



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ  
ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ  
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ Ι. ΑΡΕΤΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ι. ΜΑΡΟΥΛΑΣ

ΑΘΗΝΑ , 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ  
ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ  
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ Ι. ΑΡΕΤΑΚΗ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Ι. ΜΑΡΟΥΛΑΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. ΨΑΡΡΑΚΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ:

ΓΡ. ΚΑΛΟΓΕΡΟΠΟΥΛΟΣ, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α

Σ. ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Α. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ , 2011

*Στον παππού μου, Επαμεινώνδα*

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

*Η διατριβή αυτή (Ph.D. Thesis) εκπονήθηκε για την απόκτηση του τίτλου της Διδάκτορος και το περιεχόμενο της βασίζεται στη μελέτη και επεξεργασία σύγχρονων ερευνητικών προβλημάτων των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, στην Ανάλυση Πινάκων και γενικότερα, στη Θεωρία Τελεστών. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του Επιβλέποντος κ. Ιωάννη Μαρουλά, Καθηγητή στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Η καθοδήγησή του υπήρξε αρωγός στην ερευνητική μου δραστηριότητα, καθώς μέσω των ιδεών, προτάσεων και στοχευμένων παρατηρήσεων του συνέβαλε καθοριστικά στο να εμβαθύνω και να παρουσιάσω αρτιότερα τα ερευνητικά μου αποτελέσματα. Συγχρόνως, η υποστήριξη και ενθάρρυνση που μου παρέιχε αποτέλεσαν κινητήριο μοχλό για την επιτυχή ολοκλήρωση της διατριβής αυτής και γι' αυτόν το λόγο τον ευχαριστώ θερμά.*

*Επίσης, οφείλω ευχαριστήρια προς το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) για την υποτροφία που μου παρέιχε κατά την διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής, υποστηρίζοντας οικονομικά την έρευνά μου.*

*Εκφράζω τις ευχαριστίες μου και προς τον Καθηγητή κ. Σωτήριο Καρανάσιο του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. και τον κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Αναπληρωτή Καθηγητή της ίδιας Σχολής, για την συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.*

*Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Τομέα Μαθηματικών για το ακαδημαϊκό και ευχάριστο κλίμα συνεργασίας και για την εκπαιδευτική εμπειρία που απέκτησα διδάσκοντας τα εργαστηριακά μαθήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης II στο πλαίσιο του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. Επίσης ευχαριστώ τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τομέα Μαθηματικών και τον κ. Τύρο Κωνσταντίνο, Διδάκτορα του Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ.Π. για τις χρήσιμες και εποικοδομητικές επιστημονικές συζητήσεις.*

*Αικ. Αρετάκη.*

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ</b>	<b>12</b>
2.1	Ορισμός - Βασικές ιδιότητες . . . . .	12
2.2	Εναλλακτικές ισότητες του $\Lambda_k(A)$ . . . . .	15
2.3	Ιδιότητες των $r_k(A)$ και $\tilde{r}_k(A)$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</b>	<b>23</b>
3.1	Perron-Frobenius θεωρία . . . . .	23
3.2	Γενίκευση στο $\Lambda_k(A)$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</b>	<b>34</b>
4.1	Ορισμός - Γεωμετρικές ιδιότητες . . . . .	34
4.2	Γωνιακά σημεία . . . . .	46
4.3	Σύνδεση μεταξύ των $\Lambda_k(L(\lambda))$ και $\Lambda_k(\mathbf{A})$ . . . . .	49
4.4	Εφαρμογή της θεωρίας Perron-Frobenius . . . . .	52
<b>5</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</b>	<b>56</b>
5.1	Ορισμός - Βασικές ιδιότητες . . . . .	56
5.2	$q$ -Αριθμητικό πεδίο . . . . .	64
	<b>ABSTRACT OF Ph.D. THESIS</b>	<b>70</b>
	<b>BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>78</b>

# Κεφάλαιο 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην κβαντική πληροφορική, εφαρμόζονται οι κβαντομηχανικές ιδιότητες της ύλης για την αναπαράσταση και τη δόμηση δεδομένων και δημιουργούνται διαδικασίες βασισμένες στην κβαντομηχανική για την επεξεργασία των δεδομένων. Ο κβαντικός υπολογιστής επεξεργάζεται τα δεδομένα, στον οποίο οι στοιχειώδεις μονάδες πληροφορίας είναι τα **κβαντικά ψηφία**, τα λεγόμενα **qubits**.

Από την Μαθηματική πλευρά, ένα qubit αναπαρίσταται από την  $2 \times 2$  ορθογώνια προβολή  $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}$ , όπου  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Μια **κατάσταση (state)** από  $k$ -qubits  $Q_1, \dots, Q_k$  αντιπροσωπεύεται από το ταυστικό γινόμενο  $Q_1 \otimes \dots \otimes Q_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , όπου  $n = 2k$  και  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  είναι η άλγεβρα των  $n \times n$  μιγαδικών πινάκων.

Επιπλέον, η κατάσταση με τα  $k$ -qubits κωδικοποιείται σε μια κατάσταση από  $N$ -qubits, μεταδίδεται μέσω ενός κβαντικού καναλιού και αποκωδικοποιείται σωστά όταν δεν υπάρχουν σφάλματα. Στο κβαντικό κανάλι με καταστάσεις από  $N$ -qubits αντιστοιχεί μια πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ , με  $n = 2N$ , η οποία διατηρεί αναλλοίωτο το ίχνος του αντίστοιχου πίνακα. Σύμφωνα με τον M.D. Choi [8], σε κάθε πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση  $\mathcal{E}$  υπάρχουν πίνακες  $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}_n$  τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^m E_j^* E_j = I_n \quad \text{και} \quad \mathcal{E}(A) = \sum_{j=1}^m E_j A E_j^*.$$

Οι πίνακες  $E_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) είναι γνωστοί ως *πίνακες σφαλμάτων*.

Έστω  $\mathcal{V}$  ένας  $k$ -διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathbb{C}^n$  και  $P_{\mathcal{V}}$  μια ορθογώ-

για προβολή του  $\mathbb{C}^n$  επί του  $\mathcal{V}$ . Ο χώρος  $\mathcal{V}$  είναι κβαντικός κώδικας διόρθωσης σφαλμάτων (quantum error correcting code) για το κανάλι  $\mathcal{E}$ , αν υπάρχει ένα άλλο κβαντικό κανάλι  $\mathcal{R} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$  τέτοιο ώστε

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{E})(A) = A,$$

για κάθε  $A \in P_{\mathcal{V}}\mathcal{M}_n P_{\mathcal{V}}$ . Οι E. Knill και R. Laflamme [28], απέδειξαν ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί  $\gamma_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  τέτοιοι ώστε

$$P_{\mathcal{V}}E_i^*E_jP_{\mathcal{V}} = \gamma_{ij}P_{\mathcal{V}}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m. \quad (1.1)$$

Για θετικό ακέραιο  $k \geq 1$ , τα παραπάνω αποτελέσματα οδήγησαν στον ορισμό του **k-βαθμού αριθμητικού πεδίου**  $\Lambda_k(A)$  του  $n \times n$  μιγαδικού πίνακα  $A$ , ως το σύνολο

$$\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k\},$$

όπου  $\mathcal{P}_k$  συμβολίζει το σύνολο όλων των ορθογωνίων προβολών  $P$  του  $\mathbb{C}^n$  επί οποιουδήποτε  $k$ -διάστατου υποχώρου  $\mathcal{K}$  του  $\mathbb{C}^n$ . Ισοδύναμα,  $\lambda \in \Lambda_k(A)$  ακριβώς όταν ο  $k \times k$  βαθμωτός πίνακας  $\lambda I_k$  αποτελεί «συστολή» του πίνακα  $A$  σ' έναν  $k$ -διάστατο υπόχωρο, δηλαδή ο πίνακας  $A$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον  $2 \times 2$  σύνθετο πίνακα της μορφής  $\begin{bmatrix} \lambda I_k & B \\ C & D \end{bmatrix}$ .

Η έννοια του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου παρουσιάστηκε το 2006 και συνεχίζει έως και σήμερα να προσελκύει την ερευνητική κοινότητα. Αναπτύχθηκε, αρχικά, από τους M.D. Choi, M. Giesinger, J.A. Holbrook, D.W. Kribs και K. Życzkowski στις εργασίες τους [9, 10, 11, 12], καθώς και από άλλους ερευνητές [17, 36, 37, 39, 59]. Ο H.J. Woerdeman στην εργασία του [59] το 2007 απέδειξε την κυρτότητα του συνόλου  $\Lambda_k(A)$ , την οποία επαλήθευσαν και οι C.K. Li και N.S. Sze ένα χρόνο αργότερα στην εργασία τους [39]. Ιδιαίτερης προσοχής είναι το γεγονός ότι για κάποιο δείκτη  $k \leq n$ , ενδέχεται  $\Lambda_k(A) = \emptyset$ . Οι C.K. Li, Y.T. Poon και N.S. Sze [37] απέδειξαν ότι  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$  ακριβώς όταν  $n \geq 3k - 2$ .

Για  $k = 1$ , το  $\Lambda_k(A)$  ταυτίζεται με το κλασικό **αριθμητικό πεδίο** [19, 21, 23, 27]

$$\Lambda_1(A) \equiv F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\},$$

το οποίο είναι ο περιορισμός της Ευκλείδιας μοναδιαίας σφαίρας  $\mathcal{S}_n = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\|_2 = 1\}$ , στο μιγαδικό επίπεδο μέσω της συνεχούς απεικόνισης  $f(x) = \langle Ax, x \rangle =$

$x^*Ax$ . Για το λόγο αυτό,  $F(A)$  είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο. Αξιοσημείωτο είναι ότι  $\Lambda_1(A)$  είναι και κυρτό σύνολο, όπως απέδειξαν ο Toeplitz το 1918 και ο Hausdorff το 1919 στις εργασίες τους [57] και [20], αντίστοιχα, και περιλαμβάνει το φάσμα  $\sigma(A)$  του πίνακα  $A$ , δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$  του  $A$ . Από το αριθμητικό πεδίο αντλούμε χρήσιμες πληροφορίες για τον πίνακα και τις ιδιότητές του, που μας οδηγούν σε εφαρμογές επί της Θεωρίας Διαταραχών [26, 55]. Μεταξύ των ανωτέρου βαθμού αριθμητικών πεδίων ισχύει η σχέση εγκλεισμού

$$\Lambda_1(A) \supseteq \Lambda_2(A) \supseteq \dots \supseteq \Lambda_k(A).$$

Παράλληλα με το  $\Lambda_k(A)$ , ορίζονται η **εξωτερική  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα**,

$$r_k(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \partial\Lambda_k(A)\},$$

καθώς και η **εσωτερική  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα**,

$$\tilde{r}_k(A) = \min \{|\lambda| : \lambda \in \partial\Lambda_k(A)\},$$

οι οποίες αποτελούν τις ακτίνες του μικρότερου κυκλικού δακτυλίου με κέντρο την αρχή που περιέχει το  $\Lambda_k(A)$ . Για  $k = 1$ , οδηγούμαστε στις αριθμητικές ακτίνες του κλασικού αριθμητικού πεδίου,

$$r(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \partial F(A)\} \quad \text{και} \quad \tilde{r}(A) = \min \{|\lambda| : \lambda \in \partial F(A)\},$$

αντίστοιχα. Η αριθμητική ακτίνα συναντάται ως δείκτης του ρυθμού σύγκλισης διαφορών επαναληπτικών μεθόδων και χρησιμεύει σε θέματα ευστάθειας γενικευμένων ιδιοπροβλημάτων και δυναμικών συστημάτων [3, 23].

Σημαντική γενίκευση του  $\Lambda_k(A)$  ενός πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  αποτελεί το **σύνθετο  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο** [36, 38]

$$\Lambda_k(\mathbf{A}) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m : PA_iP = \lambda_iP \text{ για κάθε } i = 1, \dots, m, \text{ με } P \in \mathcal{P}_k\},$$

όπου  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$  είναι μια  $m$ -άδα πινάκων  $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , για  $i = 1, \dots, m$ . Συνεπώς, αν  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_k(\mathbf{A})$ , τότε  $\lambda_j \in \Lambda_k(A_j)$ , για κάθε  $j = 1, \dots, m$  και σύμφωνα με τη σχέση (1.1), για το κβαντικό κανάλι  $\mathcal{E}$ , με πίνακες σφαλμάτων  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , υπάρχει  $k$ -διάστατος κβαντικός κώδικας διόρθωσης σφαλμάτων αν και μόνο αν

$$\Lambda_k(E_1^*E_1, \dots, E_m^*E_m) \neq \emptyset.$$



Προφανώς, όταν  $k = 1$ , το  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  ισούται με το **σύνθετο αριθμητικό πεδίο**

$$w(\mathbf{A}) = \{(x^* A_1 x, \dots, x^* A_m x) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}. \quad (1.2)$$

Το  $w(\mathbf{A})$  είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο, ως συνεχής εικόνα της μοναδιαίας σφαίρας  $\mathcal{S}_n$  στον  $\mathbb{C}^m$ , ενώ δεν είναι απαραίτητα κυρτό, όπως διαπιστώνεται από τους P. Binding και C.K. Li [4]. Σημειώνουμε ότι για κάθε πίνακα  $A$ , ισχύει

$$w\left(\frac{A + A^*}{2}, \frac{A - A^*}{2i}\right) = F(A).$$

Το σύνθετο αριθμητικό πεδίο του συνόλου πινάκων  $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$  συνδέεται και με το αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα με συντελεστές τους πίνακες αυτούς. Έστω, λοιπόν, ο πολυωνυμικός πίνακας [18, 42]

$$L(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0,$$

που αντιστοιχεί στην  $(m+1)$ -άδα  $n \times n$  μιγαδικών πινάκων  $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m)$  και  $A_m \neq 0$ , τότε ως **αριθμητικό πεδίο του  $L(\lambda)$**  ορίζεται το σύνολο

$$w(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x^* L(\lambda) x = 0 \text{ για κάποια } x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}$$

και από την (1.2), επισημαίνουμε

$$w(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle u, (1, \lambda, \dots, \lambda^m) \rangle = 0 \text{ για κάποια } u \in w(\mathbf{A})\}. \quad (1.3)$$

Το  $w(L(\lambda))$  παρουσιάστηκε από τους C.K. Li και L. Rodman [34] και στη συνέχεια, μελετήθηκε εκτενώς από τους M. Αδάμ, I. Μαρουλά και Π. Ψαρράκο στις εργασίες [1, 44, 45, 50], καθόσον οι πολυωνυμικοί πίνακες αποτελούν χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε προβλήματα της υπολογιστικής χημείας και της μοριακής βιολογίας [15, 18].

Στα παραπάνω, το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  ενός πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  ορίστηκε στην περίπτωση της μοναδιαίας σφαίρας του διαχωρίσιμου χώρου Hilbert  $\mathbb{C}^n$  εφοδιασμένου με την Ευκλείδεια νόρμα  $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Πέρα από το χώρο Hilbert, το αριθμητικό πεδίο γενικεύεται τόσο σε ένα χώρο όσο και σε μία άλγεβρα Banach ως προς οποιαδήποτε νόρμα. Η γενίκευση αυτή στηρίζεται στην εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach, σύμφωνα με το οποίο, για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα  $x$  που ανήκει σ' έναν γραμμικό χώρο  $\mathcal{X}$  με νόρμα  $\|\cdot\|$ , υπάρχει ένα γραμμικό

συναρτησιακό  $f$  στο δυϊκό χώρο  $\mathcal{X}^*$  τέτοιο ώστε  $\|f\| = 1$  και  $f(x) = \|x\|$ . Συνεπώς, αν  $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$  με αυθαίρετη νόρμα  $\|\cdot\|$ , έχουμε ότι  $\mathcal{X}^* = \mathbb{C}^n$  με τη δυϊκή νόρμα  $\|y^*\| = \sup\{|y^*x| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ , για οποιοδήποτε  $y \in \mathbb{C}^n$ . Τότε ορίζεται ως **χωρικό αριθμητικό πεδίο** ή **πεδίο τιμών Bauer** το σύνολο

$$W(A) = \{y^*Ax : x, y \in \mathbb{C}^n, \text{ με } \|x\| = \|y^*\| = y^*x = 1\},$$

το οποίο εν γένει δεν είναι κυρτό, ούτε κλειστό και όταν  $\|x\| = \|x\|_2$ , ταυτίζεται με το  $F(A)$  [5, 6, 19, 40, 49, 54, 60].

Από την άλλη μεριά, θεωρούμε την άλγεβρα των πινάκων  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  εφοδιασμένη με τη νόρμα πίνακα που εισάγεται από τη διανυσματική νόρμα του  $\mathbb{C}^n$ , δηλαδή  $\|A\| = \{\sup \|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ . Τότε το  $W(A)$  γενικεύεται στο **αλγεβρικό αριθμητικό πεδίο**

$$V(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}\},$$

όπου

$$\mathcal{L} = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοια ώστε } \|f\| = f(I_n) = 1\},$$

με  $\|f\| = \sup\{|f(X)| : X \in \mathcal{M}_n, \|X\| = 1\}$  και  $I_n$  είναι ο  $n \times n$  μοναδιαίος πίνακας. Το  $V(A)$  είναι κλειστό και κυρτό σύνολο και ειδικότερα,

$$V(A) = \text{co}W(A),$$

όπου  $\text{co}(\cdot)$  συμβολίζει την κυρτή θήκη ενός συνόλου. Το  $V(A)$  μελετήθηκε από τους F.F Bonsall και J. Duncan [5, 6], οι οποίοι έδειξαν ότι μπορεί να γραφεί και ως άπειρη τομή κυκλικών δίσκων, δηλαδή

$$V(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 I_n\|), \quad (1.4)$$

όπου  $\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ . Από την ισότητα (1.4) οδηγούμαστε στον ισοδύναμο χαρακτηρισμό του κλασικού αριθμητικού πεδίου,

$$F(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 I_n\|_2). \quad (1.5)$$

Το δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, διαπραγματεύεται την έννοια του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου  $\Lambda_k(A)$  ενός πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$ , παρουσιάζοντας

ενδιαφέρουσες ιδιότητες του συνόλου. Θεωρώντας τις  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρίες  $M$ , αποδεικνύουμε ότι

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_M F(M^*AM). \quad (1.6)$$

Η άπειρη τομή των αριθμητικών πεδίων  $F(M^*AM)$  ως προς οποιαδήποτε  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  συστολή  $M^*AM$  του πίνακα  $A$  αποτελεί μια εναλλακτική ισότητα του συνόλου  $\Lambda_k(A)$  και με περαιτέρω ερευνητική επεξεργασία επί της (1.6) οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα ότι για το  $\Lambda_k(A)$  αρκεί μια αριθμήσιμη οικογένεια ισομετριών  $M$ . Η αριθμήσιμη αυτή τομή είναι η αφορμή για τον χαρακτηρισμό των  $k$ -βαθμού αριθμητικών ακτίνων  $r_k(A)$  και  $\tilde{r}_k(A)$ . Ειδικότερα, αν  $\mathcal{J}_\nu(A) = \bigcap_{p=1}^\nu F(M_p^*AM_p)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , έχουμε

$$r_k(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\} = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}$$

και όταν  $0 \notin \Lambda_k(A)$ ,

$$\tilde{r}_k(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\} = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}.$$

Επιπλέον, παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα των  $r_k(A)$  και  $\tilde{r}_k(A)$  σε σχέση με τις αριθμητικές ακτίνες  $r(M_p^*AM_p)$  και  $\tilde{r}(M_p^*AM_p)$ , αντίστοιχα.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το σύνολο  $\Lambda_k(A)$  των μη αρνητικών πινάκων, δηλαδή των πινάκων με στοιχεία μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Η θεωρία που έχει αναπτυχθεί για τους πίνακες αυτούς οφείλεται στους Perron-Frobenius και αναφέρεται στις φασματικές τους ιδιότητες. Συγκεκριμένα, ασχολείται με την ύπαρξη θετικών ή μη αρνητικών ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη φασματική ακτίνα  $\rho(\cdot) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\cdot)\}$ , η οποία είναι ιδιοτιμή των πινάκων αυτών [22]. Με αναφορά τα αποτελέσματα στην αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή του Issos [24] (1966), ο οποίος ασχολήθηκε με το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  ενός μη αρνητικού πίνακα  $A$ , μελετάμε την περίπτωση του  $\Lambda_k(A)$ . Συσχετίζοντας τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  με την αριθμητική ακτίνα  $r(A)$  ενός μη αρνητικού πίνακα  $A$ , ο Issos απέδειξε ότι  $r(A)$  είναι στοιχείο του συνόλου  $F(A)$  στο οποίο αντιστοιχεί ένα μη αρνητικό μοναδιαίο διάνυσμα και ακόμη, ότι

$$\left\{ r(A)e^{i\frac{2\pi t}{q}} : t = 0, 1, \dots, q - 1 \right\}$$

είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του  $F(A)$  με τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή, όπου  $q$  είναι το πλήθος των ιδιοτιμών του  $A$  μέτρου  $\rho(A)$ . Το πρώτο από τα

αποτελέσματα αυτά δεν ισχύει στην περίπτωση της  $k$ -βαθμού αριθμητικής ακτίνας  $r_k(A)$  του  $\Lambda_k(A)$  ενός μη αρνητικού πίνακα  $A$ , όπως διαπιστώνεται από σχετικό αντιπαράδειγμα. Εν τούτοις, αν  $k$  είναι ο μικρότερος ακέραιος ώστε  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$  και  $\Lambda_{k+1}(A) = \emptyset$ , αποδεικνύουμε ότι για  $j = 1, \dots, k$ , τα στοιχεία του  $\Lambda_j(A)$  μέτρου  $r_j(A)$  συνιστούν το σύνολο

$$\left\{ r_j(A) e^{i\left(\frac{2\pi t}{q} + \theta_j\right)} : t = 0, 1, \dots, q-1 \right\},$$

όπου  $\theta_j = 0$  ή  $\frac{\pi}{q}$ .

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναφερόμαστε στο ανωτέρου βαθμού αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα  $L(\lambda)$ . Για θετικό ακέραιο  $k \geq 1$  και πολυωνυμικό πίνακα  $L(\lambda) = A_m \lambda^m + \dots + A_1 \lambda + A_0$ , με  $A_i \in \mathcal{M}_n$  και  $A_m \neq 0$ , ορίζουμε ως  **$k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο του  $L(\lambda)$** ,

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : PL(\lambda)P = 0_n \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k \}.$$

Προφανώς, για  $k = 1$ , έχουμε  $\Lambda_1(L(\lambda)) \equiv w(L(\lambda))$ .

Γενικότερα, για  $k > 1$ , το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  μπορεί να είναι το κενό σύνολο. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη  $n \geq 3k - 2$  για την οποία  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$ , δεν ισχύει στην περίπτωση του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ . Έχουμε ότι  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  ακριβώς όταν εξασφαλίζεται η ύπαρξη κοινών ριζών των  $k^2$  πολυωνύμων που είναι τα στοιχεία του  $k \times k$  πολυωνυμικού πίνακα  $Q^*L(\lambda)Q$ , όπου  $Q \in \mathcal{M}_{n,k}$ ,  $Q^*Q = I_k$ . Εφαρμόζοντας τον γενικευμένο πίνακα Sylvester  $R_s(Q)$  [43], δείχνουμε ότι  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  ακριβώς όταν  $\text{rank} R_s(Q) < 2m$ , για κάποια  $n \times k$  ισομετρία  $Q$ . Στη συνέχεια, αφού παραθέσουμε θεμελιώδεις ιδιότητες του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , μελετάμε τόσο την αλγεβρική όσο και τη γεωμετρική του δομή.

Γενικεύοντας τη σχέση (1.6) που δείξαμε για τους πίνακες, περιγράφουμε το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  μέσω της άπειρης τομής

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \bigcap_M w(M^*L(\lambda)M), \quad (1.7)$$

όπου  $M^*L(\lambda)M$  είναι οι πολυωνυμικοί πίνακες συστολής του  $L(\lambda)$  σε υποχώρους διάστασης  $n - k + 1$ . Η (1.7) μας οδηγεί στην αριθμητική προσέγγιση του συνόρου του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  μέσω των  $w(M^*L(\lambda)M)$ . Διαπιστώνεται ότι  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι πάντα κλειστό σύνολο, δεν είναι φραγμένο ή συνεκτικό, ούτε κυρτό. Ερευνώντας ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το φραγμένο του συνόλου, αποδεικνύουμε ότι

$\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι φραγμένο, όταν  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ , όπου  $A_m$  είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του  $L(\lambda)$ . Αντίστροφα, όταν  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι φραγμένο και  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$  για κάθε ισομετρία  $Q \in \mathcal{M}_{n,k}$  τέτοια ώστε  $Q^*A_mQ = zI_k$ ,  $z \in \Lambda_k(A_m) \neq \{0\}$ , τότε  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ .

Ακολούθως, μελετώντας τη μη συνεκτικότητα του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , προσδιορίζουμε τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του. Έστω ότι  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$  για κάθε ισομετρία  $Q \in \mathcal{M}_{n,k}$  τέτοια ώστε  $Q^*A_mQ = zI_k$ , με  $z \in \Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$ . Τότε ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  δεν ξεπερνάει το βαθμό  $m$  του πολυωνυμικού πίνακα  $L(\lambda)$ , όταν  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$  είναι συνεκτικό σύνολο, ενώ δεν ξεπερνάει το  $2m$ , όταν  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$  είναι μη συνεκτικό.

Ως γωνιακά σημεία ενός συνόλου ορίζονται τα συνοριακά του σημεία με μη μοναδική εφαπτομένη [23, 30]. Αφού συσχετίσουμε τα συνοριακά σημεία του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  με τα συνοριακά σημεία του  $w(L(\lambda))$ , αποδεικνύουμε ότι ένα γωνιακό σημείο του  $w(A\lambda - B)$  αλγεβρικής πολλαπλότητας  $k$ , ως σημείο του φάσματος  $\sigma(A\lambda - B)$ , είναι και γωνιακό σημείο του  $\Lambda_j(A\lambda - B)$ , για όλα τα  $j = 2, \dots, k$ .

Για τα σύνθετα  $k$ -βαθμού αριθμητικά πεδία,  $w(\mathbf{A})$  και  $\Lambda_k(\mathbf{A})$ , με  $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m)$ , αποδεικνύουμε μια ικανή συνθήκη ώστε τα συνοριακά σημεία του  $w(\mathbf{A})$  να είναι και συνοριακά σημεία του  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  και συσχετίζουμε το  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  με το  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , γενικεύοντας την (1.3). Τέλος, αν  $C_L(\lambda)$  είναι το συνοδεύον πολυώνυμο του  $L(\lambda)$  [18], παρουσιάζουμε τον εγκλεισμό

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \cup \{0\} \subseteq \Lambda_k(C_L(\lambda)),$$

ειδικότερη μορφή του οποίου οδηγεί σε γενίκευση των αποτελεσμάτων για τους πολυωνυμικούς πίνακες με μη αρνητικούς συντελεστές, γνωστοί ως *πολυωνυμικοί πίνακες Perron* [52].

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής, θα αναφερθούμε στους μη τετραγωνικούς πίνακες και θα διατυπώσουμε δύο διαφορετικούς ορισμούς για το αριθμητικό τους πεδίο, χρησιμοποιώντας την έννοια της ορθογώνιας προβολής σε υπόχωρο κατάλληλης διάστασης. Έστω, λοιπόν, ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , με  $m > n$  και η ισομετρία  $H \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , τότε ορίζουμε ως **κατώτερο αριθμητικό πεδίο** του  $A$  ως προς  $H$

$$w_l(A) = F(H^*A),$$

και ως ανώτερο αριθμητικό πεδίο του  $A$  ως προς  $H$

$$w_h(A) = F(AH^*).$$

Ο πίνακας  $P = HH^* \in \mathcal{M}_m$  είναι μια ορθογώνια προβολή του  $\mathbb{C}^m$  επί του  $\mathbb{C}^n$  και στον ορισμό του συνόλου  $w_l(A)$ , το διάνυσμα  $y = Hx \in \mathbb{C}^m$  προβάλλεται επί του χώρου με τη μικρότερη διάσταση  $\mathbb{C}^n$ , ενώ στην περίπτωση του  $w_h(A)$  έχουμε  $x = H^*y \in \mathbb{C}^n$ , δηλαδή προβολή επί του μεγαλύτερης διάστασης χώρου  $\mathbb{C}^m$ . Είναι φανερό ότι για  $m = n$  και  $H = I$ ,  $w_l(A) = w_h(A) = F(A)$ , ενώ σημειώνουμε ότι στην περίπτωση  $m < n$ ,

$$w_l(A) = F(AH) \quad \text{και} \quad w_h(A) = F(HA).$$

Ο C.F. Amelin στην εργασία του [2] ορίζει ως «**bioperative**» αριθμητικό πεδίο δύο μη τετραγωνικών πινάκων  $A$  και  $H$  το σύνολο

$$W(A, H) = \{ \langle Ax, Hx \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|Hx\|_2 = 1 \}.$$

Αν  $H$  είναι  $m \times n$  ισομετρία ( $m > n$ ), διαπιστώνουμε την ισότητα  $w_l(A) = W(A, H)$ .

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα συγκρίνουμε τα σύνολα  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$  με έναν πρόσφατα διατυπωμένο ορισμό στην εργασία των X. Χωριανόπουλου, Σ. Καρανάσιου και Π. Ψαρράκου [13], ο οποίος στηρίζεται στην έννοια της νόρμας πίνακα. Ως **αριθμητικό πεδίο ενός μη τετραγωνικού  $m \times n$  πίνακα  $A$  ως προς  $m \times n$  πίνακα  $B$**  ορίζεται το σύνολο

$$w_{\|\cdot\|}(A, B) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 B\|), \quad (1.8)$$

όπου  $\|B\| \geq 1$  και  $\|\cdot\|$  είναι οποιαδήποτε νόρμα πίνακα. Ο ορισμός (1.8) γενικεύει τη σχέση (1.4) που δώθηκε από τους F.F. Bonsall και J. Duncan [5, 6]. Επίσης, στην [13] αποδεικνύεται ότι όταν η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , τότε

$$w_{\|\cdot\|}(A, B) = \mathcal{D} \left( \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \sqrt{1 - \|B\|^{-2}} \right). \quad (1.9)$$

Επεξεργάζοντας περαιτέρω τη σχέση (1.9), αποδεικνύεται ότι η ένωση όλων των αριθμητικών πεδίων  $w_{\|\cdot\|}(A, B)$  ως προς τους πίνακες  $B$ , με  $\|B\| \geq 1$  ταυτίζεται

με τον κυκλικό δίσκο  $\mathcal{D}(0, \|A\|)$ . Στη συνέχεια, αφού θεμελιώσουμε βασικές ιδιότητες των συνόλων  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$  ως προς οποιαδήποτε ισομετρία  $H$ , θα αποδείξουμε τον εγκλεισμό τους σε σχέση με το  $w_{\|\cdot\|_2}(A, H)$  και ειδικότερα,

$$w_l(A) \subseteq w_{\|\cdot\|_2}(A, H) \subseteq w_h(A).$$

Στο τελευταίο εδάφιο του κεφαλαίου, επεκτείνουμε την έννοια του αλγεβρικού αριθμητικού πεδίου  $V(A)$  στην (1.4), ορίζοντας ως **q-αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα**  $A \in \mathcal{M}_n$  το σύνολο

$$F_q(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}_q\},$$

όπου

$$\mathcal{L}_q = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοια ώστε } \|f\| = 1, f(I) = q \in [0, 1]\}.$$

Είναι φανερό ότι για  $q = 1$ ,  $F_1(A) \equiv V(A)$  και για νόρμα  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , ταυτίζεται με το γνωστό  $q$ -αριθμητικό πεδίο [31, 32, 33, 41, 48, 58]

$$F_q(A) = \{\langle Ax, y \rangle : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1, \langle x, y \rangle = q\}.$$

Θα αποδείξουμε την ισότητα

$$F_q(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(qz_0, \|A - z_0 I_n\|_2)$$

και βασιζόμενοι σε αυτή, θα ορίσουμε το **q-αριθμητικό πεδίο ενός μη τετραγωνικού  $m \times n$  πίνακα  $A$  ως προς  $m \times n$  πίνακα  $B$** , το σύνολο

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(qz_0, \|A - z_0 B\|),$$

όπου  $\|B\| \geq q$  και  $\|\cdot\|$  είναι οποιαδήποτε νόρμα πίνακα. Είναι φανερό ότι  $w_{\|\cdot\|}(A, B; 1) \equiv w_{\|\cdot\|}(A, B)$  και  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = w_{\|\cdot\|}(A, \frac{B}{q})$ , όταν  $q \neq 0$ . Θα αναπτύξουμε βασικές ιδιότητες του  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q)$ , εξετάζοντας και την περίπτωση  $q = 0$ .

Όταν η νόρμα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο, η σχέση (1.9) γενικεύεται στο  $q$ -αριθμητικό πεδίο

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D}\left(q \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \sqrt{1 - \left(\frac{\|B\|}{q}\right)^{-2}}\right),$$

η οποία για  $B = 0$ , εκφυλίζεται στην  $w_{\|\cdot\|}(A, 0; 0) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ . Για την ένωση των παραπάνω συνόλων έχουμε

$$\bigcup_{\|B\| \geq q, 0 \leq q \leq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D}(0, \|A\|),$$

όπου η νόρμα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι για  $0 < q_1 \leq q_2 \leq 1$ , ισχύει

$$\frac{w_{\|\cdot\|}(A, B; q_2)}{q_2} \subseteq \frac{w_{\|\cdot\|}(A, B; q_1)}{q_1}.$$

Η σχέση αυτή εγκλεισμού γενικεύει μια ανάλογη για το  $q$ -αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πίνακα στην εργασία [32].



## Κεφάλαιο 2

# Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

### 2.1 Ορισμός - Βασικές ιδιότητες

Έστω  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  η άλγεβρα των πινάκων  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$  με στοιχεία  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ . Για ένα θετικό ακέραιο  $k \geq 1$ , το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο (k-rank numerical range) ενός πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  ορίζεται ως

$$\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k\},$$

όπου  $\mathcal{P}_k$  είναι το σύνολο των ορθογωνίων προβολών  $P$  του  $\mathbb{C}^n$  επί οποιουδήποτε  $k$ -διάστατου υποχώρου  $\mathcal{K}$  του  $\mathbb{C}^n$ . Ισοδύναμα,

$$\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : X^*AX = \lambda I_k, X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C}), X^*X = I_k\}.$$

Η έννοια αυτή εισήχθη από τους M.D. Choi, M. Giesinger, J.A. Holbrook, D.W. Kribs και K. Życzkowski, οι οποίοι απέδειξαν θεμελιώδεις ιδιότητες του συνόλου στις εργασίες [9, 10, 11, 12]. Έκτοτε, η γεωμετρία του συνόλου γενικότερα, αλλά και ειδικότερα στην περίπτωση πινάκων ειδικής μορφής, όπως είναι οι κανονικοί ή οι ερμιτιανοί πίνακες, έχει μελετηθεί εκτενώς στις εργασίες [17, 36, 37, 39, 59].

Στην περίπτωση  $k = 1$ , το  $\Lambda_k(A)$  ταυτίζεται με το κλασικό αριθμητικό πεδίο (numerical range) ενός πίνακα  $A$ , δηλαδή

$$\Lambda_1(A) \equiv F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}, \quad (2.1)$$

του οποίου οι βασικές ιδιότητες εκτείνονται στα βιβλία των R.A Horn και C.R. Johnson [23], K.E. Gustafson και D.K.M. Rao [19] και P.R. Halmos [21, Κεφάλαιο 22].

Για τα ανωτέρου βαθμού αριθμητικά πεδία έχει αποδειχθεί η σχέση εγκλεισμού [12]

$$\Lambda_1(A) \supseteq \Lambda_2(A) \supseteq \dots \supseteq \Lambda_k(A) \quad (2.2)$$

και επιπλέον, οι παρακάτω βασικές ιδιότητες [9, 12]:

(Iδ.1)  $\Lambda_k(aA + bI) = a\Lambda_k(A) + b$ , για κάθε  $a, b \in \mathbb{C}$ .

(Iδ.2)  $\Lambda_k(U^*AU) = \Lambda_k(A)$ , για κάθε  $n \times n$  ορθομοναδιαίο πίνακα  $U$ .

(Iδ.3)  $\Lambda_k(V^*AV) \subseteq \Lambda_k(A)$ , όπου  $V \in \mathcal{M}_{n,k}$  με  $V^*V = I_k$ .

(Iδ.4)  $\Lambda_k(A^*) = \overline{\Lambda_k(A)}$ .

(Iδ.5)  $\Lambda_k(A) \subseteq \Lambda_k(H(A)) + i\Lambda_k(S(A))$ , όπου  $H(A) = (A + A^*)/2$  και  $S(A) = (A - A^*)/2i$  συμβολίζουν το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα  $A$ , αντίστοιχα.

(Iδ.6)  $\Lambda_k(A_1 \oplus A_2) \supseteq \Lambda_k(A_1) \cup \Lambda_k(A_2)$ , για  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n$ .

(Iδ.7)  $\Lambda_{k_1+k_2}(A_1 \oplus A_2) \supseteq \Lambda_{k_1}(A_1) \cap \Lambda_{k_2}(A_2)$ , για  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ .

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τις προτάσεις, οι οποίες συνοψίζουν τα κύρια χαρακτηριστικά του συνόλου  $\Lambda_k(A)$ .

Η πρώτη πρόταση διατυπώθηκε από τους M.D. Choi, D.W. Kribs και K. Życzkowski στην [12] και αναφέρεται για την ύπαρξη στοιχείων στο  $\Lambda_k(A)$ .

**Πρόταση 2.1.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $n < 2k$ . Τότε το σύνολο  $\Lambda_k(A)$  έχει το πολύ ένα στοιχείο. Αν είναι το μονοσύνολο  $\{\lambda_0\}$ , τότε  $\lambda_0$  είναι ιδιοτιμή γεωμετρικής πολλαπλότητας τουλάχιστον  $2k - n$ . Ειδικότερα,  $\Lambda_n(A) \neq \emptyset$  αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  είναι βαθμωτός.

Στην παρακάτω πρόταση των C.K. Li, Y.T. Poon και N.S. Sze [37], διατυπώνεται ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το  $\Lambda_k(A)$  να είναι μη κενό σύνολο.

**Πρόταση 2.2.** Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n$ , τότε το σύνολο  $\Lambda_k(A)$  είναι μη κενό, ακριβώς όταν ισχύει η συνθήκη  $n \geq 3k - 2$ .

Επιπλέον, οι C.K. Li και N.S. Sze [39], απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα, το οποίο γενικεύει αντίστοιχο αποτέλεσμα του κλασικού αριθμητικού πεδίου [23, 25].

**Θεώρημα 2.3.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$ , τότε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \lambda_k(H(e^{i\theta} A))\},$$

όπου  $\lambda_k(H)$  είναι η  $k$ -στή μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα  $H \in \mathcal{M}_n$ . Ειδικότερα, αν ο  $A$  είναι κανονικός πίνακας με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , έχουμε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k+1} \leq n} \operatorname{co} \{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{n-k+1}}\}.$$

Άμεσο είναι το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο έχει αποδειχθεί στην [12].

**Πόρισμα 2.4.** Έστω ερμιτιανός πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Τότε

$$\Lambda_k(A) = [\lambda_k, \lambda_{n-k+1}],$$

όταν  $\lambda_k \leq \lambda_{n-k+1}$ , διαφορετικά  $\Lambda_k(A) = \emptyset$ .

Ο H.J. Woerdeman [59] απέδειξε ότι  $\Lambda_k(A)$  είναι κυρτό σύνολο, όπως βέβαια διαπιστώνεται και από το θεώρημα 2.3.

**Θεώρημα 2.5.** Για κάθε πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $1 \leq k \leq n$ , το  $\Lambda_k(A)$  είναι κυρτό.

Συνηφασμένες με το σύνολο  $\Lambda_k(A)$  είναι η  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα ( $k$ -rank numerical radius)  $r_k(A)$  και η εσωτερική  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα (inner  $k$ -rank numerical radius)  $\tilde{r}_k(A)$ , που ορίζονται, αντίστοιχα, ως

$$r_k(A) = \max \{|z| : z \in \partial \Lambda_k(A)\} \quad \text{και} \quad \tilde{r}_k(A) = \min \{|z| : z \in \partial \Lambda_k(A)\}.$$

Για  $k = 1$ , έχουμε την αριθμητική ακτίνα (numerical radius) και την εσωτερική αριθμητική ακτίνα (inner numerical radius),

$$r(A) = \max \{|z| : z \in \partial F(A)\} \quad \text{και} \quad \tilde{r}(A) = \min \{|z| : z \in \partial F(A)\},$$

αντίστοιχα [19, 23]. Σημειώνουμε ότι  $r(A) \geq r_k(A)$ , όπως εύκολα διαπιστώνεται από την ιδιότητα (2.2) και  $r_k(A) = -\infty$ , όταν  $\Lambda_k(A)$  είναι το κενό σύνολο.

## 2.2 Εναλλακτικές ιδότητες του $\Lambda_k(A)$

Στο εδάφιο αυτό, περιγράφουμε το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο μέσω δύο εναλλακτικών εκφράσεων. Αρχικά, αποδεικνύεται ότι το  $\Lambda_k(A)$  είναι ίσο με μια άπειρη τομή αριθμητικών πεδίων ως προς διάφορες ισομετρίες  $(n - k + 1)$ -βαθμού. Αν

$$\mathcal{X}_k = \{X \in \mathcal{M}_{n,k} : X^*X = I_k\},$$

είναι το σύνολο των ισομετριών  $k$ -βαθμού, διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.6.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Τότε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{M \in \mathcal{X}_{n-k+1}} F(M^*AM).$$

*Απόδειξη.* Συμβολίζοντας  $\lambda_1(H) \geq \dots \geq \lambda_n(H)$  τις ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  διατεταγμένες κατά φθίνουσα σειρά, από το Θεώρημα 2.3 έχουμε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \lambda_k(H(e^{i\theta}A))\}$$

όπου  $H(\cdot)$  είναι το ερμιτιανό μέρος ενός πίνακα. Επιπλέον, από το θεώρημα Courant-Fisher έχουμε

$$\lambda_k(H(e^{i\theta}A)) = \min_{\dim \mathcal{S} = n-k+1} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ \|x\|_2 = 1}} x^*H(e^{i\theta}A)x.$$

Αν  $\mathcal{S} = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-k+1}\}$ , όπου  $u_i \in \mathbb{C}^n$ ,  $i = 1, \dots, n - k + 1$  είναι ορθομοναδιαία διανύσματα, τότε οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα  $x \in \mathcal{S}$  γράφεται στη μορφή  $x = My$ , όπου  $M = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_{n-k+1} \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_{n-k+1}$  και  $y \in \mathbb{C}^{n-k+1}$  είναι μοναδιαίο. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_k(H(e^{i\theta}A)) &= \min_M \max_{\substack{y \in \mathbb{C}^{n-k+1} \\ \|y\|_2 = 1}} y^*M^*H(e^{i\theta}A)My \\ &= \min_M \max_{\substack{y \in \mathbb{C}^{n-k+1} \\ \|y\|_2 = 1}} y^*H(e^{i\theta}M^*AM)y \\ &= \min_M \lambda_1(H(e^{i\theta}M^*AM)) \end{aligned}$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(A) &= \bigcap_{\theta} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \min_M \lambda_1(H(e^{i\theta} M^* A M)) \right\} \\
&= \bigcap_M \bigcap_{\theta} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \lambda_1(H(e^{i\theta} M^* A M)) \right\} \\
&= \bigcap_{M \in \mathcal{X}_{n-k+1}} F(M^* A M).
\end{aligned}$$

□

Είναι φανερό από το Θεώρημα 2.6, ότι η «κυρτότητα του  $\Lambda_k(A)$ » επαληθεύεται και μέσω της κυρτότητας των αριθμητικών πεδίων  $F(M^* A M)$ , την οποία εξασφαλίζει το Θεώρημα των Toeplitz-Hausdorff. Για  $k = n$ , είναι φανερό ότι  $\Lambda_n(A) = \bigcap_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2=1} F(x^* A x)$  και έχουμε  $\Lambda_n(A) \neq \emptyset$  ακριβώς όταν ο  $A$  είναι βαθμωτός πίνακας.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη δυϊκή έκφραση «max-min» της  $k$ -ής ιδιοτιμής,

$$\lambda_k(H(e^{i\theta} A)) = \max_{\dim \mathcal{G}=k} \min_{\substack{x \in \mathcal{G} \\ \|x\|_2=1}} x^* H(e^{i\theta} A) x = \max_N \lambda_{\min}(H(e^{i\theta} N^* A N)),$$

όπου  $N \in \mathcal{X}_k$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(A) &= \bigcap_{\theta} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \max_N \lambda_k(H(e^{i\theta} N^* A N)) \right\} \\
&= \bigcup_N \bigcap_{\theta} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \lambda_k(H(e^{i\theta} N^* A N)) \right\} \\
&= \bigcup_{N \in \mathcal{X}_k} \Lambda_k(N^* A N), \tag{2.3}
\end{aligned}$$

και λόγω κυρτότητας του  $\Lambda_k(A)$ , συμπεραίνουμε

$$\Lambda_k(A) = \operatorname{co} \bigcup_{N \in \mathcal{X}_k} \Lambda_k(N^* A N). \tag{2.4}$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα στην Πρόταση 2.1, είναι γνωστό ότι  $\Lambda_k(N^* A N) \neq \emptyset$  αν και μόνο αν  $N^* A N = \lambda I_k$  και τότε η (2.4) γίνεται  $\bigcup_N \Lambda_k(N^* A N) = \bigcup_N \{\lambda : N^* A N = \lambda I_k\} = \Lambda_k(A)$ , όπου ο πίνακας  $N$  διατρέχει όλες τις  $n \times k$  ισομετρίες.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να επαναπροσδιορίσουμε το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο όπως στο προηγούμενο θεώρημα, αλλά αυτή τη φορά μέσω μιας αριθμήσιμης τομής αριθμητικών πεδίων.

**Θεώρημα 2.7.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$ . Τότε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \{F(M_\nu^* A M_\nu) : M_\nu \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.6, ισχύει ότι

$$\Lambda_k(A) = \bigcap \{F(M^* A M) : M \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}, \quad (2.5)$$

το οποίο όπως είναι γνωστό από το Θεώρημα 2.5, είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Για οποιαδήποτε  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρία  $M_\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ), έχουμε  $\Lambda_k(A) \subseteq F(M_\nu^* A M_\nu)$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$  κι έτσι,

$$\Lambda_k(A) \subseteq \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \{F(M_\nu^* A M_\nu) : M_\nu \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}. \quad (2.6)$$

Με σκοπό να αποδείξουμε την ισότητα στη σχέση (2.6), διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το εσωτερικό του  $\Lambda_k(A)$ .

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι  $\text{int}\Lambda_k(A) \neq \emptyset$ . Τότε από την (2.6), έχουμε

$$\emptyset \neq \text{int}\Lambda_k(A) \subseteq \text{int} \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)$$

και εφόσον  $\bigcap_{\nu} F(M_\nu^* A M_\nu)$  είναι κλειστό και κυρτό σύνολο ως (άπειρη) τομή κλειστών και κυρτών συνόλων, συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{\text{int} \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)} = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu), \quad (2.7)$$

όπου  $\overline{\cdot}$  συμβολίζει την κλειστότητα ενός συνόλου. Έτσι, συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.6) και (2.7), έχουμε

$$\Lambda_k(A) \subseteq \overline{\text{int} \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)}.$$

Στη συνέχεια, ισχυριζόμαστε ότι  $\text{int} \bigcap_{\nu} F(M_\nu^* A M_\nu) \subseteq \Lambda_k(A)$ . Έστω ότι  $z_0 \in \text{int} \bigcap_{\nu} F(M_\nu^* A M_\nu)$ , αλλά  $z_0 \notin \Lambda_k(A)$ . Τότε υπάρχει μια ανοικτή περιοχή  $\mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$ , με  $\varepsilon > 0$ , τέτοια ώστε

$$\mathcal{B}(z_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu) \text{ και } \mathcal{B}(z_0, \varepsilon) \not\subseteq \Lambda_k(A).$$

Το σύνολο  $[\Lambda_k(A)]^c = \mathbb{C} \setminus \Lambda_k(A)$  είναι διαχωρίσιμο, ως ανοικτό υποσύνολο του διαχωρίσιμου χώρου  $\mathbb{C}$  [47] και έστω  $\mathcal{Z}$  ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του

$[\Lambda_k(A)]^c$ . Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία  $\{z_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$  στο  $\mathcal{Z}$  τέτοια ώστε  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$  και  $z_\nu \in \mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$ . Εφόσον,  $z_\nu \in [\Lambda_k(A)]^c$ , από τη σχέση (2.5) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$  υπάρχουν δείκτες  $j_\nu$  τέτοιοι ώστε  $z_\nu \notin F(M_{j_\nu}^* A M_{j_\nu})$ . Οπότε  $z_\nu \notin \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_{j_\nu}^* A M_{j_\nu})$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ , το οποίο οδηγεί σε άτοπο, καθόσον  $z_\nu \in \mathcal{B}(z_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)$ . Άρα, ισχύει ότι  $z_0 \in \Lambda_k(A)$ , γεγονός που αποδεικνύει τον εγκλεισμό

$$\overline{\text{int} \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)} \subseteq \overline{\Lambda_k(A)} = \Lambda_k(A). \quad (2.8)$$

Από τις (2.6) και (2.8), επιβεβαιώνεται η ζητούμενη ισότητα.

Αν θεωρήσουμε ότι το  $\Lambda_k(A)$  δεν έχει εσωτερικά σημεία, δηλαδή, είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα μονοσύνολο, τότε υπάρχει κατάλληλος αφινικός υπόχωρος  $\mathcal{V}$  του  $\mathbb{C}$  τέτοιος ώστε  $\Lambda_k(A) \subseteq \mathcal{V}$ . Στην περίπτωση αυτή, ο  $\mathcal{V} \setminus \Lambda_k(A)$  είναι διαχωρίσιμος και  $\text{int} \Lambda_k(A) \neq \emptyset$  ως προς την τοπολογία που εισάγεται από τον υπόχωρο  $\mathcal{V}$ . Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, θεωρούμε το πυκνό σύνολο  $\mathcal{Z}$  στο  $[\Lambda_k(A)]^c$  και τότε  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{V}$  είναι πυκνό στο χώρο  $\mathcal{V} \setminus \Lambda_k(A)$ , ως προς την τοπολογία του υποχώρου. Συνεπώς, λόγω πυκνότητας του  $\mathcal{Z} \cap \mathcal{V}$ , υπάρχει ακολουθία  $\{\tilde{z}_\nu\}$  ώστε  $\tilde{z}_\nu \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{B}(z_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu)$  και η οποία συγκλίνει στο σημείο  $z_0$ . Από την άλλη μεριά, λόγω της (2.5), έχουμε  $\tilde{z}_\nu \notin \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_{i_\nu}^* A M_{i_\nu})$ , για κάποιους δείκτες  $i_\nu$ . Προφανώς, οδηγούμαστε σε αντίφαση και έτσι συμπεραίνουμε  $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu) \subseteq \Lambda_k(A)$ . Τέλος, από τη (2.6) καταλήγουμε στην ισότητα

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F(M_\nu^* A M_\nu),$$

όπου  $M_\nu \in \mathcal{X}_{n-k+1}$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

Σε αντίθεση με το Θεώρημα 2.7, το  $\Lambda_k(A)$  δεν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση στη (2.3), διότι σε διαφορετική περίπτωση

$$\Lambda_k(A) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \{\Lambda_k(N_\nu^* A N_\nu) : N_\nu \in \mathcal{X}_k\} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \{\lambda_\nu : N_\nu^* A N_\nu = \lambda_\nu I_k, N_\nu \in \mathcal{X}_k\},$$

δηλαδή, το  $\Lambda_k(A)$  θα ήταν αριθμήσιμο, το οποίο δεν είναι αληθές.

Τέλος, τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7 μας επιτρέπουν να περιγράψουμε το  $\Lambda_k(A)$

μέσω τομής κυκλικών δίσκων, δηλαδή

$$\begin{aligned}\Lambda_k(A) &= \bigcap_M \left\{ \bigcap_{\gamma \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\gamma, \|M^*AM - \gamma I_{n-k+1}\|_2) \right\} \\ &= \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \left\{ \bigcap_{\gamma \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\gamma, \|M_\nu^*AM_\nu - \gamma I_{n-k+1}\|_2) \right\}.\end{aligned}$$

Η γραφή αυτή οφείλεται στους F.F. Bonsall και J. Duncan [5, 6], οι οποίοι απέδειξαν ότι το κλασικό αριθμητικό πεδίο εκφράζεται μέσω της τομής κυκλικών δίσκων (1.5), όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή.

## 2.3 Ιδιότητες των $r_k(A)$ και $\tilde{r}_k(A)$

Οι  $k$ -βαθμού αριθμητικές ακτίνες  $r_k(A)$  και  $\tilde{r}_k(A)$  συνιστούν σημαντικά μεγέθη εντοπισμού της θέσης του  $\Lambda_k(A)$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς αποτελούν την εξωτερική και εσωτερική ακτίνα, αντίστοιχα, του μικρότερου κυκλικού δακτυλίου με κέντρο την αρχή που περιέχει το  $\Lambda_k(A)$ . Τα θεωρήματα 2.6 και 2.7, που αποδείχθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο, μας ωθούν προς έναν διαφορετικό χαρακτηρισμό των  $r_k(A)$  και  $\tilde{r}_k(A)$ , ο οποίος παρουσιάζεται στις ακόλουθες δυο προτάσεις.

**Θεώρημα 2.8.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $\mathcal{J}_\nu(A) = \bigcap_{p=1}^\nu \{F(M_p^*AM_p) : M_p \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . Τότε

**I.**  $r_k(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\},$

**II.**  $r_k(A) = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}.$

Απόδειξη. **I.** Από το Θεώρημα 2.7, έχουμε

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(A) \subseteq \mathcal{J}_\nu(A) \subseteq F(A) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|_2), \quad (2.9)$$

για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ , όπου η ακολουθία συνόλων  $\{\mathcal{J}_\nu(A)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  είναι φθίνουσα και  $\mathcal{D}(0, \|A\|_2)$  είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο την αρχή και ακτίνα τη φασματική νόρμα  $\|A\|_2$  του πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$ . Από τη σχέση (2.9), είναι φανερό ότι

$$r_k(A) = \max_{z \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(A)} |z| \leq \sup_{z \in \mathcal{J}_\nu(A)} |z| \leq r(A) \leq \|A\|_2.$$



Τότε η φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών  $q_\nu = \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}$  συγκλίνει, με αποτέλεσμα

$$r_k(A) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} q_\nu = q_0.$$

Ακολούθως, θα αποδείξουμε ότι στην παραπάνω ανισότητα επιτυγχάνεται πάντα η ισότητα. Έστω  $r_k(A) < q_0$ , τότε υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , ώστε  $r_k(A) + \varepsilon < q_0 \leq q_\nu$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία  $\{\zeta_\nu\} \subseteq \mathcal{J}_\nu(A)$  τέτοια ώστε  $q_0 \leq |\zeta_\nu|$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ . Καθόσον το σύνολο  $\mathcal{J}_\nu(A)$  είναι φραγμένο, η ακολουθία  $\{\zeta_\nu\}$  περιέχει υπακολουθία  $\{\zeta_{\rho_\nu}\}$  που συγκλίνει στο σημείο  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$  και προφανώς,  $q_0 \leq |\zeta_0|$ . Επιπλέον,  $\mathcal{J}_{\nu+1}(A) \subseteq \mathcal{J}_\nu(A)$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ , με αποτέλεσμα τα σημεία  $\zeta_{\rho_\nu}$  να ανήκουν τελικά στο  $\mathcal{J}_\nu(A)$ ,  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ , δηλαδή  $\{\zeta_{\rho_\nu}\} \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(A) = \Lambda_k(A)$ . Εφόσον το σύνολο  $\Lambda_k(A)$  είναι κλειστό,  $\zeta_0 \in \Lambda_k(A)$  και άρα  $|\zeta_0| \leq r_k(A)$ . Τότε  $q_0 \leq r_k(A)$ , που οδηγεί σε άτοπο.

**II.** Προφανώς, η φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία  $\{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο κατώτερο πέρας της (infimum) και από την (I), διαπιστώνουμε  $r_k(A) = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} q_\nu$ .  $\square$

**Θεώρημα 2.9.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $\mathcal{J}_\nu(A) = \bigcap_{p=1}^{\nu} \{F(M_p^* A M_p) : M_p \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . Αν  $0 \notin \Lambda_k(A)$ , τότε

**I.**  $\tilde{r}_k(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\},$

**II.**  $\tilde{r}_k(A) = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}.$

*Απόδειξη.* **I.** Προφανώς, η υπόθεση  $0 \notin \Lambda_k(A)$  οδηγεί στην ισότητα  $\tilde{r}_k(A) = \min \{|z| : z \in \Lambda_k(A)\}$  και από τη σχέση (2.9), έχουμε

$$\|A\|_2 \geq r(A) \geq \tilde{r}_k(A) = \min_{z \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(A)} |z| \geq \inf_{z \in \mathcal{J}_\nu(A)} |z|.$$

Κατά συνέπεια, η  $t_\nu = \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , συγκλίνει ως αύξουσα και φραγμένη ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και

$$\tilde{r}_k(A) \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = t_0.$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.8(I), θα δείξουμε ότι  $\tilde{r}_k(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu$ . Έστω, λοιπόν, ότι  $\tilde{r}_k(A) > t_0$ , τότε  $t_\nu \leq t_0 < \tilde{r}_k(A) - \varepsilon$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$  και  $\varepsilon > 0$ . Θεωρώντας μια ακολουθία  $\{\tilde{\zeta}_\nu\} \subseteq \mathcal{J}_\nu(A)$  τέτοια ώστε  $|\tilde{\zeta}_\nu| \leq t_0$ , παίρνουμε υπακολουθία  $\{\tilde{\zeta}_{s_\nu}\}$  της  $\{\tilde{\zeta}_\nu\}$ , η οποία συγκλίνει στο  $\tilde{\zeta}_0$ , με

$|\tilde{\zeta}_0| \leq t_0$ . Εφόσον  $\{\mathcal{J}_\nu(A)\}$  είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, τα σημεία  $\tilde{\zeta}_{s_\nu}$  ανήκουν τελικά στα  $\mathcal{J}_\nu(A)$ ,  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ , αποδεικνύοντας ότι  $\{\tilde{\zeta}_{s_\nu}\} \subseteq \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_\nu(A) = \Lambda_k(A)$ . Άρα, καταλήγουμε ότι  $\tilde{\zeta}_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{J}_\nu(A) = \Lambda_k(A)$ , δηλαδή  $t_0 \geq |\tilde{\zeta}_0| \geq \tilde{r}_k(A)$ , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας.

**II.** Εύκολα διαπιστώνεται ότι  $t_0 = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} t_\nu$ , καθόσον  $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία. Συνεπώς, από την περίπτωση (I), έχουμε  $\tilde{r}_k(A) = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} t_\nu$ .  $\square$

Επιπλέον, συμπεραίνουμε:

**Πόρισμα 2.10.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $M_p \in \mathcal{X}_{n-k+1}$ , για όλα τα  $p \in \mathbb{N}$ , τότε

$$r_k(A) \leq \min_{p \in \mathbb{N}} r(M_p^* A M_p).$$

Αν  $0 \notin \Lambda_k(A)$ , τότε

$$\tilde{r}_k(A) \geq \min_{p \in \mathbb{N}} \tilde{r}(M_p^* A M_p).$$

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 2.7, προκύπτει  $\partial\Lambda_k(A) \subseteq \Lambda_k(A) \subseteq F(M_p^* A M_p)$  για κάθε  $p \in \mathbb{N}$ . Τότε

$$r_k(A) = \max\{|z| : z \in \Lambda_k(A)\} \leq \max\{|z| : z \in F(M_p^* A M_p)\} = r(M_p^* A M_p)$$

και

$$\tilde{r}_k(A) \geq \min\{|z| : z \in \Lambda_k(A)\} \geq \min\{|z| : z \in F(M_p^* A M_p)\} = c(M_p^* A M_p),$$

για κάθε  $p \in \mathbb{N}$ . Εφόσον,  $0 \leq c(M_p^* A M_p) \leq \tilde{r}(M_p^* A M_p) \leq r(M_p^* A M_p) \leq \|A\|_2$  για οποιοδήποτε  $p \in \mathbb{N}$ , έχουμε άμεσα τις ανισότητες

$$r_k(A) \leq \min_{p \in \mathbb{N}} r(M_p^* A M_p) \quad \text{και} \quad \tilde{r}_k(A) \geq \max_{p \in \mathbb{N}} c(M_p^* A M_p).$$

Αν  $0 \notin \Lambda_k(A)$ , τότε από το Θεώρημα 2.7,  $0 \notin F(M_l^* A M_l)$  για κάποια  $l \in \mathbb{N}$  και  $M_l \in \mathcal{X}_{n-k+1}$ . Άρα,  $c(M_l^* A M_l) = \tilde{r}(M_l^* A M_l)$  και έχουμε

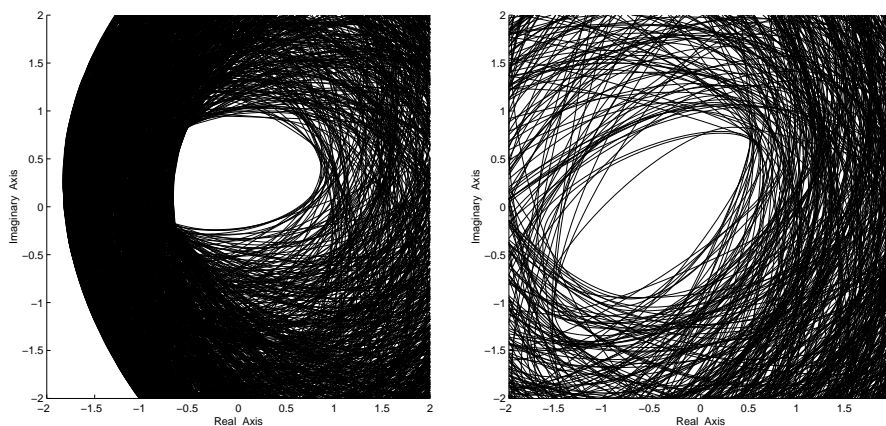
$$\tilde{r}_k(A) \geq \max_{p \in \mathbb{N}} c(M_p^* A M_p) \geq \tilde{r}(M_l^* A M_l) \geq \min_{p \in \mathbb{N}} \tilde{r}(M_p^* A M_p).$$

$\square$

Η αριθμητική ακτίνα ως η μη αρνητική συνάρτηση  $r(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$  δεν αποτελεί νόρμα πίνακα, εφόσον δεν ικανοποιεί την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα  $r(AB) \leq r(A)r(B)$ , για κάθε  $A, B \in \mathcal{M}_n$ . Παρόλα αυτά, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ισχύει η ανισότητα  $r(A^m) \leq [r(A)]^m$ , για όλες τις δυνάμεις πινάκων  $A^m$ , με εκθέτη οποιοδήποτε θετικό ακέραιο  $m$ . Αντιθέτως, η  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα αποτυγχάνει να ικανοποιήσει τόσο την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα όσο και την ανισότητα των δυνάμεων, όπως αποκαλύπτει το ακόλουθο αντιπαράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.1.** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1.8 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.8+i & 0 & i \\ -2 & 1 & -1.2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{bmatrix}$ . Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7, το σύνολο  $\Lambda_2(A)$  αναπαρίσταται παρακάτω από τη λευκή περιοχή μέσα στην αριστερή εικόνα. Προφανώς, το  $\Lambda_2(A)$  περιέχεται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι  $r_2(A) < 1$ .

Από την άλλη μεριά, το σύνολο  $\Lambda_2(A^2)$ , που απεικονίζεται στη δεξιά εικόνα με τον ίδιο τρόπο, δεν φράσσεται από τον μοναδιαίο κύκλο και άρα,  $r_2(A^2) > 1$ . Συνεπώς,  $[r_2(A)]^2 < 1 < r_2(A^2)$ .



## Κεφάλαιο 3

# Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

### 3.1 Perron-Frobenius θεωρία

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε βασικές έννοιες και θεωρήματα που αφορούν τους μη αρνητικούς πίνακες. Η θεωρία αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως θεωρία **Perron-Frobenius** [22].

Ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  ονομάζεται *μη αρνητικός* (nonnegative) όταν κάθε στοιχείο του  $a_{ij} \geq 0$  και συμβολίζεται  $A \geq 0$ . Όμοια, ο πίνακας  $A$  ονομάζεται *θετικός* (positive) όταν κάθε  $a_{ij} > 0$  και συμβολίζεται  $A > 0$ .

Ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n$  ονομάζεται *αναγώγιμος* (reducible) όταν υπάρχει μεταθέτης  $P$  τέτοιος ώστε

$$P^T A P = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

όπου  $R, T$  είναι και οι δύο τετραγωνικοί πίνακες. Για  $n = 1$ , θα πρέπει  $A = 0$ . Σε αντίθετη περίπτωση, ο  $A$  ονομάζεται *μη αναγώγιμος* (irreducible).

Όταν ο  $A$  είναι μη αρνητικός και μη αναγώγιμος πίνακας και έχει  $q (> 1)$  ιδιοτιμές μέτρου ίσες με τη φασματική ακτίνα  $\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ , τότε ονομάζεται *εξεληγμένος* (imprimitive) και ο αριθμός  $q$  αναφέρεται ως *δείκτης εξεληξιμότητας* (index of imprimitivity). Στην περίπτωση  $q = 1$ , ο  $A$  χαρακτηρίζεται

πρωτόγονος (primitive).

Είναι ευρύτατα γνωστό ότι τα θεωρήματα που διατύπωσαν πρώτα ο O. Perron (1907) και ύστερα ο G. Frobenius (1912) για τους θετικούς και μη αρνητικούς πίνακες, αντίστοιχα, αφορούν την ύπαρξη θετικών ή μη αρνητικών ιδιοποσών (ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) [22]. Αργότερα, ο Issos το 1966 στην αδημοσίευτη διδακτορική του διατριβή, μελέτησε το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  μη αρνητικού πίνακα  $A$ , συσχετίζοντας τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  με την αριθμητική ακτίνα  $r(A)$  [24].

Συνοψίζουμε τα κύρια αποτελέσματα του Issos στο ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.1.** Έστω μη αρνητικός και μη αναγώγιμος πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n$ . Τότε ισχύουν τα επόμενα:

1.  $r(A) = x^T Ax$ , όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι μοναδιαίο με  $x > 0$ ,
2.  $r(A) = y^* Ay$ , με  $y \in \mathbb{C}^n$  μοναδιαίο ακριβώς όταν  $y = e^{i\theta}x$  για  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,
3. υπάρχει θετικός ακέραιος  $q \leq n$  τέτοιος ώστε τα μέγιστα στοιχεία του  $F(A)$  είναι της μορφής  $r(A)e^{i\frac{2\pi t}{q}}$ ,  $t = 0, 1, \dots, q-1$ , τα δε μέγιστα στοιχεία του  $\sigma(A)$  είναι  $\lambda = \rho(A)e^{i\frac{2\pi t}{q}}$ ,  $t = 0, 1, \dots, q-1$ .

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, αν το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  μη αρνητικού και μη αναγώγιμου πίνακα  $A$  έχει  $q$  το πλήθος μέγιστα στοιχεία (δηλαδή, στοιχεία μέτρου ίσα με την αριθμητική ακτίνα  $r(A)$ ), το ένα από αυτά βρίσκεται στο θετικό πραγματικό άξονα και τα υπόλοιπα στην περιφέρεια κύκλου  $\mathcal{S}(0, r(A))$ , όπου τα ορίσματά τους είναι πολλαπλάσια της γωνίας  $\frac{2\pi}{q}$ . Δηλαδή, το σύνολο

$$\mathcal{F}(A) = \left\{ r(A)e^{i\frac{2\pi t}{q}} : t = 0, \dots, q-1 \right\}$$

είναι ακριβώς όλα τα μέγιστα στοιχεία του  $F(A)$ , όπου στην αριθμητική ακτίνα  $r(A) \in F(A)$  αντιστοιχεί πάντα ένα θετικό μοναδιαίο διάνυσμα. Επιπλέον, ο Issos απέδειξε ότι  $|\mathcal{F}(A)| = q$ , όπου  $q$  είναι ο δείκτης εξελιξιμότητας του πίνακα  $A$ .

## 3.2 Γενίκευση στο $\Lambda_k(A)$

Στο εδάφιο αυτό ερευνούμε αν τα αποτελέσματα του Issos γενικεύονται για το  $\Lambda_k(A)$ , όπου  $A$  μη αρνητικός και μη αναγώγιμος πίνακας.

Ορίζουμε ως μέγιστα στοιχεία του  $\Lambda_k(A)$  τα στοιχεία του συνόλου:

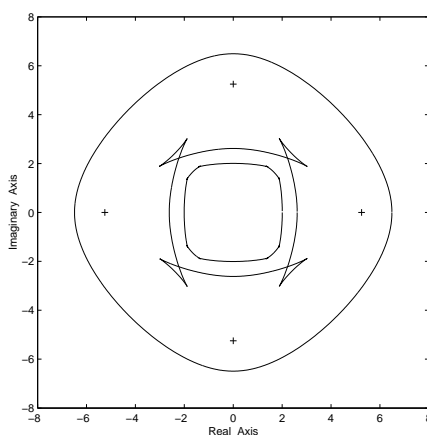
$$\mathcal{F}_k(A) = \{z \in \Lambda_k(A) : |z| = r_k(A)\},$$

το οποίο για  $k = 1$ , ισούται με  $\mathcal{F}(A)$ . Όπως είδαμε, το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  ενός μη αρνητικού πίνακα  $A$  περιλαμβάνει πάντα την αριθμητική ακτίνα  $r(A) > 0$  (Θεώρημα 3.1), δεν ισχύει όμως γενικότερα ότι  $r_k(A) \in \Lambda_k(A)$ , όπως διαπιστώνουμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.1.** Έστω ο  $8 \times 8$  μη αρνητικός και μη αναγώγιμος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Η εξωτερική καμπύλη στο σχήμα 3.1 απεικονίζει το σύνολο}$$

του  $F(A)$ , ενώ η δεύτερη και τρίτη εσωτερική καμπύλη απεικονίζουν το σύνολο των  $\Lambda_2(A)$  και  $\Lambda_3(A)$ , αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι  $0 < r(A) \in F(A)$ , ενώ  $0 < r_2(A) \notin \Lambda_2(A)$  και  $0 < r_3(A) \notin \Lambda_3(A)$ , όπως εύκολα αναγνωρίζουμε στο σχήμα. Ο πίνακας  $A$  έχει 4 μέγιστες ιδιοτιμές, οι οποίες σημειώνονται με «+» και επίσης, το  $F(A)$  έχει 4 μέγιστα στοιχεία.



Σχήμα 3.1: Οι τρεις καμπύλες με το εσωτερικό τους απεικονίζουν τα σύνολα  $\Lambda_1(A) \supset \Lambda_2(A) \supset \Lambda_3(A)$ .

Το ακόλουθο Λήμμα γενικεύει γνωστή συνθήκη για το αναλλοίωτο ως προς στροφή και συμμετρία ως προς την αρχή, στην περίπτωση του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου.

**Λήμμα 3.2.** Έστω ότι ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον σύνθετο πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & C_{q-1,q} \\ C_{q1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

όπου οι διαγώνιοι μηδενικοί υποπίνακες είναι τετραγωνικοί και ο πίνακας ομοιότητας είναι μεταθέτης (permutation matrix). Αν  $r_j(A) \neq 0$ , για  $j = 1, \dots, k$ , τότε:

- I.  $\Lambda_j(A) = \Lambda_j(e^{i\frac{2\pi t}{q}} A)$ , για  $t = 0, 1, \dots, q-1$ ,
- II.  $\mu \in \Lambda_j(A)$  αν και μόνο αν  $\mu e^{i\frac{2\pi t}{q}} \in \Lambda_j(A)$ , για  $t = 0, 1, \dots, q-1$ ,
- III. αν  $q = 2t$ ,  $\Lambda_j(A)$  είναι συμμετρικό ως προς την αρχή.

*Απόδειξη.* I. Από την απόδειξη του θεωρήματος 6 στη διδακτορική διατριβή του Issos [24], έχουμε ότι  $D^{-1}CD = e^{i\theta}C$ , όπου  $D = I_{n_1} \oplus e^{i\theta}I_{n_2} \oplus \dots \oplus e^{i(q-1)\theta}I_{n_q}$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνιος, με  $\theta = \frac{2\pi t}{q}$  και  $n_1 + \dots + n_q = n$ , όπου  $n_l$  ( $l = 1, \dots, q$ ) είναι η τάξη του  $l$ -οστού διαγωνίου υποπίνακα του  $C$ . Αν  $P$  είναι μεταθέτης τέτοιος ώστε  $A = P^T C P$ , έχουμε  $e^{i\theta}A = (P^T D P)^{-1} A (P^T D P)$  και άρα,  $\Lambda_j(A) = \Lambda_j(e^{i\theta}A)$ , για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .

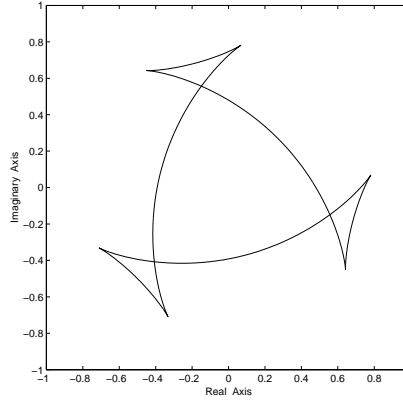
II. Από την περίπτωση (I), έχουμε

$$\mu \in \Lambda_j(A) \Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi t}{q}} \mu \in \Lambda_j(e^{i\frac{2\pi t}{q}} A) = \Lambda_j(A),$$

για όλα τα  $t = 0, 1, \dots, q-1$  και  $j = 1, \dots, k$ .

III. Έστω  $q = 2t$ , τότε από την (II),  $\mu \in \Lambda_j(A)$  αν και μόνο αν  $e^{i\frac{2\pi t}{2t}} \mu \in \Lambda_j(A)$ , δηλαδή  $e^{i\pi} \mu = -\mu \in \Lambda_j(A)$ , για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .  $\square$

**Παράδειγμα 3.2.** Θεωρούμε τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 3+2i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , όπως στην (3.1) με  $q = 3$ . Το σύντομο του  $\Lambda_2(A)$  απεικονίζεται στο σχήμα 3.2 από το καμπυλωτό τρίγωνο. Είναι εμφανές ότι  $\Lambda_2(A)$  παραμένει αναλλοίωτο σε στροφή γωνίας  $\frac{2\pi t}{3}$  ως προς την αρχή, για  $t = 0, 1, 2$ , επιβεβαιώνοντας τις περιπτώσεις (I) και (II) του Λήμματος 3.2.



Σχήμα 3.2: Το 2-βαθμού αριθμητικό πεδίο πίνακα

Όσον αφορά το πλήθος των μέγιστων στοιχείων του  $\Lambda_k(A)$  και τη θέση τους στο μιγαδικό επίπεδο, αναφερόμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.3.** Έστω ο εξεληγμένος πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  με δείκτη εξελιξιμότητας  $q > 1$  τέτοιος ώστε  $r_k(A) > 0$ . Τότε

$$\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\}, \quad (3.2)$$

για κάθε  $j = 1, \dots, k$  και  $\theta_j = 0$  ή  $\frac{\pi}{q}$ .

*Απόδειξη.* Εφόσον  $q > 1$  είναι ο δείκτης εξελιξιμότητας του πίνακα  $A$ , υπάρχει μεταθέτης  $P$  τέτοιος ώστε

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & C_{q-1,q} \\ C_{q1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω ότι  $\theta_j \in [0, 2\pi)$  είναι το πρωτεύον όρισμα ώστε  $0 < r_j(A) \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$  με  $j = 1, \dots, k$ . Τότε, από Λήμμα 3.2(II), έχουμε  $r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} \in \Lambda_j(A)$  για  $t = 0, 1, \dots, q-1$  και  $j = 1, \dots, k$ , από όπου συμπεραίνουμε

$$\mathcal{F}_j(A) \supseteq \left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\},$$

για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .

Ο δείκτης εξελιξιμότητας  $q$  ισούται με τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο για τον



οποίο ο  $A$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνια όμοιος με τον πίνακα  $e^{i\frac{2\pi}{q}} A$ , ισοδύναμα, οι πίνακες  $e^{-i\theta_j} A$  και  $e^{i(-\theta_j + \frac{2\pi}{q})} A$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνια όμοιοι. Συνεπώς, το σύνολο

$$\left\{ 0, \frac{2\pi}{q}, \dots, \frac{2\pi(q-1)}{q} \right\}$$

είναι η κυκλική ομάδα modulo  $2\pi$  με τη μεγαλύτερη δυνατή τάξη. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει γωνία  $\phi = \frac{2\pi}{p} < \frac{2\pi}{q}$  τέτοια ώστε  $r_j(A)e^{i\phi} \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$ , για  $j = 1, \dots, k$  και έτσι, εξασφαλίζεται η ισότητα

$$\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A)e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\}. \quad (3.3)$$

Αν συμβολίσουμε με  $\overline{\cdot}$  το συζυγές ενός συνόλου, είναι σαφές ότι  $\Lambda_j(A) = \overline{\Lambda_j(A)}$ , καθώς  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , δηλαδή  $\Lambda_j(A)$  είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα, για κάθε  $j = 1, \dots, k$ . Λόγω της συμμετρίας αυτής και της ισότητας (3.3), για  $\theta_j \neq 0$ , έχουμε  $2\pi - \theta_j = \theta_j + \frac{2\pi(q-1)}{q}$ . Οπότε,  $\theta_j = \frac{\pi}{q}$  και η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, ο αριθμός των στοιχείων μέγιστου μέτρου σε κάθε  $\Lambda_j(A)$ , για  $j = 1, 2, \dots, k$ , μη αρνητικού και μη αναγώγιμου πίνακα  $A$ , διατηρείται ίσος με τον δείκτη εξελιξιμότητας  $q$ . Ειδικότερα, έχουμε ότι όλα τα μέγιστα στοιχεία του συνόλου είναι διαδοχικά κατανεμημένα πάνω σε κύκλο με κέντρο την αρχή και απέχουν μεταξύ τους σταθερή γωνία  $\frac{2\pi}{q}$ .

Παρατηρούμε ότι όταν η  $j$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα  $r_j(A)$  δεν ανήκει στο σύνολο  $\Lambda_j(A)$ , για κάποιο  $j = 1, \dots, k$ , έπειτα από δεξιόστροφη περιστροφή του  $\Lambda_j(A)$  γύρω από την αρχή κατά γωνία  $\frac{\pi}{q}$ , επιτυγχάνουμε η θετική αυτή ποσότητα να ανήκει στο  $\Lambda_j(e^{-i\frac{\pi}{q}} A)$ , δηλαδή  $0 < r_j(A) \in \Lambda_j(e^{-i\frac{\pi}{q}} A)$ .

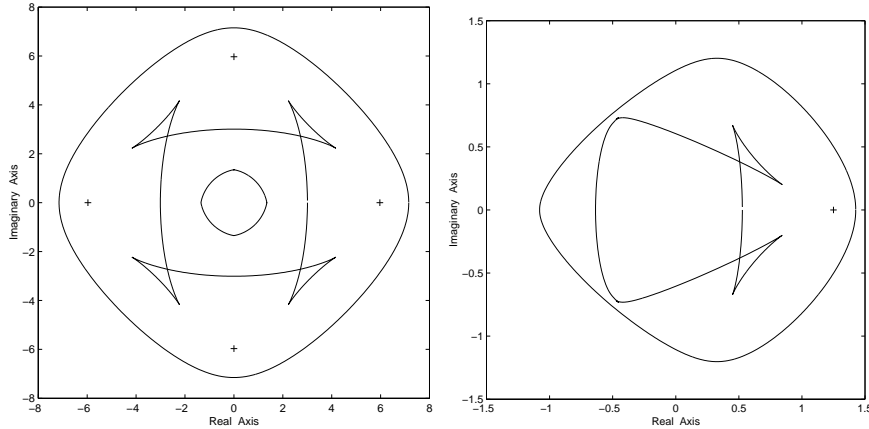
Από την άλλη μεριά, αν θεωρήσουμε την κλάση των μη αρνητικών πρωτόγονων πινάκων  $A$  ( $q = 1$ ), τότε τα σύνολα  $\Lambda_j(A)$ , για  $j = 2, \dots, k$  δεν έχουν απαραίτητα ένα μοναδικό μέγιστο στοιχείο, σε αντίθεση με το  $F(A)$ . Το συμπέρασμα αυτό δικαιολογείται από τη συμμετρία των συνόλων  $\Lambda_j(A)$  ως προς τον πραγματικό άξονα και από το γεγονός ότι  $r_j(A)$  δεν είναι πάντοτε στοιχείο του συνόλου  $\Lambda_j(A)$  ( $j \neq 1$ ). Έτσι, όταν  $r_j(A)e^{i\theta_j} \in \Lambda_j(A)$  για κάποιο  $\theta_j \in (0, 2\pi)$ , θα έχουμε επίσης,  $r_j(A)e^{-i\theta_j} \in \Lambda_j(A)$ .

**Παράδειγμα 3.3.** Έστω ο μη αρνητικός και μη αναγώγιμος  $8 \times 8$  πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει 4 μέγιστες ιδιοτιμές (εξελιγμένος πίνακας) και άρα έχει δείκτη εξελιξιμότητας  $q = 4$ . Τα σύνορα των  $F(A) \equiv \Lambda_1(A) \supseteq \Lambda_2(A) \supseteq \Lambda_3(A)$  απεικονίζονται παρακάτω στην αριστερή εικόνα όπου και επαληθεύουμε ότι όλα τα  $\Lambda_j(A)$  έχουν  $q = 4$  μέγιστα στοιχεία ( $j = 1, 2, 3$ ), τα οποία διαχωρίζονται εξίσου κατά γωνία  $t\frac{\pi}{2}$ ,  $t = 0, 1, 2, 3$ . Ειδικότερα, βλέπουμε ότι  $r_2(A)e^{i\frac{\pi}{4}} \in \Lambda_2(A)$  και  $r_3(A) \in \Lambda_3(A)$ .

Ας θεωρήσουμε τον μη αρνητικό και μη αναγώγιμο πίνακα  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , ο οποίος έχει μόνο μία μέγιστη ιδιοτιμή. Τα σύνορα των  $F(B) \supseteq \Lambda_2(B)$  απεικονίζονται στην δεξιά εικόνα του παρακάτω σχήματος, όπου φαίνεται ότι το  $\Lambda_2(B)$  έχει δυο μέγιστα στοιχεία, συμμετρικά ως προς τον αρνητικό ημιάξονα, ενώ το  $F(B)$  έχει μόνο ένα μέγιστο στοιχείο, την αριθμητική του ακτίνα  $r(B)$ . Οι μέγιστες ιδιοτιμές των  $A$  και  $B$  σημειώνονται με «+» και στις δυο εικόνες.



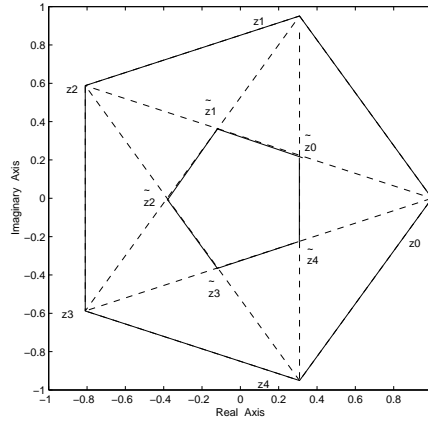
**Παρατήρηση 3.1.** Είναι αρκετά ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο μεταθέτης  $P_n = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μια ειδική μορφή εξελιγμένου πίνακα, με δείκτη εξελιξιμότητας  $n$  και φάσμα τις  $n$ -οστές ρίζες της μονάδος,  $z_t = e^{2\pi i t/n}$ ,  $t = 0, \dots, n-1$ . Προφανώς,  $P_n$  είναι ορθομοναδιαίος πίνακας και  $F(P_n) = \text{co}(\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\})$ . Από το πόρισμα 2.8 στην εργασία [17], όταν  $2k < n$ , έχουμε ότι

$$\Lambda_k(P_n) = \text{co}(\{\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-1}\}),$$

με  $\tilde{z}_t$  ( $t = 0, \dots, n-1$ ) τα σημεία τομής των ευθυγράμμων τμημάτων  $[z_t, z_{t+k}]$  και  $[z_{t+1}, z_{t+n-k+1}]$ , όταν  $z_j = z_{j-n}$  για  $j > n-1$ .

Για τις δυνάμεις των  $P_n$ , έχουμε ότι  $\Lambda_k(P_n^\alpha) = \Lambda_k(P_n)$ ,  $1 \leq \alpha \leq n - 1$ , καθόσον οι πίνακες  $P_n^\alpha$  είναι όμοιοι με τον  $P_n$  έχοντας πίνακα ομοιότητας έναν μεταθέτη, ενώ  $\Lambda_k(P_n^n) = \{1\}$ , εφόσον  $P_n^n = I_n$ .

Παραδείγματος χάριν,  $F(P_5)$  και  $\Lambda_2(P_5)$  απεικονίζονται στο σχήμα 3.3, για τον μεταθέτη  $P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .



Σχήμα 3.3: Το εξωτερικό και εσωτερικό πεντάγωνο αποτελούν το κλασικό και το 2-βαθμού αριθμητικό πεδίο του  $P_5$ , αντίστοιχα.

**Λήμμα 3.4.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μη αρνητικός πίνακας, με μη αναγώγιμο ερμιτιανό μέρος  $H(A)$  τέτοιος ώστε  $0 < r_j(A) \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$ , για  $j = 1, 2, \dots, k$  και για  $\theta_j \in [0, 2\pi)$ . Αν υπάρχει γωνία  $\phi$  τέτοια ώστε  $r(A)e^{i\phi} \in F(A)$ , τότε  $r_j(A)e^{i\phi} \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$ , για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $r(A)e^{i\phi} \in F(A)$  για κάποια γωνία  $\phi \in \mathbb{R}$ , τότε από την πρόταση 3.7 στην εργασία [35], έχουμε ότι  $e^{-i\phi} A = D^{-1}AD$  για κάποιον ορθομοναδιαίο διαγώνιο πίνακα  $D$ . Προφανώς,  $0 < r_j(A) \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A) = \Lambda_j(e^{-i(\theta_j+\phi)} A)$ , γι' αυτό  $r_j(A)e^{i\phi} \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$ , για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .  $\square$

Ερευνώντας το  $\Lambda_k(A)$  ενός μη αρνητικού πίνακα  $A$  σε σχέση με την μη αναγωγικότητα του ερμιτιανού μέρους  $H(A)$  του πίνακα  $A$ , επεκτείνουμε μία ανάλογη ανάλυση που παρουσιάστηκε στις εργασίες [35, 46].

**Πρόταση 3.5.** Έστω ότι ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μη αρνητικός,  $H(A)$  μη-αναγώγιμος και  $r_k(A) > 0$ . Τότε για κάθε  $j = 1, \dots, k$ , έχουμε είτε  $\mathcal{F}_j(A) =$

$\mathcal{S}(0, r_j(A))$ , για κάθε  $j = 1, \dots, k$ , είτε  $\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\}$ , όπου  $\theta_j = 0$  ή  $\frac{\pi}{q}$  και  $q > 1$  είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ώστε ο πίνακας  $A$  είναι διαγώνια όμοιος με τον πίνακα  $e^{i\frac{2\pi}{q}} A$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι για  $j = 1, \dots, k$  έχουμε  $0 < r_j(A) \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$  για κάποιο πρωτεύον όρισμα  $\theta_j \in [0, 2\pi)$ . Από την πρόταση 3.11 στην εργασία [35] και το πόρισμα 3.6 στην [46], έχουμε είτε  $\mathcal{F}(A) = \mathcal{S}(0, r(A))$  ή  $\mathcal{F}(A) = \left\{ r(A) e^{i\frac{2\pi t}{q}} : t = 0, \dots, q-1 \right\}$ , όπου  $q$  είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ώστε ο πίνακας  $A$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνια όμοιος με τον πίνακα  $e^{i\frac{2\pi}{q}} A$ . Η πρώτη ισότητα των συνόλων υποδηλώνει ότι  $r(A) e^{i\phi} \in F(A)$  για κάθε γωνία  $\phi \in \mathbb{R}$ , έτσι από το Λήμμα 3.4,  $r_j(A) e^{i\phi} \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$  για κάθε γωνία  $\phi \in \mathbb{R}$ , καταλήγοντας  $\mathcal{F}_j(A) = \mathcal{S}(0, r_j(A))$  για όλα τα  $j = 1, \dots, k$ .

Στη δεύτερη περίπτωση,  $r(A) e^{i\frac{2\pi t}{q}} \in F(A)$  και από το Λήμμα 3.4, συμπεραίνουμε ότι  $r_j(A) e^{i\frac{2\pi t}{q}} \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} A)$ , για  $j = 1, \dots, k$ . Τότε

$$\left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\} \subseteq \mathcal{F}_j(A),$$

για κάθε  $j = 1, \dots, k$ . Η ισότητα του παραπάνω εγκλεισμού, με  $\theta_j = 0$  ή  $\frac{\pi}{q}$ , αποδεικνύεται όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.3, καθόσον το  $q$  ταυτίζεται με τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ώστε  $e^{-i\theta_j} A$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνια όμοιος με τον πίνακα  $e^{i(-\theta_j + \frac{2\pi}{q})} A$  και τα  $\Lambda_j(A)$  είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα, για κάθε  $j = 1, \dots, k$ .  $\square$

**Πόρισμα 3.6.** Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μη αρνητικός, με  $H(A)$  μη-αναγώγιμο. Αν  $0 < r_j(A) \notin \Lambda_j(A) \neq \emptyset$  για κάποιο  $j = 2, \dots, k$  και  $\Lambda_j(A)$  δεν είναι κυκλικός δίσκος, τότε το  $\Lambda_j(A)$  είναι συμμετρικό ως προς τις ευθείες  $\mathcal{L}_{\pm} = \left\{ z e^{\pm i\frac{\pi}{q}} : z \in \mathbb{R} \right\}$ , όπου  $q$  είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ώστε ο  $A$  είναι διαγώνια όμοιος με τον  $e^{i\frac{2\pi}{q}} A$ .

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 3.5,  $\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A) e^{i\frac{\pi(2t+1)}{q}} : t = 0, \dots, q-1 \right\}$ . Κατά συνέπεια,

$$\mathcal{F}_j(e^{\pm i\frac{\pi}{q}} A) = \left\{ r_j(A) e^{i\frac{2\pi t}{q}} : t = 0, \dots, q-1 \right\} \subseteq \partial\Lambda_j(e^{\pm i\frac{\pi}{q}} A),$$

για κάποιο  $j = 2, \dots, k$ . Σαφώς,  $\Lambda_j(e^{\pm i\frac{\pi}{q}} A)$  είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα, που σημαίνει ότι  $\Lambda_j(A) = e^{\mp i\frac{\pi}{q}} \Lambda_j(e^{\pm i\frac{\pi}{q}} A)$  είναι συμμετρικό ως προς τις ευθείες  $\mathcal{L}_{\pm}$ .  $\square$

**Πόρισμα 3.7.** Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μη αρνητικός,  $H(A)$  μη αναγώγιμος και  $r_k(A) > 0$ . Αν  $F(A)$  είναι κυκλικός δίσκος, τότε  $\Lambda_j(A)$  είναι επίσης κυκλικός δίσκος, για κάθε  $j = 2, \dots, k$ .

Οποιοσδήποτε πίνακας της μορφής (3.1) με  $C_{q1} = 0$  και  $q > 1$  ονομάζεται σύνθετος πίνακας μετάθεσης (block-shift). Οι μη αρνητικοί πραγματικοί πίνακες με μη αναγώγιμο ερμιτιανό μέρος, οι οποίοι με κατάλληλες μεταθέσεις γραμμών και στηλών μπορούν να τεθούν στη μορφή ενός σύνθετου πίνακα μετάθεσης, χαρακτηρίζουν την κυκλικότητα του αριθμητικού πεδίου [56, Θεώρημα 1]. Λόγω του Πορίσματος 3.7, είναι άμεσο ότι αυτού του τύπου οι πίνακες χαρακτηρίζουν επίσης και την κυκλικότητα του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου.

**Πρόταση 3.8.** Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  είναι μη αρνητικός και  $H(A)$  είναι μη αναγώγιμος. Αν ο  $A$  είναι όμοιος με έναν σύνθετο πίνακα μετάθεσης, τότε το  $\Lambda_j(A)$  ταυτίζεται με τον κυκλικό δίσκο  $\mathcal{D}(0, r_j(A))$ , για  $j = 1, \dots, k$ .

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει γενικότερα για οποιοδήποτε μιγαδικό πίνακα  $A$  που είναι ορθομοναδιαία όμοιος με σύνθετο πίνακα μετάθεσης. Για τη γενικότερη περίπτωση, παρουσιάζουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.9.** Έστω ότι  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , με  $A_1 \in \mathcal{M}_{m, n-m}(\mathbb{C})$  και  $\text{rank} A_1 = k$ . Τότε

$$\Lambda_j(A) = \mathcal{D}(0, r_j(A)) \text{ και } r_j(A) = \frac{\sigma_j(A_1)}{2},$$

όπου  $\sigma_j(A_1)$  συμβολίζει την  $j$ -στή μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του  $A_1$ , για  $j = 1, \dots, k$ .

*Απόδειξη.* Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\Lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{D}(0, \frac{\sigma_j(A_1)}{2})$ , για  $j = 1, \dots, k$ , εφόσον σύμφωνα με την ιδιότητα (Ιδ.2)  $\Lambda_j(A)$  είναι αναλλοίωτο ως προς οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό (κεφάλαιο 2). Γι' αυτό, από το Θεώρημα 2.3 έχουμε

$$\Lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \leq \lambda_j\left(H\left(\begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \right\},$$

όπου  $\lambda_j(H(A))$  είναι η  $j$ -στή μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού μέρους  $H(A)$  του πίνακα  $A$ . Άρα,

$$\Lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} A_1 \\ e^{-i\theta} A_1^* & 0 \end{bmatrix}\right) \right\}.$$

Οι ιδιοτιμές του  $n \times n$  ερμιτιανού πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} A_1 \\ e^{-i\theta} A_1^* & 0 \end{bmatrix}$  είναι οι ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_1(A_1) \geq \dots \geq \sigma_k(A_1) > 0 \geq \dots \geq 0 > -\sigma_k(A_1) \geq \dots \geq -\sigma_1(A_1)$  με  $k = \operatorname{rank} A_1$  [22], έτσι για  $j = 1, \dots, k$ ,

$$\Lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \frac{\sigma_j(A_1)}{2} \right\} = \mathcal{D}\left(0, \frac{\sigma_j(A_1)}{2}\right).$$

□

## Κεφάλαιο 4

# Κ-ΒΑΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

### 4.1 Ορισμός - Γεωμετρικές ιδιότητες

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$L(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0,$$

με  $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  και  $A_m \neq 0$ . Για  $k \in \mathbb{N}$ , το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο (higher rank numerical range) του  $L(\lambda)$  είναι το σύνολο

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PL(\lambda)P = 0_n, \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k\}, \quad (4.1)$$

όπου  $\mathcal{P}_k$  είναι το σύνολο των ορθογωνίων προβολών, όπως έχουμε αναφέρει στη σελίδα 12. Ισοδύναμα, έχουμε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Q^*L(\lambda)Q = 0_k, \text{ για κάποια } Q \in \mathcal{M}_{n,k} \text{ με } Q^*Q = I_k\}, \quad (4.2)$$

καθόσον  $P = QQ^*$  και  $Q \in \mathcal{X}_k$  (βλέπε σελίδα 15). Για  $k = 1$ , το σύνολο ταυτίζεται με το γνωστό αριθμητικό πεδίο  $w(L(\lambda))$  του  $L(\lambda)$  [16, 34], δηλαδή

$$\Lambda_1(L(\lambda)) \equiv w(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*L(\lambda)x = 0 \text{ για κάποια } x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}. \quad (4.3)$$

Το σύνολο  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι μια ενδιαφέρουσα γενίκευση αριθμητικού πεδίου, καθόσον οι πολυωνυμικοί πίνακες παίζουν σημαντικό ρόλο στα προβλήματα υπολογιστικής χημείας και δομικής μοριακής βιολογίας. Αποτελούν αλγεβρικά εργαλεία στον υπολογισμό όλων των διαμορφώσεων των μοριακών δακτυλίων και μοντελοποιούν ποικίλα προβλήματα πολυωνυμικών εξισώσεων [15, 18].

Αν  $L(\lambda) = I\lambda - A$ , τότε

$$\begin{aligned}\Lambda_k(I\lambda - A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P, \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : Q^*AQ = \lambda I_k, \text{ για κάποια } Q \in \mathcal{X}_k\},\end{aligned}\quad (4.4)$$

δηλαδή, συμπίπτει με το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο  $\Lambda_k(A)$  του πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$ .

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι  $\Lambda_k(L(\lambda))$  μπορεί να είναι και το κενό σύνολο. Από την (4.2), για οποιοδήποτε πολυωνυμικό πίνακα  $L(\lambda) = \sum_{l=0}^m A_l \lambda^l$ , με  $A_m \neq 0$ , θα έχουμε  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$ , ακριβώς όταν τα  $k^2 > 1$  βαθμωτά πολυώνυμα  $b_{ij}(\lambda, Q) = q_i^* L(\lambda) q_j$ ,  $i, j = 1, \dots, k$  για κάποιες ισομετρίες  $Q = [q_1 \ \dots \ q_k] \in \mathcal{X}_k$  έχουν κοινές ρίζες. Συγκεκριμένα, σημειώνοντας

$$\begin{aligned}b_{ij}(\lambda, Q) &= q_i^* A_m q_j \lambda^m + \dots + q_i^* A_l q_j \lambda^l + \dots + q_i^* A_0 q_j \\ &= b_{ij}^{(m)}(Q) \lambda^m + \dots + b_{ij}^{(l)}(Q) \lambda^l + \dots + b_{ij}^{(0)}(Q),\end{aligned}\quad (4.5)$$

για όλα τα  $i, j = 1, \dots, k$  και για την  $n \times k$  ισομετρία  $Q = [q_1 \ \dots \ q_k]$ , έχουμε  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  ακριβώς όταν τα πολυώνυμα  $b_{ij}(\lambda, Q)$  έχουν κοινές ρίζες.

Αν συμβολίσουμε  $\sigma \leq m$  το μεγαλύτερο βαθμό των πολυωνύμων  $b_{ij}(\lambda, Q)$  και  $\tau \leq \sigma$  το μεγαλύτερο βαθμό των υπολειπόμενων πολυωνύμων, τότε

$$b_{i_1, j_1}(\lambda, Q) = b_{i_1, j_1}^{(\sigma)}(Q) \lambda^\sigma + \dots + b_{i_1, j_1}^{(l)}(Q) \lambda^l + \dots + b_{i_1, j_1}^{(0)}(Q) \quad (4.6)$$

για κάποιους δείκτες  $i_1, j_1 \in \{1, \dots, k\}$ . Τότε ο γενικευμένος πίνακας Sylvester [43] είναι

$$R_s(Q) = \begin{bmatrix} R_1(Q) \\ \vdots \\ R_{k^2}(Q) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

όπου ο υποπίνακας

$$R_1(Q) = \begin{bmatrix} b_{i_1, j_1}^{(\sigma)}(Q) & b_{i_1, j_1}^{(\sigma-1)}(Q) & \dots & b_{i_1, j_1}^{(0)}(Q) & \mathbf{0} \\ & b_{i_1, j_1}^{(\sigma)}(Q) & b_{i_1, j_1}^{(\sigma-1)}(Q) & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & b_{i_1, j_1}^{(\sigma)}(Q) & \dots & b_{i_1, j_1}^{(\sigma-1)}(Q) & \dots & b_{i_1, j_1}^{(0)}(Q) \end{bmatrix}$$



είναι διαστάσεως  $\tau \times (\sigma + \tau)$  και οι υποπίνακες  $R_p(Q)$ , για  $p = 2, \dots, k^2$ , είναι οι παρακάτω  $\sigma \times (\sigma + \tau)$  πίνακες

$$R_p(Q) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & b_{i_p, j_p}^{(\tau)}(Q) & \cdot & \cdot & b_{i_p, j_p}^{(0)}(Q) \\ & b_{i_p, j_p}^{(\tau)}(Q) & & & & \\ & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ b_{i_p, j_p}^{(\tau)}(Q) & & \cdot & & b_{i_p, j_p}^{(0)}(Q) & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

με  $i_p, j_p \in \{1, \dots, k\}$  και  $i_p \neq i_1, j_p \neq j_1$ . Είναι γνωστό ότι ο βαθμός  $\delta(Q) \neq 0$  του μέγιστου κοινού διαιρέτη των πολυωνύμων  $b_{ij}(\lambda, Q)$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ) για την  $n \times k$  ισομετρία  $Q$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{rank} R_s(Q) = \sigma + \tau - \delta(Q) \leq 2m - \delta(Q) \quad (4.8)$$

και κατά συνέπεια,  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  αν και μόνο αν υπάρχει  $n \times k$  ισομετρία  $Q$  τέτοια ώστε  $\text{rank} R_s(Q) < 2m$ .

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μερικές βασικές ιδιότητες για το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα  $L(\lambda)$ .

**Πρόταση 4.1.** Έστω πολυωνυμικός πίνακας  $L(\lambda) = \sum_{j=0}^m A_j \lambda^j$ , όπου  $A_m \neq 0$ , τότε

- (a) το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι κλειστό στο  $\mathbb{C}$ ,
- (b) για οποιοδήποτε  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\Lambda_k(L(\lambda + \alpha)) = \Lambda_k(L(\lambda)) - \alpha$ ,
- (c) αν  $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^m A_{m-j} \lambda^j$ , τότε  $\Lambda_k(Q(\lambda)) \setminus \{0\} = \{\mu^{-1} : \mu \in \Lambda_k(L(\lambda))\}$ ,
- (d) αν οι πίνακες  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  έχουν έναν κοινό ισοτροπικό υπόχωρο  $\mathcal{S} = \text{span} \{x_1, \dots, x_k\}$  με ορθοκανονικά διανύσματα  $x_j \in \mathbb{C}^n$ ,  $j = 1, \dots, k$ , δηλαδή  $x_l^* A_i x_j = 0$ , για κάθε  $l, j = 1, \dots, k$  και  $i = 0, \dots, m$ , τότε  $\Lambda_k(L(\lambda)) = \mathbb{C}$ .

**Πρόταση 4.2.** Έστω πολυωνυμικός πίνακας  $L(\lambda) = \sum_{j=0}^m A_j \lambda^j$ , τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i)  $\mu \in \Lambda_k(L(\lambda))$
- (ii) υπάρχει  $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$  με  $\text{rank} M = k$  τέτοιος ώστε  $M^* L(\mu) M = 0_k$

- (iii) υπάρχει ένας  $L(\mu)$ -ορθογώνιος  $k$ -διάστατος υπόχωρος  $\mathcal{K}$  του  $\mathbb{C}^n$
- (iv) υπάρχουν  $\{u_i\}_{i=1}^k$  ορθοκανονικά διανύσματα τέτοια ώστε  $u_j^* L(\mu) u_i = 0$ , για κάθε  $i, j = 1, \dots, k$
- (v) υπάρχει ένας  $k$ -διάστατος υπόχωρος  $\mathcal{K}$  του  $\mathbb{C}^n$  τέτοιος ώστε  $v^* L(\mu) v = 0$ , για κάθε  $v \in \mathcal{K}$
- (vi) υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  τέτοιος ώστε

$$U^* L(\mu) U = \begin{bmatrix} 0_k & L_1(\mu) \\ L_2(\mu) & L_3(\mu) \end{bmatrix},$$

όπου  $L_1(\mu), L_2(\mu)$  και  $L_3(\mu)$  είναι κατάλληλοι πολυωνυμικοί πίνακες.

*Απόδειξη.* Εφόσον  $\mu \in \Lambda_k(L(\lambda))$  ισοδυναμεί με  $0 \in \Lambda_k(L(\mu))$ , από την πρόταση 1.1 στην εργασία [9], αποδεικνύουμε άμεσα τους ισοδύναμους ισχυρισμούς (i)-(vi).  $\square$

**Πρόταση 4.3.** Έστω  $L(\lambda) = \sum_{j=1}^m A_j \lambda^j$ , τότε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \subseteq \Lambda_{k-1}(L(\lambda)) \subseteq \dots \subseteq \Lambda_1(L(\lambda)).$$

*Απόδειξη.* Για οποιοδήποτε  $j \in \{2, \dots, k\}$ , έστω  $\mu_0 \in \Lambda_j(L(\lambda))$ . Τότε  $0 \in \Lambda_j(L(\mu_0)) \subseteq \Lambda_{j-1}(L(\mu_0))$ . Καθόσον,  $0 \in \Lambda_{j-1}(L(\mu_0))$ , προφανώς συμπεραίνουμε  $\mu_0 \in \Lambda_{j-1}(L(\lambda))$ .  $\square$

**Πόρισμα 4.4.** Έστω  $L(\lambda)$  ένας  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας. Τότε για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο  $k \leq n$

$$\Lambda_k(\underbrace{L(\lambda) \oplus \dots \oplus L(\lambda)}_k) = w(L(\lambda)),$$

δηλαδή το  $\Lambda_k(\oplus_k L(\lambda))$  είναι ένα μη κενό σύνολο.

*Απόδειξη.* Εξαιτίας της Πρότασης 4.3,  $\mu_0 \in \Lambda_k(\oplus_k L(\lambda)) \subseteq w(\oplus_k L(\lambda))$ . Άρα,  $0 \in F(\oplus_k L(\mu_0)) = F(L(\mu_0))$ , ισοδύναμα  $\mu_0 \in w(L(\lambda))$  και τότε παίρνουμε  $\Lambda_k(\oplus_k L(\lambda)) \subseteq w(L(\lambda))$ . Επιπλέον,  $\mu_0 \in w(L(\lambda)) \Rightarrow 0 \in F(L(\mu_0)) = \bigcap_k F(L(\mu_0)) \subseteq \Lambda_k(\oplus_k L(\mu_0))$ , σύμφωνα με την ιδιότητα (Ιδ.7) που αναφέραμε στο εδάφιο 2.1. Έτσι,  $w(L(\lambda)) \subseteq \Lambda_k(\oplus_k L(\lambda))$  και η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

Αντίστοιχα με το Θεώρημα 2.6 που εκφράζει το  $\Lambda_k(A)$  ως άπειρη τομή αριθμητικών πεδίων, έχουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.5.** Αν  $L(\lambda) = \sum_{j=1}^m A_j \lambda^j$ , τότε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \bigcap_M w(M^*L(\lambda)M) = \bigcup_N \Lambda_k(N^*L(\lambda)N),$$

όπου  $M \in \mathcal{M}_{n,n-k+1}(\mathbb{C})$ ,  $N \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$  είναι ισομετρίες.

Απόδειξη. Προφανώς, από το Θεώρημα 2.6

$$\mu_0 \in \Lambda_k(L(\lambda)) \Leftrightarrow 0 \in \Lambda_k(L(\mu_0)) \Leftrightarrow$$

$$0 \in \bigcap_M F(M^*L(\mu_0)M) \Leftrightarrow \mu_0 \in \bigcap_M w(M^*L(\lambda)M).$$

Όμοια, θεωρώντας την ισότητα  $\Lambda_k(A) = \bigcup_N \Lambda_k(N^*AN)$ , που αποδείχθηκε στη σχέση (2.3), έχουμε

$$\mu_0 \in \Lambda_k(L(\lambda)) \Leftrightarrow 0 \in \Lambda_k(L(\mu_0)) \Leftrightarrow$$

$$0 \in \bigcup_N \Lambda_k(N^*L(\mu_0)N) \Leftrightarrow \mu_0 \in \bigcup_N \Lambda_k(N^*L(\lambda)N).$$

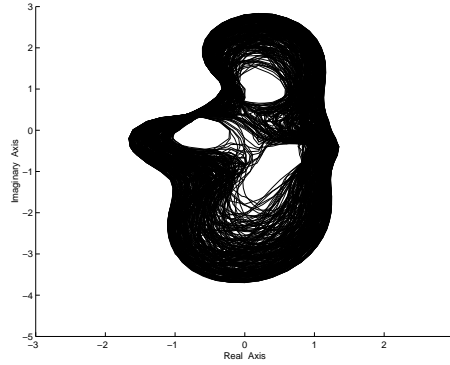
□

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Πρόταση 4.5 μας δίνει μια εκτίμηση του συνόρου του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  μέσω της αριθμητικής προσέγγισης του αριθμητικού πεδίου  $w(L(\lambda))$  [7, 53]. Παρότι το  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο  $\Lambda_k(I\lambda - A)$  είναι πάντα συνεκτικό και κυρτό (Θεώρημα 2.5), το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  δεν ικανοποιεί αναγκαία αυτές τις ιδιότητες, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.1.** Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$L(\lambda) = 3I_5\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ \mathbf{i} & 2\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & 4\mathbf{i} & 5\mathbf{i} \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 4 & -\mathbf{i} & 1 & 0 & -2 \\ \mathbf{i} & 2\mathbf{i} & -6\mathbf{i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ -\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η τομή των αριθμητικών πεδίων  $w(M^*L(\lambda)M)$  για 400 τυχαία επιλεγμένες  $5 \times 4$  ισομετρίες  $M$ , προσεγγίζει το σύνολο  $\Lambda_2(L(\lambda))$  και απεικονίζεται από τις «λευκές» περιοχές μέσα στη φηγούρα του σχήματος 4.1. Παρατηρούμε ότι ολόκληρη η φηγούρα με το εσωτερικό της αποτελεί το αριθμητικό πεδίο  $w(L(\lambda))$ .



Σχήμα 4.1: Οι «λευκές τρύπες» συνιστούν το  $\Lambda_2(L(\lambda))$ .

Ερευνώντας περισσότερο το μη κενό του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , παρατηρείται ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη  $n \geq 3k - 2$  ώστε  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$  για τον πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  (Πρόταση 2.2) αποτυγχάνει γενικότερα για τους πολυωνυμικούς πίνακες, όπως δείχνεται στα ακόλουθα δύο αποτελέσματα. Η πρώτη πρόταση αναφέρεται στο κενό του συνόλου  $\Lambda_k(A\lambda + B)$ , όπου  $A, B$  είναι  $n \times n$  ερμιτιανοί πίνακες με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

**Πρόταση 4.6.** Έστω  $n \times n$  αυτοσυζυγές pencil  $L(\lambda) = A\lambda + B$  τέτοιο ώστε  $w(M^*(A\lambda + B)M) \neq \mathbb{C}$  για οποιαδήποτε  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρία  $M$ . Αν ο  $A$  είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας, όπου η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\mu_A = 0$  είναι μεγαλύτερη από  $k - 1$  και ο  $B$  είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένος, τότε  $\Lambda_k(A\lambda + B) = \emptyset$ , για οποιοδήποτε  $k = 2, 3, \dots, n$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι ο  $B$  είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Λόγω της συνθήκης πολλαπλότητας της ιδιοτιμής  $\mu_A = 0$ , οι πίνακες  $M^*AM$  και  $M^*BM$  είναι θετικά ημιορισμένοι και θετικά ορισμένοι, αντίστοιχα, για οποιαδήποτε  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρία  $M$ . Ακόμη,  $w(M^*(A\lambda + B)M) \neq \mathbb{C}$  και  $w(M^*(A\lambda + B)M) = (-\infty, -\frac{1}{\nu_M}]$ , [50, Θεώρημα 9], όπου  $\nu_M$  είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα  $(M^*BM)^{-1}M^*AM$ . Τότε, από την Πρόταση 4.5, παίρνουμε

$$\Lambda_k(A\lambda + B) = \bigcap_M w(M^*(A\lambda + B)M) = \bigcap_M (-\infty, -\frac{1}{\nu_M}] = \mathbb{R}^c = \emptyset.$$

Ομοιοτρόπως, όταν  $B$  είναι αρνητικά ορισμένος πίνακας. □

Απεναντίας,  $\Lambda_k(L(\lambda))$  εμφανίζεται μη κενό στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.7.** Έστω ότι  $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m A_m$  είναι  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας, όπου  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  και  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ . Τότε  $\Lambda_k(L(\lambda)) = \{\lambda_0\}$ .

*Απόδειξη.* Καθόσον  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ , από το Θεώρημα 2.6, υπάρχει μια  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρία  $M_0$  τέτοια ώστε  $0 \notin F(M_0^* A_m M_0)$  και ακόμη, ισχύει  $w(M_0^* L(\lambda) M_0) = w((\lambda - \lambda_0)^m M_0^* A_m M_0) = \{\lambda_0\}$ . Συνεπώς, από την Πρόταση 4.5, έχουμε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \bigcap_M w(M^* L(\lambda) M) = w(M_0^* L(\lambda) M_0) = \{\lambda_0\}.$$

□

Εν συνεχεία, ερευνούμε το φραγμένο του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  και παραθέτουμε το ακόλουθο χρήσιμο λήμμα.

**Λήμμα 4.8.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Για τη συνάρτηση  $f : \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ , όπου  $f(Q) = Q^* A Q$ , έχουμε  $\text{int}(\ker f) = \emptyset$ .

*Απόδειξη.* Για  $k = 1$ , έστω  $\text{int}(\ker f) \neq \emptyset$  και διάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^n \cap \text{int}(\ker f)$ , τότε υπάρχει μια ανοικτή μπάλα  $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \subset \ker f$ , με  $\varepsilon > 0$ . Για οποιοδήποτε  $y \in \mathbb{C}^n$ , με  $y \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$  και πραγματικό  $t < 1$ , σαφώς,  $ty \in \mathcal{B}(0, t\varepsilon) \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon)$  και  $x_0 + ty \in \mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ . Άρα,

$$f(x_0 + y) = f(x_0 + ty) = 0$$

και συνεπώς, έχουμε  $(t^2 - t)y^* A y = 0$  για κάθε  $y \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$ . Όμως, τότε  $A = 0$  και οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Για  $k > 1$ , υποθέτουμε  $Q_0 \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C}) \cap \text{int}(\ker f)$  και έστω η ανοικτή μπάλα  $\mathcal{B}(Q_0, \varepsilon) \subset \ker f$ . Αν ένας  $n \times k$  πίνακας  $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_k \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(Q_0, \varepsilon)$  και συμβολίσουμε  $Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & q_{02} & \dots & q_{0k} \end{bmatrix}$ , τότε

$$\|q_i - q_{0i}\|_2 = \|(Q - Q_0)e_i\|_2 \leq \|Q - Q_0\|_2 < \varepsilon \quad (4.9)$$

για  $i = 1, \dots, k$ , όπου  $e_i \in \mathbb{C}^n$  είναι το  $i$ -οστό διάνυσμα της κανονικής βάσης του  $\mathbb{C}^n$  και  $\|\cdot\|_2$  είναι η φασματική νόρμα. Άρα, από  $Q^* A Q = Q_0^* A Q_0 = 0$ , λαμβάνουμε  $f(q_i) = q_i^* A q_i = 0$  και  $f(q_{0i}) = q_{0i}^* A q_{0i} = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) και από την (4.9), καταλήγουμε  $q_i \in \mathcal{B}(q_{0i}, \varepsilon)$ , δηλαδή  $\mathcal{B}(q_{0i}, \varepsilon) \subset \ker f$ . Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το κενό του  $\text{int}(\ker f)$  που ισχύει στη διανυσματική περίπτωση. □

**Πρόταση 4.9.** Έστω ότι  $L(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$  είναι  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας, όπου  $A_m \neq 0$ . Αν  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ , τότε  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  είναι φραγμένο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$ , όπου  $R_s(Q)$  είναι ο γενικευμένος πίνακας Sylvester στην (4.7) των  $k^2$  πολυωνύμων, στοιχείων του πίνακα  $Q^*L(\lambda)Q$ , για όλες τις ισομετρίες  $Q \in \mathcal{M}_{n,k}$  τέτοιες ώστε  $Q^*A_mQ = zI_k$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Αν  $\Lambda_k(A_m) \neq \{0\}$  και το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι φραγμένο, τότε  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ .

Απόδειξη. Αρχικά, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ερευνούμε το φραγμένο του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη (4.8), έτσι ώστε να μην είναι κενό και όλα τα σύνολα  $\Lambda_1(L(\lambda)) \supseteq \dots \supseteq \Lambda_{k-1}(L(\lambda))$  να μην είναι φραγμένα. Αν  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ , τότε από Θεώρημα 2.6 υπάρχει μια  $n \times (n - k + 1)$  ισομετρία  $M_0$  τέτοια ώστε  $0 \notin F(M_0^*A_mM_0)$ . Άρα, το  $w(M_0^*L(\lambda)M_0)$  είναι φραγμένο [34] και από την Πρόταση 4.5, καθώς  $\Lambda_k(L(\lambda)) \subseteq w(M_0^*L(\lambda)M_0)$ , καταλήγουμε ότι  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι φραγμένο.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι  $0 \in \Lambda_k(A_m) \neq \{0\}$  και το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι φραγμένο. Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία  $\{z_\nu\} \subseteq \Lambda_k(A_m)$  τέτοια ώστε  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = 0$  και συνεπώς, μια ακολουθία  $n \times k$  ισομετριών  $\{Q_\nu\}$  τέτοιων ώστε  $Q_\nu^*A_mQ_\nu = z_\nu I_k \rightarrow 0_k$ . Λόγω συμπάγειας της ομάδας των  $n \times k$  ισομετριών, υπάρχει υπακολουθία  $\{Q_\rho\}$  της  $\{Q_\nu\}$  τέτοια ώστε  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} Q_\rho = Q_0$ , όπου  $Q_0 \in \mathcal{M}_{n,k}$  είναι ισομετρία. Άρα, λόγω συνέχειας,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} Q_\rho^*A_mQ_\rho = Q_0^*A_mQ_0 = 0_k$  και από Λήμμα 4.8, θα είναι  $Q_\rho^*A_mQ_\rho = z_\rho I_k \neq 0$ . Σημειώνουμε ότι ο γενικευμένος πίνακας Sylvester  $R_s(Q_\rho)$  στην (4.7) έχει διαστάσεις  $k^2m \times 2m$ , καθόσον στις (4.5) και (4.6),  $\sigma = \tau = m$  και λόγω της  $\text{rank}R_s(Q_\rho) < 2m$ , εξασφαλίζονται οι ρίζες της εξίσωσης  $Q_\rho^*L(\lambda)Q_\rho = 0_k$ .

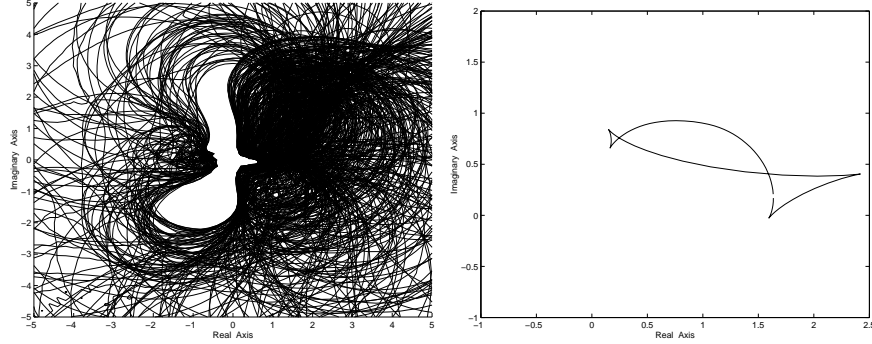
Επιπλέον, υπάρχει δείκτης  $j \neq m$  τέτοιος ώστε  $Q_0^*A_jQ_0 \neq 0_k$  (διαφορετικά,  $\Lambda_k(L(\lambda)) \equiv \mathbb{C}$  και ακόμη,  $\|Q_\rho^*A_jQ_\rho\| \geq \varepsilon$  για κάποιο δεδομένο  $\varepsilon > 0$  και αρκετά μεγάλο  $\rho$ ). Άρα, η  $(m - j)$ στή πρωτεύουσα συμμετρική συνάρτηση  $\pm \frac{1}{z_\rho} Q_\rho^*A_jQ_\rho$  των ριζών του πολυωνυμικού πίνακα  $Q_\rho^*L(\lambda)Q_\rho$  [14, Θεώρ.4.2] δεν είναι φραγμένη, καταλήγοντας ότι το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  δεν είναι φραγμένο. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση και η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

Είναι φανερό ότι αν  $L(\lambda)$  είναι monic πολυωνυμικός πίνακας, τότε  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι πάντα φραγμένο σύνολο. Ακολούθως, παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα επί της Προτάσεως 4.9.

**Παράδειγμα 4.2. I.** Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 & 2 \\ -i & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} i & 2 & i & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ i & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Η «λευκή» περιοχή στην παρακάτω αριστερή εικόνα προσεγγίζει το σύνολο  $\Lambda_2(L(\lambda))$ , το οποίο είναι φραγμένο, παρόλο που  $\Lambda_1(L(\lambda)) = \mathbb{C}$ . Το σύνορο του  $\Lambda_2(A_2)$ , του συντελεστή  $A_2$  του μεγιστοβάθμιου όρου του  $L(\lambda)$ , απεικονίζεται στη δεξιά εικόνα και παρατηρούμε ότι  $0 \notin \Lambda_2(A_2)$ .



**II.** Για το αντίστροφο, έστω ο  $4 \times 4$  πολυωνυμικός πίνακας ( $m = 1$ )

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1 \lambda + A_0.$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι  $0 \in \Lambda_2(A_1) = [0, 3]$ . Από την άλλη μεριά, το  $\Lambda_2(L(\lambda))$  ισούται με το φραγμένο σύνολο  $\{0\}$ . Πράγματι, αν πάρουμε τις  $4 \times 3$  ισομετρίες  $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  και  $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , τότε οι πίνακες  $M_1^* A_1 M_1$  και  $M_1^* A_0 M_1$  είναι και οι δύο θετικά ημιορισμένοι και συνεπώς, [50, Θεώρ.9],  $w(M_1^* L(\lambda) M_1) = (-\infty, 0]$ . Όμοια, οι πίνακες  $M_2^* A_1 M_2$ ,  $M_2^* A_0 M_2$  είναι θετικά και αρνητικά ημιορισμένοι, αντίστοιχα, που συνεπάγεται ότι  $w(M_2^* L(\lambda) M_2) = [0, \infty)$ . Σαφώς,  $\Lambda_2(L(\lambda)) \subseteq w(M_1^* L(\lambda) M_1) \cap w(M_2^* L(\lambda) M_2) = \{0\}$  και  $0 \in \Lambda_2(L(\lambda)) \neq \emptyset$ , δηλαδή  $\Lambda_2(L(\lambda)) = \{0\}$ .

Επιπλέον, για την ισομετρία  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{6}/4 & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{6}/4 & 1/\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$  έχουμε  $Q^* A_1 Q = I_2$  και

στην (4.7), ο γενικευμένος πίνακας Sylvester  $R_s(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 3/8 \\ 1 & 1/3 \\ 0 & -3\sqrt{2}/4 \\ 0 & -3\sqrt{2}/4 \end{bmatrix}$  έχει  $\text{rank}R_s(Q) = 2$  και όχι λιγότερο από 2, όπως απαιτείται.

**III.** Ας θεωρήσουμε τον  $4 \times 4$  πολυωνυμικό πίνακα  $L(\lambda) = I_2 \otimes (B\lambda + I_2)$ , με  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Τότε  $\Lambda_2(I_2 \otimes B) \neq \{0\}$  και  $0 \in \Lambda_2(I_2 \otimes B)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, για οποιαδήποτε  $4 \times 2$  ισομετρία  $Q$  τέτοια ώστε  $Q^*(I_2 \otimes B)Q = zI_2 \neq 0_2$ , ο γενικευμένος πίνακας Sylvester στην (4.7) είναι  $R_s(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 1/z \\ 1 & 1/z \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  με  $\text{rank}R_s(Q) = 1 < 2$ . Εφόσον,  $0 \in F(A_2)$ , τότε το  $\omega(L(\lambda))$  όπως και το  $\Lambda_2(L(\lambda) \oplus L(\lambda))$  (Πόρισμα 4.4) είναι μη φραγμένα σύνολα, όπως είναι αναμενόμενο από τον αντίστροφο ισχυρισμό της Πρότασης 4.9.

Ακόμη, μελετάμε τη μη συνεκτικότητα του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , προσπαθώντας να προσδιορίσουμε ένα φράγμα για τον αριθμό των συνεκτικών συνιστώσων του.

**Πρόταση 4.10.** Έστω ότι  $L(\lambda) = A_m\lambda^m + \dots + A_1\lambda + A_0$  είναι  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας, με  $A_m \neq 0$  και  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  έχει  $\rho$  συνεκτικές συνιστώσες. Επιπλέον,  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$ , όπου  $R_s(Q)$  είναι ο γενικευμένος πίνακας Sylvester στην (4.7) των  $k^2$  πολυωνύμων (στοιχείων του  $Q^*L(\lambda)Q$ ), για οποιαδήποτε  $n \times k$  ισομετρία  $Q$  τέτοια ώστε  $Q^*A_mQ = \gamma I_k$ , με  $\gamma \in \Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$ .

Αν  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$  είναι συνεκτικό, τότε  $\rho \leq l \leq m$ , όπου  $l$  είναι ο μικρότερος αριθμός διακεκριμένων ριζών της εξίσωσης  $Q^*L(\lambda)Q = 0$ , για κάθε  $n \times k$  ισομετρία  $Q$  τέτοια ώστε  $Q^*A_mQ = \gamma I_k$ , με  $\gamma \in \Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$ .

Διαφορετικά, αν  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , με  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$  και  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2$  είναι συνεκτικά, τότε  $\rho \leq l_1 + l_2 \leq 2m$ , όπου  $l_i$  είναι ο μικρότερος αριθμός διακεκριμένων ριζών της  $Q^*L(\lambda)Q = 0$ , για κάθε  $n \times k$  ισομετρία  $Q$  που αντιστοιχεί σε σημεία  $\gamma \in \mathcal{C}_i$ , για  $i = 1, 2$ .

Απόδειξη. Έστω ότι  $\mathcal{C}_1$  είναι μια συνεκτική συνιστώσα του  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$  και οι  $n \times k$  ισομετρίες  $Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & \dots & q_{0k} \end{bmatrix}$ ,  $Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \end{bmatrix}$  αντιστοιχούν στα  $Q_0^*A_mQ_0 = \gamma_0 I_k$  και  $Q_1^*A_mQ_1 = \gamma_1 I_k$ , με  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}_1$ . Ακόμη, θεωρούμε ότι  $Q_0^*L(\lambda)Q_0 = 0_k$ ,  $Q_1^*L(\lambda)Q_1 = 0_k$  και συγκεκριμένα, ότι η  $Q_0^*L(\lambda)Q_0 = 0$  έχει το μικρότερο πλήθος διακεκριμένων ριζών. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση ισομετριών  $Q(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ , με  $Q(0) = Q_0$ ,  $Q(1) = Q_1 U$ , για κάποιον ορθομοναδιαίο πίνακα  $U$  τέτοια ώστε αντιστοιχεί σε ένα συνεχές μονοπάτι  $\gamma(t) \in \mathcal{C}_1$  που ενώνει το  $\gamma_0$  με το  $\gamma_1$ .



Στην περίπτωση όπου  $\gamma_0 \neq \gamma_1$  και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα  $\gamma_0, \gamma_1$  δεν περιέχει την αρχή, θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$Q(t) = (\sqrt{1-t^2}Q_0 + tQ_1U)C(t, U), \quad t \in [0, 1], \quad (4.10)$$

όπου  $U = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k})$ , με  $\theta_j \in [0, 2\pi]$ ,  $j = 1, \dots, k$  και

$$C(t, U) = \text{diag}(c_1^{-1}(t, \theta_1), \dots, c_k^{-1}(t, \theta_k)) \in \mathcal{M}_k,$$

όπου  $c_j(t, \theta_j) = \|\sqrt{1-t^2}q_{0j} + te^{i\theta_j}q_{1j}\|_2$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Σαφώς,  $Q(0) = Q_0$ ,  $Q(1) = Q_1U$  και  $Q^*(t)Q(t) = I_k$ , καθόσον οι υπόχωροι  $\mathcal{K}_j = \text{span}\{q_{0j}, q_{1j}\}$  είναι ορθογώνιοι κατά ζευγη, για όλα τα  $j = 1, \dots, k$  [21, σελ.318]. Άρα, μετά από κάποιους υπολογισμούς, παίρνουμε

$$Q^*(t)A_mQ(t) = C(t, U) \left[ \gamma(t)I_k + t\sqrt{1-t^2}(Q_0^*A_mQ_1U + U^*Q_1^*A_mQ_0) \right] C(t, U),$$

όπου  $\gamma(t) = \gamma_0 + t^2(\gamma_1 - \gamma_0)$  για  $t \in [0, 1]$ . Επιπλέον, σύμφωνα με τις συνθήκες (i)-(iii) στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2 στην εργασία [34], υπάρχει κατάλληλος ορθομοναδιαίος πίνακας  $U_0 = \text{diag}(e^{i\theta_{01}}, \dots, e^{i\theta_{0k}})$  ώστε η συνάρτηση πινάκων

$$g(U) = Q_0^*A_mQ_1U + U^*Q_1^*A_mQ_0$$

να ικανοποιεί μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

$$(i) \quad g(U_0) = 0_k,$$

$$(ii) \quad g(U_0) = \xi(\gamma_1 - \gamma_0)I_k, \text{ για κάποιο πραγματικό αριθμό } \xi \neq 0.$$

Τότε  $Q^*(t)A_mQ(t) = [\gamma_0 + (t^2 + \xi t\sqrt{1-t^2})(\gamma_1 - \gamma_0)] C^2(t, U_0) \neq 0_k$  και για κάθε  $j = 1, \dots, k$ , τα ευθύγραμμο τμήματα  $h_j(t) = \frac{\gamma_0 + (t^2 + \xi t\sqrt{1-t^2})(\gamma_1 - \gamma_0)}{c_j^2(t, \theta_{0j})} \neq 0$  συνδέουν τα σημεία  $\gamma_0, \gamma_1$ , χωρίς αυτά απαραίτητα να είναι και άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων. Προφανώς, λόγω της κυρτότητας του  $\Lambda_k(A_m)$ , έχουμε ότι οι ισομετρίες  $Q(t)$  δημιουργούν το ευθύγραμμο τμήμα  $\gamma(t) \in \mathcal{C}_1$ .

Στην περίπτωση που η αρχή ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα  $[\gamma_0, \gamma_1]$ , ( $\gamma_0 \neq \gamma_1$ ), μπορούμε να θεωρήσουμε ένα άλλο σημείο  $\gamma_2 \in \mathcal{C}_1$  τέτοιο ώστε  $\gamma_2 \neq \gamma_0, \gamma_1$  και  $[\gamma_0, \gamma_2] \cup [\gamma_2, \gamma_1] \subseteq \mathcal{C}_1$ . Αυτό είναι αληθές από την κυρτότητα του  $\Lambda_k(A_m)$  και το γεγονός ότι τα σημεία  $\gamma_0, \gamma_1$  ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Τελικά, αν  $\gamma_0 = \gamma_1$  και ο  $A_m$  είναι βαθμωτός πίνακας, τότε αντί για την (4.10) θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση των  $n \times k$  ισομετριών

$$Q(t) = (\sqrt{1-t^2}Q_0 + tQ_1)C(t, I_k), \quad t \in [0, 1].$$

Διαφορετικά, αν ο  $A_m$  δεν είναι βαθμωτός, αναφερόμαστε στην (4.10).

Έτσι, έχουμε κατασκευάσει μια συνεχή συνάρτηση  $n \times k$  ισομετριών  $Q(t)$  τέτοια ώστε  $Q^*(t)A_m Q(t) = \gamma(t)I_k \neq 0_k$ ,  $t \in [0, 1]$  και για την οποία ο γενικευμένος πίνακας Sylvester στην (4.7),  $R_s(Q(t)) \in \mathcal{M}_{k^2m, 2m}$  για  $t \in [0, 1]$ , καθόσον  $\sigma = \tau = m$  στις (4.5) και (4.6). Άρα, από την υπόθεση  $\text{rank}R_s(Q(t)) < 2m$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ , έχουμε ότι η εξίσωση  $Q^*(t)L(\lambda(t))Q(t) = 0$  έχει πάντοτε ρίζες, έστω τις  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$  ( $r \leq m$ ). Λόγω συνέχειας της  $Q(t)$ , οι ρίζες  $\lambda_j(t) : [0, 1] \rightarrow \Lambda_k(L(\lambda))$  είναι συνεχή μονοπάτια στο  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , συνδέοντας τις ρίζες των εξισώσεων  $Q_0^*L(\lambda)Q_0 = 0_k$  και  $Q_1^*L(\lambda)Q_1 = 0_k$ , έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

**Παράδειγμα 4.3.** Έστω ο  $4 \times 4$  πολωνυμικός πίνακας δευτέρου βαθμού

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \otimes I_2 \lambda^2 + 4I_4 \lambda = \lambda(D\lambda + 4I_4), \quad \mu \in D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \otimes I_2.$$

Προφανώς,  $\Lambda_2(L(\lambda)) = \{0\} \cup \Lambda_2(D\lambda + 4I_4)$  και  $0 \notin \Lambda_2(D\lambda + 4I_4) \neq \emptyset$ , δηλαδή το  $\{0\}$  είναι ένα μεμονωμένο σημείο. Σημειώνουμε επίσης, ότι  $\mu_0 \in \Lambda_2(D\lambda + 4I_4)$  αν και μόνο αν  $\mu_0^{-1} \in \Lambda_2\left(\begin{bmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix} \otimes I_2\right) \setminus \{0\}$ , γι' αυτό το  $\Lambda_2(L(\lambda))$  έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες, τις ημιευθείες  $(-\infty, -2]$ ,  $[2, \infty)$  στον φανταστικό άξονα και το σημείο  $\{0\}$ . Επιπλέον, ο  $8 \times 4$  γενικευμένος πίνακας Sylvester  $R_s(Q)$  στην (4.7) έχει  $\text{rank}R_s(Q) = \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 4 \\ \lambda_0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 4 \end{bmatrix} < 4$  για κάθε ισομετρία  $Q \in \mathcal{M}_{4,2}$  τέτοια ώστε  $Q^*DQ = \lambda_0 I_2 \neq 0_2$ . Ακόμη, το  $\Lambda_2(D) \setminus \{0\}$  έχει δυο συνεκτικές συνιστώσες και η Πρόταση 4.10 επιβεβαιώνεται.

## 4.2 Γωνιακά σημεία

Στην εργασία [44], ορίζεται η έννοια των γωνιακών σημείων του συνόλου  $w(L(\lambda))$  για πολυωνυμικό πίνακα  $L(\lambda)$ , η οποία στο εδάφιο αυτό θα επεκταθεί στο σύνολο  $\Lambda_k(L(\lambda))$ . Ειδικότερα, για το σύνολο  $\Lambda_k(L(\lambda))$  το  $z_0 \in \partial\Lambda_k(L(\lambda))$  ονομάζεται *γωνιακό σημείο* (sharp point) αν για μια συνεκτική συνιστώσα  $\Lambda_k^{(s)}(L(\lambda))$  του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  υπάρχει δίσκος  $S(z_0, \varepsilon)$  και γωνίες  $\theta_1 < \theta_2$ , με  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ , τέτοιες ώστε

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) = \max \left\{ \operatorname{Re} z : e^{-i\theta} z \in \Lambda_k^{(s)}(L(\lambda)) \cap S(z_0, \varepsilon) \right\} \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Η ακόλουθη πρόταση παρουσιάζει μια συνθήκη για ένα συνοριακό σημείο του  $w(L(\lambda))$  να είναι επίσης συνοριακό σημείο του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ . Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο όρος «πολλαπλότητα», όπου αναφέρεται παρακάτω, αποδίδεται στην αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής.

**Πρόταση 4.11.** Έστω  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας  $L(\lambda)$ . Αν  $\gamma \in \sigma(L(\lambda)) \cap \partial w(L(\lambda))$  με πολλαπλότητα  $k$ , τότε για  $j = 2, \dots, k$

$$\gamma \in \partial\Lambda_j(L(\lambda)).$$

*Απόδειξη.* Σαφώς, από την υπόθεση,  $\gamma$  είναι μια ημικανονική ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα  $L(\lambda)$  πολλαπλότητας  $k$  [29, Θεώρημα 6]. Δηλαδή, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε

$$U^*L(\gamma)U = 0_k \oplus R(\gamma),$$

όπου  $R(\gamma)$  είναι  $(n - k) \times (n - k)$  πολυωνυμικός πίνακας και  $\gamma \notin \operatorname{int} w(R(\lambda))$ . Άρα, από τις Προτάσεις 4.2(vi) και 4.3, συνεπάγεται  $\gamma \in \Lambda_j(L(\lambda)) \subseteq \Lambda_{j-1}(L(\lambda))$ , για  $j = 2, \dots, k$  και λόγω ότι  $\gamma \notin \operatorname{int} w(L(\lambda))$  ( $\equiv \operatorname{int}\Lambda_1(L(\lambda))$ ), παίρνουμε  $\gamma \in \partial\Lambda_j(L(\lambda))$ , για  $j = 2, \dots, k$ .  $\square$

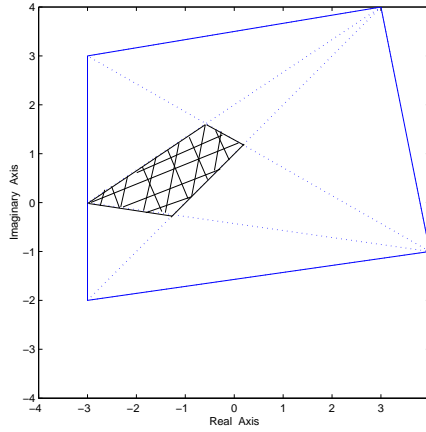
Για το pencil  $I\lambda - A$ , ισχύει το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.12.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Αν  $\gamma \in \partial F(A)$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  πολλαπλότητας  $k$ , τότε

$$\gamma \in \partial\Lambda_j(A), \quad j = 2, \dots, k.$$

Το αντίστροφο του Πορίσματος 4.12 και συνεπώς και της Πρότασης 4.11 δεν είναι αληθές, καθώς φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.4.** Έστω  $A = \text{diag}(3 + 4i, 4 - i, -3 - 2i, -3, -3 + 3i)$ . Το εξωτερικό πολύγωνο στο σχήμα 4.2 είναι το  $F(A)$ , ενώ το εσωτερικό γραμμοσκιασμένο πολύγωνο είναι το  $\Lambda_2(A)$ , το οποίο προκύπτει από την τομή όλων των  $\binom{5}{4}$  κυρτών συνδυασμών των ιδιοτιμών  $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}, \lambda_{j_4}$  του  $A$ , με  $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_4 \leq 5$ . Παρατηρούμε ότι  $\lambda_0 = -3 \in \partial F(A) \cap \partial \Lambda_2(A)$ , αλλά είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Επιπλέον,  $\Lambda_3(A) = \emptyset$ .



Σχήμα 4.2: Τα σύνολα  $F(A)$  και  $\Lambda_2(A)$ .

Για τα γωνιακά σημεία του pencil  $A\lambda - B$ , έχουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.13.** Έστω  $L(\lambda) = A\lambda - B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  και  $z_0$  είναι γωνιακό σημείο του  $w(A\lambda - B)$  πολλαπλότητας  $k$ , ως σημείο του φάσματος  $\sigma(A\lambda - B)$ . Τότε  $z_0$  είναι επίσης γωνιακό σημείο του  $\Lambda_j(A\lambda - B)$ , για  $j = 2, \dots, k$ .

*Απόδειξη.* Εφόσον το γωνιακό σημείο  $z_0$  του  $w(A\lambda - B)$  είναι επίσης ιδιοτιμή του pencil  $A\lambda - B$  [45, Θεώρ.1.3], με πολλαπλότητα  $k$  από υπόθεση, συμπεραίνουμε από την Πρόταση 4.11 ότι  $z_0 \in \partial \Lambda_j(A\lambda - B)$ , για  $j = 2, \dots, k$ . Αρκεί μόνο να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε δίσκο  $S(z_0, \varepsilon)$ , με  $\varepsilon > 0$ , το σημείο  $z_0$  ικανοποιεί την ισότητα

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) = \max \{ \operatorname{Re} z : e^{-i\theta} z \in \Lambda_j(A\lambda - B) \cap S(z_0, \varepsilon) \}$$

ή ισοδύναμα, λόγω της Πρότασης 4.5

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) = \max \left\{ \operatorname{Re} z : z \in \bigcap_M (w(e^{i\theta} M^*(A\lambda - B)M) \cap S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)) \right\},$$

για κάθε γωνία  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$  με  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ .

Η σχέση εγκλεισμού  $w(M^*(A\lambda - B)M) \subseteq w(A\lambda - B)$  για οποιαδήποτε  $n \times (n - j + 1)$  ισομετρία  $M$ ,  $j = 2, \dots, k$ , επαληθεύει την ανισότητα

$$\max_{\bigcap_M (w(e^{i\theta} M^*(A\lambda - B)M) \cap S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon))} \operatorname{Re} z \leq \max_{w(e^{i\theta}(A\lambda - B)) \cap S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) \quad (4.11)$$

για οποιοδήποτε δίσκο  $S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)$  και κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

Επιπλέον,  $\ker(Az_0 - B) \cap \operatorname{Im}(MM^*) \neq \emptyset$ , καθόσον  $\dim \ker(Az_0 - B) + \dim \operatorname{Im}(MM^*) = k + n - j + 1 \geq n + 1$ . Γι' αυτό για ένα ιδιοδιάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  του  $A\lambda - B$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $z_0$  υπάρχει ένα διάνυσμα  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  τέτοιο ώστε  $x_0 = MM^*y_0$ . Προφανώς,  $M^*y_0 \in \mathbb{C}^{n-j+1}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $M^*(A\lambda - B)M$  αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $z_0$ , και άρα,  $z_0 \in \sigma(M^*(A\lambda - B)M) \subseteq w(M^*(A\lambda - B)M)$  για οποιαδήποτε  $n \times (n - j + 1)$  ισομετρία  $M$ .

Έτσι,  $z_0 \in \bigcap_M w(M^*(A\lambda - B)M)$ , δηλαδή  $\operatorname{Re} z_0 \in \operatorname{Re}(\bigcap_M w(M^*(A\lambda - B)M))$ , από όπου παίρνουμε την ανισότητα

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) \leq \max_{\bigcap_M (w(e^{i\theta} M^*(A\lambda - B)M) \cap S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon))} \operatorname{Re} z, \quad (4.12)$$

για οποιοδήποτε δίσκο  $S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)$  και κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . Από τις σχέσεις (4.11) και (4.12),

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} z_0) = \max \left\{ \operatorname{Re} z : z \in \bigcap_M (w(e^{i\theta} M^*(A\lambda - B)M) \cap S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)) \right\},$$

για οποιοδήποτε δίσκο  $S(e^{i\theta} z_0, \varepsilon)$  και κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , επιβεβαιώνοντας τον ισχυρισμό.  $\square$

Από τα προηγούμενα συμπεράσματα, έχουμε άμεσα ένα ενδιαφέρον πόρισμα για τα γωνιακά σημεία του  $\Lambda_k(A)$ .

**Πόρισμα 4.14.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  και  $z_0 \in \partial F(A)$  είναι γωνιακό σημείο του  $F(A)$  πολλαπλότητας  $k$ , ως ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , τότε  $z_0$  είναι επίσης γωνιακό σημείο του  $\Lambda_j(A)$ , για  $j = 2, \dots, k$ .

Μπορούμε να διατυπώσουμε έναν ανάλογο ισχυρισμό με την Πρόταση 4.13 για τα «γωνιακά σημεία» του  $\Lambda_j(L(\lambda))$ , λαμβάνοντας υπόψιν το θεώρημα 1.4 στην εργασία [45].

### 4.3 Σύνδεση μεταξύ των $\Lambda_k(L(\lambda))$ και $\Lambda_k(\mathbf{A})$

Ένα διανυσματικό ανωτέρου βαθμού αριθμητικό πεδίο είναι το σύνθετο  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο (joint  $k$ -rank numerical range) [38]

$$\Lambda_k(\mathbf{A}) = \{(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : \exists P \in \mathcal{P}_k \text{ τέτοια ώστε} \quad (4.13)$$

$$PA_iP = \mu_iP, i = 0, \dots, m\},$$

όπου  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$  είναι μια  $(m+1)$ -άδα πινάκων  $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  για  $i = 0, \dots, m$ . Προφανώς, για  $k = 1$ , το  $\Lambda_1(\mathbf{A})$  ταυτίζεται με το σύνθετο αριθμητικό πεδίο (joint numerical range)

$$w(\mathbf{A}) = \{(x^*A_0x, \dots, x^*A_mx) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}. \quad (4.14)$$

Με βάση την κβαντική θεωρία πληροφοριών, το  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με έναν κβαντικό κώδικα διόρθωσης σφαλμάτων (quantum error correcting code), καθόσον αυτός υπάρχει ακριβώς όταν το σύνθετο  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο των τελεστών σφάλματος ενός θορυβώδους κβαντικού καναλιού είναι μη κενό σύνολο.

Για τον πολυωνυμικό πίνακα  $L(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ , το σύνολο  $\Lambda_k(L(\lambda))$  σχετίζεται με το σύνθετο  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  της  $(m+1)$ -άδας  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} \Lambda_k(L(\lambda)) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : PA_mP\lambda^m + \dots + PA_1P\lambda + PA_0P = 0_n, P \in \mathcal{P}_k\} \\ &\supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mu_m\lambda^m + \dots + \mu_1\lambda + \mu_0)P = 0_n, (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \Lambda_k(\mathbf{A})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu_m\lambda^m + \dots + \mu_1\lambda + \mu_0 = 0, (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \Lambda_k(\mathbf{A})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle (1, \lambda, \dots, \lambda^m), \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \Lambda_k(\mathbf{A})\}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω εγκλεισμός δικαιολογείται καθόσον  $Q^*A_jQ$  μπορεί να μην είναι βαθμωτοί πίνακες για όλα τα  $j = 0, \dots, m$  και για κάθε ισομετρία  $Q \in \mathcal{X}_k$ .

Η έννοια του σύνθετου φάσματος μιας  $(m+1)$ -άδας πινάκων  $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m)$

[29],

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : (A_0 \mathbf{x}, \dots, A_m \mathbf{x}) = (\mu_0 \mathbf{x}, \dots, \mu_m \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\},$$

οδηγεί σε γενίκευση της Πρότασης 4.11.

**Πρόταση 4.15.** Έστω  $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m)$  είναι  $(m+1)$ -άδα  $n \times n$  πινάκων. Αν  $(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \partial\omega(\mathbf{A})$  είναι μια σύνθετη ιδιοτιμή της  $\mathbf{A}$  με γεωμετρική πολλαπλότητα  $k$ , τότε

$$(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \partial\Lambda_j(\mathbf{A}), \quad j = 2, \dots, k.$$

*Απόδειξη.* Εφόσον  $(\mu_0, \dots, \mu_m)$  είναι μια κανονική σύνθετη ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα  $k$  [29], υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  τέτοιος ώστε

$$(U^* A_0 U, \dots, U^* A_m U) = (\mu_0 I_k \oplus B_0, \dots, \mu_m I_k \oplus B_m),$$

όπου  $(B_0, \dots, B_m)$  είναι μια  $(m+1)$ -άδα  $(n-k) \times (n-k)$  πινάκων και  $(\mu_0, \dots, \mu_m) \notin \sigma(B_0, \dots, B_m)$ . Άρα,  $(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \Lambda_k(\mathbf{A})$ . Καθόσον το διάνυσμα  $(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \partial\omega(\mathbf{A})$  και  $\Lambda_j(\mathbf{A}) \subseteq \Lambda_{j-1}(\mathbf{A})$  για κάθε  $j = 2, \dots, k$  [38], επιβεβαιώνουμε ότι  $(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \partial\Lambda_j(\mathbf{A})$  για όλα τα  $j = 2, \dots, k$ .  $\square$

Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα, κατ' αντιστοιχία με εκείνο της εργασίας [51].

**Πρόταση 4.16.** Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας  $L(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ . Τότε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle (1, \lambda, \dots, \lambda^m), \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} \in \text{co}\Lambda_k(\mathbf{A})\},$$

όπου  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$  είναι  $(m+1)$ -άδα των  $n \times n$  πινάκων  $A_i$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle (1, \lambda, \dots, \lambda^m), \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} \in \text{co}\Lambda_k(\mathbf{A})\}$ . Για να αποδείξουμε τον εγκλεισμό υποθέτουμε  $\lambda_0 \in \Omega$ , δηλαδή

$$\langle (1, \lambda_0, \dots, \lambda_0^m), \mathbf{u} \rangle = 0 \tag{4.15}$$

για κάποιο  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_m) \in \text{co}\Lambda_k(\mathbf{A})$ . Έχουμε  $\Lambda_k(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{C}^{m+1} \equiv \mathbb{R}^{2m+2}$  και από το θεώρημα Καραθεοδωρή της Κυρτής Ανάλυσης, υπάρχουν το πολύ  $2m+3$  στοιχεία του  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  τέτοια ώστε

$$\text{co}\Lambda_k(\mathbf{A}) = \left\{ \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j \mathbf{u}_j : \mathbf{u}_j \in \Lambda_k(\mathbf{A}), \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j = 1, \mu \leq 2m+3 \right\}.$$

Άρα, για  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_m) \in \text{co}\Lambda_k(\mathbf{A})$  υπάρχουν κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί  $\mu_j \geq 0$ ,  $\sum_j^\rho \mu_j = 1$ ,  $\rho \leq 2m + 3$  ώστε

$$\mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_\rho \mathbf{u}_\rho = \mu_1 \begin{bmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{1m} \end{bmatrix} + \dots + \mu_\rho \begin{bmatrix} u_{\rho 0} \\ \vdots \\ u_{\rho m} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

όπου  $\mathbf{u}_j = [u_{j0} \ \dots \ u_{jm}]^T \in \Lambda_k(\mathbf{A})$ ,  $j = 1, \dots, \rho$  και από τις εξισώσεις (4.15) και (4.16), έχουμε:

$$\langle (1, \lambda_0, \dots, \lambda_0^m), \mathbf{u} \rangle = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 & \dots & \lambda_0^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{1m} \end{bmatrix} + \dots + \mu_\rho \begin{bmatrix} 1 & \dots & \lambda_0^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\rho 0} \\ \vdots \\ u_{\rho m} \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\mu_1 p_1(\lambda_0) + \dots + \mu_\rho p_\rho(\lambda_0) = 0, \quad (4.17)$$

όπου  $p_j(\lambda) = u_{jm}\lambda^m + \dots + u_{j1}\lambda + u_{j0}$  για  $j = 1, \dots, \rho$ . Ακόμη, εφόσον  $\mathbf{u}_j = (u_{j0}, \dots, u_{jm}) \in \Lambda_k(\mathbf{A})$ , υπάρχουν  $k$ -βαθμού ορθογώνιες προβολές  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, \rho$  ώστε  $P_j A_i P_j = u_{ji} P_j$ ,  $i = 0, \dots, m$  και συνεπώς,

$$\begin{aligned} p_j(\lambda_0) P_j &= u_{j0} P_j + u_{j1} P_j \lambda_0 + \dots + u_{jm} P_j \lambda_0^m \\ &= P_j A_0 P_j + P_j A_1 P_j \lambda_0 + \dots + P_j A_m P_j \lambda_0^m \\ &= P_j L(\lambda_0) P_j, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι  $p_j(\lambda_0) \in \Lambda_k(L(\lambda_0))$ . Λόγω κυρτότητας του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου του πίνακα  $L(\lambda_0)$  και της εξίσωσης (4.17),  $0 \in \Lambda_k(L(\lambda_0))$ , ισodύναμα  $\lambda_0 \in \Lambda_k(L(\lambda))$ .  $\square$



## 4.4 Εφαρμογή της θεωρίας Perron-Frobenius

Τα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, επεκτείνονται στην ενότητα αυτή στο  $k$ -βαθμού αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα.

Έστω πολυωνυμικός πίνακας  $L(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$  και το αντίστοιχο  $mn \times mn$  συνοδεύον pencil

$$C_L(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & A_m \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & I_n \\ A_0 & \cdots & & & A_{m-1} \end{bmatrix},$$

ευρύτερα γνωστό ως γραμμικοποιητής του  $L(\lambda)$  [18], καθόσον υπάρχουν κατάλληλοι πολυωνυμικοί πίνακες  $E(\lambda)$ ,  $F(\lambda)$  με σταθερές μη μηδενικές ορίζουσες, τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{n(m-1)} \end{bmatrix} = E(\lambda)C_L(\lambda)F(\lambda).$$

Γενικεύοντας μια αντίστοιχη σχέση της εργασίας [44], στην περίπτωση του  $k$ -βαθμού αριθμητικού πεδίου μεταξύ των  $L(\lambda)$  και  $C_L(\lambda)$ , έχουμε:

**Πρόταση 4.17.**  $\Lambda_k(L(\lambda)) \cup \{0\} \subseteq \Lambda_k(C_L(\lambda)).$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 4.5 και τη σχέση  $w(L(\lambda)) \cup \{0\} \subseteq w(C_L(\lambda))$  στην [44], έχουμε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \cup \{0\} = \left( \bigcap_M w(M^*L(\lambda)M) \right) \cup \{0\} \subseteq \bigcap_M w(C_{M^*LM}(\lambda)), \quad (4.18)$$

όπου  $M \in \mathcal{M}_{n, n-k+1}(\mathbb{C})$ , με  $M^*M = I_{n-k+1}$  και  $C_{M^*LM}(\lambda)$  είναι ο γραμμικοποιητής του πολυωνυμικού πίνακα  $M^*L(\lambda)M$ . Εφόσον

$$\begin{aligned} C_{M^*LM}(\lambda) &= (I_m \otimes M)^* \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda I_n & -I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & -I_n \\ A_0 & \cdots & & & A_m \lambda + A_{m-1} \end{bmatrix} (I_m \otimes M) \\ &= (I_m \otimes M)^* C_L(\lambda) (I_m \otimes M), \end{aligned}$$

θεωρώντας την ισομετρία  $Q = \begin{bmatrix} I_m \otimes M & V \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn, mn-k+1}(\mathbb{C})$ , με  $Q^*Q = I_{mn-k+1}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \bigcap_M w(C_{M^*LM}(\lambda)) &= \bigcap_M w((I_m \otimes M)^*C_L(\lambda)(I_m \otimes M)) \subseteq \bigcap_Q w(Q^*C_L(\lambda)Q) \\ &\subseteq \bigcap_X w(X^*C_L(\lambda)X) = \Lambda_k(C_L(\lambda)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

όπου  $X \in \mathcal{M}_{mn, mn-k+1}(\mathbb{C})$  με  $X^*X = I_{mn-k+1}$ . Έτσι, από τις (4.18) και (4.19), η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

Ορίζουμε ως πολυώνυμο Perron  $L(\lambda)$ , τους  $n \times n$  μονιέ πολυωνυμικούς πίνακες  $m$  βαθμού

$$L(\lambda) = I\lambda^m - A_{m-1}\lambda^{m-1} - \dots - A_1\lambda - A_0, \quad (4.20)$$

όπου  $A_j$  είναι μη αρνητικοί πίνακες, για  $j = 0, \dots, m-1$ . Η έννοια του πολυωνύμου Perron  $L(\lambda)$  στην (4.20) είναι ισοδύναμη με τη μη αρνητικότητα του  $mn \times mn$  συνοδεύοντα πίνακα

$$C_L = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & I_n \\ A_0 & \cdots & & & A_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Ως φάσμα του  $L(\lambda)$  ορίζουμε το σύνολο  $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(L(\lambda))\}$ , ενώ ως  $k$ -βαθμού αριθμητική ακτίνα του  $\Lambda_k(L(\lambda))$ ,

$$r_k(L) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \Lambda_k(L(\lambda))\},$$

όπου όταν  $k = 1$ , έχουμε

$$r_1(L) \equiv r(L) = \max \{|\lambda| : \lambda \in w(L(\lambda))\}.$$

Σημειώνουμε  $r_k(L) = -\infty$ , όταν  $\Lambda_k(L(\lambda)) = \emptyset$ .

Διαμέσου του συνοδεύοντα πίνακα  $C_L$  του πολυωνύμου Perron  $L(\lambda)$  στην (4.20), τόσο τα κύρια θεωρήματα των Perron-Frobenius που αφορούν στο φάσμα

$\sigma(L)$  του  $L(\lambda)$  όσο και τα αποτελέσματα του Issos για το αριθμητικό πεδίο επεκτείνονται και στο  $w(L(\lambda))$  [52]. Συνεχίζοντας, λοιπόν τη μελέτη αυτή ελέγχουμε και την περίπτωση του συνόλου  $\Lambda_k(L(\lambda))$  για ένα Perron πολυώνυμο  $L(\lambda)$ .

Συνεπώς, το σύνολο των μέγιστων στοιχείων του  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι

$$\mathcal{F}_k(L) = \{|\lambda| = r_k(L) : \lambda \in \Lambda_k(L(\lambda))\}.$$

Όπως διαπιστώσαμε στο παράδειγμα 3.1 του τρίτου κεφαλαίου,  $r_k(A) \notin \Lambda_k(A)$  ενός πίνακα  $A$  και κατά συνέπεια, ούτε το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  περιέχει πάντα το στοιχείο  $r_k(L) > 0$ .

Το επόμενο λήμμα γενικεύει την Πρόταση 4.17 και ταυτίζει το  $\Lambda_k(L(\lambda))$  ενός πολυωνυμικού πίνακα  $L(\lambda)$  με ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του  $\Lambda_k(C_L)$  του συνοδού πίνακα  $C_L$ .

**Λήμμα 4.18.** Έστω ο  $mn \times k$  πίνακας  $Y(\lambda, Q) = (1, \lambda, \dots, \lambda^{m-1})^T \otimes Q$  με  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $Q \in \mathcal{M}_{n,k}$ . Τότε

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \cup \{0\} = \left\{ \lambda : Y^*(\lambda, Q)C_L Y(\lambda, Q) = \lambda I_k, Q \in \mathcal{M}_{n,k}, Q^*Q = \frac{1}{c(|\lambda|^2)} I_k \right\},$$

όπου  $c(|\lambda|^2) = (1 + |\lambda|^2 + |\lambda|^4 + \dots + |\lambda|^{2(m-1)})^{1/2}$ .

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$Y^*(\lambda, Q)(C_L - \lambda I_{mn})Y(\lambda, Q) = \bar{\lambda}^{m-1} Q^* L(\lambda) Q$$

και  $Y^*(\lambda, Q)Y(\lambda, Q) = c(|\lambda|^2)Q^*Q$ . Άρα,  $\lambda_0 \in \Lambda_k(L(\lambda))$  αν και μόνο αν  $\sqrt{c(|\lambda_0|^2)}Q^*L(\lambda_0)Q\sqrt{c(|\lambda_0|^2)} = 0_k$ , ισοδύναμα, όταν  $Q^*L(\lambda_0)Q = 0_k$ .  $\square$

**Πρόταση 4.19.** Έστω ότι  $L(\lambda)$  είναι ένα πολυώνυμο Perron τέτοιο ώστε  $r_k(L) > 0$ , με μη αναγώγιμο συνοδού πίνακα  $C_L$  και  $q > 1$  ιδιοτιμές μέγιστου μέτρου. Τότε όλα τα μέγιστα στοιχεία του  $\Lambda_j(L(\lambda))$  είναι ακριβώς

$$\mathcal{F}_j(L) = \left\{ r_j(L) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})}, t = 0, \dots, q-1 \right\},$$

όπου  $\theta_j = 0$  ή  $\frac{\pi}{q}$ , για  $j = 1, \dots, k$ .

Απόδειξη. Ο συνοδού πίνακας  $C_L \geq 0$  είναι εξελιγμένος πίνακας με δείκτη εξελιξιμότητας  $q > 1$ , εφόσον  $\sigma(L) = \sigma(C_L)$ . Οπότε  $q$  είναι ο μεγαλύτερος

θετικός ακέραιος ώστε  $C_L$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνιος με τον  $e^{i\frac{2\pi}{q}} C_L$ . Γι' αυτό,  $e^{i\frac{2\pi t}{q}} C_L = D^{-1} C_L D$  ( $t = 0, 1, \dots, q-1$ ), για κάποιο ορθομοναδιαία διαγώνιο  $mn \times mn$  πίνακα  $D = \text{diag}(D_0, e^{i\frac{2\pi t}{q}} D_0, \dots, e^{i\frac{2\pi t(m-1)}{q}} D_0)$ , όπου  $D_0 \in \mathcal{M}_n$  είναι ορθομοναδιαία διαγώνιος. Ας υποθέσουμε ότι  $\theta_j \in [0, 2\pi)$  είναι το πρωτεύον όρισμα ώστε  $0 < r_j(L) \in \Lambda_j(e^{-i\theta_j} L(\lambda))$ , τότε από το Λήμμα 4.18 έχουμε

$$\begin{aligned} 0_k &= Y^*(r_j(L)e^{i\theta_j}, Q)(C_L - r_j(L)e^{i\theta_j} I_{mn})Y(r_j(L)e^{i\theta_j}, Q) \\ &= Y^*(r_j(L)e^{i\theta_j}, Q)D^{-1}(e^{-i\frac{2\pi t}{q}} C_L - r_j(L)e^{i\theta_j} I_{mn})DY(r_j(L)e^{i\theta_j}, Q) \\ &= Y^*(r_j(L)e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})}, D_0 Q)(C_L - r_j(L)e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} I_{mn})Y(r_j(L)e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})}, D_0 Q), \end{aligned}$$

με  $Y^*(e^{i\frac{2\pi t}{q}} \lambda, D_0 Q)Y(e^{i\frac{2\pi t}{q}} \lambda, D_0 Q) = Y^*(\lambda, Q)Y(\lambda, Q) = I_{mn,k}$  για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό  $\lambda$ . Προφανώς,

$$\mathcal{F}_j(L) \supseteq \left\{ r_j(L)e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})}, t = 0, \dots, q-1 \right\}. \quad (4.21)$$

Όμοια, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.3, αποδεικνύουμε την ισότητα των συνόλων στην (4.21) με  $\theta_j = 0$  ή  $\theta_j = \frac{\pi}{q}$ , για  $j = 1, \dots, k$ , καθόσον οι συντελεστές του  $L(\lambda)$  είναι πραγματικοί και άρα συμπεραίνουμε ότι  $\Lambda_k(L(\lambda))$  είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα.  $\square$

## Κεφάλαιο 5

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

### 5.1 Ορισμός - Βασικές ιδιότητες

Οι F.F Bonsall και J. Duncan όρισαν και μελέτησαν την έννοια του *αλγεβρικού αριθμητικού πεδίου* ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  [5, 6],

$$V(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}\},$$

θεωρώντας το σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών του  $\mathcal{M}_n$

$$\mathcal{L} = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοια ώστε } \|f\| = f(I_n) = 1\},$$

με νόρμα  $\|f\| = \sup \{|f(X)| : X \in \mathcal{M}_n, \|X\| = 1\}$  και  $I_n$  τον  $n \times n$  μοναδιαίο πίνακα. Επιπλέον, απέδειξαν μια βασική ισότητα [6, Λήμμα 6.22.1], την οποία και διατυπώνουμε ως Πρόταση, εφόσον θα αναφερθούμε σε αυτήν παρακάτω.

**Πρόταση 5.1.** Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $\|\cdot\|$  είναι οποιαδήποτε νόρμα πίνακα. Τότε

$$V(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 I_n\|).$$

Είναι φανερό ότι η σχέση της Πρότασης 5.1 στηρίζεται στην έννοια της νόρμας πίνακα και στην περίπτωση του κλασικού αριθμητικού πεδίου ισχύει

$$F(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 I_n\|_2). \quad (5.1)$$

Πρόσφατα, οι Χ. Χωριανόπουλος, Σ. Καρανάσιος και Π. Ψαρράκος [13], βασίζόμενοι στην Πρόταση 5.1, μελέτησαν ως αριθμητικό πεδίο ενός μη τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  ως προς  $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , το συμπαγές και κυρτό σύνολο

$$w_{\|\cdot\|}(A, B) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 B\|), \quad (5.2)$$

όπου  $\|B\| \geq 1$  και  $\|\cdot\|$  είναι οποιαδήποτε νόρμα πίνακα. Επίσης, στην [13], αποδεικνύεται ότι το σύνολο  $w_{\|\cdot\|}(A, B)$  συμπίπτει με τον κυκλικό δίσκο του  $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \sqrt{1 - \|B\|^{-2}}\right), \quad (5.3)$$

όταν η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε δυο ορισμούς αριθμητικού πεδίου μη τετραγωνικού πίνακα μέσω της έννοιας της προβολής πάνω σε υπόχωρο μικρότερης ή μεγαλύτερης διάστασης.

Έστω  $m > n$  και τα διανύσματα  $v_1, \dots, v_n$  του  $\mathbb{C}^m$  αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{C}^n$ . Προφανώς, ο πίνακας  $P = HH^*$ , όπου  $H = [v_1 \ \dots \ v_n] \in \mathcal{M}_{m,n}$ , είναι μια ορθογώνια προβολή του  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Κατά συνέπεια, ορίζουμε το κατώτερο αριθμητικό πεδίο (lower numerical range) του  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  ως προς μια ισομετρία  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$ , ως το σύνολο:

$$\begin{aligned} w_l(A) &= F(H^*A) \\ &= \{\langle Ax, Hx \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|Hx\|_2 = 1\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

με  $H^*A$   $n \times n$  πίνακα. Στο σύνολο αυτό, το διάνυσμα  $y = Hx \in \mathbb{C}^m$  προβάλλεται επί του  $\mathbb{C}^n$  κατά μήκος του  $\mathcal{K}$ , όπου  $\mathcal{K}$  είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $\mathbb{C}^n$ , δηλαδή  $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{K}$ . Στην (5.4) το δεύτερο σύνολο έχει οριστεί από τον C.F. Amelin [2] ως «*bioperative*» αριθμητικό πεδίο  $W(A, H)$ , χωρίς αναγκασία ο πίνακας  $H$  να είναι ισομετρία. Επειδή,  $\|y\|_2 = \langle Hx, Hx \rangle^{1/2} = \|x\|_2$ , μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε το ανώτερο αριθμητικό πεδίο (upper numerical range)  $w_h(A)$ , χρησιμοποιώντας τον μεγαλύτερης διάστασης  $m \times m$  πίνακα  $AH^*$ . Δηλαδή,

$$w_h(A) = F(AH^*). \quad (5.5)$$

Ομοίως, αν  $m < n$ , τότε  $x = Hy$  και άρα

$$w_l(A) = F(AH), \quad w_h(A) = F(HA). \quad (5.6)$$

Είναι φανερό ότι για  $m = n$  και  $H = I$ ,  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$  εκφυλίζονται στο κλασικό αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  στην (2.1). Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε βασικές ιδιότητες αυτών.

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι η ένωση όλων των αριθμητικών πεδίων  $w_{\|\cdot\|}(A, B)$ , καθώς ο πίνακας  $B$  μεταβάλλεται, ταυτίζεται με τον κυκλικό δίσκο  $\mathcal{D}(0, \|A\|)$ , όταν η νόρμα πίνακα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο.

**Πρόταση 5.2.** Έστω  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$  έτσι ώστε  $\|B\| \geq 1$ . Τότε για οποιαδήποτε νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  που εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ισχύουν τα ακόλουθα.

**I.**  $\bigcup_{\|B\| \geq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ .

**II.** Αν  $\text{rank} B = k$  και  $\|\sigma\|_2 \geq \sqrt{k}$ , όπου το διάνυσμα  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  αντιστοιχεί στις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα  $B$ , τότε τα κέντρα των κυκλικών δίσκων στην (5.3),  $\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \in \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ , ως προς το Frobenius εσωτερικό γινόμενο  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^* A)$ .

*Απόδειξη.* **I.** Από τον ορισμό (5.2), έχουμε  $w_{\|\cdot\|}(A, B) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\lambda, \|A - \lambda B\|)$ . Είναι άμεσο ότι  $w_{\|\cdot\|}(A, B) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|)$  για κάθε  $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ ,  $\|B\| \geq 1$  και συνεπώς,  $\bigcup_{\|B\| \geq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|)$ .

Αντίστροφα, έστω  $z \in \mathcal{D}(0, \|A\|)$ . Τότε

- αν  $z \neq 0$ ,  $z \in w_{\|\cdot\|}(A, \frac{1}{z}A)$
- αν  $z = 0$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.3), έχουμε  $0 \in w_{\|\cdot\|}(A, B)$ , όπου  $B$  τέτοιος ώστε  $\langle A, B \rangle = 0$ ,  $\|B\| \geq 1$ .

Συνεπώς  $\mathcal{D}(0, \|A\|) \subseteq \bigcup_{\|B\| \geq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B)$ .

**II.** Συμβολίζοντας με  $\lambda(\cdot)$  και  $\sigma(\cdot)$  τις ιδιοτιμές και ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα, αντίστοιχα και κάνοντας χρήση γνωστών ανισοτήτων [23, σελ.176,177] συνεπάγεται

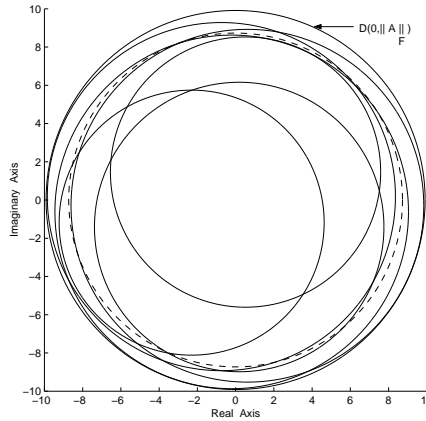
$$\begin{aligned} \frac{|\langle A, B \rangle|}{\|B\|^2} &= \frac{|\text{tr}(B^* A)|}{\|B\|^2} = \frac{|\sum \lambda(B^* A)|}{\|B\|^2} \leq \frac{\sum |\lambda(B^* A)|}{\|B\|^2} \leq \frac{\sum \sigma(B^* A)}{\|B\|^2} \\ &\leq \frac{\sum \sigma(B^*) \sigma(A)}{\|B\|^2} \leq \sigma_{\max}(A) \frac{\sum \sigma(B)}{\sum \sigma^2(B)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Εφόσον  $\|\sigma\|_2 \geq \sqrt{k}$ , τότε  $\sum \sigma^2(B) = \|\sigma\|_2^2 \geq \sqrt{k} \|\sigma\|_2 \geq \langle \mathbf{1}, \sigma \rangle = \sum \sigma(B)$  και από τη σχέση (5.7),

$$\frac{|\langle A, B \rangle|}{\|B\|^2} \leq \sigma_{\max}(A) = \|A\|_2.$$

□

**Παράδειγμα 5.1.** Αν  $A = \begin{bmatrix} 6 + \mathbf{i} & 0 & 1/2 \\ -4 & -3 - 6\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$  και  $\|B\|_F = [\text{tr}(B^*B)]^{1/2}$  είναι η Frobenius νόρμα του πίνακα  $B$ , τότε η Πρόταση 5.2 παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1, όπου απεικονίζονται οι κυκλικοί δίσκοι  $w_{\|\cdot\|_F}(A, B)$  της σχέσης (5.3) για έξι διαφορετικούς πίνακες  $B$  με  $\|B\|_F \geq 1$ , οι οποίοι προσεγγίζουν το δίσκο  $\mathcal{D}(0, \|A\|_F)$ . Ο κύκλος με τη διακεκομμένη γραμμή αποτελεί το σύνορο του κυκλικού δίσκου  $\mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ .



Σχήμα 5.1: Οι διάφοροι κυκλικοί δίσκοι  $w_{\|\cdot\|_F}(A, B)$  προσεγγίζουν το σύνορο του  $\mathcal{D}(0, \|A\|_F)$ , το οποίο υποδεικνύει το βέλος.

Οι σχέσεις (5.4) και (5.5) αναφέρονται στα αριθμητικά πεδία  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$ , αντίστοιχα, για έναν μη τετραγωνικό πίνακα  $A$  ως προς μια  $m \times n$  ισομετρία  $H$  ( $m > n$ ). Για τα αριθμητικά αυτά πεδία, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

**Πρόταση 5.3.** Έστω  $m > n$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  και ισομετρία  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$ , τότε

- I.  $w_l(A) \subseteq w_h(A)$ ,
- II.  $\bigcup_H w_l(A) = \bigcup_H w_h(A) = \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ ,
- III.  $\sigma(A, H) \subseteq w_l(A) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ , όπου  $\sigma(A, H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda Hx, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$  είναι το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτιμών του πίνακα  $A$ .



Απόδειξη. **I.** Έστω ορθομοναδιαίος πίνακας  $U = \begin{bmatrix} H & R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m}$ , όπου  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$ . Τότε

$$w_h(A) = F(AH^*) = F(U^*AH^*U) = F\left(\begin{bmatrix} H^*A & 0 \\ R^*A & 0 \end{bmatrix}\right),$$

από όπου συμπεραίνουμε  $w_l(A) = F(H^*A) \subseteq w_h(A)$ .

**II.** Ας υποθέσουμε ότι  $z \in \bigcup_H w_l(A) = \bigcup_H F(H^*A)$ , τότε για οποιαδήποτε  $m \times n$  ισομετρία  $H$

$$|z| \leq r(H^*A) \leq \|H^*A\|_2 \leq \|H^*\|_2 \|A\|_2 = \|A\|_2.$$

Συνεπώς,  $\bigcup w_l(A) = \bigcup_H F(H^*A) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ . Από την άλλη μεριά, αν  $z = y^*Ax \in \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$ , τότε υπάρχει μια  $m \times n$  ισομετρία  $H$  έτσι ώστε  $y = Hx$  και  $z = x^*(H^*A)x \in F(H^*A)$ . Ο ισχυρισμός  $\bigcup w_h(A) = \mathcal{D}(0, \|A\|_2)$  διαπιστώνεται ομοιοτρόπως.

**III.** Εφόσον  $\sigma(A, H) \subseteq \sigma(H^*A, I_n)$  για οποιαδήποτε  $m \times n$  ισομετρία  $H$ , απλά εφαρμόζουμε τη (II). □

**Πόρισμα 5.4.** Έστω  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ ,  $\text{rank} B = n$  και  $B = QR$  είναι η  $QR$ -παραγοντοποίηση του  $B$ . Τότε

$$W(A, B) = \{\langle Ax, Bx \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|Bx\|_2 = 1\} = F(Q^*AR^{-1}),$$

όπου  $W(A, B)$  είναι το «bioperative» αριθμητικό πεδίο που ορίζεται στην [2].

Απόδειξη. Προφανώς,

$$\begin{aligned} W(A, B) &= \{\langle Q^*Ax, Rx \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|Rx\|_2 = 1\} \\ &= \{\langle Q^*AR^{-1}\omega, \omega \rangle : \omega \in \mathbb{C}^n, \|\omega\|_2 = 1\} = F(Q^*AR^{-1}). \end{aligned}$$

□

Από τους ορισμούς (5.4) και (5.5) ( ή αντίστοιχα, (5.6) ), είναι άμεσο ότι η έννοια του γωνιακού σημείου των αριθμητικών πεδίων  $F(H^*A)$  ή  $F(AH^*)$  (δηλαδή, του συνοριακού σημείου με μη μοναδικές εφαπτομένες [23, σελ.50]) μεταφέρεται στην έννοια του γωνιακού σημείου για τα  $w_l(A)$  ή  $w_h(A)$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι κάθε γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου ενός πίνακα είναι και ιδιοτιμή του πίνακα, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Ειδικότερα, παρουσιάζουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 5.5.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ ,  $m > n$  και  $\lambda_0 (\neq 0)$  γωνιακό σημείο του  $w_h(A)$  ως προς μια ισομετρία  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$ . Τότε  $\lambda_0 \in \sigma(H^*A)$  και είναι γωνιακό σημείο του  $w_l(A)$  ως προς  $H$ .

*Απόδειξη.* Για το γωνιακό σημείο  $\lambda_0 \in \partial w_h(A) = \partial F(AH^*)$  με  $H^*H = I_n$  προφανώς,  $\lambda_0 \in \sigma(AH^*) = \sigma(U^*AH^*U) = \sigma(H^*A) \cup \{0\}$ , για τον ορθομοναδιαίο πίνακα  $U = \begin{bmatrix} H & R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m}$ , δηλαδή,  $\lambda_0 \in \sigma(H^*A) \subseteq F(H^*A) = w_l(A)$ .

Ακόμη, σύμφωνα με τον ορισμό του γωνιακού σημείου, για το  $\lambda_0$  υπάρχουν  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta_1 < \theta_2$  τέτοιες ώστε

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_0) = \max \{ \operatorname{Re} a : a \in e^{i\theta} w_h(A) \}$$

για κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . Καθόσον  $w_h(A) \supseteq w_l(A)$ , έχουμε

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_0) = \max_{a \in e^{i\theta} w_h(A)} \operatorname{Re} a \geq \max_{b \in e^{i\theta} w_l(A)} \operatorname{Re} b$$

για κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

Επιπλέον, για όλα τα  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$

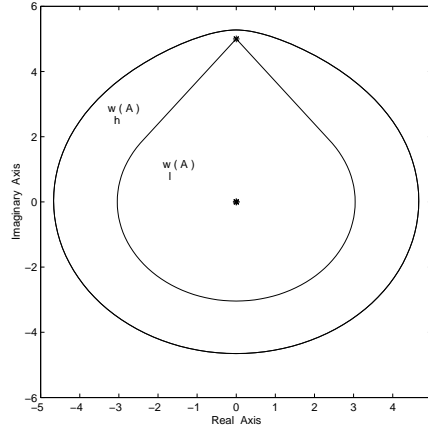
$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_0) \in \operatorname{Re}(e^{i\theta} F(H^*A)) \leq \max \{ \operatorname{Re} b : b \in e^{i\theta} F(H^*A) \}$$

και έτσι  $\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_0) = \max \{ \operatorname{Re} b : b \in e^{i\theta} F(H^*A) \}$  για κάθε  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , καταλήγοντας ότι  $\lambda_0 (\neq 0)$  είναι γωνιακό σημείο του  $F(H^*A) = w_l(A)$ .  $\square$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το αντίστροφο της Πρότασης 5.5 δεν ισχύει, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 5.2.** Έστω ο  $4 \times 3$  πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{i} & -7 & 0 \\ 5\mathbf{i} & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  και η  $4 \times 3$

ισομετρία  $H = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}$ . Τότε  $\lambda_0 = 5\mathbf{i}$  είναι γωνιακό σημείο του  $w_l(A)$ , αλλά όχι του  $w_h(A)$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2. Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές 0 και  $5\mathbf{i}$  του πίνακα  $AH^*$  σημειώνονται με «\*».



Σχήμα 5.2: Τα σύνολα  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$  ως προς την ισομετρία  $H = [0 \ I_3]^T$ .

Τέλος, παρουσιάζουμε την παρακάτω σχέση εγκλεισμού.

**Πρόταση 5.6.** Έστω  $m > n$  και  $A, H \in \mathcal{M}_{m,n}$ , όπου  $H$  είναι ισομετρία. Τότε

$$w_l(A) \subseteq w_{\|\cdot\|_2}(A, H) \subseteq w_h(A).$$

*Απόδειξη.* Εισάγοντας στη σχέση (5.4), τις ισότητες (5.1) και (5.2), έχουμε

$$\begin{aligned} w_l(A) = F(H^*A) &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|H^*A - z_0 I_n\|_2\} \\ &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|H^*A - z_0 H^*H\|_2\} \\ &\subseteq \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|H^*\|_2 \|A - z_0 H\|_2\} \\ &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|A - z_0 H\|_2\} = w_{\|\cdot\|_2}(A, H). \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο εγκλεισμό,

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|_2}(A, H) &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|A - z_0 H\|_2\} \\ &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|AH^*H - z_0 H\|_2\} \\ &\subseteq \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|AH^* - z_0 I_m\|_2 \|H\|_2\} \\ &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z - z_0| \leq \|AH^* - z_0 I_m\|_2\} = F(AH^*) = w_h(A). \end{aligned}$$

□

Συνδυάζοντας τις προτάσεις 5.3(II) και 5.6, διατυπώνουμε το παρακάτω άμεσο πόρισμα.

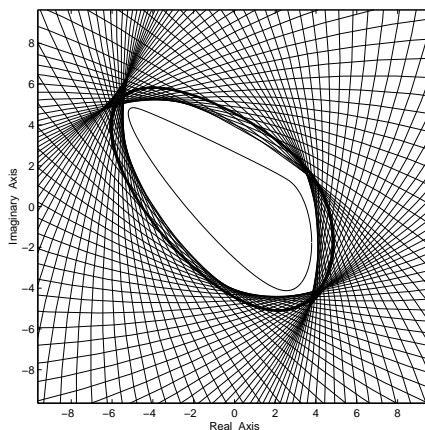
**Πόρισμα 5.7.** Έστω  $m > n$  και  $A, H \in \mathcal{M}_{m,n}$ . Αν  $H$  είναι ισομετρία, τότε

$$\bigcup_H w_{\|\cdot\|_2}(A, H) = \mathcal{D}(0, \|A\|_2).$$

**Παράδειγμα 5.3.** Για τον  $4 \times 3$  πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 5\mathbf{i} & -1 & \mathbf{i} \\ 2 - 7\mathbf{i} & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0.3 \\ 0.5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ , η Πρόταση 5.6

παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα. Η μη σκιαγραφημένη περιοχή προσεγγίζει το σύνολο  $w_{\|\cdot\|_2}(A, H)$ , ενώ η λεπτή και η παχιά καμπύλη εσωτερικά και εξωτερικά της περιοχής αυτής, απεικονίζουν το σύνολο των  $w_l(A)$  και  $w_h(A)$ , αντίστοιχα, ως προς την ισομετρία

$$H = \begin{bmatrix} -0.1856 - 0.1899\mathbf{i} & -0.2828 - 0.2242\mathbf{i} & 0.8783 - 0.1527\mathbf{i} \\ -0.4251 + 0.0565\mathbf{i} & 0.6297 + 0.1258\mathbf{i} & 0.1929 - 0.0260\mathbf{i} \\ 0.2363 + 0.0733\mathbf{i} & 0.1885 + 0.6418\mathbf{i} & 0.2993 + 0.0222\mathbf{i} \\ 0.8152 - 0.1407\mathbf{i} & 0.0806 - 0.0589\mathbf{i} & 0.1362 - 0.2426\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$



## 5.2 $q$ -Αριθμητικό πεδίο

Εδώ θα επεκτείνουμε την έννοια του αριθμητικού πεδίου, που έχει αναπτυχθεί εκτενώς στα [5, 6] και ήδη έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη ενότητα, στο  $q$ -αριθμητικό πεδίο, θεωρώντας την άλγεβρα των τελεστών στο  $\mathbb{C}$ , η οποία ταυτίζεται με την άλγεβρα  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  των τετραγωνικών  $n \times n$  μιγαδικών πινάκων. Χρησιμοποιώντας το μη κενό σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών

$$\mathcal{L}_q = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοιο ώστε } \|f\| = 1, f(I) = q \in [0, 1]\}, \quad (5.8)$$

ορίζουμε το  $q$ -αριθμητικό πεδίο ( $q$ -numerical range) του πίνακα  $A \in \mathcal{M}_n$  ως το σύνολο

$$F_q(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}_q\}. \quad (5.9)$$

Εφόσον οποιοδήποτε γραμμικό συναρτησιακό στον  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  μπορεί να οριστεί από ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $y \in \mathbb{C}^n$  διαμέσου της απεικόνισης  $A \mapsto \langle Ax, y \rangle$ , τέτοια ώστε  $\|y\|_2 = 1$  και  $\langle x, y \rangle = q \leq 1$  για όλα τα μοναδιαία διανύσματα  $x \in \mathbb{C}^n$ , το σύνολο (5.9) ταυτίζεται με το σύνολο [31, 32, 33, 41, 58]

$$F_q(A) = \{\langle Ax, y \rangle : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1, \langle x, y \rangle = q\}. \quad (5.10)$$

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι το  $q$ -αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών  $n \times n$  πινάκων στην (5.9) γράφεται ως τομή κυκλικών δίσκων, έκφραση η οποία παράλληλα δείχνει και το κυρτό του συνόλου. Συγκεκριμένα, γενικεύουμε την Πρόταση 5.1, παρουσιάζοντας την ακόλουθη πρόταση, η οποία ισχύει και στον απειροδιάστατο χώρο των τελεστών.

**Πρόταση 5.8.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $F_q(A)$  στην ισότητα (5.9), τότε

$$F_q(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(qz_0, \|A - z_0 I_n\|),$$

όπου  $\|\cdot\|$  συμβολίζει οποιαδήποτε νόρμα πίνακα.

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $\Omega = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} : |z - qz_0| \leq \|A - z_0 I_n\|\}$ . Αν  $\gamma \in F_q(A)$  στην (5.9), τότε υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό  $f \in \mathcal{L}_q$  τέτοιο ώστε  $\gamma = f(A)$ . Έτσι

$$|\gamma - qz_0| = |f(A - z_0 I_n)| \leq \|f\| \|A - z_0 I_n\| = \|A - z_0 I_n\|,$$

για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Άρα  $\gamma \in \Omega$ .

Για τον αντίθετο εγκλεισμό  $\supseteq$ , έστω  $\gamma \in \Omega$ . Αν  $A$  είναι βαθμωτός πίνακας, δηλαδή  $A = cI_n$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , τότε  $|\gamma - qc| \leq \|A - cI_n\| = 0 \Rightarrow \gamma = qc$ . Συνεπώς, για οποιοδήποτε γραμμικό συναρτησιακό  $f \in \mathcal{L}_q$ , έχουμε  $\gamma = cf(I_n) = f(cI_n) = f(A) \in F_q(A)$ .

Από την άλλη μεριά, επιλέγοντας  $B \in \mathcal{M}_n$  τέτοιον ώστε  $\{I_n, A, B\}$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και  $\|B\| \leq 1$ , θεωρούμε τον υπόχωρο  $\mathcal{X} = \text{span}\{I_n, A, B\}$ . Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό  $\tilde{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο

$$\tilde{f}(c_1 I_n + c_2 A + c_3 B) = c_1 q + c_2 \gamma + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |\gamma - qz_0| &\leq \|A - z_0 I_n\| \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ |\tilde{f}(A) - z_0 \tilde{f}(I_n)| &\leq \|A - z_0 I_n\| \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ |\tilde{f}(A - z_0 I_n)| &\leq \|A - z_0 I_n\| \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \|\tilde{f}\| \leq 1. \end{aligned}$$

Εφόσον,  $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1) \Rightarrow 1 = |\tilde{f}(B)| \leq \|\tilde{f}\| \|B\| \leq \|\tilde{f}\|$ , προφανώς  $\|\tilde{f}\| = 1$ , ενώ για  $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$  και  $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$  παίρνουμε  $\tilde{f}(I_n) = q$  και  $\tilde{f}(A) = \gamma$ , αντίστοιχα. Εξαιτίας του θεωρήματος Hahn-Banach, το  $\tilde{f}$  επεκτείνεται στο γραμμικό συναρτησιακό  $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C}$  για το οποίο  $\|f\| = \|\tilde{f}\| = 1$  και  $f|_{\mathcal{X}} = \tilde{f}$ . Επομένως,  $f \in \mathcal{L}_q$ , με  $f(A) = \gamma \in F_q(A)$ .  $\square$

*Παρατήρηση 5.1.* Στην περίπτωση της φασματικής διανυσματικής νόρμας  $\|\cdot\|_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$  στον  $\mathbb{C}^n$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα αναπαράστασης Riesz, το  $q$ -αριθμητικό πεδίο που ορίζεται στην (5.9) εκφράζεται μέσω εσωτερικού γινομένου και τότε το σύνολο (5.9) ταυτίζεται με το (5.10), όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την παραπάνω πρόταση δίνουν μια καινούρια περιγραφή του  $q$ -αριθμητικού πεδίου (5.10) για τετραγωνικούς πίνακες, δηλαδή,

$$F_q(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(qz_0, \|A - z_0 I_n\|_2) = \{\langle Ax, y \rangle : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1, \langle x, y \rangle = q\}.$$

Ακόμη, όταν  $q \neq 0$ , τότε το  $F_q(A)$  ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο  $w_{\|\cdot\|_2}(A, \frac{1}{q} I_n)$  του  $A$  ως προς τον πίνακα  $\frac{1}{q} I_n$ , στη σχέση (5.2).

Παράλληλα με την έννοια του αριθμητικού πεδίου μη τετραγωνικών πινάκων, επεκτείνουμε την έννοια του  $q$ -αριθμητικού πεδίου ορίζοντας ως  $q$ -αριθμητικό πεδίο

μη τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  ως προς πίνακα  $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ , το σύνολο

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} : |z - qz_0| \leq \|A - z_0B\|, \|B\| \geq q\}, \quad (5.11)$$

όπου  $q \in [0, 1]$  και  $\|\cdot\|$  είναι οποιαδήποτε νόρμα πίνακα.

Το σύνολο (5.11) είναι συμπαγές και κυρτό ως τομή συμπαγών και κυρτών συνόλων, ενώ για  $q = 1$ , το  $w_{\|\cdot\|}(A, B; 1)$  ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο  $w_{\|\cdot\|}(A, B)$  στην (5.2).

Στην επόμενη πρόταση, αναφέρουμε μερικές βασικές ιδιότητες του  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q)$ .

**Πρόταση 5.9.** Αν  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ , ισχύουν οι σχέσεις

**I.**  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = w_{\|\cdot\|}(A, \frac{B}{q})$ , για  $q \neq 0$

**II.**  $w_{\|\cdot\|}(c_1A + c_2B, B; q) = c_1w_{\|\cdot\|}(A, B; q) + c_2q$ , για κάθε  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

**III.**  $q_1w_{\|\cdot\|}(A, B; q_2) \subseteq q_2w_{\|\cdot\|}(A, B; q_1)$ , για  $0 < q_1 \leq q_2 \leq 1$ .

*Απόδειξη.* **I.** Από τον ορισμό (5.11), για  $q \neq 0$

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|}(A, B; q) &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{z : |z - q\lambda| \leq \|A - \lambda B\|, \|B\| \geq q\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ z : |z - q\lambda| \leq \|A - q\lambda \frac{B}{q}\|, \frac{\|B\|}{q} \geq 1 \right\} \\ &= \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}} \left\{ z : |z - \mu| \leq \|A - \mu \frac{B}{q}\|, \frac{\|B\|}{q} \geq 1 \right\} = w_{\|\cdot\|}(A, \frac{B}{q}). \end{aligned}$$

**II.** Από την αποδειχθήσα σχέση (I) και την πρόταση 8 στην εργασία [13], για  $q \neq 0$  και οποιαδήποτε  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|}(c_1A + c_2B, B; q) &= w_{\|\cdot\|}(c_1A + c_2B, \frac{B}{q}) = w_{\|\cdot\|}(c_1A + c_2q\frac{B}{q}, \frac{B}{q}) \\ &= c_1w_{\|\cdot\|}(A, \frac{B}{q}) + c_2q = c_1w_{\|\cdot\|}(A, B; q) + c_2q. \end{aligned}$$

Αν  $q = 0$  και  $c_1 \neq 0$ , τότε για αυθαίρετο  $c_2$ :

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|}(c_1A + c_2B, B; 0) &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z| \leq \|c_1A + c_2B - z_0B\|\} \\ &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \left\{ z : \left| \frac{z}{c_1} \right| \leq \|A - \frac{z_0 - c_2}{c_1} B\| \right\} \\ &= \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}} \{c_1u : |u| \leq \|A - \mu B\|\} = c_1w_{\|\cdot\|}(A, B; 0). \end{aligned}$$

Αν  $c_1 = q = 0$ , είναι άμεσο (παίρνοντας  $z_0 = c_2$ ) ότι  $w_{\|\cdot\|}(c_2 B, B; 0) = \{0\}$ .

**III.** Αποδεικνύεται στην [13] ότι  $w_{\|\cdot\|}(A, B) \subseteq b^{-1}w_{\|\cdot\|}(A, b^{-1}B)$ , όταν  $|b| < 1$ .

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή και την (I), καθόσον  $0 < \frac{q_1}{q_2} < 1$ , ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{q_2}w_{\|\cdot\|}(A, B; q_2) &= \frac{q_1}{q_2}w_{\|\cdot\|}\left(A, \frac{B}{q_2}\right) \subseteq w_{\|\cdot\|}\left(A, \frac{q_2 B}{q_1 q_2}\right) \\ &= w_{\|\cdot\|}\left(A, \frac{B}{q_1}\right) = w_{\|\cdot\|}(A, B; q_1). \end{aligned}$$

Η έκφραση αυτή είναι ανάλογη αντίστοιχης ιδιότητας για το  $q$ -αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πίνακα στην εργασία [32].  $\square$

**Πρόταση 5.10.** Έστω  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$  με  $\|B\| \geq q$ ,  $q \in [0, 1]$  και η νόρμα πίνακα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Τότε

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D}\left(q \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|}\right)$$

και ειδικότερα,  $w_{\|\cdot\|}(A, 0; 0) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ .

*Απόδειξη.* Για  $q \in (0, 1]$  η ισότητα επιβεβαιώνεται εύκολα συνδυάζοντας την Πρόταση 5.9(I) και την πρόταση 13 στην [13]. Στην περίπτωση  $q = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|}(A, B; 0) &= \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z : |z| \leq \|A - z_0 B\|, \|B\| \geq 0\} \\ &= \left\{z : |z| \leq \min_{z_0 \in \mathbb{C}} \|A - z_0 B\|, \|B\| \geq 0\right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Χρησιμοποιώντας την μεταθετική ιδιότητα του  $q$ -αριθμητικού πεδίου (Πρόταση 5.9(II)) για τον πίνακα  $C = A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B$  και το λήμμα 11 στην [13], παίρνουμε

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; 0) = w_{\|\cdot\|}(C, B; 0)$$

με  $\langle C, B \rangle = 0$ . Έτσι, από την (5.12) και για μη μηδενικό πίνακα  $B$ , έχουμε

$$\begin{aligned} w_{\|\cdot\|}(A, B; 0) &= \left\{z : |z| \leq \min_{z_0 \in \mathbb{C}} \|C - z_0 B\|\right\} \\ &= \left\{z : |z| \leq \min_{\rho \in \mathbb{R}_+} \sqrt{\|C\|^2 + \rho^2 \|B\|^2}\right\} \\ &= \{z : |z| \leq \|C\|\} = \mathcal{D}(0, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\|). \end{aligned}$$

Εφόσον  $\|B\| = 0 \Leftrightarrow B = 0$ , μέσω της (5.12) έχουμε  $w_{\|\cdot\|}(A, 0; 0) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ .  $\square$

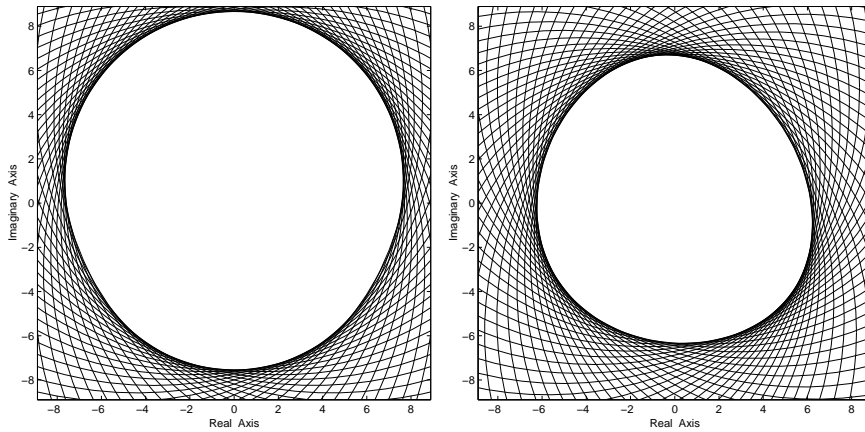


Στο επόμενο παράδειγμα, απεικονίζεται το σύνολο  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q)$  στην (5.11) ως προς δυο διαφορετικές νόρμες πίνακα.

**Παράδειγμα 5.4.** Θεωρούμε τους  $4 \times 3$  πίνακες  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2 - \mathbf{i} & -1 & 0.5 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0.3\mathbf{i} & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$  και

$$B = \begin{bmatrix} 0.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 - 0.35\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.75\mathbf{i} \end{bmatrix}, \text{ με } \|B\|_1 = 0.75 \text{ και } \|B\|_2 = 0.7566, \text{ όπου}$$

$\|\cdot\|_1$  είναι η νόρμα πίνακα που εισάγεται από τη διανυσματική νόρμα 1 και  $\|\cdot\|_2$  είναι η φασματική νόρμα πίνακα. Τα σύνολα  $w_{\|\cdot\|_1}(A, B; 0.5)$  και  $w_{\|\cdot\|_2}(A, B; 0.5)$  απεικονίζονται από τη μη γραμμοσκιασμένη περιοχή δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα, στις παρακάτω εικόνες.



Από την Πρόταση 5.9(I), παίρνουμε ανάλογη σχέση της Πρότασης 5.2(I).

**Πρόταση 5.11.** Έστω  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$  τέτοιος ώστε  $\|B\| \geq q$ , όπου η νόρμα πίνακα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο και  $0 \leq q \leq 1$ . Τότε

$$\bigcup_{\|B\| \geq q, 0 \leq q \leq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D}(0, \|A\|).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \bigcup_{\|B\| \geq q, 0 < q \leq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B; q) &= \bigcup_{\frac{\|B\|}{q} \geq 1} w_{\|\cdot\|}(A, \frac{B}{q}) = \bigcup_{\|\Gamma\| \geq 1} w_{\|\cdot\|}(A, \Gamma) \\ &= \mathcal{D}(0, \|A\|), \end{aligned}$$

όπου  $\Gamma = \frac{B}{q}$ , με  $\|\Gamma\| \geq 1$ , για  $B \in \mathcal{M}_{m,n}$  και  $q \in (0, 1]$ .

Για  $q = 0$ ,  $B \neq 0$ , χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.10, έχουμε

$$\bigcup_{B \neq 0} w_{\|\cdot\|}(A, B; 0) = \bigcup_{B \neq 0} \mathcal{D}(0, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\|) \subseteq \mathcal{D}(0, \|A\|).$$

Έτσι, εφόσον  $w_{\|\cdot\|}(A, 0; 0) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ , παίρνουμε το ζητούμενο.  $\square$

Ειδικότερα, για τετραγωνικούς πίνακες έχουμε:

**Πρόταση 5.12.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$  και  $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{M}_n : \text{rank} B = 1, \text{tr} B B^* = 1, \text{tr} B = q, q \in [0, 1]\}$ . Αν  $\|\cdot\|_F$  είναι η Frobenius νόρμα πίνακα, τότε

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} w_{\|\cdot\|_F}(A, B) = F_q(A),$$

όπου  $F_q(A)$  είναι το σύνολο στην (5.10).

*Απόδειξη.* Καθόσον  $B \in \mathcal{G}$ , γράφουμε  $B = yx^*$  όπου  $\|x\|_2 \|y\|_2 = 1$  και  $\langle x, y \rangle = q$ . Επομένως, από (5.3)

$$w_{\|\cdot\|}(A, B) = \mathcal{D}(\langle A, yx^* \rangle, 0) = \frac{y^* A x}{\|y\|_2 \|x\|_2}$$

και συνεπώς, για  $\hat{x} = x / \|x\|_2$ ,  $\hat{y} = y / \|y\|_2$ , ισχύει

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} w_{\|\cdot\|}(A, B) = \{\hat{y}^* A \hat{x} : \|\hat{x}\|_2 = \|\hat{y}\|_2 = 1, \hat{y}^* \hat{x} = q\} = F_q(A).$$

$\square$

# Εργασίες

Επιστημονικές εργασίες που έχουν υποβληθεί για δημοσίευση σε επιστημονικά περιοδικά:

1. Investigating the Numerical Range and  $q$ -Numerical Range of Non Square Matrices, *Opuscula Mathematica* (υπό δημοσίευση).
2. The Higher Rank Numerical Range of Matrix Polynomials (υποβληθείσα εργασία).
3. The Higher Rank Numerical Range of Nonnegative Matrices (υποβληθείσα εργασία).
4. The  $k$ -Rank Numerical Radii (υποβληθείσα εργασία).

# Abstract of Ph.D. Thesis

In quantum computing, information is stored in quantum bits, abbreviated as qubits. Mathematically, a qubit is represented by a  $2 \times 2$  rank one projection  $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}$ , with  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . A state of  $K$ -qubits, represented by the tensor product  $Q_1 \otimes \dots \otimes Q_K$ , is encoded as a state of  $N$ -qubits and transmitted through an quantum channel.

Let  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  denote the algebra of  $n \times n$  complex matrices, then an quantum channel for states of  $N$ -qubits is a trace preserving completely positive linear map  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , with  $n = 2N$ . Due to E. Knill and R. Laflamme [28], a  $k$ -dimensional subspace  $\mathcal{V}$  of  $\mathbb{C}^n$  is an quantum error correcting code if and only if there are  $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  such that

$$P_{\mathcal{V}} E_i^* E_j P_{\mathcal{V}} = \gamma_{ij} P_{\mathcal{V}}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m,$$

where  $P_{\mathcal{V}}$  is a  $k$ -rank orthogonal projection of  $\mathbb{C}^n$  onto  $\mathcal{V}$  and  $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}_n$ ,  $\sum_{i=1}^m E_i^* E_i = I_n$ .

In the context of quantum error correction, for a positive integer  $k \geq 1$ , researchers [9, 10, 11, 12, 17, 36, 37, 39, 59] introduced the *k-rank numerical range* of a matrix  $A \in \mathcal{M}_n$ , defined and denoted by

$$\Lambda_k(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \text{ for some } P \in \mathcal{P}_k \},$$

where  $\mathcal{P}_k$  is the set of all orthogonal projections of  $\mathbb{C}^n$  onto any  $k$ -dimensional subspace  $\mathcal{K}$  of  $\mathbb{C}^n$ . Equivalently,

$$\Lambda_k(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : X^* A X = \lambda I_k \text{ for some } X \in \mathcal{X}_k \},$$

where  $\mathcal{X}_k = \{ X \in \mathcal{M}_{n,k} : X^* X = I_k \}$ . Evidently, for  $k = 1$ ,  $\Lambda_k(A)$  yields the classical *numerical range* of a matrix  $A$  [19, 23], i.e.

$$\Lambda_1(A) \equiv F(A) = \{ x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \},$$

which is known to be a compact and convex subset of  $\mathbb{C}$  [20, 23, 57], as well as the same properties hold for the set  $\Lambda_k(A)$ , for  $k > 1$  [39, 59].

Moreover, it is readily verified that

$$\Lambda_1(A) \supseteq \Lambda_2(A) \supseteq \dots \supseteq \Lambda_k(A).$$

Associated with the  $\Lambda_k(A)$  are the *k-rank numerical radius*  $r_k(A)$  and the *inner k-rank numerical radius*  $\tilde{r}_k(A)$ , defined respectively, by

$$r_k(A) = \max \{|z| : z \in \partial\Lambda_k(A)\} \quad \text{and} \quad \tilde{r}_k(A) = \min \{|z| : z \in \partial\Lambda_k(A)\}.$$

For  $k = 1$ , they are reduced to the *numerical radius* and the *inner numerical radius*,

$$r(A) = \max \{|z| : z \in \partial F(A)\} \quad \text{and} \quad \tilde{r}(A) = \min \{|z| : z \in \partial F(A)\},$$

respectively [3, 19, 23].

In the second chapter of this dissertation,  $\Lambda_k(A)$  is proved to coincide with an indefinite intersection of numerical ranges of all the compressions of  $A \in \mathcal{M}_n$  to  $(n - k + 1)$ -dimensional subspaces, namely

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{M \in \mathcal{X}_{n-k+1}} F(M^*AM).$$

Further elaboration of this equality, leads us to reformulate  $\Lambda_k(A)$  in terms of an intersection of a *countable family* of numerical ranges, i.e.

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \{F(M_\nu^*AM_\nu) : M_\nu \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}.$$

The above equality provides additional characterizations of  $r_k(A)$  and  $\tilde{r}_k(A)$ . Hence, denoting by  $\mathcal{J}_\nu(A) = \bigcap_{p=1}^\nu \{F(M_p^*AM_p) : M_p \in \mathcal{X}_{n-k+1}\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , we obtain

$$r_k(A) = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\} = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \sup \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}$$

and also, whenever  $0 \notin \Lambda_k(A)$

$$\tilde{r}_k(A) = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\} = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \inf \{|z| : z \in \mathcal{J}_\nu(A)\}.$$

Moreover, we present a lower and an upper bound of  $r_k(A)$  and  $\tilde{r}_k(A)$ , concerning the radii  $r(M_p^*AM_p)$  and  $\tilde{r}(M_p^*AM_p)$ , respectively.

The  $k$ -rank numerical range of entrywise nonnegative matrices is studied in the third chapter. Introducing the notion of elements of maximum modulus in  $\Lambda_k(A)$ , we obtain interesting results comparing to those appeared in Issos' dissertation [24] concerning the numerical range  $F(A)$ . Especially, we define the *maximal elements* in  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$  to constitute the set:

$$\mathcal{F}_k(A) = \{z \in \Lambda_k(A) : |z| = r_k(A)\}.$$

Let  $k$  be the minimum integer such that  $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$  and  $\Lambda_{k+1}(A) = \emptyset$ . Then for a nonnegative and irreducible  $n \times n$  matrix  $A$  having  $q > 1$  eigenvalues of maximum modulus  $\rho(A)$  (i.e. imprimitive matrix), where  $\rho(\cdot)$  denotes the spectral radius of a matrix, we prove that

$$\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\},$$

for every  $j = 1, \dots, k$ , with  $\theta_j = 0$  or  $\frac{\pi}{q}$ .

In addition, if we consider a nonnegative matrix  $A \in \mathcal{M}_n$  with irreducible hermitian part  $H(A)$ , we prove that either  $\mathcal{F}_j(A)$  coincides with the circle  $\mathcal{S}(0, r_j(A))$ , for every  $j = 1, \dots, k$ , or

$$\mathcal{F}_j(A) = \left\{ r_j(A) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})} : t = 0, \dots, q-1 \right\},$$

for every  $j = 1, \dots, k$ , where  $\theta_j = 0$  or  $\frac{\pi}{q}$  and  $q > 1$  is the largest positive integer such that  $A$  is diagonally similar to the matrix  $e^{i\frac{2\pi}{q}}A$ .

Further, if  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  is unitarily similar to the matrix  $\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , with  $A_1 \in \mathcal{M}_{m, n-m}(\mathbb{C})$  and  $\text{rank}A_1 = k$ , we obtain

$$\Lambda_j(A) = \mathcal{D}\left(0, \frac{\sigma_j(A_1)}{2}\right), \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

where  $\sigma_j(A_1)$  denotes the  $j$ -th largest singular value of  $A_1$ .

Extending the notion of  $\Lambda_k(A)$  of a matrix  $A$ , we define the  *$k$ -rank numerical range* of a matrix polynomial  $L(\lambda) = A_m\lambda^m + \dots + A_1\lambda + A_0$ , with  $A_i \in \mathcal{M}_n$  and  $A_m \neq 0$ , by the set

$$\begin{aligned} \Lambda_k(L(\lambda)) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : PL(\lambda)P = 0_n \text{ for some } P \in \mathcal{P}_k\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : Q^*L(\lambda)Q = 0_k \text{ for some } Q \in \mathcal{X}_k\}. \end{aligned}$$

We note that  $\Lambda_k(I\lambda - A) \equiv \Lambda_k(A)$  and when  $k = 1$ ,  $\Lambda_k(L(\lambda))$  reduces to the well known *numerical range*  $w(L(\lambda))$  of  $L(\lambda)$  [34], that is

$$\Lambda_1(L(\lambda)) \equiv w(L(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*L(\lambda)x = 0 \text{ for some } x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}.$$

Elaborating the set  $\Lambda_k(L(\lambda))$  in the fourth chapter, we present its fundamental properties and we study its geometry. Initially, we investigate conditions for the set to be non empty. Hence, considering the  $k^2$  scalar polynomials, elements of the matrix polynomial  $Q^*L(\lambda)Q$ ,  $Q \in \mathcal{X}_k$ , we introduce the notion of the generalized Sylvester matrix  $R_s(Q)$  [43] and we prove that  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  precisely when

$$\text{rank}R_s(Q) < 2m,$$

for some isometry  $Q \in \mathcal{X}_k$ .

Motivated by analogous expressions for matrices, we describe  $\Lambda_k(L(\lambda))$  via the following equalities

$$\Lambda_k(L(\lambda)) = \bigcap_{M \in \mathcal{X}_{n-k+1}} w(M^*L(\lambda)M) = \bigcup_{N \in \mathcal{X}_k} \Lambda_k(N^*L(\lambda)N),$$

from which an estimation of the boundary of  $\Lambda_k(L(\lambda))$  is provided through the numerical approximation of the numerical ranges  $w(M^*L(\lambda)M)$  [7, 53].

Basic geometrical properties of  $\Lambda_k(L(\lambda))$  are also investigated, such as the boundedness and connectedness of the set. Especially, for a matrix polynomial  $L(\lambda)$  of  $m$ -th degree,  $\Lambda_k(L(\lambda)) \neq \emptyset$  is a bounded set, whenever  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ , with  $A_m$  to be the leading coefficient of  $L(\lambda)$ . Conversely, suppose that  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$ , for all  $Q \in \mathcal{X}_k$  such that  $Q^*A_mQ = zI_k$ . If  $\Lambda_k(A_m) \neq \{0\}$  and  $\Lambda_k(L(\lambda))$  is bounded, then  $0 \notin \Lambda_k(A_m)$ .

Further, assume that  $\text{rank}R_s(Q) < 2m$ , for any  $Q \in \mathcal{X}_k$  such that  $Q^*A_mQ = zI_k$  with  $z \in \Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$ . Then  $\Lambda_k(L(\lambda))$  has at most  $m$  connected components, if  $\Lambda_k(A_m) \setminus \{0\}$  is a connected set, or  $\Lambda_k(L(\lambda))$  has at most  $2m$  connected components, in the opposite case.

Following, a connection of the boundary points of  $\Lambda_k(L(\lambda))$  with respect to the boundary points of  $w(L(\lambda))$  is considered. Particularly, introducing the notion of *sharp points* for  $\Lambda_k(L(\lambda))$ , we show that a sharp point of  $w(A\lambda - B)$  with algebraic multiplicity  $k$  with respect to the spectrum  $\sigma(A\lambda - B)$  is also a sharp point of  $\Lambda_j(A\lambda - B)$ , for any  $j = 2, \dots, k$ .

The set  $\Lambda_k(L(\lambda))$  is closely related to the multi-dimensional *joint  $k$ -rank numerical range* [36, 38],

$$\Lambda_k(\mathbf{A}) = \{(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : \exists P \in \mathcal{P}_k \text{ such that} \\ PA_i P = \mu_i P, i = 0, \dots, m\},$$

where  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$  is an  $(m + 1)$ -tuple of matrices  $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  for  $i = 0, \dots, m$ . Apparently,  $\Lambda_1(\mathbf{A})$  is identified with the *joint numerical range* [4]

$$w(\mathbf{A}) = \{(x^* A_0 x, \dots, x^* A_m x) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}.$$

In the context of quantum information theory,  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  refers to an quantum error correcting code, since the latter exists as long as the joint  $k$ -rank numerical range associated with the error operators  $E_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) of a noisy quantum channel  $\mathcal{E}$  is a non empty set.

In view of the joint numerical ranges, we treat a sufficient condition for the boundary points of  $w(\mathbf{A})$  to be boundary points of  $\Lambda_k(\mathbf{A})$ , as well, where  $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m)$ . Evenly, we reveal the interplay of  $\Lambda_k(L(\lambda))$  and  $\Lambda_k(\mathbf{A})$  by the relation

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle \mathbf{u}, (1, \lambda, \dots, \lambda^m) \rangle = 0 \text{ for some } \mathbf{u} \in \text{co}\Lambda_k(\mathbf{A})\}.$$

Considering the companion polynomial  $C_L(\lambda)$  of  $L(\lambda)$  [18], we prove the next inclusion

$$\Lambda_k(L(\lambda)) \cup \{0\} \subseteq \Lambda_k(C_L(\lambda)).$$

This leads to an extention of our results involving  $\Lambda_k(A)$  of nonnegative matrices to  $\Lambda_k(L(\lambda))$  of matrix polynomials with nonnegative coefficients, known as Perron polynomials [52]. Let  $r_k(L) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda_k(L(\lambda))\}$  be the  $k$ -rank numerical radius of a matrix polynomial  $L(\lambda)$ . If  $L(\lambda)$  is a Perron polynomial and  $C_L(\lambda)$  is an irreducible matrix having  $q > 1$  eigenvalues of maximum modulus, then

$$\mathcal{F}_j(L) = \left\{ r_j(L) e^{i(\theta_j + \frac{2\pi t}{q})}, t = 0, \dots, q - 1 \right\}$$

are the elements of maximum modulus in  $\Lambda_j(L(\lambda))$ , where  $\theta_j = 0$  or  $\frac{\pi}{q}$ , for every  $j = 1, \dots, k$ .



Finally, the fifth and last chapter of our treatment refers to the numerical range of non square matrices. F.F. Bonsall and J. Duncan [5, 6] defined the *algebraic numerical range of a square  $n \times n$  matrix  $A$*  by the set

$$V(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}\},$$

where

$$\mathcal{L} = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ such that } \|f\| = f(I) = 1\}$$

and  $\|\cdot\|$  is any matrix norm. They also proved that

$$V(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 I_n\|),$$

where  $\mathcal{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ . Extending the above equality, Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios and P. Psarrakos [13] defined the *numerical range of a non square  $m \times n$  matrix  $A$  with respect to  $B \in \mathcal{M}_{m,n}$*  by the compact and convex set

$$w_{\|\cdot\|}(A, B) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(z_0, \|A - z_0 B\|),$$

where  $\|B\| \geq 1$  and  $\|\cdot\|$  denotes any matrix norm. Clearly, this set is based on the notion of a matrix norm and  $w_{\|\cdot\|_2}(A, I_n) \equiv F(A)$ . It is also proved in [13] that  $w_{\|\cdot\|}(A, B)$  is identified with the disc

$$\mathcal{D}\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \sqrt{1 - \|B\|^{-2}}\right),$$

when the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by an inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Herein we prove that the union of the aforementioned discs, as  $B$  varies, is the disc  $\mathcal{D}(0, \|A\|)$ .

Alternatively, we also provide two different definitions of numerical range for rectangular matrices via an orthogonal projection onto a lower or a higher dimensional subspace. In this case, we define the (*lower*) *numerical range of  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  ( $m > n$ ) with respect to an  $m \times n$  isometry  $H$*  as the set:

$$\begin{aligned} w_l(A) &= F(H^* A) \\ &= \{\langle Ax, Hx \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|Hx\|_2 = 1\}, \end{aligned}$$

where obviously  $H^* A$  is an  $n \times n$  matrix. The second equality is the set defined in [2] as "*bioperative*" *numerical range  $W(A, H)$* , without requiring  $H$  to be an isometry.

We also define the (*upper*) *numerical range*  $w_h(A)$  with respect to an isometry  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$ , using the higher dimensional  $m \times m$  matrix  $AH^*$ , namely

$$w_h(A) = F(AH^*).$$

Similarly, if  $m < n$ , then

$$w_l(A) = F(AH), \quad w_h(A) = F(HA).$$

Obviously, for  $m = n$  and  $H = I$ ,  $w_l(A) = w_h(A) = F(A)$ . We present basic properties of the sets  $w_l(A)$ ,  $w_h(A)$ , with respect to an isometry  $H \in \mathcal{M}_{m,n}$  ( $m > n$ ) and then we compare them with the set  $w_{\|\cdot\|_2}(A, H)$ , presenting the inclusion relation

$$w_l(A) \subseteq w_{\|\cdot\|_2}(A, H) \subseteq w_h(A).$$

Further, according to the definition of sharp points (i.e. boundary points with nonunique tangents [23, 30]), we prove that  $\lambda_0 (\neq 0)$  is a sharp point of  $w_l(A)$ , with respect  $H \in \mathcal{X}_n$ , if it is a sharp point of  $w_h(A)$ .

In the final section of the fifth chapter, we refer to the  $q$ -numerical range of a rectangular matrix  $A$ , where  $q \in [0, 1]$ . Using the nonempty set of linear functionals

$$\mathcal{L}_q = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{C} \text{ such that } \|f\| = 1, f(I) = q \in [0, 1]\},$$

we define the  $q$ -numerical range of a square matrix  $A$  to be the set

$$F_q(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{L}_q\}.$$

In case  $q = 1$ , we have  $F_1(A) \equiv V(A)$  and when  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , we obtain [31, 32, 33, 41, 48, 58]

$$F_q(A) \equiv \{\langle Ax, y \rangle : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1, \langle x, y \rangle = q\}.$$

It is proved that

$$F_q(A) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(qz_0, \|A - z_0I_n\|).$$

Motivated by this result, we define the  $q$ -numerical range of a non square matrix  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  with respect to  $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ , by the compact and convex set

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} : |z - qz_0| \leq \|A - z_0B\|, \|B\| \geq q\},$$

with  $q \in [0, 1]$ . For  $q \neq 0$ , we have  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = w_{\|\cdot\|}(A, \frac{1}{q}B)$  and for  $q = 1$ ,  $w_{\|\cdot\|}(A, B; 1) = w_{\|\cdot\|}(A, B)$ .

We study basic properties of  $w_{\|\cdot\|}(A, B; q)$  and prove that

$$w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D} \left( q \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \|A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B\| \sqrt{1 - \left( \frac{\|B\|}{q} \right)^{-2}} \right),$$

when  $B \neq 0$  and the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by an inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , otherwise,  $w_{\|\cdot\|}(A, 0; 0) = \mathcal{D}(0, \|A\|)$ . In view of the aforementioned disc, we obtain

$$\bigcup_{\|B\| \geq q, 0 \leq q \leq 1} w_{\|\cdot\|}(A, B; q) = \mathcal{D}(0, \|A\|),$$

where the matrix norm is induced by an inner product. Finally, for  $0 < q_1 \leq q_2 \leq 1$ , we state the following inclusion relation

$$\frac{w_{\|\cdot\|}(A, B; q_2)}{q_2} \subseteq \frac{w_{\|\cdot\|}(A, B; q_1)}{q_1},$$

which is an analogue for the  $q$ -numerical range of square matrices in [32].

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Adam, J. Maroulas, P. Psarrakos, On the numerical range of rational matrix functions, *Linear and Multilinear Algebra*, **50**(1), 75-89, 2002.
- [2] C.F. Amelin, A numerical range for two linear operators, *Pacific Journal Mathematics*, **48**, 335-345, 1973.
- [3] T. Ando, Structure of operators with numerical radius one, *Acta Scientia Mathematica (Szeged)*, **34**, 11-15, 1973.
- [4] P. Binding, C.K. Li, Joint ranges of hermitian matrices and simultaneous diagonalization, *Linear Algebra and its Applications*, **151**, 157-167, 1991.
- [5] F.F. Bonsall, J. Duncan, ***Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras***, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, 1971.
- [6] F.F. Bonsall, J. Duncan, ***Numerical Ranges II***, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, New York, 1973.
- [7] M.T. Chien, H. Nakazato, P. Psarrakos, Point equation of the boundary of the numerical range of a matrix polynomial, *Linear Algebra and its Applications*, **347**, 205-217, 2002.
- [8] M.D. Choi, Completely positive linear maps on complex matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **10**, 285-290, 1975.
- [9] M.D. Choi, M. Giesinger, J.A. Holbrook, D.W. Kribs, Geometry of higher-rank numerical ranges, *Linear and Multilinear Algebra*, **56**(1), 53-64, 2008.

- [10] M.D. Choi, J.A. Holbrook, D.W. Kribs, K. Życzkowski, Higher-rank numerical ranges of unitary and normal matrices, preprint, <http://arxiv.org/quant-ph/0608244>.
- [11] M.D. Choi, D.W. Kribs, K. Życzkowski, Quantum error correcting codes from the compression formalism, *Reports on Mathematical Physics*, **58**, 77-86, 2006.
- [12] M.D. Choi, D.W. Kribs, K. Życzkowski, Higher-rank numerical ranges and compression problems, *Linear Algebra and its Applications*, **418**, 828-839, 2006.
- [13] Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios, P. Psarrakos, A definition of numerical range of rectangular matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **57**, 459-475, 2009.
- [14] J.E. Dennis, Jr., J.F. Traub, R.P. Weber, The Algebraic Theory of Matrix Polynomials, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **13**, 831-845, 1976.
- [15] I.Z. Emiris, E.D. Fritzilas, D. Manocha, Algebraic Algorithms for structure Determination in Biological chemistry, *International Journal of Quantum Chemistry*, **106**, 190-210, 2006.
- [16] F. Farid, On the numerical range of operator polynomials, *Linear and Multilinear Algebra*, **50**(3), 223-239, 2002.
- [17] H.L. Gau, C.K. Li, Y.T. Poon, N.S. Sze, Quantum error correction and higher rank numerical ranges of normal matrices, preprint, <http://arxiv.org/0902.4869v1> [math.FA], 2009, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, (to appear).
- [18] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, ***Matrix Polynomials***, Academic Press, New York, 1982.
- [19] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao, ***Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices***, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [20] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Z.*, **3**, 314-316, 1919.

- [21] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
- [22] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [23] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [24] J.N. Issos, *The field of values of non-negative irreducible matrices*, Ph.D. Thesis, Auburn University, 1966.
- [25] C.R. Johnson, Numerical determination of the field of values of a general complex matrix, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **15**, 595-602, 1978.
- [26] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1980.
- [27] R. Kippenhahn, Über den wertevorrat einer matrix, *Mathematische Nachrichten*, **6**, 193-228, 1951.
- [28] E. Knill, R. Laflamme, Theory of quantum error correcting codes, *Phys. Rev. A*, **55**, 900-911, 1997.
- [29] P. Lancaster, P. Psarrakos, Normal and seminormal eigenvalues of matrix functions, *Integral Equations and Operator Theory*, **41**, 331-342, 2001.
- [30] H. Langer, A. Markus, C. Tretter, Corners of numerical ranges, *Operator Theory: Advances and Applications*, **124**, 385-400, 2001.
- [31] C.K. Li, Some convexity theorems for the generalized numerical ranges, *Linear and Multilinear Algebra*, **40**, 235-240, 1996.
- [32] C.K. Li, P.P. Mehta, L. Rodman, A generalized numerical range: The range of a constrained sesquilinear form, *Linear and Multilinear Algebra*, **37**, 25-50, 1994.
- [33] C.K. Li, H. Nakazato, Some results on the q-numerical range, *Linear and Multilinear Algebra*, **43**, 385-409, 1998

- [34] C.K. Li, L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, **15**, 1256-1265, 1994.
- [35] C.K. Li, B.S. Tam, P.Y. Wu, The numerical range of a nonnegative matrix, *Linear Algebra and its Applications*, **350**, 1-23, 2002.
- [36] C.K. Li, Y.T. Poon, N.S. Sze, Higher rank numerical ranges and low rank perturbations of quantum channels, *J. Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 843-855, 2008.
- [37] C.K. Li, Y.T. Poon, N.S. Sze, Condition for the higher rank numerical range to be non-empty, *Linear and Multilinear Algebra*, **57**(4), 365-368, 2009.
- [38] C.K. Li, Y.T. Poon, Quantum error correction and generalized numerical ranges, preprint, <http://arxiv.org/0812.4772v1> [math.FA], 2008.
- [39] C.K. Li, N.S. Sze, Canonical forms, higher rank numerical ranges, totally isotropic subspaces, and matrix equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, 3013-3023, 2008.
- [40] G. Lumer, Semi-Inner-Product Spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **100**, 29-43, 1961.
- [41] M. Marcus, P. Andresen, Constrained extrema of bilinear functionals, *Monatsh. Math.*, **84**, 219-235, 1977.
- [42] A.S. Markus, *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*, American Mathematical Society, Providence, Translations of Math. Monographs, **71**, 1988.
- [43] J. Maroulas, D. Dascalopoulos, Applications of the Generalized Sylvester Matrix, *Applied Mathematics and Computations*, **8**, 121-135, 1981.
- [44] J. Maroulas, P. Psarrakos, Geometrical Properties of numerical range of matrix polynomials, *Computers Mathematics Applications*, **31**, 41-47, 1996.
- [45] J. Maroulas, P. Psarrakos, The boundary of the numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra and its Applications*, **267**, 101-111, 1997.

- [46] J. Maroulas, P.J. Psarrakos, M.J Tsatsomeros, Perron-Frobenius type results on the numerical range, *Linear Algebra and its Applications*, **348**, 49-62, 2002.
- [47] J.R. Munkres, *Topology*, 2nd. Edition, Prentice Hall, 1975.
- [48] H. Nakazato, The boundary of the range of a constrained sesquilinear form, *Linear and Multilinear Algebra*, **40**, 37-43, 1995.
- [49] N. Nirschl, H. Schneider, The Bauer fields of values of a matrix, *Numer. Math.*, **6**, 355-365, 1964.
- [50] P.J. Psarrakos, Numerical range of linear pencils, *Linear Algebra and its Applications*, **317**, 127-141, 2000.
- [51] P.J. Psarrakos, M.L. Tsatsomeros, On the relation between the numerical range and the joint numerical range of matrix polynomials, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **6**, 20-30, 2000.
- [52] P.J. Psarrakos, M.J Tsatsomeros, A primer of Perron-Frobenius theory for matrix polynomials, *Linear Algebra and its Applications*, **393**, 333-351, 2004.
- [53] P.J. Psarrakos, C. Tsitouras, Numerical approximation of the boundary of numerical range of matrix polynomials, *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, **2**, 126-133, 2005.
- [54] J. Stampfli, J.P. Williams, Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra, *Tohoku Math. Jr.*, **20**, 417-424, 1968.
- [55] G.W. Stewart, J.G. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, New York, 1990.
- [56] B.S. Tam, S. Yang, On matrices whose numerical ranges have circular or weak circular symmetry, *Linear Algebra and its Applications*, **302-303**, 193-221, 1999.
- [57] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einern Satze von Fejér, *Math. Z.*, **2**, 187-197, 1918.



- [58] N.K. Tsing, The constrained bilinear form and the c-numerical range, *Linear Algebra and its Applications*, **56**, 195-206, 1984.
- [59] H.J. Woerdeman, The higher rank numerical range is convex, *Linear and Multilinear Algebra*, **56**(1), 65-67, 2007.
- [60] C. Zenger, On convexity properties of the Bauer field of values of a matrix, *Numer. Math.*, **12**, 96-105, 1968.