



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΜΒΑΘΥΝΣΗ ΣΤΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ
ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Κ. ΣΠΥΡΟΥ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

Η ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, πέρα από την προσωπική προσπάθεια, ήταν αποτέλεσμα της εξαιρετικής συνεργασίας μου με ανθρώπους που με υποστήριξαν έμπρακτα.

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Κ. Σπύρου για την εμπιστοσύνη του να μου αναθέσει και να επιβλέψει την εργασία μου και για την -ανά πάσα στιγμή- αμέριστη καθοδήγηση του σε όλα τα στάδια της εργασίας. Επιπλέον, τον ευχαριστώ για την υπομονή, την κατανόηση και τον σεβασμό του στους προσωπικούς μου ρυθμούς εκτέλεσης της εργασίας. Ευχαριστώ, επίσης, τον διδάκτορα κ. Ν. Θεμελή για την βοήθειά του και τις συμβουλές του πάνω στη χρήση και την εκτέλεση του υπολογιστικού προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε όπως και τον υποψήφιο διδάκτορα Ι. Κοντολέφα για τις κατευθύνσεις και τις εναλλακτικές λύσεις που μου πρότεινε. Τέλος, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Χ. Σπανδωνίδα για την βοήθειά του στην προετοιμασία της πειραματικής διαδικασίας καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα Π. Αναστόπουλο για την καταλυτική συμβολή του στην εκτέλεση του πειράματος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2	ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ	
2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
2.2	ΘΕΜΕΛΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	4
3	ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ	
3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	10
3.2	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	10
3.3	ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ ΜΙΚΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΚΛΙΣΗΣ	12
3.4	ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ ΜΕΓΑΛΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΚΛΙΣΗΣ.....	14
4	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	18
4.2	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	18
4.2.1	ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ	18
4.2.2	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	19
4.3	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ \overline{GZ}	21
4.3.1	ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΑΝΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	21
4.3.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	33
4.3.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΥΨΟΥΣ \overline{GM}	38
4.4	ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΓΙΑ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΤΕΡΕΟ..	40
4.4.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	40
4.4.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΥΨΟΥΣ \overline{GM}	42
5	ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	44
5.2	ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	44
5.3	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	45
5.4	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.....	49
5.5	ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΝΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.....	51
6	ΘΕΩΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	59
6.2	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	59
6.3	ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ.....	62

7	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	
7.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	70
7.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	70
8	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	
8.1	ΣΚΟΠΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ	82
8.2	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ	82
8.3	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	84
8.4	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	85
8.5	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	90
9	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	92
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96

1 ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ευρύτερο αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη των καταστάσεων ισορροπίας επιπλεόντων σωμάτων. Έναυσμα αλλά και προϋπόθεση για την μελέτη ενός τέτοιου θέματος αποτέλεσε η παρακολούθηση του μαθήματος του 9^{ου} εξαμήνου σπουδών «Ευστάθεια Διατοιχισμού Πλοίου και Υπόβαθρο Κανονισμών».

Στην πραγματικότητα, οι έννοιες της πλευστότητας και της ευστάθειας στα επιπλέοντα σώματα και κατ' επέκταση στα πλοία κάθε άλλο παρά σύγχρονες είναι, αφού έχουν απασχολήσει έντονα τον άνθρωπο ήδη από την αρχαιότητα. Η κρισιμότητα και σπουδαιότητα των εννοιών αυτών έγκειται στο γεγονός ότι ο έλεγχος τους εγγυάται την ασφάλεια του πλεούμενου έναντι βύθισης ή ανατροπής. Η πλευστότητα, ως γνωστόν, σχετίζεται με την δυνατότητα ισορροπίας του σώματος στην όρθια θέση υπό την επίδραση των δυνάμεων βάρους και άντωσης, ενώ η ευστάθεια έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του σώματος όταν απομακρυνθεί απ' την θέση ισορροπίας. Τα ζητήματα ευστάθειας και πλευστότητας αν και φαντάζουν οικεία, σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να θεωρηθούν ως τετριμμένα, καθώς η περιοχή παρουσιάζει επιστημονικό βάθος και επίσης συχνά εμφανίζονται παράμετροι ή δεδομένα που δεν έχουν τύχει αρκετής προσοχής.

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε, λοιπόν, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας αν και περιορίζεται στη διερεύνηση της στατικής ευστάθειας επιπλεόντων πρισμάτων (διδιάστατη θεωρία), εξετάζει την επίδραση δυναμικών παραμέτρων -όπως το σχετικό ειδικό βάρος ή το σχήμα της εγκάρσιας τομής του σώματος- στα χαρακτηριστικά ευστάθειάς τους. Η ανάλυση του θέματος της στατικής ευστάθειας προς αυτήν την κατεύθυνση πυροδοτήθηκε από την δημοσίευση των Erdos , Schibler και Herdon [1], στην οποία εξετάζεται η ισορροπία συμμετρικών επιπλεόντων σωμάτων (τετραγωνικό πρίσμα) και το περίφημο "σπάσιμο της συμμετρίας" από σκοπιά ενεργειακή. Με βάση την αρχή ότι οι θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα/ελάχιστα της καμπύλης δυναμικής ενέργειας, η μελέτη της ισορροπίας επεκτάθηκε στις περιπτώσεις μη ομογενών σωμάτων ορθογωνικής διατομής για ένα εύρος λόγου διαστάσεων. Με αυτόν τον τρόπο διαπιστώθηκε πώς επιδρά στη συμπεριφορά του πρίσματος η διαταραχή των παραμέτρων συμμετρίας.

Η μελέτη των καταστάσεων ισορροπίας ενισχύθηκε, επιπλέον, από την γεωμετρική προσέγγιση του φαινομένου κατά την οποία προσδιορίστηκαν οι αναλυτικές εκφράσεις των καμπυλών στατικής ευστάθειας (μοχλοβραχίονες επαναφοράς), στις οποίες συμπεκνώνονται τα χαρακτηριστικά ευστάθειας των σωμάτων για το εξεταζόμενο εύρος γωνιών. Κύριο εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε τόσο για την παραγωγή αυτών των αναλυτικών σχέσεων όσο και των ζητούμενων διαγραμμάτων αποτέλεσε το υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica. Επίσης, στο πλαίσιο της εργασίας αυτής εκπονήθηκε πείραμα με σκοπό τη διαπίστωση του προβλήματος της ευστάθειας πρισμάτων σε πραγματικές συνθήκες, την παρατήρηση και την σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα θεωρητικά.

Η διπλωματική εργασία περιλαμβάνει εννέα κεφάλαια. Τα κεφάλαια 2, 3 και 6 είναι αμιγώς θεωρητικά, ενώ στα κεφάλαια 4, 5 και 7 αναπτύσσεται, πέραν του σχετικού θεωρητικού υποβάθρου, η μεθοδολογία και παρατίθενται αποτελέσματα και συμπεράσματα. Στο κεφάλαιο 8 περιγράφεται όλη η πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε και παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα, ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο συγκεντρώνονται τα συγκριτικά αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας.

Συγκεκριμένα, μετά την γενική εισαγωγή (κεφάλαιο 1) ακολουθεί το κεφάλαιο 2, στο οποίο γίνεται ιστορική αναδρομή στα θέματα ευστάθειας από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Ακόμη, γίνεται ειδική μνεία στους θεμελιωτές της θεωρίας ευστάθειας.

Στο κεφάλαιο 3 υπενθυμίζονται οι βασικές έννοιες της υδροστατικής. Επιπλέον, διακρίνουμε την ευστάθεια σε τέτοια μικρών και μεγάλων γωνιών εγκάρσιας κλίσης. Σε κάθε μία θεώρηση από αυτές παρατίθενται οι σχέσεις που την διέπουν, ενώ στην περίπτωση των μεγάλων γωνιών γίνεται ειδική αναφορά στις καμπύλες του μοχλοβραχίονα επαναφοράς, στα χαρακτηριστικά τους και στο φαινόμενο του αρνητικού αρχικού μετακεντρικού ύψους.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία για τον γεωμετρικό υπολογισμό των καμπυλών του μοχλοβραχίονα επαναφοράς, καθώς η έκφραση αυτών διαφοροποιείται ανάλογα με τη γεωμετρία της βυθισμένης επιφάνειας. Εν συνεχεία, παρατίθενται τα αποτελέσματα που συνίστανται σε παραμετρικά διαγράμματα με παραμέτρους τον λόγο των διαστάσεων της διατομής και τον λόγο ειδικών βαρών στερεού-ρευστού τόσο για την περίπτωση ομογενούς όσο και μη ομογενούς στερεού. Τέλος, και για τις δύο αυτές περιπτώσεις μελετώνται και αναπαρίστανται τα χαρακτηριστικά αρχικής ευστάθειας μέσω των καμπυλών του αρχικού μετακεντρικού ύψους.

Στο κεφάλαιο 5, μετά από μια σύντομη ιστορική αναφορά, περιγράφεται το θεωρητικό υπόβαθρο της ενεργειακής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε, δηλαδή της αναζήτησης θέσεων ισορροπίας μέσω των τοπικών ακρότατων της δυναμικής ενέργειας. Ακόμη, παρουσιάζονται οι αναλυτικές εκφράσεις της δυναμικής ενέργειας σε κάθε περιοχή γωνιών εγκάρσιας κλίσης, με σκοπό την παραγωγή των διαγραμμάτων ισορροπίας των πρισμάτων. Αρχικά, εξετάζουμε το πρόβλημα της απόλυτης συμμετρίας ενός ομογενούς τετραγωνικού πρίσματος, ενώ στη συνέχεια εφαρμόζουμε διαταραχές στις παραμέτρους συμμετρίας, ώστε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές στην απόκριση του συστήματος.

Το κεφάλαιο 6 κρίθηκε απαραίτητο για την κατανόηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της ενεργειακής μεθόδου. Εδώ παρατίθενται τα βασικά στοιχεία θεωρίας των δυναμικών συστημάτων καθώς επίσης και οι χαρακτηριστικές μορφολογίες των αποκρίσεων που τα χαρακτηρίζουν (διακλαδώσεις).

Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται όλα τα γραφικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου, που έγκειται στην περίπτωση της απόλυτης συμμετρίας του συστήματος αλλά και στις περιπτώσεις διαταραχής του.

Το κεφάλαιο 8 αφιερώνεται στην περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε και του πειραματικού εξοπλισμού που χρησιμοποιήσαμε. Ακολουθεί η

παράθεση αλλά και η επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων καθώς και η σύγκριση τους με τα αντίστοιχα θεωρητικά.

Στο κεφάλαιο 9 συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα της εργασίας που προέκυψαν από την εφαρμογή των τριών παρατιθέμενων μεθόδων (γεωμετρική, ενεργειακή, πειραματική) σε συγκριτικά διαγράμματα, ενώ τελευταία διατυπώνονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, πριν προχωρήσουμε στο κυρίως μέρος της εργασίας αυτής, θεωρείται απαραίτητη η αναφορά των βασικών στόχων της :

- Η πλήρης κατανόηση του φαινομένου της στατικής ευστάθειας και του μηχανισμού “επιπλοής” ενός επιπλέοντος σώματος μετά την διαταραχή του μέσω του υπολογισμού και της γραφικής αναπαράστασης του βασικού εργαλείου περιγραφής του (μοχλοβραχίονας επιπλοής).
- Η μελέτη επίδρασης των παραμέτρων του προβλήματος στα χαρακτηριστικά ευστάθειας των επιπλεόντων σωμάτων.
- Η μελέτη του φαινομένου της στατικής ευστάθειας από ενεργειακή σκοπιά, δηλαδή η εξέταση της απόκρισης του επιπλέοντος σώματος-ρευστού -ως δυναμικού συστήματος- στις διάφορες διαταραχές συμμετρίας.
- Η επαφή με το θέμα της ευστάθειας σε επίπεδο πειραματικό μέσω της εκτέλεσης σχετικού πειράματος, η αναπαράσταση των θεωρητικών αποτελεσμάτων σε πραγματικές συνθήκες και η παρατήρηση των αποκρίσεων του συστήματος.
- Η σύγκριση των αποτελεσμάτων ευστάθειας από την εφαρμογή των τριών μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν.
- Η εξοικείωση με το πολύτιμο -για την διεκπεραίωση του υπολογιστικού κομματιού της εργασίας- πρόγραμμα Mathematica.

2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εμπειρική κατανόηση της σημασίας της ευστάθειας είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εν ύδατι δραστηριότητα του ανθρώπου και επομένως τόσο μακράιωνα όσο και εκείνη. Οι βασικές αρχές, όμως, για την επεξήγηση και την ποσοτική εκτίμηση του φυσικού φαινομένου της υδροστατικής ευστάθειας επιπλεόντων συστημάτων διατυπώθηκαν και θεμελιώθηκαν από τον Αρχιμήδη κατά την αρχαιότητα, αν και η ανάλυσή του περιορίστηκε σε απλές γεωμετρίες. Αντίθετα, η εκτίμηση της ευστάθειας πλοίου -επιπλέον σώμα σύνθετης γεωμετρίας- έγινε πρακτικά εφικτή δύο χιλιετίες αργότερα και μετά την έλευση του απειροστικού λογισμού. Στη σύγχρονη εποχή ακολούθησαν πολλές σημαντικές συμβολές από επιστήμονες όπως οι Stevin και Huygens, χωρίς ωστόσο μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα να έχει διατυπωθεί και δημοσιευθεί κάποια ολοκληρωμένη επιστημονική θεωρία περί υδροστατικής ευστάθειας πλοίου. Οι Pierre Bouguer και Leonard Euler αποτέλεσαν τους θεμελιωτές της σύγχρονης θεωρίας της ευστάθειας πλοίου, οι οποίοι σχεδόν παράλληλα κατέληξαν σε σπουδαία αποτελέσματα για τα κριτήρια της υδροστατικής ευστάθειας. Συγκεκριμένα ο Bouguer πρωτοπόρησε εισάγοντας τις έννοιες του μετακέντρου και της μετακεντρικής ακτίνας καθώς και της αντίστοιχης θεωρίας, ενώ ο Euler είναι γνωστός για τον υπολογισμό της ροπής επαναφοράς για μικρές γωνίες κλίσης. Παρόλα αυτά, στην πράξη χρειάστηκαν αρκετά χρόνια για την εφαρμογή των μεθόδων τους και τελικά την ευρεία αποδοχή τους από επαγγελματίες.

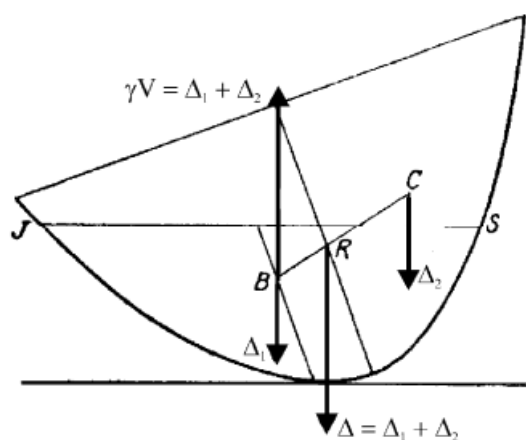
2.2 ΘΕΜΕΛΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Η πρώτη απόπειρα επιστημονικής προσέγγισης της ευστάθειας ξεκινάει με τον Αρχιμήδη τον Συρακούσιο (287-212 Π.Χ) και τους δύο τόμους του βιβλίου “Περί των εν ύδατι εφισταμένων ή περί οχομένων”. Επιφανής μαθηματικός και μηχανικός της αρχαιότητας, υπήρξε εισηγητής των βασικών νόμων της υδροστατικής επιπλεόντων σωμάτων. Η περίφημη Αρχή του Αρχιμήδη (Τόμος Ι, Πρόταση 5) -σήμερα εκφρασμένη ως $\Delta = \gamma V$ - ορίζει ότι: “Όποιοδήποτε στερεό ελαφρύτερο από το ρευστό στο οποίο ισορροπεί θα βυθιστεί τόσο, ώστε το βάρος του σώματος να είναι ίσο με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού” [2]. Η αρχή αυτή απορρέει από την απλή παρατήρηση ότι ένα σώμα δύναται να επιπλέει στο νερό, αν και υπόκειται στη δύναμη του βάρους του, εξαιτίας μιας ανωστικής δύναμης (*άνωση*) που εφαρμόζεται στο κέντρο του βυθισμένου όγκου του.

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσέξει κανείς ότι ο Αρχιμήδης φαίνεται να διατυπώνει περισσότερο μια συνθήκη ισορροπίας παρά μια συνθήκη ευστάθειας. Όμως, όπως έγινε αρκετά πρόσφατα γνωστό [3], ο Αρχιμήδης είχε ασχοληθεί και με τις προϋποθέσεις

ευστάθειας ομογενών επιπλεόντων σωμάτων απλής μορφής (σφαίρα και τμήμα παραβολοειδούς), εισάγοντας την ιδέα της ισορροπίας ζευγών δυνάμεων ή ροπών [4]. Στην περίπτωση αυτή, το κριτήριο ευστάθειας αξιολογήθηκε γεωμετρικά εξετάζοντας τον μοχλοβραχίονα των δυνάμεων βάρους και άντωσης (Σχήμα 2.1).

Ωστόσο, η εφαρμογή του κριτηρίου ευστάθειας περιορίζεται στην ειδική περίπτωση του ομογενούς σώματος απλής παραβολικής γεωμετρίας. Δεν επεκτείνεται σε επιπλέοντα μη ομογενή σώματα σύνθετης γεωμετρίας όπως τα πλοία. Παρόλα αυτά, με την εργασία του αυτή, που συνιστά το απαύγασμα του έργου του, έθεσε τις βάσεις της ευστάθειας επιτρέποντας σε επόμενους να ασχοληθούν περαιτέρω με τη μελέτη της ειδικής περίπτωσης του πλοίου.



Σχήμα 2.1:Ροπές και μοχλοβραχίονες επαναφοράς για κεκλιμένο ομογενές παραβολοειδές, βασισμένο στο βιβλίο του Αρχιμήδη “Περί οχουμένων “ ,Τόμος II ([4])

Πολύ αργότερα, στις αρχές του 17^{ου} αιώνα και εμπνευσμένοι από το έργο του Αρχιμήδη, ο Φλαμανδός Simon Stevin (1548-1620) και ο Γερμανός Christiaan Huygens (1629-1695) μελέτησαν την ισορροπία επιπλεόντων σωμάτων. Ο Stevin [5] ήταν ο πρώτος σύγχρονος επιστήμονας που αναβίωσε τη μελέτη της υδροστατικής και την εφάρμοσε στα πλοία. Στο σημαντικό του έργο “ De Beghinselen des Waterwichts ” που εκδόθηκε στη Δανία το 1586 ασχολείται με τις αρχές της υδροστατικής και της υδραυλικής. Εισάγει την ιδέα της “υδροστατικής πίεσης” καθώς επίσης και τα στοιχειώδη της θεμελιώδους για την ευστάθεια του πλοίου έννοιας του μετακέντρου.

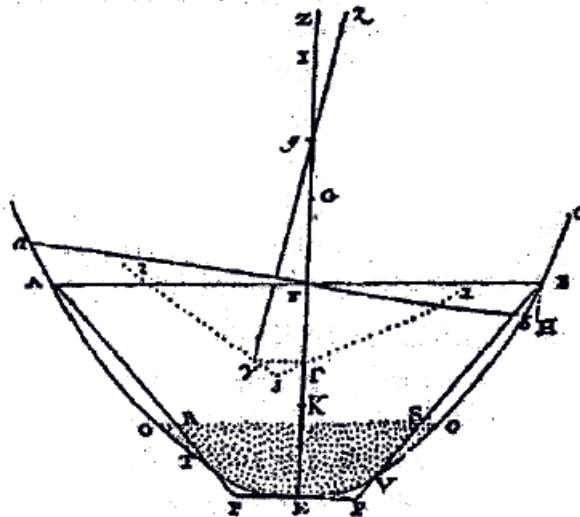
Συγκρινόμενος με τον Stevin, η δουλειά του Huygens [6] αν και βασίζεται σε γεωμετρικές μεθόδους, όπως άλλωστε είθισται την εποχή εκείνη, εντούτοις χαρακτηρίζεται από εντονότερο επιστημονικό ύφος. Πιο συγκεκριμένα, στο έργο του “De iis quae liquido supernatant” (1650) εφαρμόζει τη μεθοδολογία υπολογισμού της ευστάθειας επιπλεόντων σωμάτων του Αρχιμήδη και την επεκτείνει σε πιο σύνθετες γεωμετρικές εφαρμογές (επιπλέοντες κώνους, παραλληλεπίπεδα και κυλίνδρους). Επίσης, αξιοσημείωτη είναι η

παρατήρησή του ότι για ομογενή πρισματικά στερεά το ειδικό τους βάρος και ο λόγος αναλογίας των πλευρών τους συνιστούν σημαντικές παραμέτρους της υδροστατικής ευστάθειας.

Στην πραγματικότητα, όλοι οι επιστήμονες που εργάστηκαν πάνω στην υδροστατική ευστάθεια επιπλεόντων στερεών μεταξύ του 15^{ου} και 17^{ου} αιώνα φαίνεται απλά να κατανοούν ό,τι θεμελιώθηκε από τον Αρχιμήδη, χωρίς να έχουν να επιδείξουν κάποια καινοτόμα μεθοδολογία ή επέκταση σε γεωμετρικές πραγματικών πλοίων. Αυτό άρχισε να γίνεται τον 18^ο αιώνα με την έλευση και την εφαρμογή του λογισμού.

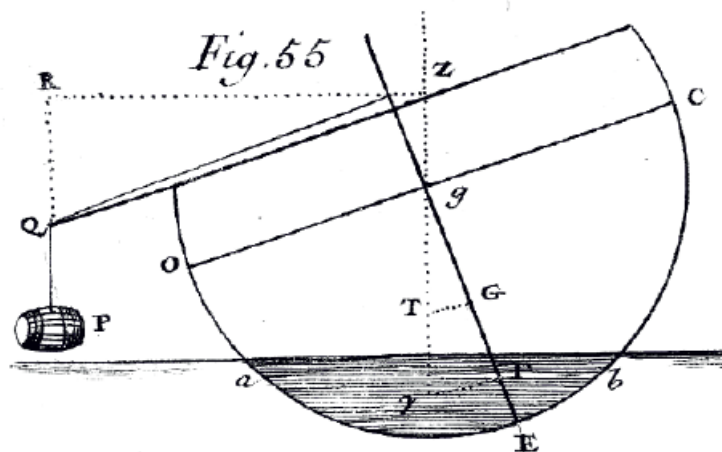
Στα μέσα του 18^{ου} αιώνα η μελέτη της ευστάθειας πλοίου σε διατοιχισμό συνεχίστηκε από τους Pierre Bouguer (1698-1758) και Leonard Euler (1707-1783), οι οποίοι δημοσιεύουν δύο κορυφαίες εργασίες πάνω στις αρχές της σύγχρονης ευστάθειας πλοίου. Αρχικά ο Bouguer, Γάλλος επιστήμονας και μέλος της Γαλλικής Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών, δημοσιεύει το 1746 την εργασία "Traite' du Navire" και εν συνεχεία το 1749 δημοσιεύεται η εργασία "Scientia Navalis" του Euler από την Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης. Δεν θα πρέπει, βέβαια, να αγνοηθεί και η σημαντική συνεισφορά του Daniel Bernoulli στο θέμα της ευστάθειας.

Ο Bouguer [7] στην εργασία του αναλύει λεπτομερώς το ρόλο του μετακέντρου. Έχοντας προσδιορίσει το κέντρο άντωσης του βυθισμένου όγκου, εξηγεί γεωμετρικά γιατί επιλέγει το μετάκεντρο ως αρχικό κριτήριο ευστάθειας χρησιμοποιώντας το σχήμα 2.2. Αναφέρει ότι τα κέντρα βάρους και άντωσης βρίσκονται πάντα επί της ίδιας καθέτου, χωρίς ωστόσο η γεωμετρία να διατηρείται σταθερή, λόγω της κίνησης του πλοίου. Αν το κέντρο βάρους του πλοίου είναι πολύ ψηλά καθώς αυτό μετακινείται –έστω και λίγο- από την όρθια σε μια κεκλιμένη θέση, δεν είναι πλέον στατικά ευσταθές. Αυτό γιατί, στην κεκλιμένη θέση μετατοπιζόμενο το νέο κέντρο άντωσης δεν βρίσκεται πλέον επί της καθέτου του κέντρου βάρους, ενώ οι νέες θέσεις των δύο κέντρων είναι τέτοιες ώστε το ζεύγος των δυνάμεων βάρους-άντωσης να τείνει να ανατρέψει το πλοίο, καθιστώντας το έτσι ασταθές. Αντίθετα, αν το κέντρο βάρους βρίσκεται κάτω από την τομή των δυνάμεων άντωσης στην όρθια και κεκλιμένη θέση (δηλαδή το μετάκεντρο M), τότε το ζεύγος δυνάμεων βάρους-άντωσης είναι τέτοιο που τείνει να επαναφέρει το πλοίο στην οριζόντια θέση. Αναγνωρίζει, δηλαδή, τη σημασία του μετακέντρου, το οποίο περιορίζει την καθ' ύψος θέση του κέντρου βάρους καθιστώντας το πλοίο ευσταθές. Στην πραγματικότητα, ο Bouguer δεν χρησιμοποιεί τους όρους "ευσταθής" ή "ασταθής", αλλά αναφέρει αντιστοίχως το κέντρο βάρους κάτωθεν ή άνωθεν του μετακέντρου.



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα μετακέντρου του Bouguer, ([7],fig. 54)

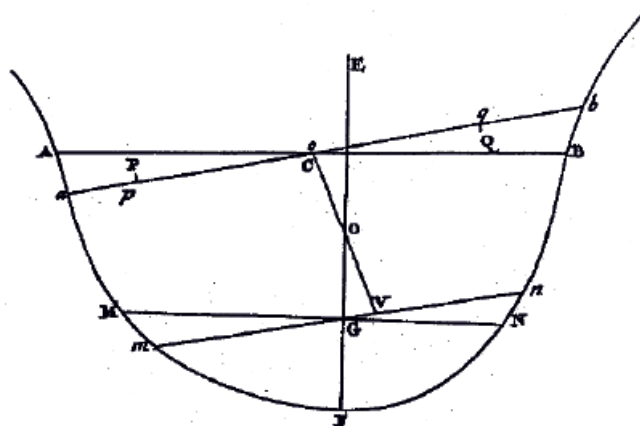
Ο όρος *μετακεντρικό ύψος*, δηλαδή η απόσταση \overline{GM} του μετακέντρου από το κέντρο βάρους, καθιερώνεται από τον Bouguer και προτείνεται σαν το μέτρο της ευστάθειας ενός πλοίου, ενώ εξελίσσεται στην σύγχρονη έκφραση για τον καθορισμό της ευστάθειας ενός πλοίου σε διατοιχισμό. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφει για πρώτη φορά πως μπορεί να αξιολογηθεί το πείραμα ευστάθειας -του οποίου η ιδέα ανήκει στον Hoste- για τον υπολογισμό του μετακεντρικού ύψους \overline{GM} . Με το σχήμα 2.3 δείχνει πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα αναρτώμενο βάρος, ώστε να προσδώσουμε εγκάρσια κλίση στο πλοίο και στη συνέχεια να την υπολογίσουμε. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα των όμοιων τριγώνων, αποδεικνύει ότι ο λόγος του αναρτώμενου βάρους προς το εκτόπισμα του πλοίου είναι ίσος με τον λόγο του \overline{GM} επί την γωνία κλίσης προς την απόσταση κατά την οποία μετακινείται το βάρος ($\tan a = \frac{P \cdot y}{\Delta \cdot \overline{GM}}$). Επομένως, υποθέτοντας μικρές γωνίες κλίσης, το μετακεντρικό ύψος \overline{GM} μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας, χωρίς να γνωρίζουμε την ακριβή θέση του μετακέντρου M .



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα πειράματος ευστάθειας του Bouguer, ([7], Fig. 55)

Ο Bouguer κατάφερε, επίσης, να προσδιορίσει την απόσταση του κέντρου άντωσης από το μετάκεντρο, δηλαδή την μετακεντρική ακτίνα \overline{BM} , ως το λόγο της ροπής της ισάλου επιφάνειας περί τον διαμήκη άξονα συμμετρίας προς το βυθισμένο όγκο του πλοίου ($\overline{BM} = \frac{I_T}{\nabla}$), γεγονός σημαντικό, αφού το μετακεντρικό ύψος μπορούσε να υπολογιστεί - πλέον- γνωρίζοντας τη γεωμετρία της γάστρας και τη θέση του κέντρου βάρους από τη σχέση $\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG}$. Τέλος, ο Bouguer υπολόγισε τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς από τη σχέση $\overline{GZ} = \overline{GM} \sin \phi$. Έτσι, γνωρίζοντας το μετακεντρικό ύψος καθόριζε τη ροπή επαναφοράς και κατ' επέκταση την ευστάθεια.

Στη συνέχεια, ο Ελβετός Euler [8] δημοσιεύει την εργασία του συνεχίζοντας και βελτιώνοντας το έργο του Bernoulli. Σημειώνει ότι για την ισορροπία ενός ελεύθερα επιπλέοντος σώματος απαιτείται οι δυνάμεις βάρους και άντωσης να είναι ίσες σε μέγεθος, αντίθετες σε φορά και να επενεργούν στην ίδια κατακόρυφη ευθεία. Χρησιμοποιεί την λέξη "ευστάθεια" και την συσχετίζει με την απόκριση σε μια απειροστή διαταραχή της θέσης ισορροπίας. Ο Euler διαπιστώνει ότι η ροπή επαναφοράς συνιστά το κρίσιμο μέγεθος για την ύπαρξη ευστάθειας. Για την ακρίβεια, ορίζει το κριτήριο ευστάθειας ως εξής: "Η ευστάθεια ενός επιπλέοντος σώματος στην θέση ισορροπίας θα πρέπει να εκτιμηθεί από την ροπή επαναφοράς, αν το σώμα αποκλίνει από τη θέση ισορροπίας κατά μια απειροστή γωνία". Ο Euler διευκρινίζει περαιτέρω το κριτήριο αυτό διακρίνοντας τις περιπτώσεις της ασταθούς, ουδέτερης και ευσταθούς ισορροπίας, ενώ επισημαίνει την σημασία του υπολογισμού της ευστάθειας από την άποψη της ροπής επαναφοράς, αφού δεν αρκεί ένα πλοίο να είναι αρχικά ευσταθές, αλλά θα πρέπει να έχει ικανότητα επαναφοράς σε ενδεχόμενη διαταραχή του. Τέλος, με τη μέθοδο υπολογισμού σφηνών βυθιζόμενου και αναδυόμενου όγκου, ο Euler υπολογίζει τη ροπή επαναφοράς για απειροστή κλίση (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα για τον υπολογισμό της ροπής επαναφοράς με τη μέθοδο των σφηνών([8], fig. 39)

Μέχρι τη στιγμή εκείνη όποιες εργασίες ευστάθειας είχαν δημοσιευτεί αφορούσαν την περίπτωση των απειροστών διαταραχών. Μια πιο ευρεία επέκταση της θεωρίας της ευστάθειας πραγματοποιήθηκε στην Αγγλία, όταν ο Βρετανός μαθηματικός George Atwood με δύο εργασίες του που δημοσιεύθηκαν από την Βασιλική Ακαδημία του Λονδίνου το 1796 και το 1798 αντίστοιχα εξέτασε την κλίση πλοίων σε μεγάλες γωνίες στροφής. Στην πρώτη εργασία [9] ο Atwood επανεξετάζει τις βασικές αρχές της υδροστατικής ευστάθειας και τις εφαρμόζει για πεπερασμένες –πλέον- γωνίες στροφής. Μελετά την ευστάθεια ομογενών στερεών απλής γεωμετρίας στο εύρος μιας πλήρους στροφής και εντοπίζει πολλές θέσεις ισορροπίας, από τις οποίες ορισμένες είναι ευσταθείς. Στην εργασία αυτή γίνεται σαφές ότι η ευστάθεια θα πρέπει να εκτιμηθεί σε ένα εύρος πεπερασμένων γωνιών στροφής, καθώς η αρχική ευστάθεια από μόνη της είναι ανεπαρκής ως μέτρο ευστάθειας.

Στη δεύτερη εργασία του [10] με την σύμπραξη του Γάλλου Vial Du Clairbois, η έρευνα επεκτάθηκε σε πραγματικά πλοία και για πρώτη φορά εφαρμόστηκε αριθμητική ανάλυση για τον υπολογισμό των ροπών επαναφοράς σε μεγάλο εύρος γωνιών στροφής. Ο Atwood και ο Vial Du Clairbois εισήγαγαν ακόμη τον συμβολισμό \overline{GZ} για τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, ο οποίος εκτιμήθηκε αριθμητικά με τη μέθοδο των αναδυόμενων και καταδυόμενων σφηνών.

Οι αρχές του 19^{ου} αιώνα χαρακτηρίζονται από μια γενικευμένη προσπάθεια ερευνητών για την μελέτη των χαρακτηριστικών ευστάθειας. Χαρακτηριστική είναι αυτή του Γάλλου Charles Dupin [11], ο οποίος εισάγει τις έννοιες της γραμμής και της επιφάνειας άντωσης ενώ ακόμη προτείνει ότι ο αριθμός σημείων ισορροπίας επιπλέοντος σώματος είναι πάντα περιττός και ότι οι θέσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας εμφανίζονται εναλλάξ.

Παρά τις προγενέστερες εργασίες του Atwood που επεκτάθηκαν σε μεγάλο εύρος γωνιών στροφής, η θεώρηση αυτή εφαρμόστηκε σε πραγματικά πλοία όταν ο Ναυπηγός του Βρετανικού Ναυτικού Edward James Reed [12] εισήγαγε την χρήση των καμπυλών στατικής ευστάθειας (δηλαδή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} συναρτήσεως της γωνίας κλίσης).

3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

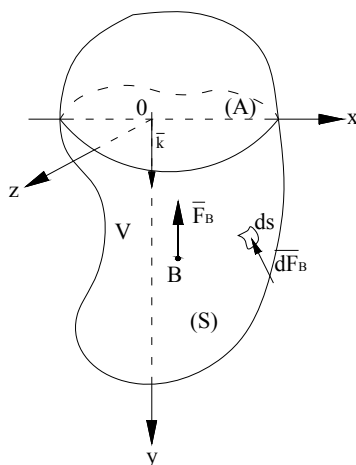
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όταν ένα σώμα βυθίζεται σε ένα ρευστό, τότε αναπτύσσονται δυνάμεις υδροστατικής φύσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε αναλυτικά τις δυνάμεις αυτές, τα χαρακτηριστικά τους καθώς και τις μαθηματικές τους εκφράσεις. Θα δούμε, επίσης, πως αλληλεπιδρούν με άλλες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και υπό ποιες προϋποθέσεις επιτυγχάνεται υδροστατική ισορροπία. Ακόμη, θα αναφερθούμε στο θεωρητικό υπόβαθρο της στατικής ευστάθειας εξεταζόμενης υπό το πρίσμα τόσο των μικρών μεταβολών όσο και των μεγάλων γωνιών εγκάρσιας κλίσης.

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σε κατάσταση ηρεμίας, ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και των υδροστατικών μόνο δυνάμεων πίεσεως. Αυτό γιατί ενδεχόμενες δυνάμεις συνεκτικότητας είναι μηδενικές, λόγω της απουσίας σχετικής κίνησης σώματος-ρευστού. Γνωρίζοντας, επομένως, από την μηχανική των ρευστών ότι η εμφάνιση διατμητικών δυνάμεων οφείλεται στις χωρικές παραγώγους της ταχύτητας, καταλήγουμε στο ότι η υδροστατική ισορροπία χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μόνο ορθών τάσεων, δηλαδή των πιέσεων p που ασκούνται κάθετα στην βρεχόμενη επιφάνεια και προς το εσωτερικό του σώματος (θλιπτικά φορτία).

Έστω, λοιπόν, στερεό σώμα τυχαίας μορφής με επιφάνεια ισάλων S , όγκο υφάλων V που επιπλέει σε ίσαλο με επιφάνεια A . Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θεωρείται ότι έχει προσανατολισμό όπως στο σχήμα 3.1 και την αρχή του πάνω στην ίσαλο που συμπίπτει με το επίπεδο xy .



Σχήμα 3.1: Δυνάμεις επιπλέοντος σώματος

Αρχικά, λόγω του βαρυτικού πεδίου στο οποίο βρίσκεται, το σώμα δέχεται τη δύναμη του βάρους του :

$$\vec{F}_G = \vec{k}g \iiint_V \rho_{body} dV \quad (3.1)$$

Η συνολική δύναμη που οφείλεται στις πιέσεις του ρευστού ονομάζεται άντωση και η αναλυτική της έκφραση είναι:

$$\vec{F}_B = - \iint_S p d\vec{s} \quad (3.2.α)$$

όπου:

$d\vec{s}$ το διάνυσμα που έχει μέτρο τη στοιχειώδη επιφάνεια ds και είναι κάθετο σε αυτή με φορά προς το εξωτερικό της βρεχόμενης επιφάνειας S

Από διανυσματική ανάλυση τελικά προκύπτει για την δύναμη της άντωσης η παρακάτω θεμελιώδης σχέση:

$$\vec{F}_B = -\vec{k}g \iiint_V \rho dV \quad (3.2.β)$$

ενώ για σταθερή πυκνότητα ρευστού:

$$\vec{F}_B = -\vec{k}\rho g \iiint_V dV = -\vec{k}\rho g V \quad (3.2.γ)$$

Η σχέση αυτή συνιστά τη γνωστή σε όλους μας αρχή του Αρχιμήδη και εκφράζει ότι η δύναμη άντωσης είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού και πάντα κατακόρυφη και αντίθετη του βάρους του σώματος. Επιπλέον, σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας το βάρος του σώματος είναι ίσο με την άντωση και κατ' επέκταση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού.

Οι δυνάμεις πίεσεως εκφράζονται μέσω της συνισταμένης κατακόρυφης δύναμης της άντωσης, η οποία εφαρμόζεται στο κέντρο όγκου των υφάλων (ή στο κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού) και καλείται κέντρο άντωσης. Ως γνωστόν, οι συντεταγμένες του κέντρου άντωσης προκύπτουν από τις εξής σχέσεις:

$$x_B = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV} = \frac{M_{yz}}{V} \quad (3.3.α)$$

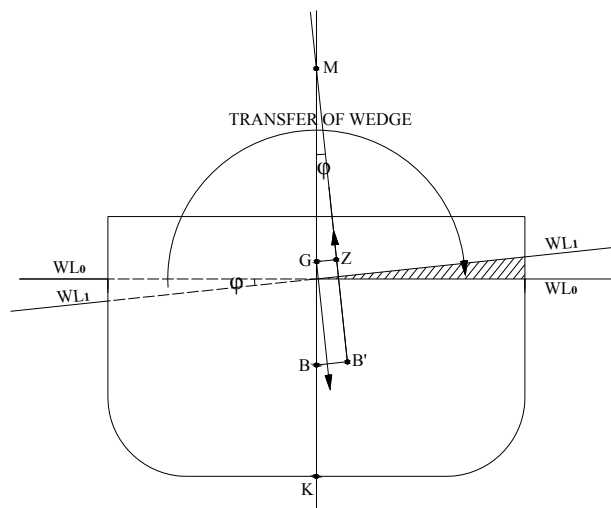
$$y_B = \frac{\iiint_V y dV}{\iiint_V dV} = \frac{M_{xz}}{\nabla} \quad (3.3.\beta)$$

$$z_B = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV} = \frac{M_{xy}}{\nabla} \quad (3.3.\gamma)$$

Τέλος, όπως είναι εύλογο, η υδροστατική ισορροπία δεν εξασφαλίζεται με την ισότητα των δυνάμεων βάρους και άντωσης, δηλαδή την ισορροπία δυνάμεων, αλλά απαιτείται και ισορροπία ροπών. Αυτό σημαίνει ότι για να ισορροπεί το σώμα, οι δυνάμεις βάρους και άντωσης θα πρέπει να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη, ούτως ώστε ο μοχλοβραχίονας του ζεύγους δυνάμεων να είναι μηδενικός .

3.3 ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ ΜΙΚΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΚΛΙΣΗΣ

Έστω ότι ένα πλοίο ή οποιοδήποτε άλλο επιπλέον σώμα αποκτήσει μια εγκάρσια κλίση υπό την επίδραση μιας ροπής. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το κέντρο άντωσης B να μετακινηθεί έτσι, ώστε η ροπή που δημιουργείται από το ζεύγος των δυνάμεων άντωσης-βάρους να ισορροπήσει την εξωτερική ροπή. Αντίθετα, το εκτόπισμα του σώματος θα διατηρηθεί σταθερό, δεδομένου ότι στο σώμα δεν επιδρούν άλλες εξωτερικές δυνάμεις. Αυτό συνεπάγεται ότι οι όγκοι των αναδυόμενων και καταδυόμενων σφηνών είναι ίσοι (Σχήμα 3.2). Για μικρές γωνίες στροφής φ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι κάθετοι στις νέες ισάλους που διέρχονται από τα αντίστοιχα κέντρα άντωσης τέμνονται με το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας σε ένα κοινό σημείο M , που καλείται *μετάκεντρο*.



Σχήμα 3.2 : Δυνάμεις άντωσης και βάρους σε κεκλιμένη κατάσταση μικρών εγκάρσιων στροφών

Το μέγεθος που συνιστά κριτήριο ευστάθειας για μικρές γωνίες κλίσης -αρχική ευστάθεια- είναι το μετακεντρικό ύψος \overline{GM} , το οποίο εκφράζεται ως εξής:

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG} \quad (3.4)$$

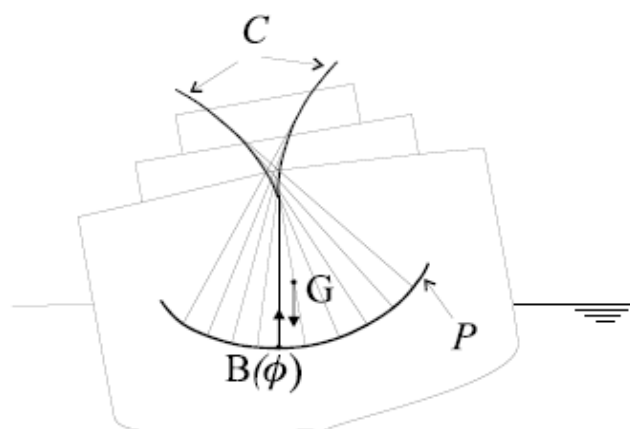
Η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου άντωσης \overline{KB} εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία της εγκάρσιας διατομής του βυθισμένου τμήματος, ενώ η καθ' ύψος θέση του κέντρου βάρους \overline{KG} εξαρτάται από την κατακόρυφη κατανομή του βάρους ή από τη γεωμετρία του επιπλέοντος σώματος, εφόσον αυτό θεωρηθεί ομογενές. Τέλος, η απόσταση \overline{BM} -η επονομαζόμενη μετακεντρική ακτίνα- εξαρτάται από την ροπή αδράνειας της ισάλου επιφάνειας ως προς τον διαμήκη άξονα συμμετρίας και συγκεκριμένα περιγράφεται από την σχέση:

$$\overline{BM} = \frac{I_T}{\nabla} \left(1 + \frac{\tan^2 \varphi}{2} \right) \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} \quad (3.5.a)$$

$$\overline{BM} = \frac{I_T}{\nabla} \quad (3.5.β)$$

Είναι σαφές ότι η θέση του κέντρου άντωσης μεταβάλλεται συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ . Όταν, λοιπόν, για σταθερό εκτόπισμα Δ το επιπλέον σώμα κλίνει προοδευτικά κατά αύξουσες γωνίες, έχει παρατηρηθεί ότι το κέντρο άντωσης κινείται στην καμπύλη (παραβολή) P , ενώ το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης P διαγράφει την

καμπύλη C (Σχήμα 3.3). Η καμπύλη C , ουσιαστικά, αποτελεί το γεωμετρικό τόπο του μετακέντρου, που είναι το σημείο γύρω από το οποίο στρέφεται το κέντρο άντωσης.

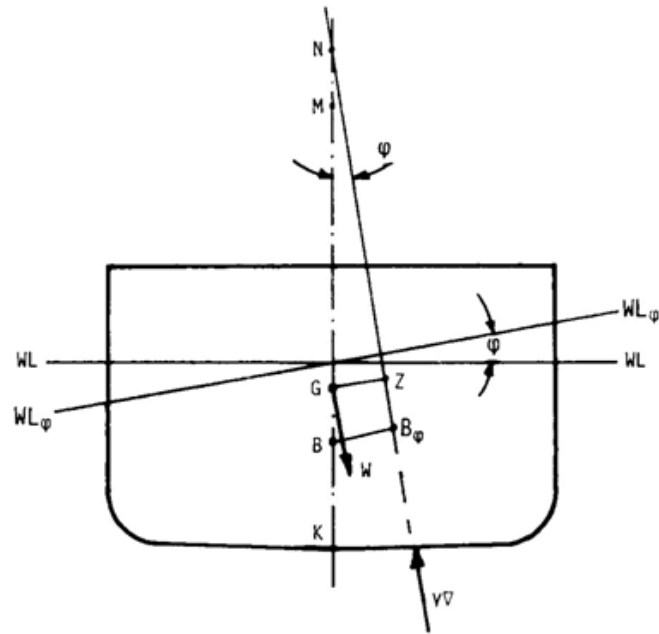


Σχήμα 3.3: Γεωμετρικοί τόποι του κέντρου άντωσης και του μετακέντρου

Για μικρές γωνίες στροφής, το σημείο τομής του διαμήκους άξονα συμμετρίας του σώματος με τον φορέα του κέντρου άντωσης συνιστά σημείο της καμπύλης C και κατ' επέκταση μετάκεντρο. Σε μεγαλύτερες, όμως, γωνίες το σημείο αυτό δεν βρίσκεται επί της καμπύλης C και στην περίπτωση αυτή καλείται *ψευδομετάκεντρο*.

3.4 ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ ΜΕΓΑΛΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΚΛΙΣΗΣ

Η συμπεριφορά των επιπλεόντων σωμάτων σε διατοιχισμό είναι κρίσιμης σημασίας, καθώς συνδέεται άμεσα με την ασφάλειά τους. Μέχρι αυτό το σημείο αναφερθήκαμε στη στατική ευστάθεια για μικρές γωνίες. Η ανατροπή όμως ενός σώματος είναι φαινόμενο που πραγματοποιείται –κανονικά- σε μεγάλες γωνίες κλίσης. Ο διατοιχισμός μεγάλου εύρους είναι ποιοτικά πολύ διαφορετικός από αυτόν σε μικρές γωνίες κλίσης, αφού παύει να είναι γραμμικός. Για το λόγο αυτό, η θεωρία της προηγούμενης ενότητας δεν ισχύει, ενώ τα χαρακτηριστικά στατικής ευστάθειας σε μεγάλα εύρη γωνιών προβλέπονται –πλέον- με τη βοήθεια του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} , που εκφράζει την απόσταση μεταξύ του κέντρου βάρους και της καθέτου που άγεται από το κέντρο άντωσης.



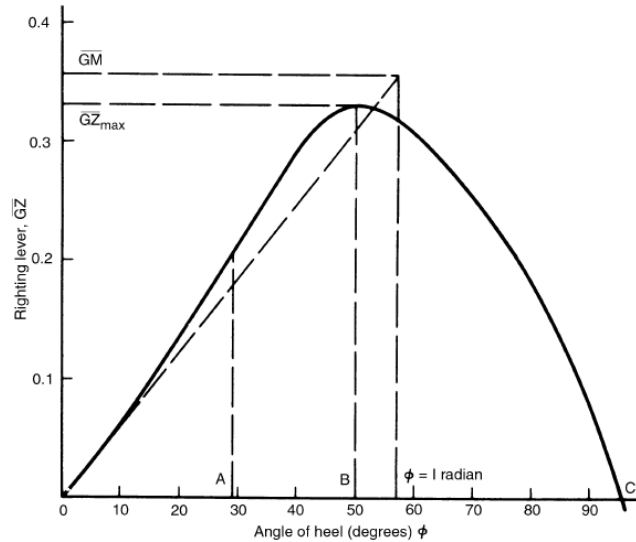
Σχήμα 3.4 : Δυνάμεις άντωσης και βάρους σε κεκλιμένη κατάσταση μεγάλων εγκάρσιων στροφών

Όπως προκύπτει γεωμετρικά από το Σχήμα 3.4, ο μοχλοβραχίονας δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{GZ} = \overline{GN} \sin \varphi = (\overline{KB} + \overline{BM} + \overline{MN} - \overline{KG}) \sin \varphi = (\overline{GM} + \overline{MN}) \sin \varphi \quad (3.6)$$

Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μοχλοβραχίονας ευστάθειας για ένα σώμα που πλέει σε εκτόπισμα Δ συντίθεται από δύο όρους. Ο ένας όρος $\overline{GM} \sin \varphi$ καλείται ευστάθεια λόγω αρχικού μετακεντρικού ύψους (\overline{GM} -stability) και εξαρτάται -κατά τα προηγούμενα- από την κατακόρυφη κατανομή του βάρους και την αρχική γεωμετρία των υφάλων, ενώ ο άλλος όρος $\overline{MN} \sin \varphi$ εξαρτάται από τη γεωμετρία των υφάλων στην τελική θέση και ονομάζεται υπόλοιπη ευστάθεια (residuary stability).

Αν χαράξουμε την καμπύλη του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ , θα προκύψει το χαρακτηριστικό διάγραμμα της μορφής του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 3.5: Χαρακτηριστικό διάγραμμα του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ

Αρχικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $\varphi \rightarrow 0$ ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς απλοποιείται στην μορφή $\overline{GZ} = \overline{GM}\varphi$, ενώ η κλίση του στη γωνία $\varphi = 0$ προκύπτει ίση με την τιμή του μετακεντρικού ύψους, αφού $\left. \frac{d\overline{GZ}}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \overline{GM}$. Γραφικά, υπολογίζεται από την

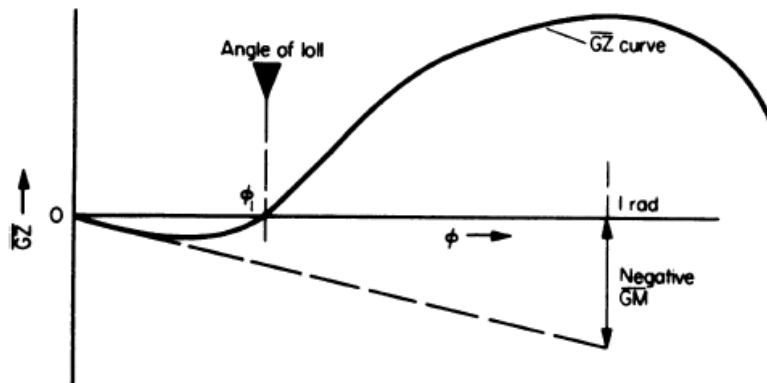
εφαπτομένη της καμπύλης $\overline{GZ}(\varphi)$ στη γωνία $\varphi = 0$ για γωνία εγκάρσιας κλίσης $\varphi = 1 \text{ rad}$. Στο σημείο αυτό γίνεται αντιληπτό γιατί η εξέταση της ευστάθειας με μόνο κριτήριο την τιμή του μετακεντρικού ύψους \overline{GM} δεν αρκεί για να εκτιμηθεί γενικότερα η ευστάθεια. Συγκεκριμένα, ανάλογα με τη μορφή της καμπύλης $\overline{GZ}(\varphi)$ σε μικρές γωνίες, δηλαδή αν η

κλίση της καμπύλης παρουσιάζει αυξητικό $\left(\frac{d^2\overline{GZ}}{d\varphi^2} > 0 \right)$ ή μειωτικό ρυθμό $\left(\frac{d^2\overline{GZ}}{d\varphi^2} < 0 \right)$ ή

ακόμα αν λαμβάνει αρνητικές τιμές, μπορούμε να αξιολογήσουμε την αρχική ευστάθεια, αλλά σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτό τη συμπεριφορά του επιπλέοντος σώματος σε μεγαλύτερες γωνίες. Αυτό σημαίνει ότι πέρα από το μετακεντρικό ύψος \overline{GM} υπάρχουν και πολλά ακόμα αξιόλογα χαρακτηριστικά για την αξιολόγηση της ευστάθειας, όπως η μέγιστη τιμή της καμπύλης $\overline{GZ}(\varphi)$, το εύρος της (η γωνία ανατροπής στην οποία ο μοχλοβραχίονας $\overline{GZ}(\varphi)$ μηδενίζεται) και το εμβαδόν κάτω από αυτή.

Τέλος, αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση του αρνητικού αρχικού μετακεντρικού ύψους, όπου το επιπλέον σώμα είναι αρχικά σε ασταθή ισορροπία, ενώ τελικά ισορροπεί ευσταθώς, αποκτώντας, ωστόσο, μόνιμη κλίση (angle of loll). Καθότι, όμως, η καμπύλη $\overline{GZ}(\varphi)$ είναι

συμμετρική ως προς τη μηδενική γωνία, το πλοίο θα παρουσιάζει τελικά δύο συμμετρικές και ευσταθείς θέσεις μόνιμης κλίσης, ενώ η θέση μηδενικής γωνίας θα παραμένει σταθερά ασταθής. Έτσι, το αρνητικό μετακεντρικό ύψος (λόγω φαινομένου lolling) συνοδεύεται από έντονες κινήσεις διατοιχισμού, που συνιστούν ένδειξη ότι η μόνιμη κλίση που χαρακτηρίζει το επιπλέον σώμα οφείλεται μάλλον στο αρνητικό \overline{GM} παρά σε κάποια επιδρούσα διέγερση.



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα μοχλοβραχίονα επαναφοράς στην περίπτωση αρνητικού αρχικού μετακεντρικού ύψους.

4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε το φαινόμενο της στατικής ευστάθειας γεωμετρικά. Θα βρούμε, δηλαδή, τις σχέσεις που περιγράφουν τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} για τις διάφορες γωνίες διαταραχής, με σκοπό την γραφική αναπαράστασή του μέχρι και την γωνία ανατροπής του στερεού σώματος. Εν συνεχεία, όντας παραμετρικές, οι σχέσεις του μοχλοβραχίονα επαναφοράς θα παράξουν μια σειρά γραφημάτων στα οποία θα παρουσιάζεται η επίδραση των διάφορων παραμέτρων στα χαρακτηριστικά της στατικής ευστάθειας του επιπλέοντος σώματος.

Η μελέτη του φαινομένου της πλευστότητας και της ευστάθειας στερεών σωμάτων αφορά στην περίπτωση ορθογωνικών πρισμάτων διαστάσεων $b \times h$. Οι διαστάσεις αυτές, όπως και η παράμετρος του λόγου ειδικών βαρών r , θα εμφανίζονται μέσα στις προκύπτουσες σχέσεις καθιστώντας τις παραμετρικές.

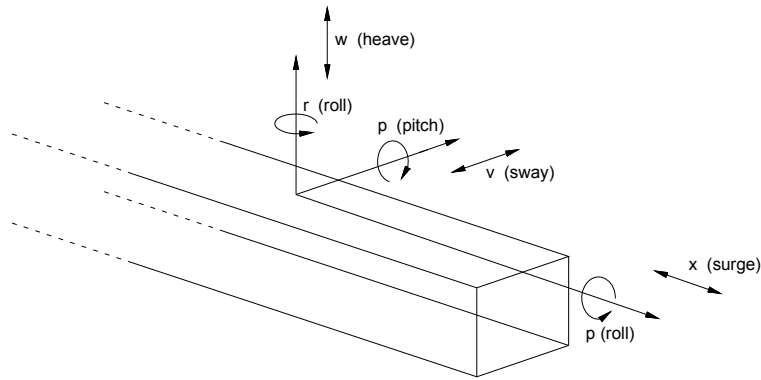
Επιπλέον, η μελέτη θα επεκταθεί και σε μη ομογενή στερεά σώματα, στα οποία η θέση του κέντρου βάρους τους θα μεταβάλλεται καθ' ύψος σενάριο καθόλα ρεαλιστικό στην περίπτωση των πλοίων.

Τέλος, στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρούμε πως το μήκος του στερεού δεν επιδρά στην συμπεριφορά του. Αυτό συμβαίνει όταν θεωρητικά το μήκος απειρίζεται ή πρακτικά όταν είναι πολύ μεγαλύτερο των άλλων διαστάσεων. Επομένως, στην περίπτωση επιπλέοντος στερεού ορθογωνικής διατομής απείρου μήκους (πρίσμα), η διδιάστατη και τριδιάστατη θεωρία συμπίπτουν.

4.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4.2.1 ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ένα επιπλέον σώμα συνιστά σύστημα έξι βαθμών ελευθερίας, τριών γραμμικών και τριών περιστροφικών. Οι επιτρεπόμενες κινήσεις που δύναται να εκτελέσει το σύστημα ως προς ένα σωματοπαγές σύστημα αναφοράς έγκεινται σε τρεις γραμμικές κινήσεις και τρεις περιστροφές, επί και περί αντίστοιχα του διαμήκη, εγκάρσιου και κάθετου άξονα του συστήματος.



Σχήμα 4.1: Οι κινήσεις επιπλέοντος σώματος

Από τις παραπάνω κινήσεις ιδιαίτερο ενδιαφέρον, λόγω της κρισιμότητάς τους, παρουσιάζουν η παράλληλη βύθιση (heave) και η εγκάρσια στροφή (διατοιχισμός). Αυτό γιατί, η πιθανότητα εγκάρσιας βύθισης ή ανατροπής είναι εν γένει αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διαμήκη για τον προφανή λόγο του μεγάλου λόγου μήκους - πλάτους. Έτσι, θα θεωρήσουμε παρακάτω ότι το επιπλέον σώμα αποκρίνεται αποκλειστικά κατά τους δύο προαναφερθέντες βαθμούς ελευθερίας.

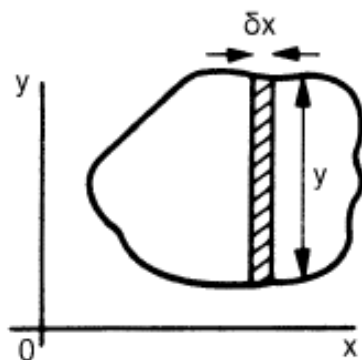
4.2.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Για τον υπολογισμό του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} που θα ακολουθήσει αποτελεί προϋπόθεση ο προσδιορισμός τόσο της επιφάνειας όσο και του κέντρου άντωσης του βυθισμένου τμήματος της εγκάρσιας διατομής του πρίσματος στις διάφορες γωνίες στροφής.

Αρχικά, στη γενική περίπτωση ενός σώματος τυχαίας μορφής, το εμβαδόν της επιφάνειας στο σύστημα Oxy - που καθορίζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες- είναι :

$$A = \int y dx \quad (4.1)$$

στο οποίο όλες οι στοιχειώδεις λωρίδες μήκους y και πλάτους dx αθροίζονται σε όλο το μήκος του x .

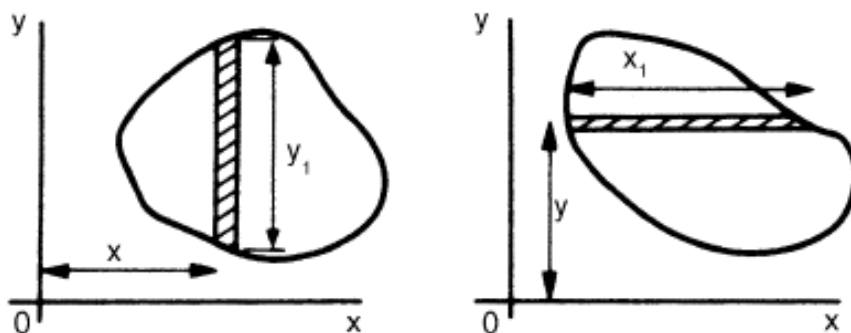


Σχήμα 4.2 : Εμβαδόν επιφανείας

Οι πρώτες ροπές επιφανείας γύρω από τους αντίστοιχους άξονες x, y , ως γνωστόν, δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_{yy} = \int xy_1 dx \quad (4.2.α)$$

$$M_{xx} = \int x_1 y dy \quad (4.2.β)$$



Σχήμα 4.3 : Πρώτες ροπές επιφανείας ως προς τους άξονες x, y

Τελικά, οι συντεταγμένες του κέντρου άντωσης x_B, y_B προκύπτουν ως εξής :

$$x_B = \frac{\int xy_1 dx}{\int y dx} \quad (4.3.α)$$

$$y_B = \frac{\int x_1 y dy}{\int y dx} \quad (4.3.β)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός των στοιχείων επιφανείας με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού -κατά τα προηγούμενα- είναι απαραίτητος στην περίπτωση επιφανειών τυχαίας γεωμετρίας. Αντίθετα, σε επιφάνειες απλής γεωμετρίας οι παραπάνω υπολογισμοί μπορούν να είναι και αμιγώς γεωμετρικοί. Για να διαφωτίσουμε και τους δύο αυτούς τρόπους, στο παρόν κεφάλαιο ο υπολογισμός των στοιχείων θα είναι γεωμετρικός, ενώ στο επόμενο αναλυτικός.

4.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ \overline{GZ}

4.3.1 ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΑΝΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς \overline{GZ} συνιστά την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του κέντρου βάρους και του κέντρου άντωσης του επιπλέοντος σώματος για τις διάφορες γωνίες διαταραχής του και εκφράζει την ικανότητα επαναφοράς του στην αρχική θέση ισορροπίας. Αποτελεί πολύτιμο εργαλείο στην μελέτη της ευστάθειας των επιπλεόντων σωμάτων, καθώς αναπαριστά την συμπεριφορά τους όταν αυτά υπόκεινται σε κάποια διαταραχή ισορροπίας.

Πριν τον γεωμετρικό υπολογισμό της έκφρασης του μοχλοβραχίονα επαναφοράς για την περίπτωση του ορθογωνίου πρίσματος, κρίνεται αναγκαίο να αναφερθούμε στις παραδοχές που κάναμε για την επίλυση του προβλήματος. Σύμφωνα με τη γνωστή σε όλους μας Αρχή του Αρχιμήδη, το βάρος σώματος που ισορροπεί στην επιφάνεια υγρού ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται ή διαφορετικά με την δύναμη άντωσης που ασκείται στο σώμα. Δεδομένου ότι το βάρος του σώματος διατηρείται σταθερό στις διάφορες γωνίες στροφής, τότε και το μέτρο της δύναμης της άντωσης θα παραμένει αμετάβλητο. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να δεχτούμε ότι το εμβαδόν της βυθισμένης εγκάρσιας επιφάνειας του επιπλέοντος στερεού κάτω από την ίσαλο επιφάνεια είναι σταθερό για όλες τις γωνίες στροφής. Επιπλέον, δεχόμαστε ότι το σώμα μετά τη διαταραχή του από την αρχική θέση ισορροπίας δύναται να εκτελεί μόνο στροφή περί τον διαμήκη άξονα (roll-διατοιχισμός) καθώς και εγκάρσιες μετατοπίσεις, αποκλείοντας έτσι την δυνατότητα οποιασδήποτε άλλης κίνησης. Τέλος, αγνοούμε τα όποια ενδεχόμενα μεταβατικά φαινόμενα στην απόκριση του συστήματος στερεού-ρευστού μετά την διαταραχή, με σκοπό την απλοποίηση του προβλήματος.

Θεωρούμε, λοιπόν, επιπλέον στερεό ορθογωνικής διατομής και απείρου μήκους (πρίσμα) με τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

b : πλάτος στερεού

h : ύψος στερεού

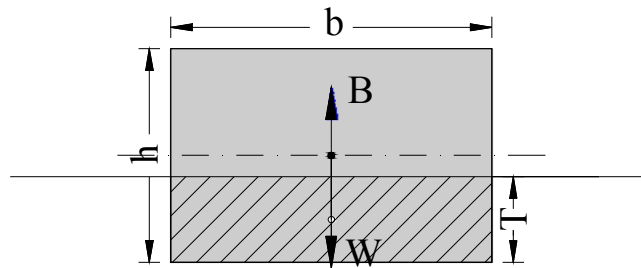
l : μήκος του πρίσματος ($l \rightarrow \infty$)

$\lambda = h/b$: λόγος των πλευρών

- T : βύθισμα του στερεού
- ρ_1 : πυκνότητα του στερεού
- ρ_0 : πυκνότητα του ρευστού
- $r = \rho_1 / \rho_0$: λόγος των πυκνοτήτων
- a : γωνία στροφής στερεού
- g : επιτάχυνση της βαρύτητας

Εύρεση εμβαδού του βυθισμένου τμήματος του στερεού

Έχοντας θεωρήσει ότι το εμβαδόν της διατομής του βυθισμένου τμήματος κάτω από την ίσαλο διατηρείται σταθερό για όλες τις γωνίες κλίσης του στερεού, τότε αρκεί να το υπολογίσουμε στη θέση μηδενικής εγκάρσιας κλίσης ($a = 0^\circ$).



Σχήμα 4.4 : Ορθογωνικό πρίσμα στην όρθια θέση ισορροπίας ($a = 0^\circ$)

Τότε, από συνθήκη ισορροπίας θα έχουμε :

$$\vec{W} = \vec{B} \quad (4.4)$$

όπου: $\vec{W} = m\vec{g} = \rho_1 V_1 \vec{g} = \rho_1 (bhl)\vec{g} \quad (4.5)$

$$\vec{B} = \rho_0 \vec{g} V_{sub} = \rho_0 \vec{g} (bTl) \quad (4.6)$$

Οπότε, με αντικατάσταση των σχέσεων (4.5) και (4.6) στην (4.4) θα έχουμε :

$$T = \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot h = rh \quad (4.7)$$

Επομένως, το εμβαδόν του βυθισμένου τμήματος της διατομής θα είναι :

$$A_w = b \cdot T \stackrel{(4.7)}{=} rbh \quad (4.8)$$

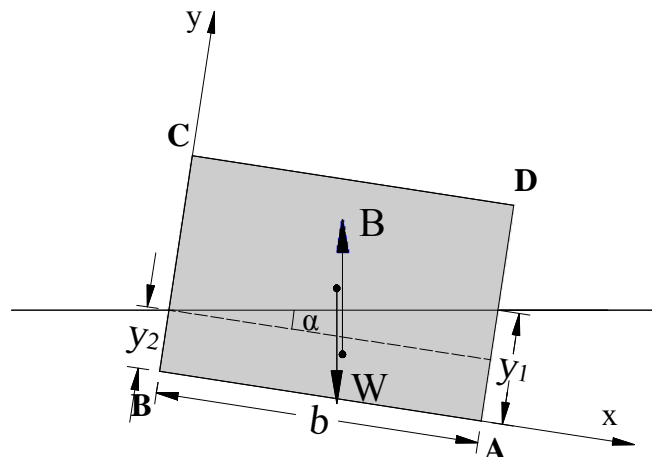
Προσδιορισμός του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ}

Για τον πλήρη προσδιορισμό του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} για τις διάφορες γωνίες στροφής α , θα πρέπει αρχικά να διακρίνουμε τις τρεις διακριτές θέσεις του πρίσματος που αυτό λαμβάνει κατά την στροφή του περί τον διαμήκη άξονα, καθώς στις θέσεις αυτές η έκφραση του \overline{GZ} διαφοροποιείται. Οι θέσεις εγκάρσιας κλίσης του πρίσματος είναι :

- Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.
- Μία γωνία (A) βυθισμένη.
- Δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες.

Τελικά, η γραφική παράσταση του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} σε όλο το εύρος των γωνιών εγκάρσιας κλίσης α θα προκύψει από την παράθεση των επιμέρους γραφημάτων που αντιστοιχούν στις παραπάνω θέσεις.

- Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες



Σχήμα 4.5 : Κεκλιμένη θέση πρίσματος με δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες

Οι γωνίες A και B του πρίσματος παραμένουν βυθισμένες για γωνίες κλίσης $\alpha \geq 0$ μέχρι την γωνία για την οποία $y_2 = 0$.

Το κέντρο άντωσης, δηλαδή το κέντρο επιφανείας του βυθισμένου τμήματος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προκύπτει ως εξής :

$$x_B = \frac{M_{yy}}{A_W} \quad (4.9.\alpha)$$

$$y_B = \frac{M_{xx}}{A_W} \quad (4.9.\beta)$$

$$\text{όπου: } M_{xx} = E_{rect} y_{rect} + E_{tr} y_{tr} = b \frac{y_2^2}{2} + \frac{(y_1 - y_2)b}{2} \left(y_2 + \frac{1}{3}(y_1 - y_2) \right) \quad (4.10.\alpha)$$

$$M_{yy} = E_{rect} x_{rect} + E_{tr} x_{tr} = \frac{1}{2} b^2 y_2 + \frac{1}{3} b^2 (y_1 - y_2) \quad (4.10.\beta)$$

Οι ροπές επιφανείας, όπως εκφράστηκαν πιο πάνω, είναι συναρτήσεις των βυθισμάτων y_1 και y_2 . Ο υπολογισμός τους θα προκύψει από την επίλυση του παρακάτω συστήματος :

- Υπόθεση σταθερού εμβαδού:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} b = r b h \quad (4.11.\alpha)$$

- Τριγωνομετρία:

$$\tan a = \frac{y_1 - y_2}{b} \quad (4.11.\beta)$$

Οπότε, θα έχουμε :

$$y_1 = hr + \frac{b \tan a}{2} \quad (4.12.\alpha)$$

$$y_2 = hr - \frac{b \tan a}{2} \quad (4.12.\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.8),(4.10.α),(4.10.β),(4.12.α) και (4.12.β) στις (4.9.α) και (4.9.β) βρίσκουμε ότι :

$$x_B = \frac{b(6hr + b \tan a)}{12hr} \quad (4.13.\alpha)$$

$$y_B = \frac{hr}{2} + \frac{b^2 \tan^2 a}{24hr} \quad (4.13.\beta)$$

Για τον προσδιορισμό, τώρα, του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} , αρκεί να υπολογίσουμε την απόσταση του κέντρου άντωσης $B(x_B, y_B)$ από τον φορέα του διανύσματος του βάρους. Η εξίσωση του φορέα (στο σύστημα συντεταγμένων xBy) είναι :

$$y - \frac{h}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\left(x - \frac{b}{2}\right) \rightarrow y + x \cot a - \frac{h}{2} - \frac{b}{2} \cot a = 0 \quad (4.14)$$

Επομένως, η απόσταση του φορέα του διανύσματος του βάρους από το κέντρο άντωσης $B(x_B, y_B)$ θα δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$d = \overline{GZ} = \frac{\cot a x_B + y_B - \frac{b}{2} \cot a - \frac{h}{2}}{\sqrt{\cot^2 a + 1}} \quad (4.15)$$

Με αντικατάσταση των (4.13.α) και (4.13.β) στην (4.15), προκύπτει η σχέση του μοχλοβραχίονα επαναφοράς :

$$\overline{GZ} = \frac{\frac{1}{hr} [2(b^2 + 6h^2(r-1)r) + b^2 \tan^2 a]}{24\sqrt{(\sin^{-1} a)^2}} \quad (4.16)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει όσο οι γωνίες A και B παραμένουν βυθισμένες ή διαφορετικά όσο $y_2 \geq 0$. Η σχέση ικανοποιείται και για την οριακή περίπτωση όπου $y_2 = 0$.

Από τη σχέση (4.12.β) :

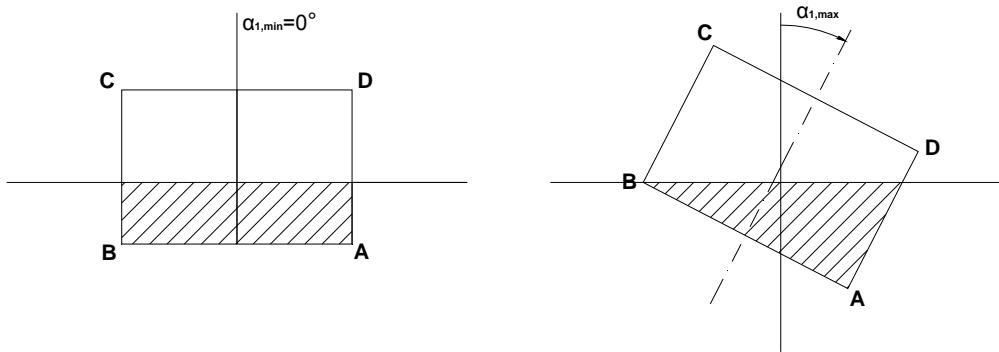
$$hr - \frac{b \tan a}{2} = 0 \quad (4.17)$$

κατά την οποία η γωνία στροφής είναι :

$$a_{1,\max} = \tan^{-1}\left(\frac{2hr}{b}\right) \quad (4.18)$$

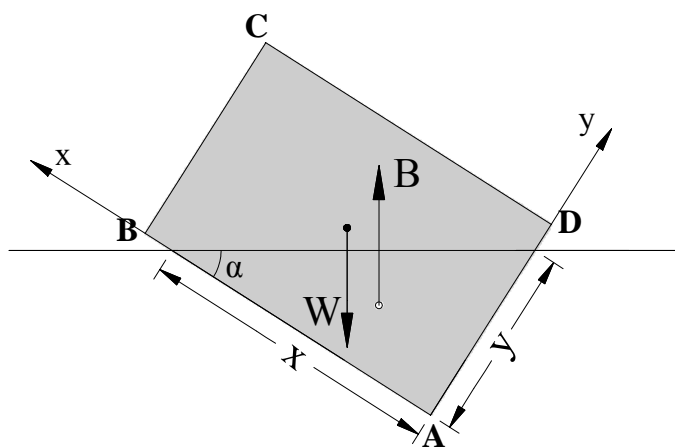
Άρα, το πεδίο ορισμού γωνιών της παραπάνω έκφρασης του \overline{GZ} είναι :

$$0 \leq a_1 \leq \tan^{-1}\left(\frac{2hr}{b}\right) \quad (4.19)$$



Σχήμα 4.6: Πεδίο ορισμού του $\overline{GZ}(a)$ για δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες

b) Μία γωνία (A) βυθισμένη



Σχήμα 4.7 : Κεκλιμένη θέση πρίσματος με μία γωνία (A) βυθισμένη

Για γωνίες στροφής $a \geq a_1$, βυθισμένη είναι μόνο η γωνία A . Στην περίπτωση αυτή, το βυθισμένο πρίσμα είναι τριγωνικής διατομής. Επομένως, το κέντρο άντωσης θα είναι :

$$x_B = \frac{x}{3} \quad (4.20.a)$$

$$y_B = \frac{y}{3} \quad (4.20.β)$$

Οι τιμές των x και y θα προσδιοριστούν ως εξής :

- Υπόθεση σταθερού εμβαδού:

$$\frac{xy}{2} = rbh \quad (4.21.α)$$

- Τριγωνομετρία:

$$\tan a = \frac{y}{x} \quad (4.21.β)$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος βρίσκουμε ότι :

$$x = \sqrt{\frac{2bhr}{\tan a}} \quad (4.22.α)$$

$$y = \sqrt{2bhr \tan a} \quad (4.22.β)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.22.α) και (4.22.β) στις (4.20.α) και (4.20.β) αντιστοίχως, προκύπτουν οι συντεταγμένες του κέντρου άντωσης :

$$x_B = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2bhr}{\tan a}} \quad (4.23.α)$$

$$y_B = \frac{1}{3} \sqrt{2bhr \tan a} \quad (4.23.β)$$

Ο μοχλοβραχίονας υπολογίζεται ακριβώς όπως και προηγουμένως. Ο φορέας του διανύσματος του βάρους ως προς το σύστημα αξόνων xAy εκφράζεται ως εξής :

$$y - \frac{h}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(x - \frac{b}{2}\right) \rightarrow y - x \cot a + \frac{b}{2} \cot a - \frac{h}{2} = 0 \quad (4.24)$$

Άρα, η απόσταση του φορέα από το κέντρο άντωσης $B(x_B, y_B)$, που συνιστά και τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} , θα είναι :

$$d = \overline{GZ} = \frac{y_B - x_B \cot a + \frac{b}{2} \cot a - \frac{h}{2}}{\sqrt{(-\cot a)^2 + 1}} \quad (4.25)$$

Με αντικατάσταση των (4.23.α) και (4.23.β) στην (4.25) προκύπτει :

$$\overline{GZ} = \frac{3h - 3b \cot a + 2\sqrt{2} \cot a \sqrt{bhr \cot a} - 2\sqrt{2} \sqrt{bhr \tan a}}{6\sqrt{(\sin^{-1} a)^2}} \quad (4.26)$$

Βυθισμένη παραμένει η γωνία A για εκείνες τις γωνίες στροφής για τις οποίες $x \leq b$ και $y \leq h$. Για τις οριακές περιπτώσεις που $x \equiv b$ και $y \equiv h$ θα έχουμε :

Από την (4.22.α) :

$$\sqrt{\frac{2bhr}{\tan a}} = b \rightarrow \quad (4.27)$$

$$a_{2,\min} = \tan^{-1}\left(\frac{2hr}{b}\right) \quad (4.28)$$

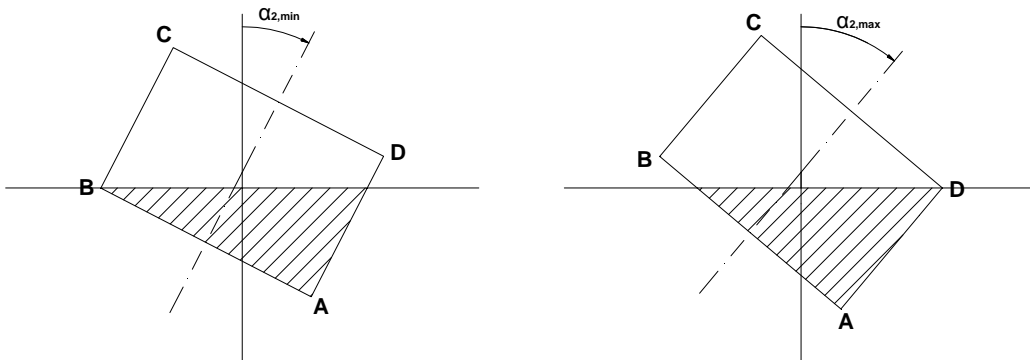
Από την (4.22.β) :

$$\sqrt{2bhr \tan a} = h \rightarrow \quad (4.29)$$

$$a_{2,\max} = \tan^{-1}\left(\frac{h}{2br}\right) \quad (4.30)$$

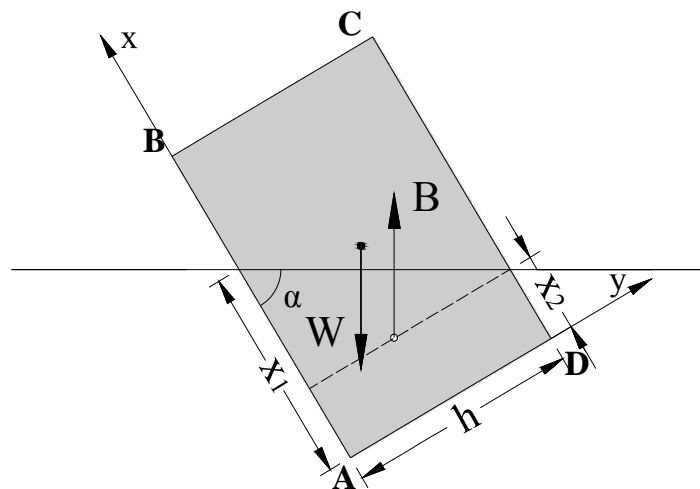
Άρα, η σχέση (4.26) ισχύει για το εξής εύρος γωνιών :

$$\tan^{-1}\left(\frac{2hr}{b}\right) \leq a_2 \leq \tan^{-1}\left(\frac{h}{2br}\right) \quad (4.31)$$



Σχήμα 4.8: Πεδίο ορισμού του $\overline{GZ}(a)$ για μία γωνία (A) βυθισμένη

c) Δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες



Σχήμα 4.9 : Κεκλιμένη θέση πρίσματος με δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες

Για γωνίες στροφής $a > a_{2,max}$, βυθισμένες είναι οι γωνίες A και D. Οι σχέσεις που θα παραχθούν σε αυτήν την περίπτωση αφορούν σε εκείνο το εύρος γωνιών στροφής για το οποίο $a_{2,max} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$. Για $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$, η συμπεριφορά του πρίσματος είναι η ίδια, ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς χαρακτηρίζεται όμως από αντίθετο πρόσημο. Για το λόγο αυτό στο εν λόγω διάστημα, η γραφική παράσταση του \overline{GZ} θα προκύπτει ως η συμμετρική της υπολογισθείσας ως προς το σημείο $a = \frac{\pi}{2}$.

Για τον υπολογισμό του κέντρου άντωσης του πρίσματος θα πρέπει πρώτα να βρούμε τις ροπές επιφανείας του βυθισμένου τμήματος, οι οποίες είναι :

$$M_{xx} = E_{rect} y_{rect} + E_{tr} y_{tr} \rightarrow M_{xx} = \frac{x_2^2 h^2}{2} + \frac{(x_1 - x_2) h^2}{6} \quad (4.32.α)$$

$$M_{yy} = E_{rect} x_{rect} + E_{tr} x_{tr} \rightarrow M_{yy} = \frac{x_2^2 h}{2} + \frac{(x_1 - x_2) h}{2} \left(x_2 + \frac{x_1 - x_2}{3} \right) \quad (4.32.β)$$

Για να προσδιορίσουμε, όμως, πλήρως τις ροπές επιφανείας, θα πρέπει να βρούμε τα x_1 και x_2 :

- Υπόθεση σταθερού εμβαδού:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} h = rbh \quad (4.33.α)$$

- Τριγωνομετρία:

$$\tan a = \frac{h}{(x_1 - x_2)} \quad (4.33.β)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων, βρίσκουμε ότι :

$$x_1 = rb + \frac{h}{2 \tan a} \quad (4.34.α)$$

$$x_2 = rb - \frac{h}{2 \tan a} \quad (4.34.β)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.32.α),(4.32.β),(4.34.α) και (4.34.β) στις (4.9.α) και (4.9.β) θα έχουμε :

$$x_B = \frac{br}{2} + \frac{h^2 \cot^2 a}{24br} \quad (4.35.α)$$

$$y_B = \frac{h(6br - h \cot a)}{12br} \quad (4.35.β)$$

Ο φορέας του διανύσματος του βάρους στην περίπτωση αυτή, ως προς το σύστημα συντεταγμένων xAy , εκφράζεται ως εξής :

$$y - \frac{h}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\left(x - \frac{b}{2}\right) \rightarrow y - x \cot a + \frac{b}{2} \cot a - \frac{h}{2} = 0 \quad (4.36)$$

Συνεπώς, ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς \overline{GZ} θα είναι :

$$d = \overline{GZ} = \frac{y_B - x_B \cot a + \frac{b}{2} \cot a - \frac{h}{2}}{\sqrt{(-\cot a)^2 + 1}} \quad (4.37)$$

Με αντικατάσταση των (4.35.α) και (4.35.β) στην (4.37) προκύπτει τελικά :

$$\overline{GZ} = \frac{\frac{\cot a}{br} [2(h^2 + 6b^2(r-1)r) + h^2 \cot^2 a]}{24\sqrt{(\sin^{-1} a)^2}} \quad (4.38)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για εκείνο το διάστημα γωνιών για το οποίο $x_2 \geq 0$. Για την οριακή περίπτωση όπου $x_2 \equiv 0$, θα έχουμε :

Από την (4.34.β) :

$$rb - \frac{h}{2 \tan a} = 0 \rightarrow \quad (4.39)$$

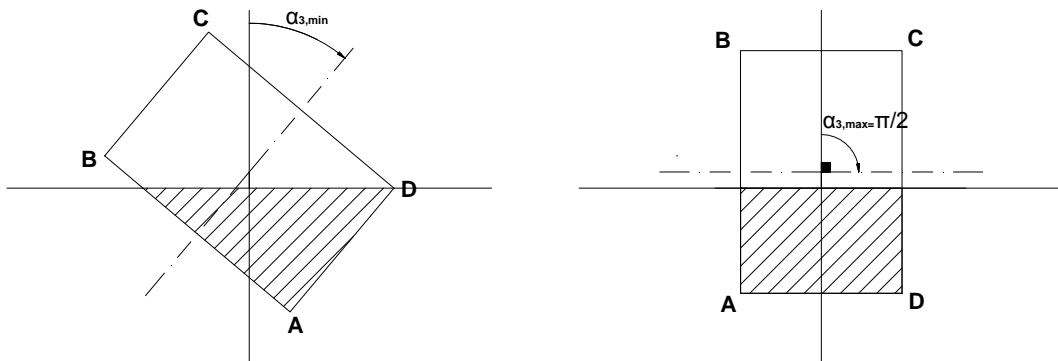
$$a_{3,\min} = \tan^{-1} \left(\frac{h}{2br} \right) \quad (4.40)$$

Επειδή μελετάμε τη συμπεριφορά του πρίσματος στο διάστημα $a \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, το άνω όριο του διαστήματος των γωνιών στροφής θα είναι:

$$a_{3,\max} = \frac{\pi}{2} \quad (4.41)$$

Άρα, η σχέση (4.38) ισχύει για το διάστημα :

$$\tan^{-1} \left(\frac{h}{2br} \right) \leq a_3 \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.42)$$



Σχήμα 4.10: Πεδίο ορισμού του $\overline{GZ}(a)$ για δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι όλη η παραπάνω ανάλυση έγινε θεωρώντας ότι ο λόγος των ειδικών βαρών του πρίσματος προς τον αντίστοιχο του ρευστού $r < 0.5$, ή διαφορετικά ότι το κέντρο βάρους του πρίσματος είναι άνωθεν της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.

Για $r > 0.5$, οι διακριτές θέσεις που λαμβάνει το πρίσμα κατά τη στροφή του διαφοροποιούνται από αυτές που μελετήσαμε προηγουμένως, με αποτέλεσμα να περιγράφονται από διαφορετικές μαθηματικές σχέσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι θέσεις του πρίσματος στην περίπτωση αυτή συνίστανται σε:

- a) Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.
- b) Τρεις γωνίες (A , B και D) βυθισμένες.
- c) Δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στις περιπτώσεις a και c οι βυθισμένες γωνίες του πρίσματος παραμένουν δύο, ενώ στην περίπτωση b οι βυθισμένες γωνίες γίνονται τρεις (από μία). Οι νέες αυτές θέσεις είναι απολύτως λογικές, αν σκεφτεί κανείς πως για $r > 0.5$ εξετάζουμε ουσιαστικά το συμμετρικό πρόβλημα του αρχικού.

Στις περιπτώσεις όπου έχουμε δύο γωνίες βυθισμένες, οι εκφράσεις για τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} παραμένουν οι ίδιες, όπως εξάλλου και η γεωμετρία του βυθισμένου τμήματος του σώματος. Διαφοροποιούνται, ωστόσο, τα πεδία ορισμού τους. Αντίθετα, στην περίπτωση των τριών βυθισμένων γωνιών, αλλάζουν τόσο η μαθηματική σχέση όσο και το πεδίο ορισμού του μοχλοβραχίονα. Με την ίδια λογική που ακολουθήσαμε και προηγουμένως για την εύρεση των εκφράσεων του \overline{GZ} στις χαρακτηριστικές θέσεις του πρίσματος, προκύπτει:

- a) Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.

Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς από τη σχέση (4.16) θα είναι :

$$\overline{GZ} = \frac{\frac{1}{hr} [2(b^2 + 6h^2(r-1)r) + b^2 \tan^2 a]}{24\sqrt{(\sin^{-1} a)^2}}$$

ενώ το πεδίο ορισμού του :

$$0 \leq a_1 \leq \tan^{-1} \left(\frac{2h(1-r)}{b} \right) \quad (4.43)$$

b) Τρεις γωνίες (A , B και D) βυθισμένες.

Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς θα είναι :

$$\overline{GZ} = \frac{(1-r)(b \cot a (-2\sqrt{2}h(1-r) + 3\sqrt{bh(1-r)\tan a}) - h(-2\sqrt{2}b(1-r)\tan a + 3\sqrt{bh(1-r)\tan a}))}{6\sqrt{(\sin^{-1} a)^2 (r\sqrt{br(1-r)}\tan a)}} \quad (4.44)$$

Το διάστημα στο οποίο εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος είναι :

$$\tan^{-1}\left(\frac{2h(1-r)}{b}\right) \leq a_2 \leq \tan^{-1}\left(\frac{h}{2b(1-r)}\right) \quad (4.45)$$

c) Δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες.

Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς στην περίπτωση αυτή, όπως προκύπτει από τη σχέση (4.38) θα είναι :

$$\overline{GZ} = \frac{\frac{\cot a}{br} [2(h^2 + 6b^2(r-1)r) + h^2 \cot^2 a]}{24\sqrt{(\sin^{-1} a)^2}}$$

ενώ το πεδίο ορισμού του :

$$\tan^{-1}\left(\frac{h}{2b(1-r)}\right) \leq a_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.46)$$

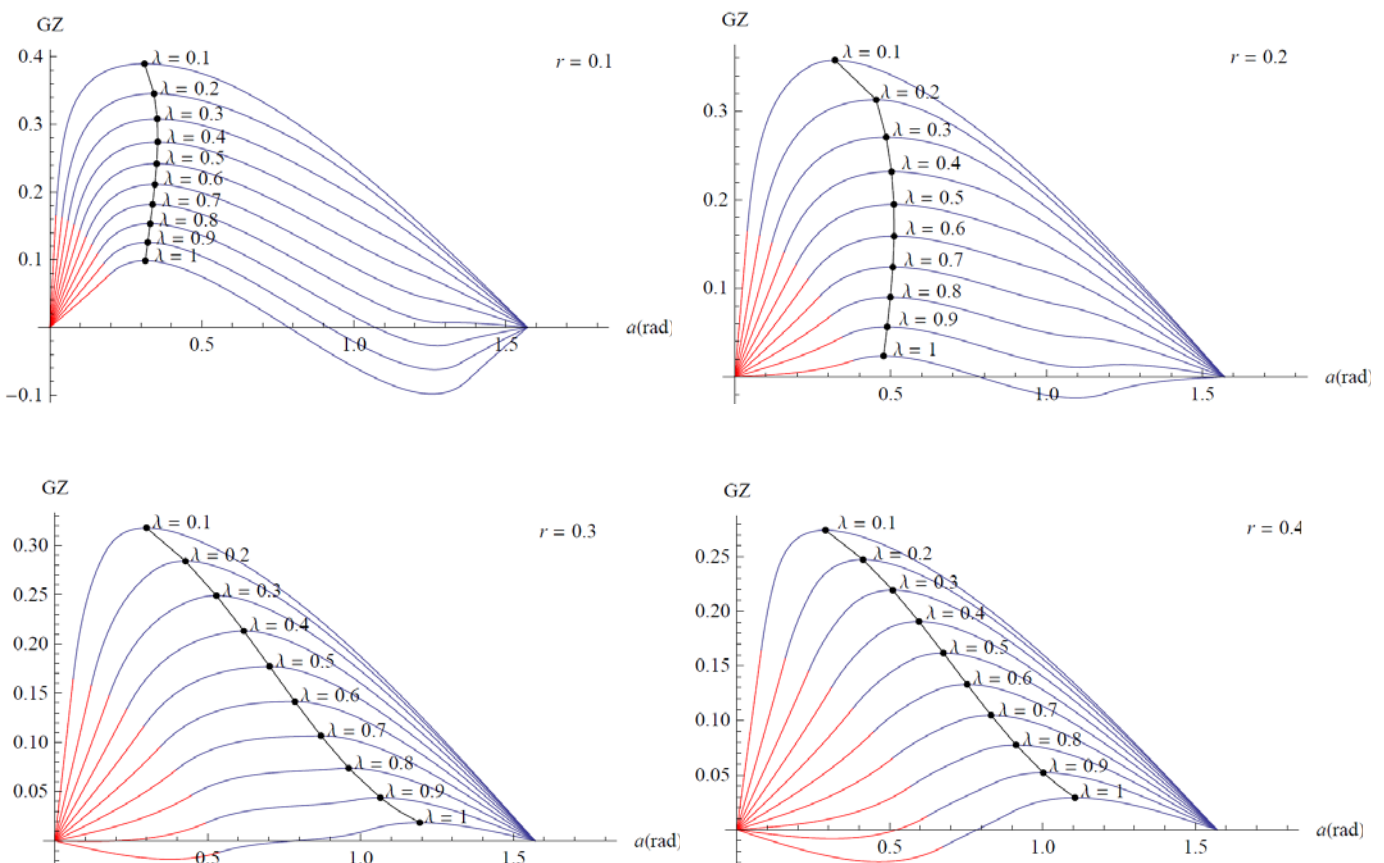
4.3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

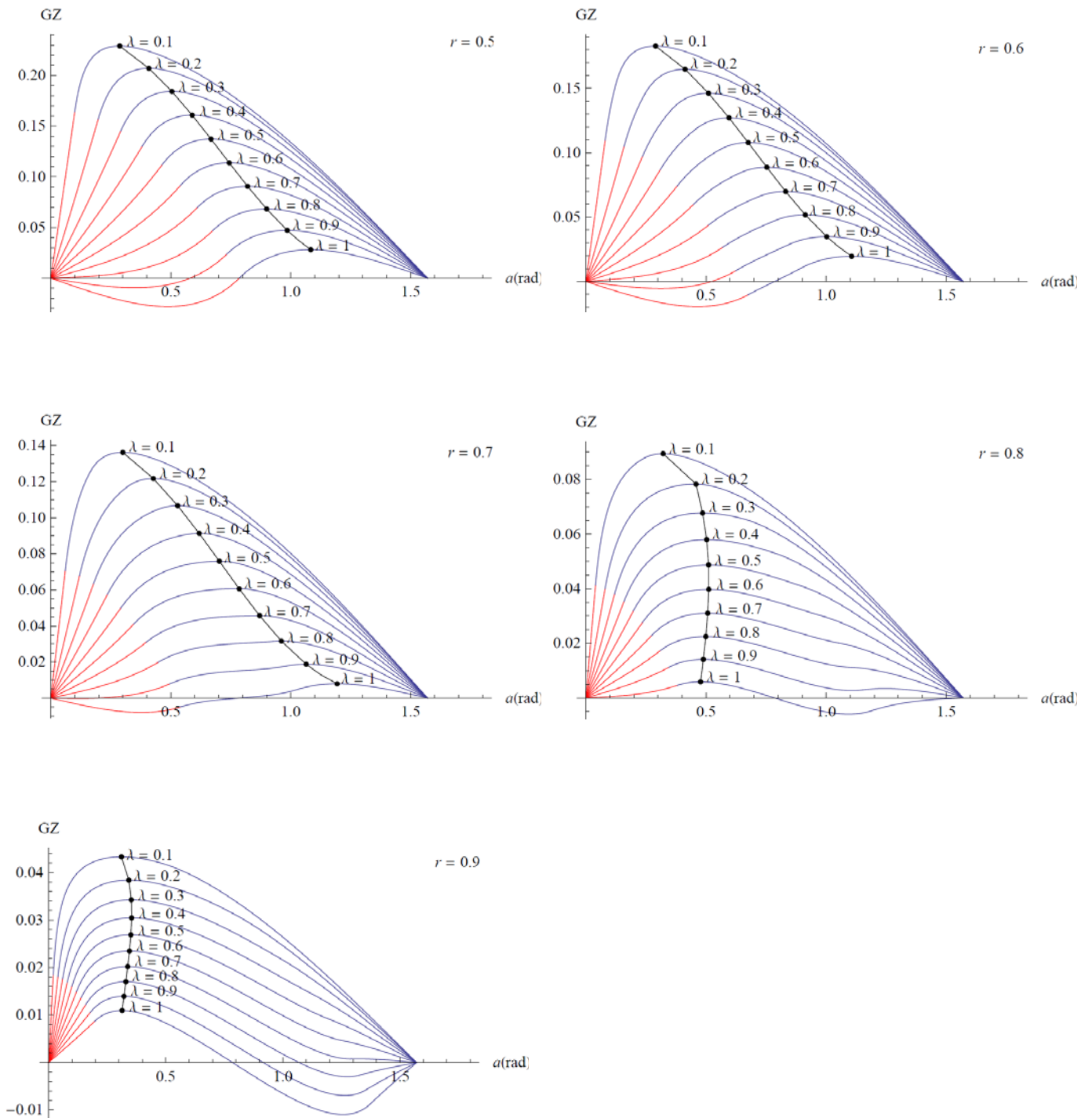
Έχοντας προσδιορίσει πλήρως τις μαθηματικές εκφράσεις του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} σε όλες τις δυνατές θέσεις που λαμβάνει το ορθογωνικό πρίσμα κατά την στροφή του, είμαστε πλέον σε θέση να αναπαράξουμε τη γραφική παράσταση $\overline{GZ}(a)$. Όπως, όμως, διαπιστώσαμε από τις σχέσεις που προέκυψαν, οι εκφράσεις του \overline{GZ} συνιστούν παραμετρικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό, για να καταφέρουμε να

παραστήσουμε γραφικά τις πιο πάνω σχέσεις, θα πρέπει διατηρώντας σταθερή μια παράμετρο να μεταβάλουμε τις υπόλοιπες, παράγοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παραμετρικά διαγράμματα. Θα πρέπει, ακόμα, να επισημάνουμε ότι η δημιουργία παραμετρικών διαγραμμάτων θα μας επιτρέψει να παρακολουθήσουμε συγκριτικά τη συμπεριφορά του πρίσματος, καθώς συγκεκριμένες παράμετροι μεταβάλλονται, κατανοώντας έτσι πλήρως το πρόβλημα που μελετάμε.

Στη συνέχεια, λοιπόν, ακολουθούν δύο σειρές παραμετρικών γραφημάτων, όπως αυτά παρήχθησαν με την χρήση του προγράμματος Mathematica. Όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει, οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν τις εκφράσεις του μοχλοβραχίονα επαναφοράς είναι : το πλάτος του πρίσματος b , το ύψος του πρίσματος h και ο λόγος των ειδικών βαρών $r = \rho_1 / \rho_0$. Επειδή δεν έχει πρακτική αξία να μελετάμε την επίδραση των απόλυτων τιμών των διαστάσεων του πρίσματος στη μορφή του \overline{GZ} , θα θεωρήσουμε τον λόγο $\lambda = h/b$, ο οποίος εκφράζει άμεσα την γεωμετρία του πρίσματος. Επειδή οι σχέσεις του \overline{GZ} είναι ήδη αρκετά σύνθετες, θα θεωρήσουμε ότι το πρίσμα χαρακτηρίζεται από μοναδιαίο πλάτος. Έτσι, αυτόματα το ύψος h θα εκφράζει τον λόγο λ . Θα προκύψουν, λοιπόν, τα διαγράμματα $\overline{GZ}(a)$ ως παραμετρικές συναρτήσεις των λ και r .

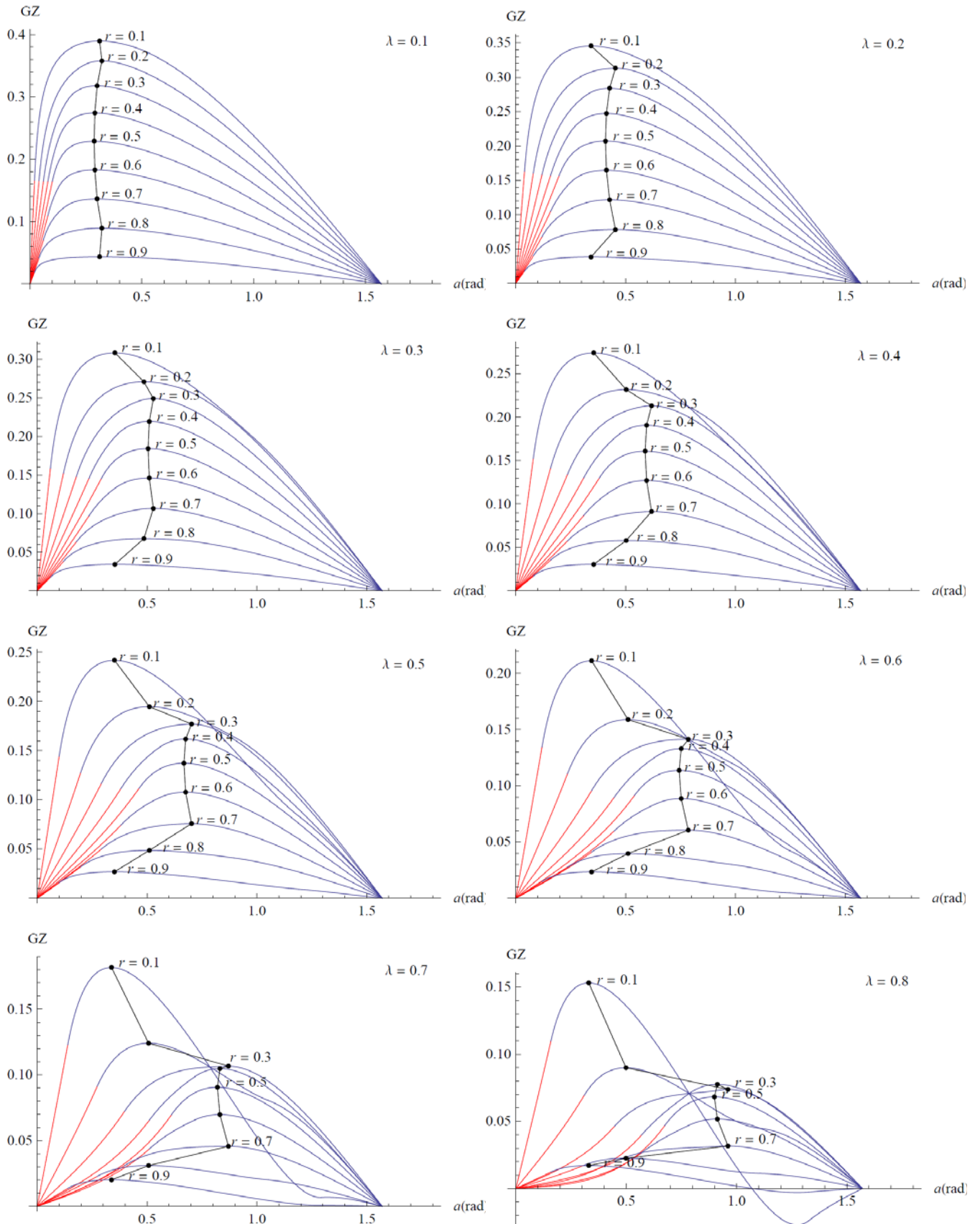
Διαγράμματα μεταβλητού λ

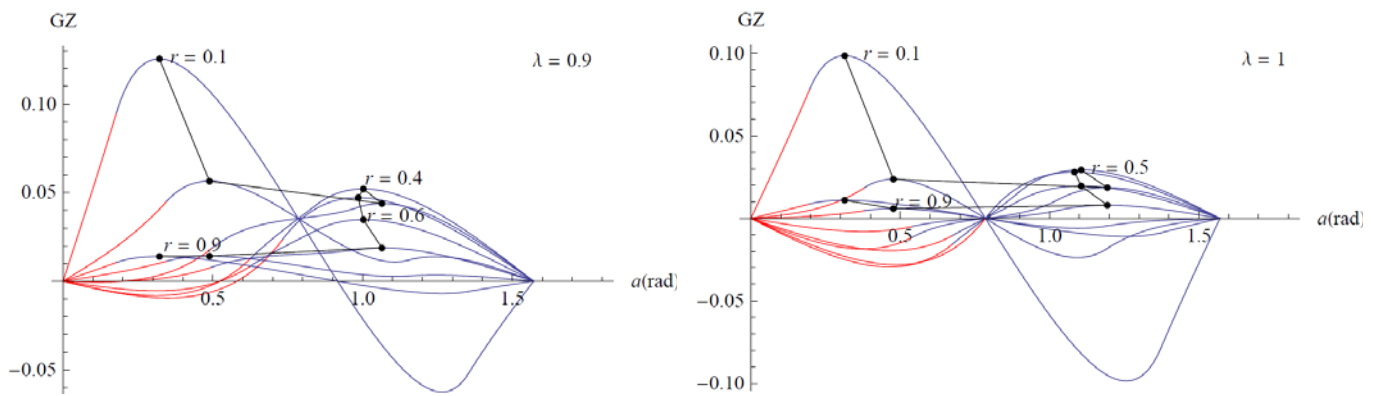




Σχήμα 4.11: Διαγράμματα $\overline{GZ}(a)$ μεταβλητού λόγου διαστάσεων λ

Διαγράμματα μεταβλητού r





Σχήμα 4.12: Διαγράμματα $\overline{GZ}(a)$ μεταβλητού λόγου ειδικών βαρών r

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα, βλέπουμε ότι οι καμπύλες $\overline{GZ}(a)$ που χαρακτηρίζονται από ίδιες τιμές λ και r συναντώνται και στις δύο ομάδες διαγραμμάτων. Όμως, η διαφορετική ομαδοποίησή τους (για μεταβλητό λ και για μεταβλητό r) μας επιτρέπει να παρακολουθήσουμε πως επιδρά η κάθε παράμετρος στο πρόβλημα. Έτσι, μπορούμε να προχωρήσουμε στις παρακάτω επισημάνσεις :

- Για ένα επιπλέον σώμα σε ένα συγκεκριμένο ρευστό (σταθερό r), βλέπουμε ότι όσο αυξάνει ο λόγος των διαστάσεων ($\lambda \rightarrow 1$), η τιμή του \overline{GZ} μικραίνει προοδευτικά γενικευμένη τάση για όλες τις τιμές του λόγου ειδικών βαρών r . Αυτό μπορεί να συνδεθεί με το γεγονός ότι η αύξηση του λ (μείωση του πλάτους b) επιφέρει μείωση του μετακεντρικού ύψους \overline{GM} , λόγω της μείωσης της ροπής I_{xx} και επομένως και του μοχλοβραχίονα στατικής ευστάθειας. Διαφορετικά, αν η αύξηση του λ αποδοθεί στην αύξηση του ύψους h , η μείωση του μοχλοβραχίονα εξηγείται από την μετατόπιση του κέντρου βάρους προς τα πάνω.
- Για μεγάλες τιμές του λ (και συγκεκριμένα $\lambda > \sqrt{2/3}$ -όπως προκύπτει από την επόμενη ενότητα), ο μοχλοβραχίονας χαρακτηρίζεται από αρνητικό αρχικό μετακεντρικό ύψος, με αποτέλεσμα να λαμβάνει και αρνητικές τιμές, τέμνοντας έτσι τον οριζόντιο άξονα σε σημεία ισορροπίας.
- Οι καμπύλες μεταβλητού λ για λόγους ειδικών βαρών r και $1-r$ είναι ποιοτικά ίδιες, καθώς γι' αυτές τις τιμές η γεωμετρία επιπλέοντος σώματος είναι συμμετρική.
- Το κόκκινο τμήμα των καμπυλών αντιπροσωπεύει το διάστημα κατά το οποίο δύο γωνίες είναι βυθισμένες. Για $r \geq 0.5$, το τέλος της περιοχής αυτής συμβολίζει το σημείο στο οποίο βυθίζεται η γωνία του καταστρώματος, η οποία αυξανόμενου του λ αυξάνει.

- Για συγκεκριμένο επιπλέον σώμα (σταθερό λ), παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του r , δηλαδή όσο πιο πολύ βυθίζεται το σώμα, η τιμή του \overline{GZ} μικραίνει, αφού όπως γνωρίζουμε όσο πιο πολύ βυθίζεται ένα σώμα τόσο μειώνεται η ικανότητα επαναφοράς του. Η τάση όμως αυτή δεν φαίνεται να είναι ξεκάθαρη σε όλες τις γωνίες στροφής για μεγάλες τιμές του λ και ιδίως για $r = 0.1$, όπου παρουσιάζεται έντονα αποκλίνουσα συμπεριφορά.
- Η εξέταση τιμών του λ μεγαλύτερων της μονάδας (δηλαδή η εξέταση της ευστάθειας ενός πρίσματος με ύψος μεγαλύτερο του πλάτους) δεν έχει πρακτική αξία, αφού η περίπτωση αυτή περιγράφεται από τα συμμετρικά διαγράμματα $\overline{GZ}(a)$ ως προς την κάθετο $a = \frac{\pi}{2}$.

4.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΥΨΟΥΣ \overline{GM}

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, το μετακεντρικό ύψος \overline{GM} προκύπτει ως η πρώτη παράγωγος του μοχλοβραχίονα στατικής ευστάθειας στη γωνία $a = 0^\circ$. Έχοντας, λοιπόν, προσδιορίσει την έκφραση του \overline{GZ} και συγκεκριμένα από τη σχέση (4.16), θα έχουμε :

$$\overline{GM} = \left. \frac{d\overline{GZ}}{da} \right|_{a=0} \rightarrow \overline{GM} = \frac{b^2 + 6h^2(-1+r)r}{12hr} \quad (4.47)$$

Στα διαγράμματα που προηγήθηκαν παρατηρήσαμε ότι το αρχικό μετακεντρικό ύψος \overline{GM} γίνεται αρνητικό για κάποιες τιμές του λόγου διαστάσεων λ . Για να βρούμε το εύρος των τιμών του λ στις οποίες παρατηρείται το φαινόμενο αυτό, αρκεί να λύσουμε την ανισότητα $\overline{GM} \leq 0$ ως προς λ , οπότε προκύπτει :

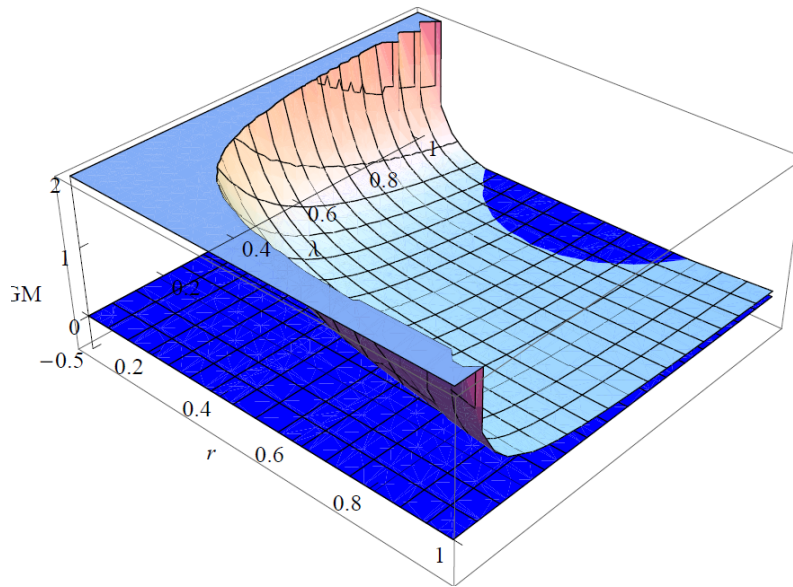
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{1}{6r(1-r)}} \quad (4.48)$$

Η ελάχιστη τιμή του λ για την οποία το αρχικό μετακεντρικό ύψος είναι αρνητικό, προκύπτει με την παραγωγή της (4.48) ως προς r , οπότε και έχουμε ολικό ελάχιστο λ_{\min} . Άρα θα έχουμε :

$$\lambda \geq \lambda_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ για } r_{\min} = 0.5 \quad (4.49)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει πως για λόγο διαστάσεων $\lambda \geq \lambda_{\min}$, το σώμα παρουσιάζοντας αρνητικό μετακεντρικό ύψος τείνει να εκτραπεί από την όρθια θέση ισορροπίας, χωρίς την επίδραση κάποιας εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης.

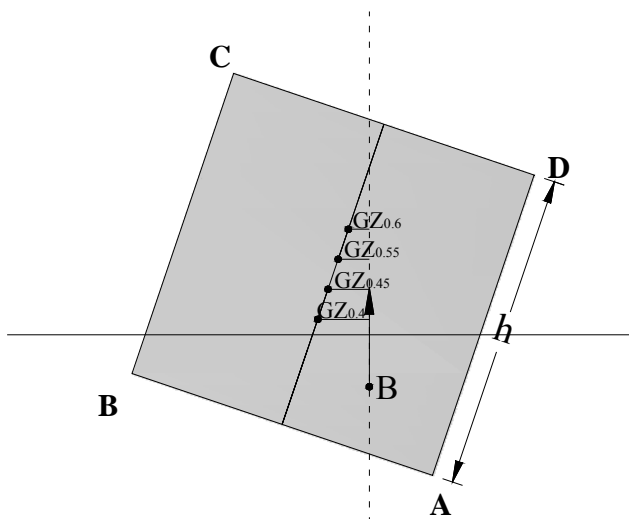
Στο παρακάτω τριδιάστατο διάγραμμα, παρουσιάζεται το γράφημα του μετακεντρικού ύψους \overline{GM} συναρτήσει των μεταβλητών λ και r , καθώς και το μηδενικό οριζόντιο επίπεδο ($\overline{GM}=0$). Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η περιοχή όπου το αρχικό μετακεντρικό ύψος είναι αρνητικό.



Σχήμα 4.13: Τριδιάστατο σχήμα αρχικού μετακεντρικού ύψους $\overline{GM}(r, \lambda)$ - περιοχή αρνητικού αρχικού μετακεντρικού ύψους

4.4 ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΓΙΑ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΤΕΡΕΟ

4.4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



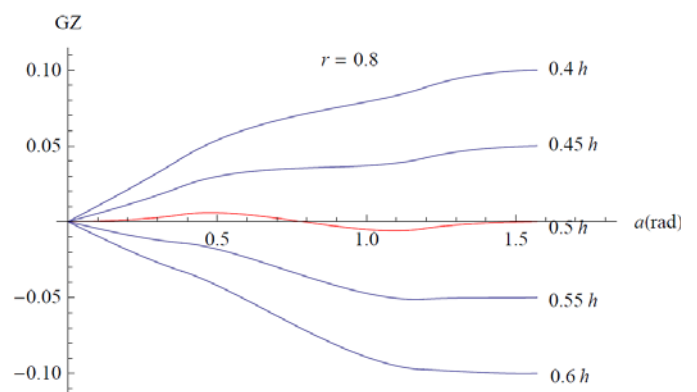
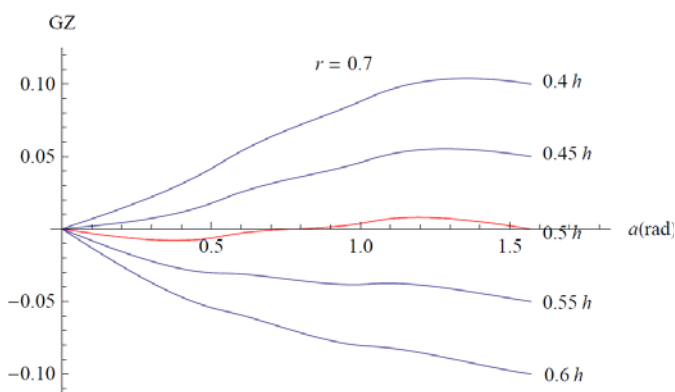
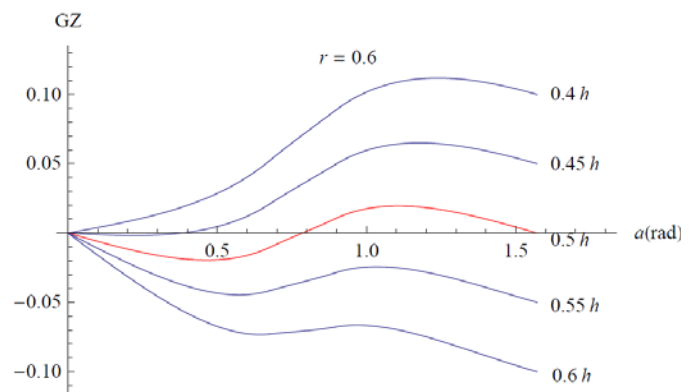
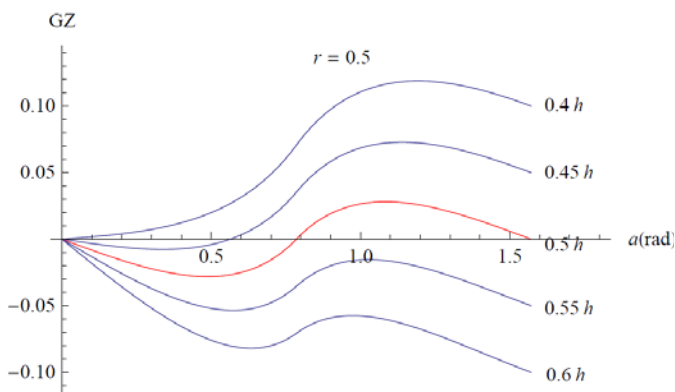
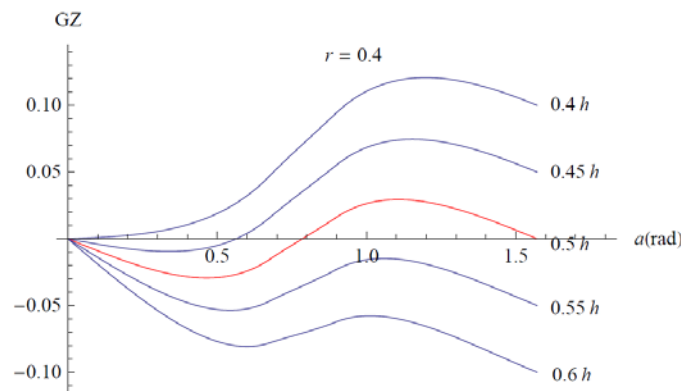
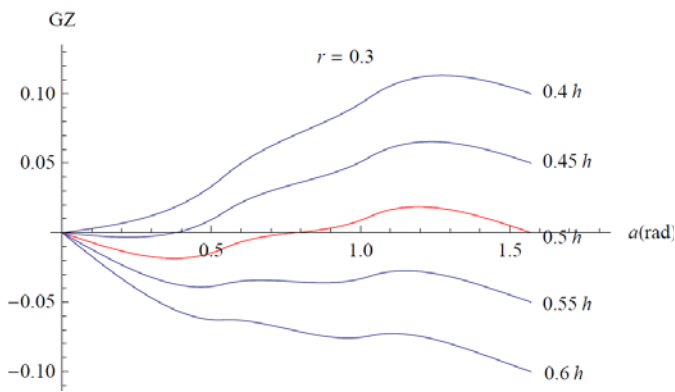
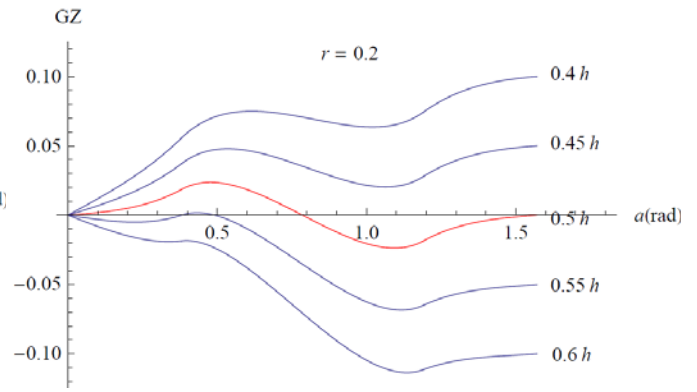
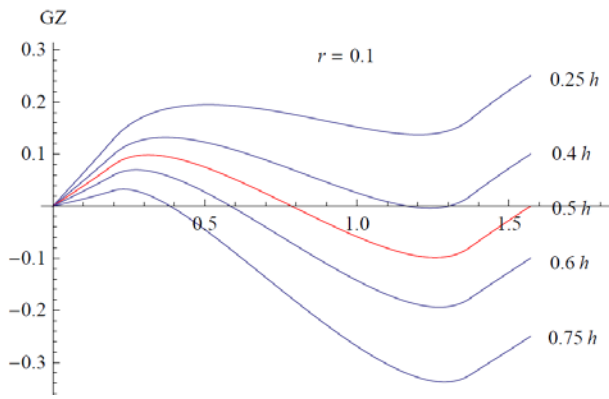
Σχήμα 4.14 : Μοχλοβραχίονας επαναφοράς \overline{GZ} για περιπτώσεις μη ομογενούς στερεού

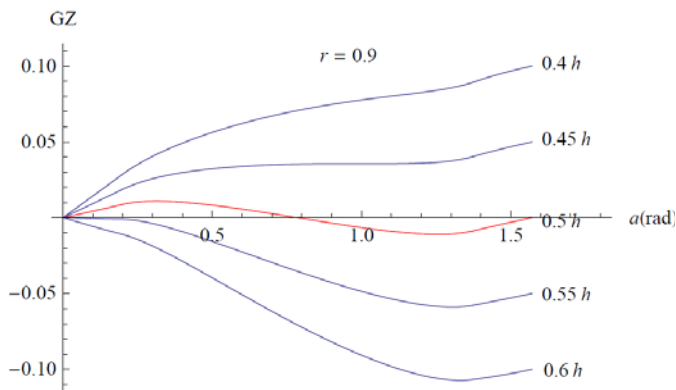
Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την στατική ευστάθεια ενός μη ομογενούς στερεού. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο βάρους του σώματος δεν θα βρίσκεται στο κέντρο της επιφάνειας της εγκάρσιας διατομής, αλλά θα κινείται σε διάφορες θέσεις καθ' ύψος, παραμένοντας, όμως, πάντα επί της καθέτου. Ενδεικτικά, θα εξετάσουμε εκείνες τις περιπτώσεις που το κέντρο βάρους βρίσκεται στις θέσεις $0.4h$, $0.45h$, $0.55h$, $0.6h$.

Δεδομένου ότι η θέση του κέντρου βάρους συνιστά μια νέα παράμετρο στο φαινόμενο που μελετάμε, για την απλοποίηση του προβλήματος θα θεωρήσουμε ότι ο λόγος των διαστάσεων του στερεού είναι σταθερός και συγκεκριμένα $\lambda = 1$. Έτσι, οι νέες παράμετροι στο πρόβλημα θα είναι ο λόγος των πυκνοτήτων r και h καθ' ύψος θέση του κέντρου βάρους.

Για τον υπολογισμό της καμπύλης του μοχλοβραχίονα επαναφοράς \overline{GZ} , ακολουθήσαμε την ίδια λογική με την περίπτωση του ομογενούς στερεού που προηγήθηκε, με τη διαφορά ότι η θέση του κέντρου βάρους δεν είναι πλέον στο κέντρο της επιφάνειας

$(\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$. Τελικά, παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:





Σχήμα 4.15: Διαγράμματα $\overline{GZ}(a)$ για μη ομογενές στερεό

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα, για την περίπτωση του μη ομογενούς στερεού, αναδύθηκαν οι εξής παρατηρήσεις:

- Η κατανομή των μοχλοβραχιόνων επαναφοράς για τις περιπτώσεις των μη ομογενών στερεών φαίνεται να ακολουθεί την μορφή της καμπύλης για την περίπτωση ομογενούς σώματος, ενώ όπως είναι αναμενόμενο η μετατόπιση του κέντρου βάρους κάτωθεν συνοδεύεται από καλύτερα χαρακτηριστικά ευστάθειας.

- Η γωνία στροφής $a = \frac{\pi}{2}$ συνιστά θέση ισορροπίας (και μάλιστα ευσταθή) μόνο για την περίπτωση του ομογενούς σώματος. Αυτό γιατί, στη δεδομένη θέση, η καθ' ύψος μετατόπιση του κέντρου βάρους για τα μη ομογενή σώματα αποτελεί την οριζόντια απόσταση μεταξύ των κέντρων βάρους και άντωσης. Δηλαδή, η τιμή του \overline{GZ} για $a = \frac{\pi}{2}$ ισούται με την καθ' ύψος μετατόπιση του κέντρου βάρους.

4.4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΥΨΟΥΣ \overline{GM}

Στην περίπτωση του μη ομογενούς τετραγωνικού πρίσματος, αν θεωρήσουμε γενικά τη θέση του κέντρου βάρους του από την κάτω οριζόντια πλευρά του ως x , το αρχικό μετακεντρικό ύψος κατά τη σχέση (4.47) προκύπτει :

$$\overline{GM} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{r} + 6r - 12x \right) \quad (4.50)$$

Όπως και στην περίπτωση του ομογενούς στερεού, το αρχικό μετακεντρικό ύψος \overline{GM} γίνεται αρνητικό για κάποιες καθ' ύψος θέσεις του κέντρου βάρους του στερεού. Για να προσδιορίσουμε τις σχέσεις αυτές επ' ακριβώς, αρκεί να λύσουμε την ανισότητα $\overline{GM} \leq 0$ ως προς x , οπότε παίρνουμε :

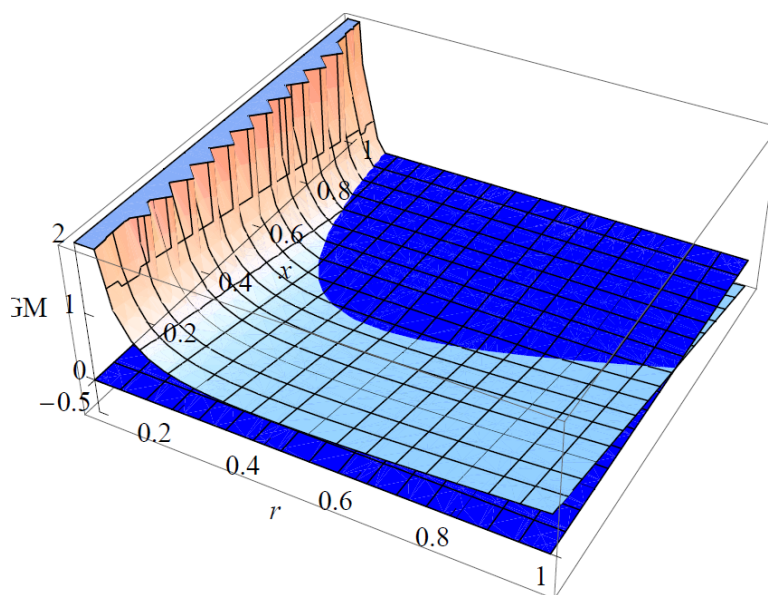
$$x \geq \frac{1 + 6r^2}{12r} \quad (4.51)$$

Η χαμηλότερη θέση του κέντρου βάρους x για την οποία το αρχικό μετακεντρικό ύψος είναι αρνητικό προκύπτει ως το ολικό ελάχιστο της (4.51). Οπότε, βρίσκουμε ότι :

$$x \geq x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{για } r_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4.52)$$

Αξίζει, όμως, να επισημάνουμε ότι το κριτήριο του αρχικού μετακεντρικού ύψους (όπως έχουμε ήδη αναφέρει και στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας) είναι ανεπαρκές για μεγάλο εύρος των εγκάρσιων γωνιών στροφής. Αυτό πρακτικά στην περίπτωση μας σημαίνει ότι ένα ενδεχόμενο θετικό αρχικό μετακεντρικό ύψος (για $x < x_{\min}$) δεν εξαιρεί την ύπαρξη σημείων ισορροπίας σε μεγαλύτερες γωνίες στροφής.

Παρακάτω αποτυπώνεται τριδιάστατα το μετακεντρικό ύψος \overline{GM} συναρτήσει των μεταβλητών x και r όπως και το μηδενικό οριζόντιο επίπεδο, ενώ η μπλε περιοχή ορίζει το αρνητικό αρχικό μετακεντρικό ύψος.



Σχήμα 4.16: Τριδιάστατο σχήμα αρχικού μετακεντρικού ύψους $\overline{GM}(r, x)$ - περιοχή αρνητικού αρχικού μετακεντρικού ύψους

5. ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε το θέμα της στατικής ευστάθειας ενεργειακά. Συγκεκριμένα, η αναζήτηση θέσεων ισορροπίας μέσω των τοπικών ακρότατων της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας θα προσδιορίσει και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το εξεταζόμενο σύστημα. Η επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να χαράξουμε τα διαγράμματα ισορροπίας $a - r$, τα οποία απεικονίζουν τις θέσεις εγκάρσια κλίσης στις οποίες ισορροπεί το επιπλέον σώμα συναρτήσει της σχετικής πυκνότητάς του.

5.2 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Φαίνεται πως ο πρώτος άνθρωπος που αντιμετώπισε το θέμα της πλευστότητας και ευστάθειας ομογενών στερεών σωμάτων σε ρευστά ήταν ο Αρχιμήδης με την περίφημη μελέτη του τμήματος παραβολοειδούς. Ο Huygens [6] το 1650 με την εργασία του “De iis quae liquido supernatant” ασχολήθηκε με τα επιπλέοντα μακριά πρίσματα ορθογωνικής διατομής και ανακάλυψε ότι σε συγκεκριμένα εύρη του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού τα δεδομένα συμμετρικά στερεά δύνανται να επιπλεύσουν σε ασύμμετρες θέσεις ευσταθούς ισορροπίας. Αυτή η ανακάλυψη δεν ήταν ουσιαστικά καινούρια, καθώς ο Αρχιμήδης είχε ήδη επισημάνει ότι ένα συμμετρικό σώμα μπορεί να επιπλεύσει ευσταθώς σε θέση ισορροπίας ανεξάρτητη από τη συμμετρία του. Ο Huygens δεν έφτασε σε πλήρη επίλυση του προβλήματος των μακρών πρισμάτων, καθώς δεν προσδιόρισε την ύπαρξη ευσταθούς θέσης ισορροπίας στην οποία μία ή τρεις γωνίες είναι βυθισμένες, αλλά περιορίστηκε στην περίπτωση των δύο βυθισμένων γωνιών. Για την θέση των δύο βυθισμένων γωνιών, παρατήρησε ότι είναι ευσταθής για ένα μικρό μόνο εύρος του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού.

Αργότερα, ο Korteweg έχοντας εντοπίσει το κενό στη μελέτη του Huygens, ολοκλήρωσε τη λύση του προβλήματος κατασκευάζοντας ένα διάγραμμα με άξονες το λόγο των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού $(0 - 1.0)$ και το λόγο των πλευρών του ορθογωνίου $(0 - 1.0)$, στο οποίο αναπαράστησε όλες τις καμπύλες που ορίζουν τις περιοχές των διαφορετικών θέσεων ευσταθούς ισορροπίας.

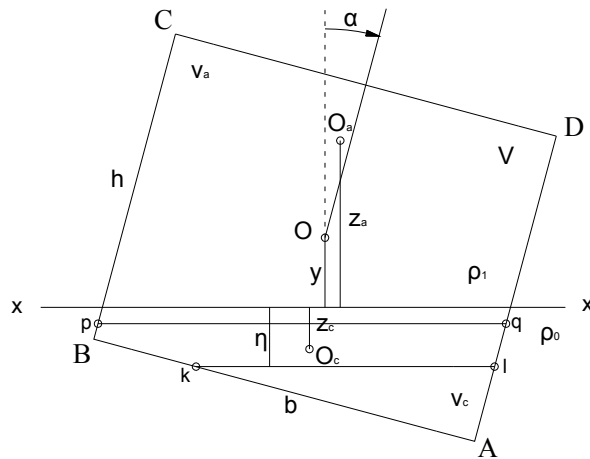
Τέλος, προς παρόμοια κατεύθυνση κινήθηκαν οι Erdos , Schibler και Herdon [1], οι οποίοι μελέτησαν ενεργειακά την ευστάθεια συμμετρικών πρισμάτων (τετραγωνικής και τριγωνικής διατομής) κατασκευάζοντας τα διαγράμματα της εγκάρσιας γωνίας ισορροπίας συναρτήσει του λόγου ειδικών βαρών στερεού-ρευστού. Επέκτειναν βέβαια την μελέτη τους και στην αναζήτηση θέσεων ισορροπίας τριδιάστατων συμμετρικών στερεών (κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο) [13], αξιοποιώντας την έννοια της επιφάνειας άντωσης.

5.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Έστω ότι ένα σώμα ειδικού βάρους μικρότερου από αυτό ενός ρευστού αφήνεται στην επιφάνειά του. Τότε, το εκτοπιζόμενο ρευστό από το επιπλέον σώμα ανυψώνεται στην επιφάνεια. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος (σώμα-ρευστό-εκτοπισμένο υγρό) αυξάνεται από την δυναμική ενέργεια που αποκτάται από την μεταφορά του υγρού στην επιφάνεια. Αυτή η αύξηση της δυναμικής ενέργειας δεν εξαρτάται μόνο από τον όγκο του εκτοπισμένου υγρού, ο οποίος διατηρείται σταθερός καθώς το στερεό στρέφεται, αλλά και από την γεωμετρία του ίδιου όγκου (ή διαφορετικά του βυθισμένου όγκου του στερεού) στις διάφορες κεκλιμένες θέσεις.

Για να κατανοήσουμε, όμως, πλήρως το παραπάνω πρόβλημα θα πρέπει να προχωρήσουμε στην ποσοτική ανάλυσή του. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνολική ενέργεια του στερεού-εκτοπιζόμενου ρευστού σαν συνάρτηση κάποιων μεταβλητών, όπως για παράδειγμα του ύψους του κέντρου βάρους του στερεού από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού και της γωνία στροφής. Τότε, μπορεί κανείς να προσδιορίσει τις θέσεις ισορροπίας παραγωγίζοντας τη συνολική ενέργεια ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος.

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυση, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα πρίσματα θεωρούνται τόσο μακριά που ο διαμήκης άξονας του πρίσματος διατηρείται συνεχώς παράλληλος με την επιφάνεια του ρευστού. Αυτή η παραδοχή -όπως και προηγούμενα στην γεωμετρική προσέγγιση- μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας σε δύο. Το επιπλέον σώμα είναι δηλαδή σε θέση να εκτελεί μόνο εγκάρσια στροφή (roll) και παράλληλη βύθιση (heave).



Σχήμα 5.1 : Εγκάρσια διατομή πρίσματος για δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες

Στο παραπάνω σχήμα αποτυπώνεται μια εγκάρσια τομή του ορθογωνίου επιπλέοντος πρίσματος με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

x : ο άξονας της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού

O : το κέντρο βάρους όλου του σώματος

O_a : το κέντρο βάρους του μη βυθισμένου τμήματος

O_c : το κέντρο βάρους του βυθισμένου τμήματος

z_a : η τεταγμένη του κέντρου βάρους του μη βυθισμένου τμήματος

z_c : η τεταγμένη του κέντρου βάρους του βυθισμένου τμήματος

y : η τεταγμένη του κέντρου βάρους όλου του σώματος

ρ_1 : πυκνότητα του στερεού

ρ_0 : πυκνότητα του ρευστού

$r = \rho_1 / \rho_0$: λόγος των πυκνοτήτων

V : ο όγκος του σώματος

V_a : ο όγκος του σώματος πάνω από την επιφάνεια του ρευστού

V_c : ο όγκος του σώματος κάτω από την επιφάνεια του ρευστού

Για την ενεργειακή ανάλυση που έπεται θα υποθέσουμε ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού-ρευστού ταυτίζεται με αυτό της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού. Η δυναμική ενέργεια U_s του στερεού είναι :

$$U_s = g\rho_1 V y \quad (5.1)$$

Η δυναμική ενέργεια U_l του εκτοπιζόμενου ρευστού δίδεται από :

$$U_l = -g\rho_0 V_c z_c \quad (5.2)$$

Η διαφορά στο πρόσημο μεταξύ των ενεργειών U_s και U_l εξηγείται ως εξής: Όταν το στερεό τοποθετείται στο ρευστό, το κέντρο βάρους του μετατοπίζεται από το μηδέν στο y . Αντίθετα, το κέντρο βάρους του εκτοπισμένου ρευστού μετακινείται από το z_c στο μηδέν.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.1) και (5.2) προκύπτει πως η δυναμική ενέργεια E του συστήματος θα είναι :

$$E = U_s + U_l = g\rho_0 (rV y - V_c z_c) \quad (5.3)$$

Η ενέργεια E συνήθως εκφράζεται ως συνάρτηση του y και της μεταβλητής a που αποτελεί τη γωνία στροφής του στερεού. Η έκφραση της δυναμικής ενέργειας στις διάφορες θέσεις του πρίσματος δεν αξιολογείται τόσο για τις απόλυτες τιμές της όσο για την εύρεση των ενδεχόμενων θέσεων ισορροπίας του πρίσματος όταν η ενέργεια παρουσιάζει ακρότατα.

Η πρώτη συνθήκη ισορροπίας είναι η γνωστή σε όλους μας αρχή του Αρχιμήδη, η οποία απαιτεί το συνολικό βάρος του επιπλέοντος στερεού $V\rho_1 g$ να ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού $V_c\rho_0 g$. Επομένως:

$$V_c = rV \quad (5.4)$$

Για περιπτώσεις, όμως, που η γεωμετρία του στερεού δεν περιγράφεται εύκολα γεωμετρικά, η παραπάνω συνθήκη λαμβάνει την έκφραση :

$$\frac{\partial E(y, a)}{\partial y} = 0 \quad (5.5.a)$$

Εφόσον ο διαμήκης άξονας του πρίσματος διατηρείται παράλληλος με την επιφάνεια του ρευστού, το πρίσμα χαρακτηρίζεται από δύο βαθμούς ελευθερίας. Προκύπτει, επομένως, και δεύτερη συνθήκη ισορροπίας από την απαίτηση η γωνία στροφής a να είναι τέτοια που να καθιστά την ενέργεια E να παρουσιάζει ακρότατο. Άρα:

$$\frac{\partial E(y, a)}{\partial a} = 0 \quad (5.5.b)$$

Ο καθορισμός των θέσεων ισορροπίας απαιτεί –αρχικά– τον υπολογισμό της ποσότητας $V_c z_c$ ως συνάρτηση των y και a . Αυτό μπορεί να γίνει είτε αναλυτικά είτε γεωμετρικά (εφόσον η γεωμετρία του στερεού το επιτρέπει). Επειδή στην γεωμετρική προσέγγιση που προηγήθηκε όλοι οι υπολογισμοί ήταν αμιγώς γεωμετρικοί, στην αντίστοιχη ενεργειακή που θα ακολουθήσει οι υπολογισμοί θα είναι αναλυτικοί.

Η ποσότητα $V_c z_c$ αποτελεί τη ροπή του βυθισμένου όγκου ως προς την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού και δίνεται από τη σχέση :

$$V_c z_c = \int_{z_0}^0 A(z) z dz \quad (5.6)$$

όπου z_0 είναι η τεταγμένη του χαμηλότερου σημείου του V_c και $A(z)$ η επιφάνεια της οριζόντιας τομής του στερεού με τεταγμένη z .

Είναι προφανές ότι η θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας αποτελεί ευσταθή θέση ισορροπίας. Θα πρέπει, όμως, να εξετάσουμε και αν κάποια άλλη θέση μεγαλύτερης δυναμικής ενέργειας είναι επίσης ευσταθής.

Γενικά αν τα q_i ($i = 1, \dots, n$) εκφράζουν τις μεταβλητές του προβλήματος από τις οποίες εξαρτάται η ενέργεια E και οι συνθήκες ισορροπίας $\frac{\partial E}{\partial q_i} = 0, (i = 1, \dots, n)$ καθορίζουν μια σειρά τιμών ισορροπίας των μεταβλητών, τότε η ισορροπία είναι ευσταθής αν για κάθε μικρή μεταβολή των μεταβλητών δq_i ($i = 1, \dots, n$) η ενέργεια αυξάνεται, δηλαδή:

$$\delta E = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{eq} \delta q_i \delta q_k > 0 \quad (5.7)$$

Η παραπάνω ανισότητα θα ικανοποιηθεί αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα $(\partial^2 E / \partial q_i \partial q_k)$ είναι θετικές. Επομένως, για τις μεταβλητές a και y η ισορροπία χαρακτηρίζεται ευσταθής αν και μόνο αν :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y} \right)^2 > 0 \quad (5.8)$$

Παρατηρώντας την έκφραση της ενέργειας στη σχέση (5.3), βλέπουμε ότι η ενέργεια είναι συνάρτηση των σταθερών g και ρ_0 . Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις της ενέργειας που θα προκύψουν, θα εισάγουμε το ειδικό μέγεθος :

$$\mathcal{E} = \frac{E}{\rho_0 g} \quad (5.9)$$

Οπότε, η σχέση (5.3) παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\mathcal{E} = rVy - V_c z_c \quad (5.10)$$

5.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η εύρεση της αναλυτικής έκφρασης της ενέργειας εξαρτάται από τον υπολογισμό της ροπής του βυθισμένου όγκου $V_c z_c$. Όπως ήδη αναφέραμε ο υπολογισμός αυτός θα γίνει αναλυτικά. Δεδομένου, όμως, ότι η ποσότητα $V_c z_c$ εξαρτάται από την εγκάρσια γωνία στροφής a , θα πρέπει να παραθέσουμε αναλυτικά τόσο τη γεωμετρία του πρίσματος όσο και τις γεωμετρικές σχέσεις που περιγράφουν την ροπή αυτή.

Έστω σωματοπαγές σύστημα συντεταγμένων όπου ο κατακόρυφος άξονας σχηματίζει γωνία a με τον y άξονα (του γαιόδετου συστήματος). Το κέντρο του ορθογωνίου $ABCD$ διαστάσεων $b \times h$ θα έχει συντεταγμένες $O : (0, y)$.

Στην ανάλυση που κάνουμε θεωρούμε πως το πρίσμα στρέφεται δεξιόστροφα ($-a$). Επομένως, το μητρώο στροφής θα είναι :

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Άρα, οι συντεταγμένες των γωνιών σε κάθε πιθανή θέση του πρίσματος στο σύστημα συντεταγμένων που ορίσαμε προκύπτουν ως ο αφινικός μετασχηματισμός (στροφή και μεταφορά) των αρχικών συντεταγμένων στην όρθια θέση ισορροπίας. Συνεπώς, θα έχουμε :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = A \times \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

Εφαρμόζοντας τον αφινικό μετασχηματισμό στα σημεία που ορίζουν οι τέσσερις γωνίες της εγκάρσιας διατομής του πρίσματος, τελικά προκύπτει :

$$\begin{aligned} A &: \left(\frac{b}{2} \cos a - \frac{h}{2} \sin a, -\frac{b}{2} \sin a - \frac{h}{2} \cos a + y \right) \\ B &: \left(-\frac{b}{2} \cos a - \frac{h}{2} \sin a, \frac{b}{2} \sin a - \frac{h}{2} \cos a + y \right) \\ C &: \left(-\frac{b}{2} \cos a + \frac{h}{2} \sin a, \frac{b}{2} \sin a + \frac{h}{2} \cos a + y \right) \\ D &: \left(\frac{b}{2} \cos a + \frac{h}{2} \sin a, -\frac{b}{2} \sin a + \frac{h}{2} \cos a + y \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Παρακάτω, θα γίνει απόλυτα εμφανής η χρησιμότητα των συντεταγμένων των γωνιών του ορθογωνίου σε κάθε γωνία στροφής του πρίσματος, αφού ουσιαστικά θα καθορίσουν τις διάφορες περιοχές ολοκλήρωσης για τον αναλυτικό υπολογισμό του $V_c z_c$.

Αν θεωρήσουμε ξ το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος εντός του ορθογωνίου, παράλληλου στον x άξονα και σε απόσταση η κάτω από αυτόν, τότε η ροπή του βυθισμένου τμήματος θα είναι :

$$V_c z_c = \int_{y_A}^0 \xi \eta d\eta \quad (5.14)$$

$$= \begin{cases} \int_{y_A}^{y_B} \xi_1 \eta d\eta + \int_{y_B}^0 \xi_2 \eta d\eta & , y_B \leq 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

$$= \begin{cases} \int_{y_A}^0 \xi_1 \eta d\eta & , y_B \geq 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

όπου οι αποστάσεις $\xi_1 = x_l - x_k$ και $\xi_2 = x_q - x_p$ προσδιορίζονται γεωμετρικά ως εξής :

$$\bullet \quad \xi_1 = \frac{\eta - y_A}{\sin a \cdot \cos a} \quad (5.17)$$

$$\bullet \quad \xi_2 = \frac{b}{\cos a} \quad (5.18)$$

Θα πρέπει βέβαια να αναφέρουμε ότι η παραπάνω περίπτωση περιγραφής υπολογισμού της ροπής $V_c z_c$ ανταποκρίνεται στο σχήμα 5.1 και επομένως καλύπτει την περίπτωση των δύο και της μιας βυθισμένης γωνίας. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, οι αντίστοιχες σχέσεις διαφοροποιούνται και θα αναφερθούν παρακάτω.

5.5 ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΝΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Στο σημείο αυτό και αφού παραθέσαμε το θεωρητικό υπόβαθρο, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις αναλυτικές σχέσεις της ενέργειας E του συστήματος στερεού-ρευστού. Όπως στην γεωμετρική προσέγγιση έτσι και εδώ, το θεωρούμενο πρίσμα είναι ορθογωνικής διατομής διαστάσεων $b \times h$. Η ενέργεια θα πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά για τις διακριτές θέσεις που λαμβάνει το πρίσμα. Επομένως, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.
- Μία γωνία (A) βυθισμένη.
- Δύο γωνίες (A και D) βυθισμένες.

Όπως ήδη αναφέραμε, για να βρούμε τις εκφράσεις της ενέργειας E , θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε αναλυτικά την ποσότητα $V_c z_c$.

- Δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.

Στην περίπτωση που οι γωνίες A και B είναι βυθισμένες, η γωνία εγκάρσιας στροφής χαρακτηρίζεται από ένα εύρος τιμών που οριοθετείται από την όρθια θέση ισορροπίας ($a = 0^\circ$) και εκείνη την εγκάρσια στροφή κατά την οποία η γωνία B αρχίζει να αναδύεται.

Επομένως, για $y_B \leq 0$ παίρνουμε από τη σχέση (5.15) ότι :

$$V_c z_c = \int_{y_A}^{y_B} \xi_1 \eta d\eta + \int_{y_B}^0 \xi_2 \eta d\eta$$

Ολοκληρώνοντας και αντικαθιστώντας τα ξ_1, ξ_2 από τις σχέσεις (5.17),(5.18) προκύπτει:

$$V_c z_c = \frac{y_B^3 - y_A^3}{3 \sin a \cos a} - \frac{y_B^2 y_A - y_A^3}{2 \sin a \cos a} - \frac{b y_B^2}{2 \cos a} \quad (5.19)$$

Με αντικατάσταση των τεταγμένων των σημείων A και B -όπως αυτές προσδιορίστηκαν από τις σχέσεις (5.13) - στην (5.19) θα έχουμε :

$$V_c z_c = -\frac{b}{24}(-12hy + 3h^2 \cos a + 12y^2 \sec a + b^2 \sin a \tan a) \quad (5.20)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος γνωρίζουμε από τη σχέση (5.3) ότι είναι:

$$E = g\rho_0(rVy - V_c z_c)$$

Ή αλλιώς από την (5.10):

$$\mathcal{E} = rVy - V_c z_c$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.3) και (5.10) και αντικαθιστώντας στην (5.20), τελικά παίρνουμε ότι:

$$\mathcal{E} = rbhy + \frac{b}{24}(-12hy + 3h^2 \cos a + 12y^2 \sec a + b^2 \sin a \tan a) \quad (5.21)$$

Στο παρόν σημείο, κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε ότι στο πλαίσιο της διδιάστατης θεωρίας ο όγκος πρίσματος ορθογωνικής διατομής $b \times h$ αντικαθίσταται από το εμβαδόν αυτής. Αυτό γιατί το μήκος του πρίσματος, όπως έχουμε προαναφέρει, θεωρείται άπειρο. Η απαλοιφή του μήκους από τις ενεργειακές σχέσεις μπορεί διαφορετικά να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι στην ουσία υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα μήκους του πρίσματος.

Για να βρούμε τώρα τις θέσεις ισορροπίας του πρίσματος, αρκεί να εφαρμόσουμε τις συνθήκες ισορροπίας όπως αυτές ορίστηκαν πιο πάνω.

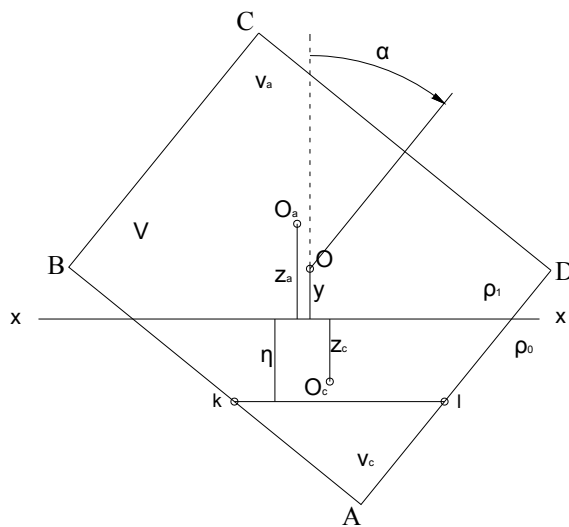
Η πρώτη συνθήκη ισορροπίας $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial a} = 0$ οδηγεί σε:

$$\frac{b \sin a}{24 \cos^2 a} [(b^2 - 3h^2) \cos^2 a + b^2 + 12y^2] = 0 \quad (5.22)$$

Από την δεύτερη συνθήκη ισορροπίας $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial y} = 0$, θα έχουμε :

$$rbh + \frac{b}{24}(-12h + 24y \sec a) = 0 \quad (5.23)$$

b) Μία γωνία (A) βυθισμένη



Σχήμα 5.2 : Εγκάρσια διατομή πρίσματος για μία γωνία (A) βυθισμένη

Στην περίπτωση αυτή και εφόσον η γωνία B έχει αρχίσει να αναδύεται ($y_B \geq 0$), βυθισμένη παραμένει μόνο η γωνία A . Τότε, η ροπή του βυθισμένου τμήματος θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (5.16) :

$$V_c z_c = \int_{y_A}^0 \xi_1 \eta d\eta$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (5.17) στην (5.16) και ολοκληρώσουμε, θα έχουμε :

$$V_c z_c = -\frac{y_A^3}{3 \sin a \cos a} + \frac{y_A^3}{2 \sin a \cos a} \quad (5.24)$$

Εφαρμόζοντας την τεταγμένη του σημείου A από την (5.13) στην (5.24) και κάνοντας πράξεις προκύπτει:

$$V_c z_c = -\frac{1}{24} \frac{1}{2 \sin a \cos a} (-2y + h \cos a + b \sin a)^3 \quad (5.25)$$

Επομένως, η ανηγμένη συνολική δυναμική ενέργεια, σύμφωνα με την (5.10) θα είναι:

μας δίνει το μήκος ξ_2 αλλάζει, με το ξ_1 ωστόσο να διατηρεί την ίδια έκφραση. Έτσι, λοιπόν, θα έχουμε :

$$\bullet \quad \xi_2 = \frac{h}{\sin a} \quad (5.29)$$

Η ροπή του βυθισμένου τμήματος του πρίσματος θα είναι :

$$V_c z_c = \int_{y_A}^{y_D} \xi_1 \eta d\eta + \int_{y_D}^0 \xi_2 \eta d\eta \quad (5.30)$$

Αντικαθιστώντας τα ξ_1, ξ_2 στην παραπάνω σχέση και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$V_c z_c = \frac{y_D^3 - y_A^3}{3 \sin a \cos a} - \frac{y_A y_D^2 - y_A^3}{2 \sin a \cos a} - \frac{h y_D^2}{2 \sin a} \quad (5.31)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις τεταγμένες των βυθισμένων γωνιών y_A και y_D στη σχέση (5.31), θα προκύψει ότι :

$$V_c z_c = -\frac{1}{24} h \left(h^2 \cos a \cot a + \frac{3}{\sin a} (-2y + b \sin a)^2 \right) \quad (5.32)$$

Από τη σχέση (5.10), η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι :

$$\mathcal{E} = rbhy + \frac{1}{24} h \left(h^2 \cos a \cot a + \frac{3}{\sin a} (-2y + b \sin a)^2 \right) \quad (5.33)$$

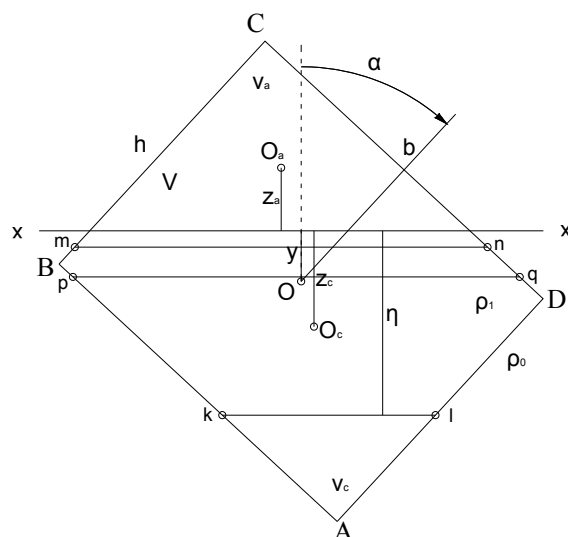
Από την πρώτη συνθήκη ισορροπίας $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial a} = 0$, θα έχουμε :

$$-\frac{1}{24} h \left((-3b^2 + h^2) \cos a + (h^2 + 12y^2) \cot a \csc a \right) = 0 \quad (5.34)$$

Ενώ από τη δεύτερη $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial y} = 0$, παίρνουμε :

$$bhr - \frac{h}{2 \sin a} (-2y + b \sin a) = 0 \quad (5.35)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε πως για τιμές του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού $r > 0.5$, το στερεό σώμα αντί για μία γωνία βυθισμένη καταλαμβάνει μια διαφορετική χαρακτηριστική θέση, αυτή κατά την οποία τρεις γωνίες είναι βυθισμένες.



Σχήμα 5.4 : Εγκάρσια διατομή πρίσματος για τρεις γωνίες (A, B και D) βυθισμένες

Η περίπτωση των τριών βυθισμένων γωνιών (γωνίες A, B, D) έπεται αυτής των δύο βυθισμένων γωνιών (περίπτωση α) για $r > 0.5$, ενώ η ροπή του βυθισμένου όγκου υπολογίζεται ως εξής :

$$V_c z_c = \int_{y_A}^{y_D} \xi_1 \eta d\eta + \int_{y_D}^{y_B} \xi_2 \eta d\eta + \int_{y_B}^0 \xi_3 \eta d\eta \quad (5.36)$$

όπου οι αποστάσεις $\xi_1 = x_l - x_k$, $\xi_2 = x_q - x_p$ και $\xi_3 = x_n - x_m$ προσδιορίζονται γεωμετρικά ως εξής :

- $\xi_1 = \frac{\eta - y_A}{\sin a \cos a} \quad (5.37)$

- $\xi_2 = \frac{h}{\sin a} \quad (5.38)$

- $\xi_3 = \frac{y_C - \eta}{\sin a \cos a} \quad (5.39)$

Αντικαθιστώντας τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 στην παραπάνω σχέση και ολοκληρώνοντας θα έχουμε :

$$V_c z_c = \frac{y_D^3 - y_A^3}{3 \sin a \cos a} - \frac{y_A y_D^2 - y_A^3}{2 \sin a \cos a} - \frac{h y_B^2}{2 \sin a} - \frac{h y_D^2}{2 \sin a} - \frac{y_C y_B^2}{2 \sin a \cos a} + \frac{y_B^3}{3 \sin a \cos a} \quad (5.40)$$

Με αντικατάσταση των y_A, y_B, y_C και y_D στην έκφραση της ροπής του βυθισμένου όγκου που μόλις βρήκαμε, θα πάρουμε :

$$V_c z_c = \frac{1}{48} (36bhy - 6h^2 y \cot a - 12hy^2 \csc a - 12by^2 \sec a - 8y^2 \csc a \sec a - 3b^2 h \sin a - h^2 \cot a (h \cos a + 3b \sin a) - 6b^2 y \tan a - b^2 \sin a \tan a) \quad (5.41)$$

Άρα, η συνολική δυναμική ενέργεια κατά την (5.10) θα είναι:

$$\mathcal{E} = rbhy + \frac{1}{48} (36bhy - 6h^2 y \cot a - 12hy^2 \csc a - 12by^2 \sec a - 8y^2 \csc a \sec a - 3b^2 h \sin a - h^2 \cot a (h \cos a + 3b \sin a) - 6b^2 y \tan a - b^2 \sin a \tan a) \quad (5.42)$$

Από την πρώτη συνθήκη ισορροπίας $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial a} = 0$, θα έχουμε :

$$\frac{1}{48} (\csc^2 2a (2y + h \cos a + b \sin a)^2 (-5h \cos a - 8y \cos 2a + h \cos 3a + 5b \sin a + b \sin 3a)) = 0 \quad (5.43)$$

Ενώ από τη δεύτερη $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial y} = 0$, παίρνουμε :

$$bhr + \frac{1}{48} (-36bh + 6h^2 \cot a + 24hy \csc a + 24by \sec a + 24y^2 \csc a \sec a + 6b^2 \tan a) = 0 \quad (5.44)$$

Τα αποτελέσματα της ενεργειακής ανάλυσης που προηγήθηκε, δηλαδή τα διαγράμματα ισορροπίας $a - r$, θα προκύψουν από συναρτήσεις της μορφής $a = a(r)$ (δεν παρατίθενται λεπτομερώς λόγω συντομίας), αφού απαλείψουμε τον όρο y από το σύστημα των συνθηκών ισορροπίας σε κάθε μία από τις προαναφερθείσες περιπτώσεις.

Πριν προχωρήσουμε στην παράθεση των αποτελεσμάτων, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μνεία στη θεωρία ευστάθειας δυναμικών συστημάτων και στον τρόπο που διάφορες παράμετροι τα επηρεάζουν (διακλαδώσεις), με σκοπό να κατανοήσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

6 ΘΕΩΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ενεργειακή διερεύνηση του φαινομένου της ισορροπίας επιπλεόντων σωμάτων οδήγησε στην περιγραφή του από συστήματα διαφορικών εξισώσεων που προέκυψαν από τις συνθήκες ισορροπίας του. Αυτό μας επιτρέπει να αντιληφθούμε και κατ' επέκταση να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό ως δυναμικό. Μάλιστα, κρίνεται απαραίτητη η επέκταση της θεωρίας προς αυτήν την κατεύθυνση, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν ως αποκρίσεις του δυναμικού συστήματος θα υποστηριχθούν θεωρητικά, ώστε στη συνέχεια να ερμηνευθούν.

6.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Οι διάφορες ποιοτικές μεταβολές που χαρακτηρίζουν τα φυσικά φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν από συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων. Στην ενότητα αυτή, θα αναφερθούμε στις έννοιες και τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, ώστε να κατανοήσουμε σε βάθος τη συμπεριφορά τους.

Έστω, λοιπόν, δυναμικό σύστημα, το οποίο περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Η κατάσταση του συστήματος στο χρόνο περιγράφεται από τις συναρτήσεις $x_i \left(= \frac{d x_i}{dt} \right)$ που εξαρτώνται από τον χρόνο και καλούνται μεταβλητές κατάστασης (state

variables). Καθότι, όμως, η εξάρτηση από την μεταβλητή του χρόνου t δεν είναι άμεση, το σύστημα χαρακτηρίζεται αυτόνομο.

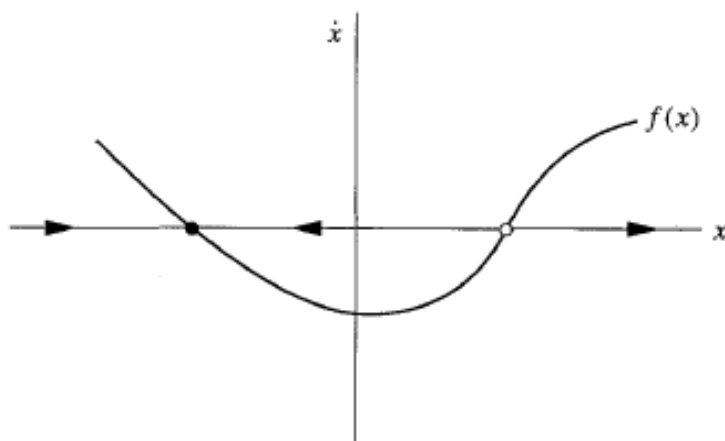
Το σύστημα αυτό παράγει ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο με συντεταγμένες x_1, x_2, \dots, x_n , που ονομάζεται χώρος φάσεων (phase space), ενώ κάθε σημείο του εκφράζεται από το διάνυσμα (x_1, x_2, \dots, x_n) . Το σύστημα, όντας δυναμικό, επιτρέπει την μετακίνηση (με την αλλαγή του χρόνου) των σημείων του, τα οποία διαγράφουν ένα σύνολο τροχιών ή καμπυλών ροής (flow lines). Το γράφημα στο οποίο αποτυπώνονται τα χαρακτηριστικά του συνόλου των τροχιών στο χώρο φάσεων του δεδομένου δυναμικού συστήματος καλείται πορτραίτο φάσεων (phase portrait).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία ισορροπίας (equilibrium points) του δυναμικού συστήματος, τα οποία αποτελούν λύσεις του συστήματος εξισώσεων :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ονομάζονται επίσης μόνιμες λύσεις (stationary solutions) ή σταθερά σημεία (fixed points).

Για απλοποίηση του προβλήματος, έστω μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ που χαρακτηρίζεται από το παρακάτω πορτραίτο φάσεων :



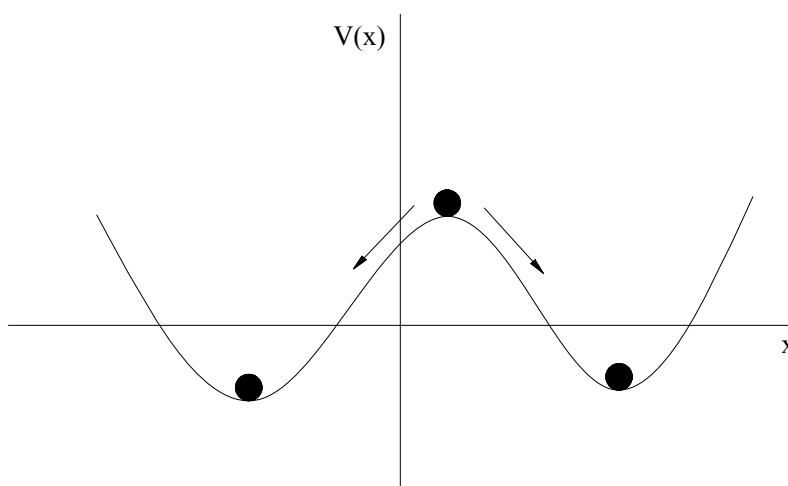
Σχήμα 6.1 : Σημεία ισορροπίας σε πορτραίτο φάσεων

Τα σταθερά σημεία αντιπροσωπεύουν τις λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας $f(x) = 0$. Μια θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται ευσταθής, αν οι διαταραχές περί της θέσης αυτής

αποσβένονται με τον χρόνο και συμβολίζεται γεωμετρικά από ευσταθές σταθερό σημείο (μαύρη τελεία). Αντίθετα, ασταθής θέση ισορροπίας στην οποία με την πάροδο του χρόνου οι διαταραχές αυξάνονται συμβολίζεται από ασταθές σταθερό σημείο (λευκή τελεία).

Ένας διαφορετικός τρόπος για να απεικονίσουμε τη δυναμική του παραπάνω πρωτοτάξιου συστήματος $\dot{x} = f(x)$ βασίζεται στην ιδέα της δυναμικής ενέργειας. Έστω σωματίδιο που κινείται προς το σημείο της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, η οποία ορίζεται από :

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (6.3)$$



Σχήμα 6.2 : Σωματίδιο που κινείται πάνω στην καμπύλη δυναμικής ενέργειας.

Το αρνητικό πρόσημο στον ορισμό της V ακολουθεί την παραδοχή ότι το σωματίδιο κινείται προς τα κάτω καθώς προχωράει. Αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές, αν εκφράσουμε την μεταβλητή x ως συνάρτηση του χρόνου και υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο της συνάρτησης $V(x(t))$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (6.4)$$

Από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$, οπότε :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} \quad (6.5)$$

Άρα,

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0 \quad (6.6)$$

Επομένως, η δυναμική ενέργεια $V(t)$ μειώνεται κατά μήκος της τροχιάς και έτσι το σωματίδιο κινείται πάντα προς θέσεις χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Φυσικά, αν το σωματίδιο βρίσκεται σε σημείο ισορροπίας όπου $dV/dx = 0$, η δυναμική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Θα πρέπει να αναφέρουμε, ακόμα, πως το τοπικό ελάχιστο της $V(x)$ αντιστοιχεί σε ευσταθή σταθερά σημεία, ενώ το αντίστοιχο μέγιστο σε ασταθή.

6.3 ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ

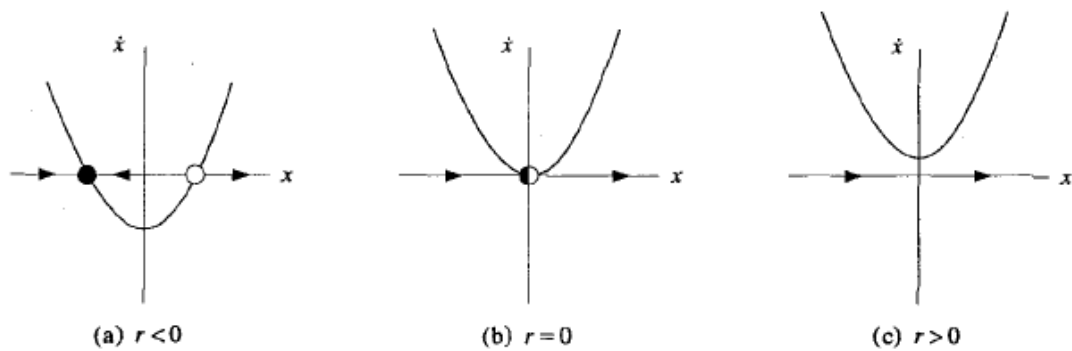
Το πλέον ενδιαφέρον και σημαντικό κομμάτι που παρουσιάζουν τα μη γραμμικά συστήματα είναι η εξάρτησή τους από τις παραμέτρους που τα καθορίζουν. Είναι δυνατόν η ποιοτική μορφή των λύσεων ενός μη γραμμικού συστήματος να μεταβληθεί και να μεταβεί από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη (πχ. από ευστάθεια σε αστάθεια) ή και να αλλάξει απόκριση. Όλες αυτές οι μεταβολές μπορούν να προκληθούν με την αλλαγή των παραμέτρων που επηρεάζουν το σύστημα και ονομάζονται διακλαδώσεις (bifurcations). Οι διακλαδώσεις αποτελούν σημαντικό χαρακτηριστικό του κάθε συστήματος, αφού παρέχουν πληροφορίες για τις μεταβολές στις οποίες υπόκειται η απόκριση του συστήματος, καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι ελέγχου.

Saddle- Node Bifurcation

Η διακλάδωση αυτή συνιστά τον βασικό μηχανισμό κατά τον οποίο σταθερά σημεία “δημιουργούνται” και “εξαφανίζονται”. Καθώς η παράμετρος μεταβάλλεται, δύο σταθερά σημεία πλησιάζουν, συγκρούονται και αμοιβαία “εξαφανίζονται”. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας διακλάδωσης δίνεται από το πρωτοτάξιο σύστημα :

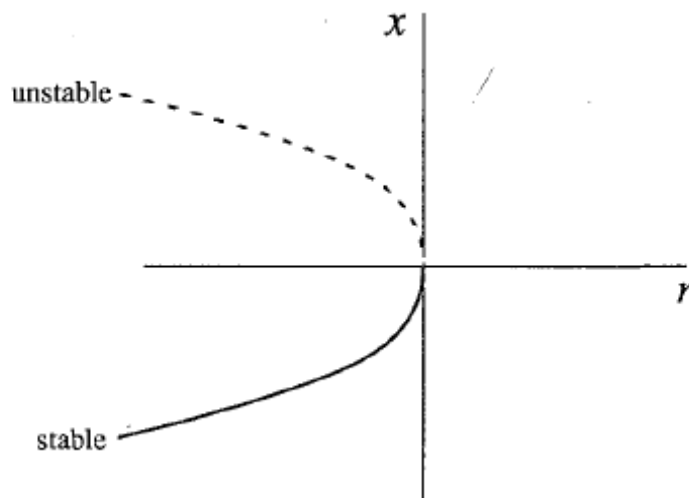
$$\dot{x} = r + x^2 \quad (6.7)$$

όπου r είναι η παράμετρος, η οποία μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν.



Σχήμα 6.3 : Σημεία ισορροπίας συστήματος για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου r (Saddle- Node Bifurcation)

Για $r < 0$, οι λύσεις του συστήματος ($x^* = \sqrt{-r}, x^* = -\sqrt{-r}$) σχηματίζουν παραβολή, ενώ το σημείο στο οποίο εμφανίζονται οι λύσεις ($r = 0$) αποτελεί μια saddle-node διακλάδωση. Σχετικά με την ευστάθεια των λύσεων προκύπτει ότι ο κλάδος $x = \sqrt{-r}$ είναι ασταθής, ενώ ο κλάδος $x = -\sqrt{-r}$ ευσταθής.



Σχήμα 6.4 : Διακλάδωση τύπου Saddle-node

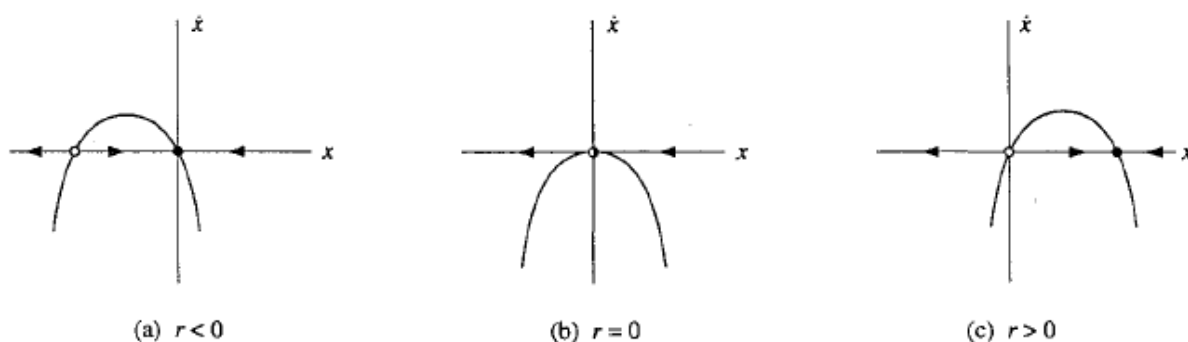
Transcritical Bifurcation

Υπάρχουν συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου ένα σταθερό σημείο πρέπει να υπάρχει για κάθε τιμή της παραμέτρου χωρίς να καταστρέφεται ποτέ. Ωστόσο, καθώς η παράμετρος

μεταβάλλεται, το σταθερό αυτό σημείο ενδέχεται να αλλάζει ευστάθεια. Μια τυπική μορφή μιας τέτοιας διακλάδωσης είναι η εξής :

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (6.8)$$

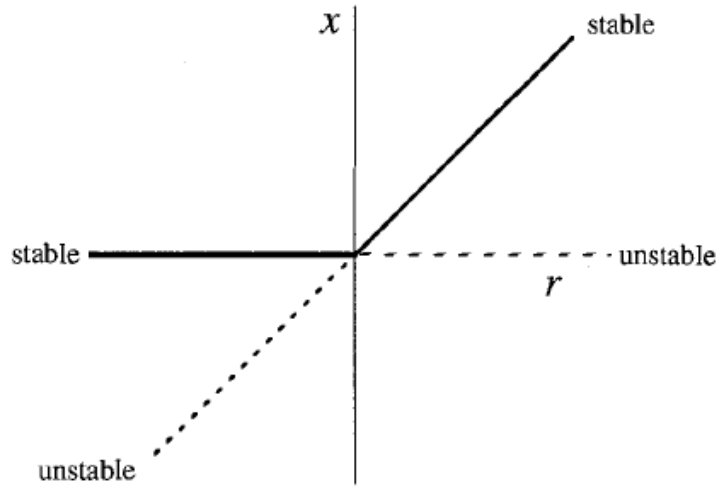
Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται το διανυσματικό πεδίο καθώς η παράμετρος r μεταβάλλεται. Αξιοσημείωτο είναι ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο για όλες τις τιμές της παραμέτρου.



Σχήμα 6.5: Σημεία ισοροπίας συστήματος για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου r (Transcritical Bifurcation)

Για $r < 0$, υπάρχει ένα ασταθές σταθερό σημείο για $x^* = r$ και ένα ευσταθές σταθερό σημείο για $x^* = 0$. Καθώς το r αυξάνεται, το ασταθές σταθερό σημείο προσεγγίζει το ευσταθές στην αρχή των αξόνων και ενώνεται με αυτό όταν $r = 0$. Τελικά, για $r > 0$, το σταθερό σημείο στην αρχή των αξόνων γίνεται ασταθές, ενώ το σταθερό σημείο για $x^* = r$ είναι πλέον ευσταθές. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι τα δύο σταθερά σημεία ανταλλάσσουν ευστάθειες.

Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά αυτής της διακλάδωσης από την saddle-node διακλάδωση, η οποία έγκειται στο γεγονός ότι στην transcritical διακλάδωση τα δύο σταθερά σημεία δεν εξαφανίζονται μετά την διακλάδωση· απλά αλλάζουν ευστάθεια.



Σχήμα 6.6 : Διακλάδωση τύπου transcritical

Pitchfork Bifurcation

Μια τρίτη κατηγορία διακλαδώσεων είναι οι περίφημες διακλαδώσεις pitchfork, οι οποίες συναντώνται συχνά σε φυσικά φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από συμμετρία. Για παράδειγμα, υπάρχουν προβλήματα που χαρακτηρίζονται από συμμετρία (στο χώρο) μεταξύ της δεξιάς και αριστερής μεριάς. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα σταθερά σημεία τείνουν να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται σε συμμετρικά ζευγάρια.

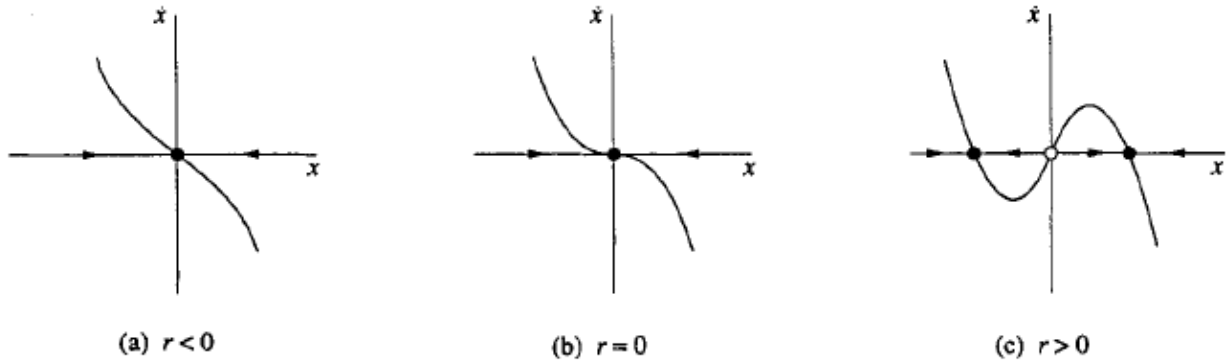
Οι διακλαδώσεις τύπου Pitchfork διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στις supercritical (πιο απλός τύπος διακλάδωσης) και στις subcritical pitchfork διακλαδώσεις.

Supercritical Pitchfork Bifurcation

Η χαρακτηριστική μορφή των διακλαδώσεων τύπου supercritical pitchfork είναι :

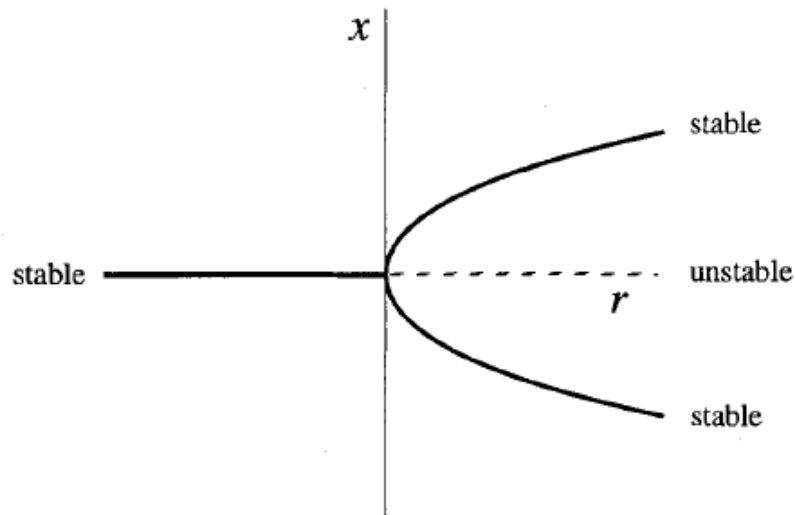
$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (6.9)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή $f(x) = f(-x)$. Αυτή η ιδιότητα ευθύνεται για την συμμετρία μεταξύ δεξιάς και αριστερής μεριάς που αναφέραμε προηγουμένως.



Σχήμα 6.7 : Διανυσματικό πεδίο για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου r (Supercritical Pitchfork Bifurcation)

Για $r < 0$, η αρχή των αξόνων είναι το μόνο σταθερό σημείο και μάλιστα ευσταθές. Όταν $r = 0$, το ίδιο σημείο παραμένει ευσταθές αλλά πλέον οριακά, καθώς η γραμμικότητα εξαφανίζεται. Τελικά για $r > 0$, το σταθερό σημείο στην αρχή των αξόνων γίνεται ασταθές, ενώ δύο νέα ευσταθή σταθερά σημεία εμφανίζονται εκατέρωθεν του ασταθούς στις συμμετρικές θέσεις $x^* = \pm\sqrt{r}$. Η διακλάδωση αυτού του τύπου έχει την χαρακτηριστική μορφή :



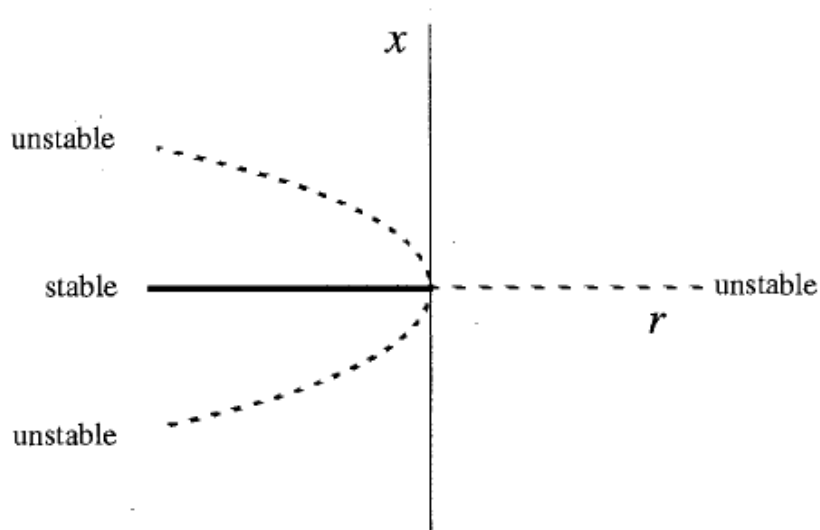
Σχήμα 6.8 : Διακλάδωση τύπου supercritical pitchfork

Subcritical Pitchfork Bifurcation

Στην περίπτωση που μόλις εξετάσαμε, ο τριτοβάθμιος όρος είναι σταθεροποιητικός. Αυτό σημαίνει ότι δρα σαν δύναμη επαναφοράς που έλκει το $x(t)$ στο σταθερό σημείο ($x = 0$). Αντίθετα, στην περίπτωση της subcritical pitchfork διακλάδωσης, ο τριτοβάθμιος όρος λειτουργεί αποσταθεροποιητικά, δηλαδή :

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad (6.10)$$

Η διακλάδωση αυτού του τύπου έχει την παρακάτω μορφή :



Σχήμα 6.9 : Διακλάδωση τύπου subcritical pitchfork

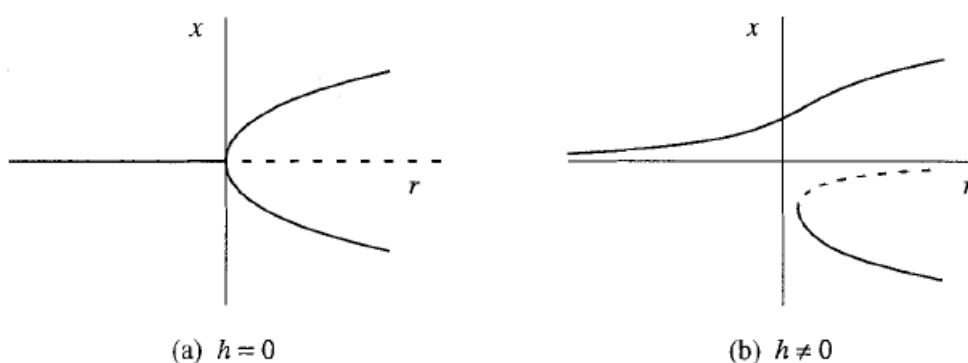
Σε σχέση με το σχήμα 6.8, η διακλάδωση αντιστρέφεται. Εδώ τα μη μηδενικά σταθερά σημεία $x^* = \pm\sqrt{-r}$ είναι ασταθή και εντοπίζονται πριν τη διακλάδωση ($r < 0$). Όπως και στην supercritical pitchfork διακλάδωση, το σταθερό σημείο στην αρχή των αξόνων είναι ευσταθές για $r < 0$ και ασταθές για $r > 0$, με τη διαφορά ότι η αστάθεια μετά την διακλάδωση δεν εμποδίζεται από τον κυβικό όρο. Αντιθέτως, ο αποσταθεροποιητικός πλέον κυβικός όρος κατευθύνει τις τροχιές στο άπειρο.

Παρατηρούμε ότι η περίπτωση όπου η ευθεία $x = -h$ εφάπτεται στο τοπικό μέγιστο ή στο τοπικό ελάχιστο της κυβικής καμπύλης συνιστά μια saddle-node διακλάδωση. Στο τοπικό μέγιστο ισχύει $\frac{d}{dy}(rx - x^3) = r - 3x^2 = 0$, άρα :

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{r}{3}} \quad (6.12)$$

$$rx_{\max} - x_{\max}^3 = 2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{2/3} \quad (6.13)$$

Επομένως, η εξίσωση (6.11) έχει τρία σταθερά σημεία για $|h| < h_c(r)$ και ένα σταθερό σημείο για $|h| > h_c(r)$. Το διάγραμμα διακλάδωσης στην περίπτωση αυτή έχει την ακόλουθη μορφή για σταθερές τιμές της παραμέτρου h :



Σχήμα 6.11: Ατελής διακλάδωση

Για $h = 0$, έχουμε την περίπτωση μιας διακλάδωσης pitchfork, ενώ για $h \neq 0$ το διάγραμμα χωρίζεται σε δύο κομμάτια. Το πάνω κομμάτι αποτελείται μόνο από ευσταθή σταθερά σημεία, σε αντίθεση με το κάτω κομμάτι που χαρακτηρίζεται από δύο τμήματα, ένα ευσταθές και ένα ασταθές. Καθώς το r αυξάνεται, δεν υπάρχει πλέον σημείο μετάβασης για $r = 0$. Έτσι, το σταθερό σημείο κινείται ομαλά κατά μήκος του πάνω κλάδου. Αντίθετα, ο κάτω κλάδος δεν είναι προσβάσιμος, εκτός και αν προκαλέσουμε μια μεγάλη διαταραχή.

Θα πρέπει να αναφέρουμε πως το διάγραμμα διακλάδωσης (b) του σχήματος 6.11 ενδέχεται να είναι συμμετρικό ως προς τον οριζόντιο άξονα για τιμές του h , υπολογιζόμενες ως προς το τοπικό ελάχιστο.

7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά αντιστοιχία με το προηγούμενο κεφάλαιο, το δυναμικό σύστημα που μελετάμε είναι το επιπλέον πρίσμα που δύναται να ισορροπεί σε διαφορετικές θέσεις εγκάρσιας στροφής, καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού r . Η πρωτοτάξια μη γραμμική διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι της μορφής :

$$\dot{V} = f(a; r) \quad (7.1)$$

όπου V είναι η δυναμική ενέργεια και a η μεταβλητή (γωνία εγκάρσιας στροφής) του συστήματος. Ζητούμενο της ενεργειακής ανάλυσης είναι η εύρεση των σημείων ισορροπίας του συστήματος, γεγονός που απαιτεί :

$$\dot{V} = f(a^*; r^*) = 0 \quad (7.2)$$

Ουσιαστικά, τα διαγράμματα ισορροπίας $a - r$ που αναζητούμε δεν είναι άλλα από τα διαγράμματα διακλαδώσεων (bifurcation diagrams). Λόγω της πολυπλοκότητας της f , δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε το είδος της διακλάδωσης που χαρακτηρίζει την ισορροπία του συστήματος πριν την αναπαράσταση των διαγραμμάτων $a - r$.

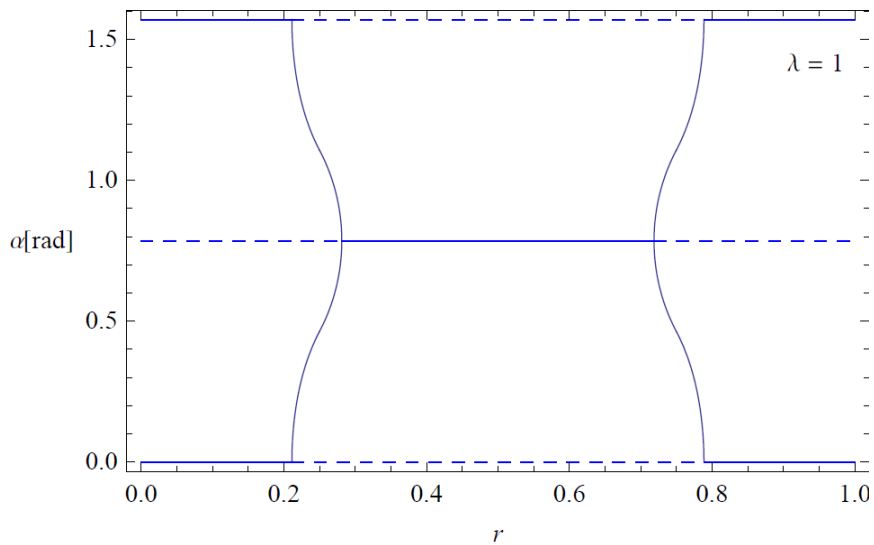
7.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αρχικά, θα παραθέσουμε το διάγραμμα $a - r$ του συμμετρικού προβλήματος (ομογενές πρίσμα τετραγωνικής διατομής), ενώ εν συνεχεία θα διαταράξουμε αυτή τη συμμετρία, μεταβάλλοντας τον λόγο των διαστάσεων της διατομής, το κέντρο βάρους του πρίσματος αλλά επίσης και τα δύο παράλληλα.

Να αναφέρουμε ότι παρακάτω τα διαγράμματα που αφορούν στην διαταραχή της παραμέτρου του κέντρου βάρους και στη συνδυασμένη διαταραχή παρατίθενται παράλληλα, για να μπορέσουμε να παρακολουθήσουμε πως επιδρά η κάθε παράμετρος μόνη της αλλά και μαζί με την άλλη, ώστε να κατανοήσουμε την επίδρασή τους στην απόκριση του συστήματος.

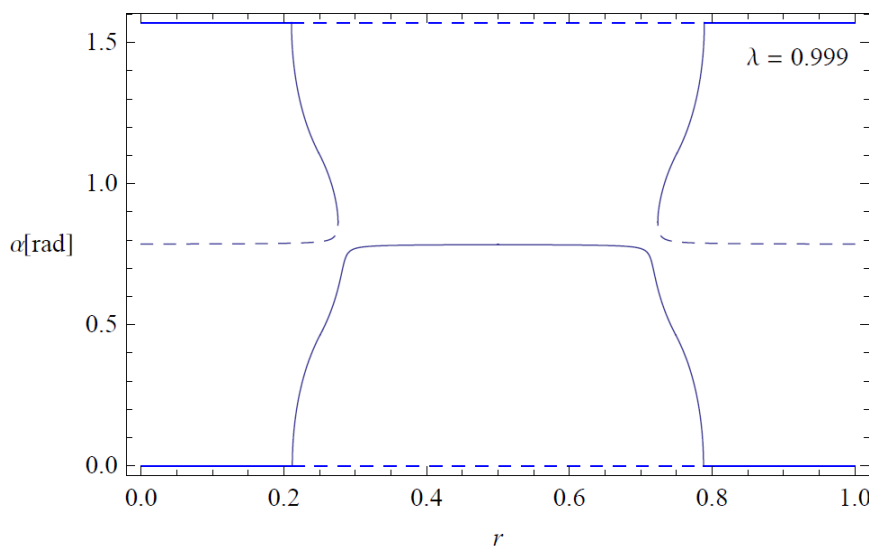
Επίσης, σημαντικό για την κατανόηση των σχημάτων είναι να εξηγήσουμε ότι με διακεκομμένες γραμμές (γκρι τελείες) αποτυπώνονται οι καμπύλες (σημεία) που χαρακτηρίζουν ασταθείς θέσεις ισορροπίας, ενώ οι συνεχείς γραμμές (μαύρες τελείες) εκφράζουν θέσεις ευσταθούς ισορροπίας. Τα σημεία αυτά είναι θέσεις ισορροπίας όπως προέκυψαν από την γεωμετρική μέθοδο και παρατίθενται για λόγους πληρότητας (εφόσον με την ενεργειακή μέθοδο δεν μπόρεσαν να εντοπιστούν).

Συμμετρικό πρόβλημα

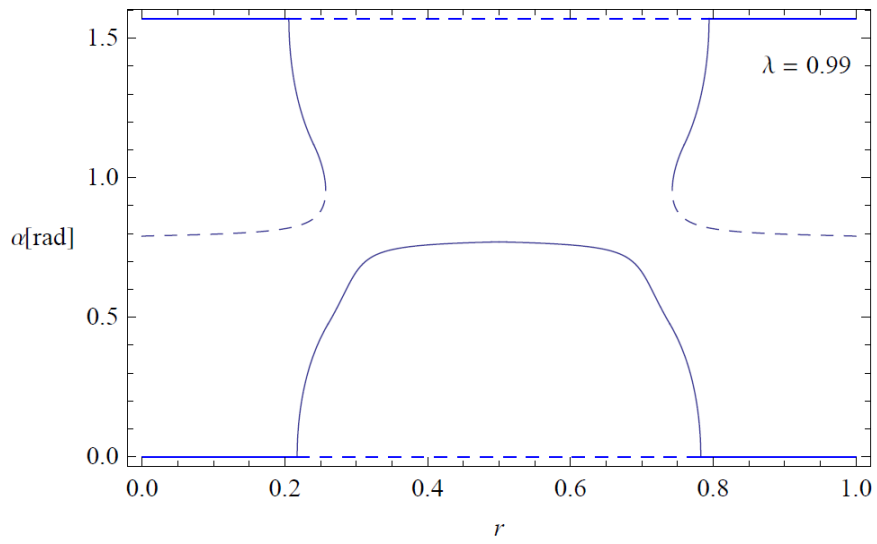


Σχήμα 7.1: Διάγραμμα ισορροπίας $\alpha - r$ για την περίπτωση ομογενούς πρίσματος τετραγωνικής διατομής(απόλυτη συμμετρία)

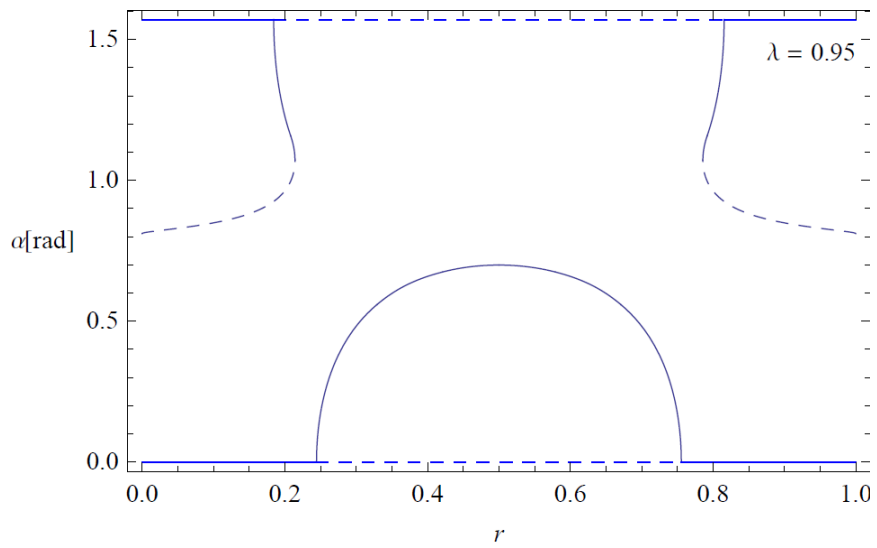
Διαταραχή λόγου αναλογίας λ



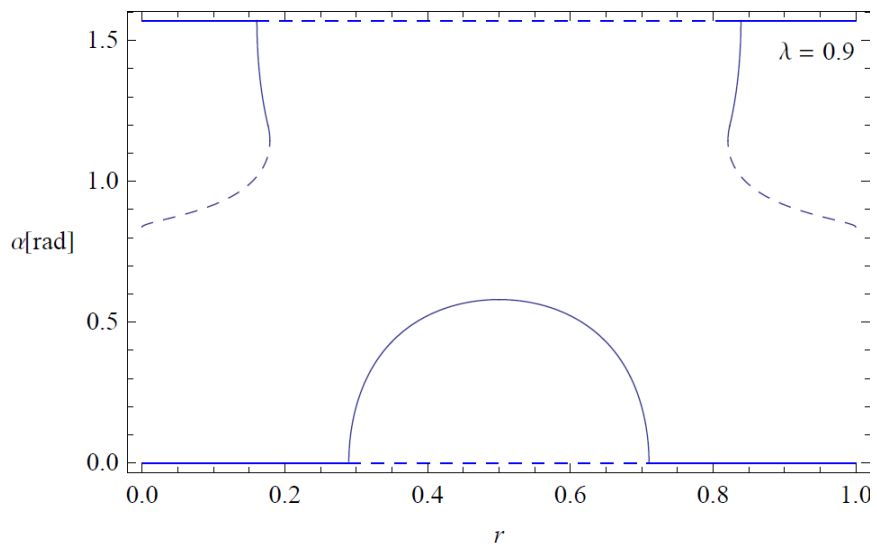
Σχήμα 7.2



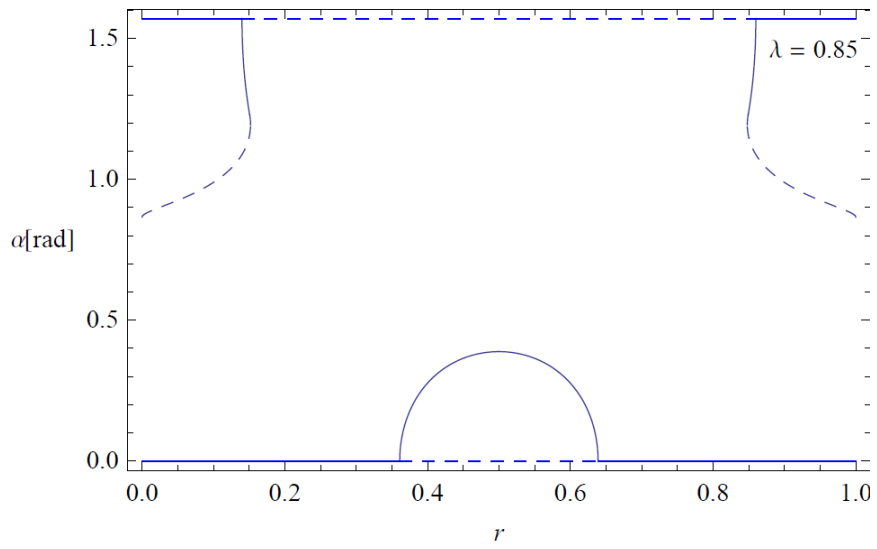
Σχήμα 7.3



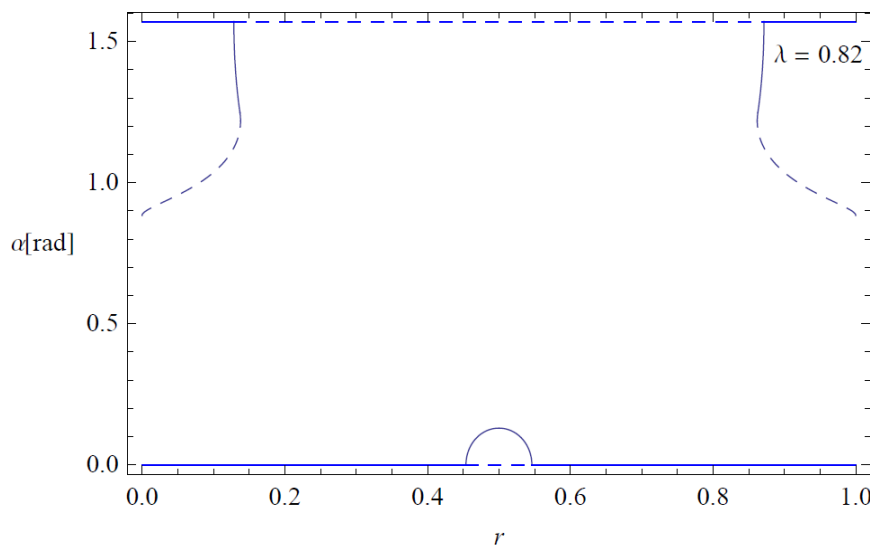
Σχήμα 7.4



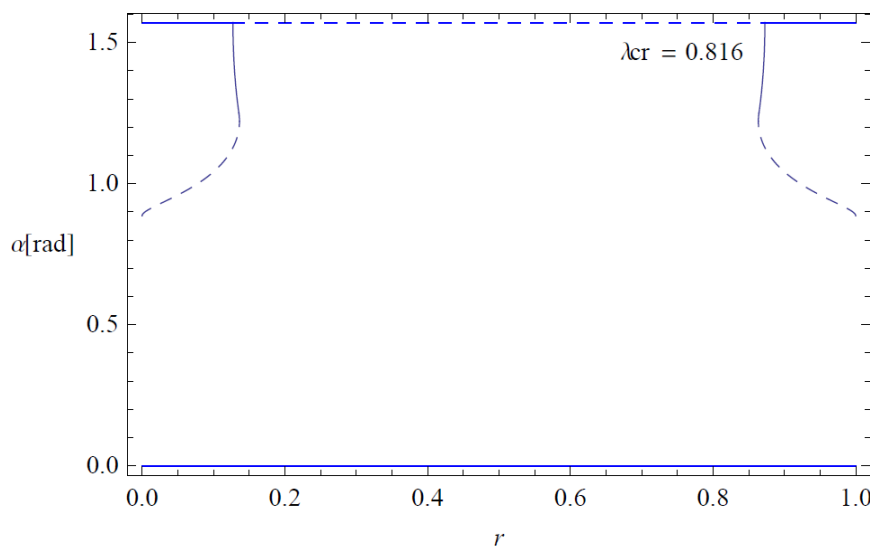
Σχήμα 7.5



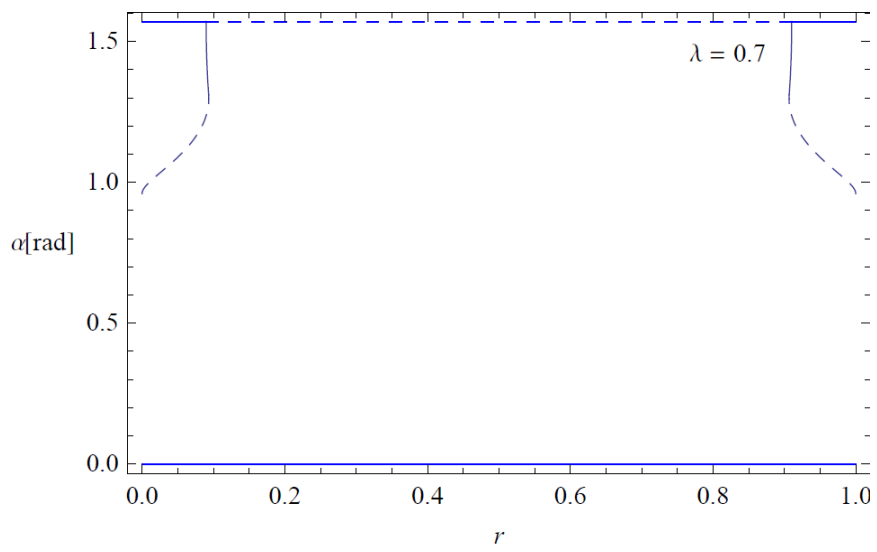
Σχήμα 7.6



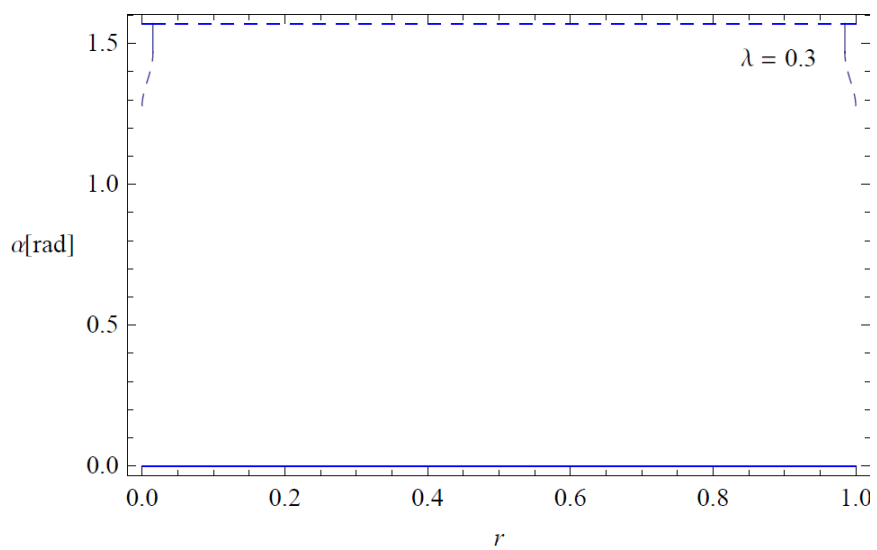
Σχήμα 7.7



Σχήμα 7.8



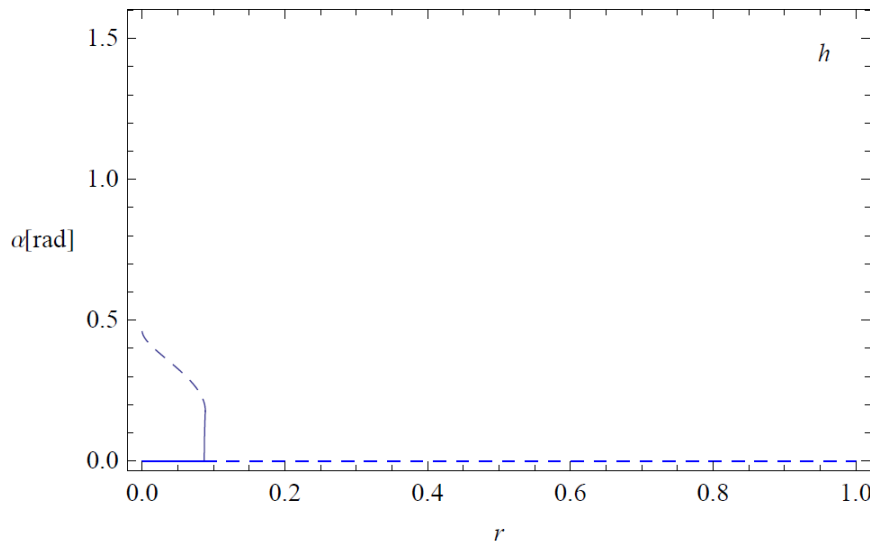
Σχήμα 7.9



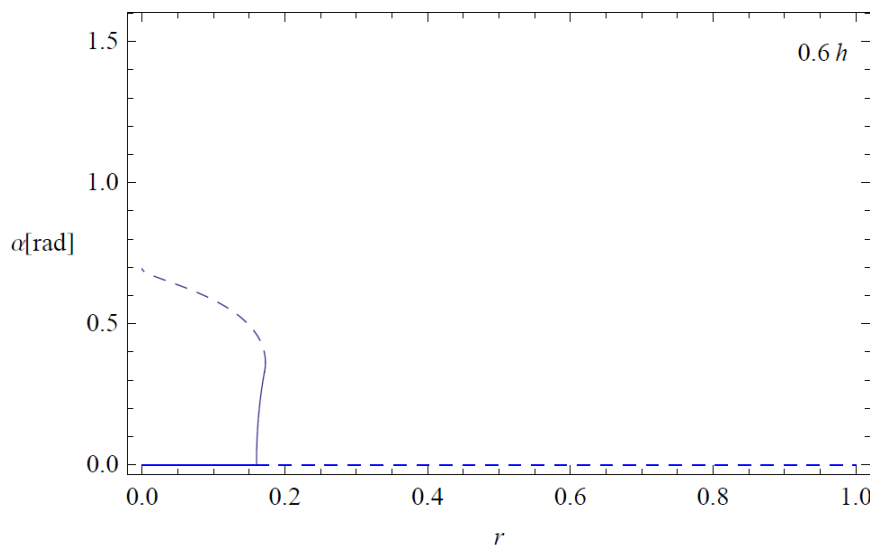
Σχήμα 7.10

Σχήμα 7.2-7.10: Διαγράμματα ισορροπίας $\alpha - r$, για διαταραχή της παραμέτρου λ

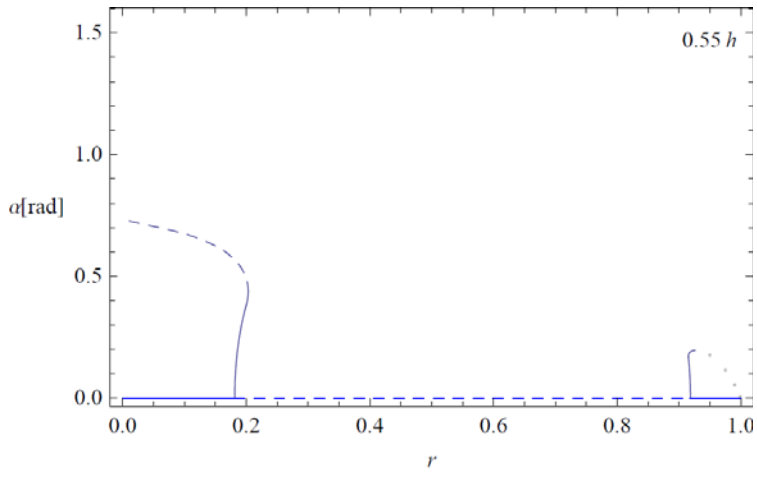
Διαταραχή κέντρου βάρους και συνδυασμένη διαταραχή



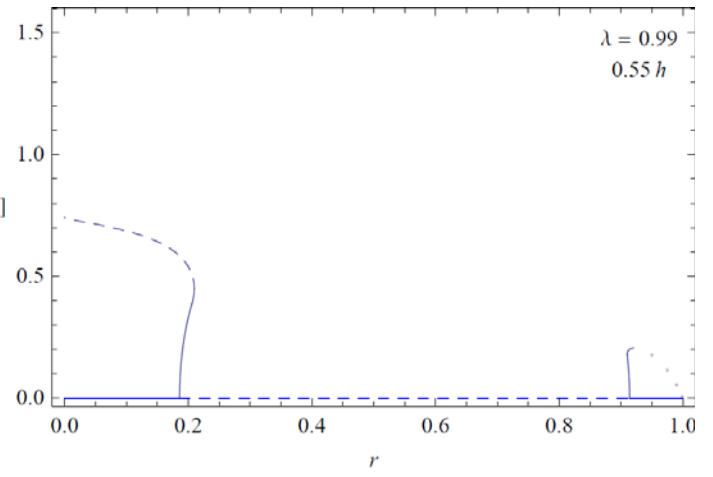
Σχήμα 7.11



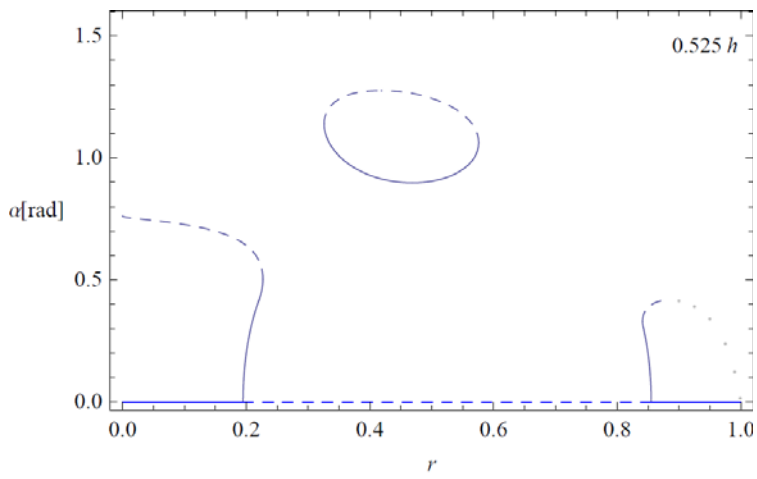
Σχήμα 7.12



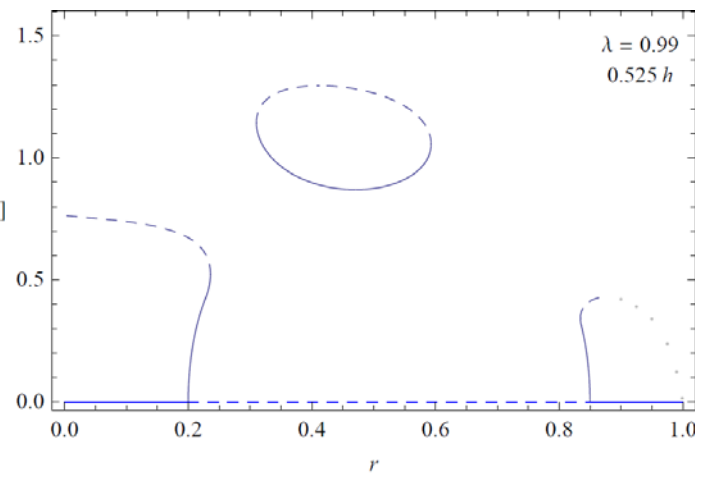
Σχήμα 7.13



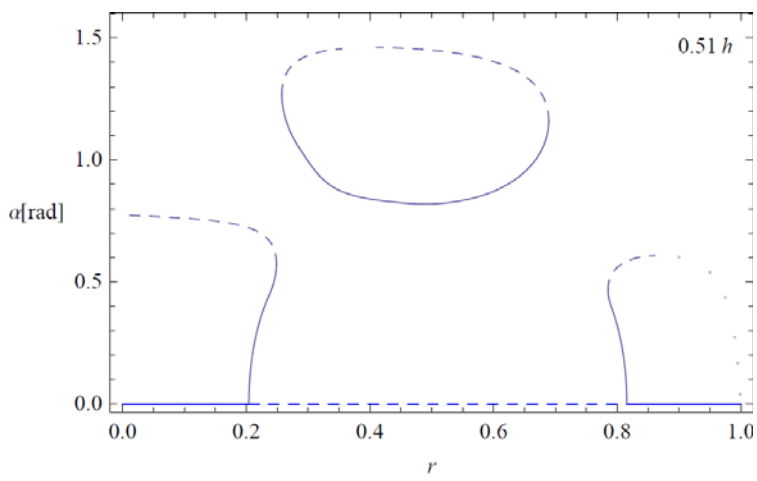
Σχήμα 7.23



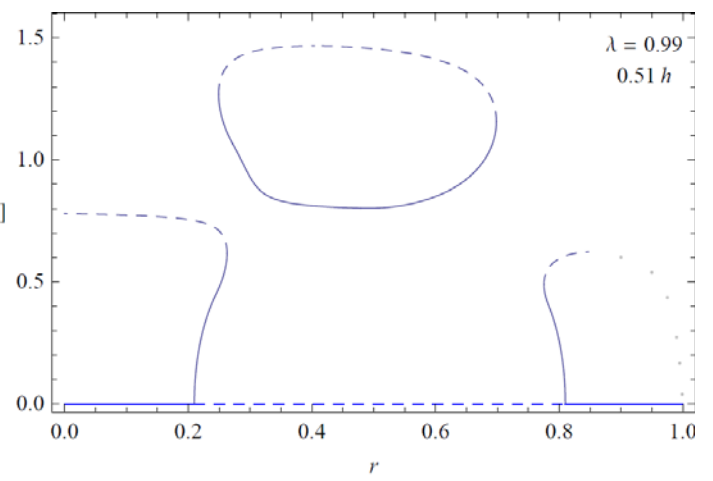
Σχήμα 7.14



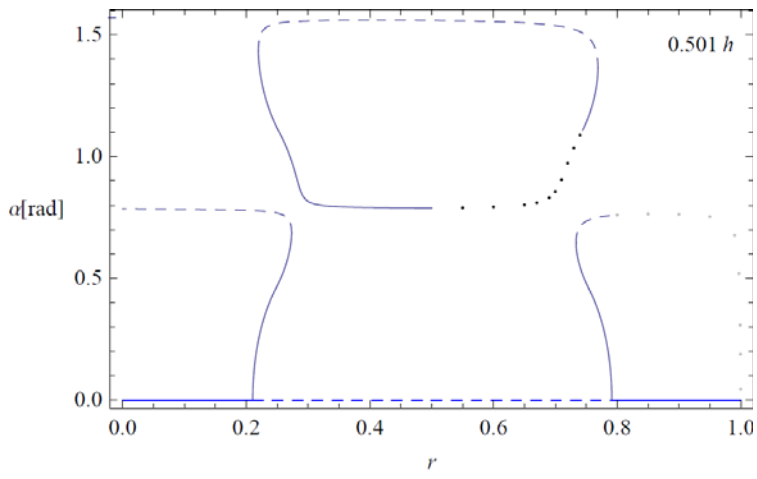
Σχήμα 7.24



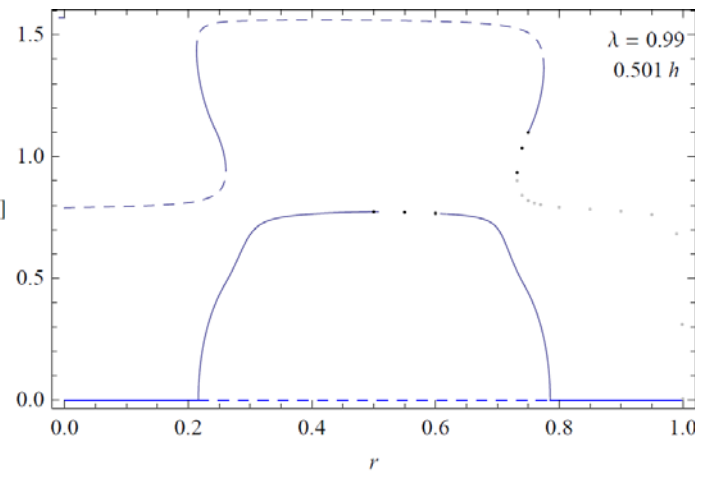
Σχήμα 7.15



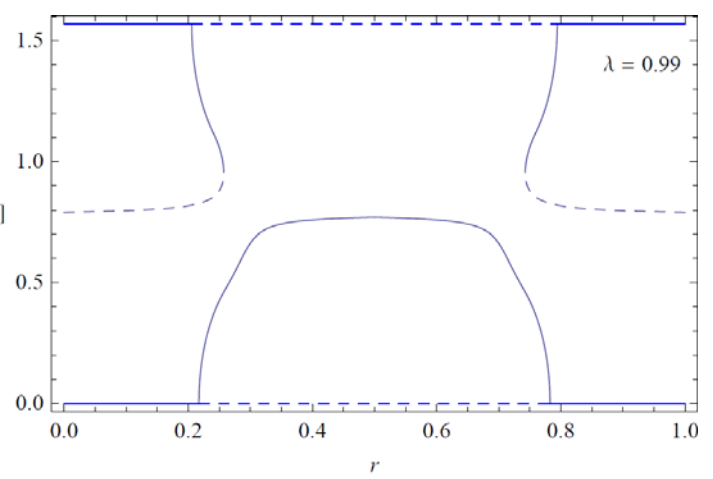
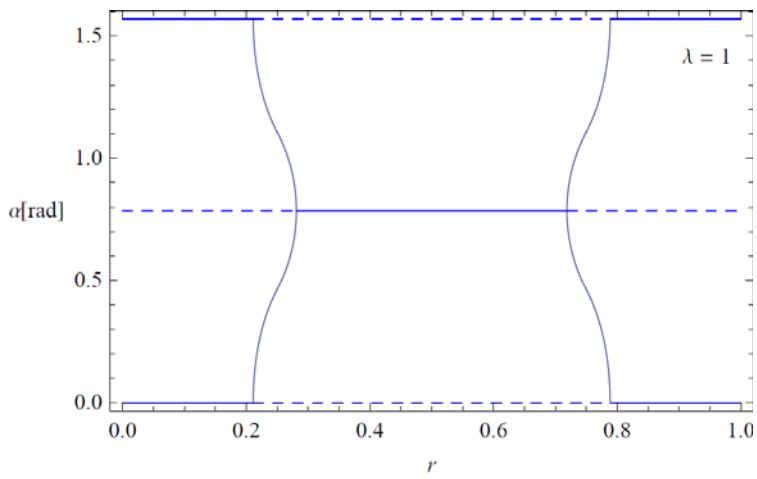
Σχήμα 7.25



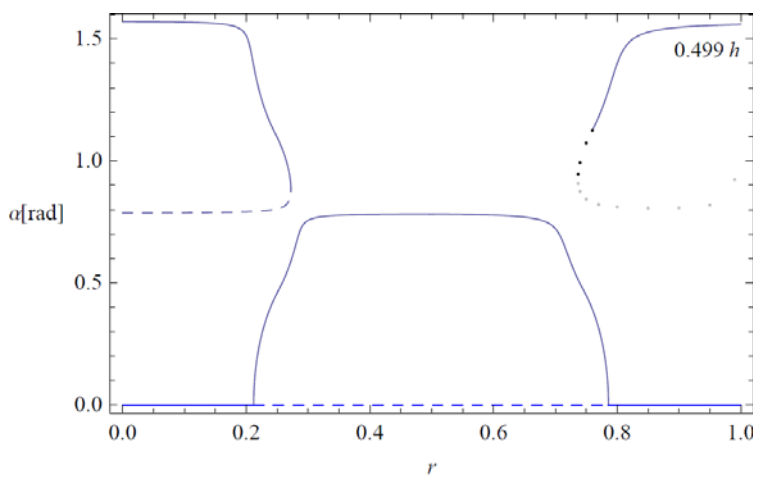
Σχήμα 7.16



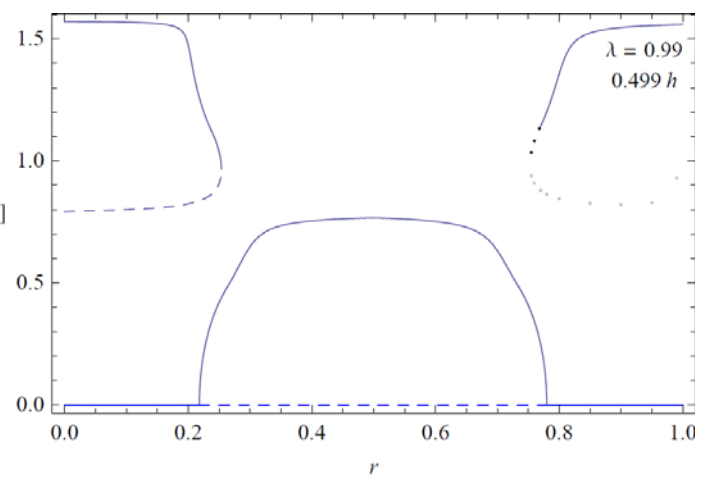
Σχήμα 7.26



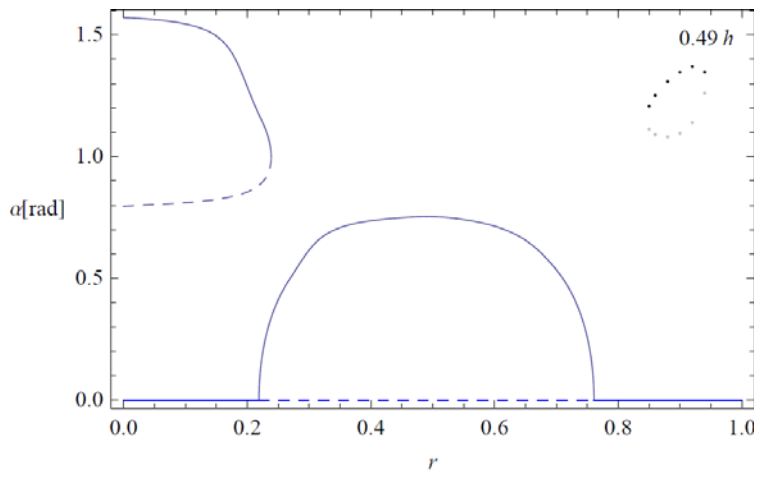
(Προηγμένα Σχήματα 7.1 και 7.3)



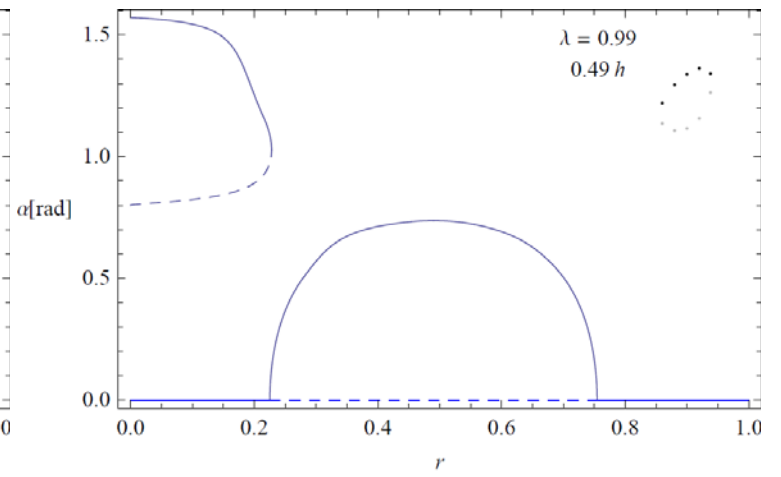
Σχήμα 7.17



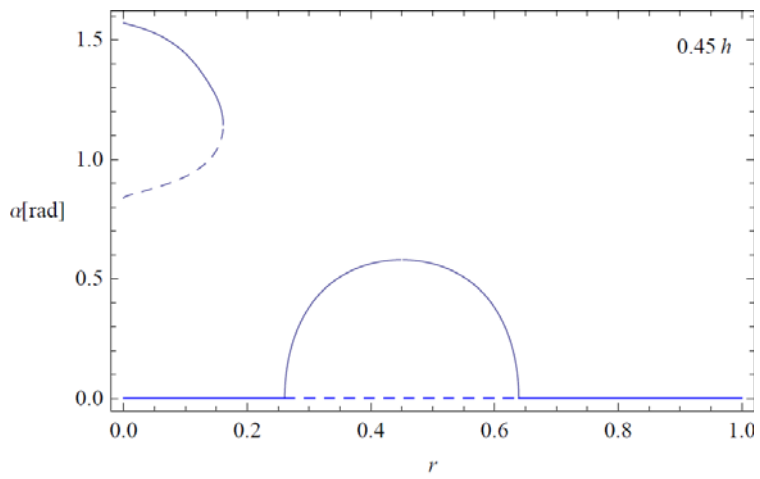
Σχήμα 7.27



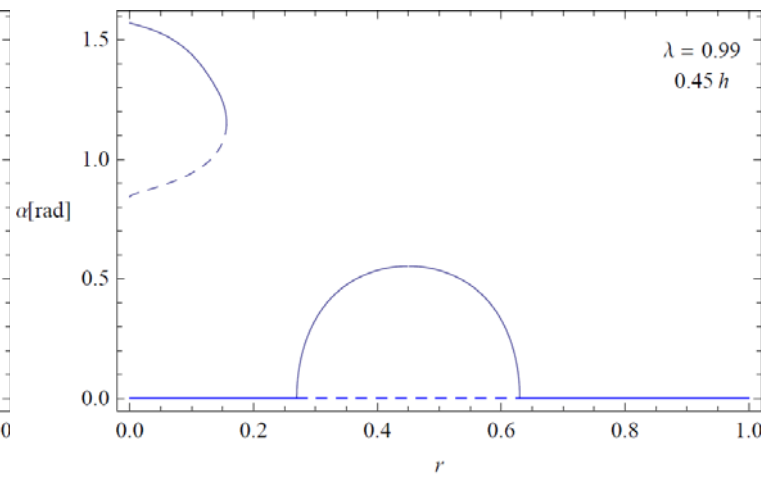
Σχήμα 7.18



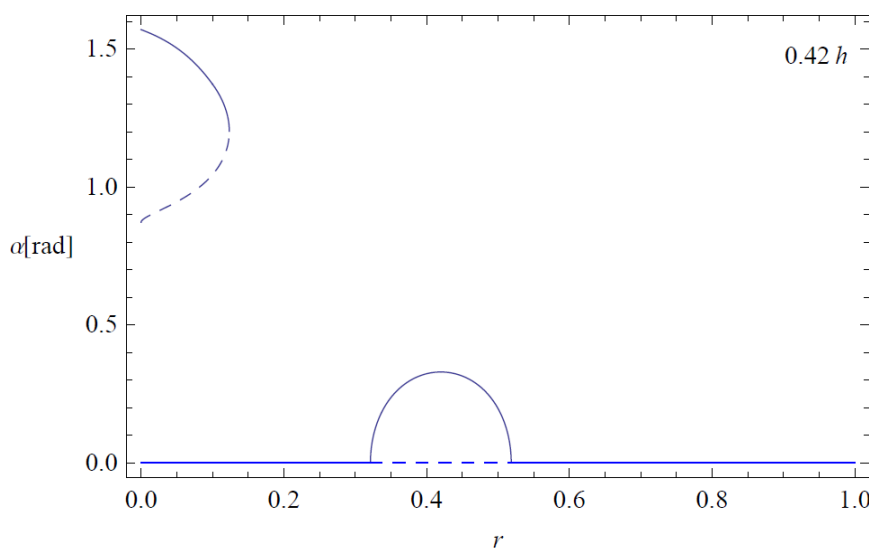
Σχήμα 7.28



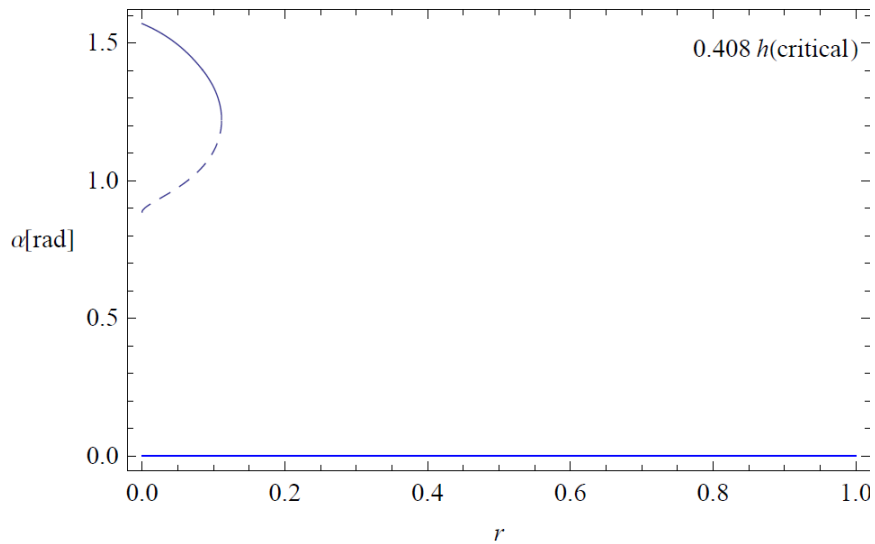
Σχήμα 7.19



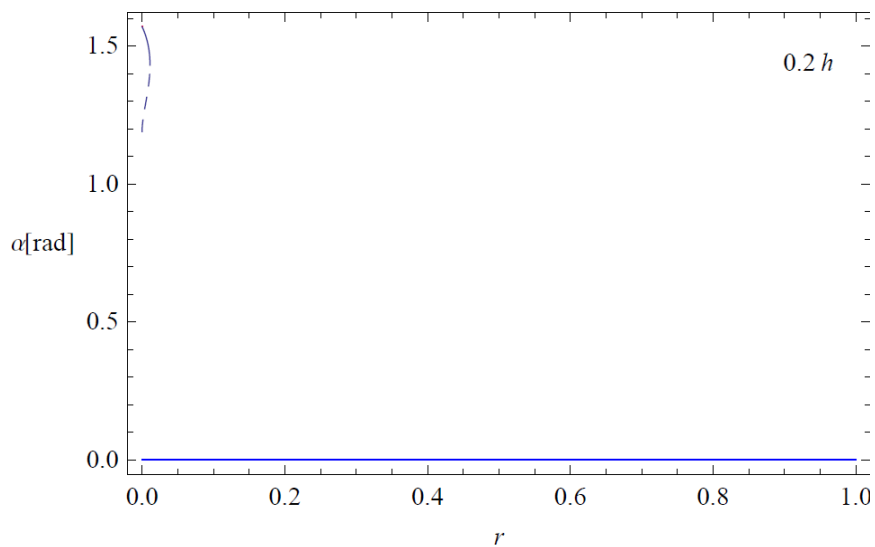
Σχήμα 7.29



Σχήμα 7.20



Σχήμα 7.21



Σχήμα 7.22

Σχήματα 7.11-7.22: Διαγράμματα ισορροπίας $a - r$, για διαταραχή της παραμέτρου του κέντρου βάρους

Σχήματα 7.23-7.29 : Διαγράμματα ισορροπίας $a - r$, για συνδυασμένη διαταραχή

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα, είμαστε σε θέση να εξάγουμε συμπεράσματα για τον τρόπο με τον οποίο αποκρίνεται το δυναμικό σύστημα όταν βρίσκεται σε συνθήκες απόλυτης συμμετρίας και όταν διαταράσσεται. Οι παρατηρήσεις αυτές συνοψίζονται στις ακόλουθες :

- Στην περίπτωση που το σύστημα χαρακτηρίζεται από απόλυτη συμμετρία (ομογενές πρίσμα τετραγωνικής διατομής), παρατηρούμε ότι η απόκριση (Σχήμα 7.1) είναι επίσης απόλυτα συμμετρική (και ως προς τους δύο κάθετους άξονες που διέρχονται από το κέντρο του διαγράμματος), ενώ αναγνωρίζουμε (στο διάστημα που μελετάμε) την δημιουργία δύο διακλαδώσεων τύπου *supercritical pitchfork*. Στην πραγματικότητα, αν θελήσουμε να επεκτείνουμε νοητά το διάγραμμα σε γωνίες στροφής a αρνητικές ή μεγαλύτερες από τις εξεταζόμενες, μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι η συμμετρία στην απόκριση παρουσιάζει περιοδικότητα ανά διάστημα γωνιών $\pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι στο διάγραμμα αποτυπώνονται (μερικώς) 4 ακόμα διακλαδώσεις του ίδιου τύπου.
- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περιοχή του $r \in (0.211 - 0.281)$ στην οποία εκδηλώνεται το περίφημο “σπάσιμο της συμμετρίας”. Αυτό σημαίνει ότι το επιπλέον συμμετρικό σώμα δύναται να ισορροπεί σε θέσεις μη συμμετρικές. Στο εναπομένον διάστημα, το σώμα ισορροπεί άλλοτε ευσταθώς και άλλοτε ασταθώς σε θέσεις συμμετρικές ($a = 0, a = \frac{\pi}{4}$ ή $a = \frac{\pi}{2}$).
- Στο διάγραμμα αυτό όπως και σε όλα τα υπόλοιπα, αποτυπώνεται χαρακτηριστικά η εναλλαγή της ευστάθειας που χαρακτηρίζει τις θέσεις ισορροπίας του συστήματος.
- Όταν διαταράξουμε τη συμμετρία του συστήματος μεταβάλλοντας την τιμή της παραμέτρου λ (Σχήματα 7.2-7.10), παρατηρούμε ότι η διακλάδωση εξελίσσεται σε ατελή ενώ πλέον το σχήμα διατηρεί τη συμμετρία του μόνο προς τον κατακόρυφο άξονα. Με την σταδιακή μείωση της παραμέτρου λ , οι πάνω κλάδοι συρρικνώνονται σταθερά μέχρι που εξαφανίζονται όταν και η παράμετρος μηδενιστεί. Αντίθετα, οι ευσταθείς θέσεις στην θέση $a = \frac{\pi}{4}$, με την διαταραχή της συμμετρίας μετατοπίζονται προς τα κάτω και περιορίζονται μέχρι την κρίσιμη τιμή της παραμέτρου (Σχήμα 7.8), στην οποία δεν παρατηρείται πλέον διαταραχή από την αρχική θέση ευσταθούς ισορροπίας για καμιά τιμή του r .
- Η μεταβολή, τώρα, της παραμέτρου της ομοιογένειας στα Σχήματα 7.11-7.22 βλέπουμε πως καταργεί κάθε είδους συμμετρία στην απόκριση του συστήματος. Για μετατόπιση του κέντρου βάρους προς τα πάνω, παρατηρούμε εκτός από την ατελή διακλάδωση και τον σχηματισμό κλειστών τροχιών, γνωστών στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων ως *isolas*. Καθώς το κέντρο βάρους ανυψώνεται, οι περιοχές ευστάθειας περιορίζονται, με αποτέλεσμα η κλειστή τροχιά και ο κάτω δεξιά κλάδος να εξαφανίζονται και τελικά το σύστημα να χαρακτηρίζεται από μια πολύ περιορισμένη απόκριση.
- Αν η παράμετρος διαταραχθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση, σημειώνεται πάλι ατελής διακλάδωση, διαφορετικής όμως μορφής. Με την μείωση της τιμής της διαταραχθείσας παραμέτρου εμφανίζεται και εξαφανίζεται μια κλειστή τροχιά, ενώ η

κρίσιμη τιμή της (Σχήμα 7.20) σηματοδοτεί την απουσία διαταραχής από την όρθια θέση ισορροπίας, χωρίς ωστόσο να εμποδίζει την ύπαρξη άλλων θέσεων ισορροπίας.

- Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις διαταραχής, παρατηρούμε ότι στις κρίσιμες τιμές των παραμέτρων του συστήματος το επιπλέον σώμα -χαρακτηριζόμενο πλέον από θετικό αρχικό μετακεντρικό ύψος- δεν διαταράσσεται από την όρθια θέση ευσταθούς ισορροπίας για μικρές γωνίες διαταραχής. Αυτό βέβαια -όπως είδαμε- δεν αποκλείει την εμφάνιση θέσεων ισορροπίας σε μεγαλύτερες γωνίες διαταραχής, θέσεις που το κριτήριο του αρχικού μετακεντρικού ύψους αγνοεί.
- Τέλος, για τη συνδυασμένη διαταραχή των παραμέτρων, διακρίνουμε δύο διαφορετικές συμπεριφορές του συστήματος. Όταν το κέντρο βάρους διαταράσσεται προς τα κάτω, παρατηρούμε ότι οι παράμετροι αστάθειας επιδρούν αποσταθεροποιητικά προς την ίδια κατεύθυνση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απόκριση του συστήματος να “επιταχύνεται” υπό την επίδραση και των δύο παραμέτρων. Αντίθετα, όταν το κέντρο βάρους μετατοπίζεται προς τα πάνω οι παράμετροι αποσταθεροποίησης επιδρούν προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για το λόγο αυτό η παράλληλη διαταραχή των παραμέτρων “καθυστερεί” την εξέλιξη της απόκρισης.

8 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

8.1 ΣΚΟΠΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Για την επαλήθευση συγκεκριμένων τιμών των αποτελεσμάτων, όπως αυτές προέκυψαν από την εφαρμογή των δύο μεθόδων – τη γεωμετρική και την ενεργειακή- σε προηγούμενα κεφάλαια, κρίθηκε σκόπιμη η διεξαγωγή πειράματος. Ο έλεγχος των θεωρητικών αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε για τις περιπτώσεις κοίλων πρισμάτων τετραγωνικής και ορθογωνικής διατομής και για τέτοιους λόγους ειδικών βαρών στερεοϋρευστού που καθορίζονταν από το υλικό πλήρωσης των πρισμάτων. Το ζητούμενο στο πείραμα αυτό ήταν η μέτρηση της γωνίας εγκάρσιας κλίσης στην οποία ισορροπούν ευσταθώς τα πρίσματα, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των ζευγών πειραματικών τιμών $a - r$ με τα αντίστοιχα θεωρητικά.

8.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Για την εκτέλεση του πειράματος που έλαβε μέρος στον χώρο του Εργαστηρίου Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής απαιτήθηκε ο παρακάτω εξοπλισμός :

Πρισματικά μοντέλα

Το βασικότερο –ενδεχομένως- κομμάτι της πειραματικής διάταξης ήταν αυτό των πρισματικών μοντέλων. Όπως προαναφέρθηκε, τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε ήταν δύο, ένα τετραγωνικής και ένα ορθογωνικής διατομής. Οι σχετικές διαστάσεις τους καθορίστηκαν με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα που προηγήθηκαν. Συγκεκριμένα, ο λόγος των πλευρών της εγκάρσιας διατομής λ επιλέχθηκε έτσι ώστε να αναπαραστήσουμε το συμμετρικό πρόβλημα της τετραγωνικής διατομής ($\lambda = 1$) αλλά και μιας διαταραχής της που οδήγησε σε ορθογωνική γεωμετρία της διατομής ($\lambda = 0.9$). Από την άλλη μεριά, επειδή η θεωρητική ανάλυση περιορίζεται σε στερεά πολύ μεγάλου μήκους, για να είναι τα πειραματικά αποτελέσματα συγκρίσιμα με τα αντίστοιχα θεωρητικά -και εφόσον σε πειραματικό επίπεδο το μήκος των πρισμάτων δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλο-, το επιλεγθέν μήκος των μοντέλων είναι τέτοιο ώστε ενδεχόμενα φαινόμενα λόγω τριδιάστατης γεωμετρίας να είναι περιορισμένα. Οι απόλυτες τιμές, τώρα, των διαστάσεων των μοντέλων ορίστηκαν έτσι που να επιτρέπεται τόσο η συνεργασία τους με τα υπόλοιπα στοιχεία της πειραματικής διάταξης όσο και η καθαρή παρατήρηση του φαινομένου.

Με βάση τα παραπάνω καταλήξαμε στις ακόλουθες εξωτερικές διαστάσεις(πλάτος(b), ύψος(h), μήκος(l)) των μοντέλων :

- Πρίσμα τετραγωνικής διατομής : $(20 \times 20 \times 50)cm$, πάχους $t = 0.5cm$
- Πρίσμα ορθογωνικής διατομής : $(20 \times 18 \times 50)cm$, πάχους $t = 0.5cm$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι οδηγηθήκαμε στην επιλογή κοίλων πρισμάτων, ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε το συνολικό ειδικό βάρος τους αλλάζοντας το υλικό πλήρωσής τους. Επίσης, ως υλικό κατασκευής των μοντέλων επιλέχθηκε το Plexiglas, όντας υδατοστεγές, διαφανές και εύκολο για την κατασκευή των μοντέλων.

Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι κάθε μοντέλο φέρει στο μέσο μιας διαμήκου πλευράς του οπή διαμέτρου $3cm$, από την οποία γίνεται η πλήρωσή του με το έκαστο υλικό, όπως επίσης και καπάκι ίδιου υλικού που σφραγίζει μετά το γέμισμά του.

Υλικά πλήρωσης

Η επιλογή των υλικών με τα οποία γεμίσαμε τα μοντέλα έγινε με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα που προηγήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια όσον αφορά το ειδικό τους βάρος. Έχοντας προσδιορίσει το εύρος των λόγων πυκνοτήτων γ στο οποίο το πρίσμα αποκτά κεκλιμένη θέση, επιλέξαμε τα κατάλληλα υλικά πλήρωσης λαμβάνοντας βέβαια υπόψη και την επίδραση του κελύφους στο συνολικό ειδικό βάρος του σώματος. Επιπλέον κριτήρια για την επιλογή των υλικών αποτέλεσαν η ευκολία διαχείρισής τους και το κόστος τους. Έτσι, καταλήξαμε στα παρακάτω υλικά :

- Πριονίδι
- Αλεύρι

Το γέμισμα των μοντέλων με κάθε ένα από τα παραπάνω υλικά ήταν πλήρες, ώστε να εξασφαλίσουμε ομοιογένεια των σωμάτων- όσο αυτό δύναται σε πειραματικό επίπεδο.

Ρευστό μέσο του πειράματος

Για την εκτέλεση του πειράματος και την καταγραφή πειραματικών αποτελεσμάτων ήταν αναγκαία η ύπαρξη ενός ρευστού, στο οποίο βυθίστηκαν και ισορρόπησαν τα μοντέλα. Η επιλογή του ρευστού είναι προφανής και έγκειται στο γλυκό νερό. Για απλοποίηση της πειραματικής διαδικασίας και των αποτελεσμάτων, θα θεωρήσουμε το ειδικό βάρος του νερού ίσο με $\rho = 1g/cm^3$, ανεξάρτητα, δηλαδή, από την επικρατούσα θερμοκρασία κατά την

διεξαγωγή του πειράματος. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος των πυκνοτήτων στερεού-ρευστού ρ' ισοδυναμεί με το ειδικό βάρος του στερεού.

Δεξαμενή πειράματος

Το πείραμα διεξήχθη μέσα σε δεξαμενή κατασκευασμένη από Plexiglas με εσωτερικές διαστάσεις $(40 \times 40 \times 60)cm$.

Συμπληρωματικός πειραματικός εξοπλισμός

Για την ολοκληρωμένη εκτέλεση της πειραματικής διαδικασίας απαιτήθηκε βοηθητικός εξοπλισμός, όπως :

- Αναλογική ζυγαριά ακρίβειας $10g$, για την μέτρηση της μάζας των μοντέλων άδειων και γεμισμένων.
- Μετρητική ταινία ακρίβειας $1mm$, για την μέτρηση των διαστάσεων των μοντέλων και της δεξαμενής.
- Μονωτική διάφανη ταινία για το υδατοστεγές σφράγισμα του καπακιού των μοντέλων μετά την πλήρωσή τους.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων που θα ακολουθήσει δεν θα ληφθούν υπόψη τα μετρητικά σφάλματα, προς απλοποίηση της διαδικασίας.

8.3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η πειραματική διαδικασία ξεκίνησε με την ζύγιση και την μέτρηση των διαστάσεων των μοντέλων, ώστε να προσδιοριστεί το ειδικό βάρος του υλικού κατασκευής τους. Αυτό το δεδομένο ήταν καταλυτικό για την προετοιμασία και την διερεύνηση πριν από το πείραμα, με σκοπό τη σωστή επιλογή των υλικών πλήρωσης.

Έχοντας καταλήξει στα υλικά πλήρωσης άρχισε η εκτέλεση του πειράματος. Αρχικά, γεμίσαμε τη δεξαμενή με γλυκό νερό και εν συνεχεία τα δύο μοντέλα εκ περιτροπής με τα δύο επιλεχθέντα υλικά πλήρωσης. Μετά το γέμισμα φροντίσαμε να σφραγίζουμε υδατοστεγώς τα ανοίγματα των μοντέλων, ώστε να αποφευχθεί ενδεχόμενη εισροή υδάτων στο εσωτερικό τους, κάτι που θα οδηγούσε στην αλλοίωση των ιδιοτήτων τους (ειδικό βάρος). Ακολούθησε η

ζύγιση των πληρωμένων πλέον μοντέλων και η βύθισή τους στη δεξαμενή. Σημαντικό πριν το στάδιο της καταγραφής των αποτελεσμάτων ήταν τόσο η πλήρης απόσβεση των κινήσεων του στερεού-ρευστού μετά τη βύθισή του πρώτου όσο και η απουσία επαφής του μοντέλου με την δεξαμενή. Η καταγραφή των αποτελεσμάτων συνίστατο σε κάθε περίπτωση στην μέτρηση των βυθισμάτων κατά μήκος των κεκλιμένων (μετά τη βύθιση των σωμάτων) πλευρών, ώστε εν συνεχεία να προσδιοριστεί τριγωνομετρικά η γωνία εγκάρσιας κλίσης α . Για το σκοπό αυτό, κατά μήκος των πλευρών που αναφέραμε, προσαρμόστηκαν κλίμακες.

Συνολικά κάναμε μετρήσεις για τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις :

- Μοντέλο τετραγωνικής διατομής γεμισμένο με αλεύρι.
- Μοντέλο ορθογωνικής διατομής γεμισμένο με πριονίδι.
- Μοντέλο τετραγωνικής διατομής γεμισμένο με πριονίδι.
- Μοντέλο ορθογωνικής διατομής γεμισμένο με αλεύρι.

8.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι πρώτες καταγραφείσες μετρήσεις αφορούν στην μάζα m των άδειων μοντέλων σύμφωνα με τις οποίες :

ΜΟΝΤΕΛΑ	$m(g)$	$V(cm^3)$	$\rho(g/cm^3)$
Πρίσμα τετραγωνικής διατομής ($\lambda = 1$)	2640	2311	1.142
Πρίσμα ορθογωνικής διατομής ($\lambda = 0.9$)	2460	2173	1.132
Μέση τιμή $\bar{\rho}$	-	-	1.137

Πίνακας 8.1: Υπολογισμός ειδικού βάρους υλικού κατασκευής δοκιμίων

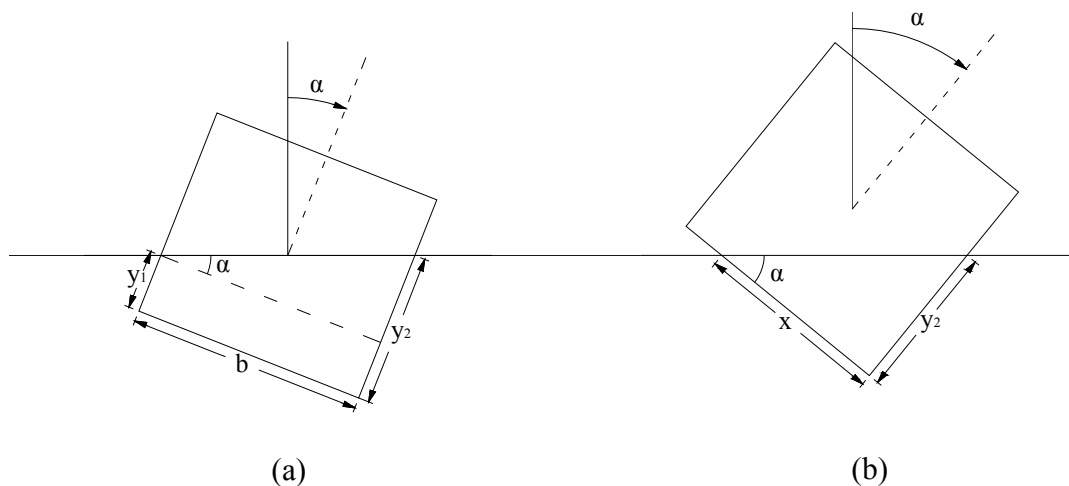
όπου :

$V = V_{out} - V_{in} = b \times h \times l - (b - 2t) \times (h - 2t) \times (l - 2t)$ ο όγκος που καταλαμβάνει το υλικό κατασκευής των μοντέλων και προκύπτει γεωμετρικά από τις διαστάσεις τους

$\rho = \frac{m}{V}$ το ειδικό βάρος του υλικού (Plexiglas)

$\bar{\rho} = \frac{\rho_{\lambda=1} + \rho_{\lambda=0.9}}{2}$ η μέση τιμή του ειδικού βάρους του υλικού

Στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, θα παρουσιαστούν τα πειραματικά αποτελέσματα (μετρήσεις μάζας m και αποστάσεων y_1, y_2, x) καθώς και η επεξεργασία αυτών, ώστε να προκύψουν τα ζητούμενα μεγέθη για τις τέσσερις περιπτώσεις που εξετάσαμε συνολικά. Για να γίνουν κατανοητοί οι συμβολισμοί που έπονται, θα προηγηθεί επεξηγηματικό σχήμα.



Σχήμα 8.1: Αντιστοιχία συμβολισμών και μετρούμενων αποστάσεων

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	$m(g)$	$V(cm^3)$	r	$y_1(cm)$	$y_2(cm)$	$a(rad)$
Μοντέλο τετραγωνικής διατομής + αλεύρι	16320	20000	0.816	15.9	16.5	-0.03 (-1.72°)
Μοντέλο ορθογωνικής διατομής + πριονίδι.	7720	18000	0.429	1.95	13.8	-0.535 (-30.65°)
				13.6	2.05	0.523 (30.01°)
Μοντέλο τετραγωνικής διατομής+πριονίδι	8690	20000	0.435	$x = 18.9$	18.6	-0.777 (-44.54°)
				18.5	$x = 19.0$	0.772 (44.24°)
Μοντέλο ορθογωνικής διατομής + αλεύρι	15420	18000	0.856	15.7	15.5	0.01 (0.57°)

Πίνακας 8.2: Αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων και υπολογισμός της γωνίας εγκάρσιας κλίσης a

όπου :

$V = V_{out} = b \times h \times l$: ο όγκος που καταλαμβάνει το κάθε μοντέλο και προκύπτει γεωμετρικά από τις διαστάσεις του

r : ο λόγος των ειδικών βαρών στερεού- ρευστού. Δεδομένου ότι το ρευστό θεωρήθηκε πυκνότητας $\rho = 1g/cm^3$, τελικά $r = \frac{m}{V}$, δηλαδή όσο το ειδικό βάρος του στερεού.

y_1, y_2, x : είναι οι αποστάσεις όπως αναπαρίστανται στο σχήμα 8.1

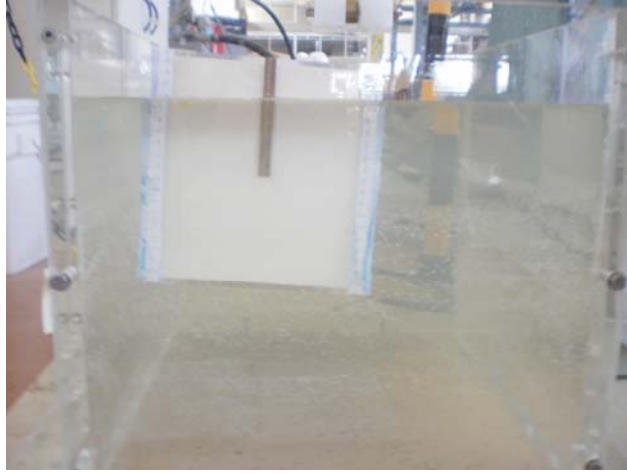
a : η γωνία εγκάρσιας κλίσης, όπου ανάλογα με τη θέση που ισορροπεί στο ρευστό (Σχήμα 8.1) προκύπτει τριγωνομετρικά ως εξής :

περίπτωση (a) : $\tan a = \frac{|y_1 - y_2|}{b}$

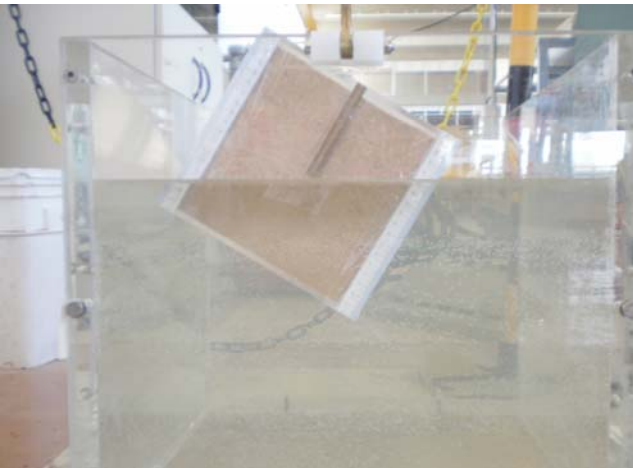
περίπτωση (b) : $\tan a = \frac{y_2}{x}$ (αντίστοιχα $\tan a = \frac{y_1}{x}$ αν το σώμα ισορροπήσει στρεφόμενο προς τα αριστερά)

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι κατά την εκτέλεση του πειράματος παρατηρήθηκαν θέσεις ισορροπίας των μοντέλων και προς τα δεξιά και προς τα αριστερά. Για να διακρίνουμε τον προσανατολισμό στη στροφή των στερεών, θα θεωρήσουμε (σε αντιστοιχία και με τις προηγούμενες θεωρητικές προσεγγίσεις) ότι η αρνητική γωνία $-a$ αντιπροσωπεύει δεξιόστροφη κίνηση, ενώ η θετική γωνία a αριστερόστροφη.

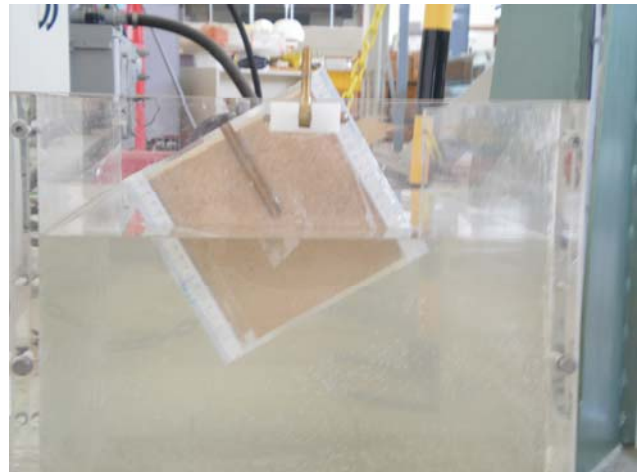
Πριν τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων, για να αναπαραστήσουμε πλήρως τα πειραματικά αποτελέσματα, θα ακολουθήσουν εικόνες από τις ευσταθείς θέσεις ισορροπίας που κατέλαβαν τα μοντέλα σε κάθε μία από τις πιο πάνω εξεταζόμενες περιπτώσεις. Επίσης, θα παρατεθεί εικόνα (ενδεικτικά μιας περίπτωσης -η συμπεριφορά αυτή χαρακτηρίζει όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις), που θα δείχνει την διαμήκη άποψη του πρίσματος κατά την ισορροπία του. Η εικόνα αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί απεικονίζει το πρίσμα να ισορροπεί απουσίας διαγωγής (ή έστω πολύ μικρής, μη διακρινόμενης). Αν και οι αναλογίες των πρισμάτων εκλέχθηκαν ώστε να περιορίζονται οι επιδράσεις λόγω της τριδιάστατης γεωμετρίας, στην πράξη δεν ήταν δεδομένα τα αμελητέα φαινόμενα διαμήκους κλίσης.



Φωτογραφία 8.1 : Πρίσμα τετραγωνικής διατομής γεμισμένο με αλεύρι ($r = 0.816$, $a = -1.72^\circ$)



(a) ($r = 0.429$, $a = -30.65^\circ$)



(b) ($r = 0.429$, $a = 30.01^\circ$)

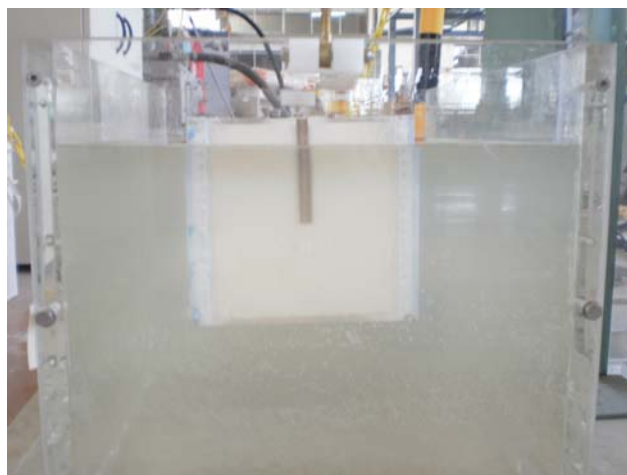
Φωτογραφία 8.2: Πρίσμα ορθογωνικής διατομής γεμισμένο με πριονίδι σε συμμετρικές θέσεις ευσταθούς ισορροπίας



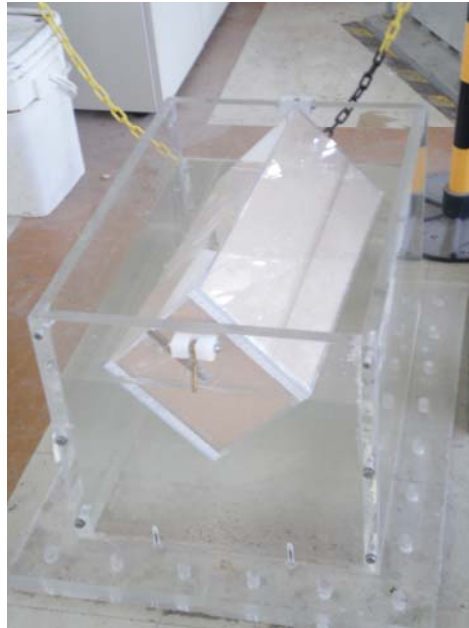
(a) ($r = 0.435$, $a = -44.54^\circ$)

(b) ($r = 0.435$, $a = 44.24^\circ$)

Φωτογραφία 8.3: Πρίσμα τετραγωνικής διατομής γεμισμένο με πριονίδι σε συμμετρικές θέσεις ευσταθούς ισορροπίας



Φωτογραφία 8.4 : Πρίσμα ορθογωνικής διατομής γεμισμένο με αλεύρι ($r = 0.856$, $a = 0.57^\circ$)



Φωτογραφία 8.5 : Διαμήκης άποψη επιπλέοντος πρίσματος

8.5 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας (ενεργειακή προσέγγιση) με αυτά που προέκυψαν από την εκτέλεση του πειράματος. Συγκεκριμένα, θα συγκρίνουμε τις γωνίες εγκάρσιας στροφής a που υπολογίστηκαν με τις δύο μεθόδους, για εκείνες τις τιμές των λόγων ειδικών βαρών στερεού-ρευστού r που κατεγράφησαν στο πείραμα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	$a_{\text{ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ}}$		$a_{\text{ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ}}$	
$\lambda = 1$, $r = 0.816$	0°		-1.72°	
$\lambda = 0.9$, $r = 0.429$	-31.701°	31.701°	-30.65°	30.01°
$\lambda = 1$, $r = 0.435$	-45°	45°	-44.54°	44.24°
$\lambda = 0.9$, $r = 0.856$	0°		0.57°	

Πίνακας 8.3: Σύγκριση θεωρητικών –πειραματικών αποτελεσμάτων

Από τα παραπάνω συγκριτικά αποτελέσματα, είναι προφανές ότι υπάρχει εύλογη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να κάνουμε τις πιο κάτω παρατηρήσεις :

- Και στις δύο περιπτώσεις με υλικό πλήρωσης το αλεύρι, παρατηρήθηκε ότι τα μοντέλα ισορρόπησαν ευσταθώς σε θέσεις μη μηδενικής εγκάρσιας κλίσης, χωρίς, ωστόσο, να εμφανίζουν ισορροπία σε κάποια αντίστοιχη συμμετρική θέση. Το γεγονός ότι η θέση ευσταθούς ισορροπίας είναι μία, σηματοδοτεί ότι στην πραγματικότητα συνιστά μια διαταραχή (bias) της όρθιας θέσης ευσταθούς ισορροπίας λόγω των σφαλμάτων που μοιραία συνοδεύουν το πείραμα. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι στην περίπτωση του μοντέλου ορθογωνικής διατομής που επετεύχθη πιο ομοιογενής πλήρωση (μεγαλύτερο r) σε σχέση με το αντίστοιχο τετραγωνικής διατομής, δηλαδή όντας πιο κοντά στην ιδανική συνθήκη της πλήρους ομοιογένειας που προβλέπει η θεωρία, η διαταραχή αυτή (a) ελαττώθηκε.
- Στις περιπτώσεις που τα μοντέλα πληρώθηκαν με πριονίδι, οι πειραματικές αποκρίσεις συμβαδίζουν με τις θεωρητικές, συνυπολογιζομένων και των πειραματικών σφαλμάτων. Η ισορροπία μάλιστα σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν της όρθιας θέσης ισορροπίας πιστοποιεί ότι πρόκειται για πραγματικές θέσεις ισορροπίας.
- Οι αποκλίσεις που παρουσιάζουν τα πειραματικά αποτελέσματα από τη θεωρία αλλά και οι συμμετρικές θέσεις ευσταθούς ισορροπίας μεταξύ τους αποδίδονται στα πειραματικά σφάλματα. Στο δεδομένο πείραμα αυτά εντοπίζονται:
 - Στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των μοντέλων που ενδέχεται να αποκλίνουν από τις θεωρητικές τιμές.
 - Στην επίδραση του πεπερασμένου μήκους στο φαινόμενο της ευστάθειας. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι επιδράσεις της τριδιάστατης γεωμετρίας ήταν μάλλον αμελητέες, αφού τα μοντέλα ισορροπούσαν χωρίς να παρουσιάζουν διαμήκη κλίση.
 - Στην απουσία απόλυτης ομοιογένειας στα υλικά πλήρωσης των μοντέλων.
 - Στα μετρητικά σφάλματα τόσο στην μέτρηση της μάζας των μοντέλων όσο και στην μέτρηση των ζητούμενων αποστάσεων.
 - Στην παραδοχή ότι το ειδικό βάρος του νερού, ανεξάρτητα από την ποιότητά του και την θερμοκρασία, είναι $\rho = 1g / cm^3$.

9 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, διερευνήθηκε το θέμα της στατικής ευστάθειας πρισμάτων ορθογωνικής διατομής $b \times h$ σε μεγάλες γωνίες κλίσης. Η μελέτη ξεκίνησε από τον γεωμετρικό υπολογισμό της ευστάθειας μέσω των μοχλοβραχιόνων επαναφοράς \overline{GZ} . Εν συνεχεία, το πρόβλημα της στατικής ευστάθειας προσεγγίστηκε ενεργειακά όπου από την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων προέκυψαν τα διαγράμματα ισορροπίας $a - r$. Και στις δύο αυτές προσεγγίσεις, η μελέτη επεκτάθηκε και σε μη ομογενή στερεά. Τέλος, η θεωρητική διερεύνηση του εξεταζόμενου φαινομένου ενισχύθηκε από την εκτέλεση πειράματος, κατά το οποίο μακριά στερεά γεμισμένα με υλικά διαφορετικών ειδικών βαρών βυθίστηκαν σε ρευστό εντός δεξαμενής και ισορρόπησαν σε χαρακτηριστικές θέσεις εγκάρσιας κλίσης, ανάλογα με το ειδικό βάρος και την γεωμετρία τους.

Το γεγονός ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν (γεωμετρική και ενεργειακή) έχουν απόλυτη ισχύ και ακρίβεια μας προϊδεάζει ότι τα αποτελέσματα θα παρουσιάζουν απόλυτη σύγκλιση. Με ποιόν τρόπο, όμως, θα γίνει αυτή η σύγκριση, αφού τα πρώτα αποτελέσματα είναι διαγράμματα του μοχλοβραχίονα ευστάθειας, ενώ τα δεύτερα διαγράμματα αναπαριστούν θέσεις ισορροπίας; Η λογική της σύγκρισης των αποτελεσμάτων είναι η εξής:

Ως γνωστόν, το ολοκλήρωμα του στατικού μοχλοβραχίονα επαναφοράς (ή αλλιώς ο δυναμικός μοχλοβραχίονας), που αποτελεί την επιφάνεια κάτω από τον μοχλοβραχίονα μέχρι μια γωνία a_d , εκφράζει τη δυναμική ενέργεια στη γωνία αυτή, δηλαδή :

$$\mathcal{E} = \int_0^{a_d} \overline{GZ}(a) da \quad (9.1)$$

Η ενεργειακή προσέγγιση προβλέπει τη συνθήκη ισορροπίας $\frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial a} = 0$, οπότε σύμφωνα με την (9.1) θα έχουμε :

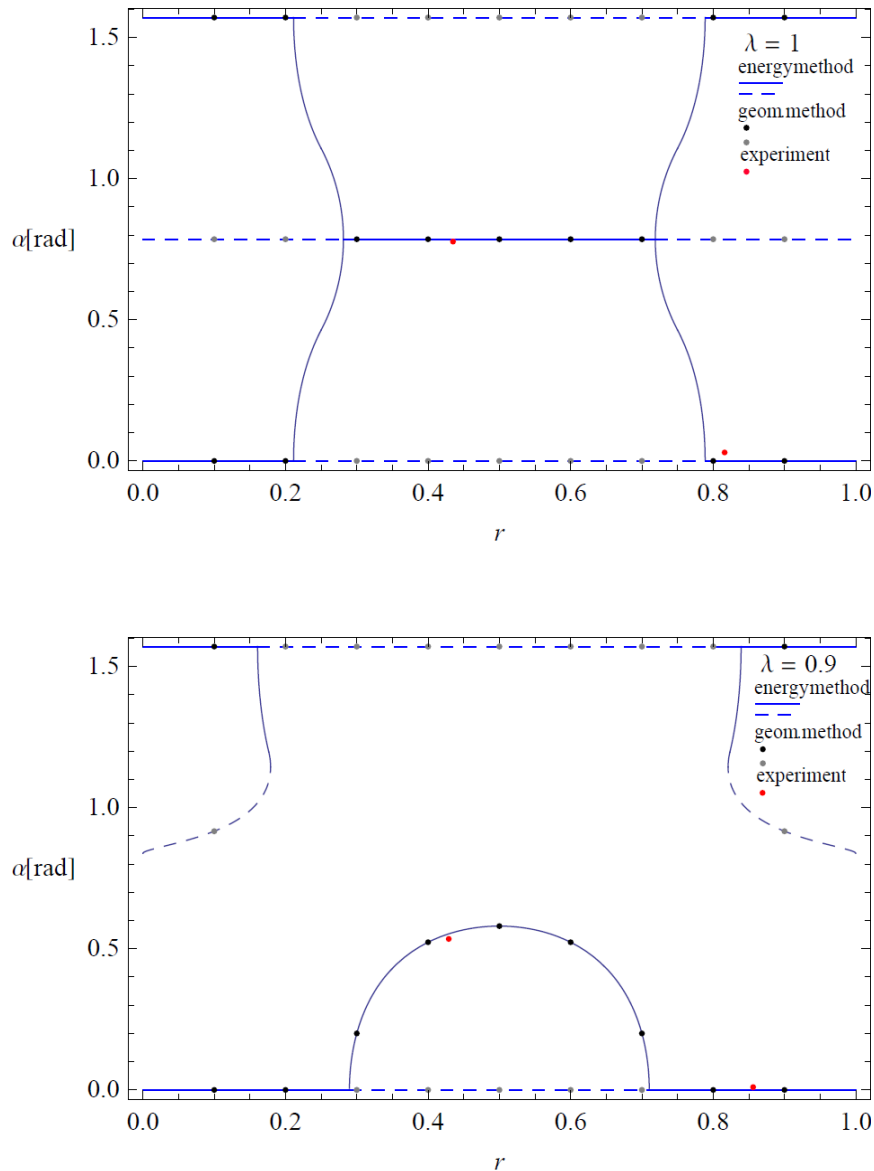
$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}(y, a)}{\partial a} = \overline{GZ}(a) = 0 \quad (9.2)$$

Όπως έχουμε προαναφέρει, τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού συστήματος που μελετάμε αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{\mathcal{E}} = f(a^*; r^*) = 0 \rightarrow \overline{GZ}(a^*) = 0 \quad (9.3)$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγκειται στη σύγκριση των γωνιών a των διαγραμμάτων ισορροπίας $a - r$ με τις γωνίες στις οποίες μηδενίζεται ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς.

Παρακάτω, παρατίθενται τα κοινά διαγράμματα με τα θεωρητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα για τις περιπτώσεις ομογενών πρισμάτων με λόγους διαστάσεων $\lambda = 1$ και $\lambda = 0.9$.



Σχήμα 9.1: Συγκριτικά διαγράμματα αποτελεσμάτων $a - r$, για $\lambda = 1$ και $\lambda = 0.9$

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε τα κύρια συμπεράσματα της μελέτης, τα οποία συνοψίζονται στα παρακάτω:

- Οι δυναμικές παράμετροι του λόγου πλευρών της διατομής των πρισμάτων, του σχετικού ειδικού βάρους και της ομοιογένειας των επιπλεόντων σωμάτων που

λήφθηκαν υπόψη και στις δύο θεωρητικές μεθόδους που εφαρμόστηκαν φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά τα χαρακτηριστικά στατικής ευστάθειας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει εκείνο το εύρος των τιμών των παραμέτρων, κατά το οποίο το επιπλέον σώμα παρουσιάζει αρνητικό αρχικό μετακεντρικό ύψος, αποκλίνοντας έτσι από την όρθια θέση ισορροπίας, χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων (στατική ευστάθεια).

- Το αρχικό μετακεντρικό ύψος συνιστά κριτήριο ευστάθειας περιορισμένης ισχύος. Αυτό πιστοποιείται από το γεγονός ότι το θετικό αρχικό μετακεντρικό ύψος δεν εξασφαλίζει ισορροπία στην όρθια θέση ισορροπίας για κάθε τιμή των παραμέτρων, αφού εντοπίζονται θέσεις ισορροπίας σε κεκλιμένες θέσεις.
- Το σύστημα επιπλέον σώμα-ρευστό, αντιμετωπιζόμενο ως δυναμικό, διαταράσσεται με την μεταβολή των διάφορων παραμέτρων του προβλήματος, παρουσιάζοντας ενδιαφέροντα φαινόμενα δυναμικής απόκρισης (διακλαδώσεις, isolas) .
- Από τα διαγράμματα ισορροπίας, όπως αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου, διαπιστώθηκε το περίφημο “σπάσιμο της συμμετρίας”, δηλαδή η δυνατότητα ισορροπίας συμμετρικών σωμάτων σε θέσεις μη συμμετρικές.
- Όπως διαπιστώθηκε και πιο πάνω, τα αποτελέσματα των δύο θεωρητικών μεθόδων (γεωμετρική και ενεργειακή) ταυτίζονται. Βέβαια, η γεωμετρική μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι προσφέρει μια πληρέστερη εικόνα για τα χαρακτηριστικά ευστάθειας (επιπλέον πληροφορίες για την μορφή και μέγιστη τιμή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς). Από την άλλη μεριά, η ενεργειακή μέθοδος δύναται να αναπαραστήσει συγκεντρωμένα τα σημεία ισορροπίας που χαρακτηρίζουν το σύστημα μέσω συνεχών καμπυλών ισορροπίας.
- Τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζουν ικανοποιητική σύγκλιση με τα αντίστοιχα θεωρητικά, χωρίς ωστόσο να ταυτίζονται. Το γεγονός αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί απόλυτα από τις μη ιδανικές επικρατούσες συνθήκες κατά την εκτέλεση του πειράματος.
- Τέλος, με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα, παρατηρήθηκε ότι οι επιδράσεις λόγω τριδιάστατης γεωμετρίας για τον λόγο των διαστάσεων των μοντέλων του πειράματος ήταν αμελητέες. Αυτό σημαίνει πως η τριδιάστατη θεώρηση του φαινομένου της στατικής ευστάθειας έχει νόημα για πολύ κοντινούς λόγους διαστάσεων.

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας τόσο υπολογιστικά όσο και πειραματικά θα μπορούσε να επεκταθεί μελλοντικά προς τις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Μελέτη ευστάθειας πρισμάτων σύνθετης γεωμετρίας εγκάρσιας τομής (πχ. παραβολοειδούς μορφής ανωτέρας τάξεως). Με αυτόν τον τρόπο θα είναι εφικτή η

εύρεση των αποκρίσεων του συστήματος για διαταραχή της παραμέτρου της γεωμετρίας.

- Μελέτη των καταστάσεων ισορροπίας στην περίπτωση τριδιάστατων στερεών, όπου το μήκος πλέον θα είναι τετριμμένο και θα συνιστά μια ακόμη παράμετρο του προβλήματος.
- Διερεύνηση της ευστάθειας στην περίπτωση στερεών μεταβαλλόμενης γεωμετρίας κατά το μήκος τους. Η προοπτική αυτή μαζί με τις δύο προηγούμενες ουσιαστικά αποτελούν μια ολοκληρωμένη μελέτη στατικής ευστάθειας ενός πλοίου.
- Διεξαγωγή πειραματικών δοκιμών με άλλα υλικά πλήρωσης ή για συνθήκες ελεγχόμενης ανομοιογένειας ή ακόμη και για την περίπτωση τριδιάστατων στερεών απλής γεωμετρίας, με προϋπόθεση την ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας.

BIBΛIOΓPAΦIA

[1] Erdős P., Schibler G., Herndon R. C., (1992) Floating equilibrium of Symmetrical Objects and the breaking of symmetry. Part 1: Prisms, American Journal of Physics, Vol. 60, Issue 3, pp 335-345

[2] Archimedes (2002) The works of Archimedes, edited by T.L. Heath, republished by Dover Publ, Mineola, New York

[3] Netz R., Noel W. (2010) The story of the amazing discovery of Archimedes' lost works, Archimedes, The Palimpsest Project

[4] Nowacki H. (2002) Archimedes and Ship Stability, Proc. Intl. Multi-Conf./ Euroconf. On Passenger Ship Design, Operation and Safety, Anissaras/Crete, edited by A. Papanikolaou and K. Spyrou, NTU Athens (Oct. 2001). Republ as Preprint No. 198, Max Plank Inst for the History of Science, Berlin

[5] Stevin S. (1955) The principal works of Simon Stevin, 5 vols (Ed. E. J Dijksterhuis), Swets and Zeitlinger, Amsterdam

[6] Huygens C. (1967) De iis quae liquido supernatant libri tres (Three books on bodies floating on top of a liquid) (1650). Published in Euvres Complètes de Christiaan Huygens, vol. XI (1908). Repub Swets and Zeitlinger, Amsterdam

[7] Bouguer P. (1746) Traité du Navire, de sa Construction et de ses Mouvements (Treatise of the Ship, its Construction and its Movements), Jombert, Paris

[8] Euler L. (1967) Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus (Science of Ships or Treatise on How to Build and Operate Ships), 2 vols., St. Petersburg, (1749). Republ in Euler's Collected Works, Series II, vols. 18 and 19, issued by the Euler Comm of the Swiss Academy of Natural Science, Zurich and Basel

[9] Atwood G. (1796) The Construction and Analysis of Geometrical Propositions, Determining the Positions Assumed by Homogeneous Bodies which Float Freely, and at Rest, on a Fluid's Surface; Also Determining the Stab of Ships and of Other Float Bodies, Philos. Trans. of the R. Soc. of London, Vol. 86: 46-278

[10] Atwood G, Vial du Clairbois HS (1798) A Disquisition on the Stability of Ships, Philos. Trans. of the R. Soc. of London, Vol. 88, vi-310

- [11] Dupin C. (1813) *Développements de géométrie: avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc. pour faire suite a la Géométrie descriptive et a la Géométrie analytique de M. Monge* (Developments in geometry; with applications to the Stab of vessels, to trenches and embankments, to ramparts, to optics, etc. following the Descriptive Geometry and Analytic Geometry of M. Monge), Mme Ve Courcier, Paris
- [12] Reed E. J. (1885) *A Treatise on the Stability of Ships*, republished by Cambridge University Press (2010), New York
- [13] Erdős P., Schibler G., Herndon R. C., (1992) Floating equilibrium of Symmetrical Objects and the breaking of symmetry. Part 2: The cube, the octahedron, and the tetrahedron, *American Journal of Physics*, Vol. 60, Issue 4, pp 345-356
- [14] Francescutto A., Papanikolaou A. D. (2010) Buoyancy, stability and subdivision : from Archimedes to SOLAS 2009 and the way ahead, *Proc. IMechE Vol. 225 Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment*.
- [15] Nowacki H, Ferreiro L.D (2011) Historical Roots of the Theory of Hydrostatic Stability of Ships, *Contemporary Ideas on Ship Stability and Capsizing in Waves, Fluid Mechanics and its Applications*, Vol. 97, pp 141-180, Springer
- [16] Leine R. I. (2010) The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability, *Nonlinear Dyn.*, Vol. 59, pp 173-182, Springer
- [17] Gilbert E. N. (1991) How things float, *The American Monthly*, Vol. 98, No 3, pp 201-216, Mathematical Association of America
- [18] Delbourgo R. (1987) The floating plank, *American Journal of Physics*, Vol. 55 pp 799-802
- [19] Lautrup B. (2004) *Physics of Continuous Matter*, Institute of Physics Publishing
- [20] Strogatz S. H. (2000) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Book Publishing
- [21] Drazin P. G. (1992) *Nonlinear Systems*, Cambridge texts in applied Mathematics, Cambridge University Press
- [22] Σπύρου Κ. (2009) *Ευστάθεια Διατοιχισμού Πλοίου και Υπόβαθρο Κανονισμών, Σημειώσεις Μαθήματος*

[23] Τζαμπίρας Γ. (2007) Υδροστατική και Ευστάθεια Πλοίου Ι (Ευστάθεια Άθικτου Πλοίου), Τόμος Α, Σημειώσεις Μαθήματος

[24] Λουκάκης Θ. Α , Πέρρας Π. Τ (1985) Υδροστατική και Ευστάθεια Πλοίου, Έκδοση 2η

[25] Rawson K. J., Tupper E. C (2004) Βασική Θεωρία Πλοίου, Τόμος 2, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π