



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Ανάλυση Παρατηρησιμότητας και Κατανεμημένη Εκτίμηση  
Κατάστασης Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρίστος Σ. Παύλου

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Δ. Χατζηαργυρίου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δέσποινα Κουκουλά  
Υποψήφια Δρ. Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Αθήνα, Νοέμβριος 2013





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Ανάλυση Παρατηρησιμότητας και Κατανεμημένη Εκτίμηση  
Κατάστασης Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρίστος Σ. Παύλου

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Δ. Χατζηαργυρίου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δέσποινα Κουκουλά  
Υποψήφια Δρ. Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 7<sup>η</sup> Νοεμβρίου 2013.

.....  
Ν. Χατζηαργυρίου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Γ. Κορρές  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

.....  
Π. Γεωργιάκης  
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2013

.....  
Χρίστος Σ. Παύλου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χρίστος Σ. Παύλου, 2013.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Οι παράμετροι που προσδιορίζουν την κατάσταση ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας μεταβάλλονται ανά πάσα χρονική στιγμή. Επομένως, είναι απαραίτητο τα Σ.Η.Ε. να παρακολουθούνται, ώστε να διατηρούνται οι κανονικές και ασφαλείς συνθήκες λειτουργίας τους. Οι παραστατικοί μιγαδικοί των τάσεων των ζυγών προσδιορίζουν σε απόλυτο βαθμό ένα Σ.Η.Ε.. Η Εκτίμηση Κατάστασης είναι ικανή να προσδιορίσει τα μέτρα και τις γωνίες των τάσεων των ζυγών ενός συστήματος με βέλτιστο τρόπο, λαμβάνοντας ένα επαρκές σύνολο μετρήσεων ως δεδομένα.

Η Ανάλυση Παρατηρησιμότητας είναι απαραίτητη, προκειμένου να ελέγξουμε αν τα δεδομένα του αλγορίθμου Εκτίμησης Κατάστασης είναι επαρκή, ούτως ώστε ο αλγόριθμος να μπορεί να επιλυθεί. Σε περίπτωση που ένα σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο, τότε πρέπει να αποκατασταθεί η Παρατηρησιμότητα, για να δώσει λύση ο Εκτιμητής Κατάστασης και να λάβουμε τους παραστατικούς μιγαδικούς των τάσεων των ζυγών.

Δεδομένου ότι με το πέρασμα των ετών τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας μεγαλώνουν ολοένα και περισσότερο, έχει προκύψει η ανάγκη για αποδοτικότερους και ταχύτερους αλγορίθμους Εκτίμησης Κατάστασης. Στην κατεύθυνση αυτή κινούνται οι αλγόριθμοι Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης, οι οποίοι προϋποθέτουν τον χωρισμό ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας σε επιμέρους υποσυστήματα/περιοχές.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσει το ζήτημα της Εκτίμησης Κατάστασης, καθώς και να αναλύσει την Παρατηρησιμότητα συστήματος. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού, δημιουργήθηκαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας ένας αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης κι ένας αλγόριθμος ανάλυσης Παρατηρησιμότητας.

**Λέξεις κλειδιά:** Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας, παραστατικός μιγαδικός τάσης, Εκτίμηση Κατάστασης, Κατανεμημένη Εκτίμηση Κατάστασης, Παρατηρησιμότητα.

## **Abstract**

The parameters that determine the state of a Power System change anytime during the day. Therefore, it is indispensable to monitor Power Systems, in order to contain their normal and secure operating conditions. Bus's voltage phasors can greatly determine a Power System. State Estimation can optimally determine the voltage magnitude and voltage argument, having an adequate set of measurements as input data.

Observability Analysis is indispensable, in order to find out whether input data is adequate to solve State Estimation's algorithm. In case a Power System is unobservable, observability has to be restored, otherwise the algorithm cannot be solved. After observability restoration, the State Estimator can determine the bus's voltage phasors.

Over the years, Power Networks are getting increasingly larger. Therefore, arises the need for faster and more efficient State Estimation algorithms. Distributed State Estimation algorithms are moving in this direction. These algorithms require the division of the Power System into subsystems/areas.

The objective of this diploma thesis is to investigate the Observability Analysis and State Estimation problem as well. In order to achieve this purpose, two algorithms were created, one that deals with the State Estimation problem in a distributed manner, and one that deals with the Observability Analysis.

**Key words:** Power System, voltage phasor, State Estimation, Distributed State Estimation, Observability.

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κ. Νικόλαο Χατζηαργυρίου, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου πρόσφερε να ασχοληθώ με το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω την υποψήφια Διδάκτορα Δέσποινα Κουκουλά τόσο για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, όσο για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε την ακαδημαϊκή χρονιά που πέρασε. Η βοήθειά της και η καθοδήγησή της σε όλα τα στάδια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας ήταν πολύτιμη.

Καθοριστική για την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας υπήρξε η συνεργασία με τον κ. Γεώργιο Κορρέ, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π.. Η πείρα του, η καθοδήγησή του και οι συμβουλές του ήταν κομβικής σημασίας προκειμένου να φέρω εις πέρας τη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Για τους λόγους αυτούς, θα ήθελα να του εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου πρόσφερε όλα αυτά τα χρόνια και που συνεχίζει να με στηρίζει σε όλες μου τις προσπάθειες, την Αγγελίνα Χ. για την υπομονή της και τη στήριξή της, καθώς και όλους τους φίλους μου, οι οποίοι στάθηκαν δίπλα μου στα καλά και τα άσχημα κατά την φοίτησή μου στο Ε.Μ.Π..

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους αυτούς, οι οποίοι υπήρξαν κομμάτι της ζωής μου και σήμερα δεν βρίσκονται κοντά μας.





## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	5
Abstract .....	6
Ευχαριστίες .....	7
1 Κεφάλαιο 1 <sup>ο</sup> – Εκτίμηση Κατάστασης .....	13
1.1 Εισαγωγή .....	13
1.2 Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης .....	14
1.3 Υποθέσεις .....	14
1.4 Γραμμές Μεταφοράς .....	14
1.5 Εγκάρσια Στοιχεία .....	15
1.6 Φορτία και Γεννήτριες .....	15
1.7 Μετασχηματιστές .....	16
1.8 Γενικευμένος Ζυγός ΣΗΕ .....	17
1.9 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας .....	21
1.10 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Κανονικής Κατανομής .....	22
1.11 Συνάρτηση Πιθανοφάνειας .....	22
1.12 Μοντέλο Μετρήσεων και Υποθέσεις .....	23
1.13 Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης Σταθμισμένων Ελαχίστων Τετραγώνων 25	
1.14 Μη γραμμική συνάρτηση μετρήσεων $\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ .....	26
1.15 Ιακωβιανή Μήτρα Μετρήσεων $\mathbf{H}$ .....	26
1.16 Μήτρα κέρδους $\mathbf{G}$ .....	32
1.17 Παραγοντοποίηση του πίνακα κέρδους $\mathbf{G}$ και επίλυση των Κανονικών Εξισώσεων .....	32
2 Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> – Χρησιμότητα κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης και «έξυπνων» μετρητών .....	35
2.1 Εισαγωγή .....	35
2.2 «Εξυπνοι» Μετρητές .....	36
2.3 Χωρισμός σε περιοχές/υποσυστήματα .....	38
2.4 Εκσυγχρονισμός εκτίμησης κατάστασης και επίβλεψης δικτύου .....	38
3 Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> - Matlab-Περιγραφή ΣΗΕ και αρχεία εισόδου .....	39
3.1 Περιγραφή αρχείου ΡΤΙ στην Matlab .....	39
3.2 Α.Π.Ε. ως είσοδοι στην Matlab .....	42
3.3 Δεδομένα μετρήσεων ως είσοδοι για την Κατανεμημένη Εκτίμηση Κατάστασης .....	42

4	Κεφάλαιο 4 <sup>ο</sup> - Παρατηρησιμότητα Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας .....	45
4.1	Εισαγωγή .....	45
4.2	Εύρεση Παρατηρήσιμων Νησίδων .....	46
4.3	Συνοριακοί ζυγοί παρατηρήσιμων νησίδων.....	48
4.4	Εύρεση ελάχιστων εγχύσεων ενεργού ισχύος σε συνοριακούς ζυγούς του ΣΗΕ	48
4.5	Παράδειγμα εφαρμογής του προτεινόμενου αλγορίθμου Παρατηρησιμότητας ΣΗΕ.....	51
4.6	Εφαρμογή του αλγορίθμου στο ΣΗΕ IEEE 14 ζυγών.....	54
4.7	Συμπεράσματα-Σχόλια .....	61
5	Αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης.....	63
5.1	Περιγραφή αλγορίθμου .....	63
5.2	Ανάλυση Παρατηρησιμότητας.....	73
5.3	Παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου .....	73
6	Εφαρμογή αλγορίθμου κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης σε δίκτυο 107 ζυγών στην Κρήτη .....	91
6.1	Χωρισμός σε περιοχές.....	91
6.2	Διαθέσιμες μετρήσεις.....	93
6.3	Αποτελέσματα .....	108
7	Συμπεράσματα.....	111
7.1	Σχολιασμός αποτελεσμάτων .....	111
7.2	Συμβολή της διπλωματική εργασίας .....	111
7.3	Εργασίες για περαιτέρω διερεύνηση.....	113
	Παράρτημα.....	115
	Βαθμός και Μηδενικότητα πίνακα.....	115
	Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange.....	116
	Βιβλιογραφία .....	119

## Περιεχόμενα Εικόνων

Εικόνα 1: Καταστάσεις Σ.Η.Ε. ....	13
Εικόνα 2: Μοντέλο «π» .....	15
Εικόνα 3: Εγκάρσια Στοιχεία.....	15
Εικόνα 4: Φορτία-Γεννήτριες .....	16
Εικόνα 5: Μετασχηματιστές .....	17

Εικόνα 6: Αναπαράσταση Ζυγών .....	18
Εικόνα 7: Μιγαδικός Ρεύματος.....	21
Εικόνα 8: Διάγραμμα Ροής Αλγορίθμου Εκτίμησης Κατάστασης.....	34
Εικόνα 9: Καμπύλη Ικανότητας Γεννήτριας.....	41
Εικόνα 10: Διάγραμμα Αλγορίθμου Παρατηρησιμότητας Σ.Η.Ε. ....	50
Εικόνα 11: Σ.Η.Ε. 6 ζυγών .....	51
Εικόνα 12: Σ.Η.Ε. 14 ζυγών .....	55
Εικόνα 13. Σ.Η.Ε. χωρισμένο σε περιοχές.....	63
Εικόνα 14: Διάγραμμα Ροής Αλγορίθμου Κατανομής Εκτίμησης Κατάστασης .	72
Εικόνα 15: Σ.Η.Ε. 14 ζυγών χωρισμένο σε περιοχές.....	74
Εικόνα 16: Σ.Η.Ε. 107 ζυγών χωρισμένο σε περιοχές.....	92
Εικόνα 17: Βήματα Υλοποίησης Διπλωματικής Εργασίας .....	112

## Περιεχόμενα Πινάκων

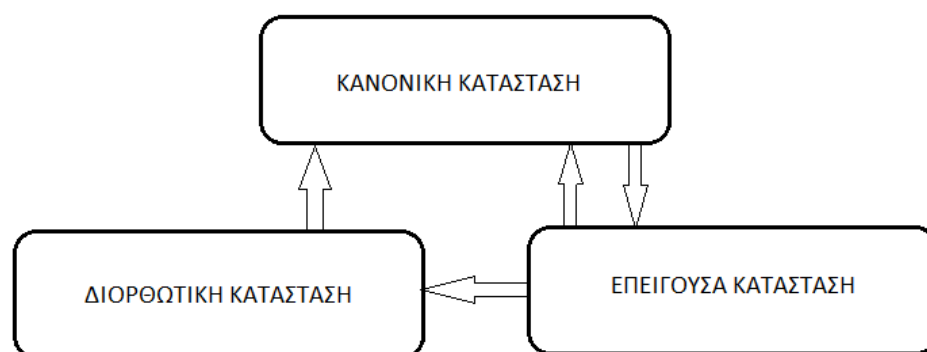
Πίνακας 1: Ισχύς Φορτίων-Γεννητριών .....	16
Πίνακας 2: Απλοποιημένες Παραγωγίσεις Ρεύματος (αναλυτικές εκφράσεις).....	30
Πίνακας 3: Απλοποιημένες Παραγωγίσεις Ρεύματος.....	31
Πίνακας 4: Διαθέσιμες Μετρήσεις .....	55
Πίνακας 5: Παρατηρήσιμες Νησίδες .....	58
Πίνακας 6: Περιοχές Σ.Η.Ε 14 ζυγών.....	74
Πίνακας 7: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 1 .....	74
Πίνακας 8: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 2.....	75
Πίνακας 9: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 3.....	75
Πίνακας 10: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 4.....	76
Πίνακας 11: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 1 .....	76
Πίνακας 12: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 2 .....	77
Πίνακας 13: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 3 .....	77
Πίνακας 14: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 4.....	77
Πίνακας 15: Αποτελέσματα 1 <sup>ης</sup> Επανάληψης.....	86
Πίνακας 16: Αποτελέσματα 2 <sup>ης</sup> Επανάληψης.....	87
Πίνακας 17: Αποτελέσματα 3 <sup>ης</sup> Επανάληψης.....	88
Πίνακας 18: Αποτελέσματα 4 <sup>ης</sup> Επανάληψης.....	89
Πίνακας 19: Αποτελέσματα 5 <sup>ης</sup> Επανάληψης.....	90
Πίνακας 20: Περιοχές Σ.Η.Ε. 107 ζυγών.....	91
Πίνακας 21: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 1 .....	93
Πίνακας 22: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 2.....	93
Πίνακας 23: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 3.....	94
Πίνακας 24: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 4.....	95
Πίνακας 25: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 5.....	95
Πίνακας 26: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 6.....	96
Πίνακας 27: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 7.....	96
Πίνακας 28: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 8.....	97
Πίνακας 29: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 9.....	97

Πίνακας 30: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 10.....	98
Πίνακας 31: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 11.....	98
Πίνακας 32: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 12.....	99
Πίνακας 33: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 13.....	99
Πίνακας 34: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 14.....	100
Πίνακας 35: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 15.....	100
Πίνακας 36: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 1.....	101
Πίνακας 37: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 2.....	102
Πίνακας 38: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 3.....	102
Πίνακας 39: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 4.....	103
Πίνακας 40: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 5.....	103
Πίνακας 41: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 6.....	104
Πίνακας 42: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 7.....	104
Πίνακας 43: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 8.....	104
Πίνακας 44: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 9.....	105
Πίνακας 45: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 10.....	105
Πίνακας 46: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 11.....	106
Πίνακας 47: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 12.....	106
Πίνακας 48: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 13.....	106
Πίνακας 49: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 14.....	107
Πίνακας 50: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 15.....	107
Πίνακας 51: Αποτελέσματα Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης.....	108

# 1 Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> – Εκτίμηση Κατάστασης

## 1.1 Εισαγωγή

Οι συνθήκες λειτουργίας ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας (ΣΗΕ) μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως και ανά πάσα στιγμή, αν είναι γνωστές οι παράμετροι του δικτύου, καθώς και οι παραστατικοί μιγαδικοί των τάσεων κάθε ζυγού (μέτρο και γωνίας τάσης). Από τη στιγμή που οι παραστατικοί μιγαδικοί των τάσεων προσδιορίζουν σε απόλυτο βαθμό ένα ΣΗΕ, αναφέρονται ως στατική κατάσταση συστήματος. Για ένα ΣΗΕ υπάρχουν τρεις πιθανές καταστάσεις, η κανονική, η διορθωτική και η επείγουσα.



Εικόνα 1: Καταστάσεις Σ.Η.Ε.

Οι δυνατότητες των συστημάτων SCADA διευρύνθηκαν με την εισαγωγή της εκτίμησης κατάστασης στα Κέντρα Ελέγχου Ενέργειας. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία των Συστημάτων Διαχείρισης Ενέργειας. Στη λειτουργία κάθε ΣΗΕ, υπάρχουν περιορισμοί, όπως για παράδειγμα μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου τάσης των ζυγών, μέγιστη παραγωγή ισχύος από τις γεννήτριες. Οι εκτιμητές κατάστασης προσδιορίζουν με ακρίβεια και αποδοτικότητα την τρέχουσα κατάσταση του ΣΗΕ, οπότε παρακολουθούνται και οι λειτουργικοί περιορισμοί. Παρέχεται επίσης μια βάση δεδομένων πραγματικού χρόνου του ΣΗΕ, η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί για να εφαρμοστούν λειτουργίες ελέγχου ασφαλείας του ΣΗΕ. Οι εκτιμητές κατάστασης περιλαμβάνουν συνήθως τις ακόλουθες λειτουργίες:

- Επεξεργαστής Τοπολογίας: Συλλέγει τα δεδομένα της κατάστασης (ON-OFF) των διακοπών και των αποζευκτών και παράγει το τρέχον διάγραμμα του ΣΗΕ.
- Ανάλυση Παρατηρησιμότητας: Συγκεντρώνει όλες τις διαθέσιμες μετρήσεις και κρίνει το αν είναι εφικτή η λύση της εκτίμησης κατάστασης. Αξιολογεί δηλαδή εάν το ΣΗΕ είναι παρατηρήσιμο. Σε περίπτωση που δεν είναι, τότε αναγνωρίζει τις παρατηρήσιμες νησίδες του ΣΗΕ και προσδιορίζει τις ελάχιστες μετρήσεις που χρειάζονται, ώστε το ΣΗΕ να γίνει παρατηρήσιμο. Καθορίζεται και ο ελάχιστος αριθμός μετρήσεων που απαιτούνται, αλλά και οι ζυγοί στους οποίους πρέπει να τοποθετηθούν οι μετρήσεις αυτές.
- Εκτίμηση Κατάστασης: Συγκλίνει στη βέλτιστη, τρέχουσα εκτίμηση κατάστασης του ΣΗΕ, προσδιορίζοντας τα μέτρα και τις γωνίες των τάσεων των ζυγών.

- Επεξεργασία κακών δεδομένων: Επισημαίνει τις εσφαλμένες μετρήσεις. Η εξάλειψή τους ή μη, εξαρτάται από το αν υπάρχει πλεόνασμα μετρήσεων ή όχι.
- Επεξεργασία δεδομένων και δομικών σφαλμάτων: Κάνει έλεγχο των διαφορών παραμέτρων του ΣΗΕ και εντοπίζει δομικά σφάλματα.

## 1.2 Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης

Η στατική εκτίμηση κατάσταση έγκειται στη λήψη των μέτρων και γωνιών των τάσεων όλων των ζυγών του ΣΗΕ. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί με την ταυτόχρονη λήψη των μετρήσεων από όλους τους ζυγούς του ΣΗΕ. Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος αυτή δεν θα μπορούσε να είναι αξιόπιστη, λόγω των σφαλμάτων των μετρήσεων, καθώς και επειδή είναι αδύνατο να γίνεται ταυτοχρονισμένη λήψη όλων των μετρήσεων από όλους τους ζυγούς και ιδιαίτερα των απομακρυσμένων ζυγών. Η μετάδοση της πληροφορίας των μετρήσεων γίνεται είτε μέσω GSM είτε μέσω GPRS. Σε απομακρυσμένες περιοχές το σήμα της σύνδεσης μπορεί να είναι αρκετά ασθενές ή ακόμη και να έχει διακοπή. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι σε αυτές τις περιοχές μπορεί να μην υπάρχουν δεδομένα μετρήσεων ακόμη και για ολόκληρες ημέρες.

Αντίθετα, η μέθοδος της εκτίμησης κατάστασης χρησιμοποιεί ένα επαρκές σύνολο μετρήσεων για τον βέλτιστο υπολογισμό της κατάστασης του ΣΗΕ. Εσφαλμένες μετρήσεις μπορούν να φιλτράρονται ή να διαγράφονται ανάλογα με το αν υπάρχει πλεονασμός μετρήσεων ή όχι. Η λήψη των μετρήσεων δεν είναι ταυτόχρονη, ούτε απαιτείται κάτι τέτοιο. Υπάρχει ανοχή στη χρονική απόκλιση της λήψης των μετρήσεων, διότι οι συνθήκες λειτουργίας ενός ΣΗΕ στην κανονική λειτουργία μεταβάλλονται πολύ αργά.

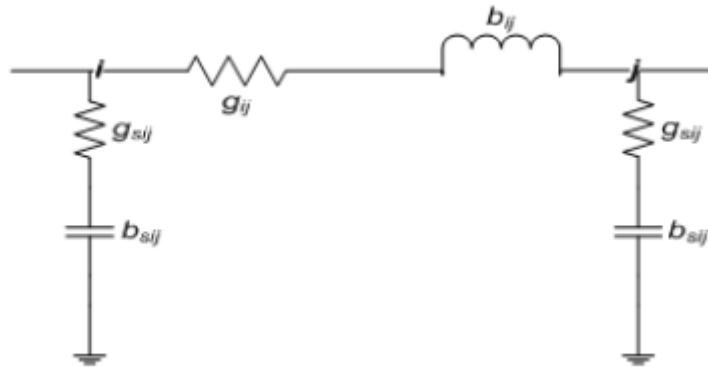
Όπως προαναφέρθηκε, η κατάσταση του συστήματος περιλαμβάνει τα μέτρα και τις γωνίες τάσης όλων των ζυγών του συστήματος θεωρώντας γνωστές τις παραμέτρους του ΣΗΕ. Παρ' όλα αυτά, βλάβες στον εξοπλισμό προκαλούν σφάλματα στις παραμέτρους ή την τοπολογία του ΣΗΕ. Τα σφάλματα αυτά μπορούν να αναγνωριστούν και να αντισταθμιστούν από τον εκτιμητή κατάσταση.

## 1.3 Υποθέσεις

Το ΣΗΕ λειτουργεί στη μόνιμη κατάσταση, ενώ τα φορτία, οι ροές ισχύος, οι εγκάρσιες αγωγιμότητες και οι γραμμές μεταφοράς του δικτύου είναι τριφασικά και συμμετρικά μεγέθη. Λόγω των παραπάνω υποθέσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μονοφασικό ισοδύναμο ανά μονάδα για την περιγραφή των επιμέρους στοιχείων και τελικώς του ολικού συστήματος.

## 1.4 Γραμμές Μεταφοράς

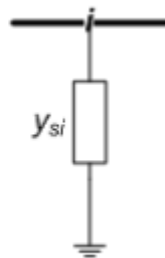
Οι γραμμές μεταφοράς αναπαρίστανται με το ισοδύναμο μοντέλο «π». Μια τέτοια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από μια εν σειρά σύνθετη αγωγιμότητα  $y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij}$  και από δύο εγκάρσιες σύνθετες αγωγιμότητες  $y_{sij} = g_{sij} + jb_{sij}$  συνδεδεμένες στους ζυγούς  $i$  και  $j$ .



Εικόνα 2: Μοντέλο «π»

### 1.5 Εγκάρσια Στοιχεία

Τα εγκάρσια στοιχεία είναι είτε πυκνωτές είτε αυτεπαγωγές και χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση της τάσης και της αέργου ισχύος. Η αγωγιμότητα των εγκάρσιων στοιχείων είναι  $y_{si} = jb_{si}$  και αν  $b_{si} < 0$ , τότε πρόκειται για εγκάρσια αυτεπαγωγή (εγκάρσιο πηνίο), ενώ εάν  $b_{si} > 0$ , τότε έχουμε να κάνουμε με εγκάρσια χωρητικότητα (εγκάρσιος πυκνωτής).



Εικόνα 3: Εγκάρσια Στοιχεία

### 1.6 Φορτία και Γεννήτριες

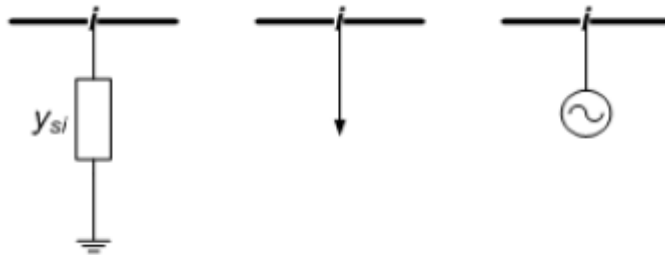
Τα φορτία σταθερής ισχύος και οι γεννήτριες αναπαρίστανται με ισοδύναμες μιγαδικές εγχύσεις ισχύος και δεν έχουν καμία επίδραση στο μοντέλο του δικτύου. Το φορτίο σταθερής ισχύος έχει μιγαδική έγχυση  $\tilde{S}_{Di} = P_{Di} + jQ_{Di}$  με αρνητική ενεργό ισχύ, ενώ οι γεννήτριες έχουν μιγαδική έγχυση  $\tilde{S}_{Gi} = P_{Gi} + jQ_{Gi}$  με θετική ενεργό ισχύ. Αντίθετα με τα φορτία σταθερής ισχύος και τις γεννήτριες, τα φορτία σταθερής αγωγιμότητας έχουν επίδραση στο μοντέλο του δικτύου και η αναπαράστασή τους είναι εγκάρσιες σύνθετες αγωγιμότητες  $y_{si} = g_{si} + jb_{si}$ .

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι ενεργός και άεργος ισχύς για τα φορτία σταθερής ισχύος, τις γεννήτριες και τα φορτία σταθερής αγωγιμότητας.

Πίνακας 1: Ισχύς Φορτίων-Γεννητριών

	Ενεργός Ισχύς $P$	Άεργος Ισχύς $Q$
Φορτίο Σταθερής Ισχύος	$P < 0$	$Q < 0$ ή $Q > 0$
Γεννήτρια	$P > 0$	$Q < 0$ ή $Q > 0$
Φορτίο Σταθερής Αγωγιμότητας	$P < 0$ ή $P > 0$	$Q < 0$ ή $Q > 0$

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η σχηματική αναπαράσταση των φορτίων σταθερής αγωγιμότητας, των φορτίων σταθερής ισχύος και των γεννητριών, όπως εμφανίζονται με τη σειρά στο σχήμα.

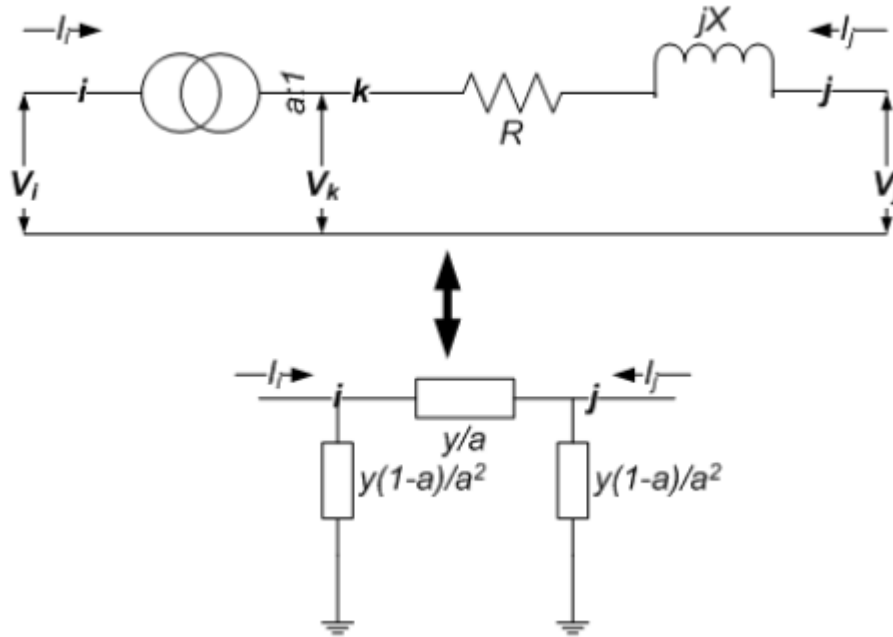


Εικόνα 4: Φορτία-Γεννήτριες

## 1.7 Μετασχηματιστές

Οι μετασχηματιστές μοντελοποιούνται ως ένας ιδανικός μετασχηματιστής με λόγο μετασχηματισμού  $a$ , εν σειρά με την ισοδύναμη αντίσταση  $Z = R + jX$ , όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.





Εικόνα 5: Μετασχηματιστές

Οι ακροδέκτες του μετασχηματιστή αντιστοιχούν στους κόμβους  $i$  και  $j$ . Αν η σύνθετη αγωγιμότητα είναι  $y = \frac{1}{Z}$ , τότε τα ρεύματα  $I_{kj}$  και  $I_j$  συναρτήσει των τάσεων  $u_k$  και  $u_j$  δίνονται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} I_{kj} \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_j \end{bmatrix}$$

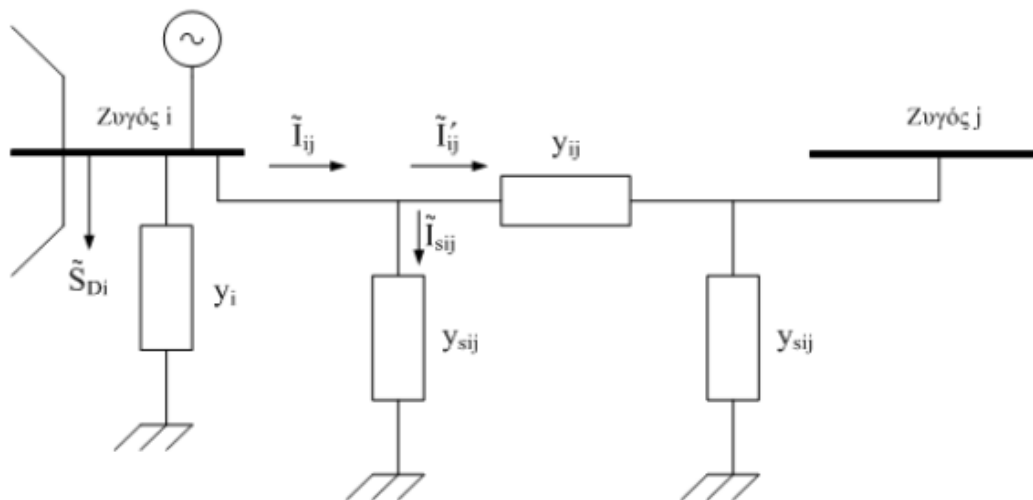
Όμως,  $I_{kj} = \alpha \cdot I_i$  και  $u_k = \frac{u_i}{\alpha}$ . Επομένως, το σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{a^2} & -\frac{y}{a} \\ -\frac{y}{a} & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

## 1.8 Γενικευμένος Ζυγός ΣΗΕ

Θεωρούμε τον γενικευμένο ζυγό  $i$  ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Ο ζυγός  $i$  συνδέεται με το ζυγό  $j$  μέσω μιας γραμμής μεταφοράς, η οποία αναπαρίσταται με το ισοδύναμο μοντέλο «π». Στον ζυγό  $i$  είναι επίσης συνδεδεμένη μία σύνθετη εγκάρσια αγωγιμότητα  $y_{si}$ , η οποία είναι είτε μια συστοιχία πυκνωτών, είτε μια συστοιχία πηνίων, είτε φορτία σταθερής σύνθετης αγωγιμότητας, είτε οποιοσδήποτε συνδυασμός των παραπάνω. Επιπλέον, ο ζυγός  $i$  συνδέεται με γεννήτρια, η οποία εγγείει μιγαδική ισχύ  $\tilde{S}_{Gi}$ , ενώ το αντίστοιχο φορτίο σταθερής ισχύος απορροφά μιγαδική ισχύ  $\tilde{S}_{Di}$ . Οι μιγαδικές τάσεις των ζυγών  $i$  και  $j$  είναι  $\tilde{V}_i$  και  $\tilde{V}_j$  αντίστοιχα. Αν υπήρχε μετασχηματιστής, αυτός θα ήταν συνδεδεμένος εν σειρά με τη γραμμή μεταφοράς, οπότε το ισοδύναμο κύκλωμα θα μπορούσε να εκφραστεί από μία σύνθετη

εν σειρά αγωγιμότητα  $y_{ij}$  και δύο σύνθετες εγκάρσιες αγωγιμότητες  $y_{sij}$ , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 6: Αναπαράσταση Ζυγών

Οι μιγαδικές τάσεις εκφράζονται σε τριγωνομετρική μορφή, ενώ οι σύνθετες αγωγιμότητες σε καρτεσιανή μορφή.

$$\tilde{V}_i = V_i \cos \delta_i + jV_i \sin \delta_i$$

$$\tilde{V}_j = V_j \cos \delta_j + jV_j \sin \delta_j$$

$$y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij}$$

$$y_{sij} = g_{sij} + jb_{sij}$$

$$y_i = g_i + jb_i$$

Οι εξισώσεις έγχυσης και ροής ισχύος συναρτήσει των μέτρων και γωνιών τάσεων, καθώς και των σύνθετων αγωγιμοτήτων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

Έγχυση ενεργού ισχύος στο ζυγό  $i$

$$P_i = V_i^2 \sum_{j \in a(i)} (g_{ij} + g_{sij}) + V_i^2 g_i - V_i \sum_{j \in a(i)} V_j [g_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + b_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)]$$

Έγχυση αέργου ισχύος στο ζυγό  $i$

$$Q_i = -V_i^2 \sum_{j \in a(i)} (b_{ij} + b_{sij}) - V_i^2 b_i \\ - V_i \sum_{j \in a(i)} V_j [g_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - b_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)]$$

Ροή ενεργού ισχύος στη γραμμή  $i - j$

$$P_{ij} = V_i^2 (g_{ij} + g_{sij}) - V_i V_j [g_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + b_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)]$$

Ροή αέργου ισχύος στη γραμμή  $i - j$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + b_{sij}) - V_i V_j [g_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - b_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)]$$

Όπου  $a(i)$  είναι το σύνολο των ζυγών, οι οποίοι συνδέονται με τον ζυγό  $i$ .

Εάν θέσουμε:

$$\alpha_{ij} = g_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + b_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)$$

$$\beta_{ij} = g_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - b_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)$$

τότε οι εξισώσεις έγχυσης και ροής ισχύος θα γίνουν:

$$P_i = V_i^2 \sum_{j \in a(i)} (g_{ij} + g_{sij}) + V_i^2 g_i - V_i \sum_{j \in a(i)} V_j \alpha_{ij}$$

$$Q_i = -V_i^2 \sum_{j \in a(i)} (b_{ij} + b_{sij}) - V_i^2 b_i - V_i \sum_{j \in a(i)} V_j \beta_{ij}$$

$$P_{ij} = V_i^2 (g_{ij} + g_{sij}) - V_i V_j \alpha_{ij}$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + b_{sij}) - V_i V_j \beta_{ij}$$

Η τιμή του ρεύματος  $I_{ij}$  υπολογίζεται από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff ως εξής:

$$\tilde{I}_{ij} = \tilde{V}_i y_{sij} + (\tilde{V}_i - \tilde{V}_j) y_{ij} = \tilde{V}_i (y_{sij} + y_{ij}) - \tilde{V}_j y_{ij}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{I}_{ij} &= \{V_i[(g_{ij} + g_{sij}) \cos \delta_i - (b_{ij} + b_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[g_{ij} \cos \delta_j - b_{ij} \sin \delta_j]\} + \\ &+ j\{V_i[(b_{ij} + b_{sij}) \cos \delta_i + (g_{ij} + g_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[b_{ij} \cos \delta_j + g_{ij} \sin \delta_j]\} \\ \Rightarrow \begin{cases} I_{Re} = Re(\tilde{I}_{ij}) = \{V_i[(g_{ij} + g_{sij}) \cos \delta_i - (b_{ij} + b_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[g_{ij} \cos \delta_j - b_{ij} \sin \delta_j]\} \\ I_{Im} = Im(\tilde{I}_{ij}) = \{V_i[(b_{ij} + b_{sij}) \cos \delta_i + (g_{ij} + g_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[b_{ij} \cos \delta_j + g_{ij} \sin \delta_j]\} \end{cases} \end{aligned}$$

Το ρεύμα εκφρασμένο σε πολική μορφή θα είναι:

$$\tilde{I}_{ij} = I_{ij} \angle \theta_{ij}$$

Όπου  $I_{ij} = \sqrt{I_{Re}^2 + I_{Im}^2}$ , και  $\theta_{ij} = \arctan\left(\frac{I_{Im}}{I_{Re}}\right)$  το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αντίστοιχα. Αναλυτικότερα, το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού ρεύματος  $\tilde{I}_{ij}$  περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$I_{ij} = \sqrt{A_{ij}V_i^2 + B_{ij}V_j^2 + 2C_{ij}V_iV_j}$$

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \\ &= \arctan\left\{\frac{V_i[(b_{ij} + b_{sij}) \cos \delta_i + (g_{ij} + g_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[b_{ij} \cos \delta_j + g_{ij} \sin \delta_j]}{V_i[(g_{ij} + g_{sij}) \cos \delta_i - (b_{ij} + b_{sij}) \sin \delta_i] - V_j[g_{ij} \cos \delta_j - b_{ij} \sin \delta_j]}\right\} \end{aligned}$$

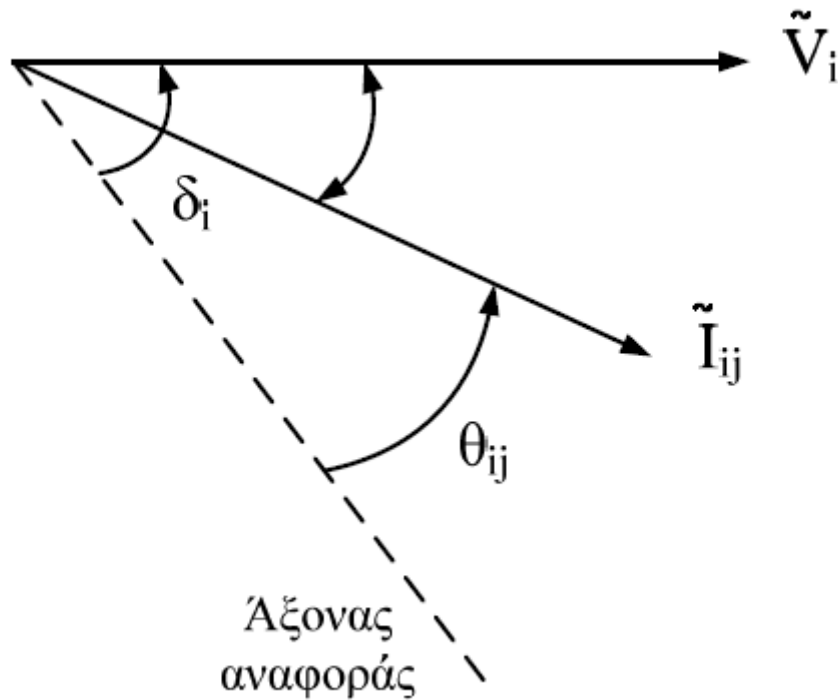
Όπου:

$$A_{ij} = (g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2$$

$$B_{ij} = g_{ij}^2 + b_{ij}^2$$

$$C_{ij} = (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αναπαράσταση του μιγαδικού ρεύματος  $\tilde{I}_{ij}$ .



Εικόνα 7: Μιγαδικός Ρεύματος

## 1.9 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Σκοπός της εκτίμησης κατάστασης είναι να προσεγγίσει με όσο το δυνατόν ακριβέστερο τρόπο την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, με βάση τις μετρήσεις που έχουν συλλεχθεί. Ένας τρόπος επίτευξης του παραπάνω σκοπού είναι η χρήση της Εκτίμησης Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Οι μετρήσεις εμπεριέχουν σφάλματα, τα οποία όμως υποτίθεται ότι έχουν γνωστή κατανομή πιθανότητας με άγνωστες παραμέτρους. Βάση αυτών των άγνωστων παραμέτρων, μπορεί να γραφτεί η μικτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όλων των μετρήσεων. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν, οι άγνωστοι παράμετροι έχουν τιμές όσο το δυνατόν πλησιέστερες στις πραγματικές τους τιμές. Επομένως, για να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας συναρτήσει των άγνωστων παραμέτρων, μπορεί να οριστεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η λύση αυτού του προβλήματος θα δώσει την εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους ενδιαφέροντος.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων γίνεται η υπόθεση ότι τα σφάλματα των μετρήσεων ακολουθούν την κανονική κατανομή. Οι παράμετροι μιας τέτοιας κατανομής είναι η μέση τιμή « $\mu$ » και η τυπική απόκλιση « $\sigma$ », η οποία αποτελεί τη θετική ρίζα της διασποράς ή διακύμανσης « $\sigma^2$ ».

## 1.10 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Κανονικής Κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής για τυχαία μεταβλητή «z» ορίζεται ως εξής:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Η συνάρτηση  $f(z)$  αλλάζει σχήμα ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων «μ» και «σ», ωστόσο μπορεί να κανονικοποιηθεί με την εφαρμογή της αλλαγής μεταβλητής, όπως περιγράφεται ακολούθως.

$$\text{Θέτουμε: } u = \frac{z-\mu}{\sigma}$$

Και τότε, η μέση τιμή θα είναι:

$$E(u) = \frac{1}{\sigma} (E(z) - \mu) = 0$$

Και για τη διασπορά θα ισχύει:

$$\text{Var}(u) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(z - \mu) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Άρα και η τυπική απόκλιση θα ισούται με:

$$\sigma(u) = +\sqrt{1} = 1$$

Επομένως, η νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

## 1.11 Συνάρτηση Πιθανοφάνειας

Έστω η μικτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία αναπαριστά την πιθανότητα μέτρησης «m» ανεξάρτητων μετρήσεων. Κάθε μία από τις μετρήσεις έχει την ίδια κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Η μικτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας, διότι κάθε μέτρηση θεωρείται ανεξάρτητη σε σχέση με τις άλλες.

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2) \cdots f(z_m)$$

Όπου  $z_i$  η  $i$ -οστή μέτρηση

$$z^T: [z_1, z_2, \dots, z_m]$$

Η συνάρτηση  $f_m(z)$  αποτελεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας της τυχαίας μεταβλητής  $z$  και εκφράζει το κατά πόσο είναι πιθανό να παρατηρηθεί στο διάνυσμα  $z$  ένα συγκεκριμένο σύνολο μετρήσεων.

Σκοπός της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας της τυχαίας μεταβλητής. Για διευκόλυνση των υπολογισμών, η συνάρτηση πιθανοφάνειας αντικαθίσταται από το λογάριθμό της. Έτσι, προκύπτει μια νέα συνάρτηση, η οποία ονομάζεται συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας και συμβολίζεται με το λατινικό γράμμα  $L$ .

$$L = \log(f_m(z)) = \sum_{i=1}^m \log(f(z_i))$$

$$\Rightarrow L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 - \frac{m}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^m \log(\sigma_i)$$

Για να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας, πρέπει να μεγιστοποιηθεί η  $\log(f_m(z))$  ή να ελαχιστοποιηθεί το  $\sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ , αφού οι υπόλοιποι όροι του αθροίσματος είναι σταθεροί. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να γραφεί συναρτήσει της διαφοράς  $r_i = z_i - \mu_i = z_i - E(z_i)$ . Η μέση τιμή « $\mu$ » της τυχαίας μεταβλητής μπορεί να εκφραστεί ως  $h_i(x)$ , δηλαδή ως μια γραμμική συνάρτηση, η οποία συνδέει το διάνυσμα κατάστασης « $x$ » με την  $i$ -οστή μέτρηση. Το τετράγωνο της διαφοράς  $r_i^2$  πολλαπλασιάζεται με το βάρος  $W_{ii} = \sigma_i^{-2}$ . Εν τέλει, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του  $\sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$  ανάγεται στο παρακάτω:

$$\text{Ελαχιστοποίηση του } \sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2$$

$$\text{με } z_i = h_i(x) + r_i, i = 1, \dots, m$$

Η λύση αυτού του προβλήματος ονομάζεται σταθμισμένη εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων για το διάνυσμα κατάστασης  $x$ .

## 1.12 Μοντέλο Μετρήσεων και Υποθέσεις

Έχουμε το ακόλουθο σύνολο μετρήσεων:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} = h(x) + e$$

Όπου:

$$h^T = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x), ]$$

$h_i(x)$  είναι η μη γραμμική συνάρτηση που συνδέει την  $i$ -οστή μέτρηση με το διάνυσμα κατάστασης « $x$ ».

$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος

$e^T = [e_1, e_2, \dots, e_m]$  είναι το διάνυσμα σφαλμάτων των μετρήσεων.

Σχετικά με τις στατιστικές ιδιότητες των σφαλμάτων των μετρήσεων γίνονται οι ακόλουθες υποθέσεις:

- $E(e_i) = 0, i = 1, \dots, m$
- Τα σφάλματα των μετρήσεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει ότι  $E(e_i e_j) = 0$ . Επομένως,  $Cov(e) = E(ee^T) = R = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2)$ .

Η σταθμισμένη εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων καλείται να ελαχιστοποιήσει την παρακάτω συνάρτηση:

$$J(x) = \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(x))^2}{R_{ii}} = [z - h(x)]^T \cdot R^{-1} \cdot [z - h(x)]$$

Προκειμένου η  $J(x)$  να είναι ελάχιστη, θα πρέπει να ικανοποιούνται τουλάχιστον οι συνθήκες πρώτης τάξης. Θα πρέπει δηλαδή:

$$g(x) = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = -H^T(x)R^{-1} \cdot [z - h(x)] = 0$$

$$\text{Όπου } H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}.$$

Αναπτύσσουμε την  $g(x)$  σε σειρά Taylor, γύρω από το διάνυσμα κατάστασης  $x^k$ :

$$g(x) = g(x^k) + G(x^k) \cdot (x - x^k) + \dots = 0$$

Αγνοούμε τους όρους υψηλότερης τάξης, ούτως ώστε να φτάσουμε στη λύση με την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Newton:

$$x^{k+1} = x^k - [G(x^k)]^{-1} \cdot g(x^k)$$

Όπου  $k$  ο δείκτης επανάληψης και  $x^k$  το διάνυσμα κατάστασης στην  $k$ -οστή επανάληψη.

Έχουμε:

$$G(x^k) = \frac{\partial g(x^k)}{\partial x} = H^T(x^k) \cdot R^{-1} \cdot H(x^k)$$

$$g(x^k) = -H^T(x^k) \cdot R^{-1} \cdot (z - h(x^k))$$



Ο πίνακας  $G(x)$  ονομάζεται πίνακας κέρδους. Είναι αραιός, θετικά ορισμένος και συμμετρικός, αν και μόνο αν το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Κατά την επίλυση, ο  $G(x)$  δεν αντιστρέφεται, αλλά παραγοντοποιείται σε 2 τριγωνικούς πίνακες. Έπειτα, το σύστημα εξισώσεων επιλύεται με πίσω αντικατάσταση σε κάθε επανάληψη  $k$ .

$$G(x^k)\Delta x^{k+1} = H^T(x^k) \cdot R^{-1} \cdot [z - h(x^k)]$$

Όπου  $\Delta x^{k+1} = x^{k+1} - x^k$ .

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων αναφέρεται ως «Κανονικές Εξισώσεις».

### 1.13 Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης Σταθμισμένων Ελαχίστων Τετραγώνων

Η λύση των Κανονικών Εξισώσεων είναι επαναληπτική, επομένως απαιτείται μια αρχικοποίηση του διανύσματος κατάστασης  $x^0$ . Για τα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, η αρχικοποίηση του διανύσματος κατάστασης γίνεται δίνοντας στα μέτρα τάσεων μοναδιαία ανά μονάδα τιμή και στις γωνίες των τάσεων μηδενικές τιμές μετρούμενες σε ακτίνια. Ακολουθούν τα βήματα του αλγορίθμου:

- 1) Αρχικοποίηση του δείκτη επανάληψης  $k = 0$  και εκκίνηση επαναλήψεων.
- 2) Αρχικοποίηση του διανύσματος κατάστασης, όπως προαναφέρθηκε
- 3) Υπολογισμός του πίνακα κέρδους  $G(x)$
- 4) Υπολογισμός του  $t^k = H^T(x^k) \cdot R^{-1} \cdot (z - h(x^k))$ .
- 5) Παραγοντοποίηση του  $G(x^k)$  και επίλυση για την εύρεση του  $\Delta x^{k+1}$ .
- 6) Έλεγχος για σύγκλιση, δηλαδή αν  $\max|\Delta x^{k+1}| \leq \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  το μέγιστο σφάλμα.
- 7) Αν υπάρχει σύγκλιση, τότε ο αλγόριθμος τερματίζεται. Αν δεν υπάρχει σύγκλιση, τότε:  $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ ,  $k = k + 1$  και επιστροφή στο βήμα 3.

Ο παραπάνω αλγόριθμος περιλαμβάνει τους εξής υπολογισμούς σε κάθε επανάληψη  $k$ :

- 1) Υπολογισμός του  $t^k = H^T(x^k) \cdot R^{-1} \cdot (z - h(x^k))$ ,
  - Υπολογισμός της συνάρτησης μετρήσεων  $h(x^k)$
  - Δημιουργία της Ιακωβιανής μήτρας μετρήσεων  $H(x^k)$
- 2) Υπολογισμός του πίνακα κέρδους  $G(x^k)$  και επίλυση των Κανονικών Εξισώσεων.
  - Δημιουργία του πίνακα κέρδους  $G(x^k)$
  - Παραγοντοποίηση του  $G(x^k)$  σε  $LU$ .
  - Εφαρμογή της εμπρός και πίσω αντικατάστασης για την εύρεση του  $\Delta x^{k+1}$ .

### 1.14 Μη γραμμική συνάρτηση μετρήσεων $h(x^k)$

Οι πιο συνηθισμένοι τύποι μετρήσεων είναι τα μέτρα τάσεων ζυγών, οι ενεργές και άεργες εγχύσεις ισχύος στους ζυγούς, καθώς και οι ενεργές και άεργες ροές ισχύος μεταξύ των ζυγών. Ακόμη, υπάρχουν μετρήσεις γωνιών τάσεων ζυγών, μετρήσεις ρευμάτων γραμμών και άλλες. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης του διάνυσματος  $x^k$ , σε πολικό ή καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Εάν πρόκειται για πολικό σύστημα συντεταγμένων, τότε σε ένα ΣΗΕ που έχει  $N$  ζυγούς, το διάνυσμα κατάστασης  $x^k$  θα έχει  $2N$  στοιχεία. Από αυτά, τα  $N$  θα είναι γωνίες τάσεων των ζυγών του και τα άλλα  $N$  θα είναι μέτρα τάσεων των ζυγών του ΣΗΕ. Επομένως, το διάνυσμα κατάστασης  $x^k$  θα είναι:

$$x^T = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N, V_1, V_2, \dots, V_N]$$

### 1.15 Ιακωβιανή Μήτρα Μετρήσεων $H$

Η Ιακωβιανή μήτρα μετρήσεων  $H$  έχει την παρακάτω δομή:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_i}{\partial \delta} & \frac{\partial V_i}{\partial V} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \delta} & \frac{\partial P_i}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \delta} & \frac{\partial Q_i}{\partial V} \\ \frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta} & \frac{\partial P_{ij}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta} & \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V} \end{bmatrix}$$

Για τις παραπάνω παραγωγίσεις ισχύουν τα ακόλουθα:

- Μετρήσεις Τάσεων

$$\frac{\partial V_i}{\partial \delta_i} = 0, \text{ για κάθε ζυγό } i$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \delta_j} = 0, \text{ για κάθε ζυγό } i \text{ και κάθε ζυγό } j$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial V_i} = 1, \text{ για κάθε ζυγό } i$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial V_j} = 0, \text{ για κάθε ζυγό } i \text{ και κάθε ζυγό } j$$

- Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = V_i \sum_{j \in a(i)} V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = V_i \sum_{j \in a(i)} V_j \cdot \beta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -V_i V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = -V_i V_j \cdot \beta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial V_i} &= 2V_i \sum_{j \in a(i)} (g_{ij} + g_{sij}) + 2V_i g_i - \sum_{j \in a(i)} V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = \\ &= 2V_i \sum_{j \in a(i)} (g_{ij} + g_{sij}) + 2V_i g_i - \sum_{j \in a(i)} V_j \cdot \alpha_{ij} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = -V_i \cdot \alpha_{ij}$$

- Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = -V_i \sum_{j \in a(i)} V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = -V_i \sum_{j \in a(i)} V_j \cdot \alpha_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = V_i V_j \cdot \alpha_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} &= -2V_i \sum_{j \in a(i)} (b_{ij} + b_{sij}) - 2V_i b_i - \sum_{j \in a(i)} V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = \\ &= -2V_i \sum_{j \in a(i)} (b_{ij} + b_{sij}) - 2V_i \cdot b_i - \sum_{j \in a(i)} V_j \cdot \beta_{ij} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = -V_i \cdot \beta_{ij}$$

- Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_i} = V_i V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = V_i V_j \cdot \beta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_j} = -V_i V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = -V_i V_j \cdot \beta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} &= -V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) + 2V_i (g_{ij} + g_{sij}) \\ &= -V_j \alpha_{ij} + 2V_i (g_{ij} + g_{sij}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = -V_i \alpha_{ij}$$

- Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_i} = -V_i V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = -V_i V_j \cdot \alpha_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_j} = V_i V_j (g_{ij} \cos \delta_{ij} + b_{ij} \sin \delta_{ij}) = V_i V_j \cdot \alpha_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} &= -V_j (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) - 2V_i (b_{ij} + b_{sij}) \\ &= -V_j \beta_{ij} - 2V_i (b_{ij} + b_{sij}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \sin \delta_{ij} - b_{ij} \cos \delta_{ij}) = -V_i \beta_{ij}$$

Η Ιακωβιανή μήτρα μπορεί να συμπεριλαμβάνει και τις αντίστοιχες παραγωγίσεις για μετρήσεις γωνιών τάσεων ζυγών και ρευμάτων γραμμών. Οι επιμέρους παραγωγίσεις περιγράφονται ακολούθως:

- Μετρήσεις ορισμάτων τάσεων

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial \delta_i} = 1$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial \delta_j} = 0$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial V_i} = 0$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial V_j} = 0$$

- Μετρήσεις μέτρων ρευμάτων

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_i} &= \\ &= \frac{V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\beta_{ij} + (b_{ij} + b_{sij})\alpha_{ij}]}{\sqrt{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2 (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) - 2V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_j} &= \\ &= - \frac{V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\beta_{ij} + (b_{ij} + b_{sij})\alpha_{ij}]}{\sqrt{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2 (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) - 2V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}}{\partial V_i} &= \\ &= \frac{V_i [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] - V_j [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}{\sqrt{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2 (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) - 2V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}}{\partial V_j} &= \\ &= \frac{V_j (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) - V_i [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}{\sqrt{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2 (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) - 2V_i V_j [(g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij} - (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij}]}} \end{aligned}$$

- Μετρήσεις ορισμάτων ρευμάτων

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_i} &= \\ &= \frac{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]}{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2 (g_{ij}^2 + b_{ij}^2) + 2V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_j} &= \\ &= \frac{V_j^2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) + V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]}{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) + 2V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_i} &= \\ &= - \frac{V_j [(g_{ij} + g_{sij})\beta_{ij} + (b_{ij} + b_{sij})\alpha_{ij}]}{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) + 2V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_j} &= \\ &= \frac{V_i [(g_{ij} + g_{sij})\beta_{ij} + (b_{ij} + b_{sij})\alpha_{ij}]}{V_i^2 [(g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2] + V_j^2(g_{ij}^2 + b_{ij}^2) + 2V_i V_j [(b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}]} \end{aligned}$$

Για λόγους απλότητας, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν όπως φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 2: Απλοποιημένες Παραγωγίσεις Ρεύματος (αναλυτικές εκφράσεις)

$\frac{\partial I_{ij}}{\partial V_i} = \frac{V_i A_{ij} + V_j C_{ij}}{\sqrt{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}}$	$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_i} = \frac{V_i V_j D_{ij}}{\sqrt{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}}$
$\frac{\partial I_{ij}}{\partial V_j} = \frac{V_j B_{ij} + V_i C_{ij}}{\sqrt{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}}$	$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_j} = - \frac{V_i V_j D_{ij}}{\sqrt{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}}$
$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_i} = - \frac{V_j D_{ij}}{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}$	$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_i} = \frac{V_i^2 A_{ij} + V_i V_j C_{ij}}{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}$
$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_j} = \frac{V_i D_{ij}}{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}$	$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_j} = \frac{V_j^2 B_{ij} + V_i V_j C_{ij}}{V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}}$

όπου:	όπου:
$A_{ij} = \left[ (g_{ij} + g_{sij})^2 + (b_{ij} + b_{sij})^2 \right]$	$B_{ij} = (g_{ij}^2 + b_{ij}^2)$
$C_{ij} = (b_{ij} + b_{sij})\beta_{ij} - (g_{ij} + g_{sij})\alpha_{ij}$	$D_{ij} = (g_{ij} + g_{sij})\beta_{ij} + (b_{ij} + b_{sij})\alpha_{ij}$

Εναλλακτικά, οι εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν όπως φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 3: Απλοποιημένες Παραγωγίσεις Ρεύματος

$\frac{\partial I_{ij}}{\partial V_i} = \frac{V_i A_{ij} + V_j C_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}$	$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_i} = \frac{V_i V_j D_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}$
$\frac{\partial I_{ij}}{\partial V_j} = \frac{V_j B_{ij} + V_i C_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}$	$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \delta_j} = -\frac{V_i V_j D_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}$
$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_i} = -\frac{V_j D_{ij}}{E_{ij}}$	$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_i} = \frac{V_i^2 A_{ij} + V_i V_j C_{ij}}{E_{ij}}$
$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial V_j} = \frac{V_i D_{ij}}{E_{ij}}$	$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \delta_j} = \frac{V_j^2 B_{ij} + V_i V_j C_{ij}}{E_{ij}}$
$\text{όπου: } E_{ij} = V_i^2 A_{ij} + V_j^2 B_{ij} + 2V_i V_j C_{ij}$	

Εάν οι μετρήσεις ρευμάτων εκφράζονται σε καρτεσιανή μορφή, τότε οι αντίστοιχες παραγωγίσεις θα είναι οι ακόλουθες:

- Μετρήσεις πραγματικού μέρους ρευμάτων

$$\frac{\partial I_{ij,Re}}{\partial \delta_i} = -V_i [(g_{ij} + g_{sij}) \sin \delta_i + (b_{ij} + b_{sij}) \cos \delta_i]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Re}}{\partial \delta_j} = V_j [g_{ij} \sin \delta_j + b_{ij} \cos \delta_j]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Re}}{\partial V_i} = [(g_{ij} + g_{sij}) \cos \delta_i - (b_{ij} + b_{sij}) \sin \delta_i]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Re}}{\partial \delta_j} = -[g_{ij} \cos \delta_j - b_{ij} \sin \delta_j]$$

- Μετρήσεις φανταστικού μέρους ρευμάτων

$$\frac{\partial I_{ij,Im}}{\partial \delta_i} = V_i [(g_{ij} + g_{sij}) \cos \delta_i - (b_{ij} + b_{sij}) \sin \delta_i]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Im}}{\partial \delta_j} = -V_j [g_{ij} \cos \delta_j - b_{ij} \sin \delta_j]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Im}}{\partial V_i} = [(b_{ij} + b_{sij}) \cos \delta_i + (g_{ij} + g_{sij}) \sin \delta_i]$$

$$\frac{\partial I_{ij,Im}}{\partial \delta_j} = -[b_{ij} \cos \delta_j + g_{ij} \sin \delta_j]$$

### 1.16 Μήτρα κέρδους $G$

Η μήτρα κέρδους  $G$  σχηματίζεται από την Ιακωβιανή μήτρα  $H$  και τον πίνακα αυτομεταβλητότητας των σφαλμάτων  $R$ , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$G(x^k) = H^T \cdot R^{-1} \cdot H$$

Ο πίνακας  $R$  είναι διαγώνιος, με στοιχεία διαγωνίου τις διασπορές των μετρήσεων. Ο πίνακας κέρδους  $G$  έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- 1) Είναι δομικά και αριθμητικά συμμετρικός
- 2) Είναι αραιός, όμως λιγότερο αραιός από την Ιακωβιανή μήτρα  $H$
- 3) Όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές.
- 4) Αν το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο, τότε είναι θετικά ορισμένος.

### 1.17 Παραγοντοποίηση του πίνακα κέρδους $G$ και επίλυση των Κανονικών Εξισώσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο πίνακας κέρδους  $G$  μπορεί να αναλυθεί ως γινόμενο δύο τριγωνικών πινάκων  $L$  και  $U$ . Ο πίνακας  $L$  είναι κάτω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας  $U$  είναι άνω τριγωνικός. Θα έχουμε λοιπόν:

$$G = L \cdot U$$



Μετά την παραγοντοποίηση του  $G$ , μπορεί να γίνει η επίλυση των Κανονικών Εξισώσεων:

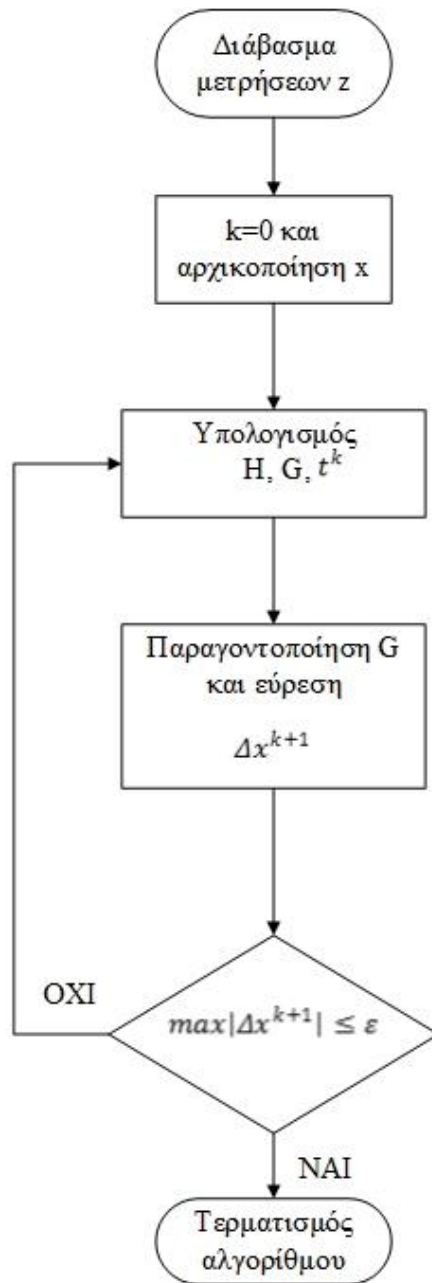
$$L \cdot U \cdot \Delta x^k = t^k$$

Η λύση υπολογίζεται σε δύο βήματα, εμπρός και πίσω αντικατάσταση, ενώ λόγω της αραιότητας των πινάκων  $L$  και  $U$ , η λύση είναι αρκετά αποδοτική. Έχουμε λοιπόν:

1) Εμπρός αντικατάσταση:  $U \cdot \Delta x^k = u$

2) Πίσω αντικατάσταση:  $L \cdot u = t^k$

Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του γενικού αλγορίθμου εκτίμησης κατάστασης:



Εικόνα 8: Διάγραμμα Ροής Αλγορίθμου Εκτίμησης Κατάστασης

Βιβλιογραφία κεφαλαίου: (1) (2) (3) (4) (5)

## 2 Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> – Χρησιμότητα καταναλωμένης εκτίμησης κατάστασης και «έξυπνων» μετρητών

### 2.1 Εισαγωγή

Με το πέρασμα του χρόνου έγινε απαραίτητη η ύπαρξη αλγορίθμων, οι οποίοι θα μπορούσαν να προσδιορίσουν ανά πάσα στιγμή την κατάσταση ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Η ανάγκη αυτή προέκυψε από την αγορά, την πρόσβαση των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας, καθώς και από τις δυνατότητες και μετρητικές ικανότητες που προσφέρουν οι «έξυπνοι» μετρητές (smart meters). Ως προς την αγορά, υπάρχει η πλευρά του καταναλωτή και η πλευρά των εταιρειών ηλεκτρισμού. Οι εταιρείες αυτές, γνωρίζοντας ανά πάσα στιγμή την κατανάλωση των κατοίκων μιας περιοχής, μπορούν να δημιουργήσουν ένα πιο ευέλικτο τιμολόγιο ενέργειας από το ισχύον. Μέχρι τώρα, στην Ελλάδα, αλλά και σε αρκετές ακόμη χώρες, ο διαχωρισμός γινόταν ανάμεσα σε κανονική και νυκτερινή τιμολόγηση, όμως πλέον υπάρχει η δυνατότητα να αυξηθεί η ευελιξία και η τιμολόγηση να μεταβάλλεται ακόμη και ανά ώρα. Κάτι τέτοιο θα ευνοούσε και τις δύο πλευρές. Από τη μία, οι καταναλωτές θα μπορούσαν να επωφεληθούν από τη φθηνή τιμή ενέργειας που θα υπήρχε σε συγκεκριμένες ώρες της ημέρας και να χρησιμοποιήσουν εκείνες τις ώρες τις συσκευές με μεγαλύτερη κατανάλωση. Από την άλλη, μία επιχείρηση ηλεκτρισμού θα απέφευγε ή τουλάχιστον θα ελαχιστοποιούσε τις υπερφορτίσεις του δικτύου, αφού η κατανάλωση θα διαμοιραζόταν σε ένα μεγαλύτερο εύρος ωρών της ημέρας σε σχέση με πριν. Επί της ουσίας, οι εταιρίες κοστολογούν πολύ ακριβά την ηλεκτρική ενέργεια τις ώρες με πιθανή αιχμή, ώστε να αποτρέψουν τους καταναλωτές από την κατανάλωση εκείνες τις ώρες. Οι πιο λεπτομερείς καμπύλες κατανάλωσης που προσφέρουν οι «έξυπνοι» μετρητές, αλλά και η ελαχιστοποίηση των υπερφορτίσεων του δικτύου, είναι δύο νευραλγικοί παράγοντες στην απόφαση δημιουργίας νέου σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Δηλαδή, μπορεί μια επιχείρηση ηλεκτρισμού να αποφύγει μια ζημιογόνο επένδυση σε νέο σταθμό παραγωγής ή μία επένδυση βελτίωσης του δικτύου διανομής λαμβάνοντας συγκεκριμένα μέτρα που αφορούν την τιμολόγηση, όπως αναλύθηκε και παραπάνω.

Παλαιότερα, η εκτίμηση κατάστασης γινόταν τοπικά, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η αλληλεπίδραση με το υπόλοιπο δίκτυο. Όμως, οι ISOs (Isolated System Operators) δεν μπορούν πλέον να δρουν ανεξάρτητα, αφού το δίκτυο μπορεί να επηρεαστεί από γεγονότα και αποφάσεις που λαμβάνονται για το δίκτυο σε μακρινή απόσταση. Η πρόσβαση των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας δυσκόλεψε ακόμη περισσότερο τη μεμονωμένη-τοπική λειτουργία των ISOs, ενώ να σημειωθεί ότι οι ΑΠΕ από τη φύση τους απαιτούν πιο συχνή εκτίμηση της κατάστασής τους.

Ένας παράγοντας, ο οποίος έχει συμβάλλει θετικά στην εκτίμηση κατάστασης των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας, είναι η χρήση των «έξυπνων» μετρητών. Τα δεδομένα των «έξυπνων» μετρητών, τα οποία υπάρχουν σε αφθονία και ποικιλία, προσφέρουν εξαιρετικές δυνατότητες για την Εκτίμηση Κατάστασης. Παρ' όλα αυτά, η επεξεργασία των δεδομένων τους αποτελεί μία μεγάλη πρόκληση λόγω των κακής ποιότητας δεδομένων και των κακόβουλων επιθέσεων στα δεδομένα. Χρονικές αλλοιώσεις, αποτυχίες επικοινωνίας ή οργάνων, ακανόνιστες βαθμονομήσεις οργάνων, αναστροφή καλωδίωσης και αβεβαιότητα παραμέτρων μπορούν να προσδώσουν κακής ποιότητας δεδομένα στην ανάλυση εκτίμησης κατάστασης. Για την εξάλειψη τέτοιων κακής ποιότητας δεδομένων γίνεται Ανάλυση Κακής Ποιότητας Δεδομένων (Bad Data Analysis), η οποία έχει ως στόχο τον εντοπισμό των εσφαλμένων μετρήσεων και

κατόπιν την εξάλειψή τους. Αν όμως κάποιος «εισβολέας» παραχαράξει κάποιους μετρητές, έτσι ώστε το «διάνυσμα επίθεσης» να βρίσκεται εντός των ορίων του εκτιμητή κατάστασης, τότε η επίθεση δεν είναι ανιχνεύσιμη και μπορεί να διαταράξει αυθαιρέτως τις εκτιμήσεις κατάστασης. Για την αντιμετώπιση τέτοιων κακόβουλων επιθέσεων είναι απαραίτητη η ύπαρξη προγραμμάτων προστασίας από ιούς (antivirus programs) (6) (7)

## 2.2 «Έξυπνοι» Μετρητές

Οι «έξυπνοι» ή αλλιώς ηλεκτρονικοί μετρητές έχουν αντικαταστήσει ήδη περίπου το 12% των παραδοσιακών ηλεκτρομηχανικών μετρητών στις Η.Π.Α. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την EIA (U.S. Energy Information Administration) έχουν εγκατασταθεί 37.290.374 «έξυπνοι» μετρητές. Η Ευρωπαϊκή Ένωση από την πλευρά της έχει θέσει ως στόχο την αντικατάσταση του 80% των «ρολογιών» με «έξυπνους» μετρητές μέχρι το τέλος του 2020. (8)

Οι «έξυπνοι» μετρητές, είναι μετρητές με πολύ μεγαλύτερες δυνατότητες από τους παραδοσιακούς ηλεκτρομηχανικούς μετρητές, τους λεγόμενους και ως «ρολόγια». Οι παλιοί μετρητές, οι οποίοι χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα στη χώρα μας, έχουν τη δυνατότητα να μετρούν την κατανάλωση της ενεργού ισχύος, ενώ χρειάζεται δεύτερος μετρητής για τη μέτρηση της κατανάλωσης αέργου ισχύος. Η τοποθέτηση δεύτερου «ρολογιού» πραγματοποιείται σε βιομηχανικούς καταναλωτές κι όχι σε οικιακούς. Οι ηλεκτρονικοί μετρητές έχουν τη δυνατότητα να μετρούν ανά πάσα στιγμή την κατανάλωση ενεργού και αέργου ισχύος, το μέτρο και τη γωνία τάσης, καθώς και το μέτρο και τη γωνία του ρεύματος της γραμμής. Τα δεδομένα αυτά μετρούνται αυτόματα από τους μετρητές ανά τακτά χρονικά διαστήματα (συνήθως ανά τέταρτο της ώρας) και αποθηκεύονται στη μνήμη τους μαζί με άλλες πληροφορίες, οι οποίες έχουν να κάνουν με ημερομηνία και ώρα, πληροφορίες προστασίας συστήματος και ισχύ σήματος επικοινωνίας. Υπάρχουν και ποικίλες άλλες πληροφορίες, οι οποίες έχουν να κάνουν κυρίως με την ασφάλεια του συστήματος, δηλαδή ελέγχεται αν κάποιος παραβίασε τον μετρητή ή αν υπήρξε κάποια παρέκκλιση από την κανονική διαδικασία μέτρησης. Όλες οι πληροφορίες αυτές συλλέγονται από την αρμόδια εταιρεία ηλεκτρισμού μία φορά την ημέρα και αποθηκεύονται σε μία βάση δεδομένων. Υπάρχει περίπτωση να μην μπορεί να καταστεί εφικτή η επικοινωνία με κάποιον μετρητή λόγω ασθενούς ή ανύπαρκτου σήματος επικοινωνίας. Αν συμβεί αυτό, τότε τα δεδομένα του συγκεκριμένου μετρητικού σημείου συλλέγονται την επόμενη μέρα και για τις δύο ημέρες. Αν είναι ξανά ανέφικτη η επικοινωνία, τότε τα δεδομένα συλλέγονται από κάποιον τεχνικό απευθείας από τον μετρητή την επόμενη ημέρα.

Οι έξυπνοι μετρητές μπορούν να ωφελήσουν ποικιλοτρόπως μια εταιρεία ηλεκτρισμού:

- Καταργώντας το παραδοσιακό διάβασμα των δεδομένων των «ρολογιών», το οποίο είναι χρονοβόρο και απαιτεί μεγάλο αριθμό προσωπικού.
- Κάνοντας την επίβλεψη των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας πιο εύκολη και πιο γρήγορη.
- Παρέχοντας χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την κατανάλωση και τις υπερφορτίσεις, ώστε να αποφευχθούν ή να μειωθούν οι ανεπιθύμητες διακοπές ηλεκτρικού ρεύματος.
- Παρέχοντας πληροφορίες, οι οποίες καταστούν εφικτή τη δυναμική τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας

- Παρέχοντας πληροφορίες κρίσιμες για μια εταιρεία ηλεκτρισμού, ώστε να αποφασιστεί η δημιουργία ή μη ενός νέου σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς και να αποφασιστεί αν υπάρχει ανάγκη για έργα βελτίωσης/επέκτασης του δικτύου διανομής.

Από την άλλη, υπάρχουν και προκλήσεις, τις οποίες καλείται να αντιμετωπίσει μια εταιρεία ηλεκτρισμού για τη μετάβαση από τους παραδοσιακούς ηλεκτρομηχανικούς μετρητές στους «έξυπνους» μετρητές.

- Πρέπει να υπάρχει η τεχνογνωσία για την μετάβαση από τους παραδοσιακούς μετρητές στους «έξυπνους» μετρητές.
- Πρέπει να γίνει σωστός προϋπολογισμός, λαμβάνοντας υπόψιν και τα έξοδα που αφορούν τη βάση δεδομένων και τα λογισμικά που θα χρησιμοποιηθούν.
- Πρέπει να είναι ικανή να δημιουργήσει μία βάση δεδομένων, η οποία θα μπορεί να αποθηκεύει μεγάλο όγκο δεδομένων.
- Πρέπει να μπορεί να διασφαλίσει την ασφάλεια των δεδομένων των έξυπνων μετρητών. Αυτό έχει να κάνει τόσο με ζητήματα ιδιωτικού απορρήτου, το οποίο έχει σχέση με τους καταναλωτές, τόσο και με ζητήματα κακόβουλων επιθέσεων στα δεδομένα των «έξυπνων» μετρητών. Το τελευταίο είναι ίσως η μεγαλύτερη πρόκληση και η αντιμετώπισή του έγκειται στη δημιουργία ασφαλών προγραμμάτων, τα οποία θα μπορούν να προστατεύουν το σύστημα από τέτοιες κακόβουλες επιθέσεις.

Οι καταναλωτές μπορούν κι αυτοί να ευνοηθούν από τη χρήση των «έξυπνων μετρητών».

- Μπορούν να εξοικονομήσουν χρήματα καταναλώνοντας μεγαλύτερες ποσότητες ηλεκτρικής ενέργειας τις ώρες που η τιμολόγηση είναι χαμηλή.
  - Ευνοούνται από τη μείωση των ανεπιθύμητων διακοπών ηλεκτρικού ρεύματος.
- Από την άλλη, οι καταναλωτές πρέπει να βεβαιωθούν ότι προστατεύεται το ιδιωτικό τους απόρρητο, καθώς και ότι δεν θα κληθούν να πληρώσουν επιπλέον ποσά για την εγκατάσταση των «έξυπνων μετρητών».

Όσον αφορά το περιβάλλον, η αποφυγή δημιουργίας νέων σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, οι οποίοι θα προκαλούσαν επιπρόσθετη μόλυνση, είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα. Επιπλέον, δεν πρέπει να αμελείται η μόλυνση που αποφεύγεται με την κατάργηση του παραδοσιακού διαβάσματος των «ρολογιών», αφού οι τεχνικοί έπρεπε να μετακινούνται από μετρητή σε μετρητή για να λαμβάνουν τις ενδείξεις. Αυτό προφανώς γινόταν με κάποιο τροχοφόρο όχημα, το οποίο προκαλεί μόλυνση στο περιβάλλον με την κατανάλωση καυσίμου. Από την άλλη, ένα πολύ σημαντικό ζήτημα που προκύπτει από την αντικατάσταση των παραδοσιακών «ρολογιών» με «έξυπνους» μετρητές, είναι να γίνει σωστή διαχείριση των υλικών των παλιών μετρητών, ώστε να ανακυκλωθούν τα ανακυκλώσιμα υλικά, ενώ τα μην ανακυκλώσιμα να μην επιβαρύνουν το περιβάλλον. (3) (9)

### 2.3 Χωρισμός σε περιοχές/υποσυστήματα

Η Εκτίμηση Κατάστασης μπορεί να γίνει είτε συγκεντρωτικά, είτε με καταναμημένο τρόπο, δηλαδή χωρίζοντας το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας σε υποσυστήματα ή αλλιώς περιοχές. Η Καταναμημένη Εκτίμηση Κατάστασης γίνεται όλο και πιο διαδεδομένη σιγά σιγά. Αυτό συμβαίνει διότι έχει κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι της Συγκεντρωτικής Εκτίμησης Κατάστασης. Καταρχάς, η σύγκλιση των αλγορίθμων γίνεται σε πολύ ταχύτερο χρόνο σε σύγκριση με τους αλγορίθμους της συγκεντρωτικής εκτίμησης κατάστασης. Έτσι, τα συμπεράσματα για την κατάσταση του δικτύου εξάγονται σε μικρότερο χρόνο. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη επίβλεψη του δικτύου, καθώς προσεγγίζει έτσι την επίβλεψη σε πραγματικό χρόνο. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα της Καταναμημένης Εκτίμησης Κατάστασης είναι όταν έχουμε να κάνουμε με δίκτυα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Τότε, μπορούμε να χωρίσουμε το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας σε περιοχές και κάθε περιοχή να αποτελεί ένα αυτοτελές δίκτυο διανομής. Έτσι, θα μπορούμε να επιβλέπουμε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα υποσυστήματα, τα οποία αφορούν τη διανομή, και να εξάγουμε συμπεράσματα ξεχωριστά για το κάθε δίκτυο διανομής, αλλά και συνολικά για όλο το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο εξετάζουμε. (10)

### 2.4 Εκσυγχρονισμός εκτίμησης κατάστασης και επίβλεψης δικτύου

Υπάρχουν δύο κλειδιά για τον εκσυγχρονισμό της εκτίμησης κατάστασης και της επίβλεψης του δικτύου.

1. Η εκτίμηση κατάστασης έχει περισσότερα πλεονεκτήματα και δυνατότητες όταν πραγματοποιείται καταναμημένα παρά όταν πραγματοποιείται συγκεντρωτικά. Η εκτίμηση κατάστασης πρέπει να γίνεται στο επίπεδο της ενδοδιασύνδεσης, η οποία μπορεί να περιλαμβάνει χιλιάδες ζυγούς, ενώ τυπικά χρειάζονται μόλις μερικές μετρήσεις. Απαιτείται επίσης επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο με ελαστικότητα σε κακής ποιότητας δεδομένα. Όταν εκτελείται συγκεντρωτική εκτίμηση κατάστασης (centralized power system state estimation), τα κακής ποιότητας δεδομένα μπορεί να την καταστήσουν υπολογιστικά αφόρητη κι επομένως να μην μπορέσουμε να εξάγουμε αποτέλεσμα για την κατάσταση του δικτύου, άρα να μην μπορούμε να το επιβλέψουμε. Επιπλέον, μία προσέγγιση συγκεντρωτικής εκτίμησης κατάστασης είναι ευάλωτη και μην ευέλικτη σε θέματα ιδιωτικότητας και αρχών.
2. Η επεξεργασία των αποκεντρωμένων πληροφοριών του δικτύου μπορεί να πραγματοποιηθεί ιεραρχικά. Οι PMU (Phasor Measurement Units) μπορούν να επεξεργαστούν από τους PDCs (Phasor Data Concentrators), οι συμβατικές μετρήσεις SCADA (Supervisory Control And Data Acquisition) μαζί με τα δεδομένα των PDCs από τους ISOs και τέλος οι εκτιμήσεις από τους ISOs μπορούν να συγχωνευτούν στο επίπεδο της ενδοδιασύνδεσης.

Από τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι η καταναμημένη εκτίμηση κατάστασης σε συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας και η ανάλυση κακών δεδομένων είναι ιδανικές και απαραίτητες διεργασίες για την εξαγωγή έγκυρων και έγκαιρων συμπερασμάτων για την κατάσταση των «έξυπνων» δικτύων (smart grids), κι επομένως για την επίβλεψή τους. (6)

### 3 Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> - Matlab-Περιγραφή ΣΗΕ και αρχεία εισόδου

#### 3.1 Περιγραφή αρχείου PTI στην Matlab

Η περιγραφή ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας στην Matlab, δεν διαφέρει από την PTI μορφή ή την τυπική IEEE CDF μορφή. Πιο συγκεκριμένα, η μορφή είναι η ακόλουθη:

- Δεδομένα ζυγών

$bus_i$   $type$   $P_d$   $Q_d$   $G_s$   $B_s$   $area$   $V_m$   $V_a$   $basekV$   $zone$   $V_{max}$   $V_{min}$

όπου:

$bus_i$ , ο αριθμός του ζυγού

$type$ , το είδος του ζυγού, που διακρίνεται σε Αναφοράς ή Ταλάντωσης, Παραγωγής ή PV και Φορτίου ή PQ

$P_d$ , η κατανάλωση ενεργού ισχύος του ζυγού μετρούμενη σε MW

$Q_d$ , η κατανάλωση αέργου ισχύος του ζυγού μετρούμενη σε MVAr

$G_s$ , το πραγματικό μέρος της εγκάρσιας αγωγιμότητας (shunt conductance)

$B_s$ , το φανταστικό μέρος της εγκάρσιας αγωγιμότητας (shunt susceptance)

$area$ , περιοχή που ανήκει ο ζυγός

$V_m$ , το μέτρο τάσης σε ανά μονάδα τιμή

$V_a$ , η γωνία τάσης σε μοίρες

$basekV$ , η βασική τάση μετρούμενη σε kV

$zone$ , ζώνη απωλειών

$V_{max}$ , το μέγιστο επιτρεπτό μέτρο τάσης του ζυγού

$V_{min}$ , το ελάχιστο επιτρεπτό μέτρο τάσης του ζυγού

- Δεδομένα γεννητριών

$bus$   $P_g$   $Q_g$   $Q_{max}$   $Q_{min}$   $V_g$   $mBase$   $status$   $P_{max}$   $P_{min}$  ...  
 $P_{c1}$   $P_{c2}$   $Q_{c1min}$   $Q_{c1max}$   $Q_{c2min}$   $Q_{c2max}$   $ramp_{agc}$   $ramp_{10}$   $ramp_{30}$   $ramp_q$   $apf$

όπου:

$bus$ , ο αριθμός του ζυγού

$P_g$ , η παραγωγή ενεργού ισχύος σε MW

$Q_g$ , η παραγωγή αέργου ισχύος σε MVA<sub>r</sub>

$Q_{max}$ , η μέγιστη επιτρεπτή παραγόμενη άεργος ισχύς σε MVA<sub>r</sub>

$Q_{min}$ , η ελάχιστη επιτρεπτή παραγόμενη άεργος ισχύς σε MVA<sub>r</sub>

$V_g$ , η επιθυμητή τιμή του μέτρου τάσης

$mBase$ , η βάση ισχύος της γεννήτριας σε MVA

$status$ , η κατάσταση λειτουργίας της γεννήτριας

$P_{max}$ , η μέγιστη επιτρεπτή παραγόμενη ενεργός ισχύς σε MW

$P_{min}$ , η ελάχιστη επιτρεπτή παραγόμενη ενεργός ισχύς σε MW

$P_{c1}$ , η ελάχιστη παραγόμενη ενεργή ισχύς της καμπύλης ικανότητας  $P - Q$  της γεννήτριας σε MW

$P_{c2}$ , η μέγιστη παραγόμενη ενεργή ισχύς της καμπύλης ικανότητας  $P - Q$  της γεννήτριας σε MW

$Q_{c1min}$ , η ελάχιστη παραγόμενη άεργος ισχύς (MVA<sub>r</sub>) για παραγωγή ενεργού ισχύος  $P_{c1}$

$Q_{c1max}$ , η μέγιστη παραγόμενη άεργος ισχύς (MVA<sub>r</sub>) για παραγωγή ενεργού ισχύος  $P_{c1}$

$Q_{c2min}$ , η ελάχιστη παραγόμενη άεργος ισχύς (MVA<sub>r</sub>) για παραγωγή ενεργού ισχύος  $P_{c2}$

$Q_{c2max}$ , η μέγιστη παραγόμενη άεργος ισχύς (MVA<sub>r</sub>) για παραγωγή ενεργού ισχύος  $P_{c2}$

$ramp_{agc}$ , το φορτίο ενεργού ισχύος, με το οποίο μπορεί να επιβαρυνθεί η γεννήτρια ανά μονάδα χρόνου (MW/min)

$ramp_{10}$ , το φορτίο ενεργού ισχύος, με το οποίο μπορεί να επιβαρυνθεί η γεννήτρια στα πρώτα 10 λεπτά της λειτουργίας της

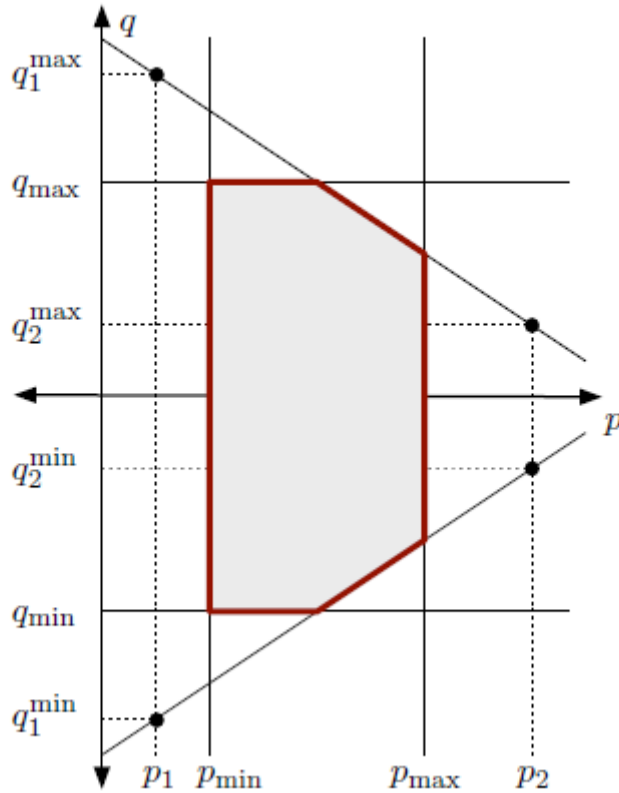
$ramp_{30}$ , το φορτίο ενεργού ισχύος, με το οποίο μπορεί να επιβαρυνθεί η γεννήτρια στα πρώτα 30 λεπτά της λειτουργίας της

$ramp_q$ , το φορτίο αέργου ισχύος, με το οποίο μπορεί να επιβαρυνθεί η γεννήτρια ανά μονάδα χρόνου (MVA<sub>r</sub>/min)



$apf$ , βάρος συμμετοχής της γεννήτριας σε κάποια περιοχή

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η καμπύλη ικανότητας  $P - Q$  της γεννήτριας:



Εικόνα 9: Καμπύλη Ικανότητας Γεννήτριας

- Δεδομένα γραμμών μεταφοράς

$f_{bus}$   $t_{bus}$   $r$   $x$   $b$   $rateA$   $rateB$   $rateC$   $ratio$   $angle$   $status$   $ang_{min}$   $ang_{max}$

όπου:

$f_{bus}$ , ο ζυγός αναχώρησης

$t_{bus}$ , ο ζυγός άφιξης

$r$ , η ωμική αντίσταση σε ανά μονάδα τιμή

$x$ , η επαγωγική αντίσταση σε ανά μονάδα τιμή

$b$ , η συνολική επαγωγική αντίσταση της γραμμής σε ανά μονάδα τιμή

$rateA$ , ονομαστική ισχύς του μετασχηματιστή σε  $MVA$ , όσον αφορά τη μακροπρόθεσμη χρήση του

$rateB$ , ονομαστική ισχύς του μετασχηματιστή σε  $MVA$ , όσον αφορά τη βραχυπρόθεσμη χρήση του

$rateC$ , ονομαστική ισχύς του μετασχηματιστή σε  $MVA$ , όσον αφορά τη χρήση του σε επείγουσα κατάσταση

$ratio$ , ο λόγος μετασχηματισμού του μετασχηματιστή

$angle$ , η μεταβολή της φάσης που προκαλεί ο μετασχηματιστής

$status$ , η κατάσταση λειτουργίας του μετασχηματιστή

$ang_{min}$ , η ελάχιστη επιτρεπτή διαφορά φάσης

$ang_{max}$ , η μέγιστη επιτρεπτή διαφορά φάσης (11)

### 3.2 Α.Π.Ε. ως είσοδοι στην Matlab

Το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, ήταν ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας στην Κρήτη αποτελούμενο από 107 ζυγούς. Σε αυτό, υπήρχαν 25 γεννήτριες ατμού, αερίου και ντίζελ και 24 ανεμογεννήτριες. Κατά την πραγματοποίηση της ροής φορτίου, οι ανεμογεννήτριες εντάχθηκαν στα δεδομένα των ζυγών ως αρνητική κατανάλωση κι όχι στα δεδομένα των γεννητριών ως παραγωγή ενεργού και αέργου ισχύος. Αυτό έγινε, διότι οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας από τη φύση τους έχουν λειτουργία, η οποία είναι πιο κοντά στον τρόπο που λειτουργούν τα φορτία κατανάλωσης, παρά στον τρόπο που λειτουργούν οι γεννήτριες. Δηλαδή, οι Α.Π.Ε. προσφέρουν στο δίκτυο ισχύ, η οποία δεν ελέγχεται από τον ανθρώπινο παράγοντα, όπως συμβαίνει με τις γεννήτριες. Αντιθέτως, θυμίζουν τη συμπεριφορά των καταναλωτών, οι οποίοι ζητούν ισχύ, χωρίς να μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια η ποσότητα ζήτησης ανά πάσα χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν, όλες οι ανεμογεννήτριες αντιμετωπίστηκαν ως αρνητικές καταναλώσεις, όπως και είναι προτιμότερο και ορθότερο να γίνεται.

### 3.3 Δεδομένα μετρήσεων ως είσοδοι για την Κατανομημένη Εκτίμηση Κατάστασης

Τα δεδομένα, τα οποία είχαμε στη διάθεσή μας ήταν:

- Στοιχεία γραμμών μεταφοράς, δηλαδή όλες τις πληροφορίες για τις εν σειρά και εγκάρσιες αγωγιμότητες, καθώς και για τους μετασχηματιστές.
- Μετρήσεις παραγωγής ενεργού ισχύος από τις γεννήτριες και τις ανεμογεννήτριες ανά μία ώρα.

Τα παραπάνω δεδομένα δεν ήταν αρκετά για την επίλυση του αλγορίθμου Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης. Προκειμένου να λάβουμε τις πληροφορίες που έλειπαν, εκτελέσαμε τον αλγόριθμο Ροής Φορτίου και από εκεί συλλέξαμε δεδομένα μέτρων τάσεων, ροών ενεργού και άεργου ισχύος, καθώς και δεδομένα έγχυσεων ενεργού και άεργου ισχύος, τα οποία ήταν απαραίτητα για την εκτέλεση του αλγορίθμου εκτίμησης κατάστασης.



## 4 Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> - Παρατηρησιμότητα Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας

### 4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση:

$$z = H \cdot \theta + e$$

όπου,

$z$  είναι η αναντιστοιχία μεταξύ των μετρούμενων και των υπολογισμένων μετρήσεων ενεργού ισχύος,

$H$  είναι ο αποσυζευγμένος Ιακωβιανός πίνακας των μετρήσεων ενεργού ισχύος ως προς όλες τις γωνίες φάσης των ζυγών, συμπεριλαμβανομένου και του ζυγού αναφοράς

$e$  είναι το διάνυσμα σφάλματος μετρήσεων

Ο αποσυζευγμένος πίνακας κέρδους για μετρήσεις ενεργού ισχύος σχηματίζεται ως:

$$G = H^T \cdot H$$

Όπου έχουμε υποθέσεις, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο πίνακας διασποράς των σφαλμάτων των μετρήσεων είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Σημειώνουμε ότι από τη στιγμή που ο ζυγός αναφοράς έχει συμπεριληφθεί στη δημιουργία του  $H$ , τότε ο βαθμός των πινάκων  $H$  και  $G$  θα είναι το πολύ  $(N - 1)$ , όπου  $N$  ο αριθμός των ζυγών, ακόμη και για ένα πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα. Αυτό οδηγεί στην τριγωνική παραγοντοποίηση ενός μη αντιστρέψιμου και συμμετρικού πίνακα κέρδους. Ο πίνακας  $H$  μπορεί να σχηματιστεί είτε με τις πραγματικές τιμές των αγωγιμοτήτων του, είτε με τεχνητές τιμές. Η εφαρμοζόμενη μέθοδος έχει αποτέλεσμα ανεξάρτητα από την επιλογή αυτή.

Οι τεχνητές τιμές για τη μήτρα  $H$  προκύπτουν αν θέσουμε το πραγματικό μέρος όλων των αγωγιμοτήτων ίσο με το μηδέν και το φανταστικό μέρος όλων των αγωγιμοτήτων ίσο με ένα ανά μονάδα. Επίσης, πρέπει ο λόγος μετασχηματισμού των μετασχηματιστών να ορισθεί ίσος με τη μονάδα. Ένας άλλος τρόπος να σχηματισθεί η μήτρα  $H$  με τεχνητές τιμές περιγράφεται παρακάτω σε ένα παράδειγμα, στο οποίο χρησιμοποιήθηκε ένα Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας 6 ζυγών.

Αφού έχουμε σχηματίσει τους πίνακες  $H$  και  $G$ , χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση Cholesky, έτσι ώστε:

$$G = L \cdot D \cdot L^T$$

Ο πίνακας  $L$  είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, ενώ ο πίνακας  $D$  είναι διαγώνιος. Αμφότεροι οι πίνακες έχουν διαστάσεις  $(N \times N)$ .

Ο πίνακας  $D$  έχει  $(N - k)$  στοιχεία της διαγωνίου διάφορα του μηδενός, ενώ τα άλλα  $k$  στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν. Τα στοιχεία ενδιαφέροντος είναι τα μηδενικά στοιχεία της διαγωνίου. Αυτά μας δείχνουν ότι χρειάζονται  $(k - 1)$  μετρήσεις έγχυσης ισχύος, ώστε το σύστημα να γίνει παρατηρήσιμο. Αυτό συμβαίνει, διότι στον σχηματισμό του πίνακα  $H$  έχουμε λάβει υπόψιν μας το ζυγό αναφοράς του ΣΗΕ. Αν ο ζυγός αναφοράς δεν συμμετείχε στο σχηματισμό του  $H$ , τότε θα χρειάζονταν  $k$  μετρήσεις έγχυσης ισχύος, ώστε το σύστημα να γίνει παρατηρήσιμο. Αυτός είναι ο ελάχιστος αριθμός εγχύσεων που απαιτούνται. Παρακάτω θα αναφερθούμε στο πώς προσδιορίζουμε τους ζυγούς, στους οποίους πρέπει να τοποθετηθούν οι μετρήσεις αυτές. Πριν από αυτό όμως, θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες  $L$  και  $D$ , ώστε να βρούμε τις παρατηρήσιμες νησίδες του συστήματος. (12) (13)

## 4.2 Εύρεση Παρατηρήσιμων Νησίδων

Παρατηρήσιμη νησίδα ονομάζουμε ένα σύνολο ζυγών, πλήθους  $t$  με  $1 \leq t \leq N$ , οι οποίοι αποτελούν ένα υποσύστημα του ΣΗΕ, το οποίο (υποσύστημα) είναι παρατηρήσιμο. Προκειμένου το σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας να είναι πλήρως παρατηρήσιμο και να μπορεί να επιλυθεί ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης, πρέπει το ΣΗΕ να αποτελείται από μία και μόνο μία παρατηρήσιμη νησίδα. Διαφορετικά, το ΣΗΕ δεν είναι παρατηρήσιμο και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο εκτίμησης κατάστασης. Δηλαδή, πρέπει το ΣΗΕ, το οποίο αποτελείται από  $N$  ζυγούς, να εκφυλίζεται σε μία παρατηρήσιμη νησίδα αποτελούμενη από  $N$  ζυγούς. Αν μετά τον έλεγχο της παρατηρησιμότητας έχουμε παραπάνω από μία παρατηρήσιμες νησίδες, τότε πρέπει να προσθέσουμε μετρήσεις σε συγκεκριμένους συνοριακούς ζυγούς, ώστε το ΣΗΕ να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

Γνωρίζουμε ότι έχουμε  $k$  μηδενικά στοιχεία διαγωνίου στον πίνακα  $D$ . Τότε, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα  $W$ , ο οποίος σχηματίζεται από  $k$  γραμμές του πίνακα  $L^{-1}$ . Δηλαδή, για κάθε γραμμή του  $W$  θα ισχύει:

$$W_i = L_m^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ και } m \in B$$

Όπου:

$W_i$  είναι η  $i$  - οστή γραμμή του πίνακα  $W$

$L_m^{-1}$  είναι η  $m$  - οστή γραμμή του πίνακα  $L^{-1}$  και το  $m$  αντιστοιχεί σε θέση μηδενικού στοιχείου διαγωνίου του πίνακα  $D$ . Είναι δηλαδή  $D(m, m) = 0$ .

Το σύνολο  $B$  αποτελείται από  $k$  ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι δείχνουν σε ποιες σειρές του πίνακα  $D$  έχουμε μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

Είναι προφανές από τα παραπάνω, ότι ο δείκτης  $m$  λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο  $k$  θετικών ακέραιων αριθμών, με  $m \leq N$ .

Τελικά θα έχουμε:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_k \end{bmatrix}$$

Για λόγους υπολογιστικής ταχύτητας, αλλά και επειδή η αντιστροφή του πίνακα  $L$  σε ένα σύστημα πολλών ζυγών θα καταλάμβανε μεγάλο χώρο στη μνήμη, ο πίνακας  $W$  δεν υπολογίζεται με αντιστροφή του  $L$ , αλλά με πίσω αντικατάσταση. Δηλαδή υπολογίζεται λύνοντας  $k$  γραμμικά συστήματα ως εξής:

$$L^T \cdot W_i = e_i, i = 1, 2, \dots, k$$

Όπου:

$L^T$  είναι ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα  $L$   
 $W_i$  είναι η  $i$  – οστή στήλη του πίνακα  $W$

$e_i$  είναι ένα διάνυσμα στήλης, το οποίο έχει διαστάσεις  $(N \times 1)$ . Όλα τα στοιχεία του διανύσματος  $e_i$  έχουν μηδενικές τιμές, εκτός από το στοιχείο της  $m$  – οστής γραμμής. Οι τιμές που λαμβάνει ο δείκτης  $m$  έχουν περιγραφεί παραπάνω.

Από τη στιγμή που έχει σχηματιστεί και ο πίνακας  $W$ , μπορούν να βρεθούν οι παρατηρήσιμες νησίδες με δύο τρόπους.

1. Έχουμε τον πίνακα  $A$ , ο οποίος είναι ο πίνακας προπτώσεων των γραμμών και κόμβων του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Τότε, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα  $C$  ως εξής:

$$C = A \cdot W^T$$

Μέσω του πίνακα  $C$  μπορούμε να βρούμε τις παρατηρήσιμες νησίδες του συστήματος. Όσες σειρές του πίνακα  $C$  έχουν στοιχεία μη μηδενικά, αναφέρονται σε μη παρατηρήσιμες γραμμές του ΣΗΕ. Ομαδοποιώντας τις σειρές του πίνακα  $C$ , οι οποίες ταυτίζονται και αφαιρώντας όλες τις μη παρατηρήσιμες γραμμές, λαμβάνουμε τις παρατηρήσιμες νησίδες.

2. Μέσω του πίνακα  $W$  μπορούμε να βρούμε τις παρατηρήσιμες νησίδες του συστήματος. Αυτό επιτυγχάνεται ομαδοποιώντας τις στήλες του πίνακα  $W$ , οι οποίες ταυτίζονται. Κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε βρει σε πόσες παρατηρήσιμες νησίδες χωρίζεται το ΣΗΕ, καθώς και ποιοι ζυγοί περιλαμβάνονται σε κάθε μία από αυτές. (14) (15) (13)

### 4.3 Συνοριακοί ζυγοί παρατηρήσιμων νησίδων

Οι συνοριακοί ζυγοί των παρατηρήσιμων νησίδων, είναι αυτοί οι ζυγοί, οι οποίοι συνορεύουν με άλλες παρατηρήσιμες νησίδες. Σε κάθε παρατηρήσιμη νησίδα λοιπόν, έχουμε (αν υπάρχουν) τους εσωτερικούς ζυγούς, οι οποίοι συνδέονται μόνο με άλλους εσωτερικούς ζυγούς της νησίδας, και τους συνοριακούς ζυγούς.

### 4.4 Εύρεση ελάχιστων εγχύσεων ενεργού ισχύος σε συνοριακούς ζυγούς του ΣΗΕ

Θεωρούμε τους πίνακες  $H_b$  και  $H_c$  με διαστάσεις  $(m_b \times N)$  και  $(m_c \times N)$  αντίστοιχα. Οι πίνακες αυτοί είναι οι Ιακωβιανοί υποπίνακες, για μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος, των συνοριακών ζυγών των παρατηρήσιμων νησίδων. Ο πίνακας  $H_b$  αναφέρεται σε συνοριακούς ζυγούς, στους οποίους έχουμε ήδη μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος. Ο πίνακας  $H_c$  αναφέρεται στους υπόλοιπους συνοριακούς ζυγούς, οι οποίοι είναι υποψήφιοι για μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος, ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

Έστω ότι έχουμε  $r$  παρατηρήσιμες νησίδες. Τότε, ορίζουμε τους πίνακες  $W_b$  και  $W_c$  με διαστάσεις  $(m_b \times r)$  και  $(m_c \times r)$  αντίστοιχα. Για τους πίνακες αυτούς έχουμε:

$$W_b = (w_{b1} \cdots w_{bi} \cdots w_{br})$$

$$W_c = (w_{c1} \cdots w_{ci} \cdots w_{cr})$$

Όπου:

$w_{bi}$  είναι το άθροισμα των στηλών του πίνακα  $H_b$ , οι οποίες αναφέρονται στους ζυγούς της  $i$  - οστής παρατηρήσιμης νησίδας του συστήματος,

$w_{ci}$  είναι το άθροισμα των στηλών του πίνακα  $H_c$ , οι οποίες αναφέρονται στους ζυγούς της  $i$  - οστής παρατηρήσιμης νησίδας του συστήματος.

Προκειμένου του σύστημα να είναι πλήρως παρατηρήσιμο, πρέπει:

$$\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(H) = N - 1 \Leftrightarrow \mu\eta\delta\epsilon\nu\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha(H) = 1$$

Εάν  $\mu\eta\delta\epsilon\nu\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha(H) = k > 1$ , τότε το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο και υπάρχουν  $r \geq k$  παρατηρήσιμες νησίδες. Όπως έχει αναφερθεί, τότε θα χρειαζόμαστε  $(k - 1)$  μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος, ώστε το ΣΗΕ να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

Για τους προαναφερθέντες πίνακες, ισχύουν τα παρακάτω:



$$\text{μηδενικότητα}(H) = \text{μηδενικότητα}(W_b) = k$$

$$\text{μηδενικότητα}(H_{bc}) = \text{μηδενικότητα}(W_{bc})$$

Όπου:

$$H_{bc} = \begin{pmatrix} H \\ H_c \end{pmatrix} \text{ με διαστάσεις } ((m + m_c) \times n),$$

$$W_{bc} = \begin{pmatrix} W_b \\ W_c \end{pmatrix} \text{ με διαστάσεις } ((m_b + m_c) \times r)$$

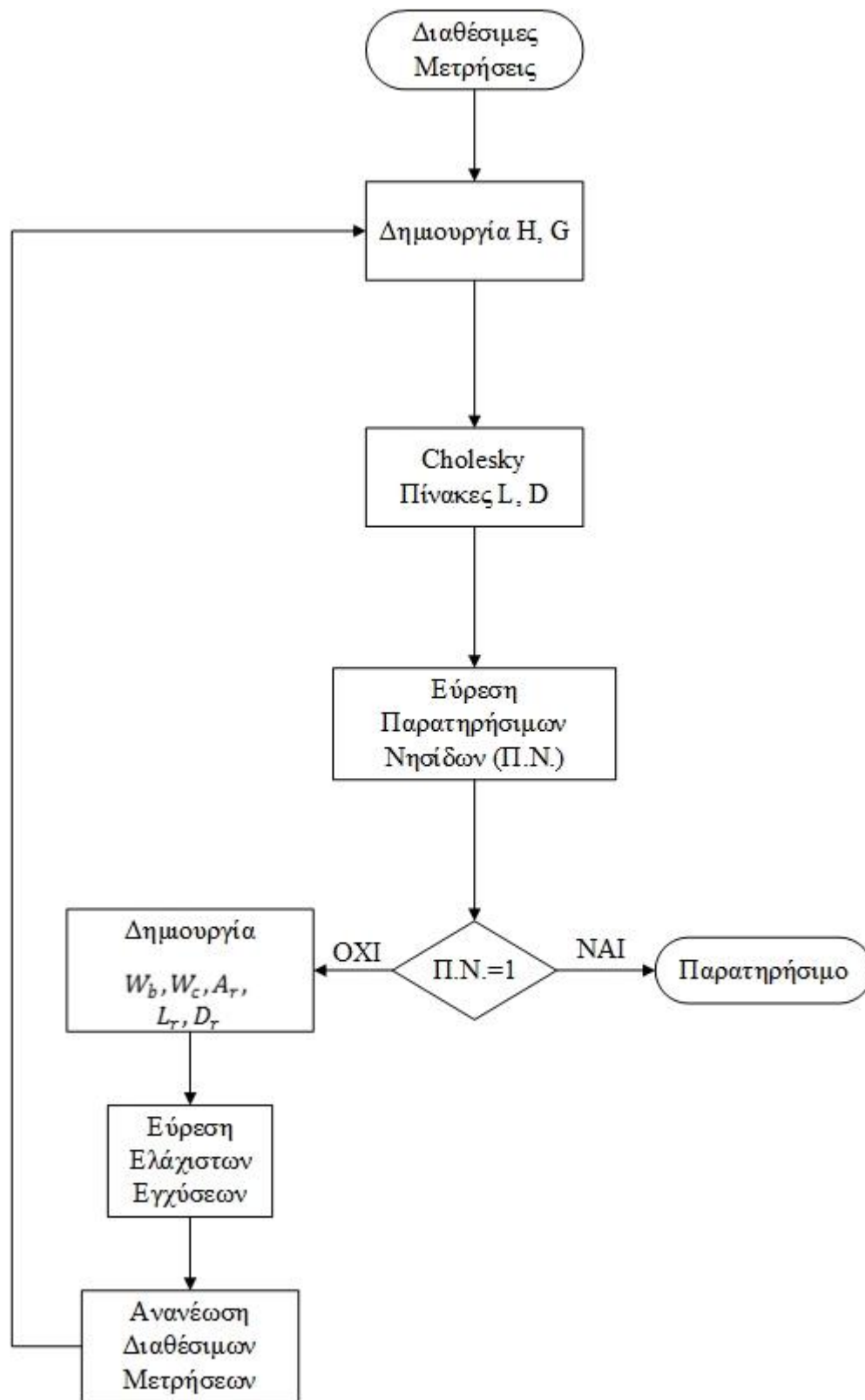
Από τη δεύτερη εξίσωση συνεπάγεται ότι οι πληροφορίες, που αναφέρονται στην αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας, μπορούν να αποκτηθούν από τον μειωμένο Ιακωβιανό πίνακα  $W_{bc}$  αντί να αποκτηθούν από τον πίνακα  $H_{bc}$ .

Ορίζουμε τον πίνακα κέρδους  $A_r$ , ο οποίος σχετίζεται με τον μειωμένο Ιακωβιανό πίνακα  $W_{bc}$ .

$$A_r = W_{bc} \cdot W_{bc}^T$$

Κάνοντας παραγοντοποίηση Cholesky στον πίνακα  $A_r$ , λαμβάνουμε τους πίνακες  $L$  και  $D$ . Οι υποψήφιοι συνοριακοί ζυγοί για μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος αντιστοιχούν στα μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $D$  και είναι γραμμικά ανεξάρτητοι από τους συνοριακούς ζυγούς που έχουν ήδη μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος. Έτσι, καταλήγουμε στην επιλογή των ελάχιστων συνοριακών ζυγών, οι οποίοι επιλέγονται για μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος, ώστε το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο και να μπορεί να επιλυθεί ο αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης. (16)

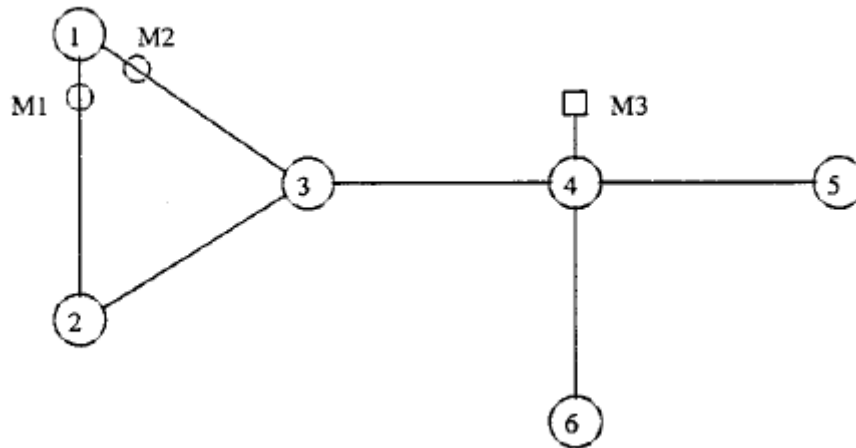
Παρακάτω παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ροής με τα βήματα, τα οποία εκτελούνται στον προτεινόμενο αλγόριθμο παρατηρησιμότητας.



Εικόνα 10: Διάγραμμα Αλγορίθμου Παρατηρησιμότητας Σ.Η.Ε.

#### 4.5 Παράδειγμα εφαρμογής του προτεινόμενου αλγορίθμου Παρατηρησιμότητας ΣΗΕ

Θεωρούμε το παρακάτω Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας αποτελούμενο από 6 ζυγούς:



Εικόνα 11: Σ.Η.Ε. 6 ζυγών

Όπως φαίνεται και από το σχήμα, έχουμε 3 διαθέσιμες μετρήσεις  $M1$ ,  $M2$  και  $M3$ . Οι μετρήσεις  $M1$  και  $M2$  αναφέρονται σε ροή ενεργού ισχύος από το ζυγό 1 προς το ζυγό 2 και από το ζυγό 1 προς το ζυγό 3 αντίστοιχα. Η μέτρηση  $M3$  αναφέρεται σε έγχυση ενεργού ισχύος στο ζυγό 4.

Με τα παραπάνω δεδομένα, σχηματίζεται ο ακόλουθος Ιακωβιανός πίνακας  $H$ .

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_4 \end{array} \end{array}$$

Ο παραπάνω Ιακωβιανός πίνακας  $H$  δημιουργήθηκε με τεχνητές τιμές. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό αναφέρθηκε παραπάνω. Ένας άλλος τρόπος, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στον αλγόριθμο της Παρατηρησιμότητας είναι ο εξής. Στις μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος τοποθετούμε μονάδα στη στήλη του πίνακα  $H$ , η οποία αναφέρεται στο ζυγό αναχώρησης, ενώ τοποθετούμε  $(-1)$  στη στήλη του πίνακα  $H$ , η οποία αναφέρεται στο ζυγό άφιξης. Στο παράδειγμά μας βλέπουμε ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα  $H$  αναφέρεται στη μέτρηση ροής ενεργού ισχύος  $P_{1-2}$ . Παρατηρούμε ότι η στήλη 1 που αναφέρεται στο ζυγό αναχώρησης έχει λάβει την τιμή 1, ενώ η στήλη 2 που αναφέρεται στο ζυγό άφιξης έχει λάβει την τιμή  $(-1)$ . Το ίδιο βλέπουμε να συμβαίνει στη δεύτερη γραμμή του πίνακα, όπου έχουμε τη μέτρηση ροής ενεργού ισχύος  $P_{1-3}$ , δηλαδή η πρώτη στήλη έχει λάβει την τιμή 1 και η Τρίτη στήλη έχει λάβει την τιμή  $(-1)$ . Όσον αφορά τις γραμμές του Ιακωβιανού πίνακα  $H$ , οι οποίες

αναφέρονται στις μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος, αυτές σχηματίζονται ως εξής. Η στήλη του πίνακα  $H$  που αναφέρεται στο ζυγό, στον οποίο έχουμε μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος, λαμβάνει ως τιμή τον αριθμό των ζυγών με τους οποίους συνδέεται ο ζυγός. Από την άλλη, οι στήλες του πίνακα  $H$  που αναφέρονται στους ζυγούς, με τους οποίους συνδέεται ο ζυγός αυτός, λαμβάνουν την τιμή  $(-1)$ . Στο παράδειγμά μας έχουμε μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος στον ζυγό 4. Βλέπουμε ότι ο ζυγός 4 συνδέεται με τρεις ζυγούς και συγκεκριμένα με τους ζυγούς 3, 5 και 6. Η στήλη του πίνακα  $H$ , η οποία αναφέρεται στο ζυγό 4 έχει λάβει την τιμή 3, ενώ οι στήλες που αναφέρονται στους ζυγούς 3, 5 και 6 έχουν λάβει την τιμή  $(-1)$ .

Κατόπιν, λαμβάνουμε τον πίνακα κέρδους  $G$ :

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{matrix}$$

Η παραγοντοποίηση Cholesky για τον πίνακα  $G$  μας δίνει τους παρακάτω πίνακες  $L$  και  $D$ .

$$G = L \cdot D \cdot L^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο διαγώνιος πίνακας  $D$  έχει τρία μηδενικά στοιχεία. Επομένως, θα χρειαστούν  $(3 - 1) = 2$  μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος σε συνοριακούς ζυγούς, ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο. Πριν την εύρεση των ελάχιστων εγχύσεων, προηγείται η εύρεση των παρατηρήσιμων νησίδων του συστήματος. Επομένως, θα σχηματιστεί ο πίνακας  $W$ , με τρόπο που έχει αναφερθεί παραπάνω. Να σημειωθεί ξανά, ότι για λόγους υπολογιστικής ταχύτητας, αλλά και χωρητικότητας μνήμης, ο πίνακας  $W$  βρίσκεται επιλύοντας  $k$  γραμμικά συστήματα (όπου  $k$  ο αριθμός των μηδενικών διαγώνιων στοιχείων του πίνακα  $D$ ), αντί για την αναστροφή του  $L$ . Ο πίνακας  $W$  φαίνεται παρακάτω:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι στήλες του πίνακα  $W$  μπορούν να ομαδοποιηθούν ως εξής:  $[1,2,3]$ ,  $[4]$ ,  $[5]$ ,  $[6]$ , καθώς οι πρώτες τρεις στήλες είναι ίδιες, ενώ οι άλλες τρεις διαφορετικές μεταξύ τους και διαφορετικές από τις πρώτες τρεις στήλες. Έτσι, λαμβάνουμε τις τέσσερις παρατηρήσιμες νησίδες του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας των 6 ζυγών.

Νησίδα 1 ( $I_1$ ): ζυγοί 1, 2, 3

Νησίδα 2 ( $I_2$ ): ζυγός 4

Νησίδα 3 ( $I_3$ ): ζυγός 5

Νησίδα 4 ( $I_4$ ): ζυγός 6

Τώρα θα βρούμε σε ποιους συνοριακούς ζυγούς των νησίδων πρέπει να τοποθετηθεί μέτρηση έγχυσης ενεργούς ισχύος, ώστε το όλο σύστημα να γίνει μία παρατηρήσιμη νησίδα, άρα και πλήρως παρατηρήσιμο.

Είναι προφανές ότι οι συνοριακοί ζυγοί των παρατηρήσιμων νησίδων είναι οι ζυγοί 3, 4, 5 και 6. Στο ζυγό 4 είχαμε ήδη μέτρηση για έγχυση ενεργού ισχύος, άρα υποψήφιοι για τις δύο μετρήσεις που χρειαζόμαστε είναι οι υπόλοιποι τρεις ζυγοί. Δημιουργούνται λοιπόν οι πίνακες  $W_b$ ,  $W_c$ , και  $A_r$ .

$$W_b = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} P_4$$

$$W_c = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_3 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_4 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

Κάνοντας παραγοντοποίηση Cholesky λαμβάνουμε τους πίνακες  $L_r$  και  $D_r$ , παράγοντες του πίνακα  $A_r$ .

$$A_r = L_r \cdot D_r \cdot L_r^T$$

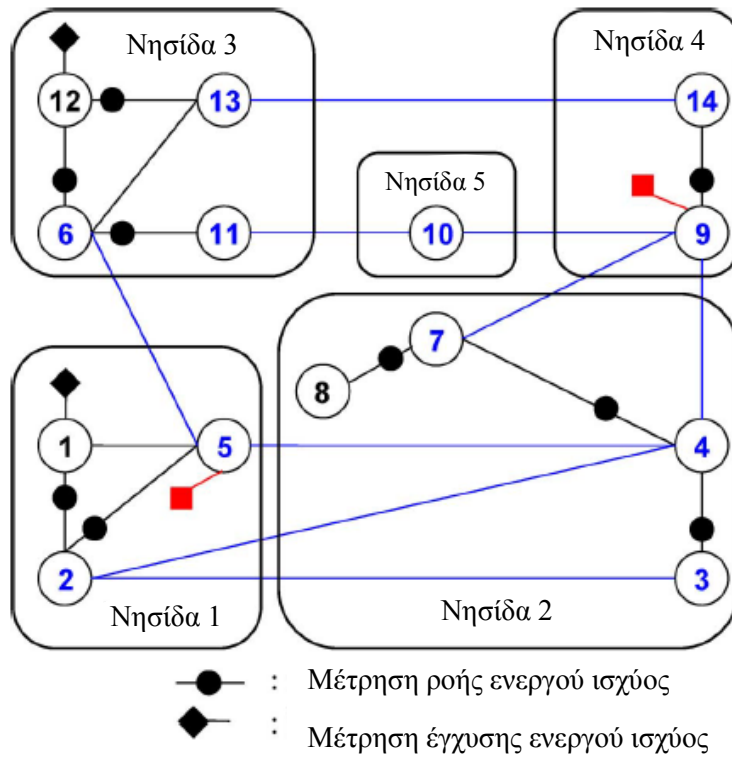
$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3\bar{3} & 1 & 0 & 0 \\ -0.3\bar{3} & -0.5 & 1 & 0 \\ -0.3\bar{3} & -0.5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_4 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

$$D_r = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6\bar{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_4 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

Η πρώτη σειρά του πίνακα  $D_r$  αναφέρεται στο ζυγό 4, ο οποίος έχει ήδη μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος. Οι άλλες τρεις σειρές αναφέρονται στους ζυγούς 3, 5 και 6 αντίστοιχα, δηλαδή στους άλλους συνοριακούς ζυγούς των παρατηρήσιμων νησίδων. Παρατηρούμε ότι το διαγώνιο στοιχείο, το οποίο αναφέρεται στο ζυγό 6 είναι μηδενικό, ενώ τα διαγώνια στοιχεία που αναφέρονται στους ζυγούς 3 και 5 είναι μη μηδενικά. Επομένως, πρέπει να τοποθετηθούν δύο μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος στους ζυγούς 3 και 5, ούτως ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

#### 4.6 Εφαρμογή του αλγορίθμου στο ΣΗΕ IEEE 14 ζυγών

Θεωρούμε το παρακάτω Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας αποτελούμενο από 14 ζυγούς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ΣΗΕ και οι πέντε παρατηρήσιμες νησίδες. Ο χωρισμός τους θα αναλυθεί παρακάτω στο παράδειγμα.



Εικόνα 12: Σ.Η.Ε. 14 ζυγών

Οι διαθέσιμες μετρήσεις, όπως φαίνονται και στο σχήμα είναι οι ακόλουθες:

Πίνακας 4: Διαθέσιμες Μετρήσεις

Τύπος Μέτρησης	Από	Προς
Ροή Ενεργού Ισχύος	1	2
Ροή Ενεργού Ισχύος	2	5
Ροή Ενεργού Ισχύος	3	4
Ροή Ενεργού Ισχύος	4	7
Ροή Ενεργού Ισχύος	7	8
Ροή Ενεργού Ισχύος	9	14
Ροή Ενεργού Ισχύος	6	11
Ροή Ενεργού Ισχύος	6	12
Ροή Ενεργού Ισχύος	12	13
Έγχυση Ενεργού Ισχύος	1	-
Έγχυση Ενεργού Ισχύος	5	-
Έγχυση Ενεργού Ισχύος	9	-
Έγχυση Ενεργού Ισχύος	12	-

Με τα παραπάνω δεδομένα, σχηματίζεται ο ακόλουθος Ιακωβιανός πίνακας  $H$ .

$$H = \begin{array}{cccccccccccccc|l} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{1-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{2-5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{3-4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{6-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & P_{6-12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & P_{9-14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & P_{12-13} \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & P_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & P_{12} \end{array}$$

Κατόπιν, λαμβάνουμε τη μήτρα κέρδους  $G$ .

$$G = \begin{array}{cccccccccccccc|l} 6 & -2 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_4 \\ -6 & -4 & 0 & -4 & 18 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & \delta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 17 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 & \delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \delta_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & \delta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & \delta_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & \delta_{14} \end{array}$$



Η παραγοντοποίηση Cholesky για τον πίνακα  $G$  μας δίνει τους παρακάτω πίνακες  $L$  και  $D$ :

$$G = L \cdot D \cdot L^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1,8 & 0 & -0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,1 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,7 & -1 & 0 & -1,3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 0 & 0 & 0 & -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $D$  έχει τρία μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Άρα, θα χρειαστούν  $(3 - 1) = 2$  μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος, ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

Ο πίνακας  $W$  θα είναι ο ακόλουθος:

$$W = \begin{bmatrix} -0,3 & -0,3 & -0,5 & -0,5 & -0,3 & 0 & -0,5 & -0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & -0,1 & -0,1 & 0,4 & 1 & -0,1 & -0,1 & 0 & 0,3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 1 & 1 & 0,4 & -0,3 & 1 & 1 & 1 & 0,9 & -0,3 & -0,3 & -0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι παρατηρήσιμες νησίδες θα είναι οι ακόλουθες:

Πίνακας 5: Παρατηρήσιμες Νησίδες

Αριθμός Νησίδας	Ζυγοί
1	6, 11, 12, 13
2	10
3	9, 14
4	1, 2, 5
5	3, 4, 7, 8

Οι συνοριακοί ζυγοί των παρατηρήσιμων νησίδων είναι οι ζυγοί 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14. Όπως και προηγουμένως, θα σχηματιστούν οι πίνακες  $W_b, W_c, A_r$ .

$$W_b = \begin{bmatrix} \frac{I_1}{I_2} & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_5 \\ P_9 \end{matrix}$$

$$W_c = \begin{array}{ccccc|c} & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & \\ \hline & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & P_2 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\ & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 & P_4 \\ & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & P_6 \\ & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & P_7 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & P_{10} \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & P_{11} \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & P_{13} \\ & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & P_{14} \end{array}$$

$$A_r = \begin{array}{cccccccccccc|c} & 6 & 2 & 6 & -3 & -7 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & P_5 \\ & 2 & 14 & 4 & -2 & -9 & 0 & -5 & -5 & 1 & -3 & 3 & P_9 \\ & 6 & 4 & 8 & -4 & -10 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 \\ & -3 & -2 & -4 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\ & -7 & -9 & -10 & 5 & 14 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 & P_4 \\ & -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & P_6 \\ & -1 & -5 & -2 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & P_7 \\ & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 & 0 & 0 & P_{10} \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & -1 & P_{11} \\ & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & P_{13} \\ & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & P_{14} \end{array}$$

Κάνοντας παραγοντοποίηση Cholesky λαμβάνουμε τους πίνακες  $L_r$  και  $D_r$ , παράγοντες του πίνακα  $A_r$ .

$$A_r = L_r \cdot D_r \cdot L_r^T$$

$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,1 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & -0,5 & -1,2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,1 & 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,4 & -0,2 & 0 & 1 & -1,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & -0,1 & -0,1 & -5 & 5 & 1,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,5 & 3 & -3 & -0,9 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0,8 & 0,5 & 1 & -1 & -0,5 & -0,1 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & -0,8 & -0,5 & -1 & 1 & 0,5 & 0,1 & -0,3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_5 \\ P_9 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

$$D_r = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13,3\bar{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_5 \\ P_9 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

Οι πρώτες δύο σειρές του πίνακα  $D_r$  αναφέρονται στους ζυγούς 5 και 9, οι οποίοι έχουν ήδη μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος. Οι άλλες εννιά σειρές αναφέρονται στους ζυγούς 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13 και 14 αντίστοιχα, δηλαδή στους άλλους συνοριακούς ζυγούς των παρατηρήσιμων νησίδων. Παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία, τα οποία αναφέρονται στους ζυγούς 3, 6, 7, 10, 11, 13, 14 είναι μηδενικά, ενώ τα διαγώνια στοιχεία που αναφέρονται στους ζυγούς 2 και 4 είναι μη μηδενικά. Επομένως, πρέπει να τοποθετηθούν δύο μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος στους ζυγούς 2 και 4, ούτως ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

#### 4.7 Συμπεράσματα-Σχόλια

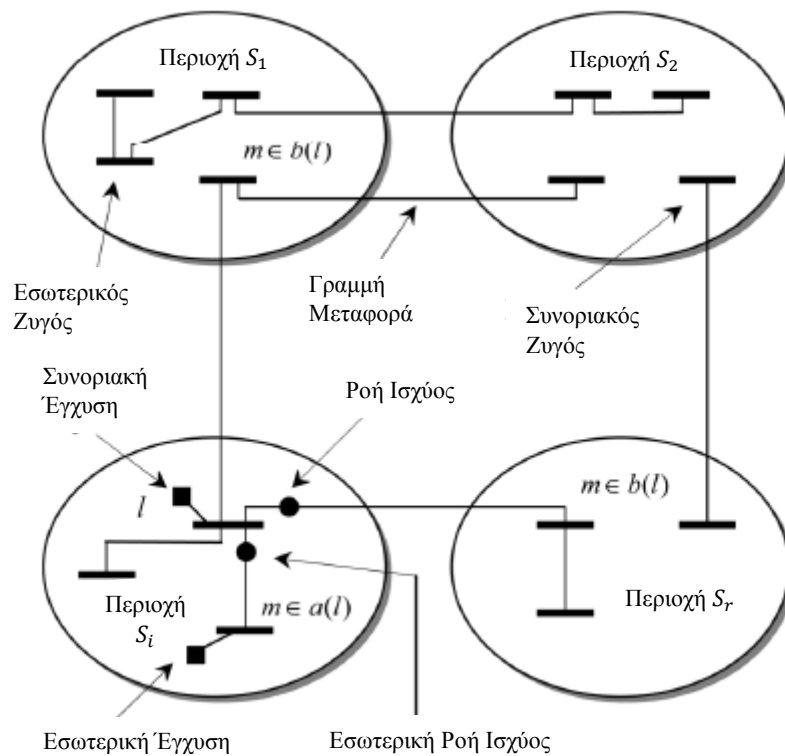
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η μέθοδος εύρεσης των ελάχιστων εγχύσεων που απαιτούνται, έτσι ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο, είναι μία μη επαναληπτική μέθοδος. Ύστερα από τη δημιουργία του πίνακα  $A_r$  και βρίσκοντας τους παράγοντες Cholesky με την ομώνυμη μέθοδο, μπορούμε απευθείας να εντοπίσουμε τους συνοριακούς ζυγούς, στους οποίους πρέπει να τοποθετηθεί μέτρηση έγχυσης ενεργού ισχύος. Προφανώς, προϋποτίθεται η ύπαρξη έγκυρων και έγκαιρων μετρήσεων στους ζυγούς αυτούς από κατάλληλα μετρητικά όργανα. Σε διαφορετική περίπτωση, ο ελάχιστος αριθμός εγχύσεων δεν θα είναι αρκετός, για να γίνει το ΣΗΕ πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε, η μέθοδος θα επαναληφθεί μέχρι να υπάρχουν όλες οι προϋποθέσεις της παρατηρησιμότητας.



## 5 Αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης

### 5.1 Περιγραφή αλγορίθμου

Υποθέτουμε ένα Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας, το οποίο αποτελείται από  $n$  ζυγούς και το οποίο έχει χωριστεί σε  $r$  μη επικαλυπτόμενες περιοχές (υποσυστήματα). Κάθε υποσύστημα  $S_i$  αποτελείται από  $n_i$  ζυγούς και ελέγχεται από ένα τοπικό κέντρο ελέγχου. Κάθε τοπικό κέντρο ελέγχου είναι υπεύθυνο για την εκτίμηση κατάστασης του αντίστοιχου υποσυστήματος και συνδέεται σε ένα συντονιστικό-καθολικό κέντρο ελέγχου του ολικού Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο ζυγός αναφοράς του συστήματος εμπεριέχεται περιοχή  $S_1$ .



Εικόνα 13. Σ.Η.Ε. χωρισμένο σε περιοχές

Το μοντέλο μετρήσεων της κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης διατυπώνεται ως εξής:

$$z_i = h_i(x_i) + e_i, i = 1, \dots, r$$

$$z_c = h_c(x) + e_c$$
(1)

Όπου:

$z_i$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων ( $m_i \times 1$ ), το οποίο περιλαμβάνει τις τοπικές μετρήσεις της περιοχής  $S_i$

$z_c$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων ( $m_c \times 1$ ), το οποίο περιλαμβάνει τις συνοριακές μετρήσεις

$x_i = \begin{pmatrix} \delta_i \\ V_i \end{pmatrix}$  είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης, διαστάσεων ( $2n_i \times 1$ ), το οποίο περιλαμβάνει  $n_i$  γωνίες τάσης και  $n_i$  μέτρα τάσεων όλων των ζυγών της περιοχής  $S_i$

$x = (x_1^T \ \dots \ x_r^T)^T$  είναι το ολικό διάνυσμα κατάστασης του συστήματος και έχει διαστάσεις ( $2n \times 1$ )

$h_i, h_c$  είναι διανύσματα μη γραμμικών συναρτήσεων

$e_i, e_c$  είναι διανύσματα σφαλμάτων των μετρήσεων που υπακούν στην κατανομή Gauss

Το σύνολο των μετρήσεων μπορεί να περιλαμβάνει:

- Μετρήσεις μέτρου τάσης

$$V_l^{meas} = V_l + e_{V_l} \quad (2)$$

- Μετρήσεις ροής ενεργού και αέργου ισχύος

$$P_{lm}^{meas} = P_{lm} + e_{P_{lm}} \quad (3)$$

$$Q_{lm}^{meas} = Q_{lm} + e_{Q_{lm}} \quad (4)$$

- Μετρήσεις έγχυσης ενεργού και αέργου ισχύος

$$P_l^{meas} = \left( V_l^2 \cdot g_l + \sum_{m \in a(l)} P_{lm} \right) + \sum_{m \in b(l)} P_{lm} + e_{P_l} \quad (5)$$

$$Q_l^{meas} = \left( -V_l^2 \cdot b_l + \sum_{m \in a(l)} Q_{lm} \right) + \sum_{m \in b(l)} Q_{lm} + e_{Q_l} \quad (6)$$

Όπου:



$$P_{lm} = V_l^2 \cdot (g_{lm} + g_{slm}) - V_l \cdot V_m \cdot [g_{lm} \cdot \cos(\delta_l - \delta_m) + b_{lm} \cdot \sin(\delta_l - \delta_m)]$$

$$Q_{lm} = -V_l^2 \cdot (b_{lm} + b_{slm}) - V_l \cdot V_m \cdot [g_{lm} \cdot \sin(\delta_l - \delta_m) - b_{lm} \cdot \cos(\delta_l - \delta_m)]$$

$l$  είναι ζυγός της περιοχής  $S_i$

$V_l, V_m$  είναι τα μέτρα τάσης των ζυγών  $l$  και  $m$  αντίστοιχα

$\delta_l, \delta_m$  είναι οι γωνίες τάσεων των ζυγών  $l$  και  $m$  αντίστοιχα

$g_{lm} + jb_{lm}$  είναι η εν σειρά αγωγιμότητα της γραμμής  $l - m$

$g_{slm} + jb_{slm}$  είναι η εγκάρσια αγωγιμότητα της γραμμής  $l - m$

$g_l + jb_l$  είναι η εγκάρσια αγωγιμότητα, που είναι συνδεδεμένη στον ζυγό  $l$

$a(l)$  είναι το σύνολο των ζυγών της περιοχής  $S_i$ , οι οποίοι συνδέονται με τον ζυγό  $l$

$b(l)$  είναι το σύνολο των ζυγών των περιοχών  $S_j, j \neq i$ , οι οποίοι συνδέονται με τον ζυγό  $l$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η περιοχή  $S_1$  περιλαμβάνει τουλάχιστον μία μέτρηση μέτρου τάσης.

Το πρόβλημα εκτίμησης κατάστασης πολλαπλών περιοχών μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμό (constrained WLS minimization problem):

$$\text{ελαχιστοποίηση του } J(x) = r_c^T \cdot R_c^{-1} \cdot r_c + \sum_{i=1}^r r_i^T(x_i) \cdot R_i^{-1} \cdot r_i(x_i) \quad (7)$$

$$\text{υπό τον περιορισμό } r_c = z_c - h_c(x)$$

όπου

$$r_i(x) = z_i - h_i(x) \quad (8)$$

ενώ

$$R_i = \text{cov}(e_i) = E(e_i \cdot e_i^T) = \text{diag}(\sigma_1^2 \cdots \sigma_{m_i}^2) \quad (9)$$

$$R_c = \text{cov}(e_c) = E(e_c \cdot e_c^T) = \text{diag}(\sigma_1^2 \cdots \sigma_{m_c}^2)$$

είναι οι πίνακες διασποράς, όπου  $\sigma_i$  είναι η τυπική απόκλιση του σφάλματος, που σχετίζεται με τη μέτρηση  $i$ .

$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$  είναι ο συντελεστής στάθμισης της μέτρησης  $i$

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange*. Η *Lagrangian*  $L(x, \lambda)$  ορίζεται ως εξής:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot r_c^T \cdot R_c^{-1} \cdot r_c + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^r r_i^T(x_i) \cdot R_i^{-1} \cdot r_i(x_i) + \lambda^T \cdot (r_c - z_c + h_c(x)) \quad (10)$$

Όπου  $\lambda$  είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών *Lagrange* και έχει διαστάσεις  $(m_c \times 1)$ . Η εκτιμώμενη κατάσταση  $\hat{x}$  είναι η λύση της (7) και ικανοποιεί τις συνθήκες βελτιστοποίησης:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow - \begin{pmatrix} H_1^T(\hat{x}_1) \cdot R_1^{-1} \\ \vdots \\ H_r^T(\hat{x}_r) \cdot R_r^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 - h_1(\hat{x}_1) \\ \vdots \\ z_r - h_r(\hat{x}_r) \end{pmatrix} + H_c^T(\hat{x}) \cdot \hat{\lambda} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_c} = 0 \Rightarrow R_c^{-1} \cdot r_c + \hat{\lambda} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow r_c - z_c + h_c(\hat{x}) = 0 \quad (13)$$

Από τις σχέσεις (12) και (13) προκύπτει:

$$h_c(\hat{x}) - z_c - R_c \cdot \hat{\lambda} = 0$$

Οι μη γραμμικές εξισώσεις (11) και (14) λύνονται ως προς  $\hat{x}$  από τις ακόλουθες επαναληπτικές σχέσεις:

$$\begin{pmatrix} G_1(x_1^k) & & \\ & \ddots & \\ & & G_r(x_r^k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1^k \\ \vdots \\ \Delta x_r^k \end{pmatrix} + H_c^T(x^k) \cdot \lambda^{k+1} = \begin{pmatrix} H_1^T(x_1^k) \cdot R_1^{-1} \cdot \Delta z_1^k \\ \vdots \\ H_r^T(x_r^k) \cdot R_r^{-1} \cdot \Delta z_r^k \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$H_c(x^k) \cdot \Delta x^k - R_c \cdot \lambda^{k+1} = \Delta z_c^k$$

όπου  $k$  είναι ο δείκτης της επανάληψης.

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ \vdots \\ x_i^{k+1} - x_i^k \\ \vdots \\ x_r^{k+1} - x_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^k \\ \vdots \\ \Delta x_i^k \\ \vdots \\ \Delta x_r^k \end{pmatrix}$$

$$\Delta z_i^k = z_i - h_i(x_i^k), \quad i = 1, \dots, r$$

$$\Delta z_c = z_c - h_c(x^k)$$

$H_i(x_i^k) = \frac{\partial h_i(x_i^k)}{\partial x_i}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, ο οποίος σχετίζεται με τις εσωτερικές μετρήσεις της περιοχής  $S_i$ . Οι διαστάσεις του είναι  $(m_i \times 2n_i)$ .

Τότε, μπορεί να σχηματιστεί ο πίνακας κέρδους  $G$  της περιοχής  $S_i$ , ο οποίος έχει διαστάσεις  $(2n_i \times 2n_i)$ . Θα είναι λοιπόν:

$$G_i(x_i^k) = H_i^T(x_i^k) \cdot R_i^{-1} \cdot H_i(x_i^k) \quad (16)$$

$H_c(x^k) = \frac{\partial h_c(x^k)}{\partial x}$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, ο οποίος σχετίζεται με τις συνοριακές μετρήσεις και έχει διαστάσεις  $(m_c \times 2n)$ . Οι συνοριακές μετρήσεις μπορούν να κατανεμηθούν ως εξής:

$$H_c(x^k) = [H_{c1}(x_1^k) \quad \dots \quad H_{cr}(x_r^k)] \quad (17)$$

όπου  $H_{ci}(x_i^k)$  είναι ο υποπίνακας του  $H_c(x^k)$ , που εμπεριέχει τις στήλες του  $H_c(x^k)$ , οι οποίες αντιστοιχούν στους ζυγούς της περιοχής  $S_i$ . Ο πίνακας  $H_{ci}(x_i^k)$  έχει διαστάσεις  $(m_c \times 2n_i)$ .

Από τις σχέσεις (15) και (17) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} G_1(x_1^k) & & & H_{c1}^T(x_1^k) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & G_r(x_r^k) & H_{cr}^T(x_r^k) \\ H_{c1}(x_1^k) & \dots & H_{cr}(x_r^k) & -R_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1^k \\ \vdots \\ \Delta x_r^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^T(x_1^k) \cdot R_1^{-1} \cdot \Delta z_1^k \\ \vdots \\ H_r^T(x_r^k) \cdot R_r^{-1} \cdot \Delta z_r^k \\ \Delta z_c^k \end{pmatrix} \quad (18)$$

Από τη σχέση (18) προκύπτουν οι ακόλουθες επαναληπτικές εξισώσεις, οι οποίες θα πρέπει να επιλυθούν σε κάθε ανακύκλωση του αλγορίθμου:

$$\Delta y_i^k = G_i^{-1}(x_i^k) \cdot H_i^T(x_i^k) \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^k, \quad i = 1, \dots, r \quad (19)$$

$$\lambda^{k+1} = G_c^{-1}(x^k) \cdot \left( \Delta z_c^k - \sum_{i=1}^r H_{ci}(x_i^k) \cdot \Delta y_i^k \right) \quad (20)$$

$$u_i^{k+1} = G_i^{-1}(x_i^k) \cdot H_{ci}^T(x_i^k) \cdot \lambda^{k+1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (21)$$

$$\Delta x_i^k = \Delta y_i^k + u_i^{k+1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (22)$$

όπου

$$\begin{aligned} G_c(x^k) &= \sum_{i=1}^r (R_{ci} + H_{ci}(x_i^k) \cdot G_i^{-1}(x_i^k) \cdot H_{ci}^T(x_i^k)) \Rightarrow \\ G_c(x^k) &= \sum_{i=1}^r G_{ci}(x^k) + R_c \end{aligned} \quad (23)$$

είναι ο πίνακας κέρδους, ο οποίος σχετίζεται με τις συνοριακές μετρήσεις και έχει διαστάσεις  $(m_c \times m_c)$ . Ο πίνακας διασποράς  $R_{ci}$  περιλαμβάνει μόνο τα διαγώνια στοιχεία του  $R_c$ , τα οποία σχετίζονται με τις συνοριακές μετρήσεις της περιοχής  $S_i$ .

Ο πίνακας  $R_c$  ορίζεται ως:

$$R_c = \sum_{i=1}^r R_{ci}$$

Ο πίνακας  $G_{ci}(x^k)$  ορίζεται ως:

$$G_{ci}(x^k) = H_{ci}(x_i^k) \cdot G_i^{-1}(x_i^k) \cdot H_{ci}^T(x_i^k)$$

Οι επαναληπτικές σχέσεις (19) – (22) είναι η βάση του προτεινόμενου αλγορίθμου κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης.

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτουν τα ακόλουθα βήματα για την επίλυση του αλγορίθμου κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης:

1. Ταυτόχρονα, κάθε περιοχή  $S_i$ 
  - Διαβάζει τις παραμέτρους του δικού της δικτύου και τις γραμμές διασύνδεσης, οι οποίες συνδέουν την περιοχή  $S_i$  με το υπόλοιπο σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας.
  - Διαβάζει τις εσωτερικές μετρήσεις  $z_i$ , καθώς και τις συνοριακές μετρήσεις  $z_{ci}$ .
  - Υπολογίζει τον Ιακωβιανό πίνακα  $H_i$ , τον Ιακωβιανό πίνακα  $H_{ci}$  τον πίνακα κέρδους  $G_i$  και τον πίνακα κέρδους  $G_{ci}$ .

$$G_i = H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot H_i$$

$$G_{ci} = H_{ci} \cdot G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T$$

- Στέλνει στον κεντρικό συντονιστή τους πίνακες  $H_{ci}$  και  $G_{ci}$
2. Ο κεντρικός συντονιστής
    - Διαβάζει όλες τις παραμέτρους των γραμμών διασύνδεσης
    - Υπολογίζει τον πίνακα κέρδους

$$G_c = \sum_{i=1}^r G_{ci} + R_c$$

και τους παράγοντες, που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση *Cholesky*

$$G_c = L_c \cdot D_c \cdot L_c^T$$

- Μεταφέρει τους παράγοντες  $L_c$  και  $D_c$  σε κάθε περιοχή
3. Αρχικοποιούμε  $k = 0$  και το διάνυσμα παραμέτρων  $x_i^0$  ως *flat start*, δηλαδή τις γωνίες τάσεων ίσες με το μηδέν και τα μέτρα των τάσεων ίσα με τη μονάδα. Κατόπιν, πραγματοποιούμε την ακόλουθη επαναληπτική διαδικασία.
  4. Κάθε περιοχή  $S_i$  υπολογίζει το διάνυσμα

$$\Delta y_i^k = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^k.$$

Κατόπιν, υπολογίζει το διάνυσμα

$$\rho_i^{k+1} = \Delta z_{ci}^k - H_{ci}(x_i^k) \cdot \Delta y_i^k$$

και το στέλνει στον κεντρικό συντονιστή

5. Ο κεντρικός συντονιστής υπολογίζει το διάνυσμα:

$$\rho_c^{k+1} = \sum_{i=1}^r \rho_i^{k+1}$$

Ύστερα, υπολογίζει το διάνυσμα

$$\lambda^{k+1} = G_c^{-1} \cdot \rho_c^{k+1}$$

Κατόπιν, στέλνει το διάνυσμα  $\lambda^{k+1}$  σε κάθε περιοχή  $S_i$ .

6. Όταν κάθε περιοχή  $S_i$  συλλέξει το διάνυσμα  $\lambda^{k+1}$ , τότε υπολογίζεται το διάνυσμα

$$u_i^{k+1} = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^{k+1}$$

7. Κάθε περιοχή  $S_i$  υπολογίζει το διάνυσμα

$$\Delta x_i^k = \Delta y_i^k + u_i^{k+1}$$

και στέλνει στον κεντρικό συντονιστή μόνο τα στοιχεία του διανύσματος  $x_i^{k+1}$ , τα οποία σχετίζονται με τους συνοριακούς ζυγούς, που αφορούν τις συνοριακές μετρήσεις  $z_{ci}$ . Τότε, κάθε περιοχή  $S_i$  ελέγχει αν υπάρχει εσωτερική σύγκλιση, δηλαδή αν το υποσύστημα  $S_i$  συγκλίνει. Έπειτα, ενημερώνει τον κεντρικό συντονιστή για την κατάσταση εσωτερικής σύγκλισης. Αν υπάρχει σύγκλιση σε όλα τα υποσυστήματα, τότε καταλήγουμε σε σύγκλιση του Κατανεμημένου Εκτιμητή Κατάστασης που αφορά όλο το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας. Αν δεν υπάρξει σύγκλιση, τότε θέτουμε  $k = k + 1$  και επιστρέφουμε στο βήμα 4.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος περιλαμβάνει δύο στάδια:

- i. Μη επαναληπτικό στάδιο, στο οποίο υπολογίζονται οι πίνακες κέρδους και οι παράγοντές τους κατά *Cholesky*
- ii. Επαναληπτικό στάδιο, στο οποίο γίνονται οι ανακυκλώσεις του Κατανεμημένου Εκτιμητή Κατάστασης.

Τα δεδομένα, τα οποία απαιτούνται να μεταφερθούν για κάθε στάδιο είναι:

- i. Μη επαναληπτικό στάδιο
  - Μεταφέρονται οι πίνακες  $H_{ci}$  και  $G_{ci}$  από κάθε περιοχή  $S_i$  προς τον κεντρικό συντονιστή.

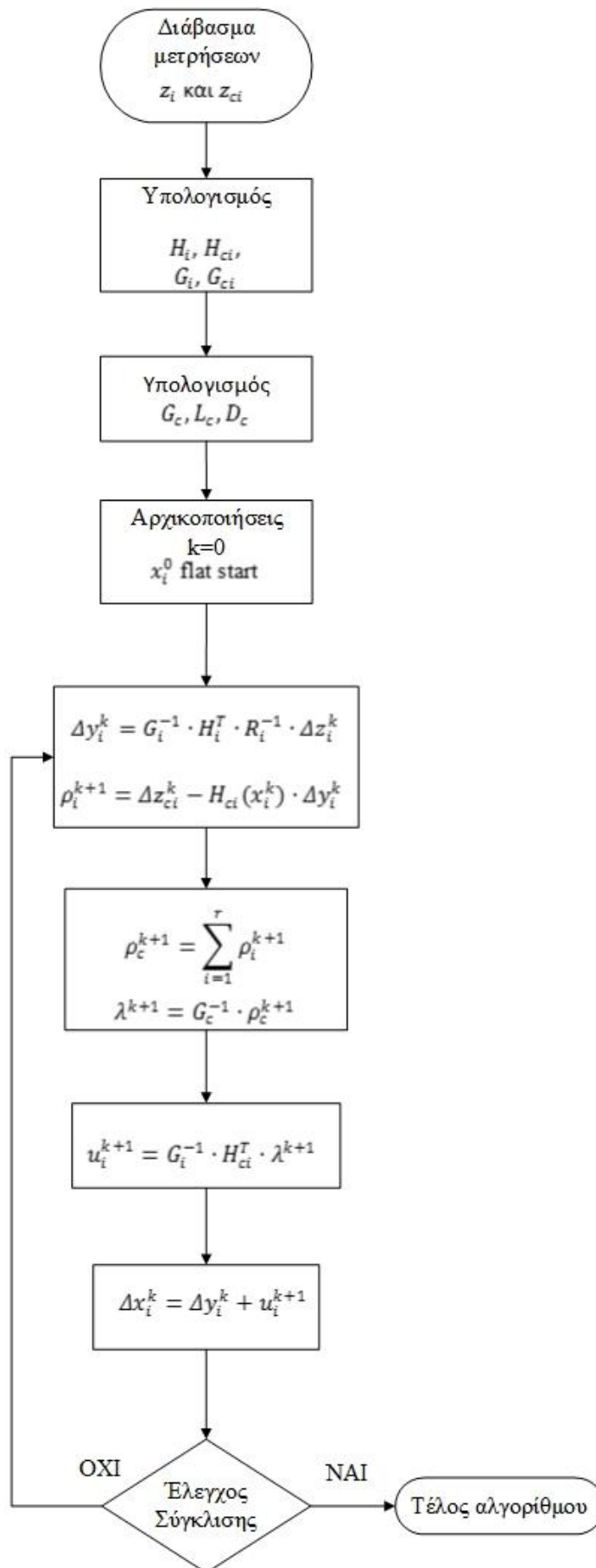
- Μεταφέρονται οι παράγοντες *Cholesky*  $L_c$  και  $D_c$  του πίνακα κέρδους  $G_c$  από τον κεντρικό συντονιστή προς κάθε περιοχή  $S_i$ .

ii. Επαναληπτικό στάδιο

- Μεταφέρεται το διάνυσμα  $\rho_i^{k+1}$  και οι ανανεωμένες γωνίες και μέτρα τάσεων των συνοριακών ζυγών, που σχετίζονται με τις συνοριακές μετρήσεις  $z_{ci}$ , από κάθε περιοχή  $S_i$  προς τον κεντρικό συντονιστή.
- Μεταφέρεται το διάνυσμα  $\lambda^{k+1}$  από τον κεντρικό συντονιστή προς κάθε περιοχή  $S_i$ .

Η υπολογιστική ταχύτητα του επαναληπτικού σταδίου εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το υποσύστημα, το οποίο θα χρειαστεί τον περισσότερο χρόνο, ώστε να συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει, διότι ο κεντρικός συντονιστής απαιτεί το λιγότερο χρόνο. Κατά τη διάρκεια του επαναληπτικού σταδίου, ανταλλάσσεται μόνο μία μικρή ποσότητα δεδομένων μεταξύ κάθε περιοχής και του κεντρικού συντονιστή. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου Κατανεμημένου Εκτιμητή Κατάστασης είναι ότι σε περίπτωση που αποτύχει η επικοινωνία μεταξύ μιας περιοχής και του κεντρικού συντονιστή ή σε περίπτωση μη σύγκλισης ενός τοπικού εκτιμητή, η λύση της Εκτίμησης Κατάστασης μπορεί να συνεχιστεί για το υπόλοιπο Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας με κατανεμημένο τρόπο. (17)

Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου αλγορίθμου Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης:



Εικόνα 14: Διάγραμμα Ροής Αλγορίθμου Κατανομισμένης Εκτίμησης Κατάστασης



## 5.2 Ανάλυση Παρατηρησιμότητας

Κάθε περιοχή  $S_i$  είναι παρατηρήσιμη αν και μόνο αν:

$$\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(H_i) = \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(G_i) = 2n_i - 1 \quad (24)$$

Αν κάποια περιοχή δεν είναι παρατηρήσιμη, τότε βρίσκουμε τις παρατηρήσιμες νησίδες και αποκαθιστούμε την παρατηρησιμότητα της περιοχής.

Αφού ελέγξουμε ότι όλες οι περιοχές είναι παρατηρήσιμες, ελέγχουμε και την ολική παρατηρησιμότητα του ολικού Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Αν είναι και αυτό πλήρως παρατηρήσιμο, τότε ο αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης μπορεί να επιλυθεί.

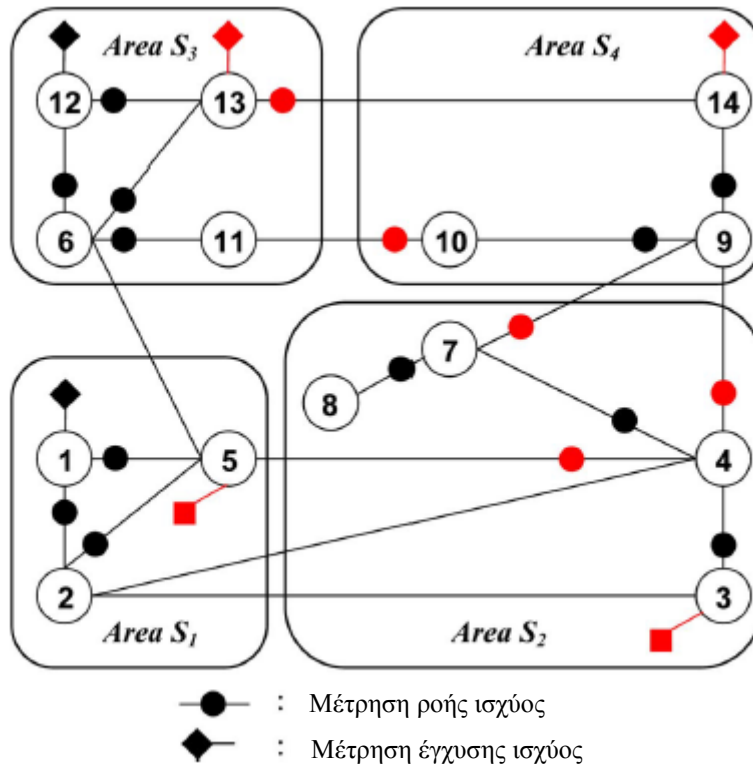
Υποθέτουμε ότι έχουμε εξασφαλίσει την παρατηρησιμότητα κάθε περιοχής, αλλά και του ολικού συστήματος. Σύμφωνα με την (24), οι πίνακες  $G_i$  είναι μη αντιστρέψιμοι και τότε οι εξισώσεις (19) και (21) δεν μπορούν να επιλυθούν. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί ως εξής:

- Τοποθετούμε στον ζυγό αναφοράς του ΣΗΕ (ο οποίος έχουμε υποθέσει χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ανήκει στην περιοχή  $S_1$ ) μία ψευδομέτρηση γωνίας τάσης, η οποία έχει μηδενική τιμή και αυθαίρετη διασπορά. Η ψευδομέτρηση αυτή συμπεριλαμβάνεται στο διάνυσμα μετρήσεων  $z_1$  της περιοχής  $S_1$ , καθώς και στη δημιουργία του πίνακα  $H_1$ .
- Τοποθετούμε στον τοπικό ζυγό αναφοράς κάθε περιοχής  $S_i, i \neq 1$  μία ψευδομέτρηση γωνίας τάσης, η οποία έχει μηδενική τιμή και αυθαίρετη διασπορά. Η ψευδομέτρηση αυτή συμπεριλαμβάνεται στο διάνυσμα μετρήσεων  $z_i$  της περιοχής  $S_i$ , καθώς και στη δημιουργία του πίνακα  $H_i$ . Επίσης, συμπεριλαμβάνεται στο διάνυσμα συνοριακών μετρήσεων  $z_{ci}$  της περιοχής  $S_i$  και στη δημιουργία του πίνακα  $H_{ci}$ , αλλά αυτή τη φορά έχει αντίθετη τιμή διασποράς από πριν.

Έτσι, οι πίνακες  $G_i$  γίνονται αντιστρέψιμοι και τότε οι εξισώσεις (19) και (21) επιδέχονται λύση. (17)

## 5.3 Παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου

Θεωρούμε το παρακάτω Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας:



Εικόνα 15: Σ.Η.Ε. 14 ζυγών χωρισμένο σε περιοχές

Όπως φαίνεται στην εικόνα, το ΣΗΕ έχει χωριστεί σε τέσσερις περιοχές:

Πίνακας 6: Περιοχές Σ.Η.Ε 14 ζυγών

Περιοχή	Ζυγοί
1	1, 2, 5
2	3, 4, 7, 8
3	6, 11, 12, 13
4	9, 10, 14

Οι διαθέσιμες μετρήσεις κάθε περιοχής έχουν ομαδοποιηθεί σε εσωτερικές και συνοριακές μετρήσεις.

Για τις εσωτερικές μετρήσεις έχουμε:

Πίνακας 7: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 1

Περιοχή 1			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Άφιξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	1	-	0

Μετρήσεις μέτρου τάσης	1	-	1,06
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	1	-	0,232
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	1	-	-0,017
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	1	2	0,157
	1	5	0,076
	2	5	0,042
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	1	2	-0,020
	1	5	0,004
	2	5	0,001

Πίνακας 8: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 2

Περιοχή 2			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	3	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	7	-	1,062
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	3	4	-0,023
	4	7	0,028
	7	8	0
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	3	4	0,004
	4	7	-0,010
	7	8	-0,017

Πίνακας 9: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 3

Περιοχή 3			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	6	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	11	-	1,057
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	12	-	-0,006
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	12	-	-0,002

<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	6	11	0,007
	6	12	0,008
	6	13	0,018
	12	13	0,002
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	6	11	0,004
	6	12	0,003
	6	13	0,007
	12	13	0,001

Πίνακας 10: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 4

<b>Περιοχή 4</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	9	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	14	-	1,034
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	9	10	0,005
	9	14	0,009
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	9	10	0,004
	9	14	0,004

Για τις συνοριακές μετρήσεις έχουμε:

Πίνακας 11: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 1

<b>Περιοχή 1</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	5	-	-0,008
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	5	-	-0,002

Πίνακας 12: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 2

<b>Περιοχή 2</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	3	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	3	-	-0,094
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	3	-	0,006
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	4	5	-0,061
	4	9	0,016
	7	9	0,028
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	4	5	0,016
	4	9	-0,001
	7	9	0,006

Πίνακας 13: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 3

<b>Περιοχή 3</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	6	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	13	-	-0,013
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	13	-	-0,006
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	13	14	0,006
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	13	14	0,002

Πίνακας 14: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 4

<b>Περιοχή 4</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>

Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	9	-	0
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	14	-	-0,015
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	14	-	-0,005
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	10	11	-0,004
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	10	11	-0,002

Από τις εσωτερικές μετρήσεις λαμβάνουμε τους παρακάτω Ιακωβιανούς πίνακες  $H_i$ :

$$H_1 = \begin{array}{cccccc|l} & \delta_1 & \delta_2 & \delta_5 & V_1 & V_2 & V_5 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & V_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{1-2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{1-5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{2-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & Q_{1-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & Q_{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & Q_{2-5} \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & Q_1 \end{array}$$

$$H_2 = \begin{array}{cccccccc|c} & \delta_3 & \delta_4 & \delta_7 & \delta_8 & V_3 & V_4 & V_7 & V_8 & \\ \hline \left[ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} \delta_3 \\ V_3 \\ P_{3-4} \\ P_{4-7} \\ P_{7-8} \\ Q_{3-4} \\ Q_{4-7} \\ Q_{7-8} \end{array} \end{array}$$

$$H_3 = \begin{array}{cccccccc|c} & \delta_6 & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & V_6 & V_{11} & V_{12} & V_{13} & \\ \hline \left[ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} \delta_6 \\ V_6 \\ P_{6-11} \\ P_{6-12} \\ P_{6-13} \\ P_{12-13} \\ Q_{6-11} \\ Q_{6-12} \\ Q_{6-13} \\ Q_{12-13} \\ P_{12} \\ Q_{12} \end{array} \end{array}$$

$$H_4 = \begin{array}{cccccc|c} \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{14} & V_9 & V_{10} & V_{14} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & V_9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{9-10} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{9-14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & Q_{9-10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & Q_{9-14} \end{array}$$

Οι πίνακες κέρδους  $G_i$  υπολογίζονται ως εξής:

$$G_i = H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot H_i$$

$$G_1 = 10^4 \times \begin{array}{cccccc|c} 7 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 & V_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & V_5 \end{array}$$

$$G_2 = 10^4 \times \begin{array}{cccccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & V_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & V_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & V_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & V_8 \end{array}$$



$$G_3 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_6 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \\ V_6 \\ V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{matrix}$$

$$G_4 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{14} \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{14} \end{matrix}$$

Από τις συνοριακές μετρήσεις λαμβάνουμε τους παρακάτω Ιακωβιανούς πίνακες  $H_{ci}$ :

$$H_{c1} = \begin{array}{cccccc}
& \delta_1 & \delta_2 & \delta_5 & V_1 & V_2 & V_5 \\
\left[ \begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right] \begin{array}{l}
\delta_3 \\
\delta_6 \\
\delta_9 \\
P_{4-5} \\
P_{4-9} \\
P_{7-9} \\
P_{13-14} \\
P_{10-11} \\
Q_{4-5} \\
Q_{4-9} \\
Q_{7-9} \\
Q_{13-14} \\
Q_{10-11} \\
P_5 \\
P_3 \\
P_{13} \\
P_{14} \\
Q_5 \\
Q_3 \\
Q_{13} \\
Q_{14}
\end{array}
\end{array}$$

$$H_{c2} = \begin{array}{cccccccc|c}
\delta_3 & \delta_4 & \delta_7 & \delta_8 & V_3 & V_4 & V_7 & V_8 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_9 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-9} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13-14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10-11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Q_{4-5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Q_{4-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q_{7-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{13-14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{10-11} \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Q_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & Q_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14}
\end{array}$$

$$H_{c3} = \begin{array}{cccccccc|c}
\delta_6 & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & V_6 & V_{11} & V_{12} & V_{13} & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13-14} \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10-11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{4-5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{4-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{7-9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{13-14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Q_{10-11} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\
-1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13} \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & Q_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & Q_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & Q_{14}
\end{array}$$

$$H_{c4} = \begin{array}{cccccc|l} \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{14} & V_9 & V_{10} & V_{14} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-5} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-9} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{13-14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{4-5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Q_{4-9} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & Q_{7-9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & Q_{13-14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q_{10-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{13} \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & Q_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & Q_{14} \end{array}$$

Από τη σχέση (23), ο πίνακας  $G_c$  υπολογίζεται ως εξής:

$$G_c = \sum_{i=1}^4 (R_{ci} + H_{ci} \cdot G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T) \Rightarrow$$

$$G_c = \sum_{i=1}^4 G_{ci} + R_c$$

Αφού υπολογιστούν οι παραπάνω πίνακες, αρχίζει η επαναληπτική διαδικασία του αλγορίθμου.

1<sup>η</sup> επανάληψη:

Από τις σχέσεις (19) – (22) θα έχουμε:

$$\Delta y_i^1 = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^1$$

$$\lambda^1 = G_c^{-1} \cdot \left( \Delta z_c^1 - \sum_{i=1}^r H_{ci} \cdot \Delta y_i^1 \right)$$

$$u_i^1 = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^1$$

$$\Delta x_i^1 = \Delta y_i^1 + u_i^1$$

$$X_1 = X_0 + \Delta x$$

Πίνακας 15: Αποτελέσματα 1<sup>ης</sup> Επανάληψης

Αριθμός Ζυγού	Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)	Γωνία Τάσης (μοίρες)
1	1,0509	0
2	1,0623	-6,602
3	1,0615	-10,933
4	1,0554	-9,778
5	1,0542	-6,784
6	1,0527	-10,529
7	1,0598	-10,551
8	1,0769	-10,551
9	1,0488	-11,325
10	1,0456	-11,472
11	1,0482	-11,103
12	1,0490	-11,151
13	1,0470	-11,420
14	1,0453	-11,802

Η μεγαλύτερη διαφορά κατά απόλυτη τιμή μεταξύ του αρχικού διανύσματος  $X_0$  και του νέου διανύσματος εκτίμησης  $X_1$  είναι ίση με  $0,2060 > 10^{-4}$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, οπότε απαιτείται τουλάχιστον και δεύτερη επανάληψη.

2<sup>η</sup> επανάληψη:

Από τις σχέσεις (19) – (22) θα έχουμε:

$$\Delta y_i^2 = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^2$$

$$\lambda^2 = G_c^{-1} \cdot \left( \Delta z_c^2 - \sum_{i=1}^r H_{ci} \cdot \Delta y_i^2 \right)$$

$$u_i^2 = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^2$$

$$\Delta x_i^2 = \Delta y_i^2 + u_i^2$$

$$X_2 = X_1 + \Delta x$$

Πίνακας 16: Αποτελέσματα 2<sup>ης</sup> Επανάληψης

Αριθμός Ζυγού	Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)	Γωνία Τάσης (μοίρες)
1	1,0477	0
2	1,0672	-5,874
3	1,0636	-9,691
4	1,0585	-8,698
5	1,0550	-6,044
6	1,0592	-9,367
7	1,0631	-9,384
8	1,0792	-9,384
9	1,0531	-10,077
10	1,0509	-10,212
11	1,0542	-9,879
12	1,0554	-9,923
13	1,0532	-10,166
14	1,0507	-10,509

Η μεγαλύτερη διαφορά κατά απόλυτη τιμή μεταξύ του διανύσματος κατάστασης  $X_1$  και του νέου διανύσματος εκτίμησης κατάστασης  $X_2$  είναι ίση με  $0,0226 > 10^{-4}$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, οπότε απαιτείται τουλάχιστον και τρίτη επανάληψη.

3<sup>η</sup> επανάληψη:

Από τις σχέσεις (19) – (22) θα έχουμε:

$$\Delta y_i^3 = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^3$$

$$\lambda^3 = G_c^{-1} \cdot \left( \Delta z_c^3 - \sum_{i=1}^r H_{ci} \cdot \Delta y_i^3 \right)$$

$$u_i^3 = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^3$$

$$\Delta x_i^3 = \Delta y_i^3 + u_i^3$$

$$X_3 = X_2 + \Delta x$$

Πίνακας 17: Αποτελέσματα 3<sup>ης</sup> Επανάληψης

Αριθμός Ζυγού	Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)	Γωνία Τάσης (μοίρες)
1	1,0484	0
2	1,0656	-5,950
3	1,0628	-9,808
4	1,0576	-8,804
5	1,0549	-6,128
6	1,0585	-9,478
7	1,0622	-9,495
8	1,0783	-9,495
9	1,0522	-10,189
10	1,0500	-10,323
11	1,0534	-9,991
12	1,0547	-10,034
13	1,0525	-10,277
14	1,0499	-10,621

Η μεγαλύτερη διαφορά κατά απόλυτη τιμή μεταξύ του διανύσματος κατάστασης  $X_2$  και του νέου διανύσματος εκτίμησης κατάστασης  $X_3$  είναι ίση με  $0,0020 > 10^{-4}$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, οπότε απαιτείται τουλάχιστον και τέταρτη επανάληψη.

4<sup>η</sup> επανάληψη:

Από τις σχέσεις (19) – (22) θα έχουμε:

$$\Delta y_i^4 = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^4$$

$$\lambda^4 = G_c^{-1} \cdot \left( \Delta z_c^4 - \sum_{i=1}^r H_{ci} \cdot \Delta y_i^4 \right)$$



$$u_i^4 = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^4$$

$$\Delta x_i^4 = \Delta y_i^4 + u_i^4$$

$$X_4 = X_3 + \Delta x$$

Πίνακας 18: Αποτελέσματα 4<sup>ης</sup> Επανάληψης

Αριθμός Ζυγού	Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)	Γωνία Τάσης (μοίρες)
1	1,0483	0
2	1,0658	-5,944
3	1,0628	-9,803
4	1,0577	-8,796
5	1,0549	-6,119
6	1,0586	-9,471
7	1,0622	-9,488
8	1,0784	-9,488
9	1,0522	-10,183
10	1,0500	-10,317
11	1,0535	-9,984
12	1,0548	-10,028
13	1,0525	-10,270
14	1,0499	-10,616

Η μεγαλύτερη διαφορά κατά απόλυτη τιμή μεταξύ του διανύσματος κατάστασης  $X_3$  και του νέου διανύσματος εκτίμησης κατάστασης  $X_4$  είναι ίση με  $1,8113 \cdot 10^{-4} > 10^{-4}$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, οπότε απαιτείται τουλάχιστον και πέμπτη επανάληψη.

5<sup>η</sup> επανάληψη:

Από τις σχέσεις (19) – (22) θα έχουμε:

$$\Delta y_i^5 = G_i^{-1} \cdot H_i^T \cdot R_i^{-1} \cdot \Delta z_i^5$$

$$\lambda^5 = G_c^{-1} \cdot \left( \Delta z_c^5 - \sum_{i=1}^r H_{ci} \cdot \Delta y_i^5 \right)$$

$$u_i^5 = G_i^{-1} \cdot H_{ci}^T \cdot \lambda^5$$

$$\Delta x_i^5 = \Delta y_i^5 + u_i^5$$

$$X_5 = X_4 + \Delta x$$

Πίνακας 19: Αποτελέσματα 5<sup>ης</sup> Επανάληψης

Αριθμός Ζυγού	Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)	Γωνία Τάσης (μοίρες)
1	1,0483	0
2	1,0658	-5,945
3	1,0628	-9,803
4	1,0577	-8,797
5	1,0549	-6,120
6	1,0586	-9,472
7	1,0622	-9,488
8	1,0784	-9,488
9	1,0522	-10,184
10	1,0500	-10,318
11	1,0535	-9,985
12	1,0548	-10,029
13	1,0525	-10,271
14	1,0499	-10,616

Η μεγαλύτερη διαφορά κατά απόλυτη τιμή μεταξύ του διανύσματος κατάστασης  $X_4$  και του νέου διανύσματος εκτίμησης κατάστασης  $X_5$  είναι ίση με  $2,2065 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$ . Επομένως, υπάρχει σύγκλιση και ο αλγόριθμος τερματίζεται. Οι παραπάνω τιμές είναι και το τελικό διάνυσμα εκτίμησης κατάστασης.

## 6 Εφαρμογή αλγορίθμου κατανεμημένης εκτίμησης κατάστασης σε δίκτυο 107 ζυγών στην Κρήτη

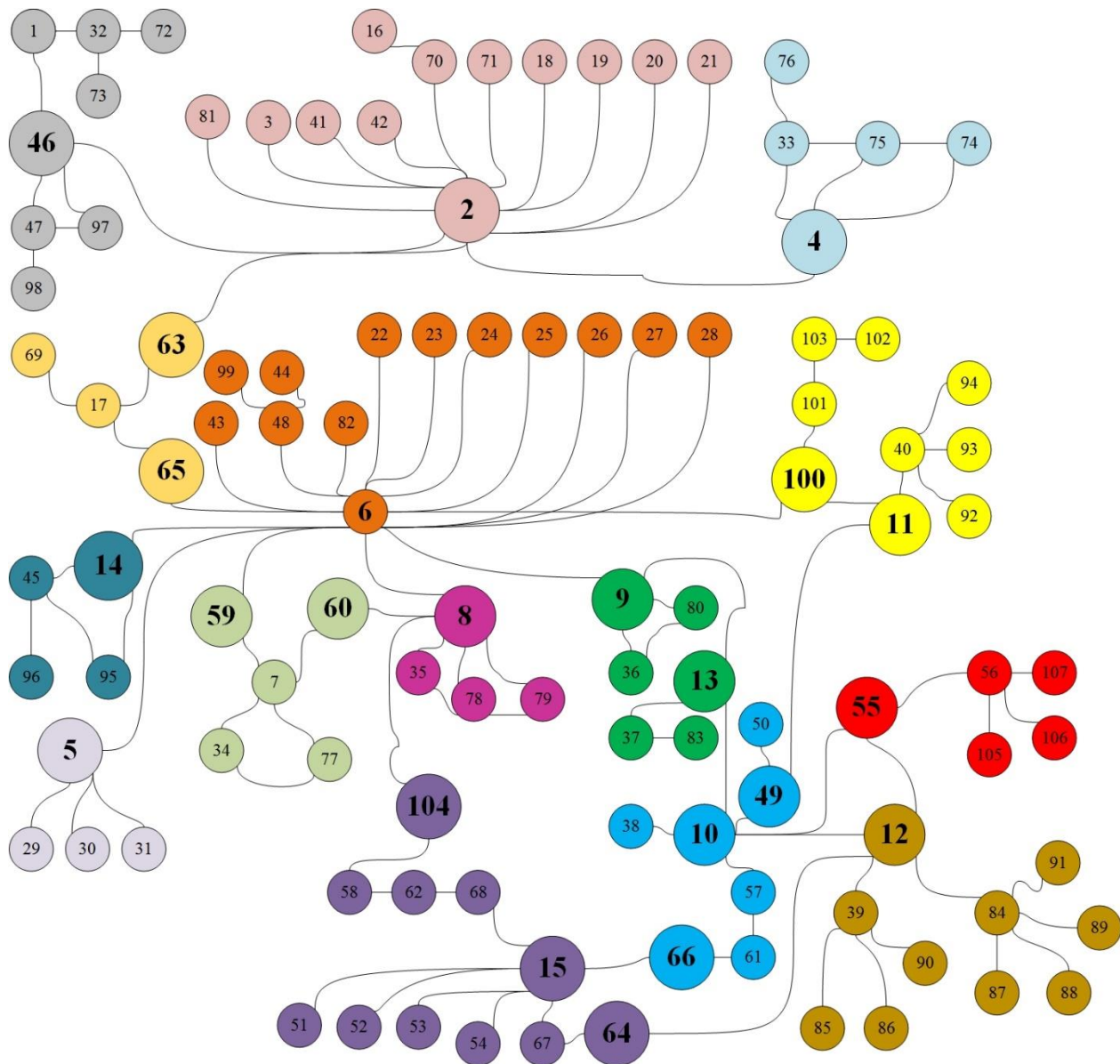
### 6.1 Χωρισμός σε περιοχές

Το δίκτυο των 107 ζυγών χωρίστηκε σε 15 περιοχές ως εξής:

Πίνακας 20: Περιοχές Σ.Η.Ε. 107 ζυγών

Περιοχή	Ζυγοί
1	1, 32, 46, 47, 72, 73, 97, 98
2	2, 3, 16, 18, 19, 20, 21, 41, 42, 70, 71, 81
3	4, 33, 74, 75, 76
4	17, 63, 65, 69
5	6, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 43, 44, 48, 82, 99
6	14, 45, 95, 96
7	7, 34, 59, 60, 77
8	8, 35, 78, 79
9	5, 29, 30, 31
10	11, 40, 92, 93, 94, 100, 101, 102, 103
11	9, 13, 36, 37, 80, 83
12	10, 38, 49, 50, 57, 61, 66
13	15, 51, 52, 53, 54, 58, 62, 64, 67, 68, 104
14	55, 56, 105, 106, 107
15	12, 39, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91

Μία γραφική αναπαράσταση του χωρισμένου ΣΗΕ φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 16: Σ.Η.Ε. 107 ζυγών χωρισμένο σε περιοχές

## 6.2 Διαθέσιμες μετρήσεις

Οι διαθέσιμες μετρήσεις κάθε περιοχής έχουν ομαδοποιηθεί σε εσωτερικές και συνολικές μετρήσεις.

Για τις εσωτερικές μετρήσεις έχουμε:

Πίνακας 21: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 1

Περιοχή 1			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	1	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	1	-	1,0004
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	1	-	-0,0090
	32	-	-0,0087
	73	-	-0,0042
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	1	-	-0,0044
	32	-	-0,0048
	73	-	-0,0044
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	1	46	-0,0244
	47	98	0,0034
	46	47	0,0104
	46	97	0,0104
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	1	46	-0,0177
	47	98	0,0037
	46	47	0,0068
	46	97	0,0068

Πίνακας 22: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 2

Περιοχή 2			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	2	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	2	-	1,0015
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	3	-	-0,0088
	18	-	0,0121
	19	-	-0,0001
	21	-	0
	42	-	0,0001

	71	-	-0,0088
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	3	-	-0,0048
	18	-	-0,0066
	19	-	-0,0063
	21	-	-0,0057
	42	-	-0,0087
	71	-	-0,0048
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	3	70	-0,0005
	70	71	-0,0009
	2	3	0,0083
	2	20	-0,0186
	2	21	0
	2	41	-0,3863
	2	81	-0
	16	70	0
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	3	70	-0,0006
	70	71	-0,0001
	2	3	0,0043
	2	20	0,0069
	2	21	0,0057
	2	41	0,0319
	2	81	0,0051
	16	70	0,0012

Πίνακας 23: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 3

<b>Περιοχή 3</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	4	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	4	-	1,0015
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	33	-	-0,0088
	75	-	-0,0088
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	33	-	-0,0048
	75	-	-0,0048
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	33	75	-0,0060
	74	75	0,0030
	4	33	0,0118
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	33	75	-0,0028
	74	75	0,0014
	4	33	0,0063

Πίνακας 24: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 4

<b>Περιοχή 4</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	17	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	17	-	1,0018
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	17	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	17	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	17	63	-0,1514
	17	65	0,1337
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	17	63	0,0406
	17	65	-0,0498

Πίνακας 25: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 5

<b>Περιοχή 5</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	6	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	6	-	1,0019
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	23	-	0,0220
	25	-	0,0098
	26	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	23	-	-0,0071
	25	-	-0,0034
	26	-	-0,0030
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	48	99	0,0064
	6	22	0
	6	23	-0,0220
	6	24	-0,0224
	6	27	-0,0101
	6	28	-0,0103
	6	43	-0,0001
	6	48	0,0151

	6	82	0
	44	48	0
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	48	99	0,0044
	6	22	0,0064
	6	23	0,0073
	6	24	0,0073
	6	27	0,0035
	6	28	0,0035
	6	43	0,0095
	6	48	0,0042
	6	82	0,0068
	44	48	0,0051

Πίνακας 26: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 6

<b>Περιοχή 6</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	14	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	14	-	1,0018
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	45	-	-0,0088
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	45	-	-0,0048
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	45	96	0,0088
	14	45	0,0132
	14	95	0,0132
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	45	96	0,0042
	14	45	0,0070
	14	95	0,0070

Πίνακας 27: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 7

<b>Περιοχή 7</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	7	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	7	-	1,0022



Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	7	-	-0,0090
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	7	-	-0,0044
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	7	59	-0,0522
	7	60	0,0257
	7	34	0,0088
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	7	59	0,0086
	7	60	-0,0227
	7	34	0,0049

Πίνακας 28: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 8

Περιοχή 8			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	8	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	8	-	1,0020
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	8	35	0,0086
	8	78	0,0086
	8	79	0,0091
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	8	35	0,0048
	8	78	0,0048
	8	79	0,0051

Πίνακας 29: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 9

Περιοχή 9			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Αφίξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	5	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	5	-	1,0009
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	5	29	0
	5	30	-0,0107
	5	31	-0,0106
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	5	29	0,0017
	5	30	0,0022

	5	31	0,0022
--	---	----	--------

Πίνακας 30: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 10

Περιοχή 10			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Άφιξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	11	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	11	-	1,0004
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	40	-	-0,0087
	92	-	-0,0107
	101	-	-0,0090
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	40	-	-0,0048
	92	-	-0,0044
	101	-	-0,0044
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	11	100	-0,0668
	40	93	-0,0041
	100	101	-0,0166
	102	103	0,0346
	11	40	0,0098
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	11	100	0,0061
	40	93	0,0042
	100	101	0,0134
	102	103	-0,0044
	11	40	0,0087

Πίνακας 31: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 11

Περιοχή 11			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Άφιξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	9	-	0
Μετρήσεις μέτρου τάσης	9	-	1,0014
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	9	13	0,0524
	37	83	-0,0066
	9	36	0,0087
	9	80	0,0087
	13	37	0,0011
	9	13	-0,0125

<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	37	83	0,0038
	9	36	0,0049
	9	80	0,0049
	13	37	0,0043

Πίνακας 32: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 12

<b>Περιοχή 12</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	10	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	10	-	1,0005
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	38	-	-0,0087
	57	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	38	-	-0,0048
	57	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	10	49	-0,0204
	10	57	0,0014
	61	66	-0,0166
	49	50	0,0044
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	10	49	-0,0094
	10	57	0,0004
	61	66	-0,0070
	49	50	0,0024

Πίνακας 33: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 13

<b>Περιοχή 13</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	15	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	15	-	1,0004
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	52	-	0,0450
	58	-	-0,0090
	52	-	-0,0027

<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	58	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	15	67	0,0996
	15	68	-0,0188
	58	104	-0,0459
	62	68	0,0279
	64	67	-0,0905
	15	51	-0,0001
	15	53	-0,0349
	15	54	-0,0354
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	15	67	0,0299
	15	68	-0,0306
	58	104	0,0296
	62	68	0,0087
	64	67	-0,0405
	15	51	0,0016
	15	53	0,0032
	15	54	0,0032

Πίνακας 34: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 14

<b>Περιοχή 14</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	55	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	55	-	0,9980
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	56	-	-0,0090
	105	-	-0,0064
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	56	-	-0,0044
	105	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	56	106	0,0085
	55	56	0,0250
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	56	106	0,0043
	55	56	0,0177

Πίνακας 35: Εσωτερικές Μετρήσεις-Περιοχή 15

<b>Περιοχή 15</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	12	-	0
<b>Μετρήσεις μέτρου τάσης</b>	12	-	0,9978
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	39	-	-0,0088
	84	-	-0,0090
	85	-	-0,0088
	87	-	-0,0059
	89	-	-0,0091
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	39	-	-0,0048
	84	-	-0,0044
	85	-	-0,0044
	87	-	-0,0044
	89	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	39	86	0,0148
	84	88	0,0094
	12	39	0,0193
	12	84	0,0421
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	39	86	0,0048
	84	88	0,0041
	12	39	0,0096
	12	84	0,0219

Για τις συνοριακές μετρήσεις έχουμε:

Πίνακας 36: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 1

<b>Περιοχή 1</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	46	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	46	-	-0,0044

Πίνακας 37: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 2

<b>Περιοχή 2</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	2	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	2	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	2	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	2	4	0,1668
	2	46	0,0543
	2	63	0,1608
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	2	4	-0,0534
	2	46	0,0159
	2	63	-0,0517

Πίνακας 38: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 3

<b>Περιοχή 3</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Αφίξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	4	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	4	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	4	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	4	6	0,1218
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	4	6	-0,0470

Πίνακας 39: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 4

<b>Περιοχή 4</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	17	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	63	-	-0,0090
	65	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	63	-	-0,0044
	65	-	-0,0044

Πίνακας 40: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 5

<b>Περιοχή 5</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	6	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	6	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	6	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	6	8	0,0412
	6	9	0,0790
	6	14	0,0677
	6	59	0,0612
	6	65	-0,1241
	6	100	0,0594
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	6	8	-0,0185
	6	9	-0,0238
	6	14	-0,0047
	6	59	-0,0378
	6	65	0,0057
	6	100	-0,0103

Πίνακας 41: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 6

<b>Περιοχή 6</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	14	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	14	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	14	-	-0,0044

Πίνακας 42: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 7

<b>Περιοχή 7</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	7	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	59	-	-0,0090
	60	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	59	-	-0,0044
	60	-	-0,0044

Πίνακας 43: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 8

<b>Περιοχή 8</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	8	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	8	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	8	-	-0,0044



Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	8	14	-0,0323
	8	60	-0,0167
	8	104	0,0549
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	8	14	0,0105
	8	60	-0,0066
	8	104	-0,0289

Πίνακας 44: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 9

Περιοχή 9			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Άφιξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	5	-	0
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	5	-	-0,0090
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	5	-	-0,0044
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	5	6	0,0061
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	5	6	-0,0052

Πίνακας 45: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 10

Περιοχή 10			
	Ζυγός Αναχώρησης	Ζυγός Άφιξης	Τιμή (ανά μονάδα)
Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης	11	-	0
Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος	11		-0,0090
	100		-0,0090
Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος	11	-	-0,0044
	100	-	-0,0044
Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος	11	49	0,0382
Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος	11	49	-0,0279

Πίνακας 46: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 11

<b>Περιοχή 11</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	9	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	9	-	-0,0090
	13	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	9	-	-0,0044
	13	-	-0,0044

Πίνακας 47: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 12

<b>Περιοχή 12</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	10	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	10	-	-0,0090
	49	-	-0,0090
	66	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	10	-	-0,0044
	49	-	-0,0044
	66	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	10	13	-0,0412
	10	55	0,0424
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	10	13	-0,0071
	10	55	0,0069

Πίνακας 48: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 13

<b>Περιοχή 13</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	15	-	0
	15	-	-0,0090
	64	-	-0,0090

<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	104	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	15	-	-0,0044
	64	-	-0,0044
	104	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	15	66	0,0256
<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	15	66	-0,0149

Πίνακας 49: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 14

<b>Περιοχή 14</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	55	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	55	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	55	-	-0,0044

Πίνακας 50: Συνοριακές Μετρήσεις-Περιοχή 15

<b>Περιοχή 15</b>			
	<b>Ζυγός Αναχώρησης</b>	<b>Ζυγός Άφιξης</b>	<b>Τιμή (ανά μονάδα)</b>
<b>Ψευδομέτρηση γωνίας τάσης</b>	12	-	0
<b>Μετρήσεις έγχυσης ενεργού ισχύος</b>	12	-	-0,0090
<b>Μετρήσεις έγχυσης αέργου ισχύος</b>	12	-	-0,0044
<b>Μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος</b>	12	55	-0,0083
	12	64	-0,0815
	12	55	-0,0094

<b>Μετρήσεις ροής αέργου ισχύος</b>	12	64	-0,0361
---	----	----	---------

### 6.3 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον αλγόριθμο Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης παρουσιάζονται παρακάτω:

Πίνακας 51: Αποτελέσματα Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης

<b>Ζυγός</b>	<b>Μέτρο Τάσης (ανά μονάδα)</b>	<b>Γωνία Τάσης (μοίρες)</b>
1	1,0003	0
2	1,0014	0,091
3	0,9994	-0,125
4	1,0014	-0,897
5	1,0013	-1,500
6	1,0019	-1,545
7	1,0022	-1,603
8	1,0019	-1,629
9	1,0013	-1,863
10	1,0004	-2,102
11	1,0005	-1,819
12	0,9978	-2,248
13	1,0008	-2,016
14	1,0018	-1,578
15	1,0003	-2,028
16	0,9999	-0,127
17	1,0018	-0,392
18	0,9999	0,254
19	0,9999	0,093
20	0,9999	0,339
21	0,9999	0,095
22	0,9999	-1,536
23	0,9999	-1,142
24	0,9999	-1,131
25	0,9998	-1,177
26	0,9998	-1,530
27	0,9998	-1,166
28	0,9998	-1,159
29	1,0008	-1,536
30	1,0009	-1,165
31	1,0009	-1,167
32	0,9943	-0,382
33	0,9986	-1,183

34	0,9999	-1,813
35	0,9998	-1,837
36	0,9989	-2,083
37	0,9983	-2,051
38	0,9980	-2,324
39	0,9929	-2,790
40	0,9958	-2,111
41	0,9999	3,819
42	0,9999	0,095
43	0,9999	-1,537
44	0,9997	-2,118
45	0,9986	-1,896
46	1,0011	0,064
47	0,9981	-0,190
48	0,9986	-2,113
49	1,0007	-1,952
50	0,9991	-2,099
51	0,9999	-2,026
52	0,9999	-1,465
53	0,9999	-1,702
54	0,9999	-1,698
55	0,9979	-2,246
56	0,9898	-2,897
57	1,0004	-2,102
58	1,0021	-1,659
59	1,0021	-1,597
60	1,0022	-1,606
61	1,0004	-2,101
62	1,0023	-1,939
63	1,0017	-0,312
64	0,9978	-2,248
65	1,0019	-0,465
66	1,0003	-2,028
67	1,0003	-2,028
68	1,0003	-2,028
69	0,9997	-0,588
70	0,9994	-0,125
71	0,9994	-0,125
72	0,9880	-0,441
73	0,9893	-0,440
74	0,9986	-1,183
75	0,9986	-1,183
76	0,9869	-1,588
77	0,9999	-1,811
78	0,9998	-1,837
79	0,9998	-1,837
80	0,9989	-2,083
81	0,9999	0,095

82	0,9999	-1,538
83	0,9984	-1,576
84	0,9878	-3,332
85	0,9736	-3,490
86	0,9630	-4,316
87	0,9854	-3,389
88	0,9834	-3,501
89	0,9830	-3,510
90	1,0260	-1,323
91	0,9839	-3,448
92	0,9882	-2,432
93	0,9943	-1,752
94	0,9991	-2,017
95	0,9986	-1,896
96	0,9899	-2,203
97	0,9981	-0,190
98	0,9922	-0,231
99	0,9871	-2,407
100	1,0009	-1,712
101	1,0009	-1,712
102	0,9974	-1,036
103	0,9969	-1,094
104	1,0019	-1,629
105	0,9873	-2,959
106	0,9871	-2,987
107	0,9875	-2,880

Η σύγκλιση επιτεύχθηκε σε 4 επαναλήψεις. Στην πρώτη επανάληψη είχαμε  $\max(|\Delta x|) = 0,0742$ , στη δεύτερη επανάληψη είχαμε  $\max(|\Delta x|) = 0,0027$ , στην τρίτη επανάληψη είχαμε  $\max(|\Delta x|) = 1,3364 \cdot 10^{-4}$  και στην τέταρτη επανάληψη είχαμε  $\max(|\Delta x|) = 8,7155 \cdot 10^{-6}$ .

## 7 Συμπεράσματα

### 7.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης συγκλίνει και μάλιστα σε μικρό αριθμό επαναλήψεων, ακόμη και για το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας των 107 ζυγών. Άλλωστε, ο βασικός λόγος που προτιμάται η Κατανεμημένη Εκτίμηση Κατάστασης είναι το γεγονός ότι συγκλίνει σε λιγότερες επαναλήψεις και σε μικρότερο χρόνο σε σχέση με τη Συγκεντρωτική Εκτίμηση Κατάστασης.

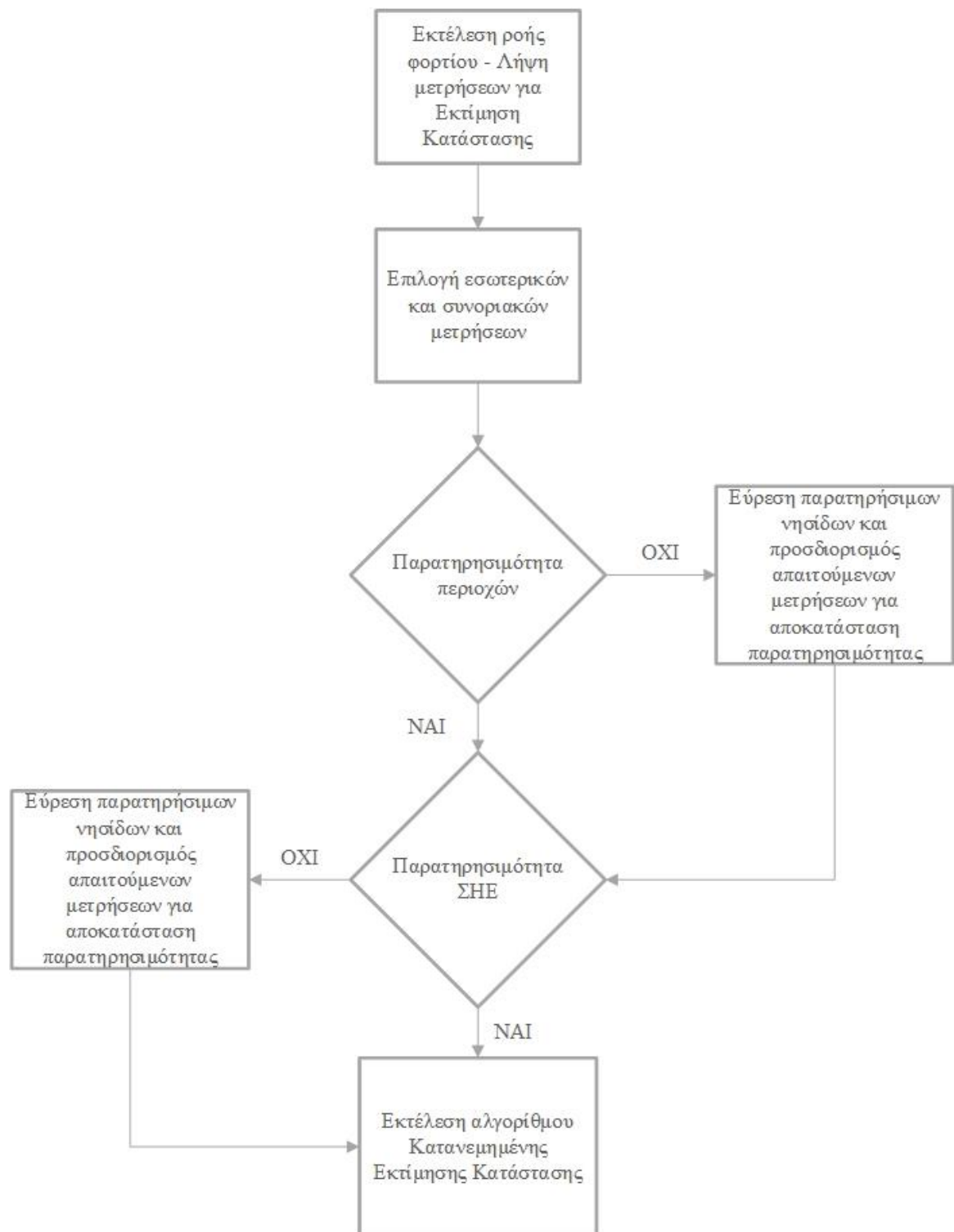
Όσον αφορά την Παρατηρησιμότητα, παρατηρούμε ότι αυτή είναι απαραίτητη, ώστε οι πίνακες κέρδους  $G$  να είναι αντιστρέψιμοι και ο αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης να έχει λύση. Αυτό ισχύει είτε αναφερόμαστε σε Κατανεμημένο Εκτιμητή, είτε σε Συγκεντρωτικό Εκτιμητή.

### 7.2 Συμβολή της διπλωματική εργασίας

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής ήταν να εξετάσει το πρόβλημα της Παρατηρησιμότητας Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας και το πρόβλημα της Εκτίμησης Κατάστασης. Τελικώς, η εργασία περιλαμβάνει τα εξής:

- Αλγόριθμος Παρατηρησιμότητας Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας, ο οποίος χρησιμοποιείται για να εξετάσει αν ένα ΣΗΕ είναι παρατηρήσιμο. Επίσης, στην περίπτωση του Κατανεμημένου Εκτιμητή Κατάστασης, εξετάζει αν τα επιμέρους υποσυστήματα είναι παρατηρήσιμα, καθώς και το ολικό ΣΗΕ.
- Αλγόριθμος Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης, ο οποίος εκτιμά την κατάσταση ενός συστήματος με χωρισμό του ΣΗΕ σε υποσυστήματα/περιοχές, ούτως ώστε να έχουμε ταχύτερη σύγκλιση.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα διάγραμμα, το οποίο περιγράφει συνοπτικά τους τομείς ενασχόλησης της εν λόγω διπλωματικής εργασίας:



Εικόνα 17: Βήματα Υλοποίησης Διπλωματικής Εργασίας



### 7.3 Εργασίες για περαιτέρω διερεύνηση

Στην παρούσα εργασία, το ΣΗΕ των 107 ζυγών χωρίστηκε σε 15 περιοχές με τοπολογικά κριτήρια. Προκειμένου να προκύψει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα σχετικά με τον αλγόριθμο, πρέπει να δοκιμαστούν διαφορετικοί χωρισμοί περιοχών, οι οποίοι θα χωρίζουν το ΣΗΕ σε περισσότερα ή λιγότερα υποσυστήματα. Τα κριτήρια για το χωρισμό μπορεί να είναι τοπολογικά είτε να σχετίζονται με τη θεωρία γράφων, η οποία βρίσκει καλύτερη εφαρμογή σε συστήματα με μεγάλο αριθμό ζυγών.

Στην παρούσα διπλωματική, ύστερα από την εκτέλεση τους αλγορίθμου Κατανεμημένης Εκτίμησης Κατάστασης δεν έγινε επεξεργασία των εσφαλμένων μετρήσεων (bad data processing). Η επεξεργασία εσφαλμένων μετρήσεων αναγνωρίζει κακής ποιότητας δεδομένα, τα αποκλείει από το σύνολο των μετρήσεων και έπειτα εκτελείται ξανά ο Εκτιμητής Κατάστασης όσες φορές χρειαστεί μέχρι να μην αναγνωριστεί καμία άλλη εσφαλμένη μέτρηση.



## Παράρτημα

### Βαθμός και Μηδενικότητα πίνακα

Ο βαθμός ενός πίνακα  $A$  διαστάσεων  $(m \times n)$  συμβολίζεται με  $rank(A)$  και ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα  $A$ . Για τον βαθμό ενός πίνακα  $A$  ισχύει:

$$rank(A) = rank(A^T) \leq \min(m, n)$$

Ο πυρήνας ενός πίνακα  $A$  διαστάσεων  $(m \times n)$  συμβολίζεται με  $\ker(A)$  και ορίζεται ως εξής:

$$\ker(A) = \{x: A \cdot x = 0\} \subseteq R^n$$

Ένα σύνολο  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq R^n$  λέγεται βάση ενός διανυσματικού χώρου  $U \subseteq R^n$  αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και κάθε διάνυσμα  $b \in U$  μπορεί να γραφτεί ως:

$$b = x_1 \cdot a_1 + \dots + x_m \cdot a_m$$

Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου  $S$  συμβολίζεται με  $\dim(S)$  και ορίζεται ως εξής:

$$\dim(S) = \text{ο αριθμός των στοιχείων κάθε βάσης του } S$$

Η μηδενικότητα του  $A$  συμβολίζεται με  $null(A)$  και ορίζεται ως:

$$null(A) = \dim(\ker(A))$$

Για κάθε πίνακα  $A$  διαστάσεων  $(m \times n)$  ισχύει:

$$rank(A) + null(A) = n$$

**Παράδειγμα:** Ψάχνουμε το βαθμό και τη μηδενικότητα του παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ο πυρήνας του  $A$  είναι τα  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , τέτοια ώστε:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι έχει λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Οπότε,

$$\ker(A) = \{x = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Επομένως, θα είναι:

$$\text{null}(A) = \dim(\ker(A)) = 1$$

Οπότε,

$$\text{rank}(A) = n - \text{null}(A) = 2 - 1 = 1$$

### Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις τιμές των  $x_1, x_2, \dots, x_n$  που μεγιστοποιούν τη συνάρτηση

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

υπό τον περιορισμό

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Δημιουργούμε την παρακάτω εξίσωση:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

όπου το  $\lambda$  είναι μία επιπλέον μεταβλητή, η οποία λέγεται πολλαπλασιαστής *Lagrange*.

Όταν ισχύει ο περιορισμός, τότε έχουμε  $L = f$ , γιατί  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ .

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda \cdot g_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda \cdot g_2 = 0$$

⋮

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = f_n + \lambda \cdot g_n = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης μπορεί να λυθούν για  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και  $\lambda$ .

Η λύση έχει δύο ιδιότητες:

- Τα  $x$  υπακούουν στον περιορισμό που έχει τεθεί.
- Αυτά τα  $x$  θα κάνουν την τιμή του  $L$ , άρα και το  $f$ , όσο το δυνατό μεγαλύτερη.

**Παράδειγμα:** Θέλουμε να βρούμε τις τιμές των  $x, y$ , που μεγιστοποιούν τη συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 - x \cdot y$  υπό τον περιορισμό  $g(x, y) = x - 2y - 1$ .

Σχηματίζουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$L(x, y) = x^2 - x \cdot y + \lambda(x - 2y - 1)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -x - 2\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - 2y - 1 = 0 \quad (3)$$

Από την (2) προκύπτει:

$$x = -2\lambda$$

Τότε, η (1) γίνεται:

$$2(-2\lambda) - y + \lambda = 0 \Rightarrow y = -3\lambda$$

Και τότε η (3) γίνεται:

$$-2\lambda - 2(-3\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Άρα,

$$x = -\frac{1}{2} \text{ και } y = -\frac{3}{4}$$

## Βιβλιογραφία

1. Θεωρία Εκτίμησης Κατάστασης, *mycourses.ntua.gr*
2. Ν.Χατζηαργυρίου, Γ.Κονταξής, *Κέντρα Ελέγχου Ενέργειας*. Αθήνα : Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2003.
3. *Smart meters for power grid: Challenges, issues, advantages and status*. Soma Shekara Sreenadh Reddy Depuru, Lingfeng Wang, Vijay Devabhaktuni. 2011.
4. *Smart Grid Technologies in Europe: An Overview*. Luca Ardito, Giuseppe Procaccianti, Giuseppe Menga, Maurizio Morisio. 2013.
5. *Distribution State Estimation: A Fundamental Requirement for the Smart Grid*. R. Hoffman, S. Lefebvre, J. Prevost.
6. *Distributed Robust Power System State Estimation*. Vassilis Kekatos, Georgios B. Giannakis. 2012.
7. *What Smart Grid Means to an ISO/RTO*. Zhenyu Fan, Yiming Mao, Tim Horger.
8. *www.eia.gov*
9. *www.energy.about.com*
10. *Development of Distributed State Estimation Methods to Enable Smart Distribution Management Systems*. Nazia Nusrat, Malcolm Irving, Gareth Taylor.
11. Ray D. Zimmerman, Carlos E. Murillo-Sanchez. *Matpower 4.1 User's Manual*. 2011.
12. *Network Observability Theory*. A. Monticelli, F. F. Wu. 1985.
13. *A Direct Numerical Method for Observability Analysis*. Bei Gou, Ali Abur. 2000.
14. *Network Observability: Identification of Observable Islands and Measurement Placement*. A. Monticelli, F. F. Wu. 1985.
15. *An Improved Measurement Placement Algorithm for Network Observability*. Bei Gour, Ali Abur. 2001.
16. *A Gram Matrix-Based Method for Observability Restoration*. George N. Korres 2011.
17. *A Distributed Multiarea State Estimation*. George N. Korres 2011.