

ΕΛΕΝΗ ΓΕΡΟΥΜΑΤΟΥ
Διπλωματούχος Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π.
Μ.Δ.Ε. Εφαρμοσμένης Μηχανικής Ε.Μ.Π.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
στον Τομέα Μηχανικής
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

Μικροπολικές θεωρίες συνεχούς με
εφαρμογή σε προβλήματα παραμόρφωσης
κοκκωδών υλικών

Επιβλέποντες
Ι. ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗΣ† (2007-2009)
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Χ.Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ (2009-2010)
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Νοέμβριος 2010

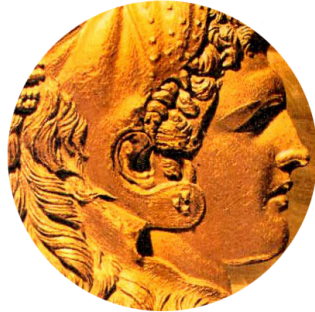
.....
Ελένη Γερολυμάτου

Copyright ©Ελένη Γερολυμάτου, 2010.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διατριβής από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).



*Στον Πατέρα μου χρωστώ το Ζείν,
στον Διδάσκαλό μου το Εν Ζείν.*

Αλέξανδρος ο Μέγας,
Βασιλεύς των Μακεδόνων.

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε στον Τομέα Μηχανικής του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου από τον Ιανουάριο του 2007 έως τον Οκτώβριο του 2010. Η πραγματοποιηθείσα εργασία υπήρξε τόσο επίπονη όσο και ικανοποιητική και μου προσέφερε την ευκαιρία να έρθω σε επαφή με διαφορετικές μεθόδους και επιστημονικές προσεγγίσεις στα πλαίσια της μαθηματικής προτυποποίησης στο πεδίο της Μηχανικής.

Κατά την σχεδόν τετραετή διάρκεια της παρούσας διατριβής ωφελήθηκα συχνά από την βοήθεια κάποιων ανθρώπων τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω στο σημείο αυτό. Μεταξύ αυτών υπάρχουν αρκετοί στους οποίους είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων και τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά:

Την οικογένεια και τους φίλους μου για την ηθική συμπαράσταση που μου παρείχαν κατά την περίοδο των σπουδών μου και για την υπομονή και κατανόηση που έδειξαν τα τελευταία τρία χρόνια.

Τον αείμνηστο καθηγητή Ιωάννη Βαρδουλάκη για την καθοδήγηση που μου προσέφερε, την έμπνευση που παρείχε πάντα και για την αγάπη και τον ενθουσιασμό για τις προκλήσεις που ενέπνευσε σε όλη την ομάδα του. Κυρίως όμως τον ευχαριστώ για την πίστη και την εμπιστοσύνη του στις δυνατότητες μου, την καλοσύνη του και τον χρόνο που προσέφερε πάντα γενναιόδωρα.

Τον καθηγητή Χαράλαμπο Γ. Γεωργιάδη για την βοήθεια και υποστήριξή του κατά την διάρκεια μιας περιόδου πολύ δύσκολης για μένα, καθώς και για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και συμβουλές του.

Τον Δρ. Francesco Froiio της École Centrale de Lyon για τον χρόνο, την βοήθεια και την ηθική υποστήριξη που μου προσέφερε και η οποία ήταν πέρα από ο,τιδήποτε θα τολμούσα να ζητήσω.

Τον καθηγητή Ιωάννη Δαφαλιά για τις σημαντικές παρατηρήσεις και τη βοήθειά του πάνω στην θεωρία πλαστικότητας. Τους καθηγητές Roberto Nova και Claudio di Prisco του Politecnico di Milano για την ενθάρρυνση και υποστήριξη που μου παρείχαν και για τις πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Τα μέλη του Εργαστηρίου Γεωυλικών, και ιδιαίτερα τον Δρ. Μανώλη Βεβαιάκη, για την βοήθεια τους και για το ότι μου παρείχαν συχνά μια διαφορετική οπτική γωνία πάνω σε πολλά ζητήματα.

Τον καθηγητή Farhang Radjai του Université de Montpellier II για τις καίριες παρατηρήσεις του πάνω στην φυσική των κοκκωδών υλικών.

Τους Δρς. Frederic Dubois και Emilien Azema του Université de Montpellier II για την βοήθεια που μου προσέφεραν στις προσομοιώσεις με την μέθοδο των διακριτών στοιχείων.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους η δουλειά των οποίων αναφέρεται στην βιβλιογραφία και αποτελεί την βάση της παρούσας εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να αναγνωρίσω την χρηματοδότηση που έλαβα από τον Τομέα Μηχανικής με τη μορφή υποτροφίας και από το Ευρωπαϊκό Συμβούλιο στα πλαίσια του προγράμματος Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) / ERC grant agreement n° 228051 με τον τίτλο ‘Mechanics of Energy Dissipation in Dense Granular Materials’.

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτελεί η διερεύνηση ορισμένων απόψεων της συμπεριφοράς των κοκκωδών υλικών και ο τίτλος της είναι 'Μικροπολικές θεωρίες συνεχούς με εφαρμογή στην ροή και παραμόρφωση των κοκκωδών μέσων'. Η διατριβή αποτελείται από την περίληψη, επτά κεφάλαια, δύο παραρτήματα και την βιβλιογραφία. Το περιεχόμενο των κεφαλαίων και των παραρτημάτων περιγράφεται εν συντομία παρακάτω:

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει μια συζήτηση πάνω στα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά των κοκκωδών υλικών, μια σύντομη σύνοψη των υπαρχόντων μοντέλων συνεχούς μέσου και την τοποθέτηση του προβλήματος που εξετάζεται στο υπόλοιπο της διατριβής.

Κεφάλαιο 2: Μικροσκοπική Θεώρηση

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζονται οι συμπεριφορές και αλληλεπιδράσεις στο επίπεδο του κόκκου. Οι εξισώσεις ισορροπίας για έναν κόκκο και για ένα σύνολο κόκκο εξάγονται σε διακριτή μορφή με την χρήση θεωρήσεων ανεξαρτησίας από τον παρατηρητή. Επιπλέον εξάγονται οι διακριτές μορφές του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους, με την χρήση της εσωτερικής ισχύος ή μιας συνεχούς παρεμβολής των ταχυτήτων των κόκκων.

Κεφάλαιο 3: Διακριτές Προσομοιώσεις: Μακροσκοπικές Μετρήσεις

Αρχικά περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την διακριτή προσομοίωση της συμπεριφοράς συνόλων κόκκων σε δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια περιγράφεται η προετοιμασία των δοκιμίων και το αριθμητικό πείραμα. Τέλος περιγράφονται και συζητούνται τα μακροσκοπικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4: Διακριτές Προσομοιώσεις: Μεσοσκοπικές Μετρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται μετρήσεις ποσοτήτων στην μεσοκλίμακα, με έμφαση στο αντισυμμετρικό κομμάτι του τανυστή των τάσεων και στον τανυστή των τάσεων ζεύγους και στον σχηματισμό ζωνών διάτμησης.

Κεφάλαιο 5: Μικροπολικές θεωρίες

Εισάγονται τα βασικά χαρακτηριστικά των μικροπολικών θεωριών. Εξάγονται οι εξισώσεις ισορροπίας στο συνεχές από τις αντίστοιχες διακριτές εξισώσεις που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 2 με την χρήση μιας προεκβολής. Επίσης εξάγεται η μικροπολική ελαστικότητα για ένα σύνολο κυλίνδρων με βάση την υπόθεση επαφών κατά Hertz.

Κεφάλαιο 6: Μικροπολικές Θεωρίες: Πλαστικότητα

Εξάγεται η μικροπολική πλαστικότητα για ένα σύνολο κυλίνδρων με βάση την μορφή της ελαστικής ενέργειας που προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο και κάποιες ενεργειακές θεωρήσεις.

Κεφάλαιο 7: Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Παρουσιάζονται εν συντομία τα αποτελέσματα που προέκυψαν στα προηγούμενα κεφάλαια και αντλούνται συμπεράσματα.

Παράρτημα Α: Μαθηματικοί Υπολογισμοί

Το πρώτο παράρτημα περιέχει τους μαθηματικούς υπολογισμούς που θεωρήθηκαν υπερβολικά εκτενείς προκειμένου να περιληφθούν στο κυρίως κείμενο.

Παράρτημα Β: Υπολογιστικά Προγράμματα

Το παράρτημα αυτό περιέχει τους αριθμητικούς κώδικες που προγραμματίστηκαν για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της Μεθόδου Διακριτών Στοιχείων στην μακρο- και στην μεσοσκοπική κλίμακα.

Abstract

The objective of the present dissertation is the investigation of certain aspects of the behavior of granular materials and its title is 'Micropolar continuum theories as applied for the description of the deformation of granular media'. The dissertation consists of the abstract, seven chapters, two appendices and the bibliography. The content of the chapters and appendices is briefly outlined as follows:

Chapter 1: Introduction

The first chapter contains a discussion on the phenomenological features of granular materials, a brief summary of the available continuum models and the position of the problem considered in the rest of the dissertation.

Chapter 2: Microscopic Consideration

In this chapter the behaviors and interactions at the grain scale are considered. The balance equations for a grain and a granular assembly are derived in a discrete form by means of invariance considerations and the discrete formulations for the stress and couple stress tensors are obtained in two ways, making use of the internal virtual power or a continuous interpolation of the velocities of the grains.

Chapter 3: Discrete Simulations: Macroscopic Analysis

The numerical method used for the discrete simulation of the behavior of granular assemblies in two dimensions is summarized. The preparation and the testing of the specimens is described and the macroscopic results are presented and discussed.

Chapter 4: Discrete Simulations: Mesoscopic Measurements

Measurements of quantities at the mesoscale are presented, with emphasis on the antisymmetric part of the stress tensor and the norm of the couple stress tensor with focus on the formation of shear bands.

Chapter 5: Micropolar Theories

The basic features of micropolar theories are introduced. The balance equations at the continuum are derived by means of an extrapolation of the corresponding discrete balance equations derived in Chapter 2. The micropolar elasticity is derived for an assembly of cylinders assuming a Hertz contact law.

Chapter 6: Micropolar Theories: Plasticity

The micropolar plasticity is derived for an assembly of cylinders based on the form of the elastic energy derived in the previous chapter and some energy considerations, resulting in a thermomechanically consistent model.

Chapter 7: Discussion and Conclusions

The results derived in the previous chapters are briefly discussed and conclusions are drawn.

Appendix A: Mathematical Derivations

The first appendix contains the mathematical derivations that were deemed too lengthy and too cumbersome to include in the main text.

Appendix B: Computer Programs

This appendix includes the numerical codes programmed for the postprocessing of the Discrete Element Method results at the macroscopic and the mesoscopic scale.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ορισμένα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά των κοκκωδών ροών	2
1.2	Τύποι παραμόρφωσης	7
1.3	Μικροσκοπική προέλευση της παραμόρφωσης	9
1.4	Οιονεί-στατικά συνεχή μοντέλα	14
1.5	Τοποθέτηση του προβλήματος	16
1.6	Συμβολισμοί	17
2	Μικροσκοπική Θεώρηση	19
2.1	Ανεξαρτησία της ισχύος για έναν κόκκο	19
2.1.1	Αλλαγή παρατηρητή κατά Γαλιλαίο	21
2.1.2	Αλλαγή παρατηρητή κατά Leibniz	22
2.2	Εξισώσεις ισορροπίας για ένα σύνολο κόκκων	24
2.2.1	Διατήρηση μάζας	26
2.2.2	Διατήρηση της ορμής	26
2.2.3	Διατήρηση της αδράνειας ως προς την περιστροφή	27
2.2.4	Διατήρηση της στροφορμής	28
2.3	Δυνατή ισχύς	30
2.4	Συνεχής κινηματική παρεμβολή	34
2.5	Μηχανισμοί παραμόρφωσης	35
3	Διακριτές Προσομιώσεις: Μακροσκοπική Ανάλυση	39
3.1	Εισαγωγή	39
3.2	Η Μέθοδος της Μηχανικής των Επαφών	40
3.2.1	Σύνοψη του αλγορίθμου	41

3.2.2	Μαθηματική περιγραφή	42
3.2.3	Κρούσεις	45
3.3	Διατήρηση της ενέργειας	46
3.4	Προετοιμασία δοκιμίων	46
3.5	Δοκιμή	50
3.6	Επεξεργασία αποτελεσμάτων	53
3.7	Καμπύλες τάσεων και τροπών	54
3.8	Πορώδες	61
3.9	Αριθμός συνδιάταξης	65
3.10	Προσανατολισμός των επαφών	69
3.11	Συζήτηση	82
4	Διακριτές προσομοιώσεις: Μεσοσκοπικές Μετρήσεις	83
4.1	Εισαγωγή	83
4.2	Παρατήρηση του εντοπισμού της παραμόρφωσης	83
4.3	Επεξεργασία αποτελεσμάτων	86
4.3.1	Τριγωνισμός Delaunay και διαμέριση Voronoi	87
4.3.2	Τανυστής τροπών	88
4.3.3	Τανυστής μικρο-περιστροφής και διάνυσμα καμπυλότητας	90
4.3.4	Τανυστές τάσεων και τάσεων ζεύγους	91
4.4	Επιβεβαίωση του κώδικα	92
4.5	Δίσκοι	97
4.6	Δωδεκάγωνα	103
4.7	Εξάγωνα	107
4.8	Συζήτηση	113
4.9	Απλή διάτμηση	114
4.9.1	Δίσκοι	115
4.9.2	Δωδεκάγωνα	118
4.9.3	Εξάγωνα	122
4.10	Συμπεράσματα	126
5	Μικροπολικές Θεωρίες	129
5.1	Μη απλά συνεχή (Non-simple continua)	129
5.2	Κινηματική του συνεχούς Cosserat	132

5.3	Εξισώσεις ισορροπίας	135
5.4	Ο κύκλος του Mohr για μη συμμετρικούς τανυστές τάσεων	137
5.5	Ελαστικότητα	139
5.5.1	Λοξή συμπίεση δύο κυλίνδρων	139
5.5.2	Ρυθμός ελαστικής ενέργειας μιας επαφής	141
5.5.3	Δυνατές μετατοπίσεις	142
5.5.4	Ρυθμός ελαστικής ενέργειας του συνόλου	144
5.5.5	Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας	147
5.5.6	Αναδιάταξη των πολλαπλασιαστών	149
5.5.7	Ολοκλήρωση πολλαπλασιαστών	151
5.5.8	Ισότροπο υλικό	152
5.5.9	Ανισότροπο υλικό	153
5.5.10	Σχέσεις τάσεων-τροπών	155
5.6	Παρατηρήσεις πάνω στην μικροπολική ελαστικότητα	158
5.7	Ελαστική ενέργεια κοκκώδους	160
6	Μικροπολικές Θεωρίες: Πλαστικότητα	163
6.1	Εσωτερική ενέργεια	163
6.2	Περιγραφή της μεθόδου	164
6.2.1	Στοιχεία θερμοδυναμικής	164
6.2.2	Πεπλεγμένα υλικά	167
6.2.3	Οι συναρτήσεις απόσβεσης και διαρροής	169
6.3	Επιφάνεια διαρροής λόγω ολίσθησης	169
6.4	Επιφάνεια διαρροής λόγω κύλισης	176
6.5	Κανόνες πλαστικής ροής	183
6.6	Παρατηρήσεις	185
7	Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα	187
A	Μαθηματικοί Υπολογισμοί	191
A.1	Αλλαγή παρατηρητή κατά Leibniz	191
A.2	Θερμική μέθοδος	197
A.3	Μικροπολική ελαστικότητα για ένα σύνολο σφαιρών	199
A.3.1	Υποθέσεις	199
A.3.2	Λοξή συμπίεση δύο ελαστικών σφαιρών	200

A.3.3	Ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας για μια επαφή ελαστικών σφαιρών	201
A.3.4	Δυνατές μετατοπίσεις	202
A.3.5	Ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας για το σύνολο	204
A.3.6	Αναδιάταξη πολλαπλασιαστών	207
A.3.7	Προσέγγιση μέσω αναπτύγματος σε σειρά	210
A.3.8	Ολοκλήρωση πολλαπλασιαστών	211
A.3.9	Ανάπτυγμα τρίτης τάξης, ανισότροπο υλικό	211
A.3.10	Ανάπτυγμα τρίτης τάξης, ισότροπο υλικό	214
A.3.11	Ανάπτυγμα πρώτης τάξης, ανισότροπο υλικό	215
A.3.12	Ανάπτυγμα πρώτης τάξης, ισότροπο υλικό	216
A.3.13	Αποτελέσματα	217
A.4	Ένα παράδειγμα για την υπόθεση της ομοαξονικότητας	220
B	Computer Programs	223
B.1	Global postprocessing	223
B.2	Mesoscale postprocessing	252

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα κοκκώδη υλικά αποτελούνται από μεγάλο αριθμό σωματιδίων τα οποία αλληλεπιδρούν διαμέσου επαφών ανά ζεύγη. Η κλάση των κοκκωδών υλικών αποτελείται από πολυάριθμα και πολυποίκιλα είδη υλικών, πολλά εκ των οποίων είναι φυσικής προέλευσης, ενώ άλλα είναι ανθρωπογενή. Πολλά γεωυλικά ανήκουν στην



Εικόνα 1.1: Μερικά παραδείγματα κοκκωδών υλικών.

κλάση αυτή, όπως η άμμος, η ιλύς και, σε διαφορετική όμως κλίμακα, τα συνθρίμματα μεγαλύτερων διαμέτρων. Άλλα παραδείγματα κοκκωδών υλικών αποτελούν τα σιτηρά, οι καρποί, τα χάρπια κ.λπ. Οι διαδικασίες αποθήκευσης και μεταφοράς των κοκκωδών υλικών παρουσιάζουν τεχνικά προβλήματα, τα οποία είναι μείζονος

σημασίας για την αποδοτικότητα πολλών βιομηχανικών κλάδων όπως ο φαρμακευτικός, ο κατασκευαστικός, ο γεωργικός, καθώς και ο κλάδος παραγωγής τροφίμων. Παρά το γεγονός ότι, ως απόρροια των παραπάνω, το ενδιαφέρον για την συμπεριφορά των κοκκωδών υλικών είναι μεγάλο και προέρχεται από πολλές πηγές, η κατανόηση των σχετικών μηχανισμών παραμένει ελλιπή. Ακριβέστερα, εάν και έχουν γίνει πολλές αξιόλογες προσπάθειες για την ανάπτυξη καταστατικών μοντέλων για εδάφη, πολλά φαινομενολογικά χαρακτηριστικά παραμένουν ασαφή και δυσνόητα.

Ένας πρώτος περιορισμός στο πεδίο της παρούσας εργασίας είναι αυτός στην φαινομενολογία των μη συνεκτικών, στεγνών κοκκωδών υλικών. Η παρούσα εργασία περιορίζεται δηλαδή σε φαινόμενα που εμφανίζονται σε σύνολα κόκκων που ικανοποιούν τις παρακάτω υποθέσεις:

- η χαρακτηριστική διάμετρος d των κόκκων είναι αρκετά μεγάλη ώστε οι ηλεκτροστατικές, τριχοειδείς και αεροδυναμικές δυνάμεις να είναι αγνοήσιμες (e.g. $d > 100 \mu\text{m}$ (Pouliquen and Chevoir, 2002)),
- η παραμόρφωση του κοκκώδους υλικού δεν μεταβάλλει το σχήμα και την πυκνότητα των κόκκων,
- το κοκκώδες υλικό είναι στεγνό.

1.1 Ορισμένα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά των κοκκωδών ροών

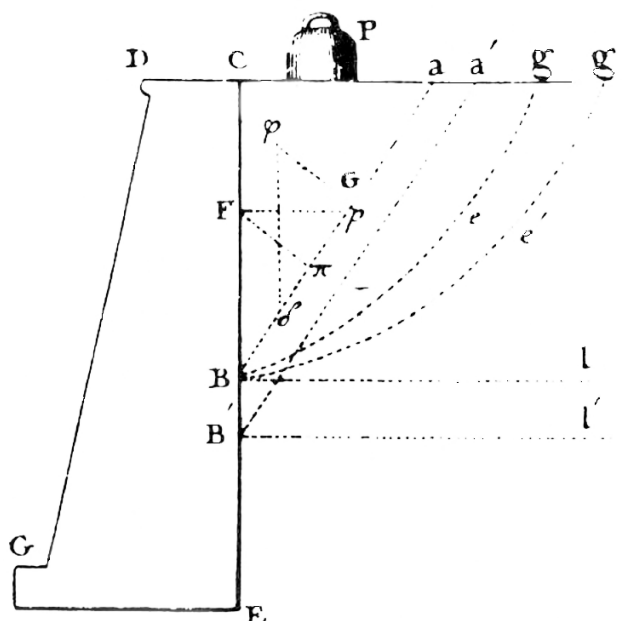
Τα στεγνά κοκκώδη υλικά εμφανίζουν κάποιες συμπεριφορές που δεν απαντώνται σε άλλα στερεά ή ρευστά. Αυτές πηγάζουν από κάποια στοιχεία της φαινομενολογίας τους που τα καθιστούν εκ φύσεως διαφορετικά από τα περισσότερα συνεχή. Καταρχήν χαρακτηρίζονται από την ικανότητα να επιδεικνύουν συμπεριφορά ρευστού ή στερεού, ανάλογα με τις συνθήκες και το ιστορικό φόρτισης. Επιπλέον διαθέτουν τις ιδιότητες της εσωτερικής τριβής και της συνοχής, καθώς και της διασταλτικότητας, όλες εκ των οποίων επηρεάζουν έντονα την μακροσκοπική συμπεριφορά τους. Επίσης τείνουν να διανέμουν τις ασκούμενες δυνάμεις ανομοιογενώς, κατά μήκος προτιμώμενων αλυσίδων κόκκων. Ένα άλλο χαρακτηριστικό που οδηγεί σε απόκλιση από την ομοιογένεια είναι η τάση των κοκκωδών υλικών

να εμφανίζουν εντοπισμένη παραμόρφωση, κατά κύριο λόγο με τη μορφή ζωνών διάτμησης. Τέλος, άλλα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά είναι ο διαχωρισμός, καθώς και η θραύση και η φθορά των κόκκων, με τα οποία ωστόσο δε θα απασχοληθεί η παρούσα εργασία.

Το πιο κυρίαρχο μεταξύ των παραπάνω χαρακτηριστικών είναι η δυική τους φύση: ανάλογα με τις επιβληθείσες συνθήκες φόρτισης και παραμόρφωσης, τα κοκκώδη μέσα δύνανται να συμπεριφερθούν ως στερεά, ρευστά ή αέρια ενώ η συμπεριφορά τους μπορεί να εμφανίζει εναλλαγές των χαρακτηριστικών της κατά τη διάρκεια μιας δοθείσας διαδικασίας. Είναι σκόπιμο να παρατηρηθεί ότι το όριο μεταξύ αυτών των τύπων συμπεριφοράς (η μετάβαση από τη συμπεριφορά ως στερεό σε αυτή ως ρευστό και αντίστροφα) αποτελεί *in se* αντικείμενο μελέτης και μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ξεχωριστή κατηγορία φαινομένων (Cates et al., 1998; Liu and Nagel, 1998).

Για την περιγραφή της συμπεριφοράς των κοκκωδών μέσων διάφορα χαρακτηριστικά τους είναι μείζονος σημασίας. Η πρώτη προσπάθεια να περιγραφεί η αστοχία των εδαφών -και επομένως και των κοκκωδών υλικών- με χρήση των όρων της τριβής και της συνεκτικότητας πρέπει να αποδοθεί στον Charles Augustine Coulomb. Τα φαινομενολογικά αυτά χαρακτηριστικά εμφανίζονται για πρώτη φορά στην *Essai sur une application des règles des maximis et minimis á quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture* το 1773, στην ανάλυση της ώθησης του εδάφους σε τοίχους αντιστήριξης. Χρησιμοποιείται η υπόθεση της ισορροπίας, εκπεφρασμένη ως προς στερεά σώματα, ενώ αγνοείται πλήρως η δράση του ρευστού των πόρων. Στην Εικ. 1.2 της *Essai* φαίνεται η γενική έκφραση της ώθησης που ασκείται από το έδαφος στον τοίχο -και αντίστροφα-: επί του εδαφικού κώνου ασκούνται η δύναμη του βάρους, η ώθηση από τον τοίχο και η εσωτερική δράση που αντιστοιχεί στην επιφάνεια αστοχίας και η οποία μπορεί να διασπαστεί σε μια δύναμη τριβής και μια δύναμη συνοχής. Η μορφή της δύναμης τριβής που προτάθηκε από τον C. A. Coulomb είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο και στις μέρες μας: περιγράφεται ως μια δύναμη παράλληλη στην επιφάνεια σχετικής μετατόπισης της οποίας το μέτρο συνδέεται με αυτό της κάθετης δύναμης επί της επιφάνειας σχετικής μετατόπισης διαμέσου μιας σταθεράς. Ο ορισμός της συνεκτικότητας από την άλλη πλευρά δεν είναι εξίσου ξεκάθαρος:

La cohesion se mesure par la resistance que le corps solides opposent



Εικόνα 1.2: Υπολογισμός της ώθησης του εδάφους σε τοίχο αντιστήριξης (Coulomb, 1773).

à la desunion direct de leurs parties [...]

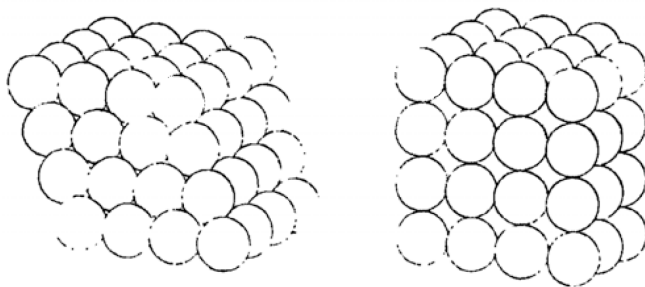
Αυτή η αμφισημία ωστόσο δεν αντικατοπτρίζεται στην ανάλυση που πραγματοποιήθηκε από τον Coulomb: η συνεκτικότητα θεωρείται να δρα επί της επιφανείας αστοχίας και να είναι παράλληλη σε αυτή, ανάλογη της έκτασής της και αντιτιθέμενη στην παραμόρφωση. Αυτή η μέθοδος ανάλυσης χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα στις πιο συμβατικές γεωτεχνικές εφαρμογές σε συνδυασμό με συντελεστές ασφαλείας και είναι ευρέως γνωστή ως *μέθοδος οριακής ανάλυσης (limit equilibrium method)*. Έκτοτε οι έννοιες της τριβής και της συνεκτικότητας έχουν μεταφραστεί από το παραπάνω πλαίσιο σε αυτό της μηχανικής συνεχούς μέσου και εκφραστεί σε όρους τάσεων ή πιέσεων. Με αρχή το ευρέως γνωστό κριτήριο Mohr-Coulomb, πολλές μορφές έχουν δοθεί στις έννοιες της τριβής και της συνεκτικότητας και αυτές έχουν συμπεριληφθεί σε νόμους διαρροής για απολύτως πλαστικές (Chen, 1975) ή ελαστοπλαστικές συμπεριφορές (Drucker et al., 1957; Nova and Wood, 1979; Schofield and Roth, 1968; Roscoe et al., 1958; Drucker and Prager, 1952), ή έχουν χρησιμοποιηθεί ανεξάρτητα σε μηχανικά προβλήματα εντοπισμού, αστάθειας ή διακλάδωσης (Rudnicki and Rice, 1975; Nova, 1989; Vardoulakis and

Sulem, 1995).

Ένα άλλο φαινομενολογικό χαρακτηριστικό για την περιγραφή των κοκκωδών υλικών είναι η διασταλτικότητα, η οποία και εισήχθη από τον Osborne Reynolds το 1885:

[...], I would point out the existence of a singular property of such granular media, which is not possessed by known fluids or solids. [...] I have called this unique property of granular masses 'dilatancy', because the property consists in a definite change of bulk consequent on a definite change of shape or distortional strain, any disturbance whatever causing a change of volume and generally dilatation.

Είναι πλέον εμφανές ότι η 'διασταλτικότητα' εκφράζει την ιδιότητα των κοκκωδών υλικών να επιδεικνύουν μεταβολές του όγκου τους ακόμα και όταν οι επιβληθέντες κινηματικοί περιορισμοί αντιστοιχούν σε απλή αλλαγή σχήματος. Το αίτιο της συμπεριφοράς αυτής διαφαίνεται στην Εικ. 1.3. Ένα σύνολο σφαιρών υποβαλ-



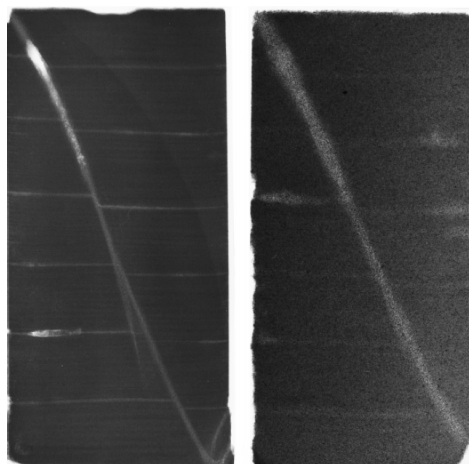
Εικόνα 1.3: Παραμόρφωση στερεών κόκκων σε επαφή (Reynolds, 1885).

λόμενο σε διατμητική παραμόρφωση αναδιοργανώνεται σε έναν πιο διεσπαρμένο σχηματισμό εξαιτίας της αναγκαίας 'υπέρθεσης' του ενός κόκκου επί του άλλου, δηλαδή αποκλειστικά για λόγους που επιβάλλονται από την μικροδομή. Στα κοκκώδη υλικά η εσωτερική γεωμετρία είναι εν γένει πολύ πιο σύνθετη από την περίπτωση που παρουσιάζεται εδώ. Ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις παρατηρείται η ίδια φαινομενολογική συμπεριφορά και είναι επομένως λογικό να αποδοθεί αυτή σε ανάλογους μηχανισμούς. Πολυάριθμες προσπάθειες έχουν γίνει για την κατανόηση αυτού του μηχανισμού και την ενσωμάτωσή του στην καταστατική περιγραφή των εδαφών (Roscoe et al., 1958; Bolton, 1986).

Πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε σφρούς κοκκώδους υλικού έχουν δείξει

ότι η κατανομή των δυνάμεων στο εσωτερικό του συνόλου των κόκκων απέχει πολύ από το να είναι ομογενής ή ισοτροπική. Με την χρήση φωτοελαστικών δίσκων οι Drescher και de Josselin de Jong (Drescher and de Josselin de Jong, 1972) παρατήρησαν, στο επίπεδο του κόκκου, το σχηματισμό μεσοδομών και την συγκέντρωση των εσωτερικών δυνάμεων κατά μήκος προνομιακών αλυσίδων επαφών. Το αυτό χαρακτηριστικό έχει ευρέως παρατηρηθεί σε αριθμητικά πειράματα (Radjai et al., 1998) και η ένταση του έχει συνδεθεί με την παρουσία τριβής, συνοχής και αντίστασης στην κύλιση μεταξύ των κόκκων. Αυτή η εσωτερική αναδιοργάνωση των συστημάτων κόκκων είναι ένα εντυπωσιακό φαινομενολογικό χαρακτηριστικό και η σχέση του με τις ιδιότητες του υλικού σε μακροσκοπικό επίπεδο, π.χ. τις ιδιότητες του τανυστή τάσεων, φαίνεται να είναι τόσο ιδιαίτερος σύνθετη όσο και εξαιρετικά ενδιαφέροντα.

Είναι εμφανές ότι κάποια στοιχεία των παραπάνω φαινομενολογικών χαρακτηριστικών παραμένουν δυσνόητα, ή τουλάχιστον ανοιχτά σε διαφορετικές ερμηνείες. Ένα επιπλέον στοιχείο πολυπλοκότητας αποτελεί το ότι συχνά η συμπεριφορά των συνόλων κόκκων αφορά σε περιοχές που αντιστοιχούν σε ένα πολύ μικρό κλάσμα του συνολικού όγκου του υλικού. Το φαινόμενο αυτό είναι ευρέως γνωστό ως *εντοπισμός της παραμόρφωσης*. Για δείγματα που υποβάλλονται σε συνεχείς προσανξήσεις της αποκλίνουσας εντατικής κατάστασης, μετά από ένα αρχικό στάδιο ομογενούς παραμόρφωσης, παρατηρείται ο σχηματισμός *ζωνών διάτμησης*. Πρόκειται για ουσιαστικά δισδιάστατες περιοχές του όγκου του υλικού, δηλαδή για περιοχές πολύ μικρού πάχους, στις οποίες συγκεντρώνεται η παραμόρφωση. Οι ζώνες διάτμησης στα κοκκώδη υλικά μπορούν να παρατηρηθούν με την στερεοποίηση του υλικού μετά το πέρας του πειράματος, όπως για παράδειγμα στην εργασία των Oda και Kazama (Oda and Kazama, 1998) της οποίας κάποια αποτελέσματα φαίνονται στην Εικ. 1.4. Στις μέρες μας είναι βεβαίως διαθέσιμες και πιο προηγμένες μέθοδοι. Ζώνες διάτμησης έχουν παρατηρηθεί πειραματικά και σε ένα μεγάλο αριθμό άλλων εργασιών (Desrues et al., 1985; Desrues and Viggiani, 2004; Finno et al., 1997; Hall et al., 2010). Όπως είναι αναμενόμενο, στην περίπτωση των κοκκωδών μέσων η επιλογή της χρονικής και χωρικής κλίμακας στην οποία πραγματοποιείται η διαδικασία μεσοτίμησης είναι μεγάλης σημασίας: τα μήκη που διαχωρίζουν την μικροσκοπική από την μακροσκοπική κλίμακα είναι πολύ μεγαλύτερα από εκείνα που απαιτούνται για άλλα υλικά, όπως τα συνήθη ρευστά ή τα μέταλλα. Επιπλέον πολλά φαινόμενα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον κυριαρχούνται



Εικόνα 1.4: Ζώνες διάτμησης σε άμμο Toyoura και Ticino (Oda and Kazama, 1998).

από χαρακτηριστικά μήκη που βρίσκονται μεταξύ των δύο κλιμάκων, καθιστώντας αμφισβητήσιμη την αξία μιας συνεχούς απεικόνισης.

1.2 Τύποι παραμόρφωσης

Τα φαινόμενα παραμόρφωσης των κοκκωδών υλικών είναι στις μέρες μας αντικείμενα έντονου ενδιαφέροντος από την πλευρά ερευνητών στον χώρο της φυσικής, της μηχανικής και της γεωτεχνίας. Ωστόσο τα φαινόμενα αυτά αποτελούν ένα εξαιρετικά ανομοιογενές σύνολο, του οποίου η ταξινόμηση δεν είναι ακόμα γενικά αποδεκτή. Σε κάθε περίπτωση η ταξινόμηση που χρησιμοποιείται ευρέως στην σύγχρονη βιβλιογραφία έχει ως εξής:

- *οιωνεί στατική περιοχή*, η οποία αναφέρεται σε φαινόμενα κατά τη διάρκεια των οποίων η δράση των αδρανειακών δυνάμεων είναι αμελητέα σε σύγκριση με άλλες ποσότητες,
- *περιοχή κοκκώδους αερίου*, που περιλαμβάνει τα φαινόμενα κατά τα οποία η χαοτική κίνηση των κόκκων κυριαρχεί επί της μακροσκοπικής φυσικής συμπεριφοράς του συνόλου και η οποία είναι επίσης γνωστή ως *περιοχή ταχείας κοκκώδους ροής (rapid granular flows regime)*,
- μια ενδιάμεση περιοχή, η οποία είναι γνωστή και ως *περιοχή πυκνών κοκκωδών ροών (dense granular flows regime)*, και η οποία περιλαμβάνει τα

φαινόμενα κατά τα οποία η δράση των αδρανειακών δυνάμεων είναι σημαντική, ενώ η μήτρα των επαφών που συνιστά τον στέρεο σκελετό του υλικού δεν έχει ακόμα διαλυθεί.

Στην παρούσα εργασία δεν θα εξεταστεί η περιοχή κοκκώδους αερίου. Αντίθετα η εργασία θα περιοριστεί στην οιονεί στατική περιοχή. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι στα πλαίσια των οιονεί στατικών παραμορφώσεων η επίδραση της αδράνειας είναι αγνοήσιμη στο επίπεδο του χαρακτηριστικού όγκου. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι μπορεί να αγνοηθεί και στο μικροσκοπικό επίπεδο.

Εντός της οιονεί στατικής περιοχής ένας όγκος κοκκώδους υλικού που εξελίσσεται σε συνθήκες ομογενούς φόρτισης και παραμόρφωσης και υποβάλλεται σε ίσες, αργές και συνεχείς επαυξήσεις της διατμητικής παραμόρφωσης υπό σταθερή υδροστατική πίεση αρχικά αντιδρά ως στερεό, δηλαδή αντιθέτοντας επαυξήσεις της διατμητικής τάσης στις επαυξήσεις της παραμόρφωσης. Εντέλει ωστόσο η συμπεριφορά του εξελίσσεται στο σημείο του να προσεγγίζει αυτή ενός ρευστού: περιέρχεται σε μια κατάσταση στην οποία είναι δυνατή πρακτικά άπειρη διατμητική παραμόρφωση χωρίς επαυξήσεις της φόρτισης. Αυτή η τελευταία κατάσταση αναφέρεται συχνά ως ‘κρίσιμη κατάσταση’:

The kernel of our ideas is the concept that soils and other granular materials, if continuously distorted until they flow as a frictional fluid, will come into a well-defined critical state [...].

Consider a random aggregate of irregular ‘solid’ particles of diverse sizes which tear, rub, scratch, chip and even bounce against each other during the process of continuous deformation. If the motions were viewed at close range we could see a stochastic process of random movements, but we keep our distance and see a continuous flow. At close range we would expect to find many complicated causes of power dissipation and some damage to particles; however, we stand back from the small details and loosely describe the whole power dissipation as ‘friction’, neglecting the possibilities of degradation or of orientation of particles.

Ωστόσο τριαξονικές δοκιμές συμπίεσης τόσο υπό αστράγγιστες όσο και υπό στραγγιζόμενες συνθήκες σε άμμο που πραγματοποιήθηκαν το 1969 από τον Castro (Castro, 1969) υποδεικνύουν ότι η εσωτερική δομή του υλικού διαδραματίζει έναν

σημαντικό ρόλο, πράγμα το οποίο μπορεί με τη σειρά του να επηρεαστεί από την ταχύτητα της παραμόρφωσης. Οι παρατηρήσεις αυτές δικαιολογούν την μετεξέλιξη της έννοιας της κρίσιμης κατάστασης σε αυτή της *στάσιμης κατάστασης*. Ο ορισμός της στάσιμης κατάστασης μπορεί να δοθεί ως ακολούθως (Poulos, 1981):

The steady state of deformation [...] for any mass of particles is that state at which the mass is continuously deforming at constant volume, constant effective stress, constant shear stress, and constant velocity. The steady state of deformation is achieved after all particle orientation has reached a statistically steady-state condition and after all particle breakage, if any, is complete, so that the shear stress needed to continue deformation and the velocity of deformation remain constant.

Από τα παραπάνω μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι κύριες διαφορές μεταξύ της έννοιας της στάσιμης κατάστασης και της κρίσιμης κατάστασης συνδέονται με την εσωτερική δομή του υλικού, την απουσία μεταβατικών φαινομένων, όπως η θραύση κόκκων, και τον ρόλο που διαδραματίζει η ταχύτητα της παραμόρφωσης:

One difference between the steady state and the critical void ratio (CVR) [...] is the explicit requirement that the steady state does not exist unless deformation occurs at constant velocity. In contrast, the implications of the description of critical state in the aforementioned drained case is that, as shear is stopped, after the critical state is reached, the specimen remains in the critical state.

Ένα επιπλέον αντικείμενο που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στα πλαίσια της περιοχής της οιονεί στατικής ροής είναι η κατανόηση της προέλευσης της παραμόρφωσης. Το θέμα αυτό θα συζητηθεί στην επόμενη παράγραφο.

1.3 Μικροσκοπική προέλευση της παραμόρφωσης

Τα κοκκώδη υλικά διαφέρουν από τα περισσότερα συνεχή ως προς το ότι χαρακτηρίζονται σε μεγάλο βαθμό από μια εσωτερική γεωμετρία που μπορεί να μεταβάλλεται κατά την εξέλιξη ενός δεδομένου φαινομένου. Το φαινόμενο της μεταβολής της μικροδομής είναι επομένως μεγάλης σημασίας και δε μπορεί να αγνοηθεί. Αν και έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες για την επίτευξη μιας γεωμετρικής περιγραφής των συνόλων κόκκων (Oda and Kazama, 1998; Satake, 2004; Bagi, 1996;

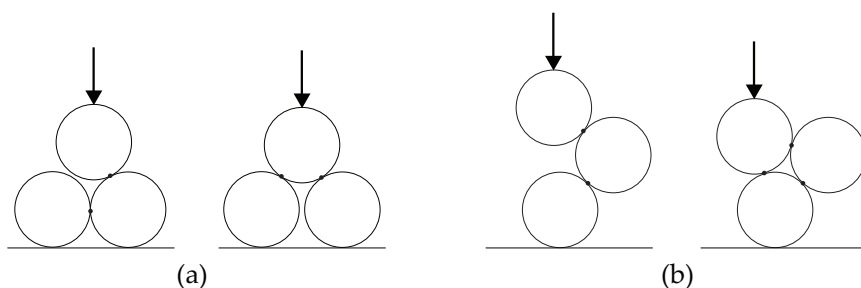
Satake, 1982), η κατανόηση του ρόλου που διαδραματίζει η γεωμετρία των κόκκων παραμένει ατελής.

Είναι ωστόσο ξεκάθαρο ότι η μεταφορά των δυνάμεων λαμβάνει χώρα μέσω του δικτύου των επαφών και ότι η προκύπτουσα παραμόρφωση είναι ένας συνδυασμός παραμορφώσεων των επαφών και αναδιάταξης των κόκκων, δηλαδή της παραμόρφωσης του στερεού σκελετού. Κατά τον Roux (Roux, 2000) γίνεται διάκριση μεταξύ δύο περιοχών της οιονεί στατικής παραμόρφωσης των κοκκωδών μέσων:

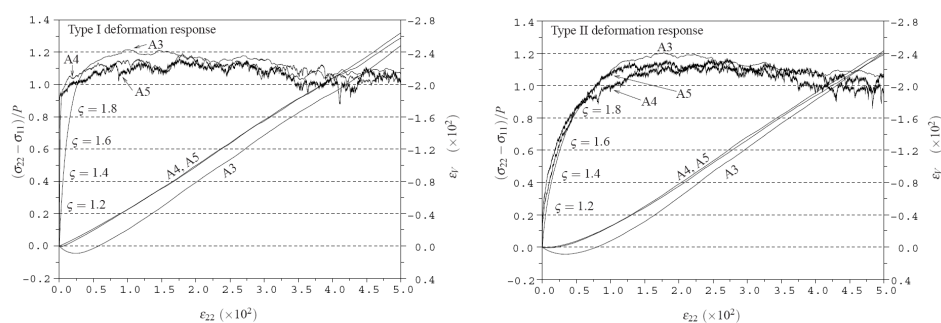
In the first one, the macroscopic strains stem from the deformation of contacts. The motion can be calculated by purely static means, without inertia, stress or strain rate controlled simulations yield identical smooth rheological curves for a same sample. In the second regime, strains are essentially due to instabilities of the contact network, the approach to the limits of large samples and of small strain rates is considerably slower and the material is more sensitive to perturbations.

Η αρχική περιοχή είναι η περιοχή ευστάθειας της αρχικής διάταξης και οι παραμορφώσεις λαμβάνουν χώρα εξαιτίας των παραμορφώσεων των επαφών. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί ελαστική, καθώς εμφανίζεται μη γραμμικότητα λόγω της απώλειας επαφών και της σταδιακής κινητοποίησης της παρούσας τριβής. Αυτή η περιοχή παραμόρφωσης συνδέεται με υπερστατικά δίκτυα επαφών και μεγάλους αριθμούς συντονισμού. Παραμορφώσεις της δεύτερης περιοχής λαμβάνουν χώρα όταν η συσσώρευση ολισθαίνουσων επαφών οδηγεί σε μια αστάθεια με αποτέλεσμα την κίνηση. Η κίνηση αυτή στη συνέχεια παύει να υφίσταται λόγω της δημιουργίας νέων επαφών, καθώς κλείνουν οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών κόκκων. Η περιοχή αυτή συνδέεται με μεγαλύτερες παραμορφώσεις, καθώς και με δυναμικά φαινόμενα και χωρικές διακυμάνσεις, καθώς το δίκτυο των επαφών μεταξύ των κόκκων διαρκώς καταρρέει και αναδομείται.

Στην Εικ. 1.5 δίνονται δύο παραδείγματα σχετικής κίνησης κόκκων. Στην Εικ. 1.6 δίνονται τα αντίστοιχα μακροσκοπικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τέτοιες σχετικές κινήσεις κόκκων κατά τους (Froio and Roux, 2010). Η περίπτωση (a) της Εικ. 1.5 επιδεικνύει μια αντίδραση που ανήκει στην πρώτη περιοχή. Η γεωμετρία παραμένει στην ουσία η ίδια αν και έχει αλλάξει η λίστα των επαφών.



Εικόνα 1.5: Microscopic deformation examples.



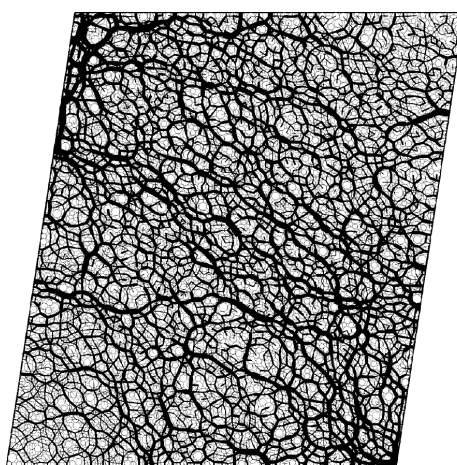
Εικόνα 1.6: Macroscopic deformation examples after (Froiiio and Roux, 2010).

Στην περίπτωση που οι κόκκοι δεν είναι απαραμόρφωτοι, παραμορφώσεις μπορεί να προκύψουν ενώ το υλικό διατηρεί την λίστα των επαφών του, εξαιτίας των παραμορφώσεων των ίδιων των κόκκων στην περιοχή των επαφών. Η πρώτη αυτή περιοχή παραμορφώσεων αναφέρεται συχνά ως περιοχή των πολύ μικρών παραμορφώσεων και αντιστοιχεί σε παραμορφώσεις της τάξης του 0.1% (Combe and Roux, 2003), ανάλογα με τις ιδιότητες του υλικού.

Η περίπτωση (b) της Εικ. 1.5 από την άλλη πλευρά επιδεικνύει μια αντίδραση που ανήκει στην δεύτερη περιοχή. Ο ανώτατος κόκκος έχει μετακινηθεί σε σχέση με τους άλλους δύο, με αποτέλεσμα μια αλλαγή ως προς την γεωμετρία του συνόλου. Οι μηχανισμοί που συνδέονται με τέτοιες μετατοπίσεις είναι η σχετική ολίσθηση και η σχετική κύλιση των κόκκων. Το κατά πόσο λαμβάνει χώρα ολίσθηση ή κύλιση καθορίζεται από την δεδομένη τριβή και αντίσταση στην κύλιση. Αυτή η δεύτερη περιοχή αναφέρεται σε μεσαίες και μεγάλες τιμές παραμόρφωσης, οι οποίες ωστόσο χαρακτηρίζονται από διαφορετικές συμπεριφορές του στερεού σκελετού.

Η περιοχή των μεσαίων παραμορφώσεων εκτείνεται μέχρι παραμορφώσεις της

τάξης του 1% (Oda and Kazama, 1998). Κυριαρχείται από σύνθετα, αλληλένδετα μεταξύ τους φαινόμενα, όπως η κατάρρευση αλυσίδων δυνάμεων, ο λυγισμός στηλών κόκκων και ο διαχωρισμός του συνόλου των κόκκων σε κραταιό και ασθενές κλάσμα. Η εμφάνιση προτιμητέων φέρουσων διαδρομών για τις δυνάμεις παρατηρήθηκε αρχικά με την μέθοδο της φωτοελαστικότητας (Drescher and de Josselin de Jong, 1972). Τόσο πειράματα που πραγματοποιήθηκαν αργότερα, όσο και προσομοιώσεις με την μέθοδο των διακριτών στοιχείων (DEM) βρίσκονται σε συμφωνία με αυτή την παρατήρηση. Η εμφάνιση αλυσίδων κόκκων που φέρουν δυσανάλογο



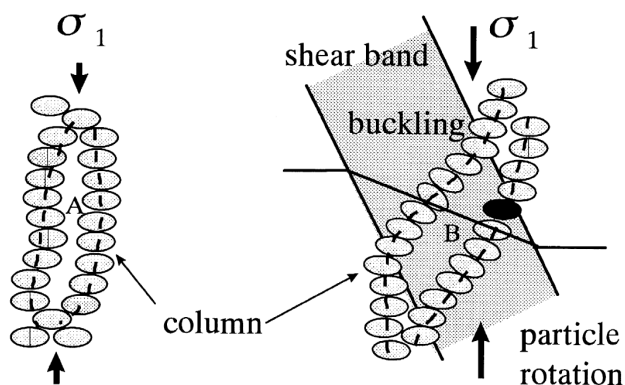
Εικόνα 1.7: Προσομοίωση DEM που επιδεικνύει την διάδοση των δυνάμεων κατά μήκος προτιμητέων διαδρομών (Radjai, 1999).

μέρος του φορτίου οδηγεί στον διαχωρισμό του πληθυσμού τους σε ένα ισχυρό και ένα ασθενές κλάσμα, όπως έχει παρατηρηθεί από τον Radjai (Radjai et al., 1998), ο οποίος έτσι επιβεβαίωσε μια προηγούμενη υπόθεση του Dietrich (Dietrich, 1976). Στην εν λόγω εργασία παρατηρήθηκε η εμφάνιση ενός ισχυρού και ενός ασθενούς κλάσματος, με το ισχυρό κλάσμα να επιδεικνύει μακράν πιο έντονη ανισοτροπία. Το σύνολο του αποκλίνοντος φορτίου φέρεται από ισχυρές αλυσίδες, οι οποίες με τη σειρά τους υποστηρίζονται πλευρικά από το συμπληρωματικό ασθενές δίκτυο. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι σχεδόν το σύνολο της απώλειας ενέργειας λαμβάνει χώρα στο ασθενές δίκτυο. Ως εκ τούτου μπορεί κανείς να αναφέρεται σε δύο συμπληρωματικά δίκτυα: ένα ‘φέρων’ δίκτυο επαφών που φέρουν δυνάμεις μεγαλύτερες του μέσου όρου και ένα ‘αποσβένον’ δίκτυο επαφών που φέρουν δυνάμεις μικρότερες του μέσου όρου και είναι κατά κύριο λόγο υπεύθυνο για τις απώλειες

ενέργειας. Η διάταξη αυτή οδηγεί σε παραμορφώσεις που προκύπτουν από τον λυγισμό στηλών φέρουσων επαφών. Η διαδικασία αυτή έχει παρατηρηθεί με χρήση ακτίνων X, καθώς και με χρήση οπτικών μεθόδων και περιγράφει από τους Oda και Kazama (Oda and Kazama, 1998):

We make the following observations.

1. *Development of columnar structure. Around the peak, axial stress is mainly transmitted through columnar structures extending parallel to the vertical direction, and contact normals gradually concentrate towards the major principal stress direction in parallel with the development of such columns.[...]*
2. *Buckling of columnar structure in shear bands. As the axial stress reaches the peak (failure), the columns start buckling, and are subsequently able to carry less axial stress (strain softening).*



Εικόνα 1.8: Column buckling (Iwashita and Oda, 2000).

Ανάλογες παρατηρήσεις έχουν πραγματοποιηθεί με την βοήθεια DEM (Iwashita and Oda, 2000). Το φαινόμενο που περιγράφεται παραπάνω συνοδεύεται από διαστολή του υλικού, αφού σχηματίζονται κενά μεταξύ των στηλών καθώς αυτές λυγίζουν.

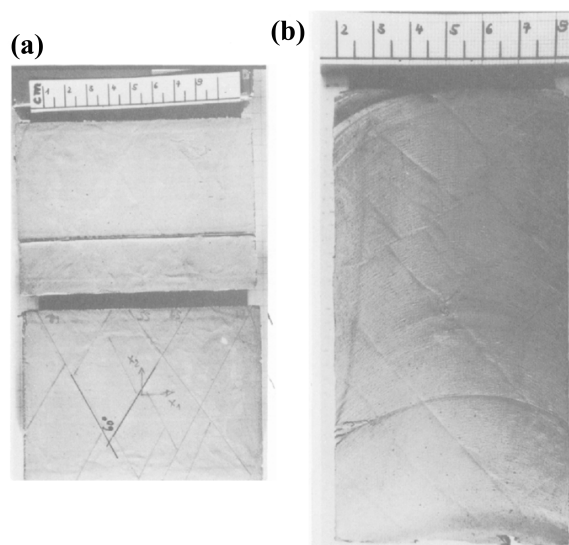
Μετά από αυτό το στάδιο το υλικό φθάνει σε μια παραμένουσα αντοχή. Σε αυτό το σημείο έχει επιτευχθεί η κρίσιμη κατάσταση και η περιοχή παραμόρφωσης μπορεί να χαρακτηριστεί ως περιοχή πυκνής ροής ή περιοχή μεγάλων παραμορφώσεων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην κρίσιμη κατάσταση το κοκκώδες συμπερι-

φέρεται ως ρευστό με εσωτερική τριβή. Η μικροδομή επιτυγχάνει μια δυναμικά ευσταθή διάταξη, με την έννοια ότι η δημιουργία νέων επαφών εξισορροπείται από την κατάρρευση ήδη υπάρχουσων δομών, ούτως ώστε να σχηματίζονται διαρκώς μεγάλα κενά λόγω του μηχανισμού του λυγισμού, αλλά, ταυτοχρόνως, να καταρρέουν προϋπάρχοντα κενά, ώστε να επιτυγχάνεται σταθερός όγκος κενών υπό συνεχιζόμενη φόρτιση.

1.4 Οιονεί-στατικά συνεχή μοντέλα

Τα ελάστο-πλαστικά συνεχή μοντέλα χρησιμοποιούνται ευρέως για την προσομοίωση της συμπεριφοράς των κοκκωδών υλικών στα πλαίσια της οιονεί στατικής περιοχής. Εν γένει οι συμπεριφορές των γεωυλικών που σχετίζονται με την συνοχή, την τριβή και την διασταλτικότητα περιγράφονται ικανοποιητικά στα πλαίσια της θεωρίας ελαστο-πλαστικότητας με επιφάνεια διαρροής που χαρακτηρίζεται από τροπική κράτυνση και χαλάρωση (strain hardening/softening) και μη συνηρημένη θεωρία πλαστικής ροής (non-associate flow rule), όπως μπορεί να δει κανείς για παράδειγμα στην εργασία του Mróz (Mróz, 1963). Το παραπάνω ισχύει υπό την παραδοχή ότι ένα μακροσκοπικά ομογενές υλικό στοιχείο παραμορφώνεται ομογενώς όταν εφαρμοστεί ομογενής φόρτιση στο σύνορό του.

Ωστόσο η παραδοχή αυτή δεν ικανοποιείται πάντα. Καθώς οι παραμόρφωση γίνεται μεγαλύτερη, εξαιτίας ανομοιογενειών οι οποίες είναι ενγενείς στα κοκκώδη υλικά, εμφανίζονται συγκεντρώσεις υψηλών τάσεων ή υψηλών παραμορφώσεων. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει την εμφάνιση φαινομένων εντοπισμού. Ο εντοπισμός μπορεί να κατανοηθεί ως μια αστάθεια στη μακροσκοπική καταστατική περιγραφή της ανελαστικής παραμόρφωσης του υλικού, με την έννοια ότι οι καταστατικές σχέσεις μπορεί να επιτρέπουν στην ομογενή παραμόρφωση του υλικού να οδηγήσει σε ένα σημείο διακλάδωσης, στο οποίο μια πολλαπλότητα λύσεων είναι αποδεκτή σε συνάρτηση με ένα δεδομένο βήμα φόρτισης. Οι συνθήκες για την εμφάνιση ενός τέτοιου φαινομένου εξετάστηκαν από τους Rudnicki και Rice (Rudnicki and Rice, 1975), η εργασία των οποίων αναθεωρήθηκε μερικώς στα πλαίσια της εργασίας (Perrin and Leblond, 1993). Πιο πρόσφατα δείχθηκε από τους Imposimato και Nova (Imposimato and Nova, 1998) ότι η απώλεια της μοναδικότητας της προσαναζητικής απόκρισης των ελαστοπλαστικών μοντέλων μπορεί να εμφανιστεί σε μια ποικιλία καταστάσεων, ανάλογα με το ιστορικό και τον έλεγχο



Εικόνα 1.9: Σχηματισμοί παραμόρφωσης σε κανονικά σταθεροποιημένα δοκίμια καολινίτη: (a) δοκιμή επίπεδης παραμόρφωσης με ελεγχόμενο όγκο, (b) αστράγγιστη δοκιμή (Vardoulakis and Sulem, 1995).

της φόρτισης. Μια τέτοια απώλεια της μοναδικότητας δεν συνδέεται αναγκαία με τον εντοπισμό της παραμόρφωσης και εξαρτάται από τις ελεγχόμενες παραμέτρους κατά την διάρκεια της δοκιμής, π.χ. έλεγχος τάσης ή παραμόρφωσης.

Το πρόβλημα της προσομοίωσης αυτής της συμπεριφοράς στα κοκκώδη υλικά αποτελεί πρόκληση, εξαιτίας των δυσχερειών που προκύπτουν από τους περιορισμούς της κλασικής θεωρίας συνεχούς σε συνδυασμό με τον εντοπισμό της παραμόρφωσης, ή, πιο γενικά, όπου παρατηρείται απώλεια της ελλειπτικότητας των κυβερνόντων εξισώσεων (Benallal et al., 1988). Αυτή η ανεπιθύμητη συμπεριφορά μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι τα συμβατικά καταστατικά μοντέλα δεν λαμβάνουν υπόψιν την μικροδομή του μέσου στο οποίο αναφέρονται. Σε περιπτώσεις στις οποίες εμφανίζεται εντοπισμός της παραμόρφωσης τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στην κλίμακα του κόκκου δεν μπορούν πλέον να αγνοηθούν, καθιστώντας αναγκαία την χρήση μοντέλων με μικροδομή. Τα μοντέλα αυτά είναι γνωστά ως ‘γενικευμένα συνεχή’ ή ‘μη - απλά συνεχή’ και χαρακτηρίζονται από ένα εσωτερικό μήκος που αποτελεί ιδιότητα του υλικού, επιλύοντας με αυτό τον τρόπο εν μέρει τους μαθηματικούς περιορισμούς που προκύπτουν ως προς την εφαρμοσιμότητα. Η επιπλέον αυτή παράμετρος συνδέεται ως επί το πλείστον είτε με την μέση

διάμετρο κόκκου, στην περίπτωση των κοκκωδών μέσων, είτε με κάποιο άλλο χαρακτηριστικό μήκος του θεωρούμενου προβλήματος. Τέτοιες γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου είναι οι ακόλουθες:

- Η μικροπολική θεωρία ή θεωρία Cosserat, η οποία εισάγει τρεις βαθμούς ελευθερίας ως προς την περιστροφή, πέραν των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις.
- Η θεωρία του Mindlin (Mindlin, 1964), μια ισχυρή και γενική θεωρία για υλικά με μικροδομή στην γραμμική ελαστικότητα, η οποία χαρακτηρίζεται από μια μικρο- και μια μακρο- παραμόρφωση.
- Η θεωρία πλαστικότητας βαθμίδας, η οποία εισάγει παραγώγους ανωτέρας τάξης της ανηγμένης παραμόρφωσης στις καταστατικές εξισώσεις.
- Η μη - τοπική θεωρία συνεχούς, η οποία εισάγει μια διαδικασία μεσοτίμησης με αποτέλεσμα μη σημειακές καταστατικές εξισώσεις.

Έτσι, στα γενικευμένα συνεχή οι περιστροφές και οι κλίσεις τους, οι παράγωγοι ανωτέρας τάξης των ταχυτήτων και τα χωρικά ολοκληρώματα εισάγουν ένα χαρακτηριστικό μήκος στο πρόβλημα, το οποίο, πέρα από το ότι είναι αναγκαίο για την ορθή περιγραφή των φαινομένων εντοπισμού, κανονικοποιεί το υποκείμενο μαθηματικό πρόβλημα και διατηρεί την ελλειπτικότητα των κυβερνόντων εξισώσεων. Η τεχνική αυτή επιτρέπει με τη χρήση κατάλληλων τεχνικών την παρακολούθηση της εξέλιξης του συστήματος πέραν του σημείου της διακλάδωσης και την εξαγωγή επιπλέον πληροφοριών, όπως το πάχος της ζώνης διάτμησης και την εκτίμηση του φαινομένου κλίμακας.

1.5 Τοποθέτηση του προβλήματος

Ο κύριος στόχος της παρούσας διατριβής είναι η διερεύνηση της καταλληλότητας των μικροπολικών θεωριών για την περιγραφή της συμπεριφοράς των κοκκωδών μέσων. Αυτό θα επιτευχθεί με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις, την αριθμητική προσομοίωση και την μαθηματική προτυποποίηση.

Διακριτές αριθμητικές προσομοιώσεις θα πραγματοποιηθούν προκειμένου να εξεταστεί η συσχέτιση μεταξύ του πάχους της ζώνης διάτμησης με το σχήμα των

κόκκων. Επιπλέον θα μετρηθούν οι τιμές του αντισυμμετρικού τμήματος του ταυυστή των τάσεων, καθώς και ο ταυυστής των τάσεων ζεύγους, στο εσωτερικό ζωνών διάτμησης κατά τον σχηματισμό τους, ώστε να ερευνηθεί η εξάρτησή τους από το σχήμα των κόκκων και την μέθοδο προετοιμασίας του δοκιμίου. Συσχετισμός των στροφών με τον σχηματισμό ζωνών διάτμησης και μη μηδενική τιμή των συνιστωσών του ταυυστή τάσεων ζεύγους και του αντισυμμετρικού τμήματος του ταυυστή των τάσεων θα αποδείκνυε την καταλληλότητα των μικροπολικών θεωριών για την περιγραφή των κοκκωδών μέσων. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων που αναφέρονται παραπάνω παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 για την μακροσκοπική κλίμακα και στο Κεφάλαιο 4 για την μεσοσκοπική κλίμακα.

Παράλληλα θα χρησιμοποιηθούν διαδικασίες μεσοτίμησης, ώστε να αποδειχθεί ότι μικροπολικές ποσότητες και καταστατικές περιγραφές στο συνεχές μπορούν να προκύψουν από μικροσκοπικές θεωρήσεις που περιλαμβάνουν περιστροφές. Στο Κεφάλαιο 2 χρησιμοποιείται η δυνατή ισχύς για την εξαγωγή της διακριτής μορφής του ταυυστή των τάσεων και του ταυυστή των τάσεων ζεύγους, ενώ στο Κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται μια προσπάθεια να εξαχθεί η συνεχής περιγραφή της μικροπολικής ελαστικότητας από μικροσκοπικές θεωρήσεις. Η εξαγωγή της μικροπολικής καταστατικής περιγραφής ενός κοκκώδους μέσου ολοκληρώνεται με την αντίστοιχη μικροπολική πλαστικότητα, η οποία δίνεται στο Κεφάλαιο 6.

Χάρην απλότητας γίνονται κάποιες υποθέσεις. Θα θεωρηθούν μόνο στεγνά υλικά. Γίνεται η υπόθεση ότι οι κόκκοι είναι αρκετά μεγάλοι για να μπορούν να αγνοηθούν τυχόν ηλεκτροστατικές ή αεροδυναμικές δυνάμεις. Οι κόκκοι αντιμετωπίζονται ως οριζοντιοειδή, δηλαδή γίνεται η υπόθεση ότι αλλαγές στο σχήμα ή στην πυκνότητα των κόκκων που προέρχονται από παραμορφώσεις μπορούν να αγνοηθούν. Το πρόβλημα εξετάζεται σε δύο διαστάσεις και οι παραμορφώσεις και περιστροφές θεωρούνται μικρές.

1.6 Συμβολισμοί

Για την απλοποίηση των μαθηματικών εκφράσεων, τα διανύσματα θα συμβολίζονται με έντονους χαρακτήρες, ενώ οι πίνακες με έντονους χαρακτήρες και υπογράμμιση. Οι πραγματικές συναρτήσεις θα εκφράζονται με κανονικούς, ενώ οι διανυσματικές με καλλιγραφικούς χαρακτήρες. Η θεώρηση του χώρου είναι Ευκλείδεια. Όπου χρησιμοποιούνται δείκτες, υπονοείται η συνθήκη άθροισης Einstein,

εκτός και αν διευκρινίζεται το αντίθετο.

Το σύμβολο \cdot θα συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο όταν αφορά σε πράξη μεταξύ διανυσμάτων και την συστολή ως προς τους εσωτερικούς δείκτες όταν αφορά σε πράξη μεταξύ τανυστών:

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = A_{ij} B_{jk}$$

Το σύμβολο \otimes θα συμβολίζει το τανυστικό γινόμενο

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x_i y_j$$

Τέλος το σύμβολο $:$ θα συμβολίζει την διπλή συστολή μεταξύ τανυστών ως εξής:

$$\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}} = A_{ij} B_{ij}$$

Κεφάλαιο 2

Μικροσκοπική Θεώρηση

Οι φυσικές διαδικασίες που καθορίζουν την συμπεριφορά των κοκκωδών μέσων δεν είναι ακόμα απολύτως κατανοητές. Ως εκ τούτου είναι αναγκαίο να ξεκινήσει κανείς από το απλούστερο δυνατό πρόβλημα, δηλαδή από την κατανόηση της συμπεριφοράς ενός μικρού συνόλου κόκκων σε μικρομηχανικό επίπεδο. Στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου θα εξεταστούν η ανεξαρτησία της ισχύος από τον παρατηρητή κατά Γαλιλαίο και κατά Leibniz. Οι εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν χρησιμοποιούνται στην συνέχεια για την εξαγωγή των αντιστοίχων εξισώσεων ισορροπίας για ένα σύνολο κόκκων. Στην συνέχεια εξετάζεται η εσωτερική ισχύς ενός συνόλου κόκκων, η οποία και χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της διακριτής μορφής του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους για ένα σύνολο κόκκων. Τέλος συζητούνται εν συντομία οι δυνατοί μηχανισμοί παραμόρφωσης.

2.1 Ανεξαρτησία της ισχύος για έναν κόκκο

Η ιδέα της χρήσης της ανεξαρτησίας της ισχύος από τον παρατηρητή ως ένα εργαλείο για την εξαγωγή των βασικών αρχών της μηχανικής χρονολογείται το 1959 και εισήχθη αρχικά από τον W. Noll (Noll, 1959). Η ίδια ιδέα χρησιμοποιήθηκε αργότερα και από άλλους συγγραφείς, βλέπε (Green and Rivlin, 1964b; Podio-Guidugli, 1997). Ο στόχος στην προκειμένη περίπτωση είναι να εφαρμοστεί η εν λόγω αρχή στο πεδίο των κοκκωδών υλικών, ώστε να προκύψουν με φυσικό τρόπο οι βασικές εξισώσεις ισορροπίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ η ισχύς διατηρείται

σε μη αδρανειακές αλλαγές του παρατηρητή, δεν ισχύει το ίδιο για την ενέργεια. Αρχικά εξετάζεται ένας μόνο κόκκος.

Η ισορροπία της ισχύος γράφεται στην γενική της μορφή ως

$$\dot{E} = \dot{W}_F + \dot{W}_C + \dot{W}_q - \dot{E}_{kin} - \dot{E}_{el} - \dot{Q} - D = 0 \quad (2.1.1)$$

όπου W_F είναι το έργο των δυνάμεων, W_C είναι το έργο των ροπών, W_q είναι η ποσότητα θερμότητας που εισέρχεται στο σύστημα, E_{kin} είναι η κινητική ενέργεια του κόκκου, E_{el} είναι η αποθηκευμένη κινητική ενέργεια, Q είναι η θερμότητα και D είναι ο ρυθμός απόσβεσης ενέργειας.

Στην παρούσα διατριβή η θερμότητα θα αγνοηθεί. Ως εκ τούτου το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί ως

$$\dot{E} = \dot{W}_F + \dot{W}_C - \dot{E}_{kin} - \dot{E}_{el} - D = 0 \quad (2.1.2)$$

Σημειώνεται ότι, όπως παρατηρείται στο (Noll, 1959), ο ρυθμός της κινητικής ενέργειας αντιστοιχεί στην ισχύ που οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις, οι οποίες μπορούν να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του συστήματός μας με τα υπόλοιπα σώματα του σύμπαντος. Υπό αυτή την έννοια η παραπάνω έκφραση της διατήρησης της ισχύος δεν είναι η μοναδική δυνατή. Το γεγονός αυτό εξετάζεται εκτενώς στο (Podio-Guidugli, 1997), όπου συζητάται επίσης η μορφή του κάθε ενός από τους ενεργειακούς όρους.

Η ισχύς που πρέπει να διατηρείται μεταξύ παρατηρητών είναι

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{\tilde{W}}_F + \dot{\tilde{W}}_C - \dot{\tilde{E}}_{kin} \quad (2.1.3)$$

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο κόκκο. Αυτός χαρακτηρίζεται από την μάζα του, ένα βαθμωτό μέγεθος m , την θέση του κέντρου βάρους του \mathbf{x} , την γραμμική του ταχύτητα \mathbf{v} , την γωνιακή του ταχύτητα \mathbf{w} και τον τανυστή της αδράνειας του ως προς την περιστροφή $\underline{\theta}$.

Υπάρχει μια μοναδική δύναμη και μια μοναδική ροπή ως προς το κέντρο μάζας του κόκκου που μπορεί να εκφράσει το σύστημα δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στα διάφορα σημεία του. Επομένως

$$\dot{\tilde{W}}_F + \dot{\tilde{W}}_C = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w} \quad (2.1.4)$$

Από την άλλη πλευρά για την κινητική ενέργεια ισχύει το ακόλουθο

$$\dot{\tilde{E}}_{kin} = \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \quad (2.1.5)$$

Θα εξεταστούν δύο αλλαγές παρατηρητή. Στην πρώτη ο δεύτερος παρατηρητής κινείται με σταθερή γραμμική ταχύτητα ως προς τον πρώτο, ενώ στη δεύτερη ο δεύτερος παρατηρητής κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς τον πρώτο.

2.1.1 Αλλαγή παρατηρητή κατά Γαλιλαίο

Έστω παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα \mathbf{a} ως προς το αρχικό σύστημα. Η γωνιακή ταχύτητα και η αδράνεια ως προς την περιστροφή που παρατηρεί ο δεύτερος παρατηρητής είναι όμοιες με αυτές που παρατηρούνται από τον πρώτο. Το αυτό ισχύει και για τις ροπές:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}' = \underline{\boldsymbol{\theta}} \quad \& \quad \mathbf{w}' = \mathbf{w} \quad \& \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} \quad (2.1.6)$$

Ο κανόνας μετατροπής για τις δυνάμεις παραμένει άγνωστος, ενώ αυτός για την ταχύτητα είναι

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{a} \quad (2.1.7)$$

Τότε από την απαίτηση της ανεξαρτησίας προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{m} \cdot \mathbf{w} &= \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\theta} \dot{\mathbf{w}} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' - m \mathbf{v}' \cdot \dot{\mathbf{v}}' - \frac{1}{2} \mathbf{w}'^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{w}' - \mathbf{w}'^T \boldsymbol{\theta} \dot{\mathbf{w}}' &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' = \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' - m \mathbf{v}' \cdot \dot{\mathbf{v}}' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}' \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \\ - \frac{1}{2} \dot{m} (\mathbf{v} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{a}) + & \\ - m (\mathbf{v} - \mathbf{a}) \cdot (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{a}) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \\ - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \dot{m} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \\ - m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + m \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \\ + \dot{m} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \end{aligned}$$

Αφού η ποσότητα \mathbf{a} είναι ελεύθερη, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \quad (2.1.8)$$

$$\mathbf{f} = \dot{m}\mathbf{v} + m\dot{\mathbf{v}} \quad (2.1.9)$$

$$\dot{m} = 0 \quad (2.1.10)$$

2.1.2 Αλλαγή παρατηρητή κατά Leibniz

Η αλλαγή παρατηρητή κατά Leibniz αναφέρεται σε έναν παρατηρητή που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και μηδενική γραμμική ταχύτητα σε σχέση με τον αρχικό. Έστω λοιπόν παρατηρητής που κινείται με γωνιακή ταχύτητα \mathbf{b} ως προς το αρχικό σύστημα. Τότε, σε χρονική στιγμή t , οι άξονες του δευτέρου συστήματος θα είναι στραμμένοι κατά μια στροφή $\underline{\mathbf{O}}(t)$ σε σχέση με εκείνους του αρχικού συστήματος. Χάριν απλότητας στο εξής γράφουμε $\underline{\mathbf{O}}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφής θα είναι

$$\underline{\dot{\mathbf{O}}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{O}}(t + dt) - \underline{\mathbf{O}}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\underline{\dot{\mathbf{O}}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\underline{\mathbf{O}} - \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{O}}}{dt} \Rightarrow$$

$$\underline{\dot{\mathbf{O}}} = \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{O}} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση $\underline{\mathbf{W}}$ είναι ένας τανυστής γωνιακής ταχύτητας τέτοιος ώστε

$$\underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{R}} = \mathbf{b} \times \underline{\mathbf{R}}$$

για κάθε διάνυσμα $\underline{\mathbf{R}}$.

Σημειώνεται ότι μεταξύ $\underline{\mathbf{W}}$ και \mathbf{b} κρατεί η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\underline{\mathbf{W}} = -\underline{\mathbf{E}}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{W}}$$

όπου $\underline{\mathbf{E}}$ είναι ο τανυστής Ricci τρίτης τάξεως.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος του $\underline{\mathbf{O}}$.

$$\underline{\ddot{\mathbf{O}}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\dot{\mathbf{O}}}(t + dt) - \underline{\dot{\mathbf{O}}}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\ddot{\underline{\mathbf{O}}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{W}}(t+dt)\underline{\mathbf{O}}(t+dt) - \underline{\mathbf{W}}(t)\underline{\mathbf{O}}(t)}{dt}$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση το $\underline{\mathbf{W}}$ είναι σταθερό στο χρόνο, επομένως

$$\ddot{\underline{\mathbf{O}}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{W}}\underline{\mathbf{O}}(t+dt) - \underline{\mathbf{W}}\underline{\mathbf{O}}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\ddot{\underline{\mathbf{O}}} = \underline{\mathbf{W}} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{O}}(t+dt) - \underline{\mathbf{O}}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\ddot{\underline{\mathbf{O}}} = \underline{\mathbf{W}} \dot{\underline{\mathbf{O}}}$$

Επιπλέον, για κάθε τανυστή στροφής ισχύει

$$\underline{\mathbf{O}} \underline{\mathbf{O}}^T = \underline{\mathbf{I}} \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T + \underline{\mathbf{O}} \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{W}}^T = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{W}} = -\underline{\mathbf{W}}^T \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{W}} \in \text{Skw} \quad (2.1.11)$$

Όσον αφορά στη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων του πρώτου και του δευτέρου συστήματος, είναι γνωστό το ακόλουθο:

$$m' = m, \quad \dot{m}' = \dot{m} \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{x}' = \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{x} \quad (2.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{v}' = \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v} \quad (2.1.14)$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = \ddot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \dot{\mathbf{x}} + \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{v}} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{v}} \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{w}' = \underline{\mathbf{O}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) \quad (2.1.16)$$

$$\dot{\mathbf{w}}' = \dot{\underline{\mathbf{O}}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{w}} \quad (2.1.17)$$

Για την μετατροπή των δυνάμεων και των ροπών χρησιμοποιείται ο κανόνας που ισχύει για τα διανύσματα:

$$\mathbf{f}' = \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{m}' = \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{m} \quad (2.1.18)$$

Για τις ποσότητες $\underline{\theta}$, $\underline{\theta}'$, $\underline{\dot{\theta}}$ και $\underline{\dot{\theta}'}$ γίνεται η υπόθεση ότι είναι συμμετρικά.

Καταρχήν υπολογίζεται η μορφή της κινητικής ενέργειας στο δεύτερο σύστημα. Εισάγοντας τον ρυθμό της κινητικής ενέργειας στις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{E}'_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{m} \left[\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v} \right]^T \left[\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v} \right] + \\ &+ m \left[\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v} \right]^T \left[\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{x} + 2 \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{v}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T \right] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \left[\mathbf{w} - \mathbf{b} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T \right] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \left[\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{w}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\dot{\mathbf{O}}} + \dot{\mathbf{w}}^T \underline{\mathbf{O}} \right] \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \left[\mathbf{w} - \mathbf{b} \right] \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω και θέτοντας τον ρυθμό μεταβολής στο νέο σύστημα ίσο με εκείνο στο σύστημα αναφοράς, προκύπτουν, μετά από πράξεις που δίνονται στο Παράρτ. Α.1, οι ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας

$$\underline{\dot{\theta}} = \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}} \quad (2.1.19)$$

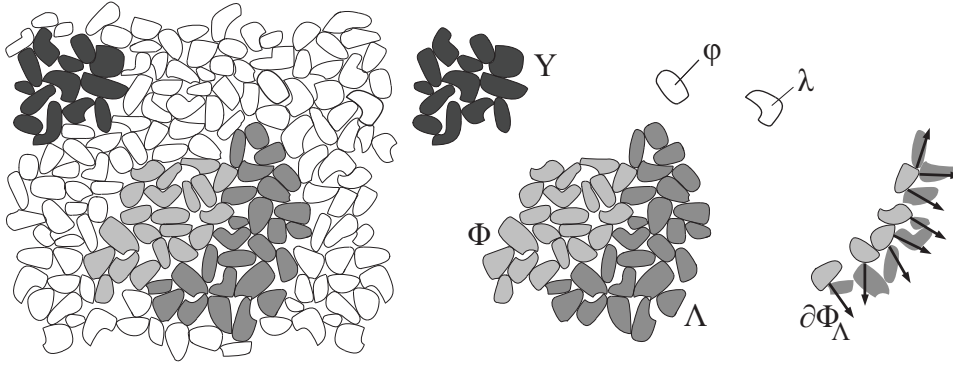
$$\underline{\mathbf{m}} = \underline{\dot{\theta}} \underline{\mathbf{w}} + \underline{\theta} \underline{\dot{\mathbf{w}}} \quad (2.1.20)$$

για τον τανυστή αδράνειας ως προς την περιστροφή και την στροφορμή αντίστοιχα, όπου $\underline{\mathbf{W}}$ είναι ο τανυστής γωνιακής ταχύτητας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα \mathbf{w} .

2.2 Εξισώσεις ισορροπίας για ένα σύνολο κόκκων

Οι εξισώσεις ισορροπίας για ένα σύνολο κόκκων θα εξαχθούν εδώ. Η παρούσα παράγραφος ακολουθεί την ορολογία της εργασίας των Froiio, Tomassetti και Βαρδουλάκη (Froiio et al., 2006). Αρχικά εισάγονται μερικοί βασικοί ορισμοί. Έστω σύνολο στερεών, τυχαίου σχήματος κόκκων, το οποίο συμβολίζεται ως Γ . Ως \mathbb{P}_Γ συμβολίζεται η άλγεβρα των μερών του Γ , δηλαδή η συλλογή όλων των δυνατών υποσυνόλων του Γ , εφοδιασμένη με τις κλασικές συνολοθεωρητικές πράξεις. Τα σύμβολα Φ , Λ και Υ θα χρησιμοποιούνται για τυχαία στοιχεία του \mathbb{P}_Γ , ενώ τα σύμβολα ϕ και λ θα υποδηλώνουν τυχαία στοιχεία του Γ .

Μια συνάρτηση στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών διακριτών κόκκων του Γ θα καλείται στο εξής *δίκτυο*. Ένα διανυσματικό δίκτυο \mathbf{y} είναι αντισυμμετρικό



Εικόνα 2.1: Παρουσίαση κάποιων από τους ορισμούς.

όταν

$$\mathbf{y}(\lambda, \phi) + \mathbf{y}(\phi, \lambda) = \mathbf{0}$$

για κάθε ζεύγος ϕ, λ . Μια συνάρτηση $\mathbf{X} : \mathbb{P}_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται *κατά μέρη προσθετική* αν είναι προσθετική σε κάθε ζεύγος ξεχωριστών μερών του Γ , δηλαδή αν

$$\mathbf{X}(\Phi \cup \Lambda) = \mathbf{X}(\Phi) + \mathbf{X}(\Lambda)$$

για κάθε Φ, Λ με $\Phi \cap \Lambda = \emptyset$.

Μια διανυσματική συνάρτηση \mathbf{Y} στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών των ξεχωριστών υποσυνόλων του Γ θα καλείται *αλληλεπίδραση* όταν, για κάθε Φ , τόσο το $\mathbf{Y}(\Phi, \cdot)$ όσο και το $\mathbf{Y}(\cdot, \Phi)$ είναι περιορισμοί κατά μέρη προσθετικών συναρτήσεων.

Ο στερεός σκελετός ορίζεται ως το σύνολο $S_\Gamma \subset \Gamma \times \Gamma$, που αποτελείται από τα ζεύγη διακριτών κόκκων που βρίσκονται σε επαφή. Τα στοιχεία του S_Γ καλούνται προσανατολισμένες επαφές. Απαιτείται να ισχύει ότι αν $(\phi, \lambda) \in S_\Gamma$ τότε $(\lambda, \phi) \in S_\Gamma$.

Η *κοκκώδης επιφάνεια* που διαχωρίζει το Φ από το Λ ορίζεται ως το σύνολο των προσανατολισμένων επαφών

$$\partial\Phi_\Lambda := (\Phi \times \Lambda) \cap S_\Gamma$$

και αποτελεί ένα διακριτό ανάλογο της έννοιας της επιφάνειας. Συμβολίζοντας το εξωτερικό του Φ ως Φ^Γ , το *κοκκώδες σύνολο* του Φ υποδηλώνει το σύνολο

$$\partial\Phi := \partial\Phi_{\Phi^\Gamma}$$

Μια αλληλεπίδραση \mathbf{Y} είναι μια αλληλεπίδραση μέσω επαφών όταν $\mathbf{Y}(\Phi, \Lambda) = \emptyset$ για κάθε Φ, Λ έτσι ώστε $\Phi \cap \Lambda = \emptyset$ και $\partial\Phi_\Lambda = \emptyset$. Τα σύμβολα Σ και $\hat{\Sigma}$ θα χρησιμοποιούνται για τυχαίες κοκκώδεις επιφάνειες. Δύο κοκκώδεις επιφάνειες Σ και $\hat{\Sigma}$ θα καλούνται *συμβατές* αν η τομή τους είναι κενή και η ένωσή τους συνεχίζει να είναι κοκκώδης επιφάνεια.

Μια διανυσματική συνάρτηση \mathbf{Z} ορισμένη στο σύνολο των κοκκωδών επιφανειών θα ονομάζεται ροή αν είναι προσθετική σε συμβατές κοκκώδεις επιφάνειες, δηλαδή αν

$$\mathbf{Z}(\Sigma \cup \hat{\Sigma}) = \mathbf{Z}(\Sigma) + \mathbf{Z}(\hat{\Sigma})$$

2.2.1 Διατήρηση μάζας

Η μάζα είναι προφανώς μια κατά μέρη προσθετική βαθμωτή συνάρτηση, ενώ η ορμή μια κατά μέρη προσθετική διανυσματική συνάρτηση. Ο χαρακτηρισμός ως τέτοια δεν είναι εξίσου ξεκάθαρος στην περίπτωση του ταυυστή της αδράνειας ως προς την περιστροφή και της στροφορμής, αφού είναι μεγέθη στενά συνδεδεμένα με ένα σημείο αναφοράς. Ωστόσο, όπως έχει δειχθεί (Froiiio et al., 2006), η θεώρηση αυτών των ποσοτήτων ως κατά μέρη προσθετικών είναι αποδεκτή από φυσικής πλευράς.

Όσον αφορά στη μάζα μπορεί να γράψει κανείς για έναν μόνο κόκκο

$$m(\phi)$$

και

$$\dot{m}(\phi) = 0$$

Για την μάζα ενός υποσυνόλου Φ του Γ μπορεί κανείς να γράψει

$$M(\Phi) = \sum_{\phi \in \Phi} m(\phi)$$

και

$$\dot{M}(\Phi) = \sum_{\phi \in \Phi} \dot{m}(\phi) = 0 \quad (2.2.1)$$

2.2.2 Διατήρηση της ορμής

Η διατήρηση της ορμής για έναν κόκκο γράφεται

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = m(\phi)\dot{\mathbf{v}}(\phi)$$

Για ένα υποσύνολο Φ του Γ το παραπάνω λαμβάνει την μορφή

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] + \sum_{(\phi, \lambda) \in S_\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = \sum_{\phi \in \Phi} m(\phi) \dot{\mathbf{v}}(\phi) \quad (2.2.2)$$

Επειδή, αν $(\phi, \lambda) \in S_\Phi$, τότε $(\lambda, \phi) \in S_\Phi$, και

$$\mathbf{f}[(\phi, \lambda)] + \mathbf{f}[(\lambda, \phi)] = \mathbf{0}$$

πρέπει να ισχύει ότι

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in S_\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = \mathbf{0}$$

Με βάση τα παραπάνω η διατήρηση της ορμής μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = \sum_{\phi \in \Phi} m(\phi) \dot{\mathbf{v}}(\phi) \quad (2.2.3)$$

Στην περίπτωση που υποτεθούν οιονεί στατικές συνθήκες για το σύνολο, η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται περαιτέρω ως

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = \mathbf{0} \quad (2.2.4)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι οι δυνάμεις \mathbf{f} είναι ένα αντισυμμετρικό δίκτυο. Όταν ορίζονται σε ένα σύνολο αντί για έναν κόκκο, τότε λαμβάνουν την μορφή μιας αλληλεπίδρασης

$$\mathbf{F}(\Phi, \Lambda) = \sum_{(\phi, \lambda) \in (\Phi, \Lambda)} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \quad (2.2.5)$$

ενώ ο περιορισμός σε μια κοκκώδη επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα μια ροή

$$\hat{\mathbf{F}}(\partial\Phi) = \sum_{(\phi, \lambda) \in (\partial\Phi)} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \quad (2.2.6)$$

2.2.3 Διατήρηση της αδράνειας ως προς την περιστροφή

Όσον αφορά στην αδράνεια ως προς την περιστροφή για έναν κόκκο, ισχύει

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\phi) = \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) + \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \underline{\mathbf{W}}^T(\phi) \quad (2.2.7)$$

όπως έχει δειχθεί παραπάνω. Ακολουθώντας την εργασία των Froiio et al. (Froiio et al., 2006) και αντιμετωπίζοντας την αδράνεια ως προς την περιστροφή ως μία

κατά μέρη αθροιστική συνάρτηση, η αδράνεια ως προς την περιστροφή ενός υποσυνόλου Φ του Γ είναι

$$\underline{\Theta}(\Phi) = \sum_{\phi \in \Phi} \underline{\theta}(\phi)$$

Επομένως η διατήρηση της αδράνειας ως προς την περιστροφή ενός υποσυνόλου Φ γράφεται ως εξής

$$\dot{\underline{\Theta}}(\Phi) = \sum_{\phi \in \Phi} \{ \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\theta}(\phi) + \underline{\theta}(\phi) \underline{\mathbf{W}}^T(\phi) \} \quad (2.2.8)$$

2.2.4 Διατήρηση της στροφορμής

Όπως έχει ήδη δειχθεί, η διατήρηση της στροφορμής για έναν κόκκο $\phi \in \Gamma$ γράφεται

$$\mathbf{m}(\phi) = \dot{\underline{\theta}}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\theta}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi)$$

ή εναλλακτικά

$$\mathbf{m}(\phi) = \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\theta}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\theta}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi)$$

Η ποσότητα $\mathbf{m}(\phi)$ υποδηλώνει την ροπή που ασκείται στο κέντρο βάρους του κόκκου ϕ . Η επιλογή του κέντρου βάρους ως σημείο αναφοράς είναι ένα αναγκαίο αποτέλεσμα του ότι η αδράνεια ως προς την περιστροφή υπολογίζεται ως προς το κέντρο βάρους.

Είναι εύλογο να εκφραστούν οι ροπές με την μορφή αλληλεπιδράσεων. Οι τελευταίες μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες: ροπές που ασκούνται απευθείας στον κόκκο και ροπές που είναι αποτέλεσμα δυνάμεων που ασκούνται σε σημεία \mathbf{x}_c του κόκκου τα οποία δεν συμπίπτουν με το κέντρο βάρους που βρίσκεται στη θέση \mathbf{x}_0 . Συμβολίζοντας την ροπή που ασκείται στον κόκκο ϕ από τον κόκκο λ ως $\mathbf{c}(\phi, \lambda)$ η εξίσωση ισορροπίας της στροφορμής γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] + \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \} = \\ = \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\theta}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\theta}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi) \end{aligned}$$

Για ένα υποσύνολο Φ του Γ η παραπάνω σχέση εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] \} + \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \} + \\ + \sum_{(\phi, \lambda) \in S_\Phi} \{ \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] \} + \sum_{(\phi, \lambda) \in S_\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\phi \in \Phi} \{ \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi) \}$$

Εφόσον το $(\phi, \lambda) \in S_\phi$ συνεπάγεται ότι $(\lambda, \phi) \in S_\phi$ και οι ροπές \mathbf{c} είναι ένα αντισυμμετρικό δίκτυο

$$\mathbf{c}[(\phi, \lambda)] + \mathbf{c}[(\lambda, \phi)] = \mathbf{0}$$

επομένως

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in S_\Phi} \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] = \mathbf{0}$$

Από την άλλη πλευρά το δίκτυο \mathbf{f} των δυνάμεων είναι επίσης αντισυμμετρικό

$$\begin{aligned} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) + \mathbf{f}[(\lambda, \phi)] \times (\mathbf{x}_0(\lambda) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) = \\ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) - \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\lambda) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \Rightarrow \\ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) + \mathbf{f}[(\lambda, \phi)] \times (\mathbf{x}_0(\lambda) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) = \\ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda)) \end{aligned}$$

Εισάγοντας στην παραπάνω εξίσωση την διατήρηση της αδράνειας ως προς την περιστροφή, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] \} + \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \} + \\ + \sum_{(\phi, \lambda) \in S'_\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda)) \} = \quad (2.2.9) \\ = \sum_{\phi \in \Phi} \{ \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi) \} \end{aligned}$$

όπου S'_Φ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $(\phi, \lambda) \in \Phi$. Εναλλακτικά, εκφράζοντας την πρώτη γραμμή της παραπάνω εξίσωσης ως προς τις ροπές γύρω από το κέντρο βάρους των κόκκων, προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in \partial\Phi} \mathbf{m}(\phi) + \sum_{(\phi, \lambda) \in S'_\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda)) \} = \\ = \sum_{\phi \in \Phi} \{ \underline{\mathbf{W}}(\phi) \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \mathbf{w}(\phi) + \underline{\boldsymbol{\theta}}(\phi) \dot{\mathbf{w}}(\phi) \} \quad (2.2.10) \end{aligned}$$

Για οιονεί στατικές συνθήκες οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως

$$\begin{aligned} \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{c}[(\phi, \lambda)] \} + \sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_c(\phi, \lambda)) \} + \\ + \sum_{(\phi, \lambda) \in S'_\Phi} \{ \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda)) \} = \mathbf{0} \quad (2.2.11) \end{aligned}$$

και

$$\sum_{\phi \in \partial\Phi} \mathbf{m}(\phi) + \sum_{(\phi, \lambda) \in S'_\Phi} \{\mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda))\} = \mathbf{0} \quad (2.2.12)$$

αντίστοιχα.

2.3 Δυνατή ισχύς

Έστω κοκκώδες υλικό αποτελούμενο από σύνολο κόκκων, στο οποίο οι κόκκοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στις επαφές τους. Ο όγκος V του κοκκώδους αποτελείται από κενά και P κόκκους που απαρτίζουν το σύνολο $\mathcal{A} = \{1, \dots, P\}$. Οι επαφές των σωματιδίων απαρτίζουν το σύνολο $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Το ζεύγος $(i, j) \in \mathcal{C}$ και το συμμετρικό του (j, i) αντιμετωπίζονται ως ένα και το αυτό στοιχείο του \mathcal{C} . Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η αρίθμηση των επαφών δεν τους αποδίδει συγκεκριμένη θέση.

Έστω πεδίο ταχυτήτων της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(i)} &= \mathbf{v}^{(0)} + \nabla \mathbf{v} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(0)}) \\ \mathbf{w}^{(i)} &= \mathbf{w}^{(0)} + \nabla \mathbf{w} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(0)}) \end{aligned}$$

Η εσωτερική ισχύς μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_{int} = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^{C_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \mathbf{v}^{(ij)} + \mathbf{m}^{(ij)} \mathbf{w}^{(i)} \right)$$

όπου P είναι ο αριθμός των σωματιδίων, C_i είναι ο αριθμός των επαφών του σωματιδίων i , και

$$\mathbf{v}^{(ij)} = \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)})$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει

$$\begin{aligned} P_{int} &= \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^{C_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)}) \right) + \mathbf{m}^{(ij)} \mathbf{w}^{(i)} \right) \Rightarrow \\ P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}^{(j)} \right) \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(i)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{w}^{(j)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)}) \right) \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(j)} \right) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \nabla_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(i)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) - \mathbf{w}^{(j)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \Rightarrow \\
P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \nabla_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(0)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) - \mathbf{w}^{(0)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(0)} \right) \right) \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) \right) \quad (2.3.1) \\
&- \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(0)} \right) \right) \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Αφού η εσωτερική ισχύς δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου επαφής, μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο κόκκων χωρίς απώλεια της γενικότητας. Επομένως

$$\begin{aligned}
P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \nabla_{\mathbf{v}} \right) \\
&- \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \mathbf{W}^{(0)} \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \times \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \left(\nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{x}^{(j)} - 2\mathbf{x}^{(0)} \right) \right) \right) \\
&+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \nabla_{\mathbf{w}} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \nabla_{\mathbf{v}} \right) \\
&- \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \mathbf{W}^{(0)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \left(\nabla \mathbf{w} (\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{x}^{(j)} - 2\mathbf{x}^{(0)}) \right) \right) \\
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) : \nabla \mathbf{w} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{int} & = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) : \nabla \mathbf{v} \right) \\
& - \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) : \underline{\mathbf{W}}^{(0)} \right) \\
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \otimes (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(0)}) : \nabla \mathbf{w} \right) \\
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) : \nabla \mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

Είναι συνήθης η υπόθεση ότι η εσωτερική ισχύς ενός μικροπολικού μέσου έχει την μορφή

$$P_{int} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\Gamma}}} + \underline{\boldsymbol{\mu}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\kappa}}}$$

Ως εκ τούτου προκύπτουν οι ορισμοί

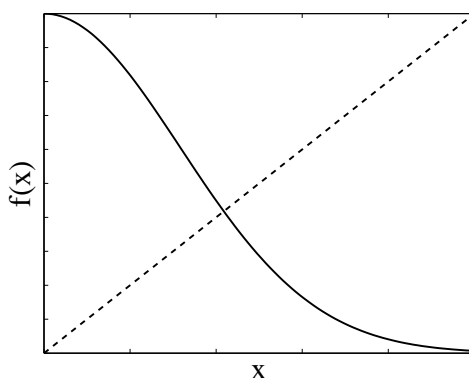
$$\begin{aligned}
\underline{\dot{\boldsymbol{\Gamma}}} & = \nabla \mathbf{v} - \underline{\mathbf{W}} \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}} & = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \mathbf{f}^{ij} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \\
\underline{\dot{\boldsymbol{\kappa}}} & = \nabla \mathbf{w}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\mu}} & = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \right) + \\
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\left(\mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \right) \otimes (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(0)}) \right)
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω θεώρηση είναι ξεκάθαρη η εξάρτηση του τανυστή των τάσεων ζεύγους από την επιλογή του σημείου αναφοράς. Αυτό το αποτέλεσμα βρίσκεται σε συμφωνία με τις εργασίες των Ehlers *et al.* (Ehlers et al., 2003) και των Chang and Liao (Chang and Liao, 1990). Στην πρώτη περίπτωση προέκυψε από τις εξισώσεις ισορροπίας του συνεχούς προεκβάλλοντας τα ολοκληρώματα σε αθροίσματα, προκειμένου να προκύψει η διακριτή μορφή του τανυστή των τάσεων και του τανυστή

των τάσεων ζεύγους. Στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιείται η ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων σε συνάρτηση με δυνατές μετατοπίσεις. Εάν και η μορφή του τανυστή των τάσεων ζεύγους που προέκυψε παραπάνω βρίσκεται σε συμφωνία με την βιβλιογραφία, έρχεται σε αντίθεση με την μορφή του τανυστή των τάσεων ζεύγους που υποδηλώνεται από την εξίσωση ισορροπίας που προκύπτει από την ανεξαρτησία της ισχύος από τον παρατηρητή. Εν γένει η μορφή της εξ. (2.2.12) υποδηλώνει μια πιο πλήρη αναλογία με την μορφή του τανυστή των τάσεων. Υπάρχουν επιπλέον αντιρρήσεις ως προς την μορφή του τανυστή των τάσεων ζεύγους που προκύπτει εδώ. Η ποσότητα $\mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})$ εκφράζει την διαφορά των ροπών που ασκούνται σε δύο γειτονικά σωματίδια ως αποτέλεσμα των δυνάμεων που ασκούνται στην κοινή τους επαφή. Ο όρος $\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(0)}$ εισάγει, πέρα από μια διεύθυνση, ένα βάρος $l^{(ij)}$ που εκφράζει την απόσταση της επαφής από το σημείο αναφοράς. Για έναν σφαιρικό όγκο μέτρησης το βάρος αυτό φαίνεται στην Εικ. 2.2 ως μια διακεκομμένη γραμμή. Σε διαδικασίες μεσοτίμησης η



Εικόνα 2.2: Συναρτήσεις βάρους.

συνάρτηση βάρους έχει συνήθως μια μορφή παρόμοια σε αυτήν που δείχνεται ως συνεχής γραμμή. Επιπλέον εγείρονται ερωτήματα για την φυσική σημασία του γιγονότος, ότι σημεία που είναι πιο απομακρυσμένα από το σημείο αναφοράς έχουν μεγαλύτερη επίδραση στο αποτέλεσμα από σημεία που βρίσκονται κοντά στο σημείο αναφοράς. Προτείνεται επομένως μια εναλλακτική προσέγγιση.

2.4 Συνεχής κινηματική παρεμβολή

Στην παρούσα παράγραφο γίνεται η υπόθεση ότι οι γραμμικές και γωνιακές ταχύτητες μπορούν να εκφραστούν από τα συνεχή πεδία \mathbf{v}^i και \mathbf{w}^i . Είναι δυνατόν να επεκταθούν τα πεδία της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας σε μια σειρά Taylor γύρω από το σημείο της επαφής. Τότε

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}^{(cij)} + \nabla \mathbf{v}^{(cij)} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)})$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{w}^{(cij)} + \nabla \mathbf{w}^{(cij)} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)})$$

Το παραπάνω υποδηλώνει ότι

$$\mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}^{(j)} = \nabla \mathbf{v}^{(cij)} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})$$

$$\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(j)} = \nabla \mathbf{w}^{(cij)} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})$$

και

$$\mathbf{w}^{(cij)} = \mathbf{w}^{(i)} \frac{\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(ij)}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|} + \mathbf{w}^{(j)} \frac{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|}$$

όταν το σημείο της επαφής βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των δύο κόκκων. Επομένως προκύπτει ότι η επιλογή που έγινε παραπάνω αντιστοιχεί σε μια συνεχή παρεμβολή των διακριτών πεδίων των γραμμικών και γωνιακών ταχυτήτων.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση που εκφράζει την εσωτερική ισχύ, προκύπτει

$$\begin{aligned} P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}^{(j)} \right) \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(i)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) - \mathbf{w}^{(j)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \left(\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(j)} \right) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{int} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \nabla \mathbf{v}^{(cij)} \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \mathbf{w}^{(cij)} \times \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) \right) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\nabla \mathbf{w}^{(cij)} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \left(\nabla \mathbf{w}^{(cij)} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \right) \right) \\
& + \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) : \nabla \mathbf{w}^{(cij)} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{int} & = \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) : \left(\nabla \mathbf{v}^{(cij)} - \underline{\mathbf{W}}^{(cij)} \right) \right) \\
& + \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \times \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) \right) \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) : \nabla \mathbf{w}^{(cij)} \\
& + \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) : \nabla \mathbf{w}^{(cij)} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{int} & = \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) : \left(\nabla \mathbf{v}^{(cij)} - \underline{\mathbf{W}}^{(cij)} \right) \right) \\
& + \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{M}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) : \nabla \mathbf{w}^{(cij)} \right)
\end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{M}^{(ij)} = \mathbf{m}^{(ij)} + \mathbf{f}^{(ij)} \times \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right)$$

Εάν τα πεδία των γραμμικών και των γωνιακών ταχυτήτων είναι αρκετά ομαλά, τότε

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{\Gamma}} & = \nabla \mathbf{v} - \underline{\mathbf{W}} \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}} & = \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{f}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) \right) \\
\underline{\dot{\boldsymbol{\kappa}}} & = \nabla \mathbf{w}
\end{aligned}$$

και

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{M}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)} \right) \right)$$

Η θεώρηση της εσωτερικής ισχύος καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα συν έναν όρο που εξαρτάται από την θέση του σημείου επαφής ως προς το σημείο αναφοράς.

2.5 Μηχανισμοί παραμόρφωσης

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζεται η αλληλεπίδραση δύο σωμάτων σε δύο διαστάσεις. Υποθέτοντας ότι η προκύπτουσα παραμορφώσεις είναι μικρές σε σχέση

με το μέγεθος των σωμάτων, οι τοπικές καμπυλότητες των δύο σωμάτων σε επαφή μπορούν να θεωρηθούν. Ως εκ τούτου το πρόβλημα περιορίζεται σε αυτό της αλληλεπίδρασης δύο κυλίνδρων απείρου μήκους με παράλληλους άξονες. Η αλληλεπίδραση θα θεωρηθεί ελαστική.

Σύμφωνα με την γνωστή θεωρία του Hertz, βλέπε (Johnson, 1985) Κεφάλαιο 4, μια δύναμη F (ανά μονάδα μήκους, λαμβάνοντας υπόψιν το άπειρο μήκος των κυλίνδρων) κάθετη στην επιφάνεια της επαφής έχει ως αποτέλεσμα ένα ήμι-μήκος επαφής ίσο με

$$a = \left(\frac{4FR}{\pi E^*} \right)^{1/2}$$

όπου

$$E^* \equiv \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$$

$$R \equiv \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

και όπου E_i , ν_i και R_i είναι το μέτρο ελαστικότητας, ο λόγος του Poisson και η ακτίνα του κυλίνδρου (i) αντίστοιχα.

Έστω μια επαφή στην οποία τείνει να λάβει χώρα ολίσθηση. Στη απλούστερη περίπτωση θεωρείται ο νόμος του Coulomb. Τότε για την παράλληλη στην επιφάνεια της επαφής δύναμη προκύπτει

$$T \leq \mu F$$

ενώ, αν η σχετική ταχύτητα στο σημείο επαφής είναι μη μηδενική

$$T = \mu F$$

με διεύθυνση αντίθετη με αυτή της σχετικής ταχύτητας.

Όταν θεωρείται μια επαφή στην οποία τείνει να λάβει χώρα σχετική ολίσθηση, η διατύπωση δεν είναι εξίσου απλή. Ακολουθείται για το λόγο αυτό μια απλοποιημένη ανάλυση. Έστω δύο κύλινδροι σε επαφή, όπως φαίνεται στην Εικ. 2.3. Ασκείται μια δύναμη F κάθετα στην επαφή της οποίας το αποτέλεσμα είναι μια επιφάνεια επαφής πλάτους $2a$. Η αντίσταση της επαφής στην κύλιση S , σε γωνία θ ως προς την επιφάνεια της επαφής, ασκείται στο άκρο της επαφής την στιγμή που ξεκινάει η σχετική κύλιση. Προκειμένου να ξεκινήσει η σχετική κύλιση πρέπει η δύναμη F'

να είναι αρκετά μεγάλη για να ανυψώσει τον κύλινδρο κατά το απαιτούμενο ύψος, αλλά μικρότερη από την μέγιστη στατική τριβή:

$$F' \leq \mu F$$

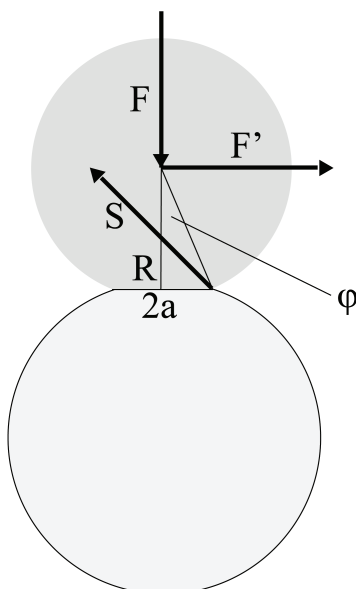
Η κύλιση μπορεί να ξεκινήσει όταν οι ροπές περί του σημείου εφαρμογής της δύναμης S είναι μηδέν. Η ισοροπία των ροπών γράφεται ως

$$Fa - F'R \cos(\phi) = 0$$

Η ροπή αντίστασης m_R θα είναι ίση με $F'R \cos(\phi)$ ως προς το σημείο εφαρμογής της S και F ως προς το κέντρο της επαφής. Στην πραγματικότητα οι δύο ποσότητες έχουν την ίδια τιμή

$$m_R = aF$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η αντίσταση κύλισης είναι η ίδια και για τους δύο κύλινδρους, δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα του κυλίνδρου. Η ποσότητα a μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένας συντελεστής τριβής κύλισης. Ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό των κόκκων, στην περίπτωση που αυτοί είναι ακανόνιστοι, ή μπορεί να



Εικόνα 2.3: Δύο κύλινδροι σε επαφή.

εξαρτάται από την κάθετη δύναμη σύμφωνα με τον νόμο του Hertz. Στην πρώτη περίπτωση ο συντελεστής της αντίστασης στην κύλιση είναι σταθερός, ενώ στην δεύτερη περίπτωση είναι μια γραμμική συνάρτηση του μέτρου της κάθετης δύναμης υψωμένου στην $1/2$. Πρέπει να παρατηρηθεί στο σημείο αυτό ότι η παρούσα ανάλυση δεν έχει λάβει υπόψιν ούτε τυχόν πλαστικές παραμορφώσεις ούτε τυχόν επιφανειακή ζημιά των κόκκων.

Ας επιστρέψουμε στην Εικ. 2.3. Εάν

$$F' \geq \mu F$$

τότε θα λάβει χώρα σχετική ολίσθηση στην επαφή. Εάν από την άλλη πλευρά

$$F' R \geq aF$$

τότε θα λάβει χώρα σχετική κύλιση. Οι δύο μηχανισμοί δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι, αλλά είναι ξεκάθαρο ότι όταν

$$\mu < \frac{a}{R}$$

η ολίσθηση θα είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός σχετικής κίνησης, ενώ όταν

$$\mu > \frac{a}{R}$$

η κύλιση θα είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός σχετικής κίνησης. Οι μηχανισμοί αυτοί θα χρησιμοποιηθούν στο Κεφάλαιο 6 για την εξαγωγή της καταστατικής συμπεριφοράς στην πλαστικότητα ενός κοκκώδους μέσου.

Κεφάλαιο 3

Διακριτές Προσομοιώσεις: Μακροσκοπική Ανάλυση

3.1 Εισαγωγή

Προκειμένου να εξεταστεί η συμπεριφορά των κοκκωδών μέσων στο μακροσκοπικό και το μεσοσκοπικό επίπεδο, πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις με την Μέθοδο των Διακριτών Στοιχείων (DEM). Οι μέθοδοι Διακριτών Στοιχείων στηρίζονται στην προσομοίωση της συμπεριφοράς κάθε κόκκου και της αλληλεπίδρασής του με τους γείτονές του. Ο όρος περιγράφει μια οικογένεια αριθμητικών μεθόδων, όπως η Μοριακή Δυναμική (Molecular Dynamics) ή η Δυναμική των Επαφών (Contact Dynamics), για τον υπολογισμό της κίνησης ενός μεγάλου αριθμού σωματιδίων, όπως τα μόρια και οι κόκκοι άμμου. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Cundall σε προβλήματα βραχομηχανικής και η περιγραφή της μπορεί να βρεθεί στο (Cundall and Strack, 1979). Μια πλήρης περιγραφή των διαφόρων μεθόδων βρίσκεται στο βιβλίο (Pöschel and Schwager, 2005).

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της Δυναμικής των Επαφών (CD) και πιο συγκεκριμένα ο κώδικας LMGC90 (Dubois and Jean, 2003; Jean, 1999; Renouf et al., 2004). Η συγκεκριμένη μέθοδος παρουσιάζεται εν συντομία στη συνέχεια. Ακολούθως παρουσιάζεται μια σειρά διαξονικών δοκιμών σε δύο διαστάσεις. Διαφορετικά σχήματα σωματιδίων (δίσκοι, δωδεκάγωνα και εξάγωνα) χρησιμοποιούνται προκειμένου να εξεταστεί η επίδραση του σχήματος των κόκκων και της αντίστασης στην περιστροφή στη συμπεριφορά του

υλικού. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η συμπεριφορά του δοκιμίου και μετρούνται κλασικά ως επί το πλείστον μεγέθη. Στο επόμενο κεφάλαιο πραγματοποιούνται μετρήσεις στην μεσοκλίμακα πάνω σε περιοχές μετρήσεις που περιέχουν ή όχι ζώνες διάτμησης, με στόχο την αξιολόγηση της καταλληλότητας των μικροπολικών συνεχών για την περιγραφή της συμπεριφοράς των κοκκωδών μέσων.

3.2 Η Μέθοδος της Μηχανικής των Επαφών

Ενώ η Μοριακή Δυναμική βασίζεται στον υπολογισμό των δυνάμεων αλληλεπίδρασης, η Δυναμική των Επαφών βασίζεται στην ικανοποίηση της υπόθεσης συνακολουθίας από την συμπεριφορά των σωματιδίων. Ως εκ τούτου η μέθοδος είναι κατάλληλη για την προσομοίωση απαραμόρφωτων σωματιδίων, χωρίς να υφίσταται η ανάγκη να καθοριστεί ένας νόμος για την παραμόρφωση στις επαφές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συγκεκριμένη μέθοδος να είναι καταλληλότερη για την προσομοίωση σωματιδίων με ακανόνιστο σχήμα ή με γωνίες. Η ορθή συμπεριφορά των σωματιδίων εξασφαλίζεται από ορισμένους περιορισμούς:

1. Οι δυνάμεις στις επαφές πρέπει να επιλέγονται ώστε να αποφεύγεται η αμοιβαία διείσδυση σωματιδίων που βρίσκονται σε επαφή.
2. Οι δυνάμεις στις επαφές μηδενίζονται όταν παύει να υφίσταται η επαφή. Η σχετική ταχύτητα θεωρείται θετική όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων αυξάνει.
3. Δεν υπάρχουν ελκτικές κάθετες στην επαφή δυνάμεις. Αυτό αποκλείει την ύπαρξη αρνητικών δυνάμεων επαφής.
4. Οι δυνάμεις τριβής είναι παράλληλες στο επίπεδο της επαφής. Αν F^* είναι η εφαπτομενική δύναμη που είναι αναγκαία για να αποτρέψει την σχετική ολίσθηση δύο σωματιδίων, τότε η δύναμη τριβής είναι $|F| = \min(|F^*|, |\mu F^n|)$. Εάν υφίσταται σχετική ολίσθηση, η δύναμη τριβής αποκτά την μέγιστη τιμή της με διεύθυνση αντίθετη στην σχετική εφαπτομενική επιτάχυνση για στατικές επαφές και αντίθετη στην σχετική εφαπτομενική ταχύτητα για ολισθαίνουσες επαφές.

3.2.1 Σύνοψη του αλγορίθμου

Η κατάσταση ενός συστήματος κόκκων περιγράφεται από τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωματιδίων. Οι επαφές μεταξύ των σωματιδίων διαχωρίζονται σε στατικές και ολισθαίνουσες. Η κατάσταση του συστήματος αλλάζει όταν μεταβάλλεται το δίκτυο των επαφών του. Η προσομοίωση παρακολουθεί τις μεταβολές σε διακριτά βήματα, κάθε ένα από τα οποία αποτελείται από

1. **Εντοπισμό των επαφών:** Καταγράφονται όλες οι υπάρχουσες επαφές.
2. **Επεξεργασία των κρούσεων:** Μια κρούση λαμβάνει χώρα όταν δύο σωματίδια που βρίσκονται σε επαφή κινούνται με αρνητική σχετική κάθετη ταχύτητα. Κάθε πεπερασμένη δύναμη επαφής απαιτεί ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα για να επιβραδύνει τα σωματίδια και επομένως σε μια τέτοια περίπτωση δεν είναι δυνατόν να αποφευχθούν οι παραμορφώσεις. Για το λόγο αυτό οι κρούσεις πρέπει να τύχουν ξεχωριστού χειρισμού.
3. **Καθαρισμός της λίστας των επαφών:** Μετά από μια κρούση τα εμπλεκόμενα σωματίδια χάνουν επαφή και επομένως απομακρύνονται από την λίστα των επαφών.
4. **Διατύπωση της γεωμετρικής εξίσωσης:** Οι κάθετες ταχύτητες σε όλες τις απομένουσες επαφές είναι μηδενικές. Διατυπώνεται η εξίσωση της γεωμετρίας, η οποία περιέχει την πληροφορία σχετικά με το δίκτυο επαφών του συστήματος.
5. **Υπολογισμός των δυνάμεων:** Υπολογίζονται οι δυνάμεις και οι σχετικές επιταχύνσεις μέσω της γεωμετρικής εξίσωσης.
6. **Ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης:** Τέλος ολοκληρώνεται το σύστημα των εξισώσεων κίνησης για όλα τα σωματίδια. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας μπορεί να καταστεί αναγκαίο να ανανεωθεί το σύστημα των εξισώσεων γεωμετρίας και να υπολογιστούν εκ νέου οι δυνάμεις.

3.2.2 Μαθηματική περιγραφή

Η μη παραμορφωσιμότητα των σωματιδίων μπορεί να επιβληθεί μέσω μαθηματικών περιορισμών στην κίνηση της μορφής

$$\bar{g}^n(\tilde{\mathbf{q}}) \geq 0 \quad (3.2.1)$$

όπου $\tilde{\mathbf{q}}$ είναι το διάνυσμα του οποίου συνιστώσες είναι οι βαθμοί ελευθερίας όλων των σωματιδίων του συστήματος. Για κάθε επαφή α υπάρχει μια συνάρτηση περιορισμού g_α^n με

$$g_\alpha^n(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \begin{cases} 0 & \text{εάν τα σωματίδια είναι σε επαφή} \\ > 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

όπου οι ελληνικοί δείκτες υποδηλώνουν επαφές και οι λατινικοί σωματίδια. Για την πιο απλή περίπτωση, αυτή των σφαιρών, η συνάρτηση περιορισμού γράφεται

$$g_\alpha^n(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| - R_i - R_j \quad (3.2.3)$$

Εάν οι σφαίρες παραμόρφωναν η μία την άλλη η συνάρτηση θα γινόταν αρνητική, όταν αγγίζουν είναι ίση με μηδέν. Το $g_\alpha^n(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) > 0$ είναι επίσης επιτρεπτό, αλλά επειδή μια επαφή αγνοείται όταν σπάσει, μόνο η ισότητα με το μηδέν απαντάται. Αυτός ο περιορισμός είναι γνωστός ως η συνθήκη Signorini.

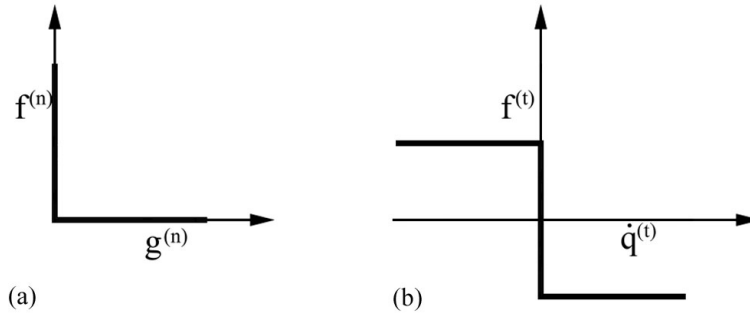
Προκειμένου να εισαχθεί η τριβή, πρέπει να περιληφθούν επιπλέον περιορισμοί ως προς την εφαπτομενική κίνηση. Οι περιορισμοί στην εφαπτομενική κίνηση είναι διαφορετικοί από εκείνους στην κάθετη με δεδομένο το ότι μπορούν να παραβιαστούν, όπως και συμβαίνει όταν λαμβάνει χώρα σχετική ολίσθηση. Η δύναμη τριβής λαμβάνει την μέγιστη τιμή της όταν παραβιάζεται ένας περιορισμός, αλλά, αν και η τιμή της δύναμης τριβής υπολογίζεται από τον νόμο του Coulomb, ο περιορισμός πρέπει να ληφθεί υπόψιν, αφού είναι αναγκαίο να καθοριστεί η δύναμη της εφαπτομενικής δύναμης. Η συνθήκη Signorini και ο παραπάνω περιορισμός, ο οποίος αναφέρεται στο εξής ως συνθήκη Coulomb, δίνονται στην Εικ. 3.1.

Υπάρχουν επομένως δύο κλάσεις περιορισμών της κίνησης,

$$g_\alpha^n(\tilde{\mathbf{q}}) \geq 0 \quad (3.2.4)$$

και

$$g_\alpha^t(\tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (3.2.5)$$



Εικόνα 3.1: (α) Συνθήκη Signorini και (β) συνθήκη Coulomb.

και οι αντίστοιχες δυνάμεις επαφής f_{α}^n και f_{α}^t . Η εξίσωση της κίνησης για το σωματίδιο k γράφονται επομένως

$$\underline{\mathbf{M}}_k \ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{Q}_k + f_{\alpha}^n \frac{\partial g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_i} + f_{\alpha}^t \frac{\partial g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.2.6)$$

όπου δεν υπονοείται η συνθήκη άθροισης Einstein ως προς τον δείκτη k , $\underline{\mathbf{M}}_k$ είναι ο πίνακας αδράνειας

$$\underline{\mathbf{M}}_k = \begin{bmatrix} m_k \cdot \underline{\mathbf{I}}_N & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

όπου $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ είναι ο τανυστής αδράνειας ως προς την περιστροφή και \mathbf{Q}_k είναι το διάλυμα των εξωτερικών δυνάμεων και ροπών.

Αφού απαιτείται οι συναρτήσεις περιορισμού να είναι πάντα μη αρνητικές, οι παράγωγοί τους ως προς τον χρόνο πρέπει να είναι επίσης μη αρνητικές. Αφού δε χρειάζεται να ληφθούν υπόψιν οι επαφές που παύουν να υφίστανται, οι επιταχύνσεις γράφονται

$$\ddot{g}_{\alpha}^n = \frac{\partial g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_k} \ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial^2 g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_l \geq 0 \quad (3.2.8)$$

$$\ddot{g}_{\alpha}^t = \frac{\partial g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_k} \ddot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial^2 g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_l \geq 0 \quad (3.2.9)$$

Συνδυάζοντας αυτό με την εξίσωση κίνησης προκύπτει

$$\ddot{g}_{\alpha}^n = \frac{\partial g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_k} (\underline{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}_k) + \frac{\partial^2 g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_l + \frac{\partial g_{\alpha}^n}{\partial \mathbf{q}_k} \underline{\mathbf{M}}^{-1} \left(\sum_{\beta} f_{\beta}^n \frac{\partial g_{\beta}^n}{\partial \mathbf{q}_i} + f_{\beta}^t \frac{\partial g_{\beta}^t}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \quad (3.2.10)$$

$$\ddot{g}_{\alpha}^t = \frac{\partial g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_k} (\underline{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}_k) + \frac{\partial^2 g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_l + \frac{\partial g_{\alpha}^t}{\partial \mathbf{q}_k} \underline{\mathbf{M}}^{-1} \left(\sum_{\beta} f_{\beta}^n \frac{\partial g_{\beta}^n}{\partial \mathbf{q}_i} + f_{\beta}^t \frac{\partial g_{\beta}^t}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \quad (3.2.11)$$

Θεωρώντας $a_\alpha^n \equiv \ddot{g}_\alpha^n$, $a_\alpha^t \equiv \ddot{g}_\alpha^t$ και θέτοντας

$$b_\alpha^n = \frac{\partial g_\alpha^n}{\partial \mathbf{q}_k} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_k) + \frac{\partial^2 g_\alpha^n}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_l \quad (3.2.12)$$

$$b_\alpha^t = \frac{\partial g_\alpha^t}{\partial \mathbf{q}_k} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_k) + \frac{\partial^2 g_\alpha^t}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_l \quad (3.2.13)$$

και

$$A_{\alpha\beta}^{nn} \equiv \frac{\partial g_\alpha^n}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{M}^{-1} f_\beta^n \frac{\partial g_\beta^n}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.2.14)$$

$$A_{\alpha\beta}^{nt} \equiv \frac{\partial g_\alpha^n}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{M}^{-1} f_\beta^n \frac{\partial g_\beta^t}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.2.15)$$

$$A_{\alpha\beta}^{tn} \equiv \frac{\partial g_\alpha^t}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{M}^{-1} f_\beta^n \frac{\partial g_\beta^n}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.2.16)$$

$$A_{\alpha\beta}^{tt} \equiv \frac{\partial g_\alpha^t}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{M}^{-1} f_\beta^n \frac{\partial g_\beta^t}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.2.17)$$

η γεωμετρική εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} a_\alpha^n &= b_\alpha^n + \sum_\beta A_{\alpha\beta}^{nn} f_\beta^n + A_{\alpha\beta}^{nt} f_\beta^t \\ a_\alpha^t &= b_\alpha^t + \sum_\beta A_{\alpha\beta}^{tn} f_\beta^n + A_{\alpha\beta}^{tt} f_\beta^t \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων συνακολουθίας γράφεται τότε:

- $a_\alpha^n \geq 0$: Οι σχετικές επιταχύνσεις στις επαφές πρέπει να είναι μη αρνητικές, ώστε να αποφευχθεί αμοιβαία παραμόρφωση των σωματιδίων.
- $f_\alpha^t \geq 0$: Οι κάθετες δυνάμεις είναι πάντα μη αρνητικές.
- $a_\alpha^n f_\alpha^t = 0$: Εάν η κάθετη επιτάχυνση είναι μη μηδενική, η δύναμη στην επαφή μηδενίζεται.
- $|f_\alpha^t| \leq \mu f_\alpha^n$: Οι εφαπτομενικές δυνάμεις περιορίζονται από τον νόμο τριβής του Coulomb.
- $a_\alpha^n (|f_\alpha^t| - \mu f_\alpha^n) = 0$: Εάν η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι μη μηδενική, η εφαπτομενική επιτάχυνση λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Η διεύθυνσή της είναι αντίθετη της διεύθυνσης της σχετικής εφαπτομενικής κίνησης.

Η γεωμετρική εξίσωση σε συνδυασμό με τις συνθήκες συνακολουθίας μπορούν πλέον να επιλυθούν με έναν κατάλληλο αλγόριθμο.

3.2.3 Κρούσεις

Αφού καμία πεπερασμένη δύναμη δεν μπορεί να εμποδίσει δύο σωματίδια από το να συγκρουστούν σε μια μη πεπερασμένη χρονική διάρκεια, θεωρούνται ωθήσεις αντί για δυνάμεις. Λόγω της άπειρης ακαμψίας των σωματιδίων, οι ταχύτητές τους δεν μπορούν να υπολογιστούν κατά μοναδικό τρόπο, εισάγοντας έτσι ένα στοιχείο αβεβαιότητας, το οποίο είναι ένα εγγενές στοιχείο της Δυναμικής των Επαφών.

Γίνονται οι ακόλουθες υποθέσεις

1. Όλες οι ξεχωριστές κρούσεις ζευγών συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή.
2. Η μεταφορά της ορμής στα σημεία επαφής είναι πεπερασμένη και δεν υπάρχει μεταφορά ορμής που να αντιστοιχεί σε ελκτικές δυνάμεις.
3. Αν ϵ είναι ο συντελεστής αποκατάστασης και v η σχετική ταχύτητα της κρούσης, απαιτείται ότι $v' \geq -\epsilon v$, όπου v' είναι η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση.
4. Εάν η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση είναι μεγαλύτερη από $-\epsilon v$, τότε δεν υπάρχει μεταφορά ορμής σε αυτή την επαφή.

Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν ως

$$\Delta v_\alpha \geq 0 \quad (3.2.19)$$

$$\Delta p_\alpha \geq 0 \quad (3.2.20)$$

$$\Delta v_\alpha \Delta p_\alpha = 0 \quad (3.2.21)$$

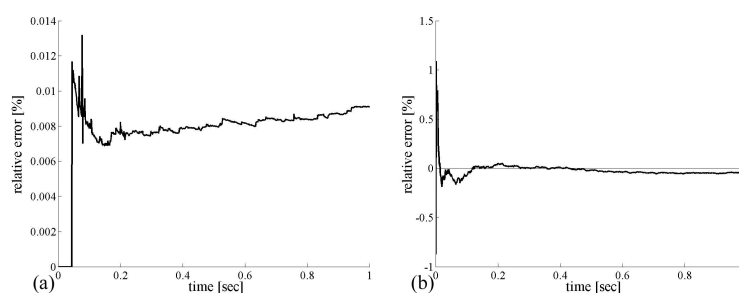
όπου Δv_α είναι η πλεονάζουσα ταχύτητα, που ορίζεται ως $\Delta v_\alpha = v' + \epsilon v$ και μπορεί να συνδεθεί με την μεταφορά ορμής μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$\Delta v_\alpha = (1 + \epsilon v_\alpha) + A_{\alpha\beta}^{col} \Delta p_\beta \quad (3.2.22)$$

Οι παραπάνω συνθήκες και εξισώσεις σε συνδυασμό με την γεωμετρική εξίσωση και τις συνθήκες συνακολουθίας ολοκληρώνουν την περιγραφή του προβλήματος.

3.3 Διατήρηση της ενέργειας

Η μέθοδος της Δυναμικής των Επαφών προτιμήθηκε λόγω της δυνατότητάς της να χειρίζεται με ευκολία πολυγωνικά σωματίδια και, κυρίως, λόγω του ότι δεν περιέχει αριθμητική απόσβεση. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια διατηρείται, κάτι που δεν ισχύει ή ισχύει υπό περιορισμούς για άλλες μεθόδους διακριτών στοιχείων. Προκειμένου να επιβεβαιωθεί ότι ικανοποιείται η διατήρηση της ενέργειας και δεν υφίσταται αριθμητική απόσβεση, πραγματοποιήθηκε ένας απλός έλεγχος. Ο έλεγχος πραγματοποιήθηκε σε ένα ορθογωνικό δοκίμιο υπό διάτμηση με περιοδικές συνοριακές συνθήκες στην οριζόντια διεύθυνση και σε ένα δοκίμιο υπό δακτυλιοειδή διάτμηση με περίπου 800 κόκκους. Στην Εικ. 3.2 φαίνεται το σχετικό σφάλμα για τις δύο περιπτώσεις. Άρα επιβεβαιώνεται η απουσία αριθμητικής απόσβεσης.

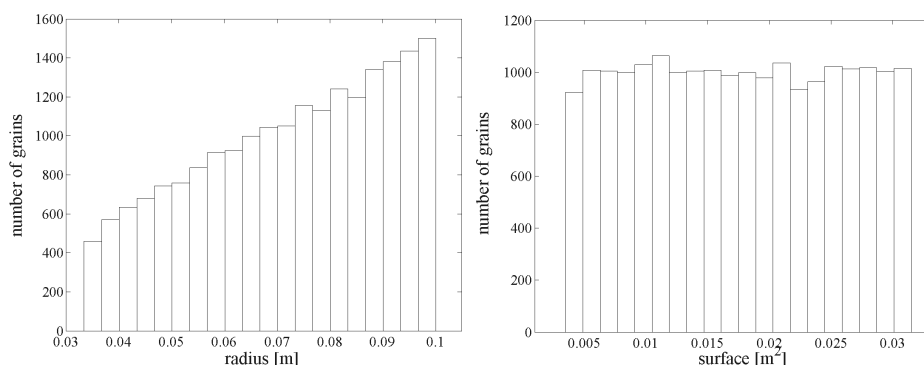


Εικόνα 3.2: Σχετικό σφάλμα για (α) ορθογωνικό δοκίμιο υπό απλή διάτμηση, (β) δακτυλιοειδή δοκιμή διάτμησης.

3.4 Προετοιμασία δοκιμών

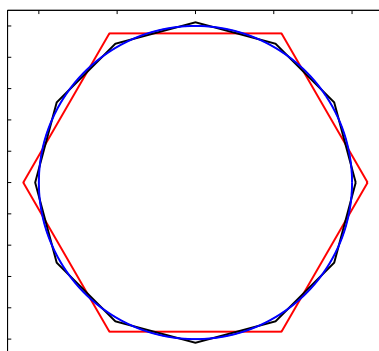
Τετραγωνικά δοκίμια περίπου 5000 κόκκων έκαστο προετοιμάστηκαν. Αρχικά δημιουργήθηκαν πέντε πυκνά δοκίμια δίσκων σύμφωνα με μία δοσμένη κατανομή ακτίνων. Για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί μια ομοιόμορφη κατανομή ως προς την επιφάνεια. Η μέγιστη επιφάνεια ήταν εννιά φορές μεγαλύτερη από την ελάχιστη. Στην Εικ. 3.3 δίνεται ένα παράδειγμα των ιστογραμμάτων για τις ακτίνες και τις επιφάνειες των κόκκων.

Επιλέχθηκε να δοκιμαστούν εξάγωνα και δωδεκάγωνα πέρα από δίσκους. Από κάθε δοκίμιο δίσκων παρήχθη ένα ισοδύναμο δοκίμιο εξαγώνων και ένα δωδεκάγώνων. Το κανονικό εξάγωνο και δωδεκάγωνο προέκυψαν από τον δίσκο υπό την



Εικόνα 3.3: Ιστογράμματα για την ακτίνα και την επιφάνεια των κόκκων.

απαίτηση της ίσης επιφανείας και τοποθετήθηκαν εν συνεχεία στις ίδιες καρτεσιανές συντεταγμένες με την προσθήκη μιας τυχαίας στροφής. Ένα παράδειγμα



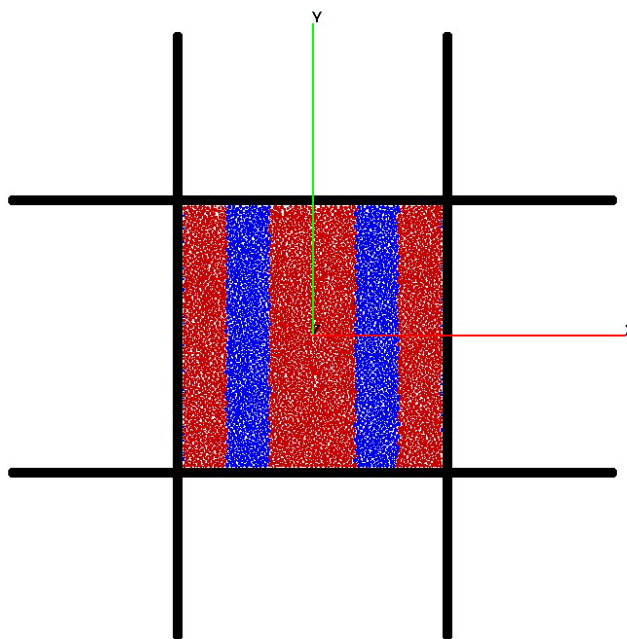
Εικόνα 3.4: Σχήματα κόκκων.

δίνεται στην Εικ. 3.4.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία πυκνών δοκιμίων βασίζεται στην τοποθέτηση κάθε νέου δίσκου στο σημείο ελαχίστου δυναμικού που είναι διαθέσιμο, ενώ η συνάρτηση που εκφράζει το δυναμικό εξαρτάται από το σχήμα του δοκιμίου. Η μέθοδος έχει ως αποτέλεσμα ελαφρώς δομημένα δοκίμια. Επιλέχθηκε ως εκ τούτου να επιβληθούν τυχαίες ταχύτητες στους κόκκους στην αρχή κάθε προσομοίωσης και να αφεθεί το δοκίμιο να χαλαρώσει, εφαρμόζοντας παράλληλα τα στατικά φορτία που θα εφαρμοστούν και κατά την διάρκεια της δοκιμής. Πιο συγκεκριμένα, τα τετραγωνικά δοκίμια αφέθηκαν να χαλαρώσουν υπό ισότροπη φόρτιση 10 kPa έως ότου η κινητική ενέργεια των κόκκων και η σχετική κίνηση των τοιχωμάτων μπορούσαν να θεωρηθούν αμελητέες. Μετά την ολοκλή-

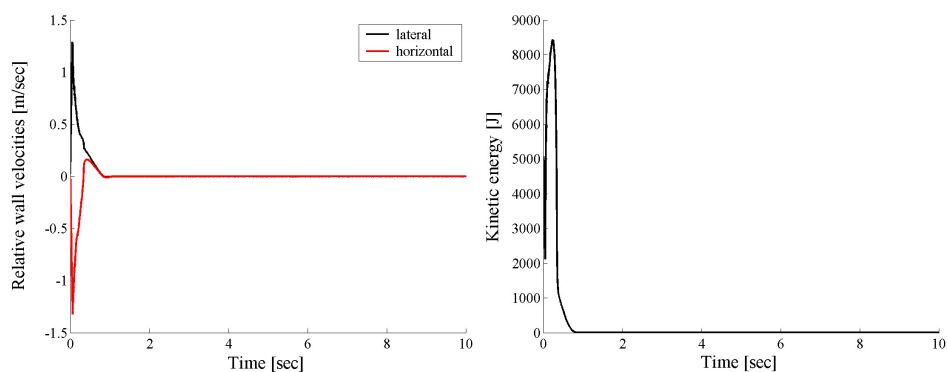
ρωση αυτής της διαδικασίας, οι ταχύτητες των κόκκων τέθηκαν ίσες με το μηδέν και το δοκίμιο ήταν πλέον έτοιμο προς χρήση.

Η αρχική κατάσταση ενός δοκιμίου δίσκων φαίνεται στην Εικ. 3.5, ενώ οι σχε-



Εικόνα 3.5: Δοκίμιο δίσκων πριν την δοκιμή.

τικές ταχύτητες των τοιχωμάτων και η κινητική ενέργεια κατά την διάρκεια της προετοιμασίας φαίνονται στην Εικ. 3.6. Η διαδικασία χαλάρωσης επαναλήφθηκε



Εικόνα 3.6: Διαδικασία χαλάρωσης.

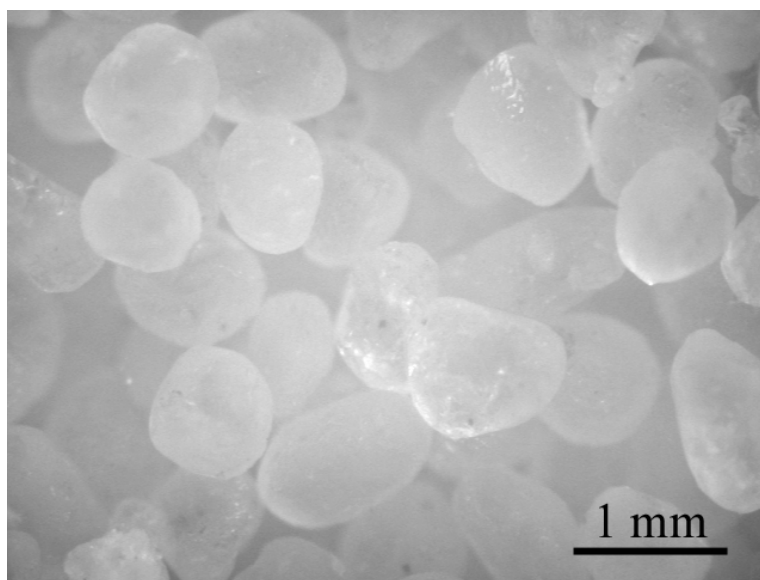
δύο φορές για κάθε δοκίμιο, μια φορά με συντελεστή τριβής ίσο με μηδέν και μία

με συντελεστή τριβής ίσο με 0.5, ώστε να προκύψουν ένα δοκίμιο με υψηλό και ένα με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης. Από αυτή την διαδικασία προέκυψαν 30 δοκίμια, πέντε για κάθε συνδυασμό σχήματος κόκκων και πυκνότητας δοκιμίου, όπου ως πυκνότητα δοκιμίου εννοείται ο υψηλός ή χαμηλός αριθμός συνδιάταξης.

Σημειώνεται ότι μια διαδικασία προετοιμασίας με μηδενικό συντελεστή τριβής θα είχε ως αποτέλεσμα ένα κοκκώδες μέσο εν ισορροπία υπό αποκλειστικά κάθετες δυνάμεις. Αυτή η κατάσταση δεν ανταποκρίνεται στην φυσική πραγματικότητα, επομένως επιλέχθηκε να διασταλεί ελαφρά το δοκίμιο και να συμπιεστεί εκ νέου με συντελεστή τριβής ίσο με 0.5. Το γεγονός ότι η διαστολή είναι μικρή οδηγεί σε υψηλό αριθμό συνδιάταξης, ενώ παράλληλα έχει επιλυθεί το ζήτημα της απουσίας των εφαπτομενικών δυνάμεων.

Επιλέχθηκε να αποδοθούν στα σωματίδια οι ιδιότητες ενός καλά καταγεγραμμένου υλικού. Ως τέτοιο επιλέχθηκε η άμμος Ottawa 20-30. Είναι μια λεπτή, σχετικά ομογενής άμμος με στρογγυλεμένους κόκκους, η οποία αποτελείται κατά κύριο λόγο (99.8 %) από διοξείδιο του πυριτίου (χαλαζία). Μια μικροσκοπική της εικόνα φαίνεται στην 3.7.

Οι βασικές ιδιότητες της άμμου Ottawa που χρησιμοποιήθηκαν στις προσο-



Εικόνα 3.7: Μικροσκοπική εικόνα της άμμου Ottawa 20-30, (Evans, 2005).

μοιώσεις μπορούν να βρεθούν στον Πίνακα 3.1. Όσον αφορά στις μηχανικές ιδιότητες, χρησιμοποιήθηκαν το ελαστικό μέτρο και ο λόγος Poisson του χαλαζία:

<i>Ιδιότητα</i>	<i>Τιμή</i>
Πυκνότητα ρ	$2.65 \cdot 10^{-3} \text{ gr/mm}^3$
Θερμική αγωγιμότητα k	$8.0 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
Ειδική θερμοχωρητικότητα C_p 20°	$2.3 \text{ MJ}/(\text{m}^{-3} \text{ K})$

Πίνακας 3.1: Ιδιότητες της άμμου Ottawa 20-30.

$E = 75 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.17$.

Τα δοκίμια ονομάστηκαν σύμφωνα με την σύμβαση gX_fY_ZZ. Το X είναι ίσο με 1, 2, ή 3, για δοκίμια δίσκων, δωδεκαγώνων και εξαγώνων, αντίστοιχα, και Y ίσο με d ή l, για δοκίμια με υψηλό και χαμηλό αριθμό συνδιάταξης αντίστοιχα. Το ZZ κυμαίνεται από 1 ως 5 και υποδηλώνει τον αύξοντα αριθμό του δοκιμίου. Για παράδειγμα g3_fd_01 είναι το πρώτο δοκίμιο εξαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

3.5 Δοκιμή

Όμοιες διαξονικές δοκιμές πραγματοποιήθηκαν σε όλα τα δοκίμια, ανεξάρτητα από την μέθοδο προετοιμασίας και το σχήμα των κόκκων. Η φόρτιση που εφαρμόστηκε κατά την διάρκεια της προετοιμασίας, ίση με 10 kPa, εφαρμόστηκε στο δοκίμιο μέσω των πλαϊνών τοιχωμάτων. Σημειώνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται με την μορφή δυνάμεων και όχι τάσεων. Επομένως οι δυνάμεις που εφαρμόστηκαν στα πλαϊνά τοιχώματα ήταν χρονοεξαρτώμενες, ώστε να είναι οι τάσεις σταθερές στο χρόνο.

Το κάτω τοίχωμα παρέμεινε σταθερό, ενώ το πάνω εκινείτο με σταθερή ταχύτητα ίση με 0.01 m/sec. Η συγκεκριμένη τιμή επιλέχθηκε ώστε η δοκιμή να λάβει χώρα υπό οιονεί στατικές συνθήκες. Ο δείκτης αδράνειας I ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του λόγου του μέτρου των αδρανειακών δυνάμεων προς το μέτρο των στατικών δυνάμεων:

$$I = \sqrt{\frac{f_{imp}}{f_{stat}}} \quad (3.5.1)$$

Ως αποτέλεσμα ο δείκτης αδράνειας είναι ένα μέτρο της σημασίας των αδρανειακών δυνάμεων. Αν

$$I < 10^{-3}$$

μπορεί να θεωρηθεί ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στην οιονεί στατική περιοχή, γεγονός που σημαίνει ότι όλη η απόσβεση ενέργειας πραγματοποιείται με την μορφή ενέργειας λόγω τριβής και ότι τόσο οι γραμμικές όσο και οι γωνιακές επιταχύνσεις μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Για τις αδρανειακές δυνάμεις

$$f_{imp} = \frac{m \|\mathbf{v}\|}{\delta t}$$

ή

$$f_{imp} = \frac{m d}{\delta t^2}$$

όπου d είναι η μέση διάμετρος των κόκκων και m είναι η μέση μάζα των κόκκων. Ως χρονική κλίμακα μπορεί να θεωρηθεί το αντίστροφο του ρυθμού της τροπής:

$$\delta t = \dot{\epsilon}_{yy}^{-1}$$

Για τις στατικές δυνάμεις,

$$f_{stat} = \sigma_{yy} d^{D-1}$$

όπου D είναι ο αριθμός των διαστάσεων. Έτσι προκύπτει

$$I = \dot{\epsilon}_{yy} \sqrt{\frac{m}{\sigma_{yy} d^{D-2}}}$$

το οποίο για δύο διαστάσεις ισοδυναμεί με

$$I = \dot{\epsilon}_{yy} \sqrt{\frac{m}{\sigma_{yy}}} \quad (3.5.2)$$

Για την επιλεγμένη τιμή της ταχύτητας, 0.01 m/sec, η τιμή του δείκτη αδράνειας είναι

$$I < 10^{-4}$$

Οι δοκιμές τερματίστηκαν σε μετατοπίσεις ίσες με το 20% του ύψους του δοκιμίου, το οποίο ήταν περίπου ίσο με 10.5 m. Στον Πίνακα 3.2 περιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά όλων των δοκιμών πριν την δοκιμή.

Όνομα	Αριθμός κόκκων	Αριθμός συνδιάταξης		Πορώδες
		Ολικός	Ενεργός	
g1_fl_01	5220	2.4	3.1	0.16
g1_fd_01	5220	2.8	3.2	0.15
g2_fl_01	5220	2.2	3.0	0.17
g2_fd_01	5220	2.6	3.1	0.15
g3_fl_01	5220	2.2	2.9	0.16
g3_fd_01	5220	2.5	3.0	0.13
g1_fl_02	5193	2.5	3.1	0.16
g1_fd_02	5193	2.7	3.2	0.16
g2_fl_02	5193	2.2	3.0	0.17
g2_fd_02	5193	2.6	3.1	0.15
g3_fl_02	5193	2.2	3.0	0.16
g3_fd_02	5193	0.25	3.0	0.13
g1_fl_03	5282	2.4	3.1	0.17
g1_fd_03	5282	2.7	3.2	0.16
g2_fl_03	5282	2.2	3.0	0.17
g2_fd_03	5282	2.5	3.1	0.15
g3_fl_03	5282	2.2	3.0	0.16
g3_fd_03	5282	0.26	3.1	0.13
g1_fl_04	5258	2.4	3.1	0.16
g1_fd_04	5258	2.7	3.2	0.16
g2_fl_04	5258	2.3	3.0	0.17
g2_fd_04	5258	2.5	3.1	0.15
g3_fl_04	5258	2.2	3.0	0.16
g3_fd_04	5258	2.5	3.0	0.13
g1_fl_05	5191	2.4	3.1	0.17
g1_fd_05	5191	2.7	3.2	0.16
g2_fl_05	5191	2.2	3.0	0.17
g2_fd_05	5191	2.6	3.1	0.15
g3_fl_05	5191	2.2	2.9	0.16
g3_fd_05	5191	2.5	3.0	0.14

Πίνακας 3.2: Κατάλογος δοκιμίων.

3.6 Επεξεργασία αποτελεσμάτων

Ο στόχος της επεξεργασίας των αποτελεσμάτων είναι ο υπολογισμός κάποιων ποσοτήτων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στο σύνολο ή σε μέρος του δοκιμίου. Οι υπολογισμοί επικεντρώνονται κατά κύριο λόγο στα σωματίδια.

Μεταξύ των ποσοτήτων αυτών είναι το πορώδες, ο αριθμός συνδιάταξης και ο προσανατολισμός των επαφών. Η διαδικασία υπολογισμού αυτών των ποσοτήτων περιγράφεται σε αυτή την παράγραφο.

Οι τάσεις υπολογίστηκαν με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση υπολογίστηκαν οι ασκούμενες στα τοιχώματα δυνάμεις και διαιρέθηκαν δια της επιφάνειας του τοιχώματος που βρίσκεται σε επαφή με το δοκίμιο. Στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η σχέση που εξήχθη στις Παραγράφους 2.3 και 2.4. Τα αποτελέσματα ήταν πανομοιότυπα.

Η τροπή υπολογίστηκε επίσης με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν οι θέσεις των τοιχωμάτων, ενώ στην δεύτερη περίπτωση η σχέση που εισήχθη από την Tordesillas (Tordesillas and Muthuswamy, 2008), η οποία βασίζεται στο θεώρημα απόκλισης του Gauss. Η μέθοδος περιγράφεται πιο αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο. Όπως και για την περίπτωση του ταυστή των τάσεων, τα αποτελέσματα των δύο προσεγγίσεων ήταν πανομοιότυπα. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο κώδικας για τον υπολογισμό των εσωτερικών τάσεων και τροπών είναι ορθός και ικανοποιητικής ακρίβειας για να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα σε περιοχές του δοκιμίου, όπου η παραδοσιακή μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Προκειμένου να υπολογιστεί το πορώδες υπολογίστηκε ο όγκος του δοκιμίου από τη σχετική θέση των τοιχωμάτων και αφαιρέθηκε ο όγκος των κόκκων. Το πορώδες προκύπτει ως ο ολικός όγκος μείον τον όγκο των κόκκων, δια του συνολικού όγκου. Το ενεργό πορώδες προκύπτει ανάλογα, με τη μόνη διαφορά ότι υπολογίζεται ο όγκος των κόκκων που διαθέτουν τουλάχιστον μια επαφή.

Ο αριθμός συνδιάταξης προκύπτει από τον αριθμό των επαφών, πολλαπλασιασμένο επί δύο και διαιρεμένο δια του αριθμού των κόκκων.

Για τον υπολογισμό του προσανατολισμού των επαφών το εύρος των πιθανών προσανατολισμών $[0, 2\pi]$ διαιρέθηκε σε 36 ίσους τομείς. Οι επαφές σε κάθε τομέα μετρήθηκαν και διαιρέθηκαν δια τον συνολικό αριθμό των επαφών. Για τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις κάθετες και τις εφαπτομενικές δυνάμεις, η μέση

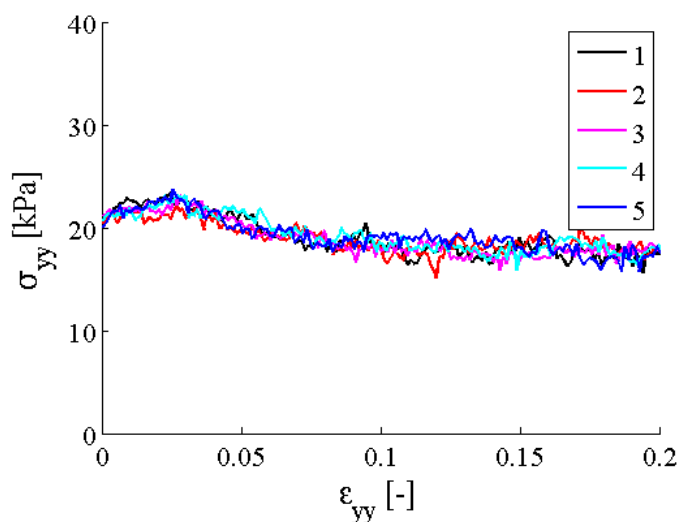
κάθετη και η μέση εφαπτομενική δύναμη υπολογίστηκαν για κάθε τομέα και τα αποτελέσματα διαιρέθηκαν δια την συνολική μέση δύναμη ανά επαφή.

Ο υπολογισμός των παραπάνω ποσοτήτων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση ενός κώδικα σε Fortran90, ο οποίος προγραμματίστηκε επί τούτου. Ο εν λόγω κώδικας μπορεί να βρεθεί στο Παράρτ. Β.1. Η είσοδος του κώδικα αυτού είναι η έξοδος της LMGC90, δηλαδή οι θέσεις και οι ταχύτητες των κόκκων και οι θέσεις και οι δυνάμεις των επαφών.

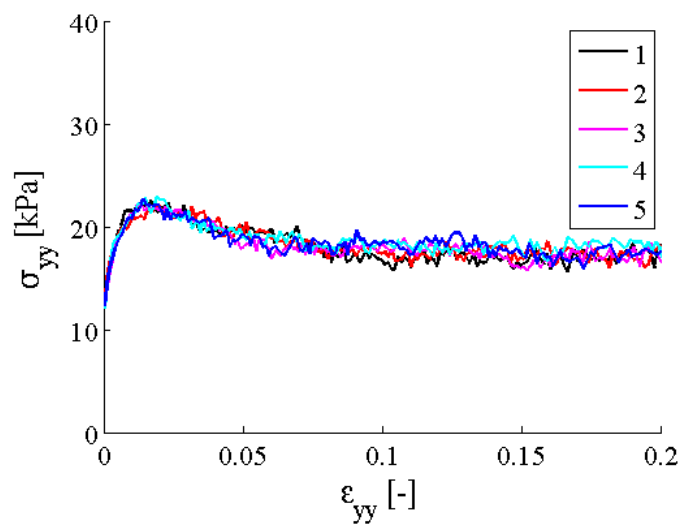
3.7 Καμπύλες τάσεων και τροπών

Προκειμένου να επιβεβαιωθεί η καταλληλότητα της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για των υπολογισμό των τάσεων και των τροπών, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με εκείνα που προέκυψαν από τις δυνάμεις και τις μετατοπίσεις των τοιχωμάτων, αντίστοιχα. Η συμφωνία βρέθηκε να είναι άριστη, υπό την έννοια ότι δεν ήταν δυνατόν να διακριθεί η διαφορά στα γραφήματα.

Στις Εικς. 3.8 ως 3.13 δίνεται η κάθετη τάση ως συνάρτηση της κάθετης τροπής για κάθε συνδυασμό σχήματος κόκκων και αριθμού συνδιάταξης. Ως εκ τούτου, σε

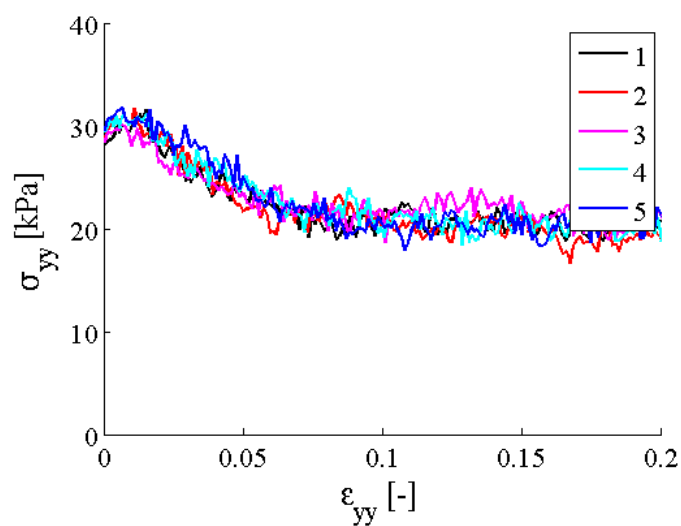


Εικόνα 3.8: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δίσκων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

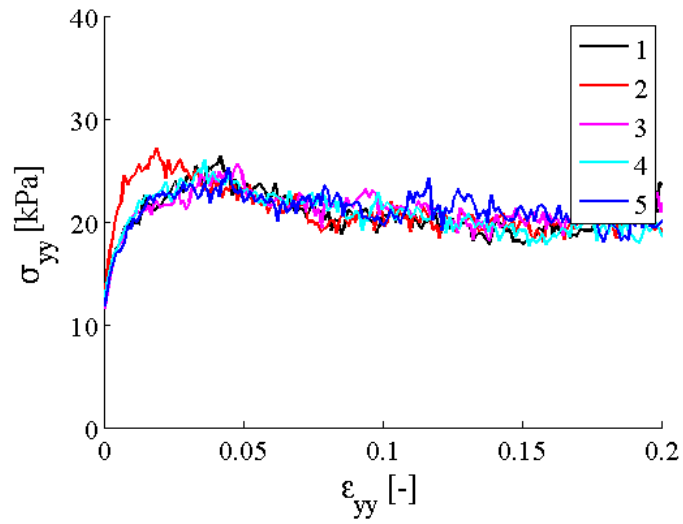


Εικόνα 3.9: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δίσκων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

κάθε σχήμα εμφανίζονται τα αποτελέσματα για πέντε δοκίμια. Μπορεί να παρατη-

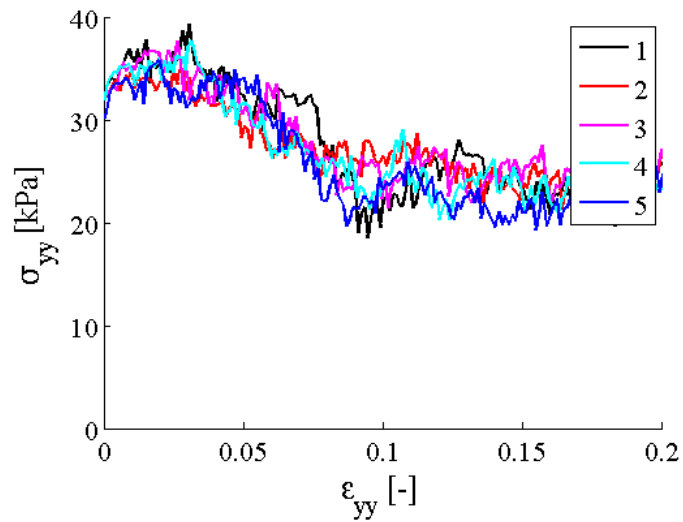


Εικόνα 3.10: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

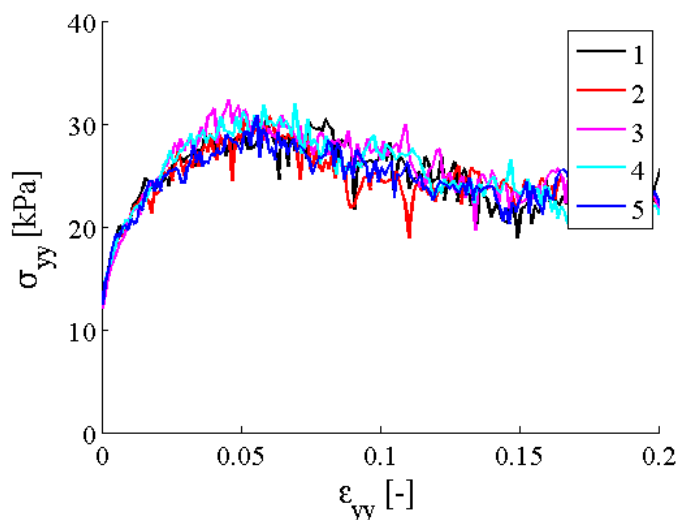


Εικόνα 3.11: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δωδεκαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

ρηθεί ότι δείγματα με αρχικά χαμηλό αριθμό συνδιάταξης εμφανίζουν ένα πρώτο



Εικόνα 3.12: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια εξαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

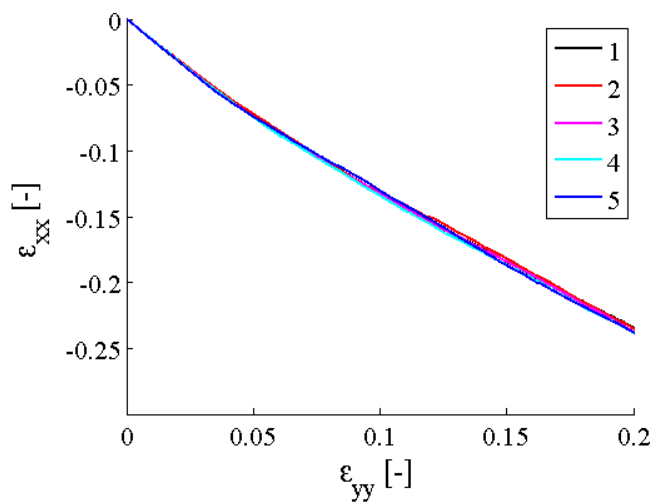


Εικόνα 3.13: Τάση ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια εξαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

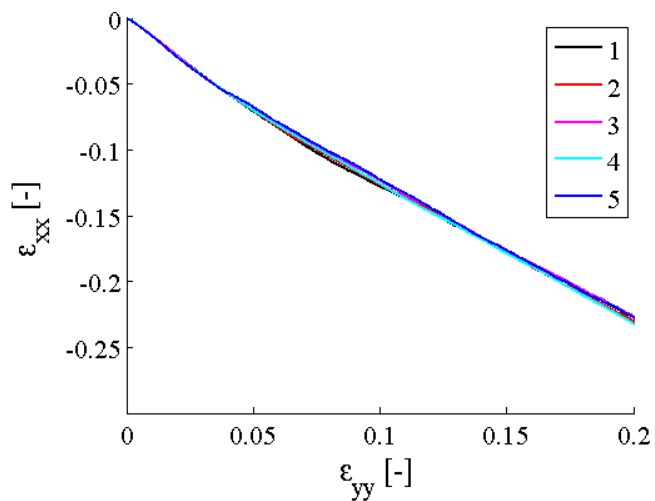
στάδιο κράτνσης, ενώ δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης έχουν πολύ υψηλή αρχική ακαμψία. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αρχική κράτνση που παρατηρείται σε δοκίμια με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης δεν μπορεί να αποδοθεί στην ελαστικότητα, καθώς έχει γίνει η υπόθεση ότι οι κόκκοι δεν είναι παραμορφώσιμοι.

Μπορεί να παρατηρηθεί ακόμα ότι η μέγιστη τάση σε δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης είναι γενικά υψηλότερη από την μέγιστη τάση σε δοκίμια με τον ίδιο τύπο κόκκων και με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης. Επιπλέον, η μέγιστη κάθετη τάση που παρατηρήθηκε σε δοκίμια δωδεκαγώνων με υψηλό ή χαμηλό αριθμό συνδιάταξης είναι υψηλότερη από την μέγιστη τάση σε δοκίμια δίσκων με υψηλό ή χαμηλό αριθμό συνδιάταξης αντίστοιχα. Το αντίθετο ισχύει όταν συγκρίνεται η μέγιστη τάση σε δοκίμια δωδεκαγώνων με εκείνη στα αντίστοιχα δοκίμια εξαγώνων.

Στις Εικς. 3.14 ως 3.19 παρουσιάζεται η οριζόντια προς την κάθετη τροπή για κάθε συνδυασμό σχήματος κόκκων και αριθμού συνδιάταξης. Όπως πριν, σε κάθε εικόνα δίνονται τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε πέντε δοκίμια. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι τα αποτελέσματα για όλα τα δοκίμια ενός συγκεκριμένου τύπου βρίσκονται σε καλή συμφωνία. Εν γένει οι οριζόντιες τροπές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις κάθετες τροπές και κάπως μεγαλύτερες. Το γεγονός αυτό είναι σε

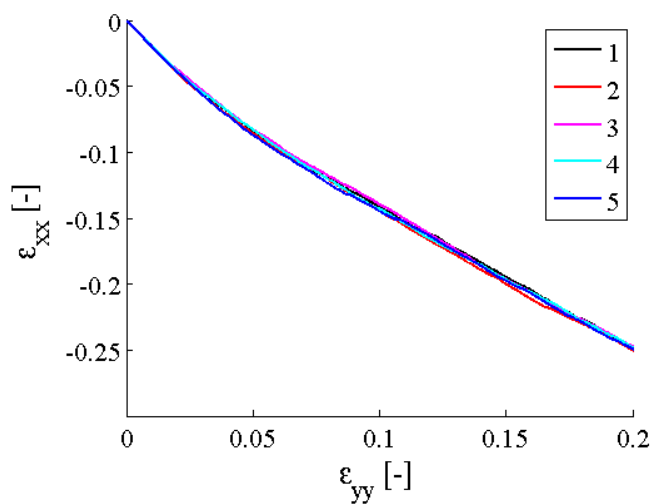


Εικόνα 3.14: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δίσκων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

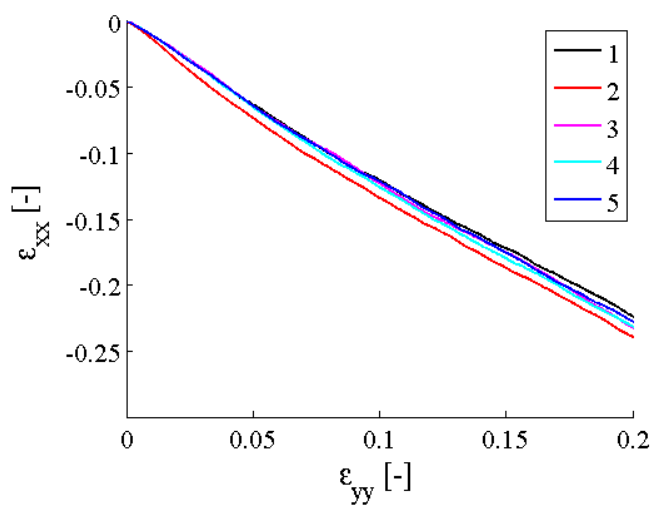


Εικόνα 3.15: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δίσκων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

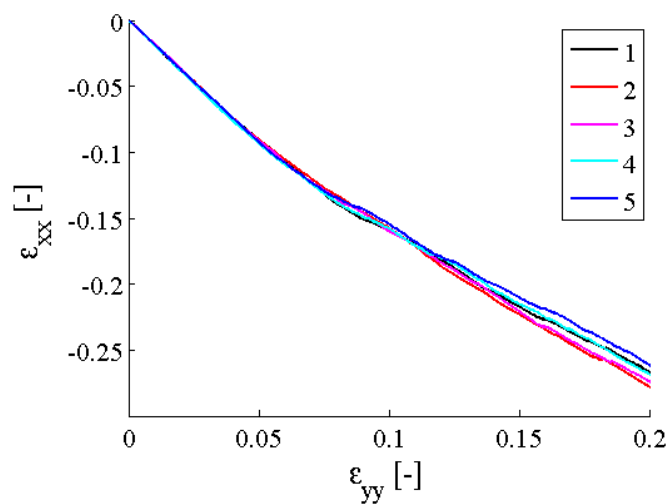
συμφωνία με το ότι τα δοκίμια κοκκωδών υλικών τείνουν να διαστέλλονται όταν υποβάλλονται σε αλλαγές του σχήματός τους. Οι οριζόντιες τροπές είναι ελαφρά



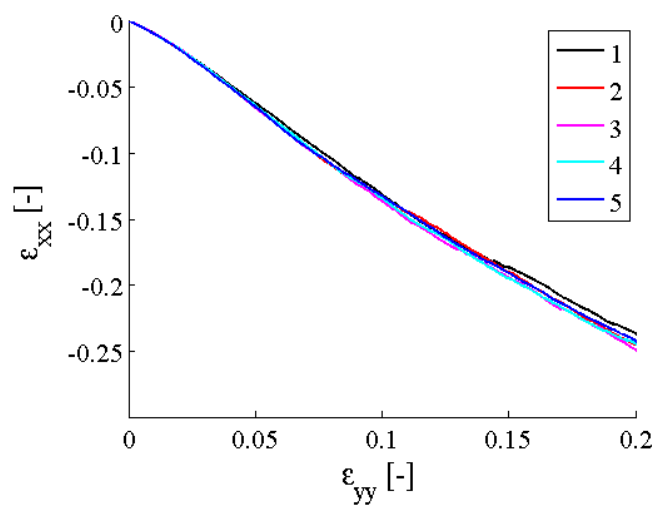
Εικόνα 3.16: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.17: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια δωδεκαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.18: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια εξαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.19: Οριζόντια ως προς κάθετη τροπή για δοκίμια εξαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

μεγαλύτερες για δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης, αλλά η διαφορά είναι μάλλον μικρή.

Με βάση τα διαγράμματα αυτής της παραγράφου μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική.

3.8 Πορώδες

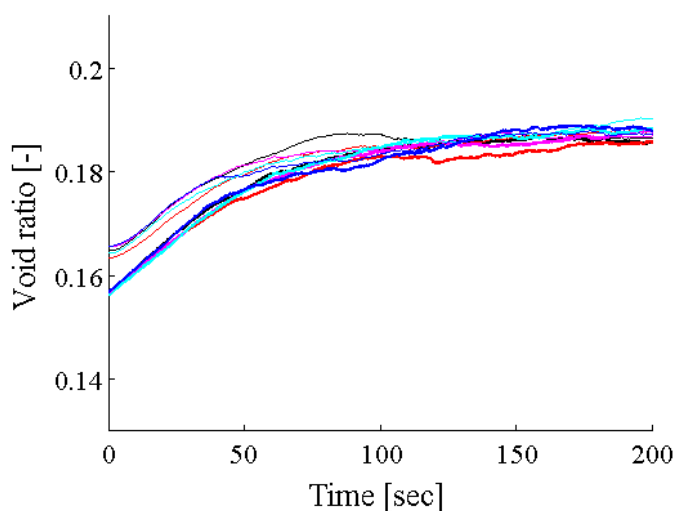
Έστω V ο ολικός όγκος του δοκιμίου. Έστω επιπλέον V_s ο ολικός όγκος των κόκκων. Τότε το πορώδες ορίζεται ως

$$e = \frac{V_v}{V} = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - s \quad (3.8.1)$$

όπου s είναι το στερεό κλάσμα. Πέρα από το πορώδες, υπολογίστηκε επίσης το ενεργό πορώδες. Αυτό ορίζεται ως

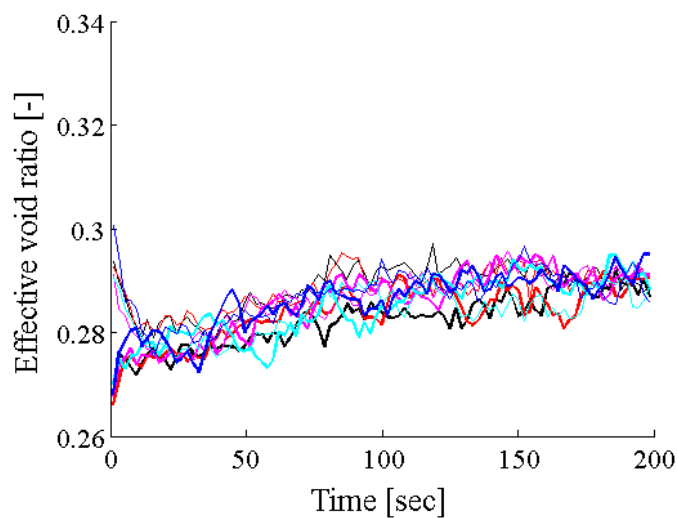
$$e' = \frac{V'_v}{V} = \frac{V - V'_s}{V} = 1 - \frac{V'_s}{V} = 1 - s' \quad (3.8.2)$$

όπου s' είναι το ενεργό στερεό κλάσμα, το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα των όγκων των κόκκων που διαθέτουν τουλάχιστον μια επαφή. Τα σχετικά αποτελέ-

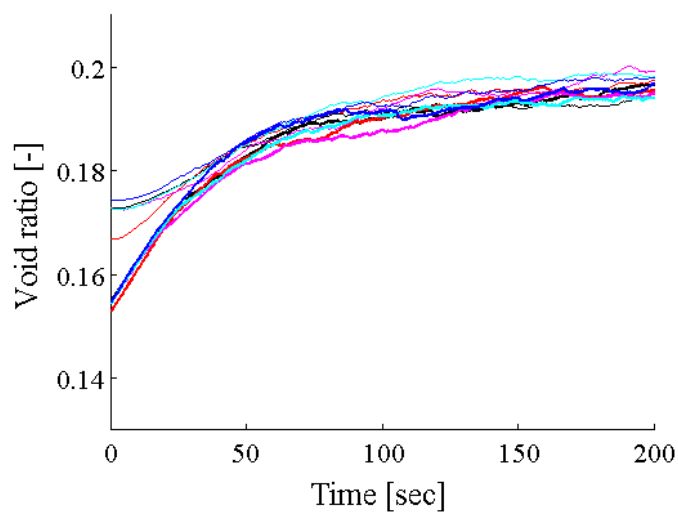


Εικόνα 3.20: Πορώδες για δοκίμια δίσκων.

σματα παρουσιάζονται στις Εικς. 3.20 ως 3.25.

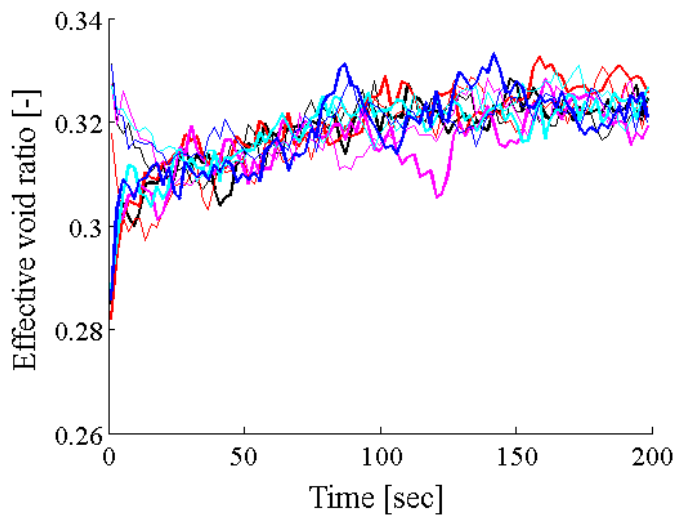


Εικόνα 3.21: Ενεργό πορώδες για δοκίμια δίσκων.

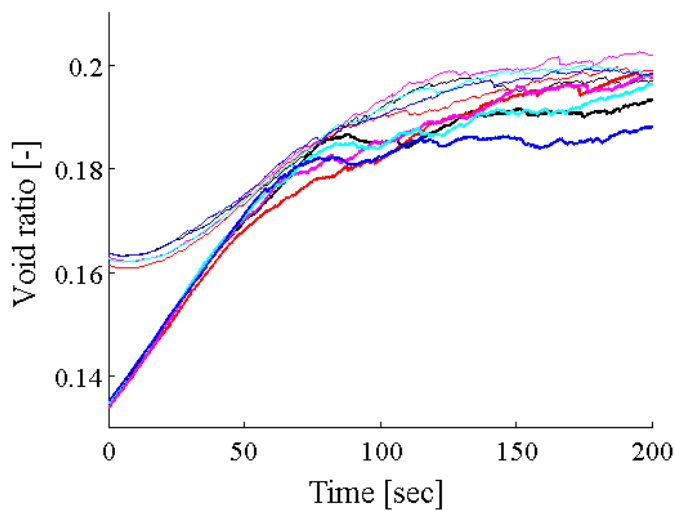


Εικόνα 3.22: Πορώδες για δοκίμια δωδεκαγώνων.

Τα υπομνήματα δεν περιλαμβάνονται λόγω του μεγάλου αριθμού καμπυλών που εμφανίζονται σε κάθε εικόνα (10). Τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς δοκιμίων, όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Οι παχιές



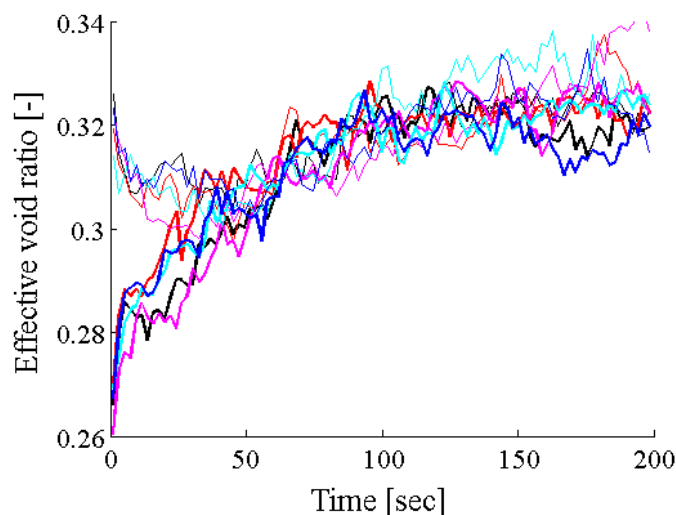
Εικόνα 3.23: Ενεργό πορώδες για δοκίμια δωδεκαγώνων.



Εικόνα 3.24: Πορώδες για δοκίμια εξαγώνων.

γραμμές αντιστοιχούν σε δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης, ενώ οι λεπτές γραμμές σε δοκίμια με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι τα δοκίμια με χαμηλό αρχικό αριθμό συνδιάταξης



Εικόνα 3.25: Ενεργό πορώδες για δοκίμια εξαγώνων.

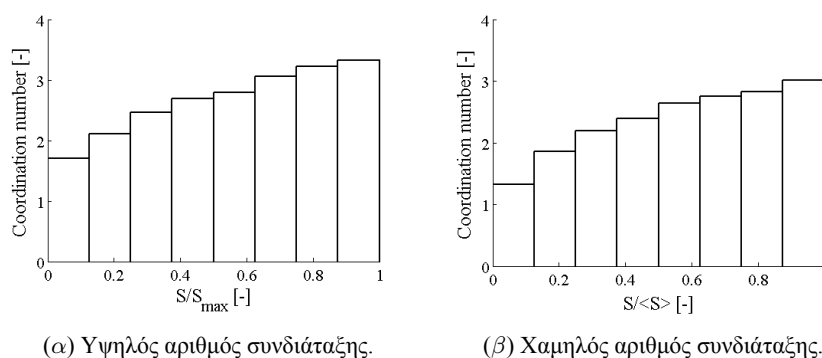
έχουν ένα ελαφρά υψηλότερο αρχικό πορώδες, όπως ήταν αναμενόμενο. Η διαφορά αυτή παρατηρείται σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα από τον τύπο κόκκων των δοκιμίων. Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση των δίσκων, μετά από ένα αρχικό στάδιο, η αρχική διαφορά στα πορώδη μεταξύ δοκιμίων με υψηλό και χαμηλό αριθμό συνδιάταξης παύει να υφίσταται. Το αυτό δεν ισχύει για δοκίμια εξαγώνων. Η αρχική διαφορά στα πορώδη μειώνεται κατά την πρόοδο της δοκιμής, αλλά παραμένει παρούσα μέχρι το τέλος. Σημειώνεται τέλος ότι τα δοκίμια εξαγώνων τείνουν να είναι αρχικά πιο πυκνά σε σχέση με αντίστοιχα δοκίμια δίσκων, αλλά πιο χαλαρά στο τέλος της δοκιμής. Το γεγονός αυτό πρέπει να αποδοθεί στην επίδραση του διαφορετικού σχήματος κόκκων, καθώς μια αντίστοιχη αλλά μικρότερη διαφορά είναι παρούσα κατά τη σύγκριση δοκιμίων δίσκων με δοκίμια εξαγώνων ή δοκιμίων δωδεκαγώνων με δοκίμια εξαγώνων.

Το ενεργό πορώδες είναι σημαντικά υψηλότερο από το αντίστοιχο συνολικό πορώδες. Το ενεργό πορώδες παρουσιάζει επίσης πιο έντονες διακυμάνσεις από το πορώδες, γεγονός που συνδέεται μάλλον με το ότι ο αριθμός και το μέγεθος των κόκκων χωρίς επαφές αλλάζει στο χρόνο με υψηλές συχνότητες. Η κύρια διαφορά μεταξύ του ενεργού και του συνολικού πορώδους είναι ότι το πρώτο παρουσιάζει μια σαφή μείωση στην αρχή της δοκιμής για δοκίμια με χαμηλό αρχικό αριθμό

συνδιάταξης και μια αντίστοιχη αύξηση για δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

3.9 Αριθμός συνδιάταξης

Οι αριθμοί συνδιάταξης που μετρήθηκαν ήταν κάπως χαμηλότεροι από το αναμενόμενο. Σε δύο διαστάσεις ο αριθμός συνδιάταξης για πολύ πυκνά δοκίμια αναμένεται να είναι περί το τέσσερα. Η απόκλιση μπορεί να αποδοθεί εν μέρει στο ευρύ φάσμα των μεγεθών των κόκκων. Κόκκοι με μεγάλη ακτίνα τείνουν να έχουν περισσότερες επαφές, ενώ μικροί κόκκοι τείνουν να έχουν πολύ λίγες. Η κατανομή



Εικόνα 3.26: Κατανομή των επαφών σε σχέση με την επιφάνεια των όγκων.

των επαφών για το πρώτο δοκίμιο δίσκων για χαμηλό και για υψηλό αριθμό συνδιάταξης αντίστοιχα δίνονται στην Εικ. 3.26.

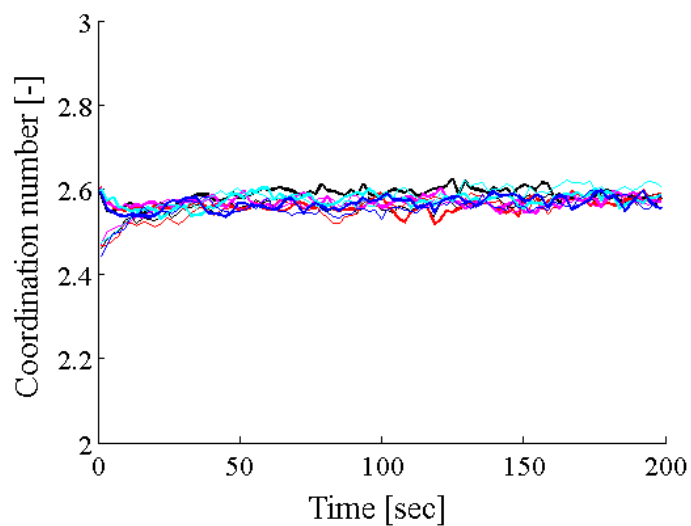
Όπως και για το πορώδες, τόσο ο αριθμός συνδιάταξης, όσο και ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης παρουσιάζονται γραφικά. Ο αριθμός συνδιάταξης ορίζεται ως ο μέσος αριθμός επαφών ανά κόκκο

$$Coor_num := 2 \frac{n_c}{n_g} \quad (3.9.1)$$

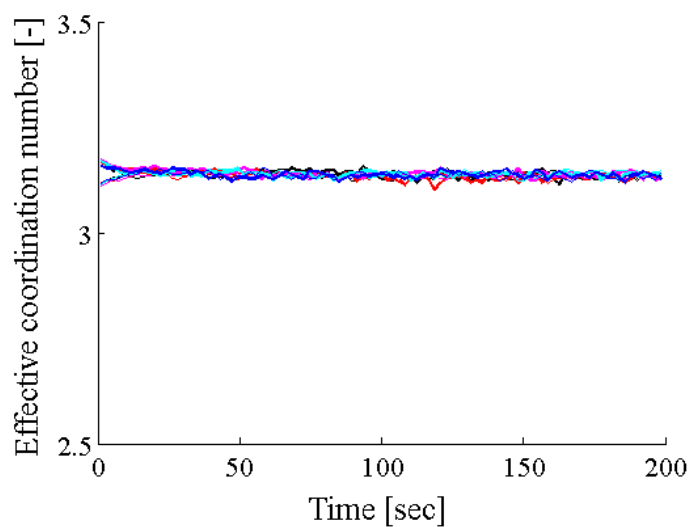
όπου n_c είναι ο αριθμός των επαφών και n_g είναι ο αριθμός των κόκκων. Ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης ορίζεται ως ο μέσος αριθμός επαφών ανά κόκκο που διαθέτει τουλάχιστον μια επαφή

$$Eff_coor_num := 2 \frac{n_c}{n_g - n_r} \quad (3.9.2)$$

όπου n_r είναι ο αριθμός των κόκκων που δεν διαθέτουν επαφές. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις Εικς. 3.27 ως 3.32. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο,

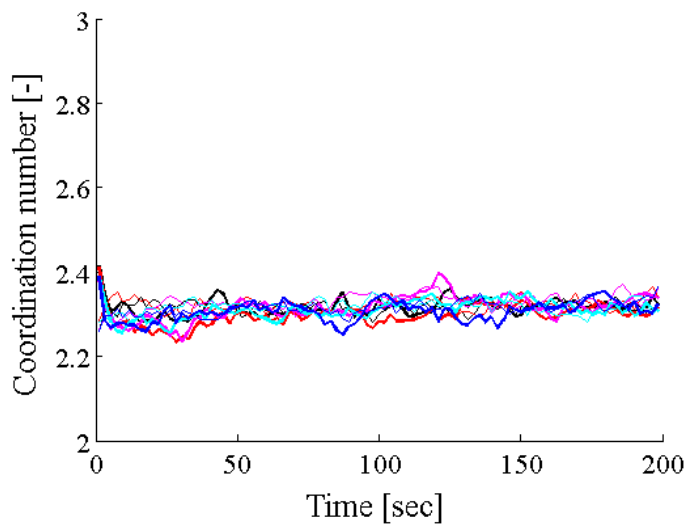


Εικόνα 3.27: Αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των δίσκων.

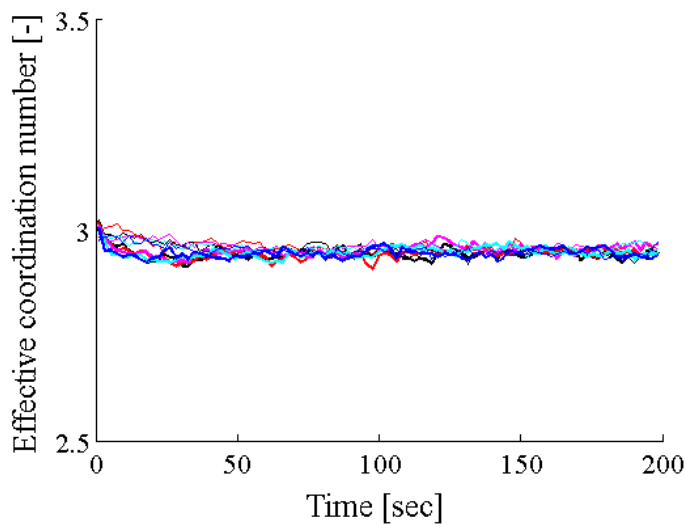


Εικόνα 3.28: Ενεργός αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των δίσκων.

τα υπομνήματα δεν περιλαμβάνονται λόγω του μεγάλου αριθμού καμπυλών που περιέχονται σε κάθε γράφημα (10). Τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αύξοντες αριθμούς δοκιμίων, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο.

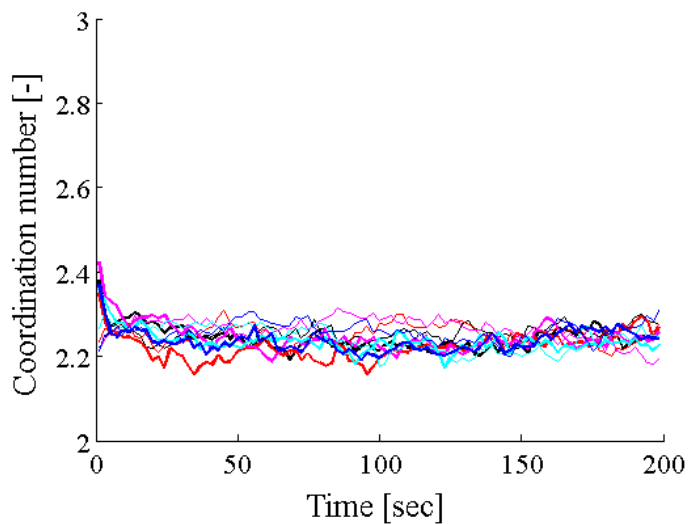


Εικόνα 3.29: Αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των δωδεκαγώνων.

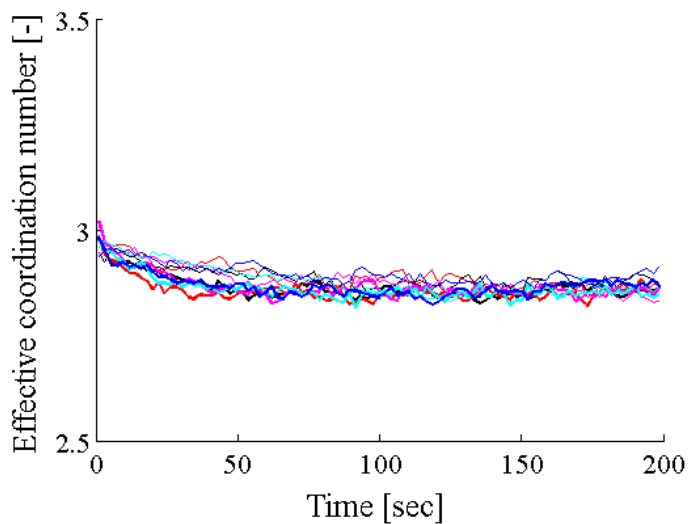


Εικόνα 3.30: Ενεργός αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των δωδεκαγώνων.

Οι παχιές γραμμές αντιστοιχούν σε δοκίμια με υψηλό αρχικό αριθμό συνδιάταξης, ενώ οι λεπτές γραμμές αντιστοιχούν σε δοκίμια με χαμηλό αρχικό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.31: Αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των εξαγώνων.



Εικόνα 3.32: Ενεργός αριθμός συνδιάταξης για τα δοκίμια των εξαγώνων.

Η αρχική διαφορά στην τιμή του αριθμού συνδιάταξης για δοκίμια του ίδιου τύπου κόκκων μειώνεται ραγδαία κατά τη διάρκεια της δοκιμής. Επιπλέον, όπως ήταν αναμενόμενο, όσο πιο γωνιώδεις ήταν οι κόκκοι, τόσο μικρότερος ήταν ο πα-

ρατηρηθείς αριθμός συνδιάταξης. Στο σύνολο, η συμφωνία των αποτελεσμάτων για δοκίμια του ίδιου τύπου ήταν ικανοποιητική για τον αριθμό συνδιάταξης, αλλά ακόμα περισσότερο για τον ενεργό αριθμό συνδιάταξης.

Επιπρόσθετα μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης για τους δίσκους, σε αντίθεση με τον αριθμό συνδιάταξης για το ίδιο σχήμα κόκκων, ήταν πρακτικά σταθερός κατά τη διάρκεια της δοκιμής. Δεν ισχύει το ίδιο για τα εξάγωνα, όπου ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης επιδεικνύει μια αρχική μείωση, πριν αποκτήσει μια προσεγγιστικά σταθερή τιμή. Η συμπεριφορά των δοκιμών των δωδεκαγώνων είναι ενδιάμεση μεταξύ των δύο, υποδεικνύοντας έτσι ότι το φαινόμενο σχετίζεται με το σχήμα των κόκκων.

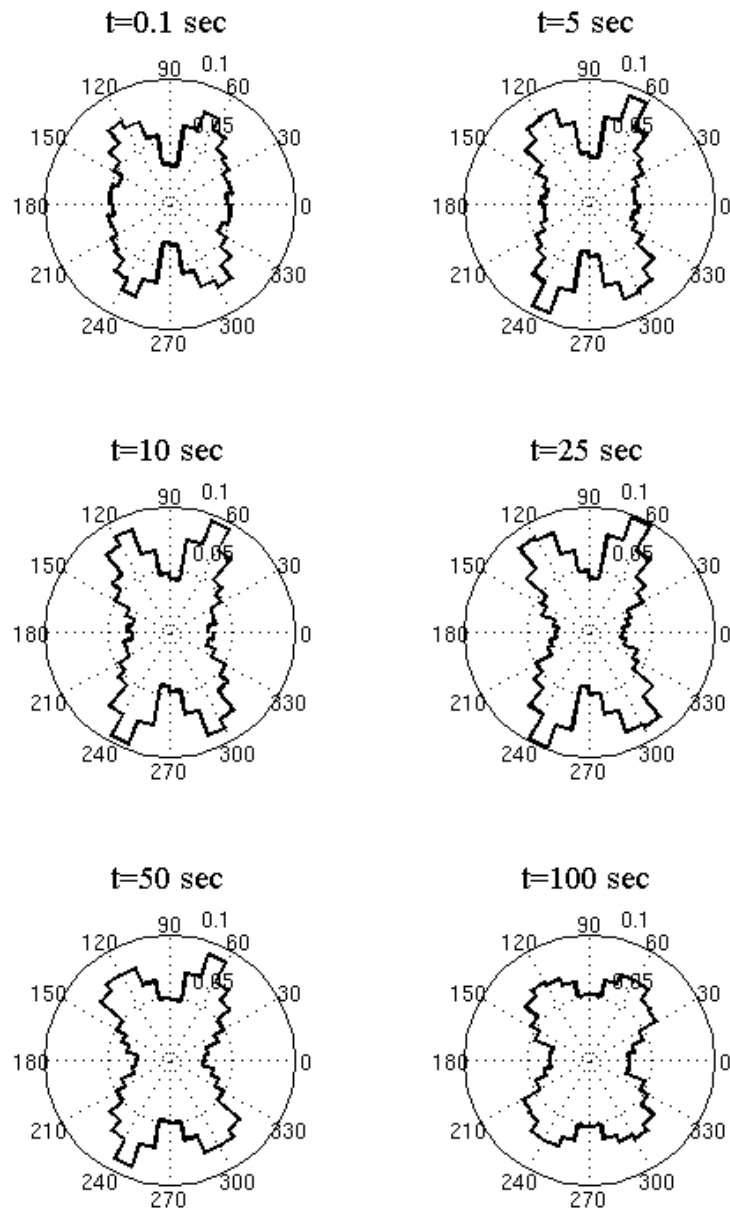
3.10 Προσανατολισμός των επαφών

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται ο προσανατολισμός των επαφών. Σχεδιάζονται τα πολικά διαγράμματα για την κατανομή των επαφών για ένα χαλαρό και ένα πυκνό δοκίμιο για κάθε σχήμα κόκκων.

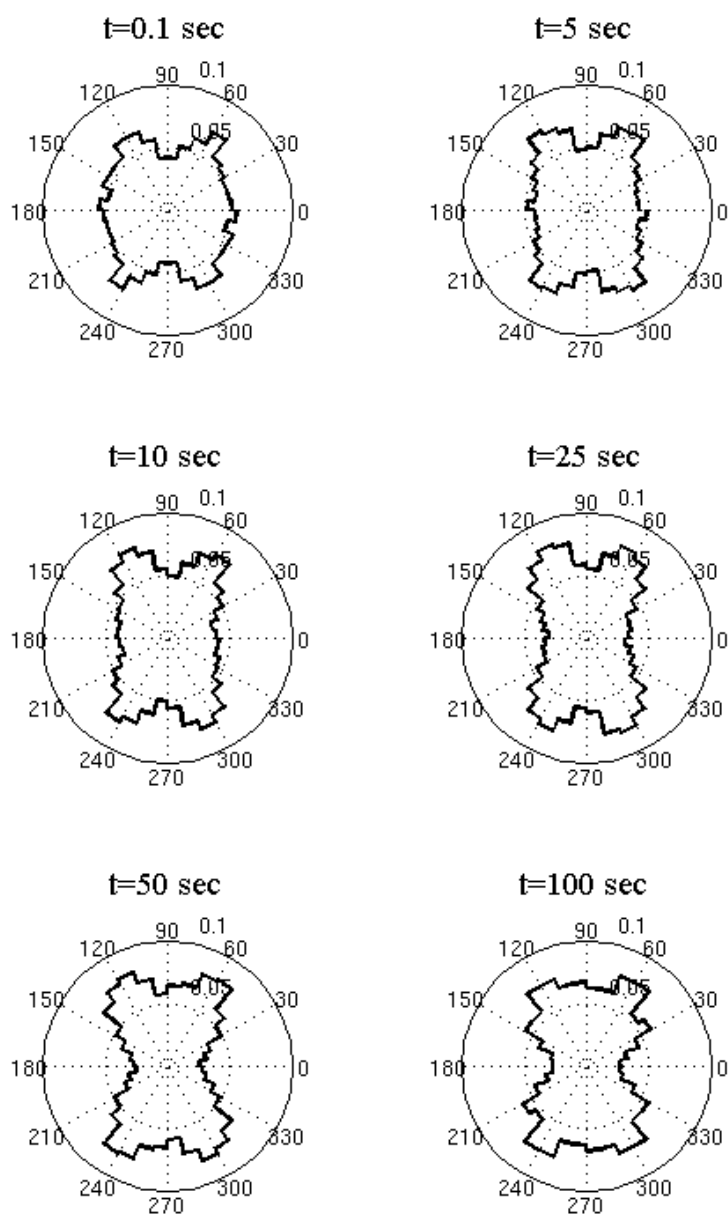
Στις Εικς. 3.33, 3.34 και 3.35 δίνονται οι προσανατολισμοί των επαφών για διαφορετικές χρονικές στιγμές για το πρώτο δοκίμιο δίσκων, εξαγώνων και δωδεκαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης. Στις Εικς. 3.36, 3.37 και 3.38 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την ένταση των καθέτων δυνάμεων. Τα αποτελέσματα για την κατανομή των εφαπτομενικών δυνάμεων δεν δίνονται. Τα τελευταία βρέθηκαν να είναι παρόμοια με εκείνα των καθέτων δυνάμεων, με τη μόνη διαφορά ότι στην περίπτωση των εφαπτομενικών δυνάμεων η ανισοτροπία ήταν λιγότερο έντονη.

Στις Εικς. 3.39, 3.40 και 3.41 δίνεται ο προσανατολισμός των επαφών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές για το πρώτο δοκίμιο δίσκων, εξαγώνων και δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης αντίστοιχα. Στις Εικς. 3.42, 3.43 και 3.44 δίνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις κάθετες δυνάμεις. Όπως και πριν, τα αποτελέσματα για τις εφαπτομενικές δυνάμεις δεν παρουσιάζονται.

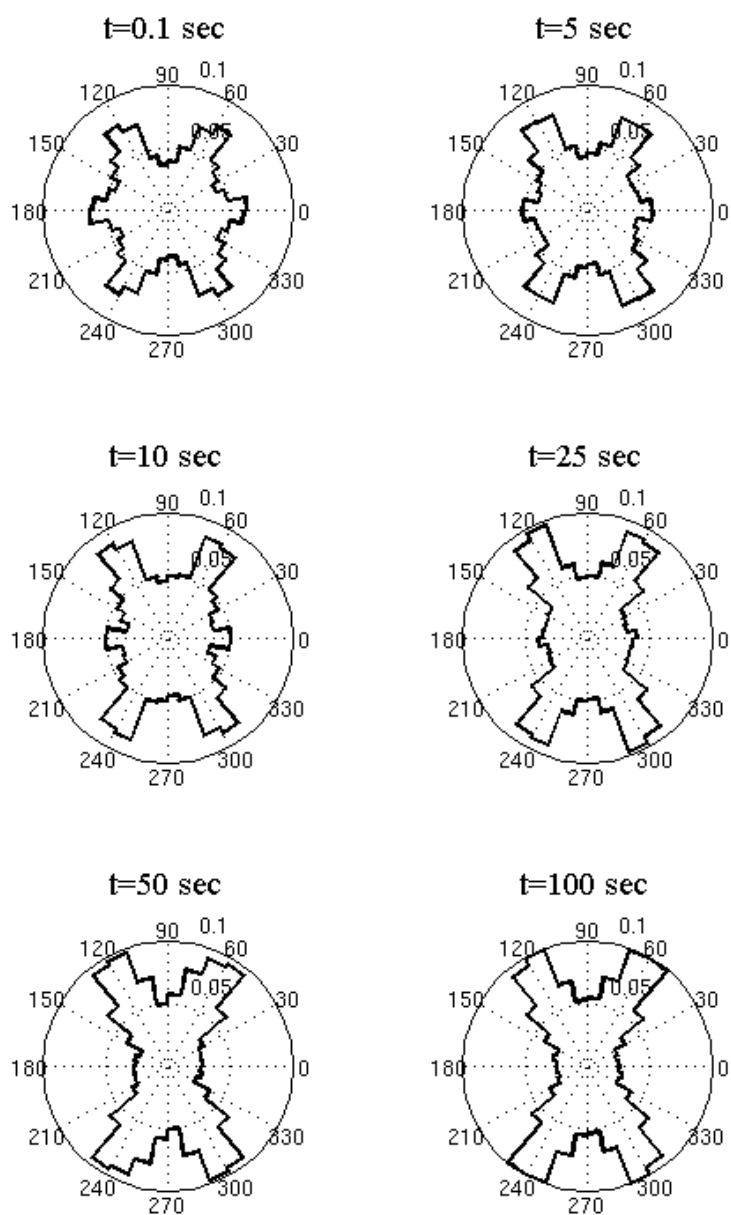
Παρατηρείται ότι η αρχικά ισότροπη κατανομή των επαφών γίνεται ανισότροπη κατά την διάρκεια της φόρτισης για όλα τα σχήματα κόκκων. Η ανισοτροπία φαίνεται ωστόσο να αυξάνει με την αύξηση της απόκλισης του σχήματος των κόκκων από το κυκλικό. Γενικά ο προσανατολισμός των επαφών επιδεικνύει μια πιο έντονη ανισοτροπία από τις δυνάμεις.



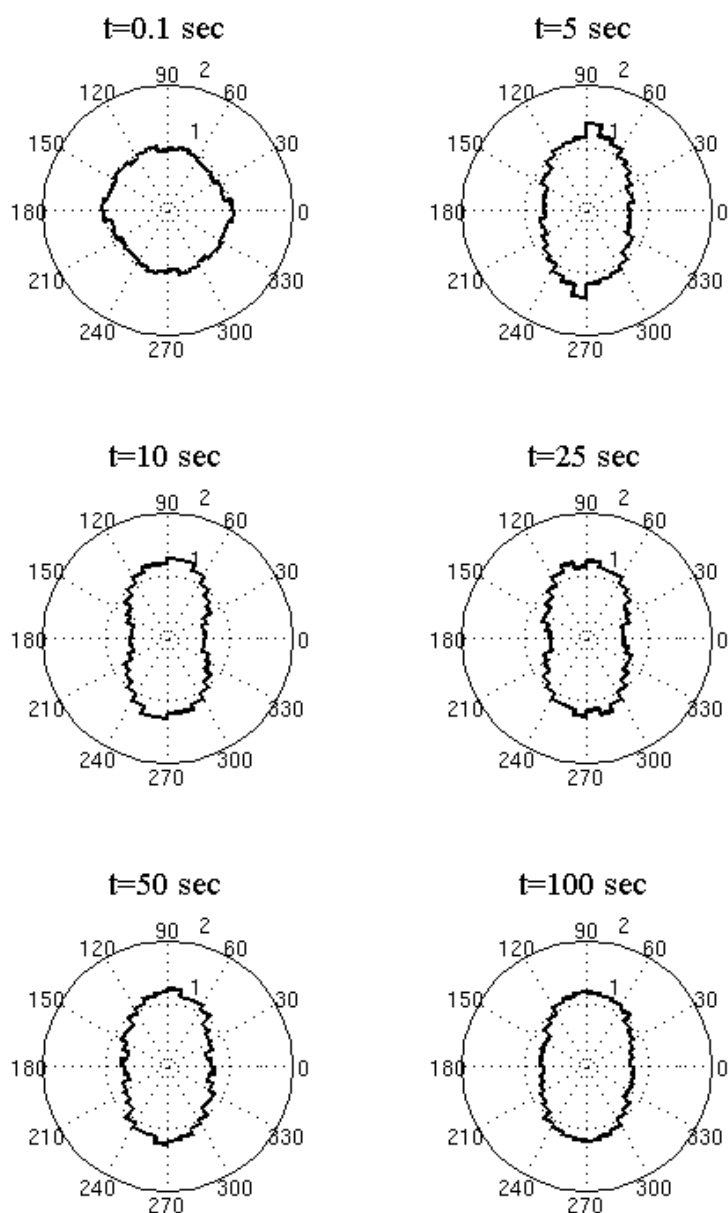
Εικόνα 3.33: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο δίσκων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



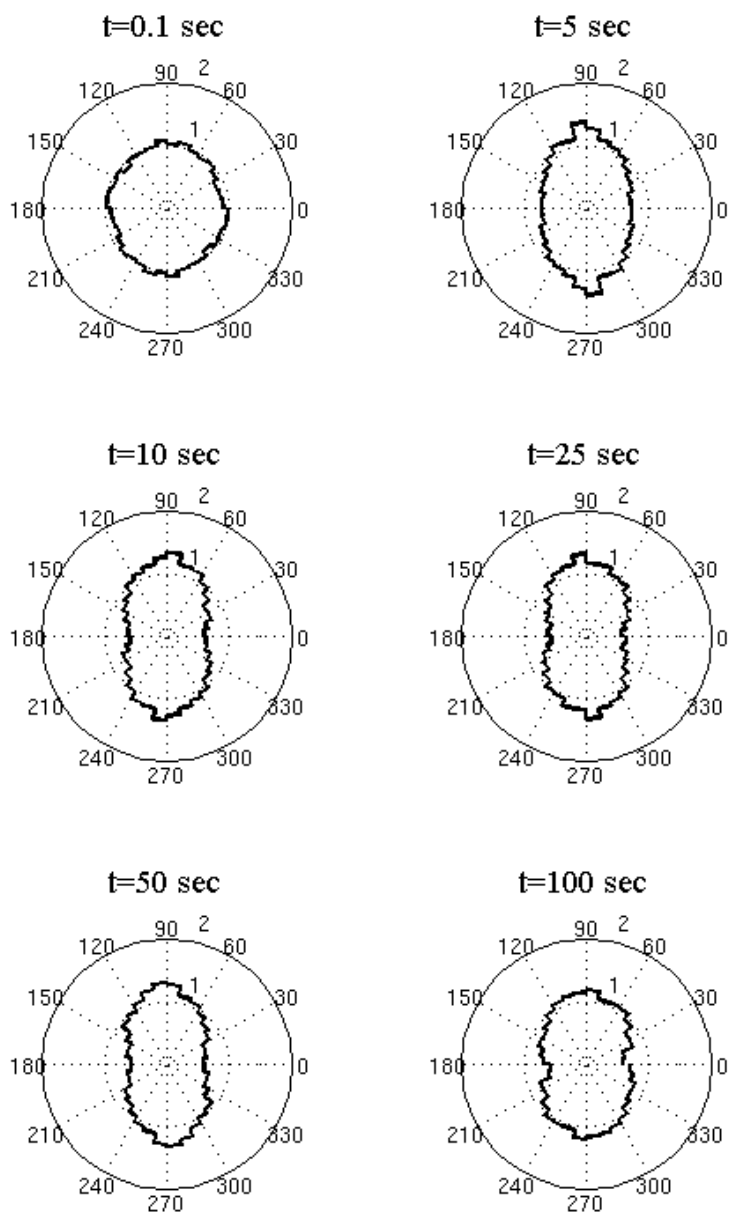
Εικόνα 3.34: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο δωδεκαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



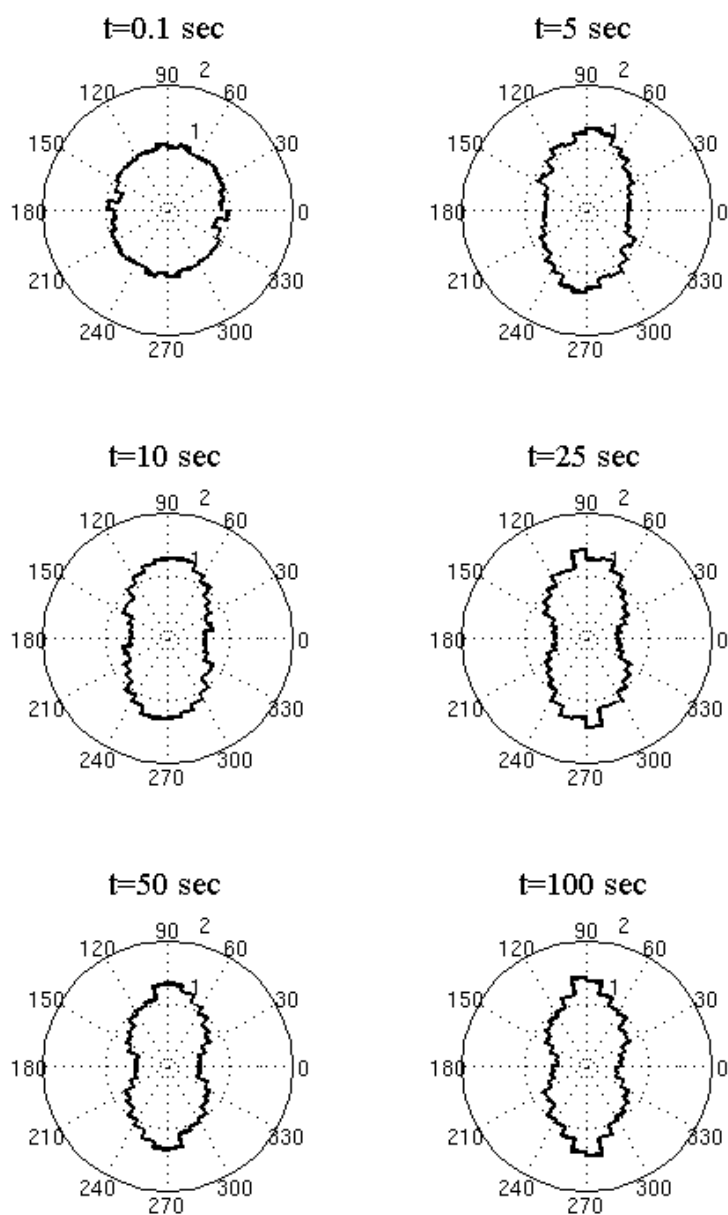
Εικόνα 3.35: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο εξαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



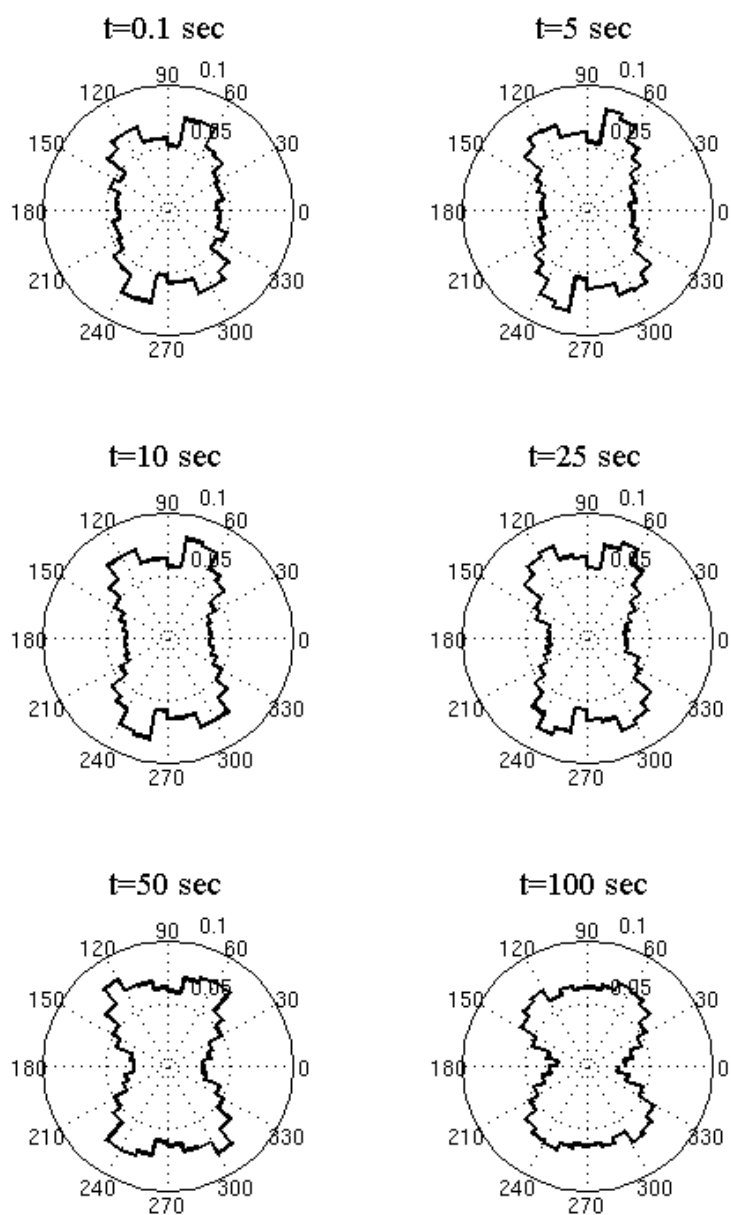
Εικόνα 3.36: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο δίσκων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



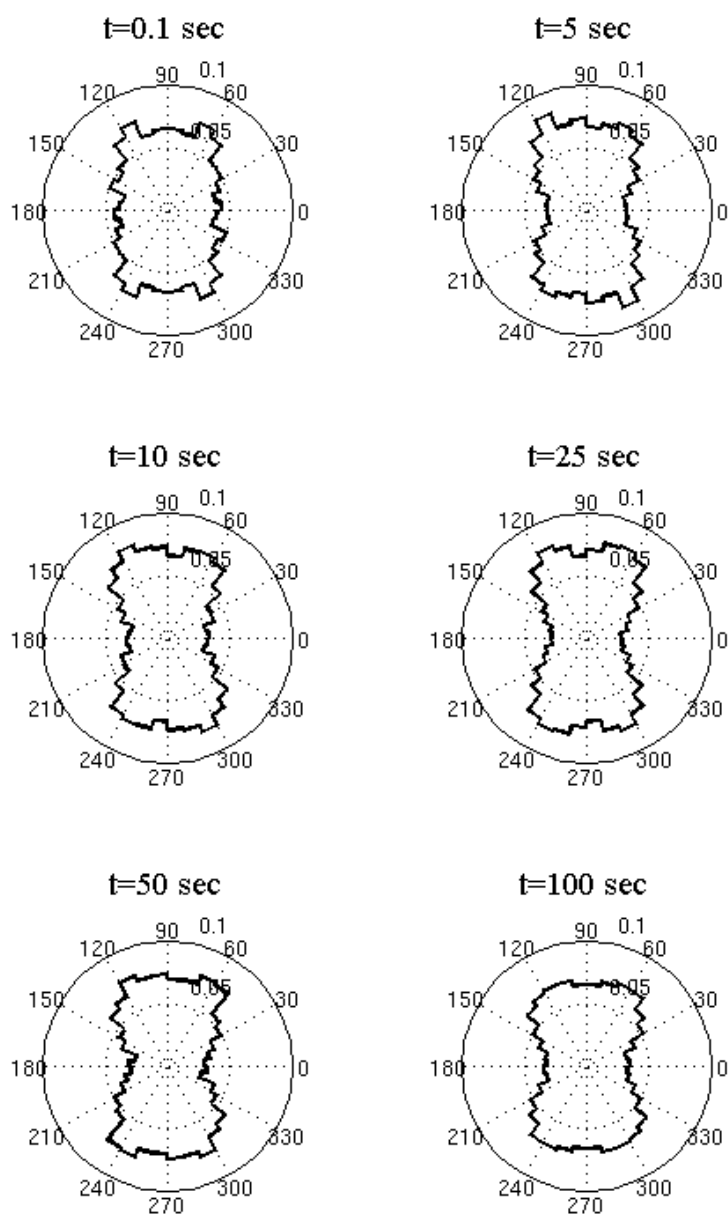
Εικόνα 3.37: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο δωδεκαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



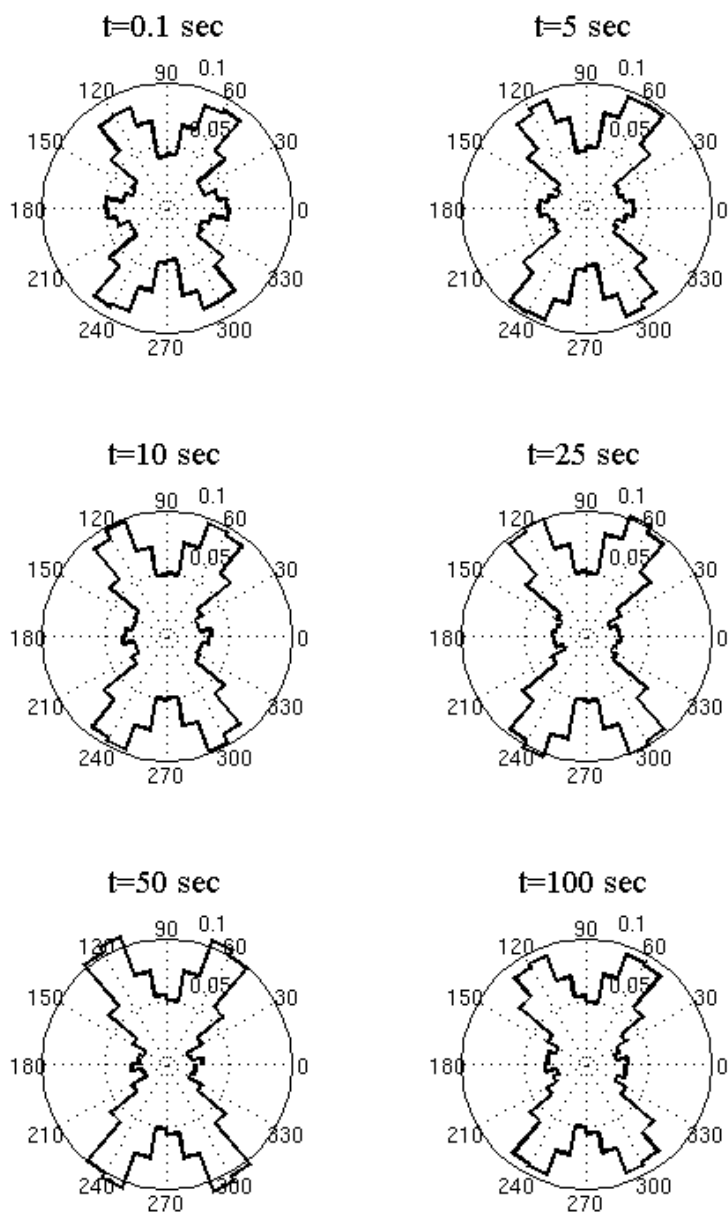
Εικόνα 3.38: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο εξαγώνων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.



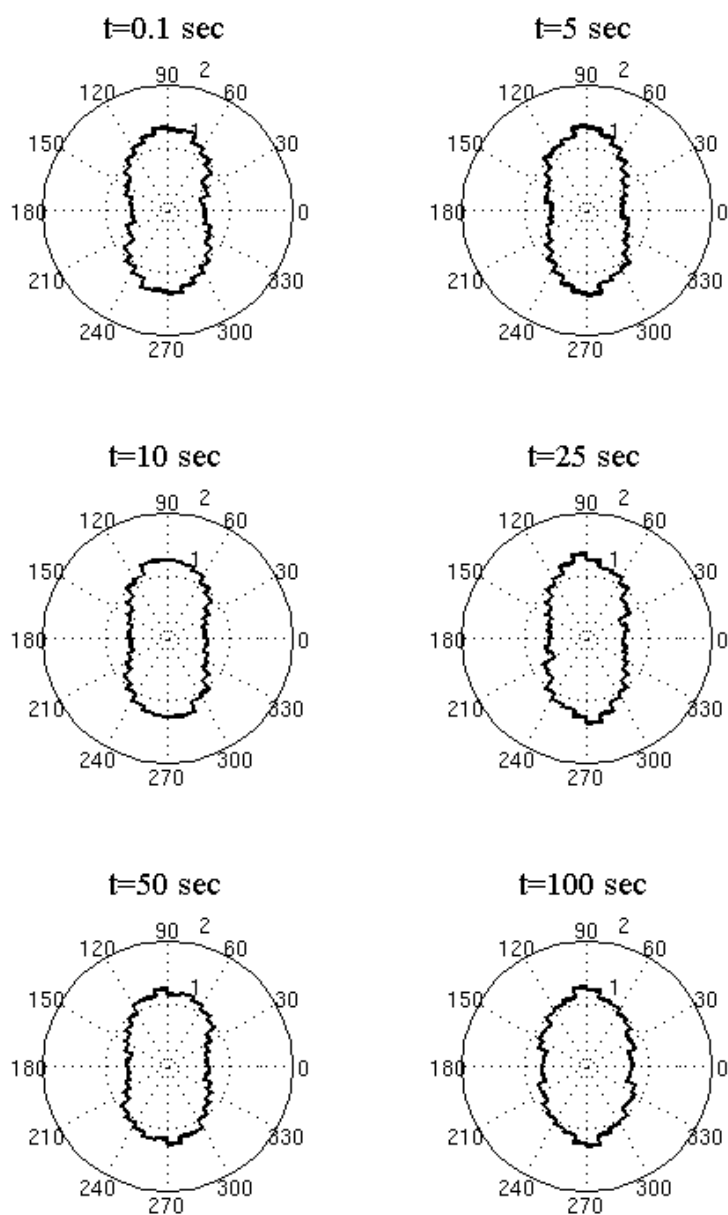
Εικόνα 3.39: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο δίσκων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



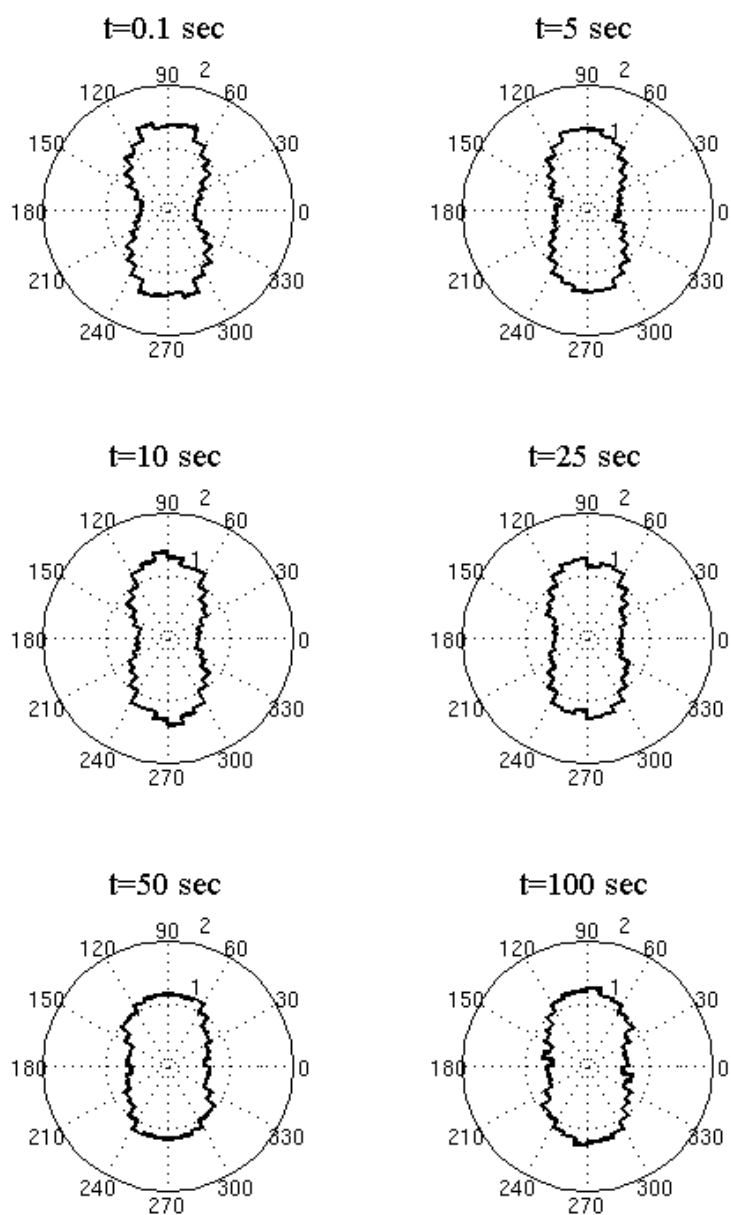
Εικόνα 3.40: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



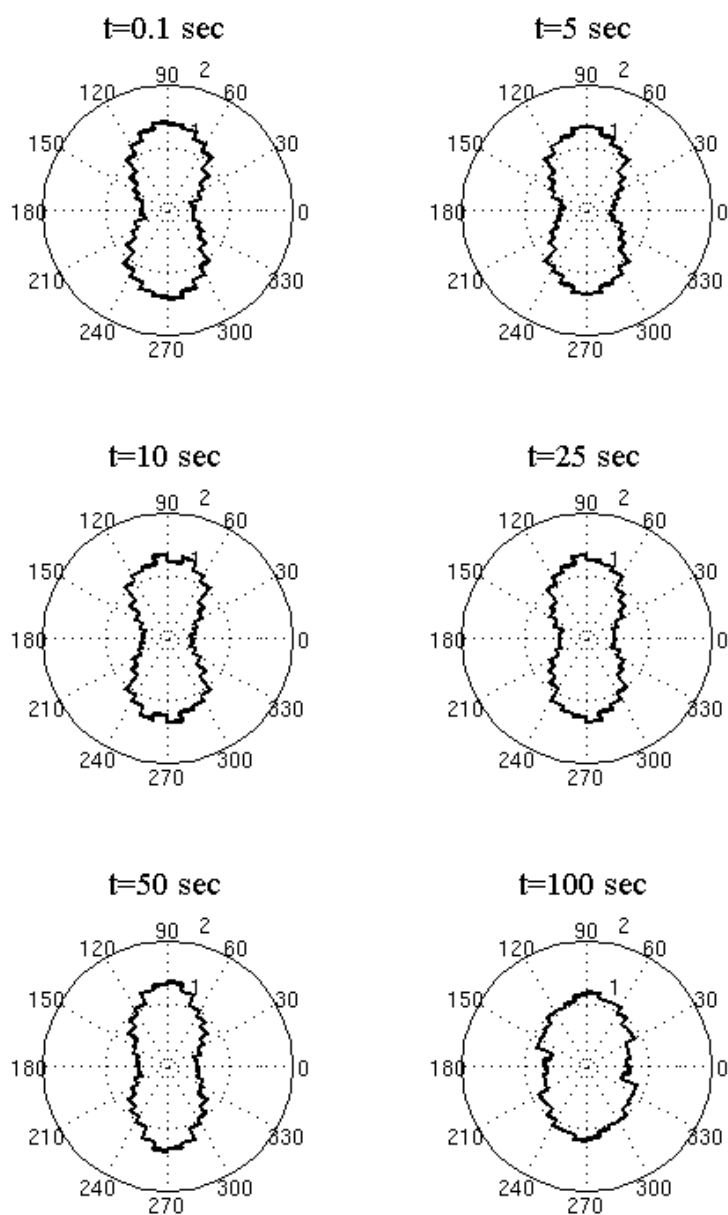
Εικόνα 3.41: Προσανατολισμοί των επαφών για το πρώτο δοκίμιο εξαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.42: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο δίσκων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.43: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.



Εικόνα 3.44: Ένταση κάθετων δυνάμεων ως προς τον προσανατολισμό για το πρώτο δοκίμιο εξαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δοκιμίων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης με εκείνα των δοκιμίων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η αρχική απόκριση είναι διαφορετική. Δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης επιδεικνύουν απευθείας μια προτίμηση για την κατακόρυφη διεύθυνση. Δοκίμια με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης από την άλλη πλευρά επιδεικνύουν μια προτίμηση για την οριζόντια διεύθυνση στην αρχή της δοκιμής. Το γεγονός αυτό φαίνεται να είναι συνδεδεμένο με τη διαφορά στην συμπεριφορά που παρατηρείται στην αρχική φάση της φόρτισης μεταξύ δοκιμίων με υψηλό και με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης.

3.11 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα που συνοψίζονται στο παρόν κεφάλαιο υποδεικνύουν ότι τόσο ο αριθμός συνδιάταξης, όσο και το σχήμα των κόκκων έχουν σημαντική επίδραση στη συμπεριφορά του δοκιμίου. Τόσο ο υψηλός αριθμός συνδιάταξης όσο και η έντονη απόκλιση του σχήματος από το κυκλικό έχουν ως αποτέλεσμα δοκίμια με υψηλότερη μέγιστη κάθετη τάση φόρτισης.

Επιπρόσθετα προκύπτει ότι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης και το ενεργό πορώδες διαφέρουν λιγότερο μεταξύ δοκιμίων με υψηλό και χαμηλό αριθμό συνδιάταξης από ό,τι τα αντίστοιχα ολικά για δοκίμια του ίδιου σχήματος κόκκων. Το ίδιο δεν ισχύει αν θεωρηθούν δοκίμια με διαφορετικά μεταξύ τους σχήματα κόκκων.

Κεφάλαιο 4

Διακριτές προσομοιώσεις: Μεσοσκοπικές Μετρήσεις

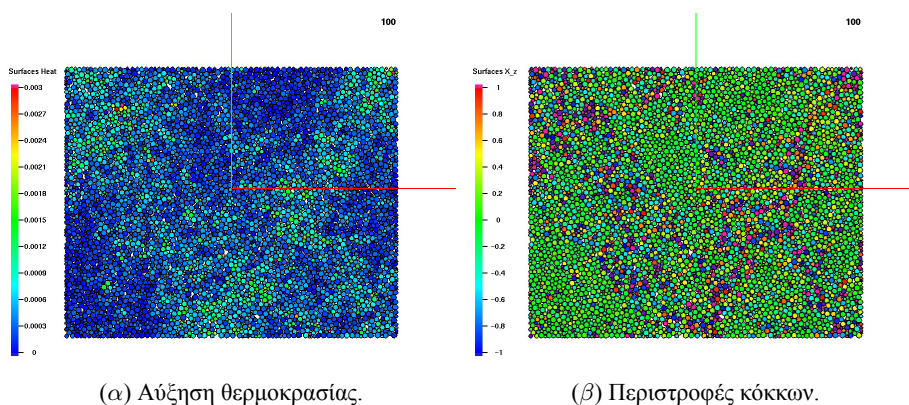
4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε περιοχές μέτρησης του δοκιμίου που περιέχουν ζώνες διάτμησης. Αρχικά γίνονται κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τον σχηματισμό ζωνών διάτμησης στους διαφορετικούς τύπους δοκιμίων. Ακολούθως παρουσιάζεται η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Η ορθότητα του αριθμητικού κώδικα που προγραμματίστηκε για το σκοπό αυτό επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια απλών πειραμάτων διάτμησης. Τέλος δίνονται τα αποτελέσματα για τις περιοχές μέτρησης που περιέχουν ζώνες διάτμησης για τους διαφορετικούς τύπους δοκιμίων.

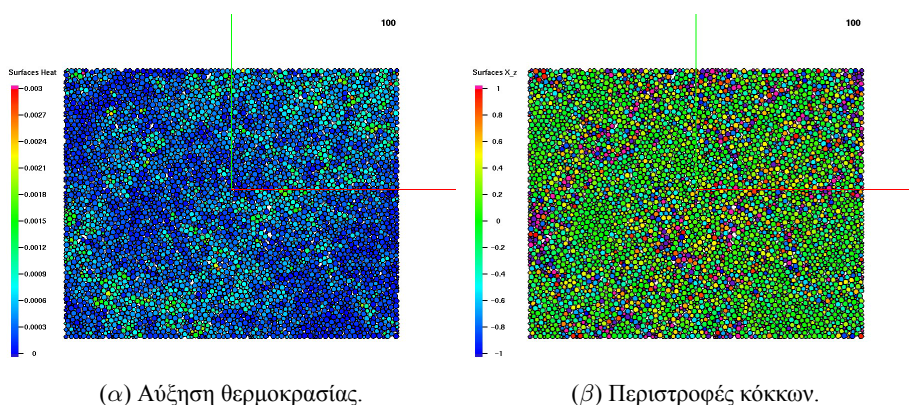
4.2 Παρατήρηση του εντοπισμού της παραμόρφωσης

Στα περισσότερα δοκίμια παρατηρήθηκε εντοπισμός της παραμόρφωσης κατά την διάρκεια της δοκιμής. Τα δοκίμια στα οποία δεν παρατηρήθηκε εμφανής εντοπισμός της παραμόρφωσης ήταν κυρίως δοκίμια δίσκων. Οι ζώνες εντοπισμένης παραμόρφωσης βρέθηκαν να συμπίπτουν με τις ζώνες συγκεντρωμένων στροφών των κόκκων. Για την αριθμητική προσομοίωση έγινε η υπόθεση ότι όλη η ενέργεια που χάνεται σε μια επαφή μετατρέπεται σε θερμότητα που μοιράζεται εξίσου

μεταξύ των κόκκων που βρίσκονται σε επαφή.



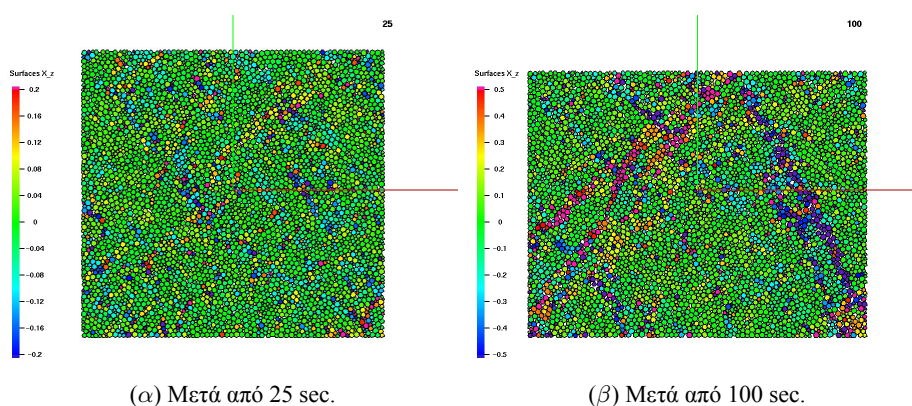
Εικόνα 4.1: Αποτελέσματα για το δοκίμιο g1_fd_02 μετά από 100 sec.



Εικόνα 4.2: Αποτελέσματα για το δοκίμιο g1_fl_02 μετά από 100 sec.

Στις Εικς. 4.1α και 4.2α δίνεται η αύξηση θερμοκρασίας μετά από 100 sec για ένα δοκίμιο δίσκων με υψηλό και ένα με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης αντιστοίχως. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της αύξησης της θερμοκρασίας περιγράφεται εκτενώς στο Παράρτ. Α.2. Η κατανομή της αύξησης της θερμοκρασίας εμφανώς συμπίπτει με την αντίστοιχη κατανομή των περιστροφών των κόκκων, η οποία δίνεται στις Εικς. 4.1β και 4.2β. Ως εκ τούτου επιλέχθηκε να εμφανίζονται στα γραφήματα οι περιστροφές των κόκκων ως μέτρο του εντοπισμού της παραμόρφωσης.

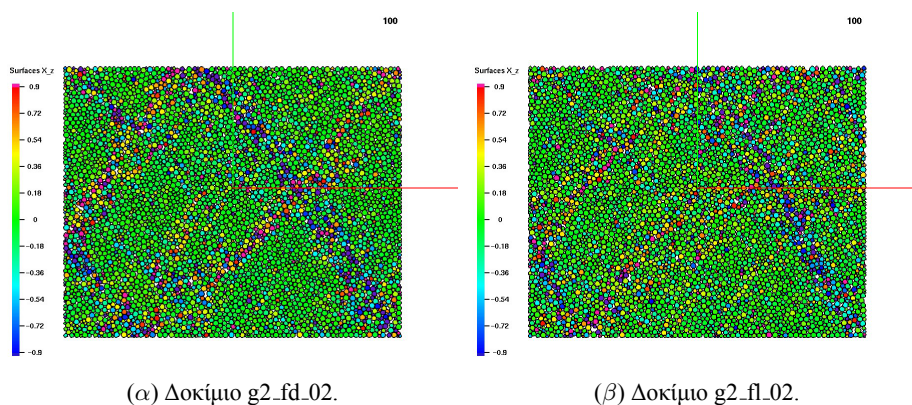
Κατά το αρχικό στάδιο της φόρτισης παρατηρήθηκε ένας μεγάλος αριθμός



Εικόνα 4.3: Περιτροφές των κόκκων για το δοκίμιο g3_fd_01.

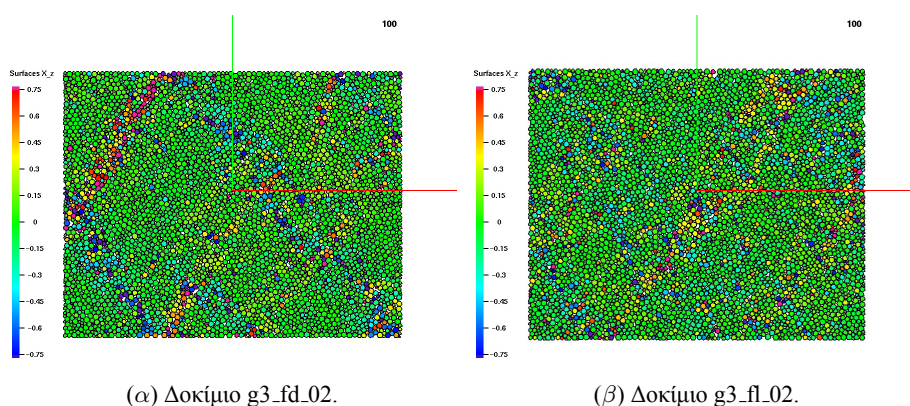
μικρών ζωνών διάτμησης. Αυτές οι μικρο-ζώνες διάτμησης εξασθένησαν και εξαφανίστηκαν καθώς η φόρτιση προχώρησε. Λίγες μόνο από αυτές εξελίχθηκαν σε πλήρως σχηματισμένες ζώνες διάτμησης. Ένα παράδειγμα δίνεται στην Εικ. 4.3. Στην Εικ. 4.3α δείχνεται το δοκίμιο g3_fd_01 μετά από 25 sec δοκιμής και στην Εικ. 4.3β μετά από 100 sec δοκιμής. Στην πρώτη περίπτωση φαίνονται οι αρχικές ασθενείς ζώνες διάτμησης, ενώ στην δεύτερη οι πλήρως σχηματισμένες ζώνες διάτμησης είναι κυρίαρχες.

Στις Εικ. 4.4 και 4.5 δίνονται οι περιστροφές των κόκκων μετά από 100 sec



Εικόνα 4.4: Περιτροφές των κόκκων για δωδεκάγωνα μετά από 100 sec.

για το δεύτερο δοκίμιο δωδεκαγώνων και εξαγώνων, τόσο για υψηλό, όσο και για χαμηλό αριθμό συνδιάταξης. Σημειώνεται ότι οι στροφές των κόκκων μετρούνται



Εικόνα 4.5: Περιτροφές των κόκκων για εξάγωνα μετά από 100 sec.

σε πλήρεις περιστροφές και όχι σε ακτίνια.

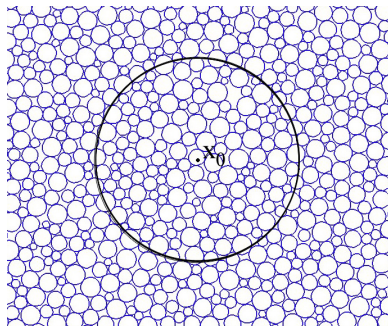
Μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι ζώνες διάτμησης που σχηματίζονται σε δοκίμια δίσκων τείνουν να είναι ευρείς και όχι ιδιαίτερα καθαρά οριοθετημένες. Αντίθετα οι ζώνες διάτμησης που σχηματίζονται σε δοκίμια δωδεκαγώνων και εξαγώνων είναι καθαρά οριοθετημένες. Οι ζώνες διάτμησης που σχηματίζονται σε δοκίμια δωδεκαγώνων είναι πιο ευρείς σε σχέση με εκείνες που σχηματίζονται σε δοκίμια εξαγώνων και πιο στενές σε σχέση με εκείνες που σχηματίζονται σε δοκίμια δίσκων. Επιπρόσθετα οι μέγιστες περιστροφές που απαντώνται σε δοκίμια εξαγώνων τείνουν να είναι μικρότερες από εκείνες που απαντώνται σε δοκίμια δίσκων. Αυτές οι παρατηρήσεις μπορούν να αποδοθούν στην αντίσταση στην περιστροφή η οποία εισάγεται μέσω του σχήματος των κόκκων.

Τέλος, μπορεί να παρατηρηθεί ότι τα δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης εμφανίζουν μεγαλύτερες περιστροφές και πιο καθαρά οριοθετημένες ζώνες διάτμησης. Η παρατήρηση ισχύει για όλα τα σχήματα κόκκων και δεν φαίνεται να συνδέεται με την αντίσταση ως προς την περιστροφή.

4.3 Επεξεργασία αποτελεσμάτων

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κάθε μιας από τις ποσότητες που θα μετρηθούν στη μεσοκλίμακα. Οι ποσότητες αυτές μετρούνται σε ζώνες με κέντρο επί των ζωνών διάτμησης, ώστε να αξιολογηθεί η σημασία των τάσεων ζεύγους και των περιστροφών για το φαινόμενο

του εντοπισμού της παραμόρφωσης. Ένα παράδειγμα περιοχής μέτρησης δίνεται



Εικόνα 4.6: Περιοχή μέτρησης.

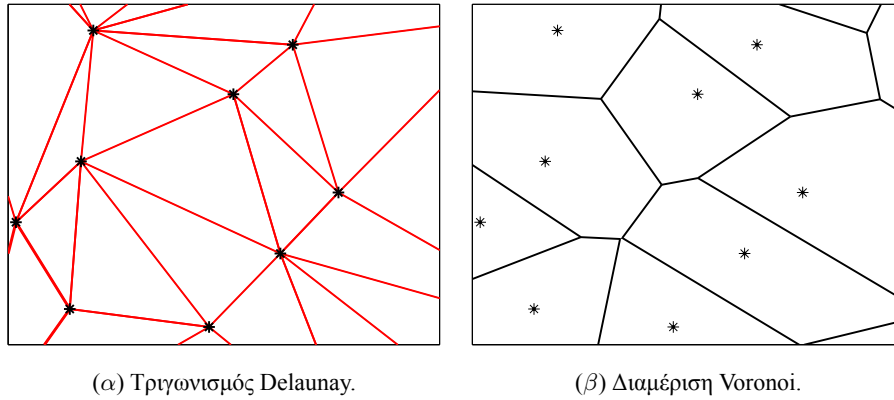
στην Εικ. 4.6. Άλλα σχήματα περιοχών μετρήσεις εξετάστηκαν επίσης. Εντέλει επιμηκυσμένες περιοχές μέτρησης στην διεύθυνση της ζώνης διάτμησης χρησιμοποιήθηκαν. Ο αριθμητικός κώδικας που προγραμματίστηκε για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων στην μεσοκλίμακα μπορεί να βρεθεί στο Παράρτ. Β.2.

4.3.1 Τριγωνισμός Delaunay και διαμέριση Voronoi

Ο τριγωνισμός Delaunay για ένα σύνολο θέσεων $\{P_i\}$ στο επίπεδο είναι ένας τριγωνισμός $DT(P)$ τέτοιος ώστε καμία θέση P_i δεν βρίσκεται εντός κάποιου τριγώνου $DT(P)$. Ο τριγωνισμός Delaunay μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία των τριγώνων του τριγωνισμού. Βάσει του ορισμού του τριγωνισμού, για τέσσερα σημεία επί του ιδίου κύκλου ο τριγωνισμός δεν είναι μοναδικός.

Ο τριγωνισμός Delaunay είναι δυικός ως προς τη διαμέριση Voronoi. Ένα παράδειγμα τριγωνισμού Delaunay και της δυικής διαμέρισής του Voronoi δίνεται στην Εικ. 4.7. Σε μια διαμέριση Voronoi το επίπεδο χωρίζεται σε έναν αριθμό περιοχών ίσων με τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου των θέσεων $\{P_i\}$. Κάθε τέτοια περιοχή $V(P_i)$ καλείται κελί Voronoi και αποτελείται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται πλησιέστερα στην θέση P_i από ό,τι σε κάθε άλλη θέση. Οι πλευρές της διαμέρισης Voronoi είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο θέσεις. Οι κορυφές της διαμέρισης Voronoi είναι τα σημεία που ισαπέχουν από τρεις ή περισσότερες θέσεις.

Οι ποσότητες για τον υπολογισμό των οποίων οφείλει να ληφθεί υπόψιν το εμβαδόν μετρούνται σε κάθε τρίγωνο του τριγωνισμού Delaunay.



Εικόνα 4.7: Τριγωνισμός Delaunay και διαμέριση Voronoi.

4.3.2 Τανυστής τροπών

Εδώ θεωρείται η Ιακωβιανή της ταχύτητας

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (4.3.1)$$

για τον ρυθμό των τροπών αντί της συμμετρικής μορφής. Εξ ορισμού η μέση τιμή του τανυστή του ρυθμού μεταβολής της τροπής σε έναν όγκο V , που περικλείεται από μια επιφάνεια S θα δίνεται από

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (4.3.2)$$

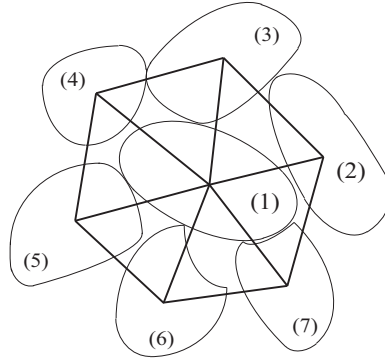
Με χρήση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss το παραπάνω λαμβάνει τη μορφή

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_S v_i n_j dS \quad (4.3.3)$$

όπου n_j είναι οι συνιστώσες του κάθετου προς τα έξω διανύσματος της επιφάνειας S . Έστω τώρα η διάταξη της Εικ. 4.8.

Είναι δυνατόν να γίνει η επιλογή να πραγματοποιηθεί η ολοκλήρωση στην περίμετρο και να αποδοθεί η προκύπτουσα μέση τιμή για την τροπή στο κεντρικό σωματίδιο. Παραμένουν άγνωστες οι ταχύτητες στο σύνορο. Γίνεται επομένως η υπόθεση ότι η ταχύτητα στο σύνορο μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ των ταχυτήτων στις κορυφές κάθε πλευράς.

Έστω ότι το ζητούμενο είναι η ολοκλήρωση επί ενός όγκου που ορίζεται από τα κέντρα των σωματιδίων $i = 1, \dots, N$ ως κορυφές και χαρακτηρίζεται από



Εικόνα 4.8: Τριγωνισμός για έναν κόκκο και τους πρώτους γείτονες αυτού.

$j = 1, \dots, S$ πλευρές. Τότε, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα σε κάθε πλευρά είναι μια γραμμική παρεμβολή των ταχυτήτων των κορυφών, προκύπτει

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3V} \sum_{j=1}^S s_j (\mathbf{v}^{j1} + \mathbf{v}^{j2} + \mathbf{v}^{j3}) \otimes \mathbf{n}^j \quad (4.3.4)$$

όπου s_j είναι η επιφάνεια της πλευράς j .

Σε δύο διαστάσεις και αν υποθεθεί ότι η πλευρά j αντιστοιχεί στις κορυφές j και $j + 1$, η παραπάνω έκφραση λαμβάνει την μορφή

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2S} \sum_{j=1}^N l_j (\mathbf{v}^j + \mathbf{v}^{j+1}) \otimes \mathbf{n}^j \Rightarrow \quad (4.3.5)$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2S} \sum_{k=1}^N (\mathbf{v}_k^j + \mathbf{v}_k^{j+1}) \epsilon_{mj3} (l_m^{k+1} - l_m^k) \quad (4.3.6)$$

όπου l_j είναι το μήκος της πλευράς και \mathbf{l}^k είναι το διάνυσμα με αρχή το κεντρικό σωματίδιο και πέρας το σωματίδιο j . Στην πραγματικότητα η επιλογή του κεντρικού σημείου δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Η τελευταία εξίσωση είναι πανομοιότυπη με την εξίσωση για τον υπολογισμό των τροπών που χρησιμοποιείται από την Tordesillas (Tordesillas and Muthuswamy, 2008).

Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό η μεσοτίμηση λαμβάνει χώρα επί των σωματιδίων που βρίσκονται στο εξωτερικό του επιλεγμένου χωρίου. Αφού οι συνεισφορές των εσωτερικών πλευρών αλληλοεξουδετερώνονται, το αυτό ισχύει και για οποιοδήποτε χωρίο. Προκειμένου να ληφθούν υπόψιν και οι συνεισφορές των εσωτερικών πλευρών μια εναλλακτική προσέγγιση ακολουθείται στη συνέχεια. Ο ρυθμός

της τροπής υπολογίζεται σε κάθε σωματίδιο και στη συνέχεια πραγματοποιείται μεσοτίμηση επί των σωματιδίων χρησιμοποιώντας ως συνάρτηση βάρους την επιφάνεια του κελιού Voronoi του κάθε σωματιδίου. Η τροπή προκύπτει στη συνέχεια από τον ρυθμό της τροπής με χρονική ολοκλήρωση. Τα αντίστοιχα πεδία των περιστροφών υπολογίζονται με αντίστοιχο τρόπο, που περιγράφεται παρακάτω.

4.3.3 Τανυστής μικρο-περιστροφής και διάνυσμα καμπυλότητας

Για ένα υλικό Cosserat ο τανυστής ρυθμού γενικευμένης τροπής ορίζεται ως

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dot{W}_{ij}^c$$

όπου

$$W_{ij}^c = -\epsilon_{ijk} w_k$$

είναι ο λεγόμενος τανυστής ρυθμού μικρο-περιστροφής και w_k είναι το πεδίο των γωνιακών ταχυτήτων. Εξ ορισμού η μέση τιμή του εν λόγω τανυστή σε έναν όγκο V δίνεται από

$$\dot{W}_{ij}^c = -\epsilon_{ijk} \frac{1}{V} \int_V w_k dV$$

Η παραπάνω ποσότητα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα στην διδιάστατη περίπτωση αποδίδοντας σε κάθε σωματίδιο την επιφάνεια του αντίστοιχου κελιού Voronoi:

$$\dot{W}_{ij}^c = -\epsilon_{ijk} \frac{1}{V} \sum_i w_k^{(i)} V^{(i)}$$

με το (i) να διατρέχει όλα τα σωματίδια που ανήκουν στον όγκο V .

Είναι επιπλέον αναγκαίο να υπολογιστεί το διάνυσμα των καμπυλοτήτων. Σε δύο διαστάσεις ισχύει

$$\dot{\kappa}_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

Η μέση του τιμή σε έναν όγκο V , που περιβάλλεται από επιφάνεια S δίνεται από

$$\dot{\kappa}_i = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial w}{\partial x_i} dV$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss το παραπάνω λαμβάνει την μορφή

$$\dot{\kappa}_i = \frac{1}{V} \int_S w n_i dS$$

όπου n_i είναι οι συνιστώσες του κάθετου προς τα έξω μοναδιαίου διανύσματος για την επιφάνεια S . Όπως και για την περίπτωση των τροπών

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{2S} \sum_{j=1}^N l_j (w^j + w^{j+1}) \mathbf{n}_j$$

Η καμπυλότητα υπολογίζεται από τον ρυθμό της με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο.

4.3.4 Τανυστές τάσεων και τάσεων ζεύγους

Οι τύποι που χρησιμοποιούνται εδώ για τον τανυστή των τάσεων και τον τανυστή των τάσεων ζεύγους προέκυψαν στο Κεφάλαιο 2 από τη δυνατή εσωτερική ισχύ και από μια συνεχή παρεμβολή των πεδίων των γραμμικών και γωνιακών ταχυτήτων. Επαναλαμβάνονται εδώ χάριν απλότητας. Ο τύπος για τον υπολογισμό του τανυστή των τάσεων είναι

$$\underline{\sigma} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \mathbf{f}^{ij} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (4.3.7)$$

Για τον τανυστή των τάσεων ζεύγους προκύπτουν δύο μορφές, δηλαδή

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{m}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \right) + \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\left(\mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \right) \otimes (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(0)}) \right) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

από την δυνατή εσωτερική ισχύ και

$$\underline{\mu}' = \sum_{(i) \in \mathcal{A}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}_i} \left(\mathbf{M}^{(ij)} \otimes (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(ij)}) \right) \quad (4.3.9)$$

από την συνεχή κινηματική παρεμβολή, όπου

$$\mathbf{M}^{(ij)} = \mathbf{m}^{(ij)} + \mathbf{f}^{(ij)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)}) \quad (4.3.10)$$

Ο τύπος που προέκυψε για τον υπολογισμό του τανυστή των τάσεων προσομοιάζει έντονα σε εκείνον που προτάθηκε από τους Drescher και de Josselin de Jong (Drescher and de Josselin de Jong, 1972), και, ανεξάρτητα, από τους Christoffersen et al. (Christoffersen et al., 1981) και τους Rothenburg και Selvadurai (Rothenburg and Selvadurai, 1981). Σημειώνεται ότι η σχέση αυτή ισχύει για την κατάσταση ισοροπίας, δηλαδή όταν

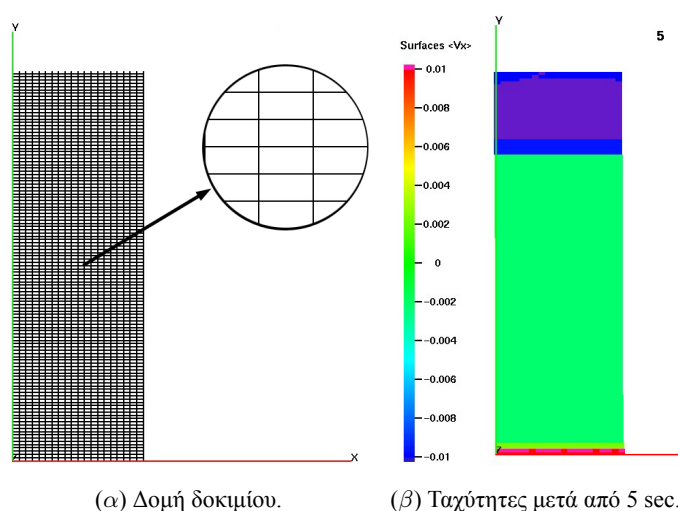
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ext} \quad (4.3.11)$$

Στην περίπτωση που η ισορροπία δεν ικανοποιείται, οι αδρανειακές δυνάμεις θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν υπό τη μορφή επιταχύνσεων, αλλά η γενίκευση αυτή δεν είναι απλή.

4.4 Επιβεβαίωση του κώδικα

Προκειμένου να επιβεβαιωθεί η ορθότητα του κώδικα που προγραμματίστηκε για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που αναφέρθηκαν παραπάνω, πραγματοποιήθηκαν δύο δοκιμές απλής διάτμησης. Η πρώτη από αυτές είναι ένα ακραίο παράδειγμα για τη δράση της αντίστασης στην κύλιση. Αφορά στην απλή διάτμηση ενός πυκνού και δομημένου συνόλου ορθογωνικών σωματιδίων. Η δεύτερη από αυτές αφορά στην απλή διάτμηση ενός συνόλου εξαγώνων.

Το πρώτο δοκίμιο αποτελείται από 2400 ορθογωνικά σωματίδια των οποίων



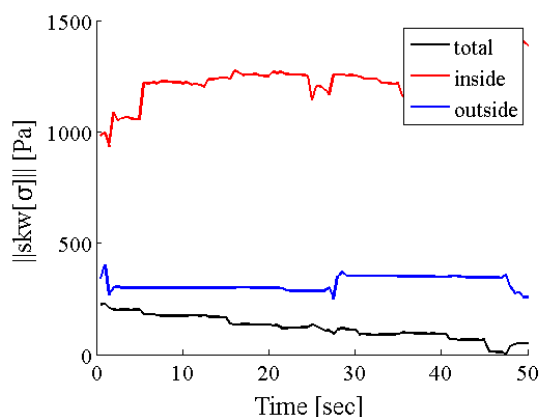
Εικόνα 4.9: Διάγραμμα για την πρώτη δοκιμή.

το μήκος ήταν διπλάσιο του ύψους τους. Το συνολικό ύψος του δοκιμίου ήταν ίσο με 12 m και το πλάτος του ήταν ίσο με 4 m. Μια σταθερή κάθετη δύναμη και μια σταθερή οριζόντια ταχύτητα επεβλήθησαν στο πάνω και κάτω σύνορο. Στο αριστερό και στο δεξί σύνορο επεβλήθησαν περιοδικές συνθήκες, υπό την έννοια ότι τα σωματίδια που εξέρχονται από τα δεξιά εισέρχονται εκ νέου από τα αριστερά με την ίδια ταχύτητα. Στην Εικ. 4.9α δίνεται η δομή του δοκιμίου, ενώ στην Εικ. 4.9β δίνονται οι ταχύτητες των σωματιδίων μετά από 5 sec φόρτισης. Μετρήθηκαν οι

συνιστώσες του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους για κάθε χρονική στιγμή για μια περιοχή του δοκιμίου με ύψος ίσο με 11.5 m. Το ανώτατο και το κατώτατο τμήμα του δοκιμίου εξαιρέθηκαν προκειμένου να αποφευχθεί η δράση των συνόρων. Οι μετρήσεις επαναλήφθηκαν για μια περιοχή με ύψος 2 m και κέντρο στο σημείο που εμφανίζει άλμα ταχυτήτων και για μια περιοχή που δεν περιέχει άλματα ταχυτήτων.

Τα αποτελέσματα για το συμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων δεν εμφανίζονται εδώ, καθώς δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων και για τις δύο μορφές του τανυστή των τάσεων ζεύγους οι ευκλείδειες μετρικές των τανυστών παρουσιάζονται στη συνέχεια.

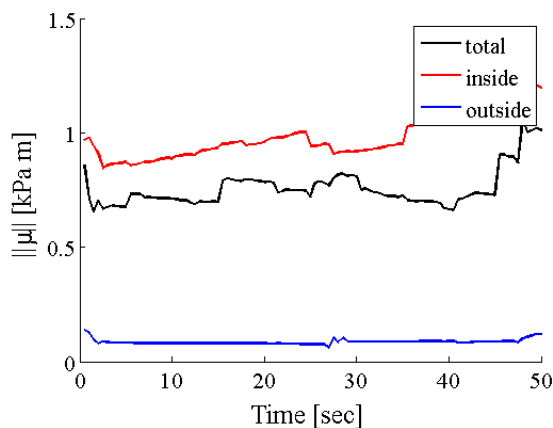
Στην Εικ. 4.10 δίνεται η μετρική του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή



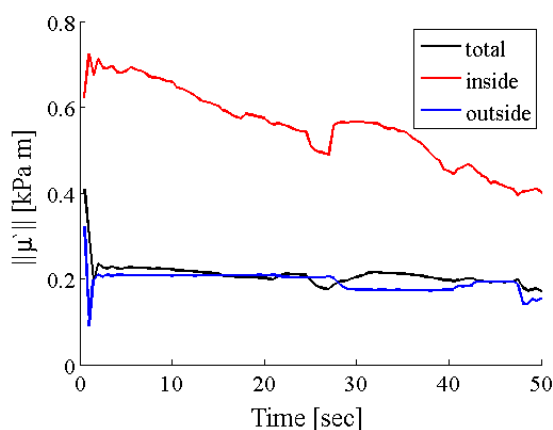
Εικόνα 4.10: Αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων.

των τάσεων για τρεις περιοχές μέτρησης. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων μέσα στη ‘ζώνη διάτμησης’ είναι σημαντικά μεγαλύτερο από εκείνο εκτός της ζώνης διάτμησης ή επί του συνόλου του δοκιμίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κάθετη τάση ήταν ίση με 30 kPa. Συγκρινόμενο με αυτή την ποσότητα το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων είναι μικρό, αλλά όχι αμελητέο.

Στην Εικ. 4.11 δίνεται η μετρική του τανυστή των τάσεων ζεύγους σύμφωνα με την πρώτη μορφή. Όπως προηγουμένως, η περιοχή μέτρησης που περιέχει το άλμα των ταχυτήτων επιδεικνύει τη μέγιστη τιμή. Η μέτρηση που αντιστοιχεί στην



Εικόνα 4.11: Τανυστής τάσεων ζεύγους, πρώτη μορφή.



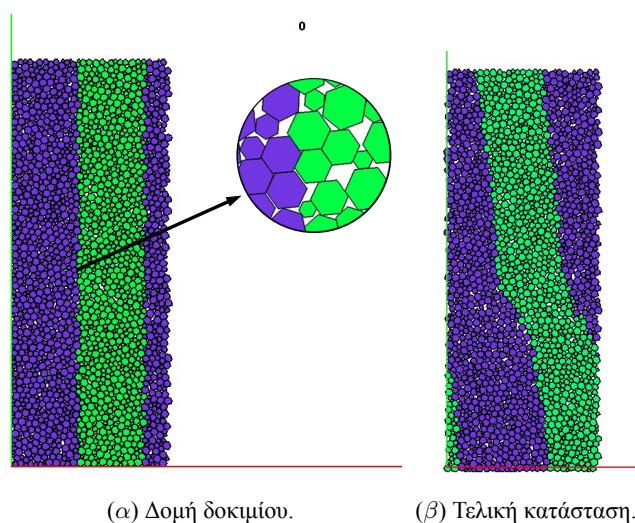
Εικόνα 4.12: Τανυστής τάσεων ζεύγους, δεύτερη μορφή.

περιοχή που δεν περιέχει άλμα στην οριζόντια ταχύτητα είναι η μικρότερη, ενώ η μέτρηση στο σύνολο του δοκιμίου είναι μεταξύ των δύο και πλησιέστερα στη μέγιστη τιμή. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι και το σύνολο του δοκιμίου περιέχει άλμα ταχύτητας ή μπορεί να συνδέεται με το μέγεθος της περιοχής μέτρησης.

Στην Εικ. 4.12 δείχνεται η μετρική του τανυστή των τάσεων ζεύγους σύμφωνα με τη δεύτερη μορφή. Και σε αυτή την περίπτωση η μετρική του τανυστή των τάσεων φαίνεται να είναι μέγιστη για την περιοχή με κέντρο στο άλμα των ταχυτήτων,

ελάχιστη για την περιοχή που δεν το περιέχει και ενδιάμεση για το σύνολο του δοκιμίου. Η κύρια διαφοροποίηση σε σχέση με την πρώτη μορφή είναι ότι η μέτρηση επί του συνόλου του δοκιμίου είναι πιο κοντά στη μέτρηση που αντιστοιχεί στην περιοχή που δεν περιέχει άλμα ταχυτήτων από ό,τι στη μέτρηση που αντιστοιχεί στην περιοχή με κέντρο επί του άλματος ταχυτήτων.

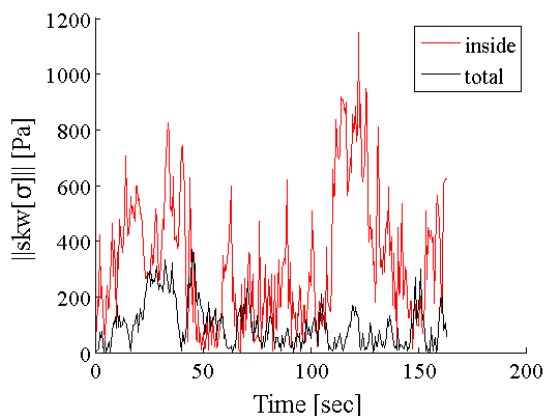
Πραγματοποιήθηκε επίσης μια δεύτερη δοκιμή, πιο κοντά σε ρεαλιστικές συνθήκες. Δοκιμάστηκε ένα δοκίμιο εξαγώνων υπό συνθήκες απλής διάτμησης. Οι



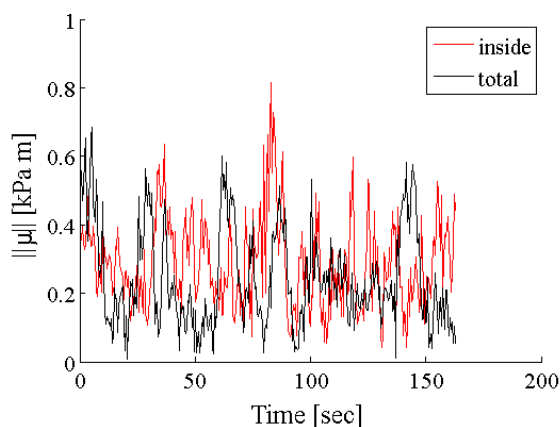
Εικόνα 4.13: Διάγραμμα για την δεύτερη δοκιμή.

συνοριακές συνθήκες που επεβλήθησαν ήταν όμοιες με εκείνες της προηγούμενης περίπτωσης. Μια ζώνη διάτμησης άρχισε να σχηματίζεται σε χρόνο 20 sec και ολοκλήρωσε το σχηματισμό της σε χρόνο 50 sec. Στις Εικς. 4.14 ως 4.16 οι μετρικές του αντισυμμετρικού τμήματος του τανυστή των τάσεων και της πρώτης και της δεύτερης μορφής του τανυστή των τάσεων ζεύγους δίνονται ως συνάρτηση του χρόνου.

Το διάστημα στο οποίο το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων είναι σημαντικό συμπίπτει εμφανώς με το χρονικό διάστημα σχηματισμού της ζώνης διάτμησης. Τα αποτελέσματα δεν είναι εξίσου ξεκάθαρα στην περίπτωση του τανυστή των τάσεων ζεύγους. Για την πρώτη μορφή ο τανυστής των τάσεων ζεύγους αυξάνει πριν το σχηματισμό της ζώνης διάτμησης και μετά γίνεται πρακτικά σταθερός. Η τιμή του πριν την εμφάνιση της ζώνης διάτμησης είναι κατά προσέγγιση ίση με εκείνη που αντιστοιχεί στο σύνολο του δοκιμίου. Το αυτό ισχύει και



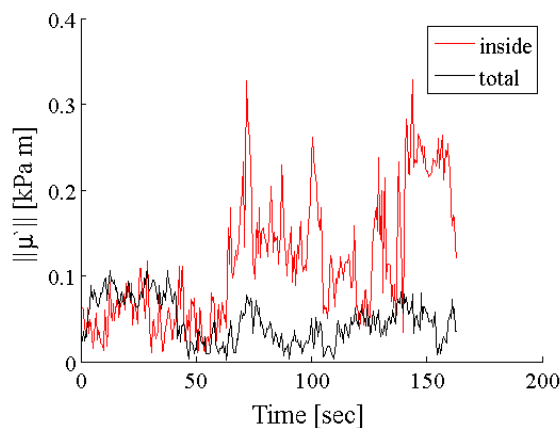
Εικόνα 4.14: Αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων.



Εικόνα 4.15: Τανυστής των τάσεων ζεύγους, πρώτη μορφή.

για την περίπτωση της δεύτερης μορφής του τανυστή των τάσεων ζεύγους, με τη διαφορά ότι εδώ τα αποτελέσματα εμφανίζουν πιο έντονες ταλαντώσεις.

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρήθηκε μια εμφανής διαφορά μεταξύ των τιμών των μικροπολικών μεγεθών μεταξύ του συνόλου του δοκιμίου και των περιοχών σχηματισμού ζωνών διάτμησης. Τα αποτελέσματα είναι συνεπή με το αναμενόμενο, παρά τις έντονες διακυμάνσεις που παρατηρήθηκαν. Επομένως, αν και ο κώδικας κρίνεται κατάλληλος, είναι αναγκαίο να επιλέγονται μεγάλες κατά το δυνατόν περιοχές μέτρησης, ώστε να μειώνονται οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις.



Εικόνα 4.16: Τανυστής των τάσεων ζεύγους, δεύτερη μορφή.

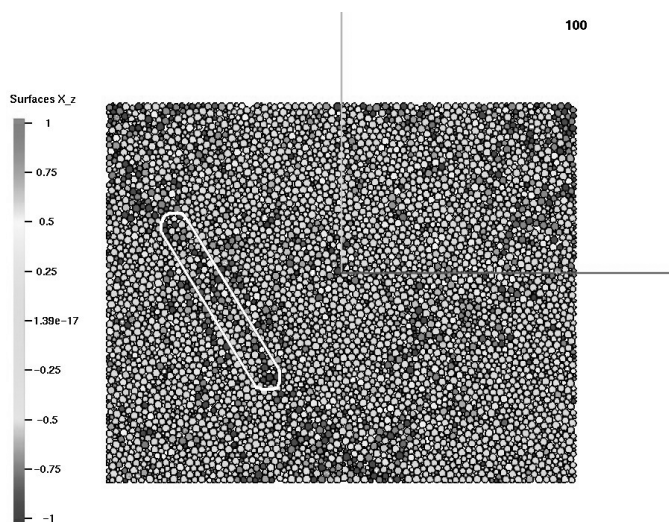
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αντιστοιχούν σε επιμήκεις περιοχές μέτρησης με πλάτος ίσο με 0.8 m και κεντρικό άξονα επί ζωνών διάτμησης. Αυτές οι περιοχές μετρήσεις περιείχαν κατά μέσο όρο 200 σωματίδια. Δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ σωματιδίων με υψηλό και χαμηλό αριθμό συνδιακύμανσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα για ένα δοκίμιο για κάθε σχήμα κόκκου. Επιλέχθηκαν τα πιο χαρακτηριστικά δοκίμια.

4.5 Δίσκοι

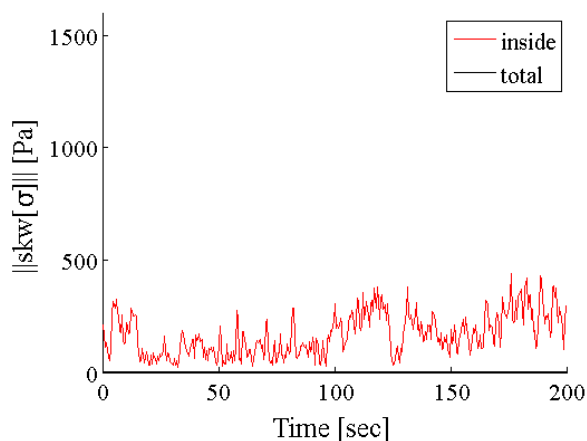
Στην Εικ. 4.17 εμφανίζεται η περιοχή μέτρησης για το τρίτο δοκίμιο δίσκων με χαμηλό αριθμό συνδιάταξης μετά από 100 sec δοκιμής. Η περιοχή στην οποία πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις είναι σημειωμένη με κόκκινο.

Στην Εικ. 4.18 δίνεται η μετρική του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων για την περιοχή μέτρησης και για το σύνολο του δοκιμίου. Ομοίως στις Εικς. 4.19 και 4.20 δίνονται τα αποτελέσματα για την μετρική του τανυστή των τάσεων ζεύγους για την πρώτη και την δεύτερη μορφή αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων και η μετρική του τανυστή των τάσεων ζεύγους είναι πρακτικά μηδενικά όταν μετρούνται στο σύνολο του δοκιμίου.

Στις Εικς. 4.21 και 4.22 παρουσιάζεται η ορθή τροπή στην οριζόντια και την

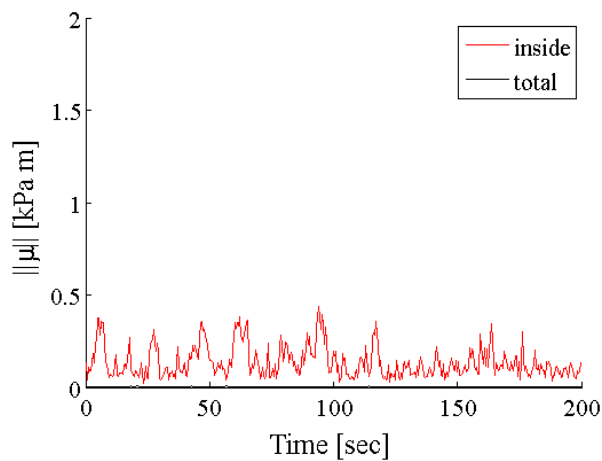


Εικόνα 4.17: Περιοχή μέτρησης.

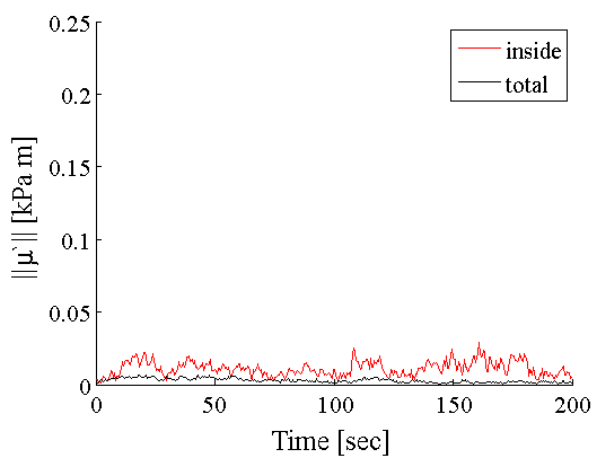


Εικόνα 4.18: Αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων.

κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα. Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι η ζώνη διάτμησης αρχίζει να σχηματίζεται μετά από 25 sec και έχει ολοκληρώσει το σχηματισμό της μετά από 100 sec. Στα 25 sec οι ορθές τροπές εντός της περιοχής μέτρησης αρχίζουν να αποκλίνουν από τις ορθές τροπές στο σύνολο του δοκιμίου, οδηγώντας σε μια πιο έντονη διαστολή του υλικού στην περιοχή μέτρησης. Οι διαφορές μεταξύ των ορθών τροπών στην περιοχή μέτρησης και στο σύνολο του δοκιμίου γίνεται πρακτικά σταθερή περίπου στα 100 sec, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι στο ση-



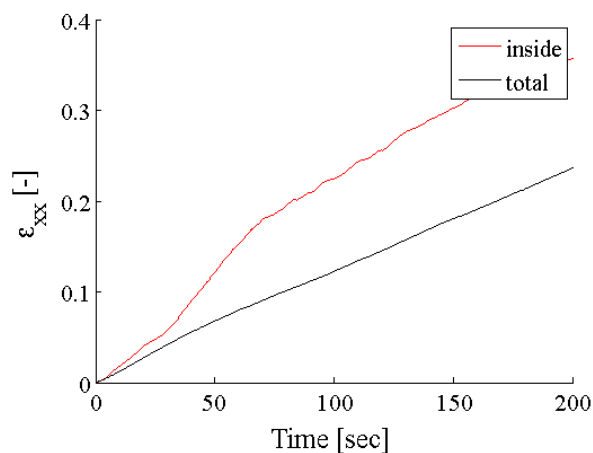
Εικόνα 4.19: Τανυστής τάσεων ζεύγους, πρώτη μορφή.



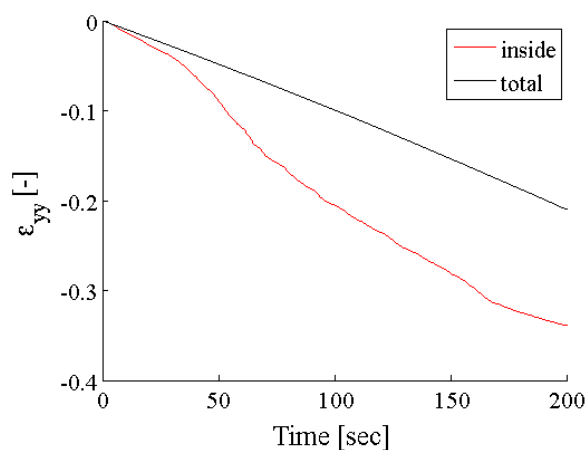
Εικόνα 4.20: Τανυστής τάσεων ζεύγους, δεύτερη μορφή.

μείο αυτό η ζώνη διάτμησης, είτε έχει σχηματιστεί πλήρως, είτε γίνεται ανενεργή. Προς το τέλος της δοκιμής παρατηρείται μια αλλαγή στην συμπεριφορά των ορθών τροπών μέσα στην περιοχή μέτρησης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο σχηματισμό μιας δεύτερης ζώνης διάτμησης κάθετα στην αρχική.

Η ίδια ποιοτική εξέλιξη παρατηρείται και στην περίπτωση της διατμητικής τροπής, η οποία παρουσιάζεται στην Εικ. 4.23, το αντισυμμετρικό τμήμα της Ια-

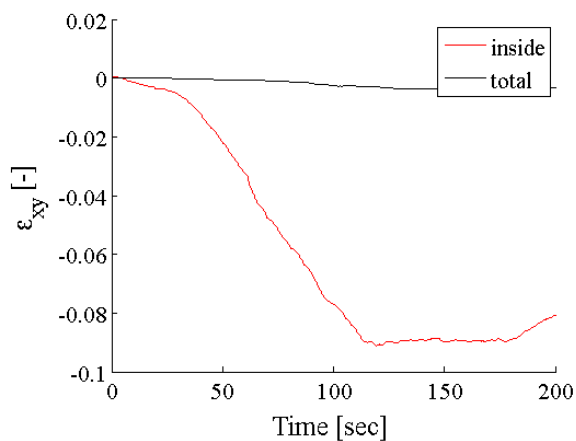


Εικόνα 4.21: Ορθή τροπή στην οριζόντια διεύθυνση.

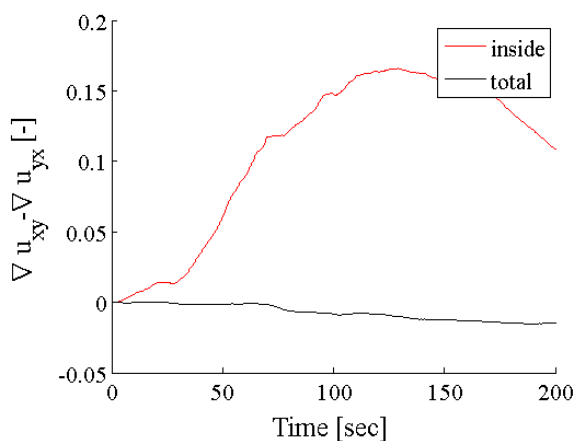


Εικόνα 4.22: Ορθή τροπή στην κάθετη διεύθυνση.

κωβιανής των μετατοπίσεων, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικ. 4.24, και τις περιστροφές, οι οποίες παρουσιάζονται στην Εικ. 4.25. Αν και η διατμητική τροπή, το αντισυμμετρικό τμήμα της Ιακωβιανής και οι περιστροφές είναι ποιοτικά όμοια, οι τιμές τους διαφέρουν σημαντικά. Η απόλυτη τιμή της διατμητικής τροπής είναι περίπου το ήμισυ αυτής του αντισυμμετρικού τμήματος της Ιακωβιανής των μετατοπίσεων. Ταυτόχρονα οι περιστροφές είναι περίπου ίσες κατά απόλυτη τιμή με το αντισυμμετρικό τμήμα της Ιακωβιανής των μετατοπίσεων, αλλά έχουν το αντίθετο



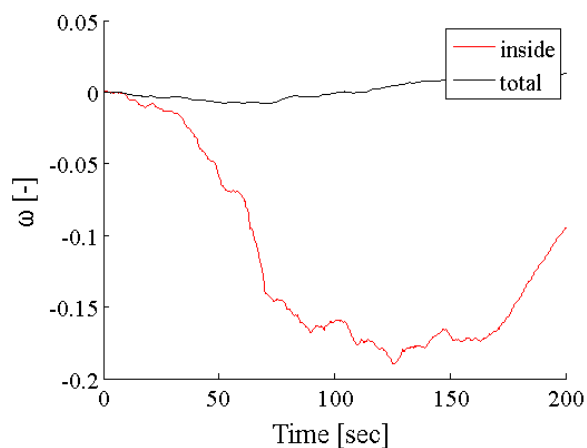
Εικόνα 4.23: Διαμητική τροπή.



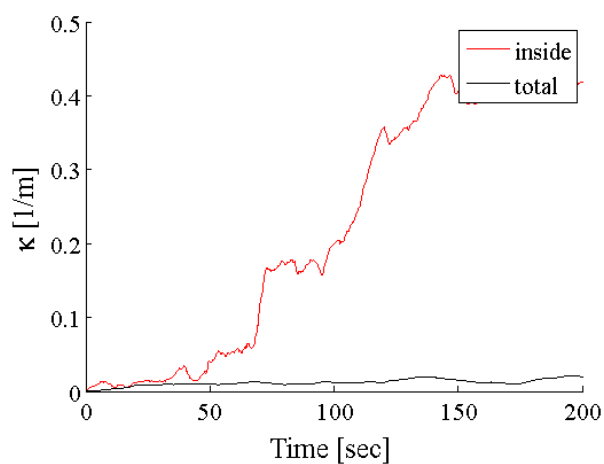
Εικόνα 4.24: Αντισυμμετρικό τμήμα της Ιακωβιανής των μετατοπίσεων.

πρόσημο. Και στις τρεις Εικς. 4.23, 4.24 και 4.25 παρατηρείται ότι οι εμφανιζόμενες ποσότητες είναι πρακτικά μηδενικές όταν μετρώνται στο σύνολο του δοκιμίου, όπως ήταν αναμενόμενο.

Στην Εικ. 4.26 δίνεται η μετρική της καμπυλότητας. Στο εσωτερικό της περιοχής μέτρησης παρατηρείται μια έντονη αύξηση της καμπυλότητας λίγο μετά τα 50 sec δοκιμής, η οποία συνεχίζεται ως περίπου τα 150 sec με ένα πλατό περίπου στα 100 sec. Η γενική συμπεριφορά της μετρικής του τανυστή της καμπυλότητας



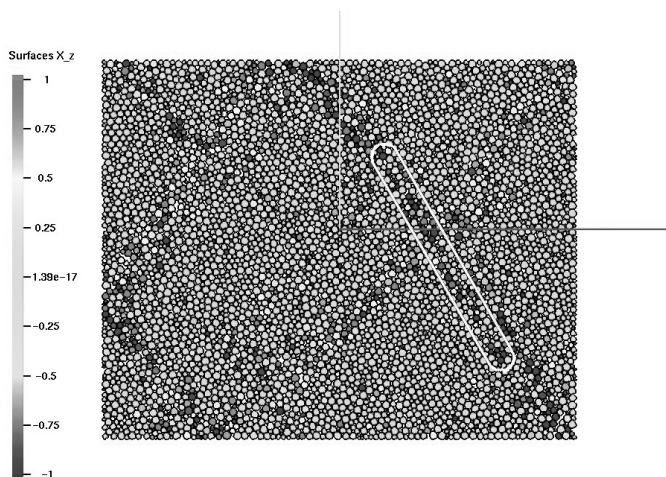
Εικόνα 4.25: Περιστροφές.



Εικόνα 4.26: Μετρική της καμπυλότητας.

βρίσκεται σε συμφωνία με τις ποσότητες που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Η μέτρηση του τανυστή της καμπυλότητας παρουσιάζει ωστόσο περισσότερες ταλαντώσεις σε σχέση με τα υπόλοιπα μέτρα παραμόρφωσης και φαίνεται να είναι εν γένει πιο ευαίσθητη στην επιλογή της περιοχής μέτρησης.

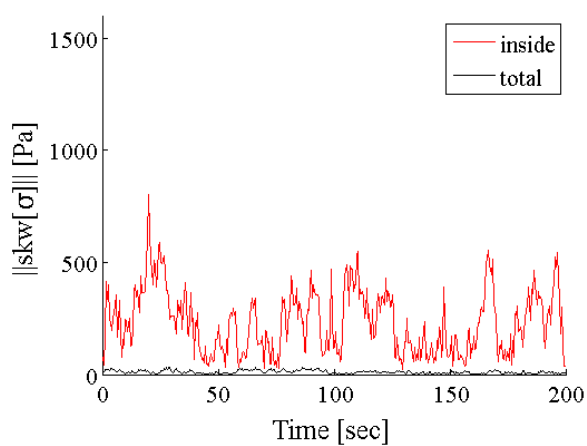
4.6 Δωδεκάγωνα



Εικόνα 4.27: Περιοχή μέτρησης.

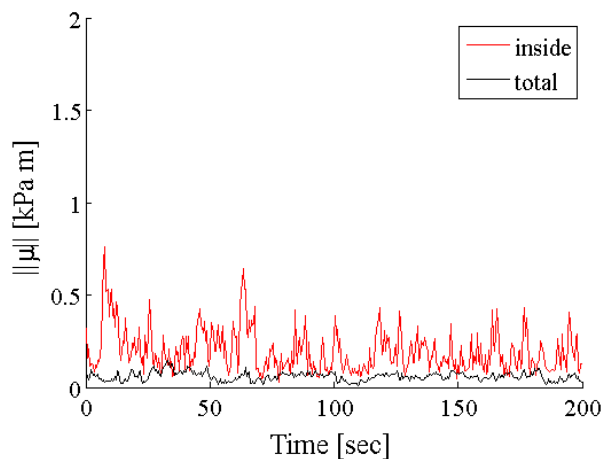
Στην Εικ. 4.27 παρουσιάζεται η περιοχή μέτρησης για το δεύτερο δοκίμιο δωδεκαγώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης μετά από 100 sec φόρτισης. Όπως φαίνεται η ζώνη διάτμησης έχει ήδη σχηματιστεί.

Στην Εικ. 4.28 δίνεται η μετρική του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή

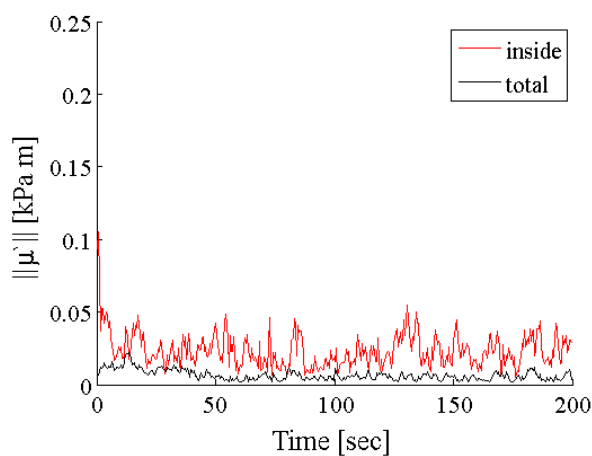


Εικόνα 4.28: Αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων.

των τάσεων, ενώ στις Εικς. 4.29 και 4.30 παρουσιάζεται η μετρική του τανυστή



Εικόνα 4.29: Τανυστής τάσεων ζεύγους, πρώτη μορφή.

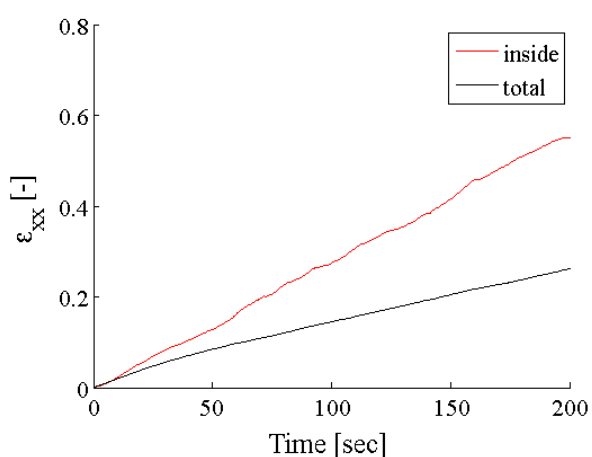


Εικόνα 4.30: Τανυστής τάσεων ζεύγους, δεύτερη μορφή.

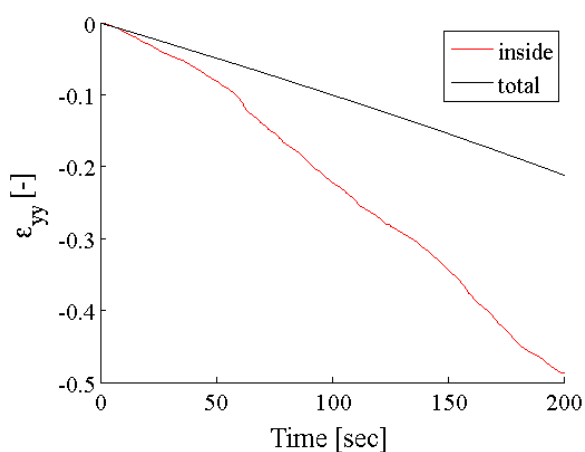
των τάσεων ζεύγους για την πρώτη και τη δεύτερη μορφή αντίστοιχα. Οι τιμές και των τριών ποσοτήτων είναι σημαντικά υψηλότερες από τις αντίστοιχες για τους δίσκους. Στην περίπτωση του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων παρατηρείται ένα μέγιστο περίπου στα 25 sec και μετά η τιμή του απομειώνεται σχεδόν στο μηδέν στα 100 sec έως περίπου τα 125 sec. Και οι δύο μορφές του τανυστή των τάσεων ζεύγους επιστρέφουν αποτελέσματα με έντονες ταλαντώσεις.

Στην περίπτωση της πρώτης μορφής παρατηρείται μια αυξημένη τιμή της μετρικής του τανυστή των τάσεων ζεύγους μέχρι τα περίπου 70 sec, ενώ στην περίπτωση της δεύτερης μορφής ως τα περίπου 25 sec και εκ νέου στα περίπου 125 sec. Οι ταλαντώσεις ωστόσο είναι τέτοιες που παρατηρήσεις αυτού του είδους δεν μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστες.

Στις Εικς. 4.31 και 4.32 δίνεται η ορθή τροπή στην οριζόντια και στην κάθετη

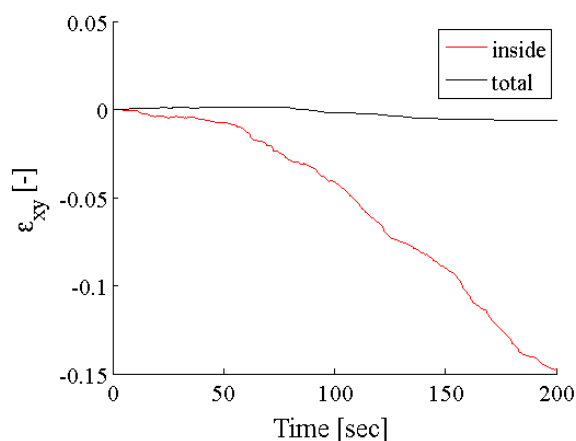


Εικόνα 4.31: Ορθή τροπή στην οριζόντια διεύθυνση.



Εικόνα 4.32: Ορθή τροπή στην κάθετη διεύθυνση.

διεύθυνση αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις η τιμή που μετρήθηκε μέσα στην



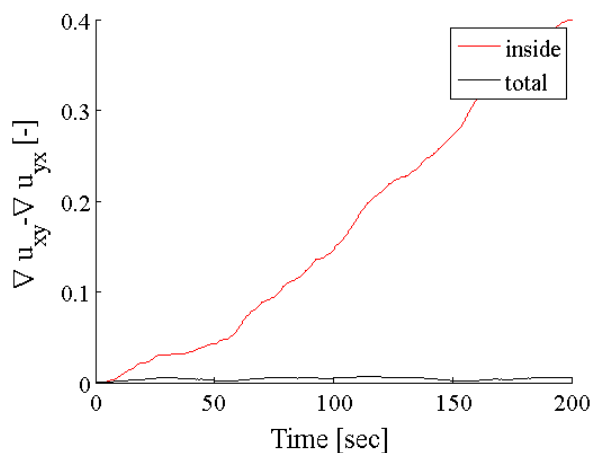
Εικόνα 4.33: Διατμητική τροπή.

περιοχή μέτρησης είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη για το σύνολο του δοκιμίου για όλες τις χρονικές στιγμές. Η ορθή τροπή εντός της περιοχής μέτρησης αποκλίνει από εκείνη στο σύνολο του δοκιμίου σε πολύ μικρό χρόνο, περί τα 5 sec.

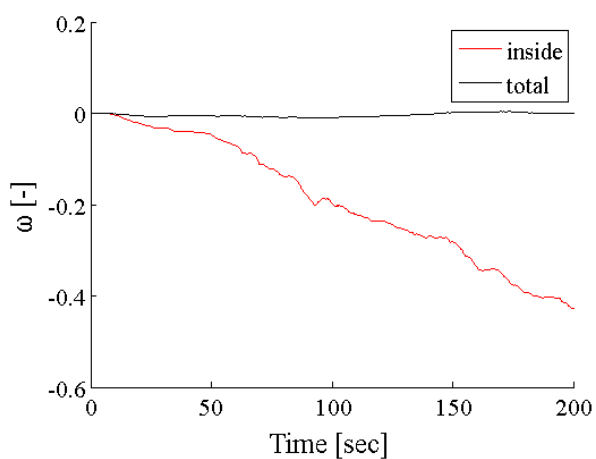
Στην Εικ. 4.33 παρουσιάζεται η διατμητική τροπή. Και σε αυτή την περίπτωση η διατμητική τροπή στην περιοχή μέτρησης αποκλίνει αμέσως από εκείνη στο σύνολο του δοκιμίου, η οποία και είναι πρακτικά αμελητέα.

Στην Εικ. 4.34 παρουσιάζεται η μετρική του αντισυμμετρικού τμήματος της Ιακωβιανής της μετατόπισης, ενώ στην Εικ. 4.35 δίνονται οι περιστροφές. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρείται σημαντική διαφορά μεταξύ της μετρούμενης ποσότητας στην περιοχή μέτρησης και στο σύνολο του δοκιμίου. Όπως και για την διατμητική παραμόρφωση, και οι δύο ποσότητες εμφανίζουν αύξηση του ρυθμού τους περί τα 50 sec. Όπως και για τους δίσκους, οι τιμές του αντισυμμετρικού μέρους της Ιακωβιανής της μετατόπισης είναι παρόμοιες, αλλά με αντίθετο πρόσημο.

Στην Εικ. 4.36 δίνεται η μετρική του τανυστή της καμπυλότητας. Η τιμή που μετρήθηκε μέσα στην περιοχή μέτρησης είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στο σύνολο του δοκιμίου. Μια απότομη αύξηση του ρυθμού της καμπυλότητας παρατηρείται εντός της ζώνης διάτμησης μεταξύ των 50 και των 100 sec, στο οποίο σημείο παρατηρείται μια μείωση. Η μείωση αυτή οφείλεται στο σχηματισμό



Εικόνα 4.34: Αντισυμμετρικό τμήμα της Ιακωβιανής της μετατόπισης.

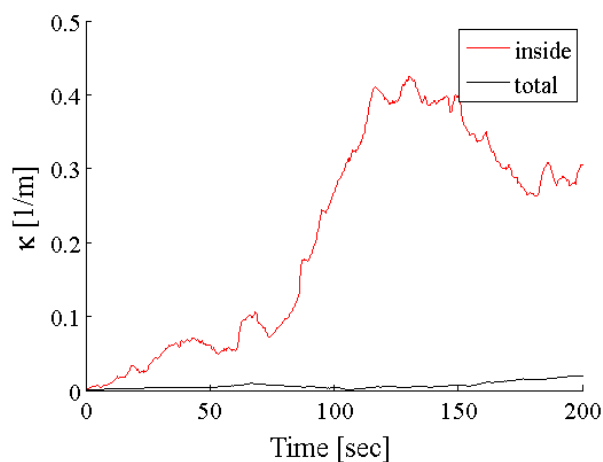


Εικόνα 4.35: Περιστροφές.

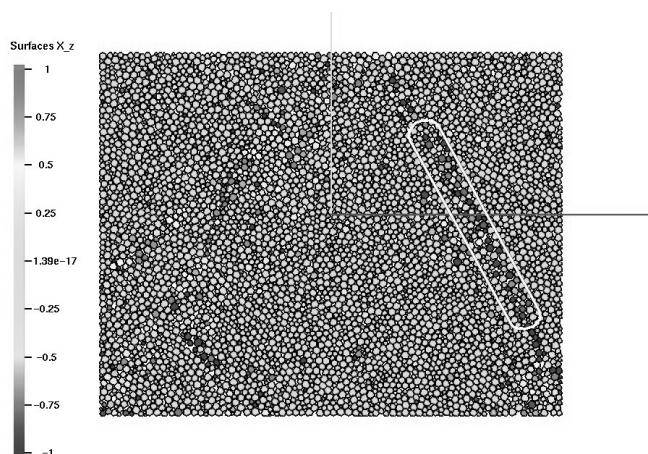
μιας δεύτερης ζώνης διάτμησης που τέμνει την πρώτη και είναι σχεδόν κάθετη σε αυτή. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να αιτιολογήσει και την δεύτερη αύξηση του αντισυμμετρικού τμήματος του τανυστή των τάσεων λίγο μετά τα 100 sec.

4.7 Εξάγωνα

Στην Εικ. 4.37 παρουσιάζεται η περιοχή μέτρησης για το πρώτο δοκίμιο εξα-



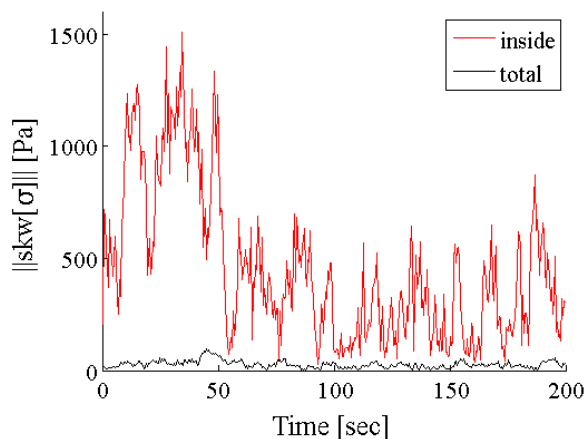
Εικόνα 4.36: Μετρική της καμπυλότητας.



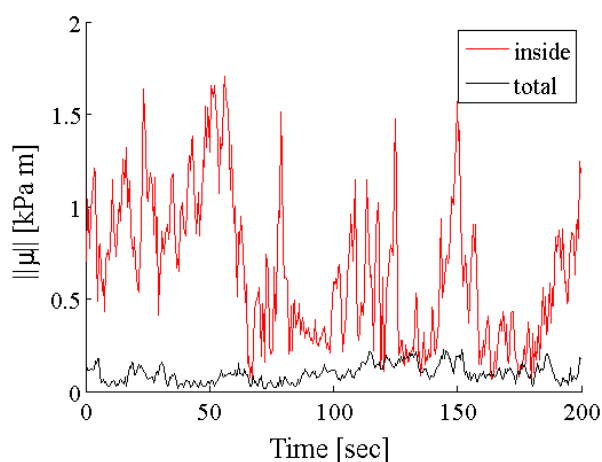
Εικόνα 4.37: Περιοχή μέτρησης.

γώνων με υψηλό αριθμό συνδιάταξης μετά από 100 sec δοκιμής. Η κυρίαρχη ζώνη διάτμησης φαίνεται καθαρά. Σε σχέση με το δοκίμιο των δίσκων η σχηματιζόμενη ζώνη διάτμησης είναι σημαντικά πιο λεπτή και παραμένει καθ'όλη τη διάρκεια μικρότερη από 10 σωματίδια.

Στην Εικ. 4.38 δίνεται η μετρική του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων. Μια έντονη αύξηση της τιμής του παρατηρείται στην αρχή της δοκιμής, ακολουθούμενη από μια μείωση περίπου στα 50 sec. Η τιμή της μετρικής του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων είναι σημαντικά μεγαλύτερη



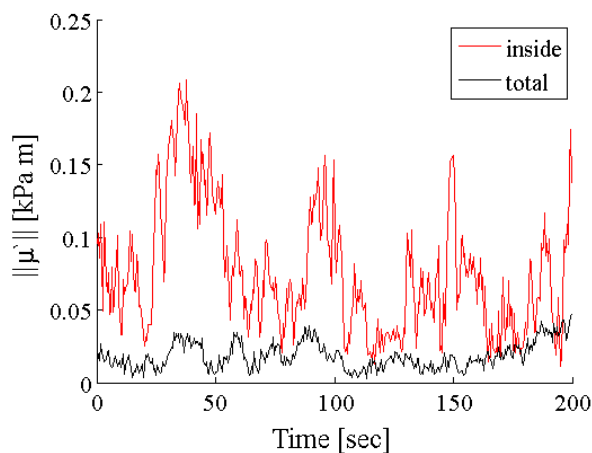
Εικόνα 4.38: Αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων.



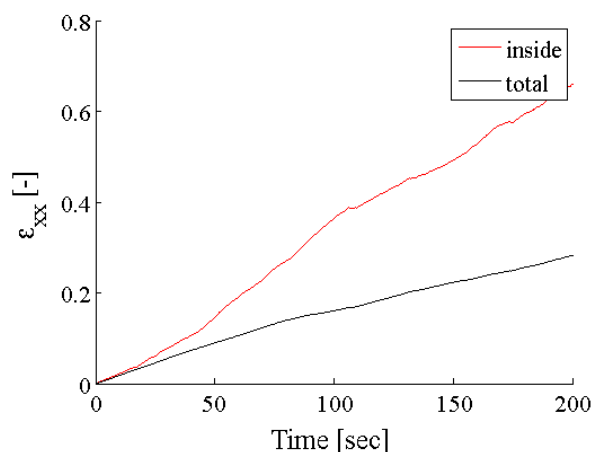
Εικόνα 4.39: Τανυστής τάσεων ζεύγους, πρώτη μορφή.

από εκείνη που μετράται σε δοκίμια δωδεκαγώνων και δίσκων για όλες τις χρονικές στιγμές, όπως μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί.

Στις Εικς. 4.39 και 4.40 παρουσιάζεται η μετρική του τανυστή των τάσεων ζεύγους σύμφωνα με την πρώτη και τη δεύτερη μορφή, αντιστοίχως. Και στις δύο περιπτώσεις η εξέλιξη είναι παρόμοια με εκείνη του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων, αν και οι τιμές διαφέρουν κατά περίπου μια τάξη μεγέθους. Η πρώτη μορφή αποδίδει πιο συνεπή αποτελέσματα με λιγότερες ταλαντώσεις.



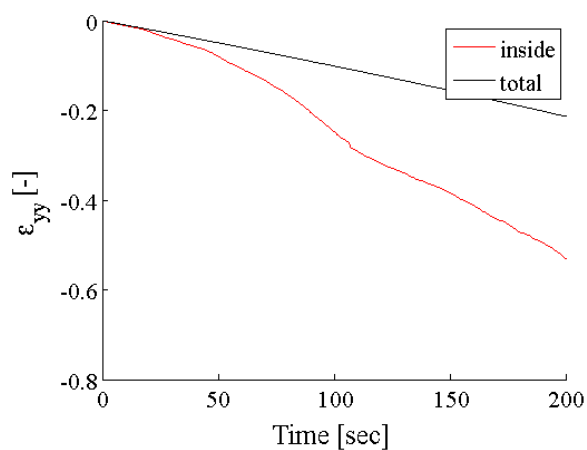
Εικόνα 4.40: Τανυστής τάσεων ζεύγους, δεύτερη μορφή.



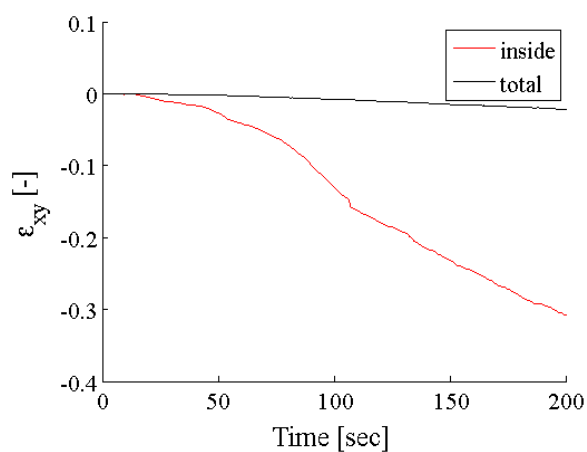
Εικόνα 4.41: Ορθή τροπή στην οριζόντια διεύθυνση.

Στις Εικς. 4.41 και 4.42 δίνεται η τροπή στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα. Η διαστολή του υλικού είναι σημαντικά μεγαλύτερη στη ζώνη διάτμησης, όπως ήταν αναμενόμενο.

Στην Εικ. 4.43 παρουσιάζεται η διατμητική τροπή. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται εντοπισμός της παραμόρφωσης στην περιοχή μέτρησης. Μια αύξηση στο ρυθμό της διατμητικής τροπής παρατηρείται στα 50 sec περίπου και μια μείωση στα 100 sec περίπου. Η αύξηση του ρυθμού προκύπτει ως αποτέλεσμα της



Εικόνα 4.42: Ορθή τροπή στην κάθετη διεύθυνση.

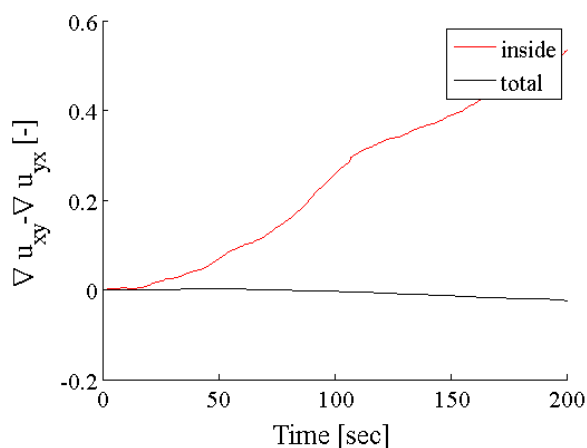


Εικόνα 4.43: Διαμητική τροπή.

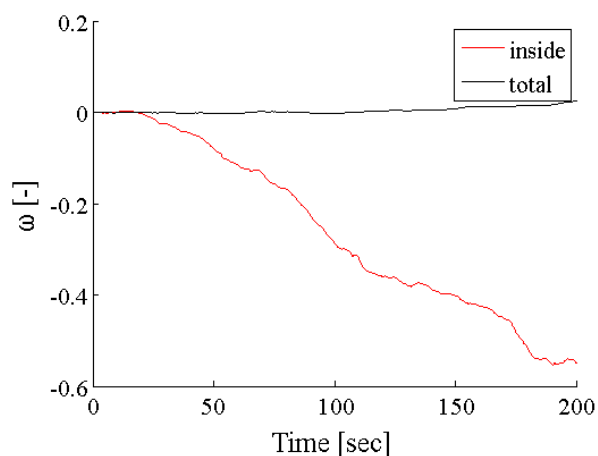
εξέλιξης της ζώνης διάτμησης, ενώ η μείωση λόγω του σχηματισμού μιας γεινιάζουσας ζώνης διάτμησης.

Στην Εικ. 4.44 παρουσιάζεται η μετρική του αντισυμμετρικού μέρους της Ιακωβιανής των μετατοπίσεων, ενώ στην Εικ. 4.45 οι περιστροφές. Όπως παρατηρήθηκε και στην περίπτωση των δίσκων και των δωδεκαγώνων, οι δύο ποσότητες έχουν κατά προσέγγιση την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετα πρόσημα.

Στην Εικ. 4.46 παρουσιάζεται η μετρική των καμπυλοτήτων. Η ποσότητα αυτή

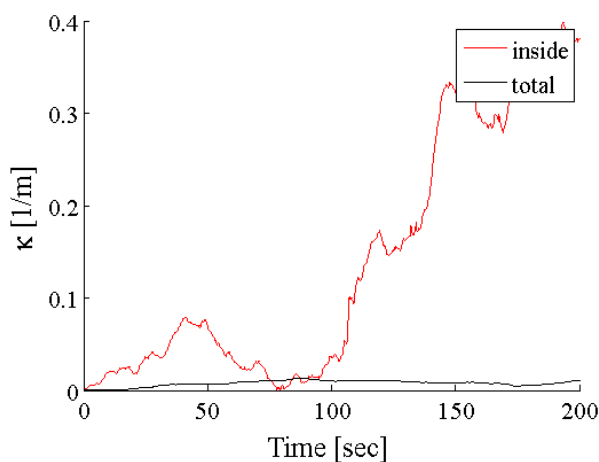


Εικόνα 4.44: Αντισυμμετρικό μέρος της Ιακωβιανής της μετατόπισης.



Εικόνα 4.45: Περιστροφές.

επιδεικνύει πολύ πιο έντονες ταλαντώσεις από τα μέτρα παραμόρφωσης που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Ακόμα και έτσι, είναι εμφανές ότι, μετά από μια ταλάντωση σε χρόνο ίσο με 50 sec, η μετρική της καμπυλότητας αυξάνει σημαντικά μέχρι το τέλος της δοκιμής. Το σημείο στο οποίο αρχίζει να λαμβάνει χώρα αυτή η έντονη αύξηση συμπίπτει με το σημείο στο οποίο παρατηρείται μείωση της τιμής του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων και της μετρικής του τανυστή των τάσεων ζεύγους.



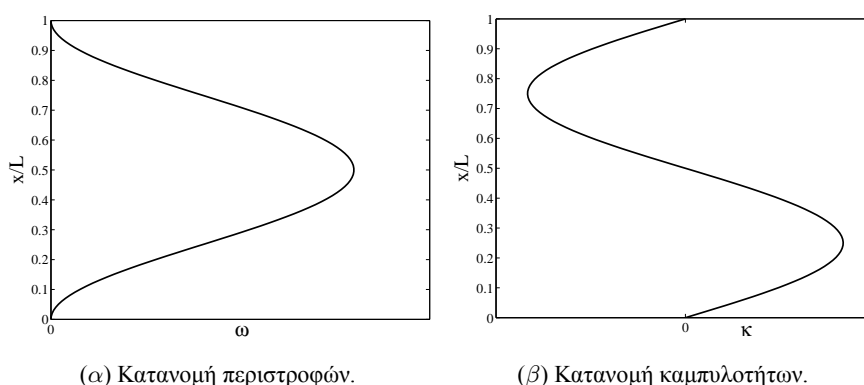
Εικόνα 4.46: Μετρική της καμπυλότητας.

4.8 Συζήτηση

Στο προηγούμενο μέρος του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάστηκαν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις περιοχές μέτρησης με κέντρο επί των ζωνών διάτμησης. Με βάση αυτά τα συμπεράσματα μπορούν να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις.

Οι μετρηθείσες μικροπολικές ποσότητες φαίνεται να εξαρτώνται έντονα από το σχήμα των κόκκων, αλλά οι έντονες ταλαντώσεις των τιμών των μετρήσεων καθιστούν την ερμηνεία των αποτελεσμάτων δυσχερή. Παρατηρήθηκε επιπλέον ότι τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στην επιλογή της περιοχής μέτρησης. Αν και κάτι τέτοιο είναι εν μέρει αναμενόμενο λόγω του μικρού εύρους των ζωνών διάτμησης και των επιβληθείσων συνοριακών συνθηκών, εγείρει ωστόσο ερωτήματα ως προς την αξιοπιστία της προσέγγισης.

Είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι ο τανυστής των τάσεων ζεύγους θα είναι μια μονότονη και περιττή συνάρτηση του τανυστή των καμπυλοτήτων. Στην μονοδιάστατη περίπτωση οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους και του τανυστή των καμπυλοτήτων κάθετα στη σχηματιζόμενη ζώνη διάτμησης αναμένεται να είναι κατά πρώτη προσέγγιση ανάλογες. Σε μία ζώνη διάτμησης που σχηματίζεται κατά την οριζόντια διεύθυνση σε ένα δισδιάστατο μέσο αναμένεται να παρατηρηθεί εντοπισμός των περιστροφών, όπως δείχνεται ποιοτικά στην Εικ. 4.47α, όπου L είναι το πάχος της ζώνης διάτμησης. Αφού η καμπυλότητα ορίζεται ως η βαθμίδα



Εικόνα 4.47

των περιστροφών, μπορεί να αποδοθεί ποιοτικά όπως φαίνεται στην Εικ. 4.47β. Αυτός ο απλός συλλογισμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή της καμπυλότητας σε όλη την έκταση της ζώνης διάτμησης θα ισούται με το μηδέν, ενώ το αυτό θα ισχύει και για την μέση τιμή των τάσεων ζεύγους. Προκειμένου επομένως να μετρηθούν οι ποσότητες αυτές είναι αναγκαίο να πραγματοποιηθούν μετρήσεις σε τμήματα μιας ζώνης διάτμησης και όχι στην ολόκληρη αυτής. Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο πρώτο μέρος του παρόντος κεφαλαίου, καθώς και τα αποτελέσματα των (Ehlers et al., 2003), μπορούν να αποδοθούν σε αδρανειακά φαινόμενα. Στα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάστηκαν μέχρι το σημείο αυτό δεν είναι δυνατόν πραγματοποιηθούν μετρήσεις σε μέρη των ζωνών διάτμησης, λόγω του ότι αυτές είναι πολύ λεπτές. Τέτοιες μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε δοκιμές απλής διάτμησης και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

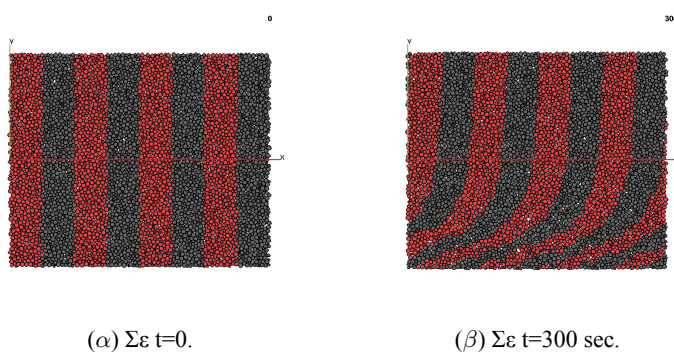
4.9 Απλή διάτμηση

Πραγματοποιήθηκαν δοκιμές απλής διάτμησης σε δοκίμια με πλάτος 11.5 m και ύψος περίπου 8 m. Στο άνω και στο κάτω σύνορο επιβλήθησαν σταθερή κάθετη τάση ίση με 20 kPa και σταθερή οριζόντια ταχύτητα ίση με 0.01 m/sec. Στα πλευρικά σύνορα επιβλήθησαν περιοδικές συνθήκες. Διαδοχικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε περιοχές μέτρησης με κέντρο σε $x = 10.5/2$ m και y να κυμαίνεται μεταξύ -3 και 3 m με βήμα 0.25. Το ύψος κάθε περιοχής μέτρησης ήταν ίσο με 2 m. Όπως και προηγουμένως, εξετάστηκαν δοκίμια δίσκων, εξαγώνων και

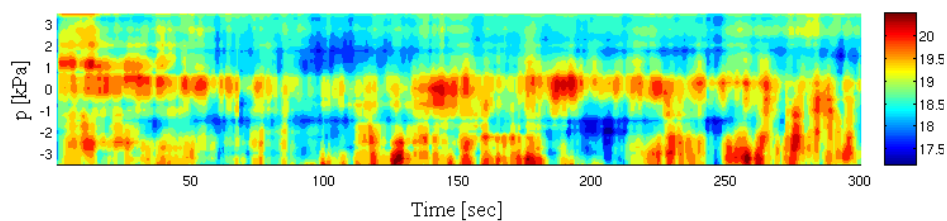
δωδεκαγώνων.

4.9.1 Δίσκοι

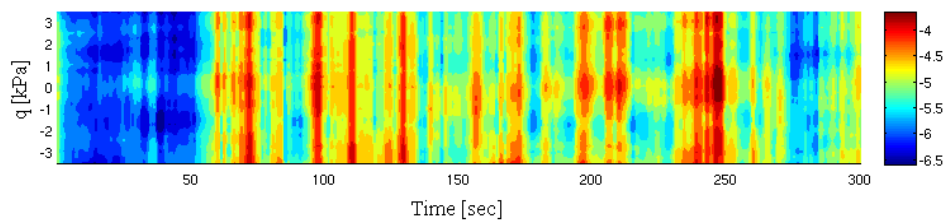
Στην Εικ. 4.48 εμφανίζεται ένα δοκίμιο δίσκων πριν και μετά τη δοκιμή. Στις Εικς. 4.49 ως 4.61 δίνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Η διατμητική τάση



Εικόνα 4.48: Δοκίμιο δίσκων.

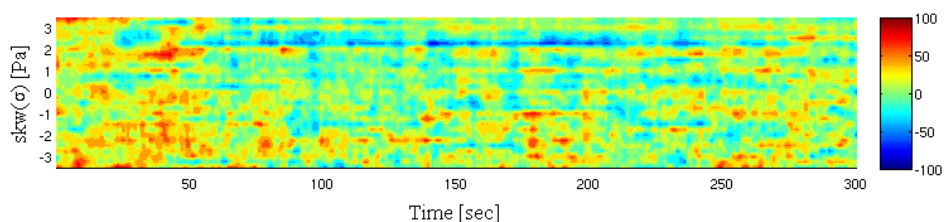


Εικόνα 4.49: σ_p σε kPa .

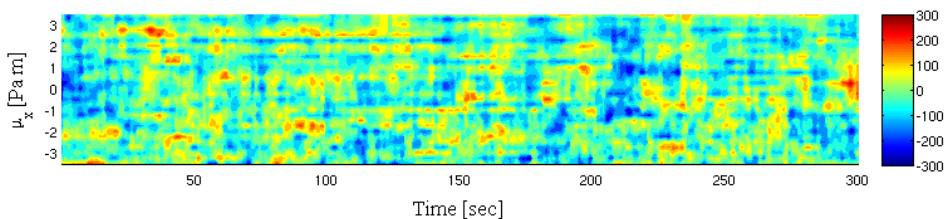


Εικόνα 4.50: σ_q σε kPa .

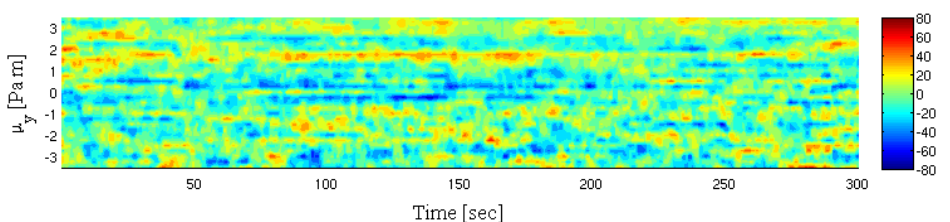
εμφανίζει μια μείωση τη χρονική στιγμή $t=60$ sec, η οποία συμπίπτει με τη στιγμή

Εικόνα 4.51: $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ σε Pa.

κατά την οποία αρχίζει να σχηματίζεται μια ζώνη διάτμησης κοντά στο κάτω σύνορο. Όπως φαίνεται στην Εικ. 4.51, δεν παρατηρούνται σημαντικές τιμές του αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων, γεγονός που συμβαδίζει με μια καταστατική περιγραφή τύπου restricted Cosserat. Και για τις δύο εκφράσεις του τα-

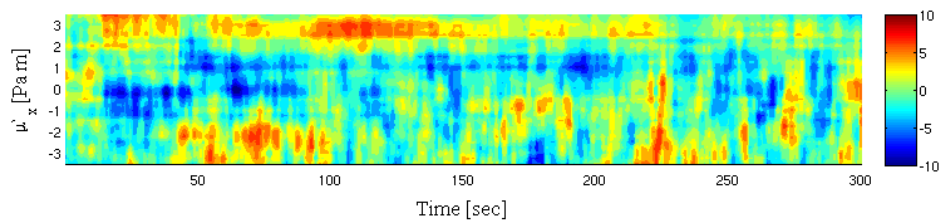
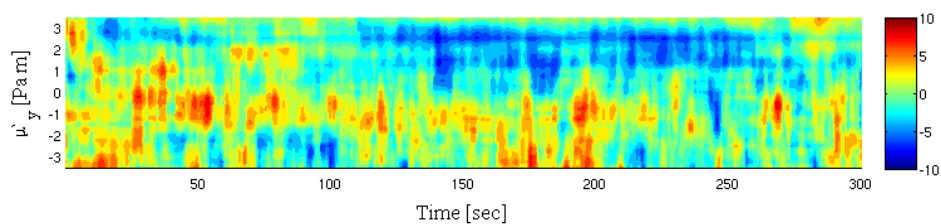
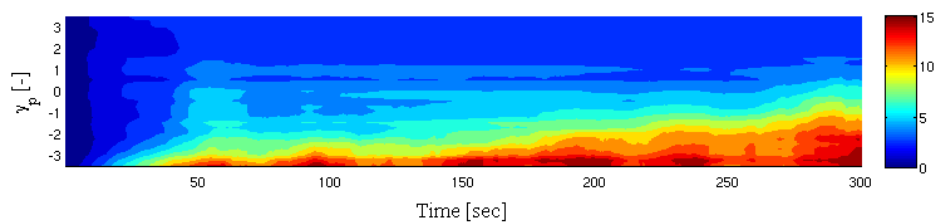
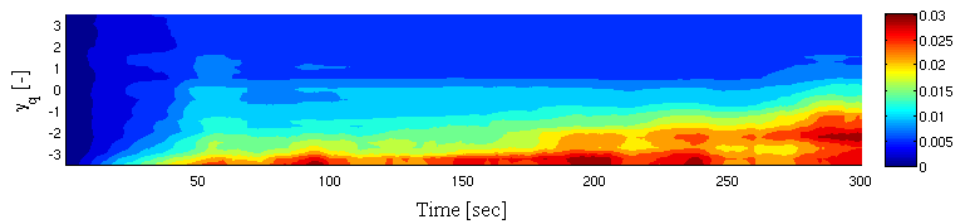
Εικόνα 4.52: μ_x σε Pa · m.

νυστή των τάσεων ζεύγους παρατηρούνται μόνο ταλαντώσεις τόσο στην οριζόντια όσο και στην κάθετη διεύθυνση. Τα αποτελέσματα για τα μέτρα παραμόρφωσης

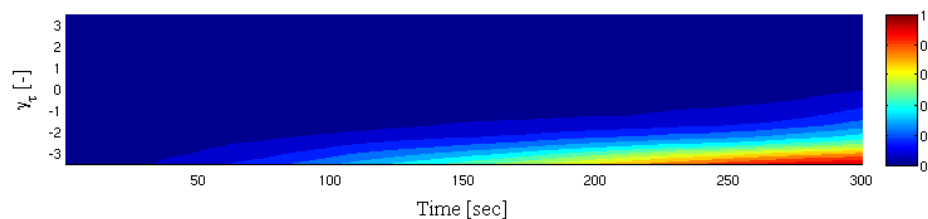
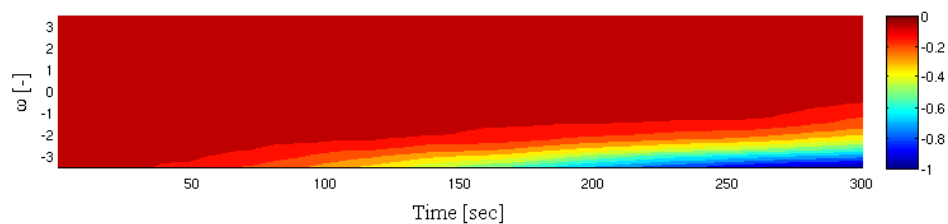
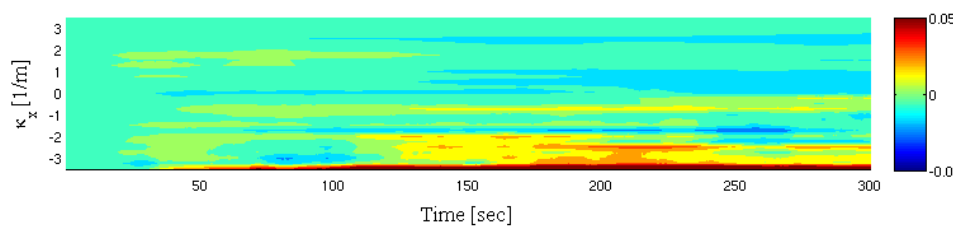
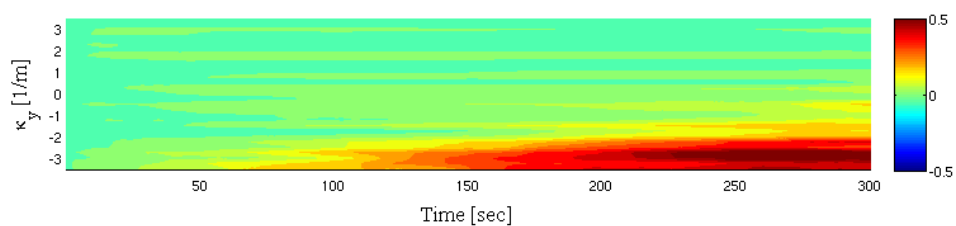
Εικόνα 4.53: μ_y σε Pa · m.

είναι τα αναμενόμενα. Στο εσωτερικό της ζώνης διάτμησης παρατηρούνται εντονη διασταλτικότητα και διατμητική τροπή, όπως φαίνεται στις Εικς. 4.56 και 4.57 αντίστοιχα.

Εντοπισμός των περιστροφών εμφανίζεται επίσης στο ίδιο χωρίο. Η συνιστώσα της καμπυλότητας στην κάθετη διεύθυνση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την

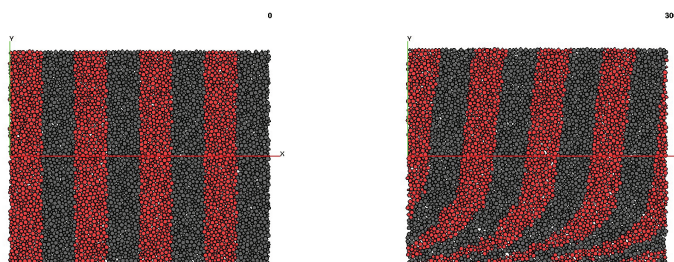
Εικόνα 4.54: μ'_x σε $Pa \cdot m$.Εικόνα 4.55: μ'_y σε $Pa \cdot m$.Εικόνα 4.56: γ_p .Εικόνα 4.57: γ_q .

αντίστοιχη στην οριζόντια διεύθυνση, όπως ήταν αναμενόμενο.

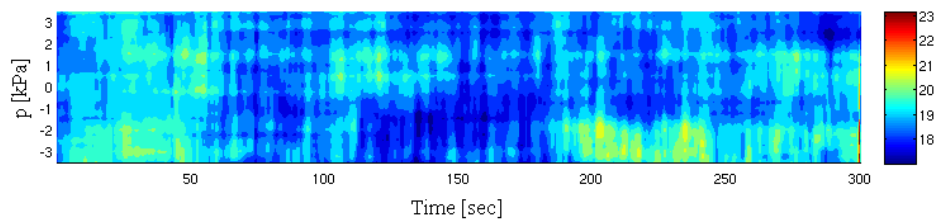
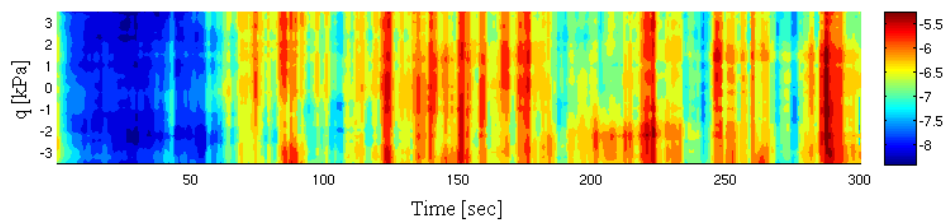
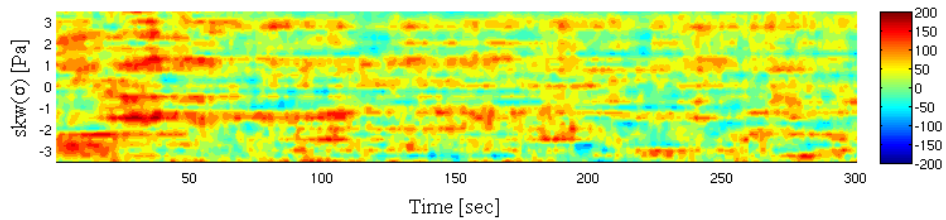
Εικόνα 4.58: $\partial_y u_x - \partial_x u_y$.Εικόνα 4.59: ω .Εικόνα 4.60: κ_x σε $1/m$.Εικόνα 4.61: κ_y in $1/m$.

4.9.2 Δωδεκάγωνα

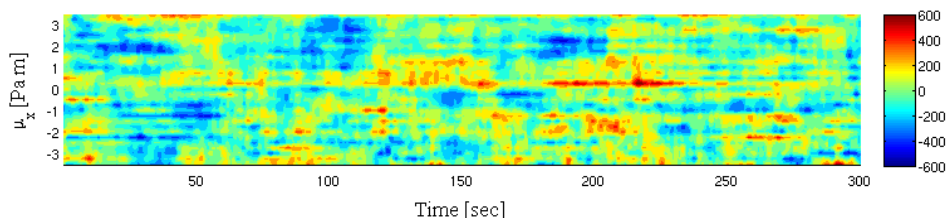
Στην Εικ. 4.62 εμφανίζεται ένα δοκίμιο δωδεκαγώνων πριν και μετά την δοκιμή. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα δίνονται στις Εικς. 4.63 ως 4.75. Η διατμητική τάση εμφανίζει μια μείωση στα 60 sec δοκιμής, χρονική στιγμή που συμπίπτει

(α) Σε $t=0$.(β) Σε $t=300$ sec.

Εικόνα 4.62: Δοκίμιο δωδεκαγώνων.

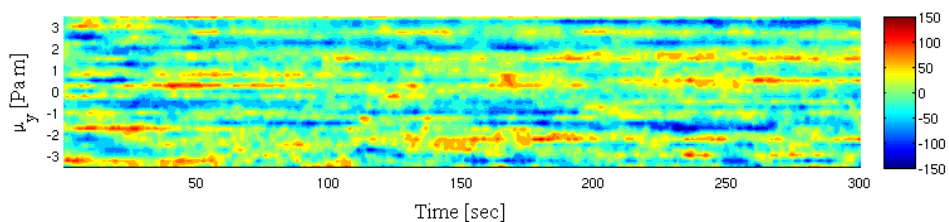
Εικόνα 4.63: σ_p σε kPa .Εικόνα 4.64: σ_q σε kPa .Εικόνα 4.65: $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ σε Pa .

με εκείνη του σχηματισμού μια ζώνης διάτμησης στην εγγύτητα του κάτω συνόρου. Όπως φαίνεται στην Εικ. 4.65, δεν μετράται σημαντικό αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων ζεύγους, όπως και προηγουμένως. Η πρώτη διατύπωση του

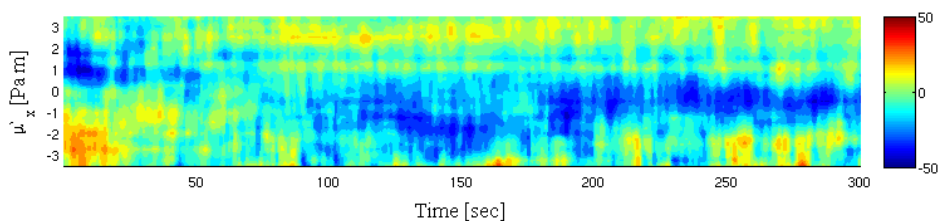


Εικόνα 4.66: μ_x σε $Pa \cdot m$.

τανυστή των τάσεων ζεύγους δεν αποδίδει συνεπή αποτελέσματα. Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί ότι η συνιστώσα του τανυστή των τάσεων ζεύγους στην οριζόντια διεύθυνση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη στην κάθετη διεύθυνση. Το γεγονός αυτό βρίσκεται σε αντίθεση με τα αναμενόμενα και οφείλεται στη γεωμετρία της περιοχής μέτρησης. Στην περίπτωση της δεύτερης διατύπωσης παρατηρείται

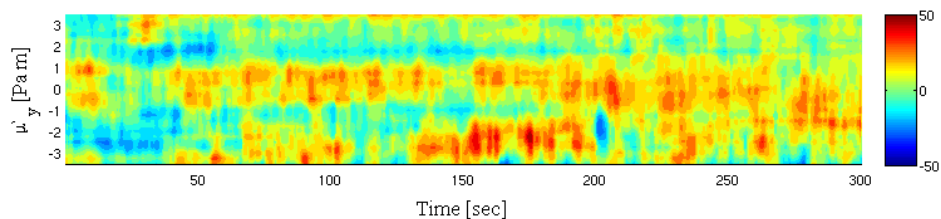


Εικόνα 4.67: μ_y σε $Pa \cdot m$.

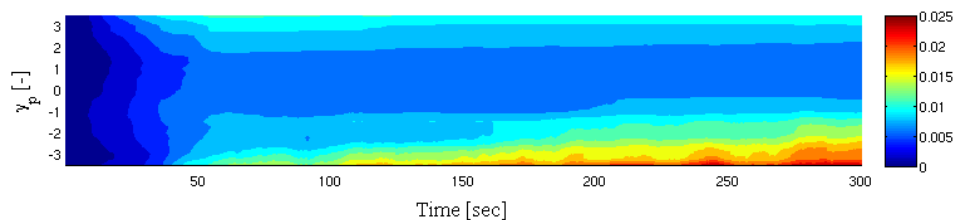


Εικόνα 4.68: μ'_x σε $Pa \cdot m$.

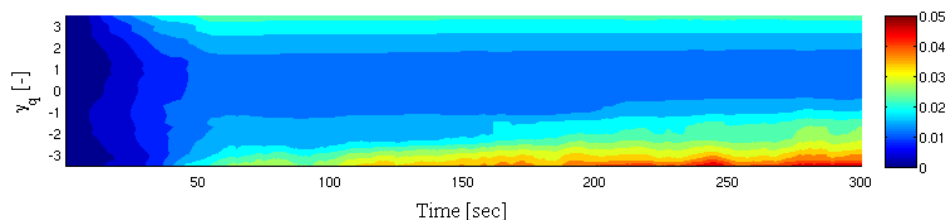
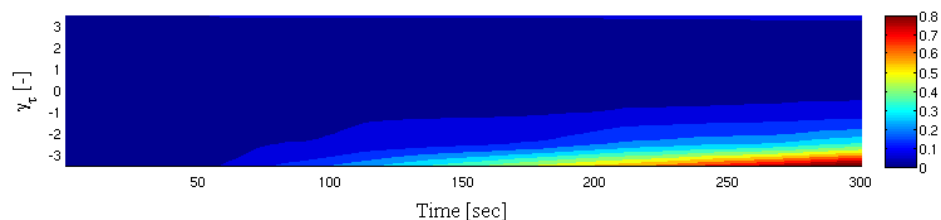
μια συγκέντρωση των τάσεων ζεύγους στο σύνορο της ζώνης διάτμησης τόσο στην οριζόντια όσο και στην κάθετη διεύθυνση. Οι τιμές των παρατηρούμενων τάσεων ζεύγους είναι σε όλες τις χρονικές στιγμές μικρότερες από 50 Pa m. Τα ποτελέ-

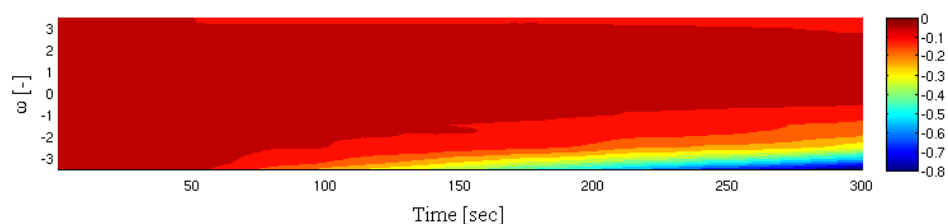
Εικόνα 4.69: μ'_y σε $\text{Pa} \cdot \text{m}$.

σματα για τα μέτρα παραμόρφωσης είναι τα αναμενόμενα. Στο εσωτερικό της ζώ-

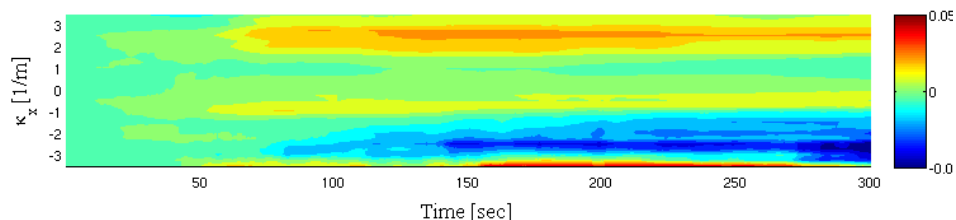
Εικόνα 4.70: γ_p .

νης διάτμησης παρατηρούνται έντονη διασταλτικότητα και διατμητική τροπή από τα 60 sec δοκιμής.

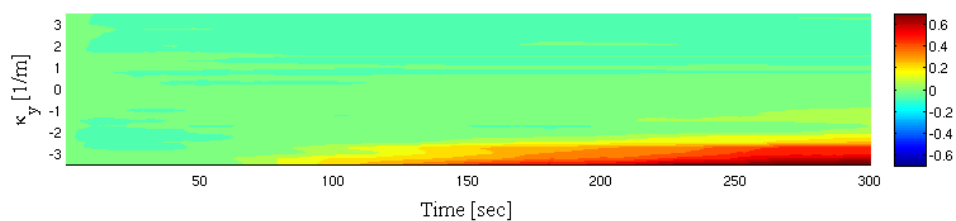
Εικόνα 4.71: γ_q .Εικόνα 4.72: $\partial_y u_x - \partial_x u_y$.

Εικόνα 4.73: ω .

Στην ίδια περιοχή παρατηρείται και εντοπισμός των περιστροφών. Η συνι-

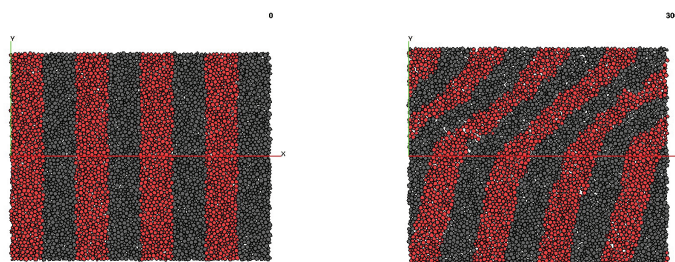
Εικόνα 4.74: κ_x σε $1/m$.

στάσα της καμπυλότητας στην οριζόντια διεύθυνση είναι και σε αυτή την περίπτωση σημαντικά μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από εκείνη στην οριζόντια διεύθυνση και είναι έντονα εντοπισμένη στο κάτω σύνορο.

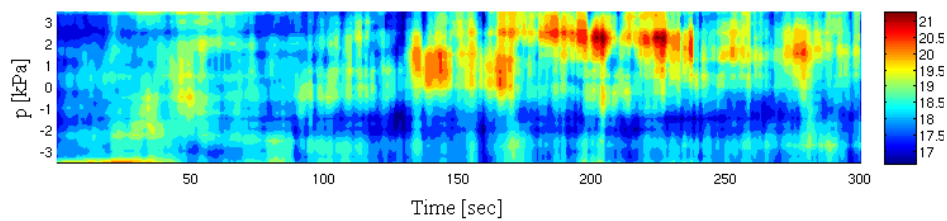
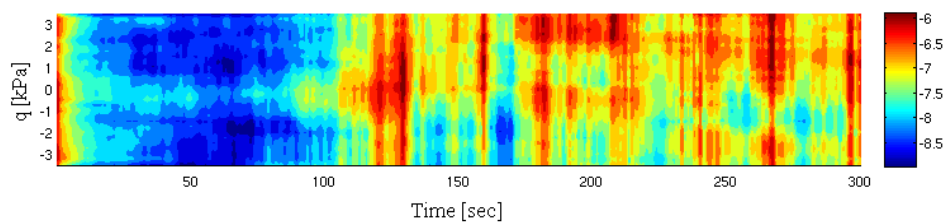
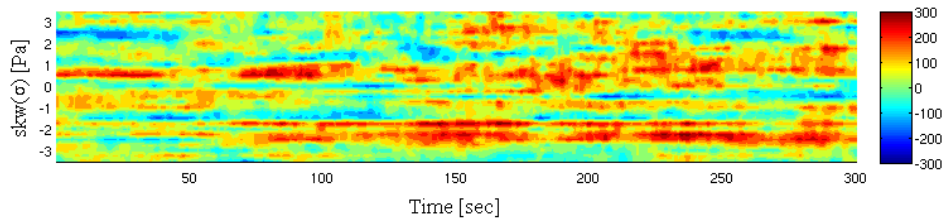
Εικόνα 4.75: κ_y in $1/m$.

4.9.3 Εξάγωνα

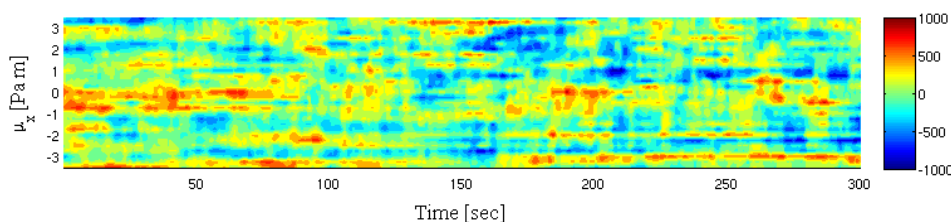
Στην Εικ. 4.76 εμφανίζεται ένα δοκίμιο εξαγώνων πριν και μετά τη δοκιμή. Στις Εικς. 4.77 ως 4.89 δίνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Η διατμητική τάση παρουσιάζει μια σημαντική μείωση στα περίπου 100 sec δοκιμής, κατά την οποία χρονική στιγμή παρατηρείται και σχηματισμός μιας ζώνης διάτμησης κοντά

(α) Σε $t=0$.(β) Σε $t=300$ sec.

Εικόνα 4.76: Δοκίμιο εξαγώνων.

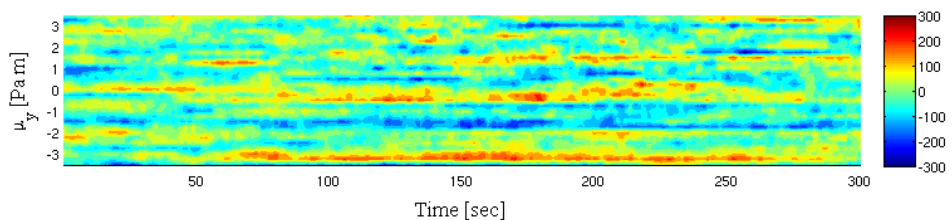
Εικόνα 4.77: σ_p σε kPa .Εικόνα 4.78: σ_q σε kPa .Εικόνα 4.79: $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ σε Pa .

στο άνω σύνορο. Όπως φαίνεται στην Εικ. 4.79, το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων εμφανίζεται να είναι θετικό, αν και μικρό. Τα αποτελέσματα δεν αρκούν για την εξαγωγή συμπερασμάτων, οι τιμές που παρατηρούνται είναι ωστόσο ξεκάθαρα μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες για δίσκους και δωδεκάγωνα. Η πρώτη διατύπωση αποδίδει μόνο ταλαντώσεις, όπως και προηγουμένως. Σε αυτή

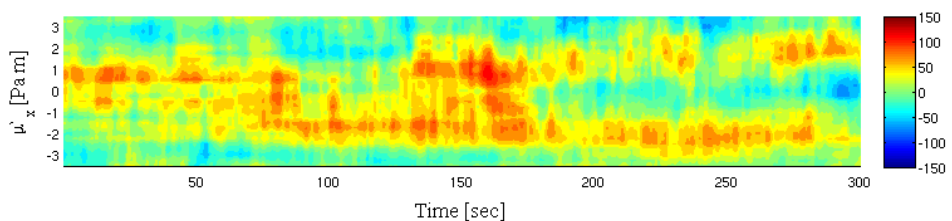


Εικόνα 4.80: μ_x σε $Pa \cdot m$.

την περίπτωση επίσης η συνιστώσα του τανυστή των τάσεων ζεύγους είναι σημαντικά μεγαλύτερη στην οριζόντια από ό,τι στην κάθετη διεύθυνση. Στην περίπτωση



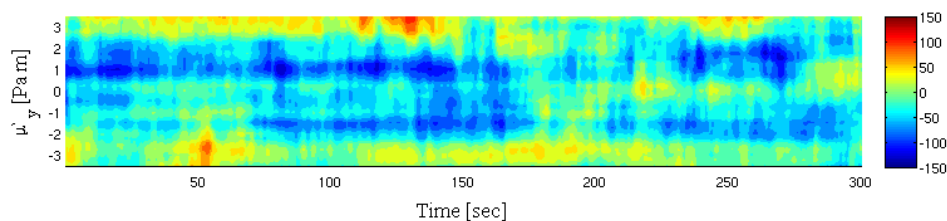
Εικόνα 4.81: μ_y σε $Pa \cdot m$.



Εικόνα 4.82: μ'_x σε $Pa \cdot m$.

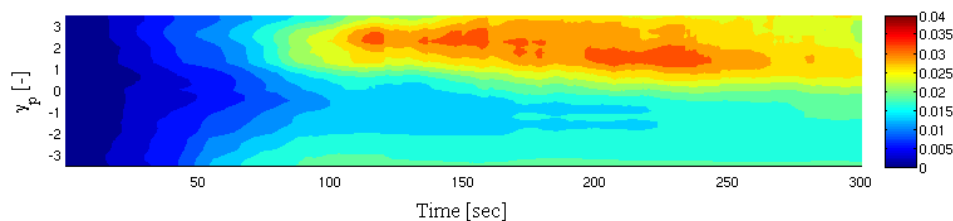
της δεύτερης διατύπωσης παρατηρείται συγκέντρωση των τάσεων ζεύγους στα σύνορα της ζώνης διάτμησης τόσο στην οριζόντια όσο και στην κάθετη διεύθυνση. Οι μετρηθείσες τιμές είναι μικρές και παραμένουν κάτω των $150 Pa \cdot m$, είναι ωστόσο σημαντικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές που μετρήθηκαν στην περίπτωση

των δωδεκαγώνων. Παρατηρείται μια απομείωση του τανυστή των τάσεων ζεύγους στα 150 sec, χρονική στιγμή κατά την οποία γίνεται σημαντική η τιμή των καμπυλοτήτων, όπως φαίνεται στην Εικ. 4.89. Τα αποτελέσματα για τα μέτρα παραμόρ-



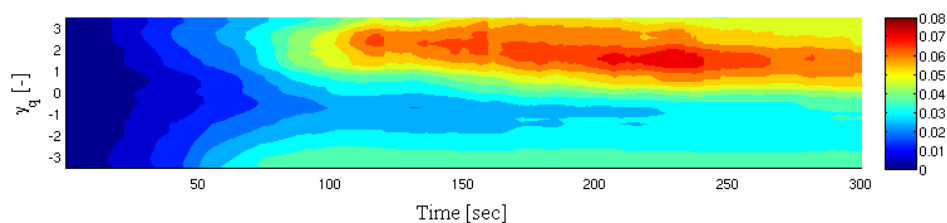
Εικόνα 4.83: μ'_{xy} σε $Pa \cdot m$.

φοσης είναι τα αναμενόμενα. Μετά από 100 sec δοκιμής παρατηρούνται έντονη



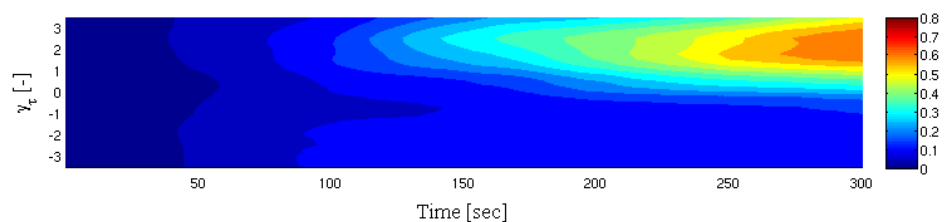
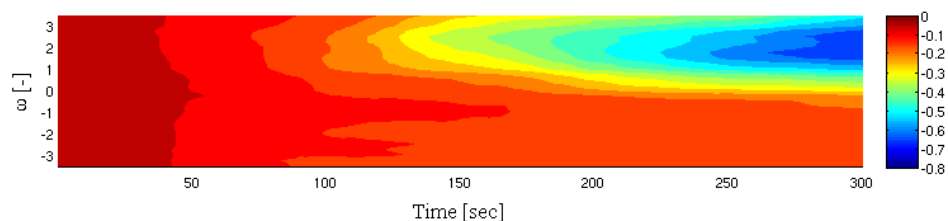
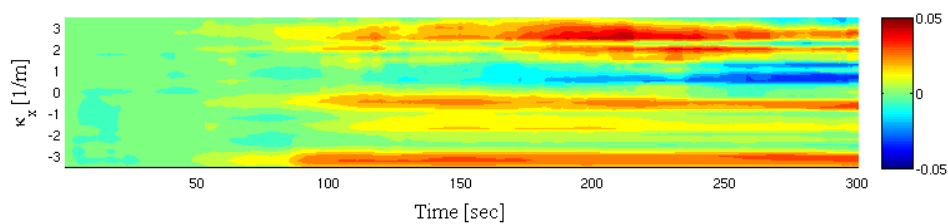
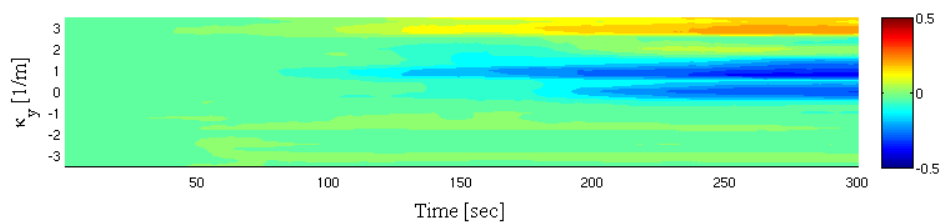
Εικόνα 4.84: γ_p .

διασταλτικότητα και διατμητική τροπή στο εσωτερικό της ζώνης διάτμησης.



Εικόνα 4.85: γ_q .

Στην ίδια περιοχή παρατηρείται και εντοπισμός των περιστροφών. Η συνιστώσα της καμπυλότητας στην κάθετη διεύθυνση είναι σημαντικά μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την αντίστοιχη ποσότητα στην οριζόντια διεύθυνση. Όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, παρατηρούνται τιμές με αντίθετα πρόσημα στα δύο σύνορα της ζώνης διάτμησης.

Εικόνα 4.86: $\partial_y u_x - \partial_x u_y$.Εικόνα 4.87: ω .Εικόνα 4.88: κ_x σε $1/m$.Εικόνα 4.89: κ_y σε $1/m$.

4.10 Συμπεράσματα

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο παρόν κεφάλαιο μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα.

Καταρχήν, το σχήμα των κόκκων συνδέεται ισχυρά με την μέγιστη τιμή του

αντισυμμετρικού μέρους του τανυστή των τάσεων ή της μετρικής του τανυστή των τάσεων ζεύγους. Φαίνεται ότι η αντίσταση στην περιστροφή είναι η ποσότητα που ελέγχει το μέγεθος των μικροπολικών μεγεθών φόρτισης. Η αντίσταση στην περιστροφή φαίνεται επιπλέον να επιδρά επί του πάχους των ζωνών διάτμησης, καθώς παρατηρήθηκε σημαντική διαφορά στο πάχος των ζωνών διάτμησης μεταξύ δοκίμων με διαφορετικό τύπο κόκκων. Οι ζώνες διάτμησης σε δοκίμια δίσκων ήταν οι παχύτερες, ενώ εκείνες σε δοκίμια εξαγώνων οι λεπτότερες.

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους και του τανυστή των καμπυλοτήτων δεν μπορούν να μετρηθούν σε περιοχές μέτρησης που περιλαμβάνουν ολόκληρες ζώνες διάτμησης, όπως στην περίπτωση των (Ehlers et al., 2003), καθώς κάτι τέτοιο οδηγεί σε παραπλανητικά αποτελέσματα. Είναι αναγκαίο να πραγματοποιηθεί μια τομογραφία της περιοχής ενδιαφέροντος, καθώς η μέση τιμή των παραπάνω ποσοτήτων επί ολοκλήρων ζωνών διάτμησης είναι ίση με το μηδέν. Ο τανυστής των τάσεων ζεύγους και το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων είναι σημαντικοί πριν από τον σχηματισμό της ζώνης διάτμησης για δοκίμια με αντίσταση στην κύλιση, ή, ισοδύναμα, για δοκίμια με μη κυκλικούς κόκκους. Όταν σχηματιστεί η ζώνη διάτμησης οι ποσότητες αυτές εμφανίζουν μείωση. Η ισχυρή συσχέτιση των τιμών αυτών των ποσοτήτων με τον σχηματισμό ζωνών διάτμησης οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα μικροπολικά μοντέλα είναι μια κατάλληλη επιλογή για την περιγραφή του εντοπισμού της παραμόρφωσης σε κοκκώδη μέσα.

Όσον αφορά στις δύο μορφές του τανυστή των τάσεων ζεύγους, σημειώνεται ότι η επιλογή της κατάλληλης εξαρτάται από την επιλογή για την κατανομημένη αδράνεια ως προς την περιστροφή. Αξίζει ωστόσο να σημειωθεί ότι η δεύτερη μορφή φαίνεται να είναι πιο κατάλληλη, καθώς τα σχετικά αποτελέσματα εμφανίζουν μεγαλύτερη συνέπεια και οι τιμές δεν εξαρτώνται από την γεωμετρία της περιοχής μέτρησης.

Σχετικά με τα μέτρα παραμόρφωσης, είναι δύσκολο να γίνουν συγκρίσεις στο επίπεδο της περιοχής μέτρησης, καθώς τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή σχηματισμού της ζώνης διάτμησης και από την εξέλιξή της, πράγμα που εξαρτάται με τη σειρά του από τον σχηματισμό άλλων ζωνών διάτμησης στην εγγύς περιοχή της πρώτης. Μπορούν παρόλα αυτά να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις.

Έντονη διαστολή και ισχυρή διάτμηση παρατηρήθηκαν σε όλες τις περιπτώ-

σεις, όπως ήταν αναμενόμενο. Είναι ενδιαφέρον ότι, ενώ η διατμητική τροπή είναι σημαντική, το αντισυμμετρικό μέρος της γενικευμένης τροπής είναι σχεδόν μηδέν, λόγω του ότι το αντισυμμετρικό μέρος της Ιακωβιανής της μετατόπισης έχει παρόμοια τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο με τις περιστροφές.

Εν κατακλείδι, οι μικροπολικές θεωρίες φαίνεται να αποτελούν κατάλληλο εργαλείο για την περιγραφή του εντοπισμού της παραμόρφωσης σε κοκκώδη μέσα, όπως φαίνεται από τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε περιοχές μέτρησης που περιέχουν σχηματιζόμενες ζώνες διάτμησης και κατά την διάρκεια των οποίων μετρήθηκαν μεταξύ άλλων μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους.

Κεφάλαιο 5

Μικροπολικές Θεωρίες

5.1 Μη απλά συνεχή (Non-simple continua)

Τα μικροπολικά συνεχή ανήκουν στην ευρύτερη κλάση των μη απλών συνεχών. Διάφορα συνεχή υψηλής τάξης έχουν εισαχθεί στο παρελθόν, σε μια προσπάθεια να ξεπεραστεί η αδυναμία των κλασικών θεωριών συνεχούς να προβλέψουν την συμπεριφορά του υλικού μετά τη διαρροή. Αν και οι κλασικές θεωρίες συνεχούς είναι σε θέση να περιγράψουν την εμφάνιση της αστάθειας, στην περιοχή μετά τη διακλάδωση καταλήγουν σε μαθηματικά προβλήματα που είναι κακώς ορισμένα υπό την έννοια του Hadamard. Οι προκύπτουσες δυσκολίες γίνονται πιο μεγάλες όταν εισάγεται τροπική χαλάρωση (softening) του υλικού. Τα μη απλά συνεχή χαρακτηρίζονται από ένα εσωτερικό μήκος που αποτελεί ιδιότητα του υλικού, με αποτέλεσμα να επιλύονται σε ένα βαθμό τα μαθηματικά προβλήματα που προκύπτουν στην περίπτωση των κλασικών θεωριών συνεχούς. Αυτή η επιπλέον παράμετρος συνδέεται συνήθως με τη μέση διάμετρο κόκκου, στην περίπτωση των κοκκωδών μέσων, ή με κάποιο άλλο χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος υπό εξέταση. Τέτοιου είδους μη απλά συνεχή είναι τα μικροπολικά συνεχή ή συνεχή Cosserat, τα μοντέλα που προκύπτουν από την θεωρία του Mindlin, τα μη τοπικά συνεχή και τα συνεχή που περιέχουν πλαστικότητα βαθμίδας.

Η τελευταία προσέγγιση εισάγει υψηλότερες βαθμίδες της τροπής στις καταστατικές εξισώσεις. Παραδείγματα τέτοιων διατυπώσεων αποτελούν οι εργασίες (Vardoulakis et al., 1992; Dillon and Kratochvil, 1970; Fleck et al., 1994). Οι θεωρίες πλαστικότητας βαθμίδας μπορούν εν γένει να διακριθούν σε δύο κατηγορίες.

Στην πρώτη από αυτές γίνεται η θεώρηση ότι η συνάρτηση διαρροής εξαρτάται απευθείας από τη Λαπλασιανή της πλαστικής τροπής, ενώ στη δεύτερη η αρχική υπόθεση είναι ότι η εσωτερικές μεταβλητές στη συνεχή περιγραφή εξαρτώνται από το ολοκλήρωμα του αντίστοιχου μικρομηχανικού μεγέθους σε έναν πεπερασμένο όγκο. Οι υψηλότερες βαθμίδες προκύπτουν από ένα ανάπτυγμα κατά Taylor. Η συμμετρία του πεπερασμένου όγκου έχει ως αποτέλεσμα να επιβιώνουν της ολοκλήρωσης μόνο όροι άρτιας τάξης.

Η μη τοπική θεωρία συνεχούς εισάγει μια διαδικασία μεσοτίμησης, η οποία έχει ως αποτέλεσμα μη τοπικές καταστατικές εξισώσεις (Bažant et al., 1984). Γίνεται η υπόθεση ότι η απόκριση του υλικού σε ένα δεδομένο σημείο δίνεται, όχι μόνο από την κατάσταση του υλικού στο δεδομένο σημείο, αλλά και από την κατάσταση του υλικού στα γειτνιάζοντα σημεία. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα καταστατικές εξισώσεις ολοκληρωτικής μορφής.

Η θεωρία του Mindlin (Mindlin, 1964) είναι μια ισχυρή και γενική θεωρία για υλικά με μικροδομή στη γραμμική ελαστικότητα. Το υλικό χαρακτηρίζεται από μια μικρο- και από μια μακρο-τροπή, με αποτέλεσμα να εισάγεται έτσι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος, το οποίο συνδέεται με το μέγεθος του μικρο-όγκου. Η δυναμική ενέργεια της παραμόρφωσης είναι συνάρτηση των έξι συνιστωσών της τροπής και των δεκαοχτώ συνιστωσών της βαθμίδας της τροπής. Αυτή η προσέγγιση έχει αποδειχθεί αποτελεσματική για την προσομοίωση μέσων με περιοδική δομή, όπως πολυκρυσταλλικά ή κοκκώδη υλικά. Η θεωρία του Mindlin είναι παλαιότερη των προηγούμενων δύο διατυπώσεων.

Μια ειδική περίπτωση της θεωρίας του Mindlin με μεγάλο εύρος εφαρμογών αποτελεί η θεωρία τάσεων ζεύγους, η οποία αναφέρεται και ως περιορισμένη θεωρία Cosserat. Στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους γίνεται η υπόθεση ότι το μέσο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, οι τάσεις ζεύγους είναι μη μηδενικές και η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας εξαρτάται από την τροπή και από την βαθμίδα της περιστροφής. Παραδείγματα των εφαρμογών της θεωρίας των τάσεων ζεύγους αποτελούν οι εργασίες (Georgiadis and Grentzelou, 2006; Georgiadis and Anagnostou, 2008; Gourgiotis and Georgiadis, 2009).

Τέλος, η μικροπολική θεωρία εισάγει τρεις βαθμούς ελευθερίας ως προς την περιστροφή, επιπλέον των τριών βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις. Η εισαγωγή ανεξάρτητων περιστροφών έχει ως αποτέλεσμα την ασυμμετρία του τανυστή των τάσεων, ένα γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την κλασική

μηχανική συνεχούς και που έχει συζητηθεί έντονα τα τελευταία χρόνια (Bardet and Vardoulakis, 2001; Bagi, 2003; Bardet and Vardoulakis, 2003a; Kuhn, 2003; Bardet and Vardoulakis, 2003b).

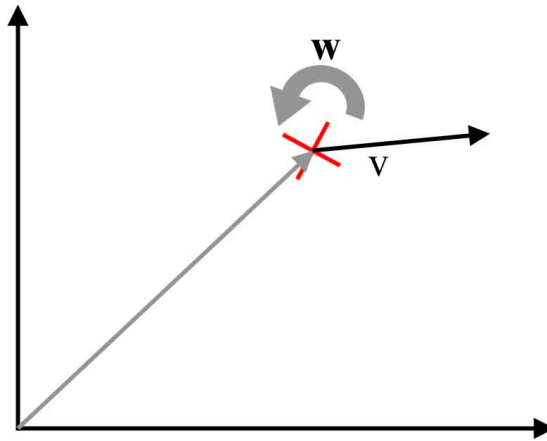
Η ιδέα εισήχθη αρχικά από τους αδερφούς Cosserat (Cosserat and Cosserat, 1909) σε ένα βιβλίο που αποτέλεσε την βάση για όλες τις μετέπειτα εργασίες στα πολικά συνεχή, αλλά που παρέμεινε στην αφάνεια για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το ενδιαφέρον αναζωπυρώθηκε στο τέλος της δεκαετίας του πενήντα και παρέμεινε ενεργό για περισσότερο από μια δεκαετία, με σημαντικά έργα ενός πλήθους συγγραφέων. Το 1957 οι Ericksen και Truesdell (Ericksen and Truesdell, 1957) δημοσίευσαν μια εργασία πάνω στην ακριβή θεωρία τάσεων και τροπών σε ράβδους και κελύφη, με βάση την εργασία των αδερφών Cosserat. Ο Günther (Günther, 1958) δημοσίευσε μια γραμμική θεωρία συνεχούς τύπου Cosserat ένα χρόνο αργότερα και μερικά χρόνια μετά οι Green και Rivlin προσέθεσαν τις δικές τους, σημαντικές συνεισφορές (Green and Rivlin, 1964c,a). Το 1967 ο Schäffer (Schaeffer, 1967) δημοσίευσε μια εργασία στην οποία συνοψίζεται η θεωρία Cosserat.

Πιο πρόσφατα η εφαρμογή των μικροπολικών θεωριών στα κοκκώδη μέσα μπορεί να αναχθεί στην πρωτοποριακή εργασία του Oshima (Oshima, 1955), του Satake (Satake, 1963) και, αργότερα, στις συνεισφορές των Kanatani (Kanatani, 1979) και των Mühlhaus και Vardoulakis (Mühlhaus and Vardoulakis, 1987). Αν και η ελαστικότητα Cosserat είναι σαφώς αρχαιότερη της πλαστικότητας Cosserat, σημαντικά έργα έχουν γίνει και σε αυτόν τον τομέα. Ένα από τα πρώτα έργα που εμπεριείχε πλαστικότητα τύπου Cosserat ήταν το (Mühlhaus, 1989) του Mühlhaus, που αναφερόταν σε κανονικές δομές παραλληλεπιπέδων. Το 1993 εισήχθη μια εξαρτώμενη από την πίεση θεωρία ροής από τον de Borst (de Borst, 1993), ενώ ένα χρόνο αργότερα αντιμετωπίστηκαν και πεπερασμένες παραμορφώσεις και περιστροφές στα πλαίσια της πολλαπλασιαστικής πλαστικότητας από τον Steinmann (Steinmann, 1994). Πρόσφατα, με βάση την πολλαπλασιαστική πλαστικότητα της εργασίας του Steinmann και με την εισαγωγή μιας μικρομορφικής θεώρησης οι Γραμμενούδης και Τσακμάκης (Grammenoudis and Tsakmakis, 2007; Grammenoudis et al., 2007; Grammenoudis and Tsakmakis, 2009) διατύπωσαν ένα ελαστοπλαστικό μικροπολικό μοντέλο και εξέτασαν τη συμπεριφορά του στο κλασικό όριο. Η συνάρτηση διαρροής εμπεριείχε εξάρτηση από την πίεση, ενώ εισήχθησαν δύο κανόνες πλαστικής ροής. Στις εργασίες των (Mohan et al., 1999, 2002; Nott, 2009) εξετάζεται η αργή ροή κοκκωδών υλικών με χρήση πλαστικότητας Cosserat

από τους Nott, Mohan και Rao. Μάλιστα η εργασία του (Nott, 2009) περιέχει μια ανασκόπηση των θεωριών πλαστικότητας για κοκκώδη μέσα περιλαμβάνοντας την κλασική, την Cosserat και την ίζωδο-πλαστικότητα.

5.2 Κινηματική του συνεχούς Cosserat

Σε ένα συνεχές Cosserat το υλικό σημείο P έχει τους βαθμούς ελευθερίας ενός απειροστού στερεού σταυρού, δηλαδή διαθέτει μια γραμμική ταχύτητα \mathbf{v} και μια γωνιακή ταχύτητα \mathbf{w} όπως στην Εικ. 5.1. Σε δύο διαστάσεις έχει κανείς δύο συνι-



Εικόνα 5.1: Κινηματική ενός σημείου Cosserat.

στάσεις γραμμικής ταχύτητας και μία περιστροφικής,

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{w} = w_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.2.2)$$

Στην γενική περίπτωση που θεωρούνται τρεις διαστάσεις, ο τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\dot{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \Rightarrow \dot{D}_{ij} = \dot{D}_{ji} \quad (5.2.3)$$

και είναι εμφανώς συμμετρικός. Το πεδίο των ταχυτήτων εισάγει επίσης τον τανυστή του μάκρο-spin, ο οποίος είναι αντισυμμετρικός

$$\dot{W}_{ji}^a = \frac{1}{2} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) \Rightarrow \dot{W}_{ij}^a = -\dot{W}_{ji}^a \quad (5.2.4)$$

Από την άλλη πλευρά η γωνιακή ταχύτητα των σωματιδίων εισάγει τον τανυστή του μικρο-spin, ο οποίος είναι επίσης αντισυμμετρικός,

$$\dot{W}_{ij} = -\epsilon_{ijk}w_k \Rightarrow \dot{W}_{ij} = -\dot{W}_{ji} \quad (5.2.5)$$

Υπό συνθήκες επίπεδης τροπής και σε καρτεσιανές συντεταγμένες οι παραπάνω τανυστές εκφράζονται ως εξής:

$$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}) = [\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & 0 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) & \partial_2 v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{W}}^a &= \begin{bmatrix} 0 & -w_3^a & 0 \\ w_3^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & 0 \\ w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

Εν γένει, ο τανυστής γενικευμένης τροπής ορίζεται ως

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \partial_i v_j - W_{ij} \quad (5.2.10)$$

Αυτός ο τανυστής μπορεί να διασπαστεί σε ένα συμμετρικό και σε ένα αντισυμμετρικό τμήμα

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \dot{\Gamma}_{(ij)} + \dot{\Gamma}_{[ij]} \quad (5.2.11)$$

Το συμμετρικό του μέρους ταυτίζεται με τον ρυθμό μάκρο-παραμόρφωσης και το αντισυμμετρικό του μέρους είναι ένα μέτρο της σχετικής περιστροφικής ταχύτητας

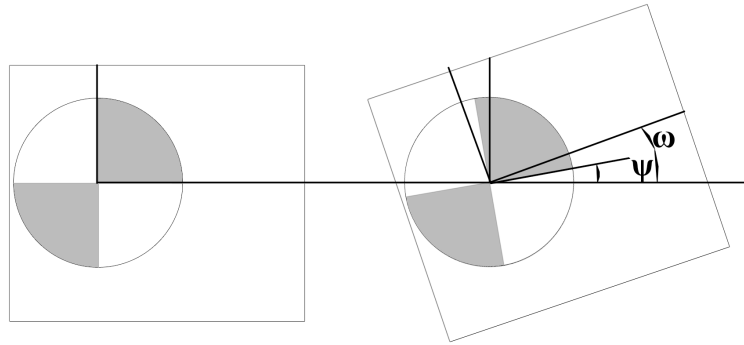
$$\dot{\Gamma}_{(ij)} = \frac{1}{2}(\dot{\Gamma}_{ij} + \dot{\Gamma}_{ji}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - W_{ij} + \partial_i v_j - W_{ji}) = \dot{D}_{ij} \quad (5.2.12)$$

$$\dot{\Gamma}_{[ij]} = \frac{1}{2} (\dot{\Gamma}_{ij} - \dot{\Gamma}_{ji}) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j - \dot{W}_{ij} - \partial_j v_i + \dot{W}_{ji}) = \dot{\Omega}_{ij} \quad (5.2.13)$$

Έτσι ο τανυστής γενικευμένης τροπής διασπάται αθροιστικά στη μακροπαραμόρφωση και τη σχετική περιστροφή:

$$\Gamma_{ij} = D_{ij} + \Omega_{ij} \quad (5.2.14)$$

Έστω ψ το αξονικό διάνυσμα της σχετικής περιστροφής. Τότε το φυσικό νόημα του τανυστή Ω_{ij} φαίνεται καθαρά στην Εικ. 5.2. Η σχετική περιστροφή εκφρά-



Εικόνα 5.2: Σχετική στροφή.

ζει την περιστροφή ενός δεδομένου σημείου ως προς το ενσωματωμένο στο υλικό σύστημα αναφοράς. Εκφράζει δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της περιστροφής του υλικού ως ένα απαραμόρφωτο υλικό και της περιστροφής του δεδομένου υλικού σημείου. Αξίζει να σημειωθεί ότι το Ω γίνεται μηδενικό στη θεωρία τάσεων ζεύγους, στην οποία οι μικρο-περιστροφές τίθενται ίσες με τις στερεές στροφές.

Σε ένα συνεχές Cosserat ορίζεται επιπλέον ο τανυστής του ρυθμού των καμπυλοτήτων ως

$$\underline{\dot{\kappa}} = \begin{bmatrix} \partial_1 w_1 & \partial_2 w_1 & \partial_3 w_1 \\ \partial_1 w_2 & \partial_2 w_2 & \partial_3 w_2 \\ \partial_1 w_3 & \partial_2 w_3 & \partial_3 w_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

το οποίο σε δύο διαστάσεις λαμβάνει τη μορφή

$$\underline{\dot{\kappa}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 w_3 & \partial_2 w_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.16)$$

Επομένως για μια ανάλυση που περιορίζεται σε δύο διαστάσεις ο τανυστής του ρυθμού των καμπυλοτήτων μπορεί να εκφραστεί επίσης με τη μορφή διανύσματος

$$\dot{\kappa}_i = \partial_i w_3 \quad (5.2.17)$$

όπου όμως πρέπει να δοθεί προσοχή στην διαδικασία μετασχηματισμού σε στροφή. Είναι ως εκ τούτου δυνατό να εναλλάσσονται οι δύο συμβολισμοί χωρίς απώλεια της γενικότητας, με την προϋπόθεση να παραμένει ο περιορισμός σε δύο διαστάσεις και να τηρείται η δέουσα προσοχή.

5.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Στο Κεφάλαιο 2 εξήχθησαν οι εξισώσεις ισορροπίας σε διακριτή μορφή για ένα κοκκώδες μέσο υπό την υπόθεση οιονεί στατικών κινήσεων ως εξής

$$\sum_{(\phi, \lambda) \in \partial\Phi} \mathbf{f}[(\phi, \lambda)] = \mathbf{0} \quad (5.3.1)$$

και

$$\sum_{\phi \in \partial\Phi} \mathbf{m}(\phi) + \sum_{(\phi, \lambda) \in S'_\Phi} \{\mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \times (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda))\} = \mathbf{0} \quad (5.3.2)$$

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί το πέρασμα στο συνεχές, γίνεται η υπόθεση ότι είναι αποδεκτό να αντικατασταθούν τα αθροίσματα από τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Τότε η εξ. (5.3.1) γράφεται

$$\int_S \mathbf{t} dS = \mathbf{0}$$

όπου \mathbf{t} είναι οι ελκυστές στο σύνορο και

$$\mathbf{t} = \underline{\sigma} \mathbf{n}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$\int_V \nabla \cdot \underline{\sigma} dV = 0 \quad (5.3.3)$$

πράγμα ισοδύναμο με

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned}$$

αφού ο όγκος ολοκλήρωσης είναι αυθαίρετος. Σημειώνεται ότι η απόκλιση ενός τανυστικού πεδίου εννοείται εδώ ως προς τον δεύτερο δείκτη

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = A_{ij,j}$$

Επίσης σημειώνεται ότι έχουν αγνοηθεί οι καθολικές δυνάμεις.

Εξετάζεται τώρα η εξ. (5.3.2). Χρησιμοποιώντας τον τανυστή Ricci $\underline{\mathbf{E}}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\sum_{\phi \in \partial\Phi} \mathbf{m}(\phi) + \sum_{(\phi, \lambda) \in S_{\Phi}'} \{ \underline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \otimes (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda))) \} = \mathbf{0}$$

όπου

$$\underline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{f}[(\phi, \lambda)] \otimes (\mathbf{x}_0(\phi) - \mathbf{x}_0(\lambda))) = \epsilon_{ijk} f_i[(\phi, \lambda)] (x_0(\phi) - x_0(\lambda))_j$$

Περνώντας στο συνεχές λαμβάνει κανείς

$$\int_S \mathbf{m} dS + \int_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} dV = \mathbf{0}$$

Από την χρήση του

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{n} = \mathbf{m}$$

και του θεωρήματος απόκλισης προκύπτει

$$\int_V \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} dV + \int_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} dV = \mathbf{0} \quad (5.3.4)$$

Εφόσον ο όγκος ολοκλήρωσης είναι αυθαίρετος, το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί επίσης ως

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad (5.3.5)$$

ή, χρησιμοποιώντας τον περιορισμό σε δύο διαστάσεις και κάνοντας χρήση της γραφής άθροισης κατά Einstein

$$\frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \quad (5.3.6)$$

Συνολικά το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

με

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ t_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \\ m_3 &= \mu_{13}n_1 + \mu_{23}n_2 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

στο σύνορο.

5.4 Ο κύκλος του Mohr για μη συμμετρικούς τανυστές τάσεων

Τα περιεχόμενα της παρούσας παραγράφου αποτελούν προσωπική επικοινωνία του Καθηγητή Ιωάννη Βαρδουλάκη. Παρατίθενται εδώ προκειμένου να συμβάλουν στην καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού μη συμμετρικών τανυστών υπό στροφή.

Θεωρώντας τα συστήματα συντεταγμένων Ox_1x_2 και Oxy , ο μετασχηματισμός μη συμμετρικού τανυστή δίνεται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{21} + \sigma_{12})\sin(2\phi) \quad (5.4.1)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21})\cos(2\phi) \quad (5.4.2)$$

$$\sigma_{yx} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin(2\phi) - \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21})\cos(2\phi) \quad (5.4.3)$$

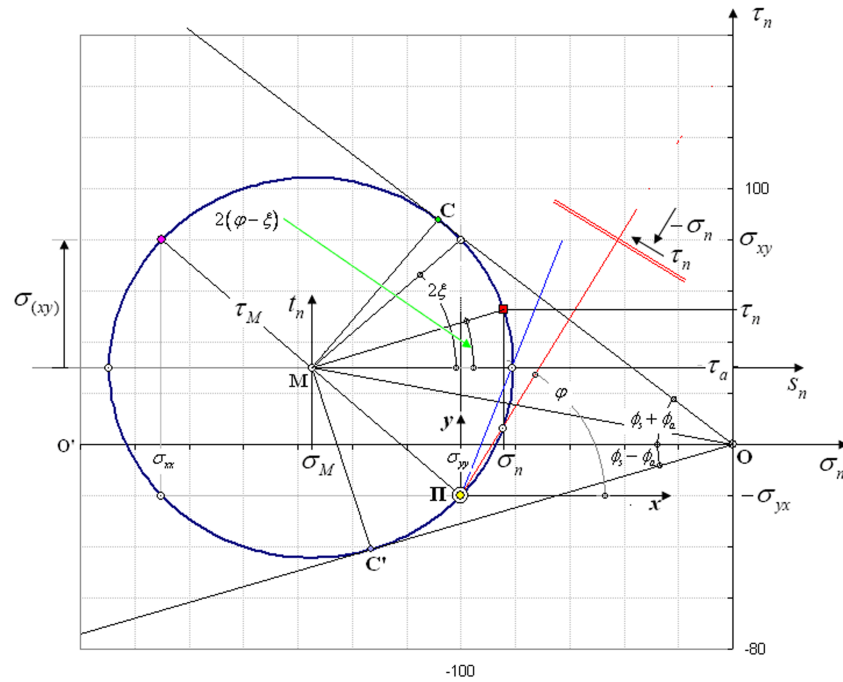
$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos(2\phi) - \frac{1}{2}(\sigma_{21} + \sigma_{12})\sin(2\phi) \quad (5.4.4)$$

Παρατηρείται ότι, αν ο τανυστής είναι συμμετρικός, ο κανόνας μετασχηματισμού ταυτίζεται με το γνωστό από τη Μηχανική Συνεχούς κατά Boltzmann. Η μέση ορθή τάση, η οποία είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης, συμβολίζεται ως

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5.4.5)$$

Η διαφορά των διατμητικών τάσεων

$$\tau_a = \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) = \frac{1}{2}(\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) \quad (5.4.6)$$



Εικόνα 5.3: Ο κύκλος του Mohr για μη συμμετρικό τανυστή τάσεων.

είναι επίσης ανεξάρτητη της διεύθυνσης και αποτελεί μέτρο της ασυμμετρίας του τανυστή των τάσεων. Η ορθή και η διατμητική συνιστώσα του ελκυστή που δρα σε ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ δίνονται από τις ακόλουθες δύο εξισώσεις

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{21} + \sigma_{12})\sin(2\phi) \quad (5.4.7)$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21})\cos(2\phi) \quad (5.4.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω μπορεί κανείς να γράψει

$$s_n = \sigma_n - \sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{21} + \sigma_{12})\sin(2\phi) \quad (5.4.9)$$

$$t_n = \tau_n - \tau_a = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin(2\phi) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21})\cos(2\phi) \quad (5.4.10)$$

Είναι εμφανές ότι τα s_n και t_n βρίσκονται επί κύκλου με ακτίνα

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21})^2)} \quad (5.4.11)$$

και κέντρο στο σημείο (σ_M, τ_a) . Ο κύκλος του Mohr για μη συμμετρική εντατική κατάσταση δίνεται στην Εικ. 5.3. Από αυτήν είναι εμφανές ότι, όταν εκφραστεί ως προς τις κύριες διευθύνσεις του, ο μη συμμετρικός τανυστής των τάσεων γίνεται αντισυμμετρικός, δηλαδή ισχύει $\sigma_{12} + \sigma_{21} = 0$.

5.5 Ελαστικότητα

Σε αυτή την παράγραφο γίνεται μια προσπάθεια να εξαχθεί η μικροπολική ελαστικότητα για ένα κοκκώδες μέσο από μικροσκοπικές θεωρήσεις. Προκειμένου να καταστεί πιο εύκολο για τον αναγνώστη να διατηρήσει μια εποπτική εικόνα της διαδικασίας που παρουσιάζεται, η παράγραφος χωρίζεται σε αρκετές υποπαραγράφους.

Λόγω του περιορισμού σε δύο διαστάσεις εξετάζεται ένα σύνολο κυλίνδρων υπό συνθήκες επίπεδης τροπής. Γίνεται η υπόθεση ότι όλοι οι κύλινδροι αποτελούνται από το ίδιο υλικό και είναι απείρου μήκους. Χάριν απλότητας γίνεται επιπλέον η υπόθεση ότι όλοι οι κύλινδροι έχουν την ίδια ακτίνα. Το φορτίο θεωρείται στατικό και για τις επαφές των κυλίνδρων χρησιμοποιούνται γραμμικοποιημένες σχέσεις δυνάμεων-μετατοπίσεων.

Μια ανάλογη διαδικασία στην οποία εξετάζεται ένα σύνολο σφαιρών παρουσιάζεται στο Παράρτ. Α.3. Η διαδικασία που ακολουθείται εδώ αρχικά εισήχθη από τον Walton (Walton, 1987) για την εξαγωγή της ελαστικής απόκρισης ενός συνόλου σφαιρών. Σε αυτή την εργασία αγνοήθηκαν ωστόσο οι περιστροφές.

5.5.1 Λοξή συμπίεση δύο κυλίνδρων

Γίνεται η υπόθεση ότι η επιφάνεια της επαφής είναι μικρή σε σχέση με το μέγεθος των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει την αντικατάσταση του σώματος από έναν ημίχωρο κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων που δρουν στην επαφή. Οι ακόλουθες σχέσεις εξήχθησαν από τον Johnson (Johnson, 1985).

Η επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο ελαστικών κυλίνδρων είναι μια συνάρτηση της κάθετης δύναμης που ασκείται στην επαφή και μπορεί να γραφεί ως (βλέπε (Johnson, 1985), σελ. 101)

$$\alpha = \left(2NR \frac{(1-\nu)}{\pi G} \right)^{1/2} \quad (5.5.1)$$

όπου N είναι η κάθετη δύναμη στην επαφή, R είναι η ακτίνα των κυλίνδρων, ν είναι ο λόγος του Poisson και G είναι το μέτρο διάτμησης. Η μείωση της απόστασης μεταξύ των κέντρων των δύο κυλίνδρων θα συμβολίζεται ως dn και θα δίνεται από

$$dn = \frac{2N(1 - \nu)}{\pi G} \quad (5.5.2)$$

Η σχέση μεταξύ της αμοιβαίας προσέγγισης των δύο σωμάτων και του ήμι-πλάτους της επαφής είναι

$$\alpha^2 = dnR \quad (5.5.3)$$

Η σχέση μεταξύ της συγκεντρωμένης εφαπτομενικής δύναμης που ασκείται στην επαφή και της εφαπτομενικής μετατόπισης προκύπτει από τις εξ. (2.5), (2.23) και (7.22) του Johnson (Johnson, 1985) ως

$$T = \pi G dt \quad (5.5.4)$$

όπου dt είναι η εφαπτομενική μετατόπιση. Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στην εφαπτομενικά φορτισμένη επαφή δύο κυλίνδρων, προκύπτει

$$T = \frac{\pi G}{2} dt \quad (5.5.5)$$

αφού η συνολική εφαπτομενική μετατόπιση των κέντρων θα είναι ίση με το διπλάσιο της αντίστοιχης ποσότητας για έναν φορτισμένο ημίχωρο.

Για την ροπή και την περιστροφή υποτίθεται μια γραμμική σχέση μέχρι το σημείο στο οποίο ξεκινάει η σχετική κύλιση:

$$M = Kd\omega \quad (5.5.6)$$

Η αντίσταση στην περιστροφή αντιμετωπίζεται ως μια ιδιότητα του υλικού και όχι ως συνάρτηση του πλάτους της επαφής. Έστω ότι η αντίσταση στην κύλιση δίνεται από την παράμετρο β

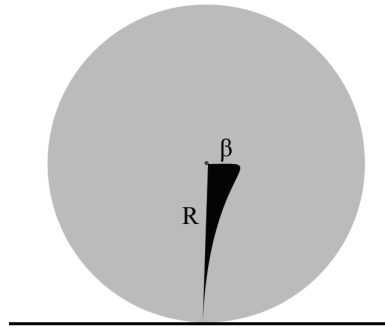
$$m_R = \beta N \quad (5.5.7)$$

Για ροπή ίση με τη μέγιστη η γωνιακή μετατόπιση δίνεται ως

$$d\omega = \arctan\left(\frac{\beta}{R}\right) \quad (5.5.8)$$

Για τη στιγμή κατά την οποία ξεκινάει η κύλιση θα ισχύει ότι

$$m_R = Kd\omega \Rightarrow \quad (5.5.9)$$



Εικόνα 5.4: Σχηματικό διάγραμμα για την αντίσταση στην κύλιση.

$$\beta N = K \arctan \left(\frac{\beta}{R} \right) \Rightarrow \quad (5.5.10)$$

$$K = \frac{\beta N}{\arctan \left(\frac{\beta}{R} \right)} \quad (5.5.11)$$

Για μικρή αντίσταση στην κύλιση ($\beta \ll R$)

$$K = NR \quad (5.5.12)$$

γεγονός που σημαίνει ότι

$$M = NRd\omega \quad (5.5.13)$$

5.5.2 Ρυθμός ελαστικής ενέργειας μιας επαφής

Όπως φάνηκε παραπάνω, οι δυνάμεις και οι ροπές που δρουν σε μια επαφή μεταξύ ελαστικών κυλίνδρων μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των σχετικών μετατοπίσεων και των σχετικών στροφών ως ακολούθως:

$$N = \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dn \quad (5.5.14)$$

$$T = \frac{\pi G}{2} dt \quad (5.5.15)$$

$$M = R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dnd\omega \quad (5.5.16)$$

Επομένως ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας που βρίσκεται αποθηκευμένος στην επαφή μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{E}_c = \dot{E}_c^n + \dot{E}_c^t + \dot{E}_c^m \quad (5.5.17)$$

όπου

- \dot{E}_c^n είναι ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας λόγω της κάθετης δύναμης,
- \dot{E}_c^t είναι ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας λόγω της εφαπτομενικής δύναμης,
- και \dot{E}_c^m είναι ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας λόγω της ροπής.

Ο διαχωρισμός αυτός είναι δυνατός λόγω του ότι τα έργα των καθέτων δυνάμεων, εφαπτομενικών δυνάμεων και ροπών μπορούν να αντιμετωπιστούν ξεχωριστά, καθώς οι ποσότητες είναι κάθετες μεταξύ τους. Οι παραπάνω όροι μπορούν να γραφούν ως

$$\dot{E}_c^n = \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dnd\dot{n} \quad (5.5.18)$$

$$\dot{E}_c^t = \frac{\pi G}{2} dt d\dot{t} \quad (5.5.19)$$

$$\dot{E}_c^m = R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dnd\omega d\dot{\omega} \quad (5.5.20)$$

5.5.3 Δυνατές μετατοπίσεις

Έστω σύνολο ίσων μεταξύ τους κυλίνδρων. Θεωρείται ότι υφίστανται φυσικές επαφές, αλλά γίνεται η υπόθεση ότι τα σώματα μόλις αγγίζουν και δεν υφίστανται παραμορφώσεις στις επαφές. Σε αυτό το σύνολο επιβάλλεται ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων και ένα δυνατών στροφών, ώστε να υπολογιστεί ο ρυθμός της ελαστικής ενέργειας για το σύνολο ως συνάρτηση των επιβληθέντων μετατοπίσεων και περιστροφών. Θεωρείται ότι οι επαφές είναι σταθερές, μια υπόθεση η οποία, αν και ισχυρή, είναι συμβατή με τις έννοιες των ελαστικών παραμορφώσεων ενός κοκκώδους μέσου και της οιονεί στατικής περιοχής.

Έστω πεδίο δυνατών μετατοπίσεων σε δύο διαστάσεις, ως ακολούθως

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.5.21)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.5.22)$$

Σε αυτό υπερτίθεται ένα πεδίο δυνατών ταχυτήτων:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.5.23)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.5.24)$$

Έστω επιπλέον δύο κύλινδροι σε επαφή με τα κέντρα τους στις θέσεις $\mathbf{x}^{(i)}$ και $\mathbf{x}^{(j)}$ αντίστοιχα. Οι μετατοπίσεις τους δίνονται ως

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.25)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.26)$$

και

$$\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.27)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(j)} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.28)$$

ενώ οι ταχύτητές τους ως

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.29)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.30)$$

και

$$\dot{\mathbf{u}}^{(j)} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.31)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} \left(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0 \right) \quad (5.5.32)$$

Η σχετική μετατόπιση και στροφή των κέντρων θα είναι

$$\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)} = \nabla \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \quad (5.5.33)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = \nabla \boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)} \right) \quad (5.5.34)$$

Η σχετική κάθετη μετατόπιση εκφράζεται ως

$$\delta n = \left(\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)} \right) \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \quad (5.5.35)$$

$$\delta n = (2R \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 2R \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.36)$$

ενώ η σχετική εφαπτομενική μετατόπιση των κέντρων εκφράζεται ως

$$\delta t^1 = \left(\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)} \right) \cdot \mathbf{t} = (\nabla \mathbf{u} \cdot 2R \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 2R \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.37)$$

Οι μετατοπίσεις των δύο κυλίνδρων στην επαφή είναι

$$\mathbf{u}^{(i)c} = \mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(i)} \times \left(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} \right) \quad (5.5.38)$$

και

$$\mathbf{u}^{(j)c} = \mathbf{u}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}^{(j)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (5.5.39)$$

Επομένως για την εφαπτομενική σχετική μετατόπιση προκύπτει

$$\delta t = 2R\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\omega}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(j)}) \times R\mathbf{n} \Rightarrow \quad (5.5.40)$$

$$\delta t = 2R(\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}) - (\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot 2(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)})) \times R\mathbf{n} \Rightarrow \quad (5.5.41)$$

$$\delta t = 2R[\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}] \Rightarrow \quad (5.5.42)$$

$$\delta t = 2R[\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{n}] \quad (5.5.43)$$

$$\delta t = 2R\mathbf{t} \cdot \underline{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.44)$$

Σημειώνεται ότι, αφού το δn εκφράζεται σε μια τετραγωνική μορφή, σε αυτή την έκφραση το αντισυμμετρικό τμήμα του $\nabla \mathbf{u}$ δεν υπεισέρχεται και, ως εκ τούτου, το δn μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως

$$\delta n = 2R\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.45)$$

Η σχετική γωνιακή μετατόπιση θα είναι

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) = \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot (2R\mathbf{n}) \Rightarrow \quad (5.5.46)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = 2R\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.47)$$

Λόγω του περιορισμού σε δύο διαστάσεις

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = 2R\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.48)$$

5.5.4 Ρυθμός ελαστικής ενέργειας του συνόλου

Ο ρυθμός της ελαστικής ενέργειας του συνόλου υπολογίζεται ως το άθροισμα των ρυθμών ελαστικής ενέργειας των επαφών του συνόλου. Η πυκνότητα του ρυθμού ελαστικής ενέργειας είναι ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας του συνόλου δια του όγκου του συνόλου. Χάριν απλότητας κάθε ένας από τους τρεις όρους του ρυθμού ελαστικής ενέργειας υπολογίζεται ξεχωριστά. Ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας που οφείλεται στις κάθετες δυνάμεις γράφεται ως

$$\dot{E}^n = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dn^{(ij)} d\dot{n}^{(ij)} \Rightarrow \quad (5.5.49)$$

$$\dot{E}^n = \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} dn^{(ij)} d\dot{n}^{(ij)} \Rightarrow \quad (5.5.50)$$

$$\dot{E}^n = \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.51)$$

$$\dot{E}^n = \frac{2\pi GR^2}{(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.52)$$

$$\dot{E}^n = \frac{2\pi GR^2}{(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \mathbf{n}^{(ij)} \right) : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (5.5.53)$$

Αντίστοιχα ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας λόγω των εφαπτομενικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\dot{E}^t = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \frac{\pi G}{2} dt^{(ij)} d\dot{t}^{(ij)} \Rightarrow \quad (5.5.54)$$

$$\dot{E}^t = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \frac{\pi G}{2} \left(2R\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \dot{\underline{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.55)$$

$$\dot{E}^t = 2\pi GR^2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \dot{\underline{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.56)$$

$$\dot{E}^t = 2\pi GR^2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{t}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \mathbf{n}^{(ij)} \right) : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (5.5.57)$$

Τέλος, ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας που οφείλεται στις ροπές γράφεται

$$\dot{E}^m = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dn^{(ij)} d\omega^{(ij)} d\dot{\omega}^{(ij)} \Rightarrow \quad (5.5.58)$$

$$\dot{E}^m = R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R\nabla\omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R\nabla\dot{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.59)$$

$$\dot{E}^m = 4 \frac{\pi G}{(1-\nu)} R^4 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\nabla \dot{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (5.5.60)$$

$$\dot{E}^m = 2 \frac{\pi G}{(1-\nu)} R^4 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \dot{\omega} \quad (5.5.61)$$

Προκειμένου να προκύψουν οι αντίστοιχες εκφράσεις για το συνεχές, πρέπει να ακολουθηθεί μια διαδικασία μεσοτίμησης επί των επαφών. Τα αθροίσματα επί των επαφών θα αντικατασταθούν από τον αριθμό των επαφών πολλαπλασιασμένο επί τη μέση της συνάρτησης μέσα στο άθροισμα. Ο αριθμός των επαφών είναι ίσος με τον ενεργό αριθμό των κυλίνδρων πολλαπλασιασμένο επί τον ενεργό αριθμό συνδιάταξης και διαιρεμένο δια δύο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το επίθετο ‘ενεργός’ υποδηλώνει την διάταξη στην οποία οι κύλινδροι που δεν διαθέτουν επαφές έχουν αγνοηθεί. Για τον αριθμό των επαφών προκύπτει

$$n_c = NC/2 \quad (5.5.62)$$

όπου N είναι ο αριθμός των κυλίνδρων που διαθέτουν τουλάχιστον μια επαφή και C είναι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης. Σημειώνεται ότι

$$V_s = \pi R^2 N \quad (5.5.63)$$

είναι ο ενεργός όγκος στερεών, ενώ

$$\phi_s = \frac{V_s}{V} = 1 - \phi \quad (5.5.64)$$

είναι ο ενεργός λόγος στερεών και ϕ είναι το πορώδες.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, ο ρυθμός της πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$\dot{\mathcal{E}}^n = \phi_s \frac{GC}{(1-\nu)} \underline{\mathbf{Q}}^n : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (5.5.65)$$

$$\dot{\mathcal{E}}^t = \phi_s GC \underline{\mathbf{Q}}^t : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (5.5.66)$$

$$\dot{\mathcal{E}}^m = 2\phi_s \frac{GC}{(1-\nu)} R^2 \underline{\mathbf{Q}}^m \cdot \nabla \dot{\omega} \quad (5.5.67)$$

όπου

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \int_0^{2\pi} (\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \quad (5.5.68)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} (\mathbf{t} \otimes (\mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \quad (5.5.69)$$

$$\mathbf{Q}^m = \int_0^{2\pi} ((\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \quad (5.5.70)$$

με

$$\mathbf{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (5.5.71)$$

και

$$\mathbf{t} = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (5.5.72)$$

και όπου $p(\theta)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του να βρεθεί επαφή σε γωνία θ . Οι ποσότητες $\underline{\mathbf{Q}}^n$, $\underline{\mathbf{Q}}^t$ και \mathbf{Q}^m θα αναφέρονται ως πολλαπλασιαστές στο εξής, χάριν απλότητας.

5.5.5 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

Σε ό,τι ακολουθεί ως προσανατολισμός της επαφής εννοείται ο προσανατολισμός του κάθετου διανύσματος αυτής. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του να βρεθεί επαφή με κάθετο διάνυσμα σε γωνία θ μπορεί να γραφεί ως

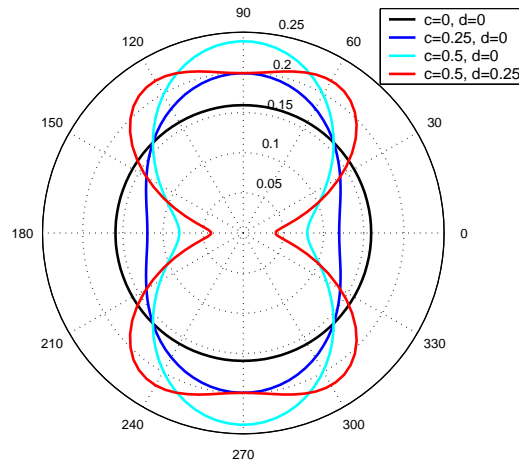
$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (5.5.73)$$

στην περίπτωση που αυτή είναι ισότροπη. Στην περίπτωση που υφίσταται ανισοτροπία μια πιθανή μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$p(\theta) = \frac{1 - c \cos(2\theta) - d \cos(4\theta)}{2\pi} \quad (5.5.74)$$

Μια τέτοια γενική μορφή για την $p(\theta)$ υποστηρίζεται μεταξύ άλλων και από αποτελέσματα που προέκυψαν με την Μέθοδο των Διακριτών Στοιχείων. Παραδείγματα τέτοιων αποτελεσμάτων δίνονται στις Εικς. 3.33 ως 3.35.

Στην Εικ. 5.5 δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που προκύπτει για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων c και d . Οι τιμές των παραμέτρων c και d δίνονται στο υπόμνημα. Παρατηρείται ότι οι τιμές των c και d δεν επιδρούν στην τιμή του ολοκληρώματος της $p(\theta)$ από 0 ως 2π και μπορούν επομένως να κυμαίνονται

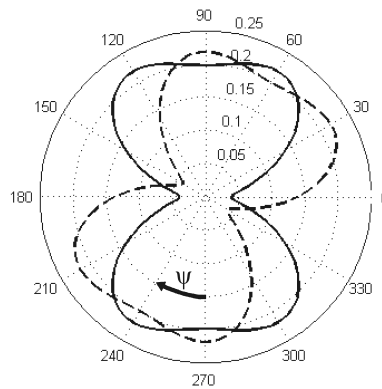


Εικόνα 5.5: Προσεγγιστική κατανομή των επαφών.

ελεύθερα.

Είναι εύλογο να υποτεθεί ότι οι παράμετροι c και d εξαρτώνται από το ιστορικό φόρτισης του υλικού. Γίνεται η υπόθεση ότι οι κύριες διευθύνσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του προσανατολισμού των επαφών συμπίπτουν με τις κύριες διευθύνσεις του τανυστή των γενικευμένων πλαστικών τροπών και όχι με εκείνες του τανυστή των τάσεων. Ένα παράδειγμα που δικαιολογεί αυτή την επιλογή δίνεται στο Παράρτ. Α.4.

Έστω λοιπόν ότι το υλικό έχει αρχικά φορτιστεί σε μια διεύθυνση και στη συ-



Εικόνα 5.6: Στροφή της κατανομής των επαφών.

νέχεια φορτίζεται σε διαφορετική διεύθυνση, στραμμένη κατά γωνία ψ στην αντιωρολογιακή διεύθυνση, σε σχέση με την αρχική. Σε αυτή την περίπτωση οι κύριοι

άξονες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι πλέον στραμμένοι κατά γωνία ψ στην ωρολογιακή διεύθυνση, σε σχέση με τους νέους κύριους άξονες των γενικευμένων τροπών, όπως φαίνεται στην Εικ. 5.6. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του να βρεθεί μια επαφή σε γωνία θ δίνεται τώρα από την σχέση

$$p(\theta) = \frac{1 - c \cos(2(\theta + \psi)) - d \cos(4(\theta + \psi))}{2\pi} \quad (5.5.75)$$

στο σύστημα που αντιστοιχεί στους κύριους άξονες της γενικευμένης ελαστικής τροπής. Το παραπάνω αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί στις ακόλουθες παραγράφους για την εξαγωγή της μικροπολικής ελαστικότητας εκπεφρασμένης ως προς τις κύριες διευθύνσεις των ελαστικών γενικευμένων τροπών.

5.5.6 Αναδιάταξη των πολλαπλασιαστών

Σε αυτή την υποπαράγραφο οι πολλαπλασιαστές εκφράζονται ως ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αρχικά εξετάζεται ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στις κάθετες δυνάμεις και υπολογίζεται η ακόλουθη ποσότητα:

$$A_n = \mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.76)$$

Το παραπάνω ισούται με

$$A_n = \gamma_{11} \cos^2(\theta) + (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \sin(\theta) \cos(\theta) + \gamma_{22} \sin^2(\theta) \Rightarrow \quad (5.5.77)$$

$$A_n = \frac{\gamma_{11}}{2} (1 + \cos(2\theta)) + \frac{(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{2} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{22}}{2} (1 - \cos(2\theta)) \Rightarrow \quad (5.5.78)$$

$$A_n = \frac{1}{2} \{ (\gamma_{11} + \gamma_{22}) + (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \sin(2\theta) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(2\theta) \} \Rightarrow \quad (5.5.79)$$

$$A_n = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(2\theta) \right\} \quad (5.5.80)$$

Επομένως

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \int_0^{2\pi} (\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.81)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{bmatrix} A_n \frac{1 - c \cos(2\theta) - d \cos(4\theta)}{2\pi} d\theta \Rightarrow \quad (5.5.82)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} A'_n \frac{1 - c \cos(\theta) - d \cos(2\theta)}{2\pi} d\theta \Rightarrow \quad (5.5.83)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} A'_n p'(\theta) d\theta \quad (5.5.84)$$

όπου

$$A'_n = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(\theta) \right\} \quad (5.5.85)$$

και

$$p'(\theta) = \frac{1 - c \cos(\theta) - d \cos(2\theta)}{2\pi} \quad (5.5.86)$$

Στη συνέχεια εξετάζεται ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στις εφαπτομενικές δυνάμεις. Αρχικά υπολογίζεται η ακόλουθη ποσότητα:

$$A_t = \mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.87)$$

Το παραπάνω ισούται με

$$A_t = \mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \quad (5.5.88)$$

$$A_t = \gamma_{21} \cos^2(\theta) - \gamma_{12} \sin^2(\theta) - (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(\theta) \cos(\theta) \Rightarrow \quad (5.5.89)$$

$$A_t = -\frac{1}{2} \{ -\gamma_{21}(1 + \cos(2\theta)) + \gamma_{12}(1 - \cos(2\theta)) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(2\theta) \} \Rightarrow \quad (5.5.90)$$

$$A_t = -\frac{1}{2} \{ (\gamma_{12} - \gamma_{21}) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(2\theta) - (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \cos(2\theta) \} \quad (5.5.91)$$

Ως εκ τούτου

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} (\mathbf{t} \otimes (\mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.92)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \cos(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix} A_t p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.93)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) - 1 \\ 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{bmatrix} A_t p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.94)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \\ 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} A_t' p'(\theta) d\theta \quad (5.5.95)$$

όπου

$$A_t' = -\frac{1}{2} \{(\gamma_{12} - \gamma_{21}) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(\theta) - (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \cos(\theta)\} \quad (5.5.96)$$

Τέλος εξετάζεται ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στις ροπές.

$$\mathbf{Q}^m = \int_0^{2\pi} ((\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.97)$$

$$\mathbf{Q}^m = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} (\kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ (\kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta)) \sin(\theta) \end{bmatrix} A_n p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.98)$$

$$\mathbf{Q}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_1 \cos(2\theta) + \kappa_2 \sin(2\theta) \\ \kappa_2 - \kappa_2 \cos(2\theta) + \kappa_1 \sin(2\theta) \end{bmatrix} A_n p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (5.5.99)$$

$$\mathbf{Q}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta) \\ \kappa_2 - \kappa_2 \cos(\theta) + \kappa_1 \sin(\theta) \end{bmatrix} A_n' p'(\theta) d\theta \quad (5.5.100)$$

5.5.7 Ολοκλήρωση πολλαπλασιαστών

Προκειμένου να απλοποιηθούν οι εκφράσεις που προέκυψαν, θέτουμε τα ακόλουθα:

$$\alpha_1 = \gamma_{11} + \gamma_{22} \quad (5.5.101)$$

$$\alpha_2 = \gamma_{11} - \gamma_{22} \quad (5.5.102)$$

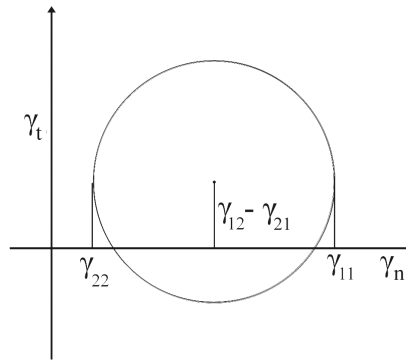
$$\alpha_3 = \gamma_{12} + \gamma_{21} \quad (5.5.103)$$

$$\alpha_4 = \gamma_{12} - \gamma_{21} \quad (5.5.104)$$

Θεωρούνται οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή των γενικευμένων ελαστικών τροπών. Από τον κύκλο του Mohr που δίνεται στην Εικ. 5.7 για ασύμμετρο τανυστή είναι εμφανές ότι σε αυτή την περίπτωση $\gamma_{12} = -\gamma_{21}$ ή, ισοδύναμα, $\alpha_3 = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του να βρεθεί μια επαφή σε γωνία θ γίνεται

$$p(\theta) = \frac{1 - c \cos(2(\theta + \psi)) - d \cos(4(\theta + \psi))}{2\pi} \quad (5.5.105)$$

ενώ η βοηθητική συνάρτηση $p'(\theta)$ γράφεται πλέον ως



Εικόνα 5.7: Κύκλος του Mohr για τον τανυστή των γενικευμένων ελαστικών τροπών.

$$p'(\theta) = \frac{1 - c \cos(\theta + \psi) - d \cos(2\theta + 2\psi)}{2\pi} \quad (5.5.106)$$

Υπό τις παραπάνω υποθέσεις τα αποτελέσματα για τους πολλαπλασιαστές δίνονται στις επόμενες υποπαραγράφους.

5.5.8 Ισότροπο υλικό

$$Q_{11}^n = \frac{1}{8}(2\alpha_1 + \alpha_2) \quad (5.5.107)$$

$$Q_{12}^n = 0 \quad (5.5.108)$$

$$Q_{21}^n = Q_{12}^n \quad (5.5.109)$$

$$Q_{22}^n = \frac{1}{8}(2\alpha_1 - \alpha_2) \quad (5.5.110)$$

$$Q_{11}^t = \frac{\alpha_2}{8} \quad (5.5.111)$$

$$Q_{12}^t = \frac{\alpha_4}{4} \quad (5.5.112)$$

$$Q_{21}^t = -\frac{\alpha_4}{4} \quad (5.5.113)$$

$$Q_{22}^t = -\frac{\alpha_2}{8} \quad (5.5.114)$$

$$Q_1^m = \frac{1}{8}(2\alpha_1 + \alpha_2)\kappa_1 \quad (5.5.115)$$

$$Q_2^m = \frac{1}{8}(2\alpha_1 - \alpha_2)\kappa_2 \quad (5.5.116)$$

5.5.9 Ανισότροπο υλικό

$$Q_{11}^n = \frac{1}{16}(4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) \quad (5.5.117)$$

$$Q_{12}^n = \frac{1}{8}(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \quad (5.5.118)$$

$$Q_{21}^n = Q_{12}^n \quad (5.5.119)$$

$$Q_{22}^n = \frac{1}{16}(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) \quad (5.5.120)$$

$$Q_{11}^t = \frac{1}{16}(\alpha_2 d \cos(2\psi) + 2(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin(\psi))) \quad (5.5.121)$$

$$Q_{12}^t = \frac{1}{8}(\alpha_4(2 + c \cos(\psi)) + \alpha_2(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)) \quad (5.5.122)$$

$$Q_{21}^t = \frac{1}{8}(\alpha_4(-2 + c \cos(\psi)) - \alpha_2(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)) \quad (5.5.123)$$

$$Q_{22}^t = \frac{1}{16}(-\alpha_2 d \cos(2\psi) - 2(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin(\psi))) \quad (5.5.124)$$

$$\begin{aligned} Q_1^m &= \frac{1}{16}\kappa_1(4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \frac{1}{8}\kappa_2(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \end{aligned} \quad (5.5.125)$$

$$\begin{aligned} Q_2^m &= \frac{1}{16}\kappa_2(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \frac{1}{8}\kappa_1(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \end{aligned} \quad (5.5.126)$$

5.5.10 Σχέσεις τάσεων-τροπών

Οι εκφράσεις για τις τάσεις και τις τάσεις ζεύγους δίνονται στην παρούσα υπο-παράγραφο. Με βάση τα παραπάνω οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των γενικευμένων ελαστικών τροπών ως

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \phi_s \frac{GC}{16(1-\nu)} (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{16} (\alpha_2 d \cos(2\psi) + 2(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin(\psi)))\end{aligned}\quad (5.5.127)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= -\phi_s \frac{GC}{8} (\alpha_4(2 - c \cos(\psi)) + \alpha_2(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{8(1-\nu)} (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)\end{aligned}\quad (5.5.128)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{21} &= \phi_s \frac{GC}{8} (\alpha_4(2 + c \cos(\psi)) + \alpha_2(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{8(1-\nu)} (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)\end{aligned}\quad (5.5.129)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \phi_s \frac{GC}{16(1-\nu)} (4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &- \phi_s \frac{GC}{16} (\alpha_2 d \cos(2\psi) + 2(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin(\psi)))\end{aligned}\quad (5.5.130)$$

ενώ οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους μπορούν να εκφραστούν ως

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \phi_s \frac{GCR^2}{8(1-\nu)} \kappa_1 (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} \kappa_2 (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)\end{aligned}\quad (5.5.131)$$

και

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \phi_s \frac{GCR^2}{8(1-\nu)} \kappa_2 (4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} \kappa_1 (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)\end{aligned}\quad (5.5.132)$$

Είναι εύλογο να εκφραστούν οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ως προς τις γενικευμένες τροπές και τις καμπυλότητες. Ισχύουν τα παρακάτω:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\gamma_{11} \quad (5.5.133)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\gamma_{22} \quad (5.5.134)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\gamma_{11} + \gamma_{22} \quad (5.5.135)$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma_{11} + 3\gamma_{22} \quad (5.5.136)$$

Επομένως προκύπτει

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \phi_s GC \left(\frac{6 - 4c \cos(\psi) - d \cos(2\psi)}{16(1 - \nu)} + \frac{2 + d \cos(2\psi)}{16} \right) \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s GC \left(\frac{2 + d \cos(2\psi)}{16(1 - \nu)} - \frac{2 + d \cos(2\psi)}{16} \right) \gamma_{22} + \\ &+ \frac{\phi_s GC}{8} c(\gamma_{12} - \gamma_{21}) \sin(\psi) \end{aligned} \quad (5.5.137)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \phi_s GC \left(\frac{(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8(1 - \nu)} + \frac{(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8} \right) \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s GC \left(\frac{(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8(1 - \nu)} - \frac{(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8} \right) \gamma_{22} + \\ &+ \phi_s GC \frac{(2 + c \cos(\psi))}{8} (\gamma_{12} - \gamma_{21}) \end{aligned} \quad (5.5.138)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \phi_s GC \left(\frac{(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8(1 - \nu)} - \frac{(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8} \right) \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s GC \left(\frac{(c - d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8(1 - \nu)} + \frac{(c + d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{8} \right) \gamma_{22} + \\ &- \phi_s GC \frac{(2 - c \cos(\psi))}{8} (\gamma_{12} - \gamma_{21}) \end{aligned} \quad (5.5.139)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \phi_s GC \left(\frac{2 + d \cos(2\psi)}{16(1 - \nu)} - \frac{2 + d \cos(2\psi)}{16} \right) \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s GC \left(\frac{6 + 4c \cos(\psi) - d \cos(2\psi)}{16(1 - \nu)} + \frac{2 + d \cos(2\psi)}{16} \right) \gamma_{22} + \\ &- \frac{\phi_s GC}{8} c(\gamma_{12} - \gamma_{21}) \sin(\psi) \end{aligned} \quad (5.5.140)$$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{\phi_s GCR^2}{8} (2(3\gamma_{11} + \gamma_{22}) - 4c\gamma_{11} \cos(\psi) - d(\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(2\psi)) \kappa_1 + \\ &+ \frac{\phi_s GCR^2}{4} (c(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + d(\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(\psi)) \sin(\psi) \kappa_2\end{aligned}\quad (5.5.141)$$

και

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{\phi_s GCR^2}{8} (2(\gamma_{11} + 3\gamma_{22}) + 4c\gamma_{22} \cos(\psi) + d(\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(2\psi)) \kappa_2 + \\ &+ \frac{\phi_s GCR^2}{4} (c(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + d(\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(\psi)) \sin(\psi) \kappa_1\end{aligned}\quad (5.5.142)$$

Τέλος, θέτοντας την γωνία ψ ίση με το μηδέν η σχέση τάσεων-τροπών λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \phi_s \frac{GC}{16} \left\{ \frac{6 - 4c - d}{1 - \nu} + 2 + d \right\} \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{16} \left\{ \frac{2 + d}{1 - \nu} - 2 - d \right\} \gamma_{22}\end{aligned}\quad (5.5.143)$$

$$\sigma_{12} = \phi_s \frac{GC}{8} (2 + c) (\gamma_{12} - \gamma_{21}) \quad (5.5.144)$$

$$\sigma_{21} = \phi_s \frac{GC}{8} (-2 + c) (\gamma_{12} - \gamma_{21}) \quad (5.5.145)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \phi_s \frac{GC}{16} \left\{ \frac{2 + d}{1 - \nu} - 2 - d \right\} \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{16} \left\{ \frac{6 + 4c - d}{1 - \nu} + 2 + d \right\} \gamma_{22}\end{aligned}\quad (5.5.146)$$

$$\mu_1 = \phi_s \frac{GCR^2}{8(1 - \nu)} ((6 - 4c - d)\gamma_{11} + (2 + d)\gamma_{22}) \kappa_1 \quad (5.5.147)$$

και

$$\mu_2 = \phi_s \frac{GCR^2}{8(1 - \nu)} ((2 + d)\gamma_{11} + (6 + 4c - d)\gamma_{22}) \kappa_2 \quad (5.5.148)$$

που αποτελεί την έκφραση της μικροπολικής ελαστικότητας στην περίπτωση που οι κύριες διευθύνσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας συμπίπτουν με εκείνες του ταυστή των γενικευμένων ελαστικών τροπών.

5.6 Παρατηρήσεις πάνω στην μικροπολική ελαστικότητα

Σε αυτή την παράγραφο γίνονται κάποιες παρατηρήσεις πάνω στα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα μέτρα ελαστικότητας για το κοκκώδες δίνονται ως συναρτήσεις των ιδιοτήτων του υλικού των κόκκων, G και ν , και των ιδιοτήτων της διάταξης του συνόλου, ϕ_s , C , c και d . Ο ρόλος των ιδιοτήτων του υλικού των κόκκων είναι ξεκάθαρος και δεν διαφέρει από εκείνον στην κλασική ελαστικότητα συνεχούς. Οι παράμετροι ϕ_s και C επηρεάζουν το ελαστικό μέτρο του υλικού. Όσο υψηλότερος είναι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης και ο ενεργός λόγος των στερεών, τόσο υψηλότερη είναι η τάση που πρέπει να ασκηθεί ώστε να προκύψει μια δεδομένη παραμόρφωση. Από την άλλη πλευρά πιο χαλαρά υλικά με λιγότερες επαφές παραμορφώνονται στον ίδιο βαθμό υπό χαμηλότερες τάσεις.

Μπορούν τώρα να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις πάνω στην ανισοτροπία του υλικού, η οποία εισάγεται μέσω των παραμέτρων c και d . Είναι εμφανές ότι στην γενική περίπτωση η συμπεριφορά του υλικού είναι ισχυρά ανισότροπη. Ωστόσο στην περίπτωση που θεωρηθεί ένας συμμετρικός τανυστής ελαστικών τροπών με $\psi = 0$, το υλικό προκύπτει ορθοτροπικό.

Ο περιορισμός των σχέσεων τάσεων-τροπών που εξήχθησαν παραπάνω στην περίπτωση μιας ισότροπης κατανομής επαφών δίνει

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \phi_s \frac{GC}{8} \left\{ \frac{4-\nu}{1-\nu} \right\} \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{8} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \right\} \gamma_{22}\end{aligned}\quad (5.6.1)$$

$$\sigma_{12} = \phi_s \frac{GC}{4} (\gamma_{12} - \gamma_{21}) \quad (5.6.2)$$

$$\sigma_{21} = \phi_s \frac{GC}{4} (\gamma_{21} - \gamma_{12}) \quad (5.6.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \phi_s \frac{GC}{8} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \right\} \gamma_{11} + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{8} \left\{ \frac{4-\nu}{1-\nu} \right\} \gamma_{22}\end{aligned}\quad (5.6.4)$$

$$\mu_1 = \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} (3\gamma_{11} + \gamma_{22}) \kappa_1 \quad (5.6.5)$$

και

$$\mu_2 = \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} (\gamma_{11} + 3\gamma_{22}) \kappa_2 \quad (5.6.6)$$

Είναι εμφανές ότι μια ισότροπη κατανομή επαφών έχει ως αποτέλεσμα μια ισότροπη ελαστική συμπεριφορά. Στην πραγματικότητα είναι η παράμετρος c που προκαλεί την απόκλιση από την ισότροπη ελαστικότητα.

Εξετάζεται τώρα η περίπτωση στην οποία απουσιάζουν οι περιστροφές. Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής των τάσεων ζεύγους είναι μηδενικός. Το αυτό ισχύει για τα σ_{12} και σ_{21} . Επομένως οι κύριοι άξονες του τανυστή των τροπών είναι επίσης οι κύριοι άξονες του τανυστή των τάσεων.

Εάν από την άλλη πλευρά θεωρηθούν οι πλήρεις εξισώσεις με $c \neq 0$, τότε προκύπτει απώλεια της ομοαξονικότητας. Είναι ενδιαφέρον να υπολογιστεί η γωνία ξ_{el} μεταξύ των κυρίων αξόνων των τροπών και των κυρίων αξόνων των τάσεων. Χάρην απλότητας γίνεται η υπόθεση ότι $\psi = 0$. Αφού ο τανυστής των γενικευμένων ελαστικών τροπών είναι ήδη εκπεφρασμένος ως προς τις κύριες διευθύνσεις, η ξ_{el} θα είναι ίση με την γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο τανυστής των τάσεων προκειμένου να εκφραστεί ως προς τις κύριες διευθύνσεις του, έστω Oxy , όπου και θα ισχύει ότι $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για μη συμμετρικούς τανυστές τάσεων ο κανόνας στροφής είναι

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos(2\phi) + \frac{1}{2} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) \sin(2\phi) \quad (5.6.7)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin(2\phi) + \frac{1}{2} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos(2\phi) \quad (5.6.8)$$

$$\sigma_{yx} = -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin(2\phi) - \frac{1}{2} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos(2\phi) \quad (5.6.9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos(2\phi) - \frac{1}{2} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) \sin(2\phi) \quad (5.6.10)$$

Η γωνία ξ_{el} για την οποία $\sigma_{xy}(\xi_{el}) = -\sigma_{yx}(\xi_{el})$ πρέπει τώρα να υπολογιστεί.

$$\sigma_{xy}(\xi_{el}) = -\sigma_{yx}(\xi_{el}) \Rightarrow \quad (5.6.11)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin(2\xi_{el}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos(2\xi_{el}) = \\ & = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin(2\xi_{el}) + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) - \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos(2\xi_{el}) \Rightarrow (5.6.12) \end{aligned}$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin(2\xi_{el}) - (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos(2\xi_{el}) = 0 \Rightarrow \quad (5.6.13)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\frac{2-2c-d}{1-\nu} + 2 + d \right] \gamma_{11} + \left[\frac{-2-2c+d}{1-\nu} - 2 - d \right] \gamma_{22} \right\} \sin(2\xi_{el}) = \\ & = 2c(\gamma_{12} - \gamma_{21}) \cos(2\xi_{el}) \quad (5.6.14) \end{aligned}$$

πού σημαίνει ότι

$$\xi_{el} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{A}{B} \right) \quad (5.6.15)$$

όπου

$$A = 2c(\gamma_{12} - \gamma_{21}) \quad (5.6.16)$$

και

$$B = \left(\frac{2-d}{2-2\nu} + 2 + d \right) (\gamma_{11} - \gamma_{22}) - \frac{2c}{1-\nu} (\gamma_{11} + \gamma_{22}) \quad (5.6.17)$$

Εμφανώς για $c = 0$, προκύπτει ότι $\xi_{el} = 0$. Σημειώνεται ότι $\underline{\Gamma}$ είναι η γενικευμένη τροπή και επομένως η ποσότητα $\gamma_{12} - \gamma_{21}$ είναι ένα μέτρο της διάτμησης του υλικού και όχι ένα μέτρο της στερεής στροφής. Υπό στερεές στροφές $\gamma_{12} - \gamma_{21} = 0$ και οι ταυιστές τάσεων και τροπών παραμένουν ομοαξονικοί.

5.7 Ελαστική ενέργεια κοκκώδους

Αξίζει να υπολογιστεί η ελαστική ενέργεια του κοκκώδους ως συνάρτηση των γενικευμένων ελαστικών τροπών. Θα θεωρηθεί ότι $\psi = 0$ χάριν απλότητας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι ρυθμοί ελαστικής ενέργειας στις επαφές είναι

$$\dot{E}^n = \frac{2\pi GR^2}{(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{n}_{(ij)} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{(ij)}) (\mathbf{n}_{(ij)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{(ij)})$$

$$\dot{E}^t = 2\pi GR^2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{t}_{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{(ij)}) (\mathbf{t}_{(ij)} \cdot \dot{\underline{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}_{(ij)})$$

$$\dot{E}^m = 4 \frac{\pi G}{(1-\nu)} R^4 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{n}_{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{(ij)}) (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}_{(ij)}) (\nabla \dot{\omega} \cdot \mathbf{n}_{(ij)})$$

το οποίο συνεπάγεται ότι οι ελαστικές ενέργειες στις επαφές δίνονται ως

$$E^n = \frac{\pi GR^2}{(1-\nu)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{n}_{(ij)} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{(ij)})^2 \quad (5.7.1)$$

$$E^t = \pi GR^2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{t}_{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{(ij)})^2 \quad (5.7.2)$$

$$E^m = \frac{2\pi G}{(1-\nu)} R^4 \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} (\mathbf{n}_{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{(ij)}) (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}_{(ij)})^2 \quad (5.7.3)$$

υπό την υπόθεση ότι οι ελαστικές περιστροφές λαμβάνουν χώρα υπό σταθερές κάθετες δυνάμεις. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι πυκνότητες των ελαστικών ενεργειών για το κοκκώδες είναι

$$\mathcal{E}^n = \phi_s \frac{GC}{2(1-\nu)} A^n \quad (5.7.4)$$

$$\mathcal{E}^t = \phi_s \frac{GC}{2} A^t \quad (5.7.5)$$

$$\mathcal{E}^m = \phi_s \frac{GCR^2}{(1-\nu)} A^m \quad (5.7.6)$$

όπου

$$A^n = \int_0^{2\pi} (\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n})^2 p(\theta) d\theta \quad (5.7.7)$$

$$A^t = \int_0^{2\pi} (\mathbf{t} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n})^2 p(\theta) d\theta \quad (5.7.8)$$

$$A^m = \int_0^{2\pi} (\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}) (\nabla \omega \cdot \mathbf{n})^2 p(\theta) d\theta \quad (5.7.9)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς την γωνία θ , προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}^n = \phi_s \frac{GC}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{16} (4\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2c - \alpha_2^2d) \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \phi_s \frac{GC}{32(1-\nu)} (6\gamma_{11}^2 + 6\gamma_{22}^2 + 4\gamma_{11}\gamma_{22}) \\ &- \phi_s \frac{GC}{32(1-\nu)} (4c(\gamma_{11}^2 - \gamma_{22}^2) + d(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2) \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

$$\mathcal{E}^t = \phi_s \frac{GC}{2} \left(\frac{1}{16} (2\alpha_2^2 + 4\alpha_4^2 + \alpha_2^2d) \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^t &= \phi_s \frac{GC}{32} \left(2(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4(\gamma_{12} - \gamma_{21})^2 \right) + \\ &+ \phi_s \frac{GC}{32} \left(d(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 \right)\end{aligned}\quad (5.7.11)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^m &= \phi_s \frac{GCR^2}{16(1-\nu)} \left(2(4\alpha_1 + \alpha_2)\kappa_1^2 - (2\alpha_2 + \alpha_1)\kappa_2^2 \right) + \\ &- \phi_s \frac{GCR^2}{16(1-\nu)} \left(2c(\alpha_1 + 2\alpha_2)\kappa_1^2 + \alpha_2 d(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^m &= \phi_s \frac{GCR^2}{16(1-\nu)} \left(2(5\gamma_{11} + 3\gamma_{22})\kappa_1^2 - (3\gamma_{11} - \gamma_{22})\kappa_2^2 \right) + \\ &- \phi_s \frac{GCR^2}{16(1-\nu)} \left(2c(3\gamma_{11} - \gamma_{22})\kappa_1^2 \right) + \\ &- \phi_s \frac{GCR^2}{16(1-\nu)} \left(d(\gamma_{11} - \gamma_{22})(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \right)\end{aligned}\quad (5.7.12)$$

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι ο συνολικός ρυθμός ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από αλλαγές στις γενικευμένες ελαστικές τροπές αλλά και από αλλαγές στον ενεργό αριθμό συνδιάταξης, τις παραμέτρους ανισοτροπίας και το πορώδες. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι τελευταίες παράμετροι δρουν ως εσωτερικές μεταβλητές. Προκειμένου να περιγραφεί επαρκώς η συμπεριφορά του υλικού είναι επομένως αναγκαίο να θεωρηθεί εξελισσόμενη ελαστικότητα ή ελαστοπλαστικότητα.

Κεφάλαιο 6

Μικροπολικές Θεωρίες: Πλαστικότητα

6.1 Εσωτερική ενέργεια

Η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος είναι η ενέργεια που συνδέεται με τους εσωτερικούς του βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση των αερίων είναι η κινητική ενέργεια της κίνησης των μορίων (σε ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το αέριο είναι ακίνητο) σε συνδυασμό με την δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης των μορίων. Εμφανώς η εσωτερική ενέργεια είναι μια συνάρτηση της κατάστασης του συστήματος. Η έννοια έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την περιγραφή θερμοδυναμικών συστημάτων μέσω της στατιστικής μηχανικής. Στην θερμοδυναμική η κυρίαρχη μεταβλητή είναι η θερμοκρασία. Μια τέτοια επιλογή δεν είναι εύλογη για τα κοκκώδη μέσα, όπου ωστόσο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αντ' αυτού ο όγκος που καταλαμβάνουν. Η πρώτη απόπειρα για μια τέτοια έκφραση της εσωτερικής ενέργειας των σκονών εισήχθη το 1989 από τους Edwards και Oakeshott (Edwards and Oakeshott, 1989). Η θεωρητική προσέγγιση του Edwards έχει χρησιμοποιηθεί (Coniglio et al., 2004) για τη δημιουργία διαγραμμάτων αλλαγής φάσης για κοκκώδη υλικά και μεταβολές από τη στερεή στη ρευστή φάση. Στα κοκκώδη μέσα υπό οιονεί στατικές συνθήκες η εσωτερική ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζεται από την ελαστική ενέργεια.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται και εφαρμόζεται η μέθοδος μέσω της οποίας είναι δυνατόν να εξαχθεί η πλαστική συμπεριφορά ενός μικροπολικού κοκκώδους

μέσου από τη συνάρτηση που εκφράζει την εσωτερική του ενέργεια και μια συνάρτηση απόσβεσης της ενέργειας ή μια συνάρτηση διαρροής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ως συνάρτηση εσωτερικής ενέργειας χρησιμοποιείται η συνάρτηση ελαστικής ενέργειας που υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης εξάγονται δύο συναρτήσεις διαρροής με βάση απλουστευμένα μικρομηχανικά κριτήρια.

Στην δεύτερη παράγραφο περιγράφεται η μέθοδος που χρησιμοποιείται και η οποία εισήχθη από τους Collins και Houlsby (Collins and Houlsby, 1997). Στην τρίτη παράγραφο εξάγεται η συνάρτηση διαρροής λόγω της σχετικής κύλισης με βάση την θεώρηση του ορίου της ελαστικότητας, ενώ στην τέταρτη παράγραφο ακολουθείται η ίδια διαδικασία για την επιφάνεια διαρροής λόγω της σχετικής κύλισης. Στην πέμπτη παράγραφο εξάγονται οι κανόνες της πλαστικής ροής, ενώ στην έκτη και τελευταία παράγραφο παρατίθενται κάποιες παρατηρήσεις.

6.2 Περιγραφή της μεθόδου

6.2.1 Στοιχεία θερμοδυναμικής

Προκειμένου να εξαχθεί η καταστατική περιγραφή για την πλαστική παραμόρφωση των κοκκωδών μέσων θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος που εισήχθη από τους Collins και Houlsby (Collins and Houlsby, 1997). Η μέθοδος αυτή, η οποία είναι προγενέστερη της συγκεκριμένης δημοσίευσης, οδηγεί σε θερμοδυναμικά συνεπή μοντέλα.

Βασικό ρόλο στη διαδικασία που παρουσιάζεται εδώ διαδραματίζουν οι μετασχηματισμοί Legendre. Κύριος στόχος ενός μετασχηματισμού Legendre είναι να αντικαταστήσει μια συνάρτηση $Z = X(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ με τη δυική της $Z = Y(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, όπου $y_i = (\partial X / \partial x_i)$ είναι οι συνιστώσες της βαθμίδας της αρχικής συνάρτησης.

Γίνεται η θεώρηση ότι η κατάσταση του υλικού καθορίζεται από την γενικευμένη (ελαστική) παραμόρφωση ϵ_i , ένα σύνολο εσωτερικών μεταβλητών α_i και είτε την θερμοκρασία θ , είτε την εντροπία s . Το πρώτο αξίωμα της θερμοδυναμικής μπορεί να γραφεί στην τοπική μορφή

$$\dot{U} = \tau_i \dot{\epsilon}_i - q_{k,k} \quad (6.2.1)$$

όπου U είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα όγκου και q_i είναι το διάνυσμα ροής θερμότητας. Το δεύτερο αξίωμα της θερμοδυναμικής μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$D \equiv \theta \dot{s}^i \geq 0 \quad (6.2.2)$$

η οποία αναφέρεται συχνά ως ανισότητα του Planck, βλέπε (Truesdell, 1969), σελ. 30. Στην παραπάνω εξίσωση \dot{s}^i είναι το μη αναστρέψιμο μέρος του ρυθμού της εντροπίας, ή αλλιώς, ο ρυθμός παραγωγής εντροπίας μέσα στο στοιχείο, και D είναι η συνάρτηση απόσβεσης. Για το αντιστρεπτό μέρος της παραγωγής εντροπίας ισχύει το ακόλουθο

$$\theta \dot{s}^r \equiv -\theta \left(\frac{q_k}{\theta} \right)_{,k} = -q_{k,k} + \frac{q_k \theta_{,k}}{\theta} \quad (6.2.3)$$

Για την εσωτερική ενέργεια ισχύει ότι

$$U = U(\epsilon_i, \alpha_i, s) \quad (6.2.4)$$

αφού είναι συνάρτηση της κατάστασης. Για απλές μεταβολές της θερμοκρασίας τα ϵ_i και α_i είναι σταθερά, γεγονός που σημαίνει ότι

$$\dot{U} = (\partial U / \partial s) \dot{s} \quad (6.2.5)$$

Ταυτόχρονα από τις εξς. (6.2.1) και (6.2.3) προκύπτει ότι $\dot{U} = \theta \dot{s}$, άρα

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial s} \quad (6.2.6)$$

Αφού θεωρούνται ισόθερμες ή ισοδύναμα αποπλεγμένες διαδικασίες, είναι εύλογο να αντικατασταθεί το θ από το s στη έκφραση για τη συνάρτηση της ενέργειας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό Legendre για την εναλλαγή των ρόλων των θ και s . Η δυική συνάρτηση της εσωτερικής ενέργειας είναι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz $F(\epsilon_i, \alpha_i, \theta)$, όπου

$$F = U - \theta s \quad (6.2.7)$$

και

$$s = -\frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (6.2.8)$$

είναι η δυική στην εξ. (6.2.6) σχέση. Παραγωγίζοντας την εξ. (6.2.7) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις εξς. (6.2.1) και (6.2.3) και το γεγονός ότι τα $\dot{\theta}$ και $\theta_{,k}$ είναι μηδενικά σε μια ισόθερμη διαδικασία, προκύπτει ότι

$$\dot{F} = \tau_i \dot{\epsilon}_i - \theta \dot{s}^i \Leftrightarrow \tau_i \dot{\epsilon}_i = \dot{F} + D \quad (6.2.9)$$

Από το παραπάνω είναι εμφανές ότι σε μια ισόθερμη διαδικασία η εσωτερική ισχύς είναι ίση με το άθροισμα του ρυθμού μεταβολής της ελεύθερης ενέργειας και της απόσβεσης. Το πρώτο αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της αντιστρέψιμης, αν και όχι απαραίτητα ελαστικής, ενέργειας, ενώ το D εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο αποσβένεται ενέργεια. Σε ένα πλαστικό υλικό η απόσβεση της ενέργειας πηγάζει από τις μεταβολές των εσωτερικών μεταβλητών, επομένως η D λαμβάνεται ως μια συνάρτηση των καταστατικών μεταβλητών και του $\dot{\alpha}_i$, $D = D(\epsilon_i, \alpha_i, \dot{\alpha}_i)$.

Μια εναλλακτική μορφή για την \dot{F} για μια ισόθερμη διαδικασία μπορεί να προκύψει από απευθείας παραγωγή

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_i} \dot{\epsilon}_i + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad (6.2.10)$$

η οποία συγκρινόμενη με την εξ. (6.2.9) δίνει

$$\tau_i = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_i} \quad (6.2.11)$$

αφού οι ρυθμοί μεταβολής των συνιστωσών της γενικευμένης τροπής και των εσωτερικών μεταβλητών είναι ανεξάρτητοι. Η αντίστοιχη της τάσης μεταβλητή που προκύπτει από την παραγωγή της F ως προς τις εσωτερικές μεταβλητές συμβολίζεται ως

$$\chi_i = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \quad (6.2.12)$$

Αξίζει να σημειωθεί η αλλαγή στο πρόσημο. Προκύπτει ότι η συνάρτηση της απόσβεσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$D \equiv \theta \dot{s}^i = \chi_i \dot{\alpha}_i \quad (6.2.13)$$

Η διαφορά μεταξύ της γενικευμένης τάσης, τ_i , και της ‘πλαστικής’ γενικευμένης τάσης, χ_i , θα συμβολίζεται ως $\rho_i = \tau_i - \chi_i$.

Αφού περιοριζόμαστε σε ισόθερμα συστήματα, η εξάρτηση της ενέργειας από τη θερμοκρασία θ μπορεί να αγνοηθεί. Σε αυτό το σημείο εισάγεται η ελεύθερη ενέργεια Gibbs $G(\tau_i, \alpha_i)$. Από την εξ. (6.2.11) αυτή μπορεί να εκφραστεί με την χρήση της συνάρτησης της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz $F(\epsilon_i, \alpha_i)$ μέσω ενός μερικού μετασχηματισμού Legendre που να εναλλάσσει της μεταβλητές της τάσης και της τροπής

$$F(\epsilon_i, \alpha_i) + G(\tau_i, \alpha_i) = \tau_i \epsilon_i \quad (6.2.14)$$

όπου

$$\epsilon_i = \frac{\partial G}{\partial \tau_i} \quad (6.2.15)$$

και

$$\chi_i = \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} \quad (6.2.16)$$

Η βασική παραδοχή που έγινε αρχικά από τον Ziegler (Ziegler and Wehrli, 1983; Ziegler, 1983) είναι ότι οι καταστατικές εξισώσεις ενός υλικού καθορίζονται πλήρως από δύο συναρτήσεις, ένα θερμοδυναμικό δυναμικό, όπως η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ή οποιοδήποτε άλλο από τα δυναμικά που σχετίζονται με αυτή μέσω μετασχηματισμών Legendre, και τη συνάρτηση απόσβεσης. Από την εξ. (6.2.13) φαίνεται ότι η D είναι συνάρτηση του $\dot{\alpha}_i$, καθώς και πιθανώς των α_i και ϵ_i . Για ένα υλικό χωρίς ιξώδη συμπεριφορά η D πρέπει να είναι ομογενής πρώτη βαθμού ως προς το $\dot{\alpha}_i$. Επομένως

$$D = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_i} \dot{\alpha}_i \quad (6.2.17)$$

σύμφωνα με το θεώρημα του Euler για τις ομογενείς συναρτήσεις. Προκύπτει από τις εξ. (6.2.13) και (6.2.17) ότι η διαφορά μεταξύ των χ_i και $(\partial D / \partial \dot{\alpha}_i)$ πρέπει να είναι ορθόγωνη στο $\dot{\alpha}_i$. Ο Ziegler υπέθεσε ότι στην πραγματικότητα η διαφορά αυτή είναι μηδενική, με αποτέλεσμα

$$\chi_i = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (6.2.18)$$

και το χ_i να είναι κάθετο στις ισοϋψείς της D . Αυτή η υπόθεση καλείται συνήθως 'αρχή ορθογωνιότητας', βλέπε (Ziegler, 1983), Κεφάλαιο 15, για την πλήρη συζήτηση. Αν και η παραπάνω υπόθεση έχει λογοκριθεί, λαμβάνεται εδώ ως αποδεκτή και θα χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή της έκφρασης της μη συντηρημένης πλαστικής ροής. Όπως παρατηρείται από τον Ziegler στο (Ziegler, 1981), αν θεωρηθεί ότι η γνώση της συνάρτησης D επαρκεί για τον καθορισμό του χ_i , τότε η εξ. (6.2.18) είναι η μόνη δυνατότητα, καθώς η κάθετη στις ισοϋψείς είναι το μόνο διανυσματικό πεδίο που καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από μια βαθμωτή συνάρτηση.

6.2.2 Πεπλεγμένα υλικά

Σε αυτή την υποπαράγραφο συζητούνται εν συντομία τα πεπλεγμένα υλικά. Ως πεπλεγμένα χαρακτηρίζονται τα υλικά στα οποία οι ελαστικές σταθερές εξαρτώνται

από τις εσωτερικές μεταβλητές. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει η μικροπολική ελαστικότητα που εξήχθη στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ολική τροπή δίνεται από την σχέση

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \dot{\tau}_j + \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \quad (6.2.19)$$

όπου υπονοείται άθροιση ως προς τους επαναλαμβανόμενους δείκτες για j από 1 ως N . Οι δύο όροι της δεξιάς πλευράς δεν μπορούν να ταυτοποιηθούν ως 'ελαστικοί' και 'πλαστικοί' ρυθμοί τροπής, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση ενός αποπλεγμένου υλικού. Μπορούν να ταυτοποιηθούν ως 'αντιστρεπτός' και 'μη αντιστρεπτός' ρυθμός τροπής

$$\dot{\epsilon}_i^r = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \dot{\tau}_j \quad (6.2.20)$$

και

$$\dot{\epsilon}_i^i = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \quad (6.2.21)$$

αντίστοιχα. Η πλαστική τροπή ορίζεται ως το μέρος της τροπής που παραμένει αφού η τάση επιστρέψει στην αρχική της τιμή

$$\epsilon_i^p = \left. \frac{\partial G}{\partial \tau_i} \right|_{\tau_i^0} \quad (6.2.22)$$

Το σύνολο εσωτερικών μεταβλητών α_i μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπίπτει με τις πλαστικές τροπές. Η ελαστική τροπή λαμβάνει τότε την μορφή

$$\epsilon_i^e = \epsilon_i - \epsilon_i^p = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \dot{\tau}_j + \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_i \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_i \quad (6.2.23)$$

ή

$$\dot{\epsilon}_i^e = \dot{\epsilon}_i^r + \dot{\epsilon}_i^c \quad (6.2.24)$$

και

$$\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\epsilon}_i^i - \dot{\epsilon}_i^c \quad (6.2.25)$$

όπου

$$\dot{\epsilon}_i^c = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \tau_k \partial \alpha_j} - \delta_{jk} \right) \dot{\alpha}_j \quad (6.2.26)$$

Εμφανώς ο ρυθμός ελαστικής τροπής είναι το άθροισμα αντιστρεπτής και πεπλεγμένης τροπής, ενώ η μη αντιστρεπτή τροπή είναι το άθροισμα της μη αντιστρεπτής και της πεπλεγμένης τροπής. Για υλικά που είναι γραμμικώς ελαστικά ως προς τις τάσεις ο ρυθμός της πεπλεγμένης τροπής γράφεται ως

$$\dot{\epsilon}_i^c = \frac{\partial C_{ij}}{\partial \alpha_k} \tau_j \dot{\alpha}_k \quad (6.2.27)$$

6.2.3 Οι συναρτήσεις απόσβεσης και διαρροής

Από την υπόθεση της ορθογωνιότητας και με τη χρήση μετασχηματισμών Legendre, προκύπτει ότι υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(\alpha_i, \chi_i) = 0 \quad (6.2.28)$$

με

$$\dot{\alpha}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \chi_i} \quad \text{και} \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \quad (6.2.29)$$

για κάποιον πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$. Στις παραπάνω εξισώσεις D είναι η συνάρτηση απόσβεσης. Η εξ. (6.2.28) και η πρώτη από τις εξ. (6.2.29) είναι η συνάρτηση διαρροής και ο κανόνας πλαστικής ροής, αλλά και η δύο είναι εκπεφρασμένες στο γενικευμένο χώρο τάσεων και όχι στον πραγματικό.

Προκύπτει το ερώτημα για το κατά πόσο η ορθογωνιότητα υφίσταται στον πραγματικό χώρο τάσεων. Μπορεί ναδειχθεί ότι αυτό πράγματι ισχύει για αποπλεγμένα υλικά. Στην περίπτωση ωστόσο των πεπλεγμένων υλικών μπορεί ναδειχθεί, βλέπε (Collins and Houlsby, 1997), ότι ο κανόνας πλαστικής ροής λαμβάνει την μορφή

$$\dot{\epsilon}_i^j = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_j \partial \tau_i} \dot{\alpha}_j \quad (6.2.30)$$

όπου

$$\bar{f}(\alpha_i, \tau_i) = f\left(\alpha_i, \frac{\partial G}{\partial \alpha_i}\right) \quad (6.2.31)$$

Επομένως για πεπλεγμένα υλικά ο συνηρημένος κανόνας πλαστικής ροής δίνει το ρυθμό μη αντιστρεπτής τροπής και όχι τον ρυθμό πλαστικής τροπής. Εισάγεται επομένως με τον τρόπο αυτό ένας μη συνηρημένος κανόνας πλαστικής ροής με φυσικό τρόπο. Αυτός περιγράφεται πλήρως από δύο καταστατικές συναρτήσεις, τη συνάρτηση Gibbs ή την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και την απόσβεση ή τη συνάρτηση διαρροής, και δεν καθίσταται αναγκαίο να εισαχθεί μια νέα συνάρτηση ως πλαστικό δυναμικό.

6.3 Επιφάνεια διαρροής λόγω ολίσθησης

Γίνεται μια απλουστευμένη υπόθεση για τον μηχανισμό διαρροής. Σκοπός είναι ναδειχθεί ότι είναι δυνατόν να εξαχθεί μια συνάρτηση διαρροής από μικρομηχανικές παρατηρήσεις. Θα θεωρηθεί μόνο η διάτμηση και το προκύπτον μοντέλο δεν θα

δύναται να προβλέψει την απόσβεση ενέργειας λόγω ισότροπων παραμορφώσεων. Έστω επαφή με προσανατολισμό ϕ , ώστε το κάθετο διάνυσμα να είναι

$$\mathbf{n} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$$

ενώ το εφαπτομενικό διάνυσμα δίνεται ως

$$\mathbf{t} = (-\sin(\phi), \cos(\phi))$$

Τότε η κάθετη σχετική παραμόρφωση μεταξύ δύο κυλίνδρων θα είναι

$$dn = 2R (\gamma_{11} \cos(\phi)^2 + \gamma_{22} \sin(\phi)^2)$$

ενώ η εφαπτομενική μετατόπιση θα είναι

$$dt = 2R (-\gamma_{12} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \sin(\phi) \cos(\phi))$$

Η κάθετη και εφαπτομενική δύναμη στην επαφή θα είναι

$$N = \frac{\pi GR}{1 - \nu} (\gamma_{11} \cos(\phi)^2 + \gamma_{22} \sin(\phi)^2)$$

και

$$T = \pi GR (-\gamma_{12} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \sin(\phi) \cos(\phi))$$

αντίστοιχα.

Η διαρροή λόγω ολίσθησης λαμβάνει χώρα όταν αρχίζει η σχετική ολίσθηση. Η σχετική ολίσθηση δεν λαμβάνει χώρα όταν

$$|T| \leq \mu N \Rightarrow \quad (6.3.1)$$

$$|\pi GR (-\gamma_{12} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \sin(\phi) \cos(\phi))| \leq \frac{\mu \pi GR}{1 - \nu} (\gamma_{11} \cos(\phi)^2 + \gamma_{22} \sin(\phi)^2) \Rightarrow \quad (6.3.2)$$

$$|(-\gamma_{12} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \sin(\phi) \cos(\phi))| \leq \frac{\mu}{1 - \nu} (\gamma_{11} \cos(\phi)^2 + \gamma_{22} \sin(\phi)^2) \quad (6.3.3)$$

όπου οι τροπές που εμφανίζονται είναι ελαστικές. Όταν ισχύει η ισότητα βρισκόμαστε στην πλαστική περιοχή, ενώ όταν ισχύει η ανισότητα στην ελαστική περιοχή. Οι ποσότητες $\gamma_p^{(e)}$, $\gamma_q^{(e)}$ και $\gamma_\tau^{(e)}$ εισάγονται ως

$$\gamma_p^{(e)} = \frac{1}{2} (\gamma_{11}^{(e)} + \gamma_{22}^{(e)}) \quad (6.3.4)$$

$$\gamma_q^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_{22}^{(e)} - \gamma_{11}^{(e)} \right) \quad (6.3.5)$$

και

$$\gamma_\tau^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_{12}^{(e)} - \gamma_{21}^{(e)} \right) \quad (6.3.6)$$

Τότε ισχύει

$$\gamma_{11}^{(e)} = \gamma_p^{(e)} - \gamma_q^{(e)} \quad (6.3.7)$$

και

$$\gamma_{22}^{(e)} = \gamma_p^{(e)} + \gamma_q^{(e)} \quad (6.3.8)$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (6.3.3) προκύπτει

$$\left| -\gamma_\tau^{(e)} + 2\gamma_q^{(e)} \sin(\phi) \cos(\phi) \right| \leq \frac{\mu}{1-\nu} \left(\gamma_p^{(e)} - \gamma_q^{(e)} (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2) \right) \Rightarrow \quad (6.3.9)$$

$$\left| -\gamma_\tau^{(e)} + \gamma_q^{(e)} \sin(2\phi) \right| \leq \frac{\mu}{1-\nu} \left(\gamma_p^{(e)} - \gamma_q^{(e)} \cos(2\phi) \right) \quad (6.3.10)$$

Υποθέτοντας ότι η ποσότητα στην πρώτη γραμμή είναι θετική και θέτοντας

$$A = \frac{\mu}{1-\nu} \quad (6.3.11)$$

η εξ. (6.3.10) γράφεται

$$-\gamma_\tau^{(e)} + \gamma_q^{(e)} \sin(2\phi) \leq A \left(\gamma_p^{(e)} - \gamma_q^{(e)} \cos(2\phi) \right) \Rightarrow \quad (6.3.12)$$

$$(A \cos(2\phi) + \sin(2\phi)) \gamma_q^{(e)} \leq \gamma_\tau^{(e)} + A \gamma_p^{(e)} \quad (6.3.13)$$

Η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές του ϕ . Είναι επαρκές να απαιτηθεί να ισχύει για την μέγιστη τιμή της

$$f(\phi) = A \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \quad (6.3.14)$$

εάν το γ_q είναι θετικό και την ελάχιστη τιμή της $f(\phi)$, εάν το γ_q είναι αρνητικό. Παραγωγίζοντας την $f(\phi)$ προκύπτει ότι τόσο η μέγιστη όσο και η ελάχιστη τιμή εμφανίζονται όταν

$$\tan(2\phi_1) = \frac{1}{A} \quad (6.3.15)$$

για γωνίες που διαφέρουν κατά π . Θέτοντας

$$B = |f(\phi_1)| \quad (6.3.16)$$

η εξ. (6.3.13) γίνεται

$$B \left| \gamma_q^{(e)} \right| \leq \gamma_\tau^{(e)} + A \gamma_p^{(e)} \quad (6.3.17)$$

οπότε προκύπτει

$$\left| \gamma_q^{(e)} \right| \leq \frac{1}{B} \gamma_\tau^{(e)} + \frac{A}{B} \gamma_p^{(e)} \quad (6.3.18)$$

Η προκύπτουσα συνάρτηση διαρροής είναι

$$\left| \gamma_q^{(e)} \right| = \frac{1}{B} \gamma_\tau^{(e)} + \frac{A}{B} \gamma_p^{(e)} \quad (6.3.19)$$

Υποθέτοντας ότι η ποσότητα

$$-\gamma_\tau^{(e)} + \gamma_q^{(e)} \sin(2\phi)$$

είναι αρνητική, η εξ. (6.3.10) γίνεται

$$\gamma_\tau^{(e)} - \gamma_q^{(e)} \sin(2\phi) \leq A \left(\gamma_p^{(e)} - \gamma_q^{(e)} \cos(2\phi) \right) \Rightarrow \quad (6.3.20)$$

$$(A \cos(2\phi) - \sin(2\phi)) \gamma_q^{(e)} \leq -\gamma_\tau^{(e)} + A \gamma_p^{(e)} \quad (6.3.21)$$

Όπως προηγουμένως, η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές του ϕ . Είναι επαρκές να απαιτήσει κανείς να ισχύει για την μέγιστη τιμή της

$$h(\phi) = A \cos(2\phi) - \sin(2\phi) \quad (6.3.22)$$

όταν το $\gamma_q^{(e)}$ είναι θετικό και την ελάχιστη τιμή της $h(\phi)$ όταν το $\gamma_q^{(e)}$ είναι αρνητικό. Παραγωγίζοντας την h , προκύπτει ότι τόσο το μέγιστο όσο και το ελάχιστο εμφανίζονται όταν

$$\tan(2\phi_2) = -\frac{1}{A} \quad (6.3.23)$$

Οι αριθμητικές τιμές του μέγιστου και του ελάχιστου είναι ίσες με τις αντίστοιχες της f . Θέτοντας

$$B = |h(\phi_2)| \quad (6.3.24)$$

η εξ. (6.3.21) γίνεται

$$|\gamma_q^{(e)}| \leq -\frac{1}{B}\gamma_\tau^{(e)} + \frac{A}{B}\gamma_p^{(e)} \quad (6.3.25)$$

Η προκύπτουσα συνάρτηση διαρροής είναι

$$|\gamma_q^{(e)}| = -\frac{1}{B}\gamma_\tau^{(e)} + \frac{A}{B}\gamma_p^{(e)} \quad (6.3.26)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς ως προς το πρόσημο της ποσότητας

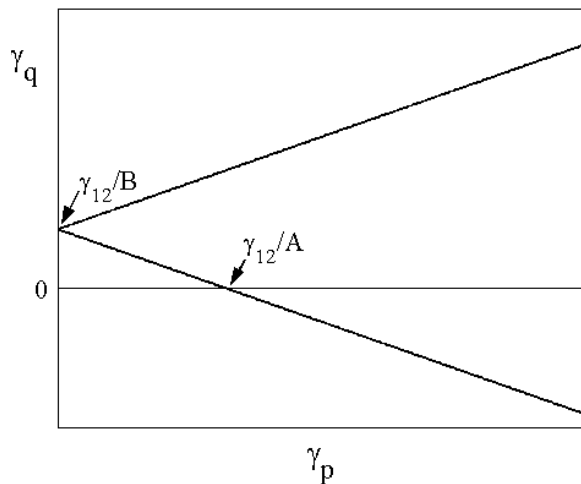
$$-\gamma_\tau^{(e)} + \gamma_q^{(e)} \sin(2\phi)$$

η προκύπτουσα συνάρτηση διαρροής μπορεί να γραφεί ως

$$\gamma_q^{(e)} = \frac{1}{B}\gamma_\tau^{(e)} \pm \frac{A}{B}\gamma_p^{(e)} \quad (6.3.27)$$

και εμφανίζεται στην Εικ. 6.1.

Είναι εμφανές ότι το κριτήριο διαρροής εκφράζεται ως προς τις ελαστικές τρο-



Εικόνα 6.1: Επιφάνεια διαρροής λόγω ολίσθησης ως προς τις ελαστικές τροπές.

πές σε αυτό το σημείο. Κρίνεται σκόπιμο να εκφραστεί ως προς τις τάσεις. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί η ελαστικότητα που εξήχθη στο προηγούμενο κεφάλαιο. Χρησιμοποιώντας τις εξς. (5.5.127) ως (5.5.130) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\gamma_p = (1 - \nu) \left(\frac{C_{pp}}{Q} p + \frac{C_{pq}}{Q} q + \frac{C_{p\tau}}{Q} \tau \right) \quad (6.3.28)$$

$$\gamma_q = \left(\frac{C_{qp}}{Q} p + \frac{C_{qq}}{Q} q + \frac{C_{q\tau}}{Q} \tau \right) \quad (6.3.29)$$

$$\gamma_\tau = \left(\frac{C_{\tau p}}{Q} p + \frac{C_{\tau q}}{Q} q + \frac{C_{\tau\tau}}{Q} \tau \right) \quad (6.3.30)$$

όπου

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (6.3.31)$$

$$q = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \quad (6.3.32)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \quad (6.3.33)$$

και

$$\begin{aligned} Q &= (1 - \nu) (2 + d \cos(2\psi) + c^2 \sin(\psi)^2) + \\ &+ (2 - c^2 \cos(\psi)^2 - d \cos(2\psi)) \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

$$\begin{aligned} C_{pp} &= 2(1 - \nu)(2 + d \cos(2\psi) + c^2 \sin(\psi)^2) + \\ &+ 2(2 - d \cos(2\psi)) \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

$$C_{pq} = -4c \cos(\psi) \quad (6.3.36)$$

$$C_{p\tau} = -c^2 \sin(2\psi) \quad (6.3.37)$$

$$C_{qp} = -4c(1 - \nu) \cos(\psi) \quad (6.3.38)$$

$$C_{qq} = 8(1 - \nu) \quad (6.3.39)$$

$$C_{q\tau} = 4c(1 - \nu) \sin(\psi) \quad (6.3.40)$$

$$C_{\tau p} = -c^2(1 - \nu) \sin(2\psi) \quad (6.3.41)$$

$$C_{\tau q} = 4c(1 - \nu) \sin(\psi) \quad (6.3.42)$$

$$\begin{aligned} C_{\tau\tau} &= 2(1 - \nu)(2 + d \cos(2\psi)) + \\ &+ 2(2 - c^2 \cos(\psi)^2 - d \cos(2\psi)) \end{aligned} \quad (6.3.43)$$

Η επιφάνεια διαρροής ως προς τις ελαστικές τροπές είναι

$$\gamma_q = \frac{1}{B} \gamma_{12} \pm \frac{A}{B} \gamma_p \quad (6.3.44)$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει

$$\begin{aligned} B \left(\frac{C_{qp}}{Q} p + \frac{C_{qq}}{Q} q + \frac{C_{q\tau}}{Q} \tau \right) &= \left(\frac{C_{\tau p}}{Q} p + \frac{C_{\tau q}}{Q} q + \frac{C_{\tau\tau}}{Q} \tau \right) + \\ &\pm \frac{\mu}{(1 - \nu)} (1 - \nu) \left(\frac{C_{pp}}{Q} p + \frac{C_{pq}}{Q} q + \frac{C_{p\tau}}{Q} \tau \right) \Rightarrow \\ B(C_{qp}p + C_{qq}q + C_{q\tau}\tau) &= (C_{\tau p}p + C_{\tau q}q + C_{\tau\tau}\tau) + \\ &\pm \mu(C_{pp}p + C_{pq}q + C_{p\tau}\tau) \Rightarrow \\ (BC_{qq} \mp \mu C_{pq} - C_{\tau q}) q &= (C_{\tau\tau} - BC_{q\tau} \pm \mu C_{p\tau}) \tau + \\ &+ (\pm \mu C_{pp} - BC_{qp} + C_{p\tau}) p \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση διαρροής λόγω ολίσθησης ως προς τις τροπές. Οι συντελεστές C_{ij} εξαρτώνται από τις παραμέτρους c , d και ψ , οι οποίες είναι συναρτήσεις των πλαστικών τροπών. Εάν $\psi = 0$, δηλαδή αν η φόρτιση είναι ομοαξονική με την αρχική φόρτιση, τότε η συνάρτηση διαρροής γράφεται

$$\begin{aligned} (BC_{qq} \mp \mu C_{pq}) q &= C_{\tau\tau} \tau + \\ &+ (\pm \mu C_{pp} - BC_{qp}) p \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η συνάρτηση διαρροής που προκύπτει εδώ είναι ποιοτικά παρόμοια με εκείνη που εμφανίζεται στην Εικ. 6.1. Αξίζει ωστόσο να σημειωθεί ότι οι δύο κλάδοι δεν χαρακτηρίζονται απαραίτητα από τις ίδιες απόλυτες τιμές κλίσεων, εκτός εάν $c = 0$. Υπενθυμίζεται ότι το c είναι μια από τις δύο παραμέτρους που καθορίζουν την ανισοτροπία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του προσανατολισμού των επαφών.

6.4 Επιφάνεια διαρροής λόγω κύλισης

Μια προσέγγιση παρόμοια με εκείνη της προηγούμενης παραγράφου ακολουθείται εδώ. Έστω επαφή με προσανατολισμό ϕ , έτσι ώστε το κάθετο διάνυσμα να είναι

$$\mathbf{n} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$$

και το εφαπτομενικό να είναι

$$\mathbf{t} = (-\sin(\phi), \cos(\phi))$$

Τότε η κάθετη σχετική μετατόπιση μεταξύ των δύο κυλίνδρων είναι

$$dn = 2R (\gamma_{11} \cos(\phi)^2 + \gamma_{22} \sin(\phi)^2)$$

ενώ η σχετική γωνιακή μετατόπιση θα είναι

$$d\omega = 2R (\kappa_1 \cos(\phi) + \kappa_2 \sin(\phi))$$

Η κάθετη δύναμη και η ροπή στην επαφή θα είναι

$$N = \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dn$$

και

$$M = R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dnd\omega$$

αντίστοιχα.

Η διαρροή λόγω κύλισης λαμβάνει χώρα όταν αρχίζει η σχετική κύλιση. Η σχετική ολίσθηση δεν αρχίζει εφόσον

$$|M| \leq \beta N \quad (6.4.1)$$

όπου το β είναι ένα μέτρο αντίστασης στην κύλιση με μονάδες μήκους. Από τα παραπάνω λαμβάνει κανείς

$$\left| R \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dnd\omega \right| \leq \beta \frac{\pi G}{2(1-\nu)} dn \Rightarrow \quad (6.4.2)$$

$$|d\omega| \leq \frac{\beta}{R} \Rightarrow \quad (6.4.3)$$

$$|2R (\kappa_1 \cos(\phi) + \kappa_2 \sin(\phi))| \leq \frac{\beta}{R} \Rightarrow \quad (6.4.4)$$

$$|\kappa_1 \cos(\phi) + \kappa_2 \sin(\phi)| \leq \frac{\beta}{2R^2} \quad (6.4.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές του ϕ . Είναι ωστόσο επαρκές να απαιτηθεί να ισχύει για την τιμή του ϕ για την οποία η ποσότητα στο πρώτο μέλος της εξίσωσης λαμβάνει την μέγιστη τιμή. Έστω η συνάρτηση

$$f(\phi) = \kappa_1 \cos(\phi) + \kappa_2 \sin(\phi) \quad (6.4.6)$$

Ζητείται η γωνία ϕ για την οποία η f γίνεται μέγιστη, αν είναι θετική, και ελάχιστη, αν είναι αρνητική. Παραγωγίζοντας μια φορά ως προς το ϕ προκύπτει

$$f'(\phi) = -\kappa_1 \sin(\phi) + \kappa_2 \cos(\phi) \quad (6.4.7)$$

ενώ παραγωγίζοντας ξανά προκύπτει

$$f''(\phi) = -\kappa_1 \cos(\phi) - \kappa_2 \sin(\phi) \quad (6.4.8)$$

Για κάθε τιμή της ϕ οι συναρτήσεις f και f'' έχουν αντίθετα πρόσημα, γεγονός που σημαίνει ότι η τιμή του ϕ που αποτελεί ρίζα της f' αντιστοιχεί σε μέγιστο αν η f είναι θετική και σε ελάχιστο αν η f είναι αρνητική. Ως αποτέλεσμα η συνθήκη προκειμένου να μην υπάρξει διαρροή λόγω κύλισης εκφράζεται ως

$$|\kappa_1 \cos(\phi_s) + \kappa_2 \sin(\phi_s)| \leq \frac{\beta}{2R^2} \quad (6.4.9)$$

όπου

$$-\kappa_1 \sin(\phi_s) + \kappa_2 \cos(\phi_s) = 0 \quad (6.4.10)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τόσο την ανισότητα όσο και την ισότητα έχει ως αποτέλεσμα

$$\kappa_1^2 \cos(\phi_s)^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 \sin(\phi_s) \cos(\phi_s) + \kappa_2^2 \sin(\phi_s)^2 \leq \frac{\beta^2}{4R^4} \quad (6.4.11)$$

και

$$\kappa_1^2 \sin(\phi_s)^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \sin(\phi_s) \cos(\phi_s) + \kappa_2^2 \cos(\phi_s)^2 = 0 \quad (6.4.12)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (6.4.12), η εξ. (6.4.11) μπορεί να γραφεί ως

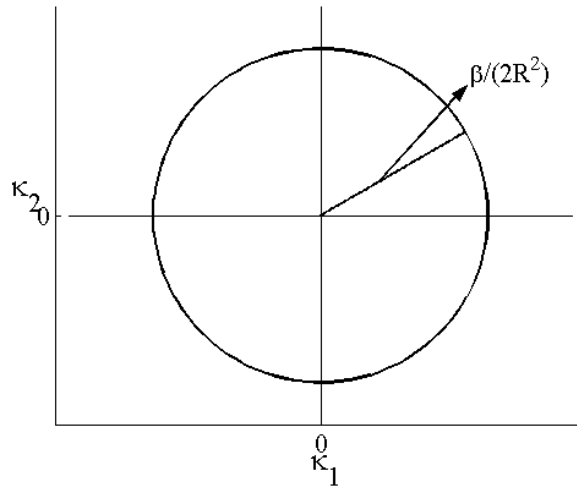
$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \leq \frac{\beta^2}{4R^4} \quad (6.4.13)$$

Η εξ. (6.4.13) είναι μια έκφραση για τη συνθήκη διαρροής λόγω κύλισης ως προς τις καμπυλότητες. Η συνάρτηση διαρροής εκπεφρασμένη ως προς τις καμπυλότητες γράφεται ως

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{\beta^2}{4R^4} \quad (6.4.14)$$

Πρόκειται εμφανώς για κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων στο επίπεδο $O\kappa_1\kappa_2$, όπως φαίνεται στην Εικ. 6.2.

Θεωρείται σκόπιμο να εκφραστεί η παραπάνω συνάρτηση ως προς τάσεις και



Εικόνα 6.2: Επιφάνεια διαρροής λόγω της κύλισης ως προς τις ελαστικές καμπυλότητες.

τάσεις ζεύγους. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τις εξς. (5.5.131) και (5.5.132). Υπενθυμίζεται ότι αυτές είναι οι

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \phi_s \frac{GCR^2}{8(1-\nu)} \kappa_1 (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} \kappa_2 (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \phi_s \frac{GCR^2}{8(1-\nu)} \kappa_2 (4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) + \\ &+ \phi_s \frac{GCR^2}{4(1-\nu)} \kappa_1 (\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \end{aligned}$$

Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι $\psi = 0$. Τότε οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως

$$\frac{\mu_1}{\kappa_1} = 4R^2 \frac{(2 - c^2 - d)(p - q) + (2 - c)(2 + d)(1 - \nu)p}{2(2 + d)(1 + \nu) + (2 - c^2 - d)} \quad (6.4.15)$$

και

$$\frac{\mu_2}{\kappa_2} = 4R^2 \frac{(2 + c)(2 + d)(1 - \nu)p + (2 - c^2 - d)(p - q)}{2(2 + d)(1 - \nu) + (2 - c^2 - d)} \quad (6.4.16)$$

Θέτουμε

$$X = 2(2 + d)(1 - \nu) + (2 - c^2 - d)$$

και

$$E = X + c^2$$

Επιπλέον θέτουμε

$$F = (2 - c^2 - d) \quad (6.4.17)$$

γεγονός που σημαίνει ότι

$$X - F = 2(2 + d)(1 - \nu) \Leftrightarrow (2 + d)(1 - \nu) = \frac{X - F}{2} \quad (6.4.18)$$

Μπορεί πλέον κανείς να γράψει

$$\frac{\mu_1}{\kappa_1} = 2R^2 \frac{2F(p - q) + (2 - c)(X - F)p}{X} \quad (6.4.19)$$

και

$$\frac{\mu_2}{\kappa_2} = 2R^2 \frac{(2 + c)(X - F)p + 2F(p - q)}{X} \quad (6.4.20)$$

ή, αναδιατάσσοντας,

$$\frac{\mu_1}{\kappa_1} = 2R^2 \frac{((2 - c)X + cF)p - 2Fq}{X} \quad (6.4.21)$$

και

$$\frac{\mu_2}{\kappa_2} = 2R^2 \frac{((2 + c)X + cF)p - 2Fq}{X} \quad (6.4.22)$$

Εξαλείφοντας τα κ_1 και κ_2 από τις εξς. (6.4.14), (6.4.21) και (6.4.22) προκύπτει

$$\frac{\mu_1^2}{(((2 - c)X + cF)p - 2Fq)^2} + \frac{\mu_2^2}{(((2 + c)X + cF)p - 2Fq)^2} = \frac{\beta^2}{X^2} \quad (6.4.23)$$

το οποίο είναι μια έλλειψη στο επίπεδο $O\mu_1\mu_2$ και γίνεται κύκλος όταν $c = 0$.

Η υπόθεση ότι $\psi = 0$ τώρα παραλείπεται. Οι υπολογισμοί γίνονται ως εκ τούτου σημαντικά πιο σύνθετοι. Συνδυάζοντας τις εξς. (5.5.131) και (5.5.132), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{(1-\nu)}{2\phi_s GCR^2} \frac{16\mu_1(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi))}{M} + \\ &- \frac{(1-\nu)}{2\phi_s GCR^2} \frac{32\mu_2(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{M} \end{aligned} \quad (6.4.24)$$

και

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{(1-\nu)}{2\phi_s GCR^2} \frac{16\mu_2(4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi))}{M} + \\ &- \frac{(1-\nu)}{2\phi_s GCR^2} \frac{32\mu_1(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)}{M} \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

όπου

$$\begin{aligned} M &= 4\alpha_1^2(4 - c^2) - 4\alpha_1\alpha_2 c(2 + d) \cos(\psi) + \\ &+ \alpha_2^2(-4 + 2c^2 - d^2 + 2(c^2 + 2d) \cos(2\psi)) \end{aligned} \quad (6.4.26)$$

Θέτουμε επιπλέον

$$M_1 = 16(4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c \cos(\psi) + \alpha_2 d \cos(2\psi)) \quad (6.4.27)$$

$$M_2 = 16(4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)c \cos(\psi) - \alpha_2 d \cos(2\psi)) \quad (6.4.28)$$

$$M_3 = -32(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi) \quad (6.4.29)$$

Έτσι ώστε να μπορεί πλέον κανείς να γράψει

$$\kappa_1 = \frac{M_1\mu_1 + M_3\mu_2}{M} \quad (6.4.30)$$

και

$$\kappa_2 = \frac{M_2\mu_2 + M_3\mu_1}{M} \quad (6.4.31)$$

Η συνάρτηση διαρροής λόγω της κύλισης πλέον εκφράζεται ως

$$(M_1^2 + M_3^2) \mu_1^2 + 2(M_1 + M_2) M_3 \mu_1 \mu_2 + (M_2^2 + M_3^2) \mu_2^2 = \left(\frac{\phi_s GC \beta}{1 - \nu} \right)^2 M^2 \quad (6.4.32)$$

η οποία είναι μια στραμμένη έλλειψη. Για μια έλλειψη της μορφής

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = r^2$$

η γωνία κατά την οποία έχει στραφεί δίνεται ως

$$\phi = \arctan(m)$$

όπου m είναι η θετική ρίζα του

$$cm^2 + (a - b)m - c = 0$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται εδώ ζητείται η θετική ρίζα του

$$(M_1 + M_2) M_3 m^2 + (M_1^2 - M_2^2) m - (M_1 + M_2) M_3 = 0 \Rightarrow$$

$$M_3 m^2 + (M_1 - M_2) m - M_3 = 0 \Rightarrow$$

Αυτή είναι

$$m_0 = \frac{\sqrt{8\alpha_1^2 c^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 c(2 - dd) \cos(\psi) + \alpha_2^2(4 + d^2 - 4d \cos(2\psi))}}{2(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)} + \frac{2\alpha_1 c \cos(\psi) - \alpha_2(2 - d \cos(2\psi))}{2(\alpha_1 c + \alpha_2 d \cos(\psi)) \sin(\psi)} \quad (6.4.33)$$

οπότε η γωνία κατά την οποία έχει στραφεί η έλλειψη δίνεται από

$$\phi_r = \arctan(m_0) \quad (6.4.34)$$

Μπορεί κανείς πλέον να εκφράσει τις ποσότητες M_1 , M_2 , M_3 και M ως προς τα p , q και τ . Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\phi_s GC} &= \frac{2(4 + 2c - c(4 - c^2 - (c^2 + 2d) \cos(2\psi)) \cos(\psi))}{Z/(64(1 - \nu))} p + \\ &+ \frac{4(4 - c^2 - (c^2 + 2d) \cos(2\psi))}{Z/(64(1 - \nu))} q + \\ &+ \frac{2c(4 - c^2 - (c^2 + 2d) \cos(2\psi)) \sin(\psi)}{Z/(64(1 - \nu))} \tau \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{\phi_s GC} &= \frac{2(4 - 2c + c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\cos(\psi))}{Z/(64(1 - \nu))} p + \\ &- \frac{4(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))}{Z/(64(1 - \nu))} q + \\ &- \frac{2c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\sin(\psi)}{Z/(64(1 - \nu))} \tau \end{aligned} \quad (6.4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_3}{\phi_s GC} &= \frac{4c(1 - (c^2 + 2d)\cos^2(\psi))\sin(\psi)}{Z/(64(1 - \nu))} p + \\ &+ \frac{8(c^2 + 2d)\cos(\psi)\sin(\psi)}{Z/(64(1 - \nu))} q + \\ &+ \frac{2c(c^2 + 2d)\sin(\psi)\sin(2\psi)}{Z/(64(1 - \nu))} \tau \end{aligned} \quad (6.4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{4(\phi_s GC)^2} &= \frac{(4 - c^2)}{Z^2/(64(1 - \nu)^2)} p^2 + \\ &+ \frac{((4 - c^2)(c^2 + 2d)\cos^2(\psi) - (2 + d)^2)}{Z^2/(64(1 - \nu)^2)} q_t^2 + \\ &- \frac{2c(2 - c^2 - d)\cos(\psi)}{Z^2/(64(1 - \nu)^2)} p q_t \end{aligned} \quad (6.4.38)$$

όπου

$$q_t = 2q - cp\cos(\psi) + c\tau\sin(\psi) \quad (6.4.39)$$

και

$$\begin{aligned} Z &= (1 - \nu)(4 - c^2 + (c^2 + 2d)\cos(2\psi)) + \\ &+ ((4 - c^2) - (c^2 + 2d)\cos(2\psi)) \end{aligned} \quad (6.4.40)$$

Πραγματοποιώντας κάποιες απλοποιήσεις, η επιφάνεια διαρροής λόγω της ολίσθησης μπορεί πλέον να γραφεί ως

$$(S_1^2 + S_3^2)\mu_1^2 + 2(S_1 + S_2)S_3\mu_1\mu_2 + (S_2^2 + S_3^2)\mu_2^2 = \frac{\beta^2}{Z^2} S^2 \quad (6.4.41)$$

όπου

$$\begin{aligned} S_1 &= 2(4 + 2c - c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\cos(\psi)) p + \\ &+ 4(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi)) q + \\ &+ 2c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\sin(\psi)\tau \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= 2(4 - 2c + c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\cos(\psi))p + \\
&- 4(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))q + \\
&- 2c(4 - c^2 - (c^2 + 2d)\cos(2\psi))\sin(\psi)\tau
\end{aligned} \tag{6.4.43}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= 4c(1 - (c^2 + 2d)\cos^2(\psi))\sin(\psi)p + \\
&+ 8(c^2 + 2d)\cos(\psi)\sin(\psi)q + \\
&+ 2c(c^2 + 2d)\sin(\psi)\sin(2\psi)\tau
\end{aligned} \tag{6.4.44}$$

$$\begin{aligned}
S &= 4(4 - c^2)p^2 + \\
&+ 4((4 - c^2)(c^2 + 2d)\cos^2(\psi) - (2 + d)^2)q_t^2 + \\
&- 8c(2 - c^2 - d)\cos(\psi)pq_t
\end{aligned} \tag{6.4.45}$$

6.5 Κανόνες πλαστικής ροής

Με βάση την πρώτη παράγραφο, ο κανόνας πλαστικής ροής προκύπτει με φυσικό τρόπο από την συνάρτηση διαρροής. Στην παρούσα παράγραφο οι ρυθμοί των πεπλεγμένων τροπών εκφράζονται ως συναρτήσεις των ρυθμών των πλαστικών τροπών, προκειμένου να προκύψουν οι μη συνηρητημένοι κανόνες ροής. Από τις

$$\dot{\epsilon}_i^i = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_i}$$

και

$$\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\epsilon}_i^i - \dot{\epsilon}_i^c$$

λαμβάνει κανείς

$$\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial C_{ij}}{\partial \epsilon_k^p} \tau_j \dot{\epsilon}_k^p \tag{6.5.1}$$

Στην παρούσα διατύπωση

$$\boldsymbol{\tau} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \mu_1, \mu_2) \tag{6.5.2}$$

και

$$\epsilon = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \kappa_1, \kappa_2) \quad (6.5.3)$$

Γίνεται η υπόθεση ότι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης και ο ενεργός λόγος των στερεών εξαρτώνται μόνο από την ογκική πλαστική τροπή. Για τις παραμέτρους c και d που ελέγχουν την ανισοτροπία των επαφών γίνεται η υπόθεση ότι εξαρτώνται από τις ποσότητες γ_q^p και γ_τ^p . Είναι εύλογο να υποθεθεί ότι δεν εξαρτώνται από την πλαστική ογκική τροπή γ_p^p , αφού τα c και d είναι παράμετροι που συνδέονται με μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, της οποίας το ολοκλήρωμα είναι σταθερό και ίσο με την μονάδα.

Οι ελαστικοί συντελεστές υπό τις παραπάνω υποθέσεις λαμβάνουν την μορφή

$$C_{ij} = h(\gamma_p^p) S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p) \quad (6.5.4)$$

όπου

$$h(\gamma_p^p) = \frac{1}{\phi_s C} \quad (6.5.5)$$

Με βάση τα παραπάνω η εξ. (6.5.1) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial (h(\gamma_p^p) S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p))}{\partial \gamma_p^p} \tau_j \dot{\gamma}_p^p + \\ &- \frac{\partial (h(\gamma_p^p) S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p))}{\partial \gamma_q^p} \tau_j \dot{\gamma}_q^p - \frac{\partial (h(\gamma_p^p) S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p))}{\partial \gamma_\tau^p} \tau_j \dot{\gamma}_\tau^p \Rightarrow \\ \dot{\epsilon}_i^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial h(\gamma_p^p)}{\partial \gamma_p^p} \tau_j S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p) \dot{\gamma}_p^p + \\ &- h(\gamma_p^p) \frac{\partial S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_q^p} \tau_j \dot{\gamma}_q^p - h(\gamma_p^p) \frac{\partial S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_\tau^p} \tau_j \dot{\gamma}_\tau^p \Rightarrow \\ \dot{\epsilon}_i^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial h(\gamma_p^p)}{\partial \gamma_p^p} S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p) \tau_j \dot{\gamma}_p^p + \\ &- h(\gamma_p^p) \left(\frac{\partial S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_q^p} \dot{\gamma}_q^p + \frac{\partial S_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_\tau^p} \dot{\gamma}_\tau^p \right) \tau_j \quad (6.5.6) \end{aligned}$$

Ονομάζοντας f_1 την συνάρτηση διαρροής λόγω κύλισης και f_2 την συνάρτηση διαρροής λόγω ολίσθησης, οι κανόνες πλαστικής ροής εκφράζονται ως

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ij}^p &= \dot{\lambda}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial h(\gamma_p^p)}{\partial \gamma_p^p} T_{ijkl}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p) \sigma_{kl} \dot{\gamma}_p^p + \\ &- h(\gamma_p^p) \left(\frac{\partial T_{ijkl}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_q^p} \dot{\gamma}_q^p + \frac{\partial T_{ijkl}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_\tau^p} \dot{\gamma}_\tau^p \right) \sigma_{kl} \quad (6.5.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_i^p &= \dot{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \mu_i} - \frac{\partial h(\gamma_p^p)}{\partial \gamma_p^p} U_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p) \mu_j \dot{\gamma}_p^p + \\ &- h(\gamma_p^p) \left(\frac{\partial U_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_q^p} \dot{\gamma}_q^p + \frac{\partial U_{ij}(\gamma_q^p, \gamma_\tau^p)}{\partial \gamma_\tau^p} \dot{\gamma}_\tau^p \right) \mu_j \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

όπου T_{ijkl} και U_{ij} είναι οι τανυστές που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\gamma_{ij}^e = \frac{1}{\phi_s C} T_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (6.5.9)$$

και

$$\kappa_i^e = \frac{1}{\phi_s C} U_{ij} \mu_j \quad (6.5.10)$$

αντίστοιχα. Αυτές προκύπτουν από την επίλυση των εξν. (5.5.127) ως (5.5.132) ως προς τις γενικευμένες τροπές και τις καμπυλότητες. Οι εξς. (6.5.7) και (6.5.8) δίνουν μια γενική ιδέα της μορφής του κανόνα μη συνηρητημένης πλαστικής ροής που προκύπτει από την θεώρηση ενός κοκκώδους μέσου με εξελισσόμενη ελαστικότητα. Ο μη συνηρητημένος κανόνας πλαστικής ροής μπορεί να διορθώσει το εγγενές σε μοντέλα Mohr-Coulomb ελάττωμα της άπειρης διασταλτικότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι αναγκαίο να είναι ταυτοχρόνως ενεργές αμφότερες οι συναρτήσεις διαρροής.

6.6 Παρατηρήσεις

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει την εξαγωγή ενός απλού μοντέλου πλαστικότητας για το μικροπολικό κοκκώδες μέσο που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η εξαγωγή αυτή βασίστηκε σε απλές υποθέσεις για το όριο της ελαστικότητας.

Το πιο αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της πλαστικότητας που παρουσιάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο είναι η επίδραση της ανισοτροπίας του δικτύου των επαφών στη μορφή της συνάρτησης διαρροής. Αξίζει να σημειωθεί ότι για ένα ισότροπο υλικό η επιφάνεια διαρροής λόγω της ολίσθησης λαμβάνει τη μορφή του νόμου Mohr-Coulomb για ένα μη συνεκτικό μέσο.

Ένα επιπλέον ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι το ότι ο μη συνηρητημένος κανόνας πλαστικής ροής προκύπτει από την υπόθεση της ορθογωνιότητας χωρίς να χρειάζεται να θεωρηθεί ένα επιπλέον πλαστικό δυναμικό.

Κεφάλαιο 7

Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή εξετάστηκε η καταλληλότητα των μικροπολικών μοντέλων για την περιγραφή της παραμόρφωσης των κοκκωδών μέσων. Επιπλέον διερευνήθηκε η δυνατότητα να εξαχθούν οι καταστατικές εξισώσεις του συνεχούς από την μικροδομή του μέσου.

Τα παραπάνω πραγματοποιήθηκαν με την χρήση δύο διαφορετικών μεθόδων, αυτής της μαθηματικής μοντελοποίησης και αυτής της διακριτής προσομοίωσης. Η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να εξαχθεί η διακριτή μορφή του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους καθώς και προκειμένου να προκύψουν οι καταστατικές σχέσεις για ένα σύνολο κόκκων με βάση τις ιδιότητες των κόκκων.

Η διακριτή μορφή του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους εξήχθησαν στο Κεφάλαιο 2 μέσω της χρήσης Δυνατών Ισχύων, καθώς και μέσω της χρήσης μιας συνεχούς παρεμβολής των κινηματικών πεδίων των κόκκων. Στο ίδιο κεφάλαιο προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας για ένα σύνολο κόκκων στη διακριτή τους μορφή από την αρχή ανεξαρτησίας από τον παρατηρητή του ρυθμού ενέργειας για ένα κόκκο. Στο Κεφάλαιο 5 δείχνεται ότι η διακριτή μορφή των εξισώσεων ισορροπίας είναι ευθέως ανάλογη της γνωστής από την βιβλιογραφία συνεχούς μορφής.

Η μέθοδος της Δυναμικής των Επαφών χρησιμοποιήθηκε για τη διακριτή προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός κοκκώδους μέσου σε δύο διαστάσεις. Η μέθοδος

περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3. Μια εγγενής υπόθεση της Δυναμικής των Επαφών είναι ότι οι κόκκοι θεωρούνται απολύτως απαραμόρφωτοι. Αυτό συνεπάγεται ότι αγνοείται παντελώς η ελαστικότητα και ότι παρατηρούνται πολύ πιο έντονες ταλαντώσεις στα αποτελέσματα από ό,τι σε άλλες μεθόδους Διακριτών Στοιχείων. Στο ίδιο κεφάλαιο περιγράφονται η προετοιμασία και δοκιμή των δοκιμίων και παρουσιάζονται τα μακροσκοπικά αποτελέσματα. Ο σχηματισμός ζωνών διάτμησης παρατηρήθηκε σε όλα σχεδόν τα δοκίμια.

Επιλέχθηκε να γίνει μέτρηση των ποσοτήτων που συνδέονται με τις μικροπολικές θεωρίες στη μεσοκλίμακα, με έμφαση σε περιοχές στις οποίες παρατηρήθηκε εντοπισμός της παραμόρφωσης. Τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων στη μεσοκλίμακα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4, με έμφαση στο αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων και στη νόρμα του τανυστή των τάσεων ζεύγους. Επίσης παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ποσότητες που αφορούν στην παραμόρφωση.

Στο Κεφάλαιο 5 εισάγονται τα βασικά χαρακτηριστικά των μικροπολικών θεωριών, με έμφαση στην κινηματική των μέσων Cosserat. Εξάγονται οι εξισώσεις ισορροπίας μέσω μιας προεκβολής των αντίστοιχων διακριτών εξισώσεων ισορροπίας που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 2. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου εξάγεται η μικροπολική ελαστικότητα που προκύπτει για ένα σύνολο ίσων μεταξύ τους κόκκων αν θεωρηθούν επαφές τύπου Hertz. Η ελαστική απόκριση του κοκκώδους μέσου προκύπτει ως συνάρτηση των ιδιοτήτων του υλικού από το οποίο αποτελούνται οι κόκκοι, του ενεργού πορώδους και αριθμού συνδιάταξης και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των επαφών. Μικροπολικές ποσότητες, όπως η μη συμμετρικότητα του τανυστή των τάσεων, ο μη μηδενικός τανυστής τάσεων ζεύγους και οι καμπυλότητες, προκύπτουν με φυσικό τρόπο από τη θεώρηση ενός πεδίου περιστροφών, πέρα από το πεδίο μετατοπίσεων, για τους κυλίνδρους.

Στο Κεφάλαιο 6 εξάγεται η μικροπολική πλαστικότητα για ένα σύνολο κόκκων με βάση την μορφή της ελαστικής ενέργειας που προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Προκύπτουν δύο συναρτήσεις διαρροής, μια σχετιζόμενη με την ολίσθηση και μια με την κύλιση, από απλοποιημένες υποθέσεις που αφορούν στο όριο της ελαστικότητας. Οι κανόνες πλαστικής ροής προκύπτουν ως μη συντηρημένοι, εξαιτίας της εξάρτησης της ελαστικής συμπεριφοράς από τις εσωτερικές μεταβλητές.

Με βάση τα παραπάνω, τα κύρια συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι τα ακόλουθα:

- Η μέθοδος της Δυναμικής των Επαφών είναι σε θέση να αναπαράγει τα αναμενόμενα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά ενός κοκκώδους μέσου σε δύο διαστάσεις υπό διαξονική φόρτιση. Ωστόσο, λόγω του ότι αγνοείται η ελαστικότητα των κόκκων, η αρχική κράτνωση είναι εξαιρετικά απότομη, ειδικά για δοκίμια με υψηλό αριθμό συνδιάταξης.
- Το σχήμα των κόκκων και ισοδύναμα, η αντίσταση στην περιστροφή, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο για τη μέγιστη τιμή κάθετης τάσης που μπορεί να φέρει το δοκίμιο. Πρόκειται επομένως για παραμέτρους που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη μαθηματική προσομοίωση της συμπεριφοράς των κοκκωδών μέσων.
- Οι ενεργοί αριθμοί συνδιάταξης για δοκίμια με το ίδιο σχήμα κόκκων και διαφορετικές αρχικές τιμές αριθμού συνδιάταξης προσεγγίζουν καλύτερα από τους αντίστοιχους αριθμούς συνδιάταξης. Τα αποτελέσματα για το ενεργό πορώδες δεν είναι καταληκτικά λόγω των εντόνων ταλαντώσεων που παρατηρούνται. Οι τελευταίες είναι αποτέλεσμα του ότι οι κόκκοι μετακινούνται σε υψηλές συχνότητες μεταξύ του κλάσματος που φέρει και του κλάσματος που δεν φέρει φορτίο.
- Οι μικροπολικές ποσότητες μπορούν να μετρηθούν και οι Μέθοδοι Διακριτών Στοιχείων είναι κατάλληλες για τη μέτρησή τους. Οι τιμές αυτών των ποσοτήτων είναι εν γένει μικρές, αλλά εξαρτώνται έντονα από την αντίσταση στην περιστροφή. Μεγαλύτερες τιμές αντίστασης στην περιστροφή έχουν ως αποτέλεσμα μεγαλύτερες τιμές του αντισυμμετρικού τμήματος του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους.
- Οι μικροπολικές ποσότητες προκύπτουν με φυσικό τρόπο από τη θεώρηση σε μικροσκοπικό επίπεδο της επίδρασης των περιστροφών των κόκκων. Αυτό αποδεικνύεται ξεκάθαρα από την εξαγωγή του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους στη διακριτή τους μορφή και κυρίως από την καταστατική περιγραφή που προκύπτει για τη μικροπολική ελαστικότητα και πλαστικότητα από μικροσκοπικές θεωρήσεις.
- Οι μικροσκοπικές θεωρήσεις μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμες σε ένα γενικότερο επίπεδο για την εξαγωγή της καταστατικής περιγραφής ενός μέσου.

Αυτό αποδεικνύεται από την εξαγωγή των συναρτήσεων διαρροής από τη θεώρηση της σχετικής ολίσθησης και της σχετικής κύλισης μεταξύ δύο κόκκων. Αν και οι υποθέσεις που έγιναν ήταν εξαιρετικά απλουστευμένες, το αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι είναι δυνατόν να εκφραστεί η καταστατική συμπεριφορά του συνεχούς με βάση μικρομηχανικές θεωρήσεις.

- Η ανισοτροπία της κατανομής των επαφών επηρεάζει σημαντικά της μηχανικές ιδιότητες του υλικού, όπως φαίνεται καθαρά από την προκύπτουσα μορφή της ελαστικότητας. Η ανισοτροπία αυτή είναι παρούσα επίσης στην πλαστικότητα, όπως φαίνεται από τη συνάρτηση διαρροής λόγω της σχετικής ολίσθησης, όπου οι δύο κλάδοι μπορεί να έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές κλίσης, ανάλογα με τις παραμέτρους που ελέγχουν την ανισοτροπία.
- Στα κοκκώδη μέσα οι ελαστικοί συντελεστές εξαρτώνται από τις εσωτερικές μεταβλητές, όπως το ενεργό πορώδες, ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης, οι παράμετροι c και d και η γωνία ψ . Ως εκ τούτου η ελαστικότητα εξελίσσεται καθώς το υλικό παραμορφώνεται. Το γεγονός αυτό οδηγεί μεταξύ άλλων και σε ένα μη συντηρημένο κανόνα πλαστικής ροής, τόσο για την ολίσθηση, όσο και για την κύλιση.

Παράρτημα Α

Μαθηματικοί Υπολογισμοί

A.1 Αλλαγή παρατηρητή κατά Leibniz

Ο ρυθμός της κινητικής ενέργειας στο νέο σύστημα γράφεται ως

$$\begin{aligned}\dot{E}'_{kin} &= \frac{1}{2}\dot{m} [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}}]^T [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}}] + \\ &+ m [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}}]^T [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\dot{\mathbf{v}}}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T [\mathbf{w} - \mathbf{b}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\dot{\mathbf{w}}}] + \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\dot{\mathbf{O}}} + \underline{\dot{\mathbf{w}}}^T \underline{\mathbf{O}}] \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T [\mathbf{w} - \mathbf{b}] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}'_{kin} &= \frac{1}{2}\dot{m} [\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} + \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{O}}] [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}}] + \\ &+ m [\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} + \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{O}}] [\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\dot{\mathbf{v}}}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T [\mathbf{w} - \mathbf{b}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T [\underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \underline{\dot{\mathbf{w}}}] + \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T + \underline{\dot{\mathbf{w}}} \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}}' \underline{\mathbf{O}}^T] [\mathbf{w} - \mathbf{b}] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{E}'_{kin} = \frac{1}{2}\dot{m} [\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{v}}] +$$

$$\begin{aligned}
& + m \left[\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{v}} \right] + \\
& + m \left[\mathbf{v}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{v}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{v}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T [\mathbf{w} - \mathbf{b}] + \\
& + \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T [\underline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \dot{\mathbf{w}}] + \\
& + \frac{1}{2} [(\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{w}}^T] \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T [\mathbf{w} - \mathbf{b}] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} \left[\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{I}} \mathbf{v} \right] + \\
& + m \left[\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \underline{\dot{\mathbf{O}}} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\mathbf{O}}}^T \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{v}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{w}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} \left[\mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}} \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] + \\
& + m \left[\mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{v}} \right] + \\
& + m \left[\mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \underline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{O}} \underline{\dot{\theta}'} \underline{\mathbf{O}}^T \dot{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι $\mathbf{x}^T \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{W}}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x}$ είναι η τετραγωνική μορφή ενός αντισυμμετρικού πίνακα και επομένως είναι ίσο με το μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα $\mathbf{v}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{v}$. Η αναφορά του συστήματος στην διάταξη της χρονικής στιγμής $t = 0$ έχει ως συνέπεια ότι $\underline{\mathbf{O}} = \underline{\mathbf{I}}$. Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} [(-\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + 2\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] + \\
& + m [2(-\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + \mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{v}})] + \\
& + m [(\mathbf{b} \times \mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} [(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) - 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] + \\
& + m [2(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + \mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} (\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \\
& + (\mathbf{w}^T - \mathbf{b}^T) \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} [(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) - 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] + \\
& + m [2(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + \mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{b} + \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{b} + \\
& + \mathbf{w}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{b}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}'_{kin} & = \frac{1}{2} \dot{m} [(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] + \\
& + m [2(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{b} + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{b} + \\
& - \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{b}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

αφού ο πίνακας $\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T$ είναι εμφανώς συμμετρικός. Εξετάζουμε στην συνέχεια το εσωτερικό γινόμενο της μορφής

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Σκοπός είναι να μετατραπεί αυτό στη μορφή

$$\mathbf{b}^T \underline{\mathbf{A}} \mathbf{b}$$

για κάποιον πίνακα $\underline{\mathbf{A}}$. Είναι γνωστό ότι

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Επομένως

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = b_j a_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} c_n b_m \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = b_j a_k \delta_{jm} \delta_{kn} c_n b_m - b_j a_k \delta_{jn} \delta_{km} c_n b_m \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = b_j a_k c_k b_j - b_j a_k c_j b_k \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = b_j a_k c_k b_j - b_j c_j a_k b_k \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}^T (\mathbf{a} \mathbf{I} \mathbf{c}) \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{b} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}^T (\mathbf{a} \mathbf{I} \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{b} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}^T [\mathbf{a} \mathbf{I} \mathbf{c} - \mathbb{S} \mathbf{y} \mathbf{m} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a})] \mathbf{b}$$

Με βάση τα παραπάνω ο ρυθμός της κινητικής ενέργειας στο δεύτερο σύστημα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \dot{E}'_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{m} [\mathbf{b}^T (\mathbf{x} \mathbf{I} \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] + \\ &+ m [\mathbf{b}^T (\mathbf{x} \mathbf{I} \mathbf{v} - \mathbb{S} \mathbf{y} \mathbf{m} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{v})) \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}] + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{b} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{b} + \\ &- \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{b}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

Αφαιρώντας το παραπάνω από τον ρυθμό της κινητικής ενέργειας στο πρώτο σύστημα προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{E}'_{kin} - \dot{E}_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{m} [\mathbf{b}^T (\mathbf{x} \mathbf{I} \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v})] + \\ &+ m [\mathbf{b}^T (\mathbf{x} \mathbf{I} \mathbf{v} - \mathbb{S} \mathbf{y} \mathbf{m} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{v})) \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}})] + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{w}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{b} + \\ &- \mathbf{b}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{b}^T \underline{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{w}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}'_{kin} - \dot{E}_{kin} &= \frac{1}{2}\dot{m} [\mathbf{b}^T (\mathbf{x}\mathbf{I}\mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v})] + \\
 &+ m [\mathbf{b}^T (\mathbf{x}\mathbf{I}\mathbf{v} - \text{Sym}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{v})) \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}})] + \\
 &+ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} + \\
 &+ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{b} + \\
 &- \mathbf{b}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}}
 \end{aligned}$$

Για το έργο των δυνάμεων και των ροπών στο δεύτερο σύστημα ισχύει

$$\begin{aligned}
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{m}' \cdot \mathbf{w}' \Rightarrow \\
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{f} \cdot (\dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v}) + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{m} \cdot (\underline{\mathbf{O}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b})) \Rightarrow \\
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= \mathbf{f}^T \underline{\mathbf{O}} (\dot{\underline{\mathbf{O}}}^T \mathbf{x} + \underline{\mathbf{O}}^T \mathbf{v}) + \mathbf{m}^T \underline{\mathbf{O}} (\underline{\mathbf{O}}^T (\mathbf{w} - \mathbf{b})) \Rightarrow \\
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= \mathbf{f}^T \underline{\mathbf{W}}^T \mathbf{x} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{b}) \Rightarrow \\
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= -\mathbf{f} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{b}) \Rightarrow \\
 \dot{W}'_F + \dot{W}'_C &= -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{b})
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\dot{W}'_F + \dot{W}'_C - \dot{W}_F - \dot{W}_C = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}$$

Συνολικά

$$\begin{aligned}
 \dot{E}' - \dot{E} &= 0 \Rightarrow \\
 \dot{E}'_{kin} - \dot{E}_{kin} &= \dot{W}'_F + \dot{W}'_C - \dot{W}_F - \dot{W}_C \Rightarrow \\
 -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{2}\dot{m} [\mathbf{b}^T (\mathbf{x}\mathbf{I}\mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{v})] + \\
 &+ m [\mathbf{b}^T (\mathbf{x}\mathbf{I}\mathbf{v} - \text{Sym}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{v})) \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}})] + \\
 &+ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} + \\
 &+ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{b} + \\
 &- \mathbf{b}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}}
 \end{aligned}$$

Αφού η επιλογή του \mathbf{b} είναι τυχαία, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$0 = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^T (\mathbf{W} \underline{\theta} + \underline{\theta} \mathbf{W}^T) \mathbf{w} \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \dot{\underline{\theta}} \mathbf{w} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underline{\dot{\theta}} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta}' + \underline{\theta}' \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \mathbf{m} &= \dot{m} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) + m (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}) + \\ &+ \underline{\dot{\theta}}' \mathbf{w} + (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \mathbf{w} + \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{0}} &= \frac{1}{2} \dot{m} (\mathbf{x} \underline{\mathbf{I}} \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) + m (\mathbf{x} \underline{\mathbf{I}} \mathbf{v} - \text{Sym}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{v})) + \\ &+ \frac{1}{2} \underline{\dot{\theta}}' + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta} + \underline{\theta} \underline{\mathbf{W}}^T) \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Αφού η Εξ. (A.1.1) ισχύει για κάθε γωνιακή ταχύτητα του κόκκου, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\theta}} &= \underline{\dot{\theta}}' - (\underline{\mathbf{W}} \underline{\theta}' + \underline{\theta}' \underline{\mathbf{W}}^T) \Rightarrow \\ \underline{\dot{\theta}} &= \underline{\dot{\theta}}' - \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta}' - \underline{\theta}' \underline{\mathbf{W}}^T \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

Επομένως η Εξ. (A.1.2) μπορεί πλέον να γραφεί ως

$$\mathbf{x} \times \mathbf{f} + \mathbf{m} = \dot{m} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) + m (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}) + \underline{\dot{\theta}} \mathbf{w} + \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \quad (\text{A.1.5})$$

Από την άλλη πλευρά

$$\underline{\mathbf{0}} = \underline{\dot{\theta}}' - \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta}' - \underline{\theta}' \underline{\mathbf{W}}^T + \dot{m} (\mathbf{x} \underline{\mathbf{I}} \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) + 2m (\mathbf{x} \underline{\mathbf{I}} \mathbf{v} - \text{Sym}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}))$$

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις αναφέρονται στο κέντρο των αξόνων αναφοράς στο αρχικό σύστημα. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το κέντρο βάρους του σωματιδίου, έχουμε ότι

$$\underline{\dot{\theta}}' = \underline{\mathbf{W}} \underline{\theta}' + \underline{\theta}' \underline{\mathbf{W}}^T \quad (\text{A.1.6})$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισορροπίας της ορμής η εξ. (A.1.5) γράφεται ως

$$\mathbf{m} = \underline{\dot{\theta}} \mathbf{w} + \underline{\theta} \dot{\mathbf{w}} \quad (\text{A.1.7})$$

A.2 Θερμική μέθοδος

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η θερμική μέθοδος, όπως αυτή περιγράφεται στο (Richard et al., 2008). Γίνονται ελαφρές τροποποιήσεις για την προσαρμογή στα κοκκώδη μέσα, αντί των συνόλων μεταλλικών σφαιρών.

Δύο κύριοι παράγοντες λαμβάνονται υπόψιν για την προσομοίωση του φαινομένου:

- Η διάχυση της θερμότητας μέσα στο κοκκώδες μέσο.
- Η παραγωγή θερμότητας λόγω της αλληλεπίδρασης των κόκκων.

Η μεταφορά της θερμότητας λαμβάνει χώρα διαμέσου τριών μηχανισμών, την αγωγή, την μεταφορά και την ακτινοβολία. Η ακτινοβολία γίνεται σημαντική σε υψηλές θερμοκρασίες και θα αγνοηθεί εδώ. Η μεταφορά θα θεωρηθεί επίσης αμελητέα, καθώς το μέσο είναι στεγνό και η θερμική αγωγιμότητα του αέρα είναι πολύ χαμηλότερη από εκείνη του χαλαζία ($k_a = 0.0257W/(mK)$, $k_q = 8.0W/(mK)$ στους $20\text{ }^\circ C$). Ο μοναδικός μηχανισμός που θα ληφθεί υπόψιν θα είναι η διάχυση στην στερεή φάση. Το φαινόμενο αυτό καθορίζεται κυρίως από την θερμική αγωγιμότητα του υλικού, η οποία ορίζεται ως το ποσό της θερμότητας που μεταδίδεται ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα βαθμίδας θερμοκρασίας. Ο γνωστός νόμος του Fourier για την μεταφορά της θερμότητας

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{A.2.1})$$

όπου Q είναι η θερμότητα, k είναι θερμική αγωγιμότητα, A είναι η διαθέσιμη για επιφάνεια για μεταφορά και T είναι η θερμοκρασία.

Μια μεταβολή θερμότητας για ένα σώμα μπορεί να συνδεθεί με μια μεταβολή θερμοκρασίας μέσω της σχέσης

$$dQ = \rho V c dT \quad (\text{A.2.2})$$

όπου dQ είναι η εισροή θερμότητας, ρ είναι η πυκνότητα του υλικού, V είναι ο όγκος του, c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητά του και dT είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας. Η ειδική θερμοχωρητικότητα ορίζεται ως την ποσότητα της θερμότητας που απαιτείται για να αυξηθεί η θερμοκρασία μιας μονάδας μάζας κατά ένα βαθμό θερμοκρασίας.

Χάριν απλότητας επιλέγεται να περιγραφεί το φαινόμενο μόνο με όρους θερμοκρασίας. Κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος η αύξηση της θερμοκρασίας του κόκκου i μπορεί να περιγραφεί ως

$$dT_i = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} dT_{ij}^d + \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} dT_{ij}^g \quad (\text{A.2.3})$$

όπου το \mathcal{F} συμβολίζει το σύνολο των επαφών, dT_{ij}^d είναι η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της διάχυσης της θερμότητας στην επαφή (i, j) και dT_{ij}^g είναι η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της παραγωγής θερμότητας στην επαφή (i, j) .

Η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω διάχυσης στην επαφή (i, j) μπορεί να περιγραφεί ως

$$dT_{ij}^d = \frac{2k_{ij}\alpha_{ij}\Delta t (T_j^- - T_i^-)}{\rho_i c_i V_i} \quad (\text{A.2.4})$$

όπου k_{ij} είναι η θερμική αγωγιμότητα στην επαφή και α_{ij} είναι η ακτίνα της επιφανείας που είναι διαθέσιμη μεταφορά. T_i^- είναι η θερμοκρασία του σωματιδίου i στο τέλος του προηγούμενου βήματος. Η θερμική αγωγιμότητα της επαφής υπολογίζεται από τις θερμικές αγωγιμότητες των δύο σωματιδίων που συνδέονται σε σειρά. Για τον υπολογισμό της επιφανείας της επαφής αποδίδεται ένα ελαστικό μέτρο και ένας λόγος Poisson σε κάθε σωματίδιο. Η επιφάνεια της επαφής υπολογίζεται με βάση τις ελαστικές σταθερές και την δύναμη μεταξύ των σωματιδίων.

Ο νόμος του Hertz για δύο κυλίνδρους δίνει ήμι-μήκος επαφής ίσο με

$$\alpha = \left(\frac{4FR}{\pi E^*} \right)^{1/2} \quad (\text{A.2.5})$$

όπου F είναι η κάθετη δύναμη μεταξύ των κυλίνδρων, το R δίνεται από

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (\text{A.2.6})$$

και το E^* από

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (\text{A.2.7})$$

Γίνεται η υπόθεση ότι όλη η ενέργεια που αποσβένεται λόγω τριβής μετατρέπεται σε θερμότητα που μεταφέρεται στους κόκκους. Θεωρείται επίσης ότι το σύστημα είναι μονωμένο. Γίνεται επιπλέον η υπόθεση ότι δε λαμβάνουν χώρα ανελαστικές κρούσεις. Η απόσβεση ενέργειας λαμβάνει χώρα αποκλειστικά λόγω τριβής μεταξύ των κόκκων και υπολογίζεται σε κάθε βήμα για κάθε επαφή. Η ενέργεια

που αποσβένεται σε μία επαφή μετατρέπεται σε θερμότητα που μοιράζεται εξίσου μεταξύ των δύο κόκκων. Έστω ότι τα σωματίδια i και j βρίσκονται σε επαφή και έστω ότι η απώλεια ενέργειας κατά την διάρκεια ενός βήματος είναι Q_{ij} . Τότε η αύξηση της θερμοκρασίας του σωματιδίου i λόγω της αλληλεπίδρασης με το σωματίδιο j θα είναι

$$dT_{ij}^g = \frac{1}{2} \frac{Q_{ij}}{\rho_i c_i V_i} \quad (\text{A.2.8})$$

όπου ρ_i είναι η πυκνότητα του σωματιδίου, V_i είναι ο όγκος του και c_i είναι η ειδική θερμοχωρητικότητά του.

Σε αυτή την προσέγγιση γίνεται η υπόθεση ότι σε κάθε δεδομένο σωματίδιο η θερμοκρασία είναι ομογενής. Αυτό σημαίνει ότι γίνεται η υπόθεση πως η θερμότητα διαχέεται στο εσωτερικό του σωματιδίου σε ένα και μόνο βήμα στο χρόνο. Προκειμένου να είναι αποδεκτή μια τέτοια υπόθεση, η θερμική αντίσταση της επαφής πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη από την θερμική αντίσταση του εσωτερικού του σωματιδίου. Η ισχύς αυτής της υπόθεσης δεν εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού αλλά από τον λόγο μεταξύ της επιφανείας της επαφής και της μέσης ακτίνας των σωματιδίων

$$\frac{\alpha}{R} \ll 1 \quad (\text{A.2.9})$$

Η παραπάνω σχέση εν γένει ισχύει εξαιτίας της υπόθεσης των οιονεί απαραμόρφωτων κόκκων.

A.3 Μικροπολική ελαστικότητα για ένα σύνολο σφαιρών

A.3.1 Υποθέσεις

Χάριν απλότητας γίνονται οι παρακάτω υποθέσεις.

- Θεωρούνται δύο διαστάσεις.
- Θεωρούνται σφαίρες με ίδιες ακτίνες και όμοιες ελαστικές ιδιότητες.
- Γραμμικοποιημένες σχέσεις δύναμης-παραμόρφωσης θεωρούνται για τις σφαίρες.
- Η φόρτιση είναι στατική.

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να βρεθεί μια επαφή σε γωνία θ εκφράζεται ως

$$p(\theta) = \frac{1 - c \cos(2\theta) - d \cos(4\theta)}{2\pi}$$

A.3.2 Λοξή συμπίεση δύο ελαστικών σφαιρών

Γίνεται η υπόθεση ότι η επιφάνεια επαφής είναι μικρή σε σχέση με το μέγεθος των σωμάτων. Αυτό επιτρέπει την αντικατάσταση του σώματος από έναν ημίχωρο όταν υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια της επαφής. Η ακόλουθη ανάλυση για την σχέση δυνάμεων και μετατοπίσεων μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του Johnson (Johnson, 1985).

Η ακτίνα της επαφής μεταξύ δύο όμοιων σφαιρών είναι μια συνάρτηση της κάθετης δύναμης και μπορεί να γραφεί ως (βλέπε (Johnson, 1985), σελ. 93)

$$\alpha = \left(3NR \frac{(1-\nu)}{2G} \right)^{1/3} \quad (\text{A.3.1})$$

όπου N είναι η κάθετη δύναμη στην επαφή, R είναι η ακτίνα κάθε σφαίρας, ν είναι ο λόγος του Poisson και G είναι το μέτρο διάτμησης. Η μείωση της απόστασης μεταξύ των κέντρων των σφαιρών συμβολίζεται ως dn και δίνεται από τη σχέση

$$dn = \left(\frac{9N^2(1-\nu)^2}{4RG^2} \right)^{1/3} \quad (\text{A.3.2})$$

Η σχέση μεταξύ της αμοιβαίας προσέγγισης των δύο σωμάτων και της ακτίνας της επαφής είναι

$$\alpha^2 = dnR \quad (\text{A.3.3})$$

Η σχέση μεταξύ της εφαπτομενικής δύναμης και της εφαπτομενικής μετατόπισης δίνεται από τον Johnson (Johnson, 1985), σελ. 217 και 220 ως

$$T = 4\alpha \frac{G}{2-\nu} dt \quad (\text{A.3.4})$$

ή, ισοδύναμα,

$$T = 4R^{1/2} \frac{G}{2-\nu} dn^{1/2} dt \quad (\text{A.3.5})$$

όπου dt είναι η εφαπτομενική μετατόπιση. Στο σημείο αυτό παύουμε να ακολουθούμε την ανάλυση του Johnson.

Για την ροπή και την περιστροφή υποτίθεται μια γραμμική σχέση μέχρι το σημείο στο οποίο αρχίζει να παρατηρείται σχετική κύλιση:

$$M = Kd\omega \quad (\text{A.3.6})$$

Η αντίσταση στην περιστροφή ερμηνεύεται ως μια ιδιότητα του υλικού και όχι ως μια συνάρτηση της ακτίνας της επαφής. Έστω λοιπόν ότι η αντίσταση στην κύλιση δίνεται από την σχέση

$$m_R = \beta N \quad (\text{A.3.7})$$

Για ροπή ίση με την ροπή αντίστασης η γωνιακή μετατόπιση θα είναι

$$d\omega = \arctan\left(\frac{\beta}{R}\right) \quad (\text{A.3.8})$$

Την χρονική στιγμή που αρχίζει να παρατηρείται κύλιση, θα ισχύει ότι

$$m_R = Kd\omega \Rightarrow \quad (\text{A.3.9})$$

$$\beta N = K \arctan\left(\frac{\beta}{R}\right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.10})$$

$$K = \frac{\beta N}{\arctan\left(\frac{\beta}{R}\right)} \quad (\text{A.3.11})$$

Για μικρή αντίσταση στην κύλιση ($\beta \ll R$)

$$K = NR \quad (\text{A.3.12})$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$M = NRd\omega \quad (\text{A.3.13})$$

A.3.3 Ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας για μια επαφή ελαστικών σφαιρών

Όπως είδαμε παραπάνω, οι δυνάμεις και η ροπή που δρουν σε μια επαφή μεταξύ ελαστικών σφαιρών μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των σχετικών μετατοπίσεων ως ακολούθως:

$$N = \frac{2}{3}R^{1/2}\frac{G}{1-\nu}dn^{3/2} \quad (\text{A.3.14})$$

$$T = 4R^{1/2}\frac{G}{2-\nu}dn^{1/2}dt \quad (\text{A.3.15})$$

$$M = \frac{2}{3}R^{3/2}\frac{G}{1-\nu}dn^{3/2}d\omega \quad (\text{A.3.16})$$

Ως εκ τούτου ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην επαφή μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{E}_c = \dot{E}_c^n + \dot{E}_c^t + \dot{E}_c^m \quad (\text{A.3.17})$$

όπου

- \dot{E}_c^n είναι ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας λόγω της κάθετης δύναμης,
- \dot{E}_c^t είναι ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας λόγω της εφαπτομενικής δύναμης,
- και \dot{E}_c^m είναι ο ρυθμός ελαστικής ενέργειας λόγω της ροπής.

Οι παραπάνω όροι μπορούν να γραφούν ως ακολούθως

$$\dot{E}_c^n = \frac{4}{3}R^{1/2}\frac{G}{1-\nu}dn^{3/2}d\dot{n} \quad (\text{A.3.18})$$

$$\dot{E}_c^t = 4R^{1/2}\frac{G}{2-\nu}dn^{1/2}dtd\dot{t} \quad (\text{A.3.19})$$

$$\dot{E}_c^m = \frac{4}{3}R^{3/2}\frac{G}{1-\nu}dn^{3/2}d\omega d\dot{\omega} \quad (\text{A.3.20})$$

A.3.4 Δυνατές μετατοπίσεις

Θεωρείται σύνολο ίσων σφαιρών σε δύο διαστάσεις. Γίνεται η υπόθεση ότι, αν και φυσικές επαφές υφίστανται, τα σώματα μόλις αγγίζουν και δεν υπάρχουν αρχικές παραμορφώσεις. Σε αυτό το σύνολο επιβάλλεται ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, ώστε να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας ως συνάρτηση των επιβληθέντων μετατοπίσεων και παραμορφώσεων. Γίνεται η υπόθεση ότι δεν έχουμε απώλειες επαφών. Αυτή η υπόθεση, εάν και ισχυρή, είναι συμβατή με την έννοια των ελαστικών παραμορφώσεων του κοκκώδους μέσου και την οιονεί στατική περιοχή φόρτισης.

Θεωρείται πεδίο δυνατών μετατοπίσεων περιορισμένο σε δύο διαστάσεις, σύμφωνα με την έκφραση

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.21})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.22})$$

Σε αυτό υπερτίθεται ένα πεδίο δυνατών ταχυτήτων:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.23})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.24})$$

Έστω δύο σφαίρες με τα κέντρα τους στις θέσεις $\mathbf{x}^{(i)}$ και $\mathbf{x}^{(j)}$ αντίστοιχα. Οι μετατοπίσεις τους θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.25})$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.26})$$

και

$$\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.27})$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(j)} = \boldsymbol{\omega}_0 + \nabla \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.28})$$

ενώ οι ταχύτητές τους από τις σχέσεις

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.29})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.30})$$

και

$$\dot{\mathbf{u}}^{(j)} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \nabla \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.31})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(j)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.3.32})$$

Η σχετική μετατόπιση και στροφή των κέντρων θα είναι

$$\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)} = \nabla \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (\text{A.3.33})$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = \nabla \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (\text{A.3.34})$$

Επομένως η σχετική κάθετη μετατόπιση εκφράζεται ως

$$\delta n = (\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)}) \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \quad (\text{A.3.35})$$

$$\delta n = (2R \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 2R \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.36})$$

ενώ η σχετική εφαπτομενική παραμόρφωση ως

$$\delta t^1 = (\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)}) \cdot \mathbf{t} = (\nabla \mathbf{u} \cdot 2R \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 2R \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.37})$$

Οι μετατοπίσεις των δύο σφαιρών στο σημείο της επαφής θα είναι

$$\mathbf{u}^{(i)c} = \mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(i)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)}) \quad (\text{A.3.38})$$

και

$$\mathbf{u}^{(j)c} = \mathbf{u}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}^{(j)} \times (\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (\text{A.3.39})$$

Ως αποτέλεσμα για την εφαπτομενική μετατόπιση λαμβάνουμε

$$\delta t = 2R\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\omega}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(j)}) \times R\mathbf{n} \Rightarrow \quad (\text{A.3.40})$$

$$\delta t = 2R(\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}) - (\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot 2(\mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{x}^{(ij)} - \mathbf{x}^{(j)})) \times R\mathbf{n} \Rightarrow \quad (\text{A.3.41})$$

$$\delta t = 2R[\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}] \Rightarrow \quad (\text{A.3.42})$$

$$\delta t = 2R[\mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{n}] \quad (\text{A.3.43})$$

$$\delta t = 2R\mathbf{t} \cdot \underline{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.44})$$

Σημειώνεται ότι, εφόσον η δn εκφράζεται ως τετραγωνική μορφή, σε αυτή την έκφραση το αντισυμμετρικό κομμάτι του $\nabla \mathbf{u}$ δεν έχει καμία επίδραση και επομένως η δn μπορεί επίσης να εκφραστεί ως

$$\delta n = 2R\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.45})$$

Η σχετική γωνιακή μετατόπιση θα είναι

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}) = \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot (2R\mathbf{n}) \Rightarrow \quad (\text{A.3.46})$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = 2R\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.47})$$

Λόγω του περιορισμού σε δύο διαστάσεις

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)} = 2R\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.48})$$

A.3.5 Ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας για το σύνολο

Ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας του συνόλου υπολογίζεται ως το άθροισμα των ρυθμών μεταβολής της ελαστικής ενέργειας των επαφών. Η πυκνότητα του ρυθμού μεταβολής της ελαστικής ενέργειας είναι ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας δια του όγκου του συνόλου. Χάριν απλότητας κάθε ένας από τους τρεις όρους του ρυθμού ελαστικής ενέργειας θα υπολογιστεί ξεχωριστά. Ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας που οφείλεται στις κάθετες δυνάμεις είναι

$$\dot{E}^n = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \frac{2}{3} R^{1/2} \frac{G}{1-\nu} dn^{(ij)3/2} d\dot{n}^{(ij)} \Rightarrow \quad (\text{A.3.49})$$

$$\dot{E}^n = \frac{2}{3} R^{1/2} \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} dn^{(ij)3/2} d\dot{n}^{(ij)} \Rightarrow \quad (\text{A.3.50})$$

$$\dot{E}^n = \frac{2}{3} R^{1/2} \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.51})$$

$$\dot{E}^n = 4\sqrt{2} \frac{2}{3} R^3 \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\dot{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.52})$$

$$\dot{E}^n = 4\sqrt{2} \frac{2}{3} R^3 \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \mathbf{n}^{(ij)} \right) : \underline{\dot{\Gamma}} \quad (\text{A.3.53})$$

Αντίστοιχα, ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας που οφείλεται στις εφαπτομενικές δυνάμεις είναι

$$\dot{E}^t = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} 4R^{1/2} \frac{G}{2-\nu} dn^{(ij)1/2} dt^{(ij)} d\dot{t}^{(ij)} \Rightarrow \quad (\text{A.3.54})$$

$$\dot{E}^t = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} 4R^{1/2} \frac{G}{2-\nu} \left(2R\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{1/2} \left(2R\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\dot{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.55})$$

$$\dot{E}^t = 4\sqrt{2} 4R^3 \frac{G}{2-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{1/2} \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\dot{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.56})$$

$$\dot{E}^t = 4\sqrt{2} 4R^3 \frac{G}{2-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{t}^{(ij)} \otimes \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{1/2} \left(\mathbf{t}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \mathbf{n}^{(ij)} \right) : \underline{\dot{\Gamma}} \quad (\text{A.3.57})$$

Τέλος, ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής ενέργειας που οφείλεται στις ροπές είναι

$$\dot{E}^m = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \frac{4}{3} R^{3/2} \frac{G}{1-\nu} dn^{(ij)3/2} d\omega^{(ij)} d\dot{\omega}^{(ij)} \Rightarrow \quad (\text{A.3.58})$$

$$\dot{E}^m = \frac{4}{3} R^{3/2} \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(2R \mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \left(2R \nabla \omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(2R \nabla \dot{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.59})$$

$$\dot{E}^m = 8\sqrt{2} R^2 \frac{4}{3} R^3 \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \left(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \left(\nabla \dot{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \Rightarrow \quad (\text{A.3.60})$$

$$\dot{E}^m = 8\sqrt{2} R^2 \frac{4}{3} R^3 \frac{G}{1-\nu} \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} \left(\mathbf{n}^{(ij)} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right)^{3/2} \left(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}^{(ij)} \right) \mathbf{n}^{(ij)} \cdot \nabla \dot{\omega} \quad (\text{A.3.61})$$

Προκειμένου να εξαχθούν οι αντίστοιχες εκφράσεις για το συνεχές, πρέπει να ακολουθηθεί μια διαδικασία μεσοτίμησης ως προς τις επαφές. Τα αθροίσματα πάνω στις επαφές μπορούν να αντικατασταθούν από τον αριθμό των επαφών πολλαπλασιασμένο επί τη μέση τιμή της συνάρτησης που περιέχεται στο άθροισμα. Ο αριθμός των επαφών είναι ίσος με τον ενεργό αριθμό των σφαιρών επί τον ενεργό αριθμό συνδιάταξης και διαιρεμένο δια δύο. Το επίθετο ‘ενεργός’ υποδηλώνει την διάταξη στην οποία έχουν αγνοηθεί οι κόκκοι που δεν έχουν επαφές. Για τον αριθμό των επαφών προκύπτει

$$n_c = NC/2 \quad (\text{A.3.62})$$

όπου N είναι ο αριθμός των σφαιρών που διαθέτουν τουλάχιστον μία επαφή και C είναι ο ενεργός αριθμός συνδιάταξης. Σημειώνεται ότι

$$V_s = \frac{4}{3} \pi R^3 N \quad (\text{A.3.63})$$

είναι ο ενεργός όγκος των σφαιρών, ενώ

$$\phi_s = \frac{V_s}{V} = 1 - \phi \quad (\text{A.3.64})$$

είναι ο δείκτης στερεών και ϕ είναι ο δείκτης πόρων ή αλλιώς πορώδες.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, οι πυκνότητες του ρυθμού της ελαστικής ενέργειας που αντιστοιχούν στις παραπάνω εκφράσεις των ρυθμών ελαστικής ενέργειας λαμβάνουν την μορφή

$$\dot{\mathcal{E}}^n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \mathbf{Q}^n : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (\text{A.3.65})$$

$$\dot{\underline{\mathcal{E}}}^t = 6 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \phi_s \frac{GC}{2-\nu} \underline{\mathbf{Q}}^t : \dot{\underline{\Gamma}} \quad (\text{A.3.66})$$

$$\dot{\underline{\mathcal{E}}}^m = 2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} R^2 \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \underline{\mathbf{Q}}^m \cdot \nabla \dot{\omega} \quad (\text{A.3.67})$$

όπου

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n})^{3/2} \mathbf{n} \right) p(\theta) d\theta \quad (\text{A.3.68})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{t} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n})^{1/2} (\mathbf{t} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right) p(\theta) d\theta \quad (\text{A.3.69})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^m = \int_0^{2\pi} \left((\mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n})^{3/2} (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right) p(\theta) d\theta \quad (\text{A.3.70})$$

με

$$\mathbf{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (\text{A.3.71})$$

και

$$\mathbf{t} = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (\text{A.3.72})$$

και όπου $p(\theta)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του να βρεθεί μια επαφή σε γωνία θ . Οι ποσότητες $\underline{\mathbf{Q}}^n$, $\underline{\mathbf{Q}}^t$ και $\underline{\mathbf{Q}}^m$ θα καλούνται στο εξής πολλαπλασιαστές, χάριν απλότητας.

A.3.6 Αναδιάταξη πολλαπλασιαστών

Σε αυτή την παράγραφο οι πολλαπλασιαστές θα εκφραστούν ως ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αρχικά θα υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στις κάθετες δυνάμεις. Καταρχήν υπολογίζεται η ακόλουθη ποσότητα:

$$A_n = \mathbf{n} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.73})$$

Αυτό ισούται με

$$A_n = \gamma_{11} \cos^2(\theta) + (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \sin(\theta) \cos(\theta) + \gamma_{22} \sin^2(\theta) \Rightarrow \quad (\text{A.3.74})$$

$$A_n = \frac{\gamma_{11}}{2} (1 + \cos(2\theta)) + \frac{(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{2} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{22}}{2} (1 - \cos(2\theta)) \Rightarrow \quad (\text{A.3.75})$$

$$A_n = \frac{1}{2} \{(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \sin(2\theta) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \cos(2\theta)\} \Rightarrow \quad (\text{A.3.76})$$

$$A_n = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(2\theta) \right\} \quad (\text{A.3.77})$$

Ως εκ τούτου

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \int_0^{2\pi} (\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n})^{3/2} \mathbf{n}) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.78})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{bmatrix} A_n \sqrt{A_n} \frac{1 - c \cos(2\theta) - d \cos(4\theta)}{2\pi} d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.79})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} A'_n \sqrt{A'_n} \frac{1 - c \cos(\theta) - d \cos(2\theta)}{2\pi} d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.80})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} A'_n \sqrt{A'_n} \frac{1 - c \cos(\theta) - d \cos(2\theta)}{2\pi} d\theta \quad (\text{A.3.81})$$

όπου

$$A'_n = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(\theta) \right\} \quad (\text{A.3.82})$$

Προχωράμε τώρα στον πολλαπλασιαστή που αντιστοιχεί στις εφαπτομενικές δυνάμεις. Υπολογίζεται αρχικά η ακόλουθη ποσότητα:

$$A_t = \mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3.83})$$

Αυτό ισούται με

$$A_t = \mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \quad (\text{A.3.84})$$

$$A_t = \gamma_{21} \cos^2(\theta) - \gamma_{12} \sin^2(\theta) - (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(\theta) \cos(\theta) \Rightarrow \quad (\text{A.3.85})$$

$$A_t = -\frac{1}{2} \{-\gamma_{21}(1 + \cos(2\theta)) + \gamma_{12}(1 - \cos(2\theta)) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(2\theta)\} \Rightarrow \quad (\text{A.3.86})$$

$$A_t = -\frac{1}{2} \{(\gamma_{12} - \gamma_{21}) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(2\theta) - (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \cos(2\theta)\} \quad (\text{A.3.87})$$

Ως εκ τούτου

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{t} \otimes (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n})^{1/2} (\mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n}) \right) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.88})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \cos(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix} A_t \sqrt{A_n} p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.89})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) - 1 \\ 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{bmatrix} A_t \sqrt{A_n} p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.90})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}^t = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \\ 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} A'_t \sqrt{A'_n} p'(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.91})$$

όπου

$$A'_t = -\frac{1}{2} \{(\gamma_{12} - \gamma_{21}) + (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \sin(\theta) - (\gamma_{12} + \gamma_{21}) \cos(\theta)\} \quad (\text{A.3.92})$$

και

$$p'(\theta) = \frac{1 - c \cos(\theta) - d \cos(2\theta)}{2\pi} \quad (\text{A.3.93})$$

Τέλος, υπολογίζεται ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στις ροπές.

$$\mathbf{Q}^m = \int_0^{2\pi} \left((\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{n})^{3/2} (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) \right) p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.94})$$

$$\mathbf{Q}^m = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} (\kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ (\kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta)) \sin(\theta) \end{bmatrix} A_n \sqrt{A_n} p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.95})$$

$$\mathbf{Q}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_1 \cos(2\theta) + \kappa_2 \sin(2\theta) \\ \kappa_2 - \kappa_2 \cos(2\theta) + \kappa_1 \sin(2\theta) \end{bmatrix} A_n \sqrt{A_n} p(\theta) d\theta \Rightarrow \quad (\text{A.3.96})$$

$$\mathbf{Q}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \sin(\theta) \\ \kappa_2 - \kappa_2 \cos(\theta) + \kappa_1 \sin(\theta) \end{bmatrix} A'_n \sqrt{A'_n} p'(\theta) d\theta \quad (\text{A.3.97})$$

A.3.7 Προσέγγιση μέσω αναπτύγματος σε σειρά

Η ολοκλήρωση των ποσοτήτων \underline{Q}^n , \underline{Q}^t και \underline{Q}^m είναι πολύπλοκη και, στην περίπτωση που είναι εφικτή, καταλήγει σε σύνθετες εκφράσεις που περιέχουν ελλειπτικά ολοκληρώματα. Καθίσταται επομένως αναγκαίο να πραγματοποιηθεί κάποιου είδους απλοποίηση. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, επιλέχθηκε να εκφραστούν οι τετραγωνικές ρίζες που περιέχονται στις εκφράσεις προς ολοκλήρωση στη μορφή ενός αναπτύγματος σε σειρά. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι

$$A'_n = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(\theta) \right\} \quad (\text{A.3.98})$$

Επομένως η συνάρτηση που πρέπει να προσεγγιστεί από ένα ανάπτυγμα σε σειρά είναι

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad (\text{A.3.99})$$

όπου, στην συγκεκριμένη περίπτωση,

$$x = \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \sin(\theta) + \frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \cos(\theta) \quad (\text{A.3.100})$$

Το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης $f(x)$ είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 (4^n)} x^n \quad \forall |x| \leq 1 \quad (\text{A.3.101})$$

ΤΗ υπόθεση ότι $|x| \leq 1$ δεν έχει επιβεβαιωθεί, αλλά είναι αναμενόμενο να ισχύει για αρκετά μικρούς συντελεστές τριβής, αφού το x είναι ένα μέτρο της ελαστικής διατμητικής παραμόρφωσης προς την ελαστική ογκική παραμόρφωση.

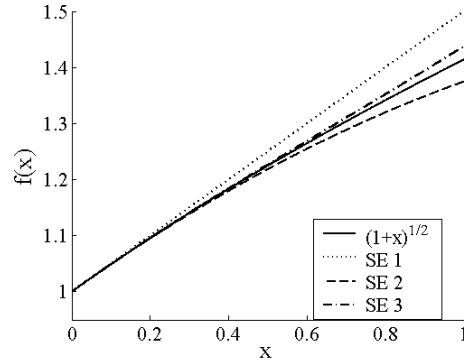
Το ανάπτυγμα σε σειρά της $f(x)$ μέχρι την τέταρτη τάξη είναι

$$S(4, x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \quad (\text{A.3.102})$$

Τα αναπτύγματα σε σειρά πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης φαίνονται στην Εικ. A.1 μαζί με την πλήρη συνάρτηση. Σε ό,τι ακολουθεί το ανάπτυγμα πρώτης τάξης θα χρησιμοποιηθεί για τις ολοκληρώσεις, αλλά τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στο ανάπτυγμα τρίτης τάξης θα παρουσιαστούν επίσης.

Προκειμένου να απλοποιηθούν οι προκύπτουσες εκφράσεις θέτουμε τα ακόλουθα:

$$\alpha_1 = \gamma_{11} + \gamma_{22} \quad (\text{A.3.103})$$



Εικόνα A.1: Σύγκλιση του αναπτύγματος σε σειρά του $\sqrt{1+x}$.

$$\alpha_2 = \gamma_{11} - \gamma_{22} \quad (\text{A.3.104})$$

$$\alpha_3 = \gamma_{12} + \gamma_{21} \quad (\text{A.3.105})$$

$$\alpha_4 = \gamma_{12} - \gamma_{21} \quad (\text{A.3.106})$$

A.3.8 Ολοκλήρωση πολλαπλασιαστών

Θεωρείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μορφής

$$p(\theta) = \frac{1 - c \cos(2(\theta + \psi)) - d \cos(4(\theta + \psi))}{2\pi} \quad (\text{A.3.107})$$

Έτσι στρέφεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατά ψ στην ωρολογιακή κατεύθυνση. Τότε ο ταυστής των τροπών μπορεί να θεωρηθεί ως προς τις κύριες διευθύνσεις. Σε αυτή την περίπτωση $\gamma_{12} = -\gamma_{21}$ ή, ισοδύναμα, $\alpha_3 = 0$. Τα αποτελέσματα με βάση τις παραπάνω υποθέσεις παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους για αναπτύγματα τρίτης και πρώτης τάξης και ανισότροπη ή ισότροπη κατανομή των επαφών.

A.3.9 Ανάπτυγμα τρίτης τάξης, ανισότροπο υλικό

$$Q_{11o3a}^n = \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (256\alpha_1^4 + 192\alpha_1^3\alpha_2 + 48\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2^3 + 6\alpha_2^4) +$$

$$- \frac{c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (128\alpha_1^4 + 192\alpha_1^3\alpha_2 + 36\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2^3 + 5\alpha_2^4) +$$

$$- \frac{d \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (4\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2) (12\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)) \quad (\text{A.3.108})$$

$$\begin{aligned} Q_{12o3a}^n &= \frac{(128\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4) c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} + \\ &- \frac{2\alpha_1\alpha_2 (-48\alpha_1^2 + \alpha_2^2) d \sin(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.109})$$

$$Q_{21o3a}^n = Q_{12o3a}^n \quad (\text{A.3.110})$$

$$\begin{aligned} Q_{22o3a}^n &= \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (256\alpha_1^4 - 192\alpha_1^3\alpha_2 + 48\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2^3 + 6\alpha_2^4) + \\ &+ \frac{c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (128\alpha_1^4 - 192\alpha_1^3\alpha_2 + 36\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2^3 + 5\alpha_2^4) + \\ &- \frac{d \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (4\alpha_2 (-24\alpha_1^3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)) \end{aligned} \quad (\text{A.3.111})$$

$$\begin{aligned} Q_{11o3a}^t &= \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(-\alpha_2^2 (16\alpha_1^2 + \alpha_2^2) c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \\ &+ \frac{2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(2 (32\alpha_1^3 - \alpha_1\alpha_2^2) \left(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) \right) + \\ &+ \frac{2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (32\alpha_1^3\alpha_2 d \cos[\psi] + \alpha_2 (16\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \alpha_4 d \sin(\psi)) \end{aligned} \quad (\text{A.3.112})$$

$$\begin{aligned} Q_{12o3a}^t &= \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (-2 (-128\alpha_1^3 + 32\alpha_1^2\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3) \alpha_4) + \\ &+ \frac{c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (2 (64\alpha_1^3 - 32\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_2^2 - 3\alpha_2^3) \alpha_4) + \\ &+ \frac{d \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (4\alpha_2 (8\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) \alpha_4) + \\ &+ \frac{c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (-\alpha_2 (-128\alpha_1^3 + 16\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)) + \\ &+ \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (2\alpha_2 (-32\alpha_1^3 + 16\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3) d \sin(\psi)) \end{aligned} \quad (\text{A.3.113})$$

$$\begin{aligned}
 Q_{21o3a}^t &= \frac{c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(2 (64\alpha_1^3 + 32\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3) \alpha_4\right) + \\
 &+ \frac{d \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(4\alpha_2 (8\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) \alpha_4\right) + \\
 &+ \frac{c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(-\alpha_2 (128\alpha_1^3 + 16\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)\right) + \\
 &+ \frac{-2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(128\alpha_1^3 + 32\alpha_1^2\alpha_2 - 8\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3\right) \alpha_4 + \\
 &+ \frac{-2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(\alpha_2 (32\alpha_1^3 + 16\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3) d \sin(\psi)\right) \quad (A.3.114)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{22o3a}^t &= \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(\alpha_2^2 (16\alpha_1^2 + \alpha_2^2) c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + \\
 &+ \frac{-2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(32\alpha_1^3\alpha_2 d \cos(\psi) + \alpha_2 (16\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \alpha_4 d \sin(\psi)\right) + \\
 &+ \frac{-2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(2 (32\alpha_1^3 - \alpha_1\alpha_2^2) \left(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)\right) \quad (A.3.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{1o3a}^m &= \frac{\kappa_1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(2 (128\alpha_1^4 + 96\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^2\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_2^4)\right) + \\
 &- \frac{c\kappa_1 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(128\alpha_1^4 + 192\alpha_1^3\alpha_2 + 36\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2^3 + 5\alpha_2^4\right) + \\
 &+ \frac{d\kappa_1 \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(-4\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2) (12\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\right) + \\
 &+ \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(128\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4\right) c\kappa_2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \\
 &+ \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(-2\alpha_1\alpha_2 (-48\alpha_1^2 + \alpha_2^2) d\kappa_2 \sin(\psi)\right) \quad (A.3.116)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2o3a}^m &= \frac{\kappa_2}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(2 (128\alpha_1^4 - 96\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_2^4)\right) + \\
 &+ \frac{c\kappa_2 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \left(128\alpha_1^4 - 192\alpha_1^3\alpha_2 + 36\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2^3 + 5\alpha_2^4\right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\kappa_2 \cos(\psi)}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (-4\alpha_2 (-24\alpha_1^3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)) + \\
& + \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (128\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4) c\kappa_1 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} (-2\alpha_1\alpha_2 (-48\alpha_1^2 + \alpha_2^2) d\kappa_1 \sin(\psi)) \quad (\text{A.3.117})
\end{aligned}$$

A.3.10 Ανάπτυγμα τρίτης τάξης, ισότροπο υλικό

$$Q_{11o3i}^n = \frac{256\alpha_1^4 + 192\alpha_1^3\alpha_2 + 48\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2^3 + 6\alpha_2^4}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.118})$$

$$Q_{12o3i}^n = 0 \quad (\text{A.3.119})$$

$$Q_{21o3i}^n = Q_{12o3i}^n \quad (\text{A.3.120})$$

$$Q_{22o3i}^n = \frac{256\alpha_1^4 - 192\alpha_1^3\alpha_2 + 48\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2^3 + 6\alpha_2^4}{1024\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.121})$$

$$Q_{11o3i}^t = \frac{\alpha_2 (32\alpha_1^3 - \alpha_1\alpha_2^2)}{256\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.122})$$

$$Q_{12o3i}^t = -\frac{(-128\alpha_1^3 + 32\alpha_1^2\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3) \alpha_4}{512\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.123})$$

$$Q_{21o3i}^t = -\frac{(128\alpha_1^3 + 32\alpha_1^2\alpha_2 - 8\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3) \alpha_4}{512\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.124})$$

$$Q_{22o3i}^t = -\frac{\alpha_2 (32\alpha_1^3 - \alpha_1\alpha_2^2)}{256\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.125})$$

$$Q_{1o3i}^m = \frac{(128\alpha_1^4 + 96\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^2\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_2^4) \kappa_1}{512\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.126})$$

$$Q_{2o3i}^m = \frac{(128\alpha_1^4 - 96\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_2^4) \kappa_2}{512\sqrt{2}\alpha_1^{5/2}} \quad (\text{A.3.127})$$

A.3.11 Ανάπτυγμα πρώτης τάξης, ανισότροπο υλικό

$$Q_{11o1a}^n = \frac{4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)d \cos(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \frac{-(8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.128})$$

$$Q_{12o1a}^n = \frac{(8\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + 6\alpha_1\alpha_2d \sin(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.129})$$

$$Q_{21o1a}^n = Q_{12o1a}^n \quad (\text{A.3.130})$$

$$Q_{22o1a}^n = \frac{4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2d \cos(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \frac{(8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.131})$$

$$Q_{11o1a}^t = \frac{-\alpha_2^2c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + 4\alpha_1\alpha_2d \cos(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \frac{8\alpha_1\left(\alpha_2 + \alpha_4c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + 2\alpha_2\alpha_4d \sin(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.132})$$

$$Q_{12o1a}^t = \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left(-4(-4\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_4 + 4(2\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left(2\alpha_2\alpha_4d \cos(\psi) + (8\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (2\alpha_2(-2\alpha_1 + \alpha_2)d \sin[\psi]) \quad (\text{A.3.133})$$

$$\begin{aligned}
Q_{21o1a}^t &= \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left(-4(4\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_4 + 4(2\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_4 c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left(2\alpha_2\alpha_4 d \cos(\psi) - \alpha_2(8\alpha_1 + \alpha_2)c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-2\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)d \sin(\psi)) \quad (\text{A.3.134})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22o1a}^t &= \frac{\alpha_2^2 c \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - 4\alpha_1\alpha_2 d \cos(\psi)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \\
&+ \frac{-2\left(4\alpha_1\left(\alpha_2 + \alpha_4 c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + \alpha_2\alpha_4 d \sin(\psi)\right)}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.135})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{1o1a}^m &= \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\kappa_1) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left(- (8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2) c\kappa_1 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-2\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)d\kappa_1 \cos(\psi)) + \\
&+ \frac{\kappa_2}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left((8\alpha_1^2 + \alpha_2^2) c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + 6\alpha_1\alpha_2 d \sin(\psi) \right) \quad (\text{A.3.136})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2o1a}^m &= \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\kappa_2) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left((8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2) c\kappa_2 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 d\kappa_2 \cos(\psi)) + \\
&+ \frac{\kappa_1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \left((8\alpha_1^2 + \alpha_2^2) c \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + 6\alpha_1\alpha_2 d \sin(\psi) \right) \quad (\text{A.3.137})
\end{aligned}$$

A.3.12 Ανάπτυγμα πρώτης τάξης, ισότροπο υλικό

$$Q_{11o1i}^n = \frac{4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.138})$$

$$Q_{12o1i}^n = 0 \quad (\text{A.3.139})$$

$$Q_{21o1i}^n = Q_{12o1i}^n \quad (\text{A.3.140})$$

$$Q_{22o1i}^n = \frac{4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.141})$$

$$Q_{11o1i}^t = \frac{\sqrt{\alpha_1}\alpha_2}{8\sqrt{2}} \quad (\text{A.3.142})$$

$$Q_{12o1i}^t = \frac{(4\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.143})$$

$$Q_{21o1i}^t = -\frac{(4\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_4}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.144})$$

$$Q_{22o1i}^t = -\frac{\sqrt{\alpha_1}\alpha_2}{8\sqrt{2}} \quad (\text{A.3.145})$$

$$Q_{1o1i}^m = \frac{(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\kappa_1}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.146})$$

$$Q_{2o1i}^m = \frac{(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\kappa_2}{16\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.147})$$

A.3.13 Αποτελέσματα

Οι εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων και του τανυστή των τάσεων ζεύγους δίνονται σε αυτή την παράγραφο. Χάριν απλότητας θα χρησιμοποιηθεί το ανάπτυγμα πρώτης τάξης για ανισότροπο υλικό. Θα υποτεθεί για απλότητα ότι η γωνία ψ είναι μηδενική. Αυτή η υπόθεση είναι συμβατή με αριθμητικά

αποτελέσματα όταν δεν έχει προηγηθεί αλλαγή της κύριας διεύθυνσης φόρτισης. Σε αυτήν την περίπτωση οι πολλαπλασιαστές γράφονται

$$Q_{11o1a}^n = \frac{4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)d}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \frac{-(8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.148})$$

$$Q_{12o1a}^n = 0 \quad (\text{A.3.149})$$

$$Q_{21o1a}^n = Q_{12o1a}^n \quad (\text{A.3.150})$$

$$Q_{22o1a}^n = \frac{4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2d}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} + \frac{(8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.151})$$

$$Q_{11o1a}^t = \frac{-\alpha_2^2c + 4\alpha_1\alpha_2d}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.152})$$

$$Q_{12o1a}^t = \frac{\alpha_4}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-4(-4\alpha_1 + \alpha_2) + 4(2\alpha_1 - \alpha_2)c + 2\alpha_2d) \quad (\text{A.3.153})$$

$$Q_{21o1a}^t = \frac{\alpha_4}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-4(4\alpha_1 + \alpha_2) + 4(2\alpha_1 + \alpha_2)c + 2\alpha_2d) \quad (\text{A.3.154})$$

$$Q_{22o1a}^t = \frac{\alpha_2^2c - 4\alpha_1\alpha_2d}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad (\text{A.3.155})$$

$$Q_{1o1a}^m = \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\kappa_1) + \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-(8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c\kappa_1) + \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (-2\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)d\kappa_1) \quad (\text{A.3.156})$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2o1a}^m &= \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) \kappa_2) + \\
 &+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} ((8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2) c\kappa_2) + \\
 &+ \frac{1}{64\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1}} (2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 d\kappa_2) \quad (A.3.157)
 \end{aligned}$$

Τότε οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις της ελαστικής τροπής ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \frac{4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)d}{64\pi\sqrt{\alpha_1}} + \\
 &+ \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \frac{-(8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c}{64\pi\sqrt{\alpha_1}} \\
 &+ 3\phi_s \frac{GC}{2-\nu} \frac{-\alpha_2^2 c + 4\alpha_1\alpha_2 d}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} \quad (A.3.158)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = 3\phi_s \frac{GC}{2-\nu} \frac{\alpha_4}{16\pi\sqrt{\alpha_1}} (-2(-4\alpha_1 + \alpha_2) + 2(2\alpha_1 - \alpha_2)c + \alpha_2 d) \quad (A.3.159)$$

$$\sigma_{21} = 3\phi_s \frac{GC}{2-\nu} \frac{\alpha_4}{16\pi\sqrt{\alpha_1}} (-2(4\alpha_1 + \alpha_2) + 2(2\alpha_1 + \alpha_2)c + \alpha_2 d) \quad (A.3.160)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \frac{4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 d}{64\pi\sqrt{\alpha_1}} + \\
 &+ \phi_s \frac{GC}{1-\nu} \frac{(8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2)c}{64\pi\sqrt{\alpha_1}} \\
 &+ 3\phi_s \frac{GC}{2-\nu} \frac{\alpha_2^2 c - 4\alpha_1\alpha_2 d}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} \quad (A.3.161)
 \end{aligned}$$

ενώ οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους μπορούν να εκφραστούν ως

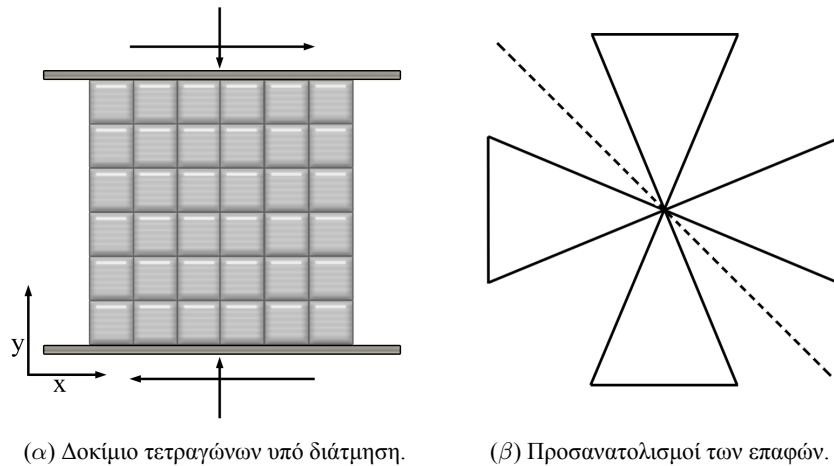
$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2\phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) \kappa_2) + \\
 &+ \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2\phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} ((8\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2) c\kappa_2) + \\
 &+ \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2\phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} (-2(3\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2 d\kappa_2) \quad (A.3.162)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2 \phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} (4(4\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) \kappa_2) + \\ &+ \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2 \phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} ((8\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2) c\kappa_2) + \\ &+ \frac{GC}{1-\nu} \frac{R^2 \phi_s}{32\pi\sqrt{\alpha_1}} (2(3\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 d\kappa_2) \end{aligned} \quad (\text{A.3.163})$$

A.4 Ένα παράδειγμα για την υπόθεση της ομοαξονικότητας

Θεωρείται ένα πολύ πυκνό δοκίμιο από απαραμόρφωτα τετράγωνα, όπως φαίνεται στην Εικ. A.2α. Το δοκίμιο υποβάλλεται σε μια κάθετη και μια διατμητική



Εικόνα A.2: Παράδειγμα τετραγώνων υπό διάτμηση.

τάση στο άνω και στο κάτω σύνορο και σε περιοδικές συνθήκες στα κάθετα σύνορα. Είναι εμφανές από τη γεωμετρία ότι οι προσανατολισμοί των επαφών θα ακολουθούν την κατανομή που φαίνεται στην Εικ. A.2β. Οι άξονες συμμετρίας που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες για αυτή την κατανομή είναι στραμμένοι κατά γωνία $\pi/4$ ή $-\pi/4$ ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση, όπως δείχνει η διακεκομμένη γραμμή. Στην συνέχεια θα εξεταστεί κατά πόσο αυτός ο προσανατολισμός συμπίπτει με τους κύριους άξονες του τανυστή των τάσεων η του τανυστή των γενηκευμένων τροπών.

Ο τανυστής των τάσεων θα είναι της μορφής

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ 0 & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

ενώ ο τανυστής των γενικευμένων τροπών θα είναι της μορφής

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.2})$$

στο σύστημα Oxy . Σημειώνεται ότι από την προϋπόθεση της ισορροπίας το σ_{xx} εξαρτάται από τον συντελεστή της τριβής και είναι εν γένει μικρότερο του σ_{yy} . Η κύρια διεύθυνση του τανυστή των τάσεων βρίσκεται σε γωνία ϕ_1 που δίνεται από την σχέση

$$\tan(2\phi_1) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \neq \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.4.3})$$

Η κύρια διεύθυνση του γενικευμένου τανυστή των τροπών από την άλλη πλευρά βρίσκεται σε γωνία ϕ_2 και, από τον κανόνα μεταβολής για την στροφή τανυστών, δίνεται από την σχέση

$$\cos(2\phi_2) = 0 = \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.4.4})$$

Επομένως αποδεικνύεται ότι η κατανομή των επαφών είναι ομοαξονική με των τανυστή των γενικευμένων τροπών. Φυσικά το παραπάνω αποτελεί απλά ένα παράδειγμα και το αντικείμενο χρήζει περαιτέρω μελέτης.

Παράρτημα Β

Computer Programs

B.1 Global postprocessing

```
program post2Dc
use def
use mymods
use triang_init

implicit none

type(T_CORPS),allocatable,dimension(:) :: TAB_DISK,TAB_BD
type(T_CONTACT),allocatable,dimension(:) :: TAB_CONTACT,TAB_CONTACT_INITIAL
type(T_TRIANGLE),allocatable,dimension(:) :: TAB_TR

!DEFINITIONS Vloc-Dof-Bodies
!=====
integer :: nb_patoi=0,fin=0,nbParticules=0
integer :: nb_boundl=4
integer :: counter_cl=0,all_steps=0
logical :: the_first_time=.true., fin_post=.false.
integer :: steps,nb_lineCONTACT
real(kind=8) :: time

!DEFINITIONS BOITE
!=====
real(kind=8),dimension(2,2) :: tab_box
real(kind=8) :: height,length

!COMMANDS TO BE CALLED
!=====
character(len=30) :: command
logical :: first_list_contact=.true.
integer :: nb_lineCONTACT_first=0
integer :: type_box=0, calcul_coordination=0,&
    calcul_qoverp=0, calcul_contact_anisotropy=0,&
    calcul_force_anisotropy=0, calcul_inertia=0,&
    calcul_void=0, calcul_wall=0,&
    calcul_stress_tensor=0,calcul_strain_tensor=0
integer :: Nsect_orientation=0,nsec_s=0,nsec_e=0
integer,dimension(:),allocatable :: nfiles_s,nfiles_e
character(len=21) :: file_name
integer :: calcul_orientation=0,calcul_gmv_file=0

!AUXILIARY
!=====
```

```

integer :: i,ji

=====
! Reading input file
=====
print*, '_____,'
print*, '! !'
print*, '! 2D Post-Treatment Controller !'
print*, '! Eleni Gerolyमतou !'
print*, '! Emilien Azema !'
print*, '_____,'
print*, 'Reading the postprocessing commands'
open(unit=1,file='INPUT.DAT',status='old')
do

read(1,'(A30)') command print*,command

if (command=='VLOC.DOF_BODIES :') then
read(1,*) nbParticules
read(1,*) nb.bound1
read(1,*) all_steps
cycle
end if

if (command=='COORDINATION NUMBER :') then
calcul.coordination=1
open (unit=100,file='COORDINATION_NUMBER.DAT',status='replace')
open (unit=108,file='COORD_NUMBER.S.DAT',status='replace')
open (unit=111,file='CONTACT_MOTION.DAT',status='replace')
open (unit=117,file='CONT_DISTR.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='Q/P :') then
calcul.qoverp=1
open (unit=103,file='QoverP.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='CONTACT ANISOTROPY :') then
calcul.contact_anisotropy=1
open (unit=104,file='CONTACT_ANISOTROPY.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='FORCE ANISOTROPY :') then
calcul.force_anisotropy=1
open (unit=105,file='FORCE_ANISOTROPY.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='STRESS TENSOR :') then
calcul.stress.tensor=1
open (unit=106,file='STRESS_TENSOR.DAT',status='replace')
read(1,*) nsec.s
allocate(nfiles_s(nsec.s))
cycle
end if

if (command=='STRAIN TENSOR :') then
calcul.strain.tensor=1
open (unit=107,file='STRAIN_TENS.C.DAT',status='replace')
read(1,*) nsec.e
allocate(nfiles_e(nsec.e))
cycle
end if

if (command=='INERTIA :') then
calcul.inertia=1

```

```

open (unit=109,file='INERTIA.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='VOID RATIO :') then
calcul_void=1
open (unit=110,file='VOIDR.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='WALL STRESS :') then
calcul_wall=1
open (unit=112,file='WALLS.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='ORIENTATIONS :') then
calcul_orientation=2
read(1,*) Nsect.orientation
open (unit=113,file='CONTACT_ORIENTATION.DAT',status='replace')
open (unit=114,file='ORIENTATION_NORMAL_FORCE.DAT',status='replace')
open (unit=115,file='ORIENTATION_TANGENT_FORCE.DAT',status='replace')
open (unit=116,file='COORD_ANIS.DAT',status='replace')
cycle
end if
!----- One only one time step -----

if (command=='FORCE/CONTACT ORIENTATION :') then
calcul_orientation=1
read(1,*) Nsect.orientation
open (unit=1000,file='CONTACT_ORIENTATION.DAT',status='replace')
open (unit=1001,file='ORIENTATION_NORMAL_FORCE.DAT',status='replace')
open (unit=1002,file='ORIENTATION_TANGENT_FORCE.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='WRITE ONE GMV FILE :') then
calcul_gmv_file=1
open (unit=1003,file='GMV_ONE_FILE.DAT',status='replace')
cycle
end if

if (command=='END :') exit
end do
close(1)

!=====
! Calling the resources named in the command file
!=====
do
call read_Vloc_dof_bodies
write(6,*) 'read1'
call test_position_contact
write(6,*) 'read2'
if (all_steps==0) then
if (calcul_coordination == 1) call nb_coordination
if (calcul_qoverp == 1) call qoverp
if (calcul_contact_anisotropy == 1) call contact_anisotropy
if (calcul_force_anisotropy == 1) call force_anisotropy
if (calcul_inertia == 1) call inertia_ind
if (calcul_void == 1) call void
if (calcul_wall == 1) call wallf
if (calcul_orientation == 2) call orientation2
if (calcul_stress_tensor == 1 .OR. calcul_strain_tensor == 1) call delaunay
write(6,*) 'delaunay out'
if (calcul_stress_tensor == 1) call stress_tensor
write(6,*) 'stress tensor out'

```

```

if (calcul_strain_tensor == 1) call strain_tensor
write(6,*) 'strain tensor out'

if (fin_post) then
call shut_down
print*, '-> Finished post - treatment < -'
exit
end if
else
if (calcul_orientation == 1) call orientation
if (calcul_gmv_file == 1) call write_one_gmvfile
call shut_down
print*, '-> Finished post - treatment < -'
exit
end if
end do
call write_out(TAB_DISK, TAB_BD, nbParticules, nb_bound1)

!=====
!=====
!=====
!=====
contains
!=====
! Calculating the anisotropy of branches
!=====

subroutine force_anisotropy
implicit none
real(kind=8), dimension(2,2) :: Fabric_N, Fabric_T, Fabric, Fabric_T2
real(kind=8), dimension(2) :: nik, tik
integer :: i, cd, an, j
integer :: ierror, matz, lda
real(kind=8), dimension(2) :: wrt, wit, wrn, win, wr, wi
real(kind=8) :: S1n, S2n, S1t, S2t, S1, S2, Force_N, Force_T
real(kind=8), dimension(2,2) :: localframe_N, localframe_T, localframe
real(kind=8), dimension(2) :: Ipoint, nuc, tuc, Likn, Likt
real(kind=8) :: Norm_F, cpt, norm
real(kind=8) :: ac, afn, aft, rr

Norm_F = 0.D0
cpt = 0.D0
do i = 1, nb_lineCONTACT
if (TAB_CONTACT(i)%nature == 'DKJCx') cycle if (TAB_CONTACT(i)%rn == 0.D0) cycle
Norm_F = Norm_F + sqrt(TAB_CONTACT(i)%art**2 + TAB_CONTACT(i)%rn**2)
cpt = cpt + 1
end do
Norm_F = Norm_F / cpt

Fabric = 0.D0
Fabric_N = 0.D0
Fabric_T = 0.D0
cpt = 0.D0
do i = 1, nb_lineCONTACT
if (TAB_CONTACT(i)%nature == 'DKJCx') cycle
if (TAB_CONTACT(i)%rn == 0.D0) cycle

nik(1) = TAB_CONTACT(i)%n(1)
nik(2) = TAB_CONTACT(i)%n(2)
tik(1) = TAB_CONTACT(i)%t(1)
tik(2) = TAB_CONTACT(i)%t(2)

Ipoint = TAB_CONTACT(i)%coor_etc(1:2)
rr = sqrt(Ipoint(1)**2 + Ipoint(2)**2)
nuc = Ipoint(1:2)/rr
tuc(1) = -nuc(2)
tuc(2) = nuc(1)
Likn(1) = nik(1)*nuc(1) + nik(2)*nuc(2)

```

```

Likn(2) = nik(1)*tuc(1)+nik(2)*tuc(2)
Likt(1) = tik(1)*nuc(1)+tik(2)*nuc(2)
Likt(2) = tik(1)*tuc(1)+tik(2)*tuc(2)

Fabric(1,1:2) = Likn(1)*Likn(1:2) + Fabric(1,1:2)
Fabric(2,1:2) = Likn(2)*Likn(1:2) + Fabric(2,1:2)
Fabric_N(1,1:2) = TAB.CONTACT(i)%rn * Likn(1)*Likn(1:2) + Fabric_N(1,1:2)
Fabric_N(2,1:2) = TAB.CONTACT(i)%rn * Likn(2)*Likn(1:2) + Fabric_N(2,1:2)
Fabric_T(1,1:2) = TAB.CONTACT(i)%rt * Likn(1)*Likn(1:2) + Fabric_T(1,1:2)
Fabric_T(2,1:2) = TAB.CONTACT(i)%rt * Likn(2)*Likn(1:2) + Fabric_T(2,1:2)

cpt = cpt + 1
end do
Fabric = Fabric / cpt
Fabric_N = Fabric_N / Norm_F
Fabric_T = Fabric_T / Norm_F
Fabric_T2 = Fabric_T + Fabric_N

lda = 2
matz = 1
call rg ( lda, 2, Fabric, wr, wi, matz, localframe, ierror )
S1 = max( wr(1),wr(2) )
S2 = min( wr(1),wr(2) )
ac = 2*(S1-S2)

lda = 2
matz = 1
call rg ( lda, 2, Fabric_N, wrn, win, matz, localframe_N, ierror )
S1n = max( wrn(1),wrn(2) )
S2n = min( wrn(1),wrn(2) )
afn = 2*(S1n-S2n)/(S1n+S2n) - ac

lda = 2
matz = 1
call rg ( lda, 2, Fabric_T2, wrt, wit, matz, localframe_T, ierror )
S1t = max( wrt(1),wrt(2) )
S2t = min( wrt(1),wrt(2) )
aft = 2*(S1t-S2t)/(S1t+S2t) - ac - afn

write(105,'(5(1X,D12.5))' time, ac,afn,aft,0.5*(ac+afn+aft)

end subroutine force_anisotropy

!=====
! Calculating the anisotropy of contacts
!=====
subroutine contact_anisotropy
implicit none
real(kind=8),dimension(2,2) :: Fabric
real(kind=8),dimension(2) :: nik,nuc,tuc
integer :: i,cd,an
integer :: ierror,matz,lda
real(kind=8),dimension(2) :: wr,wi,lpoint,Likn
real(kind=8) :: S1,S2,cpt,rr
real(kind=8),dimension(2,2) :: localframe

cpt = 0
Fabric=0.D0
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rn==0.D0) cycle
cd = TAB.CONTACT(i)%icdent
an = TAB.CONTACT(i)%ianent
nik(1) = TAB.CONTACT(i)%n(1)
nik(2) = TAB.CONTACT(i)%n(2)

lpoint = TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:2)
rr = sqrt(lpoint(1)**2+lpoint(2)**2)
nuc = lpoint(1:2)/rr

```

```

tuc(1)=-nuc(2)
tuc(2) = nuc(1)

Likn(1) = nik(1)*nuc(1)+nik(2)*nuc(2)
Likn(2) = nik(1)*tuc(1)+nik(2)*tuc(2)

Fabric(1,1:2) = Likn(1)*Likn(1:2)/real(nb_lineCONTACT) + Fabric(1,1:2)
Fabric(2,1:2) = Likn(2)*Likn(1:2)/real(nb_lineCONTACT) + Fabric(2,1:2)
cpt=cpt+1
end do
Fabric = Fabric / cpt
lda = 2
matz = 1
call rg (lda, 2, Fabric, wr, wi, matz, localframe, ierror )
S1 = max( wr(1),wr(2) )
S2 = min( wr(1),wr(2) )
write(104,'(2(1X,D12.5))' ) time, 2*(S1-S2)
end subroutine contact_anisotropy

!=====
! Calculating q/p
!=====

subroutine qoverp
implicit none
real(kind=8),dimension(2,2) :: Moment
real(kind=8),dimension(2) :: nik,tik,Lik,Fik
real(kind=8),dimension(2) :: nuc,tuc,Dik,Gik,Ipoint
real(kind=8) :: Rtik,Rnik
integer :: i,cd,an
integer :: ierror,matz,lda
real(kind=8),dimension(2) :: wr,wi
real(kind=8) :: S1,S2,rr
real(kind=8),dimension(2,2) :: localframe

do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJCx') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%m==0,D0) cycle
cd = TAB.CONTACT(i)%icdent
an = TAB.CONTACT(i)%ianent
nik(1) = TAB.CONTACT(i)%n(1)
nik(2) = TAB.CONTACT(i)%n(2)
tik(1) = TAB.CONTACT(i)%t(1)
tik(2) = TAB.CONTACT(i)%t(2)
Rtik = TAB.CONTACT(i)%rt
Rnik = TAB.CONTACT(i)%rn

Ipoint = TAB.CONTACT(i)%coor_etc(1:2) rr = sqrt(Ipoint(1)**2+Ipoint(2)**2)
nuc = Ipoint(1:2)/rr
tuc(1)=-nuc(2)
tuc(2) = nuc(1)
Gik=0.0
Dik=0.0

if ( (cd < nbParticules+1).and.(an < nbParticules+1) ) then
Lik(1) = TAB.DISK(cd)%centre(1)-TAB.DISK(an)%centre(1)
Lik(2) = TAB.DISK(cd)%centre(2)-TAB.DISK(an)%centre(2)
Dik(1) = Lik(1)*nuc(1)+Lik(2)*nuc(2)
Dik(2) = Lik(1)*tuc(1)+Lik(2)*tuc(2)
Fik(1) = Rnik*nik(1)+Rtik*tik(1)
Fik(2) = Rnik*nik(2)+Rtik*tik(2)
Gik(1) = Fik(1)*nuc(1)+Fik(2)*nuc(2)
Gik(2) = Fik(1)*tuc(1)+Fik(2)*tuc(2)
end if

Moment(1,1:2) = Gik(1)*Dik(1:2) + Moment(1,1:2)
Moment(2,1:2) = Gik(2)*Dik(1:2) + Moment(2,1:2)
end do

```



```

Moment = Moment / (Pi*(tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2))

lda = 2
matz = 1
call rg ( lda, 2, Moment, wr, wi, matz, localframe, ierror )
S1 = max( wr(1),wr(2) )
S2 = min( wr(1),wr(2) )

write(103,'(4(1X,D12.5))' time, S1,S2,(S1-S2)/(S1+S2)

end subroutine qoverp

!=====
! Coordination number
!=====

subroutine nb.coordination
implicit none
real(kind=8) :: z,zt,zc,zp,zcslide,zcstick
real(kind=8) :: rmin,rmax,dstep,zstick,zslide
real(kind=8) :: zsingle,zdouble,zcsingle,zcdouble
real(kind=8) :: zrs,zr,zs,z0,vl
real(kind=8),dimension(3) :: v1,v2,vc,r1,r2
real(kind=8),dimension(8) :: tab.coor
real(kind=8),dimension(nsec.s) :: zz,zzslide,zzstick
integer :: i,k1,ia,ic,kz

ia=0
ic=0
z=0
zc=0
zp=0
zcslide = 0
zcstick = 0
zslide = 0
zstick = 0
zsingle = 0
zdouble = 0
zcsingle = 0
zcdouble = 0
tab.coor(:)=0.0
rmax=-2.0
rmin= 12000.0

do i=1,nbParticules
TAB_DISK(i)%cont=0
zp=zp+1
rmax=max(rmax,TAB_DISK(i)%Area)
rmin=min(rmin,TAB_DISK(i)%Area)
end do
dstep = (rmax-rmin)/8.0

do i=1,nb_lineCONTACT
TAB_CONTACT(i)%sect=0
if (TAB_CONTACT(i)%m==0.D0) cycle
if (i > 1) then
if (ia==TAB_CONTACT(i)%ianent.AND.ic==TAB_CONTACT(i)%icdent) then
TAB_CONTACT(i-1)%sect = 1
TAB_CONTACT(i)%sect = 2
end if
end if
ia=TAB_CONTACT(i)%ianent
ic=TAB_CONTACT(i)%icdent
if (TAB_CONTACT(i)%ianent.le.nbParticules) &
TAB_DISK(TAB_CONTACT(i)%ianent)%cont=1
if (TAB_CONTACT(i)%icdent.le.nbParticules) &
TAB_DISK(TAB_CONTACT(i)%icdent)%cont=1
end do

```

```

do i=1,nbParticules
if (TAB.DISK(i)%cont==1) z=z+1
end do

do i=1,nb_lineCONTACT
! if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
if (TAB.CONTACT(i)%sect==2) cycle
zc=zc+1
if (abs(TAB.CONTACT(i)%v1).gt.1e-18) TAB.CONTACT(i)%statut = 'slibw'
if (TAB.CONTACT(i)%statut == 'slibw') zcslide=zcslide+1
if (TAB.CONTACT(i)%statut == 'stick') zcstick=zcstick+1
if (TAB.CONTACT(i)%sect == 0) zcsingle=zcsingle+1
if (TAB.CONTACT(i)%sect == 1) zcdouble=zcdouble+1
end do

zt = 2.0 * zc / zp
zslide = 2.0 * zcslide / zp
zstick = 2.0 * zcstick / zp
zsingle = 2.0 * zcsingle / zp
zdouble = 2.0 * zcdouble / zp

write(100,'(6(1X,D12.5))' time,zt,zslide,zstick,zsingle,zdouble

zt = 2.0 * zc / z
zslide = 2.0 * zcslide / z
zstick = 2.0 * zcstick / z
zsingle = 2.0 * zcsingle / z
zdouble = 2.0 * zcdouble / z

write(108,'(7(1X,D12.5))' time,zt,zslide,zstick,zsingle,zdouble,zp-z

zrs = 0.0
zr = 0.0
zs = 0.0
z0 = 0.0

do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
if (TAB.CONTACT(i)%sect==2) cycle
ia = TAB.CONTACT(i)%ianent
ic = TAB.CONTACT(i)%icdent
v1 = TAB.DISK(ia)%V(1:3)
v2 = TAB.DISK(ic)%V(1:3)
vc = v1 - v2
r1 = TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:3) - TAB.DISK(ia)%centre(1:3)
r2 = TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:3) - TAB.DISK(ic)%centre(1:3)
v1 = vc(1)*TAB.CONTACT(i)%at(1) + vc(2)*TAB.CONTACT(i)%at(2)
v1 = v1 + v1(3)*(r1(2)*TAB.CONTACT(i)%at(1)-r1(1)*TAB.CONTACT(i)%at(2))
v1 = v1 - v2(3)*(r2(2)*TAB.CONTACT(i)%at(1)-r2(1)*TAB.CONTACT(i)%at(2))
! if (abs(v1).lt.1e-7) then
if (abs(TAB.CONTACT(i)%v1).lt.1e-7) then
if (abs(v1(3)-v2(3)).lt.1e-6) then
z0 = z0 + 1
else
zr = zr + 1
endif
else
if (abs(v1(3)-v2(3)).lt.1e-6) then
zs = zs + 1
else
zrs= zrs+ 1
endif
endif

kz = (TAB.DISK(ia)%Area-rmin)/dstep
kz=kz+1

```

```

tab_coor(kz) = tab_coor(kz)+1.0
kz = (TAB_DISK(ic)%Area-rmin)/dstep
kz=kz+1
tab_coor(kz) = tab_coor(kz)+1.0

end do
! total coordination number
zt = 2 * zc / zp
! rolling and sliding coordination number
zrs = 2 * zrs / zp
! rolling coordination number
zr = 2 * zr / zp
! sliding coordination number
zs = 2 * zs / zp
! no motion coordination number
z0 = 2 * z0 / zp
tab_coor=tab_coor/zp

write(111,'(6(1X,D12.5))' ) time,zt,zs,zr,zrs,z0

write(117,'(9(1X,D12.5))' ) time,tab_coor(1:8)

end subroutine nb.coordination

!=====
! void ratio
!=====
subroutine void
implicit none
real(kind=8) :: surft,surfs,surfx
real(kind=8) :: xx,yy
integer :: i

surft=0.0
surfs=0.0
surfx=0.0

xx = TAB.BD(3)%centre(1) - TAB.BD(1)%centre(1) - 0.4
yy = TAB.BD(2)%centre(2) - TAB.BD(4)%centre(2) - 0.4
surft = xx*yy

do i=1,nbParticules
surfs = surfs +TAB_DISK(i)%Area
if (TAB_DISK(i)%cont==1) surfx = surfx +TAB_DISK(i)%Area
end do

write(110,'(6(1X,D12.5))' ) time,xx,yy,surft,1.0-surfs/surft,1.0-surfx/surft

end subroutine void

!=====
! wall forces
!=====
subroutine wallf
implicit none
real(kind=8) ,dimension(4) :: str
real(kind=8) ,dimension(2) :: ff
real(kind=8) :: xx,yy
integer :: i,n

str=0.0

do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKDKx') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%m==0.D0) cycle
if (TAB.CONTACT(i)%ianent.gt.nbParticules) then
n = TAB.CONTACT(i)%ianent - nbParticules
else
n = TAB.CONTACT(i)%icdent - nbParticules
endif

```

```

ff = TAB.CONTACT(i)%rn*TAB.CONTACT(i)%n(1:2)+TAB.CONTACT(i)%rt*TAB.CONTACT(i)%t(1:2)
if (n==1.OR.n==3) then
str(n) = str(n) + abs(ff(1))
else
str(n) = str(n) + abs(ff(2))
endif
end do

xx = TAB.BD(3)%centre(1) - TAB.BD(1)%centre(1) - 0.4
yy = TAB.BD(2)%centre(2) - TAB.BD(4)%centre(2) - 0.4

write(112,'(5(1X,D12.5))' time,str(1)/yy,str(2)/xx,str(3)/yy,str(4)/xx

end subroutine wallf

!=====
! Orientation of contacts, normal forces and tangent forces SECOND
!=====

subroutine orientation2
implicit none
integer :: i,j,k
real(kind=8) :: faverag,sect,alpha,cpt=0,rr
real(kind=8) :: cmin,cmax,nmin,nmax,tmin,tmax
real(kind=8),dimension(:),allocatable :: tab_C,tab_N,tab_T,tab_alpha,test
real(kind=8),dimension(2) :: nik,tik

k=0
cpt=0
do i=1,nb_lineCONTACT
! if (.NOT. TAB.CONTACT(i)%in_box) exit
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%m==0.D0) cycle
faverag = faverag +sqrt( TAB.CONTACT(i)%m**2 + TAB.CONTACT(i)%rt**2 )
cpt = cpt + 1
k = k + 1
end do
faverag = faverag / real(k,8)

allocate(tab_alpha(Nsect.orientation+1))
tab_alpha = 0.0
sect = Pi / real(Nsect.orientation,8)
tab_alpha(1) = 0.0
do i=1,Nsect.orientation
tab_alpha(i+1)=tab_alpha(i)+sect
end do

allocate(tab_C(Nsect.orientation))
allocate(tab_N(Nsect.orientation))
allocate(tab_T(Nsect.orientation))
allocate(test(4*Nsect.orientation+1))
tab_C = 0.0
tab_N = 0.0
tab_T = 0.0
alpha = 0.0
do i=1,Nsect.orientation
do j=1,nb_lineCONTACT
! if (.NOT. TAB.CONTACT(j)%in_box) exit
if (TAB.CONTACT(j)%m==0.D0) cycle
if (TAB.CONTACT(j)%nature == 'DKJcX') cycle
alpha=acos(TAB.CONTACT(j)%n(1))
!(tab_FN(4,j)/tab_FN(3,j))
if ((alpha >= tab_alpha(i)).and.(alpha < tab_alpha(i+1))) then
tab_N(i) = tab_N(i)+TAB.CONTACT(j)%m / faverag
tab_T(i) = tab_T(i)+abs(TAB.CONTACT(j)%rt) / faverag
tab_C(i) = tab_C(i) + 1.0
end if
end do
end do

```

```

end do
tab_N(:) = tab_N(:) / tab_C(:)
tab_T(:) = tab_T(:) / tab_C(:)
tab_C(:) = tab_C(:) / real(k,8)

do i=1,Nsect_orientation
k=2*i-1
test(2*i-1) = sqrt((cos(sect*(i-1))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_C(i))**2)
test(2*i) = sqrt((cos(sect*(i))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_C(i))**2)
test(2*Nsect_orientation+2*i-1) = test(2*i-1)
test(2*Nsect_orientation+2*i) = test(2*i)
end do
test(4*Nsect_orientation+1) = test(1)

write(113,'(80(1X,D14.7))' ) time,(test(i), i=1,4*Nsect_orientation+1)

do i=1,Nsect_orientation
k=2*i-1
test(2*i-1) = sqrt((cos(sect*(i-1))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_N(i))**2)
test(2*i) = sqrt((cos(sect*(i))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_N(i))**2)
test(2*Nsect_orientation+2*i-1) = test(2*i-1)
test(2*Nsect_orientation+2*i) = test(2*i)
end do
test(4*Nsect_orientation+1) = test(1)

write(114,'(80(1X,D14.7))' ) time,(test(i), i=1,4*Nsect_orientation+1)

do i=1,Nsect_orientation
k=2*i-1
test(2*i-1) = sqrt((cos(sect*(i-1))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_T(i))**2)
test(2*i) = sqrt((cos(sect*(i))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_T(i))**2)
test(2*Nsect_orientation+2*i-1) = test(2*i-1)
test(2*Nsect_orientation+2*i) = test(2*i)
end do
test(4*Nsect_orientation+1) = test(1)

write(115,'(80(1X,D14.7))' ) time,(test(i), i=1,4*Nsect_orientation+1)

cmin= 10000000.0
cmax=-1000000.0
nmin= 10000000.0
nmax=-1000000.0
tmin= 10000000.0
tmax=-1000000.0
do i=1,Nsect_orientation
cmin= min(cmin,tab_C(i))
cmax=max(cmax,tab_C(i))
nmin= min(nmin,tab_N(i))
nmax=max(nmax,tab_N(i))
tmin= min(tmin,tab_T(i))
tmax=max(tmax,tab_T(i))
end do

write(116,'(7(1X,D14.7))' ) time,cmax,cmin,nmax,nmin,tmax,tmin

end subroutine

!=====
! Orientation of contacts, normal forces and tangent forces
!=====

subroutine orientation
implicit none

```

```

integer :: i,j
real(kind=8) :: faverag,sect,alpha,cpt=0,rr
real(kind=8),dimension(:),allocatable :: tab_C,tab_N,tab_T,tab_alpha
real(kind=8),dimension(2) :: nik,tik
real(kind=8),dimension(2) :: nuc,tuc,lpoint

do i=1,nb_lineCONTACT
! if (.NOT. TAB_CONTACT(i)%in_box) exit
if (TAB_CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB_CONTACT(i)%m==0.D0) cycle
faverag = faverag +sqrt( TAB_CONTACT(i)%m**2 + TAB_CONTACT(i)%rt**2 )
cpt = cpt + 1
end do
faverag = faverag / real(cpt,8)

allocate(tab_alpha(Nsect.orientation))
tab_alpha = 0
sect = pi / real(Nsect.orientation,8)
tab_alpha(1) = sect
do i=2,Nsect.orientation
tab_alpha(i)=tab_alpha(i-1)+sect
end do

allocate(tab_C(Nsect.orientation))
allocate(tab_N(Nsect.orientation))
allocate(tab_T(Nsect.orientation))
tab_C = 0
tab_N = 0
tab_T = 0
alpha=0
do i=1,Nsect.orientation
do j=1,nb_lineCONTACT
! if (.NOT. TAB_CONTACT(j)%in_box) exit
if (TAB_CONTACT(j)%m==0.D0) cycle
if (TAB_CONTACT(j)%nature == 'DKJcX') cycle
nik(1) = TAB_CONTACT(j)%n(1)
nik(2) = TAB_CONTACT(j)%n(2)
lpoint = TAB_CONTACT(j)%coor_etc(1:2)
rr = sqrt(lpoint(1)**2+lpoint(2)**2)
nuc = lpoint(1:2)/rr
tuc(1) = nik(1)*nuc(1)+nik(2)*nuc(2)
tuc(2) =-nik(1)*nuc(2)+nik(2)*nuc(1)
alpha=acos(tuc(1))
!(tab_FN(4,j)/tab_FN(3,j))
if (i==1) then
if (alpha < =tab_alpha(i)) then
tab_N(i) = tab_N(i)+TAB_CONTACT(j)%m / faverag
tab_T(i) = tab_T(i)+TAB_CONTACT(j)%rt / faverag
tab_C(i) = tab_C(i) + 1
end if
else if ((i > 1).and.(i < Nsect.orientation)) then
if ((alpha >=tab_alpha(i-1)).and.(alpha < =tab_alpha(i))) then
tab_N(i) = tab_N(i)+TAB_CONTACT(j)%m / faverag
tab_T(i) = tab_T(i)+TAB_CONTACT(j)%rt / faverag
tab_C(i) = tab_C(i) + 1
end if
else if (i==Nsect.orientation) then
if ((alpha < =tab_alpha(i)).and.(alpha >=tab_alpha(i-1))) then
tab_N(i) = tab_N(i)+TAB_CONTACT(j)%m / faverag
tab_T(i) = tab_T(i)+TAB_CONTACT(j)%rt / faverag
tab_C(i) = tab_C(i) + 1
end if
end if
end do
end do
tab_N(:) = tab_N(:) / tab_C(:)

```

```

tab_T(:) = tab_T(:) / tab_C(:)
tab_C(:) = tab_C(:) / real(nb_lineCONTACT,8)

do i=1,Nsect.orientation-1
write(1000,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1), sqrt( (cos(sect*(i-1))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_C(i))**2)
write(1000,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i) , sqrt( (cos(sect*(i))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_C(i))**2)

write(1001,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1), sqrt( (cos(sect*(i-1))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_N(i))**2)
write(1001,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i) , sqrt( (cos(sect*(i))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_N(i))**2)

write(1002,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1), sqrt( (cos(sect*(i-1))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(i-1))*tab_T(i))**2)
write(1002,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i) , sqrt( (cos(sect*(i))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(i))*tab_T(i))**2)
end do

do i=1,Nsect.orientation-1
write(1000,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1)+pi, sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_C(i))**2)
write(1000,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i)+pi , sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_C(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_C(i))**2)

write(1001,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1)+pi, sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_N(i))**2)
write(1001,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i)+pi , sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_N(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_N(i))**2)
write(1002,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i-1)+pi, sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i-1))*tab_T(i))**2)
write(1002,'(2(1X,D14.7))' ) sect*(i)+pi , sqrt( (cos(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_T(i))**2 + &
(sin(sect*(-Nsect.orientation/2+i))*tab_T(i))**2)
end do
end subroutine

!=====
! evaluation of the inertia index (mv, rav)
!=====

subroutine inertia_ind
implicit none
integer :: i,j,k1,k2
real(kind=8) :: xstep,rav,rho,m,rr,surf
real(kind=8),dimension(nsec.s+1) :: scoord,AREA
real(kind=8),dimension(nsec.s) :: inertia,nbP
real(kind=8),dimension(2) :: cooric

! evaluating the coordinates of the layers
xstep=(tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2)/real(nsec.s,kind=8)
surf = tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2
scoord(1) = tab_box(2,1)
do i=1,nsec.s
scoord(i+1) = sqrt(scoord(i)**2+xstep)
enddo
! initializing the inertia index
inertia = 0.0
AREA=0.0
rho=2650.0
surf=tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2
k2=0
nbP=0
! cycling over particles
do i=1,nbParticules
cooric=TAB.DISK(i)%centre(1:2)
rr = sqrt(cooric(1)**2+cooric(2)**2)
k1=floor((rr**2-tab_box(2,1)**2)/surf*real(nsec.s))+1

```

```

if (rr < 0.092.AND. rr>0.05) then
m = Pi*TAB.DISK(i)%Radius**2*rho
inertia(k1) = inertia(k1) + m*sqrt(TAB.DISK(i)%V(1)**2+TAB.DISK(i)%V(2)**2)
k2=k2+1
rav = rav + TAB.DISK(i)%Radius
nbP(k1) = nbP(k1) +1
endif
end do
rav = rav/k2
do i=1,nsec_s
inertia(i) =inertia(i)/nbP(i)
enddo

write(109,'(7(3x,E14.7))') time,rav,inertia(1),inertia(2),&
inertia(3),inertia(4),inertia(5)

end subroutine

!=====
! evaluation of the stress tensor
!=====

subroutine stress_tensor
implicit none
integer :: nfile,ic,ac
integer :: i,j,k1,k2
real(kind=8) :: xstep,rho,m,rr,surf
real(kind=8) :: scoord,AREA
real(kind=8) :: s11,s12,s21,s22,f11,f12,f21,f22
real(kind=8) :: m11,m12,m21,m22,mom1,mom2
real(kind=8) :: rln,rlt,rtc
real(kind=8),dimension(2) :: Ipoint,tuc,nuc,Fik,Lik
real(kind=8),dimension(2) :: Gik,Dik,test,xc
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac

! evaluating the coordinates of the layers
xstep=(tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2)/real(nsec_s,kind=8)
surf = tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2
! initializing stress tensors
s11=0.0
s12=0.0
s22=0.0
s21=0.0
! initializing force tensors
f11=0.0
f12=0.0
f22=0.0
f21=0.0
! initializing couple force tensors
m11=0.0
m12=0.0
m22=0.0
m21=0.0
mom1=0.0
mom2=0.0
! initializing the surface
AREA=0.0
surf=tab_box(2,2)**2-tab_box(2,1)**2
! cycling over contacts
do i=1,nb_lineCONTACT
! importing contact info
ic=TAB.CONTACT(i)%icdent
ac=TAB.CONTACT(i)%aianent
nuc=TAB.CONTACT(i)%n(1:2)
tuc=TAB.CONTACT(i)%t(1:2)
rln=TAB.CONTACT(i)%rln
rlt=TAB.CONTACT(i)%rt

```



```

Ipoint=TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:2)
! evaluating the vectors
Fik=rln*nuc+rlt*tuc
cooric=TAB.DISK(ic)%centre(1:2)
coorac=TAB.DISK(ac)%centre(1:2)

if (ic < nbParticules+1.AND.ac < nbParticules+1) then
Lik = cooric(1:2) - Ipoint(1:2)
f11 = f11 + Fik(1)*Lik(1)
f12 = f12 + Fik(1)*Lik(2)
f21 = f21 + Fik(2)*Lik(1)
f22 = f22 + Fik(2)*Lik(2)
mom1 = mom1 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(1)
mom2 = mom2 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(2)
Lik = Ipoint(1:2) - coorac(1:2)
f11 = f11 + Fik(1)*Lik(1)
f12 = f12 + Fik(1)*Lik(2)
f21 = f21 + Fik(2)*Lik(1)
f22 = f22 + Fik(2)*Lik(2)
mom1 = mom1 - (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(1)
mom2 = mom2 - (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(2)
Lik = cooric(1:2) - coorac(1:2)
xc(1)=(TAB.BD(3)%centre(1) + TAB.BD(1)%centre(1))/2.0
xc(2)=(TAB.BD(2)%centre(2) + TAB.BD(4)%centre(2))/2.0
m11 = m11 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*(Ipoint(1)-xc(1))
m22 = m22 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*(Ipoint(2)-xc(2))
endif
end do

AREA=(TAB.BD(3)%centre(1) - TAB.BD(1)%centre(1) - 0.4)* &
      (TAB.BD(2)%centre(2) - TAB.BD(4)%centre(2) - 0.4)

s11=f11/AREA
s12=f12/AREA
s22=f22/AREA
s21=f21/AREA
m11=m11/AREA
m12=m12/AREA
m22=m22/AREA
m21=m21/AREA
mom1=mom1/AREA
mom2=mom2/AREA

write(106,'(9(3x,E14.7))' time,s11,s12,s21,s22,mom1,mom2,m11,m22)
end subroutine

!=====
! evaluation of the strain tensor
!=====

subroutine strain_tensor
implicit none
integer :: nfile,ic,ac
integer :: i,j,k1,k2,itot
real(kind=8) :: xstep,rr,surf
real(kind=8) :: scoord,AREA
real(kind=8) :: e11,e12,e21,e22,omega,curv1,curv2
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac
integer :: nb.triangle
real(kind=8),dimension(:),allocatable :: u11,u12,u21,u22,kappa1,kappa2

! preparing for the triangulation
itot = nbParticules
! allocating the particle strain
allocate(u11(nbParticules))
allocate(u12(nbParticules))
allocate(u21(nbParticules))

```

```

allocate(u22(nbParticules))
allocate(kappa1(nbParticules))
allocate(kappa2(nbParticules))
u11=0.0
u12=0.0
u21=0.0
u22=0.0
kappa1=0.0
kappa2=0.0
! cycling to evaluate particle strain
do i=1,nbParticules
if (TAB_DISK(i)%lieu < 2) then
do j=1,TAB_DISK(i)%neigh
k2=TAB_DISK(i)%nlist(j)
u11(i) = u11(i) + TAB_TR(k2)%u(1,1)/TAB_DISK(i)%surf
u12(i) = u12(i) + TAB_TR(k2)%u(1,2)/TAB_DISK(i)%surf
u21(i) = u21(i) + TAB_TR(k2)%u(2,1)/TAB_DISK(i)%surf
u22(i) = u22(i) + TAB_TR(k2)%u(2,2)/TAB_DISK(i)%surf
kappa1(i) = kappa1(i) + TAB_TR(k2)%curv(1)/TAB_DISK(i)%surf
kappa2(i) = kappa2(i) + TAB_TR(k2)%curv(2)/TAB_DISK(i)%surf
enddo
u11(i) = u11(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u12(i) = u12(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u21(i) = u21(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u22(i) = u22(i)*TAB_DISK(i)%surf0
kappa1(i) = kappa1(i)*TAB_DISK(i)%surf0
kappa2(i) = kappa2(i)*TAB_DISK(i)%surf0
endif
enddo
write(6,*) `strains evaluated`
! evaluating the coordinates of the layers
xstep=(tab.box(2,2)**2-tab.box(2,1)**2)/real(nsec_s,kind=8)
surf = tab.box(2,2)**2-tab.box(2,1)**2
! initializing strain tensors
e11=0.0
e12=0.0
e22=0.0
e21=0.0
omega=0.0
curv1=0.0
curv2=0.0
AREA=0.0
! cycling over particles
do i=1,nbParticules
! importing info
if (TAB_DISK(i)%lieu < 2) then
e11 = e11 + u11(i)
e12 = e12 + u12(i)
e21 = e21 + u21(i)
e22 = e22 + u22(i)
omega=omega + TAB_DISK(i)%V(3)*TAB_DISK(i)%surf0
curv1=curv1 + kappa1(i)
curv2=curv2 + kappa2(i)
AREA=AREA + TAB_DISK(i)%surf0
! write(6,*) i,TAB_DISK(i)%surf0
endif
end do
rr=(TAB_BD(3)%centre(1) - TAB_BD(1)%centre(1) - 0.4)* &
(TAB_BD(2)%centre(2) - TAB_BD(4)%centre(2) - 0.4)

write(6,*) `summed over particles`
write(6,*) `AREA:`, AREA, AREA-rr
write(6,*) `five`
e11=e11/AREA
e12=e12/AREA

```

```

e22=e22/AREA
e21=e21/AREA
omega = omega/AREA
curv1 = curv1/AREA
curv2 = curv2/AREA
! writing in files the total stress tensor
write(107,'(8(3x,E14.7))' ) time,e11,e12,e21,e22,omega,curv1,curv2

deallocate(u11)
deallocate(u12)
deallocate(u21)
deallocate(u22)

end subroutine

!=====
! evaluation of the delaunay triangulation and the voronoi cells
!=====

subroutine delaunay
implicit none
integer :: ic,ac,c1,c2
integer :: i,j,k1,k2,itot,k,kk,kz
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac
real(kind=8),dimension(2) :: nor,vel,nuc,tuc
real(kind=8) :: rr
integer :: nb_triangle
real(kind=8),dimension(:,,:),allocatable :: node_xy,v_xy
integer,dimension(:,,:),allocatable :: triangle_node,triangle_neighbor

c1 = 1
c2 = 1
! preparing for the triangulation
itot = nbParticules
allocate(node_xy(2,itot))
allocate(v_xy(3,itot))
allocate(triangle_neighbor(3,itot*2))
allocate(triangle_node(3,itot*2))
! reading in what is necessary from the assembly disks
do i=1,nbParticules
node_xy(1,i)=TAB_DISK(i)%centre(1)
node_xy(2,i)=TAB_DISK(i)%centre(2)
v_xy(1,i)=TAB_DISK(i)%V(1)
v_xy(2,i)=TAB_DISK(i)%V(2)
v_xy(3,i)=TAB_DISK(i)%V(3)
TAB_DISK(i)%neigh=0
TAB_DISK(i)%surf=0.0
TAB_DISK(i)%surf0=0.0
end do
! calling the triangulation
call dtris2( itot, node_xy, nb_triangle, triangle_node, &
            triangle_neighbor )
if (allocated(TAB_TR)) deallocate(TAB_TR)
allocate(TAB_TR(nb_triangle))
! circling the triangles -first-
do i=1,nb_triangle
TAB_TR(i)%ou=0.0
TAB_TR(i)%curv=0.0
TAB_TR(i)%num=i
k2=triangle_node(1,i)
TAB_TR(i)%nod(1)=k2
TAB_TR(i)%coor(1:2,1)=node_xy(1:2,k2)
cooric = -node_xy(1:2,k2)
coorac = -node_xy(1:2,k2)
k2=triangle_node(2,i)
TAB_TR(i)%nod(2)=k2
TAB_TR(i)%coor(1:2,2)=node_xy(1:2,k2)

```

```

cooric = cooric + node.xy(1:2,k2)
k2=triangle_node(3,i)
TAB.TR(i)%nod(3)=k2
TAB.TR(i)%coor(1:2,3)=node.xy(1:2,k2)
coorac = coorac + node.xy(1:2,k2)
TAB.TR(i)%surf=abs(cooric(1)*coorac(2) &
-cooric(2)*coorac(1))/2.0
do j=1,3
k2=triangle_node(j,i)
if (k2 < nbParticules+1) then
TAB.DISK(k2)%neigh=TAB.DISK(k2)%neigh+1
TAB.DISK(k2)%nlist(TAB.DISK(k2)%neigh) =i
TAB.DISK(k2)%pos(TAB.DISK(k2)%neigh) =j
TAB.DISK(k2)%surf=TAB.DISK(k2)%surf+TAB.TR(i)%surf
endif
end do
call triangle_circumcenter_2d(TAB.TR(i)%coor,TAB.TR(i)%centre)
end do
! circling the triangles -second-
! this evaluates the unweighted strain of each triangle
do i=1,nb_triangle
! first side
k1=triangle_node(1,i)
k2=triangle_node(2,i)
! getting attributes
cooric = node.xy(1:2,k1)
coorac = node.xy(1:2,k2)
vic = v.xy(1:2,k1)
vac = v.xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v.xy(3,k1)+v.xy(3,k2))/2.0
TAB.TR(i)%u(1,1)=TAB.TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB.TR(i)%u(1,2)=TAB.TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB.TR(i)%u(2,1)=TAB.TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB.TR(i)%u(2,2)=TAB.TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB.TR(i)%curv(1)=TAB.TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB.TR(i)%curv(2)=TAB.TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
! second side
k1=triangle_node(2,i)
k2=triangle_node(3,i)
! getting attributes
cooric = node.xy(1:2,k1)
coorac = node.xy(1:2,k2)
vic = v.xy(1:2,k1)
vac = v.xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v.xy(3,k1)+v.xy(3,k2))/2.0
TAB.TR(i)%u(1,1)=TAB.TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB.TR(i)%u(1,2)=TAB.TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB.TR(i)%u(2,1)=TAB.TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB.TR(i)%u(2,2)=TAB.TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB.TR(i)%curv(1)=TAB.TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB.TR(i)%curv(2)=TAB.TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
! third side
k1=triangle_node(3,i)
k2=triangle_node(1,i)
! getting attributes

```

```

cooric = node.xy(1:2,k1)
coorac = node.xy(1:2,k2)
vic = v.xy(1:2,k1)
vac = v.xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v.xy(3,k1)+v.xy(3,k2))/2.0
TAB_TR(i)%u(1,1)=TAB_TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(1,2)=TAB_TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB_TR(i)%u(2,1)=TAB_TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(2,2)=TAB_TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB_TR(i)%curv(1)=TAB_TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%curv(2)=TAB_TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
end do
open (unit=456,file='tri_neigh.dat',status='replace')
do i=1,nb_triangle
write(456,*) i,triangle_neighbor(1,i),triangle_neighbor(2,i),&
triangle_neighbor(3,i)
enddo
close(456)
open (unit=457,file='tri_nod.dat',status='replace')
do i=1,nb_triangle
write(457,*) i,triangle_node(1,i),triangle_node(2,i),&
triangle_node(3,i)
enddo
close(457)
open (unit=458,file='tri_cent.dat',status='replace')
do i=1,nb_triangle
write(458,*) i,TAB_TR(i)%centre(1),TAB_TR(i)%centre(2)
enddo
close(458)
open (unit=459,file='tri_ncoor.dat',status='replace')
do i=1,itot
write(459,*) i,node_xy(1,i),node_xy(2,i)
enddo
close(459)
write(6,*) 'triangle strain evaluated'
! sorting the triangles of each particle in
! counterclockwise order
do i=1,nbParticules
call box_check(c2,TAB_DISK(i)%centre(1),TAB_DISK(i)%centre(2))
if (c2.lt.1) then
TAB_DISK(i)%lieu = 2
TAB_DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif
do j=2,TAB_DISK(i)%neigh
! locating the current triangle
k1=TAB_DISK(i)%nlist(j-1)
! pinpointing the position of the node in it
k2=TAB_DISK(i)%pos(j-1)
! evaluating the position in the triangle list
k2=k2-1
if (k2 < 1) k2=3
! locating the next triangle
TAB_DISK(i)%nlist(j) = triangle_neighbor(k2,k1)
k2= triangle_neighbor(k2,k1)
! write(6,*) 'sofarsogood05',i
! write(6,*) i,TAB_DISK(i)%nlist(j-1),TAB_DISK(i)%pos(j-1),k2,TAB_DISK(i)%neigh

if (k2 < 1) then
TAB_DISK(i)%lieu = 2

```

```

TAB.DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif
call box_check(c1,TAB.TR(k1)%centre(1),TAB.TR(k1)%centre(2))
call box_check(c2,TAB.TR(k2)%centre(1),TAB.TR(k2)%centre(2))

if (c1*c2.lt.1) then
TAB.DISK(i)%lieu = 2
TAB.DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif

! locating the particle in the new triangle
do k=1,3
if (triangle_node(k,k2)==i) TAB.DISK(i)%pos(j)=k
enddo
cooric = -TAB.DISK(i)%centre(1:2)
coorac = -TAB.DISK(i)%centre(1:2)
cooric = cooric + TAB.TR(k1)%centre(1:2)
coorac = coorac + TAB.TR(k2)%centre(1:2)
TAB.DISK(i)%surf0=TAB.DISK(i)%surf0 + &
      abs(cooric(1)*coorac(2)-cooric(2)*coorac(1))/2.0
enddo
k1 = TAB.DISK(i)%nlist(1)
k2 = TAB.DISK(i)%nlist(TAB.DISK(i)%neigh)
cooric = -TAB.DISK(i)%centre(1:2)
coorac = -TAB.DISK(i)%centre(1:2)
cooric = cooric + TAB.TR(k1)%centre(1:2)
coorac = coorac + TAB.TR(k2)%centre(1:2)
TAB.DISK(i)%surf0=TAB.DISK(i)%surf0 + &
      abs(cooric(1)*coorac(2)-cooric(2)*coorac(1))/2.0
call box_check(c1,TAB.TR(k1)%centre(1),TAB.TR(k1)%centre(2))
call box_check(c2,TAB.TR(k2)%centre(1),TAB.TR(k2)%centre(2))

if (c1*c2.lt.1) then
TAB.DISK(i)%lieu = 2
TAB.DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif

20 continue
enddo
open (unit=460,file='tri_ngtri.dat',status='replace')
do i=1,TAB.DISK(500)%neigh
write(460,*) TAB.DISK(500)%nlist(i)
enddo
write(460,*) TAB.DISK(500)%surf
write(460,*) TAB.DISK(500)%surf0
close(460)
! deallocating what is no longer needed
deallocate(node_xy)
deallocate(v_xy)
deallocate(triangle_neighbor)
deallocate(triangle_node)

end subroutine

!=====
! Write one GMV File
!=====

subroutine write_one_gmvfile
implicit none
integer :: i,j,k,nb_nodev
character(len=5),dimension(:),allocatable :: list_body_material,list_material
integer :: nb_body_material,GMV_nb_materials

write(1003,'(A14)') 'gmvinput ascii'

```

```

write(1003,(A8)) 'comments'
write(1003,(A7)) 'endcomm'
!----- Nodev
nb_nodev = 20 * nbParticules
write(1003,(A5,I10)) 'nodev',nb_nodev
do i = 1,nbParticules
call write_gmv_nodev_part(TAB_DISK(i)%centre,TAB_DISK(i)%radius)
end do
!----- Cell
write(1003,(A5,I10)) 'cells',0
!----- List Material
k = 0
GMV_nb_materials = 0
nb_body_material = 0
allocate( list_body_material(20) )
call construct_list_material( nb_body_material , list_body_material )

!-----> + Weak force and strong force
GMV_nb_materials = GMV_nb_materials + 2
k = k + 2
!-----> + Contact line
GMV_nb_materials = GMV_nb_materials + 1
k = k + 1
!-----> + Behav grains
GMV_nb_materials = GMV_nb_materials + nb_body_material
allocate( list_material(GMV_nb_materials) )
!----- List of materials
list_material(1) = 'STRON'
list_material(2) = 'WEAK '
list_material(3) = 'CTC '
do i=k+1,GMV_nb_materials
list_material(i) = list_body_material(i-k)
end do
write(1003,(A8,I7,2X,I1)) 'material',GMV_nb_materials,1
do i = 1,GMV_nb_materials
write(1003,(A5)) list_material(i)
end do
do i = 1,nbParticules
write(1003,(I6,I6,I6,I6,I6,I6,I6,I6)) 1,1,1,1,1,1,1,1,1
write(1003,(I6,I6,I6,I6,I6,I6,I6,I6)) 1,1,1,1,1,1,1,1,1
end do
!----- Surface material
write(1003,(A7,I1X,I7)) 'surface',nbParticules
do i = 1,nbParticules
write(1003,(I2)) 20
write(1003,(8(I10,I1X)) ((i-1)*20+j,j=1,20)
end do
write(1003,(A8)) 'surfmat'
call write_surface_material(k,list_material,GMV_nb_materials)
!----- Surface variables
write(1003,(A8)) 'surfvars'
call write_surface_velocity
write(1003,(A8)) 'endsvars'
!----- Polygones
write(1003,(A8)) 'polygons'
call write_line_force
call write_line_contact
write(1003,(A7)) 'endpoly'
!-----
write(1003,(A6)) 'endgmv'
end subroutine write_one_gmvfile
!----- SUBROUTINES TO WRITE A GMV FILE... -----
subroutine write_gmv_nodev_part(Particle_centre,Particle_radius)
implicit none
integer :: i

```

```

real(kind=8) :: X,Y,Z
real(kind=8),dimension(3) :: Particle_centre
real(kind=8) :: Particle_radius

X = 0.D0
Y = 0.D0
Z = 0.D0
do i=1,20
X = Particle_centre(1) + cos( i * 2 * Pi/20 ) * Particle_radius
Y = Particle_centre(2) + sin( i * 2 * Pi/20 ) * Particle_radius
write(1003,'(3(1X,E14.7))') X,Y,Z
end do
end subroutine write_gmv_nodev_part

subroutine construct_list_material(nb_body_material,tab_body_mat_TEMP)
implicit none
integer :: i,j,nb_body_material
character(len=5),dimension(:),allocatable :: tab_body_mat
character(len=5),dimension(20) :: tab_body_mat_TEMP !ASSUME NO MORE THAN 20 BEHAV...

tab_body_mat_TEMP(:) = 'VIDE '
nb_body_material = 0
allocate( tab_body_mat(nbParticules) )
do i=1,nbParticules
if ( i < nbParticules + 1 ) tab_body_mat(i) = TAB_DISK(i)%behav
! if ( i > nbParticules ) tab_body_mat(i) = TAB_PLAN(i - nbParticules )%behav
end do
do i=1,nbParticules
do j=1,20
if ( tab_body_mat(i) == tab_body_mat_TEMP(j) ) then
exit
else
if ( tab_body_mat_TEMP(j) == 'VIDE ' ) then
tab_body_mat_TEMP(j) = tab_body_mat(i)
exit
else
cycle
end if
end if
end do
end do
do i=1,20
if (tab_body_mat_TEMP(i) /= 'VIDE ') nb_body_material = nb_body_material + 1
end do
end subroutine construct_list_material

subroutine write_surface_material(k,list_material,nb_body_material)
implicit none
integer :: i,j,k,cpt,nb_body_material
integer,dimension(:),allocatable :: tab_material
character(len=5),dimension(:),allocatable :: list_material

cpt = 0
allocate(tab_material(nbParticules))
do i=1,nbParticules
cpt = cpt + 1
do j=1,nb_body_material
if ( list_material(k+j) == TAB_DISK(i)%behav ) exit
end do
tab_material(i) = j+k
end do
write(1003,'(8(I7))') (tab_material(j),j=1,nbParticules)
deallocate( tab_material )
end subroutine write_surface_material

subroutine write_surface_velocity
implicit none

```



```

integer :: i

write(1003,'(A5)') '< V>'
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (sqrt( TAB.DISK(i)%V(1)**2 + TAB.DISK(i)%V(2)**2 + &
    TAB.DISK(i)%V(3)**2),i=1,nbParticules)

end subroutine write_surface_velocity

subroutine write_line_force
implicit none
integer :: i,j,cpt,cd,an
real(kind=8) :: faverag,fmax,X1,Y1,X,Y,Ax1,Ax2
real(kind=8),dimension(:,:,:),allocatable :: tab_poly_force
real(kind=8),dimension(3) :: centre

cpt = 0
faverag = 0
fmax = 0
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJCx') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
faverag = faverag + TAB.CONTACT(i)%rm
fmax = max(fmax,TAB.CONTACT(i)%rm)
cpt = cpt + 1
end do
faverag = faverag / real(cpt,8)

allocate( tab_poly_force(cpt,3,40) )
cpt = 0
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJCx') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rm == 0.D0) cycle
if (TAB.CONTACT(i)%rm < faverag) write(1003,'(17,1X,17)') 2,40
if (TAB.CONTACT(i)%rm >= faverag) write(1003,'(17,1X,17)') 1,40
cpt = cpt + 1
cd = TAB.CONTACT(i)%icident
an = TAB.CONTACT(i)%ianent
centre(1) = ( TAB.DISK(an)%centre(1) + TAB.DISK(cd)%centre(1) ) / 2
centre(2) = ( TAB.DISK(an)%centre(2) + TAB.DISK(cd)%centre(2) ) / 2
centre(3) = acos( ( TAB.DISK(an)%centre(1) - TAB.DISK(cd)%centre(1) ) / &
    sqrt( ( TAB.DISK(an)%centre(1) - TAB.DISK(cd)%centre(1) )**2 + &
    ( TAB.DISK(an)%centre(2) - TAB.DISK(cd)%centre(2) )**2 ) )
if ( (TAB.DISK(an)%centre(2) - TAB.DISK(cd)%centre(2)) < 0 ) centre(3) = - centre(3)
Ax1 = sqrt( (TAB.DISK(cd)%centre(1) - TAB.DISK(an)%centre(1))**2 + &
    (TAB.DISK(cd)%centre(2) - TAB.DISK(an)%centre(2))**2 ) / 2
Ax2 = 0.5 * (TAB.DISK(cd)%radius + TAB.DISK(an)%radius) * (TAB.CONTACT(i)%rm / fmax) !* 0.75
do j=1,20
X1 = Ax1 + cos( j * Pi/20 - Pi/2 ) * Ax2
Y1 = sin( j * Pi/20 - Pi/2 ) * Ax2
X = cos( centre(3) ) * X1 - sin( centre(3) ) * Y1 + centre(1)
Y = sin( centre(3) ) * X1 + cos( centre(3) ) * Y1 + centre(2)
tab_poly_force(cpt,1,j) = X
tab_poly_force(cpt,2,j) = Y
tab_poly_force(cpt,3,j) = 0
end do
do j=1,20
X1 = -Ax1 + cos( j * Pi/20 + Pi/2 ) * Ax2
Y1 = sin( j * Pi/20 + Pi/2 ) * Ax2
X = cos( centre(3) ) * X1 - sin( centre(3) ) * Y1 + centre(1)
Y = sin( centre(3) ) * X1 + cos( centre(3) ) * Y1 + centre(2)
tab_poly_force(cpt,1,j+20) = X
tab_poly_force(cpt,2,j+20) = Y
tab_poly_force(cpt,3,j+20) = 0
end do
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_force(cpt,1,j),j=1,40)
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_force(cpt,2,j),j=1,40)
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_force(cpt,3,j),j=1,40)

```

```

end do
deallocate( tab_poly_force )
end subroutine write_line_force

subroutine write_line_contact
implicit none
integer :: i,j,cpt,cd,an
real(kind=8) :: X1,Y1,X,Y,Ax1,Ax2,rmax,rmin
real(kind=8),dimension(:,:),allocatable :: tab_poly_contact
real(kind=8),dimension(4) :: centre

cpt = 0
rmax = 0
rmin = 1000000000
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%m==0.D0) cycle
cpt = cpt + 1
end do
do i = 1, nbParticules
rmax = max(rmax,TAB.DISK(i)%Radius)
rmin = min(rmin,TAB.DISK(i)%Radius)
end do
allocate( tab_poly_contact(cpt,3,40) )
cpt = 0
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB.CONTACT(i)%nature == 'DKJcX') cycle
if (TAB.CONTACT(i)%m == 0.D0) cycle
cpt = cpt + 1
cd = TAB.CONTACT(i)%icdent
an = TAB.CONTACT(i)%ianent
centre(1) = ( TAB.DISK(an)%centre(1) + TAB.DISK(cd)%centre(1) ) / 2
centre(2) = ( TAB.DISK(an)%centre(2) + TAB.DISK(cd)%centre(2) ) / 2
centre(3) = acos( ( TAB.DISK(an)%centre(1) - TAB.DISK(cd)%centre(1) ) / &
sqrt(( TAB.DISK(an)%centre(1) - TAB.DISK(cd)%centre(1) )**2 + &
( TAB.DISK(an)%centre(2) - TAB.DISK(cd)%centre(2) )**2 ) )
if ( ( TAB.DISK(an)%centre(2) - TAB.DISK(cd)%centre(2) ) < 0 ) centre(3) = - centre(3)

Ax1 = sqrt( (TAB.DISK(cd)%centre(1) - TAB.DISK(an)%centre(1))**2 + &
(TAB.DISK(cd)%centre(2) - TAB.DISK(an)%centre(2))**2 ) / 2

Ax2 = 0.25 * rmin

write(1003,'(I7,1X,I7)') 3,40

do j=1,20
X1 = Ax1 + cos( j * Pi/20 - Pi/2 ) * Ax2
Y1 = sin( j * Pi/20 - Pi/2 ) * Ax2
X = cos( centre(3) ) * X1 - sin( centre(3) ) * Y1 + centre(1)
Y = sin( centre(3) ) * X1 + cos( centre(3) ) * Y1 + centre(2)
tab_poly_contact(cpt,1,j) = X
tab_poly_contact(cpt,2,j) = Y
tab_poly_contact(cpt,3,j) = 0
end do
do j=1,20
X1 = -Ax1 + cos( j * Pi/20 + Pi/2 ) * Ax2
Y1 = sin( j * Pi/20 + Pi/2 ) * Ax2
X = cos( centre(3) ) * X1 - sin( centre(3) ) * Y1 + centre(1)
Y = sin( centre(3) ) * X1 + cos( centre(3) ) * Y1 + centre(2)
tab_poly_contact(cpt,1,j+20) = X
tab_poly_contact(cpt,2,j+20) = Y
tab_poly_contact(cpt,3,j+20) = 0
end do
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_contact(cpt,1,j),j=1,40)
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_contact(cpt,2,j),j=1,40)
write(1003,'(8(E14.7,1X))') (tab_poly_contact(cpt,3,j),j=1,40)

```

```

end do
deallocate( tab_poly_contact )
end subroutine write_line_contact

!=====
! Lecture des donnees
!=====

subroutine read_Vloc_dof_bodies
implicit none
integer :: i_err,num_part
character(len=23) :: cl_DOF
character(len=29) :: cl_Vloc
character(len=6) :: text
character(len=13) :: text2
character(len=5) :: statut,behav
real(kind=8) :: centre1,centre2,centre3
real(kind=8) :: coor1,coor2,coor3
real(kind=8) :: Vx,Vy,Vr
real(kind=8) :: Radius,ax1,ax2
integer :: nb_dkdkx,nb_dkjc
integer :: icdent,ianent
real(kind=8) :: n1,n2,n3
real(kind=8) :: rn,rt,rs
real(kind=8) :: vln,vlt,vls
real(kind=8) :: coor_etc1,coor_etc2,coor_etc3

if (all_steps==0) then
counter_cl = counter_cl+1
cl_DOF = './OUTBOX/DOF.OUT.'
cl_Vloc = './OUTBOX/Vloc_Rloc.OUT.'
else
counter_cl = all_steps
cl_DOF = './OUTBOX/DOF.OUT.'
cl_Vloc = './OUTBOX/Vloc_Rloc.OUT.'
end if

if (counter_cl < 10) then
WRITE(cl_DOF(19:20),'(I1)') counter_cl
WRITE(cl_Vloc(25:26),'(I1)') counter_cl
else if ( (counter_cl >=10) .and. (counter_cl < 100) ) then
WRITE(cl_DOF(19:21),'(I2)') counter_cl
WRITE(cl_Vloc(25:27),'(I2)') counter_cl
else if ( (counter_cl >=100) .and. (counter_cl < 1000) ) then
WRITE(cl_DOF(19:22),'(I3)') counter_cl
WRITE(cl_Vloc(25:28),'(I3)') counter_cl
WRITE(cl_DOF(1:2),'(A2)') '..'
else if ( (counter_cl >=1000) .and. (counter_cl < 10000) ) then
WRITE(cl_DOF(19:23),'(I4)') counter_cl
WRITE(cl_Vloc(25:29),'(I4)') counter_cl
WRITE(cl_DOF(1:2),'(A2)') '..'
end if

if (the_first_time) then
open(unit=2,file='./DATBOX/BODIES.DAT',status='old')
allocate(TAB_DISK(nbParticules))
allocate(TAB_BD(nb_bound1))
i=0
do
read(2,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i + 1
TAB_DISK(i)%num=i
read(2,*)
read(2,*)
read(2,'(22X,A5,7X,D14.7)') behav,Radius
TAB_DISK(i)%behav = behav

```

```

read(2,*)
read(2,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') centre1,centre2,centre3
TAB.DISK(i)%centre.ref(1)=centre1
TAB.DISK(i)%centre.ref(2)=centre2
TAB.DISK(i)%centre.ref(3)=centre3
read(2,*)
read(2,*)
TAB.DISK(i)%Radius=Radius
TAB.DISK(i)%Area=Pi*Radius*Radius
TAB.DISK(i)%lieu=1
TAB.DISK(i)%centre(:)=0.D0
end if
if (i==nbParticules) exit
end do
i=0
do
read(2,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i + 1
TAB.BD(i)%num=i
read(2,*)
read(2,*)
read(2,'(22X,A5)') behav
TAB.BD(i)%behav = behav
read(2,*)
read(2,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') centre1,centre2,centre3
TAB.BD(i)%centre.ref(1)=centre1
TAB.BD(i)%centre.ref(2)=centre2
TAB.BD(i)%centre.ref(3)=centre3
read(2,*)
read(2,'(29X, (5x,D14.7,2X))') Radius
TAB.BD(i)%Radius=Radius
TAB.BD(i)%Area=Pi*Radius*Radius
TAB.BD(i)%lieu=1
TAB.BD(i)%centre(:)=0.D0
end if
if (i==nb_bound1) exit
end do
the_first_time=.false.
end if
open(unit=5,file=cl_DOF,iostat=err,status='old')
if (err/=0) then
fin_post=.true.
else
fin_post=.false.
i = 0
do
i=i+1
TAB.DISK(i)%lieu=1
if (i==nbParticules) exit
end do
i = 0
read(5,*)
read(5,*)
read(5,*)
read(5,'(7X,i8,19X,D14.7)') steps,time
print*, 'time step n:',steps, time
print*, '—>',cl_DOF
do
read(5,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i+1
read(5,'(6X,i9)') num_part
read(5,*)
read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor1,coor2,coor3

```

```

read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') Vx,Vy,Vr
TAB_DISK(i)%centre(1)=coor1+TAB_DISK(i)%centre.ref(1)
TAB_DISK(i)%centre(2)=coor2+TAB_DISK(i)%centre.ref(2)
TAB_DISK(i)%centre(3)=coor3+TAB_DISK(i)%centre.ref(3)
TAB_DISK(i)%V(1) = Vx
TAB_DISK(i)%V(2) = Vy
TAB_DISK(i)%V(3) = Vr
if (i==nbParticules) exit
end if
end do
i=0
do
read(5,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i+1
read(5,'(6X,i9)') num_part
read(5,*)
read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor1,coor2,coor3
read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') Vx,Vy,Vr
TAB_BD(i)%centre(1)=coor1+TAB_BD(i)%centre.ref(1)
TAB_BD(i)%centre(2)=coor2+TAB_BD(i)%centre.ref(2)
TAB_BD(i)%centre(3)=coor3+TAB_BD(i)%centre.ref(3)
TAB_BD(i)%V(1) = Vx
TAB_BD(i)%V(2) = Vy
TAB_BD(i)%V(3) = Vr
if (i==nb_bound1) exit
end if
end do
end if
nb_dkdkx=0
nb_dkjcx=0
open(unit=4,file=c1.Vloc,iostat=err,status='old')
if (err/=0) then
else
print*,'—>',c1.Vloc
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
do
read(4,'(A13)',iostat=err) text2
if (err/=0) then
close(2)
close(4)
close(5)
exit
end if
if (text2 == '!————') exit
if (text2 == '$icdan PLPLx') then
nb_dkdkx = nb_dkdkx +1
end if
if (text2 == '$icdan PLJcx') then
nb_dkjcx = nb_dkjcx +1
end if
if (text2 == '$icdan DKPDx') then
nb_dkjcx = nb_dkjcx +1
end if
end do
close(4)
if (allocated(TAB_CONTACT)) deallocate(TAB_CONTACT)
allocate(TAB_CONTACT(nb_dkjcx+nb_dkdkx))
nb_dkdkx=0
nb_dkjcx=0

```

```

nb_lineCONTACT=0
open(unit=4,file=cl_Vloc,status='old')
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
do
read(4,'(A13)',iostat=err) text2
if (err/=0) then
close(4)
exit
end if
if (text2 == '!————') exit
if (text2 == '$icdan PLJCx') then
read(4,*)
read(4,'(8X,15,44X,15,30X,A5)') icdent,ianent,statut
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') rt,rm,rs
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') vlt,vln,vls
read(4,*)
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') n1,n2,n3
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor_etc1,coor_etc2,coor_etc3
nb_lineCONTACT=nb_lineCONTACT+1
nb.dkjcx = nb.dkjcx + 1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%icdent=icdent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%ianent=ianent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%statut=statut
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(1)=n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(2)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(3)=n3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(1)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(2)=-n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(3)=0.D0
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(1)=coor_etc1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(2)=coor_etc2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(3)=coor_etc3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%rm=rm
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%rt=rt
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%rs=rs
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%nature='DKJCx'
end if
if (text2 == '$icdan PLPLx') then
read(4,*)
read(4,'(8X,15,44X,15,30X,A5)') icdent,ianent,statut
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') rt,rm,rs
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') vlt,vln,vls
read(4,*)
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') n1,n2,n3
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor_etc1,coor_etc2,coor_etc3
nb_lineCONTACT=nb_lineCONTACT+1
nb.dkdkx = nb.dkdkx + 1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%icdent=icdent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%ianent=ianent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%statut=statut
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(1)=n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(2)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%n(3)=n3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(1)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(2)=-n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%t(3)=0.D0
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(1)=coor_etc1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(2)=coor_etc2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%coor_etc(3)=coor_etc3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdkx)%rm=rm

```

```

TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%rt=rt
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%rs=rs
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%vn=vlt
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%vl=vln
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%vs=vls
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%nature='DKDKx'
end if
end do
end if
end subroutine read_Vloc_dof_bodies

!===== ! Test contact
!=====

subroutine test_position_contact
implicit none
integer :: i
real(kind=8) :: xmax,ymax,rmax
real(kind=8) :: xmin,ymin,rmin
real(kind=8) :: rcoor,rad

xmax=-1000000000.D0
ymax=-1000000000.D0
rmax=-1000000000.D0
xmin=1000000000.D0
ymin=1000000000.D0
rmin=1000000000.D0
rad=0.0
do i=1,nbParticules
rcoor=TAB.DISK(i)%centre(1)**2+TAB.DISK(i)%centre(2)**2
xmax=max(xmax,TAB.DISK(i)%centre(1))
ymax=max(ymax,TAB.DISK(i)%centre(2))
rmax=max(rmax,sqrt(rcoor))
xmin=min(xmin,TAB.DISK(i)%centre(1))
ymin=min(ymin,TAB.DISK(i)%centre(2))
rmin=min(rmin,sqrt(rcoor))
rad=rad+TAB.DISK(i)%Radius
end do
rad=rad/nbParticules
tab_box(1,1)=xmin-rad
tab_box(2,1)=ymin-rad
tab_box(2,1)=rmin-rad
tab_box(1,2)=xmax+rad
tab_box(2,2)=ymax+rad
tab_box(2,2)=rmax+rad

height=tab_box(2,2)-tab_box(2,1)
length=tab_box(1,2)-tab_box(1,1)

end subroutine test_position_contact

!=====
! check whether a location is in box
!=====

subroutine box_check(cc,xx,yy)
integer :: cc
real(kind=8) :: xx,yy

cc=2
if(xx.gt.TAB.BD(3)%centre(1)-0.25) cc=0
if(yy.gt.TAB.BD(2)%centre(2)-0.25) cc=0
if(xx.lt.TAB.BD(1)%centre(1)+0.25) cc=0
if(yy.lt.TAB.BD(4)%centre(2)+0.25) cc=0

end subroutine box_check

!=====
! Closing the files

```

```

=====
subroutine shut_down
implicit none

if (calcul_coordination == 1) close (100)
if (calcul_qoverp == 1) close (103)
if (calcul_contact_anisotropy == 1) close (104)
if (calcul_force_anisotropy == 1) close (105)
if (calcul_orientation == 1) then
close(1000)
close(1001)
close(1002)
end if
if (calcul_gmv_file == 1) close (1003)

end subroutine shut_down

=====
=====
=====

!That's all folks!

=====

end program post2Dc

```

B.2 Mesoscale postprocessing

```

program post2locDc

use def
use mymods
use triang_init

implicit none

type(T_CORPS),allocatable,dimension(:) :: TAB_DISK,TAB_BD
type(T_CONTACT),allocatable,dimension(:) :: TAB_CONTACT,TAB_CONTACT_INITIAL
type(T_CONTACT),allocatable,dimension(:) :: TAB_CONTACTF
type(T_TRIANGLE),allocatable,dimension(:) :: TAB_TR

!DEFINITIONS Vloc-Dof-Bodies
=====
integer :: nb_pari=0,fin=0,nbParticules=0
integer :: nb_bound1=4
integer :: counter_cl=0,all_steps=0
logical :: the_first_time=.true., fin_post=.false.
integer :: steps,nb_lineCONTACT
real(kind=8) :: time

!COMMANDS TO BE CALLED
=====
character(len=30) :: command
logical :: first_list_contact=.true.
integer :: nb_lineCONTACT_first=0
integer :: type_box=0,&
      calcul_stress_tensor=0,calcul_strain_tensor=0
integer :: nsec_s=0,nsec_e=0
integer,dimension(:),allocatable :: nfiles_s,nfiles_e
real(kind=8),dimension(6) :: radd

```



```

real(kind=8),dimension(2) :: xc
character(len=13) :: file_name

!AUXILIARY
!=====
integer :: i,ji

!=====
! Reading input file
!=====
print*, '-----'
print*, '! !'
print*, '! 2D Local stress and strain !'
print*, '! ln( $\epsilon$ ) !'
print*, '-----'
print*, 'Reading the basic quantities'

nbParticules = 5193
nb_bound1 = 4
all_steps = 0
xc(1) = 4.0
xc(2) = 0.0
radd(1) = 0.2
radd(2) = 0.4
radd(3) = 0.6
radd(4) = 0.8
radd(5) = 1.0
radd(6) = 1.5
calcul_stress_tensor=1
nsec_s = 6
allocate(nfiles_s(2*nsec_s))
file_name='STRESS_50.DAT'
ii=2000
do i=1,nsec_s
nfiles_s(i)=ii+i
write(file_name(9:9), '(I1)') i
open(unit=nfiles_s(i),file=trim(file_name),status='replace')
enddo
file_name='STRESD_50.DAT'
ii=2000+nsec_s
do i=1,nsec_s
nfiles_s(i+nsec_s)=ii+i
write(file_name(9:9), '(I1)') i
open(unit=nfiles_s(i+nsec_s),file=trim(file_name),status='replace')
enddo

calcul_strain_tensor=1
nsec_e = nsec_s
allocate(nfiles_e(nsec_e))
file_name='STRAIN_50.DAT'
ii=3000
do i=1,nsec_e
nfiles_e(i)=ii+i
write(file_name(9:9), '(I1)') i
open(unit=nfiles_e(i),file=trim(file_name),status='replace')
enddo

!=====
! Calling the commands
!=====
do
call read.Vloc_dof.bodies
write(6,*) 'read1'
call test_position_contact
write(6,*) 'read2'
if (all_steps==0) then
! call nb.coordination

```

```

if (calcul_stress.tensor == 1 .OR. calcul_strain.tensor == 1) call delaunay
write(6,*) 'delaunay out'
if (calcul_stress.tensor == 1) call stress_tensor
write(6,*) 'stress tensor out'
if (calcul_strain.tensor == 1) call strain_tensor
write(6,*) 'strain tensor out'

```

```

if (fin_post) then
call shut_down
print*, '-> Finished post - treatment <-'
exit
end if
end if

```

```

if (fin_post) then
call shut_down
print*, '-> Finished post - treatment <-'
exit
end if
end if
end do

```

```

=====
=====

```

contains

```

=====
! Coordination number
=====

```

```

subroutine nb_coordination
implicit none
real(kind=8) :: cooc1,cooc2,cooc3,rm,rt,rs
real(kind=8) :: vln,vlt,vls,d1,d2
real(kind=8),dimension(2) :: f1,f2,r1,r2
integer :: i,k1,ia,ic,z,z0

```

```

ia=0
ic=0
z=0

```

```

do i=1,nb_lineCONTACT
TAB_CONTACT(i)%sect=0
if (TAB_CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
if (i>1) then
if (ia==TAB_CONTACT(i)%ianent.AND.ic==TAB_CONTACT(i)%icdent) then
TAB_CONTACT(i-1)%sect = 1
TAB_CONTACT(i)%sect = 2
end if
end if
ia=TAB_CONTACT(i)%ianent
ic=TAB_CONTACT(i)%icdent
end do

```

```

do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB_CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
if (TAB_CONTACT(i)%sect == 2) cycle
z = z+1
end do
if (allocated(TAB_CONTACTF)) deallocate(TAB_CONTACTF)
allocate(TAB_CONTACTF(z))

```

```

z0=0
do i=1,nb_lineCONTACT
if (TAB_CONTACT(i)%rm==0.D0) cycle
if (TAB_CONTACT(i)%sect==2) cycle
z0=z0+1
if (TAB_CONTACT(i)%sect==1) then

```

```

TAB.CONTACTF(z0)%icident=TAB.CONTACT(i)%icident
TAB.CONTACTF(z0)%ianent=TAB.CONTACT(i)%ianent
TAB.CONTACTF(z0)%statut=TAB.CONTACT(i)%statut
TAB.CONTACTF(z0)%n(1)=TAB.CONTACT(i)%n(1)
TAB.CONTACTF(z0)%n(2)=TAB.CONTACT(i)%n(2)
TAB.CONTACTF(z0)%n(3)=TAB.CONTACT(i)%n(3)
TAB.CONTACTF(z0)%t(1)=TAB.CONTACT(i)%t(1)
TAB.CONTACTF(z0)%t(2)=TAB.CONTACT(i)%t(2)
TAB.CONTACTF(z0)%t(3)=TAB.CONTACT(i)%t(3)
ia=TAB.CONTACT(i)%ianent
ic=TAB.CONTACT(i)%icident
d1=TAB.DISK(ia)%Radius
d2=TAB.DISK(ic)%Radius
cooc1 = (TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1)+TAB.CONTACT(i+1)%coor.ctc(1))/2.0
cooc2 = (TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(2)+TAB.CONTACT(i+1)%coor.ctc(2))/2.0
cooc3 = (TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(3)+TAB.CONTACT(i+1)%coor.ctc(3))/2.0
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(1)=cooc1
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(2)=cooc2
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(3)=cooc3
cooc1 = TAB.CONTACT(i)%rn+TAB.CONTACT(i+1)%rn
cooc2 = TAB.CONTACT(i)%rt+TAB.CONTACT(i+1)%rt
r1=TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(1:2)-TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:2)
r2=TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(1:2)-TAB.CONTACT(i+1)%coor.ctc(1:2)
f1=TAB.CONTACT(i)%rn*TAB.CONTACT(i)%n(1:2) + &
    TAB.CONTACT(i)%rt*TAB.CONTACT(i)%t(1:2)
f2=TAB.CONTACT(i+1)%rn*TAB.CONTACT(i+1)%n(1:2) + &
    TAB.CONTACT(i+1)%rt*TAB.CONTACT(i+1)%t(1:2)
cooc3 = f1(1)*r1(2)-f1(2)*r1(1)+f2(1)*r2(2)-f2(2)*r2(1)
TAB.CONTACTF(z0)%rn=cooc1
TAB.CONTACTF(z0)%rt=cooc2
TAB.CONTACTF(z0)%rs=cooc3
cooc1 = (TAB.CONTACT(i)%vn+TAB.CONTACT(i+1)%vn)/2.0
cooc2 = (TAB.CONTACT(i)%vl+TAB.CONTACT(i+1)%vl)/2.0
cooc3 = (TAB.CONTACT(i)%vs+TAB.CONTACT(i+1)%vs)/2.0
TAB.CONTACTF(z0)%vn=cooc1
TAB.CONTACTF(z0)%vl=cooc2
TAB.CONTACTF(z0)%vs=cooc3
TAB.CONTACTF(z0)%nature=TAB.CONTACT(i)%nature
TAB.CONTACTF(z0)%sect=1
else
TAB.CONTACTF(z0)%icident=TAB.CONTACT(i)%icident
TAB.CONTACTF(z0)%ianent=TAB.CONTACT(i)%ianent
TAB.CONTACTF(z0)%statut=TAB.CONTACT(i)%statut
TAB.CONTACTF(z0)%n(1)=TAB.CONTACT(i)%n(1)
TAB.CONTACTF(z0)%n(2)=TAB.CONTACT(i)%n(2)
TAB.CONTACTF(z0)%n(3)=TAB.CONTACT(i)%n(3)
TAB.CONTACTF(z0)%t(1)=TAB.CONTACT(i)%t(1)
TAB.CONTACTF(z0)%t(2)=TAB.CONTACT(i)%t(2)
TAB.CONTACTF(z0)%t(3)=TAB.CONTACT(i)%t(3)
ia=TAB.CONTACT(i)%ianent
ic=TAB.CONTACT(i)%icident
d1=TAB.DISK(ia)%Radius
d2=TAB.DISK(ic)%Radius
cooc1 = TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1)
cooc2 = TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(2)
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(1)=cooc1
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(2)=cooc2
TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(3)=TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(3)
TAB.CONTACTF(z0)%rn=TAB.CONTACT(i)%rn
TAB.CONTACTF(z0)%rt=TAB.CONTACT(i)%rt
r1=TAB.CONTACTF(z0)%coor.ctc(1:2)-TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:2)
f1=TAB.CONTACT(i)%rn*TAB.CONTACT(i)%n(1:2) + &
    TAB.CONTACT(i)%rt*TAB.CONTACT(i)%t(1:2)
cooc3 = f1(1)*r1(2)-f1(2)*r1(1)
TAB.CONTACTF(z0)%rs=cooc3

```

```

TAB.CONTACTF(z0)%vn=TAB.CONTACT(i)%vn
TAB.CONTACTF(z0)%vl=TAB.CONTACT(i)%vl
TAB.CONTACTF(z0)%vs=TAB.CONTACT(i)%vs
TAB.CONTACTF(z0)%nature=TAB.CONTACT(i)%nature
TAB.CONTACTF(z0)%sect=0
endif
end do

nb_lineCONTACT = z0

end subroutine nb.coordination

!=====
! evaluation of the stress tensor
!=====

subroutine stress_tensor
implicit none
integer :: nfile,ic,ac,nd
integer :: i,j,k1,k2,zk,cc,c1,c2
real(kind=8) :: xstep,rho,m,rr,surf
real(kind=8) :: scoord,AREA
real(kind=8) :: s11,s12,s21,s22,f11,f12,f21,f22
real(kind=8) :: mo1,mo2,mom1,mom2,mm1,mm2,mm
real(kind=8) :: m111,m112,m122,m211,m212,m222
real(kind=8) :: rln,rlt,fac
real(kind=8),dimension(2) :: Ipoint,tuc,nuc,Fik,Lik
real(kind=8),dimension(2) :: Gik,Dik,test,x1,x2
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac

do zk = 1,6
! initializing stress tensors
s11=0.0
s12=0.0
s22=0.0
s21=0.0
! initializing force tensors
f11=0.0
f12=0.0
f22=0.0
f21=0.0
! initializing couple force tensors
m111=0.0
m112=0.0
m122=0.0
m211=0.0
m212=0.0
m222=0.0
mo1=0.0
mo2=0.0
mom1=0.0
mom2=0.0
mm1=0.0
mm2=0.0
mm =0.0
! initializing the surface
AREA=0.0
! cycling over contacts
do i=1,nb_lineCONTACT
! importing contact info
ic=TAB.CONTACT(i)%icdent
ac=TAB.CONTACT(i)%ianent
nuc=TAB.CONTACT(i)%n(1:2)
tuc=TAB.CONTACT(i)%t(1:2)
rln=TAB.CONTACT(i)%rn
rlt=TAB.CONTACT(i)%rt
Ipoint=TAB.CONTACT(i)%coor.ctc(1:2)

```

```

! evaluating the vectors
Fik=rln*nuc+rlt*tuc
cooric=TAB.DISK(ic)%centre(1:2)
coorac=TAB.DISK(ac)%centre(1:2)
call area.check(c1,cooric(1),cooric(2),zk)
call area.check(c2,coorac(1),coorac(2),zk)
cc = c1*c2
if (ic<nbParticules+1.AND.ac<nbParticules+1.AND.cc>0) then
Lik = cooric(1:2) - coorac(1:2)
f11 = f11 + Fik(1)*Lik(1)
f12 = f12 + Fik(1)*Lik(2)
f21 = f21 + Fik(2)*Lik(1)
f22 = f22 + Fik(2)*Lik(2)

Lik = cooric(1:2) - Ipoint(1:2)
mom1 = mom1 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(1)
mom2 = mom2 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(2)
Lik = coorac(1:2) - Ipoint(1:2)
mom1 = mom1 - (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(1)
mom2 = mom2 - (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*Lik(2)
Lik = cooric(1:2) - coorac(1:2)
mo1 = mo1 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*((cooric(1)+coorac(1))/2.0-xc(1))
mo2 = mo2 + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))*((cooric(2)+coorac(2))/2.0-xc(2))
mm1 = mm1 + TAB.CONTACT(i)%rs*Lik(1)
mm2 = mm2 + TAB.CONTACT(i)%rs*Lik(2)
Lik = cooric(1:2) - Ipoint(1:2)
mm=mm + (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))
Lik = coorac(1:2) - Ipoint(1:2)
mm=mm - (Fik(1)*Lik(2) - Fik(2)*Lik(1))
Lik = cooric(1:2) - xc(1:2)
m111=m111+ Fik(1)*Lik(1)*Lik(1)
m112=m112+ Fik(1)*Lik(1)*Lik(2)
m122=m122+ Fik(1)*Lik(2)*Lik(2)
m211=m211+ Fik(2)*Lik(1)*Lik(1)
m212=m212+ Fik(2)*Lik(1)*Lik(2)
m222=m222+ Fik(2)*Lik(2)*Lik(2)
Lik = coorac(1:2) - xc(1:2)
m111=m111- Fik(1)*Lik(1)*Lik(1)
m112=m112- Fik(1)*Lik(1)*Lik(2)
m122=m122- Fik(1)*Lik(2)*Lik(2)
m211=m211- Fik(2)*Lik(1)*Lik(1)
m212=m212- Fik(2)*Lik(1)*Lik(2)
m222=m222- Fik(2)*Lik(2)*Lik(2)
endif

end do
nd = 0
do i=1,nbParticules
call area.check(cc,TAB.DISK(i)%centre(1),TAB.DISK(i)%centre(2),zk)
if (cc>0) then
nd=nd+1
AREA = AREA + TAB.DISK(i)%surf0
endif
enddo

!AREA=Pi*radd(zk)**2

s11=f11/AREA
s12=f12/AREA
s22=f22/AREA
s21=f21/AREA
mm1=mm1/AREA
mm2=mm2/AREA
mom1=mom1/AREA
mom2=mom2/AREA
mo1=mo1/AREA

```

```

mo2=mo2/AREA
m111=m111/AREA
m112=m112/AREA
m122=m122/AREA
m211=m211/AREA
m212=m212/AREA
m222=m222/AREA
mm=mm/AREA

nfile = nfiles_s(zk)
write(nfile,'(10(3x,E14.7),3x,I4)') time,s11,s12,s21,s22,mom1,&
      mom2,mm1,mm2,mm

write(nfile+nsec_s,'(9(3x,E14.7),3x,I4)') time,mo1,mo2,m111,m112,m122,&
      m211,m212,m222,nd

enddo
end subroutine

!=====
! evaluation of the strain tensor
!=====

subroutine strain_tensor
implicit none
integer :: nfile,ic,ac,cc
integer :: i,j,k1,k2,itot,zk
real(kind=8) :: xstep,rr,surf
real(kind=8) :: scoord,AREA
real(kind=8) :: e11,e12,e21,e22,omega,curv1,curv2
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac
integer :: nb_triangle
real(kind=8),dimension(:),allocatable :: u11,u12,u21,u22,kappa1,kappa2

! preparing for the triangulation
itot = nbParticules
! allocating the particle strain
allocate(u11(nbParticules))
allocate(u12(nbParticules))
allocate(u21(nbParticules))
allocate(u22(nbParticules))
allocate(kappa1(nbParticules))
allocate(kappa2(nbParticules))
u11=0.0
u12=0.0
u21=0.0
u22=0.0
kappa1=0.0
kappa2=0.0
! cycling to evaluate particle strain
do i=1,nbParticules
if (TAB_DISK(i)%lieu < 2) then
do j=1,TAB_DISK(i)%neigh
k2=TAB_DISK(i)%nlist(j)
u11(i) = u11(i) + TAB.TR(k2)%u(1,1)/TAB_DISK(i)%surf
u12(i) = u12(i) + TAB.TR(k2)%u(1,2)/TAB_DISK(i)%surf
u21(i) = u21(i) + TAB.TR(k2)%u(2,1)/TAB_DISK(i)%surf
u22(i) = u22(i) + TAB.TR(k2)%u(2,2)/TAB_DISK(i)%surf
kappa1(i) = kappa1(i) + TAB.TR(k2)%curv(1)/TAB_DISK(i)%surf
kappa2(i) = kappa2(i) + TAB.TR(k2)%curv(2)/TAB_DISK(i)%surf
enddo
u11(i) = u11(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u12(i) = u12(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u21(i) = u21(i)*TAB_DISK(i)%surf0
u22(i) = u22(i)*TAB_DISK(i)%surf0
kappa1(i) = kappa1(i)*TAB_DISK(i)%surf0
kappa2(i) = kappa2(i)*TAB_DISK(i)%surf0

```

```

endif
enddo
write(6,*) 'strains evaluated'

do zk=1,nsec.e
! initializing strain tensors
e11=0.0
e12=0.0
e22=0.0
e21=0.0
omega=0.0
curv1=0.0
curv2=0.0
AREA=0.0
! cycling over particules
do i=1,nbParticules
! importing info
call area_check(cc,TAB_DISK(i)%centre(1),TAB_DISK(i)%centre(2),zk)
if (cc < 1) cycle
if (TAB_DISK(i)%lieu < 2) then
e11 = e11 + u11(i)
e12 = e12 + u12(i)
e21 = e21 + u21(i)
e22 = e22 + u22(i)
omega=omega + TAB_DISK(i)%V(3)*TAB_DISK(i)%surf0
curv1=curv1 + kappa1(i)
curv2=curv2 + kappa2(i)
AREA=AREA + TAB_DISK(i)%surf0
endif
end do
rr = Pi*(radd(zk)**2)

write(6,*) 'summed over particles'
write(6,*) 'AREA:', AREA, AREA-rr
write(6,*) 'five'
!AREA=Pi*radd(zk)**2
e11=e11/AREA
e12=e12/AREA
e22=e22/AREA
e21=e21/AREA
omega = omega/AREA
curv1 = curv1/AREA
curv2 = curv2/AREA
! writing in files the total stress tensor
nfile = nfiles_e(zk)
write(nfile,'(8(3x,E14.7))') time,e11,e12,e21,e22,omega,curv1,curv2

enddo

deallocate(u11)
deallocate(u12)
deallocate(u21)
deallocate(u22)

end subroutine

!=====
! evaluation of the delaunay triangulation and the voronoi cells
!=====

subroutine delaunay
implicit none
integer :: ic,ac,c1,c2
integer :: i,j,k1,k2,itot,k,kk,kz
real(kind=8),dimension(2) :: cooric,coorac,vic,vac
real(kind=8),dimension(2) :: nor,vel,nuc,tuc
real(kind=8) :: rr

```

```

integer :: nb_triangle
real(kind=8),dimension(:,),allocatable :: node_xy,v_xy
integer,dimension(:,),allocatable :: triangle_node,triangle_neighbor

c1 = 1
c2 = 1
! preparing for the triangulation
itot = nbParticules
allocate(node_xy(2,itot))
allocate(v_xy(3,itot))
allocate(triangle_neighbor(3,itot*2))
allocate(triangle_node(3,itot*2))
! reading in what is necessary from the assembly disks
do i=1,nbParticules
node_xy(1,i)=TAB.DISK(i)%centre(1)
node_xy(2,i)=TAB.DISK(i)%centre(2)
v_xy(1,i)=TAB.DISK(i)%V(1)
v_xy(2,i)=TAB.DISK(i)%V(2)
v_xy(3,i)=TAB.DISK(i)%V(3)
TAB.DISK(i)%neigh=0
TAB.DISK(i)%surf=0.0
TAB.DISK(i)%surf0=0.0
end do
! calling the triangulation
call dtris2( itot, node_xy, nb_triangle, triangle_node, &
            triangle_neighbor )
if (allocated(TAB.TR)) deallocate(TAB.TR)
allocate(TAB.TR(nb_triangle))
! circling the triangles -first-
do i=1,nb_triangle
TAB.TR(i)%ou=0.0
TAB.TR(i)%curv=0.0
TAB.TR(i)%num=i
k2=triangle_node(1,i)
TAB.TR(i)%nod(1)=k2
TAB.TR(i)%coor(1:2,1)=node_xy(1:2,k2)
cooric = -node_xy(1:2,k2)
coorac = -node_xy(1:2,k2)
k2=triangle_node(2,i)
TAB.TR(i)%nod(2)=k2
TAB.TR(i)%coor(1:2,2)=node_xy(1:2,k2)
cooric = cooric + node_xy(1:2,k2)
k2=triangle_node(3,i)
TAB.TR(i)%nod(3)=k2
TAB.TR(i)%coor(1:2,3)=node_xy(1:2,k2)
coorac = coorac + node_xy(1:2,k2)
TAB.TR(i)%surf=abs(cooric(1)*coorac(2) &
                  -cooric(2)*coorac(1))/2.0
do j=1,3
k2=triangle_node(j,i)
if (k2 < nbParticules+1) then
TAB.DISK(k2)%neigh=TAB.DISK(k2)%neigh+1
TAB.DISK(k2)%nlist(TAB.DISK(k2)%neigh) =i
TAB.DISK(k2)%pos(TAB.DISK(k2)%neigh) =j
TAB.DISK(k2)%surf=TAB.DISK(k2)%surf+TAB.TR(i)%surf
endif
end do
call triangle_circumcenter_2d(TAB.TR(i)%coor,TAB.TR(i)%centre)
end do
! circling the triangles -second-
! this evaluates the unweighted strain of each triangle
do i=1,nb_triangle
! first side
k1=triangle_node(1,i)
k2=triangle_node(2,i)

```



```

! getting attributes
cooric = node_xy(1:2,k1)
coorac = node_xy(1:2,k2)
vic = v_xy(1:2,k1)
vac = v_xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v_xy(3,k1)+v_xy(3,k2))/2.0
TAB_TR(i)%u(1,1)=TAB_TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(1,2)=TAB_TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB_TR(i)%u(2,1)=TAB_TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(2,2)=TAB_TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB_TR(i)%curv(1)=TAB_TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%curv(2)=TAB_TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
! second side
k1=triangle_node(2,i)
k2=triangle_node(3,i)
! getting attributes
cooric = node_xy(1:2,k1)
coorac = node_xy(1:2,k2)
vic = v_xy(1:2,k1)
vac = v_xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v_xy(3,k1)+v_xy(3,k2))/2.0
TAB_TR(i)%u(1,1)=TAB_TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(1,2)=TAB_TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB_TR(i)%u(2,1)=TAB_TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(2,2)=TAB_TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB_TR(i)%curv(1)=TAB_TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%curv(2)=TAB_TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
! third side
k1=triangle_node(3,i)
k2=triangle_node(1,i)
! getting attributes
cooric = node_xy(1:2,k1)
coorac = node_xy(1:2,k2)
vic = v_xy(1:2,k1)
vac = v_xy(1:2,k2)
coorac=coorac-cooric
! this is the outbound normal
cooric(1)= coorac(2)
cooric(2)=-coorac(1)
vic=(vic+vac)/2.0
vac(1)=(v_xy(3,k1)+v_xy(3,k2))/2.0
TAB_TR(i)%u(1,1)=TAB_TR(i)%u(1,1)+vic(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(1,2)=TAB_TR(i)%u(1,2)+vic(1)*cooric(2)
TAB_TR(i)%u(2,1)=TAB_TR(i)%u(2,1)+vic(2)*cooric(1)
TAB_TR(i)%u(2,2)=TAB_TR(i)%u(2,2)+vic(2)*cooric(2)
TAB_TR(i)%curv(1)=TAB_TR(i)%curv(1)+vac(1)*cooric(1)
TAB_TR(i)%curv(2)=TAB_TR(i)%curv(2)+vac(1)*cooric(2)
end do
open (unit=456,file='tri_neigh.dat',status='replace')
do i=1,nb_triangle
write(456,*) i,triangle_neighbor(1,i),triangle_neighbor(2,i),&
triangle_neighbor(3,i)
enddo
close(456)
open (unit=457,file='tri_nod.dat',status='replace')

```

```

do i=1,nb.triangle
write(457,*) i,triangle_node(1,i),triangle_node(2,i),&
triangle_node(3,i)
enddo
close(457)
open (unit=458,file='tri.cent.dat',status='replace')
do i=1,nb.triangle
write(458,*) i,TAB_TR(i)%centre(1),TAB_TR(i)%centre(2)
enddo
close(458)
open (unit=459,file='tri.ncoor.dat',status='replace')
do i=1,itot
write(459,*) i,node_xy(1,i),node_xy(2,i)
enddo
close(459)
write(6,*) 'triangle strain evaluated'
! sorting the triangles of each particle in
! counterclockwise order
do i=1,nbParticules
call box_check(c2,TAB_DISK(i)%centre(1),TAB_DISK(i)%centre(2))
if (c2.lt.1) then
TAB_DISK(i)%lieu = 2
TAB_DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif
do j=2,TAB_DISK(i)%neigh
! locating the current triangle
k1=TAB_DISK(i)%nlist(j-1)
! pinpointing the position of the node in it
k2=TAB_DISK(i)%pos(j-1)
! evaluating the position in the triangle list
k2=k2-1
if (k2 < 1) k2=3
! locating the next triangle
TAB_DISK(i)%nlist(j) = triangle_neighbor(k2,k1)
k2= triangle_neighbor(k2,k1)

if (k2 < 1) then
TAB_DISK(i)%lieu = 2
TAB_DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif
call box_check(c1,TAB_TR(k1)%centre(1),TAB_TR(k1)%centre(2))
call box_check(c2,TAB_TR(k2)%centre(1),TAB_TR(k2)%centre(2))

if (c1*c2.lt.1) then
TAB_DISK(i)%lieu = 2
TAB_DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif

! locating the particle in the new triangle
do k=1,3
if (triangle_node(k,k2)==i) TAB_DISK(i)%pos(j)=k
enddo
cooric = -TAB_DISK(i)%centre(1:2)
coorac = -TAB_DISK(i)%centre(1:2)
cooric = cooric + TAB_TR(k1)%centre(1:2)
coorac = coorac + TAB_TR(k2)%centre(1:2)
TAB_DISK(i)%surf0=TAB_DISK(i)%surf0 + &
abs(cooric(1)*coorac(2)-cooric(2)*coorac(1))/2.0
enddo

k1 = TAB_DISK(i)%nlist(1)
) k2 = TAB_DISK(i)%nlist(TAB_DISK(i)%neigh)
cooric = -TAB_DISK(i)%centre(1:2)

```

```

coorac = -TAB.DISK(i)%centre(1:2)
cooric = cooric + TAB.TR(k1)%centre(1:2)
coorac = coorac + TAB.TR(k2)%centre(1:2)
TAB.DISK(i)%surf0=TAB.DISK(i)%surf0 + &
    abs(cooric(1)*coorac(2)-cooric(2)*coorac(1))/2.0
call box_check(c1,TAB.TR(k1)%centre(1),TAB.TR(k1)%centre(2))
call box_check(c2,TAB.TR(k2)%centre(1),TAB.TR(k2)%centre(2))

if (c1*c2.lt.1) then
TAB.DISK(i)%lieu = 2
TAB.DISK(i)%surf0 = 0.0
goto 20
endif

20 continue
enddo

open (unit=460,file='tri_ngtri.dat',status='replace')
do i=1,TAB.DISK(500)%neigh
write(460,*) TAB.DISK(500)%nlist(i)
enddo
write(460,*) TAB.DISK(500)%surf
write(460,*) TAB.DISK(500)%surf0
close(460)
! deallocating what is no longer needed
deallocate(node.xy)
deallocate(v.xy)
deallocate(triangle_neighbor)
deallocate(triangle_node)

end subroutine

!=====
! Lecture des donnees
!=====

subroutine read.Vloc_dof.bodies
implicit none
integer :: i,err,num_part
character(len=23) :: cl_DOF
character(len=29) :: cl_Vloc
character(len=6) :: text
character(len=13) :: text2
character(len=5) :: statut,behav
real(kind=8) :: centre1,centre2,centre3
real(kind=8) :: coor1,coor2,coor3
real(kind=8) :: Vx,Vy,Vr
real(kind=8) :: Radius,ax1,ax2
integer :: nb_dkdkx,nb_dkjcx
integer :: icdent,ianent
real(kind=8) :: n1,n2,n3
real(kind=8) :: rn,rt,rs
real(kind=8) :: vln,vlt,vls
real(kind=8) :: coor_etc1,coor_etc2,coor_etc3

if (all_steps==0) then
counter_cl = counter_cl+1
cl_DOF = './OUTBOX/DOF.OUT.'
cl_Vloc = './OUTBOX/Vloc_Rloc.OUT.'
else
counter_cl = all_steps
cl_DOF = './OUTBOX/DOF.OUT.'
cl_Vloc = './OUTBOX/Vloc_Rloc.OUT.'
end if

if (counter_cl<10) then
WRITE(cl_DOF(19:20),'(I1)') counter_cl
WRITE(cl_Vloc(25:26),'(I1)') counter_cl

```

```

else if ( (counter.cl>=10) .and. (counter.cl<100) ) then
WRITE(cl.DOF(19:21),'(I2)') counter.cl
WRITE(cl.Vloc(25:27),'(I2)') counter.cl
else if ( (counter.cl>=100) .and. (counter.cl<1000) ) then
WRITE(cl.DOF(19:22),'(I3)') counter.cl
WRITE(cl.Vloc(25:28),'(I3)') counter.cl
WRITE(cl.DOF(1:2),'(A2)') '..'
else if ( (counter.cl>=1000) .and. (counter.cl<10000) ) then
WRITE(cl.DOF(19:23),'(I4)') counter.cl
WRITE(cl.Vloc(25:29),'(I4)') counter.cl
WRITE(cl.DOF(1:2),'(A2)') '..'
end if

```

```

if (the.first.time) then
open(unit=2,file='../DATBOX/BODIES.DAT',status='old')
allocate(TAB_DISK(nbParticules))
allocate(TAB_BD(nb_bound1))
i=0
do
read(2,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i + 1
TAB_DISK(i)%num=i
read(2,*)
read(2,*)
read(2,'(22X,A5,7X,D14.7)') behav,Radius
TAB_DISK(i)%behav = behav
read(2,*)
read(2,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') centre1,centre2,centre3
TAB_DISK(i)%centre.ref(1)=centre1
TAB_DISK(i)%centre.ref(2)=centre2
TAB_DISK(i)%centre.ref(3)=centre3
read(2,*)
read(2,*)
TAB_DISK(i)%Radius=Radius
TAB_DISK(i)%Area=Pi*Radius*Radius
TAB_DISK(i)%lieu=1
TAB_DISK(i)%centre(:)=0.D0
end if
if (i==nbParticules) exit
end do
i=0
do
read(2,'(A6)') text
if (text == '$bdyty') then
i = i + 1
TAB_BD(i)%num=i
read(2,*)
read(2,*)
read(2,'(22X,A5)') behav
TAB_BD(i)%behav = behav
read(2,*)
read(2,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') centre1,centre2,centre3
TAB_BD(i)%centre.ref(1)=centre1
TAB_BD(i)%centre.ref(2)=centre2
TAB_BD(i)%centre.ref(3)=centre3
read(2,*)
read(2,'(29X, (5x,D14.7,2X))') Radius
TAB_BD(i)%Radius=Radius
TAB_BD(i)%Area=Pi*Radius*Radius
TAB_BD(i)%lieu=1
TAB_BD(i)%centre(:)=0.D0
end if
if (i==nb_bound1) exit
end do

```

```

the_first.time=.false.
end if

open(unit=5,file=cl_DOF,iostat=err,status='old')
if (err/=0) then
  fin_post=.true.
else
  fin_post=.false.
  i = 0
  do
    i=i+1
    TAB_DISK(i)%lieu=1
    if (i==nbParticules) exit
  end do
  i = 0
  read(5,*)
  read(5,*)
  read(5,*)
  read(5,'(7X,i8,19X,D14.7)') steps,time
  print*, 'time step n:',steps, time
  print*, '—>',cl_DOF
  do
    read(5,'(A6)') text
    if (text == '$bdyty') then
      i = i+1
      read(5,'(6X,i9)') num_part
      read(5,*)
      read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor1,coor2,coor3
      read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') Vx,Vy,Vr
      TAB_DISK(i)%centre(1)=coor1+TAB_DISK(i)%centre.ref(1)
      TAB_DISK(i)%centre(2)=coor2+TAB_DISK(i)%centre.ref(2)
      TAB_DISK(i)%centre(3)=coor3+TAB_DISK(i)%centre.ref(3)
      TAB_DISK(i)%V(1) = Vx
      TAB_DISK(i)%V(2) = Vy
      TAB_DISK(i)%V(3) = Vr
    if (i==nbParticules) exit
  end if
  end do
  i=0
  do
    read(5,'(A6)') text
    if (text == '$bdyty') then
      i = i+1
      read(5,'(6X,i9)') num_part
      read(5,*)
      read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor1,coor2,coor3
      read(5,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') Vx,Vy,Vr
      TAB_BD(i)%centre(1)=coor1+TAB_BD(i)%centre.ref(1)
      TAB_BD(i)%centre(2)=coor2+TAB_BD(i)%centre.ref(2)
      TAB_BD(i)%centre(3)=coor3+TAB_BD(i)%centre.ref(3)
      TAB_BD(i)%V(1) = Vx
      TAB_BD(i)%V(2) = Vy
      TAB_BD(i)%V(3) = Vr
    if (i==nb_bound1) exit
  end if
  end do

end if

nb_dkdex=0
nb_dkjcx=0
open(unit=4,file=cl_Vloc,iostat=err,status='old')
if (err/=0) then

else
  print*, '—>',cl_Vloc

```

```

read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
do
read(4,'(A13)',iostat=err) text2
if (err/=0) then
close(2)
close(4)
close(5)
exit
end if
if (text2 == '!————') exit
if (text2 == '$icdan PLLx') then
nb.dkdckx = nb.dkdckx + 1
end if
if (text2 == '$icdan PLJCx') then
nb.dkjcx = nb.dkjcx + 1
end if
if (text2 == '$icdan DKPDx') then
nb.dkjcx = nb.dkjcx + 1
end if
end do
close(4)

if (allocated(TAB.CONTACT)) deallocate(TAB.CONTACT)
allocate(TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx))

nb.dkdckx=0
nb.dkjcx=0
nb.lineCONTACT=0
open(unit=4,file=c1.Vloc,status='old')
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
read(4,*)
do
read(4,'(A13)',iostat=err) text2
if (err/=0) then
close(4)
exit
end if
if (text2 == '!————') exit
if (text2 == '$icdan PLJCx') then
read(4,*)
read(4,'(8X,I5,44X,I5,30X,A5)') icdent,ianent,statut
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') rt,rm,rs
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') vlt,vln,vls
read(4,*)
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') n1,n2,n3
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor_etc1,coor_etc2,coor_etc3

! if (icdent < nbParticules) TAB.DISK(icdent)%lieu = 2
! if (ianent < nbParticules) TAB.DISK(ianent)%lieu = 2

nb.lineCONTACT=nb.lineCONTACT+1
nb.dkjcx = nb.dkjcx + 1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%icdent=icdent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%ianent=ianent
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%statut=statut
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%n(1)=n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%n(2)=n2

```

```

TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%n(3)=n3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%t(1)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%t(2)=-n1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%t(3)=0.D0
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%coor.ctc(1)=coor.ctc1
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%coor.ctc(2)=coor.ctc2
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%coor.ctc(3)=coor.ctc3
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%rn=rn
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%rt=rt
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%rs=rs
TAB.CONTACT(nb.dkjcx+nb.dkdckx)%nature='DKJCx'
end if
if (text2 == '$icdan PLPLx') then
read(4,*)
read(4,'(8X,I5,44X,I5,30X,A5)') icdent,ianent,statut
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') rt,rm,rs
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') vlt,vln,vls
read(4,*)
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') n1,n2,n3
read(4,'(29X, 3(5x,D14.7,2X))') coor.ctc1,coor.ctc2,coor.ctc3

nb.lineCONTACT=nb.lineCONTACT+1
nb.dkdckx = nb.dkdckx + 1
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%icdent=icdent
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%ianent=ianent
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%statut=statut
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%n(1)=n1
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%n(2)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%n(3)=n3
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%t(1)=n2
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%t(2)=-n1
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%t(3)=0.D0
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%coor.ctc(1)=coor.ctc1
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%coor.ctc(2)=coor.ctc2
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%coor.ctc(3)=coor.ctc3
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%rn=rn
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%rt=rt
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%rs=rs
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%vn=vlt
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%vl=vln
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%vs=vls
TAB.CONTACT(nb.dkdckx)%nature='DKDKx'
end if
end do
end if
end subroutine read_Vloc_dof_bodies

!=====
! check whether a location is in box
!=====

subroutine box_check(cc,xx,yy)
integer :: cc
real(kind=8) :: xx,yy

cc = 2
if (xx.gt.TAB.BD(3)%centre(1)-0.25) cc = 0
if (yy.gt.TAB.BD(2)%centre(2)-0.25) cc = 0
if (xx.lt.TAB.BD(1)%centre(1)+0.25) cc = 0
if (yy.lt.TAB.BD(4)%centre(2)+0.25) cc = 0

end subroutine box_check

!=====
! check whether a location is measurement region
! this is for rectangular regions
!=====

```

```

subroutine area_check(cc,xx,yy,kk)
integer :: cc,kk
real(kind=8) :: xx,yy,dd
real(kind=8),dimension(2) :: x1,x2

x1(1) = TAB_DISK(712)%centre(1)
x1(2) = TAB_DISK(712)%centre(2)
x2(1) = TAB_DISK(4221)%centre(1)
x2(2) = TAB_DISK(4221)%centre(2)
xc(1) = (x1(1)+x2(1))/2.0
xc(2) = (x1(2)+x2(2))/2.0

cc = 2
dd = sqrt((x1(1)-x2(1))**2+(x1(2)-x2(2))**2)
dd = ((x2(1)-x1(1))*(x1(2)-yy)-(x2(2)-x1(2))*(x1(1)-xx))/dd
dd = radd(kk)-abs(dd)
if (dd.lt.0.0) cc = 0

end subroutine area_check

!=====
! Closing the files
!=====

subroutine shut_down
implicit none

if (calcul_stress_tensor == 1) then
do i=1,nsec_s
close(nfiles_s(i))
enddo
end if

if (calcul_strain_tensor == 1) then
do i=1,nsec_e
close(nfiles_e(i))
enddo
end if

end subroutine shut_down

!=====

!That's all folks!

!=====

end program post2locDc

```


Βιβλιογραφία

- Bagi, K. (1996). Stress and strain in granular assemblies, *Mechanics of Materials*, **22**: pp. 165–177.
- Bagi, K. (2003). Discussion on “the asymmetry of stress in granular media”, *International Journal of Solids and Structures*, **40**: pp. 1329–1331.
- Bardet, J.P. and Vardoulakis, I. (2001). The asymmetry of stress in granular media, *International Journal of Solids and Structures*, **38**: pp. 353–367.
- Bardet, J.P. and Vardoulakis, I. (2003a). Reply to discussion by Dr. Katalin Bagi, *International Journal of Solids and Structures*, **40**: p. 1035.
- Bardet, J.P. and Vardoulakis, I. (2003b). Reply to Dr. Kuhn’s discussion, *International Journal of Solids and Structures*, **40**: p. 1809.
- Bazant, Z.P., Belytschko, T.B. and Chang, T.-P. (1984). Continuum theory for strain-softening, *Journal of Engineering Mechanics*, **110**: pp. 1666–1692.
- Benallal, A., Billardon, R. and Geymonat, G. (1988). Some mathematical aspects of damage softening rate problem, in Mazars and Bazant (editors), *Cracking and Damage*, pp. 274–258, Elsevier, Amsterdam.
- Bolton, M.D. (1986). The strength and dilatancy of sands, *Géotechnique*, **36**: pp. 65–78.
- Castro, G. (1969). *Liquefaction of sands*, Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, Mass.
- Cates, M.E., Wittmer, J.P., Bouchaud, J.-P. and Claudin, P. (1998). Jamming, force chains and fragile matter, *Physical Review Letters*, **81**: pp. 1841–1844.

- Chang, C.S. and Liao, C.L. (1990). Constitutive relation for a particulate medium with the effect of particle rotation, *International Journal of Solids and Structures*, **26**: pp. 437–453.
- Chen, W.-F. (1975). *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier Scientific Publishing Company.
- Christoffersen, J., Mehrabadi, M.M. and Nemat-Nasser, S. (1981). A micromechanical description of granular material behavior, *Journal of Applied Mechanics*, **48**: pp. 339–344.
- Collins, I.F. and Houlsby, G.T. (1997). Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials, *Proceedings of the Royal Society A*, **453**: pp. 1975–2001.
- Combe, G. and Roux, J.-N. (2003). Discrete numerical simulation, quasistatic deformation and the origins of strain in granular materials, in Di Benedetto, Doanh, Geoffroy and Sauzéat (editors), *Deformation Characteristics of Geomaterials*, pp. 1071–1078, Swets & Zeitlinger, Lisse.
- Coniglio, A., de Candia, A., Fierro, A., Nicodemi, M., Ciamarra, M. Pica and Tarzia, M. (2004). On Edwards theory of powders, *Physica A*, **339**: pp. 1–6.
- Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). *Théorie de corps déformable*, Hermann, Paris.
- Coulomb, C.A. (1773). *Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, volume VII, Année 1776, Mémoires Académie Royale des Sciences, Paris.
- Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, **29**: pp. 47–65.
- de Borst, R. (1993). A generalisation of J2-flow theory for polar continua, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **103**: pp. 347–362.
- Desrues, J., Lanier, J. and Stutz, P. (1985). Localization of the deformation in tests on sand sample, *Engineering Fracture Mechanics*, **21**: pp. 909–921.
- Desrues, J. and Viggiani, G. (2004). Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry,

- International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **28**: pp. 279–321.
- Dietrich, T. (1976). *Der Psammische Stoff als mechanisches Modell des Sandes*, Ph.D. thesis, Universität Karlsruhe.
- Dillon, Jr.O.W. and Kratochvil, J. (1970). A strain gradient theory of plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **6**: pp. 1513–1533.
- Drescher, A. and de Josselin de Jong, G. (1972). Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **20**: pp. 337–351.
- Drucker, D.C., Gibson, R.E. and Henkel, D.J. (1957). Soil mechanics and work hardening theories of plasticity, *Transaction of the American Society of Civil Engineers*, **122**: pp. 338–346.
- Drucker, D.C. and Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis of limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, **10**: pp. 5–51.
- Dubois, F. and Jean, M. (2003). LMGC90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d’interaction, in *Actes du 16eme Congrès fran cais de mécanique*, pp. 111–118, Giens (Var).
- Edwards, S.F. and Oakeshott, R.B.S. (1989). Theory of powders, *Physica A*, **157**: pp. 1080–1090.
- Ehlers, W., Ramm, E., Diebels, S. and D’Addetta, G.A. (2003). From particle ensembles to Cosserat continua: homogenization of contact forces towards stresses and couple stresses, *International Journal of Solids and Structures*, **40**: pp. 6681–6702.
- Ericksen, J.L. and Truesdell, C. (1957). Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **1**: pp. 295–323.
- Evans, T.M. (2005). *Microscale physical and numerical investigations of shear banding in granular soils*, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology.
- Finno, R.J., Harris, W.W., Mooney, M.A. and Viggiani, G. (1997). Shear bands in plane strain compression of loose sand, *Géotechnique*, **47**: pp. 149–165.

- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F. and Hutchinson, J.W. (1994). Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metallurgica Et Materialia*, **42**: pp. 475–487.
- Froio, F. and Roux, J.-N. (2010). Incremental response of a model granular material by stress probing with DEM simulations, in Goddart J., Jenkins J.T. and Giovine P. (editors), *IUTAM-ISIMM Symposium on Mathematical Modeling and Physical Instances of Granular Flows*, p. CP1227, American Institute of Physics.
- Froio, F., Tomassetti, G. and Vardoulakis, I. (2006). Mechanics of granular materials: the discrete and the continuum descriptions juxtaposed, *International Journal of Solids and Structures*, **43**: pp. 7684–7720.
- Georgiadis, H.G. and Anagnostou, D.S. (2008). Problems of the Flamant–Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity, *Journal of Elasticity*, **90**: pp. 71–98.
- Georgiadis, H.G. and Grentzelou, C.G. (2006). Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **43**: pp. 5690–5712.
- Gourgiotis, P.A. and Georgiadis, H.G. (2009). Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **57**: pp. 1898–1920.
- Grammenoudis, P., Sator, C. and Tsakmakis, Ch. (2007). Micropolar plasticity theories and their classical limits. Part II: Comparison of responses predicted by the limiting and a standard classical model, *Acta Mechanica*, **189**: pp. 177–191.
- Grammenoudis, P. and Tsakmakis, Ch. (2007). Micropolar plasticity theories and their classical limits. Part I: Resulting model, *Acta Mechanica*, **189**: pp. 151–175.
- Grammenoudis, P. and Tsakmakis, Ch. (2009). Isotropic hardening in micropolar plasticity, *Archive of Applied Mechanics*, **79**: pp. 323–334.
- Green, A.E. and Rivlin, R.S. (1964a). Multipolar continuum mechanics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **17**: pp. 113–147.

- Green, A.E. and Rivlin, R.S. (1964b). On Cauchy's equations of motion, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **15**: pp. 290–292.
- Green, A.E. and Rivlin, R.S. (1964c). Simple force and stress multipoles, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**: pp. 325–353.
- Günther, W. (1958). Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Göttingen, Verlag E. Goltze*, **101**: pp. 95–213.
- Hall, S.A., Bornert, M., Desrues, J., Pannier, Y., Lenoir, N., Viggiani, G. and Bésuelle, P. (2010). Discrete and continuum analysis of localised deformation in sand using X-ray μ CT and volumetric digital image correlation, *Géotechnique*, **accepted**: p. xxx.
- Imposimato, S. and Nova, R. (1998). An investigation on the uniqueness of the incremental response of elastoplastic models for virgin sand, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, **3**: pp. 65–87.
- Iwashita, K. and Oda, M. (2000). Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method, *Powder Technology*, **109**: pp. 192–205.
- Jean, M. (1999). The non-smooth contact dynamics method, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**: pp. 235–257.
- Johnson, K.L. (1985). *Contact mechanics*, Cambridge University Press.
- Kanatani, K.-I. (1979). A micropolar continuum theory for the flow of granular materials, *International Journal of Engineering Science*, **17**: pp. 419–432.
- Kuhn, M.R. (2003). Discussion of □□The asymmetry of stress in granular media□□, *International Journal of Solids and Structures*, **40**: pp. 1805–1807.
- Liu, A.J. and Nagel, S.R. (1998). Jamming is not just cool any more, *Nature*, **396**: p. 21.
- Mindlin, R.D. (1964). Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**: pp. 51–78.

- Mohan, L.S., Nott, P.R. and Rao, K.K. (1999). A frictional Cosserat model for the flow of granular materials through a vertical channel, *Acta Mechanica*, **138**: pp. 75–96.
- Mohan, L.S., Rao, K.K. and Nott, P.R. (2002). A frictional Cosserat model for the slow shearing of granular materials, *Journal of Fluid Mechanics*, **457**: pp. 377–409.
- Mróz, Z. (1963). Non-associated flow rules in plasticity, *Journal de Mécanique*, **2**: pp. 21–42.
- Mühlhaus, H.-B. (1989). Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems, *Ingenieur-Archiv*, **59**: pp. 124–137.
- Mühlhaus, H.-B. and Vardoulakis, I. (1987). The thickness of shear bands in granular materials, *Géotechnique*, **37**: pp. 271–283.
- Noll, W. (1959). La mécanique classique, basée sur un axiome d’objectivité, in *Colloque International sur la Méthode Axiomatique dans les Mécaniques Classiques et Nouvelles, 1963*, pp. 47–56, Paris.
- Nott, P.R. (2009). Classical and Cosserat plasticity and viscoplasticity models for slow granular flow, *Acta Mechanica*, **205**: pp. 151–160.
- Nova, R. (1989). Liquefaction, stability, bifurcations of soils via strainhardening plasticity, in *Workshop on localization and bifurcation of granular bodies*.
- Nova, R. and Wood, D.M. (1979). A mathematical model for sands, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **3**: pp. 255–278.
- Oda, M. and Kazama, H. (1998). Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dense granular soils, *Géotechnique*, **48**: pp. 465–481.
- Oshima, N. (1955). Dynamics of granular media, in Kondo K. (editor), *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry*, pp. 563–572.
- Perrin, G. and Leblond, J.B. (1993). Rudnicki and Rice’s analysis of strain localization revisited, *Journal of Applied Mechanics*, **60**: pp. 842–846.

- Podio-Guidugli, P. (1997). Inertia and invariance, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **172**: pp. 103–124.
- Pöschel, T. and Schwager, T. (2005). *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*, Springer Verlag.
- Pouliquen, O. and Chevoir, F. (2002). Dense flows in dry granular materials, *Comptes Rendus Physique*, **3**: pp. 163–175.
- Poulos, S.J. (1981). The steady state of deformation, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, **107**: pp. 553–562.
- Radjai, F. (1999). Multicontact dynamics of granular systems, *Computer Physics Communications*, **121-122**: pp. 294–298.
- Radjai, F., Wolf, D.E., Jean, M. and Moreau, J.-J. (1998). Bimodal character of stress transmission in granular packings, *Physical Review Letters*, **80**: pp. 61–64.
- Renouf, M., Dubois, F. and Alart, P. (2004). A parallel version of the Non Smooth Contact Dynamics Algorithm applied to the simulation of granular media, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **168**: pp. 375–382.
- Reynolds, O. (1885). The dilatancy of media composed of rigid particles in contact, *Philosophical Magazine*, **20**: pp. 469–481.
- Richard, D., Iordanoff, I., Renouf, M. and Berthier, Y. (2008). Thermal study of the dry sliding contact with third body presence, *Journal of Tribology*, **130**: p. 031404.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Wroth, C.P. (1958). On the yielding of soils, *Géotechnique*, **8**: pp. 22–53.
- Rothenburg, L. and Selvadurai, A.P.S. (1981). A micromechanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media, in Selvadurai (editor), *Proc. Int. Symp. Mechanical Behavior of Structured Media*, volume B, pp. 469–486, Ottawa.
- Roux, J.-N. (2000). Geometric origin of mechanical properties of granular materials, *Physical Review E*, **61**: pp. 6802–6836.

- Rudnicki, J.W and Rice, J.R. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **23**: pp. 371–394.
- Satake, M. (1963). Some considerations on the mechanics of granular materials, in E. Kröner (editor), *IUTAM Symposium on the Mechanics of Generalized Continua*, pp. 156–159, Springer, Berlin.
- Satake, M. (1982). Fabric tensor in granular materials, in Vermeer P. A. and Luger H. J. (editors), *IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft*, pp. 701–704, A.A. Balkema, Rotterdam.
- Satake, M. (2004). Tensorial form definitions of discrete–mechanical quantities for granular assemblies, *International Journal of Solids and Structures*, **41**: pp. 5775–5791.
- Schaeffer, H. (1967). Das Cosserat-Kontinuum, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **47**: pp. 485–498.
- Schofield, A.N and Roth, C.P. (1968). *Critical state soil mechanics*, McGraw-Hill, London.
- Steinmann, P. (1994). A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **8**: pp. 1063–1084.
- Tordesillas, A. and Muthuswamy, M. (2008). A thermomicromechanical approach to multiscale continuum modeling of dense granular materials, *Acta Geotechnica*, **3**: pp. 225–240.
- Truesdell, C. (1969). *Rational thermodynamics*, McGraw Hill.
- Vardoulakis, I., Shah, K.R. and Papanastasiou, P. (1992). Modelling of tool-rock shear interfaces using gradient-dependent flow theory of plasticity, *International Journal of of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, **29**: pp. 573–582.
- Vardoulakis, I. and Sulem, J. (1995). *Bifurcation analysis in geomechanics*, Blackie Academic and Professional.

Walton, K. (1987). The effective elastic moduli of a random packing of spheres, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **35**: pp. 213–226.

Ziegler, H. (1981). Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality, *Ingenieur Archiv*, **50**: pp. 149–164.

Ziegler, H. (1983). *An introduction to thermomechanics*, North Holland.

Ziegler, H. and Wehrli, C. (1983). The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function, *Advances in Applied Mechanics*, **25**: pp. 183–238.