ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ ΚΟΚΚΟΒΑ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:09101064

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΚΟΚΚΙΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ(ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

ΑΘΗΝΑ 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

-ΕΙΣΑΓΩΓΗ-

Το ξέσπασμα της βιομηχανικής επανάστασης (19^{ο} αιώνα) σηματοδότησε μια νέα εποχή συνεχούς και ταχείας ανάπτυξης των επιχειρήσεων, οδηγώντας έτσι μικρές επιχειρήσεις σε εταιρείες συγκέντρωσης μεγάλων κεφαλαίων που τις διέκρινε η πολυπλοκότητα και το τεράστιο μέγεθος. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια αυξήθηκε σημαντικά ο καταμερισμός και η κατανομή της εργασίας στις διάφορες λειτουργίες των επιχειρήσεων με σκοπό την βελτίωση της ανταγωνιστικότητας και της οικονομικής αποτελεσματικότητας. Παρόλη αυτή την επαναστατικοποίηση στην παραγωγή, νέα προβλήματα αναδύθηκαν όπως η έλλειψη συνολικής πληροφόρησης της λειτουργίας της επιχείρησης, η διαφοροποίηση στόχων και αξιακών συστημάτων ανάμεσα στα επιμέρους τμήματα της και σε σχέση με τους αντικειμενικούς σκοπούς της επιχείρησης συνολικά. Για παράδειγμα, σε μια εταιρεία που πουλάει προϊόντα, το τμήμα πωλήσεων επιδιώκει να βρει ποια προϊόντα θα αυξήσουν τις πωλήσεις, το τμήμα παραγωγής ενδιαφέρεται για την καλύτερη αξιοποίηση των πόρων, τη μεγιστοποίηση της παραγωγικότητας και την καλύτερη απασχόληση του εργατικού δυναμικού. Η ανάγκη για την επίλυση αυτών των προβλημάτων οδήγησε στην εμφάνιση της Επιχειρησιακής Έρευνας (OR).

Οι ρίζες της OR μπορούν να ανιχνευθούν πίσω πολλές δεκαετίες όπου έγιναν προσπάθειες να προσεγγισθεί επιστημονικά η διοίκηση οργανισμών. Το πρώτο βήμα έγινε από τον γνωστό μαθηματικό CharlesBabbage(1791-1871), ο οποίος χαρακτηρίστηκε πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας, επειδή ερεύνησε το κόστος μεταφοράς και το κόστος ταξινόμησης της αλληλογραφίας. Το 1917 ο AgnerErlang(1878-1929) μελετούσε προβλήματα σχετικά με τον χρόνο απασχόλησης στα τηλεφωνικά δίκτυα.

Η γέννηση όμως της ORσαν νέου επιστημονικού κλάδου εντοπίζεται χρονικά το 1940 μέσα στη δίνη του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου. Κατά τη διάρκεια αυτού του πολέμου ανέκυψαν διάφορα προβλήματα όσον αφορά αποφάσεις για τον επισιτισμό των στρατιωτικών μονάδων ή γενικότερα για προγράμματα διοικητικής έρευνας. Ειδικότερα, η διοίκηση των ένοπλων δυνάμεων της Μεγάλης Βρετανίας χρειάζονταν βοήθεια για τη μελέτη της νέας τεχνολογίας των ραντάρ και την εξεύρεση των πιο αποτελεσματικών μεθόδων για τον εντοπισμό εχθρικών αεροσκαφών. Επίσης, από την άλλη πλευρά του Ατλαντικού έψαχναν λύσεις στο πρόβλημα του πρόβλημα του προσδιορισμού του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών (πλήθος φορτηγών πλοίων συνοδευόμενων από πολεμικά) ή ακόμα προσπάθησαν να κάνουν αποτελεσματικότερη την ρίψη βομβών μελετώντας πρότυπα ρίψης. Είναι γενικά αποδεκτό ότι η επιχειρησιακή έρευνα έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην έκβαση σημαντικών γεγονότων του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου.

Με το τέλος του πολέμου η ανάγκη για την καλύτερη δυνατή αξιοποίηση των περιορισμένων διαθέσιμων πόρων ήταν φανερή. Το μεταπολεμικό οικονομικό μπουμ συντέλεσε στη δημιουργία οργανισμών και επιχειρήσεων αυξημένης πολυπλοκότητας και ειδίκευσης συγκεντρώνοντας την προσοχή ερευνητών επιχειρησιακής έρευνας που εργάστηκαν στο Β΄ Παγκόσμιο, οι οποίοι έβλεπαν ομοιότητες στα προβλήματα που υπήρχαν στον πόλεμο, με νεοεμφανιζόμενα προβλήματα της βιομηχανίας.

Η βιομηχανία με τη σειρά της παρακινήθηκε στο να ενσωματώσει τον κλάδο της ORβλέποντας τις επιτυχίες αυτού στον πόλεμο. Έτσι άρχισαν να ιδρύονται σταδιακά, από τη Μεγάλη Βρετανία μέχρι την Αμερική, ομάδες και εταιρίες OR. Στην αναπτυξιακή αυτή έκρηξη της OR έπαιξαν καθοριστικό ρόλο η βελτίωση τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας, όπως η ανάπτυξη του αλγόριθμου Simplexαπό τον G. Dantzig το 1947, ο οποίος βοήθησε στην επιτυχή επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Πέρα από αυτή την εξέλιξη και άλλα εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας αναπτύχθηκαν εκείνη την περίοδο, όπως ο δυναμικός προγραμματισμός και η θεωρία ουρών αναμονής. Παράλληλα όμως, η πρόοδος που σημειώθηκε στην τεχνολογία ηλεκτρονικών υπολογιστών έκανε εφικτή την παροχή πληθώρας ενημερωμένων πληροφοριών στα στελέχη της διοίκησης, τα οποία απαιτούσαν επεξεργασία.

Η ανάγκη λοιπόν για ταχεία και αποτελεσματική αντιμετώπιση των περίπλοκων επιχειρησιακών προβλημάτων και η πρόοδος της τεχνολογίας οδήγησαν σε μια σταδιακή εμφάνιση και αξιοποίηση της επιχειρησιακής έρευνας στον χώρο της βιομηχανίας καθώς και στους χώρους παροχής υπηρεσιών, προγραμματισμού κ.τ.λ.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η επιχειρησιακή έρευνα είναι ένα βασικό εργαλείο, που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή της διοίκησης και ειδικότερα για την λήψη αποφάσεων με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η απόδοση του όρου επιχειρησιακή έρευνα στην αγγλική είναι OperationalResearch. Εναλλακτικές ονομασίες του όρου επιχειρησιακή έρευνα τα τελευταία χρόνια είναι Διοικητική Επιστήμη (ManagementScience), Επιστήμη Αποφάσεων (DecisionScience) και Ανάλυση Συστημάτων (SystemsAnalysis). Επίσης, χρησιμοποιείται η συνδυαστική ονομασία OperationsResearchκαι ManagementScience.

Κατά καιρούς έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί του όρου Επιχειρησιακή Έρευνα. Ενδεικτικά θα παραθέσουμε μερικούς από τους σημαντικότερους. Ο R. Watson-Watto οποίος ήταν από τους πρωτεργάτες της εισαγωγής και ανάπτυξης του θέματος στη βρετανική αεροπορία, μαζί με τον A.P. Rowe, έδωσε τον εξής ορισμό:

« Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποσκοπεί στο να ερευνήσει ποσοτικά αν ένας οργανισμός παίρνει από τη λειτουργία του εξοπλισμού του, τη βέλτιστη δυνατή συνεισφορά σε σχέση με τον ολικό αντικειμενικό σκοπό του, ποιες αλλαγές εξοπλισμού και μεθόδους απαιτούνται για την βελτίωση των αποτελεσμάτων με το μικρότερο δυνατό κόστος σε προσπάθεια και χρόνο και τέλος σε ποιο βαθμό μεταβολές στους επιμέρους αντικειμενικούς σκοπούς θα συνεισέφεραν στην πιο οικονομική και έγκαιρη εκτέλεση του ολικού στρατηγικού αντικειμενικού σκοπού ».

Από την εταιρεία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας έχει προταθεί ο παρακάτω ορισμός: «Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα, τα οποία ανακύπτουν στη διεύθυνση και στη διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, τις κυβερνητικές υπηρεσίες και την άμυνα. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογίας συνίσταται στη ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων. Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση και να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειες της επιστημονικά (κατά τον καλύτερο τρόπο).

Τέλος, ο ορισμός της Ελληνικής Εταιρείας Επιχειρησιακών Ερευνών είναι :

«η συστηματική εφαρμογή ποσοτικών μεγεθών, τεχνικών και εργαλείων στη ανάλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν τη λειτουργία συστημάτων».

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΑΔΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Κατά βάση η επιστημονική μεθοδολογία που ακολουθείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ίδια ανεξαρτήτως του πεδίου εφαρμογής και του μοντέλου που χρησιμοποιούμε. Παραθέτουμε εν συντομία τα διάφορα στάδια.

Ανάλυση του Συστήματος

Στόχος αυτού του σταδίου είναι η κατανόηση του υπό μελέτη συστήματος και για τον λόγο αυτό προσδιορίζουμε τη δομή και τον τρόπο λειτουργίας του. Έπειτα το αναλύουμε στα επιμέρους υποσυστήματα του και προσπαθούμε να βρούμε τα σημεία στα οποία μπορούμε να επηρεάσουμε τη λειτουργία του. Έτσι εντοπίζουμε τις διάφορες μεταβλητές-παραμέτρους του συστήματος, καθώς επίσης και τους περιορισμούς που επιβάλλονται από την ίδια τη δομή του συστήματος, το περιβάλλον και τη λειτουργία.

Διατύπωση Στόχων

Το στάδιο αυτό ακολουθεί μετά την ανάλυση του συστήματος και αποσκοπεί στον προσδιορισμό του αντικειμενικού στόχου που θέλουμε να επιτύχουμε όπως μεγιστοποίηση του κέρδους, ελαχιστοποίηση του κόστους, βελτίωση της παραγωγικότητας κ.τ.λ.

Διατύπωση Μοντέλου

Στο στάδιο αυτό προσπαθούμε να αναπαραστήσουμε μαθηματικά το σύστημα κάνοντας τις απαραίτητες απλουστεύσεις και αναλύουμε την επίδραση διάφορων παραγόντων στους στόχους που τέθηκαν και επιλέγουμε την καλύτερη στρατηγική.

Επίλυση Μοντέλου

Στην επίλυση του μαθηματικού μοντέλου χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές για τον εντοπισμό της βέλτιστης στρατηγικής. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται θεμελιώνονται στα Ανώτερα Μαθηματικά (Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό, Αριθμητική Ανάλυση, Γραμμική Άλγεβρα, Κλασσικές Μεθόδους Βελτιστοποίησης, Λογισμό Μεταβολών), στη Θεωρία Πιθανοτήτων (Κατανομές Πιθανοτήτων, Στοχαστικές Ανελίξεις τύπου Markov) ή σε μεθόδους Επιχειρησιακής Έρευνας. Η πιο χαρακτηριστική τεχνική της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ο γραμμικός προγραμματισμός (LinearProgramming). Ο γραμμικός προγραμματισμός εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις. Ο δυναμικός προγραμματισμός ο οποίος συνίσταται στη διαίρεση του προβλήματος σε υπο-προβλήματα για τα οποία ξέρουμε τη λύση, ο ακέραιος προγραμματισμός και φυσικά ο μη γραμμικός προγραμματισμός, στον οποίο οι συναρτήσεις των μοντέλων είναι μη γραμμικές. Επιπλέον, ο προγραμματισμός δικτύων, τα δέντρα αποφάσεων, η διαχείρηση αποθεμάτων, η θεωρία ουρών αναμονής και η θεωρία παιγνίων είναι αρκετά χρήσιμες μέθοδοι της επιχειρησιακής έρευνας. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από τον τύπο και την πολυπλοκότητα του μαθηματικού μοντέλου. Ορισμένες φορές η φύση του προβλήματος απαιτεί υβριδικές μεθόδους.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Η λύση η οποία μας υπεδείχθη από το μοντέλο στο παραπάνω στάδιο ισχύει για τις παραμέτρους του περιβάλλοντος (τιμές, δυναμικότητα, κ.τ.λ.) που ορίσαμε αρχικά, όταν μοντελοποιούσαμε το πρόβλημα. Εντούτοις πριν υλοποιήσουμε τη στρατηγική που υποδεικνύει το μοντέλο χρειάζεται να διερευνήσουμε την επίπτωση που θα είχε στην άριστη στρατηγική μια τυχόν αλλαγή στο περιβάλλον. Αυτή η ανάλυση της λύσης ονομάζεται Ανάλυση Ευαισθησίας.

Υλοποίηση της Λύσης

Σε αυτό το στάδιο που είναι και το τελικό, έχοντας επιλέξει τη στρατηγική που θα ακολουθήσουμε, πρέπει να τη θέσουμε σε εφαρμογή. Το στάδιο αυτό είναι συχνά το δυσκολότερο. Η υλοποίηση και η διατήρηση της λύσης ενός μοντέλου, περιλαμβάνει την μετατροπή των αποτελεσμάτων σε λειτουργικές οδηγίες, παρουσιαζόμενες με κατανοητό τρόπο στα άτομα που θα διαχειριστούν το προτεινόμενο σύστημα. Το βάρος αυτού του σταδίου το επωμίζεται κυρίως η ομάδα της Επιχειρησιακής Έρευνας, γιατί είναι πιθανόν να προκύψουν προβλήματα τα οποία δεν είχαν προβλεφθεί εξαρχής.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ο κατεξοχήν χώρος εφαρμογής της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ο χώρος της οικονομίας. Έτσι στη βιομηχανία-παραγωγή απαιτείται λύση προβλημάτων που έχουν να κάνουν με τη χωροθέτηση εργοστασίου, προγραμματισμός παραγωγής ή προμηθειών, έλεγχος αποθεμάτων πρώτων υλών ή προϊόντων, έλεγχος ποιότητας, ανανέωση μηχανολογικού εξοπλισμού, εξισορρόπηση γραμμής παραγωγής. Στο εμπόριο : καθορισμός βέλτιστης σύνθεσης παραγωγής, βέλτιστη στρατηγική διαφημίσεως και τιμολόγησης προϊόντων, προγραμματισμός πωλήσεων, προγραμματισμός μεταφοράς και διανομής προϊόντων, προσδιορισμός θέσεως και αριθμού αποθηκών, σύνθεση μεταφορικού στόλου. Στα οικονομικά : χρηματοοικονομικός προγραμματισμός, καθορισμός πιστωτικής πολιτικής, προϋπολογισμός, βελτιστοποίηση χρηματοροών. Επίσης η Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιείται για ανάλυση και αξιολόγηση προσωπικού, ανάλυση αιτιών απουσίας, πρόληψη ατυχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Η Ανάλυση Αποφάσεων χωρίζεται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία επικεντρώνεται στη λήψη αποφάσεων των οποίων οι συνέπειες της εναλλαγής τους είναι γνωστές με ένα σημαντικό βαθμό βεβαιότητας. Αυτό το περιβάλλον λήψης αποφάσεων τυποποιείται ικανοποιητικά από μαθηματικά μοντέλα (γραμμικός προγραμματισμός, ακέραιος προγραμματισμός, μη γραμμικός προγραμματισμός) με αντικειμενικές συναρτήσεις που εξειδικεύουν τις εκτιμούμενες συνέπειες οποιουδήποτε συνδυασμού αποφάσεων.

Ωστόσο, συχνά πρέπει να ληφθούν αποφάσεις σε περιβάλλοντα που είναι γεμάτα αβεβαιότητα. Παραθέτουμε κάποια παραδείγματα :

1. Μια επιχείρηση εισάγει ένα νέο προϊόν στην αγορά. Ποια θα είναι η αντίδραση των πιθανών πελατών; Πόσο θα έπρεπε να παραχθεί; Θα έπρεπε το προϊόν να δοκιμαστεί σε μικρότερη κλίμακα πριν κατανεμηθεί πλήρως στις αγορά;
2. Μια οικονομική φίρμα επενδύει στις ασφάλειες. Ποιοι είναι οι τομείς της αγοράς και οι ατομικές ασφάλειες με τις καλύτερες προοπτικές; Προς τα πού κινείται η οικονομία; Τι συμβαίνει με τα επιτόκια; Πως θα έπρεπε αυτοί οι παράγοντες να επηρεάσουν τις αποφάσεις για επενδύσεις;
3. Σε περίπτωση που εταιρία φυσικού αερίου αποφασίσει αν πρέπει να γίνει γεώτρηση για φυσικό αέριο σε συγκεκριμένη τοποθεσία, θα πρέπει να διερευνηθεί, πόσο πιθανόν είναι να βρίσκεται φυσικό αέριο εκεί; Σε τι ποσότητα υπάρχει; Πόσο βαθιά μπορεί να βρίσκεται; Θα έπρεπε οι γεωλόγοι να ερευνήσουν το μέρος πριν τη γεώτρηση;

Αυτά είναι τα είδη λήψης αποφάσεων που αντιμετωπίζουν μεγάλη αβεβαιότητα και που η Ανάλυση Αποφάσεων καλείται να απαντήσει. Η Ανάλυση Αποφάσεων παρέχει ένα πλαίσιο και μια μεθοδολογία για ορθολογική λήψη αποφάσεων όταν τα αποτελέσματα είναι αβέβαια.

Υπάρχουν κάποιες ομοιότητες στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται από την Θεωρία Παιγνίων και αυτών της Ανάλυσης Αποφάσεων. Εντούτοις υπάρχουν επίσης και διαφορές εξαιτίας των διαφορετικών εφαρμογών για τις οποίες έχουν σχεδιαστεί.

Συχνά, μια ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί με την Ανάλυση Αποφάσεων είναι εάν πρέπει να πάρουμε την απαιτούμενη απόφαση άμεσα ή αν πρώτα θα κάνουμε μερικά τέστ για να μειώσουμε το επίπεδο αβεβαιότητας σχετικά με το αποτέλεσμα της απόφασης. Για παράδειγμα θα έπρεπε να ελέγξουμε πρώτα την αντίδραση του καταναλωτή σε ένα νέο προϊόν πριν πάρουμε την απόφαση ή θα έπρεπε να προχωρήσουμε κατευθείαν σε μεγάλη κλίμακα παραγωγής και προώθηση του προϊόντος. Ως εκ τούτου, η Ανάλυση Αποφάσεων διαιρεί την λήψη αποφάσεων μεταξύ των περιπτώσεων χωρίς πειραματισμό και σε αυτές με πειραματισμό.

1.1 ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η εταιρία GasHellenicέχει στην κατοχή της ένα κομμάτι γης στο οποίο ενδέχεται να υπάρχει φυσικό αέριο. Ένας σύμβουλος της εταιρίας με την ιδιότητα του γεωλόγου αναφέρει στο τμήμα μάνατζμεντ, ότι πιστεύει ότι η πιθανότητα ύπαρξης φυσικού αερίου είναι 1 προς 4.

Εξαιτίας αυτής της προοπτικής, μια άλλη εταιρία φυσικού αερίου προσφέρει 90.000€ για την αγορά αυτής της γης. Ωστόσο, η GasHelleniceίναι σε δίλημμα εάν πρέπει να κρατήσει τη γη με σκοπό να προβεί σε εξόρυξη ή να την πουλήσει. Το κόστος της εξόρυξης είναι 100.000 €. Αν βρεθεί φυσικό αέριο, τα αναμενόμενα έσοδα θα είναι 800.000 €. Έτσι η εταιρία θα πρέπει να αναμένει κέρδος 700.000 €, ενώ θα υποστεί ζημία 100.000 € αν δεν υπάρχουν αποθέματα φυσικού αερίου. Ο κάτωθι πίνακας συνοψίζει τα δεδομένα.

Πίνακας 1. Αναμενόμενα κέρδη της εταιρίας GasHellenic

Κατάσταση Γης	**Απόδοση**	
Εναλλακτικές	**Φυσικό αέριο**	**ΈλλειψηΦυσικού αερίου**
Εξόρυξη Φυσικού αερίου	€ 700,000	- € 100,000
Πώληση Γης	€ 90,000	€ 90,000
Πιθανότητα κατάστασης	1 προς 4	3 προς 4

Ωστόσο, πριν αποφασίσει αν προβεί στην εξόρυξη ή όχι, μιαν άλλη οπτική είναι να διεξάγει σεισμική έρευνα της γης για να αποκτήσει μια καλύτερη εκτίμηση της πιθανότητας της ύπαρξης φυσικού αερίου. Αυτή είναι η περίπτωση της απόφασης με πειραματισμό. Η εταιρία λειτουργεί χωρίς μεγάλο κεφάλαιο, που σημαίνει ότι η απώλεια 100.000 € θα ήταν αρκετά σοβαρή.

1.2 ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΧΩΡΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟ

Πριν αναζητήσουμε μια λύση στο αρχικό πρόβλημα της GasHellenicCo. θα σχηματοποιήσουμε ένα γενικό πλαίσιο για την λήψη αποφάσεων.

Με γενικούς όρους, ο λήπτης αποφάσεων πρέπει να επιλέξει μια δράση από ένα σύνολο πιθανών δράσεων. Το σύνολο περιέχει όλες τις εφικτές εναλλακτικές υπό θεώρηση για το πως θα προχωρήσουμε με το πρόβλημα που μας αφορά.

Αυτή η επιλογή της δράσης πρέπει να γίνει αντιμέτωπη με την αβεβαιότητα, επειδή το αποτέλεσμα θα επηρεαστεί από τυχαίους παράγοντες που βρίσκονται έξω από τον έλεγχο του λήπτη αποφάσεων. Αυτοί οι τυχαίοι παράγοντες προσδιορίζουν ποια κατάσταση θα προκύψει κατά τη διάρκεια που αναλαμβάνουμε δράση. Κάθε μια από αυτές τις καταστάσεις αναφέρεται σαν πιθανή κατάσταση της φύσης.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε μια ενδιαφέρουσα αναλογία μεταξύ του πλαισίου της ανάλυσης αποφάσεων και Παιγνίων δυο παικτών μηδενικού αθροίσματος που θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ο λήπτης αποφάσεων και η Φύση μπορούν να ιδωθούν ως δυο παίκτες ενός παιγνίου. Οι εναλλακτικές δράσεις και οι πιθανές καταστάσεις της φύσης μπορούν τότε να ιδωθούν σαν οι διαθέσιμες στρατηγικές για αυτούς τους παίκτες, όπου κάθε συνδυασμός στρατηγικών επιφέρει κάποια απόδοση στον παίκτη (τον λήπτη αποφάσεων). Από αυτή την οπτική γωνία το πλαίσιο της ανάλυσης αποφάσεων μπορεί να συνοψισθεί ως ακολούθως :

1. Ο λήπτης αποφάσεων χρειάζεται να επιλέξει μια από τις εναλλακτικές δράσεις.
2. Η Φύση τότε θα “επιλέξει” μια από τις πιθανές καταστάσεις της φύσης.
3. Κάθε συνδυασμός δράσης και κατάστασης της φύσης θα έχει αποτέλεσμα μια απόδοση, η οποία δίνεται σαν μια από τις εισόδους στον πίνακα αποδόσεων.
4. Αυτός ο πίνακας αποδόσεων θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί μια βέλτιστη δράση από τον λήπτη αποφάσεων σύμφωνα με το κατάλληλο κριτήριο.

Ωστόσο, αυτή η αναλογία με τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών διαρρηγνύεται σε ένα σημαντικό ζήτημα. Στην Θεωρία Παιγνίων, οι δυο παίκτες υποτίθεται ότι είναι ορθολογικοί και επιλέγουν τις στρατηγικές τους για να προωθήσουν την προσωπική τους ευημερία. Αυτή η περιγραφή σίγουρα ταιριάζει για τον λήπτη αποφάσεων αλλά σίγουρα όχι για την Φύση. Εν αντιθέσει, η Φύση τώρα είναι ένας παθητικός παίκτης που “επιλέγει” τις στρατηγικές τις με ένα τυχαίο τρόπο.

Ένα επιπλέον στοιχείο χρειάζεται να προστεθεί στο πλαίσιο της Ανάλυσης Αποφάσεων. Ο λήπτης αποφάσεων γενικά θα έχει κάποια πληροφορία που θα έπρεπε να λάβει υπόψη όσον αφορά τη σχετική πιθανότητα των δυνατών καταστάσεων της Φύσης. Μια τέτοια πληροφορία δύναται συχνά να μεταφραστεί σε μια κατανομή πιθανότητας, ενεργώντας σαν η κατάσταση της Φύσης να είναι μια τυχαία μεταβλητή, στην οποία περίπτωση η κατανομή αναφέρεται σαν priorκατανομή. Οι priorκατανομές είναι συχνά υποκείμενες της εμπειρίας ή της διαίσθησης ενός ατόμου. Οι πιθανότητες για τις αντίστοιχες καταστάσεις της Φύσης που παρέχονται από την priorκατανομή, καλούνται prior πιθανότητες.

Τυποποίηση του παραδείγματος σε αυτό το πλαίσιο όπως υποδηλώνεται στον Πίνακα 1, η GasHellenic έχει δυο πιθανές εναλλακτικές υπό θεώρηση : να προβεί στην εξόρυξη φυσικού αερίου ή να πουλήσει τη γη. Οι πιθανές καταστάσεις της Φύσης είναι αυτές όπου η γη περιέχει κοιτάσματα φυσικού αερίου ή αυτές που όχι.

Από τη στιγμή που ο γεωλόγος μας, έχει εκτιμήσει ότι υπάρχει 1 στις 4 πιθανότητες για φυσικό αέριο (άρα 3 στις 4 πιθανότητες να μην υπάρχει) οι priorπιθανότητες για τις δύο καταστάσεις της Φύσης είναι 0,25 και 0,75 αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, με την απόδοση σε μονάδες χιλιάδων ευρώ σε κέρδος ο πίνακας αποδόσεων μπορεί να αποκτηθεί άμεσα από τον πίνακα 1.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα αποδόσεων για να βρούμε την βέλτιστη δράση σύμφωνα με τα τρία κριτήρια που θα περιγραφούν παρακάτω.

Το MaximinΚριτήριο Απόδοσης

Αν πρόβλημα απόφασης του λήπτη αποφάσεων ειδωθεί σαν παίγνιο ενάντια στη Φύση, τότε η Θεωρία Παιγνίων θα μας καθοδηγούσε να επιλέξουμε την δράση σύμφωνα με το κριτήριο minimax.

MaximinΚριτήριο Απόδοσης: Για κάθε πιθανή δράση, βρες την ελάχιστη απόδοση πάνω σε όλες τις πιθανές καταστάσεις της Φύσης. Έπειτα, βρες την μέγιστη από αυτές τις ελάχιστες αποδόσεις. Επέλεξε την δράση τη οποίας η ελάχιστη απόδοση δίνει αυτό το μέγιστο.

Ο πίνακας του Excelόπως περιγράφεται στο Σχεδιάγραμμα 1, δείχνει την εφαρμογή αυτού του κριτηρίου στο παράδειγμα μας. Έτσι, από τη στιγμή που η ελάχιστη απόδοση για πώληση (90) είναι μεγαλύτερη από αυτή την εξαγωγή (-100), θα επιλεγεί η πρώτη εναλλακτική (πώληση της γης).

Το ορθολογικό για αυτό το κριτήριο είναι ότι παρέχει την καλύτερη εγγύηση της απόδοσης που θα αποκτηθεί. Αδιαφορώντας για το ποια πραγματική κατάσταση της Φύσης προκύπτει, η απόδοση για την πώληση της γης δεν μπορεί να είναι λιγότερη από 90, κάτι το οποίο παρέχει την καλύτερη διαθέσιμη εγγύηση.

Πίνακας 2. Πίνακας Απόδοσης για την Ανάλυση Αποφάσεων

	Κατάσταση Φύσης	
Εναλλακτικές	**Φυσικό αέριο**	**ΈλλειψηΦυσικού αερίου**
Εξόρυξη Φυσικού αερίου	700	- 100
Πώληση Γης	90	90
Prior Πιθανότητα	0,25	0,75

Σχεδιάγραμμα 1. Εφαρμογή του Maximin Κριτηρίου Απόδοσηςστον Πίνακα του Excel

	A	B	C	F	G	H	I
1	**Κριτήριο Maximin Απόδοσης για την Gas Hellenic**						
2							
3				**Κατάσταση της Φύσης**		**Ελάχιστο σε**	
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό αέριο**	**Έλλειψη Φυσικού αερίου**		**κάθε Σειρά**	
5		Εξόρυξη	700	-100		-100	
6		Πώληση	90	90		90	**Maximin**
7							
8							
9							

Έτσι, το κριτήριο παίρνει την πεσιμιστική οπτική, ότι ανεξάρτητα το ποια δράση επιλέγεται, η χειρότερη κατάσταση της Φύσης για αυτή τη δράση είναι πιθανόν να εμφανιστεί, επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνη την δράση η οποία παρέχει την καλύτερη απόδοση σε σχέση με την χειρότερη κατάσταση της Φύσης.

Αυτή η λογική είναι αρκετά έγκυρη, όταν κάποιος αγωνίζεται εναντίον ενός ορθολογικού και εχθρικού αντιπάλου. Ωστόσο, αυτό το κριτήριο δεν χρησιμοποιείται συχνά σε παίγνια ενάντια στη Φύση, επειδή είναι ένα εξαιρετικά συντηρητικό κριτήριο σε αυτό το πλαίσιο. Ουσιαστικά, αυτό υποθέτει ότι η Φύση είναι ένας συνειδητός αντίπαλος που θέλει να επιφέρει όση μεγαλύτερη ζημία είναι δυνατόν στον λήπτη αποφάσεων. Η Φύση δεν είναι ένας κακόβουλος αντίπαλος και ο λήπτης αποφάσεων δεν χρειάζεται επικεντρωθεί αποκλειστικά στην χειρότερη δυνατή απόδοση κάθε δράσης. Αυτό είναι ειδικά αληθινό, όταν η χείριστη δυνατή απόδοση μιας δράσης προέρχεται από μια σχετικά απίθανη κατάσταση της Φύσης. Έτσι, αυτό το κριτήριο κανονικά έχει ενδιαφέρον μόνο για έναν ιδιαίτερα επιφυλακτικό λήπτη αποφάσεων.

Το Κριτήριο Μέγιστης Πιθανότητας

Το επόμενο κριτήριο επικεντρώνεται στην πιο πιθανή κατάσταση της Φύσης, όπως συνοψίζεται παρακάτω.

Κριτήριο Μέγιστης Πιθανότητας: Ταυτοποίησε την πιο πιθανή κατάσταση της Φύσης (αυτή με την μέγιστη priorπιθανότητα). Για αυτή την κατάσταση, βρες την δράση με την μέγιστη απόδοση και επέλεξε αυτή τη δράση.

Εφαρμόζοντας αυτό το κριτήριο στο παράδειγμα, ο πίνακας 2 δείχνει ότι, η κατάσταση έλλειψης φυσικού αερίου έχει την μεγαλύτερη priorπιθανότητα. Στην στήλη "Έλλειψη Φυσικού αερίου", η εναλλακτική της πώλησης έχει την μέγιστη απόδοση, που σημαίνει ότι η επιλογή είναι η πώληση της γης.

Η γοητεία αυτού του κριτηρίου είναι ότι η πιο σημαντική κατάσταση της Φύσης είναι αυτή που είναι η πιο πιθανή. Επομένως, η επιλεχθείσα δράση είναι η καλύτερη για αυτήν την ιδιαίτερα σημαντική κατάσταση της Φύσης. Βασίζοντας την απόφαση στην υπόθεση ότι αυτή η κατάσταση της Φύσης θα εμφανιστεί, τείνει να δώσει μια καλύτερη ευκαιρία ενός επιθυμητού αποτελέσματος. Επιπλέον αυτό το κριτήριο δεν άπτεται αμφισβητήσιμων υποκειμενικών εκτιμήσεων των πιθανοτήτων των αντίστοιχων καταστάσεων της Φύσης.

Σχεδιάγραμμα 2. Εφαρμογή του Κριτηρίου Μέγιστης Πιθανότητας στον Πίνακα του Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Κριτήριο Μέγιστης Πιθανότητας για το Πρόβλημα της Gas Hellenic**						
2							
3				**Κατάσταση της Φύσης**			
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό αέριο**	**Έλλειψη Φυσικού αερίου**			
5		Εξόρυξη	700	-100			
6		Πώληση	90	90		**Maximum**	
7							
8							
9							
10		Prior Πιθανότητα	0,25	0,75			
11				**Maximum**			

Το κύριο μειονέκτημα αυτού του κριτηρίου είναι ότι αγνοεί ολοκληρωτικά πολλές σχετικές πληροφορίες. Η μοναδική κατάσταση της Φύσης που βρίσκεται υπό θεώρηση είναι η πιο πιθανή. Σε ένα πρόβλημα με πολλές πιθανές καταστάσεις της Φύσης, η πιθανότητα, της πιο πιθανής κατάστασης μπορεί να είναι πολύ μικρή, έτσι ώστε η επικέντρωση σε αυτήν την κατάσταση να είναι αδικαιολόγητη. Ακόμα και στο παράδειγμα όπου η priorπιθανότητα της κατάστασης "Έλλειψη Φυσικού αερίου" είναι 0,75, αυτό το κριτήριο αγνοεί την εξαιρετική ελκυστική απόδοση των 700 αν η εταιρία εξορύξει και βρει φυσικό αέριο. Σαν αποτέλεσμα το κριτήριο δεν επιτρέπει τον τζόγο, ανεξάρτητα το πόσο ελκυστικός μπορεί να είναι ο τζόγος.

Ο Κανόνας Απόφασης του Bayes

Το τρίτο μας κριτήριο, και το πιο συχνά επιλεγόμενο είναι "Ο Κανόνας Απόφασης του Bayes", που περιγράφεται κάτωθι.

Κριτήριο του Bayes: Χρησιμοποιώντας τις καλύτερες διαθέσιμες εκτιμήσεις των πιθανοτήτων των αντίστοιχων καταστάσεων της Φύσης, υπολόγισε την αναμενόμενη αξία της απόδοσης για καθεμιά από τις πιθανές δράσεις και επέλεξε την δράση με την μέγιστη αναμενόμενη απόδοση.

Για το παράδειγμα μας, αυτές οι αναμενόμενες αποδόσεις υπολογίζονται απευθείας από τον Πίνακα 2 ως ακολούθως:

Ε [απόδοση (εξόρυξης)] = 0,25 · (700) + 0,75 · (-100) = 100

Ε [απόδοση (πώλησης)] = 0,25 · (90) + 0,75 · (90) = 90

Αφού το 100 είναι μεγαλύτερο από το 90, η εναλλακτική λύση που επιλέγεται είναι η εξόρυξη για φυσικό αέριο.

Σημειώνουμε ότι αυτή η επιλογή αντιτίθεται με την επιλογή της πώλησης που παίρνεται υπό την εφαρμογή των προαναφερθέντων κριτηρίων.

Σχεδιάγραμμα 3. Εφαρμογή του Κανόνα Απόφασης του Bayes στον Πίνακα του Excel

	A	B	C	D	E	G	H
1	**Ο Κανόνας Απόφασης του Bayes στο πρόβλημα της Gas Hellenic**						
2							
3				**Κατάσταση της Φύσης**		**Αναμενόμενη**	
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό αέριο**	**Έλλειψη Φυσικού αερίου**		**Απόδοση**	
5		Εξόρυξη	700	-100		**100**	**Maximum**
6		Πώληση	90	90		**90**	
7							
8							
9							
10		Prior Πιθανότητα	0,25	0,75			

Το Σχεδιάγραμμα 3 δείχνει την εφαρμογή του Bayesστο Excelστο πρόβλημα μας. Η λέξη Maximumστο κελί Ι5 σημαίνει ότι η εναλλακτική της πώλησης στη γραμμή 5 θα έπρεπε να επιλεγεί επειδή έχει τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του κανόνα του Bayesείναι ότι αυτός ενσωματώνει όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες, συμπεριλαμβάνοντας όλες τις αποδόσεις και τις καλύτερες διαθέσιμες εκτιμήσεις των πιθανοτήτων των αντίστοιχων καταστάσεων της Φύσης.

Κάποιες φορές επιχειρηματολογείτε ότι αυτές οι εκτιμήσεις των πιθανοτήτων είναι σε μεγάλο βαθμό υποκειμενικές και έτσι είναι αρκετά αναξιόπιστες. Δεν υπάρχει ακριβής τρόπος πρόβλεψης του μέλλοντος και συνακόλουθα της μελλοντικής κατάστασης της Φύσης, ακόμη και με όρους πιθανοτήτων. Αυτή η προβληματική ενέχει κάποια εγκυρότητα. Η έλλειψη λογικής των εκτιμήσεων των πιθανοτήτων θα έπρεπε να αξιολογηθεί σε κάθε ατομική κατάσταση.

Παρόλα αυτά, κάτω από πολλές περιστάσεις, η παρελθοντική εμπειρία και τα τρέχοντα στοιχεία καθιστούν εφικτή την ανάπτυξη λογικών εκτιμήσεων των πιθανοτήτων. Επιπλέον, ο πειραματισμός συχνά θα μπορούσε να διεξαχθεί για την βελτίωση αυτών των εκτιμήσεων, όπως περιγράφεται παρακάτω. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον κανόνα του Bayesγια το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

Για να αξιολογήσουμε την επίδραση των πιθανοτήτων ανακολουθιών στις priorπιθανότητες είναι συχνά βοηθητικό η εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ ΤΟΥ BAYES

Η ανάλυση ευαισθησίας συχνά χρησιμοποιείται σε διάφορες εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας για την μελέτη της επίδρασης αν κάποιοι από τους αριθμούς που περικλείονται στο μαθηματικό μοντέλο δεν είναι σωστοί. Στην περίπτωση αυτή, το μαθηματικό μοντέλο, αναπαρίσταται από τον πίνακα αποδόσεων όπως φαίνεται στο σχεδιάγραμμα 3. Οι αριθμοί σε αυτόν τον πίνακα που είναι οι πιο αμφισβητήσιμοι είναι οι priorπιθανότητες στα κελιάC10 και D10. Θα επικεντρώσουμε την ανάλυση ευαισθησίας σε αυτούς τους αριθμούς, παρόλο που μια όμοια προσέγγιση θα μπορούσε να εφαρμοστεί στις αποδόσεις που δίνονται από τον πίνακα.

Το άθροισμα των δυο priorπιθανοτήτων πρέπει να ισούται με 1, έτσι ώστε αυξάνοντας μια από αυτές τις πιθανότητες αυτόματα μειώνεται η άλλη και αντίστροφα. Η διοίκηση της GasHellenicθεωρεί ότι οι πραγματικές δυνατότητες ύπαρξης φυσικού αερίου κυμαίνεται κάπου ανάμεσα στο 15% και 35%. Με άλλα λόγια η πραγματική priorπιθανότητα ύπαρξης φυσικού αερίου είναι πιθανόν να είναι ανάμεσα στο 0,15-0,35 έτσι ώστε η αντίστοιχη prior πιθανότητα η γη να μην περιέχει φυσικό αέριο να κυμαίνεται από 0,85 μέχρι 0,65.

Η ανάλυση ευαισθησίας ξεκινάει επανεφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayesδυο φορές, μια όταν η priorπιθανότητα για φυσικό αέριο είναι στο κατώτερο όριο της κύμανσης (0,15) και έπειτα όταν αυτό βρίσκεται στο ανώτερο όριο (0,35). Το σχεδιάγραμμα 4 δείχνει τα αποτελέσματα αυτής της πράξης. Όταν η prior πιθανότητα ύπαρξης φυσικού αερίου είναι μόνο 0,15, η απόφαση ταλαντεύεται στην πώληση της γης με ένα μεγάλο περιθώριο (μια αναμενόμενη απόδοση 90 έναντι μιας απόδοσης 20 για εξαγωγή). Ωστόσο, όταν αυτή η πιθανότητα είναι 0,35 , η απόφαση είναι η εξαγωγή με ένα περιθώριο εξίσου μεγάλο (αναμενόμενη απόδοση =180 έναντι μόνο 90 για την πώληση). Έτσι, η απόφαση είναι πολύ ευαίσθητη στην priorπιθανότηταγια φυσικό αέριο. Αυτή η ανάλυση ευαισθησίας έχει αποκαλύψει ότι είναι σημαντικό να κάνουμε όσο το δυνατόν περισσότερα για την καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της πιθανότητας ύπαρξης φυσικού αερίου.

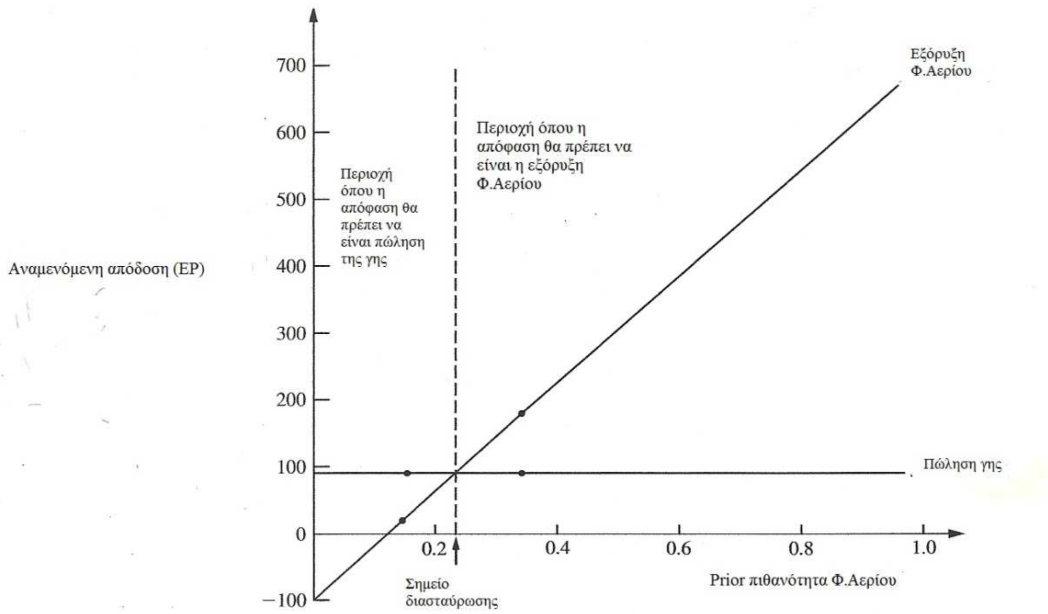
Έστω p= priorπιθανότητα, η αναμενόμενη απόδοση από τη εξόρυξη για κάθε pείναιE [Απόδοση (εξόρυξης)] = 700p – 100(1 –p) = 800p– 100.

Σχεδιάγραμμα 4. Εφαρμόζοντας την Ανάλυση Ευαισθησίας δοκιμάζοντας εναλλακτικές τιμές της priorπιθανότητας ύπαρξης φυσικού αερίου

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Ο Κανόνας Απόφασης του Bayes στο πρόβλημα της Gas Hellenic**								
2									
3				**Κατάσταση της Φύσης**				**Αναμενόμενη**	
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό αέριο**	**Έλλειψη Φυσικού αερίου**				**Απόδοση**	
5		Εξόρυξη	700	-100				**20**	
7		Πώληση	90	90				**90**	**Maximum**
7									
8									
9									
10		Prior Πιθανότητα	0,15	0,85					

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Ο Κανόνας Απόφασης του Bayes στο πρόβλημα της Gas Hellenic**								
2									
3				**Κατάσταση της Φύσης**				**Αναμενόμενη**	
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό αέριο**	**Έλλειψη Φυσικού αερίου**				**Απόδοση**	
5		Εξόρυξη	700	-100				**180**	**Maximum**
7		Πώληση	90	90				**90**	
7									
8									
9									
10		Prior Πιθανότητα	0,35	0,65					

Σχεδιάγραμμα 5. Γραφική Παράσταση του τρόπου με τον οποίο η αναμενόμενη απόδοση για κάθε εναλλακτική δράση μεταβάλλεται όταν η priorπιθανότητα ύπαρξης φυσικού αερίου αλλάζει για το πρώτο πρόβλημα της GasHellenic.



Η ευθεία στο σχήμα 5 δείχνει την γραφική παράσταση συναρτήσει του p, το οποίο είναι απλά η ευθεία που περνάει από δυο σημεία τα οποία δίνονται από τα κελιά C10 και H5 στο σχεδιάγραμμα 4. Αφού η απόδοση της πώλησης της γης είναι 90 για κάθε p, η ευθεία γραμμή στο σχήμα 5 δίνει την Ε[απόδοση(πώλησης)] συναρτήσει του p.

Το σημείο στο σχήμα 5 όπου οι δυο γραμμές τέμνονται είναι το σημείο τομής όπου η απόφαση μεταβαίνει από την μια εναλλακτική στην άλλη καθώς η priorπιθανότητα αυξάνεται. Για να βρούμε αυτό το σημείο παίρνουμε :

Ε[Απόδοση(εξόρυξης)] = Ε[Απόδοση(πώλησης)

800p – 100 = 90 ή

p = 190 / 800 = 0,2375

Συμπέρασμα: θα έπρεπε να πουλήσουμε την γη εάν $p < 0{,}2375$.

θα έπρεπε να προβούμε στη εξόρυξη φυσικού αερίου εάν $p > 0{,}2375$.

Ο ίδιος τύπος ανάλυσης μπορεί να εφαρμοστεί και για άλλα προβλήματα τα οποία έχουν περισσότερες από μια εναλλακτικές. Η κύρια διαφορά είναι ότι τώρα θα υπάρχουν περισσότερες από δυο γραμμές (μια για κάθε εναλλακτική) στην αντίστοιχη γραφική παράσταση. Ωστόσο, η κύρια γραμμή για οποιαδήποτε αξία της priorπιθανότητας ακόμη υποδηλώνει ποια εναλλακτική θα έπρεπε να επιλεγεί.

Επειδή η απόφαση της GasHellenicεξαρτάται έντονα από την πραγματική πιθανότητα ύπαρξης φυσικού αερίου, θα έπρεπε να διερευνήσουμε διεξοδικά την απόφαση διεξαγωγής σεισμικής έρευνας για την καλύτερη εκτίμηση της πιθανότητας. Παρακάτω εξετάζουμε αυτή την οπτική.

1.3 ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟ

Συχνά, ο επιπρόσθετος έλεγχος (πειραματισμός) μπορεί να γίνει για να βελτιωθούν οι πρωταρχικές εκτιμήσεις των πιθανοτήτων των αντίστοιχων καταστάσεων της Φύσης που προέρχονται από τις priorπιθανότητες. Αυτές οι βελτιωμένες εκτιμήσεις καλούνται posteriorπιθανότητες.

Εμείς πρώτα θα ανασυνθέσουμε το παράδειγμα της GasHellenic, ώστε να ενσωματώσουμε τον πειραματισμό, έπειτα θα περιγράψουμε πως εξάγουμε τις posteriorπιθανότητες και τέλος, συζητήσουμε εάν αξίζει τον κόπο η διεξαγωγή του πειραματισμού.

Συνεχίζοντας το Παράδειγμα

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια διαθέσιμη οπτική πριν την λήψη απόφασης είναι η διεξαγωγή σεισμικής έρευνας της γης για την καλύτερη εκτίμηση των πιθανοτήτων ύπαρξης του φυσικού αερίου. Το κόστος είναι 30.000 €.

Η σεισμική αξιολόγηση ενέχει σεισμική έρευνα η οποία υποδηλώνει αν η γεωλογική δομή είναι σύννομη για την παρουσία φυσικού αερίου. Εμείς θα διαιρέσουμε τα πιθανά ευρήματα της έρευνας στις ακόλουθες δυο κατηγορίες :

USS:Η ύπαρξη φυσικού αερίου είναι σχεδόν αδύνατη.

FSS : Η ύπαρξη φυσικού αερίου είναι σχεδόν σίγουρη.

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη εμπειρία, αν υπάρχει φυσικό αέριο, οι πιθανότητες των προηγούμενων ενδεχομένων είναι:

P(USS|Κατάσταση = Φυσικό αέριο) = 0,4, έτσι

P(FSS|Κατάσταση = Φυσικό αέριο) = 1- 0,4 = 0,6.

Ομοίως, εάν δεν υπάρχει φυσικό αέριο, τότε οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι

P(USS|Κατάσταση= Έλλειψη Φυσικού αερίου) = 0,8 έτσι

P(FSS|Κατάσταση= Έλλειψη Φυσικού αερίου) = 1 – 0,8 = 0,2.

Σύντομα θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα δεδομένα για να βρούμε τις posteriorπιθανότητες των αντίστοιχων καταστάσεων της Φύσης, δοθέντος ότι πραγματοποιήθηκε σεισμική έρευνα.

PosteriorΠιθανότητες

Μιλώντας τώρα με γενικούς όρους, έστω

n = ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων της Φύσης

P(Κατάσταση = κατάσταση i) = priorπιθανότητα ότι η πραγματική κατάσταση της Φύσης είναι η κατάσταση i, για i= 1,2,…, n.

Εύρημα = το εύρημα από τον πειραματισμό (τυχαία μεταβλητή)

Εύρημα j = μια πιθανή τιμή του ευρήματος

P(Κατάσταση = κατάσταση i| Εύρημα = εύρημα j) = posteriorπιθανότητα ότι η πραγματική κατάσταση της Φύσης είναι η κατάσταση i, δεδομένου ότι Εύρημα= εύρημα j, για j = 1,2,….,n.

Δοθέντος ότι P(Κατάσταση= κατάσταση i) και P(Εύρημα = εύρημα j|Κατάσταση= κατάστασηi), για i = 1,2,…, n, ποια είναι η P(Κατάσταση = κατάσταση i | Εύρημα = εύρημα j) ;

Αυτό το ερώτημα απαντάται συνδυάζοντας τους ακόλουθους τύπους από την θεωρία πιθανοτήτων:

P(Κατάσταση = κατάσταση i |Εύρημα = εύρημα j) =

$$\frac{\text{P(Κατάσταση= κατάσταση i, Εύρημα= εύρημα j)}}{\text{P(Εύρημα = εύρημα j)}}$$

$$\text{P(Εύρημα= εύρημα j)} = \sum_{k=1}^{n} \text{P(Κατάσταση= κατάσταση k, Εύρημα= εύρημα j)}$$

P(Κατάσταση= κατάσταση i, Εύρημα= εύρημα j) =

P(Εύρημα= εύρημα j) |Κατάσταση= κατάσταση i)P(Κατάσταση=κατάσταση i).

Ως εκ τούτου για κάθε i= 1,2,…, n, ο επιθυμητός τύπος για την αντίστοιχη posteriorπιθανότητα είναι (Τύπος του Bayes)

$$P(\text{Κατάσταση= κατάσταση i} \mid \text{Εύρημα= εύρημα j}) = \frac{P(\text{Εύρημα= εύρημα j}) \mid \text{Κατάσταση= κατάσταση i})P(\text{Κατάσταση=κατάσταση i})}{\sum_{k=1}^{n} P(\text{Εύρημα= εύρημα j}) \mid \text{Κατάσταση= κατάσταση k})P(\text{Κατάσταση=κατάσταση k})}$$

Τώρα ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα μας εφαρμόζοντας αυτόν τον τύπο.

Αν το εύρημα της σεισμικής έρευνας είναι USSτότε οι posteriorπιθανότητες είναι

P(Κατάσταση= Φυσικό αέριο| Εύρημα= USS)= $\frac{0.4(0.25)}{0.4(0.25)+0.8(0.75)} = \frac{1}{7}$,

P(Κατάσταση= Έλλειψη Φυσικού αερίου| Εύρημα= USS)= 1 - $\frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

Ομοίως, εάν η σεισμική έρευνα δώσει (FSS), τότε:

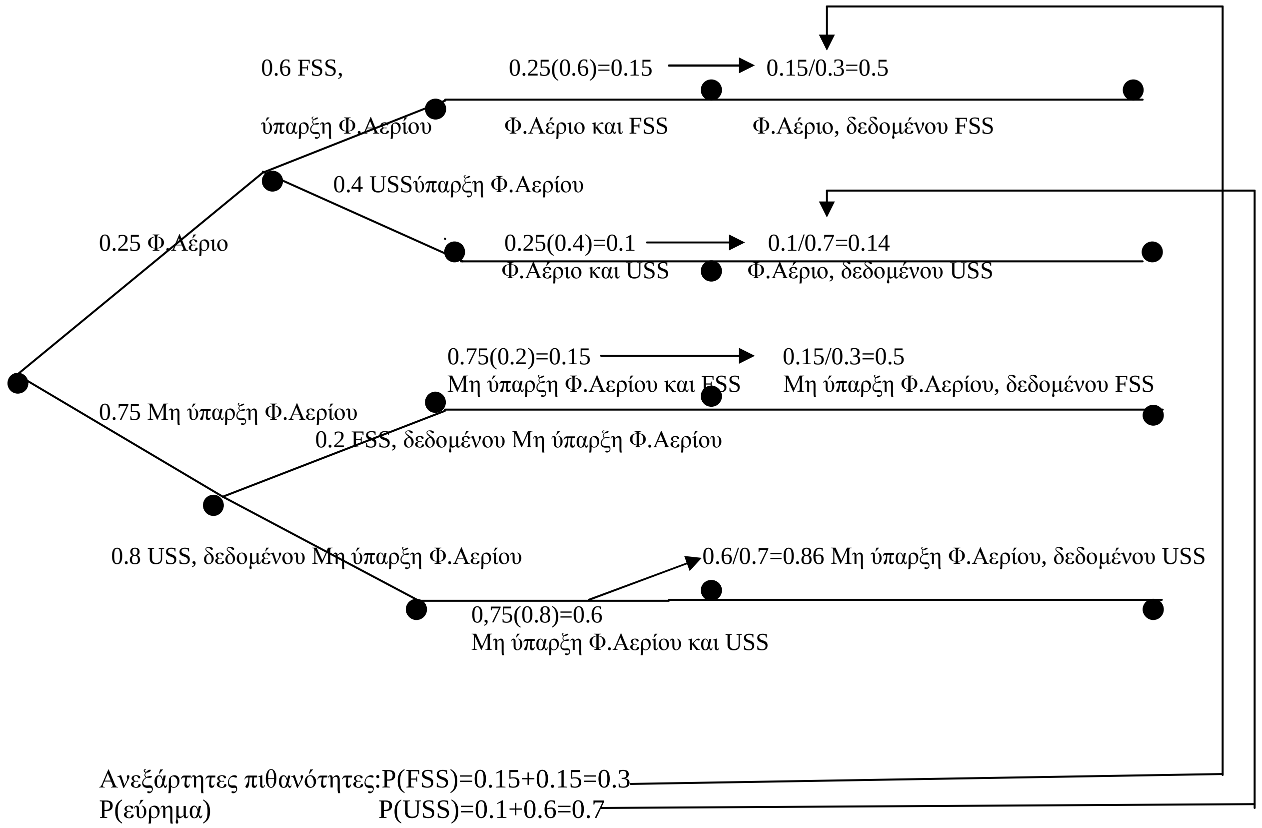
P(Κατάσταση= Φυσικό αέριο| Εύρημα= FSS)= $\frac{0.6(0.25)}{0.6(0.25)+0.2(0.75)} = \frac{1}{2}$,

P(Κατάσταση= Έλλειψη Φυσικού αερίου| Εύρημα= FSS)= 1- $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Το παρακάτω δενδροειδές διάγραμμα 6 πιθανοτήτων, δείχνει με κομψό τρόπο την οργάνωση αυτών των υπολογισμών με ένα διαισθητικό τρόπο. Οι priorπιθανότητες υπό συνθήκη στήλη είναι μέρη των εισαγόμενων δεδομένων του προβλήματος. Πολλαπλασιάζοντας κάθε πιθανότητα στην πρώτη στήλη με την πιθανότητα στη δεύτερη στήλη παίρνουμε την αντίστοιχη κοινή πιθανότητα στην τρίτη στήλη. Κάθε κοινή πιθανότητα τότε γίνεται ο αριθμητής στον υπολογισμό της αντίστοιχης posteriorπιθανότητας στην τέταρτη στήλη. Αθροίζοντας τις κοινές πιθανότητες με το ίδιο εύρημα (όπως δείχνεται στη βάση του διαγράμματος) μας παρέχεται ο παρανομαστής για κάθε posteriorπιθανότητα με αυτό το εύρημα.

Σχεδιάγραμμα 6. Διάγραμμα πιθανοτήτων για το πλήρες πρόβλημα της GasHellenic, που δείχνει όλες τις πιθανότητες που οδηγούν στον υπολογισμό κάθε posteriorπιθανότητα για την κατάσταση της φύσης δοθέντος του ευρήματος της σεισμικής έρευνας.

Prior Πιθανότητες P(κατάσταση)	Conditional Πιθανότητες P(εύρημα|κατάσταση	JointΠιθανότητες P(κατάσταση και εύρημα)	Posterior Πιθανότητες P(κατάσταση|εύρημα)



Μετά από αυτούς τους υπολογισμούς, ο κανόνας του Bayesμπορεί να εφαρμοστεί όπως και πριν, με τις posteriorπιθανότητες να αντικαθιστούν τις priorπιθανότητες. Πάλι, χρησιμοποιώντας τις αποδόσεις (σε μονάδες χιλιάδων ευρώ) από τον πίνακα 2 και αφαιρώντας το κόστος του πειραματισμού, αποκτούμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Αναμενόμενες αποδόσεις αν το εύρημα μας είναι (USS) :

$$E[\text{Απόδοση(εξόρυξης| Εύρημα = USS)}]= \frac{1}{7}(700)+ \frac{6}{7}(-100) - 30= - 15.7$$

$$E[\text{Απόδοση(πώλησης| Εύρημα = USS)}]= \frac{1}{7}(90)+ \frac{6}{7}(90) - 30= 60.$$

Αναμενόμενες αποδόσεις αν το εύρημα μας είναι (FSS) :

Ε[Απόδοση(εξόρυξης| Εύρημα = FSS)]= $\frac{1}{2}$ (700)+ $\frac{1}{2}$ (-100) – 30 = 270.

Ε[Απόδοση(πώλησης| Εύρημα = FSS)]= $\frac{1}{2}$ (90)+ $\frac{1}{2}$ (90) – 30 = 60.

ΠΙΝΑΚΑΣ3Η Βέλτιστη Πολιτική με πειραματισμό, υπό τον Κανόνα Απόφασης του Bayes.

Εύρημα από την Σεισμική Έρευνα	**Βέλτιστη Δράση**	**Αναμενόμενη Απόδοση Δίχως Κόστη της Έρευνας**	**Αναμενόμενη Απόδοση Με τα κόστη της Έρευνας**
USS	Πώληση γης	90	60
FSS	Εξόρυξη Φυσικού αερίου	300	270

Αφού το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη απόδοση, αυτά τα αποτελέσματα αποφέρουν την βέλτιστη πολιτική η οποία διακρίνεται στον πίνακα 3. Ωστόσο, αυτό που αυτή η ανάλυση δεν κάνει είναι ότι δεν απαντά αν αξίζει η δαπάνη των 30.000€ για την διεξαγωγή της σεισμικής έρευνας. Ίσως θα ήταν καλύτερα να ξεχάσουμε αυτή την μεγάλη δαπάνη και απλά να χρησιμοποιήσουμε τη βέλτιστη λύση χωρίς πειραματισμό. Παρακάτω εξετάζουμε αυτή την οπτική.

Η Αξία του Πειραματισμού

Πριν διεξάγουμε οποιοδήποτε, θα έπρεπε να προσδιορίσουμε την πιθανή του αξία. Εμείς θα παρουσιάσουμε δυο ολοκληρωμένες μεθόδους αξιολόγησης της πιθανής τους αξίας.

Η πρώτη μέθοδος υποθέτει ότι το πείραμα θα απομακρύνει όλη την αβεβαιότητα σχετικά με την πραγματική κατάσταση της φύσης, και τότε αυτή η μέθοδος εκτελεί έναν πολύ γρήγορο υπολογισμό της βελτίωσης της αναμενόμενης απόδοσης (αγνοώντας το κόστος του πειράματος). Αυτή η ποσότητα που καλείται αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφόρησης, παρέχει ένα άνω όριο της πιθανής αξίας του πειράματος. Εντούτοις, αν αυτό το άνω όριο είναι μικρότερο από το κόστος του πειράματος, το πείραμα θα έπρεπε να αποκλειστεί οριστικά.

Ωστόσο, αν το άνω όριο υπερβαίνει το όριο του πειράματος, τότε η δεύτερη μέθοδος θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί. Αυτή η μέθοδος υπολογίζει την πραγματική βελτίωση στην αναμενόμενη απόδοση (αγνοώντας το κόστος του πειραματισμού) που θα προκύψει από την διεξαγωγή του πειράματος. Συγκρίνοντας αυτή τη βελτίωση με το κόστος υποδηλώνεται αν το πείραμα θα έπρεπε να εκτελεστεί.

Αναμενόμενη Αξία Τέλειας Πληροφόρησης

Υποθέτουμε τώρα ότι το πείραμα θα μπορούσε στα σίγουρα να ταυτοποιήσει την πραγματική κατάσταση της φύσης, παρέχοντας έτσι τέλεια πληροφόρηση. Όποια κατάσταση της φύσης και αν ταυτοποιηθεί, εμείς φυσικά επιλέγουμε τη δράση με την μέγιστη απόδοση για αυτή την κατάσταση. Εμείς δεν ξέρουμε εκ των προτέρων ποια κατάσταση της φύσης θα ταυτοποιηθεί, έτσι ο υπολογισμός της αναμενόμενης απόδοσης με τέλεια πληροφόρηση (αγνοώντας το κόστος του πειράματος) απαιτεί ζύγιασμα της μέγιστης απόδοσης για κάθε κατάσταση της φύσης με την priorπιθανότητα για αυτή την κατάσταση της φύσης. Το σχεδιάγραμμα7δείχνει τον πίνακα του excelπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την οργάνωση και την παρουσίαση αυτού του υπολογισμού, χρησιμοποιώντας την εξίσωση που δίνεται από το κελί F13,

Αναμενόμενη απόδοση με τέλεια πληροφόρηση = 0,25(700) + 0,75(90)
= 242,5.

Σχεδιάγραμμα 7. Πίνακας του excel για την απόκτηση της αναμενόμενης απόδοσης με τέλεια πληροφόρηση εφαρμόζεται εδώ στο πρόβλημα της GasHellenic.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Αναμενόμενη Απόδοση με Τέλεια Πληροφόρηση για την Gas Hellenic**						
2							
3							
4		**Εναλλακτικές**	**Φυσικό Αέριο**	**Κατάσταση της Φύσης**			
5		Εξόρυξη	700	-100			
7		Πώληση	90	90			
7							
8							
9							
10		Prior Πιθανότητα	0,15	0,85			
11		Maximum Απόδοση	700	90			
12							
13		Αναμενόμενη Απόδοση με Τέλεια Πληροφόρηση= 242.5					

Έτσι αν η GasHellenic, θα μπορούσε να μάθει πριν επιλέξει την δράση της αν η γη περιέχει φυσικό αέριο, η αναμενόμενη απόδοση από τώρα (πριν την απόκτηση της πληροφορίας) θα ήταν 242,500 € (συμπεριλαμβανομένου το κόστος του πειράματος που παράγει την πληροφορία).

Για να αξιολογήσουμε αν το πείραμα θα έπρεπε να διεξαχθεί, θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ποσότητα για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφόρησης.

Η **αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφόρησης,** συντομογραφούμενη **EVPI**, υπολογίζεται ως :

EVPI = αναμενόμενη απόδοση με τέλεια πληροφόρηση – αναμενόμενη απόδοση χωρίς πειραματισμό.

Για το παράδειγμα μας βρήκαμε προηγουμένως ότι η αναμενόμενη απόδοση χωρίς πειραματισμό (με τον Κανόνα του Bayes) είναι 100. Ως εκ τούτου,

EVPI = 242,5 – 100 = 142,5.

Αφού το 142,5 ξεπερνά κατά πολύ το 30, το κόστος του πειραματισμού (σεισμική έρευνα), μπορεί να είναι προς το συμφέρον μας να προβούμε τη σεισμική έρευνα. Για να μάθουμε στα σίγουρα, πάμε στη δεύτερη μέθοδο αξιολόγησης του πιθανού πλεονεκτήματος του πειραματισμού.

Αναμενόμενη Αξία του Πειραματισμού

Αντί να αποκτήσουμε απλά ένα άνω όριο για την αναμενόμενη αύξηση της απόδοσης (συμπεριλαμβάνοντας το κόστος πειραματισμού) εξαιτίας της διεξαγωγής του πειράματος, θα κάνουμε κάτι με περισσότερη δουλειά για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη αύξηση άμεσα. Αυτή η ποσότητα καλείται αναμενόμενη αξία πειραματισμού.

Υπολογίζοντας αυτή την ποσότητα απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός της αναμενόμενης απόδοσης με πειραματισμό (περικλείοντας το κόστος πειραματισμού). Για να αποκτήσουμε την τελευταία ποσότητα απαιτείται όλη η διεργασία που περιγράφτηκε νωρίτερα για την εύρεση των posteriorπιθανοτήτων, η προκύπτουσα βέλτιστη πολιτική με πειραματισμό, και η αντίστοιχη αναμενόμενη απόδοση (συμπεριλαμβάνοντας το κόστος πειραματισμού) για κάθε πιθανό εύρημα από τον πειραματισμό. Τότε, για κάθε μια από αυτές τις αναμενόμενες αξίες χρειάζεται να σταθμιστούν από το αντίστοιχο εύρημα, που είναι :

Αναμενόμενη Απόδοση χωρίς Πειραματισμό = $\sum_j P$ (Εύρημα= εύρημα j)E[Απόδοση | Εύρημα = εύρημα j], όπου η άθροιση γίνεται για κάθε πιθανή τιμή του j.

Στο παράδειγμα μας τώρα, εμείς έχουμε κάνει ήδη όλη την εργασία για να αποκτήσουμε τους όρους στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Οι τιμές του P (Εύρημα= εύρημα j) για τα δυο πιθανά ευρήματα από τη σεισμική έρευνα (USS) και (FSS) υπολογίστηκαν στην βάση του δέντρου πιθανοτήτων στο διάγραμμα **6** ως :

E(απόδοση |Εύρημα= USS)= 90 ,

E(απόδοση |Εύρημα= FSS)= 270.

Με αυτούς τους αριθμούς ,

Η αναμενόμενη απόδοση με πειραματισμό= 0,7(90) + 0,3(300)= 153.

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την αναμενόμενη αξία του πειραματισμού. Η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού που συμβολίζεται με EVE, υπολογίζεται ως : EVE= αναμενόμενη απόδοση με πειραματισμό- αναμενόμενη απόδοση χωρίς πειραματισμό. Έτσι, η ποσότητα EVE ταυτοποιεί την πιθανή αξία του πειραματισμού. Για την GasHellenicτώρα έχουμε : EVE= 153-100

Εφόσον η αξία υπερβαίνει το 30, το κόστος της διεξαγωγής της σεισμικής έρευνας (σε μονάδες χιλιάδων ευρώ) το πείραμα θα έπρεπε να γίνει.

1.4 ΔΕΝΤΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Τα δέντρα αποφάσεων παρέχουν έναν χρήσιμο τρόπο οπτικοποιημένης έκθεσης του προβλήματος καθώς και την οργάνωση της υπολογιστικής εργασίας που ήδη περιγράφτηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Αυτά τα δέντρα είναι ιδιαίτερα βοηθητικά όταν πρέπει να ληφθεί μια αλληλουχία αποφάσεων.

Κατασκευάζοντας ένα Δέντρο Αποφάσεων

Το παράδειγμα μας περικλείει μια διαδοχή δυο αποφάσεων :

1. Θα έπρεπε να διεξαχθεί σεισμική έρευνα πριν την ανάληψη δράσης;
2. Ποια δράση (εξόρυξη φυσικού αερίου ή πώληση γης) θα έπρεπε να επιλεχθεί;

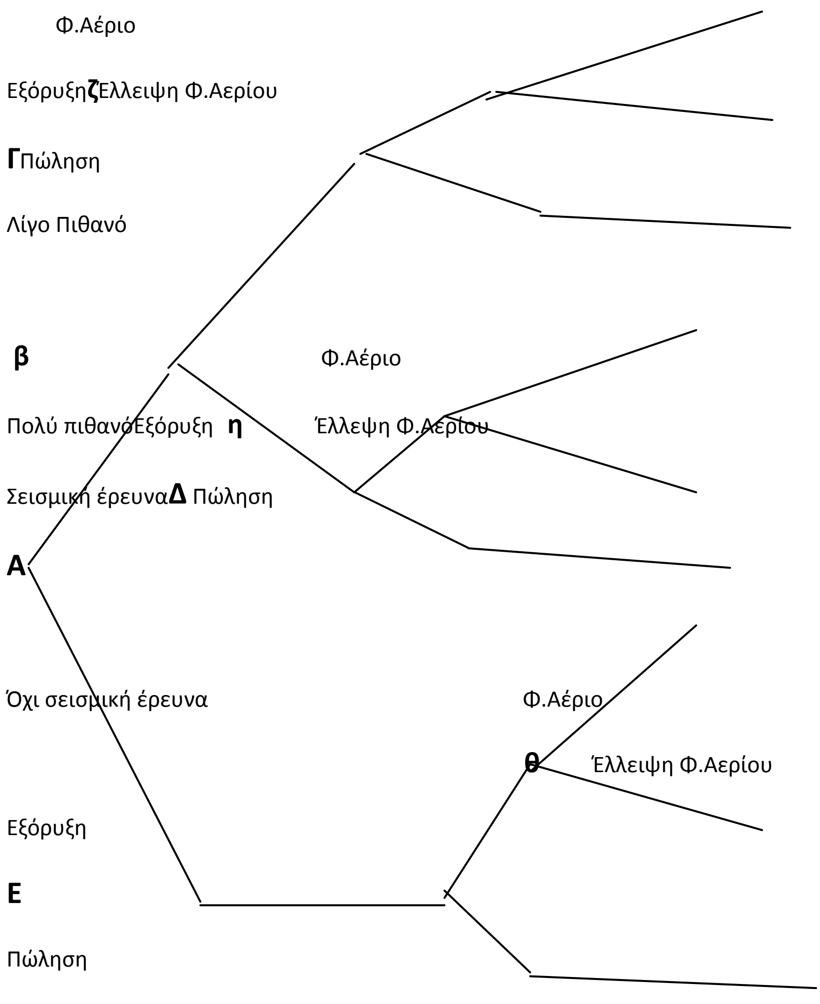
Το αντίστοιχο δέντρο αποφάσεων παρουσιάζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα 8.

Οι κόμβοι του δέντρου αναφέρονται ως διακλαδώσεις και οι πλευρές του ως κλαδιά.

Μια διακλάδωση απόφασης αναπαρίσταται από ένα τετράγωνο υποδηλώνοντας ότι πρέπει να ληφθεί μια απόφαση σε αυτό το σημείο κατά την διαδικασία. Μια διακλάδωση δυνατοτήτων αναπαρίσταται από έναν κύκλο, υποδηλώνοντας ότι ένα τυχαίο γεγονός εμφανίζεται σε αυτό το σημείο.

Έτσι, στο σχήμα 8 η πρώτη απόφαση αναπαρίσταται από μια απόφαση διακλάδωσης Α,η διακλάδωση β είναι μια δυνατότητα διακλάδωσης που αναπαριστά το τυχαίο γεγονός του αποτελέσματος της σεισμικής έρευνας. Τα δυο κλαδιά που εκπηγάζουν από την διακλάδωση β αντιπροσωπεύουν τα δυο πιθανά αποτελέσματα της έρευνας.

Σχεδιάγραμμα 8. Το δένδρο απόφασης (πριν συμπεριλάβει οποιονδήποτε αριθμό) για το πλήρες πρόβλημα της GasHellenic

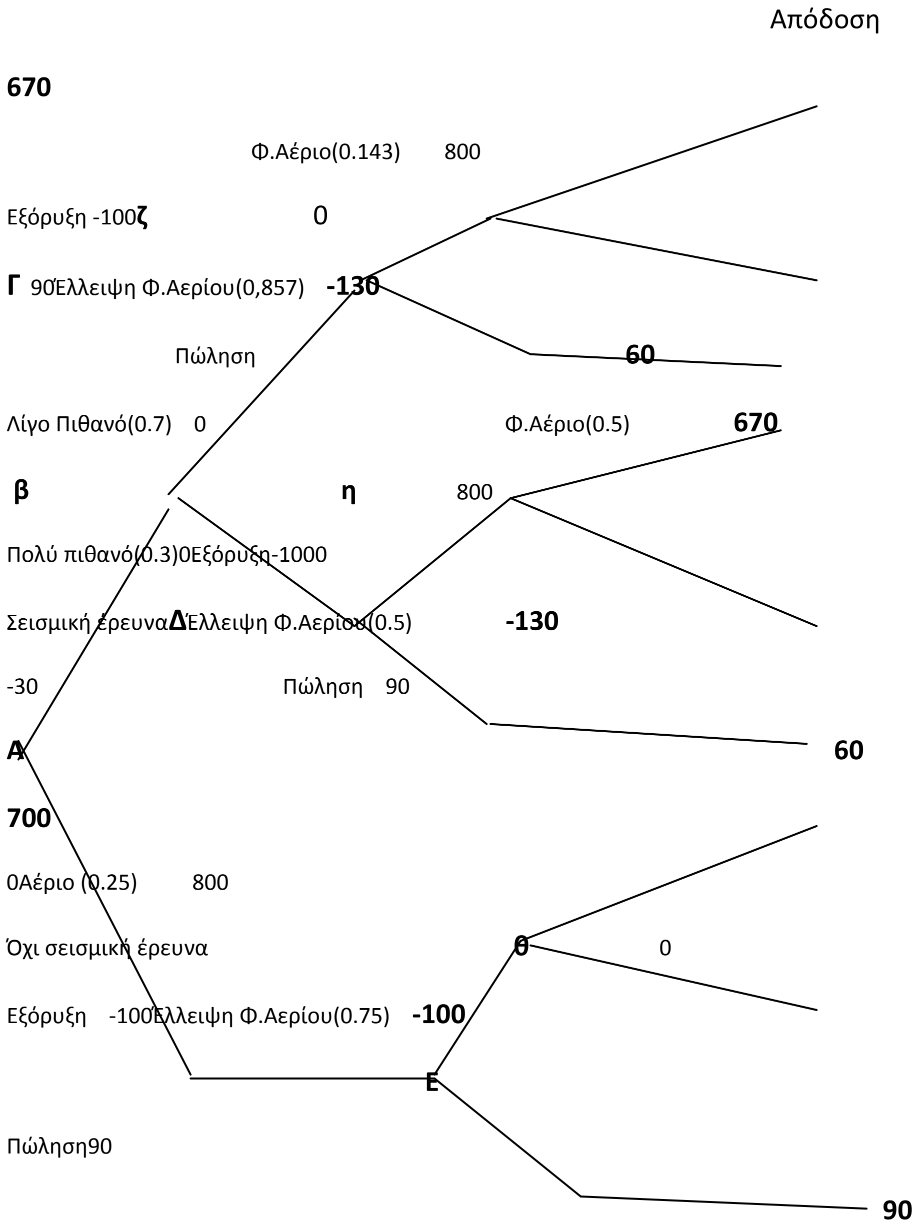


Έπειτα, ακολουθεί η δεύτερη απόφαση (διακλαδώσεις Γ, Δ και Ε) με τις δυο πιθανές επιλογές. Αν η απόφαση είναι να γίνει εξόρυξη φυσικού αερίου, τότε ερχόμαστε στην άλλη διακλάδωση, όπου τα δυο της κλαδιά αντιστοιχούν στις δυο πιθανές καταστάσεις της φύσης.

Σημειώνουμε ότι το μονοπάτι που ακολουθείται από την Α για να φτάσουμε σε τερματικό κλαδί (εκτός από το κλειδί στη βάση) προσδιορίζεται από τις ληφθείσες αποφάσεις και από τα τυχαία γεγονότα που είναι έξω από τον έλεγχο του λήπτη αποφάσεων.

Το επόμενο βήμα στην κατασκευή του δέντρου είναι η εισαγωγή αριθμών στο δέντρο όπως φαίνεται στο σχήμα 9. Οι αριθμοί κάτω ή πάνω από τα κλαδιά που δεν είναι σε παρενθέσεις είναι η ροή του χρήματος που εμφανίζεται σε αυτά τα κλαδιά. Για κάθε μονοπάτι στο δέντρο από τον κόμβο Α σε ένα τερματικό κλαδί, αυτοί οι αριθμοί προστίθενται για την απόκτηση της συνολικής απόδοσης. Το τελευταίο σύνολο αριθμών είναι οι πιθανότητες των τυχαίων γεγονότων. Ειδικότερα, αφού κάθε κλαδί εκπηγάζει από μια διακλάδωση δυνατοτήτων αντιπροσωπεύει ένα πιθανό τυχαίο γεγονός. Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος εμφανίζεται από την διακλάδωση που έχει εισαχθεί σε παρενθέσεις κατά μήκος του κλαδιού. Από τη διακλάδωση θ, οι πιθανότητες είναι οι priorπιθανότητες αυτών των καταστάσεων της φύσης, εφόσον καμιά σεισμική έρευνα δεν έχει διεξαχθεί για να αποκτήσουμε περισσότερες πληροφορίες για αυτή την περίπτωση. Ωστόσο, η ζ και η η οδηγούν στην απόφαση να γίνει η σεισμική έρευνα (και έπειτα να γίνει εξόρυξη). Ως εκ τούτου, οι πιθανότητες από αυτές τις διακλαδώσεις είναι οι posteriorπιθανότητες των καταστάσεων της φύσης δοθέντος του ευρήματος από την σεισμική έρευνα, όπου αυτοί οι αριθμοί δίνονται στο σχήμα 6. Τελικά, έχουμε δυο κλαδιά που εκπηγάζουν από την διακλάδωση β. οι αριθμοί εδώ είναι οι πιθανότητες από αυτά τα ευρήματα.

Σχεδιάγραμμα 9. Το δένδρο αποφάσεων μετά την απονομή των πιθανοτήτων των τυχαίων γεγονότων και των αποδόσεων



Παρουσιάζοντας την Ανάλυση

Έχοντας κατασκευάσει το δέντρο αποφάσεων, που περιλαμβάνει αυτούς τους αριθμούς, είμαστε έτοιμοι να αναλύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία.

1. Ξεκινάμε από την δεξιά μεριά του δέντρου απόφασης και κινούμαστε αριστερά μια στήλη την φορά. Για κάθε στήλη, αναπαρίσταται είτε το βήμα 2 είτε το 3, πράγμα που εξαρτάται από το αν οι διακλαδώσεις σε αυτήν την στήλη είναι δυνατοτήτων ή αποφάσεων.

2. Για κάθε διακλάδωση δυνατοτήτων, υπολόγισε την αναμενόμενη απόδοση της πολλαπλασιάζοντας την αναμενόμενη απόδοση κάθε κλαδιού με την πιθανότητα αυτού του κλαδιού και έπειτα άθροισε αυτά τα αποτελέσματα. Αντέγραψε αυτήν την αναμενόμενη απόδοση για κάθε διακλάδωση αποφάσεων δίπλα στην διακλάδωση αποφάσεων και θέσε αυτήν την ποσότητα να είναι η αναμενόμενη απόδοση για κάθε κλαδί που οδηγεί στην διακλάδωση.
3. Για κάθε διακλάδωση αποφάσεων, σύγκρινε τις αναμενόμενες αποδόσεις των κλαδιών της και επέλεξε την εναλλακτική της οποίας το κλαδί έχει την μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Για κάθε περίπτωση αντέγραψε την επιλογή στο δέντρο αποφάσεων εισάγοντας μια διπλή μπάρα σε κάθε απορριφθέν κλαδί.

Για να ξεκινήσουμε την διαδικασία θεωρούμε την πιο δεξιά στήλη διακλαδώσεων, δηλαδή τις διακλαδώσεις δυνατοτήτων ζ, η και θ. Εφαρμόζοντας το βήμα 2, οι αναμενόμενες αποδόσεις (ΕΡ) υπολογίζονται ως :

$$\text{ΕΡ} = \frac{1}{7}(670) + \frac{6}{7}(-130) = 15.7 \text{ για ζ}$$

$$\text{ΕΡ} = \frac{1}{2}(670) + \frac{1}{2}(-130) = 270 \text{ για η}$$

$$\text{ΕΡ} = \frac{1}{4}(700) + \frac{3}{4}(-100) = 100 \text{ για θ.}$$

Αυτές οι αναμενόμενες αποδόσεις τοποθετούνται κάτω από αυτές τις διακλαδώσεις , όπως φαίνεται στο σχήμα 10.

Έπειτα, μετακινούμε μια στήλη στα αριστερά, η οποί αποτελεί τις αποφάσεις διακλαδώσεων Γ, Δ και Ε. Η αναμενόμενη απόδοση για ένα κλαδί που οδηγεί σε μια διακλάδωση δυνατοτήτων τώρα καταγράφεται πάνω από την διακλάδωση δυνατοτήτων. Ως εκ τούτου, το βήμα 3 μπορεί να εφαρμοστεί ως εξής:

<u>Κλαδί Γ</u> : Η εναλλακτική της εξόρυξης έχει ΕΡ= -15,7

Η εναλλακτική της πώλησης έχει ΕΡ= 60.

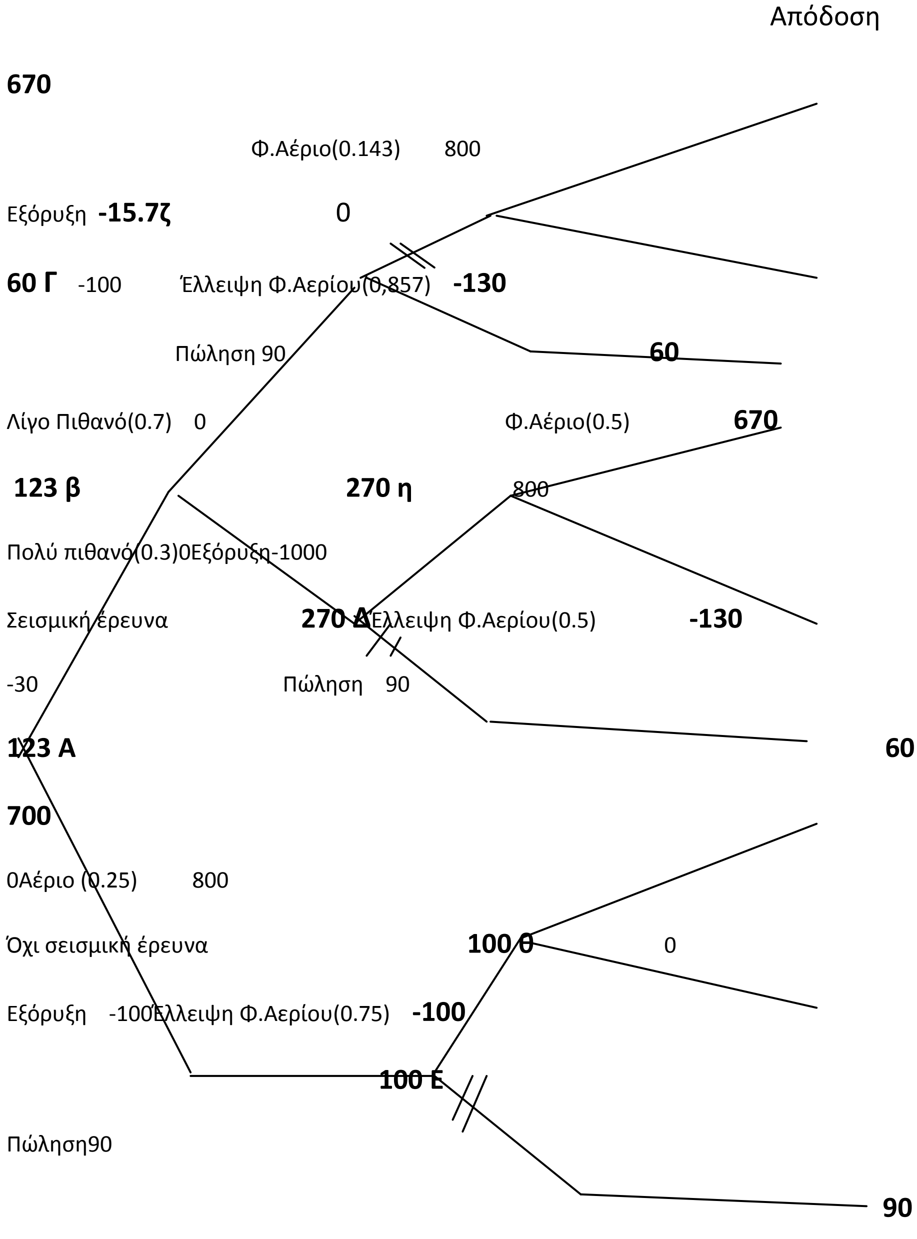
60>-15,7, έτσι επέλεξε την εναλλακτική της πώλησης.

<u>Κλαδί Δ</u> : Η εναλλακτική της εξόρυξης έχει ΕΡ= 270

Η εναλλακτική της πώλησης έχει ΕΡ=60.

270>60, άρα επέλεξε την εναλλακτική της εξόρυξης.

Σχεδιάγραμμα 10. Το τελικό δέντρο αποφάσεων το οποίο περιγράφει την ανάλυση για το πλήρες πρόβλημα της GasHellenic χρησιμοποιώντας νομισματικές αποδόσεις.



<u>Κλαδί Ε</u> : Η εναλλακτική της εξόρυξης έχει EP= 100

Η εναλλακτική της πώλησης έχει EP= 90.

100>90, έτσι επέλεξε την εναλλακτική της εξόρυξης.

Η αναμενόμενη απόδοση για κάθε επιλεγμένη εναλλακτική τώρα θα έπρεπε να καταγραφεί πάνω στον κόμβο απόφασης, όπως φαίνεται στο σχήμα 10. Η επιλεγμένη εναλλακτική επίσης υποδηλώνεται εισάγοντας μια διπλή παύλα σε κάθε απορριφθέν κλαδί.

Έπειτα μετακινώντας μια ακόμη στήλη στα αριστερά, μας φέρνει στην διακλάδωση β. αφού αυτή είναι η διακλάδωση δυνατοτήτων, το βήμα 2 της διαδικασίας απαιτείται να εφαρμοστεί. Η αναμενόμενη απόδοση για κάθε ένα από τα κλαδιά της καταγράφεται πάνω στην διακλάδωση απόφασης. Ως εκ τούτου, η αναμενόμενη απόδοση είναι :

EP= 0.7(60) + 0.3(270)= 123, για την β, όπως καταγράφεται στο σχήμα 10.

Τελικά κινούμαστε αριστερά στην διακλάδωση Α, που είναι αποφάσεων. Εφαρμόζοντας το τρίτο βήμα

Διακλάδωση Α : το να γίνει σεισμική έρευνα έχει EP= 123

το να μην γίνει σεισμική έρευνα έχει EP= 100.

123>100, έτσι επιλέγουμε να γίνει σεισμική έρευνα.

Αυτή η αναμενόμενη απόδοση του 123 θα καταγραφεί πάνω στην διακλάδωση και μια διπλή μπάρα εισάγεται για να δηλώσει το απορριφθέν κλαδί.

Αυτή η διαδικασία έχει μετακινηθεί από τα δεξιά προς τα αριστερά για ανάλυση. Ωστόσο, έχοντας ολοκληρώσει το δέντρο αποφάσεων με αυτόν τον τρόπο, ο λήπτης αποφάσεων τώρα μπορεί να διαβάσει το δέντρο από τα δεξιά για να δει την πραγματική εξέλιξη των γεγονότων. Οι διπλές μπάρες έχουν αποκλείσει τα ανεπιθύμητα μονοπάτια. Συνεπώς, δεδομένου των αποδόσεων για τα τελικά αποτελέσματα όπως φαίνονται στην δεξιά πλευρά, ο Κανόνας Απόφασης του Bayes λέει να ακολουθήσουμε μόνο τα ανοικτά μονοπάτια από τα αριστερά προς τα δεξιά για να επιτύχουμε την μεγαλύτερη πιθανή αναμενόμενη απόδοση.

Ακολουθώντας τα ανοιχτά μονοπάτια από τα αριστερά προς τα δεξιά στο σχήμα 10, οδηγούμαστε στην ακόλουθη βέλτιστη πολιτική, σύμφωνα με τον κανόνατου Bayes.

Βέλτιστη πολιτική:

Κάνε την σεισμική έρευνα .

Αν το αποτέλεσμα έχει πολύ μικρή πιθανότητα, πούλησε την γη.

Αν το αποτέλεσμα έχει μεγάλη πιθανότητα, προχώρησε σε εξόρυξη.

Η αναμενόμενη απόδοση (συμπεριλαμβανομένου το κόστος της σεισμικής έρευνας) είναι 123 (123.000 €).

Αυτή η (μοναδική) βέλτιστη λύση φυσικά είναι η ίδια όπως αυτή που αποκτιέται σε προηγούμενη ενότητα χωρίς το πλεονέκτημα του δέντρου απόφασης.

Για κάθε δέντρο αποφάσεων, αυτή η προς τα πίσω αναγωγική διαδικασία πάντα θα οδηγεί στην βέλτιστη πολιτική εφόσον υπολογιστούν οι πιθανότητες για τα κλαδιά που εκπηγάζουν από μια διακλάδωση πιθανοτήτων.

1.5 ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ως εδώ, όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes, έχουμε υποθέσει ότι η αναμενόμενη απόδοση με νομισματικού όρους είναι το κατάλληλο μέτρο των συνεπειών της ανάληψης μιας δράσης. Ωστόσο, σε πολλές καταστάσεις αυτή η υπόθεση είναι ακατάλληλη.

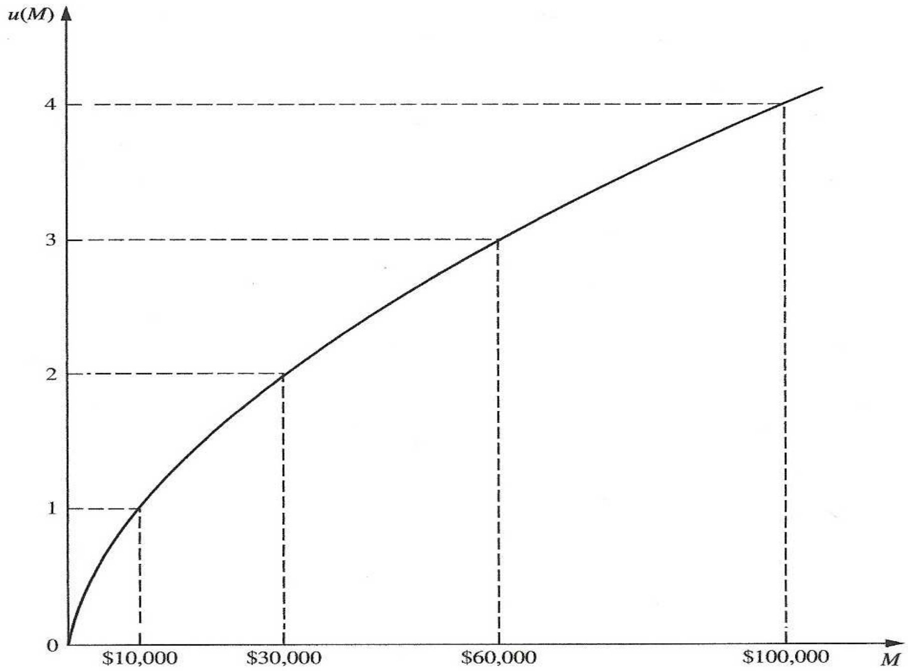
Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι σε ένα άτομο προσφέρεται η επιλογή (1) δεχόμενοι μια 50:50 δυνατότητα κέρδους 100.000 € ή τίποτα ή (2) απολαβής 40.000€ με βεβαιότητα. Πολλοί άνθρωποι θα προτιμήσουν τα 40.000 ευρώακόμη και αν η αναμενόμενη απόδοση στα 50:50 δυνατότητα κέρδους 100.000 € είναι 50.000€. μια εταιρία μπορεί να είναι απρόθυμη να επενδύσει ένα μεγάλο ποσό χρημάτων σε ένα νέο προϊόν ακόμη και όταν το αναμενόμενο κέρδος είναι ουσιαστικό εάν υπάρχει ένα ρίσκο απώλειας της επένδυσης της και ως εκ τούτου να χρεοκοπήσει. Οι άνθρωποι αγοράζουν ασφάλεια παρόλο που είναι μια φτωχή επένδυση από την άποψη της αναμενόμενης απόδοσης.

Εν τούτοις αυτά τα παραδείγματα δεν καθιστούν άκυρο τον κανόνα του Bayesαπό την στιγμή που υπάρχει τρόπος μετασχηματισμού των νομισματικών αξιών στην κατάλληλη κλίμακα που αντανακλά τις προτιμήσεις του λήπτη αποφάσεων. Αυτή η κλίμακα καλείται συνάρτηση χρησιμότητας για χρήματα.

Συνάρτηση Χρησιμότητας για Χρήματα

Το σχήμα 11 δείχνει μια τυπική συνάρτηση χρησιμότητας u(M) για χρήματα M. Αυτό υποδεικνύει ότι ένα άτομο έχοντας αυτή την συνάρτηση χρησιμότητας αξιολογεί διπλάσια τα 30.000 € σχετικά με τα 10.000 € και τα 100.000 € διπλάσια σε σχέση με τα 30.000 €. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η ύψιστη προτεραιότητα των αναγκών ενός προσώπου θα καλυφθεί από τα πρώτα 10.000 €. Έχοντας αυτή την μειούμενη κλίση της συνάρτησης καθώς το ποσό των χρημάτων αυξάνει, παρουσιάζεται σε εμάς σαν να έχει μια οριακά μειούμενη χρησιμότητα για χρήματα. Ένα τέτοιο άτομο αναφέρεται ως risk-averse.

Σχεδιάγραμμα 11. Μια τυπική συνάρτηση χρησιμότητας για χρήματα, όπου u(M) είναι η χρησιμότητα απόκτησης μιας ποσότητας χρημάτων Μ.



Ωστόσο, δεν έχουν όλα τα άτομα μια οριακά μειούμενη χρησιμότητα για χρήματα. Κάποιοι άνθρωποι είναι riskseekersαντί για risk-averse και πορεύονται στη ζωή τους ψάχνοντας για το «μεγάλο αποτέλεσμα». Η κλίση της συνάρτησης χρησιμότητας τους αυξάνει καθώς το ποσό των χρημάτων αυξάνει και έτσι έχουν μια οριακά αυξητική συνάρτηση χρησιμότητας για χρήματα.

Η ενδιάμεση κατάσταση είναι αυτή των risk-neutral ατόμων, τα οποία εκτιμούν τα χρήματα στην ονομαστική τους αξία. Μια τέτοια χρησιμότητα ενός ατόμου για χρήματα είναι απλά αναλογική στο ποσό των χρημάτων που περικλείονται. Παρόλο που κάποιοι άνθρωποι εμφανίζονται να είναι risk-neutralόταν περιλαμβάνονται μικρά χρηματικά ποσά, είναι ασυνήθιστο να είναι πραγματικά risk-neutral με πολύ μεγάλα ποσά.

Είναι επίσης πιθανόν να επιδεικνύουν ένα μείγμα αυτό των συμπεριφορών. Για παράδειγμα, ένα άτομο μπορεί να είναι ουσιαστικά risk-neutralμε μικρά ποσά, μετά να γίνεται risk-seekerμε μέτρια ποσά και μετά να παλινδρομεί σε συμπεριφορές risk-averse με μεγάλα ποσά. Επιπλέον, η στάση κάποιου προς το ρίσκο μπορεί να μεταστρέφεται στον χρόνο εξαρτώμενοι από διάφορες περιστάσεις.

Η στάση ενός ατόμου προς το ρίσκο μπορεί επίσης να είναι διαφορετική όταν ασχολείται με τα προσωπικά οικονομικά κάποιου από το να παίρνει αποφάσεις για το συμφέρον κάποιου οργανισμού. Για παράδειγμα οι Managersμιας μεγάλης επιχείρησης χρειάζεται να θεωρήσουν τις περιστάσεις της εταιρίας και τη συλλογική φιλοσοφία της ανώτατης διεύθυνσης για τον προσδιορισμό της κατάλληλης στάσης προς το ρίσκο όταν παίρνουν διοικητικές αποφάσεις.

Το γεγονός ότι διαφορετικοί άνθρωποι έχουν διαφορετικές συναρτήσεις χρησιμότητας για χρήματα, έχει μια σημαντική συνέπεια για την λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα. Όταν η συνάρτηση χρησιμότητας ενσωματώνεται σε μια προσέγγιση ανάλυσης αποφάσεων για ένα πρόβλημα, αυτή η συνάρτηση χρησιμότητας πρέπει να κατασκευασθεί ώστε να ταιριάζει με τις προτιμήσεις και τις αξίες του λήπτη αποφάσεων.

Το κλειδί στην κατασκευή μιας συνάρτησης χρησιμότητας που να εναρμονίζεται με τον λήπτη της απόφασης είναι η κάτωθι θεμελιώδη ιδιότητα των συναρτήσεων χρησιμότητας.

Θεμελιώδη Ιδιότητα

Υπό τις υποθέσεις της θεωρίας χρησιμότητας, η συνάρτηση χρησιμότητας ενός ατόμου έχει την ιδιότητα ότι το άτομο που πρόκειται να λάβει μια απόφαση είναι αδιάφορο μεταξύ δυο εναλλακτικών πορειών δράσης αν οι δυο εναλλακτικές έχουν την ίδια αναμενόμενη χρησιμότητα.

Για την παρουσίαση υποθέτουμε ότι το άτομο έχει την συνάρτηση χρησιμότητας που απεικονίζεται στο σχήμα 11. Για τα περαιτέρω υποθέτουμε ότι στο άτομο προσφέρεται η ακόλουθη ευκαιρία.

<u>Προσφορά</u>: Μια ευκαιρία να αποκτήσει είτε 100.000€ (Χρησιμότητα= 4) με πιθανότητα p ή τίποτα (χρησιμότητα= 0) με πιθανότητα (1-p). Έτσι,

Ε (χρησιμότητα)= 4p, για αυτή την προσφορά.

Ως εκ τούτου, για κάθε από τα ακόλουθα τρία ζευγάρια εναλλακτικών, το άτομο είναι αδιάφορο μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης εναλλακτικής:

1. Η προφορά με p= 0,25 [Ε (χρησιμότητα)= 1] ή σίγουρη απόκτηση 10.000€ (χρησιμότητα= 1)
2. Η προφορά με p= 0,5 [Ε (χρησιμότητα)= 2] ή σίγουρη απόκτηση 30.000€ (χρησιμότητα= 2)

3. Η προφορά με p= 0,75 [E (χρησιμότητα)= 3] ή σίγουρη απόκτηση 60.000€ (χρησιμότητα= 3)

Αυτό το παράδειγμα επίσης παρουσιάζει έναν τρόπο με τον οποίο η συνάρτηση χρησιμότητας του ατόμου μπορεί να κατασκευασθεί σε πρώτη φάση. Στο άτομο θα γίνονταν η ίδια υποθετική προσφορά για να αποκτήσει είτε ένα μεγάλο ποσό χρημάτων (για παράδειγμα 100.000€) με πιθανότητα ρή τίποτα. Τότε για κάθε από τα λίγα χαμηλότερα ποσά χρημάτων (για παράδειγμα 10.000€, 30.000€ και 60.000€), θα ζητούνται από το άτομο να επιλέξει μια τιμή του ρθα τον έκανε αδιάφορο μεταξύ της προσφοράς και της σίγουρης απόκτησης αυτού του ποσού χρημάτων. Η χρησιμότητα του χαμηλότερου ποσού χρημάτων τότε είναι p φορές η χρησιμότητα του μεγάλου ποσού.

Η κλίμακα της συνάρτησης χρησιμότητας είναι άσχετη. Είναι μόνο οι σχετικές αξίες των χρησιμοτήτων που έχουν σημασία. Όλες οι χρησιμότητες μπορούν να πολλαπλασιαστούν με οποιαδήποτε θετική σταθερά χωρίς να επηρεάζουν ποια εναλλακτική πορεία δράσης θα έχει την μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα.

Συνοψίζοντας τον βασικό ρόλο των συναρτήσεων χρησιμότητας στην ανάλυση αποφάσεων έχουμε:

Όταν η συνάρτηση χρησιμότητας του ατόμου χρησιμοποιείται στην μέτρηση των σχετικών αξιών των διάφορων πιθανών αποτελεσμάτων, ο κανόνας του Bayesαντικαθιστά τις αποδόσεις των αντίστοιχων χρησιμοτήτων. Ως εκ τούτου η βέλτιστη δράση (η σειρά δράσεων) είναι αυτή που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητα.

Εφαρμόζοντας την Θεωρία Χρησιμότητας στοΠρόβλημα της GasHellenic

Όπως προαναφέρθηκε η εταιρία GasHellenicλειτουργούσε χωρίς μεγάλο κεφάλαιο και μια απώλεια των 100.000€ θα ήταν αρκετά σοβαρή. Ο (αρχικός) ιδιοκτήτης της εταιρίας έχει ήδη βυθιστεί στα χρέη για να συνεχίσει. Το χειρότερο σενάριο θα ήταν να δαπανήσει 30.000€ για σεισμική έρευνα και να χάσει ακόμα 100.000€ προβαίνοντας σε εξόρυξη όταν το φυσικό αέριο είναι ανύπαρκτο. Το σενάριο αυτό δεν οδηγούσε την εταιρία σε χρεοκοπία σε αυτό το σημείο, αλλά σίγουρα θα την άφηνε σε αρκετά δεινή οικονομική θέση.

Από την άλλη, το να βρεθεί φυσικό αέριο είναι μια εξαιρετική προοπτική, καθώς τα κέρδη των 700.000€ θα βοηθούσαν την εταιρία να ορθοποδήσει οικονομικά.

Κατά την εφαρμογή της συνάρτησης χρησιμότητας για χρήματα του ιδιοκτήτη (λήπτη της απόφασης) στο πρόβλημα όπως περιγράφτηκε στα σχήματα 1και 3,είναι απαραίτητο να αναγνωριστούν οι χρησιμότητες για όλες τις πιθανές νομισματικές αποδόσεις. Αυτές οι πιθανές αποδόσεις και οι αντίστοιχες χρησιμότητες δίνονται στον πίνακα 4. Θα συζητήσουμε λοιπόν πως αυτές αποκτήθηκαν αυτές οι χρησιμότητες.

Αρχικά δομώντας την συνάρτηση χρησιμότητας, είναι φυσικό να αφήσουμε την χρησιμότητα των μηδενικών χρημάτων να είναι μηδέν, έτσι u(0)= 0. Το επόμενο βήμα είναι να σκεφτούμε το χειρότερο σενάριο και το καλύτερο σενάριο και έπειτα να απαντήσουμε το παρακάτω ερώτημα.

Πίνακας4 χρησιμότητες για το πρόβλημα της GasHellenic

Νομισματικές Αποδόσεις	Χρησιμότητα
-130	-150
-100	-105
60	60
90	90
670	580
700	600

Υποθέστε ότι έχετε μόνο τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές. Εναλλακτική 1 είναι να μην κάνετε τίποτα (Απόδοση και χρησιμότητα= 0). Εναλλακτική 2 είναι να έχετε μια πιθανότητα ρμιας απόδοσης των 700 και μια πιθανότητα 1 – ρμιας απόδοσης των -130 (απώλεια των 130). Ποια αξία του ρσας αφήνει αδιάφορο μεταξύ των δύο εναλλακτικών; Η επιλογή του λήπτη απόφασης: p= 1 / 5.

Εάν συνεχίσουμε να αφήνουμε το u(M) να σημαίνει την χρησιμότητα μιας νομισματικής απόδοσης του M, αυτή η επιλογή του ρσημαίνει ότι

Η τιμήείτε του u(-130) η u(700) μπορεί να τεθεί αυθαιρέτως (εφόσον μόνο ότι το πρώτο είναι αρνητικό και το δεύτερο θετικό) για να φτιάξει την κλίμακα της συνάρτησης χρησιμότητας. Επιλέγοντας u(-130) = -150 (μια βολική επιλογή καθώς θα κάνει το u(M) περίπου ίσο με το M όταν το M είναι κοντά στο μηδέν 0), αυτή η εξίσωση τότε δίνει u(700)= 600.

Για να προσδιορίσουμε το u(-100), γίνεται μια επιλογή του p, η οποία κάνει τον λήπτη απόφασης αδιάφορο μεταξύ μιας απόδοσης του -130 με πιθανότητα ρή μια σίγουρη απόδοση -100. Η επιλογή είναι p= 0,7 , έτσι

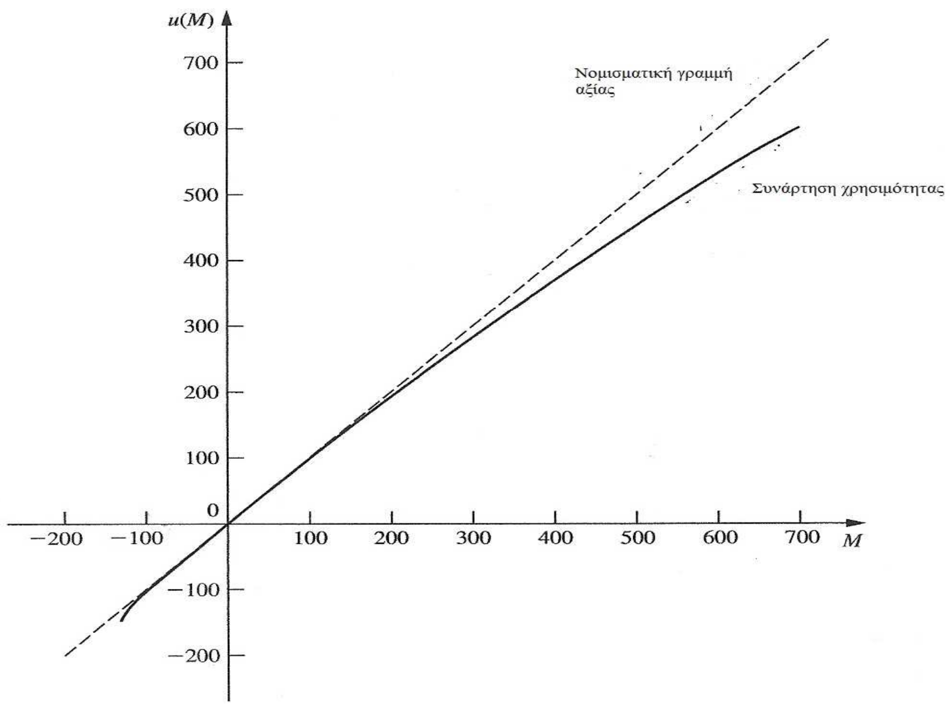
u(-100) = pu(-130)= 0,7(-150)= -105.

Για να αποκτήσουμε u(90), μια τιμή του ρεπιλέγεται, η οποία κάνει τον λήπτη απόφασης αδιάφορο μεταξύ μιας απόδοσης των 700 με πιθανότητα ρή σίγουρα αποκτώντας μια απόδοση 90. Η τιμή που επιλέχθηκε είναι p= 0,15, έτσι

u(90) = pu(700)= 0,15(600)= 90

Σε αυτό το σημείο, σχηματίζεται μια ελαφριά καμπύλη μεταξύ του u(-130), u(-100), u(90) και u(700) για να αποκτήσουμε την συνάρτηση χρησιμότητας για τον λήπτη αποφάσεων όπως φαίνεται στο σχήμα 12. Οι τιμές σε αυτήν την καμπύλη στο Μ= 60 και Μ=670 παρέχουν τις αντίστοιχες χρησιμότητες, u(60)= 60 και u(670)= 580, οι οποίες συμπληρώνουν την λίστα χρησιμοτήτων, όπως δίνεται στην δεξιά στήλη του πίνακα 4. Εν αντιθέσει, η διακεκομμένη γραμμή που είναι σχεδιασμένη σε γωνία 45^0 στο σχήμα 12 δείχνει την νομισματική αξία Μ της ποσότητας των χρημάτων Μ. Αυτή η διακεκομμένη γραμμή μας παρέχει τις αξίες των αποδόσεων που χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στις προηγούμενες ενότητες. Επισημαίνουμε πως το u(M) ουσιαστικά εξισώνεται με Μ για μικρές τιμές (θετικές ή αρνητικές) του Μ, και τότε πως το u(M) σταδιακά αποκλίνει από το Μ για μεγαλύτερες τιμές του Μ. αυτό είναι σύνηθες ενός ατόμου risk-averse.

Σχεδιάγραμμα 12. Η συνάρτηση χρησιμότητας για χρήματα του ιδιοκτήτη της GasHellenic.



Εκ φύσεως, ο ιδιοκτήτης της εταιρίας GasHellenic τείνει να είναι risk-seeker. Ωστόσο, οι δύσκολες οικονομικές καταστάσεις αυτής της εταιρίας, την οποία αυτός θέλει οπωσδήποτε να την κρατήσει αξιόπιστη, τον έχει οδηγήσει να υιοθετήσει μια μετριοπαθή risk-aversεστάση στην αντιμετώπιση των τρεχουσών αποφάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Θεωρία Παιγνίων είναι η μαθηματική θεωρία που πραγματεύεται και προσπαθεί να μοντελοποιήσει καταστάσεις μεταξύ αλληλοεπιδρώντων οντοτήτων (άτομα, επιχειρήσεις, κράτη κτλ), που λειτουργούν ορθολογικά και ο καθένας επιδιώκει την μεγιστοποίηση της ωφέλειας του. Με άλλα λόγια, στόχος της είναι η ανάλυση των συγκρούσεων που προκύπτουν μεταξύ οντοτήτων που συμπεριφέρονται στρατηγικά και προσβλέπουν στη βέλτιστη απόφαση.

Η μεθοδολογία και τα αναλυτικά εργαλεία της θεωρίας παιγνίων αναπτύχθηκαν κατά βάση από τον John von Neumann στο διάστημα 1928-1941, παρόλο που η έννοια του παιγνίου ήταν γνωστή από πιο πριν, με αποκορύφωμα την συγγραφή του βιβλίου «TheoryofGamesandEconomicBehaviour», το οποίο συνέγραψε με τον Oskar Morgenstern και συμπυκνώνει εργασία χρόνων.

Ο κύριος λόγος που ώθησε τον Neumann στην ενασχόληση με τη θεωρία αυτή, ήταν το ζωηρό ενδιαφέρον του για τα οικονομικά και η προσπάθεια ανάπτυξης ενός αυστηρού και συγκροτημένου συστήματος για τα οικονομικά που θα ήταν καθολικά αποδεκτό από τους οικονομολόγους. Θεωρούσε επίσης, ότι η Θεωρία Παιγνίων παρείχε το κατάλληλο εννοιολογικό και αναλυτικό πλαίσιο για την ερμηνεία της οικονομικής συμπεριφοράς.

Έτσι το θεμελιώδες πρόβλημα της Θεωρίας Παιγνίων όπως διατυπώθηκε από τον Von Neumann είναι: Έστω οι παίκτες P_1, P_2,…P_n παίζουν δοθέν παίγνιο G, πως πρέπει ο τυχόν παίκτης P_i (i=1,2,…,n) να ενεργήσει, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την συνάρτηση χρησιμότητας του; Όταν λέμε παίγνιο εννοούμε ένα σύνολο κανόνων που διέπουν το παίξιμο. Το πιο βασικό αξίωμα της Θεωρίας Παιγνίου είναι η ορθολογικότητα των παικτών, με την έννοια ότι κάθε παίκτης ενεργεί ορθολογικά ξέροντας επιπλέον ότι και οι υπόλοιποι παίκτες ενεργούν ορθολογικά.

Ακόμη τα παίγνια κατηγοριοποιούνται με βάση διάφορα χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος στα οποία το άθροισμα των ζημιών και των κερδών των παικτών στο τέλος του παιχνιδιού ισούται με μηδέν. Μια άλλη σημαντική ταξινόμηση των παιγνίων ανάλογα με το αν υπάρχουν συμφωνίες ή συνεννοήσεις μεταξύ των παικτών είναι τα (μη) συνεργατικά παίγνια, που ορίστηκαν στην κύρια εργασία τον Neumann στη Θεωρία Παιγνίων. Άλλες σημαντικές κατηγορίες παιγνίων είναι τα παίγνια πινάκων, όπου έχουμε δύο παίκτες, ο καθένας από τους οποίους έχει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών, παίγνια σε στρατηγική μορφή, παίγνια πινάκων με μεικτές στρατηγικές, καθώς και ακολουθιακά παίγνια όπου οι αποφάσεις δεν λαμβάνονται μια φορά και για πάντα αλλά παίρνονται διαδοχικά και τα κέρδη αποκομίζονται μόνο μετά από μια ολόκληρη ακολουθία αποφάσεων.

Μετά τον Neumann η Θεωρία Παιγνίων εμπλουτίστηκε και από άλλους μαθηματικούς δίνοντας βαθύτερο περιεχόμενο στη θεωρία και διευρύνοντας το πεδίο εφαρμογών της. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η σημαντική συνεισφορά του JohnNash, όπου μεταξύ άλλων εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας σε ένα παίγνιο. Περιγραφικά λοιπόν, σε ένα παίγνιο έχουμε ισορροπία κατά Nash, όταν κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να μετακινηθεί από μία στρατηγική, δοθέντος ότι οι υπόλοιποι παίκτες εμμένουν στη στρατηγική που επέλεξαν.

Η Θεωρία Παιγνίων σήμερα είναι ένας γοργά αναπτυσσόμενος κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών με αναπάντεχες εφαρμογές που εκτείνονται από τα οικονομικά και τις πολιτικές επιστήμες μέχρι το Δίκαιο, τη Διπλωματία και τις Δημοπρασίες. Εμείς στην παρούσα διπλωματική θα επικεντρωθούμε στην εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στην Οικονομική Επιστήμη.

Πιο συγκεκριμένα, αν και η Θεωρία Παιγνίων αντιμετωπίζεται από αρκετούς ως παρακλάδι των Οικονομικών, στην πραγματικότητα τα μοντέλα της σε σχέση με τα οικονομικά παρουσιάζουν κάποιες ομοιότητες και διαφορές. Όσον αφορά τις ομοιότητες μεταξύ τους και στα δυο, οι παίκτες είναι εκείνοι που λαμβάνουν τις αποφάσεις καθώς και ότι η συμπεριφορά των παικτών στη λήψη αποφάσεων καθορίζεται από τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας (ωφέλειας) που μπορούν να αποκτήσουν οι παίκτες από τις διάφορες καταστάσεις που μπορεί να περιέλθει το παίγνιο. Από την άλλη, βασική διαφορά και χαρακτηριστικό της Θεωρίας Παιγνίων είναι ότι οι παίκτες κατά την λήψη αποφάσεων λαμβάνουν υπόψη τις δυνατές επιλογές των υπολοίπων και ότι η έννοια της ισορροπίας είναι μια κατάσταση από την οποία κανείς παίκτης δεν έχει συμφέρον να απομακρυνθεί μονομερώς ενώ στα οικονομικά μοντέλα η ισορροπία αποσκοπεί στο προσδιορισμό τιμών που επιφέρουν γενική ικανοποίηση της αγοράς. Επιπλέον, ενώ στα οικονομικά μοντέλα αποδεχόμαστε το γεγονός ότι κάποια εξωτερική δύναμη μελετά την αγορά αποσκοπώντας στη γενική ευημερία, στη Θεωρία Παιγνίων η κατάσταση ρυθμίζεται εσωτερικά από τους παίκτες, των οποίων η συμπεριφορά καθορίζεται εφόσον μελετήσουν διεξοδικά τις κινήσεις των υπολοίπων.

2.1 ΠΑΙΓΝΙΑ- ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΥΟ ΑΤΟΜΩΝ

Είναι γεγονός ότι, σε πολλές περιπτώσεις ο λήπτης απόφασης δεν είναι ο μοναδικός ο οποίος θα μπορεί να επιλέξει την καλύτερη δυνατή επιλογή από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών, ώστε να βελτιστοποιήσει ένα προκαθορισμένο κριτήριο επιλογής, αλλά η «ευημερία» του εξαρτάται επίσης και από το ποια αποτελέσματα προκύπτουν από τις επιλογές των άλλων, δηλαδή, από τον παράγοντα της αμοιβαίας αλληλεξάρτησης. Προβλήματα στην διοίκηση επιχειρήσεων, στα οποία δημιουργούνται καταστάσεις ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης, προκύπτουν διότι υπάρχουν δύο ή και περισσότεροι λήπτες αποφάσεων. Η μεθοδολογία λοιπόν της θεωρίας παιγνίων χρησιμοποιείται στη λήψη αποφάσεων για να περιγράψει τέτοιου είδους ανταγωνισμό ή σύγκρουση και να δώσει απάντηση στα αντίστοιχα προβλήματα.

Ως παίγνιο επομένως, θεωρείται η κατάσταση εκείνη , κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενα ενδιαφέροντα επιλέγουν τρόπους ενέργειας που δημιουργούν συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης. Τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά ενός παιγνίου σε στρατηγική μορφή είναι το σύνολο των παικτών από το οποίο αποτελείται, το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών, στρατηγικών που αντιστοιχούν σε κάθε παίκτη και τέλος για κάθε αποτέλεσμα ή συνδυασμό στρατηγικών υπάρχει μια απόδοση για τον κάθε παίκτη.

Η ανάλυση ενός παιγνίου δύο ατόμων μέσα από το παράδειγμα, γνωστό ως δίλημμα του φυλακισμένου, θα μας βοηθήσει αρχικά ώστε να δοθεί αμέσως μετά ο ορισμός του παιγνίου υπό την μορφή πινάκων. Γενικά, τα παίγνια-πίνακες πρόκειται για πεπερασμένα παίγνια στα οποία το σύνολο των παικτών και τα σύνολο των επιλογών τους είναι πεπερασμένα.

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Το δίλημμα του φυλακισμένου αποτελεί το πιο κλασικό και παράλληλα το πιο ευρέως αναλυόμενο παίγνιο για την εισαγωγή στις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας παιγνίων. Αυτό το παίγνιο- πίνακα αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου δυο άτομα που έχουν συλληφθεί και κατηγορούνται ότι έχουν διαπράξει μια ληστεία, τους παρέχεται η επιλογή κατά την ανάκριση να ομολογήσουν ή να σιωπήσουν. Σε περίπτωση όμως που ο ένας ομολογήσει και ο άλλος δεν ομολογήσει, αυτός που θα μιλήσει δεν θα πάει φυλακή, ενώ αυτός που δεν θα ομολογήσει θα καταδικαστεί σε ποινή φυλάκισης 10 ετών. Αν ομολογήσουν και οι δύο τότε η ποινή θα είναι 5 έτη φυλάκισης και τέλος, αν κανένας του δεν ομολογήσει τότε επιβάλλεται και στους δυο ένας χρόνος φυλάκισης.

Αυτό το παίγνιο-πίνακα μας δείχνει ότι υπάρχουν δύο παίκτες με το ίδιο σύνολο στρατηγικής { σιωπή, ομολογία }. Οι αποδόσεις δίνονται από διατεταγμένα ζεύγη (a, b) , όπου aη απόδοση του παίκτη 1 και bη απόδοση του παίκτη 2.

Πίνακας 2.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Παίκτης	P_2		
	Στρατηγική	Σιωπή	Ομολογία
P_1	Σιωπή	(-1, -1)	(-10, 0)
	Ομολογία	(0,-10)	(-5, -5)

Από τον πίνακα αυτό αναδεικνύονται κάποια χαρακτηριστικά που αφορούν την στρατηγική των παικτών :

1. Συμφέρον και για τους δύο παίκτες είναι η άρνηση της κατηγορίας αφού ο χρόνος φυλάκισης είναι μόνο 1 χρόνος.
2. Δεδομένου ότι ένας μείνει σιωπηλός, συμφέρει στον άλλον παίκτη η ομολογία.

Παρόλο που η πρόταση 1 φαντάζει η πιο «λογική», η μη συνεργατική μορφή του παιγνίου (υποτίθεται ότι οι κατηγορούμενοι είναι απομονωμένοι σε διαφορετικά δωμάτια κατά την διαδικασία της ανάκρισης χωρίς να υπάρχει δυνατότητα επικοινωνίας) καθώς και οι αξιωματικές παροχές της θεωρίας που συνίστανται στην ορθολογικότητα των παικτών, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη ηθικοί και αξιακοί κώδικες (αν και θα μπορούσαν με κάποιο τρόπο να ενσωματωθούν στις συναρτήσεις χρησιμότητας), επιβάλλουν στους παίκτες την στρατηγική της ομολογίας, που προκύπτει εύκολα από την μελέτη του πίνακα. Ένας από τους παίκτες επιλέγει στρατηγική με μοναδικό κριτήριο την ελαχιστοποίηση του χρόνου φυλάκισης. Αν ο άλλος παίκτης επιλέξει την ομολογία, ο παίκτης μας θα επιλέξει και αυτός την ομολογία που επιφέρει 5 χρόνια φυλάκισης, ενώ αν σιωπούσε η ποινή θα ήταν 10 χρόνια. Αν ο δεύτερος παίκτης επέλεγε την σιωπή, τότε ο πρώτος θα επέλεγε την ομολογία πάλι, γιατί επιφέρει μηδενικό χρόνο φυλάκισης. Άρα σε κάθε περίπτωση, η ορθολογικότητα των δύο παικτών σε συνδυασμό με την αλληλεξάρτηση των συνεπειών της επιλογής στρατηγικής από τους παίκτες, απαιτεί να ακολουθήσουν και οι δύο την στρατηγική της ομολογίας. Αυτή είναι και η λύση του παιγνίου.

Γενικεύοντας, τώρα παίγνιο δύο παικτών (παίγνιο- πίνακα), είναι μια συγκρουσιακή κατάσταση στην οποία συμμετέχουν δύο παίκτες που ονομάζονται P_1 και P_2, ώστε:

1. Ο P_1 έχει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών $S_1 = \{σ_1, σ_2, \ldots, σ_n\}$με n στοιχεία και ο P_2 έχει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών $S_2 = \{ω_1, ω_2, \ldots, ω_m\}$με m στοιχεία.
2. Οι πραγματικές συναρτήσεις u_1 $(σ_i, ω_j)$ και u_2 $(σ_i ω_j)$ είναι οι αποδόσεις των παικτών όταν ο παίκτης 1 ακολουθήσει την στρατηγική $σ_i$και ο P_2 ακολουθήσει την $ω_j$.

Το παίγνιο εκτυλίσσεται ως εξής : σε μια δεδομένη χρονική στιγμή οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές ταυτόχρονα, ο P_1επιλέγει $σ_i \in S_1$ και ο P_2 επιλέγει $ω_j \in S_2$και στην επόμενη φάση τους όπου απονέμονται οι προκύπτουσες αποδόσεις : στον P_1απονέμεται απόδοση u_1 $(σ_i, ω_j)$ και στον P_2 , u_2 $(σ_i ω_j)$.

Σε παίγνια πίνακα είναι συνηθισμένο να αναπαριστούμε τις αποδόσεις των παικτών με πίνακες Α και Β. Αν θέσουμε $α_{ij} = u_1(σ_i, ω_j)$και $b_{ij} = u_2$ $(σ_i ω_j)$ τότε οι αποδόσεις του P_1είναι ο πίνακας $A = [α_{ij}]$ και του P_2 ο πίνακας $B = [b_{ij}]$, οι οποίοι δεδομένων των διαστάσεων των συνόλων στρατηγικής είναι nxm πίνακες.

Πιο εύληπτα ακόμη, θα μπορούσαμε να παραστήσουμε το παίγνιο πινάκων δυο ατόμων στην γενική του μορφή ως εξής:

Πίνακας 2.2 Παίγνιο δύο Προσώπων

Παίκτης	P_2				
	Στρατηγική	$ω_1$	$ω_2$	….	$ω_m$
P_1	$σ_1$	$(α_{11}, b_{11})$	$(α_{12}, b_{12})$	….	$(α_{1m}, b_{1m})$
	$σ_2$	$(α_{21}, b_{21})$	$(α_{22}, b_{22})$	….	$(α_{2m}, b_{2m})$
	….	….	….	….	….
	$σ_n$	$(α_{n1}, b_{n1})$	$(α_{n2}, b_{n2})$		$(α_{nm}, b_{nm})$

Στο παίγνιο δίλημμα του φυλακισμένου ουσιαστικά η λύση του παιγνίου προέκυψε από την απόρριψη της στρατηγικής (σιωπή) που έδινε την μικρότερη απόδοση σε σχέση με την εναλλακτική ανεξάρτητα από την στρατηγική που θα επέλεγε ο αντίπαλος. Αυτή η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση αυτού του απλού παιγνίου ονομάζεται μέθοδος διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών και μπορεί να εφαρμοστεί και σε παίγνια-πίνακα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας.

Ορισμός : Λέμε ότι η στρατηγική $\sigma_i \in S_1$ του P_1 κυριαρχεί στη στρατηγική $\sigma_j \in S_1$ του P_1 αν ισχύει : $u_1(\sigma_i, \omega) \geq u_1(\sigma_j, \omega)$, $\forall \omega \in S_2$.

Η στρατηγική σ_iτου P_1κυριαρχεί αυστηρά στην στρατηγική $\sigma_j \in S_1$ του P_1 αν $u_1(\sigma_i, \omega) > u_1(\sigma_j, \omega)$, $\forall \omega \in S_2$.

Το ακόλουθο παίγνιο επιλύεται με την μέθοδο της διαδοχικής απαλοιφής των κυριαρχημένων στρατηγικών.

Πίνακας 2.3

Παίκτης	P_2			
	Στρατηγική	L	C	R
P_1	T	(1, 0)	(1, 3)	(3, 0)
	M	(0, 2)	(0, 1)	(3, 0)
	B	(0, 2)	(2, 4)	(5, 3)

Αναλύοντας τον πίνακα του παιγνίου βλέπουμε ότι η στρατηγική C κυριαρχεί αυστηρά επί της Rγια τον παίκτη 2 και άρα απορρίπτει την Rαπό το σύνολο των στρατηγικών του. Έτσι το παίγνιο ανάγεται στην εξής απλούστερη μορφή του.

Πίνακας 2.4

Παίκτης	P_2		
	Στρατηγική	L	C
P_1	T	(1, 0)	(1, 3)
	M	(0, 2)	(0, 1)
	B	(0, 2)	(2, 4)

Παρατηρώντας το προκύπτον παίγνιο βλέπουμε ότι η στρατηγική T κυριαρχεί αυστηρά επί της M για τον παίκτη 1 και έτσι απορρίπτοντας ο παίκτης 1 την M, το παίγνιο μετασχηματίζεται στο ακόλουθο.

Πίνακας 2.5

Παίκτης	P_2		
P_1	Στρατηγική	L	C
	T	(1, 0)	(1, 3)
	B	(0, 2)	(2, 4)

Έτσι, το αρχικό παίγνιο ανάγεται σε έναν πίνακα-παίγνιο 2 x 2 στο οποίο ο παίκτης 2 έχει την αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική (οπότε εξαλείφεται η L). Τέλος, είναι προφανές για τον παίκτη 1 να παίξει την στρατηγική B. Οπότε τελικά με την μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών, προκύπτει η λύση του παιγνίου που δεν είναι άλλη από την (B, C).

Ωστόσο, τέτοιες λύσεις με την παραπάνω μέθοδο στα παίγνια είναι κατά βάση σπάνιες. Για παράδειγμα, το παρακάτω παίγνιο-πίνακα είναι φανερό ότι δεν έχει λύση:

Πίνακας 2.6

Παίκτης	P_2		
P_1	Στρατηγική	L	R
	T	(1, 0)	(0, 0)
	B	(0, 2)	(1, 1)

Παρόλα αυτά, η έννοια της ισορροπίας κατά Nash όπως θα οριστεί παρακάτω, μας παρέχει την δυνατότητα επίλυσης κάποιων παιγνίων που δεν έχουν καθόλου κυριαρχημένες στρατηγικές ή έχουν μόνο μερικές κυριαρχημένες στρατηγικές.

<u>Ορισμός</u> : Λέμε ότι το διάνυσμα στρατηγικής $(\sigma_1^*, \omega_2^*) \in S_1 x S_2$, όπου S_1 καιS_2είναι τα σύνολα στρατηγικών των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα, είναι ισορροπία κατά Nashαν :

i) $u_1 (\sigma_1^*, \omega_2^*) \geq u_1(\sigma, \omega_2^*) \forall \sigma \in S_1$ και

ii) $u_2 (\sigma_1^*, \omega_2^*) \geq u_1 (\sigma_1^*, \omega) \forall \sigma \in S_2$

Με άλλα λόγια η ισορροπία κατά Nashείναι μια έκβαση του παιγνίου στην οποία κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να παρεκκλίνει από αυτή δοθέντος ότι οι άλλοι παίκτες εμμένουν στην στρατηγική που επέλεξαν. Δηλαδή, αν και οι δύο παίκτες ξέρουν ότι ο καθένας έχει συμφωνήσει να παίξει μια ισορροπία κατά Nash, τότε ο καθένας θα παίξει την ισορροπία αυτή για τον απλό λόγο ότι θα τον αποφέρει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Παρατηρώντας τον πίνακα 2.6 βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο ισορροπίες κατά Nash, η (T, L) και η (B, R). Επιπλέον, σημειώνουμε ότι αν ένα παίγνιο επιλυθεί με την μέθοδο των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών, η λύση του παιγνίου αυτού είναι και ισορροπία κατά Nash. Η απάντηση είναι αρνητική και επιβεβαιώνεται από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα πίνακα-παιγνίου, στο οποίο δεν υπάρχει ισορροπία κατά Nash.

Πίνακας 2.7

Παίκτης	P_2		
	Στρατηγική	L	R
P_1	Τα B	(0, 3) (2, 1)	(3, 0) (1, 2)

Ωστόσο, παίγνια χωρίς ισορροπίες κατά Nashσε καθαρές στρατηγικές συχνά επιλύονται με χρήση μεικτών στρατηγικών που θα εξεταστούν παρακάτω.

2.2. ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Παραπάνω είδαμε πως παίγνια με δύο παίκτες αναπαρίστανται ως παίγνια πίνακα. Στην πράξη όμως εμφανίζονται παίγνια με αριθμό παικτών μεγαλύτερο του 2. Όμως οι περισσότερες από τις έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως για την επίλυση παιγνίου δύο παικτών μπορούν να επεκταθούν και να γενικευθούν σε μια ευρύτερη κατηγορία παιγνίων, των παιγνίων στρατηγικής μορφής.

Παίγνια στρατηγικής μορφής ή παίγνια nπαικτών είναι παίγνια που συμμετέχουν οι παίκτες που αριθμούνται με τα γράμματα 1,2…, n. Όπως και στα παίγνια πίνακα, κάθε παίκτης έχει ένα σύνολο στρατηγικών S_i (i= 1,2, …, n) και μια συνάρτηση απόδοσης u_i: $S_1 x S_2 x \ldots x S_n \rightarrow$ IRόπου $S_1 x S_2 x \ldots x S_n$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων στρατηγικής των παικτών. Ταστοιχεία $(s_1, s_2, \ldots s_n) \in S_1 x S_2 x \ldots x S_n$του καρτεσιανού γινομένου ονομάζονται στρατηγικοί συνδυασμοί ή προφίλ στρατηγικής. Επομένως, ένα παίγνιο nπαικτών είναι το σύνολο G= { (S_i, u_1) | i= 1,2, …, n}. Ακόμη, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ισορροπία κατά Nashγια αυτά τα παίγνια είναι επέκταση του ορισμού για παίγνια πίνακα.

Για το παίγνιο G={ (S_i, u_1) | i= 1,2, …, n} λέμε ότι το διάνυσμα στρατηγικής $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 x S_2 x \ldots x S_n$είναι ισορροπία κατά Nashόταν $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$και για $\forall s \in S_1$ ισχύει $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, s_2, \ldots, s, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Όπως και πριν ένας στρατηγικός συνδυασμός είναι ισορροπία κατά Nashαν κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει γνήσια την απόδοση του αλλάζοντας στρατηγική δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική.

Αν και η ισορροπία κατά Nashφαίνεται λογική ως προτεινόμενη λύση για ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής, είναι προς το συμφέρον του παίκτη να επιλέξει την στρατηγική της ισορροπίας Nashμόνο αν είναι σίγουρος ότι και οι άλλοι παίκτες θα παίξουν με την προοπτική της ισορροπίας Nash. Αυτή η λογική αλληλουχία προκύπτει από τις αξιωματικές παραδοχές της θεωρίας, ότι δηλαδή κάθε παίκτης είναι ορθολογικός, ξέρει ότι και οι άλλοι είναι ορθολογικοί και γνωρίζει ότι οι άλλοι ξέρουν ότι είναι ορθολογικός. Παρακάτω αναπτύσσουμε μια εφαρμογή αυτών που είπαμε από τον χώρο των πολιτικών επιστημών.

Το Μοντέλο του Μεσαίου Ψηφοφόρου

Έστω ότι έχουμε ένα εκλογικό σώμα που οι ψηφοφόροι κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλο το φάσμα της ιδεολογίας από άκρα αριστερά μέχρι άκρα δεξιά. Επίσης, έχουμε και δύο υποψήφια κόμματα (παίκτες), το πράσινο κόμμα που θα το συμβολίζουμε με 1 και το μπλε κόμμα που το συμβολίζουμε με 2. Ακόμη θεωρούμε ότι ο κάθε ψηφοφόρος ψηφίζει το κόμμα που βρίσκεται πιο κοντά ιδεολογικά με αυτόν. Το ιδεολογικό φάσμα το αναπαριστούμε με το κλειστό διάστημα [0,1]. Ξέρουμε ακόμα, ότι μοναδικό μέλημα των κομμάτων (παικτών), είναι να συγκεντρώσουν το μεγαλύτερο ποσοστό ψηφοφόρων. Με βάση αυτές τις παραδοχές ο κάθε παίκτης καλείται να επιλέξει μια θέση (στρατηγική) στο ιδεολογικό φάσμα με την έννοια της επιλογής ενός πραγματικού αριθμού $\alpha_i \in [0,1]$. Τουτέστιν, το σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη είναι το κλειστό διάστημα [0,1]. Η συνάρτηση απόδοσης $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$ του παίκτη i είναι το ποσοστό των ψήφων που λαμβάνει , όταν υιοθετηθεί ο στρατηγικός συνδυασμός (α_1, α_2) από τους παίκτες. Μετά από αυτά έχουμε ότι :

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2)= \begin{cases} \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ -0{,}50 \\ 1 - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{cases} \text{αν } \alpha_1<\alpha_2, \text{ αν } \alpha_1=\alpha_2 \text{ και αν} \alpha_1>\alpha_2$$

$$u_2(\alpha_1, \alpha_2)= \begin{cases} 1-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \\ -0,50 \\ \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \end{cases}$$ αν $\alpha_1<\alpha_2$, αν $\alpha_1=\alpha_2$, αν $\alpha_1>\alpha_2$

Οι τύποι αυτοί προκύπτουν εύκολα αν θεωρήσουμε την περίπτωση του στρατηγικού συνδυασμού (α_1, α_2) με $\alpha_1< \alpha_2$. Τότε προφανώς, αφού το $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ είναι το κέντρο του διαστήματος $[\alpha_1, \alpha_2]\subseteq[0,1]$ οι ιδεολογικές θέσεις που βρίσκονται στο$\left[0, \frac{a-S_2}{2}\right]$ βρίσκονται κοντύτερα στην ιδεολογική θέση α_1 του παίκτη 1. Άρα το ποσοστό των παικτών που ψηφίζουν τον παίκτη 1 είναι το μήκος του διαστήματος $\left[0, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]$, δηλαδή $u_1(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Συνακόλουθα έχουμε ότι το ποσοστό των ψήφων του παίκτη 2 είναι $u_2(\alpha_1,\alpha_2)= \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Είναι λογικό να ισχυριστεί κάποιος ότι μια ισορροπία Nash του παιγνίου αυτού είναι η πιο πιθανή έκβαση, αφού κάθε υποψήφιο κόμμα θα αγωνιστεί για μεγαλύτερο αριθμό ψήφων. Ουσιαστικά, ισχυριζόμαστε ότι :

Η μοναδική ισορροπία Nashτου παιγνίου είναι $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό σε τρία βήματα. Έτσι θεωρούμε την ισορροπία Nash (S_1,S_2).

Βήμα 1 :$S_1=S_2$

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με εις άτοπον απαγωγή. Έστω λοιπόν ότι $S_1\neq S_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (εξαιτίας της συμμετρίας του προβλήματος) θεωρούμε ότι $S_1<S_2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι για οποιαδήποτε στρατηγική α του παίκτη 2 με $\alpha\in\left(\frac{S_1+S_2}{2}, S_2\right)$ έχουμε $u_2(S_1,S_2)–u_2(S_1, \alpha)= 1-\frac{S_1+S_2}{2} - \left(1-\frac{S_1+a}{2}\right)=$

$\frac{S_1+a}{2} - \frac{S_1+S_2}{2} = \frac{a-S_2}{2} < 0$.

Δηλαδή, $u_2(S_1,\alpha) >u_2(S_1, S_2)$ άτοπο γιατί το διάνυσμα στρατηγικής (S_1,S_2) είναι ισορροπία Nashοπότε $S_1=S_2$.

Βήμα 2 : $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$

Έστω ότι $S_1 = S_2 \neq \frac{1}{2}$, πάλι από την συμμετρία της κατάστασης υποθέτουμε ότι $S_1 = S_2 < \frac{1}{2}$. Αν ο υποψήφιος 2 επιλέξει α$\in (S_1, \frac{1}{2})$, τότε $u_2(S_1,\alpha) - u_2(S_1, S_2)=$ $1-\frac{S_1+a}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-S_1-a}{2}>0$, αφού $S_1, a<\frac{1}{2}$, άρα $S_1+a<1$.

Δηλαδή, $u_2(S_1,\alpha) > u_2(S_1, S_2)$ καταλήγοντας πάλι σε άτοπο λόγω ισορροπίας Nash.

Τα δύο προηγούμενα βήματα δείχνουν ότι το διάνυσμα στρατηγικής $(S_1, S_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι ο μόνος δυνατός υποψήφιος για ισορροπία Nash.

Βήμα 3 : στρατηγικός συνδυασμός $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι ισορροπία Nash. Πράγματι, αν ο παίκτης 2 διατηρήσει την στρατηγική $\frac{1}{2}$, τότε αν ο υποψήφιος επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική $a \neq \frac{1}{2}$, έστω $a<\frac{1}{2}$, τότε έχουμε

$$u_1=\left(a,\frac{1}{2}\right)=\frac{a+0,5}{2}=\frac{a}{2}+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(αφού $a<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}<\frac{1}{4}$). Όμοια αν $a>\frac{1}{2}$.

2.3 ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΙΚΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Τα παίγνια πίνακα δεν έχουν όλα μια ισορροπία. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει σημαντικά ζητήματα αναφορικά με την επίλυση των παιγνίων αυτών. Το ερώτημα είναι σημαντικό αφού σχετίζεται με μια αρκετά μεγάλη κατηγορία παιγνίων. Στην αναζήτηση μιας λύσης για παίγνια χωρίς ισορροπία Nash θα ήταν καλό να εξετάσουμε το πρόβλημα με ένα παράδειγμα. Αν θεωρήσουμε το παίγνιο πίνακα

Ένα παίγνιο χωρίς ισορροπία Nash

Παίκτης	P_2		
	Στρατηγική	L	R
P_1	Tα	(0, 3)	(3, 0)
	B	(3, 0)	(0, 3)

Θα παρατηρήσουμε ότι αν ο παίκτης 1 επιλέξει Tα, τότε ο παίκτης 2 θα θέλει να επιλέξει L, αλλά στην περίπτωση αυτή ο παίκτης 1 θέλει να επιλέξει B, οπότε ο παίκτης 2 θα θέλει να επιλέξει R κ.ο.κ. Υπάρχει συνεπώς ένας κύκλος με τους παίκτες να θέλουν να αλλάζουν στρατηγικές. Πράγματι, αν σκεφτούμε τι θα πρέπει να κάνει ο παίκτης 1, διαπιστώνουμε ότι πρέπει να προσέξει ώστε να μην κάνει φανερώσει την στρατηγική του στον παίκτη 2, διότι αν ο παίκτης 2 γνωρίζει την στρατηγική του παίκτη 1 τότε η επιλογή του παίκτη 2 θα φέρει την χειρότερη δυνατή απόδοση για τον παίκτη 1. Για παράδειγμα αν ο παίκτης 2 γνωρίζει ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει T, τότε θα επιλέξει L και η απόδοση του 1 θα είναι 0, δηλαδή η χειρότερη δυνατή.

Προφανώς ο παίκτης 1 πρέπει να προσπαθήσει ώστε ο παίκτης 2 να συνεχίζει να μαντεύει αν ο αντίπαλος του σκοπεύει να επιλέξει T ή B. Ένας τρόπος για να το πετύχει αυτό είναι χρησιμοποιώντας μια διάταξη που επιλέγει με τυχαίο τρόπο μια από τις δύο στρατηγικές. Αυτή η διάταξη, μπορεί να είναι ένα νόμισμα ή οποιαδήποτε άλλη διάταξη που δίνει μια τυχαία επιλογή της στρατηγικής T ή της B.

Φυσικά, αφού η κατάσταση είναι παρόμοια για τον παίκτη 2, θα θέλει κι αυτός να κάνει το ίδιο. Το αποτέλεσμα τότε είναι ότι και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν μια τυχαία τακτική επιλογής των στρατηγικών τους όταν είναι αντιμέτωποι στο συγκεκριμένο παίγνιο. Τέτοιες τυχαίες τακτικές για την επιλογή στρατηγικών ονομάζονται μικτές στρατηγικές και γι' αυτές θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Έχουμε δει μέχρι στιγμής ότι ένα παίγνιο πίνακα μπορεί να περιγραφεί με ένα m×nπίνακα της μορφής

	Παίκτης 2				
	Στρατηγική	S_1^2	S_2^2	….	S_n^2
Παίκτης 1	S_1^1	(α_{11} , b_{11})	(α_{12} , b_{12})	….	(α_{1n}, b_{1n})
	S_2^1	(α_{21} , b_{21})	(α_{22} , b_{22})	….	(α_{2n} , b_{2n})
	….	….	….	….	….
	S_m^1	(α_{m1} , b_{m1})	(α_{m2} , b_{m2})		(α_{mn}, b_{mn})

όπου $α_{ij}$και b_{ij} είναι οι αποδόσεις του παίκτη 1 και του παίκτη 2 αντίστοιχα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να διαμερίσουμε τον πίνακα σε δύο πίνακες απόδοσης.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Αυτό δείχνει ότι ένα παίγνιο πίνακα προσδιορίζεται πλήρως από το ζεύγος των πινάκων απόδοσης Α και Β. Όταν παρουσιάζουμε ένα παίγνιο πίνακα με το ζεύγος (Α,Β) των πινάκων απόδοσης του, θα λέμε ότι το παίγνιο είναι σε μορφή δύο πινάκων. Σύμφωνα με την καθιερωμένη ορολογία ο παίκτης 1 ονομάζεται «παίκτης-γραμμή» και ο παίκτης 2 «παίκτης- στήλη». Συνεπώς, οι στρατηγικές του παίκτη-γραμμή συμβολίζονται με το δείκτη i (i= 1, …, m) και οι στρατηγικές του παίκτη-στήλη με το δείκτη j (j =1, …, n).

Με αυτό το συμβολισμό μπορούμε να περιγράψουμε ένα στρατηγικό συνδυασμό ως ζεύγος (i,j) και μια ισορροπία Nash (ή απλά ισορροπία) ως ορίζοντα στρατηγικής (i,j) τέτοιο ώστε

1. Το $α_{ij}$είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της στήλης jτου πίνακα Α, δηλαδή $α_{ij}=\max_{1\leq k\leq m}α_{kj}$, και
2. Το b_{ij}είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της γραμμής i του πίνακα Β, δηλαδή$b_{ij}= \max_{1\leq r\leq m}α_{ir}$

Μια μικτή στρατηγική (ή ορίζοντας πιθανότητας) για τον παίκτη- γραμμή είναι απλά κάθε διάνυσμα **p**= (p_1, p_2, …, p_m) τέτοιο ώστε $p_i\geq 0$ για κάθε στρατηγική i και $\Sigma_{i=1}^{m} p_i = 1$. Ομοίως μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη – στήλη είναι ένα διάνυσμα **q**= (q_1,q_2,…,q_n) τέτοιο ώστε $q_j\geq 0$ για κάθε στρατηγική jκαι $\Sigma_{j=1}^{n} q_j = 1$. Μια μικτή στρατηγική **p**για τον παίκτη-γραμμή ονομάζεται αμιγής στρατηγική αν για κάποια στρατηγική iέχουμε $p_i=1$ και $p_k= 0$ για $k\neq i$. Δηλαδή, η αμιγής στρατηγική iγια τον παίκτη-γραμμή είναι η στρατηγική σύμφωνα με την οποία ο παίκτης-γραμμή επιλέγει την στρατηγική i με πιθανότητα 1 και κάθε άλλη στρατηγική με πιθανότητα 0. Με άλλα λόγια, οι αμιγείς στρατηγικές του παίκτη 1 είναι οι στρατηγικές της μορφής

P=(0,0,…,0,1,0,…,0)

όπου το 1 εμφανίζεται μόνο μια φορά. Προφανώς ο παίκτης-γραμμή έχει ακριβώς m αμιγείς στρατηγικές, τις οποίες συνήθως ορίζουμε ως τις αρχικές στρατηγικές του.

Ομοίως, κάθε στρατηγική της μορφής **q**=(0,0,…0,1,0,…,0) όπου το 1 εμφανίζεται μόνο μια φορά, ονομάζεται αμιγής στρατηγική για τον παίκτη-στήλη. Παρατηρούμε πάλι ότι ο παίκτης-στήλη έχει ακριβώς ηαμιγείς στρατηγικές, τις οποίες ορίζουμε ως τις αρχικές στρατηγικές του.

Έστω τώρα ότι κάθε παίκτης (για να παραπλανήσει τον άλλον παίκτη) επιλέγει την στρατηγική του σύμφωνα με κάποιον ορίζοντα πιθανότητας - ο παίκτης-γραμμή παίζει σύμφωνα με μια μικτή στρατηγική **p**και ο παίκτης-στήλη σύμφωνα με μια μικτή στρατηγική **q**. Σε αυτή, την περίπτωση, ο κάθε παίκτης δεν έχει τρόπο να προβλέψει τη στρατηγική του άλλου παίκτη και η μόνη ελπίδα του είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση του. Πως υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-γραμμή αν οι παίκτες παίζουν σύμφωνα με τις μικτές στρατηγικές **p**και **q**;

Πρώτα παρατηρούμε ότι αν ο παίκτης-στήλη επιλέξει την στρατηγική j τότε ο παίκτης-γραμμή, παίζοντας το συνδυασμό πιθανότητας **p**, μπορεί να αναμένει μια απόδοση $\Sigma_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$. Τώρα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο παίκτης-στήλη επίσης επιλέγει τις στρατηγικές του σύμφωνα με τον ορίζοντα πιθανότητας **q**, προκύπτει ότι ο παίκτης-γραμμή μπορεί να αναμένει μια απόδοση $q_j \Sigma_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ από τον παίκτη-στήλη που θα επιλέξει τη στρατηγική j. Αυτό σημαίνει ότι η αθροιστική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-γραμμή είναι $$\pi_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

Ομοίως, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-στήλη είναι $$\pi_2(\mathrm{p,q}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i q_j} b_{\mathrm{ij}}$$

Τώρα έχουμε ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής στο οποία τα σύνολα στρατηγικών των παικτών έχουν αντικατασταθεί με ορίζοντες πιθανότητας πάνω στις στρατηγικές. Ένα τέτοιο παίγνιο λέγεται παίγνιο σε μικτές στρατηγικές. Ακόμη, το παίγνιο πίνακα έχει μια ισορροπία Nashσε μικτές στρατηγικές όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1 Κάθε παίγνιο πίνακα έχει μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι οι ισορροπίες Nashσε αμιγείς στρατηγικές (όταν υπάρχουν) ενός παιγνίου πίνακα μπορούν να γραφούν ως ισορροπίες μικτών στρατηγικών (**p,q**) στις οποίες οι στρατηγικές **p**και **q**έχουν την μορφή

$\mathbf{p}$=(0,…,0,1,0,…,0) και $\mathbf{q}$=(0,…,0,1,0,…,0)

Θεώρημα 2 Ένας ορίζοντας στρατηγικής (i,j) για ένα παίγνιο πίνακα είναι ισορροπία Nash αν και μόνο αν η αμιγής στρατηγική (i,j) είναι επίσης ισορροπία Nash για το παίγνιο σε μικτές στρατηγικές.

Με άλλα λόγια, κάθε ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές είναι επίσης ισορροπία Nash του παιγνίου σε μικτές στρατηγικές. Δηλαδή, αν υπάρχουν ισορροπίες Nash, τότε είναι επίσης σύμφωνα με το θεώρημα 2 ισορροπίες για το παίγνιο σε μικτές στρατηγικές. Όμως, η μεγάλη διαφορά είναι ότι ενώ το παίγνιο μπορεί να μην έχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές, έχει πάντα σύμφωνα με το θεώρημα 1 μια ισορροπία μικτών στρατηγικών. Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες οδηγίες για την εύρεση ισορροπιών μικτών στρατηγικών.

Οδηγίες για τον υπολογισμό ισορροπιών μικτών στρατηγικών

Για να υπολογίσουμε ισορροπίες μικτών στρατηγικών σε ένα παίγνιο πίνακα ακολουθούμε τα τέσσερα παρακάτω βήματα :

1. Γράφουμε το παίγνιο πίνακα σε μορφή δύο πινάκων A=[a_{ij}], B=[b_{ij}].
2. Υπολογίζουμε τις δύο συναρτήσεις απόδοσης

   $\pi_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$ και $\pi_2(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}_\mathrm{i} \mathrm{q}_\mathrm{j} b_{\mathrm{ij}}$
3. Θέτουμε $p_m = 1 - \Sigma_{i=1}^{m-1} p_i$ και $q_n = 1 - \Sigma_{j=1}^{n-1} q_j$ στους τύπους για την απόδοση και εκφράζουμε (μετά από τους υπολογισμούς) τις συναρτήσεις απόδοσης π_1 και π_2 ως συναρτήσεις των μεταβλητών $p_1,\ldots,p_{m-1}$, $q_1,\ldots,q_{n-1}$.
4. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_i}$ και $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_j}$ και θεωρούμε το σύστημα $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_i} = 0$ (i=1,…,m-1) και $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} = 0$ (j=1,…,n-1).

Κάθε λύση αυτού του συστήματος $p_1,\ldots,p_{m-1}$, $q_1,\ldots,q_{n-1}$με $p_i \geq 0$ και$q_j \geq 0$ για κάθε iκαι j, $\Sigma_{i=1}^{m-1} p_i \leq 1$και $\Sigma_{j=1}^{n-1} q_j \leq 1$είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών.

Μια ισορροπία (**p,q**) ονομάζεται εσωτερική ισορροπία αν $p_i>0$ και $q_j>0$ για όλα τα i και j. Οι εσωτερικές ισορροπίες του παιγνίου αντιστοιχούν ακριβώς στις λύσεις $p_1,...,p_{m-1}$, $q_1,\dots,q_{n-1}$του συστήματος

$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_i}=0$, (i=1,…,m-1) και $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_j}=0$, (j=1,…,n-1) με $p_i>0$ και $q_j>0$ για όλα τα iκαι j, $\Sigma_{i=1}^{m-1} p_i<1$και $\Sigma_{j=1}^{n-1} q_j<1$.

Ας επεξηγήσουμε τις οδηγίες για την εύρεση ισορροπιών μικτών στρατηγικών με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Είναι εύκολο να δούμε ότι το παίγνιο πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

δεν έχει ισορροπία Nashσε αμιγείς στρατηγικές. Θα χρησιμοποιήσουμε τις οδηγίες που παρουσιάσαμε πιο πάνω για να υπολογίσουμε μια ισορροπία μικτών στρατηγικών για το παίγνιο αυτό.

Αρχίζουμε υπολογίζοντας τις συναρτήσεις αναμενόμενης απόδοσης των παικτών. Έχουμε

$\pi_1=3p_1\cdot q_2 + 2p_2q_1 + p_2q_2=$

$= 3p_1(1-q_1) + 2(1-p_1)q_1 + (1-p_1)(1-q_1)$

$=4p_1q_1 + 2p_1 + q_1 + 1$

και

$\pi_2=3p_1\cdot q_1 + p_2q_1 + 2p_2q_2=$

$= 3p_1q_1 + (1-p_1)q_1 + 2(1-p_1)(1-q_1)$

$=4p_1q_1- q_1 - 2p_1 + 2$

Παραγωγίζοντας, παίρνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1}=-4q_1+2=0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_1}=4p_1-1=0$$

το οποίο δίνει $p_1=\frac{1}{4} \quad \kappa\alpha\iota \quad q_1=\frac{1}{2}$. Αυτό συνεπάγεται

$$p_2=1-p_1=\frac{3}{4} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad q_2=1-q_1=\frac{1}{2}$$

Επομένως, το $\left(\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών, η οποία είναι επίσης εσωτερική ισορροπία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Binmore K., Does Game Theory Work?

Borm P.,Peter H.,Chapters In Game Theory

Branzei R.,Dimitrov D.,Tijs S.,Models In cooperative Game Theory

Gintis H.,Game Theory Evolving,2E

Hillier-Lieberman,Introduction to Operations Research,7E

Huang Q.,Game Theory

Kubilay G.,Anderson P.,Applied Game Theory And Strategic Behavior

Mobius M.,Game Theory and Economics

Neogy S.K,Bapat R.B.,Das A.K.,Parthasarathy T.,Mathematical Programming And Game Theory For Decision Making

Rasmusen E.,Games And Information,4E

Schmidt C.,Game Theory And Economic Analysis

Vincent T.,Brown J.,Evolutionary Game Theory,Natural Selection And Darwinian Dynamics

Von Neumann J.,Morgenstern O.,Games And Economic Behavior

ΑλιπραντήςΧ.Δ.,ChakrabartiS.K.,ΠαίγνιαΚαιΛήψηΑποφάσεων

Κολέτσος Ιωάννης,Στογιάννης Δημήτρης,ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Πολυράκης Ιωάννης,ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία