ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μη Γραμμικοί Υδάτινοι Κυματισμοί: Σύγκριση Διαφόρων Μεταβολικών Μεθόδων

Συγγραφέας:
Χρήστος Παπουτσέλλης

Υπεύθυνος:
Καθ. Γεράσιμος Αθανασούλης

Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών - Τομέας Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής

Περίληψη

Η προτυποποίηση των υδάτινων κυματισμών είναι ένας εκτενής ερευνητικός τομέας που παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές της μηχανικής όπως .... Οι υδάτινοι κυματισμοί (επιφανειακοί κυματισμοί ή κυματισμοί βαρύτητας) δημιουργούνται από την βαρυτική δύναμη υπό την παρουσία ελεύθερης επιφάνειας πάνω στην οποία η πίεση είναι σταθερή. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτού του προβλήματος είναι ότι τα φαινόμενα διάδοσης συμβαίνουν κατά την οριζόντια κατεύθυνση και ότι μη-τοπικές αλληλεπιδράσεις (κύμα - κύμα, κύμα - πυθμένας) υφίστανται διαμέσου της κατακόρυφης δομής του ροικού πεδίου.

Σε αυτή την εργασία θεωρούμε το πρόβλημα διάδοσης των κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια ιδανικού, ασυμπίεστου ρευστού πάνω από αυθέρετη θαλάσσια τοπογραφία υπό την επίδραση της βαρύτητας. Η Eulerian περιγραφή υιοθετείται, δηλ. Η κίνηση των σωματιδίων του ρευστού καθορίζεται από το πεδίο ταχύτητας στο υδάτινο χωρίο κάθε χρονική στιγμή.

Στο πρώτο κεφάλαιο οι παρουσιάζονται οι εξισώσεις του φυσικού προβλήματος. Η ροή θεωρείται αστρόβιλη. Οι άγνωστες φυσικές ποσότητες είναι το δυναμικό της ταχύτητας και η ελεύθερη επιφάνεια. Οι εξισώσεις που διέπουν το φυσικό πρόβλημα είναι, μία γραμμική μερική διαφορική εξίσωση -εξίσωση Laplace, για το δυναμικό της ταχύτητας, σε ένα χρονοεξαρτόμενο χωρίο φραγμένο απο την ελεύθερη επιφάνεια και τον σταθερό ανομοιογενή πυθμένα. Μία ομογενής συνθήκη Neumann πρέπει να ικανοποιείται στον πυθμένα και δύο μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια. Χρονική παραγώγιση εμφανίζεται στις δύο εξισώσεις στην ελεύθερη επιφάνεια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο η παρουσιάζεται η διατύπωση κατα Hamilton. Η Χαμιλτονιανή η οποία ισούται με την ολική ενέργεια γράφεται συναρτήσει της ελεύθερης επιφάνειας και του ίχνους του δυναμικού σε αυτήν, δια μέσου ενός κατάλληλου Dirichlet to Neumann τελεστή. Η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται βάσει πειφανειακών ποσοτήτων που παίζουν το ρόλο των γενικευμένων συντεταγμένων και ορμών. Αυτό είναι δυνατό μόνο όταν θεωρήσουμε εκ τών προτέρων, το γεγονός ότι η ροή είναι ασυμπίεστη και αστρόβιλη και ο πυθμένας μη διαπερατός. Έτσι, εξάγουμε τις εξισώσεις Hamilton μεταβάλοντας την Χαμιλτονιανή. Οι τελικές εξισώσεις είναι δύο μη γρμμικές και μη-τοπικές εξελικτικές εξισώσεις επί επιφανειακών ποσοτήτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια άλλη μεταβολική αρχή του προβήματος του υδάτινου κυματισμού. Σε αυτή τη διατύπωση, εκτός απο την αστροβιλότητα, καμία άλλη κινηματική συνθήκη δε πρέπει να ικανοπόιείται εκ των προτέρων αφού όλες οι εησώσεις που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 1 εξάγονται απο την μεταβολική αρχή. Η Λαγκρανζιανή ελιναι το ολοκλήρωμα της πίεσης σε όλο το χρονοεξαρτόμενο υδάτινο χωρίο. Στη τελευταία ενότητα του κεφαλαίου δείχνουμε την σύνδεση ανάμεσα στη μεταβολική αρχη του Luke και την αρχή του Hamilton.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε τη μεταβολική αρχή του Luke σε σύνδεση με την ακριβή και συμβατή αναπαράσταση του δυναμικού της ταχύτητας. Η αναπαράσταση είναι μια άπειρη σειρά σε κάθετες συναρτήσεις με ταχέως φθίνοντες συντελεστές, η οποία είναι συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες του υδάτινου χωρίου. Το κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι μας

επιτρέπει να αναπαραστήσουμε ακριβώς το δυναμικό της ταχύτητας στην μεταβολική αρχή. Το αποτέλεσμα είναι η αναδιατύπωση του ολικά μη γραμμικού προβλήματος του δυάτινου κυματισμού σαν ένα σύστημα δύο εξελικτικών εξισώσεων και ενός άπειρου συστήματος συζευγμένων Σ.Δ.Ε (2Δ) η Μ.Δ.Ε (3Δ). Ένα αποετέλεσμα αυτής της ανάλυσης είναι μια καινούρια αναπαράσταση του τελεστή Dirichlet to Neumann , η οποία είναι ακριβής, γενική και βολική για την περίπτωση της γενικής βαθυμετρίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαφορική διατύπωση του προβλήματος

Σε αυτό το κεφάλαιο συνοψίζουμε τη διατύπωση του προβλήματος υδάτινων κυματισμών η οποία μπορεί να βρεθεί σε πολλά κλασσικά βιβλία (δεσ πχ. [Wit74, Ch. 13, s. 1], [Sto57, Ch. 1, s. 1], [Lam75, Ch. 9, s. 227]).

Θεωρείστε ένα ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό (νερό) σε ένα σταθερό βαρυτικό πεδίο πάνω από γενική βαθυμετρία. Η οριζόντιές και η κάθετη συντεταγμένη συμβολίζονται $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2)$ καιz αντιστοίχως και οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας $\boldsymbol{u}$ με (u_1, u_2, v). Η βαρυτική επιτάχυνση $\boldsymbol{g}$ είναι αρνητική στην κατεύθυνση z. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η πυκνότητα ρ παραμένει σταθερή και ότι υπάρχει μια εξωτερική δύναμη $\boldsymbol{F} = -\rho g(0, 0, 1)$. Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης (Euler Equations)

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g(0, 0, 1), \tag{1.1}$$

οι οποίες μαζί με την *εξίσωση συνέχειας* (υπενθ. $\partial_t \rho = 0$)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_z v = 0, \tag{1.2}$$

αποτελούν ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων το οποίο όταν καθοριστούν οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες μπορεί να προσδιορισθεί η ταχύτητα $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, v)$ και η πίεση p.

Στο υπόλοιπο της εργασίας η ροή θεωρείται *αστρόβιλη* (δλδ. $\mathrm{curl}\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = 0$), συνεπώς εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενος δυναμικού $\Phi(\boldsymbol{x}, z, t)$ απο το οποίο μπορεί να εξαχθεί το πεδίο ταχυτήτων

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi \equiv (\partial_{x_1}\Phi, \partial_{x_2}\Phi, \partial_z\Phi). \tag{1.3}$$

Από (1.2), το Φ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\Delta\Phi = \partial^2_{x_1x_1}\Phi + \partial^2_{x_2x_2}\Phi + \partial^2_{zz}\Phi = 0. \tag{LE}$$

Αντικαθιστώντας την (1.3) στην (1.1) και ολοκληρώνοντας σε όλο το χωρίο του ρευστού λαμβάνουμε την γνωστή *Αρχή του Bernoulli* για αστρόβιλη ροή

$$\partial_t\Phi + \frac{1}{2}(|\nabla\Phi|^2) + \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \tag{1.4}$$

όπου $f(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου. Η εξίσωση Laplace (LE) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορισθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας και *Αρχή του Bernoulli* (1.4) θα μας δώσει την πίεση p. Σημειώνουμε ότι η πίεση p εξαρτάται από την $f(t)$ η οποία είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Αυτή η συνάρτηση προστιθέμενη στην πίεση δεν αλλάζει την βαθμίδα της πίεσης, έτσι, δεν επηρεάζει την κίνηση του ρευστού. Η $f(t)$ μπορεί να απορροφηθεί στο Φ απλά εισάγωντας ένα δυναμικό $\Phi' = \Phi - \int f(t)dt$. Το Φ' είναι αρμονικό και ικανοποιεί $\nabla\Phi' = \nabla\Phi$. Από την (1.4) για το Φ' δεξια μέλος εξαφανίζεται, συνεπώς μπορούμε να πάρουμε $f(t) \equiv 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ορίσουμε το χωρίου του ρευστού για να προχωρήσουμε στην διατύπωση των συνοριακών συνθηκών. Θεωρούμε την περίπτωση δύο ρευστών (νερό - αέρας), χωρισμένα από μία διεπιφάνεια η οποία περιγράφεται από μία συνάρτηση $\eta(\boldsymbol{x}, t)$, πάνω απο μία σταθερή τοπογραφία που περιγράφεται από μία συνάρτηση $h(\boldsymbol{x})$. Για $t \geq t_0$ συμβολίζουμε $\mathcal{D}^\eta_h(t)$

το άγνωστο χρονοεξαρτόμενο χωρίο του ρευστού που ορίζεται από

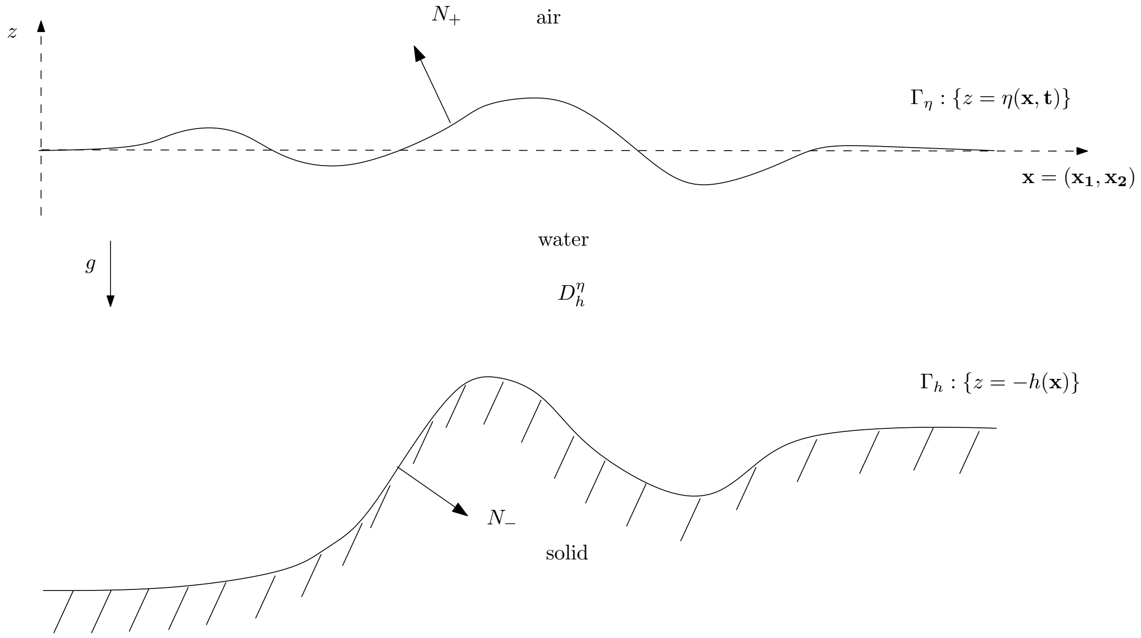
$$\mathcal{D}_h^\eta = \{(\boldsymbol{x}, z) \in S \times \mathbb{R} : z \in (-h(\boldsymbol{x}), \eta(\boldsymbol{x}, t))\}, \tag{1.5}$$

όπου $S \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι η οριζόντια προβολή της ελεύθερης επιφάνειας. Η βαθυμετρία και η ελεύθερη επιφάνεια συμβολίζονται

$$\Gamma_h = \{(\boldsymbol{x}, z) \in S \times \mathbb{R} : z = -h(\boldsymbol{x})\}, \tag{1.6}$$

$$\Gamma_\eta(t) = \{(\boldsymbol{x}, z) \in S \times \mathbb{R} : z = \eta(\boldsymbol{x}, t)\}. \tag{1.7}$$

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{N}_- = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\boldsymbol{x}} h|^2}}(-\nabla_{\boldsymbol{x}} h, -1)^T$ και $\boldsymbol{N}_+ = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\boldsymbol{x}} \eta|^2}}(-\nabla_{\boldsymbol{x}} \eta, 1)^T$ τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην Γ_h και $\Gamma_\eta(t)$ αντίστοιχα, όπου $\nabla_{\boldsymbol{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ είναι η οριζόντια παράγωγος. Στη σταθερη βαθυμετρία Γ_h η καθετη ταχύτητα του ρευστού πρέπει να



μηδενίζεται

$$\boldsymbol{N}_- \cdot [\boldsymbol{u}]_{z=-h} = 0 \qquad \text{for} \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{x} \in S. \tag{1.8}$$

Η διεπιφάνεια των δύο ρευστών ορίζεται από την ιδιότητα ότι δεν μπορεί να διαπεραστεί από τα σωματίδια του ρευστού. Αυτό σημαίνει ότι η κάθετη ταχύτητα του ρευστού στην $\Gamma_\eta(t)$ ισούται με την κάθετη ταχύτητα της $\Gamma_\eta(t)$. Οπότε,

$$\boldsymbol{N}_+ \cdot [\boldsymbol{u}]_{z=\eta} = \frac{-\partial_t \eta}{\sqrt{|\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta|^2+1}} \qquad \text{for} \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{x} \in S. \tag{1.9}$$

Χρησιμοποιώντας το $\boldsymbol{u} = \nabla\Phi$ οι παραπάνω συνθήκες δίνουν

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi + \partial_z \Phi = 0, \qquad \text{on} \quad \Gamma_h, \qquad t \geq t_0, \tag{KC1}$$

$$\partial_t \eta + \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta - \partial_z\Phi = 0, \qquad \text{on} \quad \Gamma_\eta(t), \qquad t \geq t_0. \tag{KC2}$$

Η εξίσωση (KC1) είναι μια συνθήκη Neumann ενώ η (KC2) δείχνει οτι τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται αρχικά στην ελεύθερη επιφάνεια παραμένουν εκει και είναι μια *κινηματική συνοριακή συνθήκη.* Αυτες οι συνθήκες δεν είναι αρκετές για να προσδιορισθούν τα η και Φ γιαυτό μία άλλη συνοριακή συνθήκη χρειάζεται. Εφ'όσον η ελεύθερη επιφάνεια θεωρείται άμαζη, οι δυνάμεις εκεί μηδενίζονται, οπότε, (αγνοώντας την επιφανειακή τάση) η πίεση στο νερό και στον αέρα πρέπει να ισούνται με την πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η πίεση του αέρα είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με αυτή του νερού υποθέτουμε ότι η πίεση στον αέρα δεν αλλάζει με την εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας. Έτσι προκαθορίζουμε την τιμή $\bar{p}$ για τη εξωτερικά ασκούμενη πίεση (λόγω του αέρα) και διατυπώνουμε την συνοριακή συνθήκη $p = \bar{p}$ στην $\Gamma_\eta(t)$. Συνεπώς, απο την (1.4) προκύπτει η συνθήκη

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta = -\frac{\bar{p}}{\rho} = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_\eta(t), \quad t \geq t_0, \tag{DC}$$

όπου διαλέξαμε $\bar{p} = 0$. Η εξίσωση (DC) ονομάζεται εξίσωση *Bernoulli* ή *δυναμική συνοριακή συνθήκη.* Στην οριζόντια διάσταση, το $\mathcal{D}_h^\eta$ δεν είναι φραγμένο οπότε μία συνθήκη στο άπειρο χρειάζεται. Μια τέτοια φυσική συνθήκη είναι ότι οι παράγωγοι του Φ και η παραμένουν φραγμένες καθώς $|\boldsymbol{x}| \to \infty$. Συνοψίζοντας, η διατύπωση του προβλήματος υδάτινου κυματισμού έχει ως εξής: *Δεδομένης της εξωτερικής πίεσης* $\bar{p}$ και της βαθυμετρίας $h(\boldsymbol{x})$ να βρεθεί η ελεύθερη επιφάνεια $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ και το δυναμικό $\Phi(\boldsymbol{x}, z, t)$, $(\boldsymbol{x}, z) \in \mathcal{D}_h^\eta$, $t > t_0$ *που ικανοποιεί*

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\Phi = 0, &\quad \text{in} \quad \mathcal{D}_h^\eta(t),\\ \nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi + \partial_z\Phi = 0, &\quad \text{on} \quad \Gamma_h,\\ \partial_t\eta + \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta - \partial_z\Phi = 0, &\quad \text{on} \quad \Gamma_\eta(t),\\ \partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta = 0, &\quad \text{on} \quad \Gamma_\eta(t). \end{aligned}\right. \qquad (\mathcal{P}_{WW})$$

Το παραπάνω σύστημα πρέπει να συμπληρωθεί με κατάλληλες αρχικές συνθήκες και συνθήκες στο άπειρο στην περίπτωση οριζοντίως μη φραγμένου ρευστού ή με κατάλληλες πλευρικές συνοριακές συνθήκες στην περίπτωση πλευρικών συνόρων.

Παρατήρηση 1.0.1. *Στιγμιαία, το Φ ικανοποιεί ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που εξαρτάται μη γραμμικά από το σχήμα του χωρίου $\mathcal{D}_h^\eta$ το οποίο είναι άγνωστο. Συνεπώς η γεωμετρία δεν μπορεί να βρεθεί από το γραμμικό πρόβλημα. Η χρονική παραγώγιση δεν εφαρμόζεται στην πεδιακή εξίσωση* (LE) *αλλά στις συνοριακές συνθήκές* (KC2) *και* (DC). *Το δυναμικό της ταχύτητας Φ ικανοποιεί μια γραμμική εξίσωση στο $\mathcal{D}_h^\eta$ και δύο μη γραμμικές εξισώσεις στην ελεύθερη επιφάνεια, η οποία είναι διαφορετικη από την συνήθη γραμμική συνοριακή συνθήκη για μια ελλιπτική εξίσωση, όπως η (KC1).*

Κεφάλαιο 2

Διατύπωση κατά Hamilton για το πρόβλημα των υδάτινων κυματισμών

2.1 Γενικό Υπόβαθρο

Για να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά ενός ιδανικού μηχανικού συστήματος, αποτελούμενο από N σωματίδια, απαιτούνται οι συντεταγμένες $\mathbf{q}(t) = \{q_i(t)\}_{i=1}^{N}$ καθώς και οι αντίστοιχες ορμές $\boldsymbol{\pi}(t) = \{\pi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ σε κάθε χρονική στιγμή t. Ο χώρος όλων των δυνατών καταστάσεων $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi})$ του συστήματος είναι ο *χώρος φάσεων* του συστήματος. Συγκεκριμένα ο χώρος $\mathbf{q}$ ονομάζεται *configuration space* και ορίζεται απο την *κινηματική* του συστήματος. Η *Hamiltonian* είναι μια συνάρτηση $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\pi}) \to H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\pi})$ των θέσεων $\boldsymbol{q}$ και των ορμών $\boldsymbol{\pi}$, που εξελίσονται βάσει των εξισώσεων Hamilton.

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{\pi} &= \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} \\ \partial_t \boldsymbol{q} &= -\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{\pi}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Σε κάθε συντεταγμένη $q_i(t)$ αντιστοιχεί μια ορμή $\pi_i(t)$ η οποία, από την Langrangian μηχανική, ορίζεται ως η παράγωγος της *Langrangian συνάρτησης* $L = K - V = L(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t)$ ως προς τισ ταχύτητες $\dot{q}_i(t)$. K ςίναι η κινητική ενέργεια, P η δυναμική ενέργεια και η L πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει των $\mathbf{q}$ και $\dot{\mathbf{q}}$.

Στη περίπτωση ενός συστήματος της κλασσικής μηχανικής ο confuguration space ειναι μια N-διάστατη πολλαπλότητα που αντιπροσωπεύει όλες τις κινηματικά αποδεκτές θέσεις $\mathbf{q} \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^N$. Η αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ είναι μια συνάρτηση πάνω στο *tangent bundle* $T(\mathcal{M}) = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) | \mathbf{q} \in \mathcal{M}, \dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}(\mathcal{M})\} \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ και οι ορμές δίνονται από $\pi_i = \partial_{\dot{q}_i} L(q(t), \dot{q}(t))$ για $i = 1...N$. Στο πρόβλημα του ιαλάσσιου κυματισμού ο configuration space είναι μια απειροδιάστατη πολλαπλότητα M. For $q \in M$, $\dot{q} = \partial_t q$ είναι ένα στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου $T_q(M)$. Η Langrangian εκφράζεται συναρτήσει των $(q, \dot{q})$ (tangent variables) και είναι μια συνάρτηση $L : T(M) \to \mathbb{R}$ όπου $T(M) = \{(q, \dot{q}) : q \in M,\ \dot{q} \in T_q(M)\}$ είναι το *tangent bundle*. Συνεπώς το π ανήκει στον cotangent space $T_q^*(M)$ και η εξέλιξη $t \mapsto (q(t), \pi(t))$ περιγράφεται βάση της *Hamiltonian function* $H : T^*(M) \to \mathbb{R}$, όπου $T^*(M) = \left\{(q, \pi) : q \in M,\ \pi \in T_q^*(M)\right\}$ είναι το *cotangent bundle*. Ο $T^*(M)$ είναι ο *phase space* στον οποίο εξελίσεται το συστημα και η αντίστοιχει *symplectic form* $\omega := dq \wedge d\pi$. Οι εξισώσεις*Hamilton* είναι

$$\partial_t \begin{pmatrix} q(t) \\ \\ \pi(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \partial_q H \\ \\ -\partial_\pi H \end{pmatrix}$$

ή γράφοντας $u = (q, \pi)$

$$\begin{cases} \partial_t u = J \nabla H(u) \\ \\ u(t_0) = u_0 \in M \end{cases} \tag{2.2}$$

Για μια αυστηρή περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου των συστημάτων *Hamilton* δες [Gol80, AM78, MRA01, LL60].

2.2 Γενικευμένες συντεταγμένες και Κινητική ενέργεια

Στη περίπτωση ενός ρευστού με άπειρο βάθος ο Zakharov [Zak68] ήταν ο πρώτος που εξήγαγε τις εξισώσεις Hamilton. Η παρατήρηση του Zakharov ήταν ότι το δυναμικό στην ελεύθερη επιφάνεια και η ελεύθερη επιφάνεια είναι αρκετά για να ορίσουνε την ροή αφού το πρόβλημα συνορικών τιμών για την εξίσωση Laplace είναι καλά τοποθετημένο. Οι Craig και Sulem [CS93] εξέφρασαν τις εξισώσεις του Zakharov χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο Dirichlet to Neumann (DtN) τελεστή ο οποίος είναι ένας τελεστής που απεικονίζει το δυναμικό στην εέύθερη επιφάνεια (Dirichlet data) στην κάθετη παράγωγο του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια (Neumann data). Αργότερα οι Craig et al.[CGS09] γενίκευσαν αυτή τη διατύπωση στη περίπτωση μεταβλητού πυθμένα. Η H θεωρείται ένα συναρτησιακό των (η, ξ) όπου $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, και $\xi(\boldsymbol{x}, t)$ είναι το ίχνος της αρμινικλης συνάρτησης Φ στην ελεύθερη επιφάνεια. Η εξέλιξη λαμβάνει χώρα στο χώρο τών αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathcal{D}_h^\eta$.

Υπενθιμίζουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια $\Gamma_\eta(t)$ περιγράφεται πλήρως από την εξίσωση

$$z = \eta(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.3}$$

ως το γράφημα $\Gamma_\eta(t) = \{(\boldsymbol{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = \eta(\boldsymbol{x}, t)\}$. Ο configuration space M είναι ο χώρος όλων των δυνατών $t \mapsto q_{\boldsymbol{x}}(t) = \eta(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in S \subset \mathbb{R}^2$ όπου S είναι η προβολή της Γ_η στο οριζόντιο επίπεδο (x_1, x_2). Οι γενικευμένες συντεταγμένες και ταχύτητες, $q_{\boldsymbol{x}}(t) = \eta(\boldsymbol{x}, t)$, $\dot{q}_{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\eta}(\boldsymbol{x}, t)$, αντιστοιχα, είναι συνεχώς κατανεμημένες στο $S \subset \mathbb{R}^2$.

$$\pi_{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\delta}{\delta \dot{q}_{\boldsymbol{x}}(t)} L(q_{\boldsymbol{x}}(t), \dot{q}_{\boldsymbol{x}}(t)) \tag{2.4}$$

Για να συνεχίσουμε με την ανάπτυξη του Hamiltonia φορμαλισμού , πρέπει να εκφράσουμε την Langrangian $L = K - V$ συναρτήσει των $(\eta, \dot{\eta})$. Η κινητική ενέργεια δινεται από

$$K = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\mathcal{D}_h^\eta} |\nabla\Phi|^2 \, dz d\boldsymbol{x}$$

Αυτό είναι ένα συναρτησιακό με μεταβλητό χώρο ολοκλήρωσης. Μέσω του τύπου Green the kinetic η κινητική ενέργεια γράφεται

$$K = \frac{1}{2}\left(-\int\limits_{\mathcal{D}_h^\eta} \Phi\Delta\Phi \, d\boldsymbol{x}dz + \int\limits_{\Gamma_h} \Phi\partial_{N_-}\Phi \, d\Gamma_h + \int\limits_{\Gamma_\eta} \Phi\partial_{N_+}\Phi \, d\Gamma_\eta \right)$$

Εισάγοντας το ίχνος $\xi(\boldsymbol{x}, t) \equiv [\Phi]_{z=\eta} = \Phi(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x}, t), t)$ και λαμβάνοντας υπ'όψην την κινηματική του προβλήματος ,(LE), (KC1),(KC2), βλέπουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι είναι μηδέν ενώ ο τελευταίος εκφράζεται ως

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \xi\partial_{N_+}\Phi|_{\Gamma_\eta} R \, d\boldsymbol{x} \tag{2.5}$$

όπου θέσαμε $R = (1 + |\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta|^2)^{1/2}$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα που ολοκληρώνεται εξαρτάται μ΄νο από επιφανειακές ποσότητες. Το επόμενο βήμα είναι να γράψουμε την κάθετη παράγωγο του δυναμικού στην Γ_η, που εμφανίζεται στην παραπάνω έκφραση, συναρτήσει του δυναμικού στην Γ_η. Ο Zakharov (in the case of deep water) συνέδεσε τις δύο ποσότητες χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Green που σχετίζεται με το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace. Εδώ ακολουθούμε τους [CS93] όπου χρησιμοποιείται ένας κατάλληλος τελεστής Dirichlet to Neumann. Είναι γνωστό ότι αυτός ο τελεστής εξαρτάται αναλυτικά απο την εέυθερη επιφάνεια η. Οι Coifman and Meyer θεώρησαν μικρές Lipsitz διαταραχές γραμμής ή επιπέδου, και οι Craig et al. [HN05] C1 διαταραχές υπερεπιπέδου σε αυθαιρετη διάσταση.

Ο DtN Τελεστής

Θεωρείστε το παρακάτω ελλιπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών στον $\mathcal{D}_h^\eta$

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}_h^\eta \\ [\Phi]_{z=\eta} = \xi, \qquad \partial_{N_-}\Phi := N_- \cdot [\nabla\Phi]_{z=\eta} = 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_{DtN}$}$$

μαζί με κατάλληλες πλευρικές συνθήκες. Υποθέτωντας ότι η και h είναι αρκετά λείες υπάρχει μοναδική Φ στον $\in H^{k+2}(\mathcal{D}_h^\eta)$, που ικανοποιελι την ουσιαστική συνθήκη $[\Phi]_{z=\eta} = \xi$, λύση (variational, classical) στο $(\mathcal{P}_{DtN})$.[Lan05, Lem. 2.9, Th . 2.9]. Έτσι η συμπεριφορά του ξ όπως $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ ορίζει μοναδικά την συμπεριφορά του Φ κοντά στο άπειρο. Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος $(\mathcal{P}_{DtN})$ ορίζει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στους χώρους των Dirichlet and Neumann data. Αυτό κινητοποιεί των ορισμό ενός τελεστη από των χώρο των Dirichlet data $(\xi = \Phi|_{\Gamma_\eta})$ στον χώρο των Neumann data $(\partial_{N_-}\Phi|_{\Gamma_\eta})$ που εμπεριέχονται στην διατύπωση.

Ορισμός 2.2.1 (DtN Operator)**.** *Για το υδάτινο χωρίο $\mathcal{D}_h^\eta$ που ορίζεται από $\eta(\cdot,t), h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ for $t \geq t_0$ και την μοναδική λύση Φ του προβλήματος $(\mathcal{P}_{DtN})$ ορίζουμε*

$$G(\eta, h) : \xi \mapsto R\partial_{N_-}\Phi|_{\Gamma_\eta}, \qquad R = \left(1 + |\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta|^2\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Προφανώς, ο DtN operator είναι γραμμικός in ξ και θετικά ορισμένος

$$\begin{aligned}(\xi, G(\eta,h)\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} [\Phi]_{z=\eta} R_+ \partial_{N_+}\Phi \, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\Gamma_\eta} \Phi \partial_{N_+}\Phi \, d\Gamma_\eta \\ &= \int_{\mathcal{D}_h^\eta} |\nabla\Phi|^2 \, dV\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον DtN operator μπορούμε να επανεκφράσουμε την κινηματική συνοριακή συνθήκη (KC2) ως

$$\partial_t \eta = G(\eta, h)\xi \tag{2.7}$$

Έτσι ορισμένος ο DtN operator είναι αυτοσυζυγής. Όντως έστω u, v αρκετά λείες συναρτήσεις του $\mathbb{R}^2$ (e.g. Schwartz) και U, V οι αρμονικές επεκτάσεις τους στο $\mathcal{D}_h^\eta$ που ικανοποιούν το $(\mathcal{P}_{DtN})$. Η ταυτότητα Green για τις U, V δίνει

$$\int_{\Gamma_\eta} U(N_+ \cdot \nabla V) - V(N_+ \cdot \nabla U) \ d\Gamma_\eta = 0$$

Hence

$$(u, G(\eta, h)v) = (v, G(\eta, h)u)\,, \qquad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \tag{2.8}$$

Το συναρτησιακό της κινητικής ενέργειας K γίνεται

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \xi G(\eta, h)\xi d\boldsymbol{x}$$

που είναι ένα ολοκληρωτικό συναρτησιακό με την ολοκληρώνουσα να εξαρτάται μόνο απο τις συναρτήσεις ξ και η.

2.3 Εξαγωγή των Εξισώσεων Hamilton

Χρησιμοποιώντας την κινηματική συνθήκη (2.7) και την αντιστρεψιμότητα του G μπορούμε να γράψουμε την Lagrangian συναρτήσει των $(\eta, \partial_t \eta)$

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}[\eta, \dot{\eta}] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \dot{\eta} G^{-1}(\eta, h)\dot{\eta} \ d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 \ d\boldsymbol{x} \tag{2.9}$$

απ'όπου βρίσκουμε τις γενικευμένες ορμές

$$\pi_{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\eta}} = \rho G^{-1}(\eta, h)\dot{\eta} = \rho \xi(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.10}$$

Έτσι κατασκευάζουμε την Hamiltonian χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Legendre

$$\mathcal{H}[\eta, \xi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho \xi G(\eta, h)\xi d\boldsymbol{x} + \frac{g}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 d\boldsymbol{x} \tag{2.11}$$

Είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε την παράγωγο σχήματος του DtN για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας $\mathcal{K}$. Προς αυτή την κατεύθυνση χρησιμοποιούμε τον τύπο απο το [Lan05].

Θεώρημα 2.3.1. *[Lan05, Th. 3.20] Η απεικόνιση*

$$\eta \;\mapsto\; G(\eta,h)\varphi,$$

είναι καλώς ορισμένη και διαφορίσιμη. Για κάθε $\delta\eta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_\eta G(\eta,h)\varphi\cdot\delta\eta \;&=\; -\,G(\eta,h)\Big(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\delta\eta\Big)-\\ &\quad-\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\left[\left(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi-\Big(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\Big)\right)\delta\eta\right].\end{aligned}$$

Λήμμα 2.3.1. *Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού της κινητικής ενέργειας*

$$\mathcal{K}[\varphi,\eta] \;=\; \frac{1}{2}\int_S \varphi\, G(\eta,h)\varphi\, d\boldsymbol{x},$$

στην κατεύθυνση $\delta\eta$ είναι

$$\delta_\eta\mathcal{K}[\varphi,\eta;\delta\eta] \;=\; \int_S\Big\{-\frac{1}{2}|\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi|^2+\frac{1}{2R_+^2}\big((G(\eta,h)\varphi)+\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2\Big\}\delta\eta\, d\boldsymbol{x}.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_\eta\mathcal{K}[\varphi,\eta;\delta\eta] \;&=\; \frac{1}{2}\int_S\varphi\left(\delta_\eta G(\eta,h)\varphi\cdot\delta\eta\right)d\boldsymbol{x}\\ &=\; \frac{1}{2}\int_S\Big\{-\,\varphi\, G(\eta,h)\Big(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\delta\eta\Big)-\\ &\quad-\varphi\,\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\Big[\Big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi-\Big(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\Big)\Big)\delta\eta\Big]\Big\}d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αυτοσυζυγία του DtN (**??**) για τον πρώτο όρο και ολοκλήρωση κατα παράγοντες για τον δεύτερο έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_\eta\mathcal{K}[\varphi,\eta;\delta\eta] \;&=\; \frac{1}{2}\int_S -G(\eta,h)\varphi\left(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\delta\eta\right)-\\ &\quad-\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\left[\left(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi-\Big(R_+^{-2}\big(G(\eta,h)\varphi+\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\Big)\right)\delta\eta\right]d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

και έπειτα από βασική άλγεβρα λαμβάνουμε το αποτέλεσμα. □

Παίρνοντας τις μεταβολικές παραγώγους της Hamiltonian $H[\varphi,\eta] = K[\varphi,\eta] + V[\eta]$ (2.11) επαληθεύουμε τις εξισώσεις Hamilton (??)

$$\begin{cases} \partial_t \eta = \dfrac{\delta \mathcal{K}}{\delta \varphi} = G(\eta,h)\varphi, \\ \partial_t \varphi = -g\eta - \dfrac{\delta \mathcal{K}}{\delta \eta} = -g\eta + \dfrac{1}{2}|\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi|^2 - \dfrac{1}{2R_+^2}\big((G(\eta,h)\varphi) + \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2. \end{cases} \tag{HE}$$

που είναι ένα εξελικτικό σύστημα Hamilton για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta(\boldsymbol{x},t)$ και του ίχνους του δυναμικού της ελεύθερης επιφάνειας $\xi(\boldsymbol{x},t)$. Αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις συνοριακές συνθήκες (KC2), (DC) ενώ οι (??) και (KC1) εκφράζονται δια μέσου του ορισμού του DtN τελεστή.

Ένας άλλος τρόπος να εξάγουμε τις παραπάνω εξισώσεις είναι ως αναδιατύπωση του προβλήματος υδάτινου κυματισμού $(\mathcal{P}_{WW})$. Η πρώτη εξίσωση του (HE)είναι η κινηματική συνθήκη (KC2) και είναι προφανές από τον ορισμό του DtN.

$$\begin{aligned} G(\eta,h)\xi &= R_+N_+\cdot[\nabla\Phi]_{z=\eta} = \\ &= \left(1+|\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta|^2\right)^{1/2}(-\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta,1)\cdot\left[(\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_x\Phi)\right]_{z=\eta} \\ &= -\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\left[\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi\right]_{z=\eta} + \left[\partial_z\Phi\right]_{z=\eta} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Για την δεύτερη χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας για να εκφράσουμε το$[\nabla\Phi]_{z=\eta}$ και $[\partial_t\Phi]_{z=\eta}$ συναρτήσει ξ and $G(\eta,h)\xi$

$$[\nabla\Phi]_{z=\eta} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\xi - \partial_{x_1}\eta[\partial_z\Phi]_{z=\eta} \\ \partial_{x_2}\xi - \partial_{x_2}\eta[\partial_z\Phi]_{z=\eta} \\ G(\eta,h)\xi + \partial_{x_1}\eta\partial_{x_1}\xi + \partial_{x_2}\eta\partial_{x_2}\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\xi - \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta[\partial_z\Phi]_{z=\eta} \\ G(\eta,h)\xi + \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\nabla_{\boldsymbol{x}}\xi \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$[\partial_t\Phi]_{z=\eta} = \quad \partial_t\xi - \partial_z\Phi\partial_t\eta \tag{2.14}$$

και αντικαθιστούμε αυτές τις εκφράσεις στην συνθήκη Bernoulli (??).

Δεδομένης μιας διαδικασίας προσέγγισης του DtN (υπό κατάλληλες πλευρικές συνοριακές συνθήκες), το πρόβλημα του υδάτινου κυματισμού ανάγεται στην ταυτόχρονη ολοκλήρψση στον χρόνο της κινηματικής και δυναμικής συνθήκης της ελεύθερης επιφάνειας. Έτσι, οι εξαρτημένες μεταβλητές $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ και $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ υλοποιούνται μόνο στην ελεύθερη επιφάνεια. Μία σειρά Taylor για τον DtN, εξήχθη απο τους Craig και Sulem στο [CS93] και επεκτάθηκε σε μεταβλητό πυθμένα στο [CGS09].

Κεφάλαιο 3

Μία unconditional μεταβολική αρχή για το $(\mathcal{P}_{WW})$(Luke's Principle) και η σύνδεση της με την αρχή του Hamilton

Η φυσική κατάσταση που περιγάφεται στο Κεφάλαιο 1 περιγράφεται κλασσικά από τα πεδία *fields* $\Phi(\boldsymbol{x}, z, t)$ και $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ με $\boldsymbol{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\boldsymbol{x}, z) \in \mathcal{D}_h^\eta$ και $t \geq t_0$ και το σύστημα των εξισώσεων $(\mathcal{P}_{WW})$ μαζί με αρχικές-πλευρικές συνθήκες. Αυτό το σύστημα εξήχθη από μεταβολική αρχή από την παρατήρηση του Luke στο [Luk67], ότι το συναρτησιακό δράσης που δίνει την σωστή πεδιακή εξίσωση (Laplace equation) μαζί με όλες τις σημαντικές συνοριακές συνθήκες είναι το

$$S[\Phi, \eta] \;=\; \int_I \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big(\partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz\Big)\, dV\, dt, \tag{3.1}$$

το οποίο είναι το ολοκλήρωμα της πίεσης σε όλο το χρονοεξαρτόμενο χωρίο $I \times \mathcal{D}_h^\eta$. Εδώ δεν γίνεται a priori χωρισμός του κινηματικού μέρους του προβλήματος όπως χρειάστηκεστο Κεφάλαιο 2. Αναφέρουμε επίσης τον [Pet64] όπου μελετάται η περίπτωση κυμάτων σε μια πεπερασμένη δεξαμενη (με επιφανειακή τάση). Παρακάτω η αρχή του Luke εξάγεται σαν ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού συναρτησιακού

3.1 Συμβολισμός και Προκαταρτικά

Σε ότι ακολουθεί έστω $\Phi \in C^1\big([t_0,T) \to C^2(\mathcal{D}_h^\eta)\big) \cap C^1\big([t_0,T) \to C^1(\overline{\mathcal{D}_h^\eta})\big) \equiv \mathcal{M}_\Phi$ να είναι ένα πεδίο $\eta \in C^1\big([t_0,T] \to C_0^1(S)\big) \equiv \mathcal{M}_\eta$ και $S \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό. Ο χώρος C^k είναι ο χώρος των k-διαφορίσιμων συναρτήσεων και ο δείκτης 0 σημαίνει συμπαγές στήριγμα. Ο χώρος όλων των $\big(\Phi,\eta\big)$ που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες με την πρόσθετη απαίτηση να μηδενίζονται καθώς $|\boldsymbol{x}| \to \infty$, ονομάζεται *configuration space* και συμβολίζεται με

$$\mathcal{M} := \Big\{\big(\Phi,\eta\big) \in \mathcal{M}_\Phi \times \mathcal{M}_\eta : \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \Phi = \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \eta = 0\Big\},$$

όπου ∂S είναι το πλευρικό σύνορο του χωρίου. Δεδομένης μιας συνάρτησης *Lagrange*

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times J_h^\eta \to \mathbb{R},$$

συνεχώς διαφορίσιμη ως προς όλα τα ορίσματα γράφουμε

$$(1,\vec{2},3,4) \to G(1,\vec{2},3,4) \equiv G$$

και συμβολίζουμε τις αντίστοιχες μερικές παραγλωγους, ως προς τα συναρτησιακά ορίσματα, ως

$$\begin{aligned}
D_1G &:= D_1G(1,\vec{2},3,4) := \frac{\partial G}{\partial 1}(1,\vec{2},3,4),\\
\vec{D}_2G &:= \vec{D}_2G(1,\vec{2},3,4) := \Big(\frac{\partial G}{\partial 2_1}(1,\vec{2},3,4), \frac{\partial G}{\partial 2_2}(1,\vec{2},3,4)\Big), \quad \vec{2} = (2_1,2_2),\\
D_3G &:= D_3G(1,\vec{2},3,4) := \frac{\partial G}{\partial 3}(1,\vec{2},3,4).
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $G(1,\vec{2},3,4)$ είναι γραμμική ως προς το πρώτο όρισμα και συγκεκριμένα $D_1G = 1$. Τπ *Lagrangian density functional* $\mathcal{G}$ είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της *Lagrangian function* G

$$\mathcal{G}[\Phi(\cdot,\cdot,t),\eta(\cdot,t)] = \int_{\mathcal{D}_{h(\cdot)}^{\eta(\cdot,t)}} G(\partial_t\Phi(\cdot,\cdot,t), \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\cdot,\cdot,t), \partial_z\Phi(\cdot,\cdot,t), z)\, dV. \tag{3.2}$$

Ορίζουμε το αντίστοιχο *action functional* $S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ σαν το χρονικό ολοκλήρωμα της *Lagrangian density functional* $\mathcal{G}$

$$S[\Phi, \eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{G}[\Phi(\cdot, \cdot, t), \eta(\cdot, t)] dt. \tag{3.3}$$

Στην υπόλοιπη εργασία, αναφερόμαστε σε αυτό ως το γενικευμένο συναρτησιακό του Luke, ή απλά *g-Luke's functional*. Είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από το Φ και το σχήμα του χωρίου $\mathcal{D}_h^{\eta}$ που καθορίζεται πλήρως απο το η. Το σύστημα εξελίσεται από το σημείο $(\Phi(\cdot, t_0), \eta(\cdot, t_0))$ στο σημείο $(\Phi(\cdot, T), \eta(\cdot, T))$ στον configuration space $\mathcal{M}$ κατα μήκος του μονοπατιου $t \to (\Phi(\cdot, t), \eta(\cdot, t))$ το οποίο σταιμοποιεί το συναρτησιακό. Στασιμότητα σημαίνει ότι η πρώτη μεταβολή του S στο $\big(\Phi, \eta\big)$ είναι μηδέν. i.e.

$$\delta S[\Phi, \eta; \delta\Phi, \delta\eta] \quad = \quad \delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi] \; + \; \delta_{\eta} S[\Phi, \eta; \delta\eta] \quad = \quad 0, \tag{3.4}$$

όπου $\delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi]$ και $\delta_{\eta} S[\Phi, \eta; \delta\eta]$ είναι οι μερικές μεταβολές του S συναρτήσει του Φ και η, αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό των μεταβολών ο χώρος των αποδεκτών μεταβολών πρέπει να ορισθεί. Ορίζουμε αυτόν το χώρο σαν το υποσύνολο του $\mathcal{M}$ που χαρακτηρίζεται από την ιδότητα της ισοχρονικότητας.

$$\delta\mathcal{M} = \delta\mathcal{M}_{\Phi} \times \delta\mathcal{M}_{\eta} = \big\{ \big(\Psi, \zeta\big) \in \mathcal{M} : \Psi(\cdot, t_0) = \Psi(\cdot, T) = 0, \; \zeta(\cdot, t_0) = \zeta(\cdot, T) = 0 \big\}. \tag{3.5}$$

3.1.1 Υπολογισμός της πρώτης μεταβολής του g-Luke συναρτησιακού $S[\Phi,\eta]$

Εξ'ορισμού, η μερική μεταβολή του S στο (Φ,η) στην κατεύθυνση $\delta\Phi$ είναι

$$\begin{aligned}
\delta_\Phi S[\Phi,\eta;\delta\Phi] &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[S[\Phi(\cdot,t)+\epsilon\delta\Phi(\cdot,t),\eta]-S_{\mathcal{G}}[\Phi(\cdot,t),\eta]\Big] = \\
&= \int_{t_0}^{T}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[\mathcal{G}[\Phi(\cdot,t)+\epsilon\delta\Phi(\cdot,t),\eta(\cdot,t)]-\mathcal{G}[\Phi(\cdot,t),\eta(\cdot,t)]\Big]dt \\
&= \int_{t_0}^{T}\delta_\Phi\mathcal{G}[\Phi(\cdot,\cdot,t),\eta(\cdot,t);\delta\Phi(\cdot,\cdot,t)]dt
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\delta_\eta S[\Phi,\eta;\delta\eta] = \int_{t_0}^{T}\delta_\eta\mathcal{G}[\Phi(\cdot,\cdot,t),\eta(\cdot,t);\delta\Phi(\cdot,\cdot,t)]dt.$$

Άρκεί τότε να υπολογίσουμε τις μεταβολές (dropping the notation $(\cdot,\cdot,t)$, $(\cdot,t)$)

$$\mathcal{G}[\Phi,\eta] = \int_S\int_{-h}^{\eta}G\big(\partial_t\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi,z\big)\,d\boldsymbol{x}\,dz. \tag{3.6}$$

Για να υπολογίσουμε την μεταβολή $\delta_\Phi\mathcal{G}[\Phi,\eta;\delta\Phi]$ και $\delta_\eta\mathcal{G}[\Phi,\eta;\delta\eta]$, ορίζουμε κλασσικά τις συναρτήσεις

$$i(\epsilon) := \mathcal{G}[\Phi+\epsilon\delta\Phi,\eta] = \int_{\mathcal{D}_h^\eta}G(\partial_t\Phi+\epsilon\partial_t\delta\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi+\epsilon\nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\Phi,\partial_z\Phi+\epsilon\partial_z\delta\Phi,z)dV,$$

$$j(\epsilon) := \mathcal{G}[\Phi,\eta+\epsilon\delta\eta] = \int_{\mathcal{D}_h^{\eta+\epsilon\delta\eta}}G(\partial_t\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi,z)dV.$$

Λαμβάνοντας την ϵ-παράγωγο του $i(\epsilon)$ παίρνουμε (ανακαλώντας την υπόθεση $D_1G=1$.)

$$\begin{aligned}
i'(\epsilon) = \int_{\mathcal{D}_h^\eta}\Big\{&\partial_t\delta\Phi+\overrightarrow{D}_2G(\partial_t\Phi+\epsilon\partial_t\delta\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi+\epsilon\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi+\epsilon\partial_z\delta\Phi,z)\ \cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\Phi+ \\
&+D_3G(\partial_t\Phi+\epsilon\partial_t\delta\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi+\epsilon\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi+\epsilon\partial_z\delta\Phi,z)\ \partial_z\delta\Phi\Big\}dV.
\end{aligned}$$

Αφού τα όρια ολοκλήρωσης εξαρτώνται από την συνάρτηση της μεταβολής, για να υπολογίσουμε το $j'(\epsilon)$ χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό κανόνα Leibniz

$$\begin{aligned} j'(\epsilon) &= \int_S \Big\{ \frac{d}{d\epsilon} \int_{-h}^{\eta+\epsilon\delta\eta} G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\, dz \Big\} d\boldsymbol{x} \\ &= \int_S \Big[G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \Big]_{z=\eta+\epsilon\delta\eta} \delta\eta d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας $\epsilon = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\delta_\Phi \mathcal{G}[\Phi, \eta; \delta\Phi] = \\ &= \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big\{ \partial_t\delta\Phi + \overrightarrow{D}_2 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \ \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\Phi + D_3 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\ \partial_z\delta\Phi \Big\} dV, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\delta_\eta \mathcal{G}[\Phi, \eta; \delta\eta] = \int_S \Big[G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \Big]_{z=\eta} \delta\eta d\boldsymbol{x}. \tag{3.8}$$

Ο δεύτερος και τρίτος όρος του δεξιά μέλους της (3.7) γράφονται, using Green's Identity and recalling that $\delta\Phi = 0$ on the lateral boundaries, ως

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big\{ \overrightarrow{D}_2 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \ \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\Phi + D_3 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\ \partial_z\delta\Phi \Big\} dV = \\ &\quad = \int_{\Gamma_\eta} \Big(\overrightarrow{D}_2 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\, ,\, D_3 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \Big) \cdot \boldsymbol{N}_+ \delta\Phi\, d\Gamma_\eta + \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} \Big(\overrightarrow{D}_2 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\, ,\, D_3 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \Big) \cdot \boldsymbol{N}_- \delta\Phi\, d\Gamma_h - \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big(\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} \overrightarrow{D}_2 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) + \partial_z D_3 G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big) \Big)\ \delta\Phi dV. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της (3.7) μετασχηματίζεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα Leibniz

$$\int_{\mathcal{D}_h^\eta} \partial_t\delta\Phi\ dV = \partial_t \int_S \int_{-h}^{\eta} \delta\Phi dz d\boldsymbol{x} - \int_S \partial_t\eta\ [\delta\Phi]_{z=\eta} d\boldsymbol{x}. \tag{3.9}$$

Εξ'αιτίας της ισοχρονικότητας της $\delta\Phi$ ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της τελευταίας ισότητας μηδενίζεται ολοκληρωμένος στα όρια του $[t_0, T]$. Έτσι λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \delta_\Phi S[\Phi,\eta;\delta\Phi] \quad = \quad & \int_{t_0}^{T}\int_S \Big\{ -\int_{-h}^{\eta} \big(\mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)\,\delta\Phi\,\big)\,dz + \\ & + \big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ - \partial_t\eta\Big)\big[\delta\Phi\big]_{z=\eta} \\ & + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\Big)\big[\delta\Phi\big]_{z=-h}\Big\} d\boldsymbol{x}dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Τελικά από την (3.8) έχουμε

$$\delta_\eta S[\Phi,\eta;\delta\eta] \quad = \quad \int_{t_0}^{T}\int_S \Big[G\big(\partial_t\Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi, \partial_z\Phi, z\big)\Big]_{z=\eta}\delta\eta d\boldsymbol{x}dt. \tag{3.11}$$

Οι εξισώσεις (3.10) και (3.11), σε συνδυασμό με (3.4) και του θεμελιώδους λήμματος του λογισμού των μεταβολών οδηγεί στο παρακάτω

Θεώρημα 3.1.1. *The pair of fields $(\Phi,\eta)\in\mathcal{M}$ satisfies the variational equation*

$$\delta S[\Phi,\eta;\delta\Phi,\delta\eta] := \delta_\Phi S[\Phi,\eta;\delta\Phi] + \delta_\eta S[\Phi,\eta;\delta\eta] = 0, \tag{3.12}$$

για κάθε $\big(\delta\Phi,\delta\eta\big)\in\delta\mathcal{M}$ αν και μόνο αν είναι λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων.

$$div\big(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G\big) = \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot(\overrightarrow{D}_2 G) \ + \ \partial_z(D_3 G) \quad = 0 \quad in \quad \mathcal{D}_h^\eta, \tag{3.13α'}$$

$$\big(\vec{D}_2 G, D_3 G\big)\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ - \partial_t\eta = 0 \quad on \quad \Gamma_\eta, \tag{3.13β'}$$

$$\big(\vec{D}_2 G, D_3 G\big)\cdot R_-\boldsymbol{N}_- = 0 \quad on \quad \Gamma_h, \tag{3.13γ'}$$

$$G = 0 \quad on \quad \Gamma_\eta. \tag{3.13δ'}$$

3.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα του υδάτινου κυματισμού

Για να ανακτήσουμε την αρχή του Luke ορίζουμε το συναρτησιακό δράσης

$$S[\Phi,\eta] = \int_I \mathcal{L}[\Phi,\eta]\,dt, \quad \mathcal{L}[\Phi,\eta] = \int_{\mathcal{D}_h^\eta}\big(\partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz\big)dV. \tag{3.14}$$

Θεώρημα 3.2.1 (Luke's Variational Principle). *Έστω το* $(\Phi, \eta) \in \mathcal{M}$ *ικανοποιεί*

$$\delta S[\Phi, \eta; \delta\Phi, \delta\eta] = \delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi] + \delta_{\eta} S[\Phi, \eta; \delta\eta] = 0, \tag{3.15}$$

για κάθε $(\delta\Phi, \delta\eta) \in \delta\mathcal{M}$, *όπου* S *δίνεται από την* (3.14). *Τότε* (Φ, η) *είναι λύση της* $(\mathcal{P}_{WW})$. *Δηλαδή,*

$$\Delta\Phi = 0, \quad in \quad \mathcal{D}_h^{\eta}, \tag{3.16α'}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi + \partial_z \Phi = 0, \quad on \quad \Gamma_h, \tag{3.16β'}$$

$$\partial_t \eta + \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \eta - \partial_z \Phi = 0, \quad on \quad \Gamma_{\eta}, \tag{3.16γ'}$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + g\eta = 0, \quad on \quad \Gamma_{\eta}. \tag{3.16δ'}$$

Παρόλο που το παραπάνω σύστημα εξάγεται με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.1 για $G = \partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz$, παρουσιάζουμε εδώ την αρχική απόδειξη από τον Luke.

Απόδειξη. Ακολουθώντας την συνήθη διαδικασία του λογισμού μεταβολών υπολογίζουμε

$$\delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi] = \int_{t_0}^{T} \int_{\mathcal{D}_h^{\eta}} \Big\{ \partial_t \delta\Phi + \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\Phi + \partial_z \Phi \, \partial_z \delta\Phi \Big\} dV \, dt.$$

Η ταυτότητα Green και ο ολοκληρωτικός κανόνας Leibnitz δίνουν

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi] = \int_{t_0}^{T} \Big\{ \partial_t \int_{\mathcal{D}_h^{\eta}} \delta\Phi \; dV + \int_{\Gamma_{\eta}} \left(-\frac{\partial_t \eta}{R} + N_{+} \cdot \nabla\Phi \right) \delta\Phi \; d\Gamma_{\eta} + \\ + \int_{\Gamma_h} N_{-} \cdot \nabla\Phi \delta\Phi \; d\Gamma_h - \int_{\mathcal{D}_h^{\eta}} \Delta\Phi \delta\Phi \; dV \Big\} dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ισοχρονικότητα της $\delta\Phi$ (i.e. $\delta\Phi(\cdot, t_0) = \delta\Phi(\cdot, T) = 0$) ο πρώτος όρος μηδενίζεται, συνεπώς

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi} S[\Phi, \eta; \delta\Phi] = \int_{t_0}^{T} \int_{S} \Big\{ \Big(\partial_t \eta - R_{+} N_{+} \cdot \big[\nabla\Phi\big]_{z=\eta} \Big) \big[\delta\Phi\big]_{z=\eta} + \\ + \int_{S} R_{-} N_{-} \cdot \big[\nabla\Phi\big]_{z=-h} \big[\delta\Phi\big]_{z=-h} - \int_{-h}^{\eta} \Delta\Phi \, \delta\Phi \, dz \Big\} d\boldsymbol{x} \, dt, \end{aligned} \tag{3.17}$$

Η μερική μεταβολή του $S[\Phi,\eta]$ w.r.t η υπολογίζεται ακριβώς όπως στην προηγούμενη πιο γενική μορφή; δες (3.11)

$$\delta_\eta S[\Phi,\eta;\delta\eta] = \int_I\int_S \Big(\big[\partial_t\Phi\big]_{z=\eta} + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi\big]^2_{z=\eta} + g\eta\Big)\delta\eta\, d\boldsymbol{x}\, dt.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, στην εξίσωση (3.15) λαμβάνουμε την μεταβολική εξίσωση

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_S \Big\{ \Big(\partial_t\eta - R_+N_+\cdot\big[\nabla\Phi\big]_{z=\eta}\Big)\big[\delta\Phi\big]_{z=\eta} + R_-N_-\cdot\big[\nabla\Phi\big]_{z=-h}\big[\delta\Phi\big]_{z=-h} - \\ - \int_{-h}^{\eta}\Delta\Phi\,\delta\Phi\, dz + \big[\partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta\big]_{z=\eta}\delta\eta\Big\}\, d\boldsymbol{x}\, dt = 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Διαλέγοντας πρώτα $\delta\eta = 0$ και $\delta\Phi = 0$ στο Γ_η και Γ_h παίρνουμε την (3.16α′). Διαλέγοντας $\delta\Phi = 0$ στην Γ_η λαμβάνουμε την (3.16β′) και συνεπως αφου η $\delta\Phi$ είναι αυθαίρετη λαμβάνουμε την (3.16γ′). Τελικά αφού $\delta\eta$ είναι επίσης αυθαίρετη λαμβάνουμε την (3.16δ′) □

Αυτή η διατύπωση χρησιμοποιεί τα πεδία Φ και η και παράγει όλες τις εξισώσει του $(\mathcal{P}_{WW})$; Εξισώσεις (3.16α′)-(3.16δ′). Συγκεκριμένα , μηδενίζοντας την πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού S συναρτήσει του Φ στην κατεύθυνση $\delta\Phi$ δίνει όλες τις εξισώσεις του κινηματικού μέρους του προβλήματος (LE), (KC1), (KC2) ενώ, μηδενίζοντας την μεταβολη ως προς η επάγει την (DC). Η μεταβολική αρχή του Luke είναι ελεύθερη συνδέσμων. Εκτός από την αστροβιλότητα, καμία από τις κινηματικές συνθήκες δεν θεωρούνται εκ των προτέρων.

3.3 Ανάκτηση των εξισώσεων Hamilton από την αρχή του Luke

Θεωρείστε το συναρτησιακό δράσης που εισήλθε από τον Luke στο [Luk67]

$$S[\Phi,\eta] = \int_I \mathcal{L}[\Phi,\eta]\, dt, \quad \mathcal{L}[\Phi,\eta] = \int_{\mathcal{D}_h^\eta}\big(\partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz\big)dV. \tag{3.19}$$

Η στασιμότητα αυτού συναρτήσει των ανεξάρτητων μεταβολών $\delta\Phi$ και $\delta\eta$ οι οποίες μηδενίζονται στα πλευρικά όρια, δίνει όλες τις εξισώσεις του $(\mathcal{P}_{WW})$, που επαναλαβάνουμε εδώ για ευκολία

$$\Delta\Phi = 0, \quad \text{in} \quad \mathcal{D}_h^\eta, \tag{3.20α'}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi + \partial_z \Phi = 0, \quad \text{on} \quad \Gamma_h, \tag{3.20β'}$$

$$\partial_t \eta = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \eta + \partial_z \Phi, \quad \text{on} \quad \Gamma_\eta, \tag{3.20γ'}$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + g\eta = 0, \quad \text{on} \quad \Gamma_\eta. \tag{3.20δ'}$$

Ο Miles στο [Mil77] ξεκινάει την αναλυση του από ένα ισοδύναμο συνρτησιακό δράσης, το οποίο κατασκευάζει ως ακολούθως. Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό κανόνα Leibniz στον πρώτο όρο του συναρτησιακού του Luke (3.19) έχουμε

$$\int_{-h}^{\eta} \partial_t \Phi dz = \partial_t \int_{-h}^{\eta} \Phi \, dz - \partial_t \eta \big[\Phi\big]_{z=\eta}, \tag{3.21}$$

Από ολοκλήρωση κατα παράγοντες για τον τελευταίο όρο

$$\int_{-h}^{\eta} gz \, dz = \frac{1}{2} g\eta^2 - \frac{1}{2} g h^2. \tag{3.22}$$

Εν δυνάμει της (3.21) και (3.22), το συναρτησιακό δράσης (3.19) (αφού μηδενίσουμε τους όρους που συνισφέρουν μόνο στα χρονικά όρια) παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$S[\Phi, \eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{L}[\Phi, \eta] \, dt, \quad \mathcal{L}[\Phi, \eta] = \int_S \partial_t \eta \, [\Phi]_{z=\eta} \, d\boldsymbol{x} - \mathcal{H}[\Phi, \eta], \tag{3.23}$$

όπου $\mathcal{H}$ είναι τι συναρτησιακό Hamiltoni (ολική ενέργεια) (δες Section **??**)

$$\mathcal{H}[\Phi, \eta] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \big(\nabla\Phi\big)^2 \, dV + \frac{1}{2} \int_S g\eta^2 \, d\boldsymbol{x}. \tag{3.24}$$

Παρατηρήστε ότι η κινητική ενέργεια στην (3.24) δεν εκφράζεται με ε[ιφανειακές μεταβλητές. Αφού η στασιμότητα του S δίνει όλες τις εξισώσεις του προβλήματος του υδάτινου κυματισμου (3.20α')-(3.20δ'), για τα εξαρτημένα πεδία Φ και η, μπορούμε να υποθέσουμε ότι λύνοντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.20α′), (3.20β′) με $\big[\Phi\big]_{z=\eta} = \varphi$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την λύση στην (3.24) και να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Green για να πάρουμε ένα συναρτησιακό δράσης πάνω στις επιφανειακές μεταβλητες φ και η [Mil77, Sec. 2]:

$$S[\varphi,\eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{L}[\varphi,\eta]\,dt, \quad \mathcal{L}[\varphi,\eta] = \int_S \partial_t\eta\,\varphi\,d\boldsymbol{x} - \mathcal{H}[\varphi,\eta], \tag{3.25}$$

όπου

$$\mathcal{H}[\varphi,\eta] = \frac{1}{2}\int_S \Big(\varphi R_+\,\boldsymbol{N}_+\cdot[\nabla\Phi]_{z=\eta} + g\eta^2\Big)\,d\boldsymbol{x}, \tag{3.26}$$

και $\Phi = \Phi[\varphi,\eta]$ είναι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών $(\mathcal{P}_{DtN})$. Η εξίσωση (3.26) είναι η ολική ενέργεια και μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τον καν όνα της αλυσίδας για να μετασχηματίσουμε την χωρική παράγωγο του Φ στην ελεύθερη επιφάνεια

$$[\nabla\Phi]_{z=\eta} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi - \big[\partial_z\Phi\big]_{z=\eta}\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta \\ [\partial_z\Phi]_{z=\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$[\partial_t\Phi]_{z=\eta} = \quad \partial_t\varphi - \big[\partial_z\Phi\big]_{z=\eta}\partial_t\eta. \tag{3.28}$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (3.27) στην (3.26) το συναρτησιακο της ενέργειας Hamilton λαμβάνει την μορφή

$$\mathcal{H}[\varphi,\eta] = \frac{1}{2}\int_S \Big(\,\varphi\big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta + \zeta[\varphi,\eta]R_+^2\big) + g\eta^2\,\Big)\,d\boldsymbol{x}, \tag{3.29}$$

όπου $\zeta[\varphi,\eta] = \big[\partial_z\Phi\big]_{z=\eta}$ δρα γραμμικά στο φ και μη-γραμμικά και μη-τοπικά στο η. Η στασιμότητα του $S[\varphi,\eta]$ σημαίνει

$$\delta S[\varphi,\eta] \quad = \quad \int_I\int_S \Big\{\,\Big(\partial_t\eta - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi}\Big)\delta\varphi \;-\; \Big(\partial_t\varphi + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta}\Big)\delta\eta\,\Big\}d\boldsymbol{x}\,dt \quad = \quad 0. \tag{3.30}$$

όπου $\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi}$ και $\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta}$ είναι οι μεταβολικές παράγωγοι του $\mathcal{H}$ συναρτήσει του φ και η αντιστοίχως. Ορίζονται με τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\delta_\varphi\mathcal{H}[\varphi,\eta;\delta\varphi] = \int_S \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi}\delta\varphi\,d\boldsymbol{x}, \quad \delta_\eta\mathcal{H}[\varphi,\eta;\delta\eta] = \int_S \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta}\delta\eta\,d\boldsymbol{x} \tag{3.31}$$

και πρέπει να προσδιορισθούν. Αυτό επάγει τις ακόλουθες εξελικτικές εξισώσεις

$$\partial_t \eta = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}, \qquad \partial_t \varphi = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta}, \tag{3.32}$$

και έτσι ανακτάται η δεύτερη μορφή της αρχής του Hamilton. Ο Miles στο [Mil77] δεν υπολογίζει ευθέως αυτές τις συναρτησιακές παραγώγους. Αντί αυτού εξλαγει τις εξισώσεις (3.32) αναδιατυπώνοντας τις (3.20γ′) και (3.20δ′). Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας την (3.27) και (3.28) στις (3.20γ′) και (3.20δ′), λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} \partial_t \eta &= \big[\partial_z \Phi\big]_{z=\eta} R_+^2 - \nabla_{\boldsymbol{x}} \eta \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi \\ \partial_t \varphi &= -g\eta - \frac{1}{2}\big(\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi\big)^2 + \frac{1}{2}\big[\partial_z \Phi\big]_{z=\eta}^2 R_+^2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

όπου $\big[\partial_z \Phi\big]_{z=\eta}$ βρίσκεται από την λύση Φ του $(\mathcal{P}_{DtN})$.

Οι εξισώσεις (3.33) είναι ακριβώς οι εξισώσεις Hamilton που εξήχθησαν από τους Craig και Sulem στο [CS93], με την χρήση του DtN τελεστή (δες Κεφάλαιο 2). Συναρτήσει του DtN τελεστή το συναρτησιακό δράσης του οποίου η στασιμότητα δίνει τις εξισώσεις (HE) είναι

$$S[\varphi, \eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{L}[\varphi, \eta]\, dt, \quad \mathcal{L}[\varphi, \eta] = \int_S \partial_t \eta \, \varphi \, d\boldsymbol{x} - \mathcal{H}[\varphi, \eta], \tag{3.34}$$

όπου

$$\mathcal{H}[\varphi, \eta] = \frac{1}{2} \int_S \Big(\varphi\, G(\eta, h)\varphi + g\,\eta^2\Big)\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.35}$$

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή της αρχής του Luke σε συνδυασμό με την συνεπή, συζευγμένη, τοπική αναπαράσταση του κυματικού δυναμικού

Η χρησιμότητα της μεταβολικής αρχής του Luke είναι ότι, είναι άνευ όρων, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε βολική αναπαράσταση για το δυναμικό της ταχύτητας, αποφεύγοντας την a priori συνεκτίμηση της κινηματικής που είναι λογικό στην Hamiltonian διατύπωση. Φυσικά, η αναπαράσταση που επιλέγει κάποιος, πρέπει να πληροί όλα τα αναλυτικά και γεωμετρικά προαπαιτούμενα, που συνάγεται από τις a priori υποθέσεις ομαλότητας και από τις ιδιαιτερότητες του τομέα.

Για την περίπτωση γραμμικών κυματισμών πάνω από γενική βαθυμετρία, η ιδέα του sloping-bottom mode εισήχθει από τους Athanassoulis και Belibassakis στο [AB99] για να υλοποιήσει την συνεπή ικανοποιήση της Neumann συνθήκης στη γενική βαθυμετρία. Αυτή μέθοδος εφαρμόστηκε - με την εισαγωγή και του free surface mode σε ασθενώς μη γραμμική αλληλεπίδραση με επιπλέουσες δομές στο [BA06] και σε μη γραμμικά υδάτινα κύματα στο [BA11].

Στη πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζουμε την συνεπή, συζευγμένη, τοπική αναπαράσταση του κυματικού δυναμικού και παραθέτουμε τις ουσιαστικές ιδιότητες. Στη δεύτερη παράγραφο εισάγουμε αυτήν την αναπαράστση στην γενικευμένη αρχή του Luke. Στη τρίτη εξάγουμε τις εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδότητες των συναρτήσεων που χρησιμοποιήσαμε στην αναπαράσταση. Στις δύο τελευταίες παραγράφους δείχνουμε την σύνδεση των εξισώσεων αυτού του Κεφαλαίου με τις εξισώσεις Hamilton και εκφράζουμε τον τελεστή DtN συναρτήσει της αναπαράστασης.

4.1 Κάθετο ανάπτυγμα του κυματικού δυναμικού

Εδώ παρουσιάζουμε λεπτομερώς το συνεπές ανάπτυγμα σε σειρά το οποίο χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση του κυματικού δυναμικού([AB02]):

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x},z,t) &= \varphi_{-2}(\boldsymbol{x},t)Z_{-2}(z;\eta,h) + \varphi_{-1}(\boldsymbol{x},t)Z_{-1}(z;\eta,h) + \sum_{n\geq 0}\varphi_n(\boldsymbol{x},t)Z_n(z;\eta,h) \\ &= \sum_{n\geq -2}\varphi_n(\boldsymbol{x},t)Z_n(z;\eta,h) =: \Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta],\end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου συμβολίσαμε $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,...) = \{\varphi_n\}_{n\geq -2}$. Το πεδίο φ_{-2} θα αναφέρεται ως *free surface mode*, το φ_{-1} ως *bottom surface mode*, το φ_0 ως το *propagating mode* και $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ τα *evanecent modes*. Οι κάθετες συναρτήσεις $Z_n(z;\eta,h)$ έχουν διαλεχθεί έτσι ώστε οι $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ να είναι μία $L^2\big((-h,\eta)\big)$ βάση η οποία σχετίζεται με ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville ([CL72]) για τον αυτοσυζηγή τελεστή d^2/dz^2 στην οικογένεια διαστημάτων $J_h^\eta = [-h(\boldsymbol{x}),\eta(\boldsymbol{x},t)]$, $t \geq t_0$

$$\frac{d^2}{dz^2}Z_n - k_n^2 Z_n = 0, \tag{4.2α′}$$

$$\big[\partial_z Z_n - \mu_0 Z_n\big]_{z=\eta} = 0, \tag{4.2β′}$$

$$\big[\partial_z Z_n\big]_{z=-h} = 0. \tag{4.2γ′}$$

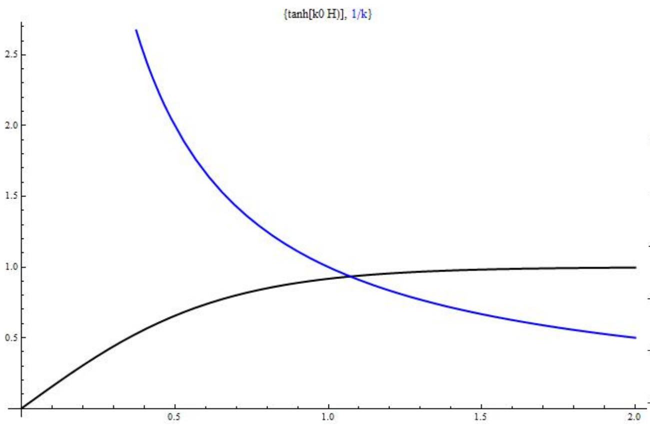
Η λύση του παραπάνω προβλήματος οδηγεί σε μία ακολουθία ιδοσυναρτήσεων $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ που δίνονται από

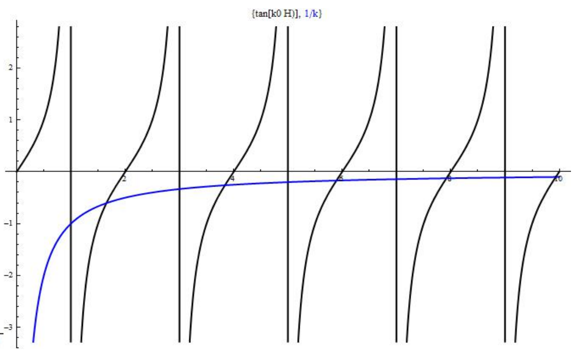
$$Z_0(z;\eta,h)=\frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh[k_0(\eta+h)]},\ \ Z_n(z;\eta,h)=\frac{\cos[k_n(z+h)]}{\cos[k_n(\eta+h)]},\ n=1,2,...,$$

Οι αριθμητικές πράμετροι $\mu_0=\omega^2/g$, h_0 είναι θετικές σταθερές, που δεν υπόκεινται σε a priori περιορισμούς. Επιπλέον, οι z-ανεξάρτητες ποσότητες $k_0=k_0(\eta,h)$ και $k_n=k_n(\eta,h)$ ορίζονται ως οι θετικές ρίζες των υπερβατικών εξισώσεων,

$$\mu_0-k_0\tanh(k_0(\eta+h))=0,\quad \mu_0+k_n\tan(k_n(\eta+h))=0. \tag{4.3}$$

Σημειώστε ότι για $n\geq 0$ οι συναρτήσεις $Z_n=Z_n(z;\eta,h)=Z_n(z;\eta,h,k_n(\eta,h))$ εξαρτώνται άμεσα και έμμεσα απο η and h. Οι εκφράσεις $Z_{-2}(z;\eta,h)$, $Z_{-1}(z;\eta,h)$ δίνονται από





$$Z_{-2}(z;\eta,h)=\frac{\mu_0h_0+1}{2h_0(\eta+h)}(z+h)^2-\frac{\mu_0h_0+1}{2h_0}(\eta+h)+1, \tag{4.4}$$

$$Z_{-1}(z;\eta,h)=\frac{\mu_0h_0-1}{2h_0(\eta+h)}(z+h)^2+\frac{1}{h_0}(\eta+h)+\frac{2h_0-(\eta+h)(\mu h_0+1)}{2h_0}, \tag{4.5}$$

Οι συναρτήσεις Z_{-2}, Z_{-1} είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς z, που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες

$$\begin{aligned}\big[\partial_z Z_{-2} - \mu_0 Z_{-2}\big]_{z=\eta} = \frac{1}{h_0}, \quad [\partial_z Z_{-2}]_{z=-h} = 0,\\ [\partial_z Z_{-1}]_{z=\eta} = 0, \quad [\partial_z Z_{-1}]_{z=-h} = \frac{1}{h_0}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Παρατηρήστε ότι οι ιδοσυναρτήσεις που απεικονίζουν τον $L^2(-h,\eta)$ και οι επιπρόσθετες συναρτήσεις Z_{-2}, Z_{-1} επιλέχθηκαν έτσι ώστε

$$[Z_n]_{z=\eta} = 1, \quad n \geq -2. \tag{4.7}$$

Περισσότερς λεπτομέρειες για την κατασκευή και την ορθότητα της (4.1) μπορούν να βρεθούν στο [BA11]. Η εξίσωση (4.7) επάγει

$$[\Phi]_{z=\eta} = [\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]]_{z=\eta} = \sum_{n\geq -2} \varphi_n := \varphi. \tag{4.8}$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι οι κάτακόρυφες πράγωγοι στην ελεύθερη και στην κάτω επιφάνεια δίνονται από

$$[\partial_z \Phi - \mu\Phi]_{z=\eta} = \frac{\varphi_{-2}}{h_0}, \tag{4.9α′}$$

$$[\partial_z \Phi]_{z=-h} = \frac{\varphi_{-1}}{h_0}. \tag{4.9β′}$$

Οι χωρικές και χρονικές παράγωγοι του Φ που βρίσκονται στην Lagrangian πυκνότητα παίρνουν την μορφή (συμβολίζοντας $\partial/\partial\eta = \partial_\eta$ κλπ.)

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi &= \sum_{n\geq -2} \partial_t\varphi_n Z_n + \varphi_n \partial_t Z_n\\ &= \sum_{n\geq -2} \partial_t\varphi_n Z_n + \varphi_n (\partial_\eta Z_n)(\partial_t \eta),\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \sum_{n\geq -2} \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \\ \\ \varphi_n \partial_z Z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n + \varphi_n \Big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta(\partial_\eta Z_n) + \nabla_{\boldsymbol{x}} h(\partial_h Z_n) \Big) \\ \\ \varphi_n \partial_z Z_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώωους των Z_n ως προς την ελεύθερη επιφάνεια η, και την κάτω επιφάνεια h και τις παραμέτρους k_n, $n \geq 0$. Οι συναρτήσεις $\{Z_n\}_{n=-2,1}$ εξαρτώνται άμεσα απο η και h, ενώ οι $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ εξαρτώνται και έμμεσα απο τα η και h δια μέσου των $k_n(\eta, h)$. Οι τιμές τους για $z = \eta$, αφού λάβουμε υπ'όψιν τις σχέσεις διασποράς (δες Παράρτημα (5)) γίνονται

$$
\begin{aligned}
\big[\partial_\eta Z_{-2}\big]_{z=\eta} &= -\frac{1}{h_0} - \mu_0, & \big[\partial_h Z_{-2}\big]_{z=\eta} &= 0, \\
\big[\partial_\eta Z_{-1}\big]_{z=\eta} &= -\mu_0, & \big[\partial_h Z_{-1}\big]_{z=\eta} &= 0, \\
\big[\partial_\eta Z_{0}\big]_{z=\eta} &= -\mu_0, & \big[\partial_h Z_{0}\big]_{z=\eta} &= \big[\partial_{k_0} Z_0\big]_{z=\eta} = 0, \\
\big[\partial_\eta Z_{n}\big]_{z=\eta} &= -\mu_0, & \big[\partial_h Z_{n}\big]_{z=\eta} &= \big[\partial_{k_n} Z_n\big]_{z=\eta} = 0,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Οι παραπάνω τύποι γράφονται σε πιο συμπαγή μορφη ([BA11])

$$
\big[\partial_\eta Z_n\big]_{z=\eta} = -[\partial_z Z_n]_{z=\eta} = -\big(\frac{\delta_{-2n}}{h_0} + \mu_0\big), \quad n \geq -2, \tag{4.13}
$$

όπου δ_{mn} συμβολίζει το δέλτα του Kronecker's . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των $\{Z_n\}$ που δίνονται από (4.7)-(4.12) λαμβάνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για την $\partial_t\Phi$ και $\nabla\Phi$ στην ελεύθερη επιφάνεια

$$
[\nabla\Phi]_{z=\eta} = \begin{pmatrix} \big[\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi\big]_{z=\eta} \\ \\ [\partial_z\Phi]_{z=\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + \Big(-\varphi_{-2}/h_0 - \mu_0\varphi \Big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta \\ \\ \varphi_{-2}/h_0 + \mu_0\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.14}
$$

$$
[\partial_t\Phi]_{z=\eta} = \partial_t\varphi - \Big(\varphi_{-2}/h_0 + \mu_0\varphi\Big)\partial_t\eta. \tag{4.15}
$$

4.2 Το συναρτησιακό δράσης g-Luke συναρτήσει της τοπικής αναπράστασης

Εισάγοντας την αναπαράσταση (4.1) στην μεταβολική αρχή, αντικαθιστούμε το άγνωστο πεδίο $\Phi : [t_0, T) \times \mathcal{D}_h^\eta \to \mathbb{R}$ με άπειρους άγνωστους συντελεστές δλδ. τα πεδία $\varphi_n : [t_0, T) \times S \to \mathbb{R}, \quad n \geq -2$. Στην επόμενη υποπαράγραφο αντιμετωπίζουμε το $\tilde{S}$ ως σύνθεση του S με το $\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$.

4.2.1 Πρώτη μεταβολή σύνθετων συναρτησιακών

Εν συντομία ανακαλούμε κάποια βασικά αποτελέσματα για την παραγώγιση σύνθετων συναρτησιακών. Ας θέσουμε

$$\tilde{\mathcal{M}}_\varphi \times \mathcal{M}_\eta := C^1\big([t_0, T) \to C^2(S)\big) \times C^1\big([t_0, T) \to C^2(S)\big)... \times C^1\big([t_0, T) \to C^1(S)\big),$$

και να υποθέσουμε ότι έχουμε το Φ σαν μια απεικόνιση $\tilde{\mathcal{M}}_\varphi \times \mathcal{M}_\eta \to \mathcal{M}$, η οποία είναι Fréchet διαφορίσιμη. Θεωρείστε το συναρτησιακό δράσης $\tilde{S} : \tilde{\mathcal{M}}_\varphi \times \mathcal{M}_\eta \to \mathbb{R}$ που δίνεται από,

$$\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = S[\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{G}[\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \eta] dt. \tag{4.16}$$

Συνθέτοντας την Lagrangian πυκνότητα $\mathcal{G}[\Phi, \eta]$ with $\Phi = \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$, λαμβάνουμε την Lagrangian πυκνότητα $\tilde{\mathcal{G}}$ σαν ένα συναρτησιακο στα $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_n\}$, $n \geq -2$ καιd η,

$$\tilde{\mathcal{G}}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = \mathcal{G}[\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \eta] = \int_{\mathcal{D}_h^\eta} G\big(\partial_t \Phi, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi, \partial_z \Phi, z\big)[\boldsymbol{\varphi}, \eta]\, dV. \tag{4.17}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι οι μεταβολές $\delta\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = (\delta\varphi_{-2}, \delta\varphi_{-1}, \delta\varphi_0, ...)$ είναι ισόχρονες. Η μεταβολη του $\tilde{S}$ είναι εξ'ορισμού

$$\delta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\eta] = \sum_{m \geq -2} \delta_{\varphi_m} \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\varphi_m] + \delta_\eta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta] \tag{4.18}$$

όπου $\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]$ είναι η μερική μεταβολή του $\tilde{S}$ στην κατεύθυνση $\delta\varphi_m$ και $\delta_\eta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]$ είναι η μερική μεταβολή του $\tilde{S}$ κατα την κατεύθυνση $\delta\eta$. Προχωρούμε θεωρώντας το $\tilde{S}$ σαν σύνθεση του S με το $\Phi=\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$. Ο κανόνας της σύνθεσης για τέτοια συναρτησιακά είναι (see [LV00, Lem. 3.1.1], [MRA01,])

$$\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] \;=\; \delta_\Phi S\big[\,\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\,,\,\eta\,;\,\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]\,\big],\quad m\geq -2, \tag{4.19α$'$}$$

$$\delta_\eta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]=\delta_\Phi S\big[\,\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta];\delta_\eta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]\,\big]+\delta_\eta S\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta];\delta\eta\,\big], \tag{4.19β$'$}$$

όπου $\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]$ και $\delta_\eta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]$ συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους του $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ ως προς φ_m και η, αντιστοίχως.

4.2.2 Υπολογισμός της μερικής μεταβολής του συναρτησιακού g-Luke δια μέσου της αναπαράστασης

In this subsection we apply the previous facts in order to calculate the partial variations of g-Luke's functional expressed in terms of the local-mode representation given by (4.1). From the form of the partial variations (4.19α$'$) and (4.19β$'$) we already see that the condition of stationarity of the functional $\tilde{S}$:

$$\delta\tilde{S}=\sum_{m\geq -2}\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]+\delta_\eta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]=0, \tag{4.20}$$

contains the variation of the representation $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ with respect to η. In what follows we use the notation

$$\big\langle f,g\big\rangle=\int_{-h(\boldsymbol{x})}^{\eta(\boldsymbol{x},t)}f(\boldsymbol{x},z)g(\boldsymbol{x},z)dz. \tag{4.21}$$

We easily see from (4.1) that for every $m\geq -2$ the partial Fréchet derivatives of $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ with respect to φ_m are

$$\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]=Z_m\delta\varphi_m,\quad m\geq -2 \tag{4.22}$$

which implies that the partial Fréchet derivative of $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ with respect to $\boldsymbol{\varphi}$ is

$$\delta_{\boldsymbol{\varphi}}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{m\geq -2} Z_m \delta\varphi_m. \tag{4.23}$$

and the partial Fréchet derivative of $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ with respect to η

$$\delta_{\eta}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta] = \Big(\sum_{m\geq -2} \varphi_m\ \partial_\eta Z_m\Big)\delta\eta. \tag{4.24}$$

The partial derivatives of the functions Z_n with respect to η and k_n are calculated in the Appendix (5). Substituting (4.13) in (4.24), we also obtain

$$\big[\delta_{\eta}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]\big]_{z=\eta} = (\varphi_{-2}/h_0 + \mu\varphi)\delta\eta. \tag{4.25}$$

Λήμμα 4.2.1. *Let $\tilde{S} : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$ be a functional such that*

$$\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta] := S\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta],\eta\big] = \int_{t_0}^{T}\int_{\mathcal{D}_h^\eta} G\big(\partial_t\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi,z\big)[\boldsymbol{\varphi},\eta]dVdt.$$

Then the for $m \geq -2$ the partial variation of $\tilde{S}$ at $(\boldsymbol{\varphi},\eta) = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,...,\eta)$ in the direction $\delta\varphi_m$ is

$$\begin{aligned}\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] = \int_{t_0}^{T}\int_{S}\Big\{ & -\partial_t\eta + \big[\big(\overrightarrow{D}_2G, D_3G\big)\cdot R_+\boldsymbol{N}_+\big]_{z=\eta} + \\ & + \Big\langle -div(\overrightarrow{D}_2G, D_3G)\,,Z_m\Big\rangle + \\ & + \big[\big(\overrightarrow{D}_2G, D_3G\big)\cdot\ R_-\boldsymbol{N}_-Z_m\big]_{z=-h}\Big\}\delta\varphi_m d\boldsymbol{x}dt,\end{aligned} \tag{4.26}$$

where $G \equiv G\big(\partial_t\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi,z\big)[\boldsymbol{\varphi},\eta]$, $\boldsymbol{N}_+ = R_+^{-1}\big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta,1\big)$ and $\boldsymbol{N}_- = R_-^{-1}\big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}h,-1\big)^T$ are the outward unit normal vectors on Γ_η and Γ_h respectively and $R_+ = \big((\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2+1\big)^{1/2}$, $R_- = \big((\nabla_{\boldsymbol{x}}h)^2+1\big)^{1/2}$ are the corresponding scalar functions.

Απόδειξη. From (3.10) we know that

$$\begin{aligned}\delta_\Phi S[\Phi,\eta;\delta\Phi] = \int_{t_0}^{T}\int_{S}\Big\{ & -\int_{-h}^{\eta}\big(\mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2G, D_3G)\,\delta\Phi\big)\,dz + \\ & + \big[(\overrightarrow{D}_2G, D_3G)\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ - \partial_t\eta\Big)\big[\delta\Phi\big]_{z=\eta} \\ & + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G, D_3G)\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\Big)\big[\delta\Phi\big]_{z=-h}\Big\}d\boldsymbol{x}dt.\end{aligned} \tag{4.27}$$

From the composition rule (4.19α′) we obtain

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta\,;\,\delta\varphi_m] &= \delta_\Phi S\big[\,\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta],\eta;\delta_{\varphi_m}\tilde{\Phi}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]\,\big]\\
&= \int_{t_0}^{T}\int_S\Big\{-\int_{-h}^{\eta}\big(\mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)\big)\big(\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]\big)\,dz+\\
&\quad+\Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+-\partial_t\eta\Big)\big[\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]\big]_{z=\eta}\Big)d\boldsymbol{x}dt\\
&\quad+\Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\Big)\big[\delta_{\varphi_m}\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m]\big]_{z=-h}\Big\}d\boldsymbol{x}dt\\
&= \int_{t_0}^{T}\int_S\Big\{-\Big\langle\mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2G,D_3G),Z_m\Big\rangle+\\
&\quad+\Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)^T\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+-\partial_t\eta\Big)\big[Z_m\big]_{z=\eta}\\
&\quad+\Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)^T\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\Big)\big[Z_m\big]_{z=-h}\Big\}\delta\varphi_m d\boldsymbol{x}dt
\end{aligned}$$

Where (4.22) have been used. Using the fact that $[Z_n]_{z=\eta}=1$ we obtain the result. □

Λήμμα 4.2.2. *The partial variation of $\tilde{S}$ at $(\boldsymbol{\varphi},\eta)=(\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,...,\eta)$ in the direction $\delta\eta$ is*

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta] = \int_{t_0}\int_S\Big\{\sum_{l\geq -2}\Big(&-\big\langle div(\overrightarrow{D}_2G,D_3G),\partial_\eta Z_l\big\rangle+\\
&+\Big(\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+-\partial_t\eta\Big)\big[\partial_\eta Z_l\big]_{z=\eta}\\
&+\big[(\overrightarrow{D}_2G,D_3G)\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\big[\partial_\eta Z_l\big]_{z=-h}\Big)\varphi_l+[G]_{z=\eta}\Big\}\delta\eta d\boldsymbol{x}dt
\end{aligned}$$

where $G\equiv G\big(\partial_t\Phi,\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi,\partial_z\Phi,z\big)[\boldsymbol{\varphi},\eta]$, $\boldsymbol{N}_+=R_+^{-1}\big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta,1\big)$ and $\boldsymbol{N}_-=R_-^{-1}\big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}h,-1\big)^T$ are the outward unit normal vectors on Γ_η and Γ_h respectively, $R_+=\big((\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2+1\big)^{1/2}$, $R_-=\big((\nabla_{\boldsymbol{x}}h)^2+1\big)^{1/2}$ are the corresponding scalar functions and $\partial_\eta Z_l=\partial Z_l/\partial\eta$ are given in the Appendix (5).

Απόδειξη. From (3.10) and (4.19β′)

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta] = \int_{t_0}^{T}\int_S \Big\{ & \int_{-h}^{\eta} -\big(\operatorname{div}(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)\big)\delta_\eta \Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]\, dz + \\
& + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)^T\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ - \partial_t\eta\Big)\big[\delta_\eta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]\big]_{z=\eta}\Big) + \\
& + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)^T\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\Big)\big[\delta_\eta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta]\big]_{z=-h} + \big[G\big]_{z=\eta}\delta\eta\Big\} d\boldsymbol{x}dt \\
= \int_{t_0}\int_S \Big\{ \sum_{m\ge -2} \Big(& - \big\langle \operatorname{div}(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G), \partial_\eta Z_m \big\rangle \varphi_m + \\
& + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)^T\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ - \partial_t\eta\Big)\big[\partial_\eta Z_m\big]_{z=\eta}\varphi_m \\
& + \big[(\overrightarrow{D}_2 G, D_3 G)^T\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-\big[\partial_\eta Z_m\big]_{z=-h}\varphi_m\Big) + \big[G\big]_{z=\eta}\Big\}\delta\eta\, d\boldsymbol{x}\, dt.
\end{aligned}$$

where (4.24) have been used. □

4.2.3 Στασιμότητα του συναρτησιακού g-Luke δια μέσου της τοπικής αναπράστασης

We can write the variational equation (4.18) as,

$$\delta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\boldsymbol{\varphi},\delta\eta] = \int_{t_0}^{T}\int_S \Big\{ \sum_{m\ge -2} \frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\varphi_m}\delta\varphi_m + \frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\eta}\delta\eta\Big\}\, d\boldsymbol{x}\, dt = 0, \tag{4.28}$$

for all $\delta\varphi_m$, $m \ge -2$ and for all $\delta\eta$, where $\delta\tilde{\mathcal{G}}/\delta\varphi_m$ and $\delta\tilde{\mathcal{G}}/\delta\eta$ denote the variational derivatives of $\tilde{\mathcal{G}}[\boldsymbol{\varphi},\eta] = \mathcal{G}\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]$ and are given by the expressions in curly brackets in the statements of Lemma (4.2.1) and Lemma (4.2.2) correspondigly. Choosing first $\delta\eta = 0$ and all $\delta\varphi_m$ to vanish expect one we obtain

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\varphi_{m_*}} = 0, \quad \text{for some} \quad m_* \ge -2 \tag{4.29}$$

Repeating this procedure we obtain the following infinite system

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\varphi_m} = 0, \quad m \ge -2. \tag{4.30}$$

Choosing, now, all $\delta\varphi_m$ to be zero and $\delta\eta$ arbitary we obtain

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\eta} = 0. \tag{4.31}$$

Finally, the Euler-Lagrange equations for $\tilde{S}$ are

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\varphi_m} = 0, \quad m \geq -2 \quad \text{and} \quad \frac{\delta\tilde{\mathcal{G}}}{\delta\eta} = 0. \tag{4.32}$$

4.3 Στασιμότητα του συναρτησιακού Luke δια μέσου της τοπικής αναπράστασης και το Coupled Mode System (CMS)

Using the expansion (4.1) into the Lagrangian density function introduced in [Luk67], we obtain

$$L = L(\partial_t \Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], \nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], z) = \partial_t \Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta] + \frac{1}{2}\big(\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big)^2 + gz. \tag{4.33}$$

The Lagrangian density functional then reads

$$\tilde{\mathcal{L}}[\boldsymbol{\varphi},\eta] = \mathcal{L}[\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta],\eta] = \int_{\mathcal{D}_h^\eta} L(\partial_t \Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], \nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], z)\, dV. \tag{4.34}$$

Now $\tilde{\mathcal{L}}$ can be written

$$\tilde{\mathcal{L}}[\boldsymbol{\varphi},\eta] = \int_S \Big\{ \int_{-h}^{\eta} \sum_{n\geq -2} \big(\partial_t \varphi_n \, Z_n + \varphi_n \, \partial_t Z_n \big) dz +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{n\geq -2} \sum_{m\geq -2} \big(\mathcal{A}_{mn} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_m + 2\vec{\mathcal{B}}_{mn} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \varphi_m + \mathcal{C}_{mn} \varphi_n \varphi_m + \mathcal{D}_{mn} \varphi_n \varphi_m \big) + g\eta^2 \Big\} d\boldsymbol{x}, \tag{4.35}$$

where $\mathcal{A}_{mn}$, $\vec{\mathcal{B}}_{mn}$, $\mathcal{C}_{mn}$ and $\mathcal{D}_{mn}$ are vertical integrals given by

$$\mathcal{A}_{mn} = \left\langle Z_n, Z_m \right\rangle = \mathcal{A}_{nm}, \tag{4.36α′}$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{mn} = \left\langle Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_m \right\rangle, \tag{4.36β′}$$

$$\mathcal{C}_{mn} = \left\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_m \right\rangle = \mathcal{C}_{nm}, \tag{4.36γ′}$$

$$\mathcal{D}_{mn} = \left\langle \partial_z Z_n, \partial_z Z_m \right\rangle = \mathcal{D}_{nm}. \tag{4.36δ′}$$

Observe that the Hamiltonian energy, appearing in the Lagrangian (4.35), in terms of the local-mode representation, is given by

$$\tilde{\mathcal{H}}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = \\ = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \big(\mathcal{A}_{mn} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_m + 2\vec{\mathcal{B}}_{mn} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \varphi_m + \mathcal{C}_{mn} \varphi_n \varphi_m + \mathcal{D}_{mn} \varphi_n \varphi_m \big) + g\eta^2 \right\} d\boldsymbol{x} \tag{4.37}$$

or alternativelly by,

$$\tilde{\mathcal{H}}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = \\ = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \big(\mathcal{A}_{mn} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_m + 2\vec{\mathcal{B}}_{mn} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \varphi_m + \mathcal{C}'_{mn} \varphi_n \varphi_m \big) + g\eta^2 \right\} d\boldsymbol{x} \quad , \tag{4.38}$$

where

$$\mathcal{C}'_{mn} = \left\langle \nabla Z_n \cdot \nabla Z_m \right\rangle. \tag{4.39}$$

The action functional is the time integral of $\tilde{\mathcal{L}}$, i.e.

$$\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = S[\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \eta] = \int_{t_0}^{T} \mathcal{L}[\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \eta] dt. \tag{4.40}$$

Stationarity means that the first variation of $\tilde{S}$ is zero. i.e.

$$\delta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\eta] = \sum_{m \geq -2} \delta_{\varphi_m} \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\varphi_m] + \delta_\eta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta] = 0. \tag{4.41}$$

We could proceed by calculating the variations using (4.35). This, indeed, would be the only way to find the variation $\delta\tilde{S}$, in the case where simplifications are made concerning the horizontal velocity $\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi$ or the bottom. For this simplified representation, $\tilde{S}$ would not be exactly equal to S and we can only say that $\tilde{S} \approx S \circ \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$ and we proceed by varying the simplified form of (4.35). For example, Klopman et al. in [KGD10], use a simplified Hamiltonian, after introducing a general series representation for the velocity potential, which contains vertical integrals of the form of $\mathcal{A}_{mn}$ and $\mathcal{D}_{mn}$. However the integrals given by $\vec{\mathcal{B}}_{mn}$ and $\mathcal{C}_{mn}$ have simplified forms. Specifically the terms containing the derivatives of the vertical functions with respect to the depth h and the parameters k_n are supressed. A similar situation is occured in [CD12] where several approximate models are derived. There, the authors use ansatzes to represent both the potential and the velocity. In the case of arbitary depth a product of a vertical hyperbolic cosine function (Z_0 in the present notation) with the trace of the potential is chosen to represent the velocity potential. The partial derivatives with respect to the free surface elevation, depth and the parameter are not kept in the representation of the horizontal velocity. This can be seen if one takes the horizontal derivative of the ansatz for the potential and compares it with the ansatz used for the velocity. We mention that these terms are important when modelling flows over steep bottoms and for wave reflections as is described in [DK09] for the case of linearised waves.

Here, since no simplifications are made, and the involved arguments in the Lagrangian equal exactly their corresponding representations through (4.1), we can apply directly the previous results, when we vary $\tilde{S} = S \circ \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$. The resulting Euler-Lagrange equations were first appeared in [AB02]. First we calculate the partial variations of $\tilde{S}$ at $(\boldsymbol{\varphi}, \eta)$ in the direction $\delta\varphi_m$, $m \geq -2$ and $\delta\eta$.

Λήμμα 4.3.1. *The partial variation of the functional $\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ at $(\boldsymbol{\varphi},\eta)$ in the direction $\delta\varphi_m$, for $m \geq -2$ is given by*

$$\delta_{\varphi_m}\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] = \int_I\int_S \Big\{ -\partial_t\eta - \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ - \sum_{n\geq -2} A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n\Big\}\delta\varphi_m\, d\boldsymbol{x}\, dt,$$

where $R_+ = \sqrt{\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2 + 1}$ and

$$\begin{aligned} A_{mn}(\eta,h) &= \langle Z_n, Z_m\rangle = A_{nm}, \\ \vec{B}_{mn}(\eta,h) &= 2\,\langle \nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n, Z_m\rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}}h[Z_nZ_m]_{z=-h}, \\ C_{mn}(\eta,h) &= \langle \Delta Z_n, Z_m\rangle + \Big[\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}h\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n + \partial_z Z_n\big)Z_m\Big]_{z=-h} \\ &= \langle \Delta Z_n, Z_m\rangle - R_-\boldsymbol{N}_-\cdot[(\nabla Z_n)Z_m]_{z=-h}. \end{aligned}$$

Note that, the matrix A_{mn} is symmetric and for $m,n \geq -2$ and the submatrix $\big(A_{mn}\big)_{m,n\geq 0}$ is diagonal. Furthermore, the elements of $\vec{B}_{mn}$ are two dimensional vectors depending on the horizontal derivatives of the vertical functions and the bottom. The matrix C_{mn} contains the full Laplacian of the vertical functions as well as the their outward normal derivative on the bottom surface.

Απόδειξη. We apply Lemma (4.2.1) to the functional

$$\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta] = \int_I\int_{\mathcal{D}_h^\eta} L\, dV\, dt, \quad L = \partial_t\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta] + \frac{1}{2}\big(\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big)^2 + gz,$$

and we proceed by calculating the terms involved

$$\begin{aligned} \Big\langle -\operatorname{div}(\overrightarrow{D}_2L, D_3L), Z_m\Big\rangle &= -\Big\langle \Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], Z_m\Big\rangle \\ &= -\Big\langle \sum_{n\geq -2} \nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n Z_n + 2\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n + \varphi_n\Delta Z_n\,,\, Z_m\Big\rangle \\ &= -\sum_{n\geq -2} \big\langle Z_n, Z_m\big\rangle\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + 2\big\langle\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n, Z_m\big\rangle\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \big\langle\Delta Z_n, Z_m\big\rangle\varphi_n \end{aligned}$$

The bottom surface term reads

$$\begin{aligned}
\big[(\overrightarrow{D}_2L, D_3L)\cdot R_-\boldsymbol{N}_-Z_m\big]_{z=-h} =& \big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]_{z=-h}\cdot R_-\boldsymbol{N}_-Z_m \\
=& -\nabla_{\boldsymbol{x}}h\cdot\sum_{n\geq -2}\Big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\big[Z_nZ_m\big]_{z=-h}+\varphi_n\big[\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_nZ_m\big]_{z=-h}\Big)- \\
&-\sum_{n\geq -2}\varphi_n\big[\partial_z Z_nZ_m\big]_{z=-h} \\
=& -\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}h\big[Z_nZ_m\big]_{z=-h}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n- \\
&-\big[(\nabla_{\boldsymbol{x}}h\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n+\partial_z Z_n)Z_m\big]_{z=-h}\varphi_n
\end{aligned}$$

For the free surface term we use (4.14)

$$[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]]_{z=\eta}=\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi+\Big(-\varphi_{-2}/h_0-\mu_0\varphi\Big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\\ \varphi_{-2}/h_0+\mu_0\varphi\end{pmatrix},$$

to obtain

$$\begin{aligned}
\big[(\overrightarrow{D}_2L, D_3L)\cdot R_+\boldsymbol{N}_+Z_m\big]_{z=\eta} =& \big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+ \\
=& -\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi-\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2\sum_{n\geq -2}[\frac{\partial Z_n}{\partial\eta}]_{z=\eta}\varphi_n+\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu\varphi \\
=& -\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi+\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu\varphi\Big)+\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu\varphi \\
=& -\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi+\Big(\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big)^2+1\Big)\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu\varphi\Big).
\end{aligned}$$

□

We also have

Λήμμα 4.3.2. *The partial variation of the functional $\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ on $(\boldsymbol{\varphi},\eta)$ in the direction $\delta\eta$*

is given by

$$\delta_\eta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta] = \int_I \int_S \Bigg\{ \partial_t \varphi + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 - \frac{1}{2}R_+^2 \Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu\varphi \Big)^2 + \\ + \sum_{n\geq -2} \Big(\sum_{l\geq -2} -a_{nl}(\eta, h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n - \vec{b}_{nl}(\eta, h) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n - c_{nl}(\eta, h)\varphi_n \Big) \varphi_l \Bigg\} \delta\eta d\boldsymbol{x} dt,$$

where

$$\begin{aligned} a_{nl}(\eta, h) &= \langle Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle, \\ \vec{b}_{nl}(\eta, h) &= 2\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}} h [Z_n(\partial_\eta Z_l)]_{z=-h}, \\ c_{nl}(\eta, h) &= \langle \Delta Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle + \big[\big(\nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n + \partial_z Z_n \big) \big(\partial_\eta Z_l \big) \big]_{z=-h}, \end{aligned}$$

and $\partial_\eta Z_l = \partial Z_l / \partial\eta$ *are given in Apendix* (5).

Απόδειξη. From Lemma (4.2.1)

$$\delta_\eta \tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta] = \int_{t_0} \int_S \Big\{ \sum_{l\geq -2} \Big(- \big\langle \mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L), \partial_\eta Z_l \big\rangle + \\ + \Big(\big[(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L) \big]_{z=\eta} \cdot R_+ \boldsymbol{N}_+ - \partial_t \eta \Big) \big[\partial_\eta Z_l \big]_{z=\eta} \\ + \big[(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L) \big]_{z=-h} \cdot R_- \boldsymbol{N}_- \big[\partial_\eta Z_l \big]_{z=-h} \Big) \varphi_l \\ + \Big[L\big(\partial_t \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \partial_z \Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], z \big) \Big]_{z=\eta} \Big\} \delta\eta \, d\boldsymbol{x} \, dt.$$

We proceed by calculating the terms involved in the above equation

$$\begin{aligned} \Big\langle \mathrm{div}(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L), \partial_\eta Z_l \Big\rangle &= \Big\langle \Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi}, \eta], \partial_\eta Z_l \Big\rangle \\ &= \sum_{n\geq -2} \langle Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + 2\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n + \langle \Delta Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle \varphi_n. \end{aligned}$$

For the bottom surface term we have

$$\big[(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L)^T \big]_{z=-h} \cdot R_- \boldsymbol{N}_- \big[(\partial_\eta Z_l) \big]_{z=-h} = \sum_{n\geq -2} -[Z_n(\partial_\eta Z_l)]_{z=-h} \nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n - \\ - [(\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n)(\partial_\eta Z_l)]_{z=-h} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} h \varphi_n - [(\partial_z Z_n)(\partial_\eta Z_l)]_{z=-h} \varphi_n.$$

For the free surface terms we use the fact that (see (4.14))

$$[\nabla\Phi]_{z=\eta} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + \Big(-\varphi_{-2}/h_0 - \mu_0\varphi\Big)\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta \\ \varphi_{-2}/h_0 + \mu_0\varphi \end{pmatrix},$$

and

$$\sum_{l\geq -2}\varphi_l\big[\partial_\eta Z_l\big]_{z=\eta} = -\partial_z\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]_{z=\eta} = -\varphi_{-2}/h_0 - \mu_0\varphi,$$

to obtain

$$\sum_{l\geq -2}\partial_t\eta[\partial_\eta Z_l]_{z=\eta}\varphi_l \quad = \quad -\partial_t\eta(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi),$$

$$\begin{aligned}\sum_{l\geq -2}\big[(\overrightarrow{D}_2 L, D_3 L)^T\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+\big[\partial_\eta Z_l\big]_{z=\eta}\varphi_l &= \big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]_{z=\eta}\cdot R_+\boldsymbol{N}_+\sum_{l\geq -2}\varphi_l\big[\partial_\eta Z_l\big]_{z=\eta} \\ &= \Big(-\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta + (\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi)(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2 + (\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi)\Big)\Big(-\frac{\varphi_{-2}}{h_0} - \mu_0\varphi\Big) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big) - \big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)^2\big((\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2+1\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[L]_{z=\eta} \quad &= \quad [\partial_t\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]]_{z=\eta} + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\big]^2_{z=\eta} + g\eta \\ &= \quad \partial_t\varphi - \big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)\partial_t\eta + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)^2 - \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big) + \frac{1}{2}\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)^2\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)^2 + g\eta \\ &= \quad \partial_t\varphi - \big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)\partial_t\eta + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\big)^2 - \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)^2\Big((\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2+1\Big) + g\eta.\end{aligned}$$

Taking the sum of the above terms we see that the terms $\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)\partial_t\eta$ and $\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\big)$ cancel out and after some rearrangement we obtain the result $\square$

4.3.1 Στασιμότητα του $\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$

After the calculation of the partial variations of $\tilde{S}$, the variational equation (4.41) takes the form, for all $\delta\boldsymbol{\varphi}$, $\delta\eta$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\boldsymbol{\varphi},\delta\eta] = \int_{t_0}\int_S \Big\{ \sum_{m\geq -2} \Big(&- \partial_t\eta - \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ &- \sum_{n\geq -2} A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n\Big)\delta\varphi_m + \\ &+ \Big(\partial_t\varphi + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 - \frac{1}{2}R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu\varphi\Big)^2 + \\ + \sum_{l\geq -2}\Big(\sum_{n\geq -2} - a_{nl}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n - \vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n &- c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\,\varphi_l\Big)\delta\eta\Big\}\, d\boldsymbol{x}\, dt = 0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Choosing first $\delta\eta = 0$ and all $\delta\varphi_m$ to vanish except one, say $\delta\varphi_{m_*}$, we obtain (using Lemma 4.3.1)

$$\begin{aligned}\delta_{\varphi_m} S[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] = \int_I\int_S \Big\{ &- \partial_t\eta - \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ - \sum_{n\geq -2}\Big(A_{mn_*}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn_*}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n &+ C_{mn_*}(\eta,h)\varphi_n\Big)\Big\}\delta\varphi_{m_*} d\boldsymbol{x}dt = 0,\end{aligned}$$

which implies the equation

$$\begin{aligned}\partial_t\eta = &- \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ &- \sum_{n\geq -2} A_{mn_*}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn_*}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn_*}(\eta,h)\varphi_n.\end{aligned}$$

Repeating this procedure consecutively for all m_* we arrive at the following infinite system

$$\begin{aligned}\partial_t\eta = &- \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ &- \sum_{n\geq -2} A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n, \quad m\geq -2.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Choosing now, $\delta\varphi_m = 0$, for all $m \geq -2$, equation (4.42) becomes

$$\begin{aligned}&\int_I\int_S \Big\{\partial_t\varphi + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 - \frac{1}{2}R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu\varphi\Big)^2 - \\ &- \sum_{l\geq-2}\Big(\sum_{n\geq-2} a_{nl}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\varphi_l\Big\}\,\delta\eta\, d\boldsymbol{x}\, dt = 0.\end{aligned} \tag{4.44}$$

By the arbitariness of $\delta\eta$ we obtain

$$\begin{aligned}\partial_t\varphi &= -\,g\eta - \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 + \frac{1}{2}R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu\varphi\Big)^2 + \\ &+ \sum_{l\geq-2}\Big(\sum_{n\geq-2} a_{ln}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\varphi_l.\end{aligned} \tag{4.45}$$

The nonlinear CMS, Eqs. (4.43) and (4.45), has been derived by Luke's variational principle, and thus it is equivalent to the conventional description of the water wave problem defined by Eqs. (3.16α′)-(3.16β′). This system of equations was first derived in [AB02]. The difference with the present form, is that the free-surface terms involved in the definitions of the matrix coefficients A_{mn}, $\vec{B}_{mn}$, C_{mn}, a_{nl}, $\vec{b}_{nl}$, c_{nl} in [AB02], are summed out of the series using Eqs. (4.12). We state this fact in the following corollary.

Πόρισμα 4.3.1. *Let A'_{mn}, B'_{mn}, C'_{mn}, $a_{nl}^{(0,2)}$, $a_{nl}^{(1,1)}$, $b_{mn}^{(1,1)}$, $c_{mn}^{(0,0)}$ be the matrix coeeficients defined in [AB02]. Then*

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq-2} A'_{mn}\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + B'_{mn}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C'_{mn}\varphi_n = \\ &= \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi - R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) + \\ &+ \sum_{n\geq-2} A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l\geq-2}\sum_{n\geq-2} a_{nl}^{(0,2)}\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n\varphi_l - a_{nl}^{(1,1)}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_l + b_{mn}^{(1,1)}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\varphi_l + c'_{mn}\varphi_n\varphi_l = \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 - \frac{1}{2}R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu\varphi\Big)^2 + \\ &+ \sum_{l\geq-2}\Big(\sum_{n\geq-2} a_{nl}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\varphi_l\end{aligned}$$

We note that the CMS has been obtained without any essential assumptions concerning the vertical structure of the wave potential. Furthermore no simplifications (mild-slope etc) were made and thus, the present CMS, being equivalent to the complete formulation, is expected to be able to fully account for wave nonlinearity and dispersion.

Περαιτέρω μελέτη του υποσυστήματος (4.43)-Αναδιατύπωση του CMS σαν ένα σύστημα δύο εξελικτικών εξισώσεων

The subsystem (4.43) is of peculiar form, since the time derivative of η, $\partial_t\eta$, appears as the left hand side of all equations. Writting (4.43) as

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq -2} A_{mn}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n = \\ = \quad \partial_t\eta + \nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi - R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big),\end{aligned} \tag{4.46}$$

we see that the r.h.s terms cannot, in fact, be dependent on m. We resolve this controversy as follows [AB02] : Choose the m_*^{th} equation and substract it from the others to obtain the following system

$$\sum_{n\geq -2} \hat{A}_{mn}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \hat{C}_{mn}(\eta,h)\varphi_n = 0, \quad m\geq -2, \quad m\neq m_*. \tag{4.47}$$

where

$$\begin{aligned}\hat{A}_{mn}(\eta,h) &= A_{mn}(\eta,h) - A_{m_*n}(\eta,h),\\ \hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h) &= \vec{B}_{mn}(\eta,h) - \vec{B}_{m_*n}(\eta,h),\\ \hat{C}_{mn}(\eta,h) &= C_{mn}(\eta,h) - C_{m_*n}(\eta,h),\end{aligned}$$

together with the remaning equation

$$\begin{aligned}\partial_t\eta \;=\; &-\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) - \\ &-\sum_{n\geq -2} A_{m_*n}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \vec{B}_{m_*n}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{m_*n}(\eta,h)\varphi_n.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Θεώρημα 4.3.1. *($\mathcal{P}_{WW}$) is equivalent with the following system of evolution equations for φ and η*

$$\begin{aligned}\partial_t\eta \;=\; &-\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\Big)-\\ &-\sum_{n\geq -2} A_{m_*n}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n + \vec{B}_{m_*n}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{m_*n}(\eta,h)\varphi_n,\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\varphi \;=\; &-g\eta-\frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2+\frac{1}{2}R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi\Big)^2+\\ &+\sum_{l\geq -2}\sum_{n\geq -2}\Big(a_{nl}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n+\vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\varphi_l,\end{aligned} \tag{4.50}$$

where $\{\varphi_n\}_{n\geq -2}$ are obtained by the infinite coupled mode system

$$\sum_{n\geq -2}\hat{A}_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n+\hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n+\hat{C}_{mn}(\eta,h)\varphi_n=0,\quad m\geq -2,\quad m\neq m_0, \tag{4.51}$$

$$\sum_{n\geq -2}\varphi_n=\varphi. \tag{4.52}$$

where

$$\hat{A}_{mn}(\eta,h)=A_{mn}(\eta,h)-A_{m_*n}(\eta,h),$$

$$\hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h)=\vec{B}_{mn}(\eta,h)-\vec{B}_{m_*n}(\eta,h),$$

$$\hat{C}_{mn}(\eta,h)=C_{mn}(\eta,h)-C_{m_*n}(\eta,h).$$

Θεώρημα 4.3.2. *The following identity holds*

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq -2}A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n+\vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n+C_{mn}(\eta,h)\varphi_n=\\ &=\int_{-h}^{\eta}\Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\,Z_m\,dz-R_-\boldsymbol{N}_-\cdot\big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\,Z_m\big]_{z=-h}.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Θεώρημα 4.3.3. *The following identity holds*

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq -2}\Big(\sum_{l\geq -2}a_{nl}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n+\vec{b}_{nl}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n+c_{nl}(\eta,h)\varphi_n\Big)\varphi_l=\\ &=\int_{-h}^{\eta}\Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\,\big(\sum_{l\geq -2}(\partial_\eta Z_l)\varphi_l\big)\,dz-R_-\boldsymbol{N}_-\cdot\big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\,\big(\sum_{l\geq -2}(\partial_\eta Z_l)\varphi_l\big)\big]_{z=-h}.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Απόδειξη. Recall that

$$\Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta] = \sum_{n\geq -2} \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n + 2\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n + \varphi_n \Delta Z_n, \tag{4.55}$$

Using the above equation, the first term of the r.h.s (4.54) becomes

$$\Big\langle \Delta\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta], (\partial_\eta Z_l)\varphi_l \Big\rangle =$$
$$= \sum_{l\geq -2} \Big(\sum_{n\geq -2} \langle Z_n, \partial_\eta Z_l \rangle \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + 2\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \partial_\eta Z_l\rangle \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \langle \Delta Z_n, \partial_\eta Z_l\rangle \varphi_n \Big)\varphi_l.$$

where we denoted $\partial_\eta Z_l = \partial Z_l/\partial\eta$. Similarly, for the second term in the r.h.s of (4.54), we have

$$-R_-\boldsymbol{N}_- \cdot \big[\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]\Big(\sum_{l\geq -2}(\partial_\eta Z_l)\varphi_l\Big)\big]_{z=-h} =$$
$$= \sum_{l\geq -2}\Big(\sum_{n\geq -2} \nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n \big[Z_n(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h} + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \big[(\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n)(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h} +$$
$$+\varphi_n \big[(\partial_z Z_n)(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h}\Big)\varphi_l.$$

The sum of the r.h.s of the last two equations is

$$\sum_{l\geq -2}\Big(\sum_{n\geq -2} \langle Z_n, \partial_\eta Z_l\rangle \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \big(2\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \partial_\eta Z_l\rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}} h \big[Z_n(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h}\big)\cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n +$$
$$+\big(\langle \Delta Z_n, \partial_\eta Z_l\rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \big[\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h} + \big[\partial_z Z_n(\partial_\eta Z_l)\big]_{z=-h}\big)\varphi_n\Big)\varphi_l.$$

Using the definitions of a_{nl}, $\vec{b}_{nl}$, c_{nl} found in Lemma (4.3.2), we obtain the result. □

Theorems 4.3.3 and 4.3.2 show, that if $\Phi[\boldsymbol{\varphi},\eta]$ solves the Laplace equation and the bottom boundary condition, then the double series in the r.h.s of (4.83) vanishes.

4.4 Έκφραση του DtN τελεστή δια μέσου της τοπικής αναπαράστασης

It is interesting to note that the system (4.84) with (4.85), has a specific physical meaning. In fact, it gives an indirect representation of the DtN operator (see Chapter 2, Definition **??**).

Θεώρημα 4.4.1. *Let η be the instataneous surface elevation defining the corresponding fluid domain $\mathcal{D}_h^\eta$. Let $\Phi(\boldsymbol{x}, z)$ be a function defined on $\mathcal{D}_h^\eta$, such that $\Phi \in C^2(\mathcal{D}_h^\eta) \cap C^1(\overline{\mathcal{D}_h^\eta})$ and $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|-\to\infty} \Phi(\boldsymbol{x}, z) = 0$. Assuming that $\varphi_n = O(n^{-4})$ uniformly in $\boldsymbol{x}$, the velocity potential field $\Phi(\boldsymbol{x}, z)$ can be represented in the form*

$$\Phi(\boldsymbol{x}, z) = \sum_{n\geq -2} \varphi_n(\boldsymbol{x})\, Z_n(z; \eta, h) \tag{4.56}$$

and the series can be termwise differentiated up to two times (at least). Then,

1. *If Φ is the solution of $(\mathcal{P}_{DtN})$ then $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, ...)$ is the solution of (4.84) and (4.85).*

2. *If $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, ...)$ is the solution of (4.84) and (4.85) then Φ is the solution of $(\mathcal{P}_{DtN})$.*

Απόδειξη. 1. Let Φ be the solution of $(\mathcal{P}_{DtN})$. Then it satisfies $[\Phi]_{z=\eta} = \varphi$. By the construction of Z_n we have

$$[Z_n]_{z=\eta} = 1, \quad \text{for all} \quad n \geq -2,$$

and this implies $\sum\limits_{m\geq -2} \varphi_m = \big[\Phi\big]_{z=\eta} = \varphi$. Furthermore, Φ is the unique solution to the following variational equation

$$\delta\mathcal{I}[\Phi;\delta\Phi]=0,\quad \text{for all}\quad \delta\Phi:\ [\delta\Phi]_{z=\eta}=0,$$

where

$$\mathcal{I}[\Phi]=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\big(\nabla\Phi\big)^2 dV. \tag{4.57}$$

Performing the variation in the functional $\mathcal{I}[\Phi]$, we obtain that Φ is the solution of the following variational equation

$$\delta\mathcal{I}[\Phi;\delta\Phi]=\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\big(\nabla\Phi\big)\cdot\big(\nabla\delta\Phi\big)dV=0,\quad \text{for all}\quad \delta\Phi:\ [\delta\Phi]_{z=\eta}=0 \tag{4.58}$$

Integration by parts shows

$$\delta\mathcal{I}[\Phi;\delta\Phi]=\int_{\Gamma_h}\partial_{N_-}\Phi\,\delta\Phi\,d\Gamma_h-\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\Delta\Phi\,\delta\Phi\,dV=0, \tag{4.59}$$

or,

$$\delta\mathcal{I}[\Phi;\delta\Phi]=\int_S N_-\cdot\big[\nabla\Phi\big]_{z=-h}\big[\delta\Phi\big]_{z=-h}R_-d\boldsymbol{x}-\int_S\int_{-h}^{\eta}\Delta\Phi\,\delta\Phi\,dV=0. \tag{4.60}$$

Replace

$$\Phi=\Phi[\boldsymbol{\varphi}]=\sum_{n\geq-2}\varphi_n\,Z_n, \tag{4.61}$$

in the functional $\mathcal{I}$ to obtain

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathcal{I}\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi}]\big]\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\big(\nabla\Phi[\boldsymbol{\varphi}]\big)^2 dV\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\Big(\nabla\big(\sum_{n\geq-2}\varphi_n\,Z_n\big)\Big)^2 dV.\end{aligned}$$

The variation $\delta\Phi$ becomes

$$\delta\Phi=\delta\Phi[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}]=\sum_{n\geq-2}\delta\varphi_n\,Z_n. \tag{4.62}$$

and $[\delta\Phi]_{z=\eta} = 0$ implies $\sum\limits_{m\geq -2} \delta\varphi_m = 0$. Stationarity of $\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi}]$ means

$$\delta\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}] = 0, \quad \text{for all} \quad \delta\boldsymbol{\varphi} : \sum_{m\geq -2} \delta\varphi_m = 0.$$

The Fréchet derivative of $\tilde{I}[\boldsymbol{\varphi}]$ with respect to $\boldsymbol{\varphi}$, $\delta\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}]$, can be calculated using the formula

$$\delta\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}] = \delta\mathcal{I}\big[\Phi[\boldsymbol{\varphi}];\delta\Phi[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}]\big]. \tag{4.63}$$

Hence, substituting (4.61), (4.62) in (4.60) we obtain

$$\delta\tilde{\mathcal{I}}[\boldsymbol{\varphi};\delta\boldsymbol{\varphi}] =$$
$$= \int_S \sum_{m\geq -2} \Big\{ \sum_{n\geq -2} \Big(A_{mn}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n \Big) \Big\}\delta\varphi_m \, d\boldsymbol{x} = 0, \tag{4.64}$$

where the matrix coefficients are given by

$$\begin{aligned} A_{mn}(\eta,h) &= \langle Z_n, Z_m\rangle\,, \\ \vec{B}_{mn}(\eta,h) &= 2\,\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, Z_m\rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}} h [Z_n Z_m]_{z=-h}, \\ C_{mn}(\eta,h) &= \langle \Delta Z_n, Z_m\rangle + \Big[\big(\nabla_{\boldsymbol{x}} h\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n + \partial_z Z_n\big) Z_m\Big]_{z=-h}. \end{aligned}$$

The variational equation (4.64) holds for all $\delta\varphi_m$ such that

$$\sum_{m\geq -2} \delta\varphi_m = 0. \tag{4.65}$$

Using (4.65) we can write for $m_0 \geq -2$

$$\delta\varphi_{m_0} = -\sum_{m\geq -2} \delta\varphi_m, \quad m \neq m_0. \tag{4.66}$$

Now (4.64) can be written for $m \neq m_0$

$$\int_S \sum_{n\geq -2} \Big(A_{mn_0}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \vec{B}_{mn_0}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn_0}(\eta,h)\varphi_n \Big)\,\delta\varphi_{m_0} +$$
$$+ \sum_{m\geq -2} \left(\sum_{n\geq -2} \Big(A_{mn}(\eta,h)\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n \Big) \right) \delta\varphi_m \, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Substituting (4.66) in the above equation we obtain,

$$\int_S \sum_{n\geq -2} \Big(A_{mn_0}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + \vec{B}_{mn_0}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn_0}(\eta,h)\varphi_n \Big)\Big(-\sum_{m\geq -2}\delta\varphi_m\Big) +$$
$$+\sum_{m\geq -2}\left(\sum_{n\geq -2} \Big(A_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + \vec{B}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + C_{mn}(\eta,h)\varphi_n \Big)\right)\delta\varphi_m\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

and a factorizing shows that

$$\int_S \sum_{m\geq -2}\left(\sum_{n\geq -2} \hat{A}_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + \hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \hat{C}_{mn}(\eta,h)\varphi_n \right)\delta\varphi_m\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

where

$$\hat{A}_{mn}(\eta,h) = A_{mn}(\eta,h) - A_{mn_0}(\eta,h),$$
$$\hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h) = \vec{B}_{mn}(\eta,h) - \vec{B}_{mn_0}(\eta,h),$$
$$\hat{C}_{mn}(\eta,h) = C_{mn}(\eta,h) - C_{mn_0}(\eta,h).$$

This implies the system

$$\sum_{n\geq -2} \hat{A}_{mn}(\eta,h)\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + \hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n + \hat{C}_{mn}(\eta,h)\varphi_n = 0, \quad m\geq -2, \quad m\neq m_0,$$

Of cousre the fields $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},...)$ should satisfy the same latteral conditions as Φ i.e. $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \varphi_m = 0$, for all $m\geq -2$.

2. For the inverse, Let $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},...)$ satisfy the system (4.84) and (4.85). Observe that the coefficients $\hat{A}_{mn}$, $\hat{\vec{B}}_{mn}$, $\hat{C}_{mn}$ are given by

$$\hat{A}_{mn}(\eta,h) = \langle Z_n, Z_m - Z_{m_0}\rangle\,, \tag{4.67α′}$$

$$\hat{\vec{B}}_{mn}(\eta,h) = 2\,\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, (Z_m - Z_{m_0})\rangle + \nabla_{\boldsymbol{x}} h[Z_n(Z_m - Z_{m_0})]_{z=-h}, \tag{4.67β′}$$

$$\hat{C}_{mn}(\eta,h) = \langle \Delta Z_n, (Z_m - Z_{m_0})\rangle - R_{-}\boldsymbol{N}_{-}\cdot\big[\big(\nabla Z_n\big)(Z_m - Z_{m_0})\big]_{z=-h}. \tag{4.67γ′}$$

Multiplying (4.84) with arbitary $\delta\varphi_m$ and integrating over the horizontal domain S and denoting $\hat{A}_{mn} \equiv \hat{A}_{mn}(\eta, h)$ etc. we can write

$$\sum_{n\geq -2} \int_S \Big\{ \hat{A}_{mn} \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \delta\varphi_m + \hat{\vec{B}}_{mn} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \delta\varphi_m + \hat{C}_{mn} \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x} = 0, \tag{4.68}$$

and denote the three terms of (4.68) as

$$I_{mn} = \int_S \Big\{ \hat{A}_{mn} \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x}, \tag{4.69α′}$$

$$II_{mn} = \int_S \Big\{ \hat{\vec{B}}_{mn} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x}, \tag{4.69β′}$$

$$III_{mn} = \int_S \Big\{ \hat{C}_{mn} \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x}. \tag{4.69γ′}$$

The first term of (4.68) can be written via integration by parts as

$$I_{mn} = \sum_{n\geq -2} \int_S \Big\{ -(\nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{A}_{mn}) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n) \delta\varphi_m - \hat{A}_{mn} (\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\varphi_m) \Big\} d\boldsymbol{x}. \tag{4.70}$$

Using the definition of the matrix coefficient $\hat{A}_{mn}$ (Eqs. (4.67)), and invoking Leibnitz's integral rule, we see that

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{A}_{mn} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \eta [Z_n \hat{Z}_m]_{z=\eta} + \nabla_{\boldsymbol{x}} h [Z_n \hat{Z}_m]_{z=-h} + \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m \big\rangle + \big\langle Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m \big\rangle, \tag{4.71}$$

where we denoted $\hat{Z}_m = Z_m - Z_{m_0}$. Using the fact that $[\hat{Z}_m]_{z=\eta} = 0$, (4.70) can further be written as

$$\begin{aligned} I_{mn} = \int_S \Big\{ \big(-\nabla_{\boldsymbol{x}} h [Z_n \hat{Z}_m]_{z=-h} - \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m \big\rangle - \big\langle Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m \big\rangle \big) \cdot \big(\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \big) \delta\varphi_m - \\ - \big\langle Z_n, \hat{Z}_m \big\rangle \big(\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \big) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

The third term of (4.68) is treated similarlly. First observe that

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla^2_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m \big\rangle = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m \big\rangle - \\ -\nabla_{\boldsymbol{x}} \eta \cdot [\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \hat{Z}_m]_{z=\eta} - \nabla_{\boldsymbol{x}} h [\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \hat{Z}_m]_{z=-h} - \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m \big\rangle, \end{aligned} \tag{4.73}$$

and

$$\big\langle \partial^2_{zz} Z_n, Z_m \big\rangle = [\partial_z Z_n \hat{Z}_m]_{z=\eta} - [\partial_z Z_n \hat{Z}_m]_{z=-h} - \big\langle \partial_z Z_n, \partial_z \hat{Z}_m \big\rangle. \tag{4.74}$$

Recall also that

$$R_{-}\boldsymbol{N}_{-} \cdot \big[(\nabla Z_n)\hat{Z}_m\big]_{z=-h} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} h \cdot \big[\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \hat{Z}_m\big]_{z=-h} - \big[\partial_z Z_n \hat{Z}_m\big]_{z=-h}. \tag{4.75}$$

Now the third term of (4.68), in virtue of the last three equations and the fact that $[\hat{Z}_m]_{z=\eta} = 0$, can be written as

$$III_{mn} = \int_S \Big\{\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m - \\ - \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m - \big\langle \partial_z Z_n, \partial_z \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x},$$

and an integration by parts for the first term shows

$$\begin{aligned} III_{mn} = \int_S \Big\{ &- \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \hat{Z}_m\big\rangle \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}(\varphi_n \delta\varphi_m) \\ &- \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m - \big\langle \partial_z Z_n, \partial_z \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{4.76}$$

We can now compose Eq. (4.68) as

$$\sum_{n\geq -2} \Big(I_{mn} + II_{mn} + III_{mn}\Big) = 0 \tag{4.77}$$

Substituting the expressions (4.72), (4.69β′), (4.76) in (4.77) we obtain the following variational equation

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq -2} \int_S \Big\{ &\big\langle Z_n, \hat{Z}_m\big\rangle \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\varphi_m + \big\langle Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m\big\rangle \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}(\varphi_n \delta\varphi_m) + \\ &+ \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n, \nabla_{\boldsymbol{x}} \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m + \big\langle \partial_z Z_n, \partial_z \hat{Z}_m\big\rangle \varphi_n \delta\varphi_m \Big\} d\boldsymbol{x} = 0 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Taking the sum over m, one can verify that

$$\int_S \Big\{ \int_{-h}^{\eta} \nabla\Big(\sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n\Big) \cdot \nabla\Big(\sum_{m\geq -2} \hat{Z}_m \delta\varphi_m\Big) dz \Big\} d\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.79}$$

Which is exactly the variational equation (4.58) where $\Phi = \sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n$ and $\delta\Phi = \sum_{m\geq -2} \hat{Z}_m \delta\varphi_m$. Furthermore for all $\delta\varphi_m$ one has

$$[\delta\Phi]_{z=\eta} = \big[\sum_{m\geq -2} \hat{Z}_m \delta\varphi_m\big]_{z=\eta} = \sum_{m\geq -2} [\hat{Z}_m]_{z=\eta} \delta\varphi_m = 0. \tag{4.80}$$

and also the following holds

$$[\Phi]_{z=\eta} = [\sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n]_{z=\eta} = \sum_{n\geq -2} \varphi_n = \varphi. \tag{4.81}$$

Now Green's theorem and the assumption that $\delta\varphi_n$ vanish outside S for all n, yields

$$\int_S \Big\{ \int_{-h}^{\eta} \Delta\Big(\sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n \Big)\Big(\sum_{m\geq -2} \hat{Z}_m \delta\varphi_m \Big) dz -$$
$$- R_- \boldsymbol{N}_- \cdot \big[\nabla\big(\sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n \big)\big(\sum_{m\geq -2} \hat{Z}_m \delta\varphi_m \big)\big]_{z=-h} \Big\} d\boldsymbol{x} = 0.$$

We deduce that $\Phi = \sum_{n\geq -2} \varphi_n Z_n$ solves $(\mathcal{P}_{DtN})$. □

By virtue of Theorems (4.3.3) and (4.3.2) in conjunction with Theorem (4.4.1) we can state the following result

Θεώρημα 4.4.2. *$(\mathcal{P}_{WW})$ is equivalent with the following system of evolution equations for φ and η*

$$\partial_t \eta \; = - \nabla_{\boldsymbol{x}} \eta \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi + R_+^2 \Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0 \varphi \Big) \tag{4.82}$$

$$\partial_t \varphi \; = - g\eta - \frac{1}{2} (\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi)^2 + \frac{1}{2} R_+^2 \Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0 \varphi \Big)^2 \tag{4.83}$$

where $\{\varphi_n\}_{n\geq -2}$ are obtained by the infinite coupled mode system

$$\sum_{n\geq -2} A_{mn}(\eta, h) \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \varphi_n + \hat{B}_{mn}(\eta, h) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n + C_{mn}(\eta, h) \varphi_n = 0, \quad m \geq -2, \quad m \neq m_0, \tag{4.84}$$

$$\sum_{n\geq -2} \varphi_n = \varphi. \tag{4.85}$$

4.5 Implication to the representation of the DtN operator

In the previous subsection we treated the free suraface elevation η and the trace of the velocity potential φ, as data for the problem $(\mathcal{P}_{DtN})$ expressed in terms of the local mode representation. When $\varphi(\cdot,t)$ and $\eta(\cdot,t)$ are known at an instant t, then we can solve the (CMS) Eqs. (4.84) and (4.85), and obtain a solution $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\varphi,\eta,h] = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,...)$. The dependence of the solution on the free surface η and the fixed bottom surface h is expressed through the coefficients $\hat{A}_{mn}$, $\hat{\vec{B}}_{mn}$, $\hat{C}_{mn}$. Recall the definition of the DtN operator

$$G(\eta,h)\varphi = R_+\partial_{\boldsymbol{N}_+}\Phi|_{\Gamma_\eta}, \tag{4.86}$$

where Φ solves $(\mathcal{P}_{DtN})$. Having in hand a solution $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\varphi,\eta,h] = (\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,...)$ of Eqs. (4.84) and (4.85) we can reconstruct the wave potential $\Phi = \sum\limits_{n\geq -2}\varphi_n Z_n$ and express the DtN operator in terms of the free surface mode φ_{-2} as follows

$$\tilde{G}(\eta,h)\varphi = -\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi + R_+^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big). \tag{4.87}$$

In order to compare the expression of the DtN operator (4.87), derived through the local mode representation of the velocity potential, we briefly recall the approach developed in a series of works (see [CS93, Cra07, CLS11, CGNS05]), where a functional Taylor expansion of the DtN is used. For the case of variable bottom of the form $h(\boldsymbol{x}) = -h_0 + \beta(\boldsymbol{x})$ where $\beta(\boldsymbol{x})$ denotes the variation of the bottom of the fluid domain from its mean value $-h_0$, Craig et al. [CGNS05] obtained a Taylor expansion of the DtN operator given by

$$G(\eta,h) = \sum_{l=0}^{\infty} G^{(l)}(\eta,\beta), \tag{4.88}$$

where

$$G^{(0)} = |D|\tanh(h_0|D|) + |D|L(\beta), \qquad D = -i\nabla_{\boldsymbol{x}}, \tag{4.89}$$

and for l odd,

$$G^{(l)} = |D|^{l-1}D\frac{\eta^l}{l!}\cdot D - \sum_{j=2,even}^{l-1}|D|^j\frac{\eta^j}{j!}G^{(l-j)} - \sum_{j=1,odd}^{l}|D|^{j-1}G^{(0)}\frac{\eta^j}{j!}G^{(l-j)}, \tag{4.90}$$

and for l even,

$$G^{(l)} = |D|^{l-2} G^{(0)} D \frac{\eta^l}{l!} \cdot D - \sum_{j=2,even}^{l-1} |D|^j \frac{\eta^j}{j!} G^{(l-j)} - \sum_{j=1,odd}^{l-1} |D|^{j-1} G^{(0)} \frac{\eta^j}{j!} G^{(l-j)}. \tag{4.91}$$

The bottom variation is expressed through the operator $L(\beta)$ which also can be expanded in Taylor series, with the first few terms given by

$$\begin{aligned} L_0 &= 0, \\ L_1 &= -\frac{D}{|D|}\text{sech}(h_0|D|) \cdot \beta D\text{sech}(h|D|), \\ L_2 &= \frac{D}{|D|}\text{sech}(h|D|) \cdot \beta D\text{sinh}(h_0|D|) L_1. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 5

Μερικές παράγωγοι των κάθετων συναρτήσεων

The vertical functions Z_n, $n \geq -2$ are given by

$$Z_{-2}(z,\eta,h) = \frac{\mu_0 h_0 + 1}{2h_0(\eta+h)}(z+h)^2 - \frac{\mu_0 h_0 + 1}{2h_0}(\eta+h) + 1, \tag{5.1}$$

$$Z_{-1}(z;\eta,h) = \frac{\mu_0 h_0 - 1}{2h_0(\eta+h)}(z+h)^2 + \frac{1}{h_0}(\eta+h) + \frac{2h_0 - (\eta+h)(\mu h_0 + 1)}{2h_0}, \tag{5.2}$$

$$Z_0(z;\eta,h) = \frac{\cosh\left[k_0(z+h)\right]}{\cosh\left[k_0(\eta+h)\right]}, \tag{5.3}$$

$$Z_n(z;\eta,h) = \frac{\cos\left[k_n(z+h)\right]}{\cos\left[k_n(\eta+h)\right]}, \quad \text{n} \geq 0, \tag{5.4}$$

where $k_0 = k_0(\eta,h)$ and $k_n = k_n(\eta,h)$ satisfy the dispersion relations

$$\mu_0 - k_0 tanh(k_0(\eta+h)) = 0, \quad \mu_0 + k_n tan(k_n(\eta+h)) = 0. \tag{5.5}$$

Note that Z_{-2} and Z_{-1} depend explicitely on η an h, while Z_n , $n \geq 0$ depend both explicitely and implicitely (through (5.5)) on η and h. Their partial derivatives are given by

$$\partial_\eta Z_{-2} = \frac{1 + h_0\mu_0}{2h_0} - \frac{1 + h_0\mu_0}{2h_0(\eta+h)^2}(z+h)^2,$$

$$\partial_h Z_{-2} = -\frac{1+h_0\mu_0}{2h_0} + \frac{1+h_0\mu_0}{h_0(\eta+h)}(z+h) - \frac{(1+h_0\mu_0)(z+h)^2}{2h_0(\eta+h)^2}.$$

$$\partial_\eta Z_{-1} = \frac{-1-h_0\mu_0}{2h_0} - \frac{-1+h_0\mu_0}{2h_0(\eta+h)^2}(z+h)^2,$$

$$\partial_h Z_{-1} = \frac{1}{h_0} - \frac{-1-h_0\mu_0}{2h_0} + \frac{-1+h_0\mu_0}{h_0(\eta+h)}(z+h) - \frac{(1+h_0\mu_0)(z+h)^2}{2h_0(\eta+h)^2}.$$

Recalling that for $n \geq 0$, the vertical functions $Z_n = Z_n(z;\eta,h)$, depend implicitely on $k_n = k_n(\eta,h)$, we also obtain

$$\partial_\eta Z_0 = \left\{ \begin{array}{r} (z+h)\sinh\big[k_0(z+h)\big](\partial_\eta k_0) - \\ -\cosh\big[k_0(z+h)\big]\tan\big[k_0(\eta+h)\big]\,\big(k_0 + (\eta+h)(\partial_\eta k_0)\big) \end{array} \right\} \frac{1}{\cosh\big[k_0(\eta+h)\big]},$$

$$\partial_{k_0} Z_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sinh\big[k_0(z+h)\big]\cosh\big[k_0(\eta+h)\big](z+h) - \\ -\sinh\big[k_0(\eta+h)\big]\cosh\big[k_0(z+h)\big](\eta+h) \end{array} \right\} \frac{1}{\cosh^2\big[k_0(\eta+h)\big]},$$

$$\partial_h Z_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sinh\big[k_0(z+h)\big]\cosh\big[k_0(\eta+h)\big]\big((\partial_h k_0)(z+h) + k_0\big) - \\ \quad -\sinh\big[k_0(\eta+h)\big]\cosh\big[k_0(z+h)\big]\big(\frac{\partial k_0}{\partial h}(z+h) + k_0\big) \end{array} \right\} \frac{1}{\cosh^2\big[k_0(\eta+h)\big]},$$

$$\partial_\eta Z_n = \left\{ \begin{array}{r} -(z+h)\sin\big[k_n(z+h)\big](\partial_\eta k_n) + \\ +\cos\big[k_n(z+h)\big]\tan\big[k_n(\eta+h)\big]\,\big(k_n + (\eta+h)(\partial_\eta k_n)\big) \end{array} \right\} \frac{1}{\cos\big[k_n(\eta+h)\big]},$$

$$\partial_{k_n} Z_n = \left\{ \begin{array}{l} -\sin\big[k_n(z+h)\big]\cos\big[k_n(\eta+h)\big](z+h) + \\ \quad +\sin\big[k_n(\eta+h)\big]\cos\big[k_n(z+h)\big](\eta+h) \end{array} \right\} \frac{1}{\cos^2\big[k_n(\eta+h)\big]},$$

$$\partial_h Z_n = \left\{ \begin{array}{l} -\sin\big[k_n(z+h)\big]\cos\big[k_n(\eta+h)\big]\big((\partial_h k_n)(z+h) + k_n\big) + \\ \quad +\sin\big[k_n(\eta+h)\big]\cos\big[k_n(z+h)\big]\big((\partial_h k_n)(z+h) + k_n\big) \end{array} \right\} \frac{1}{\cos^2\big[k_n(\eta+h)\big]}.$$

For the values, of the above derivatives, on the free surface we easily obtain

$$[\partial_h Z_n]_{z=\eta} = 0, \quad n \geq -2,$$

$$[\partial_{k_n} Z_n]_{z=\eta} = 0, \quad n \geq 0,$$

$$[\partial_\eta Z_{-2}]_{z=\eta} = -\frac{1}{h_0} - \mu_0,$$

$$[\partial_\eta Z_{-1}]_{z=\eta} = -\mu_0, \quad \left[\frac{\partial Z_{-1}}{\partial h}\right]_{z=\eta} = 0$$

$$\begin{aligned}[\partial_\eta Z_0]_{z=\eta} &= (\eta + h)\tanh\big[k_0(\eta + h)\big]\,(\partial_\eta k_0) - \tanh\big[k_0(\eta + h)\big]\,\big(k_0 + (\eta + h)(\partial_\eta k_0)\big) \\ &= -k_0 \tanh\big[k_0(\eta + h)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\partial_\eta Z_n]_{z=\eta} &= -(\eta + h)\tan\big[k_n(\eta + h)\big]\,(\partial_\eta k_n) + \tan\big[k_n(\eta + h)\big]\,\big(k_n + (\eta + h)(\partial_\eta k_n)\big) \\ &= k_n \tan\big[k_n(\eta + h)\big].\end{aligned}$$

Using the dispersion relations Eqs. (5.5) in the two last equations, we finally obtain

$$[\partial_\eta Z_0]_{z=\eta} = -\mu_0,$$

$$[\partial_\eta Z_n]_{z=\eta} = -\mu_0, \quad n \geq 0.$$

Κεφάλαιο 6

Υπολογισμός της μεταβολής του $\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta]$

The velocity potential is represented by a series expansion in terms of vertical functions (4.1) that depend implicitely by the free surface elevation and the depth. Substituting the representation into (3.14) the action functional $S[\Phi, \eta]$ becomes a functional on the boundary fields $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) := \{\varphi_n(\boldsymbol{x}, t)\}_{n\geq -2}$ and $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ given by

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] \quad &= \quad \int_I \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big\{ \sum_n \partial_t \varphi_n Z_n + \varphi_n \partial_t Z_n + \\
&\quad + \frac{1}{2} \Big(\sum_{n\geq -2} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n Z_n + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\sum_{n\geq -2} \varphi_n \partial_z Z_n \Big)^2 + gz \Big\} \, dV \, dt \\
&= \quad \tilde{F}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] \; + \; \tilde{K}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] \; + \; V[\eta],
\end{aligned}$$

where

$$\tilde{F}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = \sum_{n\geq 2} \int_I \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big\{ \partial_t \varphi_n Z_n + \varphi_n \partial_t Z_n \Big\} dV dt,$$

$$\tilde{K}[\boldsymbol{\varphi}, \eta] = \frac{1}{2} \int_I \int_{\mathcal{D}_h^\eta} \Big\{ \big(\sum_{n\geq 2} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_n Z_n + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n \big)^2 + \big(\sum_{n\geq 2} \varphi_n \partial_z Z_n \big)^2 \Big\} \, dV dt,$$

and

$$V[\eta] = \int_I \int_{\mathcal{D}_h^\eta} gzdVdt. \tag{6.1}$$

These three terms will be reffered as the time derrivative term, the kinetic energy term and the potential energy term correspondigly and will be treated seperately for convenience of the reader. The variation of the action functional $\tilde{S}[\{\varphi_n\}_{n\geq -2}, \eta]$ is the sum of the variations of the three terms, with respect to all functional arguments. The following identities simplify the presentation of the calculations of the variations of the three terms $\tilde{F}$, $\tilde{K}$ and V. They are known as Leibnitz's integral rule ([Die69]).

Πρόταση 6.0.1. *Let $a, b \in C^1(I \to C_0^1(\mathbb{R}^2))$ be two functions with graphs Γ_a, Γ_b that define the open bounded domain $\mathcal{D}_b^a$. Given the functions $f, g \in C^1(I \to C^2(\mathcal{D}_b^a)) \cap C^1(I \to C_0^1(\overline{\mathcal{D}_b^a}))$ the following identities hold*

$$\big\langle f, \partial_t g \big\rangle = \frac{d}{dt}\big\langle f, g \big\rangle - \partial_t a[fg]_{z=a} + \partial_t b[fg]_{z=b} - \big\langle \partial_t f, g \big\rangle \tag{6.2α′}$$

$$\langle f, \partial_{x_i} g\rangle = \partial_{x_i} \langle f, g\rangle - \langle \partial_{x_i} f, g\rangle - [fg]_{z=a}\partial_{x_i} a + [fg]_{z=b}\partial_{x_i} b, \quad i = 1, 2, \tag{6.2β′}$$

$$\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} f, \nabla_{\boldsymbol{x}} g\rangle = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \langle \nabla_{\boldsymbol{x}} f, g\rangle - \big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 f, g\big\rangle - [\nabla_{\boldsymbol{x}} fg]_{z=a} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} a + [\nabla_{\boldsymbol{x}} fg]_{z=b} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} b \tag{6.2γ′}$$

with the notation $\big\langle f, g \big\rangle = \displaystyle\int_{b(\boldsymbol{x},t)}^{a(\boldsymbol{x},t)} f(\boldsymbol{x}, z, t)\, g(\boldsymbol{x}, z, t)\, dz.$

The partial variation of the kinetic energy term $\tilde{K}$ w.r.t $\delta\varphi_m$ reads

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi_m}\tilde{K}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] &= \frac{d}{d\epsilon}\big[\tilde{\mathcal{K}}[\varphi_1,...,\varphi_m+\epsilon\delta\varphi_m,...,\eta]\big]_{\epsilon=0} \\
&= \int_I\int_{\mathcal{D}_h^\eta}\Big\{\Big(\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n+\varphi_n\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n\Big)\cdot\Big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\varphi_m Z_m+\delta\varphi_m\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_m\Big)+ \\
&\quad+\Big(\sum_{n\geq -2}\varphi_n\partial_z Z_n\Big)\delta\varphi_m\partial_z Z_m\Big\}dV\,dt \\
&= \int_I\int_S\Big\{\int_{-h}^{\eta}\Big(\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n+\varphi_n\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n\Big)\cdot\Big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\delta\varphi_m Z_m+\delta\varphi_m\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_m\Big)\,dz+ \\
&\quad+\int_{-h}^{\eta}\Big(\sum_{n\geq -2}\partial_z Z_n\Big)\delta\varphi_m\partial_z Z_m\,dz\Big\}d\boldsymbol{x}\,dt.
\end{aligned}$$

For the first term we use (6.2γ') with $f=\nabla_{\boldsymbol{x}}(\sum\varphi_n Z_n)$ and $g=\sum\delta\varphi_n Z_n$ and for the second we integrate by parts. Hence, we obtain

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi_m}\tilde{K}[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\varphi_m] = \int_I\int_S\Big\{&-\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\varphi_n\left\langle Z_n,Z_m\right\rangle+2\nabla_x\varphi_n\left\langle\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_n,Z_m\right\rangle+\varphi_n\left\langle\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 Z_n,Z_m\right\rangle- \\
&-\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}h[Z_nZ_m]_{z=h}-\varphi_n\nabla_{\boldsymbol{x}}h\cdot[\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_nZ_m]_{z=h}- \\
&-\sum_{n\geq -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta[Z_nZ_m]_{z=\eta}+\varphi_n\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\cdot[\nabla_{\boldsymbol{x}}Z_nZ_m]_{z=\eta}+ \\
&+\sum_{n\geq -2}\varphi_n\Big([\partial_z Z_nZ_m]_{z=\eta}+[\partial_z Z_nZ_m]_{z=h}-\left\langle\partial_{zz}^2 Z_n,Z_m\right\rangle\Big)\Big\}\delta\varphi_m d\boldsymbol{x}dt.
\end{aligned}$$

For the time derivative term one has

$$\delta_{\varphi_m}\tilde{F}[\varphi,\eta;\delta\varphi_m]=\int_{t_0}^{T}\int_S-\partial_t\eta\delta\varphi_m d\boldsymbol{x}dt.$$

and obviously, for the potential emergy term

$$\delta_{\varphi_m}V[\eta;\delta\varphi_m]=0 \tag{6.3}$$

After reordering the terms, summing the partial variations of the three terms and denoting $\Delta=\nabla_{\boldsymbol{x}}^2+\partial_{zz}^2$ we obtain the result of Lemma 4.3.1. Simililarly, for the variation in η, one has

$$
\begin{aligned}
\delta_\eta \tilde{F}\big[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta\big] =& \frac{d}{d\epsilon} \tilde{F}[\boldsymbol{\varphi}, \eta + \epsilon\delta\eta]\big|_{\epsilon=0} \\
=& \frac{d}{d\epsilon}\left[\int_I \int_{\mathcal{D}_h^{\eta+\epsilon\delta\eta}} \Big(\sum_{n\geq -2} \partial_t \varphi_n Z_n\big(z; \eta + \epsilon\delta\eta, h\big) + \varphi_n \partial_t Z_n\big(z; \eta + \epsilon\delta\eta, h\big)\Big) dV\, dt\right]_{\epsilon=0} \\
=& \int_I \int_S \Big\{ \Big(\sum_{n\geq -2} \partial_t \varphi_n \big[Z_n\big]_{z=\eta} + \varphi_n \big[\partial_t Z_n\big]_{z=\eta}\Big) \delta\eta + \\
& + \int_{-h}^{\eta} \Big(\sum_{n\geq -2} \partial_t \varphi_n \, (\partial_\eta Z_n) \delta\eta + \varphi_n \, \partial_t\big(\, (\partial_\eta Z_n) \, \delta\eta\big)\Big) dz \Big\} d\boldsymbol{x} dt.
\end{aligned}
$$

Using idendity (6.2α′), we can write

$$
\int_{-h}^{\eta} \partial_t \varphi_n \, (\partial_\eta Z_n) \delta\eta \, dz = \partial_t \int_{-h}^{\eta} \varphi_n \, (\partial_\eta Z_n) \delta\eta \, dz - \int_{-h}^{\eta} \varphi_n \partial_t\big((\partial_\eta Z_n) \delta\eta\big) \, dz - \partial_t \eta \varphi_n [\partial_\eta Z_n]_{z=\eta} \delta\eta \tag{6.4}
$$

The first term of the right hand side of the last equation contributes only to the temporal boundaries and can be neglected. Using also the fact that

$$
\varphi_n \partial_t Z_n = \varphi_n \big(\partial_\eta Z_n + (\partial_{k_n} Z_n)(\partial_\eta k_n)\big) \partial_t \eta = \varphi_n (\partial_\eta Z_n)(\partial_t \eta), \tag{6.5}
$$

we obtain

$$
\delta_\eta \tilde{F}\big[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta\big] = \int_I \int_S \Big(\sum_{n\geq -2} \partial_t \varphi_n [Z_n]_{z=\eta}\Big) \delta\eta. \tag{6.6}
$$

For the kinetic energy term we compute

$$
\begin{aligned}
\delta_\eta \tilde{K}\left[\boldsymbol{\varphi}, \eta; \delta\eta\right] \quad &= \quad \frac{d}{d\epsilon}\left[\tilde{K}[\boldsymbol{\varphi}, \eta + \epsilon\delta\eta]\right]_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\Bigg[\frac{1}{2}\int_I\int_{\mathcal{D}_h^{\eta+\epsilon\delta\eta}} \Big(\sum_{n\ge -2} \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n\big(z;\eta+\epsilon\delta\eta, h\big) + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n\big(z;\eta+\epsilon\delta\eta,h\big)\Big)^2 \\
&\quad + \Big(\sum_{n\ge -2}\varphi_n \partial_z Z_n\big(z;\eta+\epsilon\delta\eta,h\big)\Big)^2 dV dt\Bigg]_{\epsilon=0} \\
= \int_I\int_S \Bigg\{ &\Big\{\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\ge-2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n [Z_n]_{z=\eta} + \varphi_n[\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n]_{z=\eta}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\ge -2}\varphi_n[\partial_z Z_n]_{z=\eta}\Big)^2\Big\}\delta\eta \\
+ \int_{-h}^{\eta}\Big\{&\Big(\sum_{n\ge-2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n Z_n + \varphi_n \nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n\Big)\cdot\Big(\sum_{l\ge -2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta + \varphi_l \nabla_{\boldsymbol{x}}\big((\partial_\eta Z_l)\delta\eta\big)\Big) + \\
&+ \Big(\sum_{n\ge-2}\varphi_n\partial_z Z_n\Big)\Big(\sum_{l\ge-2}\varphi_l\,\partial_z(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big\}dz\Bigg\}d\boldsymbol{x}dt
\end{aligned}
$$

The first term is computed, using (4.13), as follows

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\ge-2}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi_n[Z_n]_{z=\eta} + \varphi_n[\nabla_{\boldsymbol{x}} Z_n]_{z=\eta}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\ge-2}\varphi_n[\partial_z Z_n]_{z=\eta}\Big)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi)^2 - \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big) + \frac{1}{2}\big((\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2 + 1\big)\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big)^2
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

For the second term we use (6.2γ′) with $f = \sum \varphi_n Z_n$ and $g = \sum \varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta$ to obtain

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta}\nabla_{\boldsymbol{x}} f\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} g\, dz = &-\Big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Big(\sum\varphi_n Z_n\Big), \Big(\sum\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big\rangle - \\
&- \Big[\nabla_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum\varphi_n Z_n\Big)\Big(\sum\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big]_{z=\eta}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta - \\
&- \Big[\nabla_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum\varphi_n Z_n\Big)\Big(\sum\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big]_{z=-h}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} h \\
= &-\Big\langle \nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Big(\sum\varphi_n Z_n\Big), \Big(\sum\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big\rangle - \\
&- (\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta)^2\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big)^2\delta\eta + \nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\eta\Big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0} + \mu_0\varphi\Big)\delta\eta - \\
&- \Big[\nabla_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum\varphi_n Z_n\Big)\Big(\sum\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\Big]_{z=-h}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} h,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

where the term contributing only on the latteral boundaries is neglected and also (4.13) have been used. Finally for the third term we perform an integration by parts

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{\eta}\Big(\sum_{n\geq -2}\varphi_n\partial_z Z_n\Big)\Big(\sum_{l\geq -2}\varphi_l\,\partial_z(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\Big)\,dz = -\big(\frac{\varphi_{-2}}{h_0}+\mu_0\varphi)^2\delta\eta-\\ -\Big(\sum_{n\geq -2}\varphi_n[\partial_z Z_n]_{z=-h}\Big)\Big(\sum_{l\geq -2}\varphi_l\,[\partial_\eta Z_l]_{z=-h}\delta\eta\Big)-\\ -\big\langle\partial_z\Big(\sum_{n\geq -2}\varphi_n\partial_z Z_n\Big),\sum_{l\geq -2}\varphi_l(\partial_\eta Z_l)\delta\eta\big\rangle.\end{aligned} \tag{6.9}$$

For the potential energy term one has

$$\delta_\eta V[\boldsymbol{\varphi},\eta;\delta\eta] = \int_I\int_S g\eta\delta\eta\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{6.10}$$

Taking the sum of (6.6), (6.8), (6.9), (6.10) one can verify the result of Lemma 4.3.2.

Βιβλιογραφία

[AB99] G.Athanassoulis and K.Belibassakis, *A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions*, J. Fluid Mech. **389** (1999), 275–301.

[AB02] ______, *A non-linear coupled-mode model for water waves*, Proceedings of OMAE2002 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Enginnering (2002).

[AM78] R.Abraham and J.Marsden, *Foundations of mechanics*, Adisson - Wesley, USA, 1978.

[BA06] K.Belibassakis and G.Athanassoulis, *A coupled-mode technique for weakly nonlinear wave interaction with large floating structures lying over variable bathymetry regions*, Applied Ocean Research **28** (2006), 59–76.

[BA11] ______, *A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions*, Coastal Engineering **58** (2011), 337–350.

[CD12] D.Clamond and D.Dutykh, *Practical use of variational principles for modelling water waves*, Physica D **241** (2012), 25–36.

[CGNS05] W.Craig, P.Guyenne, D.Nicholls, and C.Sulem, *Hamiltonian long wave expansions for water waves over a rough bottom*, Proc. R. Soc. Lond **461** (2005), 839–873.

[CGS09] W.Craig, C.Guyenne, and C.Sulem, *Hamiltonian formulation for water waves over a variable bottom: Asymptotic models and numerical simulations*, Proceedings of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, 2009.

[CL72] Coddington and Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, TATA MacGraw-Hill, 1972.

[CLS11] W.Craig, D.Lannes, and C.Sulem, *Water waves over a rough bottom in the shallow water regime*, Ann. I. H.Poincare-AN (2011).

[Cra07] W.Craig, *Hamiltonian dynamical systems and applications*, Springer, Southampton, Boston, 2007.

[CS93] W.Craig and C.Sulem, *Numerical simulation of gravity waves*, J. Comp. Phys **108** (1993), 73–83.

[Die69] J.Dieudoné, *Foundations of modern analysis,*, Number 10-I in Pure and Applied Mathematics, Elsevier, Vol.1 of treatise in Analysis, NY, 1969.

[DK09] W.Dingermans and G.Klopman, *Effects of normalisation and mild-slope approximation on wave re ection by bathymetry in a hamiltonian wave model*, Proceedings of Twenty-Fourth International Workshop on Water Waves and Floating Bodies (Zelenogorsk, Russia.), 2009.

[Gol80] H.Goldstein, *Classical mechanics*, Adisson - Wesley, USA, 1980.

[HN05] B.Hu and D.Nicholls, *Analyticity of dirichlet to neumann operators on holder and lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2005), no.1, 302–320.

[KGD10] G.Klopman, B.Van Groesen, and M.Dingermans, *A variational approach to boussinesq modelling of fully nonlinear water waves*, Journal of Fluid Mechanics **657** (2010), 36–63.

[Lam75] H.Lamb, *Hydrodynamics*, 6 ed., Campridge University Press, UK, 1975.

[Lan05] D.Lannes, *Well-posedness of the water wave equations*, Journal of the American Mathematical Society **18** (2005), no.3, 605–654.

[LL60] L.Landau and E.Lifshitz, *Mechanics*, Butterworth-Heinenann, Oxford, 1960.

[Luk67] J.Luke, *A variational principle for a fluid with a free surface*, J.Fluid mech **27** (1967), 395–397.

[LV00] L.P. Lebedev and I.I. Vorovich, *Functional analysis in mechanics*, Springer, NY, 2000.

[Mil77] J.W. Miles, *On hamilton's principle for surface waves*, J. Fluid Mech **83** (1977), 153–158.

[MRA01] J.Marsden, T.Ratiu, and R.Abraham, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, Springer-Verlag, N.Y, 2001.

[Pet64] A.A. Petrov, *Variational treatment of the problem of liquid motion in container of finite dimensions*, PMM **28** (1964), 754–758.

[Sto57] J.Stoker, *Water waves*, Interscience, NY, 1957.

[Wit74] G.B Witham, *Linear and non linear waves*, Wiley, NY, 1974.

[Zak68] V.Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys **9** (1968), 86–94.