Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων & Φυσικων Επιστημων
Τομεας Φυσικης

Initial Value Problem

in General Relativity

Στρατος Χ. Παπαδουδης

Επιβλέπων:
Κωνσταντινος Αναγνωστοπουλος

Τριμελής Επιτροπή: Κωνσταντινος Αναγνωστοπουλος
Αλεξανδρος Κεχαγιας
Νικος Ηργες

Περιεχόμενα

Μέρος I

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ[1]

[1] όπως στο [1]

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

1.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός 1.1.1 (τοπικός χαρτης). Έστω σύνολο X και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζεται *τοπικός χάρτης διάστασης* n του *συνόλου* X ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ εφοδιασμένο με μια απεικόνιση $\phi : X \supseteq U \longmapsto \phi(U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$ αμφιμονοσήμαντη.

Σχόλιο. Έστω $\{\pi^i : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R} : (h^k)_{k=1}^n \mapsto h^i\}_{i=1}^n$ οι κανονικές προβολές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η ϕ ορίζεται μονοσήμαντα από τις συνιστώσες της, $\{x^i \equiv \pi^i \circ \phi : X \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$. $\forall x \in U \subseteq X$, $\{x^i(x)\}_{i=1}^n$ είναι οι *συντεταγμένες* του x στον χάρτη $(U|\phi)$.

Ορισμός 1.1.2 ($\mathcal{C}^k$-συμβιβαστότητα σε χάρτες). $\forall k \in \mathbb{N}$ ή $k = \infty$ ή $k = \omega$ ή $k = 0$, δύο τοπικοί χάρτες $(U|\phi)$ και $(V|\psi)$ διάστασης $n \in \mathbb{N}$ ενός συνόλου X είναι $\mathcal{C}^k$-*συμβιβαστοί* αν και μόνο αν:

- τα επόμενα σύνολα είναι ανοιχτά:
  - $\phi(U \cap V) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$
  - $\psi(U \cap V) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$
- οι επόμενες συναρτήσεις είναι k-τάξης[1]:
  - $(\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq \phi(U \cap V) \longmapsto \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n) \in \mathcal{C}^k[\phi(U \cap V)|\psi(U \cap V)]$,
  - $(\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq \psi(U \cap V) \longmapsto \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n) \in \mathcal{C}^k[\psi(U \cap V)|\phi(U \cap V)]$.

Γράφουμε $(U|\phi) \sim (V|\psi)$.

Σχόλιο. Οι $\mathcal{C}^\infty/\mathcal{C}^\omega/\mathcal{C}^0$-συμβιβαστοί χάρτες ονομάζονται *διαφορικώς/αναλυτικώς/τοπολογικώς συμβιβαστοί*.

Ορισμός 1.1.3 (άτλας). Μια οικογένεια $\mathcal{A} = \{(U_i \subseteq X|\phi_i)\}_{i \in I}$ τοπικών χαρτών του X είναι *άτλας* του X αν και μόνο αν:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ορισμός 1.1.4 ($\mathcal{C}^k$-άτλας). Ένας άτλας $\mathcal{A}$ του X, είναι $\mathcal{C}^k$-*άτλας* αν όλοι οι χάρτες του είναι ανά δύο $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστοί.

Σχόλιο. Οι $\mathcal{C}^\infty/\mathcal{C}^\omega/\mathcal{C}^0$-άτλαντες ονομάζονται *διαφορικοί/αναλυτικοί/τοπολογικοί άτλαντες*.

[1] $\mathcal{C}^k[A|B]$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$, είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων k-τάξης από το A στο B. $\mathcal{C}^k_x[\mathbb{R}^n|\mathbb{R}^m]$ αντίστοιχα είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων k-τάξης στο $x \in \mathbb{R}^n$, ανεξαρτήτως πεδίου ορισμού.

Ορισμός 1.1.5 ($\mathcal{C}^k$-συμβιβαστότητα σε άτλαντες)**.** Έστω σύνολο X και $\mathfrak{A}(X)$ το *σύνολο* όλων των *ατλάντων* του X. $\forall k \in \mathbb{N}$ ή $k = \infty$ ή $k = \omega$ ή $k = 0$, $\mathfrak{A}_n^k(X) := \{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}(X) | \dim\mathcal{A} = n\}$ είναι το *σύνολο* όλων των $\mathcal{C}^k$-*ατλάντων διάστασης* n του X.[2] Η διμελής σχέση[3] $\sim$ του ορισμού 1.1.2 μεταξύ χαρτών, επεκτείνεται με φυσικό τρόπο και σε σύνολα χαρτών, ειδικότερα σε άτλαντες: $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$. Τότε οι άτλαντες ονομάζονται $\mathcal{C}^k$-*συμβιβαστοί*.

Πρόταση 1.1.1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall k \in \mathbb{N}$ ή $k = \infty$ ή $k = \omega$ ή $k = 0$, $(\mathfrak{A}_n^k(X) | \subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος*[4] *και $(\mathfrak{A}_n^k(X) | \sim)$ είναι χώρος με διαμέριση*[5].

Απόδειξη. Για τη μερική διάταξη:

$\mathfrak{P}_1$: $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$,

$\mathfrak{P}_2$: $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$,

$\mathfrak{P}_3$: $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$.

Για τη διαμέριση:

$\mathfrak{S}_1$: $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_n^k(X) \Longrightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{A}$,

$\mathfrak{S}_2$: $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X) \Longrightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_n^k(X)) \Longrightarrow (\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{A})$.

Για το $\mathfrak{S}_3$, έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$ και $(U|\phi) \in \mathcal{A}$, $(W|\chi) \in \mathcal{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(U|\phi)$ και $(W|\chi)$ είναι $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστοί. $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$ άρα $\forall x \in U \cap W$, $\exists (V_x|\psi_x) \in \mathcal{B}$ τέτοιος, ώστε $x \in U \cap V_x \cap W \subseteq U \cap W$. Τότε $((U|\phi) \sim_k (V_x|\psi_x) \Longrightarrow \psi_x(U \cap V_x) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)) \wedge ((V_x|\psi_x) \sim_k (W|\chi) \Longrightarrow \psi_x(V_x \cap W) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)) \Longrightarrow \psi_x(U \cap V_x \cap W) = \psi_x(U \cap V_x \cap V_x \cap W) = \psi_x(U \cap V_x) \cap \psi_x(V_x \cap W) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$:

- $(U|\phi) \sim_k (V_x|\psi_x) \Longrightarrow \phi \circ \psi_x^{-1} \in \mathcal{C}^k[\psi_x(U \cap V_x)|\phi(U \cap V_x)] \wedge \psi_x \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\phi(U \cap V_x)|\psi_x(U \cap V_x)] \Longrightarrow \phi(U \cap V_x \cap W) = (\phi \circ \psi_x^{-1})(\psi_x(U \cap V_x \cap W)) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \phi(U \cap W) = \cup_{x \in U \cap W} \phi(U \cap V_x \cap W) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$,
- $(V_x|\psi_x) \sim_k (W|\chi) \Longrightarrow \chi \circ \psi_x^{-1} \in \mathcal{C}^k[\psi_x(V_x \cap W)|\chi(V_x \cap W)] \wedge \psi_x \circ \chi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\chi(V_x \cap W)|\psi_x(V_x \cap W)] \Longrightarrow \chi(U \cap V_x \cap W) = (\chi \circ \psi_x^{-1})(\psi_x(U \cap V_x \cap W)) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \chi(U \cap W) = \cup_{x \in U \cap W} \chi(U \cap V_x \cap W) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$.

$\forall x \in U \cap W$:

- $\chi \circ \phi^{-1} = \chi \circ \psi_x^{-1} \circ \psi_x \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\phi(U \cap V_x \cap W)|\chi(U \cap V_x \cap W)]$,
- $\phi \circ \chi^{-1} = \phi \circ \psi_x^{-1} \circ \psi_x \circ \chi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\chi(U \cap V_x \cap W)|\phi(U \cap V_x \cap W)]$,

συνεπώς:

- $\chi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\cup_{x \in U \cap W} \phi(U \cap V_x \cap W)| \cup_{x \in U \cap W} \chi(U \cap V_x \cap W)] = \mathcal{C}^k[\phi(\cup_{x \in U \cap W}(U \cap V_x \cap W))|\chi(\cup_{x \in U \cap W}(U \cap V_x \cap W))] = \mathcal{C}^k[\phi(U \cap W)|\chi(U \cap W)]$,
- $\phi \circ \chi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\cup_{x \in U \cap W} \chi(U \cap V_x \cap W)| \cup_{x \in U \cap W} \phi(U \cap V_x \cap W)] = = \mathcal{C}^k[\chi(\cup_{x \in U \cap W}(U \cap V_x \cap W))|\phi(\cup_{x \in U \cap W}(U \cap V_x \cap W))] = \mathcal{C}^k[\chi(U \cap W)|\phi(U \cap W)]$,

quod erat demonstrandum. □

Θεώρημα 1.1.1 (μέγιστος $\mathcal{C}^k$-άτλαντας)**.** $\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{A}] \subseteq \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^* = \cup[\mathcal{A}] \in [\mathcal{A}] \subseteq \mathfrak{A}_n^k(X)$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\mathcal{A} \subseteq \cup[\mathcal{A}] = \mathcal{A}^*$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A}^* \in [\mathcal{A}] \subseteq \mathfrak{A}_n^k(X)$. Πράγματι, $\cup\mathcal{A}^* = \cup\cup[\mathcal{A}] = \cup\cup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B} = \cup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \cup \mathcal{B} = \cup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} X = X$. Επιπλέον, $\forall \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ ισοδύναμα, $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$, $\forall (V|\psi) \in \mathcal{B}$, ή $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall (V|\psi) \in \cup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B} = \cup[\mathcal{A}] = \mathcal{A}^*$, $(U|\phi)$ και $(V|\psi)$ είναι $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστοί, οπότε $\mathcal{A}^* \sim \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{A}^* \in [\mathcal{A}] \subseteq \mathfrak{A}_n^k(X)$.[6] □

[2] Οι χάρτες ενός $\mathcal{C}^k$-άτλαντα έχουν όλοι την ίδια διάσταση από ορισμό 1.1.2.

[3] υποενότητα A΄.1.2 στη σελίδα 91

[4] ορισμός A΄.1.2.1.1

[5] υποενότητα A΄.1.2.2 στη σελίδα 91

[6] Αυτό που λέει με άλλα λόγια το θεώρημα είναι ότι για κάθε άτλαντα $\mathcal{A}$, υπάρχει μέγιστος άτλας $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστός με τον $\mathcal{A}$. Προφανώς, ο $\mathcal{A}^*$ είναι μοναδικός, αφού $\mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{A}$, $\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$, πόρισμα1.1.1.

Πόρισμα 1.1.1. *Ο* $\mathcal{A}^*$ *είναι μεγιστικός του* $(\mathfrak{A}_n^k(X)|\subseteq)$.

Απόδειξη.
Ισχυρισμός. $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \vee \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A} \sim_k \mathcal{B}$.
Πράγματι, αν π.χ. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ τότε $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$.
Συνεπώς $(\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}^* \Longrightarrow \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}^* \in [\mathcal{A}] \Longrightarrow \mathcal{A}' \in [\mathcal{A}] \Longrightarrow \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}^*) \Longrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A}^*$. □

Πόρισμα 1.1.2. $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}^*$ *και* $\forall A \subseteq U$ *με* $\phi(A) \in \mathcal{T}_\varrho(\phi(U))$, $(A|\phi) \in \mathcal{A}^*$.

Απόδειξη. $\forall (V|\psi) \in \mathcal{A}^*$, $\phi(A \cap V) = \phi(A) \cap \phi(V) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$. $\phi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\phi(U \cap V)|\psi(U \cap V)] \Longrightarrow (\psi \circ \phi^{-1})(\phi(A \cap V)) = \psi(A \cap V) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$. $\phi(A \cap V) \subseteq \phi(U \cap V)$ και $\psi(A \cap V) \subseteq \psi(U \cap V)$, οπότε και $\psi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\phi(A \cap V)|\psi(A \cap V)]$ και $\phi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^k[\psi(A \cap V)|\phi(A \cap V)]$. □

Ορισμός 1.1.6 ($\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητα)**.** Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με ένα *μέγιστο* άτλαντα $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_n^k(X)$ καλείται *$\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητα διαστάσεως n*. Ειδικότερα:

- για $k = \infty$, καλείται *διαφορική πολλαπλότητα διαστάσεως n*,
- για $k = \omega$, καλείται *αναλυτική πολλαπλότητα διαστάσεως n*,
- για $k = 0$, καλείται *τοπολογική πολλαπλότητα διαστάσεως n*.

Το σύνολο X καλείται και *φορέας* της πολλαπλότητας. Γράφουμε $(X|\mathcal{A})$ και $\dim X = \dim \mathcal{A} = n$.

Ορισμός 1.1.7 (κανονική τοπολογία πολλαπλότητας)**.** Έστω τοπολογική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Η οικογένεια $\mathcal{T}_\mathcal{A}(X) := \{A \in X | \forall (U|\phi) \in \mathcal{A}, \phi(A \cap U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X})\}$ συνιστά τοπολογία[7] του X, η οποία ονομάζεται και *κανονική τοπολογία* της *πολλαπλότητας* $(X|\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Πράγματι:

$\mathfrak{T}_1$: $\phi(\emptyset \cap U) = \emptyset \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X}) \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(X)$ & $\phi(X \cap U) = \phi(U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X}) \Longrightarrow X \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(X)$,

$\mathfrak{T}_2$: $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{A}(X)$, $\phi(\cup_{i \in I} A_i \cap U) = \phi(\cup_{i \in I}(A_i \cap U)) = \cup_{i \in I} \phi(A_i \cap U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X})$ οπότε

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(X),$$

$\mathfrak{T}_3$: $\forall \{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{A}(X)$, $\phi(\cap_{i=1}^n A_i \cap U) = \phi(\cap_{i=1}^n (A_i \cap U)) = \cap_{i=1}^n \phi(A_i \cap U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X})$ οπότε

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_\mathcal{A}(X),$$

quod erat demonstrandum. □

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω τοπολογική πολλαπλότητα* $(X|\mathcal{A})$. *Τότε* $\mathcal{A}$ *είναι βάση της κανονικής τοπολογίας* $\mathcal{T}_\mathcal{A}$.

Απόδειξη.
Ισχυρισμός. $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$, $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$.
Πράγματι, $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $\psi(U \cap V) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X})$ συνεπώς $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$.
$\forall x \in A \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, $\exists (U_x|\phi_x) \in \mathcal{A}$ τέτοιος, ώστε $x \in U_x \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$ συνεπώς $x \in U_x \cap A \subseteq A$. Επιπλέον, $(U_x \cap A|\phi) \in \mathcal{A}$[8]. Τότε

$$\bigcup_{x \in A} (U_x \cap A) = A,$$

quod erat demonstrandum. □

---
[7] ορισμός Α′.1.1.1
[8] ορισμός 1.1.7 και πόρισμα 1.1.2

1.2 ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 1.2.1 (τοπική παρασταση απεικόνισης)**.** Έστω συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$.

Ισχυρισμός. $\forall x \in X$, $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\exists (V|\psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι, ώστε $x \in U \cap f^{-1}(V)$.

Πράγματι, έστω $x \in A$. Από ορισμό 1.1.3 έχουμε ότι $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. $f(x) \in Y$ επομένως, ομοίως $\exists (V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x) \in V$, συνεπώς $x \in f^{-1}(V)$, οπότε και $x \in U \cap f^{-1}(V)$.

Ορίζεται τότε η *τοπική παράσταση* της *συνάρτησης* f στο x ως η συνάρτηση

$$\begin{array}{cccc} & \phi & & \\ & X & \rightarrow & \mathbb{R}^{\dim X} \\ f & \downarrow & & \downarrow \\ & Y & \rightarrow & \mathbb{R}^{\dim Y} \\ & \psi & & \end{array} \quad F := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \supseteq \phi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^{\dim Y}.$$

Σχόλιο. Στην περίπτωση που $Y = \mathbb{R}^{\dim Y}$, τότε αρκεί να $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ X & \rightarrow & \mathbb{R}^{\dim X} \\ & \searrow & \downarrow \\ f & & \mathbb{R}^{\dim Y} \end{array} \quad F := f \circ \phi^{-1}$$

$$F := f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \supseteq \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim Y}.$$

Στην περίπτωση που $X = \mathbb{R}^{\dim X}$, τότε αρκεί να $\exists (V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x) \in V$ και

$$\begin{array}{ccc} f & & \mathbb{R}^{\dim X} \\ & \swarrow & \downarrow \\ Y & \rightarrow & \mathbb{R}^{\dim Y} \\ & \psi & \end{array} \quad F := \psi \circ f$$

$$F := \psi \circ f : \mathbb{R}^{\dim X} \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^{\dim Y}.$$

Στην περίπτωση που $X = \mathbb{R}^{\dim X}$ και $Y = \mathbb{R}^{\dim Y}$, $\forall x \in X$, $F \equiv f$. Επιπλέον, στην γενική περίπτωση πάλι των X και Y, ορίζονται οι *προβολές* της *τοπικής παράστασης* της *συνάρτησης* f με τον γνωστό τρόπο: $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim Y}$,

$$F^i := \pi^i \circ F = \pi^i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} = y^i \circ f \circ \phi^{-1} = f^i \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \supseteq \phi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.2.2 (διαφορισιμότητα απεικόνισης)**.** Έστω συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$ και $(Y|\mathcal{B})$. Η f είναι *διαφορίσιμη k-τάξης* σε ένα $x \in X$ αν και μόνο αν $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\exists (V|\psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι, ώστε $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap f^{-1}(V)$[9] και $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$. Η f είναι *διαφορίσιμη k-τάξης* αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη k-τάξης $\forall x \in X$.

Ισχυρισμός. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n|\{(\mathbb{R}^n|\mathrm{id}(\mathbb{R}^n) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n)\})$ είναι αναλυτική πολλαπλότητα διάστασης n.

Πράγματι, $\mathrm{id}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{id}(\mathbb{R}^n) \circ \mathrm{id}^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{id}^{-1}(\mathbb{R}^n) \circ \mathrm{id}(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{C}^\omega[\mathbb{R}^n|\mathbb{R}^n]$ και $\cup\{\mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$. Άρα έχουμε βρει αναλυτικό άτλα για τον $\mathbb{R}^n$ επομένως υπάρχει μέγιστος άτλας[10] που να ορίζει την εν λόγω πολλαπλότητα.

[9] Αυτό εδώ είναι πολύ σημαντικό. Στον ορισμό της διαφορισιμότητας θέλουμε η F να ορίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\dim X}$. Πράγματι, από το πόρισμα 1.1.2 έχουμε ότι $(U|\phi) \in \mathcal{A} \wedge (f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A} \iff \phi(U) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X}) \wedge \phi(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X}) \implies \phi(U \cap f^{-1}(V)) = \phi(U) \cap \phi(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X}) \iff (U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$.

[10] Αποδεικνύεται ότι οι χάρτες ενός τέτοιου άτλαντα είναι όλα τα ανοιχτά με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένα με την ταυτοτική απεικόνιση.

Σχόλιο. Με βάση τον παραπάνω ισχυρισμό, γενικεύεται η έννοια της διαφορισιμότητας από τον $\mathbb{R}^n$ στις πολλαπλότητες. Γράφουμε $f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$ αν η f είναι διαφορίσιμη k-τάξης στο $x \in X$ και $f \in \mathcal{C}^k[X|Y]$ αν η f είναι διαφορίσιμη k-τάξης.[11]

Λήμμα 1.2.1. *Έστω συνάρτηση $f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$ και $(Y|\mathcal{B})$ και $x \in X$. Τότε $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$, $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall (V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ και $x \in U \cap f^{-1}(V)$.*

Απόδειξη. $\exists (A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και $\exists (B|\beta) \in \mathcal{B}$ με $x \in A \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ και $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\alpha(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$. $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall (V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$, $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi \circ (\beta^{-1} \circ \beta) \circ f \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \beta^{-1}) \circ (\beta \circ f \circ \alpha^{-1}) \circ (\alpha \circ \phi^{-1}) \in \mathcal{C}^k_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$. □

Ισχυρισμός. Με βάση την απαίτηση του ορισμού 1.2.2, $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ και το λήμμα 1.2.1 μπορούμε πάντα να διαλέγουμε τοπική παράσταση της f τέτοια, ώστε $f(U) \subseteq V$.

Πράγματι $f(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq f(U) \cap V \subseteq V$, οπότε θέτουμε $(U|\phi) \to (U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$, $(Z|\mathcal{C})$, $x \in X$ και συναρτήσεις $f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$ και $g \in \mathcal{C}^k_{f(x)}[Y|Z]$. Τότε $h = g \circ f \in \mathcal{C}^k_x[X|Z]$.*

Απόδειξη. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$, $(V|\psi) \in \mathcal{B}$, $(W|\chi) \in \mathcal{C}$ με $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$ και $F = \chi \circ g \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\psi(f(x))}[\mathbb{R}^{\dim Y}|\mathbb{R}^{\dim Z}]$. Τότε $G \circ F = \chi \circ h \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Z}]$:

$$H \equiv \chi \circ h \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \supseteq \phi(U \cap f^{-1}(V \cap g^{-1}(W))) \longrightarrow \chi(W) \subseteq \mathbb{R}^{\dim Z}$$

Ισχυρισμός. Η H αποτελεί τοπική παράσταση της $h = g \circ f$.

Πράγματι, έχουμε $\phi(U \cap f^{-1}(V \cap g^{-1}(W))) = \phi(U \cap f^{-1}(V) \cap h^{-1}(W))$. Από ορισμό 1.2.2 για την f, $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap f^{-1}(V)$ προφανώς. Για τη g, $(W|\chi) \in \mathcal{C}$ με $g(f(x)) = h(x) \in W \Longrightarrow x \in h^{-1}(W)$. Άρα $x \in U \cap f^{-1}(V) \cap h^{-1}(W)$.[12] □

Σχόλιο. Φυσικά, από κατασκευή της τοπικής παράστασης σύνθετης συνάρτησης έχουμε $H = G \circ F$.

Ορισμός 1.2.3 (τοπικά ορισμένες απεικονίσεις)**.** Έστω συνάρτηση $f : X \supseteq \mathrm{dom} f \longrightarrow Y$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$. Η f είναι *τοπικά ορισμένη* στο $x \in X$ αν και μόνο αν $\exists (A|\alpha) \in \mathcal{A}$ τέτοιος, ώστε $x \in A$ και $A \subseteq \mathrm{dom} f$. Η f τότε, λέμε ότι είναι και *τοπικά ορισμένη* στο A αφού εμφανώς, η f είναι τοπικά ορισμένη στο x, $\forall x \in A$.

Παράδειγμα 1.2.1. $\forall (A|\alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha : X \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim X}$ είναι τοπικά ορισμένη συνάρτηση.

Σχόλιο. Όλα όσα ισχύουν για συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων (π.χ.: διαφορισιμότητα κ.λ.π.) ισχύουν και για τις τοπικά ορισμένες συναρτήσεις με την αντικατάσταση $A \cap U \to U$, όπου $(A|\alpha) \in \mathcal{A}$ κάθε φορά ο τοπικός χάρτης ορισμού της τοπικά ορισμένης συνάρτησης και $(U|\phi) \in \mathcal{A}$. Από πόρισμα 1.1.2 $(A \cap U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A} \Longrightarrow (A \cap U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$. Με αυτόν τον τρόπο δε χρειάζεται να αναφερόμαστε ειδικά κάθε φορά αν η συνάρτηση είναι τοπικά ορισμένη ή όχι. Κάθε απεικόνιση k-τάξης:

- για $k = \infty$ ονομάζεται *διαφορίσιμη*,
- για $k = \omega$ ονομάζεται *αναλυτική* και
- για $k = 0$ ονομάζεται *συνεχής*.

Επεκτείνουμε το σύνολο $\mathcal{C}^k_x[X|Y]$ ώστε να περιλαμβάνει και τις τοπικά k-τάξης απεικονίσεις.

[11] Στο εξής θα γράφουμε αποκλειστικά $f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$, για να συμπεριλάβουμε στον ορισμό και τις αναλυτικές και τις συνεχείς συναρτήσεις.

[12] Ομοίως, με βάση το σχόλιο του λήμματος 1.2.1, μπορούσαμε να πούμε ότι αφού $f(U) \subseteq V$ και $g(V) \subseteq W$ τότε $h(U) = (g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$ και άρα η H είναι τοπική παράσταση της h.

Ορισμός 1.2.4 (εφαπτόμενες απεικονίσεις)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$, $x \in X$ και συναρτήσεις $f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$ και $g \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$, $k \neq 0$. Οι συναρτήσεις f και g *εφάπτονται* στο x αν και μόνο αν $f(x) = g(x)$ και, $\exists(U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\exists(V|\psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι, ώστε $x \in U \cap f^{-1}(V)$ και[13] $DF|_{\phi(x)} = DG|_{\phi(x)}$. Γράφουμε $f \sim_x g$.

Λήμμα 1.2.2. *Ο ορισμός* 1.2.4 *είναι ανεξάρτητος της τοπικής παράστασης.*

Απόδειξη. $f \sim_x g$, συνεπώς $\exists(A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και $\exists(B|\beta) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι, ώστε $x \in A \cap f^{-1}(B)$ και $DF|_{\alpha(x)} \equiv D(\beta \circ f \circ \alpha^{-1})|_{\alpha(x)} = D(\beta \circ g \circ \alpha^{-1})|_{\alpha(x)} \equiv DG|_{\alpha(x)}$. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U \cap f^{-1}(V)$. Τότε $DF|_{\phi(x)} \equiv D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = D(\psi \circ \beta^{-1})|_{\beta(f(x))} \circ D(\beta \circ f \circ \alpha^{-1})|_{\alpha(x)} \circ D(\alpha \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = D(\psi \circ \beta^{-1})|_{\beta(g(x))} \circ D(\beta \circ g \circ \alpha^{-1})|_{\alpha(x)} \circ D(\alpha \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = D(\psi \circ g \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \equiv DG|_{\phi(x)}$. ☐

Πρόταση 1.2.2. $(\mathcal{C}^k_x[X|Y]| \sim_x)$ *είναι χώρος με διαμέριση* $\forall k \neq 0$.

Απόδειξη. Πράγματι:

$\mathfrak{S}_1$: $\forall f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$, $DF|_{\phi(x)} = DF|_{\phi(x)} \Longrightarrow f \sim_x f$,

$\mathfrak{S}_2$: $\forall f, g \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$, $(DF|_{\phi(x)} = DG|_{\phi(x)} \Longrightarrow DG|_{\phi(x)} = DF|_{\phi(x)}) \Longrightarrow (f \sim_x g \Longrightarrow g \sim_x f)$,

Για το $\mathfrak{S}_3$, έστω $f, g, h \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]$ με $f \sim_x g$ και $g \sim_x h$. Τότε $f(x) = g(x) = h(x)$. Με βάση το λήμμα 1.2.2, $\exists(A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και $\exists(B|\beta) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι, ώστε $x \in A \cap f^{-1}(B)$ και $F, G, H \in \mathcal{C}^k_{\alpha(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}]$ από κοινού. Τότε προφανώς από υπόθεση, $DF|_{\phi(x)} = DG|_{\phi(x)} = DH|_{\phi(x)}$. ☐

Πρόταση 1.2.3. *Ο χώρος πηλίκο* $\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x$ *των κλάσεων εφαπτόμενων συναρτήσεων από την* X *στην* Y *εφοδιασμένος με άθροισμα* $+ : (\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x) \times (\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x) \longmapsto \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x$ *τέτοιο, ώστε*

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x\ ,\ [f]_x + [g]_x = [f+g]_x,$$

βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R} \times (\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x) \longmapsto \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x$ *τέτοιον, ώστε*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \forall f \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x\ ,\ \lambda[f]_x = [\lambda f]_x,$$

και γινόμενο $\cdot : (\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x) \times (\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x) \longmapsto \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x$ *τέτοιο, ώστε*

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x\ ,\ [f]_x[g]_x = [fg]_x,$$

συνιστά άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}^k_x[X|Y]/\sim_x$ *είναι η άλγεβρα-πηλίκο της άλγεβρας* $\mathcal{C}^k_x[X|Y]$.

1.3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ

1.3.1 Γεωμετρικός ορισμός.

Ορισμός 1.3.1.1 (εφαπτόμενος χώρος)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, και $\mathcal{C}^\infty_0[\mathbb{R}|X]$ το σύνολο όλων των *τοπικά λείων* στο $0 \in \mathbb{R}$ *καμπύλων* του X.[14] $\mathcal{C}_x X \equiv \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty_0[\mathbb{R}|X] | \alpha(0) = x\}$ είναι το σύνολο των τοπικά λείων στο $0 \in \mathbb{R}$ καμπύλων, που διέρχονται από το $x \in X$. Τότε, ο $(\mathcal{C}_x X| \sim_x)$ είναι χώρος με διαμέριση και $T_x X \equiv \mathcal{C}_x X/\sim_x$ ορίζεται ως ο *εφαπτόμενος χώρος* της X στο x, τα στοιχεία του $T_x X$ ονομάζονται *εφαπτόμενα διανύσματα*[15] και συμβολίζονται ως $\upsilon^\cdot \equiv [x|\alpha] \in T_x X$ (συμβολισμός κλάσης).

[13] Έστω διανυσματική συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε:

$$DF|_x = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_x & \cdots & \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right|_x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right|_x & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right|_x \end{pmatrix},$$

ο *πίνακας Jacobi* δηλαδή της F στο x. Στην πραγματικότητα, είναι μια γραμμική απεικόνιση, $DF|_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Η ολική παράγωγος της F ως συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι μια συνάρτηση της μορφής $D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ με $DF(x|z) = (F(x)|DF|_x(z))$. Επίσης, αν $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, τότε $D(G \circ F)|_x = DG|_{F(x)} \circ DF|_x$ και $D(G \circ F) = DG \circ DF$.

[14] $\alpha : \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow X$, $0 \in I$. Στον $\mathbb{R}$ μπορούμε πάντα να υποθέσουμε το διάστημα I αρκετά μικρό ώστε $\alpha(I) \subseteq U$. Πράγματι, αν όχι, τότε $U \equiv \{\alpha(0)\}$ και άρα $\mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n) \ni \phi(U) \equiv \{\phi(\alpha(0))\} \notin \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$, άτοπο. Η τοπική παράσταση τέτοιων καμπύλων στον $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ θα είναι της μορφής (σχόλιο ορισμού 1.2.1) $\alpha_x \equiv \phi \circ \alpha : \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim X}$.

[15] θεώρημα 1.3.1.1

Ορισμός 1.3.1.2. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ και η απεικόνιση $\phi_{\bullet} : T_xX \longmapsto \mathbb{R}^{\dim X}$ με $\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}) := D(\phi \circ \alpha)|_0$,[16] $\forall \upsilon^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$.

Λήμμα 1.3.1.1. *Η $\phi_{\bullet}$ είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Απόδειξη. Έστω $u^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$ και $\upsilon^{\bullet} \equiv [x|\beta] \in T_xX$ με $\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) = \phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})$. Τότε $D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\phi \circ \beta)|_0$ δηλαδή $\alpha \sim_x \beta$, συνεπώς $u^{\bullet} \equiv [x|\alpha] = [x|\beta] \equiv \upsilon^{\bullet}$.

Έστω $h \in \mathbb{R}^{\dim X}$ και $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim X}$ με $\sigma(t) := \phi(x) + th$. Έστω $\alpha := \phi^{-1} \circ \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow X$. Τότε $\alpha \in \mathcal{C}_xX$ αφού $\phi \circ \alpha = \sigma \in \mathcal{C}_0^{\omega}[\mathbb{R}|\mathbb{R}^{\dim X}] \subseteq \mathcal{C}_0^{\infty}[\mathbb{R}|\mathbb{R}^{\dim X}]$. Έστω $\upsilon^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$. Τότε $\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}) = D(\phi \circ \alpha)|_0 = D\sigma|_0 = h$. □

Σχόλιο. Τότε ορίζεται[17] η αντίστροφη της $\phi_{\bullet}$, $\phi_{\bullet}^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \longmapsto T_xX$.

Λήμμα 1.3.1.2. $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$,

$$D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = \psi_{\bullet} \circ \phi_{\bullet}^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \longmapsto \mathbb{R}^{\dim X}$$

Απόδειξη. Έστω $h \in \mathbb{R}^{\dim X}$ και $\upsilon^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$ με $\phi_{\bullet}^{-1}(h) = \upsilon^{\bullet}$. Τότε $(\psi_{\bullet} \circ \phi_{\bullet}^{-1})(h) = \psi_{\bullet}(\phi_{\bullet}^{-1}(h)) = \psi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}) = D(\psi \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}) = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}h$. □

Λήμμα 1.3.1.3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u^{\bullet}, \upsilon^{\bullet} \in T_xX$ *και* $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $\phi_{\bullet}^{-1}(\lambda\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})) = \psi_{\bullet}^{-1}(\lambda\psi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\psi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}))$.

Απόδειξη. $D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} : \mathbb{R}^{\dim X} \longmapsto \mathbb{R}^{\dim X}$ είναι γραμμική επομένως και από λήμμα 1.3.1.2, $(\psi_{\bullet} \circ \phi_{\bullet}^{-1})(\lambda\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})) = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}(\lambda\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})) = \lambda D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet}) = \lambda(\psi_{\bullet} \circ \phi_{\bullet}^{-1})(\phi_{\bullet}(u^{\bullet})) + \mu(\psi_{\bullet} \circ \phi_{\bullet}^{-1})(\phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})) = \lambda\psi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\psi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})$. □

Θεώρημα 1.3.1.1. *Ο χώρος T_xX εφοδιασμένος με πρόσθεση $+ : T_xX \times T_xX \longmapsto T_xX$ τέτοια, ώστε*

$$\forall u^{\bullet}, \upsilon^{\bullet} \subseteq T_xX,\ u^{\bullet} + \upsilon^{\bullet} := \phi_{\bullet}^{-1}(\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \phi_{\bullet}(\upsilon^{\bullet})),$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R} \times T_xX \longmapsto T_xX$ τέτοιο, ώστε

$$\forall \lambda \subseteq \mathbb{R} \text{ και } \forall u^{\bullet} \subseteq T_xX,\ \lambda u^{\bullet} := \phi_{\bullet}^{-1}(\lambda\phi_{\bullet}(u^{\bullet})),$$

είναι διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$.[18]

Σχόλιο. Από λήμμα 1.3.1.1 η $\phi_{\bullet}^{-1}$ είναι *ισομορφισμός διανυσματικών χώρων* και άρα $\{\phi_{\bullet}^{-1}(e_i)\}_{i=1}^{\dim X}$, όπου $\{e_i\}_{i=1}^{\dim X}$ η κανονική βάση[19] του $\mathbb{R}^{\dim X}$, είναι *βάση* του T_xX .[20] Συμβολίζουμε $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \phi_{\bullet}^{-1}(e_i) \text{ με } \upsilon^{\bullet} = \sum_{i=1}^{\dim X} \upsilon^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x.$$

όπου $(\upsilon^i)_{i=1}^{\dim X}$ οι *συνιστώσες* του εφαπτόμενου διανύσματος $\upsilon^{\bullet} \in T_xX$.

---

[16]
$$\nabla_0(\phi \circ \alpha)(t) = \left.\frac{d(\phi \circ \alpha)}{dt}\right|_0 (t).$$

Η $\nabla_0(\phi \circ \alpha)$ δεν είναι ακριβώς στοιχείο του $\mathbb{R}^{\dim X}$ καθώς δεν είναι διάνυσμα αλλά *γραμμική απεικόνιση*. Η απεικόνιση αυτή όμως αναπαριστά παραμετροποιημένη ευθεία και αυτή αντιπροσωπεύεται από ένα διάνυσμα. Άρα ο ορισμός είναι καλός, modulo ισομορφισμό.

[17] ορισμός Α΄.2.1.1

[18] Οι ορισμοί των πράξεων είναι καλοί χάρη στο λήμμα 1.3.1.3.

[19] ορισμός Α.3.1.9.

[20] θεώρημα Α.3.2.1.

1.3.2 Αλγεβρικός ορισμός.

Ορισμός 1.3.2.1 (σημειακή παραγώγιση)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $x \in X$. Η $\ell : \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}] \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται *σημειακή παραγώγιση της άλγεβρας* $\mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$ αν και μόνο αν:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\ell(\lambda f + \mu g) = \lambda \ell(f) + \mu \ell(g)$ (γραμμικότητα),
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\ell(fg) = f(x)\ell(g) + g(x)\ell(f)$ (κανόνας γινομένου Leibniz).

Ονομάζουμε D_xX το σύνολο όλων των σημειακών παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$.

Λήμμα 1.3.2.1. *Ο χώρος D_xX εφοδιασμένος με τις πράξεις συναρτήσεων είναι διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Έχουμε:

- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $(\mu_1\ell_1+\mu_2\ell_2)(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2) = \mu_1\ell_1(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)+\mu_2\ell_2(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2) = \mu_1(\lambda_1\ell_1(f_1)+\lambda_2\ell_1(f_2))+\mu_2(\lambda_1\ell_2(f_1)+\lambda_2\ell_2(f_2)) = \lambda_1(\mu_1\ell_1(f_1)+\mu_2\ell_2(f_1))+\lambda_2(\mu_1\ell_1(f_2)+\mu_2\ell_2(f_2)) = \lambda_1(\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)(f_1) + \lambda_2(\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)(f_2)$,
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $(\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)(f_1f_2) = \mu_1\ell_1(f_1f_2) + \mu_2\ell_2(f_1f_2) = \mu_1(f_1(x)\ell_1(f_2) + f_2(x)\ell_1(f_1)) + \mu_2(f_1(x)\ell_2(f_2)+f_2(x)\ell_2(f_1)) = f_1(x)(\mu_1\ell_1(f_2)+\mu_2\ell_2(f_2))+f_2(x)(\mu_1\ell_1(f_1)+\mu_2\ell_2(f_1)) = f_1(x)(\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)(f_2) + f_2(x)(\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)(f_1)$,

δηλαδή η $\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz. □

Ορισμός 1.3.2.2. $\forall \upsilon^\centerdot \equiv [x|\alpha] \in T_xX$, ορίζουμε $\ell_\upsilon \in D_xX$ τέτοιο, ώστε $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\ell_\upsilon(f) = D(f \circ \alpha)|_0$.[21] Ταυτίζουμε το ℓ_υ με το $\upsilon^\centerdot$ και γράφουμε $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\upsilon^\centerdot(f) := \ell_\upsilon(f)$, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα $\upsilon^\centerdot$ είναι και *κλάση ισοδυναμίας* και *απεικόνιση*.

Ισχυρισμός. $\upsilon^\centerdot \in D_xX$.

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\upsilon^\centerdot(\lambda f + \mu g) \equiv D((\lambda f + \mu g) \circ \alpha)|_0 = D(\lambda(f \circ \alpha) + \mu(g \circ \alpha))|_0 = \lambda D(f \circ \alpha)|_0 + \mu D(g \circ \alpha)|_0 \equiv \lambda \upsilon^\centerdot(f) + \mu \upsilon^\centerdot(g)$,
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\upsilon^\centerdot(fg) \equiv D((fg) \circ \alpha)|_0 = D((f \circ \alpha)(g \circ \alpha))|_0 = f(x)D(g \circ \alpha)|_0 + g(x)D(f \circ \alpha)|_0 = f(x)\upsilon^\centerdot(g) + g(x)\upsilon^\centerdot(f)$.

Σχόλιο. Με βάση τον ορισμό 1.3.2.2 γράφουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f).$$

Παρατήρηση 1.3.2.1. *Με βάση τον ορισμό 1.3.2.2 έχουμε* $\forall \upsilon^\centerdot \in T_xX$, $\upsilon^i = (\pi^i \circ \phi_\centerdot)(\upsilon^\centerdot) = \pi^i(\phi_\centerdot(\upsilon^\centerdot)) = \pi^i(D(\phi \circ \alpha)|_0) = D\pi^i|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\pi^i \circ \phi \circ \alpha)|_0 = D(x^i \circ \alpha)|_0 = \upsilon(x^i)$.[22] *Γράφουμε*

$$\upsilon^\centerdot = \sum_{i=1}^{\dim X} \upsilon^\centerdot(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x.$$

Λήμμα 1.3.2.2. [23]$\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ *με* $x \in U$ *και* $\phi(x) = 0$ *έτσι, ώστε*

$$f = f(x) + \sum_{i=1}^{\dim X} x^i f_i \text{ με } f_i(x) := \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x.$$

[21] Ο ορισμός είναι καλός: $D(f \circ \alpha)|_0 = D(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)|_0 = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}(D(\phi \circ \alpha)|_0) = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}(\phi_\centerdot(\upsilon^\centerdot))$, ανεξάρτητο της $\alpha \in [x|\alpha]$.

[22] $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $D u\pi^i|_x y = \langle y|e^i\rangle = y^i = \pi^i(y)$, δηλαδή $D\pi^i|_x = \pi^i$.

[23] Όπως παρουσιάζεται στο [1].

Απόδειξη. Ο άτλαντας $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος οπότε $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, επιλέγουμε $(U|\phi') \in \mathcal{A}$ με $\phi' = \phi - \phi(x)$, οπότε και $\phi'(x) = 0$. Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\phi(x) = 0$. Έστω $h = f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{\dim X} \supseteq \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}] \Longrightarrow h \in \mathcal{C}^\infty[\phi(U)|\mathbb{R}]$[24] και $\forall (u^i)_{i=1}^{\dim X} \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim X}$,

$$h((u^i)_{i=1}^{\dim X}) - h(0) = \int_0^1 \frac{dh}{dt}((tu^i)_{i=1}^{\dim X})dt = \sum_{i=1}^{\dim X} u^i \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \pi^i}((tu^i)_{i=1}^{\dim X})dt.$$

Θέτοντας $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$,

$$h_i((u^i)_{i=1}^{\dim X}) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \pi^i}((tu^i)_{i=1}^{\dim X})dt,$$

έπεται ότι

$$h = h(0) + \sum_{i=1}^{\dim X} u^i h_i,$$

ισοδύναμα, θέτοντας $f_i = h_i \circ \phi \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$,[25]

$$f \circ \phi^{-1} = f(x) + \sum_{i=1}^{\dim X} u^i (f_i \circ \phi^{-1}).$$

Δεδομένου ότι

$$f_i(x) = (h_i \circ \phi)(x) = h_i(\phi(x)) = h_i(0) = \left.\frac{\partial h}{\partial \pi^i}\right|_0 = \left.\frac{\partial}{\partial \pi^i}\right|_{\phi(x)} (f \circ \phi^{-1}),$$

δηλαδή

$$f_i(x) = \pi^i \circ D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} e_i = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x,$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.3.2.1. *Οι χώροι T_xX και D_xX ταυτίζονται modulo ισομορφισμό.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η αντιστοιχία του ορισμού 1.3.2.2 είναι ισομορφισμός[26] μεταξύ T_xX και D_xX. Πράγματι:

- $\forall u^\bullet, v^\bullet \in T_xX$ με $\ell_u = \ell_v$ και $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $u^\bullet(f) = v^\bullet(f)$ οπότε $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, $u^\bullet(x^i) = v^\bullet(x^i) \Longrightarrow u^i = v^i \Longrightarrow u^\bullet = v^\bullet$.
- $\forall \ell \in D_xX$, $\exists v^\bullet \in T_xX$ τέτοιο, ώστε $v^i = \ell(x^i)$. Τότε $\ell = \ell_v$. Πράγματι, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$,

$$\ell(f) = \ell\left(f(x) + \sum_{i=1}^{\dim X} x^i f_i\right) = \ell(f(x)) + \sum_{i=1}^{\dim X} (x^i(x)\ell(f_i) + \ell(x^i)f_i(x)).$$

  $\phi(x) = 0$, συνεπώς $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $x^i(x) = 0$. Επιπλέον

$$f_i(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x,$$

  και προφανώς $\ell(f(x)) = 0$[27], οπότε

$$\ell(f) = \sum_{i=1}^{\dim X} \ell(x^i) f_i(x) = \sum_{i=1}^{\dim X} v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = v^\bullet(f).$$

[24] Υπό την έννοια ότι αν $h \in \mathcal{C}^\infty_{\phi(x)}[\phi(U)|\mathbb{R}]$ τότε $\exists V \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$ με $x \in V$ τέτοιο, ώστε $h \in \mathcal{C}^\infty[V|\mathbb{R}]$. Επειδή $\mathcal{A}$ μέγιστος, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε U τέτοιο, ώστε $\phi(U) \subseteq V$.

[25] $\phi(x) = 0$ και $h(0) = (f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = f(x)$

[26] ορισμός A.3.2.2.

[27] Έχουμε $\forall \ell \in D_xX$, $\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = 1 \cdot \ell(1) + 1 \cdot \ell(1)$, συνεπώς $\ell(1) = 0$ (υποενότητα A.3) και άρα $\ell(f) = 0$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$ *σταθερή*.

Ισχυρισμός. Η αντιστοιχία είναι γραμμική.

Πράγματι, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u^{\bullet} \equiv [x|\alpha], v^{\bullet} \equiv [x|\beta] \in T_xX$ και $\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}_x[X|\mathbb{R}]$, από υποσημείωση 21 στη σελίδα 10 και επειδή $\phi_{\bullet}$ είναι γραμμική[28], $(\lambda u^{\bullet} + \mu v^{\bullet})(f) = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(\lambda u^{\bullet} + \mu v^{\bullet}) = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}(\lambda\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu\phi_{\bullet}(v^{\bullet})) = \lambda D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(u^{\bullet}) + \mu D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(v^{\bullet}) = \lambda u^{\bullet}(f) + \mu v^{\bullet}(f)$. □

1.3.3 Παράγωγος συνάρτησης.

Ορισμός 1.3.3.1 (σημειακή παραγώγιση απεικόνισης)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και $x \in X$. Η απεικόνιση

$$d_{-}|_x : \mathcal{C}^{\infty}_x[X|Y] \longrightarrow \mathcal{L}[T_xX|T_{f(x)}Y] : f \mapsto df|_x : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y : [x|\alpha] \mapsto df|_x[x|\alpha] := [f(x)|f \circ \alpha]$$

καλείται *σημειακή παραγώγιση της άλγεβρας* $\mathcal{C}^{\infty}_x[X|Y]$.[29]

Ισχυρισμός. $\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}_x[X|Y]$, $\forall g \in \mathcal{C}^{\infty}_{f(x)}[Y|\mathbb{R}]$ και $\forall v^{\bullet} \in T_xX$, $df|_x(v^{\bullet})(g) = v^{\bullet}(g \circ f)$.

Πράγματι, $df|_x(v^{\bullet})(g) = D(g \circ (f \circ \alpha))|_0 = D((g \circ f) \circ \alpha)|_0 = v^{\bullet}(g \circ f)$.

Λήμμα 1.3.3.1. *$\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}_x[X|Y]$ και $\forall g \in \mathcal{C}^{\infty}_{f(x)}[Y|Z]$, $d(g \circ f)|_x = dg|_{f(x)} \circ df|_x$.*

Απόδειξη. $\forall z \equiv [x|\alpha] \in T_xX$, $d(g \circ f)|_x[x|\alpha] = [g(f(x))|g \circ f \circ \alpha] = dg|_{f(x)}[f(x)|f \circ \alpha] = dg|_{f(x)}df|_x[x|\alpha]$. □

Ισχυρισμός. $df|_x = \psi_{\bullet}^{-1} \circ DF|_{\phi(x)} \circ \phi_{\bullet}$. Ειδικότερα, $d\phi|_x = \phi_{\bullet}$.

Πράγματι, $\forall v^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$, $\psi_{\bullet}(df|_x[x|\alpha]) = \psi_{\bullet}([f(x)|f \circ \alpha]) = D(\psi \circ f \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = DF|_{\phi(x)} \circ DA|_0 = DF|_{\phi(x)}\phi_{\bullet}(v^{\bullet})$.

Έστω $Y \equiv \mathbb{R}^{\dim X}$ και $f \equiv \phi$. Τότε $f_x = f \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}(\mathbb{R}^{\dim X})$, συνεπώς $\nabla_{\phi(x)} f_x = \mathrm{id}$. Επιπλέον, $\psi_{\bullet} \equiv \mathrm{id}(\mathbb{R}^{\dim X})$[30] επομένως έχουμε το ζητούμενο.

Με βάση τα παραπάνω

$$(d\phi|_x)^{-1} \equiv d\phi^{-1}|_{\phi(x)} : \mathbb{R}^{\dim X} \longrightarrow T_xX : h \mapsto$$
$$\mapsto d\phi^{-1}|_{\phi(x)}h := [x|a \equiv \phi^{-1} \circ (\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim X} : t \mapsto \sigma(t) := \phi(x) + th)],$$
$$DF|_{\phi(x)} = d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)}.$$

Επιπλέον $\forall v^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$ και $\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}_x[X|\mathbb{R}]$, $v^{\bullet}(f) = D(f \circ \alpha)|_0 = D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = df|_x d\phi^{-1}|_{\phi(x)} d\phi|_x v^{\bullet} = df|_x v^{\bullet}$, οπότε και

$$df^j|_x = \sum_{i=1}^{\dim X} dx^i|_x {f_i}^j(x),$$

όπου

$${f_i}^j(x) = \left.\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right|_x,$$

με $f^j \equiv y^j \circ f$. Από ορισμό 1.3.2.1, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$ και $\forall j \in \mathbb{N}_{\dim f(X)}$, ${f_i}^j(x) \in \mathbb{R}$, επομένως, μπορεί να οριστεί ο πίνακας Jacobi της f στο x αντίστοιχο της $df|_x$, $J_x(f) \in \mathbb{M}_{\dim f(X) \times \dim X}[\mathbb{R}]$. Τότε $J_x(f) = J_{\phi(x)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$. $\forall j \in \mathbb{N}_{\dim X}$

$$d\psi^{-1}|_{\psi(x)} e_j = d(\psi^{-1} \circ \phi)|_x d\phi^{-1}|_{\phi(x)} e_j,$$

ή

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x = \sum_{i=1}^{\dim X} \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x.$$

σε αλλαγή συντεταγμένων.

[28] θεώρημα 1.3.1.1.

[29] Ο ορισμός είναι καλός: $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap f^{-1}(V)$ και $\forall \beta \in [x|\alpha]$, $D(\psi \circ f \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = DF|_{\phi(x)} \circ DA|_0 = DF|_{\phi(x)} \circ DB|_0 = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \beta)|_0 = D(\psi \circ f \circ \beta)|_0$, δηλαδή $f \circ \beta \in [f(x)|f \circ \alpha]$.

[30] Εδώ υποθέτουμε $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^{\dim X} \equiv \mathbb{R}^{\dim X}$, αλλιώς δε μπορούμε να έχουμε $d\phi|_x = \phi_{\bullet}$. Πράγματι, μια κλάση $[y|\beta]$ καμπυλών στον $\mathbb{R}^{\dim X}$ θα είχε $\psi_{\bullet}([y|\beta]) = D(\psi \circ \beta)|_0 = D\beta|_0$, οπότε όπως και με τους αντίστοιχους χάρτες, και εδώ θεωρούμε ότι η $\psi_{\bullet}$ δεν υπάρχει. Με αυτήν τη λογική, $\forall v^{\bullet} \equiv [x|\alpha] \in T_xX$ και $\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}_x[X|\mathbb{R}]$, $df|_x v^{\bullet} \in \mathbb{R}$, δηλαδή $df|_x \in \mathcal{L}[T_xX|\mathbb{R}] \equiv (T_xX)^* =: T^*_xX$ (υποενότητα Α.3.2).

1.4 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΕΣΜΗ

Ορισμός 1.4.1 (εφαπτόμενη δέσμη)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, $x \in X$. Ορίζουμε την *εφαπτόμενη δέσμη* ως[31]

$$T(X) := \bigcup_{x \in X} T_x X.$$

Επειδή $\forall x, y \in X$, $T_x X \cap T_y X = \emptyset$, γράφουμε και

$$T(X) = \sum_{x \in X} T_x X.$$

Η πολλαπλότητα X καλείται και *βάση* της εφαπτόμενης δέσμης $T(X)$.

Ορισμός 1.4.2 (απεικόνιση προβολής στη βάση)**.** Εφοδιάζουμε την εφαπτόμενη δέσμη με μια *απεικόνιση προβολής στη βάση* X της $T(X)$,

$$\pi : T(X) \longmapsto X : T_x X \ni z \mapsto \pi(z) := x.$$

Ισοδύναμα, $\pi^{-1}(\{x\}) := \pi^{-1}(x) \equiv T_x X \subset T(X)$.

Λήμμα 1.4.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $(U|\phi) \in \mathcal{A}$. $(\pi^{-1}(U)|\alpha)$ έτσι, ώστε*[32]

$$\alpha : T(X) \supseteq T(U) \equiv \pi^{-1}(U) \longmapsto \phi(U) \times \mathbb{R}^{\dim X} : T_x X \ni z \mapsto \alpha(z) := (\phi(x)|d\phi|_x z),\ \pi(z) = x \in U \subseteq X$$

είναι τοπικός χάρτης της $T(X)$.

Απόδειξη. Έχουμε:

- $\forall z_1, z_2 \in \pi^{-1}(U)$, $\alpha(z_1) = \alpha(z_2) \implies \phi(\pi(z_1)) = \phi(\pi(z_2)) \implies \pi(z_1) = \pi(z_2) = x \in U$. Τότε $z_1, z_2 \in T_x X$ με $d\phi|_x z_1 = d\phi|_x z_2$, συνεπώς $z_1 = z_2$.
- Η απεικόνιση

  $$\alpha|_x : T(X) \supseteq T(U) \equiv \pi^{-1}(U) \supset \pi^{-1}(x) \equiv T_x X \longmapsto \{x\} \times \mathbb{R}^{\dim X} \subset \phi(U) \times \mathbb{R}^{\dim X} \subseteq \mathbb{R}^{2\dim X}$$

  είναι επί $\forall x \in U$, καθώς και η $\phi : U \longmapsto \phi(U)$.

Επιπλέον, $\phi(U) \times \mathbb{R}^{\dim X} \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{2 \cdot \dim X})$. □

Λήμμα 1.4.2. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. $T(\mathcal{A}) := \{(\pi^{-1}(U)|\alpha)|(U|\phi) \in \mathcal{A}\}$ είναι διαφορικός άτλαντας της $T(X)$.*

Απόδειξη.
Ισχυρισμός. Η $T(\mathcal{A})$ είναι άτλαντας της $T(X)$.
Πράγματι, $T(X) = \pi^{-1}(X) = \pi^{-1}(\cup_{(U|\phi)\in\mathcal{A}} U) = \cup_{(U|\phi)\in\mathcal{A}} \pi^{-1}(U)$.
Ισχυρισμός. $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $(\pi^{-1}(U)|\alpha)$ και $(\pi^{-1}(V)|\beta)$ είναι διαφορικώς συμβιβαστοί.

- $\alpha(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \alpha(\pi^{-1}(U \cap V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\dim X} \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim T(X)})$,
- $\beta(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \beta(\pi^{-1}(U \cap V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\dim X} \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim T(X)})$.

Επιπλέον, $\forall x \in U \cap V$ και $\forall z \in T_x X$:

- $(\beta \circ \alpha^{-1})(\phi(x)|d\phi|_x z) = ((\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))|D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} d\phi|_x z)$,
- $(\alpha \circ \beta^{-1})(\psi(x)|d\psi|_x z) = ((\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x))|D(\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)} d\psi|_x z)$,

quod erat demonstrandum. □

[31] $T(X)$, not to be confused with the topology $\mathcal{T}(X)$ of a set X.
[32] $\phi(x) := (\phi \circ \pi)(z)$, $\forall z \in T_x X$.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. $(T(X)|T(\mathcal{A}))$ είναι διαφορική πολλαπλότητα με $\dim T(X) = 2 \cdot \dim X$.*

Ορισμός 1.4.3 (παράγωγος/εφαπτόμενη απεικόνιση)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Η απεικόνιση

$$d_- : \mathcal{C}^\infty[X|Y] \longrightarrow \sum_{x\in X} \mathcal{L}(T_xX|T_{f(x)}Y) : f \mapsto df : T(X) \longrightarrow T(Y) : T_xX \ni z \mapsto df(z) := df|_x z \in T_{f(x)}Y,$$

$x = \pi_X(z)$, καλείται *ολική παραγώγιση* της $\mathcal{C}^\infty[X|Y]$.[33] Η df είναι η *παράγωγος/εφαπτόμενη απεικόνιση*.

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τότε $df \in \mathcal{C}^\infty[T(X)|T(Y)]$.*

Απόδειξη. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ $((\pi^{-1}(U)|\alpha) \in T(\mathcal{A}))$, $(V|\psi) \in \mathcal{B}$ $((\pi^{-1}(U)|\beta) \in T(\mathcal{B}))$, $x \in U \cap f^{-1}(V) \subseteq X$, $z \in T_xX$ και η τοπική παράστασή της df,

$$\beta \circ df \circ \alpha^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \times \mathbb{R}^{\dim X} \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^{\dim Y}.$$

Ισχυρισμός. $\beta \circ df \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{C}^\infty[\phi(U \cap f^{-1}(V)) \times \mathbb{R}^{\dim X}|\psi(V) \times \mathbb{R}^{\dim Y}]$.

Πράγματι, $\forall x \in U \cap f^{-1}(V)$ και $\forall z \in T_xX$, $(\beta \circ df \circ \alpha^{-1})(\phi(x)|d\phi|_x z) = (\beta \circ df)(\alpha^{-1}(\phi(x)|d\phi|_x z)) = (\beta \circ df)(z) = \beta(df(z)) = \beta(df|_x z) = (\psi(f(x))|d\psi|_{f(x)} df|_x z) = (\psi(f(\phi^{-1}(\phi(x))))|d\psi|_{f(x)} df|_x d\phi^{-1}|_{\phi(x)} d\phi|_x z) = (F(\phi(x))|DF|_{\phi(x)} d\phi|_x z)$. Όμως $F \in \mathcal{C}^\infty[\phi(U \cap f^{-1}(V))|\psi(V)]$ και $DF|_{\phi(x)} \in \mathcal{C}^\infty[\phi(U \cap f^{-1}(V))|\psi(V)]$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

1.4.1 Δέσμη πλαισίων.

Ορισμός 1.4.1.1 (δέσμη πλαισίων)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, $x \in X$ και $\mathcal{B}_xX$ το σύνολο των βάσεων (πλαισίων[34]) του T_xX. Ορίζουμε την *δέσμη πλαισίων* ως

$$\mathcal{B}(X) := \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_xX.$$

Επειδή $\forall x, y \in X$, $T_xX \cap T_yX = \emptyset$, γράφουμε και

$$\mathcal{B}(X) = \sum_{x\in X} \mathcal{B}_xX.$$

Η πολλαπλότητα X καλείται και βάση της δέσμης πλαισίων $\mathcal{B}(X)$.

Ορισμός 1.4.1.2 (απεικόνιση προβολής)**.** Ορίζεται η *απεικόνιση προβολής* της $\mathcal{B}(X)$,

$$\pi : \mathcal{B}(X) \longmapsto X : \mathcal{B}_xX \ni e \mapsto \pi(e) := x.$$

Ισοδύναμα, $\pi^{-1}(\{x\}) := \pi^{-1}(x) \equiv \mathcal{B}_xX \subset \mathcal{B}(X)$.

Ισχυρισμός. $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_xX \simeq GL_{\dim X}(\mathbb{R})$[35].

Πράγματι, έστω $\mathcal{B}_xX \ni e = (e_i)_{i=1}^{\dim X} \subset T_xX \simeq \mathbb{R}^{\dim X}$. Από αλγεβρικό ορισμό του T_xX,[36] δεδομένου ότι $\forall j \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $x^j : X \longrightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται $\lambda_i^{\ j} := e_i(x^j) \in \mathbb{R}$ και ο αντίστοιχος πίνακας $\lambda[\phi](e) \in GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{M}_{n\times n}[\mathbb{R}])$. Προφανώς, $\lambda[\phi] : \mathcal{B}_xX \longrightarrow GL_{\dim X}(\mathbb{R})$ είναι ισομορφισμός.

Λήμμα 1.4.1.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $(U|\phi) \in \mathcal{A}$. $(\pi^{-1}(U)|\alpha)$ έτσι, ώστε*

$$\alpha : \mathcal{B}(X) \supseteq \mathcal{B}(U) \equiv \pi^{-1}(U) \longmapsto \phi(U) \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) : \mathcal{B}_xX \ni e \mapsto \alpha(e) := (\phi(x), \lambda[\phi](e))$$

με $x = \pi(e) \in U$, είναι τοπικός χάρτης της $\mathcal{B}(X)$.

[33] Η $\mathcal{C}^\infty[X|Y]$ *δεν* είναι άλγεβρα, όπως και η $T(X)$ *δεν* είναι διανυσματικός χώρος και η ∇ *δεν* είναι γραμμική.

[34] ορισμός A.3.1.9

[35] $GL_n(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{M}_{n\times n}[\mathbb{R}])$: general linear group, σύνολο πραγματικών αντιστρέψιμων πινάκων $n \times n$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Είναι ανοιχτό υποσύνολο με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{M}_{n\times n}[\mathbb{R}]$.

[36] ορισμός 1.3.2.1

Απόδειξη. Έχουμε:

- $\forall e_1, e_2 \in \pi^{-1}(U)$, $\alpha(e_1) = \alpha(e_2) \implies \phi(\pi(e_1)) = \phi(\pi(e_2)) \implies \pi(e_1) = \pi(e_2) = x \in U$. Τότε $e_1, e_2 \in \mathcal{B}_x X$ με $\lambda[\phi](e_1) = \lambda[\phi](e_2)$, συνεπώς $e_1 = e_2$.
- Η απεικόνιση

$$\alpha|_x : \mathcal{B}(X) \supseteq \mathcal{B}(U) \equiv \pi^{-1}(U) \supseteq \pi^{-1}(x) \equiv \mathcal{B}_x X \longmapsto \{x\} \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \subseteq \phi(U) \times GL_{\dim X}(\mathbb{R})$$

  είναι επί $\forall x \in U$, καθώς και η $\phi : U \longmapsto \phi(U)$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Επιπλέον, $\phi(U) \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim X} \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\dim X + (\dim X)^2} \equiv \mathbb{R}^{(1+\dim X)\dim X})$ οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.4.1.2. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. $\mathcal{B}(\mathcal{A}) := \{(\pi^{-1}(U)|\alpha)\}_{(U|\phi)\in\mathcal{A}}$ είναι διαφορικός άτλαντας της $\mathcal{B}(X)$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε τα παρακάτω:

Ισχυρισμός. Η $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ είναι άτλαντας της $\mathcal{B}(X)$.

Πράγματι, $\mathcal{B}(X) \equiv \pi^{-1}(X) = \pi^{-1}(\cup_{(U|\phi)\in\mathcal{A}} U) = \cup_{(U|\phi)\in\mathcal{A}} \pi^{-1}(U)$.

Ισχυρισμός. $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $(\pi^{-1}(U)|\alpha)$ και $(\pi^{-1}(V)|\beta)$ είναι διαφορικώς συμβιβαστοί.

- $\alpha(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \alpha(\pi^{-1}(U \cap V)) = \phi(U \cap V) \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim \mathcal{B}(X)})$,
- $\beta(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \beta(\pi^{-1}(U \cap V)) = \psi(U \cap V) \times GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^{\dim \mathcal{B}(X)})$.

Επιπλέον, $\forall x \in U \cap V$ και $\forall z \in T_x X$:

- $(\beta \circ \alpha^{-1})(\psi(x), \lambda[\psi](e)) = ((\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)), (\lambda[\psi] \circ \lambda^{-1}[\phi])(\lambda[\phi](e)))$,

$$(\lambda[\psi] \circ \lambda^{-1}[\phi])_i{}^k(\lambda[\phi](e)) = \lambda_i{}^k[\psi](e) = e_i(y^k) = \sum_{j=1}^{\dim X} \lambda_i{}^j[\phi](e)\frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

  δηλαδή, $\lambda[\psi] \circ \lambda^{-1}[\phi] \equiv (D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} : GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \longmapsto GL_{\dim X}(\mathbb{R})) \in \mathcal{C}^\infty[GL_{\dim X}(\mathbb{R})|GL_{\dim X}(\mathbb{R})]$.

- $(\alpha \circ \beta^{-1})(\phi(x), \lambda[\phi](e)) = ((\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x)), (\lambda[\phi] \circ \lambda^{-1}[\psi])(\lambda[\psi](e)))$,

$$(\lambda[\phi] \circ \lambda^{-1}[\psi])_i{}^j(\lambda[\psi](e)) = \lambda_i{}^j[\phi](e) = e_i(x^j) = \sum_{j=1}^{\dim X} \lambda_i{}^k[\psi](e)\frac{\partial x^j}{\partial y^k},$$

  δηλαδή, $\lambda[\phi] \circ \lambda^{-1}[\psi] \equiv (D(\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)} : GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \longmapsto GL_{\dim X}(\mathbb{R})) \in \mathcal{C}^\infty[GL_{\dim X}(\mathbb{R})|GL_{\dim X}(\mathbb{R})]$.

quod erat demonstrandum. □

Θεώρημα 1.4.1.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. $(\mathcal{B}(X)|\mathcal{B}(\mathcal{A}))$ είναι διαφορική πολλαπλότητα με $\dim \mathcal{B}(X) = \dim X + (\dim X)^2 = (1 + \dim X) \cdot \dim X$.*

Σχόλιο. Έστω γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε $\forall l \in \mathbb{N}$, επεκτείνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f_l : \mathbb{M}_{n\times l}[\mathbb{R}] \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times l}[\mathbb{R}] : \forall i \in \mathbb{N}_m \text{ και } \forall j \in \mathbb{N}_l,\ a_{ij} \mapsto b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} a_{kj}, \text{ όπου } x_i \mapsto y_i = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} x_k.$$

Με αυτόν τον τρόπο ερμηνεύονται και οι $D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} : GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \longmapsto GL_{\dim X}(\mathbb{R})$ και $D(\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)} : GL_{\dim X}(\mathbb{R}) \longmapsto GL_{\dim X}(\mathbb{R})$ στην απόδειξη του λήμματος 1.4.1.2.

1.5 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

1.5.1 Γεωμετρικός ορισμός.

Ορισμός 1.5.1.1 (διανυσματικό πεδίο)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Μια απεικόνιση $\xi : X \longrightarrow T(X)$ είναι *διανυσματικό πεδίο* του X αν και μόνο αν $\pi_X \circ \xi = \mathrm{id}_X$:[37]

$$\begin{array}{cccc} & & \xi & \\ & X & \rightarrow & T(X) \\ \mathrm{id}_X & \downarrow & \swarrow & \\ & X & & \pi_X \end{array}$$

$\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$, ορίζεται η πραγματική συνάρτηση $\xi(f) : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \xi(f)(x) := \xi(x)(f)$.[38] Ειδικότερα, $\forall x \in X$ και $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, $x^i \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$. Ορίζεται $\xi^i := \xi(x^i)$ και

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow \mathcal{B}(U) \equiv \pi_X^{-1}(U) : x \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(x) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \in \mathcal{B}_x X \equiv \pi_X^{-1}(x).$$

Ισχυρισμός. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων επί του U με πράξεις ορισμένες κατά σημείο ορίζουν ένα $\mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$*-πρότυπο.*

Πράγματι, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$,

$$\xi + \eta : U \longrightarrow T(U) : x \mapsto (\xi + \eta)(x) := \xi(x) + \eta(x),$$
$$f\xi : U \longrightarrow T(U) : x \mapsto (f\xi)(x) := f(x)\xi(x).$$

Αν $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $\xi^i \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$ τότε

$$\xi = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ορίζεται $\mathcal{X}(X)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων στο X.

Λήμμα 1.5.1.1. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ *και* $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}].$$

Απόδειξη. Έχουμε $\forall x \in U$:

$$df|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{\dim X} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x dx^i|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{\dim X} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x D(x^i \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{\dim X} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x D\pi^i|_{\phi(x)},$$

$$D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{\dim X} \left.\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \pi^i}\right|_{\phi(x)} D\pi^i|_{\phi(x)},$$

$$D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} = df|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = \left.\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \pi^i}\right|_{\phi(x)} =: \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \pi^i}(\phi(x)).$$

$f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] \Longrightarrow f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}]$ οπότε και

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \pi^i} \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}] \right) \circ \phi \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}].$$

quod erat demonstrandum. □

[37] Αυτό διασφαλίζει ότι $\forall x \in X$, $\xi(x) \in \pi_X^{-1}(x) \equiv T_x X \subset T(X)$.

[38] $\xi(x) \in T_x X \subset T(X)$.

Θεώρημα 1.5.1.1 (διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία)**.** *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $x \in X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. $\xi \in \mathcal{C}_x^\infty[X|T(X)]$,
2. $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $\xi^i \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$,
3. $\forall f \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\xi(f) \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$.

Απόδειξη. 1. $\Longleftrightarrow$ 2.. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$.[39] Η τοπική παράστασή της ξ στο x είναι της μορφής

$$\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^{\dim X} : \phi(x) \mapsto \alpha(\xi(x)) = (\phi(x)|(\pi^i(d\phi|_x\xi(x)))_{i=1}^{\dim X}),$$

όπου $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $\pi^i(d\phi|_x\xi(x)) = D\pi^i|_{\phi(x)}d\phi|_x\xi(x) = d(\pi^i \circ \phi)|_x\xi(x) = dx^i|_x(\xi(x)) = \xi(x)(x^i) = \xi^i(x) = (\xi^i \circ \phi^{-1})(\phi(x))$, δηλαδή

$$(\alpha \circ \xi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = (\phi(x)|((\xi^i \circ \phi^{-1})(\phi(x)))_{i=1}^{\dim X}).$$

$\xi \in \mathcal{C}_x^\infty[X|T(X)] \Longleftrightarrow \alpha \circ \xi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}_{\phi(x)}^\infty[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim T(X)}] \Longleftrightarrow \xi^i \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}_{\phi(x)}^\infty[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}] \Longleftrightarrow \xi^i \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$.

2. $\Longrightarrow$ 3..$\forall f \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\forall x \in X$, $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ τέτοιος, ώστε $x \in U$ και

$$\xi(f)(x) = \xi(x)(f) = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

ή, και από λήμμα 1.5.1.1,

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}].$$

quod erat demonstrandum. □

Πόρισμα 1.5.1.1. *Τα βασικά διανυσματικά πεδία είναι διαφορίσιμα, δηλαδή $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$,*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{C}^\infty[U|T(U)].$$

Απόδειξη. Άμεση απόρροια του θεωρήματος 1.5.1.1 και του λήμματος 1.5.1.1. □

Σχόλιο. Με βάση τον ορισμό 1.5.1.1 και το θεώρημα 1.5.1.1, το σύνολο $\mathcal{X}(X)$ είναι $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-*πρότυπο.*

1.5.2 Αλγεβρικός ορισμός.

Ορισμός 1.5.2.1 (ολική παραγώγιση)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $x \in X$. Η απεικόνιση $\partial : \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ καλείται *ολική παραγώγιση* της *άλγεβρας* $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, αν και μόνο αν:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\partial(\lambda f + \mu g) = \lambda\partial f + \mu\partial g$ (γραμμικότητα),
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\partial(fg) = f\partial g + g\partial f$ (κανόνας γινομένου Leibniz).

Το σύνολο των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ με πράξεις ορισμένες κατά σημείο ορίζουν ένα $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-*πρότυπο.* Ονομάζουμε το σύνολο αυτό $\mathcal{D}(X)$.

Θεώρημα 1.5.2.1. $\mathcal{D}(X) \simeq \mathcal{X}(X)$.

Απόδειξη.

Ισχυρισμός. Η απεικόνιση $\partial_x : \mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}] \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \partial_x f := \partial f(x)$ ορίζει σημειακή παραγώγιση της $\mathcal{C}_x^\infty[X|\mathbb{R}]$.

Πράγματι, από τις κατά σημείο ιδιότητες του $\mathcal{D}(X)$ ως $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-πρότυπο, προκύπτουν οι ιδιότητες του ορισμού 1.3.2.1, δηλαδή, $\partial_x \in D_xX \simeq T_xX$. $\forall \partial \in \mathcal{D}(X)$, ορίζεται το διανυσματικό πεδίο $\xi[\partial] : X \longrightarrow T(X) : x \mapsto \xi[\partial](x) := \partial_x$.

[39] $\xi(U) \subset \pi_X^{-1}(U)$, $(\pi_X^{-1}(U)|\alpha) \in T(\mathcal{A})$ αφού $(U|\phi) \in \mathcal{A}$.

Ισχυρισμός. $\forall \partial \in \mathcal{D}(X)$, $\xi[\partial] \in \mathcal{X}(X)$.

Πράγματι, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ και $\forall x \in X$, $\xi[\partial](f)(x) := \xi[\partial](x)(f) = \partial_x f = \partial f(x) \Longrightarrow \xi[\partial](f) = \partial f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$.

- $\forall \partial_1, \partial_2 \in \mathcal{D}(X)$ με $\xi[\partial_1] = \xi[\partial_2]$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\partial_1 f = \partial_2 f \Longrightarrow \partial_1 = \partial_2$.
- $\forall \eta \in \mathcal{X}(X)$, $(\eta : \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] : f \mapsto \eta(f)) \in \mathcal{D}(X)$ από θεώρημα 1.5.1.1. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\xi[\eta](f) = \eta(f) \Longrightarrow \xi[\eta] = \eta$.

Ισχυρισμός. Η αντιστοιχία διανυσματικού πεδίου - παραγώγισης είναι (σημειακά) γραμμική.

Πράγματι, $\forall \partial_1, \partial_2 \in \mathcal{D}(X)$, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ και $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $\xi[f_1\partial_1 + f_2\partial_2](g) = (f_1\partial_1 + f_2\partial_2)(g) = f_1\partial_1 g + f_2\partial_2 g = f_1\xi[\partial_1](g) + f_2\xi[\partial_2](g)$, δηλαδή $\xi[f_1\partial_1 + f_2\partial_2] = f_1\xi[\partial_1] + f_2\xi[\partial_2]$. □

Θεώρημα 1.5.2.2 (γινόμενο Lie)**.** *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. $\forall \xi, \eta \in \mathcal{D}(X)$,*

$$([\xi|\eta] \equiv \xi \circ \eta - \eta \circ \xi : \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] : f \mapsto [\xi|\eta](f) := \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))) \in \mathcal{D}(X).$$

Αυτό δίνει μια επιπλέον δομή γινομένου δακτυλίου στο $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-πρότυπο $\mathcal{D}(X)$ με τις εξής αντικαταστάσεις *ιδιοτήτων:*

$\mathfrak{Lie}_1$*:* $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(X)$, $[\xi_1|\xi_2] + [\xi_2|\xi_1] = 0$ *(μεταθετικό $\longrightarrow$ αντιμεταθετικό γινόμενο),*

$\mathfrak{Lie}_2$*:* $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{D}(X)$, $[[\xi_1|\xi_2]|\xi_3] + [[\xi_2|\xi_3]|\xi_1] + [[\xi_3|\xi_1]|\xi_2] = 0$
(προσεταιριστική ιδιότητα $\longrightarrow$ ταυτότητα Jacobi).

που το κάνει άλγεβρα Lie.Επιπλέον, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$,

$$[f_1\xi_1|f_2\xi_2] = f_1f_2[\xi_1|\xi_2] + f_1\xi_1(f_2)\xi_2 - f_2\xi_2(f_1)\xi_1.$$

Απόδειξη. $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(X)$, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ και $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$,
$[f_1\xi_1|f_2\xi_2](g) = (f_1\xi_1)((f_2\xi_2)(g)) - (f_2\xi_2)((f_1\xi_1)(g)) = f_1\xi_1(f_2\xi_2(g)) - f_2\xi_2(f_1\xi_1(g)) = f_1(\xi_1(f_2)\xi_2(g) - f_2\xi_1(\xi_2(g))) - f_2(\xi_2(f_1)\xi_1(g) - f_1\xi_2(\xi_1(g))) = f_1f_2[\xi_1|\xi_2](g) + f_1\xi_1(f_2)\xi_2(g) - f_2\xi_2(f_1)\xi_1(g)$.

$\mathfrak{Lie}_1$: $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(X)$, $[\xi_1|\xi_2](g) + [\xi_2|\xi_1](g) = \xi_1(\xi_2(g)) - \xi_2(\xi_1(g)) + \xi_2(\xi_1(g)) - \xi_1(\xi_2(g)) = 0$,

$\mathfrak{Lie}_2$: $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{D}(X)$, $[[\xi_1|\xi_2]|\xi_3](g) + [[\xi_2|\xi_3]|\xi_1](g) + [[\xi_3|\xi_1]|\xi_2](g)$

$$\begin{aligned} &= \xi_1(\xi_2(\xi_3(g))) - \xi_2(\xi_1(\xi_3(g))) - \xi_3(\xi_1(\xi_2(g))) + \xi_3(\xi_2(\xi_1(g))) \\ &+ \xi_2(\xi_3(\xi_1(g))) - \xi_3(\xi_2(\xi_1(g))) - \xi_1(\xi_2(\xi_3(g))) + \xi_1(\xi_3(\xi_2(g))) \\ &+ \xi_3(\xi_1(\xi_2(g))) - \xi_1(\xi_3(\xi_2(g))) - \xi_2(\xi_3(\xi_1(g))) + \xi_2(\xi_1(\xi_3(g))) = 0, \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum. □

1.5.3 Διανυσματικά πεδία κατά μήκος απεικονίσεων.

Ορισμός 1.5.3.1 (διανυσματικό πεδίο κατά μήκος απεικόνισης)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$. Μια απεικόνιση $\xi : X \longrightarrow T(Y)$ είναι *διανυσματικό πεδίο* του X *κατά μήκος* της f αν και μόνο αν $\pi_Y \circ \xi = f$:[40]

$$\begin{array}{ccccc} & X & & \xi & \\ f & \downarrow & \searrow & & \\ & Y & \leftarrow & T(Y) & \\ & & \pi_Y & & \end{array}$$

$\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $\forall (V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ και $x \in U \cap f^{-1}(V)$, $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[V|\mathbb{R}]$, ορίζεται η πραγματική συνάρτηση $\xi(g) : U \cap f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \xi(g)(x) := \xi(x)(g)$.[41] Ειδικότερα, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim Y}$, $y^i \in \mathcal{C}^\infty[V|\mathbb{R}]$, ορίζεται $\xi^i := \xi(y^i)$ και

$$\frac{\partial}{\partial y^i} : U \cap f^{-1}(V) \longrightarrow \mathcal{B}(V) \equiv \pi_Y^{-1}(V) : x \mapsto \frac{\partial}{\partial y^i}(f(x)) := \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(x)} \in \mathcal{B}_{f(x)}Y \equiv \pi_Y^{-1}(f(x)).$$

[40] Αυτό διασφαλίζει ότι $\forall x \in X$, $\xi(x) \in \pi_Y^{-1}(f(x)) \equiv T_{f(x)}Y \subset T(Y)$.
[41] $\xi(x) \in T_{f(x)}Y \subset T(Y)$.

Ισχυρισμός. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων επί του $U \cap f^{-1}(V)$ με πράξεις ορισμένες κατά σημείο ορίζουν ένα $\mathcal{C}^\infty[U \cap f^{-1}(V)|\mathbb{R}]$-*πρότυπο.*

Πράγματι, $\forall h \in \mathcal{C}^\infty[U \cap f^{-1}(V)|\mathbb{R}]$,

$$\xi + \eta : U \cap f^{-1}(V) \longrightarrow T(V) : x \mapsto (\xi + \eta)(x) := \xi(x) + \eta(x),$$

$$h\xi : U \cap f^{-1}(V) \longrightarrow T(V) : x \mapsto (h\xi)(x) := h(x)\xi(x).$$

Αν $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $\xi^i \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$ τότε

$$\xi = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Ορίζεται $\mathcal{X}(f) \subset \mathcal{C}^\infty[X|T(Y)]$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων στο X κατά μήκος της f.

Θεώρημα 1.5.3.1 ($\mathcal{C}^k$-διανυσματικά πεδία)**.** *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|Y]$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

1. $\xi \in \mathcal{C}^\infty_x[X|T(Y)]$,

2. $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim Y}$, $\xi^i \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$,

3. $\forall g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}[Y|\mathbb{R}]$, $\xi(g) \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$.

Απόδειξη. 1. $\Longleftrightarrow$ 2.. Έστω $(U|\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V|\psi) \in \mathcal{B}$ με $(U \cap f^{-1}(V)|\phi) \in \mathcal{A}$ και $x \in U \cap f^{-1}(V)$.[42] Η τοπική παράστασή της ξ στο x είναι της μορφής

$$\beta \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^{\dim X} : \phi(x) \mapsto \beta(\xi(x)) = (F(\phi(x))|(\pi^i(d\psi|_{f(x)}\xi(x)))_{i=1}^{\dim X})$$

όπου $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $\pi^i(d\psi|_{f(x)}\xi(x)) = D\pi^i|_{\psi(f(x))}d\psi|_{f(x)}\xi(x) = d(\pi^i \circ \psi)|_{f(x)}\xi(x) = dy^i|_{f(x)}\xi(x) = \xi(x)(y^i) = \xi^i(x) = (\xi^i \circ \phi^{-1})(\phi(x))$, δηλαδή

$$(\beta \circ \xi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = ((\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))|((\xi^i \circ \phi^{-1})(\phi(x)))_{i=1}^{\dim X}).$$

$\xi \in \mathcal{C}^k_x[X|T(Y)] \Longleftrightarrow \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim Y}] \wedge (\beta \circ \xi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}^{\dim T(Y)}] \Longleftrightarrow \xi^i \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty_{\phi(x)}[\mathbb{R}^{\dim X}|\mathbb{R}]) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|Y] \wedge \xi^i \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim Y}$.

2. $\Longrightarrow$ 3.. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}]$, $\forall x \in X$, $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ τέτοιος, ώστε $x \in U$ και

$$\xi(g)(x) = \xi(x)(g) = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i(x) \frac{\partial g}{\partial y^i}(f(x))$$

ή, και από λήμμα 1.5.1.1,

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i \frac{\partial g}{\partial y^i} \circ f \in \mathcal{C}^\infty_x[X|\mathbb{R}].$$

quod erat demonstrandum. □

Λήμμα 1.5.3.1. *$\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$ και $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$, $df \circ \xi \in \mathcal{X}(f)$.*

Απόδειξη. Πράγματι, $df \circ \xi : X \longrightarrow T(Y)$ και $\nabla f \in \mathcal{C}^\infty[T(X)|T(Y)]$. Όμως

$$\pi_Y \circ df : T(X) \longrightarrow Y : T_x X \ni z \mapsto \pi_Y(df(z)) = \pi_Y(df|_x z) = f(x) = f(\pi_X(z)),$$

οπότε $\pi_Y \circ df \circ \xi = f \circ \pi_X \circ \xi = f$. □

[42] $\xi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \pi_Y^{-1}(V)$, $(\pi_Y^{-1}(V)|\beta) \in T(\mathcal{A})$ αφού $(V|\psi) \in \mathcal{B}$.

1.5.3.1 Διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπυλών.

Ορισμός 1.5.3.1.1 (πεδίο ταχυτήτων)**.** Έστω η τετριμμένη αναλυτική πολλαπλότητα $(\mathbb{R}|\mathcal{A})$ τέτοια, ώστε $\forall(U|\phi) \in \mathcal{A}$, $U \in \mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R})$ και $\phi = \mathrm{id}_U$. Τότε ορίζεται το βασικό πεδίο του $(\mathbb{R}|\mathrm{id}_\mathbb{R}) \in \mathcal{A}$[43],

$$\partial_t : \mathbb{R} \longrightarrow T(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto \partial_t x = \left.\frac{d}{dt}\right|_x \in T_x\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}.$$

Επομένως $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}]$,

$$\partial_t f = \frac{df}{dt} \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}].$$

Έστω καμπύλη $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$.Το διανυσματικό πεδίο

$$\frac{d\alpha}{dt} := d\alpha \circ \partial_t : \mathbb{R} \longrightarrow T(X) : x \mapsto d\alpha(\partial_t(x)) = d\alpha|_x \partial_t(x) \in T_{\alpha(x)}X$$

καλείται *πεδίο ταχυτήτων* της *καμπύλης* α. Από πρόταση 1.5.3 έχουμε ότι $\nabla\alpha \circ \partial_t \in \mathcal{X}(\alpha)$. Από ορισμό 1.5.1.1, $\forall(U|\phi) \in \mathcal{A}$,

$$(d\alpha^i \circ \partial_t)(x) := (d\alpha \circ \partial_t)(x)(x^i) = d\alpha|_x \partial_t(x)(x^i) = \partial_t(x)(x^i \circ \alpha) \equiv \left.\frac{d\alpha^i}{dt}\right|_x,$$

συνεπώς

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{\dim X} \frac{d\alpha^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

1.5.4 Συσχετισμένα διανυσματικά πεδία.

Ορισμός 1.5.4.1 (f-συσχετισμένα διανυσματικά πεδία)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ καλούνται *f-συσχετισμένα* αν και μόνο αν $df \circ \xi = \eta \circ f$.[44]Σχηματικά:

$$\begin{array}{ccccc} & & \xi & & \\ & X & \longrightarrow & T(X) & \\ f & \downarrow & & \downarrow & df \\ & Y & \longrightarrow & T(Y) & \\ & & \eta & & \end{array}$$

Λήμμα 1.5.4.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ είναι f-συσχετισμένα αν και μόνο αν $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[f(X)|\mathbb{R}]$, $\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$.*

Απόδειξη. Έστω $df \circ \xi = \eta \circ f$. Ισοδύναμα, $\forall x \in X$, $(df \circ \xi)(x) = (\eta \circ f)(x) \Longleftrightarrow df|_x \xi(x) = \eta(f(x)) \in T_{f(x)}X$. Ισοδύναμα, από θεώρημα 1.3.2.1 $\forall g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}[Y|\mathbb{R}]$, $df|_x \xi(x)(g) = \eta(f(x))(g) \Longleftrightarrow \xi(x)(g \circ f) = \eta(g)(f(x)) \Longleftrightarrow \xi(g \circ f)(x) = (\eta(g) \circ f)(x) \Longleftrightarrow \xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$. □

Πρόταση 1.5.4.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Επιπλέον, έστω ότι τα διανυσματικά πεδία $\xi_1 \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta_1 \in \mathcal{X}(Y)$, καθώς και $\xi_2 \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta_2 \in \mathcal{X}(Y)$, είναι f-συσχετισμένα, αντίστοιχα. Τότε και τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $[\xi_1|\xi_2] \in \mathcal{X}(X)$ και $[\eta_1|\eta_2] \in \mathcal{X}(Y)$ είναι f-συσχετισμένα.*

Απόδειξη. Από λήμμα 1.5.3, αρκεί να δειχθεί ότι $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[f(X)|\mathbb{R}]$, $[\xi_1|\xi_2](g \circ f) = [\eta_1|\eta_2](g) \circ f$. Πράγματι, $[\xi_1|\xi_2](g \circ f) = \xi_1(\xi_2(g \circ f)) - \xi_2(\xi_1(g \circ f)) = \xi_1(\eta_2(g) \circ f) - \xi_2(\eta_1(g) \circ f) = (df \circ \xi_1)(\eta_2(g)) - (df \circ \xi_2)(\eta_1(g)) = (\eta_1 \circ f)(\eta_2(g)) - (\eta_2 \circ f)(\eta_1(g)) = \eta_1(\eta_2(g)) \circ f - \eta_2(\eta_1(g)) \circ f = [\eta_1|\eta_2](g) \circ f$. □

[43] Κατά συνέπεια, $\forall(U|\phi) \in \mathcal{A}$ αφού $U \subseteq \mathbb{R}$ και $\phi = \mathrm{id}_U = \mathrm{id}_\mathbb{R}|_U$.

[44] $df \circ \xi \in \mathcal{X}(f)$ και άρα $\eta \circ f \in \mathcal{X}(f)$, λήμμα 1.5.3.

Ορισμός 1.5.4.2 (ισομορφισμοί & αυτομορφισμοί πολλαπλοτητων)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Η f ορίζει *ισομορφισμό* των πολλαπλοτήτων X και Y αν και μόνο αν είναι *αμφιδιαφόριση*, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη με $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Στην περίπτωση που $Y \equiv X$, η f καλείται *αυτομορφισμός* του X, και γράφουμε το σύνολο όλων των αυτομορφισμών του X ως $\mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$.

Ορισμός 1.5.4.3 (συζυγής απεικόνιση)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και ισομορφισμός $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τότε ορίζεται η *συζυγής απεικόνιση* της f, $f_* : \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(Y) : \xi \mapsto f_*(\xi) := df \circ \xi \circ f^{-1}$. Προφανώς $df \circ \xi = f_*(\xi) \circ f$.

Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του X, $\xi \in \mathcal{X}(X)$ χαρακτηρίζεται ως *αναλλοίωτο ως προς αυτομορφισμό* $f \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$ του X, αν και μόνο αν $f_*(\xi) = \xi$.

Θεώρημα 1.5.4.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και ισομορφισμός $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τότε, η απεικόνιση $f_* : \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(Y) : \xi \mapsto f_*(\xi) := df \circ \xi \circ f^{-1}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ αλγεβρών Lie.*

Απόδειξη. Η f_* είναι αμφιμονοσήμαντη αφού η απεικόνιση $f_*^{-1} : \mathcal{X}(Y) \longrightarrow \mathcal{X}(X) : \eta \mapsto f_*^{-1}(\eta) := df^{-1} \circ \xi \circ f$ είναι καλά ορισμένη[45] και $f_* \circ f_*^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}(Y)}$ και $f_*^{-1} \circ f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{X}(X)}$.

$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:

- $f_*(f_1\xi_1 + f_2\xi_2) = df \circ (f_1\xi_1 + f_2\xi_2) \circ f^{-1} = df \circ (f_1\xi_1) \circ f^{-1} + df \circ (f_2\xi_2) \circ f^{-1} = df \circ ((f_1 \circ f^{-1})(\xi_1 \circ f^{-1})) + df \circ ((f_2 \circ f^{-1})(\xi_2 \circ f^{-1})) = (f_1 \circ f^{-1})(df \circ \xi_1 \circ f^{-1}) + (f_2 \circ f^{-1})(df \circ \xi_2 \circ f^{-1}) = (f_1 \circ f^{-1})f_*(\xi_1) + (f_2 \circ f^{-1})f_*(\xi_2)$,[46]
- $f_*([\xi_1|\xi_2]) = [f_*(\xi_1)|f_*(\xi_2)]$ από πρόταση 1.5.4.1,

quod erat demonstrandum. □

Πόρισμα 1.5.4.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$. $f \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X) \Longleftrightarrow f_* \in \mathrm{aut}(\mathcal{X}(X))$.*

Λήμμα 1.5.4.2. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$, $(Z|\mathcal{C})$ και αμφιδιαφορίσεις $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$, $g \in \mathcal{C}^\infty[Y|Z]$. Τότε $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Απόδειξη. $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$,

$$(g_* \circ f_*)(\xi) = g_*(f_*(\xi)) := g_*(df \circ \xi \circ f^{-1}) := dg \circ (df \circ \xi \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = d(g \circ f) \circ \xi \circ (g \circ f)^{-1} = (g \circ f)_*(\xi),$$

quod erat demonstrandum □

1.5.4.1 Ολοκληρωτικές καμπύλες - Διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμός 1.5.4.1.1 (ολοκληρωτική καμπύλη - διαφορική εξίσωση)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(X)$. Μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$[47] καλείται *ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου* ξ αν και μόνο αν ∂_t και ξ είναι α-συσχετισμένα ή από ορισμό 1.5.3.1.1 $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \xi \circ \alpha \Longleftrightarrow \frac{d\alpha^i}{dt} = \xi^i \circ \alpha = (\xi^i \circ \phi^{-1})((\alpha^j)_{j=1}^{\dim X}),$$

που αποτελεί μια *διαφορική εξίσωση* με αντίστοιχη *τοπική έκφραση* $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 1.5.4.1.1. *Το πρόβλημα εύρεσης διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ τέτοιας, ώστε $\alpha(0) = x$ και*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \xi \circ \alpha,$$

είναι πρόβλημα Cauchy.

Λήμμα 1.5.4.1.1. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

---

[45] $(f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y) \wedge (f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X) \Longrightarrow (df)^{-1} = df^{-1} \Longrightarrow f_*^{-1} = (f^{-1})_*$.

[46] $\forall g \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty[Y|\mathbb{R}]$ από πρόταση 1.2.1 και $f \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X) \subseteq \mathcal{C}^\infty[X|Y]$.

[47] $I \subseteq \mathbb{R}$, διάστημα.

1. *Τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ είναι f-συσχετισμένα.*

2. *$\forall \alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi \in \mathcal{X}(X)$, η $f \circ \alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|Y]$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $\eta \in \mathcal{X}(Y)$.*[48]

Απόδειξη. 1. $\Longrightarrow$ 2... Ισχύει $df \circ \xi = \eta \circ f$. Έστω $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ ολοκληρωτική καμπύλη του ξ. Τότε

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = (d(f \circ \alpha) = df \circ d\alpha) \circ \partial_t = df \circ \frac{d\alpha}{dt} = (df \circ \xi = \eta \circ f) \circ \alpha,$$

2. $\Longrightarrow$ 1... Έστω ότι $f \circ \alpha$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η. Τότε $\forall x \in X$, $(df \circ \xi)(x) = df(\xi(x = \alpha(0))) = (df \circ \xi \circ \alpha)(0) = ((df \circ d\alpha = d(f \circ \alpha) = \eta \circ f) \circ \partial_t)(0) = \eta(f(\alpha(0) = x))$. ☐

Ορισμός 1.5.4.1.2 (χρονική μεταφορά)**.** Η *χρονική μετατόπιση* εκφράζεται, $\forall s \in \mathbb{R}$, από την αμφιδιαφόριση $\ell_s : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : t \mapsto \ell_s(t) := s + t = t + s$ με αντίστοιχο ισομορφισμό εφαπτόμενων χώρων $d\ell_s|_t : \mathbb{R} \simeq T_t\mathbb{R} \longmapsto T_{s+t}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} : \partial_t x \mapsto d\ell_s|_t \partial_t x =: \partial_{s+t} x$.

Πράγματι, έστω αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$. Τότε:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}_x X$ με $[f(x)|f \circ \alpha] = [f(x)|f \circ \beta]$ ισοδύναμα, $\forall (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $D(\psi \circ f \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f \circ \beta)|_0 \Longleftrightarrow d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d\alpha|_0 = d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d\beta|_0$ ισοδύναμα, $\forall (U|\phi) \in \mathcal{A}$, $d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d(\phi^{-1} \circ \phi)|_x \circ d\alpha|_0 = d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d(\phi^{-1} \circ \phi)|_x \circ d\beta|_0 \Longleftrightarrow (d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)}) \circ (d\phi|_x \circ d\alpha|_0) = (d\psi|_{f(x)} \circ df|_x \circ d\phi^{-1}|_{\phi(x)}) \circ (d\phi|_x \circ d\beta|_0) \Longleftrightarrow D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \beta)|_0$. Όμως $f^{-1} \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$ οπότε και $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty[\psi(f(U) \cap V)|\phi(U)]$[49], συνεπώς $D(\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)} \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1})|_{\psi(x)} \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \beta)|_0 \Longleftrightarrow D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\phi \circ \beta)|_0$ δηλαδή, $[x|\alpha] = [x|\beta]$.

- $f^{-1} \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$ επομένως $\forall x \in X$, $f^{-1}(x) \in X$ και $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}_x X$, $\forall (U|\phi), (V|\psi) \in \mathcal{A}$, $D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\phi \circ \beta)|_0 \Longleftrightarrow D(\psi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)} \circ D(\phi \circ \beta)|_0 \Longleftrightarrow D(\psi \circ f^{-1} \circ \alpha)|_0 = D(\psi \circ f^{-1} \circ \beta)|_0$ δηλαδή, $[f^{-1}(x)|f^{-1} \circ \alpha] = [f^{-1}(x)|f^{-1} \circ \beta]$.

Ισχυρισμός. Η χρονική μετατόπιση ℓ_s ως καμπύλη του $\mathbb{R}$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του βασικού πεδίου ∂_t.

Πράγματι, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(d\ell_s \circ \partial_t)(x) = d\ell_s(\partial_t x) := d\ell_s|_t \partial_t x := \partial_{s+t} x = \partial_t \ell_s(x) = (\partial_t \circ \ell_s)(x)$.[50]

Λήμμα 1.5.4.1.2. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ του ξ. Η καμπύλη $\alpha \circ \ell_s \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ είναι επίσης ολοκληρωτική καμπύλη του ξ.*

Απόδειξη. α είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, συνεπώς ∂_x και ξ είναι α-συσχετισμένα. ℓ_s είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ∂_x επομένως από λήμμα 1.5.4.1.1 $\alpha \circ \ell_s$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ. ☐

1.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΡΟΕΣ

Ορισμός 1.6.1 (διαφορική ροή)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Καλούμε *διαφορική ροή* μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X : (t|x) \mapsto \phi(t|x) =: \phi_t(x) =: \alpha_x(t)$$

τέτοια, ώστε $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\phi(0|x) = x$ και $\phi(t + s|x) = \phi(t|\phi(s|x))$ ισοδύναμα, $\phi_0 = \mathrm{id}_X$ και $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Συνεπώς $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$.[51] Επιπλέον $\alpha_x \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ καλείται *τροχιά* του $x \in X$ στη ϕ. Συμβολίζουμε $\phi \in \mathbb{R}(X) \subseteq \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R} \times X|X]$.

Ορισμός 1.6.2 (απειροστικός γεννήτορας)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Καλούμε *απειροστικό γεννήτορα της διαφορικής ροής* ϕ το διανυσματικό πεδίο

$$\xi : X \longrightarrow T(X) : x \mapsto \xi(x) := \frac{\partial \phi}{\partial t}(0|x) = \frac{d\alpha_x}{dt}(0) \in T_x X$$

[48] Λέμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί τις ολοκληρωτικές καμπύλες.

[49] $x \in U \cap f^{-1}(U)$ και $f(x) \in f(U \cap f^{-1}(V)) = f(U) \cap f(f^{-1}(V)) = f(U) \cap V$ αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

[50] Αυτό σημαίνει πως το βασικό πεδίο ∂_t είναι αναλλοίωτο ως προς τις χρονικές μετατοπίσεις $\{\ell_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ αφού $\nabla \ell_s \circ \partial_t = \partial_t \circ \ell_s$.

[51] $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ και $\alpha_x(0) = x$.

Σχόλιο. $\xi \in \mathcal{X}(X)$.

Λήμμα 1.6.1. *Έστω διαφορική ροή $\phi \in \mathbb{R}(X)$ σε διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $\xi \in \mathcal{X}(X)$ ο αντίστοιχος απειροστικός γεννήτορας της ϕ. $\forall x \in X$, η τροχιά του x στην ϕ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ.*

Απόδειξη. $\forall x \in X$ και $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\alpha_x(s+t) = \phi(s+t|x) = \phi(s|\phi(t|x)) = \alpha_{\phi(t|x)}(s)$,

$$\frac{d\alpha_x}{dt}(s+t) = \frac{d\alpha_x}{ds}(s+t) = \frac{d\alpha_{\phi(t|x)}}{ds}(s).$$

Για $s = 0$,

$$\frac{d\alpha_x}{dt}(t) = \frac{d\alpha_{\phi(t|x)}}{ds}(0) = \xi(\phi(t|x) = \alpha_x(t)) = (\xi \circ \alpha_x)(t),$$

quod erat demonstrandum. □

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Τότε έχουμε ότι, $\forall x \in X$, $\exists (U|\phi) \in \mathcal{A}$ τέτοιος, ώστε $\forall (\xi : X \supseteq U \longrightarrow T(U) \subseteq T(X)) \in \mathcal{X}(U) \subseteq \mathcal{X}(X)$, $\exists (\phi : \mathbb{R} \times U \supseteq I \times U \longrightarrow U \subseteq X) \in \mathbb{R}(U) \subseteq \mathbb{R}(X)$ τέτοια, ώστε ξ είναι απειροστικός γεννήτορας της ϕ, και αντίστροφα, δηλαδή $\mathbb{R}(U) \simeq \mathcal{X}(U)$. Λέμε ότι το ξ ορίζει τοπικά μια διαφορική ροή.*

Ορισμός 1.6.3 (f-συσχετισμένες διαφορικές ροές)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Οι διαφορικές ροές $\phi \in \mathbb{R}(X)$ και $\psi \in \mathbb{R}(Y)$ καλούνται *f-συσχετισμένες* αν και μόνο αν $\forall t \in \mathbb{R}$, $f \circ \phi_t = \psi_t \circ f$.[52]

Αν f ισομορφισμός ορίζεται η συζυγής απεικόνιση $f_* : \mathbb{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R}(Y) : \phi_t \mapsto f_*(\phi_t) := f \circ \phi_t \circ f^{-1}$, $\forall t \in I_\phi \subseteq \mathbb{R}$. Μια διαφορική ροή ϕ είναι f-αναλλοίωτη αν και μόνο αν $f_*(\phi) = \phi$.

Λήμμα 1.6.2. *Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ είναι f-συσχετισμένα,*

2. *$\forall x \in X$, $\exists (A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και $\exists (B|\beta) \in \mathcal{B}$ με $x \in A \cap f^{-1}(B)$ και $(A \cap f^{-1}(B)|\alpha) \in \mathcal{A}$ έτσι, ώστε οι (τοπικές) διαφορικές ροές $\phi \in \mathbb{R}(A \cap f^{-1}(B))$ του ξ και $\psi \in \mathbb{R}(B)$ του η είναι f-συσχετισμένες.*

Απόδειξη. 1. $\Longrightarrow$ 2.. Έστω $x \in A \cup f^{-1}(B)$ και α_x ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\alpha_x(0) = x$. Τότε από λήμμα 1.5.4.1.1, $f \circ \alpha_x$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η με $(f \circ \alpha_x)(0) = f(\alpha_x(0) = x)$, δηλαδή $(\psi_t \circ f)(x) = \psi_t(f(x)) = \alpha_{f(x)}(t) = (f \circ \alpha_x)(t) = f(\alpha_x(t) = \phi_t(x)) = (f \circ \phi_t)(x)$, $\forall t \in I_\phi \cap I_\psi \subseteq \mathbb{R}$.[53]

2. $\Longrightarrow$ 1.. Έστω α_x ολοκληρωτική καμπύλη του ξ και $\alpha_{f(x)}$ ολοκληρωτική καμπύλη του η αντίστοιχα. Τότε $(f \circ \alpha_x)(t) = f(\alpha_x(t) = \phi_t(x)) = (f \circ \phi_t = \psi_t \circ f)(x) = \psi_t(f(x)) = \alpha_{f(x)}(t) \Longrightarrow (df \circ \xi)(x) = df|_x(\xi(x) = (d\alpha_x \circ \partial_t)(0)) = ((df \circ \alpha_x = d\alpha_{f(x)}) \circ \partial_t)(0) = \eta(f(x)) = (\eta \circ f)(x)$, $\forall x \in X$. □

Σχόλιο. Από λήμμα 1.6.2, $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall f \in \mathcal{D}\mathrm{iff}(X)$, $df \circ \xi = \xi \circ f$ αν και μόνο αν $\forall (A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και $\forall \phi \in \mathbb{R}(A)$ με γεννήτορα $\xi|_A \in \mathcal{X}(A)$, $f \circ \phi_t = \phi_t \circ f$, $\forall t \in I_\phi \subseteq \mathbb{R}$.[54] Ειδικότερα, $d\phi_t \circ \xi|_A = \xi|_A \circ \phi_t$, δηλαδή το ξ είναι πάντα τοπικά ϕ_t-αναλλοίωτο (ως προς τη ροή του).

Θεώρημα 1.6.2 (παράγωγος Lie)**.** *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi, \eta \in \mathcal{X}(X)$. Επιπλέον, έστω τοπικός χάρτης $(A|\alpha) \in \mathcal{A}$ και η αντίστοιχη (τοπική) ροή $\phi \in \mathbb{R}(A)$ του ξ:*

$$\pounds_\xi(\eta) := [\xi|\eta]|_A = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\nabla\phi_t \circ \eta|_A \circ \phi_{-t}) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(d\phi_t \circ \eta|_A \circ \phi_{-t} - \eta|_A)$$

ονομάζεται παράγωγος Lie του η ως προς ξ. Επιπλέον έχουμε $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:

$$\pounds_\xi(f) := \xi|_A(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f|_A \circ \phi_t) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f|_A \circ \phi_t - f|_A)$$

[52] Ισοδύναμα, $\forall t \in \mathbb{R}$ και $\forall x \in X$, $f(\phi(t|x)) = \psi(t|f(x))$.
[53] λήμμα 1.6.1
[54] Ή ξ είναι f-αναλλοίωτο αν και μόνο αν ϕ είναι f- αναλλοίωτη.

Πρόταση 1.6.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\xi, \eta \in \mathcal{X}(X)$. Επιπλέον, έστω τοπικοί χάρτες $(A|\alpha), (B|\beta) \in \mathcal{A}$ και οι (τοπικές) ροές $\phi \in \mathbb{R}(A)$ του ξ και $\psi \in \mathbb{R}(B)$ του η. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. $\xi|_{A\cap B} \circ \eta|_{A\cap B} = \eta|_{A\cap B} \circ \xi|_{A\cap B}$,
2. $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$, $\forall t, s \in I_\phi \cap I_\psi \subseteq \mathbb{R}$,
3. $\phi_t \circ \eta|_{A\cap B} = \eta|_{A\cap B} \circ \phi_t$, $\forall t \in I_\phi \subseteq \mathbb{R}$,
4. $\xi|_{A\cap B} \circ \psi_s = \psi_s \circ \xi|_{A\cap B}$, $\forall s \in I_\psi \subseteq \mathbb{R}$.

1.7 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός 1.7.1 (διαφορική εμφύτευση/εμβάπτιση)**.** Έστω διαφορικές πολλαπλότητες $(X|\mathcal{A})$, $(Y|\mathcal{B})$, $x \in X$ και διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$.

- Η f είναι *εμφύτευση* του X εν Y στο x αν και μόνο αν η $df|_x$ είναι μονοσήμαντη.
- Η f είναι *εμφύτευση* του X εν Y αν και μόνο αν η df είναι μονοσήμαντη.
- Η f είναι *εμβάπτιση* του X εν Y αν και μόνο αν η f είναι εμφύτευση του X εν Y και μονοσήμαντη.

Ορισμός 1.7.2 (διαφορική υποπολλαπλότητα)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(Y|\mathcal{B})$. Μια διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με μία εμβάπτιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$ καλείται *υποπολλαπλότητα* της $(Y|\mathcal{B})$ και γράφουμε $X \hookrightarrow^f Y$. Έχουμε $\mathcal{A} = \{(f(X) \cap V|\psi \circ f)|(V|\psi) \in \mathcal{B}\}$.

Ορισμός 1.7.3 (εφαπτόμενο διαφορικής υποπολλαπλότητας διανυσματικό πεδίο)**.** Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ *εφάπτεται διαφορικής υποπολλαπλότητας* $X \hookrightarrow^f Y$ μιας διαφορικής πολλαπλότητας $(Y|\mathcal{A})$ αν και μόνο αν $\pi_{f(X)} \circ \eta = \mathrm{id}_{f(X)}$.

Θεώρημα 1.7.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορική υποπολλαπλότητα $X \hookrightarrow^f Y$. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ εφάπτεται του X αν και μόνο αν υπάρχει διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(X)$ f-συσχετισμένο ως προς το η: $df \circ \xi = \eta \circ f$.*

Σχόλιο. Η απεικόνιση $f|_{f(X)}$ είναι αμφιδιαφόριση επομένως $\xi = f_*|_{f(X)}(\eta|_{f(X)})$ μοναδικό με την παραπάνω ιδιότητα. Προφανώς μόνο το $\eta|_{f(X)}$ εφάπτεται του X.

Πόρισμα 1.7.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(Y|\mathcal{B})$ και διαφορική υποπολλαπλότητα $X \hookrightarrow^f Y$. Τότε $\mathcal{X}(X) \hookrightarrow^{f_*} \mathcal{X}(Y)$*[55].

[55] εμφυτευμένη υποάλγεβρα Lie

Κεφάλαιο 2

ΟΜΑΔΕΣ LIE

2.1 ΟΜΑΔΕΣ LIE

Ορισμός 2.1.1 (ομάδα Lie)**.** Μια ομάδα $\langle G|\rangle$ εφοδιασμένη με διαφορική δομή τέτοια, ώστε

$$(\Diamond\Diamond : G \times G \longrightarrow G : x \times y \mapsto xy) \in \mathcal{C}^\infty[G \times G|G],$$

αποτελεί *ομάδα Lie.*

Θεώρημα 2.1.1. *Οι παρακάτω απεικονίσεις είναι αυτομορφισμοί:*[1]

- $\forall a \in G$, $(a\Diamond : G \longmapsto G : x \mapsto ax) \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(G) \subseteq \mathcal{D}\mathrm{iff}(G)$ *με* $(a\Diamond)^{-1} = a^{-1}\Diamond : G \longmapsto G : x \mapsto xa^{-1}$,
- $\forall a \in G$, $(\Diamond a : G \longmapsto G : x \mapsto xa) \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(G) \subseteq \mathcal{D}\mathrm{iff}(G)$ *με* $(\Diamond a)^{-1} = \Diamond a^{-1} : G \longmapsto G : x \mapsto a^{-1}x$,
- $(\Diamond^{-1} : G \longmapsto G : x \mapsto x^{-1}) \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(G) \subseteq \mathcal{D}\mathrm{iff}(G)$ *με* $(\Diamond^{-1})^{-1} = \Diamond : G \longmapsto G : x \mapsto x.$

Πόρισμα 2.1.1. *Η απεικόνιση a-συζυγίας* $\forall a \in G$, *είναι αυτομορφισμός:*

$$(a\Diamond a^{-1} = a\Diamond \circ \Diamond a^{-1} = \Diamond a^{-1} \circ a\Diamond : G \longmapsto G : x \mapsto axa^{-1}) \in \mathrm{Aut}(G) \subseteq \mathcal{D}\mathrm{iff}(G)$$

με $(a\Diamond a^{-1})^{-1} = a^{-1}\Diamond a : G \longmapsto G : x \mapsto a^{-1}xa.$

Ορισμός 2.1.2 (ομάδα Lie)**.** Μια ομάδα $\langle G|\rangle$ εφοδιασμένη με διαφορική δομή τέτοια, ώστε

$$(\Diamond\Diamond^{-1} : G \times G \longrightarrow G) \in \mathcal{C}^\infty[G \times G|G],$$

αποτελεί *ομάδα Lie.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πως οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

2.1.1 $\Longrightarrow$ 2.1.2. $\Diamond\Diamond^{-1} = \Diamond\Diamond \circ (\Diamond \times \Diamond^{-1}) \in \mathcal{C}^\infty[G \times G|G]$.

2.1.2 $\Longrightarrow$ 2.1.1. $\Diamond\Diamond^{-1} \in \mathcal{C}^\infty[G \times G|G] \Longrightarrow \Diamond^{-1} = \Diamond\Diamond^{-1} \circ (e \times \Diamond) \in \mathcal{C}^\infty[G|G] \Longrightarrow \Diamond\Diamond = \Diamond\Diamond^{-1} \circ (\Diamond \times \Diamond^{-1}) \in \mathcal{C}^\infty[G \times G|G]$.

quod erat demonstrandum. ☐

Ορισμός 2.1.3 (υποομάδα Lie)**.** Έστω ομάδα Lie G. Η υποομάδα $H \leq G$ είναι *υποομάδα Lie* της G αν και μόνο αν H είναι ομάδα Lie με $H \hookrightarrow G$.[2]

---

[1] Περιορίζουμε την ομάδα $\langle \hom(G|H)|\circ\rangle$ / $\langle \mathrm{iso}(G|H)|\circ\rangle$ των *ομομορφισμών* (homomorphisms) / *ισομορφισμών* (isomorphisms) μεταξύ των *ομάδων* G και H στις *διαφορίσεις/αμφιδιαφορίσεις* $\mathcal{C}^\infty[G|H]$ μεταξύ των *ομάδων Lie* G και H. Ονομάζουμε το σύνολο αυτό $\mathcal{H}\mathrm{om}(G|H) \leq \hom(G|H)$ / $\mathcal{I}\mathrm{so}(G|H) \leq \mathrm{iso}(G|H)$.

[2] Όταν δεν αναγράφεται μια εμβάπτιση $f : H \longrightarrow G$, τότε εννοείται η ταυτοτική $\mathrm{id}_G|_H : H \longrightarrow G$, δηλαδή $H \subseteq G$, πράγμα το οποίο δε συμβαίνει γενικά στις υποπολλαπλότητες.

2.1.1 Διαφορίσιμες Δράσεις.

Ορισμός 2.1.1.1 (διαφορικο δυναμικό σύστημα)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα X και ομάδα Lie G.

- Καλούμε *αριστερή διαφορική δράση* της *ομάδας Lie* G στη διαφορική πολλαπλότητα X τη διαφορίσιμη απεικόνιση $\triangleright : G \times X \longrightarrow X : a \times x \mapsto ax$ τέτοια, ώστε $ex = x$ και $\forall a, b \in G$, $(ab)x = a(bx)$.
- Καλούμε *δεξιά διαφορική δράση* της *ομάδας Lie* G στη διαφορική πολλαπλότητα X τη διαφορίσιμη απεικόνιση $\triangleleft : X \times G \longrightarrow X : x \times a \mapsto xa$ τέτοια, ώστε $xe = x$ και $\forall a, b \in G$, $x(ab) = (xa)b$.

Αν $\{a\Diamond\}_{a\in G} \vee \{\Diamond a\}_{a\in G} \simeq G \hookrightarrow \mathcal{D}\mathrm{iff}(X) \iff (a\Diamond \vee \Diamond a = \mathrm{id}_X \implies a = e)$[3] η δράση καλείται *αποτελεσματική* (effective action). $\forall x \in X$ η υποομάδα $G(x) := \{a \in G | ax \vee xa = x\} \leq G$ καλείται *σταθεροποιητής* (stabiliser) του G στο x. Αν $\forall x \in X$, $G(x) = \{e\}$ τότε η δράση καλείται *ελεύθερη* (free action). Μια ελεύθερη δράση είναι αποτελεσματική. Αν $\forall x, y \in X$, $\exists a \in G$ τέτοιο, ώστε $ax \vee xa = y$, η δράση καλείται *μεταβατική*. Αν επιπλέον a μοναδικό τότε καλείται *απλώς μεταβατική*.

Το διατεταγμένο ζεύγος $(X|G)$ καλείται *γεωμετρία Klein*.

Ορισμός 2.1.1.2 (τροχιά σημείου)**.** Έστω γεωμετρία Klein $(X|G)$ και $x \in X$.

- Καλούμε *αριστερή τροχιά* του x το σύνολο $Gx := \Diamond x(G) = \{ax\}_{a\in G}$. Εξ΄ ορισμού, $\triangleright |_{G\times Gx}$ είναι μεταβατική. Αν $\triangleright$ είναι αποτελεσματική, τότε $\triangleright |_{G\times Gx}$ είναι απλώς μεταβατική.
- Καλούμε *δεξιά τροχιά* του x το σύνολο $xG := x\Diamond(G) = \{xa\}_{a\in G}$. Εξ΄ ορισμού, $\triangleleft |_{xG\times G}$ είναι μεταβατική. Αν $\triangleleft$ είναι αποτελεσματική, τότε $\triangleleft |_{xG\times G}$ είναι απλώς μεταβατική.

Ισχυρισμός. Οι τροχιές συνιστούν διαμέριση του συνόλου X.[4]

Προφανώς $\forall x \in X$, $x = (ex \in Gx) = (xe \in xG)$ συνεπώς

$$\bigcup_{x\in X} Gx = \bigcup_{x\in X} xG = X.$$

Έστω $x, y, z \in X$ τέτοια, ώστε:

- $z \in Gx \cap Gy \neq \emptyset$. Τότε $\exists a, b \in G$ τέτοια, ώστε
  $z = ax = by \implies (x = a^{-1}by \in Gy \implies Gx \subseteq Gy) \wedge (y = b^{-1}ax \in Gx \implies Gx \supseteq Gy) \implies Gx = Gy$,
- $z \in xG \cap yG \neq \emptyset$. Τότε $\exists a, b \in G$ τέτοια, ώστε
  $z = xa = yb \implies (x = yba^{-1} \in yG \implies xG \subseteq yG) \wedge (y = xab^{-1} \in xG \implies xG \supseteq yG) \implies xG = yG$,

αφού $a^{-1}b, ba^{-1}, b^{-1}a, ab^{-1} \in G$.

Ορισμός 2.1.1.0.3 (αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο)**.** Έστω γεωμετρία Klein $(X|G)$. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(X)$ καλείται:

- *αριστερά αναλλοίωτο* αν και μόνο αν $a_\triangleright(\xi) := da\Diamond \circ \xi \circ a^{-1}\Diamond = \xi$, $\forall a \in G$. Ονομάζουμε το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $\mathcal{X}_\triangleright(X) \leq \mathcal{X}(X)$.
- *δεξιά αναλλοίωτο* αν και μόνο αν $a_\triangleright(\xi) := d\Diamond a \circ \xi \circ \Diamond a^{-1} = \xi$, $\forall a \in G$. Ονομάζουμε το σύνολο των δεξιά αναλλοίωτων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $\mathcal{X}_\triangleleft(X) \leq \mathcal{X}(X)$.

Σχόλιο. Ειδικότερα για $X \equiv G$ γράφουμε:

- $\mathcal{L}_\triangleright(G) = \mathcal{X}_\triangleright(G)$. $\forall \xi \in \mathcal{L}_\triangleright(G)$ και $\forall x \in G$, $\xi = x_\triangleright(\xi)$ ή $\xi(x) = dx\Diamond|_e\xi(e)$,
- $\mathcal{L}_\triangleleft(G) = \mathcal{X}_\triangleleft(G)$. $\forall \xi \in \mathcal{L}_\triangleleft(G)$ και $\forall x \in G$, $\xi = x_\triangleleft(\xi)$ ή $\xi(x) = d\Diamond x|_e\xi(e)$,

δηλαδή το ξ υπολογίζεται σε όλη την G μόνο από την τιμή του στο e. Στα επόμενα θα περιοριστούμε σε *αριστερές δράσεις* οπότε και το σύμβολο $\triangleright$ θα παραλείπεται από τους παραπάνω ορισμούς.

[3] Εδώ μιλάμε για εμφύτευση ομάδων, ήτοι μονομορφισμό ομάδων.
[4] υποϋποενότητα Α΄.1.2.2 στη σελίδα 91

2.2 ΑΛΓΕΒΡΕΣ LIE

Θεώρημα 2.2.1 (αλγεβρα Lie). *Έστω ομάδα Lie G. Η απεικόνιση*

$$T_eG \longmapsto \mathcal{L}(G) : \upsilon \mapsto \xi_\upsilon : G \longrightarrow T(G) : x \mapsto \xi_\upsilon(x) := dx\Diamond|_e(\upsilon = \xi_\upsilon(e)) \in T_{x\Diamond(e)=xe=x}G$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απόδειξη. Η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη:

- $\forall u, \upsilon \in T_eG$ με $\xi_u = \xi_\upsilon$, $u = \xi_u(e) = \xi_\upsilon(e) = \upsilon$,
- $\forall \xi \in \mathcal{L}(G)$, $\upsilon = \xi(e) \in T_eG$. $\forall x \in G$, $\xi(x) = dx\Diamond|_e(\xi(e) = \upsilon = \xi_\upsilon(e)) = \xi_{\upsilon=\xi(e)}(x)$.

Ισχυρισμός. $\forall \upsilon \in T_eG$, $\xi_\upsilon \in \mathcal{X}(G)$.

Πράγματι $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[G|\mathbb{R}]$ και $\alpha \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathbb{R}|G)$ με $\upsilon \equiv [e, \alpha] \in T_eG$ και $\forall x \in X$, $\xi_\upsilon(f)(x) := \xi_\upsilon(x)(f) := dx\Diamond|_e\upsilon(f) = \upsilon(f \circ x\Diamond) =$

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}(f \circ x\Diamond) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(f \circ x\Diamond \circ \alpha) \in \mathcal{C}^\infty_x[G|\mathbb{R}]$$

Ισχυρισμός. $\forall \upsilon \in T_eG$, $\xi_\upsilon \in \mathcal{L}(G)$.

Πράγματι $\forall a, x \in G$, $(da\Diamond \circ \xi_\upsilon)(x) = da\Diamond|_x(\xi_\upsilon(x) = dx\Diamond|_e(\upsilon)) = (da\Diamond|_x \circ dx\Diamond|_e = d(a\Diamond \circ x\Diamond)|_e = dax\Diamond|_e)(\upsilon) = \xi_\upsilon(ax = a\Diamond(x)) = (\xi_\upsilon \circ a\Diamond)(x)$.

Ισχυρισμός. Η απεικόνιση είναι γραμμική.

Πράγματι $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall u, \upsilon \in T_eG$, $\forall x \in G$, $\xi_{\lambda u + \mu\upsilon}(x) = dx\Diamond|_e(\lambda u + \mu\upsilon) = \lambda dx\Diamond|_e u + \mu dx\Diamond|_e\upsilon = \lambda\xi_u(x) + \mu\xi_\upsilon(x) = (\lambda\xi_u + \mu\xi_\upsilon)(x)$. ☐

Σχόλιο. Με βάση το θεώρημα 2.2.1, ο εφαπτόμενος χώρος στο ουδέτερο στοιχείο $e \in G$, T_eG ταυτίζεται με την άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$ θέτοντας $\forall u, \upsilon \in T_eG$, $[u|\upsilon] = [\xi_u|\xi_\upsilon](e)$.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω ομάδα Lie G και α ολοκληρωτική καμπύλη ενός αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου* $\xi \in \mathcal{L}(G)$ *με* $\alpha(0) = e$. *Τότε* $\mathrm{dom}\alpha = \mathbb{R}$.

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω ομάδα Lie G και α ολοκληρωτική καμπύλη ενός αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου* $\xi \in \mathcal{L}(G)$ *με* $\alpha(0) = x$. *Τότε* $\mathrm{dom}\alpha = \mathbb{R}$.

Σχόλιο. Από το λήμμα 2.2.1 στο πόρισμα 2.2.1, $x\alpha = x\Diamond \circ \alpha \longrightarrow \alpha$.

Θεώρημα 2.2.2 (αλγεβρα Lie). *Έστω ομάδα Lie G. Η απεικόνιση*

$$h : \mathcal{L}(G) \longmapsto \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathbb{R}|G) : \xi \mapsto h(\xi) := \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}e \leq G : 0 \mapsto \alpha(0) := e$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Σχόλιο. Από τα παραπάνω, $T_eG \simeq \mathcal{L}(G) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathbb{R}|G)$ με

$$T_eG \ni \upsilon = \xi(e) = \frac{d\alpha}{dt}(0) \longmapsto \xi : x \mapsto \xi(x) = \frac{d\alpha_x}{dt}(0) \longmapsto \alpha_x : \frac{d\alpha_x}{dt} = \xi \circ \alpha_x$$

δηλαδή, $\xi \in \mathcal{K}(G)$.[5]

[5] πεδία Killing, $\kappa : \mathcal{L}(G) \longmapsto \mathcal{K}(G) : \xi \mapsto \kappa(\xi) : G \longrightarrow T(G) := \kappa(\xi)(x) := (d\Diamond x \circ \xi \circ \Diamond x^{-1})(x)$

2.2.1 Συζυγής (adjoint) παράσταση ομάδος Lie.

Ορισμός 2.2.1.1 (συζυγής (adjoint) απεικόνιση)**.** Έστω ομάδα Lie G και $\forall x \in G$, η απεικόνιση[6]

$$(x\Diamond x^{-1} = x\Diamond \circ \Diamond x^{-1} = \Diamond x^{-1} \circ x\Diamond : G \longmapsto G : a \mapsto xax^{-1}) \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(G).$$

Τότε ορίζεται η συζυγής παράσταση της G,

$$\mathrm{adj} : G \longrightarrow \mathrm{aut}(T_eG) : x \mapsto \mathrm{adj}(x) := dx\Diamond x^{-1}|_e : T_eG \longmapsto T_eG.$$

Ισχυρισμός. Ο περιορισμός της συζυγούς απεικόνισης της $x\Diamond x^{-1}$ στο $\mathcal{L}(G) \leq \mathcal{X}(G)$ δίνει

$$(x\Diamond x^{-1})_* : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{X}(G) : \xi \mapsto dx\Diamond x^{-1} \circ \xi \circ x^{-1}\Diamond x \in \mathcal{L}(G).$$

Πράγματι $\forall x \in G$, $dx\Diamond x^{-1} \circ \xi \circ x^{-1}\Diamond x \in \mathcal{L}(G)$ αφού $\forall y \in G$, $dy\Diamond \circ (d\Diamond x \circ \xi \circ \Diamond x^{-1}) \circ y^{-1}\Diamond = d(y\Diamond \circ \Diamond x) \circ \xi \circ (y\Diamond \circ \Diamond x)^{-1} = d(\Diamond x \circ y\Diamond) \circ \xi \circ (\Diamond x \circ y\Diamond)^{-1} = d\Diamond x \circ (dy\Diamond \circ \xi \circ y^{-1}\Diamond) \circ \Diamond x^{-1} = d\Diamond x \circ \xi \circ \Diamond x^{-1}$ συνεπώς $dx\Diamond x^{-1} \circ \xi \circ x^{-1}\Diamond x = d(\Diamond x^{-1} \circ x\Diamond) \circ \xi \circ (\Diamond x^{-1} \circ x\Diamond)^{-1} = d\Diamond x^{-1} \circ (dx\Diamond \circ \xi \circ x^{-1}\Diamond) \circ \Diamond x = d\Diamond x^{-1} \circ \xi \circ \Diamond x = \xi$.

Ορίζοντας την αντίστροφη απεικόνιση του θεωρήματος 2.2.1, $\ell : \mathcal{L}(G) \longmapsto T_eG : \xi \mapsto \ell(\xi) := \xi(e)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & \mathcal{L}(G) & \longrightarrow & T_eG & \\ (x\Diamond x^{-1})_* & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{adj}(x) := dx\Diamond x^{-1}|_e \\ & \mathcal{L}(G) & \longrightarrow & T_eG & \\ & & \ell & & \end{array}$$

Ισχυρισμός. $\forall x \in G$, $\ell \circ (x\Diamond x^{-1})_* = dx\Diamond x^{-1}|_e \circ \ell$.

Πράγματι $\forall \xi \in \mathcal{L}(G)$, $\ell \circ (x\Diamond x^{-1})_*(\xi) = \ell(dx\Diamond x^{-1}(\xi(x^{-1}\Diamond x))) = dx\Diamond x^{-1}(\xi(x^{-1}\Diamond x(e) = x^{-1}ex = x^{-1}x = e) \in T_eG) = dx\Diamond x^{-1}|_e\xi(x^{-1}\Diamond x(e))$.

Λήμμα 2.2.1.1. *$\forall f \in \mathcal{H}\mathrm{om}(G|H)$ και $\forall x \in G$, $\mathrm{adj}(f(x)) \circ df|_e = df|_e \circ \mathrm{adj}(x)$.*

Απόδειξη. $df|_e \circ (\mathrm{adj}(x) = dx\Diamond x^{-1}|_e) = d(f \circ x\Diamond x^{-1} =: f\Diamond f^{-1}(x) \circ f)|_e = (df\Diamond f^{-1}|_{f(e)=e}(x) = \mathrm{adj}(f(x))) \circ df|_e$. □

2.2.2 Εφαπτόμενη δέσμη ομάδος Lie.

Λήμμα 2.2.2.1. *Έστω ομάδα Lie G. $\forall (\xi_i)_{i=1}^{\dim G} \subset \mathcal{L}(G)$ με $(\xi_i(e))_{i=1}^{\dim G} \subset \mathcal{B}_eG$, $(\xi_i(G))_{i=1}^{\dim G} \in \mathcal{C}^\infty[G|\mathcal{B}(G)]$.*

Θεώρημα 2.2.2.1. *Έστω ομάδα Lie G. Τότε*

$$(T(G) \longmapsto G \times \mathbb{R}^{\dim G} : z \mapsto (x|(z^i)_{i=1}^{\dim G})) \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(G).$$

Ορισμός 2.2.2.1. Μια διαφορική πολλαπλότητα X είναι *παραλληλοποιήσιμη* ή η εφαπτόμενη της δέσμη $T(X)$ είναι *τετριμμένη* αν και μόνο αν $T(X) = X \times \mathbb{R}^{\dim X}$. Από θεώρημα 2.2.2.1, κάθε ομάδα Lie είναι παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα.

2.3 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Ορισμός 2.3.1 (εκθετική απεικόνιση)**.** Έστω ομάδα Lie G. Καλείται *εκθετική* η *απεικόνιση*

$$\exp : T_eG \longrightarrow G : \upsilon \mapsto \exp \upsilon := \alpha(1),$$

όπου $\alpha \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathbb{R}|G)$ ολοκληρωτική καμπύλη του αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου[7]

$$(\xi : G \longrightarrow T(G) : x \mapsto \xi(x) := dx\Diamond|_e(\upsilon = \xi(e)) \in T_{x\Diamond(e)=xe=x}G) \in \mathcal{L}(G).$$

Λήμμα 2.3.1. *Έστω ομάδα Lie G και $\upsilon \in T_eG$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp t\upsilon = \alpha(t)$.*

Σχόλιο. Με βάση τον ορισμό 2.3.1 και το λήμμα 2.3.1 έχουμε $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\exp(t+s)\upsilon = \exp t\upsilon \exp s\upsilon$. Ειδικά $\exp 0 = e$ και $(\exp \upsilon)^{-1} = \exp(-\upsilon)$.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω ομάδα Lie G. $\forall t, s \in \mathbb{R}$ και $\forall u, v \in T_eG$, $\exp tu \exp sv = \exp(tu + sv)$ αν και μόνο αν $[u, v] = 0$.*

---

[6] πόρισμα 2.1.1 στη σελίδα 25
[7] σχόλιο 2.2 στην προηγούμενη σελίδα

Κεφάλαιο 3

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ RIEMANN

3.1 ΣΥΝΟΧΕΣ

Ορισμός 3.1.1 (γραμμική συνοχή)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Καλείται *γραμμική συνοχή* μια απεικόνιση $\nabla : \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(X)$ τέτοια, ώστε:

- $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(X)$:

$$\begin{aligned} \nabla(\xi + \eta|\zeta) &= \nabla(\xi|\zeta) + \nabla(\eta|\zeta) \\ \nabla(\xi|\eta + \zeta) &= \nabla(\xi|\eta) + \nabla(\xi|\zeta) \end{aligned}$$

- $\forall \xi, \eta, \in \mathcal{X}(X)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:

$$\begin{aligned} \nabla(f\xi|\eta) &= f\nabla(\xi|\eta) \\ \nabla(\xi|f\eta) &= f\nabla(\xi|\eta) + \xi(f)\eta \end{aligned}$$

Σχόλιο. Η συνοχή είναι διγραμμική απεικόνιση αφού $\xi(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\nabla(\lambda\xi|\eta) = \nabla(\xi|\lambda\eta) = \lambda\nabla(\xi|\eta)$. $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$, $(\nabla_\xi : \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(X) : \eta \mapsto \nabla_\xi \eta := \nabla(\xi|\eta)) \in \mathcal{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}(X))$, με $\mathcal{X}(X)$ ως πραγματικό διανυσματικό χώρο, όχι $\mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$-πρότυπο ή ακόμα και άλγεβρα Lie.

Ορισμός 3.1.2 (σύμβολα Christoffel)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $\partial \equiv (\partial_k)_{k=1}^{\dim X}$ το βασικό πεδίο του τοπικού χάρτη $(U|\phi \equiv (x^k)_{k=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$. Καλούμε *σύμβολα Christoffel* μια συνοχής του X, τις απεικονίσεις ${\Gamma_{ij}}^k := \nabla(\partial_i|\partial_j)(x^k) \in \mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]$, $\forall i, j, k \in \mathbb{N}_{\dim X}$. Τότε $\forall i, j \in \mathbb{N}_{\dim X}$,

$$\nabla(\partial_i|\partial_j) = \sum_{k=1}^{\dim X} {\Gamma_{ij}}^k \partial_k.$$

Ισχυρισμός. Μια γραμμική συνοχή είναι *τοπικά* μονοσήμαντα ορισμένη από τα σύμβολα Christoffel της.

Πράγματι $\forall \xi, \eta \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall (U|\phi \equiv (x^k)_{k=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$,

$$\nabla(\xi|\eta) = \sum_{i=1}^{\dim X} (\nabla(\xi|\eta^i\partial_i) = \xi(\eta^i)\partial_i + \eta^i\nabla(\xi|\partial_i)) = \sum_{k=1}^{\dim X} \xi(\eta^k)\partial_k + \sum_{j=1}^{\dim X} \eta^j\nabla(\xi|\partial_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\dim X} \eta^j\nabla(\xi|\partial_j) = \sum_{j=1}^{\dim X} \eta^j \sum_{i=1}^{\dim X} (\nabla(\xi^i\partial_i|\partial_j) = \xi^i\nabla(\partial_i|\partial_j) = \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i\eta^j{\Gamma_{ij}}^k\partial_k,$$

$$\nabla(\xi|\eta) = \sum_{k=1}^{\dim X} \nabla(\xi|\eta)(x^k)\partial_k \text{ με } \nabla(\xi|\eta)(x^k) = \sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i\partial_i\eta^k + \sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i\eta^j{\Gamma_{ij}}^k.$$

Ορισμός 3.1.3 (κατά σημείο συνοχή)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Καλείται *συνοχή στο σημείο* $x \in X$ μια απεικόνιση $\nabla_x : T_xX \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow T_xX$ τέτοια ώστε:

- $\forall \zeta \in \mathcal{X}(X)$, $\forall u, v \in T_xX$:
$$\nabla(u + v|\zeta) = \nabla(u|\zeta) + \nabla(v|\zeta)$$
- $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{X}(X)$, $\forall u \in T_xX$:
$$\nabla(u|\eta + \zeta) = \nabla(u|\eta) + \nabla(u|\zeta)$$
- $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$, $\forall u \in T_xX$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\nabla(\lambda v|\xi) = \lambda \nabla(v|\xi)$$
- $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$, $\forall u \in T_xX$ και $f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:
$$\nabla(v|f\xi) = f(x)\nabla(v|\xi) + v(f)\xi(x)$$

Λήμμα 3.1.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, $x \in X$ και $U \in \mathcal{A}$. $\forall v \in T_xX$, $\exists \xi \in \mathcal{X}(X)$ τέτοιο, ώστε $\xi(x) = v$. Γενικότερα $\forall \xi_U \in \mathcal{X}(U)$, $\exists \xi \in \mathcal{X}(X)$ τέτοιο, ώστε $\xi|_U = \xi_U$.*

Λήμμα 3.1.2. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, $x \in X$ και $U \in \mathcal{A}$. $\forall \xi, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ τέτοια, ώστε $\xi(x) = \zeta(x)$, $\nabla_\xi \eta = \nabla_\zeta \eta$ και $\nabla_\eta \xi = \nabla_\eta \zeta$, $\forall \eta \in \mathcal{X}(X)$. Γενικότερα $\forall \xi, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ τέτοια, ώστε $\xi|_U = \zeta|_U$, $\nabla_\xi \eta = \nabla_\zeta \eta$ και $\nabla_\eta \xi = \nabla_\eta \zeta$, $\forall \eta \in \mathcal{X}(X)$.*

Σχόλιο. Η απεικόνιση

$$\nabla_x : T_xX \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow T_xX : v \times \xi \mapsto \nabla_x(v|\xi) := \nabla(\zeta|\xi)(x) \in T_xX$$

είναι καλά ορισμένη συνοχή στο σημείο x.[1]

Ορισμός 3.1.4 (διαφορίσιμη οικογένεια κατά σημείο συνοχών)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$. Μια *οικογένεια κατά σημείο συνοχών* $\{\nabla_x\}_{x\in X}$ είναι *διαφορίσιμη* αν και μόνο αν $\forall \zeta, \xi \in \mathcal{X}(X)$,

$$(\nabla(\zeta|\xi) : X \longrightarrow T(X) : x \mapsto \nabla(\zeta|\xi)(x) := \nabla_x(\zeta(x)|\xi)) \in \mathcal{X}(X).$$

Τότε, η απεικόνιση $\nabla : \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(X)$ που ορίζεται από την *διαφορίσιμη οικογένεια κατά σημείο συνοχών* $\{\nabla_x\}_{x\in X}$ είναι συνοχή στο X.

Σχόλιο. Η αντιστοιχία $\nabla \longleftrightarrow \{\nabla_x\}_{x\in X}$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

3.1.1 Καμπυλότητα

Ορισμός 3.1.1.1 (καμπυλότητα)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα X εφοδιασμένη με μια γραμμική συνοχή ∇. Καλείται *καμπυλότητα* της *συνοχής* ∇ η απεικόνιση

$$R_\nabla : \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(X) : \xi \times \eta \times \zeta \mapsto R_\nabla(\xi|\eta)\zeta := \nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta)) - \nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)) - \nabla([\xi|\eta]|\zeta),$$

ή ισοδύναμα

$$R_\nabla : \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathrm{end}(\mathcal{X}(X)) : \xi \times \eta \mapsto$$
$$R_\nabla(\xi|\eta) := [\nabla_\xi|\nabla_\eta] - \nabla_{[\xi|\eta]} = \nabla_\xi \circ \nabla_\eta - \nabla_\eta \circ \nabla_\xi - \nabla_{\xi\circ\eta-\eta\circ\xi}.$$

Σχόλιο. Η καμπυλότητα εκφράζει την απόκλιση από το να είναι ο ομομορφισμός $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-προτύπων,

$$\nabla : \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathrm{end}(\mathcal{X}(X)) : \xi \mapsto \nabla_\xi$$

ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Η $\nabla_\xi \in \mathrm{end}(\mathcal{X}(X))$ καλείται *συναλλοίωτη* ως προς $\xi \in \mathcal{X}(X)$ παράγωγος.

Πρόταση 3.1.1.1 (τανυστής Riemann)**.** *Έστω διαφορική πολλαπλότητα X εφοδιασμένη με μια γραμμική συνοχή ∇. Η καμπυλότητα είναι σημειακά τριγραμμική απεικόνιση.*

[1] $\forall \zeta \in \mathcal{X}(X)$ με $\zeta(x) = v$, λήμμα 3.1.1 και 3.1.2.

Απόδειξη. Η καμπυλότητα είναι τριπροσθετική εξ' ορισμού. $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$,
$R_\nabla(f\xi|\eta)\zeta := (\nabla(f\xi|\nabla(\eta|\zeta)) = f\nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta))) - (\nabla(\eta|\nabla(f\xi|\zeta) = f\nabla(\xi|\zeta)) = f\nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)) + \eta(f)\nabla(\xi|\zeta))$
$- (\nabla([f\xi|\eta] = f[\xi|\eta] - \eta(f)\xi|\zeta) = (\nabla(f[\xi|\eta]|\zeta) = f\nabla([\xi|\eta]|\zeta)) - (\nabla(\eta(f)\xi|\zeta) = \eta(f)\nabla(\xi|\zeta))) =: fR_\nabla(\xi|\eta)\zeta$,
$R_\nabla(\xi|f\eta)\zeta := (\nabla(\xi|\nabla(f\eta|\zeta) = f\nabla(\eta|\zeta)) = f\nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta)) + \xi(f)\nabla(\eta|\zeta)) - (\nabla(f\eta|\nabla(\xi|\zeta)) = f\nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)))$
$- (\nabla([\xi|f\eta] = f[\xi|\eta] + \xi(f)\eta|\zeta) = (\nabla(f[\xi|\eta]|\zeta) = f\nabla([\xi|\eta]|\zeta)) + (\nabla(\xi(f)\eta|\zeta) = \xi(f)\nabla(\eta|\zeta))) =: fR_\nabla(\xi|\eta)\zeta$
και
$R_\nabla(\xi|\eta)f\zeta$:
$= (\nabla(\xi|\nabla(\eta|f\zeta) = f\nabla(\eta|\zeta) + \eta(f)\zeta)$
$= (\nabla(\xi|f\nabla(\eta|\zeta)) = f\nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta)) + \xi(f)\nabla(\eta|\zeta)) + (\nabla(\xi|\eta(f)\zeta) = \eta(f)\nabla(\xi|\zeta) + \xi(\eta(f))\zeta))$
$- (\nabla(\eta|\nabla(\xi|f\zeta) = f\nabla(\xi|\zeta) + \xi(f)\zeta)$
$= (\nabla(\eta|f\nabla(\xi|\zeta)) = f\nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)) + \eta(f)\nabla(\xi|\zeta)) + (\nabla(\eta|\xi(f)\zeta) = \xi(f)\nabla(\eta|\zeta) + \eta(\xi(f))\zeta))$
$- (\nabla([\xi||\eta]|f\zeta) = f\nabla([\xi|\eta]|\zeta) + (([\xi|\eta] = \xi\circ\eta - \eta\circ\xi)(f)\zeta) = \xi(\eta(f))\zeta - \eta(\xi(f))\zeta)$.

Συνεπώς $R_\nabla(f\xi|\eta)\zeta = R_\nabla(\xi|f\eta)\zeta = R_\nabla(\xi|\eta)f\zeta = fR_\nabla(\xi|\eta)\zeta$. □

Σχόλιο. Ορίζουμε $\forall (U|\phi \equiv (x^l)_{l=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$,

$$R_{ijk}{}^l = R_\nabla(\partial_i|\partial_j)\partial_k(x^l),$$

συνεπώς

$$R_\nabla(\partial_i|\partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{\dim X} R_{ijk}{}^l\partial_l,$$

και

$$R_\nabla(\xi|\eta)\zeta = \sum_{l=1}^{\dim X}\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} \xi^i\eta^j\zeta^k R_{ijk}{}^l\partial_l.$$

Εξ' ορισμού,

$$R_\nabla(\partial_i|\partial_j)\partial_k(x^l) = \nabla(\partial_i|\nabla(\partial_j|\partial_k))(x^l) - \nabla(\partial_j|\nabla(\partial_i|\partial_k))(x^l) - \nabla([\partial_i|\partial_j] = 0|\partial_k)(x^l)$$

$$= \sum_{n=1}^{\dim X} \partial_i{}^n\partial_n\Gamma_{jk}{}^l + \sum_{m=1}^{\dim X}\sum_{n=1}^{\dim X} \partial_i{}^n\Gamma_{jk}{}^m\Gamma_{nm}{}^l - \sum_{n=1}^{\dim X} \partial_j{}^n\partial_n\Gamma_{ik}{}^l - \sum_{m=1}^{\dim X}\sum_{n=1}^{\dim X} \partial_j{}^n\Gamma_{ik}{}^m\Gamma_{nm}{}^l,$$

συνεπώς

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i\Gamma_{jk}{}^l - \partial_j\Gamma_{ik}{}^l + \sum_{m=1}^{\dim X}(\Gamma_{jk}{}^m\Gamma_{im}{}^l - \Gamma_{ik}{}^m\Gamma_{jm}{}^l).$$

Σχόλιο. Ισχύει $\forall \xi, \eta \in \mathcal{X}(X)$, $R_\nabla(\xi|\eta) = -R_\nabla(\xi|\eta)$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$, $R_\nabla(f\xi|\eta) = R_\nabla(\xi|f\eta) = fR_\nabla(\xi|\eta)$, και $\forall \zeta \in \mathcal{X}(X)$, $R_\nabla(\xi|\eta)f\zeta = fR_\nabla(\xi|\eta)\zeta$, δηλαδή $R_\nabla(\xi|\eta) \in \mathcal{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}(X))$.[2] $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(X)$,

$$R_\nabla(\xi|\eta) + R_\nabla(\eta|\xi) = 0 \iff R_{ijk}{}^l + R_{jik}{}^l = R_{[ij]k}{}^l = 0.$$

1^{st} Bianchi identity:

$$\begin{array}{rcll} R_\nabla(\xi|\eta)\zeta + R_\nabla(\eta|\zeta)\xi + R_\nabla(\zeta|\xi)\eta &=& \nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta)) - \nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)) - \nabla([\xi|\eta]|\zeta) & \\ &+& \nabla(\eta|\nabla(\zeta|\xi)) - \nabla(\zeta|\nabla(\eta|\xi)) - \nabla([\eta|\zeta]|\xi) & \\ &+& \nabla(\zeta|\nabla(\xi|\eta)) - \nabla(\xi|\nabla(\zeta|\eta)) - \nabla([\zeta|\xi]|\eta) & = \quad 0 \end{array}$$

$$\iff R_{ijk}{}^l + R_{jki}{}^l + R_{kij}{}^l = R_{[ijk]}{}^l = 0$$

2^{nd} Bianchi identity:

$$\begin{array}{rcll} \nabla_\zeta R_\nabla(\xi|\eta) + \nabla_\xi R_\nabla(\eta|\zeta) + \nabla_\eta R_\nabla(\zeta|\xi) &=& \nabla_\zeta\circ\nabla_\xi\circ\nabla_\eta - \nabla_\zeta\circ\nabla_\eta\circ\nabla_\xi - \nabla_\zeta\circ\nabla_{\xi\circ\eta-\eta\circ\xi} & \\ &+& \nabla_\xi\circ\nabla_\eta\circ\nabla_\zeta - \nabla_\xi\circ\nabla_\zeta\circ\nabla_\eta - \nabla_\xi\circ\nabla_{\eta\circ\zeta-\zeta\circ\eta} & \\ &+& \nabla_\eta\circ\nabla_\zeta\circ\nabla_\xi - \nabla_\eta\circ\nabla_\xi\circ\nabla_\zeta - \nabla_\eta\circ\nabla_{\zeta\circ\xi-\xi\circ\zeta} & = \quad 0 \end{array}$$

$$\iff R_{ijk}{}^l|_m + R_{ijl}{}^m|_k + R_{ijm}{}^k|_l = R_{ij[k}{}^l|_{m]} = 0$$

[2] Χωρίς το γινόμενο Lie• ενδομορφισμός $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-προτύπου.

3.2 ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

3.2.1 Συνοχές κατά μήκος απεικονίσεων.

Ορισμός 3.2.1.1 (συνοχή κατά μήκος απεικόνισης)**.** Έστω διαφορίσιμη απεικόνιση $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$ και $(Y|\mathcal{B})$, και συνοχή ∇ του Y. Καλείται *συνοχή κατά μήκους* της f η *απεικόνιση*

$$\nabla_f : \mathcal{X}(f) \times \mathcal{X}(Y) \longrightarrow \mathcal{X}(f) : \xi \times \eta \mapsto \nabla_f(\xi|\eta) : X \longrightarrow T(Y) : x \mapsto \nabla_f(\xi|\eta)(x) := \nabla_{f(x)}(\xi(x)|\eta) \in T_{f(x)}Y,$$

όπου $\nabla_{f(x)}$ σημειακή συνοχή του Y στο $f(x) \in Y$.

Σχόλιο. Ο ορισμός είναι καλός αφού $\forall x \in X$ και $\forall h \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}[Y|\mathbb{R}]$, $\nabla_f(\xi|\eta)(h)(x) := \nabla_f(\xi|\eta)(x)(h) := \nabla_{f(x)}(\xi(x)|\eta)(h) = \nabla(\zeta|\eta)(f(x))(h) =: \nabla(\zeta|\eta)(h)(f(x)) = (\nabla(\zeta|\eta)(h) \circ f)(x)$, όπου $\zeta \circ f = \xi$, δηλαδή $\nabla_f(\xi|\eta)(h) \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$ και άρα $\nabla_f(\xi|\eta) \in \mathcal{X}(f)$. Ισχύουν παρόμοιες ιδιότητες με τη συνοχή:

- $\forall \xi, \eta \in \mathcal{X}(f)$, $\forall \zeta \in \mathcal{X}(Y)$:
$$\nabla_f(\xi + \eta|\zeta) = \nabla_f(\xi|\zeta) + \nabla_f(\eta|\zeta)$$
- $\forall \xi \in \mathcal{X}(f)$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{X}(Y)$:
$$\nabla_f(\xi|\eta + \zeta) = \nabla_f(\xi|\eta) + \nabla_f(\xi|\zeta)$$
- $\forall \xi \in \mathcal{X}(f)$, $\forall \eta \in \mathcal{X}(Y)$ και $h \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:
$$\nabla_f(h\xi|\eta) = h\nabla_f(\xi|\eta)$$
- $\forall \xi \in \mathcal{X}(f)$, $\forall \eta \in \mathcal{X}(Y)$ και $g \in \mathcal{C}^\infty[Y|\mathbb{R}]$:
$$\nabla_f(\xi|g\eta) = (g \circ f)\nabla_f(\xi|\eta) + \xi(g)(\eta \circ f)$$

Φυσικά η ∇_f είναι διγραμμική αφού $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \circ f = \lambda$ και $\xi(\lambda) = 0$. Η τοπική παράσταση της ∇_f:

$$\nabla_f(\xi = \zeta \circ f|\eta)(x) = \nabla(\zeta|\eta) \circ f$$
$$= \sum_{k=1}^{\dim X} \sum_{i=1}^{\dim X} ((\zeta^i \partial_i \eta^k \partial_k) \circ f = ((\zeta^i \circ f) = \xi^i)(\partial_i \eta^k \circ f)(\partial_k \circ f))$$
$$+ \sum_{k=1}^{\dim X} \sum_{j=1}^{\dim X} \sum_{i=1}^{\dim X} ((\zeta^i \eta^j {\Gamma_{ij}}^k \partial_k) \circ f = (\zeta^i \circ f = \xi^i)(\eta^j \circ f)({\Gamma_{ij}}^k \circ f)(\partial_k \circ f))$$

3.2.1.1 Συνοχές κατά μήκος καμπυλών.

Ορισμός 3.2.1.1.1 (συνοχή κατά μήκος καμπύλης)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$, *ολοκληρωτική καμπύλη* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ *διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου* $\zeta \in \mathcal{X}(X)$ και συνοχή ∇ του X. Καλείται *συνοχή κατά μήκους* της α η *απεικόνιση*

$$\nabla_\alpha : \mathcal{X}(\alpha) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha) : \frac{d\alpha}{dt} \times \xi \mapsto \frac{d\xi}{dt} := \nabla(\zeta \circ \alpha|\xi),$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt} := \nabla_{\zeta\circ\alpha} : \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha) : \xi \mapsto \frac{d\xi}{dt} := \nabla_{\zeta\circ\alpha}\xi.$$

Σχόλιο. Ισχύει για την συναλλοίωτη παράγωγο κατά μήκος καμπύλης:

- $\forall \xi, \eta \in \mathcal{X}(Y)$:
$$\frac{d}{dt}(\xi + \eta) = \nabla_{\zeta\circ\alpha}(\xi + \eta) = \nabla_{\zeta\circ\alpha}\xi + \nabla_{\zeta\circ\alpha}\eta = \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt}$$

- $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$:

$$\frac{d}{dt}(f\xi) = \nabla_{\zeta\circ\alpha}(f\xi) = f\nabla_{\zeta\circ\alpha}\xi + (\zeta\circ\alpha)(f)\xi = f\frac{d\xi}{dt} + \frac{df}{dt}\xi$$

Φυσικά:

$$\frac{d}{dt}(\lambda\xi) = \lambda\frac{d\xi}{dt}, \text{ αφού } \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

Η τοπική παράσταση της συναλλοίωτης παραγώγου κατά μήκος καμπύλης:

$$\frac{d\xi}{dt} := \nabla_{\zeta\circ\alpha}\xi = \nabla_\zeta\xi\circ\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}(\zeta^i\partial_i\xi^k\partial_k)\circ\alpha + \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}(\zeta^i\xi^j{\Gamma_{ij}}^k\partial_k)\circ\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^{\dim X}\frac{d\xi^k}{dt}(\partial_k\circ\alpha) + \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}\frac{d\alpha^i}{dt}\xi^j({\Gamma_{ij}}^k\circ\alpha)(\partial_k\circ\alpha)$$

Η αντιστοιχία ολοκληρωτικής καμπύλης και συναλλοίωτης παραγώγισης είναι αμφιμονοσήμαντη.

Ορισμός 3.2.1.1.2 (παράλληλο διανυσματικό πεδίο)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με συνοχή ∇. Ένα *διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο* $\xi \in \mathcal{X}(\alpha)$ *κατά μήκος* μιας *διαφορίσιμης καμπύλης* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ καλείται παράλληλο αν και μόνο αν

$$\frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Λήμμα 3.2.1.1.1. *$\forall v \in T_{\alpha(0)}X$, $\exists \xi \in \mathcal{X}(\alpha)$ μοναδικό με $\mathrm{dom}\xi \subseteq \mathrm{dom}\alpha$ ανοικτό υποδιάστημα τέτοιο, ώστε*

$$\frac{d\xi}{dt} = 0 \text{ και } \xi(0) = v.$$

Απόδειξη. Έστω τοπικός χάρτης $(U|\phi \equiv (x^l)_{l=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$ με $\alpha(0) \in U$. Τότε, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με

$$\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}\frac{d\alpha^i}{dt}\xi^j({\Gamma_{ij}}^k\circ\alpha) = 0 \text{ και } \xi^k(0) = v^k,$$

$\forall k \in \mathbb{N}_{\dim X}$, το οποίο είναι πρόβλημα Cauchy. □

Γεωδαισιακή καμπύλη. Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με συνοχή ∇. Μια διαφορίσιμη *καμπύλη* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ καλείται γεωδαισιακή αν και μόνο αν

$$\frac{d}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Ομοίως, $\forall v \in T_{\alpha(0)}X$, *μοναδική γεωδαισιακή καμπύλη* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ με

$$\alpha(0) = x \text{ και } \frac{d\alpha}{dt}(0) = v.$$

Πράγματι, έστω τοπικός χάρτης $(U|\phi \equiv (x^l)_{l=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$ με $\alpha(0) = x \in U$. Τότε, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με

$$\frac{d^2\alpha^k}{dt^2} + \sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}({\Gamma_{ij}}^k\circ\alpha) \text{ με } \alpha^k(0) = x^k(x) \text{ και } \frac{d\alpha^k}{dt}(0) = v^k,$$

$\forall k \in \mathbb{N}_{\dim X}$, το οποίο είναι πρόβλημα Cauchy.

Ορισμός 3.2.1.1.3 (παράλληλη μετατόπιση)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με συνοχή ∇. Καλείται *παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος διαφορίσιμης καμπύλης* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ η απεικόνιση $\forall t \in I$,

$$\tau_t : T_{\alpha(0)}X \longmapsto T_{\alpha(t)}X : \xi(0) = \upsilon \mapsto \tau_t(\upsilon) := \xi_\upsilon(t),$$

όπου $\xi_\upsilon \in \mathcal{X}(\alpha)$ το παράλληλο ως προς $\upsilon \in T_{\alpha(0)}X$ κατά μήκος της $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ διανυσματικό πεδίο.

Θεώρημα 3.2.1.1.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με συνοχή ∇ και διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$. $\forall t \in I$, $\tau_t \in \mathrm{iso}(T_{\alpha(0)}X|T_{\alpha(t)}X)$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

Απόδειξη. $\forall u, v \in T_{\alpha(0)}X$ και $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\exists \xi_{\lambda u+\mu v} \in \mathcal{X}(\alpha)$ μοναδικό τέτοιο, ώστε

$$\frac{d\xi_{\lambda u+\mu v}}{dt} = 0 \text{ και } \xi_{\lambda u+\mu v}(0) = \lambda u + \mu v.$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt}(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) = \lambda\frac{d\xi_u}{dt} + \mu\frac{d\xi_v}{dt} = 0 \text{ και } (\lambda\xi_u + \mu\xi_v)(0) = \lambda\xi_u(0) + \mu\xi_v(0) = \lambda u + \mu v,$$

οπότε $\xi_{\lambda u+\mu v} = \lambda\xi_u + \mu\xi_v$ και συνεπώς $\tau_t(\lambda u + \mu v) = \lambda\tau_t(u) + \mu\tau_t(v)$, $\forall t \in I$. Η τ_t είναι αμφιμονοσήμαντη λόγω μοναδικότητας λύσης παράλληλου πεδίου και $\dim T_{\alpha(0)}X = \dim T_{\alpha(t)}X = \dim X$, $\forall t \in I$. □

Θεώρημα 3.2.1.1.2. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με συνοχή ∇ και ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[I|X]$ διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$ με $\alpha(0) = x$ και παράλληλη μεταφορά $\forall t \in I$, $\tau_t \in \mathrm{iso}(T_{\alpha(0)}X|T_{\alpha(t)}X)$. Τότε $\forall \eta \in \mathcal{X}(X)$,*

$$\nabla_\xi\eta(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_t^{-1}(\eta(\alpha(t))) - \eta(x))$$

3.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ RIEMANN

Ορισμός 3.3.1 (duality bracket)**.** Έστω E πραγματικός διανυσματικός χώρος και E^* ο δυϊκός του[3]. Καλείται πραγματικό *εσωτερικό γινόμενο* στον E μια απεικόνιση

$$I(E) \ni \langle\_|\_\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} : x \times z \mapsto \langle x|z\rangle$$

τέτοια, ώστε

- $\forall (x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}E$, $\forall (z^j)_{j\in I} \in \Pi_{j\in I}E$ και $\forall (\lambda^i)_{i\in I}, (\mu_j)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$,

$$\langle\Sigma_{i\in I}\lambda^i x_i|\Sigma_{j\in I}\mu_j z^j\rangle = \Sigma_{i\in I}\Sigma_{j\in I}\lambda^i\mu_j\langle x_i|z^j\rangle,$$

- $\forall x \in E$ και $\forall z \in E$, $\langle x|z\rangle = \langle z|x\rangle$ και
  - $\langle x|x\rangle \geq 0$ με $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$,
  - $\langle z|z\rangle \geq 0$ με $\langle z|z\rangle = 0 \iff z = 0$.

Ορισμός 3.3.2 (διαδορική πολλαπλότητα Riemann)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(X|\mathcal{A})$ και $\forall x \in X$ το εσωτερικό γινόμενο $I_xX \ni \langle\_|\_\rangle_x : T_xX \times T_xX \longrightarrow \mathbb{R}$. Ορίζεται $\mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}]$-εσωτερικό γινόμενο στο X:

$$\prod_{x\in X} I_xX \ni \langle\_|\_\rangle : \mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] : \xi \times \eta \mapsto \langle\xi|\eta\rangle : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle\xi(x)|\eta(x)\rangle_x$$

Διαφορική πολλαπλότητα Riemann είναι μια πολλαπλότητα X εφοδιασμένη με το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο το οποίο καλείται και *μετρική Riemann*.

[3]υποενότητα Α.3.2 στη σελίδα 96

3.3.1 Συνοχή Riemann.

Τοπική παράσταση μετρικής Riemann. Έστω $(U|\phi = (x^i)_{i=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$ και $\forall i,j \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $g_{ij} := \langle \partial_i|\partial_j\rangle_U$ έτσι, ώστε $\forall \xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall \eta \in \mathcal{X}(X)$,

$$\langle \xi|\eta\rangle_U = \sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{ij}\xi^i\eta^j$$

Εξ' ορισμού της μετρικής, $\forall (U|\phi = (x^i)_{i=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$ και $\forall x \in X$, $[g_{ij}|_x]_{i,j=1}^{\dim X} \in \mathrm{GL}_{\dim X}[\mathbb{R}]$ συνεπώς $[g_{ij}]_{i,j=1}^{\dim X} \in \mathrm{GL}_{\dim X}[\mathcal{C}^\infty[U|\mathbb{R}]]$. Επιπλέον, $[g_{ij}]_{i,j=1}^{\dim X} = [g_{ji}]_{i,j=1}^{\dim X}$. Γράφουμε $([g_{ij}]_{i,j=1}^{\dim X})^{-1} = [g^{ij}]_{i,j=1}^{\dim X}$.

Ορισμός 3.3.1.1. Έστω διαφορική πολλαπλότητα Riemann X εφοδιασμένη με συνοχή ∇. Η συνοχή είναι συμβιβαστή με τη δομή Riemann $\langle \_|\_\rangle$ αν και μόνο αν:

- είναι συμμετρική: $\forall \xi,\eta \in \mathcal{X}(X)$, $\nabla(\xi|\eta) - \nabla(\eta|\xi) = [\xi|\eta]$,
- $\forall \xi,\eta,\zeta \in \mathcal{X}(X)$, $\zeta(\langle\xi|\eta\rangle) = \langle\nabla(\zeta|\xi)|\eta\rangle + \langle\xi|\nabla(\zeta|\eta)\rangle$(ταυτότητα του Ricci).

Μια τέτοια συνοχή καλείται και *συνοχή Levi-Civita* ή *συνοχή Riemann.*

Σχόλιο. Από πρώτη ιδιότητα προκύπτει απευθείας ότι $\forall i,j,k \in \mathbb{N}_{\dim X}$, ${\Gamma_{ij}}^k = {\Gamma_{ji}}^k$, δηλαδή όλη η πληροφορία για το μεταθέτη βρίσκεται εκτός των συναρτήσεων Christoffel,

$$[\xi|\eta]^k = \sum_{i=1}^{\dim X}(\xi^i\partial_i\eta^k - \eta^i\partial_i\xi^k).$$

Από τη δεύτερη συνθήκη και $\forall i,j \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $g_{ij} = g_{ji}$, $\forall (U|\phi = (x^i)_{i=1}^{\dim X}) \in \mathcal{A}$,

$$\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}\zeta^k\partial_k(g_{ij}\xi^i\eta^j) =$$

$$\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X}\xi^i\eta^j\zeta^k\partial_k g_{ij} + \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{ij}\eta^j\zeta^k\partial_k\xi^i + \sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{ij}\xi^i\zeta^k\partial_k\eta^j =$$

$$+\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{ij}\eta^j\zeta^k\partial_k\xi^i + \sum_{l=1}^{\dim X}\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{lj}\xi^i\eta^j\zeta^k{\Gamma_{ki}}^l$$

$$+\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{ij}\xi^i\zeta^k\partial_k\eta^j + \sum_{l=1}^{\dim X}\sum_{k=1}^{\dim X}\sum_{j=1}^{\dim X}\sum_{i=1}^{\dim X} g_{il}\xi^i\eta^j\zeta^k{\Gamma_{kj}}^l$$

ισοδύναμα:

$$\partial_k g_{ij} = \sum_{l=1}^{\dim X}(g_{lj}{\Gamma_{ki}}^l + g_{il}{\Gamma_{kj}}^l)$$

$$\partial_i g_{jk} = \sum_{l=1}^{\dim X}(g_{lk}{\Gamma_{ij}}^l + g_{jl}{\Gamma_{ik}}^l)$$

$$\partial_j g_{ki} = \sum_{l=1}^{\dim X}(g_{li}{\Gamma_{jk}}^l + g_{kl}{\Gamma_{ji}}^l)$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες και αφαιρώντας την πρώτη σχέση, δεδομένου ότι $\forall i,j,k \in \mathbb{N}_{\dim X}$, $g_{ij} = g_{ji}$ και ${\Gamma_{ij}}^k = {\Gamma_{ji}}^k$:

$${\Gamma_{ij}}^l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\dim X} g^{kl}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

Από ισχυρισμό ορισμού 3.1.1 και τη παραπάνω σχέση, η συνοχή Levi-Civita ορίζεται μονοσήμαντα στο $U \subseteq X$.

3.3.2 Παράλληλη μετατόπιση.

Ορισμός 3.3.2.1 (μετρική κατά μήκος απεικόνισης)**.** Η *μετρική* Riemann *κατά μήκος* μια *διαφορίσιμης απεικόνισης* $f \in \mathcal{C}[X|Y]$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων $(X|\mathcal{A})$ και $(Y|\mathcal{B})$ ορίζεται:[4]

$$\prod_{x \in X} I_x X \ni \langle \_|\_ \rangle : \mathcal{X}(f) \times \mathcal{X}(f) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[X|\mathbb{R}] : \xi \times \eta \mapsto \langle \xi|\eta \rangle_f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle \xi(x)|\eta(x) \rangle_{f(x)}$$

Ειδικότερα, ορίζεται η μετρική κατά μήκος καμπύλης για $f \equiv \alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ με $\langle \xi|\eta \rangle_\alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}]$.

Σχόλιο. Από δεύτερη συνθήκη συνοχής Riemann $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ και $\forall \alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|X]$ ολοκληρωτική καμπύλη του ζ, $\zeta(\langle \xi|\eta \rangle_\alpha) = \langle \nabla(\zeta|\xi)|\eta \rangle_\alpha + \langle \xi|\nabla(\zeta|\eta) \rangle_\alpha$. Ορισμός:

$$\frac{d\alpha}{dt}\langle \xi|\eta \rangle_\alpha := \frac{d}{dt}\langle \xi|\eta \rangle_\alpha = \left\langle \frac{d\xi}{dt} \middle| \eta \right\rangle_\alpha + \left\langle \xi \middle| \frac{d\eta}{dt} \right\rangle_\alpha$$

Η παράλληλη μετατόπιση κατά συνοχή Levi-Civita διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο,

$$\frac{d}{dt}\langle \xi|\eta \rangle_\alpha = 0 \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο, ώστε } \forall t \in (-\varepsilon|\varepsilon) \subseteq \mathbb{R},\ \langle \xi(t)|\eta(t) \rangle_{\alpha(t)} = \langle u|v \rangle_x,$$

ισοδύναμα η παράλληλη μετατόπιση είναι κάτι παραπάνω από ισομορφισμό, είναι *ισομετρία* μεταξύ εφαπτόμενων χώρων. $\forall x \in X$ και $\forall \upsilon \in T_x X$,

$$\|\tau_t(\upsilon)\|_{\alpha(t)} = \|\upsilon\|_x.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι άμεσα συνυφασμένο με τη ταυτότητα του Ricci της συνοχής Levi-Civita[5] όπως φαίνεται και από τη σχηματική εξαγωγή του. Ως εκ τούτου κανείς χρησιμοποιεί αυτό σαν ισοδύναμος ορισμός τη συνοχής Levi-Civita.

[4] Η μετρική $\langle \_|\_ \rangle \circ f$ είναι μετρική κατά μήκος της $f \in \mathcal{C}^\infty[X|Y]$, όπου $\langle \_|\_ \rangle$ μετρική της X.
[5] ορισμός 3.3.1.1

Μέρος II

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Κεφάλαιο 4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

4.1 ΨΕΥΔΟΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

Έστω διανυσματικός χώρος V με δυϊκό V^* (συνδιανυσματικός χώρος). Ο V εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο του ορισμού 3.3.1 είναι ένας ευκλείδειος χώρος. Μια μετρική $\langle \_|\_ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται *μη-εκφυλισμένη* αν και μόνο αν $\forall u \in V$: $\langle u|v \rangle = 0$, $\forall v \in V$ αν και μόνο αν $v = 0$. Αν αντικατασταθεί η θετικά ορισμένη μετρική με μία μη-εκφυλισμένη, τότε ο V ονομάζεται ψευδοευκλείδειος χώρος. Σε άλγεβρα πινάκων απλά παύει ο πίνακας να είναι θετικά ορισμένος, αλλά εξακολουθεί να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή

$$\sum_\mu g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Επιπλέον το ίχνος της μετρικής είναι αναλλοίωτο βάσης και η κατασκευή ορθοκανονικής βάσης είναι δυνατή και στους ψευδοευκλείδειους χώρους. Παρατηρούμε ότι $\forall v \in V$, $V^* \ni \langle \_|v \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}$ και $V^* \ni \langle v|\_ \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M|\mathcal{A})$ και $(O|\psi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M}) \in \mathcal{A}$ με $p \in O$. $V_pM \equiv V_p^{(1|0)}M$ είναι ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο p και $V_p^*M \equiv V_p^{(0|1)}M$ ο συνεφαπτόμενος χώρος με βάση $\{\partial^\mu \equiv dx^\mu\}_{\mu=1}^{\dim M}$ δυϊκή της $\{\partial_\nu\}_{\nu=1}^{\dim M}$ του V_pM. Συμβολίζουμε με $V_p^{(k|l)}M$ τον εφαπτόμενο χώρο τανυστών τύπου $(k|l)$ στο p. Με τον ίδιο τρόπο που επεκτείνονται τα εφαπτόμενα διανύσματα σε διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία, το ίδιο γίνεται συνεπώς και με τα συνδιανύσματα και τους τανυστές πεπερασμένης τύπου γενικότερα. Συμβολίζουμε με $V^{(k|l)}M$ την τανυστική δέσμη τύπου $(k|l)$ της πολλαπλότητας M και $\mathcal{V}^{(k|l)}M$ το σύνολο των διαφορίσιμων τανυστικών πεδίων στη πολλαπλότητα M.

Ισχυρισμός. Τα συνδιανύσματα της δυϊκής μια βάσης συντεταγμένων[1] $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^{\dim M}$ είναι $\forall \mu \in \mathbb{N}_{\dim M}$, $\partial^\mu := dx^\mu$.

Πράγματι $\forall \nu \in \mathbb{N}_{\dim M}$, $\partial^\mu \partial_\nu = dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu x^\mu = \delta^\mu{}_\nu$.

- *Νόμος μετασχηματισμού ανταλλοίωτων διανυσμάτων*:

$$\partial_{\mu} = \sum_\nu \partial_\mu{}^\nu \partial_\nu \text{ και } v^\nu = \sum_\mu v^\mu \partial_\mu{}^\nu$$

- *Νόμος μετασχηματισμού συναλλοίωτων διανυσμάτων*:

$$\partial^{\nu} = \sum_\mu \partial^\mu \partial_\mu{}^\nu \text{ και } \omega_\mu = \sum_\nu \partial_\mu{}^\nu \omega_\nu$$

Σχόλιο. $\dim V(M) = \dim V^*M = \dim V^{**}M = \dim M < \infty$.[2] Ειδικότερα $V^{**}M = V(M)$ αφού $\forall v \in V(M)$,

$$V^{**}M \ni v : V^*M \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[M|\mathbb{R}] : \omega \mapsto v(\omega) := \omega(v),$$

Με γνώμονα τον αρχικό ορισμό των εφαπτόμενων διανυσμάτων να στηρίζει το οικοδόμημα μπορούμε πια να γράφουμε $V_pM \ni v : V_p^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ και $V_p^*M \ni \omega : V_pM \longrightarrow \mathbb{R}$.

[1] θεώρημα Α.3.2.2
[2] πόρισμα Α.3.2.1

4.1.1 Τανυστές.

Με γνώμονα το τελευταίο σχόλιο έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.1.1.1 (τανυστης)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M|\mathcal{A})$ και $p \in M$. Καλείται τανυστής τύπου $(k|l)$ μια πολυγραμμική μορφή:

$$T : \Pi_{i=1}^{k} V_p^* M \times \Pi_{j=1}^{l} V_p M \longrightarrow \mathbb{R} : (b^i)_{i=1}^{k} \times (a_j)_{j=1}^{l} \mapsto T(b^1, \ldots, b^k; a_1, \ldots, a_l)$$

Ονομάζουμε $V_p^{(k|l)} M$ το σύνολο όλων των τανυστών τύπου $(k|l)$ στο p. $\forall I \subseteq \mathbb{N}_k$ και $\forall J \subseteq \mathbb{N}_l$ ορίζεται η πολυγραμμική απεικόνιση, συμπληρώνοντας μόνο μερικά από τα ορίσματα:

$$T : V_p^{(\#J|\#I)} M \supseteq \Pi_{i \in I} V_p^* M \times \Pi_{j \in J} V_p M \longrightarrow V_p^{(k-\#I|l-\#J)} M : (b^i)_{i \in I} \times (a_j)_{j \in J} \mapsto$$

$$\mapsto T((\_^i | (\_^i \leftarrow b^i)_{i \in I})_{i=1}^{k}; (\_{}_j | (\_{}_j = a_j)_{j \in J})_{j=1}^{l})$$

4.1.1.1 Πράξεις τανυστών.

Ορισμός 4.1.1.1.1 (διμελής - τανυστικό γινόμενο)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M|\mathcal{A})$ με $\{\upsilon_\sigma\}_{\sigma=1}^{\dim M}$ βάση του $V_p M$ και $\{\omega^\sigma\}_{\sigma=1}^{\dim M}$ η δυϊκή της του $V_p^* M$. Το *τανυστικό γινόμενο* απεικονίζει τανυστές τύπου $(k|l)$ και $(n|m)$ αντίστοιχα σε $(k+n|l+m)$:

$$\otimes : V_p^{(k|l)} M \times V_p^{(n|m)} M \longmapsto V_p^{(k+n|l+m)} M : T \times S \mapsto$$

$$\mapsto T \otimes S : \Pi_{i=1}^{k+n} V_p^* M \times \Pi_{j=1}^{l+m} V_p M \longrightarrow \mathbb{R} : (\omega^i)_{i=1}^{k+n} \times (\upsilon_j)_{j=1}^{l+m} \mapsto$$

$$\mapsto (T \otimes S)(\omega^1, \ldots, \omega^{k+n}; \upsilon_1, \ldots, \upsilon_{l+m}) := T(\omega^1, \ldots, \omega^k; \upsilon_1, \ldots, \upsilon_l) S(\omega^{k+1}, \ldots, \omega^{k+n}; \upsilon_{l+1}, \ldots, \upsilon_{l+m})$$

Σχόλιο. Κάθε τανυστής τύπου $(k|l)$ της μορφής $\otimes_{i=1}^{k} a_i \otimes \otimes_{j=1}^{l} b^j$, $\forall \{a_i\}_{i=1}^{k} \subset V_p M$ και $\forall \{b^j\}_{j=1}^{l} \subset V_p^* M$ καλείται *απλός τανυστής* τύπου $(k|l)$. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο

$$\{\otimes_{i=1}^{k} \upsilon_{\mu_i} \otimes \otimes_{j=1}^{l} \omega^{\nu_j}\}_{(\mu_i)_{i=1}^{k} \times (\nu_j)_{j=1}^{l} \in \mathbb{N}_{\dim M}^{k+l}} \subset \Pi_{i=1}^{k} V_p M \times \Pi_{j=1}^{l} V_p^* M$$

συνιστά βάση του χώρου $V_p^{(k|l)} M$. Ως εκ τούτου ορίζονται οι *συνιστώσες* ενός *τανυστή* στην εν λόγω βάση:

$$T = \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_k} \sum_{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_l} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \upsilon_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \upsilon_{\mu_k} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{\nu_l}$$

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T(\omega^{\mu_1}, \ldots, \omega^{\mu_k}; \upsilon_{\nu_1}, \ldots, \upsilon_{\nu_l})$$

Οι συνιστώσες του τανυστικού γινομένου είναι:

$$(T \otimes S)^{\mu_1 \ldots \mu_{k+n}}{}_{\nu_l \ldots \nu_{l+m}} = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} S^{\mu_{k+1} \ldots \mu_{k+n}}{}_{\nu_{l+1} \ldots \nu_{l+m}}$$

στη βάση

$$\{\otimes_{i=1}^{k+n} \upsilon_{\mu_i} \otimes \otimes_{j=1}^{l+m} \omega^{\nu_j}\}_{(\mu_i)_{i=1}^{k+n} \times (\nu_j)_{j=1}^{l+m} \in \mathbb{N}_{\dim M}^{k+l+m+n}} \subset \Pi_{i=1}^{k+n} V_p M \times \Pi_{j=1}^{l+m} V_p^* M$$

$$T \otimes S = \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_{k+n}} \sum_{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_{l+m}} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} S^{\mu_{k+1} \ldots \mu_{k+n}}{}_{\nu_{l+1} \ldots \nu_{l+m}} \upsilon_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \upsilon_{\mu_{k+n}} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{\nu_{l+m}}$$

Ορισμός 4.1.1.1.2 (μονομελής - συστολή)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M|\mathcal{A})$ και $p \in M$ με $\{\upsilon_\sigma\}_{\sigma=1}^{\dim M}$ βάση του $V_p M$ και $\{\omega^\sigma\}_{\sigma=1}^{\dim M}$ η δυϊκή της του $V_p^* M$. Η *συστολή* απεικονίζει τανυστή τύπου $(k|l)$ σε $(k-1|l-1)$:

$$\Diamond_{\{j\}}^{\{i\}} : V_p^{(k|l)} M \longmapsto V_p^{(k-1|l-1)} M : T \mapsto \Diamond_{\{j\}}^{\{i\}} T := \sum_{\sigma} T(\ldots, \omega^\sigma, \ldots; \ldots, \upsilon_\sigma, \ldots)$$

$\forall I \subseteq \mathbb{N}_k$ και $\forall J \subseteq \mathbb{N}_l$ με $\#I = \#J = c \leq \min\{k, l\}$ ορίζεται:

$$\Diamond_J^I := \Diamond_{\{j_1\}}^{\{i_1\}} \ldots \Diamond_{\{j_c\}}^{\{i_c\}} : V_p^{(k|l)} M \longmapsto V_p^{(k-c|l-c)} M : T \mapsto \Diamond_J^I T := \sum \cdots \sum_{(\sigma_o)_{o=1}^{c}} T((\omega^{\sigma_o})_{o=1}^{c}; (\upsilon_{\sigma_o})_{o=1}^{c})$$

Σχόλιο. Οι συνιστώσες του συνεσταλμένου τανυστή είναι:

$$(\Diamond^{\{i\}}_{\{j\}}T)^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_{j-1}\nu_{j+1}\ldots\nu_l} = \sum_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\sigma\mu_{i+1}\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_{j-1}\sigma\nu_{j+1}\ldots\nu_l}$$

$$\Diamond^{\{i\}}_{\{j\}}T = \sum_{\mu_1}\cdots\sum_{\mu_{i-1}}\sum_{\mu_{i+1}}\cdots\sum_{\mu_k}\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_{j-1}}\sum_{\nu_{j+1}}\cdots\sum_{\nu_l}\sum_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\sigma\mu_{i+1}\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_{j-1}\sigma\nu_{j+1}\ldots\nu_l}$$
$$\upsilon_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes\upsilon_{\mu_{i-1}}\otimes\upsilon_{\mu_{i+1}}\otimes\ldots\otimes\upsilon_{\mu_k}\otimes\omega^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{\nu_{j-1}}\otimes\omega^{\nu_{j+1}}\otimes\ldots\otimes\omega^{\nu_l}$$

και γενικότερα

$$(\Diamond^I_J T)^{(\mu_i)_{i\in I}}_{(\nu_j)_{j\in J}} = \sum\cdots\sum_{(\sigma_o)^c_{o=1}} T^{(\mu_i|\mu_{i_o}=\sigma_o)}{}_{(\nu_j|\nu_{j_o}=\sigma_o)}$$

στη βάση

$$\{\otimes_{i\notin I}\upsilon_{\mu_i}\otimes\otimes_{j\notin J}\omega^{\nu_j}\}_{(\mu_i)_{i\notin I}\times(\nu_j)_{j\notin J}\in\mathbb{N}^{k+l-2c}_{\dim M}} \subset \Pi_{i\notin I}V_pM\times\Pi_{j\notin J}V^*_pM$$

$$\Diamond^I_J T = \sum\cdots\sum_{(\mu_i)_{i\notin I}}\sum\cdots\sum_{(\nu_j)_{j\notin J}}\sum\cdots\sum_{(\sigma_o)^c_{o=1}} T^{(\mu_i|\mu_{i_o}=\sigma_o)^k_{i=1}}{}_{(\nu_j|\nu_{j_o}=\sigma_o)^l_{j=1}}(\otimes_{i\notin I}\upsilon_{\mu_i}\otimes\otimes_{j\notin J}\omega^{\nu_j})$$

Πρόταση 4.1.1.1.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M|\mathcal{A})$ και $p\in M$ με $\{\upsilon_\sigma\}^{\dim M}_{\sigma=1}$ βάση του V_pM και $\{\omega^\sigma\}^{\dim M}_{\sigma=1}$ η δυϊκή της του V^*_pM. Η συστολή είναι αναλλοίωτη βάσης.*

Απόδειξη. Έστω νέα βάση του V_pM:

$$(\upsilon')_{\nu'} = \sum_\nu \upsilon_\nu\ \Lambda^\nu{}_{\nu'}$$

Ισχυρισμός. Η δυϊκή της βάση μετασχηματίζεται ως:

$$(\omega')^{\mu'} = \sum_\mu (\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\mu\ \omega^\mu$$

Πράγματι $\forall\mu,\nu\in\mathbb{N}_{\dim M}$,

$$(\omega')^{\mu'}((\upsilon')_{\nu'}) = \sum_\mu\sum_\nu(\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\mu\ \omega^\mu\ (\upsilon_\nu\ )\Lambda^\nu{}_{\nu'} = \sum_\mu\sum_\nu(\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\mu\ \delta^\mu{}_\nu\ \Lambda^\nu{}_{\nu'} = \sum_\sigma(\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\sigma\ \Lambda^\sigma{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}{}_{\nu'}.$$

Τότε $\forall T\in V^{(k|l)}_pM$,

$$\sum_\sigma T(\ldots,\omega^\sigma,\ldots;\ldots,\upsilon_\sigma,\ldots) =$$
$$= \sum_\sigma\sum_{\mu'}\sum_{\nu'}\Lambda^\sigma{}_{\mu'}T(\ldots,(\omega')^{\mu'},\ldots;\ldots,(\upsilon')_{\nu'},\ldots)(\Lambda^{-1})^{\nu'}{}_\sigma =$$
$$= \sum_{\sigma'}T(\ldots,(\omega')^{\sigma'},\ldots;\ldots,(\upsilon')_{\sigma'},\ldots),$$

quod erat demonstrandum. □

Νόμος μετασχηματισμού τανυστών:[3]

$$\partial_{\nu'} = \sum_\nu \partial_\nu\ \partial^\nu{}_{\nu'} \text{ και } \partial^{\mu'} = \sum_\mu \partial^{\mu'}{}_\mu\ \partial^\mu$$

$$T^{\mu'_1\ldots\mu'_k}{}_{\nu'_1\ldots\nu'_l} = \sum_{\mu_1}\cdots\sum_{\mu_k}\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_l}\partial^{\mu'_1}{}_{\mu_1}\ldots\partial^{\mu'_k}{}_{\mu_k}T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\,\partial^{\nu_1}{}_{\nu'_1}\ldots\partial^{\nu_l}{}_{\nu'_l}$$

[3]Αναφερόμενοι σε διαφορίσιμα τανυστικά πεδία πια.

4.2 ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΑΦΗΡΗΜΕΝΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ

Υιοθετείται ο τρόπος του Wald στην αναπαράσταση του φορμαλισμού των αφηρημένων δεικτών του Einstein.[4] Συμβολίζουμε τους αφηρημένους δείκτες με αγγλικούς χαρακτήρες ξεκινώντας κατά προτίμηση από την αρχή της αλφαβήτου, και τους πραγματικούς δείκτες με ελληνικούς χαρακτήρες όπως στις συνιστώσες ενός τανυστή, ξεκινώντας από τη μέση της αλφαβήτου κατά προτίμηση. Για παράδειγμα:

$$T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \sum_{\mu_1}\cdots\sum_{\mu_k}\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_l} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\, \upsilon_{\mu_1}{}^{a_1}\otimes\ldots\otimes\upsilon_{\mu_k}{}^{a_k}\otimes\omega^{\nu_1}{}_{b_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{\nu_l}{}_{b_l}$$

Συμμετρική συνιστώσα τανυστή $T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$:

$$T^{(a_1\ldots a_k)}{}_{(b_1\ldots b_l)} = \frac{1}{k!l!}\sum_\sigma\sum_\rho T^{a_{\sigma(1)}\ldots a_{\sigma(k)}}{}_{b_{\rho(1)}\ldots b_{\rho(l)}}$$

Αντισυμμετρική συνιστώσα τανυστή $T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$:

$$T^{[a_1\ldots a_k]}{}_{[b_1\ldots b_l]} = \frac{1}{k!l!}\sum_\sigma\sum_\rho \epsilon(\sigma)\epsilon(\rho) T^{a_{\sigma(1)}\ldots a_{\sigma(k)}}{}_{b_{\rho(1)}\ldots b_{\rho(l)}}$$

όπου $\sigma : \mathbb{N}_k \longmapsto \mathbb{N}_k$ οι μεταθέσεις k τάξης, $\rho : \mathbb{N}_l \longmapsto \mathbb{N}_l$ οι μεταθέσεις l τάξης και ϵ η συνάρτηση προσήμου μιας μετάθεσης.[5]

4.2.1 Σύμβαση άθροισης Einstein.

Στην ενότητα 4.1 στη σελίδα 39 έγινε αναφορά στη μετρική μιας πολλαπλότητας Riemann[6] και ειδικότερα:

$$\forall\upsilon\in\mathcal{V}^{(1|0)}M,\ \langle \_|\upsilon\rangle\in\mathcal{V}^{(0|1)}M \ni \langle\upsilon|\_\rangle$$

δηλαδή $\forall\upsilon\in V$ η μετρική ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ $\mathcal{V}^{(1|0)}M$ και $\mathcal{V}^{(0|1)}M$, ισοδύναμα για κάθε ανταλλοίωτο διάνυσμα υπάρχει μοναδικό συναλλοίωτο διάνυσμα και αντίστροφα. Σε συνέπεια με το συμβολισμό των συνιστωσών, τα ανταλλοίωτα διανύσματα συμβολίζονται με δείκτη πάνω, $\upsilon^a\in\mathcal{V}^{(1|0)}M$ ενώ τα συναλλοίωτα διανύσματα συμβολίζονται με δείκτη κάτω, $\upsilon_a\in\mathcal{V}^{(0|1)}M$. Τώρα πια αναφερόμενοι σε διανύσματα ή τανυστές εννοούμε διανυσματικα ή τανυστικά πεδία. Έτσι αναπαριστούμε με φορμαλισμό συνιστωσών, που εξαρτώνται πάντα από τον τοπικό χάρτη που λαμβάνεται και άρα σε υποσύνολο πάντα της πολλαπλότητας, αναπαριστούμε λογισμό τανυστών σε ολόκληρη τη πολλαπλότητα, υπονοώντας ότι κάθε φορά που κάνουμε υπολογισμούς, πρέπει να του εντοπίσουμε σε ένα τοπικό χάρτη ή/και να χρησιμοποιήσουμε τους διαφορομορφισμούς μεταξύ επικαλυπτόμενων χαρτών για να μεταβούμε σε νέο χάρτη. Έτσι, αφού η μετρική κάνει τη μετατροπή στον εφαπτόμενο χώρο για κάθε σημείο, η ιδιότητα αυτή είναι παγκόσμια και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φορμαλισμό δεικτών για να τη διατυπώσουμε:

$$\forall\upsilon^a\in\mathcal{V}^{(1|0)}M,\ \upsilon^b g_{ba} = g_{ab}\upsilon^b =: \upsilon_a\in\mathcal{V}^{(0|1)}M$$

Έτσι $\forall u,\upsilon\in V$,

$$\langle u|\upsilon\rangle = \sum_\mu\sum_\nu g_{\mu\nu}u^\mu\upsilon^\nu = g_{ab}u^a\upsilon^b = u^a\upsilon_a = \sum_\mu u^\mu\upsilon_\mu$$

Η τελευταία ισότητα αποτελεί και τη σύμβαση άθροισης του Einstein, Έστω τανυστής $T\equiv T^a_{\ b}\in\mathcal{V}^{(1|1)}M$ και βάση $\{\upsilon_\mu{}^a\}_{\mu=1}^{\dim M}$ με δυϊκή $\{\upsilon^\nu{}_b\}_{\nu=1}^{\dim M}$.[7] Ορίζεται:

$$T^a_{\ b} = T^{ac}g_{cb}$$

και γενικότερα η δράση της μετρικής σε τανυστή ορίζεται ως $g\otimes\_ : \mathcal{V}^{(k|l)}M\longmapsto\mathcal{V}^{(k+1|l-1)}M$ όπως και $g^{-1}\otimes\_ : \mathcal{V}^{(k|l)}M\longmapsto\mathcal{V}^{(k-1|l+1)}M$.

[4] Ο οποίος είναι και συνεπής με τα παραπάνω.

[5] Θετικό για άρτια μετάθεση, αρνητικό για περιττή μετάθεση.

[6] Τώρα πια η πολλαπλότητα είναι *ψευδο-Riemann* αφού έχουμε μεταβεί από ευκλείδεια σε ψευδο-ευκλείδεια μετρική.

[7] Πράγματι, η εικόνα της βάσης μέσω της μετρικής είναι ακριβώς η δυϊκή της αφού $\upsilon^\nu(\upsilon_\mu) = \upsilon_\mu{}^a\upsilon^\nu{}_a = g_{ab}\upsilon_\mu{}^a\upsilon_\nu{}^b = \langle\upsilon_\mu|\upsilon_\nu\rangle$.

Κεφάλαιο 5

ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

5.1 ΣΥΝΟΧΗ & ΣΥΝΑΛΛΟΙΤΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Όπως φαίνεται και στο μέρος η έννοια της συνοχής δεν απαιτεί την ύπαρξη μετρικής.

Ορισμός 5.1.1. Έστω διαφορική πολλαπλότητα M. Για κάθε συνοχή ∇[1] και $\forall k, l \in \mathbb{N}$, ορίζεται τελεστής

$$\nabla_c : \mathcal{V}^{(k|l)}M \longrightarrow \mathcal{V}^{(k|l+1)}M : T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \mapsto \nabla_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \equiv T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}|_c$$

τέτοιος, ώστε:

- (γραμμικότητα) $\forall A, B \in \mathcal{V}^{(k|l)}M$ και $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty[M|\mathbb{R}]$:
$$\nabla_c(\alpha A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} + \beta B^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$$
- (κανόνας γινομένου Leibniz) $\forall A \in \mathcal{V}^{(k|l)}M$ και $\forall B \in \mathcal{V}^{(n|m)}M$:
$$\nabla_e(A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} B^{c_1\ldots c_n}{}_{d_1\ldots d_m}) = B^{c_1\ldots c_n}{}_{d_1\ldots d_m} \nabla_e A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} + A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \nabla_e B^{c_1\ldots c_n}{}_{d_1\ldots d_m}$$
- (μεταθετικότητα με συστολή) $\forall A \in \mathcal{V}^{(k|l)}M$:
$$\nabla_d(A^{a_1\ldots c\ldots a_k}{}_{b_1\ldots c\ldots b_l}) = \nabla_d A^{a_1\ldots c\ldots a_k}{}_{b_1\ldots c\ldots b_l}$$
- $\forall f \in \mathcal{V}^{(0|0)}M$[2] και $\forall \upsilon \in V^{(1|0)}M$:
$$\upsilon(f) = \upsilon^a \nabla_a f$$

Ισχυρισμός. Έστω ο τελεστής μερικής παραγώγου είναι τελεστής παραγώγου:

$$\partial_c : \mathcal{V}^{(k|l)}M \longrightarrow \mathcal{V}^{(k|l+1)}M : T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \mapsto \partial_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$$

$$T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \sum_{\mu_1}\cdots\sum_{\mu_k}\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_l} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\, \upsilon^{a_1}{}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \upsilon^{a_k}{}_{\mu_k} \otimes \omega_{b_1}{}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{b_l}{}^{\nu_l}$$

$$\partial_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \sum_{\mu_1}\cdots\sum_{\mu_k}\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_l}\sum_{\sigma} \partial_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\, \omega_c{}^{\sigma} \otimes \upsilon^{a_1}{}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \upsilon^{a_k}{}_{\mu_k} \otimes \omega_{b_1}{}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{b_l}{}^{\nu_l}$$

Πράγματι, από βασικές ιδιότητες της μερικής παραγώγου όπως ορίζεται για κάθε σύστημα συντεταγμένων $(O|\psi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M})$.

[1] ορισμοί 3.1.1 και 3.1.2

[2] $\mathcal{V}^{(0|0)}M \subset \mathcal{C}^\infty[M|\mathbb{R}]$, αφού, σύμφωνα με το νόμο μετασχηματισμού τανυστών, κάθε βαθμωτό παραμένει αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμό συντεταγμένων, κάτι το οποίο δεν ισχύει γενικά για βαθμωτές συναρτήσεις.

5.1.1 Σύνδεση με συνοχή.

Είναι ήδη γνωστό ότι $\upsilon(f) = \upsilon^a \partial_a f \ \forall \upsilon \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$, οπότε η δράση της παραγώγου σε βαθμωτά είναι τετριμμένη:

$$\nabla_a f = \partial_a f$$

Έστω τώρα $f \in \mathcal{V}^{(0|0)}M$ και $\nabla_a(f\upsilon^c) = \upsilon^c \nabla_a f + f\nabla_a \upsilon^c = \upsilon^c \partial_a f + f\nabla_a \upsilon^c$,

$$(\nabla_a - \partial_a)(f\upsilon^c) = \nabla_a(f\upsilon^c) - \partial_a(f\upsilon^c) = f(\nabla_a \upsilon^c - \partial_a \upsilon^c) = f(\nabla_a - \partial_a)\upsilon^c,$$

δηλαδή η απεικόνιση $\nabla_a - \partial_a$ είναι γραμμική στο σύνολο των διανυσματικών πεδίων, οπότε από ορισμό 4.1.1.1:

$$\mathcal{V}^{(1|2)} \ni \Gamma^c{}_{ab} = \nabla_a - \partial_a : \mathcal{V}^{(1|0)} \longrightarrow \mathcal{V}^{(1|1)} : \upsilon^c \mapsto \Gamma^c{}_{ab}\upsilon^b$$

$$\nabla_a \upsilon^c = \partial_a \upsilon^c + \Gamma^c{}_{ab}\upsilon^b$$

Ομοίως $\forall \omega_b \in \mathcal{V}^{(0|1)}M$:

$$(\nabla_a - \partial_a)(\omega_c \upsilon^c) = ((\nabla_a - \partial_a)\omega_b + \omega_c \Gamma^c{}_{ab})\upsilon^b = 0,$$

οπότε έχουμε αντίστοιχα:

$$\mathcal{V}^{(1|2)} \ni \Gamma^c{}_{ab} = \nabla_a - \partial_a : \mathcal{V}^{(0|1)} \longrightarrow \mathcal{V}^{(0|2)} : \omega_b \mapsto \omega_c \Gamma^c{}_{ab}$$

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \omega_c \Gamma^c{}_{ab}$$

Γενικότερα, $\forall T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} \in \mathcal{V}^{(k|l)}M$:[3]

$$\nabla_a T^{c_1 \ldots c_k}{}_{b_1 \ldots b_l} = \partial_a T^{c_1 \ldots c_k}{}_{b_1 \ldots b_l} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{c_i}{}_{ad} T^{c_1 \ldots c_{i-1} d c_{i+1} \ldots c_k}{}_{b_1 \ldots b_l} - \sum_{j=1}^{l} \Gamma^d{}_{ab_j} T^{c_1 \ldots c_k}{}_{b_1 \ldots b_{j-1} d b_{j+1} \ldots b_l}$$

Ισχυρισμός. $\forall \xi, \eta \in \mathcal{V}(M)$ ισοδύναμα $\forall \xi^a, \eta^b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$, $\nabla(\xi|\eta) = \xi^a \nabla_a \eta^b$.

Πράγματι, αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση με η^b και συστέλλοντας με ξ^a,

$$\xi^a \nabla_a \eta^b = \xi^a \partial_a \eta^b + \Gamma^b{}_{ac}\xi^a \eta^c,$$

όπου από ισχυρισμό 3.1 στη σελίδα 29 έχουμε το ζητούμενο *για κάθε σύστημα συντεταγμένων*.

Κατά συνέπεια, έχει βρεθεί η σύνδεση της συνοχής όπως ορίστηκε μαθηματικά στην ενότητα 3.1 του κεφαλαίου 3 και του τελεστή παραγώγισης στο φορμαλισμό αφηρημένων δεικτών. Και στις δύο περιπτώσεις τα σύμβολα Christoffel $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ επιτελούν τον ίδιο ρόλο μόνο που στη τελευταία περίπτωση είναι δυνατός ο ορισμός αντίστοιχου τανυστή $\Gamma^c{}_{ab}$.

Αντικαθιστώντας $\omega_b = \nabla_b f = \partial_b f$ στην εξίσωση δράσης της παραγώγου πάνω σε συνδιανύσματα έχουμε

$$\nabla_a \nabla_b f = \partial_a \partial_b f - \Gamma^c{}_{ab} \nabla_c f,$$

δηλαδή

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -2T^c{}_{ab} \nabla_c f,$$

$$T^c{}_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ab}) = \Gamma^c{}_{[ab]}$$

ο τανυστής στρέψης.

[3] όπως στο [3]

5.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

Στην ενότητα 1.1 του κεφαλαίου 3 έγινε αναφορά σε μια ειδική κατηγορία συνοχών που είναι συμβιβαστές με τη δομή Riemann. Οι συνθήκες μετασχηματίζονται ως εξής:

- είναι συμμετρική: $\forall \xi^a, \eta^b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$, $\xi^a \nabla_a \eta^b - \eta^a \nabla_a \xi^b = \xi^a \partial_a \eta^b - \eta^a \partial_a \xi^b$,
- $\forall \xi^b, \eta^c, \zeta^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$, $\zeta^a \nabla_a (g_{bc}\xi^b\eta^c) = g_{bc}\eta^c\zeta^a\nabla_a\xi^b + g_{bc}\xi^b\zeta^a\nabla_a\eta^c$ (ταυτότητα του Ricci).

Από τη πρώτη συνθήκη,

$$\xi^a\nabla_a\eta^b - \eta^a\nabla_a\xi^b - \xi^a\partial_a\eta^b + \eta^a\partial_a\xi^b = \Gamma^b{}_{ac}\xi^a\eta^c + (\Gamma^b{}_{ac}\eta^a\xi^c = \Gamma^b{}_{ca}\xi^a\eta^c) = 0 \Longrightarrow T^b{}_{ac} = 0,$$

δηλαδή οι συνοχές Levi-Civita και κατ΄ επέκταση οι γεωμετρίες Riemann δεν έχουν στρέψη, δηλαδή:

- $\forall f \in \mathcal{V}^{(0|0)}M$:
$$\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$$

Φυσικά, $T^c{}_{ab} = 0 \Longrightarrow \Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab}$ δηλαδή ο τανυστής Christoffel είναι συμμετρικός και η μερική παράγωγος εξ΄ ορισμού είναι μεταθετική:

$$\partial_a\partial_b f = \partial_b\partial_a f$$

Μάλιστα $\forall T^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_l} \in \mathcal{V}^{(k|l)}M$:

$$\partial_a\partial_b T^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_l} = \partial_b\partial_a T^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_l}$$

Από τη δεύτερη συνθήκη,

$$\zeta^a\xi^b\eta^c\nabla_a g_{bc} + g_{bc}\eta^c\zeta^a\nabla_a\xi^b + g_{bc}\xi^b\zeta^a\nabla_a\eta^c = \zeta^a\nabla_a(g_{bc}\xi^b\eta^c) = g_{bc}\eta^c\zeta^a\nabla_a\xi^b + g_{bc}\xi^b\zeta^a\nabla_a\eta^c \Longrightarrow \nabla_a g_{bc} = 0,$$

δηλαδή για μια συνοχή Levi-Civita σε μια πολλαπλότητα Riemann:

$$\nabla_a g_{bc} = 0$$

Αναλυτικά, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία $\Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ba}$:

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \Longrightarrow \partial_a g_{bc} = \Gamma^d{}_{ab}g_{dc} + \Gamma^d{}_{ca}g_{bd} = \Gamma_{cab} + \Gamma_{bca}$$

$$\nabla_b g_{ca} = 0 \Longrightarrow \partial_b g_{ca} = \Gamma^d{}_{bc}g_{da} + \Gamma^d{}_{ab}g_{cd} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{cab}$$

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \Longrightarrow \partial_c g_{ab} = \Gamma^d{}_{ca}g_{db} + \Gamma^d{}_{bc}g_{ad} = \Gamma_{bca} + \Gamma_{abc}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες και αφαιρώντας τη τρίτη:

$$2\Gamma_{cab} = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}$$

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

Όπως φαίνεται σχηματικά, ακολουθήθηκε διαδικασία εξαγωγής του τανυστή Christoffel της συνοχής Levi-Civita όμοια[4] με αυτήν εξαγωγής των συμβόλων Christoffel της συνοχής Levi-Civita, σχόλιο 3.3.1 στη σελίδα 35. Αυτό αναδεικνύει περαιτέρω την πρακτικότητα του φορμαλισμού δεικτών, ήτοι του χειρισμού των τανυστών μέσω των ιδιοτήτων των συνιστωσών τους που παραμένουν όμως αναλλοίωτες μετασχηματισμού βάσης, έτσι ώστε όντως οι ιδιότητες που εξάγονται να είναι παγκόσμιας ισχύος στη πολλαπλότητα. Από κατασκευής φυσικά, η συνοχή Levi-Civita είναι μοναδική. Όπως φαίνεται από τον ορισμό της,[5] η καμπυλότητα

$$R_\nabla : \mathcal{V}^{(3|0)}M \supset \mathcal{V}^{(1|0)}M \times \mathcal{V}^{(1|0)}M \times \mathcal{V}^{(1|0)}M \longrightarrow \mathcal{V}^{(1|0)}M : \xi\times\eta\times\zeta \mapsto \nabla(\xi|\nabla(\eta|\zeta)) - \nabla(\eta|\nabla(\xi|\zeta)) - \nabla([\xi|\eta]|\zeta)$$

είναι ένα τανυστής τύπου (1|3).

[4] όπως στο [3]

[5] ορισμός 3.1.1.1

5.2.1 Ιδιότητες τανυστή Riemann.

Η συνοχή Levi-Civita είναι απαλλαγμένη από στρέψη. Επιπλέον $\forall \xi \otimes \eta \in \mathcal{V}^{(2|0)}M$:

$$[\xi|\eta]^b = \xi^a \partial_a \eta^b - \eta^a \partial_a \xi^b = \xi^a \nabla_a \eta^b - \eta^a \nabla_a \xi^b$$

Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς για τον τανυστή Riemann έχουμε:

$$R^a{}_{bcd}\xi^b\eta^c\zeta^d = \xi^b\nabla_b(\eta^c\nabla_c\zeta^a) - \eta^c\nabla_c(\xi^b\nabla_b\zeta^a) - (\xi^b\nabla_b\eta^d - \eta^c\nabla_c\xi^d)\nabla_d\zeta^a =$$

$$\xi^b\nabla_b(\eta^c\nabla_c\zeta^a) - \xi^b\nabla_b\eta^d\nabla_d\zeta^a - \eta^c\nabla_c(\xi^b\nabla_b\zeta^a) + \eta^c\nabla_c\xi^d\nabla_d\zeta^a =$$

$$\xi^b\eta^c\nabla_b\nabla_c\zeta^a - \eta^c\xi^b\nabla_c\nabla_b\zeta^a = \xi^b\eta^c(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\zeta^a$$

δηλαδή:

$$(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\zeta^a = R^a{}_{bcd}\zeta^d \tag{5.2.1}$$

Για επαλήθευση:

$$(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\zeta^a = \nabla_b(\partial_c\zeta^a + \Gamma^a{}_{cd}\zeta^d) - \nabla_c(\partial_b\zeta^a + \Gamma^a{}_{bd}\zeta^d) =$$

$$+\partial_b(\partial_c\zeta^a + \Gamma^a{}_{cd}\zeta^d) + \Gamma^a{}_{be}(\partial_c\zeta^e + \Gamma^e{}_{cd}\zeta^d) - \Gamma^e{}_{bc}(\partial_e\zeta^a + \Gamma^a{}_{ed}\zeta^d)$$

$$-\partial_c(\partial_b\zeta^a + \Gamma^a{}_{bd}\zeta^d) - \Gamma^a{}_{ce}(\partial_b\zeta^e + \Gamma^e{}_{bd}\zeta^d) + \Gamma^e{}_{cb}(\partial_e\zeta^a + \Gamma^a{}_{ed}\zeta^d)$$

$$+\partial_b\partial_c\zeta^a + \partial_b\Gamma^a{}_{cd}\zeta^d + \Gamma^a{}_{be}\partial_c\zeta^e + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd}\zeta^d - \Gamma^e{}_{bc}\partial_e\zeta^a - \Gamma^e{}_{bc}\Gamma^a{}_{ed}\zeta^d$$

$$-\partial_c\partial_b\zeta^a - \partial_c\Gamma^a{}_{bd}\zeta^d - \Gamma^a{}_{ce}\partial_b\zeta^e - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd}\zeta^d + \Gamma^e{}_{cb}\partial_e\zeta^a + \Gamma^e{}_{cb}\Gamma^a{}_{ed}\zeta^d$$

$$+(\partial_b\partial_c - \partial_c\partial_b)\zeta^a + \partial_b\Gamma^a{}_{cd}\zeta^d - \Gamma^a{}_{cd}\partial_b\zeta^d - \partial_c\Gamma^a{}_{bd}\zeta^d + \Gamma^a{}_{bd}\partial_c\zeta^d + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd}\zeta^d - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd}\zeta^d$$

$$(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\zeta^a = (\partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd})\zeta^d = R^a{}_{bcd}\zeta^d$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι $(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)f = 0$. $\forall \omega_d \in \mathcal{V}^{(0|1)}M$:

$$(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d = \nabla_b(\partial_c\omega_d - \Gamma^a{}_{cd}\omega_a) - \nabla_c(\partial_b\omega_d - \Gamma^a{}_{bd}\omega_a) =$$

$$+\partial_b(\partial_c\omega_d - \Gamma^a{}_{cd}\omega_a) - \Gamma^e{}_{bd}(\partial_c\omega_e - \Gamma^a{}_{ce}\omega_a) - \Gamma^e{}_{bc}(\partial_e\omega_d - \Gamma^a{}_{ed}\omega_a)$$

$$-\partial_c(\partial_b\omega_d - \Gamma^a{}_{bd}\omega_a) + \Gamma^e{}_{cd}(\partial_b\omega_e - \Gamma^a{}_{be}\omega_a) + \Gamma^e{}_{cb}(\partial_e\omega_d - \Gamma^a{}_{ed}\omega_a)$$

$$+\partial_b\partial_c\omega_d - \partial_b(\Gamma^a{}_{cd}\omega_a) - \Gamma^e{}_{bd}\partial_c\omega_e + \Gamma^e{}_{bd}\Gamma^a{}_{ce}\omega_a - \Gamma^e{}_{bc}\partial_e\omega_d + \Gamma^e{}_{bc}\Gamma^a{}_{ed}\omega_a$$

$$-\partial_c\partial_b\omega_d + \partial_c(\Gamma^a{}_{bd}\omega_a) + \Gamma^e{}_{cd}\partial_b\omega_e - \Gamma^e{}_{cd}\Gamma^a{}_{be}\omega_a + \Gamma^e{}_{cb}\partial_e\omega_d - \Gamma^e{}_{cb}\Gamma^a{}_{ed}\omega_a$$

$$+(\partial_b\partial_c - \partial_c\partial_b)\omega_d - \partial_b(\Gamma^a{}_{cd}\omega_a) + \Gamma^a{}_{cd}\partial_b\omega_a + \partial_c(\Gamma^a{}_{bd}\omega_a) - \Gamma^a{}_{bd}\partial_c\omega_a - \omega_a\Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} + \omega_a\Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd}$$

$$(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d = \omega_a(\partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd}) = -\omega_a R^a{}_{bcd}$$

Γενικότερα:[6]

$$\nabla_b\nabla_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{d_1\ldots d_l} = \nabla_c\nabla_b T^{a_1\ldots a_k}{}_{d_1\ldots d_l} + \sum_{i=1}^{k} R^{a_i}{}_{bce} T^{a_1\ldots a_{i-1}ea_{i+1}\ldots a_k}{}_{d_1\ldots d_l} - \sum_{j=1}^{l} R^e{}_{bcd_j} T^{a_1\ldots a_k}{}_{d_1\ldots d_{j-1}ed_{j+1}\ldots d_l}$$

Σχόλιο. Η παραπάνω ταυτότητα ισχύει και για τη τυχούσα συνοχή *με στρέψη* καθώς δε χρειάστηκε η δεύτερη συνθήκη ορισμού της συνοχής Levi-Civita.[7]

[6] όπως στο [3] με αλλαγμένα πρόσημα (ελευθερία επιλογής λόγω συμμετρίας $R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{cbd}$)

[7] Αλλά χρειάστηκε η πρώτη που είναι ισοδύναμη με $\nabla_b\nabla_c f = \nabla_c\nabla_b f$, βλέπε ορισμό 3.3.1.1.

Πρόταση 5.2.1.1 (ιδιότητες τανυστή Riemann). *Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίσαμε τον τανυστή Riemann] οδηγεί σε αποτέλεσμα που δεν είναι καθιερωμένο στη βιβλιογραφία. Καθώς είναι θέμα ορισμού το τι ρόλος αποδίδεται σε κάθε slot του τανυστή, στα πλαίσια αυτού του θεωρήματος επαναορίζουμε* ${R^a}_{bcd} := {R^a}_{dcb}$ *οπότε:*

$$
\begin{gathered}
{R^a}_{bcd} = \partial_d {\Gamma^a}_{cb} - \partial_c {\Gamma^a}_{db} + {\Gamma^a}_{de}{\Gamma^e}_{cb} - {\Gamma^a}_{ce}{\Gamma^e}_{db} \\
\nabla_c \nabla_d \zeta^a = \nabla_d \nabla_c \zeta^a - {R^a}_{bcd}\zeta^b \\
\nabla_c \nabla_d \omega_b = \nabla_d \nabla_c \omega_b + {R^a}_{bcd}\omega_a
\end{gathered}
$$

$$
\nabla_c \nabla_d {T^{a_1\ldots a_k}}_{b_1\ldots b_l} = \nabla_d \nabla_c {T^{a_1\ldots a_k}}_{b_1\ldots b_l} - \sum_{i=1}^{k} {R^{a_i}}_{ecd} {T^{a_1\ldots a_{i-1} e a_{i+1}\ldots a_k}}_{b_1\ldots b_l} + \sum_{j=1}^{l} {R^e}_{b_j cd} {T^{a_1\ldots a_k}}_{b_1\ldots b_{j-1} e b_{j+1}\ldots b_l}
$$

Υποθέτουμε ότι η συνοχή είναι Levi-Civita και ορίζουμε $R_{abcd} := g_{ae}{R^e}_{bcd}$*:*

$$
R_{ab(cd)} = R_{(ab)cd} = 0 \text{ ή } R_{abcd} = -R_{abdc} = -R_{bacd} \tag{5.2.2}
$$

$$
R_{abcd} = R_{cdab}
$$

1st Bianchi identity:

$$
{R^a}_{[bcd]} = 0
$$

2nd Bianchi identity:

$$
\nabla_{[e}{R^a}_{|b|cd]} := {R^a}_{b[cd}|_{e]} = 0
$$

Απόδειξη. [8]$\forall \omega_b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$,

$$
0 = (\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)\omega_b + (\nabla_d\nabla_c - \nabla_c\nabla_d)\omega_b = {R^a}_{bcd}\omega_a + {R^a}_{bdc}\omega_a = 2R_{ab(cd)}\omega_a.
$$

Για τη συνοχή Levi-Civita ισχύει η συνθήκη συμβιβαστότητας με τη μετρική, $\nabla_a g_{bc} = 0$ άρα:

$$
0 = (\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)g_{ab} = {R^e}_{acd}g_{eb} + {R^e}_{bcd}g_{ae} = R_{bacd} + R_{abcd} = 2R_{(ab)cd}
$$

1st Bianchi identity: $\forall \omega_b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$,

$$
\begin{aligned}
\nabla_c\nabla_d\omega_b &= \nabla_c(\partial_d\omega_b - {\Gamma^a}_{db}\omega_a) \\
&= \partial_c(\partial_d\omega_b - {\Gamma^a}_{db}\omega_a) - {\Gamma^e}_{cb}(\partial_d\omega_e - {\Gamma^a}_{de}\omega_a) - {\Gamma^e}_{cd}(\partial_e\omega_b - {\Gamma^a}_{eb}\omega_a) \\
&= \partial_c\partial_d\omega_b - \partial_c{\Gamma^a}_{db}\omega_a - {\Gamma^a}_{db}\partial_c\omega_a - {\Gamma^a}_{cb}\partial_d\omega_a + {\Gamma^e}_{cb}{\Gamma^a}_{de}\omega_a - {\Gamma^e}_{cd}\partial_e\omega_b + {\Gamma^e}_{cd}{\Gamma^a}_{eb}\omega_a.
\end{aligned}
$$

Αντισυμμετρικοποιώντας ως προς c και d:

$$
\nabla_{[c}\nabla_{d]}\omega_b = \partial_{[c}\partial_{d]}\omega_b - \partial_{[c}{\Gamma^a}_{d]b}\omega_a - {\Gamma^a}_{[d|b|}\partial_{c]}\omega_a - {\Gamma^a}_{[c|b|}\partial_{d]}\omega_a + {\Gamma^e}_{[c|b|}{\Gamma^a}_{d]e}\omega_a - {\Gamma^e}_{[cd]}\partial_e\omega_b + {\Gamma^e}_{[cd]}{\Gamma^a}_{eb}\omega_a = 0
$$

Η αντισυμμετρικοποίηση των c, d και b περιέχει την αντισυμμετρικοποίηση των c και d,

$$
\nabla_{[c}\nabla_d\omega_{b]} = 0,
$$

συνεπώς:

$$
0 = \nabla_{[c}\nabla_d\omega_{b]} - \nabla_{[d}\nabla_c\omega_{b]} = {R^a}_{[bcd]}\omega_a
$$

2nd Bianchi identity: $\forall \omega_b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$,

$$
(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)\nabla_e\omega_b = {R^a}_{ecd}\nabla_a\omega_b + {R^a}_{bcd}\nabla_e\omega_a
$$

$$
\nabla_e(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)\omega_b = \nabla_e({R^a}_{bcd}\omega_a) = \nabla_e{R^a}_{bcd}\omega_a + {R^a}_{bcd}\nabla_e\omega_a
$$

Αντισυμμετρικοποιώντας ως προς c, d και e, τα πρώτα μέλη των άνω εξισώσεων είναι ίσα:

$$
{R^a}_{[ecd]}\nabla_a\omega_b + {R^a}_{b[cd}\nabla_{e]}\omega_a = \nabla_{[e}{R^a}_{|b|cd]}\omega_a + {R^a}_{b[cd}\nabla_{e]}\omega_a
$$

[8]όπως στο [3]

Από πρώτη ταυτότητα Bianchi, $R^a{}_{[ecd]} = 0$ ενώ απαλείφονται οι όροι $R^a{}_{b[cd}\nabla_{e]}\omega_a$ οπότε έχουμε το ζητούμενο:

$$\nabla_{[e}R^a{}_{|b|cd]} := R^a{}_{b[cd}|_{e]} = 0$$

Τέλος, από τη πρώτη ταυτότητα Bianchi

$$g_{ae}R^e{}_{[bcd]} = R_{a[bcd]} = R_{abcd} - R_{abdc} - R_{acbd} + R_{acdb} + R_{adbc} - R_{adcb} = 0$$

Από ιδιότητα (5.2.2) και με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να πούμε ότι:

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

$$R_{bcda} + R_{bdac} + R_{bacd} = 0$$

$$R_{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} = 0$$

$$R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} + R_{bcda} + R_{bdac} + R_{bacd} = 0$$

$$R_{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} + R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} + R_{bcda} + R_{bdac} + R_{bacd} - R_{cdab} - R_{cabd} - R_{cbda} - R_{dabc} - R_{dbca} - R_{dcab} = 0$$

$$R_{abcd} - R_{cdab} + R_{acdb} - R_{cabd} + R_{adbc} - R_{dabc} + R_{bcda} - R_{cbda} + R_{bdac} - R_{dbca} + R_{bacd} - R_{dcab} = 0$$

Όλες οι επιμέρους διάφορές όπως παρίστανται στη τελευταία παράσταση απαλείφονται μέσω ιδιότητας (5.2.2), οπότε έχουμε και το ζητούμενο. □

5.2.2 Γεωδαισία.

Στα παρακάτω θα επανέρθουμε στον πρώτο ορισμό του τανυστή Riemann. Από ορισμό 3.2.1.1.1 στη σελίδα 32, στο φορμαλισμό δεικτών ο τελεστής συναλλοιώτου παραγώγου ως προς λεία καμπύλη $x^a \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|M]$[9] είναι:[10]

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^a}{d\tau}\nabla_a$$

Ειδικότερα, για τη συνήθη παραγώγιση (κατά συντεταγμένες):

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^a}{d\tau}\partial_a$$

Για εφαπτόμενο διάνυσμα γράφουμε:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{dx^a}{d\tau} = \frac{dx^b}{d\tau}\nabla_b\frac{dx^a}{d\tau} = \frac{dx^b}{d\tau}\partial_b\frac{dx^a}{d\tau} + \frac{dx^b}{d\tau}\Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^c}{d\tau} =$$

Η συνθήκη παράλληλης μετατόπισης $\forall \upsilon^b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ είναι:[11]

$$\frac{D\upsilon^a}{d\tau} = 0$$

[9]Το x^a *δεν* είναι εφαπτόμενο διάνυσμα, αλλά συμπεριφέρεται το ίδιο ως προς τη μετρική g_{bc} όπως άλλωστε και ο τελεστής παραγώγου ∇_a. Για τον τετραδιάστατο χωροχρόνο ειδικά, ονομάζουμε το x^a *τετραδιάνυσμα*. Φυσικά:

$$\frac{dx^a}{dt} \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$$

[10]Εδώ έχουμε αλλάξει το συμβολισμό της συναλλοιώτου παραγώγου (ορισμός 3.2.1.1.1 στη σελίδα 32) για να ξεχωρίζει από τη συνήθη παράγωγο καμπύλης ως προς την παράμετρό της. Επιπλέον, φυλάμε το χαρακτήρα $'t'$ για τη συντεταγμένη του χρόνου και συμβολίζουμε τη παραμετροποίηση *κοσμικών γραμμών* (χωροχρονικών καμπύλων) με $'\tau'$

[11]ορισμός 3.2.1.1.2 στη σελίδα 33

Η συνθήκη για μια καμπύλη να είναι γεωδαισιακή γίνεται τότε:[12]

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \sum_\mu\sum_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Η συνθήκη αυτή μπορεί να γίνει ασθενέστερη, δηλαδή απαιτούμε απλά το εφαπτόμενο διάνυσμα να μεταφέρεται παράλληλα στον εαυτό του χωρίς να διατηρεί το μήκος του απαραίτητα. Οπότε η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = \alpha\frac{dx^a}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \sum_\mu\sum_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \alpha\frac{dx^\sigma}{d\tau}$$

5.2.2.1 Συστήματα κανονικών συντεταγμένων.

Ορισμός 5.2.2.1.1 (κανονικές συντεταγμένες Riemann)**.** Ορίζουμε τις κανονικές συντεταγμένες περί σημείου $p \in M$ μέσω της εκθετικής απεικόνισης:[13] $\exp : V_pM \longrightarrow M : \tau\upsilon^a \mapsto \exp\tau\upsilon^a := \gamma^a(\tau)$ όπου

$$\frac{d\gamma^a}{d\tau} = \upsilon^a \text{ και } \frac{D\upsilon^a}{dt} = 0$$

δηλαδή γ είναι γεωδαισιακή εφαπτόμενη στο υ^a. Οι *κανονικές συντεταγμένες Riemann* ορίζονται από τις

$$\frac{d\gamma^\mu}{d\tau} : O \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M} : \gamma(\tau) := q \mapsto \frac{d\gamma}{d\tau}$$

Οι κανονικές συντεταγμένες Riemann, όπως φαίνεται και από τον ορισμό της εκθετικής απεικόνισης έχουν την ιδιότητα να απεικονίζουν γεωδαισιακές στην M σε ευθείες στον $\mathbb{R}^{\dim M}$.

Ορισμός 5.2.2.1.2 (κανονικές συντεταγμένες Gauss)**.** [14]Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το υπόβαθρο που παρατίθεται στην ενότητα 1.7 του κεφαλαίου 1. Έστω, εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα $S \hookrightarrow M$ διάστασης $\dim S = \dim M - 1$ μιας πολλαπλότητας Riemann. Συνεπώς η $\mathcal{V}^{(1|0)}S$ είναι εμβαπτισμένη υποάλγεβρα της $\mathcal{V}^{(1|0)}M$. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε διάνυσμα $n^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ τέτοιο ώστε $g_{ab}n^a\upsilon^b = 0$, $\forall\upsilon^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}S$. Αν το διάνυσμα είναι null, δηλαδή $g_{ab}n^an^b = 0$ τότε μπορεί $n^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}S$ και η S καλείται null hypersurface.[15] Αν S λοιπόν δεν είναι null, τότε $g_{ab}n^an^b \neq 0$ και μπορούμε να κανονικοποιήσουμε με $|g_{ab}n^an^b| = 1$. $\forall S$ non-null και $\forall(U|\phi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim S})$ ορίζεται το κανονικό σύστημα συντεταγμένων Gauss $(O|\psi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M})$ τέτοιο, ώστε:

$$\psi : O \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M} : \gamma_p(x^{\dim M} = \tau) := q \mapsto (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M}$$

με γ_p γεωδαισιακή διερχόμενη από το $q \in M$ και $p \in S$ με[16]

$$\gamma^a(0) = S \text{ και } \frac{d\gamma^a}{d\tau} = n^a.$$

Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται μια μονοπαραμετρική οικογένεια υπερεπιφανειών S_τ, $\forall\tau \in I \subseteq \mathbb{R}$. Οι υπερεπιφάνειες αυτές ονομάζονται και ισόχρονες αν και η παράμετρος τ δεν έχει καμία σχέση με χρόνο απαραίτητα.[17]

[12] Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο τη παράγωγο κατά συντεταγμένη εξακολουθούμε να τη συμβολίζουμε με 'd', γιατί σε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων $\forall\mu \in \mathbb{N}_{\dim M}$, $x^\mu \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}]$, και πράγματι ανάγεται σε 2ης τάξης συνήθη παράγωγο.

[13] ορισμός 2.3.1 στη σελίδα 28

[14] όπως στο [3]

[15] Τα ίδια μπορούν να λεχθούν και για μεμονωμένα σημεία και άρα εφαπτόμενα διανύσματα οπότε τότε λέμε ότι η υπερεπιφάνεια S είναι null στο σημείο τάδε.

[16] Με γ^a αντιπροσωπεύουμε την οικογένεια γεωδαισιακών που διέρχονται από το S με την επιθυμητή ιδιότητα.

[17] Παρόλο που επιτελεί στον Lorentziανό χωροχρόνο τον ίδιο ρόλο που επιτελεί ο χρόνος στον Ευκλείδειο χώρο.

Ισχυρισμός. Οι γεωδαισιακές που διατρέχουν κάθετα την υπερεπιφάνεια $S \equiv S_0$ διατρέχουν κάθετα όλη τη μονοπαραμετρική οικογένεια.

Πράγματι έστω υ^a διάνυσμα βάσης του θεωρούμενου συστήματος συντεταγμένων στην S. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνοχή Levi-Civita διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, επομένως έχουμε το ζητούμενο:

$$\frac{D}{dt}\langle n|\upsilon\rangle = n^b \nabla_b (n^a \upsilon_a) = 0$$

Μετά από τη διερεύνηση των ειδικών αυτών συστημάτων συντεταγμένων, ειδικά του Gaussιανού, είναι πιο εύκολα κατανοητός ο διαχωρισμός των καμπύλων σε:

- *χρονοειδείς καμπύλες* (timelike), για τις οποίες
$$g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} < 0,$$
και ορίζεται ο ιδιοχρόνος
$$T = \int \sqrt{-g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau}}d\tau.$$
- φωτοειδείς καμπύλες (lightlike), για τις οποίες
$$g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} = 0,$$
και ως γνωστόν τα null διανύσματα έχουν μέτρο 0 και τέτοιες καμπύλες δεν έχουν ολοκληρωτέα μεγέθη ως εκ' τούτου που να σχετίζονται με τη μετρική.
- χωροειδείς καμπύλες (spacelike), για τις οποίες
$$g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} > 0,$$
και ορίζεται το ιδιομήκος
$$L = \int \sqrt{g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau}}d\tau$$

Μια μη-εκφυλισμένη καμπύλη μπορεί ως εκ τούτου να αναπαραμετροποιηθεί ώστε

$$g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} = \pm 1$$

ανάλογα με τον αν είναι spacelike ή timelike. Αυτή η παραμετροποίηση καλείται *φυσική παραμετροποίηση της καμπύλης*. Κάτι άλλο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων επιλέγεται και περιορισμένο εύρος της παραμέτρου τ και επομένως σε μετάβαση σε γειτονικό χάρτη π.χ.: από $(U|\phi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M})$ σε $(V|\psi \equiv (y^\nu)_{\nu=1}^{\dim M})$, επιβάλλεται

$$\frac{dy^\nu}{d\tau} = \sum_\mu \frac{dy^\nu}{dx^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Με αυτό υπόψη, αποδεικνύεται ότι $\forall p, q \in M$, αν

$$s = \int \sqrt{\left|g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau}\right|}d\tau$$

τότε

$$\frac{ds}{d\tau} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2x^a}{d\tau^2} + {\Gamma^a}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = \alpha\frac{dx^a}{d\tau} \Longleftrightarrow \frac{d^2x^a}{d\tau^2} + {\Gamma^a}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0$$

όπου η τελευταία εξίσωση προκύπτει με φυσική παράμετρο. Το νόημα του τελευταίου είναι ότι οι spacelike γεωδαισιακές συνδέουν δύο γεγονότα με την ακρότατη ιδιοαπόσταση ενώ οι timelike γεωδαισιακές συνδέουν δύο γεγονότα με ακρότατο ιδιοχρόνο.

5.2.2.2 Γεωδαισιακή απόκλιση.

Οι γεωδαισιακές καμπύλες όπως φαίνεται απο την επιβαλλόμενη συνθήκη ορισμού και απο την τελευταία ιδιότητα που αναφέρθηκε, είναι το ανάλογο των ευθειών στον ευκλείδειο χώρο. Οι ευθείες στον ευκλείδειο χώρο έχουν μια ιδιότητα: οι παράλληλες ποτέ δε τέμνονται.[18] Σε καμπύλους χώρους, ακόμα και με θετικά ορισμένη μετρική, αρχικά παράλληλες γεωδαισιακές αποτυγχάνουν να παραμείνουν παράλληλες. Αυτό πολλές φορές αναφέρεται στη βιβλιογραφία ότι χαρακτηρίζει την καμπυλότητα ενός χώρου. Για παράδειγμα αν αρχικά παράλληλες γεωδαισιακές τέμνονται κάπου αυτό χαρακτηρίζει θετική καμπυλότητα, όπως στη σφαίρα S^2. Όμοια, στη "σέλλα" η οποία χαρακτηρίζεται απο αρνητική καμπυλότητα οι γεωδαισιακές αποκλίνουν ανεπανόρθωτα. Υπάρχουν και περιπτώσεις μεικτής καμπυλότητας όπως στη περίπτωση του τόρου $S^1 \times S^1$, που αναδεικνύει την καμπυλότητα ως τοπικό μέγεθος σε μια υπερεπιφάνεια και κατ΄ επέκταση σε μια πολλαπλότητα.

Έστω $\{\gamma_\sigma : \tau \mapsto \gamma_\sigma(\tau)\}$ μια μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαισιακών non-null καμπύλων και $S = \{\gamma_\sigma(\tau)\}$ η αντίστοιχη διδιάστατη υποπολλαπλότητα ότι η αντιστοιχία $S \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \gamma_\sigma(\tau) \mapsto \sigma \times \tau$ είναι αμφιδιαφόριση και άρα η S μπορεί να χαρτογραφηθεί ολόκληρη από τις συντεταγμένες σ και τ. Εδώ δε μπορούμε να επιλέξουμε φυσική παραμετροποίηση κάθε γεωδαισιακής χωρίς να εξετάσουμε τη διαφορισιμότητα της παραπάνω αντιστοιχίας. Έστω $(\partial_\tau)^a := \eta^a$ και $(\partial_\sigma)^a := \xi^a$ είναι τα αντίστοιχα βασικά πεδία, το τελευταίο όντας το διάνυσμα απόκλισης ξ^a μεταξύ απειροστικά κοντά γεωδαισιακών.[19] Το βασικό ως προς τ διανυσματικό πεδίο εφάπτεται πάντα μιας γεωδαισιακής επομένως ισχύει:

$$\eta^b \nabla_b \eta^a = 0 \tag{5.2.3}$$

Λήμμα 5.2.2.2.1. *Κάθε καμπύλη που ικανοποιεί την ασθενή εξίσωση γεωδαισίας, με κατάλληλη αναπαραμετροποίηση, ικανοποιεί την ισχυρή εξίσωση γεωδαισίας.*

Απόδειξη. Έστω νέα παραμετροποίηση $\mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}] \ni \sigma : \tau \mapsto \sigma(\tau)$. Τότε $\forall (O|\psi \equiv (x^\mu)_{\mu=1}^{\dim M}) \in \mathcal{A}$ η ταχύτητα της χαρτογραφημένης καμπύλης μετασχηματίζεται όπως η συνήθης παράγωγος, δηλαδή ισχύει στην M:

$$\frac{dx^a}{d\tau} = \frac{d\sigma}{d\tau}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = \frac{d\sigma}{d\tau}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{dx^a}{d\sigma}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \frac{d^2\sigma}{d\tau^2}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

Από υπόθεση έστω $\alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}]$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = \alpha\frac{dx^a}{d\tau}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \frac{d^2\sigma}{d\tau^2}\frac{dx^a}{d\sigma} + \Gamma^a{}_{bc}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} = \alpha\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma}\right) + \frac{d^2\sigma}{d\tau^2}\frac{dx^a}{d\sigma} = \alpha\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

Απαιτώντας στη νέα παραμετροποίηση να ικανοποιείται η ισχυρή εξίσωση γεωδαισίας:

$$\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} = 0$$

η νέα παραμετροποίηση είναι λύση της εξίσωσης:

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = \alpha\frac{d\sigma}{d\tau}$$

$$\frac{d\sigma'}{d\tau} = \alpha\sigma'$$

[18]Όταν αναφερόμαστε σε ευκελίδειο χώρο, δεν εννοούμε τον προβολικό χώρο, απλά τον $\mathbb{R}^n$.

[19]Κοντά με την έννοια της παραμέτρου σ, δηλαδή απέχουν κατά $d\sigma$, διαφορετικά μπορεί να έχουν την τάση να απομακρυνθούν πολύ πχ, κάτι που αντικατοπτρίζεται απο το διάνυσμα απόκλισης ξ^a.

Θεωρούμε αρχικές συνθήκες $\sigma(0) := \sigma_0$ και $\sigma'(0) := \sigma_1$. Η γενική λύση της τελευταίας είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \sigma_1 \exp \int_0^\tau \alpha dt$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \int_0^\tau \exp \int_0^s \alpha dt ds \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}],\ \forall \alpha \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}|\mathbb{R}]$$

Έστω τώρα ότι η τ είναι φυσική παραμετροποίηση. Τότε $\forall \sigma$ φυσική παραμετροποίηση:

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = 0$$

δηλαδή υπάρχει γραμμική ελευθερία επιλογής φυσικής παραμέτρου $\sigma = a\tau + b$, $\forall a > 0$ και $\forall b \in \mathbb{R}$. □

Λήμμα 5.2.2.2.2. *Λόγω της εξίσωσης* (5.2.3), *υπάρχει ελευθερία βαθμίδας για το ξ^a κάτω από αλλαγή φυσικής παραμέτρου.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω αλλαγή φυσικής παραμέτρου $\tau' = a(\sigma)\tau + b(\sigma)$, $a \neq 0$. Λαμβάνουμε την επαναπαραμετροποίηση ως αλλαγή συντεταγμένων $\sigma'(\sigma, \tau) = \sigma$ και $\tau'(\sigma, \tau) = a(\sigma)\tau + b(\sigma)$. Τότε:[20]

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma'} + \frac{\partial\tau'}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau'} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma'} + \left(\tau\frac{da}{d\sigma} + \frac{db}{d\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial\sigma'}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma'} + \frac{\partial\tau'}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\tau'} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\tau} = a\frac{\partial}{\partial\tau'}$$

Συνοπτικά:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tau\frac{d}{d\sigma}\log_e|a| + \frac{1}{a}\frac{db}{d\sigma} \\ \xi'^a &= \xi^a - \alpha\eta^a \\ a\eta'^a &= \eta^a \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

quod erat demonstrandum. □

Εδώ φαίνεται η ισχύς του φορμαλισμού αφηρημένων δεικτών. Οτιδήποτε μετασχηματίζεται σαν τανυστής, στο φορμαλισμό αυτό παραμένει αναλλοίωτο[21]. Ο λόγος που στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε διαφορετικά διανύσματα βάσης είναι γιατί είναι συνυφασμένα με το σύστημα συντεταγμένων κάθε φορά. Δε μετασχηματίζουμε διανύσματα, ορίζουμε νέα διανύσματα, και οι σχέσεις βαθμίδας παραπάνω είναι σχέσεις διανυσμάτων και ισχύουν πάλι σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Τα διανύσματα βάσης αντιπροσωπεύουν και τον τελεστή συνήθους παραγώγου όπως ορίστηκε[22] και ως εκ τούτου, νέο σύστημα συντεταγμένων ορίζει νέο τελεστή:

$$\partial'_{c'} = \epsilon_{c'}{}^{c}\,\partial_c$$

Ως εκ' τούτου αναμένεται και ο τανυστής Christoffel να είναι διαφορετικός:

$$\Gamma'^{a'}{}_{b'c'} = C^{a'}{}_{b'c'a}{}^{b\,c}\,\Gamma^{a}{}_{b\,c}$$

Ειδικά για τη συνοχή Levi-Civita:

$$2\Gamma'^{a'}{}_{b'c'} = g^{a'd'}(\partial'_{b'}g_{c'd'} + \partial'_{c'}g_{d'b'} - \partial'_{d'}g_{b'c'}) = g^{a'd'}(\epsilon_{b'}{}^{b}\,\partial_b\,g_{c'd'} + \epsilon_{c'}{}^{c}\,\partial_c\,g_{d'b'} - \epsilon_{d'}{}^{d}\,\partial_d\,g_{b'c'})$$

$$2\Gamma'^{a'}{}_{b'c'} = \epsilon_{b'}{}^{b}\,g^{a'd'}\partial_b\,g_{c'd'} + \epsilon_{c'}{}^{c}\,g^{a'd'}\partial_c\,g_{d'b'} - g^{a'd'}\epsilon_{d'}{}^{d}\,\partial_d\,g_{b'c'}$$

$$C^{a'}{}_{b'c'a}{}^{b\,c} = (-\epsilon^{a'}{}_{a}) \oplus \epsilon_{b'}{}^{b} \oplus \epsilon_{c'}{}^{c}$$

[20] υποενότητα 1.3.3 στη σελίδα 12

[21] παραστατικά. Κάθε σχέση γραμμένη στο φορμαλισμό αυτό είναι ανεξάρτητη επιλογής συντεταγμένων.

[22] ισχυρισμός 5.1 στη σελίδα 43

Πρόταση 5.2.2.2.1. *Αν η συνοχή είναι Levi-Civita τότε υπάρχει φυσική παραμετροποίηση τέτοια, ώστε:*

$$g_{ab}\xi^a\eta^b = 0$$

Απόδειξη. Έστω το τυχόν διανυσματικό πεδίο απόκλισης ξ^a. Εισάγουμε μια βαθμίδα α και επιβάλλουμε την άνω συνθήκη:[23]

$$g_{ab}\xi'^a\eta'^b = 0 \Longrightarrow g_{ab}\xi^a\eta^b = \alpha g_{ab}\eta^a\eta^b \Longrightarrow \alpha = \frac{g_{ab}\xi^a\eta^b}{g_{ab}\eta^a\eta^b} \Longrightarrow \tau\frac{d}{d\sigma}\log_e|a| + \frac{1}{a}\frac{db}{d\sigma} = \alpha$$

το οποίο καταλήγει στη διαφορική εξίσωση:

$$\tau\frac{da}{d\sigma}(\sigma) + \frac{db}{d\sigma}(\sigma) = a(\sigma)\alpha(\sigma,\tau)$$

Η γενική λύση της άνω εξίσωσης με αρχικές συνθήκες[24] $a(0) := a_0$ και $b(0) := b_0$ είναι για $\tau \neq 0$:

$$a(\sigma) = a_0 \exp\frac{1}{\tau}\int_0^\sigma \alpha(s,\tau)ds - \frac{1}{\tau}\int_0^\sigma \frac{db}{ds}(s)\exp\frac{1}{\tau}\int_s^\sigma \alpha(t,\tau)dtds \tag{5.2.5}$$

Για να είναι καλά ορισμένη η λύση πρέπει:

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{\tau}\int_0^\sigma \alpha(s,\tau)ds = \tau\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{\tau}\int_0^\sigma \frac{db}{ds}(s)\exp\frac{1}{\tau}\int_s^\sigma \alpha(t,\tau)dtds$$

$$\int_0^\sigma \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} - \frac{\alpha}{\tau}\right)(s,\tau)ds = \frac{1}{\tau}\int_0^\sigma \left[\int_s^\sigma \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} - \frac{\alpha}{\tau}\right)(t,\tau)dt - 1\right]\frac{db}{ds}(s)\exp\int_s^\sigma \frac{\alpha}{\tau}(t,\tau)dtds$$

$$\tau\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(\sigma,\tau) = \alpha(\sigma,\tau) - \frac{db}{d\sigma}(\sigma)$$

$$\alpha(\sigma,\tau) = \frac{\tau}{\tau_0}\alpha(\sigma,\tau_0) + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{db}{d\sigma}(\sigma)$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά μήκος μιας δεδομένης γεωδαισιακής, για σταθερό σ δηλαδή, το ξ^a αλλάζει γραμμικά ως προς τη παράμετρο τ κατά η^b στο μετασχηματισμό βαθμίδας. Αυτό ήδη ισχύει απο τον ορισμό του α[25] για σταθερό σ. Πράγματι, απο συμβιβαστότητα των δύο σχέσεων:

$$\tau_0\frac{d}{d\sigma}\log_e|a|(\sigma) + \frac{db}{d\sigma}(\sigma) = \alpha(\sigma,\tau_0)$$

Κατά συνέπεια οι γενική λύση (5.2.5) είναι καλά ορισμένη $\forall\tau \neq 0$, δηλαδή η a προκύπτει όντως συνάρτηση μόνο του σ, όπως και πρέπει. □

Στην ανάλυση που προηγήθηκε η περίπτωση $\tau = 0$ είναι η μόνη που δεν εξετάστηκε. Συγκεκριμένα τότε έχουμε:

$$\frac{db}{d\sigma}(\sigma) = a(\sigma)\alpha(\sigma,0)$$

$$b(\sigma) = b_0 + \int_0^\sigma a(s)\alpha(s,0)ds$$

[23] Έχουμε υποθέσει non-null γεωδαισιακές.

[24] μια προτιμητέα γεωδαισιακή...

[25] εξίσωση (5.2.4)

Η επιλογή της παραμετροποίησης είναι συναρτησιακά αυθαίρετη. Ένα χρήσιμο κριτήριο επιλογής είναι αυτό που παρατίθεται στο [3] βάση του οποίου ρυθμίζεται η a έτσι, ώστε το μέτρο $\|\eta'\|$ να είναι αναλλοίωτο και του σ':[26]

$$a^2 \frac{D}{d\sigma'} \|\eta'\|^2 = a^2 \frac{D}{d\sigma'} \frac{1}{a^2} \|\eta\|^2 = \frac{\partial}{\partial\sigma'} \|\eta\|^2 - 2\|\eta\|^2 \frac{\partial}{\partial\sigma'} \log_e |a|$$

$$a^2 \frac{D}{d\sigma} \left\| \frac{\eta}{a} \right\|^2 = \langle \xi | \eta \rangle \frac{D}{d\tau} \log_e \left\| \left| \frac{\eta}{a} \right| \right\|^2 = 0$$

$$a = a_0 \frac{\|\eta\|^2}{\|\eta_0\|^2}$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα $a_0 = \|\eta_0\|^2$ και $b_0 = 0$ έτσι, ώστε:

$$a = g_{ab} \eta^a \eta^b$$

$$b = \int_0^\sigma g_{ab} \xi^a \eta^b ds$$

Έτσι έχουμε διασφαλίσει ότι για $\tau = 0$ και $\forall \sigma$, $g_{ab}\xi^a\eta^b = 0$. Επιπλέον η επιλογή αυτού του a είναι απόλυτα φυσική και προφανής ίσως: η φυσικά προτεινόμενη ανακλιμάκωση των γεωδαισιακών ώστε το μέτρο των εφαπτόμενων διανυσμάτων να εξισωθεί κατά μήκος της απόκλισης είναι το ίδιο το μέτρο τους. Τα επόμενα είναι δεδομένα:

- Τα ξ^a και η^c είναι βασικά πεδία οπότε μετατίθενται: $\eta^c \nabla_c \xi^a = \xi^c \nabla_c \eta^a$
- Το η^b είναι εφαπτόμενο γεωδαισιακής οπότε μεταφέρονται παράλληλα: $\eta^c \nabla_c \eta^b$
- Ορίσαμε την νέα φυσική παραμετροποίηση επιβάλλοντας: $\xi^c \nabla_c (g_{ab} \eta^a \eta^b) = 2 g_{ab} \eta^b \xi^c \nabla_c \eta^a = 0$

Έχοντας αυτά υπόψη, $\forall \tau$:

$$\eta^c \nabla_c (g_{ab} \xi^a \eta^b) = \eta^c \nabla_c g_{ab} \xi^a \eta^b + g_{ab} \eta^b \eta^c \nabla_c \xi^a + \xi^a g_{ab} \eta^c \nabla_c \eta^b = g_{ab} \eta^b \xi^c \nabla_c \eta^a = 0$$

συνεπώς $g_{ab}\xi^a\eta^b = 0$, $\forall \sigma, \tau$.

[26]Φυσικά η είναι εφαπτόμενο γεωδαισιακής επομένως ισχύει:

$$\frac{D}{d\tau} \|\eta\|^2 = 0$$

επομένως οι αντίστοιχοι όροι στην εξίσωση μηδενίζονται αφήνοντας μόνο όρους με παραγώγιση ως προς σ που είναι και συνεπές δεδομένου ότι η κλίμακα a και το offset b είναι συναρτήσεις του σ μόνο.

Εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης. Ορίζουμε τα εξής μεγέθη:

- απόκλιση γεωδαισιακών και ανεξάρτητη μεταβλητή:

$$\xi^a$$

  Είναι ουσιαστικά ρυθμός μια απόκλισης που πιθανόν θα μπορούσε να ορίσει κανείς μέσω αποστάσεων αντίστοιχων σημείων μεταξύ δύο τυχόντων γεωδαισιακών όμως αυτό θα απαιτούσε οι καμπύλες ως προς σ να είναι επίσης γεωδαισιακές. Έτσι μετά τη ρύθμιση που έγινε πάνω είναι βολικό να εξακολουθήσουμε να αναφερόμαστε στο ξ^a ως διάνυσμα απόκλισης πια.

- ταχύτητα απόκλισης κατά μήκος γεωδαισιακής:

$$\eta^c \nabla_c \xi^a = \xi^c \nabla_c \eta^a$$

  Είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η απόκλιση κατά μήκος δεδομένης γεωδαισιακής. Μας λέει πότε οι γεωδαισιακές σε μια εντοπισμένη περιοχή συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

- επιτάχυνση απόκλισης κατά μήκος γεωδαισιακών:[27]

$$\eta^b \nabla_b (\eta^c \nabla_c \xi^a = \xi^c \nabla_c \eta^a) = (\eta^b \nabla_b \xi^c = \xi^b \nabla_b \eta^c) \nabla_c \eta^a + \eta^b \xi^c (\nabla_b \nabla_c \eta^a = \nabla_c \nabla_b \eta^a + R^a{}_{bcd} \eta^d) =$$

$$((\xi^b \nabla_b \eta^c \nabla_c \eta^a = \xi^c \nabla_c \eta^b \nabla_b \eta^a) + \eta^b \xi^c \nabla_c \nabla_b \eta^a = \xi^c \nabla_c (\eta^b \nabla_b \eta^a) = 0) + R^a{}_{bcd} \eta^b \xi^c \eta^d$$

  Είναι η επιτάχυνση με την οποία μεταβάλλεται η απόκλιση κατά μήκος της γεωδαισιακής. Μας λέει πότε οι γεωδαισιακές έχουν την "τάση" να πλησιάσουν ή να απομακρυνθούν, άσχετα με το αν πλησιάζουν η απομακρύνονται στη δεδομένη τιμή τ της παραμέτρου.

Με βάση το τελευταίο αποτέλεσμα διατυπώνουμε την εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης όπως προκύπτει απο τα παραπάνω, στη μορφή που παρουσιάζεται στο [4], κεφάλαιο 1^o:

$$\frac{D^2 \xi^a}{dt} + R^a{}_{bcd} \frac{dx^b}{dt} \xi^c \frac{dx^d}{dt} = 0$$

[27] εξίσωση (5.2.1)

Κεφάλαιο 6

Η ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Παραθέτουμε ξανά τις ιδιότητες του τανυστή Riemann όπως ορίστηκε τη πρώτη φορά όμως.

$$R_{a(bc)d} = R_{(a|bc|d)} = 0 \text{ ή } R_{abcd} = -R_{acbd} = -R_{dbca}$$
$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{6.0.1}$$

1st Bianchi identity:

$$R^a{}_{[bcd]} = 0$$

2nd Bianchi identity:

$$\nabla_{[e} R^a{}_{bc]d} = 0$$

Σύμφωνα με τις καθεαυτές συμμετρίες του τανυστή Riemann[1], πολλές συστολές του θα δίνουν αποτέλεσμα 0. Βασικά μόνο ένας τύπος συστολής modulo συμμετρία δίνει μη-μηδενικό αποτέλεσμα, και ορίζει τον *τανυστή του Ricci*:

$$R_{ab} := R^c{}_{acb} = g^{cd} R_{dacb}$$

ο οποίος με βάση τη συμμετρία (6.0.1) του τανυστή Riemann, είναι συμμετρικός:

$$R_{[ab]} = 0 \text{ ή } R_{ab} = R_{ba}$$

Επιπλέον, η δεύτερη συστολή του τανυστή Riemann, δηλαδή το ίχνος του τανυστή Ricci, συμβολίζεται:

$$R := R^a{}_a = g^{ab} R_{ab}$$

Η άϊχνη συνιστώσα του τανυστή Riemann καλείται *τανυστής* του *Weyl* και συμβολίζεται με C_{abcd}: $C = 0$. Τότε ο τανυστής Riemann αναπτύσσεται στη μορφή:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{4}{\dim M - 2} g_{[b|[d} R_{a]|c]} - \frac{2}{(\dim M - 1)(\dim M - 2)} R g_{b[d} g_{a]c}$$

Συστέλλοντας τη δεύτερη ταυτότητα Bianchi:

$$\nabla_{[a} R^a{}_{bc]d} = \nabla_a R^a{}_{bcd} - \nabla_a R^a{}_{cbd} + \nabla_b R^a{}_{cad} - \nabla_b R^a{}_{acd} + \nabla_c R^a{}_{abd} - \nabla_c R^a{}_{bad} = 0$$
$$\nabla_a R^a{}_{bcd} + \nabla_b R^a{}_{cad} - \nabla_c R^a{}_{bad} = 0$$
$$\nabla_a R^a{}_{bcd} + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0$$

Συστέλλοντας δεύτερη φορά:

$$\nabla_a R^a{}_{bc}{}^b + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R^b{}_b = 0$$

[1] Όχι τη δεύτερη ταυτότητα Bianchi.

Συστέλλοντας ακόμα μια φορά:

$$\nabla_a R^a{}_c + \nabla_b R^b{}_c - \nabla_c R = 0$$
$$\nabla_a R^a{}_b + \nabla_a R^a{}_b - \nabla_b R = 0$$
$$\nabla^a R_{ab} + \nabla^a R_{ab} - \nabla_b R = 0$$

όπου:

$$\nabla^c := g^{cd}\nabla_d : \mathcal{V}^{(k|l)}M \longrightarrow \mathcal{V}^{(k+1|l)}M : T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \mapsto$$
$$\mapsto \nabla^c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = g^{cd}\nabla_d T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \equiv T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}|_d g^{cd} = T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}|^c$$

και:

$$\nabla_b R = g_{ab}\nabla^a R = \nabla^a(g_{ab}R) - \nabla^a g_{ab} R = \nabla^a(Rg_{ab})$$

Ο *τανυστής* του *Einstein* ορίζεται έτσι, ώστε:

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \tag{6.0.2}$$
$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$$

Ο τανυστής Riemann αναπτύσσεται συναρτήσει των συμβόλων Christoffel:

$$R^a{}_{bcd} = \partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd}$$

Τότε ο τανυστής Ricci εκφράζεται ως:[2]

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = \partial_a\Gamma^c{}_{cb} - \partial_c\Gamma^c{}_{ab} + \Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} - \Gamma^c{}_{cd}\Gamma^d{}_{ab} =$$
$$\partial_a g^{cd}\Gamma_{dcb} + \Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} - \partial_c g^{cd}\Gamma_{dab} - \Gamma^c{}_{cd}\Gamma^d{}_{ab} + \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a\partial_b g_{dc} - \partial_a\partial_d g_{cb} - \partial_c\partial_b g_{da} + \partial_c\partial_d g_{ab}) =$$
$$= \underbrace{\partial_a g^{cd}\Gamma_{dcb} + \Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} - \partial_c g^{cd}\Gamma_{dab} - \Gamma^c{}_{cd}\Gamma^d{}_{ab}}_{\text{γραμμική και τετραγωνικοί όροι μέχρι } 1^{\text{ης}}\text{τάξης}} \underbrace{+ \frac{1}{2}g^{cd}\partial_a\partial_b g_{dc} - g^{cd}\partial_d\partial_{(a}g_{b)c} + \frac{1}{2}\Box g_{ab}}_{\text{γραμμικοί όροι } 2^{\text{ης}}\text{τάξης}}$$

όπου εδώ επιλέγεται η $\Box := \partial^d\partial_d$ ως σύβλολο της D' Alambertιανής. Τέλος, για το βαθμωτό πεδιο Ricci:

$$R = g^{ab}R_{ab} = \underbrace{g^{ab}\partial_a g^{cd}\Gamma_{dcb} + g^{ab}\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} - g^{ab}\partial_c g^{cd}\Gamma_{dab} - g^{ab}\Gamma^c{}_{cd}\Gamma^d{}_{ab}}_{\text{γραμμική και τετραγωνικοί όροι μέχρι } 1^{\text{ης}}\text{τάξης}} \underbrace{+ g^{ab}\Box g_{ab} - g^{ab}g^{cd}\partial_d\partial_{(a}g_{b)c}}_{\text{γραμμικοί όροι } 2^{\text{ης}}\text{τάξης}}$$

Συνοπτικά,[3] θέτοντας

$$F_{abcd} = g_{af}(\partial_b g^{fe}\Gamma_{ecd} - \partial_c g^{fe}\Gamma_{ebd} + \Gamma^f{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^f{}_{be}\Gamma^e{}_{cd})$$

έχουμε

$$R^a{}_{bcd} = F^a{}_{bcd} + \frac{1}{2}g_{ag}(\partial_b\partial_d g_{gc} - \partial_b\partial_g g_{cd} - \partial_c\partial_d g_{gb} + \partial_c\partial_g g_{bd})$$
$$R_{ab} = g^{cd}g_{de}R^e{}_{acb} = F_{ab} + \frac{1}{2}(g^{cd}\partial_a\partial_b g_{dc} + \Box g_{ab}) - g^{cd}\partial_d\partial_{(a}g_{b)c}$$
$$R = g^{ab}R_{ab} = g^{ab}g^{cd}g_{de}R^e{}_{acb} = F + g^{ab}\Box g_{ab} - g^{ab}g^{cd}\partial_d\partial_{(a}g_{b)c}$$

όπου F_{abcd} και κατα συνέπεια F_{ab} και F, αποτελούνται από γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους μέχρι και πρώτης τάξης συνήθους παραγώγισης ως προς τη μετρική g_{ab}. Τέλος με βάση αυτά

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = A_{ab} + \frac{1}{2}(g^{cd}\partial_a\partial_b g_{dc} + \Box g_{ab} - g_{ab}g^{cd}\Box g_{cd}) - g^{cd}\partial_d\partial_{(a}g_{b)c} + \frac{1}{2}g_{ab}g^{ef}g^{cd}\partial_d\partial_{(e}g_{f)c}$$
$$A_{ab} = F_{ab} - \frac{1}{2}Fg_{ab}$$

[2] ενότητα Β΄.1.1 παραρτήματος Β΄ στη σελίδα 99

[3] ενότητα Β΄.1.1.1 παραρτήματος Β΄ στη σελίδα 99

Principle of special covariance. The principle of *special covariance* states that all physical laws expressible in a particular spacetime shall remain covariant with spacetime isometries, i.e. maintain form. For example all isometries regarding euclidean space, i.e: rotations, translation along with parity transformations, preserve the euclidean metric and thus all laws of classical mechanics must be expressible in terms of the metric and derivable expressions from it.That disallows for having special frames and/or orientations in a physical theory pertaining to space.

On the other hand, proper Poincaré transformations on Minkowski spacetime spawn the *special theory* of *relativity*, with the difference that no parity transformations have been included since the presence of time in the theories' background prescribes the existence of a preferred time orientation and thus a preferred space orientation which is defined by the selection of chirality for space frames, all in contrast with the conviction regarding special directions.

However this hypothesis is minimal and in consistency with the principle of special covariance since it does not violate all the other isometries and is intrinsic with the very nature of spacetime, i.e. its only natural that a specific time orientation out of two selects a specific orientation of space out of two chiralities. By convention we tag right handed space to positive the direction of time. Overall the orientation of a Lorentzian manifold, i.e. supplied with a metric of signature -1, is defined by the volume element ϵ_{abcd} such that:

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} = -(\dim M)!$$

Special covariance as stated induces a natural selection of a class of special coordinate systems called *inertial* frames of reference or *observers*. Designate a particular coordinate system as inertial and then all coordinate systems isometric[4] to it are also inertial frames of reference. This notion of inertial observer in special relativity[5] induces a method of measurement through inertial observers in all physics done in Minkowski spacetime. A beautiful and concise example is the theory of electromagnetism unified under Maxwell's equations, reformulated in index notation:

$$\partial^a F_{[ab]} = -4\pi j_b$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0$$

For example, all electromagnetic fields are measured by coordinate systems designated inertial. Although abrupt it is of actual practicality since we can always releave a measuring device from the motive effects of the measured field by, for example, fixing it mechanically.

Principle of general covariance. In the principle of *general covariance* the hypothesis of *isommetry* is dropped to *isomorphism* in principle, diffeomorphism in terms of manifold structures, thus stating that all physical laws expressible in a particular spacetime shall remain covariant with *all* coordinate transformations. So as the name implies, it is indeed a generalization of the principle of special covariance, as isometries are classified as special coordinate transformations. There is a non-trivial difference though: the metric is preserved under isometries by definition, so that all laws expressed in terms of the metric or its derivables are automatically covariant laws and potentially laws of physics, while the metric is generally deformed by an arbitrary coordinate transformation. That only hints that equations in physics following the principle of general covariance should be expressible in tensorial form, since only scalars, which are measurable quantities, are invariant under transformations and derivable from tensors at the same time. The only physical entity directly pertaining to space that has tensorial form is the metric and thus it is still expected that all physical laws are expressed in terms of the metric or its derivables. However in general covariance, these are the only physical laws described in spacetime.

Gravity poses an example of a potentially general covariant theory[6]: we cannot in practicality isolate an object from any gravitational fields existent or even if we do we can't know about it which is much the same thing. Thus as far as gravity is concerned, no preferential class of observers can be designated inertial. Therefore the assumption can be made that, all observers are inertial with respect to gravity: that is more or less the famous *equivalence principle* stated by Einstein in 1915.

[4] by Poincaré transformations only, no reflections nor parity transformations

[5] which coincides with the notion of inertial observer in the classical formulation of special relativity

[6] Always under the scope of continuum physics.

6.1 ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω η ειδική θεωρία της σχετικότητα παράγεται από την special covariance εφαρμοσμένη πάνω στον χώρο Minkowski με μετρική

$$\eta_{ab} = \sum_\mu \sum_\nu \eta_{\mu\nu} dx^\mu{}_a dx^\nu{}_b,$$

$$(ds)^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Εδώ είναι ένα καλό σημείο να διευκρινίσουμε ότι στη σχετικότητα είναι δόκιμο να χρησιμοποιούνται φυσικές μονάδες. Ειδικά, στην ειδική θεωρία της σχετικότητας η ταχύτητα του φωτός λαμβάνεται σαν μονάδα ταχύτητας, $c = 1$, εξισώνοντας με αυτόν τον τρόπο τις διαστάσεις χρόνου και απόστασης, $x^0 = ct$, και τις διαστάσεις ενέργειας και ορμής, $p^0 = mc^2$.[7] Αυτό επιτρέπει τον ορισμό τετραδιανυσμάτων στον χώρο Minkowski τα οποία είναι σαν τα γνωστά διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ μόνο που έχουν γενικευμένη συμπεριφορά υπό μια όχι απαραίτητα θετικά ορισμένη μετρική. Όπως είναι αναμενόμενο σε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους, ο δυϊκός είναι ο ίδιος ο χώρος, αλλά με μη θετικά ορισμένη μετρική το συμπέρασμα αυτό αίρεται, και καταλήγουμε στον ορισμό των συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων διανυσμάτων και την ανάλυση που προηγήθηκε στην ενότητα 4.1 στη σελίδα 39 για τους ψευδοευκλείδειους χώρους όπως ονομάζονται γενικά οι χώροι με μη απαραίτητα θετικά ορισμένη μετρική. Έτσι ορίζεται η φυσική ταχύτητα ως τετραδιάνυσμα,

$$\upsilon^a = \frac{dx^a}{d\tau},$$

$$\tau = \int \sqrt{-\eta_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}} dt,$$

Τότε ορίζεται καλά και το τετραδιάνυσμα ενέργειας-ορμής απουσία της έννοιας της σχετικιστικής μάζας:

$$p^a = m\upsilon^a$$

Η παράγωγος συμβατή με τη μετρική είναι η συνήθης μιας και

$$\partial_a \eta_{bc} = 0.$$

Τότε $\Gamma^a{}_{bc} = 0$ και η (ισχυρή) εξίσωση γεωδαισίας γίνεται

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = 0,$$

δηλαδή οι γεωδαισιακές της ειδικής σχετικότητας είναι ευθείες στο χώρο Minkowski. Οι χρονοειδής γεωδαισιακές ορίζουν κινούμενους αδρανειακούς παρατηρητές αφού κάθε σύστημα συντεταγμένων που η χρονική του συντεταγμένη συμπίπτει με τη παράμετρο μια γεωδαισιακής αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό στις συντεταγμένες. Επιπλέον, απο τον ορισμό του τετραδιανύσματος της ταχύτητας,

$$\eta_{ab} \upsilon^a \upsilon^b = -1,$$

οπότε η μετρική παραμένει αναλλοίωτη[8]. Στις γεωδαισιακές η 4-ταχύτητα έχει τη μορφή

$$\upsilon^a = \gamma \frac{dx^a}{dx^0},$$

[7] Στη γενική θεωρία της σχετικότητας, όπου η έννοια της βαρύτητας ενσωματώνεται στο υπόβαθρο της θεωρίας, η σταθερά βαρύτητας του Newton λαμβάνεται μονάδα, $G = 1$, εξισώνοντας τις διαστάσεις μάζας και απόστασης.

[8] Για την ακρίβεια, τη *χωροχρονική* απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων που είναι μετρήσιμη ποσότητα:

$$\lambda = \int \sqrt{\eta_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}} dl$$

ενώ η 4-ορμή

$$p^a = \gamma m \frac{dx^a}{dx^0}$$

που συμφωνεί απόλυτα με τους ορισμούς που κάνουν λόγο για σχετικιστική μάζα. Το όλο πρόβλημα ήταν στον καλό ορισμό ταχύτητας ώστε να έχει νόημα στο σχετικιστικό χωροχρόνο. Το τετραδιάνυσμα ενέργειας-ορμής είναι ικανό να περιγράψει πλήρως τη δυναμική κατάσταση ενός νέφους μάζας. Παρόλα αυτά, αν η γενική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων του νέφους είναι να ληφθεί υπόψη, η κατάσταση, όπως γίνεται και στα ρευστά, πρέπει να περιγραφεί και απο τον τανυστή τάσης, πέρα απο το διάνυσμα της ορμής και το μέτρο της ενέργειας, όλα ενσωματωμένα στο *συμμετρικό τανυστή τάσης-ενέργειας-ορμής* T_{ab}. Για έναν παρατηρητή με 4-ταχύτητα υ^a, η πυκνότητα ενέργειας όπως τη μετράει ο παρατηρητής είναι

$$\rho = T_{00} = T_{ab}\upsilon^a\upsilon^b,$$

ενώ αν x^a, y^a και z^a τέτοια, ώστε $\eta_{ab}\upsilon^a x^b = \eta_{ab}\upsilon^a y^b = \eta_{ab}\upsilon^a z^b = 0$, η πυκνότητα ορμής κατά τις δεδομένες διευθύνσεις, όπως τη μετράει ο παρατηρητής είναι

$$\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{01} & T_{02} & T_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ab}\upsilon^a x^b & T_{ab}\upsilon^a y^b & T_{ab}\upsilon^a z^b \end{bmatrix}.$$

Αν επιπλέον ισχύει για τα x^a, y^a και z^a, $\eta_{ab}x^a y^b = \eta_{ab}x^a z^b = \eta_{ab}y^b z^a = 0$, η κατανομή τάσης κατά τις δεδομένες διευθύνσεις, όπως τη μετράει ο παρατηρητής είναι

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & T_{22} & T_{23} \\ & & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ab}x^a x^b & T_{ab}x^a y^b & T_{ab}x^a z^b \\ & T_{ab}y^a y^b & T_{ab}y^a z^b \\ & & T_{ab}z^a z^b \end{bmatrix}.$$

6.2 ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ο τανυστής τάσης-ενέργειας-ορμής έχει όλη τη πληροφορία που απαιτείται για μια γενική κατανομή μάζας. Επιπλέον από τοπική διατήρηση ενέργειας-ορμής και εξίσωση Euler στη ρευστομηχανική $\partial_a T_{bc} = 0$.[9] Από βασικές αρχές, το "φορτίο" της βαρύτητας είναι η μάζα, οπότε ο τανυστής T_{ab} είναι πιθανός υποψήφιος για input σε μια εξίσωση βαρύτητας όπως γίνεται και στην εξίσωση Poisson για το δυναμικό νευτώνειας βαρύτητας. Χωρίς πολλές λεπτομέρειες η κατάλληλη ποσότητα για να συγκριθεί με τον τανυστή τάσης-ενέργειας-ορμής είναι ο τανυστής Einstein, ο οποίος πράγματι εκφράζεται τελικά σε όρους παραγωγίσεων της μετρικής μέχρι δεύτερης τάξης.

Εξίσωση Einstein:

$$\begin{aligned} G_{ab} &:= R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \qquad (6.2.1) \\ G &= -R = 8\pi T \\ R_{ab} &=: G_{ab} - \frac{1}{2} G g_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) \end{aligned}$$

Εξίσωση Einstein στο κενό:

$$R_{ab} = 0 \qquad (6.2.2)$$

Όλη η φυσική της γενικής θεωρίας της σχετικότητας περιέχεται στην εξίσωση Einstein και σε ότι αντιπροσωπεύουν τα μέλη της. Ο τανυστής Einstein αντιπροσωπεύει τη δομή του χωροχρόνου και ο τανυστής τάσης-ενέργειας-ορμής αντιπροσωπεύει την κατανομή μάζας στο χωροχρόνο αυτό. Δηλαδή έχουμε στα χέρια μας μια πραγματική θεωρία βαρύτητας όπου η μάζα είναι το φορτίο επίδρασης σε γειτονικές μάζες. Από δεύτερη ταυτότητα Bianchi, $\nabla^a G_{ab} = 0 \Longrightarrow \nabla^a T_{ab} = 0$, παρόλο που αυτό διασφαλίζει μόνο *τοπική* συνέχεια μάζας.

Η εξίσωση Einstein στο κενό πράγματι ανάγεται στην εξίσωση (6.2.2):

$$T_{ab} = 0 \Longrightarrow G_{ab} = 0 \Longrightarrow R_{ab} = \frac{1}{2} R g_{ab} \Longrightarrow R = g^{ab} R_{ab} = \frac{1}{2} R g^{ab} g_{ab} = \frac{1}{2} R g \Longrightarrow R = 0 \Longrightarrow R_{ab} = 0$$

---

[9] Στη ρευστομηχανική:

$$T_{ab} = \rho \upsilon_a \upsilon_b + P(g_{ab} + \upsilon_a \upsilon_b)$$

Τότε απο εξίσωση κίνησης ρευστών $\nabla^a T_{ab} = 0$:

$$\upsilon^a \nabla_a \rho + (\rho + P) \nabla^a \upsilon_a = 0$$

$$(P + \rho) \upsilon^a \nabla_a \upsilon_b + (g_{ab} + \upsilon_a \upsilon_b) \nabla^a P = 0$$

Μέρος III

INITIAL VALUE PROBLEM OF GENERAL RELATIVITY

Κεφάλαιο 7

ΑΙΤΙΑΚΗ ΔΟΜΗ

Θεώρημα 7.1. *Έστω $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητα M. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*[1]

- *M είναι παρασυμπαγής με την κανονική τοπολογία*[2].
- *M είναι πολλαπλότητα Riemann*[3].
- *M ικανοποιεί το αξίωμα του δεύτερου αριθμήσιμου.*

Αυτό είναι το θεώρημα που διασφαλίζει ότι όσο δουλεύουμε σε παρασυμπαγείς πολλαπλότητες Hausdorff όλο το υπόβαθρο στοιχειώδους διαφορικής γεωμετρίας που παρουσιάστηκε στο μέρος I, παραμένει αυτοσυνεπές ως προς τη κανονική τοπολογία. Πολλά απο τα θεωρήματα επιδέχονται και ακόμα ασθενέστερες υποθέσεις ως προς την κανονική τοπολογία όμως έτσι κι αλλιώς οι χωροχρόνοι με τους οποίους ασχολούμαστε είναι τουλάχιστον παρασυμπαγείς Hausdorff.

7.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 7.1.1 (χρονικά προσανατολίσιμη πολλαπλότητα)**.** Μια πολλαπλότητα M Lorentz[4] εφοδιασμένη με μετρική g_{ab} ίχνους $\dim M - 2$,[5] είναι *χρονικά προσανατολίσιμη* αν και μόνο αν η αντιστοιχία μελλοντικού-παρελθοντικού κώνου φωτός σε κάθε σημείο είναι συνεχής.

Ισοδύναμα, καμία συνεχής κλειστή καμπύλη δεν επαναφέρει τον εφαπτόμενο κώνο στο ίδιο σημείο με διαφορετικό προσανατολισμό. Ο διαχωρισμός των χρονοειδών εφαπτόμενων διανυσμάτων με βάση το χρονικό προσανατολισμό τους σε κάθε σημείο με *συνεχή* τρόπο, επιτρέπει τον ορισμό σε χρονικά προσανατολίσιμες πολλαπλότητες, χρονικά προσανατολισμένων *διαφορίσιμων* χρονοειδών διανυσματικών πεδίων και κατ΄ επέκταση χρονικά προσανατολισμένων διαφορίσιμων χρονοειδών καμπυλών, ανάλογα με την φορά του χρόνου που εξελίσσονται. Αυτό απαιτεί απόδειξη που δε παρατίθεται εδώ. Διαισθητικά και μόνο, αν ο για παράδειγμα ο μελλοντικός κώνος φωτός μεταβιβάζεται *συνεχώς* πάνω στο χωροχρόνο, τότε υπάρχει πολύ περιθώριο για επιλογή μελλοντικά προσανατολισμένου διανύσματος μέσα σε αυτόν, που χονδρικά επιτρέπει και την επιλογή διαφορίσιμου τέτοιου πεδίου που κείται στο εσωτερικό του συνεχούς πεδίου μελλοντικών κώνων.

Πρέπει να καταστεί υπόψη πως η κωνική δέσμη με το τρόπο που ορίζεται η εφαπτομένη δέσμη είναι συνεχής, μάλιστα είναι και διαφορίσιμη• η έννοια της κωνικής δέσμης υπό αυτό το πρίσμα είναι κοντινότερη στη έννοια του double cover[6] που είναι ακριβώς μια χρονικά προσανατολισμένη πολλαπλότητα προκύπτουσα από μη χρονικά προσανατολισμένη πολλαπλότητα.

[1] υποενότητα Α΄.1.1, παράρτημα Α΄.
[2] ορισμός 1.1.7 στη σελίδα 5
[3] ορισμός 3.3.2 στη σελίδα 34
[4] Το ανάλογο μιας πολλαπλότητας Riemann με ψευδοευκλείδεια μετρική• ορισμός 3.3.2 στη σελίδα 34 και ενότητα 4.1 στη σελίδα 39.
[5] Δηλαδή μία διάσταση χρόνου.
[6] [4]

Ορισμός 7.1.2 (χρονικός προσανατολισμός πεδίων και καμπυλών)**.** Μια *χρονοειδής καμπύλη* χαρακτηρίζεται *μελλοντικά/παρελθοντική προσανατολισμένη* αν και μόνο αν το πεδίο ταχυτήτων της είναι μελλοντικά/παρελθοντικά προσανατολισμένο. Μια χρονικά προσανατολισμένη μη-χωροειδής *καμπύλη* χαρακτηρίζεται *αιτιακή*.[7]

Ορισμός 7.1.3 (chronological domains)**.** Έστω διαφορική πολλαπλότητα Riemann $(M|g_{ab})$, παρασυμπαγής και Hausdorff με την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{T}_M$ που επάγεται απο τον διαφορικό άτλαντα $\mathcal{A}$. $\forall p \in U \subseteq M$:

Το *χρονικό μέλλον* $I^+(p)$ του *γεγονότος* $p \in M$ αποτελείται από όλα τα γεγονότα $q \in M$, για τα οποία υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη *χρονοειδής* καμπύλη $\lambda_<$ που να συνδέει τα δύο γεγονότα, δηλαδή $\exists a \in \mathbb{R}^+$ έτσι, ώστε $\lambda_<(0) = p$ και $\lambda_<(a) = q$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και $p \prec\prec q$ και λέμε ότι το p προηγείται χρονικά του q, ή ότι το q έπεται χρονικά του p. Όμοια ορίζεται και το χρονικό μέλλον $I^+(U)$ του $U \subseteq M$:

$$I^+(U) := \bigcup_{p \in U} I^+(p)$$

Το *αιτιακό μέλλον* $J^+(p)$ του *γεγονότος* $p \in M$ αποτελείται από όλα τα γεγονότα $q \in M$, για τα οποία υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη *αιτιακή* καμπύλη $\lambda_\leq$ που να συνδέει τα δύο γεγονότα, δηλαδή $\exists a \in \mathbb{R}^+$ έτσι, ώστε $\lambda_\leq(0) = p$ και $\lambda_\leq(a) = q$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε και $p \prec q$ και λέμε ότι το p προηγείται αιτιακά του q, ή ότι το q έπεται αιτιακά του p. Όμοια ορίζεται και το αιτιακό μέλλον $J^+(U)$ του $U \subseteq M$:

$$J^+(U) := \bigcup_{p \in U} J^+(p)$$

Ο ορισμός του χρονικού παρελθόντος I^- και αιτιακού παρελθόντος J^- ενός γεγονότος p ή του U ορίζονται αντίστοιχα.

Σχόλιο. Εξ' ορισμού, τα χρονικά domains αυτά, είναι δρομοσυνεκτικά με την επιπλέον συνθήκη οι "δρόμοι" να είναι χρονοειδείς καμπύλες.

Παρατήρηση 7.1.1. *Έστω χωροχρόνος M με μετρική g_{ab} και τοπολογία $\mathcal{T}$. $\forall p \in M$, $I^+(p) \in \mathcal{T}$.*

Το παραπάνω παρατίθεται χωρίς απόδειξη. Για μια εισαγωγή βλέπε [3], και αναλυτική απόδειξη, [4].

Έστω χωροχρόνος M με μετρική g_{ab} και τοπολογία $\mathcal{T}$. $\forall S \subseteq M$, $I^+(S) \in \mathcal{T}$. Πράγματι, ως ένωση ανοικτών:

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p) \in \mathcal{T}$$

Επιπλέον, παρόλο που η απόδειξή του είναι ιδιαίτερα τεχνική, είναι διαισθητικά φανερό ότι δεν προστίθεται τίποτα παίρνοντας το χρονικό μέλλον του χρονικού μέλλοντος:

$$I^+(I^+(S)) = I^+(S)$$

Πράγματι, εξ' ορισμού, $I^+(I^+(S)) \supseteq I^+(S)$. Έστω $p \in S$, $q \in I^+(S)$ και $r \in I^+(I^+(S))$. Τότε το r ενώνεται με το q, το οποίο ενώνεται με το p με χρονοειδείς καμπύλες εκάστως. Το μόνο τεχνικό σημείο είναι η διασφάλιση ελευθερίας επιλογής αυτών των χρονοειδών καμπυλών αρκετή, ώστε τα εφαπτόμενα διανύσματά τους να συμπίπτουν στο q και άρα να έχει βρεθεί μια χρονοειδής καμπύλη που να ενώνει το r με το p, δηλαδή $r \in I^+(S)$ οπότε και $I^+(I^+(S)) \subseteq I^+(S)$.

Τα οριακά σημεία[8] ενός συνόλου γεγονότων δε προσφέρουν τίποτα στο χρονικό του μέλλον:

$$I^+(\overline{S}) = I^+(S) = I^+(S^\circ)$$

Πράγματι, σχηματικά πάλι, επειδή το $I^+(S)$ είναι ανοικτό, οποιοδήποτε "μεγάλωμα" του θα είναι "φούσκωμα" του αφού πρέπει να είναι ανοικτό. Η προσθήκη οριακών σημείων στον πηγαίο χωροχρόνο S δεν είναι αρκετό για να προκαλέσει αυτό το φούσκωμα, δηλαδή τα χρονικά μέλλοντα των οριακών σημείων καλύπτονται απο τα

[7] Έχει νόημα ο χρονικός προσανατολισμός φωτοειδών διανυσματικών πεδίων, εξαιρουμένου του ταυτοτικά 0 το οποίο δεν έχει προσανατολισμό. Πράγματι, αν τα μη μηδενικά διανύσματα ενός πεδίου έχουν δεδομένο προσανατολισμό τότε το συνολικό πεδίο χαρακτηρίζεται απο τον προσανατολισμό αυτό, δηλαδή τα διανύσματα 0 όπου εμφανίζονται στο πεδίο δεν συνεισφέρουν στον προσανατολισμό του πεδίου, όπως είναι και φυσικό.

[8] ορισμός Α΄.1.1.5

χρονικά μέλλοντα των γειτονικών σημείων που συγκλίνουν σε αυτά, γιατί τα μόνα στοιχεία που προστίθενται στην κλειστότητα ενός συνόλου είναι τα σημεία συσσώρευσης[9] που τυχών δεν έχουν συμπεριληφθεί.[10]

Τέλος, γενικά ισχύει

$$I^+(S) \subset J^+(S) \subseteq \overline{I^+(S)} \Longleftrightarrow E^+(S) \equiv J^+(S) \backslash I^+(S) \subseteq \partial I^+(S)$$

συνεπώς $I^+(S) = (J^+(S))^\circ$, $\overline{I^+(S)} = \overline{J^+(S)}$ και άρα $\partial I^+(S) = \partial J^+(S)$, που μας λέει το διαισθητικά ενδιαφέρον γεγονός ότι τα γεγονότα που προσεγγίζονται *αποκλειστικά* με φωτοειδείς καμπύλες δεν συνιστούν απαραίτητα το σύνορο των χρονικά προσεγγιζόμενων γεγονότων. Αλλά αυτό ισχύει τοπικά, όπως φαίνεται και από το παρακάτω ισχυρότερο θεώρημα, διατυπωμένο όπως στο [3]. Πρώτα όμως έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 7.1.4 (κανονική συνεκτικότητα)**.** Έστω χωροχρόνος M με μετρική g_{ab} και τοπολογία $\mathcal{T}$, και έστω $O \in \mathcal{T}$ δρομοσυνεκτικό[11]. Το O είναι *κανονικά συνεκτικό* αν η καμπύλη του ορισμού Α$'$.1.1.2.1 είναι γεωδαισιακή.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω χωροχρόνος M με μετρική g_{ab} και τοπολογία $\mathcal{T}$. $\forall p \in M$, $\exists O \in \varpi(p)$ κανονικά συνεκτικό. Επιπλέον $\forall O \in \varpi(p)$:*

- *το $I^+(p)|_O$ παράγεται από όλες τις χρονοειδείς γεωδαισιακές περιορισμένες στο O,*
- *το $\partial(I^+(p)|_O)$ παράγεται από όλες τις φωτοειδείς γεωδαισιακές περιορισμένες στο O,*

από το οποίο συμπεραίνεται ότι το $\overline{I^+(p)|_O}$ παράγεται από όλες τις αιτιακές γεωδαισιακές περιορισμένες στο O.

Πόρισμα 7.1.1. *$\forall p \in M$ και $\forall q \in J^+(p) \backslash I^+(p)$, κάθε αιτιακή καμπύλη πρέπει να είναι φωτοειδής καμπύλη.*

Το τελευταίο είναι λογικό, αφού καταφέραμε τοπικά να εξισώσουμε αιτιακό μέλλον με κλειστότητα χρονικού μέλλοντος, και μάλιστα το σύνορό του με φωτοειδώς σχετιζόμενα γεγονότα, καθολικώς, τα αιτιακώς σχετιζόμενα γεγονότα που καταφέρνουν να είναι στο σύνορο $\partial I^+(p)$ του καθολικού χρονικού μέλλοντος $I^+(p)$ του p πρέπει να συνδέονται με φωτοειδείς γεωδαισιακές απαραίτητα. Και αυτό γιατί μια αιτιακή καμπύλη που δεν είναι φωτοειδής, μπορεί να παραμορφωθεί τοπικά, όπου δεν είναι χρονοειδής σε χρονοειδής καμπύλη.

Στο Wald ([3]) γίνεται εκτενής συζήτηση πάνω στην επεκτασιμότητα των χρονοειδών καμπυλών, μπροστά και πίσω στο χρόνο, που εδώ όμως θα αποφευχθεί. Θα αρκεστούμε μόνο στην πληροφορία ότι, οποιοδήποτε τμήμα αιτιακής καμπύλης πάρουμε μέσα σε έναν χρονικά προσανατολισμένο, παρασυμπαγή χωροχρόνο Hausdorff επεκτείνεται μέχρι το άπειρο που αυτό σημαίνει τρία πράγματα σε έναν τέτοιο γενικό χωροχρόνο:

- είτε είναι μια άπειρη καμπύλη στο χωροχρόνο,
- είτε είναι κλειστή καμπύλη, οπότε επιδέχεται περιοδική παραμετροποίηση,
- είτε καταλήγει σε singularity, το οποίο, κατά κάποιο τρόπο, είναι ισοδύναμο με το πρώτο.

Το τελευταίο σχόλιο έγινε με βάση την ιδέα ότι οι singularities αποτελούν μέρος του συνόρου το σύμπαντος, μαζί με το άπειρο. Είναι επόμενο, όταν παραμορφώνεται η γεωμετρία του χωροχρόνου, κομμάτια του απείρου να "βρεθούν αλλού". Παρόλα αυτά, γεωμετρικά η καμπύλη της τρίτης κατηγορίας συγκλίνει σε ένα σημείο, το οποίο σημείο δεν ανήκει στην πολλαπλότητα.

Λόγω του χρονικού προσανατολισμού του χωροχρόνου είναι πάντα καθορισμένο ποίο άκρο μιας αιτιακής καμπύλης είναι το μελλοντικό/παρελθοντικό. Με αυτο το γνώμονα, μια καμπύλη με άκρο μελλοντικό/παρελθοντικό άκρο της πρώτης κατηγορίας αναφέρεται και ως μελλοντικά/παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη καμπύλη, ενώ της τρίτης κατηγορίας αναφερόμαστε στο σημείο σύγκλισης ως μελλοντικό/παρελθοντικό άκρο της καμπύλης. Οι καμπύλες που εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία, δηλαδή είτε αρχικά είτε τελικά κλειστών, είναι παθολογικές περιπτώσεις και στην επόμενη ενότητα θα αποκλειστούν προς χάριν της ευσταθούς αιτιακής δομής του χωροχρόνου.

[9] ορισμός Α$'$.1.1.5

[10] τα απομονωμένα σημεία άμα υπάρχουν θα είναι ήδη στο S αλλιώς τα ξεχνάμε στην κλειστότητα αφού τότε το S θα αγνοεί την ύπαρξή τους, όπως λέει και ο ισοδύναμος ορισμός της κλειστότητας, περί ελάχιστου κλειστού που περιέχει το S.

[11] ορισμός Α$'$.1.1.2.1

Ορισμός 7.1.5 (άχρονικότητα)**.** Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$. Ένα υποσύνολο $S \subseteq M$ καλείται άχρονο αν και μόνο αν $I^+(S) \cap S = \emptyset$.[12]

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$ και $S \subseteq M$.*

- *Τότε $\partial I^+(S)$...*
- *Αν S κλειστό άχρονο με $\partial\partial S = \emptyset$[13] τότε S και κατά συνέπεια $\partial I^+(S) \cup S$...*

... είναι άχρονη συνεχής εμβαπτισμένη[14] υποπολλαπλότητα της M με:

$$\dim \partial I^+(S) = \dim S = \dim(\partial I^+(S) \cup S) = \dim M - 1$$

Από ιδιότητα $I^+(\overline{S}) = I^+(S)$ και όπως φαίνεται και από θεώρημα 7.1.2, κλειστά άχρονα σύνολα γεγονότων αποτελούν σχεδόν τμήματα υπερεπιφανειών διάστασης κατά μία χαμηλότερη της πολλαπλότητας M.[15] Επομένως κάθε άχρονο υποσύνολο γεγονότων S υποτίθεται, όπως και στο [3], κλειστό, δηλαδή $\partial\partial S \subseteq S = \overline{S}$. Μια ιδιότητα που έχει το $\partial\partial S$,[16] είναι ότι, ως συνεχής εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα μιας διάστασης χαμηλότερης, $\forall p \in \partial\partial S$ και $\forall O \in \varpi(p)$, $\exists q \in I^+(S)$ και $\exists r \in I^-(S)$ τέτοια, ώστε να υπάρχει χρονοειδής καμπύλη από το r στο q που να παρακάμπτει την S. Είναι φανερό ότι κάθε σημείο $p \in S$ με αυτή την ιδιότητα, $p \in \partial\partial S$, γιατί διαφορετικά $p \in S^{\circ\circ}$ οπότε $\exists O \in \varpi(p)$ τέτοια, ώστε $O \cap S^{\circ\circ} \subseteq S^{\circ\circ}$ οπότε τέτοια καμπύλη δεν υπάρχει για τη γειτονιά αυτή.

Ορισμός 7.1.6 (domains of dependence)**.** Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$ και κλειστό άχρονο υποσύνολο $S \subseteq M$.

- Η *μελλοντική περιοχή χρονικής εξάρτησης* του S ορίζεται ως το σύνολο $C^+(S)$ των γεγονότων $p \in M$, *κάθε* παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη από τα οποία, τέμνει το S.
- Η *μελλοντική περιοχή αιτιακής εξάρτησης* του S ορίζεται ως το σύνολο $D^+(S)$ των γεγονότων $p \in M$, *κάθε* παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη από τα οποία, τέμνει το S.

Τότε ορίζεται ο *μελλοντικός ορίζοντας Cauchy* του S, $H^+(S) := \overline{D^+(S)} \backslash I^-(D^+(S))$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται οι *παρελθοντικές περιοχές εξάρτησης* $C^-(S)$, $D^-(S)$ όπως και ο *παρελθοντικός ορίζοντας Cauchy* $H^-(S)$.

Ο ορισμός του ορίζοντα είναι πρακτικά το $\partial D^+(S)$ αλλά επειδή $S \subset D^+(S) \subset \overline{D^+(S)} \implies S \subset \partial D^+(S)$, δε το θέλουμε στον ορίζοντα οπότε καθαρίζουμε το $\overline{D^+(S)}$ με τη "σκούπα" του χρονικού παρελθόντος του $D^+(S)$, $I^-(D^+(S))$. Πράγματι, κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή (και άρα χρονοειδής) καμπύλη που ξεκινάει απο το $D^+(S)$ τέμνει το S από ορισμό 7.1.6, επομένως $S^{\circ\circ} \subseteq I^-(D^+(S)) \implies \partial\partial S \subseteq H^+(S)$.[17] Πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω:

[12] Είναι η κοντινότερη έννοια "στιγμιότυπου" που μπορεί να οριστεί σε ένα τέτοιο χωροχρόνο.

[13] Με τη σχετική τοπολογία, γιατί με την ολόκληρη, $\partial S = S$ αφού η S είναι μηδενικού μέτρου ως συνεχής εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα χαμηλότερης διάστασης. Το ίδιο με το εσωτερικό, το οποίο θα συμβολίζουμε με $S^{\circ\circ}$. Η κλειστότητα από την άλλη δε διαφέρει σε κάθε διάσταση υποπολλαπλότητας.

[14] Δηλαδή, η εμβάπτιση f του ορισμού 1.7.2 είναι τουλάχιστον συνεχής.

[15] Πράγματι γενικεύεται το αποτέλεσμα του θεωρήματος 7.1.2 εισάγοντας και την έννοια της πολλαπλότητας με σύνορο όπου είναι ίδια όπως παρουσιάζεται στην ενότητα 1.1 στη σελίδα 3 μόνο που ο ορισμός του χάρτη περιλαμβάνει ανοιχτά υποσύνολα του

$$\mathbb{R}^{n+} := \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) := \{(x^i)_{i=1}^n | x^n \geq 0\}$$

με τη σχετική τοπολογία που επάγεται από τη συνήθη του $\mathbb{R}^n$. Όποια σημεία της πολλαπλότητας M χαρτογραφούνται με $x^n = 0$ ανήκουν στο σύνορο ∂M. Έτσι το αποτέλεσμα του θεωρήματος 7.1.2 γενικεύεται ως:

Αν S *κλειστό άχρονο* τότε S είναι άχρονη συνεχής εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα της M με *σύνορο*.

[16] Η ιδιότητα αυτή παρατίθεται στο [3] ως ο ορισμός του συνόρου υπερεπιφάνειας χαμηλότερης κατά 1 διάστασης.

[17] Εδώ δεν είναι τετριμμένο αλλά άμα απαιτούσαμε από χρονοειδής καμπύλες μέσα στο $D^+(S)$ να τέμνουν το $\partial\partial S$ τότε λόγω παραμορφωσιμότητας των χρονοειδών καμπυλών, θα θέλαμε ένα ανοιχτό φούσκωμα του S, άτοπο. Γι αυτό ολόκληρο το *κλειστό* S συνεισφέρει μόνο στον ορισμό του Wald, [3], με τις αιτιακές καμπύλες, δηλαδή $C^+(S) = C^+(S^{\circ\circ})$.

Πρόταση 7.1.1. *$p \in \overline{D^+(S)}$ αν και μόνο αν κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη από το p (συμπεριλαμβανομένου του p) τέμνει το S.*

Απόδειξη υπάρχει στο [3]. Αυτό σημαίνει ότι $\overline{D^+(S)} = C^+(S) \cup S \subseteq I^+(S) \cup S$.

Λήμμα 7.1.1. $(D^+(S))^\circ = I^-(D^+(S)) \cap I^+(S)$.

Απόδειξη. Από ορισμό 7.1.6, κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη από κάθε σημείο του $D^+(S)$ τέμνει την S, επομένως

$$(D^+(S) \subseteq J^-(D^+(S)) \Longrightarrow (D^+(S))^\circ \subseteq I^-(D^+(S))) \wedge (D^+(S) \subseteq J^+(S) \Longrightarrow (D^+(S))^\circ \subseteq I^+(S)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (D^+(S))^\circ \subseteq I^-(D^+(S)) \cap I^+(S).$$

Αντίστροφα, έστω $p \in J^-(D^+(S)) \cap J^+(S)$. Τότε από $p \in J^-(D^+(S))$, συνεπάγεται ότι υπάρχει παρελθοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη από ένα $q \in D^+(S)$ στο p, ενώ από $p \in J^+(S)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει παρελθοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη από το p στο S. Κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη από το $q \in D^+(S)$ τέμνει το S. Δεδομένου ότι κάθε πεπερασμένη αιτιακή καμπύλη είναι επεκτάσιμη με οποιοδήποτε τρόπο,[18] υποθέτοντας ότι η σύνθετη παρελθοντικά προσανατολισμένη καμπύλη που κατασκευάστηκε από $p \in J^-(D^+(S)) \cap J^+(S)$ είναι διαφορίσιμη στο p, η τελευταία πρέπει να είναι τμήμα μιας εκ΄ των παρελθοντικά μη-επεκτάσιμων αιτιακών καμπυλών από το q που τέμνουν την S λόγω του $q \in D^+(S)$. Κάθε τέτοια όμως καμπύλη κείται υποχρεωτικά μέσα στο $D^+(S)$ οπότε $p \in D^+(S)$ και συνεπώς

$$D^+(S) \supseteq J^-(D^+(S)) \cap J^+(S) \Longrightarrow (D^+(S))^\circ \supseteq I^-(D^+(S)) \cap I^+(S).$$

□

Λήμμα 7.1.2. *Ο μελλοντικός/παρελθοντικός ορίζοντας Cauchy είναι κλειστός και άχρονος.*

Απόδειξη. Πράγματι, $H^+(S) = \overline{D^+(S)} \cap (M \backslash I^-(D^+(S)))$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών. Επιπλέον

$$I^-(H^+(S)) \subset I^-(\overline{D^+(S)}) = I^-(D^+(S)) \subset M \backslash H^+(S) \Longrightarrow I^-(H^+(S)) \cap H^+(S) = 0,$$

δηλαδή $H^+(S)$ άχρονο. □

Τέλος παραθέτουμε δύο θεωρήματα από το [3] που αναδεικνύουν τον χαρακτήρα τόσο του $\partial I^+(S)$ όσο και του ορίζονται $H^+(S)$ αλλά που παραλείπουμε την απόδειξή τους (που περιλαμβάνει μπόλικα λήμματα) καθώς ξεφεύγουν από τον κορμό αυτού του μέρους που είναι το Initial Value Problem.

Θεώρημα 7.1.3. *Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$ και κλειστό άχρονο υποσύνολο $S \subseteq M$.*

- $\forall p \in \partial I^+(S) \backslash S$, $\exists \lambda \subset \partial I^+(S)$...
- $\forall p \in H^+(S) \backslash S$, $\exists \lambda \subset H^+(S)$...

... φωτοειδής καμπύλη τέτοια, ώστε $p \in \lambda$ και η οποία είτε είναι παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη είτε έχει παρελθοντικό άκρο στο ∂S.

Φυσικά, ανάλογα θεωρήματα ισχύουν και για τα $\partial I^-(S)$ και $H^-(S)$.

Ορισμός 7.1.7 (total domains of dependence)**.** Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$ και κλειστό άχρονο υποσύνολο $S \subseteq M$. Ορίζεται:

- η ολική περιοχή χρονικής εξάρτησης ως $D(S) := D^+(S) \cup D^-(S)$.
- ο ολικός χρονικός ορίζοντας ως $H(S) := H^+(S) \cup H^-(S)$.

Ισχύει ότι $\partial D(S) = H(S)$.

[18]Έναν απο τους τρεις τρόπου επεκτασιμότητας που περιγράφονται στη σελίδα 67.

Λήμμα 7.1.3. $S = \partial D^+(S) \cap \partial D^-(S)$.

Απόδειξη. S είναι άχρονο οπότε $D^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$, ενώ $(D^-(S))^\circ \subset I^-(S)$ επομένως $(D^+(S))^\circ \cap (D^-(S))^\circ = \emptyset$, και συνεπώς

$$\overline{D^+(S) \cap D^-(S)} = (\partial D^+(S) \cup (D^+(S))^\circ) \cap (\partial D^-(S) \cup (D^-(S))^\circ) = \partial D^+(S) \cap \partial D^-(S).$$

Προφανώς $S \subseteq D^+(S) \cap D^-(S)$. Έστω $p \in D^+(S) \cap D^-(S)$, δηλαδή κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη και κάθε μελλοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη από το p τέμνει το S. Αν $p \notin S$, τότε ανάμεσά τους υπάρχει μια μη-επεκτάσιμη χρονική καμπύλη που διέρχεται από το p και τέμνει την S δυο φορές, άτοπο αφού η S είναι άχρονη. Άρα $p \in S$, συνεπώς $S \supseteq D^+(S) \cap D^-(S)$ οπότε $S = \overline{S} = \overline{D^+(S) \cap D^-(S)} = \partial D^+(S) \cap \partial D^-(S)$. □

Λήμμα 7.1.4. $(D(S))^\circ = I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))$.

Απόδειξη. Προφανώς

$$\begin{aligned} D^+(S) &\subseteq J^-(D^+(S)) \\ D^-(S) &\subseteq J^+(D^-(S)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} D^+(S) &\subseteq J^+(S) \subseteq J^+(D^-(S)) \\ D^-(S) &\subseteq J^-(S) \subseteq J^-(D^+(S)) \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} D^+(S) &\subseteq J^-(D^+(S)) \cap J^+(D^-(S)) \\ D^-(S) &\subseteq J^+(D^-(S)) \cap J^-(D^+(S)) \end{aligned}$$

και άρα $D(S) \subseteq J^-(D^+(S)) \cap J^+(D^-(S)) \Longrightarrow (D(S))^\circ \subseteq I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))$.

Αντίστροφα, έστω $p \in J^-(D^+(S)) \cap J^+(D^-(S))$. Τότε, με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του λήμματος 7.1.1, κατασκευάζουμε μια σύνθετη παρελθοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη από το $D^+(S)$ στο $D^-(S)$ η οποία διέρχεται από το p και η οποία συνθέτει κατά τμήματα κάποια από τις αιτιακές καμπύλες που ορίζουν τα $D^+(S)$ και $D^-(S)$, και άρα το p πέφτει σε ένα από τα $D^+(S)$ και $D^-(S)$, $p \in D^+(S) \cup D^-(S) =: D(S)$. Επομένως $D(S) \supseteq J^-(D^+(S)) \cap J^+(D^-(S)) \Longrightarrow (D(S))^\circ \supseteq I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))$. □

Θεώρημα 7.1.4. $H(S) = \partial D(S)$.

Απόδειξη. $\partial D(S) = \overline{D(S)} \backslash (D(S))^\circ = (\overline{D^+(S) \cup D^-(S)}) \backslash (I^-(D^+(S)) \cap I^+(D^-(S))) =$

$$(\overline{D^+(S)} \backslash I^-(D^+(S))) \cup (\overline{D^+(S)} \backslash I^+(D^-(S))) \cup (\overline{D^-(S)} \backslash I^-(D^+(S))) \cup (\overline{D^-(S)} \backslash I^+(D^-(S))) = H(S)$$

αφού

$$\begin{aligned} (D^+(S))^\circ \subseteq I^+(S) \subseteq I^+(D^-(S)) \wedge S \subseteq D^+(S) \subseteq \overline{D^+(S)} &\Longrightarrow \overline{D^+(S)} \backslash I^+(D^-(S)) = \partial\partial S \subseteq H^+(S) \\ (D^-(S))^\circ \subseteq I^-(S) \subseteq I^-(D^+(S)) \wedge S \subseteq D^-(S) \subseteq \overline{D^-(S)} &\Longrightarrow \overline{D^-(S)} \backslash I^-(D^+(S)) = \partial\partial S \subseteq H^-(S) \end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} S^{\circ\circ} \subseteq I^+(D^-(S)) &\Longrightarrow \overline{D^+(S)} \subseteq I^+(S) \cup S \subseteq I^+(D^-(S)) \cup \partial\partial S \\ S^{\circ\circ} \subseteq I^-(D^+(S)) &\Longrightarrow \overline{D^-(S)} \subseteq I^-(S) \cup S \subseteq I^-(D^+(S)) \cup \partial\partial S \end{aligned}$$

από πρόταση 7.1.1 και σχόλιο που προηγήθηκε στην προηγούμενη σελίδα. □

7.2 ΑΙΤΙΟΤΗΤΑ

Παρόλη τη δυνατότητα ορισμού αιτιακής δομής σε ένα χρονικά προσανατολίσιμο χωροχρόνο, αυτό δε σημαίνει ότι μια προκύπτουσα αιτιακή δομή δεν περιλαμβάνει παθολογικές καταστάσεις όπως αυτές που περιγράφονται απο κλειστές αιτιακές καμπύλες. Στην περίπτωση των κλειστών αιτιακών καμπύλων, το μέλλον "συναντά" το παρελθόν.[19] Παρόλο που μια τέτοια παθολογική κατάσταση ίσως να μην ήταν δόκιμο να αποκλειστεί για ένα κοσμολογικό μοντέλο, εντούτοις, σε υποπεριοχές του χωροχρόνου περιμένουμε ότι πάντα η αιτιακή δομή θα είναι απουσίας τέτοιων κλειστών καμπυλών. Αυτή είναι η συνθήκη ασθενούς αιτιότητας, δηλαδή να μην υπάρχουν αρχικά/τελικά περιοδικές αιτιακές καμπύλες:

Ορισμός 7.2.1 (ασθενής αιτιότητα)**.** Ο παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι *ισχυρά αιτιακός* αν και μόνο αν, κάθε χρονικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη δεν είναι αρχικά/τελικά περιοδική.

Λόγω της φύσης των φωτοειδών καμπυλών να κείτονται στο σύνορο του $I^+(p)$ ενός γεγονότος $p \in M$, επιτρέπει οριακές καταστάσεις όπου για παράδειγμα δεν παραβιάζεται η συνθήκη ασθενούς αιτιότητας είναι όμως απείρως κοντά στο να παραβιαστεί. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει αιτιακή καμπύλη λ η οποία οριακά να μην παραβιάζει την ασθενή συνθήκη της αιτιότητας, δηλαδή $\overline{\lambda}$ την παραβιάζει. Η αποφυγή αυτού του είδους της *τοπολογικά οριακής* παραβίασης της αιτιότητας διατυπώνεται τυπικά με την συνθήκη της ισχυρής αιτιότητας:

Ορισμός 7.2.2 (ισχυρή αιτιότητα)**.** Ο παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι *ισχυρά αιτιακός* αν και μόνο αν, $\forall p \in M$ και $\forall U \in \varpi(p)$, $\exists V \in \beta(p)$ τέτοιο, ώστε $\exists I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα τέτοιο, ώστε $\forall t \in \mathbb{R} \backslash I$, $\lambda(t) \notin V$. Με άλλα λόγια, η καμπύλη οδεύοντας στο μέλλον περνάει το πολύ μια φορά από μια επαρκώς μικρή γειτονιά κάθε γεγονότος, δηλαδή μία φορά $\forall p \in \lambda$, και καμία $\forall p \notin \lambda$.

Αυτο συνάδει με το παράδειγμα παραπάνω, καθώς λέει ότι σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, υπάρχει γειτονιά στην οποία μια αιτιακή καμπύλη είναι απαλλαγμένη από τον εαυτό της, δηλαδή ούτε κοντά της θα μπορέσει να συναντήσει τον εαυτό της, παίρνοντας την κλειστότητα. Ακόμα και έτσι όμως υπάρχει ακόμα ένας οριακός τρόπος να παραβιαστεί η ισχυρή αιτιότητα ακόμα, που βασίζεται πάλι στο γεγονός ότι οι φωτοειδείς καμπύλες κείτονται στο σύνορο του $I^+(p)$ ενός γεγονότος $p \in M$, αλλά αυτή τη φορά η παραβίαση γίνεται έξω απο το σύνορο: με μια ελαφριά διαταραχή της μετρικής μπορεί ακόμα μια μη περιοδική καμπύλη να καταστεί περιοδική.

Λήμμα 7.2.1 (time-inflated metric)**.** *Έστω χωροχρόνος M εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab}. Τότε $\forall t^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ χρονοειδή διανυσματικα πεδία,*

$$\hat{\alpha}g_{ab} := g_{ab} - \alpha g_{ac} t^c g_{bd} t^d = g_{ab} - \alpha t_a t_b$$

είναι μετρική του χωροχρόνου M, ιδίου signature.

Απόδειξη. $\forall u^a, v^b \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$:

$$\hat{\alpha}g_{ab} u^a v^b = g_{ab} u^a v^b - \alpha g_{ac} u^a t^c g_{bd} v^b t^d$$

$\forall \{u_\mu{}^a\}_\mu, \{v_\nu{}^b\}_\nu \subset \mathcal{V}^{(1|0)}M$ και $\forall \{\lambda_\mu\}_\mu, \{\mu_\nu\}_\nu \subset \mathbb{R}$:

$$\hat{\alpha}g_{ab} \sum_\mu \lambda_\mu u_\mu{}^a \sum_\nu \mu_\nu v_\nu{}^b = g_{ab} \sum_\mu \lambda_\mu u_\mu{}^a \sum_\nu \mu_\nu v_\nu{}^b - \alpha g_{ac} \sum_\mu \lambda_\mu u_\mu{}^a t^c g_{bd} \sum_\nu \mu_\nu v_\nu{}^b t^d =$$

$$\sum_\mu \sum_\nu \lambda_\mu \mu_\nu (g_{ab} u_\mu{}^a v_\nu{}^b - \alpha g_{ac} u_\mu{}^a t^c g_{bd} v_\nu{}^b t^d) = \sum_\mu \sum_\nu \lambda_\mu \mu_\nu \hat{\alpha}g_{ab} u_\mu{}^a v_\nu{}^b$$

quod erat demonstrandum. □

[19]Σε μια τέτοια περίπτωση κλειστής *χρονοειδούς* καμπύλης, $p \in I^+(p)$ οπότε το I^+ συνεχίζει με ακόμα μεγαλύτερη πηγαία επιφάνεια που με επαγωγή τελικά καλύπτει όλο το χωροχρόνο, $I^+(p) = M$. Παρόλο που ο χωροχρόνος είναι χρονικά προσανατολισμένος, είναι πλήρως αιτιακά συνδεδεμένος και γεγονότα, μπορούν να επηρεάσουν παρελθοντικά γεγονότα μέσω των μελλοντικών γεγονότων που επηρεάζουν και αυτό οπουδήποτε πάνω στο χωροχρόνο αν και "μακρύτερα" γεγονότα, έξω από το "άμεσο" χρονικό μέλλον, μπορεί να χρειαστούν "περισσότερο" χρόνο (και χώρο) για να τα φτάσουν.

Λήμμα 7.2.2. *Η αντίστροφή της μετρικής $\hat{\alpha}g_{ab}$ είναι:*

$$\hat{\alpha}g^{ab} = g^{ab} + \frac{\alpha t^a t^b}{1 - \alpha g_{cd} t^c t^d}$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\hat{\alpha}g^{ab}\hat{\alpha}g_{bc} = g^{ab}g_{bc} - \alpha g^{ab}g_{bf}g_{cg}t^f t^g + \frac{\alpha}{1 - \alpha g_{de}t^d t^e} t^a (g_{bc}t^b - \alpha g_{bf}t^b t^f g_{cg}t^g) = \delta^a{}_c$$

quod erat demonstrandum. □

Λήμμα 7.2.3. *Έστω χωροχρόνος M εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab}. Τότε $\forall \alpha > 0$, η μετρική*

$$\hat{\alpha}g_{ab} := g_{ab} - \alpha g_{ac}t^c g_{bd}t^d = g_{ab} - \alpha t_a t_b$$

"φουσκώνει" τον κώνο φωτός ενός γεγονότος $p \in M$.

Απόδειξη. Έστω $c^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ φωτοειδές με τη μετρική g_{ab}. Τότε

$$\hat{\alpha}g_{ab}c^a c^b = g_{ab}c^a c^b - \alpha g_{ac}c^a t^c g_{bd}c^b t^d < 0$$

αφού $g_{ab}c^a c^b = 0$ από υπόθεση και $g_{ac}c^a t^c g_{bd}c^b t^d = \langle c|t\rangle^2 > 0$. □

Ορισμός 7.2.3 (ευσταθής αιτιότητα)**.** Ο παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι *ευσταθώς αιτιακός* αν και μόνο αν $\forall \alpha > 0$, $\exists t^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ χρονοειδές τέτοιο, ώστε ο χωροχρόνος M με τη μετρική $\hat{\alpha}g_{ab}$ είναι ασθενώς αιτιακός.

Το παρακάτω θεώρημα, όπως παρατίθεται στο [3] είναι ισχυρότερο, δηλαδή ισχύει ως ισοδυναμία. Παρόλα αυτά, εδώ παρατίθεται μόνο το κριτήριο για ένα χωροχρόνο να είναι αιτιακά ευσταθής.

Θεώρημα 7.2.1. *Ο παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι ευσταθώς αιτιακός αν και μόνο αν $\exists f \in \mathcal{V}^{(0|0)}M$ τέτοιο, ώστε $\nabla^a f \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ είναι παρελθοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha > 0$ και η μετρική

$$\hat{\alpha}g_{ab} := g_{ab} - \alpha g_{ac}\nabla^c f g_{bd}\nabla^d f = g_{ab} - \alpha \nabla_a f \nabla_b f$$

$\forall \upsilon^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ μελλοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές,

$$\frac{df}{d\tau} := \upsilon^a \partial_a f = g_{ab}\upsilon^a \nabla^b f > 0,$$

συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, και άρα *όχι* περιοδική,[20] κατά μήκος *κάθε* μελλοντικά προσανατολισμένης χρονοειδούς καμπύλης, συνεπώς ο χωροχρόνος M με τη μετρική g_{ab} είναι ασθενώς αιτιακός. Θεωρούμε το $\nabla^a f$ ως διάνυσμα οπότε το "ταΐζουμε" στη νέα μετρική χωρίς να αλλάξουμε τη συνοχή.

Αφού $g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f > 0$ και άρα$1 - \alpha g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f < 0$,

$$\hat{\alpha}g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f = g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f - \alpha g_{ac}\nabla^a f \nabla^c f g_{bd}\nabla^b f \nabla^d f = (1 - \alpha g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f) g_{ab}\nabla^a f \nabla^b f < 0,$$

συνεπώς το διανυσματικό πεδίο $\nabla^a f$ εξακολουθεί να είναι παρελθοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές στη νέα μετρική.

Εξάλλου από λήμμα 7.2.3, το διανυσματικό πεδίο $\nabla^a f$ εξακολουθεί να είναι παρελθοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές με τη νέα μετρική, επομένως επικαλούμενοι το ίδιο επιχείρημα, όπως παραπάνω και στο [3], η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα κατά μήκος κάθε *νέας* μελλοντικά προσανατολισμένης χρονοειδούς καμπύλης, συνεπώς ο χωροχρόνος M με τη νέα μετρική $\hat{\alpha}g_{ab}$ είναι ασθενώς αιτιακός. □

[20] Αφού η f δε μπορεί να είναι περιοδική σε μια τέτοια χρονοειδή καμπύλη τότε η καμπύλη δε μπορεί να είναι περιοδική αφού το πεδίο της παραμετροποίησης και άρα και της $f \circ \lambda$ είναι το $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 8

INITIAL VALUE FORMULATION

Παρόλο που δε φαίνεται στο παρών κείμενο, υπάρχουν κάποιες κλάσεις ακριβών λύσεων της εξίσωσης Einstein

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab},$$

με

$$T_{ab} = \rho dx_a dx_b + P(g_{ab} + dx_a dx_b),$$

ως προς τη μετρική g_{ab} του χωροχρόνου. Η εξίσωση Einstein σε αυτή τη διατύπωση έχει δύο βασικά προβλήματα:

1. Λύνεται ως προς τη μετρική, η οποία είναι implicit τόσο στον τανυστή Einstein G_{ab} όσο και στον τανυστή τάσης-ενέργειας-ορμής T_{ab}. Άρα δεν ισχύει αυτο που φαινομενικά καταλαβαίνει κανείς από τη μορφή της εξίσωσης, ότι δηλαδή ο τανυστής τάσης-ενέργειας-ορμής αποτελεί input στην εξίσωση Einstein. Αυτό είναι φυσικό καθώς η κατανομή μάζας που περιγράφεται από τον τανυστή τάσης-ενέργειας-ορμής ορίζεται πάνω στο υπόβαθρο του χωροχρόνου και άρα εξαρτάται άμεσα από το g_{ab}.

2. Η εξίσωση Einstein λύνεται για όλο το χωροχρόνο κάτι που είναι φυσικά απρόσιτο. Πράγματι, μια πλήρης λύση θα ήταν ικανή να προβλέψει τα πάντα μέσα στο σύμπαν θεωρητικά, και οι ακριβείς λύσεις που υπάρχουν αυτο ακριβώς κάνουν, μόνο που είναι για τόσο απλά συστήματα και με συμμετρίες που δύσκολα έρχεται σε αντιστοιχία με πραγματικά συστήματα.[1] Το σημαντικότερο όμως είναι ότι οποιαδήποτε λύση που δίνεται υπό αυτή τη μορφή δεν μπορεί να ελεγχθεί άμεσα αφού δεν υπάρχει έλεγχος ως προς το input.

Αυτά τα δύο σημεία είναι κομμάτι του χαρακτήρα που πρέπει και έχει μια φυσική θεωρία: δυνατότητα ελέγχου και περιγραφή μιας μεγάλης γκάμας φαινομένων. Αν είναι δυνατό να παράγουμε λύσεις για συστήματα από συνθήκες που καθορίζονται πειραματικά ή/και (μάλλον πιο πολύ) παρατηρησιακά, ώστε να είναι ελέγξιμες (οι λύσεις) και ταυτόχρονα να προβλέπουν την εξέλιξή των συστημάτων στο χρόνο, η θεωρία της γενικής σχετικότητας είναι μια φυσική θεωρία. Αυτό είναι το πρόβλημα αρχικών τιμών στη θεωρία της γενικής σχετικότητας, και το τελευταίο και σημαντικότερο κεφάλαιο αυτής της διατριβής αφορά την τοποθέτηση του προβλήματος για την γενική θεωρία της σχετικότητας. Ακολουθείται σε μεγάλο βαθμό η συλλογιστική του Wald, [3].

8.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στη φυσική, οι περισσότερες θεωρίες (πρέπει να) διατυπώνονται σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών από το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς το χρόνο της κλασικής μηχανικής στο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων της κλασικής θεωρίας πεδίου. Μένοντας στο δεύτερο διατυπώνουμε αναλυτικά το πρόβλημα:

Έστω πεδία ϕ_i ορισμένα στο χωροχρόνο και η Lagrangianή πυκνότητά τους που μπαίνει στο ολοκλήρωμα της δράσης,

$$S(\phi_i|\partial_\mu\phi_i) = \int d^4x\mathcal{L}(\phi_i|\partial_\mu\phi_i).$$

[1] Οι λύσεις για κοσμολογικά μοντέλα έχουν μια σύνδεση με παρατηρήσεις (Hubble: redshift) όμως αφορούν μόνο το συνολικό υπόβαθρο του σύμπαντος και πάλι με μεγάλες προσεγγίσεις ως προς το "περιεχόμενό" του.

Τότε ισχύουν απο βασικές αρχές που δε διατυπώνονται εδώ οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τα ελεύθερα πεδία,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i},$$

η οποία οδηγεί συνήθως σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ως προς τα πεδία ϕ_i. Εφοδιασμένο πάντα με τις κατάλληλες αρχικές-συνοριακές συνθήκες, το σύστημα αυτό εξισώσεων δίνει μοναδική λύση γύρω απο κάθε σημείο.[2] Συνήθως το μόνο επιπλέον που απαιτείται είναι οι λύσεις να μεταβάλλονται με συνεχή τουλάχιστον τρόπο με τις αρχικές συνθήκες, διαφορετικά οι αρχικές συνθήκες είναι μετρήσιμες με πεπερασμένη ακρίβεια, που σημαίνει ότι η θεωρία που υποθάλπει το συγκεκριμένο σύστημα χάνει την ικανότητα προβλεψιμότητας από ένα σημείο και μετά, αλλάζουμε δηλαδή φυσική. Ισχύει το παρακάτω γενικό θεώρημα για τέτοια συστήματα:

Θεώρημα 8.1.1 (Θεώρημα Cauchy-Kowalewski). *Κάθε σύστημα μερικών διαφορικών δεύτερης τάξης της μορφής*[3]

$$\partial_t \partial_t \phi_i = F_i(t, x^\mu; \phi_i; \partial_t \phi_i, \partial_\mu \phi_i; \partial_t \partial_\mu \phi_i, \partial_\mu \partial_\nu \phi_i)$$

όπου $F_i \in \mathcal{C}^\omega$, εφοδιασμένο με ***αναλυτικές*** *αρχικές συνθήκες $\phi_i(t_0, x^\mu) := f_i(x^\mu)$ και $\partial_t \phi_i(t_0; x^\mu) := g_i(x^\mu)$, έχει τοπική* ***αναλυτική*** *λύση, δηλαδή $\exists O \in \mathcal{T}(\Sigma_{t=t_0})$ (ανοικτό πάνω στην υπερεπιφάνεια αρχικών συνθηκών $t = t_0$) τέτοιο, ώστε το παραπάνω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με τις δεδομένες αναλυτικές αρχικές συνθήκες έχει μοναδική αναλυτική λύση στο O.*

Ο περιορισμός σε αναλυτικές συνθήκες είναι ισχυρός εν γένει αλλά όχι τόσο ώστε να παρεμβαίνει στις περισσότερες κλασικές θεωρίες. Στη σχετικότητα όμως παραβιάζεται η αιτιότητα του χωροχρόνου, και αυτό γιατί οι αναλυτικές συναρτήσεις γράφονται ως ανάπτυγμα γύρω από ένα σημείο p, οπότε αν αλλάξουν με συνεχή τρόπο οι συνοριακές συνθήκες τοπικά σε ένα $O \in \varpi(p)$, τότε αλλάζει όλη η συνάρτηση μέσα στην ακτίνα σύγκλισης η οποία είναι εξ' ορισμού όλο το πεδίο ορισμού για τις αναλυτικές συναρτήσεις. Αφού οι συνοριακές συνθήκες είναι σε μονοσήμαντη αντιστοιχία με τις λύσεις αυτό σημαίνει ότι με μια τοπική αλλαγή έχουμε επηρεάσει την ολική λύση όσο χρονικά κοντά θέλουμε κάτι που παραβιάζει την αιτιότητα του χωροχρόνου, υπό την έννοια ότι γεγονότα που είναι χωροειδή ως προς ένα γεγονός p, δε μπορούν να επηρεαστούν από το p.

Συγκεκριμένα έχουμε το εξής για μια οποιαδήποτε χωροειδή υπερεπιφάνεια:[4]

Εικασία 8.1.1 (αιτιότητα). *Για ένα υποσύνολο S γεγονότων μιας υπερεπιφάνειας Σ του χωροχρόνου M:*

- *Αλλαγές μέσα στο S επηρεάζονται το πολύ από το αιτιακό παρελθόν του, $J^-(S)$.*
- *Αλλαγές έξω από το S δεν επηρεάζουν το $D^+(S)$.*

Η συνέχεια λύσεων - αρχικών συνθηκών και η αιτιότητα είναι αναγκαίες συνθήκες για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος Cauchy της γενικής σχετικότητας. Είδαμε ότι το θεώρημα 8.1.1 δε καλύπτει την αιτιότητα, όμως κατά τα άλλα, μέχρι ακόμα και διαφορίσιμες αρχικές συνθήκες επιτρέπουν την τμηματική αλλαγή τους και με κατάλληλη τοπολογία στο χώρο των λύσεων μπορούμε να διασφαλίσουμε τόσο την συνέχεια όσο και την αιτιότητα.[5]

Ορισμός 8.1.1 (επιφάνεια Cauchy). Έστω παρασυμπαγής χρονικά προσανατολίσιμος χωροχρόνος M Hausdorff εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$. Μια κλειστή άχρονη επιφάνεια $\Sigma \subseteq M$[6] είναι υπερεπιφάνεια Cauchy αν και μόνο αν $M = D(\Sigma)$.

Spacetime M is said to be *globally hyperbolic* if and only if it admits a Cauchy hypersurface Σ.

Με λίγα λόγια, ο ορισμός 8.1.1 λέει ότι ο ολόκληρος ο χωροχρόνος είναι αιτιακά συνδεδεμένος με την άχρονη υπερεπιφάνεια γεγονότων Σ. Βέβαια, αν η υπερεπιφάνεια Σ είναι επιπλέον χωροειδής τότε ακόμα καλύτερα. Αλλά το πρόβλημα Cauchy αφορά χρονική εξέλιξη επομένως άχρονη είναι αρκετό.

[2] Στα συνηθέστερα προβλήματα η λύση είναι global.

[3] $x^0 \equiv t$, $\partial_0 \equiv \partial_t$ $\mu, \nu = 1, 2, 3$.

[4] Μια χωροειδής υπερεπιφάνεια S είναι μια άχρονη υπερεπιφάνεια με την ισχυρότερη απαίτηση $J^+(S) \cap S = \emptyset$.

[5] Με αναλυτικές συνοριακές συνθήκες, για καμία τοπολογία στο χώρο των λύσεων δε μπορούσαμε να διασφαλίσουμε την αιτιότητα, προφανώς, αφού η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία λύσεων - αρχικών συνθηκών εξακολουθεί να ισχύει.

[6] θεώρημα στη σελίδα 68

Λήμμα 8.1.1. *Αν M συνεκτικός, τότε Σ είναι υπερεπιφάνεια Cauchy αν και μόνο αν $H(\Sigma) \equiv \partial D(\Sigma) = \emptyset$.*

Απόδειξη. Πράγματι, τα μόνα υποσύνολα συνεκτικού χώρου με κενό σύνορο είναι το $\emptyset$ και το M, επομένως η συνθήκη για συνεκτικούς χωροχρόνους είναι $M = D(\Sigma) \Longleftrightarrow \partial D(\Sigma) = \emptyset$. □

Γενικά περιμένουμε ότι ένας φυσιολογικός χωροχρόνος θα είναι συνεκτικός, διαφορετικά θα αποτελείται από μεγιστικές συνεκτικές συνιστώσες που θα διαχωρίζουν το χωροχρόνο επί της ουσίας, κάτι το οποίο δεν είναι αναγκαίο εν γένει. Αλλά αυτό αφήνεται ελεύθερο να υποτεθεί στις περιπτώσεις μόνο που θα χρειαστεί αν χρειαστεί. Με αυτό το σκεπτικό, βλέπουμε πως $\forall S \subseteq M$ κλειστό άχρονο, $(D(S))^\circ$ είναι συνεκτική συνιστώσα του χωροχρόνου και άρα αφού λείπει το σύνορο, με βάση το λήμμα 8.1.1 εφαρμοσμένο στη σχετική τοπολογία, το $(D(S))^\circ$ είναι μια υπερβολική περιοχή του χωροχρόνου. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέτουμε ότι ο χωροχρόνος είναι υπερβολικός (όχι απλά τοπικά υπερβολικός).

Επομένως, φαίνεται ότι μια επιφάνεια Cauchy είναι πιθανή υποψήφια για τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος Cauchy,[7] καθώς πληρεί την απαίτηση περί αιτιότητας. Η εντύπωση αυτή ισχυροποιείται από το εξής ισχυρό θεώρημα:

Θεώρημα 8.1.2. *Ένας υπερβολικός χωροχρόνος M εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} είναι ευσταθώς αιτιακός. Επιπλέον, οι ισοσταθμικές της συνάρτησης f του θεωρήματος 7.2.1 είναι υπερεπιφάνειες Cauchy.*

Αυτό το θεώρημα είναι πολύ ισχυρό και λέει πρακτικά ότι ο χωροχρόνος έχει στρωματώδη υφή, δηλαδή την τοπολογία του $\mathbb{R} \times \Sigma_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, όπου Σ_t συμβολίζεται η (Cauchy) ισοσταθμική $f(p) = t$. Επομένως, από τη στιγμή που η f του θεωρήματος είναι αύξουσα κατά μήκος μελλοντικά προσανατολισμένων καμπυλών και διαφορίσιμη, θα είναι γνησίως αύξουσα κατά μήκος καμπυλών που διατρέχουν κάθετα τις ισοσταθμικές, δηλαδή η f δίνει μια έννοια παγκόσμιου χρόνου και την εξέλιξη μιας επιφάνειας Cauchy σε υπερβολικούς χωροχρόνους. Ισχύουν τα παρακάτω γενικά θεωρήματα για συστήματα βαθμωτών πεδίων:

Θεώρημα 8.1.3. *Έστω υπερβολικός χωροχρόνος M μετρικής g_{ab} και Σ μια διαφορίσιμη χωροειδής επιφάνεια του. Τότε το γραμμικό, διαγώνιο υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης βαθμωτών πεδίων ϕ_i, της μορφής*

$$\Box\phi_i + \sum_j (A_{ij})^a \nabla_a \phi_j + \sum_j B_{ij}\phi_j + C_i = 0$$

εφοδιασμένο με τις διαφορίσιμες αρχικές συνθήκες ϕ_i και $n^a \nabla_a \phi_i$, όπου $n^a \perp \Sigma$, αποτελεί καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy με συνέχεια και αιτιότητα αρχικών συνθηκών - λύσεων όπως περιγράφονται στην ενότητα 8.1.

Θεώρημα 8.1.4. *Έστω υπερβολικός χωροχρόνος M μετρικής g_{ab} και Σ μια διαφορίσιμη χωροειδής επιφάνεια του. Έστω το σχεδόν γραμμικό, διαγώνιο υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης βαθμωτών πεδίων $\{\phi_i\}_i$, της μορφής*

$$\Box\phi_i = F_i,\ F_i : \mathcal{V}^{(0|0)}M \times \mathcal{V}^{(0|1)}M \longrightarrow \mathcal{V}^{(0|0)}M$$

ή ποιο παραστατικά

$$g^{ab}(\phi_j|\nabla_c\phi_j)\nabla_a(\phi_j|\nabla_c\phi_j)\nabla_b(\phi_j|\nabla_c\phi_j)\phi_i = F_i(\phi_j|\nabla_c\phi_j) \tag{8.1.1}$$

όπου φαίνεται η εξάρτηση της μετρικής (και άρα και της συνοχής Levi-Civita[8]) τόσο και από τα άγνωστα πεδία, και μιά λύση του $(\phi_0)_i$ τέτοια, ώστε M εφοδιασμένος με τη μετρική

$$(g_0)_{ab} = g_{ab}((\phi_0)_i|\nabla_c(\phi_0)_i)$$

να είναι υπερβολικός. Έστω διαφορίσιμη χωροειδής ως προς τη μετρικη $(g_0)_{ab}$ υπερεπιφάνεια Cauchy Σ. Τότε, εφοδιασμένο με αρχικες συνθήκες επαρκώς κοντά[9] σε αυτές της λύσης $(\phi_0)_i$, $\exists O \in \mathcal{T}$ με $O \cap \Sigma \neq \emptyset$, στο οποίο το παραπάνω σύστημα έχει καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy με τις απαιτήσεις συνέχειας και αιτιότητας και O εφοσιασμένο με τη μετρική g_{ab} αντίστοιχη της λύσης είναι υπερβολικό.

---

[7] Γι' αυτο και η συνωνυμία άλλωστε...

[8] ενότητα 5.2 στη σελίδα 45

[9] Με ποια νόρμα ή τοπολογια πάνω στο χώρο των αρχικών συνθηκών εννοείται η εγγύτητα εδώ όσο και για το ποια είναι η συνθήκη εγγύτητας είναι ασαφές. Ίσως στο [4], κεφάλαιο 7, ενότητες 7.3 - 7.4, να υπάρχουν λεπτομέρειες, αλλά είναι εκτος του σκοπού αυτής της σύνοψης.

Το θεώρημα 8.1.3 διασφαλίζει τον φορμαλισμό αρχικών τιμών μιας γραμμικής βαθμωτής θεωρίας πεδίου δεύτερης τάξης, σε καμπύλο (υπερβολικό) χωροχρόνο. Το θεώρημα 8.1.4 μας διασφαλίζει ότι σε σχεδόν γραμμικά, διαγώνια υπερβολικά συστήματα, μπορούμε πάντα να βρούμε τοπική λύση με αρχικές συνθήκες κοντά σε αυτές γνωστής λύσης. Εδώ συνήθως υποτίθεται μια λύση υποβάθρου η οποία είναι εύκολο να εξαχθεί. Παραδειγμα αποτελεί η επιλογή της επίπεδης μετρικής Minkowski, όπου διασφαλίζεται ο φορμαλισμός αρχικών τιμών του συστήματος για διαταραχές γύρω απο αυτήν.

8.2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ CAUCHY (ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ)

Έστω (παρασυμπαγής) υπερβολικός χωροχρόνος M (Hausdorff) (αιτιακά ευσταθής εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab} και την κανονική τοπολογία $\mathcal{T}$) και υπερεπιφάνεια Cauchy $\Sigma_0 \subseteq M$. Ισχύει η εξίσωση Einstein για τη μετρική:

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

8.2.1 Αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 8.2.1.1. *Η ψευδοRiemannια μετρική g_{ab} του χωροχρόνου M επάγει μια Riemannια μετρική $\boldsymbol{g}_{ab}$ στην υπερεπιφάνεια Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Δηλαδή η χωροειδής υπερεπιφάνεια Σ_t είναι χωρικής φύσεως $\forall t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $n_a \in \mathcal{V}^{(0|1)}M$ το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στις υπερεπιφάνειες Σ_t, $n_a = (\partial_t)_a = (dt)_a$ αν ληφθούν Gaussianές συντεταγμένες[10]. Εδώ αμέσως φαίνεται ένα πρόβλημα. Για να υφίσταται κάθετο πεδίο ακόμα και με ψευδοRiemannια μετρική, πρέπει η υποπολλαπλότητα Σ_t να είναι τουλάχιστον $\mathcal{C}^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ορίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα πάνω στην Σ_t και κατά συνέπεια η καθετότητα. Όμως το θεώρημα 7.1.1 μας εξασφαλίζει μόνο συνέχεια. Η διαφορισιμότητα προκύπτει από την ευσταθή αιτιότητα των υπερβολικών χωροχρόνων απο το γεγονός ότι υπάρχει το $\partial^a t$ από θεώρημα 8.1.2[11] και μάλιστα είναι και το ζητούμενο διανυσματικό πεδίο, κάθετο στις ισοσταθμικές Σ_t, δηλαδή $g^{ab}\upsilon_a\partial_b t = \upsilon^a\partial_a t = 0$, $\forall \upsilon^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}\Sigma_t$ και $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ισχυρισμός. Η μετρική

$$\boldsymbol{g}_{ab} = g_{ab} + n_a n_b,\ n_a := \nabla_a t \equiv \partial_a t$$

είναι Riemann πάνω στην Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, $\boldsymbol{g}_{ab}n^a n^b = g_{ab}n^a n^b + n_a n^a n_b n^b = \|n\|^2 + \|n\|^4 = -1 + 1 = 0$, δηλαδή η μετρική $\boldsymbol{g}_{ab}$ προβάλει τα διανύσματα της M στην Σ_t. Τώρα, έστω $\upsilon^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}\Sigma_t$, δηλαδή χωροειδές ή το πολύ φωτοειδές και $g_{ab}\upsilon^a n^b = 0$. Τότε, $\boldsymbol{g}_{ab}\upsilon^a\upsilon^b = g_{ab}\upsilon^a\upsilon^b + n_a\upsilon^a n_b\upsilon^b \geq 0$. Εδώ εντοπίζεται ακόμα ένα πρόβλημα: αν δε διασφαλίσουμε ότι τα υ^a είναι χωροειδή τότε αποτυγχάνει η $\boldsymbol{g}_{ab}$ από το να είναι Riemannια μετρική. Αυτό διασφαλίζεται από το γεγονός ότι υ^a σε ένα σημείο είναι κάθετο στο χρονοειδές διάνυσμα $\nabla_a t$ στον εφαπτόμενο χώρο Minkowski και άρα χωροειδές. □

Λήμμα 8.2.1.1. *Η μετρική $\boldsymbol{g}_{ab}$ προβάλει τανυστές του χωροχρόνου M σε χωρικούς τανυστές της υπερεπιφάνειας Cauchy Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $\upsilon^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}M$ και $\boldsymbol{\upsilon}^a := g^{ab}\boldsymbol{g}_{bc}\upsilon^c \equiv \boldsymbol{g}^a{}_b\upsilon^b$. Τότε,

$$g_{ad}\boldsymbol{\upsilon}^a n^d = g_{da}g^{ab}\boldsymbol{g}_{bc}\upsilon^c n^d = \delta_d{}^b(g_{bc}\upsilon^c n^d + n_b n_c \upsilon^c n^d) = g_{cd}\upsilon^c n^d(1 + g_{cd}n^c n^d) = 0$$

από $g_{cd}n^c n^d = -1$. Το αποτέλεσμα γενικεύεται εύκολα στους τανυστές:

$$\boldsymbol{T}^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \boldsymbol{g}^{a_i}{}_{c_i}\cdots\boldsymbol{g}^{a_i}{}_{c_i}\boldsymbol{g}_{b_i}{}^{d_i}\cdots\boldsymbol{g}_{b_i}{}^{di}T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$$

quod erat demonstrandum. □

[10] ορισμός 5.2.2.1.2 στη σελίδα 49

[11] Δε ξεχνάμε ότι δράση συναλλοιώτου παραγώγου σε βαθμωτό ισούται με δράση συνήθους παραγώγου.

Πόρισμα 8.2.1.1. *Ο τελεστής παραγώγου*

$$\boldsymbol{\nabla}_c : \mathcal{V}^{(k|l)}\Sigma_t \longrightarrow \mathcal{V}^{(k|l+1)}\Sigma_t : \boldsymbol{T}^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \mapsto \boldsymbol{\nabla}_c \boldsymbol{T}^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} := \boldsymbol{g}^{a_i}{}_{d_i} \cdots \boldsymbol{g}^{a_i}{}_{d_i} \boldsymbol{g}_{b_i}{}^{e_i} \cdots \boldsymbol{g}_{b_i}{}^{ei} \boldsymbol{g}_c{}^f \nabla_f T^{d_1\ldots d_k}{}_{e_1\ldots e_l}$$

που ορίζεται από τον επαγόμενο από τη συνοχή Levi-Civita τελεστή παραγώγου ∇_c του χωροχρόνου, επάγεται από τη συνοχή Levi-Civita της υπερεπιφάνειας Cauchy Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\boldsymbol{\nabla}_a \boldsymbol{g}_{bc} = \boldsymbol{g}_a{}^d \boldsymbol{g}_b{}^e \boldsymbol{g}_c{}^f \nabla_d (g_{ef} + n_e n_f) = \boldsymbol{g}_a{}^d \boldsymbol{g}_b{}^e \boldsymbol{g}_c{}^f (\nabla_d n_e n_f + n_e \nabla_d n_f) = 0$$

από $\nabla_a g_{bc} = 0$ και $\boldsymbol{g}_a{}^b n_b = 0$. □

Σχόλιο. Μετά από όλους τους ορισμούς και τα αποτελέσματα που αφορούν τους "ισοπεδωμένους" τανυστές, η σύμβαση που ακολουθήθηκε και θα ακολουθείται και στο εξής είναι, οι προβαλλόμενοι τανυστές να γράφονται με ***bold symbol***.

8.2.1.1 Congruence.

Μέχρι τώρα έχει επιτευχθεί η αρχικοποίηση στης μετρικής, ή το χωρικό της κομμάτι κατά κάποιο τρόπο μιας και αυτο είναι που θα μπορούσαμε εν δυνάμει να μετρηθεί άμεσα. Πρακτικά όμως απλά έγινε ο διαχωρισμός του χώρου από το χρόνο στη μετρική έτσι ώστε αυτή να γραφτεί σαν εξελισσόμενη ποσότητα, $\boldsymbol{g}_{ab}(t)$. Οι ανεξάρτητες παράμετροι της χρονικά εξελισσόμενης χωρικής μετρικής αυτής είναι 6 και όχι οι 10 της αρχικής μετρικής, αφού ως προβολικός τανυστής έχει χάσει βαθμούς ελευθερίας. Παρόλα αυτά η πληροφορία για το υπόλοιπο της μετρικής βρίσκεται στη χρονική εξέλιξή του χωρικού κομματιού.

Επομένως, η μετρική έχει αρχικοποιηθεί. Όπως φαίνεται και στην επόμενη υποενότητα οι εξισώσεις για τις συνιστώσες της μετρικής είναι δευτέρου βαθμού επομένως χρειάζεται και η αρχικοποίηση της "ταχύτητας" εξέλιξης της μετρικής.

Ορισμός 8.2.1 (εξωτερική καμπυλότητα)**.** Έστω μελλοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές γεωδαισιακό[12] πεδίο ξ^a πάνω στον υπερβολικό χωροχρόνο M *κάθετο* σε μια υπερεπιφάνεια Cauchy Σ. Η *εξωτερική καμπυλότητα* της υπερεπιφάνειας Σ ορίζεται (και υπολογίζεται πάνω στη Σ) ως:

$$K_{ab} = \nabla_a \xi_b$$

Ειδικότερα, μια hypersurface normal δέσμη καμπυλών από πόρισμα του θεωρήματος Frobenius αποδεικνύεται ότι δεν έχει στρέψη που εν γένει σημαίνει ότι ο τανυστής K_{ab} είναι συμμετρικός. Στην περίπτωση αυτή:

$$K_{ab} = \nabla_{(a}\xi_{b)} = \frac{1}{2}\pounds_\xi g_{ab}$$

όπου η παράγωγος Lie[13] γενικεύεται εύκολα σε τανυστές ως:

$$\pounds_\xi T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} = \xi^c \nabla_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1\ldots a_{i-1} c a_{i+1}\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \nabla_c \xi^{a_i} + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_{j-1} c b_{j+1}\ldots b_l} \nabla_{b_j} \xi^c$$

Ο ορισμός είναι καλός υπό την έννοια ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το μελλοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές γεωδαισιακό[14] πεδίο ξ^a. Στην πραγματικότητα υπολογίζεται για οποιοδήποτε μελλοντικά προσανατολισμένο χρονοειδές πεδίο κάθετο στη Σ αφού δεν συνεισφέρει κάτι στην προβαλλόμενη συναλλοίωτη παράγωγο. Αυτό φαίνεται αξιοποιώντας τη προβαλλόμενη μετρική.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_a{}^c \nabla_c n_b &= (g_a{}^c + n_a n^c)\nabla_c n_b = g_a{}^c \nabla_c n_b + n_a n^c \nabla_c n_b = \nabla_a n_b + n_a n^c \nabla_c n_b \\ \boldsymbol{g}_b{}^c \nabla_c n_a &= (g_b{}^c + n_b n^c)\nabla_c n_a = g_b{}^c \nabla_c n_a + n_b n^c \nabla_c n_a = \nabla_b n_a + n_b n^c \nabla_c n_a \end{aligned}$$

[12] Δηλαδή οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ^a είναι γεωδαισιακές του M.
[13] ορισμός 1.6.2 και υποενότητα 5.2.1 στη σελίδα 46
[14] Δηλαδή οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ^a είναι γεωδαισιακές του M.

οπότε:

$$\begin{aligned}
\pounds_n \boldsymbol{g}_{ab} = n^c\nabla_c \boldsymbol{g}_{ab} + \boldsymbol{g}_{cb}\nabla_a n^c + \boldsymbol{g}_{ac}\nabla_b n^c &= n^c\nabla_c(g_{ab}+n_a n_b) + (g_{cb}+n_c n_b)\nabla_a n^c + (g_{ac}+n_a n_c)\nabla_b n^c = \\
&= n^c\nabla_c g_{ab} + n^c\nabla_c(n_a n_b) + g_{cb}\nabla_a n^c + n_c n_b \nabla_a n^c + g_{ac}\nabla_b n^c + n_a n_c \nabla_b n^c = \\
&= n^c\nabla_c n_a n_b + n_a n^c \nabla_c n_b + \nabla_a n_b + n_c n_b \nabla_a n^c + \nabla_b n_a + n_a n_c \nabla_b n^c
\end{aligned}$$

Γενικά, για το κανονικοποιημένο χρονοειδές πεδίο n^a ισχύει

$$g_{ab}n^a n^b = -1 \Longrightarrow g_{ab}n^a\nabla_c n^b = \frac{1}{2}g_{ab}\nabla_c(n^a n^b) = 0$$

οπότε $\pounds_n \boldsymbol{g}_{ab} = \nabla_a n_b + n^c\nabla_c n_a n_b + \nabla_b n_a + n_a n^c \nabla_c n_b = \boldsymbol{g}_a{}^c\nabla_c n_b + \boldsymbol{g}_b{}^c\nabla_c n_a = 2\boldsymbol{g}_{(a}{}^c\nabla_{|c|}n_{b)} = \boldsymbol{\nabla}_{(a}n_{b)}$:

$$\boldsymbol{K}_{ab} = \nabla_a n_b = \boldsymbol{\nabla}_{(a}n_{b)} = \frac{1}{2}\pounds_n \boldsymbol{g}_{ab}$$

Ο λόγος για τον οποίο ορίστηκε η εξωτερική καμπυλότητα υπερεπιφάνειας μιας πολλαπλότητας είναι ότι σε αντίθεση με τη παράγωγο κατά τη χρονική διεύθυνση της μετρικής, η εξωτερική καμπυλότητα είναι διαφορομορφικά συναλλοίωτη[15].

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι προβαλλόμενοι τανυστές έχουν μεν διαστατικότητα 4 στους δείκτες, είναι όμως ουσιωδώς χωρικοί δε, δηλαδή, μη αναφερόμενοι σε μηδενικές συνιστώσες, οι δείκτες είναι πρακτικά διαστατικότητας 3. Αυτή η τετριμμένη επέκταση των χωρικών τανυστών μας επιτρέπει να τελούμε πράξεις μεταξύ των και χωροχρονικών τανυστών.

8.2.2 Οι εξισώσεις εξέλιξης.

Στο κεφάλαιο 6 στη σελίδα 57 εξήχθησαν τα εξής αποτελέσματα σε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \ldots + \frac{1}{2}\sum_\epsilon g_{\alpha\epsilon}(\partial_\beta\partial_\delta g_{\epsilon\gamma} - \partial_\beta\partial_\epsilon g_{\gamma\delta} - \partial_\gamma\partial_\delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\gamma\partial_\epsilon g_{\beta\delta}) \tag{8.2.1}$$

$$R_{\alpha\beta} = \ldots + \frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} - 2\partial_\nu\partial_{(\alpha}g_{\beta)\mu}) \tag{8.2.2}$$

$$R = \ldots + \sum_\mu\sum_\nu\sum_\sigma\sum_\rho g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma}) \tag{8.2.3}$$

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g_{\alpha\beta} \\
&= \ldots + \frac{1}{2}\sum_\sigma\sum_\rho g^{\sigma\rho}\Big((\partial_\sigma\partial_\rho g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\sigma\rho} - 2\partial_\rho\partial_{(\alpha}g_{\beta)\sigma}) - g_{\alpha\beta}\sum_\mu\sum_\nu g^{\mu\nu}(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma})\Big)
\end{aligned}$$

Ο τανυστής Einstein όπως και η μετρική είναι συμμετρικός, και άρα από τη παραπάνω σχέση εξάγονται 10 ανεξάρτητες εξισώσεις:

- 4 από τις κάθετες στην υπερεπιφάνεια Cauchy προβολές:

$$\sum_\beta G_{\alpha\beta}n^\beta = 8\pi\sum_\beta T_{\alpha\beta}n^\beta \tag{8.2.4}$$

- 6 πάνω στην υπερεπιφάνεια Cauchy:

$$\sum_\gamma\sum_\delta \boldsymbol{g}_\alpha{}^\gamma \boldsymbol{g}_\beta{}^\delta G_{\gamma\delta} = 8\pi\sum_\gamma\sum_\delta \boldsymbol{g}_\alpha{}^\gamma \boldsymbol{g}_\beta{}^\delta T_{\gamma\delta} \tag{8.2.5}$$

Είναι ένα καλό σημείο να επισημανθεί ότι οι εξίσωση Einstein με ύλη δεν έχει πάντα καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy. Αυτό θα διασαφηνίστει αργότερα. Για την ώρα θα δουλέψουμε με τις εξισώσεις κενού,

$$\sum_\beta G_{\alpha\beta}n^\beta = 0 \text{ και } \sum_\gamma\sum_\delta \boldsymbol{g}_\alpha{}^\gamma \boldsymbol{g}_\beta{}^\delta G_{\gamma\delta} = 0.$$

Φυσικά, στο κενό $G_{ab} = R_{ab}$, παρόλα αυτά κρατάμε το G_{ab}όπου μπορούμε καθώς πολλές ταυτότητες ισχύουν για το G_{ab} γενικότερα.

[15] generally covariant: μετασχηματίζεται όπως ένας τανυστής.

8.2.2.1 Περιορισμοί στις αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 8.2.2.1.1. *Οι εξισώσεις*

$$\sum_{\beta} G_{\alpha\beta} n^{\beta} = 0$$

δε περιέχουν χρονικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς οποιαδήποτε συνιστώσα της μετρικής.

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης ξεκινάει απο τη χρονική παράγωγο δεύτερης τάξης, οποιεσδήποτε χαμηλότερης τάξης ή άλλου τύπου μερικές παράγωγοι, αφορούν το input του προβλήματος, εν προκειμένω, τις αρχικές συνθήκες.[16] Είναι οι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές συνθήκες για να αντιστοιχούν σε λύση στο εν λόγω πρόβλημα, βλέπε [3] για μια αυστηρή αναλογική αντιστοίχηση μεταξύ ηλεκτρομαγνητισμού και γενικής σχετικότητας κενού.

Διαμελίζονταν το σύστημα των τεσσάρων αυτών εξισώσεων σε τρεις χωρικές και μία χρονική, έχουμε αντίστοιχα:

$$G_{ab} n^b = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{g}_a{}^c G_{cb} n^b = 0 \wedge G_{ab} n^a n^b = 0$$

Κάνουμε μια εξαίρεση στο φορμαλισμό και σημειώνουμε με bold το αντίστοιχο τανυστή στη Σ αντί για τον προβαλλόμενο τανυστή από τον χωροχρόνο, αναφερόμενοι συγκεκριμένα στον τανυστή Riemann ή/και τα σύμβολα Christoffel.

Λήμμα 8.2.2.1.1 (σχέσεις Gauss-Codacci)**.** *Έστω $\boldsymbol{R}^a{}_{bcd}$ ο τανυστής Riemann της υπερεπιφάνειας Cauchy Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$.*[17] *Τότε:*

$$\boldsymbol{R}^a{}_{bcd} = \boldsymbol{g}^a{}_e \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^g \boldsymbol{g}_d{}^h R^e{}_{fgh} + \boldsymbol{K}^a{}_b \boldsymbol{K}_{cd} - \boldsymbol{K}^a{}_c \boldsymbol{K}_{bd}$$

Επιπλέον:

$$-\boldsymbol{R}_{bd} n^d = \boldsymbol{\nabla}_a \boldsymbol{K}^a{}_b - \boldsymbol{\nabla}_b \boldsymbol{K} = -\boldsymbol{g}_b{}^c R_{cd} n^d$$

Απόδειξη. Για τη πρώτη σχέση Gauss-Codacci ακολουθούμε τα βήματα του [3]: $\forall t \in \mathbb{R}$ και $\forall \boldsymbol{\upsilon}^a \in \mathcal{V}^{(1|0)}\Sigma_t$,[18]

$$\begin{aligned}
2^{-1} \boldsymbol{R}^a{}_{bcd} \boldsymbol{\upsilon}^d &= \boldsymbol{\nabla}_{[b} \boldsymbol{\nabla}_{c]} \boldsymbol{\upsilon}^a \\
&= \boldsymbol{g}^a{}_i \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^k \nabla_{[f} (\boldsymbol{g}_{|k}{}^g \boldsymbol{g}^i{}_{e|} \nabla_{g]} \upsilon^e) \\
&= \boldsymbol{g}^a{}_i \boldsymbol{g}^i{}_e \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^k \boldsymbol{g}_k{}^g \nabla_{[f} \nabla_{g]} \upsilon^e + \boldsymbol{g}^a{}_i \boldsymbol{g}^i{}_e \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^k \nabla_{[f} \boldsymbol{g}_{|k|}{}^g \nabla_{g]} \upsilon^e + \boldsymbol{g}^a{}_i \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^k \boldsymbol{g}_k{}^g \nabla_{[f} \boldsymbol{g}^i{}_{|e|} \nabla_{g]} \upsilon^e \\
&= 2^{-1} \boldsymbol{g}^a{}_e \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^g R^e{}_{fgh} \upsilon^h + \boldsymbol{g}^a{}_d \underbrace{\boldsymbol{g}_{[b}{}^f \boldsymbol{g}_{c]}{}^k \nabla_f \boldsymbol{g}_{|k|}{}^g}_{\boldsymbol{K}_{[bc]} n^g} \nabla_g \upsilon^d + \underbrace{\boldsymbol{g}_{[b}{}^f \boldsymbol{g}^a{}_{|i} \nabla_f \boldsymbol{g}^i{}_{d|}}_{\boldsymbol{K}^a{}_{[b} n_d} \underbrace{\boldsymbol{g}_{c]}{}^g \nabla_g \upsilon^d}_{\xrightarrow[n_d]{} \boldsymbol{K}_{c]d} \boldsymbol{\upsilon}^d} \\
&= 2^{-1} \boldsymbol{g}^a{}_e \boldsymbol{g}_b{}^f \boldsymbol{g}_c{}^g \boldsymbol{g}_d{}^h R^e{}_{fgh} \boldsymbol{\upsilon}^d + \boldsymbol{K}^a{}_{[b} \boldsymbol{K}_{c]d} \boldsymbol{\upsilon}^d,
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{g}_a{}^d \boldsymbol{g}_b{}^e \nabla_d \boldsymbol{g}_{ec} = \boldsymbol{g}_a{}^d \boldsymbol{g}_b{}^e \nabla_d (g_{ec} + n_e n_c) = \boldsymbol{g}_a{}^d \boldsymbol{g}_b{}^e \underbrace{\nabla_d g_e{}^c}_{=0} + \underbrace{\boldsymbol{g}_b{}^e \underbrace{\boldsymbol{g}_a{}^d \nabla_d n_e}_{\boldsymbol{K}_{ae}}}_{\boldsymbol{K}_{ab}} n_c + \boldsymbol{g}_a{}^d \underbrace{\boldsymbol{g}_b{}^e n_e}_{=0} \nabla_d n_c = \boldsymbol{K}_{ab} n_c,$$

$$\boldsymbol{g}_a{}^c n_b \nabla_c \upsilon^b = \boldsymbol{g}_a{}^c \underbrace{\nabla_c (n_b \upsilon^b)}_{=0} - \underbrace{\boldsymbol{g}_a{}^c \nabla_c n_b}_{\boldsymbol{K}_{ab}} \upsilon^b = \boldsymbol{K}_{ab} \upsilon^b = \boldsymbol{K}_{ab} \boldsymbol{\upsilon}^b.$$

---

[16] Αυτό είναι εύκολα κατανοητό αφού από το pool των πεδίων και των μερικών παραγώγων τους, τα πάντα είναι ελεύθερα μέχρι που να εμφανιστεί η πρώτη εξάρτηση. και αυτό γίνεται με τη διαφορική εξίσωση που συνδέει δεύτερη χρονική παράγωγο με δεύτερες χωρικές παραγώγους και τα πάντα απο κατώτερες τάξης. Επομένως οποιεσδήποτε εξισώσεις που συνδέουν οποιαδήποτε απο τα τελευταία, είναι περιορισμοί των αρχικών συνθηκών και κατ΄ επέκταση των λύσεων της διαφορική εξίσωσης αφού μόνη της μαζί με τις αρχικές συνθήκες αρκούν για το μονοσήμαντο προσδιορισμό λύσης σε ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy.

[17] Η διατύπωση είναι δόκιμη αφού οι υπερεπιφάνειες Cauchy συνδέονται με μια μονοπαραμετρικη ομάδα διαφορομορφισμών, ήτοι διαφορική ροή, βλέπε ενότητα 1.6 στη σελίδα 22.

[18] υπό τη σιωπηλή υπόθεση ότι οι Σ_t είναι διαφορικές, όχι απλά συνεχής, την τουλάχιστον μόνο των οποίων μας διασφαλίζει το θεώρημα 7.1.2 στη σελίδα 68.

Επιπλέον, $\boldsymbol{K}^a{}_b = \boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{K}_{cb} = \boldsymbol{K}_{bc}\boldsymbol{g}^{ca} = \boldsymbol{K}_b{}^a$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{K}^a{}_b - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b n^a - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a n^a (= -\boldsymbol{R}_{bd}n^d) &(8.2.6)\\
&= \boldsymbol{g}_b{}^c\boldsymbol{\nabla}_a\nabla_c n^a - \boldsymbol{g}_a{}^c\boldsymbol{\nabla}_b\nabla_c n^a\\
&= \boldsymbol{g}_a{}^d\boldsymbol{g}_b{}^c\nabla_d\nabla_c n^a - \boldsymbol{g}_b{}^d\boldsymbol{g}_a{}^c\nabla_d\nabla_c n^a\\
&= \boldsymbol{g}_b{}^d(g_a{}^c + n_a n^c)(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)n^a\\
&= \boldsymbol{g}_b{}^d g_a{}^c R^a{}_{cde}n^e + \boldsymbol{g}_b{}^d n_a n^c R^a{}_{cde}n^e\\
&= -\boldsymbol{g}_b{}^d R_{cd}n^d + \underbrace{\boldsymbol{g}_b{}^d n_a n^c R^a{}_{cde}n^e}_{=0} &(8.2.7)
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 8.2.2.1.1 (περιορισμοί αρχικών συνθηκών). *Οι περιορισμοί στις αρχικές συνθήκες μπορούν να πάρουν την γενικά συναλλοίωτη (και πραγματικού περιορισμού αρχικών συνθηκών) μορφή:*

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}^{ab}) = 0 \ \textit{και}\ \boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{K}^a{}_b - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{K} = 0$$

Απόδειξη. Οι προς απόδειξη εξισώσεις αντιπροσωπεύουν το χωρισμό των τεσσάρων περιορισμών αρχικών συνθηκών σε μία χρονική και τρεις χωρικές σύμφωνα με την επιλογή της υπερεπιφάνειας Cauchy Σ_t, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_\alpha\sum_\beta G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = 0 \text{ και } \sum_\beta\sum_\gamma \boldsymbol{g}_\alpha{}^\gamma G_{\gamma\beta}n^\beta = 0$$

$$G_{ab}n^a n^b = 0 \text{ και } \boldsymbol{g}_a{}^c G_{cb}n^b = 0$$

Ξεκινώντας με τη χρονική, έχουμε ότι

$$\boldsymbol{R}_{abcd} = \boldsymbol{g}_a{}^e\boldsymbol{g}_b{}^f\boldsymbol{g}_c{}^g\boldsymbol{g}_d{}^h R_{efgh} + \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{cd} - \boldsymbol{K}_{ac}\boldsymbol{K}_{bd} \Longrightarrow$$
$$\boldsymbol{g}_a{}^e\boldsymbol{g}_b{}^f\boldsymbol{g}_c{}^g\boldsymbol{g}_d{}^h R_{efgh} = \boldsymbol{R}_{abcd} + \boldsymbol{K}_{ac}\boldsymbol{K}_{bd} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{cd} \Longrightarrow$$
$$\underbrace{\boldsymbol{g}_a{}^e\boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}_c{}^g}_{\boldsymbol{g}^{eg}}\underbrace{\boldsymbol{g}_b{}^f\boldsymbol{g}^{bd}\boldsymbol{g}_d{}^h}_{\boldsymbol{g}^{fh}} R_{efgh} = \boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}^{bd}\boldsymbol{R}_{abcd} + \boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}^{bd}\boldsymbol{K}_{ac}\boldsymbol{K}_{bd} - \boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}^{bd}\boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{cd} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}^{bd}R_{abcd} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}^{ab},$$

ενώ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^{ac}\boldsymbol{g}^{bd}R_{abcd} &= g^{ac}g^{bd}R_{abcd} + g^{ac}R_{abcd}n^b n^d + g^{bd}R_{abcd}n^a n^c + \underbrace{R_{abcd}n^a n^b n^c n^d}_{=0}\\
&= R + 2R_{ab}n^a n^b\\
&= 2G_{ab}n^a n^b
\end{aligned}$$

Για τις χωρικές, έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{g}_a{}^c G_{cb}n^b = \boldsymbol{g}_a{}^c R_{cb}n^b = \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{K}^b{}_a - \boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{K},$$

όπου $\boldsymbol{g}_a{}^c g_{cb}n^b = \boldsymbol{g}_a{}^c n_c = 0$. □

8.2.2.2 Επιλογή βαθμίδας.

Αποδεικνύεται, στα πλαίσια της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων, ότι αν οι περιοριστικές εξισώσεις ισχύουν σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Cauchy τότε ισχύουν σε κάθε υπερεπιφάνεια της διαστρωμάτωσης του χωροχρόνου. Αυτό διασφαλίζεται από τη 2^η ταυτότητα Bianchi[19],

$$\nabla^a G_{ab} = 0,$$

[19] εξίσωση (6.0.2), βλέπε κεφάλαιο 6 γενικότερα.

μαζί με τις υπόλοιπες εξισώσεις εξέλιξης, οι οποίες μηδενίζουν τις χωρικες συνιστώσες του τανυστή Einstein,

$$G_{\alpha\beta} = 0,\, \forall \alpha, \beta > 0,$$

και άρα, στο κενό, η ταυτότητα ανάγεται σε μια γραμμική ομογενής μερική διαφορική εξίσωση ως προς τις μία χρονικη και τρεις μεικτές συνιστώσες. Πράγματι, με βάση τα παραπάνω, μόνο οι 6 χωρικές εξισώσεις του Einstein είναι πραγματικές εξισώσεις εξέλιξης της μετρικής. Επομένως έχουμε 4 βαθμούς ελευθερίας βαθμίδας οι οποίοι κατ΄ αναλογια με τον ηλεκτρομαγνιτισμό, δεν είναι φυσική ελευθερία, αλλά μαθηματικη απροσδιοριστία των λύσεων η οποία είναι συνιφασμένη με την ομοιότητα διαφορομορφικών λύσεων τις μετρικής. Υπό την υπόδειξη του Wald ([3]), επιλέγουμε τη βαθμίδα για την οποία:

$$\Box x^{\beta} = 0, \text{ όπου } \Box \equiv g^{ab}\nabla_a\nabla_b \tag{8.2.8}$$

Η επιλογή για κάθε τοπικό χάρτη είναι δυνατή, αφού οι εξισώσεις (8.2.8) αποτελούν ένα υπερβολικό γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικων εξισώσεων και αποτελεί καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy. Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα ([3]):

Η συνθήκης βαθμίδας (8.2.8) αφορά συγκεκριμενοποίηση συστήματος συντεταγμένων, και άρα εφαρμόζεται πάντα σε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων. Επομένως, αντιμετωπίζουμε κάθε εξίσωση βαθμίδας χωριστά δηλαδή ο τελεστής της D' Alambertιανής δρώμενος σε βαθμωτα πεδία. Από τη σχέση (B′.1.1) στο παράρτημα B′.1.1.1: $\forall\mu$,

$$\nabla_a\nabla^a x^{\mu} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\alpha}(\sqrt{|g|}\nabla^{\alpha}x^{\beta}) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\alpha}(\sqrt{|g|}\underbrace{\sum_{\gamma} g^{\alpha\gamma}\underbrace{\partial_{\gamma}x^{\beta}}_{\delta_{\gamma}{}^{\beta}}}_{g^{\alpha\beta}})$$

$$\Box x^{\beta} = \sum_{\alpha}\left(\partial_{\alpha}g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\sum_{\mu}\sum_{\nu} g^{\mu\nu}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}\right) \tag{8.2.9}$$

Αναγράφουμε τους όρους δεύτερης τάξης ως προς τη μετρική του αναπτύγματος (8.2.2) του τανυστή Ricci ώστε να εμφανιστούν όροι που πειέχονται στο ανάπτυγμα του $\Box x^b$ ως προς τη μετρική. Πράγματι έχουμε, ταΐζοντας όρους χαμηλότερης τάξης στο $F_{\alpha\beta}$:[20]

$$(R_{\alpha\beta})_0 = R_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} g_{\gamma(\alpha}\partial_{\beta)}\Box x^{\gamma} = F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu} g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} \tag{8.2.10}$$

Η εξίσωση (8.2.10) είναι γνωστή στη ξένη βιβλιογραφία και ως *reduced Einstein equation*. Από τη σχέση (8.2.10), τανυστής Einstein μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των τανυστών καμπυλότητας επεκφρασμένους στο σύστημα αρμονικών συντεταγμένων, σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων που εμπεριέχεται σε αυτό:

$$G_{\alpha\beta} = \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)_0 + \sum_{\gamma}\left(g_{\gamma(\alpha}\partial_{\beta)}\Box x^{\gamma} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}\Box x^{\gamma}\right)$$

Η εξίσωση κενού είναι συναλλοίωτη, επομένως $(R_{\alpha\beta})_0 = 0 \Longrightarrow$

$$\sum_{\gamma} g_{\gamma(\alpha}\partial_{\beta)}\Box x^{\gamma} = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι εκτός των άλλων $\pounds_t\Box x^{\alpha} = 0$[21], $\forall\alpha$ παντού στο χωροχρόνο και άρα πάνω στη Σ. Επιπλέον από δεύτερη ταυτότητα Bianchi, $\nabla^a G_{ab} = 0$:

$$0 = \sum_{\alpha}\nabla^{\alpha}G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\delta} g^{\alpha\delta}\nabla_{\delta}\sum_{\gamma}(g_{\gamma\alpha}\partial_{\beta}\Box x^{\gamma} + g_{\gamma\beta}\partial_{\alpha}\Box x^{\gamma} - g_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}\Box x^{\gamma}) =$$

[20] Η παράσταση γράφεται με ελληνικούς δείκτες μιας και ισχυει μόνο σε αρμονικές συντεταγμένες.

[21] υποενότητα 8.3.1 στην επόμενη σελίδα για ορισμό της $\pounds_t$.

$$\ldots + \frac{1}{2}\sum_\delta \sum_\gamma (\underbrace{\underbrace{\sum_\alpha g_{\gamma\alpha} g^{\alpha\delta}}_{\delta_\gamma{}^\delta} \partial_\delta}_{\partial_\gamma} \partial_\beta \Box x^\gamma + \sum_\alpha g_{\gamma\beta} g^{\alpha\delta} \partial_\alpha \partial_\delta \Box x^\gamma - \underbrace{\underbrace{\sum_\alpha g_{\beta\alpha} g^{\alpha\delta}}_{\delta_\beta{}^\delta} \partial_\delta}_{\partial_\beta} \partial_\gamma \Box x^\gamma) = \ldots + \frac{1}{2}\Box' \Box x_\beta$$

όπου στο τελευταίο βήμα προστέθηκαν κι άλλοι γραμμικοι όροι στους $\ldots$ από το πέρασμα της μετρικής μέσα στις συνήθεις μερικές παραγώγους[22], ενώ $\Box' = g^{ab}\partial_a \partial_b$. β-συστέλλωντας με $g^{\alpha\beta}$ καταλήγουμε σε σύστημα της μορφής του θεωρήματος 8.1.3 και άρα

$$\Box' \Box x^\alpha + \ldots = 0, \Box x^\alpha = \pounds_t \Box x^\alpha = 0,$$

αποτελεί καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες και με λύση η οποία είναι συμβατή με την εξίσωση. Το σύστημα είναι γραμμικό επομένως στο domain of dependence του υποσυνόλου της Σ που χαρτογραφείται, $\Box x^\alpha = 0$ με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες, οπότε μπορούμε να περάσουμε τοπικά σε αρμονικές συντεταγμένες κλειδώνοντας τη βαθμίδα επίλυσης των εξισωσεων Einstein.

8.3 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ CAUCHY (ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ)

8.3.1 Αρχικές συνθήκες.

Spacetime metric g_{ab} of a globally hyperbolic spacetime M is described by (ADM decomposition) the *lapse function* $\boldsymbol{N}$, the *shift vector* $\boldsymbol{N}_a$ and the *spatial metric* $\boldsymbol{g}_{ab}$ defined as follows in classical relativistic spacetime: $\forall t^a$ such that $t^a \nabla_a t = 1$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{g}_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \\ \boldsymbol{N} = -t^a n_a = (n^a \nabla_a t)^{-1} \\ \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{g}_{ab} t^b \end{gathered}$$

where n^a is hypersurface orthonormal to the spacetime foliation with parameter t.

Έτσι, η πλήρως αρχικοποιημένη μετρική συνίσταται από τη χωρική μετρική $\boldsymbol{g}_{ab}$, το διάνυσμα χρονικής μετατόπισης χωρικών συντεταγμένων $\boldsymbol{N}_a$ και το βαθμωτό χρόνου $\boldsymbol{N}$. Η φαινομενική αυθαιρεσία αρχικοποίησης είναι στην πραγματικότητα συναλλοιώτητα της μετρικής η οποία παραβιάστηκε με την ADM αποδόμηση της και η οποία επαναφέρεται ορίζοντας την τυχούσα συντεταγμένη χρόνου $\boldsymbol{N}$ με artifact τη μετατόπιση των χωρικών συντεταγμένων περιγραφόμενη από το χωρικό πεδίο ταχυτήτων $\boldsymbol{N}^a$.

Η αρχικοποίηση της μετρικής σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων γίνεται με χωρικούς δείκτες εν προκειμένω:

$$\begin{gathered} g_{00} = \sum_\alpha \sum_\beta \boldsymbol{g}_{\alpha\beta} \boldsymbol{N}^\alpha \boldsymbol{N}^\beta - \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \\ g_{\alpha 0} = \boldsymbol{N}_\alpha / g_{0\beta} = \boldsymbol{N}_\beta \\ g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_{\alpha\beta} \end{gathered}$$

Η αρχικοποίηση της "ταχύτητας" της μετρικής γίνεται όπως αναφέρθηκε και στην υποενότητα 8.2.1.1 με το χωρικό, γενικά συναλλοίωτο τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας αρχικών συνθηκών Σ,[23]

$$\frac{1}{2}\pounds_t \boldsymbol{g}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{K}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\pounds_n \boldsymbol{g}_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\pounds_{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{g}_{\alpha\beta}$$

ενώ οι εναπομένουσες συνιστώσες καθορίζονται από την εξίσωση βαθμίδας που αναλύθηκε στην υποϋποενότητα 8.2.2.2, δηλαδή $\pounds_t \boldsymbol{g}_{0\mu}$, $\forall \mu$ ικανοποιούν την αρχική συνθήκη βαθμίδας της μορφής (8.2.8) πάνω στη Σ.

[22] για τις οποίες δεν ισχύει $\partial_a g_{bc} = 0$, όπως με τις φυσικές συναλλοίωτες παραγώγους.

[23] Τα σύμβολα t και $\boldsymbol{N}$ στις παραγώγου Lie αντιπροσωπεύουν τα διανύσματα t^a και $\boldsymbol{N}^a$.

8.3.2 Χρονική εξέλιξη.

8.3.2.1 Ύπαρξη.

Δεδομένου ότι ο χωροχρόνος Minkowski αποτελεί την απλούστερη γνωστή λύση του κενού, σύμφωνα με το θεώρημα 8.1.4 έχουμε καταφέρει να θεμελιώσουμε την τοπική ύπαρξη καλά τοποθετημένου προβλήματος Cauchy για λύσεις της μετρικής αρκετά κοντά της επίπεδης.[24] Η γενίκευση, σύμφωνα με το [3], επιτυγχάνεται ανακλιμακώνοντας τις αρχικές συνθήκες και το χωροχρόνο σε κλίμακα $\lambda \ll R$.

Συγκεκριμένα, μετασχηματίζοντας conformally τη μετρική με global κλίμακα $\lambda > 0$,[25] $g_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow \lambda^{-2} g_{\alpha\beta}(x)$, και επανακλιμακώνοντας το χωροχρόνο, $x^\gamma \longrightarrow \lambda^{-1} x^\gamma$ τελικά οι αρχικές συνθήκες αλλάζουν ως:

$$g_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow g_{\alpha\beta}(x) \text{ και } \pounds_t g_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow \lambda \pounds_t g_{\alpha\beta}(x)$$

Στις νέες συντεταγμένες με τις νέες αρχικές συνθήκες και για $\lambda \ll R$, εξάγουμε μια λύση $h_{\alpha\beta}$ της εξίσωσης Einstein με υπόβαθρό την επίπεδη μετρική. Η μετρική $g_{\alpha\beta}(\lambda^{-1}x)$ αποτελεί λύση με τις πρωταρχικές αρχικές συνθήκες. Με λίγα λόγια κάθε τοπική λύση της εξίσωσης Einstein είναι conformally flat.

8.3.2.2 Μοναδικότητα.

Η τοπική μοναδικότητα μιας λύσης σε ένα ανοικτό $O \subseteq M$ με $O \cap \Sigma \neq \emptyset$, ανάγεται στην εύρεση διαφορομορφισμού ψ που να συνδέει μια τυχούσα λύση με αρχικές συνθήκες διαφορόμορφες με τις πρωταρχικές.[26] Η πρωταρχική λύση είναι υπολογισμένη σε αρμονικές συντεταγμένες, οπότε ο ψ πρέπει να περιέχει εκτός τον άλλων και μετασχηματισμό σε αρμονικές συντεταγμένες. Υπό τις ίδιες συντεταγμένες, οι αρχικές συνθήκες των δύο λύσεων ταιριάζουν και ικανοποιούν και οι δύο τις ίδιες reduced equations (8.2.10), οπότε χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα του θεωρήματος 8.1.4, από συνέχεια λύσεων με αρχικές συνθήκες εφαρμοσμένη στην ταύτιση εδώ των αρχικών συνθηκών. Φυσικά είναι αναμενόμενο ότι οι τοπικές λύσεις $(O|g_{ab})$ είναι globally hyperbolic με υπερεπιφάνεια Cauchy τη $O \cap \Sigma$, δηλαδή $O \subseteq D(O \cap \Sigma)$[27].

8.3.2.3 Globalization

Έχει δειχθεί ότι $\forall p \in \Sigma$, $\exists O \in \varpi(p)$ και g_{ab} λύση της εξίσωσης Einstein στο O.[28] Με αυτό το αποτέλεσμα χτίζουμε έναν διαφορικό άτλαντα πάνω στη Σ από ανοικτά, με την επαγόμενη στο Σ τοπολογία, $O \cap \Sigma$ σύνολα που παίρνουμε από τις τοπικές λύσεις. Η ιδιότητα της παρασυμπάγειας[29] διασφαλίζει ότι μόνο πεπερασμένα το πλήθος επικαλύπτονται σε κάθε σημείο της Σ και άρα οι επικαλύψεις είναι ανοικτά σύνολα. Σε κάθε επικάλυψη έχουμε προφανώς ύπαρξη λύσης, και από μοναδικότητα στις επικαλύψεις έχουμε διαφορομορφική ταύτιση των λύσεων. Δε λέμε τίποτα καινούριο εδώ, παρά μόνο ότι υπάρχει και είναι μοναδική η λύση κοντά σε όλη την υπερεπιφάνεια αρχικών συνθηκών Σ. Το patchάρισμα αυτό ως εκ τούτου διαμορφώνει έναν globally hyperbolic χωροχρόνο M κοντά σε όλη τη Σ, δηλαδή με υπερεπιφάνεια Cauchy τη Σ.

8.3.2.4 Maximal Cauchy Development

Εδώ τίθεται το ερώτημα κατά πόσο μακριά από τη Σ εκτείνεται αυτή η global λύση. Η απάντηση βρίσκεται στην παρατήρηση ότι οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο $N \subseteq M$ με $\Sigma \subseteq N$, δηλαδή ένας globally hyperbolic υποχωροχρόνος με την επαγόμενη μετρική g_{ab} της αρχικής λύσης είναι επίσης λύση της εξίσωσης Einstein με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Εδώ είναι προφανές ότι ακολουθείται η γνωστή συνταγή της υποενότητας Α΄.1.2 στη σελίδα 91 του παραρτήματος Α΄, της μερικής διάταξης του υποσυνόλου δηλαδή. Ποιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 8.3.2.4.1. $\forall (M|g_{ab})$ και $\forall (N|h_{ab})$, λύσεις τις εξίσωσης Einstein αρχικοποιημένες από κοινού σε μια υπερεπιφάνεια Σ με διαφορόμορφες αρχικές συνθήκες, $(M|g_{ab}) \geq (N|h_{ab})$ αν και μόνο αν $M \supseteq N$ και οι λύσεις είναι διαφορόμορφες στη κοινή περιοχή N *με σταθερή* την *επιφάνεια Cauchy* Σ.

---

[24] Αυτό καθιστά αυτή τη θεμελίωση πάρα πολύ βολική για τη γραμμική θεωρία βαρύτητας όπου η μετρική θεωρείται διαταραγμένη επίπεδη.

[25] Εδώ οι δείκτες είναι ξανά χωροχρονικοί.

[26] Φυσικά μια λύση ως προς τη μετρική είναι γενικά συναλλοίωτη...

[27] το οποίο είναι globally hyperbolic αφού $O \cap \Sigma$ είναι ανοικτό και άρα $D(O \cap \Sigma) = (D(O \cap \Sigma))^\circ$.

[28] Οι γειτονιές γεγονότων είναι χωροχρονικές.

[29] υποενότητα Α΄.1.1.1 στη σελίδα 89 και [3]

Στο σύνολο των λύσεων με διαφορόμορφες αρχικές συνθήκες με τη μερική διάταξη που περιγράφηκε, κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα,[30] επομένως από λήμμα του Zorn (στη σελίδα 91) *υπάρχει* μεγιστικό στοιχείο στοιχείο, το οποίο είναι ο "μέγιστος" δυνατός globally hyperbolic χωροχρόνος εφοδιασμένος με τη μετρική g_{ab}, λύση της εξίσωσης Einstein *στο κενό.*

Το ότι είναι μοναδικό το μεγιστικό στοιχείο σε αυτήν την περίπτωση, ενδείκνυται από το άτοπο των δύο μεγιστικών λύσεων, οι οποίες, δεδομένου των κοινών αρχικών συνθηκών, είναι διαφορόμορφες στην επικάλυψη τους επομένως (χονδρικά μιλώντας) μπορούν να ενωθούν σε μια ενιαία λύση η οποία φράσσει και τις δύο προηγούμενες, παραβιάζοντας τη μεγιστικότητά τους.[31] Συμπερασματικά, έχουμε ότι:

Για κάθε τρισδιάστατη Riemannια διαφορίσιμη πολλαπλότητα Σ εφοδιασμένη με μετρική $\boldsymbol{g}_{ab}$ και εξωτερική καμπυλότητα $\boldsymbol{K}_{ab}$, υπάρχει *μοναδική* τετραδιάστατη ψευδοRiemannια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μετρική g_{ab} , globally hyperbolic, η οποία είναι λύση της εξίσωσης Einstein κενού, $R_{ab} = 0$, τέτοια, ώστε κάθε τετραδιάστατη ψευδοRiemannια διαφορίσιμη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μετρική g_{ab}, globally hyperbolic, λύση της εξίσωσης κενού, *εμβαπτίζεται* στην M *ισομετρικά.*

8.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ CAUCHY (ΜΕ ΥΛΗ)

Το πρόβλημα Cauchy της βαρύτητας Einstein με ύλη εν γένει δεν είναι γνωστό αν είναι καλά τοποθετημένο, παρά μόνο για ειδικές περιπτώσεις ύλης μεταξύ των οποίων και gauge πεδία γενικά και η ρευστομηχανική περίπτωση

$$T_{ab} = \rho \upsilon_a \upsilon_b + P(g_{ab} + \upsilon_a \upsilon_b)$$

για ειδικές μορφές της καταστατικής εξίσωσης $P = P(\rho)$, όπου υ είναι το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού και g_{ab} η εμπλεκόμενη λύση του προβλήματος φυσικά.

Οι περιορισμοί των αρχικών συνθηκών, $G_{ab}n^b = 8\pi T_{ab}n^b$, έχουν τη μορφή:

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}^{ab} = 16\pi\rho,\ \rho = T_{ab}n^a n^b \text{ και } \boldsymbol{\nabla}^a(\boldsymbol{K}_{ab} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_{ab}) = 8\pi \boldsymbol{J}_b,\ \boldsymbol{J}_b = -\boldsymbol{g}_b{}^c T_{cd}\, n^d$$

---

[30] Πράγματι, για κάθε αλυσίδα, η ένωση των στοιχείων της εφοδιασμένη με τη μετρική η οποία κατασκευάζεται "κλιμακωτά" απο τους διαδοχικούς διαφορομορφισμούς-εμβάπτιση κάθε λύσης με την επόμενή της στην αλυσίδα, αποτελεί άνω φράγμα της αλυσίδας.

[31] ορισμός Α'.1.2.1.4 στη σελίδα 91

Μέρος IV

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα Α΄

ΔΟΜΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ & ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Α΄.1 ΔΟΜΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Α΄.1.1 Τοπολογία.

Ορισμός Α΄.1.1.1 (τοπολογικός χώρος)**.** Έστω σύνολο X και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$[1]. Το σύνολο $\mathcal{T}$ καλείται *τοπολογία* του X αν και μόνο αν:

$\mathfrak{T}_1$: $\emptyset \in \mathcal{T}$ & $X \in \mathcal{T}$,

$\mathfrak{T}_2$: $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T},$$

$\mathfrak{T}_3$: $\forall \{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{T}$,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}.$$

Ο $(X|\mathcal{T})$ καλείται *τοπολογικός χώρος* και $\forall U \in \mathcal{T}(X)$, U καλείται *ανοιχτό* και $X \setminus U$ *κλειστό*.

Πρόταση Α΄.1.1.1 (σχετική τοπολογία)**.** *Έστω $A \subseteq X$. Τότε ο $(A|\mathcal{T}(A))$ με $\mathcal{T}(A) \equiv \{U \cap A | U \in \mathcal{T}(X)\}$ είναι τοπολογικός χώρος.*[2]

Απόδειξη. Έχουμε:

$\mathfrak{T}_1$: $\emptyset \in \mathcal{T} \Longrightarrow \emptyset \cap A = \emptyset \in \mathcal{T}(A)$ & $X \in \mathcal{T} \Longrightarrow X \cap A = A \in \mathcal{T}(A)$,

$\mathfrak{T}_2$: $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, $\{U_i \cap A\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}(A)$ και

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

συνεπώς

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cap A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) \in \mathcal{T}(A),$$

---

[1] $\mathcal{P}(X)$ είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου X.
[2] $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}$ φυσικά...

$\mathfrak{T}_3$: $\forall\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$, $\{U_i \cap A\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}(A)$ και

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$$

συνεπώς

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \cap A = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap A) \in \mathcal{T}(A).$$

quod erat demonstrandum. □

Ορισμός Α΄.1.1.2 (βάση τοπολογίας)**.** Έστω $(X|\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ καλείται *βάση* της $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν $\forall U \in \mathcal{T}$, $\exists\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ τέτοια, ώστε

$$U = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ καλείται *υποβάση* της $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists\{F_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ τέτοια, ώστε

$$B = \bigcap_{j=1}^n F_j.$$

Τότε, $\forall U \in \mathcal{T}$, $\exists\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ τέτοια, ώστε $\forall i \in I$, $\exists\{F_{ij}\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ τέτοια, ώστε

$$U = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j=1}^n F_{ij}.$$

$\forall\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\exists\mathcal{T} := \mathcal{T}[\mathcal{F}]$ της οποίας είναι υποβάση. Δεν ισχύει το ίδιο για τις βάσεις...

Αξίωμα δεύτερου αριθμησιμου. Ένας τοπολογικός χώρος ικανοποιει το αξίωμα του δεύτερου αριθμησίμου αν και μόνο αν η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση.

Ορισμός Α΄.1.1.3 (τοπολογία γινόμενο)**.** Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και

$$X := \prod_{i\in I} X_i.$$

Η *τοπολογία γινόμενο* $\mathcal{T}$ στο X ορίζεται απο τη βάση $\mathcal{B}$ της, η οποία αποτελειται απο σύνολα της μορφής $U := \Pi_{i\in F} U_i \cup \Pi_{i\in I\setminus F} X_i \in \mathcal{B}$, $\forall F \subseteq I$ πεπερασμένο υποσύνολο δεικτών και $\forall\{U_i \in \mathcal{T}_i\}_{i\in F}$.

Ορισμός Α΄.1.1.4 (γειτονιά σημείου)**.** Έστω τοπολογικός χώρος X και $x \in A \subseteq X$. Καλούμε *γειτονιά του σημείου* x το σύνολο $\varpi(x) := \{U \in \mathcal{T}|x \in U\} \subseteq \mathcal{T}$. Καλούμε *βάση της γειτονιάς* $\varpi(x)$ ή *τοπική βάση του σημείου* x ένα υποσύνολο $\beta(x) \subseteq \varpi(x)$ τέτοιο, ώστε ισοδύναμα, $\forall U \in \varpi(x)$, $\exists V \in \beta(x)$ τέτοιο, ώστε $V \subseteq U$. Ο ορισμός επεκτείνεται εύκολα και για τη γειτονιά του υποσυνόλου A, $\varpi(A) := \{U \in \mathcal{T}|A \subseteq U\} \subseteq \mathcal{T}$.

Ορισμός Α΄.1.1.5. Έστω X τοπολογικός χώρος και $x \in X \supseteq A$:

- Το σημείο x καλείται *εσωτερικό* του συνόλου A αν και μόνο αν $\exists U \in \varpi(x)$ τέτοιο, ώστε $U \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A καλειται *εσωτερικό* του A και συμβολίζεται A°. Ισχύει $A^\circ = \cup\{U \subseteq A|U \in \mathcal{T}\}$ ή το εσωτερικό ενός συνόλου είναι το *μεγιστικό*[3] *ανοιχτό υποσύνολο* του με τη μερική διάταξη της τοπολογίας.

- Το σημείο x καλείται *οριακό* του συνόλου A αν και μόνο αν $\forall U \in \varpi(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$. Το σύνολο των οριακών σημείων του A καλειται *κλειστότητα* του A και συμβολίζεται $\overline{A}$. Ισχύει $\overline{A} = \cap\{V \supset A|X\setminus V \in \mathcal{T}\}$ ή η κλειστότητα ενός συνόλου είναι το *ελαχιστικό κλειστο υπερσύνολο* του με τη μερική διάταξη της τοπολογίας των κλειστών.[4]

[3] ορισμός Α΄.1.2.1.4

[4] Δεδομένου ότι ένα υποσύνολο του X σε μια δεδομένη τοπολογία μπορεί να είναι ανοιχτό και κλειστό ή κανένα απο τα δύο, ένας τοπολογικός χώρος ορίζεται ισοδύναμα απο τα κλειστά του σύνολα. Βεβαια στην περίπτωση αυτή αλλάζουν σημαντικά ορισμοί όπως αυτός της συνεκτρικότητας, συμπάγειας κ.λ.π..

- Το σημείο x καλειται *σύνοριακό* του συνόλου A αν και μόνο αν είναι $\forall U \in \varpi(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$ και $U \cap X \backslash A \neq 0$. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A καλείται *συνορο* του A και συμβολίζεται ∂A. Ισχύει $\partial A = \overline{A} \backslash A^{\circ}$.
- Το σημείο x καλειται σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν $\forall U \in \varpi(x)$, $U \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset$. Ένα συμείο συσσώρευσης είναι και οριακο σημείο. Ένα οριακό σημείο που δεν είναι σημείο συσσώρευσης είναι απμονωμένο σημείο.
- Το A είναι πυκνό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $\overline{A} = X$.

Με λίγα λόγια, η κλειστότητα ενός υποσυνόλου A του X μπορει και διαχωρίζεται, είτε σε σύνορο και εσωτερικό, $\overline{A} = \partial A \cup A^{\circ}$, $\partial A \cap A^{\circ} = \emptyset$, είτε σε σημεία συσσώρευσης και απομονωμένα σημεία.

Ορισμός Α΄.1.1.6 (τοπολογία Hausdorff)**.** Ένας τοπολογικός χώρος X καλειται Hausdorff αν και μόνο αν $\forall x \in X$ και $\forall y \in X$, $\exists U \in \varpi(x)$ και $\exists V \in \varpi(y)$ τέτοια, ώστε $U \cap V = \emptyset$.

Σχόλιο. Έστω τοπολογικός χώρος X και $A \subseteq X$.

- Το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $A = A^{\circ}$.
- Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.

Α΄.1.1.1 Συμπάγεια

Ορισμός Α΄.1.1.1.1 (κάλυμμα)**.** Μια οικογένεια υποσυνόλων $\{U_i\}_{i \in I}$ ενός τοπολογικού χώρου X, καλείται *κάλυμμα* του X αν και μόνο αν

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Κάθε υποσύνολο του $\{U_i\}_{i \in I}$ που καλύπτει το X ονομάζεται *υποκάλυμμα* του $\{U_i\}_{i \in I}$. Κάθε κάλυμμα $\{V_j\}_{j \in J}$ του X τέτοιο, ώστε $\forall j \in J$, $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $V_j \subseteq U_i$, αποτελεί *εκλέπτυνση* του $\{U_i\}_{i \in I}$ και γενικευει την έννοια του υποκαλύμματος.

Ορισμός Α΄.1.1.1.2 (συμπάγεια)**.** Έστω τοπολογικός χώρος X:

- Ο X είναι *συμπαγής* αν και μόνο αν κάθε *ανοιχτό* κάλυμμά του έχει *πεπερασμένο* υποκάλυμμα, δηλαδη $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ ανοικτό κάλυμματου X, $\exists F \subseteq I$ πεπερασμένο, τέτοιο, ώστε $\{U_i\}_{i \in F}$ κάλυμμα του X.
- Ο X είναι *Lindelöf* αν και μόνο αν κάθε *ανοιχτό* κάλυμμά του έχει *αριθμήσιμο* υποκάλυμμα, δηλαδη $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ ανοικτό κάλυμματου X, $\exists C \subseteq I$ πεπερασμένο, τέτοιο, ώστε $\{U_i\}_{i \in C}$ κάλυμμα του X.

Ορισμός Α΄.1.1. Ως γνωστό οι ορισμοί ανοιχτότητας και κλειστότητας μεταφέρονται στη σχετική τοπολογια $\forall A \subseteq X$, X τοπολογικός χώρος. Αυτό ισχύει για κάθε ορισμό που αφορά την τοπολογία ενός χώρου. Παρόλα αυτά παραθέτουμε τον σχετικό ορισμό της συμπάγειας μαζι με κάποιους βοηθητικους ορισμούς:

- Το A είναι συμπαγές υποσύνολο του X αν και μόνο αν A είναι συμπαγής με τη σχετική τοπολογία.
- Το A είναι *σχετικά συμπαγές* αν και μόνο αν $\overline{A}$ είναι συμπαγές.
- Ο X είναι *τοπικά συμπαγής* στο σημείο x αν και μόνο αν $\exists U \in \varpi(x)$ σχετικά συμπαγές, και είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν είναι τοπικά συμπαγής $\forall x \in X$.

Θεώρημα Α΄.1.1.1.1. *Κάθε κλειστό σύνολο συμπαγούς τοπολογικού χωρου είναι συμπαγές.*

Θεώρημα Α΄.1.1.1.2. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο τοπολογικού χώρου Hausdorff είναι κλειστό.*

Θεώρημα Α΄.1.1.1.3 (θεώρημα Tychonoff)**.** *Αν $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων, το γινόμενό τους $X = \Pi_{i \in I} X_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Ορισμός Α΄.1.1.1.3 (point & local finiteness)**.** Έστω οικογένεια $\{A_i\}_{i\in I}$ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X:

- Η $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι σημειακά πεπερασμένη αν και μόνο αν $\forall x \in X$, $\exists F \subset I$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $\{x \notin U\}_{i\in I\setminus F}$, δηλαδή κάθε σημείο ανήκει μόνο σε πεπερασμένο το πλήθος σύνολα της οικογένειας.
- Η $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένη αν και μόνο αν $\forall x \in X$, $\exists U \in \varpi(x)$ και $\exists F \subset I$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $\{U \cap A_i = \emptyset\}_{i\in I\setminus F}$, δηλαδή κάθε σημείο έχει γειτονιά που τέμνει μόνο πεπερασμένο το πλήθος σύνολα της οικογένειας.

Ορισμός Α΄.1.1.1.4 (ασθενέστερη συμπάγεια)**.** Έστω τοπολογικός χώρος X:

- Ο X είναι *μετασυμπαγής* αν και μόνο αν κάθε *ανοιχτό* κάλυμμά του έχει *σημειακά πεπερασμένη ανοιχτή* εκλέπτυνση, δηλαδή $\forall\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ ανοικτό κάλυμμα του X, $\exists F \subseteq I$ πεπερασμένο και $\{V_j\}_{j\in F}$ τέτοια, ώστε $\{V_j\}_{j\in F}$ σημειακά πεπερασμένο κάλυμμα του X και $\forall j \in F$, $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $V_j \subseteq U_i$.
- Ο X είναι *παρασυμπαγής* αν και μόνο αν κάθε *ανοιχτό* κάλυμμά του έχει *τοπικά πεπερασμένη ανοιχτή* εκλέπτυνση, δηλαδή $\forall\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ ανοικτό κάλυμμα του X, $\exists F \subseteq I$ πεπερασμένο και $\{V_j\}_{j\in F}$ τέτοια, ώστε $\{V_j\}_{j\in F}$ τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X και $\forall j \in F$, $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $V_j \subseteq U_i$.

Ορισμός Α΄.1.1.1.5 (σ-συμπαγής)**.** Ένας τοπολογικός χώρος είναι *σ-συμπαγής* αν και μόνο αν έχει αριθμήσιμο συμπαγές κάλυμμα. Ένας σ-συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι και Lindelöf.

Θεώρημα Α΄.1.1.1.4. *Ένας σ-συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff είναι παρασυμπαγής.*

Α΄.1.1.2 Συνεκτικότητα

Ορισμός Α΄.1.1.2.1 (συνεκτικότητα)**.** Ένας τοπολογικός χώρος X είναι είναι *συνεκτικός* αν και μόνο αν $\forall U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \neq \emptyset$ ή $X \neq U \cup V$, ισοδύναμα $X\setminus U \cap X\setminus V = X\setminus(U\cup V) \neq \emptyset$ ή $X \neq X\setminus U \cup X\setminus V = X\setminus(U\cap V)$, δηλαδη ο ορισμός ειναι ίδιος τόσο για ανοιχτα όσο και για κλειστά.

Σχόλιο. Εξ΄ ορισμού, τα μόνα ανοιχτα και κλειστα σύνολα στο συνεκτικό χώρο X είναι το $\emptyset$ και το X,[5] καθώς αν υπήρχε τέτοιο γνήσιο υποσύνολο του X, $U \in \mathcal{T}$ και $X\setminus U \in \mathcal{T}$, $X = X\setminus U \cup U$ άτοπο.

Ισχυρότερα είναι *δρομοσυνεκτικός* αν $\forall x \in X$ και $\forall y \in X$, υπάρχει κλειστο διάστημα $[a|b] \subseteq \mathbb{R}$ και συνεχής (με τη συνήθη τοπολογια του $\mathbb{R}$) καμπύλη $f : [a|b] \longrightarrow X$ έτσι, ώστε $f(a) = x$ και $f(b) = y$.

Ακόμα ισχυρότερα, λέμε ότι είναι *συνεκτικός κατά τόξα* αν και μόνο αν η εν προκειμένω καμπύλη f είναι ομοιομορφική[6], δηλαδή $I \simeq f(I)$.

Σχόλιο. Ένας δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff είναι συνεκτικός κατα τόξα.

Φυσικά, όλοι οι ορισμοί μεταφέρονται και σε υποσύνολα ενός τοπολογικου χώρου με τη σχετικής πάντα τοπολογία.

Ορισμός Α΄.1.1.2.2 (συνεκτική συνιστώσα)**.** Έστω τοπολογικός χώρος X και $(\mathcal{C}|\subseteq)$ το μερικά διατεταγμένο με τη σχέση υποσυνόλου σύνολο των συνεκτικών υποσυνόλων του X.[7] Τα μεγιστικά στοιχεία[8] του $\mathcal{C}$ καλούνται *συνεκτικές συνιστώσες* του X. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ορίζονται και οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του X.

Σχόλιο. Προφανώς, ένα συνεκτικό σύνολο έχει μία μόνο συνεκτική συνιστώσα, το ίδιο το X.

Ορισμός Α΄.1.1.2.3 (τοπική συνεκτικότητα)**.** Έστω τοπολογικός χώρος X και $x \in X$. Ο X είναι *τοπικά συνεκτικός* στο x αν και μόνο αν το x έχει συνεκτική τοπική βάση[9], και είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν είναι τοπικά συνεκτικός $\forall x \in X$, ισοδύναμα $\mathcal{T}$ έχει συνεκτική βάση.

Σχόλιο. Ένα ανοιχτό υποσύνολο τοπικά συνεκτικού τοπολογικού χώρου είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι δρόμοσυνεκτικό.

[5] Ισοδύναμα, $\partial\emptyset = \partial X = \emptyset$ και $\partial A \neq \emptyset$, $\forall A \subseteq X$.
[6] ορισμός Α΄.2.2.2
[7] Το $\emptyset$ θεωρειται συνεκτικό.
[8] ορισμός Α΄.1.2.1.4
[9] ορισμός Α΄.1.1.4

Α΄.1.2 Διμελείς Σχέσεις

Α΄.1.2.1 Μερική διάταξη.

Ορισμός Α΄.1.2.1.1 (μερικά διατεταγμένος χώρος)**.** Έστω σύνολο X και $P(X) \subseteq X \times X$[10]. Γράφουμε $\forall (a,b) \in P(X)$, $a \leq b$. Η διμελής σχέση $\leq$ που ορίζεται από το $P(X)$ καλείται *σχέση μερικής διάταξης* στο σύνολο X αν και μόνο αν:

$\mathfrak{P}_1$: $\forall a \in X$, $a \leq a$ (ανακλαστικότητα),

$\mathfrak{P}_2$: $\forall a, b \in X$, $a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$ (αντισυμμετρικότητα),

$\mathfrak{P}_3$: $\forall a, b, c \in X$, $a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$ (μεταβατικότητα).

Ο $(X| \leq)$ καλείται *μερικά διατεταγμένος χώρος*.

Παράδειγμα Α΄.1.1. Η τοπολογία $\mathcal{T}$ ενός τοπολογικού χώρου X[11] είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο ως προς τα ανοικτα υποσύνολα του X με μερική διάταξη τη σχέση υποσυνόλου. Το σύνολο των καλυμμάτων του X επίσης συνιστά μερικά διατεταγμένο χώρο με μερική διάταξη τη σχέση υποκαλύματος ή ακόμα και ραφιναρίσματος.[12]

Ορισμός Α΄.1.2.1.2 (αλυσίδα)**.** Έστω $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται *αλυσίδα* του X αν και μόνο αν $\forall x, y \in A$, $x \leq y \vee y \leq x$.

Ορισμός Α΄.1.2.1.3 (άνω (κάτω) φράγμα)**.** Έστω μερικά διατεταγμένος χώρος $(X| \leq)$ και $A \subseteq X$. Λέμε ότι το A έχει *άνω* (*κάτω*) φράγμα αν και μόνο αν $\exists a \in X$ τέτοιο, ώστε $\forall x \in A$, $x \leq a$ ($a \leq x$).

Ορισμός Α΄.1.2.1.4 (μεγιστικό (ελαχιστικό) στοιχείο)**.** Έστω μερικά διατεταγμένος χώρος $(X| \leq)$ και $m \in X$. Λέμε ότι το m είναι *μεγιστικό* στοιχείο του X αν και μόνο αν $\forall x \in X$, $m \leq x \Longrightarrow m = x$.[13]

Λήμμα του Zorn. Έστω μερικά διατεταγμένος χώρος $(X| \leq)$. Αν κάθε αλυσίδα του X έχει άνω φράγμα, τότε ο X περιέχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο. (αναφορά [2])

Α΄.1.2.2 Διαμέριση.

Ορισμός Α΄.1.2.2.1 (χώρος με διαμέριση)**.** Έστω σύνολο X και $S(X) \subseteq X \times X$. Γράφουμε $\forall (a,b) \in S(X)$, $a \sim b$. Η διμελής σχέση $\sim$ που ορίζεται από το $S(X)$ καλείται *σχέση ισοδυναμίας* στο σύνολο X αν και μόνο αν:

$\mathfrak{S}_1$: $\forall a \in X$, $a \sim a$ (ανακλαστικότητα),

$\mathfrak{S}_2$: $\forall a, b \in X$, $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (συμμετρικότητα),

$\mathfrak{S}_3$: $\forall a, b, c \in X$, $a \sim b \wedge b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (μεταβατικότητα).

$\forall a \in X$, το σύνολο $[a] \equiv \{x | x \sim a\}$ καλείται *κλάση ισοδυναμίας* του $a \in X$.

Παρατήρηση Α΄.1.2.2.1. $[a] = [b]$, $\forall b \in [a]$. *Πράγματι,* $\forall b \in [a] \Longrightarrow b \sim a$. *Εξ΄ ορισμού,* $\forall x \in [b]$, $x \sim b$. *Από* $\mathfrak{S}_3$, $\forall x \in [b]$, $x \sim a$. *Άρα* $[b] \subseteq [a]$. *Εναλλάσσοντας την θέση των* a *και* b *έχουμε το συμμετρικό επιχείρημα* $[a] \subseteq [b]$, *και άρα* $[b] = [a]$.

Ορισμός Α΄.1.2.2.2 (μερικά διατεταγμένος χώρος)**.** Έστω σύνολο X και $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η οικογένεια συνόλων $\{S_i\}_{i \in I}$ αποτελεί *διαμέριση* του συνόλου X αν και μόνο αν $\forall i, j \in I$ με $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ και

$$\bigcup_{i \in I} S_i = X.$$

[10] $P(X)$, not to be confused with the powerset $\mathcal{P}(X)$ of the set X.
[11] ορισμός Α΄.1.1.1
[12] ορισμός Α΄.1.1.1.1
[13] Ο $(X| \leq)$ δεν έχει απαραίτητα ένα μόνο μεγιστικό στοιχείο, όταν έχει δηλαδή... (λήμμα του Zorn)

Θεώρημα Α΄.1.2.2.1. *Έστω σύνολο X και $\sim$ μια διμελής σχέση στο X. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

1. *Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*
2. *Η οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων του X αποτελεί διαμέριση του X.*

Απόδειξη. 1. $\Longrightarrow$ 2.. Αρκεί να δείξουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας με βάση το 1., αποτελούν διαμέριση του X. Προφανώς,

$$\bigcup_{x\in X}[x]=X.$$

Έστω $x\in[a]\cap[b]$. Τότε $x\sim a\wedge x\sim b\Longrightarrow a\sim x\wedge x\sim b\Longrightarrow a\sim b$. Από παρατήρηση Α΄.1.2.2.1, $[a]=[b]$. Άρα, $\forall a,b\in X$, $[a]=[b]$ ή $[a]\cap[b]=\emptyset$.

2. $\Longrightarrow$ 1.. Έστω $\{S_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ η διαμέριση που επάγει η $\sim$ στο X. $\forall a\in X$, $\exists i\in I$ τέτοιο, ώστε $a\in S_i$, άρα $a\sim a$ ($\mathfrak{S}_1$). $\forall i\in I$, $a,b\in S_i\Longrightarrow b,a\in S_i$ άρα $a\sim b\Longrightarrow b\sim a$ ($\mathfrak{S}_2$). $\forall i\in I$, $a,b\in S_i\wedge b,c\in S_i\Longrightarrow a,c\in S_i$ άρα $a\sim b\wedge b\sim c\Longrightarrow a\sim c$ ($\mathfrak{S}_3$). □

Ορισμός Α΄.1.2.2.3 (χώρος πηλίκο)**.** Έστω χώρος διαμέρισης $(X|\sim)$. Ορίζεται ο *χώρος πηλίκο* $X/\sim\,\equiv\{[x]\}_{x\in X}$, ο οποίος αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας του X.

Α΄.2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Α΄.2.1 Γενικά.

Ορισμός Α΄.2.1.1. Έστω σύνολα X, Y και συνάρτηση $f:X\longrightarrow Y$. Ορίζουμε $\forall A\subseteq X$, $f(A)\equiv\{f(x)\in Y|x\in A\}$ και $\forall B\subseteq X$, $f^{-1}(B)\equiv\{x\in X|f(x)\in B\}$.

- Η f καλείται *μονοσήμαντη* (injective) αν και μόνο αν $\forall x,y\in X$, $f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη της f, $f^{-1}:f(X)\longmapsto X$.
- Η f καλείται *επί* (surjective) (του Y) αν και μόνο αν $\forall y\in Y$, $\exists x\in X$ τέτοιο, ώστε $y=f(x)$. Γράφουμε $f(X)=Y$.
- Η f καλείται *αμφιμονοσήμαντη* (bijective) αν και μόνο αν είναι μονοσήμαντη και επί. Τότε και η αντίστροφή της (η οποία ορίζεται), $f^{-1}:f(X)\longmapsto X$ με $f(X)=Y$, είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη.

Πρόταση Α΄.2.1.1. *Έστω σύνολα X, Y, $U_1,U_2\subseteq X$, $V_1,V_2\subseteq Y$ και συνάρτηση $f:X\longrightarrow Y$. Τότε*

1. *τα υποσύνολα και η συνολοδιαφορά διατηρούνται από τις αντίστροφες εικόνες της f:*
   (α΄) $V_1\subseteq V_2\Longrightarrow f^{-1}(V_1)\subseteq f^{-1}(V_2)$,
   (β΄) $f^{-1}(V_1\setminus V_2)=f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$,
2. *τα υποσύνολα και όχι η συνολοδιαφορά διατηρούνται από τις εικόνες της f:*
   (α΄) $U_1\subseteq U_2\Longrightarrow f(U_1)\subseteq f(U_2)$,
   (β΄) $f(U_1)\setminus f(U_2)\subseteq f(U_1\setminus U_2)$.

Απόδειξη. Έχουμε:

1. για τις αντίστροφες εικόνες της f:
   (α΄) Έστω $x\in f^{-1}(V_1)$. Τότε $f(x)\in V_1$και άρα $f(x)\in V_2$, συνεπώς $x\in f^{-1}(V_2)$.
   (β΄) Έστω $x\in f^{-1}(V_1\setminus V_2)$. Τότε $f(x)\in V_1\setminus V_2$, συνεπώς $f(x)\in V_1$ και $f(x)\notin V_2$. Τότε $x\in f^{-1}(V_1)$ και $x\notin f^{-1}(V_2)$, συνεπώς $x\in f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$. Αντίστροφα, έστω $x\in f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$. Τότε $x\in f^{-1}(V_1)$ και $x\notin f^{-1}(V_2)$, συνεπώς $f(x)\in V_1$ και $f(x)\notin V_2$. Τότε $f(x)\in V_1\setminus V_2$, συνεπώς $x\in f^{-1}(V_1\setminus V_2)$. Αφού $f^{-1}(V_1\setminus V_2)\subseteq f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$ και $f^{-1}(V_1\setminus V_2)\supseteq f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$, $f^{-1}(V_1\setminus V_2)=f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2)$.

2. για τις εικόνες της f:

   (α΄) Έστω $y \in f(U_1)$. Τότε $\exists x \in U_1$ και άρα $x \in U_2$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$ συνεπώς $y \in f(U_2)$.

   (β΄) Έστω $y \in f(U_1) \setminus f(U_2)$. Τότε $y \in f(U_1)$ και $y \notin f(U_2)$, συνεπώς $\exists x \in U_1$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$ και $x \notin U_2$ γιατί αλλιώς $y \in f(U_2)$, άτοπο. Τότε $x \in U_1 \setminus U_2$, συνεπώς $y \in f(U_1 \setminus U_2)$.

□

Παρατήρηση Α΄.2.1.1. *Έστω $y \in f(U_1 \setminus U_2)$. Τότε $\exists x \in U_1 \setminus U_2$ συνεπώς $x \in U_1$ και $x \notin U_2$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$. Τότε $y \in f(U_1)$, όμως μπορεί να $\exists x' \in U_2$ τέτοιο, ώστε $y = f(x')$, δηλαδή $y \in f(U_1) \cap f(U_2)$. Αν όμως η f είναι μονοσήμαντη, τότε $x' = x \in U_1 \setminus U_2$, συνεπώς $y \notin f(U_2)$ γιατί αλλιώς $x \in U_2$, άτοπο.*

Πρόταση Α΄.2.1.2. *Έστω σύνολα X, Y, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ και συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$. Τότε:*

1. *$U \subseteq f^{-1}(f(U))$,*
2. *$f(f^{-1}(V)) \subseteq V$.*

Απόδειξη. Έχουμε:

1. Έστω $x \in U$. Τότε $f(x) \in f(U)$, συνεπώς $x \in f^{-1}(f(U))$. Αντίστροφά, έστω $x \in f^{-1}(f(U))$. Τότε $f(x) \in f(U)$, όμως $f^{-1}(\{f(x)\}) \supseteq \{x\}$ και $f^{-1}(\{f(x)\}) \nsubseteq U$ εν γένει. Αν όμως f είναι μονοσήμαντη, τότε $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} \subseteq U$, δηλαδή $U = f^{-1}(f(U))$.

2. Έστω $y \in f(f^{-1}(V))$. Τότε $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(V)$, συνεπώς $y \in V$. Αντίστροφα, έστω $y \in V$. Τότε $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(V)$, όμως μπορεί και $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ εν γένει. Αν όμως f είναι επί του V, τότε $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ και $y \in f(f^{-1}(V))$, δηλαδή $f(f^{-1}(V)) = V$.

□

Πρόταση Α΄.2.1.3. *Έστω σύνολα X, Y, $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ και συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$. Τότε:*

1. *η ένωση και η τομή διατηρούνται από τις αντίστροφες εικόνες της f:*

   (α΄) $f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$,

   (β΄) $f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$,

2. *η ένωση και όχι η τομή διατηρείται από τις εικόνες της f:*

   (α΄) $f(\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I} f(U_i)$,

   (β΄) $f(\cap_{i\in I} U_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(U_i)$.

Απόδειξη. Έχουμε:

1. για τις αντίστροφες εικόνες της f:

   (α΄) Έστω $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i)$. Τότε $f(x) \in \cup_{i\in I} V_i$, συνεπώς $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $f(x) \in V_i$. Τότε $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $x \in f^{-1}(V_i)$, συνεπώς $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Αντίστροφα, έστω $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Τότε $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $x \in f^{-1}(V_i)$, συνεπώς $f(x) \in V_i$. Τότε $f(x) \in \cup_{i\in I} V_i$, συνεπώς $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i)$. Αφού $f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ και $f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) \supseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$, $f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$.

   (β΄) Έστω $x \in f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i)$. Τότε $f(x) \in \cap_{i\in I} V_i$, συνεπώς $\forall i \in I$, $f(x) \in V_i$. Τότε $\forall i \in I$, $x \in f^{-1}(V_i)$, συνεπώς $x \in \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Αντίστροφα, έστω $x \in \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Τότε $\forall i \in I$, $x \in f^{-1}(V_i)$, συνεπώς $f(x) \in V_i$. Τότε $f(x) \in \cap_{i\in I} V_i$, συνεπώς $x \in f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i)$. Αφού $f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i) \subseteq \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ και $f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i) \supseteq \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$, $f^{-1}(\cap_{i\in I} V_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$

2. για τις εικόνες της f:

   (α΄) Έστω $y \in f(\cup_{i\in I}U_i)$. Τότε $\exists x \in \cup_{i\in I}U_i$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$, συνεπώς $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $x \in U_i$. Τότε $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $y \in f(U_i)$, συνεπώς $y \in \cup_{i\in I}f(U_i)$. Αντίστροφα, έστω $y \in \cup_{i\in I}f(U_i)$. Τότε $\exists i \in I$ τέτοιο, ώστε $y \in f(U_i)$, συνεπώς $\exists x \in U_i$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$. Τότε $x \in \cup_{i\in I}U_i$, συνεπώς $y \in f(\cup_{i\in I}U_i)$. Αφού $f(\cup_{i\in I}U_i) \subseteq \cup_{i\in I}f(U_i)$ και $f(\cup_{i\in I}U_i) \supseteq \cup_{i\in I}f(U_i)$, $f(\cup_{i\in I}U_i) = \cup_{i\in I}f(U_i)$.

   (β΄) Έστω $y \in f(\cap_{i\in I}U_i)$. Τότε $\exists x \in \cap_{i\in I}U_i$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$, συνεπώς $\forall i \in I$, $x \in U_i$. Τότε $\forall i \in I$, $y \in f(U_i)$, συνεπώς $y \in \cap_{i\in I}f(U_i)$. Άρα $f(\cap_{i\in I}U_i) \subseteq \cap_{i\in I}f(U_i)$.

□

Παρατήρηση Α΄.2.1.2. *Έστω $y \in \cap_{i\in I}f(U_i)$. Τότε $\forall i \in I$, $y \in f(U_i)$, συνεπώς $\forall i \in I$, $\exists x_i \in U_i$* τέτοιο, ώστε *$y = f(x_i)$. Αυτό είναι και το αδύναμο σημείο της απόδειξης, και δεδομένου ότι υπάρχει αντιπαράδειγμα, έχουμε ότι $f(\cap_{i\in I}U_i) \subseteq \cap_{i\in I}f(U_i)$. Αν η f όμως είναι μονοσήμαντη, τότε αναγκαστικά $\forall i, j \in I$, $x_i = x_j = x$, οπότε και $\forall i \in I$, $x \in U_i$ με $y = f(x)$. Τότε $x \in \cap_{i\in I}U_i$, συνεπώς $y \in f(\cap_{i\in I}U_i)$. Άρα $f(\cap_{i\in I}U_i) \supseteq \cap_{i\in I}f(U_i)$, συνεπώς $f(\cap_{i\in I}U_i) = \cap_{i\in I}f(U_i)$.*

Α΄.2.2 Τοπολογικών χώρων.

Ορισμός Α΄.2.2.1 (συνέχεια & ανοιχτή απεικόνιση)**.** Έστω τοπολογικοί χώροι X, Y , $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ και $f : X \longrightarrow Y$ συνάρτηση.

- Η f καλείται *συνεχής* στο A αν και μόνο αν $\forall V \in \mathcal{T}(f(A))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}(A)$. Η f είναι *συνεχής* αν και μόνο αν είναι συνεχής στο X. Η f είναι *συνεχής* σε ένα $x \in X$ αν και μόνο αν $\exists A \subseteq X$ με $x \in A$ στο οποίο η f να είναι συνεχής.

- Η f καλείται *ανοιχτή* στο B αν και μόνο αν $\forall U \in \mathcal{T}(f^{-1}(B))$, $f(U) \in \mathcal{T}(B)$. Η f είναι *ανοιχτή* αν και μόνο αν είναι ανοιχτή στο Y. Η f είναι *ανοιχτή* σε ένα $y \in Y$ αν και μόνο αν $\exists B \subseteq Y$ με $y \in B$ στο οποίο η f να είναι ανοιχτή.

Ορισμός Α΄.2.2.2 (ομοιομορφισμός)**.** Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέμε ότι είναι *ομοιομορφισμός* μεταξύ τοπολογικών χώρων X και Y αν και μόνο αν είναι συνεχής, ανοιχτή και αμφιμονοσήμαντη.

Παράδειγμα Α΄.2.2.1. Οι k-διαφορομορφισμοί του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμοί. Πράγματι, κάθε k-διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι και συνεχής με τη συνήθη έννοια. Η "συνήθης έννοια" παραπέμπει στη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_\varrho(\mathbb{R}^n)$.

A.3 FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES AND LINEAR MAPPINGS

A.3.1 Algebras

Definition A.3.1.1 (group)**.** A set G endowed with a binary operation $\bullet : G \times G \longrightarrow G$ such that:

$\mathfrak{G}_1$: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$, $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$,

$\mathfrak{G}_2$: $\exists e \in G$ (called the *unit element* of G) such that $\forall \alpha \in G$, $\alpha \bullet e = e \bullet \alpha = \alpha$,

$\mathfrak{G}_3$: $\forall \alpha \in G$, $\exists \alpha' \in G$ (called the *inverse* of α) such that $\alpha \bullet \alpha' = \alpha' \bullet \alpha = e$,

is called a *group* with operation $\bullet$ and is denoted $(G|\bullet)$.

Proposition A.3.1.1 (uniqueness)**.** *The unit element and the inverse of a, $\forall \alpha \in G$, are unique.*

Proof. Let, to the contrary, there exist $e' \in G$, $e' \neq e$ another unit vector. Then, by definition:

$$e' \bullet e = e \bullet e' = e' \text{ and } e \bullet e' = e' \bullet e = e$$

thereby $e' = e$. Let $a'' \in G$ another inverse of $a \in G$. Then, by definition:

$$\alpha'' = \alpha'' \bullet e = a'' \bullet \alpha \bullet \alpha' = e \bullet \alpha' = \alpha'$$

thereby $\alpha'' = \alpha'$. □

Definition A.3.1.2 (abelian group)**.** A group $(G|\bullet)$ is called *abelian* if and only if:

$\mathfrak{G}_4$: $\forall \alpha, \beta \in G$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$.

Definition A.3.1.3 (field)**.** A set $\mathcal{F}$ endowed with binary operations $+ : F \times F \longrightarrow F$ (addition) and $\cdot : F \times F \longrightarrow F$ (multiplication) such that:

$\mathfrak{F}_1$: $(F|+)$ is an abelian group with unit element 0 and inverse $-\square$,

$\mathfrak{F}_2$: $(F|\cdot)$ is an abelian group with unit element 1 and inverse $\square^{-1}$,

$\mathfrak{F}_3$: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

is called a *field*.

Definition A.3.1.4 (vector space)**.** A set V endowed with a binary operation $+ : V \times V \longrightarrow V$ (vector addition) and an operation $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ (scalar multiplication) in a field F such that:

$\mathfrak{V}_1$: $(V|+)$ is an abelian group with unit element $0^\cdot$ and inverse $-\square^\cdot$,

$\mathfrak{V}_2$: $\forall \alpha \in F$ and $\forall a^\cdot \in V$, $0a^\cdot = \alpha 0^\cdot = 0^\cdot$ and $1a^\cdot = a^\cdot$,

$\mathfrak{V}_3$: $\forall \alpha, \beta \in F$ and $\forall a^\cdot \in V$, $(\alpha + \beta)a^\cdot = \alpha a^\cdot + \beta a^\cdot$ and $\alpha(\beta a^\cdot) = (\alpha\beta)a^\cdot$,

$\mathfrak{V}_4$: $\forall \alpha \in F$ and $\forall a^\cdot, b^\cdot \in V$, $\alpha(a^\cdot + b^\cdot) = \alpha a^\cdot + \alpha b^\cdot$,

is called a *vector space* over the field $\mathcal{F}$.

Definition A.3.1.5 (algebra)**.** A set L endowed with a binary operation $+ : L \times L \longrightarrow L$ (vector addition), an operation $\cdot : F \times L \longrightarrow V$ (scalar multiplication) in a field F and an operation $\circ : L \times L \longrightarrow L$ (product) such that:

$\mathfrak{L}_1$: L is vector space,

$\mathfrak{L}_2$: $\forall \alpha, \beta \in F$ and $\forall a^\cdot, b^\cdot, c^\cdot \in V$, $(\alpha a^\cdot + \beta b^\cdot) \circ c^\cdot = \alpha(a^\cdot \circ c^\cdot) + \beta(b^\cdot \circ c^\cdot)$,

is called an *algebra* over the field $\mathcal{F}$. Additional properties may hold for operation $\circ$.

Definition A.3.1.6 (vector subspace)**.** Let $U \subseteq V$ such that, $\forall \alpha, \beta \in F$ and $\forall a^\bullet, b^\bullet \in U$, $\alpha a^\bullet + \beta b^\bullet \in U$. U is called a *subspace* of V, denoting $U \hookrightarrow V$.

Definition A.3.1.7 (spanning vector set)**.** Let $A \equiv \{a_i^\bullet \in V | i \in I\}$ be a collection of vectors. We define (*Einstein summation convention* is assumed):

$$\mathrm{span} A = \{\alpha^i a_i^\bullet | \alpha^i \in F, \, \forall i \in I\}.$$

Obviously $\mathrm{span} A \hookrightarrow V$, $\forall A \subseteq V$. Also $\mathrm{span}\emptyset = \{0^\bullet\}$.

Definition A.3.1.8 (linear independence)**.** $A \equiv \{a_i^\bullet \in V | i \in I\}$ is said to be a *linearly independent* set of vectors if and only if

$$\alpha^i a_i^\bullet = 0^\bullet \Longrightarrow a^i = 0, \, \forall i \in I.$$

Otherwise if $\exists i \in I$ such that $a^i \neq 0$, then A is called *linearly depended.*

Definition A.3.1.9 (basis set)**.** A set $E \subset V$ is said to be a *basis set* for V if and only if E is linearly independent and $\mathrm{span} E = \mathcal{V}$. We define the *dimension* of V to be $\dim V = |E|$.

Theorem A.3.1.1 (vector components)**.** *Let $E \equiv \{e_i^\bullet \in V | i \in \mathbb{N}_{\dim \mathcal{V}}\}$ be a basis set for V. $\forall a^\bullet \in V = \mathrm{span} E$, $\exists \{\alpha^i \in F | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ unique, such that*

$$a^\bullet = \alpha^i e_i^\bullet.$$

The elements $\alpha^i \in F$ are called components of vector $a^\bullet \in V$, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim V}$.

Proof. Existence is trivial ($V = \mathrm{span} E$). For proving uniqueness, suppose to the contrary that $\exists \{\beta^i \in F | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ with the same property:

$$a^\bullet = \alpha^i e_i^\bullet = \beta^i e_i^\bullet \Longrightarrow (\alpha^i - \beta^i) e_i^\bullet = 0^\bullet.$$

By the linear independence of E, $\alpha^i - \beta^i = 0 \Longrightarrow \alpha^i = \beta^i$, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim V}$. □

A.3.2 Linear Mappings of a Vector Space

Definition A.3.2.1 (linear mapping)**.** A *linear mapping* $l : V \longrightarrow \hat{V}$ is defined to be such that $\forall \alpha, \beta \in F$ and $\forall a^\bullet, b^\bullet \in V$, $l(\alpha a^\bullet + \beta b^\bullet) = \alpha l(a^\bullet) + \beta l(b^\bullet)$. If $\hat{V} = V$, then l is called a *linear operator.*

Definition A.3.2.2 (isomorphisms & transformations)**.** $\hat{V}$ is *isomorphic* to V if and only if there exists a linear, one to one, onto linear mapping $\ell : V \longmapsto \hat{V}$, denoting $V \simeq \hat{V}$. If ℓ is also a linear operator on V ($\hat{V} = V$), ℓ is called a *linear transformation* on V. Isomorphisms have an *inverse mapping* (also an isomorphism), $\ell^{-1} : \hat{V} \longrightarrow V$.

Remark. We have proven in Theorem A.3.1.1 that $V \simeq F^{\dim V}$.

Remark. For linear transformations, $\ell\ell^{-1} = \ell^{-1}\ell = \mathrm{id}$, where $\mathrm{id} : V \longmapsto V$ is the identity transformation, i.e. $\forall a^\bullet \in V$, $\mathrm{id}(a^\bullet) = a^\bullet$. The identity transformation is self-inverse ($\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$).

Theorem A.3.2.1 (change of basis)**.** *Let $\hat{E} \equiv \{\hat{e}_i^\bullet \in V | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ and $E \equiv \{e_k^\bullet \in V | k \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ be basis sets for V. There exists a linear transformation $\ell : V \longmapsto V$ such that $\hat{e}_i^\bullet = \ell(e_i^\bullet)$.*

Proof. $V = \mathrm{span} E$ therefore, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim V}$, $\exists \{\lambda_i^k \in F | k \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ such that $\hat{e}_i^\bullet = \lambda_i{}^k e_k^\bullet$. We define ℓ to be such that, $\forall a^\bullet = \alpha^j e_j^\bullet \in V$, $\ell(a^\bullet) = \alpha^j \lambda_j{}^k e_k^\bullet$.

Claim. ℓ is linear.

Indeed, $\forall \alpha, \beta \in F$ and $\forall a^\bullet, b^\bullet \in V$, $\ell(\alpha a^\bullet + \beta b^\bullet) = \ell(\alpha\alpha^i e_i^\bullet + \beta\beta^i e_i^\bullet) = \ell((\alpha\alpha^i + \beta\beta^i) e_i^\bullet) = (\alpha\alpha^j + \beta\beta^j)\lambda_j{}^k e_k^\bullet = \alpha\alpha^j \lambda_j{}^k e_k^\bullet + \beta\beta^j \lambda_j{}^k e_k^\bullet = \alpha\ell(a^\bullet) + \beta\ell(b^\bullet)$.

Claim. $\ell(e_i^\bullet) = \lambda_i{}^k e_k^\bullet$.

Indeed, $\ell(e_i^\bullet) = \delta_i{}^j \lambda_j{}^k e_k^\bullet = \lambda_i{}^k e_k^\bullet$. □

Remark. The matrix $\lambda_k{}^i \in \mathbb{M}_{\dim V}(F)$ for which $\ell(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i) = \lambda_i{}^k e^{\boldsymbol{\cdot}}_k$ is called the representation matrix of l on the basis set E. Components transform as $\hat{\alpha}^i = a^k \lambda_k{}^i$

The inverse transformation ℓ^{-1} also has a representation $\mu_j{}^k \in \mathbb{M}_{\dim V}(F)$ such that $e^{\boldsymbol{\cdot}}_k = \mu_k{}^j \hat{e}^{\boldsymbol{\cdot}}_j$. Components transform as $a^k = \hat{\alpha}^j \mu_j{}^k$.

The identity transformation id has the identity matrix $\delta_i{}^j \in \mathbb{M}_{\dim V}(F)$ as a representation. Obviously $\hat{\alpha}^j = a^i \delta_i{}^j$. Also

$$\mu_i{}^k \lambda_k{}^j = \lambda_i{}^k \mu_k{}^j = \delta_i{}^j.$$

Definition A.3.2.3 (linear functional)**.** A linear functional is a linear function $u_{\boldsymbol{.}} : V \longrightarrow F$:

$$u_{\boldsymbol{.}}(\alpha a^{\boldsymbol{\cdot}} + \beta b^{\boldsymbol{\cdot}}) = \alpha u_{\boldsymbol{.}}(a^{\boldsymbol{\cdot}}) + \beta u_{\boldsymbol{.}}(b^{\boldsymbol{\cdot}}).$$

We also denote $u_{\boldsymbol{.}}(a^{\boldsymbol{\cdot}}) = \langle a|u\rangle$.

Proposition A.3.2.1 (dual or covariant space)**.** *The set of all linear functionals $u_{\boldsymbol{.}} : V \longrightarrow F$, denoted V^*, endowed with the usual operations on functions is a vector space.*

Remark. V^* is called the *dual* or *covariant vector space* of V.

Theorem A.3.2.2 (duality brackets)**.** *Let $E \equiv \{e^{\boldsymbol{\cdot}}_i \in V | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ a basis set for V. Then $\exists E^* \equiv \{e^k_{\boldsymbol{.}} \in V^* | k \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ unique basis set for V^*, such that:*

$$e^k_{\boldsymbol{.}} e^{\boldsymbol{\cdot}}_i = \langle e_i | e^k \rangle = \delta_i{}^k, \; \forall i, k \in \mathbb{N}_{\dim V}.$$

Proof. We prove the following:

Claim. $\forall \{\alpha_i \in F | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ and $\forall b^{\boldsymbol{\cdot}} = e^{\boldsymbol{\cdot}}_i \beta^i \in V$, $\exists a_{\boldsymbol{.}} \in V^*$ such that $a_{\boldsymbol{.}}(b^{\boldsymbol{\cdot}}) = \langle b|a\rangle = \alpha_i \beta^i$.

Indeed, the last equation shows existence. As for uniqueness, let $a'_{\boldsymbol{.}} \in V^*$ be such that satisfies the definition. Then, $(a'_{\boldsymbol{.}} - a_{\boldsymbol{.}})(b^{\boldsymbol{\cdot}}) = a'_{\boldsymbol{.}}(b^{\boldsymbol{\cdot}}) - a_{\boldsymbol{.}}(b^{\boldsymbol{\cdot}}) = \alpha_i \beta^i - \alpha_i \beta^i = 0$. By uniqueness of $0_{\boldsymbol{.}} \in V^*$, $a'_{\boldsymbol{.}} - a_{\boldsymbol{.}} = 0_{\boldsymbol{.}}$. By uniqueness of the opposite, $a'_{\boldsymbol{.}} = a_{\boldsymbol{.}}$.

Then, $\forall k \in \mathbb{N}_{\dim V}$, $\exists e^k_{\boldsymbol{.}} \in V^*$ unique, such that:

$$\langle e_i | e^k \rangle = e^k_{\boldsymbol{.}}(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i) = \delta^k{}_j \delta^j{}_i = \delta^k{}_i.$$

Claim. The set $E^* = \{e^k_{\boldsymbol{.}} \in V^* | k \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ is linearly independent.

Indeed, let $\mu_k e^k_{\boldsymbol{.}} = 0_{\boldsymbol{.}}$. Then, $\forall i \in \mathbb{N}_{\dim V}$, $\mu_i = \delta_i{}^k \mu_k = \langle e_i | e^k \rangle \mu_k = \mu_k e^k_{\boldsymbol{.}}(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i) = (\mu_k e^k_{\boldsymbol{.}})(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i) = 0$.

Claim. $V^* = \mathrm{span} E^*$.

Indeed, let $\{\alpha_i \in F | i \in \mathbb{N}_{\dim V}\}$ and $a_{\boldsymbol{.}} \in V^*$ unique such that $a_{\boldsymbol{.}}(b^{\boldsymbol{\cdot}}) = \langle b|a\rangle = \alpha_i \beta^i$, $\forall b^{\boldsymbol{\cdot}} = e^{\boldsymbol{\cdot}}_i \beta^i \in V$. Then, $(\alpha_k e^k_{\boldsymbol{.}})(b^{\boldsymbol{\cdot}}) = \alpha_k e^k_{\boldsymbol{.}}(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i \beta^i) = \alpha_k e^k_{\boldsymbol{.}}(e^{\boldsymbol{\cdot}}_i)\beta^i = \beta^i \langle e_i | e^k \rangle \alpha_k = \alpha_k \delta^k{}_i \beta^i = \alpha_i \beta^i$. $\square$

Corollary A.3.2.1. $\dim V^* = \dim V$.

Παράρτημα Β′

ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Β′.1 ΌΡΟΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Β′.1.1 ΤΑΝΥΣΤΗΣ RICCI.

$$\partial_c\Gamma^c{}_{ab}-\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} = g^{ce}(\partial_c\Gamma_{eab}-\Gamma_{ead}\Gamma^d{}_{cb}) = g^{ce}(\nabla_c\Gamma_{eab}+\Gamma_{edb}\Gamma^d{}_{ca}+\Gamma_{dab}\Gamma^d{}_{ce}) = \nabla_c\Gamma^c{}_{ab}+\Gamma^c{}_{db}\Gamma^d{}_{ca}+\Gamma_{dab}\Gamma^{d}{}_{c}{}^{c}$$

$$\Gamma^c{}_{db}\Gamma^d{}_{ca} =$$

$$2\partial_c\Gamma^c{}_{ab} = \partial_c(g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{da}-\partial_d g_{ab})) = (\partial_c g^{cd}+g^{cd}\partial_c)(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{da}-\partial_d g_{ab}) =$$

$$\partial_c g^{cd}\partial_a g_{bd}+\partial_c g^{cd}\partial_b g_{da}-\partial_c g^{cd}\partial_d g_{ab}+\partial^d\partial_a g_{bd}+\partial^d\partial_b g_{da}-\Box g_{ab}$$

$$4\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} = g^{ce}(\partial_a g_{de}+\partial_d g_{ea}-\partial_e g_{ad})g^{df}(\partial_c g_{bf}+\partial_b g_{fc}-\partial_f g_{cb}) =$$

$$+\,g^{ce}\partial_a g_{de}g^{df}\partial_c g_{bf}+g^{ce}\partial_a g_{de}g^{df}\partial_b g_{fc}-g^{ce}\partial_a g_{de}\partial^d g_{cb}$$

$$+\,g^{ce}\partial_d g_{ea}g^{df}\partial_c g_{bf}+g^{ce}\partial_d g_{ea}g^{df}\partial_b g_{fc}-g^{ce}\partial_d g_{ea}\partial^d g_{cb}$$

$$-\,\partial^c g_{ad}g^{df}\partial_c g_{bf}-\partial^c g_{ad}g^{df}\partial_b g_{fc}+\partial^c g_{ad}\partial^d g_{cb} =$$

$$(\partial_a g_{ed}(\partial_b g_{cf}g^{fd}+\partial^d g_{bc})-2\partial_d g_{ea}\partial^d g_{bc})g^{ce}+2\partial^c g_{ad}\partial^d g_{bc}-\partial_a\partial^c g_{cb}$$

$$\Gamma^c{}_{cb} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_c g_{bd}+\partial_b g_{dc}-\partial_d g_{cb}) = \frac{1}{2}g^{cd}\partial_b g_{dc} = \partial_b\log_e\sqrt{|g|}$$

$$g = \det\mathbf{g} = g^{[a_1}{}_{a_1}\dots g^{a_{\dim M}]}{}_{a_{\dim M}}(\dim M)!$$

$$g^{ab}g_{ab} = \delta^a{}_a = \dim M$$

$$R_{ab} = \partial_a\partial_b\log_e\sqrt{|g|}-\Gamma^d{}_{ab}\partial_d\log_e\sqrt{|g|}-\partial_c\Gamma^c{}_{ab}+\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{cb} = \nabla_a\partial_b\log_e\sqrt{|g|}-\dots$$

Από τη σχέση

$$\Gamma^a{}_{ab} = \frac{1}{2}\partial_b\log_e|g| = \partial_b\log_e\sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_b\sqrt{|g|} = \frac{1}{2|g|}\partial_b|g|$$

έχουμε ότι η απόκλιση διανυσματικού πεδίου υ^a δίνεται απο τη συνοπτική formula:

$$\nabla_a\upsilon^a = \partial_a\upsilon^a+\Gamma^b{}_{ba}\upsilon^a = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a(\sqrt{|g|}\upsilon^a) \tag{Β′.1.1}$$

Β′.1.1.1 ΤΑΝΥΣΤΗΣ RIEMANN.

$\forall \xi \otimes \eta \otimes \zeta \in \mathcal{V}^{(3|0)}M$: $R^a{}_{bcd}\xi^b\eta^c\zeta^d = \partial_b\Gamma^a{}_{cd}\xi^b\eta^c\zeta^d - \partial_c\Gamma^a{}_{bd}\eta^c\xi^b\zeta^d + \Gamma^a{}_{be}\xi^b\Gamma^e{}_{cd}\eta^c\zeta^d - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c\Gamma^e{}_{bd}\xi^b\zeta^d$:

$$R^a{}_{bcd}\xi^b\eta^c\zeta^d = \xi^b\nabla_b(\eta^c\nabla_c\zeta^a) - \eta^c\nabla_c(\xi^b\nabla_b\zeta^a) - [\xi|\eta]^d\nabla_d\zeta^a =$$

$$\xi^b\nabla_b(\eta^c\partial_c\zeta^a + \Gamma^a{}_{cd}\eta^c\zeta^d) - \eta^c\nabla_c(\xi^b\partial_b\zeta^a + \Gamma^a{}_{bd}\xi^b\zeta^d) - (\xi^b\partial_b\eta^d - \eta^c\partial_c\xi^d)\nabla_d\zeta^a =$$

$$+\xi^b\partial_b(\eta^c\partial_c\zeta^a + \Gamma^a{}_{cd}\eta^c\zeta^d) + \Gamma^a{}_{be}\xi^b(\eta^c\partial_c\zeta^e + \Gamma^e{}_{cd}\eta^c\zeta^d)$$

$$-\eta^c\partial_c(\xi^b\partial_b\zeta^a + \Gamma^a{}_{bd}\xi^b\zeta^d) - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c(\xi^b\partial_b\zeta^e + \Gamma^e{}_{bd}\xi^b\zeta^d)$$

$$-(\xi^b\partial_b\eta^d - \eta^c\partial_c\xi^d)(\partial_d\zeta^a + \Gamma^a{}_{de}\zeta^e) =$$

$$+\xi^b\partial_b(\eta^c\partial_c\zeta^a) + \xi^b\partial_b(\Gamma^a{}_{cd}\eta^c\zeta^d) + \Gamma^a{}_{be}\xi^b\eta^c\partial_c\zeta^e + \Gamma^a{}_{be}\xi^b\Gamma^e{}_{cd}\eta^c\zeta^d$$

$$-\eta^c\partial_c(\xi^b\partial_b\zeta^a) - \eta^c\partial_c(\Gamma^a{}_{bd}\xi^b\zeta^d) - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c\xi^b\partial_b\zeta^e - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c\Gamma^e{}_{bd}\xi^b\zeta^d$$

$$-\xi^b\partial_b\eta^d\partial_d\zeta^a - \xi^b\partial_b\eta^d\Gamma^a{}_{de}\zeta^e + \eta^c\partial_c\xi^d\partial_d\zeta^a + \eta^c\partial_c\xi^d\Gamma^a{}_{de}\zeta^e =$$

$$+\xi^b\partial_b(\eta^c\partial_c\zeta^a) - \xi^b\partial_b\eta^d\partial_d\zeta^a - \eta^c\partial_c(\xi^b\partial_b\zeta^a) + \eta^c\partial_c\xi^d\partial_d\zeta^a$$

$$+\xi^b\partial_b(\Gamma^a{}_{cd}\eta^c\zeta^d) - \Gamma^a{}_{cd}\xi^b\partial_b\eta^c\zeta^d - \Gamma^a{}_{cd}\xi^b\eta^c\partial_b\zeta^d - \eta^c\partial_c(\Gamma^a{}_{bd}\xi^b\zeta^d) + \Gamma^a{}_{bd}\partial_c\xi^b\eta^c\zeta^d + \Gamma^a{}_{bd}\xi^b\eta^c\partial_c\zeta^d$$

$$+\Gamma^a{}_{be}\xi^b\Gamma^e{}_{cd}\eta^c\zeta^d - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c\Gamma^e{}_{bd}\xi^b\zeta^d =$$

$$+\xi^b\eta^c\partial_b\partial_c\zeta^a - \eta^c\xi^b\partial_c\partial_b\zeta^a + \xi^b\eta^c\zeta^d\partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \eta^c\xi^b\zeta^d\partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\xi^b\Gamma^e{}_{cd}\eta^c\zeta^d - \Gamma^a{}_{ce}\eta^c\Gamma^e{}_{bd}\xi^b\zeta^d$$

$$R^a{}_{bcd} = \partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} = \nabla_b\Gamma^a{}_{cd} - \nabla_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd}$$

$$R^a{}_{bcd} = 2(\partial_{[b}\Gamma^a{}_{c]d} + \Gamma^a{}_{e[b}\Gamma^e{}_{c]d}) = 2(\nabla_{[b}\Gamma^a{}_{c]d} - \Gamma^a{}_{e[b}\Gamma^e{}_{c]d})$$

$$2\partial_b\Gamma_{acd} - 2\partial_c\Gamma_{abd} = \partial_b(\partial_c g_{da} + \partial_d g_{ac} - \partial_a g_{cd}) - \partial_c(\partial_b g_{da} + \partial_d g_{ab} - \partial_a g_{bd}) =$$

$$\partial_b\partial_d g_{ac} - \partial_b\partial_a g_{cd} - \partial_c\partial_d g_{ab} + \partial_c\partial_a g_{bd}$$

$$\partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} = \partial_b(g^{ae}\Gamma_{ecd}) - \partial_c(g^{ae}\Gamma_{ebd}) = \partial_b g^{ae}\Gamma_{ecd} - \partial_c g^{ae}\Gamma_{ebd} + g^{ae}(\partial_b\Gamma_{ecd} - \partial_c\Gamma_{ebd})$$

$$4\Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - 4\Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} =$$

$$g^{af}(\partial_b g_{ef} + \partial_e g_{fb} - \partial_f g_{be})g^{eg}(\partial_c g_{dg} + \partial_d g_{gc} - \partial_g g_{cd}) - g^{af}(\partial_c g_{ef} + \partial_e g_{fc} - \partial_f g_{ce})g^{eg}(\partial_b g_{dg} + \partial_d g_{gb} - \partial_g g_{bd})$$

$$= (g^{af}\partial_b g_{ef} + g^{af}\partial_e g_{fb} - g^{af}\partial_f g_{be})(g^{eg}\partial_c g_{dg} + g^{eg}\partial_d g_{gc} - g^{eg}\partial_g g_{cd})$$

$$-(g^{af}\partial_c g_{ef} + g^{af}\partial_e g_{fc} - g^{af}\partial_f g_{ce})(g^{eg}\partial_b g_{dg} + g^{eg}\partial_d g_{gb} - g^{eg}\partial_g g_{bd})$$

$$= g^{af}\partial_b g_{ef}g^{eg}\partial_c g_{dg} + g^{af}\partial_b g_{ef}g^{eg}\partial_d g_{gc} - g^{af}\partial_b g_{ef}g^{eg}\partial_g g_{cd}$$

$$+g^{af}\partial_e g_{fb}g^{eg}\partial_c g_{dg} + g^{af}\partial_e g_{fb}g^{eg}\partial_d g_{gc} - g^{af}\partial_e g_{fb}g^{eg}\partial_g g_{cd}$$

$$-g^{af}\partial_f g_{be}g^{eg}\partial_c g_{dg} - g^{af}\partial_f g_{be}g^{eg}\partial_d g_{gc} + g^{af}\partial_f g_{be}g^{eg}\partial_g g_{cd}$$

$$-g^{af}\partial_c g_{ef}g^{eg}\partial_b g_{dg} - g^{af}\partial_c g_{ef}g^{eg}\partial_d g_{gb} + g^{af}\partial_c g_{ef}g^{eg}\partial_g g_{bd}$$

$$-g^{af}\partial_e g_{fc}g^{eg}\partial_b g_{dg} - g^{af}\partial_e g_{fc}g^{eg}\partial_d g_{gb} + g^{af}\partial_e g_{fc}g^{eg}\partial_g g_{bd}$$

$$+g^{af}\partial_f g_{ce}g^{eg}\partial_b g_{dg} + g^{af}\partial_f g_{ce}g^{eg}\partial_d g_{gb} - g^{af}\partial_f g_{ce}g^{eg}\partial_g g_{bd}$$

$$2^{-1}R^a{}_{bcd} = \partial_{[b}g^{af}\partial_{c]}g_{df} + \partial_{[b}g^{af}\partial_{|d}g_{f|c]} - \partial_{[b}g^{af}\partial_{|f|}g_{c]d} + g^{af}\partial_{[b}\partial_{|d}g_{f|c]} - g^{af}\partial_{[b}\partial_{|f|}g_{c]d}$$

$$+g^{af}\partial_{[b}g_{|ef|}g^{eg}\partial_{c]}g_{dg} + g^{af}\partial_{[b}g_{|ef}g^{eg}\partial_d g_{g|c]} - g^{af}\partial_{[b}g_{|ef}g^{eg}\partial_{g|}g_{c]d}$$

$$+g^{af}\partial_e g_{f[b}\,g^{eg}\partial_{\ c]}g_{dg} + g^{af}\partial_e g_{f[b}g^{eg}\partial_{|d}g_{g|c]} - g^{af}\partial_e g_{f[b\frac{1}{2}}\,g^{eg}\partial_{|g|}g_{c]d}$$

$$-g^{af}\partial_f g_{[b|e|}g^{eg}\partial_{c]}g_{dg} - g^{af}\partial_f g_{[b|e}g^{eg}\partial_d g_{g|c]} + g^{af}\partial_f g_{[b|e}g^{eg}\partial_{g|}g_{c]d}$$

B′.2 ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΟΡΟΙ CHRISTOFFEL

B′.2.1 Όροι τάξης 1.

0 συστολή.

$$2\Gamma^c{}_{ab} = g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

1 συστολή.

$$2\Gamma^e{}_{eb} = g^{ed}(\partial_e g_{bd} + \partial_b g_{de} - \partial_d g_{eb}) = g^{ed}\partial_b g_{de}$$

$$2g^{ab}\Gamma^c{}_{ab} = g^{ab}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}) = g^{cd}\partial^b g_{bd} + g^{cd}\partial^a g_{ad} - g^{ab}\partial_d g_{ab}$$

B′.2.2 Όροι τάξης 11.

0 συστολή.

$$4\Gamma^c{}_{ab}\Gamma^g{}_{ef} = g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})g^{gh}(\partial_e g_{fh} + \partial_f g_{he} - \partial_h g_{ef})$$

$$\begin{aligned} &= g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &+ g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &- g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_e g_{fh} - g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_f g_{he} + g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_h g_{ef} \end{aligned}$$

1 συστολή.

$$4\Gamma^c{}_{ai}\Gamma^i{}_{ef} = g^{cd}(\partial_a g_{id} + \partial_i g_{da} - \partial_d g_{ai})g^{ih}(\partial_e g_{fh} + \partial_f g_{he} - \partial_h g_{ef})$$

$$\begin{aligned} &= g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_e g_{fh} + g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_f g_{he} - g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_h g_{ef} \\ &+ g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_e g_{fh} + g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_f g_{he} - g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_h g_{ef} \\ &- g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_e g_{fh} - g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_f g_{he} + g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_h g_{ef} \end{aligned}$$

$$4g^{ae}\Gamma^c{}_{ab}\Gamma^g{}_{ef} = g^{ae}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})g^{gh}(\partial_e g_{fh} + \partial_f g_{he} - \partial_h g_{ef})$$

$$\begin{aligned} &= g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &+ g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &- g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_e g_{fh} - g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_f g_{he} + g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_h g_{ef} \end{aligned}$$

2 συστολές.

$$4\Gamma^j{}_{ai}\Gamma^i{}_{ej} = g^{jd}(\partial_a g_{id} + \partial_i g_{da} - \partial_d g_{ai})g^{ih}(\partial_e g_{jh} + \partial_j g_{he} - \partial_h g_{ej})$$

$$\begin{aligned} &= g^{jd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_e g_{jh} + g^{jd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_j g_{he} - g^{jd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_h g_{ej} \\ &+ g^{jd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_e g_{jh} + g^{jd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_j g_{he} - g^{jd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_h g_{ej} \\ &- g^{jd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_e g_{jh} - g^{jd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_j g_{he} + g^{jd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_h g_{ej} \end{aligned}$$

$$4g^{ae}\Gamma^c{}_{ai}\Gamma^i{}_{ef} = g^{ae}g^{cd}(\partial_a g_{id} + \partial_i g_{da} - \partial_d g_{ai})g^{ih}(\partial_e g_{fh} + \partial_f g_{he} - \partial_h g_{ef})$$

$$\begin{aligned} &= g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{id}g^{ih}\partial_h g_{ef} \\ &+ g^{ae}g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_i g_{da}g^{ih}\partial_h g_{ef} \\ &- g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_e g_{fh} - g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_f g_{he} + g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ai}g^{ih}\partial_h g_{ef} \end{aligned}$$

3 συστολές.

$$4g^{ae}\Gamma^j{}_{ai}\Gamma^i{}_{ej} = g^{ae}g^{jd}(\partial_a g_{id} + \partial_i g_{da} - \partial_d g_{ai})g^{ih}(\partial_e g_{jh} + \partial_j g_{he} - \partial_h g_{ej})$$

$$\begin{aligned} &= g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_a g_{bd}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &+ g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_e g_{fh} + g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_f g_{he} - g^{ae}g^{cd}\partial_b g_{da}g^{gh}\partial_h g_{ef} \\ &- g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_e g_{fh} - g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_f g_{he} + g^{ae}g^{cd}\partial_d g_{ab}g^{gh}\partial_h g_{ef} \end{aligned}$$

Β΄.2.3 Όροι τάξης 2.

0 συστολή.

$$2\partial_e\Gamma^c{}_{ab} = \partial_e(g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})) = (\partial_e g^{cd} + g^{cd}\partial_e)(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_e g^{cd}\partial_a g_{bd} + \partial_e g^{cd}\partial_b g_{da} - \partial_e g^{cd}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{cd}\partial_e\partial_a g_{bd} + g^{cd}\partial_e\partial_b g_{da} - g^{cd}\partial_e\partial_d g_{ab} \end{aligned}$$

1 συστολή.

$$2\partial_f\Gamma^f{}_{ab} = \partial_f(g^{fd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})) = (\partial_f g^{fd} + g^{df}\partial_f)(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_f g^{fd}\partial_a g_{bd} + \partial_f g^{fd}\partial_b g_{da} - \partial_f g^{fd}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{df}\partial_f\partial_a g_{bd} + g^{df}\partial_f\partial_b g_{da} - g^{df}\partial_f\partial_d g_{ab} \end{aligned}$$

$$2\partial_e(g^{ab}\Gamma^c{}_{ab}) = \partial_e(g^{ab}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})) = (\partial_e g^{ab}g^{cd} + g^{ab}\partial_e g^{cd} + g^{ab}g^{cd}\partial_e)(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_e g^{ab}g^{cd}\partial_a g_{bd} + \partial_e g^{ab}g^{cd}\partial_b g_{da} - \partial_e g^{ab}g^{cd}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{ab}\partial_e g^{cd}\partial_a g_{bd} + g^{ab}\partial_e g^{cd}\partial_b g_{da} - g^{ab}\partial_e g^{cd}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{ab}g^{cd}\partial_e\partial_a g_{bd} + g^{ab}g^{cd}\partial_e\partial_b g_{da} - g^{ab}g^{cd}\partial_e\partial_d g_{ab} \end{aligned}$$

2 συστολή.

$$2\partial_f(g^{ab}\Gamma^f{}_{ab}) = \partial_f(g^{ab}g^{fd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})) = (g^{df}\partial_f g^{ab} + g^{ab}\partial_f g^{fd} + g^{ab}g^{df}\partial_f)(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

$$\begin{aligned} &= g^{df}\partial_f g^{ab}\partial_a g_{bd} + g^{df}\partial_f g^{ab}\partial_b g_{da} - g^{df}\partial_f g^{ab}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{ab}\partial_f g^{fd}\partial_a g_{bd} + g^{ab}\partial_f g^{fd}\partial_b g_{da} - g^{ab}\partial_f g^{fd}\partial_d g_{ab} \\ &+ g^{ab}g^{df}\partial_f\partial_a g_{bd} + g^{ab}g^{df}\partial_f\partial_b g_{da} - g^{ab}g^{df}\partial_f\partial_d g_{ab} \end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

[1] Αναστασιου Μαλλιου. *Μαθήματα Διαφορικής Γεωμετρίας: Εισαγωγή. Θεωρία Διαφορικών Πολλαπλοτήτων και Ομάδων Λιε.* Εκδόσεις Καρδαμίτσα (Αθήνα 1992).

[2] Σπυρος Αργυρος. *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης (2^{η} έκδοση)*, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο (2003).

[3] Robert M. Wald. *General Relativity.* The University of Chigago Press, first edition, 1984.

[4] Stephen W. Hawking and George F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time.* Cambridge University Press, 1973.

[5] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, illustrated edition, 1973.

[6] Marcus Kriele. *Spacetime: Foundations of General Relativity and Differential Geometry.* (Lecture Notes in Physics. Monographs) Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1999.

[7] John Stewart. *Advanced general relativity.* (Cambridge monographs on mathematical physics) Cambridge University Press, 1991.

[8] Anadijiban Das. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics.* Springer, illustrated edition, 2007.