

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΕΠΙΚΛΙΝΟΥΣ ΣΤΕΓΗΣ ΜΕ
ΔΟΘΕΙΣΑ ΚΑΤΟΨΗ**



ΚΑΤΣΑΒΡΙΑ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2011

Ευχαριστίες (με σειρά εμπλοκής):

Παπαχρηστίδης Αριστείδης, Πολιτικός Μηχανικός

Βλασσόπουλος Βασίλειος, Επίκ. Καθηγητής

Μαρκάτης Στυλιανός, Επίκ. Καθηγητής

Κολέτσος Ιωάννης, Επίκ. Καθηγητής

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων.....	i
Κατάλογος Σχημάτων	ii
Εισαγωγή.....	iii
1 Μαθηματικό Υπόβαθρο.....	1
1.1 Στοιχεία Ευκλείδειας Γεωμετρίας.....	1
1.2 Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας	7
1.2.1 Παραστατική Γεωμετρία ενός Επιπέδου Προβολής.....	7
1.2.2 Αξονομετρική Προβολή	11
2 Βασικές γνώσεις περί στεγών	15
2.1 Τεχνικά χαρακτηριστικά μιας στέγης	15
2.2 Προσδιορισμός του πραγματικού ύψους κορυφής T_i ισοκλινούς στέγης, δεδομένης της κλίσης της και της κάτοψης της γραμμής απορροής της	21
2.3 Γενική μέθοδος χάραξης ισοκλινούς στέγης	23
3 Ευθύγραμμος Σκελετός (Straight Skeleton)	28
3.1 Ιστορική Αναδρομή	28
3.1.1 Διάγραμμα Voronoi	28
3.1.2 Μέσος Άξονας (Medial Axis).....	36
3.2 Ευθύγραμμος Σκελετός - Εισαγωγή και βασικές ιδιότητες	41
3.3 Περιγραφή του Ευθύγραμμου Σκελετού ως Γράφου και ως Επίπεδη Προβολή Τρισδιάστατου Αντικειμένου	46
3.4 Περιγραφή μεθόδου μέσω παρομοίωσης με νησιά.....	50
3.5 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα του Ευθύγραμμου Σκελετού Έναντι του Μέσου Άξονα	52
4 Αλγόριθμος Υπολογισμού του Ευθύγραμμου Σκελετού.....	54
4.1 Υπολογισμός Ευθύγραμμου Σκελετού Πολυγώνου με Τριγωνοποίηση.....	54
4.1.1 Εισαγωγή	54
4.1.2 Περιγραφή Αλγορίθμου	55
4.2 Υπολογισμός Ευθύγραμμου Σκελετού Πολυγώνου χωρίς Τριγωνοποίηση.....	60
4.2.1 Εισαγωγή	60
4.2.2 Περιγραφή Αλγορίθμου	60
4.3 Αλγόριθμος με Υπο-τετραγωνική Πολυπλοκότητα.....	66
4.3.1 Εισαγωγή	66
4.3.2 Περιγραφή Αλγορίθμου	67
Βιβλιογραφία	71
Ηλεκτρονικές Πηγές	72

Ευρετήριο	73
------------------------	-----------

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1 Δωδεκάεδρο (Κανονικό Πολύεδρο)	2
Εικόνα 2 Μετατροπή των μοιρών σε κλίση επί τοις %	17
Εικόνα 3 Ρωμαϊκού, Ολλανδικού και Βυζαντινού τύπου	18
Εικόνα 4 Σχιστολιθικές επίπεδες πλάκες & Ξυλοκέραμο.....	18
Εικόνα 5 Μερική διάκριση στεγών ανάλογα με τη μορφή	19
Εικόνα 6 Τα δομικά στοιχεία μιας στέγης.....	21
Εικόνα 7 Διάγραμμα Voronoi οκτώ σημείων	29
Εικόνα 8 Τριγωνοποίηση Delaunay στο επίπεδο με χαραγμένους τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων	34
Εικόνα 9 Παραδείγματα δύο απλών και δύο μη απλών πολυγώνων.....	36
Εικόνα 10 Ο μέσος άξονας ορθογωνίου	36
Εικόνα 11 Ο μέσος άξονας του κύκλου	36
Εικόνα 12 Ο μέσος άξονας ενός τριγώνου	37
Εικόνα 13 Η επίδραση μιας μικρής διαταραχής στη δομή του μέσου άξονα	38
Εικόνα 14 Μία κλειστή καμπύλη S και ο μέσος άξονας του χώρου $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$	39
Εικόνα 15 Ο μέσος άξονας και το διάγραμμα Voronoi του χώρου $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus E$, όπου E ένα δείγμα της καμπύλης S	39
Εικόνα 16 Το S είναι η καμπύλη με συνεχή γραμμή. Τα x' και y' είναι σημεία του S'	40
Εικόνα 17 (α) Ο Μέσος Άξονας , (β) Ο Ευθύγραμμος Σκελετός.....	41
Εικόνα 18 Γράφοι Διχοτόμων· ένας μη επίπεδος και δύο διαφορετικοί γράφοι που περιγράφουν το ίδιο αντικείμενο.	47
Εικόνα 19 Ο ευθύγραμμος Σκελετός ενός πολυγώνου	48
Εικόνα 20 Το μοντέλο στέγης που αντιστοιχεί στον ευθύγραμμο σκελετό της εικόνας 19.....	48
Εικόνα 21 Αρχικοποίηση κυματομετώπου.....	56
Εικόνα 22 Συμβάν Εναλλαγής, Συμβάν Πλευράς, Συμβάν Διαίρεσης	57
Εικόνα 23 Υπολογισμός του σημείου τομής για μία μη κυρτή κορυφή που προκαλεί ένα συμβάν διαίρεσης (σημείο B)	62
Εικόνα 24 Αρχικοποίηση και τα πρώτα τρία βήματα του αλγορίθμου για κυρτές κορυφές ..	64
Εικόνα 25 Περιγραφή του συμβάντος διαίρεσης : a) διαχείριση δεικτών, b) διαίρεση της ΛΕΚ σε δύο λίστες.....	65
Εικόνα 26 (a) Δύο ταυτόχρονα συμβάντα πλευράς, (b) Ένα συμβάν διαίρεσης.....	66
Εικόνα 27 (a) Ένα συμβάν Κορυφής, (b) Διαταραχή του Σκελετού	67

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1	Η διαδικασία που περιγράφεται, όπως εφαρμόζεται σε έναν κύβο.....	2
Σχήμα 2	Τα μέρη ενός δικτύου.....	3
Σχήμα 3	Προβολή Τομής Ισοκλινών Επιπέδων Π_1 και Π_2 ως προς τρίτο Π_0	6
Σχήμα 4	Θεώρημα τριών καθέτων.....	6
Σχήμα 5	Υψομετρική μέθοδος προβολής.....	7
Σχήμα 6	Τομή επιπέδων με ίχνη τεμνόμενα.....	9
Σχήμα 7	Τομή επιπέδων με ίχνη παράλληλα.....	10
Σχήμα 8	Αξονομετρική Μέθοδος Παράστασης.....	12
Σχήμα 9	Ισομετρική Αξονομετρική Προβολή.....	13
Σχήμα 10	Σύστημα σε Στροφή.....	13
Σχήμα 11	Μετωπική Διμετρική Προβολή.....	14
Σχήμα 12	Οριζόντια Διμετρική Προβολή.....	14
Σχήμα 13	Τριμετρική Αξονομετρική Προβολή.....	14
Σχήμα 14	Τα μέρη μίας στέγης.....	20
Σχήμα 15	Το πραγματικό ύψος μιας τυχούσας κορυφής.....	22
Σχήμα 16	Σχεδίαση στέγης σε τετριμμένη περίπτωση.....	23
Σχήμα 17	Σχεδίαση διχοτόμων.....	23
Σχήμα 18	Σημεία τομής διχοτόμων.....	24
Σχήμα 19	Κατασκευή του πολυγώνου π'	25
Σχήμα 20	Τοποθέτηση του πολυγώνου π στον χώρο.....	25
Σχήμα 21	Χάραξη της πολυεδρικής επιφάνειας.....	25
Σχήμα 22	Το αποτέλεσμα της μεθόδου μετά την πρώτη επανάληψη.....	26
Σχήμα 23	Εφαρμογή της μεθόδου.....	26
Σχήμα 24	Μέγιστος κενός κύκλος.....	31
Σχήμα 25	Ευθύγραμμος Σκελετός Τριγώνου.....	42
Σχήμα 26	Ευθύγραμμος Σκελετός Ορθογωνίου.....	42
Σχήμα 27	Διαδικασία Συρρίκνωσης.....	43
Σχήμα 28	Δομικά Στοιχεία του Ευθύγραμμου Σκελετού.....	44
Σχήμα 29	Ορισμός Διχοτόμου.....	45

Εισαγωγή

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως εξής :

Υποθέτουμε ότι μας δίδεται το σχέδιο της κάτοψης ενός κτηρίου. Ζητείται να σχεδιαστεί, με όσο το δυνατόν πιο αυτοματοποιημένο τρόπο, μία στέγη οι παρυφές της οποίας να βρίσκονται σε ένα σταθερό υψόμετρο, αποφεύγοντας παράλληλα τον σχηματισμό περιοχών συσσώρευσης υδάτων, όπως είναι οι περιοχές μηδενικής κλίσης ή αυτές των τοπικών ελαχίστων.

Παρυφή στέγασης ονομάζεται το κατώτατο οριζόντιο όριο της στέγης.

Το πρόβλημα, παρ' όλο που φαίνεται απλό, δεν είναι τετριμμένο για τις περιπτώσεις που η κάτοψη της στέγης αποτελεί ένα περίπλοκο σχήμα. Στο πρόβλημα αυτό έδωσαν τελική λύση οι καθηγητές Aichholzer, Aurenhammer, Alberts και Gärtner [8] οι οποίοι όρισαν μια νέα δομή, που λέγεται **ευθύγραμμος σκελετός (straight skeleton)**, καθώς επίσης πρότειναν μια μέθοδο κατασκευής της. Κατά το έτος 1995, δημοσίευσαν την λύση του γενικευμένου προβλήματος στο επιστημονικό περιοδικό «*Journal of Universal Computer Science*». Τρία χρόνια αργότερα δημοσίευσαν μία εκτενέστερη εργασία πάνω στο αντικείμενο αυτό [17]. Την ίδια χρονολογική περίοδο, βάσει των προαναφερθεισών δημοσιεύσεων οι Peter Felkel και Stepan Obdrzalek ανέπτυξαν έναν εναλλακτικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος [18]. Τέλος, το έτος 1999 οι Eppstein και Erickson πέτυχαν να βελτιώσουν την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, που αρχικά προτάθηκε, με τη χρήση δομών δεδομένων κατασκευασμένων σύμφωνα με τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος [19].

Μέθοδοι που στηρίζονται στη κατασκευή ενός σκελετού, όπως είναι η μέθοδος κατασκευής του ευθύγραμμου σκελετού, χρησιμοποιούνται συχνά στην περιγραφή των βασικών τοπολογικών χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου 2-διαστάσεων. Συνεπώς τόσο η επεξεργασία εικόνων, όσο και η ανακατασκευή τρισδιάστατης απεικόνισης αντικειμένων από εικόνες επίπεδων τομών υποβοηθούνται από τέτοιου είδους μεθόδους.

Η εργασία αποτελείται από τέσσερα στον αριθμό κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, παρατίθενται ορισμένα στοιχεία γεωμετρίας που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της λύσης του προβλήματος. Χωρίζεται σε δύο παραγράφους· η πρώτη αφορά σε θέματα της ευκλείδειας γεωμετρίας και η δεύτερη σε ζητήματα της παραστατικής γεωμετρίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνεται μία σύντομη περιγραφή των τεχνικών χαρακτηριστικών του αντικειμένου που μας απασχολεί, δηλαδή της στέγης. Στο ίδιο κεφάλαιο αναπτύσσεται η γενική μέθοδος χάραξης μιας ισοκλινούς στέγης. Η μέθοδος εύκολα γενικεύεται και εφαρμόζεται στην χάραξη μιας

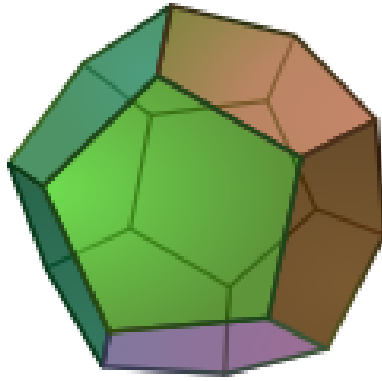
ανισοκλινούς στέγης. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφεται η δομή του ευθύγραμμου σκελετού όπως αυτή παρουσιάζεται στην εργασία των Aichholzer, Aurenhammer, Alberts και Gärtner [8]. Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται ακόμη αναφορά στα διαγράμματα Voronoi και τον μέσο άξονα, δομές που αποτέλεσαν πρόδρομο της δομής του ευθύγραμμου σκελετού. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις αλγόριθμοι για την κατασκευή του ευθύγραμμου σκελετού βήμα προς βήμα.

1 Μαθηματικό Υπόβαθρο

1.1 Στοιχεία Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Ορισμοί

- ✚ Ένα πολύγωνο καλείται **γ – μονότονο** αν κάθε ευθεία κάθετη στον άξονα των γ , έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με τις πλευρές του πολυγώνου.
Αντίστοιχα, το πολύγωνο είναι **x – μονότονο** αν κάθε κατακόρυφη ευθεία, δηλαδή κάθετη στον άξονα των x , έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με τις πλευρές του πολυγώνου.
- ✚ **Πολυεδρική επιφάνεια** ονομάζεται ένα σύνολο κλειστών επίπεδων πολυγώνων τοποθετημένα κατά τέτοιο τρόπο στον χώρο ώστε κάθε ένα από αυτά να έχει με κάποιο άλλο κοινή μία πλευρά ή μέρος πλευράς, με κάθε πλευρά ή μέρος της πλευράς να ανήκει μόνο σε δύο πολύγωνα του συνόλου.
- ✚ Η πολυεδρική επιφάνεια που κάθε επίπεδη τομή της είναι ένα κλειστό πολύγωνο ή κλειστά πολύγωνα λέγεται **πολύεδρο**.
Εναλλακτικά,
Πολύεδρο ονομάζεται κάθε κλειστή πολυεδρική επιφάνεια. Μία πολυεδρική επιφάνεια ονομάζεται **κλειστή** αν κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες.
- ✚ Η πολυεδρική επιφάνεια για την οποία υπάρχουν επίπεδες τομές που δεν αποτελούν κλειστές γραμμές καλείται **ανοικτό πολύεδρο**
- ✚ **Κυρτό πολύεδρο** είναι εκείνο για το οποίο το επίπεδο της κάθε έδρας του αφήνει ολόκληρο το πολύεδρο στον έναν από τους δύο ημιχώρους που ορίζει.
Εναλλακτικά,
Ένα **κυρτό πολύεδρο** είναι το πολύεδρο του οποίου η επιφάνεια δεν τέμνει τον εαυτό της και ακόμη, μία ακμή μεταξύ δύο κορυφών περνά μόνο από σημεία που είτε βρίσκονται σε έδρα του πολυέδρου είτε στο εσωτερικό του.
- ✚ Αντίθετα, αν υπάρχουν κορυφές του πολυέδρου που βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου μίας τουλάχιστον έδρας, τότε το πολύεδρο χαρακτηρίζεται ως **μη κυρτό**.
- ✚ Με τον όρο **σκελετός πολυέδρου** θα αναφερόμαστε στο σύνολο των ακμών του πολυέδρου.



Εικόνα 1 Δωδεκάεδρο (Κανονικό Πολύεδρο)

Θεώρημα Euler

Για κάθε απλό πολύεδρο ισχύει η σχέση

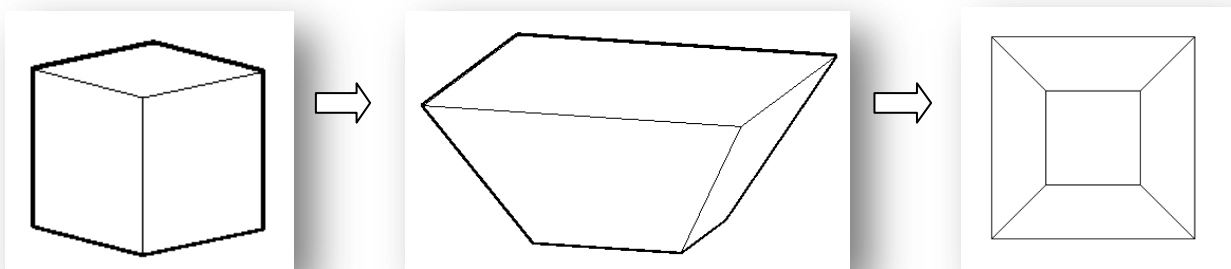
$$K - A + E = 2$$

όπου K είναι το πλήθος των κορυφών, A το πλήθος των ακμών και E το πλήθος των εδρών.

Απόδειξη (Cauchy, 1811)

Ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Αφαιρούμε την άνω έδρα , οπότε έχουμε ένα ανοικτό πολύεδρο
- Απομακρύνουμε μεταξύ τους τις ακμές οι οποίες ήταν και πλευρές της έδρας που αφαιρέσαμε μέχρι το αρχικό πολύεδρο να μετατραπεί σε ένα επίπεδο δίκτυο σημείων και γραμμών



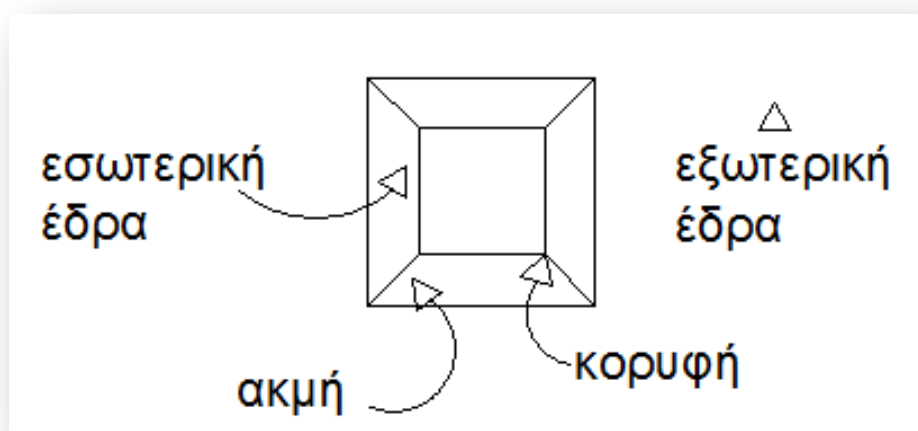
Σχήμα 1 Η διαδικασία που περιγράφεται, όπως εφαρμόζεται σε έναν κύβο

Παρατηρούμε ότι κάθε έδρα του πολυέδρου μετατρέπεται κατά αυτόν τον τρόπο σε μία περιοχή του επιπέδου περιορισμένη από ακμές. Αυτήν την περιοχή θα την

ονομάζουμε έδρα του δικτύου. Οι έδρες αυτές καλούνται εσωτερικές σε αντίθεση με την εξωτερική έδρα που βρίσκεται εκτός του δικτύου.

Η απεικόνιση ενός πολυέδρου σε ένα δίκτυο μπορεί να περιγραφεί με μία σύμμορφη απεικόνιση, τη γνωστή στερεογραφική προβολή. Για την προβολή αυτή, ορίζεται μία σφαίρα η οποία περιβάλλει το πολύεδρο, ένα επίπεδο προβολής εφαπτόμενο στην σφαίρα επί του οποίου θα αναπτυχθεί το δίκτυο και ένας πόλος προβολής. Η απεικόνιση γίνεται ως εξής :

- Προβάλλουμε από το κέντρο της σφαίρας το πολύεδρο στην επιφάνειά της. Ο πόλος επιλέγεται ώστε να μην είναι σημείο της προβολής του σκελετού του πολυέδρου επάνω στην σφαίρα.
- Ως επίπεδο προβολής επιλέγεται το εφαπτόμενο στην σφαίρα, στο αντιδιαμετρικό του πόλου σημείο.
- Ορίζουμε ως προβολή ενός σημείου P της επιφάνειας της σφαίρας, το σημείο τομής P' του επιπέδου προβολής με την ημιευθεία που ξεκινάει από τον πόλο και διέρχεται από το σημείο P της σφαίρας.
- Ο σκελετός που έχει προβληθεί επάνω στην σφαίρα, μέσω της στερεογραφικής προβολής, απεικονίζεται ομοιομορφικά στο επίπεδο προβολής. Ο πόλος δεν προβάλλεται στο επίπεδο.



Σχήμα 2 Τα μέρη ενός δικτύου

Προφανώς , το ως άνω δίκτυο και το αρχικό πολύεδρο αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό κορυφών και ακμών. Επίσης, στο σύνολό τους οι εσωτερικές και η εξωτερική έδρα του δικτύου είναι όσες και οι έδρες του πολυέδρου.

Ακολούθως, αποδεικνύουμε ότι ο τύπος του Euler ισχύει για το δίκτυο κορυφών και ακμών που κατασκευάσαμε και έπειτα συμπεραίνουμε ότι ισχύει και για το πολύεδρο, το οποίο βρίσκεται σε αντιστοιχία με το δίκτυο.

Προς διευκόλυνσή μας στον υπολογισμό της ποσότητας $K - A + E$, αναζητούμε τρόπους απλοποίησης του πολύπλοκου δικτύου που δύναται να προκύψει από ένα τυχαίο πολύεδρο. Οι επιτρεπτοί μετασχηματισμοί έχουν ως εξής :

- Τριγωνοποιούμε κάθε εσωτερική έδρα που αποτελείται από περισσότερες των τριών πλευρών.

Η τριγωνοποίηση γίνεται με τη σχεδίαση διαγωνίων από μία κορυφή. Μετά από κάθε βήμα τριγωνοποίησης , στο σύνολο των ακμών έχει προστεθεί ακόμη μία , η διαγώνιος, και , ακόμη, από μία έδρα έχουμε σχηματίσει δύο. Παρόλο αυτά , ο αριθμός των κορυφών παραμένει ο ίδιος. Δηλαδή, έχουμε K κορυφές , $A+1$ ακμές και $E+1$ έδρες.

Συνεπώς

$$K - A + E = K - (A+1) + (E+1) = K - A + E$$

Συμπεραίνουμε ότι η τριγωνοποίηση δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της πράξης

$$K - A + E$$

- Αναζητούμε έδρες που έχουν μία μόνο ακμή τους κοινή με την εξωτερική έδρα και τις αφαιρούμε από το δίκτυο διαγράφοντας την κοινή αυτή ακμή. Η περιοχή που ανήκε σε μία τέτοια έδρα αποτελεί πλέον μέρος της εξωτερικής έδρας και το δίκτυο έχει πλέον νέο σύνορο.

Σε κάθε τέτοιο βήμα μειώνουμε το πλήθος των ακμών κατά 1 , όπως και των εδρών, δηλαδή έχουμε $E-1$ έδρες, ενώ το πλήθος των κορυφών παραμένει αμετάβλητο. Οπότε,

$$K - A + E = K - (A - 1) + (E - 1) = K - A + E$$

συνεπώς και πάλι η ποσότητα προς υπολογισμό μένει ανεπηρέαστη.

- Τέλος , αφαιρούμε εκείνες τις έδρες που μοιράζονται δύο ακμές με την εξωτερική έδρα. Σε αυτήν την περίπτωση διαγράφουμε δύο ακμές του δικτύου και μία κορυφή αυτού.

Δηλαδή ισχύει

$$K - A + E = (K - 1) - (A - 2) + E - 1 = K - A + E$$

Άρα και αυτού του είδους ο μετασχηματισμός είναι επιτρεπτός, αφού η προς εξέταση ποσότητα παραμένει σταθερή.

Επαναλαμβάνουμε διαδοχικά το δεύτερο και το τρίτο μετασχηματισμό όσες φορές μας επιτραπεί τηρώντας τους εξής κανόνες :

1. Αν έχουμε τη δυνατότητα να εκτελέσουμε και τους δύο αυτούς μετασχηματισμούς, τότε επιλέγουμε ΠΑΝΤΑ τον τρίτο. Διότι αν εκτελέσουμε τον δεύτερο μπορεί το δίκτυό μας να χωριστεί σε κομμάτια.
2. Αφαιρούμε μία έδρα κάθε φορά. Ειδάλλως μπορεί να καταλήξουμε σε μία μη επιθυμητή μορφή δικτύου – ακμές μεμονωμένες στην εξωτερική έδρα.

Προφανώς, το πλήθος των μετασχηματισμών που μπορούμε να εφαρμόσουμε σε κάθε δίκτυο είναι πεπερασμένο, αφού ο αριθμός των εδρών και των ακμών είναι πεπερασμένος.

Ακόμη, ο αλγόριθμος τερματίζει όταν το δίκτυο καταλήξει να είναι ένα μόνο τρίγωνο.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα $K - A + E$ για το τελικό τρίγωνο είναι και η ποσότητα που χαρακτηρίζει το αρχικό πολύεδρο, δηλαδή

$$K - A + E = 3 - 3 + 2 = 2$$

Ο αριθμός των εδρών είναι δύο, καθώς το δίκτυο του τριγώνου περιγράφεται από μία εσωτερική και μία εξωτερική έδρα. ■

Η παράθεση των στοιχείων σχετικά με τα πολύγωνα και τα πολύεδρα δικαιολογείται από το γεγονός πως κάθε στέγη αποτελεί ένα ανοικτό πολύεδρο. Το πολύεδρο αυτό συχνά δεν είναι κυρτό.

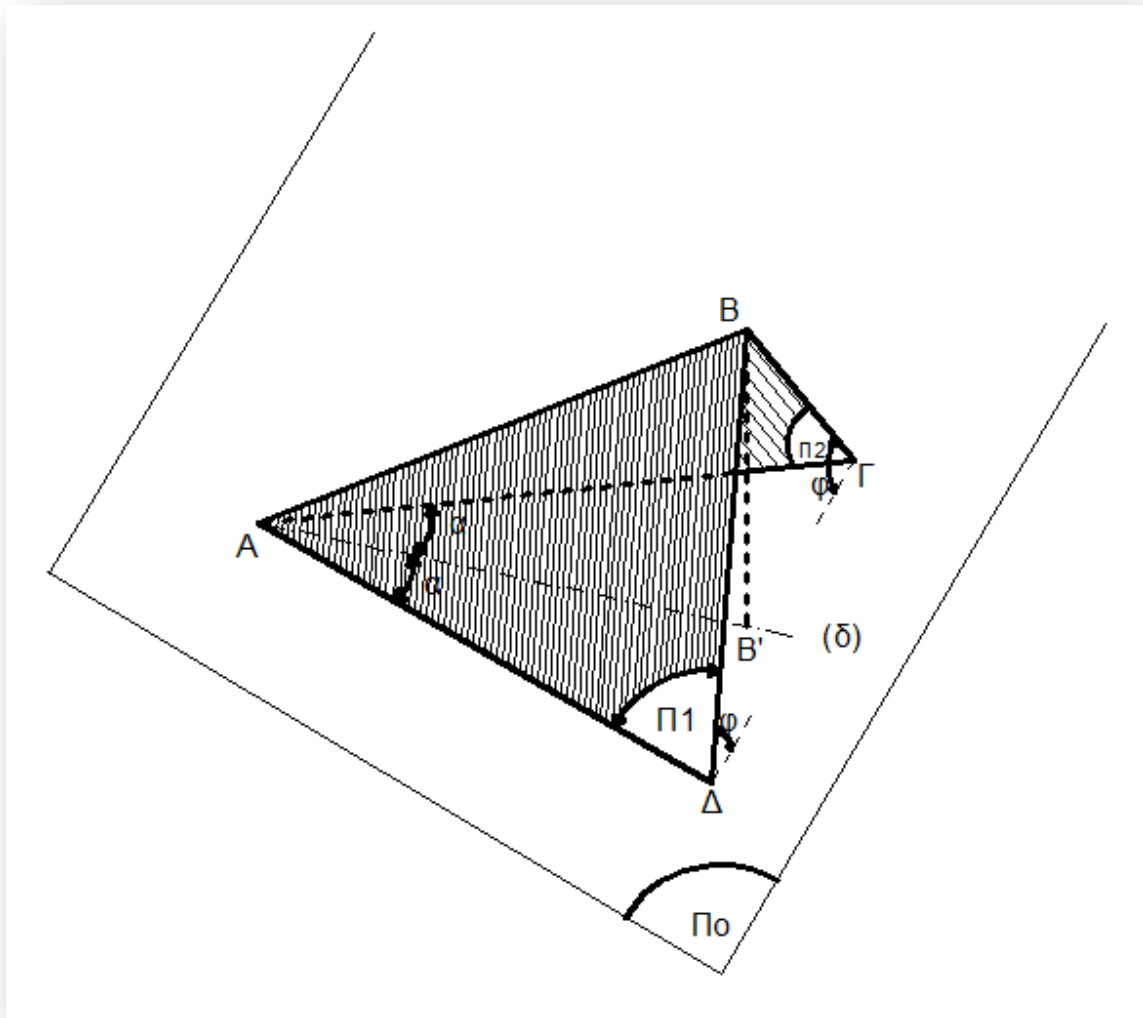
Έστω τρία επίπεδα Π_0, Π_1, Π_2 τα οποία τέμνονται ανά δύο κατά τις ευθείες AD, AG, AB και διέρχονται από το ίδιο σημείο A , από το οποίο διέρχονται και οι τομές τους.

Θεώρημα 1 : Εάν τα επίπεδα Π_1 και Π_2 είναι ισοκλινή ως προς το τρίτο Π_0 , η προβολή της μεταξύ τους τομής AB πάνω στο Π_0 , η AB' , θα ταυτίζεται με τη διχοτόμο της επίπεδης γωνίας $\Delta \hat{A} \Gamma$ των τομών τους με το Π_0 . (Σχήμα 3)

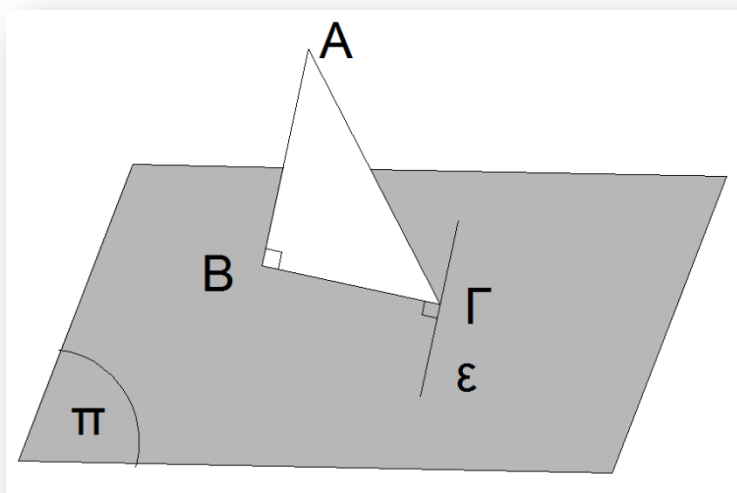
Θεώρημα 2 : Οι τομές ενός επιπέδου με δύο άλλα επίπεδα, παράλληλα μεταξύ τους είναι ευθείες παράλληλες.

Θεώρημα των τριών καθέτων

- i. Αν η ευθεία AB (Σχήμα 4) είναι κάθετη σε επίπεδο π (B σημείο του π) και η ευθεία $B\Gamma$ είναι κάθετη σε ευθεία ϵ του π , (Γ σημείο της ϵ), τότε η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην ευθεία ϵ .
- ii. Αν η ευθεία AB είναι κάθετη σε επίπεδο π και η ευθεία $A\Gamma$ είναι κάθετη σε ευθεία ϵ του π , τότε η $B\Gamma$ είναι κάθετη στην ευθεία ϵ .
- iii. Αν η ευθεία $A\Gamma$ είναι κάθετη στην ϵ , η ευθεία $B\Gamma$ είναι κάθετη στην ϵ και η AB είναι κάθετη στην $B\Gamma$, τότε η ευθεία AB είναι κάθετη στο επίπεδο π .



Σχήμα 3 Προβολή Τομής Ισοκλινών Επιπέδων Π_1 και Π_2 ως προς τρίτο Π_0



Σχήμα 4 Θεώρημα τριών καθέτων

1.2 Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας

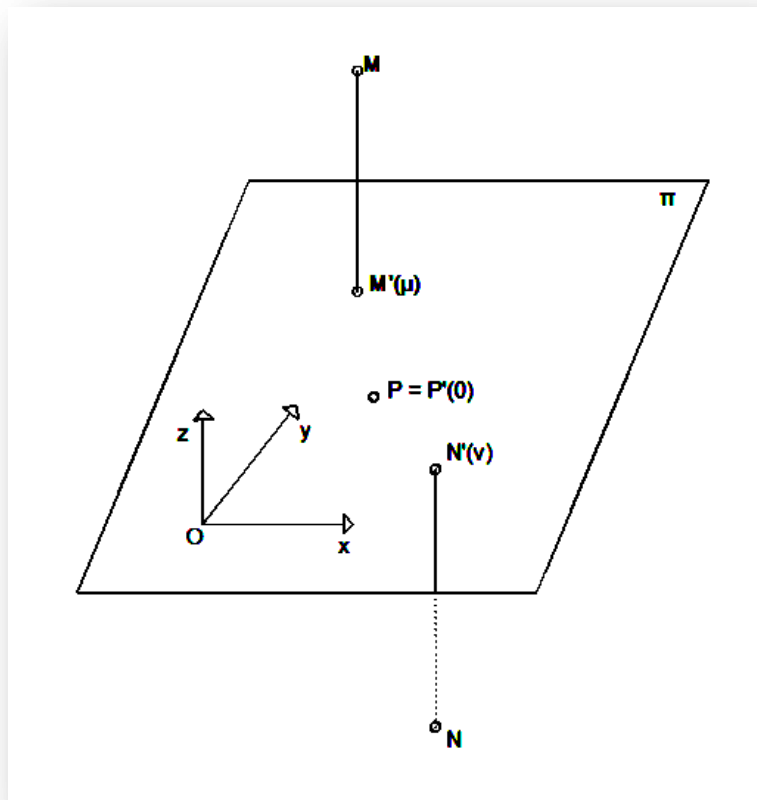
1.2.1 Παραστατική Γεωμετρία ενός Επιπέδου Προβολής

Έστω π ένα επίπεδο του τρισδιάστατου χώρου, το οποίο ονομάζεται επίπεδο προβολής. Το επίπεδο αυτό χωρίζει τον χώρο σε δύο περιοχές.

✚ Καλούμε **υψόμετρο** MM' ενός σημείου M του χώρου την προσημασμένη απόσταση του σημείου M από το επίπεδο π .

Τα σημεία επί του επιπέδου π θεωρούμε ότι έχουν μηδενικό υψόμετρο. Επίσης σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικές περιοχές του χώρου, όπως αυτές ορίζονται από το επίπεδο προβολής, θα έχουν αντίθετα πρόσημα.

Κάθε σημείο M του χώρου παριστάνεται με το ζεύγος $(M', \mu) = M'(\mu)$, όπου M' είναι η προβολή του M στο επίπεδο π και μ είναι το υψόμετρο του σημείου M .



Σχήμα 5 Υψομετρική μέθοδος προβολής

Κατά τη μεταφορά των σχημάτων του χώρου στο επίπεδο π , αφού θεωρήσουμε ένα τρισσορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα αναφορά $Oxyz$ (όπου το επίπεδο π

ταυτίζεται με το επίπεδο Oxy), απεικονίζουμε κάθε σημείο $M(x,y,z)$ στην προβολή του $M'(x,y)$ στο επίπεδο. Η τρίτη συντεταγμένη z του σημείου είναι το προσημασμένο υψόμετρο $\mu (=z)$ του σημείου.

Έστω ευθεία ϵ του χώρου που ορίζεται από τα σημεία A και B . Η προβολή αυτής στο επίπεδο π είναι η ευθεία που ορίζεται από τις προβολές των A και B , $A'(\alpha)$ και $B'(\beta)$ αντίστοιχα.

- ✚ **Ίχνος** ευθείας λέγεται το σημείο τομής της ευθείας με το επίπεδο προβολής π .
- ✚ **Γωνία κλίσης** λέγεται η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με το επίπεδο προβολής π .
- ✚ **Κλίση** ευθείας λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης.
- ✚ **Βαθμίδα ή θήμα** ευθείας λέγεται η συνεφαπτομένη της γωνίας κλίσης.
- ✚ Εάν στην προβολή ϵ' μιας ευθείας ϵ σημειώσουμε τα σημεία ακεραίου υψομέτρου, τότε λέμε ότι έχουμε την **υψομετρική κλίμακα** της ευθείας ϵ και τη συμβολίζουμε με $[\epsilon']$.

Έστω επίπεδο σ το οποίο δεν είναι παράλληλο στο επίπεδο προβολής π .

- ✚ **Ίχνος** ενός επιπέδου σ λέγεται η ευθεία τομής σ_1 του επιπέδου με το επίπεδο προβολής π .
- ✚ **Ίχνοπαράλληλες** λέγονται οι ευθείες ι του επιπέδου σ που είναι παράλληλες στο ίχνος σ_1 .
- ✚ **Ίχνοκάθετες ή γραμμές κλίσης** λέγονται οι ευθείες κ που είναι κάθετες στο ίχνος σ_1 και είναι γραμμές μέγιστης κλίσης.

Οι έδρες ενός πολυέδρου, ως τμήματα επιπέδου, θα έχουν ως γραμμές κλίσης τα τμήματα των ίχνοκαθέτων εκάστου επιπέδου, τα οποία βρίσκονται εντός της αντίστοιχης έδρας.

Από κάθε σημείο μιας επιφάνειας διέρχεται μία μόνο γραμμή κλίσης, εκτός από ορισμένα σημεία της επιφάνειας, όπως για παράδειγμα, τα σημεία μεγίστου/ελαχίστου υψομέτρου ή τα σημεία που η επιφάνεια έχει την μορφή κώνου.

- ✚ **Γωνία κλίσης** ενός επιπέδου λέγεται η οξεία γωνία ϕ που σχηματίζει το επίπεδο αυτό με το επίπεδο προβολής π , η οποία ισούται με τη γωνία κλίσης που σχηματίζει η τυχούσα ίχνοκάθετος κ του επιπέδου με το επίπεδο προβολής.

Επισημαίνουμε πως εάν δοθεί μία ίχνοκάθετος κ ενός επιπέδου σ , τότε το επίπεδο είναι πρακτικά ορισμένο, καθώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το ίχνος σ_1 του

επιπέδου ως την κάθετη ευθεία στην κ που διέρχεται από εκείνο το σημείο της που έχει μηδενικό υψόμετρο.

Τομή Δύο Επιπέδων

➤ Τομή επιπέδων με ίχνη τεμνόμενα

Έστω δύο επίπεδα σ και τ , τα οποία δίνονται με τις υψομετρικές τους κλίμακες $[u'_1]$ και $[u'_2]$ οι οποίες δεν είναι παράλληλες. Ζητείται να κατασκευαστεί η ευθεία τομής των δύο επιπέδων.

Λύση

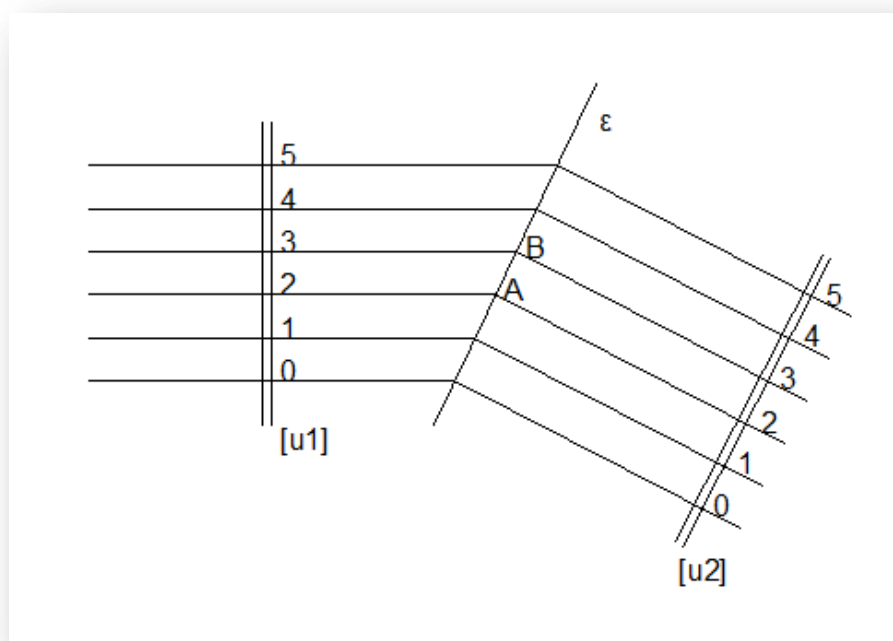
Κατασκευάζουμε τις ιχνοπαράλληλες ακεραίων υψομέτρων των δύο επιπέδων.

Η ευθεία τομής ορίζεται αν προσδιορισθούν δύο σημεία της, οπότε θεωρούμε δύο βοηθητικά οριζόντια επίπεδα, π.χ. τα επίπεδα με υψόμετρο 2 και 3 αντίστοιχα.

Τα επίπεδα αυτά τέμνουν τα επίπεδα σ και τ κατά τις ιχνοπαράλληλές τους με υψόμετρα 2 και 3 αντίστοιχα.

Οι δύο ιχνοπαράλληλες υψομέτρου 2, ως συνεπίπεδες, τέμνονται σε ένα σημείο, έστω Α. Ανάλογα, οι δύο ιχνοπαράλληλες υψομέτρου 3 τέμνονται στο σημείο Β.

Η ευθεία ϵ που ορίζεται από τα σημεία Α και Β είναι η ευθεία τομής των δύο επιπέδων.



Σχήμα 6 Τομή επιπέδων με ίχνη τεμνόμενα

➤ **Τομή επιπέδων με ίχνη παράλληλα**

Δίνονται δύο επίπεδα με υψομετρικές κλίμακες $[u'_1]$ και $[u'_2]$ παράλληλες μεταξύ τους. Ζητείται η ευθεία τομής των επιπέδων αυτών.

Λύση

Αν οι υψομετρικές κλίμακες είναι ομόρροπες και ίσες, τα επίπεδα είναι παράλληλα, επομένως δεν τέμνονται.

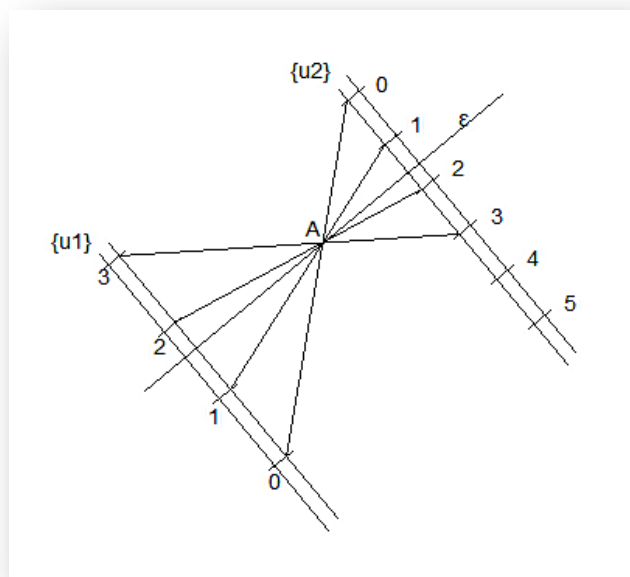
Έστω ότι τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα.

Οι ιχνοπαράλληλες των δύο επιπέδων είναι ευθείες κάθετες στις υψομετρικές κλίμακες, δηλαδή παράλληλες μεταξύ τους, επομένως τα ίχνη των δύο επιπέδων είναι παράλληλα.

Η ευθεία τομής των δύο επιπέδων είναι ευθεία παράλληλη στα ίχνη τους (και στις ιχνοπαράλληλές τους επίσης), διότι αν δύο επίπεδα τέμνονται από τρίτο κατά ευθείες παράλληλες, τότε και η τομή των δύο επιπέδων θα είναι ευθεία παράλληλη στο τέμνον επίπεδο, άρα και στις τομές των επιπέδων από το τρίτο επίπεδο.

Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα σημείο της ευθείας αυτής. Τα σημεία αντίστοιχου υψομέτρου των δύο υψομετρικών κλιμάκων ορίζουν ευθείες που διέρχονται από κοινό σημείο, λόγω της ομοιότητας των υψομετρικών κλιμάκων.

Αλλά και η κοινή ευθεία των δύο επιπέδων ανήκει σε αυτήν τη δέσμη ευθειών διότι συνδέει σημεία ίσου υψομέτρου. Είναι όμως ταυτόχρονα κάθετη στις δύο υψομετρικές κλίμακες διότι είναι κοινή ιχνοπαράλληλη των δύο επιπέδων. Επομένως από το σημείο αυτό φέρνουμε την κάθετη στις υψομετρικές κλίμακες και έτσι ορίζουμε την ευθεία τομής ϵ των δύο επιπέδων.



Σχήμα 7 Τομή επιπέδων με ίχνη παράλληλα

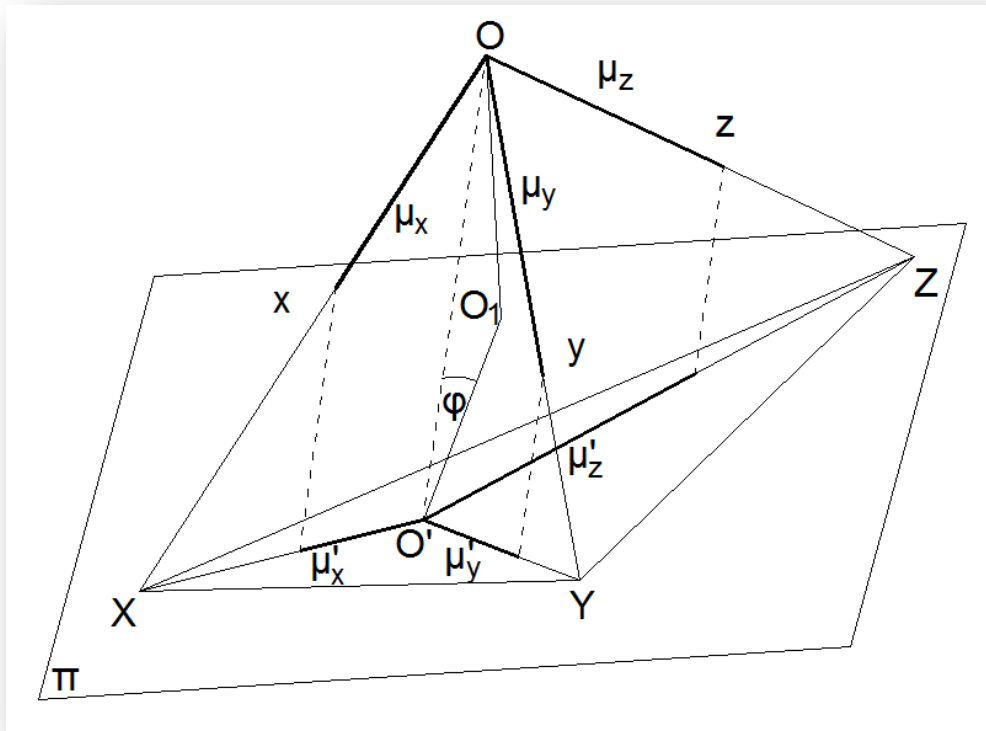
Μετά την εφαρμογή της μεθόδου του ευθύγραμμου σκελετού θα χρειαστεί να γίνουν κάποια βήματα για την απεικόνιση της στέγης στον τρισδιάστατο χώρο αξονομετρικά βάσει της δισδιάστατης κάτοψης με την οποία εργαζόμαστε στη μέθοδο.

1.2.2 Αξονομετρική Προβολή

Η αξονομετρική μέθοδος παράστασης συγκαταλέγεται στις μεθόδους απεικόνισης ενός αντικειμένου τριών διαστάσεων στο επίπεδο. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής το αντικείμενο προβάλλεται σε ένα επίπεδο παράλληλα σε μία δεδομένη ευθεία. Η ανάγκη για την ανάπτυξη της μεθόδου αυτής προέκυψε από την αδυναμία που παρουσιάζει η απλή παράλληλη προβολή να εξασφαλίσει την πλήρη εποπτεία του αντικειμένου, αφού μέσω της προβολής αυτής επιτυγχάνεται μόνο ο καθορισμός του σχήματος του αντικειμένου και της θέσης που αυτό κατέχει στο χώρο. Ειδικότερα, κατά την εφαρμογή της αξονομετρικής μεθόδου διατηρούνται οι μετρικές σχέσεις των τριών διαστάσεων του στερεού, καθώς και η παραλληλία των πλευρών του, σε αντίθεση με την προοπτική, που είναι κεντρική προβολή, στην οποία συμβαίνει ο μετασχηματισμός των επιφανειών να μην είναι ομοπαράλληλικός αλλά ομολογικός.

Η αξονομετρία ουσιαστικά παρέχει μια τρισδιάστατη (αλλά αφηρημένη) απεικόνιση του χώρου με κέντρο προβολής στο άπειρο. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για απεικονίσεις κτηρίων και κατασκευαστικών ή τεχνικών λεπτομερειών, καθώς επιτρέπει την απεικόνιση αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους. Προβάλλοντάς τα ταυτόχρονα από διαφορετικές γωνίες και διευθύνσεις, από ψηλά ή χαμηλά, ενώ ταυτόχρονα αποδεικνύεται ιδανική για τη μελέτη και διερεύνηση των όγκων των κατασκευών. Παράλληλα, μπορεί να συνδυαστεί με τις ορθές προβολές για τη μελέτη αντικειμένων ή κτηρίων τεμνομένων σε διαφορετικά σημεία επιτυγχάνοντας την ταυτόχρονη απεικόνιση του εσωτερικού και του εξωτερικού χώρου.

Το σύστημα της αξονομετρικής προβολής έχει άμεση σχέση με το σύστημα Monge και τις ίδιες αρχές (για περαιτέρω πληροφορίες για το σύστημα Monge, βλέπε Παραστατική Γεωμετρία [2]). Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ (Σχήμα 8), όπου $Ox = \mu_x$, $Oy = \mu_y$ και $Oz = \mu_z$ είναι οι μονάδες επί των τριών αξόνων, και η διεύθυνση προβολής OO' που σχηματίζει γωνία ϕ με το επίπεδο π . Επισημαίνουμε ότι το σημείο O_1 αποτελεί ορθή προβολή του σημείου O στο επίπεδο π , ενώ το σημείο O' είναι η παράλληλη κατά τη διεύθυνση του OO' προβολή του O . Οι προβολές των μονάδων έχουν κοινή αρχή το σημείο προβολής του O στο επίπεδο π , δηλαδή το O' , και λέγονται **αξονομετρικές μονάδες**. Κατ' επέκταση οι ευθείες $O'x'$, $O'y'$ και $O'z'$ λέγονται **αξονομετρικοί άξονες**.



Σχήμα 8 Αξονομετρική Μέθοδος Παράστασης

Ορίζουμε ως λόγους αναγωγής τα εξής $\lambda_x = \frac{\mu'_x}{\mu_x}, \lambda_y = \frac{\mu'_y}{\mu_y}, \lambda_z = \frac{\mu'_z}{\mu_z}$,

μεταξύ των οποίων ισχύει η σχέση $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi}$.

Στο άνωθεν σχήμα είναι σημειωμένη και η κάθετη προβολή του σημείου O στο επίπεδο π, δηλαδή το σημείο O₁, το οποίο αποτελεί προβολή του σημείου O μέσω της **ορθής αξονομετρικής προβολής**.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για την ορθή αξονομετρική προβολή οι λόγοι αναγωγής ισούνται με τα συνημίτονα των γωνιών $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ που σχηματίζουν οι άξονες με το επίπεδο π και ισχύει η σχέση :

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 2$$

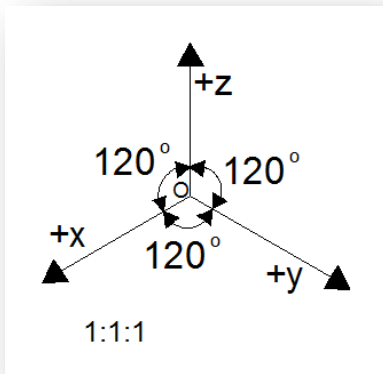
Ορισμοί

- ✚ Ανάλογα με τη διεύθυνση της προβολής ως προς το επίπεδο προβολής, η αξονομετρική παράσταση χαρακτηρίζεται ως **πλάγια αξονομετρική προβολή** (πλάγια προβολή) και ως **ορθή αξονομετρική προβολή** (κάθετη προβολή).
- ✚ Άλλη μία διάκριση που κάνουμε είναι βάσει των μηκών των αξονομετρικών μονάδων. Όταν οι τρεις αξονομετρικές μονάδες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε η προβολή ονομάζεται **ισομετρική** (ή **μονομετρική**). Στην περίπτωση που και

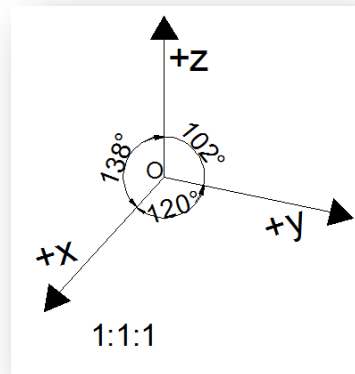
οι τρεις μονάδες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, καλούμε την προβολή **τριμετρική**. Αντίστοιχα **διμετρική** καλείται η προβολή στην οποία μόνο οι δύο από τις τρεις αξονομετρικές μονάδες είναι ίσες μεταξύ τους.

Υπάρχουν, λοιπόν, διάφορες θέσεις τις οποίες καταλαμβάνει το τρισσορθώνιο σύστημα αξόνων και αρκετοί τρόποι κατά τους οποίους διατάσσεται το τρισσορθώνιο σύστημα αξόνων. Θα περιγράψουμε μερικές από τις περιπτώσεις που συναντώνται :

- **Ισομετρική Αξονομετρική Προβολή.** Είναι η πιο αληθοφανής προβολή. Οι άξονες x , y , z σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες 120° και τα μοναδιαία διανύσματα απεικονίζονται από τη σχέση 1:1:1 (Σχήμα 9). Μπορούμε να στρέψουμε τους άξονες x και y το πολύ μέχρι 18° και να διατηρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα με τη σχέση 1:1:1 (Σχήμα 10).

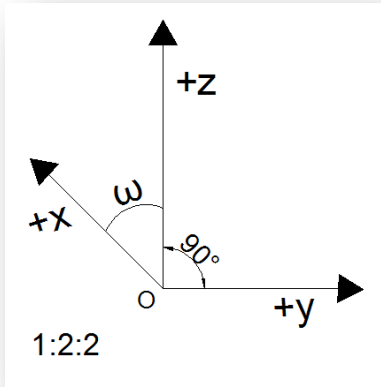


Σχήμα 9 Ισομετρική Αξονομετρική Προβολή

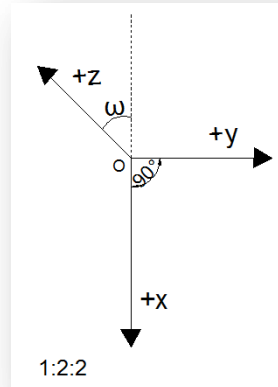


Σχήμα 10 Σύστημα σε Στροφή

- **Πλάγια Διμετρική Αξονομετρική Προβολή (Cavallère).** Στη μετωπική διμετρική προβολή οι άξονες y και z είναι κάθετοι μεταξύ τους, ενώ ο άξονας x σχηματίζει με τον z γωνία ω , που μπορεί να είναι 30° , 45° ή 60° (Σχήμα 11). Στην οριζόντια διμετρική προβολή οι άξονες x και y είναι κάθετοι μεταξύ τους, ενώ ο άξονας z σχηματίζει με τον x γωνία ω , ίση με 30° , 45° ή 60° (Σχήμα 12). Και στις δύο περιπτώσεις οι αναλογίες των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι 1:1:1/2 ή 2:2:1.

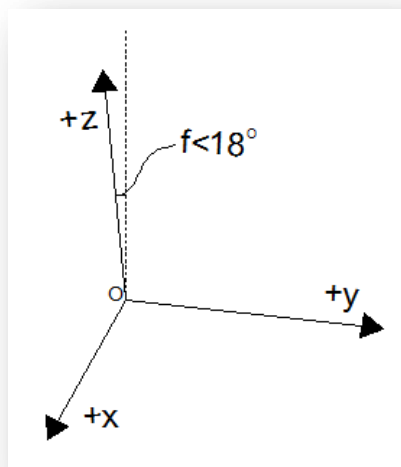


Σχήμα 11 Μετωπική Διμετρική Προβολή



Σχήμα 12 Οριζόντια Διμετρική Προβολή

- Τριμετρική Αξονομετρική Προβολή.** Στην τριμετρική προβολή οι άξονες x , y , z σχηματίζουν μεταξύ τους τυχαίες γωνίες, τα δε μοναδιαία διανύσματα είναι μεταξύ τους διάφορα. Συνήθως δε στρέφουμε τον άξονα z περισσότερο από 18° από την κορυφή, για να μην έχουμε παράδοξες απεικονίσεις.



Σχήμα 13 Τριμετρική Αξονομετρική Προβολή

2 Βασικές γνώσεις περί στεγών

Με τον όρο *στέγη* αναφερόμαστε στο τμήμα μιας κατασκευής που χρησιμεύει στην κάλυψη του χώρου που περικλείει η κατασκευή. Η χρησιμότητα μιας στέγης έγκειται στην προστασία τόσο της κατασκευής όσο και των πραγμάτων και ανθρώπων που φιλοξενεί από τα στοιχεία της φύσης.

2.1 Τεχνικά χαρακτηριστικά μιας στέγης

Κατά τον σχεδιασμό μιας στέγης, πρέπει να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με τον τρόπο στήριξής της και το κατά πόσο θα είναι επικλινής ή όχι. Οι περισσότερες κατοικίες, με εξαίρεση αυτές που κατασκευάζονται σε περιοχές με ιδιαίτερα ξηρό κλίμα, συνοδεύονται από επικλινείς στέγες. Η κλίση με την οποία σχεδιάζεται κάθε στέγη επιλέγεται βάσει των αναγκών που στην εκάστοτε περίπτωση θέλουμε να καλύψουμε και της αισθητικής. Παραδείγματος χάριν, σε περιοχές όπου οι βροχοπτώσεις και οι χιονοπτώσεις δεν αποτελούν συχνό φαινόμενο, μία σχεδόν επίπεδη στέγη προσφέρει την επιθυμητή προστασία.

Εν συντομία, το σύνολο των παραγόντων που συμβάλλουν στην τελική διαμόρφωση μιας στέγης έχει ως εξής :

1. Οι εξωτερικές όψεις

Ποια είναι η εμφάνιση που επιδιώκεται να έχει η στέγη, σε σχέση και με το περιβάλλον. Κατά πόσο είναι ορατή από παντού. Καταλήγει σε μεσοτοιχίες; Εάν το οίκημα ανήκει σε κάποιον παραδοσιακό οικισμό, ο γενικός μορφολογικός χαρακτήρας είναι δοσμένος. Τί σχέσεις όγκων δημιουργεί;

2. Η μορφή και οι διαστάσεις της κάτοψης

Είναι ενιαία ή όχι η λειτουργία των χώρων; Υπάρχουν ελεύθερα ανοίγματα; Υπάρχει η δυνατότητα ενδιάμεσων στηρίξεων;

3. Το μέγιστο ύψος

Εξαρτάται από τον Γενικό Οικοδομικό Κανονισμό (ΓΟΚ) και τα ύψη των ορόφων, ενώ επηρεάζει τους όγκους, τις κλίσεις, κ.λπ.

4. Το κλίμα της περιοχής και η ιδιαιτερότητα της θέσης της οικοδομής

Προσδιορίζουν τις φορτίσεις ανέμου και χιονιού, τη σεισμική επικινδυνότητα και τη συμπεριφορά του εδάφους. Όλα αυτά έχουν προφανή επιρροή στη Στατική λύση, που με τη σειρά της επηρεάζει την αρχιτεκτονική λύση. Επίσης θέτουν όρια στις κλίσεις και επιδρούν αποφασιστικά στο παράγοντα (5).

5. Ο τρόπος μόνωσης, απορροής και επικάλυψης

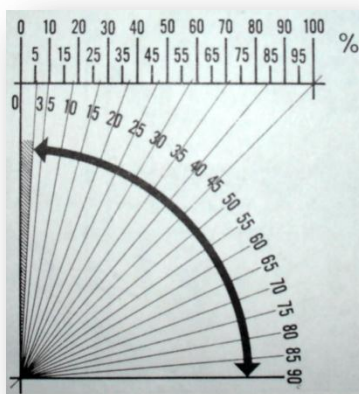
Όρια κλίσεων στέγης. Θέσεις υδρορροών, οριζόντιων και κατακόρυφων. Πάχη μονώσεων. Διαστάσεις και σχετικές θέσεις φερόντων στοιχείων. Στηθαία, κορνίζες και γείσα, συναρτώμενα και με τις όψεις κ.λπ.

6. Ορατότητα εκ των κάτω
Διατάξεις συμμετρικές ή όχι. Πιθανόν σε ενιαίο χώρο να απαιτείται ενιαία μορφή. Ψευδοροφές. Αιωρούμενη ή εδραζόμενη στέγη.
7. Η χρήση του κενού χώρου κάτω από τη στέγη
Πιθανή είναι η δημιουργία ωφέλιμων χώρων με απαιτήσεις κατάλληλου ύψους, φωτισμού και αερισμού του εσωτερικού του “σώματος” της στέγης. Κατά συνέπεια προκύπτουν ανάγκες και δεσμεύσεις σε ανοίγματα, υπερυψώσεις, αποστάσεις, εσωτερική διαμόρφωση των ζευκτών, φορτία, μονώσεις, κ.λπ.
8. Τα υλικά και η σύνθεση του φέροντα οργανισμού
Τα όρια των ελεύθερων ανοιγμάτων. Οι αποστάσεις και οι διαστάσεις των φερόντων στοιχείων. Οι τρόποι στήριξης κ.λπ. . Ο σχεδιασμός της κάτοψης και των όψεων σε λιθόκτιστα ή ξύλινα σπίτια για παράδειγμα επηρεάζεται από τις θέσεις των ζευκτών και αντίστροφα, έτσι ώστε τα φορτία της στέγης να μεταφέρονται , κατά το δυνατόν, άμεσα πάνω στα κατακόρυφα φέροντα στοιχεία (λ.χ. όχι σε ανώφλια παραθύρων, αλλά απευθείας πάνω στους πεσσούς) .
Σε περιπτώσεις σκελετών από οπλισμένο σκυρόδεμα ή σίδηρο, το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται εύκολα, λόγω της καμπτικής αντοχής των δοκών στήριξης.
9. Η πρόβλεψη για μελλοντικούς ορόφους
Πιθανή μελλοντική ανάγκη για μερική ή ολική αποσύνθεση της στέγης τί επιρροή θα είχε στα υλικά, τις συνδέσεις και τα φορτία. Ακόμη, είναι χρήσιμες οι προβλέψεις σχετικά με τη συνέχεια των κλιμάκων, των ανοιγμάτων, των αγωγών, κ.λπ. .

Ακόμη υπάρχουν και πρέπει να συνεκτιμηθούν θέματα πυρασφάλειας ,συντήρησης, επισκεψιμότητας, τεχνικών μέσων και υλικών της περιοχής, κόστους κ.λπ. .

Από όλα τα παραπάνω είναι προφανές ότι ο μηχανικός που θα διαμορφώσει τη στέγη ενός κτηρίου χρειάζεται, εκτός από φαντασία, κρίση, αίσθηση του χώρου, αισθητική και μια πληθώρα ειδικών γνώσεων. Μόνον τότε θα φθάσει σε ένα αποτέλεσμα κατασκευάσιμο , το οποίο και αισθητικά θα αναδεικνύει το κτήριο και θα εξυπηρετεί όλες τις λειτουργικές και στατικές του ανάγκες, μέσα στα οικονομικά όρια που θέτονται κάθε φορά.

✚ Η **κλίση (pitch)** είναι η εφαπτομένη της γωνίας μιας ιχνοκαθέτου.



Εικόνα 2 Μετατροπή των μοιρών σε κλίση επί τοις %

Οι στέγες διακρίνονται :

- ανάλογα με την κλίση, σε:
 1. Επίπεδα δώματα
 2. Επίπεδες στέγες με κλίση από 1° έως 3°.
Σε αυτές είναι απαραίτητη η διαμόρφωση ρήσεων για την απορροή των ομβρίων υδάτων .
 3. Στέγες με μικρή κλίση (πάνω από 3°), στις οποίες απαιτείται μελέτη της επικάλυψης.
Στέγες με κλίση μέχρι 30° χαρακτηρίζονται συχνά σαν “ελαφρά κεκλιμένες”, δεν υπάρχει, ωστόσο, κάποιος γενικός ορισμός.
 4. Στέγες με μεγάλη κλίση, πάνω από 35°.
- ανάλογα με την επικάλυψη, σε:
 1. Επικάλυψη με κεραμίδια : πτυχωτά (γαλλικού ή ολλανδικού τύπου), επίπεδα, κοίλα (βυζαντινά), ρωμαϊκού τύπου.
 2. Επικάλυψη με επίπεδες πλάκες : σχιστολιθικές, φύλλα λαμαρίνας ή ξυλοκέραμους κ.ά. , τεχνητές ή μηχανικά επεξεργασμένες φυσικές πλάκες.
 3. Επικάλυψη με κυματοειδείς πλάκες από συνθετικό υλικό ή λαμαρίνα.
 4. Μεταλλική επικάλυψη : επιψευδαργυρωμένες ταινίες λαμαρίνας, φύλλα αλουμινίου και χαλκού.
Τρόποι κατασκευής : στερέωση σε τεγίδες, μεταλλικά φύλλα με νευρώσεις, επικόλληση.
 5. Επικάλυψη με πλάκες από γυαλί.



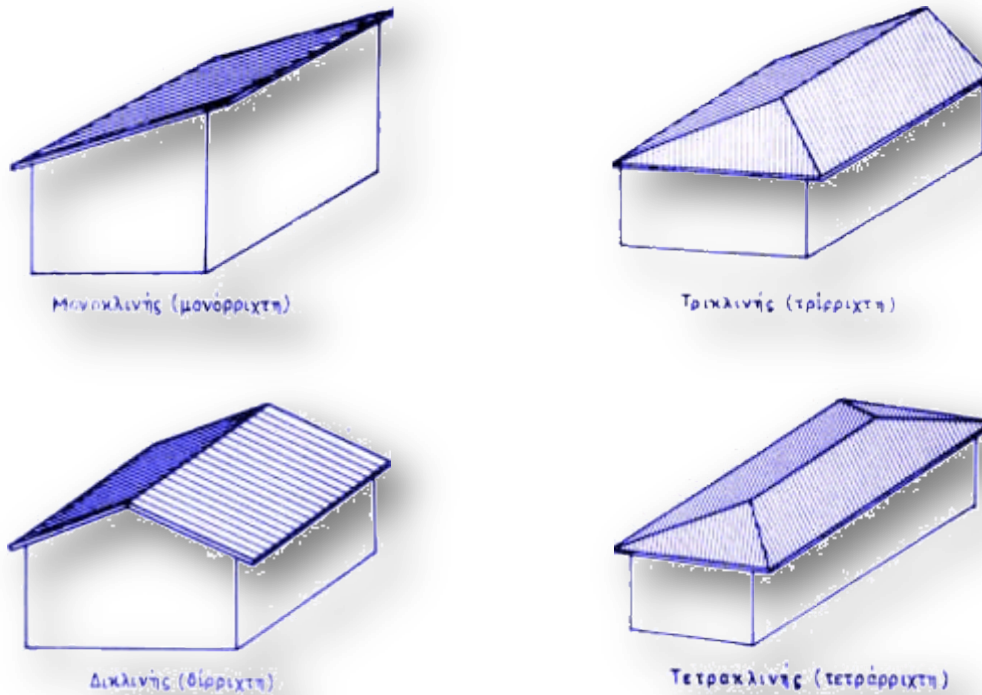
Εικόνα 3 Ρωμαϊκού, Ολλανδικού και Βυζαντινού τύπου



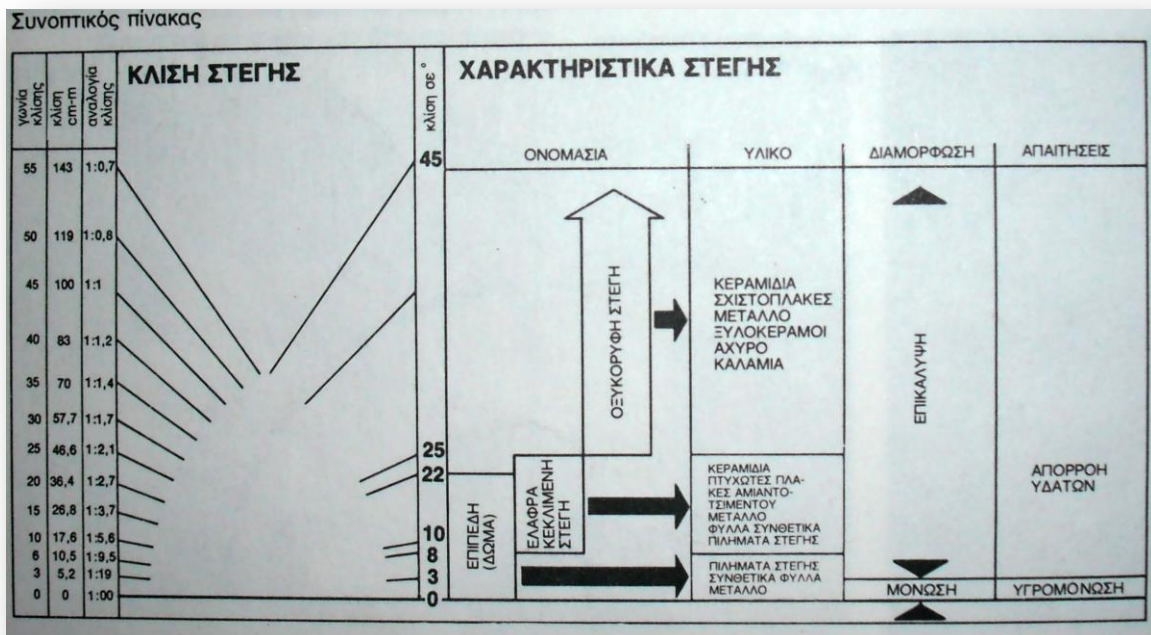
Εικόνα 4 Σχιστολιθικές επίπεδες πλάκες & Ξυλοκέραμο

- ανάλογα με τη λειτουργία (σε σχέση με τη μόνωση), σε:
 1. Μονοκέλυφες “θερμές” στεγάσεις ,όπου οι διάφορες επιστρώσεις τοποθετούνται σε επαφή χωρίς ενδιάμεσο κενό αερισμού. Το συνολικό πάχος της στέγης λειτουργεί σαν θερμομόνωση και επιπλέον δεν απαιτείται φράγμα υδρατμών. Η σειρά των μονωτικών στρώσεων είναι η χρησιμοποιούμενη σε συμβατικές κατασκευές.
 2. Αεριζόμενες “ψυχρές” στέγες που αποτελούνται από δύο επιφάνειες με ενδιάμεσο κενό.
- ανάλογα με τη μορφή, σε:
 1. Δικλινής στέγη : Οι δύο κεκλιμένες επιφάνειες τέμνονται σε μία γραμμή κορυφής (κορφιάς). Στις μη κεκλιμένες πλευρές σχηματίζονται τριγωνικά αετώματα. Είναι γνωστή και ως αμφικλινής ή δίρρους (δίρριχτη) .
 2. Τετρακλινής στέγη : Εδώ οι κεκλιμένες επιφάνειες συναντώνται σε ακμές (γερτοί μαχιάδες) οι οποίες τέμνονται στις άκρες της γραμμής κορυφής. Επίσης γνωστή ως τετράρρους ή σκαφοειδής (τετράρριχτη).
 3. Στέγη με σοφίτα
 4. Μονόρριχτη στέγη : Όλη η στέγη είναι κεκλιμένη προς τη μία πλευρά. (μονόρρους /μονόρριχτη).
 5. Πυργοειδής στέγη όπου το ύψος είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του ανοίγματος που καλύπτεται.
 6. Θόλοι, τρούλοι.
 7. Αναρτημένες στέγες. Είναι εκείνες οι οροφές οι οποίες δεν στηρίζονται κατά τον κλασσικό τρόπο σε δοκάρια και υποστυλώματα αλλά αναρτώνται μέσω ειδικών καλωδίων από στύλους.

8. Ειδικές μορφές χρησιμοποιούμενες κυρίως σε βιομηχανικά κτήρια είναι οι πριονωτές στέγες (Sheds) και οι συρόμενες στέγες.



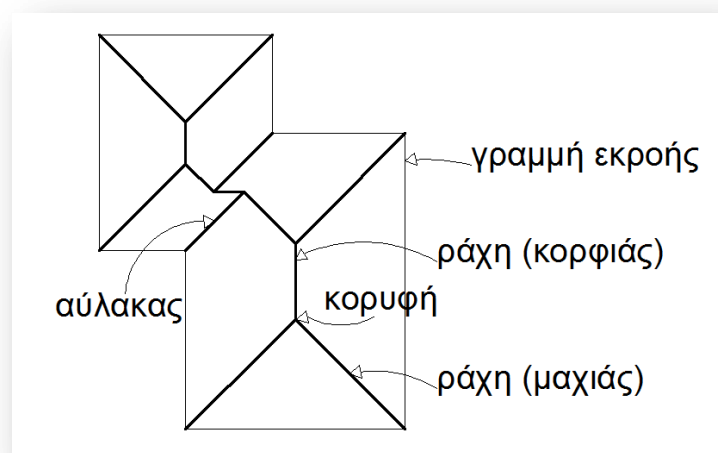
Εικόνα 5 Μερική διάκριση στεγών ανάλογα με τη μορφή



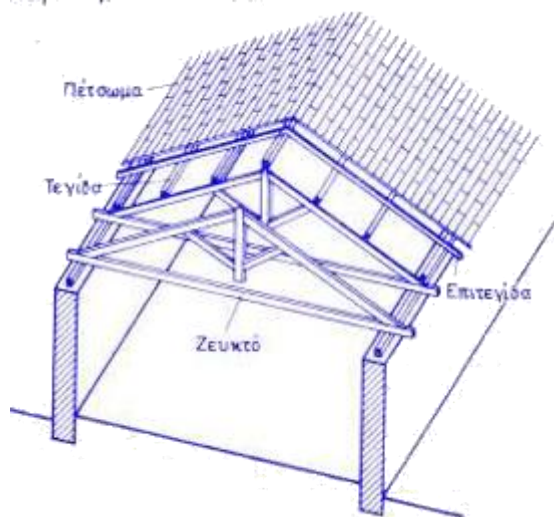
Από γεωμετρική άποψη, η εξωτερική επιφάνεια μιας στέγης μπορεί να είναι επίπεδη, πολυεδρική, καμπυλόγραμμη ή ακόμα και μεικτή. Η πολυεδρική επιφάνεια είναι ανοικτή και το σύνορό της λέγεται **περίγραμμα** της στέγης (**παρυφή στέγασης**).

Οι ακμές μιας πολυεδρικής στέγης λέγονται **ράχες** ή **αύλακες**. Ειδικότερα, ράχες ονομάζονται εκείνες οι ακμές που αντιστοιχούν σε δίεδρες γωνίες που στρέφουν την κυρτή γωνία στο εσωτερικό του κτηρίου, ενώ αύλακες καλούνται οι ακμές οι οποίες αντιστοιχούν σε δίεδρες γωνίες που στρέφουν την κυρτή τους γωνία στο εξωτερικό μέρος.

- ✚ Συχνά τα κεκλιμένα επίπεδα που συνιστούν τη στέγη εξέχουν από την εξωτερική κατακόρυφη επιφάνεια των περιμετρικών τοίχων και σχηματίζουν τις καλούμενες **κορωνίδες (κορνίζες)**, εξασφαλίζοντας τη ροή των νερών της βροχής προς το έδαφος σε απόσταση από τους τοίχους των κτηρίων.
- ✚ **Παρυφή στέγασης** ονομάζεται το κατώτατο οριζόντιο όριο της στέγης
- ✚ Είναι προφανές πώς οι ράχες είναι γραμμές διαχωρισμού των όμβριων υδάτων, γνωστές ως **γραμμές κορυφής /κορφιάδες** (οριζόντιες) ή **μαχιάδες** (κεκλιμένες),
- ✚ Οι δε αύλακες που αποτελούν μισγάγγειες, δηλαδή είναι γραμμές οι οποίες συγκεντρώνουν και αποχετεύουν τα ύδατα είναι πάντοτε κεκλιμένοι.
- ✚ **Κορυφή** λέγεται το σημείο τομής περισσοτέρων των τριών επιφανειών.
- ✚ Το μέρος του συνόρου της επιφάνειας της στέγης δια του οποίου τα όμβρια ύδατα εγκαταλείπουν τη στέγη λέγεται **γραμμή εκροής ή απορροής**. Αποτελείται συνήθως από κεκλιμένες ευθείες που γενικά μπορεί να είναι και καμπύλες.



Σχήμα 14 Τα μέρη μίας στέγης



Εικόνα 6 Τα δομικά στοιχεία μιας στέγης

Η μορφή του φέροντα οργανισμού μιας στέγης ποικίλει και ενδέχεται να αποτελείται από:

1. αποκλειστικά κεκλιμένες ή μη δοκούς (μονόρριχτη και δίρριχτη ή επίπεδη με μικρά ανοίγματα στέγη)
2. **ζευκτά**, τα οποία είναι δικτυωτές δοκοί που τοποθετούνται παράλληλα η μία στην άλλη .
3. ζευκτά και τεγίδες. **Τεγίδες** ονομάζουμε εκείνα τα δοκάρια που τοποθετούνται κάθετα προς

τα ζευκτά με σκοπό την κάλυψη των μεταξύ τους ανοιγμάτων και τη στερέωση της στεγανής επικάλυψης. Εάν οι αποστάσεις μεταξύ των τεγίδων είναι μεγάλες, μπορεί να τοποθετηθεί μία δεύτερη σειρά μικρών δοκαριών (δοκίδων) παράλληλων προς τα ζευκτά, οι **επιτεγίδες**.

Όταν υπάρχει σανίδωμα , αυτό καλείται **πεταύρωση (πέτσωμα)** και στερεώνεται επάνω στις τεγίδες ή στις επιτεγίδες , εάν αυτές υπάρχουν.

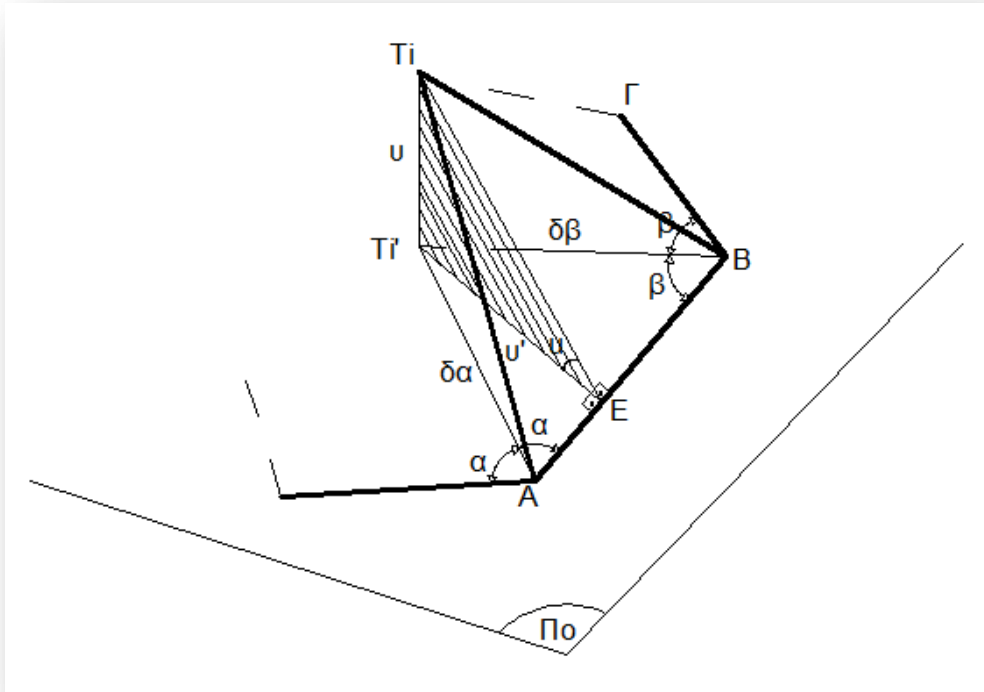
2.2 Προσδιορισμός του πραγματικού ύψους κορυφής T_i ισοκλινούς στέγης, δεδομένης της κλίσης της και της κάτοψης της γραμμής απορροής της

Βάσει του θεωρήματος των τριών καθέτων (§1 Μαθηματικό Υπόβαθρο), αφού $T_i T'_i$, Σχήμα 15, είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο Π_0 (T'_i = προβολή του T_i) και η $T'_i E$ φέρεται κάθετη στην πλευρά AB στο σημείο E και η $T_i E$ θα είναι κάθετη στην AB . Έτσι η γωνία $\hat{u} = \angle T_i E T'_i$, θα είναι η γωνία κλίσης του επιπέδου της έδρας $AT_i B$ της στέγης ως προς το οριζόντιο επίπεδο Π_0 . Με την προϋπόθεση ότι η στέγη αποτελείται από ισοκλινή επίπεδα, η γωνία \hat{u} είναι σταθερή για όλες τις έδρες της στέγης που διέρχονται από τις πλευρές ($AB, B\Gamma, \dots$) του πολυγώνου της γραμμής απορροής.

Άρα το πραγματικό ύψος u της τυχούσας κορυφής T_i της στέγης θα είναι

$$u = u' * \epsilon\phi\hat{u}$$

όπου u είναι η κατακόρυφη προβολή του τμήματος T_iE και u' είναι η οριζόντια προβολή του ίδιου τμήματος. Είναι, δηλαδή, το μέγεθος του πραγματικού ύψους u ανάλογο του ύψους u' του τριγώνου $AT_i'B$ της κάτοψης.

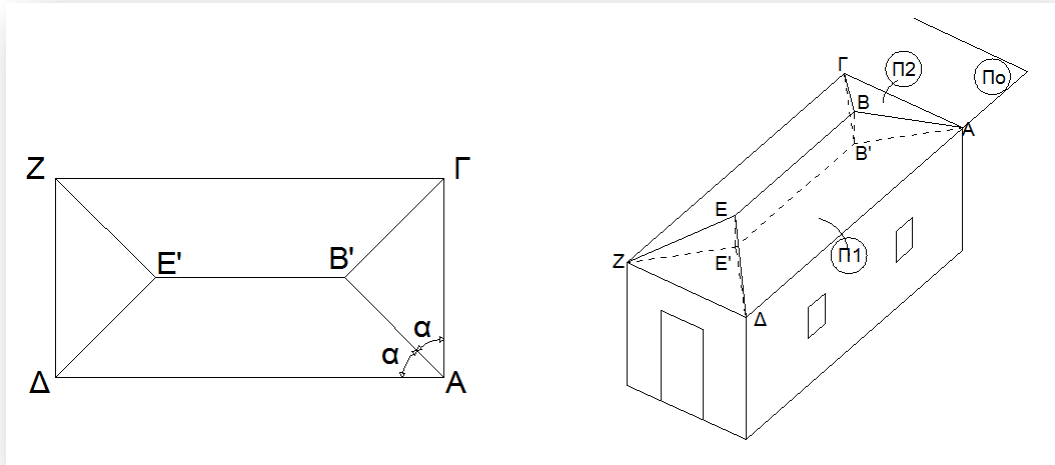


Σχήμα 15 Το πραγματικό ύψος μιας τυχούσας κορυφής

Βάσει του Θεωρήματος 1 (§1 Μαθηματικό Υπόβαθρο), στην περίπτωση ισοκλινών στεγών, (που είναι και η πιο συνηθισμένη περίπτωση), είναι εύκολη η σχεδίασή τους σε κάτοψη. Η προβολή της τομής δύο διαδοχικών εδρών της στέγης που θα αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικές πλευρές της γραμμής εκροής της στέγης θα είναι η διχοτόμος της επίπεδης γωνίας που σχηματίζουν σε κάτοψη οι δύο διαδοχικές αυτές πλευρές.

Παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα. Έχουμε μία τετράρριχτη στέγη, αποτελείται δηλαδή από τέσσερα ισοκλινή ως προς το οριζόντιο επίπεδα, και η γραμμή απορροής της είναι ολόκληρο το περίγραμμα της κάτοψης της στέγης.

Το σημείο B' είναι η οριζόντια προβολή του σημείου B , το οποίο είναι το κοινό σημείο τομής των τριών επιπέδων των διαδοχικών εδρών της στέγης που διέρχονται από τις διαδοχικές πλευρές της γραμμής απορροής DA , AG , GZ . Αντίστοιχα για το σημείο E' . Ακόμη, η $E'B'$ είναι η οριζόντια προβολή της EB , η οποία αποτελεί τομή των επιπέδων των εδρών της στέγης που διέρχονται από τις πλευρές DA και ZG .

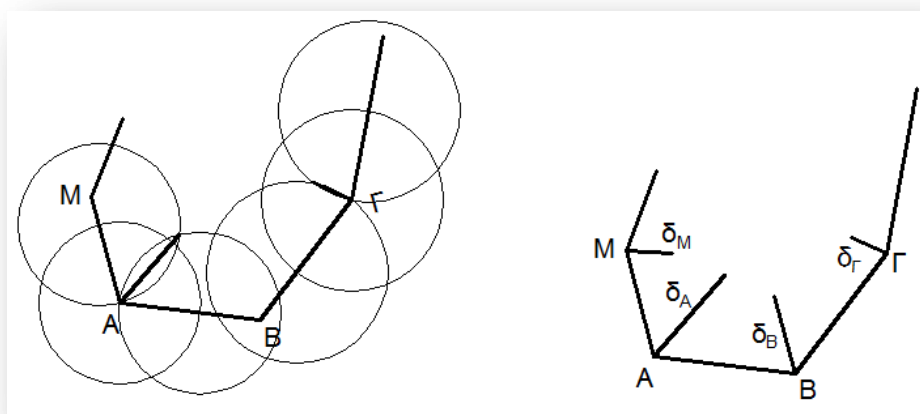


Σχήμα 16 Σχεδίαση στέγης σε τετριμμένη περίπτωση

2.3 Γενική μέθοδος χάραξης ισοκλινούς στέγης

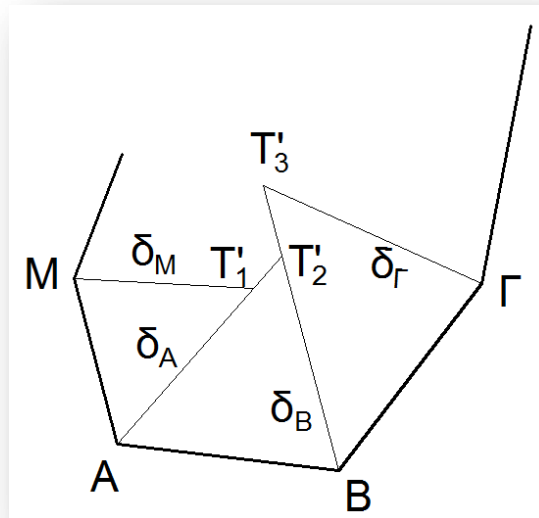
Η μέθοδος που ακολουθεί εφαρμόζεται ακόμη και στις πιο σύνθετες μορφές της γραμμής εκροής, βασίζεται δε στα γεωμετρικά θεωρήματα (1 & 2, §1 Μαθηματικό Υπόβαθρο).

Αφού καθοριστεί σε κάτοψη η γραμμή εκροής της ισοκλινούς στέγης που θέλουμε να χαράξουμε, φέρουμε τις διχοτόμους δ όλων των εσωτερικών γωνιών που η γραμμή αυτή σχηματίζει (Σχήμα 17).



Σχήμα 17 Σχεδίαση διχοτόμων

- Προσδιορίζουμε τα σημεία τομής των διχοτόμων κάθε ζεύγους διαδοχικών εσωτερικών γωνιών. Αυτά είναι, όπως προαναφέρθηκε, οι προβολές των σημείων τομής των επιπέδων που περιέχουν τις έδρες της στέγης που διέρχονται από τρεις διαδοχικές πλευρές της γραμμής εκροής.
- Από τα σημεία αυτά κρατούμε μόνο εκείνα που βρίσκονται στο εσωτερικό της γραμμής εκροής. Ας τα ονομάσουμε T_i ($i=1,2,\dots$). (Σχήμα 18)



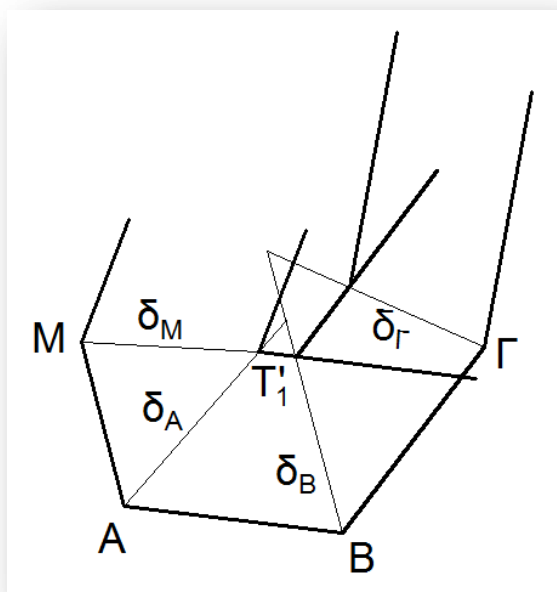
Σχήμα 18 Σημεία τομής διχοτόμων

- Εντοπίζουμε το σημείο (κορυφή της στέγης) T_1 , με προβολή το T'_1 , το οποίο έχει το μικρότερο υψόμετρο και από αυτό θεωρούμε ένα οριζόντιο επίπεδο Π που θα τμήσει την πολυεδρική επιφάνεια της στέγης κατά ένα πολύγωνο π , που θα έχει πλευρές παράλληλες προς τις αντίστοιχες πλευρές της γραμμής εκροής (σύμφωνα με το θεώρημα 2).

Το πολύγωνο π προφανώς θα έχει αριθμό πλευρών τουλάχιστον κατά μία μονάδα μικρότερο από τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου της γραμμής εκροής.

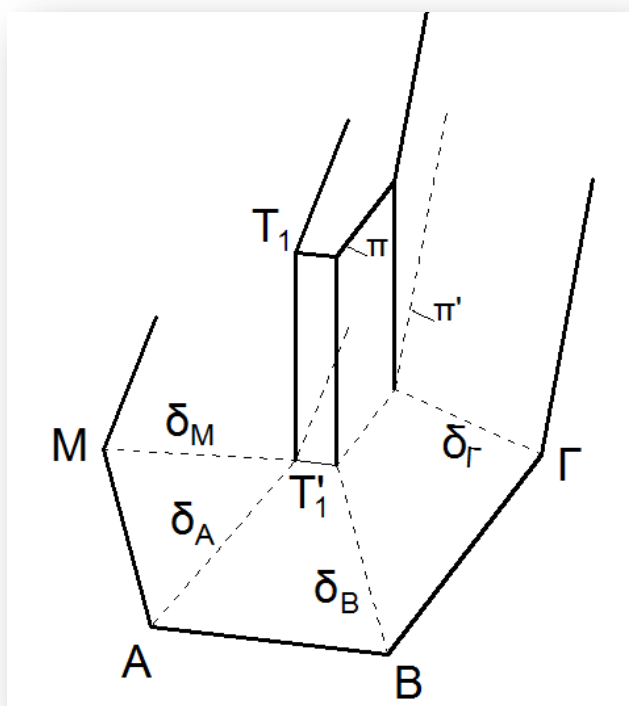
Η προβολή του πολυγώνου αυτού, π' , κατασκευάζεται εύκολα:

- Φέρουμε από το σημείο T'_1 ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB του πολυγώνου της κάτοψης, μέχρι να τμήσει την επόμενη διχοτόμο (δ_B).
- Από το σημείο τομής που προκύπτει φέρνουμε παράλληλη προς την επόμενη πλευρά $B\Gamma$ μέχρι να τμήσει τη διχοτόμο (δ_Γ).
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να ολοκληρωθεί η κατασκευή της προβολής π' .
- Θεωρούμε το πολύγωνο π' σαν κάτοψη της γραμμής εκροής μιας νέας στέγης και επαναλαμβάνουμε την ως άνω διαδικασία.

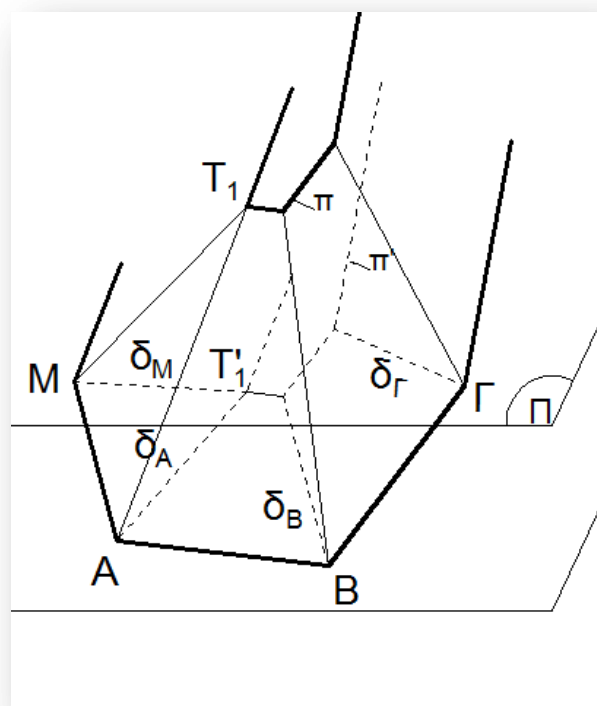


Σχήμα 19 Κατασκευή του πολυγώνου π'

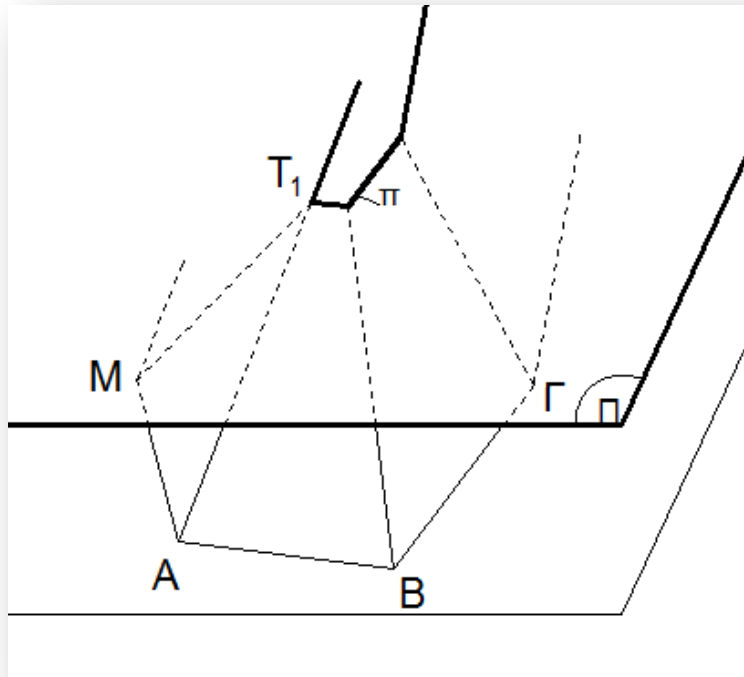
Με αυτόν τον τρόπο, των κατασκευών δηλαδή κατόψεων γραμμών εκροής με διαρκώς μειούμενο αριθμό πλευρών, μπορούμε να φτάσουμε σε μία γραμμή εκροής που θα είναι ένα τρίγωνο ή ένα παραλληλόγραμμο, περιπτώσεις για τις οποίες προφανώς γνωρίζουμε να κατασκευάζουμε την κάτοψη της ισοκλινούς στέγης. Οπότε έχουμε και λήξη της διαδικασίας.



Σχήμα 20 Τοποθέτηση του πολυγώνου π στον χώρο

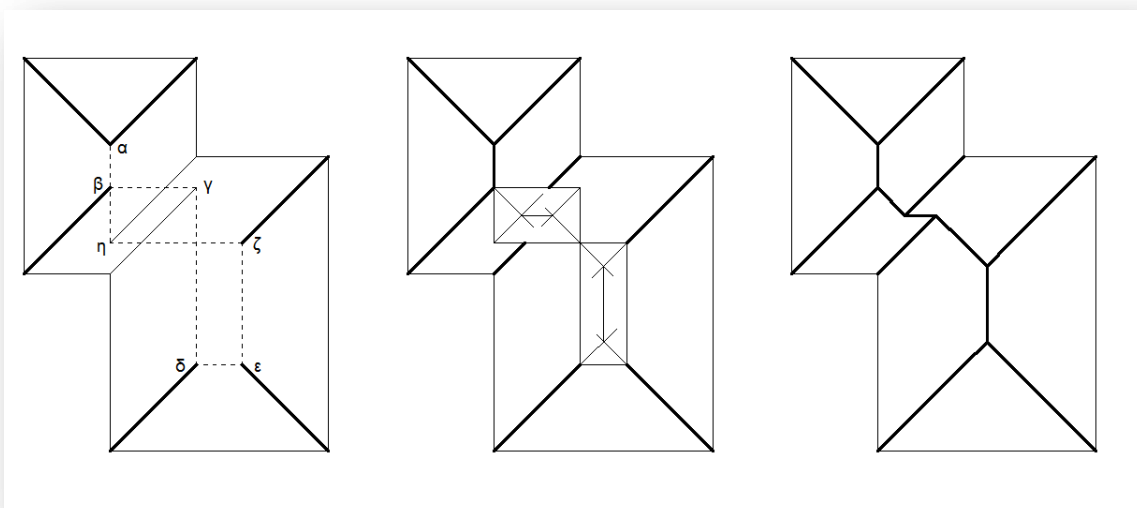


Σχήμα 21 Χάραξη της πολυεδρικής επιφάνειας



Σχήμα 22 Το αποτέλεσμα της μεθόδου μετά την πρώτη επανάληψη

Ακολουθεί ένα παράδειγμα (Σχήμα 23) όπου εφαρμόστηκε η μέθοδος που περιγράφηκε. Τα σημεία τομής προκύπτουν με την εξής σειρά : $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \epsilon \rightarrow \zeta \rightarrow \eta$. Στο δεύτερο βήμα δουλεύουμε με ένα μη συνεκτικό σύνολο σημείων, δύο παραλληλόγραμμα. Κατασκευάζουμε τις στέγες των δύο ορθογωνίων κατόψεων, βάσει του αλγορίθμου που περιγράφηκε παραπάνω, εργασία που είναι απλή.



Σχήμα 23 Εφαρμογή της μεθόδου

Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν είναι απαραίτητο μία στέγη να είναι ισοκλινής. Αρκεί το τελικό αποτέλεσμα χάραξής της να ικανοποιεί αισθητικά, να βρίσκεται μέσα στα επιτρεπτά όρια κλίσεων και να μη δημιουργεί δυσεπίλυτα κατασκευαστικά προβλήματα.

Ο λόγος που ασχολούμαστε με τη δομή του ευθύγραμμου σκελετού (straight skeleton) είναι διότι δεν είναι πάντα τετριμμένη η λύση στο πρόβλημα της σχεδίασης μιας στέγης. Προβλήματα παρουσιάζονται όταν το σχήμα της κάτοψης παρουσιάζει ιδιαιτερότητες, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που υπάρχουν μη κυρτές γωνίες, στο περίγραμμα της κάτοψης, και σε εκείνη όπου οι πλευρές της κάτοψης πλησιάζουν μεταξύ τους ενώ δεν είναι διαδοχικές.

3 Ευθύγραμμος Σκελετός (Straight Skeleton)

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται πληροφορίες αρχικά για τους “προγόνους” του ευθύγραμμου σκελετού, το διάγραμμα Voronoi και τον μέσο άξονα (medial axis), ενώ στη συνέχεια παρουσιάζεται η δομή του ευθύγραμμου σκελετού όπως αυτή περιγράφεται από τους ίδιους τους δημιουργούς της O. Aichholzer, F. Aurenhammer, D.Alberts και Gärtner στην εργασία τους “A Novel Type of Skeleton for Polygons” [8].

3.1 Ιστορική Αναδρομή

Η δομή του ευθύγραμμου σκελετού αποτελεί εξέλιξη μιας εκ των εφαρμογών του διαγράμματος Voronoi, η οποία είναι γνωστή ως μέσος άξονας (medial axis). Τα πρώτα διαγράμματα Voronoi κατασκευάστηκαν το 1644 από τον Descartes, ενώ το 1850 ο Dirichlet κατά τη διάρκεια της μελέτης που διεξήγαγε και αφορούσε τις τετραγωνικές μορφές χρησιμοποίησε δύο και τριών διαστάσεων διαγράμματα Voronoi. Μετέπειτα, το 1854, ο βρετανός φυσικός John Snow χρησιμοποίησε ένα διάγραμμα Voronoi για να απεικονίσει το γεγονός ότι η πλειοψηφία των ανθρώπων που απεβίωσαν κατά την επιδημία χολέρας που ξέσπασε στο Σόχο ήταν κάτοικοι μιας περιοχής η οποία απείχε από μία συγκεκριμένη υδραντλία τη μικρότερη μεταξύ των αποστάσεων από κάθε αντλία. Το διάγραμμα Voronoi πήρε το όνομά του από τον Georgy Fedoseevich Voronoi, ο οποίος όρισε και μελέτησε το 1908 αυτού του είδους διαγράμματα στη γενική περίπτωση της διάστασης n . Ο μέσος άξονας αναφέρθηκε για πρώτη φορά αρκετά χρόνια αργότερα και συγκεκριμένα το έτος 1967 από τον Blum στο άρθρο του «Ένας μετασχηματισμός για την εξαγωγή νέων περιγραφικών στοιχείων ενός σχήματος» (“A transformation for extracting new descriptors of shape”) [7] και είναι ένας τρόπος αναπαράστασης πολύπλοκων αντικειμένων. Αποτελεί εφαρμογή της τριγωνοποίησης Delaunay και του διαγράμματος Voronoi όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Τέλος, η δημοσίευση της δομής του ευθύγραμμου σκελετού έλαβε χώρα πολύ αργότερα, μόλις το 1995.

3.1.1 Διάγραμμα Voronoi

Έστω το σύνολο $M = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ σημείων του επιπέδου. Τα σημεία αυτά καλούνται και **εστίες** (sites). Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια την ευκλείδεια

απόσταση μεταξύ δύο σημείων P και Q , την οποία συμβολίζουμε με $d(Q,P)$ που ορίζεται ως εξής :

$$d(Q,P) := \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2} \quad , \quad \text{όπου } P = (P_x, P_y) \text{ και } Q = (Q_x, Q_y)$$

➤ Ορισμοί

- ✚ Το **χωρίο Voronoi** (ή περιοχή, έδρα, κελί, cell) του σημείου $P_i \in M$ ως προς το σύνολο $M = \{P_1, P_2, \dots, P_N\} \subset E^2$ ορίζεται ως

$$V(P_i) := V(i) := \{Q \in E^2 : d(Q, P_i) \leq d(Q, P_j), i \neq j\}.$$

Είναι, δηλαδή, το σύνολο όλων των σημείων τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο P_i από ό,τι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.

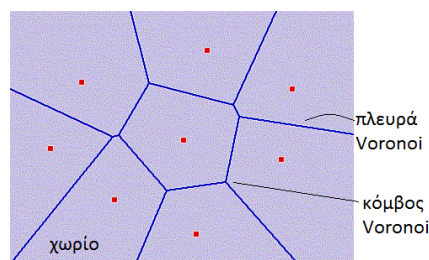
Ισοδύναμα,

Κάθε χωρίο ορίζεται ως η τομή n-1 ημιεπιπέδων, τα οποία ορίζονται από τις μεσοκαθέτους στα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ της εστίας και των άλλων n-1 εστιών. Επομένως, το χωρίο είναι ένα φραγμένο ή μη φραγμένο κυρτό πολύγωνο.

$$V(i) = \bigcap_{j=1, j \neq i}^N H_{P_i}(P_j) \quad , \quad \text{όπου } H_{P_i}(P_j) := \{Q \in E^2 : d(P_i, Q) \leq d(P_j, Q)\}$$

Το σύνολο $H_{P_i}(P_j)$ είναι, δηλαδή, το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο P_i και έχει ως σύνορο τη μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $P_i P_j$ και είναι γνωστό ότι αποτελεί ένα κυρτό σύνολο.

- ✚ Το **διάγραμμα Voronoi** του συνόλου P των σημείων, συμβολίζουμε με $V(P)$, είναι η υποδιαίρεση του επιπέδου σε χωρία, ένα για κάθε σημείο.
- ✚ **Πλευρά Voronoi** καλούμε κάθε ακμή του διαγράμματος. Συγκεκριμένα, οι ακμές που φράσσουν ένα χωρίο, έστω $V(P_i)$, είναι υποσύνολα των μεσοκαθέτων των τμημάτων (P_i, P_j) , $\forall j \neq i$.
- ✚ **Κόμβος Voronoi** καλούμε κάθε κορυφή του διαγράμματος Voronoi. Κάθε τέτοια κορυφή ορίζεται από την τομή δύο ή περισσότερων μεσοκαθέτων τμημάτων (P_i, P_j) , $\forall j \neq i$ και έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τρία (κατ'ελάχιστο) σημεία του συνόλου M.



Εικόνα 7 Διάγραμμα Voronoi οκτώ σημείων

➤ Πολυπλοκότητα του διαγράμματος

Σε αυτήν την ενότητα παραθέτονται ορισμένα στοιχεία σχετικά με την πολυπλοκότητα του διαγράμματος Voronoi, παραλείποντας ωστόσο τις αποδείξεις των. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να μελετήσει τις αντίστοιχες αποδείξεις, παραπέμπεται στο σύγγραμμα του Γιάννη Ζ. Εμίρη, υπ' αριθμό [10] στη βιβλιογραφία.

Λήμμα 3.1 : Αν το σύνολο M περιέχει n συνευθειακά σημεία, το διάγραμμα Voronoi αποτελείται από $n-1$ παράλληλες ευθείες και n μη φραγμένα κελιά. Ειδικότερα, οι πλευρές Voronoi είναι ευθύγραμμα τμήματα ή ημιευθείες και σχηματίζουν έναν συνεκτικό γράφο.

Ακολουθούν μερικοί χρήσιμοι ορισμοί από τη θεωρία γραφημάτων προς κατανόηση του όρου συνεκτικός γράφος που αναφέρεται στο Λήμμα 3.1.

- ✚ **Γράφος (ή γράφημα) G** ονομάζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος συνόλων (V, E) , όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο στοιχείων και E ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών του V , δηλαδή

$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

- ✚ Αν τα στοιχεία του E είναι διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων του V , τότε ο γράφος λέγεται **προσανατολισμένος ή κατευθυνόμενος** (directed graph or digraph). Δηλαδή $E \subseteq V \times V$.
- ✚ Τα στοιχεία του μη κενού συνόλου V λέγονται **κορυφές ή κόμβοι** (vertices, nodes) του γράφου.
- ✚ Τα στοιχεία του συνόλου E λέγονται **ακμές ή πλευρές** (edges) και απεικονίζονται με καμπύλες ή ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα στοιχεία του εκάστοτε ζεύγους.
- ✚ **Βαθμός** (degree or valence) μιας **κορυφής** $v \in V$ ονομάζεται ο αριθμός των ακμών του G που προσπίπτουν στην v και συμβολίζεται με $d_G(v)$ ή $d(v)$.
- ✚ Μια **διαδρομή μήκους k (walk)** από μία κορυφή u έως μία κορυφή u' είναι μια ακολουθία κορυφών $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ τέτοια ώστε $u = v_0$, $u' = v_k$, και $(u_{i-1}, u_i) \in E$ για $i = 1, 2, \dots, k$.
- ✚ Λέμε ότι μία κορυφή u' είναι **προσπελάσιμη** από την u αν υπάρχει κάποια διαδρομή p που τις συνδέει. Οι δύο κορυφές χαρακτηρίζονται τότε ως **συνδεδεμένες** (connected).

Η σχέση “είναι προσπελάσιμη από την” είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο V του G , η οποία δημιουργεί μια διαμέριση (partition) σε κλάσεις ισοδυναμίας π.χ. V_1, V_2, \dots, V_k . Για τις κλάσεις αυτές ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} V_i &\subseteq V & , 1 \leq i \leq k \\ V_i \cap V_j &= \emptyset & , \forall i, j \end{aligned}$$

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$$

Είναι προφανές ότι δύο κορυφές είναι συνδεδεμένες αν και μόνον αν (ανν) ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

- ✚ Έστω $V' \subset V$. Ο υπογράφος που έχει σύνολο κορυφών το V' και σύνολο ακμών όλες τις ακμές του G , των οποίων και τα δύο άκρα ανήκουν στο V' , λέγεται **παραγόμενος από τον V' υπογράφος** (induced subgraph) και συμβολίζεται με $G[V']$.
- ✚ Έστω V_1, V_2, \dots, V_k οι κλάσεις ισοδυναμίας του V που δημιουργούνται από τη σχέση “προσπελασιμότητα κορυφής από άλλη κορυφή”. Τα υπογραφήματα $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ λέγονται **συνεκτικές συνιστώσες** (connected components) του γράφου G .
- ✚ Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος ονομάζεται **συνεκτικός** ή **συνδεδεμένος** εάν όλες οι κορυφές του συνδέονται ανά δύο μέσω μιας διαδρομής. Έν ισοδύναμα εάν έχει μία και μόνο συνιστώσα.
- ✚ Ένας γράφος ονομάζεται **επίπεδος (planar)** αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο έτσι, ώστε όλες οι ακμές του να μην διασταυρώνονται, φυσικά εκτός από τις κοινές κορυφές τους.

Πόρισμα 3.2 [Euler]: Σε έναν επίπεδο γράφο ισχύει

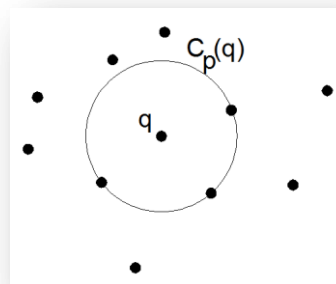
$$v - e + f - 1 = s ,$$

όπου v είναι το πλήθος των κορυφών (κόμβων), e το πλήθος των πλευρών (ακμών), f το πλήθος των χωρίων και s το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.

Θεώρημα 3.3 : Το διάγραμμα Voronoi $V(P)$ συνόλου P , $n \geq 3$ σημείων στο επίπεδο, αποτελείται από το πολύ $2n-5$ κόμβους και από το πολύ $3n-6$ ακμές.

➤ Ιδιότητες του διαγράμματος

Ορισμός : Για ένα σημείο q ορίζουμε το **μέγιστο κενό κύκλο** (maximum empty circle) του ως προς το σύνολο P , $C_p(q)$ ή απλούστερα $C(q)$, ως τον κύκλο μέγιστης ακτίνας με κέντρο το q , ο οποίος δεν περιέχει κανένα σημείο του P στο εσωτερικό του.



Σχήμα 24 Μέγιστος κενός κύκλος

Θεώρημα 3.4 : Ένα σημείο q είναι κορυφή του $V(P)$ ανν ο μέγιστος κενός κύκλος του $C_p(q)$ περιέχει τρία ή περισσότερα σημεία στην περιφέρειά του.

Απόδειξη : Έστω σημείο q τέτοιο ώστε ο $C_p(q)$ περιέχει τρία ή περισσότερα σημεία στο σύνορο και έστω p_i, p_j, p_k τρία από αυτά τα σημεία. Αφού το εσωτερικό του $C_p(q)$ είναι κενό, τότε το q είναι στο σύνορο των $V(p_i), V(p_j), V(p_k)$ και συνεπώς είναι κορυφή του διαγράμματος.

Αντίστροφα, αν το q είναι κορυφή, τότε προσπίπτει σε τρία τουλάχιστον χωρία, τα οποία συμβολίζουμε $V(p_i), V(p_j), V(p_k)$, και σε τρεις τουλάχιστον πλευρές. Το q ισαπέχει από τα p_i, p_j, p_k και δεν υπάρχει άλλο σημείο εγγύτερα σε αυτό, διότι αλλιώς τα χωρία δεν θα είχαν κοινό σημείο το q . Κατά συνέπεια, ο $C_p(q)$ είναι κενός και έχει στην περιφέρειά του τις τρεις εστίες. ■

Θεώρημα 3.5 : Η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία p_i, p_j ορίζει μία πλευρά στο $V(P)$ ανν υπάρχει σημείο q στη μεσοκάθετο τέτοιο ώστε ο μέγιστος κενός κύκλος $C_p(q)$ να έχει τα p_i, p_j στην περιφέρειά του, και μόνον αυτά.

Απόδειξη : Ας θεωρήσουμε ένα σημείο q όπως περιγράφεται στο θεώρημα. Αφού το $C_p(q)$ δεν περιέχει σημεία στο εσωτερικό του και τα p_i, p_j είναι στην περιφέρειά του, τότε το q θα ικανοποιεί τη σχέση $d(q, p_i) = d(q, p_j) \leq d(q, p_k)$ για $1 \leq k \leq n$. Από το θεώρημα 3.4 συμπεραίνουμε ότι το q δεν είναι κορυφή, άρα βρίσκεται σε πλευρά του διαγράμματος, η οποία ορίζεται από τη μεσοκάθετο των p_i και p_j .

Αντίστροφα, έστω ότι η μεσοκάθετος ορίζει μία πλευρά του $V(P)$. Ο μεγαλύτερος κενός κύκλος οποιουδήποτε σημείου q που ανήκει στην πλευρά πρέπει να έχει τα p_i και p_j στην περιφέρειά του και κανένα άλλο σημείο. ■

➤ Κατασκευή του διαγράμματος

Για την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι, μερικοί από τους οποίους είναι ο αυξητικός, ο αλγόριθμος σάρωσης του Fortune και ο γνωστός ως διαίρει και βασίλευε. Ακόμη ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος της κατασκευής του διαγράμματος είναι η αναγωγή του στο πρόβλημα υπολογισμού της τομής ημιχώρων σε τρεις διαστάσεις. Οι αλγόριθμοι αυτοί αναλύονται στο σύγγραμμα “Υπολογιστική Γεωμετρία” του Γιάννη Ζ. Εμίρη[10], ενώ στο σύγγραμμα του Βασίλειου Βλασσόπουλου “Στοιχεία Γεωμετρικών Αλγορίθμων” [12] αναλύεται η μέθοδος διαίρει και βασίλευε και παρατίθενται παραδείγματα για την καλύτερη κατανόησή της.

Πρόταση 3.6 : Το πρόβλημα κατασκευής του διαγράμματος είναι ένα $\Omega(N \log N)$ πρόβλημα.

Ο συμβολισμός Ω ορίζει ένα ασυμπτωτικό κάτω φράγμα για τον χρόνο που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα σε χρόνο μικρότερο του $N \log N$. Περαιτέρω μελέτη μπορεί να γίνει από τα συγγράμματα [9],[11],[12].

➤ Εφαρμογές του διαγράμματος

Το διάγραμμα Voronoi αποτελεί εργαλείο για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων αποστάσεως σε βέλτιστο χρόνο. Στο βιβλίο του Βασίλειου Βλασσόπουλου [12] αναφέρονται αρκούντως αναλυτικά τα εξής :

1. Πρόβλημα προσδιορισμού Ζεύγους Μικρότερης Απόστασης (closest pair)
2. Πρόβλημα Ζεύγη Πλησιέστερων Γειτόνων (all closest pairs problem)
3. Πρόβλημα Ελάχιστου Δένδρου Ζεύξεως (Minimum Spanning Tree)
4. Πρόβλημα Πλησιέστερου Γείτονα (Post Office Problem)
5. Πρόβλημα Τριγωνικής Διαμέρισης

Θα ασχοληθούμε με το τελευταίο από τα προαναφερθέντα προβλήματα, καθώς η επίλυσή του με τη βοήθεια του διαγράμματος Voronoi παράγει τη γνωστή τριγωνοποίηση Delaunay η οποία συμβάλλει στη διαδικασία χάραξης του μέσου άξονα.

Ορισμός : *Τριγωνοποίηση* (triangulation) *συνόλου σημείων* ή *εστιών* στο επίπεδο καλείται ένα σύνολο τριγώνων με τις εξής ιδιότητες :

- (i) το σύνολο των κορυφών των τριγώνων ισούται με το σύνολο των δεδομένων σημείων,
- (ii) η ένωση όλων των τριγώνων ισούται με το κυρτό περίβλημα των δεδομένων σημείων,
- (iii) η τομή δύο τριγώνων αντιστοιχεί σε ακριβώς μία εκ των εξής περιπτώσεων : είναι κενή, ισούται με την κοινή κορυφή των δύο τριγώνων, ή ισούται με την κοινή τους ακμή.

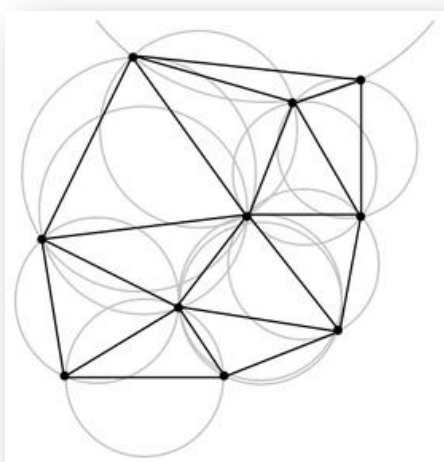
Η τριγωνοποίηση Delaunay αναπτύχθηκε από τον Ρώσο Μπορίς Ντελονέ (Борис Николаевич Делоне) το 1934. Χαρακτηρίζεται ως υψηλής ποιότητας, καθώς αποφεύγει τα μακρόστενα τρίγωνα, εξασφαλίζοντας μέγιστο για τη μικρότερη από όλες τις γωνίες, και για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιείται ευρύτατα. Ακόμη, η εν λόγω τριγωνοποίηση παρουσιάζει ένα σημαντικό πλεονέκτημα έναντι του

διαγράμματος Voronoi, δεν απαιτεί την κατασκευή νέων αντικειμένων. Επομένως, συχνά προτιμάται ο υπολογισμός του τριγωνισμού έναντι του διαγράμματος Voronoi, το οποίο είναι δυϊκό αντικείμενο του τριγωνισμού .

Ο **γεωμετρικός δυϊσμός στο επίπεδο** αποτελεί έναν βασικό γεωμετρικό μετασχηματισμό με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να αναγάγουμε γεωμετρικά προβλήματα σε ισοδύναμα προβλήματα, η επίλυση των οποίων θεωρείται απλούστερη.

- ✚ Ο **δυϊσμός** (ή **δυϊκότητα**) (duality) αντιστοιχίζει σημεία του επιπέδου, το οποίο λέγεται αρχικό ή πρωτογενές (primal) επίπεδο, σε ευθείες που βρίσκονται στο δυϊκό επίπεδο. Αντιστρόφως, απεικονίζει ευθείες του αρχικού επιπέδου σε σημεία του δυϊκού επιπέδου. Η απεικόνιση οφείλει να είναι 1 – 1 και επί, ώστε να είναι αντιστρέψιμη με τέτοιο τρόπο ώστε το δυϊκό του δυϊκού αντικείμενου να ταυτίζεται με το αρχικό.

Γενικότερα, ο δυϊσμός αντιστοιχίζει σημεία ενός χώρου, ο οποίος λέγεται αρχικός, σε υπερεπίπεδα στον δυϊκό χώρο και το αντίστροφο.



Εικόνα 8 Τριγωνοποίηση Delaunay στο επίπεδο με χαραγμένους τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων

Ορισμός : Η τριγωνοποίηση Delaunay δεδομένου συνόλου σημείων στο επίπεδο είναι ο δυϊκός γράφος του διαγράμματος Voronoi των σημείων :

- Τα χωρία Voronoi αντιστοιχούν σε σημεία, δηλαδή κορυφές τριγώνων Delaunay.
- Κάθε ζεύγος γειτονικών χωρίων αντιστοιχεί σε μία ακμή της τριγωνοποίησης, αυτή που ορίζεται από τα δύο σημεία στα οποία αντιστοιχούν τα δύο χωρία.

Η ακμή Delaunay χαράσσεται εύκολα, αφού είναι κάθετη στην πλευρά Voronoi που αποτελεί τομή των προαναφερθέντων χωρίων.

- Κάθε κορυφή Voronoi περιέχεται σε ένα τρίγωνο Delaunay.

Θεώρημα 3.7 : Στην τριγωνοποίηση Delaunay ενός συνόλου εστιών :

- Τρεις εστίες ορίζουν τρίγωνο αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι κενός, δηλαδή δεν περιέχει εστίες στο εσωτερικό του.
- Δύο εστίες ορίζουν ακμή αν υπάρχει κενός κύκλος με εστίες στην περιφέρειά του, δηλαδή υπάρχει κλειστός δίσκος με χορδή η οποία ορίζεται από τις δύο εστίες και δεν περιέχει καμία άλλη εστία.

Αντίστροφα, αν μας δοθεί μία αυθαίρετη τριγωνοποίηση ενός συνόλου εστιών, αυτή είναι τριγωνοποίηση Delaunay αν ο περιγεγραμμένος κύκλος κάθε τριγώνου είναι κενός εστιών (Εικόνα 8).

Λήμμα 3.8 : Η τριγωνοποίηση Delaunay είναι επίπεδος γράφος, με κόμβους τις κορυφές των τριγώνων.

Απόδειξη : Αν όχι, υπάρχουν ακμές Delaunay που διασταυρώνονται. Η ύπαρξη των αντίστοιχων κύκλων οδηγεί σε άτοπο με απλή Ευκλείδεια γεωμετρία. ■

Λήμμα 3.9 : Έστω n μη συνευθειακές εστίες στο επίπεδο και k το πλήθος κορυφών στο κυρτό περίβλημά τους. Τότε υπάρχουν $2n-k-2$ τρίγωνα και $3n-k-3$ ακμές σε κάθε τριγωνοποίηση των εστιών.

Απόδειξη : Πρώτος τρόπος, βάσει της σχέσης του Euler : $v - e + f - 1 = s$, όπου $v = n, f = t + 1$ και t το πλήθος των τριγώνων Delaunay συν μία μη φραγμένη έδρα. Επιπλέον, $3t + k = 2e$ είναι ο συνολικός βαθμός, όπου το πλήθος των ακμών είναι e . Οι δύο σχέσεις δίνουν $t - \frac{3t+k}{2} + n = 1 \Rightarrow t = 2n - k - 2$.

Δεύτερος τρόπος, με βάση το πλήθος των τριγώνων στην τριγωνοποίηση απλού πολυγώνου (βλ. κεφάλαιο 2 στο [10] ΓΙΑΝΝΗΣ Ζ. ΕΜΙΡΗΣ Υπολογιστική Γεωμετρία - Μια σύγχρονη αλγοριθμική προσέγγιση, ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ , 2008). ■

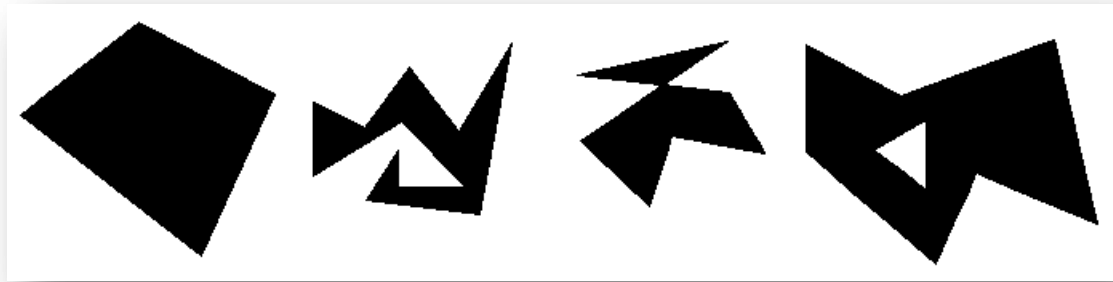
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως η πολυπλοκότητα της τριγωνοποίησης Delaunay είναι γραμμική. Συγκεκριμένα, καθώς η τριγωνοποίηση Delaunay n εστιών είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi, η πολυπλοκότητα είναι $\Theta(n \log n)$.

3.1.2 Μέσος Άξονας (Medial Axis)

Ο μέσος άξονας αποτελεί μία γενίκευση του διαγράμματος Voronoi, καθώς το πλήθος των σημείων που διαχειρίζεται είναι άπειρο, σε αντίθεση με το πεπερασμένο του πλήθους των σημείων για τα οποία χαράσσεται το διάγραμμα Voronoi. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το άπειρο αυτό σύνολο σημείων απαρτίζει το σύνορο ενός αντικειμένου στο επίπεδο.

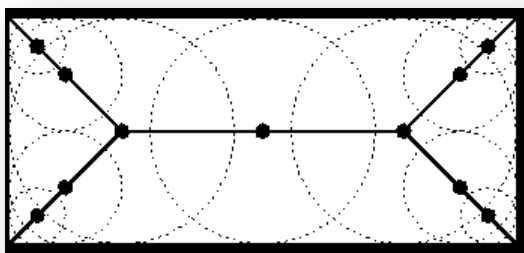
Ορισμός : Ένα *απλό πολύγωνο*, με ακολουθία ακμών (e_1, e_2, \dots, e_n), ορίζεται ως εξής :

- δύο ακμές του πολυγώνου που δεν είναι γειτονικές δεν τέμνονται, δηλαδή $e_i \cap e_j = \emptyset$ αν $|i - j| > 1$ και
- οι ακμές του πολυγώνου τέμνονται μόνο στις κορυφές τους, δηλαδή κάθε $e_i \cap e_{i+1}$, καθώς και το $e_n \cap e_1$, αποτελούν κορυφή.

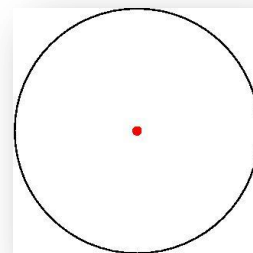


Εικόνα 9 Παραδείγματα δύο απλών και δύο μη απλών πολυγώνων

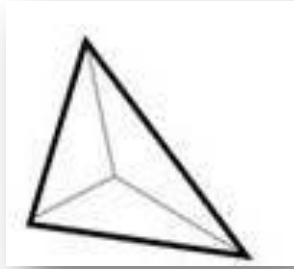
Ορισμός : Για ένα απλό αντικείμενο στο επίπεδο ο *μέσος άξονας* ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που διαθέτουν τουλάχιστον δύο πλησιέστερα σημεία, τα οποία ισαπέχουν από το σύνορο του αντικειμένου.



Εικόνα 10 Ο μέσος άξονας ορθογωνίου



Εικόνα 11 Ο μέσος άξονας του κύκλου



Εικόνα 12 Ο μέσος άξονας ενός τριγώνου

Ορισμός : Μία *μέση σφαίρα σ (medial sphere)* είναι μία σφαίρα με κέντρο ένα σημείο c του μέσου άξονα η οποία διέρχεται από τους πλησιέστερους γείτονες του σημείου c επί του συνόρου $\partial\Omega$.

Ορισμός : Εκείνα τα σημεία της σφαίρας σ στα οποία εφάπτεται του συνόρου $\partial\Omega$ καλούνται *σημεία επαφής της σ* .

➤ Πολυπλοκότητα

Το πρόβλημα του υπολογισμού του μέσου άξονα ενός απλού πολυγώνου με n κορυφές έχει πολυπλοκότητα $O(n \log n)$. Στην ειδική περίπτωση που το πολύγωνο είναι κυρτό, η πολυπλοκότητα είναι γραμμική. Περαιτέρω πληροφορίες στο βιβλίο [13].

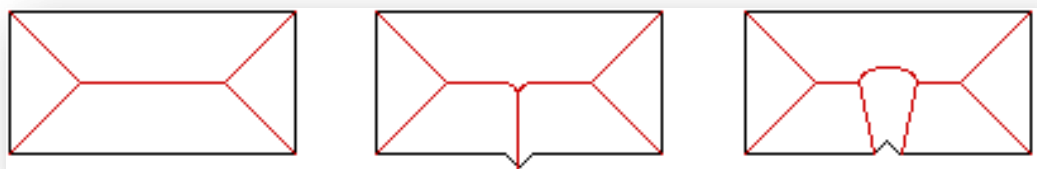
➤ Ιδιότητες

Ο μέσος άξονας ενός απλού πολυγώνου μπορεί να περιγραφεί σαν ένα δένδρο με φύλλα τις κορυφές του πολυγώνου, όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα Εικόνα 10, Εικόνα 12. Κάθε κόμβος q του δένδρου αποτελεί κέντρο κενού κύκλου $C(q)$ που εφάπτεται σε τρία σημεία στο σύνορο του αντικειμένου, δηλαδή στην πολυγωνική γραμμή.

Λήμμα 3.10 : Ο μέσος άξονας είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων μέγιστων κενών κύκλων, οι οποίοι βρίσκονται εντός του αντικειμένου, εφάπτονται στην περιφέρειά του και δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανέναν άλλο κενό κύκλο.

Η δομή του μέσου άξονα χρησιμοποιείται κατά κόρων στην απεικόνιση αντικειμένων στις τρεις διαστάσεις. Κατά τη διαδικασία επεξεργασίας ενός τέτοιου αντικειμένου, επεμβαίνουμε στις επίπεδες τομές οι οποίες συνθέτουν την τρισδιάστατη εικόνα. Για κάθε τέτοια επίπεδη τομή υπολογίζουμε τον μέσο άξονα,

ο οποίος αποδίδει τα βασικά χαρακτηριστικά του σχήματος (η τομή του αντικειμένου με το επίπεδο), ενώ παράλληλα είναι χαμηλότερης πολυπλοκότητας από αυτήν του σχήματος. Προτιμάται, λοιπόν, η επεξεργασία να γίνεται επί του μέσου άξονα παρά πάνω σε όλο το σχήμα. Παρουσιάζει, ωστόσο, ένα σημαντικό μειονέκτημα: εμφανίζονται δραστικές μεταβολές στην εικόνα του ακόμη και σε μία πολύ μικρή διαταραχή του συνόρου του αντικειμένου. Για να αποφύγουμε αυτή τη συμπεριφορά μεριμνούμε για την εξομάλυνση του συνόρου.

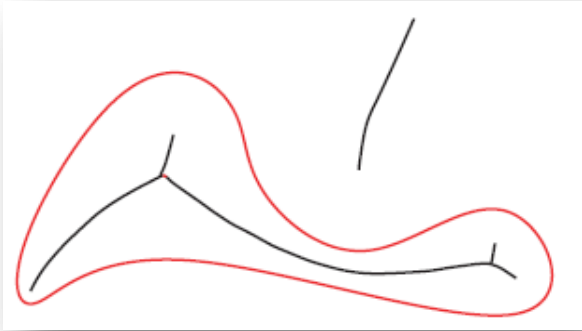


Εικόνα 13 Η επίδραση μιας μικρής διαταραχής στη δομή του μέσου άξονα

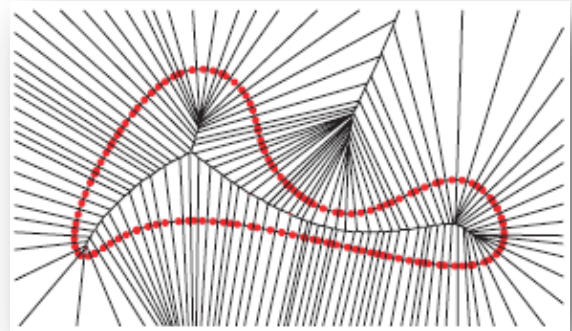
➤ Κατασκευή του Μέσου Άξονα

Όπως αναφέρεται και στην βιβλιογραφία, υπάρχουν αρκετές μέθοδοι προσέγγισης του μέσου άξονα: μία από αυτές βασίζεται στη δειγματοληψία του συνόρου του αντικειμένου και στον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi για το δείγμα. Το διάγραμμα αυτό είναι μία προσέγγιση του μέσου άξονα του αντικειμένου.

Έστω S μία κλειστή καμπύλη, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$ και P ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων που προσεγγίζουν την S . Το διάγραμμα Voronoi που προκύπτει για το σύνολο των σημείων P μοιάζει να είναι αρκετά διαφορετικό από τον μέσο άξονα του Ω , αφού εμπεριέχει αρκετά κλαδιά-τμήματα τα οποία δεν αντιστοιχίζονται σε κάποια τμήματα του μέσου άξονα, (βλέπε Εικόνα 14, Εικόνα 15). Αυτές οι πλευρές του διαγράμματος Voronoi έχουν δυϊκές ακμές Delaunay με μήκος που τείνει στο μηδέν καθώς το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο. Τα ως άνω εκφράζουν την μη συνέχεια του μέσου άξονα βάσει της απόστασης Hausdorff. Για περισσότερες πληροφορίες, βλέπε [14].



Εικόνα 14 Μία κλειστή καμπύλη S και ο μέσος άξονας του χώρου $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$



Εικόνα 15 Ο μέσος άξονας και το διάγραμμα Voronoi του χώρου $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus E$, όπου E ένα δείγμα της καμπύλης S

Παρατηρούμε, ωστόσο, πως εάν παραλείψουμε τα τμήματα που αναφέραμε, απομένει μία καλή προσέγγιση του μέσου άξονα της S . Βασιζόμενοι στην παρατήρηση αυτή, οδηγούμαστε στην ανάπτυξη του προσεγγιστικού αλγορίθμου που έχει ως εξής :

Είσοδος : Μία επιφάνεια S και ένας πραγματικός θετικός ε

1. Εξάγουμε ένα δείγμα P της S , τέτοιο ώστε $d_H(S, P) \leq \varepsilon$;
2. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα Voronoi του P ;
3. Σβήνουμε από το διάγραμμα τα χωρία για τα οποία η διάμετρος του συνόλου των σημείων επαφής είναι μικρότερη από $10\sqrt[4]{9D^3\varepsilon}$.

Έξοδος : Μία προσέγγιση του μέσου άξονα της S , $M(S)$

Πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που κάνουμε δειγματοληψία στην επιφάνεια παρατίθενται στο σύγγραμμα [14]. Ακολουθούν μερικοί ορισμοί απαραίτητοι για την κατανόηση του αλγορίθμου.

Έστω ένα ανοικτό σύνολο Ω και ένα σημείο x του μέσου άξονα του Ω .

Συμβολίζουμε με $D(x)$ τη **διάμετρο** της μικρότερης κλειστής σφαίρας που περιέχει τα σημεία επαφής της μέσης σφαίρας s που αντιστοιχεί στο σημείο x .

Ορισμός : Ορίζουμε τον λ -μέσο άξονα του Ω , συμβολίζουμε με $M_\lambda(\Omega)$, ως το υποσύνολο του μέσου άξονα του Ω που περιέχει όλα τα σημεία x τέτοια, ώστε $D(x) \geq \lambda$.

Έστω Ω και Ω' δύο ανοικτά σύνολα και S και S' τα σύνορά τους, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα S και S' είναι συμπαγή και ότι η Hausdorff απόστασή τους $d_H(S, S')$ είναι το πολύ ε , δηλαδή οποιοδήποτε σημείο του συνόρου S βρίσκεται σε

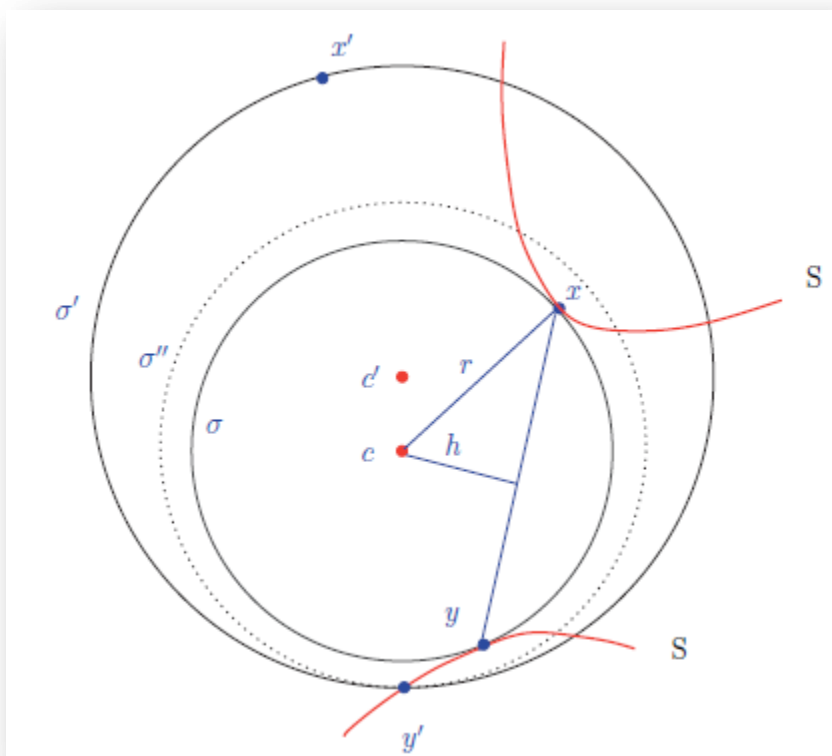
απόσταση το πολύ ε από κάθε σημείο του S' και αντίστροφα. Στη συνέχεια, συμβολίζουμε τους μέσους άξονες των συνόλων $\mathbb{R}^3 \setminus S$ και $\mathbb{R}^3 \setminus S'$ με $M(S)$ και $M(S')$ αντίστοιχα.

Λέμε ότι μία μπάλα είναι S – κενή αν το εσωτερικό της δεν τέμνει το S . Η σφαίρα που φράσσει μία S – κενή μπάλα καλείται **S – κενή σφαίρα**.

Το λήμμα που ακολουθεί μας εξασφαλίζει ότι ο λ -μέσος άξονας του S πλησιάζει τον μέσο άξονα του S' , προϋποθέτοντας πως το λ είναι αρκούντως μεγάλο.

Λήμμα 3.11 : Έστω σ μία S -κενή σφαίρα με κέντρο ένα σημείο c του μέσου άξονα και ακτίνα r , η οποία τέμνει το S σε δύο σημεία x και y . Αν $\varepsilon < \frac{r}{2}$ και $l \equiv \frac{\|x-y\|}{4} \geq \sqrt{\varepsilon r(1 - \frac{\varepsilon}{r})}$, τότε υπάρχει μία S' – κενή σφαίρα εφαπτόμενη στο S' σε δύο σημεία, η οποία έχει κέντρο το c' και ακτίνα r' τέτοια, ώστε $|1 - \frac{r'}{r}|$ και $\frac{\|c'-c\|}{r}$ να φράσσονται από την ποσότητα $\delta = \frac{\varepsilon r}{l^2 - \varepsilon r + \varepsilon^2}$.

Απόδειξη : Βλέπε [14].

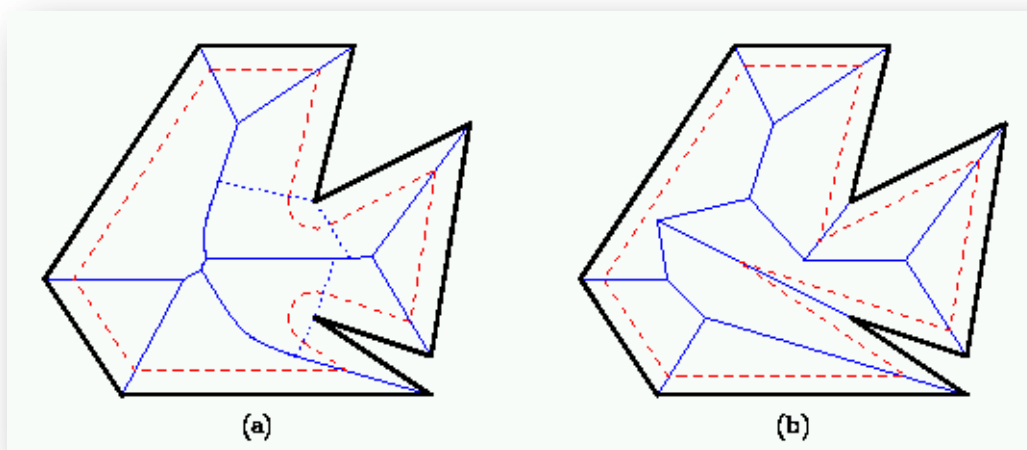


Εικόνα 16 Το S είναι η καμπύλη με συνεχή γραμμή. Τα x' και y' είναι σημεία του S'

3.2 Ευθύγραμμος Σκελετός - Εισαγωγή και βασικές ιδιότητες

Στην παράγραφο αυτή, καθώς και σε όσες ακολουθούν στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η δομή του ευθύγραμμου σκελετού όπως αυτή περιγράφηκε για πρώτη φορά στην εργασία [8] O. AICHHOLZER, D. ALBERTS, F. AURENHAMMER, and B. GÄRTNER. A novel type of skeleton for polygons. *Journal of Universal Computer Science*, 1(12):752-761, 1995. [IIG-Report-Series 424, TU Graz, Austria, 1995].

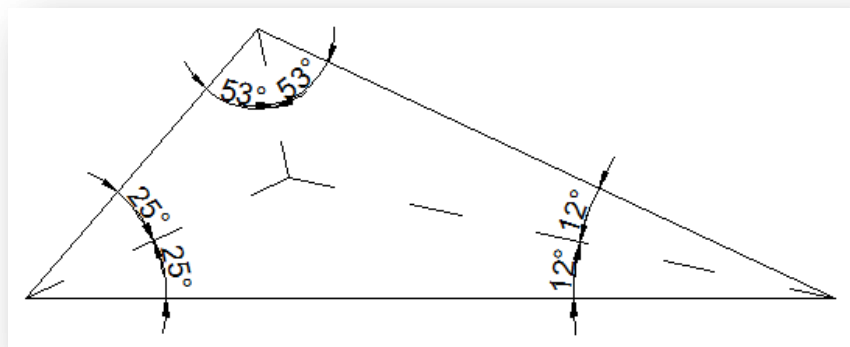
Η δομή που καλείται **ευθύγραμμος σκελετός** (straight skeleton) αποτελείται αποκλειστικά από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι μέρη των διχοτόμων των γωνιών του υπό εξέταση πολυγώνου. Ακόμη, διαιρεί κατά μοναδικό τρόπο το εσωτερικό του δοθέντος n -γώνου P σε n μονότονα πολύγωνα, καθένα από τα οποία περιέχει μία και μοναδική πλευρά του n -γώνου.



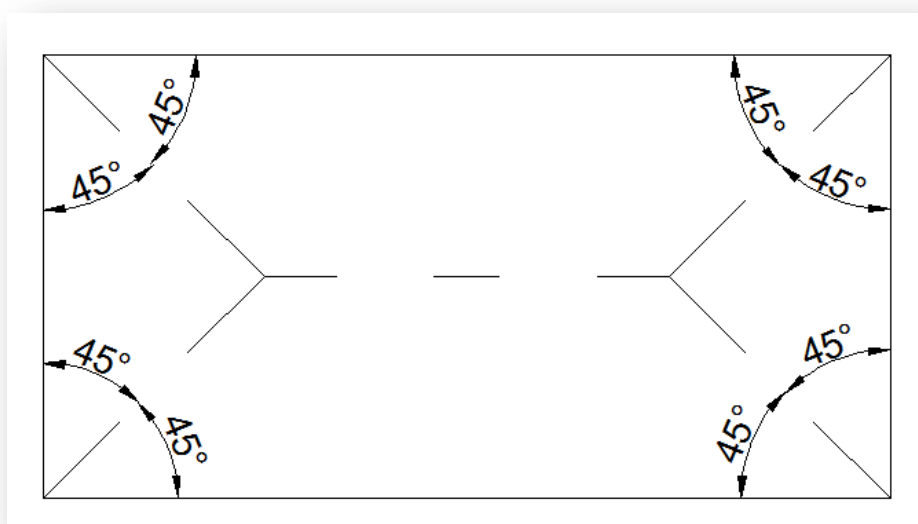
Εικόνα 17 (α) Ο Μέσος Άξονας , (β) Ο Ευθύγραμμος Σκελετός

Η εν λόγω δομή εν γένει διαφέρει από τη δομή του μέσου άξονα (medial axis) του P . Η διαφορά τους οφείλεται στο γεγονός ότι οι διχοτόμοι, από τις οποίες κατασκευάζεται ο ευθύγραμμος σκελετός, δεν ισαπέχουν κατά ανάγκη από τις πλευρές, αλλά από τους φορείς αυτών, με αποτέλεσμα, ο σκελετός αυτός να μην βρίσκεται πάντα στο κέντρο του πολυγώνου και κατά επέκταση να μην μπορεί να χαρακτηριστεί ως μέσος άξονας. Στην περίπτωση που το πολύγωνο είναι κυρτό οι δύο παραπάνω δομές ταυτίζονται. Ειδιάλλως, ο μέσος άξονας περιλαμβάνει παραβολικά τμήματα στη γειτονιά των μη κυρτών γωνιών του P , τμήματα τα οποία αποφεύγονται στη δομή του ευθύγραμμου σκελετού (βλέπε Εικόνα 17).

Δύο παραδείγματα κυρτών πολυγώνων στα οποία ο ευθύγραμμος σκελετός ταυτίζεται με τον αντίστοιχο μέσο άξονα είναι το τρίγωνο (Σχήμα 25) και το ορθογώνιο (Σχήμα 26).



Σχήμα 25 Ευθύγραμμος Σκελετός Τριγώνου



Σχήμα 26 Ευθύγραμμος Σκελετός Ορθογωνίου

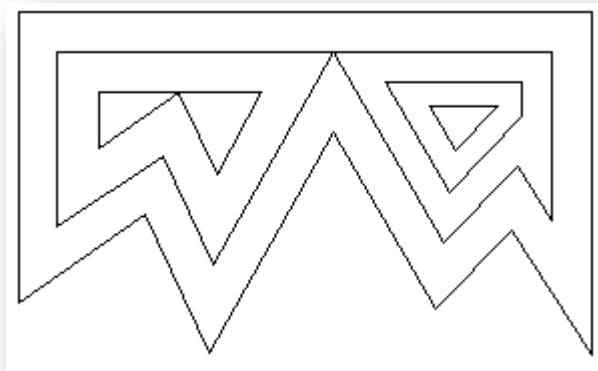
Ορισμός

Σε αντίθεση με τον μέσο άξονα, ο ευθύγραμμος σκελετός δεν ορίζεται βάσει μιας συνάρτησης απόστασης, αλλά μιας κατάλληλης **διαδικασίας συρρίκνωσης** (shrinking process) του πολυγώνου P . Θεωρούμε κατά τη διαδικασία της συρρίκνωσης ότι το σύνορο του P συστέλλεται κατά τρόπο παράλληλο προς τον εαυτό του και ότι όλες οι πλευρές του κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Το μήκος των πλευρών καθ' όλη τη διαδικασία μπορεί να μειώνεται ή να αυξάνεται, ενώ κάθε κορυφή του P κινείται κατά μήκος της διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζεται από τους φορείς των προσπιπτουσών στην κορυφή πλευρών του P . Η διαδικασία

συνεχίζεται όσο η τοπολογική δομή του πολυγώνου υπόκειται σε αλλαγές. Δύο πιθανοί τύποι αλλαγών δύναται να σημειωθούν :

- **συμβάν πλευράς** (Edge event) : Μία πλευρά συρρικνώνεται μέχρις ότου το μήκος της μηδενιστεί, οπότε οι γειτονικές της πλευρές γίνονται προσκείμενες η μία στην άλλη.
- **συμβάν διαίρεσης** (Split event) : Μία πλευρά διαιρείται σε τμήματα, για παράδειγμα όταν μία μη κυρτή κορυφή πέφτει στην πλευρά. Κατά το συμβάν αυτό, ολόκληρο το πολύγωνο διαιρείται σε δύο μέρη και καινούριες γειτνιάσεις παρατηρούνται μεταξύ της υπό διαίρεση πλευράς και καθεμιάς από τις δύο πλευρές που πρόσκεινται της μη κυρτής κορυφής.

Μετά από κάθε είδους συμβάν, προκύπτει ένα ή δύο νέα πολύγωνα που υπόκεινται με τη σειρά τους στην επαναληπτική διαδικασία συρρίκνωσης εφόσον είναι μη μηδενικού εμβαδού. Ας σημειωθεί ότι ορισμένα συμβάντα λαμβάνουν χώρα ταυτοχρόνως, όπως συμβαίνει σε ένα τρίγωνο το οποίο καταρρέει σε ένα σημείο, βλέπε Σχήμα 25 (παρατηρείται ένα συμβάν πλευράς για κάθε μία από τις τρεις πλευρές του). Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 27) απεικονίζει τη διαδικασία συρρίκνωσης, κατά την οποία όπως φαίνεται προκύπτουν εμφωλευμένα πολύγωνα.



Σχήμα 27 Διαδικασία Συρρίκνωσης

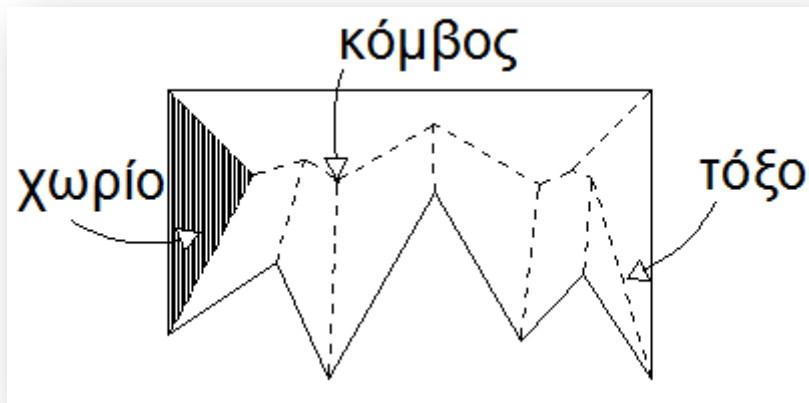
Ορισμός : Ο **ευθύγραμμος σκελετός $S(P)$** ορίζεται ως η ένωση των τμημάτων των διχοτόμων, τα οποία διατρέχονται από τις κορυφές του πολυγώνου κατά τη διαδικασία συρρίκνωσης. Ο $S(P)$ είναι μία μοναδική δομή η οποία ορίζει μία διαμέριση του P .

Χρήσιμη Ορολογία

τόξο (arc) – τμήμα μιας διχοτόμου που αποτελεί μέρος του ευθύγραμμου σκελετού

κόμβος (node) – μία κορυφή του ευθύγραμμου σκελετού (εκτός των κορυφών του πολυγώνου – κάτοψης)

χωρίο (face of edge e) – η περιοχή που σαρώνεται από την πλευρά e του πολυγώνου P



Σχήμα 28 Δομικά Στοιχεία του Ευθύγραμμου Σκελετού

➤ Ιδιότητες

Ο ευθύγραμμος σκελετός παρουσιάζει αρκετές χρήσιμες ιδιότητες. Για παράδειγμα, η δενδροειδής του δομή συνεπάγεται ότι, αν το P δεν είναι κυρτό, τότε ο $S(P)$ είναι μικρότερου μεγέθους από τον μέσο άξονα. Συγκεκριμένα, για ένα n -γωνο με ρ μη κυρτές κορυφές ο $S(P)$ περιέχει $2n-3$ τόξα, ενώ ο μέσος άξονας του P περιέχει $2n-3+\rho$ τόξα, όπου ρ το πλήθος των παραβολικών καμπυλών. Άλλη μία σημαντική ιδιότητα είναι ότι ο $S(P)$ διαιρεί το P σε μονότονα πολύγωνα.

Λήμμα 3.12 : Ο $S(P)$ είναι ένα δένδρο και αποτελείται από ακριβώς n συνεκτικά χωρία, $n-2$ κόμβους και $2n-3$ τόξα.

Απόδειξη : Η κατασκευή του χωρίου $f(e)$ ξεκινά από την πλευρά e , ενώ ολοκληρώνεται όταν αυτή (συγκεκριμένα, κάθε τμήμα της) συρρικνωθεί μέχρι να μηδενιστεί το μήκος της. Το $f(e)$ δεν μπορεί να διαιρεθεί ακόμη και αν αυτό συμβεί με την πλευρά στην οποία αντιστοιχεί.

Καθώς η πλευρά e δεν επανεμφανίζεται, το χωρίο $f(e)$ είναι συνεκτικό και ο $S(P)$ είναι ακυκλικός. Αυτό σημαίνει ότι ο $S(P)$ είναι ένα δένδρο με φύλλα τις n κορυφές του P για φύλλα και έχει $n-2$ κόμβους και $2n-3$ τόξα. ■

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη τόξων στον $S(P)$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάθε τόξο είναι ένα τμήμα της διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζεται από τους

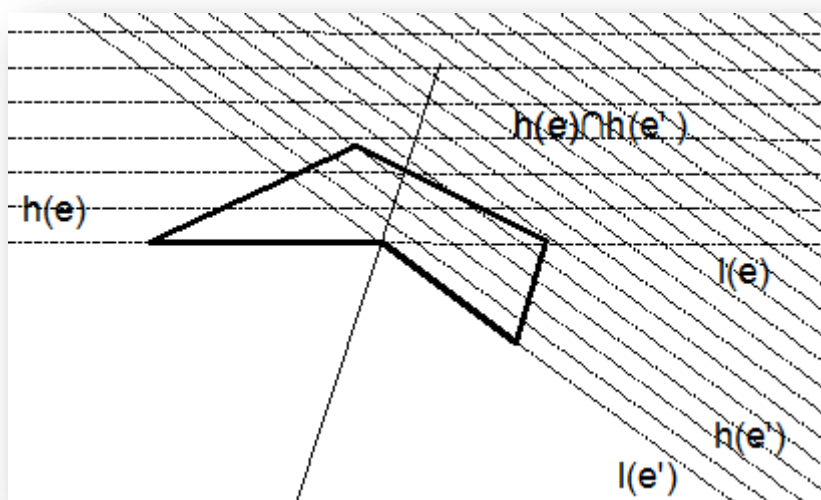
φορείς $l(e)$ και $l(e')$ δύο πλευρών e και e' του πολυγώνου P . Να σημειωθεί ότι η προαναφερθείσα διχοτόμος στην πραγματικότητα αποτελείται από δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο $l(e) \cap l(e')$. Ξεχωρίζουμε εκείνη την ευθεία που σχετίζεται με τον $S(P)$ ως εξής :

Κάθε ευθεία $l(e)$ ορίζει δύο ημιεπίπεδα ένα από τα οποία, έστω $h(e)$, περιέχει την πλευρά e καθώς και το μέρος του P που βρίσκεται κοντά στην e (εφάπτεται της e). Η μία από τις δύο ευθείες που εννοούμε με τον όρο διχοτόμος βρίσκεται στην τομή $h(e) \cap h(e')$. Αυτήν ακριβώς την ευθεία καλούμε διχοτόμο των πλευρών e και e' · την άλλη απλά την αγνοούμε.

✚ Ένα τόξο α του $S(P)$ καλείται **κυρτό τόξο** αν η τομή $h(e) \cap h(e')$ περιέχει στο σύνορό της τις πλευρές e και e' .

Σε αντίθετη περίπτωση το τόξο καλείται **μη κυρτό**.

Επίσης, συμβολίζουμε το τόξο α με το διατεταγμένο ζεύγος (e, e') , όπου πρώτη εμφανίζεται η πλευρά τμήμα του φορέα της οποίας ανήκει στο σύνορο της τομής $h(e) \cap h(e')$ και βρίσκεται στα αριστερά του τόξου (κοιτώντας το τόξο από την κορυφή εκκίνησης).



Σχήμα 29 Ορισμός Διχοτόμου

Λήμμα 3.13 : Τα μη κυρτά τόξα του $S(P)$ προέρχονται μόνο από μη κυρτές κορυφές του P .

Απόδειξη : Έστω ν ένα τόξο που ξεκινά από μία κορυφή ν του P . Τότε η u είναι μία κορυφή που αντιστοιχεί σε ένα συμβάν πλευράς ή σε συμβάν διαίρεσης. Αρκεί να δείξουμε ότι μετά το συμβάν ο $S(P)$ αναπτύσσεται πέρα από τον κόμβο u με κυρτά τόξα μόνο.

Έστω ότι έχουμε το πρώτο συμβάν, δηλαδή η πλευρά vw συρρικνώνεται έως ότου μηδενιστεί το μήκος της. Αφού το τόξο wu συναντά το vu στον κόμβο u , ο u αποτελεί μια κυρτή κορυφή του υπό συρρίκνωση πολυγώνου τη στιγμή που λαμβάνει χώρα το συμβάν.

Στη περίπτωση που σημειώνεται το δεύτερο συμβάν, το πολύγωνο διαιρείται στον κόμβο u . Είναι προφανές ότι εκείνη τη στιγμή ο u αντιστοιχεί σε μία κορυφή η γωνία της οποίας είναι κυρτή για κάθε ένα από τα δύο νέα πολύγωνα.

Εν κατακλείδι, κάθε νέα κορυφή που δημιουργείται κατά τη διαδικασία συρρίκνωσης είναι κυρτή. Έτσι, τα τόξα που εκκινούν από την u είναι επίσης κυρτά. ■

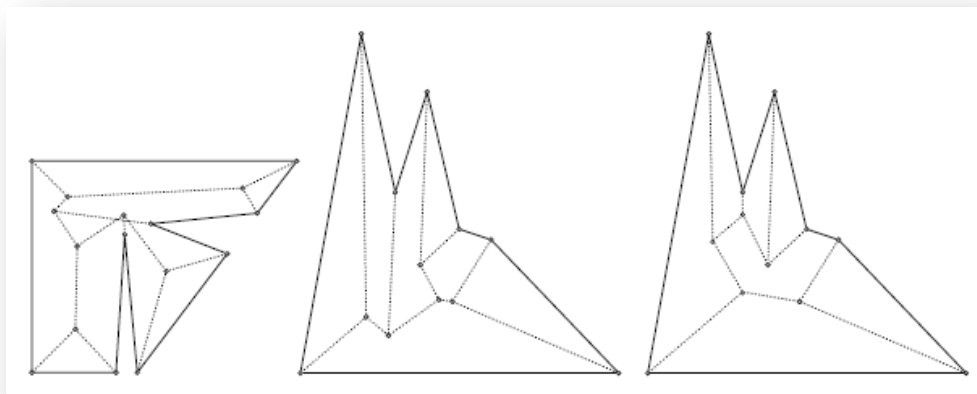
Παρατηρούμε ότι τα κυρτά τόξα ενδέχεται να συνδέουν δύο κόμβους του $S(P)$, ενώ στα μη κυρτά αυτό δεν είναι εφικτό.

3.3 Περιγραφή του Ευθύγραμμου Σκελετού ως Γράφου και ως Επίπεδη Προβολή Τρισδιάστατου Αντικειμένου

Η δυσκολία που αντιμετωπίζουμε στην προσπάθειά μας να ορίσουμε τον ευθύγραμμο σκελετό ενός πολυγώνου P βασιζόμενοι απλά σε αποστάσεις, κατά αντιστοιχία με τον ορισμό του μέσου άξονα, έχει ως εξής : το μοντέλο συρρίκνωσης υποδεικνύει τον ορισμό της απόστασης ενός σημείου $x \in P$ από μία πλευρά ως την κάθετη απόσταση του x από τον φορέα της e , $l(e)$, όμως ο ορισμός αυτός δεν είναι καθολικός, καθώς παύει να έχει υπόσταση στην περίπτωση που η πλευρά e εκφυλίζεται σε σημείο πριν ο φορέας $l(e)$ σαρώσει την περιοχή έως το σημείο x . Για να κατανοήσουμε, λοιπόν, λίγο καλύτερα τη δομή του ευθύγραμμου σκελετού τον περιγράψουμε ως έναν γράφο και έπειτα ταυτίζουμε τον γράφο αυτόν με την προβολή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε ένα επίπεδο.

Ο $S(P)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένας γεωμετρικός γράφος οι ακμές του οποίου είναι τμήματα των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από τους φορείς των πλευρών του P . Κάθε ακμή συμβολίζεται με ένα διατεταγμένο ζεύγος πλευρών (a,b) , όπου η σειρά εμφάνισης των στοιχείων του ζεύγους είναι αντίστοιχη με τη θέση που έχουν οι έδρες $f(a)$ και $f(b)$ σε σχέση με την ακμή. Οι ακμές έχουν στα άκρα τους κορυφές του πολυγώνου, οι οποίες έχουν βαθμό 1 στον γράφο, ή κόμβους του $S(P)$ οι οποίοι έχουν βαθμό 3. Κάθε κόμβος είναι το σημείο τομής τριών διχοτόμων. Τον γράφο που μόλις περιγράψαμε τον ονομάζουμε **γράφο διχοτόμων** για το P .

Ωστόσο, οι προαναφερθείσες ιδιότητες δεν είναι αρκετά ισχυρές ώστε να συνεπάγονται τη μοναδικότητα του γράφου. Ακόμη, ένας γράφος διχοτόμων δεν ορίζει κατά ανάγκη μία διαίρεση του πολυγώνου αν δεν απαιτήσουμε να είναι επίπεδος, αλλά, ακόμη και ο περιορισμός σε επίπεδους γράφους και επίπεδα δέντρα δεν εξασφαλίζει μοναδικότητα.

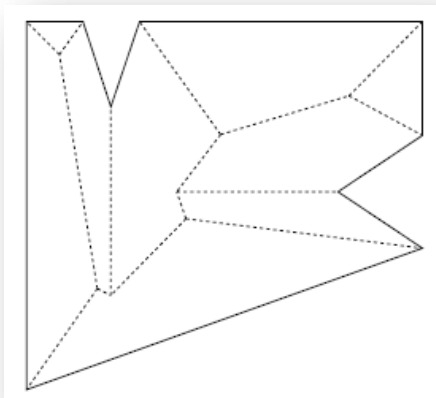


Εικόνα 18 Γράφοι Διχοτόμων· ένας μη επίπεδος και δύο διαφορετικοί γράφοι που περιγράφουν το ίδιο αντικείμενο.

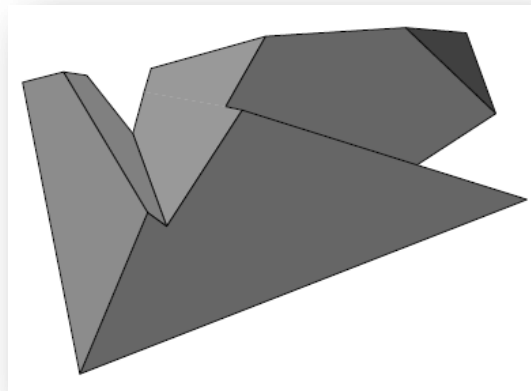
Με σκοπό να αποκτήσουμε μία καλύτερη εποπτεία του επίπεδου γράφου διχοτόμων για το P τον ταυτίζουμε με την προβολή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου.

Έστω ότι το P περιέχεται στο οριζόντιο επίπεδο Π_0 , και αντιστοιχίζουμε κάθε πλευρά του P με ένα ημιεπίπεδο $\Pi(e)$ στον χώρο των τριών διαστάσεων. Το $\Pi(e)$ περιορίζεται από την ευθεία $l(e)$, σχηματίζει μία δεδομένη γωνία, π.χ. 45° , διάφορη των 90° , σε σχέση με το επίπεδο Π_0 και κλίνει προς το εσωτερικό του P . Για δύο τυχαίες πλευρές e και e' του P , η ημιευθεία $\Pi(e) \cap \Pi(e')$ έχει την ορθή προβολή της στη διχοτόμο των e και e' (Θεώρημα 1, κεφ.1 και Σχήμα 3).

Ορισμός : Μία **στέγη για το πολύγωνο P** είναι μία πολυεδρική επιφάνεια (το γράφημα μιας μονότιμης, κατά τμήματα γραμμικής και συνεχούς συνάρτησης) πάνω από το P , οι έδρες της οποίας είναι τμήματα των ημιεπιπέδων που προαναφέραμε και η τομή της με το Π_0 είναι το σύνορο του P .



Εικόνα 19 Ο ευθύγραμμος Σκελετός ενός πολυγώνου



Εικόνα 20 Το μοντέλο στέγης που αντιστοιχεί στον ευθύγραμμο σκελετό της εικόνας 19

Θεώρημα 3.14 : Κάθε στέγη για το P αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό επίπεδο γράφο διχοτόμων για το P , και αντίστροφα.

Απόδειξη : Έστω R μία στέγη για το P . Οι ακμές της R προβάλλονται κάθετα σε τμήματα των διχοτόμων των γωνιών που ορίζουν οι πλευρές του P . Τα τμήματα αυτά ορίζονται από κόμβους οι οποίοι είναι προβολές των τομών τριών επιπέδων, οπότε το καθένα από αυτά τα τμήματα συμβολίζεται με το αντίστοιχο διατεταγμένο ζεύγος (a,b) όπως αυτό περιγράφεται στον γράφο διχοτόμων. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο γράφος είναι επίπεδος καθώς η R είναι μία επιφάνεια.

Αντίστροφα. Έστω G ένας επίπεδος γράφος διχοτόμων για το P . Κάθε κόμβος u του G είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στους φορείς των τριών πλευρών του P που ορίζουν τον u . Υψώνουμε τον u κάθετα σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου αυτού, οπότε λαμβάνουμε το σημείο $\lambda(u)$ του χώρου. Αν τα τόξα που συνδέονται στον u είναι τα (α,β) , (β,γ) , (γ,α) , τότε ισχύει $\lambda(u) \in \Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) \cap \Pi(\gamma)$.

Έστω τώρα f ένα χωρίο του G . Κάθε τόξο που το περιορίζει συμβολίζεται με (x,e) , όπου e είναι μία συγκεκριμένη πλευρά του P και το x διατρέχει όλες τις πλευρές του P που ορίζουν εκείνα τα χωρία του G τα οποία είναι γειτονικά στο f . Επομένως, $\lambda(u) \in \Pi(e)$ για κάθε κόμβο του f . Προφανώς, $e \in \Pi(e)$ εξ' ορισμού. Ας σημειωθεί, όμως, ότι η e δεν αποτελεί κατά ανάγκη σύνορο για το f . Συμπεραίνουμε ότι το f ανυψώνεται μέσω της λ σε μία επίπεδη έδρα στον χώρο. Καθώς ο G είναι ένας επίπεδος γράφος, προκύπτει μέσω της λ το γράφημα μίας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης άνωθεν του P . Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής καθώς οι έδρες στον χώρο που προέρχονται από τα χωρία του G , $f(e)$ και $f(e')$, εφάπτονται κατά μήκος της εικόνας τόξου (e,e') μέσω της λ . ■

Στη στέγη που αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο σε έναν επίπεδο γράφο διχοτόμων, τα κυρτά τόξα του γράφου απεικονίζονται σε ράχες της στέγης και τα μη κυρτά τόξα δίνουν αύλακες. Τα άκρα των αυλάκων και των ραχών που δεν αποτελούν κορυφές του πολυγώνου ονομάζονται **κόχες της στέγης**. Βρίσκονται σε υψόμετρο μεγαλύτερο από αυτό του επιπέδου Π_0 και έχουν ως προβολές τους κόμβους του γράφου.

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τί είδους στέγες κατασκευάζονται βάσει του ορισμού που έχουμε δώσει. Είναι αξιοσημείωτο ότι ένα ημιεπίπεδο μπορεί να συνεισφέρει στη στέγη με περισσότερες από μία έδρες. Αυτό, διότι μία πλευρά του P μπορεί να παράγει αρκετά χωρία στον γράφο διχοτόμων. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, σε αντίθεση με τον ευθύγραμμο σκελετό, το μέγεθος ενός επίπεδου γράφου διχοτόμων δεν είναι πάντα γραμμικής τάξης $O(n)$. Ένα τετριμμένο άνω φράγμα είναι το $O(n^3)$, καθώς κάθε κόμβος του γράφου προκύπτει από μία διαφορετική τριάδα πλευρών του P . Άλλο ένα μειονέκτημα του γράφου έγκειται στο γεγονός ότι δεν αποκλείει την εμφάνιση τοπικών ελαχίστων τα οποία είναι εντελώς ανεπιθύμητα σε μία πραγματική κατασκευή, καθώς αποτελούν σημεία-περιοχές συσσώρευσης των όμβριων υδάτων.

Παρά τα ως άνω προβλήματα που παρουσιάζουν οι επίπεδοι γράφοι διχοτόμων, τα χωρία τους έχουν μία καλή ιδιότητα η οποία αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση του μοντέλου στέγης.

Λήμμα 3.15 : Κάθε χωρίο $f(e)$ ενός επίπεδου γράφου διχοτόμων είναι μονότονο κατά τη διεύθυνση της πλευράς e που το ορίζει. Δηλαδή, η τομή του $f(e)$ με κάθε ευθεία κάθετη στην e αποτελεί μία συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη : Έστω F η έδρα της στέγης στον χώρο που αντιστοιχεί στο χωρίο $f(e)$. Γνωρίζουμε ότι $F \subset \Pi(e)$ και θεωρούμε μία ευθεία L του επιπέδου $\Pi(e)$ κάθετη στην e . Προφανώς, η L έχει κλίση ίση με 1, όση είναι και η μέγιστη δυνατή πάνω στη στέγη (θεωρούμε ότι η στέγη είναι ισοκλινής με κλίση 45 μοιρών).

Υποθέτουμε τώρα ότι το $f(e)$ δεν είναι μονότονο κατά τη διεύθυνση της e . Τότε η L μπορεί να επιλεγεί κατά τρόπο ώστε να παύει να κείται επί της F μετά από ένα σημείο x και να επανέρχεται στην F σε ένα υψηλότερο σημείο y . Μεταξύ των δύο σημείων η στέγη αποτελείται από έδρες που εμπεριέχονται σε ημιεπίπεδα διαφορετικά του $\Pi(e)$, οπότε, ακολουθώντας την κάθετη προβολή του τμήματος xy στη στέγη, συναντούμε τμήματα με κλίση μικρότερη της μονάδας, συνεπώς καταλήγουμε σε σημείο κατώτερο του y .

Αυτό συνεπάγεται ότι η στέγη δεν είναι συνεχής, συμπέρασμα το οποίο είναι άτοπο. ■

3.4 Περιγραφή μεθόδου μέσω παρομοίωσης με νησιά

Η δομή του ευθύγραμμου σκελετού $S(P)$ προσφέρει έναν μοναδικό τρόπο κατασκευής μίας στέγης αποφεύγοντας τις ως άνω αναφερθείσες “ανωμαλίες”, για μία οποιαδήποτε κάτοψη P . Αν θεωρήσουμε ότι ο $S(P)$ είναι μία στέγη, στη διαδικασία συρρίκνωσης μέσω της οποίας ορίζεται ο $S(P)$ μπορεί να αποδοθεί μία φυσική ερμηνεία.

Ταυτίζουμε, λοιπόν, τη στέγη με ένα νησί και το πολύγωνο P με την ακτή. Η στάθμη του νερού βρίσκεται στο επίπεδο Π_0 και ανυψώνεται σταθερά κατά τη διαδικασία συρρίκνωσης. Διαιρέσεις του νησιού παρατηρούνται μόλις το νερό περιβάλλει τοπικά μέγιστα του νησιού.

- ✚ Η μοναδική στέγη για το P που αντιστοιχεί στον $S(P)$ θα καλείται **νησί** του P και θα συμβολίζεται στη συνέχεια ως $I(P)$.

Αυτή η διαδικασία κατακλυσμού έχει νόημα και για στέγες που δεν είναι νησιά. Για την ακρίβεια, κάθε στέγη για το P ορίζει μια συγκεκριμένη διαδικασία πλημμύρας η οποία καθορίζεται μοναδικά από μία ακολουθία γεγονότων ταξινομημένων με σειρά αυξανόμενου ύψους. Βάσει αυτής της παρατήρησης θα μπορούσαμε να διακρίνουμε την $I(P)$ ανάμεσα σε όλες τις δυνατές στέγες.

Έστω R μία τυχαία στέγη για το P . Καθώς εξελίσσεται το φαινόμενο της πλημμύρας, ενδέχεται να συναντήσουμε κάποια συμβάντα νέου τύπου, πέρα των συμβάντων πλευράς και διαίρεσης. Για παράδειγμα, είναι πιθανό η στάθμη του νερού να φτάσει ένα τοπικό ελάχιστο μιας έδρας σε μία κόχη c της R . Αν η c δεν αποτελεί σημείο ελαχίστου για την R , τότε, στο συρρικνούμενο πολύγωνο, μία πλευρά παράλληλη σε κάποια πλευρά του P αρχίζει να διαστέλλεται (ανάστροφο συμβάν πλευράς). Αλλιώς, αν η c είναι σημείο ελαχίστου της R , εμφανίζεται μία τριγωνική οπή (τρία ταυτόχρονα συμβάντα πλευράς).

Λήμμα 3.16 : Αν η R είναι μία στέγη για το P διαφορετική από την $I(P)$, τότε η R έχει μία αύλακα που δεν προσπίπτει σε κάποια εκ των (μη κυρτών) κορυφών του P . Ισοδύναμα, η R περιέχει μία αύλακα η οποία συνδέει δύο κόχες της R .

Απόδειξη : Αρχικά παρατηρούμε ότι η διαδικασία της πλημμύρας ξεκινά με τον ίδιο τρόπο για όλες τις πιθανές στέγες του P . Με άλλα λόγια, το P συρρικνώνεται κατά μοναδικό τρόπο.

Τώρα, θεωρούμε το πρώτο συμβάν που διαφοροποιεί την R από την $I(P)$. Αυτό το συμβάν πρέπει να προέρχεται από μία κόχη του R . Αν προέκυπτε από μία κόχη του $I(P)$, τότε θα παραβλεπόταν στη διαδικασία του κατακλυσμού για την R ένα συμβάν πλευράς ή ένα συμβάν διαίρεσης.

Έστω c η κόχη της R που αντιστοιχεί σε αυτό το συμβάν. Ελάχιστα πριν φτάσει την c , το νερό περιβάλλει το μέρος της R που περιέχει την c και ορίζει ένα συρρικνωμένο πολύγωνο P' το σύνορο του οποίου οριοθετεί την τοπική ακτή. Προφανώς, το μέρος της $I(P)$ πάνω από το P' είναι η $I(P')$. Καθώς η διαδικασία συνεχίζεται για την $I(P')$, η c δεν είναι κόχη της $I(P')$, οπότε η c αντιστοιχεί σε ένα είδος συμβάντος που δεν χαρακτηρίζει τα νησιά. Συγκεκριμένα, κάποιες πλευρές που δεν εμφανίζονται στο P' πρέπει να εμπλέκονται σε αυτό το συμβάν. Αυτό σημαίνει ότι κάποιες νέες πλευρές (ή μία μόνο πλευρά) ξεκινούν να διαστέλλονται. Διαστολή, όμως, μπορεί να υποστούν μόνο μη κυρτά τόξα. Οπότε, κάποια αύλακα της R εκκινεί από την c , και το λήμμα έχει αποδειχθεί. ■

Θεώρημα 3.17 : Έστω R μία στέγη για το P . Τότε $R = I(P)$ αν και μόνον αν κάθε αύλακα του R είναι προσπίπτουσα στο P .

Απόδειξη : Αποδεικνύεται με συνδυασμό των Λήμμα 3.13 και Λήμμα 3.16 . ■

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε στέγη για το P έχει το ίδιο εμβαδό επιφάνειας. Ένα εύλογο ερώτημα που ανακύπτει είναι αν η $I(P)$ βελτιστοποιεί κάποια άλλη παράμετρο σε σχέση με όλες τις πιθανές στέγες του P . Εντούτοις η $I(P)$, στη γενική περίπτωση, δεν πετυχαίνει τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση του όγκου της στέγης. Επίσης, δεν εξασφαλίζεται ελάχιστο ή μέγιστο καθολικό ύψος για τη στέγη. Η ιδιαιτερότητα της $I(P)$ σχετίζεται με μία καλή ιδιότητα των εδρών της.

Έστω R μία οποιαδήποτε στέγη για το P . Για ένα σημείο x της R , ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)$ η οποία δηλώνει το μονοπάτι που ξεκινά από το x και ακολουθεί την πιο απότομη κλίση επί της R .

✚ Λέμε ότι η έδρα F της R έχει την **ιδιότητα της κλίσης** αν για κάθε $x \in F$, η $g(x)$ φτάνει στην πλευρά e που ορίζει την F στο εσωτερικό της ή σε μία κορυφή.

Θεώρημα 3.18 : Μία στέγη R για το P είναι το νησί που αντιστοιχεί στο P αν και μόνον αν κάθε έδρα της R ικανοποιεί την ιδιότητα της κλίσης.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι $R = I(P)$. Έστω e μία πλευρά του P , F η έδρα που ορίζει στην R και $x \in F$ ένα σημείο. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.15, οι έδρες είναι μονότονες, οπότε η $g(x)$ καταλήγει στο σύνορο της F σε ένα μοναδικό σημείο, έστω y .

Αν $y \in e$ τότε έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Αλλιώς, το y κείται σε μία αύλακα V της R . Αυτό συμβαίνει διότι οι αύλακες αντιστοιχούν σε μη κυρτά τόξα του γράφου διχοτόμων, και μόνο τέτοιου είδους τόξα σχηματίζουν γωνία μεγαλύτερη των 90° με την πλευρά e . Απομένει να παρατηρήσουμε ότι η $g(x)$ διατρέχει σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην αύλακα

V μέχρι το κατώτερό της σημείο, το οποίο σύμφωνα με το Λήμμα 3.14 είναι μία κορυφή της πλευράς e .

Αντίστροφα. Έστω $R \neq I(P)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.16, η στέγη R περιέχει μία αύλακα V , το χαμηλότερο σημείο της οποίας είναι μία κόχη c της R . Έστω F μία έδρα της R που είναι ορισμένη από μία πλευρά e και για την οποία η κόχη c αποτελεί ένα τοπικό ελάχιστο. Επιλέγουμε στη συνέχεια ένα σημείο x πάνω στην έδρα F και σε μικρή απόσταση από την κόχη c , τέτοιο ώστε η συνάρτηση $g(x)$ τελικά να παίρνει τιμές επί της αύλακος V και να καταλήγει στο σημείο c , το οποίο δεν ανήκει στην πλευρά e . ■

3.5 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα του Ευθύγραμμου Σκελετού Έναντι του Μέσου Άξονα

Τα κυριότερα πλεονεκτήματα του ευθύγραμμου σκελετού έναντι του μέσου άξονα είναι η ευθύγραμμη κατασκευή του και η χαμηλή πολυπλοκότητά του. Και οι δύο δομές απεικονίζουν το σχήμα του πολυγώνου με έναν πιο συμπαγή τρόπο. Ωστόσο, ο ευθύγραμμος σκελετός επηρεάζεται περισσότερο από τις τυχούσες αλλαγές στο σχήμα. Η προσθήκη μιας μη κυρτής κορυφής με πολύ μικρή εξωτερική γωνία ενδέχεται να οδηγήσει σε μία δραστική αλλαγή της εικόνας του σκελετού. Εάν δεν είναι επιθυμητές τέτοιες μεταβολές, τότε οι κορυφές που τα προκαλούν μπορούν να αποκοπούν τοπικά, χωρίς να επηρεαστεί σημαντικά το σχήμα του πολυγώνου και ταυτόχρονα εξασφαλίζοντας εξωτερικές γωνίες τουλάχιστον 90 μοιρών.

Ένα μειονέκτημα του ευθύγραμμου σκελετού είναι το γεγονός ότι δεν κατασκευάζεται βάσει διαγράμματος Voronoi, οπότε δεν δύναται να χρησιμοποιηθούν αλγόριθμοι που έχουν ήδη αναπτυχθεί και δοκιμαστεί. Ισχυρές τεχνικές όπως η μέθοδος διαίρει και βασίλευε και αυτή της βηματικής εισαγωγής εύκολα αποδεικνύεται ότι αποτυγχάνουν στην προσπάθεια κατασκευής του ευθύγραμμου σκελετού.

Η τετριμμένη μέθοδος επίλυσης του προβλήματος της κατασκευής του ευθύγραμμου σκελετού είναι η αναζήτηση του επόμενου συμβάντος ανάμεσα στο σύνολο των συμβάντων που προκύπτουν από κάθε ζεύγος πλευρών του πολυγώνου. Καθώς κάθε συμβάν αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του $S(P)$, ο αλγόριθμος που περιγράφει τη μέθοδο έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(n^3)$ και πολυπλοκότητα χώρου $O(n)$. Χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη δομή για την αποθήκευση των συμβάντων, όπως είναι η ουρά προτεραιότητας καταφέρνουμε να μειώσουμε την

πολυπλοκότητα χρόνου στο $O(n^2 \log n)$, εις βάρος όμως της πολυπλοκότητας χώρου η οποία αυξάνεται στο $O(n^2)$.

Και ενώ η εύρεση του αμέσως επόμενου συμβάντος πλευράς αποτελεί μία εύκολη εργασία καθώς μπορεί να πραγματοποιηθεί τοπικά, η αναζήτηση του επόμενου συμβάντος διαίρεσης σε μικρό χρόνο στη χειρότερη περίπτωση είναι κάθε άλλο παρά τετριμμένη υπόθεση. Η πρόκληση είναι να βρεθεί ένας αλγόριθμος με επίδοση συγκρινόμενη με αυτή των αλγορίθμων υπολογισμού του μέσου άξονα, παραδείγματος χάριν $O(n \log n)$ για την πολυπλοκότητα του χρόνου.

4 Αλγόριθμος Υπολογισμού του Ευθύγραμμου Σκελετού

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται κάποιοι αλγόριθμοι για την κατασκευή του ευθύγραμμου σκελετού. Προηγείται ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους δημιουργούς της δομής, Aichholzer και Aurenhammer [17] και στη συνέχεια παρατίθεται ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους Petr Felkel και Stepan Obdrzalek [18] και δημοσιεύθηκε κατά το έτος 1998 στην Μπρατισλάβα της Σλοβακίας. Η διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στους δύο αλγορίθμους έγκειται στο γεγονός ότι οι Aichholzer και Aurenhammer τριγωνοποίησαν το πολύγωνο και στην συνέχεια κατασκεύασαν τον ευθύγραμμο σκελετό του, κάτι που δεν χρειάστηκε να γίνει στον αλγόριθμο των Petr Felkel και Stepan Obdrzalek. Την ίδια περίπου χρονική περίοδο, δημοσιεύθηκε ακόμη μία μέθοδος υπολογισμού του ευθύγραμμου σκελετού από τους Eppstein και Erickson [19], η οποία επιτυγχάνει καλύτερη χρονική πολυπλοκότητα από τις δύο προηγούμενες. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής όσο αφορά στην χρονική πολυπλοκότητα οφείλεται στη χρήση δομών δεδομένων προσαρμοσμένες στις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

4.1 Υπολογισμός Ευθύγραμμου Σκελετού Πολυγώνου με Τριγωνοποίηση

4.1.1 Εισαγωγή

Έστω ένας επίπεδος και ευθύγραμμος (οι ακμές του, δηλαδή, είναι ευθύγραμμα τμήματα) γράφος G . Σε κάθε στάδιο της διαδικασίας συρρίκνωσης του πολυγώνου-γράφου G , φροντίζουμε να τριγωνοποιούμε το σύνολο των κόμβων του τρέχοντος γράφου. Από την τριγωνοποίηση αυτή δεν προκύπτουν επιπλέον κόμβοι στον γράφο μας. Όπως έχουμε ήδη περιγράψει, η συρρίκνωση προσομοιώνεται με τη κίνηση των κορυφών του πολυγώνου πάνω στις διχοτόμους των αντίστοιχων γωνιών μέχρι να λάβει χώρα κάποιο από τα συμβάντα πλευράς και διαίρεσης, καθένα από τα οποία ταυτίζεται με τον εκφυλισμό - κατάρρευση ενός τριγώνου. Εναλλακτικά, η διαδικασία μπορεί να προσομοιωθεί με κυματομέτωπα, ένα για κάθε συνιστώσα του γράφου, που εκκινούν από τις συνιστώσες του αρχικού γράφου – πολυγώνου και κινούνται προς το εσωτερικό του πολυγώνου. Καθώς, λοιπόν, τα τρίγωνα που προκύπτουν από την τριγωνοποίηση του πολυγώνου συνδέονται άμεσα με την εξέλιξη της διαδικασίας του υπολογισμού του ευθύγραμμου σκελετού, αποθηκεύουμε τα τρίγωνα αυτά σε μία κατάλληλη δομή δεδομένων, μία ουρά προτεραιότητας.

➤ Δομές Δεδομένων

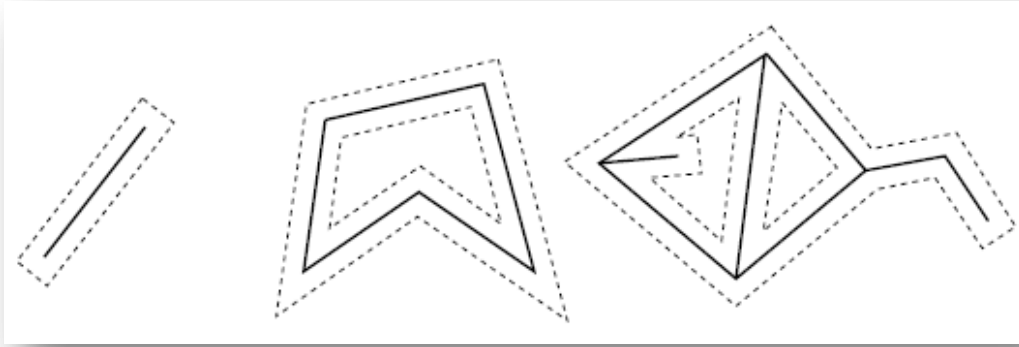
Ορισμοί

- ✚ **Αφηρημένος Τύπος Δεδομένων** καλείται ένα σύνολο με μία συλλογή πράξεων επί των στοιχείων του συνόλου.
- ✚ **Μία ουρά προτεραιότητας σωρού (heap priority queue)** είναι εκείνη η δομή στην οποία αποθηκεύονται τα στοιχεία ενός δυναμικού συνόλου S κατά τρόπο, ώστε κάθε φορά να είναι σε θέση να επιστρέφει το μέγιστο ή το ελάχιστο στοιχείο του S .
- ✚ Μία **ουρά προτεραιότητας ελαχίστου** χαρακτηρίζεται από τον εξής Αφηρημένο Τύπο Δεδομένων :

<i>makePQueue()</i>	Δοθέντος ενός συνόλου στοιχείων, χτίζει την ουρά
<i>min()</i>	Επιστρέφει, χωρίς να αφαιρεί, το ελάχιστο στοιχείο
<i>removeMin()</i> ή <i>deleteMin()</i>	Αφαιρεί το ελάχιστο στοιχείο
<i>insert(x,p)</i>	Εισάγει το στοιχείο x με προτεραιότητα p
<i>delete(x)</i>	Διαγράφει το στοιχείο x
<i>changePriority(x,Δ)</i>	Αλλάζει την προτεραιότητα του x σε Δ
<i>meld(x,y)</i>	Συγχωνεύει τις δύο ουρές x,y σε μία

4.1.2 Περιγραφή Αλγορίθμου

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό, ξεκινάμε με τη δημιουργία κυματομετώπων (wavefronts) για κάθε μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του γράφου G φτιάχνοντας από ένα αντίγραφο κάθε κόμβου του γράφου και συνδέοντας τους κόμβους - αντίγραφα μεταξύ τους (Εικόνα 21). Στη συνέχεια τριγωνοποιούμε το σύνολο των αντιγράφων. Τα ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν από τον τριγωνισμό θα τα καλούμε **ακτίνες** προς διάκριση από τις πλευρές του πολυγώνου. Καθώς διαδίδονται τα κυματομέτωπα, η περιοχή που έχουν σαρώσει παύει πλέον να είναι τριγωνοποιημένη, ενώ το υπόλοιπο χωρίο παραμένει τριγωνοποιημένο.



Εικόνα 21 Αρχικοποίηση κυματομετώπου

✚ Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τον όρο **τερματική κορυφή** για να αναφερθούμε σε μία κορυφή του γράφου G που είναι βαθμού 1. Για παράδειγμα, ο πρώτος εκ των τριών γράφων που απεικονίζονται στην Εικόνα 21 έχει δύο κορυφές οι οποίες είναι τερματικές κορυφές.

Λήμμα 4.1 : Έστω ένας γράφος με n κορυφές, t από τις οποίες είναι τερματικές. Η αρχική τριγωνοποίηση των κορυφών των κυματομετώπων που αντιστοιχούν στο G απαρτίζεται από ακριβώς $2n+t-2$ (φραγμένα και μη) τρίγωνα.

Απόδειξη : Κάθε κορυφή v του G με βαθμό $d \geq 2$ αντιγράφεται σε d κορυφές, μία για κάθε πλευρά του κυματομετώπου, η οποία συντρέχει στην κορυφή v . Ακόμη, συνδέουμε κάθε αντίγραφο με εκείνες τις ακτίνες της τριγωνοποίησης που ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο με την πλευρά του κυματομετώπου που συντρέχει στο αντίγραφο.

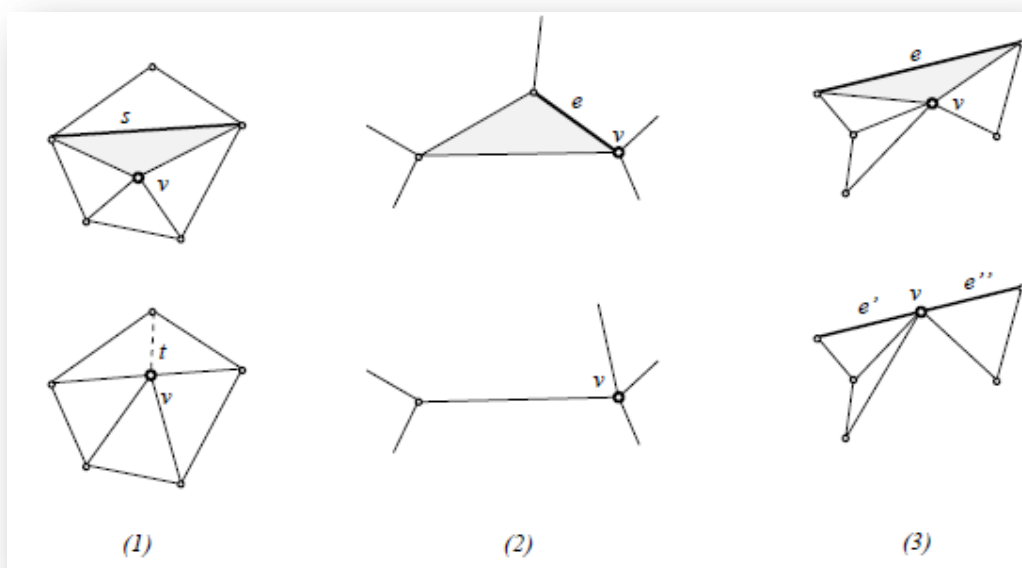
Κάθε τερματική κορυφή u του G αντιγράφεται σε δύο κορυφές οι οποίες συνδέονται με μία πλευρά κυματομετώπου e . Συνδέουμε το ένα από τα δύο αντίγραφα με το σύνολο των ακτινών τριγωνοποίησης που συντρέχουν στην κορυφή u . Το δεύτερο αντίγραφο το συνδέουμε μόνο με μία ακτίνα, την οποία χαράσσουμε σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας και διαμερίζει το τετράπλευρο που δημιουργείται με βάση την πλευρά e . Δημιουργείται, λοιπόν, ένα νέο τρίγωνο, το οποίο δεν είχε προηγουμένως ως κορυφή του την κορυφή u .

Όταν τριγωνοποιούμε τις n κορυφές του G , διαμερίζουμε το επίπεδο σε $2n-2$ φραγμένα ή μη τρίγωνα. Επιπροσθέτως, ένα νέο τρίγωνο κατασκευάζεται για κάθε τερματική κορυφή του G . Αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος των τριγώνων στην αρχική τριγωνοποίηση είναι $2n+t-2$. ■

Η τοπολογική δομή της τριγωνοποίησης μεταβάλλεται όταν οι κορυφές ενός τριγώνου της τριγωνοποίησης γίνουν συνευθειακές κατά τη διάδοση των κυματομετώπων. Ένα τρίγωνο ενδέχεται να εκφυλιστεί λόγω τριών συμβάντων.

Έχουμε ήδη αναφερθεί στα δύο από αυτά, εδώ θα ορίσουμε και τα τρία με αναφορά στην τριγωνοποίηση στην οποία υπόκειται το πολύγωνο – γράφος. Έστω v μία κορυφή κυματομετώπου (Εικόνα 22).

1. **Συμβάν Εναλλαγής** : Η κορυφή v τέμνει μία ακτίνα s . Με σκοπό να διατηρηθεί η τριγωνοποίηση, απομακρύνουμε την ακτίνα s και εισάγουμε την ακτίνα t .
2. **Συμβάν Πλευράς** : Η κορυφή v συγχωνεύεται με μία άλλη κορυφή του κυματομετώπου, το οποίο στερείται πλέον μίας πλευράς, της e .
3. **Συμβάν Διαίρεσης** : Η κορυφή v πέφτει σε μία πλευρά e του κυματομετώπου και την διαιρεί σε δύο πλευρές e' και e'' . Αντιγράφουμε την κορυφή, συνδέουμε τη μία κορυφή με την πλευρά e' και την άλλη με την e'' και ανάλογα με τη θέση που κατέχουν οι ακτίνες που αρχικά συνέτρεχαν στην κορυφή v τις συνδέουμε με ένα από τα αντίγραφα της v . Τέλος, απομακρύνουμε την πλευρά e .



Εικόνα 22 Συμβάν Εναλλαγής, Συμβάν Πλευράς, Συμβάν Διαίρεσης

Παρατηρούμε πώς σε κάθε ένα από τα συμβάντα πλευράς και διαίρεσης, κατασκευάζεται ένας νέος κόμβος του ευθύγραμμου σκελετού $S(G)$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν ο χρόνος που απαιτείται για τον εκφυλισμό καθενός από τα τρίγωνα που είναι αποθηκευμένα στην ουρά προτεραιότητας γίνει άπειρος. Η ορθότητα του αλγορίθμου μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.

Λήμμα 4.2 : Έστω ένας γράφος με n κορυφές και t τερματικές κορυφές. Ο συνολικός αριθμός των συμβάντων πλευράς και διαίρεσης που παρατηρούνται είναι φραγμένος από τον αριθμό $2n+t-2$.

Απόδειξη : Αποδεικνύουμε το λήμμα μετρώντας σε κάθε στάδιο του αλγορίθμου το πλήθος των τριγώνων που βρίσκονται αποθηκευμένα στην ουρά προτεραιότητας. Σύμφωνα με το λήμμα 4.1, η αρχική τριγωνοποίηση αποτελείται από $2n+t-2$ τρίγωνα. Είναι προφανές ότι κάθε συμβάν εναλλαγής δεν μεταβάλλει τον αριθμό των τριγώνων. Ακόμη, κάθε συμβάν πλευράς και διαίρεσης μειώνει τον αριθμό των τριγώνων ακριβώς κατά ένα. Συνεπώς, ο αριθμός $2n+t-2$ αποτελεί πράγματι ένα άνω φράγμα για το πλήθος των τριγώνων που προκύπτουν από την τριγωνοποίηση. ■

Το ίδιο φράγμα ισχύει και για τον συνολικό αριθμό των κόμβων του $S(G)$, καθώς κάθε κόμβος της δομής προκύπτει είτε από ένα συμβάν πλευράς είτε από συμβάν διαίρεσης. Το πλήθος των κόμβων γίνεται ίσο με το φράγμα όταν προσμετρηθούν και οι κόμβοι των μη φραγμένων τόξων του $S(G)$, οι οποίοι βρίσκονται στο άπειρο και πρέπει να αποθηκευτούν με κάποιο τρόπο στη δομή του $S(G)$. Μετά το τελευταίο συμβάν που χειρίζεται ο αλγόριθμος, τα εναπομείναντα τρίγωνα είναι μη φραγμένα: αυτά είναι τα τρίγωνα που απαιτούν άπειρο χρόνο μέχρι να εκφυλιστούν. Οι μη φραγμένες ακτίνες των τριγώνων αυτών αντιστοιχούν στους κόμβους του $S(G)$ που βρίσκονται στο άπειρο.

➤ Πολυπλοκότητα

Από το Λήμμα 4.2 μπορούμε να συνάγουμε ακόμη το συμπέρασμα πως κάθε χρονική στιγμή το πολύ $2n+t-2$ τρίγωνα πρέπει να βρίσκονται αποθηκευμένα στην ουρά προτεραιότητας. Ο αλγόριθμος, δηλαδή, έχει πολυπλοκότητα χώρου $O(n)$.

Προχωρώντας στην ανάλυση της χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου, φράσσουμε και το πλήθος των συμβάντων εναλλαγής που ενδέχεται να λάβουν χώρα κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου. Παρατηρούμε αρχικά πως οι κυρτές κορυφές των κυματομετώπων δεν δύναται να τμήσουν σε καμία περίπτωση μία ακτίνα, καθώς η ακτίνα τότε θα βρισκόταν στο τμήμα του πολυγώνου που έχει ήδη σαρωθεί από τα κυματομέτωπα, κάτι που είναι άτοπο, αφού, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι σαρωμένες περιοχές δεν είναι τριγωνοποιημένες. Επομένως, τα συμβάντα εναλλαγής οφείλονται αποκλειστικά στις μη κυρτές κορυφές των κυματομετώπων.

Κάνουμε άλλη μία απλή παρατήρηση :

Κάθε μη κυρτή κορυφή των κυματομετώπων εξαφανίζεται μετά από το πρώτο συμβάν, εξαιρουμένου του συμβάντος εναλλαγής, που το ίδιο προκαλεί.

Κατά συνέπεια, κάθε μη κυρτή κορυφή των κυματομετώπων που σχηματίζονται αρχικά, κινείται σε μία ευθεία γραμμή μέχρι να εξαφανιστεί σε ένα συμβάν πλευράς – όπου συγχωνεύεται με μία κυρτή κορυφή – ή σε ένα συμβάν διαίρεσης – κατά το οποίο διαιρείται σε δύο κυρτές κορυφές.

Τρία σημεία που κινούνται σε ευθύγραμμες τροχιές με διαφορετική σταθερή ταχύτητα το καθένα, δύναται να γίνουν συνευθειακά το πολύ δύο φορές. Επομένως, κάθε τριάδα μη κυρτών κορυφών των κυματομετώπων μπορεί να προκαλέσει το πολύ δύο συμβάντα εναλλαγής.

Λήμμα 4.3 : Ο συνολικός αριθμός των συμβάντων εναλλαγής είναι $O(n^3)$.

Από τα λήμματα 4.2 και 4.3 προκύπτει ότι ο συνολικός αριθμός των τριγώνων που υπόκεινται σε επεξεργασία είναι τάξης $O(n^3)$. Εκτός από τον χρόνο που απαιτείται για την ενημέρωση της ουράς προτεραιότητας στην οποία αποθηκεύονται όλα τα τρίγωνα που επεξεργάζονται, χρόνος απαιτείται και για τον εκ νέου υπολογισμό των ταχυτήτων των κορυφών των κυματομετώπων. Τα συμβάντα πλευράς ή διαίρεσης είναι αυτά που προκαλούν μεταβολές στο μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας της κορυφής που εμπλέκεται, ενώ τα συμβάντα εναλλαγής δεν επηρεάζουν την ταχύτητα. Μία μεταβολή στην ταχύτητα έχει με τη σειρά της αντίκτυπο στους χρόνους εκφυλισμού των τριγώνων τα οποία έχουν ως μία τους κορυφή την εν λόγω κορυφή των κυματομετώπων. Καθώς ο βαθμός κάθε κορυφής είναι φραγμένος από τη συνάρτηση $O(n)$, το Λήμμα 4.2 υποδεικνύει ότι συνολικά ενημερώνεται ο χρόνος εκφυλισμού $O(n^2)$ σε πλήθος τριγώνων.

Έχουμε λοιπόν έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ευθύγραμμου σκελετού με χρονική πολυπλοκότητα $O(n^3 \log n)$ και χωρική πολυπλοκότητα $O(n)$. Στην χειρότερη περίπτωση (worst case) ο αλγόριθμος αυτός είναι πιο αργός από τον τετριμμένο, κατά τον οποίο ελέγχεται κάθε ζεύγος κορυφής και πλευράς των κυματομετώπων ώστε να υπολογιστεί το επόμενο συμβάν και έχει πολυπλοκότητα χρόνου $\Theta(n^3)$. Παρόλα αυτά στις διάφορες εφαρμογές ο αλγόριθμος έχει χρόνο εκτέλεσης πολύ καλύτερο από αυτόν της χειρότερης περίπτωσης, πλησιάζει σε πολυπλοκότητα την $O(n \log n)$. Συγκεκριμένα, ο χρόνος κατασκευής του $S(G)$ είναι ίδιας τάξης με τον χρόνο που απαιτείται για την αρχική τριγωνοποίηση του G .

Έχοντας εκτελέσει μία τριγωνοποίηση επί του συνόλου των κορυφών ενός πολυγώνου, εύκολα υπολογίζεται ο ευθύγραμμος σκελετός του με τη βοήθεια ενός ελέγχου στον χρόνο που απαιτείται για τον εκφυλισμό κάθε τριγώνου που σχηματίζουν οι τριάδες των κορυφών. Ο έλεγχος αυτός ισοδυναμεί με την επίλυση μιας δευτέρας τάξεως εξίσωσης μιας μεταβλητής.

4.2 Υπολογισμός Ευθύγραμμου Σκελετού Πολυγώνου χωρίς Τριγωνοποίηση

4.2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα πολύγωνο P , οι κορυφές και οι πλευρές του οποίου είναι διατεταγμένες με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και το εσωτερικό του πολυγώνου βρίσκεται στην αριστερή πλευρά του συνόρου. Είναι, δηλαδή, το σύνоро μία θετικά ορισμένη καμπύλη. Για την αλγοριθμική αναπαράσταση του πολυγώνου P χρησιμοποιούμε μία διπλά συνδεδεμένη κυκλική λίστα, την οποία καλούμε **Λίστα Ενεργών Κόμβων (ΛΕΚ)**. Στην περίπτωση που η κάτοψή μας αποτελείται από ένα σύνολο πολυγώνων (συνεκτικών συνιστωσών), τότε σχηματίζουμε μία λίστα για κάθε ένα από τα πολύγωνα αυτά. Περισσότερες της μίας λίστας δημιουργούμε και στην περίπτωση κατά την οποία στην κάτοψή μας υπάρχουν οπές (κατασκευάζουμε μία λίστα για το σύνоро και μία λίστα για καθεμία από τις οπές που υπάρχουν). Χρησιμοποιούμε, τότε, μία δομή, την οποία ονομάζουμε **Σύνολο από κυκλικές Λίστες Ενεργών Κόμβων (ΣΛΕΚ)**. Όπως μαρτυρά και το όνομα της δομής αυτής, τα δομικά στοιχεία της είναι Λίστες Ενεργών Κόμβων (ΛΕΚ). Προφανώς το Σύνολο από κυκλικές Λίστες Ενεργών Κόμβων στην περίπτωση ενός απλού κυρτού πολυγώνου περιέχει μόνο μία Λίστα Ενεργών Κόμβων.

4.2.2 Περιγραφή Αλγορίθμου

➤ Δομές Δεδομένων

Ορισμοί

✚ Οι **γραμμικές λίστες (linear lists)** χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ακολουθιών οποιωνδήποτε αντικειμένων. Μπορούν να διαφοροποιηθούν σε οποιαδήποτε θέση, ιδιότητα που τις διακρίνει από τους πίνακες.

Συγκεκριμένα, ο αφηρημένος τύπος δεδομένων μίας γραμμικής λίστας περιγράφεται από τις κάτωθι πράξεις :

first() (ή head())	επιστρέφει δείκτη προς τον πρώτο κόμβο
last() (ή tail() ή rear())	επιστρέφει δείκτη προς τον τελευταίο κόμβο
insertAfter/Before(p,e)	ενθέτει έναν νέο κόμβο με περιεχόμενο - στοιχείο e πριν/ μετά τον κόμβο p
remove(p)	αφαιρεί έναν κόμβο σε σχέση με τον κόμβο p

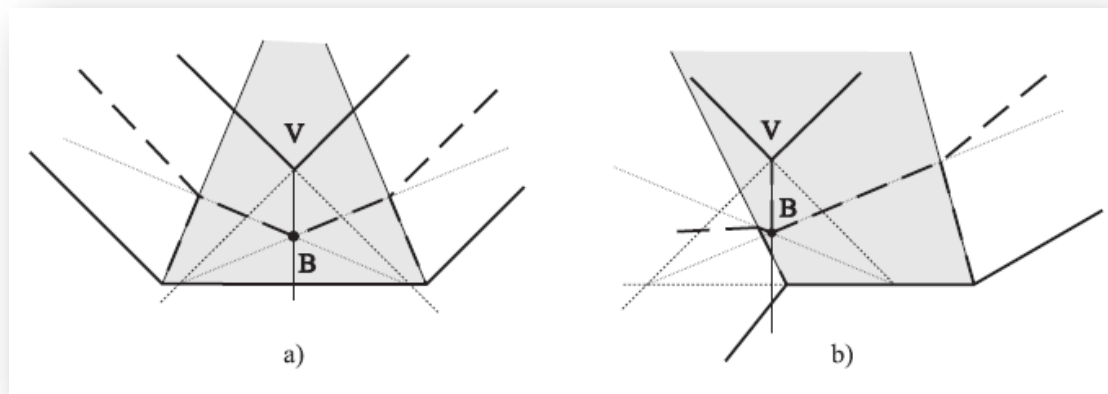
Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται μία ένθεση και μία απόσβεση στη λίστα εξαρτάται από την υλοποίηση.

- **Απλές λίστες** : Τα στοιχεία μιας απλής διασυνδεδεμένης λίστας (singly linked list) δεν αποθηκεύονται σε συνεχόμενες θέσεις. Κάθε στοιχείο (element) αποθηκεύεται μαζί με έναν δείκτη next, ο οποίος φανερώνει πού είναι το επόμενο του στην ακολουθία στοιχείο.
- **Διπλές κομβολίστες** ή **διπλά διασυνδεδεμένες λίστες (doubly linked lists)** : Αφορούν υλοποιήσεις ακολουθιών, στις οποίες κάθε στοιχείο γνωρίζει τόσο το επόμενο, όσο και το προηγούμενο από αυτό στοιχείο.
- **Κυκλικές λίστες (circular lists)** : δεν υφίσταται η έννοια της κεφαλής και της ουράς, δηλαδή δεν ορίζεται ούτε αρχή, αλλά ούτε και τέλος στην τοποθέτηση των στοιχείων της ακολουθίας. Οι κόμβοι συνθέτουν, λοιπόν, έναν κύκλο.

Γνωρίζουμε πώς τα συμβάντα διαίρεσης οφείλονται αποκλειστικά στην ύπαρξη μη κυρτών γωνιών-κορυφών V στο πολύγωνό μας, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κάθε τέτοια κορυφή προκαλεί και ένα συμβάν διαίρεσης. Από ένα τέτοιο συμβάν σχηματίζεται μία νέα κορυφή, έστω B . Η κορυφή αυτή έχει την ιδιότητα να απέχει ίση κάθετη απόσταση από τους φορείς των δύο ευθύγραμμων τμημάτων – πλευρών που ορίζουν τη μη κυρτή κορυφή V που προκαλεί το συμβάν και από τον φορέα της «απέναντι» προς την κορυφή V πλευράς e_i . Με τον όρο «απέναντι» ενδέχεται να αναφερόμαστε ακόμα και σε μία πλευρά που δεν περιέχει το ίχνος της ορθής προβολής της κορυφής V πάνω στην ευθεία που αποτελεί τον φορέα της πλευράς.

Αναζητούμε αρχικά την πλευρά εκείνη που είναι «απέναντι» στην κορυφή V . Η επισήμανση σχετικά με τον όρο «απέναντι» πλευρά μας οδηγεί στον συμπέρασμα πως η εύρεσή της δεν είναι εφικτή με έναν απλό έλεγχο που αφορά στην ύπαρξη σημείου τομής της διχοτόμου της γωνίας που αντιστοιχεί στην κορυφή V με κάθε μία από τις πλευρές e_i του πολυγώνου (εξαιρώντας εκείνες που σχηματίζουν την κορυφή). Θα πρέπει λοιπόν να ελεγχθεί κατά πόσο υπάρχει σημείο τομής της διχοτόμου με τον φορέα της εκάστοτε πλευράς e_i .

Στη συνέχεια, και με σκοπό την εύρεση των συντεταγμένων του σημείου B , βρίσκουμε τα εν δυνάμει σημεία B , έστω B_i , ένα για κάθε πιθανή «απέναντι» πλευρά e_i . Απαιτούμε κάθε B_i να βρίσκεται στην περιοχή που ορίζεται από την πλευρά e_i που εξετάζουμε κάθε φορά και τις διχοτόμους των δύο κορυφών στις οποίες πρόσκειται η πλευρά. Επομένως, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της διχοτόμου της γωνίας V με τη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζει ο φορέας της πλευράς e_i με τον φορέα της μίας εκ των δύο πλευρών που προσπίπτουν στην κορυφή V . Το σημείο αυτό είναι το ζητούμενο σημείο B_i .



Εικόνα 23 Υπολογισμός του σημείου τομής για μία μη κυρτή κορυφή που προκαλεί ένα συμβάν διαίρεσης (σημείο B)

Είναι σημαντικό να ελεγχθεί αν κάποια από τις πλευρές που προσπίπτουν στην V είναι παράλληλη προς την πλευρά e_i , οπότε και να αντιμετωπισθεί καταλλήλως. Αφού γίνει η ως άνω διαδικασία για καθεμία από τις πλευρές του πολυγώνου και συγκεντρωθούν τα σημεία B_i , ονομάζουμε B το σημείο εκείνο που βρίσκεται στην μικρότερη απόσταση από την κορυφή V .

Αποτέλεσμα ενός συμβάντος διαίρεσης είναι ο διαχωρισμός του πολυγώνου σε δύο μέρη. Αλγοριθμικά αυτό επιτυγχάνεται με τον διαχωρισμό της δομής δεδομένων που χρησιμοποιούμε για την αποθήκευση των πληροφοριών που αφορούν τις κορυφές του πολυγώνου και με την ταυτόχρονη εισαγωγή δύο νέων κόμβων V_1 και V_2 με συντεταγμένες αυτές του σημείου B . Κάθε ένας από τους δύο νέους κόμβους ανήκει σε ένα και μόνο από τα δύο πολύγωνα που προκύπτουν μετά την εμφάνιση του συμβάντος και κατ' επέκταση σε μία και μόνον δομή από αυτές που περιγράφουν τα δύο νέα πολύγωνα. Τέλος, προσθέτουμε στους κόμβους V_1 και V_2 από έναν δείκτη προς την πλευρά e_i .

1. Αρχικοποίηση

- (α) Αποθηκεύουμε τις κορυφές V_1, V_2, \dots, V_n που ορίζουν το πολύγωνα στις αντίστοιχες λίστες. Χαρακτηρίζουμε όλες τις κορυφές ως ενεργές, δηλαδή ως διαθέσιμες προς επεξεργασία.
- (β) Για κάθε κορυφή V_i στο ΣΛΕΚ προσθέτουμε έναν δείκτη σε κάθε μία από τις προσπίπτουσες πλευρές $e_{i-1} = V_{i-1}V_i$ και $e_i = V_iV_{i+1}$ και υπολογίζουμε ένα διάνυσμα b_i , το οποίο είναι συγγραμμικό της διχοτόμου της γωνίας που αντιστοιχεί στην κορυφή V_i .
- (γ) Για κάθε κορυφή V_i υπολογίζουμε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της διχοτόμου b_i με τις διχοτόμους των γειτονικών προς την V_i κορυφών, δηλαδή

με τις b_{i-1} και b_{i+1} . Ακόμη, σε περίπτωση που η κορυφή αντιστοιχεί σε μία μη κυρτή γωνία, υπολογίζουμε το σημείο που προκύπτει από συμβάν διαίρεσης (η εύρεση αυτού περιγράφεται παραπάνω). Αποθηκεύουμε σε μία ουρά προτεραιότητας εκείνο το σημείο, από τα τρία που υπολογίσαμε, το οποίο απέχει την μικρότερη απόσταση από τη στηρίζουσα ευθεία $L(e_i)$ της πλευράς e_i . Όταν το σημείο τομής I_i αντιστοιχεί σε συμβάν πλευράς αποθηκεύουμε ακόμη δύο δείκτες στις κορυφές V_α , V_b , δηλαδή στις κορυφές εκείνες οι διχοτόμοι των οποίων έχουν ως τομή το σημείο I_i . Στην περίπτωση που το σημείο I_i είναι αποτέλεσμα ενός συμβάντος διαίρεσης, αποθηκεύουμε μόνον έναν δείκτη, ο οποίος δείχνει στον κόμβο V_i του ΣΛΕΚ. Τέλος, αποθηκεύουμε τον τύπο του συμβάντος από το οποίο σχηματίστηκε το σημείο I_i (συμβάν πλευράς ή συμβάν διαίρεσης).

2. Όσο η ουρά προτεραιότητας έχει στοιχεία κάνε :

(α) Ανάκτησε το χαμηλότερο σημείο τομής I από την ουρά. Αν ο τύπος συμβάντος από το οποίο προέκυψε το I είναι συμβάν πλευράς, τότε ακολούθησε τα βήματα 2(β)-2(στ). Αλλιώς (συμβάν διαίρεσης) ακολούθησε με τη σειρά τα βήματα 2(β), 2(γ), 2(ζ), 2(η), 2(θ).

(β) Αν οι κορυφές V_α και V_b για τις οποίες έχουμε αποθηκεύσει δείκτες, είναι σημειωμένες ως επεξεργασμένες, τότε επέστρεψε στο βήμα 2. Αλλιώς η πλευρά e που ορίζεται από τις κορυφές V_α και V_b εκφυλίζεται.

(γ) Αν η προ-προηγούμενη κορυφή της κορυφής V_α ταυτίζεται με την κορυφή V_b (οπότε η κάτοψή μας είναι ένα τρίγωνο), τότε δώσε σαν έξοδο τρία τόξα ευθύγραμμου σκελετού $V_\alpha I$, $V_b I$ και $V_c I$, όπου V_c είναι η κορυφή που προηγείται της κορυφής V_α και ταυτοχρόνως έπεται της κορυφής V_b στη Λίστα των Ενεργών Κόμβων, και συνέχισε με το βήμα 2.

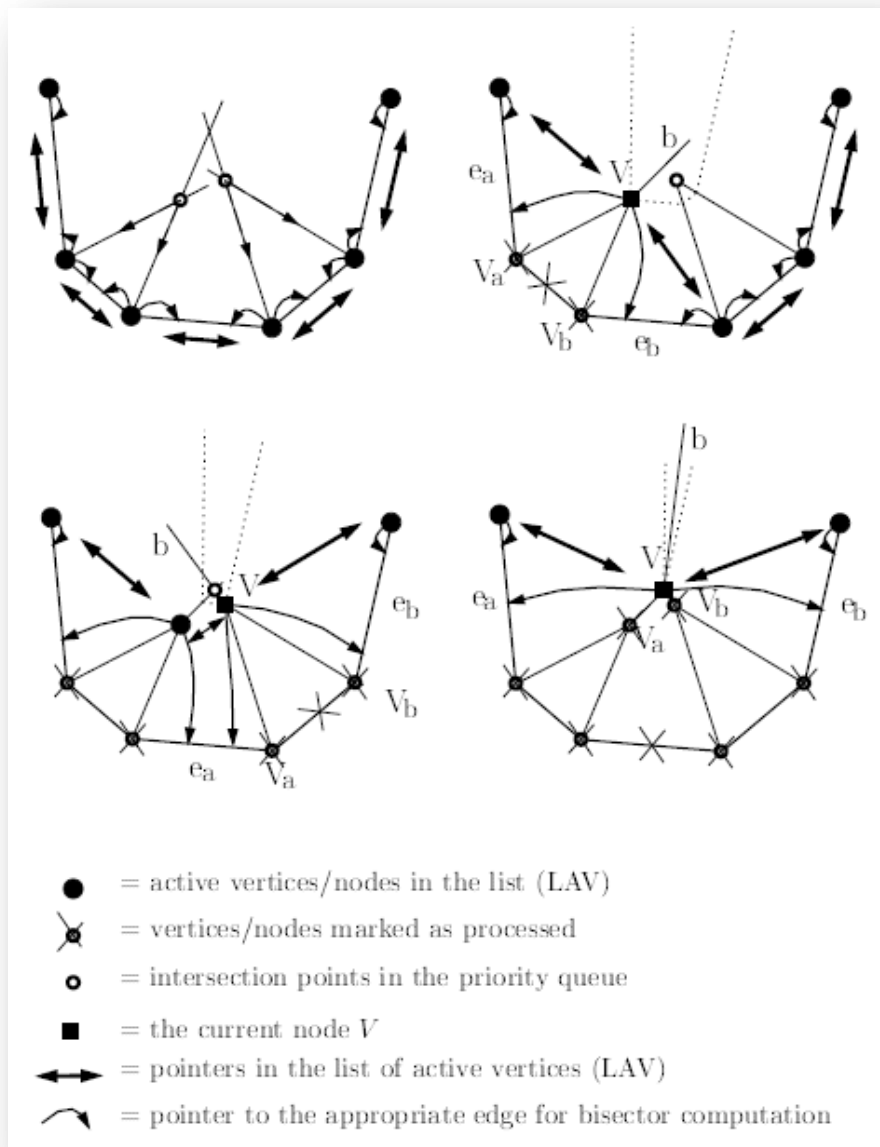
(δ) Δώσε σαν έξοδο δύο τόξα του ευθύγραμμου σκελετού $V_\alpha I$ και $V_b I$

(ε) Τροποποίησε τη Λίστα των Ενεργών Κόμβων :

- σημείωσε τις κορυφές V_α , V_b ως επεξεργασμένες
- δημιούργησε έναν νέο κόμβο V με συντεταγμένες αυτές του σημείου τομής I
- εισήγαγε αυτόν τον νέο κόμβο στη ΛΕΚ. Αυτό ισοδυναμεί με την ένωση του κόμβου με την κορυφή που προηγείται της V_α και την κορυφή που έπεται της κορυφής V_b στη ΛΕΚ.
- σύνδεσε τον νέο κόμβο με τις κατάλληλες πλευρές e_α και e_b (στις οποίες δείχνουν οι κορυφές V_α και V_b)

(στ) Για τον νέο κόμβο V , ο οποίος δημιουργήθηκε από το I :

- υπολόγισε μία νέα διχοτόμο b της γωνίας που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα e_a και e_b
- υπολόγισε τα σημεία τομής της διχοτόμου αυτής με τις διχοτόμους των γειτονικών γωνιών-κορυφών στη ΛΕΚ
- αποθήκευσε το κοντινότερο σημείο τομής στην ουρά προτεραιότητας.

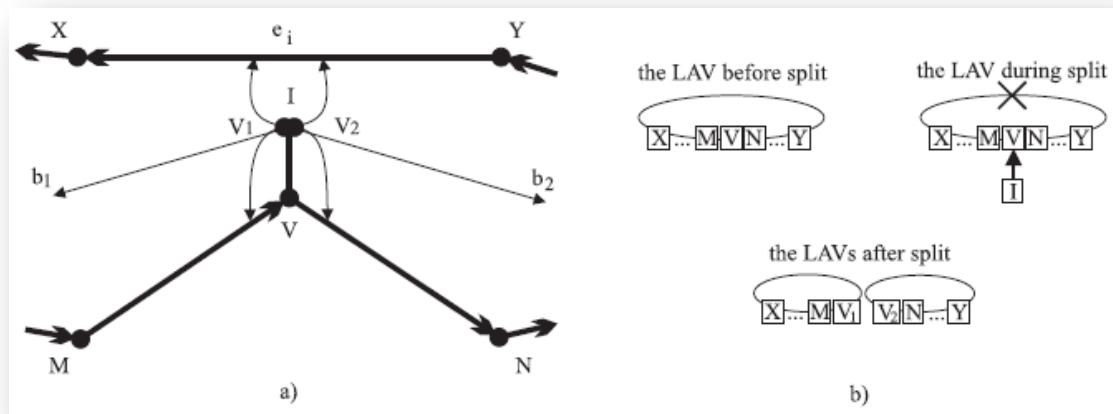


Εικόνα 24 Αρχικοποίηση και τα πρώτα τρία βήματα του αλγορίθμου για κυρτές κορυφές

(ζ) Δώσε σαν έξοδο ένα τόξο V_i του ευθύγραμμου σκελετού, όπου ο κόμβος V είναι αυτός για τον οποίο το σημείο τομής I διαθέτει δείκτη.

(η) Τροποποίησε το σύνολο των λιστών των ενεργών κόμβων (ΣΛΕΚ):

- σημείωσε τον κόμβο V (στον οποίο δείχνει ο δείκτης του I) ως επεξεργασμένο
- δημιούργησε δύο νέους κόμβους V_1 και V_2 με συντεταγμένες αυτές του σημείου τομής I
- αναζήτησε την κατάλληλη απέναντι πλευρά στο ΣΛΕΚ
- εισήγαγε τους δύο κόμβους στο ΣΛΕΚ (κατακερμάτισε τη μία ΛΕΚ σε δύο μέρη-βλέπε Εικόνα 25). Ο κόμβος V_1 θα τοποθετηθεί ανάμεσα στον προηγούμενο του V (M στο σχήμα) και τον κόμβο ο οποίος είναι ένα άκρο του απέναντι ευθύγραμμου τμήματος (X στο σχήμα). Ο κόμβος V_2 θα τοποθετηθεί ανάμεσα στον επόμενο κόμβο του V (N στο σχήμα) και τον κόμβο που αποτελεί άκρο του απέναντι ευθύγραμμου τμήματος (Y στο σχήμα). Με αυτό το βήμα, στην πραγματικότητα, το πολύγωνο διαιρείται σε δύο μέρη.
- σύνδεσε τους νέους κόμβους V_1 και V_2 με της κατάλληλες πλευρές (βλέπε Εικόνα 25)



Εικόνα 25 Περιγραφή του συμβάντος διαίρεσης : a) διαχείριση δεικτών, b) διαίρεση της ΛΕΚ σε δύο λίστες

(θ) για κάθε έναν από τους δύο κόμβους V_1 και V_2 :

- υπολόγισε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα με τα οποία ενώθηκε ο κάθε κόμβος στο βήμα 2(η)
- υπολόγισε τα σημεία τομής των διχοτόμων αυτών με τις διχοτόμους των γειτονικών κορυφών σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφεται στο βήμα 1(γ)
- αποθήκευσε το κοντινότερο σημείο τομής στην ουρά προτεραιότητας

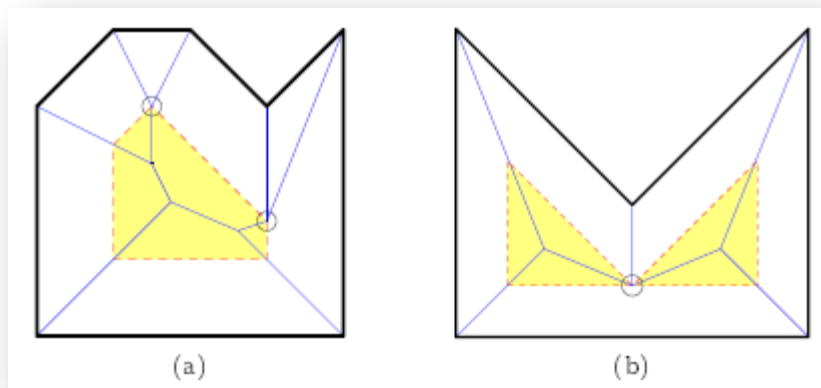
Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου για την κατασκευή του ευθύγραμμου σκελετού μη κυρτών πολυγώνων με σπές παρατηρήθηκε χρονική πολυπλοκότητα $O(nm + n \log n)$, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός των κορυφών κάθε πολυγώνου και m το πλήθος των μη κυρτών. Ο αλγόριθμος δίνει σωστά αποτελέσματα σε κυρτά, μη κυρτά πολύγωνα και σε πολύγωνα με σπές.

Ειδικότερα, τα συμβάντα διαίρεσης απαιτούν για την επεξεργασία τους χρόνο τάξης $O(n \log n)$ και χώρο αποθήκευσης $O(n)$ στην ουρά προτεραιότητας, αλλά δεν είναι η επεξεργασία τους που συνεισφέρει τα μέγιστα στην συνολική πολυπλοκότητα. Η περισσότερο χρονοβόρα εργασία είναι ο υπολογισμός των συμβάντων διαίρεσης: αυτό σημαίνει την αντιμετώπιση m το πλήθος ($m < n$) μη κυρτών κορυφών.

4.3 Αλγόριθμος με Υπο-τετραγωνική Πολυπλοκότητα

4.3.1 Εισαγωγή

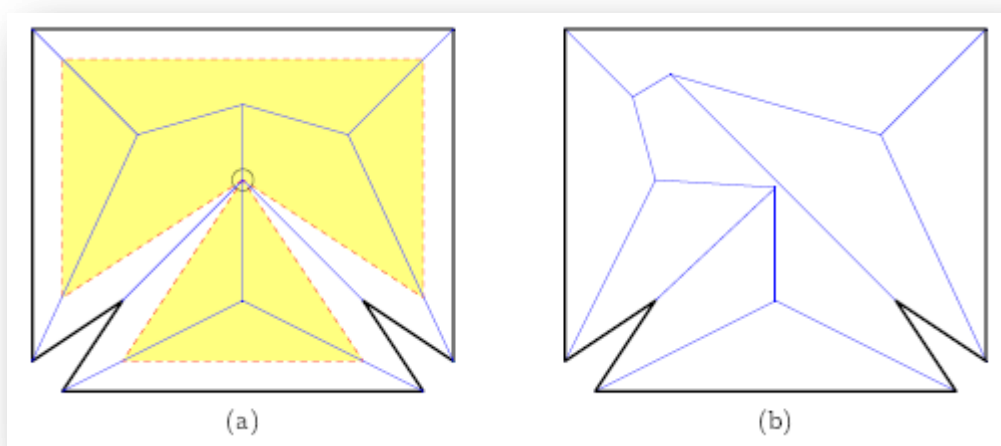
Θυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό του ευθύγραμμου σκελετού, υπάρχουν δύο ειδών συμβάντα τα οποία παρατηρούμε και διαχειριζόμαστε κατά την διαδικασία της κατασκευής του σκελετού, το συμβάν πλευράς και το συμβάν διαίρεσης (βλ. §3.2) (Εικόνα 26).



Εικόνα 26 (a) Δύο ταυτόχρονα συμβάντα πλευράς, (b) Ένα συμβάν διαίρεσης

Παρατηρούμε ότι από τα συμβάντα που απεικονίζονται στην Εικόνα 26 προκύπτουν κόμβοι βαθμού τρία στον υπό κατασκευή ευθύγραμμο σκελετό. Στην γενική περίπτωση ενδέχεται ο σκελετός να περιέχει κόμβους με βαθμό μεγαλύτερο του τρία, οι οποίοι σχηματίζονται από την ταυτόχρονη εμφάνιση περισσότερων του ενός συμβάντος σε ένα σημείο. Στις περισσότερες των περιπτώσεων

διαχειριζόμαστε τα συμβάντα αυτά με μία σειρά, αφού πρώτα αντικαταστήσουμε τον κόμβο υψηλού βαθμού με κόμβους βαθμού τρία ανάλογου πλήθους, οι οποίοι υποθέτουμε ότι είναι συνδεδεμένοι με ακμές μηδενικού μήκους. Υπάρχει, ωστόσο, μία περίπτωση για την οποία δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε την διαδικασία αυτή. Στην περίπτωση αυτή συναντιούνται δύο ή περισσότερες μη κυρτές κορυφές στο ίδιο σημείο. Θα καλούμε την κατάσταση αυτή **συμβάν κορυφής**. Απόρροια ενός τέτοιου συμβάντος ενδέχεται να είναι η δημιουργία μιας μη κυρτής κορυφής στο υπό συρρίκνωση πολύγωνο, παρόλο που ο συνολικός αριθμός των μη κυρτών κορυφών πάντα μειώνεται. Να τονίσουμε πως οποιαδήποτε μεταβολή στο σχήμα του πολυγώνου που έχει ως αποτέλεσμα να αναιρεθεί ένα συμβάν κορυφής, οδηγεί σταδιακά στην παραμόρφωση της δομής του ευθύγραμμου σκελετού. Συνεπώς, θα πρέπει τα συμβάντα κορυφής να διαχειρίζονται άμεσα (Εικόνα 27).



Εικόνα 27 (α) Ένα συμβάν Κορυφής, (β) Διαταραχή του Σκελετού

4.3.2 Περιγραφή Αλγορίθμου

Θεωρούμε πως ο χρόνος είναι μία τρίτη χωρική διάσταση, οπότε η διαδικασία συρρίκνωσης ισοδυναμεί με μία σάρωση της στέγης που αντιστοιχεί στο πολύγωνο με κατεύθυνση προς τα πάνω τέμνοντάς την συνεχώς με ένα οριζόντιο επίπεδο (η διαδικασία αυτή χαρακτηρίστηκε ως πλημμύρα στην εργασία [8], βλ. §3.4). Η βασική παρατήρηση σχετικά με τη μέθοδο είναι πως, παρά το γεγονός ότι δεν γνωρίζουμε εξ' αρχής το σύνολο των συμβάντων που θα λάβουν χώρα μέχρι να ολοκληρωθεί η διαδικασία και τη σειρά με την οποία αυτά θα εμφανιστούν, μπορούμε πάντα να υπολογίζουμε το επόμενο συμβάν.

Κάθε μία από τις πλευρές του πολυγώνου ορίζει ένα (πιθανώς μη φραγμένο) τρίγωνο στον \mathbb{R}^3 , οι άλλες δύο πλευρές του οποίου ορίζονται από τις τροχιές που διαγράφουν τα άκρα τις πλευράς. Παρόμοια, κάθε μη κυρτή κορυφή ορίζει ένα

διάνυσμα στον \mathbb{R}^3 . Ένα συμβάν πλευράς σημειώνεται όταν το οριζόντιο επίπεδο έχει σαρώσει ολόκληρο το τρίγωνο, οπότε βρίσκεται στην πάνω κορυφή του. Όταν το οριζόντιο επίπεδο που κάνει τη σάρωση συναντήσει την τομή ενός τριγώνου με ένα άλλο τρίγωνο, τότε παρατηρείται ένα συμβάν διαίρεσης ή κορυφής.

➤ Δομή Δεδομένων

Αποθηκεύουμε τα τρίγωνα και τα διανύσματα σε μία δομή δεδομένων τέτοια, ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να ανακτήσουμε από αυτήν το πρώτο συμβάν από κάθε είδος. Η ενημέρωση της δομής μετά από κάθε συμβάν πραγματοποιείται με μία σειρά από εισαγωγές και διαγραφές πληροφοριών στη δομή. Το πλήθος των ενεργειών αυτών είναι σταθερό.

Σε κάθε συμβάν πλευράς :

- Διαγράφουμε τρία τρίγωνα – αυτό που όριζε η πλευρά που εκφυλίστηκε και τα δύο που ορίζουν οι πλευρές που ήταν γειτονικές της πρώτης
- Ενδεχομένως να παραστεί η ανάγκη να διαγραφεί ένα διάνυσμα – ορισμένο σε ένα από τα άκρα της πλευράς που εκφυλίστηκε, το οποίο αποτελεί κορυφή μη κυρτής γωνίας
- Εισάγουμε δύο τρίγωνα – ορισμένα από τις δύο πλευρές που μετά του συμβάντος πρόσκεινται η μία στην άλλη

Σε κάθε συμβάν διαίρεσης :

- Διαγράφουμε ένα διάνυσμα – το αντίστοιχο της μη κυρτής κορυφής που προκάλεσε το συμβάν
- Διαγράφουμε τρία τρίγωνα – τα αντίστοιχα στην υπό διαίρεση πλευρά και στις δύο προσκείμενες στην μη κυρτή γωνία πλευρές
- Εισάγουμε τέσσερα τρίγωνα – ορισμένα στα δύο ζεύγη γειτονικών πλευρών που προκύπτουν από το συμβάν

Σε ένα συμβάν κορυφής στο οποίο εμπλέκονται k το πλήθος μη κυρτές κορυφές :

- Διαγράφουμε $2k$ τρίγωνα και k διανύσματα
- Εισάγουμε $2k$ τρίγωνα και πιθανώς ένα διάνυσμα

Με το πέρας της ακολουθίας των συμβάντων, συνολικά έχουμε εκτελέσει $O(n)$ εισαγωγές και διαγραφές.

Αποθηκεύουμε τα τρίγωνα σε μία απλή ουρά προτεραιότητας, όπου η προτεραιότητα των τριγώνων εξαρτάται από την z -συντεταγμένη της άνω κορυφής του τριγώνου, ούτως ώστε να διατηρούμε διατεταγμένα τα πιθανά συμβάντα

πλευράς. Ο χρόνος που απαιτείται για να διατηρούμε την ουρά προτεραιότητας ενημερωμένη με την επικρατούσα κατάσταση είναι $O(n \log n)$.

Για την εύρεση του επόμενου συμβάντος διαίρεσης ή κορυφής, χρησιμοποιούμε μία δομή δεδομένων η οποία διατηρεί αποθηκευμένο το υψομετρικά χαμηλότερο σημείο τομής ανάμεσα σε ένα σύνολο διανυσμάτων και ένα σύνολο τριγώνων στον \mathbb{R}^3 . Το πρόβλημα της εύρεσης του συμβάντος αυτού εκπίπτει σε δύο προβλήματα αναζήτησης εμβέλειας (range searching problem). Περαιτέρω πληροφορίες [19].

Θεώρημα 4.4 : Ο ευθύγραμμος σκελετός ενός n – γώνου μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο και χώρο $O(n^{8/5+\epsilon})$.

Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός μη ισοσταθμισμένου ευθύγραμμου σκελετού, όπου η κίνηση κάθε πλευράς γίνεται με διαφορετική ταχύτητα, στον ίδιο χρόνο και χώρο. Η μόνη διαφορά από την περίπτωση του ισοσταθμισμένου ευθύγραμμου σκελετού είναι πως τα δύο άκρα μίας πλευράς που εκφυλίζεται ενδέχεται να αντιστοιχούν σε μη κυρτές κορυφές, οπότε από το συμβάν πλευράς προκύπτει μία νέα μη κυρτή κορυφή.

Βιβλιογραφία

- [1] *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου*
(Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2008)
- [2] ΜΑΡΚΑΤΗΣ Σ. *Παραστατική Γεωμετρία*, Αθήνα, 2008
- [3] ΤΖΕΚΑΚΗ ΜΑΡΙΑΝΝΑ *Θέματα Σύγχρονων Μαθηματικών*
(Διαφάνειες Μαθήματος)
- [4] ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ Π. *Οι στέγες στην Οικοδομή σαν μορφολογικά και φέροντα στοιχεία*, Αθήνα, 1993
- [5] Ζ.Α.ΤΖΑΡΤΖΑΝΟΣ *Οικοδομική, Βιβλιοθήκη του τεχνικού τόμος Β'*,
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ, Αθήνα, 1995
- [6] WALTER MEYER-BOHE *Στέγες – Δώματα* (μετάφραση από
Δ.Μαλασπίνα) ΜΟΣΧΟΣ ΓΚΙΟΥΡΔΑΣ, Αθήνα, 1984
- [7] H. BLUM, *A transformation for extracting new descriptors of shape*, Models for the perception of speech and visual form, 1967
- [8] O. AICHHOLZER, D. ALBERTS, F. AURENHAMMER, and B. GÄRTNER. A novel type of skeleton for polygons. *Journal of Universal Computer Science*, 1(12):752-761, 1995. [IIG-Report-Series 424, TU Graz, Austria, 1995]
- [9] THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON, RONALD L. RIVEST, CLIFFORD STEIN *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*,
Μετάφραση : Ιωάννης Παπαδόγγονας, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, Ηράκλειο 2007
- [10] ΓΙΑΝΝΗΣ Ζ. ΕΜΙΡΗΣ *Υπολογιστική Γεωμετρία - Μια σύγχρονη
αλγοριθμική προσέγγιση*, ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ, 2008
- [11] ΣΤΑΘΗΣ ΖΑΧΟΣ, ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ ΚΟΖΥΡΗΣ *Εισαγωγή στην Επιστήμη
των Υπολογιστών – Θεωρητική Πληροφορική, Γλώσσες
Προγραμματισμού, Οργάνωση Υπολογιστών*, 2006
- [12] ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΒΛΑΣΣΟΠΟΥΛΟΣ *Στοιχεία Γεωμετρικών Αλγορίθμων*,
ΣΕΜΦΕ 2008
- [13] J. O'ROURKE *Computational Geometry in C*. Cambridge University
Press, Cambridge, 2nd edition, 1998
- [14] BOISSONNAT, TEILLAUD *Effective Computational Geometry for
Curves and Surfaces*, Springer, 2006

- [15] T.CULVER, J.KEYSER and D.MANOCHA. *Accurate computation of the medial axis of a polyhedron*. Solid Modeling '99 (1999), 179-190
- [16] C.HOFFMAN. *How to construct the skeleton of CSG objects*. Proc. Fourth IMA Conf., *The Mathematics of Surfaces*, A.Bowyer and J.Davenport Eds., University of Bath UK, September 1990
- [17] O. Aichholzer and F. Aurenhammer. Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. In A.M. Samoilenko, editor, *Voronoi's Impact on Modern Sciences II*, volume 21, pages 7-21. Proc. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine, 1998
- [18] PETR FELKEL και STEPAN OBDRZALEK *Straight Skeleton Implementation*, Bratislava: Comenius University, 1998
- [19] DAVID EPPSTEIN and JEFF ERICKSON *Raising Roofs, Crashing Cycles, and Playing Pool: Applications of a Data Structure for Finding Pairwise Interactions*, 1999
- [20] ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Δ. ΜΠΟΖΑΝΗΣ *Δομές Δεδομένων*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2006

Ηλεκτρονικές Πηγές

- [a] <http://en.wikipedia.org/wiki/>
- [b] <http://plus.maths.org/issue43/features/kirk>
- [c] [http://194.42.11.46/courses/EPA272/DIAGANEIES EPA272/E%CE%A0A%20272_%CE%95%CE%9D%CE%9F%CE%A4%CE%97%CE%A4%CE%91_2.pdf](http://194.42.11.46/courses/EPA272/DIAGANEIES_EPA272/E%CE%A0A%20272_%CE%95%CE%9D%CE%9F%CE%A4%CE%97%CE%A4%CE%91_2.pdf)
- [d] http://morfologia.arch.duth.gr/1o_etos/pdf/axonometria.pdf
- [e] http://www.cgal.org/Manual/3.2/doc_html/cgal_manual/Straight_skeleton_2/Chapter_main.html
- [f] <http://www.sable.mcgill.ca/~dbelan2/roofs/roofs.html>
- [g] <http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/research/publications/>

Ευρετήριο

E	E
Euler θεώρημα, 2	επίπεδο γωνία κλίσης, 8 ιχνοπαράλληλες, 8 ίχνος, 8
V	επιτεγίδα, 21
Voronoi διάγραμμα, 29 κόμβος, 29 πλευρά, 29 χωρίο, 29	εστία, 28
A	ευθεία βαθμίδα ή βήμα, 8 γωνία κλίσης, 8 ίχνος, 8 κλίση, 8 υψομετρική κλίμακα, 8
ακτίνα, 55	ευθύγραμμος σκελετός, iii, 41, 43
αξονομετρική μονάδα, 11	Z
αξονομετρικός άξονας, 11	ζευκτό, 21
αύλακα, 20	I
Αφηρημένος Τύπος Δεδομένων, 55	ιδιότητα της κλίσης, 51
Γ	Ιχνοκάθετες ή γραμμές κλίσης, 8
γραμμή εκροής ή απορροής, 20	ιχνοπαράλληλες, 8
γραμμή κλίσης, 8	K
γραμμή μέγιστης κλίσης, 8	κλίση, 16
γράφημα, 30	κόμβος (node), 44
γράφο διχοτόμων, 46	κορυφή, 20 βαθμός, 30
γράφος, 30 ακμή ή πλευρά, 30 επίπεδος, 31 κορυφή ή κόμβος, 30 προσανατολισμένος ή κατευθυνόμενος, 30 συνεκτικός ή συνδεδεμένος, 31	κορωνίδα, 20
γράφος διχοτόμων, 46	κόχη, 49
Δ	Λ
διαδικασίας συρρίκνωσης (shrinking process), 42	λίστα απλή, 61 γραμμική, 60 διπλά διασυνδεδεμένη (διπλή κομβολίστα), 61 κυκλική, 61
διαδρομή, 30	Λίστα Ενεργών Κόμβων (ΛΕΚ), 60
δυϊσμός, 34 γεωμετρικός, 34	

Μ
μέγιστος κενός κύκλος, 31
μέση σφαίρα, 37
μέσος άξονας, 36

Ν
νησί, 50

Ο
ουρά προτεραιότητας
ελαχίστου, 55
σωρού, 55

Π
παρυφή στέγασης, iii, 20
πεταύρωση, 21
πέτσωμα, 21
πολύγωνο
x-μονότονο, 1
γ-μονότονο, 1
απλό, 36
πολυεδρική επιφάνεια, 1
πολύεδρο, 1
ανοικτό, 1
κυρτό, 1
μη κυρτό, 1
σκελετός, 1

προβολή
διμετρική, 12
ισομετρική, 12
ισομετρική αξονομετρική, 13
μονομετρική, 12
ορθή αξονομετρική (κάθετη), 12
ορθή αξονομετρική, 12
πλάγια αξονομετρική, 12

πλάγια διμετρική αξονομετρική, 13
τριμετρική, 12
τριμετρική αξονομετρική, 14

Ρ
ράχη, 20

Σ
στέγη
πολυγώνου, 47
συμβάν
ανάστροφο συμβάν πλευράς, 50
διαίρεσης, 43, 57
εναλλαγής, 57
κορυφής, 67
πλευράς, 43, 57

συνεκτική συνιστώσα, 31
Σύνολο από κυκλικές Λίστες Ενεργών
Κόμβων (ΣΛΕΚ), 60

Τ
τεγίδα, 21
τερματική κορυφή, 56
τόξο, 43
κυρτό, 45
μη κυρτό, 45
τριγωνοποίηση, 33

Υ
υπογράφος, 31
υψόμετρο, 7

Χ
χωρίο (face of edge e), 44