



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Monte Carlo μέθοδοι στα Χρηματοοικονομικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ν. ΓΚΙΩΝΗ

Επιβλέπων : Μιχαήλ Λουλάκης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2013





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

## Monte Carlo μέθοδοι στα Χρηματοοικονομικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ν. ΓΚΙΩΝΗ

**Επιβλέπων:** Μιχαήλ Λουλάκης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 25η Ιουλίου 2013.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....  
Μιχαήλ Λουλάκης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Γεώργιος Κοκολάκης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Δημήτρης Φουσκάκης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

# Περίληψη

Στα πλαίσια του μοντέλου Black-Scholes υπολογίζεται άμεσα η θεωρητική τιμή ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης, στα οποία η εξάσκηση πραγματοποιείται μονάχα κατά την ωρίμανσή τους. Σε αντίθεση, οι κάτοχοι δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου, έχουν τη δυνατότητα εξάσκησης σε οποιαδήποτε στιγμή πρωτύτερη της λήξης. Η πολυπλοκότητα αυτή καθιστά αδύνατη τη θεωρητική τιμολόγηση τους, στα πλαίσια του στοχαστικού λογισμού, μέσω κλειστών τύπων. Η κλασικότερη τεχνική για την τιμολόγηση τους θεμελιώνεται μέσω της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων και αξιοποιεί αριθμητικές τεχνικές, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, για τον προσδιορισμό αποτελεσμάτων. Μία πιο σύγχρονη αντιμετώπιση βασίζεται στις στατιστικές τεχνικές προσομοιώσεις τύπου Monte Carlo. Το πρόβλημα τιμολόγησης μοντελοποιείται ως ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (optimal stopping). Η διακοπή αφορά τη βέλτιστη στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος, της οποίας ο προσδιορισμός, καθιστά στη συνέχεια την επίλυση του προβλήματος τετριμμένη. Το δυϊκό πρόβλημα της βέλτιστης διακοπής είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης στρατηγικής, ενός κανόνα δηλαδή που θα μαρτυρά στον επενδυτή για το αν η παρούσα κατάσταση της οικονομίας καθιστά την εξάσκηση του δικαιώματος βέλτιστη. Αν ο επενδυτής κατέχει εκ των προτέρων τη γνώση για την πορεία της οικονομίας, η βέλτιστη στρατηγική προσδιορίζεται αλγοριθμικά, επιλύοντας ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού. Στην εργασία παρουσιάζονται τεχνικές προσομοίωσης για την προσέγγιση της γνώσης αυτής, καθώς και τα στοιχεία πιθανοτήτων που είναι απαραίτητα για την βασική κατανόηση της θεωρητικής τους θεμελίωσης.



# Περιεχόμενα

Περίληψη	1
<b>1 Αντί Εισαγωγής</b>	<b>7</b>
<b>2 Στοιχεία Πιθανοτήτων</b>	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή	9
2.1.1 Τυχαία Διανύσματα	15
2.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue	16
2.2.1 Μέση Τιμή	19
2.2.2 Υπολογισμός της Μέσης Τιμής	19
2.3 Περιορισμός Πληροφορίας	24
2.3.1 Ανεξαρτησία	24
2.3.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή	25
2.4 Ασυμπτωτικά Αποτελέσματα	27
<b>3 Η τιμή μιας Μετοχής</b>	<b>29</b>
3.1 Στοιχεία Στοχαστικών Ανελίξεων	29
3.2 Τυχαίος Περίπατος	32
3.3 Κίνηση Brown	38



3.3.1	Κατασκευή Μονοπατιών . . . . .	41
3.3.2	Πολυδιάστατη Κίνηση Brown . . . . .	49
3.3.3	Γεωμετρική Κίνηση Brown . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Black &amp; Scholes και Monte Carlo</b>	<b>59</b>
4.1	Αξία χρήματος . . . . .	59
4.2	Σχέσεις Black & Scholes . . . . .	62
4.3	Διάφορα Παράγωγα . . . . .	64
4.4	Monte Carlo . . . . .	68
4.5	Monte Carlo για European Options . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Παράγωγα Αμερικανικού Τύπου</b>	<b>77</b>
5.1	Μοντελοποίηση του Προβλήματος . . . . .	78
5.2	Least Square Monte Carlo . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Μέθοδος των Τυχαίων Δενδρών</b>	<b>87</b>
6.1	Δένδρα Προσομοίωσης . . . . .	89
6.1.1	Δένδρα . . . . .	89
6.1.2	Το δένδρο της Μεθόδου . . . . .	90
6.1.3	Εκτιμήτρια θετικής μεροληψίας . . . . .	93
6.1.4	Εκτιμήτρια αρνητικής μεροληψίας . . . . .	100
6.1.5	Αριθμητικά Αποτελέσματα . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Μέθοδοι Στοχαστικών Πλεγμάτων</b>	<b>109</b>
7.1	Εισαγωγή . . . . .	109
7.2	Βάρη ακμών πλέγματος . . . . .	112

7.2.1	Βάρη για ανεξάρτητη παραγωγή κόμβων . . . . .	114
7.2.2	Βάρη σε Μαρκοβιανά Πλέγματα . . . . .	115
7.2.3	Τρίτη Μέθοδος Προσομοίωσης . . . . .	115



# Κεφάλαιο 1

## Αντί Εισαγωγής

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε περιληπτικά τη μετροθεωρητική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων, μιλάμε για το ολοκλήρωμα Lebesgue και για τη μέση τιμή. Συνεχίζουμε στο δεύτερο κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζουμε τη κίνηση Brown σαν το όριο του τυχαίου περιπάτου, έτσι ώστε να καταλήξουμε στην κλασικότερη μοντελοποίηση χρηματιστηριακών προϊόντων που είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες κινήσεις και στο τέλος γίνεται μια προσπάθεια εφαρμογής της για πραγματικά δεδομένα.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε συνοπτικά την επίπτωση που έχει ο χρόνος στην αξία του χρήματος, το μοντέλο Black & Scholes, καθώς και διάφορους τύπους παραγώγων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo συνεπείς με την αρχή της ιστορίας τους, που θεωρείται η εκτίμηση του αριθμού  $\pi$  μέσω του προβλήματος της βελόνας του Buffon. Στη συνέχεια, τιμολογώντας δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου, παρουσιάζουμε την εφαρμογή των μεθόδων προσομοίωσης στην αριθμητική ολοκλήρωση μονοδιάστατων και πολυδιάστατων συναρτήσεων.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύουμε το πρόβλημα της τιμολόγησης παραγώγων αμερικανικού τύπου και τιμολογούμε σύμφωνα με την μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων Monte Carlo. Στο επόμενο κεφάλαιο τιμολογούμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τυχαίων δένδρων, την οποία παρουσιάζουμε αναλυτικά. Τέλος στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται οι Μέθοδοι των Στοχαστικών Πλεγμάτων που αποτελούν μια γενίκευση των τυχαίων δενδρών.

Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε για της διάφορες εφαρμογές της εργασίας είναι η R-3.0.0 (2013-04-03) – “Masked Marvel”. Η R, πέραν της βιβλιοθήκης Rmetrics στην οποία υπάρχουν κάποιες μεθόδους προσομοίωσης, δεν περιέχει έτοιμους αλγορίθμους για την τιμολόγηση αμερικανικών παραγώγων με μεθόδους προσομοίωσης. Επίσης στην εργασία παρουσιάζουμε τους περιορισμούς της R για διάφορες προγραμματιστικές τεχνικές και στη συνέχεια τον τρόπο (διανυσματικός προγραμματισμός) με τον οποίο μπορούμε να τους αντιμετωπίσουμε. Οι κώδικες αναπτύχθηκαν στο επίσης ελεύθερο κώδικα πρόγραμμα RStudio. Ο υπολογιστής στον οποίο τρέξαμε τους κώδικες διαθέτει επεξεργαστή AMD Athlon II X4 2.60GHz και μνήμη RAM 4.00GB. Τέλος η εργασία γράφτηκε στο πρόγραμμα TexMaker με χρήση  $\LaTeX$ . Η γραμματοσειρά που χρησιμοποιήθηκε είναι η GFS Neohellenic που διατίθεται δωρεάν από την Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων από την ιστοσελίδα τους.



## Κεφάλαιο 2

# Στοιχεία Πιθανοτήτων

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής που είναι απαραίτητα για την κατανόηση των μεταγενέστερων κεφαλαίων.

### 2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης. Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος το καλούμε ενδεχόμενο (event) και το συμβολίζουμε με  $\omega$ . Το σύνολο όλων των δυνατών ενδεχομένων το συμβολίζουμε με  $\Omega$  και το καλούμε δειγματικό χώρο (sample space) του πειράματος τύχης. Πάνω στον δειγματικό χώρο θεωρούμε μια οικογένεια συνόλων η οποία είναι κλειστή ως προς όλες τις γνωστές συνολοθεωρητικές πράξεις και ορίζεται ως εξής

**Ορισμός 2.1** ( $\sigma$ -άλγεβρα). Έστω σύνολο  $\Omega \neq \emptyset$  και έστω  $\mathcal{F}$  μία οικογένεια υποσυνόλων του  $\Omega$ . Λέμε πως η  $\mathcal{F}$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα (επί) του  $\Omega$  αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

1. Το  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Για κάθε  $A \in \mathcal{F}$  και το  $A^c \in \mathcal{F}$ , όπου με  $A^c = \Omega \setminus A$  συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του συνόλου  $A$ .
3. Η  $\mathcal{F}$  είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή για κάθε οικογένεια  $\{A_i : A_i \in \mathcal{F}\}_{i=1}^{\infty}$  να ισχύει ότι  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Από τις (1) και (2) προκύπτει πως  $\Omega = \emptyset^c$  ανήκει στην  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$ . Επίσης από τις (2), (3) και τον κανόνα De Morgan, ο οποίος θυμίζουμε δηλώνει ότι

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

έπεται πως μία  $\sigma$ -άλγεβρα είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές.

Σημαντική είναι η έννοια της παραγόμενης (generated)  $\sigma$ -άλγεβρας από ένα μη κενό υποσύνολο  $A$  του  $\Omega$ . Ορίζεται ως η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα του  $\Omega$  που περιέχει τη στοιχεία του  $A$ . Η έννοια

αυτή είναι παρόμοια με την έννοια της γραμμικής θήκης που συναντούμε στη Συναρτησιακή Ανάλυση.

Πρακτικά μπορούμε να τη φτιάξουμε εκτελώντας συνολοθεωρητικές πράξεις (φτάνουν του συμπληρώματος και της ένωσης) στα στοιχεία του  $\Omega$ , καθώς και στα νέα σύνολα που προκύπτουν από τις πράξεις, έως ότου δεν μπορούμε πλέον να λάβουμε νέα σύνολα.

**Παράδειγμα 2.1.** Έστω  $\Omega = \{A, B\}$ . Η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από το υποσύνολο του  $\{A\} \subset \Omega$  είναι η

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

Επίσης η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τον  $\Omega$  θα είναι το δυναμοσύνολο του  $\Omega$ , δηλαδή

$$\sigma(\Omega) = \{\emptyset, A, B, A \cup B, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, \Omega\}$$

Η δυνατότητα ενός ενδεχομένου, σε σχέση με τα υπόλοιπα ενδεχόμενα, να αποτελέσει την έκβαση ενός πειράματος τύχης καλείται πιθανότητα. Η αντιστοίχιση των πιθανοτήτων στα ενδεχόμενα γίνεται μέσω του μέτρου πιθανότητας το οποίο ορίζεται ως εξής

**Ορισμός 2.2** (Μέτρο Πιθανότητας). Έστω  $\Omega \neq \emptyset$  και  $\mathcal{F}$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Ένα μέτρο πιθανότητας (probability measure)  $\mathbb{P}$  είναι μία συνάρτηση η οποία για κάθε σύνολο  $A \in \mathcal{F}$  αντιστοιχεί έναν αριθμό του διαστήματος  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Ο αριθμός αυτός καλείται πιθανότητα του  $A$  και συμβολίζεται με  $\mathbb{P}(A)$ . Επιπλέον η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τα ακόλουθα

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  και
2. Για κάθε οικογένεια  $\{A_i : A_i \in \mathcal{F}\}_{i=1}^{\infty}$  ξένων υποσυνόλων να ισχύει

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Η συνθήκη αυτή καλείται  $\sigma$ -προσθετική.

Η τριάδα  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  καλείται χώρος πιθανότητας (probability space) και θα αναφέρεται με τη συντομογραφία (χ.π.). Σημειώνουμε πως τα σύμβολα που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται συνήθως στη βιβλιογραφία. Αυτό δεν μας εμποδίζει βέβαια, εκεί που το δηλώνουμε ρητά, να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά σύμβολα.

Το σύνολο  $\Omega$  αποτελεί την ένωση όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και έτσι οποτεδήποτε εκτελείται το πείραμα το  $\Omega$  θα "συμβεί". Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται στη πρώτη συνθήκη του παραπάνω ορισμού. Εκτός του  $\Omega$  μπορεί να υπάρχουν και άλλα ενδεχόμενα με αυτή την ιδιότητα.

**Ορισμός 2.3** (σχεδόν βεβαίως). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Αν ένα σύνολο  $A \in \mathcal{F}$  έχει μέτρο  $\mathbb{P}(A) = 1$ , θα λέμε πως το ενδεχόμενο  $A$  συμβαίνει σχεδόν βεβαίως (almost surely).

Ένα από τα πιο κλασσικά πειράματα τύχης είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Οι συνθήκες που επηρεάζουν τη ρίψη ενός νομίσματος, όπως για παράδειγμα ο τρόπος με τον οποίο θα ρίξουμε

το νόμισμα, η αρχική του ταχύτητα, το περιβάλλον στο οποίο θα πραγματοποιηθεί η ρίψη του και οτιδήποτε άλλο μπορεί να σκεφτεί κάποιος, καθιστούν τη ντετερμινιστική του μοντελοποίηση αδύνατη. Για να μελετήσουμε λοιπόν το φαινόμενο αυτό, το αντιμετωπίζουμε ως ένα πείραμα τύχης. Συγκεκριμένα θεωρούμε ως  $\Omega = \{H, T\}$  τα ενδεχόμενα του πειράματος, που είναι φυσικά να φέρουμε κορόνα ή γράμματα και αντιστοιχούμε σε αυτά το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  με

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$$

Αν επιπλέον δύο φίλοι θέλουν να στοιχηματίσουν πάνω στο αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος, θα χρειαστούν μία συνάρτηση η οποία θα ορίζεται πάνω στα αποτελέσματα του πειράματος και θα επιστρέφει το κέρδος του παίκτη. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται τυχαία μεταβλητή.

**Ορισμός 2.4** (Τυχαία Μεταβλητή). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Μία τυχαία μεταβλητή είναι μία συνάρτηση  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα πως για κάθε  $B \subset \mathbb{R}$  borel, το σύνολο

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

είναι στοιχείο της  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathcal{F}$ .

Παρατηρήστε πως στον προηγούμενο ορισμό το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}$  δεν παίζει οποιοδήποτε ρόλο. Γενικότερα μπορούμε να ορίσουμε μία τυχαία μεταβλητή σε έναν μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$ , χωρίς να έχουμε αναφερθεί στο μέτρο του πιθανότητας.

Τα σύνολα Borel είναι τα σύνολα που ανήκουν στην  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{B}$ , που είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά διαστήματα του  $\mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας τη κλειστότητα της  $\sigma$ -άλγεβρας στις αριθμήσιμες τομές και ενώσεις μπορούμε να λάβουμε όλα τα πιθανά διαστήματα του  $\mathbb{R}$ , όπως για παράδειγμα τα ημιανοικτά, τα ημικλειστά, τα μονοσύνολα κλπ. Η άλγεβρα αυτή είναι πολύ μεγάλη, συγκεκριμένα έχει τη πληθικότητα του συνεχούς  $\mathbb{C}$ , δηλαδή την ίδια πληθικότητα με τους πραγματικούς αριθμούς. Ένα γνωστό σύνολο που δεν ανήκει στην  $\mathcal{B}$  είναι το σύνολο Cantor (βλ. [6, σελ. 7]). Προφανώς υπάρχουν και πάρα πολλά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  που δεν ανήκουν στην  $\mathcal{B}$  διότι η  $\mathcal{B}$  περιέχει στοιχεία από το σύνολο  $2^{\mathbb{R}}$ , του οποίου η πληθικότητα είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής του συνεχούς. Παρόλα αυτά δύσκολα εντοπίζονται και δεν θα τα συναντήσουμε στην εργασία αυτή.

Μιλήσαμε πρωτύτερα για την  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από μία οικογένεια συνόλων. Αντίστοιχα έχουμε τη  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από μία τυχαία μεταβλητή. Συγκεκριμένα σε έναν μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  ορίζουμε τη  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $X$ , ως τη μικρότερη άλγεβρα στην οποία η  $X$  είναι μετρήσιμη και τη συμβολίζουμε με  $\sigma(X)$ . Από τον ορισμό της εύκολα προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 2.1.** Έστω τυχαία μεταβλητή  $X$  στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Τότε η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $X$  είναι η

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής στις πιθανότητες συνδέεται με την έννοια της μετρήσιμης (measurable) συνάρτησης στη θεωρία μέτρου. Θυμίζουμε πως χώρος μέτρου είναι η τριάδα



$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Ο χώρος αυτός είναι παρόμοιος με τον  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , με τη διαφορά πως το μέτρο του είναι μία συνάρτηση  $\mu : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , όπου  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Μετρήσιμος χώρος καλείται το ζεύγος  $(\Omega, \mathcal{A})$ , δηλαδή ένα μη κενό σύνολο  $\Omega$  μαζί με μία  $\sigma$ -άλγεβρα επί του συνόλου.

**Ορισμός 2.5** (Μετρήσιμη Συνάρτηση). Έστω  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  και  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  δύο μετρήσιμοι χώροι. Μία συνάρτηση

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

θα καλείται μετρήσιμη όταν  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ .

Μια ειδική περίπτωση μετρήσιμων συναρτήσεων είναι οι Borel. Οι Borel συναρτήσεις είναι μετρήσιμες συναρτήσεις  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ , με  $d, m \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε πως αν η  $f$  είναι συνεχής, ως γνωστόν θα αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά σύνολα (βλ. σχετικά στο [5, Θεώρημα 6.20, σελ. 74]) και ως εκ τούτου θα είναι και μετρήσιμη.

**Παράδειγμα 2.2** (Δείκτρια Συνάρτηση). Μία ιδιαίτερα χρήσιμη τυχαία μεταβλητή είναι η λεγόμενη δείκτρια συνάρτηση (indicator function), η οποία ορίζεται πάνω σε έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  για ένα ενδεχόμενο  $A \in \mathcal{F}$  ως εξής

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

Εύκολα παρατηρούμε πως η  $\mathbb{I}_A$  είναι τυχαία μεταβλητή, διότι για κάθε  $B \subseteq \mathbb{R}$  borel το ενδεχόμενο

$$\{\mathbb{I}_A \in B\} = \begin{cases} A, & \text{αν } 1 \in B \text{ και } 0 \notin B \\ A^c, & \text{αν } 1 \notin B \text{ και } 0 \in B \\ \Omega, & \text{αν } 0, 1 \in B \end{cases}$$

και έτσι σε κάθε περίπτωση είναι στοιχείο της  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathcal{F}$ . Για  $A, B \in \mathcal{F}$  εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{A \cap B} &= \min\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B \\ \mathbb{I}_{A \cup B} &= \max\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B \\ \mathbb{I}_{A^c} &= 1 - \mathbb{I}_A \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2.3** (Απλή Τυχαία Μεταβλητή). Έστω τυχαία μεταβλητή  $X$  ορισμένη στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Η τυχαία μεταβλητή καλείται απλή (simple) αν λαμβάνει πεπερασμένο πλήθος τιμών  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ . Η μεταβλητή αυτή θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$X(\omega) = \begin{cases} a_1, & \text{αν } \omega \in B_1 \\ a_2, & \text{αν } \omega \in B_2 \\ \vdots \\ a_n, & \text{αν } \omega \in B_n \end{cases}$$

όπου  $B_1, B_2, \dots, B_n$  είναι τα κατάλληλα υποσύνολα της  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathcal{F}$ . Παρατηρούμε πως χρησιμοποιώντας δείκτριες συναρτήσεις η  $X$  μπορεί να γραφεί στην πιο βολική μορφή

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{B_k}(\omega)$$

Μία μη απλή τυχαία μεταβλητή θα είναι είτε διακριτή με ένα άπειρο, αλλά αριθμήσιμο σύνολο τιμών, είτε θα είναι συνεχής με σύνολο τιμών ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .

**Ορισμός 2.6** (Μέτρο Κατανομής). Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Το μέτρο κατανομής (distribution measure) της  $X$  είναι το μέτρο πιθανότητας  $\mu_X$  που αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο  $B \subset \mathbb{R}$  Borel τη πιθανότητα η  $X$  να ανήκει στο σύνολο αυτό, συμβολικά

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}\{X \in B\}$$

Το μέτρο κατανομής καλείται επίσης μάζα πιθανότητας αν η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή και πυκνότητα πιθανότητας αν είναι η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής. Επίσης το μέτρο πιθανότητας συνδέεται με την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας (cumulative distribution function), έστω  $F(x)$ , μέσω των παρακάτω σχέσεων

$$F(x) = \mu_X(-\infty, x] \quad \text{και} \quad \mu_X(x, y] = F(y) - F(x)$$

Παρατηρώντας ότι

$$[a, b] = \bigcap \left( a - \frac{1}{n}, b \right]$$

μπορούμε μέσω της σππ  $F(x)$  να υπολογίσουμε και το μέτρο κατανομής κλειστών διαστημάτων.

**Παράδειγμα 2.4** (Μέτρο Κατανομής Απλής Συνάρτησης). Παρατηρούμε πως για την τυχαία μεταβλητή του παραδείγματος 2.3 το μέτρο κατανομής είναι

$$\mu_X(B) = \sum_{k: a_k \in B} \mathbb{P}(B_k)$$

**Παράδειγμα 2.5** (Μέτρο Κατανομής της Γκαουσιανής). Έστω τυχαία μεταβλητή  $X$  πάνω στον χώρο πιθανότητας  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ . Έστω επίσης πως η συνάρτηση

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας θα είναι η

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

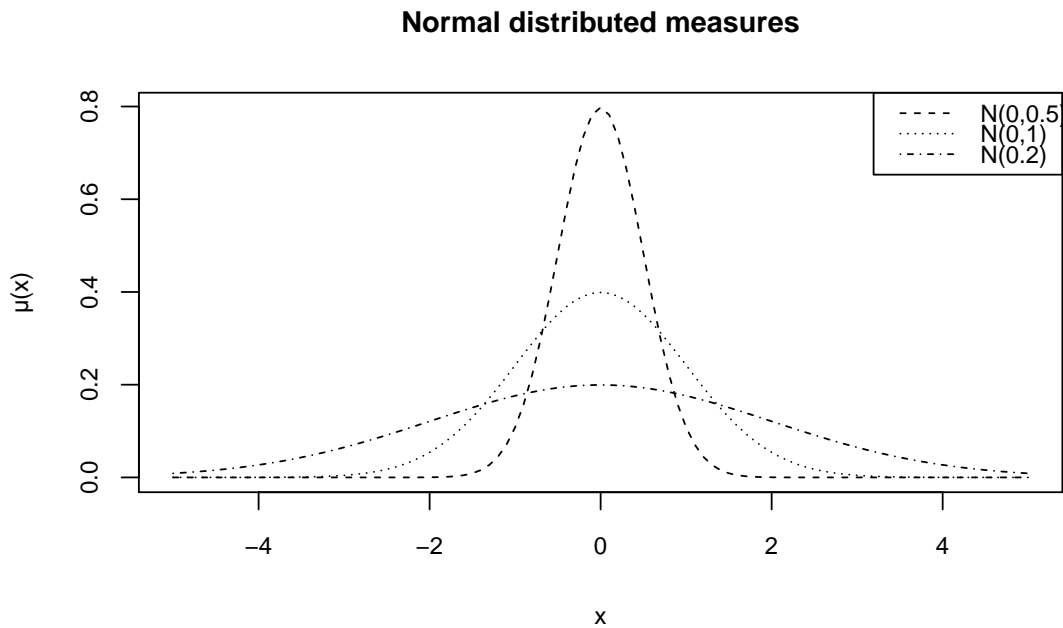
Έτσι το μέτρο κατανομής θα είναι

$$\begin{aligned} \mu_X[a, b] &= F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(y) dy - \int_{-\infty}^a f(y) dy \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \int_a^x f(y) dy + \int_x^b f(y) dy \right) \end{aligned}$$

και έτσι για  $x \in [a, b]$  καταλήγουμε πως

$$\mu_X(a, b) = \int_a^b f(y) dy$$

Το μέτρο αυτό καλείται κανονική κατανομή και η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή λέμε πως ακολουθεί την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια της εργασίας συμβολίζουμε με  $\phi(\cdot)$  τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής και με  $\Phi(\cdot)$  την συνάρτηση κατανομής της.



**Σχήμα 2.1:** Τη κανονική κατανομή τη συμβολίζουμε με  $N(\mu, \sigma)$ . Στο σχήμα παρουσιάζονται τρεις κανονικές κατανομές για διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις  $\sigma$ . Η  $N(0,1)$  καλείται τυποποιημένη κανονική κατανομή.

```

1 lty <- 1:3 # Style of line
2 col <- c("#1B9E77", "#D95F02", "#7570B3")
3 par(ps = 10, cex = 1) # set font size to 10pt
4
5
6 curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 0.5), from = -8, to = 8,
7       main = "Normal distributed measures", xlab = "x",
8       ylab = "μ(x)", lwd = lty[1], col = col[1], lty = 2)
9 curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 1), add = TRUE,
10      lwd = lty[2], col = col[2], lty = 3)
11 curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 2), add = TRUE,
12      lwd = lty[3], col = col[3], lty = 4)
13
14 legend("topright", legend = c("N(0,0.5)", "N(0,1)", "N(0.2)"),
15      col = col, lty = 2:4)

```

**Πρόγραμμα 2.1:** Κώδικας για τη παραγωγή του Σχήματος-3.9.

### 2.1.1 Τυχαία Διανύσματα

**Ορισμός 2.7** (Τυχαίο Διάνυσμα). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Μία συνάρτηση

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

θα καλείται τυχαίο διάνυσμα αν και μόνο αν οι  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τυχαίες μεταβλητές.

Παρατηρήστε πως τόσο το τυχαίο διάνυσμα όσο και οι επιμέρους τυχαίες μεταβλητές ορίζονται επί του ίδιου δειγματικού χώρου. Σκεφτείτε για παράδειγμα πως ο  $\Omega$  είναι το σύνολο όλων των κτηρίων μίας πόλης, η  $X_1$  δεχόμενη ένα ενδεχόμενο του  $\Omega$ , δηλαδή ένα κτήριο της πόλης, επιστρέφει το ύψος του και η  $X_2$  τον αριθμό των ορόφων του. Το τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ , δεχόμενη ένα κτήριο θα επιστρέφει ένα σημείο του  $\mathbb{R}^2$  του οποίου η πρώτη συντεταγμένη θα είναι το ύψος του κτηρίου και η δεύτερη ο αριθμός των ορόφων του.

Με την ακόλουθη πρόταση λαμβάνουμε ένα ανάλογο του ορισμού της μονοδιάστατης τυχαίας μεταβλητής.

**Πρόταση 2.2.** Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Μία συνάρτηση  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  θα είναι τυχαίο διάνυσμα αν και μόνο αν

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

για κάθε  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , όπου  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  η άλγεβρα Borel στον  $\mathbb{R}^n$  ή διαφορετικά η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά του  $\mathbb{R}^n$ .

Η πρόταση αυτή επιτρέπει τη φυσιολογική επέκταση των εννοιών μέτρου κατανομής, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής για τυχαία διανύσματα.

**Παράδειγμα 2.6.** Έστω  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας. Το μέτρο κατανομής του τυχαίου διανύσματος  $(X, Y)$  θα είναι το μέτρο

$$\mu(B) = \mathbb{P}[(X, Y) \in B], \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$$

Το μέτρο αυτό καλείται και από κοινού μέτρο κατανομής (joint distribution measure) των  $X, Y$ . Ανάλογα η συνάρτηση κατανομής του διανύσματος ή η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των μεταβλητών είναι μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$  μετρήσιμη, τέτοια ώστε

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_B(x, y) f(x, y) dx dy, \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας επιτρέπει να λαμβάνουμε εύκολα νέες τυχαίες μεταβλητές και νέα τυχαία διανύσματα από ήδη υπάρχουσες τυχαίες μεταβλητές. Την απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να την βρει ο ενδιαφερόμενος στο [4, σελ 64]. Παρατηρήστε πως το θεώρημα ικανοποιείται και για συνεχείς συναρτήσεις, διότι όπως έχουμε πει οι συνεχείς είναι Borel.

**Θεώρημα 2.1.** Έστω  $Y$  τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η  $Y$  μετρήσιμη είναι να υπάρχει συνάρτηση Borel  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$Y(\omega) = f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega$$

## 2.2 Ολοκλήρωμα Lebsgue

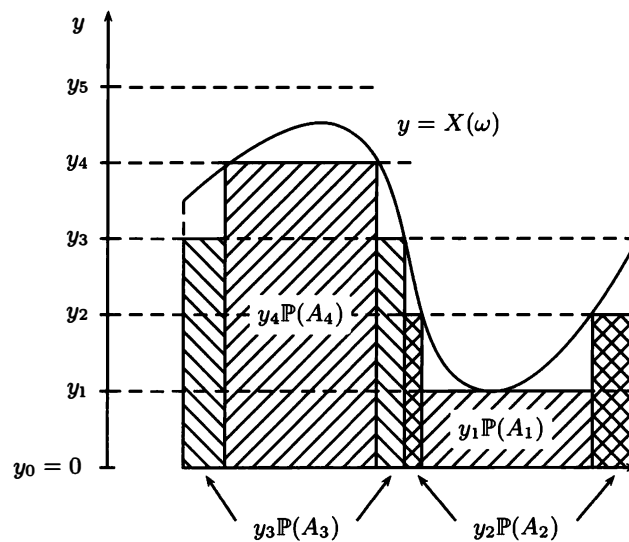
**Ορισμός 2.8** (Μέση Τιμή για αριθμήσιμο  $\Omega$ ). Έστω τυχαία μεταβλητή  $X$  ορισμένη στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Αν το  $\Omega$  είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots\}$$

ορίζουμε ως την αναμενόμενη μέση τιμή (expectation) της  $X$  τη ποσότητα

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega) \mathbb{P}(\omega_k)$$

Για να ορίσουμε την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής για μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Χωρίς να ορίσουμε αυστηρά το ολοκλήρωμα, αναφέρουμε αρκετά στοιχεία ώστε η λειτουργία του να γίνει αντιληπτή στον αναγνώστη.



**Σχήμα 2.2:** (Πηγή: [18, σελ. 15])

Το κάτω άθροισμα Lebesgue για μία θετική τυχαία μεταβλητή.

Θυμίζουμε πως η  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα Riemann, διαμερίζουμε τον άξονα  $y$  (βλ. Εικόνα- 2.2) αντί του άξονα  $x$ . Έστω

$$LS(X) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mathbb{P}(A_k)$$

το κάτω άθροισμα Lebesgue, όπου το  $A_k \in \Omega$  αντιστοιχεί στο υποδιάστημα της διαμέρισης  $[y_k, y_{k+1}]$  και ορίζεται ως

$$A_k = \{\omega \in \Omega : y_k \leq X < y_{k+1}\}$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue ως το όριο του  $LS(X)$ , καθώς το μήκος των υποδιαστημάτων της διαμέρισης τείνει στο 0. Συγκεκριμένα έχουμε πως

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mathbb{P}(A_k) \rightarrow \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \text{ καθώς } |y_k - y_{k+1}| \rightarrow 0$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [4, Ενότητα 5.1], ή σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας μέτρου, για τον αυστηρό ορισμό του ολοκληρώματος. Παρατηρούμε πως αν  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = \infty\}) > 0$  τότε το ολοκλήρωμα απειρίζεται.

Επίσης το παραπάνω ολοκλήρωμα ορίζεται και για τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνουν αρνητικές τιμές με θετική πιθανότητα, με την βοήθεια των τυχαίων μεταβλητών

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} \quad \text{και} \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$$

Παρατηρούμε πως οι  $X^+$  και  $X^-$  είναι θετικές σχεδόν παντού<sup>1</sup> και το ολοκλήρωμα Lebesgue θα είναι ίσο με

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας τυχαίας μεταβλητής σε ένα στοιχείο  $A$  της  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$  εργαζόμαστε ως εξής

$$\int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{I}_A(\omega) X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

**Παράδειγμα 2.7.** Στο παράδειγμα αυτό υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue, το ολοκλήρωμα της απλής τυχαίας μεταβλητής  $X$  του παραδείγματος 2.3. Θυμίζουμε ότι η  $X$  γράφεται ως

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{B_k}(\omega)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως οι τιμές  $a_k$  είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Αν δεν είναι, τις διατάσσουμε. Έτσι για τη διαμέριση  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  το κάτω άθροισμα Lebesgue θα είναι

$$LS(X) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{P}(B_k)$$

Παρατηρώντας τώρα πως το άθροισμα αυτό παραμένει σταθερό, οσοδήποτε και αν μικρύνουμε τις αποστάσεις των σημείων της διαμέρισης, καταλήγουμε στο ότι

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{P}(B_k)$$

**Ορισμός 2.9** (Ολοκληρώσιμη Τυχαία Μεταβλητή). Μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ορισμένη στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . θα την καλούμε ολοκληρώσιμη να και μόνο αν

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

<sup>1</sup>Σε αντιστοιχία με τον Ορισμό-2.3, μία ιδιότητα  $A$  ισχύει σχεδόν παντού όταν το μέτρο των  $\omega \in \Omega$  που ικανοποιούν την ιδιότητα  $A$  είναι 1. Για παράδειγμα η τυχαία μεταβλητή  $X$  θα είναι μη αρνητική σχεδόν παντού αν

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0\}) = 1$$

ή ισοδύναμα αν

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 0\}) = 0$$

Γενικά σε έναν χώρο μέτρου  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , για  $1 \leq p < \infty$  ορίζεται ο χώρος  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , του οποίου τα στοιχεία είναι μετρήσιμες συναρτήσεις  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση

$$\int_{\Omega} |X|^p d\mu(\omega) < \infty$$

Όταν ο μετρήσιμος χώρος είναι γνωστός συμβολίζουμε τον χώρο αυτό με  $L^p$ . Συνεπώς μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε πως μία τυχαία μεταβλητή του  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , θα καλείται ολοκληρώσιμη αν  $X \in L^1$ . Γενικότερα για μία τυχαία μεταβλητή  $X$ , θα λέμε πως έχει ροπή τάξης  $k$ , με  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , αν η  $X \in L^k$ .

### 2.2.1 Μέση Τιμή

Είμαστε τώρα έτοιμη να ορίσουμε την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

**Ορισμός 2.10** (Αναμενόμενη Μέση Τιμή). Έστω  $X$  ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Η (αναμενόμενη) μέση τιμή της  $X$  ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Πρόκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ολοκληρώματος πως η συνάρτηση  $\mathbb{E}[X]$  είναι γραμμική. Μια πολύ σημαντική ανισότητα που αφορά τη μέση τιμή και θα χρειαστούμε στη συνέχεια είναι η ανισότητα Jensen. Πριν την αναφέρουμε θυμίζουμε την έννοια της κυρτής και κοίλης συνάρτησης.

**Ορισμός 2.11** (Κυρτή Συνάρτηση). Έστω  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . Η συνάρτηση θα λέγεται κυρτή (convex) στο διάστημα  $D$ , όταν για κάθε  $x, y \in D$  και για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $0 \leq \lambda \leq 1$ , να αληθεύει η ισότητα

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

**Ορισμός 2.12** (Κοίλη Συνάρτηση). Έστω  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . Η συνάρτηση θα λέγεται κοίλη (concave) στο διάστημα  $D$ , όταν για κάθε  $x, y \in D$  και για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $0 \leq \lambda \leq 1$ , να αληθεύει η ανισότητα

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

**Πρόταση 2.3** (Ανισότητα Jensen). Έστω  $X$  ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και  $f$  μία κυρτή πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Τότε

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

Σημειώνουμε πως αν η  $f$  είναι κοίλη θα ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.

**Παράδειγμα 2.8.** Η συνάρτηση  $\max\{\cdot, x_0\} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με

$$\max\{x, x_0\} = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq x_0 \\ x_0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

απεικονίζεται στο Σχήμα-2.3. Εύκολα παρατηρούμε πως είναι συνεχής και κυρτή συνάρτηση. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα-2.1, για μία τυχαία μεταβλητή  $X$  η  $\max\{X, x_0\}$  θα είναι τυχαία μεταβλητή λόγω της συνέχειας και επιπλέον σύμφωνα με την ανισότητα Jensen θα ισχύει ότι

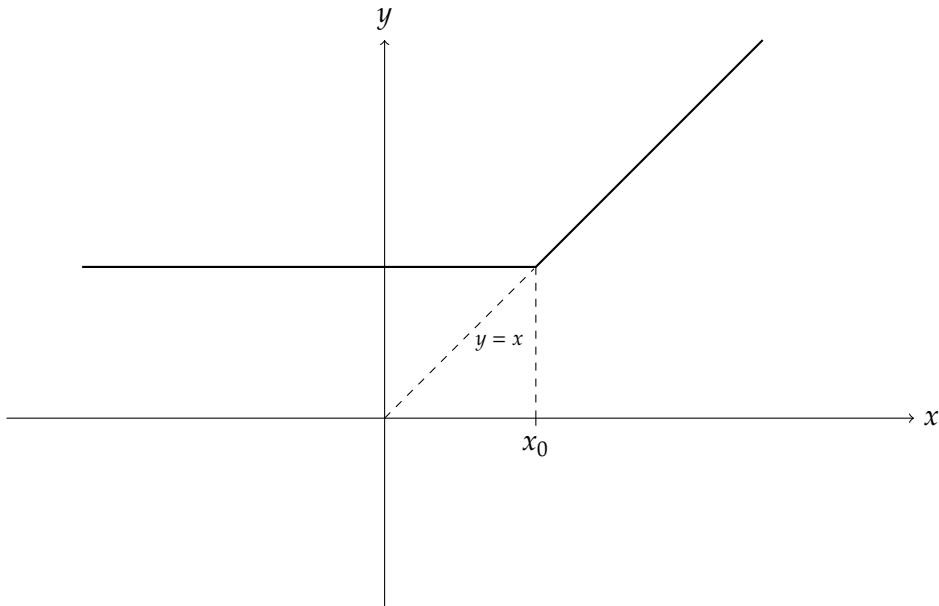
$$\max\{\mathbb{E}[X], x_0\} \leq \mathbb{E}[\max\{X, x_0\}]$$

Την τελευταία σχέση θα τη χρησιμοποιούμε συνέχεια όταν μελετάμε τη μεροληψία των εκτιμητών στη τιμολόγηση αμερικάνικων παραγώγων.

### 2.2.2 Υπολογισμός της Μέσης Τιμής

Έστω  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$  μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένες στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Υπάρχουν διάφοροι τρόπου με τους οποίους μπορεί να συγκλίνει η ακολουθία.





**Σχήμα 2.3:** Η συνάρτηση  $\max\{\cdot, x_0\} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για  $x_0 > 0$ .

Στα πλαίσια της εργασίας μας ενδιαφέρει μονάχα η σύγκλιση σχεδόν βεβαίως. Άλλοι τρόποι σύγκλισης είναι η σύγκλιση κατά πιθανότητα και η σύγκλιση κατά κατανομή (ή κατά νόμο ή ασθενής). Περισσότερα μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο [4, σελ. 190]. Τη σύγκλιση κατά κατανομή την ορίζουμε στην ενότητα 2.4.

**Ορισμός 2.13** (Σύγκλιση σχεδόν βεβαίως). Λέμε πως η ακολουθία συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή σχεδόν βεβαίως και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ σ.β.}$$

αν

$$\mathbb{P} \left[ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right] = 1$$

Σημειώνουμε πως για δεδομένο  $\omega \in \Omega$  η ακολουθία  $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$  είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών και η σύγκλιση  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$  αφορά σύγκλιση μια πραγματικής ακολουθίας, όπως αυτή ορίζεται στο  $\mathbb{R}$ . Ο επόμενος τρόπος αφορά τη σύγκλιση της μέσης τιμής των τυχαίων μεταβλητών της ακολουθίας. Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας μέτρου.

**Θεώρημα 2.2** (Μονότονη Σύγκλιση (Monotone Convergence)). Έστω  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένες στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , τέτοια ώστε να συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην τυχαία μεταβλητή  $X$ . Αν

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \text{ σχεδόν παντού}$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

δηλαδή

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

**Θεώρημα 2.3** (Κυριαρχημένη Σύγκλιση (Dominated Convergence)). Έστω  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένες στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , τέτοια ώστε να συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην τυχαία μεταβλητή  $X$ . Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή  $Y$  τέτοια ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|X_n| \leq Y$  σχεδόν βεβαίως, θα ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα τα αναφέραμε διότι χρησιμοποιούνται και αναφέρονται συχνά στη θεωρία πιθανοτήτων. Παρόλα αυτά η αξία τους δεν γίνεται εμφανής στη παρούσα εργασία (αναλυτικότερα βλ. [18, 1.4-1.5]). Είναι πάντως απαραίτητα για την απόδειξη του παρακάτω.

**Θεώρημα 2.4.** Έστω  $X$  μία τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , και  $g$  μια Borel συνάρτηση του  $\mathbb{R}$ , ώστε η  $g(X)$  να είναι ολοκληρώσιμη. Έστω επίσης πως η  $X$  έχει πυκνότητα τη συνάρτηση  $f$ , τότε

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Έτσι χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα, αν μια τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, μπορούμε πολύ εύκολα με το παραπάνω θεώρημα να την υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας το γνωστό ολοκλήρωμα Riemann.

### Διασπορά και Συνδιακύμανση

**Ορισμός 2.14** (Διασπορά). Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Εάν  $X$  είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , ορίζουμε ως τη διασπορά (ή διακύμανση (variance) της  $X$  ως

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Η διασπορά είναι ουσιαστικά η μέση τετραγωνική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής  $X$  από την σταθερά  $\mathbb{E}[X]$ . Μας πληροφορεί για τη διακύμανση της  $X$  γύρω από την μέση τιμή της.

Αν η  $X \in L^2$ , τότε αξιοποιώντας την γραμμικότητα της της μέσης τιμής και την ιδιότητα  $\mathbb{E}[c \cdot X] = c\mathbb{E}[X]$  για κάθε  $c \in \mathbb{R}$ , λαμβάνουμε το ακόλουθο γνωστό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

**Ορισμός 2.15** (Συνδιακύμανση). Έστω τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Αν οι  $X, Y \in L^2$  ορίζουμε ως τη συνδιακύμανση ή συνδιασπορά (covariance) ή συντελεστή συσχέτισης τη ποσότητα

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Το μέτρο αυτό μας πληροφορεί σχετικά με την εξάρτηση της  $X$  με την  $Y$ . Αν εργαστούμε όπως προηγουμένως καταλήγουμε εύκολα στο ότι

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\text{Var}[X] = \text{Cov}[X, X]$$

Για να μετρήσουμε τη εξάρτηση δύο τυχαιών μεταβλητών συνήθως χρησιμοποιούμε τον συντελεστή συσχέτισης (correlation coefficient που ορίζεται ως

$$\rho_{X,Y} = \text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

Είναι άμεσο από την ανισότητα Cauchy-Schwarz πως  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Όταν  $\rho = 0$  οι τ.μ. είναι ασυσχέτιστες και όταν  $\rho = \pm 1$ , οι τ.μ. έχουν θετική ή αρνητική γραμμική εξάρτηση.

### Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή

Θεωρούμε τις κανονικές τυχαιές μεταβλητές

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \dots, X_d \sim N(\mu_d, \sigma_d^2),$$

Το τυχαίο διάνυσμα

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$$

του  $\mathbb{R}^d$ , λέμε πως ακολουθεί την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$  και

$$\Sigma = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1d} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d1} & c_{d2} & \cdots & c_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_d\rho_{1d} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_d\rho_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_d\sigma_1\rho_{d1} & \sigma_d\sigma_2\rho_{d2} & \cdots & \sigma_d^2 \end{pmatrix}$$

όπου  $c_{ij} = \text{Cov}[X_i, X_j]$ , άρα  $c_{ii} = \sigma_i^2$ , και  $\rho_{ij}$  ο συντελεστής συσχέτισης. Συμβολικά γράφουμε πως  $\mathbf{X} \sim N_d(\mu, \Sigma)$  (ή αν δεν προκύπτει σύγχυση  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι η

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Αν οι  $X_i$  είναι κανονικές τότε  $X \sim N(0, I_d)$  και προκύπτει εύκολα πως η αντίστοιχη πυκνότητα είναι η

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}x^T x}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Αντίστοιχα οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα  $X$  είναι τέτοιο ώστε  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , όπου ο  $\Sigma$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

θα λέμε πως ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Επιπλέον οι συνιστώσες του διανύσματος  $X$  είναι κανονικές μονοδιάστατες τυχαιές μεταβλητές.

1. Είναι συμμετρικός, δηλαδή  $\Sigma = \Sigma^T$ .

2. Τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά.
3. Είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα  $x$  να ισχύει ότι  $x^T \Sigma x \geq 0$ . Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με το να απαιτήσουμε τα ιδιοδιανύσματα του  $\Sigma$  να είναι θετικά.

Τέλος αναφέρουμε μία χρήσιμη ιδιότητα της πολυμεταβλητής κανονική κατανομής. Έστω  $d$ -διάστατο τυχαίο διάνυσμα  $X$  τέτοιο ώστε  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , τότε για κάθε πίνακα  $A$  του  $M_{k \times d}(\mathbb{R})$  και κάθε  $k \in \mathbb{R}$  ισχύει ακόλουθη επαγωγή

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T) \quad (2.1)$$

## 2.3 Περιορισμός Πληροφορίας

### 2.3.1 Ανεξαρτησία

Στα παρακάτω δουλεύουμε στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και αναφερόμαστε επίσης σε μία  $\sigma$ -υποάλγεβρα  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , δηλαδή η  $\mathcal{G}$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα στοιχείων, όχι κατ' ανάγκη όλων, του  $\Omega$ .

Δύο γεγονότα του  $A, B \in \Omega$  καλούνται ανεξάρτητα, αν και μόνο αν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Η προηγούμενη έννοια γενικεύεται σε  $\sigma$ -άλγεβρες. Συγκεκριμένα λέμε πως  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{G}$  είναι ανεξάρτητες, αν και μόνο αν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \quad \forall A \in \mathcal{F} \text{ και } B \in \mathcal{G}$$

Συνεχίζουμε με ένα πεπερασμένο πλήθος  $\sigma$ -άλγεβρων του  $\Omega$ . Λέμε πως οι  $F_1, F_2, \dots, F_n$   $\sigma$ -άλγεβρες του  $\Omega$  είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε εκλογή ενδεχομένων  $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ , ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Η γενικότερη περίπτωση που συναντάμε είναι αυτή των αριθμήσιμων οικογενειών. Λέμε ότι η οικογένεια των  $\sigma$ -άλγεβρων  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της  $\{F_i\}_{i=1}^k$ , με  $k \in \mathbb{N}$  είναι ανεξάρτητη.

Έχουμε μιλήσει για την  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή  $X$  (βλ. Πρόταση-2.1). Έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε τους παραπάνω ορισμούς στις τυχαίες μεταβλητές, με την έννοια πως δύο τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι  $\sigma(X), \sigma(Y)$  είναι ανεξάρτητες. Ανάλογα ορίζουμε τις γενικεύσεις σε πεπερασμένες και αριθμήσιμες οικογένειες τυχαίων μεταβλητών.

Πρωτίτερα αναφέραμε πως αν η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (βλ. Πρόταση-2.1) είναι συνάρτηση Borel, τότε η  $f(X)$  είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε  $X$  τυχαία μεταβλητή. Παρατηρούμε πως ισχύει ότι αν  $A \subseteq \sigma(f(X))$  τότε και  $A \subseteq \sigma(X)$ . Πράγματι αν  $A \subseteq \sigma(f(X))$  τότε θα υπάρχει  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ώστε

$$A = \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in B\}$$

Θέτοντας

$$C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$$

το  $A$  γράφεται ως

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in C\} = X^{-1}(C)$$

Έτσι σύμφωνα με την Πρόταση-2.1 το  $A \in \sigma(X)$ . Με αυτό το απλό επιχείρημα, αποδεικνύεται εύκολα η ακόλουθη πρόταση

**Πρόταση 2.4.** Έστω  $X, Y$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και  $f, g$  Borel συναρτήσεις στον  $\mathbb{R}$ . Τότε οι  $f(X)$  και  $g(X)$  είναι ανεξάρτητες.

Τέλος, σε αντιστοιχία με τον ορισμό της ανεξαρτησίας για ενδεχόμενα, αποδεικνύεται πως οι τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\mu_{X,Y}(A \times B) &= \mu_X(A)\mu_Y(B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2 \\ F_{X,Y}((a, b)) &= F_X(a)F_Y(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

### 2.3.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Στα ακόλουθα δουλεύουμε στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Θυμίζουμε πως η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A$  δεδομένου πως έχει συμβεί ένα ενδεχόμενο  $B$  είναι

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Προφανώς αν τα  $A, B$  είναι ξένα, τότε  $\mathbb{P}(A|B) = 0$ . Αν  $A, B$  δεν είναι ξένα αλλά είναι ανεξάρτητα  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ , δηλαδή η γνώση μας για το ότι συνέβηκε το ενδεχόμενο  $B$  δεν μας προσφέρει καμία επιπλέον πληροφορία για το ενδεχόμενο να συμβεί το  $A$ . Γενικά αν συμβεί το ενδεχόμενο  $B$ , μπορούμε να θεωρήσουμε πως ο νέος δειγματικός μας χώρος είναι το σύνολο  $B$ , τα στοιχεία του είναι τα ενδεχόμενα  $A \cap B$  για κάθε  $A \in \Omega$  και το μέτρο του είναι το δεσμευμένο μέτρο πιθανότητας

$$\mathbb{P}_B(\cdot) = \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Η έννοια της δέσμευσης επεκτείνεται στις τυχαίες μεταβλητές. Μπορούμε να δεσμεύσουμε μία τυχαία μεταβλητή ως προς μία  $\sigma$ -άλγεβρα και άρα ως προς μία άλλη τυχαία μεταβλητή, δεσμεύοντας ως προς τη  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την τελευταία.

**Ορισμός 2.16** (Δεσμευμένη Μέση Τιμή). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $G$  υποάλγεβρα της  $\mathcal{F}$  και  $X$  μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Η δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  δεδομένης της  $G$  είναι μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  τέτοια ώστε να ικανοποιεί της ακόλουθες συνθήκες.

1. Η  $Y$  να είναι  $G$ -μετρήσιμη.
2. Για κάθε  $B \in G$  να ισχύει ότι

$$\int_B Y d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$$

Η πρώτη συνθήκη μας εξασφαλίζει πως η  $Y$  μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από την πληροφορία που εμπεριέχει η  $\sigma$ -άλγεβρα  $G$ . Η δεύτερη συνθήκη εξασφαλίζει πως στα σύνολα της υπό δέσμευσης  $\sigma$ -άλγεβρα  $G$ , η εκτίμηση (το ολοκλήρωμα) της  $Y$  ταυτίζεται με αυτή της  $X$ . Παρατηρούμε λοιπόν πως όσο περισσότερη πληροφορία περιέχει η  $\sigma$ -άλγεβρα  $G$ , δηλαδή όσο περισσότερα ενδεχόμενα περιέχει, τόσο για περισσότερα ενδεχόμενα θα μπορούμε να προσδιορίζουμε τη μέση τιμή της  $X$  μέσω της  $Y$ .

Με χρήση του Θεωρήματος-?? (βλ. [18, Παράρτημα B]), η ύπαρξη της τυχαία μεταβλητής  $Y$ . Επιπλέον αποδεικνύεται πως αυτή είναι μοναδική<sup>2</sup>. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα μας επιτρέπει

<sup>2</sup>Για την απόδειξη και των δύο βλ. Θεώρημα-11.2 από [4]

να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $\mathbb{E}[X|G]$  για να αναφερθούμε στην τυχαία μεταβλητή  $Y$  του προηγούμενου ορισμού. Τέλος παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα, που περιέχει σημαντικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, χωρίς απόδειξη. Στη συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες αυτές χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 2.5** (Ιδιότητες της ΔΜΤ). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , μία υποάλγεβρα  $G$  της  $\mathcal{F}$  και δύο ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι γραμμική, δηλαδή

$$\mathbb{E}[aX + bY|G] = a\mathbb{E}[X|G] + b\mathbb{E}[Y|G]$$

2. Αν η  $X$  είναι  $G$ -μετρήσιμη, τότε

$$\mathbb{E}[XY|G] = X\mathbb{E}[Y|G]$$

Παρατηρήστε πως η  $XY$  είναι  $G$ -μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη.

3. Για  $H$  υποάλγεβρα της  $G$  ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|G]|H] = \mathbb{E}[X|H]$$

4. Αν η  $X$  είναι ανεξάρτητη της  $G$ , τότε

$$\mathbb{E}[X|G] = \mathbb{E}[X]$$

5. Τέλος ικανοποιείται η ανισότητα Jensen, δηλαδή

$$\mathbb{E}[\phi(X)|G] \geq \phi(\mathbb{E}[X|G])$$

για κάθε κυρτή συνάρτηση  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2.4 Ασυμπτωτικά Αποτελέσματα

Όταν μιλήσαμε για τον υπολογισμό της Μέσης Τιμής αναφερθήκαμε στη σύγκλιση σχεδόν βεβαίως. Για τα επόμενα θα χρειαστούμε άλλες δύο. Η πρώτη είναι η σύγκλιση κατά πιθανότητα (in probability).

**Ορισμός 2.17** (Σύγκλιση κατά πιθανότητα). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , μία ακολουθία τ.μ.  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  και μία τ.μ.  $X$  ορισμένες σε αυτόν. Θα λέμε πως η ακολουθία  $X_n$  συγκλίνει κατά πιθανότητα στην  $X$ , συμβολικά  $X_n \xrightarrow{p} X$  αν και μόνο αν

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| < \epsilon) \rightarrow 1, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Οι νόμοι των μεγάλων αριθμών αποτελούν κύρια αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων και διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στη στατιστική. Υπάρχει ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών και ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών. Αναφέρουμε μόνο τον ισχυρό νόμο και συγκεκριμένα για ισόνομες ακολουθίες.

**Θεώρημα 2.6** (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (Strong Law of Large Numbers)). Έστω ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών  $\{X_n, n \geq 1\}$  με  $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ . Τότε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu, \text{ σχεδόν βεβαίως.}$$

Ο ασθενής νόμος δηλώνει το ίδιο αποτέλεσμα με τη διαφορά πως η σύγκλιση πραγματοποιείται κατά πιθανότητα (ασθενέστερο αποτέλεσμα). Αναφέρουμε πως αποδεικνύεται και το αντίστροφο του προηγούμενου νόμου. Η δεύτερη έννοια σύγκλισης που χρειαζόμαστε είναι της ασθενούς σύγκλισης ή όπως αλλιώς ονομάζεται σύγκλιση κατά κατανομή ή σύγκλιση κατά νόμο. Αφού ορίσουμε την ασθενή σύγκλιση, παρουσιάζουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

**Ορισμός 2.18** (Ασθενής σύγκλιση). Έστω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $\{X_n, n \geq 1\}$  και μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ορισμένες στους αυθαίρετους χώρους πιθανότητας  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$  και  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  αντίστοιχα. Λέμε πως η  $(X_n)_n \in \mathbb{N}$  συγκλίνει ασθενώς στην  $X$ , συμβολικά ότι  $X_n \xrightarrow{d} X$ , όταν

$$\mathbb{P}[X_n \leq x] \rightarrow \mathbb{P}[X \leq x], \text{ καθώς } n \rightarrow \infty,$$

για κάθε  $x$  για το οποίο  $\mathbb{P}[X = x] = 0$ .

**Θεώρημα 2.7** (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα). Εάν η  $\{X_n, n \geq 1\}$  είναι μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία μη εκφυλισμένων τ.μ., με  $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ , και  $\text{Var}[X_1] = \sigma^2$ , τότε

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

όπου  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , και  $Z$  είναι η τυποποιημένη κανονική τ.μ., με σ.κ.

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$



Θυμίζουμε πως μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ονομάζεται *εκφυλισμένη* (degenerate), όταν είναι σταθερή με πιθανότητα 1, δηλαδή υπάρχει  $\omega \in \Omega$ , τέτοιο ώστε  $\mathbb{P}(X = \omega) = 1$ . Για μία ακολουθία που ικανοποιεί τις συνθήκες του ΚΟΘ θα γράφουμε ότι

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

και θα εννοούμε την ασθενή σύγκλιση που περιγράφεται στο θεώρημα.

## Κεφάλαιο 3

# Η τιμή μιας Μετοχής

### 3.1 Στοιχεία Στοχαστικών Ανελίξεων

**Ορισμός 3.1** (Στοχαστική Ανέλιξη (σ.α.)). Ονομάζουμε στοχαστική ανέλιξη (stochastic process) κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X(t) : t \in T\}$  πάνω σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Θυμίζουμε πως το σύνολο  $T$  ονομάζεται παραμετρικός χώρος (parameter space) και είναι ένας ολικά διατεταγμένος χώρος δεικτών. Σημειώνουμε πως το  $T$  συνήθως ερμηνεύεται ως ο χρόνος. Επίσης συμβολίζουμε με  $S$  το χώρο καταστάσεων (state space) ο οποίος είναι το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής  $X(t)$ . Για συντομία μερικές φορές αναφερόμαστε στη  $X(t)$  με τον συμβολισμό  $X_t$ .

**Ορισμός 3.2** (Τροχιά). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και στοχαστική ανέλιξη  $\{X(t) : t \in T\}$  ορισμένη πάνω σε αυτόν με  $T$  και  $S$  τον παραμετρικό χώρο και το χώρο καταστάσεων της ανέλιξης αντίστοιχα. Έστω επίσης  $\omega \in \Omega$  ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου. Καλούμε τροχιά (path) και ειδικότερα  $\omega$ -τροχιά της στοχαστικής ανέλιξης τη συνάρτηση

$$X_t(\omega) : T \rightarrow S$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού ορίζουμε τη συνέχεια στις στοχαστικές ανελίξεις. Συγκεκριμένα λέμε πως μία στοχαστική ανέλιξη είναι *συνεχής* ή ότι έχει συνεχείς τροχιές αν οι τροχιές της είναι συνεχείς σχεδόν βεβαίως.

**Ορισμός 3.3** (Φίλτρο ή Φιλτράρισμα ή Διήθηση). Έστω δειγματικός χώρος  $\Omega$ , ένας παραμετρικός χώρος  $T$  και  $\mathcal{F}_t = \{F_t\}_{t \in T}$  μία οικογένεια  $\sigma$ -αλγεβρών του  $\Omega$ . Η  $\mathcal{F}_t$  θα καλείται φίλτρο (filtration) αν

$$\forall s, t \in T : s < t, \text{ να είναι } F_s \subseteq F_t$$

Επιπλέον ο χώρος  $\{\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in T}, \mathbb{P}\}$  καλείται φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας. Επίσης θα λέμε πως η στοχαστική ανέλιξη  $\{X(t) : t \in T\}$  είναι *προσαρμοσμένη στη διήθηση*  $\mathcal{F}_t$  αν και μόνο εάν για κάθε  $t \in T$  η  $X_t$  είναι  $F_t$ -μετρήσιμη. Όταν λέμε πως μία στοχαστική ανέλιξη ορίζεται πάνω σε χώρο πιθανότητας με φίλτρο, θα εννοούμε πως η ανέλιξη είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση του χώρου.

**Παράδειγμα 3.1.** Έστω χώρος  $\{\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in T}, \mathbb{P}\}$ , όπου  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ,  $T = \{0, 1, 2\}$ , και  $\mathbb{P}(A_i) = 1/4$ . Υποθέτουμε πως τα ενδεχόμενα του  $\Omega$  αναπαριστούν καταστάσεις της οικονομία και πως ο παραμετρικός χώρος  $T$  αναπαριστά τρεις χρονικές στιγμές της οικονομίας, με αφετηρία τη στιγμή 0. Θεωρούμε επίσης τη διήθηση

$$\begin{aligned} F_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\ F_1 &= \sigma(\{A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_4\}) \\ F_2 &= \sigma(\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4\}) \end{aligned}$$

Καταρχάς παρατηρήστε πως οι  $F_i$  είναι υποάλγεβρες της γενικής  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathcal{F}$ . Τη χρονική στιγμή μηδέν ο χώρος πιθανότητας είναι ο  $\{\Omega, F_0, \mathbb{P}\}$ . Συνεπώς μπορούμε να μετρήσουμε μόνο το  $\emptyset$  και  $\Omega$ , δηλαδή να αποφανθούμε πως με πιθανότητα 0 δεν θα συμβεί καμία κατάσταση της οικονομία και με πιθανότητα 1 θα συμβεί μία από τις  $A_i$ .

Στη χρονική στιγμή 1 έχουμε περισσότερη πληροφορία. Πέραν των αποτελεσμάτων που δώσαμε στη στιγμή 0 μπορούμε να προσθέσουμε πως με πιθανότητα  $1/2$  θα συμβεί είτε το  $A_1 \cup A_3$ , είτε το  $A_2 \cup A_4$ . Ακόμη δεν μπορούμε να μετρήσουμε την πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα, για παράδειγμα,  $A_1$ . Το  $A_1$  μπορούμε να το διακρίνουμε μόνο μέσω της ένωσης  $A_1 \cup A_3$ . Στην τελική στιγμή, ο χώρος πιθανότητας είναι ο  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και πλέον μπορούμε να μιλήσουμε για την πιθανότητα να συμβεί οποιαδήποτε κατάσταση της οικονομίας.

**Ορισμός 3.4.** Έστω στοχαστική ανέλιξη  $\{X(t) : t \in T\}$  ορισμένη στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας  $\{\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in T}, \mathbb{P}\}$ . Θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη

- Είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων (independent increments) αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  οι διαφορές

$$Y_{t_j} = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

- Είναι Μαρκοβιανή (Markov) αν για κάθε  $0 \leq s \leq t$  του  $T$  να ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X_t \in A | F_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s), \quad \forall A \in S$$

Δηλαδή για να υπολογίσουμε τη πιθανότητα η αλυσίδα να βρεθεί σε ένα υποσύνολο του συνόλου καταστάσεων  $S$  δεν χρειαζόμαστε όλο το παρελθόν της αλυσίδας προτού της στιγμής  $s$ , που δίνεται από την  $\mathcal{F}_s$ , αλλά μόνο το που βρίσκεται η αλυσίδα τη στιγμή  $s$ . Με άλλα λόγια η εξέλιξη της αλυσίδα μετά τη στιγμή  $s$  εξαρτάται μονάχα από το που βρισκόταν τη στιγμή  $s$ . Την ιδιότητα αυτή τη διατυπώνουμε λέγοντας πως η αλυσίδα δεν έχει μνήμη. Ένας χαρακτηρισμός της μαρκοβιανής ιδιότητας είναι για κάθε μη αρνητική Borel συνάρτηση  $f$  να υπάρχει συνάρτηση Borel  $g$  ώστε

$$\mathbb{E}[f(X_t) | F_s] = g(X_s)$$

Επίσης αν ο παραμετρικός χώρος είναι διακριτός η μαρκοβιανή ιδιότητα διατυπώνεται και ως εξής. Η αλυσίδα είναι μαρκοβιανή αν για  $n < m$  και για κάθε  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  είναι

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+1}}, \dots, X_{t_m} | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_{t_{n+1}}, \dots, X_{t_m} | X_{t_n} = x_n]$$

- Είναι martingale αν για κάθε  $0 \leq s \leq t$  του  $T$  ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[X_t|F_s] = X_s$$

Δηλαδή η  $X_t$  είναι ανεξάρτητη της άλγεβρας  $F_s$ . Αν για παράδειγμα η  $X_t$  αναπαριστά το κέρδος, η ιδιότητα martingale εξασφαλίζει πως τη χρονική στιγμή  $s$  δεν έχουμε πληροφορία για να εκτιμήσουμε το αναμενόμενο κέρδος μία μεταγενέστερη στιγμή  $t$ . Συγκεκριμένα δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για αν το αναμενόμενο κέρδος τη στιγμή  $t$  θα είναι υψηλότερο ή χαμηλότερο του κέρδους  $X_s$  αυτή τη στιγμή.

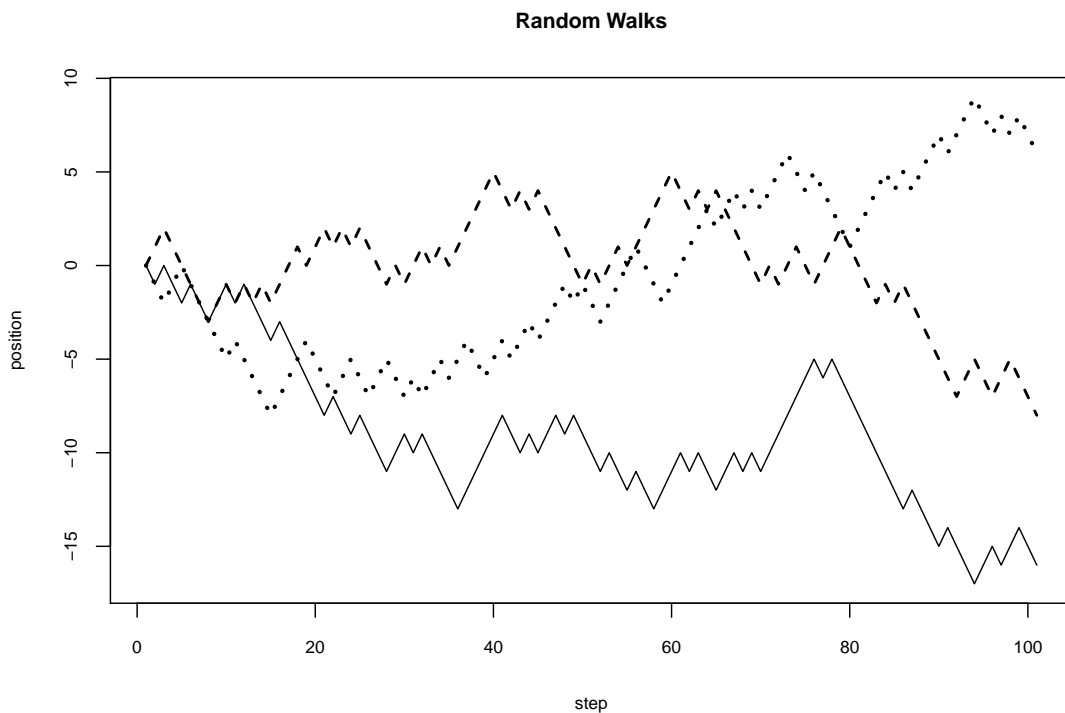
Η ανέλιξη θα ονομαζόταν submartingale αν  $\mathbb{E}[X_t|F_s] \geq X_s$  ή supermartingale αν  $\mathbb{E}[X_t|F_s] \leq X_s$ . Στην πρώτη περίπτωση το αναμενόμενο κέρδος δύναται να αυξηθεί και στην δεύτερη να μειωθεί. Για τον λόγο αυτό αν μία διαδικασία είναι martingale λέμε πως είναι δίκαιη.

Στον διακριτό παραμετρικό χώρο λέμε πως μία διαδικασία είναι martingale αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[X_{t_{n+1}}|X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] = X_{t_n}$$

### 3.2 Τυχαίος Περίπατος

Σε ένα μπαρ στον Πειραιά είναι μία παρέα ναυτών που έχουν συναντηθεί για να γιορτάσουν την επιστροφή τους από ένα μεγάλο ταξίδι. Φυσικά οι ναύτες για γιορτάζοντας την επιστροφή τους, καταναλώνουν μεγάλες ποσότητες ποτών. Συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στον πιο μεθυσμένο ναύτη που έχει ακόμη τη δυνατότητα να περπατήσει στο τέλος της βραδιάς. Συγκεκριμένα μοντελοποιούμε τη διαδρομή που θα ακολουθήσει ο ναύτης αφού φύγει από το μαγαζί. Ο ναύτης είναι τόσο μεθυσμένος που σε κάθε βήμα του η πιθανότητα να περπατήσει προς τα αριστερά είναι ίση με τη πιθανότητας να περπατήσει δεξιά.



**Σχήμα 3.1:** Τρεις τυχαίοι περίπατοι με αφετηρία  $X_0 = 0$ . Το γράφημα κατασκευάστηκε με την εντολή `plotPaths(3, 100)` στην R.

Ο περίπατος του ναύτη είναι μία στοχαστική ανέλιξη  $\{W_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ , όπου  $W_0$  είναι η αρχική θέση του περιπάτου και

$$W_n = W_0 + \sum_{k=1}^n X_k$$

είναι η  $n$ -οστή του θέση. Οι  $X_k$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με κατανομή

$$X_k = \begin{cases} 1, \\ -1, \end{cases} \quad \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2}$$

```

1 NextStep <- function(){
2   # Function that models the steps of the sailor.
3   # Right is +1 and Left is -1
4   #
5   # Returns:
6   #   The next step of the sailor
7   steps <- c(-1, +1)
8   step = sample(x = steps, size = 1,
9                prob = c(1/2, 1/2))
10  return(step)
11 }
12
13 Path <- function(n, start = 0){
14   # Constructs a possible Path for the sailor.
15   #
16   # Args:
17   # n: The number of steps.
18   # start: beginning of Path
19   #
20   # Returns:
21   #   A Path of n steps.
22   path <- start
23   for(i in 1:n){
24     path <- append(path, path[i] + NextStep(),
25                  length(path))
26   }
27   return(path)
28 }
29
30 PlotPaths <- function(n, m){
31   # Function that plots n Paths.
32   # Args:
33   # n: The number of Paths.
34   # m: Steps for each Path.
35   walks <- 1:m
36   for(i in 1:n){
37     if(i == 1)
38       walks <- Path(m)
39     else
40       walks <- rbind(walks, Path(m))
41   }
42
43   par(ps = 9) # font size
44   plot(walks[1,], type = "l", ylim = range(walks),
45        main = "Random Walks", xlab = "step", ylab = "position")
46   for(i in 2:n){
47     lines(walks[i,], lty = i, lwd = i)
48   }
49 }
50
51 PlotPaths(3,100)

```

**Πρόγραμμα 3.1:** Κώδικας για τη παραγωγή του Σχήματος-3.1.

Με το Πρόγραμμα-3.1 μπορούμε να κατασκευάσουμε τυχαίους περιπάτους. Η συνάρτηση NextStep μας επιστρέφει με το επόμενο βήμα του ναύτη. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση αυτή για να κατα-

σκευάσουμε μονοπάτια  $n$  βημάτων με την συνάρτηση Path. Τέλος με την PlotPaths σχεδιάζουμε τα μονοπάτια αυτά. Το Σχήμα-3.1 το λαμβάνουμε με την τελευταία εντολή, την PlotPaths(3,100).

### Ιδιότητες τυχαίου περιπάτου

Αρχικά προσδιορίζουμε την κατανομή των  $X_n$ . Εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}[X_k] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

και πως

$$\mathbb{E}[X_k^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Άρα

$$V(X_k) = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}[X_k]^2 = 1$$

Ο τυχαίος περίπατος είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων. Γενικότερα παρατηρούμε πως να οι  $X_t$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπως στην περίπτωση του τυχαίου περιπάτου, τότε και οι  $Y_{t_j} = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$  είναι ανεξάρτητες και συνεπώς η ανέλιξη  $\{X(t) : t \geq 0\}$  είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων. Πράγματι για  $k > 0$  έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{t_j} \cdot Y_{t_{j+k}}] &= \mathbb{E}[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \cdot (X_{t_{j+k}} - X_{t_{j+k-1}})] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_j} \cdot X_{t_{j+k}}] - \mathbb{E}[X_{t_{j-1}} \cdot X_{t_{j+k}}] - \\ &\quad \mathbb{E}[X_{t_j} \cdot X_{t_{j+k-1}}] + \mathbb{E}[X_{t_{j-1}} \cdot X_{t_{j+k-1}}] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_j}] \cdot \mathbb{E}[X_{t_{j+k}}] - \mathbb{E}[X_{t_{j-1}}] \cdot \mathbb{E}[X_{t_{j+k}}] - \\ &\quad \mathbb{E}[X_{t_j}] \cdot \mathbb{E}[X_{t_{j+k-1}}] + \mathbb{E}[X_{t_{j-1}}] \cdot \mathbb{E}[X_{t_{j+k-1}}] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_j}] (\mathbb{E}[X_{t_{j+k}}] - \mathbb{E}[X_{t_{j+k-1}}]) - \\ &\quad \mathbb{E}[X_{t_{j-1}}] (\mathbb{E}[X_{t_{j+k}}] - \mathbb{E}[X_{t_{j+k-1}}]) \\ &= (\mathbb{E}[X_{t_j}] - \mathbb{E}[X_{t_{j-1}}]) \cdot (\mathbb{E}[X_{t_{j+k}}] - \mathbb{E}[X_{t_{j+k-1}}]) \\ &= \mathbb{E}[Y_{t_j}] \cdot \mathbb{E}[Y_{t_{j+k}}] \end{aligned}$$

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι

**Πρόταση 3.1.** Έστω στοχαστική ανέλιξη  $\{X(t) : t \geq 0\}$ . Αν οι  $X_t$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε η στοχαστική ανέλιξη είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων και Markov. Αν επιπλέον  $\mathbb{E}[X_{t+k} - X_t] = 0$ , τότε είναι και martingale.

Σημειώνουμε πως αν η  $\mathbb{E}[X_t]$  είναι σταθερή για κάθε  $t$ , τότε  $\mathbb{E}[X_{t+k} - X_t] = 0$  και οι προϋποθέσεις της πρότασης ικανοποιούνται. Συνεπώς λόγω της πρότασης ο τυχαίος περίπατος θα έχει την ιδιότητα Markov και θα είναι martingale.

### Ασυμπτωτική Συμπεριφορά

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε πως ο Ναύτης ξεκινά από τη θέση 0. Τότε

$$W_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει πως  $\mathbb{E}[W_n] = 0$ . Επίσης, επειδή οι  $X_n$  είναι ανεξάρτητες (και άρα ασυσχέτιστες) είναι και  $V(W_n) = n$ . Τέλος σύμφωνα με την Πρόταση-3.1 παρατηρούμε πως ο τυχαίος περίπατος είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων, Markov και martingale<sup>1</sup>.

Η ακολουθία  $\{X_n, n \geq 1\}$  ικανοποιεί τις συνθήκες του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (βλ. Θεώρημα-2.7) και άρα

$$\frac{W_n - n \cdot \mathbb{E}[X_n]}{V(X_n)\sqrt{n}} = \frac{W_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Η  $W_n$  είναι στην ουσία το τελευταίο βήμα του τυχαίου περιπάτου. Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας πληροφορεί πως αν ο ναύτης περπατήσει αρκετά πολύ, δηλαδή το πλήθος των βημάτων του τείνει στο άπειρο, τότε η θέση στην οποία θα βρεθεί κατανέμεται κανονικά. Ειδικότερα η θέση στην οποία θα καταλήξει διαιρεμένη με τη ρίζα του πλήθους των βημάτων κατανέμεται κανονικά.

Μπορούμε να ελέγξουμε το συμπέρασμα αυτό στην R. Αν κατασκευάσουμε 1000 περιπάτους των 10,000 βημάτων, αποθηκεύσουμε σε ένα διάνυσμα τη τελευταία θέση των περιπάτων διαιρεμένη με  $\sqrt{10,000}$ , και σχεδιάσουμε το ιστόγραμμα του διανύσματος αυτού, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση το ιστόγραμμα θα πρέπει να προσεγγίζει την κανονική τυποποιημένη κατανομή. Πράγματι με το Πρόγραμμα-3.2 λαμβάνουμε το Σχήμα-3.2.

```

1 vals <- 1:1000
2 for(i in 1:1000){
3   vals[i] <- tail(Path(10000), n = 1)/sqrt(10001)
4 }
5 hist(vals, freq = F, xlim = c(-4,4), main = "Histogram
6   of Normalised Random Walks", xlab = "Last step",
7   ylab = "Frequency")
8 curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 1), from = -4, to = 4,
9   add = TRUE)

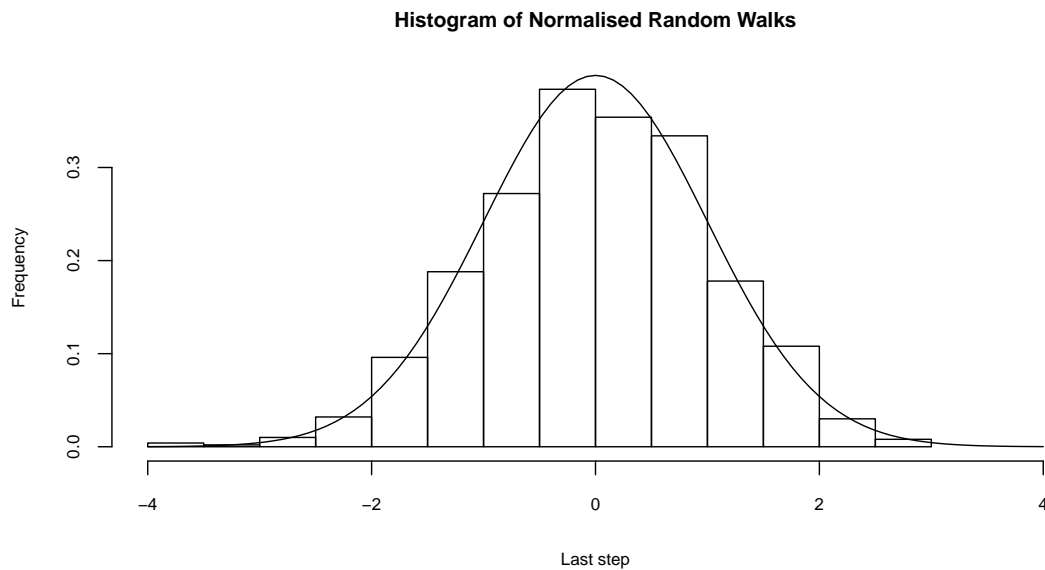
```

**Πρόγραμμα 3.2:** Κώδικας για τη παραγωγή του Σχήματος-3.2.

Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουμε τα μονοπάτια (βλ. Πρόγραμμα-3.1) αν και διαισθητικός είναι πολύ αργός. Αυτό οφείλεται στο ότι η R, αν και είναι γραμμένη ως επί των πλείστον σε Fortran και C, διαχειρίζεται με αργό τρόπο της επαναλήψεις. Αντιθέτως διαχειρίζεται με ιδιαίτερα

<sup>1</sup>Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν και για μη συμμετρικούς τυχαίους περιπάτους, δηλαδή περιπάτους όπου  $\mathbb{P}[X_k = 1] = p$ ,  $\mathbb{P}[X_k = -1] = q$ , με  $p + q = 1$  και  $p \neq \frac{1}{2}$ . Πράγματι στους περιπάτους αυτούς είναι  $\mathbb{E}[X_k] = p - q$  σταθερή και άρα οι συνθήκες της πρότασης ικανοποιούνται.





**Σχήμα 3.2:** Κατασκευάσαμε 1000 περιπάτους  $W_n/\sqrt{n}$  για  $n = 10,000$  βήματα. Στη συνέχεια σχεδιάσαμε το ιστόγραμμα των τελευταίων βημάτων των περιπάτων.

γρήγορα πράξεις διανυσμάτων (και πινάκων). Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε το Πρόγραμμα-3.3.

Με τη συνάρτηση `sample` εκλέγουμε  $n$  το πλήθος βήματα με επανατοποθέτηση και δημιουργούμε το διάνυσμα `steps`, που αφορά το βήμα που θα κάνει ο ναύτης σε κάθε στιγμή. Με τη συνάρτηση `cumsum` λαμβάνουμε ένα διάνυσμα του οποίου η θέση  $i$  είναι το άθροισμα των  $i$  πρώτων βημάτων του ναύτη. Με άλλα λόγια, η `cumsum` μας επιστρέφει ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι η θέση του ναύτη κάθε στιγμή. Γενικά η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε το κώδικα μας ώστε να αξιοποιεί τις διανυσματικές ιδιότητες μιας γλώσσας καλείται *vectorization*.

Στην R μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `system.time()`, για να μετράμε τον πραγματικό χρόνο εκτέλεσης μια συνάρτησης. Έτσι κάθε φορά που θέλουμε να μετρήσουμε το χρόνο εκτέλεσης μίας σειράς εντολών, μπορούμε να δημιουργούμε μία συνάρτηση `fun` η οποία τρέχει τις εντολές αυτές και με την εντολή `system.time(fun)` να μετράμε το χρόνο εκτέλεσης. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το χρόνο εκτέλεσης του Προγράμματος- 3.2, θα τρέχαμε το Πρόγραμμα- 3.4. Ανάλογα ελέγχουμε το χρόνο εκτέλεσης με τον δεύτερο τρόπο. Η διαφορά στον χρόνο εκτέλεσης είναι απίστευτη. Συγκεκριμένα με την αργή συνάρτηση `Path` ο χρόνος εκτέλεσης ήταν περίπου 6.75 λεπτά, ενώ με την `PathFast` μισό δευτερόλεπτο!!!

```
1 FastPath <- function(n, start = 0){
2   # Constructs a possible Path for the sailor.
3   # (Faster version).
4   #
5   # Args:
6   # n: The number of steps.
7   # start: beginning of Path
8   #
9   # Returns:
10  #   A Path of n steps.
11  steps <- c(-1, +1)
12  steps = sample(x = steps, size = n,
13               prob = c(1/2, 1/2), replace = TRUE)
14  path <- cumsum(steps)
15  return(path)
16 }
```

**Πρόγραμμα 3.3:** Κώδικας για τη γρήγορη παραγωγή τυχαίων μονοπατιών

```
1 test <- function(){
2   vals <- 1:1000
3   for(i in 1:1000){
4     vals[i] <- tail(Path(10000), n = 1)/sqrt(10001)
5   }
6   hist(vals, freq = F, xlim = c(-4,4), main = "Histogram of
7     Normalised Random Walks",
8     xlab = "Last step", ylab = "Frequency")
9   curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 1), from = -4, to = 4, add =
10     TRUE)
11 }
12 system.time(test())
```

**Πρόγραμμα 3.4:** Κώδικας για τη μέτρηση χρόνου εκτέλεσης εντολών

### 3.3 Κίνηση Brown

Ο απλός τυχαίος περίπατος που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα δεν μας είναι χρήσιμος για τη προσομοίωση τιμών αγαθών για δύο λόγους. Πρώτον οι μεταβολές του είναι διακριτές, ενώ η μεταβολές μιας τιμής θεωρούνται συνεχής ή τουλάχιστον ίσες με την μικρότερη νομισματική αξία. Δεύτερον ο τυχαίος περίπατος μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές. Πριν καταλήξουμε στη κίνηση που προσομοιάζει τις τιμές αγαθών, τη γεωμετρική κίνηση Brown, παρουσιάζουμε την απλή κίνηση Brown.

Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική ανέλιξη με συνεχή χώρο καταστάσεων και συνεχή παραμετρικό χώρο. Αποδεικνύεται πως ο απλός τυχαίος περίπατος, που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, συγκλίνει στην κίνηση Brown, η οποία ορίζεται ως ακολούθως.

**Ορισμός 3.5** (Μονοδιάστατη Κίνηση Brown). Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  εφοδιασμένος με τη διύλιση  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . Θα καλούμε τυπική μονοδιάστατη (συνήθης) κίνηση Brown τη προσαρμοσμένη στη διύλιση  $\{\mathcal{F}_t\}$  στοχαστική ανέλιξη  $\mathcal{B} = \{B_t, t \geq 0\}$ , η οποία

1. Έχει συνεχείς τροχιές.
2.  $\mathbb{P}[B_0 = 0] = 1$
3. Για κάθε  $0 \leq s \leq t$  η  $B_t - W_s$  είναι ανεξάρτητη της  $\mathcal{F}_s$ , δηλαδή η  $\mathcal{B}$  είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων.
4. Για  $0 \leq s \leq t$  η τυχαία μεταβλητή  $B_t - B_s$  ακολουθεί την κατανομή  $N(0, t - s)$ .

Η συνθήκη 1, όπως έχουμε ορίσει στην πρώτη ενότητα, μας πληροφορεί πως η συνάρτηση  $t \mapsto B_t$  είναι συνεχής σχεδόν βεβαίως. Η δεύτερη συνθήκη δηλώνει ότι η κίνηση ξεκινά από τη θέση 0 σχεδόν βεβαίως. Η συνθήκη 3 δηλώνει πως η  $\mathcal{B}$  είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων. Επίσης από τις συνθήκες 2 και 4 προκύπτει ότι για κάθε  $t \geq 0$  η τυχαία μεταβλητή  $B_t \sim N(0, t)$ . Τέλος επειδή  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , έπεται πως

$$B_t \sim N(0, t) \rightarrow \frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$$

Συνεπώς η κίνηση Brown συμπεριφέρεται, όπως συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά ο τυχαίος περίπατος. Συγκεκριμένα αν για κάθε στιγμή  $t$ , κατασκευάσουμε έναν τυχαίο περίπατο

$$(W_k)_{k \in T}, \text{ όπου } T = \{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, t\}$$

τότε καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , ο τυχαίος περίπατος θα συγκλίνει στη τυχαία μεταβλητή  $B_t$  της κίνησης Brown (σύγκλιση κατά κατανομή). Επίσης, όπως ο τυχαίος περίπατος, η Brown είναι Markov και Martingale. Παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά κάποιες ιδιότητες της στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 3.2** (Ιδιότητες Κίνησης Brown). Έστω κίνηση Brown  $\mathcal{B} = \{B_t, t \geq 0\}$  τότε

1. Η σ.α.  $\{B_t, t \geq 0\}$  είναι Markov.
2. Οι σ.α.  $\{B_t, t \geq 0\}$  και  $\{B_t^2, t \geq 0\}$  είναι martingale.

3. Έστω οι δείκτες του παραμετρικού χώρου  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Το τυχαίο διάνυσμα

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \sim N(0, \Sigma)$$

$$\text{με } \Sigma = \left[ \min \{t_i, t_j\} \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε διαδοχικά τις ιδιότητες 2 και 3.

1. Σύμφωνα με τον ορισμό της κίνησης γνωρίζουμε πως είναι ανεξάρτητων προσαυξήσεων και άρα η  $B_t - B_s$  είναι ανεξάρτητη της  $F_s$ . Επιπλέον  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ . Έτσι έχουμε πως

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | F_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$$

Συνεπώς από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής λαμβάνουμε πως

$$\mathbb{E}[B_t | F_s] = \mathbb{E}[B_s | F_s]$$

Τέλος επειδή η  $B_s$  είναι  $F_s$ -μετρήσιμη, λαμβάνουμε το ζητούμενο

$$\mathbb{E}[B_t | F_s] = B_s$$

2. Αρχικά αποδεικνύουμε πως  $\text{Cov}[B_t, B_s] = \min\{t, s\}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως  $s < t$ . Έτσι

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B_t, B_s] &= \mathbb{E}[(B_t - \mathbb{E}[B_t])(B_s - \mathbb{E}[B_s])] \\ &= \mathbb{E}[B_t \cdot B_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \end{aligned}$$

Η ανέλιξη είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων και άρα οι  $B_t - B_s$ ,  $B_s - B_0 = B_s$  είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον  $B_s \sim N(0, s)$  και άρα

$$\text{Cov}[B_t, B_s] = \mathbb{E}[B_s^2] = \mathbb{E}[B_s^2] = \text{Var}[B_s] + (\mathbb{E}[B_s])^2 = s = \min\{s, t\}$$

Έστω τώρα δείκτες  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Από τον ορισμό της κίνησης Brown οι μεταβλητές  $B_{t_1} - B_0 = B_{t_1}$ ,  $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή  $N(0, t_i - t_{i-1})$ , για  $i = 1, \dots, n$ . Άρα το τυχαίο διάνυσμα

$$B_\delta = (B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \sim N(0, T)$$

όπου

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 - t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Θεωρούμε τώρα των γραμμικό μετασχηματισμό

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Γνωρίζουμε πως το τυχαίο διάνυσμα (βλ. (2.1))

$$AB_\delta = (B_1, B_2, \dots, B_n) \sim N(A\mu, ATA^T) = N(0, \Sigma_B)$$

Όπου

$$\begin{aligned} \Sigma_B = AT \cdot A^T &= \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & t_3 - t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 - t_1 & t_3 - t_2 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

### 3.3.1 Κατασκευή Μονοπατιών

Η κίνηση Brown έχει συνεχή παραμετρικό χώρο που εκτείνεται στο άπειρο. Στα ακόλουθα μελετάμε μονοπάτια του διαστήματος  $[0, T]$ . Για να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της κίνησης διακριτοποιούμε τον παραμετρικό χώρο στις στιγμές

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T, n \in \mathbb{N}$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, θεωρούμε πως τα διαστήματα είναι ίσου μήκους και έτσι η διακριτοποίηση του  $[0, T]$  γίνεται στα  $n$  σημεία

$$0 < \frac{T}{n} < \frac{2T}{n} < \dots < T$$

Η διακριτοποίηση του παραμετρικού χώρου εισάγει το λεγόμενο σφάλμα διακριτοποίησης (discretization error). Το σφάλμα αυτό τείνει στο 0 καθώς το  $n \rightarrow \infty$ .

Το γεγονός πως η κίνηση Brown είναι ανεξαρτήτων προσauξήσεων καθιστά την κατασκευή μονοπατιών ιδιαίτερα εύκολη. Πράγματι επειδή

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim N(0, t_{i+1} - t_i) \Rightarrow \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} = Z_i \sim N(0, 1)$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε με την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$B_{t_{i+1}} = B_{t_i} + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.1)$$

μονοπάτια της κίνησης.

Παρουσιάζουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για κατασκευή μονοπατιών της κίνησης Brown στο διάστημα  $[0, 1]$ .

1. Θεωρούμε ισομήκης διαμέριση  $n$  σημείων του  $[0, 1]$ .
2. Υπολογίζουμε αναδρομικά τις τιμές της κίνησης Brown σύμφωνα με τη σχέση 3.1, προσομοιώνοντας σε κάθε βήμα μία τιμή της  $N(0, 1)$

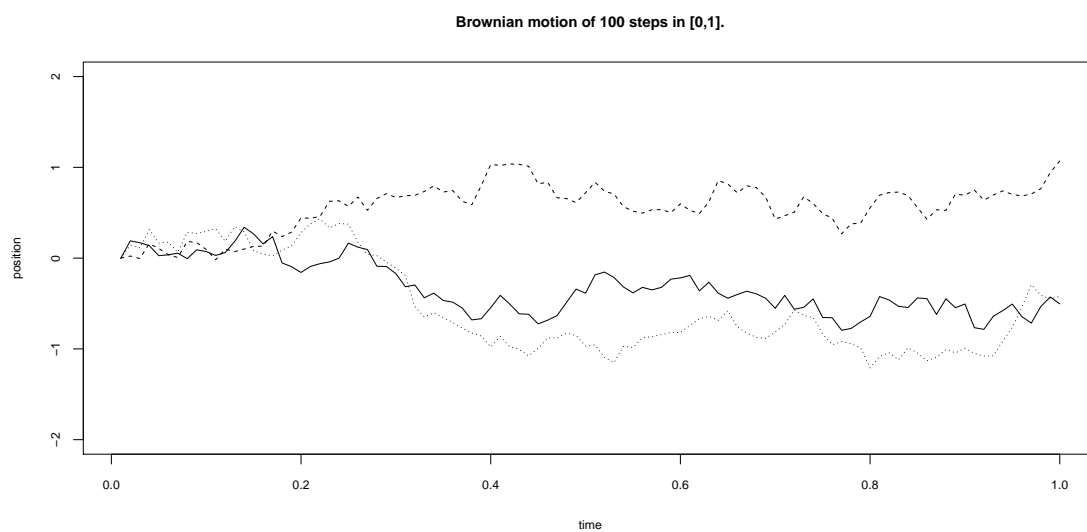
Ο αλγόριθμος υλοποιημένος στην R (με χρήση vectorization) είναι το Πρόγραμμα-3.5. Κάποια παραδείγματα του, απεικονίζονται στα σχήματα 3.3 και 3.4. Σημειώστε πως το πρόγραμμα είναι κατάλληλο και για γενικότερες κινήσεις Brown στις οποίες δεν έχουμε αναφερθεί ακόμη. Τέλος το μονοπάτι μπορεί να ξεκινά από οποιαδήποτε θέση, απλά προσθέτοντας σε όλα τα βήματα του μονοπατιού την αρχική θέση.

```

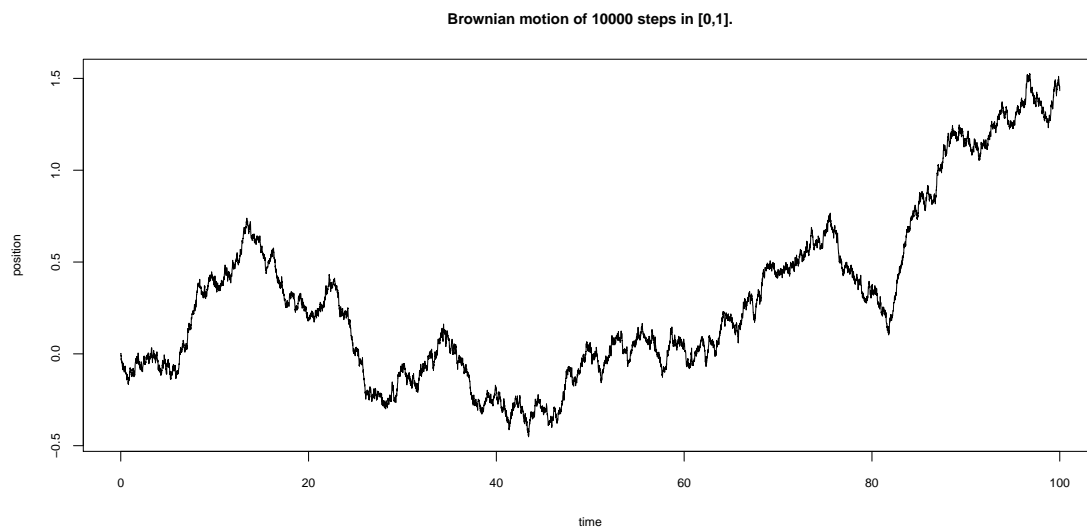
1 #####
2 Simple Brownian Motion
3 #####
4
5 brown <- function(n, m = 0, s = 1, T = 1, start = 0){
6   # Constructs a brownian motion with drift m
7   # and volatility s.
8   #
9   # Args:
10  # n: The number of steps.
11  # t: Time of final step. Initial step at 0.
12  # m: the drift parameter
13  # s: the volatility
14  #
15  # Returns:
16  # A Path of n steps in [0,T].
17  h <- T/n
18  z <- rnorm(n)
19  path <- start + cumsum(m*h + s*sqrt(h)*z)
20  return(c(start, path))
21 }
22
23 par(ps = 9) # set font size for plots
24
25 ##### Plot three simple paths
26 main <- paste("Brownian motion of", steps,
27              "steps in [0,1].")
28 x <- seq(0, 1, 1/steps)
29 plot(x = x, y = brown(steps), type = "l", xlab = "time",
30      ylab = "position", main = main,
31      ylim = c(-2, 2))
32 lines(x, brown(steps), lty = 2)
33 lines(x, brown(steps), lty = 3)
34
35 ##### Plot a path with more steps
36 steps <- 10000
37 x <- seq(0,1, 1/steps)
38 main <- paste("Brownian motion of", steps,
39              "steps in [0,1].")
40 plot(x, brown(steps), type = "l", xlab = "time",
41      ylab = "position", main = main)

```

**Πρόγραμμα 3.5:** Κατασκευή κινήσεων Brown σύμφωνα με την εξίσωση (3.1).



**Σχήμα 3.3:** Τρεις τυχαίοι περίπατοι της κίνησης Brown.



**Σχήμα 3.4:** Ένας περίπατος της κίνησης Brown, με βήμα διακριτικοποίησης  $h = 0.0001$ .



### Άλλοι τρόποι Προσομοίωσης

Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε μονοπάτια της κίνησης Brown σύμφωνα με την ιδιότητα 3 που αποδείξαμε στην Πρόταση-3.2. Έστω πως θέλουμε να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της κίνησης μέσω των στιγμών  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{Z} = (Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}) \sim N(0, I_n)$$

Σύμφωνα με την (2.1) το μονοπάτι θα είναι το διάνυσμα  $\mathbf{B} = A \times \mathbf{Z}$ , όπου  $A \in M_{n \times n}$  τέτοιος ώστε  $AI_n A^T = AA^T = \Sigma_B$ , όπου  $\Sigma_B$  ο πίνακας της Πρόταση-3.2. Ο πίνακας  $A$  καλείται πίνακα Cholesky και αποδεικνύεται πως είναι ίσος με

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \sqrt{t_3 - t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \sqrt{t_3 - t_2} & \dots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Μπορεί κάποιος να επιβεβαιώσει με πράξεις πως  $AA^T = \Sigma_B$ . Παρουσιάζουμε πάλι τη μέθοδο στο  $[0, 1]$ . Έστω διαμέριση του  $[0, 1]$  με βήμα  $h = 1/n$ . Τότε ο παράγοντας Cholesky θα είναι ο

$$A = \sqrt{\frac{1}{n}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς μπορούμε να προσομοιώσουμε στην R ένα διάνυσμα της κανονικής κατανομής και πολλαπλασιάζοντας με τον  $A$  να λάβουμε το μονοπάτι. Η μέθοδος υλοποιείται στο Πρόγραμμα-3.6. Στο πρόγραμμα κατασκευάζουμε αρχικά έναν πίνακα  $A$  του οποίου όλα τα στοιχεία είναι  $\sqrt{1/n}$  και στη συνέχεια με την  $\text{tril}(A)$  της βιβλιοθήκης Matrix λαμβάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο μαζί με τη διαγώνιο. Τα υπόλοιπα βήματα είναι προφανή.

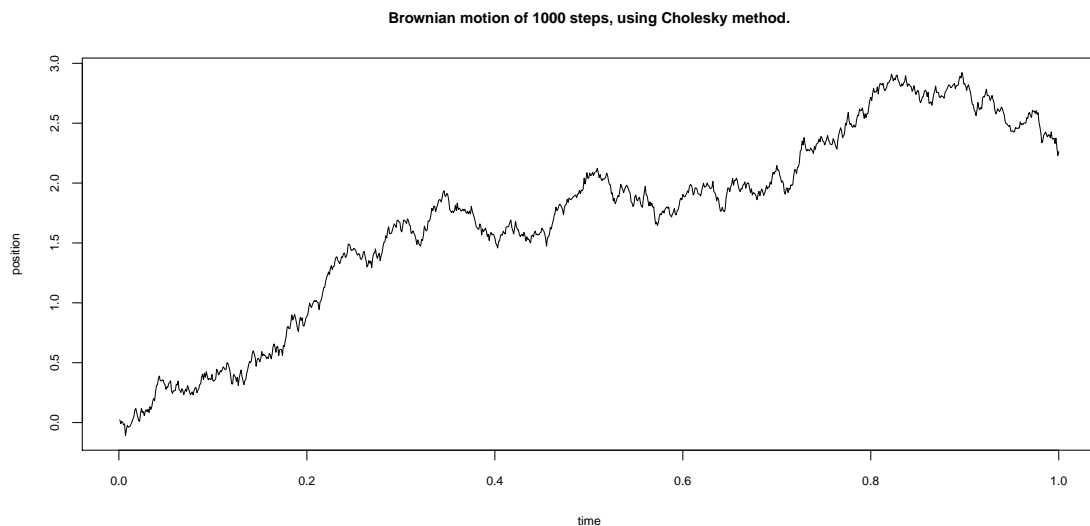
Η μέθοδος δουλεύει με πίνακες και δεν είναι γρήγορη σαν τη προηγούμενη. Το πίνακα Cholesky τον χρησιμοποιούμε, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, για την κατασκευή πολυδιάστατων κινήσεων Brown.

```

1 #####
2 Simple Brownian Motion using Cholesky
3 #####
4 require(MASS)
5 require(Matrix)
6 n <- 1000 # number of steps
7 Z <- mvrnorm(1, rep(0,n), diag(1,n))
8 A <- matrix(rep(sqrt(1/n), n^2), n, n)
9
10 path <- tril(A)%*%Z
11
12 main <- paste("Brownian motion of", n,
13             "steps, using Cholesky method.")
14 par(ps = 9) # font size
15 plot(1:n/n, path, type = "l", xlab = "time",
16      ylab = "position", main = main)
17
18
19 ### Plot Example
20 par(ps = 9) # font size
21
22 n <- 1000000
23 z <- rnorm(n)
24 path <- cumsum(sqrt(1/n)*z)
25 main <- paste("Brownian motion of", n,
26             "steps, using vectorization.")
27 plot(1:n/n, path, type = "l", xlab = "time",
28      ylab = "position", main = main)

```

**Πρόγραμμα 3.6:** Κατασκευή κινήσεων Brown με τον παράγοντα Cholesky.



**Σχήμα 3.5:** Κίνηση brown χρησιμοποιώντας τον πίνακα Cholesky.

### Γενικευμένη κίνηση Brown

**Ορισμός 3.6.** Έστω σταθερές  $\mu$  και  $\sigma > 0$ . Μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \geq 0\}$  θα ονομάζεται κίνηση Brown με τάση (drift)  $\mu$  και συντελεστή διάχυσης (diffusion coefficient)  $\sigma^2$  ή μεταβλητότητα (volatility)  $\sigma$ , συμβολικά  $X \sim \text{BM}(\mu, \sigma^2)$ , αν η

$$\frac{X_t - \mu t}{\sigma}$$

είναι η συνήθης κίνηση Brown.

Συνεπώς αν  $X \sim \text{BM}(\mu, \sigma^2)$ , τότε

$$\frac{X_t - \mu t}{\sigma} = B_t \Rightarrow X_t = \mu t + \sigma W_t$$

και άρα

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mu t + \sigma B_t] = \mu t + \sigma \mathbb{E}[B_t] = \mu t$$

και

$$\text{Var}[X_t] = \text{Var}[\mu t + \sigma B_t] = \sigma^2 \text{Var}[B_t] = \sigma^2 t$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως το  $\mu$  δεν είναι η μέση τιμή της κίνησης αλλά μία τάση που την απομακρύνει συνεχώς, είτε προς το μείον άπειρο αν η  $\mu < 0$ , είτε προς το συν άπειρο αν η  $\mu > 0$ , από την αρχική της θέση καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Συγκεκριμένα, αν παρατηρήσουμε πως αφού η  $\frac{X_t - \mu t}{\sigma}$  είναι κίνηση Brown τότε για κάθε  $0 \leq s < t$  έπεται πως

$$\left( \frac{X_t - \mu t}{\sigma} - \frac{X_s - \mu s}{\sigma} \right) = \frac{(X_t - X_s) - \mu(t-s)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

συμπεραίνουμε πως η παράμετρος  $\mu$  είναι η μέση αύξηση της κίνησης Brown ανά μονάδα χρόνο (θέστε  $t-s=1$ ) και πως η μεταβλητότητα είναι η σταθερή τυπική απόκλιση της παραμέτρου  $\mu(t-s)$ .

Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα για την κατασκευή κινήσεων Brown βασίστηκαν στην εξίσωση 3.1. Η αντίστοιχη σχέση για την γενικευμένη κίνηση Brown  $X_t \sim \text{BM}(\mu, \sigma^2)$ , με  $X_0 = 0$ , είναι

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

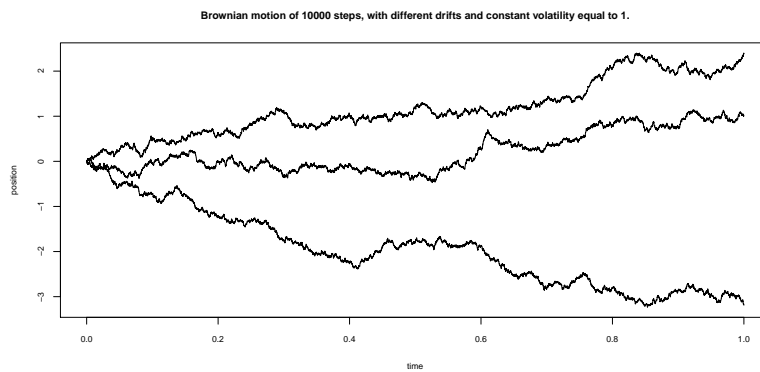
Προφανώς αν θέλουμε ο περίπατος να ξεκινά από μία άλλη σταθερή τιμή  $c \in \mathbb{R}$ , αντί του μηδενός, προσθέτουμε στις παραπάνω τιμές τον αριθμό  $c$ . Ο Κώδικας-3.5 μπορεί να κατασκευάζει τέτοιες κινήσεις. Στα σχήματα 3.6 και 3.7 απεικονίζονται κάποια παραδείγματα τα οποία βοηθούν στη κατανόηση των παραμέτρων  $\mu$  και  $\sigma$ . Στο Σχήμα-3.8 επιβεβαιώνουμε πως αν  $X \sim \text{BM}(\mu, \sigma)$  τότε  $X_t \sim N(t\mu, t\sigma)$ . Ο κώδικας για τη παραγωγή των σχημάτων είναι το Πρόγραμμα- 3.7.

```

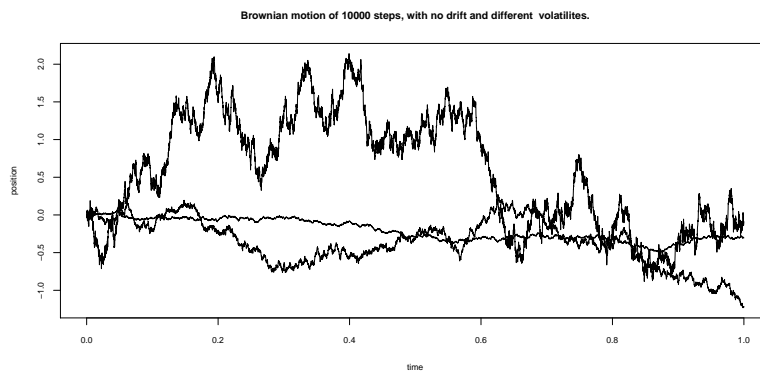
1 ## Positive drift
2 par(ps = 9) # font size
3 n = 10000
4 main <- paste("Brownian motion of", n,
5             "steps, with different drifts and",
6             "constant volatility equal to 1.")
7 b1 <- brown(n, m = -0.03)
8 b2 <- brown(n, m = +0.03)
9 b3 <- brown(n)
10 x <- seq(0, 1, 1/n)
11 plot(x, b1, type = "l", xlab = "time",
12      ylab = "position", main = main,
13      ylim = c(min(b1),max(b2)))
14 lines(x, b2)
15 lines(x, b3)
16
17 ## Different volatility
18 main <- paste("Brownian motion of", n,
19             "steps, with no drift and different",
20             "volatilities.")
21 b1 <- brown(n, s = 3)
22 b2 <- brown(n, s = 0.3)
23 b3 <- brown(n)
24 plot(x, b1, type = "l", xlab = "time",
25      ylab = "position", main = main,
26      ylim = c(min(b1),max(b1)))
27 lines(x, b2)
28 lines(x, b3)
29
30 ## Brown proof
31 n <- 10000
32 num <- 20000
33 y <- numeric(num)
34 for(i in 1:num){
35   y[i] <- tail(brown(n, m = 5, s = 2, T = 2), 1)
36 }
37
38 par(ps = 12)
39 hist(y, probability = T, xlim = c(-0, 20),
40      ylim = c(0, 0.20),
41      main = "Histogram of the last step of BM(5, 2)")
42 x <- seq(0, 20, 0.01)
43 lines(x, dnorm(x, mean = 10, sd = 2*sqrt(2)))
44 legend(16, 0.15, expression(N(10,-2*sqrt(2))),
45       lty = c(1), box.lwd = "n")

```

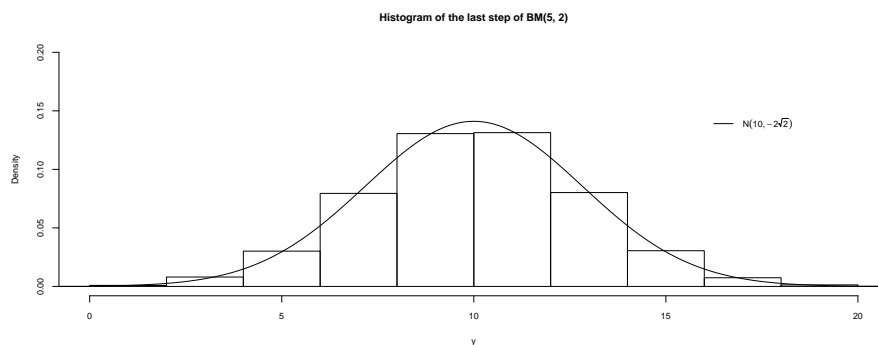
**Πρόγραμμα 3.7:** Κώδικας για τη λήψη των γραφημάτων.



**Σχήμα 3.6:** Τρεις τυχαίοι περίπατοι της κίνησης Brown με σταθερή μεταβλητότητα ίση με 1 και τάσεις  $-0.3$ ,  $0$  και  $0.3$  από κάτω προς τα επάνω.



**Σχήμα 3.7:** Τρεις τυχαίοι περίπατοι της κίνησης Brown με σταθερή τάση ίση με 0 και μεταβλητότητες  $0.3$ ,  $1.0$  και  $3$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα τόσο περισσότερο απομακρύνεται η κίνηση από το μέσο της που είναι το 0.



**Σχήμα 3.8:** Το ιστογράμμα των τελευταίων βημάτων μιας κίνησης  $BM(5, 2)$  στο  $[0, 1]$  μαζί με το γράφημα της  $N(5, 2)$ .

### 3.3.2 Πολυδιάστατη Κίνηση Brown

Στην εισαγωγή της ενότητας αναφέραμε πως η κίνηση Brown θα μας οδηγήσει στη κίνηση που προσομοιάζει τη τιμή μίας μετοχής. Κάποιες φορές θέλουμε να μελετήσουμε την ταυτόχρονη κίνηση μετοχών. Αυτό το κάνουμε για παράδειγμα για να τιμολογήσουμε ένα spread (παράγωγο στη διαφορά της τιμής δύο αγαθών) ή ακόμη και για να προβλέψουμε τις αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου.

**Ορισμός 3.7** (Πολυδιάστατη Κίνηση Brown). Μία τυπική (συνήθεις)  $n$ -διάστατη κίνηση Brown είναι μία στοχαστική ανέλιξη με χώρο καταστάσεων τον  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{B} = \{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n), t \geq 0\}$$

ορισμένη σε έναν φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  που ικανοποιεί τα παρακάτω

- Έχει συνεχείς τροχιές.
- $B_0 = 0$  σχεδόν βεβαίως.
- Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και για κάθε  $0 \leq s < t$  ισχύει ότι

$$B_t - B_s \sim N(0, (t - s)I_n)$$

Οι ιδιότητες της μονοδιάστατης κίνησης γενικεύονται και στην πολυδιάστατη κίνηση Brown. Παρατηρήστε πως τα στοιχεία του διανύσματος είναι συνήθεις μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Πρακτικά η τυπική πολυδιάστατη Brown είναι η ταυτόχρονη ανεξάρτητη κίνηση  $n$  τυπικών κινήσεων Brown. Για παράδειγμα θα μπορούσε κάποιος ισοδύναμα να θεωρήσει μία τριδιάστατη κίνηση Brown ως τρεις ανεξάρτητες κινήσεις Brown ή ως μία κίνηση Brown στον τριδιάστατο χώρο. Για την ταυτόχρονη κίνηση εξαρτημένων κινήσεων brown ορίζουμε την ακόλουθη κίνηση.

**Ορισμός 3.8.** (Γενικευμένη Πολυδιάστατη Κίνηση Brown) Μία  $n$ -διάστατη κίνηση Brown,  $X \sim BM(\mu, \Sigma)$ , με τάση  $\mu \in \mathbb{R}^n$  και συνδιακύμανση τον θετικά ορισμένο  $\Sigma \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  είναι μία στοχαστική ανέλιξη, με χώρο καταστάσεων τον  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{X} = \{X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n), t \geq 0\}$$

ορισμένη σε έναν φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  που ικανοποιεί τα παρακάτω

- Έχει συνεχείς τροχιές.
- Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και για κάθε  $0 \leq s < t$  ισχύει ότι

$$X_t - X_s \sim N((t - s)\mu, (t - s)\Sigma)$$

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε έναν τρόπο για να παράγουμε μία μονοδιάστατη κίνηση Brown μέσω της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής. Θυμίζουμε πως ξεκινήσαμε με ένα διάνυσμα

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim N(0, I_n)$$

και στη συνέχεια προσδιορίζοντας κατάλληλο πίνακα  $A$ , τέτοιων ώστε  $AI_nA^T = \Sigma$  προσομοιώσαμε τιμές ενός δεύτερου διανύσματος  $Z' \sim N(0, \Sigma)$ . Θυμίζουμε πως ο πίνακας  $\Sigma$  ήταν αυτός που προσδιορίσαμε στην Πρόταση-3.2.

Η μέθοδος Cholesky παρέχει έναν αλγοριθμικό τρόπο για την εύρεση του πίνακα  $A$ . Ο αλγόριθμος περιγράφεται στην ενότητα 2.33 του [10] και υλοποιείται στην  $R$  με τη συνάρτηση `chol(S)`. Συγκεκριμένα η για έναν θετικά ορισμένο πίνακα  $\Sigma$  ισχύει ότι

$$A = t(chol(A)) \%*\% chol(A)$$

Εύκολα παρατηρούμε πως η αντίστοιχη σχέση της (3.2) για μία  $d$ -διάστατη  $X \sim BM(\mu, \Sigma)$  είναι

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i}AZ_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

όπου  $X_{t_i}, \mu, Z_{i+1} \in \mathbb{R}^d$  και  $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$  ο πίνακας Cholesky.

Συνεπώς για να προσομοιώσουμε  $n$  τιμές της κίνησης στο  $[0, 1]$  με βήμα  $h = \frac{1}{n}$  εργαζόμαστε ως εξής

1. Προσομοιώνουμε  $n$  τιμές από την πολυμεταβλητή κατανομή  $N(0, I_d)$ . Στην  $R$  αυτό το κάνουμε με την εντολή `pnvnorm(n, rep(0,d), diag(d))`. Η εντολή αυτή μας επιστρέφει έναν πίνακα  $Z$  του οποίου η κάθε γραμμή είναι μία προσομοιωμένη τιμή του  $R^d$ .
2. Βρίσκουμε τον πίνακα Cholesky, πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία του με  $\sqrt{h}$ , στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη του πίνακα  $Z$  με αυτόν και αποκτούμε τον πίνακα  $z2$ .
3. Για να αποκτήσουμε το μονοπάτι προσθέτουμε στις στήλες του  $z2$  το  $h\mu$ , τις οποίες στη συνέχεια προσθέτουμε διαδοχικά. Αν η αρχική θέση είναι διάφορη του μηδενός τη προσθέτουμε σε όλες τις θέσεις του μονοπατιού.

Ο αλγόριθμος υλοποιείται από το Πρόγραμμα-3.8. Το πρόγραμμα είναι κατάλληλο για τη προσομοίωση απλών ή γενικών μονοδιάστατων και πολυδιάστατων κινήσεων Brown. Βέβαια στη συνέχεια θα τον χρησιμοποιούμε μονάχα αν προσομοιώνουμε εξαρτημένες κινήσεις, διότι το πρόγραμμα δουλεύει με πίνακες (οπότε είναι αργό) και στη περίπτωση των ανεξάρτητων κινήσεων οι πίνακες περιττεύουν. Επίσης αν θέσουμε τη λογική παράμετρο `plot` ίση με `true`, η `mbrown` σχεδιάζει τα μονοπάτια που παρήγαγε.

```

1 #####
2 # Multidimensional Brownian motion.
3 #####
4 mbrown <- function(n, d = 1, m = rep(0,d),
5                   s = diag(1,d,d), start = rep(0,d),
6                   T = 1, plot = FALSE, main = ""){
7   # Constructs a multidimensional brownian motion
8   # with drift m and covariance s.
9   #
10  # Args:
11  # n: The number of steps.
12  # d: The dimension of the motion.
13  # t: Time of final step. Initia step at 0.
14  # m: the drift vector
15  # s: the covariance matrix
16  # start: the initial position
17  # T: Final time.
18  # plot: (Logical) Should it plot the paths?
19  # main: the title of the plot (if plot = true)
20  #
21  # Returns:
22  # A matrix whose rows are the paths.
23  require(MASS)
24
25  h <- T/n
26  if(d == 1){# if 1-dimensional
27    z <- rnorm(n)
28    path <- start + cumsum(m*h + s*sqrt(h)*z)
29  }
30  else{
31    z <- mvrnorm(n, rep(0, d), diag(1, d))
32    chol.s <- sqrt(h)*chol(s) # cholesky factor
33    z2 <- apply(z, 1, function(x) chol.s%*%x)
34    path <- start + apply(m*h + z2, 1, cumsum)
35  }
36
37  # plot
38  if(plot == TRUE){
39    x <- seq(0, T, h)
40    par(ps = 9) # font size
41
42    if(d == 1){
43      plot(x, c(start, path), type = "l", xlab = "time",
44           ylab = "position", main = main,
45           ylim = c(min(path), max(path)))
46    }
47    else{
48      plot(x, c(start[1], path[,1]), type = "l",
49           xlab = "time",
50           ylab = "position", main = main,
51           ylim = c(min(path), max(path)))
52      for( i in 2:d )
53        lines(x, c(start[i], path[, i]))
54    }
55  }
56  return(path)
57 }

```

**Πρόγραμμα 3.8:** Γενική συνάρτηση για την κατασκευή κινήσεων Brown



### 3.3.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Οι αρνητικές τιμές που λαμβάνει η κίνηση Brown, την καθιστά ακατάλληλη για την προσομοίωση τυχαίων φαινομένων που δεν λαμβάνουν αρνητικές τιμές, όπως η αξία μιας μετοχής. Ο Paul Samuelson τη δεκαετία του 1960 εισήγαγε την γεωμετρική κίνηση Brown που είναι απλά μία εκθετική κίνηση Brown.

Στα πλαίσια του μοντέλου Black-Scholes, το οποίο παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής μιας μετοχής περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (stochastic differential equation), για συντομία SDE,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (3.4)$$

όπου το  $\mu$  είναι το μέσο ποσοστό απόδοσης της μετοχής,  $\sigma$  η μεταβλητότητα των ποσοστών απόδοσης και τέλος  $W(t)$  μια τυπική κίνηση Brown (συμβολίζεται με  $W$  διότι καλείται και wiener process). Μία στοχαστική ανέλιξη που ικανοποιεί τη παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, συμβολικά

$$S \sim \text{GBM}(\mu, \sigma)$$

Αποδεικνύεται πως η λύση της (3.4) είναι η

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

Γενικότερα για  $s < t$  είναι

$$S_t = S_s e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma \sqrt{t-s}Z}, \quad Z \sim N(0, 1) \quad (3.5)$$

Από τις παραπάνω μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως για  $t_1, t_2$  οι τυχαίες μεταβλητές  $S_{t_1}/S_0 = f(Z)$  και  $S_{t_2}/S_0 = f(Z)$  είναι ανεξάρτητες (βλ. 2.4). Συνεπώς οι ποσοστιαίες προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

### Λογαριθμική Κανονική Κατανομή

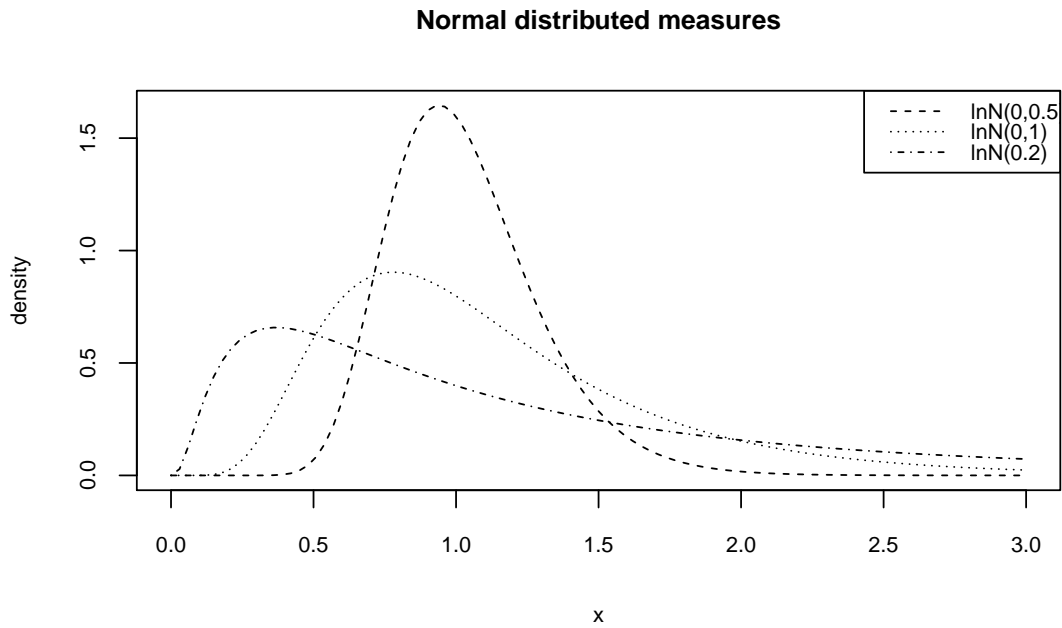
Έστω μία τυχαία μεταβλητή  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Μία τυχαία μεταβλητή

$$Y = e^X \Leftrightarrow X = \log(Y)$$

όπου με  $\log(\cdot)$  συμβολίζουμε τον νεπέριο (φυσικό) λογάριθμο, λέμε πως ακολουθεί την λογαριθμική κανονική κατανομή και γράφουμε ότι  $Y \sim \log N(\mu, \sigma^2)$ .

Η τυχαία μεταβλητή  $Y$  λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, έχει μέτρο πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (0, \infty)$$



**Σχήμα 3.9:** Στο σχήμα παρουσιάζονται τρεις λογαριθμικές κανονικές κατανομές για διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις  $\sigma$ .

και συνάρτηση κατανομής την

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

όπου  $\Phi(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής. Τέλος ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{και} \quad \text{Var}[Y] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

### Προσομοίωση γεωμετρικής Brown

Συνεπώς η στοχαστική ανέλιξη  $\{S_t/S_0 : t \geq 0\}$  είναι τέτοια ώστε

$$\frac{S_t}{S_0} \sim \log N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (3.6)$$

Για να προσομοιώσουμε τη κίνηση θεωρούμε μία διαμέριση  $t_0, \dots, t_n$ . Τότε σύμφωνα με την (3.5)

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_i}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.7)$$

Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να φτιάξουμε άμεσα έναν αλγόριθμο προσομοίωσης, όπως το κάναμε στις προηγούμενες ενότητες. Παρουσιάζουμε κατευθείαν την πολυδιάστατη περίπτωση. Θεωρούμε λοιπόν ένα  $d$ -διάστατο τυχαίο διάνυσμα

$$\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))$$

του οποίου οι συντεταγμένες ακολουθούν τη δυναμική του Black-Scholes και άρα οι ποσοστιαίες μεταβολές τους περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i(t), \quad i = 1, \dots, d$$

όπου  $W_i$  είναι μια τυπική κίνηση Brown. Έστω επίσης πως οι κινήσεις Brown συσχετίζονται μεταξύ τους με συντελεστές  $\rho_{ij}$ , δηλαδή οι ποσοστιαίες μεταβολές των τιμών έχουν συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{ij}$ . Ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι ο

$$\Sigma = [c_{ij}] = [\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}]$$

Συνεπώς αν ο  $A$  είναι ο πίνακας Cholesky του  $\Sigma$  τότε το αρχικό σύστημα των SDEs, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_t} = \boldsymbol{\mu} dt + \sigma A d\mathbf{B}$$

όπου η  $\mathbf{B}$  είναι μία  $d$ -διάστατη κίνηση Brown. Σημειώστε πως με τη διαίρεση διανυσμάτων εννοούμε τη διαίρεση των συντελεστών τους. Σύμφωνα με τα προηγούμενα η αναδρομική σχέση για τη προσομοίωση της παραπάνω, για μία διαμέριση  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ , θα είναι

$$\mathbf{S}_{t_{i+1}} = \mathbf{S}_{t_i} \exp \left( \left( \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} A \mathbf{z} \right), \quad \mathbf{z} \sim N(0, I_d)$$

Τέλος αποδεικνύεται πως αν το προϊόν πληρώνει μερίσματα συνεχούς απόδοσης  $\delta$  η παραπάνω γίνεται

$$\mathbf{S}_{t_{i+1}} = \mathbf{S}_{t_i} \exp \left( \left( \boldsymbol{\mu} - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} A \mathbf{z} \right), \quad \mathbf{z} \sim N(0, I_d) \quad (3.8)$$

Παρατηρούμε ότι η προηγούμενη γράφεται ως

$$\log(\mathbf{S}_{t_{i+1}}) = \log(\mathbf{S}_{t_i}) + \left( \boldsymbol{\mu} - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} A \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \sim N(0, I_d)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας το Πρόγραμμα-3.8 για τάση  $\boldsymbol{\mu} - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2$  και  $\Sigma$  λαμβάνουμε τους λογαρίθμους των μονοπατιών, από τους οποίους βέβαια μπορούμε να λάβουμε τα μονοπάτια. Ο κώδικας για την παραγωγή των μονοπατιών στο Πρόγραμμα-3.9.

### Αριθμητικό Παράδειγμα

Η βιβλιοθήκη `quantmod` της R μας δίνει τη δυνατότητα να κατεβάζουμε ιστορικές τιμές μετοχών με την εντολή `getSymbols`. Η `getSymbols` επιστρέφει για κάθε μετοχή ένα αντικείμενο της κλάσης `quantmod` (βιβλιοθήκη για χρονοσειρές), το οποίο για κάθε ημερομηνία μας πληροφορεί σχετικά με τη τιμή ανοίγματος, τη τιμή κλεισίματος, τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τον όγκο συναλλαγών και την προσαρμοσμένη (δηλ. λαμβάνει υπόψη τα μερίσματα) τιμή κλεισίματος (βλ. Πίνακα-3.1).

```

1 #####
2 # Paths for correlated assets
3 #####
4 AssetSim <- function(n, d = 1, m = rep(0,d),
5                   s = diag(1,d,d), start = rep(0,d),
6                   T = 1, plot = FALSE, main = ""){
7   # Constructs a multidimensional brownian motion
8   # with drift m and covariance s.
9   #
10  # Args:
11  # n: The number of steps.
12  # d: The dimension of the motion.
13  # t: Time of final step. Initial step at 0.
14  # m: the drift vector
15  # s: the covariance matrix
16  # start: the initial position
17  # T: Final time.
18  # plot: (Logical) Should it plot the paths?
19  # main: the title of the plot (if plot = true)
20  #
21  # Returns:
22  #   A matrix whose rows are the paths.
23
24  h <- T/n
25  if(d == 1){# if 1-dimensional
26    z <- rnorm(n)
27    path <- start*exp(cumsum(m*h + s*sqrt(h)*z))
28  }
29  else{
30    require(MASS)
31    z <- mvrnorm(n, rep(0, d), diag(1, d))
32    chol.s <- sqrt(h)*chol(s) # cholesky factor
33    z2 <- apply(z, 1, function(x) chol.s%*%x)
34    path <- start*exp(apply(m*h + z2, 1, cumsum))
35  }
36
37  # plot
38  if(plot == TRUE){
39    x <- seq(0, T, h)
40
41    if(d == 1){
42      plot(x, c(start, path), type = "l", xlab = "time",
43           ylab = "position", main = main,
44           ylim = c(min(path), max(path)))
45    }
46    else{
47      plot(x, c(start[1], path[,1]), type = "l",
48           xlab = "time",
49           ylab = "position", main = main,
50           ylim = c(min(path), max(path)))
51      for( i in 2:d )
52        lines(x, c(start[i], path[, i]))
53    }
54  }
55  return(path)
56 }

```

**Πρόγραμμα 3.9:** Συνάρτηση για την κατασκευή σχετιζόμενων τιμών

	Open	High	Low	Close	Volume	Adjusted
2013-07-08	899.2	906.3	897.1	905.1	1969500	905.1
2013-07-09	911.0	913.0	898.0	905.2	1979400	905.2
2013-07-10	903.5	911.1	900.4	906.0	1708400	906.0
2013-07-11	913.0	920.8	908.5	920.2	2584200	920.2
2013-07-12	920.0	923.0	915.2	923.0	2568200	923.0

**Πίνακας 3.1:** Πληροφορίες που παρέχονται από την `getSymbols` για τη μετοχή της Google τη δεύτερη εβδομάδα του Ιουλίου 2013.

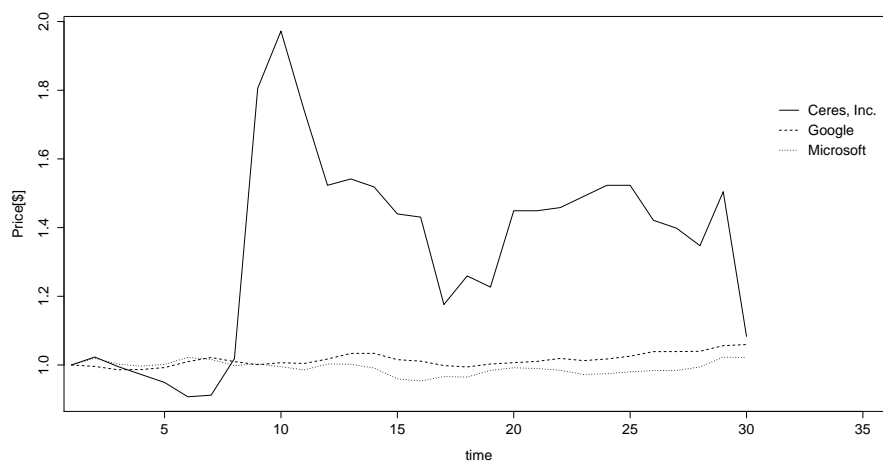
Κατεβάζουμε τις πληροφορίες για τις μετοχές της Microsoft, της Google και της Ceres. Η Ceres είναι μία εταιρεία που παράγει γενετικά μεταλλαγμένους σπάρτα που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή βιοκαυσίμων. Υπολογίζουμε τις ποσοστιαίες τιμές των μετοχών για της τριάντα τελευταίες μέρες διαπραγμάτευσης. Από τα δεδομένα αυτά εκτιμούμε τις παραμέτρους  $\mu$  και  $\Sigma$ . Συγκεκριμένα για τις Ceres, Google και Microsoft υπολογίζουμε ότι

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 0.01348 \\ 0.00197 \\ 0.00081 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0.1681 \\ 0.0091 \\ 0.0130 \end{pmatrix}, \quad \text{και } \rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -0.15 & 0.034 \\ -0.15 & 1 & 0.56 \\ 0.034 & 0.56 & 1 \end{pmatrix}$$

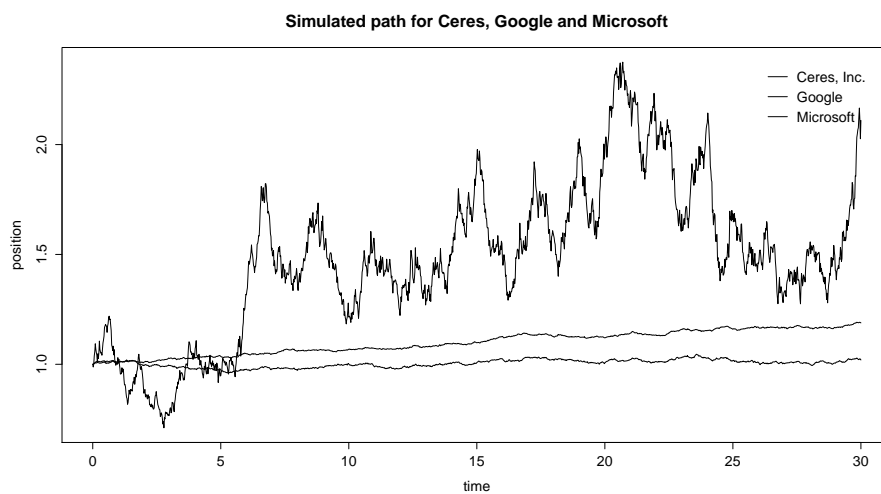
Παρατηρούμε πως η Ceres έχει μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης και μεταβλητότητα από τις άλλες δύο. Επίσης οι μετοχές των Google και Microsoft έχουν υψηλό συντελεστή συσχέτισης, σε αντίθεση με αυτήν της Ceres που φαίνεται να μην σχετίζεται ιδιαίτερα με τις άλλες δύο.

Υποθέτουμε πως η ανέλιξη των τιμών περιγράφονται από την εξίσωση (3.4) και προσομοιώνουμε ένα μονοπάτι για τη δεύτερη εβδομάδα του Ιουλίου 2013. Για κάθε ημέρα χρησιμοποιήσαμε 50 βήματα. Ο κώδικας για τα παραπάνω στο Πρόγραμμα-3.10 και στο Σχήμα-3.11 το μονοπάτι της προσομοίωσης. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι

$$\text{drift} = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad \text{και} \quad \Sigma = [\sigma_{ij}\rho_{ij}] \begin{pmatrix} 0.028274 & -0.000236 & 0.000075 \\ -0.000236 & 0.000083 & 0.000066 \\ 0.000075 & 0.000066 & 0.000170 \end{pmatrix}$$



**Σχήμα 3.10:** Η πορεία της τιμής των μετοχών τη περίοδο 31/5/2013 έως και 12/7/2013. Οι τιμές είναι κανονικοποιημένες ως προς την τιμή της πρώτης ημέρας.



**Σχήμα 3.11:** Προσομοιωμένο μονοπάτι για τις μετοχές και τη περίοδο του Σχήματος-3.10.

```

1 #####
2 # Numerical Example for three stocks
3 #####
4 require(quantmod)
5 # Load data
6 getSymbols(c("GOOG", "MSFT", "CERE"), src="yahoo")
7 google <- as.vector(tail(GOOG[, 6], 30))
8 msft <- as.vector(tail(MSFT[, 6], 30))
9 ceres <- as.vector(tail(CERE[, 6], 30))
10
11 # Plot data
12 x <- 1:30
13 plot(x, ceres/ceres[1], type = "l", xlab = "time",
14       ylab = "Price[$]", main = "", lty = 1,
15       xlim = c(2, 35))
16 lines(x, google/google[1], lty = 2)
17 lines(x, msft/msft[1], lty = 3)
18
19 legend(31, 1.8, bty = "n",
20        legend = c("Ceres, Inc.", "Google", "Microsoft"),
21        lty = 1:3)
22
23 # Get estimations
24 getGrowth <- function(x){
25   x.pst <- numeric(length(x))
26   x.pst[1] <- 0
27   for(i in 2:length(x))
28     x.pst[i] <- (x[i] - x[i - 1])/x[i - 1]
29   return(x.pst)
30 }
31
32 data <- matrix(
33   c(getGrowth(ceres), getGrowth(google),
34     getGrowth(msft)), nrow = 3, byrow = T)
35
36 mu <- apply(data, 1, mean)
37 s <- cov(t(data)) # cov needs data per column
38
39 # Create Brownian motion
40 str <- "Simulated path for Ceres, Google and Microsoft"
41 path <- AssetSim(n = 30*50, d = 3, m = mu -
42                 (1/2)*diag(s)^2, s = s,
43                 start = rep(1, 3), T = 30, plot = T,
44                 main = str);
45 tail(path, 1) # find which line is for which stock
46 legend(26, 2.4, bty = "n",
47        legend = c("Ceres, Inc.", "Google", "Microsoft"),
48        lty = rep(1, 3))

```

**Πρόγραμμα 3.10:** Συνάρτηση για την κατασκευή σχετιζόμενων τιμών

## Κεφάλαιο 4

# Black & Scholes και Monte Carlo

Το 1973 στην εργασία «The Pricing of Options and Corporate Liabilities» παρουσιάστηκε από του Fisher Black και Myron Scholes, ίσως το πιο διαδεδομένο μοντέλο των χρηματοοικονομικών. Το μοντέλο Black-Scholes και η σχέση Black-Scholes, χρησιμοποιούνται για την θεωρητική (αναλυτική) τιμολόγηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του μοντέλου θα αναφερθούμε συνοπτικά στην επίδραση του χρόνου στην αξία του χρήματος.

### 4.1 Αξία χρήματος

Το επιτόκιο δημιουργεί ένα κόστος ευκαιρίας στην αξία του γενικού ισοδύναμου συναλλαγών που είναι το χρήμα. Η επίδραση του επιτοκίου στην αξία του χρήματος συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση. *Ένα ευρώ σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα ευρώ αύριο.* Πράγματι έστω πως έχουμε ένα ευρώ και πως βρίσκουμε μία τράπεζα η οποία συμφωνεί να της το δανείσουμε για μία ημέρα με επιτόκιο  $r$ . Τότε αν επιλέγαμε να καταθέσουμε το €1 που έχουμε σήμερα, αύριο η τράπεζα θα μας το επέστρεφε με τόκο € $1 \cdot r$ . Έτσι αύριο θα είχαμε συνολικά  $1 + r \cdot 1 = (1 + r)$  ευρώ που είναι περισσότερα από το €1 που έχουμε σήμερα.

Για τα παρακάτω υποθέτουμε πως το επιτόκιο είναι αυστηρά θετικό, σταθερό και ίσο με  $r$  για όλη την αγορά. Το επιτόκιο  $r$  θεωρούμε πως είναι το επιτόκιο μίας περιόδου. Η έκταση της περιόδου δεν έχει σημασία (συνήθως θεωρούμε τη περίοδο να είναι ίση με έναν χρόνο).

Γενικά αν η σημερινή αξία (present value) ενός ποσού είναι  $PV$ , τότε η μελλοντική του αξία (future value) μετά από μία περίοδο τοκισμού θα είναι

$$FV = PV(1 + r)$$

Για παράδειγμα αν δανειστούμε από μία τράπεζα  $PV = €1000$ , η περίοδος τοκισμού είναι ένα έτος και η τράπεζα χρεώνει επιτόκιο  $r = 0.05 = 5\%$ , σε έναν χρόνο θα πρέπει να επιστρέψουμε

$$FV = €1000 \cdot (1 + 0.05) = €1050$$



Ορίζουμε, πως αν ο ανατοκισμός γίνεται  $n$  φορές ανά περίοδο, με επιτόκιο περιόδου  $r$ , τότε

$$FV = \text{€ PV} \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Δηλαδή ορίζουμε πως αν το επιτόκιο περιόδου είναι  $r$  τότε το αντίστοιχο επιτόκιο ανατοκισμού  $n$  φορές είναι το  $r/n$ . Τονίζουμε τη λέξη "ορίζουμε", διότι στη πραγματικότητα αν το επιτόκιο μιας περιόδου ήταν  $r$  τότε το επιτόκιο εκείνο που θα είχε την ίδια επίδραση στην αξία του χρήματος, αν αυτό ανατοκιζόταν  $n$  φορές θα ήταν

$$r' = \sqrt[n]{1+r} - 1$$

Στο προηγούμενο συμπέρασμα καταλήγει κανείς εξισώνοντας τις αξίες στις οποίες επιδρούν τα δύο επιτόκια, δηλαδή την  $FV$  που επάγει το  $r$  και την  $FV'$  που επάγει το  $r'$ . Πράγματι

$$\begin{aligned} FV &= FV' \Rightarrow \\ \text{PV}(1+r) &= \text{PV}(1+r')^n \Rightarrow \\ r' &= \sqrt[n]{1+r} - 1 \end{aligned}$$

Βασισμένοι στον ορισμό του επιτοκίου  $n$  ανατοκισμών προσδιορίζουμε το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού  $r_c$ .

Γνωρίζουμε (βλ. [2, Θεώρημα σελ. 140]) πως αν  $a_n$  είναι μία ακολουθία αυστηρά θετικών πραγματικών αριθμών με  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Η ακολουθία με γενικό όρο  $a_n = n/r$  αποκλίνει θετικά και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Καταλήγουμε λοιπόν να ορίσουμε το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού<sup>1</sup> ως  $r_c = e^r$ . Εν κατακλείδι, αν  $r$  είναι το επιτόκιο μίας περιόδου, τότε το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι το  $r_c = e^r$ . Παρατηρήστε ότι αν το επιτόκιο μίας περιόδου έχει διάρκεια ανατοκισμού ίση με 1, τότε το επιτόκιο  $n$  ανατοκισμών θα έχει διάρκεια ανατοκισμού  $1/n$  και τελικά το επιτόκιο συνεχών ανατοκισμών  $r_c$  θα έχει διάρκεια ανατοκισμού  $1/n \rightarrow 0$ .

Έτσι καταλήγουμε πως αν η αξία του χρήματος τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι  $PV_{t_1}$ , τότε η αξία του χρήματος την  $t_2$  θα είναι<sup>2</sup>

$$FV_{t_2} = e^{r(t_2-t_1)} \cdot PV_{t_1}$$

Είδαμε λοιπόν πως η αξία του χρήματος επηρεάζεται από τον χρόνο και συνεπώς δεν έχει νόημα να συγκρίνουμε την τιμή αγαθών εκφρασμένες σε χρήματα διαφορετικών περιόδων.

<sup>1</sup>continuous compounding rate

<sup>2</sup>Αν το μήκος μιας περιόδου είναι 1 τότε η αξία  $A$  μετά από μία περίοδο είναι  $(1+r) \cdot A$ , μετά από δύο περιόδους η αξία θα είναι

$$(1+r) \cdot ((1+r) \cdot A) = (1+r)^2 \cdot A$$

και μετά από  $n$  περιόδους (ή περίοδο μήκους  $1 \cdot n = n$ ) θα είναι  $(1+r)^n \cdot A$ .

Υποθέτουμε πως θέλουμε τη χρονική στιγμή  $t$  να αγοράσουμε ένα προϊόν, το οποίο έχει τιμή  $PV_t = A$ . Αν τη χρονική στιγμή  $t_0 < t$ , καταθέσουμε σε μια τράπεζα το ποσό  $e^{-r(t-t_0)}A$ , τότε τη χρονική στιγμή  $t$  θα έχουμε τα απαραίτητα χρήματα για να αγοράσουμε το προϊόν. Έτσι καταθέτοντας  $e^{-r(t-t_0)}A$  τη στιγμή  $t_0$  είναι σαν να έχουμε προεξοφλήσει το προϊόν  $A$ . Για τον λόγο αυτόν η τιμή  $e^{-r(t-t_0)}A$  καλείται *προεξοφλημένη* (discounted) αξία του προϊόντος σε  $t_0$ -χρήματα.

## 4.2 Σχέσεις Black & Scholes

Στα πλαίσια του μοντέλου υποθέτουμε πως

1. Η αγορά είναι δίκαιη, δηλαδή δεν υπάρχουν δυνατότητες κερδοσκοπίας (no arbitrage).
2. Η αγορά χρήματος δεν έχει στρεβλώσεις με αποτέλεσμα ο δανεισμός στο επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου ( $r$ ) να επιτρέπεται πάντοτε και για οποιοδήποτε ποσό.
3. Υπάρχει η δυνατότητα για την αγορά και την πώληση οποιασδήποτε μετοχής σε οποιαδήποτε ποσότητα (ακόμη και κλάσματος της μετοχής), χωρίς τέλη συναλλαγών.
4. Οι τιμές των μετοχών  $S$  ακολουθούν τη γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερές παραμέτρους, δηλαδή  $S \sim \text{GBM}(\mu, \sigma)$  και τα υποκείμενα προϊόντα (underlying assets) δεν πληρώνουν μερίσματα (dividends).

Για την αυστηρή απόδειξη των τιμολογήσεων, χρειαζόμαστε εργαλεία του στοχαστικού λογισμού τα οποία δεν έχουν αναφερθεί στην εργασία. Περιοριζόμαστε στην περιγραφή των δικαιωμάτων και λαμβάνουμε την τιμολόγηση τους χωρίς απόδειξη. Στη συνέχεια υποθέτουμε πως τα δικαιώματα εκδίδονται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και λήγουν τη χρονική στιγμή  $t = T$ , που καλείται ωρίμανση (maturity) του δικαιώματος.

Σημειώνουμε πως η τιμολόγηση των δικαιωμάτων γίνεται βάση του ουδέτερου ρίσκου πιθανότητας. Υποθέτουμε δηλαδή πως οι αποδόσεις των υποκείμενων αγαθών υπόκεινται στην ακόλουθη ΣτΔΕ

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta)dt + \sigma dW \quad (4.1)$$

όπου  $W$  είναι η συνήθης κίνηση Brown. Παρατηρήστε πως ο ρυθμός ανάπτυξης είναι ίσος με το επιτόκιο ουδέτερου ρίσκου μειωμένος κατά τη συνεχή απόδοση των μερισμάτων (dividend yield)  $\delta$ . Αυτό συμβαίνει διότι αποδεικνύεται πως για να τιμολογηθούν τα δικαιώματα δίκαια, ο ρυθμός αύξησης όλων των υποκείμενων αξιών θα πρέπει να είναι ίσος με  $\rho$ .

Στα ακόλουθα όταν λέμε πως ένα χρηματοοικονομικό προϊόν  $S$  ακολουθεί τη δυναμική του Black-Scholes, θα εννοούμε πως η τιμή του προϊόντος  $S$  ικανοποιεί την εξίσωση (4.1). Στο προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίς απόδειξη, είπαμε πως η λύση της εξίσωσης είναι η

$$S_t = S_0 \exp\left(\left((r - \delta) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \quad (4.2)$$

Ένα παράγωγο (derivative) είναι ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο του οποίου η αξία εξαρτάται από την αξία ενός υποκείμενου προϊόντος. Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) ευρωπαϊκού τύπου είναι ένα παράγωγο το οποίο δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο του να αγοράσει μια προσυμφωνημένη ποσότητα μετοχών του υποκείμενου τίτλου, σε μια συγκεκριμένη τιμή - την τιμή εξάσκησης (strike price)  $K$ , στην ωρίμανση του δικαιώματος (χρονική στιγμή λήξης  $T$ ). Ο κάτοχος του δικαιώματος ασκεί το δικαίωμα του μονάχα αν η  $K$  είναι μικρότερη από την αξία της μετοχής. Η λογική είναι πως θα αγοράσει τη μετοχή στην προσυμφωνημένη τιμή  $K$  και θα τη πουλήσει, άμεσα, στην τιμή αγοράς  $S$ . Έτσι η απόδοση του δικαιώματος την στιγμή  $T$  είναι

$S - K$  αν  $K < S$  και  $0$  αν  $K \geq S$ . Συνεπώς η προεξοφλημένη απόδοση ενός call option που λήγει τη χρονική στιγμή  $T$  είναι

$$e^{-rT} \max\{K - S, 0\} = e^{-rT} (K - S)^+$$

Η απόδοση είναι τυχαία μεταβλητή ως μια συνεχής συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $S$ . Στα πλαίσια του υποδείγματος, αποδεικνύεται πως η αναμενόμενη μέση απόδοση του δικαιώματος (δίκαιη τιμή) τη στιγμή  $t$  είναι ίση με

$$C = C(S_0, K, r, \delta, \sigma, T) = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

Όπου

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[ \ln \frac{S_t}{K} + \left( r - \delta + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right]$$

και

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[ \ln \frac{S_t}{K} + \left( r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right]$$

Η συνάρτηση  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Αντίστοιχα ένα δικαίωμα πώλησης (put option) ευρωπαϊκού τύπου είναι ένα παράγωγο που δίνει το δικαίωμα στο κάτοχο του να πωλήσει μία συγκεκριμένη ποσότητα μετοχών του υποκείμενου τίτλου, σε μια προσυμφωνημένη τιμή στη λήξη του δικαιώματος. Η αξία του δικαιώματος συμβολίζεται με

$$P = P(S_0, K, r, \sigma, T)$$

Ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης θα ασκήσει το δικαίωμα του μονάχα αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης ( $S > K$ ), ούτως ώστε να αγοράσει φθηνά από την αγορά και να πωλήσει ακριβιά ασκώντας το δικαίωμα.

### Put-Call Parity

Για δικαιώματα αγοράς και πώλησης επί του ίδιου υποκείμενου τίτλου και με ίση τιμή εξάσκησης ισχύει η λεγόμενη σχέση put-call parity, η οποία για κάθε  $t < T$  δηλώνει ότι

$$C - P = S - K e^{-r(T-t)}$$

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αγοράζει ένα call και πουλάει ένα put για τον ίδιο υποκείμενο τίτλο (με τιμή  $S$ ), με την ίδια ημερομηνία λήξης και στην ίδια τιμή εξάσκησης  $K$ . Υποθέτουμε επιπλέον πως ο επενδυτής πουλάει μέσω δανεισμού (short selling) μία μετοχή του υποκείμενου τίτλου. Ο επενδυτής στη λήξη των δικαιωμάτων θα κληθεί να κλείσει, όπως λέμε, τη θέση του, δηλαδή να αγοράσει από την αγορά τη μετοχή  $S$ . Η αξία του χαρτοφυλακίου  $C - P - S$  στην ωρίμανση των παραγώγων θα είναι  $-K$ . Πράγματι αν στη λήξη

- $S < K$  τότε ο θα εξασκηθεί μόνο το put και θα αποφέρει ζημία  $K - S$  για το χαρτοφυλάκιο. Προσθέτοντας  $-S$  για το κλείσιμο της θέσης το συνολικό κέρδος του χαρτοφυλακίου θα είναι  $-(K - S) - S = -K$ .
- $S > K$  τότε εξασκείτε μόνο το call και αποφέρει κέρδος  $S - K$  για το χαρτοφυλάκιο. Προσθέτοντας  $-S$  για το κλείσιμο της θέσης, το συνολικό κέρδος είναι  $(S - K) - S = -K$ .

Συνεπώς η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με την προεξοφλημένη αξία  $-K$ , δηλαδή

$$C - P - S = e^{-r(T-t)}(-K) \Rightarrow C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Έτσι στα πλαίσια του μοντέλου μπορούμε μέσω των παραπάνω σχέσεων να τιμολογούμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης ευρωπαϊκού τύπου. Τέλος, σημειώνουμε πως αν πληρώνονται μερίσματα συνεχούς απόδοσης  $\delta$ , αποδεικνύεται ότι

$$C - P = Se^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

### 4.3 Διάφορα Παράγωγα

Η δυναμική του Black-Scholes χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση διάφορων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Προϊόντα που μοντελοποιούνται από την εξίσωση (4.1) και η εξέλιξη τους προσομοιώνεται με τη μέθοδο που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι οι χρηματιστηριακοί δείκτες μετοχών (equity indices) όπως ο ελληνικός FTSE/20, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες (exchange rates) και τα εμπορεύματα (commodities), όπως ο χρυσός και το πετρέλαιο.

Τα παράγωγα που ορίζονται επί των προηγούμενων προϊόντων διαφοροποιούνται ως προς τις δυνατές στιγμές εξάσκησης και ως προς τις συναρτήσεις απόδοσης (payoff function). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα συνηθέστερα.

Υπάρχουν τρεις τύποι παραγώγων ως προς τις δυνατές στιγμές εξάσκησης

- Τα παράγωγα *ευρωπαϊκού τύπου* εξασκούνται μονάχα στη λήξη.
- Τα παράγωγα *αμερικανικού τύπου* μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή πρωτύτερη της λήξης.
- Ανάμεσα τους είναι τα *bermudian* που μπορούν να εξασκηθούν σε έναν διακριτό πεπερασμένο αριθμό στιγμών  $t_i$ .

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$$

Οι συναρτήσεις απόδοσης για τα συνηθή παράγωγα αγοράς και πώλησης είναι

$$C = (S - K)^+ \quad \text{και} \quad P = (K - S)^+$$

Τα δικαιώματα *ασιατικού τύπου* έχουν αποδόσεις

$$C = (f(S) - K)^+ \quad \text{και} \quad P = (K - f(S))^+$$

Όπου για τη συνάρτηση  $f$  υπάρχουν δύο εκδοχές. Είτε

$$f(S) = \hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

για ένα προσυμφωνημένο πλήθος χρονικών στιγμών  $\{t_i\}_{i=1}^n$ , είτε

$$f(S) = \frac{1}{t-u} \int_u^t S(\tau) d\tau$$

για ένα προσυμφωνημένο χρονικό διάστημα  $[u, t]$ .

Ένας άλλος τύπος είναι τα δικαιώματα φράγματος (barrier options), τα οποία έχουν αποδόσεις

$$C = \mathbb{I}\{\tau(b) > T\}(S - K)^+ \quad \text{και} \quad P = \mathbb{I}\{\tau(b) > T\}(K - S)^+$$

αν είναι τύπου "down-and-out" και

$$C = \mathbb{I}\{\tau(b) \leq T\}(S - K)^+ \quad \text{και} \quad P = \mathbb{I}\{\tau(b) \leq T\}(K - S)^+$$

αν είναι τύπου "down-and-in". Η τυχαία μεταβλητή

$$\tau(b) = \inf\{t \geq 0 : S(t) < b\}$$

καλείται χρόνος διακοπής και είναι η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του υποκείμενου τίτλου πέφτει κάτω από το φράγμα  $b$ . Συνεπώς ένα "down-and-out" χάνει την αξία του αν η τιμή πέσει κάτω από το φράγμα  $b$  σε χρόνο πρωτότερο του χρόνου ωρίμανσης του δικαιώματος. Ένα "down-and-in" αποκτά αξία (ή ενεργοποιείται) μονάχα αν η τιμή πέσει κάτω από το φράγμα  $b$  κάποια στιγμή πρωτότερη του χρόνου ωρίμανσης. Τα παραπάνω έχουν νόημα αν η τιμή ξεκινά πάνω από το φράγμα  $b$ . Αν η τιμή ξεκινά κάτω από το φράγμα  $b$  τότε ορίζονται τα "up-and-out" και "up-and-in" με τις ίδιες συναρτήσεις απόδοσης, αλλά με χρόνο διακοπής

$$\tau(b) = \inf\{t \geq 0 : S(t) > b\}$$

Τέλος τα *lookback options* έχουν συναρτήσεις απόδοσης

$$C = (\max_{t \in \mathcal{T}} \{S_t\} - K)^+ \quad \text{και} \quad P = (K - \max_{t \in \mathcal{T}} \{S_t\})^+$$

όπου  $\mathcal{T}$  μπορεί να είναι ένα διακριτό σύνολο χρονικών στιγμών ή ένα συνεχές χρονικό διάστημα αντίστοιχα με τα δικαιώματα ασιατικού τύπου.

Επίσης υπάρχουν παράγωγα τα οποία εξαρτώνται από περισσότερα του ενός υποκείμενα προϊόντα. Για παράδειγμα, το *spread option*, που αφορά δύο προϊόντα τιμών  $S_1$  και  $S_2$  έχει συναρτήσεις απόδοσης

$$C = ([S_1 - S_2] - K)^+ \quad \text{και} \quad P = (K - [S_1 - S_2])^+$$

Ένα άλλο είναι το *Basket option* το οποίο ορίζεται πάνω σε ένα καλάθι  $\mathbf{S}$  με  $d$  προϊόντων και έχει αποδόσεις

$$C = (B(\mathbf{S}) - K)^+ \quad \text{και} \quad P = (K - B(\mathbf{S}))^+$$

Η συνάρτηση  $B$  είναι συνήθως ο σταθμισμένος μέσος των προϊόντων

$$B(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^d w_i S_i$$

ή η μέγιστη σταθμισμένη τιμή των υποκείμενων προϊόντων

$$B(\mathbf{S}) = \max \{w_i S_i : i = 1, \dots, d\}$$

Υπάρχουν επίσης παράγωγα φράγματος δύο προϊόντων. Ανάλογα με τη μονοδιάστατη περίπτωση υπάρχουν διάφορες παραλλαγές. Για παράδειγμα ένα call τύπου "down-and-in" έχει απόδοση

$$C = \mathbb{I}\left\{\inf_{t \in \mathcal{T}} \{S_2(t) < b\}\right\} (K - S_1)^+$$

όπου  $\mathcal{T}$  ένα διακριτό σύνολο χρόνων ή ένα συνεχές διάστημα.

### Δικαίωμα γεωμετρικού μέσου

Ένα παράγωγο το οποίο έχει θεωρητική αξία, αλλά δεν συναντάται στην αγορά, είναι το παράγωγο του γεωμετρικού μέσου, το οποίο χρησιμοποιείται κυρίως για τον έλεγχο των υπολογιστικών μεθόδων που κατασκευάζουμε. Το δικαίωμα του γεωμετρικού μέσου μοιάζει με τα ασιατικού τύπου με τη διαφορά πως η συνάρτηση

$$f(S) = \left(\prod_{i=1}^n S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Θα αποδείξουμε ότι η  $f(S)$  είναι το βήμα μιας γεωμετρικής κίνησης Brown για  $T = \sum_{i=1}^n t_i$ . Παρατηρούμε αρχικά πως

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\prod_{i=1}^n S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i + \sigma W_{t_i}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n W_{t_i}\right) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την κατανομή της

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{t_i}$$

Η  $W_{t_i}$  είναι μια απλή κίνηση Brown και έτσι γνωρίζουμε πως  $W_{t_i} \sim N(0, t_i)$ . Συνεπώς το τυχαίο διάνυσμα (στήλη)

$$\mathbf{W} = (W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$$

θα ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή  $N(0, \Sigma)$  με

$$\Sigma = [\min\{t_i, t_j\}] = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε επίσης το διάνυσμα

$$A = [1, 1, 1, \dots, 1]_{1 \times n}$$

Σύμφωνα με την σχέση (2.1), γνωρίζουμε πως η τυχαία μεταβλητή

$$AW = \sum_{i=1}^n W_{t_i}$$

θα ακολουθεί την  $N(0, A\Sigma A^T)$ . Υπολογίζουμε πώς

$$A\Sigma = \left[ nt_1, t_1 + (n-1)t_2, t_1 + t_2 + (n-2)t_3, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} t_i + t_n \right]_{1 \times n}$$

Άρα

$$A\Sigma A^T = (n + (n-1))t_1 + ((n-1) + (n-2))t_2 + ((n-2) + (n-3))t_3 + \dots + ((n - (n-2)) + (n - (n-1)))t_{n-1} + ((n - (n-1)) + (n - (n)))t_n$$

Καταλήγουμε πώς

$$\begin{aligned} A\Sigma A^T &= (2n-1)t_1 + (2n-3)t_2 + (2n-5)t_3 + \dots + 3t_{n-1} + t_n \\ &= (2n-1)t_1 + (2(n-1)-1)t_2 + \dots + (2-1)t_n \\ &= \sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=1}^n W_{t_i} \sim N \left( 0, \sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i} \right)$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^n W_{t_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i}} \cdot z, \quad z \sim N(0, 1)$$

Έτσι θέτοντας

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{και} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{n\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i}}$$

παρατηρούμε πώς η αρχική εξίσωση γράφεται ως

$$I_T = \left( \prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} = S(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \bar{\sigma} \sqrt{T} z \right), \quad z \sim N(0, 1)$$

Για να βρούμε τη κίνηση που ακολουθεί η  $I_T$  αρκεί να βρούμε ένα  $\delta$ , δηλαδή μια συνεχή απόδοση μερισμάτων, έτσι ώστε

$$\left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) = \left( r - \delta - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \right) \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)$$

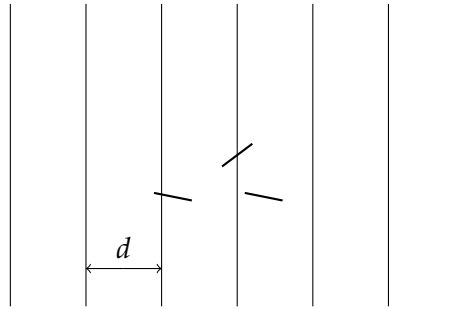
Συνεπώς αποδείξαμε ότι

$$I_T \sim \text{GBM} \left( r - \delta, \bar{\sigma}^2 \right), \quad \text{με} \quad \delta = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) \quad \text{και} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{n\sqrt{T}} \left( \sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

Έτσι για να τιμολογήσουμε το παράγωγο του γεωμετρικού μέσου, αρκεί να εφαρμόσουμε την σχέση Black-Scholes για ένα σύνθητες παράγωγο ευρωπαϊκού τύπου με υποκείμενη αξία  $I_T$  και ωρίμανση  $T$ .



#### 4.4 Monte Carlo



**Σχήμα 4.1:** Οι δύο βελόνες μήκους  $l$  τέμνουν τις γραμμές του δαπέδου, ενώ η τρίτη όχι.

Μία από τις πρώτες εφαρμογές των μεθόδων Monte Carlo θεωρείται το πρόβλημα της βελόνας του Buffon<sup>3</sup>. Θεωρούμε ένα χωρίο το οποίο έχουμε χωρίσει με παράλληλες γραμμές που απέχουν μεταξύ τους  $d$ , όπως στο Σχήμα-4.1. Ψάχνουμε να βρούμε τη πιθανότητα να προσγειωθεί μία βελόνα μήκους  $l \leq d$  έτσι ώστε να τέμνει μία από τις γραμμές.

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$X$  = "Η απόσταση του κέντρου της βελόνας από τη κοντινότερη γραμμή"

και

$\Theta$  = "Η μικρότερη γωνία που σχηματίζει η βελόνα με τις γραμμές"

Παρατηρήστε πως τα μέτρα των κατανομών είναι ομοιόμορφα. Συγκεκριμένα

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} \frac{2}{d}, & 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\mathbb{P}[\Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι  $X$  και  $\Theta$  είναι ανεξάρτητες και συνεπώς το από κοινού μέτρο κατανομής είναι

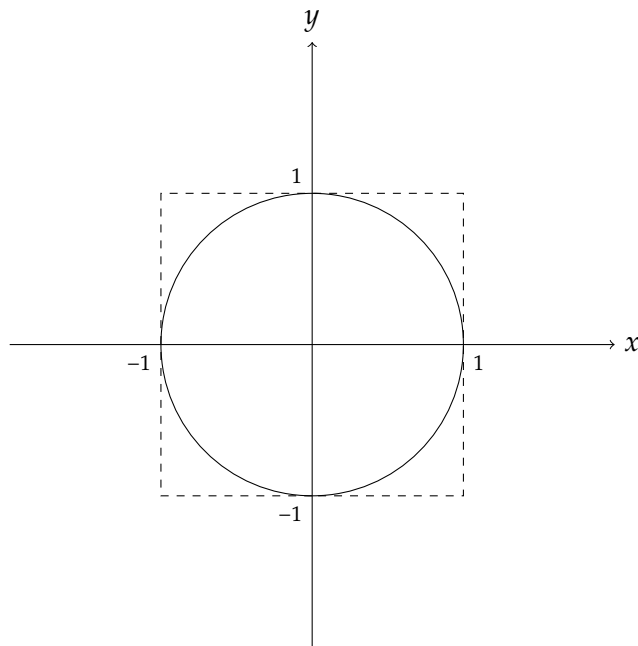
$$\mathbb{P}[X = x, \Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{4}{d\pi}, & 0 \leq x \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για να τέμνει η βελόνα μία γραμμή θα πρέπει το  $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$  και  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Συνεπώς η πιθανότητα να τέμνει η βελόνα μία γραμμή είναι

$$\mathbb{P}\left[0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right] = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2} \sin \theta} \frac{4}{d\pi} dx d\theta = \frac{2l}{d\pi}$$

Συνεπώς εκτελώντας το πείραμα πολλές φορές μπορούμε να προσεγγίσουμε τη τιμή της πιθανότητας αυτής και να στη συνέχεια να προσεγγίσουμε τη τιμή του αριθμού  $\pi$ .

<sup>3</sup>Γάλλος επιστήμονας του 18ου αιώνα.



**Σχήμα 4.2:** Ο εγγεγραμμένος μοναδιαίος κύκλος στο τετράγωνο  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Για τον υπολογισμό του  $\pi$  υπάρχει και μια πιο σύγχρονη μέθοδος. Προσομοιώνουμε στον υπολογιστή τιμές  $(x, y)$  από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Η πιθανότητα

$$p = \mathbb{P}\{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2] : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο λόγος του εμβαδού του μοναδιαίου κύκλου προς το εμβαδόν του τετραγώνου  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , δηλαδή

$$p = \frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς μπορούμε να προσομοιώσουμε τιμές και προσεγγίζοντας την  $p$  να προσεγγίσουμε τον αριθμό  $\pi$ . Πράγματι με το Πρόγραμμα-4.1 προσομοιώνουμε  $10^4$  και  $10^6$  τιμές και εκτιμούμε πως  $\hat{\pi} = 3.141224$  και  $\hat{\pi} = 3.141542$  αντίστοιχα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία 100 φορές εκτιμούμε τα σφάλματα των εκτιμητών ίσα με 0.01485 και 0.0019396 αντίστοιχα. Παρατηρήστε πως όταν αυξήσαμε τις προσομοιώσεις κατά  $10^2$  το σφάλμα μειώθηκε από 0.01 έγινε 0.001.

Γενικά αν θέλουμε να εκτιμήσουμε μια παράμετρο  $\theta$ , το πρώτο βήμα είναι να βρούμε μία τυχαία μεταβλητή  $X$  τέτοια ώστε η  $X$  να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της  $\theta$ , δηλαδή

$$\mathbb{E}[X] = \theta$$

Επιπλέον θα πρέπει να ξέρουμε τη πυκνότητα της  $X$  ώστε να μπορούμε να προσομοιώσουμε τιμές της. Στη συνέχεια προσομοιώνουμε  $n$  το πλήθος τιμές της  $X$  και αποκτούμε ένα τυχαίο δείγμα της  $X_1, \dots, X_n$ . Αν η  $X$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (βλ. Θεώρημα-2.7), γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \theta}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

```

1 MonteCarlo <- function(rep = 100, n){
2   v <- rep(1, rep)
3   for(i in 1:rep){
4     x <- runif(n, -1, 1)
5     y <- runif(n, -1, 1)
6     p <- 1/n*sum(x^2 + y^2 <= 1)
7     v[i] <- 4*p
8   }
9   return(list(mean = mean(v), sd = sd(v)))
10 }
11
12 # for n = 10^4
13 est <- MonteCarlo(rep = 100, n = 10^4)
14 est #=> mean = 3.14 +- 0.01
15
16 # for n = 10^6
17 est <- MonteCarlo(rep = 100, n = 10^6)
18 est #=> mean = 3.141 +- 0.001

```

**Πρόγραμμα 4.1:** Εκτίμηση του αριθμού  $\pi$ .

Συνεπώς το σφάλμα του εκτιμητή μας

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \theta \right) \sim N(0, \sigma)$$

Συνεπώς η σύγκλιση του σφάλματος του σφάλματος είναι τάξης του  $O(\sqrt{n})$ .

**Ορισμός 4.1** (Big-O notation). Έστω  $f(x)$  και  $g(x)$  δύο συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο  $D$ , υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \text{ καθώς το } x \rightarrow \infty$$

αν και μόνο αν υπάρχει θετική σταθερά  $M$  και  $x_0 \in D$  ώστε για κάθε  $x \geq x_0$  να ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq M |g(x)|$$

Δηλαδή για να πετύχουμε εκτίμηση ακρίβειας κατά ένα δεκαδικό ψηφίο περισσότερο θα πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των προσομοιωμένων τιμών κατά  $10^2$ . Κάποιες φορές μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά της  $X$  και άρα τη τυπική απόκλιση του σφάλματος του εκτιμητή. Τις περισσότερες φορές την εκτιμούμε επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία και υπολογίζοντας το δειγματικό τυπικό σφάλμα.

## 4.5 Monte Carlo για European Options

Ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα, το οποίο έχουμε δανειστεί από το [11]. Έστω μία μετοχή της οποίας η τιμή είναι €42 και ένα δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου επί αυτής με τιμή εξάσκησης €40 και λήξη σε έξι μήνες από τώρα. Το επιτόκιο ουδέτερου ρίσκου είναι 10% και η μεταβλητότητα της μετοχής έχει εκτιμηθεί να είναι ίση με 20% ανά έτος. Εφαρμόζοντας την σχέση Black-Scholes, με τη συνάρτηση European του Προγράμματος-4.2, για

$$S_0 = 42, K = 40, r = 0.1, \sigma = 0.2, \text{ και } T = 0.5$$

βρίσκουμε ότι

$$C = 4.759422 \text{ και } P = 0.8085994$$

Με τη μέθοδο Monte Carlo, θα εργαστούμε ως εξής

1. Θα προσομοιώσουμε  $n$  μονοπάτια της μετοχής, υποθέτοντας πως η τιμή της ακολουθεί τη δυναμική του Black-Scholes.
2. Θα υπολογίσουμε τις αποδόσεις των δικαιωμάτων.
3. Υπολογίζοντας τη μέση τιμή των αποδόσεων θα λάβουμε τις εκτιμήσεις της αξίας των δικαιωμάτων για  $t = T$ .
4. Θα προεξοφλήσουμε την εκτιμώμενη αξία των δικαιωμάτων για  $t = 0$ , θα πολλαπλασιάσουμε δηλαδή με  $e^{-rT}$ .

Εκτελώντας τα παραπάνω, με τη συνάρτηση EuropeanMC του Προγράμματος-4.2, για  $n = 10^5$  βρίσκουμε

$$C_{mc} = 4.753084 \text{ και } P_{mc} = 0.8085994$$

Ένα διάστημα εμπιστοσύνης  $(1 - a)\%$ , για μια εκτιμήτρια  $\hat{\theta}$  monte carlo, δηλαδή τέτοια ώστε

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

είναι

$$(L(\theta), U(\theta)) = \left( \hat{\theta} - \frac{\text{sd}(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} z_{-\frac{a}{2}}, \hat{\theta} + \frac{\text{sd}(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} z_{-\frac{a}{2}} \right)$$

όπου

$$z_{-\frac{a}{2}} = \Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}\right) = \Phi$$

και  $\text{sd}(\hat{\theta})$  η δειγματική τυπική απόκλιση.

Εκτιμούμε το τυπικό σφάλμα των παραπάνω εκτιμητριών, επαναλαμβάνοντας τη προηγούμενη διαδικασία 100 φορές. Οι εκτιμήσεις που βρίσκουμε είναι

$$C_{mc} = 4.756434 \text{ και } P_{mc} = 0.8093273$$

με διαστήματα εμπιστοσύνης

$$(L(C_{mc}), U(C_{mc})) = (4.753595, 4.759273)$$

$$(L(P_{mc}), U(P_{mc})) = (0.8080763, 0.8105784)$$

Παρατηρούμε πως οι τιμολογήσεις για  $n = 10^5$  συμφωνούν με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων, που είναι ικανοποιητική. Αν παρόλα αυτά θέλαμε να αυξήσουμε την ακρίβεια, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει, θα έπρεπε να εκτελέσουμε την προηγούμενη διαδικασία  $n = 10^7$  φορές. Πράγματι βρίσκουμε

$$C_{mc} = 4.759551 \text{ και } P_{mc} = 0.8087092$$

με διαστήματα εμπιστοσύνης

$$(L(C_{mc}), U(C_{mc})) = (4.759882, 4.759220)$$

$$(L(P_{mc}), U(P_{mc})) = (0.8085967, 0.8084843)$$

Ο υπολογισμός των εκτιμήσεων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης για  $n = 10^5$  και  $n = 10^7$  υλοποιείται στο Πρόγραμμα-4.3. Τις εκτιμήσεις μαζί με τα διαστήματα εμπιστοσύνης μπορούμε να τα λάβουμε με τη συνάρτηση CI της βιβλιοθήκης Rmisc.

```

1
2 European <- function(S, K, r, d, s, T = 1, t = 0){
3   # Calculates the value of a european put according
4   # to the Black & Scholes model.
5   #
6   # Args:
7   #   S: The price of the underlying asset at time t.
8   #   K: The strike price
9   #   r: the riskless interest rate.
10  #   s: the volatility parameter of the underlying
11  #      asset
12  #   t: current time
13  #   T: time of maturity
14  #
15  # Returns:
16  #   A list with the value of the call and the put.
17
18  dt <- T - t
19  h <- s*sqrt(dt)
20  d1 = (log(S/K) + (r - d + s^2/2)*dt)/h
21  d2 = d1 - h
22  c = exp(-d*dt)*S*pnorm(d1) - K*exp(-r*dt)*pnorm(d2)
23  p = c - S*exp(-d*dt) + K*exp(-r*dt)
24
25  return(list(call = c, put = p))
26 }
27
28 European.MC <- function(S, K, r, d, s, T = 1,
29                        t = 0, num){
30   # Pricing european options with Monte Carlo
31   #
32   # Args:
33   #   num: the number of simulated val
34
35   dt <- T - t
36   # simulated values
37   values <- S*exp((r - d - s^2/2)*dt +
38                s*sqrt(dt)*rnorm(num))
39   # mean of discounted payoffs
40   c <- mean(exp(-r*dt)*pmax(values - K, 0))
41   p <- mean(exp(-r*dt)*pmax(K - values, 0))
42
43   return(list(call = c, put = p))
44 }
45
46 # Black-Scholes pricing
47 European(42, 40, 0.1, 0, 0.2, 0.5)
48 # => $call = 4.759422, $put = 0.8108431
49
50 # Monte Carlo pricing
51 European.MC(42, 40, 0.1, 0, 0.2, T = 0.5, num = 10^5)
52 # => $call = 4.766029, $put = 0.8085994

```

**Πρόγραμμα 4.2:** Τιμολόγηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με τη σχέση Black-Scholes και με Monte Carlo.

```

1 # Estimating MC error and confidence intervals
2 c.mc <- numeric(100)
3 p.mc <- numeric(100)
4 for(i in 1:100){
5   e.mc <- European.MC(42, 40, 0.1, 0, 0.2, T = 0.5,
6                     num = 10^5)
7   c.mc[i] <- e.mc$call
8   p.mc[i] <- e.mc$put
9 }
10 mean(c.mc) # => 4.756434
11 mean(p.mc) # => 0.8093273
12 sd(c.mc) # => 0.01430938
13 sd(p.mc) # => 0.006304944
14 alpha <- 0.05
15 c.mc.l <- mean(c.mc) -
16   sd(c.mc)/sqrt(100)*qnorm(1 - alpha/2)
17 # => 4.75362926
18 c.mc.u <- mean(c.mc) +
19   sd(c.mc)/sqrt(100)*qnorm(1 - alpha/2)
20 # => 4.759238
21
22
23 # Confidence intervals using Rmisc
24 require(Rmisc)
25 CI(c.mc)
26 # => est = 4.756434, CI = (4.753595, 4.759273)
27 CI(p.mc)
28 # => est = 0.8093273, CI = (0.8080763, 0.8105784)
29
30 # Increase preciseness
31 c.mc <- numeric(100)
32 p.mc <- numeric(100)
33 for(i in 1:100){
34   e.mc <- European.MC(42, 40, 0.1, 0, 0.2, T = 0.5,
35                     num = 10^7)
36   c.mc[i] <- e.mc$call
37   p.mc[i] <- e.mc$put
38 }
39 CI(c.mc)
40 # => est = 4.759551, CI = (4.759882, 4.759220)
41 CI(p.mc)
42 # => est = 0.8087092, CI = (0.8085967, 0.8084843)

```

**Πρόγραμμα 4.3:** Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τις εκτιμήτριες Monte Carlo για δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου.

**Ολοκλήρωση Συναρτήσεων του  $\mathbb{R}^d$** 

Για μονοδιάστατες αριθμητικές ολοκληρώσεις υπάρχουν καλύτερες μέθοδοι από τις Monte Carlo. Αντίθετα για πολυδιάστατες συναρτήσεις οι μέθοδοι Monte Carlo αποτελούν μία καλή επιλογή. Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα από το [?].

Θεωρούμε  $d$  υποκείμενες αξίες  $S^1, S^2, \dots, S^d$ , που ακολουθούν την ( $d$ -διάστατη) δυναμική του Black-Scholes. Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης θεωρούμε πως είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον υποθέτουμε πως έχουν κοινή αρχική τιμή  $s_0 > 0$  και μεταβλητότητα  $\sigma > 0$ . Στον χρόνο ωρίμανσης η αξία του καθενός θα είναι

$$S_T = s_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z^i\right)$$

όπου η  $Z^i \sim N(0, 1)$ ,  $T$  είναι ο χρόνος ωρίμανσης και  $r$  το επιτόκιο ουδέτερου ρίσκου. Επίσης θεωρούμε τον γεωμετρικό δείκτη

$$\begin{aligned} I_T &= (S_T^1 \cdots S_T^d)^{\frac{1}{d}} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^d s_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z^i\right) \right\}^{\frac{1}{d}} \\ &= \left\{ s_0 \left( \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \right) \prod_{i=1}^d \exp\left(\sigma\sqrt{T}Z^i\right) \right\}^{\frac{1}{d}} \\ &= s_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{d} \sum_{i=1}^d Z^i\right) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε πως θεωρώντας  $A = [1 \cdots 1]_{1 \times d}$  τότε για το τυχαίο διάνυσμα

$$(Z^1, \dots, Z^d) \sim N(0, I_d)$$

, σύμφωνα με την (2.1) έπεται πως

$$\sum_{i=1}^d Z^i \sim N(0, \sqrt{d})$$

Έτσι η προηγούμενη γράφεται ως

$$I_T = s_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp\left(\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\sqrt{T}w\right), \quad w = \frac{\sum_{i=1}^d Z^i}{\sqrt{d}} \sim N(0, 1)$$

Συνεπώς για να εφαρμόσουμε τη σχέση Black-Scholes αρκεί να προσθαφαιρέσουμε  $\left(r - \frac{\sigma^2}{d}\right)T$ . Καταλήγουμε πως

$$I_T = I_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2d}\right)T + \frac{\sigma}{\sqrt{d}}\sqrt{T} \frac{\sum_{i=1}^d Z^i}{\sqrt{d}}\right), \quad I_0 = e_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2(d-1)}{2d}T\right)$$



Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για  $d = 4$  και για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης επί του γεωμετρικού μέσου των υποκείμενων αξιών. Θεωρούμε

$$S_0 = 100, K_1 = 98, r = 0.05\%, \sigma = 0.2$$

Η αληθινή τιμή υπολογίζεται με τις σχέσεις Black-Scholes και είναι ίση με 2.077. Η εκτίμηση έγινε με  $10^5$  προσομοίωσης σε μία 4-διάστατη κίνηση Brown. Υπολογίζουμε πως η τιμή του δικαιώματος είναι 2.065475 με διάστημα εμπιστοσύνης (2.037906, 2.093043).

```

1 # Black-Scholes
2 s0 = 100; K = 98; r = 0.05; sigma = 0.2; T = 2; d = 4;
3 I0 = s0*exp(-(sigma^2*(d-1)/(2*d))*T);
4 sigma.i = r - sigma^2/(2*d)
5 European(I0, K, r, 0, sigma/sqrt(d), T)
6 # -> 2.076954
7
8 # Modified European.MC for multivariate
9 European.MCGA <- function(S, K, r, Sigma, T = 1, mc.num){
10   require(MASS)
11   require(Rmisc)
12   d <- dim(Sigma)[1] #num of assets
13
14   sample <- S*exp(mvrnorm(n = mc.num, (r - diag(Sigma)/2)*T,
15     T*Sigma))
16   I <- apply(sample, 1, function(x) prod(x)^(1/d))
17   payoff <- pmax(K - I, 0)
18   return(exp(-r*T)*CI(payoff))
19 }
20
21 European.MCGA(100, 98, 0.05, diag(0.2, 4)^2, 2, 10^5)
22 # => upper mean lower
23 # => 2.093043 2.065475 2.037906

```

**Πρόγραμμα 4.4:** Ολοκλήρωση στον  $\mathbb{R}^4$ .

## Κεφάλαιο 5

# Παράγωγα Αμερικανικού Τύπου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε για διάφορα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου, για τη τιμολόγηση τους και είδαμε πως μπορούμε να τα τιμολογήσουμε με μεθόδους προσομοίωσης. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι εξασκούνται σε μία μοναδική στιγμή, στη λήξη τους. Η άλλη κατηγορία δικαιωμάτων είναι τα αμερικανικού τύπου (american options). Τα δικαιώματα αυτά μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή πρωτότερη της λήξης τους. Ανάμεσα στα δικαιώματα ευρωπαϊκού και αμερικανικού τύπου βρίσκονται εκείνα τα οποία μπορούν να εξασκηθούν πρωτότερα της λήξης τους αλλά σε έναν πεπερασμένο αριθμό στιγμών. Τα δικαιώματα αυτά καλούνται bermudian σε αντιστοιχία με το ότι οι Βερμούδες βρίσκονται στο βόρειο ατλαντικό ωκεανό ανάμεσα στην Ευρώπη και την Αμερική.

Τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου τιμολογούνται άμεσα με τις σχέσεις Black-Scholes. Αντίθετα για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου, δεν υπάρχει κλειστός τύπος. Τα δικαιώματα αυτά μπορούν να τιμολογηθούν με μεθόδους Monte Carlo. Ειδικότερα οι μέθοδοι προσομοίωσης προτιμούνται στην για τη τιμολόγηση πολυδιάστατων δικαιωμάτων, δηλαδή για δικαιώματα τα οποία βασίζονται σε περισσότερα του ενός αγαθά. Συγκεκριμένα προσεγγίζουμε ένα δικαίωμα αμερικανικού τύπου με ένα bermudian, με την έννοια πως καθώς αυξάνουμε το πλήθος των στιγμών εξασκήσεις των τελευταίων, η αξία τους θα τείνει στην αξία των αμερικανικών. Επίσης υπάρχουν δικαιώματα αμερικανικού τύπου για τα οποία αποδεικνύεται εξαρχής πως η εξάσκηση τους είναι βέλτιστη για ένα συγκεκριμένο πλήθος τιμών, για παράδειγμα για τις στιγμές στις οποίες πληρώνονται τα μερίσματα.

Αποδεικνύεται πως η τιμή των δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής των δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Οι περισσότερες δυνατότητες εξάσκησης δίνουν μια διαισθητική κατανόηση του προηγούμενου αποτελέσματος. Επίσης αποδεικνύεται πως η εξάσκηση ενός αμερικανικού call, για μία μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα, είναι βέλτιστη στη λήξη του και έτσι η τιμή του είναι ίδια με τη τιμή του ευρωπαϊκού call.

## 5.1 Μοντελοποίηση του Προβλήματος

Η τιμολόγηση δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου είναι ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (optimal stopping problem). Ειδικότερα για μια στοχαστική ανάλυση  $U(t)$  με  $0 \leq t \leq T$ , της οποίας ο παραμετρικός χώρος και ο χώρος καταστάσεων θεωρούνται συνεχείς, ψάχνουμε να βρούμε τη πρώτη χρονική στιγμή στην οποία η αναμενόμενη μέση τιμή της  $U$  είναι η μέγιστη. Τον χρόνο αυτόν τον καλούμε βέλτιστο χρόνο διακοπής και θα τον συμβολίζουμε με  $\tau^*$ .

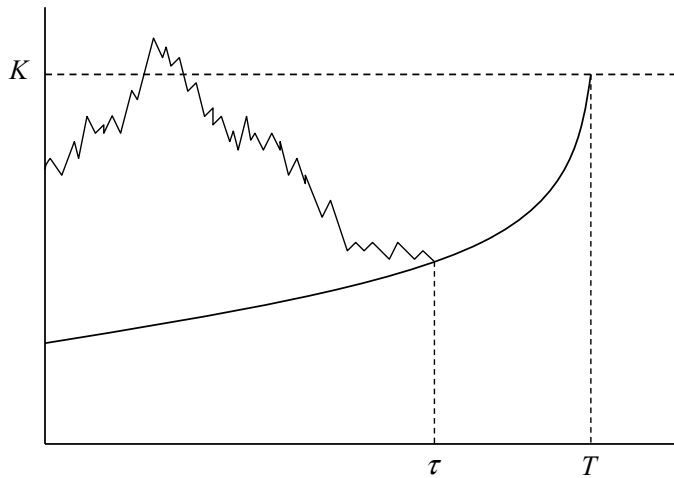
Αν η  $U$  αναπαριστά τη προεξοφλημένη απόδοση του δικαιώματος, τότε η στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος, ταυτίζεται με τον βέλτιστο χρόνο διακοπής της διαδικασίας. Ο βέλτιστος χρόνος διακοπής είναι ο

$$\tau^* = \inf\{\tau \geq 0 : \mathbb{E}[U(\tau)] = \sup_{t \in T} \mathbb{E}[U(t)]\}$$

Αν βρούμε το βέλτιστο χρόνο διακοπής  $\tau^*$ , η δίκαιη τιμή του δικαιώματος θα είναι η  $U(\tau^*)$ . Για παράδειγμα αν έχουμε μία αξία  $S(t)$  με  $0 \leq t \leq T$ , τότε η τιμή του αμερικάνικου put θα είναι

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}[U(t)] = \sup_{t \in T} \mathbb{E}[e^{-rt}(K - S(t))^+]$$

Άμεσα συνδεδεμένο με τον βέλτιστο χρόνο εξάσκησης είναι το βέλτιστο σύνορο εξάσκησης (optimal exercise boundary). Το σύνορο για ένα put αναπαρίσταται στο Σχήμα-5.1. Μπορούμε να φανταστούμε το σύνορο αυτό σαν το γεωμετρικό τόπο των σημείων των βέλτιστων τιμών εξάσκησης για κάθε  $t \in T$ .



**Σχήμα 5.1:** Με την πολυγωνική γραμμή αναπαριστάται ένα μονοπάτι της αξίας  $S(t)$  και με τη συνεχή το βέλτιστο σύνορο εξάσκησης  $b^*$ , για ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης  $K$  και ωρίμανση  $T$ .

Αν γνωρίζουμε το βέλτιστο σύνορο εξάσκησης  $b^*$ , τότε ο βέλτιστος χρόνος διακοπής μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S(t) \geq b^*(t)\}$$

Συνεπώς ο προσδιορισμός του συνόρου είναι ένας ισοδύναμος τρόπος για την τιμολόγηση του δικαιώματος. Εμείς δεν θα ασχοληθούμε ούτε με τον προσδιορισμό του συνόρου, ούτε με τον προσδιορισμό του χρόνου διακοπής, αλλά με την εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος.

Θα προσεγγίσουμε τη τιμή ενός δικαιώματος αμερικανικού τύπου τιμολογώντας το αντίστοιχο bermudian. Θεωρούμε λοιπόν  $m$  δυνατούς χρόνους εξάσκησης

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$$

Θα αναφερόμαστε στους χρόνους αυτούς παραλείποντας το  $t$ , για παράδειγμα όταν γράφουμε  $S_3$  θα εννοούμε το  $S_{t_3}$ . Θεωρούμε επίσης πως η διαδικασία  $S$  ακολουθεί τη δυναμική του Black-Scholes. Θα συμβολίζουμε επίσης με  $h_i$  τη συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος και με  $V_i$  την αξία του δικαιώματος κατά την στιγμή  $i$ , για τις οποίες θεωρούμε πως λαμβάνουν προεξοφλημένες αξίες, δηλαδή εκφράζονται σε χρήματα της στιγμής έκδοσης του δικαιώματος. Για παράδειγμα η απόδοση ενός αμερικανικού δικαιώματος τη στιγμή  $t_i$  θα είναι

$$h_i(S_i) = e^{-rt_i}(K - S_i)^+$$

Η τιμολόγηση του δικαιώματος γίνεται μέσω του προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού που περιγράφεται από την ακόλουθη αναδρομή

$$V_m(s) = h_m(s) \quad (5.1)$$

$$V_{i-1}(s) = \max \{h_{i-1}(s), \mathbb{E}[V_i(S_i)|S_{i-1} = s]\} \quad (5.2)$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$ . Η βάση της αναδρομής λέει πως στην λήξη η αξία του ομολόγου είναι ίση με την απόδοση του. Η αναδρομική σχέση λέει πως τη στιγμή  $t_{i-1}$  η αξία του ομολόγου θα είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου  $h_{i-1}$  ή με την αναμενόμενη αξία του ομολόγου την επόμενη χρονική στιγμή, δεδομένου πως η αλυσίδα βρίσκεται τη στιγμή  $i$  στην κατάσταση  $s$ , αν είναι μεγαλύτερη.

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο σκέπτεται ένας επενδυτής. Πράγματι ένας επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα του μονάχα αν η εξάσκηση εκείνη τη στιγμή θα του αποφέρει το μέγιστο κέρδος. Ειδικότερα αν υποθέσουμε πως η διαδικασία  $S$  είναι η αξία μιας μετοχής και τη χρονική στιγμή  $i$  η τιμή της είναι  $s$  τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα μονάχα αν η αξία εξάσκησης  $h_{i-1}(s)$  είναι μεγαλύτερη ή ίση με την αξία μη εξάσκησης ή αλλιώς αξία συνέχισης (continuation value), που είναι

$$C_{i-1}(s) = \mathbb{E}[V_i(S_i)|S_{i-1} = s]$$

Αυτό αποτυπώνεται στην εξίσωση (5.2). Ισοδύναμα ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα τη πρώτη στιγμή κατά την οποία η αξία εξάσκησης θα είναι μεγαλύτερη ή ίση με την αξία συνέχισης. Έτσι ο βέλτιστος χρόνος διακοπής είναι ο

$$\tau^* = \min \{i \in \{1, \dots, m\} : h_i(S_i) \geq C_i(S_i)\}$$

Οι μέθοδοι Monte Carlo για την τιμολόγηση παραγώγων αμερικανικού τύπου χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της αξίας συνέχισης. Οι πιο συνηθισμένοι μέθοδοι για τη τιμολόγηση Monte Carlo είναι αυτές που χρησιμοποιούν παλινδρομήσεις. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε τις βασικότερες.

## 5.2 Least Square Monte Carlo

Έστω ένα γραμμικό μοντέλο  $m$  ανεξάρτητων μεταβλητών της μορφής

$$y_i = b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_p x_{im} + \epsilon_i$$

όπου η  $y_i$  είναι η  $i$ -οστή παρατήρηση της εξαρτημένης μεταβλητής και οι  $x_{i1}$  είναι  $i$ -οστή παρατήρηση των ανεξάρτητων μεταβλητών. Αν τα δεδομένα, δηλαδή οι  $n$  παρατηρήσεις, ικανοποιούν τις υποθέσεις του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου, τότε η εκτίμηση των συντελεστών δίνονται από τη σχέση

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

όπου

$$X = [x_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad \text{και} \quad Y = (y_1, \dots, y_n)$$

είναι ο πίνακας των εξαρτημένων μεταβλητών και το διάνυσμα των παρατηρήσεων της ανεξάρτητης μεταβλητής αντίστοιχα.

Η ιδέα για της μεθόδους παλινδρόμησης βασίζεται στην υπόθεση πως η αξία συνέχισης μπορεί να γραφεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός κάποιων βασικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$C_i(x) = \sum_{r=1}^M b_{ir} \psi_r(x), \quad r = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, m$$

Οι  $\psi_r$  καλούνται συναρτήσεις βάσεις και τα  $b_{ir}$  βάρη. Παρατηρήστε πως οι συναρτήσεις βάσεις παραμένουν σταθερές και πως σε κάθε εξάσκηση αλλάζουν τα βάρη  $b_{ir}$ . Επίσης το  $i$  είναι ο δείκτης που αφορά τις εξασκήσεις και  $M$  είναι το πλήθος των συναρτήσεων βάσης ως προς τις οποίες αναπτύσσεται η  $C_i$ . Τέλος αν η αλυσίδα  $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  τότε και οι  $\psi_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Αρχικά θα ασχοληθούμε με παράγωγα ως προς μία υποκείμενη αξία και συνεπώς οι  $\psi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Σημειώνουμε πως η μαρκοβιανή αλυσίδα  $X$  συνήθως είναι μία αξία  $S$  που ακολουθεί την δυναμική του Black-Scholes.

Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$C_i(x) = b_i^T \psi(x)$$

αν θεωρήσουμε πως

$$b_i = (b_{i1}, \dots, b_{iM})$$

Αντίστοιχα με το γραμμικό μοντέλο, τα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση

$$b_i = \left( \mathbb{E} \left[ \psi(X_i) \psi(X_i)^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E} \left[ \psi(X_i) V_{i+1}(X_{i+1}) \right] \equiv B_{\psi}^{-1} B_{\psi V}$$

όπου ο  $B_{\psi}^{-1}$  είναι ένας  $M \times M$  πίνακας και ο  $B_{\psi V}$  ένα διάνυσμα μήκους  $V$ .

### Αλγόριθμος των Tsitsiklis και Van Roy

Ο αλγόριθμος τιμολόγησης που προτείνεται από τους Tsitsiklis και Van Roy είναι ο ακόλουθος.

1. Προσομοιώνουμε  $b$  ανεξάρτητα μονοπάτια

$$\{X_{1j}, \dots, X_{mj}\}, \quad j = 1, \dots, b$$

Αποκτούμε έτσι για κάθε εξάσκηση  $t_i$  τα διανύσματα

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ib}), \quad i = 1, \dots, m$$

2. Στους τερματικούς κόμβους υπολογίζουμε τις αποδόσεις

$$\hat{V}_{mj} = \tilde{h}_m(X_{mj}), \quad j = 1, \dots, b$$

η  $\tilde{h}$  είναι η μη προεξοφλημένη συνάρτηση απόδοσης.

3. Δεδομένων των εκτιμήσεων  $\hat{V}_{i+1,j}$  υπολογίζουμε τις την αξία τους στην παρούσα περίοδο, δηλαδή υπολογίζουμε την

$$e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{V}_{i+1,j}$$

4. Εκτελούμε την παλινδρόμηση για να υπολογίσουμε τις αξίες μη εξάσκησης. Το μοντέλο που προσαρμόζουμε είναι το

$$e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{V}_{i+1,j} \sim \psi_1(X_{ij}) + \psi_2(X_{ij}) + \dots + \psi_m(X_{ij})$$

και θέτουμε

$$\hat{V}_{ij} = \max \{h_i(X_{ij}), \hat{C}_i(X_{ij})\}, \quad j = 1, \dots, b$$

Η εκτιμήτρια για την τιμή του παραγώγου είναι η

$$\hat{V}_0 = \frac{\hat{V}_{11} + \dots + \hat{V}_{1b}}{b}$$

Στο Πρόγραμμα-5.1 παρουσιάζουμε την υλοποίηση του αλγορίθμου για ένα δικαίωμα πώλησης αμερικανικού τύπου και για συναρτήσεις βάσεις τα τρία πρώτα πολυώνυμα Laguerre. Το  $n$ -οστό πολυώνυμο Laguerre είναι το

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^n$$

Συνεπώς τα πρώτα 3 πολυώνυμα είναι τα

$$L_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$L_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}(1-x)$$

$$L_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \right)$$

```

1 tvmc <- function(s0, K, r, d, s, T = 1, b, m){
2   # Calculates the value of a american put according
3   # to regression model of Tsitsiklis and Van Roy
4   #
5   # Args:
6   #   S: The price of the underlying asset at time 0.
7   #   K: The strike price
8   #   r: the riskless interest rate.
9   #   d: dividends yield
10  #   s: the volatility parameter of the underlying
11  #      asset
12  #   t: current time
13  #   T: time of maturity
14  #   b: number of paths
15  #   m: number of exercises
16  #
17  # Returns:
18  #   The value of the option.
19
20  h <- T/m; s0 = s0/K; # calculate step and normalise
21  # create independent paths
22  paths <- matrix(nrow = b, ncol = m)
23  z <- rnorm(b)
24  paths[, 1] <- s0*exp((r-1/2*s^2)*h + s*sqrt(h)*z)
25  for(i in 2:m){
26    z <- rnorm(b)
27    paths[, i] <- paths[, i-1]*exp((r-1/2*s^2)*h +
28                                  s*sqrt(h)*z)
29  }
30  # calc NOT discounted payoff @expiration
31  value <- matrix(nrow = b, ncol = m)
32  value[, m] <- pmax(1 - paths[, m], 0)
33  # discounted payoff for one period
34  df <- exp(-r*h)
35  # main loop
36  for(i in (m-1):1){
37    # calculate values of base functions
38    psi1 <- exp(-paths[, i]/2)
39    psi2 <- psi1*(1-paths[, i])
40    psi3 <- psi1*(1 - 2*paths[, i] + paths[, i]^2/2)
41    # regress payoff at i-dollars ~ base function
42    # values and get the coefficients
43    psi <- cbind(psi1, psi2, psi3)
44    bpsi.inv <- solve(t(psi)%*%psi)
45    bpsiV <- t(psi)%*%as.matrix(df*value[, i+1])
46    coef <- bpsi.inv%*%bpsiV
47    # estimate continuation value for each path
48    cv <- coef[1]*psi1 + coef[2]*psi2 + coef[3]*psi3
49    # calc NOT discounted payoff at i
50    value[, i] <- pmax(1 - paths[, i], 0)
51    # compare with continuation value and calculate
52    # the value of the option at time i-dollars
53    value[, i] <- pmax(value[, i], cv)
54  }
55  opt.vals <- exp(-r*h)*value[, 1]
56  return(CI(opt.vals)*K)
57 }

```

**Πρόγραμμα 5.1:** Υλοποίηση του αλγορίθμου των Tsitsiklis και Van Roy.

```

1 lsm <- function(s0, K, r, d, s, T = 1, b, m){
2   # Calculates the value of a american put according
3   # to the Least Square Algorighm
4   #
5   # Args:
6   #   Same as the tvmc function
7   #
8   # Returns:
9   #   The value of the option.
10
11  h <- T/m; s0 <- s0/K;
12  # create independent paths
13  paths <- matrix(nrow = b, ncol = m)
14  z <- rnorm(b)
15  paths[, 1] <- s0*exp((r-1/2*s^2)*h + s*sqrt(h)*z)
16  for(i in 2:m){
17    z <- rnorm(b)
18    paths[, i] <- paths[, i-1]*exp((r-1/2*s^2)*h +
19                                s*sqrt(h)*z)
20  }
21  # calc NOT discounted payoff @expiration
22  value <- matrix(nrow = b, ncol = m)
23  value[, m] <- pmax(1 - paths[, i], 0)
24  # discounted payoff for one period
25  df <- exp(-r*h)
26  # main loop
27  for(i in (m-1):1){
28    # calculate values of base functions
29    psi1 <- exp(-paths[, i]/2)
30    psi2 <- psi1*(1-paths[, i])
31    psi3 <- psi1*(1 - 2*paths[, i] + paths[, i]^2/2)
32    # regress payoff at i-dollars ~ base function
33    # values and get the coefficients
34    psi <- cbind(psi1, psi2, psi3)
35    bpsi.inv <- solve(t(psi)%*%psi)
36    bpsiV <- t(psi)%*%as.matrix(df*value[, i+1])
37    coef <- bpsi.inv)%*%bpsiV
38    # estimate continuation value for each path
39    cv <- coef[1]*psi1 + coef[2]*psi2 + coef[3]*psi3
40    # calc NOT discounted payoff at i
41    value.t <- pmax(1 - paths[, i], 0)
42
43    idx <- value.t >= cv
44    value[idx == TRUE, i] <- value.t[idx == TRUE]
45    value[idx == FALSE, i] <-
46      df*value[idx == FALSE, i+1]
47  }
48  opt.vals <- exp(-r*h)*value[, 1]
49  return(CI(opt.vals)*K)
50 }

```

**Πρόγραμμα 5.2:** Υλοποίηση του αλγορίθμου των Least Square Monte Carlo.

Για τον υπολογισμό κάποιου άλλου δικαιώματος θα αλλάζαμε τις εντολές στις οποίες υπολογίζουμε τις αποδόσεις, δηλαδή τις εντολές 32 και 50. Σημειώστε πως τα αποτελέσματα της βελτιώνονται όταν τρέξουμε τον αλγόριθμο για τις κανονικοποιημένες τιμές  $S_0/K$ , όπου  $S_0$  εί-



ναι η αρχική τιμή της αξίας και η  $K$  η τιμή εξάσκησης. Έτσι κανονικοποιώντας στην πρώτη εντολή, υπολογίζουμε τις αποδόσεις (εντολές 32 και 50) με τιμή εξάσκησης τη μονάδα. Για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος για  $10^5$  ανεξάρτητα μονοπάτια και 100 εξασκήσεις χρειάζεται περίπου 9 δευτερόλεπτα.

### Αλγόριθμος LSM

Ο αλγόριθμος Least Square Monte Carlo που πήρε το όνομά του από τους Longstaff και Swartz διαφοροποιείται από τον προηγούμενο ως προς το βήμα 4. Συγκεκριμένα αφού εκτελεστεί η παλινδρόμηση, θέτουν

$$\hat{V}_{ij} = \begin{cases} h_i(X_{ij}), & h_i(X_{ij}) \geq \hat{C}_i(X_{ij}) \\ \hat{V}_{i+1,j}, & h_i(X_{ij}) < \hat{C}_i(X_{ij}) \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος υλοποιείται στο Πρόγραμμα-5.2 και η μόνη διαφορά από το Πρόγραμμα-5.1 είναι πως οι εντολές 50-53 του δεύτερου έχουν αντικατασταθεί από τις 43-46. Με τις εντολές αυτές κατασκευάζουμε ένα λογικό διάνυσμα δεικτών, όπου ο δείκτης είναι TRUE αν ικανοποιείται η ανισότητα  $h_i(X_{ij}) \geq \hat{C}_i(X_{ij})$  και FALSE σε διαφορετική περίπτωση. Έτσι χρησιμοποιώντας το διάνυσμα αυτό κάνουμε τις κατάλληλες αντικαταστάσεις.

### Αριθμητικά Αποτελέσματα

Εφαρμόζουμε τους προηγούμενους αλγόριθμους για ένα δικαίωμα πώλησης αμερικανικού τύπου. Την αξία τη προσεγγίζουμε με ένα bermudian το οποίο εξασκείται 50 φορές το χρόνο, σε αντιστοιχία με τον Πίνακα-1 της εργασίας των Longstaff και Schwartz [14]. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι 40. Στο Πίνακα-5.1 παρουσιάζονται οι τιμές των μεθόδων μαζί με τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης. Για σύγκριση παρατίθενται η τιμή του αντίστοιχου ευρωπαϊκού δικαιώματος, η τιμή του δικαιώματος σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καθώς και οι τιμές της LSM από τον Πίνακα-1 της [14].

S	$\sigma$	T	European	FDA	LSM	LSM <sub>CI</sub>	TVSM	TVSM <sub>CI</sub>	Paper	(s.e.)
36	0.20	1	3.844	4.478	4.436	(4.418, 4.453)	4.790	(4.786, 4.794)	4.472	(.010)
36	0.20	2	3.763	4.840	4.746	(4.726, 4.764)	5.278	(5.273, 5.283)	4.821	(0.12)
36	0.40	1	6.711	7.101	7.007	(6.972, 7.043)	7.835	(7.830, 7.841)	7.091	(0.20)
36	0.40	2	7.700	8.508	8.297	(8.254, 8.340)	9.402	(9.394, 9.409)	8.488	(.024)
38	0.20	1	2.852	3.250	3.180	(3.163, 3.198)	3.649	(3.645, 3.652)	3.244	(.009)
38	0.20	2	2.991	3.745	3.618	(3.597, 3.640)	4.300	(4.304, 4.296)	3.735	(.011)
38	0.40	1	5.834	6.148	6.004	(5.970, 6.039)	6.958	(6.953, 6.964)	6.139	(.019)
38	0.40	2	6.979	7.670	7.426	(7.383, 7.469)	8.677	(8.670, 8.684)	7.669	(.022)
40	0.20	1	2.066	2.314	2.191	(2.175, 2.208)	2.836	(2.836, 2.841)	2.313	(.009)
40	0.20	2	2.356	2.885	2.706	(2.686, 2.726)	3.569	(3.565, 3.572)	2.879	(.010)
40	0.40	1	5.060	5.312	5.114	(5.080, 5.147)	6.231	(6.226, 6.236)	5.308	(.018)
40	0.40	2	6.326	6.920	6.630	(6.588, 6.672)	7.973	(7.967, 7.980)	6.921	(.022)
42	0.20	1	1.465	1.617	1.495	(1.481, 1.509)	2.249	(2.248, 2.252)	1.617	(.007)
42	0.20	2	1.841	2.212	2.024	(2.001, 2.042)	3.032	(3.029, 3.035)	2.206	(.010)
42	0.40	1	4.379	4.582	4.376	(4.344, 4.408)	5.576	(7.427, 7.439)	4.588	(.017)
42	0.40	2	5.736	6.248	5.960	(5.919, 6.000)	7.433	(7.427, 7.439)	6.243	(.021)
44	0.20	1	1.017	1.110	0.991	(0.980, 1.003)	1.834	(1.833, 1.836)	1.118	(.007)
44	0.20	2	1.429	1.690	1.511	(1.495, 1.527)	2.591	(2.589, 2.593)	1.675	(.009)
44	0.40	1	3.783	3.948	3.710	(3.680, 3.740)	5.058	(5.054, 5.063)	3.957	(.017)
44	0.40	2	5.202	5.647	5.351	(5.311, 5.390)	6.918	(6.912, 6.924)	5.622	(.021)

**Πίνακας 5.1:** Με τη σειρά οι στήλες είναι: η αρχική τιμή της μετοχής, η μεταβλητότητα, ωρίμανση, η τιμή του αντίστοιχου ευρωπαϊκού δικαιώματος σύμφωνα με τις σχέσεις Black-Scholes, η τιμή του αμερικανικού put σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με την μέθοδο LSM και στην επόμενη το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης, με τη μέθοδο των Tsitsiklī και Van Roy και στην επόμενη το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης, η τιμή της LSM από την εργασία [14] και στην επόμενη το αντίστοιχο σφάλμα.



## Κεφάλαιο 6

# Μέθοδος των Τυχαίων Δενδρών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταλήξαμε στις εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού

$$V_m(x) = h_m(x) \quad (6.1)$$

$$V_{i-1}(x) = \max \{h_{i-1}(x), \mathbb{E}[V_i(X_i)|X_{i-1} = x]\} \quad (6.2)$$

Θυμίζουμε πως οι  $h$  και  $V$  αναπαριστούν προεξοφλημένες αξίες της περιόδου στην οποία αναφέρονται. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για τη τιμολόγηση bermudian δικαιωμάτων που αναπτύχθηκε από τους Broadie και Glasserman στην [8]. Τα ακόλουθα στηρίζονται εξολοκλήρου στην ανάλυση της μεθόδου από τον Glasserman στο [10].

Μία απλοποιημένη μορφή της (6.2) είναι η

$$V = \max \{a, \mathbb{E}[Y]\}$$

όπου  $a$  είναι μία σταθερά και  $Y$  μια τυχαία μεταβλητή. Η πρώτη εκτιμήτρια που θα θεωρήσουμε είναι η  $\bar{U} = \max \{a, \bar{Y}\}$ , όπου με  $\bar{Y}$  συμβολίζουμε τον δειγματικό μέσο. Γενικά αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  και ένα δείγμα της  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\bar{Y}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y]$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή και με εφαρμογή της ανισότητας Jensen παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}[\bar{U}] = \mathbb{E}[\max \{a, \bar{Y}\}] \geq \max \{a, \mathbb{E}[\bar{Y}]\} = \max \{a, \mathbb{E}[Y]\} = V$$

Συνεπώς η  $\max \{a, \bar{Y}\}$  είναι εκτιμήτρια θετικής μεροληψίας. Παρατηρήστε πως η εκτιμήτρια  $\mathbb{E}[Y]$  παίζει το ρόλο της αξίας συνέχισης για τον κόμβο  $x$  τη στιγμή  $i-1$  και ταυτόχρονα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος στη στιγμή  $i-1$ . Για τον λόγο αυτό αναφέρει ο Glasserman πως η εκτιμήτρια της αξίας του δικαιώματος "ρίχνει" μια ματιά στο μέλλον, μέσω της αξίας συνέχισης, με αποτέλεσμα να είναι μεροληπτική.

Για να ξεπεράσουμε το προηγούμενο διαμερίζουμε το τυχαίο δείγμα σε δύο σύνολα  $Y_1$  και  $Y_2$ . Θεωρούμε ως εκτιμήτρια την

$$\bar{u} = \begin{cases} a, & \bar{Y}_1 \leq a \\ \bar{Y}_2, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Συνεπώς τώρα η εκτιμήτρια δεν βλέπει στο μέλλον, διότι η αξία συνέχισης καθορίζεται από την  $\bar{Y}_1$  (η απόφαση για το αν θα εξασκήσουμε ή όχι) και η αξία του κόμβου είτε θα είναι σταθερή και ίση με  $a$  είτε θα εκτιμηθεί από την  $\bar{Y}_2$ . Επίσης η εκτιμήτρια δεν βλέπει και όλο το παρόν, με αποτέλεσμα να είναι αρνητικής μεροληψίας. Πράγματι παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{u}] &= \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a)a + (1 - \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a))\mathbb{E}[\bar{Y}_2] \\ &= \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a)a + (1 - \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a))\mathbb{E}[\bar{Y}] \\ &= \begin{cases} a, & \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a) = 1 \\ \mathbb{E}[\bar{Y}], & 1 - \mathbb{P}(\bar{Y}_1 \leq a) = 1 \end{cases} \\ &\leq \max\{a, \mathbb{E}[\bar{Y}]\} = V\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας της εκτιμήτριες εγκλωβίζουμε την πραγματική τιμή, δηλαδή

$$\mathbb{E}[\bar{u}] \leq V \leq \mathbb{E}[\bar{U}]$$

Επιπλέον αποδεικνύεται πως οι εκτιμήτριες αυτές είναι συνεπής, δηλαδή καθώς το  $n \rightarrow \infty$  συγκλίνουν στην πραγματική τιμή. Επιπλέον αν έχουμε κατασκευάσει δύο 95% διαστήματα εμπιστοσύνης

$$\bar{U} \pm H \quad \text{και} \quad \bar{u} \pm L$$

για κατάλληλους αριθμούς  $L$  και  $H$ , τότε το διάστημα

$$(\bar{u} - L, \bar{U} + H)$$

θα είναι ένα τουλάχιστον 95% διάστημα εμπιστοσύνης (στη περίπτωση συμμετρικών διαστημάτων) για τις εκτιμήσεις. Η σημειακή εκτίμηση της παραμέτρου θα είναι η

$$\frac{\hat{u} + \hat{U}}{2}$$

Έχοντας τα παραπάνω στο μυαλό μας προχωράμε στην παρουσίαση της μεθόδου με μια μικρή παράκαμψη στη θεωρία γραφημάτων.

## 6.1 Δένδρα Προσομοίωσης

Εργαζόμαστε με μία διακριτή μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X(t) : t \in T\}$ , με παραμετρικό χώρο  $T = \{0, 1, \dots, m\}$  και χώρο καταστάσεων  $S$ . Η ιδέα της μεθόδου είναι προσομοιώνοντας τιμές για την αλυσίδα

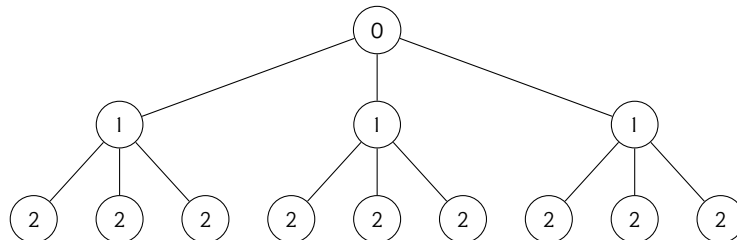
$$\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$$

να υπολογίσουμε δύο μεροληπτικές εκτιμήτριες για την παράμετρο  $V_n$  με τη μία να έχει θετική και την άλλη αρνητική μεροληψία. Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της μεθόδου αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία ενός γραφήματος-δένδρου.

### 6.1.1 Δένδρα

Στο Σχήμα-6.1 απεικονίζεται ένα δένδρο. Η ρίζα του δένδρου είναι ο κόμβος με ετικέτα "0". Θεωρούμε ότι η ρίζα βρίσκεται στο Επίπεδο-0 του δένδρου. Τα παιδιά της ρίζας είναι οι κόμβοι που βρίσκονται στο Επίπεδο-1 και έχουν ετικέτα "1". Παιδιά ενός κόμβου  $n$  είναι οι κόμβοι που έπονται του  $n$ , δηλαδή βρίσκονται σε επίπεδο με μεγαλύτερο αριθμό, και συνδέονται με τον  $n$  με ακμή.

Οι κόμβοι που δεν έχουν παιδιά λέγονται τελικοί κόμβοι ή φύλλα του δένδρου. Στην εργασία ασχολούμαστε με *πλήρη* δένδρα, δηλαδή με δένδρα όπου οι μη τελικοί κόμβοι έχουν τον ίδιο αριθμό παιδιών και όλοι οι τελικοί κόμβοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Το πλήθος των κόμβων ενός δένδρου θα το συμβολίζουμε με  $b$  και θα τον καλούμε συντελεστή διακλαδώσεως (branching factor). Παρατηρούμε πως για να σχηματιστεί ένα δένδρο θα πρέπει  $b \geq 2$ . Τέλος συμβολίζουμε με  $h$  το ύψος του δένδρου που δεν είναι τίποτα άλλο από πλήθος των επιπέδων ελαττωμένο κατά 1.



Σχήμα 6.1: Δένδρο ύψους  $h = 2$  με συντελεστή διακλαδώσεως  $b = 3$ .

**Πρόταση 6.1.** Έστω πλήρες δένδρο ύψους  $h$  με συντελεστή διακλαδώσεως  $b$ . Το πλήθος των κόμβων στο επίπεδο- $n$  είναι ίσο με  $b^n$ .

*Απόδειξη.* Το αποδυνκούμε με επαγωγή στον αριθμό του επιπέδου. Στο επίπεδο-0 υπάρχει μόνο η ρίζα και συνεπώς υπάρχουν  $b^0 = 1$  κόμβοι. Έστω πως στο επίπεδο- $i$  υπάρχουν  $b^i$  κόμβοι, θα δείξουμε ότι στο επίπεδο- $(i + 1)$  υπάρχουν  $b^{i+1}$  κόμβοι. Πράγματι στο επίπεδο- $i + 1$  θα έχουμε  $b$  κόμβους για κάθε κόμβο του επιπέδου- $i$ , δηλαδή συνολικά  $b \times b^i = b^{i+1}$  κόμβους.

■

**Πρόταση 6.2.** Έστω πλήρες δένδρο ύψους  $h$  με συντελεστή διακλαδώσεως  $b$ . Το πλήθος των κόμβων του δένδρου είναι τάξης  $O(b^h)$ .

Απόδειξη. Υπολογίζουμε καταρχάς το πλήθος των κόμβων του δένδρου, έστω  $S$ . Βάση της Πρότασης-6.1 θα είναι

$$S = \sum_{i=0}^h b^i = \frac{1 - b^{h+1}}{b - 1} = \frac{b^{h+1} - 1}{b - 1}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

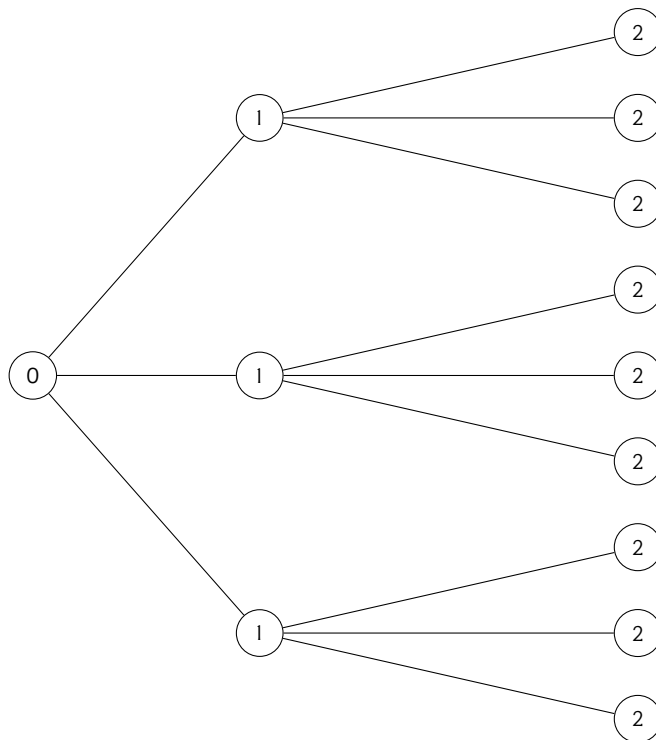
$$S = \frac{b^h}{1 - \frac{1}{b}} - \frac{1}{b - 1} \leq b^h - \frac{1}{b - 1} \leq b^h$$

και άρα  $S = O(b^h)$ . ■

Για το δένδρο του Σχήματος-6.1 εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι πλήθος των κόμβων του δένδρου είναι

$$\frac{b^{h+1} - 1}{b - 1} = \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} = 13$$

Τέλος αναφέρουμε πως το δένδρο του Σχήματος-6.1 μπορούμε να το αναπαράστούμε και ως εξής



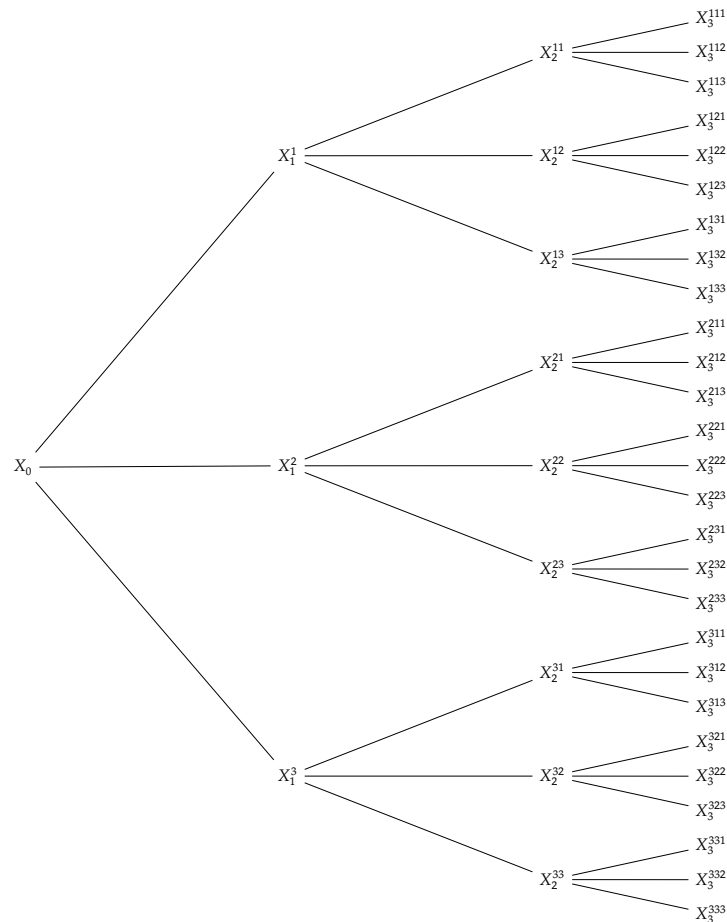
Σχήμα 6.2: Εναλλακτική αναπαράσταση δένδρου.

### 6.1.2 Το δένδρο της Μεθόδου

Επιλέγουμε τον συντελεστή διακλαδώσεως  $b$  και κατασκευάζουμε ένα δένδρο ύψους  $m$  το οποίο στην ουσία είναι ένα δένδρο που προσομοιώνει μη ανεξάρτητες  $b^m$  τροχιές (ή μονοπάτια) για

την στοχαστική ανάλυση  $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ . Αν και η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί γενικά σε μαρκοβιανές αλυσίδες, για την τιμολόγηση δικαιωμάτων θεωρούμε πως η αλυσίδα έχει την δυναμική του Black-Scholes.

Πριν παρουσιάσουμε το γενικό συμβολισμό που χρησιμοποιούμε εξηγούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα το οποίο αφορά το δένδρο προσομοίωσης του Σχήματος-6.3.



**Σχήμα 6.3:** Το δένδρο προσομοίωσης για τη στοχαστική ανάλυση  $\{X_1, X_2, X_3\}$  και συντελεστή διακλαδώσεως  $b = 3$

Για να κατασκευάσουμε το δένδρο του Σχήματος-6.3 ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση  $X_0$  της αλυσίδας και προσομοιώνουμε  $b = 3$  το πλήθος τιμές από την κατανομή της  $X_1$ . Τις τιμές αυτές τις συμβολίζουμε με  $X_1^1, X_1^2$  και  $X_1^3$ . Στη συνέχεια για κάθε μία από τις  $X_1^i$  με  $i = 1, 2, 3$  προσομοιώνουμε  $b = 3$  νέες τιμές, τις  $X_1^{i1}, X_1^{i2}$  και  $X_1^{i3}$ , από την κατανομή της  $X_2$ . Εργαζόμαστε αναλόγως μέχρι να γεμίσουμε το δένδρο. Παρατηρούμε πως συνολικά έχουμε φτιάξει  $b^m = 3^3 = 27$  τροχιές τις στοχαστικής ανάλυσης, όσοι δηλαδή είναι και οι τερματικοί κόμβοι του δένδρου.

Γενικά έναν κόμβο του δένδρου τον συμβολίζουμε με

$$X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, j_k \in \{1, 2, \dots, b\} \text{ και } k \in \{1, 2, \dots, i\}$$

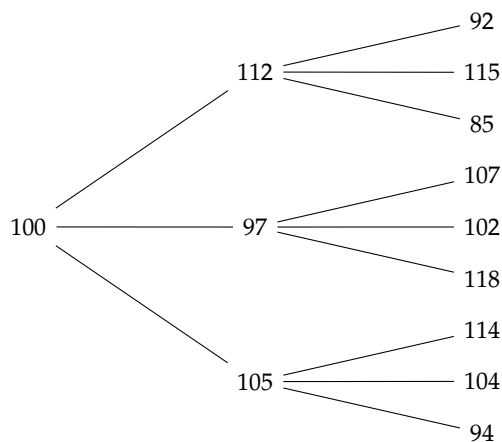
Ο δείκτης  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  δηλώνει πως η τιμή προέρχεται από την κατανομή της  $X_i$ . Το  $j_k = \{1, 2, \dots, b\}$ , με  $k \in \{1, 2, \dots, b\}$  συμβολίζει ποιο κλαδί, από πάνω προς τα κάτω, ακολουθήσαμε



για να φτάσουμε στο  $k$ -οστό επίπεδο και κατ' επέκταση ο δείκτης  $\{j_1 j_2 \dots j_i\}$  συμβολίζει το μονοπάτι που ακολουθούμε για να φτάσουμε στον κόμβο  $X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}$ .

Για παράδειγμα ο κόμβος  $X_3^{212}$  μας λέει πως η τιμή προέρχεται από την κατανομή της  $X_3$  και πως για να καταλήξουμε στην τιμή αυτή, θα ξεκινήσουμε από την  $X_0$  θα επιλέξουμε το δεύτερο κλαδί για να πάμε στην  $X_1^2$ , από εκεί θα επιλέξουμε το πρώτο κλαδί για να πάμε στην  $X_2^{21}$  και από εκεί θα επιλέξουμε το δεύτερο κλαδί για να καταλήξουμε στην  $X_3^{212}$ .

**Παράδειγμα 6.1.** Έστω ένα Bermudian call option, με  $m = 2$  ημερομηνίες εξάσκησης και τιμή εξάσκησης 100. Υποθέτουμε πως το δικαίωμα εξαρτάται μονάχα από την τιμή ενός αγαθού. Στο παράδειγμα αυτό η στοχαστική ανέλιξη είναι η  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , όπου η  $X_i$  είναι η τυχαία μεταβλητή που αφορά τη τιμή του αγαθού κατά την περίοδο εξάσκησης  $i$ . Υποθέτουμε πως προσομοιώνουμε τις τιμές και κατασκευάζουμε το ακόλουθο δένδρο.



**Σχήμα 6.4:** Το δένδρο προσομοίωσης του παραδείγματος.

### 6.1.3 Εκτιμήτρια θετικής μεροληψίας

Η εκτιμήτρια θετικής μεροληψίας υπολογίζεται σύμφωνα με την αναδρομή της οποίας η βάση είναι η

$$\hat{V}_m^{j_1 j_2 \dots j_m} = h(X_m^{j_1 j_2 \dots j_m}) \quad (6.3)$$

και η αναδρομική σχέση είναι η

$$\hat{V}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} = \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_j^{j_1 j_2 \dots j_i j} \right\}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 0 \quad (6.4)$$

Θυμίζουμε πως η  $V_0$  είναι η παράμετρος που θέλουμε να εκτιμήσουμε και αφορά την δίκαιη τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , δηλαδή τη στιγμή που εκδίδεται. Για να έχει νόημα η Εξίσωση-6.4 για  $i = 0$  σημειώνουμε πως  $X_0 \equiv X_0^j$  και συνεπώς η  $V_0$  θα εκτιμηθεί από την

$$\hat{V}_0^j = \max \left\{ h_0(X_0^j), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_1^j \right\}$$

Για τον κόμβο  $X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}$  η  $\sum_{j=1}^b \hat{V}_j^{j_1 j_2 \dots j_i j}$  αποτελεί μία εκτιμήτρια της αξίας συνέχισης

$$C_i(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) = \mathbb{E} \left[ V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right]$$

Επιπλέον επειδή οι κόμβοι  $X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}$ , με  $j_i$  να λαμβάνει τιμές από 1 έως το  $b$  είναι ανεξάρτητοι κόμβοι που έχουν παραχθεί από την πυκνότητα της  $(X_{i+1} | X_i = X_i^{j_1 j_2 \dots j_i})$ , η εκτιμήτρια αυτή σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών θα τείνει στη πραγματική αξία συνέχισης καθώς το  $b \rightarrow \infty$ . Έτσι από την (6.2), η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$V_i(x) = \max \{h_i(x), C_i(x)\}$$

αν παρατηρήσουμε πως η  $\max \{h_{i-1}(x), \cdot\}$  είναι συνεχής συνάρτηση, θα καταλήξουμε στο ότι η σύγκλιση μεταφέρεται και στην αξία του παραγώγου για την στιγμή  $i$ . Έτσι παρόλο που ο εκτιμητής είναι θετικής μεροληψίας, ασυμπτωτικά ( $b \rightarrow \infty$ ) θα συγκλίνει στην πραγματική τιμή.

**Πρόταση 6.3.** *Ο εκτιμητής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (6.3) και (6.4) έχει θετική μεροληψία.*

*Απόδειξη.* Για να δείξουμε πως η εκτιμήτρια, που προσδιορίζεται από τις εξισώσεις (6.3) και (6.4), έχει θετική μεροληψία, αρκεί να δείξουμε για κάθε κόμβο  $X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}$  ότι

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] \geq V_i \left( X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right) \quad (6.5)$$

Το αποδεικνύουμε επαγωγικά. Η βάση της επαγωγής έγκυται στη παρατήρηση πως σε κάθε τερματικό κόμβο ικανοποιείται η ισότητα

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_m^{j_1 j_2 \dots j_m} | X_m^{j_1 j_2 \dots j_m} \right] \stackrel{(6.3)}{=} h(X_m^{j_1 j_2 \dots j_m}) = V_m^{j_1 j_2 \dots j_m}$$

Έστω τώρα πως η (6.5) ισχύει για  $i + 1$  θα δείξουμε πως ισχύει για  $i$ . Πράγματι έχουμε πως

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] \stackrel{(6.4)}{=} \mathbb{E} \left[ \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j} \right\} \middle| X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right]$$

Η συνάρτηση  $\max\{\cdot\}$  είναι κυρτή και έτσι σύμφωνα με την ανισότητα Jensen έχουμε πως

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] &\geq \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \mathbb{E} \left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j} \middle| X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] \right\} \\ &= \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] \right\} \end{aligned}$$

Δεδομένης της τυχαίας μεταβλητής  $X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}$ , οι  $\hat{V}_j^{j_1 j_2 \dots j_i j}$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (iid). Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] &= \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i 1} | X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right] \right\} \\ &\stackrel{\text{E.Y.}}{\geq} \max \left\{ h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), V_{i+1} \left( X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right) \right\} \\ &= V_i \left( X_i^{j_1 j_2 \dots j_i} \right) \end{aligned}$$

■

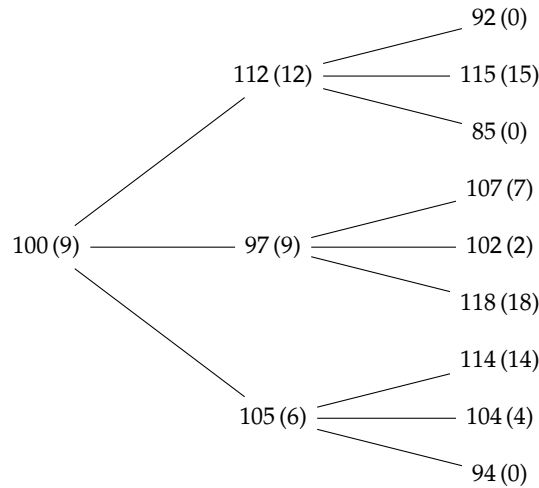
### Αριθμητικό Παράδειγμα

**Παράδειγμα 6.2.** Για τη κατανοήση της μεθόδου, εκτελούμε τον αλγόριθμο για το δένδρο προσομοίωσης του παραδείγματος 6.1. Οι τιμές του εκτιμητή βρίσκονται στις παρενθέσεις στο Σχήμα-6.5.

Για τους τερματικούς κόμβους, σύμφωνα με την Εξίσωση-6.3, έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{V}_2^{11} &= h(X_2^{11}) = (X_2^{11} - S)^+ = (92 - 100)^+ = 0 \\ \hat{V}_2^{12} &= h(X_2^{12}) = (X_2^{12} - S)^+ = (115 - 100)^+ = 15 \\ \hat{V}_2^{13} &= h(X_2^{13}) = (X_2^{13} - S)^+ = (85 - 100)^+ = 0 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε τις τιμές του εκτιμητή για τους υπόλοιπους τελικούς κόμβους. Για τους



**Σχήμα 6.5:** Το δένδρο προσομοίωσης του Παραδείγματος-6.4 με τις τιμές προσομοίωσης θετικής μεροληψίας στις παρενθέσεις.

εσωτερικούς κόμβους, σύμφωνα με την Εξίσωση-6.4, έχουμε

$$\hat{V}_1^1 = \max \left\{ h(X_1^1), \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{V}_2^{1j} \right\} = \max \left\{ (112 - 100)^+, \frac{1}{3}(0 + 15 + 0) \right\} = 12$$

$$\hat{V}_1^2 = \max \left\{ h(X_1^2), \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{V}_2^{2j} \right\} = \max \left\{ (97 - 100)^+, \frac{1}{3}(7 + 2 + 18) \right\} = 9$$

$$\hat{V}_1^3 = \max \left\{ h(X_1^3), \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{V}_2^{3j} \right\} = \max \left\{ (105 - 100), \frac{1}{3}(14 + 4 + 0) \right\} = 6$$

Τέλος για τη ρίζα του δένδρου και επομένως για την τιμολόγηση του συγκεκριμένου παραγώγου θετικής μεροληψία τη στιγμή  $t = 0$  είναι

$$\hat{V}_0 = \max \left\{ h(X_0), \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{V}_1^j \right\} = \max \left\{ (100 - 100), \frac{1}{3}(12 + 9 + 6) \right\} = 9$$

### Υλοποίηση στην R

Το Πρόγραμμα-6.1 υλοποιεί τη μέθοδο που περιγράψαμε προηγούμενος στην γλώσσα προγραμματισμού R. Η συνάρτηση εκτελεί την αναδρομή για το δένδρο του παραδείγματος. Οι κόμβοι του δένδρου δίνονται από την συνάρτηση *NextState* στην εντολή 27 με τη σειρά που τους συναντούμε όταν εκτελούμε την αναδρομή. Το Πρόγραμμα αυτό μας βοηθά να ελέγξουμε την ορθότητα της αναδρομικής συνάρτησης.

Με το Πρόγραμμα-6.2 λαμβάνουμε μία εκτίμηση για την αξία του δικαιώματος. Προσέξτε πως στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρούσαμε πως η αλυσίδα ήταν τέτοια ώστε οι αξίες να είναι προεξοφλημένες ως προς τη προηγούμενη περίοδο. Η γεωμετρική κίνηση Brown και συνεπώς ο τρόπος με τον οποίο προσομοιώνουμε αξίες δεν περιλαμβάνει κάτι τέτοιο.

```

1 #####
2 # Next State
3 #####
4 NextState <- function(){
5   states <- c(112, 92, 115, 85, 97, 107, 102, 118, 105,
6             114, 104, 94)
7   state <- states[counter + 1]
8   assign(deparse(substitute(counter)), counter +
9         1, envir = .GlobalEnv)
10  return(state)
11 }
12
13 #####
14 # Pricing Algorithm - High Bias
15 #####
16 PricingTreeHigh <- function(tree.level, b, d, state){
17   strike = 100;
18
19   # The recursion of the method
20   if(tree.level == d){
21     payoff <- max(state - strike, 0)
22     return(payoff)
23   }
24   else{
25     payoff.children <- rep(0,b)
26     for(i in 1:b){
27       state.new = NextState()
28       # Following line is used to print the tree.
29       # cat(cat(state, state.new, sep = " -> "), "\n",
30       # sep = "")
31       payoff.children[i] <-
32         PricingTreeHigh(tree.level + 1, b, d, state.new)
33     }
34     payoff <- max(max(state - strike, 0),
35                 1/b*sum(payoff.children))
36     return(payoff)
37   }
38 }
39
40 # test
41 counter = 0; # global variable
42 PricingTreeHigh(0, 3, 2, 100)

```

**Πρόγραμμα 6.1:** Η αναδρομική υλοποίηση για την εκτιμήτρια υψηλής μεροληψίας για το δένδρο του παραδείγματος.

```

1 NextState <- function(state.old, r, delta, sigma, delta.time){
2   # Simulates the price on the next exercise date
3   #
4   # Args:
5   #   state.old: The price on the current exercise date.
6   #   r: the riskless interest rate.
7   #   delta: the dividend rate.
8   #   sigma: the volatility parameter.
9   #   delta.time: time interval.
10  #
11  # Returns:
12  #   The simulated price on the next exercise date
13
14  # Simulate a price
15  z = rnorm(1)
16  state.new = state.old*exp((r - delta - sigma^2/2)*(delta.time
17                                     )+
18                                     sigma*sqrt(delta.time)*z)
19  return(state.new)
20 }
21
22 PricingTreeHigh <- function(tree.level, b, d, state){
23
24  # Initialize asset's parameters
25  r = 0.05; delta = 0.10; sigma = 0.2;
26  delta.time = T/(d + 1); strike = 1;
27  df = exp(-r*delta.time)
28
29  # The recursion of the method
30  if(tree.level == d){
31    payoff <- df*max(state - strike, 0)
32    return(payoff)
33  }
34  else{
35    payoff.children <- rep(0,b)
36    for(i in 1:b){
37      state.new = NextState(state, r, delta, sigma,
38                             delta.time)
39      payoff.children[i] <- df*PricingTreeHigh(
40        tree.level + 1, b, d, state.new)
41    }
42    payoff <- max(max(state - strike, 0),
43                 1/b*sum(payoff.children))
44    return(payoff)
45  }
46 }

```

**Πρόγραμμα 6.2:** Η αναδρομική υλοποίηση για την εκτίμηση ενός παραγώγου.

Για τον λόγο αυτόν όποτε υπολογίζουμε τις αποδόσεις των κόμβων τις προεξοφλούμε σε χρήματα της προηγούμενης περιόδου. Αυτό γίνεται στις εντολές 38 και 46. Επιπλέον για να μειωθούν τα αριθμητικά λάθη, τα οποία είναι πολύ σημαντικότερα από ότι μπορεί να φανταστεί κάποιος, τρέχουμε πάντοτε την μέθοδο με κανονικοποιημένες τιμές, δηλαδή αν  $S$  είναι η αρχική τιμή της

αξίας και  $K$  η τιμή εξάσκησης, θα τρέξουμε τη μέθοδο με παραμέτρους

$$S' = \frac{S}{K} \quad \text{και} \quad K' = 1$$

Το πρόγραμμα τρέχει σωστά, τιμολογεί σωστά αλλά δυστυχώς είναι πάρα πολύ αργό. Για παράδειγμα, αν το δένδρο τιμολόγησης έχει έχει παραμέτρους  $b = 50$  και  $m = 3$  ο αλγόριθμος τρέχει σε 3.61 δευτερόλεπτα. Συνεπώς για να τρέξουμε τη Monte Carlo για 100 κόμβους, θα θέλαμε περίπου 360 δευτερόλεπτα, δηλαδή 6 λεπτά. Πράγματι για την εκτέλεση της Monte Carlo χρειάστηκαν 5.4 λεπτά. Η R δεν μπορεί να διαχειριστή γρήγορα την αναδρομή. Η λύση είναι να φτιάξουμε μία vectorized εκδοχή του προηγούμενου προγράμματος. Το αποτέλεσμα είναι το Πρόγραμμα-6.3. Με τη συνάρτηση αυτή εκτελούμε τη Monte Carlo σε 16 δευτερόλεπτα, δηλαδή περισσότερα από 20 φορές γρηγορότερα από ότι με την προηγούμενη.

Στη συνάρτηση δεν έχουμε συμπεριλάβει τα σχόλια που περιγράφουν τις εισόδους και την έξοδο της συνάρτησης, για να χωρέσεις στην επόμενη σελίδα. Οι συνάρτηση δέχεται με τη σειρά: την αρχική τιμή της μετοχής  $start$ , την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος  $K$ , το επιτόκιο ουδέτερου ρίσκου  $r$ , τη μεταβλητότητα της μετοχής  $\sigma$ , το χρόνο ωρίμανσης  $T$ , τον συντελεστή διακλάδωσης  $b$  και το πλήθος των εξασκήσεων  $m$ .

Αντί της αναδρομής κατασκευάζει αρχικά το δένδρο προσομοίωσης σαν μία λίστα διανυσμάτων. Κάθε στοιχείο της λίστας αφορά μια ημερομηνία εξάσκησης. Έτσι το  $i$ -οστό στοιχείο της λίστας περιέχει τους  $b^i$  κόμβους τους  $i$ -οστού επιπέδου του δένδρου. Για να υπολογίσουμε τις μέση απόδοση των παιδιών κάθε κόμβου του επιπέδου  $i - 1$  πρέπει να χωρίσουμε τους κόμβους του  $i$ -οστού επιπέδου σε  $b^{i-1}$  ομάδες. Αυτό το κάνουμε με την εντολή `split` και στη συνέχεια υπολογίζουμε τις προεξοφλημένες αποδόσεις τους ως προς το επίπεδο  $i - 1$  και εφαρμόζουμε την (6.4).

```

1 #####
2 # High Bias Estimator
3 #####
4 PricingTreeHigh <- function(start , K, r, d, sigma , T, b, m){
5   h <- T/m
6   # product factor fp
7   fp <- exp((r - d - sigma^2/2)*h)
8
9   # construct tree as a list of nodes
10  # each element of the list contains the nodes
11  # of the corresponding level
12  # e.g. rtree[[1]] contains the b nodes of the first
13  # level and in general rtree[[i]] contains the b^i
14  # nodes of the i-th level of the tree.
15  rtree <- list()
16  rtree[[1]] <- start*fp*exp(sigma*sqrt(h)*rnorm(b^1))
17  for(i in 2:m){
18    rtree[[i]] <- unlist(
19      lapply(rtree[[i-1]],
20        function(x) x*fp*exp(sigma*sqrt(h)*rnorm(b))
21      )
22    )
23  }
24
25  # one period discount factor
26  df <- exp(-r*h)
27
28  # Calculate the undiscounted payoffs of all nodes
29  # as if they were to be exercised.
30  # lapply maintains the structure of the list
31  payoffs <- lapply(rtree , function(x) pmax(x - K,0))
32  # Discount payoff at expiration
33
34  # For each level going backwards we:
35  for(i in m:2){
36    # Discount payoffs at level i to i-1 money
37    payoffs[[i]] <- df*payoffs[[i]]
38    # Create a factor of b^(i - 1) levels
39    # where each factor is repeated sequentially
40    # b times in order to split children and
41    # calculate their mean
42    f <- rep(1:(b^(i - 1)), rep(b, b^(i-1)))
43    children <- split(payoffs[[i]], f)
44    payoffs.children <-
45      as.numeric(lapply(children , mean))
46    # High bias payoffs
47    payoffs[[i-1]] <-
48      pmax(as.numeric(payoffs[[i-1]]), payoffs.children)
49  }
50  return(mean(unlist(df*payoffs[[1]])))
51 }

```

**Πρόγραμμα 6.3:** Η vectorized εκδοχή της εκτιμήτριας θετικής μεροληψίας του Προγράμματος-6.2.



### 6.1.4 Εκτιμήτρια αρνητικής μεροληψίας

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου εξηγήσαμε πως μια εκτιμήτρια θετικής μεροληψίας μπορεί να γίνει αρνητικής μεροληψίας. Οι Glasserman και Broadie στη [8] επιλέγουν να διαμερίσουν το δείγμα εκλέγοντας μονάχα μία τιμή για να συγκρίνουν με τη μέση απόδοση των υπολοίπων. Συγκεκριμένα η εκτιμήτρια υπολογίζεται σύμφωνα με την αναδρομή της οποίας η βάση είναι η

$$\hat{\vartheta}_m^{j_1 j_2 \dots j_m} = h(X_m^{j_1 j_2 \dots j_m}) \quad (6.6)$$

και η αναδρομική σχέση είναι η

$$\hat{\vartheta}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{\vartheta}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i} \quad (6.7)$$

όπου

$$\hat{\vartheta}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i} = \begin{cases} h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), & \text{αν } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j \neq k}^b \hat{\vartheta}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i} \leq h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) \\ \hat{\vartheta}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i k}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (6.8)$$

Ο εκτιμητής αυτός είναι αρνητικής μεροληψίας και επιπλέον αποδεικνύεται πως είναι συνεπής. Ο συμβολισμός της αναδρομής ίσως δυσκολεύει τον αναγνώστη να κατανοήσει τη μέθοδο. Εξηγούμε λοιπόν πως συμπεριφέρεται η μέθοδος για κάθε κόμβο του δένδρου.

Για έναν κόμβο  $X$  ο εκτιμητής υπολογίζεται ως εξής. Καταρχάς βρίσκουμε την τιμή εξάσκησης  $h(X)$ . Για κάθε ένα από τα  $i$  παιδιά του υπολογίζουμε την (εκτιμώμενη) τιμή συνέχισης του  $C_i(X)$  ως τη μέση τιμή των υπολοίπων παιδιών. Έτσι για κάθε παιδί θέτουμε  $l_i(X) = h(X)$  αν η  $C_i(X) \leq h(X)$  διότι εξασκούμε ή  $C_i(X)$  αν δεν εξασκήσουμε. Η  $l_i$ , που στην αναδρομική σχέση είναι η  $\hat{\vartheta}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i}$ , είναι η εκτιμώμενη αξία του παραγώγου στον κόμβο  $X$  ως προς τους προσομοιομένους κόμβους-παιδιά του, εκτός του  $i$  παιδιού. Έτσι η εκτιμώμενη αξία του παραγώγου στον κόμβο  $X$  θα είναι η

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b l_i(X)$$

Αν κατανοηθεί ο τρόπος που εκτελείται η μέθοδος, τότε η κατανόηση του προγράμματος 6.4 είναι εύκολη. Στο ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζουμε τον υπολογισμό του εκτιμητή για το δένδρο του Σχήματος-6.4.

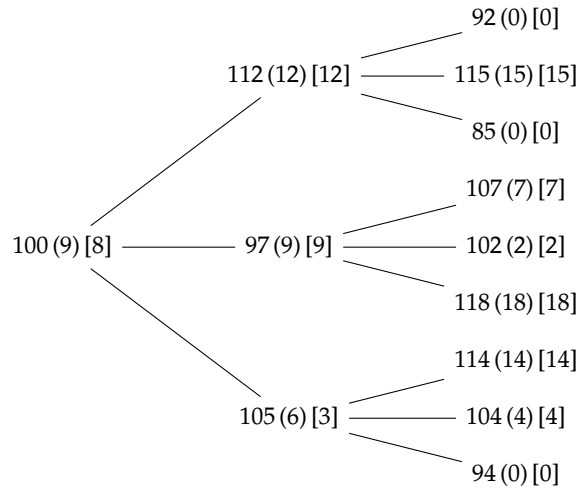
**Παράδειγμα 6.3.** Συμπληρώνουμε τις τιμές του εκτιμητή αρνητικής μεροληψίας στο δένδρο προσομοίωσης τους παραδείγματος 6.1. Τα αποτελέσματα στην Εικόνα-6.6.

Οι εξισώσεις (6.3), (6.6) είναι ίδιες και έτσι οι τιμές στους τελικούς κόμβους είναι ίδιες με αυτές του εκτιμητή θετικής μεροληψίας, δηλαδή

$$\hat{\vartheta}_2^{11} = 0, \hat{\vartheta}_2^{12} = 15, \dots, \hat{\vartheta}_2^{33} = 0,$$

Για τον κόμβο  $X_1^1$  σύμφωνα με την (6.8) είναι

$$\hat{\vartheta}_{11}^1 = \begin{cases} h(X_1^1), & \text{αν } \frac{1}{2} (\hat{\vartheta}_2^{12} + \hat{\vartheta}_2^{13}) \leq h(X_1^1) \\ \hat{\vartheta}_2^{11}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



**Σχήμα 6.6:** Το δένδρο προσομοίωσης του Παραδείγματος-6.4 με τις τιμές του εκτιμητή θετικής μεροληψίας στις παρενθέσεις και τις τιμές του αρνητικού στις αγκύλες.

Όμως  $h(X_1^1) = (112 - 100)^+ = 12$  και

$$\frac{1}{2} (\hat{v}_2^{12} + \hat{v}_2^{13}) = \frac{1}{2} (15 + 0) = 7.5 < 12$$

Άρα  $\hat{v}_{11}^1 = 12$ . Αντίστοιχα υπολογίζουμε ότι  $\hat{v}_{12}^1 = \hat{v}_{13}^1 = 12$  και έτσι

$$\hat{v}_1^1 = \frac{1}{3} (12 + 12 + 12) = 12$$

Αν εργαστούμε ανάλογα θα καταλήξουμε ότι και  $\hat{v}_1^2 = 9$ . Η συμφωνία μεταξύ των δύο εκτιμητών σταματά στον κόμβο  $X_1^3$ . Σύμφωνα με την (6.8) είναι

$$\hat{v}_{11}^1 = \begin{cases} h(X_1^3), & \text{αν } \frac{1}{2} (\hat{v}_2^{32} + \hat{v}_2^{33}) \leq h(X_1^1) \\ \hat{v}_2^{31}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και επειδή  $h(X_1^3) = (105 - 100)^+ = 5$  και  $\frac{1}{2} (4 + 0) = 2$  έπεται πως  $\hat{v}_{11}^3 = h(X_1^3) = 5$ . Για τον  $\hat{v}_{12}^3$  παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{2} (\hat{v}_2^{31} + \hat{v}_2^{33}) = \frac{1}{2} (14 + 0) = 7 > 5$$

και άρα  $\hat{v}_{12}^3 = \hat{v}_2^{11} = 4$ . Επίσης επειδή

$$\frac{1}{2} (\hat{v}_2^{31} + \hat{v}_2^{32}) = \frac{1}{2} (4 + 14) = 9 > 5$$

θα είναι  $\hat{v}_{13}^3 = \hat{v}_2^{33} = 0$ . Συνεπώς, σύμφωνα με την (6.7), υπολογίζουμε πως

$$\hat{v}_1^3 = \frac{1}{3} (5 + 4 + 0) = 3$$

Αναλόγως υπολογίζουμε και τη τιμή τις ρίζας, που είναι  $\hat{v}_0 = 8$ .

### Υλοποίηση στην R

Η αναδρομή υλοποιείται από το Πρόγραμμα-6.4. Για κάθε κόμβο το πρόγραμμα εκτελεί (εντολές 11-29) τα βήματα που περιγράψαμε για να κατανοήσουμε τον εκτιμητή. Η vectorized εκδοχή του αλγορίθμου στο Πρόγραμμα-6.5. Ο υπολογισμός του εκτιμητή αρνητικής μεροληψίας είναι πιο αργός, αλλά παρόλα αυτά η βελτίωση του χρόνου με τη vectorized εκδοχή είναι σημαντική. Συγκεκριμένα, για ένα δένδρο με παραμέτρους  $b = 50$  και  $m = 3$  η αναδρομική μέθοδος εκτελείτε σε 4.48s ενώ η δεύτερη σε 0.93s δευτερόλεπτα.

Συνδυάζοντας τα προγράμματα για τον υπολογισμό των εκτιμητών χαμηλής και υψηλής μεροληψίας κατασκευάζουμε την συνάρτηση PricingTree η οποία παρατίθεται χωρίς σχόλια στο Πρόγραμμα-6.6. Τη τελευταία τη χρησιμοποιούμε για την τιμολόγηση ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης που παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο. Ο αλγόριθμος για ένα δένδρο με παραμέτρους  $b = 50$  και  $m = 3$  εκτελείται περίπου σε 1s

```

1 #####
2 # Pricing Algorithm - Low Bias
3 #####
4 PricingTreeLow <- function(tree.level, b, d, state){
5   strike = 100;
6   # The recursion of the method
7   if(tree.level == d){
8     payoff <- max(state - strike, 0)
9     return(payoff)
10  }
11  else{
12    payoff.children <- rep(0,b)
13    for(i in 1:b){
14      state.new = NextState() #as in high bias
15      payoff.children[i] <-
16        PricingTreeLow(tree.level + 1, b, d,
17                       state.new)
18    }
19    payoff.current <- max(state - strike, 0);
20    payoff.temp <- rep(0,b)
21    for(i in 1:b){
22      check <- ((1/(b-1))*sum(payoff.children[-i])
23              <= payoff.current)
24      if(check)
25        payoff.temp[i] <- payoff.current
26      else
27        payoff.temp[i] <- payoff.children[i]
28    }
29    payoff <- 1/b*sum(payoff.temp)
30    return(payoff)
31  }
32 }
33
34 # test
35 counter = 0;
36 PricingTreeLow(0, 3, 2, 100) #=> 8
37 }

```

**Πρόγραμμα 6.4:** Η υλοποίηση του αλγορίθμου αρνητικής μεροληψίας για το δένδρο του Σχήματος-6.6.

```

1 PricingTreeLow <- function(start, K, r, d, sigma, T,
2                             b, m){
3   #
4   # code for constructing the tree is excluded
5   # It is the same as in PricingTreeHigh
6   #
7
8   # one period discount factor
9   df <- exp(-r*h)
10
11  # Calculate the undiscounted payoffs of all nodes
12  # as if they were to be exercised.
13  # lapply maintains the structure of the list
14  payoffs <- lapply(rtree, function(x) pmax(x - K, 0))
15
16  # For each level going backwards we:
17  for(i in m:2){
18    # Discount payoffs at level i to i-1 money
19    payoffs[[i]] <- df*payoffs[[i]]
20    # Create a factor of b^(i-1) levels
21    # where each factor is repeated sequentially
22    # b times in order to split children
23    f <- rep(1:(b^(i-1)), rep(b, b^(i-1)))
24    children <- split(payoffs[[i]], f)
25
26    # low bias
27    # calculate continuation values
28    cont.value <- lapply(children, function(x)
29      sapply(x, function(y) (sum(x) - y)/(b - 1)))
30    # calculate the value of the option excluding
31    # each kid and store it to cont.value
32    cont.value <- as.numeric(unlist(cont.value))
33    temp <- rep(payoffs[[i-1]], each = b)
34    idx <- (cont.value <= temp)
35    payoffs.children.l <- payoffs[[i]]
36    payoffs.children.l[idx] <- temp[idx]
37
38    payoffs.children.l <- split(payoffs.children.l, f)
39    payoffs[[i-1]] <-
40      as.numeric(sapply(payoffs.children.l, mean))
41  }
42  # there is no exercise in start
43  return(mean(unlist(df*payoffs[[1]])))
44 }

```

Πρόγραμμα 6.5: Η vectorized εκδοχή του Προγράμματος-6.4.

```

1 PricingTree <- function(start , K, r, d, sigma , T, b, m){
2   # initialization
3   h <- T/m
4   fp <- exp((r - d - sigma^2/2)*h)
5   df <- exp(-r*h)
6
7   # construct tree
8   rtree <- list()
9   rtree[[1]] <- start*fp*exp(sigma*sqrt(h)*rnorm(b^1))
10  for(i in 2:m){
11    rtree[[i]] <- unlist(
12      lapply(rtree[[i-1]],
13            function(x) x*fp*exp(sigma*sqrt(h)*rnorm(b))
14          )
15    )
16  }
17
18  payoffs.h <- payoffs.l <-
19    lapply(rtree , function(x) pmax(x - K,0))
20
21  # For each level going backwards we:
22  for(i in m:2){
23    # create factor
24    f <- rep(1:(b^(i - 1)), rep(b, b^(i-1)))
25
26    # High bias
27    payoffs.h[[i]] <- df*payoffs.h[[i]]
28    children <- split(payoffs.h[[i]], f)
29    payoffs.children <-
30      as.numeric(lapply(children , mean))
31    payoffs.h[[i-1]] <-
32      pmax(as.numeric(payoffs.h[[i-1]]),
33           payoffs.children)
34
35    # Low bias payoffs
36    payoffs.l[[i]] <- df*payoffs.l[[i]]
37    children <- split(payoffs.l[[i]], f)
38    cont.value <- lapply(children , function(x)
39      sapply(x, function(y) (sum(x) - y)/(b - 1)))
40    cont.value <- as.numeric(unlist(cont.value))
41    temp <- rep(payoffs.l[[i - 1]], each = b)
42    idx <- (cont.value <= temp)
43    payoffs.children.l <- payoffs.l[[i]]
44    payoffs.children.l[idx] <- temp[idx]
45    payoffs.children.l <- split(payoffs.children.l, f)
46    payoffs.l[[i - 1]] <-
47      as.numeric(sapply(payoffs.children.l, mean))
48  }
49  high <- mean(unlist(df*payoffs.h[[1]]))
50  low <- mean(unlist(df*payoffs.l[[1]]))
51  return(list(low = low, high = high))
52 }

```

**Πρόγραμμα 6.6:** Συνάρτηση που υπολογίζει ταυτόχρονα τους εκτιμητές θετικής και αρνητικής μεροληψίας.

### 6.1.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράψαμε προηγούμενος, εφαρμόζουμε τη μέθοδο για την τιμολόγηση ενός αμερικάνικου δικαιώματος τύπου call, σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα των Broadie και Glasserman [8]. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης απεικονίζονται στον Πίνακα-6.1.

S	$\hat{\theta}$	$sd_{\hat{\theta}}$	$\hat{V}$	$sd_{\hat{V}}$	CI	Point est.	True	Rel err [%]
70	0.116	0.000	0.123	0.000	[0.0108, 0.124]	0.119	0.121	1.25
80	0.659	0.002	0.683	0.002	[0.621, 0.722]	0.671	0.670	0.17
90	2.234	0.005	2.311	0.005	[2.144, 2.406]	2.273	2.303	1.32
100	5.556	0.009	5.758	0.009	[5.383, 5.934]	5.657	5.731	1.29
110	11.119	0.013	11.463	0.013	[10.870, 11.711]	11.291	11.341	0.44
120	18.811	0.018	19.226	0.018	[18.463, 19.576]	19.019	20.000	4.91
130	27.729	0.019	28.158	0.019	[27.354, 28.529]	27.944	30.000	6.85

**Πίνακας 6.1:** Αποτελέσματα της μεθόδου των τυχαίων δενδρών για ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης  $K = 100$ , επιτόκιου ουδέτερου ρίσκου  $r = 0.05$ , συνεχή απόδοση μερισμάτων  $\delta = 0.10$ , χρόνο ωρίμανσης  $T = 1.0$  και μεταβλητότητα  $\sigma = 0.2$ . Για κάθε τιμή εκτελέσαμε 100 προσομοιώσεις.

Σημειώνουμε πως σε αναλογία με την put-call parity σχέση για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα οι McDonald και Schroder στην [15], δείχνουν ότι για αξίες που ακολουθούν τη δυναμική του Black-Scholes ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$C(S, K, r, \delta, T) = P(K, S, \delta, r, T)$$

για αμερικανικά παράγωγα. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, η αληθινή τιμή δίνεται από την προσεγγιστική σχέση που ανέπτυξαν οι Geske και Johnson στην εργασία [?] για ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης. Η αληθινή τιμή έχει ληφθεί από την [8]. Τέλος ο κώδικας με τον οποίο λαμβάνουμε τον πίνακα είναι στο Πρόγραμμα-6.7. Για να λάβουμε κάθε γραμμή του πίνακα, δηλαδή για 100 προσομοιώσεις, χρειάστηκε περίπου 100s το οποίο είναι περισσότερο από το 1 λεπτό που χρειάστηκαν στην [8] με έναν Pentium στα 133MHz.

```
1 requires(xtable)
2 mc <- function(s0, n = 100){
3   K <- 100
4   high <- numeric(n)
5   low <- numeric(n)
6   for(i in 1:n){
7     s = s0/K
8     l <- PricingTree(s, 1, 0.05, 0.1, 0.2, 1, 50, 3)
9     high[i] <- l$high
10    low[i] <- l$low
11  }
12  print(s0)
13  print(paste(CI(low)[3], CI(high)[1], sep=" ", "))
14  return(c(s0, K*mean(low), sd(low), K*mean(high),
15          sd(high).0, 0.5*K*(mean(high)+mean(low)),
16          0, 0))
17 }
18
19 data <- matrix(nrow = 7, ncol = 9)
20 starts <- seq(70, 130, 10)
21 for(i in 1:length(starts)){
22   data[i, ] <- mc(starts[i], 100)
23 }
24
25 data[, 8] <- c(0.121, 0.670, 2.303, 5.731, 11.341, 20.000, 30.000)
26 data[, 9] <- round((abs(new[, 7] - new[, 8])/new[, 8])*100, 2)
27 tex <- xtable(new, digits = 3)
28 print(tex)
```

**Πρόγραμμα 6.7:** Ο κώδικας για να λάβουμε τις τιμές του Πίνακα-6.1.





## Κεφάλαιο 7

# Μέθοδοι Στοχαστικών Πλεγμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μία γενίκευση κατά κάποιο τρόπο της μεθόδου των τυχαίων δένδρων. Η μέθοδος καλείται *μέθοδος στοχαστικών πλεγμάτων*.

### 7.1 Εισαγωγή

Κατασκευάζουμε  $b$  το πλήθος προσομοιώσεις μίας αλυσίδας Markov  $m$  βημάτων, οι οποίες έχουν κοινή αφηρητή την κατάσταση  $X_0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^1 &= X_0, X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1} \\ \mathbf{X}^2 &= X_0, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{m2} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^j &= X_0, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^b &= X_0, X_{1b}, X_{2b}, \dots, X_{mb} \end{aligned}$$

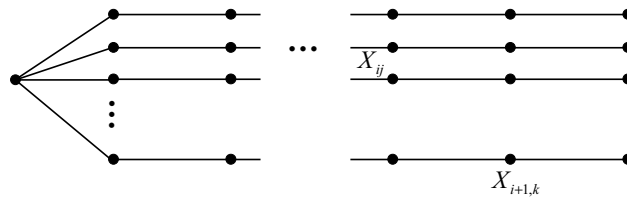
Μπορούμε να φανταζόμαστε τις παραπάνω  $b$  τροχιές της αλυσίδας όπως αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα-7.1. Αν για παράδειγμα η αλυσίδα Markov αναπαριστά τις τιμές της μετοχής, τότε η  $X_{ij}$  θα είναι η τιμή της μετοχής στην  $i$ -οστή εξάσκηση σύμφωνα με την προσομοίωση  $j$ , για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, b$ .

Στη μέθοδο των τυχαίων δενδρών για να υπολογίσουμε την απόδοση του δικαιώματος τη χρονική στιγμή  $i$  για τον κόμβο  $X_{ij}$  λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τα παιδιά του  $X_{ij}$ . Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούμε όλους τους κόμβους της επόμενης χρονικής στιγμής. Το πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού που λύνουμε έχει ως επαγωγική βάση τη σχέση

$$\hat{V}_{mj} = h_m(X_{mj})$$

και ως αναδρομή την

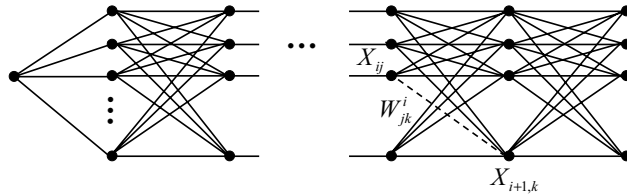
$$\hat{V}_{ij} = \max \left\{ h_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} \right\} \quad (7.1)$$



**Σχήμα 7.1:** (Πηγή: [10, σελ. 444])

Αναπαράσταση ανεξαρτήτων τροχιών μιας αλυσίδας Markov.

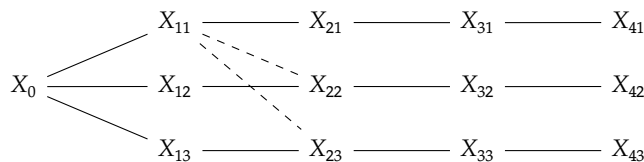
Τα  $W_{jk}^i$  είναι το βάρος της ακμής που συνδέει τον κόμβο  $X_{ij}$  με τον  $X_{i+1,k}$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα-7.2. Από κάθε κόμβο  $X_{ij}$  φεύγουν  $b$  το πλήθος ακμές προς τους κόμβους  $X_{i+1,1}, X_{i+1,2}, \dots, X_{i+1,b}$ .



**Σχήμα 7.2:** (Πηγή: [10, σελ. 444])

Κατασκευάζουμε το πλέγμα συνδέοντας κάθε κόμβο με τους κόμβους που έπονται άμεσα από αυτόν και αναθέτοντας βάρη  $W_{jk}^i$  στις ακμές που τους συνδέουν.

Από κάθε κόμβο  $X_{ij}$  φεύγουν  $b$  το πλήθος ακμές προς τους κόμβους  $X_{i+1,1}, X_{i+1,2}, \dots, X_{i+1,b}$ . Συνεπώς από κάθε μονοπάτι φεύγουν  $(m - 1)b$  ακμές, διότι από το τέλος του μονοπατιού δεν φεύγουν ακμές. Έτσι επειδή το πλέγμα έχει  $b$  μονοπάτια, το πλήθος των ακμών θα είναι  $b^2(m-1)$ .



**Σχήμα 7.3:** Ένα πλέγμα με 3 ( $b = 3$ ) μονοπάτια που έχουν παραχθεί από μία αλυσίδα 5 βημάτων ( $m = 4$ ). Στο σχήμα απεικονίζονται μόνο όλες οι ακμές που φεύγουν από τον κόμβο  $X_{11}$ . Η πρώτη ακμή είναι η  $W_{11}^1$  και οι διακεκομμένες από πάνω προς τα κάτω είναι οι  $W_{12}^1$  και  $W_{13}^1$ .

Η εκτιμήτρια για την τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή που εκδίδεται είναι

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{V}_{1k}$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε κάποιες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν τα βάρη των ακμών  $W_{jk}^i$ . Έστω

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ib})$$

οι τιμές του πλέγματος στην εξάσκηση  $i$ . Με άλλα λόγια το  $\mathbf{X}_i$  αναπαριστά το  $i$ -οστή κατάσταση της αλυσίδας σύμφωνα με τις  $b$  προσομοιώσεις. Θεωρούμε επίσης πως η κοινή αφετηρία  $X_0 = \mathbf{X}_0$ . Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται είναι οι ακόλουθες

1. Οι τιμές που λαμβάνει το πλέγμα τις στιγμές  $i+1, \dots, m$  να είναι ανεξάρτητες των  $0, 1, \dots, i-1$  δεδομένης της στιγμής  $i$ , δηλαδή

$$\{\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{i-1}\} \text{ ανεξάρτητη με } \{\mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_m\} \text{ δοσμένης της } \mathbf{X}_i \quad (\text{M1})$$

2. Η δεύτερη συνθήκη αφορά τα βάρη. Συγκεκριμένα θέλουμε

$$W_{jk}^i = f(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1}) \quad (\text{M2})$$

όπου  $f$  ντετερμινιστική συνάρτηση.

3. Θυμίζουμε πως με

$$C_i(x) = \mathbb{E}[V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = x]$$

συμβολίζουμε την αξία συνέχησης, δηλαδή την αναμενόμενη αξία του παραγώγου κατά την στιγμή εξάσκησης  $t_{i+1}$  δεδομένου πως τη στιγμή  $i$  η οικονομία βρίσκεται στην κατάσταση  $x$ . Θέλουμε τα βάρη να είναι τέτοια ώστε

$$C_i(X_{ij}) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \mathbb{E}[W_{jk}^i \cdot V_{i+1}(X_{i+1,k}) | \mathbf{X}_i] = C_i(X_{ij}) \quad (\text{M3})$$

Οι συνθήκες (M1),(M2) και (M3) μας επιτρέπουν να αποδείξουμε τις μεροληψίες των εκτιμητών για οποιαδήποτε μέθοδο ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές.

**Πρόταση 7.1.** *Ο εκτιμητής*

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{V}_{1k}$$

που προσδιορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \hat{V}_{mj} &= h_m(X_{mj}) \\ \hat{V}_{ij} &= \max \left\{ h_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} \right\} \end{aligned}$$

είναι θετικής μεροληψίας.

*Απόδειξη.* Όπως και στη μέθοδο των τυχαίων δενδρών αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή. Θέλουμε να δείξουμε πως για κάθε  $i = 0, 1, \dots, m-1$  και  $j = 1, 2, \dots, b$  ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\hat{V}_{i+1,j} | \mathbf{X}_i] \geq V_{i+1}(X_{i+1,j})$$

Παρατηρούμε πως για  $i = m-1$  και κάθε  $j = 1, 2, \dots, b$  είναι

$$\mathbb{E}[\hat{V}_{m,j} | \mathbf{X}_{m-1}] = h_m(X_{mj}) = V_m(X_{mj})$$

και συνεπώς ικανοποιείται η ισότητα. Έστω τώρα πως η ζητούμενη σχέση ισχύει για  $i + 1$ , θα δείξουμε πως ισχύει και για  $i$ . Σύμφωνα με την (2.8) είναι

$$\mathbb{E} \left[ \max \left\{ h_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} \right\} \middle| \mathbf{X}_i \right] \geq \max \left\{ h_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i \right] \right\}$$

και άρα

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i,j} | \mathbf{X}_i \right] \geq \max \left\{ h_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i \right] \right\}$$

Ασχολούμαστε τώρα με την δεσμευμένη μέση τιμή

$$\mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i \right], \quad k = 1, \dots, b$$

Σύμφωνα με την (M2) η  $W_{jk}^i$  είναι ντετερμινιστική συνάρτηση των  $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1}$  και συνεπώς παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1} \right] = W_{jk}^i \mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1} \right]$$

Επίσης από την συνθήκη (M1) και υπενθυμίζοντας ότι η

$$\hat{V}_{i+1,k} = \max \left\{ h_{i+1}(X_{i+1,k}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b W_{kj}^{i+1} \hat{V}_{i+2,j} \right\}$$

έπεται πως η  $\hat{V}_{i+1,k}$  είναι ανεξάρτητης της  $\mathbf{X}_i$ , δοσμένης της  $\mathbf{X}_{i+1}$ . Έτσι

$$\mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1} \right] = W_{jk}^i \mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_{i+1} \right]$$

Συνεπώς σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_{i+1} \right] \geq V_{i+1}(X_{i+1}, k)$$

έπεται πως

$$\mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1} \right] \geq W_{jk}^i V_{i+1}(X_{i+1}, k), \quad \forall k = 1, \dots, b$$

Έτσι

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \mathbb{E} \left[ W_{jk}^i \hat{V}_{i+1,k} | \mathbf{X}_i \right] \geq \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i V_{i+1}(X_{i+1}, k)$$

■

Όπως στα τυχαία δένδρα, διαμερίζοντας τις τιμές που έχουμε προσομοιώσει, κατασκευάζουμε ένα εκτιμητή αρνητικής μεροληψίας.

## 7.2 Βάρη ακμών πλέγματος

Έστω μία αλυσίδα Markov του  $\mathbb{R}^d$ , δηλαδή μία αλυσίδα

$$X_0, X_1, \dots, X_m$$

με χώρο καταστάσεων τον  $\mathbb{R}^d$ .

Έστω πως τη χρονική στιγμή  $i$  η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση  $x \in \mathbb{R}^d$ . Η πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα τη στιγμή  $i$  σε μία οποιαδήποτε κατάσταση  $y$  του υποσυνόλου  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  είναι

$$\mathbb{P}(X_i \in A | X_{i-1} = x) = \int_A f_i(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, A \subseteq \mathbb{R}^d$$

Οι  $f_i(x, y)$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης της αλυσίδας από τη στιγμή  $i-1$  στην  $i$ . Προφανώς το  $i$  τρέχει από 1 έως  $m$ . Αναλυτικότερα για  $x, y \in \mathbb{R}^d$  η τιμή  $f_i(x, y)$  είναι η πιθανοφάνεια να μεταβεί η αλυσίδα από την κατάσταση  $x$  τη χρονική στιγμή  $i$  στην κατάσταση  $y$  την στιγμή  $i+1$ .

Στο πλέγμα όλες οι αλυσίδες εξελίσσονται παράλληλα με κοινή αφετηρία την  $X_0$ . Αν θεωρήσουμε λοιπόν την αφετηρία σταθερή, η πιθανοφάνεια να μεταβούμε σε μία κατάσταση  $y \in \mathbb{R}^d$  τη στιγμή 1 είναι ίση με

$$g_1(y) = f_1(X_0, y)$$

Η  $g_1(\cdot)$  δεν είναι τίποτε άλλο από την περιθώρια πυκνότητα της  $X_1$ , δεδομένης βέβαια της σταθερής αφετηρίας.

Αντίστοιχα η πιθανοφάνεια να βρεθούμε σε μία κατάσταση  $x_2$  τη στιγμή 2 δεδομένου πως τη στιγμή 1 μεταβήκαμε στην  $x_1$  θα είναι ίση με το γινόμενο της πιθανοφάνειας να έχουμε βρεθεί τη στιγμή 1 στην  $x_1$  επί τη πιθανοφάνεια να μεταβούμε στην  $x_2$  από την  $x_1$  τη στιγμή 2, δηλαδή θα είναι ίση με

$$g_1(x_1) \cdot f_2(x_1, x_2)$$

Για να βρούμε λοιπόν την περιθώρια πυκνότητα της  $X_2$  ολοκληρώνουμε για όλες τις πιθανές καταστάσεις  $x$  που μπορεί να βρεθεί η αλυσίδα μας τη χρονική στιγμή 1, δηλαδή η περιθώρια πυκνότητα της  $X_2$  θα είναι η

$$g_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g_1(x) \cdot f_2(x, y) dx$$

Με τη λογική αυτή μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τις περιθώριες πυκνότητες πιθανότητας των μεταβλητών  $X_i$ , δηλαδή τα μέτρα κατανομής τους, ως εξής.

$$g_i(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g_{i-1}(x) f_i(x, y) dx$$

Μία συνάρτηση  $g_i(y)$  έχει νόημα, προφανώς λόγω της αναδρομής, μονάχα αν γνωρίζουμε την  $g_{i-1}(y)$  αλλά επιπλέον για να οριστεί απαιτείται και η κατάσταση της αλυσίδας την προηγούμενη χρονική στιγμή  $x$ .

Στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιήσαμε τις συνθήκες (M1), (M2) και (M3) για να αποδείξουμε την μεροληψία των εκτιμητών. Θυμίζουμε πως η (M3) δηλώνει πως τα βάρη πρέπει να είναι τέτοια ώστε

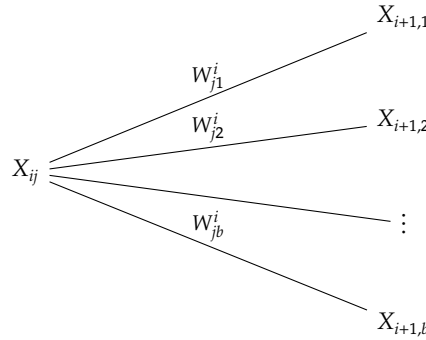
$$C_i(X_{ij}) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \mathbb{E} [W_{jk}^i \cdot V_{i+1}(X_{i+1,k}) | \mathbf{X}_i]$$

Επίσης χρησιμοποιώντας τις σ.π.π μετάβασης της αλυσίδας η  $C_i(x)$  μπορεί να γραφεί ως

$$C_i(x) = \mathbb{E} [V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = x] = \int_{\mathbb{R}^d} V_{i+1}(y) f_{i+1}(x, y) dy$$

### 7.2.1 Βάρη για ανεξάρτητη παραγωγή κόμβων

Εξετάζουμε πρώτα τη περίπτωση που οι κόμβοι  $X_{ij}$  παράγονται ανεξάρτητα τόσο από τους προηγούμενους κόμβους του πλέγματος όσο και μεταξύ τους. Συγκεκριμένα έστω πως τη στιγμή  $i+1$  παράγουμε τους κόμβους  $X_{i+1,1}, X_{i+1,2}, \dots, X_{i+1,b}$ , από μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g$ .



Σχήμα 7.4: Ανεξάρτητη παραγωγή κόμβων πλέγματος.

Παρατηρούμε σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών ότι

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b V_{i+1}(X_{i+1,k}) \rightarrow \mathbb{E} [V_{i+1}(X_{i+1,k})]$$

όπου χρησιμοποιώντας το Θεώρημα-2.4

$$\mathbb{E} [V_{i+1}(X_{i+1,k})] = \int_{\mathbb{R}^d} V_{i+1}(y) g(y) dy$$

Συνεπώς παραβιάζεται η συνθήκη (M3), διότι

$$C_i(x) = \mathbb{E} [V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = x] = \int_{\mathbb{R}^d} V_{i+1}(y) f_{i+1}(x, y) dy \neq \int_{\mathbb{R}^d} V_{i+1}(y) g(y) dy$$

Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στο ότι παράγαμε τους κόμβους ανεξάρτητα από μία πυκνότητα  $g$  και όχι από τη πυκνότητα μετάβασης  $f_{i+1}(X_{ij}, y)$ . Για να το διορθώσουμε χρησιμοποιούμε τα βάρη

$$W_{jk}^i = \frac{f_{i+1}(X_{ij}, X_{i+1,k})}{g(X_{i+1,k})}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον νόμο των μεγάλων αριθμών λαμβάνουμε το ζητούμενο. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i V_{i+1}(X_{i+1,k}) &\rightarrow \mathbb{E} [W_{jk}^i V_{i+1}(X_{i+1,k})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} W_{xy}^i V_{i+1}(y) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f_{i+1}(x, y)}{g(y)} V_{i+1}(y) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f_{i+1}(x, y) V_{i+1}(y) dy = C_i(x) \end{aligned}$$

### 7.2.2 Βάρη σε Μαρκοβιανά Πλέγματα

Στη συνέχεια μελετάμε τη περίπτωση που δεν παράγουμε όλους τους κόμβους ανεξάρτητα, αλλά παράγουμε ανεξάρτητα μονοπάτια. Υποθέτουμε πως έχουμε κατασκευάσει  $b$  ανεξάρτητα μονοπάτια της αλυσίδας με κοινή αφετηρία τη  $X_0$ . Θεωρούμε ένα από αυτά, το  $\mathbf{X}^j = X_0, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj}$ .

Κάθε κόμβος  $X_{i+1,j}$ , με  $j = 1, \dots, b$ , παράγεται από τη πυκνότητα μετάβασης  $f_i(X_{i,k}, y)$ . Αν όμως αντί των μονοπατιών που προσομοιάσαμε  $\mathbf{X}^j$ , θεωρήσουμε ένα άλλο μονοπάτι του πλέγματος, για παράδειγμα το

$$X_0, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{ij}, X_{i+1,k}, X_{i+2,j}, \dots, X_{mj}$$

παρατηρούμε πως ο κόμβος  $X_{i+1,k}$  είναι ανεξάρτητος της  $X_{ij}$  και συνεπώς για το μονοπάτι αυτό η  $X_{i+1,k}$  δεν έχει παραχθεί από την  $f_i(X_{ij}, y)$  αλλά από την περιθώρια πυκνότητα  $g_i(y)$ . Σύμφωνα με τους συλλογισμούς που αναπτύξαμε για τον προσδιορισμό των βαρών σε πλέγματα όπου παράγουμε τους κόμβους ανεξάρτητα, εύκολα οδηγείται κανείς να ορίσει τα βάρη

$$W_{jk}^i = \begin{cases} \frac{f_{i+1}(X_{ij}, X_{i+1,k})}{g_{i+1}(X_{i+1,k})}, & k \neq j, \\ 1, & k = j \end{cases}$$

έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη (M3).

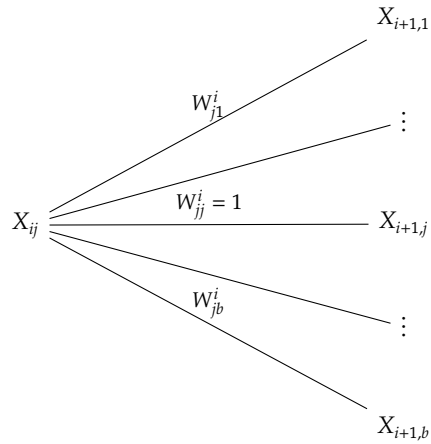
### 7.2.3 Τρίτη Μέθοδος Προσομοίωσης

Το πλέγμα όπως είδαμε μπορεί να κατασκευαστεί από ανεξάρτητους κόμβους ή από παράλληλα ανεξάρτητα μονοπάτια. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν τρίτο τρόπο. Υποθέτουμε πως έχουμε παράγει τους κόμβους μέχρι την εξάσκηση  $i$ . Στο τελευταίο επίπεδο του πλέγματος θα έχουμε παράγει τους

$$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ib}$$

Για να κατασκευάσουμε τους κόμβους της  $i + 1$  εξάσκησης εργαζόμαστε ως εξής. Επιλέγουμε τυχαία ένα κόμβο  $X_{il}$ , με  $l = 1, 2, \dots, b$  και παράγουμε από την πυκνότητα  $f_{i+1}(X_{il}, \cdot)$  έναν κόμβο  $X_{i+1,1}$ . Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία έως ότου παράγουμε τους  $b$  κόμβους της  $i + 1$  εξάσκησης. Ένας κόμβος  $X_{i+1,j}$  θα έχει προσομοιωθεί με πιθανότητα  $1/b$  από μία εκ των





**Σχήμα 7.5:** Ανεξάρτητη παραγωγή κόμβων πλέγματος.

πυκνοτήτων  $f_{i+1}(X_{il}, \cdot)$ . Ισοδύναμα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως έχει προσομοιωθεί από τη πυκνότητα

$$\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b f_{i+1}(X_{il}, \cdot)$$

Εργαζόμαστε όπως πρωτύτερα και καταλήγουμε πως τα βάρη θα είναι

$$W_{jk}^i = \frac{f_{i+1}(X_{ij}, X_{i+1,k})}{\frac{1}{b} \sum_{l=1}^b f_{i+1}(X_{il}, X_{i+1,k})}$$

Τα βάρη αυτά έχουν την ιδιότητα ο μέσος όρος των βαρών των ακμών που ξεκινούν από έναν κομβό  $X_{ij}$  να είναι ίσος με τη μονάδα, δηλαδή

$$\frac{1}{b} \sum_{i=1}^b W_{jk}^i = 1$$

# Βιβλιογραφία

- [1] Δ. Κοκολάκης, Γ. και Φουσκάκης. *Στατιστική: Θεωρία & Εφαρμογές*. Συμεών, Αθήνα, 2009.
- [2] Θ.Μ. Ρασσιάς. *Μαθηματική Ανάλυση I*, volume Τεύχος Α'. Σαββάλας, Αθήνα, 2004.
- [3] Ι. Σπηλιώτης. *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Συμεών, Αθήνα, 2004.
- [4] Ν.Δ. Παπαδάτος. *Θεωρία Πιθανοτήτων*. Αυτοέκδοση, Αθήνα, 2006.
- [5] Σ. Αργυρός. *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*. Αυτοέκδοση, Αθήνα, 2011.
- [6] Γ.Κ. Σαραντόπουλος. *Μία Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης*. Αυτοέκδοση, Αθήνα, 2012.
- [7] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, 1986.
- [8] Mark Broadie and Paul Glasserman. Pricing american-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8):1323–1352, 1997.
- [9] Morris H DeGroot, Mark J Schervish, Xiangzhong Fang, Ligang Lu, and Dongfeng Li. *Probability and statistics*, volume 2. Addison-Wesley Reading, MA, 1986.
- [10] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Applications of Mathematics Series. Springer, 2004.
- [11] J. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education, Limited, 2012.
- [12] Herb Johnson. An analytic approximation for the american put price. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1):141–148, 1983.
- [13] Rachel A Kuske and Joseph B Keller. Optimal exercise boundary for an american put option. *Applied Mathematical Finance*, 5(2):107–116, 1998.
- [14] Francis A Longstaff and Eduardo S Schwartz. Valuing american options by simulation: A simple least- squares approach. *Review of Financial studies*, 14(1):113–147, 2001.
- [15] R McDonald and M Schroder. A parity result for american options. *Journal of Computational Finance*, 1(3):5–13, 1998.
- [16] James R Norris. *Markov chains*. Number 2008. Cambridge university press, 1998.
- [17] Gilles Pagès, Huyên Pham, and Jacques Printems. Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance. In *Handbook of computational and numerical methods in finance*, pages 253–297. Springer, 2004.

- [18] S.E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Number  $\tau$ . 11 in Springer Finance. Springer, 2004.