναι διαστάσεων $(3n \times 2\gamma n)$ και το r είναι ένα διάνυσμα $(2\gamma n \times 1)$.

2.3 Διατύπωση του αρχικού και του δυικού προβλήματος στην οριακή ανάλυση

Εφόσον έχει ήδη γίνει η στατική περιγραφή του φορέα με βάση τους κόμβους, μπορούμε τώρα να σχηματίσουμε τη συγκεκριμένη μορφή της στατικής προσέγγισης στην οριακή ανάλυση, σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όπου οι μεταβλητές θα είναι το a και το s :

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} && a \\ &\text{Υποκείμενο σε} && Bs - af = 0 \\ &&& N^T s \leq r \end{aligned} \quad (2.24)$$

Όπου 0 είναι ένα διάνυσμα κατάλληλων διαστάσεων, δηλαδή $(d \times 1)$.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι, σε αυτό το στάδιο, οποιοσδήποτε γνώστης του γραμμικού προγραμματισμού, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζει το φυσικό νόημα των ποσοτήτων, θα μπορούσε αμέσως να σχηματίσει το δυικό πρόβλημα από γνωστές δυικές ιδιότητες του γραμμικού προγραμματισμού. Το δυικό πρόβλημα μπορεί να κωδικοποιηθεί ως:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & r^T z \\
 \text{Υποκείμενο σε} \quad & B^T u - Nz = 0 \\
 & f^T u = 1 \\
 & z \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Όπου z και u είναι οι δυϊκές μεταβλητές.

Από φυσικής άποψης, το z μπορεί να αναγνωριστεί ως ένα διάνυσμα μη αρνητικών πλαστικών πολλαπλασιαστών και το u σαν ένα διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων. Το πρώτο σετ περιορισμών αντιπροσωπεύει τη συμβιβαστότητα, και το δεύτερο έναν κανονικοποιημένο όρο εξωτερικού έργου. Να προσεχθεί ότι η έκφραση της εξίσωσης του έργου (εξισώνοντας το εξωτερικό έργο και τις εσωτερικές δυνάμεις) δίνει:

$$af^T u = r^T z \tag{2.26}$$

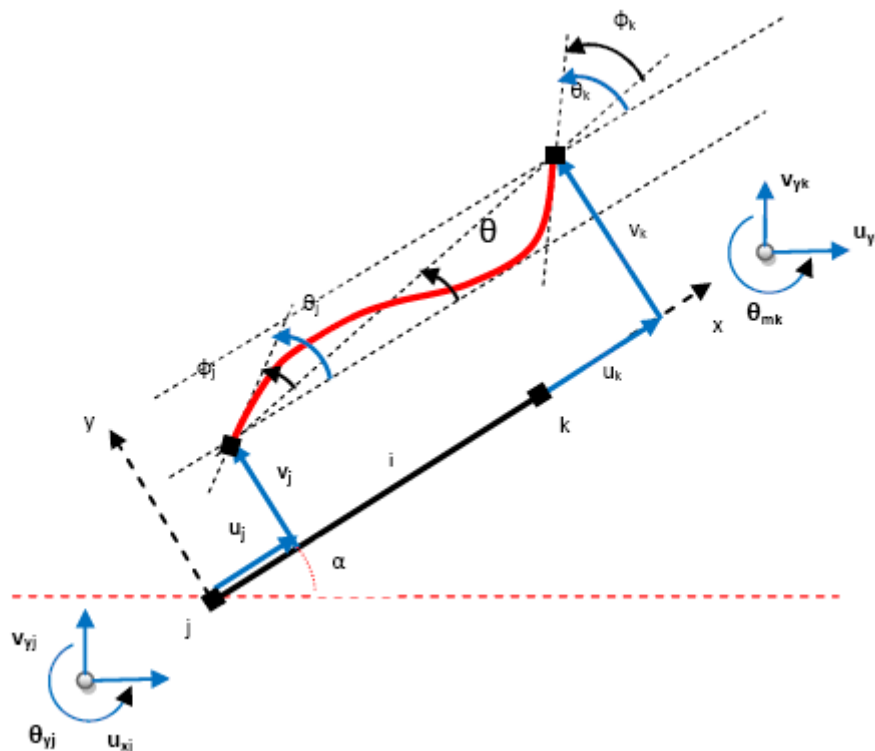
Και επειδή $f^T u = 1$, τότε η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (εξίσωση 2.25), για οποιαδήποτε αποδεκτή λύση (πιθανό μηχανισμό) είναι στην πραγματικότητα ο κινηματικά αποδεκτός φορτιστικός συντελεστής a_k .

Η γνώση του γραμμικού προγραμματισμού προσφέρει ακόμα μια εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα σχετική με τα παραπάνω προβλήματα, δηλαδή ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange της βέλτιστης λύσης στο στατικό (κινηματικό) πρόβλημα, μας παρέχουν άμεσα ένα σετ βέλτιστων κινηματικών (στατικών) μεταβλητών. Οι περισσότεροι λύτες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, συμπεριλαμβανομένου αυτού του Matlab, θα αναφέρουν αυτούς τους πολλαπλασιαστές σαν ένα αποτέλεσμα της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Ειδικότερα, κάθε περιορισμός της εξίσωσης (2.24) σχετίζεται με έναν πολλαπλασιαστή Lagrange, και στο βέλτιστο τα στοιχεία του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange, μήκους $(d+2\gamma)$, ταξινομούνται με τη σειρά του σετ περιορισμών του στατικού προβλήματος. Για παράδειγμα, οι πρώτοι d πολλαπλασιαστές απεικονίζουν τις βέλτιστες τιμές για τις μετακινήσεις u (σε αντιστοιχία με τις στατικές μεταβλητές af), και οι επόμενοι 2γ πολλαπλασιαστές σχηματίζουν τους βέλτιστους πλαστικούς πολλαπλασιαστές z που σχετίζονται με καθένα από τα επίπεδα της επιφάνειας διαρροής. Αυτή η χρήσιμη ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να προκύψουν βέλτιστες κινηματικά λύσεις χωρίς στην πραγματικότητα να χρειαστεί να λυθεί το κινηματικό πρόβλημα.

2.4 Φυσικό νόημα δυϊκού προβλήματος

Εξετάζοντας την κινηματική πλευρά της συμπεριφοράς αμφίπακτης δοκού επιδιώκουμε να ικανοποιήσουμε το συμβιβαστό των παραμορφώσεων που καθορίζουν την ένταση της δοκού με βάση τις ακραίες μετακινήσεις στα άκρα της δοκού, εκφραζόμενες στο τοπικό και στη συνέχεια στο καθολικό σύστημα. Έτσι στην ουσία αφαιρούμε την κίνηση στερεού σώματος που δεν παράγει ένταση.

Για κάθε αμφίπακτο μέλος από την αρχική παραμορφωμένη κατάσταση διακρίνουμε τις ακραίες μετακινήσεις στο τοπικό ή καθολικό σύστημα αναφοράς. Ως μετακινήσεις της δοκού θεωρούνται εδώ οι δ_j, ϕ_j, ϕ_k , δηλαδή αυτές που παράγουν την αξονική ένταση και τις ροπές στα άκρα και προκύπτουν όταν βρεθούν οι μετακινήσεις ελευθέρου σώματος, ενώ η δ_j θεωρείται θετική ως βράχυνση καθόσον στις βασικές ακραίες δράσεις η θλιπτική αξονική δύναμη στην αρχή της δοκού θεωρήθηκε ως θετική.



ΣΧΗΜΑ 2.10 Ακρικές μετακινήσεις αμφίπακτης δοκού – παραμόρφωση

$$\begin{Bmatrix} \delta_j \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_i & 1 & 0 & -1/L_i & 0 \\ 0 & 1/L_i & 0 & 0 & -1/L_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Ή

$$\{\delta\} = [E]^T \{u\} \quad (2.28)$$

Από τη συμπεριφορά της δοκού ορίζεται η εξής ελαστική συμπεριφορά-καταστατική σχέση μεταξύ των βασικών εντάσεων και ενεργών μετακινήσεων.

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ M_j \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L_i & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L_i & 2EI/L_i \\ 0 & 2EI/L_i & 4EI/L_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_j \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Ή

$$\{s\} = [D] \{\delta\} \quad (2.30)$$

Στο καθολικό σύστημα οι ακρικές μετακινήσεις προβαλλόμενες μπορούν να μετασχηματιστούν με την παρακάτω σχέση:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_j^i \\ v_j^i \\ \theta_j^i \\ u_k^i \\ v_k^i \\ \theta_k^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_j^i \\ \bar{v}_j^i \\ \bar{\theta}_j^i \\ \bar{u}_k^i \\ \bar{v}_k^i \\ \bar{\theta}_k^i \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (2.31)$$

Οπότε:

$$\{\bar{\mathbf{A}}^i\} = [\mathbf{T}][\mathbf{E}]\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{T}][\mathbf{E}][\mathbf{D}][\mathbf{E}]^T [\mathbf{T}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (2.32)$$

Ή

$$\{\bar{\mathbf{A}}^i\} = [\mathbf{B}][\mathbf{D}][\mathbf{B}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{k}]\{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (2.33)$$

Όπου $[\mathbf{k}]$ το μητρώο δυσκαμψίας της δοκού στο καθολικό σύστημα αξόνων.

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} EA/L_i & 0 & 0 & -EA/L_i & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L_i^3 & 6EI/L_i^2 & 0 & -12EI/L_i^3 & 6EI/L_i^2 \\ 0 & 6EI/L_i^2 & 4EI/L_i^2 & 0 & -6EI/L_i^2 & 2EI/L_i \\ \hline -EA/L_i & 0 & 0 & EA/L_i & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L_i^3 & -6EI/L_i^2 & 0 & 12EI/L_i^3 & -6EI/L_i^2 \\ 0 & 6EI/L_i^2 & 2EI/L_i & 0 & -6EI/L_i^2 & 4EI/L_i \end{bmatrix} [\mathbf{T}]^T \quad (2.34)$$

Η παραπάνω διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας του αμφίπακτου στοιχείου δοκού στο επίπεδο, όπως παρουσιάζεται στη σχέση (2.33), έχει την ίδια δομή με αυτή των πεπερασμένων στοιχείων.

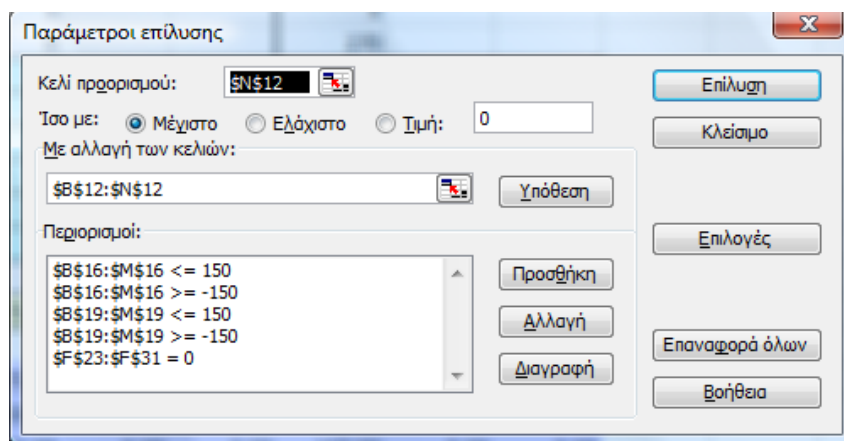
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.28) και (2.31) είναι δυνατόν να συνδεθούν οι τρεις βασικές μετακινήσεις του στοιχείου με τις ακραίες μετακινήσεις στους κόμβους στο καθολικό σύστημα αξόνων με τη σχέση:

$$\{\delta\} = [\mathbf{E}]^T [\mathbf{T}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{B}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (2.35)$$

Η οποία αποτελεί τη σχέση συμβιβαστού των παραμορφώσεων για το στοιχείο. Με βάση το συμβιβαστό των παραμορφώσεων σε κάθε στοιχείο, μπορεί να μορφωθεί το μητρώο συμβιβαστού για ολόκληρο το φορέα ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία όπως και για το μητρώο ισορροπίας του φορέα. Μπορεί να προκύψει όμως κατ' ευθείαν ως το ανάστροφο του μητρώου ισορροπίας του φορέα με διαστάσεις $(3M \times d)$.

2.5 Παραδείγματα με χρήση EXCEL

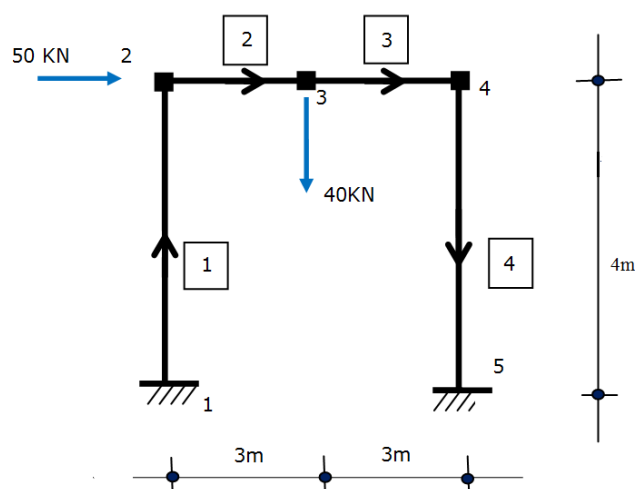
Η Επίλυση στο Microsoft Excel είναι μέρος μιας ακολουθίας εντολών που ορισμένες φορές ονομάζονται εργαλεία υποθετικής ανάλυσης. Με την Επίλυση, μπορεί να βρεθεί η βέλτιστη τιμή για τον τύπο ενός κελιού — το οποίο ονομάζεται κελί προορισμού — σε ένα φύλλο εργασίας. Η Επίλυση λειτουργεί με μια ομάδα κελιών, τα οποία σχετίζονται είτε άμεσα είτε έμμεσα με τον τύπο του κελιού προορισμού. Η Επίλυση μεταβάλλει τις τιμές στα κελιά που καθορίζεται ότι αλλάζουν — τα οποία λέγονται ρυθμιζόμενα κελιά — για να καταλήξει με τον τύπο του κελιού προορισμού, στο αποτέλεσμα που καθορίζεται. Είναι εφικτό να εφαρμοστούν περιορισμοί για να μειωθούν οι τιμές που μπορεί να χρησιμοποιήσει η Επίλυση στο μοντέλο και οι περιορισμοί μπορούν να αναφέρονται σε άλλα κελιά, τα οποία επηρεάζουν τον τύπο του κελιού προορισμού.



ΣΧΗΜΑ 2.11 Παράθυρο παραμέτρων προβλήματος βελτιστοποίησης στο Excel

Παράδειγμα 1

Το πρώτο παράδειγμα, για χάρη απλότητας, θα είναι ένα πλαίσιο, με διαστάσεις και αρίθμηση μελών και κόμβων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, στο οποίο αρχικά θα γίνει επίλυση για καθαρά καμπτική συμπεριφορά. Σε αυτήν την περίπτωση, όλα τα μέλη θα έχουν ροπή ίση με $M_p=150\text{kNm}$. Το μήκος της δοκού θα είναι 6m, το ύψος των υποστυλωμάτων 4m και τα φορτία θα είναι ένα οριζόντιο ίσο με 50kN και ένα κατακόρυφο στο μέσον της δοκού ίσο με 40kN.



ΣΧΗΜΑ 2.12 Φορέας παραδείγματος 1

Χρησιμοποιώντας ενεργειακά θεωρήματα στο συγκεκριμένο φορέα, προκύπτει ότι ο κρίσιμος μηχανισμός κατάρρευσης είναι ένας σύνθετος, συνδυασμός του

μηχανισμού δοκού και του πλάγιου. Σε αυτόν τον μηχανισμό σχηματίζονται πλαστικές αρθρώσεις στις διατομές 1,3,4 και 5. Ο συντελεστής κατάρρευσης λ Προκύπτει ίσος με $\lambda=2.8125$. Συγκεκριμένα:

Μηχανισμός δοκού: $-M_{p2}(-\theta) - M_{p4}(-\theta) + 2M_{p3}(\theta) = 40 * 3\theta * \lambda \Rightarrow \lambda_1 = 5$

Πλάγιος μηχανισμός: $-M_{p1}(-\theta) + M_{p2}(\theta) - M_{p3}(-\theta) + M_{p4}(\theta) = 50 * 4\theta * \lambda \Rightarrow \lambda_2 = 3$

Σύνθετος μηχανισμός: $M_{p1} + 2M_{p3} + 2M_{p4} + M_{p5} = 320\lambda \Rightarrow \lambda_{crit} = 2,8125$

Για τη μόρφωση του λογιστικού φύλλου Excel, καταρχήν δίνονται τα μήκη και οι διευθύνσεις των μελών ώστε να μορφωθούν τα μητρώα B^i .

Member	#1			#2		
Li(m)	4			3		
φi (degrees)	90			0		
Bi=	6,13E-17	-0,25	-0,25	1	0	0
	1	1,53E-17	1,53E-17	0	0,33333333	0,333333
	0	1	0	0	1	0
	-6,1E-17	0,25	0,25	-1	0	0
	-1	-1,5E-17	-1,5E-17	0	-0,3333333	-0,33333
	0	0	1	0	0	1

#3			#4		
3			4		
0			270		
1	0	0	-1,8E-16	0,25	0,25
0	0,333333	0,333333	-1	-4,6E-17	-4,6E-17
0	1	0	0	1	0
-1	0	0	1,84E-16	-0,25	-0,25
0	-0,33333	-0,33333	1	4,59E-17	4,59E-17
0	0	1	0	0	1

Στη συνέχεια ορίζονται τα κελιά των μεταβλητών, δηλαδή οι δράσεις s και ο φορτιστικός συντελεστής λ . Οι παρακάτω τιμές είναι αυτές που προέκυψαν μετά την επίλυση.

Si	ΜΕΛΟΣ 1			ΜΕΛΟΣ 2		
	-12,50	-150,00	-112,50	-75,00	112,50	-150,00
	ΜΕΛΟΣ 3			ΜΕΛΟΣ 4		
	-75,00	150,00	150,00	-100,00	-150,00	-150,00

Όμοια ορίζονται τα κελιά των εντατικών μεγεθών στα άκρα του κάθε μέλους.

Μέλος 1	Μέλος 2	Μέλος 3	Μέλος 4
---------	---------	---------	---------

Nj=	65,625	-75,00	-75	-75
Qj=	-12,5	-12,50	100	100
Mj=	-150	112,50	150	-150
Nk=	-65,625	75,00	75	75
Qk=	12,5	12,50	-100	-100
Mk=	-112,5	-150,00	150	-150

Τέλος, ορίζονται οι θέσεις των κελιών όπου θα διατυπωθούν οι σχέσεις ισορροπίας εσωτερικής και εξωτερικής φόρτισης. Για το παράδειγμά μας ο πίνακας ισορροπίας φαίνεται παρακάτω:

Nodes	Loads (KN)			Equilibrium
	Internal	External	*λ	
#2	-140,625	50,000	140,625	0,0000
	0,000	0,000	0,000	0,0000
	0,000	0,000	0,000	0,0000
#3	0,000	0,000	0,000	0,0000
	112,500	-40,000	-112,500	0,0000
	0,000	0,000	0,000	0,0000
#4	0,000	0,000	0,000	0,0000
	0,000	0,000	0,000	0,0000
	0,000	0,000	0,000	0,0000

Για τη διατύπωση του προβλήματος έχω περιορισμούς ισότητας, δηλαδή τις εξισώσεις ισορροπίας και περιορισμούς ανισότητας, δηλαδή καμία από τις τιμές της καμπτικής έντασης στα μέλη να μην ξεπεράσει τις ακραίες τιμές ($\pm 150\text{kNm}$). Ο φορτιστικός συντελεστής που προκύπτει από την επίλυση είναι: $\lambda = 2.8125$ ο οποίος σωστά ταυτίζεται με τα αποτελέσματα από τα ενεργειακά θεωρήματα.

Στο επόμενο βήμα, θα επιχειρηθεί να διατυπωθεί και η αλληλεπίδραση αξονικής και ροπής. Στο ίδιο παράδειγμα θα θεωρηθεί ότι οι δοκοί έχουν ροπή διαρροής $M_p = 150\text{kNm}$ και των υποστυλωμάτων: $M_p = 200\text{kNm}$. Αντίστοιχα, η αξονική διαρροής των δοκών θα είναι: $N_p = 200\text{kN}$ και των υποστυλωμάτων $N_p = 300\text{kN}$.

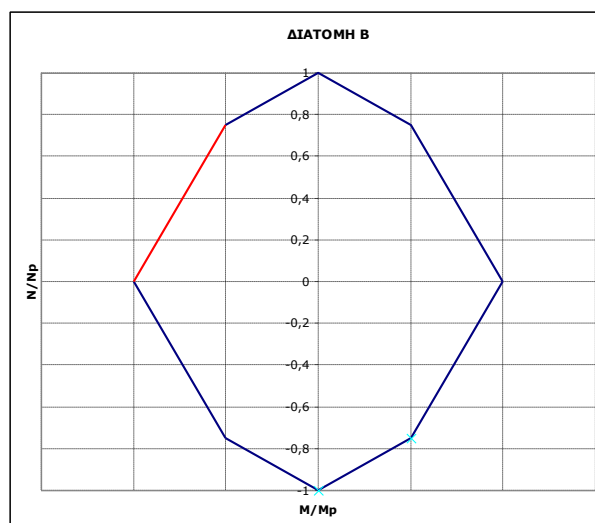
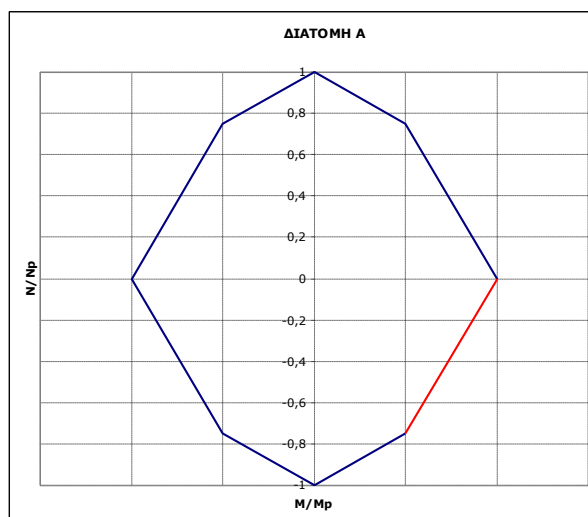
Η μόνη διαφορά με το αρχείο επίλυσης για καθαρά καμπτική συμπεριφορά είναι ότι θα μορφωθούν κελιά όπου θα περιέχουν τις εξισώσεις των ευθειών του πολυγώνου της αλληλεπίδρασης και θα αποτελούν τους ανισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος. Οι ιστοικοί περιορισμοί ισορροπίας παραμένουν ως έχουν.

Member	Interaction			
	1	2	3	4
j-1	-2,5839	-1,7412	-1,2379	-2,5194
j-2	-0,6678	-2,3656	-2,8689	-1,2961
j-3	-2,0000	-0,8722	-0,3689	-1,7476
j-4	-0,0839	-1,4967	-2,0000	-0,5243
j-5	-2,3322	-0,6344	-0,1311	-1,7039
j-6	-0,4161	-1,2588	-1,7621	-0,4806
j-7	-1,9161	-0,5033	0,0000	-1,4757
j-8	0,0000	-1,1278	-1,6311	-0,2524

k-1	-1,6083	-1,7621	-0,1311	-1,9563
k-2	-1,1400	-0,1311	-1,7621	-0,2282
k-3	-1,1922	-1,6311	0,0000	-1,7282
k-4	-0,7239	0,0000	-1,6311	0,0000
k-5	-1,8600	-2,8689	-1,2379	-2,7718
k-6	-1,3917	-1,2379	-2,8689	-1,0437
k-7	-1,2761	-2,0000	-0,3689	-2,0000
k-8	-0,8078	-0,3689	-2,0000	-0,2718

Ο παραπάνω πίνακας προέκυψε μετά την επίλυση. Με έγχρωμο έντονο χρώμα απεικονίζονται οι ευθείες του εκάστοτε πολυγώνου της αλληλεπίδρασης οι οποίες έχουν φτάσει στο όριο διαρροής δηλαδή έχουν φτάσει την οριακή τιμή 0. Φαίνεται πως έχουν σχηματιστεί πλαστικές αρθρώσεις στην αρχή του μέλους 1, στο τέλος του μέλους 2 και 3 και στο τέλος του μέλους 4, κάτι που οδηγεί πάλι στη δημιουργία ενός σύνθετου μηχανισμού κατάρρευσης. Ο φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης που προκύπτει είναι ίσος με: **$\lambda=2,668$** .

Ενδεικτικά θα παρουσιαστούν οι συνθήκες διαρροής στη φάση κατάρρευσης για δύο διατομές, αυτήν στην αρχή του μέλους 1 και αυτήν στο τέλος του μέλους 2.



ΣΧΗΜΑ 2.13 Συνθήκες διαρροής για δύο τυπικές διατομές φορέα παραδείγματος 1

Παρατηρείται με κόκκινο χρώμα η συγκεκριμένη συνθήκη η οποία έχει φτάσει στο όριο από το εκάστοτε πολύγωνο. Για την πρώτη διατομή αφορά την 8^η ευθεία και για τη δεύτερη διατομή, αφορά την 4^η ευθεία.

Τέλος, για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα επιχειρηθεί η διατύπωση μη γραμμικών περιορισμών με βάση την ακριβή εξίσωση των Massonet και Save, δηλαδή: $s_1^2 + |s_2| \leq 1$. Με τα ίδια δεδομένα, τα κελιά των περιορισμών, παίρνουν την εξής μορφή:

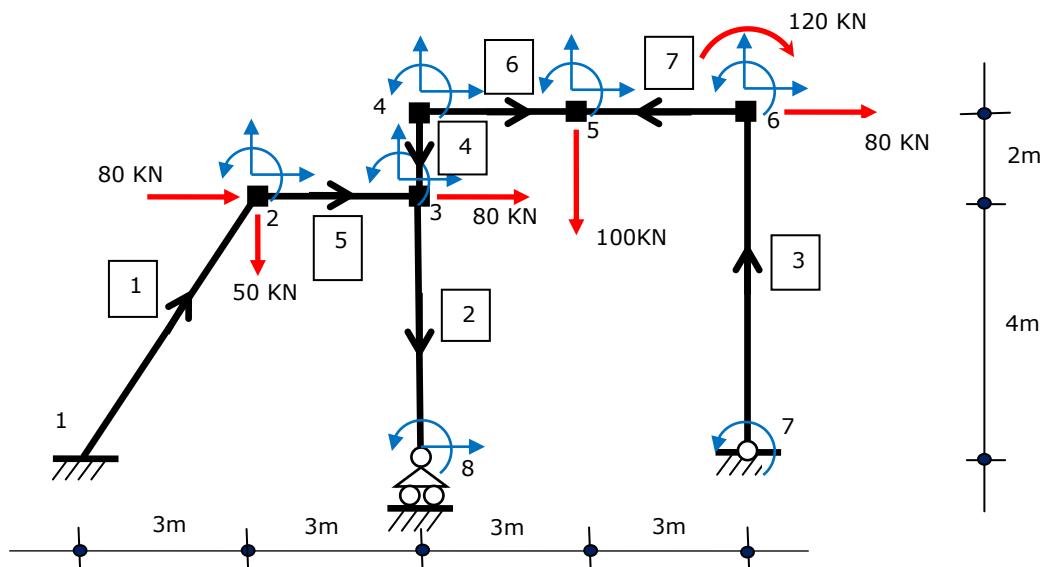
Interaction non-linear

Member	1	2	3	4
j	1,0000	0,4682	1,0000	0,7165
k	0,2455	1,0000	1,0000	1,0000

Όπου με έντονο χρώμα φαίνονται οι διατομές που έχουν διαρρεύσει. Ο φορτιστικός συντελεστής στην περίπτωση μη γραμμικών περιορισμών έχει προκύψει: $\lambda=2,786$, δηλαδή ελαφρώς μεγαλύτερος από την περίπτωση της γραμμικοποίησης του πολυγώνου διαρροής (4% μεγαλύτερο). Αυτό συμβαίνει επειδή πλέον έχουμε την ακριβή επιφάνεια αλληλεπίδρασης και όχι μια προσεγγιστική, γραμμικοποιημένη. Παρόλ' αυτά, η διαφορά είναι πολύ μικρή, άρα μπορεί να θεωρηθεί γενικά ότι η προσέγγιση με ένα οκτάγωνο είναι ικανοποιητική.

Παράδειγμα 2

Θα επιλυθεί ο φορέας με τα φορτία που απεικονίσθηκε στη θεωρητική περιγραφή του προβλήματος.

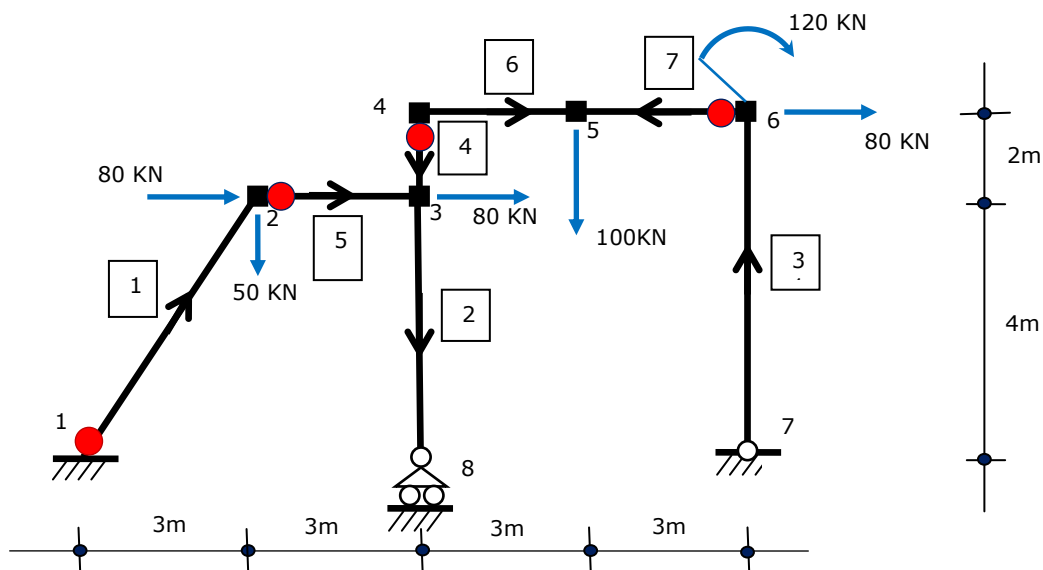


ΣΧΗΜΑ 2.14 Φορέας παραδείγματος 2

Όλα τα μέλη έχουν ροπή διαρροής ίση με $M_p=100\text{kNm}$ και αξονική διαρροής ίση με $N_p=150\text{kN}$. Όμοια με πριν, τίθενται τα δεδομένα εισαγωγής στα αντίστοιχα κελιά και ακολουθεί η επίλυση με το Solver του Excel η οποία δίνει φορτιστικό συντελεστή ίσο με: $\lambda=0,22$. Από τον πίνακα των εσωτερικών περιορισμών, μπορεί να διευκρινιστεί μάλιστα και ποιες είναι αυτές οι διατομές που έχουν διαρρεύσει.

Member	Interaction						
	1	2	3	4	5	6	7
j-1	-2,6244	-1,3267	-1,9288	-2,2221	-0,3446	-0,5126	-0,4621
j-2	-0,7489	-1,3267	-1,9288	-0,3611	-2,1892	-2,3737	-2,4242
j-3	-2,0000	-0,9422	-1,1429	-1,8611	0,0000	-0,0505	0,0000
j-4	-0,1244	-0,9422	-1,1429	0,0000	-1,8446	-1,9116	-1,9621
j-5	-2,2511	-1,6733	-1,0712	-2,6389	-0,8108	-0,6263	-0,5758
j-6	-0,3756	-1,6733	-1,0712	-0,7779	-2,6554	-2,4874	-2,5379
j-7	-1,8756	-1,0578	-0,8571	-2,0000	-0,1554	-0,0884	-0,0379
j-8	0,0000	-1,0578	-0,8571	-0,1389	-2,0000	-1,9495	-2,0000
k-1	-2,2356	-1,6733	-1,7879	-0,8916	-2,5500	-1,8621	-1,2516
k-2	-0,3911	-1,6733	-0,3546	-2,5253	-0,9163	-1,2516	-1,8621
k-3	-1,8601	-1,0578	-1,5737	-0,2526	-1,8946	-1,3242	-0,7137
k-4	-0,0155	-1,0578	-0,1404	-1,8863	-0,2609	-0,7137	-1,3242
k-5	-2,6089	-1,3267	-2,6454	-0,4747	-2,0837	-1,7484	-1,1379
k-6	-0,7644	-1,3267	-1,2121	-2,1084	-0,4500	-1,1379	-1,7484
k-7	-1,9845	-0,9422	-1,8596	-0,1137	-1,7391	-1,2863	-0,6758
k-8	-0,1399	-0,9422	-0,4263	-1,7474	-0,1054	-0,6758	-1,2863

Φαίνεται πως στο όριο διαρροής έχουν φτάσει: η αρχή του μέλους 1, 4, 5 και 7. Αυτό δίνει έναν φορέα ως εξής:



ΣΧΗΜΑ 2.15 Φορέας στη φάση κατάρρευσης.

Για μη γραμμικούς περιορισμούς, προκύπτει:

Member	Interaction non-linear						
	1	2	3	4	5	6	7
j	1,0000	0,0137	0,0877	1,0000	1,0000	0,9812	1,0000
k	0,9895	0,0137	0,8109	0,8744	0,8808	0,3361	0,3361

Δηλαδή παρατηρούνται πάλι στις ίδιες θέσεις οι πλαστικές αρθρώσεις. Ο φορτιστικός συντελεστής είναι ίσος με: $\lambda=0.229$ (περίπου 4% μεγαλύτερος).

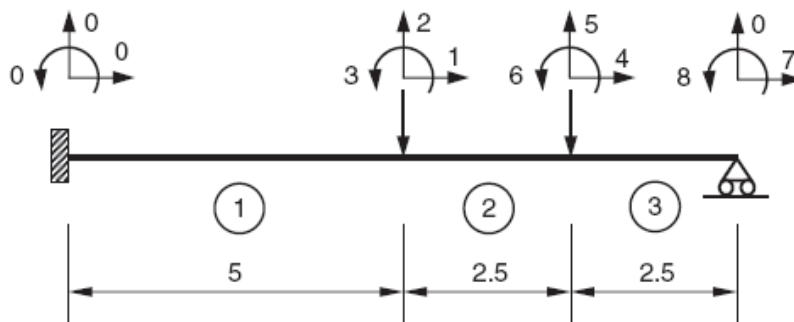
2.6 Προγραμματισμός σε MATLAB

Στη συγκεκριμένη ενότητα, αναπτύχθηκε κώδικας με χρήση της γλώσσας Matlab για την οριακή ανάλυση πλαισίων με βάση το γραμμικό προγραμματισμό. Η γλώσσα Matlab πλεονεκτεί στον προγραμματισμό με μητρώα και προσφέρει δυνατότητες αναπαράστασης, μειώνοντας δραστικά τους χρόνους ανάπτυξης και διόρθωσης ενός κώδικα, μειονεκτώντας όμως σημαντικά στο χρόνο εκτέλεσης μεγάλων προγραμμάτων. Έτσι ως βέλτιστη λύση καλό είναι να αναπτύσσεται ο κώδικας σε Matlab και μετά την ωρίμανσή του να μεταφράζεται σε Fortran, ή C. Ενδεικτικά μόνο, θα αναφερθεί και ένα ακόμα λογισμικό μοντελοποίησης και επίλυσης τέτοιων προβλημάτων το οποίο είναι ευρέως διαδεδομένο σε επιστημονικές εργασίες αυτής της μορφής και αυτό είναι το GAMS (General Algebraic Modeling System). Το λογισμικό αυτό είναι ειδικά σχεδιασμένο για το στήσιμο και την επίλυση μεγάλων και περίπλοκων μοντέλων μαθηματικού προγραμματισμού και είναι εύχρηστο για άτομα που δεν είναι εξοικειωμένα με μαθηματικές έννοιες. Εκτενέστερη αναφορά σε αυτό το λογισμικό θα γίνει σε επόμενη ενότητα.

Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός κώδικα για οριακή ανάλυση πλαισίων αναλύονται παρακάτω. Στην κατεύθυνση αυτή ενδιαφέρει η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας και των περιορισμών σε μητρώικη μορφή με βάση τα μητρώα $[B^i]$ των στοιχείων. Η διαδικασία αυτή είναι όμοια με την διαδικασία μόρφωσης του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα με βάση τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών εκφρασμένα στο καθολικό σύστημα με τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας.

Χρησιμοποιείται ένα αρχείο κειμένου για την εισαγωγή των δεδομένων που διευκολύνει στην επίλυση διαφορετικών φορέων. Εξάγεται ένα σύντομο αρχείο κειμένου αποτελεσμάτων που βοηθάει στην αποθήκευση και εκτύπωση των βασικών αποτελεσμάτων. Γίνεται χρήση μιας ισχυρής ρουτίνας γραμμικού προγραμματισμού, της LINPROG, η οποία είναι διαθέσιμη σαν ένα μέρος του λογισμικού στα εργαλεία της βελτιστοποίησης που περιέχει η Matlab, και μπορεί να χειριστεί πολύ μεγάλα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

- (1) *Καταγραφή των δεδομένων* Ένα αρχείο κειμένου χρησιμοποιείται για την εγγραφή των δεδομένων. Επειδή είναι ξεχωριστό από τον κύριο κώδικα αλλά θα πρέπει στην αρχή του προγράμματος να καλείται, θα ονομαστεί με τη συνηθισμένη επέκταση «.m». Στη συγκεκριμένη εργασία ονομάστηκε *LA_in.m*. Το αρχείο των δεδομένων πρέπει να παραμείνει όσο το δυνατόν πιο απλό γίνεται. Περιλαμβάνει έναν τίτλο, ορισμό του αριθμού των μελών και των βαθμών ελευθερίας, δεδομένα για τα μέλη (πχ ικανότητες καμπτικής αντοχής του κάθε μέλους), συντεταγμένες των κόμβων, συνδεσμολογία και το διάνυσμα της φόρτισης του φορέα. Σαν απλό παράδειγμα ορισμού των δεδομένων, χρησιμοποιείται ο ακόλουθος μικρός φορέας, όπου γίνεται ο ορισμός των μελών, των κόμβων και των βαθμών ελευθερίας σε ένα αρχείο κειμένου.



ΣΧΗΜΑ 2.16 Παράδειγμα απλού φορέα για την εισαγωγή δεδομένων σε Matlab

```

Title = 'Example 1: simple propped cantilever';

Num_el = 3;
Num_dof = 8;

El_dat = [ 5    0  10
           2.5  0  10
           2.5  0  10 ];

LV =      [ 0  0  0  1  2  3
            1  2  3  4  5  6
            4  5  6  7  0  8 ];

f = zeros(Num_dof,1);
f(2) = -1;
f(5) = -4;

```

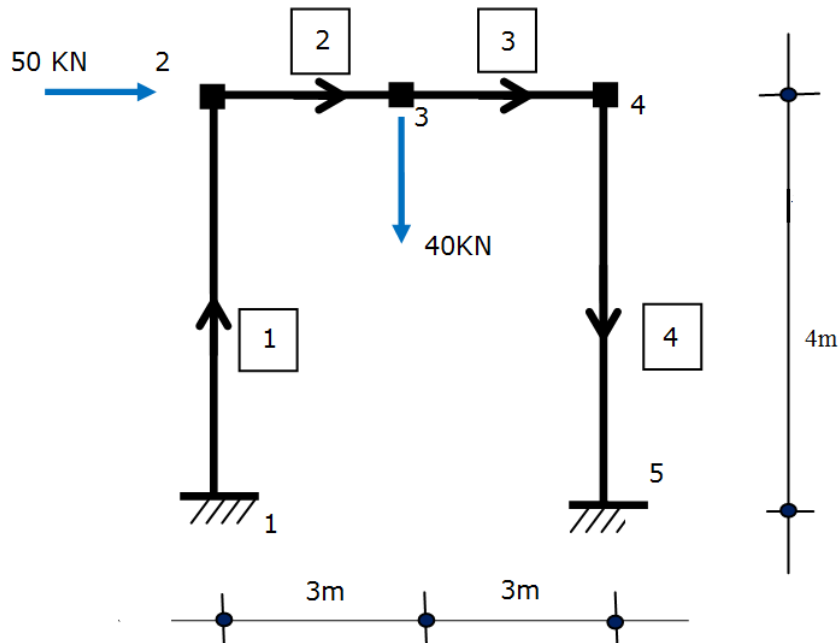
ΣΧΗΜΑ 2.17 Αρχείο δεδομένων LA_in.m

- (2) *Ανάγνωση δεδομένων και έλεγχος* Ο κύριος κώδικας σε Matlab ξεκινάει με την εκκαθάριση όλων των μεταβλητών, ανάγνωση του αρχείου δεδομένων LA_in.m και την εκτέλεση ορισμένων ελέγχων που αφορούν κυρίως το μέγεθος του προβλήματος. Για τη μόνωση διαγραμμάτων θα πρέπει να γίνουν επιπλέον έλεγχοι.
- (3) *Μόνωση μητρώου B* Η επόμενη φάση περιλαμβάνει τον υπολογισμό των μητρώων ισορροπίας B σε κάθε στοιχείο και η μόνωση του συνολικού μητρώου B της κατασκευής. Ο κώδικας ακολουθεί ακριβώς τη διαδικασία, όπως περιγράφηκε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας. Τα διανύσματα τοποθεσίας χρησιμοποιούνται για τη συλλογή των δεδομένων από τα μητρώα B κάθε στοιχείου και, επειδή η Matlab δεν επιτρέπει μηδενικές τιμές σε μια λίστα περιεχομένων, χρησιμοποιείται ένας απλός μηχανισμός για να συλλεχθούν στοιχεία που αντιστοιχούν σε μηδενικά διανύσματα τοποθεσίας. Εισάγεται και ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας όπου θα συλλεχθούν εκεί οι δεσμεύσεις (διάνυσμα τοποθεσίας ίσο με μηδέν) και τέλος η γραμμή αυτή διαγράφεται από το συνολικό μητρώο ισορροπίας B.
- (4) *Μόνωση του LP και επίλυση με LINPROG* Ανάλογα με τον solver που χρησιμοποιείται θα πρέπει να διαταχθούν και τα δεδομένα. Στην περίπτωση μας χρησιμοποιούμε την LINPROG, ένας επιλύτης προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, με χρήση της μεθόδου του εσωτερικού σημείου. Τα αποτελέσματα που εξάγονται αποτελούνται από τις ποσότητες alpha (βέλτιστος φορτιστικός συντελεστής) s alpha (διάνυσμα που περιλαμβάνει όλες τις μεταβλητές στη θέση βελτίστου) και lambda (το δυϊκό βέλτιστο ή οι τιμές πολλαπλασιαστών Lagrange).
- (5) *Συλλογή αποτελεσμάτων* Σε αυτήν τη φάση ο κώδικας συλλέγει το φορτίο κατάρρευσης και τις τιμές έντασης που προέκυψαν στο σημείο του βελτίστου από το διάνυσμα s alpha, τις τιμές μετατοπίσεων u από τους πολλαπλασιαστές Lagrange και επίσης τις ενδείξεις και τις τοποθεσίες των ενεργοποιημένων πλαστικών αρθρώσεων. Με βάση τα αποτελέσματα, αναπτύχθηκε και κώδικας ο οποίος δίνει τον παραμορφωμένο φορέα στην τελική κατάσταση.

Ακολουθώς θα παρουσιαστούν 3 παραδείγματα, κλιμακούμενης δυσκολίας, επίλυσης του προβλήματος οριακής ανάλυσης με χρήση Matlab. Οι περιορισμοί θα περιλαμβάνουν και την αλληλεπίδραση ροπής αξονικής. Το πρώτο παράδειγμα θα είναι ίδιο με το Παράδειγμα 1 του Excel, ώστε να γίνει ταυτοποίηση των αποτελεσμάτων. Τα άλλα δύο παραδείγματα είναι πλαίσια με πιο πολλά μέλη και πιο σύνθετη γεωμετρία.

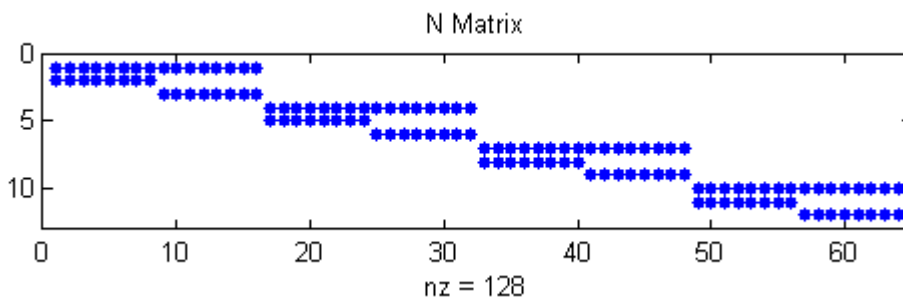
Παράδειγμα 1

Το πρώτο παράδειγμα, είναι το ίδιο με την πρώτη εφαρμογή που έγινε στο Excel, και σκοπός είναι να γίνει μια σύγκριση των αποτελεσμάτων προκειμένου να επιβεβαιωθεί η ορθότητα του προγράμματος. Ο φορέας έχει ροπές πλαστικοποίησης $M_p=200\text{kNm}$ για τα υποστυλώματα και $M_p=150\text{kNm}$ για τις δοκούς και αξονικές διαρροής $N_p=300\text{kN}$ για τα υποστυλώματα και $N_p=200\text{kN}$ για τις δοκούς. Η γεωμετρία του φορέα φαίνεται για άλλη μια φορά στο παρακάτω σχήμα.

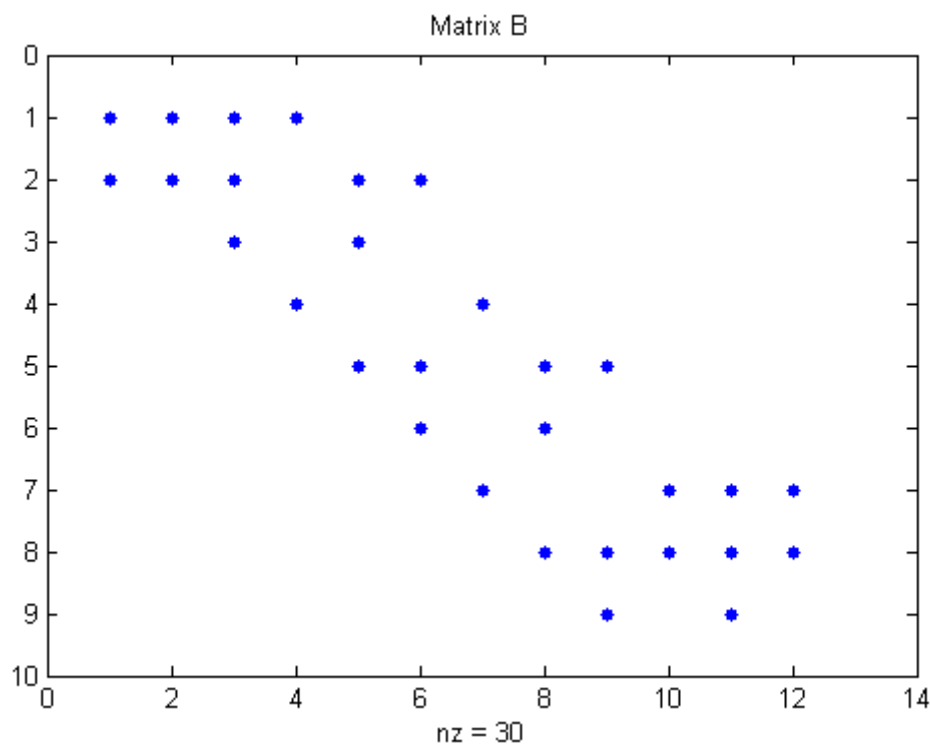


ΣΧΗΜΑ 2.17 Φορέας παραδείγματος 1 με χρήση Matlab

Χρήσιμο είναι καταρχήν, εντός του προγράμματος να διερευνώνται οι διαστάσεις και τα μη μηδενικά στοιχεία του μητρώου ισορροπίας B του φορέα και του μητρώου N , που απεικονίζει τους περιορισμούς της αλληλεπίδρασης για το σύνολο του φορέα. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο μητρώο N του φορέα, γίνεται διαγώνια παράθεση των περιορισμών αλληλεπίδρασης κάθε μέλους, άρα θα πρέπει να προκύψει ένα διαγώνιο μητρώο. Στα επόμενα σχήματα φαίνονται τα μητρώα B και N για τον παραπάνω φορέα και με κουκκίδες σημειώνονται οι μη μηδενικές θέσεις τους. Οι εικόνες αυτές προκύπτουν από τη χρήσιμη εντολή ελέγχου `spy` της Matlab.



ΣΧΗΜΑ 2.18 Έλεγχος μόρφωσης μητρώου περιορισμών αλληλεπίδρασης N



ΣΧΗΜΑ 2.19 Έλεγχος μόνρφωσης μητρώου ισορροπίας B

Από τη μορφή των παραπάνω μητρώων παρατηρείται ότι πράγματι έχουν τις σωστές διαστάσεις, όπως αναμενόταν και επιπλέον το μητρώο N προκύπτει διαγώνιο. Ακολουθεί το αρχείο output κατά το τέλος της επίλυσης του φορέα.

Title : Example 1

alpha : 2.667961

Stress resultants s:

El 1	+2.5165e+001	+1.9161e+002	+4.6835e+001
El 2	+7.3786e+001	-4.6835e+001	+1.2233e+002
El 3	+7.3786e+001	-1.2233e+002	-1.2233e+002
El 4	+8.1553e+001	+1.2233e+002	+1.7282e+002

Displacements u:

dof 1	+1.2000e-002
dof 2	-1.0000e-003
dof 3	-3.0000e-003
dof 4	+1.0853e-002
dof 5	-1.0000e-002
dof 6	+5.8252e-005
dof 7	+7.8058e-003
dof 8	-6.5049e-004
dof 9	-1.9515e-003

Positive hinges (element, s1&s2):

El 1	25.1650485	191.6116505
------	------------	-------------

Positive hinges (element, s1&s3):

El 2	73.7864078	122.3300971
El 4	81.5533981	172.8155340

Negative hinges (element, s1&s2):

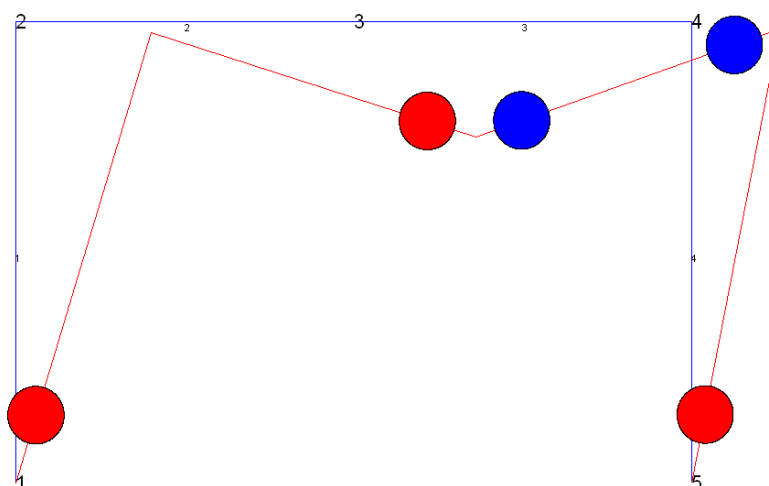
El 3	73.7864078	-122.3300971
------	------------	--------------

Negative hinges (element, s1&s3):

El 3	73.7864078	-122.3300971
------	------------	--------------

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο φορτιστικός συντελεστής (α) προκύπτει ίσος με: $\lambda=2.668$. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε πλήρη ταύτιση των αποτελεσμάτων του προγραμματισμού του προβλήματος σε Excel και Matlab. Άρα ο κώδικας που αναπτύχθηκε δίνει ακριβή αποτελέσματα και μπορεί να επεκταθεί και για πιο σύνθετους φορείς, όπως θα φανεί και στα επόμενα παραδείγματα.

Από τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων σε κάθε κόμβο (displacements u) και τις τιμές των εντάσεων στις πλαστικές αρθρώσεις (Positive & negative hinges) μπορεί να παραχθεί το παραμορφωμένο σχήμα του φορέα στη φάση της κατάρρευσης καθώς και οι αντίστοιχες πλαστικές αρθρώσεις.

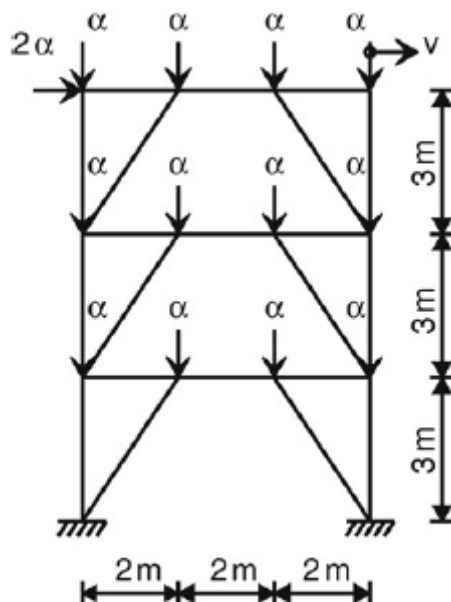


ΣΧΗΜΑ 2.20 Παραμορφωμένος φορέας στη φάση κατάρρευσης.

Παρατηρείται πάλι ο σύνθετος μηχανισμός κατάρρευσης, ακριβώς όπως υπολογίστηκε με τα ενεργειακά θεωρήματα αλλά και με την επίλυση από το Excel. Σημειώνεται ότι με κόκκινο χρώμα υποδηλώνονται οι διατομές οι οποίες έχουν φτάσει στη διαρροή και αναφέρονται σε θετική ροπή ενώ με μπλε είναι οι διατομές που έχουν φτάσει στη διαρροή και αναφέρονται σε αρνητική ροπή.

Παράδειγμα 2

Σε αυτό το δεύτερο παράδειγμα, παρουσιάζεται ένα τριόροφο πλαίσιο ενός ανοίγματος, με έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας μορφής λάμδα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Συγκεκριμένα, υπόκειται σε αυξανόμενα φορτία (kN) τα οποία έχουν σαν φορτιστικό συντελεστή το α και για την οριζόντια και για την κατακόρυφη διεύθυνση. Το v συμβολίζει την οριζόντια μετακίνηση του δεξιού κόμβου του τελευταίου ορόφου.



ΣΧΗΜΑ 2.21 Φορέας εφαρμογής 2

Ο φορέας του παραδείγματος προσομοιώνεται με 21 μέλη, 14 κόμβους και 36 βαθμούς ελευθερίας. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2}$ και έχουν θεωρηθεί τρεις διαφορετικές κατηγορίες διατομών. Οι πρότυπες διατομές είναι κατά τους αμερικάνικους κανονισμούς, επειδή αυτές χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση στο μοντέλο του Tin Loi & Tangaramvong.

- | | | | |
|--------------------------------|--------------|-----------------------|----------------------|
| 1) Διατομή υποστυλωμάτων | 310UC118 | $M_p=548.8\text{kNm}$ | $N_p=4200\text{kN}$ |
| 2) Διατομή δοκών | 200UB18.2 | $M_p=57.6\text{kNm}$ | $N_p=742.4\text{kN}$ |
| 3) Διατομή διαγωνίων συνδέσμων | SHS125/125/9 | $M_p=57.75\text{kNm}$ | $N_p=1365\text{kN}$ |

Από την επίλυση σε Matlab παρατηρείται ότι ο φορτιστικός συντελεστής στη θέση της κατάρρευσης είναι ίσος με: $\alpha=116.35$. Ακολουθεί το αρχείο output κατά το τέλος της επίλυσης του φορέα.

Title : Example 2

alpha : 116.349451

Stress resultants s:

```

E1 1      +4.6183e+002 +5.6486e+002 -3.6551e+002
E1 2      +3.1200e+002 +4.0515e+002 -2.0918e+002
E1 3      +1.2501e+002 +2.1372e+002 +3.3793e+000
E1 4      +1.0611e+002 +2.2596e+000 +2.0757e+002
E1 5      +3.8441e+002 -2.0283e+002 +3.9814e+002
E1 6      +6.3226e+002 -4.4828e+002 +5.5113e+002
E1 7      -2.6521e+001 -5.0813e+001 +3.4122e+000
E1 8      +1.8437e-010 -5.1840e+001 -5.1840e+001

```

```
El 9      -1.5849e+002 +4.5702e+001 +4.5702e+001
El 10     -2.5392e+001 -1.0177e+001 +2.4837e+001
El 11     +2.0367e-009 -5.1840e+001 -5.1840e+001
El 12     -1.2767e+002 +2.7685e+001 -9.6554e+000
El 13     +1.6033e+002 -3.3793e+000 +2.0700e+001
El 14     +1.9277e+002 -4.4374e+001 -4.4374e+001
El 15     +6.9944e+001 +2.2744e+001 -2.2596e+000
El 16     +8.8106e+001 +4.8428e+001 +4.8428e+001
El 17     +6.1661e+001 +1.1179e+001 +2.7003e+001
El 18     +7.0674e+001 +5.6428e+000 +2.3675e+001
El 19     +2.1038e+002 +2.1630e+001 +4.9172e+000
El 20     +2.1826e+002 +2.4155e+001 +4.4410e+000
El 21     +2.6588e+002 +6.1380e+000 +4.1543e+001
```

Displacements u:

```
dof 1      +1.5754e-001
dof 2      -4.2308e-003
dof 3      -5.2513e-002
dof 4      +3.1508e-001
dof 5      -4.2308e-003
dof 6      -5.2513e-002
dof 7      +4.7262e-001
dof 8      -4.2308e-003
dof 9      -5.2513e-002
dof 10     +4.6057e-001
dof 11     -4.1229e-003
dof 12     -5.1174e-002
dof 13     +3.0705e-001
dof 14     -4.1229e-003
dof 15     -5.1174e-002
dof 16     +1.5352e-001
dof 17     -4.1229e-003
dof 18     -5.1174e-002
dof 19     +1.5757e-001
dof 20     -1.0757e-001
dof 21     -5.1669e-002
dof 22     +1.5344e-001
dof 23     +9.9931e-002
dof 24     -5.0783e-002
dof 25     +3.1508e-001
dof 26     -1.0926e-001
dof 27     -5.2513e-002
dof 28     +3.0705e-001
dof 29     +9.8225e-002
dof 30     -5.1174e-002
dof 31     +4.7262e-001
dof 32     -1.0926e-001
dof 33     -5.2513e-002
dof 34     +4.6057e-001
dof 35     +9.8225e-002
dof 36     -5.1174e-002
```

Positive hinges (element, s1&s2):

```
El 1      461.8325656    564.8619801
El 9      -158.4879442    45.7020495
El 16     88.1063663      48.4278003
```

Positive hinges (element, s1&s3):

```
El 6      632.2595558    551.1313528
El 9      -158.4879442    45.7020495
El 16     88.1063663      48.4278003
El 21     265.8817796    41.5428811
```

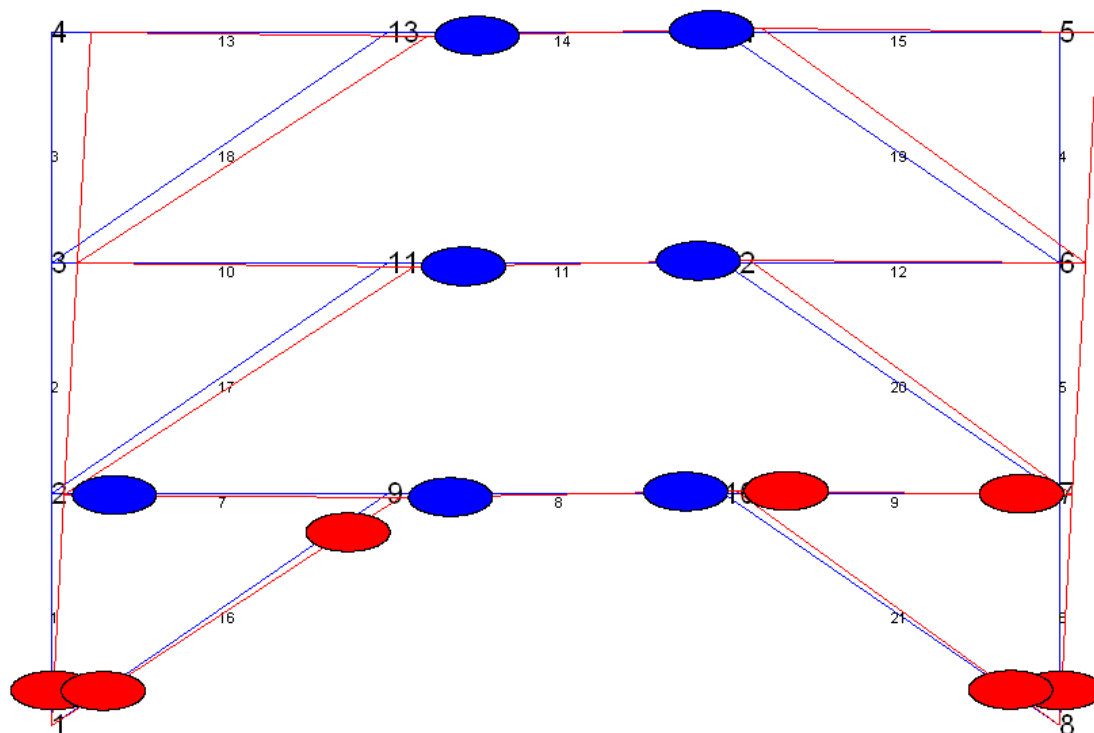
Negative hinges (element, s1&s2):

E1 7	-26.5213263	3.4121997
E1 8	0.0000000	-51.8400000
E1 8	0.0000000	-51.8400000
E1 11	0.0000000	-51.8400000
E1 11	0.0000000	-51.8400000
E1 14	192.7704435	-44.3743505

Negative hinges (element, s1&s3):

E1 8	0.0000000	-51.8400000
E1 8	0.0000000	-51.8400000
E1 11	0.0000000	-51.8400000
E1 11	0.0000000	-51.8400000
E1 14	192.7704435	-44.3743505

Από τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων σε κάθε κόμβο (displacements u) και τις τιμές των εντάσεων στις πλαστικές αρθρώσεις (Positive & negative hinges) μπορεί να παραχθεί το παραμορφωμένο σχήμα του φορέα στη φάση της κατάρρευσης καθώς και οι αντίστοιχες πλαστικές αρθρώσεις.

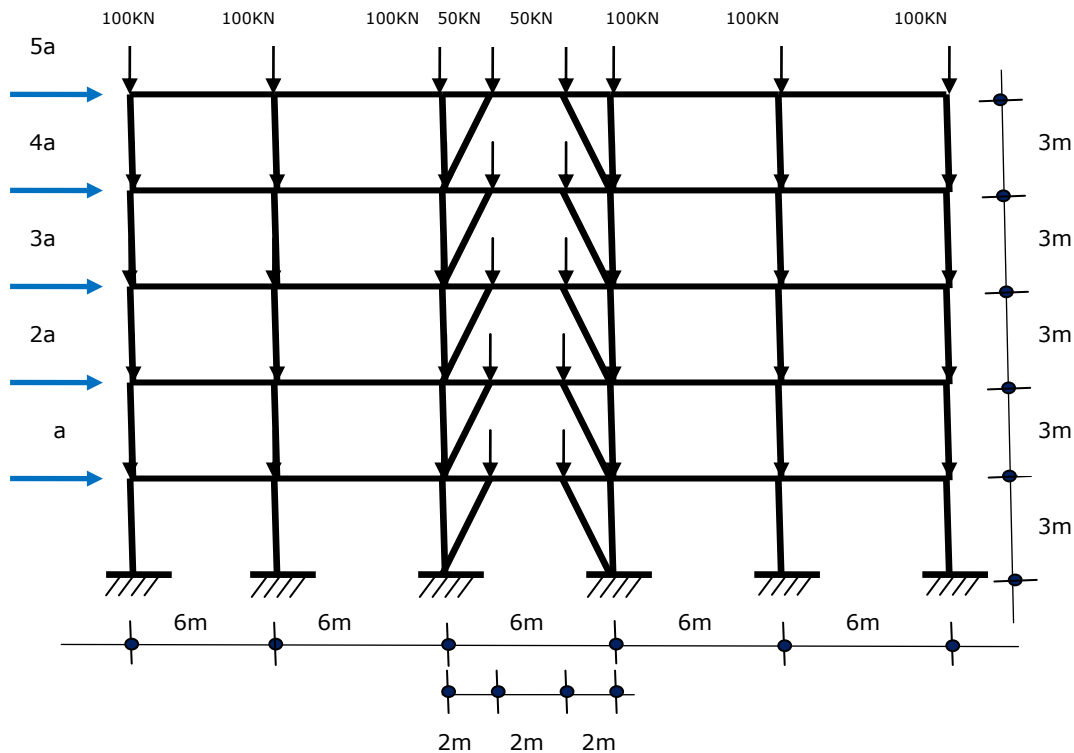


ΣΧΗΜΑ 2.22 Παραμορφωμένος φορέας παραδείγματος 2 στη φάση κατάρρευσης

Ο σύνθετος μηχανισμός κατάρρευσης περιλαμβάνει σχηματισμό πλαστικών αρθρώσεων σε όλα τα άκρα των δοκών σύζευξης (9-10, 11-12, 13-14), σε ορισμένες διατομές δοκών και υποστυλωμάτων στον πρώτο όροφο και τέλος στη βάση των έκκεντρων συνδέσμων δυσκαμψίας του πρώτου ορόφου.

Παράδειγμα 3

Σαν τελευταίο παράδειγμα αυτής της ενότητας, θα παρουσιαστεί ένα πλαίσιο με πιο σύνθετη γεωμετρία και περισσότερες κατηγορίες διατομών. Πρόκειται για ένα πλαίσιο με έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας σχήματος λάμδα. Το παράδειγμα αυτό έχει επιλυθεί και από τους Καρακώστα και Μυστακίδη οι οποίοι όμως θεώρησαν καθαρά καμπτική συμπεριφορά. Στην επίλυση που έγινε, θεωρήθηκαν πάλι σχέσεις αλληλεπίδρασης. Το πλαίσιο αποτελείται από 5 ανοίγματα και 5 ορόφους και η γεωμετρία του φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 2.23 Φορέας παραδείγματος 3

Όλες οι στηρίξεις θεωρούνται ότι είναι πακτώσεις. Η κατασκευή υπόκειται σε σταθερά κατακόρυφα φορτία τα οποία σε κάθε άνοιγμα είναι ίσα με 100kN και πάνω από τους έκκεντρους συνδέσμους είναι ίσα με 50kN. Επίσης υπόκειται σε σεισμικά οριζόντια φορτία, τριγωνικής κατανομής, όπως ακριβώς φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Το μοντέλο αποτελείται από 75 μέλη, 46 κόμβους και 120 βαθμούς ελευθερίας. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2}$ και έχουν θεωρηθεί τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες διατομών. Οι πρότυπες διατομές είναι κατά τους αμερικάνικους κανονισμούς, επειδή αυτές χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση στο μοντέλο του Καρακώστα και Μυστακίδη.

1) Διατομή υποστυλωμάτων	250UC89.5	$M_p=344.4\text{kNm}$	$N_p=3192\text{kN}$
2) Διατομή δοκών ανοίγματος 3	400WC144	$M_p=777\text{kNm}$	$N_p=5520\text{kN}$
3) Διατομή διαγωνίων συνδέσμων	200UC59.5	$M_p=196.8\text{kNm}$	$N_p=2286\text{kN}$
4) Διατομή δοκών	310UB40.4	$M_p=202.56\text{kNm}$	$N_p=1667.2\text{kN}$

Από την επίλυση σε Matlab παρατηρείται ότι ο φορτιστικός συντελεστής στη θέση της κατάρρευσης είναι ίσος με: **$\alpha=177.948$** . Δηλαδή, αντίστοιχα, τα οριζόντια φορτία κατά την κατάρρευση, θα έχουν τις εξής τιμές:

1^{ος} όροφος: **$F=177.948\text{kN}$**

2^{ος} όροφος: **$F=355.896\text{kN}$**

3^{ος} όροφος: **$F=533.844\text{kN}$**

4^{ος} όροφος: **$F=711.792\text{kN}$**

5^{ος} όροφος: **$F=889.74\text{kN}$**

Ακολουθεί το αρχείο output κατά το τέλος της επίλυσης του φορέα.

Title : Example 3

alpha : 177.948466

Stress resultants s:

E1 1	-2.8523e+002	+3.2901e+002	+3.2901e+002
E1 2	-6.7134e+000	+3.4404e+002	+2.4194e+002
E1 3	-1.5960e+003	+2.5830e+002	+1.4202e+002
E1 4	-1.4381e+003	+1.0949e+002	+5.8879e+001
E1 5	-1.3723e+003	-1.1799e+002	+5.4604e+001
E1 6	+1.5960e+003	+2.5830e+002	+2.5830e+002
E1 7	+4.3323e+000	+3.4417e+002	+2.3541e+002
E1 8	+3.2624e+002	+3.2680e+002	+1.0310e+002
E1 9	-2.1826e+002	-1.2808e+002	+3.3263e+002
E1 10	-6.1710e+000	+1.6155e+002	+3.4407e+002
E1 11	-7.5531e+002	+1.2410e+001	+2.3446e+002
E1 12	-1.5757e+003	-2.1136e+001	+8.0526e+001
E1 13	-1.5072e+003	-1.0057e+002	+3.6010e+001
E1 14	+7.7400e+002	+5.5728e+001	+3.0264e+002
E1 15	+4.7850e+000	+1.6835e+002	+3.4414e+002
E1 16	+2.5872e+002	+9.9459e+001	+3.3044e+002
E1 17	-1.5781e+002	-1.5128e+002	+3.3589e+002
E1 18	-5.2257e+000	+2.1456e+001	+3.4412e+002
E1 19	-9.7889e+001	-3.3912e+002	+3.3912e+002
E1 20	-1.5091e+003	-1.0032e+002	+1.0032e+002
E1 21	-1.5675e+003	-9.2784e+001	+3.2732e+001
E1 22	+2.3262e+001	-2.4344e+002	+3.4315e+002
E1 23	+5.5888e+000	+4.9317e+001	+3.4410e+002
E1 24	+1.9274e+002	-1.3251e+002	+3.3400e+002
E1 25	-1.0102e+002	-1.6553e+002	+3.3895e+002
E1 26	-5.0613e+000	-2.9125e+000	+3.4413e+002
E1 27	+1.3815e+002	-3.3695e+002	+3.3695e+002
E1 28	-9.4509e+002	-1.5612e+002	+1.5612e+002
E1 29	-1.1430e+003	-1.4760e+002	-1.4760e+002
E1 30	-2.8224e+002	-3.2917e+002	+3.2917e+002
E1 31	+5.6650e+000	+6.0606e+001	+3.4409e+002
E1 32	+1.2525e+002	-1.3154e+002	+3.3764e+002
E1 33	-4.6503e+001	-1.7539e+002	+1.3951e+002
E1 34	-4.6291e+000	-1.5715e+001	+2.9290e+002
E1 35	+3.6199e+002	+8.6542e+001	+1.0126e+002
E1 36	-5.3052e+002	+1.3984e+001	+9.2623e+001
E1 37	-9.3720e-009	-1.9680e+002	-1.9680e+002
E1 38	+1.1031e+002	+2.4295e+002	+3.0551e+002
E1 39	+5.7019e+000	+5.5131e+001	+3.4409e+002
E1 40	+5.8696e+001	-1.3797e+002	+2.0128e+002
E1 41	+2.6789e+001	-2.0093e+002	-2.0093e+002
E1 42	+7.7023e-008	-2.0256e+002	-2.0256e+002
E1 43	+8.3659e+002	+6.9268e+001	+7.1812e+002

```
E1 44 +3.7217e-008 -7.7700e+002 -7.7700e+002
E1 45 -7.7584e+002 +7.2240e+002 -1.2257e+001
E1 46 +2.2359e+001 -2.0120e+002 -2.0120e+002
E1 47 +8.6094e-008 -2.0256e+002 -2.0256e+002
E1 48 +3.4925e+002 -1.8134e+002 -1.8134e+002
E1 49 +3.0257e+002 -1.8418e+002 -1.8418e+002
E1 50 +1.0574e+003 +3.8916e+002 +6.8453e+002
E1 51 +1.6965e+002 -7.6506e+002 -7.6506e+002
E1 52 -6.8129e+002 +7.2905e+002 +2.2910e+002
E1 53 +1.1583e+002 -1.9552e+002 -1.9552e+002
E1 54 +7.6136e+001 -1.9793e+002 -1.9793e+002
E1 55 +5.3012e+002 -1.7036e+002 -1.7036e+002
E1 56 +5.2200e+002 -1.7085e+002 -1.7085e+002
E1 57 +1.0462e+003 +3.2480e+002 +6.6196e+002
E1 58 +2.0914e+002 -7.6228e+002 -7.6228e+002
E1 59 -6.7421e+002 +7.2955e+002 +3.3587e+002
E1 60 -5.2996e+000 -2.0224e+002 -2.0224e+002
E1 61 -1.5377e+000 -2.0247e+002 -2.0247e+002
E1 62 +6.4203e+002 -1.6356e+002 -1.6356e+002
E1 63 +6.2068e+002 -1.6485e+002 -1.6485e+002
E1 64 +1.0022e+003 -2.7262e+002 +5.6506e+002
E1 65 +4.7792e+002 -7.2118e+002 -5.5911e+002
E1 66 -2.2422e+002 +7.0671e+002 -1.7577e+002
E1 67 +4.9427e+001 -1.9956e+002 -1.9956e+002
E1 68 +4.7601e+001 -1.9967e+002 -1.9967e+002
E1 69 +9.0170e+002 -1.3951e+002 -1.3951e+002
E1 70 +8.0931e+002 -1.5340e+002 -1.5340e+002
E1 71 +7.4671e+002 +5.2132e+001 +5.6959e+002
E1 72 +4.2783e+002 -6.6222e+002 +4.3391e+002
E1 73 +3.3699e+002 -2.3711e+002 -1.1231e+002
E1 74 +1.5418e+002 -1.9319e+002 -1.9319e+002
E1 75 +2.1101e+001 -1.5090e+002 -2.0128e+002
```

Displacements u:

```
dof 1 +2.6850e-002
dof 2 +5.0665e-004
dof 3 -8.5088e-003
dof 4 +2.5812e-002
dof 5 +4.6416e-004
dof 6 -8.6039e-003
dof 7 +2.5356e-002
dof 8 +1.2899e-003
dof 9 -8.4519e-003
dof 10 +2.5342e-002
dof 11 -1.5614e-002
dof 12 -8.2502e-003
dof 13 +2.4296e-002
dof 14 +1.4970e-002
dof 15 +7.9099e-003
dof 16 +2.5422e-002
dof 17 -1.2047e-003
dof 18 -8.0873e-003
dof 19 +2.4421e-002
dof 20 -4.3915e-004
dof 21 -8.1403e-003
dof 22 +2.3985e-002
dof 23 -4.3131e-004
dof 24 -7.9950e-003
dof 25 +5.2377e-002
dof 26 +6.3692e-004
dof 27 -6.0941e-003
```



```
dof 28 +5.1623e-002
dof 29 +5.8719e-004
dof 30 -6.3233e-003
dof 31 +5.0712e-002
dof 32 +1.2899e-003
dof 33 -8.4519e-003
dof 34 +5.0712e-002
dof 35 -1.5614e-002
dof 36 -8.4519e-003
dof 37 +4.8700e-002
dof 38 +1.1912e-002
dof 39 +7.3896e-003
dof 40 +4.9684e-002
dof 41 -1.2851e-003
dof 42 -6.5983e-003
dof 43 +4.8842e-002
dof 44 -5.0028e-004
dof 45 -7.0070e-003
dof 46 +4.7970e-002
dof 47 -4.6732e-004
dof 48 -7.3275e-003
dof 49 +7.0659e-002
dof 50 +9.3640e-004
dof 51 -5.4255e-004
dof 52 +7.0593e-002
dof 53 +8.9867e-004
dof 54 -5.4949e-004
dof 55 +7.0162e-002
dof 56 +1.4017e-003
dof 57 -6.3786e-003
dof 58 +7.0162e-002
dof 59 -1.1355e-002
dof 60 -6.3786e-003
dof 61 +6.8676e-002
dof 62 +9.4163e-003
dof 63 +6.0291e-003
dof 64 +6.9479e-002
dof 65 -1.3506e-003
dof 66 -5.3835e-003
dof 67 +6.9863e-002
dof 68 -8.3723e-004
dof 69 -7.6116e-004
dof 70 +6.9953e-002
dof 71 -8.2399e-004
dof 72 -7.1603e-004
dof 73 +7.2287e-002
dof 74 +9.4467e-004
dof 75 -3.8927e-004
dof 76 +7.2242e-002
dof 77 +9.0893e-004
dof 78 -3.5943e-004
dof 79 +7.2195e-002
dof 80 +1.0770e-003
dof 81 -3.5943e-004
dof 82 +7.2195e-002
dof 83 +3.5817e-004
dof 84 -3.5943e-004
dof 85 +7.2195e-002
dof 86 -3.6070e-004
dof 87 -3.5943e-004
dof 88 +7.2195e-002
```

```
dof 89 -1.0796e-003
dof 90 -3.5943e-004
dof 91 +7.2146e-002
dof 92 -8.5849e-004
dof 93 -3.6712e-004
dof 94 +7.2101e-002
dof 95 -8.4242e-004
dof 96 -3.7454e-004
dof 97 +7.3454e-002
dof 98 +9.4467e-004
dof 99 -3.8927e-004
dof 100 +7.3320e-002
dof 101 +9.0893e-004
dof 102 -3.5943e-004
dof 103 +7.3273e-002
dof 104 +1.0770e-003
dof 105 -3.5943e-004
dof 106 +7.3273e-002
dof 107 +3.5817e-004
dof 108 -3.5943e-004
dof 109 +7.3273e-002
dof 110 -3.6070e-004
dof 111 -3.5943e-004
dof 112 +7.3273e-002
dof 113 -1.0796e-003
dof 114 -3.5943e-004
dof 115 +7.3248e-002
dof 116 -8.7862e-004
dof 117 +6.0337e-006
dof 118 +7.3224e-002
dof 119 -8.4242e-004
dof 120 -3.7454e-004
```

Positive hinges (element, s1&s2):

```
El 1 -285.2328657 329.0124375
El 2 -6.7134158 344.0378289
El 3 -1596.0000004 258.2999999
El 3 -1596.0000004 258.2999999
El 4 -1438.1310328 109.4885910
El 6 1596.0000001 258.3000000
El 6 1596.0000001 258.3000000
El 7 4.3322501 344.1662865
El 8 326.2393261 326.8002469
El 45 -775.8414725 722.3959398
El 52 -681.2928071 729.0503160
El 59 -674.2084088 729.5489191
```

Positive hinges (element, s1&s3):

```
El 1 -285.2328657 329.0124374
El 6 1596.0000001 258.2999998
El 6 1596.0000001 258.2999998
El 9 -218.2553261 332.6256995
El 10 -6.1709555 344.0670932
El 14 774.0021071 302.6446231
El 15 4.7850107 344.1418612
El 16 258.7193261 330.4427731
El 17 -157.8074676 335.8867024
El 18 -5.2256967 344.1180874
El 19 -97.8892749 339.1191309
El 20 -1509.1136902 100.3223259
El 22 23.2620880 343.1450715
```

E1 23	5.5887904	344.0984995
E1 24	192.7410388	334.0021282
E1 25	-101.0220837	338.9501242
E1 26	-5.0612741	344.1269572
E1 27	138.1486093	336.9472460
E1 28	-945.0933449	156.1188165
E1 30	-282.2353006	329.1741482
E1 31	5.6649658	344.0943898
E1 32	125.2521773	337.6429745
E1 39	5.7019337	344.0923955
E1 43	836.5856866	718.1207355

Negative hinges (element, s1&s2):

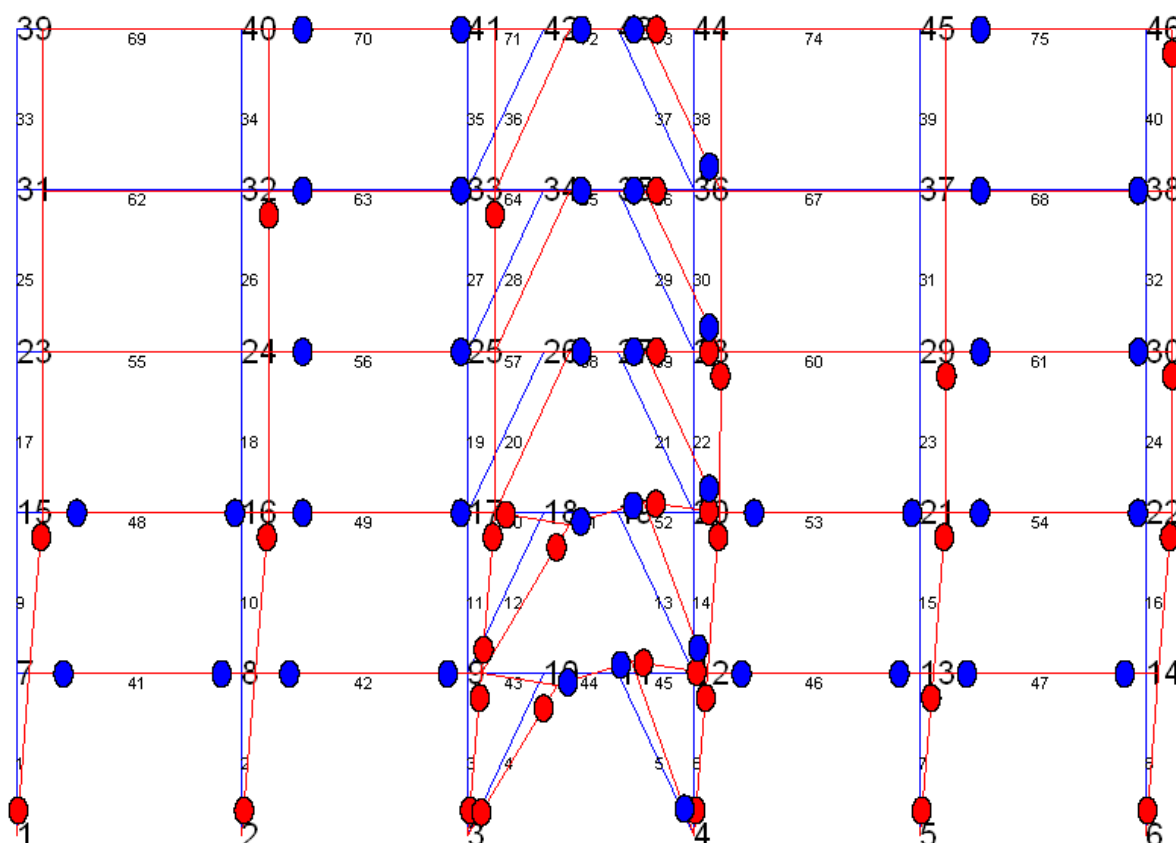
E1 5	-1372.2980177	54.6040601
E1 13	-1507.2006046	36.0096387
E1 19	-97.8892749	339.1191309
E1 20	-1509.1136902	100.3223259
E1 21	-1567.4867726	32.7320660
E1 27	138.1486093	336.9472460
E1 28	-945.0933449	156.1188165
E1 29	-1143.0000001	-147.5999999
E1 29	-1143.0000001	-147.5999999
E1 30	-282.2353006	329.1741482
E1 37	-0.0000000	-196.7999999
E1 37	-0.0000000	-196.7999999
E1 41	26.7888010	-200.9326189
E1 42	0.0000001	-202.5600000
E1 42	0.0000001	-202.5600000
E1 44	0.0000000	-777.0000000
E1 44	0.0000000	-777.0000000
E1 46	22.3590773	-201.2017182
E1 47	0.0000001	-202.5600000
E1 47	0.0000001	-202.5600000
E1 48	349.2498305	-181.3435755
E1 49	302.5692813	-184.1793517
E1 51	169.6500637	-765.0599548
E1 53	115.8295290	-195.5235228
E1 54	76.1357643	-197.9348619
E1 55	530.1170620	-170.3561515
E1 56	521.9972351	-170.8494194
E1 58	209.1350391	-762.2809850
E1 60	-5.2995748	-202.2380584
E1 61	-1.5377380	-202.4665846
E1 62	642.0260473	-163.5578417
E1 63	620.6843562	-164.8543188
E1 67	49.4269460	-199.5573841
E1 68	47.6013274	-199.6682878
E1 69	901.7036194	-139.5084094
E1 70	809.3071636	-153.3957547
E1 74	154.1757087	-193.1940427

Negative hinges (element, s1&s3):

E1 29	-1143.0000001	-147.5999999
E1 29	-1143.0000001	-147.5999999
E1 37	-0.0000000	-196.7999999
E1 37	-0.0000000	-196.7999999
E1 41	26.7888010	-200.9326189
E1 42	0.0000001	-202.5600000
E1 42	0.0000001	-202.5600000
E1 44	0.0000000	-777.0000000
E1 44	0.0000000	-777.0000000

E1 46	22.3590773	-201.2017182
E1 47	0.0000001	-202.5600000
E1 47	0.0000001	-202.5600000
E1 48	349.2498305	-181.3435755
E1 49	302.5692813	-184.1793517
E1 51	169.6500637	-765.0599548
E1 53	115.8295290	-195.5235228
E1 54	76.1357643	-197.9348619
E1 55	530.1170620	-170.3561515
E1 56	521.9972351	-170.8494194
E1 58	209.1350391	-762.2809850
E1 60	-5.2995748	-202.2380584
E1 61	-1.5377380	-202.4665846
E1 62	642.0260473	-163.5578417
E1 63	620.6843562	-164.8543188
E1 67	49.4269460	-199.5573841
E1 68	47.6013274	-199.6682878
E1 69	901.7036194	-139.5084094
E1 70	809.3071636	-153.3957547
E1 74	154.1757087	-193.1940427
E1 75	21.1011496	-201.2781354

Από τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων σε κάθε κόμβο (displacements u) και τις τιμές των εντάσεων στις πλαστικές αρθρώσεις (Positive & negative hinges) μπορεί να παραχθεί το παραμορφωμένο σχήμα του φορέα στη φάση της κατάρρευσης καθώς και οι αντίστοιχες πλαστικές αρθρώσεις.



ΣΧΗΜΑ 2.24 Παραμορφωμένος φορέας παραδείγματος 3 στη φάση κατάρρευσης

Παρατηρείται ο σχηματισμός πλαστικών αρθρώσεων στις περισσότερες δοκούς αλλά και στις διατομές των υποστυλωμάτων του πρώτου ορόφου. Επίσης κάποια από τα υποστυλώματα των άλλων ορόφων έχουν διαρρεύσει και μερικές διατομές από τους έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας. Αυτό οδηγεί σε έναν σύνθετο μηχανισμό κατάρρευσης, όπως φαίνεται άλλωστε και στο σχήμα 2.24. Επισημαίνεται και πάλι ότι με κόκκινο χρώμα υποδηλώνονται οι διατομές οι οποίες έχουν φτάσει στη διαρροή και αναφέρονται σε θετική ροπή ενώ με μπλε είναι οι διατομές που έχουν φτάσει στη διαρροή και αναφέρονται σε αρνητική ροπή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (Linear Complementarity Problem)

3.1 Γενικά

Το πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (Linear Complementarity Problem - LCP) είναι ένα γενικό πρόβλημα το οποίο συνδυάζει τα γραμμικά και τα τετραγωνικά προγράμματα (linear and quadratic programs), καθώς και τα παίγνια δύο παικτών (bimatrix games). Η μελέτη του LCP οδήγησε σε σημαντικά συμπεράσματα. Για παράδειγμα, ένας αλγόριθμος με ονομασία: Αλγόριθμος Συμπληρωματικότητας Κεντρικού Σημείου (complimentarity pivot algorithm), ο οποίος αναπτύχθηκε αρχικά για την επίλυση LCP, γενικεύτηκε με άμεσο τρόπο ώστε να σχηματιστούν επαρκείς αλγόριθμοι, για τον υπολογισμό των σταθερών σημείων Brouwer και Kakutani, για υπολογισμό οικονομικών θέσεων ισορροπίας, και για επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων και προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης, οι επαναληπτικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για την επίλυση του LCP, είναι ικανές για το χειρισμό γραμμικών προγραμμάτων μεγάλης κλίμακας, που δεν μπορούν να επιλυθούν με την απλή μέθοδο Simplex λόγω του μεγάλου μεγέθους τους και των αριθμητικών δυσκολιών. Για αυτούς τους λόγους η μελέτη του LCP παρουσιάζει και σήμερα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ερευνητές που ασχολούνται με ζητήματα βελτιστοποίησης (optimization).

Η ενότητα αυτή έχει δύο στόχους. Καταρχήν, θα παρουσιαστεί το θεωρητικό υπόβαθρο του γενικού προβλήματος της γραμμικής συμπληρωματικότητας. Στο δεύτερο σκέλος του κεφαλαίου, θα περιγραφούν πιο εξειδικευμένα, τα μαθηματικά μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της συμπεριφοράς χαλάρωσης του υλικού, τα οποία στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό, στις αρχές του προβλήματος της γραμμικής συμπληρωματικότητας.

3.2 Γεωμετρική θεώρηση

Έστω M , ένα γνωστό τετραγωνικό μητρώο, διαστάσεων n , και q ένα διάνυσμα στο \mathbb{R}^n . Θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολα: $w_1 \dots w_n$, $z_1 \dots z_n$, ως οι μεταβλητές του προβλήματος. Σε ένα LCP δεν υπάρχει αντικειμενική συνάρτηση η οποία να πρέπει να βελτιστοποιηθεί. Το πρόβλημα έχει την παρακάτω μορφή.

Να βρεθεί $w = (w_1 \dots w_n)^T$ και $z = (z_1 \dots z_n)^T$ που να ικανοποιούν:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w \geq 0, z \geq 0 \text{ και } w_i z_i &= 0 \text{ για κάθε } i \end{aligned} \quad (3.1)$$

Δηλαδή, αφενός σχετίζονται μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού και αφετέρου είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, για κάθε i , είτε το w είτε το z θα πρέπει να είναι μηδέν. Το μόνο δεδομένο στο πρόβλημα είναι το τετραγωνικό μητρώο M και το διάνυσμα q . Γι' αυτό θα συμβολίσουμε το LCP ως την εύρεση $w \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιώντας την (3.1), με δεδομένα τα (q, M) . Σε ένα LCP τάξης n , υπάρχουν $2n$ μεταβλητές.

Για την κατανόηση της φύσης και της λύσης του προβλήματος, χρήσιμο είναι να παρουσιαστεί ένα παράδειγμα τάξεως $n=2$ το οποίο να επιδέχεται και άμεσης γεωμετρικής ερμηνείας.

Ας θεωρήσουμε ότι: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $q = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$. Αυτό οδηγεί στο εξής LCP:

$$\begin{aligned} w_1 - 2z_1 - z_2 &= -5 \\ w_2 - z_1 - 2z_2 &= -6 \\ w_1, w_2, z_1, z_2 &\geq 0 \text{ και } w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Το πρόβλημα (3.2) μπορεί να εκφραστεί με διανύσματα ως εξής:

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0 \text{ και } w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0 \quad (3.4)$$

Για κάθε λύση που ικανοποιεί την (3.4), τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές του κάθε ζεύγους (w_j, z_j) είναι ίση με μηδέν. Μία προσέγγιση για να λυθεί το πρόβλημα είναι να λάβουμε τυχαία μία μεταβλητή από κάθε ζεύγος $(w_1, z_1), (w_2, z_2)$ και να τη θέσουμε ίση με 0, στη σχέση (3.3). Οι υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος αποκαλούνται χρησιμοποιούμενες μεταβλητές. Αφού απαλειφθούν οι μηδενικές μεταβλητές από τη σχέση (3.3), εάν το εναπομένον σύστημα έχει λύση στην οποία οι χρησιμοποιούμενες μεταβλητές είναι μη αρνητικές, αυτό θα αποτελεί και μία λύση για τις σχέσεις (3.3) και (3.4).

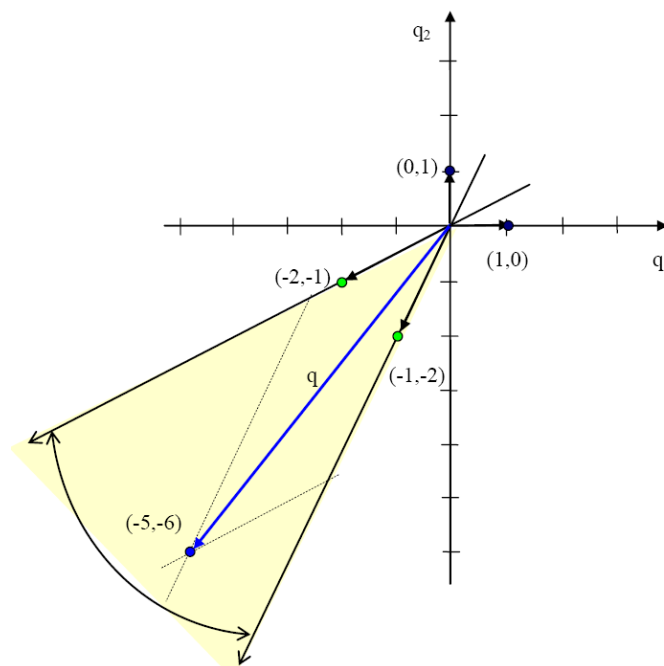
Έστω ότι w_1, w_2 είναι μηδέν. Το σύστημα γίνεται:

$$z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = q$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι τότε μπορούμε να βρούμε μη αρνητικές τιμές του z_1, z_2 οι οποίες να συνθέσουν τις συνιστώσες του διανύσματος q . Άρα εφόσον το διάνυσμα q βρίσκεται μέσα στον κώνο των δύο διανυσμάτων τότε υπάρχει λύση. Παρατηρούμε επίσης ότι η λύση είναι μοναδική καθόσον το διάνυσμα q δεν μπορεί να βρεθεί σε άλλο κώνο γιατί τα άλλα δυο διανύσματα είναι θετικά, οπότε, πολλαπλασιαζόμενα με μη αρνητικούς αριθμούς, δεν μπορούν να αποτελέσουν τις συνιστώσες του διανύσματος q .

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει: $z_1 = \frac{4}{3}$ και $z_2 = \frac{7}{3}$ οπότε η λύση του προβλήματος είναι: $w^T = [0,0]$ και $z^T = \left[\frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right]$



ΣΧΗΜΑ 3.1 Κώνος προβλήματος συμπληρωματικότητας (complimentarity cone)

Για ένα πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας τάξεως n ο περιορισμός της συμπληρωματικότητας υποχρεώνει για κάθε $j=1,2,..n$ ότι θα πρέπει να εξεταστούν όλοι οι συνδυασμοί για $w_j = 0$ ή $z_j = 0$ οπότε προκύπτουν συνολικά 2^n συνδυασμοί. Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων, προκύπτουν προβλήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} B_r y^r &= q \\ y^r &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Όπου $y^r = [y_1^r, y_2^r, \dots, y_n^r] \in (w_j, z_j)$ με $j=1,2,..,n$ και B_r το αντίστοιχο τετραγωνικό μητρώο.

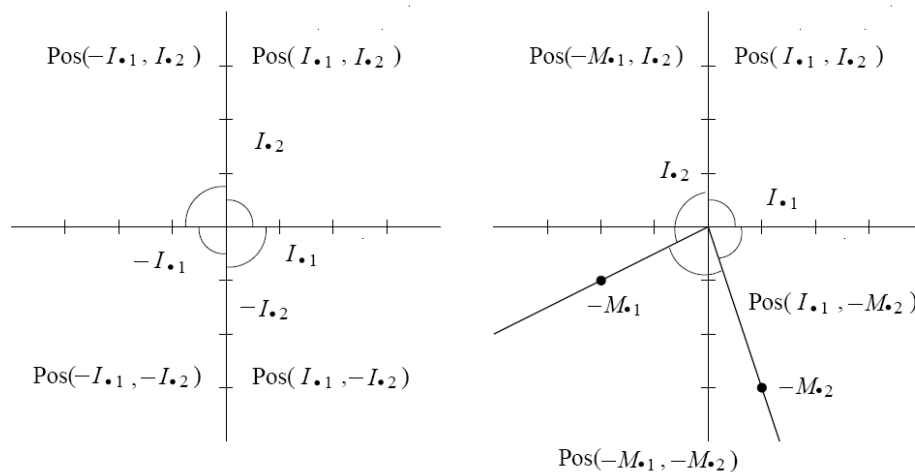
Το πρόβλημα αυτό είναι ειδική περίπτωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (LP) και μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Simplex για να αποφευχθούν λύσεις με αρνητικούς όρους που δεν είναι αποδεκτές. Αν κάποιο ή κάποια από τα μητρώα συντελεστών έχουν μηδενική ορίζουσα τότε το σύστημα ενδέχεται να μην έχει λύση, ή να έχει μία ή άπειρες αποδεκτές λύσεις. Όλες οι λύσεις για όλα τα $r = 1,2,..,2^n$ αποτελούν τις λύσεις του γραμμικού προβλήματος συμπληρωματικότητας (LCP). Για προβλήματα μεγάλης τάξης n το πρόβλημα γίνεται απαγορευτικά δύσκολο και γι' αυτό υπάρχουν άλλοι αποτελεσματικότεροι αλγόριθμοι για την επίλυσή του.

3.3 Κώννοι προβλήματος συμπληρωματικότητας

Στο LCP (q, M) , οι κώννοι της συμπληρωματικότητας εξαρτώνται από το μητρώο M . Το διάνυσμα q δεν παίζει κανένα ρόλο στον ορισμό των κώννων αυτών.

Έστω M , ένα τετραγωνικό μητρώο διάστασης n . Για να εξαχθεί το $C(M)$, δηλαδή η τάξη του συμπληρωματικού κώννου που αντιστοιχεί στο M , το ζεύγος των διανυσμάτων $(I, j-M \cdot j)$, είναι γνωστό ως το j συμπληρωματικό ζεύγος διανυσμάτων, $1 \leq j \leq n$. Λαμβάνεται ένα από τα διανύσματα του ζεύγους $(I, j-M \cdot j)$ και ορίζεται ως $A \cdot j$. Το αριθμημένο σετ διανυσμάτων $(A \cdot 1, \dots, A \cdot n)$ ονομάζεται συμπληρωματικό σετ διανυσμάτων. Ο κώννος $\text{Pos}(A \cdot 1, \dots, A \cdot n) = \{y : y = a_1 A \cdot 1 + \dots + a_n A \cdot n \geq 0, \dots, a_n \geq 0\}$ είναι γνωστός ως συμπληρωματικός κώννος στην τάξη του $C(M)$. Προφανώς υπάρχουν 2^n συμπληρωματικοί κώννοι.

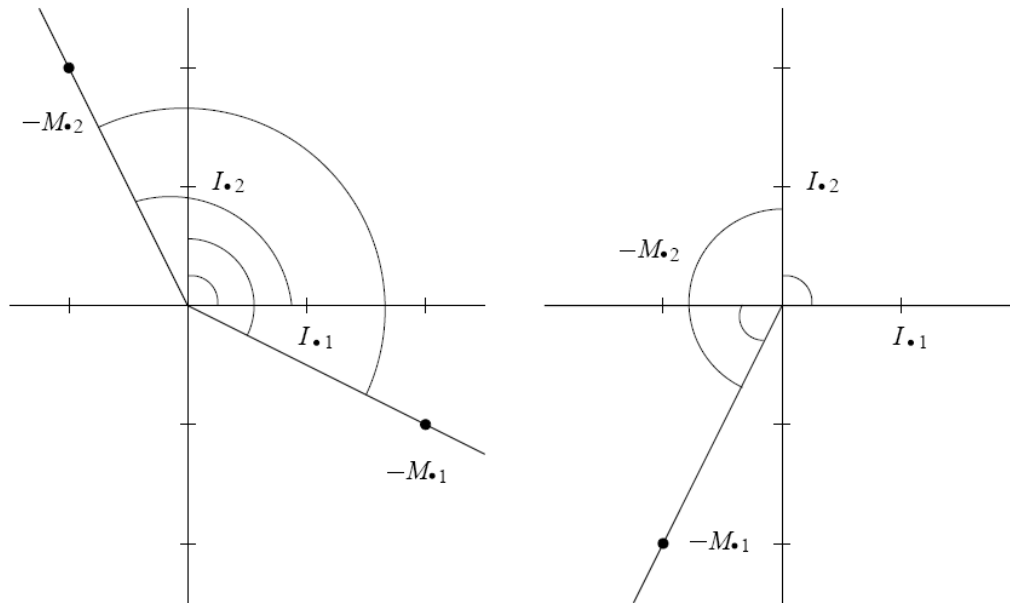
Έστω ότι $n=2$ και $M=I$. Σε αυτή την περίπτωση, η τάξη $C(I)$ είναι απλά η τάξη των ορθών γωνιών του \mathbb{R}^2 . Γενικά, για οποιοδήποτε $n, C(I)$, είναι η τάξη ορθών γωνιών του \mathbb{R}^n . Γι' αυτό, η τάξη των συμπληρωματικών κώννων είναι η γενίκευση της τάξης των ορθών γωνιών.



ΣΧΗΜΑ 3.2 Παραδείγματα κώννων συμπληρωματικότητας

Στο σχήμα (3.2.α) είναι η περίπτωση που το μητρώο M είναι το μοναδιαίο ενώ στο σχήμα (3.2.β) είναι η περίπτωση που το μητρώο M είναι το $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Στο επόμενο σχήμα, εφόσον το $\{I_1 - M_2\}$ είναι ένα γραμμικώς εξαρτημένο σετ, ο κώνος $\text{Pos}\{I_1 - M_2\}$ έχει μηδενική εσωτερική επιφάνεια. Περιλαμβάνει όλα τα σημεία του οριζώντιου άξονα. Οι υπόλοιποι τρεις συμπληρωματικοί κώνοι δεν έχουν μηδενική εσωτερική επιφάνεια.



ΣΧΗΜΑ 3.3 Κώνοι συμπληρωματικότητας

Έστω ότι το $\text{Pos}\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι ο συμπληρωματικός κώνος στο $C(M)$. Αυτός ο κώνος λέγεται ότι είναι μη εκφυλισμένος συμπληρωματικός κώνος εάν δεν έχει μηδενική εσωτερική επιφάνεια, δηλαδή εάν το $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι ένα μη γραμμικώς εξαρτημένο σετ. Για παράδειγμα, οι κώνοι συμπληρωματικότητας στο σχήμα 4.2 και στο σχήμα 4.3.α είναι μη εκφυλισμένοι. Στο σχήμα 4.3.β ο κώνος συμπληρωματικότητας $\{I_1 - M_2\}$ είναι εκφυλισμένος και οι άλλοι όχι. Το σχήμα

4.3.α αναφέρεται στην περίπτωση που το μητρώο $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ενώ το μητρώο M

για το σχήμα 4.3.β είναι $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4 Το πρόβλημα της γραμμικής συμπληρωματικότητας (LCP)

Έχοντας ως δεδομένο το τετραγωνικό μητρώο M μεγέθους n και το διάνυσμα $q \in \mathbb{R}^n$, το LCP (q, M) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης ενός συμπληρωματικού κώνου στο $C(M)$, που να συμπεριλαμβάνει το σημείο q , δηλαδή να βρεθεί ένα σετ με συμπληρωματικά διανύσματα $\{A_1, \dots, A_n\}$ τέτοια ώστε:

- (1) $A_j \in \{I_j - M_j\}$ για $1 \leq j \leq n$
- (2) το q μπορεί να εκφραστεί ως ένας μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός του $\{A_1, \dots, A_n\}$

Όπου I είναι το μοναδιαίο μητρώο μεγέθους n και I_j είναι το j στοιχείο του διανύσματος. Αυτό είναι ισοδύναμο με την εύρεση $w \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n$ που να ικανοποιεί $\sum_{j=1}^n I_j w_j - \sum_{j=1}^n M_j z_j = q, w_j \geq 0, z_j \geq 0$ για κάθε j . Σε μητρική μορφή αυτό γράφεται:

$$w - Mz = q \quad (3.7)$$

$$w \geq 0, z \geq 0 \quad (3.8)$$

$$w_i z_i = 0 \text{ για κάθε } i \quad (3.9)$$

Λόγω της (3.8) η συνθήκη (3.9) ισοδυναμεί με $\sum_{j=1}^n w_j z_j = w^T z = 0$. Αυτή η συνθήκη είναι γνωστή ως ο περιορισμός της συμπληρωματικότητας. Για κάθε λύση του LCP (q, M) εάν μία τιμή από το ζεύγος των μεταβλητών (w_j, z_j) είναι θετική, η άλλη είναι μηδενική. Άρα το ζεύγος (w_j, z_j) είναι γνωστό ως το j ζεύγος μεταβλητών περιορισμών συμπληρωματικότητας και κάθε μεταβλητή του ζεύγους είναι συμπληρωματική στην άλλη. Στη σχέση (3.7) το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο w_j είναι το I_j και το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο z_j είναι το $-M_j$. Για $j=1$ ως n το ζεύγος $\{I_j - M_j\}$ είναι το j συμπληρωματικό ζεύγος διανυσμάτων στο LCP (q, M) . Για $j=1$ ως n έστω ότι $y_j \in (w_j, z_j)$ κα έστω ότι το A_j είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο y_j στην (3.7). Άρα $A_j \in (w_j, z_j)$. Τότε το $y = (y_1 \dots y_n)$ είναι ένα συμπληρωματικό διάνυσμα μεταβλητών σε αυτό το LCP. Το διατεταγμένο σετ $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι το συμπληρωματικό σετ διανυσμάτων που αντιστοιχούν σε αυτό και το μητρώο A που τα διανύσματά του είναι στη σειρά $A_1 \dots A_n$, είναι γνωστό ως η συμπληρωματική βάση της (3.7) που αντιστοιχεί στο συμπληρωματικό βασικό διάνυσμα y . Εάν τα $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το y είναι ένα συμπληρωματικό βασικό διάνυσμα μεταβλητών σε αυτό το LCP και το συμπληρωματικό μητρώο A του οποίου τα διανύσματα είναι διαδοχικά τα $A_1 \dots A_n$, είναι γνωστό σαν η συμπληρωματική βάση της (3.7) που αντιστοιχεί στο βασικό συμπληρωματικό διάνυσμα y .

Ο κώνος $\text{Pos}(A_1 \dots A_n) = \{x : x = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n, a_1 \geq 0 \dots a_n \geq 0\}$ είναι ο συμπληρωματικός κώνος τάξης $C(M)$ που αντιστοιχεί στο συμπληρωματικό σετ διανυσμάτων $\{A_1, \dots, A_n\}$, ή το σχετιζόμενο συμπληρωματικό σετ διανυσμάτων μεταβλητών y . Μια λύση του LCP (q, M) πάντα σημαίνει ένα (w, z) που να ικανοποιεί τους περιορισμούς (3.7), (3.8), (3.9).

Ένα εφικτό συμπληρωματικό διάνυσμα για αυτό το LCP είναι ένα συμπληρωματικό βασικό διάνυσμα που να ικανοποιεί την ιδιότητα ότι το q μπορεί να εκφραστεί σαν ένας μη αρνητικός συνδυασμός των διανυσμάτων της

αντίστοιχης συμπληρωματικής βάσης. Γι' αυτό κάθε εφικτό βασικό διάνυσμα οδηγεί σε μια λύση του LCP.

Η ένωση όλων των συμπληρωματικών κώνων που σχετίζονται με το τετραγωνικό μητρώο M ορίζεται με το συμβολισμό $K(M)$. $K(M)$ είναι ξεκάθαρα το σετ όλων των διανυσμάτων q για τα οποία το LCP (q, M) έχει τουλάχιστον μία λύση.

Θα πούμε ότι το διάνυσμα \bar{z} οδηγεί σε μια λύση του LCP (q, M) εάν $(\bar{w} = M\bar{z} + q, \bar{z})$ είναι μια λύση του LCP.

Για να παρουσιαστούν τα παραπάνω, στον επόμενο πίνακα φαίνονται όλα τα συμπληρωματικά διανύσματα μεταβλητών και τα αντίστοιχα συμπληρωματικά μητρώα για ένα LCP μεγέθους $n=2$.

Complementary vector of variables	The corresponding complementary matrix
(w_1, w_2)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(w_1, z_2)	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
(z_1, w_2)	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
(z_1, z_2)	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Διανύσματα και μητρώα συμπληρωματικότητας για πρόβλημα τάξης 2

Εφόσον καθένα από τα συμπληρωματικά μητρώα είναι μη μοναδιαίο, όλα τα διανύσματα συμπληρωματικότητας είναι συμπληρωματικές βάσεις σε αυτό το LCP. Αφού το $q = (-5, -6)^T$ στο αρχικό πρόβλημα του κεφαλαίου μπορεί να εκφραστεί σαν ένα μη αρνητικός συνδυασμός του συμπληρωματικού μητρώου που αντιστοιχεί στο (z_1, z_2) , το (z_1, z_2) είναι ένα εφικτό συμπληρωματικό διάνυσμα για αυτό το LCP.

3.5 Η γενική αριθμητική μέθοδος του LCP

Θεωρούμε το LCP (q, M) μεγέθους n . Η συνθήκη συμπληρωματικότητας (3.9) δείχνει ότι σε κάθε λύση (w, z) αυτού του LCP, για κάθε $j=1$ ως n πρέπει να έχουμε είτε $w_j = 0$ ή $z_j = 0$. Αυτό δίνει στο LCP ένα συνδυαστικό παρά μη γραμμικό χαρακτήρα. Οδηγεί αυτόματα σε μια αριθμητική μέθοδο για το LCP.

Υπάρχουν ακριβώς 2^n συμπληρωματικά διανύσματα μεταβλητών. Έστω ότι:

$$y^r = (y_1^r, \dots, y_n^r) \text{ για } r=1 \text{ ως } 2^n$$

Όπου $y_j^r \in (w_j, z_j)$ για κάθε $j=1$ ως n είναι όλα τα συμπληρωματικά διανύσματα μεταβλητών. Έστω A_r ότι είναι το συμπληρωματικό μητρώο που αντιστοιχεί στο y^r για $r=1$ ως 2^n . Επιλύεται το ακόλουθο σύστημα (P_r) .

$$\begin{aligned} A_r y^r &= q \\ y^r &\geq 0 \end{aligned} \tag{P_r}$$

Αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί από τη φάση 1 της μεθόδου Simplex για το γραμμικό προγραμματισμό, ή με άλλες μεθόδους επίλυσης συστημάτων ισότητας ή ανισότητας. Αν το σύστημα έχει εφικτή λύση, έστω \bar{y}^r , τότε $y^r = \bar{y}^r$ και όλες οι μεταβλητές που δεν είναι y^r ισούνται με 0. Η παραπάνω είναι μια λύση του LCP (q, M) . Εάν το μητρώο συμπληρωματικότητας A_r είναι αντιστρέψιμο, το σύστημα (P_r) μπορεί να μην έχει εφικτή λύση. Κάθε εφικτή λύση του (P_r) οδηγεί σε λύση του LCP (q, M) . Όταν αυτό επαναλαμβάνεται για $r=1$ ως 2^n , όλες οι λύσεις του LCP (q, M) μπορούν να βρεθούν. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε στο πρώτο παράδειγμα του κεφαλαίου για το πρόβλημα τάξης 2, είναι ακριβώς η αριθμητική μέθοδος.

Αυτή η αριθμητική μέθοδος είναι ικανοποιητική για χρήση μόνο αν $n=2$, επειδή 2^2 είναι μικρός αριθμός. Και για να ελεγχθεί αν το σύστημα (P_r) έχει λύση για οποιοδήποτε r , μπορούμε να ζωγραφίσουμε τον αντίστοιχο κώνο συμπληρωματικότητας στο καρτεσιανό επίπεδο και να ελέγξουμε αν περιέχει το διάνυσμα q . Όταν $n>2$, και ειδικότερα για μεγάλα n , η αριθμητική μέθοδος δεν είναι πολύ πρακτική, επειδή το 2^n , αυξάνει πολύ γρήγορα.

3.6 Εφαρμογή στο γραμμικό προγραμματισμό

Σε ένα γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (LP), μπορεί να υπάρχουν μερικές συνθήκες ανισότητας, μεταβλητές με περιορισμό προσήμου και μεταβλητές χωρίς περιορισμούς. Μετασχηματίζουμε κάθε μεταβλητή με κάτω όριο, ας πούμε $x_j \geq l_j$, σε μια μη αρνητική μεταβλητή αντικαθιστώντας $x_j = l_j + y_j$ όπου $y_j \geq 0$. Μετασχηματίζουμε κάθε μεταβλητή με περιορισμό προσήμου της μορφής $x_j \leq 0$ σε μια μη αρνητική μεταβλητή αντικαθιστώντας $x_j = -y_j$ όπου $y_j \geq 0$. Απαλείφουμε τις μεταβλητές χωρίς περιορισμό, τη μία μετά την άλλη, χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς ισότητας. Αν παραμείνουν ακόμη περιορισμοί ισότητας αυτοί επιλύονται ως προς μία μη αρνητική μεταβλητή και ο περιορισμός ισότητας αντικαθίσταται από τον περιορισμό ανισότητας που προκύπτει. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι εξάλειψης όλων των περιορισμών ισότητας. Στη συνέχεια, όλοι οι περιορισμοί της μορφής \leq πολλαπλασιάζονται με -1 και μετατρέπονται σε ανισοτικούς της μορφής \geq . Το ίδιο γίνεται με την αντικειμενική συνάρτηση η οποία αν αφορά μεγιστοποίηση, πολλαπλασιάζεται με -1 πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Έτσι στη γενική περίπτωση, ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για ένα διάνυσμα μεταβλητών x διαστάσεων N , χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, μπορεί να διατυπωθεί στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \text{Min} & \quad c^T x \\ \text{Υποκείμενο σε:} & \quad Ax \geq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Όπου A μητρώο διαστάσεων $m \times N$. Εισάγοντας m μη αρνητικά πλεονάσματα v στους m περιορισμούς το πρόβλημα τίθεται στην τυπική του μορφή ως:

$$\begin{aligned} \text{Min} & \quad c^T x \\ \text{Υποκείμενο σε:} & \quad Ax - v = b \\ & \quad x, v \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Για το παραπάνω ευθύ πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ορίζεται το δυικό του πρόβλημα ως προς τις m το πλήθος δυικές μεταβλητές y και N το πλήθος μη αρνητικά ελλείμματα ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Max} & \quad b^T y \\ \text{Υποκείμενο σε:} & \quad -A^T y + u = c \\ & \quad y, u \geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Τα δύο αυτά προβλήματα διατυπώνονται από κοινού σε μητρική μορφή ως:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c \\ -b \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Όπου επιπλέον:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \geq 0 \text{ και } \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Η δεύτερη συνθήκη στις σχέσεις (3.14) εκφράζει τη συμπληρωματικότητα των τεχνητών μεταβλητών με τις μεταβλητές σχεδιασμού των ετερόνυμων προβλημάτων, δηλαδή τα ελλείμματα του δυικού με τις μεταβλητές του ευθέως και τα πλεονάσματα του ευθέως με τις μεταβλητές του δυικού.

Την παραπάνω διαχωρισμένη μητρική μορφή μπορούμε να εκφράσουμε ενιαία εισάγοντας τα παραπάνω διανύσματα και μητρώα:

$$w = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, z = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{Bmatrix} c \\ -b \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Οπότε οι σχέσεις (3.13) και (3.14) διατυπώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w, z &\geq 0 / w^T z = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Που ορίζουν ένα πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας τάξεως $n=m+N$. Προκύπτει έτσι ότι το ευθύ και δυικό πρόβλημα στη βάση της συμπληρωματικότητας διατυπώνονται ενιαία σε ένα πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (LCP).

3.7 Δευτεροβάθμιος προγραμματισμός

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης η αντικειμενική συνάρτηση του οποίου είναι μια δευτεροβάθμια συνάρτηση των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ οι περιορισμοί παραμένουν γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού ορίζεται ως πρόβλημα δευτεροβάθμιου προγραμματισμού (quadratic programming). Σε μητρική μορφή διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Min} & \quad Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \\ \text{Υποκείμενο σε:} & \quad Ax \geq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Όπου το μητρώο A , διαστάσεων $m \times N$ και το μητρώο D συμμετρικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$, c το διάνυσμα κόστους όπως στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διατυπώνουν το γενικό πρόβλημα δευτεροβάθμιου προγραμματισμού. Σε περίπτωση κατά την οποία το μητρώο D δεν είναι συμμετρικό τότε μπορεί να αντικατασταθεί από το μητρώο $(D + D^T)/2$ αναδιατυπώνοντας το πρόβλημα. Το μητρώο D μπορεί να είναι θετικά (positive definite) ή ημι θετικά ορισμένο (semi positive definite) μητρώο.

Ο ορισμός του θετικά ή ημι θετικά ορισμένου μητρώου απαιτεί η ποσότητα $y^T D y \geq 0$ να είναι θετική ή μηδέν για κάθε διάνυσμα $y \neq 0$. Όταν είναι αυστηρά θετική έχουμε ένα ορισμένο μητρώο ενώ όταν λαμβάνει και την τιμή μηδέν ορίζεται ως ημι θετικά ορισμένο. Για θετικά ορισμένα μητρώα ισχύει ότι όλες οι κύριες υπό οριζουσες $1^{ης}, 2^{ης}, \dots, n^{ης}$ τάξης είναι αυστηρά θετικές.

Ο συνήθης τρόπος να αποδειχθεί η ιδιότητα αυτή είναι με απαλοιφή, να αναχθεί το μητρώο σε άνω τριγωνική μορφή και όταν τα στοιχεία της διαγωνίου είναι όλα θετικά τότε το μητρώο είναι θετικά ορισμένο, ενώ αν κάποιο ή κάποια από τα στοιχεία της διαγωνίου της άνω τριγωνικής μορφής είναι μηδέν και τα υπόλοιπα θετικοί αριθμοί, τότε το μητρώο είναι ημι θετικά ορισμένο. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική εφόσον αποδεικνύεται ότι όταν ένα μητρώο είναι θετικά ή ημι θετικά ορισμένο τότε η συνάρτηση $Q(x)$ που περιγράφει είναι κυρτή (convex). Για κυρτές συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι οι συνθήκες Karush – Kuhn – Tucker αποτελούν τις αναγκαίες αλλά και ικανές συνθήκες ανάδειξης της καθολικής βέλτιστης λύσης.

3.8 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες βελτίστου για το πρόβλημα του δευτεροβάθμιου προγραμματισμού

Το πρόβλημα, όπως περιγράφεται από τις σχέσεις (4.17) καλείται κυρτό πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού όταν η συνάρτηση $Q(x)$ είναι κυρτή, πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν το μητρώο D είναι ημι-θετικά ορισμένο. Αν y_i θεωρηθεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange για τον ανισοτικό περιορισμό της γραμμής i , δηλαδή $A_{ij}x_j \geq b_i$ για όλα τα $i=1,2,\dots,m$ και u_j ο πολλαπλασιαστής Lagrange για κάθε περιορισμό μη αρνητικότητας $x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,N$, η συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στο πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού που περιγράφεται στις σχέσεις (4.17) γράφεται:

$$L(x, y, u) = Q(x) - y^T(Ax - b) - u^T x \tag{3.18}$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες KKT στην παραπάνω σχέση για κάθε επιτρεπτή λύση x , λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y, u)}{\partial x} &= c + Dx - A^T y - u = 0 \\ y &\geq 0 \quad u \geq 0 \\ y^T(Ax - b) &= 0 \quad u^T x = 0 \\ Ax - b &\geq 0 \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Όπου η πρώτη γραμμή αναφέρεται στην τρίτη απαίτηση των συνθηκών KKT ενώ η τρίτη γραμμή στη δεύτερη απαίτησή τους. Εισάγοντας τα N το πλήθος μη αρνητικά πλεονάσματα u στην τελευταία ανισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} Ax - u - b &= 0 \quad \text{ή} \quad u = Ax - b \\ u &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Αν ορίσουμε τα παρακάτω διανύσματα w, z, q καθώς και το μητρώο M ως εξής:

$$w = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} c \\ -b \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Τότε οι σχέσεις (3.19) και (3.20) γράφονται με την παρακάτω μορφή:

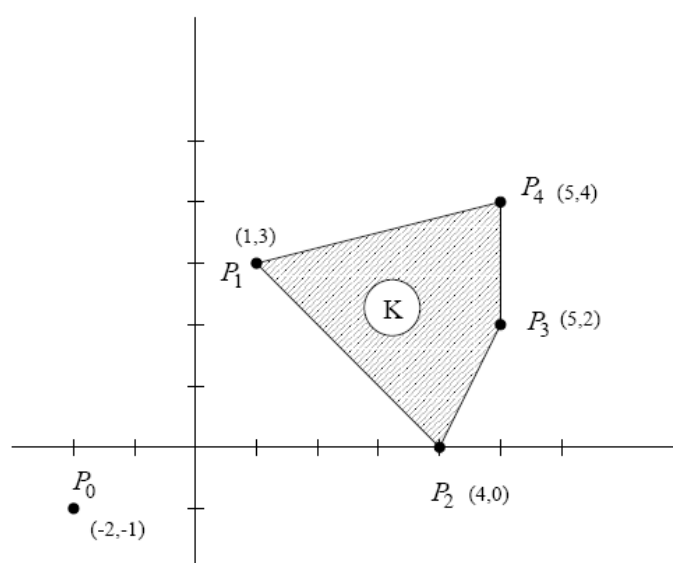
$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w, z &\geq 0 / w^T z = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Και ορίζουν ένα πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας τάξεως $n=m+N$. Προκύπτει έτσι ότι για μητρώο D ημι-θετικά ορισμένο το πρόβλημα της εύρεσης του καθολικού βελτίστου x του τετραγωνικού προγραμματισμού που περιγράφεται από τις σχέσεις (3.17) συμπίπτει με τη λύση του γραμμικού προβλήματος συμπληρωματικότητας όπως ορίστηκε από τις σχέσεις (3.22). Σε περίπτωση που το μητρώο D δεν είναι θετικά ή ημι θετικά ορισμένο τότε η λύση του γραμμικού προβλήματος συμπληρωματικότητας, ενδέχεται να μην αποτελεί λύση του προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού.

Η συσχέτιση αυτή του ευθέως και δυϊκού προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού και του κυρτού δευτεροβάθμιου ή τετραγωνικού προγραμματισμού μέσω του γραμμικού προβλήματος συμπληρωματικότητας είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική. Αυτή δεν οδηγεί κατ' ανάγκη και στους αποδοτικότερους αλγόριθμους για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνικού προγραμματισμού ο οποίος μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως ειδική περίπτωση προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποιώντας γενικούς και γρήγορους αριθμητικά αλγορίθμους.

3.9 Πρόβλημα δευτεροβάθμιου προγραμματισμού (Γεωμετρική Θεώρηση)

Προκειμένου, στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, να φανεί πόσο συχνό είναι ένα πρόβλημα να αναχθεί σε πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού, θα παρουσιαστεί συνοπτικά ένα γεωμετρικό παράδειγμα το οποίο ονομάζεται «το πρόβλημα της ελάχιστης απόστασης» (minimum distance problem).



ΣΧΗΜΑ 3.4 Πρόβλημα ελάχιστης απόστασης

Έστω ότι K είναι η γραμμοσκιασμένη λεία πολυεδρική επιφάνεια όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Έστω P_0 ότι είναι το σημείο $(-2, -1)$. Το πρόβλημα ζητάει να βρεθεί το σημείο εντός του K το οποίο είναι πιο κοντά στο P_0 (σε όρους της συνήθους ευκλείδειας απόστασης). Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά σε ερευνητικές εργασίες.

Κάθε σημείο στο K μπορεί να εκφραστεί ως ένας λείος συνδυασμός των ακραίων σημείων του (ή γωνιακών σημείων του). Δηλαδή, οι συντεταγμένες ενός γενικού σημείου εντός του K είναι: $(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4, 3\lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4)$ όπου το λ_i ικανοποιεί τη σχέση $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ και $\lambda_i \geq 0$ για όλα τα i . Άρα, το πρόβλημα της εύρεσης του σημείου στο K κοντύτερα στο σημείο P_0 είναι ισοδύναμο με το να λυθεί το εξής:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 - (-2))^2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 - (-1))^2 \\ \text{Subject to} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_i \geq 0 \text{ για κάθε } i \end{aligned}$$

Το λ_4 μπορεί να απαλειφθεί από το πρόβλημα με την αντικατάσταση της έκφρασης $\lambda_4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ αντί γι' αυτό. Κάνοντας αυτό και απλοποιώντας, οδηγεί στο ακόλουθο πρόγραμμα τετραγωνικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (-66, -54, -20)\lambda + \left(\frac{1}{2}\right)\lambda^T \begin{pmatrix} 34 & 16 & 4 \\ 16 & 34 & 16 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \lambda \\ \text{Subject to} \quad & -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Όπου $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$. Το να λυθεί αυτό το πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού είναι ισοδύναμο με το να λυθεί το ακόλουθο LCP:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 34 & 16 & 4 & 1 \\ 16 & 34 & 16 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \\ -54 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Όλες οι μεταβλητές $u_1, u_2, u_3, v_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, y_1 \geq 0$

Και: $u_1\lambda_1 = u_2\lambda_2 = u_3\lambda_3 = v_1y_1 = 0$

Έστω ότι $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{v}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{y}_1)$ είναι μια λύση του LCP. Έστω επίσης ότι: $\bar{\lambda}_4 = 1 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3$. Τότε $\bar{x} = (\bar{\lambda}_1 + 4\bar{\lambda}_2 + 5\bar{\lambda}_3 + 5\bar{\lambda}_4, 3\bar{\lambda}_1 + 0\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4)$ είναι το σημείο εντός του K που είναι πιο κοντά στο P_0 .

3.10 Η έννοια της χαλάρωσης υλικού (softening)

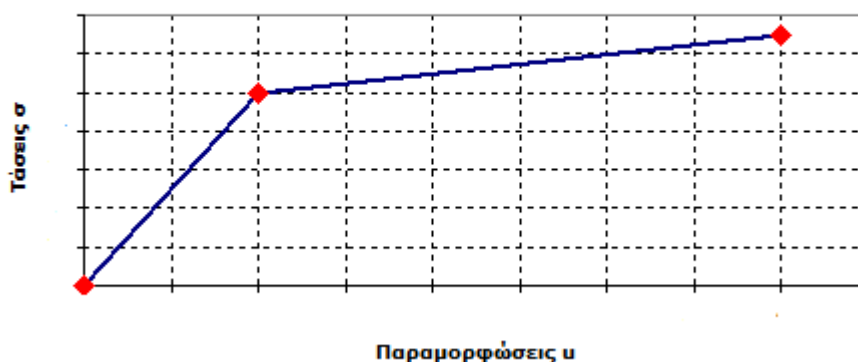
Ένα θεμελιώδες πρόβλημα στον τομέα του πολιτικού μηχανικού είναι η ανάλυση κατασκευών με ταυτόχρονη παρουσία γεωμετρικής γραμμικότητας και μη γραμμικότητας υλικού. Η μη ολόνομη συμπεριφορά του υλικού και η εξάρτηση από τη διαδρομή της φόρτισης, συνήθως επιβάλλουν ολοκλήρωση στο χώρο και στο χρόνο ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων ώστε να προκύψει η επιθυμητή απόκριση. Η διακριτοποίηση στο χρόνο μπορεί να γίνει εύκολα και συνήθως πραγματοποιείται με τυπικό τρόπο μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, ακριβής ολοκλήρωση στο χρόνο των καταστατικών νόμων, ακόμα και με την παραδοχή μικρών παραμορφώσεων, είναι επίπονη από υπολογιστικής άποψης. Αυτός συμβαίνει ειδικά αν η απόκριση πρέπει να εξαχθεί με ακρίβεια, όπως γίνεται στην περίπτωση όπου υπάρχει μεγάλος αριθμός πλαστικοποιήσεων και ελαστικών αποφορτίσεων. Μια αποδεκτή προσέγγιση ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος είναι να διεξαχθεί μια μη ολόνομη ανάλυση σαν μια σειρά από ολόνομες αναλύσεις (μη εξαρτημένες από την πορεία της φόρτισης). Σε αυτήν την βήμα προς βήμα ολόνομη προσέγγιση, οι παρεκτροπές στη συμπεριφορά της κατασκευής λόγω της μη ολόνομης συμπεριφοράς, που προκαλούνται από ελαστική αποφόρτιση από κάποια πλαστική κατάσταση, υπολογίζονται μέσα σε κάθε βήμα της μεθόδου. Παρόλ' αυτά, οποιοδήποτε ολόνομο βήμα αυτής της κλιμακωτής ανάλυσης δεν μπορεί να εκτελεστεί με ευκολία αν συμπεριλαμβάνονται στο υλικό και νόμοι χαλάρωσης, επειδή είναι πιθανόν να εμφανιστούν πολλές λύσεις που προκαλούνται από φαινόμενα διχοτόμησης (bifurcation phenomena).

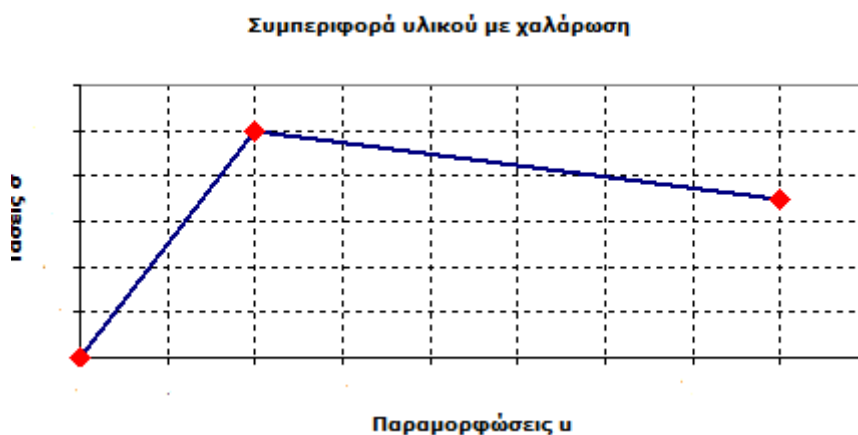
Η σύγκριση των νόμων χαλάρωσης του υλικού σε σχέση με άλλους συνήθεις καταστατικούς νόμους, φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Ελαστική-απόλυτως πλαστική συμπεριφορά



Συμπεριφορά υλικού με κράτυνση





ΣΧΗΜΑ 3.5: Σύγκριση συμπεριφοράς υλικού με χαλάρωση σε σχέση με απόλυτα πλαστική συμπεριφορά και με κράτυνση

Η ενότητα αυτή του κεφαλαίου, επικεντρώνεται στο πώς μπορούν να περιγραφούν με μαθηματικό τρόπο μοντέλα συμπεριφοράς υλικού που συμπεριλαμβάνουν κλάδο χαλάρωσης. Αυτή η μοντελοποίηση γίνεται μέσω ενός προβλήματος συμπληρωματικότητας και περιλαμβάνει την ορθογωνικότητα δύο διανυσμάτων που έχουν περιορισμό πρόσημου.

3.11 Γενικό ολόνομο μοντέλο

Θεωρούμε ένα δομικό σύστημα το οποίο έχει διακριτοποιηθεί ως ένα σύνολο στοιχείων (ράβδοι, στοιχεία δικτυώματος κλπ). Η απόκριση ενός τέτοιου συστήματος υποβαλλόμενο σε ένα δεδομένο διάνυσμα φόρτισης P , εξαρτάται από ένα αριθμό παραμέτρων μετατόπισης που συλλέγεται σε ένα διάνυσμα u . Για χάρη απλότητας, η φόρτιση θεωρείται ότι είναι περίπου στατική και ότι οι μετατοπίσεις είναι μικρές.

Οι εξισώσεις συμβιβαστού γεωμετρίας και γραμμικής ισορροπίας δίνονται αντιστοίχως από τις παρακάτω σχέσεις:

$$P = Bs \quad (3.23)$$

$$q = B^T u \quad (3.24)$$

Όπου B είναι, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1, το μητρώο ισορροπίας του στοιχείου, το οποίο εκφράζει τις ακραίες δράσεις στα δύο άκρα του στοιχείου στο καθολικό σύστημα, ως συνάρτηση των βασικών δράσεων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα, s είναι ένα διάνυσμα γενικευμένων τάσεων και q ένα διάνυσμα γενικευμένων παραμορφώσεων.

Η συμπεριφορά κάθε μεμονωμένου στοιχείου εξαρτάται λοιπόν από γενικευμένες μεταβλητές που επίσης αντικατοπτρίζουν άμεσα το νόμο του υλικού. Οι ιδότητες που χρησιμοποιούνται για αυτούς τους καταστατικούς νόμους, μπορούν να γραφτούν συμπυκνωμένα ως εξής:

$$q = e + p \quad (3.25)$$

$$s = Se \quad (3.26)$$

$$p = Nz, \quad N = \frac{\partial w^T}{\partial s} \quad (3.27)$$

$$w = w(s, z) \geq 0, \quad z \geq 0, \quad F^T z = 0 \quad (3.28)$$

Στο πνεύμα της κλασικής θεωρίας παραμορφώσεων της πλαστικότητας, οι σχέσεις (3.25)-(3.28) εκφράζουν, σε μια γενική μορφή, του ολόνομους νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Συγκεκριμένα, η (3.25) περιγράφει τη σύνθεση του διανύσματος των παραμορφώσεων, ως άθροισμα ελαστικών e και πλαστικών p παραμορφώσεων. Η γραμμική ελαστικότητα δίνεται από τη σχέση (3.26) όπου το S , όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1, είναι ένα συμμετρικό, ελαστικό μητρώο, ασύζευκτων δυσκαμψιών στοιχείων. Οι πλαστικές παραμορφώσεις p ορίζονται με τη σειρά τους από ένα νόμο ροής, που σχετίζεται με το μητρώο N , καθέτων διανυσμάτων ως προς τις επιφάνειες διαρροής, και ένα διάνυσμα πλαστικών πολλαπλασιαστών z . Οι μη αρνητικές πλαστικοποιήσεις w , θεωρούνται πως εξαρτώνται από τις γενικευμένες τάσεις s και τους μη αρνητικούς πλαστικούς συντελεστές z . Τέλος, μια σχέση συμπληρωματικότητας που εκφράζει την ορθογωνικότητα του w και του z , ολοκληρώνει την περιγραφή και ενεργοποιεί μια συμπεριφορά η οποία είναι πλήρως αντιστρέψιμη (η απόλυτη τιμή του z_i είναι μηδέν αν $w_i > 0$ για οποιοδήποτε πλαστικοποίηση i).

Στις παραπάνω σχέσεις, οι ποσότητες αναφέρονται σε ολόκληρη την κατασκευή, σε μια τυπική διάταξη πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό σημαίνει, ότι τα διανύσματα περιέχουν μέσα τους, σαν υποδιανύσματα, την αλληλουχία της ασύζευκτης συμμετοχής κάθε στοιχείου. Αντίστοιχα, τα μητρώα συλλέγουν σε μια διαγώνια μορφή, τα υπομητρώα που αναφέρονται το καθένα σε ένα στοιχείο. Για παράδειγμα: $s^T = [s^{1T} \dots s^{nT}]$, $S = \text{diag}[S^1 \dots S^n]$ κλπ, όπου n είναι ο αριθμός των στοιχείων.

Ο συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων οδηγεί στη μόρφωση ενός γενικού προβλήματος συμπληρωματικότητας μη γραμμικού προγραμματισμού (non linear complimentarity problem - NCP). Το πρόβλημα αυτό, στη γενική μορφή του γράφεται ως εξής:

$$s - SB^T u + SNz = 0 \quad (3.29)$$

Η διατύπωση του παραπάνω προβλήματος θα αναπτυχθεί λεπτομερέστερα σε επόμενη ενότητα.

3.12 Ολόνομα μοντέλα χαλάρωσης

Ένα απαραίτητο στοιχείο της NCP μορφής του προβλήματος της ολόνομης ανάλυσης είναι η ακριβής μαθηματική περιγραφή του νόμου χαλάρωσης. Για χάρη απλότητας, θεωρείται πως η σχέση τάσεων παραμορφώσεων ($s-q$) είναι 1-1 για κάθε πεπερασμένο στοιχείο i , όπως θα συνέβαινε σε ένα μοντέλο δικτυώματος. Η επέκταση σε στοιχεία με πολλές διαστάσεις θα είναι έπειτα εύκολο να εξαχθεί.

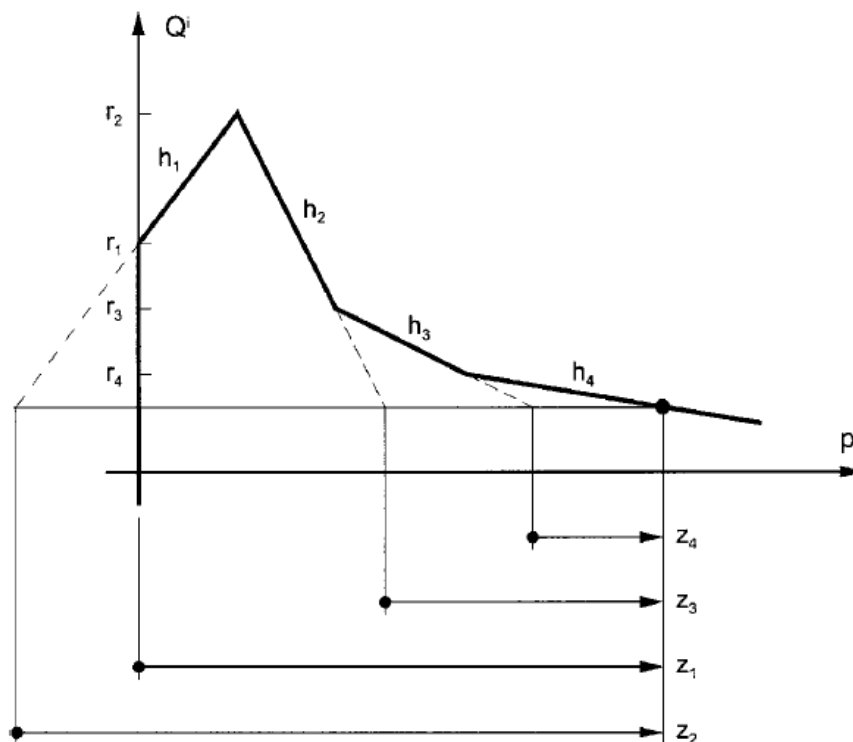
Για μοντέλα με γραμμικοποιημένη επιφάνεια διαρροής, η πλαστικοποίηση για το στοιχείο i , μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη μορφή (όπως εξήχθη από τον Maier):

$$w^i = -N^T s^i + H^i z^i + r^i \geq 0, \quad z^i \geq 0, \quad F^{iT} z^i = 0 \quad (3.30)$$

Όπου οι πλαστικές παραμορφώσεις p^i εισέρχονται στη σχέση (3.30) μέσω των πλαστικών πολλαπλασιαστών z^i (σχέση (3.27)). Παρόλ' αυτά, αντίθετα με τους νόμους κράτυνσης για τους οποίους προτάθηκε η σχέση (3.30), δεν είναι απλή διαδικασία να οριστούν τα διανύσματα και τα μητρώα για συμπεριφορά

χαλάρωσης. Βασιζόμενοι σε συμπεράσματα μηχανικής σχετικά με συστήματα ελατηρίων και επαφής, οι μελετητές εξήγαγαν σχετικά πρόσφατα επιτυχώς το μοντέλο για μια γραμμικοποιημένη σχέση χαλάρωσης για δύο κλάδους.

Στο σχήμα (3.6) παρουσιάζεται μια επέκταση του παραπάνω, ώστε να συμπεριλάβει και κλάδο κράτυνσης (όπως συνήθως συμβαίνει στην πραγματικότητα). Σε αυτό το σχήμα ορίζονται διάφορες ποσότητες, όπως τα σημεία αλλαγής κλίσης (breakpoints) και οι πλαστικοί πολλαπλασιαστές. Φαίνεται για λόγους απλότητας μόνο το θετικό τμήμα του διαγράμματος. Προφανώς, οι περιγραφές για αρνητικές τάσεις s μπορούν εύκολα να συμπληρωθούν δίπλα σε στις θετικές τάσεις s , εφόσον δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ τους.



ΣΧΗΜΑ 3.6 Γραμμικοποιημένο μοντέλο χαλάρωσης

Στη συγκεκριμένη περίπτωση στο σχήμα (3.6) οι πλαστικοποιήσεις μπορούν να περιγραφούν με χρήση των παρακάτω ποσοτήτων.

$$N^{iT} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H^i = \begin{bmatrix} h_1 & -h_1 & 0 & 0 \\ -h_1 & (h_1 + \hat{h}_2) & -\hat{h}_2 & 0 \\ 0 & \hat{h}_2 & -(\hat{h}_2 + \hat{h}_3) & \hat{h}_3 \\ 0 & 0 & \hat{h}_3 & -(\hat{h}_3 + \hat{h}_4) \end{bmatrix}$$

$$r^i = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 - r_4 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Όπου $h_1 (> 0)$ είναι η κλίση του κλάδου της κράτυνσης και $\hat{h}_2, \hat{h}_3, \hat{h}_4$ (όλα < 0) ορίζουν τους διαδοχικούς κλάδους χαλάρωσης. Πιο συγκεκριμένα, αν οι

αντίστοιχες πραγματικές (αρνητικές) κλίσεις χαλάρωσης στο χώρο $s^i - p^i$, συμβολιστούν με τις μη επιγραμμισμένες ποσότητες h_2, h_3, h_4 , τότε:

$$\hat{h}_j = \frac{h_{j-1}h_j}{h_{j-1} - h_j}, j = 2,3,4 \quad (3.32)$$

Όπου $\hat{h}_1 = h_1$. Είναι τυπικό για την κλίση h_4 , να τίθεται ίση με μηδέν, αφού αυτό αντιπροσωπεύει μια φυσική κατάσταση. Επίσης, στην ολόνομη ανάλυση, ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να ληφθεί εάν ο κλάδος της χαλάρωσης επιτρέπεται να τμήσει τον άξονα των τάσεων s καθώς, εφόσον πρόκειται για αναλύσεις ενός βήματος που δεν ακολουθούν την ιστορία των πλαστικοποιήσεων, η πλαστικοποίηση που σχετίζεται με το συγκεκριμένο κλάδο μπορεί παραδόξως να ενεργοποιηθεί για αρνητικό s .

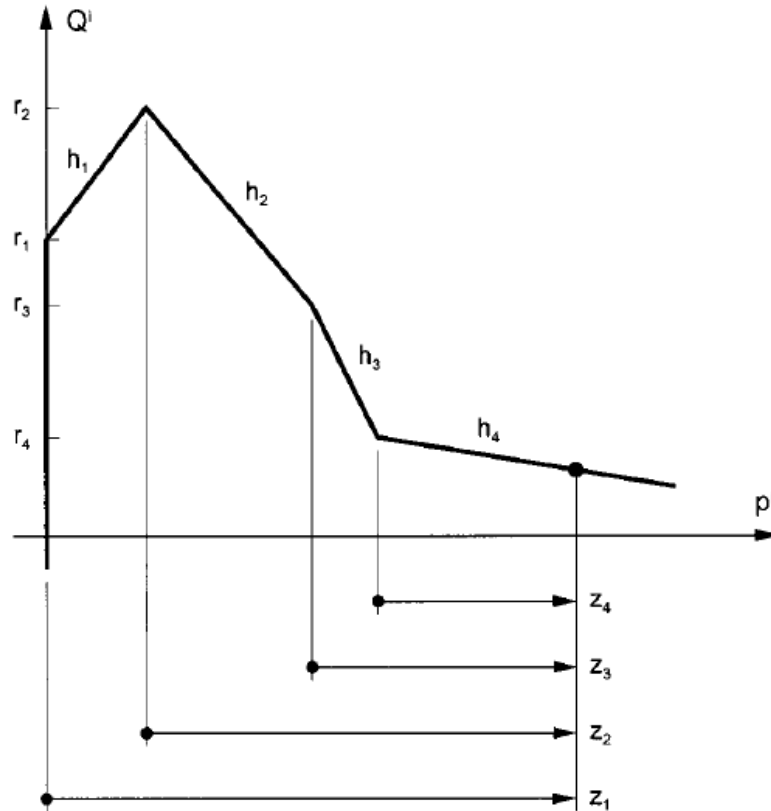
Δύο σημαντικές παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν σε αυτό το σημείο.

Πρώτα, μπορεί εύκολα να ελεγχθεί (μέσω κάποιας αριθμητικής διαδικασίας ή απλά με το χέρι) ότι για οποιοδήποτε δεδομένο επίπεδο έντασης s , οι συνθήκες συμπληρωματικότητας από τις σχέσεις (3.30)-(3.32) περιλαμβάνουν όλες τις λύσεις. Αυτό είναι απαραίτητο, εφόσον υπάρχει η απαίτηση να εξαχθεί ο πιο κρίσιμος δρόμος ισορροπίας μέσα από τα πολλά που αναμένονται να υπάρχουν. Για να διευκρινίσουμε αυτό το σχόλιο, θεωρούμε μια ολόνομη ανάλυση (path-independent) που αποτελείται από μια απλή ράβδο με τη σχέση τάσεων παραμορφώσεων που ακολουθεί το σχήμα (3.6). Για ένα δεδομένο επίπεδο γενικευμένης έντασης $r_2 < s^i < 0$, υπάρχουν δύο λύσεις για το p^i . Μία για τον ανοδικό ελαστικό κλάδο ή τον κλάδο της κράτυνσης και μία για τον κλάδο της χαλάρωσης. Επίσης, αν $s^i > 0$, δεν υπάρχει καμία λύση. Αυτό μπορεί να εξακριβωθεί από τις σχέσεις (3.30)-(3.32), ότι τα παραπάνω είναι αληθή. Τελικά, το γεγονός ότι το μητρώο H^i είναι μη συμμετρικό, οδηγεί όχι μόνο σε μια πιθανή πολλαπλότητα λύσεων αλλά και σε μια έλλειψη εξαγωγής κάποιου γενικού κανόνα.

Δεύτερον, ένας σημαντικό μειονέκτημα των σχέσεων (3.31), (3.32) είναι ότι η συμπεριφορά χαλάρωσης θα πρέπει να σχηματίζει μια λεία επιφάνεια, δηλαδή:

$$|h_2| \geq |h_3| \geq |h_4| \quad (3.33)$$

Για να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός, προτείνεται ένα νέο σετ ορισμών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7, όπου το μέρος της χαλάρωσης τώρα αποτελείται από λείες και κυρτές επιφάνειες. Ενώ αρχικά μετρούσαμε τους πλαστικούς πολλαπλασιαστές κάθε κλάδου, τώρα τους μετράμε από τα σημεία αλλαγής κλίσης της γραμμικοποιημένης επιφάνειας. Το αποτέλεσμα που προκύπτει γενικεύεται με εξαιρετικό τρόπο και δίνεται μια ισχυρή περιγραφή γραμμικοποιημένων συστημάτων κράτυνσης - χαλάρωσης. Δεν είναι δύσκολο να ελεγχθεί ότι οι σχέσεις λείων - κυρτών επιφανειών, μπορούν άμεσα να τροποποιηθούν. Επιπλέον, το μητρώο κράτυνσης H δίνεται σε όρους πραγματικής κλίσης κράτυνσης, οδηγώντας σε μια πιο εύκολη και με περισσότερο νόημα απεικόνιση. Χωρίς να μπορούμε σε λεπτομέρειες για τις γεωμετρικές πράξεις που έχουν εισέλθει στις σχέσεις ώστε να εξαχθεί ο νόμος της χαλάρωσης, δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία που ορίζουν την κατάσταση στο Σχήμα (3.7).

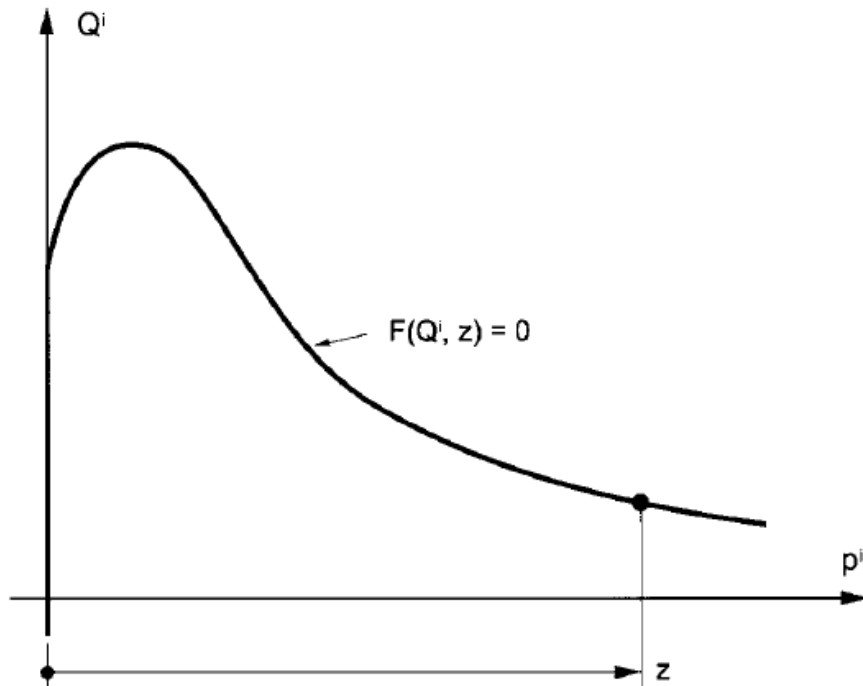


ΣΧΗΜΑ 3.7 Τροποποιημένο γραμμικοποιημένο μοντέλο χαλάρωσης

$$N^{iT} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H^i = \begin{bmatrix} h_1 & (h_2 - h_1) & (h_3 - h_2) & (h_4 - h_3) \\ -h_1 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & -h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_3 \end{bmatrix}$$

$$r^i = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 - r_4 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Τέλος, δεδομένων των σημαντικών βελτιώσεων σε υπολογιστικό επίπεδο στη μη γραμμική θεωρία συμπληρωματικότητας την τελευταία δεκαετία, θα είχε νόημα, σε πολλές περιπτώσεις, να χρησιμοποιηθεί μια μη γραμμική περιγραφή των νόμων χαλάρωσης αντί για μια γραμμικοποιημένη σχέση. Αυτό φαίνεται αρκετά σημαντικό, καθώς μια ένας μη γραμμικός νόμος κράτυνσης – χαλάρωσης, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, μπορεί άμεσα να περιγραφεί και να επιλυθεί από τη σχέση (3.28) όπου: $F(s^i, z^i) = 0$ είναι η εξίσωση της καμπύλης κράτυνσης – χαλάρωσης που φαίνεται στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 3.8 Μη γραμμική χαλάρωση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΧΑΛΑΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ (softening)

4.1 Εισαγωγή

Από πολύ παλιά έχουν αναγνωρισθεί οι επιδράσεις της συμπεριφοράς χαλάρωσης σε επίπεδο υλικού στη συνολική απόκριση μιας κατασκευής. Τέτοια φαινόμενα «φυσικής αστάθειας», όπως αναφέρονται, έχουν παρατηρηθεί για παράδειγμα σε διατομές σκυροδέματος που έχουν υπεροπλισθεί ή σε ημι άκαμπτους-μεταλλικούς κόμβους και ήταν το κύριο αντικείμενο μελέτης σε μερικές θεωρητικές δημοσιεύσεις στις δεκαετίες 1960 και 1970 από τον Maier και την ομάδα του. Παρουσιάστηκαν απλοί ραβδωτοί φορείς οι οποίοι επιδείκνυαν κρίσιμα μηχανικά φαινόμενα, όπως μια διχοτόμηση των αποκρίσεων (πολλαπλότητα δρόμων ισορροπίας) και απώλεια της συνολικής ευστάθειας της κατασκευής. Αντίθετα, σε πιο ρεαλιστικά προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων που αφορούν κατασκευές υπό χαλάρωση, τα αποτελέσματα έδιναν έναν μόνο δρόμο ισορροπίας.

Από υπολογιστικής πλευράς, δεν είναι εύκολο να υπολογισθούν όλοι οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζουν τέτοιες κατασκευές. Οι μέθοδοι που έχουν τη μεγαλύτερη ακρίβεια για να υπολογιστούν όλοι οι δρόμοι ισορροπίας, (ή να βρεθούν οι κρίσιμοι δρόμοι ισορροπίας) βασίζονται σε μια προσέγγιση μαθηματικού προγραμματισμού. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, εδώ και δεκαετίες έχουν γίνει αναλύσεις και με ολόνομη (holonomic/ path independent) και με μη ολόνομη προσέγγιση (non holonomic/ path dependent). Οι υπολογιστικές προσεγγίσεις που έχουν γίνει όσον αφορά την κλασική ευσταθή πλαστικότητα (απολύτως πλαστική συμπεριφορά ή κράτυνση) έχουν πλέον μεγάλη ακρίβεια. Μία διαδεδομένη μαθηματική δομή που χρησιμοποιήθηκε σε τέτοια προβλήματα ευσταθούς πλαστικότητας είναι αυτή της συμπληρωματικότητας. Μαθηματικά, μια σχέση συμπληρωματικότητας μεταξύ των μη αρνητικών διανυσμάτων w και z οδηγεί στη σχέση: $w_i z_i = 0$ για κάθε i και γράφεται συνήθως ως $w^T z = 0$. Από φυσικής άποψης, η παραπάνω σχέση, μπορεί να απεικονίσει το γεγονός ότι, για παράδειγμα, η πλαστικοποίηση και η αποφόρτιση σε μία διατομή δεν μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα. Υπό την παρουσία της χαλάρωσης, οι σχέσεις της συμπληρωματικότητας παραμένουν ίδιες καθώς το μητρώο κράτυνσης (hardening matrix) απλώς αντικαθίσταται από ένα μητρώο χαλάρωσης (softening matrix). Παρόλ' αυτά, το πρόβλημα συμπληρωματικότητας που προκύπτει, δεν επιλύεται εύκολα με υπάρχοντες αλγόριθμους όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος κεντρικού σημείου του Lemke (Lemke's pivoting scheme algorithm). Στην πραγματικότητα, έχει δείξει στη βιβλιογραφία του μαθηματικού προγραμματισμού, ότι δεν υπάρχει κανένας αλγόριθμος που να εγγυάται να βρίσκει όλες τις λύσεις αυτής της τάξης των προβλημάτων συμπληρωματικότητας. Ωστόσο, όπως φαίνεται σε αρκετές δημοσιεύσεις, είναι εφικτό να λυθούν εξ ολοκλήρου πολλά προβλήματα χαλάρωσης αξιοποιώντας την αναμενόμενη φυσική συμπεριφορά του συστήματος ή επειδή το πρόβλημα είναι μικρό σε μέγεθος, ή με τη χρήση σχέσεων που είναι άμεσα συνδεδεμένες με τη συμπληρωματικότητα.

Μια συνήθης και σημαντική κατηγορία προβλημάτων για την οποία είναι απαραίτητο να μελετηθεί η χαλάρωση, είναι αυτά των ρεαλιστικών ελαστοπλαστικών πλαισίων στα οποία η αστάθεια του υλικού δίνει μια συμπεριφορά όπου η καμπτική ροπή μειώνεται ενώ οι παραμορφώσεις αυξάνονται. Αυτό είναι ένα παλιό πρόβλημα το οποίο όμως ακόμα χρίζει προσοχής, καθώς υπάρχουν πάντα ορισμένα ζητήματα που πρέπει να διαλευκανθούν.

Η συγκεκριμένη ενότητα επικεντρώνει σε τρία ζητήματα. Πρώτα, περιγράφει μια γενική και επαρκή μέθοδο να επιλύει το μη ολόνομο πρόβλημα αστάθειας υλικού με έλεγχο φορτίου (load control). Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε κώδικας σε Matlab και έγιναν ορισμένες αριθμητικές εφαρμογές σε δυσδιάστατα πλαίσια. Δεύτερον, προκειμένου να γίνει μια επαλήθευση των αποτελεσμάτων, έγινε σύγκριση της απόκρισης των κατασκευών στις αριθμητικές εφαρμογές με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις δημοσιεύσεις του Tin Loi, ο οποίος επίλυσε το συγκεκριμένο πρόβλημα με το λογισμικό GAMS. Τέλος, γίνεται και μια επέκταση του καταστατικού νόμου ροπών-στροφών, προκειμένου να περιληφθεί και η αξονική δύναμη, άρα να αναπτυχθούν οι πιο ακριβείς σχέσεις αλληλεπίδρασης.

Αυτό θα βοηθήσει στο να ανιχνευθεί η επίδραση της αξονικής δύναμης στην απόκριση μιας τέτοιας κατασκευής.

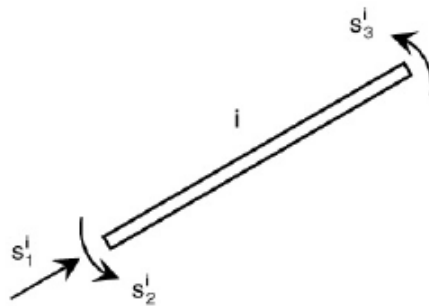
Στα αριθμητικά παραδείγματα τα οποία αναλύονται, το πρώτο είναι ένα απλό θεωρητικό μοντέλο μιας αμφίπακτης δοκού και έχει σαν στόχο να απεικονίσει την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Τα άλλα παραδείγματα αφορούν ρεαλιστικές μεταλλικές κατασκευές και τα περισσότερα είναι ίδια με τα παραδείγματα που ανέλυσε ο Tin Loi στις δημοσιεύσεις του με το λογισμικό GAMS, ώστε να επιτευχθεί και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Χρησιμοποιήθηκε η θεώρηση μικρών μετατοπίσεων, αλλά ο αλγόριθμος μπορεί εύκολα να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει και φαινόμενα δευτέρας τάξης.

Η οργάνωση της ενότητας αυτής έχει ως εξής. Αρχικά θα περιγραφούν οι καταστατικοί νόμοι αστάθειας του υλικού. Η επιφάνεια διαρροής θα είναι ένα εξάγωνο στο οποίο παρατηρείται ιστροπική χαλάρωση. Ακολούθως, παρουσιάζεται η μόρφωση του προβλήματος της μη ολόνομης ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς με αστάθεια υλικού καθώς και τα βήματα για την αριθμητική μέθοδο που ακολουθήθηκε. Στη συνέχεια γίνεται η παρουσίαση των παραδειγμάτων και τέλος εξάγονται ορισμένα συμπεράσματα.

Ακολουθούν τέλος μερικές σύντομες επεξηγήσεις για τους συμβολισμούς. Ένα διάνυσμα x μεγέθους m θα αναγράφεται ως $x \in \mathfrak{R}^m$ και ένα πραγματικό μητρώο A διαστάσεων $m \times n$ θα αναφέρεται ως $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Ένα διάνυσμα συναρτήσεων $f(x) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ θα αναφέρεται για συντομία $f \in \mathfrak{R}^n$.

4.2 Γενικό μοντέλο χαλάρωσης υλικού

Αρχικά γίνεται η θεώρηση, όπως έγινε και στην πρώτη ενότητα της εργασίας, ότι η κατασκευή έχει διακριτοποιηθεί σε ένα σύνολο πεπερασμένων στοιχείων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συμπεριφορά του υλικού έχει άμεση σχέση με τη συμπεριφορά του μέλους. Για το γενικό αυτόισορροπούμενο στοιχείο πλαισίου δύο διαστάσεων i , το γενικευμένο διάνυσμα τάσης $s^i \in \mathfrak{R}^3$ περιλαμβάνει τις δύο ακραίες ροπές (s_2^i, s_3^i) και την αξονική δύναμη (s_1^i) . Επίσης κάνουμε θεώρηση σχηματισμού πλαστικών αρθρώσεων στα άκρα κάθε μέλους.



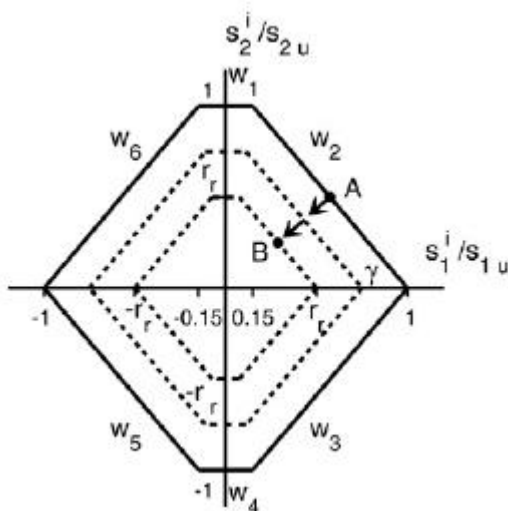
ΣΧΗΜΑ 4.1 Γενικευμένο στοιχείο πλαισίου δύο διαστάσεων

Όταν είναι ακριβές να απεικονισθούν οι πλαστικές αρθρώσεις μόνο από μια σχέση ροπής πλαστικής στροφής (όπως συμβαίνει στις δοκούς), τότε οι καταστατικοί νόμοι χαλάρωσης υλικού, όπως παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα (Tin Loi & Xia) μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Όμως, όταν τα μέλη, όπως υποστυλώματα υπό μεγάλη κατακόρυφη φόρτιση, εκτίθενται σε σημαντικές αξονικές δυνάμεις, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι επιδράσεις των αξονικών δυνάμεων κατά την κατάσταση της αστάθειας του υλικού. Στη συνέχεια επιχειρείται να δοθεί μια περιγραφή για το παραπάνω φαινόμενο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε το γνωστό εξάγωνο των συνθηκών διαρροής που χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να χαρακτηρίσει μια μεταλλική διατομή διπλού ταυ υπό ταυτόχρονη καμπτική και αξονική ένταση. Επίσης θεωρείται ότι οι θετικές και οι αρνητικές αξονικές ιδιότητες είναι πανομοιότυπες,

και ότι η καθαρή καμπτική ικανότητα ξεκινάει να μειώνεται όταν η αξονική δύναμη φτάνει το 15% της καθαρής αξονικής ικανότητας.

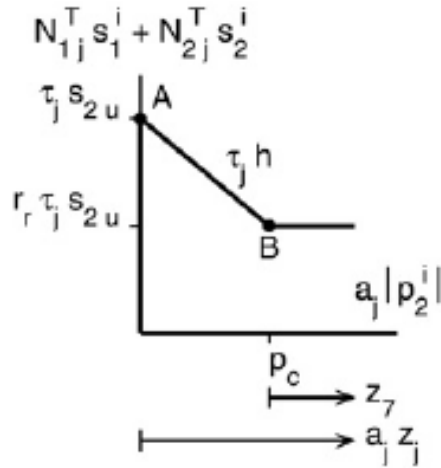
Ακολουθούμε τις δημοσιεύσεις του Cocchetti και θεωρούμε ότι η χαλάρωση του υλικού είναι ιστροπική από τη φύση της, δηλαδή μοντελοποιείται σαν μια ομοιόμορφα συρρικνωμένη περιοχή χωρίς αλλαγές στο σχήμα. Αυτό διαπιστώνεται και στο παρακάτω σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.2 Αλληλεπίδραση (με ιστροπική χαλάρωση) μεταξύ καμπτικών ροπών και αξονικών δυνάμεων

Σε αυτό το στάδιο, δύο σημεία πρέπει να αναφερθούν. Πρώτα, είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι η ιστροπική θεώρηση της χαλάρωσης, πιθανόν να μην είναι σημαντική για ρεαλιστικές κατασκευές που δεν υπόκεινται σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση, εφόσον είναι δυνατόν να έχουμε προοδευτική χαλάρωση χωρίς να ενεργοποιηθεί το αντικρινό επίπεδο της επιφάνειας διαρροής. Δεύτερον, η θεώρηση μιας γραμμικοποιημένης επιφάνειας διαρροής προσδίδει μεγάλα υπολογιστικά πλεονεκτήματα στο ότι η προκύπτουσα μόρφωση του προβλήματος οδηγεί σε ένα πιο εύκολο και περισσότερο μελετημένο γραμμικό (και όχι μη γραμμικό) πρόβλημα μεικτής συμπληρωματικότητας (MCP /mixed complementarity problem). Για παράδειγμα, το γεγονός ότι τα κάθετα διανύσματα ως προς τις επιφάνειες διαρροής είναι εξ ορισμού γνωστά, είναι ήδη μεγάλο πλεονέκτημα.

Στο σχήμα (4.2) το αδιαστατοποιημένο διάγραμμα $s_1^i/s_{1u}, s_2^i/s_{2u}$, χρησιμοποιείται για να απεικονίσει την αλληλεπίδραση κατά την ιστροπική χαλάρωση, μεταξύ της αξονικής δύναμης s_1^i και της καμπτικής ροπής s_2^i της πλαστικής άρθρωσης του κόμβου αρχής του μέλους i , όπου s_{1u} και s_{2u} είναι αντίστοιχα η αξονική και η καμπτική ικανότητα. Θεωρούμε ότι η ομοιόθετη συρρίκνωση της ελαστικής περιοχής σταματάει αμέσως στο επίπεδο έντασης r_r . Για να φανεί ξεκάθαρα, η συμπεριφορά χαλάρωσης των επιφανειών διαρροής $j \in \{1, \dots, 6\}$ (που αντιστοιχούν στα επίπεδα διαρροής w_1 ως w_6) απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα γενικευμένων εντάσεων ($N_{1j}^T s_1^i + N_{2j}^T s_2^i$) και κλιμακούμενης πλαστικής παραμόρφωσης $a_j |p_2^i|$, ώστε να φανεί ο δρόμος τάσης-παραμόρφωσης ενός μεμονωμένου επιπέδου. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (4.3).



ΣΧΗΜΑ 4.3 Τυπική συμπεριφορά χαλάρωσης στα επίπεδα διαρροής j

Συγκεκριμένα, a_j υποδηλώνει ένα μέγεθος κλίμακας που εισάγεται στον πλαστικό πολλαπλασιαστή z_j . Τα N_{1j}, N_{2j} είναι τα κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια διαρροής, προβαλλόμενα στους άξονες s_1^i και s_2^i . Είναι προφανές ότι τα μεγέθη τ_j ($j = 2,3,5,6$) = τ (μία σταθερά που δίνεται παρακάτω) ενώ τ_j ($j = 1,4$) = 1. Στο σχήμα (5.3) για κάθε επίπεδο j , το κρίσιμο σημείο μεταξύ του κλάδου χαλάρωσης και του οριζόντιου κλάδου καθορίζεται για ευκολία, από κάποια πλαστική παραμόρφωση p_c που τη θεωρούμε εμείς, ενώ p_{cj} ($j=1, \dots, 6$) είναι οι πραγματικές τιμές των πλαστικών παραμορφώσεων. Πιο συγκεκριμένα, η οικογένεια των εξισώσεων διαρροής υπό χαλάρωση υλικού (περιλαμβάνεται το διάνυσμα των εντάσεων s και οι πλαστικοί πολλαπλασιαστές z) συλλέγεται σε ένα διάνυσμα w ως εξής:

$$w = -N^T s + Hz + r \geq 0 \quad (4.1)$$

Όπου (σε επίπεδο διατομής):

$$w^T = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7] \quad (4.2)$$

$$s^T = [s_1^i \ s_2^i \ s_3^i] \quad (4.3)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{n} & \tilde{n} & 0 & -\tilde{n} & -\tilde{n} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$H = h \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & -1 \\ \tau a_1 & \tau a_2 & \tau a_3 & \tau a_4 & \tau a_5 & \tau a_6 & -\tau \\ \tau a_1 & \tau a_2 & \tau a_3 & \tau a_4 & \tau a_5 & \tau a_6 & -\tau \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & -1 \\ \tau a_1 & \tau a_2 & \tau a_3 & \tau a_4 & \tau a_5 & \tau a_6 & -\tau \\ \tau a_1 & \tau a_2 & \tau a_3 & \tau a_4 & \tau a_5 & \tau a_6 & -\tau \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & -1 \\ \underline{s_{2u} \quad s_{2u} \quad s_{2u} \quad s_{2u} \quad s_{2u} \quad s_{2u} \quad s_{2u}} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$r = \begin{bmatrix} s_{2u} \\ TS_{2u} \\ TS_{2u} \\ s_{2u} \\ TS_{2u} \\ TS_{2u} \\ 1 - r_r \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Όπου, τα μεγέθη που παρουσιάζονται στους παραπάνω πίνακες και μητρώα, ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{n} = \frac{s_{2u}}{s_{1u}} \tan\gamma, \quad h = -\frac{s_{2u}(1 - r_r)}{p_c}, \quad \tau = 1 + 0.15 \tan\gamma, \quad a_j = \frac{p_c}{|p_{cj}|} \quad (4.7)$$

Σημειώνουμε ότι το μητρώο N περιλαμβάνει όλα τα κάθετα διανύσματα στα επίπεδα διαρροής, το H είναι ένα μη συμμετρικό μητρώο χαλάρωσης, το r είναι ένα διάνυσμα με τα όρια διαρροής και το γ είναι μια καθορισμένη εσωτερική γωνία, όπως ορίζεται στο σχήμα (5.2). Επίσης, τα ορίσματα w_1 ως w_6 περιγράφουν την εξέλιξη των επιπέδων διαρροής όπως φαίνεται με τις διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα (5.2). Ένα επιπλέον όρισμα εισάγεται, το w_7 , ώστε να περιγραφεί η κίνηση ενός σημείου διαρροής κατά το οριζόντιο κλάδο του σχήματος (5.3). Η εξέλιξη αυτή παρουσιάζεται από το σημείο έντασης, το οποίο κινείται κατά μήκος του AB . Η φυσική σημασία είναι ότι, το υλικό χαλαρώνει ιστροπικά (AB) και μετά φτάνει σε ένα οριζόντιο, απολύτως πλαστικό στάδιο στο σημείο B . Είναι φανερό αυτή η απολύτως πλαστική συμπεριφορά μπορεί να γραφεί απλά με τη διαγραφή του w_7 και με το μηδενισμό του παράγοντα χαλάρωσης ($h=0$) κάτι που οδηγεί στο $H=0$.

Οι καταστατικές σχέσεις για ένα τυπικό στοιχείο i , εξαγονται με το να συλλεχθούν τα αντίστοιχα μητρώα για τους δύο κόμβους του στοιχείου, αρχής και τέλους (έστω a και b). Για απλότητα, θεωρείται ότι οι ανελαστικές ιδιότητες των δύο αυτών διατομών είναι πανομοιότυπες. Άρα οι σχέσεις χαλάρωσης σε επίπεδο μέλους είναι οι ακόλουθες:

$$w^i = -N^{iT} s^i + H^i z^i + r^i \geq 0 \quad (4.8)$$

$$w^{iT} = [w^{aT} \ w^{bT}] \quad (4.9)$$

$$z^{iT} = [z^{aT} \ z^{bT}] \quad (4.10)$$

$$s^{iT} = [s_1^i \ s_2^i \ s_3^i] \quad (4.11)$$

$$H^i = \begin{bmatrix} H^a & 0 \\ 0 & H^b \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

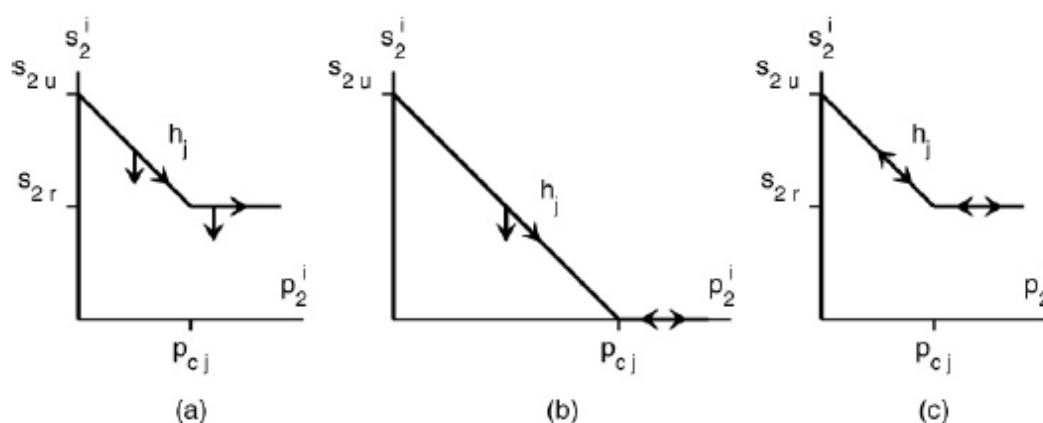
$$r^{iT} = [r^{aT} \ r^{bT}] \quad (4.13)$$

$$N^i = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{n} & \tilde{n} & 0 & -\tilde{n} & -\tilde{n} & 0 & 0 & \tilde{n} & \tilde{n} & 0 & -\tilde{n} & -\tilde{n} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.3 Μόρφωση σχέσεων για ελαστοπλαστική ανάλυση

Δύο κλασικές προσεγγίσεις αναλύονται σε αυτή την ενότητα, οι οποίες αφορούν την ελαστοπλαστική ανάλυση. Με κατάλληλες τροποποιήσεις θα μορφωθούν οι κατάλληλες σχέσεις αν εισέρχεται και ένα μητρώο κράτυνσης ή χαλάρωσης στις θεωρήσεις αυτές.

Η πρώτη προσέγγιση περιγράφει τη μη ολόνομη συμπεριφορά στο πνεύμα της θεωρίας ροής της πλαστικότητας. Αυτή η θεώρηση έχει να κάνει με την εξάρτηση από το δρόμο φόρτισης (path dependence) και μοντελοποιεί με ακρίβεια τα φαινόμενα ελαστικής αποφόρτισης και επαναφόρτισης. Αυτό φαίνεται στο σχήμα (4.4.α) όπου οποιαδήποτε αποφόρτιση από το οριζόντιο ή τον καθοδικό κλάδο του νόμου ροής - στροφής, είναι ελαστική, δηλαδή διατηρείται η τιμή της προηγούμενης πλαστικής στροφής. Τα μεγέθη s_{2r}, p_2^i, h_j είναι αντίστοιχα, η απομένουσα ροπή, η πλαστική στροφή και η κλίση του διαγράμματος κατά τη χαλάρωση. Παρόλ' αυτά, όταν ο οριζόντιος κλάδος αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου η καμπτική ικανότητα έχει εξαντληθεί, όπως στο σχήμα (4.4.β) θεωρούμε ότι σε αυτό τον κλάδο η αποφόρτιση είναι αντιστρέψιμη. Φυσικά, η αποφόρτιση κατά τον καθοδικό κλάδο εξακολουθεί να είναι μη αντιστρέψιμη.



ΣΧΗΜΑ 4.4 Γενικευμένος νόμος ροής - στροφής (α) με μη ολόνομη συμπεριφορά (β) μικτή ολόνομη και μη ολόνομη συμπεριφορά (γ) ολόνομη συμπεριφορά

Η δεύτερη θεώρηση έχει να κάνει με την ολόνομη συμπεριφορά (path independent) σε σχέση με την θεωρία παραμόρφωσης της πλαστικότητας. Γι' αυτό, σε σχέση με την εικόνα (4.4.γ), κάθε αποφόρτιση από τον κλάδο χαλάρωσης είναι πλέον αντιστρέψιμη.

4.3.1 Μη ολόνομη ανάλυση

Το μη ολόνομο πρόβλημα μπορεί απλά να μορφωθεί με τη συλλογή και την κατάλληλη τροποποίηση των σχέσεων που περιγράφουν τα τρία στοιχεία της συμπεριφοράς μιας κατασκευής: τη στατική, την κινηματική και τη σύνθεση αυτών των δύο. Οι ισχύουσες ιδιότητες που αφορούν ολόκληρη την κατασκευή μπορούν να γραφούν ως ακολούθως:

$$af + f_d = Bs \quad (4.15)$$

$$q = B^T u \quad (4.16)$$

$$q = e + p \quad (4.17)$$

$$s = Se \quad (4.18)$$

$$\dot{\rho} = \dot{N}z \quad (4.19)$$

$$w = -N^T s + Hz + r \geq 0, \quad \dot{z} \geq 0, \quad w^T \dot{z} = 0 \quad (4.20)$$

Θεωρούμε ότι η κατασκευή έχει διακριτοποιηθεί σε d βαθμούς ελευθερίας, m γενικευμένες εξισώσεις (τάσεις ή παραμορφώσεις) και y εξισώσεις διαρροής. Η σχέση (4.15) εκφράζει ισορροπία, μέσω του μητρώου ισορροπίας της κατασκευής $B \in \mathcal{R}^{d \times m}$, (η μόρφωση του οποίου ακολουθεί τη διαδικασία που περιγράφηκε στην πρώτη ενότητα), μεταξύ των μεταβλητών επικόμβιων φορτίων $af \in \mathcal{R}^d$ (το a είναι ένας πολλαπλασιαστής του φορτίου), των σταθερών επικόμβιων φορτίων f_d (fixed loads) και των γενικευμένων τάσεων $s \in \mathcal{R}^m$. Η σχέση (4.16) περιγράφει τη γραμμική εξάρτηση των παραμορφώσεων $q \in \mathcal{R}^m$ και των επικόμβιων μετακινήσεων $u \in \mathcal{R}^d$.

Οι σχέσεις (4.17)-(4.20) ενσωματώνουν τους μη ολόνομους καταστατικούς νόμους. Το άθροισμα των ελαστικών $e \in \mathcal{R}^d$ και πλαστικών $p \in \mathcal{R}^d$ παραμορφώσεων, δίνεται από την (4.17). Η γραμμική ελαστικότητα παρουσιάζεται στη σχέση (4.18) όπου το $S \in \mathcal{R}^{m \times m}$ όλες τις μη συζευγμένες δυσκαμψίες των στοιχείων. Συγκεκριμένα, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου έχοντας ως μεγέθη αναφοράς τις ροπές στα άκρα του και την αξονική δύναμη είναι το εξής:

$$S^i = \begin{bmatrix} EA/L_i & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L_i & 2EI/L_i \\ 0 & 2EI/L_i & 4EI/L_i \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Συνεπώς, για την κατασκευή, το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι μια διαγώνια παράθεση των μητρώων δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου.

$$S = \begin{bmatrix} S^1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & S^i \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Οι μεταβολές των πλαστικών παραμορφώσεων $\dot{\rho}$ ορίζονται από έναν νόμο ροής όπως φαίνεται στη σχέση (4.19) και εκφράζονται ως συναρτήσεις του ρυθμού μεταβολής των πλαστικών πολλαπλασιαστών $\dot{z} \in \mathcal{R}^y$ και εξαρτώνται επίσης από το σταθερό μητρώο των κάθετων στην επιφάνεια διαρροής διανυσμάτων $N \in \mathcal{R}^{m \times y}$. Το διάνυσμα $w \in \mathcal{R}^y$ (με περιορισμό προσήμου) των γραμμικοποιημένων εξισώσεων διαρροής, τροποποιείται μέσω του μητρώου $H \in \mathcal{R}^{y \times y}$, δηλαδή ένα γενικό μητρώο χαλάρωσης ή κράτυνσης, συμπεριλαμβανομένου αυτού που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Το διάνυσμα $r \in \mathcal{R}^y$ περιλαμβάνει τα όρια διαρροής. Τέλος, υπάρχει η σχέση συμπληρωματικότητας (4.20), μεταξύ των εξισώσεων διαρροής w σε σχέση με τους ρυθμούς μεταβολής των πλαστικών πολλαπλασιαστών \dot{z} . Η παραπάνω σχέση επιτρέπει μια ελαστική αποφόρτιση αλλά αποκλείει το ενδεχόμενο ταυτόχρονη ενεργοποίηση και ελαστικής αποφόρτισης της ίδιας πλαστικής άρθρωσης.

4.3.2 Ολόνομη ανάλυση

Ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία όπως στη μη ολόνομη ανάλυση μπορούν να εξαχθούν σχέσεις που δεν εξαρτώνται από τη διαδρομή της φόρτισης (path independent). Όλες οι σχέσεις πλέον είναι σε απόλυτες ποσότητες. Συγκεκριμένα, από το προηγούμενο σετ εξισώσεων αυτές οι οποίες μεταβάλλονται είναι οι (4.19), (4.20).

$$p = Nz \quad (4.23)$$

$$w = -N^T s + Hz + r \geq 0, \quad z \geq 0, \quad w^T z = 0 \quad (4.24)$$

Η σχέση (4.23) αντιπροσωπεύει το αντίστοιχο νόμο ροής στην ολόνομη συμπεριφορά και η ανεξαρτησία της διαδρομής φόρτισης απεικονίζεται από τη σχέση συμπληρωματικότητας (4.25) μεταξύ των απολύτων ποσοτήτων w και z .

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια ολόνομη ανάλυση γίνεται σε ένα βήμα. Αυτό σημαίνει πως, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο φόρτισης af επιχειρούμε να υπολογίσουμε τη συνολική απόκριση της κατασκευής. Για κατασκευές με αστάθεια υλικού, είναι δυνατόν αν υπάρχει μια πολλαπλότητα λύσεων και γι' αυτό η ανάλυση απαιτεί τη χρήση ειδικών αλγορίθμων όπως αυτών που προτείνονται από τον Tin Loi & Tseng, ώστε να ανιχνευθούν όλες οι λύσεις. Μια μη ολόνομη ανάλυση, αντίθετα, απαιτεί μια βήμα προς βήμα προσέγγιση ώστε να ανιχνευθούν όλοι οι δρόμοι ισορροπίας. Στην επόμενη ενότητα θα περιγραφεί ο αλγόριθμος ο οποίος αναπτύχθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab ώστε να αντιμετωπισθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα.

4.4 Αλγόριθμος για ακριβή μη ολόνομη ανάλυση

Εφόσον οι καταστατικές σχέσεις (4.15)-(4.20) είναι μη γραμμικές, ομοίως μη γραμμικό είναι και το μη ολόνομο ελαστοπλαστικό πρόβλημα. Παρόλ' αυτά, χάρη στη διακριτοποιημένη περιγραφή του φορέα που χρησιμοποιήθηκε και στη γραμμικοποίηση των επιφανειών διαρροής, το πρόβλημα που περιλαμβάνει τις μεταβολές των μεγεθών και όχι τα απόλυτα μεγέθη, μπορεί να επιλυθεί με ακρίβεια. Αρχικά θα πρέπει να μορφωθεί με έναν τρόπο επαναληπτικής διαδικασίας σε πεπερασμένα βήματα. Η προσέγγιση που προτείνουμε είναι η ακόλουθη.

Ασχολούμαστε επικεντρώνοντας την προσοχή μας στα επιβαλλόμενα φορτία και όχι στις μετακινήσεις. Επιπλέον, μπορούμε να ακολουθήσουμε οποιοδήποτε ανοδικό ή καθοδικό δρόμο ισορροπίας μέσω την αύξηση ή τη μείωση των εκάστοτε μεταβολών στη φόρτιση, όπως θα εξηγηθεί λεπτομερέστερα στη συνέχεια. Θεωρούμε πως ένα γνωστό επίπεδο έντασης συμβολίζεται με $\bar{\Sigma}$, και ότι οι σχετιζόμενες ποσότητες $(\bar{s}, \bar{u}, \bar{z})$ έχουν αναπτυχθεί μόνο σε αυτό το στάδιο κατά την εξέλιξη της ελαστοπλαστικής ιστορίας. Συνεπώς, μια ανάλυση που μπορεί να βρίσκει τέτοιες μεταβολές στις μεταβλητές απόκρισης $(\Delta s, \Delta u, \Delta z)$, ώστε να κινούμαστε από ένα γνωστό επίπεδο έντασης $\bar{\Sigma}$ σε ένα άγνωστο $\Sigma = \bar{\Sigma} + \Delta \Sigma$, μπορεί απλά να γραφεί ως:

$$\Delta a f + f_d = B \Delta s \quad (4.25)$$

$$\Delta q = B^T u \quad (4.26)$$

$$\Delta q = \Delta e + \Delta p \quad (4.27)$$

$$\Delta s = S \Delta e \quad (4.28)$$

$$\Delta p = N \Delta z \quad (4.29)$$

$$w = -N^T(\bar{s} + \Delta s) + H(\bar{z} + \Delta z) + r \geq 0, \quad \Delta z \geq 0, \quad w^T \Delta z = 0 \quad (4.30)$$

Οι παραπάνω σχέσεις (4.25)-(4.30) μπορούν εύκολα να απλοποιηθούν κρατώντας μόνο τις μεταβλητές Δz ώστε να σχηματιστεί ένα πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (LCP). Αυτό το LCP έχει την εξής μορφή:

$$w = A \Delta z - \Delta a b + \bar{w} \geq 0, \quad \Delta z \geq 0, \quad w^T \Delta z = 0 \quad (4.31)$$

Όπου:

$$\bar{w} = A \bar{z} - \bar{a} b + r \geq 0 \quad (4.32)$$

$$b = N^T S B^T K^{-1} f \quad (4.33)$$

$$A = H - N^T Z N \quad (4.34)$$

$$Z = S B^T K^{-1} B S - S \quad (4.35)$$

$$K = B S B^T \quad (4.36)$$

Παρόλο που το πρόβλημα (4.31) είναι σε μορφή επαυξητικών βημάτων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί το ακριβές πρόβλημα. Χρησιμοποιούνται αρκετές διαδικασίες που προτάθηκαν από τον Franchi & Cohn για απολύτως πλαστική συμπεριφορά στην ελαστοπλαστική ανάλυση και αργότερα επεκτάθηκαν για κατασκευές με αστάθεια υλικού από τον Bolzon. Επίσης, έχουν αναπτυχθεί διάφορες νέες τεχνικές για το σκοπό του προβλήματος αυτού.

Κάποιες ιδέες κλειδιά για την ανάπτυξη του αλγόριθμου περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω:

- a) Απαιτούνται ειδικές τροποποιήσεις στο πρόβλημα όταν η αστάθεια του υλικού, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα (4.4.b), αποτελείται όχι μόνο από ένα μη ολόνομο κλάδο χαλάρωσης στον οποίο η αποφόρτιση είναι ελαστική, αλλά επίσης και από έναν οριζόντιο κλάδο στον οποίο η αντιστροφή του σημείου έντασης μειώνει πλέον τον πλαστικό πολλαπλασιαστή με ολόνομο τρόπο. Γι' αυτό, η μη ολόνομη συνθήκη συμπληρωματικότητας (4.30) χρειάζεται να τροποποιηθεί για να ληφθεί υπόψη και ο ολόνομος κλάδος. Ο αλγόριθμός μας μπορεί να λάβει υπόψη και τα αναστρέψιμα και τα μη αναστρέψιμα φαινόμενα μέσα στις αναλύσεις του, με το να χρησιμοποιηθεί ο κατάλληλος διαχωρισμός στους τύπους των σημείων διαρροής (δηλαδή αν το σημείο έντασης βρίσκεται στο ολόνομο κλάδο ή στο μη ολόνομο). Πιο συγκεκριμένα, διαχωρίζουμε τις εξισώσεις διαρροής, της γνωστής κατάστασης $\bar{\Sigma}$ σε ένα ενεργό σετ (δηλαδή οι εξισώσεις στις οποίες $\bar{w} = 0$) και σε ένα μη ενεργό σετ $\{p\}$ (δηλαδή οι εξισώσεις διαρροής στις οποίες $\bar{w} > 0$). Αυτό το ενεργό σετ χωρίζεται εκ νέου σε δύο υποκατηγορίες οι οποίες είναι, η μη αναστρέψιμη $\{a\}$ (όταν δηλαδή αναφερόμαστε στον μη ολόνομο καθοδικό κλάδο) και η αναστρέψιμη $\{b\}$ (η οποία αναφέρεται στο ολόνομο οριζόντιο κλάδο). Το LCP της σχέσης (4.31) μπορεί τότε να μορφωθεί μόνο για το ενεργό σετ, ώστε τελικά να καταλήξουμε στο ακόλουθο πρόβλημα συμπληρωματικότητας:

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_b &= A_{bb}\Delta z_b + A_{ba}\Delta z_a - \Delta a b_b = 0 \\ \Delta w_a &= A_{ab}\Delta z_b + A_{aa}\Delta z_a - \Delta a b_a \geq 0 \\ \Delta z_a &\geq 0, \Delta w_a^T \Delta z_a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Το πρόβλημα (4.37) είναι ένα μικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (MCP), το οποίο χαρακτηρίζεται από την παρουσία εξισώσεων. Επίσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα Δz_b πλέον δεν έχουν δέσμευση προσήμου. Αυτό επιτρέπει στις εξισώσεις ισορροπίας της υποκατηγορίας $\{b\}$ να παραμένουν ενεργές (δηλαδή σε κατάσταση διαρροής) αλλά ταυτόχρονα, οι σχετιζόμενοι πλαστικοί πολλαπλασιαστές z_b να μειώνονται με ολόνομο τρόπο.

(b) Οι μεταβλητές Δa και Δz σχετίζονται με το επαυξητικό χρονικό βήμα Δt μέσω των σχέσεων: $\Delta a = \dot{a}\Delta t$ και $\Delta z = \dot{z}\Delta t$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της ενεργής κατηγορίας εξισώσεων διαρροής, το MCP (4.37) επιλύεται για κοινό φορτιστικό πολλαπλασιαστή \dot{a} ώστε να γίνει αναζήτηση για νέα σημεία διαρροής που αποφορτίζονται και για να υπολογιστούν οι αντίστοιχοι ρυθμοί των μεταβολών των πλαστικών πολλαπλασιαστών \dot{z} . Όσο η ενεργή κατηγορία διαρροής παραμένει σταθερή εντός ενός βήματος, μπορεί να υπολογιστεί ο ελάχιστος χρόνος Δt , ώστε να συμβεί είτε η ενεργοποίηση νέων πλαστικών αρθρώσεων ή να υπάρξει μείωση οποιουδήποτε αντιστρέψιμου πλαστικού πολλαπλασιαστή (στους οριζόντιους κλάδους).

(c) Με την ύπαρξη χαλάρωσης, η σταθερότητα, η μοναδικότητα ή η ύπαρξη λύσεων δεν εξασφαλίζεται. Οποιοδήποτε από τα παραπάνω γεγονότα μπορούν να συμβούν εντός κάποιου βήματος φόρτισης.

Ο υπολογιστικός αλγόριθμος, όπως κωδικοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως, για τη γενική περίπτωση, όπου ενεργοποιούνται ταυτόχρονα ολόνομες και μη ολόνομες συμπεριφορές.

ΒΗΜΑ 1: Ορισμός δεδομένων υλικού, γεωμετρίας φορέα, φόρτισης.

Σε αυτό το βήμα ακολουθούνται οι ίδιες διαδικασίες όπως περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 2 κατά την επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Σε κάποιο αρχείο input αναγράφονται τα απαραίτητα δεδομένα τα οποία καλούνται από το πρόγραμμα κατά την έναρξη της ανάλυσης.

ΒΗΜΑ 2: Εύρεση των μητρώων που είναι απαραίτητα για τη μόρφωση του προβλήματος

Όπως και στο κεφάλαιο 2, ακολουθεί η διαδικασία εύρεσης του μητρώου ισορροπίας B . Στη συνέχεια υπολογίζονται τα μητρώα δυσκαμψίας του φορέα (S), το συνολικό μητρώο χαλάρωσης του φορέα (H – το οποίο είναι κι αυτό μια διαγώνια παράθεση των μητρώων χαλάρωσης του κάθε στοιχείου), το μητρώο των συντελεστών των καθέτων διανυσμάτων στις επιφάνειες διαρροής (N), τα μητρώα b, z, K, r κτλ.

ΒΗΜΑ 3: Ορισμός αρχικών συνθηκών (Initialization)

Τίθεται αρχικά το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου. Αυτό μπορεί να είναι το επίπεδο του φορτίου ή της μετατόπισης, ή ο μέγιστος αριθμός δρόμων ισορροπίας κτλ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, στον κώδικα που αναπτύχθηκε, συνθήκη τερματισμού τέθηκε αυτή της μεγάλης μετατόπισης.

Από εκεί κι έπειτα, οι αρχικές συνθήκες ορίζονται ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι σταθερών φορτίων τα οποία δεν μεταβάλλονται με το χρόνο (το μητρώο f_d). Εάν αυτά τα φορτία είναι μηδενικά, τότε η αρχική γνωστή κατάσταση $\bar{\Sigma}$ είναι η εξής:

$$a=0, s=0, z=0, w=r \quad (4.38)$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν σταθερά φορτία f_d τότε γίνεται επίλυση του LCP μόνο με αυτά. Συγκεκριμένα, ορίζεται ένα μητρώο c μόνο για σταθερά φορτία:

$$c = -N^T S B^T K^{-1} f_d \quad (4.39)$$

Και το πρόβλημα LCP που λύνεται είναι το ακόλουθο:

$$w = A \Delta z + c + r \geq 0, \Delta z \geq 0, w^T \Delta z = 0 \quad (4.40)$$

Συνεπώς, από την επίλυση του παραπάνω LCP προκύπτουν τα αρχικά $\Delta z_0, s_0, w = A \Delta z_0 + c + r$. Στις περισσότερες περιπτώσεις πάντως, επειδή τα σταθερά φορτία αφορούν κυρίως μόνιμα φορτία, ίδια βάρη κλπ, μια κατασκευή είναι σχεδιασμένη με τρόπο ώστε να μη σχηματίζονται πλαστικές αρθρώσεις με την επιβολή και μόνο αυτών. Άρα οι πλαστικοί συντελεστές (που δείχνουν πόσο έχει εισχωρήσει μια διατομή στην πλαστική περιοχή) θα παραμένουν μηδέν και τότε, οι αρχικές συνθήκες θα ακολουθούν τη σχέση (4.38).

Με τον καθορισμό των αρχικών αυτών ποσοτήτων, ολοκληρώνεται η μόρφωση της αρχικής γνωστής κατάστασης $\bar{\Sigma} = 0$ για $t=0$.

Όσο η κατασκευή συμπεριφέρεται ελαστικά υπολογίζεται το πρώτο επαυξητικό φορτίο που απαιτείται για την πρώτη πλαστικοποίηση.

$$\Delta a = \min \left\{ \frac{r_i}{b_i} \right\} > 0, \text{ για κάθε } i \in \{1, \dots, \gamma\} \quad (4.41)$$

ΒΗΜΑ 4: Έλεγχος αποφόρτισης

Κατά το γνωστό επίπεδο έντασης $\bar{\Sigma}$, υπολογίζονται τα μητρώα και τα διανύσματα: $A_{aa}, A_{ab}, A_{bb}, A_{ba}, A_{pa}, A_{pb}, b_a, b_p, \bar{w}_p$. Τα παραπάνω είναι υπομητρώα ή υποδιανύσματα των A, b ή w τα οποία προκύπτουν μετά από κατάλληλη αναδιάταξη. Εάν όλες οι εξισώσεις διαρροής είναι θετικές ($w \geq 0$), κάτι το οποίο είναι πολύ πιθανόν να συμβαίνει κατά το πρώτο βήμα, τότε επιλύεται το απλό LCP όπως φαίνεται στη σχέση (4.31). Αν όμως δεν είναι όλες οι εξισώσεις διαρροής θετικές, τότε θα πρέπει να λυθεί το ακόλουθο MCP.

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_b &= A_{bb} \dot{z}_b + A_{ba} \dot{z}_a - a b_b = 0 \\ \dot{w}_a &= A_{ab} \dot{z}_b + A_{aa} \dot{z}_a - a b_a \geq 0 \\ \dot{z}_a &\geq 0, \dot{w}_a^T \dot{z}_a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύεται για δύο περιπτώσεις. Για φορτίο με βήμα $\dot{a} = 1$ και $\dot{a} = -1$. Εάν βρεθεί λύση για τη δεύτερη περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι ο

φορέας έχει περιέλθει πλέον σε ασταθή κατάσταση, όπου οι παραμορφώσεις αυξάνονται με μείωση του φορτίου.

Στο τέλος του βήματος αυτού, συλλέγονται οι λύσεις που προέκυψαν. Επιλέγεται κάποια από αυτές και ο αλγόριθμος συνεχίζεται στο βήμα 5.

ΒΗΜΑ 5: Εύρεση ενεργοποίησης νέων επιπέδων διαρροής

Το ελάχιστο χρονικό βήμα Δt που προέρχεται είτε από την ενεργοποίηση νέων επιπέδων διαρροής (μετά από χρόνο Δt_1) ή για αποφόρτιση της αντιστρέψιμης υποκατηγορίας (μετά από χρόνο Δt_2) όταν το φορτίο έχει γίνει $\bar{a} + \dot{a}\Delta t$, μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθες γραμμικές εξισώσεις:

$$\Delta t_1 = \min \left\{ \frac{(\bar{w}_p)_j}{(\dot{a}b_p - A_{pa}\dot{z}_a - A_{pb}\dot{z}_b)_j} \right\} > 0 \quad \text{για κάθε } j \in \{p\} \quad (4.43)$$

$$\Delta t_2 = \min \left\{ \frac{(\bar{z}_b)_k}{(-\dot{z}_b)_k} \right\} > 0, \quad \text{για κάθε } k \in \{b\} \quad (4.44)$$

$$\Delta t = \min\{\Delta t_1, \Delta t_2\} \quad (4.45)$$

Όπου προφανώς, οι ποσότητες \dot{z}_a και \dot{z}_b έχουν προέλθει από το βήμα 4. Μορφώνεται στη συνέχεια η νέα εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}$ και ανανεώνονται οι ακόλουθες ποσότητες:

$$a = \bar{a} + \Delta a, \quad z = \bar{z} + \Delta z, \quad w = Az - ab + r$$

ΒΗΜΑ 6: Τερματισμός

Εάν έχουμε φτάσει το κριτήριο τερματισμού, ή όλες οι λύσεις που βρέθηκαν στο βήμα 4 έχουν εξαντληθεί, σταματάει ο αλγόριθμός. Αλλιώς, επιστρέφουμε στο βήμα 4 και συνεχίζουμε με την εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}$.

Για περεταίρω διευκρίνιση, είναι χρήσιμο να κάνουμε τις ακόλουθες διευκρινίσεις:

- (a) Αρχικά θα γίνει ένα σχόλιο σχετικά με τη μοναδικότητα της λύσης και τις ιδιότητες σταθερότητας της κατασκευής. Όταν το A_{bb} είναι αντιστρέψιμο (δεν θα ήταν, για παράδειγμα, αν κάποιες από τις γραμμές αυτού του μητρώου ήταν γραμμικώς εξαρτημένες) μπορούμε να μεταβάλλουμε το MCP στην ακόλουθη μορφή LCP:

$$\dot{w}_a = A'_{aa}\dot{z}_a - \dot{a}b'_a, \quad \dot{z}_a \geq 0, \quad \dot{w}_a^T \dot{z}_a = 0 \quad (4.46)$$

Όπου:

$$A'_{aa} = (A_{aa} - A_{ab}A_{bb}^{-1}A_{ba}), \quad b'_a = (b_a - A_{ab}A_{bb}^{-1}b_b) \quad (4.47)$$

Το μητρώο A'_{aa} κατά την κατάσταση $\bar{\Sigma}$, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στο να καθοριστεί η μοναδικότητα της λύσης και οι ιδιότητες σταθερότητας της κατασκευής σε αυτό το βήμα. Όπως είναι πολύ γνωστό, αν το μητρώο A'_{aa} είναι θετικά ορισμένο, αυτό σημαίνει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας λύσης. Παρόλ' αυτά, αν το μητρώο A'_{aa} είναι θετικά ημιορισμένο, αυτό

σημαίνει ότι υπάρχει λύση, αλλά δεν είναι απαραίτητα η μοναδική. Σε τέτοια περίπτωση, το επίπεδο έντασης $\bar{\Sigma}$ θα βρίσκεται σε μια κατάσταση ουδέτερης (όχι ασταθούς) ισορροπίας.

- (b) Όσο υπάρχουν διχοτομήσεις των λύσεων σε οποιοδήποτε βήμα φόρτισης, που οδηγούν σε πολλαπλά μονοπάτια ισορροπίας, χρειαζόμαστε να τα εντοπίσουμε όλα λύνοντας το MCP και για $\dot{\alpha} = 1$ και $\dot{\alpha} = -1$.
- (c) Ένα οριακό σημείο είναι αυτό στο οποίο για $\dot{\alpha} = 1$ δεν υπάρχει λύση. Αυτό μας επιτρέπει να ανιχνεύσουμε, για παράδειγμα, πότε ένας μηχανισμός κατάρρευσης σχηματίζεται για την περίπτωση της πλήρους πλαστικότητας.
- (d) Αντί να συνεχιστεί η ανάλυση για όλους τους δρόμους ισορροπίας που βρίσκονται στο αντίστοιχο βήμα, μπορούμε να επιλέξουμε να ακολουθήσουμε μόνο τον κρίσιμο δρόμο ισορροπίας. Ένα απλό και κατάλληλο ενεργειακό κριτήριο, βασιζόμενο στο έργο δευτέρας τάξης, χρησιμοποιείται για αυτή τη διαδικασία. Θα μπορούσε δηλαδή, για παράδειγμα, για να επιλεγθεί ο κρίσιμος καθοδικός κλάδος ισορροπίας θα ερευνούσαμε ποιος παράγει το μέγιστο έργο δευτέρας τάξης.
- (e) Είναι απαραίτητο και να ελεγχθεί αν για $\dot{\alpha} = 0$ υπάρχει λύση στο MCP. Αυτό είναι αναγκαίο επειδή πρέπει να ελεγχθεί αν υπάρχει κάποιος «ψευδο-μηχανισμός». Τέτοιοι ψευδο-μηχανισμοί είναι αλλαγές συμπεριφοράς της κατασκευής εντός του ίδιου βήματος φόρτισης. Προκαλούνται όταν καινούριες πλαστικές αρθρώσεις ενεργοποιούνται με αυξανόμενους πλαστικούς πολλαπλασιαστές, ενώ ταυτόχρονα κάποιοι άλλοι πλαστικοί πολλαπλασιαστές μειώνονται.

4.5 Ο αλγόριθμος του Lemke

Στον κώδικα που αναπτύχθηκε στο Matlab προκειμένου να επιλυθούν σε κάθε βήμα τα προβλήματα γραμμικής συμπληρωματικότητας (LCP) που παρουσιάζονται, χρησιμοποιήθηκε ο έτοιμος αλγόριθμος του Lemke, ικανός να εντοπίσει τη λύση σε τέτοια προβλήματα, ο οποίος είναι διαθέσιμος στο διαδίκτυο. Το πλεονέκτημά του είναι ότι πρόκειται για έναν αλγόριθμο εύχρηστο και εύκολο στην κατανόηση, αρκετά όμως ευαίσθητο σε αριθμητικές αστάθειες. Συνεπώς, ήταν απαραίτητο, κατά την επίλυση των παραδειγμάτων, να ελεγχθούν ποιοτικά τα αποτελέσματα για το αν υπάρχει φυσικό νόημα σε αυτά ή να γίνει σύγκριση των επιλύσεων των προβλημάτων με άλλες επιλύσεις που έχουν γίνει κατά καιρούς με άλλες μεθόδους. Τα αποτελέσματα, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, είναι ικανοποιητικά. Θα μπορούσε επίσης, σαν εναλλακτική λύση για την αντιμετώπιση των προβλημάτων LCP, να προγραμματιστεί η μέθοδος του κεντρικού σημείου (pivoting scheme algorithm) και αυτή να χρησιμοποιηθεί εντός του κώδικα ο οποίος αναπτύχθηκε.

Ο αλγόριθμος Lemke λύνει συγκεκριμένα το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας:

$$Mz + q \geq 0, z \geq 0, z'(Mz + q) = 0 \quad (4.48)$$

Απαραίτητη για τον αλγόριθμο είναι η εισαγωγή του μητρώου M , το οποίο, σύμφωνα με τη σχέση (5.46) για το πρόβλημά μας, είναι το:

$$M = A'_{aa} = (A_{aa} - A_{ab}A_{bb}^{-1}A_{ba}) \quad (4.49)$$

Ομοίως, πρέπει να εισαχθεί το διάνυσμα q , το οποίο θα είναι:

$$q = -\dot{\alpha} b'_a = -\dot{\alpha} (b_a - A_{ab}A_{bb}^{-1}b_b) \quad (4.50)$$

Τέλος, απαραίτητος είναι και ο ορισμός ενός διανύσματος z_0 , που θα αποτελεί μια πρώτη εκτίμηση της λύσης για τα z . Αυτό το διάνυσμα μπορεί να τεθεί ως μηδενικό ή με τυχαία νούμερα ως ορίσματα. Ό,τι κι αν επιλεγθεί σαν αρχική βάση λύσεων δεν επηρεάζει τον αλγόριθμο κατά την εύρεση της τελικής λύσης.

Ο αλγόριθμος του Lemke, έτσι όπως βρίσκεται σε κωδικοποιημένη μορφή στο διαδίκτυο, είναι ο ακόλουθος:

```
% LEMKE Solves standard linear complementarity problems (LCPs).
% An LCP solves
%   Mz+q >=0, z>=0, z'(Mz+q)=0.
% USAGE
%   [z,err]=lemke(M,q,z0);
% The input z0 defines a starting basis; it can be either
% an initial guess of the solution or a vector of zeros and ones
% with ones representing those z(i) thought to be non-zero in the
% solution. For example, passing z=[1.5;0;2.2] has the same
% effect as passing z=[1;0;1].
% If z0 is omitted the origin is used as a starting basis.
% ERR returns an error condition:
%   0: Solution found
%   1: Maximum iterations exceeded
%   2: Unbounded ray termination
%   3: Initial basis cannot be computed - try new value of z0
% If NARGOUT==1, a warning message is displayed instead.
%
% ALGORITHM
%   Uses a modified Lemke's algorithm (complementary pivoting)
%   The algorithm is modified to allow a user defined initial basis.
%   If no initial solution vector is supplied, a covering ray of ones
%   is used.

% Copyright (c) 1997-2002, Paul L. Fackler & Mario J. Miranda
% paul_fackler@ncsu.edu, miranda.4@osu.edu

function [z,err] = lemke(M,q,z0)

n = length(q);

if nargin<4, ineqind=ones(n,1); end
if nargin<3, z0=[]; end

if size(M)~= [n n]
error('Matrices are not compatible');
end

zer_tol = 1e-5;
piv_tol = 1e-8;
maxiter = min(1000,50*n);
err=0;

% Trivial solution exists
if all(q>=0)
z=zeros(n,1); return;
end

% Initializations
% (note: all variables are initialized to their appropriate sizes)
z = zeros(2*n,1);
j=zeros(n,1);
```

```

iter=0;
theta=0;
ratio=0;
leaving=0;
Be=ones(n,1);
x=q;
bas=zeros(n,1);
nonbas=zeros(n,1);

t = 2*n+1;      % Artificial variable
entering=t;     % is the first entering variable

% Determine initial basis
if isempty(z0)
bas=[];
nonbas=(1:n)';
else
bas=find(z0>0);
nonbas=find(z0<=0);
end

B=spalloc(n,n,nnz(M));      % allocate memory for B
B=-speye(n);

% Determine initial values
if ~isempty(bas)
B=[M(:,bas) B(:,nonbas)];
if condst(B)>1e16      z=[]; err=3; return
end
x=- (B\q);
end

% Check if initial basis provides solution
if all(x>=0)
z(bas)=x(1:length(bas));
z=z(1:n);
return
end

% Determine initial leaving variable
[tval,lvindex]=max(-x);
bas=[bas; (n+nonbas)];
leaving=bas(lvindex);

bas(lvindex)=t;      % pivot in the artificial variable

U=x<0;
%U=ones(n,1);      % Alternative artificial vector
Be=- (B*U);
x=x+tval*U;
x(lvindex)=tval;
B(:,lvindex)=Be;

% Main iterations begin here
for iter=1:maxiter
% Check if done; if not, get new entering variable
if (leaving == t) break
elseif (leaving <= n)
entering = n+leaving;
Be=zeros(n,1); Be(leaving)=-1;
else

```

```

    entering = leaving - n;
    Be = M(:,entering);
end
d = B\Be;

% Find new leaving variable
j=find(d>piv_tol); % indices of d>0
if isempty(j) % no new pivots - ray termination
err=2;
break
end
theta=min((x(j)+zer_tol)./d(j)); % minimal ratios, d>0
j=j(find((x(j)./d(j))<=theta)); % indices of minimal ratios, d>0
lvindex=find(bas(j)==t); % check if artificial among these
if ~isempty(lvindex) % Always use artificial if
possible
lvindex=j(lvindex);
else % otherwise pick among set of max
d
[theta,lvindex]=max(d(j)); lvindex=find(d(j)==theta);
lvindex=ceil(length(lvindex)*rand(1,1)); % if multiple choose
randomly
lvindex=j(lvindex);
end
leaving=bas(lvindex);

% Perform pivot
ratio=x(lvindex)./d(lvindex);
x = x - ratio*d;
x(lvindex) = ratio;
B(:,lvindex) = Be;
bas(lvindex) = entering;
end % end of iterations
if iter>=maxiter & leaving~=t err=1; end

z(bas) = x; z = z(1:n);

% Display warning messages if no error code is returned
if nargout<2 & err~=0
s='Warning: solution not found - ';
if err==1
disp([s 'Iterations exceeded limit']);
elseif err==2
disp([s 'Unbounded ray']);
elseif err==3
disp([s 'Initial basis infeasible']);
end
end
end

```

4.6 Εφαρμογές

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, σε δημοσιεύσεις του ο Tin Loi έχει επιχειρήσει να λύσει το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα GAMS (General Algebraic Modeling System) το οποίο εξειδικεύεται στο μαθηματικό προγραμματισμό και μοντελοποίηση. Για την επίλυση του MCP χρησιμοποίησε την επέκταση του προγράμματος που ονομάζεται GAMS/PATH. Στην παρούσα εργασία, για την ανάπτυξη του κώδικα χρησιμοποιήθηκε μόνο η γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

Θα παρουσιαστούν τέσσερα παραδείγματα, τα περισσότερα εκ των οποίων έχουν επιλυθεί και από τον Tin Loi και την ομάδα του με το λογισμικό GAMS, ώστε να υπάρξει και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τα παραδείγματα αυτά εξακριβώνουν τη μέθοδο που παρουσιάστηκε προηγουμένως, αλλά ταυτόχρονα καταδεικνύουν την πολυπλοκότητα της απόκρισης ακόμα και για απλές κατασκευές και την επίδραση των αξονικών δυνάμεων αν αυτές συμπεριληφθούν μέσω της αλληλεπίδρασης στις αναλύσεις.

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι θετικές και οι αρνητικές ιδιότητες διαρροής θεωρήθηκαν ότι είναι πανομοιότυπες. Για την περίπτωση συνδυασμένων τάσεων χρησιμοποιήθηκαν οι εξής τιμές:

$$\tan \gamma = 1/0,85, \quad a_j = 1, \quad (\text{για κάθε } J), \quad p_c = p_{c1}$$

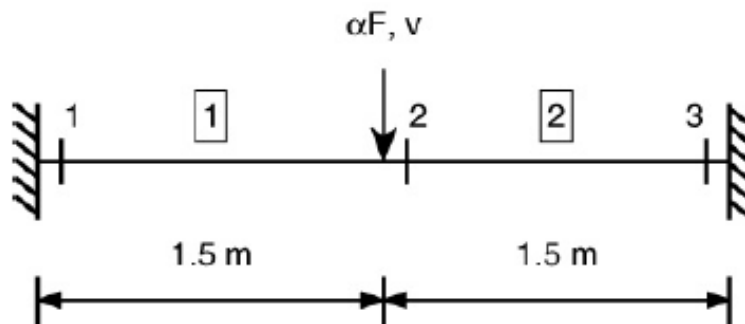
Επίσης, για όλα τα παραδείγματα, θεωρήθηκε ότι τα επίπεδα απομένουσας έντασης r_r ήταν σημαντικά, γι' αυτό και υιοθετήθηκε μια καθαρά μη ολόνομη συμπεριφορά. Στο παράδειγμα 1, όπου παρουσιαζόταν καθαρά καμπτική συμπεριφορά, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες (χωρίς αλληλεπίδραση) συνθήκες διαρροής:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_j & -h_j & 0 & 0 \\ h_j & -h_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_j & -h_j \\ 0 & 0 & h_j & -h_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{2u} \\ s_{2u} - s_{2r} \\ s_{2u} \\ s_{2u} - s_{2r} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Όπου οι εξισώσεις διαρροής w_1, w_3 αναφέρονται αντίστοιχα, σε χαλάρωση που προκαλείται από θετικές ή αρνητικές ροπές και οι εξισώσεις διαρροής w_2, w_4 εκφράζουν την ενεργοποίηση της διαρροής, αν βρισκόμαστε στους θετικούς ή αρνητικούς αντίστοιχα, κλάδους του διαγράμματος. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιήθηκε ο νόμος μεικτού ολόνομου, μη ολόνομου προβλήματος (mixed reversible - irreversible) καθώς θεωρήθηκε εξάντληση της καμπτικής ικανότητας στον οριζόντιο κλάδο (s_{2r}).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε αυτό το πρώτο παράδειγμα, το οποίο είχε παλιότερα χρησιμοποιηθεί από τον Bolzon και τον Tin Loi στην έρευνά τους για την επιρροή των γεωμετρικών φαινομένων δευτέρας τάξης σε πλαίσια, παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος, καθώς δεν αποτελεί μια ρεαλιστική κατασκευή, αλλά περισσότερο μια ακαδημαϊκή θεωρητική εφαρμογή. Παρέχει ένα ευρύ φάσμα αποκρίσεων για διαφορετικές τιμές των κλίσεων του καθοδικού κλάδου h_j . Ο φορέας είναι μια απλή αμφίπακτη δοκός, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που υπόκειται σε ένα σημειακό φορτίο αF , όπου $F=10\text{kN}$. Το σύμβολο u αποτελεί τη βύθιση της δοκού στο μέσον της.



ΣΧΗΜΑ 4.5 Φορέας παραδείγματος 1

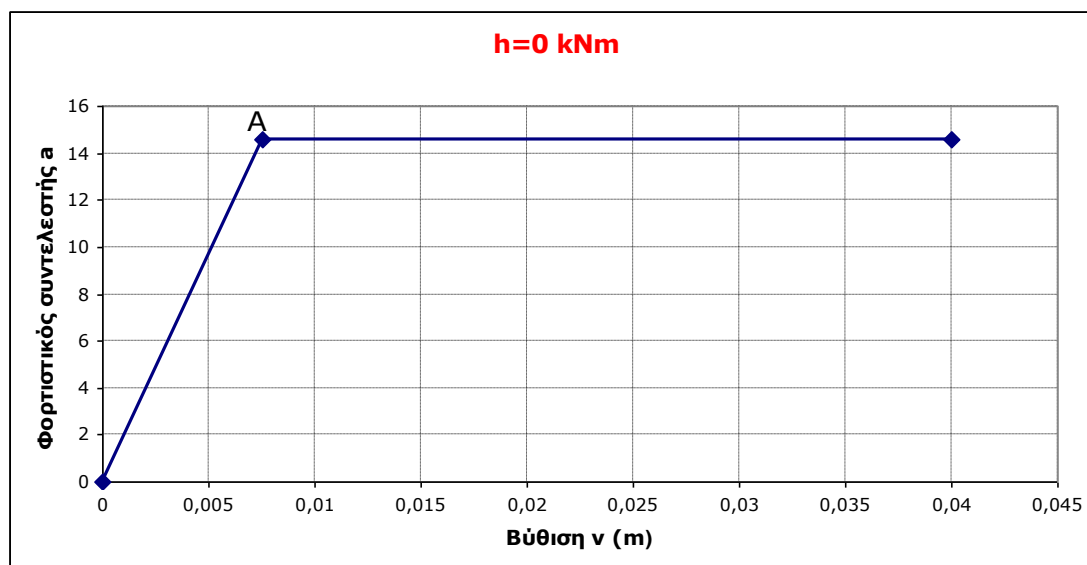
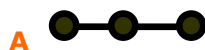
Το μοντέλο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας αποτελείται από δύο στοιχεία, με τη διαρροή να προκαλείται μόνο από κάμψη. Οι ελαστικές δυσκαμψίες και των δύο δοκών, θεωρήθηκαν ότι είναι ίσες με 3060kNm^2 και οι καμπτικές ικανότητες διαρροής ίσες με: $M_p = 54,72\text{kNm}$, χωρίς απομένουσα καμπτική ικανότητα (s_{2r}). Έγιναν αναλύσεις για διάφορες τιμές της κλίσης του καθοδικού κλάδου χαλάρωσης.

Συγκεκριμένα:

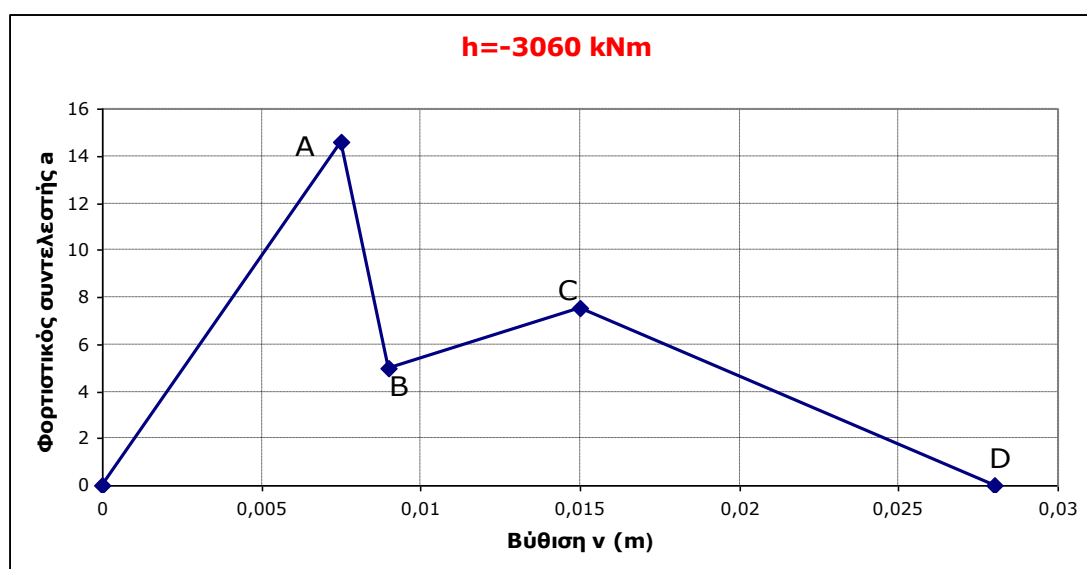
$$h_j = 0, -2040, -3060, -5610, -8160\text{kNm}$$

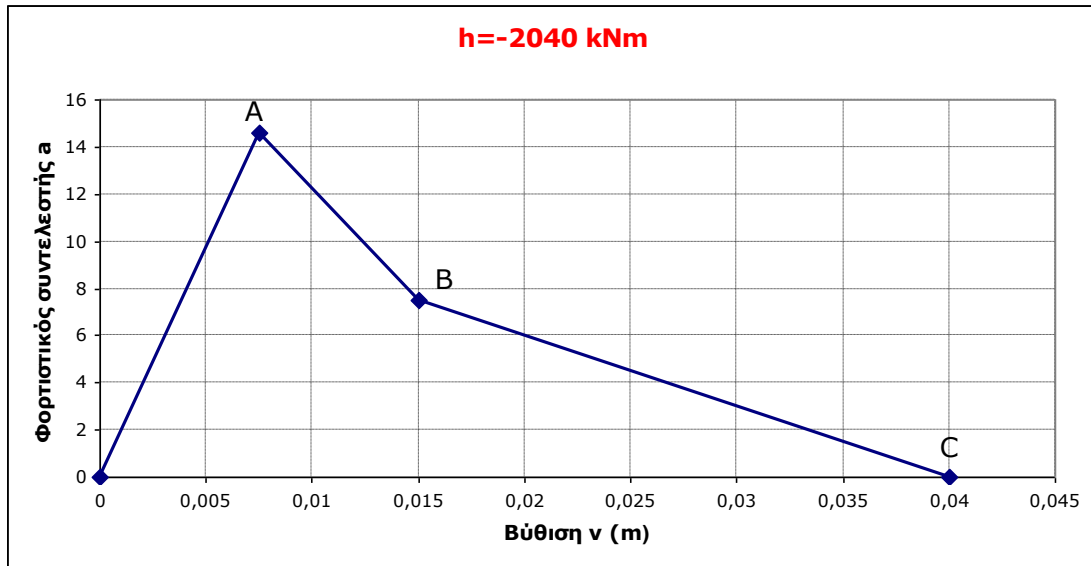
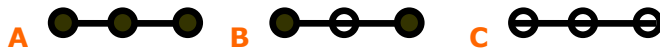
Οι αποκρίσεις της κατασκευής για τις διάφορες κλίσεις, παρουσιάζονται σε διαγράμματα $a-u$. Επίσης σημειώνεται αν η πλαστική άρθρωση σε κάθε κατάσταση βρίσκεται στον καθοδικό κλάδο ή στον οριζόντιο. Αναμένεται πολλαπλότητα λύσεων σε μερικές περιπτώσεις και γι' αυτό είναι αναγκαίο να λυθεί το γενικό μη ολόνομο πρόβλημα.

Στα σχόλια κάτω από κάθε διάγραμμα, σημειώνεται για κάθε σημείο η κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο φορέας. Χωρίς κύκλο, αναφέρονται οι κόμβοι οι οποίοι δεν έχουν ακόμα διαρρεύσει, με σκούρο κύκλο αναφέρονται οι κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται στον καθοδικό κλάδο του διαγράμματος και με λευκό κύκλο οι κόμβοι οι οποίοι έχουν περάσει στον ευθύγραμμο (ολόνομο) κλάδο του διαγράμματος ροπών στρωφών.

ΣΧΗΜΑ 4.6 Συμπεριφορά κατασκευής για $h=0\text{kNm}$ 

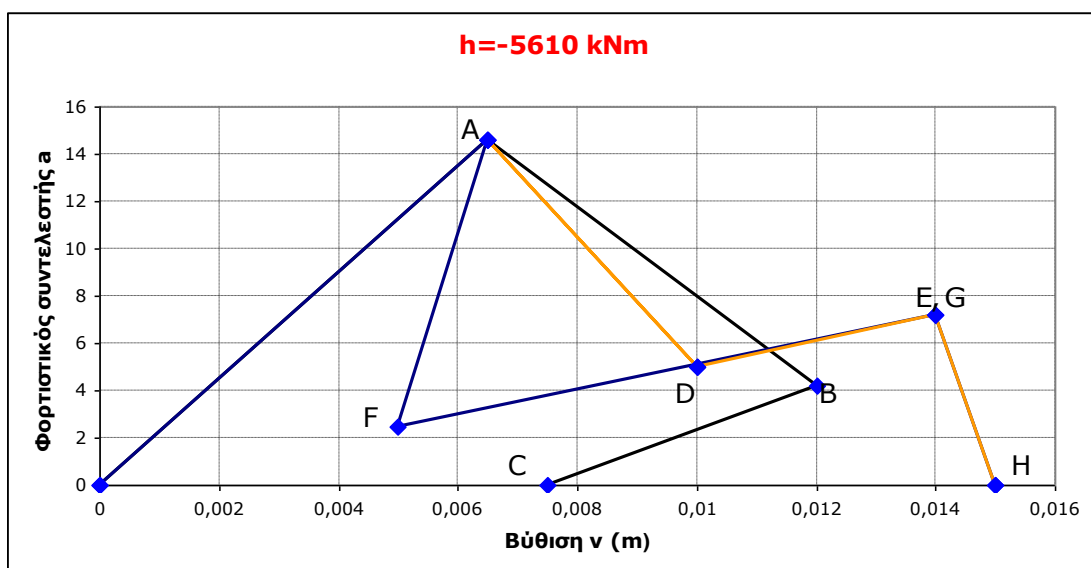
Για $h=0$, οι τρεις κρίσιμες διατομές παρουσιάζουν τελείως πλαστική συμπεριφορά. Στο σημείο A του διαγράμματος, σχηματίζονται ταυτόχρονα τρεις πλαστικές αρθρώσεις, οι οποίες δημιουργούν έναν μηχανισμό κατάρρευσης. Η κατασκευή σε αυτό το σημείο καταρρέει. Φυσικά, σε αυτήν την απλή περίπτωση, το οριακό φορτίο μπορεί να υπολογιστεί με κλασσικές μεθόδους ενεργειακών θεωρημάτων. Στην περίπτωσή μας, ο φορτιστικός συντελεστής προκύπτει ίσος με $a=14,592$ και το φορτίο κατάρρευσης $aF=145,92\text{kN}$.

ΣΧΗΜΑ 4.7 Συμπεριφορά κατασκευής για $h=-3060\text{kNm}$

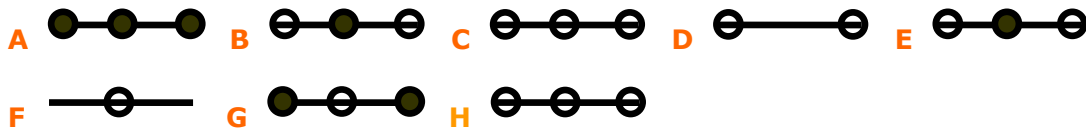
ΣΧΗΜΑ 4.8 Συμπεριφορά κατασκευής για $h=-2040\text{kNm}$ 

Όταν η κλίση του καθοδικού κλάδου είναι $h=-2040\text{kNm}$ ή $h=-3060\text{kNm}$, η αρχική ελαστική συμπεριφορά είναι πανομοιότυπη με την περίπτωση $h=0$ (καθαρά πλαστική συμπεριφορά). Και στις δύο περιπτώσεις αστάθειας, το σημείο A αντιπροσωπεύει ένα οριακό σημείο. Στην περίπτωση που $h=-2040\text{kNm}$, η ροπή στη μεσαία πλαστική άρθρωση έγινε 0 στο σημείο B και ο κόμβος κινήθηκε πια κατά τον οριζόντιο κλάδο του διαγράμματος όπου η στροφή είναι ελεύθερη. Τελικά, οι άλλες δύο διατομές ακολούθησαν μέχρι το σημείο C, όπου καμία τους δεν μπορούσε να αναλάβει ροπή άρα είχαμε και την κατάρρευση. Για $h=-3060\text{kNm}$ η απόκριση ήταν παρόμοια, εκτός απ' το γεγονός ότι οι κόμβοι στις στηρίξεις πρώτα αποφορτίστηκαν (σημείο B διάγραμμα 4.7) μετά επαναφορτίστηκαν (σημείο C διάγραμμα 4.7) μέχρι να φτάσουμε στην κατάρρευση στο σημείο D.

Πιο αναλυτικά θα μελετηθεί η περίπτωση που $h=-5610\text{kNm}$ γιατί για πρώτη φορά εμφανίζονται διχοτομήσεις των λύσεων στους δρόμους ισορροπίας (bifurcations).

ΣΧΗΜΑ 4.9 Συμπεριφορά κατασκευής για $h=-5610\text{kNm}$

Επεξήγηση σημείων διαγράμματος (4.9)



Παρουσιάζονται οι εξής δρόμοι ισορροπίας:

A → B → C

A → D → E → H

A → F → G → H

Στο αριθμητικό μοντέλο θεωρήθηκαν τρεις κρίσιμες διατομές οι οποίες αριθμήθηκαν ως εξής: η 1 στο αριστερό άκρο του πρώτου στοιχείου, η 2 και η 3 το αριστερό και δεξιό άκρο αντίστοιχα του δεύτερου στοιχείου. Το δεξιό άκρο του πρώτου στοιχείου θεωρήθηκε ελαστικό. Ακολουθώντας τη σχέση (4.51), τέσσερις εξισώσεις διαρροής είναι αναγκαίες για να περιγράψουν την πλαστικοποίηση καθεμιάς από αυτές τις διατομές. Οι 12 εξισώσεις διαρροής αριθμήθηκαν διαδοχικά ως εξής: 1-4 για τη διατομή 1, 5-8 για τη διατομή 2, 9-12 για τη διατομή 3.

Το πρώτο φαινόμενο διαρροής από τη σχέση (4.41), προέκυψε από ταυτόχρονη διαρροή όλων των κρίσιμων διατομών οι οποίες περιήλθαν στον καθοδικό κλάδο. Το σετ εξισώσεων διαρροής που ενεργοποιήθηκαν ήταν: $\{1,7,11\}$ για $\Delta a = 14.592$. Το νέο επίπεδο έντασης $\bar{\Sigma}_2$ μπορεί τότε να υπολογιστεί (σημείο A) με το μη αναστρέψιμο σετ $\{a\} = \{1,7,11\}$ και το αναστρέψιμο σετ $\{b\} = \{\}$. Το MCP επιλύθηκε για $\dot{a} = 1$ και για $\dot{a} = -1$. Το πρώτο δεν έδωσε καμία λύση. Το δεύτερο όμως, που αποτελεί δηλαδή μια μείωση στο φορτίο, έδωσε τέσσερις λύσεις:

$$\dot{z}_a = \begin{Bmatrix} \{0.94, 0.40, 0.95\} \\ \{1.05, 0, 1.05\} \\ \{0, 0.08, 0\} \\ \{0, 0, 0\} \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad \dot{w}_a = \begin{Bmatrix} \{0, 0, 0\} \\ \{0, 1.61, 0\} \\ \{2.92, 0, 2.92\} \\ \{3.75, 3.75, 3.75\} \end{Bmatrix} \quad \dot{z}_b = \{\}$$

Εφόσον η 4^η λύση περιείχε όλα τα \dot{z}_a μηδενικά (ταυτόχρονη αποφόρτιση όλων των διατομών), απομακρύνθηκε από το σετ των λύσεων. Επιλέχθηκε αρχικά η λύση 1 για να υπολογιστεί ότι $\Delta t = 10.423$ από τις σχέσεις (4.43)-(4.45) με το Δt_1 να είναι το κρίσιμο και να προκαλεί ενεργοποίηση και νέων εξισώσεων διαρροής, των 2 και 12.

Στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_2$ ($\bar{a} = 4.169$ στο σημείο B), οι πλαστικές στροφές \bar{p}_2, \bar{p}_6 στις διατομές δίπλα στις στηρίξεις έχουν φτάσει στις κρίσιμες τιμές τους. Αυτό αντιστοιχεί στην εξάντληση της καμπτικής τους ικανότητας και οδηγεί στο σχηματισμό αντιστρέψιμων πλαστικών αρθρώσεων. Σε αυτό το στάδιο έχουμε ότι: $\{a\} = \{7\}$, $\{b\} = \{1,2,11,12\}$. Το MCP επιλύθηκε για $\dot{a} = 1$ αλλά δεν έδωσε κάποια λύση. Παρόλ' αυτά, για $\dot{a} = -1$ υπήρξαν δύο λύσεις:

$$\dot{z}_a = \begin{Bmatrix} \{1.34\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad \dot{w}_a = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{7.5\} \end{Bmatrix} \quad \dot{z}_b = \begin{Bmatrix} \{-1.17, -1.17, -1.17, -1.17\} \\ \{-1.84, -1.84, -1.84, -1.84\} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Εξαιτίας της αποφόρτισης όλων των ενεργών πλαστικών αρθρώσεων, η δεύτερη λύση απορρίφθηκε. Αντίθετα, η πρώτη λύση χρησιμοποιήθηκε ώστε να υπολογιστεί το $\Delta t = 4.169$ (το ελάχιστο μεταξύ του $\Delta t_1 = 4.169$ που ενεργοποιεί

την εξίσωση διαρροής 8 και του $\Delta t_2 = 8.338$ που αποφορτίζει όλες τις εξισώσεις του σετ $\{b\}$).

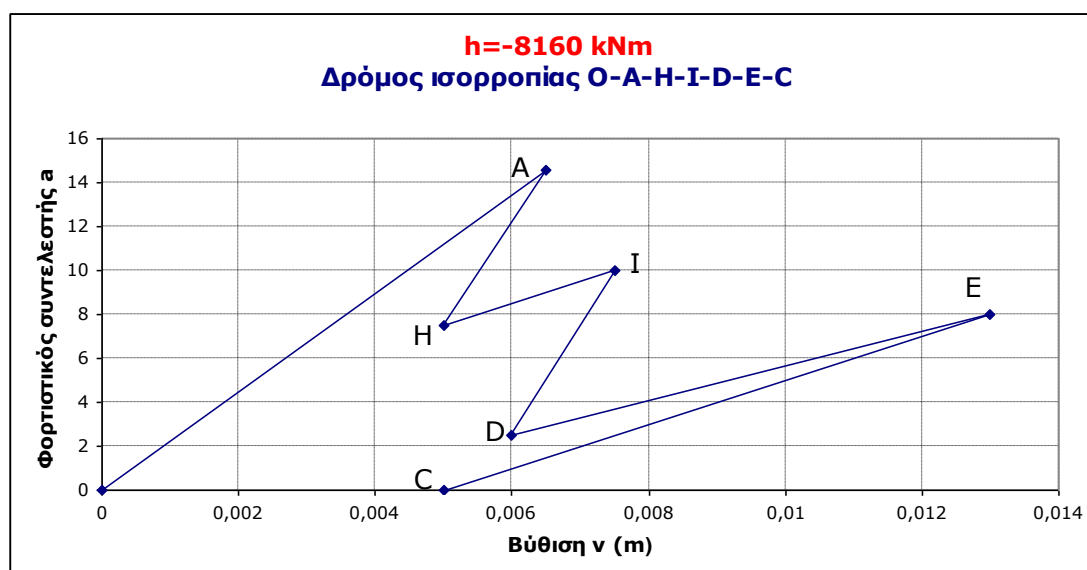
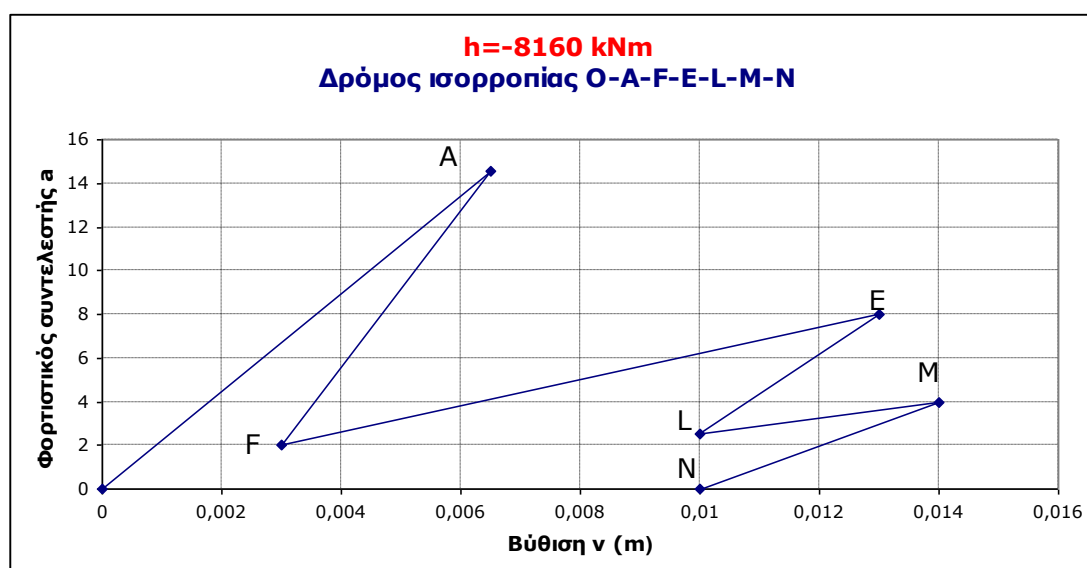
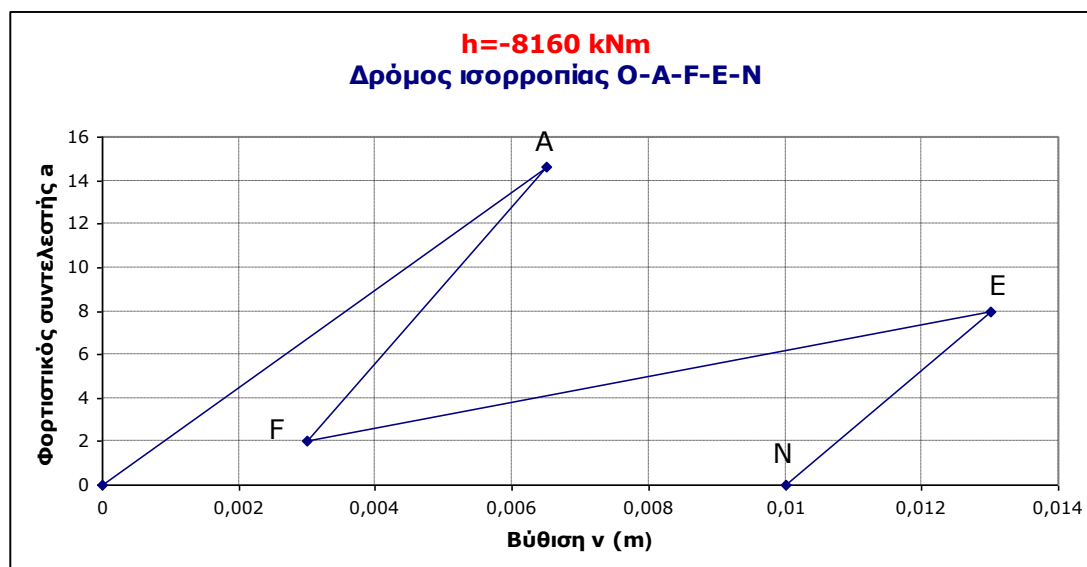
Προέκυψε τότε η εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}_3$ με $\bar{a} = 0$ (σημείο C), στην οποία η πλαστική στροφή \bar{p}_5 της μεσαίας διατομής, μετακινήθηκε στο αντιστρέψιμο οριζόντιο κλάδο με $\{a\}=\{\}$, $\{b\}=\{1,2,7,8,11,12\}$. Αυτός ο πρώτος δρόμος ισορροπίας έληξε στο σημείο C, καθώς δεν υπήρχε καμία λύση για το MCP είτε για $\dot{a} = 1$ είτε για $\dot{a} = -1$.

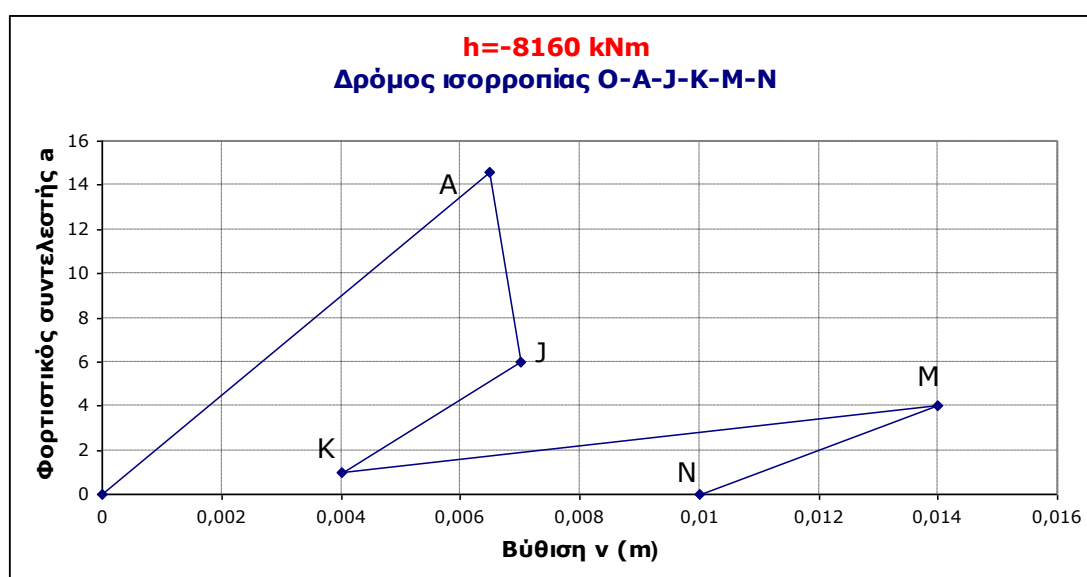
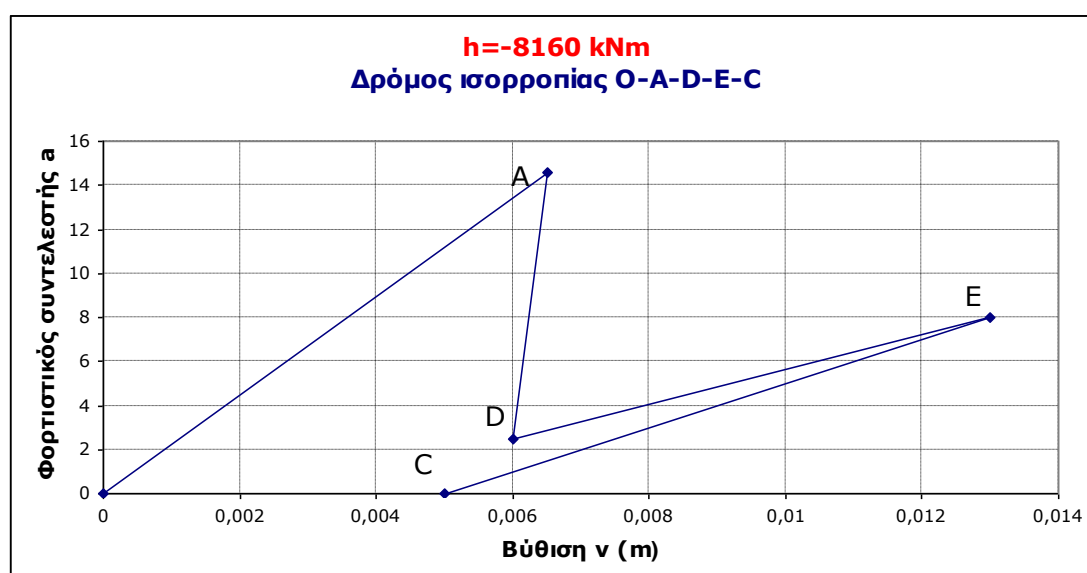
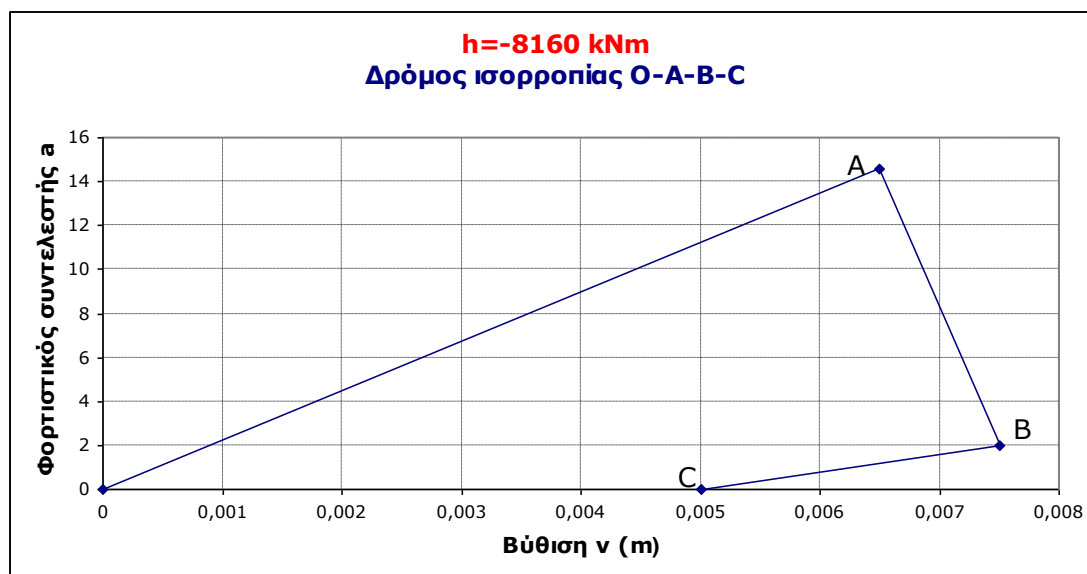
Ερευνήθηκε τότε η δεύτερη λύση που είχε βρεθεί στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_1$, η οποία περιλάμβανε την αποφόρτιση της πλαστικής άρθρωσης (την εξίσωση διαρροής 7). Με παρόμοιο τρόπο, πάντα αγνοώντας όσες λύσεις έδιναν πλήρη αποφόρτιση, μορφώθηκε η κατάσταση $\bar{\Sigma}_4$ για $\bar{a} = 5.306$ (σημείο D), με την ενεργοποίηση δύο πλαστικών αρθρώσεων αντιστρέψιμων, δίπλα στις στηρίξεις: $\{a\}=\{\}$, $\{b\}=\{1,2,11,12\}$. Τότε επαναφορτίστηκε η πλαστική άρθρωση στο μέσον της δοκού, φτάνοντας στην εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}_5$ για $\bar{a} = 7.296$ (σημείο E): $\{a\}=\{7\}$, $\{b\}=\{1,2,11,12\}$. Αυτός ο δεύτερος δρόμος ισορροπίας ολοκληρώθηκε στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_6$ (σημείο C) όταν η τάση στη μεσαία διατομή μετακινήθηκε στον οριζόντιο κλάδο: $\{a\}=\{\}$, $\{b\}=\{1,2,7,8,11,12\}$.

Ο τελευταίος δρόμος ισορροπίας ερευνήθηκε διαλέγοντας την τρίτη λύση που είχε βρεθεί στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_1$ (αποφόρτιση των πλαστικών αρθρώσεων στις στηρίξεις, για τις εξισώσεις διαρροής 1,11). Φτάσαμε στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_7$ για $\bar{a} = 2.653$ (σημείο F), κάτι που οδήγησε σε μια πλαστική άρθρωση στο μέσον όπου η στροφή ήταν ελεύθερη: $\{a\}=\{7\}$, $\{b\}=\{7,8\}$. Και οι δύο πλαστικές αρθρώσεις επαναφορτίστηκαν στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_8$ (σημείο G) με $\bar{a} = 7.296$ όπου $\{a\}=\{1,11\}$, $\{b\}=\{7,8\}$. Τέλος, ο δρόμος ισορροπίας ολοκληρώθηκε όταν σχηματίστηκαν οι αντιστρέψιμες πλαστικές αρθρώσεις και στις δύο στηρίξεις στην κατάσταση $\bar{\Sigma}_9$ (σημείο H): $\{a\}=\{7\}$, $\{b\}=\{1,2,7,8,11,12\}$. Εφόσον και οι τρεις λύσεις μελετήθηκαν, η ανάλυση θεωρήθηκε ολοκληρωμένη.

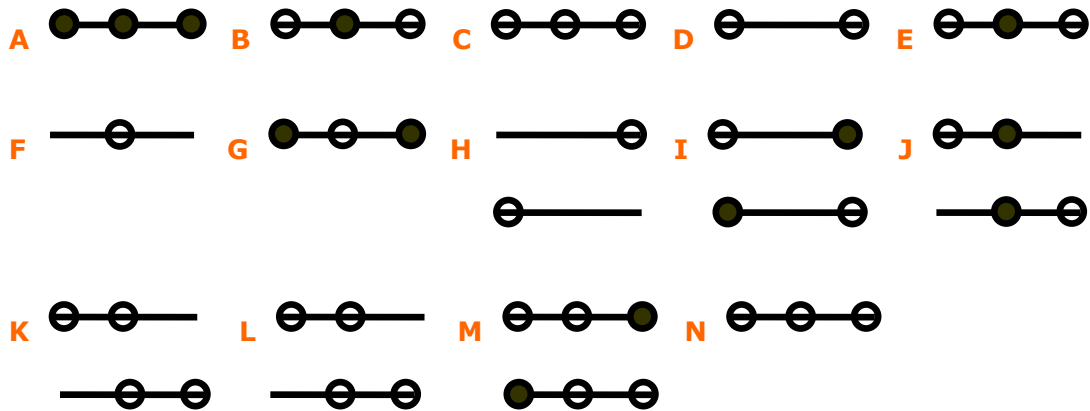
Συνοπτικά, για αυτήν την τιμή της κλίσης του διαγράμματος χαλάρωσης ($h=5610\text{kNm}$) κάθε κρίσιμο φαινόμενο αναπαρίσταται με ένα από τα γράμματα A ως H. Οι θέσεις και η κατηγορία των πλαστικών αρθρώσεων που εμφανίζονται στο φορέα, αναπαρίστανται στο σχήμα (4.9) και στο υπόμνημά του. Στο σχήμα αυτό φαίνονται και οι τρεις δρόμοι ισορροπίας (OABC, OADFC, OAFGH). Για παράδειγμα, για το δρόμο ισορροπίας OABC, το δοκάρι, ξεκινώντας από το O, σχηματίζει τρεις πλαστικές αρθρώσεις στις στηρίξεις και στο μέσον (σημείο A), μετά χαλαρώνει στο B (όπου οι δύο πλαστικές αρθρώσεις στις στηρίξεις εξαντλούν την καμπτική τους ικανότητα και φτάνουν στον οριζόντιο κλάδο) και τέλος εμφανίζεται ένα φαινόμενο snapback στο C, όπου και η διατομή στο μέσον χάνει την καμπτική της ικανότητα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι φαινόμενα snapback ήταν εμφανή στους κλάδους AF, BC, EC.

Για την τιμή $h=-5610\text{kNm}$, παρατηρήθηκαν τρεις δρόμοι ισορροπίας, ο καθένας με τα δικά του ξεχωριστά χαρακτηριστικά, κάτι που καταδεικνύει και την πολυπλοκότητα του φαινομένου. Αν επιχειρήσουμε να θέσουμε στο πρόβλημα, μια τιμή κλίσης του καθοδικού κλάδου ίση με $h=-8160\text{kNm}$, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δείχνουν φανερά πόσο περίπλοκο μπορεί να γίνει το πρόβλημα, όσο πιο έντονη γίνεται η αστάθεια του υλικού με την αύξηση της κλίσης h του διαγράμματος.



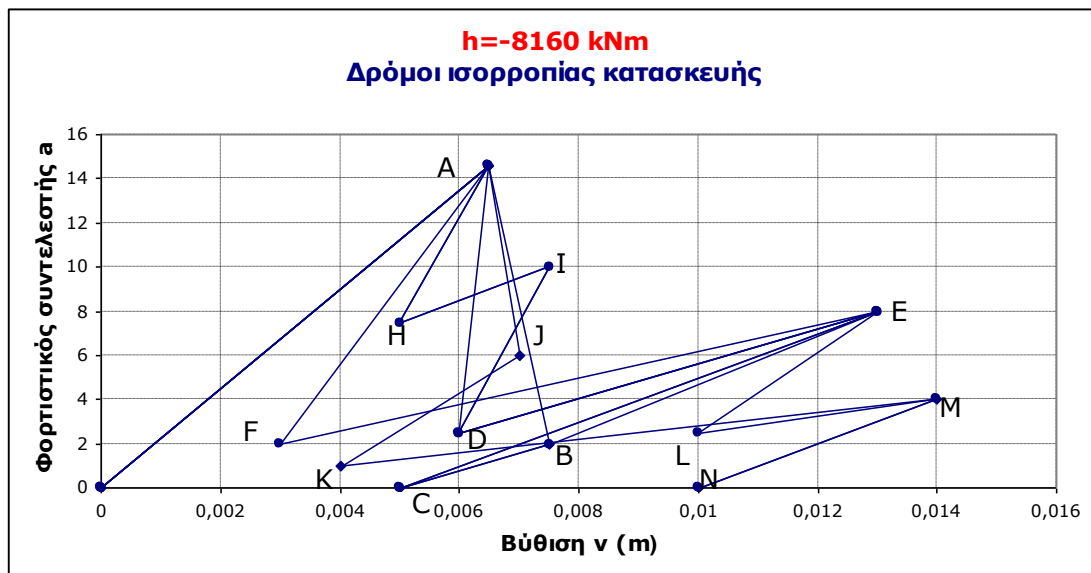
ΣΧΗΜΑ 4.10.1-4.10.6 Συμπεριφορά κατασκευής για $h=-8160$ kNm

Επεξήγηση σημείων διαγραμμάτων (4.10.1-4.10.6)



Για κλίση $h_j = -8160 \text{ kNm}$ κατασκευή έφτασε σε ένα σημείο διχοτόμησης των λύσεων στο A (bifurcation point). Από εκεί, βρέθηκαν 3 συμμετρικοί δρόμοι ισορροπίας (ABC, ADEC, AFGN) και 6 μη συμμετρικοί δρόμοι ισορροπίας (AFGLMN, AHIDEC, AJKMN, με πλαστικές αρθρώσεις να σχηματίζονται είτε στο δεξί είτε στο αριστερό άκρο). Στα διαγράμματα (4.10.1) ως και (4.10.6) φαίνονται με λεπτομέρεια όλοι οι δρόμοι ισορροπίας ρ-δ. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι εκτός από αστάθεια που οδηγεί σε φαινόμενα snapback και ελαστική τοπική αποφόρτιση, υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο διχοτόμησης των λύσεων στο G (που οδηγεί είτε στο συμμετρικό κλάδο GN είτε στους μη συμμετρικούς κλάδους GLMN).

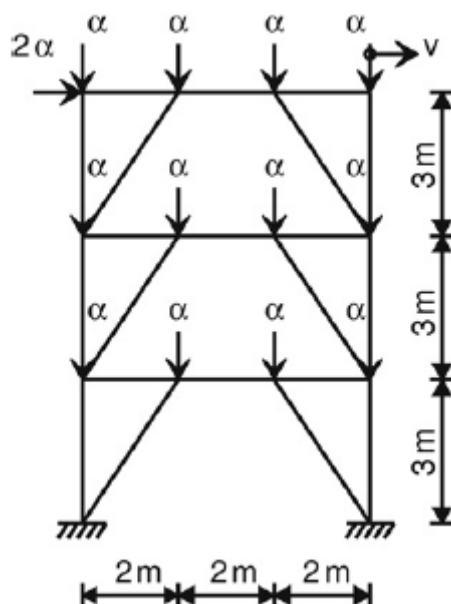
Για τη συγκεκριμένη κατασκευή, οι μέγιστοι φορτιστικοί συντελεστές για όλες τις περιπτώσεις αστάθειας του υλικού βρέθηκαν να είναι ίδιοι ($a=14.592$), και το οριακό σημείο αυτό αντιστοιχούσε στο όριο της ελαστικής περιοχής της κατασκευής. Όλοι οι δρόμοι ισορροπίας φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.11 Σύνολο δρόμων ισορροπίας για $h=-8160$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Σε αυτό το δεύτερο παράδειγμα, παρουσιάζεται ένα τριόροφο πλαίσιο ενός ανοίγματος, με έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας μορφής λάμδα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Συγκεκριμένα, υπόκειται σε αυξανόμενα φορτία (kN) τα οποία έχουν σαν φορτιστικό συντελεστή το α και για την οριζόντια και για την κατακόρυφη διεύθυνση. Το v συμβολίζει την οριζόντια μετακίνηση του δεξιού κόμβου του τελευταίου ορόφου.



ΣΧΗΜΑ 4.12 Φορέας εφαρμογής 2

Ο φορέας του παραδείγματος προσομοιώνεται με 21 μέλη, 14 κόμβους και 36 βαθμούς ελευθερίας. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2}$ και έχουν θεωρηθεί τρεις διαφορετικές κατηγορίες διατομών. Οι πρότυπες διατομές είναι κατά τους αμερικάνικους κανονισμούς, επειδή αυτές χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση στο μοντέλο του Tin Loi & Tangaramvong.

1) Διατομή υποστυλωμάτων	310UC118	$M_p=548.8\text{kNm}$	$N_p=4200\text{kN}$
2) Διατομή δοκών	200UB18.2	$M_p=57.6\text{kNm}$	$N_p=742.4\text{kN}$
3) Διατομή διαγωνίων συνδέσμων	SHS125/125/9	$M_p=57.75\text{kNm}$	$N_p=1365\text{kN}$

Σε όλες τις αναλύσεις, τα μέλη των διαγωνίων συνδέσμων θεωρήθηκαν ότι υιοθετούν μια απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Επίσης, για τις αναλύσεις που περιλάμβαναν και αστάθεια υλικού, θεωρήθηκε ότι για όλα τα υποστυλώματα:

$$h = -202.79 \text{ kNm}, r_r = 0.7$$

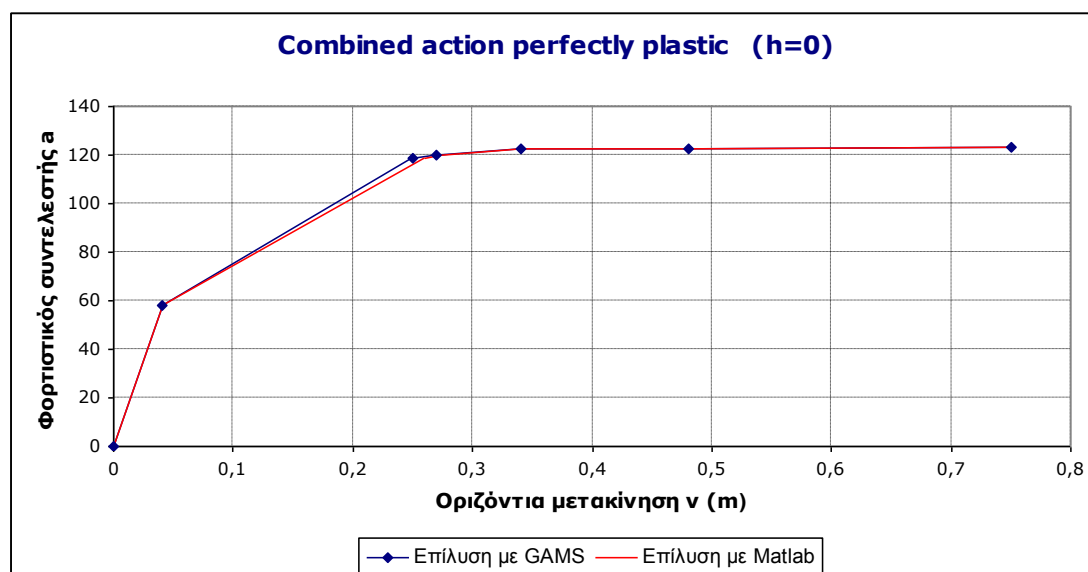
Και για τις δοκούς:

$$h = -41.04 \text{ kNm}, r_r = 0.7$$

Σε κάθε φορέα έγιναν οι εξής αναλύσεις:

- 1) Μη ολόνομη ανάλυση (path dependent) για αλληλεπίδραση και καθαρά πλαστική συμπεριφορά
- 2) Μη ολόνομη ανάλυση για καθαρή καμπτική συμπεριφορά (pure bending) και αστάθεια υλικού (softening).
- 3) Μη ολόνομη ανάλυση για αλληλεπίδραση αξονικής και αστάθεια υλικού

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναλυτικά συνοψίζονται στα παρακάτω διαγράμματα:

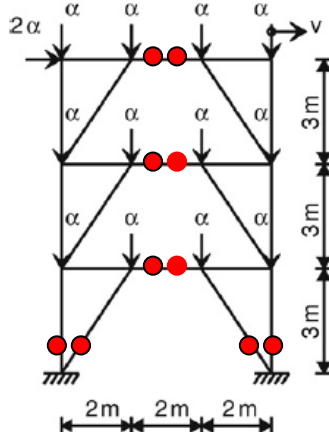


ΣΧΗΜΑ 4.13 Αλληλεπίδραση αξονικής - απόλυτα πλαστική συμπεριφορά

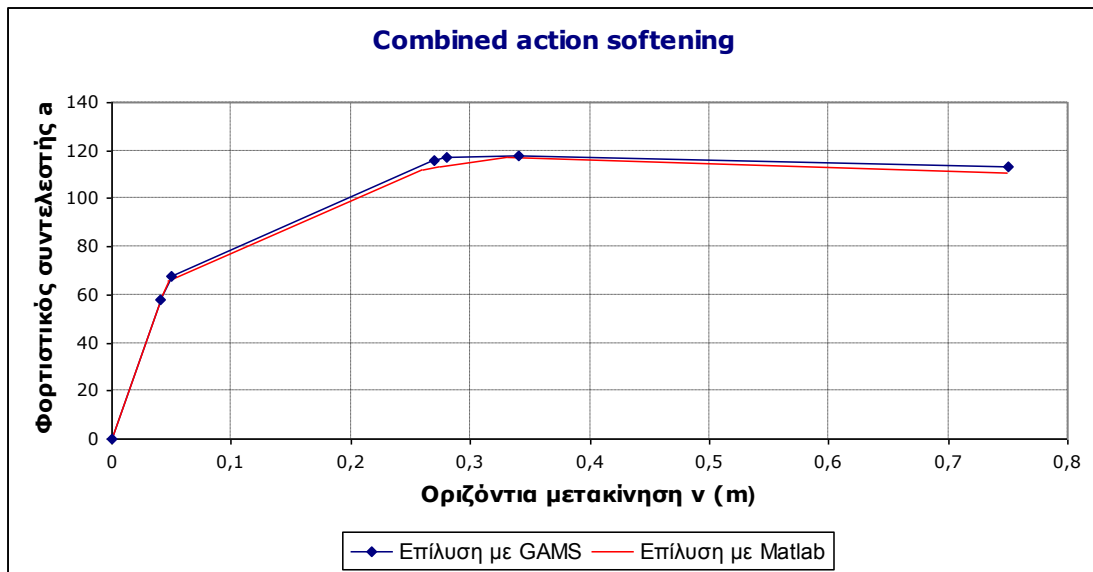
Καταρχήν παρατηρείται μια ταύτιση των αποτελεσμάτων όσον αφορά τις δικές μας επιλύσεις με τον κώδικα που αναπτύχθηκε σε Matlab και τα δεδομένα των επιλύσεων του Tin Loi ο οποίος ανέλυσε τον ίδιο φορέα, με τα ίδια γεωμετρικά στοιχεία και ιδιότητες υλικού, με τη βοήθεια του λογισμικού GAMS. Αυτό είναι μια ένδειξη ότι ο αλγόριθμος που παράχθηκε έχει μια ικανοποιητική ακρίβεια.

Η ελαστική απόκριση έδωσε φορτιστικό συντελεστή $a=57.853$ πριν τη δημιουργία ορισμένων πλαστικών αρθρώσεων στις δοκούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ελαστική συμπεριφορά του πλαισίου ήταν πανομοιότυπη και για τα τρία είδη αναλύσεων που έγιναν. Η πορεία του φορέα στη μετελαστική περιοχή ήταν η ακόλουθη:

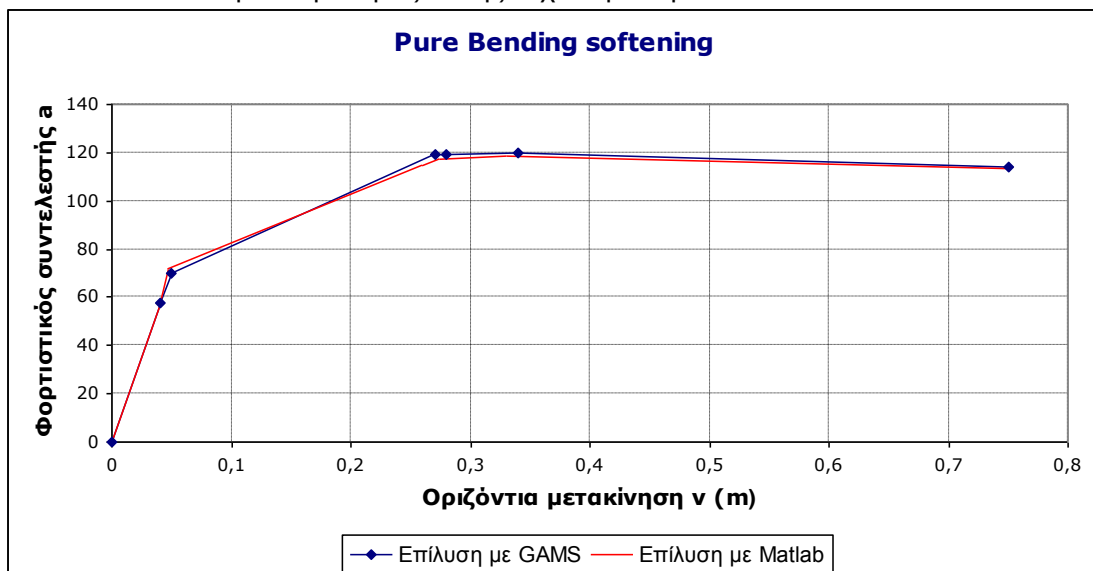
Σχηματισμός πλαστικών αρθρώσεων σε διάφορα δοκάρια. Έπειτα, όταν ο φορτιστικός συντελεστής έγινε: $a=118.85$ και $a=120.02$ σχηματίστηκαν διαδοχικά δύο πλαστικές αρθρώσεις στις διατομές των υποστυλωμάτων. Αργότερα, διέρρευσε ένας από τους συνδέσμους δυσκαμψίας για $a=122.76$ και τον ακολούθησε άλλος ένας για $a=122.94$. Η ανάλυση ολοκληρώθηκε για $a=123.2$, αφού πλέον η αντίστοιχη οριζόντια μετακίνηση είχε φτάσει $v=0.75m$, και πλέον παραβιάζει τη θεώρηση μικρών μετακινήσεων. Σημειώνεται ότι το φορτίο κατάρρευσης που προκύπτει από μια κλασική οριακή ανάλυση ήταν $a=124.148$. Οι θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων στο μέγιστο φορτίο, φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



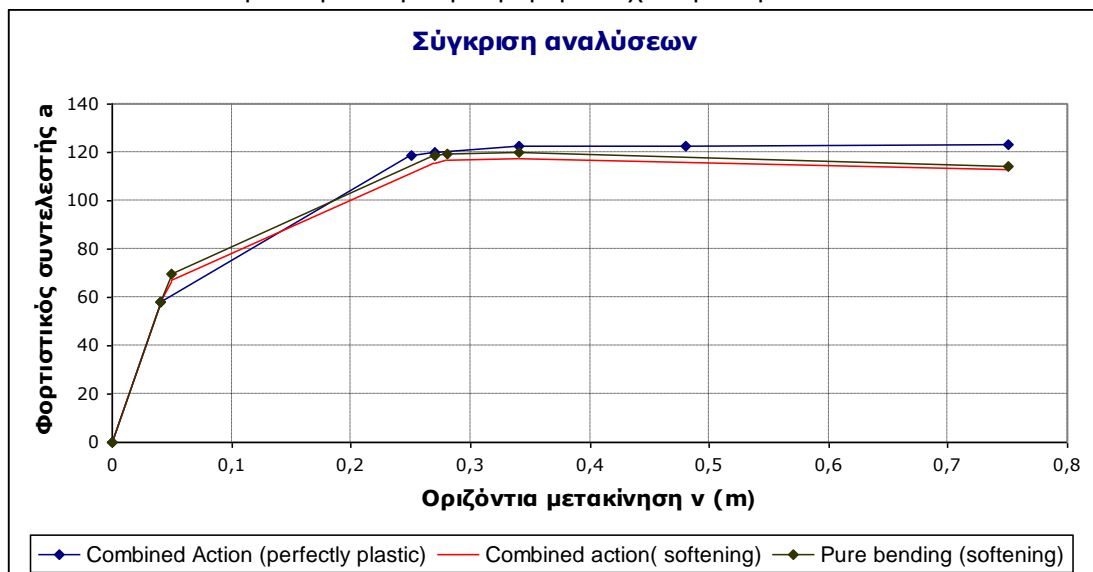
ΣΧΗΜΑ 4.14 Πλαστικές αρθρώσεις για μέγιστο φορτίο (perfectly plastic case)



ΣΧΗΜΑ 4.15 Αλληλεπίδραση αξονικής - χαλάρωση υλικού



ΣΧΗΜΑ 4.16 Καθαρὰ καμπτική συμπεριφορά - χαλάρωση υλικού

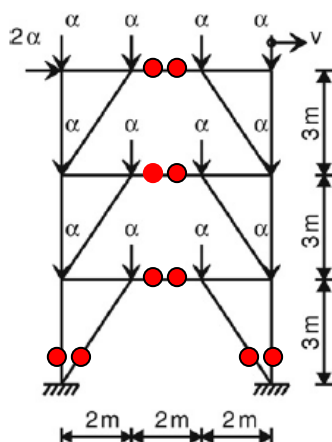


ΣΧΗΜΑ 4.17 Σύγκριση αναλύσεων A,B,C

Για τις περιπτώσεις B (combined stress) και C (pure bending) οι πλαστικές αρθρώσεις που περνούσαν στον κλάδο αστάθειας, σχηματίζονταν πρώτα σε διατομές δοκών. Οι αποκρίσεις άρχισαν να διαφέρουν όταν ο φορτιστικός συντελεστής έγινε $a=65.31$ όταν και οι υψηλές αξονικές δυνάμεις ξεκίνησαν να επηρεάζουν και δοκούς και υποστυλώματα.

Για $a=114.37$ και $a=115.12$ δύο διατομές υποστυλωμάτων έγιναν πλαστικές αρθρώσεις στην περίπτωση B. Το μέγιστο φορτίο έφτασε το $a=116.54$ όταν και οι κάτω σύνδεσμοι δυσκαμψίας άρχισαν να σχηματίζουν πλαστική άρθρωση με απολύτως πλαστική συμπεριφορά (όπως έχει θεωρηθεί για αυτήν την κατηγορία διατομών σε όλες τις περιπτώσεις αναλύσεων). Είναι ξεκάθαρο, πως η παρουσία τοπικής συμπεριφοράς αστάθειας οδηγεί σε κάποια μείωση (περίπου 4-5%) της φέρουσας ικανότητας της κατασκευής σε σχέση με τη θεώρηση καθαρά πλαστικής συμπεριφοράς, όπως έγινε στην περίπτωση A.

Για την περίπτωση Γ, η συνολική απόκριση της κατασκευής ακολούθησε σχεδόν τον ίδιο δρόμο με αυτήν των συνδυασμένων εντάσεων αλληλεπίδρασης στην περίπτωση B. Παρόλ' αυτά, τα φορτία στα οποία σχηματίστηκαν οι αντίστοιχες πλαστικές αρθρώσεις, ήταν υψηλότερα, όπως ήταν και αναμενόμενο. Οι δύο διατομές στη βάση των υποστυλωμάτων διέρρευσαν για φορτία $a=118.13$ και $a=118.78$ αντίστοιχα. Η κατασκευή έφτασε στο μέγιστό της φορτίο όταν $a=119.54$ με την ενεργοποίηση της απολύτως πλαστικής διατομής στους συνδέσμους δυσκαμψίας. Είναι φανερό, πως η εισαγωγή των αξονικών δυνάμεων στις αναλύσεις, οδηγεί σε μια μείωση (της τάξης του 2%) στη μέγιστη φέρουσα ικανότητα της κατασκευής που υπόκειται σε αστάθεια υλικού. Οι πλαστικές αρθρώσεις στη θέση του μέγιστου φορτίου, για τις αναλύσεις B και C, βρίσκονταν στις ίδιες θέσεις, όπως και στην ανάλυση A και παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα.

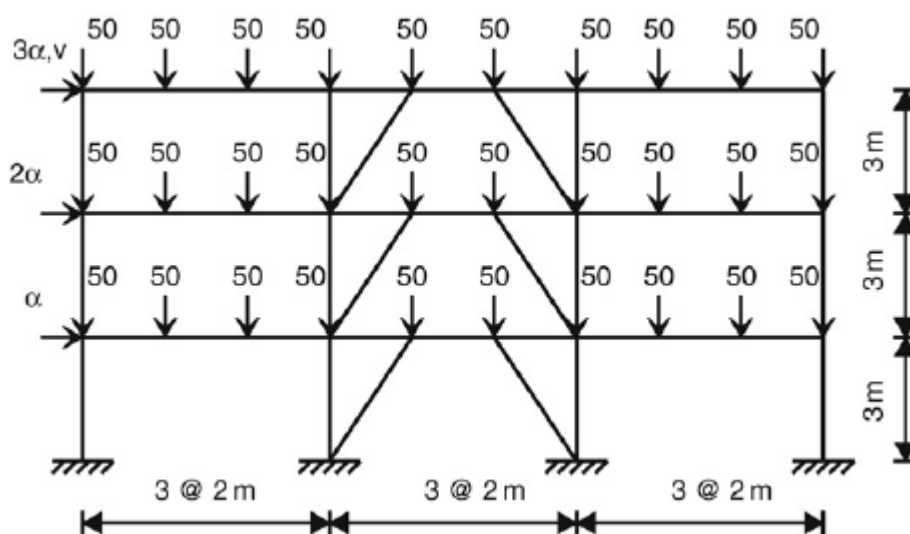


ΣΧΗΜΑ 4.18 Πλαστικές αρθρώσεις για μέγιστο φορτίο αναλύσεων B και C (combined action softening & pure bending softening)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Το τρίτο παράδειγμα αφορά ουσιαστικά το προσομοίωμα του Μυστακίδη (ο οποίος όμως στις αναλύσεις του είχε θεωρήσει καθαρά καμπτική συμπεριφορά), το οποίο παρουσιάστηκε και στην ενότητα 2, στις εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού.

Το πλαίσιο είναι τριών ανοιγμάτων και τριών ορόφων και έχει έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας μορφής λάμδα. Υπόκειται σε σταθερά κατακόρυφα φορτία (kN) και σε αυξανόμενα οριζόντια φορτία (kN) που χαρακτηρίζονται από το φορτιστικό συντελεστή α , όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα. Το ν συμβολίζει την οριζόντια μετακίνηση του τελευταίου ορόφου (m). Το προσομοίωμα αποτελείται από 45 μέλη, 34 κόμβους και 90 βαθμούς ελευθερίας.



ΣΧΗΜΑ 4.19 Φορέας παραδείγματος 3

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2}$ και έχουν θεωρηθεί τρεις διαφορετικές κατηγορίες διατομών. Οι πρότυπες διατομές είναι κατά τους αμερικάνικους κανονισμούς, επειδή αυτές χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση στο μοντέλο του Tin Loi & Tangaramvong.

1) Διατομή υποστυλωμάτων	310UC118	$M_p=548.8\text{kNm}$	$N_p=4200\text{kN}$
2) Διατομή δοκών	250UB18.2	$M_p=102.08\text{kNm}$	$N_p=1046.4\text{kN}$
3) Διατομή διαγωνίων συνδέσμων	150UC30	$M_p=80\text{kNm}$	$N_p=1235.2\text{kN}$

Σε όλες τις αναλύσεις, τα μέλη των διαγωνίων συνδέσμων θεωρήθηκαν ότι υιοθετούν μια απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Επίσης, για τις αναλύσεις που περιλάμβαναν και αστάθεια υλικού, θεωρήθηκε ότι για όλα τα υποστυλώματα:

$$h = -202.79 \text{ kNm}, r_r = 0.7$$

Για τις δοκούς του ανοίγματος 2:

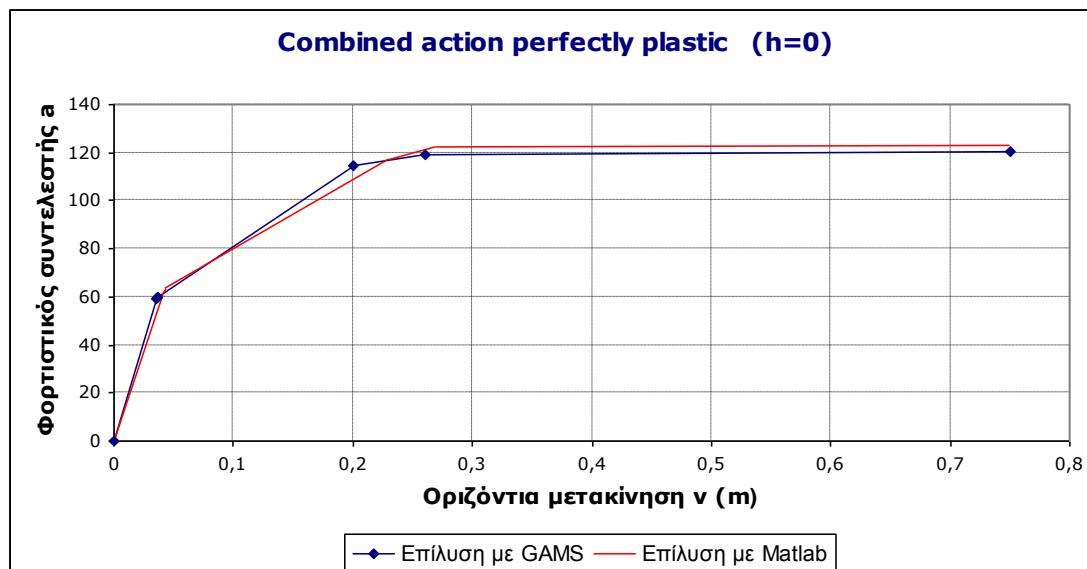
$$h = -69.1 \text{ kNm}, r_r = 0.7$$

Για τις δοκούς του ανοίγματος 1 και 3:

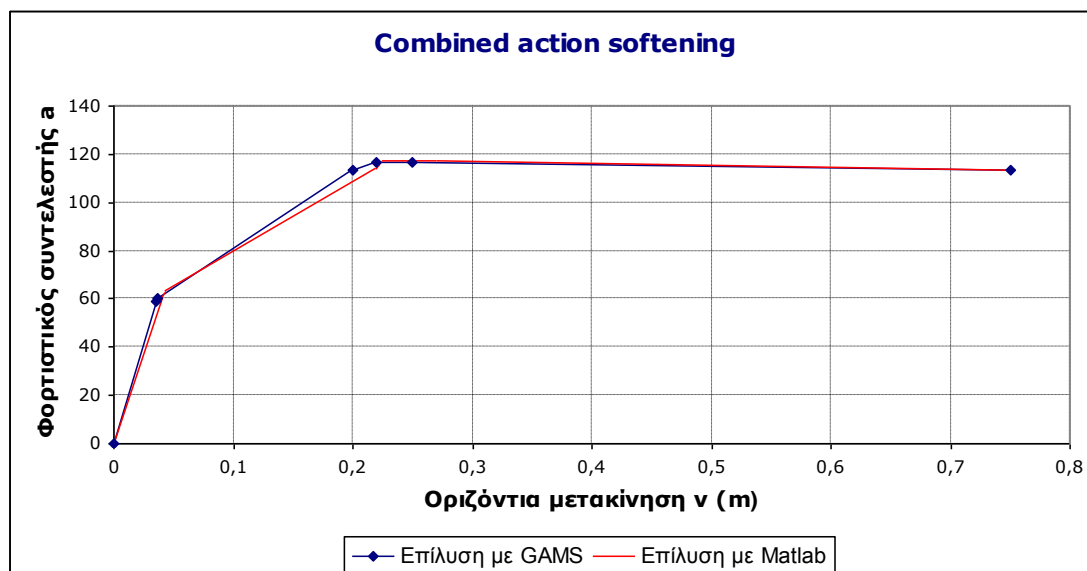
$$h = -69.1 \text{ kNm}, r_r = 0.7 \text{ στα άκρα των δοκών}$$

$$h = -34.55 \text{ kNm}, r_r = 0.7 \text{ στις θέσεις επιβολής των κατακορύφων φορτίων}$$

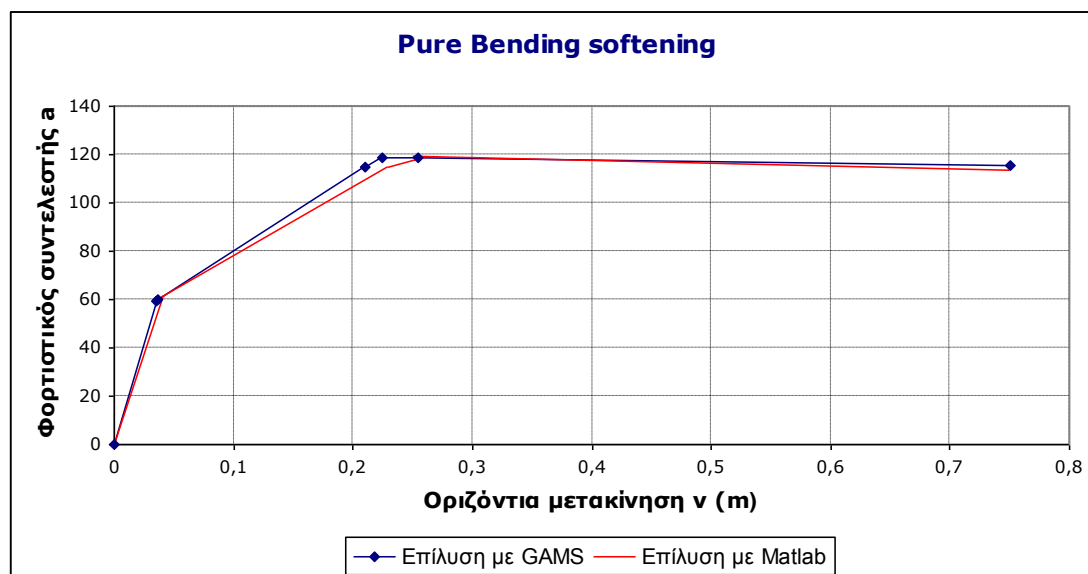
Όπως και στο παράδειγμα 2, υπάρχει μόνο ένας δρόμος ισορροπίας για καθένα από τα τρία είδη αναλύσεων. Τα αποτελέσματα από επίλυση στο Matlab, αλλά και η σύγκρισή τους με την επίλυση του Tin Loi στο GAMS, φαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα.



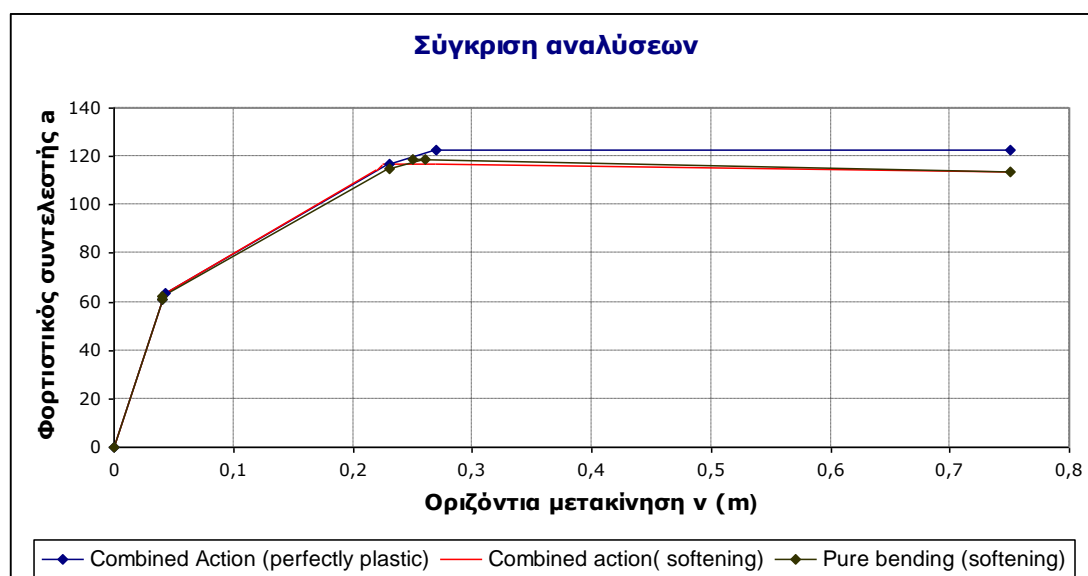
ΣΧΗΜΑ 4.20 Αλληλεπίδραση αξονικής - απόλυτα πλαστική συμπεριφορά



ΣΧΗΜΑ 4.21 Αλληλεπίδραση αξονικής - χαλάρωση υλικού



ΣΧΗΜΑ 4.22 Καθάρα καμπτική συμπεριφορά – χαλάρωση υλικού



ΣΧΗΜΑ 4.23 Σύγκριση αναλύσεων A,B,C

Σε όλες τις αναλύσεις, οι πρώτη και η δεύτερη πλαστική άρθρωση αναπτύχθηκε στις δοκούς στα ίδια επίπεδα φόρτισης $a=59.059$ και $a=60.010$ αντίστοιχα. Όταν η κατασκευή φορτίστηκε παραπάνω από $a=60.010$ οι συνολικές αποκρίσεις σε όλες τις αναλύσεις, άρχισαν να παρουσιάζουν κάποιες διαφοροποιήσεις. Για παράδειγμα, η επίδραση της αστάθειας υλικού, μπορεί να γίνει φανερή στο διάγραμμα (5.16), αν συγκριθεί η ανάλυση A όπου είχαμε πλήρη πλαστική συμπεριφορά, με την ανάλυση αστάθειας υλικού B. Επίσης, η επιρροή των αλληλεπίδρασης αύξησε την απόκριση για αστάθεια υλικού, όπως φαίνεται αν συγκριθεί το μέγιστο των περιπτώσεων B και C.

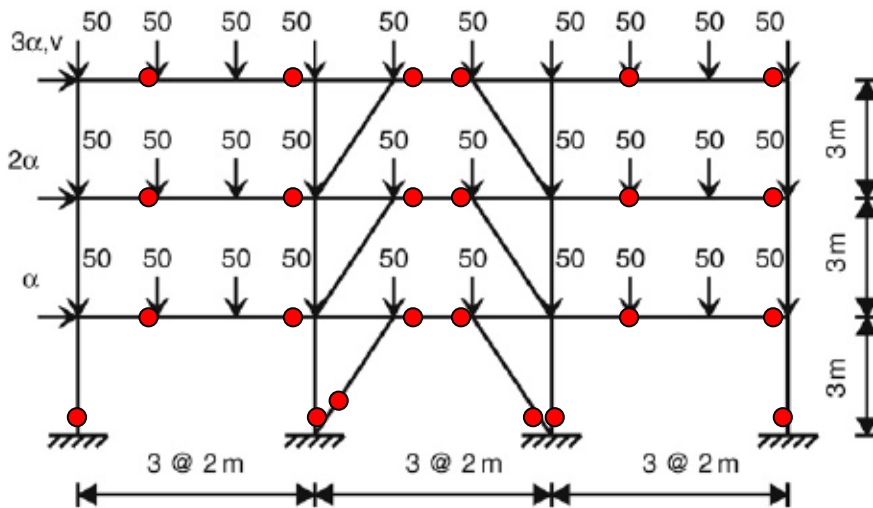
Στην ανάλυση A, οι πλαστικές αρθρώσεις, με πλήρη πλαστική συμπεριφορά, συνέχιζαν να σχηματίζονται σε διατομές δοκών, μέχρι το φορτίο $a=114.863$ όπου μια πλαστική άρθρωση εμφανίστηκε σε κάποιο υποστύλωμα στη βάση του πλαισίου. Για $a=119.392$ αναπτύχθηκε πλαστική άρθρωση σε έναν από τους κάτω έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας. Η ανάλυση ολοκληρώθηκε για $a=120.436$ και $v=0.75\text{m}$ καθώς μια περεταίρω αύξηση του φορτίου θα παραβίαζε σοβαρά την

παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων. Μια κλασική οριακή ανάλυση έδινε φορτίο κατάρρευσης $a=120.644$.

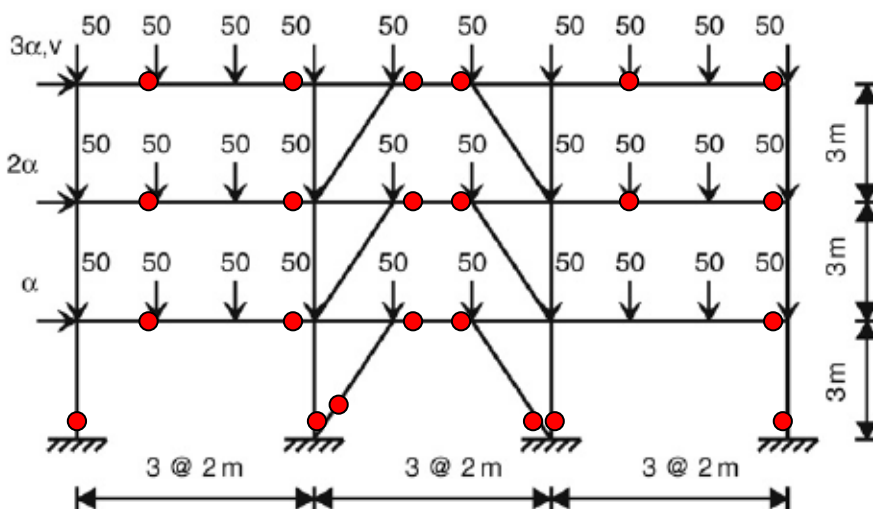
Στην ανάλυση B, δημιουργήθηκε μία πλαστική άρθρωση που πέρασε στον κλάδο της χαλάρωσης, σε κάποιο υποστυλωμα στη βάση του πλαισίου, για $a=113.170$. Η σταδιακή αύξηση του φορτίου οδήγησε σε διαρροή μερικών δοκών και υποστυλωμάτων. Όταν ο φορτιστικός συντελεστής έφτασε $a=116.688$, μία πλαστική άρθρωση ξεκίνησε να σχηματίζεται στον κάτω έκκεντρο σύνδεσμο δυσκαμψίας. Τελικά, ο φορτιστικός συντελεστής προσέγγισε το $a=116.785$. Η αστάθεια του υλικού προκάλεσε μια μείωση στο οριακό φορτίο, της τάξης του 3% και πάλι, σε σύγκριση με την ανάλυση A όπου είχαμε απόλυτα πλαστική συμπεριφορά.

Στην περίπτωση C, είχαμε διαρροή στη βάση των υποστυλωμάτων και των κάτω συνδέσμων δυσκαμψίας για φορτιστικούς συντελεστές $a=114.979$ και $a=118.889$ αντιστοίχως. Όπως ήταν αναμενόμενο, το οριακό φορτίο $a=118.982$ έφτασε σε υψηλότερο επίπεδο (της τάξης περίπου του 2%) συγκρινόμενο με την ανάλυση αλληλεπίδρασης B.

Οι θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων στο μέγιστο των φορτίων που παρουσιάστηκαν φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



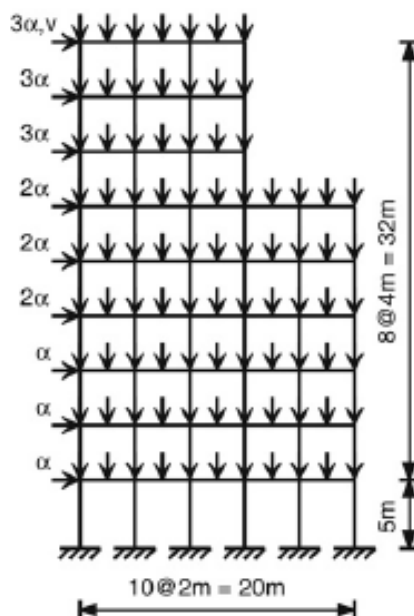
ΣΧΗΜΑ 4.24 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων για ανάλυση A (perfectly plastic)



ΣΧΗΜΑ 4.25 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων ανάλυσης B (combined stress/softening)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το τελευταίο παράδειγμα αυτής της ενότητας αφορά το ρεαλιστικό πλαίσιο της εννιαόροφης κατασκευής που φαίνεται στο σχήμα (5.23). Υπόκειται σε αυξανόμενα κατακόρυφα σημειακά φορτία της τάξης των 6α (kN) και σε αυξανόμενα οριζόντια φορτία (kN) που χαρακτηρίζονται από ένα φορτιστικό πολλαπλασιαστή α . Το α αντιστοιχεί στην οριζόντια μετακίνηση του τελευταίου ορόφου (m).



ΣΧΗΜΑ 4.26 Φορέας παραδείγματος 4

Η κατασκευή έχει διακριτοποιηθεί σε 126 στοιχεία, 93 κόμβους, 261 βαθμούς ελευθερίας και 213 κρίσιμες διατομές (στα άκρα των υποστυλωμάτων, στα άκρα και στο μέσον των δοκών). Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2}$ και έχουν θεωρηθεί δύο διαφορετικές κατηγορίες διατομών. Οι πρότυπες διατομές είναι κατά τους αμερικάνικους κανονισμούς, επειδή αυτές χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση στο μοντέλο του Tin Loi & Tangaramong.

1) Διατομή υποστυλωμάτων	400WC328	$M_p=1988\text{kNm}$	$N_p=11704\text{kN}$
2) Διατομή δοκών	460UB82.1	$M_p=552\text{kNm}$	$N_p=3150\text{kN}$

Επίσης, για τις αναλύσεις που περιλάμβαναν και αστάθεια υλικού, θεωρήθηκε ότι για όλα τα υποστυλώματα:

$$h=-18418.78\text{kNm}, r_f = 0.7$$

Για τις δοκούς στα άκρα:

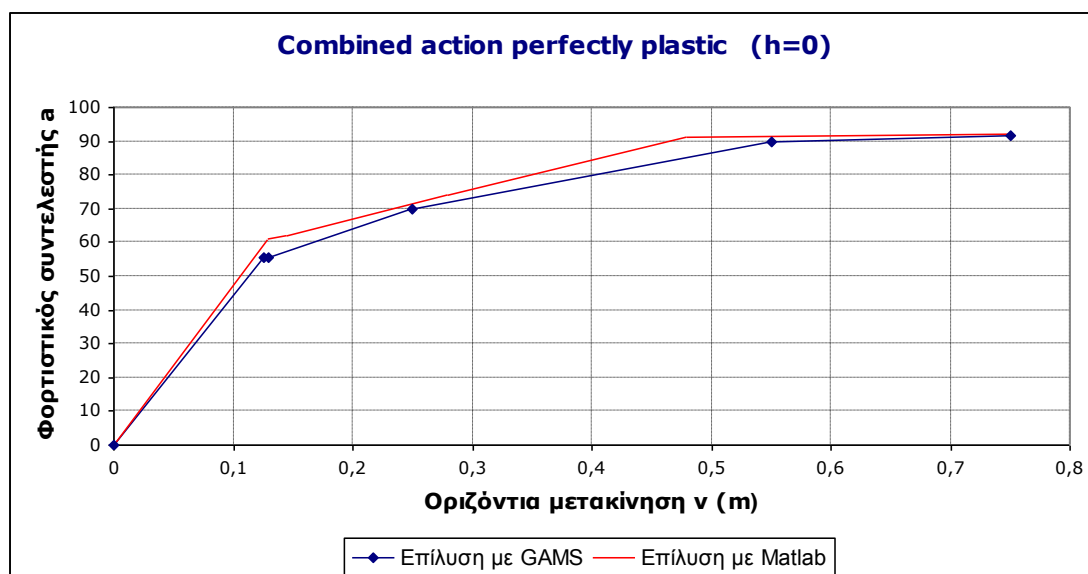
$$h=-4852.04 \text{ kNm}, r_f = 0.7$$

Για τις δοκούς στο μέσον:

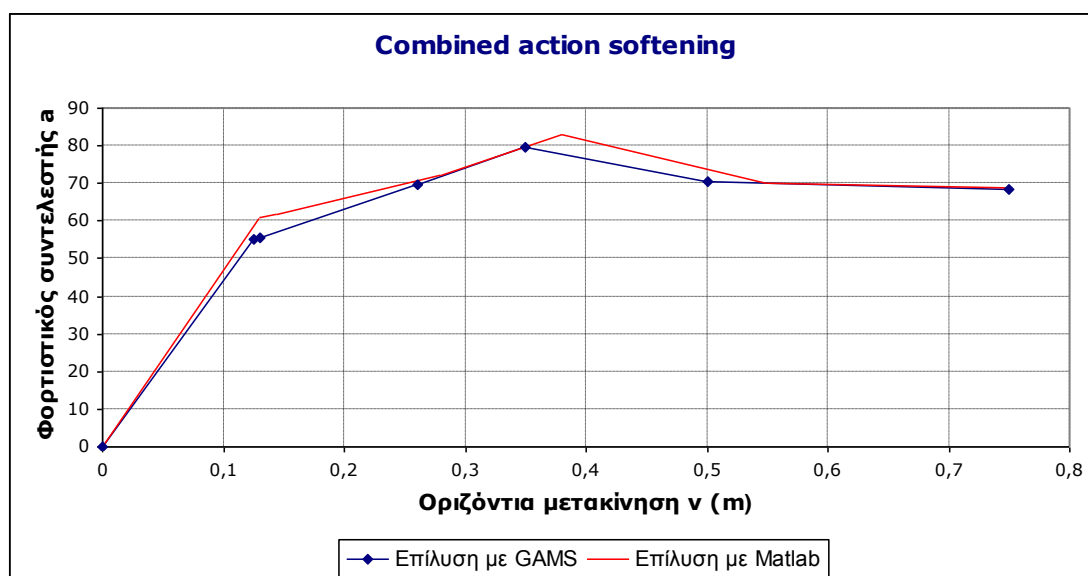
$$h=-2462.02\text{kNm}, r_f = 0.7$$

Ακολουθούν και πάλι οι αποκρίσεις φορτίου - μετατόπισης για τις τρεις διαφορετικές αναλύσεις όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Και πάλι υπάρχει ένας μοναδικός δρόμος ισορροπίας για κάθε περίπτωση. Οι θέσεις των πλαστικών

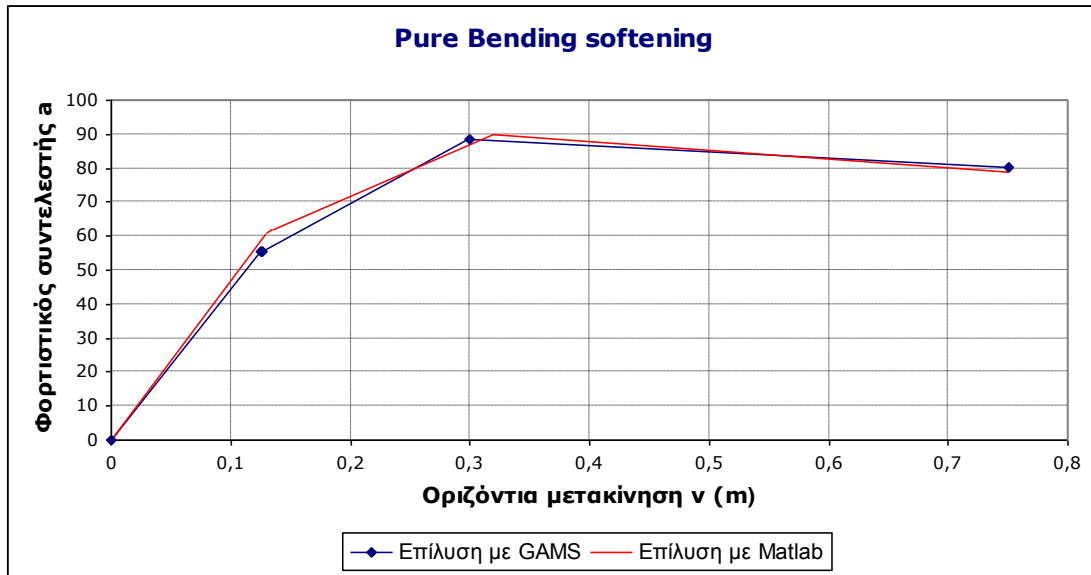
αρθρώσεων όμως στο σημείο της μέγιστης έντασης, είναι διαφορετικές για κάθε περίπτωση ανάλυσης.



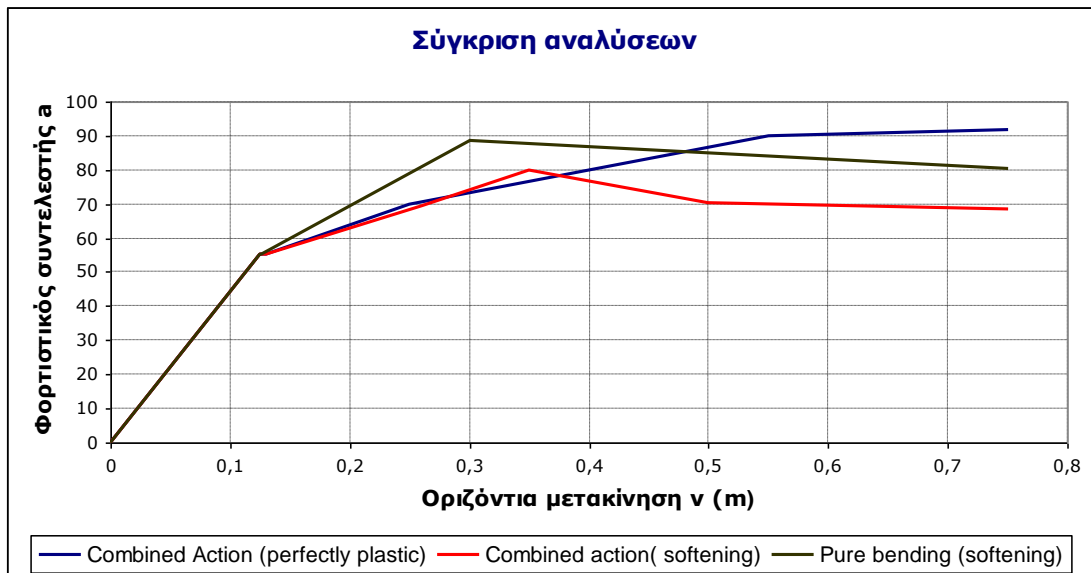
ΣΧΗΜΑ 4.27 Αλληλεπίδραση αξονικής - απόλυτα πλαστική συμπεριφορά



ΣΧΗΜΑ 4.28 Αλληλεπίδραση αξονικής - χαλάρωση υλικού



ΣΧΗΜΑ 4.29 Καθάρα καμπτική συμπεριφορά –χαλάρωση υλικού



ΣΧΗΜΑ 4.30 Σύγκριση αναλύσεων A,B,C

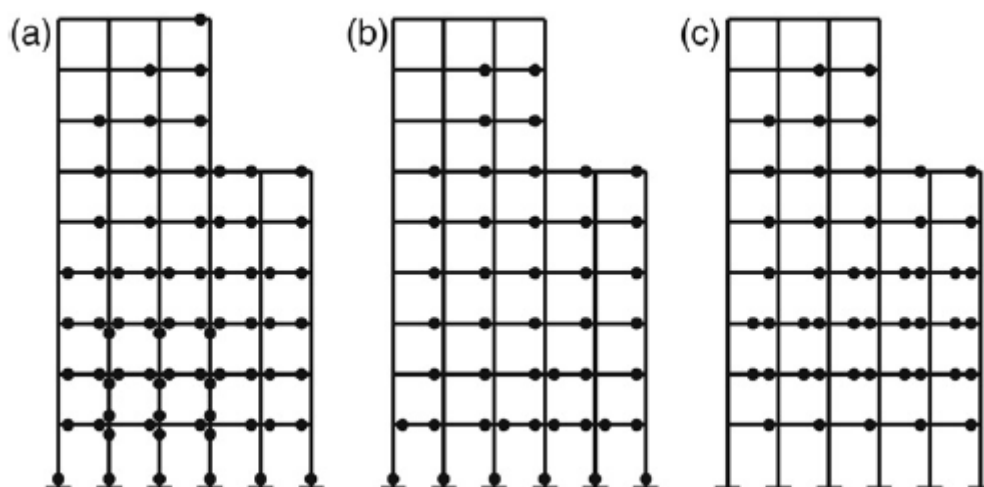
Και στις τρεις αναλύσεις, η αρχική ελαστική συμπεριφορά ήταν πανομοιότυπη. Οι πρώτες πλαστικές αρθρώσεις σχηματίστηκαν σε διατομές δοκών για φορτία $a=55.359$ και $a=55.374$.

Για την ανάλυση A, η πρώτη διατομή υποστυλώματος, άρχισε να διαρρέει σε φορτίο $a=69.981$. Η ανάλυση ολοκληρώθηκε για ένα μέγιστο φορτίο $a=91.754$, $u=0.75m$. Το φορτίο κατάρρευσης που υπολογίστηκε από τις κλασσικές μεθόδους οριακής ανάλυσης, ήταν $a=93.724$.

Στην ανάλυση B, η πρώτη πλαστική άρθρωση σε υποστυλωμα σχηματίστηκε για $a=69.531$. Το μέγιστο επίπεδο φόρτισης ήταν $a=79.709$ περίπου 15% μικρότερο από την ανάλυση A όπου είχαμε απόλυτα πλαστική συμπεριφορά.

Στην ανάλυση C οι πλαστικές αρθρώσεις με χαλάρωση, σχηματίστηκαν μόνο σε διατομές δοκών, εφόσον οι καμπτικές ροπές σε όλα τα υποστυλώματα, δεν ήταν αρκετά υψηλές ώστε να φτάσουν τα όρια διαρροής. Το οριακό φορτίο έφτασε το $a=88.622$. Η επιρροή των αξονικών δυνάμεων οδήγησε σε μια μείωση του μέγιστου φορτίου κατά 11%.

Οι θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων για τις αναλύσεις A,B,C στην κατάσταση μέγιστης έντασης, φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



ΣΧΗΜΑ 4.31 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων στη μέγιστη εντατική κατάσταση για αναλύσεις A, B, C

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΧΑΛΑΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ

5.1 Εισαγωγή

Η ολοένα αυξανόμενη ανάγκη για πιο οικονομικές και ανθεκτικές κατασκευές, καθώς και οι συνεχώς πιο αυστηρές διατάξεις των κανονισμών, έχουν επιβάλλει να λαμβάνονται υπόψιν οι μη γραμμικότητες γεωμετρίας και υλικού, όταν έχουμε να κάνουμε με το σχεδιασμό μιας κατασκευής. Η απαιτούμενη ελαστοπλαστική ανάλυση μπορεί να παρέχει το πλήρες φάσμα της απόκρισης της κατασκευής για μια δεδομένη ιστορία φόρτισης. Παρόλ' αυτά, από υπολογιστικής άποψης, αυτό δεν είναι καθόλου εύκολο, ειδικά αν πρέπει να συμπεριληφθούν φυσικά φαινόμενα, όπως η αστάθεια του υλικού, ή οι επιδράσεις της γεωμετρίας.

Αυτή η ενότητα της εργασίας κάνει μια επέκταση στις προηγούμενες θεωρήσεις, συμπεριλαμβάνοντας και γεωμετρικές μη γραμμικότητες. Η δυσκολία και πάλι είναι η επίλυση του προβλήματος συμπληρωματικότητας. Οι υπολογιστικές τεχνικές βασίζονται σε επαυξητικούς επαναληπτικούς αλγορίθμους. Συγκεκριμένα, σε κάθε επαυξητικό βήμα, επιλύεται μια σειρά από ισοδύναμα γραμμικά προβλήματα με επαναληπτικές μεθόδους ώστε, όταν προκύψει τελικά η σύγκλιση, να έχουμε προσεγγίσει το πραγματικό μη γραμμικό πρόβλημα.

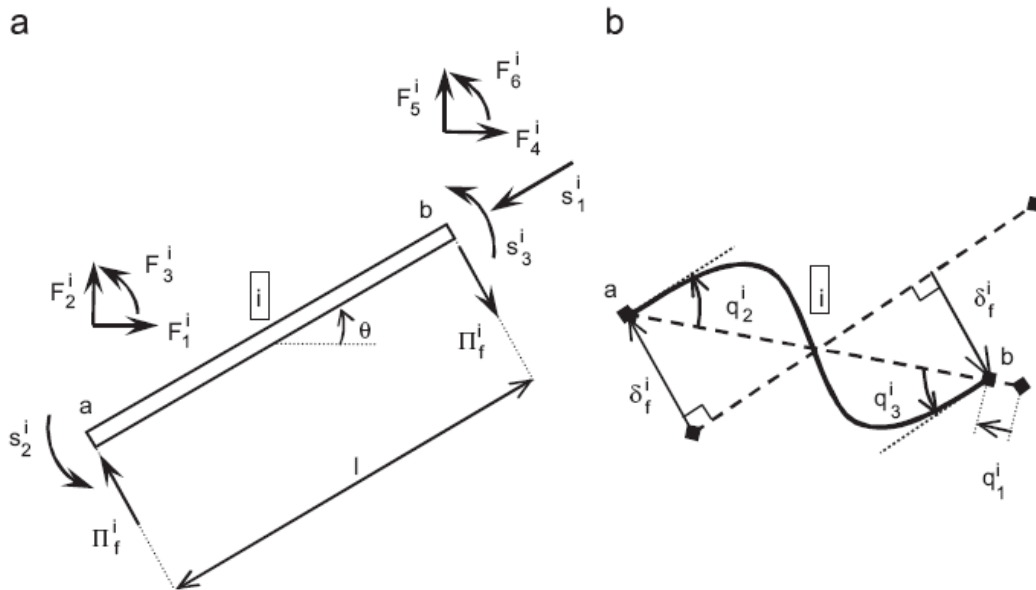
Συγκεκριμένα, σε αυτήν την ενότητα, επιδιώκουμε την ανάλυση της συμπεριφοράς ελαστοπλαστικών πλαισίων υπό αστάθεια υλικού, συμπεριλαμβανομένης και της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Πρόκειται δηλαδή για μια επέκταση της ενότητας 4, όπου είχαμε διεξάγει μη ολόνομες αναλύσεις πλαισίων υπό αστάθεια υλικού υποβαλλόμενα σε συνδυασμό καμπτικών ροπών και αξονικών δυνάμεων.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να φανεί ποια είναι η επίδραση φαινομένων 2ας τάξης στην απόκριση της κατασκευής κατά την ελαστοπλαστική ανάλυση. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω κάποιων πρακτικών παραδειγμάτων πλαισίων, στα οποία θα έχουμε εφαρμόσει τον τροποποιημένο κώδικα ο οποίος θα συμπεριλαμβάνει τις γεωμετρικές μη γραμμικότητες. Όπως και στις προηγούμενες ενότητες, η ανάπτυξη του αλγορίθμου έγινε με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab.

5.2 Στατική και κινηματική περιγραφή του προβλήματος

Θεωρούμε το γενικό αυτοισορροπούμενο στοιχείο i όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1, όπου l και θ , ορίζουν αντίστοιχα το μήκος του απαραμόρφωτου στοιχείου και τη γωνία διεύθυνσης, μετρούμενη αντιωρολογιακά σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα. Σε αυτό το σχήμα, τα διανύσματα $u^i \in \mathbb{R}^6$ και $F^i \in \mathbb{R}^6$ συμβολίζουν αντίστοιχα, τις επικόμβιες μετακινήσεις και δυνάμεις, μετρημένες στο καθολικό σύστημα αναφοράς.

Μια απλοποιημένη και ικανοποιητική προσέγγιση για να συμπεριληφθούν οι γεωμετρικές μη γραμμικότητες, βασίζεται στη γνωστή θεωρία 2ας τάξης, όπου οι ποσότητες της ακριβούς γεωμετρικής μη γραμμικότητας που λαμβάνονται υπόψιν είναι μόνο αυτές που βρίσκονται στην 1^η δύναμη (1st power quantities). Άρα κάνουμε τη θεώρηση ότι οι μετακινήσεις σε σχέση με την απαραμόρφωτη κατάσταση είναι γεωμετρικά μικρές. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη ισορροπίας για κάθε ελαστικό μέλος i στην απαραμόρφωτη κατάσταση, μορφώνεται μέσω του γεωμετρικού μητρώου δυσκαμψίας $K_g^i \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με τη φόρτιση. Για το γενικευμένο μέλος i , αυτή η μη γραμμικότητα 2ας τάξης μπορεί εύκολα να περιγραφεί με την εισαγωγή μιας πρόσθετης (πλασματικής) δύναμης p_f^i που αντιστοιχεί σε μια μετακίνηση δ_f^i , όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.1. Είναι ξεκάθαρο, ότι η δύναμη p_f^i και η μετακίνηση δ_f^i , αντιπροσωπεύουν τη μεταβολή του στοιχείου.



ΣΧΗΜΑ 5.1 Γενικευμένο 2-D στοιχείο με γεωμετρική μη γραμμικότητα 2ας τάξης

Η ισορροπία μεταξύ των επικόμβιων δυνάμεων F^i και τις συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή τις s^i και π_f^i) του στοιχείου i μπορούν τώρα να εκφραστούν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$F^i = B_0^i s^i + B_f^i \pi_f^i \tag{5.1}$$

Ή αλλιώς:

$$\begin{bmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \\ F_4^i \\ F_5^i \\ F_6^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta/l & -\sin\theta/l \\ \sin\theta & \cos\theta/l & \cos\theta/l \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta/l & \sin\theta/l \\ -\sin\theta & -\cos\theta/l & -\cos\theta/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \pi_f^i \tag{5.2}$$

Όπου $B_0^i \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ είναι το μητρώο ισορροπίας και $B_f^i \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ είναι το αντίστοιχο συμπληρωματικό μητρώο ισορροπίας.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η κατασκευή που μελετάται, ελέγχεται μόνο από ένα μονοτονικά αυξανόμενο (ή μειούμενο) φορτιστικό συντελεστή a . Άρα, οι εξωτερικές επικόμβιες δυνάμεις F^i ορίζονται ως εξής:

$$F^i = a f^i + f_d^i \tag{5.3}$$

Όπου $f^i \in \mathbb{R}^6$ και $f_d^i \in \mathbb{R}^6$ είναι τα βασικά επικόμβια φορτία, όπου το πρώτο ελέγχεται από τον φορτιστικό συντελεστή a και το δεύτερο είναι τα σταθερά επικόμβια φορτία.

Εφόσον η θεωρία 2ας τάξης προϋποθέτει μικρές μετακινήσεις, μια γραμμική σχέση μορφώνεται ως εξής:

$$q^i = B_0^{iT} u^i \quad (5.4)$$

Επίσης, μορφώνεται και η ακόλουθη γραμμική σχέση μεταξύ των προσθέτων μετακινήσεων δ_f^i και των επικόμβιων μετακινήσεων u^i :

$$\delta_f^i = B_f^{iT} u^i \quad (5.5)$$

Συλλέγοντας τις σχέσεις (6.1)-(6.5), η ισχύουσα Λαγκρανζιανή στατική-κινηματική περιγραφή του προβλήματος σε επίπεδο στοιχείου, γίνεται:

$$\begin{bmatrix} . & B_0 & B_f \\ B_0^{iT} & . & . \\ B_f^{iT} & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ s^i \\ \pi_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a f^i + f_d^i \\ q^i \\ \delta_f^i \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Όπου το σύμβολο (.) χρησιμοποιείται για να απεικονίσει κάποιο μηδενικό διάνυσμα ή ένα μηδενικό μητρώο κατάλληλων διαστάσεων.

Για τη συνολική κατασκευή με n γενικευμένα στοιχεία, d βαθμούς ελευθερίας και m γενικευμένες τάσεις ή παραμορφώσεις, οι συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστότητας είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} . & B_0 & B_f \\ B_0 & . & . \\ B_f & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ s \\ \pi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a f + f_d \\ q \\ \delta_f \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Τα μητρώα $B_0 \in \mathfrak{R}^{m \times d}$, $B_f \in \mathfrak{R}^{n \times d}$ και τα διανύσματα $f \in \mathfrak{R}^d$, $f_d \in \mathfrak{R}^d$, $u \in \mathfrak{R}^d$ μορφώνονται με τη διαδικασία που περιγράφηκε στην ενότητα 1. Τα συνολικά διανύσματα $s \in \mathfrak{R}^m$ και $q \in \mathfrak{R}^m$ είναι μια κατακόρυφη παράθεση των διανυσμάτων του κάθε στοιχείου, δηλαδή: $s^T = [s^{1T} \dots s^{nT}]$, $q^T = [q^{1T} \dots q^{nT}]$. Τέλος, τα διανύσματα $\pi_f \in \mathfrak{R}^n$ και $\delta_f \in \mathfrak{R}^n$ συλλέγουν αντίστοιχα, τις n μεταβλητές που τους αναλογούν, δηλαδή: $\pi_f^T = [\pi_f^1 \dots \pi_f^n]$, $\delta_f^T = [\delta_f^1 \dots \delta_f^n]$.

5.3 Ελαστικό μοντέλο

Όταν μια θεώρηση 2ας τάξης θεωρείται ικανοποιητική, όπως συμβαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ελαστική δυσκαμψία μπορεί να γραφεί σε δύο μέρη, δηλαδή, μέσω μιας σχέσης που συνδέει τις τάσεις s^i και τις ελαστικές παραμορφώσεις e^i και μίας σχέσης που συνδέει τις πρόσθετες δυνάμεις π_f^i και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις δ_f^i .

Η σχέση δυσκαμψίας μεταξύ s^i και e^i γίνεται:

$$s^i = (S_0^i + S_g^i) e^i \quad (5.8)$$

Ή αλλιώς:

$$\begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/l & 2EI/l \\ 0 & 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} + \frac{-s_1^i}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2/15 & -l^2/30 \\ 0 & -l^2/30 & 2l^2/15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Όπου $S_0^i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι το γνωστό (συμμετρικό και θετικά ορισμένο) ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας στη μορφή που έχει για τις μικρές παραμορφώσεις και $S_g^i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι ένα γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, το οποίο λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις των φαινομένων 2ας τάξης (συμμετρικό, αλλά όχι απαραίτητα θετικά ημι - ορισμένο). Είναι φανερό, πως το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας $S^i = S_0^i + S_g^i$, υπόκειται στην εξής σχέση:

$$s^i = S^i e^i \quad (5.10)$$

Η σχέση μεταξύ π_f^i και δ_f^i είναι:

$$\pi_f^i = S_f^i \delta_f^i \quad (5.11)$$

Ή αλλιώς:

$$\pi_f^i = \left(\frac{-s_1^i}{l} \right) \delta_f^i \quad (5.12)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι και το S_g^i και το S_f^i εξαρτώνται από μια απλή αξονική δύναμη s_1^i . Γι' αυτό, μια μηδενική αξονική δύναμη ($s_1^i = 0$), σημαίνει ότι έχουμε γεωμετρική γραμμικότητα και οδηγεί, όπως αναμένεται στο συμπέρασμα ότι $S^i = S_0^i$.

Για τη συνολική κατασκευή, οι σχέσεις ελαστικής δυσκαμψίας που καλύπτουν και τα n στοιχεία είναι:

$$s = S e \quad (5.13)$$

$$\pi_f = S_f \delta_f \quad (5.14)$$

Όπου:

$$S = S_0 + S_g \quad (5.15)$$

$$S \in \mathbb{R}^{m \times m}, S_0 \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ και } S_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

5.4 Σύνθεση των παραμορφώσεων

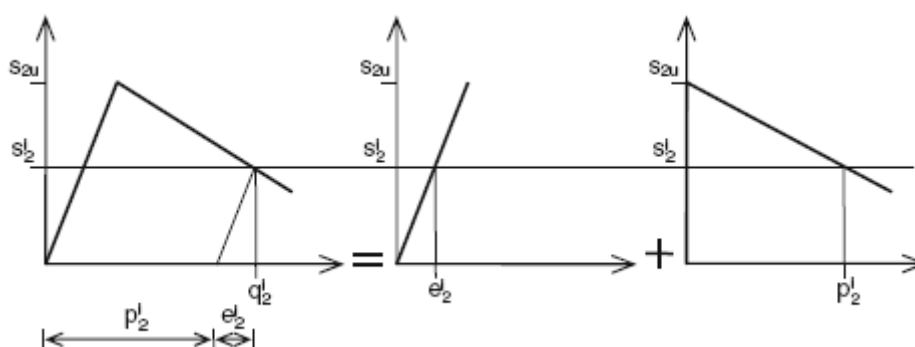
Όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, οι ελαστικές και πλαστικές παραμορφώσεις μπορούν να προστεθούν ως εξής:

$$q^i = e^i + p^i \tag{5.16}$$

Και για ολόκληρη την κατασκευή, είναι:

$$q = e + p \tag{5.17}$$

Όπου: $e^T \in \mathbb{R}^m \equiv [e^{1T} \dots e^{nT}]$ και $p^T \in \mathbb{R}^m \equiv [p^{1T} \dots p^{nT}]$



ΣΧΗΜΑ 5.2 Γενικευμένη περιγραφή παραμορφώσεων

5.5 Μόρφωση υπολογιστικού αλγορίθμου προβλήματος

Για να σχηματιστεί το πρόβλημα με μια ολόνομη προσαυξητική θεώρηση, όπως έγινε και στο κεφάλαιο 4, χρησιμοποιούνται οι εξής σχέσεις: (5.7), (5.13), (5.14), (5.17), (4.20), (4.23) και επίσης οι εξής θεωρήσεις:

$$a = \bar{a} + \Delta a \quad s = \bar{s} + \Delta s \quad u = \bar{u} + \Delta u \quad z = \bar{z} + \Delta z \tag{5.18}$$

$$\Delta a = \dot{a} \Delta t \quad , \quad \Delta z = \dot{z} \Delta t \tag{5.19}$$

Τελικά, σε μητρική μορφή προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{bmatrix} K & -B_0 S N \\ -N^T S B^T & H + N^T S N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} + \Delta u \\ \bar{z} + \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{a} + \Delta a) f + f_d \\ -r \end{bmatrix}$$

$$w \geq 0, \Delta z \geq 0, w^T \Delta z = 0 \tag{5.20}$$

Όπου $K = K_0 + K_g$ είναι η συμμετρική ελαστική δυσκαμψία της συνολικής κατασκευής, λαμβάνοντας υπόψη και τις επιρροές φαινομένων 2ας τάξης. Ισχύει ότι:

$$K_g = B_0 S_g B_0^T + B_f S_f B_f^T \tag{5.21}$$

Το οποίο είναι το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας της συνολικής κατασκευής.

Ο υπολογιστικός αλγόριθμος, όπως κωδικοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως, για τη γενική περίπτωση, όπου ενεργοποιούνται ταυτόχρονα ολόνομες και μη ολόνομες συμπεριφορές.

ΒΗΜΑ 1: Ορισμός δεδομένων υλικού, γεωμετρίας φορέα, φόρτισης.

Σε αυτό το βήμα ακολουθούνται οι ίδιες διαδικασίες όπως περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 2 κατά την επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Σε κάποιο αρχείο input αναγράφονται τα απαραίτητα δεδομένα τα οποία καλούνται από το πρόγραμμα κατά την έναρξη της ανάλυσης.

ΒΗΜΑ 2: Εύρεση των μητρώων που είναι απαραίτητα για τη μόρφωση του προβλήματος

Όπως και στο κεφάλαιο 2, ακολουθεί η διαδικασία εύρεσης του μητρώου ισορροπίας B. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα μητρώα δυσκαμψίας του φορέα (S_0), το συνολικό μητρώο χαλάρωσης του φορέα (H), το μητρώο των συντελεστών των καθέτων διανυσμάτων στις επιφάνειες διαρροής (N)

ΒΗΜΑ 3: Ορισμός αρχικών συνθηκών (Initialization)

Τίθεται αρχικά το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου. Αυτό μπορεί να είναι το επίπεδο του φορτίου ή της μετατόπισης, ή ο μέγιστος αριθμός δρόμων ισορροπίας κτλ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, στον κώδικα που αναπτύχθηκε, συνθήκη τερματισμού τέθηκε αυτή της μεγάλης μετατόπισης.

Από εκεί κι έπειτα, οι αρχικές συνθήκες ορίζονται ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι σταθερών φορτίων τα οποία δεν μεταβάλλονται με το χρόνο (το μητρώο f_d). Εάν αυτά τα φορτία είναι μηδενικά, τότε η αρχική γνωστή κατάσταση $\bar{\Sigma}$ είναι η εξής:

$$a=0, s=0, z=0, w=r \tag{5.22}$$

Υπολογίζονται τα μητρώα και διανύσματα: A,K,b,z λαμβάνοντας υπόψη ότι στην αρχή της φόρτισης, το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας είναι: $S_g = 0$

Στην περίπτωση που υπάρχουν σταθερά φορτία f_d τότε γίνεται επίλυση του LCP μόνο με αυτά. Συγκεκριμένα, ορίζεται ένα μητρώο c μόνο για σταθερά φορτία:

$$c = -N^T S_0 B^T K^{-1} f_d \tag{5.23}$$

Και το πρόβλημα LCP που λύνεται είναι το ακόλουθο:

$$w = A\Delta z + c + r \geq 0, \Delta z \geq 0, w^T \Delta z = 0 \tag{5.24}$$

Συνεπώς, από την επίλυση του παραπάνω LCP προκύπτουν τα αρχικά $\Delta z_0, s_0, w = A\Delta z_0 + c + r$.

Υπολογίζεται το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου και της κατασκευής.

$$S_g^i = \frac{-s_{(0)1}^i}{I} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2/15 & -l^2/30 \\ 0 & -l^2/30 & 2l^2/15 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

$$S_g = \begin{bmatrix} S_g^1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_g^n \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Υπολογίζεται το νέο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας: $S = S_0 + S_g$ και υπολογίζονται εκ νέου οι τάσεις s_i και τα μητρώα και διανύσματα K, Z, A, b, c . Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να προκύψει σύγκλιση στις τιμές των τάσεων, έτσι ώστε:

$$|s_i - s_{i-1}| < 10^{-5} \quad (5.27)$$

Με τον καθορισμό των αρχικών αυτών ποσοτήτων, ολοκληρώνεται η μόρφωση της αρχικής γνωστής κατάστασης $\bar{\Sigma}$ για $t=0$.

Όσο η κατασκευή συμπεριφέρεται ελαστικά υπολογίζεται το πρώτο επαυξητικό φορτίο που απαιτείται για την πρώτη πλαστικοποίηση.

$$\Delta a = \min \left\{ \frac{r_i}{b_i} \right\} > 0, \text{ για κάθε } i \in \{1, \dots, \gamma\} \quad (5.28)$$

ΒΗΜΑ 4: Έλεγχος αποφόρτισης

Κατά το γνωστό επίπεδο έντασης $\bar{\Sigma}$, υπολογίζονται τα μητρώα και τα διανύσματα: $A_{aa}, A_{ab}, A_{bb}, A_{ba}, A_{pa}, A_{pb}, b_a, b_p, \bar{w}_p$. Τα παραπάνω είναι υπομητρώα ή υποδιανύσματα των A, b ή w τα οποία προκύπτουν μετά από κατάλληλη αναδιάταξη. Εάν όλες οι εξισώσεις διαρροής είναι θετικές ($w \geq 0$), κάτι το οποίο είναι πολύ πιθανόν να συμβαίνει κατά το πρώτο βήμα, τότε επιλύεται το απλό LCP όπως φαίνεται στη σχέση (4.31). Αν όμως δεν είναι όλες οι εξισώσεις διαρροής θετικές, τότε θα πρέπει να λυθεί το ακόλουθο MCP.

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_b &= A_{bb}\dot{z}_b + A_{ba}\dot{z}_a - a b_b = 0 \\ \dot{w}_a &= A_{ab}\dot{z}_b + A_{aa}\dot{z}_a - a b_a \geq 0 \\ \dot{z}_a &\geq 0, \dot{w}_a^T \dot{z}_a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύεται για δύο περιπτώσεις. Για φορτίο με βήμα $\dot{a} = 1$ και $\dot{a} = -1$. Εάν βρεθεί λύση για τη δεύτερη περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι ο φορέας έχει περιέλθει πλέον σε ασταθή κατάσταση, όπου οι παραμορφώσεις αυξάνονται με μείωση του φορτίου.

Ακολουθώς γίνεται η ίδια επαναληπτική διαδικασία που αφορά τη σύγκλιση στις τιμές των τάσεων. Το πρόβλημα MCP λύνεται όσες φορές χρειάζεται μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση στα αποτελέσματα.

Στο τέλος του βήματος αυτού, συλλέγονται οι λύσεις που προέκυψαν. Επιλέγεται κάποια από αυτές και ο αλγόριθμος συνεχίζεται στο βήμα 5.

ΒΗΜΑ 5: Εύρεση ενεργοποίησης νέων επιπέδων διαρροής

Το ελάχιστο χρονικό βήμα Δt που προέρχεται είτε από την ενεργοποίηση νέων επιπέδων διαρροής (μετά από χρόνο Δt_1) ή για αποφόρτιση της αντιστρέψιμης υποκατηγορίας (μετά από χρόνο Δt_2) όταν το φορτίο έχει γίνει $\bar{a} + \dot{a}\Delta t$, μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθες γραμμικές εξισώσεις:

$$\Delta t_1 = \min \left\{ \frac{(\bar{w}_p)_j}{(\dot{a}b_p - A_{pa}\dot{z}_a - A_{pb}\dot{z}_b)_j} \right\} > 0 \quad \text{για κάθε } j \in \{p\} \quad (5.30)$$

$$\Delta t_2 = \min \left\{ \frac{(\bar{z}_b)_k}{(-\dot{z}_b)_k} \right\} > 0, \quad \text{για κάθε } k \in \{b\} \quad (5.31)$$

$$\Delta t = \min\{\Delta t_1, \Delta t_2\} \quad (5.32)$$

Όπου προφανώς, οι ποσότητες \dot{z}_a και \dot{z}_b έχουν προέλθει από το βήμα 4. Μορφώνεται στη συνέχεια η νέα εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}$ και ανανεώνονται οι ακόλουθες ποσότητες:

$$a = \bar{a} + \Delta a, \quad z = \bar{z} + \Delta z, \quad w = Az - ab + r$$

ΒΗΜΑ 6: Τερματισμός

Εάν έχουμε φτάσει το κριτήριο τερματισμού, ή όλες οι λύσεις που βρέθηκαν στο βήμα 4 έχουν εξαντληθεί, σταματάει ο αλγόριθμος. Αλλιώς, επιστρέφουμε στο βήμα 4 και συνεχίζουμε με την εντατική κατάσταση $\bar{\Sigma}$.

Η διαφορά που υπάρχει σε σχέση με τον αλγόριθμο του κεφαλαίου 5, είναι ότι μέσα στον κώδικα έχει εισαχθεί μια επαναληπτική διαδικασία μέσω της οποίας υπολογίζονται στη σύγκλιση οι τελικές τιμές των τάσεων, των μητρώων και των διανυσμάτων, έχοντας πλέον λάβει υπόψη την επιρροή που έχουν σε αυτά τα φαινόμενα 2ας τάξης.

5.4 Εφαρμογές

Τα τρία παραδείγματα που θα παρατεθούν στη συνέχεια, είναι ίδια με τις εφαρμογές 2,3 και 4 του κεφαλαίου 4. Με αυτόν τον τρόπο, θα καταδειχθεί η διαφορά στην απόκριση της κατασκευής αν ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα δευτέρας τάξης. Η σύγκριση θα γίνει για τη γενική περίπτωση όπου έχουμε αλληλεπίδραση αξονικών δυνάμεων και καμπτικών ροπών, καθώς και ύπαρξη αστάθειας υλικού.

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι θετικές και οι αρνητικές ιδιότητες διαρροής θεωρήθηκαν ότι είναι πανομοιότυπες. Για την περίπτωση συνδυασμένων τάσεων χρησιμοποιήθηκαν οι εξής τιμές:

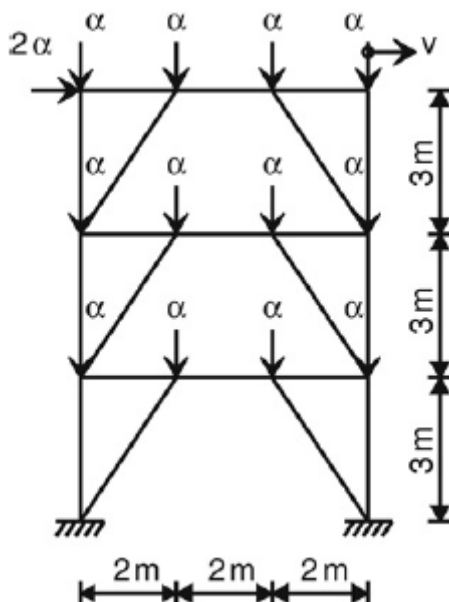
$$\tan \gamma = 1/0,85, \quad a_j = 1, \quad (\text{για κάθε } J), \quad p_c = p_{c1}$$

Επίσης, για όλα τα παραδείγματα, θεωρήθηκε ότι τα επίπεδα απομένουσας έντασης r_c ήταν σημαντικά, γι' αυτό και υιοθετήθηκε μια καθαρά μη ολόνομη συμπεριφορά.

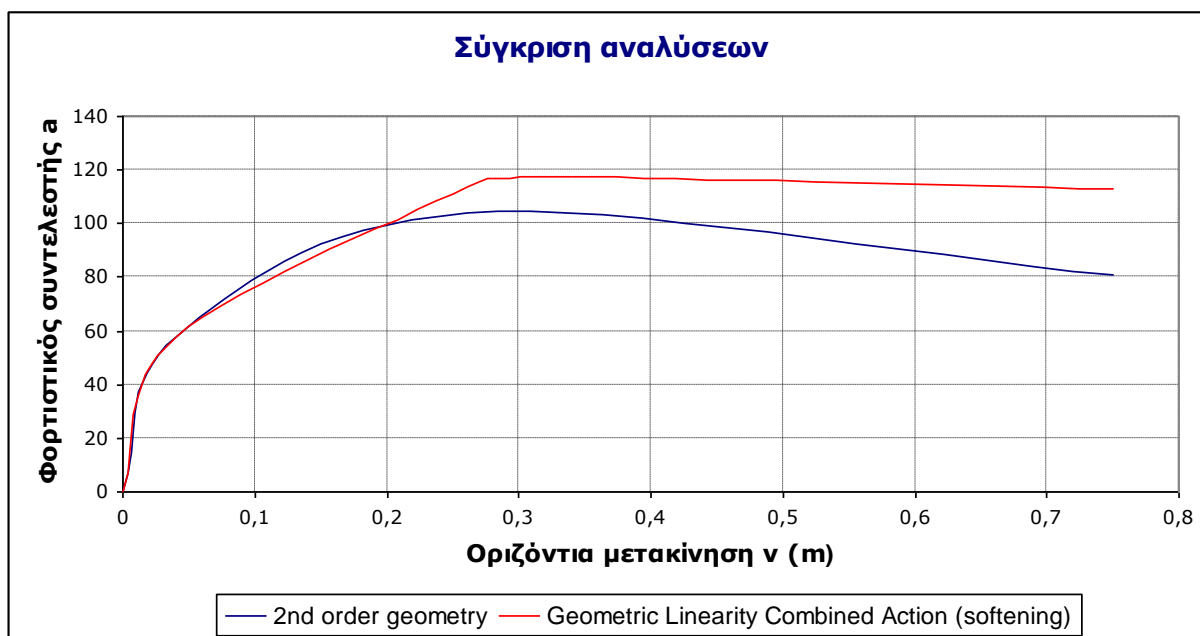
Τα γεωμετρικά στοιχεία των διατομών καθώς και οι ιδιότητες των υλικών, είναι πανομοιότυπες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στα παραδείγματα 2, 3 και 4 του κεφαλαίου 5. Σημειώνεται ότι σε δημοσιεύσεις του Tin Loi έχει επιχειρηθεί να γίνει επίλυση λαμβάνοντας υπόψη γεωμετρικές μη γραμμικότητες, όπου και χρησιμοποιήθηκε πάλι το λογισμικό GAMS/PATH.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε αυτό το πρώτο παράδειγμα, παρουσιάζεται ένα τριόροφο πλαίσιο ενός ανοίγματος, με έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας μορφής λάμδα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Συγκεκριμένα, υπόκειται σε αυξανόμενα φορτία (kN) τα οποία έχουν σαν φορτιστικό συντελεστή το α και για την οριζόντια και για την κατακόρυφη διεύθυνση. Το v συμβολίζει την οριζόντια μετακίνηση του δεξιού κόμβου του τελευταίου ορόφου.

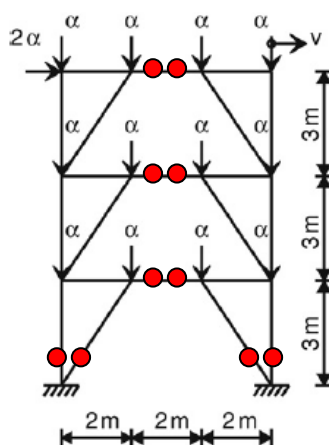


ΣΧΗΜΑ 5.3 Φορέας εφαρμογής 1

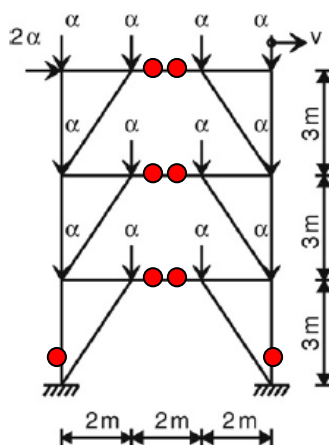


ΣΧΗΜΑ 5.4 Σύγκριση αναλύσεων με γεωμετρική γραμμικότητα και με φαινόμενα δευτέρας τάξης για φορέα εφαρμογής 1

Αυτό που παρατηρείται στο παραπάνω σχήμα είναι καταρχήν ότι η απόκριση, όπως αναμενόταν, όσο ο φορέας βρίσκεται στην ελαστική περιοχή, είναι πανομοιότυπη και για γεωμετρική γραμμικότητα και για θεώρηση φαινομένων 2ας τάξης. Στη συνέχεια, καθώς τα επιβαλλόμενα φορτία αυξάνουν, σταδιακά παρουσιάζονται κάποιες αποκλίσεις στις αποκρίσεις. Η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι προφανής όταν αρχίσουν να διαρρέουν οι πρώτες διατομές κάποιων υποστυλωμάτων του φορέα, οπότε και το φορτίο a φτάνει στις μέγιστες τιμές του. Βλέπουμε πως η συνολική φέρουσα ικανότητα της κατασκευής αν συνοπολογίσουμε τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, είναι κατά 11% μικρότερη περίπου από τη θεώρηση γραμμικότητας γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, το μέγιστο φορτίο στην ανάλυση A είναι ίσο με $a=117.617$ και στην ανάλυση $b=104.351$. Τέλος, διαφέρει και η εικόνα των θέσεων των πλαστικών αρθρώσεων, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα. Στην κατάσταση όπου αναπτύσσεται το μέγιστο φορτίο, στη μη γραμμικότητα, δεν αναπτύσσονται κάποιες πλαστικές αρθρώσεις στους έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας, όπως συμβαίνει στην περίπτωση γραμμικότητας γεωμετρίας.



ΣΧΗΜΑ 5.5 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων για μέγιστο φορτίο (geometric linearity)

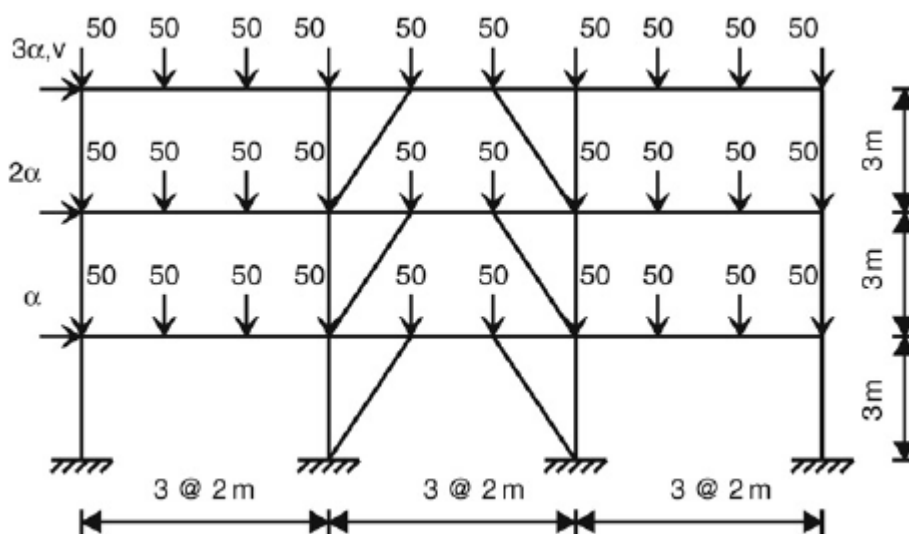


ΣΧΗΜΑ 5.6 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων για γεωμετρική μη γραμμικότητα

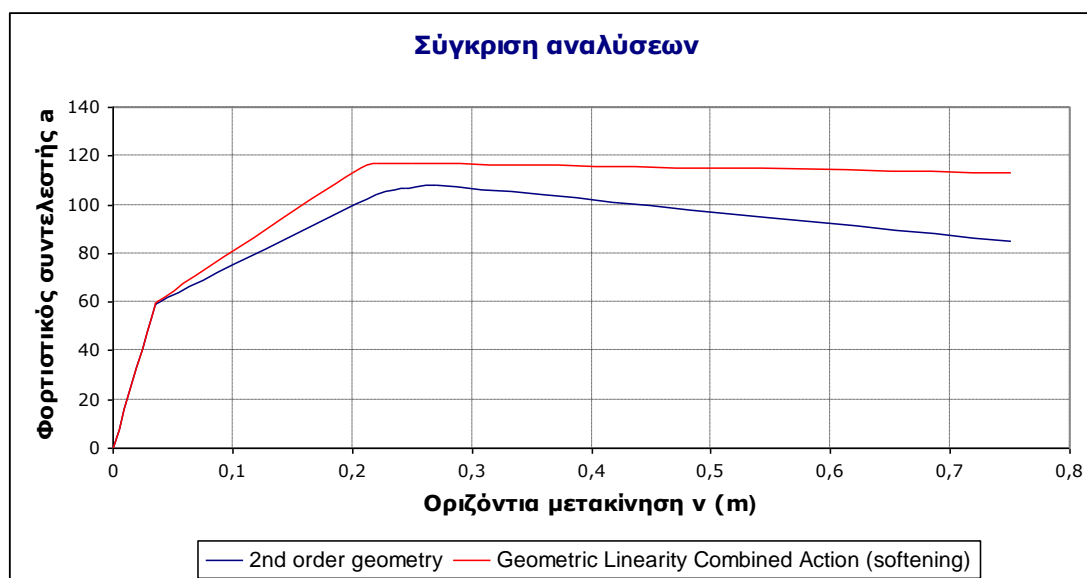
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το δεύτερο παράδειγμα αφορά ουσιαστικά το προσομοίωμα του Μυστακίδη (ο οποίος όμως στις αναλύσεις του είχε θεωρήσει καθαρά καμπτική συμπεριφορά), το οποίο παρουσιάστηκε και στην ενότητα 2 και 5.

Το πλαίσιο είναι τριών ανοιγμάτων και τριών ορόφων και έχει έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας μορφής λάμδα. Υπόκειται σε σταθερά κατακόρυφα φορτία (kN) και σε αυξανόμενα οριζόντια φορτία (kN) που χαρακτηρίζονται από το φορτιστικό συντελεστή α , όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα. Το v συμβολίζει την οριζόντια μετακίνηση του τελευταίου ορόφου (m). Το προσομοίωμα αποτελείται από 45 μέλη, 34 κόμβους και 90 βαθμούς ελευθερίας.



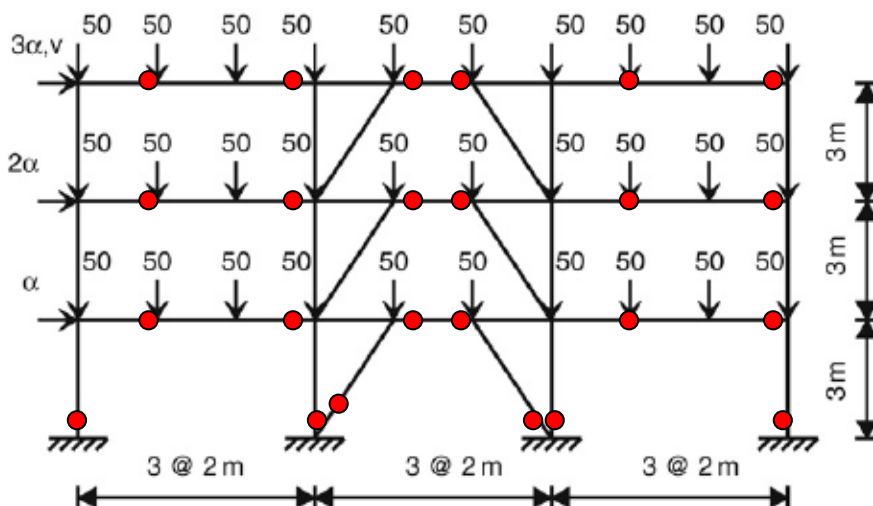
ΣΧΗΜΑ 5.7 Φορέας παραδείγματος 2



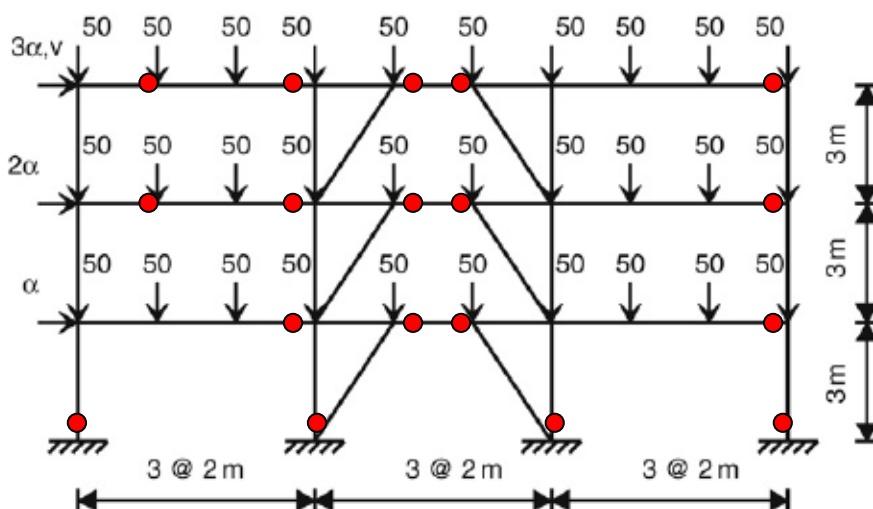
ΣΧΗΜΑ 5.8 Σύγκριση αναλύσεων με γεωμετρική γραμμικότητα και με φαινόμενα δευτέρας τάξης για φορέα εφαρμογής 2

Όμοια με το φορέα του πρώτου παραδείγματος, παρατηρείται μια διαφορά στις αποκρίσεις του φορέα όταν υπερβούμε την ελαστική περιοχή, η οποία εντείνεται όταν πλησιάζουμε το μέγιστο φορτίο και κυρίως όταν εισέρθουμε σε ένα καθοδικό κλάδο. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται μια απόκλιση της τάξης του 8% στις

αποκρίσεις. Για γεωμετρική γραμμικότητα, όπως φάνηκε και στο παράδειγμα 3 του κεφαλαίου 5, το μέγιστο φορτίο ήταν $a=116.785$, ενώ για γεωμετρική μη γραμμικότητα το μέγιστο που εμφανίστηκε ήταν $a=107.965$. Όπως και πριν, στη θέση του μέγιστου φορτίου, οι θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων διαφέρουν. Για την ανάλυση με τα φαινόμενα δευτέρας τάξης, δεν εμφανίζονται κάποιες πλαστικές αρθρώσεις σε δοκούς και στους έκκεντρους συνδέσμους δυσκαμψίας. Αυτό φαίνεται και στα ακόλουθα σχήματα.



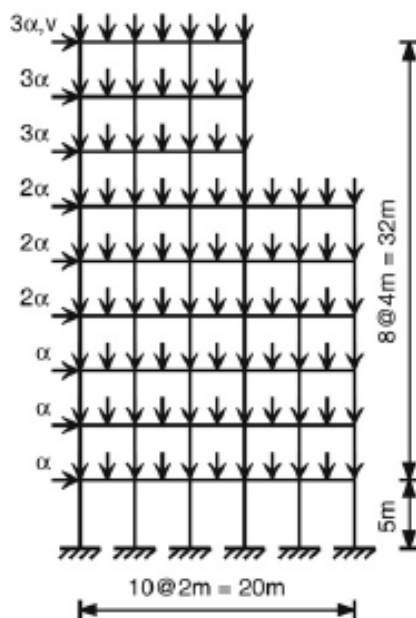
ΣΧΗΜΑ 5.9 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων για γεωμετρική γραμμικότητα



ΣΧΗΜΑ 5.10 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων για γεωμετρική μη γραμμικότητα

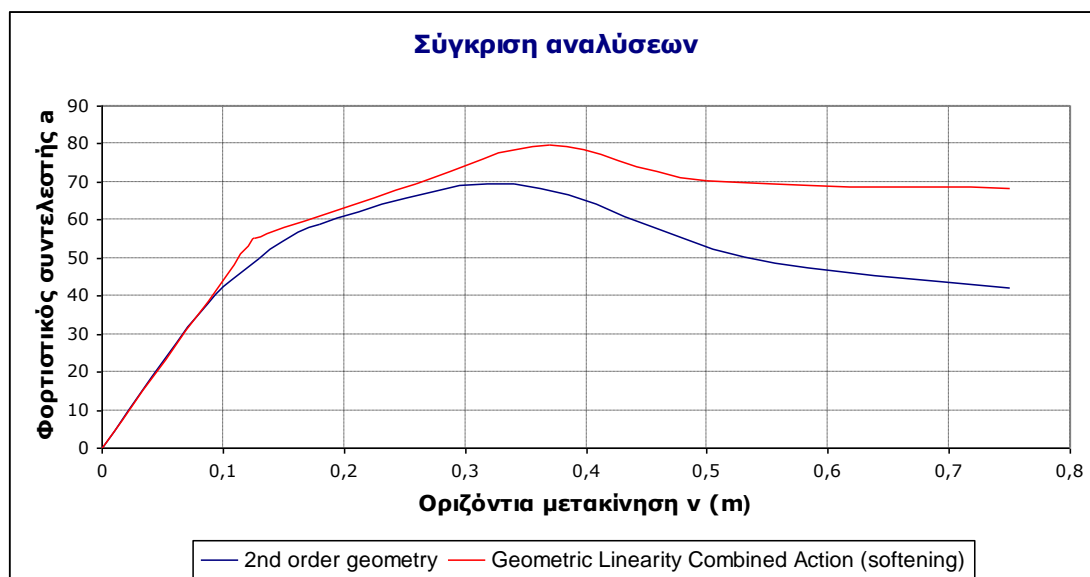
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Το τελευταίο παράδειγμα αυτής της ενότητας αφορά το ρεαλιστικό πλαίσιο της εννιαόροφης κατασκευής που φαίνεται στο σχήμα (6.11). Υπόκειται σε αυξανόμενα κατακόρυφα σημειακά φορτία της τάξης των 6α (kN) και σε αυξανόμενα οριζόντια φορτία (kN) που χαρακτηρίζονται από ένα φορτιστικό πολλαπλασιαστή α . Το α αντιστοιχεί στην οριζόντια μετακίνηση του τελευταίου ορόφου (m).



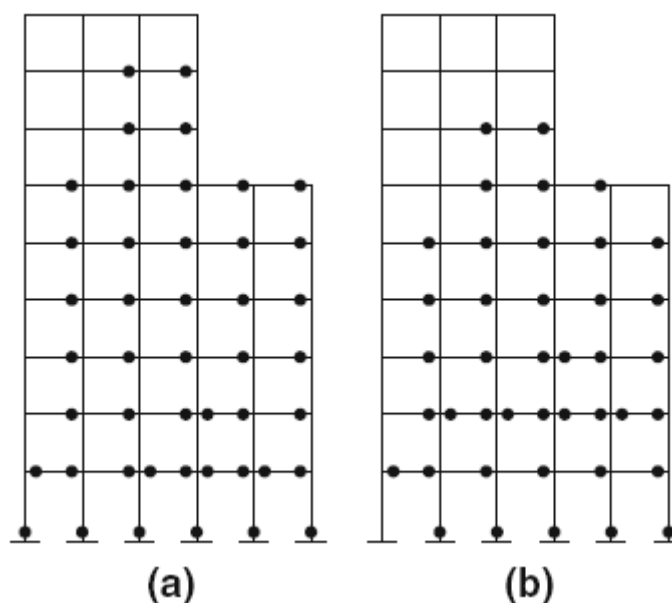
ΣΧΗΜΑ 5.11 Φορέας παραδείγματος 4

Η κατασκευή έχει διακριτοποιηθεί σε 126 στοιχεία, 93 κόμβους, 261 βαθμούς ελευθερίας και 213 κρίσιμες διατομές (στα άκρα των υποστλωμάτων, στα άκρα και στο μέσον των δοκών).



ΣΧΗΜΑ 5.12 Σύγκριση αναλύσεων με γεωμετρική γραμμικότητα και με φαινόμενα δευτέρας τάξης για φορέα εφαρμογής 3

Όμοια με το φορέα του δευτέρου παραδείγματος, παρατηρείται μια διαφορά στις αποκρίσεις του φορέα όταν υπερβούμε την ελαστική περιοχή, η οποία εντείνεται όταν πλησιάζουμε το μέγιστο φορτίο και κυρίως όταν εισέρθουμε σε ένα καθοδικό κλάδο. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται μια απόκλιση της τάξης του 13% στις αποκρίσεις. Εμφανίζεται πιο έντονη διαφορά στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Αυτό μάλλον συμβαίνει γιατί υπάρχουν περισσότερα μέλη στο φορέα, καθώς και πιο περίπλοκη γεωμετρία, κάτι που οδηγεί σε μεγαλύτερη ευαισθησία στην απόκριση του φορέα αν μεταβληθεί κάποιο χαρακτηριστικό της ανάλυσης (εδώ, η θεώρηση γεωμετρικών μη γραμμικότητας). Για γεωμετρική γραμμικότητα, όπως φάνηκε και στο παράδειγμα 4 του κεφαλαίου 5, το μέγιστο φορτίο ήταν $a=79.709$, ενώ για γεωμετρική μη γραμμικότητα το μέγιστο που εμφανίστηκε ήταν $a=69.655$. Όπως και πριν, στη θέση του μέγιστου φορτίου, οι θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων διαφέρουν. Για την ανάλυση με τα φαινόμενα δευτέρας τάξης, δεν εμφανίζονται κάποιες πλαστικές αρθρώσεις σε δοκούς αλλά και σε κάποια υποστυλώματα. Αυτό φαίνεται και στα ακόλουθα σχήματα.



ΣΧΗΜΑ 5.13 Θέσεις πλαστικών αρθρώσεων στην κατάσταση μέγιστης έντασης για ανάλυση (a) με γραμμικότητα γεωμετρίας και (b) συνυπολογισμό φαινομένων 2ας τάξης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 Αποτελέσματα εργασίας

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν μερικά από τα προβλήματα που αφορούν το ευρύ πεδίο μελέτης της ελαστοπλαστικής ανάλυσης και της θεωρίας πλαστικότητας. Το κύριο σημείο στο οποίο επικεντρώθηκε η εργασία είναι η κατάδειξη της ευκολίας με την οποία μπορούν να διατυπωθούν αλλά και να επιλυθούν αρκετά από αυτά τα προβλήματα με τη χρήση της θεωρίας της συμπληρωματικότητας.

Καταρχήν, έγινε αντιληπτό, όσον αφορά την οριακή ανάλυση και την εύρεση του οριακού φορτίου, ότι με τη χρήση του απλού γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming), μπορεί πολύ απλά να αναλυθεί ένας φορέας και να εξαχθούν αρκετά ακριβή αποτελέσματα. Αυτό γίνεται, σε προβλήματα μικρού μεγέθους, ακόμα και σε απλά λογιστικά φύλλα Excel. Όμως, πιο σημαντικό, είναι η εύκολη ανάπτυξη κώδικα σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού, όπως είναι η Matlab, η οποία παρέχει πολύ περισσότερες δυνατότητες, αλλά και την ευχέρεια για την επίλυση πολύ μεγάλων προβλημάτων. Παρατηρήθηκε ότι τα αποτελέσματα των προβλημάτων σε Excel αλλά και στη Matlab (προφανώς για μικρά προβλήματα ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν λογιστικά φύλλα Excel), ταυτίζονται, όπως επίσης και αν γίνει επίλυση του φορέα με κλασσικές ενεργειακές μεθόδους της στατικής.

Πολύ σημαντική τέλος, σε αυτήν την ενότητα, ήταν η επιρροή στη συμπεριφορά των πλαισίων, της αλληλεπίδρασης αξονικής δύναμης και καμπτικής ροπής. Όπως φάνηκε από τα παραδείγματα του κεφαλαίου 2, οι διαφορές στην εύρεση του οριακού φορτίου και την κατάσταση του φορέα στη θέση της κατάρρευσης, ήταν αρκετά σημαντικές μεταξύ της καθαρά καμπτικής συμπεριφοράς και της θεώρησης αλληλεπίδρασης, ειδικά σε περιπτώσεις όπου ο φορέας ήταν μεγάλου μεγέθους και πιο περίπλοκης γεωμετρίας, οπότε και προφανώς υπεισέρχονται περισσότερες μεταβλητές στο εκάστοτε πρόβλημα. Όπως παρουσιάστηκε, μια προσέγγιση με γραμμικοποιημένη επιφάνεια διαρροής (εξαγωνική ή οκταγωνική, όπως συνηθίζεται για μεταλλικές διατομές διπλού ταυ) είναι άκρως ικανοποιητική. Η απόκλιση στο τελικό αποτέλεσμα είναι πάρα πολύ μικρή, σε σχέση με μια ακριβή, μη γραμμική επιφάνεια διαρροής (πχ προσομοίωμα Massonet & Save). Αυτό μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι και για τα υπόλοιπα προβλήματα τα οποία επρόκειτο να επιλυθούν στη συνέχεια της εργασίας, ήταν κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί και πάλι μια γραμμικοποιημένη επιφάνεια διαρροής.

Στα επόμενα κεφάλαια, όπου ερευνήθηκε η συμπεριφορά ενός φορέα με αστάθεια υλικού, το πιο βασικό συμπέρασμα ήταν, η ευκολία με την οποία μπορεί να ξεπεραστεί η πολυπλοκότητα του προβλήματος της συμπεριφοράς χαλάρωσης, αν χρησιμοποιηθεί η θεωρία της συμπληρωματικότητας, η οποία έχει ένα ευρύτερο πεδίο εφαρμογών. Με τη μόνωση του προβλήματος ως ένα σετ μεικτού προβλήματος συμπληρωματικότητας MCP, είναι εφικτή η ανάλυση και η παραγωγή κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab, για μη ολόνομη ανάλυση – εξάρτηση από τη διαδρομή της φόρτισης (path dependent).

Το πρώτο συμπέρασμα που βγαίνει από τις επιλύσεις για αστάθεια υλικού, είναι ότι το πρόβλημα είναι εξαιρετικά περίπλοκο και έχει μεγάλη ευαισθησία. Αντίθετα με τις περιπτώσεις κράτυνσης ή απόλυτα πλαστικής συμπεριφοράς, ένα πρόβλημα χαλάρωσης, είναι δυνατό να οδηγήσει σε μια πολλαπλότητα δρόμων ισορροπίας (bifurcations) από τους οποίους, για να ανιχνευθεί ο πιο κρίσιμος, θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν ενεργειακά θεωρήματα. Εκτός από την πολλαπλότητα λύσεων, είναι εφικτή και η μη εύρεση λύσης, η δημιουργία ψευδομηχανισμών ή, τέλος, η εμφάνιση φαινομένων snapback. Όλα αυτά τα φαινόμενα, συνοψίζονται με την παρουσίαση του θεωρητικού παραδείγματος 1 της ενότητας 5, όπου, ανάλογα με την κλίση του καθοδικού κλάδου, το πρόβλημα αποκτά ολοένα μεγαλύτερη πολυπλοκότητα.

Πάντως, αξίζει να σημειωθεί, ότι για προσομοιώματα κατασκευών, ρεαλιστικού μεγέθους (παραδείγματα 2,3,4) ο δρόμος ισορροπίας που εμφανίζεται κατά τη λύση του προβλήματος, είναι μόνο ένας. Η διαφορά μεταξύ της απολύτως πλαστικής συμπεριφοράς και της συμπεριφοράς χαλάρωσης είναι προφανής. Στις περισσότερες περιπτώσεις οδηγεί σε μια διαφορά στο μέγιστο οριακό φορτίο της τάξης του 10-20%, δηλαδή ο φορέας γίνεται αρκετά πιο «μαλακός», άρα, ο μη συνυπολογισμός τέτοιων φαινομένων αστάθειας υλικού, μπορεί να είναι σημαντικό σφάλμα κατά το σχεδιασμό ενός φορέα σε μερικές περιπτώσεις. Παρατηρείται επίσης μικρή διαφορά στις αναλύσεις μικρών φορέων, αν έχουμε καθαρά καμπτική συμπεριφορά και χαλάρωση (pure bending softening) ή αν έχουμε αλληλεπίδραση και χαλάρωση (combined action softening). Βλέπουμε εδώ πως η επίδραση των αξονικών δυνάμεων, αν και υπαρκτή, δεν είναι τόσο σημαντική αν το πρόβλημα είναι μικρού μεγέθους. Όσο όμως το μέγεθος του προβλήματος και η γεωμετρία του γίνεται πιο περίπλοκη, η επίδραση της αξονικής δύναμης γίνεται όλο και πιο σημαντική. Τέλος, παρατηρούνται σε μερικούς φορείς, αρκετές διαφορές στις θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων, αν υιοθετήσουμε απολύτως πλαστική συμπεριφορά, ή συμπεριφορά υλικού με χαλάρωση. Αυτή η διαφοροποίηση στις θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων, μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα, όσον αφορά το μηχανισμό κατάρρευσης, αν δεν χρησιμοποιηθεί το ακριβές μοντέλο της συμπεριφοράς με χαλάρωση. Οι διαφορές στις θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων είναι και πάλι πιο έντονες όσο ο φορέας γίνεται πιο περίπλοκος.

Στην τελευταία ενότητα, λάβαμε υπόψη και τα φαινόμενα 2ας τάξης, δηλαδή μια μη γραμμικότητα στη γεωμετρία του φορέα, η οποία μπορεί να εμφανιστεί όσο αυξάνονται οι παραμορφώσεις κατά τη διάρκεια της φόρτισης. Το συμπέρασμα είναι, ότι παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της ανάλυσης, καθώς τα αποτελέσματα στις αποκρίσεις διαφέρουν, σε μερικές περιπτώσεις, αρκετά. Το οριακό φορτίο, σε αρκετά παραδείγματα, προέκυψε αρκετά μικρότερο για γεωμετρική μη γραμμικότητα (της τάξης του 8-15%) άρα είναι ένα φαινόμενο το οποίο πρέπει σίγουρα να λαμβάνεται υπόψη κατά τη διεξαγωγή αναλύσεων.

6.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα, με βάση αυτήν την εργασία, έχουν να κάνουν αρχικά με τον υπολογιστικό χρόνο για την εκτέλεση των κωδικών που παρήχθησαν. Η γλώσσα Matlab πλεονεκτεί στον προγραμματισμό με μητρώα και προσφέρει δυνατότητες αναπαράστασης, μειώνοντας δραστικά τους χρόνους ανάπτυξης και διόρθωσης ενός κώδικα, μειονεκτώντας όμως σημαντικά στο χρόνο εκτέλεσης μεγάλων προγραμμάτων. Έτσι ως βέλτιστη λύση καλό είναι να αναπτύσσεται ο κώδικας σε Matlab και μετά την ωρίμανσή του να μεταφράζεται σε Fortran, ή C. Αυτό είναι σημαντικό, εφόσον θέλουμε να επεκτείνουμε τον κώδικα σε μεγαλύτερα προβλήματα, που αφορούν πλαίσια 3 διαστάσεων (3d Frames), τα οποία είναι πιο ρεαλιστικά και πιο περίπλοκα.

Μια περαιτέρω επέκταση της εργασίας, είναι η μελέτη του ίδιου προβλήματος, αλλά με μια γενικευμένη συμπεριφορά, δηλαδή κράτυνση-χαλάρωση-απομένουσα αντοχή, και αν είναι δυνατόν και λαμβάνοντας υπόψη το μη γραμμικό μοντέλο, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 3. Αν και αυτό, από πλευράς προγραμματισμού, παρουσιάζει πολλές δυσκολίες, είναι αρκετά σημαντικό για την πιο ακριβή ερμηνεία της συμπεριφοράς των κατασκευών στην πλαστική περιοχή.

Σημαντική επίσης θα ήταν και η ανάπτυξη ενός κώδικα ο οποίος θα επίλυε το ίδιο πρόβλημα αλλά με ολόνομη θεώρηση. Αυτό θα καταδείκνυε ποιες είναι οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται μεταξύ της πιο ακριβούς ανάλυσης (non holonomic-path dependent) σε σχέση με μια, κάπως προσεγγιστική (holonomic-path independent). Οι διαφορές μεταξύ των δύο αυτών τύπων αναλύσεων θα βοηθούσαν στην εξαγωγή συμπερασμάτων, αλλά ίσως και στην ανάπτυξη μεθόδων

για την επίλυση του προβλήματος, οι οποίες θα απαιτούσαν λιγότερο υπολογιστικό χρόνο.

Τέλος, όσον αφορά τη γεωμετρική μη γραμμικότητα της ενότητας 6, μια ενδιαφέρουσα πρόταση, θα ήταν να μελετηθεί και η θεώρηση μεγάλων παραμορφώσεων στην απόκριση ενός φορέα (Arbitrarily large deformation), η οποία είναι η πιο ακριβής προσέγγιση του προβλήματος και λαμβάνει υπόψιν, όχι μόνο φαινόμενα 2ας τάξης, αλλά όλους τους όρους του πολυωνύμου της διαφορικής εξίσωσης του παραμορφωμένου μέλους. Αυτό θα καταδείκνυε κατά πόσον, μόνο η θεώρηση 2ας τάξης, είναι ικανοποιητική στην προσέγγιση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Π1.1 Γενικά

Στο 3^ο κεφάλαιο έγινε μια λεπτομερής περιγραφή του προβλήματος γραμμικής συμπληρωματικότητας (LCP). Η εφαρμογή αυτού του προβλήματος και οι μέθοδοι επίλυσής του, χρησίμευσαν στο να αντιμετωπιστεί το φυσικό πρόβλημα της ανάλυσης ραβδωτών φορέων με χαλάρωση υλικού. Ωστόσο, τα προβλήματα της συμπληρωματικότητας εμφανίζονται σε διάφορες μορφές. Χαρακτηριστικό είναι ότι στο κεφάλαιο 4, η ακριβής αναλυτική μορφή του προβλήματος, είναι ένα μεικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (MCP) το οποίο χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ισοτικών σχέσεων. Αυτό το MCP με κατάλληλες τροποποιήσεις και περιορισμούς μετατράπηκε ακολούθως σε ένα LCP προκειμένου να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος του Lemke και να εξαχθούν οι λύσεις.

Εκτός από τις τυπικές ονομασίες των προβλημάτων συμπληρωματικότητας, όπως «γραμμικό», «μη γραμμικό», «γενικευμένο», χρησιμοποιούνται και επίθετα όπως, «μεικτό», «οριζόντιο», «κάθετο», «εκτεταμένο» με τα οποία περιγράφεται ένα πρόβλημα συμπληρωματικότητας ενός συγκεκριμένου τύπου. Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται μία περίληψη από τα διάφορα προβλήματα που θεωρούνται ως προβλήματα συμπληρωματικότητας. Πολλές από τις εφαρμογές οι οποίες αναφέρονται σε αυτήν την ενότητα έχουν εν γένει μορφή συμπληρωματικότητας και στην περιγραφή των προβλημάτων θα διατηρηθεί η φυσική μορφή.

Π1.2 Προβλήματα μη γραμμικής συμπληρωματικότητας (Non Linear Complementarity Problems)

Αυτό το κλασσικό πρόβλημα, το οποίο ορίζεται από μια μη γραμμική συνάρτηση $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, είναι η αναζήτηση ενός $x \in \mathfrak{R}^n$ τέτοιου ώστε:

$$\text{NCP}(F) \quad 0 \leq x \perp F(x) \geq 0 \quad (\text{Π1.1})$$

Όπου χρησιμοποιείται το σύμβολο \perp για να επισημανθεί ότι εκτός από τις ανισότητες της σχέσης (Π1.1), ισχύει και η εξίσωση $x^T F(x) = 0$. Να σημειωθεί ότι εφόσον ισχύει ότι: $x^T F(x) = \sum_{i=1}^n x_i F_i(x)$, αυτό μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως:

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x_i F_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Π1.2})$$

Στην πραγματικότητα, η συμπληρωματικότητα δηλώνει ότι είτε το x_i είτε το $F_i(x)$ πρέπει να είναι 0 για κάθε $i=1, 2, \dots, n$. Είναι εύκολο να φανεί ότι το NCP(F) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα επίλυσης της μη λείας εξίσωσης:

$$\min(x, F(x)) = 0 \quad (\text{Π1.3})$$

Όπου η πράξη \min γίνεται στα επιμέρους τμήματα. Τα προβλήματα συμπληρωματικότητας αυτής της μορφής προέρχονται από τις συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ενός μη γραμμικού προγράμματος με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \theta(x) \\ &\text{subject to} \quad g(x) \leq 0, \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Π1.4})$$

Όπου $\theta : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι μια συνεχής, διαφορίσιμη συνάρτηση με πραγματικές τιμές και $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ είναι μια συνεχής, διαφορίσιμη συνάρτηση με διανυσματικές τιμές.

Π1.3 Παραμετρικές ανισότητες (Variational Inequalities)

Στην πραγματικότητα, πολλά προβλήματα έχουν άνω και κάτω όριο στις μεταβλητές, αντί για την τυπική μη αρνητικότητα όπως φάνηκε παραπάνω. Πιο γενικά, ένα πρόβλημα μπορεί να έχει και άνω και κάτω όρια σε μερικές μεταβλητές, μόνο κάτω ή μόνο άνω όρια σε άλλες μεταβλητές, και καθόλου όρια σε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές. Για να μορφωθεί ένα τέτοιο γενικό πρόβλημα, χρησιμοποιείται η ακόλουθη μορφή παραμετρικών ανισοτήτων, όπως μάλιστα παρουσιάζεται πολύ συχνά και στη βιβλιογραφία:

$$VI(F, [l, u]) \quad \text{να βρεθεί } x \in [l, u] \text{ τέτοιο ώστε } (y - x)^T F(x) \geq 0, \forall y \in [l, u] \quad (\text{Π1.5})$$

Όπου l και u είναι n διαστάσεων διανύσματα με $l_i \in [-\infty, \infty]$ και $u_i \in (l_i, \infty)$, και:

$$[l, u] \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\} \quad (\text{Π1.6})$$

Εάν $l_i = 0, u_i = \infty$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$, είναι εύκολο να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι το $VI(F, [0, \infty])$ είναι ακριβώς ένα NCP(F). Σε αρκετές δημοσιεύσεις το $VI(F, [l, u])$ ορίζεται σαν μια τετραγωνική παραμετρική ανισότητα ή σαν ένα κουτί περιορισμών, όπου το κουτί αναφέρεται στο σετ $[l, u]$.

Σε πολλές εφαρμογές, μερικές από τις συνθήκες ορίζονται από ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, ενώ οι συνθήκες συμπληρωματικότητας εισέρχονται μόνο σε μερικές από τις μεταβλητές και συναρτήσεις. Αυτό οδηγεί σε έναν τύπο προβλήματος το οποίο γενικά ορίζεται σαν ένα μεικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (MCP), και μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} F_I(x) &= 0, & x_I & \text{ελεύθερο} \\ 0 &\leq x_J \perp F_J(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Π1.7})$$

Όπου I και J είναι ο διαχωρισμός των $\{1,2,\dots,n\}$. Στο πρόβλημα χαλάρωσης υλικού, αυτά ορίστηκαν ως ενεργό και μη ενεργό σετ εξισώσεων διαρροής (passive και active). Το μεικτό μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του $VI(F, [l, u])$ θέτοντας $l_i = -\infty, u_i = \infty$ για όλες τις ελεύθερες μεταβλητές, $x_i, i \in I$ και $l_i = 0, u_i = \infty$ για κάθε $i \in J$. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η παραμετρική ανισότητα με άνω και κάτω όριο, ορίζεται τυπικά ως ένα μεικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας. Να σημειωθεί ότι τα όρια l, u στις μεταβλητές ορίζουν τους περιορισμούς που σχετίζονται με τη συνάρτηση F .

Μια γενική περίπτωση προβλήματος μεικτής συμπληρωματικότητας είναι όταν $I = \{1,2,\dots,n\}$, που οδηγεί σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων:

$$NE: \quad F(x)=0 \quad (\text{Π1.8})$$

Η $VI(F, [l, u] \cap X)$, όπου $X = \{x : Ax = b\}$ και A είναι ένα $m \times n$ μητρώο, μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε μια άνω και κάτω φραγμένη ανισότητα, με την εισαγωγή πολλαπλασιαστών για τους γραμμικούς περιορισμούς ισότητας. Είναι εύκολο να φανεί ότι το $VI(F, [l, u] \cap X)$ είναι ισοδύναμο με $VI(H, [l, u] \times \mathbb{R}^m)$ όπου:

$$H(x, \lambda) = \begin{bmatrix} F(x) + A^T \lambda \\ -Ax + b \end{bmatrix} \quad (\text{Π1.9})$$

Πιο γενικά, εάν $X = \{x : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, όπου $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ και $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^s$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε, υπό μια κατάλληλη τροποποίηση των περιορισμών, για κάθε λύση x του $VI(F, [l, u] \cap X)$, θα πρέπει να υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda \in \mathfrak{R}^s$ τέτοιοι ώστε το (x, l, η) είναι λύση του $VI(H, [l, u] \times [0, \infty] \times \mathfrak{R}^s)$ όπου:

$$H(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} L(x, \lambda, \mu) \\ -g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} \quad (\text{Π1.10})$$

Με:

$$L(x, \lambda, \mu) \equiv F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^s \mu_j \nabla h_j(x) \quad (\text{Π1.11})$$

Είναι η Λαγκρανζιανή συνάρτηση με διανυσματικές τιμές για το $VI(F, [l, u] \times X)$.

Π1.4 Προβλήματα κάθετης συμπληρωματικότητας (VCP)

Υπάρχει μια συγκεκριμένη έλλειψη συμμετρίας στο μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας, όπως μπορεί να φανεί από τη σχέση $\min(x, F(x))=0$. Μια από τις συναρτήσεις σε αυτήν τη σχέση είναι εντελώς αυθαίρετη ενώ η άλλη είναι η ταυτότητα. Πολλά προβλήματα που προκύπτουν συχνά έχουν στην πραγματικότητα μια πιο γενική μορφή:

$$VCP(F) : \quad \min(F^1(x), F^2(x), \dots, F^m(x)) = 0 \quad (\text{Π1.12})$$

Ξεκάθαρα, αυτό σημαίνει ότι $F_i^j(x) \geq 0$, για κάθε $i=1, 2, \dots, n$ και $j=1, 2, \dots, m$ και για κάθε επιμέρους στοιχείο $i, F_i^j(x) = 0$, για τουλάχιστον ένα j . Η καθαρή μορφή αυτού του προβλήματος (δηλαδή όταν όλες οι συναρτήσεις F^i είναι καθαρές) παρουσιάστηκε από τον Cottle και Dantzig και ερευνήθηκε σε αρκετές μελέτες.

Το VCP μπορεί ισοδύναμα να προσεγγιστεί σαν μια παραμετρική ανισότητα με άνω και κάτω φράγμα περιορισμών (πιο σωστά, ως ένα μεικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας), με την προσθήκη επιπλέον μεταβλητών $z^j \in \mathfrak{R}^n, j = 2, 3, \dots, m$. Η ισοδύναμη μορφή είναι:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m z^k &= F^1(x) \\ 0 &= \min\left(z^j, F^j(x) - \sum_{k=j+1}^m z^k\right), \quad j = 2, \dots, m-1 \\ 0 &= \min(z^m, F^m(x)) \end{aligned} \quad (\text{Π1.13})$$

Όπως φαίνεται, αν το x επιλύει το $VCP(F)$, τότε οι παραπάνω εξισώσεις ικανοποιούνται με:

$$\begin{aligned} z^j &\equiv \min(F^1(x), \dots, F^{j-1}(x)) - \sum_{k=j+1}^m z^k, \quad j = 2, \dots, m-1 \\ z^m &\equiv \min(F^1(x), \dots, F^{m-1}(x)) \end{aligned} \quad (\text{Π1.14})$$

Αντίστροφα, αν η (Π1.13) ισχύει, τότε το z επιλύει το $VCP(F)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος (Π1.13) είναι mn , σε σύγκριση με μόνο n Μεταβλητές που έχει η αρχική μορφή του $VCP(F)$. Μερικοί αλγόριθμοι επίλυσης του VCP (για παράδειγμα η μέθοδος Gauss-Newton για μη λείες εξισώσεις) μπορούν να εκμεταλλευτούν τη συγκεκριμένη δομή της min μορφής του προβλήματος πολύ πιο αποτελεσματικά από το να αντιμετωπιστεί άμεσα η παραμετρική ανισότητα. Παρόλ' αυτά, πολλές από τις μεταβλητές που εισάγονται στη σχέση (Π1.13) προκύπτουν σε μία καθαρά γραμμική μορφή, έτσι ώστε ένας γενικός επιλύτης του VI να μπορεί να εκμεταλλευτεί αυτό το γεγονός.

Π1.5 Προβλήματα σημείου σέλας (Saddle-Point Problems)

Αυτά τα προβλήματα είναι μια γενίκευση μη γραμμικών προγραμμάτων και παρέχουν μια πλούσια πηγή προβλημάτων συμπληρωματικότητας και παραμετρικών ανισοτήτων. Γενικά, δεδομένων δύο μη μηδενικών σετ $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ και $Y \subseteq \mathfrak{R}^m$ και μίας συνάρτησης $L : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$, το πρόβλημα του σημείου σέλας το οποίο σχετίζεται με τα (X, Y, L) είναι η εύρεση ενός ζεύγους διανυσμάτων $(x^*, y^*) \in X \times Y$, το οποίο αποκαλείται σημείο σέλας, τέτοιο ώστε:

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \text{για κάθε } (x, y) \in X \times Y \quad (\text{Π1.15})$$

Έστω ότι το L είναι μια συνεχής και διαφορίσιμη, κυρτή – κοίλη συνάρτηση, (κοίλος και κυρτός σημαίνει ότι η $L(x, y)$ είναι μια κοίλη συνάρτηση στο x για κάθε σταθερό y και μια κυρτή συνάρτηση στο y για κάθε σταθερό x) και επίσης ότι τα X και Y είναι κυρτά σετ, τότε το (x^*, y^*) είναι ένα σημείο σέλας αν και μόνο αν επιλύει το $VI(F, K)$ όπου:

$$K = X \times Y \quad \text{και} \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y) \\ -\nabla_y L(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{Π1.16})$$

Η απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας είναι εύκολη. Σε μια σειρά από πρόσφατες δημοσιεύσεις, μια σημαντική και ειδική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος σημείου σέλας, παρουσιάστηκε σαν ένα εργαλείο μοντελοποίησης για διάφορα στοχαστικά προγράμματα, βελτιστοποίηση σε πολλές φάσεις, και προβλήματα βέλτιστοι ελέγχου. Σε αυτήν την περίπτωση, τα X και Y είναι και τα δύο πολυεδρικά σετ και το L είναι μια γραμμική τετραγωνική συνάρτηση:

$$L(x, y) = p^T x + \frac{1}{2} x^T P x - x^T R y + q^T y - \frac{1}{2} y^T Q y \quad (\text{Π1.17})$$

Για μερικά μητρώα P , Q και R και διανύσματα p και q κατάλληλων διαστάσεων. Αυτό το ειδικό πρόβλημα σημείου σέλας οδηγεί σε ένα καθαρό $VI(F, K)$ στο οποίο το καθοριστικό σετ K είναι ένα πολυέδρο και η συνάρτηση F είναι καθαρή. Το όνομα «εκτεταμένο γραμμικό, τετραγωνικό πρόγραμμα» (ELQP) χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς διαφόρων δημοσιεύσεων για να ορίσουν τη σύνδεση αυτού του προβλήματος με τον τυπικό γραμμικό και τετραγωνικό προγραμματισμό στην κλασική θεωρία βελτιστοποίησης.

Π1.6 Μαθηματικός προγραμματισμός με συνθήκες ισορροπίας

Προβλήματα συμπληρωματικότητας και, πιο γενικά, οι παραμετρικές ανισότητες, συχνά εμφανίζονται σαν περιορισμοί ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Ο όρος «μαθηματικός προγραμματισμός με συνθήκες ισορροπίας», ή απλά MPEC, τέθηκε για αυτήν την τάξη προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Σε αυτό που ακολουθεί, θα διατυπωθούν οι γενικές μορφές του MPEC.

Γενικά, ένα MPEC αποτελείται από δυο σετ μεταβλητών: το πρώτο επίπεδο μεταβλητής $x \in \mathfrak{R}^n$ και το δεύτερο επίπεδο μεταβλητής $y \in \mathfrak{R}^m$. Σε μια τυπική μεταβλητή, το x περιλαμβάνει τις μεταβλητές σχεδιασμού ενώ το y περιλαμβάνει τις πρωτεύουσες μεταβλητές μιας παραμετρικής ανισότητας που έχει ως παράμετρο το x . Δίνονται τα ακόλουθα: η συνάρτηση πρώτου επιπέδου $f : \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$ και ένας χάρτης με σετ τιμών $C : \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^m$, όπου για κάθε $x \in \mathfrak{R}^n$, $C(x) \subseteq \mathfrak{R}^m$ είναι το (πιθανόν άδειο) σετ περιορισμών του δευτέρου επιπέδου VI. Το MPEC είναι:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x, y) \\ &\text{subject to} && (x, y) \in Z \\ &\text{and} && y \text{ solves VI } (F(x, \cdot), C(x)) \end{aligned} \quad (\text{Π1.18})$$

Στη σημαντική περίπτωση όπου το $\text{VI}(F(x, \cdot), C(x))$ είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα συμπληρωματικότητας, το παραπάνω MPEC μπορεί να μορφωθεί ισοδύναμα σαν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με μεικτούς περιορισμούς συμπληρωματικότητας:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \bar{f}(x, u, v, w) \\ &\text{subject to} && (x, u, v, w) \in \bar{Z} \\ &&& H(x, u, v, w) = 0 \\ &\text{and} && 0 \leq u \perp v \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Π1.19})$$

Όπου τα (u, v, w) είναι η αλληλουχία των μεταβλητών δευτέρου επιπέδου, συγκεκριμένα των y , τα ελλείμματα και οι πολλαπλασιαστές των περιορισμών που ορίζουν το σετ $C(x)$, \bar{f} και \bar{Z} είναι αντίστοιχα, η συνάρτηση f και το σετ Z ορισμένο εκ νέου σε όρους των μεταβλητών (x, u, v, w) , και το H είναι ένα μια συνάρτηση με διανυσματικές τιμές του δευτέρου επιπέδου του VI.

Το MPEC έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές στις περιοχές του σχεδιασμού του μηχανικού και στον οικονομικό σχεδιασμό. Πράγματι, πολλά από τα προβλήματα που περιγράφονται στο επόμενο παράρτημα περιέχουν δεδομένα που είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού ενός MPEC. Αυτές οι εφαρμογές είναι λοιπόν τα προβλήματα δευτέρου επιπέδου του MPEC. Ένα παράδειγμα είναι το πρόβλημα του παίγνιου του Stackelberg το οποίο μπορεί να μορφωθεί ως ένα MPEC, με το δευτέρου επιπέδου VI να είναι ένα παίγνιο κατά Nash.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Π2.1 Εφαρμογές στο πεδίο του πολιτικού μηχανικού

Οι γενικές κατηγορίες προβλημάτων στις οποίες υπάρχει άμεση εφαρμογή των ζητημάτων της συμπληρωματικότητας είναι:

- Προβλήματα μηχανικής με τριβή και επαφή
- Προβλήματα ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς κατασκευών (για τα οποία θα γίνει εκτενέστερη περιγραφή σε επόμενα κεφάλαια της εργασίας)
- Προβλήματα μη γραμμικών εμποδίων (non linear obstacle problems)
- Προβλήματα ελαστουδροδυναμικής λίπανσης
- Προβλήματα ισορροπίας κυκλοφορίας (traffic equilibrium problems)

Για κάθε μία από τις παραπάνω γενικές κατηγορίες εφαρμογών σε ζητήματα μηχανικού, υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία και έχουν κατά καιρούς προταθεί και άλλες προσεγγίσεις κατά την επίλυσή τους. Το ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη ενότητα, θα επικεντρωθεί στην προσέγγιση των προβλημάτων μέσω της συμπληρωματικότητας, ώστε να αναδειχθεί η πολύπλευρη φύση του προβλήματος, καθώς και το εύρος του πεδίου των εφαρμογών του. Σε κάθε περίπτωση, θα δοθεί το βασικό υπόβαθρο του προβλήματος και μια σύντομη περιγραφή του φυσικού νοήματος, θα εξηγηθούν οι βασικές εξισώσεις και θα παρουσιασθούν οι τροποποιήσεις ώστε να φτάσει στη γενική μορφή του προβλήματος της συμπληρωματικότητας.

Για την περιγραφή των προβλημάτων, εφόσον δεν είναι το επίκεντρο της παρούσης εργασίας, χρησιμοποιήθηκαν αναφορές από επιστημονικά άρθρα που ασχολούνται με το εκάστοτε αντικείμενο.

Π2.1.1 Προβλήματα μηχανικής με επαφή

Η επαφή μεταξύ δύο ή περισσότερων στερεών σωμάτων, είναι ένα από τα πιο δύσκολα, στη μαθηματική τους αντιμετώπιση, φαινόμενα στο χώρο της μηχανικής. Οι μέθοδοι επίλυσης για τέτοια προβλήματα βασίζονται στις λογικές του δευτεροβάθμιου προγραμματισμού. Προβλήματα επαφής με τριβή κατά Coulomb έχουν αναλυθεί σε μεγάλο βαθμό από τον Klarbring και την ομάδα του. Οι τεχνικές του μαθηματικού προγραμματισμού που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των ανωτέρω προβλημάτων, περιλαμβάνουν μεθόδους γραμμικής συμπληρωματικότητας, αλγορίθμους δευτεροβάθμιου προγραμματισμού, μεθόδους Newton για γενικευμένες εξισώσεις και B-διαφορίσιμες εξισώσεις. Μια πρόσφατη σειρά ερευνών πάνω σε προβλήματα τριβής και επαφής, έχει γίνει στο επιστημονικό πεδίο της ρομποτικής.

Στη γενική τους μορφή, τα προβλήματα τριβής – επαφής μοντελοποιούνται σε όρους μερικών ασαφών απεικονίσεων που περιγράφουν τις επιφάνειες επαφής και τις κινήσεις των σωμάτων. Τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται βασίζονται σε αρχές της μηχανικής συνεχούς μέσου. Για υπολογιστικούς σκοπούς, αυτές οι συνεχείς φόρμουλες συχνά διακριτοποιούνται από μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και σε περίπτωση προβλημάτων με χρονική εξάρτηση, από μια επαυξητική διαδικασία με βήματα, που διαιρεί τη χρονική διάρκεια του φαινομένου σε αρκετά διαστήματα. Αυτές οι διακριτοποιήσεις οδηγούν σε κάποια προβλήματα πεπερασμένου μήκους, επιλύσιμα με αριθμητικές μεθόδους.

Ακολούθως, θα περιγραφούν δύο χαρακτηριστικά προβλήματα επαφής που είναι αντιπροσωπευτικά αυτού του τομέα έρευνας.

Π2.1.1.1 Το προσομοίωμα ενός στερεού σώματος υπό δυναμική φόρτιση

Στο τρισδιάστατο μοντέλο ενός στερεού σώματος υπό τριβή και επαφή, το σώμα έρχεται σε επαφή με έναν αριθμό συνδέσμων, σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων και αυτή η επαφή το αναγκάζει να ακολουθήσει έναν νόμο τριβής Coulomb. Το μοντέλο μορφώνεται ως εξής: υπάρχουν n_c σημεία επαφής που διαχωρίζονται ως *σύνδεσμοι ολίσθησης* ή *σύνδεσμοι κύλισης*. Εξ ορισμού, οι συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας σε όλα τα σημεία επαφής είναι μηδέν. Ένα σημείο επαφής i κυλάει αν η εφαπτομενική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας σε αυτό το σημείο είναι επίσης μηδέν. Ένα σημείο επαφής I ολισθαίνει εάν είτε η εφαπτομενική συνιστώσα u_{it} ή η κατακόρυφη συνιστώσα u_{io} της ταχύτητας (που δίνονται) δεν είναι μηδενικές.

Έστω ότι R και S είναι δύο σεντ που διαιρούν το διάνυσμα $\{1, \dots, n_c\}$ και δηλώνουν αντίστοιχα τους συνδέσμους κύλισης και ολίσθησης. Έχοντας ως δεδομένο ένα σύνολο από εξωτερικές δυνάμεις, το μοντέλο απαιτεί τον καθορισμό των γραμμικών επιταχύνσεων $\{a_{in}, a_{it}, a_{io}\}$ και των δυνάμεων επαφής $\{c_{in}, c_{it}, c_{io}\}$ σε όλα τα σημεία επαφής $i=1, \dots, n_c$, όπου οι δείκτες, n, t, o αντιστοιχούν στις τρεις συνιστώσες (οριζόντια, εφαπτομενική, κατακόρυφη) των επιταχύνσεων και των δυνάμεων. Συγκεκριμένοι κινηματικοί περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται όπως η συνθήκη της μη διείδυσης του Singorini και νόμος τριβής του Coulomb.

Ειδικότερα, μπορούμε να ορίσουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} a_n &\equiv (a_{in})_{i=1}^{n_c}, & a_t &\equiv (a_{it})_{i=1}^{n_c}, & a_o &\equiv (a_{io})_{i=1}^{n_c} \\ c_n &\equiv (c_{in})_{i=1}^{n_c}, & c_t &\equiv (c_{it})_{i=1}^{n_c}, & c_o &\equiv (c_{io})_{i=1}^{n_c} \end{aligned} \quad (\text{Π2.1})$$

Και με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να ορισθούν οι κινηματικοί περιορισμοί του συστήματος σαν ένα σεντ γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_t \\ a_o \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_n \\ c_t \\ c_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_t \\ b_o \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.2})$$

Όπου, το μητρώο A και το διάνυσμα b , περιλαμβάνουν δεδομένα, τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} A_{nn} & A_{nt} & A_{no} \\ A_{tn} & A_{tt} & A_{to} \\ A_{on} & A_{ot} & A_{oo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_n^T & J_n \\ W_t^T & J_t \\ W_o^T & J_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{obj}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{man}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_n & W_t & W_o \\ J_n^T & J_t^T & J_o^T \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.3})$$

$$\begin{bmatrix} b_n \\ b_t \\ b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{W}_n^T & \dot{J}_n \\ \dot{W}_t^T & \dot{J}_t \\ \dot{W}_o^T & \dot{J}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_n^T & J_n \\ W_t^T & J_t \\ W_o^T & J_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{obj}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{man}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{obj} + h_{obj} \\ g_{man} + h_{man} - \tau \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4})$$

Η φυσική ερμηνεία των συμβόλων του μητρώου A και του διανύσματος b αναφέρονται λεπτομερώς σε εργασίες του Trinkle και Pang. Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας απλώς θα δειχθεί πως το φυσικό πρόβλημα μπορεί να πάρει τη μορφή ενός προβλήματος γραμμικής συμπληρωματικότητας. Πρέπει όμως να

τονιστεί ότι τα μητρώα M_{man}, M_{obj} είναι συμμετρικά και θετικά ορισμένα. Συνεπώς, το A είναι θετικά ημι-ορισμένο και συμμετρικό.

Η συνθήκη μη διείσδυσης του Singorini απαιτεί ότι οι οριζόντιες επιταχύνσεις είναι μη αρνητικές και οι δυνάμεις συμπληρωματικές κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$0 \leq a_n \perp c_n \geq 0 \quad (\text{Π2.5})$$

Δεν υπάρχουν αντίστοιχες απαιτήσεις στις μη οριζόντιες επιταχύνσεις και δυνάμεις. Αντίθετα, αυτές οι μεταβλητές θα πρέπει να υπακούουν στο νόμο τριβής του Coulomb ο οποίος δηλώνει ότι για δεδομένους θετικούς συντελεστές τριβής $\mu_i, i = 1, \dots, n_c$, πρέπει:

$$\mu_i c_{in}(u_{it}, u_{io}) + \sqrt{u_{it}^2 + u_{io}^2} (c_{it}, c_{io}) = 0 \quad \text{για } i \in S \quad (\text{Π2.6})$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_i c_{in}(a_{it}, a_{io}) + \sqrt{a_{it}^2 + a_{io}^2} (c_{it}, c_{io}) = 0 \\ c_{it}^2 + c_{io}^2 \leq \mu_i^2 c_{in}^2 \end{aligned} \right\} \text{για } i \in R \quad (\text{Π2.7})$$

Οι εξισώσεις (Π2.1)-(Π2.7) ορίζουν το δυναμικό πρόβλημα επαφής του στερεού σώματος με τριβή κατά Coulomb. Αυτό το πρόβλημα μπορεί ισοδύναμα να μετασχηματιστεί σε ένα μικτό μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας αν:

- απαλειφθούν οι μεταβλητές δύναμης ολίσθησης $(c_{it}, c_{io}), i \in S$ χρησιμοποιώντας την (Π2.6)
- απαλειφθούν οι περιορισμοί που ορίζουν τις μεταβλητές επιτάχυνσης ολίσθησης $(a_{it}, a_{io}), i \in S$
- εκφραστεί καθεμιά από τις μεταβλητές κύλισης $(a_{it}, a_{io}, c_{it}, c_{io}), i \in R$ σαν η διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών.

Η συμπληρωματικότητα ορίζεται από τις μεταβλητές: $(a_n, a_{Rt}^+, a_{Ro}^+, c_n, a_{Rt}^-, a_{Ro}^-)$ και έχει την ακόλουθη μορφή ισότητας:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{Rt}^+ \\ a_{Ro}^+ \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} c_n \\ c_{Rt}^+ \\ c_{Rt}^- \\ c_{Ro}^- \\ a_{Rt}^- \\ a_{Ro}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{Rt} \\ b_{Ro} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \min(a_n, c_n) &= 0 \\ \min(a_{Rt}^+, c_{Rt}^+) &= \min(a_{Ro}^+, c_{Ro}^+) = 0 \\ \min(a_{Rt}^-, c_{Rt}^-) &= \min(a_{Ro}^-, c_{Ro}^-) = 0 \\ (a_{Rt}^+ - a_{Rt}^-) \circ (c_{Ro}^+ - c_{Ro}^-) - (a_{Ro}^+ - a_{Ro}^-) \circ (c_{Rt}^+ - c_{Rt}^-) &= 0 \\ \min(\mu_R^2 c_{Rn}^2 - (c_{Rt}^+ - c_{Rt}^-)^2 - (c_{Ro}^+ - c_{Ro}^-)^2, (a_{Rt}^+ - a_{Rt}^-)^2 + (a_{Ro}^+ - a_{Ro}^-)^2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Π2.8})$$

Όπου, στην τελευταία εξίσωση, ο κύκλος \circ συμβολίζει το Hadamard γινόμενο δύο διανυσμάτων. Επίσης, στην τελευταία εξίσωση όταν χρησιμοποιείται το σύμβολο R εννοείται πως γίνεται αναφορά για κάθε $i \in R$. Το μητρώο B προκύπτει από το μητρώο A στην (Π2.3) μετά από τα απλοποιητικά βήματα που έχουν ήδη

αναφερθεί. Πρέπει να τονιστεί ότι, αντίθετα με το A, το B δεν είναι ούτε συμμετρικό ούτε θετικά ημι-ορισμένο.

Μια τροποποίηση του παραπάνω μοντέλου οδηγεί σε ένα τυπικό πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας. Το τροποποιημένο μοντέλο, αντικαθιστά το (μη γραμμικό) κώνο τριβής του περιορισμού της (Π.8) στα σημεία επαφής με κύλιση, με τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i c_{in} (a_{it} | a_{io}) + (a_{it} c_{it}, a_{io} c_{io}) = 0 \\ \max(c_{it} | c_{io}) \leq \mu_i c_{in} \end{aligned} \right\} \text{ για } i \in R \quad (\text{Π2.9})$$

Το πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας που προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ a_{Rt}^+ \\ a_{Ro}^+ \\ s_{Rt}^+ \\ s_{Ro}^- \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} c_{Sn} \\ c_{Rn} \\ s_{Rt}^+ \\ s_{Ro}^+ \\ a_{Rt}^- \\ a_{Ro}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{Sn} \\ b_{Rn} \\ b_{Rt} \\ b_{Ro} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min(a_{Rn}, c_{Rn}) &= 0 \\ \min(a_{Sn}, c_{Sn}) &= 0 \\ \min(a_{Rt}^+, s_{Rt}^+) &= \min(a_{Ro}^+, s_{Ro}^+) = 0 \\ \min(a_{Rt}^-, s_{Rt}^-) &= \min(a_{Ro}^-, s_{Ro}^-) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Π2.10})$$

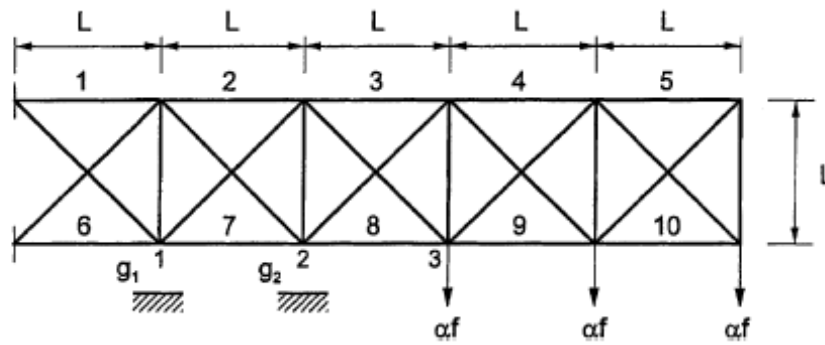
Όπου:

$$M = \begin{bmatrix} (M_{nn})_{SS} & (M_{nn})_{SR} & (A_{nt})_{SR} & (A_{no})_{SR} & 0 & 0 \\ (M_{nn})_{RS} & (M_{nn})_{RR} & (A_{nt})_{RR} & (A_{no})_{RR} & 0 & 0 \\ (M_{tn})_{RS} & (M_{tn})_{RR} & (A_{tt})_{RR} & (A_{to})_{RR} & I & 0 \\ (M_{on})_{RS} & (M_{on})_{RR} & (A_{ot})_{RR} & (A_{oo})_{RR} & 0 & I \\ 0 & 2U_R & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2U_R & 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.11})$$

Με το U_R να είναι το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία κατά τη διαγώνιο τους θετικά ορισμένο και όλοι οι συντελεστές τριβής μ_i είναι αρκετά μικροί, το M ανήκει στην τάξη των μητρώων P_0 . Επιπλέον, το παραπάνω LCP μπορεί να λυθεί με την κλασσική μέθοδο του Lemke ή με κάποια απλή μέθοδο εσωτερικού σημείου.

Π2.1.1.2 Το πρόβλημα σχεδιασμού φορέων με κριτήρια ελαχίστου βάρους

Μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων συμπληρωματικότητας οδηγεί σε μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς συμπληρωματικότητας (Mathematical Programms with Equilibrium Constraints –MPEC). Ένας τομέας στον οποίο εμφανίζονται τέτοια προβλήματα είναι η βελτιστοποίηση κατασκευών με βάση κριτήρια ελαχίστου βάρους και περιορισμούς μονοδιάστατης επαφής. Αυτό θα φανεί πιο ξεκάθαρα με το ακόλουθο σχήμα, από ένα τυπικό παράδειγμα τέτοιου προβλήματος.



ΣΧΗΜΑ Π2.1 Παράδειγμα προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού δικτύωματος με μονοδιάστατη επαφή

Το παραπάνω παράδειγμα είναι ένα δικτύωμα με 25 ράβδους των οποίων ζητείται η βέλτιστη διατομή με κριτήρια ελαχίστου βάρους. Η διαφορά είναι ότι υπάρχουν και περιορισμοί επαφής, δηλαδή οι ράβδοι του δικτύωματος δεν πρέπει να υπερβούν τα όρια g_1, g_2 , τα οποία αποτελούν την απόσταση της κατασκευής από το έδαφος. Αν συμβεί αυτό, τότε θα αναπτυχθούν δυνάμεις στήριξης από το έδαφος, εκτός της δεδομένης εξωτερικής φόρτισης, οι οποίες θα μεταβάλλουν ριζικά τη στατική συμπεριφορά του φορέα, συνεπώς θα απαιτούνται διαφορετικές σχέσεις για την εύρεση των βέλτιστων διατομών.

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν το φυσικό πρόβλημα, προέρχονται από την επίλυση του προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων με επαφή, με την τροποποίηση την απουσία τριβής (συντελεστής τριβής $\mu=0$). Ορίζεται το μητρώο δυσκαμψίας K το οποίο είναι μια συνάρτηση του παράγοντα σχεδιασμού $t \in \mathfrak{R}^m$, ο οποίος είναι το διάνυσμα του όγκου των ράβδων. Το συμπέρασμα που βγαίνει από αυτή τη θεώρηση είναι το εξής:

$$K(t) = \sum_{i=1}^m t_i K_i \quad (\text{Π2.12})$$

Όπου κάθε K^i είναι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου και αποτελεί ένα μητρώο συμμετρικό και θετικά ορισμένο. Άρα το πρόβλημα του σχεδιασμού ελαχίστου βάρους μπορεί να μορφωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } w(u, p_n, t) \\ & \text{subject to } t \in T, \\ & \quad h(u, p_n, t) \leq 0 \\ & \quad K(t)u + C_n^T p_n = F \\ & \quad 0 \leq p_n \perp g_n + C_n u \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{Π2.13})$$

Οι σχέσεις (Π2.14) είναι ξεκάθαρο ότι περιγράφουν ένα μαθηματικό πρόγραμμα με εξισώσεις γραμμικής συμπληρωματικότητας.

w είναι μια γενικευμένη συνάρτηση βάρους, T είναι το σετ περιορισμών της μεταβλητής t του όγκου των ράβδων. Ένα παράδειγμα των περιορισμών T θα περιλάμβανε: $\left\{ t \in \mathfrak{R}_+^m : \sum_{i=1}^m t_i = V \right\}$ όπου $V > 0$ είναι ο συνολικός όγκος των ράβδων και $\left\{ t \in \mathfrak{R}^m : t^+ \geq t \geq t^- \right\}$.

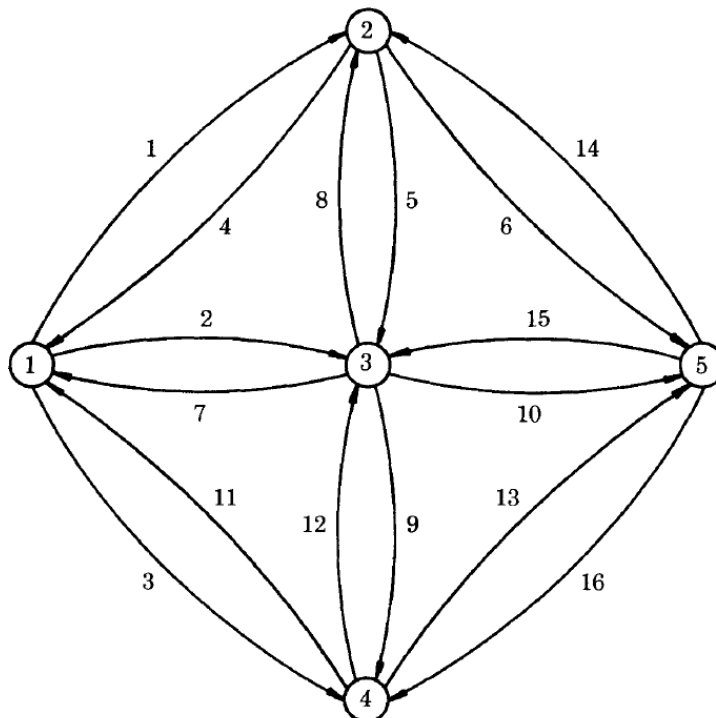
Τα σύμβολα t^+, t^- είναι αντίστοιχα τα πάνω και κάτω όρια του όγκου των ράβδων. Ο όρος p^n συμβολίζει τις δυνάμεις επαφής που θα αναπτυχθούν αν οι ράβδοι

έρθουν σε επαφή με το έδαφος ενώ ο όρος του C_n^T περιγράφει με κάποια συνάρτηση, τη μορφή της επιφάνειας του εδάφους. Με τον όρο μ εννοούνται οι συνολικές μετατοπίσεις του φορέα οι οποίες προκαλούνται από τα εξωτερικά φορτία αλλά και από τις δυνάμεις επαφής. Οι συναρτήσεις περιορισμών h μπορούν να είναι είτε περιορισμοί στις μετακινήσεις και στις τάσεις, είτε περιορισμοί στις δυνάμεις επαφής.

Π2.1.2 Προβλήματα κυκλοφοριακής ισορροπίας

Σε όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση του κυκλοφοριακού φόρτου, υπάρχει ένα δεδομένο κυκλοφοριακό δίκτυο που ορίζεται από έναν αριθμό κόμβων N και ένα σετ συνδέσμων A . Τα μοντέλα χρησιμοποιούνται για να προβλέψουν την ικανότητα κυκλοφοριακού όγκου σε αυτό το δίκτυο. Συνήθως θεωρείται ότι οι οδηγοί κυκλοφορούν με επιβαρυντικό τρόπο ως προς τις αντοχές του δικτύου, σε μια προσπάθειά τους να μειώσουν το κόστος μετακίνησής τους, όπου το κόστος της μετακίνησης κατά μήκος ενός δεδομένου συνδέσμου $a \in A$ είναι μια μη γραμμική συνάρτηση $c_a(f)$ ως προς το διάνυσμα της συνολικής ροής f με συνιστώσες $f_b, b \in A$. Έστω ότι το $c(f)$ υποδηλώνει το διάνυσμα με συνιστώσες $c_a(f) \quad a \in A$. Υπάρχουν δύο υποκατηγορίες του N που αντιπροσωπεύουν τους κόμβους προέλευσης O και τους κόμβους προορισμού D αντίστοιχα. Το σετ των ζευγαριών $(O-D)$ είναι μια δεδομένη υποκατηγορία W που ορίζεται ως OxD . Σχετιζόμενο με κάθε ζευγάρι είναι μια ταξιδιωτική ζήτηση η οποία αντιπροσωπεύει την απαιτούμενη ροή από το κόμβο προέλευσης ως τον κόμβο προορισμού.

Σε πολλές δημοσιεύσεις έχει συζητηθεί η μόνρφωση και η επίλυση προβλημάτων κυκλοφοριακής ισορροπίας με τις μεθόδους της συμπληρωματικότητας καθώς και οι εφαρμογές αυτών των προβλημάτων στο πολεοδομικό σχεδιασμό. Ακολουθεί ένα παράδειγμα μόνρφωσης τέτοιων προβλημάτων. Καταρχήν στο ακόλουθο σχήμα, παρουσιάζεται ένα τυπικό δείγμα κυκλοφοριακού δικτύου, με $N=5$ κόμβους και $A=16$ συνδέσμους.



ΣΧΗΜΑ Π2.2 Παράδειγμα κυκλοφοριακού δικτύου

Για κάθε $w \in W$, έστω ότι p_w αντιπροσωπεύει το σετ των διαδρομών που συνδέουν τα O-D ζεύγη w και P αντιπροσωπεύει όλες τις διαδρομές που συνδέουν όλα τα O-D ζεύγη του δικτύου. Έστω ότι με ξ_p αντιπροσωπεύεται η ροή των δρόμων $p \in P$ και $\gamma_p(\xi)$ είναι το κόστος της ροής στη διαδρομή αυτή, το οποίο είναι μια συνάρτηση του διανύσματος ροής της διαδρομής ξ . Έστω ότι Δ είναι το μητρώο συνδέσμου-διαδρομής με στοιχεία που έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{ανη διαδρομή } p \in P \text{ διασχίζει σύνδεσμο } a \in A \\ 0 & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (\text{Π2.14})$$

Είναι ξεκάθαρο ότι τα f και ξ συνδέονται:

$$f = \Delta \xi \quad (\text{Π2.15})$$

Όπου το κόστος $\gamma_p(\xi)$ σε κάθε διαδρομή p θεωρείται πως είναι το άθροισμα από τα κόστη συνδέσμων για όλους τους συνδέσμους που διασχίζονται από τη διαδρομή p , δηλαδή:

$$\gamma(\xi) = \Delta^T c(f) \quad (\text{Π2.16})$$

Το μοντέλο καλείται προσθετικό. Τέλος, εισάγουμε μεταβλητές τ_w οι οποίες αντιπροσωπεύουν το ελάχιστο κόστος μεταφοράς (ή χρόνου) μεταξύ των ζευγαριών O-D $w \in W$. Η ζήτηση ταξιδιού μεταξύ των ζευγών O-D w θεωρείται ότι είναι μια συνάρτηση $d_w(\tau)$ του διανύσματος τ , όπως έχει οριστεί στο πρόβλημά μας. Το μοντέλο καλείται ως προσομοίωμα σταθερής ζήτησης εάν κάθε $d_w(\tau)$ είναι μια σταθερή συνάρτηση. Το γενικό μοντέλο συχνά κατονομάζεται ως το μοντέλο ελαστικότητας ζήτησης.

Η αρχή ισορροπίας του Wardrop ορίζει πως κάθε οδηγός θα επιλέξει τη διαδρομή με το ελάχιστο κόστος μεταξύ κάθε ζεύγους προέλευσης – προορισμού και μέσω αυτής της διαδικασίας, οι διαδρομές που θα χρησιμοποιηθούν θα έχουν ισοδύναμο κόστος. Οι διαδρομές με κόστη υψηλότερα από το ελάχιστο δεν θα έχουν καθόλου ροή. Μαθηματικά, αυτή η αρχή μπορεί να εκφραστεί ως:

$$0 \leq \gamma_p(\xi) - \tau_w \perp \xi_p \geq 0, \quad \forall w \in W, p \in P_w \quad (\text{Π2.17})$$

Η συνθήκη ικανοποιείται αν:

$$\sum_{p \in P_w} \gamma_p(\xi) \geq d_w(\tau), \quad \forall w \in W \quad (\text{Π2.18})$$

Και η συνθήκη ισορροπίας μηδενικής υπέρβασης ζήτησης ορίζεται ακολούθως:

$$0 \leq \sum_{p \in P_w} \gamma_p(\xi) - d_w(\tau) \perp \tau_w \geq 0, \quad \forall w \in W \quad (\text{Π2.19})$$

Οι συνθήκες (Π2.18) και (Π2.19) μορφώνουν ένα μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας με μεταβλητές τις (ξ, τ) .

Για δίκτυα λογικού μεγέθους, η αρίθμηση όλων των διαδρομών που συνδέουν τους συνδέσμους του W είναι πολύ δύσκολη αν υπάρχουν πολλά ζεύγη O-D. Γι' αυτό το λόγο η παραπάνω μόνρφωση προβλήματος δεν είναι κατάλληλη για άμεση χρήση υπολογιστικά. Ωστόσο, υπάρχουν δημοσιεύσεις οι οποίες χρησιμοποιούν

αυτή τη διατύπωση. Η εναλλακτική πολυκριτηριακή θεώρηση του προβλήματος καταργεί την ανάγκη αρίθμησης των διαδρομών και βασίζεται και αυτή στην αρχή της συμπληρωματικότητας.

Π2.2 Οικονομικές εφαρμογές

Σε πολλές οικονομικές εφαρμογές παράγεται ένα μοντέλο ώστε να ερμηνευθούν οι περίπλοκοι μηχανισμοί ενός οικονομικού συστήματος ή για να οριστούν οι επιπτώσεις μιας συγκεκριμένης ενέργειας, όπως για παράδειγμα η φορολογία. Διαφορετικά συμπεράσματα ως προς τη συμπεριφορά των παραγωγών στην οικονομία καθορίζουν διαφορετικές μορφές ισορροπίας.

Μία οικονομία μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής. Θεωρείται ότι η οικονομία ασχολείται με ένα πεπερασμένο αριθμό l αξιών, οι οποίες καθορίζονται όχι μόνο από τον τύπο του αγαθού που σχετίζεται με αυτές, αλλά επίσης και από την ημερομηνία και την τοποθεσία. Συνδεδεμένη με κάθε αξία είναι μία τιμή, δηλαδή η ποσότητα πληρωμής για κάθε μονάδα της δεδομένης αξίας. Υπάρχουν δύο σετ παραγόντων που ασχολούνται με αυτές τις αξίες, οι παραγωγοί και οι καταναλωτές. Η ευρωστία του προϋπολογισμού ενός καταναλωτή τυπικά καθορίζεται από την αρχική ποσότητα αγαθών που έχει στην κατοχή του. Σε αυτήν την περιγραφή η οικονομία θεωρείται ότι έχει n παραγωγούς και m καταναλωτές. Οι δείκτες θα χρησιμοποιούνται για να υποδηλωθούν τα στοιχεία των διανυσμάτων και οι εκθέτες για να υποδηλωθούν οι ποσότητες των διανυσμάτων που σχετίζονται είτε με τον παραγωγό, είτε με τον καταναλωτή.

Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, θα αναλυθεί συνοπτικά το πρόβλημα της θεωρίας παιγνίων το οποίο είναι μια πολύ μεγάλη εφαρμογή σε οικονομικά ζητήματα, για το πρόβλημα της συμπληρωματικότητας.

Π2.2.1 Θεωρία Παιγνίων

Ένας μεγάλος αριθμός οικονομικών μοντέλων μορφώνονται σε όρους ενός ανταγωνιστικού παιγνίου με n παίκτες. Στο γενικό περίγραμμα, ένα τέτοιο παίγνιο αποτελείται από n παίκτες ο καθένας από τους οποίους έχει ένα ορισμένο σετ στρατηγικής $X^i \subseteq \mathfrak{R}^n$ και μίας συνάρτησης χρησιμότητας $u_i : X^i \rightarrow \mathfrak{R}$. Η χρησιμότητα για κάθε δεδομένο παίκτη εξαρτάται από τις στρατηγικές x^j όλων των παικτών.

Σύμφωνα με τη θεώρηση του Nash, κάθε παίκτης μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του θεωρώντας τις στρατηγικές όλων των άλλων παικτών γνωστές. Άρα για συγκεκριμένες στρατηγικές $z^j, j \neq i$, ο παίκτης i λύνει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max\{u_i(z^1, \dots, z^{i-1}, x^i, z^{i+1}, \dots, z^n) : x^i \in X^i\} \quad (\text{Π2.20})$$

Το διάνυσμα $z = (z^i), x \in X \equiv \prod_{i=1}^n X^i$ αποτελεί ένα σημείο ισορροπίας κατά Nash για το παίγνιο, αν για κάθε $i=1, \dots, n$:

$$u_i(z^1, \dots, z^{i-1}, x^i, z^{i+1}, \dots, z^n) \leq u_i(z) \text{ για όλα τα } x^i \in X^i \quad (\text{Π2.21})$$

Είναι πολύ γνωστό ότι το πρόβλημα του υπολογισμού ενός σημείου ισορροπίας κατά Nash μπορεί να μορφωθεί σαν μια ανισότητα με μεταβλητές αν κάθε X^i είναι ένα κλειστό κυρτό σετ και κάθε συνάρτηση:

$$u_i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \quad (\text{Π2.22})$$

είναι λεία και διαφορίσιμη στον i όρο για κάθε σταθερό:

$$(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \quad (\text{Π2.23})$$

Υπό αυτές τις θεωρήσεις, ορίζοντας:

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} -\nabla_{x^1} u_1(x) \\ \vdots \\ -\nabla_{x^n} u_n(x) \end{pmatrix}, \text{ για } x = (x^i) \in X, \quad (\text{Π2.24})$$

Ένα διάνυσμα z είναι ένα σημείο ισορροπίας κατά Nash αν και μόνο αν το z είναι μια λύση του παρακάτω προβλήματος συμπληρωματικότητας:

$$VI(F, X): \text{ να βρεθεί } z \in [X] \text{ τέτοιο ώστε } (x - z)^T F(z) \geq 0, \quad \forall x \in [X] \quad (\text{Π2.25})$$

Εάν επιπροσθέτως κάθε X^i ορίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό διαφορίσιμων ανισοτήτων και εξισώσεων που ικανοποιούν τους κατάλληλους περιορισμούς, τότε το παραπάνω πρόβλημα συμπληρωματικότητας της σχέσης (Π2.25) είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα συμπληρωματικότητας μέσω των συνθηκών Karush Kuhn Tucker.

Γενικά, το μοντέλο του Nash για τα σημεία ισορροπίας δεν είναι πλήρως επαρκές. Ένα μειονέκτημα είναι επειδή υπάρχει η πιθανότητα πολλαπλών σημείων ισορροπίας. Η ανεύρεση ποιού από τα σημεία ισορροπίας αποτελεί την επιθυμητή λύση του παιγνίου, γενικά δεν είναι εφικτό.

Το μοντέλο παραγωγής του Nash-Cournot είναι μια εφαρμογή της ιδέας του σημείου ισορροπίας του Nash. Αυτό το μοντέλο αφορά έναν αριθμό εταιριών, κάθε μία από τις οποίες παράγει ένα κοινό αγαθό στην αγορά. Κάθε εταιρία θέτει το επίπεδο παραγωγής της έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, υπό την προϋπόθεση ότι η παραγωγή των άλλων εταιριών παραμένει σταθερή. Διαισθητικά, ένα σημείο ισορροπίας Nash είναι ένα παραγωγικό μόρφωμα στο οποίο καμία εταιρία δεν μπορεί να αυξήσει το κέρδος της αλλάζοντας με μονοδιάστατο τρόπο το επίπεδο παραγωγής της. Και εφόσον καμία εταιρία δεν επιλέγει να αλλάξει την παραγωγή της, ένα σημείο ισορροπίας είναι το επακόλουθο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ένα σημείο ισορροπίας σημαίνει ότι κάθε εταιρία βρίσκει τη βέλτιστη απόκριση έχοντας ως δεδομένες τις επιλογές των άλλων.

Αν ορίσουμε ως n τον αριθμό των εταιριών, $C_i(x_i)$ την ποσότητα του αγαθού που παράγει η εταιρία i , $\xi = \sum_{i=1}^n x_i$ τη συνολική ποσότητα η οποία παράγεται, τότε το

πρόβλημα αφορά τις δύο συναρτήσεις αυτών των μεταβλητών. Η πρώτη, η ανάστροφη συνάρτηση της ζήτησης, $p(\xi)$, δίνει την τιμή της μονάδας στην οποία οι καταναλωτές θα ζητήσουν και θα αγοράσουν μια ποσότητα ξ . Η δεύτερη, $C_i(x_i)$, είναι το κόστος παραγωγής για την εταιρία i . Σε μια συνήθη οικονομική συμπεριφορά, η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης p θεωρείται πως είναι αυξητική, η συνάρτηση κόστους $C_i(x_i)$, είναι κυρτή και η καμπύλη $\xi p(\xi)$ είναι κυρτή για $\xi \geq 0$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, η συνάρτηση χρησιμότητας κάθε εταιρίας είναι:

$$x_i p \left(x_i + \sum_{j \neq i} x_j^* \right) - C_i(x_i) \quad (\text{Π2.26})$$

Και είναι κοίλη για τα x_i και το σετ στρατηγικής $X^i = \mathfrak{R}_+$. Προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα συμπληρωματικότητας.

$$0 \leq x \perp F(x) \geq 0 \quad (\text{Π2.27})$$

Όπου $F(x) = (F_i(x))$ με:

$$F_i(x) = C_i'(x_i) - p \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - x_i p' \left(\sum_{i=1}^n x_i \right), \text{ για } x \in \mathfrak{R}_+^n \text{ και } i = 1, \dots, n \quad (\text{Π2.28})$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις p και C ορίζονται παρακάτω για παραμέτρους γνωστές, τις $c_i, L_i, \beta_i > 0$ και $\gamma > 1$:

$$p(\xi) = 5000 \xi^{\frac{1}{\gamma}} \xi^{-1} \quad (\text{Π2.29})$$

$$C_i(x_i) = c_i x_i + \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} L_i^{\frac{1}{\beta_i}} x_i^{\frac{\beta_i + 1}{\beta_i}}$$

Μια εφαρμογή του σημείου ισορροπίας του Nash στο marketing, βρίσκεται στην εργασία των S.C.Choi, W.S.DeSarbo & P.T.Harker, με τίτλο «Παραγωγικές θέσεις υπό ανταγωνιστικότητα τιμών». Οι μεταβλητές αυτού του προβλήματος είναι οι τιμές. Θεωρείται ότι η συνάρτηση ζήτησης του καταναλωτή ορίζει τις ποσότητες που θα καταναλωθούν σε δεδομένη τιμή. Αντίθετα με το γενικό σημείο ισορροπίας, όπου οι εταιρίες διαλέγουν μια ποσότητα να παράγουν, εδώ διαλέγουν την τιμή εξαγωγής, ώστε να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους χρησιμοποιώντας τις αρχές του Nash. Στη βιβλιογραφία αυτό ονομάζεται προσομοίωμα του Bertrand. Υπάρχουν φυσικά και μεγαλύτερα προσομοιώματα. Μια επέκταση του προηγούμενου δίνεται από τον Von Stackelberg. Εδώ θεωρείται ότι μια εταιρία είναι «αρχηγός» και συνεπώς γνωρίζει με ποιον τρόπο θα ενεργήσουν όλες οι άλλες εταιρίες, στο πνεύμα του Bertrand. Ο αρχηγός μπορεί να βελτιστοποιήσει τις ποσότητές του, χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία ούτως ώστε να πετύχει μια διαφορετική λύση. Αυτή η εναλλακτική ανάλυση δεν είναι γνωστή ως ένα πρόβλημα συμπληρωματικότητας, αλλά είναι ένα παράδειγμα MPEC.

Στη βιβλιογραφία της θεωρίας παιγνίων, είναι πολύ γνωστοί αλγόριθμοι για την εύρεση σημείων ισορροπίας σε ανταγωνιστικά παίγνια δύο παικτών. Τώρα θα περιγραφεί μια επέκταση η παικτών στα παίγνια 2 παικτών. Έστω ότι οι παίκτες ταξινομούνται ως $j \in N \equiv \{1, 2, \dots, n\}$. Για λόγους απλότητας, θα θεωρηθεί ότι κάθε παίκτης έχει μια επιλογή καθαρής στρατηγικής από ένα σετ $P = \{1, 2, \dots, m\}$. Ένα «προφίλ στρατηγικής» s είναι ένα διάνυσμα n του οποίου το j στοιχείο είναι ένα στοιχείο P το οποίο αντιστοιχεί σε μια καθαρή στρατηγική που αντιστοιχεί στον παίκτη j . Το αντάλλαγμα του παίκτη j που προκύπτει από αυτό το στρατηγικό προφίλ s είναι A_{js} . Στο παιχνίδι, ο παίκτης j , επιλέγει ένα διάνυσμα πιθανότητας p_i^j , που αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να παίξει την καθαρή στρατηγική i στο σημείο ισορροπίας. Ξεκάθαρα:

$$p_i^j \geq 0 \quad \forall i \in P, j \in N, \quad \sum_{i \in P} p_i^j = 1 \quad \forall j \in N \quad (\text{Π2.30})$$

Τώρα θα εισαχθούν επιπλέον συμβολισμοί. Έστω ότι το p^{-j} αντιπροσωπεύει το διάνυσμα $(n-1) \times m$ $(p^1, \dots, p^{j-1}, p^{j+1}, \dots, p^n)$ και το i (j, s) συμβολίζει την καθαρή στρατηγική που αντιστοιχεί στον παίκτη j στο στρατηγικό προφίλ s . Το αναμενόμενο αντάλλαγμα για τον παίκτη j δίνεται από:

$$u_j(p) \equiv \sum_{i \in P} A_{js} p(s) \quad (\text{Π2.31})$$

Όπου $p(s)$ είναι η πιθανότητα να επιλεγθεί το στρατηγικό προφίλ s και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας:

$$p(s) = \prod_{k \in N} p_i^k(k, s) \quad (\text{Π2.32})$$

Εφόσον το παίγνιο έχει πεπερασμένο μέγεθος, η σύνοψη στο αναμενόμενο αντάλλαγμα μπορεί να αναδιαταχθεί:

$$u_j(p) = \sum_{i \in P} p_i^j x_i^j(p^{-j}) \quad (\text{Π2.33})$$

Όπου:

$$x_i^j(p^{-j}) \equiv \sum_{s: i(j,s)=i} A_{js} \prod_{k \in N \setminus \{j\}} p_i^k(k, s) \quad (\text{Π2.34})$$

Η μη γραμμική συνάρτηση x_i αντιπροσωπεύει το αναμενόμενο αντάλλαγμα του παίκτη j χρησιμοποιώντας την καθαρή στρατηγική I , υπό την προϋπόθεση ότι και οι άλλοι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές που δίνονται από p^{-j} . Τα στρατηγικά σετ είναι απλοποιημένες μονάδες $X^j = \{p \in \mathfrak{R}^m : p \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$. Το σημείο ισορροπίας κατά Nash που προκύπτει είναι το πρόβλημα εύρεσης τέτοιου $\bar{p} = (\bar{p}^{-1}, \dots, \bar{p}^{-n})$ ώστε για κάθε $j \in N$:

$$\bar{p}^j \in X^j, \sum_{i \in P} p_i^j x_i^j(\bar{p}^{-j}) \quad \forall p^j \in X^j \quad (\text{Π2.35})$$

Είναι ξεκάθαρο ότι αυτό είναι μια παραμετρική ανισότητα (VI: $F, \prod_{j \in N} X^j$), με:

$$F_i^j(p) \equiv -x_i^j(p^{-j}) \quad (\text{Π2.36})$$

Η ισοδυναμία που δίνεται στο παράρτημα 1, επιτρέπει σε αυτό το πρόβλημα να ξαναδιατυπωθεί ως ένα πρόβλημα συμπληρωματικότητας, όπου τα μητρώα A και b έχουν επιλεγθεί για να αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς $\sum_{i \in P} p_i^j = 1$.

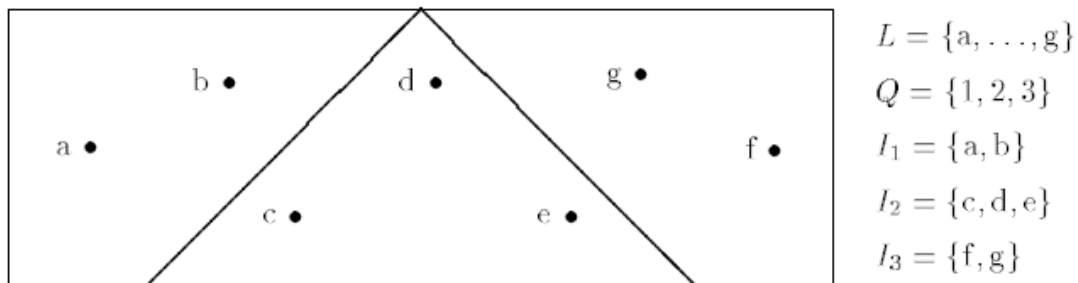
Π2.2.2 Χωρική ισορροπία τιμών

Μερικά μοντέλα βασίζονται σε μια χωρική δομή καθώς και στην ανταγωνιστική δομή της αγοράς, και συνήθως ορίζονται ως χωρικά σημεία ισορροπίας τιμών. Μερικά από αυτά τα μοντέλα βασίζονται στο πλαίσιο των γενικών σημείων ισορροπίας. Άλλα ακολουθούν το πλαίσιο των σημείων ισορροπίας του Nash.

Σε μία δημοσίευσή του ο Harker δίνει έναν αριθμό από μοντέλα που περιγράφουν τη χωρική και ανταγωνιστική δομή των αγορών που είναι μέλη ενός δικτύου (όπως αυτά που περιγράφονται στην ενότητα με το κυκλοφοριακό πρόβλημα). Κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει ένα σημείο ή μέλος, που διαχωρίζεται χωρικά από τα υπόλοιπα. Μία ανταγωνιστική δομή που μοντελοποιείται είναι ένα ολιγοπώλιο, μια κατάσταση αγοράς στην οποία λίγοι παραγωγοί (ή εταιρίες) ελέγχουν τις διανομές και τη ζήτηση ενός μεγάλου αριθμού αγοραστών. Στο ακόλουθο παράδειγμα, κάθε εταιρία $q \in Q$ προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος που σχετίζεται με την

παραγωγή μιας μεμονωμένης υπηρεσίας σε όλες τις εταιρίες. Καθορίζονται οι ακόλουθες ποσότητες (σχήμα Π2.3):

- L : σετ συγκεκριμένων παραγωγικών μονάδων ή σημείων
 $W \subseteq L \times L$: σετ τόξων μεταφοράς μεταξύ των σημείων του L
 $I_q \subseteq L$: σετ σημείων που ελέγχονται από μια εταιρία $q \in Q$. Το σετ των σημείων L διαχωρίζεται από τα σετ $I_q, q \in Q$
 $s_l, l \in L$: ποσότητα μιας υπηρεσίας που παράγεται στο σημείο l
 $C_l(s_l)$: συνολικό κόστος παραγωγής s_l μονάδων στο σημείο l
 $f_a, a \in W$: κόστος μεταφοράς μονάδας στο επίπεδο f_a
 d_{lq} : ποσότητα υπηρεσίας που παράγεται από μια εταιρία q και διανέμεται στο σημείο l
 $\theta_l(\sum_{q \in Q} d_{lq})$: τιμή αγοράς που ορίζεται από τη συνολική διανομή στο σημείο l (ανάστροφη συνάρτηση ζήτησης)



ΣΧΗΜΑ Π2.3 Οκτώ σημεία που διαχωρίζονται μεταξύ 3 παραγωγών

Θα θεωρηθεί ότι κάθε εταιρία q δρα κατά τον τρόπο του Nash όταν λαμβάνει αποφάσεις που αφορούν τα s, d και f . Η συνάθροιση αυτών των μεταβλητών είναι το διάνυσμα στρατηγικής της εταιρίας q : x^q . Οι περιορισμοί του x^q είναι αυτοί που θα εξασφαλίζουν τη διατήρηση της ροής σε κάθε σημείο. Οι περιορισμοί για τα σημεία τα οποία ελέγχει η εταιρία q , είναι πιο περίπλοκοι από αυτούς για τα σημεία εκτός του ελέγχου της εταιρίας q . Οι μεταβλητές τροφοδοσίας, διανομής και μεταφοράς υπόκεινται σε άνω και κάτω όρια, τα οποία είναι 0 και $+\infty$ αντίστοιχα. Γι' αυτό, το σετ των x^q εφικτών στρατηγικών για την εταιρία q είναι:

$$X^q = \left\{ x^q : \begin{cases} x^q = (s_l, d_{lq}, f_{ij}) \geq 0 & \forall l \in I_q, j \in L \\ d_{lq} + \sum_{j \in L} f_{jl} = s_l + \sum_{i \in I_q} f_{il} & \forall l \in I_q \\ d_{lq} = \sum_{i \in I_q} f_{il} & \forall l \in L \setminus I_q \end{cases} \right. \quad (\text{Π2.37})$$

Έστω ότι $X \equiv \prod_{q \in Q} X^q$ τέτοιο ώστε $x \in X$ είναι μια εφικτή στρατηγική για όλες τις εταιρίες. Το κέρδος της εταιρίας q δίνεται από τη συνάρτηση π_q :

$$\pi_q(x) \equiv \sum_{l \in L} \theta_l \left(\sum_{j \in L} f_{jl} \right) d_{lq} - \sum_{i \in I_q} C_i(s_i) - \sum_{i \in I_q} \sum_{j \in L} c_{ij}(f_{ij}) f_{ij} \quad (\text{Π2.38})$$

Γι' αυτό, μια εταιρία q επιθυμεί να βρει μια στρατηγική x^q η οποία να μεγιστοποιεί την $\pi_q(x)$ υπό την προϋπόθεση ότι όλες οι άλλες εταιρίες κρατούν τις στρατηγικές τους σταθερές στο \bar{x}_p . Εάν το θ_l αυξάνει, το C_l είναι κοίλο. Όπως και

στο μοντέλο του Nash, μια χωρική ισορροπία τιμών είναι ένα διάνυσμα $\bar{x} \in X$ που ικανοποιεί:

$$\sum_{q \in Q} \nabla \pi_q(\bar{x})^T (x^q - \bar{x}^q) \geq 0 \quad \forall x \in X \quad (\text{Π2.39})$$

Αυτή η παραμετρική ανισότητα μετατρέπεται εύκολα σε ένα πρόβλημα συμπληρωματικότητας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του παραρτήματος 1. Για αυτό το πρόβλημα υπάρχει διαθέσιμο και ένα προσομοίωμα στο λογισμικό GAMS.

Σε μία δημοσίευσή του ο Tobin περιγράφει τη χωρική ισορροπία τιμών σε μια αγορά με πολλά προϊόντα ως ένα προσομοίωμα δικτύου. Σε αυτό το παράδειγμα, οι μεταβλητές είναι οι τιμές στους διάφορους κόμβους του δικτύου. Αυτές οι τιμές καθορίζουν την τροφοδοσία και τη ζήτηση, και όχι αντίστροφα, όπως στο μοντέλο του Harker. Επιπλέον, θεωρείται ότι υπάρχει απόλυτος ανταγωνισμός, και όχι μια συμπεριφορά κατά Nash.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΟΡΩΝ

Πίνακας συμβόλων 1^{ου} κεφαλαίου

<u>Σύμβολο</u>	<u>Επεξήγηση</u>
f	Τάση χάλυβα
f _e	Ελαστική τάση χάλυβα
ε	Παραμόρφωση χάλυβα
ε _e	Ελαστική παραμόρφωση χάλυβα
ε _γ	Παραμόρφωση διαρροής χάλυβα
f _u	Οριακή τάση χάλυβα
M _γ	Ροπή διαρροής
κ _γ	Καμπυλότητα διαρροής
M _p	Πλαστική ροπή αντοχής
φ	Συντελεστής ικανότητας
(M [*])	Ροπή σχεδιασμού ελαστικής ανάλυσης
φM _s	Καμπτική ικανότητα σχεδιασμού

Πίνακας συμβόλων 2^{ου} κεφαλαίου

<u>Σύμβολο</u>	<u>Επεξήγηση</u>
a	Φορτιστικός συντελεστής
f	Διάνυσμα ασκούμενων στο φορέα φορτίων
p=af	Ισοδύναμο διάνυσμα φόρτισης
j	Κόμβος αρχής στοιχείου
k	Κόμβος τέλους στοιχείου
i	Αριθμός στοιχείου
s ⁱ	Διάνυσμα αδιάστατων γενικευμένων δυνάμεων
s ¹ , s ² , s ³	Γενικευμένες δυνάμεις (αξονική, ροπή αρχής, τέλους)
n _j	Αξονική δύναμη μέλους
N _p	Καθαρά αξονική πλαστική αντοχή μέλους
m _j	Καμπτική ροπή αρχής μέλους
m _k	Καμπτική ροπή τέλους μέλους
L ⁱ	Μήκος στοιχείου
θ	Γωνία κατεύθυνσης στοιχείου
p ⁱ	Διάνυσμα αναλογιών ασκούμενων φορτίων
B ⁱ	Μητρώο ισορροπίας στοιχείου
B	Μητρώο ισορροπίας κατασκευής
s	Διάνυσμα γενικευμένων τάσεων κατασκευής
d	Πλήθος βαθμών ελευθερίας
M	Πλήθος μελών φορέα
[B ^m _{ij}]	Συντελεστές στοιχείου που συμβάλλουν στο συνολικό μητρώο ισορροπίας
B _{ij} = ∑ _{m=1} ^M B ^m _{ij}	Μητρώο ισορροπίας κατασκευής (συμβολισμός με δείκτες)
s _{1u} / s _{2u}	Ικανότητες διαρροής αξονικής και ροπής

$\left(l_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, m_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$	Συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο 1 της επιφάνειας διαρροής
$\left(l_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}, m_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$	Συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο 2 της επιφάνειας διαρροής
r_{j1}^i	Απόσταση επιπέδου 1 από το κέντρο της επιφάνειας διαρροής
r_{j2}^i	Απόσταση επιπέδου 2 από το κέντρο της επιφάνειας διαρροής
OS	Επίπεδο έντασης
(a,b)	Συντεταγμένες επιπέδου έντασης
OB	Προβολή του επιπέδου έντασης OS στο OH
OH	Απόσταση του κέντρου από την ευθεία του συνόρου της επιφάνειας διαρροής
(cosβ, sinβ)	Συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο
N_j^i	Διάνυσμα συνθηκών διαρροής στην αρχή j του στοιχείου i
N	Διάνυσμα συνθηκών διαρροής φορέα
γ	Αριθμός επιπέδων γραμμικοποιημένης επιφάνειας διαρροής
diag	Διαγώνια παράθεση μητρώων
z	Διάνυσμα πλαστικών πολλαπλασιαστών
u	Διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων
a_k	Κινηματικά αποδεκτός φορτιστικός συντελεστής
$\delta_j, \varphi_j, \varphi_k$	Κύριες μετακινήσεις μέλους: αξονική παραμόρφωση, στροφή αρχής και τέλους μέλους
$[E]^T$	Διάνυσμα αδιάστατων συντελεστών παραμόρφωσης
E	Μέτρο ελαστικότητας υλικού
I	Ροπή αδρανείας μέλους
A	Εμβαδό διατομής μέλους
$[D]$	Ασύζευκτο μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου (3x3)
$\{\delta\}$	Διάνυσμα μετατοπίσεων
u_j, v_j, θ_j	Μετακινήσεις κόμβου αρχής μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων
\bar{u}	Διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων
$\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{\theta}_j$	Μετακινήσεις κόμβου αρχής μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων
$[T]$	Μητρώο διεύθυνσης στοιχείου
$[k]$	Μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου στο καθολικό σύστημα αξόνων
λ	Συντελεστής κατάρρευσης
LINPROG	Ρουτίνα γραμμικού προγραμματισμού στη Matlab
«.m»	Συμβολισμός αρχείου δεδομένων
LP	Γραμμικός προγραμματισμός (linear programming)
alpha	Βέλτιστος φορτιστικός συντελεστής
s alpha	Διάνυσμα όλων των μεταβλητών στη θέση βελτίστου
lambda	Δυϊκό βέλτιστο ή οι τιμές πολλαπλασιαστών Lagrange

spy	Εντολή ελέγχου μητρώων στη Matlab
EI	Αριθμός στοιχείου στη Matlab
dof	Αριθμός βαθμού ελευθερίας (degree of freedom)
v	Οριζόντια μετακίνηση κόμβου τελευταίου ορόφου (σε αριθμητικά παραδείγματα)
UC,UB,WC,SHS	Κατηγορίες διατομών αμερικάνικων κανονισμών
input	Αρχείο δεδομένων
output	Αρχείο αποτελεσμάτων

Πίνακας συμβόλων 3^{ου} κεφαλαίου

<u>Σύμβολο</u>	<u>Επεξήγηση</u>
LCP	Γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (linear complementarity problem)
QP	Δευτεροβάθμιος ή τετραγωνικός προγραμματισμός (quadratic programming)
bimatrix games	Παίγνια δύο παικτών
optimization	Βελτιστοποίηση
M	Τετραγωνικό μητρώο σε ένα LCP
n	Διαστάσεις M
q	Διάνυσμα σε ένα LCP
$w_1 \dots w_n, z_1 \dots z_n$	Μεταβλητές προβλήματος LCP
\mathfrak{R}^n	Χώρος n διαστάσεων
$y^r = [y_1^r, y_2^r, \dots, y_n^r] \in (w_j, z_j)$	Διανύσματα q ενός LCP n διαστάσεων
B_r	Τετραγωνικό μητρώο που συλλέγει τα μητρώα M σε ένα LCP διαστάσεων n
Simplex	Μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού
C(M)	Τάξη συμπληρωματικού κώνου
I.j-M.j	j συμπληρωματικό ζεύγος διανυσμάτων
A.j	Διάνυσμα ζεύγους I.j-M.j
(A.1, ..., A.n)	Συμπληρωματικό σετ διανυσμάτων
Pos	Κώνος συμπληρωματικότητας
\bar{y}^r	Εφικτή λύση γραμμικού συστήματος
$x_j \geq l_j$	Μεταβλητή με κάτω όριο
$y_j \geq 0$	Συμπλήρωμα μεταβλητής
A	Μητρώο διαστάσεων mxN
v	Μη αρνητικά πλεονάσματα
m	Αριθμός v πλεονασμάτων και πλήθος δυικών μεταβλητών
y	Δυικές μεταβλητές
N	Πλήθος μη αρνητικών ελλειμμάτων
Q(x)	Αντικειμενική συνάρτηση του δευτεροβάθμιου προγραμματισμού
D	Συμμετρικό μητρώο διαστάσεων nxn στον δευτεροβάθμιο προγραμματισμό
c	Διάνυσμα κόστους
L(x,y,u)	Συνάρτηση Lagrange
KKT	Συνθήκες Karush Kuhn Tucker

softening	Χαλάρωση υλικού
bifurcation	Διχοτόμηση λύσης
P	Διάνυσμα φόρτισης
u	Διάνυσμα παραμέτρων μετατόπισης
q	Διάνυσμα γενικευμένων παραμορφώσεων
e	Ελαστικές παραμορφώσεις
p	Πλαστικές παραμορφώσεις
S	Ασύζευκτο μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου (στο κεφάλαιο 1 ορίζεται ως D)
w	Εξισώσεις διαρροής
NCP	Μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (Non linear complementarity problem)
H	Μητρώο χαλάρωσης ή κράτυνσης (hardening/softening matrix)
$h_1 (> 0)$	Κλίση κλάδου κράτυνσης
$\hat{h}_2, \hat{h}_3, \hat{h}_4$	Κλίσεις διαδοχικών κλάδων χαλάρωσης
$h_2, h_3, h_4,$	Πραγματικές κλίσεις κλάδων χαλάρωσης
$r_2 < s^i < 0$	Επίπεδο γενικευμένης έντασης
$F(s^i, z^i)$	Εξίσωση καμπύλης κράτυνσης - χαλάρωσης

Πίνακας συμβόλων 4^{ου} κεφαλαίου

<u>Σύμβολο</u>	<u>Επεξήγηση</u>
holonomic	Ολόνομη συμπεριφορά
Non holonomic	Μη ολόνομη συμπεριφορά
Lemke	Αλγόριθμος κεντρικού σημείου για επίλυση LCP
GAMS/PATH	Λογισμικό επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού
MCP	Μεικτό πρόβλημα συμπληρωματικότητας (mixed complementarity problem)
r_r	Επίπεδο έντασης
N_{1j}, N_{2j}	Κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια διαρροής
a_j	Μέγεθος κλίμακας πλαστικού πολλαπλασιαστή
p_c	Κρίσιμη πλαστική παραμόρφωση
p_{cj}	Πραγματικές τιμές πλαστικών παραμορφώσεων
γ	Εσωτερική γωνία επιφάνειας διαρροής
h	Βοηθητική μεταβλητή στο μητρώο χαλάρωσης
\tilde{h}	Βοηθητική μεταβλητή μητρώου περιορισμών N
s_{2r}	Απομένουσα ροπή χαλάρωσης
p_2^i	Πλαστική στροφή χαλάρωσης
h_j	Κλίση διαγράμματος χαλάρωσης
f_d	Σταθερά επικόμβια φορτία (fixed loads)
\dot{p}	Μεταβολή πλαστικών παραμορφώσεων
$\dot{z} \in \mathcal{R}^Y$	Ρυθμός μεταβολής πλαστικών πολλαπλασιαστών
$r \in \mathcal{R}^Y$	Διάνυσμα ορίων διαρροής
$\bar{\Sigma}$	Γνωστό επίπεδο έντασης

$(\bar{s}, \bar{u}, \bar{z}, \bar{w}, \bar{a})$	Ποσότητες στο γνωστό επίπεδο έντασης
$\Delta s, \Delta u, \Delta z$	Μεταβολές στις μεταβλητές απόκρισης
Σ	Άγνωστο επίπεδο έντασης
$\Delta a, \Delta q, \Delta e, \Delta p$	Τιμές επαυξητικού βήματος i
K	Ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας φορέα
b	Βοηθητικό διάνυσμα προβλήματος MCP
A, Z, c	Βοηθητικά μητρώα προβλήματος MCP
$\{p\}$	Μη ενεργό σετ εξισώσεων διαρροής
$\{a\}$	Μη αντιστρέψιμη κατηγορία ενεργού σετ εξισώσεων διαρροής
$\{b\}$	Αντιστρέψιμη κατηγορία ενεργού σετ εξισώσεων διαρροής
Δt	Χρονικό βήμα
$\Delta z_a, \Delta w_a, b_a$	Ποσότητες που αναφέρονται στη μη αντιστρέψιμη κατηγορία του ενεργού σετ εξισώσεων διαρροής
$\Delta z_b, \Delta w_b, b_b$	Ποσότητες που αναφέρονται στην αντιστρέψιμη κατηγορία του ενεργού σετ εξισώσεων διαρροής
$A_{aa}, A_{ab}, A_{bb}, A_{ba}, A_{pa}, A_{pb}$	Υπομητρώα του A
w_p, b_p	Ποσότητες που αναφέρονται στο μη ενεργό σετ εξισώσεων διαρροής
\bar{w}_p	Παθητικό σετ εξισώσεων διαρροής γνωστού επαυξητικού βήματος
$\dot{a} = 1$ και $\dot{a} = -1$	Ρυθμός μεταβολής φορτιστικού συντελεστή
$\Delta t_1, \Delta t_2$	Κατηγορίες χρονικών βημάτων
A'_{aa}, b'_a	Μετασχηματισμοί μητρώων και διανυσμάτων για μετατροπή MCP σε LCP
Z_0	Αρχική εκτίμηση λύσεων z

Πίνακας συμβόλων 5^{ου} κεφαλαίου

Σύμβολο	Επεξήγηση
$K_g^i \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$	Γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου
π_f^i	Πρόσθετη (πλασματική) δύναμη
δ_f^i	Πρόσθετη (πλασματική) μετατόπιση
B_0^i	Μητρώο ισορροπίας μέλους
B_f^i	Πρόσθετο μητρώο ισορροπίας μέλους
S_g^i	Γεωμετρικό ασύζευκτο μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου
$S_0^i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$	Ασύζευκτο μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Κουμούσης Β. , 1998, «Βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών», σημειώσεις μαθήματος.
- [2] Σπηλιόπουλος Κ. Β., 2007, «Προχωρημένη ανελαστική ανάλυση ραβδωτών φορέων», σημειώσεις μαθήματος.
- [3] M. Bill Wong 2009, «Plastic analysis and design of steel structures”, Department of civil engineering Monash university, Australia
- [4] Kata Murty 1985, “Linear complementarity problem, its geometry and applications”,
- [5] Ikuyo Kaneko, Giulio Maier 1977, “A mathematical programming method for inelastic analysis of reinforced concrete frames”, International journal for numerical methods in engineering, Department of Industrial engineering, University of Wisconsin-Madison, USA
- [6] Ikuyo Kaneko, Giulio Maier, 1979, “Piecewise linear elastic-plastic analysis”, International journal for numerical methods in engineering, Department of Industrial engineering, University of Wisconsin-Madison, USA
- [7] F. Tin Loi, S. H. Xia, 2001, “Holonomic softening: models and analysis”, International journal of mechanics based design of structures and machines, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [8] F. Tin Loi, S. H. Xia, 2000, “Nonholonomic elastoplastic analysis involving unilateral frictionless contact as a mixed complementarity problem”, Journal of computing methods in applied mechanics engineering, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [9] F. Tin Loi, S. H. Xia, 2003, “An iterative complementarity approach for elastoplastic analysis involving frictional contact”, International Journal of Mechanical Sciences, Department of Civil and environmental engineering, Adelaide University, Australia
- [10] S. Tangaramvong, F. Tin Loi, 2006, “A complementarity approach for elastoplastic analysis of strain softening frames under combined bending and axial force”, International Journal of engineering structures, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [11] F. Tin Loi, S. Tangaramvong, S. H. Xia, 2006, “Limit analysis of frames involving unilateral supports with frictional contact”, International Journal of Mechanical Sciences, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia, International Journal of Mechanical Sciences, Department of Civil and environmental engineering, Adelaide University, Australia

- [12] S. Tangaramvong, F. Tin Loi, 2007, "Simultaneous ultimate load and deformation analysis of strain softening frames under combined stresses", International Journal of engineering structures, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [13] S. Tangaramvong, F. Tin Loi, 2010, "The influence of geometric effects on the behavior of strain softening frames", International Journal of Computer Mechanics, International Journal of engineering structures, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [14] S. Tangaramvong, F. Tin Loi, 2009, "Limit analysis of elastoplastic frames considering second order nonlinearity and displacement constraints", International Journal of Mechanical Sciences, School of civil and environmental engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia
- [15] M. C. Ferris, J. S. Pang, 2001, "Engineering and economic applications of complementarity problems", Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, Department of mathematical Sciences, The John Hopkins University, Baltimore, Maryland
- [16] Terry L. Friesz, Roger L. Tobin, Tony E. Smith, Patrick T. Harker, 1983, "A nonlinear complementarity formulation and solution procedure for the general derived demand network equilibrium problem", Journal of regional science
- [17] Carlo Cinquini, Roberto Contro, 1985, "Optimal design of beams discretized by elastic plastic finite element", International Journal of Computers and Structures
- [18] Anders Klarbring, Gunnar Bjorkamn, 1987, "A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface", International Journal of Computers and Structures, Linkoping Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, Division of solid mechanics, Linkopig, Sweden
- [19] J. A. Tomlin, 1977, "Robust implementation of Lemke's method for the linear complementarity problem", International Journal of Mathematical programming study 7, North Holland Publishing company, Stanford University, Stanford, CA, USA