



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΡΜΟΒΑΡΥΤΙΚΕΣ ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΖΑΧΑΡΙΑ ΡΟΥΠΑ

Πτυχιούχου Φυσικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Γ. ΖΟΤΙΑΝΟΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Σεπτέμβριος 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΡΜΟΒΑΡΥΤΙΚΕΣ ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ

ΖΑΧΑΡΙΑΣ ΡΟΥΠΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Ζουπάνος, Καθ. Ε.Μ.Π.
Μ. Αξενίδης, Ερ. Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος
Α. Κεχαγιάς, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Ζουπάνος, Καθ. Ε.Μ.Π.
Μ. Αξενίδης, Ερ. Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος
Α. Κεχαγιάς, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
Ι. Μπάκας, Καθ. Ε.Μ.Π.
Ε. Φλωράτος, Καθ. Ε.Κ.Π.Α.
Γ. Κουτσούμπας, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
Χ. Ευθυμίουπουλος, Ερ. Ακαδημίας Αθηνών

ΑΘΗΝΑ, Σεπτέμβριος 2013

στη μητέρα μου Έμη

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον *Μίνω Αξενίδη*, για την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου έρευνας. Επίσης, ευχαριστώ τον *Γιώργο Γεωργίου* για την καθοριστική και ανεκτίμητη συμβολή του στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Περίληψη

Θα μελετήσουμε τη θερμοδυναμική βαρυτικού αερίου στη Γενική Σχετικότητα και στο Νευτώνειο όριο. Κυρίως ενδιαφερόμαστε για την επίδραση της Κοσμολογικής Σταθεράς, οποιασδήποτε θετικής ή αρνητικής τιμής, στη θερμοδυναμική ευστάθεια στατικών σφαιρικών ρευστών. Στη θερμοδυναμική βαρυτικών συστημάτων, οι διάφορες στατιστικές συλλογές δεν είναι ισοδύναμες. Πραγματοποιούμε την ανάλυση στην μικροκανονική αλλά και στην κανονική συλλογή. Στη Νευτώνεια Βαρύτητα γνωρίζουμε πως εμφανίζονται δύο θερμοδυναμικές αστάθειες, η «Θερμοβαρυτική Καταστροφή» ('Gravothermal Catastrophe') στη θεώρηση της μικροκανονικής συλλογής και η «ισοθερμική κατάρρευση» ('isothermal collapse') στη θεώρηση της κανονικής συλλογής. Περιγράφουμε πώς διαμορφώνονται και τα δύο φαινόμενα υπό την παρουσία της Κοσμολογικής Σταθεράς. Στην περίπτωση θετικής Κοσμολογικής Σταθεράς παρατηρούμε «μεταβάσεις φάσης επανεισόδου» ('reentrant phase transitions'). Στη μικροκανονική συλλογή, εκτός από την άνω κρίσιμη ακτίνα, ως την τιμή της οποίας υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, εμφανίζεται και μια δεύτερη μεγαλύτερη κρίσιμη ακτίνα, η οποία σχετίζεται με την Κοσμολογική σταθερά, πάνω από την οποία αποκαθίστανται οι καταστάσεις ισορροπίας. Στην κανονική συλλογή, εκτός από την ελάχιστη κρίσιμη θερμοκρασία, μέχρι την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, εμφανίζεται και μία δεύτερη ακόμα χαμηλότερη θερμοκρασία, η οποία σχετίζεται με την κοσμολογική σταθερά, κάτω από την οποία αποκαθίστανται ξανά οι καταστάσεις ισορροπίας. Και στις δύο περιπτώσεις, μια αρνητική Κοσμολογική Σταθερά (ασυμπτωτικά anti-de Sitter χώρος) δρα θερμοδυναμικά, αποσταθεροποιητικά, ενώ μία θετική Κοσμολογική Σταθερά (ασυμπτωτικά de-Sitter χώρος) δρα θερμοδυναμικά, σταθεροποιητικά.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας. Επιπλέον, στη θερμοδυναμική επεξεργασία της Γενικής Σχετικότητας, συνάγουμε την εξίσωση της σχετικιστικής υδροστατικής ισορροπίας (εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkov) για μια σφαίρα τέλειου ρευστού από το ακρότατο της εντροπίας στη θεώρηση της μικροκανονικής συλλογής και από το ακρότατο της ελεύθερης ενέργειας στην κανονική συλλογή. Η συνθήκη ευστάθειας που καθορίζεται από την εξίσωση μεταβολών δεύτερης τάξης της εντροπίας συμπίπτει ακριβώς με τη συνθήκη ισορροπίας που συνάγεται από μεταβολές (variations) σε πρώτη τάξη γύρω από την κατάσταση ισορροπίας, στις δυναμικές εξισώσεις του Einstein. Συνεπώς, δείχνουμε την ισοδυναμία της μικροκανονικής θερμοδυναμικής ισορροπίας με την γραμμική δυναμική ισορροπία για ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό ρευστό στη Γενική Σχετικότητα.

Abstract

We study the thermodynamics of self-gravitating gas in General Relativity and the Newtonian limit. Main emphasis is given on the effect of a cosmological constant term on the thermodynamic stability of static fluid spheres. In Gravity, the statistical ensembles are not equivalent and we perform the analysis both in the microcanonical as well as the canonical ensemble. In the Newtonian Gravity is known that there appear two thermodynamic instabilities, the ‘Gravothermal Catastrophe’ in the microcanonical ensemble and the ‘isothermal collapse’ in the canonical ensemble. We formulate both instabilities in the presence of a cosmological constant. In case of a positive cosmological constant, reentrant phase transitions are observed. In the microcanonical ensemble, apart from the critical radius up to which equilibria exists, there appears a second *bigger* critical radius associated with the cosmological constant, where equilibrium states are restored. In the canonical ensemble, apart from the critical temperature, down to which equilibria exist, there appears a second *lower* critical temperature associated with the cosmological constant, where equilibrium states are restored. In both ensembles, a negative cosmological constant (asymptotically Anti-de Sitter space) acts as a thermodynamic destabilizer, while a positive cosmological constant (asymptotically de-Sitter space) acts as a thermodynamic stabilizer.

The later conclusion is reached in the General Relativistic analysis, as well. In addition, in our thermodynamic treatment of General Relativity, we obtain for a static, perfect fluid sphere with a general equation of state, the relativistic equation of hydrostatic equilibrium, namely the Tolman-Oppenheimer-Volkov equation, as the *thermodynamic equilibrium* in the microcanonical, as well as the canonical, ensemble. The stability condition determined by the *second variation of entropy* coincides with the dynamical stability condition derived by variations to first order in the dynamical Einstein’s equations. Thus, we show the equivalence of microcanonical thermodynamic stability with linear dynamical stability for a static, spherically symmetric field in General Relativity.

Η διατριβή αυτή βασίζεται στις ακόλουθες δημοσιεύσεις:

- Zacharias Roupas,
“*Thermodynamical instabilities of perfect fluid spheres in General Relativity*”,
Classical and Quantum Gravity, 30, 115018 (2013)
- Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas,
“*Gravothermal Catastrophe with a Cosmological Constant*”,
Physical Review D, 86, 104005, (2012)
- Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas,
“*Gravitational instabilities of isothermal spheres in the presence of a cosmological constant*”,
Nuclear Physics B, 871, 21, (2013)
- Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas,
“*Gravothermal instability with a cosmological constant in the canonical ensemble*”,
Journal of Physics: Conference Series, 410, 012130 (2013)
- Zacharias Roupas,
“*Gravitational-thermodynamic instabilities of isothermal spheres in dS and AdS*”,
Proceedings of the Barcelona Postgrad Encounters on Fundamental Physics, p.31-42 (2013)

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Στατιστική Μηχανική βαρυτικού αερίου	15
2.1	Προσέγγιση μέσου πεδίου	20
2.2	Το θεώρημα της γραμμικής σειράς σημείων ισορροπίας του Poincaré	24
3	Σφαιρικά ρευστά στη Νευτώνεια Βαρύτητα με Κοσμολογική Σταθερά	31
3.1	Η εξίσωση Emden με Λ	34
3.1.1	Το ακρότατο της εντροπίας και της ελεύθερης ενέργειας	34
3.1.2	Κριτήρια για την ευστάθεια	37
3.1.3	Θερμοκρασία και ενέργεια	43
3.1.4	Η σειρά των σημείων ισορροπίας και η ασυμπτωτική συμπεριφορά	45
3.1.5	Ομογενής λύση στην περίπτωση dS	49
3.2	Μικροκανονική συλλογή	51
3.2.1	Κρίσιμα μεγέθη	53
3.2.2	Σύγκριση με τον χώρο Schwarzschild-dS	54
3.3	Κανονική συλλογή	55
3.4	Δυναμική Jeans αστάθεια και θερμοδυναμική	57
4	Θερμοδυναμική ευστάθεια στη Γενική Σχετικότητα	63
4.1	Γραμμική δυναμική ισορροπία	64
4.2	Γενική σχετικιστική εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας από τη θερμοδυναμική	67
4.3	Θερμοδυναμική ευστάθεια	71
4.4	Θερμοβαρυτική καταστροφή στη Γενική Σχετικότητα με Λ	74
5	Συμπεράσματα	81
	A' Η αστάθεια Jeans	85
	B' Οι εντροπίες Gibbs και Boltzmann	87
	Γ' Συνθήκη δυναμικής ευστάθειας για τέλεια σφαιρικά ρευστά	90
Γ'.1	Η εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkov από τις εξισώσεις Einstein	90
Γ'.2	Μια εξίσωση για τη γραμμική δυναμική ευστάθεια	91

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Παρατηρησιακά δεδομένα [1] υποδεικνύουν πως το Σύμπαν είναι ομογενές σε κλίμακες μεγαλύτερες των 10^8 ετών φωτός (ε.φ.). Όμως, σε μικρότερες κλίμακες το Σύμπαν είναι ανομοιογενές και διάφορες δομές σχηματίζονται. Για σύγκριση σημειώνουμε πως η ακτίνα Hubble, δηλαδή η ακτίνα του παρατηρούμενου σύμπαντος, υπολογίζεται στα $5 \cdot 10^9$ ε.φ., ένα τυπικό γαλαξιακό σμήνος έχει διάμετρο περίπου 10^7 ε.φ., ο εγγύτερος γαλαξίας στον Γαλαξία μας απέχει περίπου $2 \cdot 10^6$ ε.φ., ενώ ο Γαλαξίας μας έχει διάμετρο περίπου 10^5 ε.φ. Η ιδέα κλειδί για την κατανόηση των μακροσκοπικών δομών [2] που υπάρχουν στο Σύμπαν είναι αυτή της βαρυτικής αστάθειας. Στην αρχή το Σύμπαν ήταν ομογενές, εκτός από μικρές χβαντικές διακυμάνσεις, όπως υποδηλώνουν οι μετρήσεις της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου [3]. Ξεκινώντας από τα μικρά αυτά συμπυκνώματα, είναι αξιοσημείωτο πως η απλή ιδέα της βαρυτικής αστάθειας επιτρέπει την ερμηνεία των παρατηρήσεων σε μια τεράστια κλίμακα, από τα υπερσμήνη γαλαξιών μέχρι τους στέρεους πλανήτες.

Το φαινόμενο της βαρυτικής αστάθειας οφείλεται στον καθολικά ελκτικό χαρακτήρα και τη μεγάλη εμβέλεια της βαρυτικής δύναμης. Σε σύγκριση με τον ηλεκτρομαγνητισμό για παράδειγμα, σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο πλάσμα, οποιοδήποτε φορτίο θωρακίζεται μέσω του μηχανισμού θωράκισης Debye (Debye shielding). Κάθε φορτισμένο σωματίο επάγει ένα αντίθετα φορτισμένο σύννεφο σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σωματίο, έτσι ώστε στην πράξη σε μεγάλες αποστάσεις από το σωματίο, δε μετράται καθόλου ηλεκτρικό πεδίο εξ' αυτού. Αντίθετα, δεν υπάρχει μηχανισμός που να θωρακίζει τη Βαρύτητα. Μικρά πυκνώματα δημιουργούν λίγο δυνατότερο βαρυτικό πεδίο που διαδίδεται σε μεγάλες αποστάσεις και έλκει ακόμα περισσότερη ύλη. Η βαρυτική αστάθεια συνήθως ονομάζεται αστάθεια *J Jeans* [4], χάρη στον Sir James Jeans ο οποίος πρώτος περιέγραψε τον βασικό δυναμικό μηχανισμό που την προκαλεί. Συνοπτικά περιγράφουμε την αστάθεια αυτή στο Παράρτημα Α'. Η αστάθεια *J Jeans* είναι καθαρά κλασικής φύσης και δεν πρέπει να συγχέεται με βαρυτικές αστάθειες χβαντικής φύσης, όπως αυτή που περιγράφεται από τους Gross, Perry και Yaffe [5], κατά την οποία μικρές μαύρες τρύπες σχηματίζονται αυθόρμητα στο θερμό επίπεδο χώρο μέσω του χβαντικού φαινομένου σήραγγας.

Η αστάθεια *J Jeans* συνήθως περιγράφεται από μια διαταραχή σε ένα «αυτοβαρές» (self-gravitating) ομογενές μέσο [6], όπως αναλυτικά δείχνουμε στο Παράρτημα Α'. Αν το μέγεθος της διαταραχής είναι μεγαλύτερο από το μήκος *J Jeans*

$$L_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$$

όπου v_s είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσο και ρ η πυκνότητα αυτού, η υπέρπυκνη περιοχή της διαταραχής είναι ασταθής και υφίσταται βαρυτική κατάρρευση. Αυτός ο χειρισμός είναι κάπως ευρετικός (heuristic), καθώς ένα βαρυτικό μέσο δεν είναι ομογενές στην ισορροπία. Η υπόθεση του ομογενούς μέσου αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως το «τέχνασμα Jeans» (*the Jeans swindle*) [6]. Παρά όλα αυτά, μπορεί φυσικά να δικαιολογηθεί αν το μέγεθος της διαταραχής είναι πολύ μικρότερο από τις ανομοιογένειες στο σύστημα, ακριβώς όπως οι ανομοιογένειες στην ατμόσφαιρα λόγω του βαρυτικού πεδίου δε λαμβάνονται υπ' όψην στη μελέτη των ηχητικών κυμάτων, διότι σχετίζονται με ένα χαρακτηριστικό μήκος (το μήκος κύματος του ήχου) πολύ μικρότερο από το μέγεθος των ανομοιογενειών.

Ένας άλλος τρόπος μελέτης της βαρυτικής αστάθειας προκύπτει θεωρώντας ένα σφαιρικό, βαρυτικό αέριο περιορισμένο σε τοιχώματα ακτίνας R . Στην κανονική συλλογή, τα τοιχώματα θεωρούνται διαθερμικά και η σφαίρα βρίσκεται σε δεξιαμενή θερμοτήτας, ενώ στη μικροκανονική συλλογή τα τοιχώματα θεωρούνται αδιαβατικά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τα βασικά φαινόμενα που θα μελετήσουμε χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική ακρίβεια για να σχηματίσουμε όσο καλύτερα μπορούμε απλά και μόνον τη φυσική εικόνα. Η πιο αναλυτική παρουσίαση της στατιστικής μηχανικής του αυτοβαρούς αερίου θα γίνει στα επόμενα κεφάλαια.

Έστω η συνάρτηση κατανομής $f(\vec{r}, \vec{p})$ που ορίζεται όταν το σύστημα μελετάται σε κλίμακα αρκετά μεγάλη έτσι, ώστε να μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα συνεχές μέσο (βλ. το επόμενο Κεφάλαιο 2), δηλαδή ένα ρευστό. Η συνάρτηση f δίνει τη συνολική μάζα που περιέχεται σε ένα στοιχείο όγκου

$$dm = f(\vec{r}, \vec{p}) d^3\vec{r} d^3\vec{p}$$

Όπως εξηγούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.1.1, στην κατάσταση ισορροπίας (και υποθέτωντας πως όλες οι μικροκαταστάσεις είναι ισοπίθανες) η συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί την κατανομή Boltzmann

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = A e^{-\frac{\tilde{m}}{kT} \frac{v^2}{2}} e^{-\frac{\tilde{m}}{kT} \phi(r)} \quad (1.1)$$

όπου \tilde{m} είναι η μάζα του ενός σωματίου του αερίου, A μία σταθερά και $\phi(r)$ το βαρυτικό δυναμικό στο σημείο r , το οποίο υπακούει στην εξίσωση Poisson. Η πυκνότητα στην επιφάνεια ενός σφαιρικού κελύφους ακτίνας r δίνεται ύστερα από ολοκλήρωση στις ορμές ως

$$\rho(r) = \int f \tilde{m} d^3\vec{v} = A \tilde{m} \left(\frac{2\pi kT}{\tilde{m}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\tilde{m}}{kT} \phi(r)} \quad (1.2)$$

έτσι, ώστε η συνολική μάζα $m(r)$ που περιέχεται εντός ακτίνας r δίνεται από τη σχέση

$$m(r) = \int_0^r \rho(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad , \text{ και η συνολική μάζα είναι: } M = m(R)$$

Συμβολίζοντας με M τη συνολική μάζα του σφαιρικού ρευστού είναι προφανές ότι

$$M = m(R)$$

Σε κάθε σημείο, η πίεση σχετίζεται με την πυκνότητα από τη σχέση:

$$p(r) = \int f \frac{1}{3} \tilde{m} v^2 d^3v = \rho(r) \frac{kT}{\tilde{m}}$$

Ας σημειωθεί πως αυτό δεν σημαίνει ότι το αέριο υπακούει στην καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου $PV = NkT$. Το τελευταίο θα σήμαινε ότι η πίεση είναι ομογενώς κατανομημένη σε όλο το ρευστό, κάτι που δεν ισχύει εν γένει στην κατάσταση ισορροπίας ενός βαρυτικού αερίου. Η κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας ορίζεται ως εκείνη η μακροκατάσταση στην οποία η βαθμίδα της πίεσης ισοσταθμίζεται από την βαρυτική δύναμη σε κάθε σημείο r

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{\partial p(r)}{\partial r} = -G \frac{m(r)}{r^2}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης ικανοποιεί την εξίσωση Poisson για κάθε $\phi(r)$ που ικανοποιεί την εξίσωση (1.2). Σε σφαιρικές συντεταγμένες και αντικαθιστώντας την πυκνότητα $\rho(r)$ από την εξίσωση (1.2), η εξίσωση Poisson καταλήγει στη λεγόμενη εξίσωση *Emden*:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 4\pi G \rho_0 e^{-\frac{\tilde{m}}{kT}(\phi(r)-\phi(0))} \quad (1.3)$$

όπου $\rho_0 e^{\frac{\tilde{m}}{kT}\phi(0)} = A \tilde{m} \left(\frac{2\pi kT}{\tilde{m}} \right)^{\frac{3}{2}}$. Κάθε κατάσταση ισορροπίας $\rho(r)$ καθορίζεται από τη λύση $\phi(r)$ της εξίσωσης (1.3) για $r \in [0, R]$, μέσω της εξίσωσης (1.2).

Μπορούμε να μελετήσουμε τη λεγόμενη σειρά καταστάσεων ισορροπίας (series of equilibria) και να βρούμε την κατάσταση εκείνη στην οποία αποσταθεροποιείται το σύστημα ως ακολούθως. Η εντροπία Boltzmann, η οποία ορίζεται ως

$$S = -k \int f \log f d^3\vec{r} d^3\vec{p}$$

γράφεται, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.1) ως

$$S = -kN \log A + \frac{1}{T} K + \frac{1}{T} \int \rho \phi d^3\vec{r}$$

όπου K είναι η μέση κινητική ενέργεια

$$K \equiv \int \frac{1}{2} \tilde{m} v^2 f d^3\vec{v} d^3\vec{r} = \frac{3}{2} NkT$$

Συμβολίζοντας την πίεση στο άκρο ως $P = p(R)$ και από την εξίσωση (1.2) έχουμε ότι η πίεση στον ακραίο φλοιό της σφαίρας δίνεται από τη σχέση

$$P = A(2\pi)^{\frac{3}{2}} \tilde{m} \left(\frac{kT}{\tilde{m}} \right)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{\tilde{m}}{kT} G \frac{M}{R}} \quad (1.4)$$

αφού $\phi(R) = -GM/R$. Αντικαθιστώντας τη σταθερά A από την εξίσωση (1.4), η εντροπία Boltzmann γράφεται ως

$$S = -kN \log \left\{ P \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \right\} + \frac{1}{T} G \frac{M^2}{R} + \frac{1}{T} 2U + \frac{1}{T} K - \frac{3}{2} kN \log \frac{\tilde{m}}{2\pi}$$

όπου U είναι η δυναμική ενέργεια

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3\vec{r}$$

Αντικαθιστώντας τη συνολική ενέργεια $E = K + U$, έχουμε τελικά:

$$S = -kN \log \left\{ P \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \right\} + \frac{1}{T} G \frac{M^2}{R} + \frac{1}{T} 2E - \frac{3}{2} kN \left(1 + \log \frac{\tilde{m}}{2\pi} \right) \quad (1.5)$$

Η ελεύθερη ενέργεια

$$F = E - TS$$

γράφεται ως

$$F = NkT \log \left\{ P \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \right\} - G \frac{M^2}{R} - E + \frac{3}{2} NkT \left(1 + \log \frac{\tilde{m}}{2\pi} \right)$$

Αντικαθιστώντας την ολική ενέργεια E από το θεώρημα virial

$$2K + U = 3PV \Rightarrow E = 4\pi R^3 P - \frac{3}{2} NkT \quad (1.6)$$

παίρνουμε

$$F = NkT \log \left\{ P \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \right\} - G \frac{M^2}{R} - 4\pi R^3 P + \frac{3}{2} NkT \left(2 + \log \frac{\tilde{m}}{2\pi} \right) \quad (1.7)$$

Υποθέτωνα σταθερή θερμοκρασία και αριθμό σωματιδίων, δηλαδή την κανονική συλλογή, η πίεση στο άκρο δίνεται από τη σχέση

$$P \equiv - \left[\frac{\partial F}{\partial V} \right]_{N,T} = - \frac{1}{4\pi R^2} \left[\frac{\partial F}{\partial R} \right]_{N,T} \quad (1.8)$$

Από την εξίσωση (1.8) μπορούμε να μελετήσουμε τη σειρά καταστάσεων ισορροπίας που ορίζονται από την τιμή της εξωτερικής ακτίνας R . Αντικαθιστώντας την ελεύθερη ενέργεια F και λύνοντας ως προς την παράγωγο $\left. \frac{\partial P}{\partial R} \right|_{N,T}$ παίρνουμε ύστερα από μερικούς σχετικά απλούς υπολογισμούς

$$\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,T} = -P \frac{8\pi R^2 P - G \frac{M^2}{R^2}}{4\pi R^3 P - NkT} \quad (1.9)$$

Για R αρκετά μεγάλο, ισχύει $\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,T} < 0$ και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Σε αυτήν την αρκετά μεγάλη ακτίνα, η συμπίεση αυξάνει την πίεση έτσι, ώστε το σύστημα τείνει να επανέλθει στη θέση ισορροπίας και συνεπώς είναι ευσταθές. Καθώς η ακτίνα αυξάνεται, η πίεση στο άκρο αυξάνεται και φτάνει ένα μέγιστο στο σημείο εκείνο όπου

$$P_B = \frac{GM^2}{8\pi R_B^4}$$

Αυτό αντιστοιχεί στο σημείο B του Σχήματος 1.1(α'), όπου φαίνεται επίσης ο ευσταθής κλάδος AB . Το Σχήμα 1.1 δημιουργήθηκε από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Emden (1.3). Περαιτέρω συμπίεση θα έφθανε στο οριακό σημείο εκείνο όπου

$$P_C = \frac{NkT}{4\pi R_C^3} \quad (1.10)$$

και

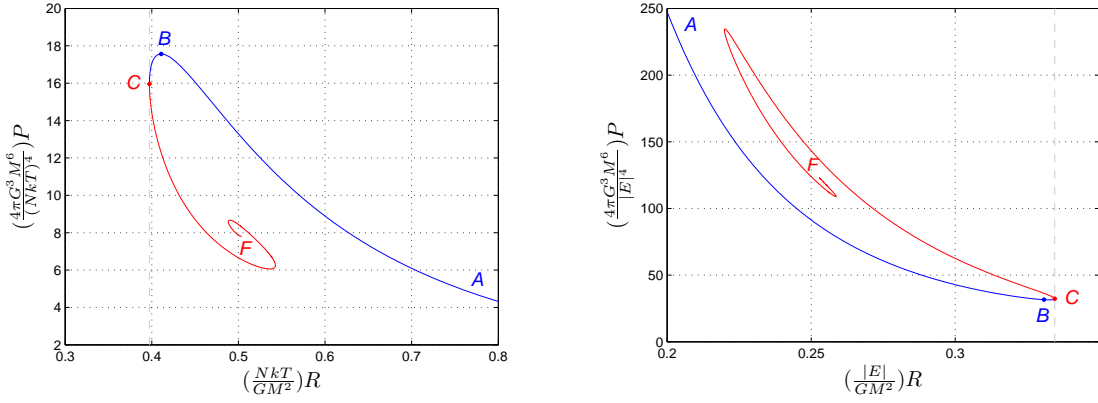
$$\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,T} \xrightarrow{R=R_C} \infty \quad (1.11)$$

Καθώς $\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,T} > 0$ στον κλάδο BC , ίσως να υπέθετε κανείς πως στο σημείο B εγκαθίσταται μία αστάθεια, διότι μια μείωση του όγκου θα προκαλούσε μείωση στην πίεση στο άκρο και συνεπώς θα εκκινούσε μια βαρυτική κατάρρευση. Όντως έτσι θα συνέβαινε αν η ύλη μέσα στη σφαίρα ήταν ομογενώς κατανομημένη και η πίεση ήταν ίδια παντού. Όμως (και σε αντίθεση με ότι σημειώνουν οι Gross, Perry και Yaffe [5]), η αστάθεια δεν εμφανίζεται στο μέγιστο σημείο B , αλλά στην λίγο μικρότερη ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο C , όπου η κλίση της $P(R)$ απειρίζεται. Η αστάθεια εγκαθίσταται στο σημείο C διότι παρ'ότι, κατά μήκος του κλάδου BC , η πίεση στο άκρο ελαττώνεται σε μια συμπίεση, η πίεση στην πειφάνεια των εσωτερικών κελιών εξακολουθεί να αυξάνεται. Συνεπώς η κατάρρευση ανακόπτεται από τα εσωτερικά μέρη της σφαίρας, για κάθε σημείο ισορροπίας έως το σημείο C , όπου $\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,T} \rightarrow \infty$, και άρα η παραμικρή ελάχιστη συμπίεση προκαλεί τεράστια μείωση στην πίεση στο άκρο έτσι που η κατάρρευση δε μπορεί να ανακοπεί. Τονίζουμε ότι τα φυσικά αυτά επιχειρήματα στηρίζονται από τα αριθμητικά μας αποτελέσματα, όπου βρίσκουμε πέραν πάσης αμφιβολίας ότι το σημείο C ταυτίζεται ακριβώς με το σημείο ισορροπίας όπου εγκαθίσταται η θερμοδυναμική αστάθεια. Δηλαδή, στο C η ελεύθερη ενέργεια σταματά να είναι τοπικό μέγιστο και γίνεται σαγματικό σημείο. Το γεγονός ότι η συνθήκη (1.11) προσδιορίζει το σημείο αλλαγής ισορροπίας (turning point of stability) είναι, όπως θα εξετάσουμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2.2, απόρροια του θεωρήματος της γραμμικής σειράς σημείων ισορροπίας του Poincaré [7, 8] (Poincaré's theorem of linear series of equilibria). Ο μηχανισμός που περιγράψαμε είναι αυτός που προκαλεί την κατάρρευση σε συμπυκνώματα διαστρικού αερίου οδηγώντας στη δημιουργία των άστρων.

Ως τώρα εργαστήκαμε στην κανονική συλλογή, υποθέτωντας ουσιαστικά πως η σφαίρα ανταλλάσει ενέργεια με το περιβάλλον μέσω έτσι, ώστε η θερμοκρασία να παραμένει σταθερή. Θέλουμε να κάνουμε όμοια ανάλυση στη μικροκανονική συλλογή. Στη συνηθισμένη θερμοδυναμική μη-βαρυτικών αερίων κανείς δε θα περίμενε να βρει διαφορετικά αποτελέσματα, καθώς είναι γνωστό ότι διαφορετικές συλλογές δίνουν ισοδύναμες περιγραφές. Όμως, όπως θα δούμε σύντομα αυτό δεν ισχύει για ένα βαρυτικό αέριο. Στη Βαρύτητα οι θερμοδυναμικές συλλογές δεν είναι ισοδύναμες, όπως θα αναλύσουμε στο Κεφάλαιο 2 και θα τονίσουμε πολλές φορές σε αυτήν την εργασία.

Στην κανονική συλλογή, σε κάθε απειροστή συμπίεση, παρ'όλο που η πίεση αυξάνεται, εκλύεται θερμική ενέργεια στη δεξαμενή θερμότητας έτσι, που η αρνητική βαρυτική ενέργεια βαθμιαία υπερिशύει της θερμικής. Σε κάποια ελάχιστη ακτίνα η πίεση της βαρύτητας δε μπορεί να συγκρατηθεί από τη θερμική και το αέριο καταρρέει για κάθε ακτίνα μικρότερη αυτής της κρίσιμης τιμής. Στη μικροκανονική συλλογή δε μπορεί να εκλυθεί ή απορροφηθεί ενέργεια και κανείς φυσιολογικά περιμένει η βαθμίδα της πίεσης να αυξάνεται πολύ πιο δραστικά σε μία συμπίεση από ότι στην κανονική συλλογή. Στην πραγματικότητα, αφού η θερμοκρασία αυξάνεται σε κάθε συμπίεση χωρίς απώλεια ενέργειας και τα σωματΙΑ γίνονται πιο κινητικά, είναι λογικό να υποψιάζεται κανείς πως το σύστημα γίνεται πιο ευσταθές κατά τη συμπίεση. Έτσι, που στο όριο $R \rightarrow 0$ το σύστημα είναι ευσταθές και η πίεση τείνει στο άπειρο. Σε αντίθεση με την κανονική συλλογή, όποια αστάθεια θα πρέπει να αναζητηθεί για μεγάλες ακτίνες.

Ας σημειώσουμε ακόμη ότι για θετική ολική ενέργεια $E = K + U$, η θερμική ενέργεια



(α) Πίεση στο άκρο της σφαίρας στην κανονική συλλογή (β) Πίεση στο άκρο της σφαίρας στη μικροκανονική συλλογή

Σχήμα 1.1: Η πίεση στο άκρο της σφαίρας $P = p(R)$ για διάφορες ακτίνες R , δηλαδή για διάφορα σημεία ισορροπίας. Στην αριστερή εικόνα είναι η πίεση P για σταθερά N, T , δηλαδή στη κανονική συλλογή και στη δεξιά εικόνα για σταθερά N, E , δηλαδή στη μικροκανονική συλλογή και για $E < 0$. Στο σχήμα (α) το σημείο A αντιστοιχεί στο $R \rightarrow \infty$, ενώ στο σχήμα (β) το σημείο A αντιστοιχεί στο $R \rightarrow 0$. Και στα δύο σχήματα ο κλάδος ABC είναι σταθερός, ενώ η αστάθεια εγκαθίσταται στο σημείο C . Τα σημεία ισορροπίας από το σημείο C στο focus point F της σπείρας είναι ασταθή. Δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας πέρα από την κάθετο που διέρχεται από το C .

K κυριαρχεί και συνεπώς δε περιμένει κανείς να βρει κάποια αστάθεια. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι οι αρνητικές ενέργειες $E < 0$, που είναι ούτως ή αλλιώς η περίπτωση της μεγάλης πλειοψηφίας των αστροφυσικών συστημάτων, λόγω του θεωρήματος virial.

Στη μελέτη της μικροκανονικής συλλογής χρησιμοποιούμε την εντροπία Boltzmann όπως δίνεται από την εξίσωση (1.5). Η σειρά των σημείων ισορροπίας διάφορων R μπορεί να μελετηθεί μέσω της καταστατικής εξίσωσης

$$P \equiv T \left[\frac{\partial S}{\partial V} \right]_{N,E} = \frac{T}{4\pi R^2} \left[\frac{\partial S}{\partial R} \right]_{N,E} \quad (1.12)$$

Υπολογίζοντας αυτή την παράγωγο της εντροπίας παίρνουμε ύστερα από λίγη άλγεβρα:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,E} = -P \frac{\left(2 - \frac{GM^2/R}{NkT} - \frac{E}{NkT} \right) 8\pi R^2 P - \frac{GM^2}{R^2}}{\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \frac{GM^2/R}{NkT} - \frac{4}{3} \frac{E}{NkT} \right) 4\pi R^3 P - NkT} \quad (1.13)$$

Σε αυτή τη μορφή είναι εύκολο να συγκριθεί με την εξίσωση (1.9). Παρατηρήστε πως ξεκάθαρα τα σημεία απειρισμού είναι διαφορετικά έτσι, ώστε σίγουρα η συμπεριφορά στις δύο συλλογές είναι διαφορετική. Το πόσο διαφορετική θα το δούμε σύντομα. Αφού τώρα η θερμοκρασία T μεταβάλλεται, είναι επιθυμητό να εκφράσουμε την παράγωγο της πίεσης μόνο ως προς $E, N (\Leftrightarrow M), R$ και όχι την T . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αντικαθιστώντας τη θερμοκρασία για την ενέργεια από την εξίσωση virial (1.6) παίρνοντας:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right]_{N,E} = -\frac{2}{3} P \frac{64\pi^2 R^5 P^2 - (10E + 4\frac{GM^2}{R}) 4\pi R^2 P + E\frac{GM^2}{R^2}}{32\pi^2 R^6 P^2 - (\frac{7}{3}E + \frac{GM^2}{R}) 8\pi R^3 P - \frac{4}{3}E^2} \quad (1.14)$$

Για R αρκετά μικρή και αρνητική ενέργεια, είναι $\left[\frac{\partial P}{\partial R}\right]_{N,E} < 0$ και συνεπώς η ισορροπία είναι ευσταθής. Καθώς η ακτίνα R αυξάνεται, η πίεση στο άκρο μειώνεται έως την ελάχιστη τιμή

$$P_B = \frac{GM^2}{32\pi R_B^4} \left\{ 10 \frac{ER_B}{GM^2} + 4 + \sqrt{\left(10 \frac{ER_B}{GM^2} + 4\right)^2 - 16 \frac{ER_B}{GM^2}} \right\}$$

που αντιστοιχεί στο σημείο B του Σχήματος 1.1(β'). Πέρα από αυτό το σημείο, $\left[\frac{\partial P}{\partial R}\right]_{N,E} > 0$ και η πίεση στο άκρο αυξάνεται καθώς η σφαίρα βαθμιαία διαστέλεται, έως το οριακό σημείο C

$$P_C = \frac{GM^2}{4\pi R_C^4} \left\{ \frac{7}{3} \frac{ER_C}{GM^2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{7}{3} \frac{ER_C}{GM^2} + 1\right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{ER_C}{GM^2}\right)^2} \right\} \quad (1.15)$$

όπου

$$\left[\frac{\partial P}{\partial R}\right]_{N,E} \xrightarrow{R=R_C} \infty \quad (1.16)$$

Κατά μήκος του κλάδου BC η πίεση στην εξωτερική επιφάνεια αυξάνεται στη διαστολή, όχι όμως η πίεση στα εσωτερικά κελιά. Μία 'αποσύνδεση' των εσωτερικών περιοχών από τις εξωτερικές επιφάνειες λαμβάνει χώρα. Θερμική ενέργεια απορροφάται από τις εσωτερικές περιοχές και μεταφέρεται στην εξωτερική επιφάνεια. Εξαιτίας αυτού οι εσωτερικές περιοχές βαθμιαία αποσταθεροποιούνται και ένας πυρήνας σχηματίζεται. Στο οριακό σημείο C μια αστάθεια εμφανίζεται, καθώς η οποδήποτε μικρή αύξηση του όγκου προκαλεί τεράστια αύξηση στην πίεση της εξωτερικής επιφάνειας απορροφώντας την περισσότερη από τη διαθέσιμη ενέργεια, αφήνοντας την εσωτερική περιοχή κυριαρχούμενη από την βαρύτητα να καταρρέει. Αυτή η αστάθεια οδηγεί σε μια δομή πυρήνας - άλως (core-halo structure). Επιβεβαιώσαμε αριθμητικά ότι η αστάθεια εμφανίζεται στο σημείο C , καθώς υπολογίσαμε αριθμητικά ότι στο σημείο αυτό η εντροπία σταματάει να είναι τοπικό μέγιστο και γίνεται σαγματικό σημείο. Συνεπώς, η αστάθεια αυτή ταυτοποιείται με την *Θερμοβαρυτική Καταστροφή* [9, 10] (Gravothermal Catastrophe) και ουσιαστικά μόλις παρουσιάσαμε μια *φυσική εξήγηση* για τη δημιουργία της δομής πυρήνα - άλω. Αυτός ο φυσικός μηχανισμός που περιγράφουμε μπορεί να έχει εφαρμογή στο τελευταίο στάδιο ενός ερυθρού γίγαντα όταν πετάει τα εξωτερικά στρώματα και ένας πυκνός πυρήνας, ο οποίος καταρρέει, απομένει.

Ας κάνουμε μια ανασκόπηση στο φαινόμενο της Θερμοβαρυτικής Καταστροφής ή όπως αλλιώς ονομάζεται αστάθεια Antonov [9]. Ότι έχουμε περιγράψει μέχρι τώρα, βασιζόμενοι στην πίεση, είναι κυρίως οι *δυναμικοί μηχανισμοί* που οδηγούν σε βαρυτική αστάθεια. Έχουμε αναφέρει αρκετές φορές όμως, πως σε κάθε περίπτωση (κανονική ή μικροκανονική συλλογή) αυτή είναι ασταθής θερμοδυναμικής φύσεως. Συνεπώς, θα αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε βαρυτική αστάθεια θερμοδυναμικής προέλευσης ως *θερμοβαρυτική αστάθεια*. Ο πρώτος που σκέφτηκε να διερευνήσει αν το ακρότατο της εντροπίας, που προσδιορίζει την κατάσταση ισορροπίας (1.2) στα βαρυτικά συστήματα, είναι ένα πραγματικό μέγιστο ήταν ο Antonov το 1962 [9].

Το σύστημα υπό μελέτη στην αρχική διατύπωση του Antonov [9, 10, 11] είναι το σύστημα που εισαγάγαμε στη μικροκανονική συλλογή, δηλαδή ένα βαρυτικό αέριο στο Νευτώνειο

όριο μέσα σε ένα σφαιρικό κελί με αδιαβατικά και τέλεια ελαστικά τοιχώματα με σταθερή ενέργεια και αριθμό σωματιδίων (αστεριών). Η κατάσταση ισορροπίας αντιστοιχεί σε μέγιστο της εντροπίας και ονομάζεται 'ισόθερμη σφαίρα'. Ο Antonov απέδειξε πως για ένα τέτοιο σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας στην προσέγγιση μέσου πεδίου, την οποία θα περιγράψουμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο, δεν υπάρχει ολικό μέγιστο στην εντροπία. Υπάρχουν, όμως, τοπικά μέγιστα για

$$\frac{ER}{GM^2} > -0.335 \quad (1.17)$$

Αυτό σημαίνει πως για θετική ενέργεια E , υπάρχουν ισόθερμες σφαίρες για κάθε ακτίνα R , αλλά για αρνητική ολική ενέργεια τοπικά μέγιστα της εντροπίας υπάρχουν μόνο για ακτίνες μικρότερες από μια κρίσιμη τιμή

$$R_A = 0.335 \frac{GM^2}{|E|}$$

που ονομάζουμε ακτίνα Antonov. Για $R > R_A$ και σταθερή αρνητική ενέργεια δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας. Η ακτίνα R_A είναι ακριβώς η κρίσιμη ακτίνα R_C που αντιστοιχεί στο σημείο C της εξίσωσης (1.15) και του Σχήματος 1.1(β').

Για σταθερή αρνητική ενέργεια και για ακτίνες μικρότερες της ακτίνας Antonov $R < R_A$, οι καταστάσεις ισορροπίας μπορεί να είναι ευσταθείς (τοπικά μέγιστα εντροπίας) ή ασταθείς (σαγματικά σημεία) ανάλογα με την τιμή του λόγου της πυκνότητας στο κέντρο $\rho_0 = \rho(0)$ προς την πυκνότητα στο άκρο $\rho_R = \rho(R)$ ή ισοδύναμα ανάλογα με τη θερμοκρασία. Υπάρχει μία κρίσιμη τιμή $(\rho_0/\rho_R)_{cr} = 709$ στην οποία εμφανίζεται μια αστάθεια, δηλαδή καταστάσεις ισορροπίας με

$$\frac{\rho_0}{\rho_R} > 709 \Leftrightarrow kT > 0.492 \frac{GM^2}{NR}$$

είναι ασταθείς. Μία αξιοσημείωτη ιδιότητα της βαρύτητας είναι πως αυτή η αστάθεια στη μικροκανονική συλλογή εμφανίζεται όταν η θερμοχωρητικότητα πηγαίνει από αρνητικές σε θετικές τιμές και όχι αντίστροφα (μη-ισοδυναμία των συλλογών). Το σημείο αυτό αλλαγής της ευστάθειας είναι το ίδιο με το σημείο ισορροπίας που αντιστοιχεί στη μέγιστη ακτίνα R_A , δηλαδή στο σημείο C του Σχήματος 1.1(β').

Οι Lynden-Bell και Wood [10] εικάσανε πως στην περιοχή που δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας το σύστημα υπερθερμαίνεται και καταρρέει. Η εικόνα αυτή της Θερμοβαρυτικής Καταστροφής επιβεβαιώθηκε αργότερα από αριθμητικές προσομοιώσεις [12, 13, 14, 15, 16, 17] και είναι γνωστή ως 'core collapse' [6] δηλαδή 'κατάρρευση πυρήνα', η οποία παίζει κεντρικό ρόλο στην εξέλιξη των αστρικών σημών. Όπως σημειώνουν οι Vega και Sanchez [16] η κατάρρευση είναι μια μετάβαση φάσης μηδενικής τάξης, καθώς η θερμοκρασία και η πίεση αυξάνουν ασυνεχώς κατά τη μετάβαση (η ελεύθερη ενέργεια Gibbs γίνεται ασυνεχής). Η θερμοβαρυτική Καταστροφή μπορεί επίσης να οδηγήσει στο σχηματισμό υπερμαζικών μαύρων οπών [18].

Η κανονική συλλογή του συστήματος μελετήθηκε κυρίως από τον Chavanis [19] από τη θερμοδυναμική σκοπιά, ενώ για τη μελέτη του βαρυτικού αερίου από τη στατιστική μηχανική σκοπιά σε όλες τις συλλογές παραπέμπουμε τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται στις αναφορές [16, 17]. Όπως εξηγούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2 βασιζόμενοι στην κλασική

ανασκόπηση του Padmanabhan [20], η κανονική συλλογή στη βαρύτητα είναι προβληματική στον ορισμό της. Όμως από αυστηρά μαθηματική σκοπιά μπορεί να οριστεί με τη χρήση της ελεύθερης ενέργειας και μπορεί να έχει ρεαλιστική φυσική εφαρμογή, όπως ήδη σημειώσαμε και επίσης προτείνεται στις αναφορές [21, 22]. Στην αναφορά [21], το διαστρικό μέσο μελετάται ως βαρυτικό αέριο σε θερμική ισορροπία με τη μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου. Αποδεικνύεται πως η βαρύτητα στην κανονική συλλογή μπορεί να εξηγήσει την fractal του διαστρικού αερίου. Ο ίδιος μηχανισμός εφαρμόζεται στην αναφορά [22] για να εξηγήσει την fractal δομή του Σύμπαντος, δηλαδή την κατανομή των γαλαξιών, υποθέτοντας πως έχουν φτάσει σε ημι-ισορροπία (quasi-equilibrium). Ο Chavanis [19] μελέτησε κλειστές ισόθερμες σφαίρες στην κανονική συλλογή και βρήκε ότι η αυτο-ομοιότητα (self-similarity) που μελετήθηκε στις αναφορές [21, 22, 23] προέρχεται από τις δευτερογενείς αστάθειες των ισόθερμων σφαιρών που οδηγούν σε τμηματική κατάρρευση (fragmented collapse), και σχετίζονται με την ακτίνα King του συστήματος. Σε αντίθεση, η ακτίνα Jeans σχετίζεται με την ισόθερμη μη-τμηματική κατάρρευση.

Η τελευταία λαμβάνει χώρα στην περιοχή όπου δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, δηλαδή για [10]

$$\frac{GM\beta}{R} > 2.52 \quad (1.18)$$

όπου $\beta = \tilde{m}/kT$. Συνεπώς, η αστάθεια συμβαίνει για ακτίνες μικρότερες της κρίσιμης τιμής

$$R_{cr} = 0.397 \frac{GM^2}{NkT}$$

Η ακτίνα αυτή αναγνωρίζεται, όπως επιβεβαιώσαμε και αριθμητικά, με την ακτίνα R_C που αντιστοιχεί στο σημείο C της εξίσωσης (1.10) και του Σχήματος (1.1(α')). Ισοδύναμα, η συνθήκη (1.18) σημαίνει ότι αν ο όγκος θεωρηθεί σταθερός, το αέριο γίνεται ασταθές για θερμοκρασίες

$$kT < 0.397 \frac{GM^2}{NR}$$

Αυτό απλά σημαίνει ότι, αν για σταθερό όγκο, μειώσεις τη θερμοκρασία της δεξαμενής θερμότητας, το σύστημα απο αποσταθεροποιείται σε κάποια χαμηλή θερμοκρασία, καθώς θερμική ενέργεια βαθμιαία εκλύεται αφήνοντας τη βαρύτητα να κυριαρχήσει. Στην περιοχή όπου υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, δηλαδή για $GM\beta/R < 2.52$, η ευστάθειά τους εξαρτάται από την «αντίθεση πυκνότητας» (density contrast) ρ_0/ρ_R ή ισοδύναμα από την *ενέργεια* του συστήματος. Η ισορροπία είναι ασταθής αν

$$\frac{\rho_0}{\rho_R} > 32.12 \Leftrightarrow E < -0.199 \frac{GM^2}{R}$$

Αυτά τα ασθενή σημεία ισορροπίας σχετίζονται με την τμηματική κατάρρευση που αναφέραμε πρωτύτερα.

Το ήμισυ της εργασίας αυτής είναι αφιερωμένο στην διατύπωση της Θερμοβαρυτικής Καταστροφής (μικροκανονική συλλογή) και της ισόθερμης κατάρρευσης (κανονική συλλογή) υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς [24, 25, 26]. Το αυξανόμενο ενδιαφέρον στον χώρο Anti-de Sitter (αρνητική κοσμολογική σταθερά), λόγω της AdS/CFT αντιστοιχίσης [27], από τη μία πλευρά και η παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος

[28, 29] από την άλλη (θετική κοσμολογική σταθερά) δικαιολογούν μια ανάλυση σταθερότητας των βαρυτικών συστημάτων παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Επιπλέον, στα περισσότερα σύγχρονα κοσμολογικά μοντέλα, ένας όρος κοσμολογικής σταθεράς, συνοδεύει με τον έναν ή άλλο τροπο την εξέλιξη του Σύμπαντος από την αρχή του μέχρι το παρόν. Στα κοσμολογικά μοντέλα με ‘φθίνουσα ενέργεια κενού’ (decaying vacuum energy) [30, 31, 32] η κοσμολογική ‘σταθερά’ δεν είναι σταθερή στο χρόνο (παρά μόνον στο χώρο) και μειώνεται, έτσι που η επίδρασή της θα μπορούσε να είναι σημαντική ακόμα και για αστρικά αντικείμενα στο μακρινό παρελθόν [33]. Θα θέλαμε να κατανοήσουμε την επίδραση μιας οποιαδήποτε τιμής κοσμολογικής σταθεράς στην ευστάθεια των βαρυτικών συστημάτων. Είναι φυσικό να αρχίσει κανείς με το απλούστερο δυνατό σύστημα, δηλαδή ένα σφαιρικό συμμετρικό, κλειστό, στατικό, Νευτώνειο σύστημα.

Για διευκόλυνση, σε όλη την εργασία αυτή, τόσο στη Νευτώνεια βαρύτητα όσο και στη Γενική Σχετικότητα, θα ονομάζουμε την περίπτωση μιας θετικής κοσμολογικής σταθεράς ‘περίπτωση dS’ (από τον de Sitter) ή απλά dS ενώ την περίπτωση αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς ‘περίπτωση AdS’ (από τον anti-de Sitter χώρο) ή απλά AdS. Στο Νευτώνειο όριο, η κοσμολογική σταθερά δρά ως μια αρμονική δύναμη, που είναι απωστική στην περίπτωση dS και ελκτική στον AdS. Στην τελευταία περίπτωση είναι σαν κάθε σωματίο να είναι δεμένο στη μία άκρη με όμοιο ελατήριο ελαστικής σταθεράς $|\Lambda|c^2/3$ με το δεύτερο άκρο όλων των ελατηρίων να είναι δεμένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Στην περίπτωση dS η εικόνα είναι η ίδια εκτός από το γεγονός ότι τα ‘ελατήρια’ δρουν με κάποιο τρόπο απωστικά. Στην ‘επίπεδη’ (μηδενική κοσμολογική σταθερά) και την AdS περιπτώσεις όλες οι καταστάσεις ισορροπίας έχουν φθίνουσα πυκνότητα $\rho(r)$ με τη μέγιστη πυκνότητα $\rho(0)$ στο κέντρο και την ελάχιστη πυκνότητα $\rho(R)$ στο άκρο. Στον dS, όμως, εκτός από τη σειρά σημείων ισορροπίας με φθίνουσα πυκνότητα, υπάρχουν πολλές άλλες σειρές. Μία με μονοτονικά αύξουσα πυκνότητα, μία με ομογενή πυκνότητα, που είναι το Νευτώνειο ανάλογο του στατικού συμπαντος του Einstein, υπάρχουν σειρές με $\rho_0 > \rho_R$ και ένα ή περισσότερα αραιώματα ανάμεσα και σειρές με $\rho_0 < \rho_R$ και ένα ή περισσότερα πυκνώματα ανάμεσα. Ο λόγος για την ποικιλία αυτή των λύσεων είναι ο ανταγωνιστικός χαρακτήρας των αλληλεπιδράσεων, η ελκτική Νευτώνεια βαρύτητα και η απωστική σκοτεινή ενέργεια (θετική κοσμολογική σταθερά). Και στις δύο συλλογές οι λύσεις με μονοτονικά αύξουσα πυκνότητα βρίσκουμε να είναι ευσταθείς. Σε αυτές τις λύσεις η σκοτεινή ενέργεια υπερिशύει της ελκτικής σβαρύτητας. Οι λύσεις με ομογενή πυκνότητα δεν είναι όλες σταθερές. Και στις δύο συλλογές, βρίσκουμε μια αστάθεια που εγκαθίσταται στην κρίσιμη θερμοκρασία

$$kT_C = \frac{GM^2}{6.72NR}$$

Οι καταστάσεις ισορροπίας με $T < T_C$ είναι ασταθείς. Βλέπουμε πως οι καταστάσεις με ομογενή πυκνότητα παραβιάζουν τον κανόνα της μη-ισοδυναμίας των συλλογών. Αυτό συμβαίνει, διότι η ακτίνα των ομογενών καταστάσεων ισορροπίας $R_H = (3M/8\pi\rho_\Lambda)^{1/3}$ είναι ανεξάρτητη τόσο της ενέργειας όσο και της θερμοκρασίας και επιπλέον διότι προσομοιάζουν τις καταστάσεις ισορροπίας της συνήθους θερμοδυναμικής λόγω της ομογενούς πυκνότητας.

Ένα από τα κύρια ενδιαφέροντά μας είναι να ανακαλύψουμε πώς η κρίσιμη ακτίνα (όπου εγκαθίσταται μια αστάθεια) μεταβάλλεται με την κοσμολογική σταθερά Λ και στις δύο συλλογές. Ας εστιάσουμε προς στιγμήν στην μικροκανονική συλλογή όπου βρίσκουμε ότι η

ακτίνα Antonov αυξάνεται με την αύξηση της κοσμολογικής σταθεράς. Το σύστημα τείνει να είναι πιο σταθερό, καθώς μια ακόμα δύναμη, πέραν της θερμικής πίεσης, που μπορεί να εξισορροπήσει τη βαρύτητα προστίθεται. Ακόμα και για αρνητική κοσμολογική σταθερά, μια αύξηση αυτής, μειώνει την ελκτική της δράση. Μία θετική κοσμολογική σταθερά (dS) τείνει να σταθεροποιεί το σύστημα, ενώ μια αρνητική κοσμολογική σταθερά (AdS) τείνει να το αποσταθεροποιεί. Στον dS, πέραν της κρίσιμης ακτίνας Antonov βρίσκουμε μια δεύτερη κρίσιμη ακτίνα, ως την πούμε κοσμολογική ακτίνα R_{cos} . Πέραν αυτής, δηλαδή για μεγαλύτερες ακτίνες, ευσταθείς καταστάσεις υπάρχουν ξανά. Άρα, στη μικροκανονική συλλογή δεν υπάρχουν καθόλου καταστάσεις ισορροπίας για $R_A < R < R_{cos}$. Φανταστείτε για μια στιγμή, ένα σφαιρικό ρευστό με σταθερή αρνητική ενέργεια, το οποίο βαθμιαία διαστέλεται από έναν αρχικά πολύ μικρό όγκο. Αρχικά, η σφαίρα είναι σε μια αέρια, ευσταθή, φάση. Όταν η ακτίνα περάσει την ακτίνα R_A μεταβαίνει σε ασταθή, καταρρέουσα φάση. Καθώς η ακτίνα μεγαλώνει περαιτέρω, η κοσμολογική δύναμη γίνεται μεγαλύτερη στα εξωτερικά μέρη. Όταν η σφαίρα φθάνει τη δεύτερη κρίσιμη ακτίνα R_{cos} οι καταστάσεις ισορροπίας αποκαθίστανται και το σύστημα περνάει στην αέρια φάση ξανά. Αυτή η συμπεριφορά είναι όμοια με μια μετάβαση φάσης επανεισόδου όπως αυτές που παρατηρούνται σε στατιστικά συστήματα με ανταγωνιστικές αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας [34, 35, 36, 37].

Στην κανονική συλλογή, η κρίσιμη ακτίνα R_C , στην οποία εγκαθίσταται μια αστάθεια μειώνεται με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά. Καθώς σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας για $R < R_C$ καταλαβαίνουμε ξανά ότι ο dS τείνει να σταθεροποιεί το σύστημα, ενώ ο AdS να το αποσταθεροποιεί. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν εξετάσουμε την κρίσιμη θερμοκρασία T_1 στην οποία εγκαθίσταται μια αστάθεια. Καταστάσεις ισορροπίας υπάρχουν μόνο για $T > T_1$ και η T_1 μειώνεται με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά. Επιπλέον, στην τιμή $\rho_\Lambda = \bar{\rho}/4$, όπου $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ και $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα του συστήματος, εμφανίζεται μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία T_2 . Για $T < T_2$ οι καταστάσεις ισορροπίας αποκαθίστανται. Αυτή είναι ξανά μια τυπική μετάβαση φάσης επανεισόδου. Καθώς η κοσμολογική σταθερά αυξάνεται, πέρα από τις καταστάσεις ισορροπίας που βασίζονται στη θερμική ενέργεια για την εξισορρόπηση της βαρύτητας, εμφανίζονται καταστάσεις ισορροπίας που βασίζονται στην κοσμολογική σταθερά. Η οριακή κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί στην $\rho_\Lambda = \bar{\rho}/4$ έχει $T = 0$, δηλαδή είναι μια στατική κατάσταση ισορροπίας με την δυναμική και όχι την υδροδυναμική έννοια. Όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην επιφάνεια της σφαίρας, όπου η δύναμη της σκοτεινής ενέργειας ισούται ακριβώς με την αντίθετη βαρυτική δύναμη και κάθε σωματίο μένει ακίνητο. Αυξάνοντας περαιτέρω το Λ επιτρέπει την εμφάνιση όλο και περισσότερων καταστάσεων ισορροπίας με εσωτερικές κινήσεις $T \neq 0$ που λαμβάνουν χώρα στις εσωτερικές περιοχές $r < R$.

Και στις δύο συλλογές, η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας $(\rho_0/\rho_R)_{cr}$ μειώνεται με αύξουσα κοσμολογική σταθερά. Αυτό απλά συμβαίνει διότι μια μεγαλύτερη κοσμολογική σταθερά οδηγεί σε καταστάσεις ισορροπίας με μεγαλύτερη πυκνότητα στο άκρο, καθώς η κοσμολογική δύναμη αυξάνει με την απόσταση από το κέντρο της σφαίρας.

Ενώ το πρώτο μισό της εργασίας αυτής αφορά στις θερμοβαρυτικές αστάθειες στη Νευτώνεια βαρύτητα, το άλλο μισό αφορά στη θερμοδυναμική βαρυτικών συστημάτων στη Γενική Σχετικότητα και στη θερμοδυναμική ευστάθεια αυτών με ή χωρίς κοσμολογική σταθερά [38]. Προκειμένου να γενικευθεί η συνήθης θερμοδυναμική στη Γενική Σχετικότητα, οι νόμοι της θερμοδυναμικής πρέπει να εκφραστούν σε μια 'τοπική', διαφορική μορφή [39, 40]. Θεωρείστε ένα στοιχείο ρευστού και έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το

στοιχείο με χωρικές συντεταγμένες \vec{r} , δηλαδή το ιδιοσύστημα αναφοράς (proper frame) ή ισοδύναμα το αδρανειακό σύστημα. Η θερμοδυναμική κατάσταση του στοιχείου ρευστού περιγράφεται από τις τοπικές θερμοδυναμικές μεταβλητές [40] $s(\vec{r})$, $n(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$, $p(\vec{r})$, $T(\vec{r})$, όπου:

s : τοπική εντροπική πυκνότητα

n : τοπική πυκνότητα βαρυονικού αριθμού

μ : τοπικό χημικό δυναμικό των βαρυονίων

ρ : τοπική ενεργειακή πυκνότητα συμπεριλαμβανομένων όλων των μορφών ενέργειας

p : ισοτροπική πίεση του στοιχείου ρευστού στο rest frame

T : θερμοκρασία του στοιχείου ρευστού στο rest frame

και όλες οι πυκνότητες μετρώνται ως προς το proper τρισδιάστατο χωρικό στοιχείο όγκου V . Καθώς το στοιχείο κινείται στο ρευστό, ο ολικός αριθμός βαρυονίων (με τα αντιβαρυόνια να έχουν αντίθετο πρόσημο) N διατηρείται

$$dN = 0$$

αν και τα 'τοιχώματα' του στοιχείου πιθανότατα αλλάζουν σχήμα. Στη συνήθη θερμοδυναμική, ο πρώτος νόμος

$$dE = \delta Q - \delta W$$

εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας και διαχωρίζει τους δύο πιθανούς τρόπους ανταλλαγής ενέργειας, δηλαδή τη θερμότητα και το έργο. Η διατήρηση της ενέργειας ισχύει τουλάχιστον τοπικά στη Γενική Σχετικότητα (για ένα τέλειο ρευστό) και εκφράζεται από την εξίσωση

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$$

όπου $T_{\mu\nu}$ είναι ο ταυιστής ενέργειας - ορμής και ∇^μ η συναλλοίωτη παράγωγος. Συνεπώς, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής σε τοπική μορφή μπορεί να διατυπωθεί στην Γενική Σχετικότητα. Αναγνωρίζοντας την ποσότητα $E = \rho N/n$ ως την ενέργεια που περιέχεται στο ιδιο-στοιχείο όγκου που περιέχει σταθερό αριθμό σωματιών, θέτοντας $\delta Q = Td(sN/n)$ για αντιστρεπτές καταστάσεις όπως θα εξηγήσουμε λίγο αργότερα και $\delta W = pd(N/n)$, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος γράφεται στη Γενική Σχετικότητα:

$$\begin{aligned} d\left(\rho\frac{N}{n}\right) &= Td\left(s\frac{N}{n}\right) - pd\frac{N}{n} \Rightarrow \\ -\frac{1}{n^2}\rho dn + \frac{1}{n}d\rho &= -\frac{1}{n^2}Tsdn + \frac{1}{n}Tds - \frac{1}{n^2}pdn \\ Tds &= d\rho - \frac{1}{n}(\rho + p - Ts)dn \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής είναι απλά ο ακόλουθος

$$Tds = d\rho - \mu dn \quad (1.19)$$

όπου ονομάσαμε μ την ποσότητα

$$\mu = \frac{1}{n}(\rho + p - Ts) \quad (1.20)$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Euler [41] και μ είναι το χημικό δυναμικό.

Η εξίσωση $\delta Q = TdS$ που χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα, όπου S είναι η εντροπία του

στοιχείου όγκου δικαιολογείται από την ισχύ του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής στη Γενική Σχετικότητα. Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$$

ή σε τοπική, διαφορική μορφή

$$\frac{d}{dt}(s\delta V)\delta t \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (1.21)$$

όπου s είναι η εντροπική πυκνότητα, δV το ιδιο-στοιχείο όγκου που ανταλλάσει θερμότητα δQ δε proper θερμοκρασία T . Αν ονομάσουμε n_μ το διάνυσμα normal στο δV , τότε η εντροπία του ρευστού γράφεται ως

$$S = \int s u^\mu n_\mu dV$$

όπου u^μ είναι η τετραταχύτητα. Για μια στατική κατάσταση ισορροπίας η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$S = \int s \sqrt{-g} d^3\vec{r}$$

όπου g η ορίζουσα της μετρικής. Για αντιστρεπτές διαδικασίες, η ανισότητα (1.21) γίνεται ισότητα έτσι, που

$$dS = \delta Q/T$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διατύπωση της θερμοδυναμικής στην Γενική Σχετικότητα, δείχνουμε ότι η εξίσωση που καθορίζει την υδροστατική ισορροπία για τέλεια σφαιρικά ρευστά, που ονομάζεται εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkov, μπορεί να συναχθεί από το ακρότατο τόσο της εντροπίας όσο και της ελεύθερης ενέργειας, δηλαδή στη μικροκανονική αλλά και την κανονική συλλογή. Πιο σημαντικό ακόμα είναι πως η θερμοδυναμική ευστάθεια μελετάται υπολογίζοντας τη μεταβολή δεύτερης τάξης της εντροπίας και της ελεύθερης ενέργειας. Βρίσκουμε πως η θερμοδυναμική ευστάθεια στη μικροκανονική συλλογή είναι ισοδύναμη με την δυναμική ευστάθεια, δηλαδή την ευστάθεια που καθορίζεται από διαταραχές σε πρώτη τάξη στις εξισώσεις Einstein. Ένα παράξενο και μάλλον ενδιαφέρον αποτέλεσμα βρίσκουμε μελετώντας το Νευτώνειο όριο. Συμπεραίνουμε πως η σχετικιστική μικροκανονική συλλογή μετατρέπεται στην κανονική συλλογή στο Νευτώνειο όριο! Αυτό το ζήτημα το συζητάμε στο Κεφάλαιο ;;

Μελετάμε επίσης την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στην ευστάθεια σφαιρικών ρευστών στην περίπτωση της μικροκανονικής συλλογής για δύο συγκεκριμένες καταστατικές εξισώσεις, που αντιστοιχούν στην ακτινοβολία και στην «δύσκαμπτη» (stiff) ύλη. Όπως και στη Νευτώνεια περίπτωση, φτάνουμε στο ίδιο βασικό συμπέρασμα ότι η περίπτωση $\Lambda < 0$ τείνει να σταθεροποιήσει το σύστημα ενώ η περίπτωση $\Lambda > 0$ να το αποσταθεροποιήσει. Σημειώνουμε επίσης, πως η κρίσιμη ακτίνα όπου εγκαθίσταται μια αστάθεια, χτυπά τον κοσμολογικό ορίζοντα για κάποια τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Πέραν αυτού του σημείου κάθε σφαίρα είναι ευσταθής.

Ας περιγράψουμε σύντομα τα περιεχόμενα αυτής της εργασίας. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα σημεία κλειδιά, απαραίτητα για την κατανόηση του υπόλοιπου της εργασίας, της στατιστικής μηχανικής βαρυτικού αερίου στη μικροκανονική και στην κανονική συλλογή. Στο Κεφάλαιο 3 μελετούμε τη θερμοδυναμική του Νευτώνειου βαρυτικού αερίου στη

μικροκανονική και την κανονική συλλογή και τόσο η Θερμοβαρυτική Καταστροφή όσο και η ισοθερμική κατάρρευση διατυπώνονται παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε τη θερμοδυναμική τέλειων σφαιρικών ρευστών στη Γενική Σχετικότητα με έμφαση στη μελέτη της θερμοδυναμικής ευστάθειας. Η επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στη θερμοδυναμική ευστάθεια διερευνάται επίσης.

Κεφάλαιο 2

Στατιστική Μηχανική βαρυτικού αερίου

Γνωρίζουμε πως είναι αδύνατον να λυθεί αναλυτικά το σύστημα N -σωμάτων που αλληλεπιδρούν μόνο με Νευτώνεια βαρύτητα για $N \geq 3$. Ακόμα και με τη χρήση των πιο εξελιγμένων σύγχρονων υπολογιστών και των πιο σύγχρονων τεχνικών αριθμητικής ανάλυσης [42], τα συστήματα N -σωμάτων με κρούσεις μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά στην καλύτερη περίπτωση για $N \sim 10^6$, ενώ για τα συστήματα χωρίς κρούσεις η απόδοση βελτιώνεται σε μέγιστο $N \sim 10^9$. Για σύγκριση, σημειώνουμε πως ένα τυπικό σφαιρωτό σμήνος περιέχει περίπου 10^5 αστέρια· ο Γαλαξίας έχει περίπου 10^{11} αστέρια, ενώ ένα τυπικό διαστρικό μοριακό νέφος από το οποίο πρωταστέρια δημιουργούνται όταν υφίσταται τμηματική (fragmented) κατάρρευση περιέχει περίπου 10^{47} σωματίδια. Εν τέλει, οι περισσότερες μακροσκοπικές δομές στο Σύμπαν δημιουργούνται και καθορίζονται από την αμοιβαία βαρυτική έλξη ενός τεράστιου πλήθους συστατικών μερών, με τη μεγαλύτερη και πιο περίπλοκη τέτοια δομή να είναι το Σύμπαν το ίδιο.

Στη Φυσική, όταν ένα σύστημα ή μια δυναμική διεργασία περιλαμβάνει ένα πολύ μεγάλο αριθμό σωμάτων, τότε χρησιμοποιούνται κατά κόρον στατιστικές τεχνικές. Το σύστημα περιγράφεται από τη συλλογική συμπεριφορά, με τη χρήση μακροσκοπικών μεγεθών όπως η πίεση, η μέση ενέργεια και η θερμοκρασία και όχι από την ξέχωρη συμπεριφορά των συστατικών του. Όμως, ένα βαρυτικό αέριο είναι ουσιαδώς διαφορετικό από τα συνήθη στατιστικά συστήματα όπως τα (ηλεκτρικά) ουδέτερα αέρια. Ο κύριος λόγος για αυτή τη διαφορά αλλά και πολλών περιέργων χαρακτηριστικών του βαρυτικού αερίου είναι ο μη θωρακισμένος και μεγάλης εμβέλειας χαρακτήρας της βαρυτικής δύναμης. Ακόμα και στο ιονισμένο πλάσμα, οι αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα είναι πρακτικά μικρής εμβέλειας λόγω της θωράκισης Debye. Έτσι, που στη συνήθη στατιστική μηχανική οι αλληλεπιδράσεις θεωρούνται πως πραγματοποιούνται μόνο μεταξύ γειτονικών σωμάτων, ενώ από την άλλη μεριά η βαρύτητα εισάγει μια αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ απομακρυσμένων περιοχών του αερίου. Κανείς θα πρέπει να αναθεωρήσει τη στατιστική μηχανική, καθώς πολλά γνωστά αποτελέσματα όπως για παράδειγμα η ισοδυναμία των στατιστικών συλλογών, δεν ισχύουν όταν η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων του αερίου ληφθούν υπ'όψιν.

Σε αυτό το κεφάλαιο Θα κάνουμε μία ανασκόπηση της βασικής στατιστικής μηχανικής του βαρυτικού αερίου [20, 43, 16, 17]. Έστω N σωματίδια που είναι περιορισμένα σε ένα

σφαιρικό κελί όγκου V με αδιαβατικά και τέλεια ανακλαστικά τοιχώματα έτσι, ώστε η ολική ενέργεια E του συστήματος να παραμένει σταθερή. Κάθε χρονική στιγμή, η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα σημείο στον $6N$ -διάστατο φασικό χώρο Γ . Καθώς ο χρόνος κυλάει, το σύστημα περιγράφεται από μια τροχιά $(q, p) = (q(t; q_0, p_0), p(t; q_0, p_0))$ στο χώρο Γ δεδομένου ότι δίνονται κάποιες αρχικές συνθήκες (q_0, p_0) . Για μεγάλο N είναι πρακτικά αδύνατον να επιλυθούν και να γνωρίζουμε επακριβώς τις συναρτήσεις (q, p) . Αντ' αυτού, το σύστημα περιγράφεται μέσω της πιθανότητας $P(q, p, t)$ για το σύστημα να βρεθεί σε ένα απειροστό στοιχείο όγκου φασικού χώρου γύρω από το σημείο (q, p) στο χρόνο t . Εφόσον η ενέργεια διατηρείται το σύστημα θα είναι περιορισμένο σε έναν $(6N - 1)$ -διάστατο υπόχωρο του φασικού χώρου, δηλαδή την ενεργειακή υπερ-επιφάνεια:

$$H(p, q) = E$$

όπου

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(q)$$

Γίνονται οι δύο ακόλουθες λογικές υποθέσεις που σχετίζονται με την συμπεριφορά για μεγάλους χρόνους $t \rightarrow \infty$: (α) πιθανότητα P είναι χρονανεξάρτητη $P = P(p, q)$ (β) η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε κάποια περιοχή δεδομένου όγκου στην ισοενεργειακή επιφάνεια είναι η ίδια για οποιαδήποτε περιοχή ίδιου όγκου στην επιφάνεια, δηλαδή η $P(q, p)$ είναι σταθερή στην ισοενεργειακή επιφάνεια και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

Για αυτό το σύστημα με σταθερή ενέργεια και όγκο, η μικροκανονική συλλογή, ορίζεται από την πυκνότητα καταστάσεων

$$g(E) = \frac{1}{N!} \int \delta(E - H(p, q)) d^{3N}q d^{3N}p \quad (2.1)$$

Η μέση τιμή οποιασδήποτε φυσικής ποσότητας που ορίζεται ως μια συνάρτηση $F(p, q)$ στο φασικό χώρο μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N!g(E)} \int F(p, q) \delta(E - H(p, q)) d^{3N}q d^{3N}p$$

Η πυκνότητα καταστάσεων (2.1) αποκλίνει αν η ολοκλήρωση γίνει στο άπειρο, τόσο για ένα ιδανικό όσο και για ένα βαρυτικό αέριο. Για το λόγο αυτό, το αέριο θα πρέπει να είναι περιορισμένο σε κάποιο κουτί. Φυσικά, αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί για ένα βαρυτικό αέριο μόνο αν η απώλεια σωματιδίων από το σύστημα είναι πολύ μικρή. Η εντροπία του συστήματος ορίζεται ως

$$S(E) = k \log g(E) \quad (2.2)$$

ενώ η συνάρτηση επιμερισμού ορίζεται ως

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE g(E) e^{-\beta E} = \frac{1}{N!} \int d^{3N}p d^{3N}q e^{-\beta H(p, q)} \quad (2.3)$$

Όταν οι εσωτερικές δυνάμεις είναι μεγάλης εμβέλειας, η εντροπία και η ενέργεια δεν είναι πια εκτατικές μεταβλητές. Το γεγονός αυτό κάνει την κανονική συλλογή προβληματική στο να οριστεί από τη μικροκανονική συλλογή, όπως γίνεται στα συνήθη συστήματα όπου

υπάρχουν μόνο δυνάμεις μικρής εμβέλειας. Κάποιος μπορεί να το καταλάβει αυτό διαισθητικά, καθώς δεν είναι πια δυνατόν να απομονωθεί ένα μικρό μόνο μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος σταθερής ενέργειας και να θεωρηθεί πως το υποσύστημα αλληλεπιδρά με το υπόλοιπο σύστημα, το οποίο θεωρείται μια δεξαμενή θερμότητας, μόνο στην επιφάνεια. Όλος ο όγκος του υποσυστήματος αλληλεπιδρά με τη δεξαμενή θερμότητας. Ας εισέρθουμε λίγο βαθύτερα σε αυτό ακολουθώντας τον Padmanabhan [20].

Θεωρείστε πως τα σωματίδια του αερίου αλληλεπιδρούν μέσω ενός ελκτικού δυναμικού της μορφής $-r^{-3-\epsilon}$. Έστω, μια σφαιρική περιοχή ακτίνας R γύρω από ένα σωματίδιο στην αρχή των αξόνων, και υποθέστε πως σε αυτή τη μικρή περιοχή τα σωματίδια κατανέμονται σχεδόν ομογενώς. Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου εξ' αιτίας της υπόλοιπης σφαίρας είναι

$$U \propto \int_0^R 4\pi r^2 dr \rho r^{-3-\epsilon} \propto \int_0^R dr r^{-1-\epsilon}$$

Για $\epsilon > 0$, η δυναμική ενέργεια είναι φθίνουσα συνάρτηση του r και η μεγαλύτερη συνεισφορά προέρχεται από σωματίδια σε μεγαλύτερες αποστάσεις. Συνεπώς, η ενέργεια δεν θα είναι εκτατική μεταβλητή. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε μια δύναμη μεγάλης εμβέλειας, καθώς η δυναμική ενέργεια έχει συνεισφορές από απομακρυσμένα σωματίδια. Ξεκάθαρα, στην περίπτωση δυνάμεων μικρής εμβέλειας η δυναμική ενέργεια μεταξύ των υποσυστημάτων εξαρτάται από τη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ αυτών και συνεπώς είναι αμελητέα σε σχέση με την εσωτερική ενέργεια του υποσυστήματος που αυξάνει με τον όγκο και όχι την επιφάνεια. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση των δυνάμεων μεγάλης εμβέλειας.

Ας θυμηθούμε για ένα σύστημα με δυνάμεις μικρής εμβέλειας πως η κανονική συλλογή μπορεί να οριστεί από την μικροκανονική. Ένα τέτοιο σύστημα με ολική ενέργεια E μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσυστήματα με ενέργειες E_1 και $E_2 = E - E_1$. Η πιθανότητα για το υποσύστημα 1 να έχει ενέργεια E_1 είναι ανάλογη στον φασικό όγκο: $P(E_1) = Cg_1(E_1)g_2(E - E_1)$. Υποθέστε πως το υποσύστημα 1 είναι πολύ μικρό, δηλαδή $E_1 \ll E$, έτσι ώστε το υποσύστημα 2 να μπορεί να θεωρηθεί ως μια δεξαμενή θερμότητας. Αναπτύσσοντας κατά Taylor $S_2(E_2) = S_2(E - E_1)$ ως προς E_1 έχουμε:

$$S_2(E - E_1) = S_2(E) - E_1 \left. \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \right|_{E_2=E} = S_2(E) - \beta E_1$$

όπου β είναι η αντίστροφη θερμοκρασία της δεξαμενής θερμότητας. Στην ισορροπία β είναι η αντίστροφη θερμοκρασία του συστήματος 1 επίσης. Είναι $g_2 = e^{S_2/k}$, και άρα η πιθανότητα για το σύστημα 1 να έχει ενέργεια E_1 μπορεί να γραφεί:

$$P(E_1) = Cg_1(E_1)e^{-\beta E_1}$$

Κανονικοποιώντας το P να ισούται με μονάδα όταν ολοκληρωθεί για όλες τις ενέργειες, και καταργώντας τον δείκτη 1, βρίσκουμε πως η πιθανότητα για ένα σύστημα στην κανονική συλλογή να έχει ενέργεια E όταν είναι σε επαφή με τη δεξαμενή θερμότητας με αντίστροφη θερμοκρασία β είναι:

$$P(E) = \frac{g(E)e^{-\beta E}}{Z(\beta)} \quad (2.4)$$

όπου $Z(\beta)$ είναι η συνάρτηση επιμερισμού που ορίσαμε νωρίτερα. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται η κανονική συλλογή από τη μικροκανονική. Εμφανώς, η λογική αυτή βασίζεται

στην εκτατικότητα της ενέργειας, έτσι που δε μπορεί να εφαρμοστεί για ένα βαρυτικό αέριο.

Μια άλλη παράξενη ιδιότητα του βαρυτικού αερίου είναι πως ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας με αρνητική θερμοχωρητικότητα είναι δυνατόν να υπάρχουν στην μικροκανονική συλλογή. Κατά συνέπεια η μικροκανονική συλλογή έχει διαφορετικές ιδιότητες ευστάθειας από την κανονική. Ας δούμε πως είναι δυνατόν αυτό. Για να είναι ισοδύναμες οι δύο συλλογές, μικροκανονική και κανονική, θα πρέπει η μέση ενέργεια $\bar{E} = \langle E \rangle$ της κανονικής συλλογής να είναι ίση με τη σταθερή τιμή της ενέργειας της μικροκανονικής και επιπλέον οι διακυμάνσεις στην ενέργεια στην κανονική συλλογή να είναι αμελητέες.

Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται όταν η μέση ενέργεια είναι η πιο πιθανή ενέργεια της μικροκανονικής συλλογής, δηλαδή υποθέτωντας πως η $P(E)$ έχει πολύ στενή κορυφή στην τιμή της μέσης ενέργειας. Το μέγιστο της $P(E)$, που είναι η πιο πιθανή ενέργεια, ας την πούμε \bar{E} (σε συμφωνία με την υπόθεσή μας), καθορίζεται εύκολα από τη συνθήκη $(\partial P/\partial E)_{E=\bar{E}} = 0$ που δίνει χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.4):

$$\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{E=\bar{E}} = \beta \quad (2.5)$$

Αυτό σημαίνει πως η σταθερή ενέργεια της μικροκανονικής συλλογής ισούται με τη μέση ενέργεια της κανονικής.

Ας εξετάσουμε πως η δεύτερη συνθήκη μπορεί να ικανοποιηθεί. Αναπτύσσουμε το $\log P(E)$ γύρω από τη μέγιστη τιμή:

$$\begin{aligned} \log(ZP(E)) &= \log g(E) - \beta E = \log g(\bar{E}) + \left. \frac{\partial \log g}{\partial E} \right|_{E=\bar{E}} (E - \bar{E}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \log g}{\partial E^2} \right|_{E=\bar{E}} (E - \bar{E})^2 - \beta E \\ &= S - \beta \bar{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial \bar{E}} (E - \bar{E})^2 \\ &= -\beta(\bar{E} - TS) - \frac{1}{2} \beta^2 C_V^{-1} (E - \bar{E})^2 \end{aligned}$$

όπου

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = -\beta^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta}$$

έτσι που η πιθανότητα για το σύστημα να έχει ενέργεια E στην κανονική συλλογή είναι:

$$P(E) = e^{\beta(\bar{E}-TS)} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 C_V^{-1}(E-\bar{E})^2} + O((E-\bar{E})^3) \quad (2.6)$$

Συνεπώς, είναι μια Γκαουσιανή κεντραρισμένη στο \bar{E} με τυπική απόκλιση

$$\sigma = \beta^{-1} \sqrt{C_V} \quad (2.7)$$

Για συστήματα τα οποία αλληλεπιδρούν με δυνάμεις μικρής εμβέλειας, η μέση ενέργεια και η θερμοχωρητικότητα μεγαλώνουν ως προς το N . Συνεπώς, η διακύμανση στην ενέργεια $\Delta E \propto \sqrt{C_V}$ θα είναι ανάλογη στο \sqrt{N} . Η σχετική διακύμανση $\Delta E/E$ θα είναι ανάλογη στο $N^{-1/2}$. Το αποτέλεσμα αυτό, μαζί με την εξίσωση (2.5), αποδεικνύει την ισοδυναμία, μέχρι όρους $O(N^{-1/2})$, της μικροκανονικής και της κανονικής συλλογής για συστήματα με

δυνάμεις μικρής εμβέλειας. Η εξίσωση (2.7) μπορεί ακόμα να αποδειχθεί με έναν πιο ευθύ τρόπο. Είναι

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}, \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$$

Συνεπάγεται πως

$$C_V = -\beta^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$$

Άρα, η C_V που ορίζεται από την κανονική συλλογή είναι θετικά ορισμένη.

Η θερμοχωρητικότητα μπορεί να οριστεί και απευθείας από τη μικροκανονική συλλογή. Από την $S(E)$, παίρνουμε τη συνάρτηση $\beta(E) = \partial S / \partial E$ και αντιστρέφοντάς την παίρνουμε μια συνάρτηση $E(\beta)$. Η θερμοχωρητικότητα ορίζεται τότε ως

$$C_V^{mic.} = -\beta^2 \frac{\partial E}{\partial \beta}$$

Αυτή είναι θετικά ορισμένη αρκεί οι δύο συλλογές να είναι ισοδύναμες. Όμως, δεν είναι βέβαιο πως αυτή η ποσότητα είναι πάντα θετική. Μπορεί να γίνει αρνητική αν σπάσει η ισοδυναμία των συλλογών.

Αυτό μπορεί να συμβεί κοντά σε μια μετάβαση φάσης που περιλαμβάνει λανθάνουσα θερμότητα. Για να είναι ισοδύναμες οι δύο συλλογές υποθέσαμε πως η πιθανότητα (2.4) έχει πολύ στενή κορυφή στη μέση ενέργεια (ώστε η μέση και η πιο πιθανή ενέργεια να είναι ίσες). Αυτή η υπόθεση καταρρέει όταν η C_V (της κανονικής συλλογής) γίνεται πολύ μεγάλη, όπως είναι εμφανές στην εξίσωση (2.6). Αυτή ακριβώς είναι η κατάσταση κοντά σε μία μετάβαση φάσης με σταθερή θερμοκρασία και με λανθάνουσα θερμότητα. Συνεπώς κοντά σε μια μετάβαση φάσης θα υπάρχουν μεγάλες διακυμάνσεις στην ενέργεια και οι δύο συλλογές θα δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Στην βαρύτητα, το θεώρημα virial υποχρεώνει τη (βαρυτική) δυναμική ενέργεια να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την κινητική ενέργεια, όπως σε μια μετάβαση φάσης ενός συνήθους συστήματος. Πραγματικά, τα βαρυτικά συστήματα είναι πολύ όμοια με τα συνήθη συστήματα (δυνάμεις μικρής εμβέλειας) κοντά σε μια μετάβαση φάσης. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί [20], συγκρίνοντας την $E(\beta)$ που παίρνουμε από την κανονική συλλογή, πως η περιοχή αρνητικής θερμοχωρητικότητας στην μικροκανονική συλλογή αντικαθίσταται με μια μετάβαση φάσης στην κανονική συλλογή. Όπως θα δούμε στην περίπτωση των βαρυτικών συστημάτων υπάρχουν πραγματικά ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας με αρνητική θερμοχωρητικότητα.

Εξ' αιτίας των προαναφερθέντων προβλημάτων να οριστεί η κανονική συλλογή για βαρυτικά συστήματα, κανείς θα μπορούσε βεβιασμένα να υποθέσει πως μόνο η μικροκανονική συλλογή είναι η κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί. Όμως, αυστηρά μαθηματικά, η κανονική συλλογή μπορεί να οριστεί από τον μαθηματικό ορισμό της συνάρτησης επιμερισμού. Αυτό δεν είναι μόνο ένα μαθηματικό τέχνασμα, καθώς υπάρχουν ρεαλιστικά συστήματα στη φύση που προσομοιάζουν την κανονική συλλογή. Μια σημαντική περίπτωση παρουσιάζεται στην αναφορά [21], όπου το διαστρικό μέσο μελετάται ως ένα βαρυτικό αέριο σε ισορροπία με την ακτινοβολία υποβάθρου. Επιπλέον, όπως θα δούμε σε αυτή τη δουλειά, η γνωστή μας διάσημη αστάθεια Jeans είναι ουσιαστικά μια αστάθεια στην κανονική συλλογή.

Τέλος, μία άλλη σημαντική διαφορά μεταξύ των συνήθων και των βαρυτικών αερίων

είναι η απουσία στα δεύτερα του *θερμοδυναμικού ορίου*. Το *θερμοδυναμικό όριο* αντιστοιχεί σε $N \rightarrow \infty$ και $V \rightarrow \infty$ ενώ μένει σταθερή η πυκνότητα $N/V = \text{const.}$ Δηλαδή, στην κατάσταση ισορροπίας ένα μη-βαρυτικό ρευστό είναι ομογενές. Αντίθετα, το σύνηθες *θερμοδυναμικό όριο* δεν υπάρχει για ένα βαρυτικό αέριο. Στην κατάσταση ισορροπίας το βαρυτικό αέριο είναι *ανομοιογενές*. Υπάρχει παρά όλα αυτά ένα ασυνήθιστο *θερμοδυναμικό όριο* $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ με τη γραμμική πυκνότητα να μένει σταθερή $N/V^{\frac{1}{3}} = \text{const.}$ όπως τονίζεται από τους de Vega & Sanchez [16, 17] (δείτε επίσης τις αναφορές [44, 45, 46]).

2.1 Προσέγγιση μέσου πεδίου

Η εντροπία, όπως δίνεται από την εξίσωση (2.2), περιλαμβάνει μία ολοκλήρωση σε $6N$ μεταβλητές. Αυτή η ολοκλήρωση μπορεί να αντικατασταθεί από μία σε μόνο 6 μεταβλητές, προσεγγίζοντας όλες τις αλληλεπιδράσεις με μία ‘μέση αλληλεπίδραση’, ονόματι το μέσο πεδίο, που θεωρείται πως δρα σε ένα σωματίδιο. Αυτή είναι φυσικά μία προσέγγιση, που ονομάζεται η προσέγγιση μέσου πεδίου (mean field approximation) και αντιστοιχεί στο μηδενισμό όλων των διακυμάνσεων σε ένα ανάπτυγμα της Χαμιλτονιανής γύρω από το μέσο πεδίο. Καθώς πολλές αλληλεπιδράσεις αντικαθίσταται από μια ενεργό αλληλεπίδραση, συνάγεται πως η ακρίβεια της μεθόδου είναι ανάλογη στον αριθμο των αλληλεπιδράσεων ανά σωματίδιο που λαμβάνουν χώρα. Πραγματικά, η προσέγγιση αυτή είναι κατάλληλη για τη βαρύτητα, όπου περιλαμβάνεται ένας τεράστιος αριθμός ($N - 1$) αλληλεπιδράσεων ανά σωματίδιο.

Ακόμα μια φορά θα ακολουθήσουμε το κλασικό άρθρο επισκόπησης του Padmanabhan [20]. Η πυκνότητα καταστάσεων (2.1) δίνει μετά την ολοκλήρωση των ορμών:

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{1}{N!} \iint \prod_{l=1}^N d^3 \vec{x}_l \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \delta \left(E - \sum_{l=1}^N \frac{\vec{p}_l^2}{2m_p} - U \right) \\ &= \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \frac{2\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2})} \int \prod_{l=1}^N d^3 \vec{x}_l \int_0^\infty dp p^{3N-1} \delta \left(E - \frac{p^2}{2m_p} - U \right) \\ &= \frac{(m_p/2\pi)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2})} \frac{1}{N!} \int \prod_{l=1}^N d^3 \vec{x}_l (E - U)^{\frac{3N}{2}-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου έχουμε ολοκληρώσει τις «γωνίες» στον $3N$ -διάστατο $\{\vec{p}_l\}$ χώρο

$$\int d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

και

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq b}^N \frac{Gm_p^2}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} = \frac{1}{2} m_p \sum_{a \neq b}^N \psi(\vec{x}_a, \vec{x}_b) \quad , \quad \psi(\vec{x}_a, \vec{x}_b) = -G \frac{m_p}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \quad (2.9)$$

Χωρίζουμε τον χωρικό όγκο V σε K κελιά ίδιου μεγέθους. Έστω n_k ο αριθμός σωματιδίων στο κελί k και n_0 ο μέγιστος αριθμός σωματιδίων που μπορεί να περιέχει κάθε κελί. Υποθέτοντας πως υπάρχει ένα πεπερασμένο n_0 είναι ισοδύναμο με την υπόθεση ενός στερεού πυρήνα για κάθε σωματίδιο. Αυτό το ελάχιστο μήκος αποκοπής απαραίτητο ώστε η

εντροπία να μένει S πεπερασμένη και να μην αποκλίνει. Όμως, στο τέλος θα υποθέσουμε $n_0 \rightarrow \infty$, δηλαδή θα ασχοληθούμε μόνο με σημειακά σωματίδια, καθώς η μελέτη της επίδρασης του μήκους αποκοπής είναι έξω από τους στόχους αυτής της εργασίας. Σημειώνουμε μόνο πως ένα μήκος αποκοπής σχετίζεται κυρίως με την κατάσταση του αερίου αφού υποστεί βαρυτική κατάρρευση. Στην πραγματικότητα, είναι υπεύθυνο για την εμφάνιση ενός ολικού μέγιστου στην εντροπία, ενώ για σημειακά σωματίδια δεν υπάρχει ολικό μέγιστο, καθώς το αέριο μπορεί να συμπυκνωθεί απεριόριστα. Αυτό το ολικό μέγιστο στην εντροπία (υπό την παρουσία ενός μήκους αποκοπής) αντιστοιχεί σε μια πολύ πυκνή κατάσταση του συστήματος. Δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες καταστάσεις σε αυτή την εργασία και θα ενδιαφερθούμε μόνο για τα τοπικά μέγιστα της εντροπίας.

Κάθε κελί πρέπει να είναι αρκετά μικρό έτσι, ώστε το βαρυτικό πεδίο να είναι σχεδόν σταθερό σε κάθε σημείο του κελιού και αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει πολλά σωματίδια. Οι υποθέσεις αυτές αντιστοιχούν στις συνθήκες $K \ll N$ και $1 \ll n_k \ll n_0$. Η προσέγγιση του μέσου πεδίου είναι έγκυρη μόνο αν υπάρχει μία τέτοια ενδιάμεση κλίμακα. Αντικαθιστούμε την ολοκλήρωση στις συντεταγμένες $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ με ένα άθροισμα στον αριθμό των σωματιδίων n_a στο κελί με κέντρο το \vec{x}_a (με $a = 1, 2, \dots, K$):

$$\frac{1}{N!} \int \prod_{l=1}^N d^3\vec{x} \mapsto \sum_{n_1, \dots, n_K} \left\{ \prod_{k=1}^K \frac{1}{n_k!} \delta(N - \sum_{a=1}^K n_a) \left(\frac{V}{K}\right)^N \right\}$$

Συμβολίζοντας $\psi(\vec{x}_a, \vec{x}_b) = \psi_{ab}$ και με τη χρήση της φόρμουλα Stirling $\log n! \simeq n \log n - n$, η πυκνότητα καταστάσεων (αγνοώντας τον σταθερό παράγοντα) μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} g(E) &= \sum_{n_1, \dots, n_K} \left\{ \prod_{k=1}^K \frac{1}{n_k!} \delta(N - \sum_{a=1}^K n_a) \left(\frac{V}{K}\right)^N \left(E - \frac{1}{2} m_p \sum_{a \neq b}^K n_a \psi_{ab} n_b\right)^{\frac{3N}{2} - 1} \right\} \\ &\simeq \sum_{n_1, \dots, n_K} \delta(N - \sum_{a=1}^K n_a) e^{S[n_a]} \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου

$$S[n_a] = \frac{3}{2} N \log \left(E - \frac{1}{2} m_p \sum_{a \neq b}^K n_a \psi_{ab} n_b \right) - \sum_{a=1}^K n_a \log(n_a K/V) \quad (2.11)$$

και έχουμε κάνει την προσέγγιση $3N/2 - 1 \simeq 3N/2$. Οι καταστάσεις ισορροπίας δίνονται από τη μεγιστοποίηση του $S[n_a]$ με τον περιορισμό του σταθερού αριθμού σωματιδίων.

$$\begin{aligned} \delta S + c \delta N &= 0 \\ \sum_{a=1}^K \left\{ -\frac{3}{2} N \left(E - \frac{1}{2} m_p \sum_{i \neq j}^K n_i \psi_{ij} n_j \right)^{-1} \left(m_p \sum_{b=1}^K n_b \psi_{ab} \right) - \log(n_a K/V) + \tilde{c} \right\} \delta n_a &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας την αντίστροφη θερμοκρασία

$$\beta \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2} N \left(E - \frac{1}{2} m_p \sum_{i \neq j}^K n_i \psi_{ij} n_j \right)^{-1} \quad (2.13)$$

και καθώς η μεταβολή (variation) στην εντροπία θα πρέπει να είναι μηδέν για όλα τα δn_a , η εξίσωση (2.12) δίνει

$$\beta m_p \sum_{b=1}^K n_b \psi_{ab} + \log(n_a K/V) = \tilde{c} \quad (2.14)$$

Επιστρέφοντας στο συνεχές όριο με τις αντικαταστάσεις:

$$n_a K/V \mapsto \rho(\vec{x}) \quad \text{και} \quad \sum_{b=1}^K n_b m_p \mapsto \int d^3 \vec{x} \rho(\vec{x})$$

η εξίσωση (2.14) δίνει

$$\rho(\vec{x}) = A e^{-\beta \phi(\vec{x})} \quad , \quad \phi(\vec{x}) = -G m_p \int d^3 \vec{y} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.15)$$

Οι συναρτήσεις $\phi(\vec{x})$ και $\rho(\vec{x})$ που δίνονται στην εξίσωση (2.15) περιγράφουν την ισορροπία στο όριο του μέσου πεδίου. Πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω εκφράσεις, αν και σωστές, έχουν συναχθεί μόνο από το ακρότατο και όχι από το μέγιστο της έκφρασης (2.10). Όμως, για να ισχύει το όριο μέσου πεδίου, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το μέγιστο της (2.10) διότι μόνο το μέγιστο κυριαρχεί πάνω σε όλους τους άλλους όρους της σειράς. Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση μέσου πεδίου είναι έγκυρη μόνο για ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας (οι οποίες φυσικά μπορούν να υπολογιστούν ως το μέγιστο της εντροπίας). Η προσέγγιση καταρρέει για ασταθείς καταστάσεις ισορροπίας. Πρέπει λοιπόν κανείς να υπολογίσει τη μεταβολή (variation) δεύτερης τάξης της εντροπίας για να καταλήξει στο είδος της ισορροπίας και συνεπώς να εφαρμόσει όριο μέσου πεδίου.

Περιγράψαμε έναν αυστηρό τρόπο για να συναχθεί το όριο μέσου πεδίου με χρήση την προσέγγιση σαγματικού σημείου. Μια μέση συνάρτηση κατανομής $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ στον φασικό χώρο μπορεί να οριστεί από τη μέση πυκνότητα (2.15) μέσω της σχέσης:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3 \vec{p} \quad (2.16)$$

Αυτή εκφράζει την πιθανότητα για οποιοδήποτε σωματίδιο να βρίσκεται μέσα στο χωρικό διάστημα $(\vec{x}, \vec{x} + d\vec{x})$ και να έχει ορμή στο διάστημα $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$ το χρόνο t . Ισοδύναμα, δίνει την ολική μάζα dm που περιέχεται στο κελί φασικού χώρου, $((\vec{x}, \vec{p}), (\vec{x} + d\vec{x}, \vec{p} + d\vec{p}))$

$$dm = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3 \vec{x} d^3 \vec{p}$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να ταυτοποιηθεί με την συνάρτηση κατανομής του ενός σωματιδίου, που συνάγεται από την ολοκλήρωση των $N - 1$ μεταβλητών από τη συνολική κατανομή των N -σωμάτων

$$f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) = \int \prod_{i=2}^N d^3 \vec{x}_i d^3 \vec{p}_i f_N(\vec{x}_1, \vec{p}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_2, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_N, t)$$

Συνεπώς στο όριο του μέσου πεδίου χρησιμοποιείται η εντροπία Boltzmann

$$S = -k \int f \log f d^3 \vec{x} d^3 \vec{p} \quad (2.17)$$

αντί της εντροπίας Gibbs

$$S_G = -k \int f_N \log f_N d^{3N} \vec{x} d^{3N} \vec{p} \quad (2.18)$$

Στο Παράρτημα Β' δείχνουμε πως η εντροπία Boltzmann συνάγεται από την εντροπία Gibbs στη συνήθη θερμοδυναμική, ακολουθώντας τον Katz [43]. Σχετικά με την εγκυρότητα της χρήσης της εντροπίας Boltzmann στη θερμοδυναμική, ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευθεί την αναφορά [47], ενώ μια διαφωτιστική συζήτηση περί της εγκυρότητας της εντροπίας Boltzmann στα βαρυτικά συστήματα υπάρχει στην αναφορά [48]. Δύο συνθήκες θα πρέπει να ισχύουν· ότι η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου ισχύει τοπικά και ότι το σύστημα είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία. Σημειώστε πάντως πως στο παρόν κείμενο οδηγηθήκαμε στην εντροπία Boltzmann μέσω της προσέγγισης μέσου πεδίου [20, 43].

Μέσω της συνάρτησης κατανομής f , ένα μέσο βαρυτικό δυναμικό μπορεί να οριστεί ως

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = 4\pi G \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}$$

Η f ικανοποιεί την εξίσωση Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C(f)$$

όπου η συνάρτηση $C(f)$ περιγράφει την επίδραση της διακριτότητας του συστήματος και ονομάζεται όρος κρούσεων. Ο καθορισμός της μορφής της $C(f)$ είναι απαραίτητος για τη μελέτη της χαλάρωσης (relaxation) του συστήματος στην κατάσταση ισορροπίας, η οποία βρίσκεται έξω από τους στόχους αυτής της εργασίας. Το αποτέλεσμα που χρειαζόμαστε εδώ είναι πως για σταθερή ενέργεια και αριθμό σωματιδίων, η εντροπία Boltzmann

$$S = -k \int f \log f d^3 \vec{x} d^3 \vec{p}$$

μπορεί μόνο να αυξηθεί [20]. Έτσι, ώστε για να υπολογιστούν οι ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας πρέπει να μεγιστοποιούν την εντροπία Boltzmann.

Όπως σημειώσαμε, αν και δεν θα ενδιαφερθούμε στην διαδικασία της χαλάρωσης στην ισορροπία του βαρυτικού αερίου σε αυτή την εργασία, ας αναφέρουμε μόνο κάποια σημαντικά, γνωστά αποτελέσματα για λόγους πληρότητας αυτού του εισαγωγικού Κεφαλαίου. Ο όρος κρούσης C επηρεάζει την εξέλιξη με δύο τρόπους. Πρώτον, κάθε σωματίδιο αισθάνεται ακριβώς ένα δυναμικό που είναι διαφορετικό του ομαλού ϕ λόγω της διακριτότητας του συστήματος. Καθώς ο χρόνος κυλάει το πραγματικό δυναμικό θα κυμαίνεται γύρω από τη μέση τιμή. Η διακύμανση αυτή συνεισφέρει στο C και γίνεται αντιληπτή ως μια τυχαία δύναμη που επάγει μια διάχυση στον χώρο των ταχυτήτων. Η διαδικασία αυτή συνήθως ονομάζεται μαλακές κρούσεις. Δεύτερον, δύο σωματίδια μπορεί όντως να συγκρουσθούν μεταξύ τους με επακόλουθο μια δραστηκή αλλαγή στην ορμή τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται σκληρές κρούσεις. Στην περίπτωση των δυνάμεων μικρής εμβέλειας, οι μαλακές κρούσεις είναι ασήμαντες και δε συνεισφέρουν σημαντικά στην χαλάρωση του συστήματος. Αυτό συμβαίνει γιατί το ομαλό μέσο πεδίο μηδενίζεται για τέτοια συστήματα. Η χαλάρωση στην ισορροπία συντελείται εξαιτίας των σκληρών κρούσεων. Αντίθετα, αποδεικνύεται πως

για ένα βαρυτικό αέριο, οι μαλακές κρούσεις μπορούν να ισορροπήσουν το σύστημα σε χρονική κλίμακα, μικρότερη $1/\log N$ από τις σκληρές κρούσεις. Συνεπώς, οι μαλακές κρούσεις γίνονται ο κυρίαρχος κρουστικός παράγοντας εξισορρόπησης για βαρυτικά συστήματα. Όμως, ο αντίστοιχος χρόνος χαλάρωσης αποδεικνύεται πολύ μεγαλύτερος από την ηλικία του σύμπαντος για τα περισσότερα αστροφυσικά συστήματα. Αντιθέτως, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις τα περισσότερα αστροφυσικά συστήματα έχουν ήδη κατανομές ταχύτητες που αντιστοιχούν στην ισορροπία. Άρα, κάποια άλλη διεργασία, εντελώς διαφορετική από τις κρούσεις, θα πρέπει να είναι υπεύθυνη για την εξισορρόπηση των βαρυτικών συστημάτων, σε αντίθεση με τα συνήθη συστήματα δυνάμεων μικρής εμβέλειας.

Ο μηχανισμός που είναι σήμερα γενικά αποδεκτός είχε προταθεί από τον Lynden-Bell [49] το 1967 και ονομάζεται βίαιη χαλάρωση (violent relaxation). Σε αυτόν το μηχανισμό θεωρούνται χρονικές κλίμακες πολύ μικρότερες από το χρόνο χαλάρωσης λόγω των μαλακών κρούσεων έτσι, ώστε να είναι $C(f) \simeq 0$. Υπάρχουν ξεχωριστές διαδικασίες που συνεισφέρουν στη βίαιη χαλάρωση.

Η πρώτη σχετίζεται με τη μίξη στο φασικό χώρο. Το σχήμα μιας αρχικά συμπαγούς περιοχής στον φασικό χώρο τείνει να παραμορφωθεί βίαια καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο. Ο όγκος αυτής της περιοχής παραμένει σταθερός, σε συμφωνία με το θεώρημα Liouville, αλλά τα στοιχεία του φασικού χώρου κατανέμονται σε όλο και μικρότερες κλίμακες. Αυτό συμβαίνει διότι στη Βαρύτητα, οι περίοδοι των τροχιών εξαρτώνται από το μέγεθός τους. Κανείς πρέπει να χρησιμοποιεί ολοένα και μεγαλύτερη ανάλυση στο φασικό χώρο. Όμως, εν τέλει το σύστημα φθάνει σε μια στάσιμη κατάσταση σε κάποια προκαθορισμένη κλίμακα αν και σε μικρότερες κλίμακες το σύστημα συνεχίζει να εξελίσσεται στο χρόνο. Έτσι, ώστε όταν η κλίμακα στην οποία πραγματοποιούνται αλλαγές στην ακριβή (λεγόμενη fine-grained) συνάρτηση κατανομής είναι μικρότερη από την προκαθορισμένη κλίμακα για την οποία ορίζεται η αδρομερής (η λεγόμενη coarse-grained) συνάρτηση κατανομής, τότε αυτή η συνάρτηση κατανομής σταματά να παρουσιάζει εξέλιξη στο χρόνο.

Η δεύτερη διαδικασία της βίαιης χαλάρωσης εμφανίζεται λόγω του χρονικά εξαρτώμενου βαρυτικού δυναμικού. Η ενέργεια καθενός σωματιδίου δεν είναι σταθερή κατά την εξέλιξη, διότι αυτό υπόκειται σε ένα χρονικά εξαρτώμενο βαρυτικό δυναμικό $\phi(\vec{x}, t)$. Ξεκάθαρα, η συνολική επίδραση θα είναι να διαπλατυνθεί το ενεργειακό εύρος των σωματιδίων. Το γεγονός αυτό παρέχει μια διεργασία εξισορρόπησης όμοια με αυτή των κρούσεων στα συνήθη αέρια. Υπάρχει, όμως, μία σημαντική ποιοτική διαφορά. Ενώ η συνήθης χαλάρωση μέσω κρούσεων (collisional relaxation) οδηγεί στην ισοκατανομή της ενέργειας, η χαλάρωση λόγω του χρονεξαρτώμενου βαρυτικού δυναμικού αλλάζει την ενέργεια καθενός σωματιδίου ανεξάρτητα από τη μάζα του, έτσι ώστε δεν οδηγεί στην ισοκατανομή της ενέργειας. Τονίζουμε πως οι δύο διαδικασίες που περιγράψαμε, δηλαδή η μίξη στο φασικό χώρο και το χρονεξαρτώμενο δυναμικό, είναι εννοιολογικά διαφορετικές και ο ρόλος τους στην εξισορρόπηση του συστήματος είναι διαφορετικός.

2.2 Το θεώρημα της γραμμικής σειράς σημείων ισορροπίας του Poincaré

Προκειμένου να αποφανθεί κανείς περί της ευστάθειας μιας κατάστασης ισορροπίας, θα πρέπει κανονικά να υπολογίσει τη μεταβολή δεύτερης τάξης της εντροπίας στη μικροκανονική συλλογή ή της ελεύθερης ενέργειας στην κανονική συλλογή. Ο υπολογισμός αυτός

οδηγεί σε μια εξίσωση ιδιοτιμών. Από το πρόσημο των ιδιοτιμών καθορίζεται το πρόσημο της μεταβολής δεύτερης τάξης και συνεπώς η ευστάθεια. Υπάρχει, όμως, ένα κλασικό αποτέλεσμα του Poincaré [7] το οποίο επιτρέπει τη μελέτη της ευστάθειας χωρίς να χρειάζεται η επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών. Βασίζεται στη γενική ιδέα της σειράς καταστάσεων ισορροπίας (series of equilibria). Για παράδειγμα μια συνάρτηση $\beta(E)$, όπου β είναι η αντίστροφη θερμοκρασία που αντιστοιχεί σε μια κατάσταση ισορροπίας με ενέργεια E , είναι μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Αν για την ίδια ενέργεια υπάρχουν για παράδειγμα δύο διαφορετικές θερμοκρασίες, τότε οι δύο καταστάσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές θερμοκρασίες ανήκουν σε διαφορετική σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Το θεώρημα του Poincaré' λέει πως μια αλλαγή στην ευστάθεια μπορεί μόνο να πραγματοποιηθεί εκεί όπου δύο σειρές έχουν μια κοινή κατάσταση (σημεία διακλάδωσης) ή όταν εισέρχονται η μία στην άλλη (στάσιμα σημεία). Αυτό είναι ένα γενικό θεώρημα που αρχικά είχε εφαρμογή στη μηχανική και πολύ αργότερα στο βαρυτικό αέριο και την αστρονομία από τους Lynden-Bell & Wood [10]. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία της σειράς δεν είναι κατ' ανάγκη συζυγείς. Ο Katz [8] επέκτεινε το θεώρημα έτσι που υπό πολύ γενικές συνθήκες η ευστάθεια ή ο αριθμός των ασταθών τρόπων ταλάντωσης μπορεί να συναχθεί από καθαρά θερμοδυναμική θεώρηση. Θα αναπτύξουμε στα ακόλουθα μια επανάληψη της ανάλυσης του Poincaré και της επέκτασης του Katz, εστιάζοντας στη θερμοδυναμική.

Έστω x^a κάποιες μεταβλητές μέσω των οποίων περιγράφεται το σύστημα. Αυτές μπορεί να είναι οι $6N$ συντεταγμένες και ορμές ή στο συνεχές όριο μέσου πεδίου, κάποια συνεχή μεταβλητή όπως η πυκνότητα ή οποιοσδήποτε άλλες ποσότητες που περιγράφουν το σύστημα. Οι καταστάσεις ισορροπίας, που συμβολίζουμε X^a , είναι οι λύσεις

$$x^a = X^a(E) \quad (2.19)$$

της συνθήκης

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x^a} \right|_{x^a=X^a} = 0 \quad (2.20)$$

δηλαδή αντιστοιχούν σε ακρότατα της εντροπίας. Μια κατάσταση είναι ευσταθής αν επιπλέον αυτό το ακρότατο είναι ένα μέγιστο

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^b} \right|_{x=X} \delta x^a \delta x^b < 0, \text{ για κάθε } \delta x \quad (2.21)$$

Η συνθήκη αυτή (2.21) οδηγεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Έστω λ_a οι ιδιοτιμές του $(-\partial_{ab} S)$ έτσι, ώστε αν για μια κατάσταση ισορροπίας $\lambda_a > 0 \forall a$, τότε η ισορροπία είναι ευσταθής. Κοντά σε ένα ακρότατο, το ανάπτυγμα της S θα είναι της ακόλουθης μορφής

$$S = S_e - \frac{1}{2} \sum_a \lambda_a (x^a - X^a(E))^2 + O(3) \quad (2.22)$$

Οι λύσεις (2.19) θα είναι στη γενική περίπτωση πολλαπλές, δηλαδή θα υπάρχουν διάφορες σειρές καταστάσεων ισορροπίας για το ίδιο εύρος ενέργειας.

Κανείς μπορεί να ορίσει την συζυγή ποσότητα της E ως προς την εντροπία εκτός ισορροπίας S αντί της εντροπίας στην ισορροπία S_e . Αυτό θα αντιστοιχούσε σε κάποιον είδους γενικευμένη αντίστροφη θερμοκρασία εκτός ισορροπίας $\tilde{\beta}(E; x^a)$. Αυτή μπορεί να

υπολογιστεί από την παράγωγο της S που δίνεται στην (2.22) ως προς E :

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \beta(E) + \sum_a \lambda_a \frac{dX^a}{dE} (x^a - X^a(E)) + O(2) \quad (2.23)$$

Υπολογίζουμε τις ακόλουθες παραγώγους στην ισορροπία:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x^a} \right|_e = \lambda_a \frac{\partial X^a}{\partial E}, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial E} \right|_e = \frac{\partial \beta}{\partial E} - \sum_a \lambda_a \left(\frac{\partial X^a}{\partial E} \right)^2$$

Αντικαθιστώντας την παράγωγο $\partial X^a / \partial E$ στη δεύτερη εξίσωση, που υπολογίζουμε από την πρώτη, έχουμε:

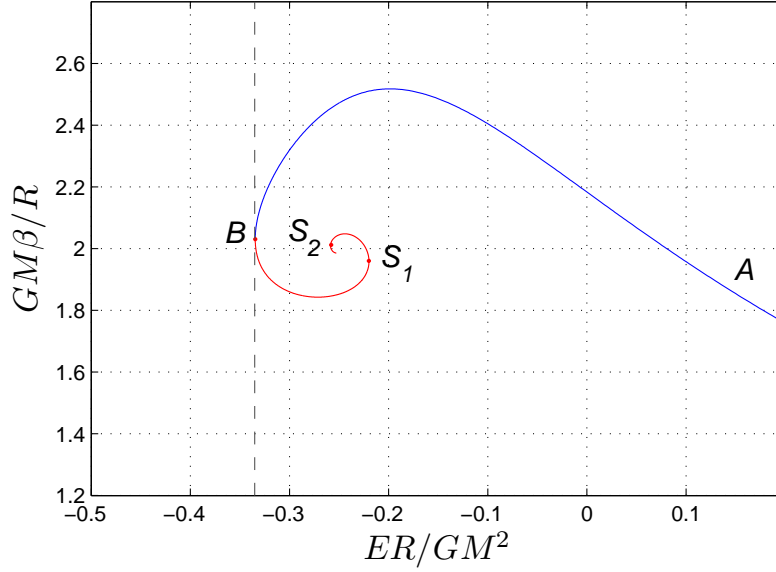
$$\frac{\partial \beta}{\partial E} = \left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial E} \right|_e + \sum_a \frac{\left(\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x^a} \right|_e \right)^2}{\lambda_a} \quad (2.24)$$

Υποθέστε πως το φάσμα των ιδιοτιμών είναι μη-εκφυλισμένο: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$. Θεωρείστε μια σειρά $\beta(E)$ από ευσταθείς καταστάσεις, δηλαδή $\lambda_1 > 0$. Καθώς πλησιάζουμε το σημείο αλλαγής ευστάθειας, $\lambda_1 \rightarrow 0$, και συνεπώς από την εξίσωση (2.24) παίρνουμε

$$\frac{\partial \beta}{\partial E} \simeq \frac{\left(\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x^1} \right|_e \right)^2}{\lambda_1} \rightarrow \infty \quad \text{για } \lambda_1 \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

Άρα, δύο γραμμικές σειρές εισέρχονται η μία στην άλλη εκεί όπου υπάρχει κάθετη εφαπτόμενη στο $\beta(E)$. Αυτό είναι αναγκαστικά ένα σημείο αλλαγής ευστάθειας. Τονίζουμε πως αντί των β , E , θα μπορούσαν να είναι οποιεσδήποτε (συζυγείς) μεταβλητές, για παράδειγμα οι P , V όπως είδαμε στην Εισαγωγή (εξισώσεις (1.11), (1.16)). Επιπλέον, από την εξίσωση (2.25) είναι εμφανές πως, κοντά σε ένα σημείο αλλαγής, το πρόσημο της κλίσης του $\beta(E)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο της πρώτης ιδιοτιμής. Συνεπώς, ο ευσταθής κλάδος είναι εκείνος με θετική κλίση κοντά στο σημείο αλλαγής. Υπάρχει η πιθανότητα στο ίδιο σύστημα να υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία αλλαγής ισορροπίας. Σε αυτή την περίπτωση, κοντά στο δεύτερο σημείο αλλαγής θα είναι $\lambda_2 \rightarrow 0$, στο τρίτο σημείο αλλαγής $\lambda_3 \rightarrow 0$ και ούτω καθ' εξής. Σε κάθε σημείο αλλαγής, η αντίστοιχη ιδιοτιμή κυριαρχεί στην ποσότητα $\partial \beta / \partial E$ ακριβώς όπως πριν, και η κλίση κοντά στο σημείο αλλαγής καθορίζει τον πιο ευσταθή κλάδο (θετική κλίση). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.1 ο κλάδος AB είναι ευσταθής και B είναι το πρώτο σημείο αλλαγής ευστάθειας. Ο κλάδος BS_1 είναι ασταθής με ένα ασταθή τρόπο ταλάντωσης, ο S_1S_2 είναι ασταθής με δύο ασταθής τρόπους ταλάντωσης και ούτω κάθε εξής. Η μέθοδος αυτή δεν προσδιορίζει αν ένας κλάδος είναι ευσταθής, αλλά μόνον το σημείο αλλαγής ευστάθειας στο οποίο πυροδοτείται μια αστάθεια και τον αντίστοιχο κλάδο. Στο Σχήμα 2.1, ξέρουμε πως ο κλάδος AB είναι ευσταθής με άλλους τρόπους. Στην πραγματικότητα, η ευστάθεια αποδεικνύεται στο όριο $E \rightarrow \infty$ με τη δεύτερη τάξης μεταβολή της εντροπίας και καθώς δεν υπάρχει σημείο αλλαγής ευστάθειας καθώς μειώνεται η ενέργεια μέχρι το σημείο B , ο κλάδος AB είναι ευσταθής. Αυτή είναι μια γενική μεθοδολογία για τον καθορισμό της ευστάθειας, χωρίς να χρειαστεί η επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών.

Ας εξετάσουμε τη μαθηματική δυνατότητα $(\partial \tilde{\beta} / \partial x^1)_e \rightarrow 0$ καθώς $\lambda_1 \rightarrow 0$ στην εξίσωση



Σχήμα 2.1: Η σειρά καταστάσεων ισορροπίας $\beta = \beta(E)$ για μια ισόθερμη σφαίρα στην προσέγγιση του μέσου πεδίου. Στη μικροκανονική συλλογή, AB είναι ο ευσταθής κλάδος και B είναι το σημείο αλλαγής ευστάθειας. Τα σημεία S_1, S_2, \dots σημειώνουν τις άπειρες δευτερογενείς αστάθειες, που εγκαθίσταται καθώς πλησιάζουμε το εστιακό σημείο της σπείρας, που δε φαίνεται στην εικόνα.

(2.25). Όπως έχει αποδείξει ο Katz [43], τέτοιες συμπτώσεις μπορεί να εμφανιστούν μόνο μαθηματικά και δεν αντιστοιχούν σε φυσικές καταστάσεις. Ο λόγος είναι πως η σύμπτωση μπορεί να αφαιρεθεί με μια μικρή διαταραχή της δυναμικής ενέργειας. Έστω $\epsilon \ll 1$ και ως εφαρμόσουμε μια μικρή διαταραχή

$$S \mapsto S + \epsilon E x^1$$

Παίρνουμε

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x^1} \right|_e = \left. \frac{\partial^2 (S + \epsilon E x^1)}{\partial E \partial x^1} \right|_e \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow 0} \epsilon \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial E} \rightarrow \frac{\epsilon^2}{\lambda_1}$$

Στα παραπάνω αναφερόμασταν στη μικροκανονική συλλογή, καθώς θεωρούσαμε τα ακρότατα της εντροπίας. Όταν μελετάμε την κανονική συλλογή, η εντροπία S θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ελεύθερη ενέργεια F ή ισοδύναμα με $-\beta F = S - \beta E$. Σε αυτή την περίπτωση οι συζυγείς μεταβλητές είναι οι $(\beta, -E)$ ως προς $-\beta F$. Όλα τα παραπάνω ισχύουν τώρα για τη σειρά $-E(\beta)$. Αυτό σημαίνει ότι το Σχήμα 2.1 θα πρέπει απλά να περιστραφεί κατά 90° αντίστροφα των δεικτών του ρολογιού. Αυτό σημαίνει πως ο ευσταθής κλάδος είναι από το σημείο A ως το μέγιστο του β . Η κανονική συλλογή γίνεται ασταθής ναρτίτερα από τη μικροκανονική.

Τώρα, μετά από αυτή την ανάλυση, μπορούμε ακόμα πιο ξεκάθαρα να δούμε πως η θερμοχωρητικότητα μπορεί πραγματικά να είναι αρνητική στη μικροκανονική συλλογή. Στην πραγματικότητα, κοντά στο σημείο αλλαγής η θερμοχωρητικότητα είναι αρνητική στον ευσταθή κλάδο και γίνεται θετική στον ασταθή! Αυτό φαίνεται εύκολα από την εξίσωση

(2.25)

$$C_V = -\beta^2 \frac{\partial E}{\partial \beta} \simeq -\lambda_1 \beta^2 \left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x^1} \Big|_e \right)^{-2} < 0, \quad \text{για ευσταθή ισορροπία } \lambda_1 > 0$$

Παρατηρήστε πως το ίδιο θα συμβεί στο δεύτερο σημείο αλλαγής έτσι, που το πρόσημο της C_V δεν είναι κριτήριο ευστάθειας όπως ήταν στη συνήθη θερμοδυναμική.

Στην κανονική συλλογή, όμως, η θερμοχωρητικότητα μιας ευσταθούς κατάστασης δε μπορεί να είναι αρνητική. Καθώς, όπως αναφέραμε νωρίτερα, οισυζυγείς μεταβλητές είναι οι $(\beta, -E)$ ως προς $-\beta F$, το ανάλογο της (2.25) στην κανονική συλλογή είναι

$$\frac{\partial(-E)}{\partial \beta} \simeq \frac{1}{\lambda_{1C}} \frac{\partial(-\tilde{E})}{\partial x_C^1} \Big|_e$$

Άρα έχουμε

$$C_V^{can.} = \beta^2 \frac{\partial(-E)}{\partial \beta} \simeq \frac{1}{\lambda_{1C}} \frac{\partial(-\tilde{E})}{\partial x_C^1} \Big|_e > 0, \quad \text{για ευσταθή ισορροπία } \lambda_{1C} > 0$$

Σημειώστε πως οι ασταθείς καταστάσεις μπορεί επίσης να έχουν θετική θερμοχωρητικότητα, για παράδειγμα κοντά στο δεύτερο σημείο αλλαγής ευστάθειας. Συνεπώς το πρόσημο της θερμοχωρητικότητας δεν είναι κατάλληλο κριτήριο για την ευστάθεια, ούτε ακόμα για την κανονική συλλογή. Η μόνη αυστηρή διατύπωση που μπορεί να ειπωθεί είναι πως αν στην κανονική συλλογή η θερμοχωρητικότητα είναι αρνητική για μια κατάσταση ισορροπίας, τότε αυτή η κατάσταση είναι ασταθής.

Κλείνοντας το Κεφάλαιο αυτό ας περιγράψουμε ένα φυσικό μηχανισμό που κάνει δυνατή την ύπαρξη ευσταθών καταστάσεων ισορροπίας με αρνητική θερμοχωρητικότητα όπως περίπου παρουσιάστηκε από τους Lynden-Bell & Wood [10]. Θεωρήστε ένα βαρυτικό αέριο περιορισμένο από σφαιρικά αδιαβατικά τοιχώματα. Έστω C_1 η θερμοχωρητικότητα του υποσυστήματος που αποτελείται από τις εσωτερικές περιοχές του αερίου και C_2 η θερμοχωρητικότητα των εξωτερικών περιοχών. Το θεώρημα virial καταδεικνύει πως ένα βαρυτικό αέριο σε ισορροπία (χωρίς εξωτερική πίεση) έχει αρνητική θερμοχωρητικότητα, καθώς

$$2K + U = 0 \Rightarrow E = -K \Rightarrow C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{3}{2} Nk$$

Το εσωτερικό υποσύστημα μένει εντοπισμένο, κυρίως λόγω της δική του βαρύτητας, έτσι που είναι λογικό να υποθέσουμε, ότι έχει αρνητική θερμοχωρητικότητα $C_1 < 0$, ενώ οι εξωτερικές περιοχές έχουν θετική θερμοχωρητικότητα $C_2 > 0$, καθώς επηρεάζονται δραστικά από την εξωτερική πίεση. Ας υποθέσουμε πως το συνολικό σύστημα έχει αρνητική θερμοχωρητικότητα

$$C_1 + C_2 < 0$$

Όπως θα δούμε, το σύστημα είναι ευσταθές σε αυτή την περίπτωση. Η τελευταία εξίσωση συνεπάγεται $|C_1| > C_2$. Έστω πως το εσωτερικό υποσύστημα είναι θερμότερο από το εξωτερικό έτσι, ώστε η θερμότητα να ρέει από το κέντρο προς την περιφέρεια. Ένα σύστημα με αρνητική θερμοχωρητικότητα γίνεται θερμότερο όταν χάνει ενέργεια! Άρα, η

θερμοκρασία του εσωτερικού συστήματος αυξάνει καθώς χάνει ενέργεια και το εξωτερικό σύστημα, που έχει θετική θερμοχωρητικότητα, θερμαίνεται και αυτό. Καθώς $|C_1| > C_2$ το εσωτερικό σύστημα θερμαίνεται με χαμηλότερο ρυθμό από τις εξωτερικές περιοχές και συνεπώς αναπόφευκτα το σύστημα φτάνει σε ισορροπία σε κάποια θερμοκρασία μεγαλύτερη και των δύο αρχικών θερμοκρασιών. Όμοια, αν το εσωτερικό σύστημα ήταν ψυχρότερο του εξωτερικού, η ενέργεια θα κυλούσε από την περιφέρεια προς το κέντρο και το εσωτερικό θα ψυχραίνονταν με μικρότερο ρυθμό από την περιφέρεια έτσι, ώστε το σύστημα να ισορροπήσει σε μια χαμηλότερη θερμοκρασία σε αυτή την περίπτωση.

Αυτή η διαδικασία οδηγεί στη δομή πυρήνα-άλω. Βλέπουμε πως η συνθήκη $C_1 + C_2 < 0$ είναι καίρια ώστε να δημιουργηθεί αυτή η δομή. Αν η ολική θερμοχωρητικότητα ήταν θετική, τότε η δομή πυρήνας-άλως δεν θα μπορούσε να δημιουργηθεί. Αυτό διότι στην περίπτωση για παράδειγμα $T_1 > T_2$, ο πυρήνας θα θερμαίνονταν με υψηλότερο ρυθμό από την άλω, καθώς $|C_1| < C_2$, και το σύστημα θα ήταν αδύνατον να φτάσει σε ισορροπία στη μορφή πυρήνα-άλω.

Κεφάλαιο 3

Σφαιρικά ρευστά στη Νευτώνεια Βαρύτητα με Κοσμολογική Σταθερά

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη θερμοδυναμική ευστάθεια του βαρυτικού αερίου στη Νευτώνεια Βαρύτητα παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Στην παράγραφο 3.1 θα βρούμε τα σημεία θερμοδυναμικής ισορροπίας υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και θα παρουσιάσουμε πως πραγματοποιήσαμε την ανάλυση θερμοδυναμικής ευστάθειας. Επιπλέον θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των καταστάσεων ισορροπίας και τη συγκεκριμένη σειρά των ομογενών λύσεων, που αντιστοιχούν στο στατικό σύμπαν του Einstein στο Νευτώνειο όριο. Στην παράγραφο 3.2 παρουσιάζουμε τη *Βαρυτική Καταστροφή* υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς, δηλαδή μελετάμε τις θερμοδυναμικές αστάθειες της βαρύτητας στη μικροκανονική συλλογή με Λ . Στην παράγραφο 3.3 περιγράφουμε την *ισοθερμική κατάρρευση* υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς, δηλαδή μελετάμε τις θερμοδυναμικές αστάθειες της βαρύτητας στην κανονική συλλογή με Λ . Τέλος, στην παράγραφο 3.4 εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ των δυναμικών ασταθειών (αστάθειες τύπου Jeans) και των θερμοβαρυτικών ασταθειών που μελετήσαμε νωρίτερα. Πριν εισέρθουμε στις λεπτομέρειες της ανάλυσής μας, ας δείξουμε πως γίνεται η Νευτώνεια βαρύτητα παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και ας εξετάσουμε την εγκυρότητα του Νευτώνειου ορίου σε αυτή την περίπτωση.

Το βαρυτικό δυναμικό ϕ_N στη Νευτώνεια βαρύτητα καθορίζεται από την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \phi_N = 4\pi G\rho \quad (3.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα της ύλης που είναι η πηγή του δυναμικού. Αυτή η εξίσωση θα έπρεπε και πραγματικά αλλάζει υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Ο Einstein έκανε ένα λάθος [50] όταν υπολόγισε τη μετατροπή της εξίσωσης Poisson, που ακόμα και σήμερα μπορεί να μπερδέψει κάποιους ερευνητές. Το λάθος αυτό είναι άσχετο με τη δήλωση του Einstein πως η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις ήταν «το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του». Ήταν μόνο ένα απλό μαθηματικό λάθος που οδηγεί στην μη-ομογενή εξίσωση Helmholtz. Εν συντομία, το λάθος ήταν πως αντί να αμελήσει

τον όρο ϕ/c^2 στην έκφραση

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$

αμέλησε το 1. Τότε, η αμιγώς χρονική συνιστώσα των εξισώσεων Einstein

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

δίνει μετά τις αντικαταστάσεις $G_{00} \simeq -\nabla^2 g_{00}$, $T_{00} \simeq \rho c^2$ και $g_{00} \simeq -2\phi/c^2$, τη μη-ομογενή εξίσωση Helmholtz $\nabla^2 \phi + \Lambda \phi = 4\pi G \rho$. Η εξίσωση αυτή λαθεμένα θεωρεί την κοσμολογική σταθερά ως υπεύθυνη για την εισαγωγή ενός μικρής εμβέλειας cutoff στη βαρυτική δύναμη. Η σωστή εξίσωση, όμως όπως θα δούμε είναι η

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2 \quad (3.2)$$

Μία θετική κοσμολογική σταθερά, που αντιστοιχεί στο κενό de-Sitter, εισάγει μια αρμονική απωστική δύναμη

$$\vec{F}_\Lambda = mc^2 \frac{\Lambda}{3} \vec{r}$$

ενώ μια αρνητική κοσμολογική σταθερά, που αντιστοιχεί στο κενό anti-de Sitter εισάγει μια ελκτική αρμονική δύναμη. Ας δούμε αναλυτικά πως η εξίσωση (3.2) συνάγεται από τη Γενική Σχετικότητα.

Ας γράψουμε τις εξισώσεις Einstein στη μορφή:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\mu} - \Lambda \delta_{\nu}^{\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\nu}^{\mu} \quad (3.3)$$

Ο ταυιστής ενέργειας-ορμής για ένα τέλειο ρευστό

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho c^2) g_{\alpha\nu} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} - p \delta_{\nu}^{\mu}$$

γίνεται στο μη-σχετικιστικό όριο για μια κατάσταση ισορροπίας ($d\vec{x}/ds = 0$):

$$T_{\nu}^{\mu} \simeq \rho c^2 \delta_0^{\mu} \delta_{\nu}^0$$

Από τις εξισώσεις Einstein παίρνουμε $R = -8\pi G T/c^4 - 4\Lambda$ και αντικαθιστώντας ξανά στην εξίσωση (3.3) παίρνουμε

$$R_{\nu}^{\mu} = \frac{4\pi G \rho}{c^2} \delta_{\nu}^{\mu} - \Lambda \delta_{\nu}^{\mu} \quad (3.4)$$

Στο όριο του ασθενούς πεδίου μόνο οι χρονικές συνιστώσες των εξισώσεων Einstein επιβιώνουν. Για αργά κινούμενα σωματίδια είναι

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -c^2 \Gamma_{00}^i \Rightarrow \Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \partial^i \phi$$

όπου το δυναμικό ϕ ορίζεται από την εξίσωση $d^2 \vec{x}/dt^2 = -\vec{\nabla} \phi$. Στο όριο του στατικού ασθενούς πεδίου είναι

$$R_0^0 = R_{00} \simeq \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \partial^{\sigma} g_{00} = \partial_{\sigma} \Gamma_{00}^{\sigma} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi \quad (3.5)$$

Τότε, η χρονική συνιστώσα της εξίσωσης (3.4) δίνει

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho - 8\pi G\rho_\Lambda \quad (3.6)$$

όπου

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (3.7)$$

Στην παραπάνω διαδικασία και ειδικά για να πάρουμε την εξίσωση (3.5) υποθέτουμε πως το βαρυτικό δυναμικό πεδίο τόσο λόγω της ύλης όσο και της κοσμολογικής σταθεράς είναι ασθενές. Η υπόθεση του ασθενούς πεδίου της κοσμολογικής σταθεράς αντιστοιχεί στη συνθήκη $\Lambda x^2 \ll 1$. Αυτό είναι πιο ξεκάθαρο στη στατική σφαιρικά συμμετρική περίπτωση όπως θα δούμε. Κάποιος θα μπορούσε ίσως να αμφισβητήσει την εγκυρότητα και τη χρησιμότητα της Νευτώνειας προσέγγισης με κοσμολογική σταθερά Λ καθώς θα μπορούσε να επιχειρηματολογήσει πως υποθέτωντας ασθενές πεδίο κοσμολογικής σταθεράς καθιστά την ίδια την κοσμολογική σταθερά αμελητέα σε κάθε περίπτωση. Αυτό δεν είναι ακριβές. Προκειμένου αυτο να γίνει ξεκάθαρο είναι χρήσιμο να μελετήσουμε την ειδική περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας, που είναι ούτως ή άλλως το θέμα αυτής της εργασίας.

Στο Παράρτημα Γ'.1 δείχνουμε ότι στη Γενική Σχετικότητα για ένα σφαιρικά συμμετρικό τέλειο ρευστό, οι στατικές καταστάσεις ισορροπίας δίνονται από την εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkov equation (TOV):

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi G\frac{p}{c^2}r - \frac{1}{3}\Lambda c^2 r\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} \quad (3.8)$$

με

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (3.9)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις αμελήσαμε το δείκτη e της εξίσωσης (Γ'.14). Το μη-σχετικιστικό όριο αντιστοιχεί σε μια γραμμική καταστατική εξίσωση

$$p = w\rho c^2$$

με $w = \frac{kT}{\tilde{m}c^2}$, όπου \tilde{m} είναι η μάζα του ενός σωματιδίου, και παίρνοντας στη συνέχεια το όριο $w \rightarrow 0$, δηλαδή

$$kT \ll \tilde{m}c^2$$

Αυτό αντιστοιχεί σε μη-σχετικιστικά 'dust' σωματίδια. Αντικαθιστώντας την εξίσωση $p = w\rho c^2$ στην εξίσωση TOV (3.8) και θεωρώντας το μη-σχετικιστικό όριο $kT \ll \tilde{m}c^2$, παίρνουμε

$$\frac{kT}{\tilde{m}} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \left(\frac{Gm(r)}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 r\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} \quad (3.10)$$

Προκειμένου να πάρουμε το Νευτώνειο όριο πρέπει να υποθέσουμε ότι το βαρυτικό πεδίο που παράγεται από την κοσμολογική σταθερά είναι ασθενές. Βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση (3.10) ότι αυτό αντιστοιχεί σε:

$$\frac{1}{3}\Lambda R^2 \ll 1 \quad , \text{ Νευτώνειο όριο} \quad (3.11)$$

όπου R είναι η ακτίνα του σφαιρικού ρευστού. Σε αυτό το όριο και αντικαθιστώντας τα $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$, $\beta = 1/kT$, η εξίσωση (3.10) γίνεται

$$r^2 \frac{d(-\frac{1}{\beta\tilde{m}} \log \rho)}{dr} = Gm(r) - \frac{1}{3}8\pi G\rho_\Lambda r^3 \quad (3.12)$$

η οποία μετά από παραγωγή ως προς r και αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.9) δίνει τελικά:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho - 8\pi G\rho_\Lambda \quad (3.13)$$

με $\rho = Ae^{-\beta\tilde{m}\phi}$. Όπως θα δούμε αυτή η έκφραση Boltzmann για το ρ είναι πραγματικά σωστή στη Νευτώνεια περίπτωση. Η εξίσωση (3.13) είναι απλά η εξίσωση Poisson με Λ (3.6) στη σφαιρικά συμμετρική περίπτωση. Είναι προφανές πως η κοσμολογική σταθερά είναι αμελητέα αν

$$\rho \gg \rho_\Lambda \Leftrightarrow \frac{1}{3}\Lambda R^2 \cdot \frac{R}{R_S} \ll 1 \quad , \text{ αμελητέο } \Lambda \quad (3.14)$$

όπου $R_S = 2GM/c^2$ είναι η ακτίνα Schwarzschild. Η εξίσωση (3.11) για το Νευτώνειο όριο δεν συνεπάγεται αυτομάτως την εξίσωση (3.14) για αμελητέο Λ καθώς στα Νευτώνεια συστήματα ισχύει φυσιολογικά ότι $R/R_S \gg 1$.

3.1 Η εξίσωση Emden με Λ

3.1.1 Το ακρότατο της εντροπίας και της ελεύθερης ενέργειας

Έστω $N \gg 1$ πανομοιότυπα σωματίδια (αστέρια), περιορισμένα σε ένα σφαιρικό κελί με αδιαβατικά και τέλεια ελαστικά τοιχώματα. Θα δουλέψουμε στο όριο του μέσου πεδίου, όπως το περιγράψαμε στην παράγραφο 2.1, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Κανείς μπορεί να σκεφτεί την f ως την κατανομή που δίνει τη μάζα dm μέσα σε ένα απειροστό κελί $d^3\vec{r}d^3\vec{p}$ στο φασικό χώρο:

$$dm = f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3\vec{r}d^3\vec{p} \quad (3.15)$$

Υποθέτουμε πως όλα τα σωματίδια έχουν μάζα $\tilde{m} = 1$, έτσι που δουλεύουμε με την ταχύτητα \vec{v} αντί της ορμής \vec{p} . Άραξ και προσδιοριστεί η f , η πυκνότητα $\rho(\vec{r})$ μπορεί να βρεθεί από

$$\rho(\vec{r}) = \int f d^3\vec{v} \quad (3.16)$$

και ο αριθμός των σωματιδίων

$$N = \int f d^3\vec{r}d^3\vec{v} \quad (3.17)$$

Η ολική μάζα είναι $M = N\tilde{m}$.

Η ερώτηση που τίθεται είναι ποιά f δίνει το ακρότατο στην εντροπία Boltzmann

$$S/k = - \int f \log f d^6\tau \quad (3.18)$$

με σταθερή ενέργεια E και σταθερό αριθμό σωματιδίων N , όπου $d^6\tau = d^3\vec{r}d^3\vec{v}$. Για την περίπτωση χωρίς κοσμολογική σταθερά, έχει αποδειχθεί [9, 10] πως μόνο οι σφαιρικές κατανομές μεγιστοποιούν την εντροπία. Για μια συζήτηση πάνω στις σφαιρικές κατανομές παρουσία κοσμολογικής σταθεράς δειτε την αναφορά [51]. Θα θεωρήσουμε μόνο σφαιρικές, στατικές καταστάσεις. Για την εύρεση της f ακολουθούμε τους Lynden-Bell & Wood [10].

Χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\beta = 1/kT$, μ έχουμε για τη συνθήκη ακροτάτου ως προς την f

$$\delta S/k - \beta\delta E + \mu\delta N = 0 \quad (3.19)$$

Η ολική ενέργεια είναι $E = K + U$, όπου K είναι η κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 f d^6\tau \quad (3.20)$$

Όσον αφορά τη βαρυτική δυναμική ενέργεια U , πρέπει να δουλέψουμε με το βαρυτικό δυναμικό $\phi(\vec{r})$. Όπως είδαμε, στο Νευτώνιο όριο, η εξίσωση Poisson παρουσία κοσμολογικής σταθεράς γίνεται

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho - 8\pi G\rho_\Lambda \quad (3.21)$$

όπου $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$.

Για σφαιρικά συμμετρικές κατανομές, περιορισμένες σε $r \in [0, R]$, το δυναμικό μπορεί να γραφεί ως

$$\phi = \phi_N + \phi_\Lambda \quad (3.22)$$

με

$$\phi_N = -G \int_0^R \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.23)$$

$$\phi_\Lambda = -\frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda r^2 \quad (3.24)$$

Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια μπορεί να γραφεί ως

$$U = -\frac{G}{2} \int \int \frac{f(\vec{r}, \vec{v})f(\vec{r}', \vec{v}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6\tau d^6\tau' - \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda \int f r^2 d^6\tau \quad (3.25)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.20), (3.25) η μεταβολή στην ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} \delta E &= \int \delta f \frac{1}{2} v^2 f d^6\tau - \frac{G}{2} \int \int \frac{f' \delta f + f \delta f'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6\tau d^6\tau' - \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda \int \delta f r^2 d^6\tau \\ &= \int \delta f \left(\frac{1}{2} v^2 - G \int \frac{f'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6\tau' - \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda r^2 \right) d^6\tau \\ &= \int \delta f \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.17), (3.18) και (3.26) παίρνουμε

$$\delta S/k - \beta\delta E + \mu\delta N = - \int \delta f \left(\log f + 1 + \beta \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) - \mu \right) d^6\tau \quad (3.27)$$

Έτσι, ώστε προκειμένου η εξίσωση (3.19) να ισχύει για όλα τα δf , πρέπει

$$\log f + 1 + \beta \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) - \mu = 0 \Rightarrow f(r, v) = A e^{-\beta \left(\frac{v^2}{2} + \phi(r) \right)} \quad (3.28)$$

για $A = e^{\mu-1}$. Παίρνουμε την κατανομή Maxwell-Boltzmann όπως με μηδενική κοσμολογική σταθερά. Η κοσμολογική σταθερά εισέρχεται μη-εκπεφρασμένα στην εξίσωση μέσω του δυναμικού.

Τώρα η κατανομή πυκνότητας μπορεί εύκολα να υπολογιστεί

$$\rho = \int f d^3 \vec{v} = \int A e^{-\frac{\beta v^2}{2}} e^{-\beta \phi} d^3 \vec{v} = A \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \phi} \quad (3.29)$$

Απορροφώντας τις σταθερές στην αρχική τιμή $\phi(0)$ του πεδίου και την κεντρική πυκνότητα ρ_0 , παίρνουμε τελικά

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta(\phi(r) - \phi(0))} \quad (3.30)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η εξίσωση (3.21), αντικαθιστώντας την (3.30), δίνει

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi(r) \right) = 4\pi G \rho_0 e^{-\beta(\phi(r) - \phi(0))} - 8\pi G \rho_\Lambda \quad (3.31)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για $r \leq R$, όπου R είναι η ακτίνα του εξωτερικού τοιχώματος. Για $r > R$, είναι φυσικά

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi(r) \right) = 0$$

και τα ϕ , ϕ' θα πρέπει να είναι συνεχή στο R . Ας εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές

$$x = r \sqrt{4\pi G \rho_0 \beta}, \quad y = \beta(\phi - \phi(0)), \quad \lambda = \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_0} \quad (3.32)$$

Τότε, η εξίσωση (3.31) γίνεται

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} y \right) = e^{-y} - \lambda \quad (3.33)$$

την οποία καλούμε εξίσωση Emden-Λ. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (3.34)$$

Η πρώτη αρχική συνθήκη έρχεται από την εξίσωση (3.32), ενώ η δεύτερη από τη σφαιρική συμμετρία (το βαρυτικό πεδίο στο κέντρο είναι μηδέν). Ονομάζουμε z την τιμή x στο R :

$$z = R \sqrt{4\pi G \rho_0 \beta} \quad (3.35)$$

Θέλουμε να παράγουμε τη σειρά των καταστάσεων ισορροπίας, δηλαδή να βρούμε το $y(z)$ για διάφορα z , λ (διάφορες ισοθερμικές σφαίρες) και όχι απλά το $y(x)$ για κάποιο λ . Αυτό θα πρέπει να γίνει επιλύοντας την (3.33) για διάφορα z , λ κρατώντας το N , δηλαδή το M , σταθερό σε κάθε περίπτωση. Για την περίπτωση $\lambda = 0$ αυτό ήταν πολύ εύκολο. Κανείς μπορούσε, απλά, να λύσει την εξίσωση Lane-Emden για ένα z και να μεταφράσει το

αποτέλεσμα $y(x)$ ως $y(z)$ χωρίς καμία ασυνέπεια, καθώς η μάζα θα μπορούσε να θεωρηθεί σταθερή: δεν υπάρχει κλίμακα μάζας στο σύστημα. Μια άλλη δυσκολία που υπεισέρχεται, είναι ότι αλλάζοντας την τιμή του λ δε μπορεί να θεωρηθεί ότι αλλάζει το ρ_Λ , καθώς το λ περιέχει επίσης το ρ_0 , που είναι διαφορετικό για κάθε κατάσταση ισορροπίας. Συνεπώς, η κατάσταση γενικά, γίνεται αρκετά περίπλοκη. Θα δούμε στην παράγραφο 3.1.3, πως μπορεί να λυθεί το πρόβλημα εισάγοντας μια νέα παράμετρο και κατασκευάζοντας ένα κατάλληλο πρόγραμμα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Η κανονική συλλογή μπορεί να μελετηθεί ορίζοντας την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz $F = E - TS$ με χρήση της εντροπίας Boltzmann (3.18). Είναι ισοδύναμο να εργαστούμε με τη συνάρτηση Massieu [8, 19] $J = -F/T$ δηλαδή

$$J = S - \frac{1}{T}E \quad (3.36)$$

Ακολουθώντας παρόμοια πορεία είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί [19] ότι η μεγιστοποίηση της J με σταθερό T είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της S με σταθερή E σε μεταβολές πρώτης τάξης σε $\delta\rho$. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο συλλογές έχουν τις ίδιες καταστάσεις ισορροπίας που δίνονται από τη συνάρτηση κατανομής

$$f = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \rho_0 e^{-\beta(\phi-\phi(0))} e^{-\frac{1}{2}\beta v^2} \quad (3.37)$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί, πραγματοποιώντας για το J τους προηγούμενους υπολογισμούς για την S , ότι το ίδιο είναι αληθές υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Αυτό που είναι διαφορετικό στις δύο συλλογές είναι η ανάλυση στην ευστάθεια, δηλαδή η μεταβολή δεύτερης τάξης στην εντροπία και στην ελεύθερη ενέργεια όπως θα δούμε στην παράγραφο 3.1.2.

3.1.2 Κριτήρια για την ευστάθεια

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή δεύτερης τάξης στην εντροπία ως προς διαταραχές $\delta\rho$. Ακολουθούμε τον Padmanabhan [11] στην παρακάτω ανάλυση, όπου γενικεύουμε κατάλληλα ώστε να συμπεριληφθεί η κοσμολογική σταθερά. Μεγιστοποιώντας την εντροπία για μια δεδομένη κατανομή $\rho(r)$ παίρνουμε την κατανομή Boltzmann

$$f(r, v) = \frac{1}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \rho(r) e^{-\frac{v^2}{2kT}} \quad (3.38)$$

Η εντροπία μπορεί συνεπώς να γραφεί ως

$$S/k = \frac{3M}{2} \log T - \int \rho \log \rho d^3\vec{r}$$

Μεταβάλλουμε την $\rho(r)$ και συνεπώς τις U , K μέσω των ϕ , T αντίστοιχα διατηρώντας τα E και M σταθερά. Η σταθερότητα της ενέργειας E δίνει τη συνθήκη

$$\delta K + \delta U = 0$$

Ας δώσουμε μια πολύ χρήσιμη έκφραση για τη δυναμική ενέργεια

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int \rho \phi_N d^3\vec{r} + \int \rho \phi_\Lambda d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \rho(\phi - \phi_\Lambda) d^3\vec{r} + \int \rho \phi_\Lambda d^3\vec{r} \\
&= \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho \phi_\Lambda d^3\vec{r}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Υποθέτουμε σταθερό το ρ_Λ . Χρησιμοποιώντας την (3.39) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\delta E &= \delta K + \delta U = \frac{3M}{2} \delta T + (\delta\rho) \frac{\partial U}{\partial \rho} + (\delta\phi) \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \left((\delta\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + (\delta\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 U + \mathcal{O}(3) \\
&= \frac{3M}{2} \delta T + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} (\rho \delta\phi + \phi \delta\rho + \phi_\Lambda \delta\rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \phi} \delta\rho \delta\phi \\
&= \frac{3M}{2} \delta T + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} (\rho \delta\phi_N + \phi_N \delta\rho + \phi_\Lambda \delta\rho + \phi_\Lambda \delta\rho) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta\rho \delta\phi \\
&= \frac{3M}{2} \delta T + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} (2\phi_N \delta\rho + 2\phi_\Lambda \delta\rho) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \delta\rho \delta\phi \\
&= \frac{3M}{2} \delta T + \int d^3\vec{r} \left(\phi \delta\rho + \frac{1}{2} \delta\rho \delta\phi \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Στην τρίτη σειρά χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{r} (\phi_N \delta\rho + \rho \delta\phi_N) &= \int \left(d^3\vec{r} \delta\rho(r) \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \int \left(d^3\vec{r} \rho(r) \int d^3\vec{r}' \frac{\delta\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
&= \int \left(d^3\vec{r} \delta\rho(r) \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \int \left(d^3\vec{r}' \int d^3\vec{r} \frac{\rho(r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\rho(r) \right) \\
&= 2 \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \delta\rho(r) \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int d^3\vec{r} 2\phi_N \delta\rho
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Ο περιορισμός $\delta E = 0$ δίνει με χρήση της (3.40):

$$\delta T = -\frac{2}{3M} \int d^3\vec{r} (\phi \delta\rho + \frac{1}{2} \delta\rho \delta\phi) + \mathcal{O}(3) \tag{3.42}$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta S/k + \mu \delta M &= \frac{3M}{2T} \left(-\frac{2}{3M} \right) \int d^3\vec{r} (\phi \delta\rho + \frac{1}{2} \delta\rho \delta\phi) - \int d^3\vec{r} \delta\rho (1 + \log \rho) \\
&\quad - \frac{3M}{4T^2} \left(-\frac{2}{3M} \int d^3\vec{r} (\phi \delta\rho + \frac{1}{2} \delta\rho \delta\phi) \right)^2 - \int d^3\vec{r} \frac{(\delta\rho)^2}{2\rho} + \mu \int d^3\vec{r} \delta\rho \\
&= - \int d^3\vec{r} \delta\rho (1 + \log \rho - \mu + \frac{\phi}{T}) - \int d^3\vec{r} \left(\frac{\delta\rho \delta\phi}{2T} + \frac{(\delta\rho)^2}{2\rho} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3MT^2} \left(\int d^3\vec{r} \phi \delta\rho \right)^2
\end{aligned}$$

με τη μεταβολή δεύτερης τάξης να είναι

$$\delta^{(2)}S/k = - \int d^3\vec{r} \left(\frac{\delta\rho\delta\phi}{2T} + \frac{(\delta\rho)^2}{2\rho} \right) - \frac{1}{3MT^2} \left(\int d^3\vec{r} \phi\delta\rho \right)^2 \quad (3.43)$$

Αν σε μια κατάσταση ισορροπίας, για κάθε διαταραχή $\delta\rho$ είναι $\delta^{(2)}S|_{equil} < 0$ τότε η εντροπία είναι ένα (τοπικό) μέγιστο και η κατάσταση ισορροπίας είναι (τοπικά) ευσταθής. Αν υπάρχει μία ή περισσότερες διαταραχές για τις οποίες $\delta^{(2)}S|_{equil} > 0$, τότε η ισορροπία είναι ασταθής. Ας δούμε πως το πρόσημο της $\delta^{(2)}S|_{equil}$ μπορεί να συναχθεί από την εξίσωση ιδιοτιμών που παράγεται από την (3.43) όπως στην αναφορά [11] (χωρίς κοσμολογική σταθερά εκεί).

Καθώς η συνολική μάζα είναι σταθερή, για το $\delta\rho$ θα ισχύει:

$$\int_0^R d^3\vec{x}\delta\rho = 0 \quad (3.44)$$

Ας επικεντρωθούμε στη σφαιρικά συμμετρική διαταραχή $\delta\rho = \delta\rho(r)$ και ας εισάγουμε τη διαταραχή μάζας

$$q(r) = \delta M(r) \quad (3.45)$$

Τότε

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr} \quad (3.46)$$

Η δύναμη λόγω της διαταραχής $(\delta\phi)' = G\frac{q}{r^2}$ πρέπει να είναι πεπερασμένη παντού και συνεπώς το q θα πρέπει να πηγαίνει σαν $q \rightarrow r^3$ για $r \rightarrow 0$. Αυτό σημαίνει ότι $q(0) = 0$. Τότε, η εξίσωση (3.44) δίνει $q(R) = 0$. Συνεπώς, οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$q(0) = q(R) = 0 \quad (3.47)$$

Αντικαθιστώντας (3.45), (3.46) στην εξίσωση (3.43) και πραγματοποιώντας διάφορες ολοκληρώσεις κατά μέλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}S &= -\frac{1}{3MT^2} \left(\int_0^R dr \phi q' \right)^2 - \int_0^R dr \left(\frac{q'\delta\phi}{2T} + \frac{(q')^2}{8\pi\rho r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{3MT^2} \left(\int_0^R dr \phi' q \right)^2 + \frac{1}{2T} \int_0^R dr q (\delta\phi)' + \int_0^R dr q \frac{d}{dr} \left(\frac{q'}{8\pi\rho r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{3MT^2} \left(\int_0^R dr \phi' q \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^R dr q \left\{ \frac{G}{Tr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) \right\} q \end{aligned} \quad (3.48)$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\delta^{(2)}S = \int_0^R \int_0^R dr dr' q(r') \hat{K}(r, r') q(r) \quad (3.49)$$

με

$$\hat{K} = -\frac{\phi'(r)\phi'(r')}{3MT^2} + \frac{1}{2}\delta(r-r') \left\{ \frac{G}{Tr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) \right\} \quad (3.50)$$

Το πρόσημο του $\delta^{(2)}S$ καθορίζεται συνεπώς από τις ιδιοτιμές του 'πίνακα' $K(r, r')$

$$\int_0^R dr' \hat{K}(r, r') F_\xi(r') = \xi F(r) \quad (3.51)$$

Σε αυτή την κατάσταση ισορροπίας όπου πραγματοποιείται η μετάβαση από την ευστάθεια στην αστάθεια, θα πρέπει να είναι $\xi = 0$. Αν για μία κατάσταση ισορροπίας βρεθεί μια διαταραχή F_ξ για την οποία $\xi > 0$ τότε αυτή η κατάσταση είναι ασταθής. Προκειμένου η ισορροπία να είναι (τοπικά) ευσταθής, όλες οι ιδιοτιμές θα πρέπει να είναι αρνητικές $\xi < 0$ για όλες τις διαταραχές. Η εξίσωση (3.51) δίνει

$$\begin{aligned} -\frac{\phi'(r)}{3MT^2} \int_0^R \phi'(r') F_\xi(r') + \frac{1}{2} \left\{ \frac{G}{Tr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) \right\} F_\xi(r) &= \xi F_\xi(r) \\ \left\{ \frac{G}{Tr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) - 2\xi \right\} F_\xi(r) &= \frac{2V}{3MT^2} \phi' \end{aligned} \quad (3.52)$$

με

$$V = \int_0^R dr' \phi'(r') F_\xi(r') \quad (3.53)$$

Η κοσμολογική σταθερά δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα στην (3.52), αλλά υπεισέρχεται σιωπηρά, καθώς:

$$\phi' = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda r$$

Οι συνοριακές συνθήκες της (3.52) είναι όπως δίνονται στην (3.47)

$$F_\xi(0) = F_\xi(R) = 0 \quad (3.54)$$

Αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο ο οποίος μπορεί να καθορίσει ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις για το πρόβλημα συνοριακών τιμών που ορίζεται από τις εξισώσεις (3.52), (3.53), (3.54). Η κύρια δυσκολία είναι πως στο V υπεισέρχεται η άγνωστη συνάρτηση F_ξ . Ξεπεράσαμε τη δυσκολία ως ακολούθως. Για ένα δεδομένο εύρος του ξ , λύνεται το πρόβλημα για δοκιμαστικές τιμές του V , έστω V_T , και στη συνέχεια υπολογίζεται το ολοκλήρωμα (3.53), το οποίο δίνει κάποια τιμή \tilde{V} . Κάποια τιμή ξ είναι πραγματικά μια ιδιοτιμή, μόνο αν $\tilde{V} = V_T$ και σε αυτή την περίπτωση φυσικά $V = \tilde{V} = V_T$. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για την αδιάστατη εκδοχή της (3.52), δηλαδή την εξίσωση:

$$\left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{e^y}{x^2} \frac{d}{dx} \right) - \bar{\xi} \right\} F_\xi = \frac{2y'}{3Bz} \bar{V} \quad (3.55)$$

όπου

$$B = \frac{GM\beta}{R}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{2\pi G^2 \beta^2 \rho_0}, \quad \bar{V} = \beta V = \beta \int_0^z dx y' F_\xi$$

και τα z, y, y', B υπολογίζονται στην ισορροπία. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μπορούμε να καθορίσουμε το σημείο αλλαγής ευστάθειας, όπου $\xi = 0$, μία αστάθεια $\xi > 0$, ή να ελέγξουμε έναν ευσταθή κλάδο μιας σειράς σημείων ισορροπίας ελέγχοντας κάθε σημείο ισορροπίας χωριστά για μια μηδενική ιδιοτιμή και για ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εύρος θετικών ιδιοτιμών. Πραγματοποιήσαμε αυτές τις διαδικασίες για κάθε σειρά καταστάσεων

ισορροπίας στη μικροκανονική συλλογή που περιέχεται σε αυτή την εργασία.

Στην ισορροπία εκείνη για την οποία $\xi = 0$, γίνεται μια μετάβαση από έναν ευσταθή κλάδο σε έναν ασταθή κλάδο ή από έναν ασταθή κλάδο σε έναν ακόμα πιο ασταθή κλάδο (ή αντίστροφα, φυσικά). Υποθέστε πως πλησιάζεται το σημείο αλλαγής από τον ευσταθή κλάδο (όλες οι ιδιοτιμές αρνητικές), τότε στο επόμενο σημείο ισορροπίας μετά τη μετάβαση, μία ιδιοτιμή θα γίνεται θετική. Ας δείξουμε με ποιόν τρόπο, από την προηγούμενη ανάλυση, μπορεί να καθοριστει ο κλάδος με την επιπλέον θετική ιδιοτιμή (αστάθεια) κοντά σε ένα σημείο αλλαγής της ευστάθειας.

Αναζητούμε μια λύση στο πρόβλημα (3.52) για $\xi = 0$. Έστω \hat{T} ο τελεστής

$$\hat{T} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) + \frac{G}{Tr^2}$$

Έστω V_T η δοκιμαστική τιμή που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε το πρόβλημα (3.52). Αν δεν αντιστοιχεί στη λύση F_0 , θα αντιστοιχεί σε κάποια άλλη λύση F_n για μια διαφορετική ιδιοτιμή

$$\hat{T}F_n = \frac{2\phi'}{3MT^2}V_T + \xi_n F_n \quad (3.56)$$

έτσι, ώστε

$$V_T = \int_0^R dr \phi' F_n$$

Έστω \tilde{V} η τιμή του ολοκληρώματος

$$\tilde{V} = \int_0^R dr \phi' F_0$$

όπου F_0 είναι η λύση του προβλήματος

$$\hat{T}F_0 = \frac{2\phi'}{3MT^2}V_T \quad (3.57)$$

Η F_0 θα αντιστοιχεί σε λύση με μηδενική ιδιοτιμή μόνο εάν

$$\tilde{V} = V_T$$

Η εξίσωση (3.57) δίνει

$$\int_0^R dr F_0 \hat{T}F_0 = \frac{2V_T}{3MT^2} \int_0^R dr \phi' F_0 = \frac{2}{3MT^2} V_T \tilde{V}$$

και

$$\int_0^R dr F_n \hat{T}F_0 = \frac{2V_T}{3MT^2} \int_0^R dr \phi' F_n = \frac{2}{3MT^2} V_T^2$$

Ας αποδείξουμε ότι

$$\int_0^R dr F_n \hat{T}F_0 = \int_0^R dr F_0 \hat{T}F_n \quad (3.58)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^R dr F_n \hat{T} F_0 &= \int_0^R dr F_n \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{dF_0}{dr} \right) + \frac{G}{Tr^2} F_0 \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\rho r^2} F_n \frac{dF_0}{dr} \Big|_0^R - \int_0^R dr \left\{ \frac{dF_n}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{dF_0}{dr} \right) + \frac{G}{Tr^2} F_n F_0 \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{dF_n}{dr} F_0 \Big|_0^R + \int_0^R dr F_0 \hat{T} F_n = \int_0^R dr F_0 \hat{T} F_n
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.58) και αφαιρώντας την (3.56) από την (3.57) παίρνουμε

$$\hat{T}F_0 - \hat{T}F_n = -\xi_n F_n \Rightarrow \frac{2V_T^2}{3MT^2} \left(\frac{\tilde{V}}{V_T} - 1 \right) = -\xi_n \int_0^R dr F_0 F_n$$

Κοντά στο σημείο αλλαγής είναι $\int_0^R dr F_0 F_n \simeq \int_0^R dr F_0^2$ έτσι, ώστε μια αστάθεια ($\xi_n > 0$) εγκαθίσταται όταν $\tilde{V} < V_T$.

Όσον αφορά στην κανονική συλλογή, πραγματοποιώντας για την ελεύθερη ενέργεια J όμοιους υπολογισμούς όπως για την εντροπία είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστεί το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών για την κανονική συλλογή:

$$\left\{ \frac{G}{Tr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{d}{dr} \right) - 2\xi \right\} F_\xi(r) = 0 \quad (3.59)$$

Συγκρινόμενη με την εξίσωση ιδιοτιμών (3.52), βλέπουμε πως η διαφορά είναι η απουσία του όρου που περιέχει την παράγωγο του δυναμικού. Αυτή η διαφορά ευθύνεται για την διαφορετικότητα του σημείου αλλαγής ευστάθειας στις δύο συλλογές.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2, χάριν σε ένα θεώρημα του Poincaré, υπάρχει τρόπος να μελετηθεί η ευστάθεια χωρίς την επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών. Θυμίζουμε εν συντομία πως το θεώρημα λέει ότι μια αλλαγή στην ευστάθει μπορεί μόνο να συντελεσθεί σε κείνο το σημείο, όπου δύο σειρές καταστάσεων ισορροπίας έχουν ένα κοινό σημείο ή εκεί όπου η μία εισέρχεται στην άλλη. Όπως παρατήρησε ο Katz [8], πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι στη μικροκανονική συλλογή, η αλλαγή της ευστάθειας συμβαίνει στο σημείο όπου η $\beta(E)$ έχει άπειρη κλίση, ενώ στην κανονική συλλογή εκεί όπου η $\beta(E)$ έχει ακρότατο. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι η E στην μικροκανονική ή το β στην κανονική συλλογή, έχει ακρότατο ως προς κάποια άλλη μεταβλητή, για παράδειγμα τη λεγόμενη

$$\text{αντίθεση πυκνότητας: } \log(\rho_0/\rho_R) \quad (3.60)$$

ή το z σε αδιάστατες μεταβλητές, στο σημείο αλλαγής. Πρακτικά, καθορίζουμε το σημείο αλλαγής ευστάθειας στις αδιάστατες μεταβλητές, βρίσκοντας ακρότατο στο ER/GM^2 στη μικροκανονική συλλογή και στο $GM\beta/R$ στην κανονική, ως προς την αντίθεση πυκνότητας $\log(\rho_0/\rho_R)$.

3.1.3 Θερμοκρασία και ενέργεια

Στη θερμοδυναμική ισορροπία, η σφαίρα έχει την ίδια θερμοκρασία β παντού, και ονομάζεται ισόθερμη σφαίρα. Ορίζουμε την αδιάστατη αντίστροφη θερμοκρασία [10]

$$B = \frac{GM\beta}{R} \quad (3.61)$$

η οποία μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των αδιάστατων μεταβλητών (3.32), ολοκληρώνοντας την εξίσωση Poisson με Λ (3.31):

$$\begin{aligned} R^2 \frac{d\phi}{dr} \Big|_R &= GM - 8\pi G \rho_\Lambda \frac{R^3}{3} \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{z}{\beta} \frac{dy}{dx} \Big|_z + \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \frac{z^2}{4\pi G \rho_0 \beta} \Rightarrow \\ \frac{GM\beta}{R} &\equiv B(z) = zy' + \frac{1}{3} \lambda z^2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Η κινητική ενέργεια ανά σωματίδιο είναι

$$\frac{K}{N} = \frac{\int f \frac{v^2}{2} d^3\vec{v}}{\int f d^3\vec{v}} = \frac{\int e^{-\frac{\beta v^2}{2}} \frac{v^2}{2} d^3\vec{v}}{\int e^{-\frac{\beta v^2}{2}} d^3\vec{v}} = \frac{3}{2\beta}$$

Καθώς $M = N\tilde{m} = N$ παίρνουμε

$$K = \frac{3M}{2\beta} \quad (3.63)$$

Για τον υπολογισμό της ολικής ενέργειας, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Virial, ώστε να αποφύγουμε ακόμα μία αριθμητική ολοκλήρωση (για τον υπολογισμό της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας) βελτιώνοντας την απόδοση του υπολογιστή.

Το θεώρημα Virial για διάκριτη ποσότητα ύλης γράφεται:

$$2 \langle K \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k \cdot \vec{r}_k \rangle$$

και μπορεί να γενικευθεί στη δική μας περίπτωση ως

$$2K = - \int \rho(\nabla\phi \cdot \vec{r}) d^3\vec{r} + 3PV \quad (3.64)$$

όπου $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ είναι ο όγκος της σφαίρας και P η πίεση στα τοιχώματα. Ο όρος $3PV$ προκύπτει απλά καθώς $F \cdot R = P \cdot 4\pi R^2 \cdot R = 3PV$. Η συνεισφορά του Νευτώνειου δυναμικού στο δεξί μέλος είναι απλά η Νευτώνεια δυναμική ενέργεια U_N , ενώ για το κοσμολογικό δυναμικό ϕ_Λ παίρνουμε τον όρο

$$\int \rho(\nabla\phi_\Lambda \cdot \vec{r}) d^3\vec{r} = \int \rho \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda r \cdot r d^3\vec{r} = -2U_\Lambda$$

Αντικαθιστώντας τα πάντα στην εξίσωση (3.64) παίρνουμε την ακόλουθη μορφή του θεωρήματος Virial:

$$2K + U_N - 2U_\Lambda = 3PV \quad (3.65)$$

Αντικαθιστώντας το U_N παίρνουμε

$$E = 3PV - K + 3U_\Lambda \quad (3.66)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.32) γράφουμε το δυναμικό U_Λ σε αδιάστατες μεταβλητές

$$\begin{aligned} U_\Lambda &= - \int \rho \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda r^2 4\pi r^2 dr = - \frac{4\pi G}{3} \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_0} \frac{\rho_0}{2} \int \rho_0 e^{-y} 4\pi \frac{1}{(4\pi G \rho_0 \beta)^2} x^4 \frac{dx}{z/R} \\ &= - \frac{\lambda}{6z} \frac{1}{G\beta^2/R} \int e^{-y} x^4 dx = - \frac{\lambda}{6z} \frac{1}{(GM\beta/R)^2} \frac{GM^2}{R} \int e^{-y} x^4 dx \\ \frac{R}{GM^2} U_\Lambda &= - \frac{\lambda}{6B^2 z} \int e^{-y} x^4 dx \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ας υπολογίσουμε τον όρο $3PV$ σε αδιάστατες μεταβλητές

$$P = \frac{\rho}{\beta} = \frac{\rho_0 e^{-y}}{\beta} = \frac{z^2}{R^2 4\pi G \beta} \frac{e^{-y}}{\beta} = \frac{z^2 e^{-y}}{34\pi G/3} \frac{1}{(GM\beta/R)^2} \frac{GM^2}{R} \Rightarrow 3PV \frac{R}{GM^2} = \frac{z^2 e^{-y}}{B^2}$$

Ορίζουμε την αδιάστατη ενέργεια

$$Q = \frac{RE}{GM^2} \quad (3.68)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το Q από την εξίσωση virial (3.66)

$$\frac{RE}{GM^2} \equiv Q(z) = \frac{z^2 e^{-y}}{B^2} - \frac{3}{2B} - \frac{\lambda}{2B^2 z} \int e^{-y} x^4 dx \quad (3.69)$$

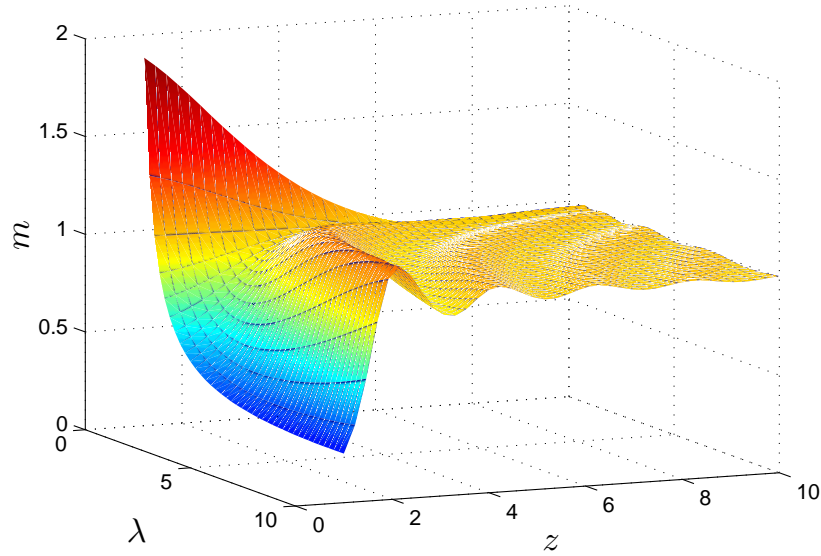
Πραγματοποιήσαμε επίσης έναν άμεσο υπολογισμό της ενέργειας σε αδιάστατες μεταβλητές, προκειμένου να ελέγξουμε αριθμητικά τις δύο εκφράσεις για κάποιες περιπτώσεις. Πρώτον, χρειαζόμαστε την τιμή $\phi(0)$ στην αρχή των αξόνων. Η εξίσωση (3.23) δίνει

$$\phi(0) = -G \int_0^R dr \frac{\rho}{r} 4\pi r^2 = -G \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{4\pi G \rho_0 \beta}} \rho_0 e^{-y} 4\pi \frac{x}{\sqrt{4\pi G \rho_0 \beta}} \Rightarrow \beta \phi_0 = - \int_0^z dx x e^{-y}$$

Στα ακόλουθα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3.39). Έχουμε

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{3M}{2\beta} + \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3 \vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho \phi_\Lambda d^3 \vec{r} \Rightarrow \\ \frac{ER}{GM^2} &= \frac{3}{2B} + \frac{R}{GM^2} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\beta} \rho (y + \beta \phi(0)) d^3 \vec{r} - \frac{R}{GM^2} \frac{1}{2} \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda \int_0^R \rho r^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3}{2B} + \frac{1}{(\frac{GM\beta}{R})^2 R \sqrt{4\pi G \rho_0 \beta}} \frac{1}{2} \int_0^z e^{-y} y x^2 + \frac{\beta \phi_0}{2 \frac{GM\beta}{R}} - \frac{\frac{R}{\sqrt{4\pi G \rho_0 \beta}}}{12(GM\beta)^2} \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_0} \int_0^z x^4 e^{-y} dx \\ &= \frac{3}{2B} + \frac{1}{2B^2 z} \int_0^z dx x^2 e^{-y} (y - \frac{\lambda}{6} x^2) - \frac{1}{2B} \int_0^z dx x e^{-y} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Οι εκφράσεις (3.69) και (3.70) αποδεικνύεται αριθμητικά πως δίνουν τα ίδια αποτελέσματα.



Σχήμα 3.1: Για $\rho_\Lambda > 0$ ($\delta\Sigma$) υπάρχουν διάφορες σειρές καταστάσεων ισορροπίας για κάποιο φιζαρισμένο ρ_Λ .

3.1.4 Η σειρά των σημείων ισορροπίας και η ασυμπτωτική συμπεριφορά

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση Emden- Λ (3.33) για διάφορα ρ_Λ διατηρώντας τη μάζα M σταθερή και για διάφορες ισοθερμικές σφαίρες που ορίζονται από την ακτίνα R . Η κοσμολογική σταθερά εισάγει μία κλίμακα μάζας

$$M_\Lambda = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_\Lambda$$

Ορίζουμε την αδιάστατη μάζα

$$m \equiv \frac{M}{2M_\Lambda} = \frac{\bar{\rho}}{2\rho_\Lambda} \quad (3.71)$$

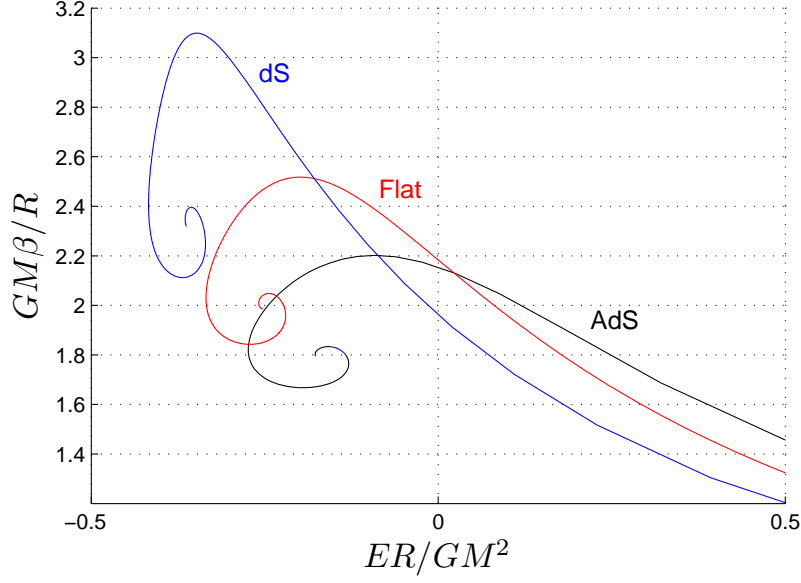
όπου $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης. Αυτό δίνει

$$m = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3 \rho_\Lambda} \quad (3.72)$$

δηλαδή

$$m = \frac{\rho_0}{2\rho_\Lambda} \frac{1}{4\pi G \rho_0 \beta R^2} \frac{3GM\beta}{R} \Rightarrow m = \frac{3B}{\lambda z^2} \quad (3.73)$$

Η εξίσωση (3.73) υποδεικνύει πως προκειμένου να διατηρηθεί το m σταθερό, το λ θα πρέπει να είναι διαφορετικό σε κάθε z . Αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο που λύνει την εξίσωση Emden- Λ διατηρώντας σταθερή την ποσότητα m : για κάθε z , κάποιες τιμές του λ δοκιμάζονται ώσπου να βρεθεί η ζητούμενη τιμή του m , υπολογισμένη από την εξίσωση (3.73), για μια σχετική ανοχή (απόκλιση από τη ζητούμενη τιμή) που προκαθορίζεται από τον χρήστη.



Σχήμα 3.2: Η θερμοκρασία ως προς την ενέργεια για κάποια αρνητική ('AdS'), μηδενική ('Flat') και θετική ('dS') κοσμολογική σταθερά. Η μάζα M και η ακτίνα R είναι σταθερές.

Για τα διάφορα σχήματα, χρησιμοποιήσαμε σχετική ανοχή μεταξύ $10^{-7} - 10^{-11}$ ανάλογα την περίπτωση. Από την εξίσωση (3.72), είναι εμφανές πως λύνοντας για διάφορα σταθερά m μπορεί να μεταφραστεί ως αλλαγή στο ρ_Λ και/ή στο R για σταθερό M . Συνεπώς, μπορούμε να καθορίσουμε πως μεταβάλλονται οι διάφορες ποσότητες ως προς ρ_Λ επιλύοντας για διάφορα m .

Για την περίπτωση AdS ($\rho_\Lambda < 0$) βρίσκουμε πως για κάθε ρ_Λ υπάρχει μόνο μία σειρά από καταστάσεις ισορροπίας, όπως στην "flat" ($\rho_\Lambda = 0$) περίπτωση. Όμως, στην περίπτωση dS ($\rho_\Lambda > 0$), βρίσκουμε πως για ένα σταθερό ρ_Λ , υπάρχει πάνω από μία σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.1 όπου το m είναι σχεδιασμένο ως προς τα λ , z . Βλέπουμε πως η τομή ενός επιπέδου $m = const$ με την m -επιφάνεια ορίζει διάφορες καμπύλες στον χώρο (λ, z) .

Η εξίσωση Emden (3.33) για $\rho_\Lambda = 0$, έχει μία αναλυτική αλλά ιδιαίζουσα λύση

$$y_s = \log \frac{z^2}{2} \quad (3.74)$$

με άπειρη πυκνότητα στο κέντρο, καθώς $e^{-y_s} = \frac{2}{z^2}$. Μπορεί να αποδειχθεί [10] ότι για $z \rightarrow \infty$ η σειρά των καταστάσεων ισορροπίας προσεγγίζει την ιδιαίζουσα λύση. Συνεπώς, η ιδιαίζουσα λύση για $\Lambda = 0$ είναι το εστιακό σημείο της σπείρας $\beta(E)$ στο Σχήμα 3.2. Βλέπουμε σε αυτή την εικόνα ότι επίσης στις dS και AdS περιπτώσεις υπάρχει το ισοδύναμο στην ιδιαίζουσα λύση της περίπτωσης $\Lambda = 0$, που μπορεί να αναγνωρισθεί ως το εστιακό σημείο των αντίστοιχων σπειρών. Σημειώστε, πως στην περίπτωση dS (θετικό Λ) δε σχηματίζουν όλες οι σειρές, σπείρα). Δυστυχώς, δεν είναι γνωστή καμία αναλυτική λύση της εξίσωσης (3.33) και ούτε εμείς καταφέραμε να βρούμε μία. Παρ' όλα αυτά, ακολουθώντας το παράδειγμα της περίπτωσης $\Lambda = 0$, μπορούμε να προσδιορίσουμε ασυμπτωτικά

την ισοδύναμη στην ιδιάζουσα λύση στις dS και AdS περιπτώσεις. Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς [10]

$$\zeta = \log z \quad , \quad u = -y + 2\zeta \quad (3.75)$$

η εξίσωση Emden-Λ γίνεται

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{du}{d\zeta} + e^u - 2 - \lambda e^{2\zeta} = 0 \quad (3.76)$$

Αυτή είναι η εξίσωση ενός ταλαντωτή στο δυναμικό $V(u) = e^u - 2u$ με εξωτερική δύναμη $F_{ext} = \lambda e^{2\zeta} - u'$ όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς ζ . Η εξωτερική δύναμη είναι αποσβένουσα στην AdS περίπτωση ($\lambda < 0$) και εξαναγκασμένη, αποσβένουσα στην dS ($\lambda > 0$). Το δυναμικό έχει ένα ελάχιστο $u_0 = \log 2$. Στην περίπτωση dS, αν η εξωτερική δύναμη είναι αποσβένουσα, δηλαδή ο όρος $-u'$ κυριαρχεί, τότε για $\zeta \rightarrow \infty$, έχουμε $u \rightarrow u_0$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να κάνουμε ένα ανάπτυγμα του u γύρω από το u_0 . Η απόσβεση κυριαρχεί αν:

$$\lambda e^{2\zeta} \ll u' \Rightarrow \lambda z^2 \ll zy' \Rightarrow \lambda z^2 \ll \frac{m+2}{6} \quad (3.77)$$

όπου το y' δηλώνει παραγωγή ως προς z και έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση (3.73). Το όριο αυτο σημαίνει πως θεωρούμε πολύ μικρό ρ_Λ , καθώς το $\lambda z^2 \rightarrow 0$ πρέπει να θεωρηθεί μαζί με το $z \rightarrow \infty$. Τα δύο όρια είναι συνεπή μεταξύ τους, καθώς από την εξίσωση (3.73) βλέπουμε πως καθώς $z \rightarrow \infty$ πρέπει $\lambda \rightarrow 0$ έτσι που το λz^2 να μένει πεπερασμένο για να παραμένει το m πεπερασμένο (και το B είναι φραγμένο για τις καταστάσεις ισορροπίας που εξετάζουμε).

Κάνοντας τον μετασχηματισμό

$$u = \log 2 + u_1$$

η εξίσωση (3.76) γίνεται

$$\frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} + \frac{du_1}{d\zeta} + 2e^{u_1} - 2 - \lambda e^{2\zeta} = 0$$

Δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη (3.77) και για $\zeta \rightarrow \infty$, το u_1 είναι μικρό και μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό κρατώντας τους δύο πρώτους όρους, για να πάρουμε:

$$\frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} + \frac{du_1}{d\zeta} + 2u_1 - \lambda e^{2\zeta} = 0$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι γνωστό πως είναι η

$$u_h = A e^{-\frac{\zeta}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\zeta + \delta\right)$$

και μία λύση της μη-ομογενούς μπορεί εύκολα να βρεθεί πως είναι

$$u_p = \frac{\lambda}{8} e^{2\zeta}$$

Έχουμε συνολικά

$$u_1 = Ae^{-\frac{\zeta}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\zeta + \delta\right) + \frac{\lambda}{8}e^{2\zeta}$$

Καθώς

$$u = u_1 + \log 2 \Rightarrow -y + 2\zeta = u_1 + \log 2 \Rightarrow y = \log \frac{z^2}{2} - u_1$$

η ασυμπτωτική συμπεριφορά της εξίσωσης Emden- Λ για $z \rightarrow \infty$ και για μικρό λz^2 είναι

$$y_a = \log \frac{z^2}{2} - \frac{A}{z^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \log z + \delta\right) - \frac{\lambda}{8}z^2 \quad (3.78)$$

Η πυκνότητα ρ δίνεται από το εκθετικό e^{-y} . Παίρνουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\begin{aligned} e^{-y_a} &= \frac{2}{z^2} e^{\frac{\lambda}{8}z^2} e^{Az^{-1/2} \cos(\frac{\sqrt{7}}{2} \log z + \delta)} \\ &\simeq \frac{2}{z^2} e^{\frac{\lambda}{8}z^2} \left(1 + \frac{A}{z^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \log z + \delta\right)\right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Βλέπουμε πως το ισοδύναμο στην ιδιάζουσα λύση (3.74) της $\Lambda = 0$ περίπτωσης, δίνεται στις dS και AdS περιπτώσεις από την ‘ασυμπτωτική ιδιάζουσα λύση’ $e^{y_{AS}} = \frac{2}{z^2} e^{\frac{\lambda}{8}z^2}$ δηλαδή

$$y_{AS} = \log \frac{z^2}{2} - \frac{\lambda}{8}z^2 \quad (3.80)$$

Η λύση αυτή y_{AS} , είναι εύκολο να ελεγχθεί πως πραγματικά ικανοποιεί την εξίσωση Emden- Λ (3.33) σε πρώτη τάξη σε λz^2 .

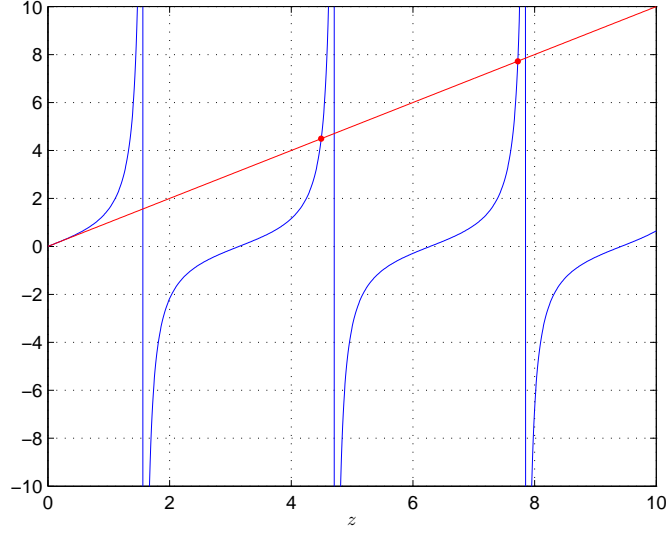
Από τις εξισώσεις (3.62) και (3.69) μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία και την ενέργεια της ασυμπτωτικής ιδιάζουσας λύσης:

$$\frac{GM\beta_{AS}}{R} = 2\frac{4m}{4m-1} \quad , \quad \frac{RE_{AS}}{GM^2} = \frac{2e^{3B/8m}}{B^2} - \frac{3}{2B} - \frac{1}{mB} - \frac{9}{40m^2} \quad (3.81)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την εξίσωση για το B_{AS} , η συνθήκη (3.77) δίνει τις τιμές του m για τις οποίες η ασυμπτωτική ιδιάζουσα λύση είναι έγκυρη

$$m < -6.98 \quad \text{και} \quad m > 5.23 \quad (3.82)$$

Θυμίζουμε πως το $m = \bar{\rho}/2\rho_\Lambda$ το χρησιμοποιούμε για να μεταβάλλουμε την κοσμολογική σταθερά. Έτσι, η περίπτωση $m \rightarrow \infty$ αντιστοιχεί στην περίπτωση $\Lambda = 0$, το $m < 0$ στην AdS και το $m > 0$ στην dS περίπτωση. Βρίσκουμε πως το ιδιάζων σημείο που προσδιορίζεται αναλυτικά από την εξίσωση (3.81) πραγματικά συμπίπτει με το αριθμητικά υπολογισμένο εστιακό σημείο της σπείρας $\beta(E)$ για διάφορες τιμές του m στο επιτρεπόμενο εύρος (3.82) στις περιπτώσεις dS και AdS. Ακόμα και για τιμές του m έξω από το επιτρεπόμενο εύρος (3.82) (όπως οι $m = 2$ και $m = -2$ του Σχήματος 3.2), η αναλυτική έκφραση δίνει ένα αποτέλεσμα πολύ κοντά στον αριθμητικό υπολογισμό.



Σχήμα 3.3: Γραφική λύση του προβλήματος $\tan(z) = z$.

3.1.5 Ομογενής λύση στην περίπτωση dS

Για θετική κοσμολογική σταθερά, η εξίσωση Emden-Λ έχει λύση με ομογενή πυκνότητα (για $r < R$), που ονομάζουμε ομογενή λύση ή καλύτερα ομογενή σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Για $\rho = \text{const.}$ η εξίσωση Poisson δίνει $\phi_N = \frac{2\pi G}{3}\rho r^2$ έτσι, ώστε το ολικό δυναμικό με την κοσμολογική σταθερά είναι

$$\phi = \frac{2\pi G}{3}(\rho - 2\rho_\Lambda)r^2 + \phi(0) \quad (3.83)$$

Η εξίσωση Poisson με Λ (3.21) δίνει $\phi = \phi(0) = \text{const.}$ για

$$\rho = 2\rho_\Lambda$$

το οποίο φυσικά είναι συνεπές με την εξίσωση (3.83). Αυτή είναι η ομογενής λύση με αδιάστατη αντίστροφη θερμοκρασία

$$B_H = \frac{1}{3}z^2 \quad (3.84)$$

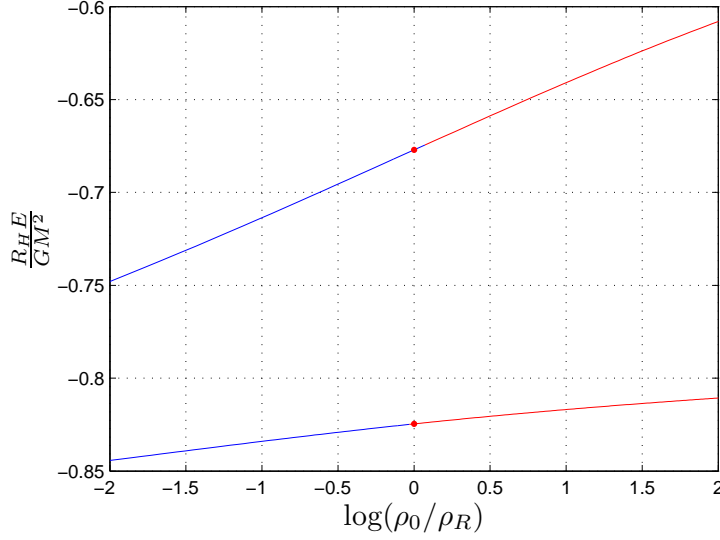
και αδιάστατη ενέργεια

$$Q_H = \frac{9}{2z^2} - \frac{9}{10} \quad (3.85)$$

Καθώς $\phi' = 0$ η ομογενής σειρά έχει τα ίδια σημεία αλλαγής ευστάθειας στις δύο συλλογές, γιατί οι εξισώσεις ιδιοτιμών (3.52) και (3.59) είναι οι ίδιες σε αυτή την περίπτωση.

Η ακτίνα R_H της ομογενούς λύσης είναι ανεξάρτητη της ενέργειας και της θερμοκρασίας και δίνεται για σταθερή μάζα M και κοσμολογική σταθερά ρ_Λ από την εξίσωση:

$$R_H = \left(\frac{3M}{8\pi\rho_\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.86)$$



Σχήμα 3.4: Η ενέργεια ως προς την αντίθεση πυκνότητας (βλ. σχέση (3.60) στην ομογενή ακτίνα $R = R_H$ για σταθερό M και θετικό ρ_Λ). Αντίθετα της περίπτωσης $\rho_\Lambda = 0$, το σχήμα αυτό δε μπορεί να γίνει αντιληπτό ως αν η ενέργεια E να μένει σταθερή και να μεταβάλλεται το R , διότι το m έχει κρατηθεί σταθερό κατά την επίλυση. Βλέπουμε δύο ξεχωρές σειρές καταστάσεων ισορροπίας που είναι ευσταθείς για $\rho_0 < \rho_R$ και ασταθείς για $\rho_0 > \rho_R$. Η αλλαγή της ευστάθειας συμβαίνει στο $\rho_0 = \rho_R$, που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες ομογενείς καταστάσεις, οι οποίες πραγματικά έχουν μηδενική ιδιοτιμή σε αυτά τα συγκεκριμένα σημεία ($ER/GM^2 = -0.677$ και $ER/GM^2 = -0.825$).

Η ομογενής λύση προσομοιάζει το στατικό σύμπαν του Einstein στο Νευτώνειο όριο (σημειώστε πως ο Gibbons [52, 53] ισχυρίζεται πως το στατικό σύμπαν του Einstein αντιστοιχεί σε ένα τοπικό μέγιστο εντροπίας ανάμεσα σε άλλα πιθανά σύμπαντα). Για να είμαστε πιο ακριβείς όμως, υπάρχουν πολλές ομογενείς καταστάσεις εκ των οποίων μόνο μία είναι από δυναμικής άποψης στατική, αυτή με $T = 0$ ($\beta \rightarrow \infty$). Το ερώτημα είναι ποιές από αυτές τις λύσεις είναι ευσταθείς. Η στατική λύση είναι σίγουρα θερμοδυναμικά ασταθής καθώς αντιστοιχεί σε μία μόνο μικροκατάσταση οπότε έχει την ελάχιστη δυνατή εντροπία, δηλαδή μηδέν. Από την άλλη πλευρά η λύση $\beta = 0$, που επιτρέπεται από την (3.84), είναι ευσταθής καθώς συμπεριφέρεται σαν ένα συνήθες αέριο. Πιο αυστηρά, η εξίσωση (3.48) μπορεί να γραφεί ως

$$\delta^{(2)}S = -\frac{\beta^2}{3M} \left(\int_0^R dr \phi' q \right)^2 + \frac{G\beta}{2} \int_0^R dr \frac{q^2}{r^2} - \int_0^R dr \frac{q'^2}{8\pi\rho R^2} \quad (3.87)$$

που δίνει $\delta^{(2)}S < 0$ για όλες τις διαταραχές q , για $\beta = 0$ ($T \rightarrow \infty$). Σε αδιάστατες μεταβλητές, η εξίσωση (3.87) γράφεται

$$M\delta^{(2)}S = -\frac{1}{3} \left(\int_0^z dx y' q \right)^2 + \frac{1}{2} Bz \int_0^z dx \frac{1}{x^2} (q^2 - q'^2 e^y) \quad (3.88)$$

που δίνει $\delta^{(2)}S < 0$ για $B = 0$, επίσης. Συνεπώς, θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο αλλαγής ευστάθειας κάπου μεταξύ του $B = 0$ και $B \rightarrow \infty$. Από την εξίσωση (3.85)

βλέπουμε πως η ενέργεια δεν έχει ακρότατο. Παρά όλα αυτά, το κριτήριο του Poincaré δεν αποκλείει την πιθανότητα, η αλλαγή στην ευστάθεια να γίνει σε σημείο άλλο από το ακρότατο της ενέργειας [8]. Η διαφορική εξίσωση (3.55) (όπως και η αντίστοιχη για την κανονική συλλογή, εξίσωση (3.59)) για την ομογενή λύση $y = y' = 0$ (και $m = \lambda = 1$) και για $\xi = 0$ γίνεται

$$F'' - \frac{2}{x}F' + F = 0$$

Η εξίσωση αυτή, για $F(0) = 0$ έχει λύση

$$F(x) = c(-x \cos(x) + \sin(x))$$

Θέλουμε το μικρότερο z που ικανοποιεί τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη $F(z) = 0$. Δηλαδή, η αλλαγή στην ευστάθεια συμβαίνει στο μικρότερο z που είναι λύση της εξίσωσης

$$\tan(z) = z$$

Η λύση, ως την πούμε z_0 , μπορεί να βρεθεί γραφικά (δες Σχήμα 3.3) για να πάρουμε

$$z_0 \simeq 4.4934$$

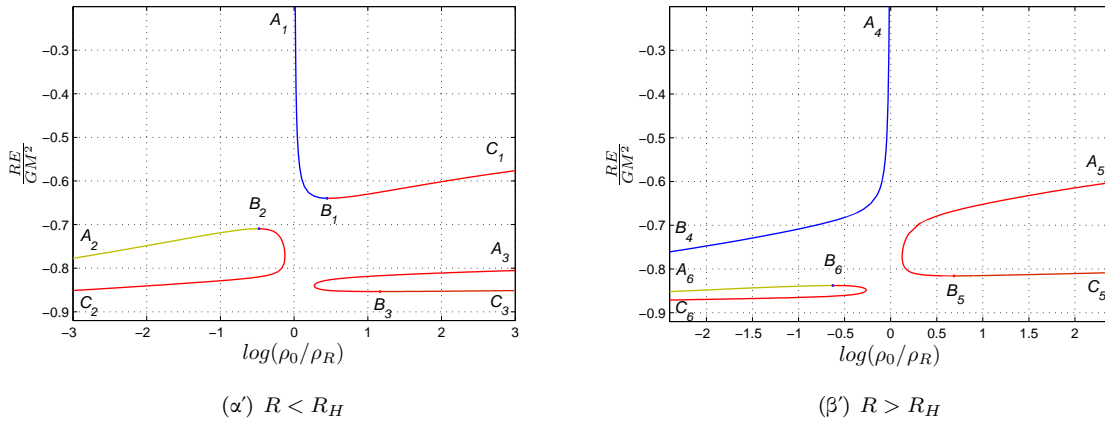
που αντιστοιχεί σε $B_0 \simeq 6.73$ από την εξίσωση (3.84). Συνεπώς, η ομογενής λύση είναι ευσταθής για θερμοκρασίες $T > T_0$ και ασταθής για $T < T_0$, με

$$T_0 \simeq \frac{GM}{6.73R_H} \quad (3.89)$$

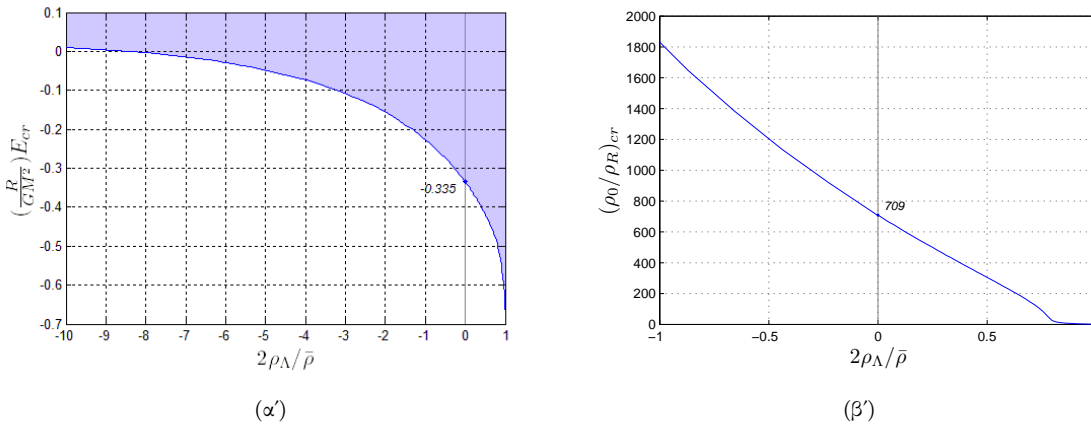
Όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 3.1 υπάρχουν άπειρες σειρές από λύσεις για την ομογενή ακτίνα R_H που αντιστοιχούν στο $m = 1$ (η ομογενής σειρά αντιστοιχεί στο $m = \lambda = 1$). Στο Σχήμα 3.4 είναι σχεδιασμένη η αδιάστατη ενέργεια $Q = \frac{R_H E}{GM^2}$ ως προς την αντίθεση πυκνότητας $\log(\rho_0/\rho_R)$ για δύο από αυτές τις σειρές. Βλέπουμε πως υπάρχουν λύσεις με $\rho_0 < \rho_R$ οι οποίες με συνεχή τρόπο γίνονται λύσεις με $\rho_0 > \rho_R$. Στο σημείο $\rho_0 = \rho_R$, που αντιστοιχεί στην ομογενή λύση, συμβαίνει μια αλλαγή στην ευστάθεια για τις δύο λύσεις. Αυτό διότι οι αντίστοιχες ενέργειες $Q_0 = -0.6771$, $Q_1 = -0.8246$ αντιστοιχούν στις δύο πρώτες μηδενικές ιδιοτιμές $z_0 = 4.4934$, $z_1 = 7.7251$ της ομογενούς λύσης όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί από την εξίσωση (3.85). Προσδιορίσαμε αριθμητικά τον ασταθή κλάδο, που είναι αυτός με $\rho_0 > \rho_R$. Κανείς είναι λογικό να υποθέσει πως αυτό το μοτίβο των διάφορων σειρών, για $R = R_H$, συνεχίζεται επ' άπειρον (όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 3.1) για όλο και χαμηλότερες ενέργειες. Η αλλαγή της ευστάθειας στο $\rho_0 = \rho_R$ θα πρέπει πάντα να αντιστοιχεί σε $Q > -0.9$ όπως υποδεικνύεται από την εξίσωση (3.85).

3.2 Μικροκανονική συλλογή

Σε αυτή την παράγραφο, ουσιαστικά, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας μας [24]. Ας εξετάσουμε τις λύσεις για $R < R_H$ και $R > R_H$ στη μικροκανονική συλλογή. Η ενέργεια ως προς την αντίθεση πυκνότητας έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.5. Η πάνω σειράς που ονομάζουμε **1** ($R < R_H$) και **4** ($R > R_H$) αντιστοιχούν σε μονοτονικά μεταβαλλόμενη πυκνότητα. Στη σειρά **1** είναι φθίνουσα ($\rho_0 > \rho_R$), ενώ στην **4** αύξουσα ($\rho_0 < \rho_R$). Η σειρά **1** υπόκειται σε αλλαγή ευστάθειας στο σημείο B_1 (ο ευσταθής κλάδος είναι ο A_1B_1),

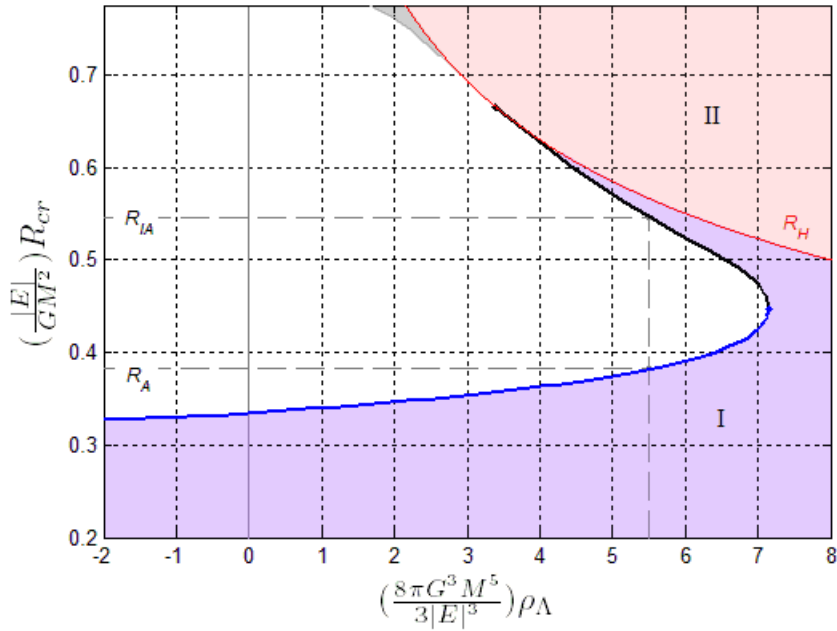


Σχήμα 3.5: Στην περίπτωση dS, η αδιάστατη ενέργεια ως προς την αντίθεση πυκνότητας για σταθερά M , R , ρ_Λ στη μικροκανονική συλλογή. Αντίθετα από την περίπτωση $\Lambda = 0$, αυτό το διάγραμμα δε μπορεί να ερμηνευτεί ως αν να μεταβάλλεται το R με σταθερή E , γιατί το m παραμένει σταθερό. Μόνο οι πάνω σειρές (1 και 4) αντιστοιχούν σε $\rho(r)$ που αλλάζει μονοτονικά. Οι σειρές με χαμηλότερες ενέργειες έχουν περισσότερα ακρότατα στην $\rho(r)$. Τα σημεία B , εκτός του B_4 , είναι σημεία αλλαγής ευστάθειας. Οι καμπύλες A_3B_3 και A_5B_5 είναι ασταθείς κλάδοι.



Σχήμα 3.6: (α) Η κρίσιμη ενέργεια ως προς το ρ_Λ για σταθερά M , R στη μικροκανονική συλλογή, όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα της ύλης. Στη μη γραμμικοποιημένη περιοχή δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας. (β) Η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας ως προς το ρ_Λ για σταθερά M , R στη μικροκανονική συλλογή, όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα. Αστάθεια εμφανίζεται για $\rho_0/\rho_R > (\rho_0/\rho_R)_{cr}$ (εκτός εάν $(\rho_0/\rho_R)_{cr} < 1$).

ενώ η σειρά 4 είναι ασταθής και δεν υπόκειται σε αλλαγή ευστάθειας. Αυτό αποδεικνύεται ως ακολούθως: για αυτή τη σειρά υπάρχει το όριο $E \rightarrow \infty$, που αντιστοιχεί σε $\beta = 0$. Από την εξίσωση (3.87), για $\beta = 0$ παίρνουμε $\delta^{(2)}S < 0$. Επιπλέον, η ενέργεια δεν έχει ακρότατο (όπου θα μπορούσε να συμβεί αλλαγή ευστάθειας) και (για να είμαστε βέβαιοι) όλοι η σειρά ελέγχθηκε αριθμητικά σε κάθε σημείο για την ύπαρξη μηδενικής ιδιοτιμής, χωρίς να βρεθεί κάποια. Κάθε τέτοια λύση (στη σειρά 4) αντιστοιχεί σε διαμορφώσεις κάπως αραιές στο κέντρο με την ύλη περισσότερο συγκεντρωμένη στην περιφέρεια. Η



Σχήμα 3.7: Η κρίσιμη ακτίνα ως προς το ρ_Λ για σταθερά E , M στη μικροκανονική συλλογή. Δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας στη μη γραμμοσκιασμένη περιοχή. Όπου R_H είναι η ακτίνα της ομογενούς λύσης. Βλέπε το κείμενο για λεπτομέρειες.

επόμενη σειρά σε χαμηλότερες ενέργειες έχει ένα ακρότατο στην πυκνότητα, η επόμενη δύο ακρότατα, κ.ο.κ. Στα σημεία B , εκτός του B_4 εγκαθίσταται αστάθεια. Για τις σειρές A_2B_2 και A_6B_6 έχουμε ισχυρές αριθμητικές ενδείξεις ότι είναι ευσταθείς, ενώ οι σειρές $\mathbf{3}$ και $\mathbf{5}$ είναι ασταθείς. Σειρές όπως οι A_2B_2 και A_6B_6 αντιστοιχούν σε λύσεις αραιωμένες στο κέντρο με περιοδικά πυκνώματα μακριά από αυτό. Λογικά, θα περίμενε κανείς αυτό το μοτίβο του Σχήματος 3.5 να συνεχίζεται επ' άπειρον με σειρές σε όλο και μικρότερες ενέργειες. Φυσικά αυτό είναι αδύνατον να ελεγχθεί αριθμητικά, καθώς ξέρουμε ότι οι σειρές είναι άπειρες.

3.2.1 Κρίσιμα μεγέθη

Ένα γενικό αποτέλεσμα είναι πως καθώς η κοσμολογική σταθερά αυξάνεται, υπάρχουν ισόθερμες σφαίρες σε όλο και χαμηλότερες θερμοκρασίες και ενέργειες. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.2, όπου είναι σχεδιασμένο η κλασική σπείρα $\beta(E)$ για κάποια αρνητική και κάποια θετική κοσμολογική σταθερά. Θα μπορούσε να πει κανείς πως ο AdS δρα αποσταθεροποιητικά ενώ ο dS σταθεροποιητικά.

Στην περίπτωση μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς, καταστάσεις ισορροπίας (ισοθερμικές σφαίρες) υπάρχουν μόνο για

$$E \cdot R > -0.335GM^2 \quad (3.90)$$

Αυτό σημαίνει πως για σταθερή ακτίνα, υπάρχει μία ελάχιστη κρίσιμη ενέργεια $E_{cr} = -0.335GM^2/R$ έως την οποία, μπορεί να επιτευχθεί ισορροπία. Θέλουμε να προσδιορίσου-

με πως αυτή η κρίσιμη ενέργεια αλλάζει ως προς το ρ_Λ . Η απάντηση βρίσκεται στο Σχήμα 3.6(α'). Η κρίσιμη ενέργεια μικραίνει καθώς αυξάνει η κοσμολογική σταθερά. Στον AdS η κρίσιμη ενέργεια γίνεται θετική για $\rho_\Lambda \lesssim -4.2\bar{\rho}$, όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα.

Υποθέτοντας τιμές ενέργειας E και ακτίνας R τέτοιες, ώστε να σέβονται την (3.90), στην περίπτωση $\Lambda = 0$, δεν εξασφαλίζουμε πως η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής. Αυτό εξαρτάται από την αντίθεση πυκνότητας ρ_0/ρ_R , δηλαδή το λόγο της κεντρικής πυκνότητας προς την πυκνότητα στο άκρο. Η κατάσταση παραμένει η ίδια παρουσία του ρ_Λ . Για $\rho_\Lambda = 0$ είναι $(\rho_0/\rho_R)_{cr} = 709$ [9] με τον ασταθή κλάδο να είναι αυτός με $\rho_0/\rho_R > 709$. Στο Σχήμα 3.6(β') βλέπουμε πώς αυτός ο αριθμός μεταβάλλεται ως προς την κοσμολογική σταθερά. Η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας μικραίνει με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά. Η αστάθεια συμβαίνει στον AdS σε πιο πυκνές καταστάσεις, ενώ στον dS σε λιγότερο πυκνές.

Υποθέστε πως η ενέργεια είναι αρνητική και σταθερή σε κάποια τιμή E στην περίπτωση $\Lambda = 0$. Τότε, η ανισότητα (3.90) δείχνει πως υπάρχει μία μέγιστη κρίσιμη ακτίνα $R_A = (-0.335/E)GM^2$ που περιορίζει την δυνατότητα ισορροπίας. Για $R > R_A$ δεν υπάρχει ισορροπία. Στον AdS αυτή η ακτίνα μικραίνει καθώς το ρ_Λ παίρνει όλο και πιο αρνητικές τιμές. Στον dS αυτή η ακτίνα μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει η κοσμολογική σταθερά και επιπλέον εμφανίζεται μια δεύτερη κρίσιμη ακτίνα, που ονομάζουμε R_{IA} , και περιορίζει την ύπαρξη καταστάσεων ισορροπίας από τα χαμηλά. Στις τιμές R_A και R_{IA} συμβαίνει μια μετάβαση φάσης. Δηλαδή δεν υπάρχει ισορροπία για $R_A < R < R_{IA}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Αυτή είναι μια τυπική συμπεριφορά επανεισόδου (reentrant behavior), που συμβαίνει σε στατιστικά συστήματα [34, 35, 36, 37], όταν υπάρχουν ανταγωνιστικές δυνάμεις. Πέρα από την οριακή τιμή $\rho_\Lambda^{dS} \simeq 7.14(3|E|^3/8\pi G^3 M^5)$ μπορούν να βρεθούν πάντα καταστάσεις ισορροπίας.

Στην περιοχή I του Σχήματος 3.7 υπάρχουν οι καταστάσεις ισορροπίας της σειράς 1 του Σχήματος 3.5(α') και στην περιοχή II όλες οι σειρές του Σχήματος 3.5(β'). Στην μικρή γκρι άνω περιοχή υπάρχουν οι υπόλοιπες σειρές του Σχήματος 3.5(α'). Αυτού του τύπου οι καταστάσεις ισορροπίας υπάρχουν μόνο για τιμές της κοσμολογικής σταθεράς μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή ρ_Λ^{min} . Αυτή η μικρότερη τιμή για την οποία η κοσμολογική δύναμη μπορεί οριακά να κρατήσει όλη την ύλη στο άκρο. Αυτή μπορεί εύκολα να υπολογιστεί εξισώνοντας τις δυνάμεις στο άκρο, υποθέτοντας πως όλη η ύλη είναι συγκεντρωμένη στο R :

$$\frac{GM^2}{2R} = GM \frac{8}{3} \pi \rho_\Lambda^{min} R^2 \Rightarrow \rho_\Lambda^{min} = \bar{\rho}/4 \quad (3.91)$$

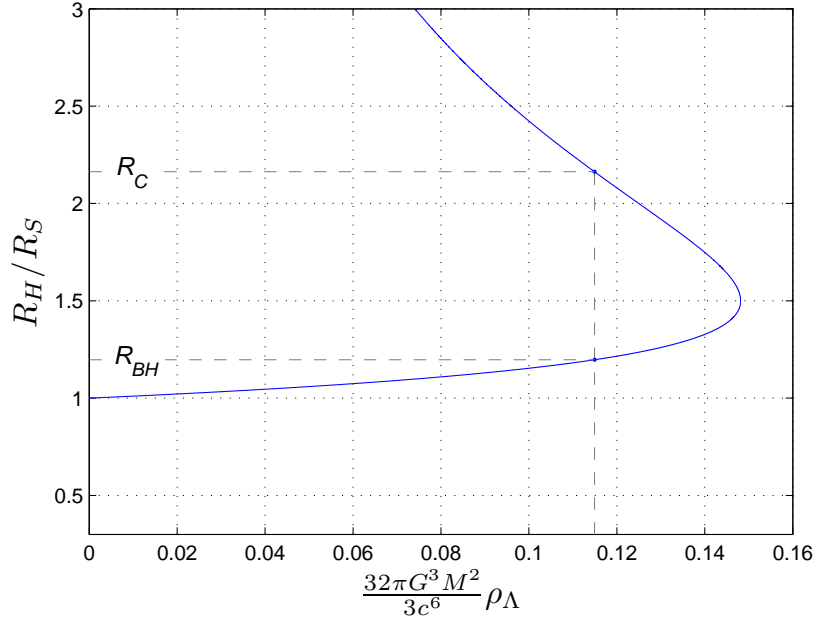
όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα.

3.2.2 Σύγκριση με τον χώρο Schwarzschild-dS

Οι δύο κρίσιμες ακτίνες στο Σχήμα 3.7 προσομοιάζουν τους δύο ορίζοντες του χώρου Schwarzschild-dS, όπου τον ρόλο του κοσμολογικού ορίζοντα παίζει η R_{IA} . Η μετρική Schwarzschild-dS μπορεί να γραφεί ως:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2 \quad (3.92)$$

όπου ρ_Λ είναι η πυκνότητα μάζας της κοσμολογικής σταθεράς (η πυκνότητα ενέργειας είναι $\kappa = \rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$). Η μετρική αυτή έχει δύο ορίζοντες για $\rho_\Lambda > 0$: τον ορίζοντα της μαύρης



Σχήμα 3.8: Οι ορίζοντες του χώρου Schwarzschild-dS ως προς την κοσμολογική σταθερά για σταθερή μάζα. Η ακτίνα του ορίζοντα R_H μετράται σε μονάδες της ακτίνας Schwarzschild $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Για μια δεδομένη κοσμολογική σταθερά υπάρχουν δύο ορίζοντες: ο ορίζοντας της μαύρης τρύπας R_{BH} και ο κοσμολογικός ορίζοντας R_C . Η ομοιότητα με το Σχήμα 3.7 είναι εντυπωσιακή!

τρύπας R_{BH} και τον κοσμολογικό ορίζοντα R_C . Και οι δύο ορίζονται ως οι πραγματικές ρίζες R_H του πολυωνύμου τρίτης τάξης

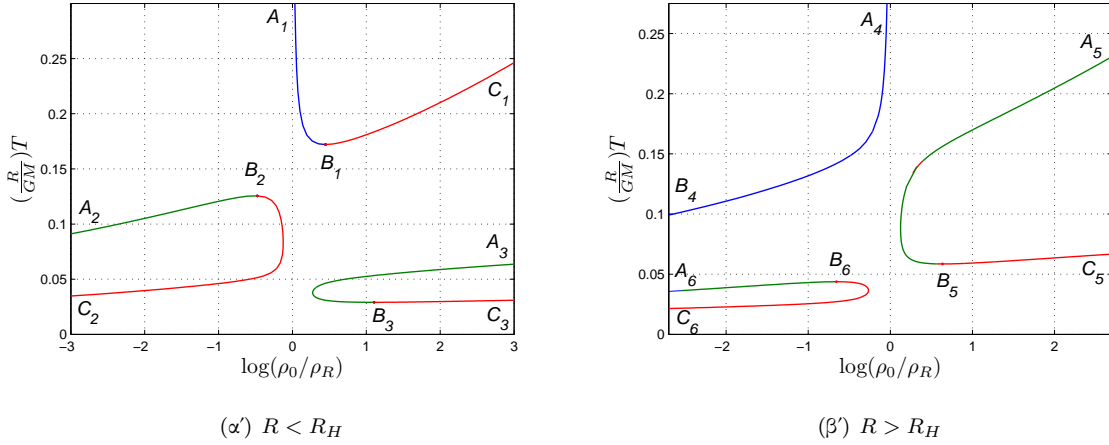
$$1 - \frac{2GM}{c^2 R_H} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda R_H^2 = 0 \quad (3.93)$$

οι οποίες, για διάφορες τιμές της κοσμολογικής σταθεράς ρ_Λ , είναι σχεδιασμένες στο Σχήμα 3.8. Η ομοιότητα με το Σχήμα 3.7 είναι πολύ μεγάλη για να θεωρηθεί σύμπτωση! Φαίνεται πως το φαινόμενο επανεισόδου του Σχήματος 3.7 είναι το κοντινότερο Νευτώνειο ανάλογο (Σχήμα 3.8) στον χώρο Schwarzschild-dS.

Όμως, υπάρχει μια μεγάλη διαφορά μεταξύ του χώρου Schwarzschild-dS και του Νευτώνειου φαινομένου επανεισόδου. Αυτή είναι ο αντίθετος χαρακτήρας της ανισότητας για την αστάθεια, δηλαδή η ευσταθής περιοχή του Νευτώνειου συστήματος αντιστοιχεί στην ασταθή περιοχή ($R < R_{BH}$ και $R > R_C$) του χώρου Schwarzschild-dS.

3.3 Κανονική συλλογή

Στην κανονική συλλογή [25, 26] τα σημεία αλλαγής ευστάθειας είναι διαφορετικά από αυτά της μικροκανονικής. Η σειρά των καταστάσεων ισορροπίας εκφρασμένη ως συνάρτηση της θερμοκρασίας ως προς την αντίθεση πυκνότητας φαίνεται στο Σχήμα 3.9 στην περίπτωση dS. Στον AdS, όπως στην περίπτωση $\Lambda = 0$, υπάρχει μόνο μία σειρά καταστάσεων ισορροπίας για κάθε τιμή κοσμολογικής σταθεράς, που είναι ίδια στη μορφή με τη σειρά **1** του

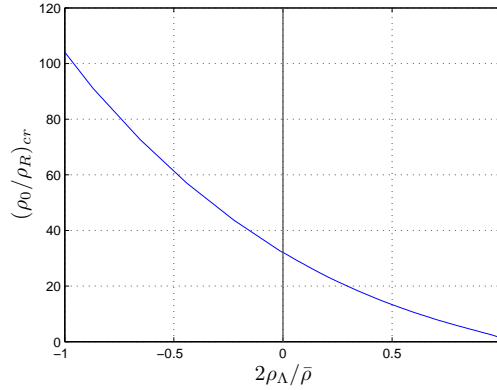


Σχήμα 3.9: Στον dS, η αδιάστατη θερμοκρασία ως προς την αντίθεση πυκνότητας για σταθερά M , R , ρ_Λ στην κανονική συλλογή. Μόνο οι πάνω σειρές (1 και 4) αντιστοιχούν σε $\rho(r)$ που μεταβάλλεται μονοτονικά. Τα σημεία B , εκτός του B_4 , είναι σημεία αλλαγής ευστάθειας. Βλέπε το κείμενο για λεπτομέρειες.

Σχήματος 3.9(α). Σημειώνουμε πως το διάγραμμα 3.9 της θερμοκρασίας είναι πολύ όμοιο με το διάγραμμα 3.5 της ενέργειας. Τα σημεία B , εκτός του B_4 , του Σχήματος 3.9, είναι σημεία αλλαγής ευστάθειας. Οι σειρές A_1B_1 και A_4B_4 είναι ευσταθείς. Δεν ήταν δυνατόν να καταλήξουμε με βεβαιότητα ως προς την ευστάθεια των πράσινων σειρών A_2B_2 , A_3B_3 , A_5B_5 και A_6B_6 , αν και το γεγονός πως η θερμοχωρητικότητα είναι θετική είναι μια ένδειξη πως είναι ευσταθείς (αφού μιλάμε για την κανονική συλλογή), όπως και το γεγονός ότι δε βρήκαμε αριθμητικά κάποια αστάθεια. Οι υπόλοιπες σειρές είναι ασταθείς.

Στο Σχήμα 3.10 βλέπουμε πως η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας (βλ. σχέση (3.60) για τη σειρά **1** του Σχήματος 3.9(α)), μειώνεται καθώς αυξάνει η κοσμολογική σταθερά, ακριβώς όπως στη μικροκανονική συλλογή. Όμως, η αστάθεια εμφανίζεται ‘νωρίτερα’ στην κανονική συλλογή. Είναι γνωστό στην περίπτωση $\Lambda = 0$ πως η αστάθεια στην κανονική συλλογή εμφανίζεται όταν η θερμοχωρητικότητα γίνεται αρνητική, κάτι που φυσικά εξακολουθεί να ισχύει παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Αυτή η περιοχή της αρνητικής θερμοχωρητικότητας είναι ευσταθής στη μικροκανονική συλλογή, ενώ η αστάθεια εμφανίζεται όταν η θερμοχωρητικότητα γίνεται θετική ξανά (βλέπε [10]).

Η κανονική συλλογή είναι εντελώς διαφορετική από τη μικροκανονική όσον αφορά στις ιδιότητες ευστάθειας του συστήματος. Θεωρούμε τη μάζα σταθερή και στις δύο συλλογές. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11, η κρίσιμη ακτίνα μειώνεται με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά και η περιοχή της αστάθειας βρίσκεται τώρα σε ακτίνες μικρότερες (και όχι μεγαλύτερες) από την κρίσιμη ακτίνα $R < R_{cr}$. Η κρίσιμη ακτίνα μειώνεται με αυξανόμενη ρ_Λ , επειδή σε μια αύξηση της ρ_Λ η θερμοκρασία μειώνεται έτσι, ώστε κανείς θα πρέπει να συμπιέσει το σύστημα για να εξουδετερώσει την αποσταθεροποιητική αυτή μείωση της θερμοκρασίας. Η περιοχή όπου βρίσκεται η αστάθεια αλλάζει σε σχέση με τη μικροκανονική συλλογή, επειδή σε μια συμπίεση αν και η βαθμίδα της πίεσης αυξάνεται, η αύξηση είναι πολύ μικρότερη καθώς ενέργεια εκλύεται προς τη δεξιά μεν θερμότητα. Στην περίπτωση AdS υπάρχει μια οριακή τιμή της κοσμολογικής σταθεράς $\rho_\Lambda^{AdS} \simeq -12.32(3/8\pi G^3 M^2 \beta^3)$ πέρα από την οποία δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας.



Σχήμα 3.10: Η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας ως προς το ρ_Λ για σταθερά M , R στην κανονική συλλογή, όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα. Αστάθεια εμφανίζεται για $\rho_0/\rho_R > (\rho_0/\rho_R)_{cr}$ (εκτός αν $(\rho_0/\rho_R)_{cr} < 1$).

Η κρίσιμη θερμοκρασία μειώνεται με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12. Η αύξηση της κοσμολογικής σταθεράς δρα σταθεροποιητικά στο σύστημα, λόγω της αύξησης της απωστικής δύναμης (ή τη μείωση της ελκτικής δύναμης στην περίπτωση AdS), επιτρέποντας στο σύστημα να μπορεί να βρεθεί σε καταστάσεις ισορροπίας σε όλο και μικρότερες θερμοκρασίες. Καθώς η κοσμολογική σταθερά αυξάνεται, φτάνει σε μια τιμή πέραν της οποίας το σύστημα μπορεί οριακά να είναι σε κατάσταση στατικής δυναμικής ισορροπίας. Σε αυτή την κατάσταση όλη η ύλη είναι ακίνητη, δηλαδή $T = 0$, και είναι συγκεντρωμένη στο άκρο. Αυτό είναι το σημείο A στο Σχήμα 3.12. Υπολογίσαμε νωρίτερα αυτό το σημείο στην εξίσωση (3.91) και βρήκαμε $\rho_\Lambda^{min} = \bar{\rho}/4$. Για μεγαλύτερες τιμές, η απωστική κοσμολογική δύναμη αυξάνεται, επιτρέποντας καταστάσεις ισορροπίας με την ύλη όλο και πιο κοντά στο κέντρο και σε υψηλότερες θερμοκρασίες. Το σύστημα υφίσταται μια μετάβαση φάσης. Για μια σταθερή κοσμολογική σταθερά σε αυτή την περιοχή (μετά το σημείο A), υπάρχουν μετασταθείς καταστάσεις για χαμηλές θερμοκρασίες μέχρι μια μέγιστη κρίσιμη τιμή T_1 , όπου το σύστημα περνάει σε φάση κατάρρευσης. Για μεγαλύτερες θερμοκρασίες, δεν υπάρχουν μετασταθείς καταστάσεις και το σύστημα υφίσταται ισοθερμική κατάρρευση. Αυτό συμβαίνει μέχρι μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία T_2 . Για ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες, επανέρχονται οι καταστάσεις ισορροπίας.

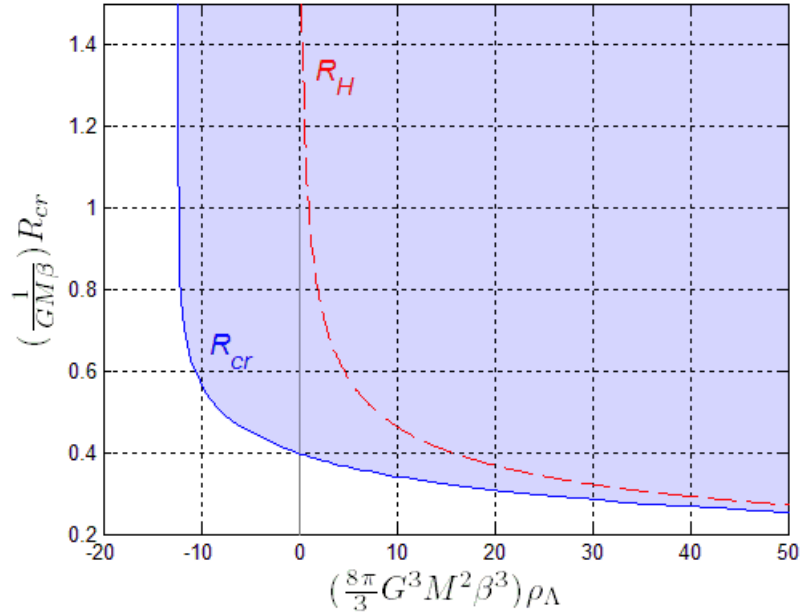
3.4 Δυναμική Jeans αστάθεια και θερμοδυναμική

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ θερμοδυναμικής και δυναμικής ευστάθειας ανεξάρτητα της κοσμολογικής σταθεράς. Η εξίσωση Emden (με, ή χωρίς Λ) είναι η εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας. Αυτό φαίνεται εύκολα. Η υδροστατική ισορροπία καθορίζεται από τη συνθήκη

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla \phi$$

Για $p = \rho/\beta$ έχουμε

$$\nabla(\log \rho) = \nabla(-\beta\phi)$$



Σχήμα 3.11: Η κρίσιμη ακτίνα ως προς το ρ_Λ για σταθερά β , M στην κανονική συλλογή. Δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας στη μη-γραμμοσχιασμένη περιοχή. Συμβολίζουμε με R_H την ακτίνα της ομογενούς λύσης. Βλέπε το κείμενο για λεπτομέρειες.

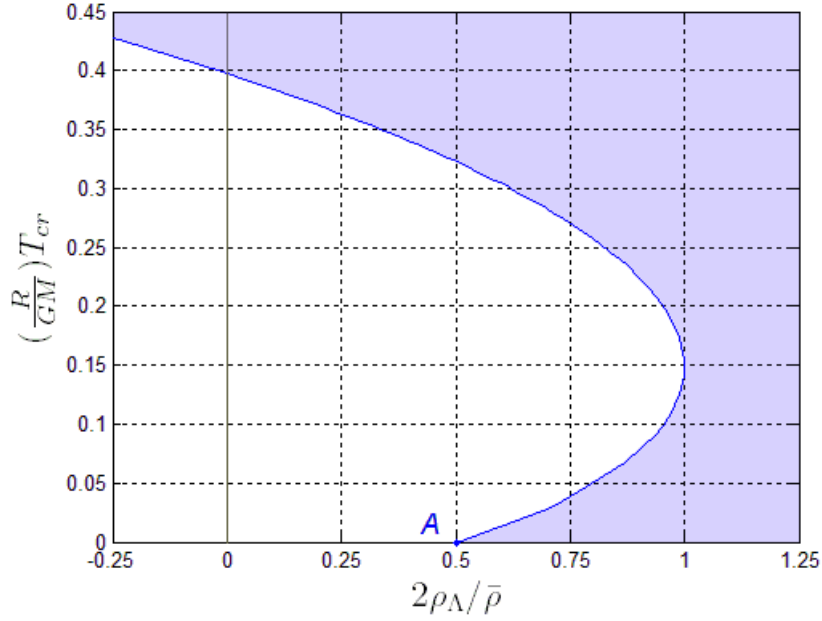
έτσι, ώστε

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta(\phi - \phi(0))}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το ρ στην εξίσωση Poisson παίρνουμε την εξίσωση Emden (με, ή χωρίς Λ). Το ερώτημα που θέτουμε είναι αν και υπό ποιές συνθήκες η δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη θερμοδυναμική ευστάθεια.

Με τον όρο δυναμική ευστάθεια, εννοούμε τη γραμμική δυναμική ευστάθεια που αντιστοιχεί σε διαταραχές πρώτης τάξης των δυναμικών εξισώσεων γύρω από την ισορροπία. Αυτή η ανάλυση δίνει τη γνωστή αστάθεια *Jeans* στην περίπτωση μιας διαταραχής σε ένα ομογενές βαρυτικό μέσο¹, που περιγράφουμε στο Παράρτημα Α'. Όμως, ένας διαφορετικός, ακριβής υπολογισμός με διαταραχή σε μια ισοθερμική σφαίρα πραγματοποιήθηκε από τον Chavanis [19]. Αυτή η αστάθεια *Jeans* αποδείχθηκε ισοδύναμη με τη θερμοδυναμική αστάθεια στην κανονική συλλογή (ισοθερμική κατάρρευση). Αυτό συνέβη γιατί στον υπολογισμό του Chavanis [19], όπως και στον αρχικό υπολογισμό, δεν πραγματοποιείται διαταραχή στη θερμοκρασία, οπότε αυτή θεωρείται πρακτικά σταθερή κατά τη διαταραχή. Συνεπώς, αν και συνήθως δεν διατυπώνεται ξεκάθαρα, σε όλες τις μορφές της αστάθειας *Jeans* υπάρχει η a-priori υπόθεση της σταθερής θερμοκρασίας, όχι όμως της σταθερής ενέργειας. Το ερώτημα που θέτουμε και επεξεργαζόμαστε στα ακόλουθα είναι αν μια δυναμική αστάθεια *Jeans* μπορεί να είναι ισοδύναμη με τη μικροκανονική, θερμοδυναμική αστάθεια, για ένα σύστημα με σταθερή ενέργεια. Πολύ πρόσφατα, παρόμοια ζητήματα συζητήθηκαν

¹Καθώς οι καταστάσεις ισορροπίας του βαρυτικού αερίου δεν είναι ομογενείς (εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς όπως είδαμε νωρίτερα) αυτή η υπόθεση της ομογένειας ονομάζεται “the Jeans swindle”, δηλαδή η εξαπάτηση *Jeans*[6].



Σχήμα 3.12: Η κρίσιμη θερμοκρασία ως προς το ρ_Λ για σταθερά M, R στην κανονική συλλογή, όπου $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα. Στη μη γραμμοσκιασμένη περιοχή δεν υπάρχει ισορροπία.

στην αναφορά [48].

Ας επαναλάβουμε τον υπολογισμό του Chavanis [19] της αστάθειας Jeans σε μη-ομογενές μέσο, που αποδεικνύει ότι είναι ισοδύναμη με τη θερμοδυναμική αστάθεια στην κανονική συλλογή. Εμείς θα συμπεριλάβουμε και την κοσμολογική σταθερά στον υπολογισμό. Ένα βαρυντικό ρευστό περιγράφεται από τρεις εξισώσεις: την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση Navier-Stokes, και την εξίσωση Poisson.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (3.95)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho - 8\pi G \rho_\Lambda \quad (3.96)$$

Όπως πριν, η καταστατική εξίσωση σε ένα σημείο \vec{r} είναι $p = \rho kT/\tilde{m}$, όπου \tilde{m} είναι η μάζα ενός σωματιδίου, και το ρευστό είναι περιορισμένο μέσα σε ένα σφαιρικό κελί ακτίνας R . Για απλότητα θα αμελήσουμε το ιξώδες, δηλαδή θεωρούμε $\eta = \zeta = 0$ στα ακόλουθα. Σημειώνουμε πως ο Chavanis απέδειξε πως το ιξώδες δεν επηρεάζει το σημείο αλλαγής ευστάθειας.

Επίσης ισχύει η συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας

$$\frac{1}{\rho_e} \nabla p_e = -\nabla \phi_e \Leftrightarrow \frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = -\frac{d\phi_e}{dr} \quad (3.97)$$

όπου ο δείκτης e συμβολίζει τις ποσότητες στην ισορροπία. Αυτές οι ποσότητες δεν εξαρτώνται από το χρόνο t . Θεωρήστε μια μικρή διαταραχή γύρω από μια στάσιμη κατάσταση ισορροπίας

$$\vec{v} = \delta\vec{v}(r, t) \quad , \quad \rho = \rho_e + \delta\rho(r, t) \quad , \quad p = p_e + \delta p(r, t) \quad , \quad \phi = \phi_e + \delta\phi(r, t) \quad (3.98)$$

Υποθέτουμε επίσης $\delta T = 0$, που σημαίνει ότι η ενέργεια του συστήματος δε διατηρείται, όπως θα δούμε αναλυτικά αργότερα. Οι εξισώσεις (3.94), (3.95) και (3.96) γίνονται για τις διαταραχές

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho_e\delta\vec{v}) = 0 \quad (3.99)$$

$$\rho_e \frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = -\frac{kT_e}{\tilde{m}} \nabla\delta\rho - \delta\rho\nabla\phi_e - \rho_e\nabla\delta\phi \quad (3.100)$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \quad (3.101)$$

Παρατηρήστε πως δεν υπάρχει κανένα λόγο να επικαλεστούμε το “Jeans swindle” καθώς εργαζόμαστε σε ρεαλιστικές μη-ομογενείς καταστάσεις ισορροπίας.

Ας περιοριστούμε σε ακτινικές διαταραχές μόνο, ανάλογες για κάθε φυσικό μέγεθος, στον ίδιο παράγοντα

$$e^{\sigma t}$$

Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις (3.99), (3.100) και (3.101) γίνονται:

$$\sigma\delta\rho + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\rho_e r^2 \delta v) = 0 \quad (3.102)$$

$$\sigma\rho_e\delta v = -\frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{d\delta\rho}{dr} - \delta\rho \frac{d\phi_e}{dr} - \rho_e \frac{d\delta\phi}{dr} \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\delta\phi}{dr} \right) = 4\pi G\delta\rho \quad (3.104)$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (3.46), δηλαδή $\delta\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr}$, η εξίσωση (3.102) δίνει μετά την ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $q(0) = 0$:

$$\delta v = -\frac{\sigma}{4\pi\rho_e r^2} q \quad (3.105)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση πίσω στην (3.103) παίρνουμε

$$\frac{\sigma^2}{4\pi r^2} q = \frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr} \right) + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr} \frac{d\phi_e}{dr} + \frac{G\rho_e}{r^2} q \quad (3.106)$$

όπου ήδη χρησιμοποιήσαμε την

$$\frac{d\delta\phi}{dr} = \frac{G}{r^2} q \quad (3.107)$$

η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση της (3.104) και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $q(0) = q(R) = 0$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας (3.97),

η εξίσωση (3.106) γίνεται

$$\begin{aligned} \rho_e \frac{k}{\tilde{m}} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho_e r^2} \frac{dq}{dr} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \left(\frac{1}{4\pi\rho_e r^2} \frac{dq}{dr} \right) \right\} + \frac{Gq}{T_e r^2} &= \frac{\sigma^2}{4\pi\rho_e T_e r^2} q \\ \frac{k}{\tilde{m}} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\rho_e r^2} \frac{dq}{dr} \right) + \frac{Gq}{T_e r^2} &= \frac{\sigma^2}{4\pi\rho_e T_e r^2} q \end{aligned} \quad (3.108)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (3.59) που καθορίζει την κανονική θερμοδυναμική ευστάθεια. Για $\sigma^2 < 0$ η διαταραχή είναι ανάλογη στο $e^{i|\sigma|t}$ και συνεπώς η ισορροπία είναι ευσταθής. Ομοίως, στην εξίσωση (3.59), το $\xi < 0$ αντιστοιχεί σε ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας (μέγιστο της συνάρτησης Massieu) και άρα σε ευσταθή κατάσταση ισορροπίας. Βλέπουμε πως η αστάθεια Jeans είναι ισοδύναμη με τη κανονική θερμοδυναμική αστάθεια. Εδώ ολοκληρώνεται η ανάλυση του Chavanis [19].

Καθώς έχουμε υποθέσει $\delta T = 0$, η ενέργεια δε διατηρείται στους υπολογισμούς του Chavanis. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί ως ακολούθως. Έστω μια χρονεξαρτώμενη διαταραχή της θερμοκρασίας του συστήματος

$$T(t) = T_e + \delta T(t) \quad (3.109)$$

Ας θυμηθούμε από την παράγραφο 3.1.2 ότι η ενέργεια του συστήματος μπορεί να γραφεί

$$E = \frac{3}{2} M \frac{kT}{\tilde{m}} + \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3 \vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho \phi_\Lambda d^3 \vec{r}$$

και συνεπώς η διαταραχή στην ενέργεια σε πρώτη τάξη ισούται με:

$$\delta E = \frac{3kM}{2\tilde{m}} \delta T + \int d^3 \vec{r} \phi_e \delta \rho \quad (3.110)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση (3.41). Από αυτή την εξίσωση είναι προφανές ότι αν $\delta T = 0$ τότε γενικά $\delta E \neq 0$. Προκειμένου να είναι

$$\delta E = 0$$

θα πρέπει

$$\delta T = -\frac{2\tilde{m}}{3kM} \int d^3 \vec{r} \phi_e \delta \rho \quad (3.111)$$

Ας γράψουμε τις δυναμικές εξισώσεις για τις γραμμικές διαταραχές, συμπεριλαμβανομένης της διαταραχής στη θερμοκρασία (3.109). Έχουμε ότι οι εξισώσεις (3.94) και (3.96) παραμένουν οι ίδιες, ενώ η εξίσωση (3.95) γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$\rho_e \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\frac{kT_e}{\tilde{m}} \nabla \delta \rho - \frac{k\delta T}{\tilde{m}} \nabla \rho_e - \delta \rho \nabla \phi_e - \rho_e \nabla \delta \phi \quad (3.112)$$

Όπως είδαμε, θεωρώντας μόνο ακτινικές διαταραχές ανάλογες στο $e^{\sigma t}$ και χρησιμοποιώντας σφαιρική συμμετρία, οι εξισώσεις (3.94) και (3.96) οδηγούν στις (3.102) και (3.104), ενώ η εξίσωση (3.112) γίνεται

$$\sigma \rho_e \delta v = -\frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{d\delta \rho}{dr} - \frac{k\delta T}{\tilde{m}} \frac{d\rho_e}{dr} - \delta \rho \frac{d\phi_e}{dr} - \rho_e \frac{d\delta \phi}{dr} \quad (3.113)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.46), (3.105), (3.107) και την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας (3.97), η τελευταία εξίσωση (3.113) γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{4\pi r^2} q &= \frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr} \right) - \rho_e \frac{\delta T}{T_e} \frac{d\phi_e}{dr} - \frac{kT_e}{\tilde{m}} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} \frac{1}{4\pi \rho_e r^2} \frac{dq}{dr} + \frac{Gq}{T_e r^2} \\ \frac{k}{\tilde{m}} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi \rho_e r^2} \frac{dq}{dr} \right) + \frac{Gq}{T_e r^2} - \frac{\delta T}{T_e^2} \phi'_e &= \frac{\sigma^2}{4\pi \rho_e T_e r^2} q \end{aligned} \quad (3.114)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς το r . Τώρα, με το συμβολισμό (3.46) για το $\delta\rho$, η συνθήκη για σταθερή ενέργεια (3.111) γίνεται:

$$\delta T = -\frac{2\tilde{m}}{3kM} \int_0^R d\tilde{r} \phi_e \frac{dq}{d\tilde{r}} = \frac{2\tilde{m}}{3kM} \int_0^R d\tilde{r} \phi'_e q \quad (3.115)$$

και συνεπώς η εξίσωση (3.114) γίνεται:

$$\frac{k}{\tilde{m}} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi \rho_e r^2} \frac{dq}{dr} \right) + \frac{Gq}{T_e r^2} - \frac{2\tilde{m}}{3kMT_e^2} \left(\int_0^R d\tilde{r} \phi'_e q \right) \phi'_e = \frac{\sigma^2}{4\pi \rho_e T_e r^2} q \quad (3.116)$$

Αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη στην (3.52) (για $k = 1$, $\tilde{m} = 1$) που καθορίζει τη θερμοδυναμική ευστάθεια στη μικροκανονική συλλογή, δηλαδή τη Θερμοβαρυτική καταστροφή. Η εξίσωση (3.116) σημαίνει ότι για ένα σύστημα με σταθερή ενέργεια, μια κατάσταση ισορροπίας είναι δυναμικά ευσταθής μόνο εάν $\sigma^2 < 0$ διότι τότε η διαταραχή είναι ανάλογη του $e^{i|\sigma|t}$. Η όμοια εξίσωση (3.52) δείχνει ότι οι ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας είναι μόνο αυτές για τις οποίες $\xi < 0$, καθώς τότε η εντροπία είναι ένα (τοπικό) μέγιστο. Εν τέλει, το πρόσημο του σ^2 για μια κατάσταση ισορροπίας είναι το ίδιο με το πρόσημο του ξ επίσης. Συνεπώς, η Θερμοβαρυτική Καταστροφή είναι ισοδύναμη με μια δυναμική αστάθεια τύπου *Jeans*, για την οποία η ενέργεια μένει σταθερή κατά τη διαταραχή.

Κεφάλαιο 4

Θερμοδυναμική ευστάθεια στη Γενική Σχετικότητα

Το 1965 ο Cocks [54] πρότεινε μια αρχή μέγιστης εντροπίας για ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό τέλειο ρευστό ώστε να εξάγει τη σχετικιστική εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας, που είναι ευρέως γνωστή ως η εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Στην ανάλυσή του, το ρευστό ήταν σε αδιαβατική κίνηση έτσι, ώστε η ολική εντροπία να μένει σταθερή και χρησιμοποιήθηκαν επίσης η εξίσωση δεσμών του Einstein (initial data constraint equation) μαζί με την ακτινική συνιστώσα των εξισώσεων Einstein. Αργότερα, το 1981, οι Sorkin, Wald και Zhang (SWZ) [55] ανέπτυξαν μια διαφορετική αρχή μέγιστης εντροπίας για την ακτινοβολία, η οποία δε χρειαζόταν την αδιαβατική υπόθεση και χρησιμοποιούσε μόνο την constraint εξίσωση. Πολύ πρόσφατα, ο Gao [56] γενίκευσε την ανάλυση των SWZ για οποιοδήποτε τέλειο ρευστό. Όμως, στην ανάλυση του Gao [56] δεν είναι ξεκάθαρο σε ποιά συλλογή πραγματοποιείται αυτή. Είναι καίριο να προσδιοριστεί η συλλογή, καθώς όπως είδαμε οι συλλογές δεν είναι ισοδύναμες στη Βαρύτητα, σε σχέση με την ευστάθεια της ισορροπίας. Θα βελτιώσουμε την ανάλυσή του, εξάγοντας την εξίσωση TOV από τη θερμοδυναμική, δουλεύοντας καθαρά τόσο στη μικροκανονική όσο και στην κανονική συλλογή με έναν ελπίζουμε πιο άμεσο και απλό τρόπο.

Πιό σημαντικό είναι πως θα δείξουμε ότι η βαρύτητα είναι ισοδύναμη στη θερμοδυναμική της μικροκανονικής συλλογής, όχι μόνο όσον αφορά στις καταστάσεις ισορροπίας (δηλαδή την εξίσωση TOV), αλλά και στο επίπεδο της ευστάθειας αυτών. Πραγματικά, βρίσκουμε πως η γραμική, δυναμική ευστάθεια, που ορίζεται από τις εξισώσεις Einstein, συμπίπτει με τη μικροκανονική, θερμοδυναμική ευστάθεια, που ορίζεται από τη μεταβολή της εντροπίας δεύτερης τάξης, για ένα στατικό, τέλειο ρευστό με γενική καταστατική εξίσωση.

Τέλος, μελετάμε την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στην ευστάθεια των σφαιρικών ρευστών. Αυτή η μελέτη μπορεί να θεωρηθεί ως η σχετικιστική γενίκευση του προηγούμενου κεφαλαίου, όπου δουλέψαμε στο Νευτώνειο όριο. Πραγματοποιούμε την ανάλυση για ύλη και ακτινοβολία με γραμική καταστατική εξίσωση, και την υπόθεση της σταθερής εντροπίας ανά βαρυόνιο και σταθερής χημικής σύνθεσης σε όλο το ρευστό. Ένα γενικό αποτέλεσμα είναι πως μια αύξηση στην κοσμολογική σταθερά τείνει να σταθεροποιήσει το σύστημα. Επιπλέον, η κρίσιμη ελάχιστη ακτίνα, μέχρι την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, ‘ακουμπάει’ πάνω στον κοσμολογικό ορίζοντα σε κάποια τιμή της κοσμολογικής σταθεράς.

Σημειώνουμε πως η βαθιά σχέση μεταξύ της βαρύτητας και της θερμοδυναμικής μελετάται έντονα εδώ και μερικές δεκαετίες, ξεκινώντας από τους τέσσερις νόμους της μηχανικής των μελανών οπών [57, 58] και της ακτινοβολίας Hawking [59]. Αυτοί οι νόμοι συνάγονται από τις εξισώσεις Einstein. Πρόσφατα, γίνονται πολλές προσπάθειες, αντιστρέφοντας τη λογική, να συναχθούν οι εξισώσεις Einstein από τη θερμοδυναμική [60, 61, 62] και συνεπώς να ερμηνευθεί η Βαρύτητα ως ένα αναδύμενο (emergent) φαινόμενο, από κάποια βαθύτερη, υποκείμενη και προς το παρόν, άγνωστη δομή. Όλες αυτές οι προσπάθειες βασίζονται στη θερμοδυναμική σε έναν ορίζοντα ή σε κάποιο άλλο σύνορο, χρησιμοποιώντας πάντα κάποια μορφή ολογραφικής αρχής, δείχνοντας έτσι στην κατεύθυνση κάποιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Όμως, πιστεύω πως είναι σημαντικό, πριν εισάγουμε κάποιας μορφής εξωτικής ή κβαντικής αρχής, να υπάρχει σε καθαρά κλασικό επίπεδο [63] η πληρέστερη δυνατή, κατανόηση του βαρυτικού αερίου. Τότε, θα είναι δυνατόν να ξεκαθαρίσει ποιές παράξενες ιδιότητες της θερμοδυναμικής της Βαρύτητας είναι κβαντικής φύσης, βασισμένες σε μια βαθύτερη θεωρία, και ποιές είναι απλά εκ κατασκευής χαρακτηριστικά της Γενικής Σχετικότητας. Σε αυτό το πνεύμα, θα μελετήσουμε την κλασική θερμοδυναμική του βαρυτικού αερίου στη Γενική Σχετικότητα, χωρίς καμία αναφορά στη θερμοδυναμική ενός ορίζοντα ή κάποιας οθόνης (screen).

Το κεφάλαιο αυτό είναι οργανωμένο ως ακολούθως. Στην παράγραφο 4.1 εξάγουμε τη συνθήκη για γραμμική δυναμική ευστάθεια από τις εξισώσεις Einstein. Στην παράγραφο 4.2 αποδεικνύουμε πως η εξίσωση TOV μπορεί να συναχθεί τόσο από τη μικροκανονική συλλογή, δηλαδή από τη μεταβολή σε πρώτη τάξη της εντροπίας με σταθερή μάζα και αριθμό βαρυονίων, όσο και από την κανονική συλλογή (σταθερή θερμοκρασία). Στην παράγραφο 4.3 υπολογίζουμε τη μεταβολή της εντροπίας σε δεύτερη τάξη και αποδεικνύουμε πως η συνθήκη για τη μικροκανονική, θερμοδυναμική ευστάθεια, είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη της γραμμικής, δυναμικής ευστάθειας που υπολογίζουμε νωρίτερα στην παράγραφο 4.1. Τέλος, στην παράγραφο 4.4 μελετάμε την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στην ευστάθεια των σφαιρικών ρευστών με συγκεκριμένες καταστατικές εξισώσεις.

4.1 Γραμμική δυναμική ισορροπία

Στην περίπτωση ενός τέλει ρευστού που είναι στατικό και σφαιρικά συμμετρικό, οι εξισώσεις Einstein δίνουν την εξίσωση γνωστή ως εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [39, 64] (βλέπε [65] για μία μελέτη της TOV με κοσμολογική σταθερά). Η TOV είναι η εξίσωση που περιγράφει την υδροστατική ισορροπία στη Σχετικότητα. Στο Παράρτημα Γ.1 κάνουμε μια ανασκόπηση του τρόπου που αυτή η εξίσωση συνάγεται από τις εξισώσεις Einstein. Σε αυτή την παράγραφο, θέλουμε να βρούμε τη συνθήκη για γραμμική, δυναμική ευστάθεια, δηλαδή για ευστάθεια κάτω από ακτινικές διαταραχές, σε πρώτη τάξη γύρω από την ισορροπία. Το πρόβλημα αυτό είχε μελετηθεί από τον Yabushita [66]. Στο Παράρτημα Γ.2 κάνουμε μια ανασκόπηση των υπολογισμών του Yabushita, συμπεριλαμβάνοντας και την κοσμολογική σταθερά. Ο τελικός σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τη δυναμική ευστάθεια με τη θερμοδυναμική ευστάθεια, όπως τελικά θα κάνουμε στην παράγραφο 4.3. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε μια έκφραση για τη γραμμική, δυναμική ευστάθεια μιας γενικής καταστατικής, την οποία έκφραση θα υπολογίσουμε στα ακόλουθα.

Η μετρική για ένα σφαιρικά συμμετρικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή [39]

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

με $\nu = \nu(r, t)$ και $\lambda = \lambda(r, t)$. Για ένα τέλειο ρευστό, ο ταχυστής ενέργειας–ορμής είναι

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho c^2) g_{\alpha\nu} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} - p \delta_{\nu}^{\mu} \quad (4.2)$$

που στην ισορροπία γίνεται

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho_e c^2, -p_e, -p_e, -p_e) \quad (4.3)$$

όπου ο δείκτης e δηλώνει τα μεγέθη στην ισορροπία. Στην ισορροπία, η μετρική είναι στατική και οι εξισώσεις Einstein εκπίπτουν σε μόνο δύο εξισώσεις (βλ. Παράρτημα Γ'.1):

$$p_e' = -\left(\frac{p_e}{c^2} + \rho_e\right) \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi G \frac{p_e}{c^2} r - \frac{\Lambda}{3} c^2 r\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} \quad (4.4)$$

$$m' = 4\pi r^2 \rho_e \quad (4.5)$$

Η πρώτη είναι η εξίσωση TOV που ορίζει την υδροστατική ισορροπία, ενώ η δεύτερη υποδεικνύει πως το $m(r)$ είναι η ολική μάζα-ενέργεια μέσα σε ακτίνα r [67]. Οι καταστάσεις ισορροπίας μπορούν να προσδιοριστούν από αυτές τις δύο μόνο εξισώσεις, δεδομένου ότι μια καταστατική εξίσωση $p = p(\rho)$ και οι αρχικές συνθήκες $p(0)$, $m(0)$ έχουν προσδιοριστεί.

Ας εφαρμόσουμε τώρα μικρές διαταραχές γύρω από την ισορροπία (βλ. Παράρτημα Γ'.2) όπως στην εξίσωση (Γ'.16). Έστω

$$f(r, t) \equiv \delta m(r, t) \quad (4.6)$$

με

$$\delta \rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (4.7)$$

Τότε, υποθέτωντας μια διαταραχή

$$\delta m \sim e^{\sigma t} \quad (4.8)$$

με $\delta m(r=0) = 0$ παίρνουμε από τις εξισώσεις Einstein, σε πρώτη τάξη, ότι:

$$\delta p' + \frac{\nu_e'}{2} (\delta p + \delta \rho c^2) + \frac{\delta \nu'}{2} (p_e + \rho_e c^2) = \frac{e^{\lambda_e - \nu_e}}{4\pi r^2} \sigma^2 f \quad (4.9)$$

Αυτή είναι η εξίσωση (2.13) του Yabushita [66] και αποδεικνύεται στο Παράρτημα Γ'.2 με την κοσμολογική σταθερά να συμπεριλαμβάνεται στον υπολογισμό. Είναι ξεκάθαρο από την εξίσωση (4.8) ότι αν $\sigma^2 < 0$ τότε το σύστημα θα πάλλεται γύρω από το σημείο ισορροπίας και συνεπώς είναι ευσταθές. Δεδομένης μιας καταστατικής εξίσωσης, όλες οι διαταραχές στην εξίσωση (4.9) μπορούν να εκφραστούν ως προς f έτσι, ώστε η (4.9) γίνεται μια διαφορική εξίσωση ως προς f και ένας διαφορικός τελεστής μπορεί να οριστεί στο αριστερό μέλος όπως θα δούμε. Η ευστάθεια καθορίζεται συνεπώς από το πρόσημο των ιδιοτιμών αυτού του τελεστή. Αν έχει κάποια θετική ιδιοτιμή, τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής.

Σε πρώτη τάξη στις διαταραχές (Γ'.16), η εξίσωση (Γ'.4) γίνεται

$$\frac{8\pi G}{c^4} \delta p = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\Lambda} r^2\right) \left\{ \frac{\delta \nu'}{r} - \delta \lambda \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \right\}$$

Αντικαθιστώντας το

$$\delta\lambda = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_{\Lambda}r^2\right)^{-1} \frac{2G}{rc^2}f$$

λύνοντας ως προς $\delta\nu'$ και αντικαθιστώντας το μαζί με το ν' από την εξίσωση (Γ'.9), στην εξίσωση (4.9) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta p' - \frac{p_e'}{p_e + \rho_e c^2}(\delta p + \delta\rho c^2) + (p_e + \rho_e c^2) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_{\Lambda}r^2\right)^{-1} \\ \times \left\{ \frac{4\pi G}{c^4}\delta p + \frac{G}{rc^2} \left(-2\frac{p_e'}{p_e + \rho_e c^2} + \frac{1}{r}\right) f \right\} = \frac{e^{\lambda_e - \nu_e}}{4\pi r^2}\sigma^2 f \end{aligned} \quad (4.10)$$

Αυτή είναι μια σημαντική εξίσωση για τους σκοπούς μας, καθώς εξαρτάται μόνο στο δp και το $f = \delta m$. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη έκφραση που παίρνουμε από τη θερμοδυναμική ευστάθεια και να καθορίσουμε έτσι την απαραίτητη συνθήκη για την καταστατική εξίσωση έτσι, ώστε τα δύο είδη ευστάθειας να είναι ισοδύναμα. Αυτό θα γίνει στην παράγραφο 4.3.

Ας υποθέσουμε μια γενική καταστατική εξίσωση της μορφής

$$p = p(\rho)$$

Έστω

$$g(r) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (4.11)$$

έτσι, που

$$p' = g(r)c^2\rho' \quad \text{και} \quad \delta p = g(r)c^2\delta\rho = \frac{gc^2}{4\pi r^2} \frac{df}{dr} \quad (4.12)$$

και

$$\delta p' = \frac{c^2}{4\pi r^2} \left(g \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(g' - \frac{2g}{r} \right) \frac{df}{dr} \right) \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.12), (4.13) και (4.7) στην (4.10) παίρνουμε τελικά:

$$\begin{aligned} gc^2 \left\{ \frac{d^2 f}{dr^2} + \left[\frac{g'}{g} - \frac{2}{r} - \frac{(g+1)c^2\rho_e'}{p_e + \rho_e c^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\pi G}{c^4}r \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_{\Lambda}r^2\right)^{-1} (p_e + \rho_e c^2) \right] \frac{df}{dr} \right\} + \\ + \frac{4\pi G}{c^2}r(p_e + \rho_e c^2) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_{\Lambda}r^2\right)^{-1} \left(-\frac{2gc^2\rho_e'}{p_e + \rho_e c^2} + \frac{1}{r} \right) f = e^{\lambda_e - \nu_e}\sigma^2 f \end{aligned} \quad (4.14)$$

Συνεπώς, η γραμμική δυναμική ευστάθεια καθορίζεται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του τελεστή

$$\begin{aligned} \hat{L} = gc^2 \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \left[\frac{g'}{g} - \frac{2}{r} - \frac{(g+1)c^2\rho_e'}{p_e + \rho_e c^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\pi G}{c^4} r \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda r^2 \right)^{-1} (p_e + \rho_e c^2) \right] \frac{d}{dr} \right\} + \\ + \frac{4\pi G}{c^2} (p_e + \rho_e c^2) r \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda r^2 \right)^{-1} \left(-\frac{2gc^2\rho_e'}{p_e + \rho_e c^2} + \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

με $g = \partial p / \partial \rho c^2$. Αν υπάρχει κάποια θετική ιδιοτιμή, η ισορροπία είναι ασταθής. Σε μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας, η ευστάθεια αλλάζει σε εκείνο το σημείο όπου:

$$\hat{L}f = 0 \quad (4.16)$$

4.2 Γενική σχετικιστική εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας από τη θερμοδυναμική

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Gao [56] γενίκευσε την ανάλυση των SWZ [55] και κατάφερε να πάρει την εξίσωση TOV από το ακτότατο της εντροπίας για ένα τυχαίο ρευστό (και όχι μόνο για ακτινοβολία), αλλά χωρίς αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη συλλογή. Τόνισαμε πολλές φορές πως ο προσδιορισμός της συλλογής είναι σημαντικός στη βαρύτητα επειδή αυτές (οι συλλογές) δεν είναι ισοδύναμες. Σε αυτή την παράγραφο θα εξάγουμε την TOV από τη θερμοδυναμική, δουλεύοντας καθαρά στη μικροκανονική συλλογή και πραγματοποιώντας τον υπολογισμό με ένα διαφορετικό, ευθύ τρόπο. Θα συμπεριλάβουμε στον υπολογισμό την κοσμολογική σταθερά, επίσης. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε και την κανονική συλλογή επίσης.

Ακολουθώντας τους Gao [56] και SWZ [55], ας διατυπώσουμε τις βασικές υποθέσεις:

- Υποθέτουμε ένα τέλειο ρευστό για το οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής (εξίσωση (1.19)):

$$ds = \frac{c^2}{T} d\rho - \frac{\mu}{T} dn \quad (4.17)$$

όπου s είναι η εντροπία ανά μονάδα όγκου, T είναι η θερμοκρασία, ρ η πυκνότητα μάζας, που σχετίζεται με την ενεργειακή πυκνότητα με τη σχέση $\epsilon = \rho c^2$, μ είναι το χημικό δυναμικό και n είναι ο αριθμός βαρυονίων ανά μονάδα όγκου. Η εξίσωση αυτή υποδεικνύει πως τα ρ και n μπορούν να θεωρηθούν ως δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και $s = s(\rho, n)$.

- Ισχύει η εξίσωση Euler [41] της θερμοδυναμικής, τουλάχιστον τοπικά (εξίσωση (1.20)) για ένα τέλειο ρευστό:

$$Ts = \rho c^2 + p - \mu n \quad (4.18)$$

- Το σύστημα είναι σφαιρικά συμμετρικό και τα μέγιστα της εντροπίας αντιστοιχούν σε στάσιμες καταστάσεις¹. Συνεπώς ισχύει η εξίσωση δεσμών [55] για χρονικά συμμετρικά δεδομένα:

$${}^{(3)}R = \frac{16\pi G}{c^2}(\rho + \rho_\Lambda) \quad (4.19)$$

όπου ${}^{(3)}R$ είναι η εγγενής καμπυλότητα, ρ η πυκνότητα μάζας της ύλης και ρ_Λ η πυκνότητα μάζας που αντιστοιχεί σε μια (θετική ή αρνητική) κοσμολογική σταθερά Λ

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (4.20)$$

Ως προς την ακτινική συνιστώσα g_{rr} της μετρικής έχουμε

$${}^{(3)}R = \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} \{r(1 - g_{rr}^{-1})\} \quad (4.21)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.21) για να ολοκληρώσουμε την (4.19), παίρνουμε:

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_\Lambda r^2\right)^{-1} \quad (4.22)$$

με

$$m(r) = \int_0^r \rho(\tilde{r})4\pi\tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad (4.23)$$

Αυτές είναι οι υποθέσεις μας. Έστω R η ακτίνα στην οποία η πίεση μηδενίζεται [64] έτσι, ώστε που ορίζει το άκρο του σφαιρικού ρευστού. Χρησιμοποιώντας τη σφαιρική συμμετρία και την εξίσωση (4.22) στο ίδιο-στοιχείο όγκου, η εντροπία μπορεί να γραφεί ως:

$$S = \int_0^R s(r) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_\Lambda r^2\right)^{-\frac{1}{2}} 4\pi r^2 dr \quad (4.24)$$

Όμοια, ο βαρυονικός αριθμός δίνεται από

$$N = \int_0^R n(r) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_\Lambda r^2\right)^{-\frac{1}{2}} 4\pi r^2 dr \quad (4.25)$$

Σε αντίθεση, για να πάρουμε τη συνολική μάζα-ενέργεια M , συμπεριλαμβανομένης αυτής του βαρυτικού πεδίου, κανείς δε θα πρέπει να ολοκληρώσει στον proper όγκο αλλά στον κανονικό όγκο (βλ. σελ. 302 στον Weinberg [67]) όπως στην εξίσωση (4.23)

$$M \equiv m(R) = \int_0^R \rho(r)4\pi r^2 dr \quad (4.26)$$

Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της εντροπίας υπό τους περιορισμούς της σταθερής ενέργειας και βαρυονικού αριθμού, δηλαδή δουλεύοντας στη μικροκανονική συλλογή. Θα

¹Σημειώστε πως αυτό έχει αποδειχθεί από τους SWZ [55] για την περίπτωση $\Lambda = 0$.

χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Έστω β_0 , α δύο, απροσδιόριστοι προς το παρόν, πολλαπλασιαστές Lagrange. Η απαίτηση του ακρότατου της εντροπίας υπό τους περιορισμούς της σταθερής ενέργειας και βαρυονικού αριθμού εκφράζεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \delta S - \beta_0 c^2 \delta M + \alpha \delta N = 0 \Leftrightarrow & \int_0^R \delta s (g_{rr})^{\frac{1}{2}} r^2 dr + \frac{G}{c^2} \int_0^R s \delta m (g_{rr})^{\frac{3}{2}} r dr - \beta_0 c^2 \int_0^R \delta \rho r^2 dr \\ & + \int_0^R \alpha \delta n (g_{rr})^{\frac{1}{2}} r^2 dr + \frac{G}{c^2} \int_0^R \alpha n \delta m (g_{rr})^{\frac{3}{2}} r dr = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Χρησιμοποιώντας πως

$$\delta s = \frac{c^2}{T} \delta \rho - \frac{\mu}{T} \delta n \quad (4.28)$$

στον πρώτο όρο και την εξίσωση Euler (4.18) για να αντικαταστήσουμε το s στον δεύτερο όρο, η εξίσωση (4.27) γίνεται

$$\begin{aligned} c^2 \int_0^R \frac{1}{T} \delta \rho (g_{rr})^{\frac{1}{2}} r^2 dr + \frac{G}{c^2} \int_0^R \frac{\rho c^2 + p}{T} \delta m (g_{rr})^{\frac{3}{2}} r dr - \beta_0 c^2 \int_0^R \delta \rho r^2 dr \\ + \int_0^R \left(\alpha - \frac{\mu}{T} \right) \delta n (g_{rr})^{\frac{1}{2}} r^2 dr + \frac{G}{c^2} \int_0^R \left(\alpha - \frac{\mu}{T} \right) n \delta m (g_{rr})^{\frac{3}{2}} r dr = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Καθώς τα ρ και n είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές και $\delta m \sim \delta \rho$, ο τέταρτος όρος στην τελευταία εξίσωση (4.29) δίνει

$$\alpha = \frac{\mu}{T} \quad (4.30)$$

Αυτό είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα, καθώς η θερμοκρασία και το χημικό δυναμικό θα πρέπει να υπόκεινται στην ίδια ερυθρή μετατόπιση. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή για το α και την εξίσωση (4.23) παίρνουμε

$$\begin{aligned} c^2 \int_0^R \frac{1}{T} \delta \rho (g_{rr})^{\frac{1}{2}} r^2 dr + \frac{G}{c^2} \int_0^R \frac{\rho c^2 + p}{T} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} r \left(\int_0^r \delta \rho(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} \right) dr - \beta_0 c^2 \int_0^R \delta \rho r^2 dr = 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^R dr (\delta \rho) (c^2 r^2) \cdot \left\{ \frac{1}{T} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} + \frac{4\pi G}{c^4} \int_r^R \frac{\rho(\tilde{r}) c^2 + p(\tilde{r})}{T(\tilde{r})} (g_{rr}(\tilde{r}))^{\frac{3}{2}} \tilde{r} d\tilde{r} - \beta_0 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

όπου, πηγαίνοντας από την πρώτη στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ανταλλάξει στο διπλό ολοκλήρωμα της μεταβλητές ολοκλήρωσης, αλλάζοντας κατάλληλα τα όρια της ολοκλήρωσης. Προκειμένου να ισχυει αυτή η εξίσωση για κάθε διαταραχή $\delta \rho$, θα πρέπει να είναι

$$\beta_0 = \frac{1}{T} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} + \frac{4\pi G}{c^4} \int_r^R \frac{\rho(\tilde{r}) c^2 + p(\tilde{r})}{T(\tilde{r})} (g_{rr}(\tilde{r}))^{\frac{3}{2}} \tilde{r} d\tilde{r} \quad (4.32)$$

που για $T_0 = 1/\beta_0$ και $r = R$ γίνεται

$$T_0 = T(R) (g_{rr}(R))^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ή} \quad T_0 = T(R) \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

που είναι η γνωστή σχέση Tolman[39]. Συνεπώς, ο πολλαπλασιαστής Lagrange $T_0 = 1/\beta_0$ είναι η επιφανειακή θερμοκρασία στο όριο $r = R$, όπως μετράται από έναν παρατηρητή στο

άπειρο,

Ας επαναλάβουμε την απόδειξη μιας σχέσης που δίνεται στο Addendum του Gao, [56] που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Παραγωγίζοντας την εξίσωση Euler (4.18) και χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο, (4.17) παίρνουμε

$$dp = sdT + nd\mu \Rightarrow p' = sT' + n\mu' \quad (4.34)$$

Η εξίσωση (4.30) δίνει

$$\mu' = \alpha T' \quad (4.35)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.34), (4.35) και (4.18) έχουμε

$$\frac{T'}{T} = \frac{p'}{p + \rho c^2} \quad (4.36)$$

Αυτή είναι η επιθυμητή εξίσωση. Παραγωγίζοντας, τώρα, την εξίσωση (4.32) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & -\frac{T'}{T^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\Lambda} r^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{T} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\Lambda} r^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ & \quad \times \frac{1}{c^2} \left(-4\pi G \rho r + \frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r\right) \\ & - \frac{1}{T} \frac{1}{c^2} (4\pi G \frac{p}{c^2} r + 4\pi G \rho r) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\Lambda} r^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

που μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης (4.36) δίνει τελικά την εξίσωση TOV

$$p' = -\left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi G \frac{p}{c^2} r - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\Lambda} r^2\right)^{-1} \quad (4.38)$$

Ας συζητήσουμε την περίπτωση της κανονικής συλλογής. Θεωρείστε ένα σφαιρικό ρευστό περιορισμένο από ανακλαστικά και διαθερμικά τοιχώματα μέσα σε δεξαμενή θερμότητας σταθερής θερμοκρασίας T_0 στην επιφάνεια των τοιχωμάτων, όπως μετράται από έναν παρατηρητή στο άπειρο. Καθώς η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ της δεξαμενής και του συστήματος γίνεται μόνο στην επιφάνεια, η θερμοκρασία που υπεισέρχεται στην ελεύθερη ενέργεια Helmholtz F είναι η T_0 :

$$F = Mc^2 - T_0 S \quad (4.39)$$

Τα ελάχιστα της F θα δίνουν τα ευσταθή σημεία ισορροπίας. Μερικές φορές είναι χρήσιμο (και είναι ισοδύναμο) να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Massieu $J = -\beta_0 F$, δηλαδή

$$J = S - \beta_0 Mc^2 \quad (4.40)$$

Τα μέγιστα, τώρα, της J θα δίνουν την ευσταθή ισορροπία. Για ευκολία, θα αναφερόμαστε καταχρηστικά στην έκφραση (4.40) ως την ελεύθερη ενέργεια. Καθώς το β_0 είναι σταθερό και είναι η αντίστροφη θερμοκρασία στην επιφάνεια της σφαίρας όπως μετράται από έναν παρατηρητή στο άπειρο, είναι στοιχειώδες να δει κανείς πως το ακρότατο, δηλαδή το σημείο μηδενισμού σε διαταραχές πρώτης τάξης, της ελεύθερης ενέργειας με σταθερό βαρυονικό

αριθμό είναι ισοδύναμο με το ακρότατο της εντροπίας με σταθερή ενέργεια και βαρυονικό αριθμό

$$\delta J + \alpha \delta N = 0 \Leftrightarrow \delta S - \beta_0 c^2 \delta M + \alpha \delta N = 0 \quad (4.41)$$

Συνεπώς, οι δύο συλλογές, κανονική και μικροκανονική, δίνουν τα ίδια σημεία ισορροπίας, δηλαδή την εξίσωση TOV, όπως θα έπρεπε. Όμως, οι διαταραχές σε δεύτερη τάξη των J και S δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Δηλαδή και στη Σχετικότητα, οι ιδιότητες ευστάθειας στις δύο συλλογές είναι διαφορετικές.

4.3 Θερμοδυναμική ευστάθεια

Είδαμε στο κεφάλαιο 2 ότι στη Βαρύτητα, τουλάχιστον στο Νευτώνειο όριο, οι στατιστικές συλλογές δεν είναι ισοδύναμες [20, 43]. Αυτό σημαίνει ότι αν και περιγράφουν τις ίδιες καταστάσεις ισορροπίας, οι ιδιότητες της ευστάθειας είναι διαφορετικές. Γενικά, τα βαρυτικά συστήματα είναι πιο ασταθή στην κανονική συλλογή από τη μικροκανονική. Αυτό σημαίνει ότι στη μικροκανονική συλλογή υπάρχουν περισσότερες καταστάσεις ισορροπίας από την κανονική. Η ερώτηση που τίθεται είναι πως η δυναμική ευστάθεια σχετίζεται με τη θερμοδυναμική. Στην περίπτωση της Νευτώνειας βαρύτητας, για ένα σφαιρικά συμμετρικό σύστημα, είδαμε στην παράγραφο 3.4 ότι η δυναμική αστάθεια Jeans είναι ισοδύναμη με τη θερμοδυναμική αστάθεια στην κανονική συλλογή, ενώ αν η ενέργεια εξαναγκαστεί να μείνει σταθερή κατά τη διαταραχή η δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη θερμοδυναμική στη μικροκανονική συλλογή. Οι SWZ [55] αποδείξανε στη Γενική Σχετικότητα πως στην περίπτωση της ακτινοβολίας η δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη θερμοδυναμική στη μικροκανονική συλλογή, χωρίς να τεθεί εκπεφρασμένα η απαίτηση διατήρησης της ενέργειας. Η ερώτηση που εξετάζουμε στην παράγραφο αυτή είναι αν η δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη θερμοδυναμική ευστάθεια στη μικροκανονική συλλογή για κάθε καταστατική εξίσωση, στη Γενική Σχετικότητα.

Στη μικροκανονική συλλογή, η ευστάθεια της ισορροπίας καθορίζεται από τη δεύτερης τάξης διαταραχή της εντροπίας. Αν για κάθε διαταραχή, είναι αρνητική, τότε η εντροπία έχει μέγιστο και η ισορροπία είναι ευσταθής ή καλύτερα μετασταθής καθώς το μέγιστο είναι τοπικό στην περίπτωσή μας. Φυσικά, το ολικό μέγιστο στην εντροπία δίνεται από την έκφραση Bekenstein-Hawking για μια μελανή οπή στο ημι-κλασικό επίπεδο, ενώ στο κλασικό επίπεδο δεν υπάρχουν ολικά μέγιστα στην εντροπία (τουλάχιστον όχι χωρίς την εισαγωγή κάποιου μήκους αποκοπής). Ας υπολογίσουμε τη δεύτερης τάξης διαταραχή στην εντροπία.

Θυμίζουμε ότι (εξισώσεις (4.6), (4.7), (4.22))

$$f = \delta m, \quad \delta \rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{df}{dr}, \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \Lambda r^2\right)^{-1} \quad (4.42)$$

και $\delta m(0) = \delta m(R) = 0$. Επίσης, η εξίσωση (4.36) υποδεικνύει ότι

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta p}{p + \rho c^2} \quad (4.43)$$

άρα

$$\delta \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T} \frac{\delta p}{p + \rho c^2} \quad (4.44)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.42), (4.44), η δευτερης τάξης μεταβολή της εντροπίας που δίνεται στην (4.24) είναι:

$$\delta^2 S = - \int_0^R dr \frac{c^2}{T} \frac{\delta p}{p + \rho c^2} \frac{df}{dr} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} \quad (I_1)$$

$$+ \int_0^R dr \frac{2G}{T} \frac{1}{r} f \frac{df}{dr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} \quad (I_2) \quad (4.45)$$

$$+ \int_0^R dr \frac{3G}{T} (p + \rho c^2) \frac{4\pi G}{c^4} f^2 (g_{rr})^{\frac{5}{2}} \quad (I_3)$$

όπου όλες οι ποσότητες (εκτός από τις διαταραχές) αντιστοιχούν στην ισορροπία, δηλαδή έχουμε παραλείψει τον δείκτη e που χρησιμοποιούσαμε στην Παράγραφο 4.1. Ολοκληρώνοντας κατά μέρος το ολοκλήρωμα (I_2) παίρνουμε

$$I_2 = \int_0^R dr \frac{G}{Tr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{p'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} + 3 \frac{1}{c^2} \left(-4\pi G \rho r + \frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r \right) g_{rr} \right\} f^2$$

Συνεπώς

$$I_2 + I_3 = \int_0^R dr \frac{G}{Tr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{p'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} + 3 \frac{1}{c^2} \left(4\pi G \frac{p}{c^2} r + \frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r \right) g_{rr} \right\} f^2$$

που, με τη χρήση της TOV (Γ'.14) γίνεται:

$$I_2 + I_3 = \int_0^R dr \frac{G}{Tr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{2p'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} \right) f^2 \quad (4.46)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρος το (I_1) παίρνουμε

$$I_1 = \int_0^R dr \frac{c^2}{T} \frac{1}{p + \rho c^2} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} \left\{ \delta p' - \delta p \frac{2p' + \rho' c^2}{p + \rho c^2} \right\} f \\ - \int_0^R dr \frac{c^2}{T} \frac{1}{p + \rho c^2} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} \delta p \frac{1}{c^2} \left(-4\pi G \rho r + \frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r \right) f$$

που, με τη χρήση της TOV (Γ'.14) στη δεύτερη γραμμή, γίνεται:

$$I_1 = \int_0^R dr \frac{c^2}{T} \frac{1}{p + \rho c^2} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} \left\{ \delta p' - \delta p \frac{p' + \rho' c^2}{p + \rho c^2} + \delta p \frac{4\pi G}{c^4} (p + \rho c^2) g_{rr} \right\} f \quad (4.47)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.46), (4.47) στην (4.45) παίρνουμε

$$\delta^2 S = \int_0^R dr \frac{1}{T} \frac{c^2}{p + \rho c^2} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} f \\ \times \left\{ \delta p' - \delta p \frac{p' + \rho' c^2}{p + \rho c^2} + (p + \rho c^2) g_{rr} \left[\delta p \frac{4\pi G}{c^4} + \frac{G}{r c^2} \left(-\frac{2p'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} \right) f \right] \right\} \quad (4.48)$$

Συγκρίνοντας αυτήν με την εξίσωση (4.10) βλέπουμε πως για να είναι η ποσότητα στις αγγύλες ίση με το αριστερό μέλος της (4.10), και άρα η μικροκανονική θερμοδυναμική ευστάθεια να είναι ισοδύναμη με τη γραμμική δυναμική ευστάθεια, θα πρέπει να ισχύει:

$$p'\delta\rho = \delta p\rho' \quad (4.49)$$

Για μια γενική καταστατική εξίσωση $p = p(\rho)$ ισχύει η παραπάνω εξίσωση. Θέτοντας $g = \partial p / \partial \rho c^2$ είναι απλό να ελεγχθεί ότι η εξίσωση (4.48) γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta^2 S = \int_0^R dr \frac{1}{T4\pi r^2} \frac{c^2}{p + \rho c^2} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} f \\ \times \left\{ gc^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{g'}{g} - \frac{2}{r} - \frac{(g+1)c^2\rho'}{p + \rho c^2} + \frac{4\pi G}{c^4} r g_{rr} (p + \rho c^2) \right) \frac{d}{dr} \right] \right. \\ \left. + \frac{4\pi G}{c^2} (p + \rho c^2) r g_{rr} \left(-\frac{2gc^2\rho'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} \right) \right\} f \quad (4.50) \end{aligned}$$

Το πρόσημο της $\delta^2 S$ καθορίζεται συνεπώς από τις ιδιοτιμές του τελεστή

$$\begin{aligned} \hat{L} = gc^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{g'}{g} - \frac{2}{r} - \frac{(g+1)c^2\rho'}{p + \rho c^2} + \frac{4\pi G}{c^4} r g_{rr} (p + \rho c^2) \right) \frac{d}{dr} \right] \\ + \frac{4\pi G}{c^2} (p + \rho c^2) r g_{rr} \left(-\frac{2gc^2\rho'}{p + \rho c^2} + \frac{1}{r} \right) \quad (4.51) \end{aligned}$$

Ο τελεστής αυτός είναι ακριβώς ίσος με αυτόν στην εξίσωση (4.15). Η ισορροπία είναι ευσταθής αν ο \hat{L} έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές, καθώς τότε έχουμε μέγιστα της εντροπίας. Για το ίδιο πρόσημο των ιδιοτιμών δίνει ευστάθεια και ο \hat{L} στη δυναμική ανάλυση της Παραγράφου 4.1. Συνεπώς, η συνθήκη για μικροκανονική, θερμοδυναμική ευστάθεια είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη για γραμμική, δυναμική ευστάθεια.

Ας εξετάσουμε και την κανονική συλλογή. Για $p = p(\rho)$, η δεύτερης τάξης μεταβολή της ελεύθερης ενέργειας (4.40):

$$\delta^2 J = \int_0^R dr \frac{G}{Tr} (g+2) f \frac{df}{dr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} + \int_0^R dr \frac{3G}{T} (p + \rho c^2) \frac{4\pi G}{c^4} f^2 (g_{rr})^{\frac{5}{2}} \quad (4.52)$$

Υπολογίζοντας το πρώτο ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά μέρη και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \int_0^R dr \frac{G}{Tr} (g_{rr})^{\frac{3}{2}} f^2 \left\{ -\frac{g'}{2} + \frac{g+2}{2r} + \frac{3g}{2c^2} g_{rr} \left(\frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{c^2} g_{rr} \left(4\pi G \frac{p}{c^2} r + \frac{Gm}{r^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda} r - 4\pi G \rho r \right) \right\} \quad (4.53) \end{aligned}$$

Καθώς $g_{rr} > 0$ (έτσι που να μη δημιουργείται μελανή οπή) βλέπουμε πως για γραμμική καταστατική εξίσωση

$$p = q\rho c^2, \quad q = const.$$

και για $\Lambda \leq 0$ είναι $\delta^2 J > 0$ για κάθε διαταραχή f . Συνεπώς, σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση η κανονική συλλογή είναι εντελώς ασταθής.

4.4 Θερμοβαρυτική καταστροφή στη Γενική Σχετικότητα με Λ

Σε αυτή την παράγραφο ενδιαφερόμαστε για την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στη θερμοδυναμική ευστάθεια του βαρυτικού αερίου. Το ενδιαφέρον μας είναι κυρίως θεωρητικό και κυρίως θέλουμε να δούμε ποιοτικά και ποσοτικά πως διάφορες (θετικές ή αρνητικές) τιμές της κοσμολογικής σταθεράς επηρεάζουν τη θερμοδυναμική ευστάθεια. Παρά ταύτα, για την περίπτωση της αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς ο σημαντικός λόγος για τη μελέτη του προβλήματος είναι η AdS/CFT και για την περίπτωση της θετικής κοσμολογικής σταθεράς, πέραν του θεωρητικού υπάρχει και φυσικός λόγος για τη μελέτη του προβλήματος. Αν και στην παρούσα φάση της εξέλιξης του σύμπαντος, η κοσμολογική σταθερά μπορεί να είναι μόνο πολύ μικρή, σε μοντέλα με χρονεξαρτώμενη κοσμολογική σταθερά ('σταθερά' μόνο στο χώρο, *decaying vacuum*) [30, 31, 32] θεωρείται πολύ μεγαλύτερη στο παρελθόν έτσι, που δεν αποκλείεται να έχει επηρεάσει το σχηματισμό ακόμα και των αστεριών στο πολύ μακρινό παρελθόν. Επιπλέον, σε κάποιου τύπου αστέρια, για παράδειγμα ταμποζονικά αστέρια, εμφανίζεται μία *effective* κοσμολογική σταθερά, δηλαδή ένας όρος στις εξισώσεις Einstein όμοιος με την κοσμολογική σταθερά [33, 68, 69] με τιμή αρκετά μεγάλη για να επηρεάζει σημαντικά το αστέρι. Συνεπώς, η μελέτη της ευστάθειας της TOV για διάφορες τιμές κοσμολογικής σταθεράς φαίνεται πως είναι άμεσου ενδιαφέροντος για την Αστροφυσική.

Θυμίζουμε από το Κεφάλαιο 3 ότι Θερμοβαρυτική Καταστροφή ονομάζεται το σύνολο των θερμοδυναμικών ασταθειών στη μικροκανονική συλλογή του βαρυτικού αερίου στη Νευτώνειο βαρύτητα. Όπως είδαμε επίσης πολλές φορές, το Νευτώνειο όριο της εξίσωσης TOV είναι η εξίσωση Emden. Είδαμε επίσης πως για γραμμική καταστατική εξίσωση

$$p = q\rho c^2, \quad q = \text{const.} \quad (4.54)$$

το μη-σχετικιστικό όριο αντιστοιχεί στο $q \rightarrow 0$. Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε αυτή την καταστατική εξίσωση με $0 < q \leq 1$. Θα υποθέσουμε επίσης σταθερή χημική σύσταση αλλά και σταθερή εντροπία ανά νουκλεόνιο ($d(s/n) = 0$) σε όλο το αέριο. Αυτές οι υποθέσεις αντιστοιχούν στις ακόλουθες φυσικές καταστάσεις [67]: (α) ένας λευκός νάνος ή ένας αστέρας νετρονίων χαμηλής μάζας, στον οποίο η θερμοκρασία είναι πρακτικά στο απόλυτο μηδέν (το θεώρημα Nernst διασφαλίζει τότε ότι $s/n = 0$). (β) αστέρια σε *convective* ισορροπία, όπως τα υπερμαζικά άστρα και η βαρυτική ακτινοβολία ('*photon stars*'). Άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η δύσκαμπτη (*stiff*) ύλη για την οποία $q = 1$ όπου η ταχύτητα του ήχου ισούται με την ταχύτητα του φωτός (για παράδειγμα το '*black hole gas*' στην κοσμολογία Banks-Fischler [70]).

Το πρόβλημα της δυναμικής ευστάθειας υπό τις ίδιες υποθέσεις στην περίπτωση $\Lambda = 0$ έχει μελετηθεί από τον Chavanis [71, 72]. Χρησιμοποιεί το θεώρημα του Weinberg (σελ. 305 στην [67]) που λέει ότι, υπό τις πάνω προϋποθέσεις, σε μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας, η μάζα και ο βαρυονικός αριθμός έχουν μέγιστο στο σημείο αλλαγής ευστάθειας. Αποδεικνύει πως η μη-γραμμική, δυναμική ευστάθεια όπως ορίζεται στον Weinberg συμπίπτει με τη γραμμική δυναμική ευστάθεια για ύλη με γραμμική καταστατική και σταθερή εντροπία ανά νουκλεόνιο. Οι SWZ [55] έχουν αποδείξει ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση της ακτινοβολίας η γραμμική δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη μικροκανονική θερμοδυναμική ευστάθεια. Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι, στην πιο γενική

περίπτωση, χωρίς κάποιες προϋποθέσεις, η γραμμική δυναμική ευστάθεια συμπίπτει με τη μικροκανονική θερμοδυναμική ευστάθεια. Συνεπώς, όλες οι περιπτώσεις που μελέτησε ο Chavanis στην αναφορά [72] είναι εν τέλει θερμοβαρυτικές αστάθειες. Επιπλέον, αυτή η ισοδυναμία που αποδείξαμε υποδεικνύει πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των θεωρημάτων του Weinberg και αυτό του Poincaré [7, 8]. Φαίνεται πως το θεώρημα Weinberg είναι μόνο μια συγκεκριμένη περίπτωση του θεωρήματος Poincaré των σειρών καταστάσεων ισορροπίας.

Εδώ, ενδιαφερόμαστε κυρίως για το είδος αυτό της αστάθειας που σχετίζεται με την απόλυτη απουσία ισορροπίας. Δηλαδή, με την περιοχή εκείνη πάνω από το μέγιστο στη μάζα ή το βαρυονικό αριθμό σε μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται από μια ελάχιστη ακτίνα έως την οποία μπορεί να επιτευχθεί ισορροπία. Η άλλου τύπου αστάθεια είναι μια ‘ασθενέστερη’ αστάθεια και σχετίζεται με καταστάσεις ισορροπίας, που όμως είναι ασταθείς. Αυτή πάντως η αστάθεια εγκαθίσταται στο ίδιο σημείο με την άλλη, δηλαδή στο μέγιστο της μάζας M και του βαρυονικού αριθμού N (που συμπίπτουν όπως απέδειξε ο Weinberg). Έτσι, που πρακτικά ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε το μέγιστο του N για διάφορες τιμές του Λ σε μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας, δηλαδή καταστάσεις ισορροπίας για διάφορες αντιθέσεις πυκνότητας $\log(\rho_0/\rho_R)$ όπου το ρ_0 είναι η πυκνότητα στο κέντρο και το ρ_R στο άκρο.

Ας αποδείξουμε μια σχέση που θα χρειαστούμε στα ακόλουθα. Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$Td\left(\frac{s}{n}\right) = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.55)$$

Με τις υπόθεσεις που έχουμε κάνει, ο όρος $Td(s/n)$ είναι αμελητέος και άρα:

$$d\rho c^2 = \frac{p + \rho c^2}{n} dn \quad (4.56)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση, λαμβάνοντας υπ’ όψην την καταστατική εξίσωση (4.54), παίρνουμε την πολυτροπική εξίσωση:

$$p = Kn^{q+1} \quad (4.57)$$

Συνδυάζοντας την πολυτροπική εξίσωση (4.57) με την καταστατική εξίσωση (4.54) παίρνουμε:

$$n = \left(\frac{q}{K}\rho c^2\right)^{\frac{1}{q+1}} \quad (4.58)$$

Υποθέτουμε τώρα πως το σφαιρικό ρευστό περιβάλλεται από τέλεια ανακλαστικά και αδιαβατικά τοιχώματα. Χρησιμοποιούμε τις αδιάστατες μεταβλητές του Chandrasekhar [73]

$$\rho = \rho_0 e^{-y}, \quad x = r \sqrt{4\pi G \rho_0 \frac{q+1}{qc^2}} \quad (4.59)$$

όπου τα y, x αντιστοιχούν στα ψ, ξ του Chandrasekhar (προτιμήσαμε να κρατήσουμε το συμβολισμό τον σχετικό με το Νευτώνειο όριο) και ρ_0 είναι η πυκνότητα μάζας στο κέντρο του σφαιρικού ρευστού. Θέτουμε ακόμα:

$$\lambda = \frac{2\rho\Lambda}{\rho_0}, \quad \mu(x) = \frac{1}{4\pi\rho_0} \left(4\pi G \rho_0 \frac{q+1}{qc^2}\right)^{\frac{3}{2}} m(r), \quad M = m(R) \quad (4.60)$$

όπου R είναι η ακτίνα της σφαίρας. Χρησιμοποιώντας αυτές τις αδιάστατες μεταβλητές, η εξίσωση TOV (4.38) γίνεται:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\mu}{x^2} + qxe^{-y} - \frac{\lambda}{3}x \right) \left(1 - 2\frac{q}{q+1}\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{3}\frac{q}{q+1}x^2 \right)^{-1} \quad (4.61)$$

$$\frac{d\mu}{dx} = x^2e^{-y} \quad (4.62)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0) = \mu(0) = 0 \quad (4.63)$$

Εισάγουμε ακόμα την αδιάστατη ενέργεια:

$$Q \equiv \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2\mu}{z} \frac{q}{q+1} \quad (4.64)$$

Έστω z η τιμή του x στο R , όπως και στη Νευτώνεια περίπτωση. Ολοκληρώνοντας την TOV (4.61) είναι εύκολο να υπολογίσουμε το μ στο z και αντικαθιστώντας το στην (4.64) παίρνουμε:

$$Q(z) = \frac{2q}{q+1} \frac{zy'(z) - qz^2e^{-y(z)} - \frac{\lambda}{3}z^2 \left(\frac{q}{q+1}zy'(z) + 1 \right)}{2\frac{q}{q+1}zy'(z) + 1} \quad (4.65)$$

όπου το $y'(z)$ συμβολίζει την παράγωγο $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=z}$. Χρησιμοποιούμε τον αδιάστατο βαρυονικό αριθμό που εισήγαγε ο Chavanis [71] τον οποίο ονομάζουμε B :

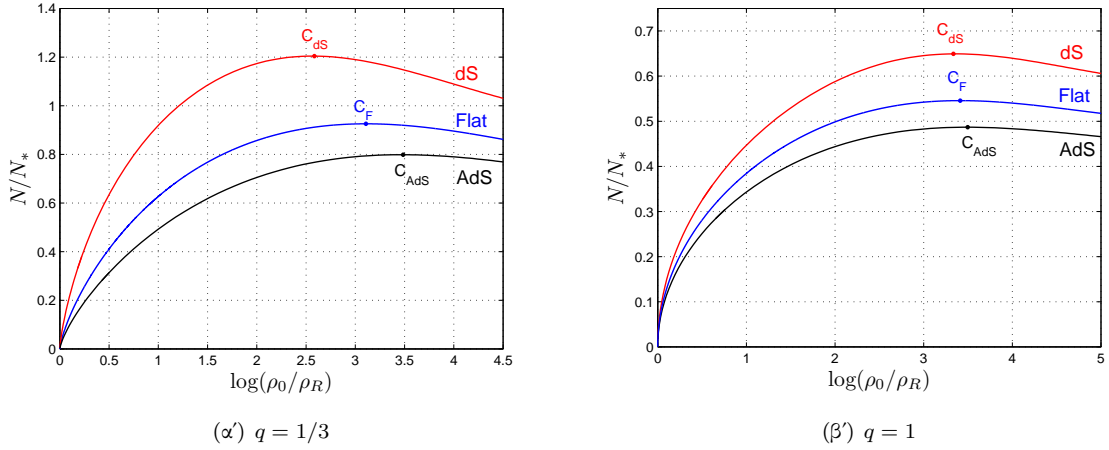
$$B = \frac{N}{N_*}, \quad N_* = 4\pi R^3 \left(\frac{1}{4\pi GK R^2} \frac{q^2 c^4}{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} \quad (4.66)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.25) για το N βρίσκουμε σε αδιάστατες μεταβλητές:

$$B(z) = \frac{1}{z^{\frac{3q+1}{q+1}}} \int_0^z x^2 e^{-\frac{y}{q+1}} \left(1 - 2\frac{q}{q+1}\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{3}\frac{q}{q+1}x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (4.67)$$

Για μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας, όπου κάθε μία προσδιορίζεται από την αδιάστατη ποσότητα z που εξαρτάται από την ακτίνα R και την κεντρική πυκνότητα ρ_0 , η ποσότητα $B(z)$ εκφράζει το βαρυονικό αριθμό για σταθερή ακτίνα, το $Q(z)$ εκφράζει την ολική μάζα για σταθερή ακτίνα, ενώ το $1/Q(z)$ εκφράζει την ακτίνα για σταθερή μάζα. Αντί του z , μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αντίθεση πυκνότητας $\log(\rho_0/\rho_R)$, ως μια ελεύθερη μεταβλητή που ορίζει τις καταστάσεις ισορροπίας.

Όπως και στο Νευτώνειο όριο, στην περίπτωση $\Lambda = 0$ είναι πολύ εύκολο αριθμητικά να παραχθεί η σειρά καταστάσεων ισορροπίας, καθώς το σύστημα των εξισώσεων (4.61), (4.62) μπορεί να θεωρηθεί ως προς το z αντί του x χωρίς πρόβλημα. Όμως, στην παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς είναι λάθος να θεωρηθεί η εξίσωση (4.61) ως προς z . Εμφανίζεται η μεταβλητή λ στις εξισώσεις που δε μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, καθώς περιέχει το ρ_0 . Έτσι, που υπάρχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές στο αδιάστατο σύστημα, οι (λ, z) . Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία αναπτύξαμε μια στρατηγική όμοια με αυτή



Σχήμα 4.1: Ο βαρυονικός αριθμός N ως προς την αντίθεση πυκνότητας $\log(\rho_0/\rho_R)$ για την ακτινοβολία ($q = 1/3$) και για τη δύσκαμπτη ύλη ($q = 1$) για τις περιπτώσεις του ασυμπτωτικά επίπεδου, de Sitter και anti-de Sitter χώρου. Τα σημεία C_i είναι σημεία αλλαγής ευστάθειας, δηλαδή στην αριστερή πλευρά τους η ισορροπία είναι ευσταθής, ενώ στη δεξιά τους, ασταθής. Σε κάθε περίπτωση πάνω από το C_i δεν υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας.

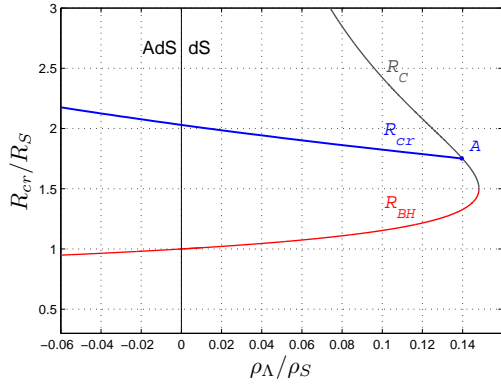
που αναπτύξαμε στο Νευτώνειο πρόβλημα. Η κοσμολογική σταθερά εισάγει μια κλίμακα μάζας στο σύστημα $M_\Lambda = \rho_\Lambda \frac{4}{3}\pi R^3$. Ορίζουμε την αδιάστατη μάζα

$$\tilde{m} \equiv \frac{M}{2M_\Lambda} = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{\rho_\Lambda R^3} = \frac{3\mu}{\lambda z^3} \quad (4.68)$$

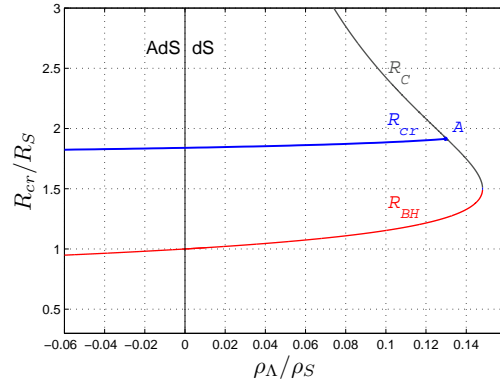
Λύνουμε αριθμητικά το σύστημα (4.61)-(4.62) για ένα εύρος τιμών του z διαλέγοντας αυτή την τιμή για το λ που κρατάει σταθερή την αδιάστατη μάζα \tilde{m} . Αυτή η λειτουργία πραγματοποιείται από ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή που ανέπτυξα. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να παραχθεί αριθμητικά μια συνεχή σειρά καταστάσεων ισορροπίας που αντιστοιχούν σε κάποια σταθερή M ή R ή ρ_Λ σύμφωνα με την εξίσωση (4.68). Τότε, παράγοντας σειρές για διάφορα \tilde{m} μπορούμε να δούμε πως διάφορες κρίσιμες ποσότητες μεταβάλλονται με το Λ .

Στο Σχήμα 4.1 μπορούμε να δούμε πώς αλλάζει ο βαρυονικός αριθμός ως προς την αντίθεση πυκνότητας για κάποιες σταθερές τιμές της κοσμολογικής σταθεράς σε μια σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Η σταθερή θετική τιμή (που αντιστοιχεί στο $\tilde{m} = 1$) συμβολίζεται με ‘dS’ και η σταθερή αρνητική τιμή (που αντιστοιχεί σε $\tilde{m} = -1$) συμβολίζεται με ‘AdS’, ενώ η περίπτωση $\Lambda = 0$ συμβολίζεται ως ‘Flat’. Η σειρά καταστάσεων ισορροπίας είναι σχεδιασμένη για τις περιπτώσεις $q = 1/3$ (ακτινοβολία ή αστέρες νετρονίων) και $q = 1$ (δύσκαμπτη ύλη). Βλέπουμε πως, η αύξηση της τιμής της κοσμολογικής σταθεράς, τείνει να σταθεροποιήσει το σύστημα σε σχέση με την «δυνατή» αστάθεια, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί στην απουσία καταστάσεων ισορροπίας, καθώς το μέγιστο πάει σε μεγαλύτερες τιμές του N . Η «ασθενής» αστάθεια, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί σε ασθενείς καταστάσεις ισορροπίας, συμβαίνει σε χαμηλότερη αντίθεση πυκνότητας καθώς αυξάνει η κοσμολογική σταθερά.

Θα θέλαμε να σχεδιάσουμε την κρίσιμη ακτίνα, δηλαδή την ελάχιστη ακτίνα του σφαιρικού ρευστού έως την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας, ως προς την κοσμολογική



(α) $q = 1/3$



(β) $q = 1$

Σχήμα 4.2: Η κρίσιμη ακτίνα R_{cr} ως προς την κοσμολογική σταθερά ρ_Λ σε μονάδες Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$, $\rho_S = 3M/4\pi R_S^3$ για σταθερή μάζα M . Οι σφαίρες με ακτίνα $R < R_{cr}$ είναι θερμοδυναμικά ασταθείς, δηλαδή δεν υπάρχουν καθόλου καταστάσεις ισορροπίας. Για $R > R_{cr}$ υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας που είναι ευσταθείς ή ασταθείς ανάλογα της τιμής της αντίθεσης πυκνότητας ρ_0/ρ_R . Στο ίδιο διάγραμμα, είναι σχεδιασμένες η ακτίνα μελανής οπής R_{BH} και η κοσμολογική ακτίνα R_C , επίσης. Στα σημεία A , η κρίσιμη ακτίνα ‘χτυπάει’ πάνω στον κοσμολογικό ορίζοντα.

σταθερά. Υπάρχει, όμως, μία περιπλοκή. Στον ασυμπτωτικά de Sitter χώρο, κάθε σφαιρικό ρευστό μάζας M και ακτίνας R έχει δύο χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους: την ακτίνα R_{BH} , που θα αντιστοιχούσε στον ορίζοντα της μελανής οπής αν $R < R_{BH}$ (η R_{BH} είναι το αντίστοιχο του μήκους Schwarzschild GM/c^2 στον de Sitter) και την ακτίνα R_C , που θα αντιστοιχούσε στον κοσμολογικό ορίζοντα αν $R > R_C$ (βλ. Σχήμα 4.2). Η R_{BH} αντιστοιχεί στη μικρότερη ρίζα του πολυωνύμου ως προς R_H :

$$1 - \frac{2GM}{R_H c^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda R_H^2 = 0 \quad (4.69)$$

Η κοσμολογική ακτίνα R_C , είναι η μεγαλύτερη ρίζα του πολυωνύμου (4.69). Αναμένουμε και πραγματικά επιβεβαιώνουμε αριθμητικά ότι η κρίσιμη ακτίνα R_{cr} είναι πάντα μεγαλύτερη από την R_{BH} . Άρα, το σύστημα γίνεται ασταθές πάντα πριν φτάσει στην τιμή ακτίνας που αντιστοιχεί στον ορίζοντα μελανής οπής και γίνει το ίδιο μελανή οπή. Αντίθετα, καθώς αυξάνει η κοσμολογική σταθερά, δηλαδή η τιμή του ορίζοντα R_C μικραίνει κανείς θα περιμενε ότι η R_{cr} ίσως γίνει μεγαλύτερη της R_C . Αυτό θα σήμαινε ότι η σφαίρα με $R = R_C = R_{cr}$ είναι η μεγαλύτερη σφαίρα για την οποία μπορεί να παρατηρηθεί κάποια αστάθεια, διότι για οποιαδήποτε μεγαλύτερη σφαίρα η κρίσιμη ακτίνα βρίσκεται πέρα από τον κοσμολογικό ορίζοντα.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την αδιάστατη μάζα \tilde{m} στην οποία $R = R_C$ ως προς το $Q = 2GM/R_C^2$ ως ακολούθως. Είναι σχετικά εύκολο να επιβεβαιωθεί πως το πολυώνυμο (4.69), για μια σφαίρα ακτίνας R , και για $R_H = R_C$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$1 - Q \frac{1}{(R_C/R)} - \frac{Q}{2\tilde{m}} \left(\frac{R_C}{R} \right)^2 = 0 \quad (4.70)$$

Βλέπουμε ότι $R = R_C$ αν:

$$2\tilde{m} = \frac{Q}{1-Q} \quad (4.71)$$

Επιβεβαιώνουμε αριθμητικά πως αυτή η συνθήκη ισχύει όταν η κρίσιμη ακτίνα ‘χτυπάει’ στον κοσμολογικό ορίζοντα. Από φυσική άποψη η σχέση $R_{cr} > R_C$ στερείται νοήματος και αυτό εκφράζεται μαθηματικά (και αριθμητικά) ως αδυναμία να υπολογιστούν διάφορες φυσικές ποσότητες (για παράδειγμα το N γίνεται μιγαδικό και το πρόγραμμα του υπολογιστή καταρρέει). Έτσι, ώστε ένα σφαιρικό ρευστό με $R_{cr} > R_C$ μπορεί να θεωρηθεί ευσταθές καθώς η ύλη πέραν του κοσμολογικού ορίζοντα δε μπορεί να αλληλεπιδράσει με την ύλη μέσα σε αυτόν. Στο Σχήμα 4.2 είναι σχεδιασμένη η κρίσιμη ακτίνα σε μονάδες Schwarzschild, μαζί με την ακτίνα μελανής οπής και την κοσμολογική ακτίνα, ως προς την κοσμολογική σταθερά για μια σταθερή μάζα. Η κρίσιμη ακτίνα χτυπάει στον κοσμολογικό ορίζοντα στο σημείο A . Σφαίρες με ακτίνα μικρότερη της κρίσιμης ακτίνας είναι μικροκανονικά, θερμοδυναμικά ασταθείς, με την έννοια ότι δεν υπάρχουν καθόλου καταστάσεις ισορροπίας στη μικροκανονική συλλογή.

Όπως είδαμε πολλές φορές, το Νευτώνειο όριο της εξίσωσης TOV αντιστοιχεί σε $q = kT/m_p c^2 \ll 1$. Ας υπολογίσουμε το $B = N/N_*$ για μη-σχετικιστική (dust) ύλη. Αντικαθιστώντας το $c^2 = 1/qm_p\beta$ στην εξίσωση (4.66), και στη συνέχεια θεωρώντας $q \rightarrow 0$, η εξίσωση (4.66) γίνεται:

$$B \xrightarrow{q \rightarrow 0} m_p \frac{GM\beta}{R} \quad (4.72)$$

Αυτή είναι ακριβώς η αδιάστατη Νευτώνεια θερμοκρασία (3.61) για $m_p = 1$. Καθώς το B ελέγχει τη μικροκανονική, θερμοδυναμική ευστάθεια στη Σχετικότητα και την κανονική, θερμοδυναμική ευστάθεια στο Νευτώνειο όριο, φαίνεται πως το Νευτώνειο όριο της σχετικιστικής μικροκανονικής συλλογής είναι η κανονική συλλογή². Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να δικαιολογηθεί διαισθητικά, καθώς η κανονική συλλογή στη Νευτώνεια Βαρύτητα συμπεριφέρεται ποιοτικά όμοια με σχετικιστικό σύστημα. Αυτό το λέμε διότι στη Νευτώνεια κανονική συλλογή, για σταθερή μάζα, η θερμοδυναμική αστάθεια συμβαίνει καθώς το σύστημα συστέλλεται πέραν κάποιας ελάχιστης ακτίνας (δηλαδή για μικρές ακτίνες), όπως και στη Γενική Σχετικότητα, ενώ στη Νευτώνεια μικροκανονική συλλογή, η αστάθεια εγκαθίσταται όταν το σύστημα διαστέλλεται πέραν κάποιας μέγιστης ακτίνας (δηλαδή για μεγάλες ακτίνες).

²Επιπλέον, επιβεβαιώσαμε αριθμητικά ότι για $q = 0$, δηλαδή μη-σχετικιστική ύλη, η κρίσιμη τιμή του z για κάθε τιμή κοσμολογικής σταθεράς ισούται με το κρίσιμο z της Νευτώνειας κανονικής συλλογής (και όχι της Νευτώνειας μικροκανονικής συλλογής).

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Μελετήσαμε τη θερμοδυναμική, σφαιρικά συμμετρικού βαρυτικού αερίου στο Νευτώνειο όριο και στη Γενική Σχετικότητα. Επιγραμματικά, τα αποτελέσματά μας είναι τα ακόλουθα. Στο Νευτώνειο όριο βρίσκουμε ότι:

- Η θετική κοσμολογική σταθερά (περίπτωση dS) τείνει να σταθεροποιήσει το σύστημα.
- Η αρνητική κοσμολογική σταθερά (περίπτωση AdS) τείνει να το αποσταθεροποιήσει.
- Όσο αυξάνει η κοσμολογική σταθερά, η αστάθεια εγκαθίσταται σε μικρότερες κεντρικές πυκνότητες και χαμηλότερες θερμοκρασίες και ενέργειες.
- Για θετική κοσμολογική σταθερά παρατηρούμε ένα νέο φαινόμενο μετάβασης φάσης επανεισόδου.
- Για θετική κοσμολογική σταθερά, βρίσκουμε μια απειρία νέων σειρών καταστάσεων ισορροπίας.
- Περιγράφουμε την ευστάθεια και την κατανομή πυκνότητας των νέων αυτών λύσεων.
- Για θετική κοσμολογική συμπεριφορά, περιγράφουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των καταστάσεων ισορροπίας που σχετίζεται με την εμφάνιση «κλασματικών» (fractal) δομών.

Στη Γενική Σχετικότητα, τα αποτελέσματά μας επιγραμματικά είναι τα ακόλουθα:

- Συνάγουμε την σχετικιστική εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (TOV) από το ακρότατο της εντροπίας υπό σταθερή ενέργεια (μικροκανονική συλλογή).
- Συνάγουμε την σχετικιστική εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (TOV) από το ακρότατο της ελεύθερης ενέργειας υπό σταθερή θερμοκρασία (κανονική συλλογή).
- Αποδεικνύουμε την ισοδυναμία της γραμμικής ευστάθειας των εξισώσεων Einstein με τη θερμοδυναμική ευστάθεια στη μικροκανονική συλλογή και τη μη-ισοδυναμία με την ευστάθεια στην κανονική συλλογή.
- Παρατηρούμε πως η μικροκανονική συλλογή στη Σχετικότητα συμπεριφέρεται σαν την κανονική (και όχι τη μικροκανονική) στο Νευτώνειο όριο.
- Βρίσκουμε πως όπως και στη Νευτώνειο περίπτωση, όσο αυξάνει η κοσμολογική σταθερά το σύστημα τείνει να σταθεροποιηθεί.

Πιο αναλυτικά, αναφέρουμε πως στη Νευτώνειο Βαρύτητα, εστίασαμε στην επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς Λ στην ευστάθεια σφαιρικών ρευστών. Τα φαινόμενα της *Θερμοβαρυτικής Καταστροφής* (μικροκανονική συλλογή) και της *ισοθερμικής κατάρρευσης* (κανονική συλλογή) διατυπώθηκαν υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς [24, 25, 26]. Ένα γενικό αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις είναι ότι ο dS (θετικό Λ) τείνει να σταθεροποιήσει το σύστημα, ενώ ο AdS (αρνητικό Λ) τείνει να το αποσταθεροποιήσει. Στη μικροκανονική συλλογή βρίσκουμε πως η μέγιστη ακτίνα έως την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας αυξάνει καθώς αυξάνει η κοσμολογική σταθερά. Επιπλέον, εμφανίζεται μια *δεύτερη, μεγαλύτερη κρίσιμη ακτίνα*, σχετιζόμενη με την κοσμολογική σταθερά, όπου οι καταστάσεις ισορροπίας αποκαθίστανται. Το γεγονός αυτό αναγνωρίζεται ως μια *μετάβαση φάσης επανεισόδου*. Στην κανονική συλλογή, η ελάχιστη ακτίνα έως την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας μειώνεται με την αύξηση της κοσμολογικής σταθεράς. Η ελάχιστη θερμοκρασία έως την οποία υπάρχουν καταστάσεις ισορροπίας μειώνεται καθώς αυξάνεται το Λ και εμφανίζεται μια *δεύτερη, μικρότερη κρίσιμη θερμοκρασία*, σχετιζόμενη με την κοσμολογική σταθερά, όπου οι καταστάσεις ισορροπίας αποκαθίστανται. Αυτή είναι πάλι μια τυπική *μετάβαση φάσης επανεισόδου*. Η κρίσιμη αντίθεση πυκνότητας $(\rho_0/\rho_R)_{cr}$ όπου εγκαθίσταται αστάθεια μειώνεται με αυξανόμενο Λ και στις δύο συλλογές. Σημειώνουμε ότι στον dS διάφορες νέες σειρές καταστάσεων ισορροπίας εμφανίζονται που δεν υπάρχουν στον AdS ή την περίπτωση $\Lambda = 0$. Αυτό συμβαίνει εξ' αιτίας του απωστικού χαρακτήρα της θετικής Λ (dark energy) που επιτρέπει την εμφάνιση διαφορετικών δομών με αύξουσα (από το κέντρο προς το άκρο της σφαίρας) ή με μη-μονοτονική πυκνότητα. Επίσης, εμφανίζεται μια ομογενή σειρά καταστάσεων ισορροπίας, η οποία αναγνωρίζεται ως το Νευτώνειο όριο του στατικού σύμπαντος του Einstein, και παρουσιάζει αστάθεια για θερμοκρασίες μικρότερες μιας κρίσιμης τιμής, η οποία είναι κοινή και στις δύο συλλογές.

Η κανονική συλλογή έχει συσχετιστεί με φράκταλ δομές που εμφανίζονται στο σύμπαν [21, 22] (για παράδειγμα οι κατανομές των γαλαξιών) και μπορούν να μελετηθούν παρουσία κοσμολογικής σταθεράς από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 3.1.4. Σχετικά με τις εφαρμογές της μικροκανονικής συλλογής, τονίζουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις πως η κοσμολογική σταθερά παίζει ρόλο στην εξέλιξη των σμηνών και υπερσμηνών γαλαξιών [74, 75]. Επιπλέον η θερμοβαρυτική καταστροφή, θα μπορούσε να παίζει ρόλο, καθώς πολλά παρουσιάζουν μια δομή πυρήνα-άλω και άλλα έχουν μια υπερμαζική μελανή οπή στο κέντρο τους. Πιστεύουμε πως η επίδραση της Θερμοβαρυτικής Καταστροφής τόσο χωρίς αλλά και με την κοσμολογική σταθερά, στην εξέλιξη των γαλαξιακών σμηνών αξίζει περαιτέρω διερεύνησης.

Τονίζουμε ότι η συμπεριφορά επανεισόδου (reentrant) του Σχήματος 3.7 προσομοιάζει τους δύο ορίζοντες της μελανής οπής Schwarzschild-dS στη Γενική Σχετικότητα. Η ακτίνα αυτών των οριζόντων έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.8 ως προς την κοσμολογική σταθερά. Η ομοιότητα μεταξύ των Σχημάτων 3.7 και 3.8 είναι πολύ έντονη και το περιεχόμενο αρκετά σχετικό, για να θεωρηθεί σύμπτωση. Φαίνεται πως το φαινόμενο που περιγράφουμε είναι το κοντινότερο Νευτώνειο ανάλογο στους δύο ορίζοντες του χώρου Schwarzschild-dS, όπου τον ρόλο της ακτίνας Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$ τον παίζει η ποσότητα $R_N = GM^2/|E|$. Όμως, υπάρχει μια μεγάλη διαφορά. Η ευσταθής περιοχή του Νευτώνειου συστήματος αντιστοιχεί στην περιοχή μέσα στους ορίζοντες στο σχετικιστικό σύστημα.

Όλα τα παραπάνω αναφέρονται στο Νευτώνειο όριο. Όσων αφορά στη Γενική Σχετικό-

τητα, πιστεύουμε πως ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα, είναι πως για ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό, τέλειο ρευστό, οι εξισώσεις Einstein είναι πλήρως ισοδύναμες με τη θερμοδυναμική του βαρυτικού αερίου στη μικροκανονική συλλογή [38]. Αυτή η ισοδυναμία δε μένει μόνο στις καταστάσεις ισορροπίας, αλλά και στις ιδιότητες της ευστάθειας αυτών. Επιπλέον παρατηρούμε πως η μικροκανονική συλλογή στη Γενική Σχετικότητα συμπεριφέρεται σαν την κανονική συλλογή στο Νευτώνειο όριο (όπου αναφερόμαστε πάντα σε στατικό, σφαιρικά συμμετρικό, τέλειο ρευστό).

Τέλος, μελετήσαμε πως οι ιδιότητες ευστάθειας επηρεάζονται από την παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς στη Γενική Σχετικότητα για συγκεκριμένες καταστατικές εξισώσεις. Τα κύρια αποτελέσματα θα λέγαμε πως συνοψίζονται στα Σχήματα 4.1 και 4.2. Για την περίπτωση της ακτινοβολίας (και του πυρήνα αστέρων νετρονίων), η κρίσιμη ακτίνα κάτω από την οποία δεν υπάρχει θερμοδυναμική ισορροπία, μειώνεται με αυξανόμενη κοσμολογική σταθερά ενώ για την δύσκαμπτη ύλη αυξάνεται. Αυτή η κρίσιμη ακτίνα είναι πάντα μεγαλύτερη από την ακτίνα μελανής οπής έτσι, που το σύστημα γίνεται ασταθές πριν φτάσει στην ακτίνα μελανής οπής (δηλαδή στην ακτίνα που γίνεται μελανή οπή) για κάθε τιμή κοσμολογικής σταθεράς. Όμως, σε κάποιο σημείο η κρίσιμη ακτίνα χτυπάει πάνω στον κοσμολογικό ορίζοντα. Κάθε σφαίρα με μεγαλύτερη ακτίνα μπορεί να θεωρηθεί ευσταθής καθώς η ύλη πέρα από τον ορίζοντα δε μπορεί να αλληλεπιδράσει με την ύλη μέσα σε αυτόν. Επιπλέον, μια αύξηση στην κοσμολογική σταθερά τείνει να αποσταθεροποιήσει το σύστημα θερμοδυναμικά, καθιστώντας τον ασυμπτωτικά de Sitter χώρο, πιο ευσταθή από τον ασυμπτωτικά anti-de Sitter, τουλάχιστον στο καθαρά κλασικό επίπεδο.

Σχετικά με πιθανές επεκτάσεις και εφαρμογές της σχετικιστικής ανάλυσης, πέραν αυτών που αναφέρουμε στην Παράγραφο 4.3 σχετικά με την AdS/CFT και την ευστάθεια των compact αστεριών, σχολιάζουμε πως κάποιος εύλογα θα περίμενε ότι μια εντροπική αρχή θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε περιστρεφόμενα, σχετικιστικά αστέρια σε υδροστατική ισορροπία (βλ. αναφορές [76, 77] για σύγχρονες ανασκοπήσεις στα σχετικιστικά, περιστρεφόμενα αστέρια). Αρχές λογισμού μεταβολών της ενέργειας έχουν ήδη αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται στη μελέτη των περιστρεφόμενων, σχετικιστικών αστεριών ξεκινώντας από την παλιά εργασία των Hartle & Sharp [78], ενώ μια θερμοδυναμική προσέγγιση περιστρεφόμενων σωμάτων και το όριο μελανή οπή αναπτύσσεται στην αναφορά [79]. Τονίζουμε πως, σήμερα, οι αστάθειες των περιστρεφόμενων, σχετικιστικών αστεριών είναι σημαντικές και εξαιρετικού ενδιαφέροντος για την αστροφυσική, λόγω των πολλών πειραμάτων, που είναι αφιερωμένα στην ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων [80, 81]. Είναι λογικό να περιμένουμε, πως μια θερμοδυναμική ανάλυση, πέρα από την εννοιολογική ενόραση που θα προσφέρει στη μελέτη των ασταθειών των περιστρεφόμενων, σχετικιστικών αστεριών, θα δώσει επιπλέον ένα τεχνικό πλεονέκτημα στον προσδιορισμό της ευσταθούς περιοχής της ισορροπίας. Αυτό διότι, ενώ στις δυναμικές αστάθειες οι τρόποι ταλάντωσης μελετώνται ένα προς ένα, η θερμοδυναμική ανάλυση είναι ανεξάρτητη των συγκεκριμένων τρόπων ταλάντωσης καθιστώντας έτσι τις θερμοδυναμικές αστάθειες, μια ευρύτερη έννοια.

Παράρτημα Α΄

Η αστάθεια Jeans

Θα κάνουμε μια ανασκόπηση της αστάθειας Jeans με βάση κυρίως το βιβλίο των Binney & Tremaine [6]. Προκειμένου να απλοποιήσει τους υπολογισμούς σχετικά με τη δυναμική αστάθεια του βαρυτικού αερίου στη Νευτώνεια Βαρύτητα, ο Jeans υπέθεσε πως η κατάσταση ισορροπίας είναι ένα άπειρο ομογενές αέριο. Αυτό δεν μπορεί να είναι αληθές για ένα βαρυτικό αέριο, καθώς η βαρυτική δύναμη $-\nabla\phi_e$ πρέπει να εξισορροπείται από τη βαθμίδα της πίεσης $\nabla p_e/\rho_e$. Αλλά σε ένα ομογενές μέσο η βαθμίδα της πίεσης είναι μηδέν και η συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας δίνει απλά $\nabla\phi_e = 0$. Αυτή η εξίσωση είναι ασύμβατη με την εξίσωση Poisson. Η υπόθεση $\phi_e = 0$ έχει ονομαστεί η ‘εξαπάτηση του Jeans’ (“the Jeans swindle”). Παρά όλα αυτά, αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί φυσικά αν η κλίμακα της διαταραχής που προκαλεί την αστάθεια είναι πολύ μικρότερη από την κλίμακα στην οποία η πίεση και η πυκνότητα μεταβάλλονται δραστηκώς.

Χρησιμοποιώντας το Jeans swindle και γράφοντας

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho}\delta\rho = v_s^2\delta\rho$$

όπου v_s^2 είναι η ταχύτητα του ήχου, οι διαταραγμένες εξισώσεις (3.99), (3.100) και (3.101) γίνονται:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_e\nabla(\delta v) = 0 \quad (\text{A'.1})$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = -v_s^2\frac{\nabla\delta\rho}{\rho_e} - \nabla\delta\phi \quad (\text{A'.2})$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \quad (\text{A'.3})$$

Η εξίσωση (A'.1) δίνει

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho_e\nabla\frac{\partial(\delta v)}{\partial t} = 0$$

και συνεπώς, με τη χρήση επίσης της εξίσωσης (A'.3), η εξίσωση (A'.2) δίνει:

$$\nabla\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = -v_s^2\frac{\nabla^2\delta\rho}{\rho_e} - \nabla^2\delta\phi \Rightarrow -\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} = -v_s^2\frac{1}{\rho_e}\nabla^2\delta\rho - 4\pi G\delta\rho$$

και τελικά

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - v_s^2\nabla^2\delta\rho - 4\pi G\rho_e\delta\rho = 0 \quad (\text{A'.4})$$

Αναπτύσσοντας τη γενική λύση αυτής της εξίσωσης κατά Fourier:

$$\delta\rho = \int C(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} d^3\vec{k}$$

τα ω , \vec{k} πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση διασποράς:

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_e$$

Αν $\omega^2 > 0$ η αντίστοιχη κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής. Αν για μια κατάσταση ισορροπίας είναι $\omega^2 < 0$, τότε αυτή είναι ασταθής, καθώς μια διαταραχή θα μεγαλώσει ως $e^{\pm|\omega|t}$. Συνεπώς η συνθήκη για ύπαρξη αστάθειας γίνεται:

$$\omega^2 < 0 \Rightarrow k^2 < \frac{4\pi G\rho_e}{v_s^2}$$

ή

$$k < k_J \quad , \quad \text{όπου } k_J = \frac{4\pi G\rho_e}{v_s^2} \quad (\text{A'.5})$$

και k_J ονομάζεται ο *κυματάριθμος Jeans*. Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι η διαταραχή οδηγεί σε αστάθεια αν υπερβαίνει το μήκος κύματος *Jeans* $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_e}} v_s \quad (\text{A'.6})$$

Σημειώστε πως, αν και είδαμε στην παράγραφο 3.4 πως η αστάθεια Jeans για σφαιρικό ρευστό είναι ισοδύναμη στην κανονική θερμοδυναμική ευστάθεια, βλέπουμε από την εξίσωση (A'.6) ότι ο χαρακτήρας της ανισότητας είναι όμοιος με τη μικροκανονική θερμοδυναμική ευστάθεια, δηλαδή συμβαίνει όταν η διαταραχή είναι *μεγαλύτερη* από κάποια κλίμακα. Κανείς θα πρέπει να είναι προσεκτικός καθώς στην παράγραφο 3.4 θεωρήσαμε την αστάθεια Jeans πεπερασμένου σφαιρικού ρευστού και όχι ενός πυκνώματος μέσα σε ένα άπειρο ομογενές μέσον, όπως εδώ. Στην προκειμένη περίπτωση ουσιαστικά δεν διατηρείται ο αριθμός σωματιδίων κατά τη διαταραχή, καθώς θεωρώντας σταθερή την πυκνότητα, μια όλο και μεγαλύτερη διαταραχή περιλαμβάνει όλο και μεγαλύτερη μάζα.

Παράρτημα Β'

Οι εντροπίες Gibbs και Boltzmann

Ακολουθώντας τον Katz [43] θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ της εντροπίας Gibbs και της εντροπίας Boltzmann στην απλή περίπτωση ενός συστήματος σε εξωτερικό πεδίο. Έστω N σωματίδια μέσα σε τέλεια ανακλαστικά τοιχώματα σε ένα εξωτερικό δυναμικό $U(\vec{r})$. Έστω E η τιμή της ολικής ενέργειας $H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i=1}^N mU(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N E_i = E \quad (\text{B'.1})$$

όπου E_i είναι η ενέργεια του σωματιδίου i . Η πυκνότητα καταστάσεων Gibbs $g(E)$ δίνεται στην εξίσωση (2.1) και είναι το άθροισμα όλων των πιθανών καταστάσεων διαιρεμένο με $N!$. Υποθέτοντας ίση πιθανότητα για κάθε μικροκατάσταση, η εντροπία Gibbs (4.18) είναι ισοδύναμη με τη φόρμουλα του Boltzmann (να μη γίνει σύγχυση με την εντροπία Boltzmann(2.17))

$$S_G = \log g(E) \Leftrightarrow g(E) = e^{S_G}$$

για $k = 1$.

Αντικαθιστώντας τη δέλτα συνάρτηση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του 1 στην $g(E)$ και αναδιατάσσοντας μερικούς όρους παίρνουμε από την (2.1):

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{1}{N!} \int \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty}^{b+\infty} e^{\beta(E-\sum E_i)} d\beta \right) \prod_{i=1}^N d\tau_i \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty}^{b+\infty} \Psi e^{\beta E} d\beta \end{aligned} \quad (\text{B'.2})$$

όπου $d\tau_i = d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i$ και

$$\Psi = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N e^{-\beta E_i} d\tau_i = \frac{1}{N!} \left(\int e^{-\beta E_0} d\tau \right)^N$$

με $E_0 = p^2/2m + mU(r)$ την ενέργεια του ενός σωματιδίου που βρίσκεται στο \vec{r} με ορμή \vec{p} και $d\tau = d^3\vec{r} d^3\vec{p}$. Γράφουμε το Ψ ως:

$$\Psi = \sum_{N'=0}^{\infty} \frac{1}{N'!} \left(\int e^{-\beta E_0} d\tau \right)^{N'} \delta_{N'N}$$

Προσεγγίζοντας το $\delta_{N',N}$ με $\delta(N' - N)$ καθώς $N \gg 1$ και αντικαθιστώντας τη δέλτα συνάρτηση με την ολοκληρωτική της αναπαράσταση όπως προηγουμένως, παίρνουμε:

$$\Psi \simeq \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \sum_{N'=0}^{\infty} \frac{1}{N'!} \left(\int e^{-\beta E_0} d\tau \right)^{N'} e^{\alpha(N'-N)} d\alpha$$

Θέτοντας

$$f = e^{\alpha - \beta E_0} \quad (\text{B'.3})$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Psi &\simeq \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\alpha N} \left\{ \sum_{N'=0}^{\infty} \frac{1}{N'!} \left(\int f d\tau \right)^{N'} \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\alpha N + \int f d\tau} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B'.4})$$

Συμβολίζοντας

$$\sigma = -\alpha N + \beta E + \int f d\tau \quad (\text{B'.5})$$

και αντικαθιστώντας το Ψ στην (B'.2), η πυκνότητα καταστάσεων γράφεται ως

$$g(E) \simeq \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\sigma} d\alpha d\beta \quad (\text{B'.6})$$

Ας ερευνήσουμε για ακρότατο του $\sigma(\alpha, \beta)$. Καθώς τα α, β είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και

$$\delta\sigma = \left(-N + \int f d\tau \right) \delta\alpha + \left(E - \int E_0 f d\tau \right) \delta\beta$$

το ακρότατο καθορίζεται από τις συνθήκες

$$N = \int f d\tau \quad , \quad E = \int E_0 f d\tau$$

που ορίζουν μια κατάσταση ισορροπίας f_e . Η τιμή στην ισορροπία σ_e δίνεται συνεπώς από

$$\sigma_e = -\alpha_e \int f_e d\tau + \beta_e \int E_0 f_e d\tau + \int f_e d\tau = - \int (\alpha_e - \beta_e E_0) f_e d\tau + N = - \int f_e \log f_e d\tau + N$$

Άρα, η εντροπία Boltzmann S ισούται με σ_e (συν κάποια σταθερά)

$$S = \sigma_e = - \int f_e \log f_e d\tau + N \quad (\text{B'.7})$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor το σ γύρω από την τιμή στην ισορροπία σ_e και κρατώντας μέχρι όρους δεύτερης τάξης, η εντροπία Gibbs (B'.6) μπορεί να γραφεί ως:

$$g(E) = e^{S_G} \simeq e^S \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\delta^2 \sigma} d\alpha d\beta + \mathcal{O}(\delta^3 \sigma) \quad (\text{B'.8})$$

Για $\delta\alpha = \alpha - \alpha_e$ και $\delta\beta = \beta - \beta_e$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta^2\sigma &= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha^2} \right|_e (\delta\alpha)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\partial\beta} \right|_e \delta\alpha\delta\beta + \left. \frac{\partial^2\sigma}{\partial\beta^2} \right|_e (\delta\beta)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (N(\delta\alpha)^2 - 2E\delta\alpha\delta\beta + N\overline{E_0}(\delta\beta)^2) \\
&= \frac{1}{2} N \left\{ (\delta\alpha - \overline{E_0}\delta\beta)^2 + \overline{(E_0 - \overline{E_0})^2} (\delta\beta)^2 \right\} \tag{B'.9}
\end{aligned}$$

όπου οι παύλες συμβολίζουν μέσες τιμές ως προς την κατανομή f_e . Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς

$$\alpha^* = i(\delta\alpha - \overline{E_0}\delta\beta) \quad , \quad \beta^* = i\delta\beta$$

η εξίσωση (B'.8) γίνεται

$$g(E) = e^{S_G} \simeq e^S \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{N}{2}\alpha^{*2}} d\alpha^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{N}{2}\overline{(E_0 - \overline{E_0})^2}\beta^{*2}} d\beta^*$$

Είναι απλό να υπολογιστούν τα γκαουσιανά ολοκληρώματα για να πάρουμε

$$S_G \sim S - \log N - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \overline{(E_0 - \overline{E_0})^2} \tag{B'.10}$$

Αυτό δείχνει ότι το S είναι ένα μέγιστο του σ για κάθε U . Επιπλέον, καθώς το S είναι της τάξης N και $N \gg 1$ οι τρεις τελευταίοι όροι είναι αμελητέοι έτσι, ώστε

$$S_G \simeq S$$

Παράρτημα Γ'

Συνθήκη δυναμικής ευστάθειας για τέλεια σφαιρικά ρευστά

Γ'.1 Η εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkov από τις εξισώσεις Einstein

Θα συνάγουμε την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας για τέλειο ρευστό στη Γενική Σχετικότητα, ήτοι την εξίσωση TOV, από τις εξισώσεις Einstein. Η μετρική για ένα σφαιρικά συμμετρικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή [39]

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d^2\phi) \quad (\Gamma'.1)$$

με $\nu = \nu(r, t)$ και $\lambda = \lambda(r, t)$ στη γενική μη-στατική περίπτωση. Για ένα τέλειο ρευστό, ο ταυοστής ενέργειας-ορμής είναι

$$T_\nu^\mu = (p + \rho c^2)g_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - p\delta_\nu^\mu \quad (\Gamma'.2)$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρική (Γ'.1), αυτός ο ταυοστής ενέργειας-ορμής (Γ'.2) έχει τις ακόλουθες συνιστώσες (π. 251 in Τολμαν [39])

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda \quad (\Gamma'.3)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda \quad (\Gamma'.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^4} T_3^3 = & -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) \\ & + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) - \Lambda \end{aligned} \quad (\Gamma'.5)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_0^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\Gamma'.6)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_1^0 = e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\Gamma'.7)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει την παραγωγή ως προς r και η τελεία ως προς t . Η τετραταχύτητα έχει συνιστώσες $u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0)$. Στην ισορροπία $u^1 = 0$, και ο ταχυστής ενέργειας–ορμής έχει μόνο τις ακόλουθες μη-μηδενικές συνιστώσες

$$T_0^0 = \rho \quad , \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \quad (\Gamma'.8)$$

και τα λ, ν είναι ανεξάρτητα του t . Συνεπώς, οι εξισώσεις (Γ'.3-Γ'.5) γίνονται

$$\frac{dp_e}{dr} = -\frac{1}{2}(p_e + \rho_e c^2) \nu'_e \quad (\Gamma'.9)$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho_e = e^{-\lambda_e} \left(\frac{\lambda'_e}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda \quad (\Gamma'.10)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} p_e = e^{-\lambda_e} \left(\frac{\nu'_e}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \quad (\Gamma'.11)$$

όπου ο δείκτης e συμβολίζει ποσότητες στην ισορροπία. Η εξίσωση (Γ'.9) είναι το σχετικιστικό ανάλογο της Νευτώνειας έκφρασης για την υδροστατική ισορροπία

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{dr} \quad (\Gamma'.12)$$

Συνάγεται, εξισώνοντας τις (Γ'.4) και (Γ'.5). Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$e^{-\lambda_e} = 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \quad (\Gamma'.13)$$

στην εξίσωση (Γ'.11), λύνοντας ως προς ν'_e και αντικαθιστώντας το ν'_e στην εξίσωση (Γ'.9), παίρνουμε την εξίσωση TOV:

$$p_e' = -\left(\frac{p_e}{c^2} + \rho_e \right) \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi G \frac{p_e}{c^2} r - \frac{\Lambda}{3} c^2 r \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} \quad (\Gamma'.14)$$

που είναι η σχετικιστική εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας. Η εναπομείνουσα εξίσωση (Γ'.10) δίνει

$$m' = 4\pi \rho_e r^2 \quad (\Gamma'.15)$$

το οποίο σημαίνει ότι το m είναι η μάζα που περιέχεται μέσα σε ακτίνα r . Οι εξισώσεις (Γ'.14) και (Γ'.15) μαζί με την καταστατική εξίσωση $p_e = p_e(\rho_e)$ περιγράφουν πλήρως την ισορροπία, δεδομένων των αρχικών συνθηκών.

Γ'.2 Μια εξίσωση για τη γραμμική δυναμική ευστάθεια

Σε αυτή την παράγραφο υπολογίζουμε την εξίσωση που καθορίζει τη γραμμική ευστάθεια για ένα στατικά σφαιρικά συμμετρικό τέλειο ρευστό, ακολουθώντας τον Yabushita [66]. Ας θεωρήσουμε μικρές διαταραχές γύρω από μια κατάσταση ισορροπίας στις εξισώσεις Einstein (Γ'.3)-(Γ'.7)

$$\lambda = \lambda_e + \delta\lambda, \quad \nu = \nu_e + \delta\nu, \quad p = p_e + \delta p, \quad \rho = \rho_e + \delta\rho, \quad u^1 = \delta u^1, \quad u^0 = u_e^0 + \delta u^0 \quad (\Gamma'.16)$$

με τις διαταραχές να εξαρτώνται από τα r και t . Σε πρώτη τάξη, οι εξισώσεις Γ'.3-Γ'.5 δίνουν

$$\frac{1}{r}e^{-\nu_e}\delta\ddot{\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4} \left\{ \delta p' + \frac{\nu_e'}{2}(\delta p + \delta\rho c^2) + \frac{1}{2}(p_e + \rho_e c^2)\delta\nu' \right\} \quad (\Gamma'.17)$$

Η διατήρηση της μάζας $T_0^\mu{}_{;\mu} = 0$ δίνει

$$\dot{\rho} + T_0^{1'} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}(p + \rho c^2) + T_0^1 \left(\frac{1}{2}\lambda' + \frac{1}{2}\nu' + \frac{2}{r} \right) = 0 \quad (\Gamma'.18)$$

που μετά την αντικατάσταση της Γ'.16, την παραγωγή ως προς t και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Γ'.9-Γ'.11 δίνει

$$\ddot{\rho} - \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \frac{e^{-\lambda_e}}{r} \delta\ddot{\lambda} = 0 \quad (\Gamma'.19)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση Γ'.17 στην Γ'.19 παίρνουμε

$$\ddot{\rho} - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left\{ e^{\nu_e - \lambda_e} \left[\delta p' + \frac{\nu_e'}{2}(\delta p + \delta\rho c^2) + \frac{\delta\nu'}{2}(p_e + \rho_e c^2) \right] \right\} \quad (\Gamma'.20)$$

Έστω

$$f(r, t) \equiv \delta m(r, t) \quad (\Gamma'.21)$$

με

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\Gamma'.22)$$

Υποθέτοντας μια διαταραχή της μορφής

$$\delta m \sim e^{\sigma t} \quad (\Gamma'.23)$$

με $\delta m(r=0) = 0$ και ολοκληρώνοντας την εξίσωση Γ'.17 παίρνουμε τελικά

$$\delta p' + \frac{\nu_e'}{2}(\delta p + \delta\rho c^2) + \frac{\delta\nu'}{2}(p_e + \rho_e c^2) = \frac{e^{\lambda_e - \nu_e}}{4\pi r^2} \sigma^2 f \quad (\Gamma'.24)$$

Η κοσμολογική σταθερά δεν υπεισέρχεται εκπεφρασμένα στην εξίσωση αυτή, παρά μόνον έμμεσα στις ποσότητες της ισορροπίας.

Βιβλιογραφία

- [1] P. Cortiglioni S. Delpino F. Sironi G. Mandolesi, N. Calzolari. Large-scale homogeneity of the Universe measured by the microwave background. *Letters to Nature*, 319:751, 1986.
- [2] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [3] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 192:18, 2011, arXiv:1001.4538.
- [4] J.H. Jeans. The Stability of a Spherical Nebula. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 199:1, 1902.
- [5] Perry M.J. Gross, D.J. and L.G. Yaffe. Instability of flat space at finite temperature. *Phys. Rev.*, D25:330, 1982.
- [6] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton, 1987.
- [7] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta. Math.*, 7:259, 1885.
- [8] T. Katz. On the number of unstable modes of an equilibrium. *MNRAS*, 183:765, 1978.
- [9] V.A. Antonov. Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence. *Vest. Leningrad Univ.*, 7:135, 1962.
- [10] D. Lynden-Bell and R. Wood. The Gravo-thermal Catastrophe in Isothermal Spheres and the onset of Red-giant Structure for stellar systems. *MNRAS*, 138:495, 1968.
- [11] T. Padmanabhan. Antonov instability and gravothermal catastrophe-revisited. *ApJS*, 71:651, 1989.
- [12] R.B. Larson. A method for computing the evolution of star clusters. *MNRAS*, 147:323, 1970.
- [13] H. Cohn. Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability. *ApJ*, 242:765, 1980.

- [14] D. Lynden-Bell and P.P. Eggleton. On the consequences of gravothermal catastrophe. *MNRAS*, 191:483, 1980.
- [15] P. Klinko and B.N. Miller. Dynamical Simulation of Gravothermal Catastrophe. *Phy. Rev. Lett.*, 92:021102, 2004.
- [16] H.J. de Vega and N.G. Sanchez. Statistical mechanics of the selfgravitating gas: 1. Thermodynamic limit and phase diagram. *Nucl.Phys.*, B625:409–459, 2002, arXiv:astro-ph/0101568.
- [17] H.J. de Vega and N.G. Sanchez. Statistical mechanics of the selfgravitating gas: 2. Local physical magnitudes and fractal structures. *Nucl.Phys.*, B625:460–494, 2002, arXiv:astro-ph/0101567.
- [18] S.L. Shapiro and S.A. Teukolski. The collapse of dense star clusters to supermassive black holes - The origin of quasars and AGNs. *ApJ*, L41:292, 1985.
- [19] Pierre-Henri Chavanis. Gravitational instability of finite isothermal spheres. *A&A*, 381:340, 2001, arXiv:astro-ph/0103159.
- [20] T. Padmanabhan. Statistical Mechanics of Gravitating Systems. *Phys. Rep.*, 188:285, 1990.
- [21] H.J. de Vega, N.G. Sanchez, and F. Combes. Selfgravity as an explanation of the fractal structure of the interstellar medium. *Nature*, 1996, arXiv:astro-ph/9609005.
- [22] H.J. de Vega, Norma G. Sanchez, and F. Combes. The Fractal structure of the universe: A New field theory approach. *Astrophys.J.*, 500:8–13, 1998, arXiv:astro-ph/9801224.
- [23] B. Semelin, H.J. de Vega, Norma G. Sanchez, and F. Combes. Renormalization group flow and fragmentation in the selfgravitating thermal gas. *Phys.Rev.*, D59:125021, 1999, arXiv:astro-ph/9812467.
- [24] Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas. Gravothermal Catastrophe with a Cosmological Constant. *Phys.Rev.*, D86:104005, 2012, arXiv:1206.2839.
- [25] Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas. Gravothermal instability with a cosmological constant in the canonical ensemble. *J. Phys. Conf. Ser.*, 410:012130, 2013, arXiv:1303.4543.
- [26] Minos Axenides, George Georgiou, and Zacharias Roupas. Gravitational instabilities of isothermal spheres in the presence of a cosmological constant. *Nucl. Phys. B*, 871:21–51, 2013, arXiv:1302.1977.
- [27] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys.Rept.*, 323:183–386, 2000, arXiv:hep-th/9905111.
- [28] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, 1999, arXiv:astro-ph/9812133.

- [29] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*, 116:1009–1038, 1998, arXiv:astro-ph/9805201.
- [30] I. Waga. Decaying Vacuum Flat Cosmological Models: expressions for some observable quantities and their properties. *Astrophys. J.*, 414:436, 1993.
- [31] R.P. Woodard and N.C. Tsamis. Quantum Gravity slows inflation. *Nucl. Phys. B*, 474:235, 1996.
- [32] A.M. Polyakov. Infrared instability of the de Sitter space. 2012, arXiv:1209.4135.
- [33] C.G. Boehmer and T. Harko. Dynamical instability of fluid spheres in the presence of a cosmological constant. *Phys.Rev.*, D71:084026, 2005, arXiv:gr-qc/0504075.
- [34] F. Staniscia, P.H. Chavanis, G. De Ninno, and Fanelli D. Out-of-equilibrium phase re-entrance(s) in long-range interacting systems. *Phys.Rev.*, E80:021138, 2009, arXiv:0903.5039.
- [35] F. Staniscia, P.H. Chavanis, and G. De Ninno. Out-of-equilibrium phase transitions in the HMF model: a closer look. *Phys.Rev.*, E83:051111, 2011, arXiv:1012.1566.
- [36] de Buyl P. Lori L. Ruffo S. Dauxois, T. Models with short- and long-range interactions: the phase diagram and the reentrant phase. *J. Stat. Mech.*, P:06015, 2010, arXiv:1004.1458.
- [37] C.K. Thomas and H.G. Katzgraber. Simplest model to study reentrance in physical systems. *Phys. Rev.*, E84:040101(R), 2011, arXiv:1104.2582.
- [38] Zacharias Roupas. Thermodynamical instabilities of perfect fluid spheres in General Relativity. *Class. Quantum Grav.*, 30:115018, 2013, arXiv:1301.3686.
- [39] R.C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford, 1934.
- [40] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1973.
- [41] N. Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag, 1984.
- [42] W. Dehnen and J. Read. N-body simulations of gravitational dynamics. *Eur.Phys.J.Plus*, 126:55, 2011, arXiv:1105.1082.
- [43] T. Katz. Thermodynamics of Self-Gravitating Systems. *Found. Phys.*, 33:223, 2003.
- [44] H.J. de Vega and J.A. Siebert. The Self-gravitating gas in the presence of dark energy. *Nucl.Phys.*, B707:529–552, 2005, arXiv:astro-ph/0305322.
- [45] H.J. de Vega and J.A. Siebert. The Self-gravitating gas in the presence of dark energy: Monte-Carlo simulations and stability analysis. *Nucl.Phys.*, B726:464–480, 2005, arXiv:astro-ph/0410147.

- [46] C. Destri and H.J. de Vega. Dilute and Collapsed Phases of the Self-Gravitating Gas. *Nucl.Phys.*, B763:309–329, 2007, arXiv:astro-ph/0605409.
- [47] E.T. Jaynes. Gibbs vs. Boltzmann Entropies. *American Journal of Physics*, 33:391, 1965.
- [48] M.C. Sormani and G. Bertin. Gravothermal Catastrophe: the dynamical stability of a fluid model. 2013, arXiv:1301.6038.
- [49] Donald Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *MNRAS*, 136:101–121, 1967.
- [50] A. Harvey and Schucking E. Einstein’s mistake and the cosmological constant. *Am. J. Phys.*, 68:723, 2000.
- [51] Marek Nowakowski, Juan-Carlos Sanabria, and Alejandro Garcia. Gravitational equilibrium in the presence of a positive cosmological constant. *Phys.Rev.*, D66:023003, 2002, arXiv:astro-ph/0105212.
- [52] G.W. Gibbons. The entropy and stability of the Universe. *Nucl. Phys. B*, 292:784, 1987.
- [53] G.W. Gibbons. Sobolev’s inequality, Jensen’s theorem and the mass and entropy of the Universe. *Nucl. Phys. B*, 310:636, 1988.
- [54] W. J. Cocke. A maximum entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 2:283, 1965.
- [55] Wald R.M. Sorkin, R.D. and Zhang Z.J. Entropy of Self-Gravitating Radiation. *Gen. Rel. Grav.*, 13:1127, 1981.
- [56] Sijie Gao. A general maximum entropy principle for self-gravitating perfect fluid. *Phys.Rev.*, D84:104023, 2011, arXiv:1109.2804.
- [57] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys.Rev.*, D7:2333–2346, 1973.
- [58] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161, 1973.
- [59] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199, 1975.
- [60] Ted Jacobson. Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state. *Phys.Rev.Lett.*, 75:1260–1263, 1995, arXiv:gr-qc/9504004.
- [61] T. Padmanabhan. Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights. *Rept.Prog.Phys.*, 73:046901, 2010, arXiv:0911.5004.
- [62] Erik P. Verlinde. On the Origin of Gravity and the Laws of Newton. *JHEP*, 1104:029, 2011, arXiv:1001.0785.
- [63] B.L. Hu. Gravity and Nonequilibrium Thermodynamics of Classical Matter. *Int.J.Mod.Phys.*, D20:697–716, 2011, arXiv:1010.5837.

- [64] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, 55:374, 1939.
- [65] Christian G. Boehmer. General relativistic static fluid solutions with cosmological constant. 2002, arXiv:gr-qc/0308057.
- [66] S. Yabushita. Pulsational instability of isothermal gas spheres within the framework of General Relativity. *MNRAS*, 165:17, 1973.
- [67] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*. Wiley New York, 1972.
- [68] M.K. Mak, Jr. Dobson, Peter N., and T. Harko. Maximum mass radius ratio for compact general relativistic objects in Schwarzschild-de Sitter geometry. *Mod.Phys.Lett.*, A15:2153–2158, 2000, arXiv:gr-qc/0104031.
- [69] Cosimo Bambi. Strange stars and the cosmological constant problem. *JCAP*, 0706:006, 2007, arXiv:0704.2126.
- [70] T. Banks and W. Fischler. An Holographic cosmology. 2001, arXiv:hep-th/0111142.
- [71] Pierre-Henri Chavanis. Gravitational instability of finite isothermal spheres in general relativity. analogy with neutron stars. *A&A*, 381:709, 2002, arXiv:astro-ph/0108230.
- [72] Pierre-Henri Chavanis. Relativistic stars with a linear equation of state: analogy with classical isothermal spheres and black holes. *A&A*, 483:673, 2008, arXiv:0707.2292.
- [73] S. Chandrasekhar. *A limiting case of relativistic equilibrium*. Oxford, 1972.
- [74] M. Axenides, E.G. Floratos, and L. Perivolaropoulos. Some dynamical effects of the cosmological constant. *Mod.Phys.Lett.*, A15:1541–1550, 2000, arXiv:astro-ph/0004080.
- [75] G. Mark Voit. Tracing cosmic evolution with clusters of galaxies. *Rev.Mod.Phys.*, 77:207–258, 2005, arXiv:astro-ph/0410173.
- [76] Nikolaos Stergioulas. Rotating stars in relativity. *Living Rev.Rel.*, 6:3, 2003, arXiv:gr-qc/0302034.
- [77] Eric Gourgoulhon. An Introduction to the theory of rotating relativistic stars. 2010, arXiv:1003.5015.
- [78] J.B. Hartle and D.H. Sharp. Variational Principle for the Equilibrium of a Relativistic, Rotating Star. 147:317, 1967.
- [79] G. Neugebauer. Black Hole Thermodynamics. 514:319, 1998.
- [80] Nils Andersson. Gravitational waves from instabilities in relativistic stars. *Class.Quant.Grav.*, 20:R105, 2003, arXiv:astro-ph/0211057.
- [81] Loic Villain. Instabilities of rotating compact stars: a brief overview. 2006, arXiv:astro-ph/0602234.