ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Υπολογισμός ενεργού δυναμικού με συναρτησιακές τεχνικές στην κβαντική θεωρία πεδίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παντελής Γ. Παπαχρήστου

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Φαράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Υπολογισμός ενεργού δυναμικού με συναρτησιακές τεχνικές στην κβαντική θεωρία πεδίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παντελής Γ. Παπαχρήστου

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Φαράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την............

....	....	....
Κωνσταντίνος Φαράκος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Γεώργιος Κουτσούμπας Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ιωάννης Ξανθάκης Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2013

....

Παντελής Γ. Παπαχρήστου
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και ο υπολογισμός του ενεργού δυναμικού στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου (ΚΘΠ) με τη χρήση συναρτησιακών τεχνικών. Ως ενεργό δυναμικό μιας ΚΘΠ ορίζεται το κλασικό δυναμικό συμπεριλαμβανομένων των κβαντομηχανικών διορθώσεων, του οποίου το ελάχιστο αντιστοιχεί στο κενό της κβαντικής θεωρίας που περιγράφει. Αρχικά αναλύεται η έννοια του διαδότη στην κβαντική μηχανική, ο οποίος εκφράζεται στη μορφή ολοκληρώματος τροχιάς. Ακολούθως γενικεύεται η έννοια του διαδότη στην ΚΘΠ, όπου υπολογίζονται οι συναρτήσεις συσχέτισης της ελεύθερης και αλληλεπιδρώσας βαθμωτής θεωρίας μέσω της διαφόρισης των συναρτησιακών τους γεννητόρων. Οι εν λόγω υπολογισμοί, όμως, εμπεριέχουν απειρισμούς, οι οποίοι απαλείφονται με την τεχνική της ανακανονικοποίησης προκειμένου οι φυσικές παράμετροι να είναι πεπερασμένες. Εν συνεχεία, εισάγεται συνοπτικά το φαινόμενο της αυθόρμητης ρήξης της συμμετρίας και αναλύονται οι επιπτώσεις που προκαλεί. Τέλος, υπολογίζεται η γενική μορφή του ενεργού δυναμικού και εφαρμόζεται στο μοντέλο Coleman – Weinberg, όπου οι κβαντομηχανικές διορθώσεις οδηγούν από μια θεωρία με μοναδικό κενό σε μια θεωρία με αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας.

Abstract

The purpose of the present thesis is to describe the computation of the effective potential of a Quantum Field Theory (QFT) using functional techniques and to study some of its novel features. The effective potential of a QFT is derived by modifying the classical potential through the inclusion of quantum corrections and its minima correspond to the vaccua of the quantum theory we wish to describe. Initially we introduce the notion of the propagator in Quantum Mechanics and we show how this is derived via the path integral formulation. Next we generalize the notion of the propagator from QM to QFT and we show how to use the generating functional for free and interacting scalar QFTs in order to compute their correlation functions. The aforementioned computations lead to divergent terms and therefore we introduce the notion of renormalization of the QFT, which allows us to subtract the infinite quantities which appear in quantum computations in order to get finite physical quantities. Subsequently, we give a short introduction to theories with Spontaneous Symmetry Breaking (SSB) in their vacuum structure. Finally, we derive the general form of the effective potential and apply it at the Coleman-Weinberg model, where quantum corrections can lead from a theory with a single vacuum to a theory with SSB.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή και υπεύθυνό μου κ. Κωνσταντίνο Φαράκο για την προτροπή του να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, καθώς επίσης τον καθηγητή κ. Άγγελο Φωτόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την εκπόνηση της εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ολοκληρώματα τροχιάς στην κβαντική μηχανική

Για τη μελέτη ενός φυσικού συστήματος είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των εξισώσεων κίνησης που το διέπουν. Θεωρούμε, αρχικά, το απλό σύστημα ενός σωματιδίου που κινείται στον χωροχρόνο. Σύμφωνα με την κλασική προσέγγιση το σωματίδιο αυτό είναι αυστηρά χωρικά εντοπισμένο και διαγράφει μια καλά καθορισμένη τροχιά η οποία περιγράφεται από τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, όπως αποτυπώνεται στην παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = -\nabla V\big(\vec{x}(t)\big)$$

όπου m η μάζα του σωματιδίου και V το δυναμικό μέσα στο οποίο κινείται. Αντίθετα, στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής και σύμφωνα με την Σχολή της Κοπεγχάγης τα σωματίδια εμφανίζονται ως δυναμικότητες (potentialities) παρά ως αντικειμενικές πραγματικότητες, όπως στην κλασική προσέγγιση[1]. Η εξέλιξη του ενός σωματιδίου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi(\vec{x},t)$$

όπου $\hat{H}$ ο τελεστής της χαμιλτονιανή του συστήματος και $\Psi(\vec{x},t)$ η κυματοσυνάρτησή του. Από την στατιστική ερμηνεία του Born η κυματοσυνάρτηση αντιπροσωπεύει ένα κύμα πιθανότητας, το τετράγωνο της οποίας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο τη χρονική στιγμή t στη θέση $\vec{x}$.

Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής, η μετάβαση από ένα αρχικό σημείο $(\vec{x}_1, t_1)$ σε ένα τελικό σημείο $(\vec{x}_2, t_2)$ δεν ακολουθεί μια καθορισμένη τροχιά, αλλά αντίθετα κάθε διαδρομή φέρει ένα συγκεκριμένο πλάτος πιθανότητας. Σύμφωνα με την Αρχή της Επαλληλίας της κβαντικής μηχανικής το άθροισμα των πλατών των πιθανοτήτων όλων των δυνατών τροχιών εκφράζει το συνολικό πλάτος πιθανότητας μετάβασης ή αλλιώς τον *διαδότη* $K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$ του συστήματος από την αρχική στην τελική θέση.

[1] Ε. Μπιτσάκης, "Η δυναμική του ελάχιστου", Σύγχρονη φιλοσοφική βιβλιοθήκη "Ι. Ζαχαρόπουλος", Αθήνα 1987.

1.1 Κβαντομηχανικός διαδότης

Θεωρούμε ότι το κβαντικό σύστημα χαρακτηρίζεται από το κατά Heisenberg χρονο-ανεξάρτητο καταστατικό διάνυσμα $|\Psi>$ του χώρου Hilbert. Σύμφωνα όμως με την εικόνα του Schrödinger, κατά την οποία η χρονική εξέλιξη εμπεριέχεται στην κυματοσυνάρτηση, κάθε διάνυσμα κατάστασης $|\Psi>$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\Psi t> = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi> \tag{1.1}$$

όπου $\hat{H} = \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$ ο τελεστής της χρονοανεξάρτητης Χαμιλτονιανής του συστήματος. Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος $\Psi(q,t)$ βρίσκεται από την προβολή του διανύσματος $|\Psi t>$ πάνω στις ιδιοκαταστάσεις της θέσης $|q>$, δηλαδή

$$\Psi(q,t) = <q|\Psi t> = <qt|\Psi> \tag{1.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της (1.1) με $<q|$ βρίσκουμε

$$<qt| = e^{-i\hat{H}t/\hbar} <q|$$

οπότε

$$|qt> = e^{i\hat{H}t/\hbar}|q> \tag{1.3}$$

Οι ιδιοκαταστάσεις της θέσης ικανοποιούν τη σχέση ορθοκανονικότητας

$$<q|q'> = \delta(q-q')$$

από την οποία έπεται

$$<q|\Psi> = \int <q|q'><q'|\Psi>\ dq'$$

$$\Rightarrow \int |q'><q'|\ dq' = 1 \tag{1.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της (1.4) με $e^{i\hat{H}t'}e^{-i\hat{H}t'}$ και σε συνδυασμό με την (1.3) προκύπτει

$$\int |q't'><q't'|\ dq' = 1$$

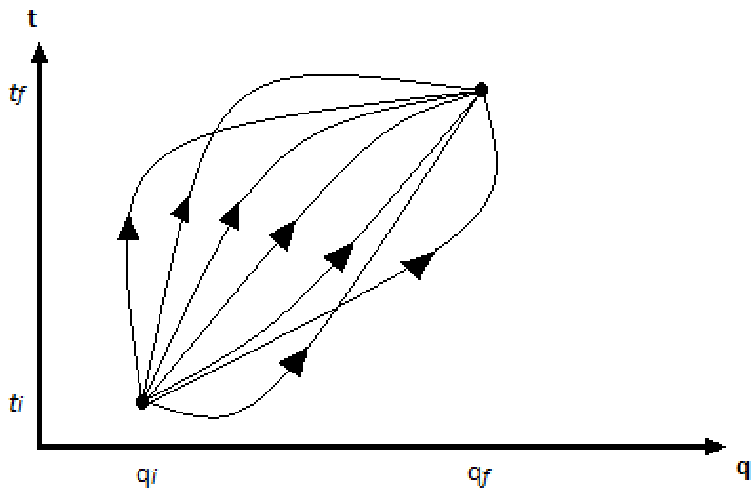
Έτσι, αντίστοιχα με πριν, μπορούμε να γράψουμε

$$\Psi(q_f, t_f) = \int <q_f t_f|q_i t_i> \Psi(q_i, t_i)\, dq_i \tag{1.5}$$

Η ποσότητα

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = <q_f t_f|q_i t_i>$$

αποτελεί τον διαδότη του συστήματος από την αρχική κατάσταση $|q_i t_i>$ στην τελική $|q_f t_f>$. Αντιπροσωπεύει, δηλαδή, το συνολικό πλάτος πιθανότητας μετάβασης από τη θέση q_i τη χρονική στιγμή t_i στη θέση q_f τη χρονική στιγμή t_f. Η πυκνότητα πιθανότητας της μετάβασης είναι κατά τα γνωστά $P = \left|< q_f t_f | q_i t_i >\right|^2$.



Σχήμα 1: Πιθανές τροχιές μετάβασης του σωματιδίου ανάμεσα στα χωροχρονικά σημεία (q_i, t_i) και (q_f, t_f).

Έστω t_1 ενδιάμεσο σημείο στο διάστημα (t_i, t_f) και q_1 ενδιάμεσο σημείο στο διάστημα (q_i, q_f) αντίστοιχα. Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση ορθοκανονικότητας του διανύσματος $|q_1 t_1>$ μπορούμε να γράψουμε

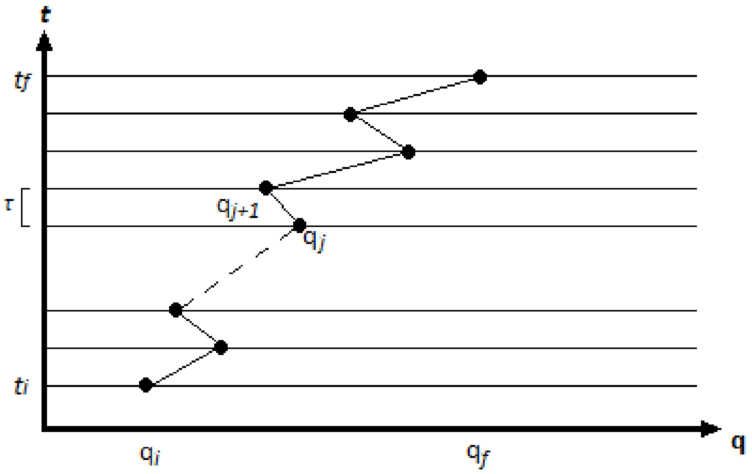
$$\Psi(q_f, t_f) = \int\int < q_f t_f \,| q_1 t_1 >< q_1 t_1 | q_i t_i > \Psi(q_i, t_i)\, dq_i dq_1 \qquad (1.6)$$

Δηλαδή, το πλάτος της πιθανότητας μετάβασης από το (q_i, t_i) στο (q_f, t_f) ισούται με το άθροισμα των πλατών των πιθανοτήτων μετάβασης από το (q_i, t_i) σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία (q_1, t_1) και στη συνέχεια στο τελικό σημείο (q_f, t_f). Αντιπαραβάλλοντας τις σχέσεις (1.5) και (1.6) έπεται ότι ο διαδότης ικανοποιεί τη σχέση

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \int < q_f t_f | q_1 t_1 >< q_1 t_1 | q_i t_i > dq_1$$

Συνεχίζοντας, μπορούμε να διαιρέσουμε το διάστημα του χρόνου $[t_i, t_f]$ σε $(n+1)$ ίσα διαστήματα πλάτους $\tau = t_{j+1} - t_j$. Κατ' αντιστοιχία με πριν ο διαδότης από την αρχική στην τελική κατάσταση είναι

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \int dq_1 \cdots \int dq_n < q_f t_f | q_n t_n >< q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} > \cdots < q_1 t_1 | q_i t_i > \qquad (1.7)$$



Σχήμα 2: Διαμέριση της τροχιάς σε επί μέρους τμήματα χρονικής διάρκειας τ.

Ο διαδότης μεταξύ 2 διαδοχικών σημείων (q_j, t_j) και (q_{j+1}, t_{j+1}) με $0 \leq j \leq n$ μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με την (1.3) ως εξής

$$< q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j > = < q_{j+1}\, |e^{-i\hat{H}t_{j+1}/\hbar} \cdot e^{i\hat{H}t_j/\hbar}\,|\, q_j > =< q_{j+1}|e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}\,|\, q_j >$$

Αναπτύσσοντας το εκθετικό έπεται

$$K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) = < q_{j+1}|\, 1 - \frac{i\hat{H}\tau}{\hbar} + O(\tau^2)\,|\, q_j >$$

$$= < q_{j+1}|q_j > - \frac{i\tau}{\hbar} < q_{j+1}|\hat{H}|q_j > + O(\tau^2)$$

$$= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} < q_{j+1}|\hat{H}|q_j > + O(\tau^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp\, e^{ip(q_{j+1}-q_j)/\hbar} - \frac{i\tau}{\hbar} < q_{j+1}|\hat{H}|q_j > + O(\tau^2) \qquad (1.8)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της δ-συνάρτησης του Dirac στη μία διάσταση $\delta(x) = (2\pi)^{-1}\int dp\, e^{ipx}$ και την ιδιότητα $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

1.2 Ολοκληρώματα τροχιάς

Θα υπολογίσουμε τον διαδότη $K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j)$ στην περίπτωση που το κβαντικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τη μη σχετικιστική Χαμιλτονιανή της μορφής:

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$$

Η μέση τιμή του πρώτου όρου της Χαμιλτονιανής πάνω στις ιδιοκαταστάσεις της θέσης είναι

$$< q_{j+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\, q_j > \; = \iint dpdp' < q_{j+1}|p' >< p'|\frac{\hat{p}^2}{2m}|p >< p|\, q_j > \qquad (1.9)$$

όπου $|p >$ ιδιοκατάσταση της ορμής, για την οποία έχουμε εισάγει τη σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων και ισχύουν

$$\hat{p}|p >= p|p > \qquad\qquad < q|p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (1.9) έχουμε

$$< q_{j+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\, q_j > \; = \iint \frac{dpdp'}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(p' q_{j+1} - p q_j)}{\hbar}} \frac{p^2}{2m} \delta(p' - p)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(q_{j+1} - q_j)}{\hbar}} \frac{p^2}{2m}$$

Αντίστοιχα για το δυναμικό έχουμε

$$< q_{j+1}|V(\hat{q})|q_j > = V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) < q_{j+1}|\, q_j >$$

$$= \; V(\bar{q}_j)\delta(q_{j+1} - q_j)$$

$$= \; \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(q_{j+1} - q_j)/\hbar} \, V(\bar{q}_j)$$

όπου $\bar{q}_j = (q_{j+1} + q_j)/2$. Τελικά, η μέση τιμή της Χαμιλτονιανής στις ιδιοκαταστάσεις τις θέσεις είναι

$$< q_{j+1}|\widehat{H}|q_j > = \; \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp\; e^{\frac{ip(q_{j+1} - q_j)}{\hbar}} \left(\frac{p^2}{2m} + V(\bar{q}_j)\right)$$

$$= \; \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp\; e^{ip(q_{j+1} - q_j)/\hbar} \; H(p, \bar{q}_j) \qquad (1.10)$$

Αντικαθιστώντας την (1.10) στην (1.8) συνεπάγεται ότι ο διαδότης μεταξύ 2 διαδοχικών σημείων είναι

$$K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \; e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)/\hbar} \; \left(1 - \frac{i\tau}{\hbar} H(p_j, \bar{q}_j) + O(\tau^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \; e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)/\hbar} \;\; e^{-i\tau H(p_j, \bar{q}_j)/\hbar}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \; e^{i[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j)]/\hbar}$$

όπου p_j η ορμή μεταξύ των θέσεων q_j και q_{j+1}. Καταφέραμε, λοιπόν, να μετατρέψουμε όλους τους τελεστές σε συναρτήσεις $q(\tau)$ και $p(\tau)$ και να διατηρήσουμε την Χαμιλτονιανή στον διαδότη. Από τον συνδυασμό της παραπάνω σχέσης με την (1.7) υπολογίζεται ο συνολικός διαδότης από το (q_i, t_i) στο (q_f, t_f) σε διακριτή μορφή, καθώς και στο όριο του συνεχούς ως εξής:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=0}^{n} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j)\right]\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{όριο συνεχούς}} \int \wp q \wp p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\,[p\dot{q} - H(p,q)]\right\} \qquad (1.11)$$

όπου $\wp q = \prod_{j=1}^{n} dq_j$ και $\wp p = \prod_{j=0}^{n} \frac{dp_j}{2\pi\hbar}$. Αντικαθιστώντας την μη σχετικιστική μορφή της Χαμιλτονιανής $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ στην διακριτή έκφραση του διαδότη έπεται

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=0}^{n} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \tau\frac{{p_j}^2}{2m} - \tau V(\bar{q}_j)\right]\right)$$

Εύκολα, όμως, αποδυκνείεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\alpha p^2 + bp + c)}\, dp = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

οπότε κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτει

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{(n+1)/2} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \exp\left(\frac{i\tau}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\tau}\right)^2 - V(q_j)\right]\right)$$

Επιστρέφοντας στο όριο του συνεχούς η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \mathcal{N}\int \wp q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right]\right) \qquad (1.12)$$

όπου $\mathcal{N} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ μια άπειρη σταθερά, ο απειρισμός της οποίας θα αρθεί με τη μέθοδο της κανονικοποίησης (normalization) που θα εφαρμόσουμε στη συνέχεια. Το $\int \wp q$ είναι ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις τροχιές $q = q(t)$ που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες $q(t_i) = q_i$ και $q(t_f) = q_f$ και ονομάζεται *ολοκλήρωμα τροχιάς*. Η ολοκληρωτέα ποσότητα στο εκθετικό είναι η Λαγκρανζιανή του συστήματος $L(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q)$ και ως γνωστόν η χρονική ολοκλήρωσή της δίνει τη δράση $S = \int dt\, L$, δηλαδή

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \mathcal{N}\int \wp q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q})\, dt\right) = \mathcal{N}\int \wp q\, e^{iS/\hbar} \qquad (1.13)$$

Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι στη διάδοση του σωματιδίου στο μικρόκοσμο συνεισφέρουν ισοβαρώς όλες οι δυνατές διαδρομές $q(t)$. Δεν υπάρχει, δηλαδή, κάποια διαδρομή που να κατέχει προνομιακό ρόλο συγκριτικά με τις υπόλοιπες. Κάθε μία, όμως, συνεισφέρει με διαφορετική φάση $e^{iS/\hbar}$, η οποία είναι η δράση της διαδρομής διαιρούμενη με τη σταθερά του Planck $\hbar$.

Η μορφή του διαδότη (1.13) εξηγεί, ακόμη, την επιλογή μιας καθορισμένης τροχιάς, όπως συμβαίνει στην κλασική προσέγγιση. Στο όριο του κλασικού η δράση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το $\hbar$

$$S/\hbar \to \infty$$

Έτσι, απειροστά κοντινές διαδρομές έχουν πολύ διαφορετικές φάσεις $e^{iS/\hbar}$ και $e^{i(S+\delta S)/\hbar}$ αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να συμβάλλουν καταστροφικά και να αλληλοαναιρούνται. Αντίθετα, ο διαδότης είναι μη μηδενικός μόνο στην περιοχή γύρω από τη διαδρομή $x_{cl}(t)$ που ικανοποιεί την συνθήκη $\delta S = 0$, δηλαδή στα σημεία στα οποία η δράση εμφανίζει ελάχιστο. Καταλήξαμε, λοιπόν, από τον κβαντομηχανικό διαδότη στη αρχή της ελάχιστης δράσης της κλασικής μηχανικής.

1.3 Θεωρία διαταραχών

Συχνά η μορφή του δυναμικού $V(q)$ καθιστά αδύνατη την εύρεση μιας αναλυτικής έκφρασης για τον διαδότη. Στην περίπτωση, όμως, που η χρονική ολοκλήρωση του δυναμικού είναι μικρή συγκριτικά με το $\hbar$

$$\int_{t_i}^{t_f} V(q,t)dt \ll \hbar$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της θεωρίας διαταραχών. Συγκεκριμένα, αναπτύσσοντας το εκθετικό στη σχέση (1.12) έχουμε

$$\begin{aligned} K(q_f,t_f;q_i,t_i) = {} & \mathcal{N}\int \wp q \, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}m\dot{q}^2 dt\right) \\ & \cdot\left\{1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(q,t)dt - \frac{1}{2!\,\hbar^2}\left[\int_{t_i}^{t_f} V(q,t)dt\right]^2 + \cdots\right\} \\ = {} & K_0 + K_1 + K_2 + \cdots \end{aligned} \tag{1.14}$$

Εκφράσαμε, δηλαδή, τον συνολικό διαδότη $K(q_f,t_f;q_i,t_i)$ σε μια άπειρη σειρά, η οποία ονομάζεται προσέγγιση Born.

Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος περιγράφει την περίπτωση της ελεύθερης διάδοσης του σωματιδίου

$$K_0(q_f,t_f;q_i,t_i) = \mathcal{N}\int \wp q \, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}m\dot{q}^2 dt\right)$$

και στη διακριτή μορφή γράφεται ως εξής

$$K_0\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{(n+1)/2} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \exp\left(\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}\left(q_{j+1}-q_j\right)^2\right)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα επιδέχεται αναλυτικής επίλυσης, με την τιμή του στη γενική περίπτωση να είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_n \exp\{i\lambda[\,(x_1-a)^2+(x_2-x_1)^2+\cdots+(b-x_n)^2]\}$$
$$= \sqrt{\frac{i^n\pi^n}{(n+1)\lambda^n}}\exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(b-a)^2\right]$$

Ύστερα από κατάλληλες αντικαταστάσεις έπεται

$$K_0\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{i2\pi\hbar\tau}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}\left(q_f-q_i\right)^2\right] \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας $(n+1)\tau = t_f - t_i$ $\left(t_f > t_i\right)$ καταλήγουμε στην έκφραση του ελεύθερου διαδότη στο χώρο των θέσεων

$$K_0\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = \Theta\left(t_f-t_i\right)\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\left(t_f-t_i\right)}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im\left(q_f-q_i\right)^2}{2\hbar\left(t_f-t_i\right)}\right] \quad (1.16)$$

όπου η συνάρτηση $\Theta\left(t_f-t_i\right) = \begin{cases}1, t_f > t_i\\ 0, t_f < t_i\end{cases}$ εξασφαλίζει ότι ο διαδότης υπακούει στην αρχή της αιτιότητας.

Η διόρθωση πρώτης τάξης K_1 του διαδότη είναι

$$K_1\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = \mathcal{N}\int \wp q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}m\dot{q}^2 dt\right)\cdot\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(q,t)dt\right)$$

και στη διακριτή μορφή γράφεται ως

$$K_1\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = -\frac{i}{\hbar}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}}\sum_{l=1}^{n}\tau\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}\left(q_{j+1}-q_j\right)^2\right]V(q_l,t_l)$$

Επειδή το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τα q_l, t_l μπορούμε να τροποποιήσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής

$$K_1\left(q_f, t_f; q_i, t_i\right) = -\frac{i}{\hbar}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\tau\int dq_l\left\{\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n-l+1}{2}}\int\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=l}^{n}\left(q_{j+1}-q_j\right)^2\right]dq_{l+1}\cdots dq_n\right\}$$
$$\cdot V(q_l,t_l)\left\{\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{l}{2}}\int\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{l-1}\left(q_{j+1}-q_j\right)^2\right]dq_1\cdots dq_{l-1}\right\}$$

Συγκρίνοντας την προηγούμενη έκφραση με την (1.15) συμπεραίνουμε ότι οι όροι στις αγκύλες αντιπροσωπεύουν τους ελεύθερους διαδότες $K_0\big(q_f,t_f;q,t\big)$ και $K_0(q,t;q_i,t_i)$ αντίστοιχα, όπου $q_i<q<q_f$ και $t_i<t<t_f$. Με βάση τη διαπίστωση αυτή ο διαδότης πρώτης τάξης στο όριο του συνεχούς μπορεί να γραφεί ως:

$$K_1\big(q_f,t_f;q_i,t_i\big)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,K_0\big(q_f,t_f;q,t\big)V(q,t)K_0(q,t;q_i,t_i)$$

Εξαιτίας, όμως, της βηματικής συνάρτησης στην (1.16) οι παραπάνω ελεύθεροι διαδότες μηδενίζονται για $t>t_f$ και $t<t_i$ αντίστοιχα, οπότε η χρονική ολοκλήρωση μπορεί να γίνει πάνω σε όλες τις τιμές του t, δηλαδή

$$K_1\big(q_f,t_f;q_i,t_i\big)=-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dtdq\,K_0\big(q_f,t_f;q,t\big)V(q,t)K_0(q,t;q_i,t_i) \qquad (1.17)$$

Η διόρθωση πρώτης τάξης εκφράζει τελικά τη διάδοση του σωματιδίου από την αρχική θέση (q_i,t_i) σε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις (q,t), στις οποίες αλληλεπιδρά με το δυναμικό $V(q,t)$ και στη συνέχεια μεταβαίνει στη τελική θέση $\big(q_f,t_f\big)$.

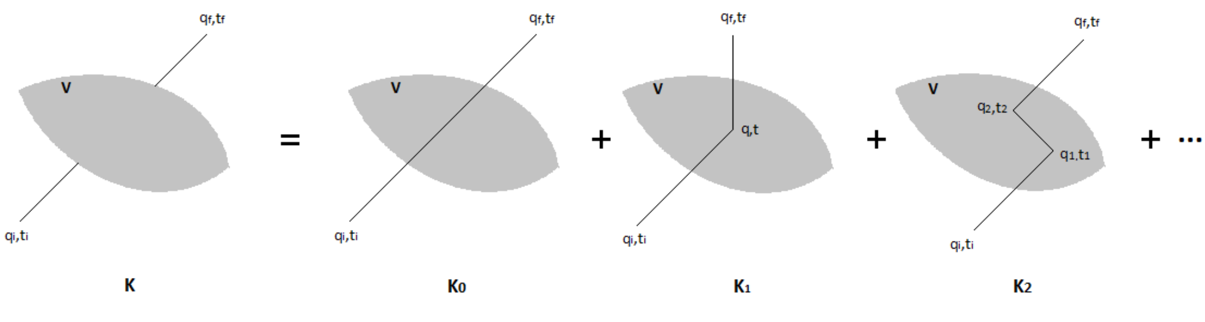
Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι η διόρθωση δεύτερης τάξης του διαδότη ικανοποιεί τη σχέση

$$K_2\big(q_f,t_f;q_i,t_i\big)=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1dt_2dq_1dq_2\;K_0\big(q_f,t_f;q_2,t_2\big)V(q_2,t_2)$$

$$K_0(q_2,t_2;q_1,t_1)V(q_1,t_1)K_0(q_1,t_1;q_i,t_i) \qquad (1.18)$$

Τελικά, ο συνολικός διαδότης, σύμφωνα με την προσέγγιση Born, είναι

$$K\big(q_f,t_f;q_i,t_i\big)=\;K_0\big(q_f,t_f;q_i,t_i\big)-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dtdq\,K_0\big(q_f,t_f;q,t\big)V(q,t)K_0(q,t;q_i,t_i)+\cdots$$



Σχήμα 3: Αναπαράσταση της προσέγγισης Born.

Αντικαθιστώντας τον τελικό διαδότη στην (1.5) έπεται ότι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου $\Psi\big(q_f,t_f\big)$ ικανοποιεί, στη μία διάσταση, τη σχέση

$$\Psi(q_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; q_i, t_i)\, \Psi(q_i, t_i) dq_i$$

$$= \int dq_i\, K_0(q_f, t_f; q_i, t_i)\, \Psi(q_i, t_i) - \frac{i}{\hbar} \int dt dq dq_i\; K_0(q_f, t_f; q, t) V(q, t) K_0(q, t; q_i, t_i) \Psi(q_i, t_i) + \cdots$$

Κεφάλαιο 2

Ολοκληρώματα τροχιάς στην κβαντική θεωρία πεδίου

Κατ' αντιστοιχία με το 1ο Κεφάλαιο, θα υπολογίσουμε τον διαδότη ενός κβαντικού συστήματος από ένα χωροχρονικό σημείο σε ένα άλλο στην περίπτωση, όμως, που η ενέργειά του υπακούει στην σχετικιστική σχέση διασποράς $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ $(\hbar = c = 1)$. Αντικαθιστώντας την ενέργεια E με τον τελεστή $i\frac{\partial}{\partial t}$ και το διάνυσμα της ορμής $\vec{p}$ με τον τελεστή $-i\vec{\nabla}$ καταλήγουμε στην γνωστή εξίσωση Klein-Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\varphi(x) = 0$$

όπου $x \equiv (t, \vec{x})$ τετραδιάνυσμα του χώρου Minkowski. Οι λύσεις της εξίσωσης έχουν τη μορφή επίπεδων κυμάτων και αναπόφευκτα οδηγούν στην εμφάνιση αρνητικών ενεργειών. Το γεγονός αυτό ανάγκασε τον Dirac να εισάγει την έννοια των αντισωματιδίων, με αποτέλεσμα οι συναρτήσεις $\varphi(x)$ να περιγράφουν καταστάσεις πολλών σωματιδίων.

Πλέον γνωρίζουμε ότι τα σωματίδια δεν είναι άφθαρτες «οντότητες», αλλά μπορούν να δημιουργούνται, να καταστρέφονται και να διασπώνται σε άλλα σωματίδια. Η ισοδυναμία ενέργειας-μάζας της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας σε συνδυασμό με την Αρχή της Απροσδιοριστίας της κβαντικής μηχανικής επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι ο αριθμός των σωματιδίων δεν αποτελεί διατηρήσιμο μέγεθος. Τα παραπάνω, μαζί με την ανάγκη για μια θεωρία που υπακούει στην αρχή της τοπικότητας (locality) μας οδηγούν στην αντιμετώπιση των σωματιδίων ως διεγερμένες καταστάσεις ενός φυσικού πεδίου με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου.

2.1 Συναρτήσεις συσχέτισης πραγματικών βαθμωτών πεδίων

Περνώντας, λοιπόν, σε μια σωματιδιακή θεωρία πεδίου και αφού εισάγουμε περιληπτικά τα αποτελέσματα του κανονικού τρόπου κβάντωσης, θα υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης του πραγματικού βαθμωτού πεδίου μέσω των ολοκληρωμάτων τροχιάς που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Κανονικός τρόπος κβάντωσης

Σε αντιστοιχία με την κβαντική μηχανική, ο κανονικός τρόπος κβάντωσης απαιτεί την μετατροπή του πραγματικού βαθμωτού πεδίου $\varphi(x)$ και της συζυγής ορμής του $\pi(x)$ σε τελεστές στον χώρο Hilbert, οι οποίοι ικανοποιούν τις ισοχρονικές σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\varphi}(t,\vec{x}),\hat{\varphi}(t,\vec{y})] = 0, \quad [\hat{\pi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = 0, \quad [\hat{\varphi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

Το ανάπτυγμα Fourier του κβαντικού πεδίου $\hat{\varphi}(x)$ προκύπτει ότι είναι

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \left[\hat{a}(p)e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}(p)e^{+ip\cdot x}\right]$$

όπου $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + {m_0}^2}$, ενώ οι τελεστές $\hat{a}(p)$ και $\hat{a}^{\dagger}(p)$ πληρούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{a}(p),\hat{a}(p')] = 0, \quad \left[\hat{a}^{\dagger}(p),\hat{a}^{\dagger}(p')\right] = 0, \quad \left[\hat{a}(p),\hat{a}^{\dagger}(p')\right] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή, ο τελεστής $\hat{a}^{\dagger}(p)$ είναι τελεστής δημιουργίας σωματιδίων με καθορισμένη ορμή p και αντίστοιχα ο $\hat{a}(p)$ είναι τελεστής καταστροφής σωματιδίων με ορμή p. Όμως, επειδή είναι αδύνατο να αντλήσουμε άπειρη ενέργεια από ένα φυσικό σύστημα ορίζουμε την θεμελιώδη κατάσταση $|0>$ (αναπαράσταση Fock), η οποία ονομάζεται *κενό* της θεωρίας και για την οποία ισχύουν

$$\hat{a}(p)|0> = 0$$

$$\hat{a}^{\dagger}(p)|0> = |p>$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι η θεμελιώδης κατάσταση είναι κανονικοποιημένη $<0|0> = 1$. Το κενό της ελεύθερης θεωρίας αντιστοιχεί στην κατάσταση μηδενικής ενέργειας $E_p = 0$, δηλαδή $<0|H_0|0> = 0$. Αντίθετα, σε μια θεωρία με αλληλεπίδραση η ενέργεια της βασικής κατάστασης είναι μη μηδενική (στον αρμονικό ταλαντωτή είναι $E_0 = (1/2)\hbar\omega$), οπότε το κενό της θεωρίας $|\Omega>$ αντιστοιχεί στην ενέργεια E_0 της θεμελιώδους κατάστασης, δηλαδή $<\Omega|H_I|\Omega> = E_0$.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου $\varphi(x)$ από ένα σημείο $x_1 \equiv (t_1,\vec{x}_1)$ σε ένα άλλο σημείο $x_2 \equiv (t_2,\vec{x}_2)$ του χώρου Minkowski, όπου $t_2 > t_1$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να δράσει πρώτα ο τελεστής $\hat{\varphi}(x_1)$ στο κενό και να δημιουργήσει ένα σωματίδιο στη θέση x_1 και στη συνέχεια να δράσει ο τελεστής $\hat{\varphi}(x_2)$ στο κενό και να καταστρέψει το σωματίδιο στη θέση x_2, ήτοι

$$<0|\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(x_1)|0> = \int \frac{d^3p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \int \frac{d^3p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} e^{+ip_1\cdot x_1}e^{-ip_2\cdot x_2} <0|\hat{a}(p_2)\hat{a}^{\dagger}(p_1)|0>$$

$$= \int \frac{d^3p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}} \int \frac{d^3p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_2}}} e^{+ip_1\cdot x_1}e^{-ip_2\cdot x_2}\, \delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip\cdot(x_1-x_2)}$$

Στην πραγματικότητα, όμως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πλάτος μετάβασης μεταξύ των σημείων $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ σε χρόνο $|t_1 - t_2|$. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται *διαδότης του Feynman* και ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$i\Delta_F(x_1 - x_2) = \Theta(t_1 - t_2) < 0|\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)|0 > + \Theta(t_2 - t_1) < 0|\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(x_1)|0 >$$

όπου $\Theta(t_1 - t_2)$ η βηματική συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την ακόλουθη αναπαράσταση της βηματικής συνάρτησης

$$\Theta(\tau) = i \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-i\rho\tau}}{\rho + i\varepsilon} \quad (\rho \in \mathbb{C})$$

καταλήγουμε στην αναπαράσταση κατά Fourier του διαδότη του Feynman

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon}$$

όπου το ε είναι μια απειροστή θετική ποσότητα. Αποδυκνείεται ότι ο διαδότης του Feynman αποτελεί μια συνάρτηση Green του πεδίου Klein-Gordon, δηλαδή η δράση του τελεστή $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + {m_0}^2\right)$ πάνω στον διαδότη $\Delta_F(x)$ δίνει τη δέλτα συνάρτηση του Dirac.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + {m_0}^2\right)\Delta_F(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + {m_0}^2\right)\frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_0^2 + \vec{p}^2 + {m_0}^2)\frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon} \\
&\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_0^2 + \vec{p}^2 + {m_0}^2)\frac{e^{-ip\cdot x}}{p_0^2 - \vec{p}^2 - {m_0}^2} \\
&= -\delta^{(4)}(x)
\end{aligned}$$

Κβάντωση με Ολοκληρώματα Τροχιάς

Παρόλο που η κβάντωση των πεδίων με τον κανονικό τρόπο καταλήγει σε πειραματικά αποδεκτά αποτελέσματα, συχνά ο βαρύς φορμαλισμός της μεθόδου καθιστά δύσκολο τον υπολογισμό του πλάτους σκέδασης, ειδικά στην περίπτωση πολλών σωματιδίων. Για αυτό το λόγο, θα επιχειρήσουμε να εισάγουμε έναν διαφορετικό τρόπο κβάντωσης που θα βασίζεται σε συναρτησιακές τεχνικές και θα διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Σκοπός μας είναι η κατασκευή ενός κομψού μαθηματικού φορμαλισμού που θα μας επιτρέπει την άμεση οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω κατάλληλων διαγραμμάτων, οδηγώντας έτσι σε καλύτερη φυσική ερμηνεία. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται *Κβάντωση με Ολοκληρώματα Τροχιάς (Path Integral Quantization)*, κεντρική έννοια της οποίας αποτελεί ο διαδότης εκφρασμένος στη μορφή ολοκληρώματος τροχιάς.

Στο 1ο Κεφάλαιο αποδείξαμε (σχέση (1.11)) ότι ο διαδότης ενός κβαντομηχανικού συστήματος με Χαμιλτονιανή H είναι στο φυσικό σύστημα μονάδων ($\hbar = c = 1$)

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = < x_2 t_2 | x_1 t_1 > = \int \wp x \wp p \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \, [p\dot{x} - H(p, x)] \right)$$

Περνώντας, τώρα, σε μια σωματιδιακή θεωρία πεδίου οι συναρτήσεις $x(t)$ και $p(t)$ αντικαθίστανται από τα πεδία $\varphi(x)$ και $\pi(x)$ αντίστοιχα, όπου $x \equiv (t, \vec{x})$ τετραδιάνυσμα στο χώρο Minkowski και η Λαγκρανζιανή διατύπωση γίνεται συναρτήσει μιας Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$

$$S[\varphi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Η δράση S καθώς και το στοιχείο όγκου d^4x είναι σχετικιστικά αναλλοίωτες ποσότητες, οπότε και η Λαγκρανζιανή πυκνότητα θα είναι σχετικιστικά αναλλοίωτη. Η Χαμιλτονιανή στην περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου είναι

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \; + \; V(\varphi) \right)$$

Με βάση τα παραπάνω, ο διαδότης του πεδίου $\varphi(x)$ από ένα σημείο $x_1 \equiv (t_1, \vec{x}_1)$ σε ένα άλλο σημείο $x_2 \equiv (t_2, \vec{x}_2)$ του χώρου Minkowski, όπου $t_2 > t_1$ είναι

$$< \varphi_2(\vec{x}_2) \left| e^{-i\hat{H}(t_2 - t_1)} \right| \varphi_1(\vec{x}_1) > = \int \wp\varphi \wp\pi \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(\pi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) \right) \right\}$$

όπου τα πεδία $\varphi(x)$ υπακούουν στις ακόλουθες οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \varphi(t_1, \vec{x}) = \varphi_1(\vec{x}) \\ \varphi(t_2, \vec{x}) = \varphi_2(\vec{x}) \end{cases}$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στον εκθέτη το συναρτησιακό ολοκλήρωμα στις ορμές ανάγεται σε Γκαουσιανό ολοκλήρωμα και υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \wp\pi \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \, (\pi - \dot{\varphi})^2 + \frac{i}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \, \dot{\varphi}^2 \right) = C \exp\left(\frac{i}{2} \int_{t_1}^{t_2} d^4x \, \dot{\varphi}^2 \right)$$

όπου C σταθερά ανεξάρτητη του πεδίου, η οποία μπορεί να παραληφθεί. Έτσι, ο διαδότης του πεδίου απλοποιείται σε

$$< \varphi_2(\vec{x}_2) \left| e^{-i\hat{H}(t_2 - t_1)} \right| \varphi_1(\vec{x}_1) > = \int \wp\varphi \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right) \qquad (2.1)$$

όπου $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)$, $(\partial_\mu \varphi)^2 = \dot{\varphi}^2 - (\nabla \varphi)^2$. Από την (2.1) παρατηρούμε πως το πλάτος μετάβασης του βαθμωτού πεδίου εξαρτάται εκθετικά από την Λαγκρανζιανή πυκνότητα, οι συμμετρίες της οποίας διατηρούνται από το συναρτησιακό ολοκλήρωμα.

Στις πειραματικές διατάξεις δεν είναι δυνατή η γνώση των καταστάσεων των σωματιδίων που συμμετέχουν. Αντίθετα, αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα σωματίδια δημιουργούνται (μέσω της αλληλεπίδρασης άλλων σωματιδίων), αλληλεπιδρούν και στη συνέχεια καταστρέφονται από την ανιχνευτική συσκευή. Ως εκ τούτου, σκοπός μας είναι η εύρεση των συναρτήσεων συσχέτισης (correlation functions) ή αλλιώς των συναρτήσεων Green, δηλαδή ο υπολογισμός της αναμενόμενης μέσης τιμής των πεδίων στο κενό της θεωρίας. Η συνάρτηση συσχέτισης n σημείων είναι

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv < \Omega | T[\varphi_H(x_1), \varphi_H(x_2), \dots, \varphi_H(x_n)] | \Omega >$$

όπου $|\Omega >$ είναι το κενό της αλληλεπιδρώσας θεωρίας κατά την αναπαράσταση Fock, $\varphi_H(x)$ ο τελεστής του πεδίου σύμφωνα με την εικόνα του Heisenberg και $T[\dots]$ ο τελεστής χρονικής σειράς (time ordering operator) που ορίζεται ως

$$T[A(x_1)B(x_2)] = \begin{cases} A(x_1)B(x_2), & t_1 > t_2 \\ B(x_2)A(x_1), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχέτισης θεωρούμε, αρχικά, την ποσότητα

$$I = \int \wp\varphi \, \varphi(x_1)\varphi(x_2) \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right) \tag{2.2}$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \varphi(-T, \vec{x}) = \varphi_a(\vec{x}) \\ \varphi(+T, \vec{x}) = \varphi_b(\vec{x}) \end{cases}$$

Τότε για κάθε t_1, t_2 τέτοια ώστε $-T < t_1, t_2 < +T$ μπορούμε να σπάσουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα ως εξής

$$I = \int \wp\varphi_1 \wp\varphi_2 \, \varphi_1(\vec{x}_1)\varphi_2(\vec{x}_2) \int \wp\varphi \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right) \tag{2.3}$$

όπου τα πεδία φ στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα $\int \wp\varphi$ ικανοποιούν τις συνθήκες $\varphi(t_1, \vec{x}) = \varphi_1(\vec{x})$ και $\varphi(t_2, \vec{x}) = \varphi_2(\vec{x})$. Έτσι, τα πεδία $\varphi(x_1)$ και $\varphi(x_2)$ μετατράπηκαν σε $\varphi_1(\vec{x}_1)$ και $\varphi_2(\vec{x}_2)$ αντίστοιχα και μπορούν να υπολογιστούν έξω από το κύριο συναρτησιακό ολοκλήρωμα $\wp\varphi$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $\boldsymbol{t_2 > t_1}$: Από τις (2.1) και (2.3) έπεται

$$I = \int \wp\varphi_1 \wp\varphi_2 \, \varphi_1(\vec{x}_1)\varphi_2(\vec{x}_2)$$
$$< \varphi_b \middle| e^{-i\hat{H}(\mathrm{T}-t_2)} \middle| \varphi_2 >< \varphi_2 \middle| e^{-i\hat{H}(\mathrm{t}_2-t_1)} \middle| \varphi_1 >< \varphi_1 \middle| e^{-i\hat{H}(\mathrm{t}_1+\mathrm{T})} \middle| \varphi_\mathrm{a} >$$

Μπορούμε να μετατρέψουμε το πεδία $\varphi_1(\vec{x}_1)$ και $\varphi_2(\vec{x}_2)$ σε τελεστές σύμφωνα με τη εικόνα του Schröndiger χρησιμοποιώντας τη σχέση $\varphi_S(\vec{x}_i)|\varphi_i >= \varphi_i(\vec{x}_i)|\varphi_i >, (i = 1{,}2)$ και την συνθήκη πληρότητας $\int \wp\varphi_i |\varphi_i >< \varphi_i| = 1$. Οδηγούμαστε, έτσι, στην έκφραση

$$I =< \varphi_b | e^{-i\hat{H}(\mathrm{T}-t_2)} \varphi_S(\vec{x}_2) e^{-i\hat{H}(\mathrm{t}_2-t_1)} \varphi_S(\vec{x}_1) e^{-i\hat{H}(\mathrm{t}_1+\mathrm{T})} |\varphi_\mathrm{a} >$$

Περνώντας, τώρα, στη εικόνα του Heisenberg μέσω της σχέσης $\varphi_H(x) = e^{+i\hat{H}t}\varphi_S(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$ βρίσκουμε

$$I =< \varphi_b | e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} \varphi_H(x_2)\varphi_H(x_1) e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} |\varphi_\mathrm{a} > \tag{2.4}$$

- $\boldsymbol{t_2 < t_1}$: Εντελώς αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση βρίσκουμε

$$I = < \varphi_b | e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} \varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2) e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} |\varphi_\mathrm{a} > \tag{2.5}$$

Από τις εξισώσεις (2.2), (2.4) και (2.5) έπεται

$$\int \wp\varphi \, \varphi(x_1)\varphi(x_2) \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right) = \tag{2.6}$$
$$= < \varphi_b | e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} \, T[\varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)] \, e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} |\varphi_\mathrm{a} >$$

Για να καταλήξουμε στην μορφή των συναρτήσεων συσχέτισης θα πρέπει να μετατρέψουμε τις καταστάσεις $|\varphi_\mathrm{a} >$ και $|\varphi_b >$ σε καταστάσεις κενού $|\Omega >$. Ένας τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να αναλύσουμε τις πεδιακές καταστάσεις σε ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής και εν συνεχεία για να απαλλαγούμε από τους όρους τάξης n να πάρουμε το όριο $\mathrm{T} \to \infty(1 - i\varepsilon)$. Έτσι, έχουμε[2]

$$e^{-i\hat{H}\mathrm{T}}|\varphi_\mathrm{a} > = \sum_n e^{-iE_n\mathrm{T}} \, |n >< n|\varphi_\mathrm{a} > = \, e^{-iE_0\mathrm{T}} \, |\Omega >< \Omega|\varphi_\mathrm{a} > + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\mathrm{T}} \, |n >< n|\varphi_\mathrm{a} >$$
$$\xrightarrow{T\to\infty(1-i\varepsilon)} < \Omega|\varphi_\mathrm{a} > e^{-iE_0\infty(1-i\varepsilon)}|\Omega >$$

$$< \varphi_b|e^{-i\hat{H}\mathrm{T}} = \sum_n e^{-iE_n\mathrm{T}} < \varphi_b|n >< n| \; = \; e^{-iE_0\mathrm{T}} \; < \varphi_b|\Omega >< \Omega| + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\mathrm{T}} < \varphi_b|n >< n|$$
$$\xrightarrow{T\to\infty(1-i\varepsilon)} < \Omega|e^{-iE_0\infty(1-i\varepsilon)} < \varphi_b|\Omega >$$

[2] Έχουμε υποθέσει ότι οι καταστάσεις $|\varphi_\mathrm{a} >$ και $|\varphi_b >$ έχουν μη μηδενική προβολή πάνω στην κατάσταση του κενού $|\Omega >$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (2.6) προκύπτει η τελική μορφή της συνάρτησης συσχέτισης 2 σημείων

$$< \Omega|T[\varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)]|\Omega > = \lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \wp\varphi\, \varphi(x_1)\varphi(x_2) \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\right)}{\int \wp\varphi \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\right)}$$

όπου διαιρέσαμε με την ποσότητα $\int \wp\varphi \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\right)$ για να απαλείψουμε τις φάσεις και τα εσωτερικά γινόμενα που δεν μας χρειάζονται. Τέλος, γενικεύοντας στην περίπτωση n σημείων καταλήγουμε στη σχέση

$$< \Omega|T[\varphi_H(x_1)\cdots\varphi_H(x_n)]|\Omega > = \lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \wp\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\right)}{\int \wp\varphi \exp\left(i \int_{-T}^{+T} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\right)} \qquad (2.7)$$

2.2 Συναρτησιακός γεννήτορας βαθμωτών πεδίων

Έχοντας εκφράσει τη συνάρτηση συσχέτισης των πραγματικών βαθμωτών πεδίων σε μορφή συναρτησιακού ολοκληρώματος (σχέση (2.7)) σκοπός μας τώρα είναι η εύρεση ενός κατάλληλου συναρτησιακού, τέτοιο ώστε όταν δράσουμε σε αυτό με έναν τελεστή n φορές να μας δίνει τη συνάρτηση συσχέτισης n σημείων.

Αρχικά θα ορίσουμε την πράξη της συναρτησιακής διαφόρισης. Κατ' αντιστοιχία με τη διαφόριση συναρτήσεων, η διαφόριση ενός συναρτησιακού $F[f]$ ως προς τη συνάρτηση $f(y)$ ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[f(x) + \varepsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\varepsilon}$$

Στην περίπτωση που το συναρτησιακό είναι της μορφής $\exp\{i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\}$, όπου $x \equiv (t, \vec{x})$ τετραδιάνυσμα στο χώρο Minkowski, η διαφόρισή του ως προς $J(x_1)$ δίνει

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \exp\left(i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp\left(i \int d^4x\, [J(x) + \varepsilon\delta(x-x_1)]\varphi(x)\right) - \exp\left(i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right)}{\varepsilon}$$

$$= \exp\left(i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right)\left[\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp\left(i\varepsilon \int d^4x\, \delta(x-x_1)\varphi(x)\right) - 1}{\varepsilon}\right]$$

$$= i\exp\left(i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right) \int d^4x\, \delta(x-x_1)\varphi(x)$$

$$= i\varphi(x_1)\exp\left(i \int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right)$$

όπου για να περάσουμε από την 2η στην 3η γραμμή χρησιμοποιήσαμε τον Κανόνα του L'Hôpital. Αντιπαραβάλλοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την (2.7) και εφορμώμενοι από τη σχέση (2.1) καταλήγουμε στο συναρτησιακό

$$\tilde{Z}[J] = \int \wp\varphi \exp\left(i \int d^4x \, [\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)]\right) \tag{2.8}$$

Η συνάρτηση $J(x)$ αντιπροσωπεύει μια εξωτερική πηγή συζευγμένη με το πεδίο, η οποία ανοίγει και κλείνει αδιαβατικά

$$J(x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα υπό την παρουσία της πηγής γίνεται $\mathcal{L}_J = \mathcal{L} + J(x)\varphi(x)$. Εν συνεχεία, κανονικοποιούμε το συναρτησιακό $\tilde{Z}[J]$ έτσι ώστε όταν η πηγή είναι μηδενική το μέτρο του να είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή

$$Z[J] = \frac{\int \wp\varphi \exp(i \int d^4x \, [\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)])}{\int \wp\varphi \exp(i \int d^4x \, \mathcal{L})} \tag{2.9}$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης προκύπτουν από τη συναρτησιακή διαφόριση του $Z[J]$ ως προς $J(x)$ μηδενίζοντας στο τέλος την πηγή, ήτοι

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv <\Omega|T[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)]|\Omega> = \left(\frac{1}{i^n}\right) \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{2.10}$$

Το συναρτησιακό $Z[J]$ ονομάζεται *συναρτησιακός* γεννήτορας, καθώς παράγει τις συναρτήσεις Green της θεωρίας. Από τις σχέσεις (2.7) και (2.9) έπεται ότι το $Z[J]$ αποτελεί το πλάτος μετάβασης του πεδίου από το κενό τη χρονική στιγμή $T = -\infty$ στο κενό τη χρονική στιγμή $T = +\infty$ υπό την επίδραση μιας εξωτερικής πηγής $J(x)$, δηλαδή

$$Z[J] = <\Omega|\Omega>^J$$

2.3 Ελεύθερη βαθμωτή θεωρία

Θεωρούμε το πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\varphi(x)$ μάζας m_0 που ικανοποιεί την εξίσωση Klein – Gordon:

$$(\Box + {m_0}^2)\varphi(x) = 0$$

όπου $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ ο τελεστής του D' Alembert. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου, σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler-Lagrange είναι

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi \, \partial^\mu\varphi - {m_0}^2\varphi^2\right) \tag{2.11}$$

Αντικαθιστώντας την (2.11) στην (2.8) βρίσκουμε ότι ο συναρτησιακός γεννήτορας του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου είναι:

$$\tilde{Z}_0[J] \; = \int \wp\varphi \exp\left\{i \int d^4x \; \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi \, \partial^\mu\varphi - {m_0}^2\varphi^2\right) + J\varphi\right]\right\}$$

Όμως, από την ταυτότητα

$$\int d^4x\, \partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi = \int d^4x\, \partial_\mu(\varphi\, \partial^\mu\varphi) - \int d^4x\, \varphi\, \underbrace{\partial_\mu\, \partial^\mu}_{\Box}\, \varphi$$

και από το γενικευμένο Θεώρημα Gauss στις 4 διαστάσεις, θεωρώντας ότι το πεδίο είναι μηδενικό στο άπειρο $\left(\lim_{x\to\infty} \varphi(x) \to 0\right)$, μηδενίζεται το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος και ο συναρτησιακός γεννήτορας γίνεται:

$$\tilde{Z}_0[J] \;=\; \int \wp\varphi\, \exp\left\{-i \int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + {m_0}^2)\varphi - J\varphi\right]\right\}$$

Το ολοκλήρωμα τροχιάς, όμως, δεν είναι καλώς ορισμένο καθώς για μεγάλες τιμές του πεδίου φ δεν αποσβένει εκθετικά. Ως εκ τούτου εφαρμόζουμε έναν παράγοντα σύγκλισης της μορφής $\int \wp\varphi\, \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\int d^4x\, \varphi^2\right\}$, όπου ε απειροστή θετική ποσότητα[3] και ο συναρτησιακός γεννήτορας γίνεται

$$\tilde{Z}_0[J] \;=\; \int \wp\varphi\, \exp\left\{-i \int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + {m_0}^2 - i\varepsilon)\varphi - J\varphi\right]\right\} \tag{2.12}$$

Προκειμένου να απομονώσουμε την επίδραση της πηγής J στο πλάτος μετάβασης μετασχηματίζουμε το $\varphi(x)$ σε[4]

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + \varphi_0(x) \tag{2.13}$$

με κατάλληλο πεδίο $\varphi_0(x)$ τέτοιο ώστε:

$$(\Box + {m_0}^2 - i\varepsilon)\varphi_0(x) = J(x) \tag{2.14}$$

Για την επίλυση της (2.14) εισάγουμε το διαδότη του Feynman $\Delta_F(x)$, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(\Box + {m_0}^2 - i\varepsilon)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x) \tag{2.15}$$

Επιλύοντας την (2.15) βρίσκουμε

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon}$$

όπως και στην περίπτωση του κανονικού τρόπου κβάντωσης. Η μορφή του διαδότη στον χώρο των ορμών, εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι είναι

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon}$$

Το πεδίο $\varphi_0(x)$ μπορεί, τώρα, να γραφεί ως εξής

---

[3] Ισοδυναμεί με την περιστροφή του άξονα των χρόνων που χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα 2.1 για να προβάλλουμε τα πεδία στο κενό.

[4] Ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού είναι ο μοναδιαίος.

$$\varphi_0(x) = -\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y) \tag{2.16}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.13), (2.14) και (2.16) στην (2.12) έπεται:

$$\tilde{Z}_0[J] \; = \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)\, J(y)\right]\int \wp\varphi \exp\left\{-i\int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\varphi'(\Box + {m_0}^2 - i\varepsilon)\varphi'\right]\right\}$$

Τέλος, θα πρέπει εν τη απουσία πηγής η πιθανότητα μετάβασης να είναι ίση με τη μονάδα $\tilde{Z}_0[J=0]=1$, οπότε ο κανονικοποιημένος συναρτησιακός γεννήτορας του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου είναι:

$$Z_0[J] \; = \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)\, J(y)\right] \tag{2.17}$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης της θεωρίας υπολογίζονται σύμφωνα με την (2.10) ως εξής:

- *Συνάρτηση συσχέτισης 1 σημείου*

$$G^{(1)}(x_1) \; = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}Z_0[J]\bigg|_{J=0} = -Z_0[0]\int d^4x\, \Delta_F(x_1-x)\, J(x)\bigg|_{J=0} = 0$$

- *Συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων*

$$G^{(2)}(x_1,x_2) \; = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}Z_0[J]\bigg|_{J=0} = i\Delta_F(x_1-x_2)$$

- *Συνάρτηση συσχέτισης 3 σημείων*

$$G^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \; = \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta^3}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)}Z_0[J]\bigg|_{J=0} = 0$$

- *Συνάρτηση συσχέτισης 4 σημείων*

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \; = \left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)}Z_0[J]\bigg|_{J=0} =$$

$$= i\Delta_F(x_1-x_3)i\Delta_F(x_2-x_4) + i\Delta_F(x_1-x_4)i\Delta_F(x_2-x_3) + i\Delta_F(x_3-x_4)i\Delta_F(x_1-x_2)$$

Υπολογίζοντας τις συναρτήσεις συσχέτισης όλο και περισσότερων σημείων καταλήγουμε στο γνωστό Θεώρημα του Wick, σύμφωνα με το οποίο οι συναρτήσεις συσχέτισης για περιττό αριθμό σημείων είναι μηδενικές, ενώ για άρτιο αριθμό σημείων είναι ίσες με το άθροισμα όλων των διαφορετικών συνδυασμών των γινομένων ανάμεσα στους διαδότες Feynman 2 σημείων $i\Delta_F(x-y),\; x \neq y$.

2.4 Συναρτησιακός γεννήτορας αλληλεπιδρώντων βαθμωτών πεδίων

Θα υπολογίσουμε, τώρα, τον συναρτησιακό γεννήτορα στην γενική περίπτωση που το βαθμωτό πεδίο αλληλεπιδρά με τον εαυτό του μέσω του όρου $\mathcal{L}_{int}$, δηλαδή έχει Λαγκρανζιανή πυκνότητα της μορφής

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\right) - \frac{1}{2}{m_0}^2\varphi^2 + \mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

και δράση

$$S = \int d^4x\left(\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - {m_0}^2\varphi^2\right) + \mathcal{L}_{int}(\varphi)\right) = -\int d^4x\left(\frac{1}{2}\varphi(\Box + {m_0}^2)\varphi - \mathcal{L}_{int}(\varphi)\right)$$

Ο κανονικοποιημένος συναρτησιακός γεννήτορας της αλληλεπιδρώσας θεωρίας, σύμφωνα με την σχέση (2.9), είναι

$$Z[J] = \frac{\int \wp\varphi \exp(iS[\varphi] + i\int d^4x\, J\varphi)}{\int \wp\varphi \exp(iS[\varphi])} = \int \wp\varphi\, \hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

όπου ορίσαμε το συναρτησιακό

$$\hat{Z}[\varphi] = \frac{\exp(iS[\varphi])}{\int \wp\varphi \exp(iS[\varphi])}$$

Παραγωγίζοντας το $\hat{Z}[\varphi]$ ως προς $\varphi(x)$ βρίσκουμε

$$i\frac{\delta\hat{Z}[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = i\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left\{\frac{\exp\left[-i\int d^4x\left(\frac{1}{2}\varphi(\Box + {m_0}^2)\varphi - \mathcal{L}_{int}\right)\right]}{\int \wp\varphi \exp(iS[\varphi])}\right\}$$

$$= (\Box + {m_0}^2)\varphi(x)\hat{Z}[\varphi] - \mathcal{L}'_{int}(\varphi)\hat{Z}[\varphi] \qquad (2.18)$$

όπου $\mathcal{L}'_{int}(\varphi) = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}(\varphi)}{\partial\varphi}$. Όμοια, το συναρτησιακό παράγωγο του $Z[J]$ ως προς $J(x)$ είναι

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \int \wp\varphi\, \varphi(x)\hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right) \qquad (2.19)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της (2.18) με $\exp(i\int d^4x\, J\varphi)$ και ολοκληρώνοντας πάνω σε όλα τα πεδία $\varphi(x)$ προκύπτει

$$i\int \wp\varphi \frac{\delta\hat{Z}[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right) = \int \wp\varphi\, (\Box + {m_0}^2)\varphi(x)\hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

$$-\int \wp\varphi\, \mathcal{L}'_{int}(\varphi)\hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης γίνεται

$$i\int \wp\varphi \frac{\delta\hat{Z}[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

$$= i\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)\hat{Z}[\varphi]\Big|_{\varphi\to\infty} - i\int \wp\varphi\, \hat{Z}[\varphi]\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left\{\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)\right\}$$

$$= 0 - i\int \wp\varphi\, \hat{Z}[\varphi]\big(iJ(x)\big)\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

$$= J(x)Z[J]$$

Το δεξί μέλος είναι, σύμφωνα με την (2.19), ίσο με

$$\int \wp\varphi\, (\Box + {m_0}^2)\varphi(x)\hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right) - \int \wp\varphi\, \mathcal{L}'_{int}(\varphi)\hat{Z}[\varphi]\exp\left(i\int d^4x\, J\varphi\right)$$

$$= (\Box + {m_0}^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]Z[J]$$

όπου το όρισμα του $\mathcal{L}'_{int}$ άλλαξε σε $(1/i)(\,\delta/\delta J(x))$ καθώς δρα πάνω στο $Z[J]$. Εξισώνοντας τα 2 μέλη καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση

$$(\Box + {m_0}^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]Z[J] = J(x)Z[J] \qquad (2.20)$$

η λύση της οποίας θα μας δώσει τον συναρτησιακό γεννήτορα των αλληλεπιδρώντων βαθμωτών πεδίων $Z[J]$. Για $\mathcal{L}'_{int} = 0$ η (2.20) μετατρέπεται στη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο συναρτησιακός γεννήτορας της ελεύθερης θεωρίας

$$(\Box + {m_0}^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = J(x)Z_0[J] \qquad (2.21)$$

Για την επίλυση της (2.20) θα αποδείξουμε αρχικά ότι

$$\exp\left(-i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)J(x)\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)$$

$$= J(x) - \mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right] \qquad (2.22)$$

Γνωρίζουμε ότι στο όριο του συνεχούς ισχύει η ακόλουθη μεταθετική σχέση

$$\left[J(x), \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right] = i\delta(x-y)$$

από την οποία προκύπτει

$$\left[J(x), \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n\right] = i\delta(x-y)n\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1}$$

Στηριζόμενοι στις παραπάνω σχέσεις και στην ιδιότητα $[A,(B+C)] = [A,B] + [A,C]$ θα υπολογίσουμε τον ακόλουθο μεταθέτη

$$\left[J(x), \int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right] = \left[J(x), \int d^4y \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{int}{}^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n\right\}\right]$$

$$= \int d^4y \left\{\mathcal{L}_{int}(0)[J(x),0] + \mathcal{L}'_{int}(0)\left[J(x),\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right] + \frac{\mathcal{L}''_{int}(0)}{2!}\left[J(x),\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^2\right]\right\} + \cdots$$

$$= \int d^4y \left\{i\delta(x-y)\left[0 + \mathcal{L}'_{int}(0) + \mathcal{L}''_{int}(0)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}'''_{int}(0)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^2 + \cdots\right]\right\}$$

$$= \int d^4y \left\{i\delta(x-y)\frac{\partial\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]}{\partial\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)}\right\}$$

$$= \int d^4y \left\{i\delta(x-y)\mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right\}$$

$$= i\,\mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης του Hausdorff: $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]\right] + \cdots$, όπου $\hat{A}, \hat{B}$ τελεστές και αντικαθιστώντας

$$\hat{A} = -i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right] \quad , \quad \hat{B} = J(x)$$

αποδυκνείεται η ζητούμενη εξίσωση (2.22).

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.20) είναι το συναρτησιακό

$$Z[J] = N\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right) Z_0[J] \qquad (2.23)$$

όπου N σταθερά κανονικοποίησης και $Z_0[J]$ ο συναρτησιακός γεννήτορας της ελεύθερης θεωρίας. Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της (2.23) με $J(x)$ συνεπάγεται

$$J(x)Z[J] = N\underbrace{J(x)\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)} Z_0[J]$$

$$= N\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)\left(J(x) - \mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\right) Z_0[J]$$

$$= N\underbrace{J(x)Z_0[J]}\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)$$
$$-N\mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\exp\left(i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right) Z_0[J]$$

$$= N\exp\left(i\int d^4y\,\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)(\Box+{m_0}^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}$$
$$-N\mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\exp\left(i\int d^4y\,\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\right)Z_0[J]$$

$$= (\Box+{m_0}^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]Z[J]$$

όπου για να περάσουμε από την 1η στη 2η γραμμή χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (2.22) και από την 3η στην 4η την (2.21). Καταλήξαμε, έτσι, στην αρχική διαφορική εξίσωση, επιβεβαιώνοντας ότι η σχέση (2.23) αποτελεί τον συναρτησιακό γεννήτορα των αλληλεπιδρώντων βαθμωτών πεδίων.

2.5 Αλληλεπίδραση φ^4

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία το πεδίο $\varphi(x)$ μάζας m_0 αλληλεπιδρά με τον εαυτό του μέσω του όρου $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4$,όπου λ_0 η σταθερά ζεύξης. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του συστήματος έχει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}{m_0}^2\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4$$

Ο κανονικοποιημένος συναρτησιακός γεννήτορας, σύμφωνα με την (2.23) είναι

$$Z[J] = \frac{\exp\left(i\int d^4z\;\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]\right)Z_0[J]}{\left\{\exp\left(i\int d^4z\;\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]\right)Z_0[J]\right\}\Big|_{J=0}} = \frac{\exp\left(\frac{-i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right)Z_0[J]}{\left\{\exp\left(\frac{-i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right)Z_0[J]\right\}\Big|_{J=0}}$$

Θεωρώντας το $\lambda_0 \ll 1$ αναπτύσσουμε το εκθετικό μέχρι τους όρους πρώτης τάξης[5], ήτοι

$$\exp\left(\frac{-i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right) = 1 - \frac{i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + \mathcal{O}({\lambda_0}^2)$$

οπότε ο συναρτησιακός γεννήτορας γίνεται

$$Z[J] = \frac{\left(1 - \frac{i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + \mathcal{O}\left({\lambda_0}^2\right)\right)Z_0[J]}{\left\{\left(1 - \frac{i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + \mathcal{O}\left({\lambda_0}^2\right)\right)Z_0[J]\right\}\Big|_{J=0}} \tag{2.24}$$

[5] Από διαστατική ανάλυση στην φ^4 θεωρία προκύπτει ότι η σταθερά ζεύξης λ στις 4 χωροχρονικές διαστάσεις είναι αδιάστατο μέγεθος.

Σε μηδενική τάξη προσέγγισης καταλήγουμε, όπως είναι αναμενόμενο, στο συναρτησιακό γεννήτορα του ελεύθερου σωματιδίου $Z_0[J]$. Για τους όρους πρώτης τάξης έχουμε

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right) Z_0[J] = -Z_0[J]\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 Z_0[J] = Z_0[J]\left\{\left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^2 + i\Delta_F(0)\right\}$$

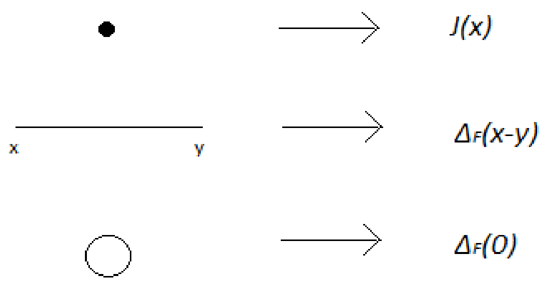
$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 Z_0[J] = Z_0[J]\left\{3[-i\Delta_F(0)]\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x) - \left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^3\right\}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 Z_0[J] = Z_0[J]\left\{-3[\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0)\left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^2 + \left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right\}$$

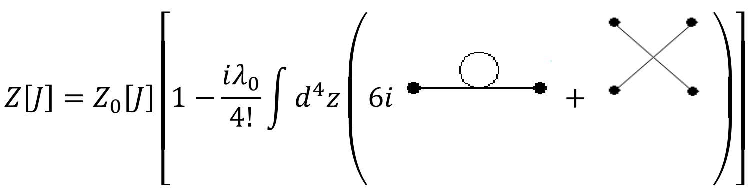
Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στην (2.24) έπεται ότι, μέχρι και τη διόρθωση πρώτης τάξης, ο συναρτησιακός γεννήτορας της φ^4 θεωρίας είναι

$$Z[J] = Z_0[J]\left\{1 - \frac{i\lambda_0}{4!}\int d^4z\left(6i\Delta_F(0)\left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^2 + \left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right)\right\} \tag{2.25}$$

όπου ο παρονομαστής απλοποιήθηκε με τη χρήση της δυναμοσειράς $1/(1-x) = \sum x^n$. Στο σημείο αυτό είναι βολικό να εισάγουμε μια διαγραμματική αναπαράσταση του συναρτησιακού γεννήτορα και των συναρτήσεων συσχέτισης, αποφεύγοντας να αναφερθούμε στους κανόνες Feynman μέχρι την επόμενη ενότητα. Τα διαγράμματα αυτά ονομάζονται *διαγράμματα Feynman* στον χώρο των θέσεων και ακολουθούν τους εξής συμβολισμούς



βάσει των οποίων η (2.25) μπορεί να γραφτεί στη συμβολική μορφή



Οι συναρτήσεις συσχέτισης της φ^4 θεωρίας μέχρι και τη διόρθωση πρώτης τάξης είναι:

- *Συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων*

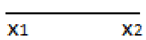
$$G^{(2)}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z[J]|_{J=0}$$

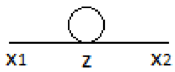
$$= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z_0[J]|_{J=0}$$

$$+ \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \left\{\frac{-i\lambda_0}{4!} 6i\Delta_F(0) Z_0[J] \int d^4z \left(\left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^2\right)\right\}\Bigg|_{J=0}$$

$$+ \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \left\{\frac{-i\lambda_0}{4!} Z_0[J] \int d^4z \left(\left[\int d^4x\, \Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right)\right\}\Bigg|_{J=0}$$

$$= i\Delta_F(x_1-x_2) - \frac{\lambda_0}{2}\Delta_F(0)\int d^4z\, \Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2) + 0$$

$= i$ 

$- \frac{\lambda_0}{2}$ 

Ο πρώτος όρος της συνάρτησης Green περιγράφει την ελεύθερη διάδοση από το σημείο x_1 στο x_2, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει την διάδοση από το x_1 σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία z, στα οποία αλληλεπιδρά μέσω του όρου $(\lambda_0/2)\Delta_F(0)$ και στη συνέχεια τη διάδοση από τα σημεία z στο x_2.

Ενώ στο χώρο των θέσεων τα αποτελέσματα της διόρθωσης ενός βρόχου δεν είναι τόσο εμφανή, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο μετασχηματισμός της συνάρτησης Green κατά Fourier

$$G^{(2)}(x_1,x_2) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon} - \frac{\lambda_0}{2}\frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^8}\int d^4p d^4q d^4z\, \frac{e^{-ip\cdot(x_1-z)}}{p^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\cdot\frac{e^{-iq\cdot(x_2-z)}}{q^2-{m_0}^2+i\varepsilon}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon} - \frac{\lambda_0}{2}\frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4}\int d^4p d^4q\, \frac{e^{-ip\cdot x_1}}{p^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\cdot\frac{e^{-iq\cdot x_2}}{q^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\delta^{(4)}(p+q)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon} - \frac{\lambda_0}{2}\frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \frac{e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}}{(p^2-{m_0}^2+i\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\left(1+\frac{\frac{i}{2}\lambda_0\Delta_F(0)}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon}\left(\frac{1}{1-\frac{\frac{i}{2}\lambda_0\Delta_F(0)}{k^2-{m_0}^2+i\varepsilon}}\right)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2 - {m_0}^2 - \frac{i}{2}\lambda_0 \Delta_F(0) + i\varepsilon}$$

Η μετασχηματισμένη συνάρτηση Green εμφανίζει πόλο στο $k^2 = {m_0}^2 + \frac{i}{2}\lambda_0 \Delta_F(0)$. Δηλαδή, η μάζα μετά την αλληλεπίδραση δεν είναι η αρχική μάζα m_0 που περιέχεται στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα, αλλά έχει μεταβληθεί σε

$$m = \sqrt{{m_0}^2 + \tfrac{i}{2}\lambda_0 \Delta_F(0)},$$

Η πειραματικά μετρήσιμη μάζα m ονομάζεται *φυσική μάζα* και είναι αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων των πεδίων με τον εαυτό τους, ή αλλιώς των κβαντομηχανικών διορθώσεων του συστήματος. Σημειώνουμε, τέλος, ότι ο διαδότης

$$\Delta_F(0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon}$$

αποκλίνει τετραγωνικά και κατά συνέπεια η μάζα m είναι μια άπειρη ποσότητα. Ο αφύσικος αυτός απειρισμός θα αρθεί μέσω της ανακανονικοποίησης (renormalization) που θα εφαρμόσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

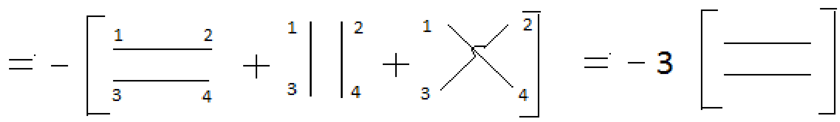
- *<u>Συνάρτηση συσχέτισης 4 σημείων</u>*

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z[J]\bigg|_{J=0}$$

Ο πρώτος όρος του $Z[J]$ εκφράζει την ελεύθερη διάδοση του σωματιδίου και σύμφωνα με το Θεώρημα του Wick είναι

$$\left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z_0[J]\bigg|_{J=0} =$$

$$= i\Delta_F(x_1 - x_2) i\Delta_F(x_3 - x_4) + i\Delta_F(x_1 - x_3) i\Delta_F(x_2 - x_4) + i\Delta_F(x_1 - x_4) i\Delta_F(x_2 - x_3)$$



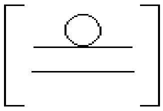
Ο δεύτερος όρος του $Z[J]$ είναι

$$\left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \left\{ \frac{-i\lambda_0}{4!} 6i\Delta_F(0) Z_0[J] \int d^4z \left(\left[\int d^4x \, \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 \right) \right\} \bigg|_{J=0}$$

$$= \frac{-i\lambda_0}{2} \Delta_F(0) \int d^4z \; \Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4)$$

$$+\,\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)+\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_1-x_4)$$

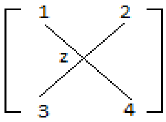
$$+\,\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_3)+\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_2)$$

$= -\,3\,i\lambda_o$ 

Αντίστοιχα, ο τρίτος όρος δίνει

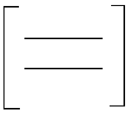
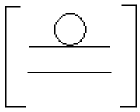
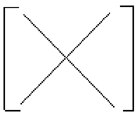
$$\left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_4)\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left\{\frac{-i\lambda_0}{4!}Z_0[J]\int d^4z\left(\left[\int d^4x\,\Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right)\right\}\Bigg|_{J=0}$$

$$=-i\lambda_0\int d^4z\;\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(z-x_4)$$

$= -\,i\lambda_o$ 

Συνολικά, η συνάρτηση Green 4 σημείων της φ^4 θεωρίας, μέχρι τη διόρθωση πρώτης τάξης, είναι σε διαγραμματική μορφή

$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$

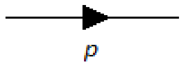
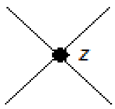
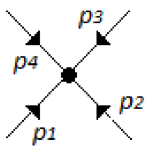
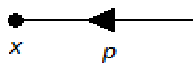
$= -3$  $- \frac{i\lambda_o}{4!}\Big(72$  $+ 24$  $\Big)$

Ο πρώτος όρος της αλληλεπίδρασης περιγράφει την ανεξάρτητη διάδοση των 2 σωματιδίων και συνεισφέρει μόνο στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα σκέδασης, καθώς η αλληλεπίδραση τροποποιεί τον διαδότη του ενός μόνο σωματιδίου. Τα διαγράμματα Feynman τέτοιου τύπου, στα οποία δηλαδή δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ όλων των γραμμών-διαδοτών, ονομάζονται *μη συνδεδεμένα (disconnected)*. Αντίθετα, ο όρος που παρουσιάζει ενδιαφέρον για τη σκέδαση είναι ο δεύτερος και τα αντίστοιχα διαγράμματα Feynman ονομάζονται *συνδεδεμένα (connected)*.

2.6 Κανόνες Feynman της φ^4 θεωρίας

Οι κανόνες αντιστοίχισης των αναλυτικών εκφράσεων με διαγράμματα ονομάζονται κανόνες Feynman. Για την φ^4 θεωρία οι κανόνες Feynman στο χώρο των θέσεων και των ορμών δίνονται στον Πίνακα 1.

Οι σταθερές που εμπεριέχονται στις συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να υπολογιστούν από τον παράγοντα συμμετρίας των αντίστοιχων διαγραμμάτων, ο οποίος εκφράζει το πλήθος των ισοδύναμων συνδυασμών (κορυφών και εξωτερικών σημείων) με τους οποίους μπορεί να προκύψει το κάθε διάγραμμα. Συγκεκριμένα στη συνάρτηση συσχέτισης 4 σημείων της φ^4 θεωρίας μέχρι και τη διόρθωση πρώτης τάξης (4 εξωτερικά σημεία, 1 κορυφή), το πρώτο διάγραμμα μπορεί να παρασταθεί με 3 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο διάγραμμα υπάρχουν 3 δυνατοί συνδυασμοί του ενός εξωτερικού σημείου με τα άλλα τρία, 8 επιλογές για την σύνδεση του ενός άκρου της κορυφής με τα δύο εναπομείναντα εξωτερικά σημεία και 3 επιλογές για την σύνδεση ενός άλλου άκρου με το τελευταίο εξωτερικό σημείο (ο βρόχος δημιουργείται από την σύνδεση ανάμεσα σε δύο άκρα της κορυφής), συνολικά 72 ισοδύναμοι συνδυασμοί. Τέλος, για το τρίτο διάγραμμα υπάρχουν 4! διαφορετικοί τρόποι ένωσης των τεσσάρων εξωτερικών σημείων με την κορυφή.

	Χώρος των Θέσεων	Χώρος των Ορμών
Εσωτερική Γραμμή	 $= i\Delta_F(x-y)$	 $= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - {m_0}^2 + i\varepsilon}$
Κορυφή	 $= (-i\lambda_0)\int d^4z$	 $= -i\lambda_0\delta^{(4)}\underbrace{(p_1+p_2+p_3+p_4)}_{\delta\iota\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ o\rho\mu\acute{\eta}\varsigma}$
Εξωτερικό Σημείο	 $= 1$	 $= e^{-ip\cdot x}$

Πίνακας 1: Κανόνες Feynman της φ^4 θεωρίας.

2.7 Συναρτησιακός γεννήτορας συνδεδεμένων διαγραμμάτων

Ο συναρτησιακός γεννήτορας $Z[J]$, όπως είδαμε, παράγει τόσο συνδεδεμένα διαγράμματα που μας ενδιαφέρουν στη σκέδαση των σωματιδίων, όσο και μη συνδεδεμένα διαγράμματα που δεν παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε έναν νέο συναρτησιακό γεννήτορα $E[J]$, οι συναρτήσεις συσχέτισης του οποίου θα εμπεριέχουν μόνο τους συνδεδεμένου όρους. Αποδυκνείεται ότι

$$Z[J] = e^{-iE[J]} \tag{2.26α}$$

$$\Rightarrow E[J] = i ln Z[J] \tag{2.26β}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.9) και (2.26α) βρίσκουμε

$$Z[J] = e^{-iE[J]} = \frac{\int \wp\varphi \exp(i\int d^4x\, [\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)])}{\int \wp\varphi \exp(i\int d^4x\, \mathcal{L})} =< \Omega|e^{-iHT}|\Omega >^J$$

Το συναρτησιακό $E[J]$ είναι, δηλαδή, η ενέργεια του κενού υπό την επίδραση μιας εξωτερικής πηγής $J(x)$ επί τον συνολικό χρόνο μετάβασης T. Οι συνδεδεμένες συναρτήσεις συσχέτισης (συναρτήσεις Green), κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (2.10), είναι

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i^{n+1}}\right) \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} E[J] \bigg|_{J=0} \tag{2.27}$$

Υπολογίζοντας, τώρα, τις συνδεδεμένες συναρτήσεις συσχέτισης της φ^4 θεωρίας βρίσκουμε

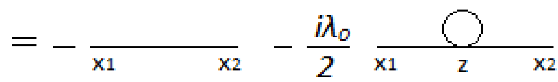
- *Συνδεδεμένη συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων*

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} E[J] \bigg|_{J=0} = i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \right\} \bigg|_{J=0}$$

$$= \left\{ -\frac{i}{Z[J]^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] + \frac{i}{Z[J]} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} Z[J] \right\} \bigg|_{J=0}$$

$$= 0 + \frac{i}{Z[0]} \left\{ \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} Z[J] \right\} \bigg|_{J=0}$$

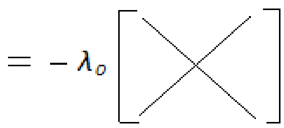
$$= iG^{(2)}(x_1, x_2)$$



- *Συνδεδεμένη συνάρτηση συσχέτισης 4 σημείων*

$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= i\big(G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3) - G(x_1, x_2, x_3, x_4)\big)$$

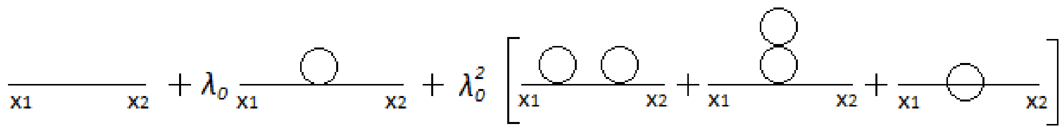


Επιβεβαιώνουμε, λοιπόν, την αρχική μας θεώρηση ότι ο συναρτησιακός γεννήτορας $E[J]$ παράγει μόνο τα συνδεδεμένα διαγράμματα της θεωρίας.

2.8 Πλήρης συνάρτηση συσχέτισης

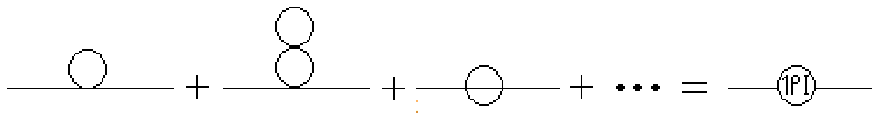
Για τη μελέτη των σκεδάσεων απαιτείται να υπολογίσουμε τις πλήρεις συναρτήσεις συσχέτισης, δηλαδή να αθροίσουμε όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να εισάγουμε μια υποκατηγορία των συνδεδεμένων διαγραμμάτων, η φυσική ερμηνεία των οποίων θα φανεί στην συνέχεια. Τα συνδεδεμένα διαγράμματα τα οποία δεν ανάγονται σε διαγράμματα χαμηλότερης τάξης αν «κόψουμε» μια εσωτερική τους γραμμή ονομάζονται 1PI (one particle irreducible). Για παράδειγμα, η συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων της φ^4 θεωρίας μέχρι και την διόρθωση 2ης τάξης (αγνοώντας τους αριθμητικούς συντελεστές) είναι

$G_c^{(2)}(x_1, x_2) \propto$



Το πρώτο διάγραμμα τάξης ${\lambda_0}^2$ μπορεί να αναχθεί σε 2 διαγράμματα τάξης λ_0, ενώ τα υπόλοιπα δύο διαγράμματα είναι 1PI. Ας θεωρήσουμε, τώρα, το άθροισμα όλων των 1PI διαγραμμάτων 2 σημείων ίσο με $-iM(p^2)$, δηλαδή

$-iM(p^2) =$

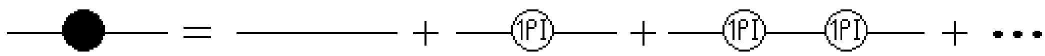


Παρατηρώντας ότι όλα τα διαγράμματα ανεξαιρέτως αρχίζουν και καταλήγουν με τον ελεύθερο διαδότη του Feynman

$$G_0(p^2) = i\Delta_F(p^2) = \frac{i}{p^2 - {m_0}^2}$$

η πλήρης συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων είναι

$\Pi^{(2)}(p^2) =$



$$= G_0(p^2) + G_0(p^2)\big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2) + G_0(p^2)\big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2)\big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2) + \cdots$$

$$= G_0(p^2)\big[1 + \big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2) + \big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2)\big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2) + \cdots\big]$$

Κάνοντας χρήση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ η τελευταία έκφραση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$= G_0(p^2)\frac{1}{1 - \big(-iM(p^2)\big)G_0(p^2)}$$

$$= \frac{1}{{G_0}^{-1}(p^2) + iM(p^2)}$$

$$= \frac{i}{p^2 - [{m_0}^2 + M(p^2)]} \qquad (2.28)$$

Διαπιστώνουμε ότι οι κβαντομηχανικές διορθώσεις όλων των τάξεων συντελούν στη μεταβολή της μάζας του σωματιδίου από την αρχική μάζα m_0 (bare mass) στη φυσική του μάζα m, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$p^2 - m_0^2 - M(p^2)\big|_{p^2=m^2} = 0 \qquad (2.29)$$

Είναι προφανές, λοιπόν, ότι τα 1PI διαγράμματα αντιστοιχούν στους όρους της αλληλεπίδρασης που είναι υπεύθυνοι για τη μεταβολή της μάζας του σωματιδίου. Για αυτό το λόγο η συνάρτηση $M(p^2)$ ονομάζεται *συνάρτηση αυτό-ενέργειας*.

Όπως και με τα συνδεδεμένα διαγράμματα, θέλουμε να υπολογίσουμε τον συναρτησιακό γεννήτορα των 1PI διαγραμμάτων. Ορίζουμε κατάλληλη συνάρτηση $\Gamma^{(2)}(p^2)$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση

$$\Pi^{(2)}(p^2)\Gamma^{(2)}(p^2) = i$$

οπότε από την (2.28) προκύπτει

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 - {m_0}^2 - M(p^2) \qquad (2.30)$$

Η συνάρτηση $\Gamma^{(2)}(p^2)$ ονομάζεται επίσης *συνάρτηση κορυφής 2 σημείων (2 point vertex function)*. Ο συναρτησιακός γεννήτορας $\Gamma[\varphi]$ των συναρτήσεων Γ, και κατά συνέπεια των 1PI διαγραμμάτων, βρίσκεται από τον Legendre μετασχηματισμό του $E[J]$, δηλαδή

$$\Gamma[\varphi] = -E[J] - \int d^4x\, J(x)\varphi(x) \qquad (2.31)$$

Οι συναρτήσεις Γ προκύπτουν από τη συναρτησιακή διαφόριση της (2.31), ήτοι

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i\frac{\delta^n}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\Gamma[\varphi]\bigg|_{\varphi=\varphi_{cl}}$$

όπου $\varphi_{cl} = -\,\delta E[J]/\delta J(x)$. Το συναρτησιακό $\Gamma[\varphi]$ αποτελεί επίσης την *ενεργό δράση* ενός κβαντικού συστήματος, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5.

Κεφάλαιο 3

Ανακανονικοποίηση

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι το γεγονός ότι εμπεριέχει απειρισμούς. Συγκεκριμένα, στην φ^4 θεωρία δείξαμε ότι τα διαγράμματα Feynman που περιέχουν βρόχο αποκλίνουν (στην UV περιοχή) σε πολύ υψηλές ενέργειες ή ισοδύναμα σε πολύ μικρές χωροχρονικές αποστάσεις. Σε μια διαταραχτική αντιμετώπιση του συστήματος οι απειρισμοί αυτοί γίνονται ολοένα και περισσότεροι καθώς προστίθενται και άλλα αποκλίνοντα διαγράμματα. Καθώς, όμως, οι απειρισμοί αντιστοιχούν στις τιμές των φυσικών παραμέτρων του συστήματος (όπως μάζα, φορτίο, κ.ά.) όλη η κατασκευή της κβαντικής θεωρίας πεδίου κινδυνεύει να παρεξηγηθεί ως ένα καθαρά φορμαλιστικό δημιούργημα, χωρίς φυσική σημασία. Είναι επιτακτική, λοιπόν, η ανάγκη της ανάπτυξης μιας μεθόδου η οποία θα αντιμετωπίζει με επιτυχία τους απειρισμούς και θα τους απαλείφει από τα φυσικά μεγέθη. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται ανακανονικοποίηση (renormalization).

Ιστορικά έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές για την ανακανονικοποίηση των σχετικιστικών κβαντικών θεωριών. Όλες, όμως, πηγάζουν από την ίδια παρατήρηση: οι αρχικές παράμετροι του συστήματος που συμμετέχουν στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν αποτελούν πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες. Κεντρική ιδέα, λοιπόν, είναι να επαναπροσδιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ώστε να εξαρτάται ρητά από τις πεπερασμένες φυσικές του παραμέτρους, απορροφώντας τους απειρισμούς στα μη μετρήσιμα μεγέθη. Η ανακανονικοποιημένη, πλέον, κβαντική θεωρία είναι σε θέση να υπολογίζει με τεράστια ακρίβεια (της τάξης του 10^{-8}) τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων.

Στο σημείο αυτό, όμως, παρουσιάζεται ένα ακόμη πρόβλημα. Δεν είναι όλες οι κβαντικές θεωρίες ανακανονικοποιήσιμες (renormalizable). Για να μπορεί μια θεωρία να ανακανονικοποιηθεί θα πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε ότι το πλήθος των αποκλινόντων διαγραμμάτων της σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση θα απαιτούταν ο προσδιορισμός ενός άπειρου αριθμού ποσοτήτων προκειμένου να άρουν τους απειρισμούς, καθιστώντας έτσι τη θεωρία μη ανακανονικοποιήσιμη (non-renormalizable).

3.1 Επιφανειακός βαθμός απόκλισης

Από τις αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων συσχέτισης είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς αν περιέχουν ή όχι απειρισμούς, καθώς και τον βαθμό απόκλισής τους[6].

[6] Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int r^n\, dr$, $n \in \mathbb{Z}$ αποκλίνουν λογαριθμικά για $n = -1$, γραμμικά για $n = 0$, τετραγωνικά για $n = 1$ κ.ο.κ.

Αντίθετα, στα διαγράμματα Feynman η διαδικασία αυτή δεν είναι το ίδιο προφανής. Προκειμένου να συνδέσουμε τον βαθμό απόκλισης με τα επί μέρους τμήματα που απαρτίζουν το κάθε διάγραμμα ορίζουμε, αρχικά, τον *επιφανειακό βαθμό απόκλισης* D ως τη διαφορά των δυνάμεων της ορμής ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή του ολοκληρώματος της συνάρτησης συσχέτισης, δηλαδή

$$D = (\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}) - (\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \sigma\tau o\nu\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta})$$

Έστω, τώρα, ότι το διάγραμμα Feynman αποτελείται από n κορυφές, E εξωτερικές γραμμές, I εσωτερικές γραμμές, ενώ ο χωρόχρονος έχει d διαστάσεις. Μια πρώτη σκέψη είναι ότι το πλήθος των δυνάμεων στον αριθμητή ισούται με το γινόμενο των εσωτερικών γραμμών επί το πλήθος των χωροχρονικών διαστάσεων. Όμως, σε κάθε κορυφή η ορμή διατηρείται οπότε οι ανεξάρτητες ορμές που μας ενδιαφέρουν είναι $I - n$. Λαμβάνοντας υπόψιν και τη συνολική διατήρηση της ορμής, που μειώνει τις σχέσεις ανάμεσα στις ανεξάρτητες ορμές σε $n - 1$, έπεται ότι οι δυνάμεις στον αριθμητή είναι $d(I - n + 1)$. Οι δυνάμεις της ορμής στον παρονομαστή εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι είναι ίσες με τις εσωτερικές γραμμές, η κάθε μία εκ των οποίων συνεισφέρει 2 συνολικά δυνάμεις. Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$D = d(I - n + 1) - 2I \tag{3.1}$$

Θέλουμε, τώρα, να εκφράσουμε τις κορυφές n συναρτήσει των εσωτερικών I και εξωτερικών γραμμών E του διαγράμματος. Στη γενική περίπτωση της φ^r θεωρίας κάθε κορυφή αποτελείται από r γραμμές, οπότε συνυπολογίζοντας ότι οι εσωτερικές γραμμές I ενώνονται με 2 κορυφές (σε θεωρία διαταραχών τάξης 2 και άνω) ισχύει

$$rn = E + 2I \tag{3.2}$$

Συνδυάζοντας τις (3.1) και (3.2) προκύπτει ότι ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης στη γενική περίπτωση έχει τη μορφή

$$D = d - E\left(\frac{d}{2} - 1\right) + n\left[\frac{r}{2}(d-2) - 4\right] \tag{3.3}$$

Στην φ^4 θεωρία και θεωρώντας $d = 4$ βρίσκουμε

$$D_{\varphi^4} = 4 - E \tag{3.4}$$

δηλαδή ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης εξαρτάται μόνο από το πλήθος των εξωτερικών γραμμών και όχι από την τάξη της θεωρίας διαταραχών (κορυφές), κάτι που αποτελεί αναγκαία συνθήκη της ανακανονικοποιησιμότητας. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα Feynman της φ^4 θεωρίας με 2 εξωτερικά σημεία ($E = 2$) αποκλίνουν τετραγωνικά, ενώ τα διαγράμματα με 4 εξωτερικά σημεία ($E = 4$) αποκλίνουν λογαριθμικά. Όλα τα υπόλοιπα θεωρούμε ότι ικανοποιούν το κριτήριο σύγκλισης.

3.2 Ανακανονικοποιημένη θεωρία διαταραχών

Για να άρουμε τους απειρισμούς στόχος μας είναι να τους απορροφήσουμε στις σταθερές οι οποίες εμπεριέχονται στα πλάτη σκέδασης και δεν αποτελούν πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη, δηλαδή στην αρχική μάζα m_0, στην σταθερά ζεύξης λ_0 και το μιγαδικό υπόλοιπο Z.[7] Εν προκειμένω, θα αναδιατάξουμε κατάλληλα την Λαγκρανζιανή έτσι ώστε να αποτελείται από ένα κομμάτι πανομοιότυπο με την αρχική Λαγκρανζιανή, αλλά με εξάρτηση μόνο από τα φυσικά μεγέθη, και από κάποιους επιπλέον όρους οι οποίοι θα άρουν τους απειρισμούς (counter terms).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_r + \Delta\mathcal{L}$$

Αρχικά, για να απαλείψουμε το μιγαδικό υπόλοιπο Z από την συνάρτηση συσχέτισης (στο χώρο των ορμών) θέτουμε

$$\varphi = \sqrt{Z}\varphi_r$$

όπου φ_r το ανακανονικοποιημένο πεδίο. Στη φ^4 θεωρία, για παράδειγμα, η Λαγκρανζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z\left(\partial_\mu\varphi_r\partial^\mu\varphi_r\right) - \frac{1}{2}Z{m_0}^2{\varphi_r}^2 - \frac{\lambda_0}{4!}Z^2{\varphi_r}^4$$

Θεωρώντας m τη φυσική μάζα και λ τη φυσική σταθερά ζεύξης ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες (counter-terms)

$$\delta_Z = Z - 1, \qquad \delta_m = {m_0}^2 Z - m^2, \qquad \delta_\lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda \tag{3.5}$$

οπότε η Λαγκρανζιανή καταλήγει στην επιθυμητή μορφή

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_r\partial^\mu\varphi_r\right) - \frac{1}{2}m^2{\varphi_r}^2 - \frac{\lambda}{4!}{\varphi_r}^4}_{\mathcal{L}_r} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta_Z\left(\partial_\mu\varphi_r\partial^\mu\varphi_r\right) - \frac{1}{2}\delta_m{\varphi_r}^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}{\varphi_r}^4}_{\Delta\mathcal{L}} \tag{3.6}$$

Ο πρώτος όρος $\mathcal{L}_r$ αντιστοιχεί στην ανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή της φ^4 θεωρίας συναρτήσει των φυσικών παραμέτρων του συστήματος, ενώ ο δεύτερος όρος περιέχει τις άπειρες ποσότητες. Τα δ_Z, δ_m και δ_λ προσδιορίζονται σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών, σύμφωνα με τις συνθήκες ανακανονικοποίησης, έτσι ώστε να ακυρώνουν τους απειρισμούς.

---

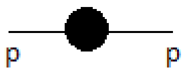
[7] Σε μια θεωρία με αλληλεπίδραση η δράση των πεδίων στο κενό περιλαμβάνει αλληλεπιδράσεις από ενδιάμεσες πολυσωματιδιακές καταστάσεις, οι οποίες συμβάλλουν στις κβαντομηχανικές διορθώσεις των φυσικών παραμέτρων του συστήματος. Χρησιμοποιώντας την Källén – Lehmann φασματική αναπαράσταση της συνάρτησης συσχέτισης δύο σημείων, βρίσκουμε ότι καθώς το πεδίο τείνει να περιγράψει μονοσωματιδιακές καταστάσεις μάζας m ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτηση συσχέτισης γίνεται

$$\int d^4x \; e^{ip\cdot x} < \Omega|T[\varphi(x)\varphi(0)]|\Omega > \xrightarrow[p^2\to m^2]{} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

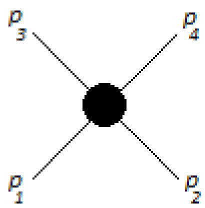
όπου το μιγαδικό υπόλοιπο Z εκφράζει την πιθανότητα να δημιουργήσει το $\varphi(0)$ όταν δράσει στο κενό την βασική ιδιοκατάσταση $|\lambda_0>$ της πλήρους Χαμιλτονιανής, δηλαδή $Z = |<\lambda_0|\varphi(0)|\Omega>|^2$. Στην ελεύθερη θεωρία είναι $Z_0 = 1$.

3.3 Ανακανονικοποίηση της φ^4 θεωρίας

Στη φ^4 θεωρία οι συνθήκες ανακανονικοποίησης (on shell renormalization scheme), βάσει των οποίων προσδιορίζεται η φυσική μάζα m και σταθερά ζεύξης λ, είναι οι ακόλουθες:



$$= \Pi^{(2)}(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \qquad (3.7)$$



$$= \Pi^{(4)}(p^2) = -i\lambda, \qquad \gamma\iota\alpha\ (s,t,u) = (4m^2, 0,0) \qquad (3.8)$$

όπου $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 + p_3)^2$ και $u = (p_1 + p_4)^2$ οι μεταβλητές Mandelstam, για συνθήκες μηδενικής ορμής. Σύμφωνα με την (3.7) η πλήρης συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων των ανακανονικοποιημένων πεδίων φ_r περιέχει πόλο στη φυσική μάζα m, οπότε από την σχέση (2.28) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\Pi^{(2)}(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - M(p^2)}$$

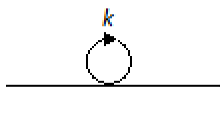
όπου $M(p^2)$ το άθροισμα των 1PI διαγραμμάτων. Αναπτύσσοντας το $M(p^2)$ γύρω από το $p^2 = m^2$ διαπιστώνουμε ότι για να ικανοποιείται η (3.7) θα πρέπει να ικανοποιούνται συγχρόνως οι σχέσεις

$$M(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \left.\frac{dM(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m^2} = 0 \qquad (3.9)$$

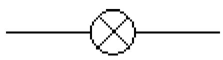
Οι καινούριοι κανόνες Feynman που αντιστοιχούν στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα (3.6) της φ^4 θεωρίας δίνονται στον Πίνακα 2. Ο διαδότης και η κορυφή προέρχονται από τον ανακανονικοποιημένο όρο $\mathcal{L}_r$ και εξαρτώνται μόνο από τα φυσικά μεγέθη του συστήματος, ενώ οι δύο επιπρόσθετοι κανόνες αντιπροσωπεύουν τον άπειρο όρο $\Delta\mathcal{L}$.

Θα υπολογίσουμε, τώρα, τις σταθερές ανακανονικοποίησης της φ^4 θεωρία μέχρι και τη διόρθωση ενός βρόχου. Το άθροισμα των 1PI διαγραμμάτων δύο σημείων μέχρι και την τάξη λ της θεωρίας διαταραχών είναι

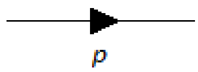
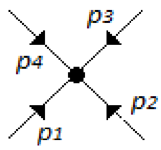
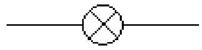
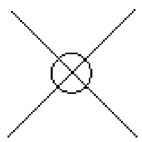
$$-iM(p^2)|_{p^2=m^2} =$$



$$+$$



$$= \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2\delta_Z - \delta_m)$$

	Χώρος των Ορμών
Εσωτερική Γραμμή	 $= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$
Κορυφή	 $= -i\lambda\delta^{(4)} \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\,)}_{\delta\iota\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ o\rho\mu\acute{\eta}\varsigma}$
Counter term γραμμής	 $= i(p^2\delta_Z - \delta_m)$
Counter term κορυφής	 $= -i\delta_\lambda$

Πίνακας 2: Κανόνες Feynman της ανακανονικοποιημένης φ^4 θεωρίας.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά με τη μέθοδο της διαστατικής ομαλοποίησης (Παράρτημα Β). Αρχικά γενικεύουμε το ολοκλήρωμα στις d-διαστάσεις και το στρέφουμε κατά Wick για να περάσουμε στον Ευκλείδειο χώρο $\left({k_M}^0 = i{k_E}^0\right)$, οπότε έχουμε

$$-iM(p^2)|_{p^2=m^2} = \lim_{d\to 4}\left[\frac{-i\lambda}{2}\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{{k_E}^2 + m^2}\right] + \ i(p^2\delta_Z - \delta_m)$$

Από την σχέση (Β.6) του παραρτήματος βρίσκουμε

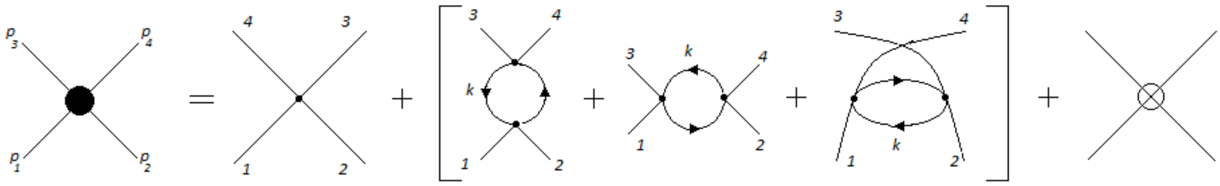
$$-iM(p^2)|_{p^2=m^2} = \frac{-i\lambda}{2}\frac{m^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln(m^2) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \ + i(p^2\delta_Z - \delta_m)$$

όπου γ_E η σταθερά Euler-Mascheroni. Όμως, από τη συνθήκη (3.9) έχουμε

$$0 = \frac{-i\lambda}{2}\frac{m^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln(m^2) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) + i(p^2\delta_Z - \delta_m)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_Z = 0 \\ \delta_m = \dfrac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\dfrac{2}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln(m^2) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

Αντίστοιχα, το άθροισμα των 1PI διαγραμμάτων τεσσάρων σημείων μέχρι και την τάξη λ^2 της θεωρίας διαταραχών είναι



$$= -i\lambda + \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-m^2}\right)\left(\frac{i}{(p_1+p_2+k)^2-m^2}\right)$$

$$+ \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-m^2}\right)\left(\frac{i}{(p_1+p_3+k)^2-m^2}\right)$$

$$+ \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{(k^2-m^2)}\right)\left(\frac{i}{(p_1+p_4+k)^2-m^2}\right) - i\delta_\lambda$$

$$= -i\lambda + \frac{(-i\lambda)^2}{2}[iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda$$

Από την συνθήκη (3.8) έχουμε

$$-i\lambda = -i\lambda + \frac{(-i\lambda)^2}{2}[iV(s=4m^2) + iV(t=0) + iV(u=0)] - i\delta_\lambda$$

$$\Rightarrow \delta_\lambda = \frac{-\lambda^2}{2}[V(s=4m^2) + 2V(0)] \tag{3.11}$$

Οι συναρτήσεις V υπολογίζονται ως εξής

$$iV(s) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-m^2}\right)\left(\frac{i}{\left(\sqrt{s}+k\right)^2-m^2}\right)$$

Από την σχέση (B.7) του παραρτήματος βρίσκουμε

$$V(s) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dz\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\big(m^2 - sz(1-z)\big) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \tag{3.12}$$

Αντικαθιστώντας την (3.12) στην (3.11) βρίσκουμε ότι η σταθερά δ_λ είναι

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dz\left(\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma_E + 3\ln(4\pi) - \ln\big(m^2 - 4m^2z(1-z)\big) - 2\ln(m^2)\right) \tag{3.13}$$

Κεφάλαιο 4

Αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας

Ο όρος «συμμετρία» στη φυσική περιγράφει μια χαρακτηριστική ιδιότητα που εμφανίζουν ορισμένα φυσικά συστήματα, η οποία μπορεί να νοηθεί ως εναλλαγή μερών χωρίς αλλαγή του όλου. Η σπουδαιότητά της αναδείχθηκε από το Θεώρημα Noether, σύμφωνα με το οποίο κάθε διαφορική συμμετρία ενός συστήματος αντιστοιχεί σε μια διατηρούμενη ποσότητα. Οι συμμετρίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε καθολικές (global) και τοπικές (local). Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι οι καθολικές συμμετρίες ορίζονται σε όλη την έκταση του χωρόχρονου, ενώ οι τοπικές περιγράφουν μετασχηματισμούς που παραμετροποιούνται από χωροχρονικά σημεία. [8]

Στην κβαντική θεωρία πεδίου μας ενδιαφέρει η συμμετρία που εμφανίζουν οι Λαγκρανζιανές και οι εξισώσεις κίνησης που προέρχονται από αυτές, καθώς επίσης οι συνθήκες που προκαλούν την ρήξη της συμμετρίας. Όμως, υπάρχουν περιπτώσεις που ενώ η Λαγκρανζιανή του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό το κενό της θεωρίας μεταβάλλεται, με αποτέλεσμα το πεδίο να μεταπίπτει σε μια νέα κατάσταση κενού. Η μετάπτωση αυτή οδηγεί στη λεγόμενη *αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας*. Το φαινόμενο αυτό κατέχει πρωτεύων ρόλο στη θεωρία της μετάβασης φάσεων, στην οποία μια πολύ μικρή μεταβολή μιας φυσικής παραμέτρου του συστήματος μπορεί να αλλάξει ποιοτικά όλη την κατάσταση του συστήματος.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας έχει διαφορετικές επιπτώσεις ανάλογα με το είδος της συμμετρίας που υπακούει η Λαγκρανζιανή. Στην περίπτωση της συνεχούς καθολικής συμμετρίας, όπως $\varphi(x) \to e^{ia}\varphi(x)$, $a \in \mathbb{R}$ η ρήξη συνεπάγεται αυτόματα την ύπαρξη άμαζων σωματιδίων, γνωστά ως Goldstone μποζόνια. Αντίθετα, όταν η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας $\varphi(x) \to e^{ia(x)}\varphi(x)$ τα μποζόνια αποκτούν μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs.

4.1 Θεώρημα Goldstone

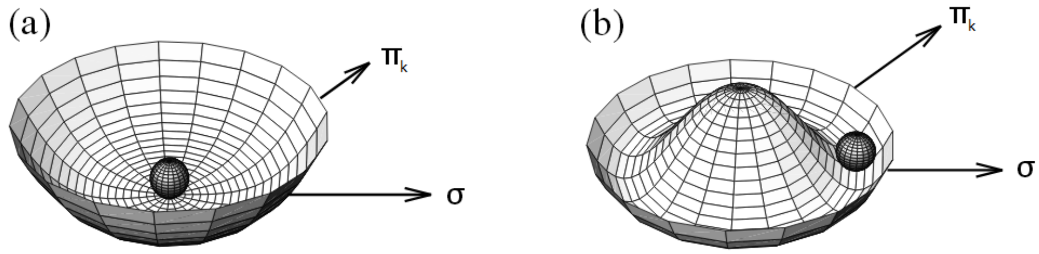
Θα μελετήσουμε αρχικά ένα σύστημα N πραγματικών βαθμωτών πεδίων μάζας m, τα οποία περιγράφονται από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα

[8] Α. Νουνού, "Η έννοια της συμμετρίας στις κβαντικές θεωρίες πεδίου και ο ρόλος των συμμετρικών δομών στην επιστημονική εξήγηση", Δευκαλίων, τ. 23/2: *Φιλοσοφία και Σύγχρονη Φυσική*, Δεκέμβριος 2005.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_i\right)^2 - \frac{1}{2}m^2(\varphi_i)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi_i)^4 \tag{4.1}$$

όπου $i = 1,2,\ldots,N$ και λ η σταθερά ζεύξης. Η εξάρτηση της Λαγκρανζιανής μόνο από το μέτρο των πεδίων, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τις N-διάστατες περιστροφές, δηλαδή από την ορθογώνια ομάδα συμμετρίας $O(N)$. Το δυναμικό του συστήματος είναι

$$V(\varphi_i) = \frac{1}{2}m^2(\varphi_i)^2 + \frac{\lambda}{4}(\varphi_i)^4$$



Σχήμα 4: Το δυναμικό $V(\sigma,\pi)$ όταν η μάζα του συστήματος είναι (a) m^2 και (b) $-\mu^2$.

Έστω $\langle\varphi_i\rangle_0$ το σταθερό πεδίο στο οποίο το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι

$$\langle\varphi_i\rangle_0 = (\underbrace{0,0,\ldots 0}_{N})$$

το οποίο είναι ολικό ελάχιστο και αποτελεί το κενό του συστήματος. Έστω, τώρα, ότι κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή της θερμοκρασίας[9] T_c η μάζα του συστήματος γίνεται $-\mu^2$, δηλαδή η Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_i\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_i)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi_i)^4 \tag{4.2}$$

Τότε το ακρότατο $\langle\varphi_i\rangle_0 = 0$ μετατρέπεται σε τοπικό μέγιστο και το δυναμικό ελαχιστοποιείται σε κάθε $\langle\varphi_i\rangle_0$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$[\langle\varphi_i\rangle_0]^2 = u^2 \equiv \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{4.3}$$

Αντίθετα λοιπόν με την προηγούμενη περίπτωση, έχουμε πλέον άπειρες σε πλήθος καταστάσεις κενού καθώς η τελευταία σχέση προσδιορίζει μόνο το μέτρο τους. Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε το πεδίο $\langle\varphi_i\rangle_0$ να είναι μη μηδενικό στη Nοστή διεύθυνση του χώρου του isospin, ήτοι

$$\langle\varphi_i\rangle_0 = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N-1},u)$$

[9] Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η θεωρία της υπεραγωγιμότητας όπου η αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας εμφανίζεται σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και προκαλεί το φαινόμενο Meissner, κατά το οποίο οι μαγνητικές γραμμές απωθούνται από το εσωτερικό ενός υπεραγώγιμου υλικού.

Με την επιλογή μας αυτή η κατάσταση του κενού παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την υποομάδα $O(N-1)$, δηλαδή η αρχική ομάδα συμμετρίας $O(N)$ "έσπασε" στην $O(N-1)$. Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε κατάλληλα το σύνολο των πεδίων φ_i με την εισαγωγή των πραγματικών βαθμωτών πεδίων $\pi(x)$ και $\sigma(x)$ (γραμμικό σίγμα μοντέλο), τέτοια ώστε

$$\varphi_i(x) = \big(\pi_k(x), u + \sigma(x)\big), \qquad k = 1,2,\ldots,N-1$$

Τα $N-1$ πεδία $\pi_k(x)$ περιγράφουν τις ταλαντώσεις των φ_i κατά την εφαπτομενική διεύθυνση ως προς το κενό, ενώ τα $\sigma(x)$ κατά την ακτινική διεύθυνση. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα συναρτήσει των $\pi_k(x)$ και $\sigma(x)$ γίνεται

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\pi_\kappa^2 + u^2 + 2u\sigma + \sigma^2) \\ &\qquad - \frac{\lambda}{4}(\pi_\kappa^4 + 2\pi_\kappa^2 u^2 + 4\pi_\kappa^2 u\sigma + 2\pi_\kappa^2\sigma^2 + u^2 + 2u\sigma + \sigma^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\pi_\kappa^2(\mu^2 - \lambda u^2) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\mu^2 - \frac{\lambda}{4}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\mu^2 - \frac{\lambda}{4}\right) + \cdots \qquad (4.4)\end{aligned}$$

όπου για να περάσουμε στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.3). Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η αλλαγή της μάζας του συστήματος ($m^2 \to -\mu^2$) προκάλεσε αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας $\big(O(N) \to O(N-1)\big)$ και ως αποτέλεσμα εμφανίστηκαν $N-1$ άμαζα πραγματικά βαθμωτά πεδία $\pi_k(x)$. Τα πεδία αυτά ονομάζονται *Goldstone μποζόνια* και αποτελούν γενική συνέπεια του Θεωρήματος Goldstone. Σύμφωνα με τη ακριβή διατύπωση του θεωρήματος, το πλήθος των άμαζων μποζονίων ισούται με τον αριθμό των γεννητόρων που «χάνονται» από την αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας. Υπενθυμίζεται ότι η ομάδα $O(N)$ έχει $N(N-1)/2$ γεννήτορες και κατά συνέπεια η υποομάδα $O(N-1)$ έχει $(N-1)(N-2)/2$, οπότε στη Λαγκρανζιανή (4.4) συμμετέχουν

$$\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N-1$$

μποζόνια Goldstone. Αξίζει, τέλος, να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα Goldstone ικανοποιείται σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών.

4.2 Μηχανισμός Higgs

Προς αποφυγή μιας βαριάς φορμαλιστικής παρουσίασης του μηχανισμού Higgs και για να επικεντρωθούμε στην φυσική του ερμηνεία θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση της Λαγκρανζιανής πυκνότητας που είναι αναλλοίωτη κάτω από μια τοπική $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας

$$\varphi(x) \to e^{ia(x)}\varphi(x)\ , \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)$$

και έχει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu \varphi\right)^2 - m^2|\varphi|^2 - \lambda|\varphi|^4 - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.5}$$

όπου φ μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, $D_\mu \varphi = \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\varphi$ η συναλλοίωτη παράγωγος και $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ο αντισυμμετρικός τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, βρίσκουμε ότι το δυναμικό ελαχιστοποιείται στο $\langle\varphi\rangle_0$ ανάλογα με τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) $m^2 > 0,$ τότε $\langle\varphi\rangle_0 = 0$

2) $m^2 \to -\mu^2 < 0,$ τότε $\langle\varphi\rangle_0 = \frac{u}{\sqrt{2}}$ $\mu\varepsilon\ u \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$

Παραμετροποιούμε το πεδίο φ ως εξής

$$\varphi(x) = e^{-i\frac{\pi(x)}{u}} \frac{\left(u + \sigma(x)\right)}{\sqrt{2}}$$

όπου $\pi(x)$ και $\sigma(x)$ πραγματικά βαθμωτά πεδία με $\langle\pi\rangle_0 = \langle\sigma\rangle_0 = 0$. Ο μετασχηματισμός αυτός μας επιτρέπει να διατηρήσουμε ανεπηρέαστους τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας του συστήματος $\left(DoF\left(\varphi, A_\mu\right) = DoF\left(\pi, \sigma, A_\mu\right) = 4\right)$ και να απλοποιήσουμε την έκφραση της Λαγκρανζιανής σε

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\left(e^{-i\frac{\pi(x)}{u}} \frac{\left(u + \sigma(x)\right)}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 + \mu^2\left(\frac{\upsilon + \sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 - \lambda\left(\frac{\upsilon + \sigma}{\sqrt{2}}\right)^4 - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Για περαιτέρω απλοποίηση του κινητικού όρου θα εκμεταλλευτούμε την $U(1)$ συμμετρία της Λαγκρανζιανής και θα εφαρμόσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό βαθμίδας

$$U = e^{+i\frac{\pi(x)}{u}}$$

$$\varphi \to \varphi' = U\varphi = \frac{\left(u + \sigma(x)\right)}{\sqrt{2}}$$

$$D_\mu\varphi \to \left(D_\mu\varphi\right)' = U\left(D_\mu\varphi\right) = e^{+i\frac{\pi(x)}{u}}\left(D_\mu\varphi\right)$$

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\left(\frac{\pi(x)}{u}\right) = A_\mu + \frac{1}{eu}\partial_\mu\pi(x)$$

οπότε έχουμε

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + ieA'_\mu\right)\varphi'\right]^2 + \mu^2|\varphi'|^2 - \lambda|\varphi'|^4 - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.6}$$

Από την (4.6) παρατηρούμε αμέσως ότι δεν εμφανίζονται πουθενά τα πεδία $\pi(x)$, δηλαδή τα Goldstone μποζόνια έχουν εξαφανιστεί παρά την αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας. Αντ' αυτών εμφανίζεται, όπως αναμέναμε, το μποζονικό πεδίο $\sigma(x)$ με μάζα $m_\sigma = \sqrt{2\mu^2} =$

$u\sqrt{2\lambda}$. Με μια πιο προσεκτική εξέταση, όμως, διαπιστώνουμε ότι και το αρχικά άμαζο πεδίο βαθμίδας A'_μ έχει αποκτήσει μάζα μέσω του όρου

$$\left| ieA'_\mu \frac{u}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{e^2 u^2}{2} A'_\mu A'^\mu$$

ίση με $m_{A'_\mu} = eu$. Ο μηχανισμός μέσω του οποίου η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας αποδίδει μάζα σε ένα μποζόνιο βαθμίδας ανακαλύφθηκε και γενικεύτηκε σε μη-αβελιανές ομάδες από τους Higgs, Guralnik, Hagen, Brout και Englert και είναι πλέον γνωστός ως *μηχανισμός Higgs*.

Κεφάλαιο 5

Ενεργό Δυναμικό

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας στο κλασικό επίπεδο και διαπιστώσαμε ότι η μεταβολή των φυσικών παραμέτρων ενός συστήματος οδηγεί στην τροποποίηση του κενού της θεωρίας και αλλάζει ποιοτικά την κατάστασή του. Στην κβαντική θεωρία πεδίου, όμως, οι φυσικές παράμετροι προσδιορίζονται από τις κβαντομηχανικές διορθώσεις, με αποτέλεσμα σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών το κενό να μεταβάλλεται. Η συνάρτηση της οποίας το ελάχιστο προσδιορίζει το ακριβές κενό της θεωρίας ονομάζεται *ενεργό δυναμικό* και στην χαμηλότερη τάξη διαταραχών συμπίπτει με το κλασικό δυναμικό.

5.1 Ενεργός δράση & ενεργό δυναμικό

Ορίζουμε, αρχικά, το κλασικό πεδίο υποβάθρου $\varphi_{cl}(x)$ ως την αναμενόμενη τιμή του πεδίου $\varphi(x)$ πάνω στο κενό της θεωρίας, υπό την επίδραση της εξωτερικής πηγής $J(x)$, ήτοι

$$\varphi_{cl}(x) = \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle^J \tag{5.1}$$

Εφορμώμενοι από τη σχέση (2.31) που δίνει τον συναρτησιακό γεννήτορα των 1PI διαγραμμάτων

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = -E[J] - \int d^4y\, J(y)\varphi_{cl}(y) \tag{5.2}$$

και παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς το πεδίο $\varphi_{cl}(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\varphi_{cl}(x)}\Gamma[\varphi_{cl}] &= -\frac{\delta E[J]}{\delta\varphi_{cl}(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_{cl}(x)}\varphi_{cl}(y) - \int d^4y\, J(y)\frac{\delta\varphi_{cl}(y)}{\delta\varphi_{cl}(x)} \\
&= -\int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_{cl}(x)}\frac{\delta E[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_{cl}(x)}\varphi_{cl}(y) - J(x) \\
&= -J(x)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $(\delta/\delta J(y))E[J] = -\varphi_{cl}(y)$. Η παραπάνω σχέση αποτελεί το κβαντικό ανάλογο της αρχής της ελάχιστης δράσης υπό την επίδραση μιας εξωτερικής πηγής

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\mathcal{L}[\varphi] + J(x) = 0$$

Οδηγούμαστε, έτσι, στη διαπίστωση ότι ο συναρτησιακός γεννήτορας των 1PI διαγραμμάτων αποτελεί την *ενεργό δράση* της κβαντικής θεωρίας. Αν θεωρήσουμε μηδενική εξωτερική πηγή τότε η ενεργός δράση ικανοποιεί την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{cl}(x)}\Gamma[\varphi_{cl}] = 0 \tag{5.3}$$

οι λύσεις της οποίας είναι οι αναμενόμενες τιμές των πεδίων πάνω στις σταθερές καταστάσεις της θεωρίας. Αναπτύσσοντας την $\Gamma[\varphi_{cl}]$ στον χώρο των θέσεων βρίσκουμε

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = \int d^4x \left[-V_{eff}(\varphi_{cl}) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_{cl}\right)^2 Z_{eff}(\varphi_{cl}) + \cdots\right] \tag{5.4}$$

όπου η συνάρτηση $V_{eff}(\varphi_{cl})$ ονομάζεται *ενεργό δυναμικό* και, κατ΄ αντιστοιχία με την κλασική θεωρία, συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας ανά μονάδα όγκου σε μια συγκεκριμένη κατάσταση στην οποία η αναμενόμενη τιμή του πεδίου είναι φ_{cl}. Υποθέτουμε, εν συνεχεία, ότι οι καταστάσεις του κενού είναι αναλλοίωτες κάτω από χωροχρονικές μεταφορές και τους μετασχηματισμούς Lorentz. Έτσι οι αντίστοιχες λύσεις φ_{cl} είναι σταθερές, ανεξάρτητες του x και η (5.4) γίνεται

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = -(VT)V_{eff}(\varphi_{cl}) \tag{5.5}$$

όπου (VT) ο τετραδιάστατος όγκος. Η εύρεση των ακροτάτων της ενεργού δράσης ανάγεται τώρα στην απλή εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_{cl}}V_{eff}(\varphi_{cl}) = 0$$

5.2 Υπολογισμός ενεργού δυναμικού

Έχοντας προσδιορίσει την ποσότητα της οποίας το ελάχιστο αντιστοιχεί στο ακριβές κενό της θεωρίας, μπορούμε να προχωρήσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό της. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι αυτή των σαγματικών σημείων (saddle-points). Αρχικά, διαχωρίζουμε την Λαγκρανζιανή πυκνότητα σε έναν ανακανονικοποιημένο όρο $\mathcal{L}_r$ που περιέχει τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος και σε έναν δεύτερο όρο $\delta\mathcal{L}$ ο οποίος περιέχει τους απειρισμούς (counter-terms)

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{L}_r[\varphi] + \Delta\mathcal{L}[\varphi] \tag{5.6}$$

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να εκφράσουμε την εξωτερική πηγή ως

$$J(x) = J_r(x) + \Delta J(x) \tag{5.7}$$

όπου ο πρώτος όρος ικανοποιεί την αρχή της ελάχιστης δράσης για τον κανονικοποιημένο όρο, δηλαδή

$$\left.\frac{\delta \mathcal{L}_r[\varphi]}{\delta \varphi(x)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + J_r(x) = 0 \tag{5.8}$$

ενώ ο δεύτερος για τα counter-terms και προσδιορίζεται μέσω του ορισμού (5.1). Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (5.6) και (5.7) το πλάτος μετάβασης κενού $Z[[J]$ γίνεται

$$Z[J] = e^{-iE[J]} = \int \wp\varphi\, e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_r[\varphi]+J_r\varphi)} e^{i\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\varphi]+\Delta J\varphi)} \tag{5.9}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των σαγματικών σημείων αναλύουμε το $\varphi(x)$ ως εξής

$$\varphi(x) = \varphi_{cl}(x) + \eta(x) \tag{5.10}$$

όπου το πεδίο $\eta(x)$ περιγράφει τις διακυμάνσεις γύρω από το $\varphi_{cl}(x)$. Αντικαθιστώντας την (5.10) στην (5.9) και αναπτύσσοντας το $\mathcal{L}_r[\varphi]$ γύρω από το $\varphi_{cl}(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\left(\mathcal{L}_r[\varphi] + J_r(x)\varphi(x)\right)\\
&= \int d^4x\left(\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}] + J_r(x)\varphi_{cl}(x)\right) + \int d^4x\,\eta(x)\left(\left.\frac{\delta\mathcal{L}_r[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + J_r(x)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y\,\eta(x)\eta(y)\left.\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + \cdots\\
&= \int d^4x\left(\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}] + J_r(x)\varphi_{cl}(x)\right) + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y\,\eta(x)\eta(y)\left.\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + \cdots
\end{aligned}$$

όπου ο γραμμικός όρος ως προς το η μηδενίζεται από τη σχέση (5.8). Αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα στο δεύτερο εκθετικό γίνεται

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\left(\Delta\mathcal{L}[\varphi] + \Delta J(x)\varphi(x)\right)\\
&= \int d^4x\left(\Delta\mathcal{L}[\varphi_{cl}] + \Delta J(x)\varphi_{cl}(x)\right) + \int d^4x\,\eta(x)\left(\left.\frac{\delta\Delta\mathcal{L}[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + \Delta J(x)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y\,\eta(x)\eta(y)\left.\frac{\delta^2\Delta\mathcal{L}[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + \cdots\\
&= \int d^4x\left(\Delta\mathcal{L}[\varphi_{cl}] + \Delta J(x)\varphi_{cl}(x)\right) + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y\,\eta(x)\eta(y)\left.\frac{\delta^2\Delta\mathcal{L}[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} + \cdots
\end{aligned}$$

όπου ο γραμμικός όρος ως προς το η μηδενίζεται από τον ορισμό (5.1). Με βάση τα παραπάνω η (5.9) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$Z[J] = e^{-iE[J]} = e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]+J_r\varphi_{cl})}e^{i\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\varphi_{cl}]+\Delta J\varphi_{cl})}\int \wp\eta\, e^{iS[\eta]+i\Delta S[\eta]} \tag{5.11}$$

όπου

$$S[\eta] = \frac{1}{2!}\int d^4xd^4y\,\eta(x)\left(\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right)\eta(y) + \cdots$$

$$\Delta S[\eta] = \frac{1}{2!}\int d^4xd^4y\,\eta(x)\left(\frac{\delta^2\Delta\mathcal{L}[\varphi]}{\delta\varphi^2}\right)\eta(y) + \cdots$$

Αγνοώντας τις όρους τρίτης τάξης και άνω καθώς και τα counter-terms $\Delta S[\eta]$ το ολοκλήρωμα τροχιάς πάνω στα πεδία η είναι ένα Γκαουσιανό συναρτησιακό ολοκλήρωμα, το οποίο υπολογίζεται ως εξής

$$\int \wp\eta \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\,\eta(x)\left(\left.\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi]}{\delta\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}}\right)\eta(y)\right\} = \left(\det\left[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right]\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right)\right\}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γνωστή αλγεβρική σχέση: $\log\det(A) = \operatorname{tr}\ln(A)$. Επίσης, το άθροισμα των διαγραμμάτων Feynman που αντιστοιχούν στους όρους τρίτης τάξης και άνω καθώς και στα counter-terms ισούται με το εκθετικό του αθροίσματος των συνδεδεμένων διαγραμμάτων, δηλαδή

$$\int \wp\eta\, e^{iS[\eta]+i\Delta S[\eta]} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right) + \begin{pmatrix}\text{άθροισμα}\\ \text{συνδεδεμένων}\\ \text{διαγραμμάτων}\end{pmatrix}\right\}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (5.11) έπεται

$$E[J] = -\int d^4x\,(\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}] + J_r\varphi_{cl} + \Delta\mathcal{L}[\varphi_{cl}] + \Delta J\varphi_{cl})$$
$$-\frac{i}{2}\operatorname{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right) + i\begin{pmatrix}\text{άθροισμα}\\ \text{συνδεδεμένων}\\ \text{διαγραμμάτων}\end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.12), (5.2) και (5.7) η ενεργός δράση γίνεται

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = \int d^4x\,\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}] + \frac{i}{2}\operatorname{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right) - i\begin{pmatrix}\text{άθροισμα}\\ \text{συνδεδεμένων}\\ \text{διαγραμμάτων}\end{pmatrix} + \int d^4x\,\Delta\mathcal{L}[\varphi_{cl}]$$

Επαναλαμβάνοντας την υπόθεση ότι το πεδίο υποβάθρου φ_{cl} είναι σταθερό έπεται $\int d^4x\,\mathcal{L}[\varphi_{cl}] = -(VT)V(\varphi_{cl})$, οπότε

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = -(VT)V_r(\varphi_{cl}) + \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right) - i\begin{pmatrix}\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\delta\varepsilon\delta\varepsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\end{pmatrix} - (VT)V_{ct}(\varphi_{cl}) \qquad (5.13)$$

Το ενεργό δυναμικό υπολογίζεται, τελικά, από τις σχέσεις (5.5) και (5.13) ως εξής

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = V_r(\varphi_{cl}) - \frac{i}{2(VT)}\,\mathrm{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right) + \frac{i}{(VT)}\begin{pmatrix}\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\delta\varepsilon\delta\varepsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\end{pmatrix} + V_{ct}(\varphi_{cl}) \qquad (5.14)$$

Οι κβαντομηχανικές διορθώσεις της πρώτης καθώς και των ανώτερων τάξεων δίνονται από τον δεύτερο και τρίτο όρο αντίστοιχα, ενώ ο τελευταίος όρος της (5.14) περιέχει τις σταθερές (counter-terms) οι οποίες θα απορροφήσουν τους απειρισμούς.

Κεφάλαιο 6

Το μοντέλο Coleman - Weinberg

Το μοντέλο Coleman – Weinberg είναι μια θεωρία βαθμωτής ηλεκτροδυναμικής και αποτελεί το τετραδιάστατο ανάλογο της Ginzburg – Landau θεωρίας, η οποία εξηγεί τις ιδιότητες των υπεραγωγών κοντά στη μετάβαση πρώτης φάσης. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που το περιγράφει είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \left(D_\mu \varphi\right)^\dagger (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{\lambda}{6}\left(\varphi^\dagger \varphi\right)^2 \tag{6.1}$$

όπου $\varphi(x)$ ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο στις 4 διαστάσεις και $D_\mu \varphi = \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\varphi$ η συναλλοίωτη παράγωγος.

Θεωρούμε, αρχικά, την περίπτωση κατά την οποία έχουμε αυθόρμητη ρήξη της $U(1)$ συμμετρίας βαθμίδας $\varphi(x) \to e^{ia(x)}\varphi(x)$ που προκαλείται από τη μεταβολή της μάζας του συστήματος σε $m^2 \to -\mu^2 < 0$. Έτσι το βαθμωτό δυναμικό της θεωρίας γίνεται

$$V(\varphi) = -\mu^2 \varphi^\dagger \varphi + \frac{\lambda}{6}\left(\varphi^\dagger \varphi\right)^2 \tag{6.2}$$

Ως αποτέλεσμα το πεδίο φ αποκτά μια μη μηδενική αναμενόμενη τιμή κενού φ_0 η οποία είναι

$$\left.\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\mu^2 \varphi_0^\dagger + \frac{\lambda}{3}\left(\varphi_0^\dagger\right)^2 \varphi_0 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_0 \varphi_0^\dagger = \frac{3\mu^2}{\lambda}$$

Εκμεταλλευόμενοι την $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας της θεωρίας μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να επιλέξουμε το φ_0 να είναι μια πραγματική θετική σταθερά, οπότε

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{3\mu^2}{\lambda}} \tag{6.3}$$

Αναπτύσσοντας το πεδίο γύρω από το ελάχιστο

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma(x) + i\pi(x)]$$

όπου σ και π πραγματικά βαθμωτά πεδία, το δυναμικό του συστήματος (6.2) αποκτά τη μορφή

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= -\frac{\lambda}{3}\varphi_0^2\left[\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\pi^2\right] + \frac{\lambda}{6}\left[\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\pi^2\right]^2 \\ &= -\frac{\lambda}{3}\varphi_0^2\left(\varphi_0^2 + \sqrt{2}\varphi_0\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\pi^2\right) + \frac{\lambda}{6}\left(\varphi_0^2 + \sqrt{2}\varphi_0\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\pi^2\right)^2 \\ &= -\frac{\lambda}{6}\varphi_0^4 + \frac{\lambda}{3}\varphi_0^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{3\sqrt{2}}\varphi_0(\sigma^2 + \pi^2)\sigma + \frac{\lambda}{24}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα ο κινητικός όρος γίνεται

$$\begin{aligned} &\left(D_\mu\varphi\right)^\dagger(D^\mu\varphi) \\ &= \left[\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - i\pi)\right)\right]\left[\left(\partial^\mu + ieA^\mu\right)\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi)\right)\right] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(\sigma - i\pi) - ieA_\mu\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - i\pi)\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu(\sigma + i\pi) + ieA^\mu\left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\pi\right)^2 + e^2\varphi_0^2A_\mu^2 + \sqrt{2}e\varphi_0A_\mu(\partial^\mu\pi) + eA_\mu(\sigma\partial^\mu\pi - \pi\partial^\mu\sigma) \\ &\qquad + \sqrt{2}e^2\varphi_0A_\mu^2\sigma + \frac{e^2}{2}A_\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα (6.1) έπεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; &-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\pi\right)^2 + e^2\varphi_0^2A_\mu^2 - \frac{\lambda}{3}\varphi_0^2\sigma^2 + \sqrt{2}e\varphi_0A_\mu(\partial^\mu\pi) \\ &+ eA_\mu(\sigma\partial^\mu\pi - \pi\partial^\mu\sigma) + \sqrt{2}e^2\varphi_0A_\mu^2\sigma + \frac{e^2}{2}A_\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) \\ &- \frac{\lambda}{3\sqrt{2}}\varphi_0(\sigma^2 + \pi^2)\sigma - \frac{\lambda}{24}(\sigma^2 + \pi^2)^2 - \frac{\lambda}{6}\varphi_0^4 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Η πρώτη γραμμή περιέχει τους όρους που είναι τετραγωνικοί ως προς τα πεδία και επομένως αποτελούν το αδιατάραχτο κομμάτι της Λαγκρανζιανής. Αντίθετα, οι όροι στη δεύτερη και τρίτη γραμμή εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις (με εξαίρεση την σταθερά $-(\lambda/6)\varphi_0^4$) και αντιμετωπίζονται ως διαταραχές. Παρατηρούμε ότι το αρχικά άμαζο πεδίο βαθμίδας A_μ απέκτησε μέσω του μηχανισμού Higgs μάζα ίση με $m_A = \sqrt{2}e\varphi_0 = e\sqrt{6\mu^2/\lambda}$. Επίσης το μποζονικό πεδίο σ εμφανίζεται με μάζα $m_\sigma = \sqrt{(2\lambda/3)}\varphi_0 = |\mu|\sqrt{2}$, ενώ το πεδίο π παραμένει άμαζο.

Ενώ στην περίπτωση της αρνητικής μάζας η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας ήταν αναμενόμενη, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία η μάζα του συστήματος τείνει στο μηδέν. Για να μελετήσουμε το κενό της κβαντικής θεωρίας θα υπολογίσουμε αρχικά το ενεργό δυναμικό του μοντέλου Coleman – Weinberg μέχρι και τη διόρθωση πρώτης τάξης. Έστω φ_{cl} το πεδίο υποβάθρου το οποίο, εκμεταλλευόμενοι την αναλλοιώτητα των καταστάσεων κενού κάτω από χωροχρονικές μεταφορές και τους μετασχηματισμούς Lorentz καθώς και την $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας, μπορούμε να το θεωρήσουμε σταθερό και πραγματικό. Αναπτύσσουμε το πεδίο γύρω από το φ_{cl} ως εξής

$$\varphi(x) = \varphi_{cl} + \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$$

όπου τα πεδία φ_1 και φ_2 αντιπροσωπεύουν τις διακυμάνσεις ως προς το φ_{cl}. Με αντικατάσταση στη Λαγκρανζιανή (6.1) και κρατώντας μόνο τους όρους που είναι τετραγωνικοί στα πεδία βρίσκουμε

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \left|\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)(\varphi_{cl} + \varphi_1 + i\varphi_2)\right|^2 - m^2|\varphi_{cl} + \varphi_1 + i\varphi_2|^2 - \frac{\lambda}{6}|\varphi_{cl} + \varphi_1 + i\varphi_2|^4$$

$$= \frac{1}{2}A_\nu\left[\left(\partial^2 + 2e^2\varphi_{cl}^2\right)\delta_\mu^\nu - \partial^\nu\partial_\mu\right]A^\mu + \frac{1}{2}\varphi_1\left(-\partial^2 - m^2 - \lambda\varphi_{cl}^2\right)\varphi_1$$

$$+\frac{1}{2}\varphi_2\left(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\varphi_2 - 2e\varphi_{cl}A_\mu(\partial^\mu\varphi_2) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}A_\nu\left[\left(\partial^2 + 2e^2\varphi_{cl}^2\right)\underbrace{\left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial^\nu\partial_\mu}{\partial^2}\right)}_{P_T} + 2e^2\varphi_{cl}^2\underbrace{\frac{\partial^\nu\partial_\mu}{\partial^2}}_{P_L}\right]A^\mu + \frac{1}{2}\varphi_1\left(-\partial^2 - m^2 - \lambda\varphi_{cl}^2\right)\varphi_1$$

$$+\frac{1}{2}\varphi_2\left(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\varphi_2 - 2e\varphi_{cl}A_\mu(\partial^\mu\varphi_2) + \cdots$$

όπου $\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$ και δ_μ^ν το δέλτα του Kronecker. Οι διαφορικοί τελεστές P_T και P_L είναι τελεστές προβολής ($P_T^2 = P_T,\ P_L^2 = P_L,\ P_TP_L = P_LP_T = 0$) και στο χώρο των ορμών

$$P_T = \delta_\mu^\nu - \frac{k^\nu k_\mu}{k^2}, \qquad P_L = \frac{k^\nu k_\mu}{k^2}$$

μπορούν να θεωρηθούν ως τετραδιάστατοι πίνακες, βαθμού 3 και 1 αντίστοιχα. Επιλέγοντας την συνθήκη βαθμίδας Landau $\partial_\mu A^\mu = ik_\mu A^\mu = 0$ ο τελεστής P_L μηδενίζεται, με αποτέλεσμα το δυναμικό βαθμίδας A_μ να αποτελείται πλέον μόνο από τις 3 ανεξάρτητες χωρικές συνιστώσες. Έτσι, η Λαγκρανζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_T^\nu\left[\left(-\partial^2 - 2e^2\varphi_{cl}^2\right)\delta_\mu^\nu\right]A_T^\mu + \frac{1}{2}\varphi_1\left(-\partial^2 - m^2 - \lambda\varphi_{cl}^2\right)\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2\left(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\varphi_2$$

όπου ο όρος $2e\varphi_{cl}A_\mu(\partial^\mu\varphi_2)$ μηδενίζεται από την παραγώγιση κατά παράγοντες. Σύμφωνα με την (5.14) το ενεργό δυναμικό μέχρι και τη διόρθωση πρώτης τάξης είναι

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = V_r(\varphi_{cl}) + \Delta^1 V_{eff}(\varphi_{cl}) + V_{ct}(\varphi_{cl}) \tag{6.5}$$

όπου

$$\Delta^1 V_{eff}(\varphi_{cl}) = -\frac{i}{2(VT)}\operatorname{tr}\ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\varphi_{cl}]}{\delta\varphi^2}\right)$$

$$= -\frac{i}{2(VT)}\left[3\operatorname{tr}\ln\left(\partial^2 + 2e^2\varphi_{cl}^2\right) + \operatorname{tr}\ln\left(\partial^2 + m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right) + \operatorname{tr}\ln\left(\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\right]$$

Το πρώτο $\operatorname{tr}\ln(\dots)$ υπολογίζεται 3 φορές εξαιτίας των 3 συνιστωσών του A_T^μ. Όμως, το ίχνος ενός τελεστή ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του, οπότε

$$\Delta^1 V_{eff}(\varphi_{cl})$$

$$= -\frac{i(VT)}{2(VT)}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[3\ln\left(-k^2 + 2e^2\varphi_{cl}^2\right) + \ln\left(-k^2 + m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right) + \ln\left(-k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\right]$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη μέθοδο της διαστατικής ομαλοποίησης (Παράρτημα Β), το γενικεύουμε στις d-διαστάσεις και το στρέφουμε κατά Wick για να περάσουμε στον Ευκλείδειο χώρο $\left({k_M}^0 = i{k_E}^0\right)$, οπότε έχουμε

$$\Delta^1 V_{eff}(\varphi_{cl})$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\left[3\ln\left(k_E^2 + 2e^2\varphi_{cl}^2\right) + \ln\left(k_E^2 + m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right) + \ln\left(k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)\right] \tag{6.6}$$

Για να φέρουμε το ολοκλήρωμα στην επιθυμητή μορφή και να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (Β.6) του παραρτήματος δουλεύουμε ως εξής

$$\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\ln(k_E^2 + m^2) = -\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k_E^2 + m^2)^a}\bigg|_{a=0}$$

$$\xrightarrow{d\to 4} -\frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{(m^2)^{2-a}}{(4\pi)^2}\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{(-1)^{2-a}}{(2-a)!}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \psi(3-a) + \ln(4\pi) - \ln(m^2)\right)\right\}\bigg|_{a=0}$$

$$= -\frac{(m^2)^2}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{3}{2} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln(m^2)\right)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\Gamma(a) \to 1/a$, καθώς $a \to 0$. Έτσι, η (6.6) γίνεται

$$\begin{aligned}\Delta^1 V_{eff}(\varphi_{cl}) = \frac{-1}{4(4\pi)^2}\Bigg\{&3\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right)^2\left[\Delta - \ln\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right) + \frac{3}{2}\right] + \left(m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right)^2\left[\Delta - \ln\left(m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right) + \frac{3}{2}\right]\\ &+ \left(m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)^2\left[\Delta - \ln\left(m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right) + \frac{3}{2}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.7}$$

όπου έχουμε ορίσει $\Delta \equiv \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi)$. Το μόνο που απομένει, τώρα, για τον υπολογισμό του ενεργού δυναμικού είναι η ανακανονικοποίησή του. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της *ελάχιστης αφαίρεσης (minimal subtraction, $\overline{MS}$ scheme)*, σύμφωνα με την οποία επιλέγονται οι ελάχιστες σταθερές ανακανονικοποίησης (counter-terms) που απαιτούνται προκειμένου να άρουν την άπειρη ποσότητα Δ. Έτσι, βρίσκουμε

$$V_{ct}(\varphi_{cl}) = \frac{1}{4(4\pi)^2} M^{-2\varepsilon}\Delta\left(3\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right)^2 + \left(m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right)^2 + \left(m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)^2\right) \tag{6.8}$$

όπου M σταθερά με διαστάσεις μάζα (renormalization scale) που εισάγαμε προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι οι λογάριθμοι παραμένουν αδιάστατοι. Από τις σχέσεις (6.5), (6.7) και (6.8) έπεται

$$\begin{aligned} V_{eff}(\varphi_{cl}) &= m^2\varphi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi_{cl}^4 \\ &+ \frac{1}{4(4\pi)^2}\left\{3\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{M^2} - \frac{3}{2}\right) + \left(m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2}{M^2} - \frac{3}{2}\right)\right. \\ &\left. + \left(m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2}{M^2} - \frac{3}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

Προς περαιτέρω απλούστευση ορίζουμε $\bar{M}^2 = M^2 \exp\left(\frac{3}{2}\right)$, οπότε

$$\begin{aligned} V_{eff}(\varphi_{cl}) &= m^2\varphi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi_{cl}^4 \\ &+ \frac{1}{4(4\pi)^2}\left\{3\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right) + \left(m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{m^2 + \lambda\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right)\right. \\ &\left. + \left(m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2\right)^2 \ln\left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Στο όριο $m^2 \to 0$ η (6.9) γίνεται

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = \frac{\lambda}{6}\varphi_{cl}^4 + \frac{1}{4(4\pi)^2}\left\{12e^4\varphi_{cl}^4 \ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right) + \lambda^2\varphi_{cl}^4 \ln\left(\frac{\lambda\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right) + \frac{\lambda^2}{9}\varphi_{cl}^4 \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right)\right\} \tag{6.10}$$

Θα αναλύσουμε την παραπάνω έκφραση για πολύ μικρή σταθερά σύζευξης ανάλογη του e^4, οπότε $\lambda^2 \approx e^8 \ll e^4$ και η (6.10) καταλήγει στην

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = \frac{\lambda}{6}\varphi_{cl}^4 + \frac{3e^4\varphi_{cl}^4}{16\pi^2}\ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right) \tag{6.11}$$

Το ενεργό δυναμικό (6.11) εμφανίζει, τελικά, ελάχιστο στο

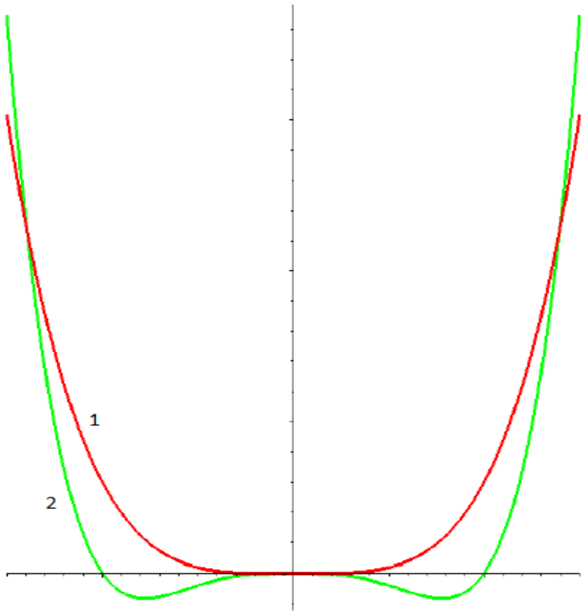
$$\frac{\partial}{\partial\varphi_{cl}^2}V_{eff}(\varphi_{cl}) = \frac{\lambda}{3}\varphi_{cl}^2 + \frac{3e^4}{16\pi^2}\left[2\varphi_{cl}^2 \ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right) + \varphi_{cl}^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{cl}^2 = \frac{\bar{M}^2}{2e^2}\exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{8\pi^2\lambda}{9e^4}\right) \tag{6.12}$$

Στην κλασική, όμως, περίπτωση το ελάχιστο του δυναμικού για $m^2 \to 0$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}V(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \tag{6.13}$$

Από την σύγκριση των 2 αποτελεσμάτων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στο όριο $m^2 \to 0$ οι κβαντομηχανικές διορθώσεις πρώτης τάξης προκαλούν την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας του συστήματος.



Σχήμα 5: Ποιοτική αναπαράσταση του δυναμικού Coleman - Weinberg για $m^2 = 0$ στην (1) κλασική και (2) κβαντική περίπτωση.

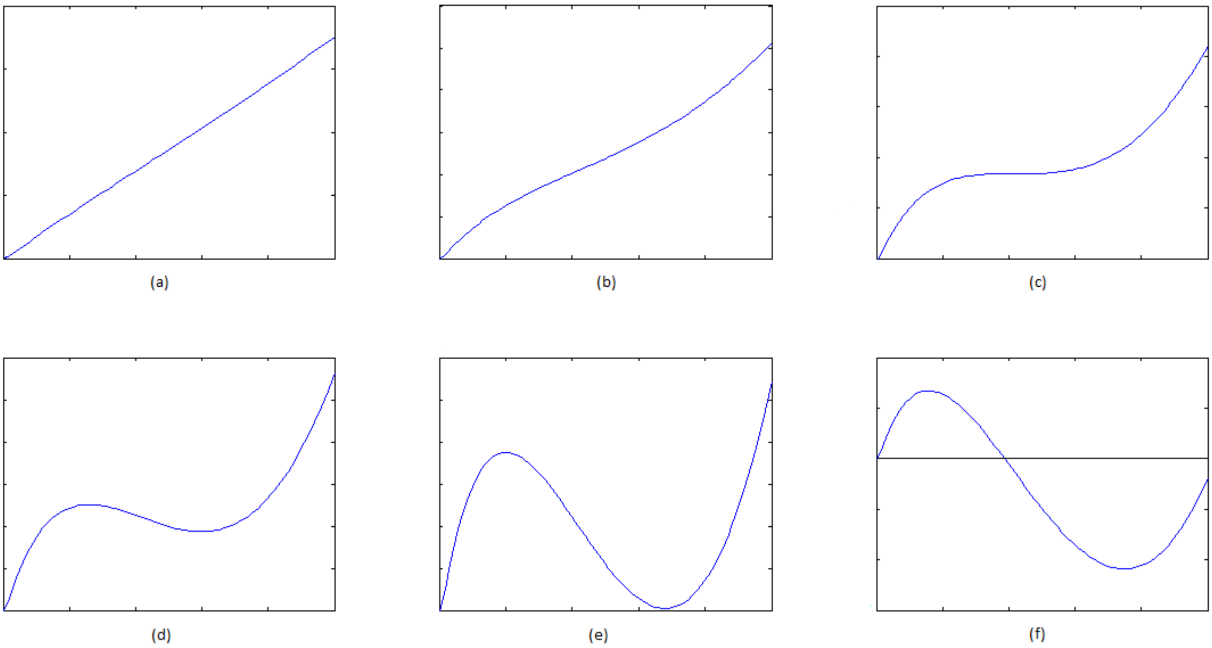
Για την γραφική απεικόνιση του ενεργού δυναμικού, καθώς η μάζα του συστήματος τείνει στο μηδέν, θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (6.9) θεωρώντας όμως $\lambda \approx e^4$ (για να απαλλαχτούμε από τους λ^2 όρους), δηλαδή

$$V_{eff}(\varphi_{cl}) = m^2\varphi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi_{cl}^4 + \frac{3\left(2e^2\varphi_{cl}^2\right)^2}{64\pi^2}\ln\left(\frac{2e^2\varphi_{cl}^2}{\bar{M}^2}\right)$$

Ορίζουμε $x \equiv 2e^2\varphi_{cl}^2/\bar{M}^2$ οπότε έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\bar{M}^4}V(x) = ax + bx^2 + cx^2\ln(x)$$

όπου $a = m^2/(2e^2\bar{M}^2)$, $b = \lambda/(24e^4)$ και $c = 3/(64\pi^2)$.



Σχήμα 6: Το ενεργό δυναμικό Coleman – Weinberg ως προς το πεδίο φ_{cl} για $b = c = 1$ και (a) $a = 1$, (b) $a = 0.25$, (c) $a = 0.164$, (d) $a = 0.15$, (e) $a = 0.1355$, (f) $a = 0.12$.

Από το Σχήμα 6 παρατηρούμε ότι καθώς η μάζα τείνει στο μηδέν οι κβαντομηχανικές διορθώσεις πρώτης τάξης δημιουργούν ένα τοπικό ελάχιστο διαφορετικό του κλασικού ελαχίστου $\varphi_0 = 0$. Για $m^2 < 0.1355(2e^2\bar{M}^2)$ το ελάχιστο της αυθόρμητης ρήξης της συμμετρίας γίνεται ολικό ελάχιστο και το σύστημα συνυπάρχει στις 2 φάσεις μέσω του φαινομένου σήραγγας (tunneling), όπως στην περίπτωση του νερού που συνυπάρχουν η υγρή και αέρια μορφή του στην θερμοκρασία των 100^oC. Τέλος, για ακόμα μικρότερες τιμές της μάζας το $\varphi_0 = 0$ μετατρέπεται σε τοπικό μέγιστο, με αποτέλεσμα το σύστημα να οδηγείται αναπόφευκτα στη μετάβαση πρώτης φάσης.

Παράρτημα A

Κβάντωση Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

A.1 Κλασική Θεωρία

Ξεκινάμε από τις εξισώσεις Maxwell στο σύστημα μονάδων των Heaviside – Lorentz με $c = \hbar = 1$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{A.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = J^0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \tag{A.2}$$

όπου J^0 και $\vec{J}$ οι πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού ρεύματος αντίστοιχα, οι οποίες ορίζουν το τετραδιάνυσμα $J^\nu \equiv \left(J^0, \vec{J}\right)$. Ενώ η κλασική περιγραφή γίνεται συναρτήσει του ηλεκτρικού $\vec{E}$ και του μαγνητικού $\vec{B}$ πεδίου, στην κβαντική θεωρία χρησιμοποιούμε το τετραδιάνυσμα του δυναμικού

$$A^\mu \equiv \left(A^0, \vec{A}\right)$$

μέσω των συνιστωσών του οποίου μπορούν να εκφραστούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ως εξής:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Ορίζουμε τον αντισυμμετρικό τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ως

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{A.3}$$

Οι μη ομογενείς εξισώσεις (A.2) μπορούν, τώρα, να γραφούν στη μορφή

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

δηλαδή

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu \tag{A.4}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που παράγει την εξίσωση κίνησης (Α.4) από τις εξισώσεις Euler – Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^{\mu}A_{\nu}$$

και η αντίστοιχη δράση

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\int d^4x\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \int d^4x\,J^{\mu}A_{\nu} \qquad (A.5)$$

Μια σημαντική ιδιότητα των εξισώσεων κίνησης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι η λεγόμενη συμμετρία βαθμίδας (gauge symmetry). Δηλαδή το τετραδιάνυσμα του δυναμικού A^{μ} δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο, με αποτέλεσμα όλα τα δυναμικά $\tilde{A}^{\mu}$ που προέρχονται από έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας της μορφής

$$A^{\mu} \rightarrow \tilde{A}^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\Lambda(x) \qquad (A.6)$$

όπου $\Lambda(x)$ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση, να ικανοποιούν εξίσου τις εξισώσεις κίνησης (Α.4), δηλαδή

$$\partial_{\mu}\left(\partial^{\mu}\tilde{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\tilde{A}^{\mu}\right) = J^{\nu}$$

Επαληθεύουμε αμέσως ότι ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $F^{\mu\nu}$, και κατ' επέκταση η δράση και η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου στην ελεύθερη θεωρία ($J^{\mu} = 0$), παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας, ήτοι

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\tilde{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\tilde{A}^{\mu} = F^{\mu\nu}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_0$$

$$\tilde{S}_0 = \int d^4x\,\tilde{\mathcal{L}}_0 = \int d^4x\,\mathcal{L}_0 = S_0$$

Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού η ομάδα μετασχηματισμού είναι η αβελιανή $U(1)$ μοναδιακή ομάδα. Το 4διάστατο ανυσματικό πεδίο A^{μ} ονομάζεται επίσης *δυναμικό βαθμίδας* ή *πεδίο βαθμίδας*.

Α.2 Διαδότης Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου (Μέθοδος Faddeev-Popov)

Έχοντας εισάγει την Λαγκρανζιανή διατύπωση είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην κβάντωση του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων δίνεται, κατ' αντιστοιχία με το βαθμωτό πεδίο, από το ολοκλήρωμα τροχιάς

$$< 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0> = \mathcal{N}\int \wp A_\mu\, A_\mu(x)A_\nu(y)e^{iS_0(A)} \tag{A.7}$$

όπου $\mathcal{N}$ η σταθερά κανονικοποίησης και $S_0(A)$ η ελεύθερη δράση του πεδίου, για την οποία ισχύει

$$S_0(A) = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu(x)\big(\partial_\mu\partial^\mu g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\big)A_\nu(x)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ η μετρική Minkowski. Μετασχηματίζοντας το πεδίο βαθμίδας $A_\mu(x)$ κατά Fourier

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A_\mu(p)e^{ip\cdot x}$$

βρίσκουμε

$$S_0(A) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A_\mu(p)(-p^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu)A_\nu(-p)$$

Ο διαδότης της θεωρίας είναι η συνάρτηση Green του τελεστή του πεδίου, δηλαδή

$$\big(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\big)D_F^{\nu\rho}(p) = i\delta_\mu^\rho \tag{A.8}$$

Όμως, $\det\big(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\big) = 0$ οπότε ο πίνακας δεν αντιστρέφεται και κατά συνέπεια ο διαδότης $D_F^{\nu\rho}(p)$ δεν μπορεί να οριστεί. Το πρόβλημα, ουσιαστικά, πηγάζει από το γεγονός ότι ενώ η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας, το ολοκλήρωμα τροχιάς (Α.7) εφαρμόζεται πάνω σε όλα τα πεδία βαθμίδας A^μ συμπεριλαμβανομένων αυτών που συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού βαθμίδας. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι τα A_μ μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (Α.6) τότε η συναρτησιακή ολοκλήρωση πάνω στα μετασχηματισμένα πεδία $\tilde{A}^\mu = \partial^\mu \Lambda(x)$ (δηλαδή $A_\mu(x) = 0$) με $\Lambda(x)$ μια συνεχή συνάρτηση προκαλεί απειρισμούς, καθώς $e^{iS_0(0)} = 1$. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό θα πρέπει να περιορίσουμε τη συναρτησιακή ολοκλήρωση μόνο στα μη ισοδύναμα πεδία βαθμίδας. Οδηγούμαστε, έτσι, στην επιβολή μιας συνθήκης βαθμίδας (gauge-fixing condition), μέσω της οποίας θα "επιλέγεται" από κάθε τροχιακό $\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu\Lambda(x)$ ένα αντιπροσωπευτικό πεδίο βαθμίδας που θα συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα τροχιάς.

Σύμφωνα με τη μέθοδο Faddeev-Popov θεωρούμε το συναρτησιακό $G(A)$ των πεδίων βαθμίδας A^μ, μέσω του οποίου θα εφαρμόσουμε την συνθήκη βαθμίδας. Προκειμένου να το εισάγουμε στο ολοκλήρωμα τροχιάς (Α.7) θα χρησιμοποιήσουμε τον συναρτησιακό ορισμό της δέλτα συνάρτησης

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta\big(x - {x_0}^{(i)}\big)}{\big|f'({x_0}^{(i)})\big|} \tag{A.9}$$

όπου ${x_0}^{(i)}$ οι ρίζες της συνάρτησης $f(x)$. Το συνεχές ανάλογο της (Α.9) στις n-διαστάσεις είναι

$$1 = \int \prod_{i=1}^{n} dx_i\, \delta^{(n)}\left(f_j(x_i)\right) \left|\det \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|$$

όπου f_j οι n συναρτήσεις των n μεταβλητών x_i. Γενικεύοντας σε άπειρες διαστάσεις καταλήγουμε στο συναρτησιακό ανάλογο της (A.9) που είναι

$$1 = \int \wp\lambda(x)\, \delta\left(G\left(A^\lambda\right)\right) \left|\det \frac{\delta G(A^\lambda)}{\delta\lambda(x)}\right| \tag{A.10}$$

όπου $A_\mu^\lambda(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$ και $G(A^\lambda)$ αυθαίρετο συναρτησιακό των συναρτήσεων $A_\mu^\lambda(x)$. Εισάγοντας την (A.10) στο ολοκλήρωμα τροχιάς

$$\mathcal{N} \int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)}$$

και επιλέγοντας για απλοποίηση

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu \Longrightarrow G\left(A^\lambda\right) = \partial_\mu A^\mu + \Box\, \lambda$$

όπου $\Box = \partial_\mu\, \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ ο τελεστής του D' Alembert, έπεται

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N} \int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)} \int \wp\lambda(x)\, \delta\left(G\left(A^\lambda\right)\right) \left|\det \frac{\delta G(A^\lambda)}{\delta\lambda(x)}\right| \\
&\qquad = \mathcal{N} \det(\Box) \int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)} \int \wp\lambda(x)\, \delta\left(G\left(A^\lambda\right)\right) \\
&\qquad = \mathcal{N}' \int \wp\lambda(x) \int \wp A_\mu^\lambda\, e^{iS_0(A^\lambda)} \delta\left(G\left(A^\lambda\right)\right) \\
&\qquad = \mathcal{N}'' \int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)} \delta\big(G(A)\big)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

όπου $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \det(\Box)$, $\mathcal{N}'' = \mathcal{N}' \int \wp\lambda(x)$ και χρησιμοποιήσαμε επίσης την αναλλοιότητα βαθμίδας της δράσης και του στοιχείου $\wp A_\mu$. Το συναρτησιακό δέλτα είναι αυτό που αποτρέπει την ολοκλήρωση πάνω σε ισοδύναμα πεδία βαθμίδας. Θεωρούμε, εν συνεχεία, τη γενική συνθήκη βαθμίδας

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x)$$

με $\omega(x)$ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση. Έτσι, η (A.11) γίνεται

$$\int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)} = \frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}} \int \wp A_\mu\, e^{iS_0(A)} \delta\left(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)\right)$$

Για να απαλλαγούμε επιπλέον από το συναρτησιακό δέλτα σκεφτόμαστε ως εξής: αντί να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση $\omega(x)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γραμμικό συνδυασμό διαφορετικών συναρτήσεων $\omega(x)$ προσδίδοντάς τους βάρος μέσω μιας Γκαουσιανής κατανομής με κέντρο το $\omega = 0$, δηλαδή

$$\omega \to \int \wp\omega \, e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x \, \omega^2}$$

όπου ξ θετική σταθερά. Έπεται

$$\int \wp A_\mu \, e^{iS_0(A)} = \frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}} \int \wp A_\mu \, e^{iS_0(A)} \int \wp\omega \, e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x \, \omega^2} \delta\left(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)\right)$$

$$= \frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}} \int \wp A_\mu \, e^{i\left[S_0(A) - \frac{1}{2\xi}\int d^4x \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right]}$$

Έτσι, η εξίσωση (Α.7) αντικαθίσταται από την

$$< 0\left|A_\mu(x)A_\nu(y)\right|0 > = \frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}} \int \wp A_\mu \, A_\mu(x)A_\nu(y) e^{i\left[S_0(A) - \frac{1}{2\xi}\int d^4x \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right]}$$

Τελικά, ο διαδότης της θεωρίας από την (Α.8) συμπεριλαμβανομένου και του επιπλέον όρου ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(-p^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu\right) D_F^{\nu\rho}(p) = i\delta_\mu^\rho$$

Θέτοντας

$$D_F^{\nu\rho}(p) = A(p^2) g_{\mu\nu} + B(p^2) p_\mu p_\nu$$

και εξισώνοντας τις ποσότητες με την ίδια τανυστική δομή βρίσκουμε

$$iD_F^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 + i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \qquad \text{(A.12)}$$

Το φωτόνιο δεν αποτελεί παρατηρήσιμο φυσικό μέγεθος και εξαρτάται από την επιλογή της σταθεράς ξ, δηλαδή της βαθμίδας. Συνήθως επιλέγει κανείς $\xi = 0$ που αντιστοιχεί στην βαθμίδα Landau και $\xi = 1$ που αντιστοιχεί στη βαθμίδα Feynman. Τέλος, στο χώρο των θέσεων ο διαδότης έχει τη μορφή

$$< 0\left|A_\mu(x)A_\nu(y)\right|0 > = \frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) e^{ip\cdot(x-y)} \qquad \text{(A.13)}$$

Παράρτημα Β

Διαστατική ομαλοποίηση

Η διαστατική ομαλοποίηση μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε τα αποκλίνοντα ολοκληρώματα σε αναλυτική μορφή, απομονώνοντας τον απειρισμό από τους πεπερασμένους όρους. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, γενικεύουμε αρχικά τα τετραδιάστατα ολοκληρώματα στις d διαστάσεις ($d \in \mathbb{R}$) και στη συνέχεια με απλούς αλγεβρικούς κανόνες προχωράμε στον υπολογισμό του d-διάστατου ολοκληρώματος με τους απειρισμούς να εμφανίζονται στο όριο $d \to 4$. Η διαστατική ομαλοποίηση έχει το πλεονέκτημα ότι διατηρεί τη συμμετρία Lorentz του χωρόχρονου καθώς και τη συμμετρία βαθμίδας.

Θεωρούμε, αρχικά, το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{d^d p}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n}$$

όπου p, q τετραδιανύσματα στον χώρο Minkowski και $n \in \mathbb{Z}$. Η βασική ιδέα είναι να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του p^2, απομακρύνοντας την γωνιακή του εξάρτηση. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στον παρονομαστή

$$p^2 + 2p \cdot q - m^2 = (p+q)^2 - (m^2 + q^2)$$

έχουμε

$$I = \int \frac{d^d p}{[(p+q)^2 - (m^2 + q^2)]^n}$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των d-διάστατων ολοκληρωμάτων να παραμένουν αναλλοίωτα κατά τη μεταφορά, δηλαδή

$$\int d^d p \, f(p+q) = \int d^d p \, f(p), \qquad \forall q$$

οπότε μπορούμε να φέρουμε το ολοκλήρωμα στην επιθυμητή μορφή

$$I = \int \frac{d^d p}{[p^2 - (m^2 + q^2)]^n}$$

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό του, θα στρέψουμε το ολοκλήρωμα κατά Wick για να περάσουμε στον Ευκλείδειο χώρο (${p_M}^0 = i{p_E}^0$)

$$I = \frac{i}{(-1)^n} \int \frac{d^d p_E}{[{p_E}^2 + (m^2 + q^2)]^n}$$

Η εξάρτηση του ολοκληρώματος μόνο από το μέτρο του p_E μας επιτρέπει να το σπάσουμε ως εξής

$$\int d^d p_E = \int d\Omega_d \int_0^{\infty} {p_E}^{d-1} dp_E$$

όπου Ω_d η d-διάστατη στερεά γωνία, η οποία μπορεί να υπολογιστεί ξεχωριστά με βάση το ακόλουθο τέχνασμα

$$\begin{aligned}(\sqrt{\pi})^d = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}\right)^d &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^d x \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} {x_i}^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_d \int_0^{\infty} dx\, x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_d \int_0^{\infty} d(x^2)\, (x^2)^{\,d/2-1} e^{-x^2} \qquad \text{(B.1)}\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στα x θα πρέπει πρώτα να εισάγουμε την γάμμα συνάρτηση. Η συνάρτηση γάμμα ορίζεται στο πεδίο $H = \{x \in \mathbb{C}: Re(x) > 0\}$ σύμφωνα με:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ικανοποιεί, επίσης, τη συναρτησιακή σχέση

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

με $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ και $\Gamma(1) = 1$. Έτσι, η (B.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(\sqrt{\pi})^d = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_d\right)\frac{1}{2}\Gamma\left({}^{d}/_{2}\right)$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left({}^{d}/_{2}\right)}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στο ολοκλήρωμα I προκύπτει

$$\begin{aligned}I &= \frac{i}{(-1)^n} \int \frac{d^d p_E}{[{p_E}^2 + (m^2 + q^2)]^n} \\ &= \frac{i}{(-1)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_d \int_0^{\infty} dp_E \frac{{p_E}^{d-1}}{[{p_E}^2 + (m^2 + q^2)]^n}\end{aligned}$$

$$= \frac{i}{(-1)^n} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(d/_2\right)} \frac{1}{2} \int_0^\infty d(p_E{}^2) \frac{(p_E{}^2)^{d/2-1}}{[p_E{}^2 + (m^2+q^2)]^n}$$

δηλαδή

$$\int \frac{d^d p_E}{[p_E{}^2 + (m^2+q^2)]^n} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(d/_2\right)} \int_0^\infty d(p_E{}^2) \frac{(p_E{}^2)^{d/2-1}}{[p_E{}^2 + (m^2+q^2)]^n} \qquad \text{(B.2)}$$

Θέτουμε

$$x \equiv \frac{m^2+q^2}{p_E{}^2 + m^2 + q^2}$$

οπότε

$$d(p_E{}^2) = -\frac{m^2+q^2}{x^2} dx$$

Έτσι, η σχέση (B.2) γίνεται

$$\int \frac{d^d p_E}{[p_E{}^2 + (m^2+q^2)]^n}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(d/_2\right)} \int_0^1 dx \left(\frac{m^2+q^2}{x^2}\right) (m^2+q^2)^{d/2-1} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{d/2-1} \left(\frac{m^2+q^2}{x}\right)^{-n}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(d/_2\right)} (m^2+q^2)^{d/2-n} \int_0^1 dx\, x^{n-d/2-1} (1-x)^{d/2-1}$$

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε τη βήτα συνάρτηση, η οποία ορίζεται στο πεδίο $F = \{a, b \in \mathbb{C}: Re(a), Re(b) > 0\}$ σύμφωνα με:

$$B(a,b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

και συνδέεται με τη συνάρτηση γάμμα μέσω της σχέσης

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Έτσι, βρίσκουμε

$$\int \frac{d^d p_E}{[p_E{}^2 + (m^2+q^2)]^n} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(d/_2\right)} (m^2+q^2)^{d/2-n}\, B\left(n - \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(^{d}/_{2}\right)} (m^2 + q^2)^{d/2-n} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$= \pi^{d/2}(m^2 + q^2)^{d/2-n} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \quad \text{(B.3)}$$

Προς περαιτέρω απλούστευση του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ιδιότητα της γάμμα συνάρτησης

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \Psi(n+1) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \quad \text{(B.4)}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon \ll 1$. Η συνάρτηση $\Psi(n+1)$ είναι η δίγαμμα συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\Psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma_E$$

όπου $\gamma_E \approx 0{,}5772$ η σταθερά Euler-Mascheroni. Αν θέσουμε $d = 4 - \varepsilon$, τότε από την (B.4) βρίσκουμε

$$\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(n - 2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \Gamma\left(-(2-n) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{(-1)^{2-n}}{(2-n)!}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \psi(3-n) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην (B.3) και διαιρώντας και τα 2 μέλη με $(2\pi)^d$ έπεται

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[{p_E}^2 + (m^2 + q^2)]^n}$$

$$= \frac{(m^2 + q^2)^{2-n-\varepsilon/2}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^{2-n}}{(2-n)!}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \psi(3-n) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \quad \text{(B.5)}$$

Τέλος, στο όριο $d \to 4 \Rightarrow \varepsilon \to 0$ χρησιμοποιούμε τη σχέση $\alpha^\varepsilon = e^{\varepsilon ln a} \xrightarrow{\varepsilon \ll 1} 1 + \varepsilon ln a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[{p_E}^2 + (m^2 + q^2)]^n}$$

$$\xrightarrow{d \to 4} \frac{(m^2 + q^2)^{2-n}}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{(-1)^{2-n}}{(2-n)!}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \psi(3-n) + \ln(4\pi) - \ln(m^2 + q^2) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \quad \text{(B.6)}$$

Καταφέραμε, λοιπόν, να γράψουμε το ολοκλήρωμα σε κατάλληλη αναλυτική μορφή, ώστε όταν οι διαστάσεις τείνουν στις 4, δηλαδή $d \to 4 \Rightarrow \varepsilon \to 0$, να ισούται με το άθροισμα πεπερασμένων και μη πεπερασμένων όρων.

Θα εξετάσουμε, τώρα την ειδική περίπτωση που το αποκλίνων ολοκλήρωμα είναι της μορφής

$$I'_d = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2 - m^2}\right)\left(\frac{1}{(p+k)^2 - m^2}\right)$$

Αρχικά, για να φέρουμε τον παρονομαστή σε κατάλληλη μορφή για υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση του Feynman, σύμφωνα με την οποία

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{\big(az + b(1-z)\big)^2}$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως εξής

$$I'_d = \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k^2 - m^2)z + ((p+k)^2 - m^2)(1-z)]^2}$$

$$= \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathrm{k}^2 z + (p+k)^2(1-z) - m^2]^2}$$

$$= \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathrm{k}^2 - m^2 + 2k \cdot p(1-z) + p^2(1-z)]^2}$$

Θέτουμε $k' = k + p(1-z)$, οπότε ο παρονομαστής γίνεται

$$(k')^2 - m^2 + p^2[(1-z) - (1-z)^2] = (k')^2 - m^2 + p^2 z(1-z)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στο ολοκλήρωμα και λαμβάνοντας υπόψιν την αναλλοιώτητα κατά τη μεταφορά έπεται

$$I'_d = \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + p^2 z(1-z) - m^2]^2}$$

Για να περάσουμε στον Ευκλείδειο χώρο στρέφουμε το ολοκλήρωμα κατά Wick

$$I_E{}'_d = i \int_0^1 dz \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[{k_E}^2 + \left(m^2 - p^2 z(1-z)\right)\right]^2}$$

οπότε από την σχέση (Β.6) έπεται

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2 - m^2}\right)\left(\frac{1}{(p+k)^2 - m^2}\right)$$

$$\xrightarrow{d\to 4} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(m^2 - p^2 z(1-z)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \quad \text{(B.7)}$$

Βιβλιογραφία

[1] M. Peskin, D. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Westview Press (1995).

[2] L. Ryder, "Quantum Field Theory" (Second Edition), Cambridge University Press (1996).

[3] M. Kaku, "Quantum Field Theory: A modern Introduction", Oxford University Press (1993).

[4] A. Zee, "Quantum Field Theory in a Nutshell" (Second Edition), Princeton University Press (2010).

[5] S. Coleman, "Aspects of Symmetry", Cambridge University Press (1985).

[6] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations", Cambridge University Press (1995).

[7] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Volume II: Modern Applications", Cambridge University Press (1996).

[8] R. Rivers, "Path Integral Methods in Quantum Field Theory", Cambridge University Press (1987).

[9] J. Zinn-Justin, "Path Integrals in Quantum Mechanics", Oxford University Press (2005).

[10] J. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press (1984).

[11] C. Itzykson, J.-B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill (1980).

[12] M. Srednicki, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press (2007).

[13] K. Huang, "Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals", John Wiley & Sons (2010).

[14] B. Ydri, "Quantum Field Theory and Particle Physics", lecture notes.

[15] D. Tong, "Quantum Field Theory", lecture notes.

[16] M. Serone, "Notes on Quantum Field Theory", lecture notes.

[17] Γ. Κουτσούμπας, "Σημειώσεις Θεωρητικής Φυσικής", Πρόχειρες σημειώσεις μαθήματος.

[18] Κ. Φαράκος, "Κβαντομηχανική II ", Πρόχειρες σημειώσεις μαθήματος.