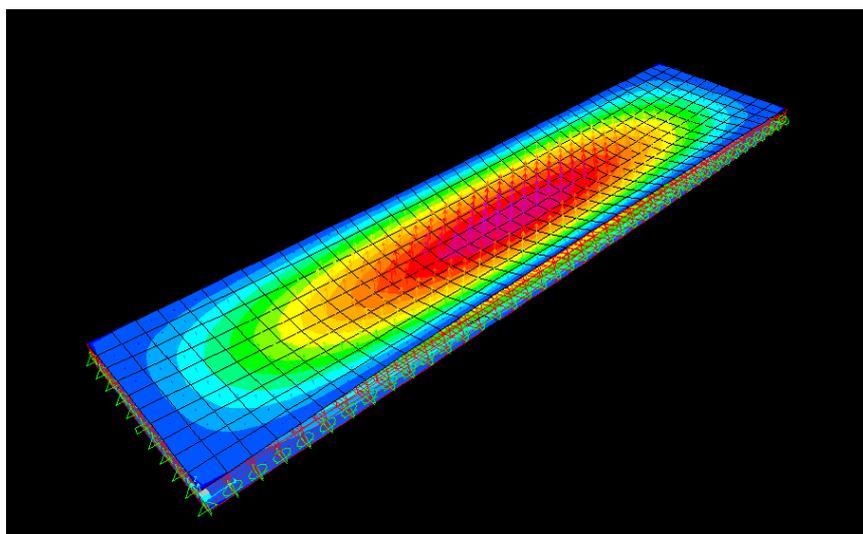




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :Ι. ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



ΤΟΣΙΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΣ ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, 2013
ΕΜΚ ΜΕ 2013/23

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Τόσιου Δέσποινα

Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright c Τόσιου Δέσποινα, 2008

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση, διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρών μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας κύριο Ιωάννη Ραυτογιάννη για την πολύτιμη βοήθεια του και υποστήριξη η οποία ήταν καταλυτική σε όλα τα στάδια της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια, τους φίλους μου και ιδιαιτέρως τη θεία μου Νεκταρία για τη βοήθεια που μου προσέφερε σε όλο το διάστημα των σπουδών μου.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα υλικά που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος σε κάθε περίοδο της ανθρώπινης ύπαρξης του, ακόμη από την αρχαιότητα, επηρεάζουν και διαμορφώνουν σημαντικά ολόκληρες εποχές. Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση των χαρακτηριστικών σύνθετων υλικών και ιδιαιτέρως πλακών τύπου σάντουιτς.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα σύνθετα υλικά που επικρατούν στην εποχή μας και ιδιαίτερη μνεία στα πλεονεκτήματά τους, στο τρόπο διαμόρφωσής τους και στα επιμέρους υλικά τους.

Στο κεφάλαιο 2, μελετούνται οι μέθοδοι ανάλυσης των σύνθετων υλικών αναφέροντας τους νόμους οι οποίοι διέπουν τα υλικά ενώ στο κεφάλαιο 3 εξετάζεται ο ρόλος των ινών ενίσχυσης στο υλικό και ο τρόπος εύρεσης της συνολικής έντασης του υλικού.

Στο επόμενο κεφάλαιο 4 επιχειρείται μια προσπάθεια για την παρουσίαση μιας πλάκας τύπου σάντουιτς και συγκεκριμένα των συστατικών της, του πυρήνα και των διαστρωματώσεων στο άνω και κάτω μέρος της πλάκας. Επιπρόσθετα διατυπώνονται και αναλύονται σχέσεις για τα μητρώα ακαμψίας συνολικά της πλάκας, για τον τρόπο στήριξης της και τις αλλαγές που προκύπτουν ανάλογα το υλικό και τη γεωμετρία της πλάκας. Στη συνέχεια περιγράφεται το φαινόμενο του λυγισμού σε αυτού του τύπου πλάκες ενώ επίσης προσδιορίζεται η ρυτίδωση των όψεων υπό τη φόρτιση εντός επιπέδου δυνάμεων. Τέλος, αναφορά γίνεται στη φυσική συχνότητα κατά την ελεύθερη ταλάντωση τέτοιου τύπου πλακών και παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής όλων των παραπάνω σχέσεων.

Με σκοπό να καθοριστεί επαρκώς ο τρόπος συμπεριφοράς πλακών τύπου σάντουιτς στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιούνται αριθμητική προσομοίωση τέτοιων πλακών με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων SAP 2000. Πιο συγκεκριμένα, μορφώσαμε, σχεδιάσαμε και μελετήσαμε τρισδιάστατα μοντέλα πλακών τύπου σάντουιτς με διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, υλικά, διαστρωματώσεις στηρίξεις, φορτίσεις καθώς επίσης με τη κατάλληλη διακριτοποίηση στοιχείων.

Το κεφάλαιο 6 συγκεντρώνει και παρουσιάζει τα κυριότερα αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων κάνοντας επίσης σύγκριση των διαφόρων περιπτώσεων μοντέλων ενώ στο κεφάλαιο 7 συγκρίνονται τα αποτελέσματα όπως προέκυψαν και από τις αριθμητικές αναλύσεις όσο και τις αναλυτικές. Η διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται με την σύνοψη των κυριότερων συμπερασμάτων (κεφάλαιο 8).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

SUMMARY

The materials used by man in every period of human existence, even from ancient times, affect and shape whole eras. The aim of this thesis is to investigate the characteristics of composite materials and specifically sandwich plates.

The first chapter is an introduction to composite materials that prevail in our times and a special reference to their advantages, in the manner in which they are formed and their individual materials.

In Chapter 2, they are studied the methods of which we analyze composite materials indicating the laws governing these materials while in Chapter 3, it is examined the role of fiber reinforcement in the materials and the way of calculating the stiffness matrices of them.

The next chapter 4 is an attempt to present a particular sandwich plate and its components, the core and the facesheets on both sides of the core. Additionally, they are formulated and analyzed relationships for the stiffness matrices and the supports of sandwich plates and presented the different analysis results which depend on the material and the geometry of the sandwich plate. Then, it is described the phenomenon of buckling in this type of plates and also it is determined the face wrinkling of the plates's edges due to in-plane forces. Finally, it is referred the physical frequency during free vibration of sandwich plates and presented an example of implementation of the above relationships.

In order to determine adequately the sandwich plate's behavior, in Chapter 5 it is formed numerical models of such plates with the finite element program SAP 2000. Specifically, we designed, simulated and examined models of sandwich plates with different geometric characteristics, materials, supports, facesheets, loads, as well as with using the proper discretization elements.

Chapter 6 presents the main and most important results of the above analyses and compare the various models. Also, in chapter 7 it is compared the results from numerical analyses and analytical ones. The thesis concludes with a summary of the main conclusions (Chapter 8).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	4
SUMMARY	6
1. ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	12
1.1 Γενικά.....	12
1.2 Ορισμός και μέθοδοι σχεδιασμού σύνθετων υλικών.....	13
1.3 Επιμέρους υλικά	14
1.3.1. Ενισχύσεις	14
1.3.2. Συνδετικά υλικά	15
1.3.3. Παρατηρήσεις.....	15
2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	18
2.1 Εισαγωγή	18
2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις	18
2.3 Γενικευμένος νόμος του HOOKE.....	19
2.4 Μηχανικές σταθερές	20
3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	22
3.1 Μετασχηματισμοί ορών ακαμψίας	22
3.2 Μεμβρανική Ένταση.....	23
4. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	24
4.1 Γενικά.....	24

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.2 Μητρώα ακαμψίας σύνθετων πλακών τύπου σάντουιτς.....	25
4.3 Στηρίξεις.....	27
4.4 Ορθότροπη πλάκα τύπου σάντουιτς.....	28
4.5 Ισότροπη πλάκα τύπου σάντουιτς.....	29
4.6 Βέλος κάμψης ορθογωνικών πλακών τύπου σάντουιτς.....	32
4.6.1. Επιμήκειες πλάκες	32
4.7 Λυγισμός ορθογωνικών πλακών τύπου σάντουιτς	33
4.7.1. Γενικά.....	33
4.7.2. Επιμήκειες πλάκες	34
4.7.3. Απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση	36
4.8 Ρυτίδωση όψεων πλάκας τύπου σάντουιτς.....	39
4.9.1. Ισοτροπικός πυρήνας-σύνθετη διαστρωμάτωση	41
4.9.2. Ισοτροπικός πυρήνας-ισοτροπική διαστρωμάτωση	44
4.9 Ελεύθερη ταλάντωση πλακών τύπου σάντουιτς	45
4.10.1. Επιμήκειες Πλάκες.....	45
4.10.2. Απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση	46
4.10 Παράδειγμα εφαρμογής αναλυτικών αναλύσεων σύνθετης πλάκας τύπου σάντουιτς	49
5. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	56

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

5.1 Γενικά.....	56
5.2 Χαρακτηριστικά μοντέλου	56
5.2.1. Διαστάσεις γεωμετρικού μοντέλου	56
5.2.2. Ορισμός υλικών	59
5.2.3. Διαστρωμάτωση	61
5.2.4. Διαχωρισμός σε πεπερασμένα στοιχεία	63
5.2.5. Στηρίξεις.....	65
5.2.6. Φορτίσεις	67
5.2.7. Ανάλυση	69
6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP	
2000	74
7. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP	
2000 ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ	94
8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	112
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	114
ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΟ ΙΝΤΕΡΝΕΤ	114
ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ	116
ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	118
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ	122

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

1. ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Γενικά

Από την αρχαιότητα, τα διάφορα υλικά (φυσικά ή τεχνητά) που χρησιμοποιούσε ο άνθρωπος στη καθημερινή του ζωή έπαιξαν σημαντικό ρολό στην ύπαρξη του και επηρέασαν καθοριστικά ολόκληρες εποχές. Ο άνθρωπος πέρασε από την εποχή της πέτρας, του σιδήρου και το χαλκού σε πιο σύνθετα υλικά τα οποία χρειάστηκε να επεξεργαστεί πρώτα πριν τα χρησιμοποιήσει. Τα τελευταία χρόνια έχουν επικρατήσει σύνθετα υλικά όπως τα κεραμικά, τα πλαστικά, τα σύνθετα τα οποία ολοένα κερδίζουν έδαφος έναντι των κλασσικών υλικών. Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν μεγάλο μέρος των εφαρμογών των νέων τεχνολογιών αιχμής στις κατασκευές και έχουν μεταβάλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης. Πλέον διατίθεται από την παγκόσμια παραγωγή μεγάλη ποικιλία ινών και ρητινών παρέχοντας τόσο στο σχεδιαστή όσο και στον πελάτη τη δυνατότητα να επιλέξει και να διαμορφώσει το πιο κατάλληλο σύστημα υλικών που καλύπτει εξ ολοκλήρου τις απαιτήσεις του.

Τα πλεονεκτήματα τους όπως το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης υπερτερούν έναντι των μειονεκτημάτων τους όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες περιβάλλοντος καθώς και το αρκετά υψηλό αρχικό τους κόστος.

Για τους παραπάνω λόγους ολοένα αυξάνεται σταθερά ο όγκος και ο αριθμός των εφαρμογών των σύνθετων υλικών όπως η χρήση υλικών από fiberglass σε θαλάσσια σκάφη και υλικών από ίνες γραφίτη σε αθλητικά είδη. Ενώ πλέον είναι ευρύτατα διαδεδομένη η χρήση σύνθετων υλικών στον ιατρικό τομέα των επεμβάσεων.

Το αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας είναι να διερευνηθεί η συμπεριφορά μία πλάκας όχι κατασκευασμένη από συμβατικά υλικά αλλά πλάκας σάντουιτς με διάφορους τύπους διαστρωμάτωσης και αφρώδη πυρήνα έναντι στο κρίσιμο φορτίο του λυγισμού χρησιμοποιώντας τη βοήθεια προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων και τα αποτελέσματα αυτά να συγκριθούν με αναλυτικές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

1.2 Ορισμός και μέθοδοι σχεδιασμού σύνθετων υλικών

ΟΡΙΣΜΟΣ (Agarwal–1990): Σύνθετα είναι τα υλικά, τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά μέρη που έχουν μια συγκεκριμένη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ τους.

Για να σχηματίσουμε σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται δύο ή περισσότερα υλικά και το νέο προϊόν πια διαθέτει βελτιωμένες ιδιότητες και χαρακτηριστικά σε σχέση με τα υλικά από τα οποία προέρχεται. Τα σύνθετα υλικά αποτελούνται κυρίως από τις ενισχύσεις και το συνδετικό υλικό αυτών (μήτρα) που είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας. Το μεν πρώτο προσδίδει δυσκαμψία και αντοχή ενώ το δεύτερο δεσμεύει τις ίνες, εξασφαλίζει τη καλύτερη συνεργασία των δύο και τη μεταφορά των φορτίων στο σύνθετο υλικό. Επίσης προστατεύει τις ίνες από το περιβάλλον και τις μηχανικές τριβές.

Οι μέθοδοι σχεδιασμού σύνθετων υλικών χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ενισχύσεων και συνδετικών υλικών όπως προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα και συνδυάζοντας αυτές δημιουργούν μια διαστρωμάτωση με ιδιότητες οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν και να χρησιμοποιηθούν ως αρχικός σχεδιασμός. Στη συνέχεια σειρά πειραμάτων θα προσδιορίσει επακριβώς τις ιδιότητες του νέου υλικού. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιρροή της αλλαγής του συνδετικού υλικού ή της πορείας κατασκευής του σύνθετου υλικού είναι καθοριστική στη διαμόρφωση των νέων ιδιοτήτων του υλικού. Το διάγραμμα σχεδιασμού σύνθετων υλικών περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες:

Αναγνώριση αναγκών / Ορισμός προβλήματος / Ιδέες σχεδιασμού / Σύνθεση / Ανάλυση-Πειράματα-Τοπική βελτιστοποίηση / Αποτίμηση / Παρουσίαση

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

1.3 Επιμέρους υλικά

Τα επιμέρους υλικά από τα οποία κυρίως απαρτίζεται ένα σύνθετο υλικό είναι οι ενισχύσεις και το συνδετικό υλικό. Παρακάτω παρουσιάζονται οι διάφοροι τύποι που συνήθως χρησιμοποιούνται.

1.3.1. Ενισχύσεις

Οι ενισχύσεις διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- Ενισχύσεις
 - Ινώδης
 - Στρωματικά
 - Κοκκώδη

- Συνεχείς επιμήκεις ίνες
 - Ίνες ενιαίου προσανατολισμού
 - Ίνες διπλού προσανατολισμού (π.χ. πλεκτές)
 - Τυχαίου προσανατολισμού (συνεχείς δέσμες ινών)

- Ασυνεχείς ίνες
 - Τυχαίου προσανατολισμού
 - Συγκεκριμένου προσανατολισμού

- Κοντές ίνες και σωματίδια
 - Τυχαίου προσανατολισμού
 - Συγκεκριμένου προσανατολισμού

- Συνήθεις ίνες
 - Γυαλιού (glass fibers)
 - Αραμιδίου (aramid fibers ή Kelvar)
 - Άνθρακα (carbon fibers)
 - Λοιπές ίνες

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

1.3.2. Συνδετικά υλικά

Τα συνδετικά υλικά μπορεί να είναι οργανικά, μεταλλικά ή κεραμικά ενώ οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε θερμοπλαστικές και θερμοσκληρυνόμενες. Οι συνηθέστερες μήτρες είναι οι πολυεστερικές ρητίνες και οι αποξικές. Συνήθως οι πρώτες ενισχύονται από ίνες γυαλιού ενώ οι δεύτερες από ίνες αραμιδίου ή άνθρακα. Στις κατασκευές συνήθως χρησιμοποιούνται εποξικές ρητίνες.

1.3.3. Παρατηρήσεις

Κρίσιμη είναι η επιλογή των υλικών ενίσχυσης και συνδετικού υλικού κατά το σχεδιασμό των σύνθετων υλικών και οι παρακάτω παράμετροι χρειάζεται να επιλεγθούν προσεκτικά.

- Γεωμετρία ινών
- Ποσοστό ινών
- Προσανατολισμός ινών
- Συνάφεια ινών μήτρας

Επιπρόσθετα σημαντικό είναι παρουσιαστούν οι χαρακτηρισμοί ενός σύνθετου υλικού. Ένα σύνθετο υλικό χαρακτηρίζεται ως συμμετρικό, μη συμμετρικό και ισορροπημένο.

- Συμμετρικό: κάθε στρώση έχει την συμμετρική της από το γεωμετρικό μέσο επίπεδο όσον αφορά τις ιδιότητες, το πάχος και τον προσανατολισμό ινών.
- Μη συμμετρικό: οι στρώσεις συνήθως παρουσιάζουν συσχετισμό μεταξύ τάσεων και καμπυλοτήτων. Για παράδειγμα, ένα δίστρωτο υλικό 0/90 θα καμφθεί με την εφαρμογή τάσης.
- Ισορροπημένο: χαρακτηρίζεται από $\pm\theta$ προσανατολισμένες ίνες. Αφορά σύνθετα υλικά με στρώσεις εκτός του άξονα.

Τέλος πριν προχωρήσουμε στην αναλυτική μελέτη της πλάκας σάντουιτς μπορούμε να αναφερθούμε στον διεθνώς καθιερωμένο κωδικοποιημένο τρόπο περιγραφής τέτοιων συστημάτων πολύστρωτων σύνθετων υλικών. Ο κώδικας που χρησιμοποιείται διεθνώς είναι ο εξής: Laminate Orientation Code Devised by Air Force Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, by P.A. Parmley. Οι γενικές αρχές του κώδικα είναι οι εξής:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

- Η κάθε στρώση αναπαριστάται από το αζιμούθιο (γωνία) των ινών της ως προς τον x-άξονα της πλάκας. (πάχος πλάκας $z=[-h/2, h/2]$)
- Ως δείκτης στη στρώση μπαίνει ο αριθμός που υποδεικνύει τον αριθμό στρώσεων ίδιας γωνίας ινών.
- Γίνεται χρήση της καθέτου ως διαχωριστικού αν αλλάζει η γωνία στρώσης.
- Η αρίθμηση ξεκινά πάντα από την κάτω επιφάνεια της πλάκας ($z=-h/2$)
- Όλη η διάταξη της πλάκας μπαίνει σε αγκύλες και τοποθετούνται δείκτες ως εξής:
"T" αν η διάταξη εντός των αγκυλών είναι ολοκληρωμένη
"S" αν η διάταξη εντός των αγκυλών είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο $z=0$.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τη μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων, τάσεων και δυνάμεων συνδέονται μεταξύ τους μέσω των εξισώσεων ισορροπίας, το νόμο ελαστικότητας, τις σχέσεις κινηματικής και τις εξισώσεις συμβιβαστού παραμορφώσεων (Εξισώσεις 2-1 έως 2-4) αντίστοιχα.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{Εξίσωση 2-1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl} \quad \text{Εξίσωση 2-2}$$

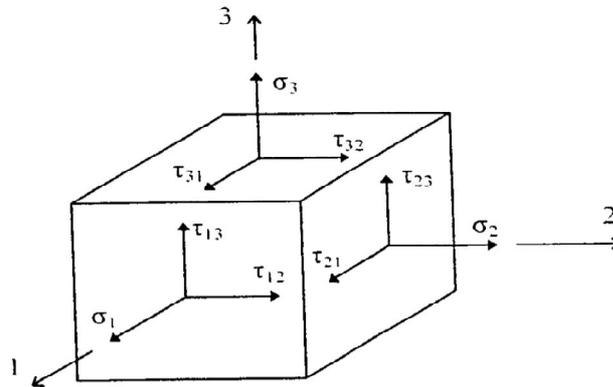
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad \text{Εξίσωση 2-3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \quad \text{Εξίσωση 2-4}$$

2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα σχήμα στο οποίο απεικονίζονται οι τάσεις στο κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3 (Σχήμα 2.1) ενώ στις Εξισώσεις 2-5 και 2-6 διατυπώνονται οι διανυσματικές μορφές των τάσεων και των παραμορφώσεων.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 2.1 Τάσεις στο κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \tau_{23} \tau_{31} \tau_{12}\}$$

Εξίσωση 2-5

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_{23} \gamma_{31} \gamma_{12}\}$$

Εξίσωση 2-6

2.3 Γενικευμένος νόμος του HOOKE

Ο νόμος ελαστικότητας για τα ανισότροπα γραμμικώς ελαστικά υλικά παρουσιάζεται στην Εξίσωση 2-6.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Εξίσωση 2-7

Ενώ όταν το υλικό είναι ορθότροπο, δηλαδή όταν υπάρχουν 3 ορθογωνικά επίπεδα συμμετρίας η εξίσωση 2-7 τροποποιείται στην εξίσωση 2-8 και περιέχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 2-8}$$

2.4 Μηχανικές σταθερές

Για να υπολογίσουμε τις μηχανικές σταθερές (μέτρα ελαστικότητας) εφαρμόζουμε απλά πειράματα (μονοαξονική τάση $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, καθαρή διάτμηση $\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}$) και έτσι να προσδιορίσουμε τους όρους ακαμψίας στο τοπικό σύστημα αξόνων ως ακολούθως (Εξισώσεις 2-9 έως 2-12)

$$\nu_{21} = \nu_{12} * \frac{E_2}{E_1} \quad \text{Εξίσωση 2-9}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} \quad \text{Εξίσωση 2-10}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} * E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} \quad \text{Εξίσωση 2-11}$$

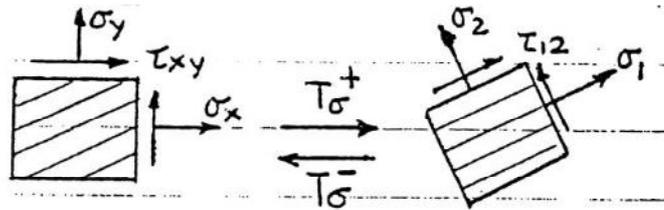
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} \quad \text{Εξίσωση 2-12}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στα σύνθετα υλικά σημαντικό ρόλο παίζει ο προσανατολισμός των ινών ενίσχυσης ενώ αναγκαίος είναι ο μετασχηματισμός για τον προσδιορισμό των τάσεων και παραμορφώσεων στο σύστημα υλικού 1-2 (Σχήμα 3.1)..



Σχήμα 3.1 Τάσεις στο γενικό σύστημα αξόνων x-y και στο τοπικό 1-2

3.1 Μετασχηματισμοί όρων ακαμψίας

Το μητρώο των μετασχηματισμένων όρων ακαμψίας $[\bar{Q}_{ij}]$ προσδιορίζεται από την παρακάτω Εξίσωση 3.1 όπου οι συντελεστές της μητρωικής σχέσης c, s και λοιποί προσδιορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ ανάλογα τη γωνία στροφής θ του προσανατολισμού των ινών.

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}$$

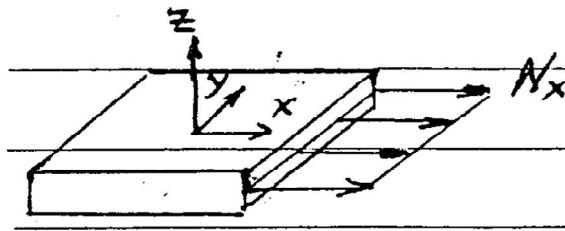
Εξίσωση 3-1

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

3.2 Μεμβρανική Ένταση

Εξετάζοντας τώρα όχι μεμονωμένες στρώσεις με προσανατολισμένες ίνες αλλά πολλές στρώσεις μαζί ώστε να σχηματιστεί μια λεπτή πλάκα, ένα κέλυφος, ένα δομικό μέλος διαπιστώνουμε ότι το πάχος της στρώσης είναι πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις για αυτό και έχουμε μια επίπεδη εντατική κατάσταση. Κάθε διαστρωμάτωση χαρακτηρίζεται από έναν κώδικα αλληλουχίας που περιγράφει τη θέση της κάθε στρώσης στο συνολικό πάχος της διαστρωμάτωσης και λαμβάνεται επίπεδο αναφοράς το μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης.

Η μεμβρανική δράση N_x είναι αξονική δύναμη ανά μονάδα μήκους και εφαρμόζεται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης και αποτελεί άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Μεμβρανική δύναμη N_x σε μία διαστρωμάτωση

Υπολογίζουμε τις μεμβρανικές ακαμψίες της διαστρωμάτωσης με βάση την Εξίσωση 3-2.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k * t_k \quad \text{Εξίσωση 3-2}$$

Όσον αφορά την απλή κάμψη διαστρωματώσεων βρίσκουμε το μητρώο καμπτικής Δυσκαμψίας μέσω της Εξίσωσης 3-3 με βάση τις στρώσεις του υλικού.

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k * \left[z_k^2 * t_k + \frac{t_k^3}{12} \right] \quad \text{Εξίσωση 3-3}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

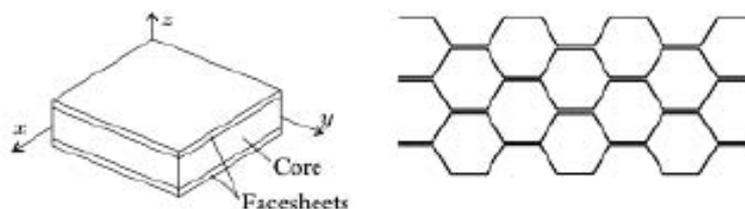
4. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.1 Γενικά

Οι πλάκες σάντουιτς, οι οποίες αποτελούνται από έναν πυρήνα ο οποίος καλύπτεται από διαστρωματώσεις, χρησιμοποιούνται συχνά αντί για στερεές πλάκες λόγω του υψηλού ποσοστού καμπτικής ακαμψίας-βάρους. Αυτή η μεγάλη καμπτική ακαμψία προκύπτει εξαιτίας της απόστασης μεταξύ των διαστρωματώσεων, οι οποίες αναλαμβάνουν το φορτίο, και του μικρού βάρους λόγω του μικρού βάρους του πυρήνα.

Στη συγκεκριμένη εργασία υποθέτουμε ορθογώνια πλάκα τύπου σάντουιτς με διαστρωμάτωση και στις δύο πλευρές του πυρήνα. Κάθε διαστρωμάτωση μπορεί να είναι από ισοτροπική διαστρωμάτωση ή από ενισχυμένο με ίνες σύνθετο φυλλώδες υλικό αλλά πρέπει να είναι λεπτό συγκρινόμενο με τον πυρήνα. Ο πυρήνας μπορεί να είναι από αφρό ή κηρήθρα και να διαθέτει ένα επίπεδο συμμετρίας υλικού παράλληλο στη μέση επιφάνεια. Η εντός επιπέδου ακαμψία του πυρήνα πρέπει να είναι μικρή συγκρινόμενη με την εντός επιπέδου ακαμψία των διαστρωματώσεων (Σχήμα 4.1).

Η συμπεριφορά λεπτών πλακών οι οποίες υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις αναλύονται με την υπόθεση Kirchhoff όπου οι κορυφές παραμένουν ευθείες και ορθογώνιες. Στη περίπτωση όμως των πλακών τύπου σάντουιτς δεν ισχύει η απαραίτητα και η δεύτερη παράμετρος. Έτσι οι μετακινήσεις κατά x και y (u και v) σε ένα σημείο σε απόσταση z θα μειωθεί κατά το γινόμενο $z\gamma_{xz}$ και $z\gamma_{yz}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1 Παρουσίαση πλάκας σάντουιτς και πυρήνας κηρήθρας

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.2 Μητρώα ακαμψίας σύνθετων πλακών τύπου σάντουιτς

Το μητρώο ακαμψίας της πλάκας σάντουιτς υπολογίζεται υποθέτοντας ότι το πάχος του πυρήνα παραμένει σταθερό υπό φόρτιση και η ακαμψία του πυρήνα εντός επιπέδου είναι αμελητέα. Υπό τις παραπάνω υποθέσεις στα μητρώα ακαμψίας της πλάκας σάντουιτς [A], [B], [C] επικρατεί η ακαμψία των διαστρωματώσεων και υπολογίζεται από τη θεωρία των παράλληλων αξόνων. Όταν η διαστρωμάτωση βάσης και ανώτερης στάθμης είναι πανομοιότυπες και η διαστρωμάτωση τους είναι συμμετρική (από την μέση επιφάνεια κάθε διαστρωμάτωσης) τότε το μητρώο [B] είναι μηδενικό και τα μητρώα [A], [C] απλοποιούνται όπως παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.1) (Όταν οι στρώσεις κάθε διαστρωμάτωσης είναι συμμετρικές, το επίπεδο αναφοράς πρέπει να λαμβάνεται συμβατικά στη μέση επιφάνεια.)

	Unsymmetrical	Symmetrical (identical facesheets)
[A]	$[A]^t + [A]^b$	$2 [A]^t$
[B]	$d^t [A]^t - d^b [A]^b + [B]^t + [B]^b$	0
[D]	$(d^t)^2 [A]^t + (d^b)^2 [A]^b + [D]^t + [D]^b + 2d^t [B]^t - 2d^b [B]^b$	$\frac{1}{2}d^2 [A]^t + 2 [D]^t$

Πίνακας 4.1 Μητρώα ακαμψίας [A], [B], [C] πλακών σάντουιτς

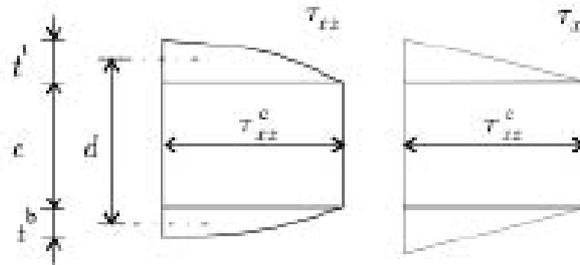
Όταν οι πάνω και κάτω διαστρωμάτωση είναι αντισυμμετρικές όσον αφορά τη μέση επιφάνεια των διαστρωματώσεων αλλά συμμετρικές όσον αφορά τη μέση επιφάνεια της πλάκας σάντουιτς, τότε $[A]^t=[A]^b$, $[B]^t=-[B]^b$, $[D]^t=[D]^b$ και τα μητρώα ακαμψίας της πλάκας σάντουιτς [A], [B], [D] υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις (Εξίσωση 4-1):

$$[A]=2[A]^t, \quad [B]=0, \quad [D]=\frac{1}{2} * d^2 * [A]^t + 2 * [D]^t + 2 * d * [B]^t \quad \text{Εξίσωση 4-1}$$

Το μητρώο διάτμησης [S] προσδιορίζεται ως εξής. Στον πυρήνα, λόγω της παραπάνω υπόθεσης περί αμελητέας εντός επιπέδου ακαμψίας του πυρήνα, η εγκάρσια διατμητική τάση τ_{xy} είναι ομοιόμορφη. Γενικά στα διαστρωμάτωση η διατμητική τάση κατανέμεται ως παρακάτω (Εξίσωση 4-2 αριστερά) αλλά λαμβάνουμε κατά προσέγγιση την κατανομή αυτή

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

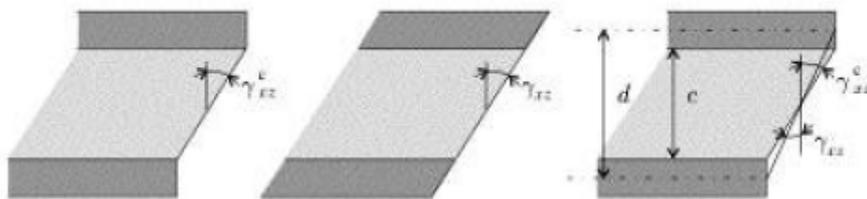
ως γραμμική (Εξίσωση 4-2 δεξιά). Το μητρώο της έντασης-τάσης προσδιορίζεται παρακάτω (Εξίσωση 4-2) όπου ο δείκτης c υποδηλώνει τον πυρήνα.



Σχήμα 4.2 Κατανομή διατμητικής τάσης τ_{xz}

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{Bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 4-2}$$

Δεν λαμβάνεται υπόψη η διατμητική παραμόρφωση των λεπτών διαστρωματώσεων. Με βάση αυτήν την προσέγγιση στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διατμητική παραμόρφωση γ_{xz}^c της διατομής (Σχήμα 4.3 αριστερά) η οποία όμως προσεγγίζεται με τη μέση διατμητική παραμόρφωση γ_{xz} (Σχήμα 4.3 μέση). Η σχέση μεταξύ μέσης διατμητικής παραμόρφωσης και παραμόρφωσης πυρήνα δίνεται στη Εξίσωση 4-3.



Σχήμα 4.3 Κατανομή διατμητικής τάσης γ_{xz}

$$\gamma_{xz}^c = \frac{d}{c} * \gamma_{xz} \quad \text{Εξίσωση 4-3}$$

Ενώ στη Εξίσωση 4-4 προσδιορίζεται η σχέση μεταξύ των εγκάρσιων διατμητικών δυνάμεων και της μέσης διατμητικής παραμόρφωσης.

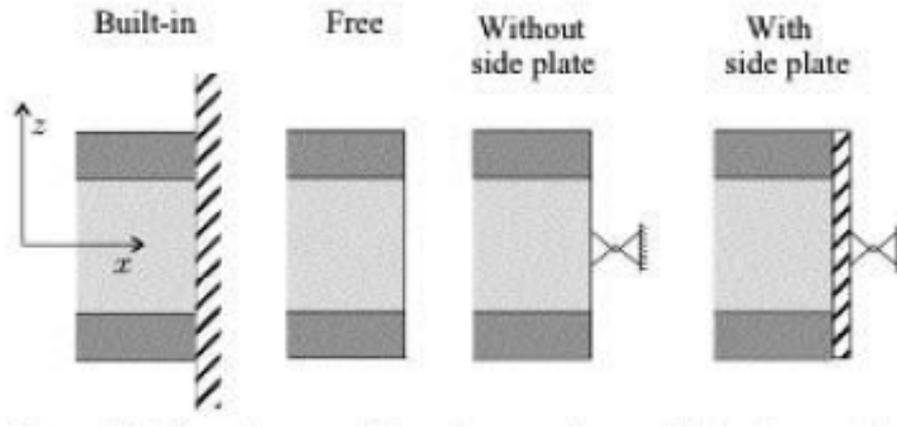
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{d^2}{c} * \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Εξίσωση 4-4

4.3 Στηρίξεις

Με σκοπό να καθορίσουμε τη βύθιση της πλάκας τύπου σάντουιτς, πρέπει να καθοριστούν οι οριακές συνθήκες κατά μήκος των τεσσάρων ακμών της πλάκας. Μία ακμή μπορεί να στηρίζεται με πάκτωση, κύλιση ή να είναι ελεύθερο άκρο. (Σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4 Οριακές συνθήκες στήριξης με τη μία πλευρά παράλληλη στο άξονα y

- Κατά μήκος μιας ακμής η οποία στηρίζεται με πακτώσεις, η βύθιση w^0 , οι εντός επιπέδου μετακινήσεις u^0 , v^0 και οι στροφές των κορυφών γ_{xz} και γ_{yz} είναι μηδενικές.

$$w^0 = 0, u^0 = v^0 = 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Εξίσωση 4-5

- Κατά μήκος μιας ελεύθερης ακμής, όπου δεν εφαρμόζονται εξωτερικά φορτία, η καμπτική ροπή M_x και η στρεπτική ροπή M_{xy} , η εγκάρσια διατμητική δύναμη V_x , και οι εντός επιπέδου δυνάμεις N_x , N_{xy} είναι μηδενικά.

$$M_x = M_{xy} = 0, V_x = 0, N_x = N_{xy} = 0$$

Εξίσωση 4-6

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

- Κατά μήκους απλά εδραζόμενης ακμής, η βύθιση w^0 , η καμπτική M_x ροπή και η ροπή στρέψης και οι εντός επίπεδου δυνάμεις N_x, N_y είναι μηδενικές.

$$w^0 = 0, M_x = M_{xy} = 0, N_x = N_{xy} = 0$$

Εξίσωση 4-7

- Όταν οι κινήσεις εντός επιπέδου αποτρέπονται από τις στηρίξεις, οι εντός επιπέδου δυνάμεις είναι μη μηδενικές ($N_x \neq 0, N_{xy} \neq 0$) ενώ οι μετακινήσεις εντός επιπέδου είναι μηδενικές $u^0 = v^0 = 0$.
- Όταν υπάρχει μια δύσκαμπτη πλάκα η οποία καλύπτει τη πλευρά της πλάκας σάντουιτς, η κορυφή δε μπορεί να στρεφθεί στο επίπεδο y-z και έχουμε $\gamma_{yz} = 0$.

Παρόλο αυτά η ροπή στρέψης είναι μη μηδενική $M_{xy} \neq 0$. Για μία ακμή παράλληλη στον x άξονα στις παραπάνω εξισώσεις απαιτείται αλλαγή των δεικτών x με y.

4.4 Ορθότροπη πλάκα τύπου σάντουιτς

Μια πλάκα τύπου σάντουιτς είναι ορθότροπη όταν και οι δύο διαστρωματώσεις και ο πυρήνας είναι ορθότροπα και οι ορθότροπες διευθύνσεις της είναι παράλληλες με τις ακμές της. Οι διαστρωματώσεις μπορεί να διαφέρουν και η διαστρωμάτωση μπορεί να είναι μην είναι συμμετρική. Για τέτοιου είδους πλάκα σάντουιτς δεν υπάρχουν ζευγάρια τάσης-επιμήκυνσης, κάμψης-στρέψης και επιμήκυνσης-στρέψης. Συνεπώς τα παρακάτω στοιχεία του μητρώου ακαμψίας είναι μηδενικά.

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$$

Εξίσωση 4-8

Επιπρόσθετα, για μια ορθότροπη πλάκα τύπου σάντουιτς η εγκάρσια διατμητική δύναμη V_x η οποία δρα στο επίπεδο x-z δεν προκαλεί διατμητική τάση γ_{yz} στο επίπεδο y-z. Αυτή η συνθήκη δίνει

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\tilde{S}_{12} = 0$$

Εξίσωση 4-9

4.5 Ισότροπη πλάκα τύπου σάντουιτς

Μια πλάκα σάντουιτς είναι ισότροπη όταν ο πυρήνας της πλάκας σάντουιτς είναι φτιαγμένη από ένα ισότροπο (όπως ο αφρός) η εγκάρσιος ισότροπος (όπως κηρήθρα) υλικό και η άνω και κάτω διαστρωμάτωση είναι φτιαγμένη από πανομοιότυπα ιστροπικά υλικά ή πανομοιότυπα οιονεί ιστροπικά φύλλα. Το πάχος της άνω και κάτω διαστρωμάτωσης μπορεί να διαφέρει.

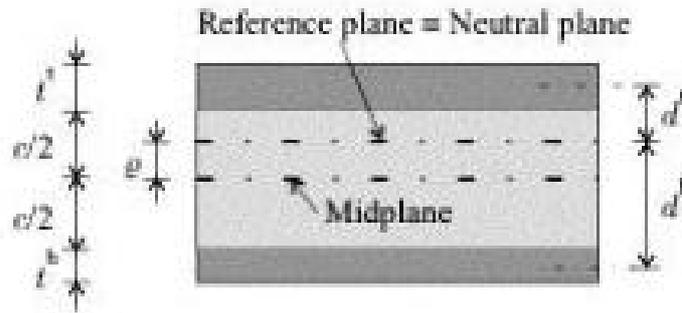
Για ισότροπη διαστρωμάτωση το μητρώο [B] είναι μηδενικό ($[B]^i=0$). Το μητρώο [A] και [D] για ισότροπες διαστρωματώσεις προσδιορίζονται ως παρακάτω (Εξίσωση 4-10 και Εξίσωση 4-11):

$$[A]^i = \frac{t^i * E^f}{1 - (v^f)^2} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 4-10}$$

$$[D]^i = \frac{(t^i)^3 * E^f}{12 * (1 - (v^f)^2)} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 4-11}$$

Όπου ο δείκτης i αναφέρεται στην άνω ($i=t$) ή κάτω ($i=b$) διαστρωμάτωση όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.5) και ο συντελεστής E^f και v^f η ακαμψία κατά Young και συντελεστής poisson των διαστρωματώσεων.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 4.5 Ουδέτερο επίπεδο πλάκας σάντουιτς

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα μητρώα [A], [B], [D] για ολόκληρη την πλάκα σάντουιτς. Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε ως επίπεδο αναφοράς το κέντρο βάρους των δύο διαστρωματώσεων. Η απόσταση ρ από την μέση επιφάνεια του πυρήνα ως το κέντρο βάρους δίνεται στη παρακάτω σχέση (Εξίσωση 4-12).

$$\rho = \frac{t^t * (c + t^t) - t^b * (c + t^b)}{2 * (t^t + t^b)} \quad \text{Εξίσωση 4-12}$$

Οι αποστάσεις d^t και d^b μεταξύ του επιπέδου αναφοράς (διαμέσου του κέντρου βάρους) και των μέσων επιπέδων των διαστρωματώσεων ισούται με (Εξίσωση 4-13):

$$d^t = \frac{c}{2} + \frac{t^t}{2} - \rho \quad d^b = \frac{c}{2} + \frac{t^b}{2} + \rho \quad \text{Εξίσωση 4-13}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε τις τιμές για τα μητρώα [A] και [D] για ολόκληρη την πλάκα σάντουιτς δεδομένου ότι το μητρώο [B] ισούται με 0 με αναφορά το ρ επίπεδο αναφοράς. Το οποίο σημαίνει ότι η πλάκα σάντουιτς με ισοτροπικό πυρήνα και διαστρωματώσεις δεν προκαλεί τάσεις στο επίπεδο. Επομένως αυτό το επίπεδο αναφοράς είναι είναι η ουδέτερη επιφάνεια. Παρακάτω διατυπώνονται τα μητρώα [A] και [D] συναρτήσει των συντελεστών d^t και d^b (Πίνακας 4.2).

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

Isotropic sandwich plate			
	Isotropic solid plate	Isotropic facesheets	Quasi-isotropic facesheets
A^{iso}	$\frac{Et^3}{1-\nu^2}$	$(t^l + t^b) \frac{E^f}{1-(\nu^f)^2}$	$(t^l + t^b) R$
D^{iso}	$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	$\frac{(d^l)^2 t^l + (d^b)^2 t^b + \frac{(t^l)^2 + (t^b)^2}{12}}{1-(\nu^f)^2} E^f$	$[t^l (d^l)^2 + t^b (d^b)^2] R$
ν^{iso}	ν	ν^f	$\frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{8R}$

Πίνακας 4.2 Μητρώα ακαμψίας και λόγος poisson ιστροπικών στερεών πλακών και πλακών σάντουιτς

$$[A] = A^{iso} * \begin{bmatrix} 1 & \nu^f & 0 \\ \nu^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 4-14}$$

$$[D] = D^{iso} * \begin{bmatrix} 1 & \nu^f & 0 \\ \nu^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Εξίσωση 4-15}$$

Όταν ο πυρήνας είναι ιστροπικός στο επίπεδο το οποίο είναι παράλληλο με τις διαστρωματώσεις προκύπτει ότι:

$$C_{45}=0, C_{44} = \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \quad \text{Εξίσωση 4-16}$$

Και η διατμητική δυσκαμψία προσδιορίζεται στη παρακάτω σχέση

$$\tilde{S}_{11} = \tilde{S}_{22} = \tilde{S} = \frac{d^2}{c} * \frac{C_{11}^c - C_{12}^c}{2} \quad \text{και } \tilde{S}_{12} = 0 \quad \text{Εξίσωση 4-17}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Η πλάκα σάντουιτς μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί ως ισοτροπική όταν οι άνω και κάτω διαστρωματώσεις είναι **οιονεί ισοτροπικά φυλλώδης** αποτελούμενες από μονής κατευθύνσεις στρώσεις από το ίδιο υλικό. Για τέτοιες πλάκες σάντουιτς το μητρώο [B] θεωρείται **αμελητέο** και το [A] και το [D] μητρώο υπολογίζεται από τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 4.2) και τα στοιχεία του μητρώου διατμητικής ακαμψίας δίνονται από την παραπάνω εξίσωση (Εξίσωση 4-17).

4.6 Βέλος κάμψης ορθογωνικών πλακών τύπου σάντουιτς

4.6.1. Επιμήκειες πλάκες

Σε μια επιμήκης ορθογωνική πλάκα σάντουιτς με διαστάσεις L_x και L_y ($L_y \gg L_x$) η οποία υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο p (εκτός επιπέδου), οι μακριές τις πλευρές είναι πακτωμένες, απλά εδραζόμενες ή ελεύθερα άκρα και το φορτίο καθώς επίσης και στηρίξεις των άκρων δε διαφέρουν κατά τη διαμήκη διεύθυνση y τότε η επιφάνεια της πλάκας η οποία βυθίζεται μπορεί να θεωρηθεί σαν να ήταν κυλινδρική σε σημαντική απόσταση από τις μικρές πλευρές τις. Η γεννήτρια αυτής της κυλινδρικής επιφάνειας είναι παράλληλη με τον διαμήκη άξονα y της πλάκας και ως εκ τούτου η βύθιση της πλάκας w^o και η στρόφη γ_{xz} δεν ποικίλει κατά μήκος του άξονα y (Εξίσωση 4-18).

$$\frac{\partial w^o}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0 \quad \text{Εξίσωση 4-18}$$

Η διατμητική παραμόρφωση αμελείται στο y - z επίπεδο ($\gamma_{xz}=0$) και επομένως η στρόφη της κορυφής είναι μηδενική.

Οι εξισώσεις ισορροπίας παρουσιάζονται παρακάτω (Εξίσωση 4-19).

$$\frac{dV_x}{dx} + p = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} - V_x = 0 \quad \text{Εξίσωση 4-19}$$

Όταν όμως η πλάκα σάντουιτς είναι συμμετρική όσον αφορά τη μέση επιφάνεια ($[B]=0$) ισχύουν τα παρακάτω (Εξίσωση 4-20).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz} \quad \text{Εξίσωση 4-20}$$

Και έτσι καταλήγουμε στις Εξισώσεις 4-21 και 4-22 οι οποίες περιγράφουν τη πλάκα σάντουιτς με συμμετρική διαστρωμάτωση.

$$-D_{11} * \frac{d^3 \gamma_{xz}}{dx^3} + p = 0 \quad \text{Εξίσωση 4-21}$$

$$D_{11} * \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dx^2} + \bar{S}_{11} * \left(\frac{dw^o}{dx} - \gamma_{xz} \right) = 0 \quad \text{Εξίσωση 4-22}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πανομοιότυπες με τις αντίστοιχες εξισώσεις που περιγράφουν εγκάρσιως φορτισμένη ισότροπη δοκό τύπου σάντουιτς αντικαθιστώντας απλώς τους συντελεστές D_{11} , \bar{S}_{11} , p με τους $\hat{E}I$, \hat{S} , \hat{p} . Παρόμοιες εκφράσεις προκύπτουν και για τη περίπτωση επιμήκους πλάκας τύπου σάντουιτς χωρίς συμμετρικές διαστρωματώσεις.

4.7 Λυγισμός ορθογωνικών πλακών τύπου σάντουιτς

4.7.1. Γενικά

Το φαινόμενο του λυγισμού είναι μια μορφή αστάθειας που παρατηρείται σε κατασκευαστικά στοιχεία όπως δοκοί, κύλινδροι ή επίπεδα ελάσματα (πλάκες), και είναι αποτέλεσμα αξονικών ή συνεπίπεδων αντίστοιχα θλιπτικών φορτίσεων που ασκούνται σε αυτά. Εξ ορισμού, το φαινόμενο του λυγισμού είναι η απότομη εμφάνιση εγκάρσιων (πλάγιων) μετατοπίσεων ενός κατασκευαστικού στοιχείου, χωρίς σημαντική αύξηση της αξονικής ή συνεπίπεδης θλιπτικής φόρτισης που εφαρμόζεται σε αυτό.

Σε ιδανικές συνθήκες, όπου ένας ιδανικός κατασκευαστικός φορέας δεν έχει καθόλου αρχικές ατέλειες (π.χ. τελείως ευθεία δοκός ή εντελώς επίπεδο έλασμα) και όπου το κέντρο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής, χωρίς την ύπαρξη εγκάρσιων φορτίων, θεωρητικά δεν υπάρχει καμία εγκάρσια μετατόπιση της

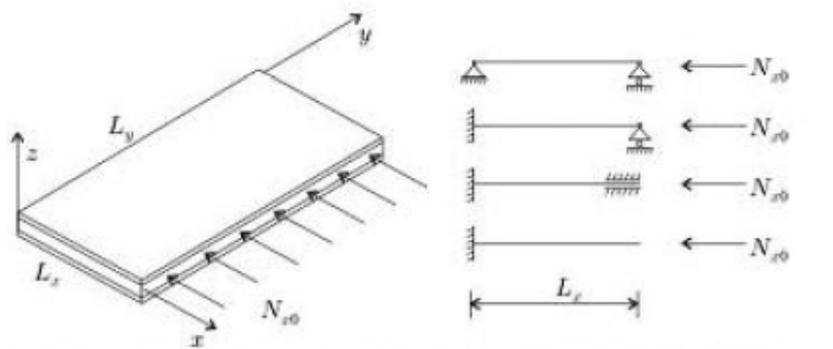
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

κατασκευής, όσο το φορτίο που ασκείται είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, παρά μόνο συνεπίπεδες παραμορφώσεις.

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του εκάστοτε κατασκευαστικού στοιχείου εξαρτάται κυρίως από το μήκος του, σε σχέση με τις διαστάσεις του, το υλικό κατασκευής και τη γεωμετρική μορφή της εγκάρσιας διατομής του.

4.7.2. Επιμήκειες πλάκες

Μια πλάκα σάντουιτς θεωρείται ως μακρά ορθογωνική πλάκα αυτή της οποίας το μήκος L_y είναι μεγαλύτερο συγκρινόμενο με το πλάτος της L_x . Οι ακμές της μπορεί να στηρίζονται με πακτώσεις, με κύλιση ή να είναι ελεύθερο άκρο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6 Επιμήκης ορθογωνική πλάκα σάντουιτς υποκείμενη σε ομοιόμορφη θλιπτική δύναμη στην ακμή της και οι διάφοροι τύποι στηρίξεις κατά μήκος των μακρών ακμών της

Στις επιμήκειες ακμές της πλάκας σάντουιτς ασκείται κατά μήκος μια ομοιόμορφη θλιπτική δύναμη N_{x0} . Αυτή η δύναμη, όπως και οι στηρίξεις των ακμών, δεν διαφέρουν κατά μήκος της διαμήκου διεύθυνσης (άξονας y). Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε το φορτίο στο οποίο λυγίζει η πλάκα σάντουιτς.

Οι εξισώσεις ισορροπίας της παραμορφωμένης επιφάνειας της πλάκας διατυπώνονται στις παρακάτω Εξισώσεις 4-23 και 4-24:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\frac{dM_x}{dx} - V_x = 0$$

Εξίσωση 4-23

$$\frac{dV_x}{dx} - N_{x0} * \frac{d^2 w^0}{dx^2} = 0$$

Εξίσωση 4-24

Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πλάκα σάντουιτς είναι συμμετρική ως τη μέση επιφάνεια. Για αυτή τη πλάκα η ροπή κάμψης και η εγκάρσια διατμητική υπολογίζονται ως παρακάτω (Εξίσωση 4-25):

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz}$$

Εξίσωση 4-25

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, για μια πλάκα σάντουιτς με συμμετρική διαστρωμάτωση ισχύουν οι Εξισώσεις 4-26 και 4-27:

$$-D_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} - N_{x0} * \frac{d^2 w^0}{dx^2} = 0$$

Εξίσωση 4-26

$$D_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + S_{11} * \left(\frac{dw}{dx} - \gamma \right) = 0$$

Εξίσωση 4-27

Για μία ορθότροπη δοκό τύπου σάντουιτς οι εξισώσεις που την διέπουν είναι οι παρακάτω:

$$-\hat{E}I * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} - \hat{N}_{x0} * \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Εξίσωση 4-28

$$\hat{E}_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + \hat{S} * \left(\frac{dw}{dx} - \gamma \right) = 0$$

Εξίσωση 4-29

Όπου EI και S είναι η καμπτική και διατμητική δυσκαμψία της ορθότροπης δοκού σάντουιτς και N_{x0} το θλιπτικό φορτίο (ανά μονάδα μήκους).

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το λυγισμό μίας επιμήκους πλάκας τύπου σάντουιτς (με συμμετρική διαστρωμάτωση) και μίας ορθότροπης δοκού τύπου σάντουιτς είναι πανομοιότυπες. Ως εκ τούτου το φορτίο λυγισμού (ανά μονάδα μήκους) μίας επιμήκους

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

πλάκας τύπου σάντουιτς (με συμμετρική διαστρωμάτωση) μπορεί να εξαχθεί αντικαθιστώντας τις τιμές D_{11} και S_{11} στις τιμές EI και S στις εξισώσεις φορτίου λυγισμού της ορθότροπης δοκού σάντουιτς.

Όταν η διαστρωμάτωση δεν είναι συμμετρική το φορτίο λυγισμού δίνεται αντικαθιστώντας τις τιμές ψ , $S_{11,p}$ στις τιμές EI , S , p των παρακάτω εξισώσεων ορθοτροπικής δοκού.

Παρακάτω παρατίθενται οι εξισώσεις υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για ένα δοκάρι και πλάκα σάντουιτς με συνθήκες στηρίξεις *ss* (κυλίσεις) και *built-in* (πακτώσεις) (Σχήμα 4.7).

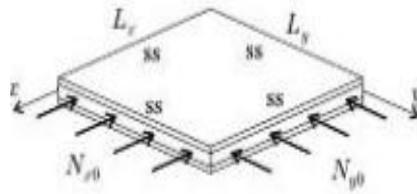
ΔΟΚΟΣ	ΠΛΑΚΑ
$\hat{N}_{cr} = \left(\frac{L^2}{\pi^2 EI} + \frac{1}{\bar{S}} \right)^{-1} \quad (ss)$	$N_{x, cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\bar{S}_{11}} \right)^{-1} \quad (ss)$
$\hat{N}_{cr} = \left(\frac{4L^2}{\pi^2 EI} + \frac{1}{\bar{S}} \right)^{-1} \quad (built-in).$	$N_{x, cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\bar{S}_{11}} \right)^{-1} \quad (built-in).$

Σχήμα 4.7 Εξισώσεις υπολογισμού κρίσιμου φορτίου λυγισμού για δοκάρι και πλάκα σάντουιτς

4.7.3. Απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

Αναφερόμαστε σε μια ορθογωνική πλάκα με διαστάσεις L_x και L_y . Η διαστρωμάτωση της πλάκας είναι ορθότροπη και συμμετρική ως προς την μέση επιφάνεια της πλάκας. Και η τέσσερις ακμές της πλάκας είναι απλά εδραζόμενες. Η πλάκα σάντουιτς υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο θλιπτικό φορτίο N_{x0} και N_{y0} κατά μήκος των ακμών (Σχήμα 4.8). Αυτά τα φορτία αυξάνονται αναλογικά και ισούται με λN_{x0} και λN_{y0} όπου λ η παράμετρος του φορτίου. Για μία πλάκα που λυγίζει η παράμετρος φορτίου ονομάζεται λ_{cr} .

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 4.8 Πλάκα σάντουιτς με ομοιόμορφα κατανεμημένο θλιπτικό φορτίο

Για μια πλάκα η οποία υπόκειται σε εντός επιπέδου φορτία μόνο, το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων ισούται με:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_x \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right)^2 dy dx \quad \text{Εξίσωση 4-30}$$

Όπου N_x , N_y , είναι οι εντός επιπέδου εφελκυστικές δυνάμεις οι οποίες συσχετίζονται με τις εντός επιπέδου θλιπτικές δυνάμεις λN_{x0} , λN_{y0} , όπου $N_x = -\lambda * N_{x0}$, $N_y = -\lambda * N_{y0}$.

Η βύθιση μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της παρακάτω εξίσωσης:

$$\frac{L_x * L_y}{4} * \begin{bmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N_{x0} \left(\frac{i\pi}{L_x} \right)^2 + N_{y0} \left(\frac{i\pi}{L_y} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ (\gamma_{xz})_{ij} \\ (\gamma_{yz})_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Εξίσωση 4-31

Όπου γ_{xz} και γ_{yz} δίνονται στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.3). Όταν το φορτίο πάρει τιμή κάτω από την κρίσιμη τιμή, η βύθιση της πλάκας είναι μηδενική. Όταν η πλάκα δε λυγίζει, η βύθιση της πλάκας είναι μηδενική, ενώ για την λυγιζόμενη πλάκα είναι μη μηδενική. Οι τιμές της παραμέτρου λ για μία πλάκα που λυγίζει (λ_{cr}) είναι ιδιοτιμές της εξίσωσης 4-31 και προσδιορίζονται θέτοντας την ορίζουσα του μητρωικού συντελεστή ίσο με το μηδέν. Έτσι προκύπτει και η Εξίσωση 4-32:

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= D_{11} \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^4 \\
 F_{34} &= -D_{11} \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^3 - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{i\pi}{L_x} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2 \\
 F_{35} &= -D_{22} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^3 - (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 \frac{j\pi}{L_y} \\
 F_{44} &= D_{11} \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 + D_{66} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2 + \tilde{S}_{11} \\
 F_{45} &= (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i\pi}{L_x}\right) \left(\frac{j\pi}{L_y}\right) \\
 F_{55} &= D_{22} \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2 + D_{66} \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 + \tilde{S}_{22}
 \end{aligned}$$

Πίνακας 4.3 Όροι μητρώου ακαμψίας

$$(\lambda_{ij})_{cr} = \frac{1}{N_{x0} * \left(\frac{i\pi}{L_x}\right)^2 + N_{y0} * \left(\frac{j\pi}{L_y}\right)^2} * \frac{\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}} \quad \text{Εξίσωση 4-32}$$

Όπου $||$ δηλώνει την ορίζουσα. Οι τιμές $(\lambda_{ij})_{cr}$ υπολογίζονται θέτοντας τιμές για τους συντελεστές i και j ($i, j = 1, 2, \dots$). Η χαμηλότερη τιμή που προκύπτει είναι αυτή που ενδιαφέρει.

Όταν μία πλάκα σάντουιτς είναι ορθότροπη, μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή $(\lambda_{ij})_{cr}$ αντικαθιστώντας τους συντελεστές D_{11}, D_{12}, D_{66} , με τους $D^{iso}, \nu^{iso} D^{iso}, (1 - \nu^{iso}) D^{iso}/2$. Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις η παραπάνω Εξίσωση 4-32 απλοποιείται στη παρακάτω εξίσωση 4-33.

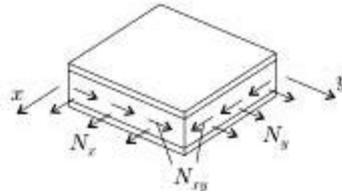
$$(\lambda_{ij})_{cr} = \frac{\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2}{N_{x0} * \left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + N_{y0} * \left(\frac{j}{L_y}\right)^2} * (N_{D,cr}^{-1} + \tilde{S}^{-1})^{-1} \quad \text{Εξίσωση 4-33}$$

$$\text{Όπου } N_{D,cr} = \pi^2 * D^{iso} * \left[\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 \right] \quad \text{Εξίσωση 4-34}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.8 Ρυτίδωση όψεων πλάκας τύπου σάντουιτς

Για να προσδιορίσουμε τη ρυτίδωση όψεων πλάκας τύπου σάντουιτς μελετούμε μια πλάκα σάντουιτς της οποίας οι διαστρωματώσεις (άνω και κάτω) είναι πανομοιότυπες και η στρώσεις των διαστρωματώσεων είναι συμμετρικές όσον αφορά την μέση επιφάνεια των διαστρωματώσεων και υπόκειται σε εντός επιπέδου δυνάμεις N_x , N_y , N_{xy} (Σχήμα 4.9).

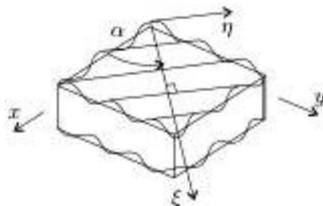


Σχήμα 4.9 Φόρτιση πλάκας σάντουιτς

Εφόσον οι εντός επιπέδου ακαμψίες του πυρήνα θεωρούνται αμελητέες, οι εντός επιπέδου εντάσεις του πυρήνα μπορούν να αμεληθούν όσον αφορά τις εντός επιπέδου εντάσεις των διαστρωματώσεων. Αντίστοιχα οι εντός επιπέδου δυνάμεις (ανά μονάδα μήκους) των διαστρωματώσεων είναι σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις της Εξίσωσης 4-35.

$$N_x^f = \frac{N_x}{2}, \quad N_y^f = \frac{N_y}{2}, \quad N_{xy}^f = \frac{N_{xy}}{2} \quad \text{Εξίσωση 4-35}$$

Ο εκθέτης f υποδηλώνει είτε την άνω είτε την κάτω διαστρωμάτωση. Υπό την ένταση αυτών των εντός επιπέδου δυνάμεων οι διαστρωματώσεις μπορεί να γίνουν κυματώδης. Αυτοί οι κυματισμοί μπορεί να θεωρηθούν πρόδρομοι τοπικού λυγισμού. Οι κυματισμοί μπορεί να ταξιδεύουν στις δύο διευθύνσεις παρόλο που γενικά ο κυματισμός κυριαρχεί στη μία διεύθυνση. Παρακάτω θα θεωρήσουμε μόνο κυματισμό στη μία διεύθυνση (Σχήμα 4.10).



Σχήμα 4.10 Φόρτιση πλάκας σάντουιτς

Το πλάτος κύματος $2l$ εξαρτάται από το υλικό και τη γεωμετρία της πλάκας σάντουιτς.

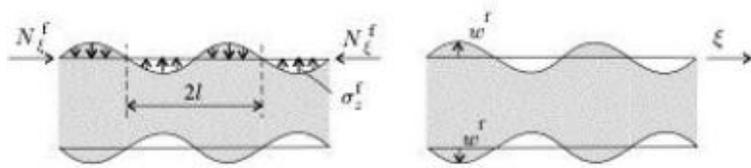
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις

1. Το πλάτος κύματος είναι 'κοντό' όταν $l/h \ll 1$
2. Το πλάτος κύματος είναι 'μακρύ' όταν $l/h \gg 1$

Όπου h είναι το πάχος της πλάκας σάντουιτς

Τα φορτία τα οποία συνεισφέρουν στον κυματισμό των διαστρωματώσεων είναι το εντός επιπέδου κάθετο φορτίο στο κυματισμό N_ξ^f και το αντίστοιχο φορτίο της ορθής τάσης σ_z^f το οποίο ασκείται στην διαστρωμάτωση μέσω του παραμορφωμένου πυρήνα (Σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11 Φόρτιση κυματισμού

Υπό τα παραπάνω φορτία (Σχήμα 4.11) η εξίσωση ισορροπίας των διαστρωματώσεων είναι η παρακάτω:

$$\psi_\xi * \frac{\partial^4 w^f}{\partial \xi^4} + N_\xi^f * \frac{\partial^2 w^f}{\partial \xi^2} = \sigma_z^f \quad \text{Εξίσωση 4-36}$$

Όπου ψ_ξ είναι η καμπτική ακαμψία των διαστρωματώσεων στη διεύθυνση ξ η οποία είναι το ενδέκατο στοιχείο του μητρώου $[D]$ στο σύστημα συντεταγμένων ξ - n . Μετατροπή του μητρώου $[D]$ ακολουθεί τον κανόνα μετασχηματισμού του μητρώου ακαμψίας $[Q]$. Έτσι έχουμε:

$$\psi_\xi * (D_{11}^\xi)_{\xi-n} = D_{11}^\xi * \cos^4 a + D_{22}^\xi * \sin^4 a + (2 * D_{12}^f + 4 * D_{66}^f) * \cos^2 a * \sin^2 a + 4 * \cos^3 a * \sin a * D_{16}^f + 4 * \cos a * \sin^3 a * D_{26}^f$$

Εξίσωση 4-37

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Όπου a η γωνία μεταξύ των αξόνων x και ξ και D_{ij}^f είναι τα στοιχεία του μητρώου καμπτικής ακαμψίας των διαστρωματώσεων στο σύστημα συντεταγμένων $x-y$.

Η παράμετρος w^f είναι η εκτός επιπέδου μετατόπιση (βύθιση) των διαστρωματώσεων και υπολογίζεται από την Εξίσωση 4-38.

$$w^f = w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l} \quad \text{Εξίσωση 4-38}$$

Όπου w_0 είναι το πλάτος της μετακίνησης και l είναι το μισό πλάτος κύματος λυγισμού.

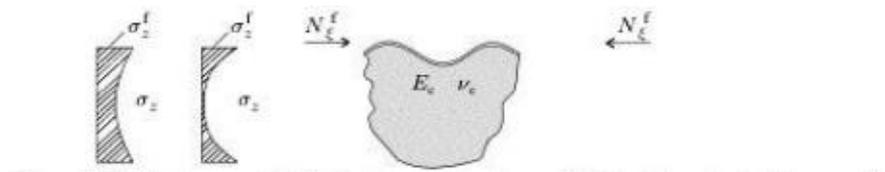
Η παράμετρος N_ξ^f είναι η εντός επιπέδου δύναμη των διαστρωματώσεων στην ξ διεύθυνση και προσδιορίζεται από τις εντός επιπέδου δυνάμεις N_x , N_y , N_{xy} με μετασχηματισμό. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό των εντάσεων μπορούμε να προσδιορίσουμε την N_ξ^f από την παρακάτω Εξίσωση 4-39.

$$N_\xi^f = -\left(N_x^f * \cos^2 a + N_y^f * \sin^2 a + 2 * N_{xy}^f * \cos a * \sin a\right) \quad \text{Εξίσωση 4-39}$$

Ενδιαφερόμαστε για τη τιμή N_ξ^f όταν φθάνει ο πρώτος κυματισμός.

4.9.1. Ισοτροπικός πυρήνας-σύνθετη διαστρωμάτωση

Όταν ο πυρήνας είναι ισοτροπικός, η εκτός επιπέδου ένταση του πυρήνα σ_z διαφέρει κατά μήκος του πάχους όπως διατυπώνεται παρακάτω (Σχήμα 4.12 αριστερά).



Σχήμα 4.12 Κατανομή τάσεως σ_z

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Όταν το πλάτος κύματος είναι **μικρό**, η ένταση σ_z διαφέρει (Σχήμα 4.12 μέση). Εφόσον η ένταση εξαφανίζεται μακριά από τη διαστρωμάτωση, το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία πλάκα με άπειρη ελαστική θεμελίωση. Έτσι η ένταση στη διεπιφάνεια πυρήνα-διαστρωματώσεων σ_z^f είναι ίση με:

$$\sigma_z^f = -\frac{a}{l} * w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l}, \text{ όπου } a = \frac{2\pi * E_c}{(3 - \nu_c)(2 + \nu_c)} \quad \text{Εξίσωση 4-40}$$

Όπου E_c και ν_c το μέτρο ελαστικότητας κατά Young και ο λόγος κατά poisson του ισοτροπικού πυρήνα. Καταλήγουμε λοιπόν με βάση τις παραπάνω Εξισώσεις 4-36 , 4-39 και 4-40 στην παρακάτω εξίσωση:

$$\psi_\xi * w_0 \frac{\pi^4}{l^4} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} - N_\xi^f * w_0 \frac{\pi^2}{l^2} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} = -\frac{a}{l} * w_0 * \sin \frac{\pi \xi}{l}, \quad \text{Εξίσωση 4-41}$$

Όταν οι διαστρωματώσεις γίνονται κυματιστές τότε η παράμετρος w_0 είναι μη μηδενική. Η τιμή N_ξ^f που αντιστοιχεί σε w_0 μη μηδενικό είναι το φορτίου λυγισμού (N_ξ^f)_{cr}. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού δίνονται από τη μη τετριμμένη λύση της παραπάνω εξίσωσης και είναι η (Εξίσωση 4-42):

$$(N_\xi^f)_{cr} = \psi_\xi * \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{a}{l} * \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \text{Εξίσωση 4-42}$$

Όταν το πλάτος κύματος είναι **μακρό**, η λύση προκύπτει υποθέτοντας ότι η κατανομής της εντάσεως σ_z είναι ομοιόμορφη και η σ_z^f είναι περίπου ίση με (Εξίσωση 4-43):

$$\sigma_z^f = -\sigma_z = -E_c * \varepsilon_z = -w^f \frac{E_c}{c/2}, \quad \text{Εξίσωση 4-43}$$

$$\text{Όπου } \varepsilon_z = w^f / (c/2), \quad \text{Εξίσωση 4-44}$$

Αντικαθιστώντας με τις παραπάνω εξισώσεις 4-38 και 4-44 στην 4-36 προκύπτει ότι:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\psi_{\xi} * w_0 * \frac{\pi^4}{l^4} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} - N_{\xi}^f * w_0 * \frac{\pi^2}{l^2} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} = \frac{E_c}{c/2} * w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l}, \quad \text{Εξίσωση 4-45}$$

Η τετριμμένη λύση είναι η παρακάτω (Εξίσωση 4-46):

$$(N_{\xi}^f)_{cr} = \psi_{\xi} * \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{E_c}{c/2} * \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \text{Εξίσωση 4-46}$$

Στο λυγισμό ορθογωνικής πλάκας σάντουιτς ενδιαφερόμαστε να βρούμε τη χαμηλότερη τιμή του κρίσιμου φορτίου N_{ξ}^f . Αυτή τη τιμή μπορούμε να τη προσδιορίσουμε θέτοντας την παράγωγο N_{ξ}^f ως προς το μήκος ίση με το μηδέν όπως φαίνεται παρακάτω στην Εξίσωση 4-47:

$$\frac{d(N_{\xi}^f)_{cr}}{dl} = 0, \quad \text{Εξίσωση 4-47}$$

Επίλυση αυτή της εξίσωσης δίνει το μισό πλάτος κύματος l_{cr} που αντιστοιχεί στο χαμηλότερο φορτίο λυγισμού. Αντικατάσταση της τιμής της παραμέτρου l_{cr} στις εξισώσεις N_{ξ}^f δίνουν το $(N_{\xi}^f)_{cr, min}$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο πάνω μισό του παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.4).

	Isotropic core		Honeycomb core
	Short wave	Long wave	Short or long wave
Composite facesheets	$(N_{\xi}^f)_{cr, min} = 1.5 \sqrt{\frac{2\psi_{\xi} u^2}{\pi^2}}$ $l_{cr} = \sqrt[3]{2 \frac{\pi^3 \psi_{\xi}}{u}}$	$(N_{\xi}^f)_{cr, min} = 2 \sqrt{\psi_{\xi} \frac{E_c}{c/2}}$ $l_{cr} = \pi \sqrt[4]{\frac{\psi_{\xi} c/2}{E_c}}$	
Isotropic facesheets	$(N_{\xi}^f)_{cr, min} = 1.5t \sqrt[3]{\frac{4E_f E_c G_c}{2(1-\nu_f^2)(3-\nu_c)(1+\nu_c)}}$ $\approx 0.79t \sqrt[3]{E_f E_c G_c}$ $l_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\pi^4 E_f^3}{6(1-\nu_f^2)u}}$	$(N_{\xi}^f)_{cr, min} = t \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{E_f E_c}{c(1-\nu_f^2)}}$ $l_{cr} = \pi \sqrt[3]{\frac{E_f}{24E_c(1-\nu_f^2)}} t^3 c$	

Πίνακας 4.4 Κρίσιμο φορτίο ρυτίδωσης όψεων πλάκας τύπου σάντουιτς

Η τιμές της παραμέτρου $(N_{\xi}^f)_{cr, min}$ εξαρτάται από τη διεύθυνση α στην οποία ταξιδεύει ο κυματισμός λόγω του ότι του ψ_{ξ} εξαρτάται από την α .

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.9.2. Ισοτροπικός πυρήνας-ισοτροπική διαστρωμάτωση

Η καμπτική ακαμψία των ισοτροπικών διαστρωματώσεων δίνεται στην Εξίσωση 4-48.

$$\psi_{\xi} = D^{iso} = \frac{E_f * t^3}{12 * (1 - \nu_f^2)}, \quad \text{Εξίσωση 4-48}$$

Όπου t είναι το πάχος των διαστρωματώσεων και ο δείκτης f υποδηλώνει το διαστρωμάτωση.

Όταν και ο πυρήνας και οι διαστρωματώσεις είναι ισοτροπικές και οι διαστρωματώσεις λυγίζουν με **κοντούς** κυματισμούς, η χαμηλότερη τιμή του φορτίου λυγισμού υπολογίζεται από τη παρακάτω σχέση (Εξίσωση 4-49).

$$\left(N_{\xi}^f\right)_{cr, \min} = t * \left[1.5 * \sqrt[3]{\frac{4 * E_t * E_c * G_c}{3 * (1 - \nu_f^2) * (3 - \nu_c)^2 * (1 + \nu_c)}} \right], \quad \text{Εξίσωση 4-49}$$

Όπου G_s το διαμητικό μέτρο ελαστικότητας του πυρήνα ($G_s = E_c / 2(1 + \nu_c)$) όπου f και c οι διαστρωματώσεις και ο πυρήνας αντίστοιχα.

Αγνοώντας το λόγο του poisson των διαστρωματώσεων και του πυρήνα ($\nu_c = \nu_f = 0$) το φορτίο μειώνεται ως εξής (Εξίσωση 4-50):

$$\left(N_{\xi}^f\right)_{cr, \min} = t * \left[0.79 * \sqrt[3]{E_t * E_c * G_c} \right], \quad \text{Εξίσωση 4-50}$$

Οι μελετητές Hoff και Mautner οδηγήθηκαν στην παραπάνω έκφραση λαμβάνοντας ως σταθερά ίση με 0,91 αντί του 0,79. Παρόλο αυτά για πρακτική χρήση συστήνεται η χρήση της τιμής 0,5.

Όταν και ο πυρήνας και οι διαστρωματώσεις είναι ισοτροπικό υλικό και οι διαστρωματώσεις λυγίζουν με μακρύς κυματισμούς τότε ο λυγισμός συμβαίνει στη διεύθυνση στην οποία η θλιπτική ένταση είναι μεγαλύτερη.

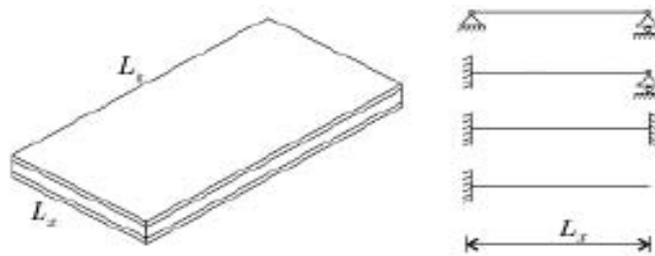
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.9 Ελεύθερη ταλάντωση πλακών τύπου σάντουιτς

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα προσδιορίσουμε την φυσική συχνότητα f και περίοδο της ταλάντωσης ($T=1/f$) και τη γωνιακή συχνότητα ($\omega=2*\pi*f$) των πλακών σάντουιτς. Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι η πλάκα ταλαντώνεται ελεύθερα και δεν έχει απόσβεση η ταλάντωση αυτή.

4.10.1. Επιμήκεις Πλάκες

Μελετούμε μια μακρά ορθογώνια πλάκα σάντουιτς της οποίας το μήκος συγκρίνεται με το πλάτος ($L_y \gg L_x$). Οι ακμές μπορεί να στηρίζονται με πακτώσεις, με απλή στήριξη ή ελεύθερα άκρα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.13).



Σχήμα 4.13 Διαφορετικοί τρόποι στήριξης κατά μήκος των μακρών ακμών της μακριάς σάντουιτς πλάκας υπό ελεύθερη χωρίς απόσβεση ταλάντωση

Οι βυθιζόμενη επιφάνεια της πλάκας σάντουιτς μπορεί να προσομοιωθεί ως κυλινδρική σε μεγάλη απόσταση από τα κοντά άκρα. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής (Εξισώσεις 4-51 & 4-52):

$$\frac{dV_x}{dx} + \rho * (2 * \pi * f)^2 * w^0 = 0, \quad \text{Εξίσωση 4-51}$$

$$\frac{dM_x}{dx} - V_x = 0, \quad \text{Εξίσωση 4-52}$$

Όπου w_0 η βύθιση και ρ η μάζα κατά μονάδα επιφανείας της πλάκας σάντουιτς.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Θεωρώντας την πλάκα τύπου σάντουιτς συμμετρική ως προς την μέση επιφάνεια, η καμπτική ροπή και η εγκάρσια διατμητική δύναμη επί της πλάκας σάντουιτς προσδιορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις (Εξισώσεις 4-53 & 4-54):

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad \text{Εξίσωση 4-53}$$

$$V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz}, \quad \text{Εξίσωση 4-54}$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 4-52, 4-53 & 4-54 με την παρακάτω Εξίσωση 4-55 καταλήγουμε στις Εξισώσεις 4-56 & 4-57 οι οποίες είναι πανομοιότυπες με τις αντίστοιχες εξισώσεις που περιγράφουν μία δοκό τύπου σάντουιτς που ταλαντώνεται όπου \hat{EI} και \tilde{S} είναι η καμπτική και διατμητική ακαμψία μίας σάντουιτς δοκού και ρ' η μάζα ανά μονάδα μήκους.

$$\frac{\partial w^o}{\partial x} = \gamma_{xz} + \chi_{xz}, \quad \text{Εξίσωση 4-55}$$

$$-\hat{EI} * \frac{d^3 \chi}{dx^3} + \rho' * (2 * \pi * f)^2 * w = 0, \quad \text{Εξίσωση 4-56}$$

$$\hat{EI} * \frac{d^2 \chi}{dx^2} + \tilde{S} * \left(\frac{dw}{dx} - \chi \right) = 0, \quad \text{Εξίσωση 4-57}$$

Η κυκλική συχνότητα μιας πλάκας προσδιορίζεται από τη παρακάτω Εξίσωση 4-58:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho}{D_{11}} * \frac{L_x^4}{\mu_{Bi}^4} + \frac{\rho}{\tilde{S}_{11}} * \frac{L_x^2}{\mu_{Si}^2} \right)^{-1}}, \quad \text{Εξίσωση 4-58}$$

4.10.2. Απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

Για μια απλά εδραζόμενη ορθογωνική πλάκα τύπου σάντουιτς με διαστάσεις L_x και L_y , με διαστρωμάτωση ορθοτροπική και συμμετρική ως προς τη μέση επιφάνεια της πλάκας η οποία υφίσταται μη αποσβενούμενη ταλάντωση, η βύθιση της πλάκας δίνεται από την

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Εξίσωση 4-59 και αναλογικά εκφράζονται και οι στροφές των κορυφών της (Εξισώσεις 4-60 και 4-61).

$$w^0 = \bar{w}^0 * \sin(2\pi ft), \quad \text{Εξίσωση 4-59}$$

$$\chi_{xz} = \bar{\chi}_{xz} * \sin(2\pi ft), \quad \text{Εξίσωση}$$

4-60

$$\chi_{yz} = \bar{\chi}_{yz} * \sin(2\pi ft), \quad \text{Εξίσωση}$$

4-61

Ακολουθώντας τα βήματα τα οποία συνηθίζονται στην ανάλυση ελεύθερης ταλάντωσης λεπτών πλακών και ικανοποιώντας τις οριακές συνθήκες καταλήγουμε με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην παρακάτω Εξίσωση 4-62.

$$\left(\frac{L_x * L_y}{4} * \begin{bmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) * \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ (\gamma_{xz})_{ij} \\ (\gamma_{yz})_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{Εξίσωση 4-62}$$

Στη περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης όπου η βύθιση είναι μη μηδενική ο συντελεστής λ προσδιορίζεται ως εξής (Εξίσωση 4-63):

$$\lambda_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} * \frac{L_x * L_y}{4}}{\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}}, \quad \text{Εξίσωση 4-63}$$

Όπου οι τιμές του συντελεστή λ_{ij} προσδιορίζονται για διάφορες τιμές των συντελεστών i και j ($i, j=1, 2, \dots$) από τις οποίες μας ενδιαφέρουν έχουν οι χαμηλότερες τιμές.

Η φυσική συχνότητα υπολογίζεται από την Εξίσωση 4-64:

$$f_{ij} = \frac{1}{\pi} * \sqrt{\frac{\lambda_{ij}}{\rho * L_x * L_y}}, \quad \text{Εξίσωση 4-64}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Όταν η πλάκα είναι ιστροπική λαμβάνουμε τον συντελεστή λ_{ij} αντικαθιστώντας τους συντελεστές D_{11} , D_{12} , D_{66} με τους D^{iso} , $\nu^{iso} * D^{iso}$, $(1-\nu^{iso}) * D^{iso}/2$ και S_{11} , S_{22} με S . Έτσι καταλήγουμε στις παρακάτω Εξισώσεις 4-65 και 4-66.

$$\lambda_{ij} = \frac{L_x * L_y}{4} * \pi^2 * \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{L_y} \right)^2 \right] * (N_{D,ij}^{-1} + \tilde{S}^{-1})^{-1} \quad \text{Εξίσωση 4-65}$$

$$N_{D,ij} = \pi^2 * D^{iso} * \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{L_y} \right)^2 \right], \quad \text{Εξίσωση 4-66}$$

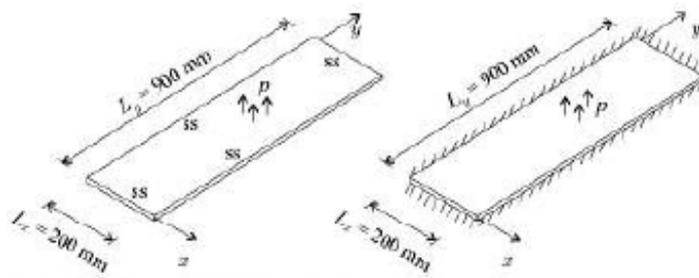
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

4.10 Παράδειγμα εφαρμογής αναλυτικών αναλύσεων σύνθετης πλάκας τύπου σάντουιτς

Για την επιβεβαίωση των παραπάνω σχέσεων επιλύθηκε η παρακάτω πλάκα σάντουιτς με αναλυτικές αναλύσεις. Σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι η εύρεση των μέγιστων βυθίσεων, του κρίσιμου φορτίου λυγισμού σε διαφορετικές μορφές στήριξης υπό διαφορετικές φορτίσεις, τη ρυτίδωση των όψεων της πλάκας σάντουιτς, το μήκος λυγισμού ανάλογα σε ποιον άξονα ταξιδεύει ο κυματισμός και τις συχνότητες στις οποίες ταλαντώνεται η πλάκα σάντουιτς. Πρόκειται για παράδειγμα με μία πλάκα διαστάσεων 0,9m x 0,2 m, διαστρωμάτωσης $[\pm 45_2/O_{12}/\pm 45_2]$, πάχος στρώσης 0,002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,02 m. Τα χαρακτηριστικά των υλικών των στρώσεων της διαστρωμάτωσης φαίνονται στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.5) ενώ η πλάκα σάντουιτς είναι απλά εδραζόμενη ή πακτωμένη και στις 4 ακμές της πλάκας. Η πλάκα φορτίζεται ομοιόμορφα με εγκάρσιο φορτίο της τάξεως 500 kN/m^2 (Σχήμα 4.14), ο πυρήνας αποτελείται από ιστροπικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E_c = 2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu_c = 0.3$ και οι ίνες προσανατολισμού 0° τοποθετούνται παράλληλα τη κοντής ακμής της πλάκας.

	0	± 45
E_1 (GPa)	148	16.39
E_2 (GPa)	9.65	16.39
G_{12} (GPa)	4.55	38.20
ν_{12}	0.3	0.801

Πίνακας 4.5 Χαρακτηριστικά υλικών στρώσεων πλάκας σάντουιτς



Σχήμα 4.14 Φόρτιση και στήριξη πλάκας σάντουιτς παραδείγματος αναλυτικής ανάλυσης

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Υπολογίζονται τα μητρώα ακαμψίας και παρουσιάζονται παρακάτω (Εξισώσεις 4-67 έως 4-69):

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 4-67}$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 4-68}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 4-69}$$

Βασιζόμενοι στον πίνακα 4.1 του παρόντος συγγράμματος υπολογίζονται και παρουσιάζονται τα μητρώα εφελκυσμού και κάμψεως και διατμητικής ακαμψίας (Εξισώσεις 4-70, 4-72 και 4-72 αντίστοιχα)

$$[A] = \begin{bmatrix} 430,34 & 65,47 & 0,00 \\ 65,47 & 96,34 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 70,08 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 4-70}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,16 & 7,96 & 0,0 \\ 7,96 & 11,71 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 8,52 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 4-71}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \frac{d^2}{c} * \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18615 & 0 \\ 0 & 18615 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 4-72}$$

$$\text{Όπου } \bar{C}_{55}^c = \bar{C}_{44}^c = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} = 769231 \times 10^3 N / m \text{ και } \bar{C}_{45}^c = 0$$

Μία πλάκα μπορεί να θεωρηθεί ως επιμήκης όταν ο λόγος των διαστάσεων των ακμών της ικανοποιεί το παρακάτω κριτήριο (Εξίσωση 4-73).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\frac{L_y}{L_x} > 3\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}},$$

Εξίσωση 4-73

Έτσι χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι ο λόγος των δύο πλευρών της πλάκας ισούται με $\frac{L_y}{L_x} = 4.5 > 3\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 4.36$.

Επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της βύθισης της πλάκας οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για ένα δοκάρι σάντουιτς (Εξισώσεις 4-74 και 4-75 για απλά εδραζόμενο και πακτωμένο δοκάρι σάντουιτς ss και built-in).

$$\tilde{w} = \frac{5}{384} * \frac{pL^4}{EI} + \frac{pL^2}{8\tilde{S}},$$

Εξίσωση 4-74

$$\tilde{w} = \frac{1}{384} * \frac{pL^4}{EI} + \frac{pL^2}{8\tilde{S}},$$

Εξίσωση 4-75

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στις Εξισώσεις 4-74 και 4-75 υπολογίζουμε τη μέγιστη βύθιση στις δύο διαφορετικές μορφές στήριξης (Εξισώσεις 4-76 και 4-77).

$$\tilde{w} = 0.0002 + 0.000134 = 0.000334,$$

Εξίσωση 4-76

$$\tilde{w} = 0.000040 + 0.0001343 = 0.000174,$$

Εξίσωση 4-77

Για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού πλάκας υπό εγκάρσιο φορτίο χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του σχήματος 4-7 αφού η πλάκα θεωρείται επιμήκης σαν μία δοκό τύπου σάντουιτς (Εξισώσεις 4-78 και 4-79).

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{12870} + \frac{1}{18615} \right)^{-1} = 7609 kN / m,$$

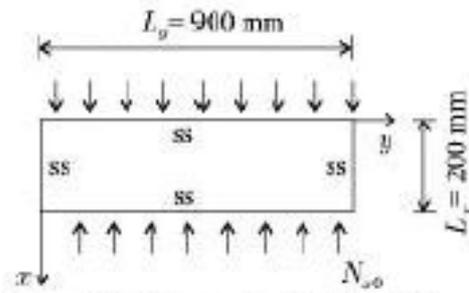
Εξίσωση 4-78

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{51481} + \frac{1}{18615} \right)^{-1} = 13672 kN / m$$

Εξίσωση 4-79

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Στη περίπτωση της εύρεσης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού πλάκας σάντουιτς υπό θλιπτικό φορτίο (Σχήμα 4.15) χρησιμοποιούνται η εξίσωση 4-32 και οι εξισώσεις του πίνακα 4.3.



Σχήμα 4.15 Σχηματική απεικόνιση θλιπτικού φορτίου πλάκας σάντουιτς

Με βάση λοιπόν τις τιμές των όρων ακαμψίας όπως υπολογίστηκαν παραπάνω προσδιορίζουμε για τιμές των συντελεστών $i,j=1,2,3$ τους συντελεστές F_{33} , F_{44} , κλπ και μέσω αυτών βρίσκουμε τελικά το φορτίο λυγισμού. Η μικρότερη τιμή αυτών είναι και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπό τη δράση του οποίου η πλάκα αρχίζει να λυγίζει. Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι συντελεστές για τιμές $i,j=1$ που εν τέλει μας οδηγούν στην εύρεση του κρίσιμου φορτίου.

$i \setminus j$	1		
1	3330484	-207038	-22443,6
	-207038	31591,7	1397,097
	-22443,6	1397,097	20919,13

Πίνακας 4.6 Συντελεστές F_{33} , F_{34} , F_{35} , F_{34} , F_{44} , F_{45}

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,2949 * 10^{15} \qquad \begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 658918920,6$$

Συνεπώς το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ισούται με $N_{cr}=7965$ kN/m.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Για να βρούμε τώρα τη παραμόρφωση (ρυτίδωση) των όψεων της πλάκας θα υποθέσουμε ότι ο κυματισμός της παραμόρφωσης ταξιδεύει παράλληλα στον άξονα y με μακρύς κυματισμούς (γωνία αξόνων χ - ξ $\alpha=0$ Σχήμα 4-10).

Από την εξίσωση 4-37 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \psi_{\xi} * (D_{11}^{\xi})_{\xi-n} &= D_{11}^{\xi} * \cos^4 a + D_{22}^{\xi} * \sin^4 a + (2 * D_{12}^f + 4 * D_{66}^f) * \cos^2 a * \sin^2 a + \\ &+ 4 * \cos^3 a * \sin a * D_{16}^f + 4 * \cos a * \sin^3 a * D_{26}^f = \\ \psi_{\xi} &= D_{11}^{\xi} = D_{11} = 45.30 \text{Nm} \end{aligned}$$

Εξίσωση 4-80

Βάση του πίνακα 4.7 υπολογίζουμε το κρίσιμο φορτίο και το μήκος λυγισμού.

$$(N_{\xi}^f)_{cr, \min} = 2 \sqrt{\psi_{\xi} \frac{E_c}{c/2}} = 19036 \frac{kN}{m} \quad \text{Εξίσωση 4-81}$$

$$l_{cr} = \pi \sqrt[4]{\frac{\psi_{\xi} c / 2}{E_c}} = 0.0069m \quad \text{Εξίσωση 4-82}$$

Διαπιστώνουμε όμως ότι το κρίσιμο μήκος λυγισμού είναι σχεδόν το ένα τρίτο του πάχους του πυρήνα οδηγώντας μας στο συμπέρασμα ότι ο κυματισμός δεν είναι μακρύς αλλά ίσως κοντός.

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις για την υπόθεση του κοντού κυματισμού από τον πίνακα 4.4 καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα (Εξίσωση 4-83 και 4-84).

$$(N_{\xi}^f)_{cr, \min} = 1.5 \sqrt[3]{\frac{2\psi_{\xi} \alpha^2}{\pi^2}} = 34116 \frac{kN}{m} \quad \text{Εξίσωση 4-83}$$

$$l_{cr} = \sqrt[4]{2 \frac{\pi^4 \psi_{\xi}}{\alpha}} = 0.0063m \quad \text{Εξίσωση 4-84}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πάλι όμως το κρίσιμο μήκος λυγισμού είναι σχεδόν το ένα τρίτο του πάχους του πυρήνα. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα δε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κυματισμός είναι κοντός ούτε μακρύς αλλά οδηγούμαστε να χρησιμοποιήσουμε τη μικρότερη τιμή εκ των δύο λύσεων ως η συντηρητικότερη επιλογή.

Επομένως το μικρότερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίνεται από την Εξίσωση 4-85.

$$N_{cr} = 2 \left(N_{\xi}^f \right)_{cr, \min} = 2 * 19036 = 38072 \frac{kN}{m} \quad \text{Εξίσωση 4-85}$$

Τέλος, θα προσδιορίσουμε τις κυκλικές συχνότητες υπό τις οποίες παραμορφώνεται η πλάκα σάντουιτς. Υποθέτοντας ότι η πλάκα είναι επιμήκης χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες εξισώσεις για δοκάρια (Εξισώσεις 7-243, 6-398 και Πίνακας 6.13 από το βιβλίο Mechanics of Composite Structures) αντικαθιστώντας τους συντελεστές. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 4-58 έχουμε τα εξής αποτελέσματα ανάλογα με τον τρόπο στήριξης (Εξίσωση 4-86 (ss) και 4-87 (built-in)):

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho}{D_{11}} * \frac{L_x^4}{\mu_{Bi}^4} + \frac{\rho}{\tilde{S}_{11}} * \frac{L_x^2}{\mu_{Si}^2} \right)^{-1}}, \quad \text{Εξίσωση 4-58}$$

$\omega_1 = 3064s^{-1}$	$\omega_1 = 4233s^{-1}$
$\omega_2 = 8214s^{-1}$,	$\omega_2 = 8945s^{-1}$,
Εξίσωση 4-86	Εξίσωση 4-87
$\omega_3 = 13344s^{-1}$	$\omega_3 = 13791s^{-1}$

Ενώ αντίστοιχα παρουσιάζονται οι συχνότητες (Εξίσωση 4-88 (ss) 4-89 (built-in)).

$f_1 = 488Hz$	$f_1 = 674Hz$
$f_2 = 1307Hz$,	$f_2 = 1424Hz$,
Εξίσωση 4-88	Εξίσωση 4-89
$f_3 = 2124Hz$	$f_3 = 2195Hz$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

5. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

5.1 Γενικά

Το πρόγραμμα με το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των τρισδιάστατων μοντέλων πλακών σάντουιτς είναι το SAP 2000 v 14 το οποίο είναι ένα πρόγραμμα που σε έναν έμπειρο χρήστη δίνει απεριόριστες δυνατότητες γρήγορης και αποτελεσματικής ανάλυσης για δεδομένη κατασκευή ή μοντέλο.

5.2 Χαρακτηριστικά μοντέλου

5.2.1. Διαστάσεις γεωμετρικού μοντέλου

Το γεωμετρικό μοντέλο αποτελείται από μια πλάκα σάντουιτς όπου ο πυρήνας της αποτελείται από αφρό και πάνω και κάτω ακμή αυτού διαθέτει συμμετρική διαστρωμάτωση.

Μελετήθηκαν τρία διαφορετικά γεωμετρικά μοντέλα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω (Σχήμα 5.1, Σχήμα 5.2 και Σχήμα 5.3):

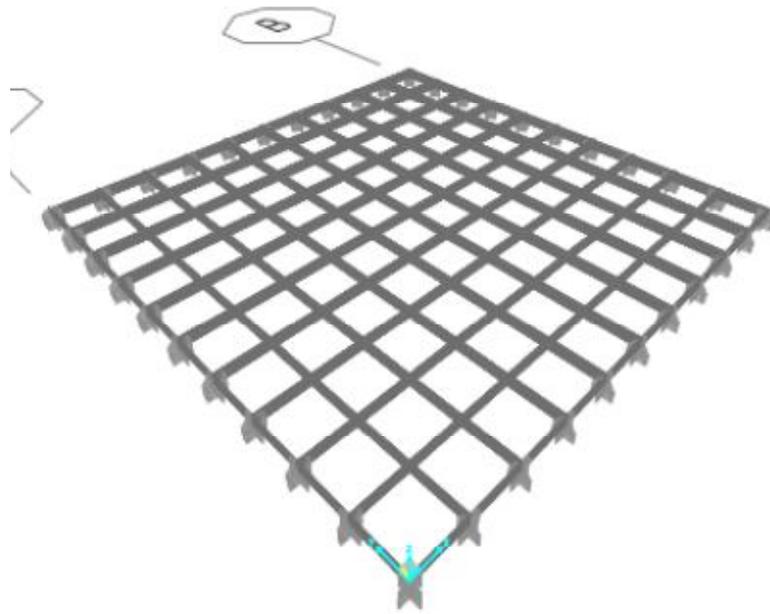
1^ο Γεωμετρικό μοντέλο

Διάσταση κατά άξονα x: 1000 mm

Διάσταση κατά άξονα y: 1000 mm

Πάχος κάθε στρώσης t: 0,2mm

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



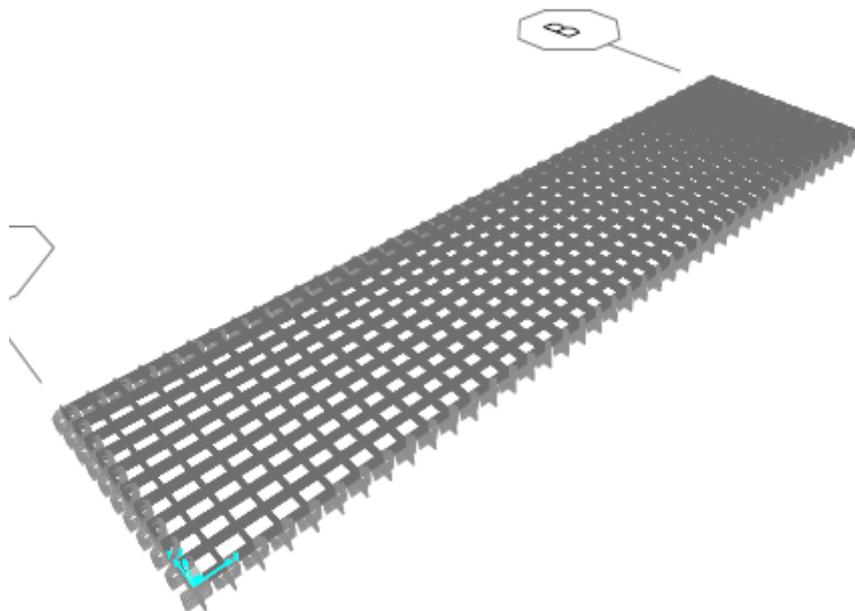
Σχήμα 5.1 Γεωμετρικό μοντέλο 1^ο (1,00 m x 1,00 m)

2^ο Γεωμετρικό μοντέλο

Διάσταση κατά άξονα x: 500 mm

Διάσταση κατά άξονα y: 2000 mm

Πάχος κάθε στρώσης t: 0,2mm



Σχήμα 5.2 Γεωμετρικό μοντέλο 2^ο (2,00 m x 0,50 m)

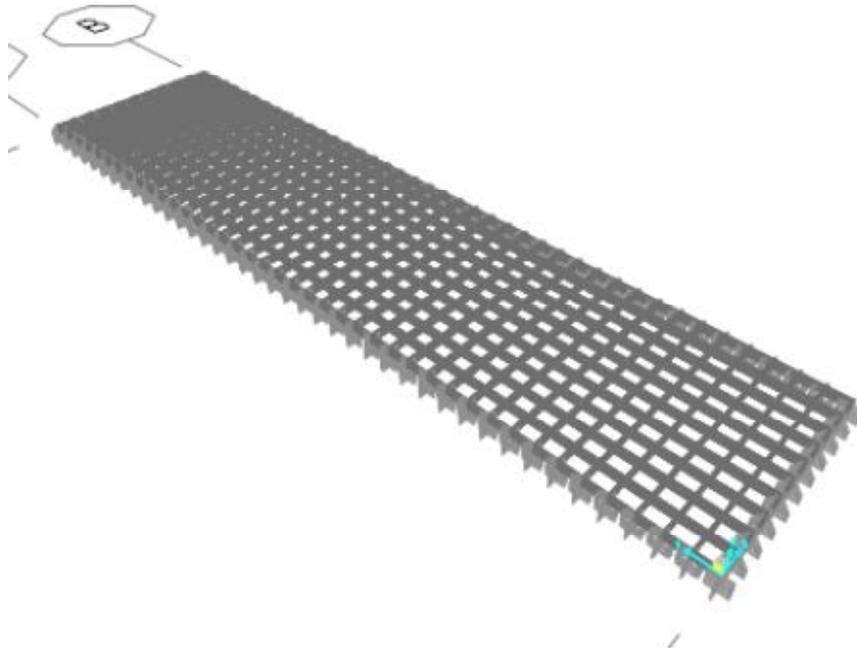
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

3^ο Γεωμετρικό μοντέλο

Διάσταση κατά άξονα x: 2000 mm

Διάσταση κατά άξονα y: 5000 mm

Πάχος κάθε στρώσης t: 0,2mm



Σχήμα 5.3 Γεωμετρικό μοντέλο 3^ο (0,50 m x 2,00 m)

Ενώ για κάθε ένα από τα παραπάνω γεωμετρικά μοντέλα χρησιμοποιήθηκαν τα εξής πάχη πυρήνα αφρού 10mm, 20mm & 60mm.

Για να ορίσουμε τη σύνθετη πλάκα σάντουιτς χρησιμοποιήσαμε από το μενού του προγράμματος SAP 2000 στοιχεία επιφανείας για τη μοντελοποίηση της διαστρωμάτωσης (Section Properties → Area sections → Shell-Layered/Nonlinear) και στοιχεία στερεού για τον αφρώδη πυρήνα (Section Properties → Solid sections).

Οι τύποι των στοιχείων οι οποίοι προσφέρονται στο πρόγραμμα SAP 2000 ποικίλουν σε στοιχεία δοκών/δικτυωμάτων (Frame/Truss), κελύφους/δίσκου (Shell/Plate), μη γραμμικά στοιχεία σύζευξης (Nonlinear Link Elements και στερεά στοιχεία (Solid). Για τη διαστρωμάτωση της πλάκας σάντουιτς επιλέχθηκε η μοντελοποίηση με στοιχεία κελύφους τα οποία είναι επιφανειακά στοιχεία και συμπεριλαμβάνουν στροφική δυσκαμψία και μπορούν

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

να χρησιμοποιηθούν σαν στοιχεία 3 ή 4 κόμβων. Όσον αφορά τον αφρόδη πυρήνα χρησιμοποιήθηκε στερεό στοιχείο το οποίο είναι ένα τρισδιάστατο οκτακομβικό στερεό με ισότροπες και ανισότροπες ιδιότητες υλικού.

5.2.2. Ορισμός υλικών

Τα υλικά τα οποία ορίσαμε και χρησιμοποιηθήκαν στην ανάλυση για τις διάφορες στρώσεις της διαστρωμάτωσης και του πυρήνα φαίνονται στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 5.4, Σχήμα 5.5, Σχήμα 5.6, Σχήμα 5.7 και Πίνακας 5.1) και είναι ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο αριθμητικό παράδειγμα της υποπαραγράφου 4.11:

	0	±45	90
E_1 (N/m ²)	$1,48 \cdot 10^{11}$	$1,64 \cdot 10^{10}$	$1,48 \cdot 10^{11}$
E_2 (N/m ²)	$9,65 \cdot 10^9$	$1,64 \cdot 10^{10}$	$9,65 \cdot 10^9$
G_{12} N/m ²)	$4,55 \cdot 10^9$	$3,82 \cdot 10^{10}$	$4,55 \cdot 10^9$
ν_{12}	0.3	0.801	0.3

Πίνακας 5.1 Μέτρο ελαστικότητας υλικών

The screenshot shows a material property dialog box for a material named 'MAT0'. The material type is 'Other' and the symmetry type is 'Orthotropic'. The units are set to 'N, m, C'. The modulus of elasticity values are E1 = 1.480E+11, E2 = 9.650E+09, and E3 = 0. The Poisson's ratio values are U12 = 0.3, U13 = 0.3, and U23 = 0.3. The coefficient of thermal expansion values are A1 = 1.170E-05, A2 = 1.170E-05, and A3 = 1.170E-05. The shear modulus values are G12 = 4.550E+09, G13 = 0, and G23 = 0. The weight and mass properties are Weight per Unit Volume = 76970 and Mass per Unit Volume = 7840. There are buttons for 'Nonlinear Material Data...', 'Material Damping Properties...', 'Time Dependent Properties...', and 'Thermal Properties...'. At the bottom, there are 'OK' and 'Cancel' buttons.

Σχήμα 5.4 Μέτρα ελαστικότητας για στρώση υλικού 0°

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Material Name MAT45	Material Type Other	Symmetry Type Orthotropic
Modulus of Elasticity E1: 1.639E+10 E2: 1.639E+10 E3: 0.	Weight and Mass Weight per Unit Volume: 76970. Mass per Unit Volume: 7840.	Units N, m, C
Poisson's Ratio U12: 0.801 U13: 0.801 U23: 0.801	Advanced Material Property Data Nonlinear Material Data... Material Damping Properties... Time Dependent Properties... Thermal Properties...	
Coeff of Thermal Expansion A1: 1.170E-05 A2: 1.170E-05 A3: 1.170E-05		
Shear Modulus G12: 3.820E+10 G13: 0. G23: 0.		
OK Cancel		

Σχήμα 5.5 Μέτρα ελαστικότητας για στρώση υλικού 45°

Material Name MAT90	Material Type Other	Symmetry Type Orthotropic
Modulus of Elasticity E1: 9.650E+09 E2: 1.480E+11 E3: 0.	Weight and Mass Weight per Unit Volume: 76970. Mass per Unit Volume: 7840.	Units N, m, C
Poisson's Ratio U12: 0.3 U13: 0.3 U23: 0.3	Advanced Material Property Data Nonlinear Material Data... Material Damping Properties... Time Dependent Properties... Thermal Properties...	
Coeff of Thermal Expansion A1: 1.170E-05 A2: 1.170E-05 A3: 1.170E-05		
Shear Modulus G12: 4.550E+09 G13: 0. G23: 0.		
OK Cancel		

Σχήμα 5.6 Μέτρα ελαστικότητας για στρώση υλικού 90°

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

The image shows a software dialog box for defining material properties. The fields are as follows:

Property	Value
Material Name	MAT_AFR05
Material Type	Other
Symmetry Type	Isotropic
Modulus of Elasticity (E)	8.700E+10
Weight per Unit Volume	60000.
Mass per Unit Volume	611621.
Units	N, m, C
Poisson's Ratio (U)	0,3
Coeff of Thermal Expansion (A)	1,170E-05
Shear Modulus (G)	3,346E+10

Σχήμα 5.7 Μέτρα ελαστικότητας για αφρόδη πυρήνα

5.2.3. Διαστρωμάτωση

Οι στρώσεις της διαστρωμάτωσης που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής και φαίνονται στα παρακάτω σχήματα όπως μοντελοποιήθηκαν στο πρόγραμμα (Σχήμα 5.8, Σχήμα 5.9 και Σχήμα 5.10):

- (+45/-45/+45/-45/0)₂
- (+45/-45/+45/-45/90)₂
- (+45/-45/+45/0/0/90/90/+45/-45/+45)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Layer Definition Data

Layer Name	Distance	Thickness	Type	Num Int. Points	Material	Material Angle	Material S11	Component S22	Behavior S12
1	0,0009	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear
2	0,0007	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
3	0,0005	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear
4	0,0003	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
5	0,0001	0,0002	Shell	2	MAT0	0,	Linear	Linear	Linear
6	-0,0001	0,0002	Shell	2	MAT0	0,	Linear	Linear	Linear
7	-0,0003	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
8	-0,0005	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear

Quick Start Add Insert Modify Delete

Section Name: DIASTRVMATVSI FACE

Order Layers By Distance: Order Ascending Order Descending

Calculated Layer Information:

Number of Layers	10
Total Section Thickness	2,000E-03
Sum of Layer Overlaps	4,879E-19
Sum of Gaps Between Layers	1,084E-19

OK Cancel

Distance

Σχήμα 5.8 Διαστρωμάτωση (+45/-45/+45/-45/0)₂

Layer Definition Data

Layer Name	Distance	Thickness	Type	Num Int. Points	Material	Material Angle	Material S11	Component S22	Behavior S12
1	0,0009	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear
2	0,0007	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
3	0,0005	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear
4	0,0003	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
5	0,0001	0,0002	Shell	2	MAT90	90,	Linear	Linear	Linear
6	-0,0001	0,0002	Shell	2	MAT90	90,	Linear	Linear	Linear
7	-0,0003	0,0002	Shell	2	MAT45	-45,	Linear	Linear	Linear
8	-0,0005	0,0002	Shell	2	MAT45	45,	Linear	Linear	Linear

Quick Start Add Insert Modify Delete

Section Name: DIASTRVMATVSI FACE

Order Layers By Distance: Order Ascending Order Descending

Calculated Layer Information:

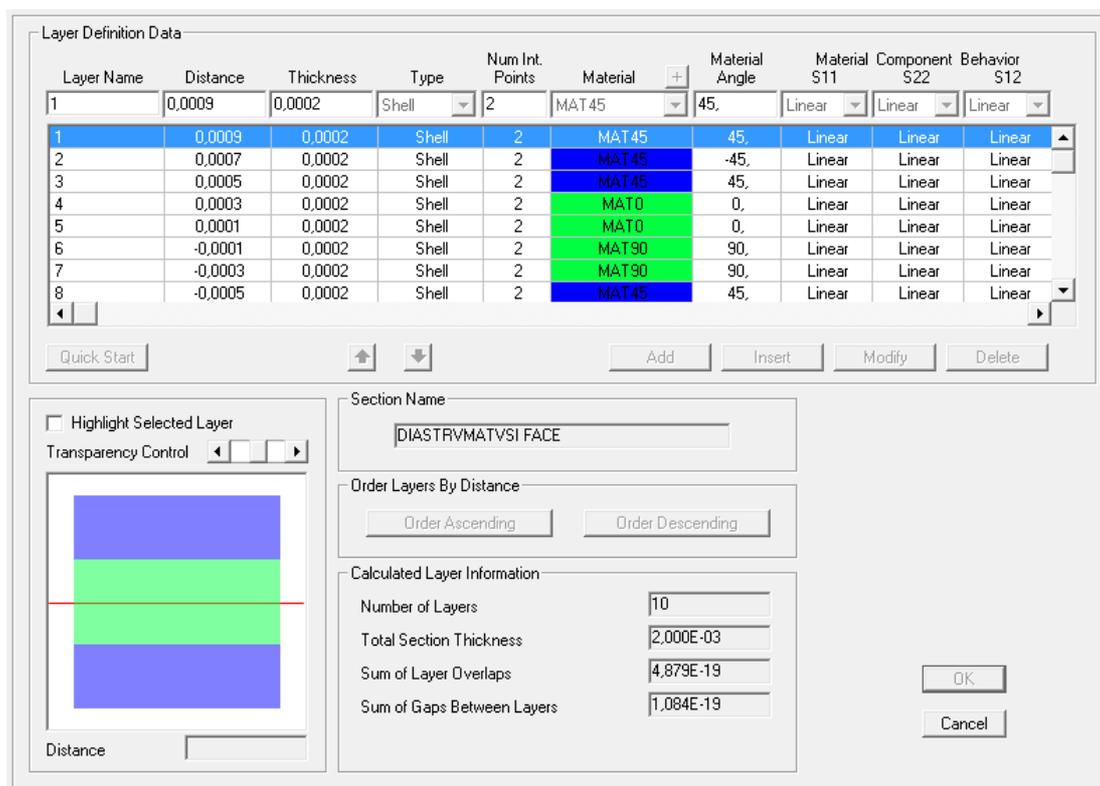
Number of Layers	10
Total Section Thickness	2,000E-03
Sum of Layer Overlaps	4,879E-19
Sum of Gaps Between Layers	1,084E-19

OK Cancel

Distance

Σχήμα 5.9 Διαστρωμάτωση (+45/-45/+45/-45/90)₂

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 5.10 Διαστρωμάτωση (+45/-45/+45/0/0/90/90/+45/-45/+45)

5.2.4. Διαχωρισμός σε πεπερασμένα στοιχεία

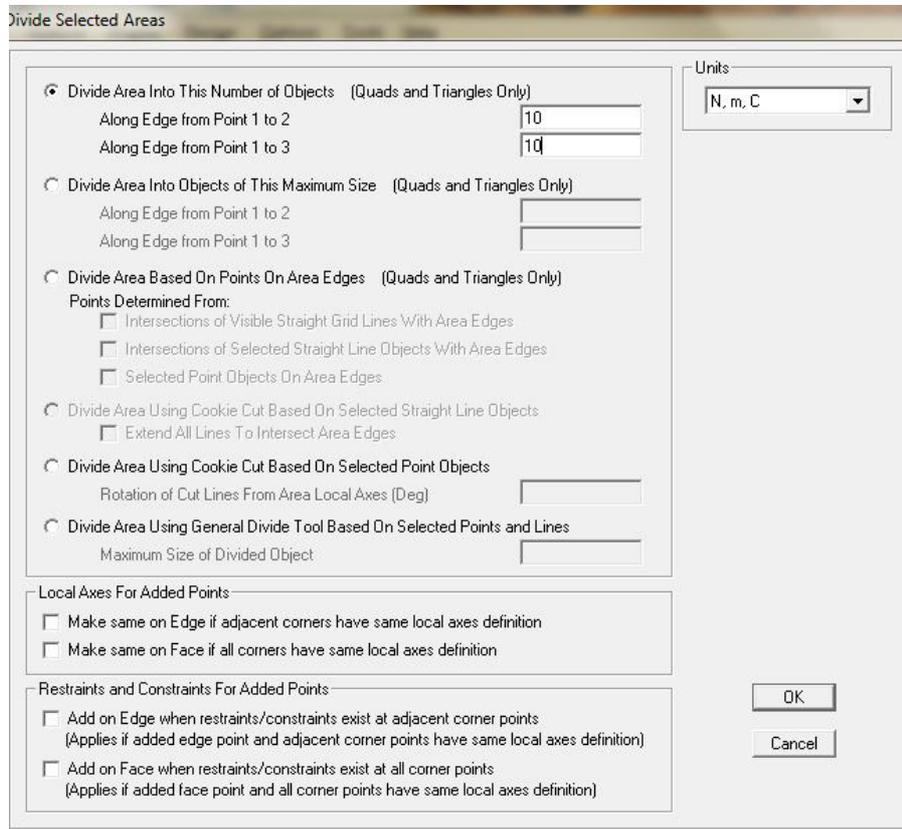
Τα επιφανειακά στοιχεία διακριτοποιήθηκαν σε 4-κομβικά τετραγωνικά στοιχεία με την εντολή του προγράμματος Divide Areas (Σχήμα 5.11-Γεωμετρικό μοντέλο 1,00 m x 1,00 m) ενώ τα στοιχεία στερεών σε 8-κομβικά κυβικά στοιχεία με την εντολή Divide Solids (Σχήμα 5.12-Γεωμετρικό μοντέλο 1,00 m x 1,00 m). Έτσι προέκυψαν επιφανειακά στοιχεία διαστάσεων 0,10 m x 0,10 m και στερεά στοιχεία 0,10 m x 0,10 m ύψους 0,005 m /0,0075 m /0,015 m ανάλογα το ύψος του πυρήνα της πλάκας σάντουιτς 0,02 m /0,03 m /0,06 m αντίστοιχα.

Η διακριτοποίηση των επιφανειακών και στερεών στοιχείων έγινε με γνώμονα την επίτευξη ίδιων διαστάσεων κατά τον άξονα x και y και σύμπτωση κόμβων στις ίδιες θέσεις και καθ' ύψος ο λόγος του πάχους του στερεού στοιχείου δια το λόγο του επιφανειακού στοιχείου να κυμαίνεται από το 2,5-3,75-7,5.

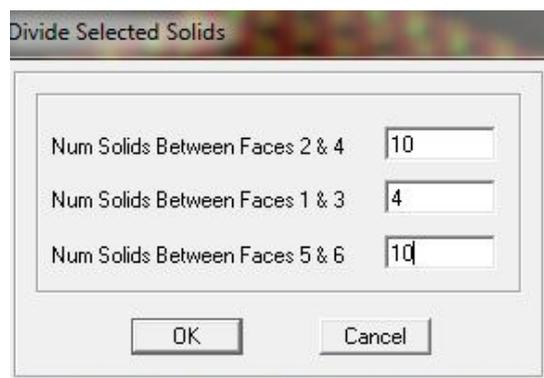
Διαμορφώθηκαν μοντέλα και με μικρότερη διακριτοποίηση στερεών στοιχείων καθ' ύψος αλλά το γεγονός αυτό αύξανε σημαντικά τον αριθμό των μητρώων ακαμψίας που έπρεπε να διαμορφώσει και να επιλύσει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων SAP 2000 για κάθε

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ένα στοιχείο και αύξανε σημαντικά τον χρόνο ανάλυσης των μοντέλων οδηγώντας τα σε αστάθεια.



Σχήμα 5.11 Διακριτοποίηση επιφανειακών στοιχείων

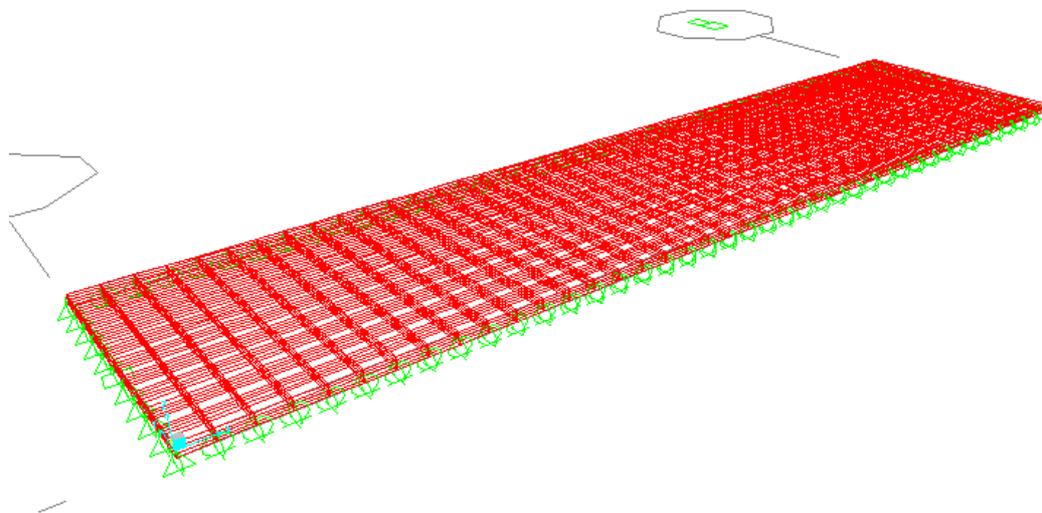


Σχήμα 5.12 Διακριτοποίηση στοιχείων στερεών

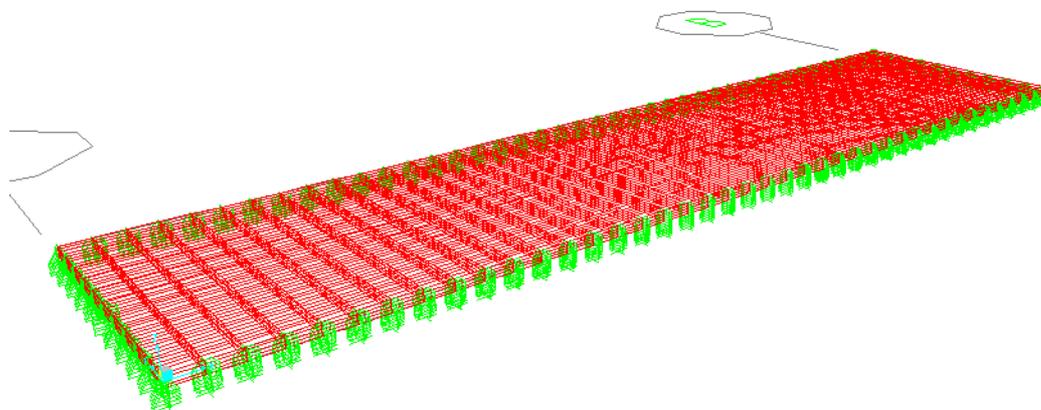
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

5.2.5. Στήριξεις

Όσον αφορά τις στήριξεις των επιμήκους και της τετραγωνικής πλάκας τοποθετήθηκαν μέσω της εντολής restraints περιορισμοί των μετακινήσεων κατά τον κατακόρυφο άξονα όλων των κόμβων των ακμών της εκάστοτε πλάκας ενώ περιορίστηκαν και οι μετακινήσεις κόμβων ανάλογα με τη κατηγορία στήριξης που χρησιμοποιήθηκε. Επίσης για κάθε κατηγορία στήριξης διαμορφώθηκαν διαφορετικά μοντέλα ανάλογα της στήριξη καθ' ύψος της πλάκας που επιλέχθηκε (ss ή built-in) όπως παρουσιάζεται στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 5.13, Σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.13 Στήριξη τύπου ss

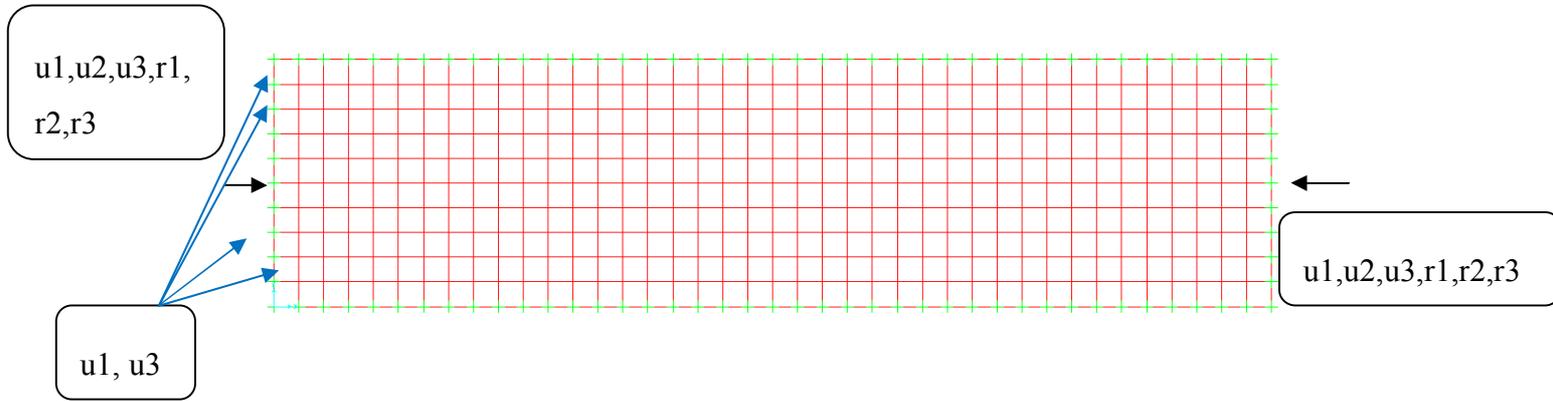


Σχήμα 5.14 Στήριξη τύπου built-in

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

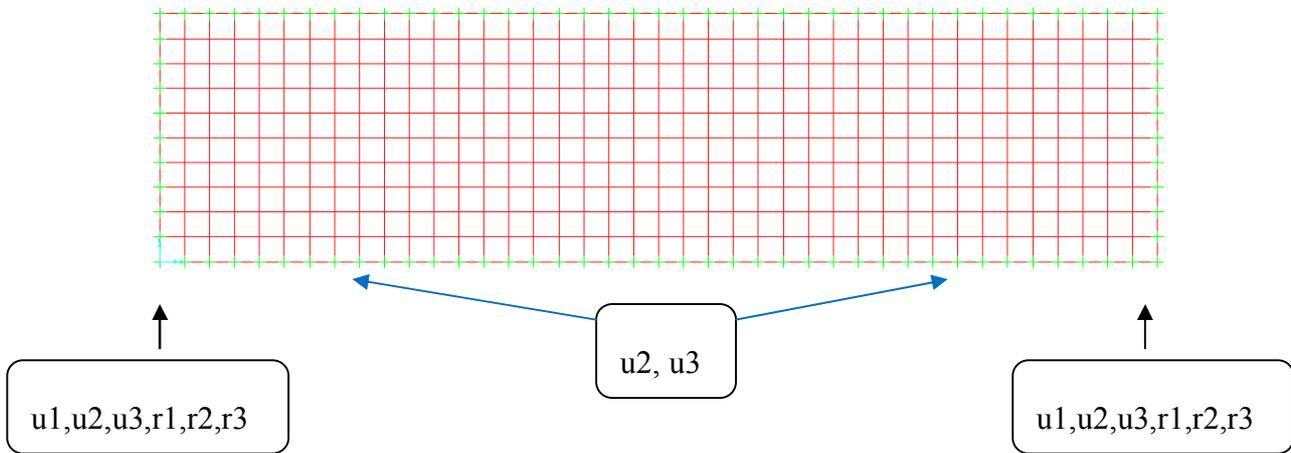
Διαμορφώθηκαν δύο περιπτώσεις στηρίξεων (Σχήμα 5.15, Σχήμα 5.16):

ΣΤΗΡΙΞΗ ΚΟΜΒΩΝ ΣΤΗ ΜΕΣΗ



Σχήμα 5.15 Στήριξη κόμβων στη μέση

ΣΤΗΡΙΞΗ ΚΟΜΒΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΑ



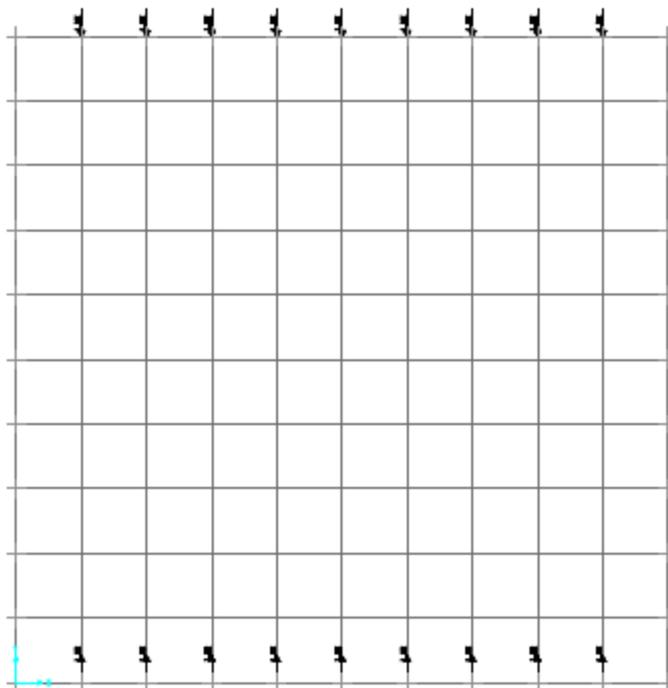
Σχήμα 5.16 Στήριξη κόμβων στα άκρα

Και στα δύο μοντέλα όλοι οι κόμβοι των ακμών των πλακών όπως προέκυψαν από την διακριτοποίηση περιορίστηκαν ως προς τη μετακίνηση στο κατακόρυφο άξονα z ενώ οι υπόλοιποι είναι ελεύθεροι να παραμορφώνονται.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

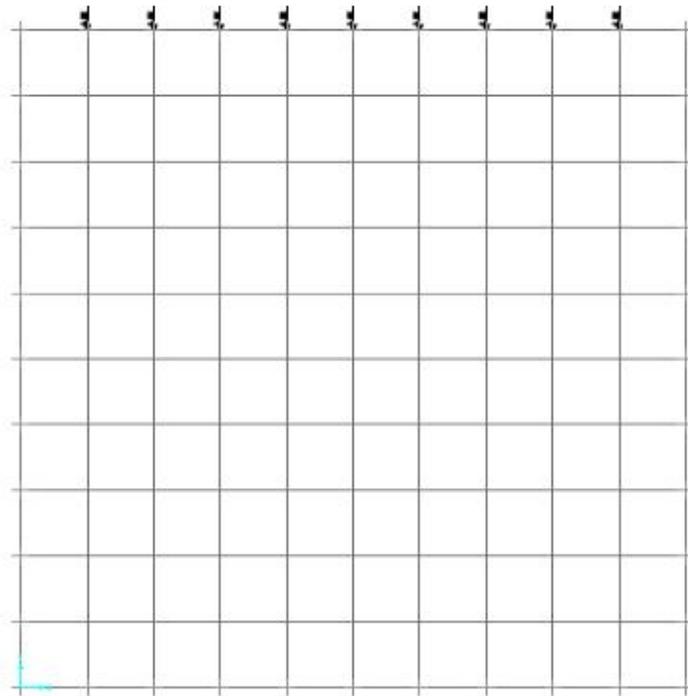
5.2.6. Φορτίσεις

Τα μοντέλα πλακών τύπου σάντουιτς φορτίστηκαν στους κόμβους των πλευρών που είναι παράλληλες με τον άξονα x με επικόμβιο φορτίο με τιμή 1N (Live φόρτιση) και στις δύο περιπτώσεις ss ή built-in όπως παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα ανάλογα τη στήριξη τους (Σχήμα 5.17, Σχήμα 5.18, Σχήμα 5.19) προκειμένου να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο N_{cr} στο οποίο η πλάκα σάντουιτς λυγίζει σε σημείο στο οποίο προκαλείται αστάθεια.

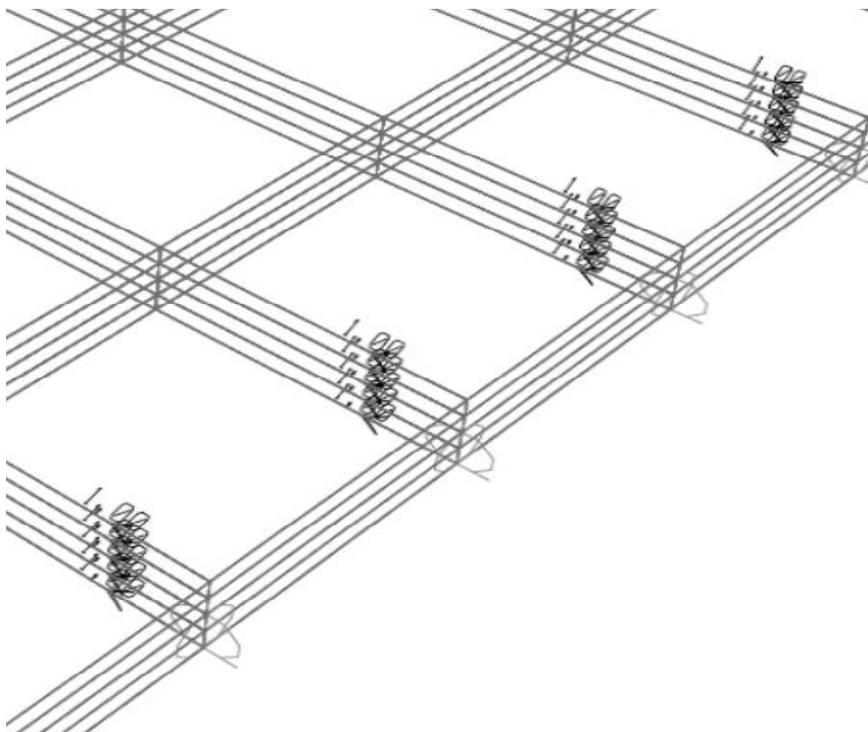


Σχήμα 5.17 Φόρτιση κόμβων ακμών μοντέλων πλάκας τύπου σάντουιτς με στήριξη μεσαίων κόμβων

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 5.18 Φόρτιση κόμβων ακμών μοντέλων πλάκας τύπου σάντουιτς με στήριξη ακραίων κόμβων



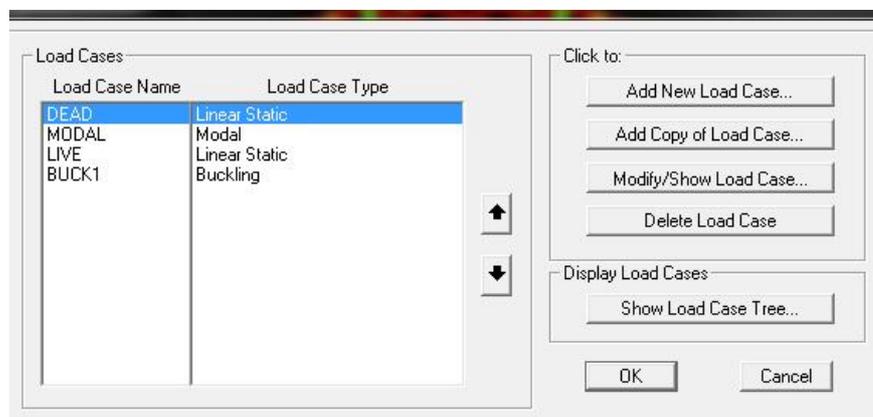
Σχήμα 5.19 Φόρτιση κόμβων ακμών πλάκας σάντουιτς με στήριξη ss

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

5.2.7. Ανάλυση

Προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά των διαφόρων μοντέλων πλακών σάντουιτς διαμορφώθηκαν τέσσερις περιπτώσεις φορτίσεων. Αναλυτικά παρουσιάζονται παρακάτω (Σχήμα 5.20):

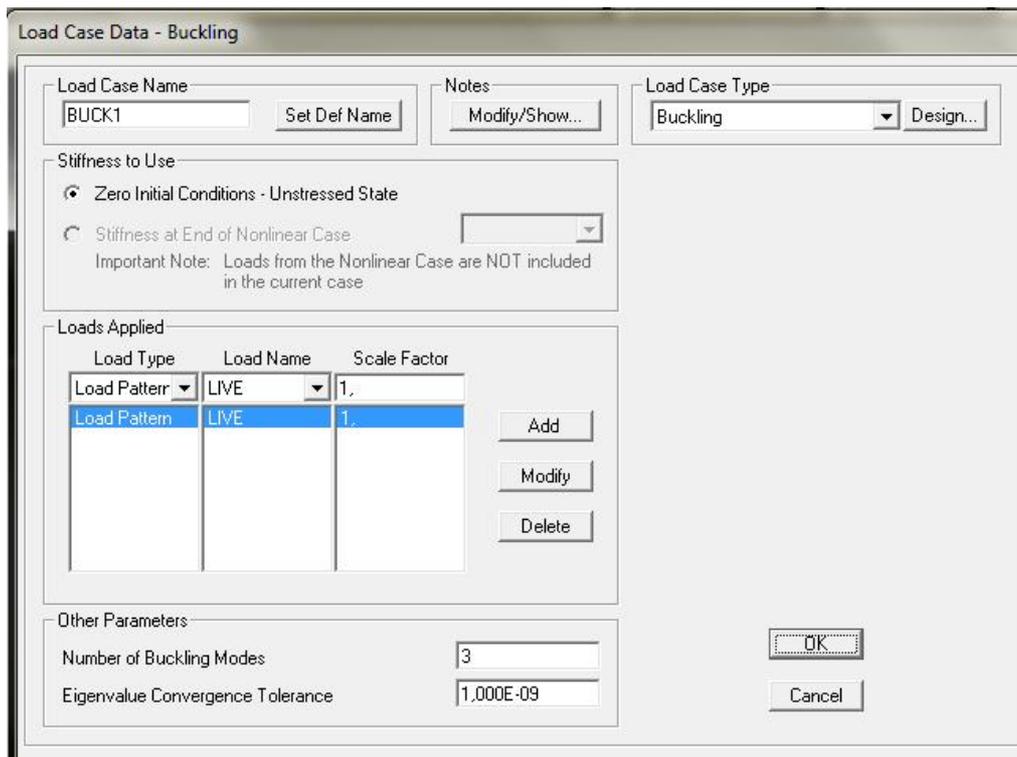
- Ιδιομορφική ανάλυση
- Γραμμικό φορτίο ιδίου βάρους
- Γραμμικό κινητό φορτίο
- Φορτίο λυγισμού



Σχήμα 5.20 Περίπτωσης φόρτισης

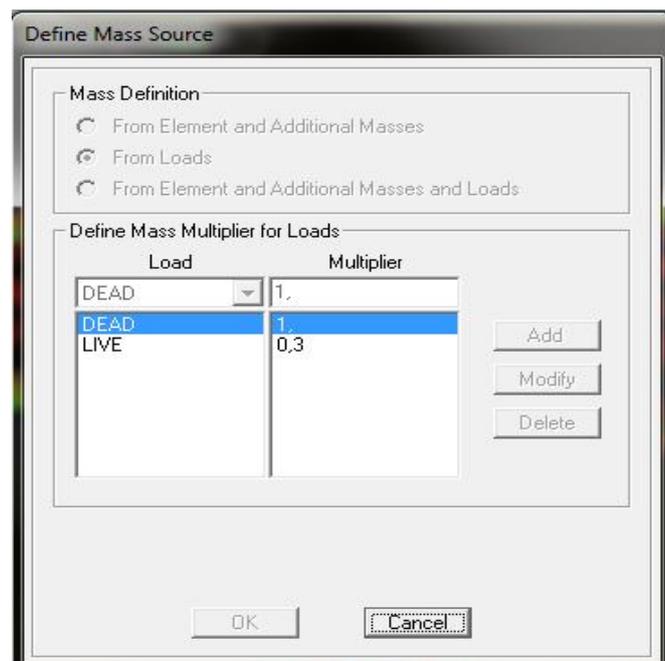
Συγκεκριμένα, για να βρεθούν οι ιδιοτιμές-μορφές στις οποίες τα διάφορα μοντέλα των πλακών σάντουιτς λυγίζουν διαμορφώνεται μέσω του προγράμματος ανάλυσης η περίπτωση λυγισμού σαν ξεχωριστή περίπτωση φόρτισης στην οποία ασκείται το κινητό φορτίο (1kN) (Σχήμα 5.21) και προσδιορίζονται οι πρώτες τρεις ιδιομορφές λυγισμού.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 5.21 Περίπτωση φόρτισης λυγισμού

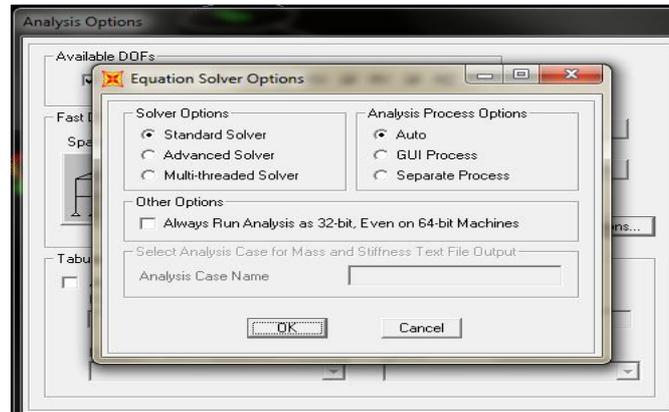
Για να υπολογιστούν τα μητρώα ακαμψίας των στοιχείων η μάζα του κάθε στοιχείου υπολογίζεται μέσω της εντολής του μενού του προγράμματος όπως παρουσιάζεται παρακάτω Σχήμα 5.22:



Σχήμα 5.22 Υπολογισμός μάζας στοιχείων

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε μέσω του μενού του προγράμματος όπως φαίνεται παρακάτω χρησιμοποιώντας των standard solver οποίος κάθε φορά που εκτελεί μία ανάλυση σου επιδεικνύει τα προβλήματα τα οποία μπορούν να παρουσιαστούν (Σχήμα 5.23):



Σχήμα 5.23 Ανάλυση standar solver (κανονικού επιλυτή)

Ενδεικτικά παρακάτω παρουσιάζονται σχήματα όπως προέκυψαν από την ανάλυση για ένα από τα γεωμετρικά μοντέλα πλάκας σάντουιτς (Σχήμα 5.24 και Σχήμα 5.25).

```
Analysis Complete - 1x1
File Name: C:\Users\despo\Desktop\X\SAP\kala\FF\FEMES\002\45-0\1.x1.SDB
Start Time: 10/9/2013 7:51:38 pm Elapsed Time: 00:00:08
Finish Time: 10/9/2013 7:51:46 pm Run Status: Done - Analysis Complete

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS
TOTAL NUMBER OF CASES TO SOLVE = 2
NUMBER OF CASES TO SOLVE PER BLOCK = 2

LINEAR STATIC CASES TO BE SOLVED:
CASE: DEAD
CASE: LIVE

L I N E A R   B U C K L I N G   A N A L Y S I S                                07:51:39
CASE: BUCK1

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS
NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 2259
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 3
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.042859851E+05  2.509493057E+05  8.603016446E+05  1.208328379E+06
  2  8.961962990E+04  1.129417701E+05  2.269523472E+05  2.985460466E+05
  3  8.960004970E+04  1.128911086E+05  2.255827249E+05  2.970923302E+05
  4  8.960004284E+04  1.128910724E+05  2.255827249E+05  2.970843413E+05
  5  8.960004283E+04  1.128910723E+05  2.255827154E+05  2.970842711E+05

Found mode  1 of 3, Eigenvalue = 8.960004283E+04
Found mode  2 of 3, Eigenvalue = 1.128910723E+05

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  5  2.255827154E+05  2.970842711E+05  3.665092914E+05  4.102866178E+05
  6  2.255827153E+05  2.970842705E+05  3.665092891E+05  4.102865794E+05

Found mode  3 of 3, Eigenvalue = 2.255827153E+05

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 3
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 6
```

Σχήμα 5.24 Γραμμική ανάλυση λογισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

```
Analysis Complete - 1x1
File Name: C:\Users\despo\Desktop\w\SAP\kala\FF\FEMES\002\45-0\1x1.SDB
Start Time: 10/9/2013 7:51:38 pm Elapsed Time: 00:00:08
Finish Time: 10/9/2013 7:51:46 pm Run Status: Done - Analysis Complete

E I G E N   M O D A L   A N A L Y S I S                                07:51:45

CASE: MODAL

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM      =      2259
NUMBER OF MASS DEGREES OF FREEDOM          =      1545
MAXIMUM NUMBER OF EIGEN MODES SOUGHT       =       17
MINIMUM NUMBER OF EIGEN MODES SOUGHT       =       1
NUMBER OF RESIDUAL-MASS MODES SOUGHT       =       3
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED            =       24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE              =     1.00E-09

FREQUENCY SHIFT (CENTER) (CYC/TIME)        =     .000000
FREQUENCY CUTOFF (RADIUS) (CYC/TIME)      =  -INFINITY-
ALLOW AUTOMATIC FREQUENCY SHIFTING        =       YES

Original stiffness at shift : EV= 0.0000000E+00, f= .000000, T= -INFINITY-
Number of eigenvalues below shift = 0
Found mode 1 of 17: EV= 4.0628134E+06, f= 320.799415, T= 0.003117
Found mode 2 of 17: EV= 1.7843477E+07, f= 672.294991, T= 0.001487
Found mode 3 of 17: EV= 2.3080987E+07, f= 764.622928, T= 0.001308
Found mode 4 of 17: EV= 4.6868233E+07, f= 1089.581, T= 0.000918
Found mode 5 of 17: EV= 7.4687576E+07, f= 1375.448, T= 0.000727
Found mode 6 of 17: EV= 8.5936927E+07, f= 1475.401, T= 0.000678
Found mode 7 of 17: EV= 1.2903016E+08, f= 1807.864, T= 0.000553
Found mode 8 of 17: EV= 1.3506970E+08, f= 1849.691, T= 0.000541
Found mode 9 of 17: EV= 2.2066941E+08, f= 2364.238, T= 0.000423
Found mode 10 of 17: EV= 2.3246942E+08, f= 2426.627, T= 0.000412
Found mode 11 of 17: EV= 2.3841292E+08, f= 2457.452, T= 0.000407
Found mode 12 of 17: EV= 2.8469469E+08, f= 2685.405, T= 0.000372
Found mode 13 of 17: EV= 3.2391775E+08, f= 2864.425, T= 0.000349
Found mode 14 of 17: EV= 3.3243812E+08, f= 2901.854, T= 0.000345
Found mode 15 of 17: EV= 5.4499644E+08, f= 3715.497, T= 0.000269
Found mode 16 of 17: EV= 5.4588918E+08, f= 3718.539, T= 0.000269
Found mode 17 of 17: EV= 5.4707901E+08, f= 3722.590, T= 0.000269

NUMBER OF EIGEN MODES FOUND                =       17
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED             =       13
NUMBER OF STIFFNESS SHIFTS                 =       0

NON-ZERO RESIDUAL-MASS MODES SOUGHT        =    UX,UY,UZ
SIGNIFICANT RESIDUAL-MASS MODES FOUND      =    UX,UY,UZ
```

Σχήμα 5.25 Ιδιομορφική ανάλυση

Παρατήρηση: Κατά τη διάρκεια των αναλύσεων των διαφόρων γεωμετρικών μοντέλων προέκυψε ένα πρόβλημα λειτουργικό του προγράμματος SAP 2000. Λόγω του γεγονότος ότι τα μοντέλα είχαν διακριτοποιηθεί σε πολλά επιμέρους στοιχεία (μεγάλος όγκος επιφανειακών και στερεών στοιχείων) και υπήρχαν επιφάνειες αλληλοεπικάλυψης (η τελική επιφάνεια του άνω και κάτω μέρους του πυρήνα βρίσκεται στη μέση επιφάνεια της συμμετρικής διαστρωμάτωσης) το πρόγραμμα δε μπορούσε να διαμορφώσει τα μητρώα ακαμψίας με απόλυτη ακρίβεια. Παρακάτω παρουσιάζεται το μήνυμα του προγράμματος όπου αναφέρεται για απώλεια αριθμού ψηφίων κατά την επίλυση (Σχήμα 5.26).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

```

Analysis Complete - 1x1
File Name: C:\Users\despo\Desktop\X\SAP\kala\kryfostririkseis\AKR1\002\45-0\1x1.SDB
Start Time: 21/9/2013 9:37:25 πμ Elapsed Time: 00:00:09
Finish Time: 21/9/2013 9:37:34 πμ Run Status: Done - Analysis Complete

L I N E A R   E Q U A T I O N   S O L U T I O N                               09:37:26

FORMING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

TOTAL NUMBER OF EQUILIBRIUM EQUATIONS      =      2488
APPROXIMATE "EFFECTIVE" BAND WIDTH        =      287

NUMBER OF EQUATION STORAGE BLOCKS         =          1
MAXIMUM BLOCK SIZE (8-BYTE TERMS)         =      679251
SIZE OF STIFFNESS FILE(S) (BYTES)         =      5.192 MB

NUMBER OF EQUATIONS TO SOLVE              =      2488

* * * W A R N I N G * * *
NUMERICAL PROBLEMS ENCOUNTERED DURING EQUATION SOLUTION:

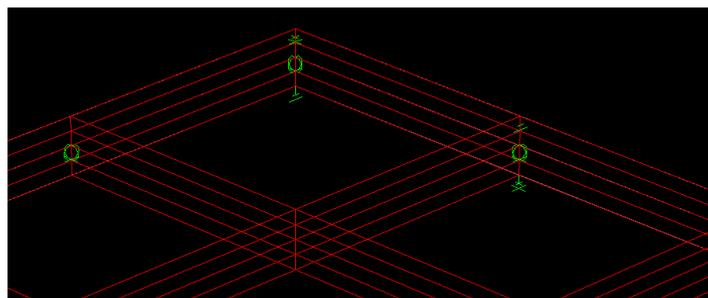
TYPE LABEL DOF      X-COORD   Y-COORD   Z-COORD   PROBLEM      VALUE
-----
Joint 520 RY  1.000000  0.900000  -0.010000 Lost accuracy 11.2 digits
Joint 520 RY  1.000000  0.900000  -0.010000 Diagonal < 0  -2.36E-10
Joint 6  RX  1.000000  1.000000  -0.010000 Lost accuracy 13.0 digits
Joint 6  RX  1.000000  1.000000  -0.010000 Diagonal < 0  -2.03E-12
Joint 6  RY  1.000000  1.000000  -0.010000 Lost accuracy 13.1 digits
Joint 6  RY  1.000000  1.000000  -0.010000 Diagonal < 0  -1.34E-12
Joint 8  RY  1.000000  1.000000  0.010000 Lost accuracy 10.9 digits
Joint 8  RY  1.000000  1.000000  0.010000 Diagonal < 0  -2.05E-10
Joint 554 RX 1.000000  0.900000  0.010000 Lost accuracy 13.3 digits
Joint 554 RX 1.000000  0.900000  0.010000 Diagonal < 0  -1.81E-12
Joint 554 RY 1.000000  0.900000  0.010000 Lost accuracy 13.3 digits
Joint 554 RY 1.000000  0.900000  0.010000 Diagonal < 0  -1.72E-12

* * * W A R N I N G * * *
EXCESSIVE LOSS OF ACCURACY WAS DETECTED DURING THE SOLUTION OF EQUATIONS
NUMBER OF DIGITS LOST EXCEEDED 11.0

* * * W A R N I N G * * *
THE STRUCTURE IS UNSTABLE OR ILL-CONDITIONED !!
CHECK THE STRUCTURE CAREFULLY FOR:
- INADEQUATE SUPPORT CONDITIONS, OR
- ONE OR MORE INTERNAL MECHANISMS, OR
- ZERO OR NEGATIVE STIFFNESS PROPERTIES, OR
- EXTREMELY LARGE STIFFNESS PROPERTIES, OR
- BUCKLING DUE TO P-DELTA OR GEOMETRIC NONLINEARITY, OR
- A FREQUENCY SHIFT (IF ANY) ONTO A NATURAL FREQUENCY
    
```

Σχήμα 5.26 Μήνυμα standard επιλυτή προγράμματος SAP 2000

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος και για την πιο σωστή διαμόρφωση των μητρώων ακαμνίας όλων των κόμβων, όπως διαμορφώθηκαν κατά την διακριτοποίηση κάθε γεωμετρικού μοντέλου πλάκας σάντουιτς, τοποθετήθηκαν στους συγκεκριμένους κόμβους στηρίξεις οι οποίες περιορίζουν τις στροφές τους κατά τον άξονα x και y όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.27).



Σχήμα 5.27 Στηρίξεις κόμβων πλάκας σάντουιτς

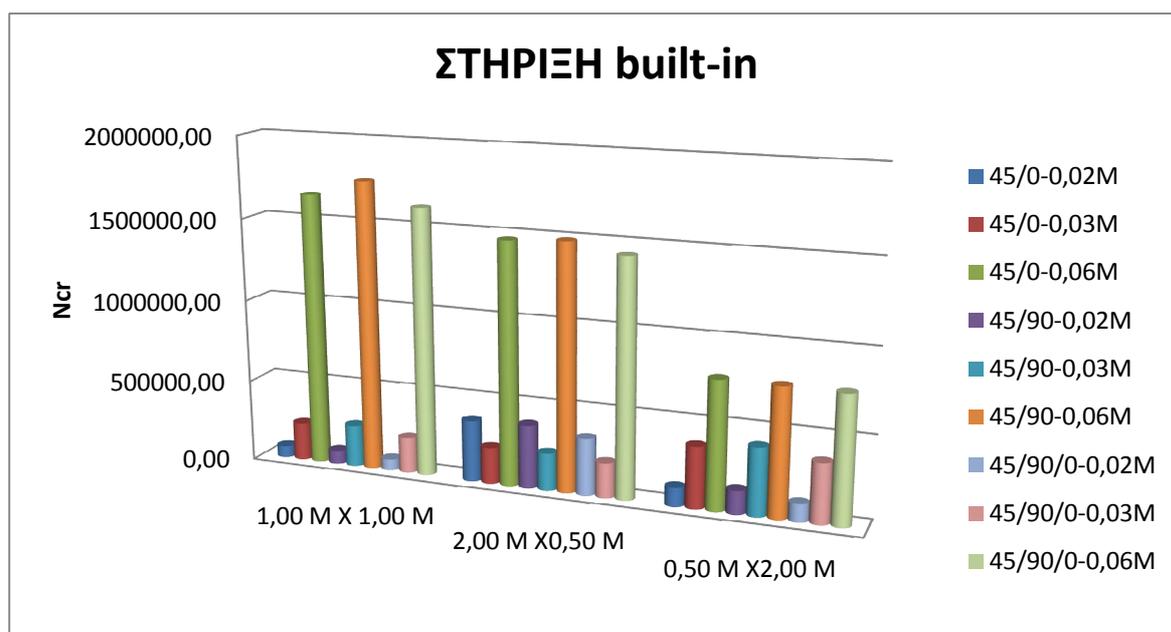
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000

Μετά την ανάλυση των διαφόρων μοντέλων με τη βοήθεια του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων SAP 2000, παρακάτω παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα για σχολιασμό.

Αρχικά παρουσιάζεται η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ανάλογα το τρόπο στήριξης του γεωμετρικού μοντέλου της πλάκας σάντουιτς και ιδιαίτερα διακρίνονται οι περιπτώσεις ανάλογα τη διαστρωμάτωση και το πάχος του αφρώδη πυρήνα.

Μοντέλα με στήριξη κόμβων στα άκρα με πάκτωση (Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1 Απεικόνιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με στηρίξεις καθ' ύψος της διατομής της πλάκας σάντουιτς

Ενώ παρακάτω παρουσιάζεται ο Πίνακας 6.1 με τα αποτελέσματα των αναλύσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τη διαμόρφωση του παραπάνω διαγράμματος.

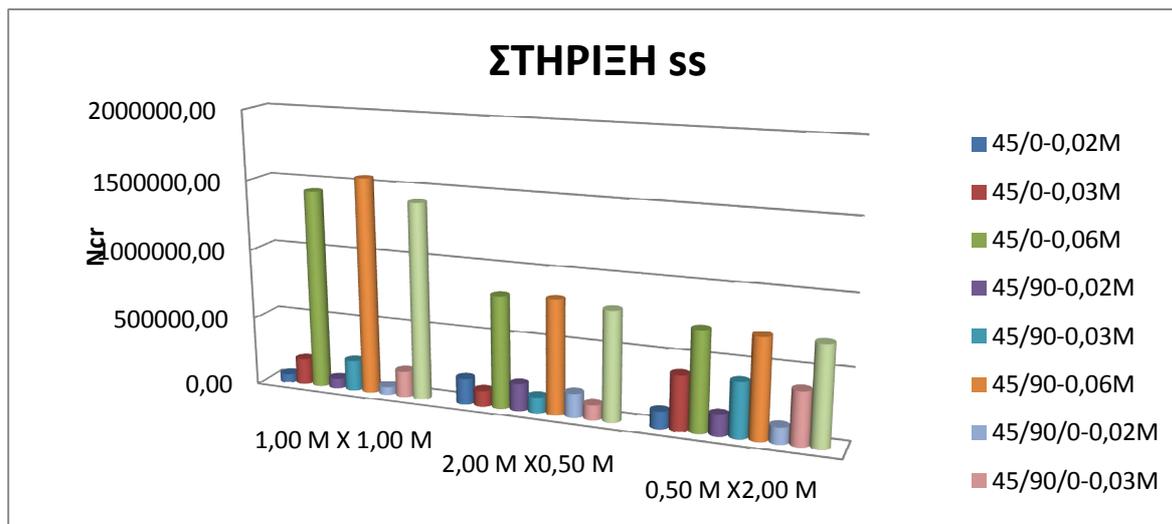
**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,02Μ					
	45/0-0,02Μ		45/90-0,02Μ		45/90/0-0,02Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,006403	73107,63	0,005949	84526,300	0,006566	69406,344
2,00 Μ Χ 0,50 Μ	0,002209	370126,59	0,002171	383246,590	0,002130	346184,863
0,50 Μ Χ 2,00 Μ	0,007337	117618,90	0,007372	145361,540	0,007420	112291,102
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,03Μ					
	45/0-0,03Μ		45/90-0,03Μ		45/90/0-0,03Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,003857	229365,36	0,003657	254717,10	0,003926	221083,51
2,00 Μ Χ 0,50 Μ	0,001360	221190,67	0,001343	226890,15	0,001391	210963,22
0,50 Μ Χ 2,00 Μ	0,006591	376532,15	0,006614	413742,02	0,006643	364664,79
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,06Μ					
	45/0-0,06Μ		45/90-0,06Μ		45/90/0-0,06Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,001678	1657178,4	0,001630	1753697,14	0,001694	1625082,10
2,00 Μ Χ 0,50 Μ	0,000995	1472710,7	0,000986	1492915,97	0,000997	1435654,32
0,50 Μ Χ 2,00 Μ	0,005632	779312,1	0,005642	776425,01	0,005655	772693,79

Πίνακας 6.1 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού και 1^η ιδιομορφή λυγισμού πλάκας με στηρίξεις καθ' ύψος της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς(built-in)

Στο επόμενο Σχήμα 6.2 και Πίνακας 6.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη περίπτωση στήριξης με τον ίδιο τρόπο, στα άκρα της πλάκας, αλλά μόνο στο κεντρικό κόμβο καθ' ύψος αυτής όπως προέκυψε από την διακριτοποίηση του μοντέλου.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 6.2 Απεικόνιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με στηρίξεις στο μεσαίο κόμβο της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς

	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,02M					
	45/0-0,02M		45/90-0,02M		45/90/0-0,02M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,008051	59102,78	0,007261	72878,260	0,007261	56454,187
2,00 M X 0,50 M	0,003407	189490,41	0,003338	197306,69	0,003338	177284,529
0,50 M X 2,00 M	0,007617	123881,91	0,007647	149770,27	0,007647	118538,645
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,03M					
	45/0-0,03M		45/90-0,03M		45/90/0-0,03M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,004784	191110,50	0,004444	221938,79	0,004861	185175,55
2,00 M X 0,50 M	0,002082	116182,29	0,002051	119715,18	0,002132	110793,44
0,50 M X 2,00 M	0,006909	393040,80	0,006930	393146,71	0,006960	381265,02
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,06M					
	45/0-0,06M		45/90-0,06M		45/90/0-0,06M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,002047	1433966,51	0,001968	1553630,62	0,002064	1410835,71
2,00 M X 0,50 M	0,001447	810744,27	0,001439	823887,89	0,001448	790431,03
0,50 M X 2,00 M	0,006080	716339,96	0,006090	713433,77	0,006101	710647,91

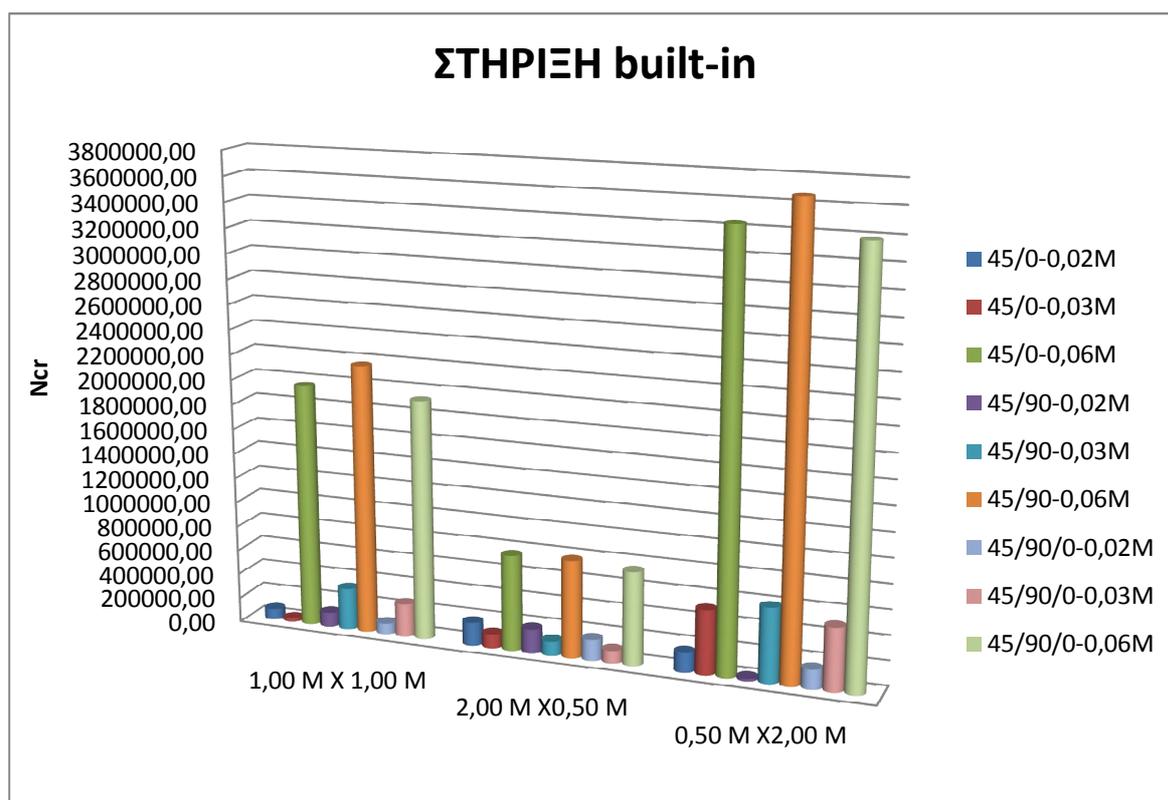
Πίνακας 6.2 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού και Iⁿ ιδιομορφή λυγισμού πλάκας με στηρίξεις στο μεσαίο κόμβο της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς (ss)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα διαπιστώνουμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού N_{cr} λαμβάνει παρόμοιες τιμές και μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο για τις περιπτώσεις όπου το πάχος του πυρήνα είναι 0,02m και 0,03m ενώ σημαντική πτώση των τιμών παρουσιάζεται στη περίπτωση του πυρήνα πάχους 0,06m. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι η αυξομείωση του ανάλογα το γεωμετρικό μοντέλο είναι ποιοτικά ίδια.

Μοντέλα με στήριξη κόμβων στη μέση με πάκτωση

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα και πίνακες με τα αποτελέσματα των αναλύσεων για στηρίξεις κόμβων στη μέση με πάκτωση. (Σχήμα 6.3, Πίνακας 6.3 και Σχήμα 6.4, Πίνακας 6.4).



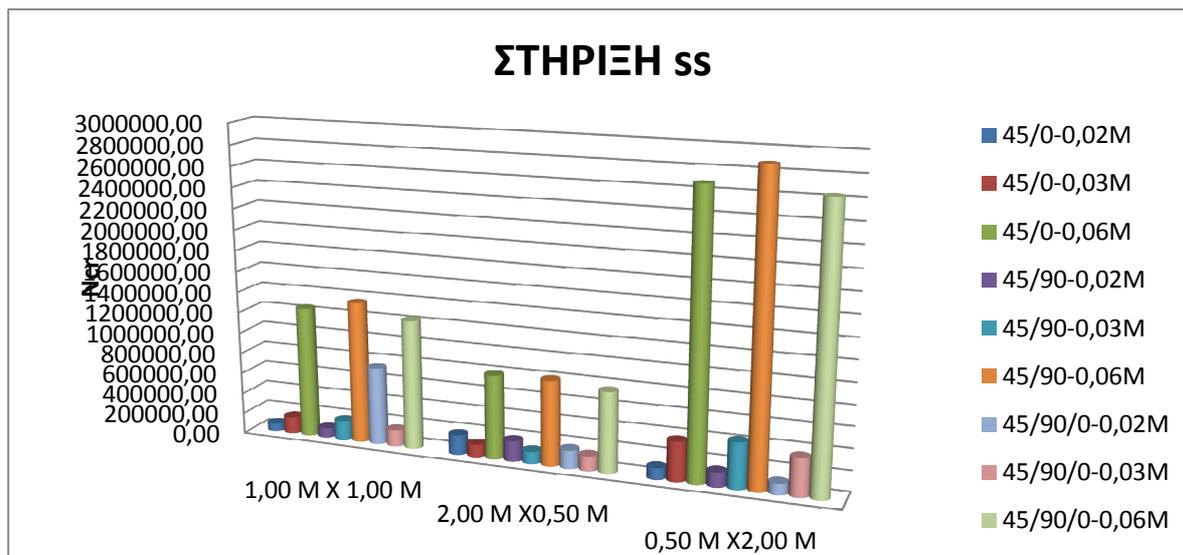
Σχήμα 6.3 Απεικόνιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με στηρίξεις καθ' ύψος της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,02Μ					
	45/0-0,02Μ		45/90-0,02Μ		45/90/0-0,02Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,005880	89600,04	0,005079	117752,00	0,006006	85721,63
2,00 Μ Χ0,50 Μ	0,003372	184520,34	0,003294	193117,72	0,003484	172722,36
0,50 Μ Χ2,00 Μ	0,002491	165288,96	0,001959	20695,89	0,002552	158131,54
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,03Μ					
	45/0-0,03Μ		45/90-0,03Μ		45/90/0-0,03Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,003545	27899,07	0,003198	338561,26	0,003596	270564,36
2,00 Μ Χ 0,50 Μ	0,002060	111651,88	0,002026	115399,72	0,002108	106494,85
0,50 Μ Χ 2,00 Μ	0,001456	523456,50	0,001230	603714,62	0,001478	507630,59
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,06Μ					
	45/0-0,06Μ		45/90-0,06Μ		45/90/0-0,06Μ	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 Μ Χ 1,00 Μ	0,001558	1964961,10	0,001479	2169991,94	0,001569	1933898,21
2,00 Μ Χ 0,50 Μ	0,001534	773193,70	0,001516	787297,62	0,001537	753275,00
0,50 Μ Χ 2,00 Μ	0,000663	3445204,42	0,000670	3671019,49	0,000665	3388086,09

Πίνακας 6.3 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού και 1^η ιδιομορφή λυγισμού πλάκας με στηρίξεις καθ' ύψος της διατομής της πλάκας σάντουιτς(built-in)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



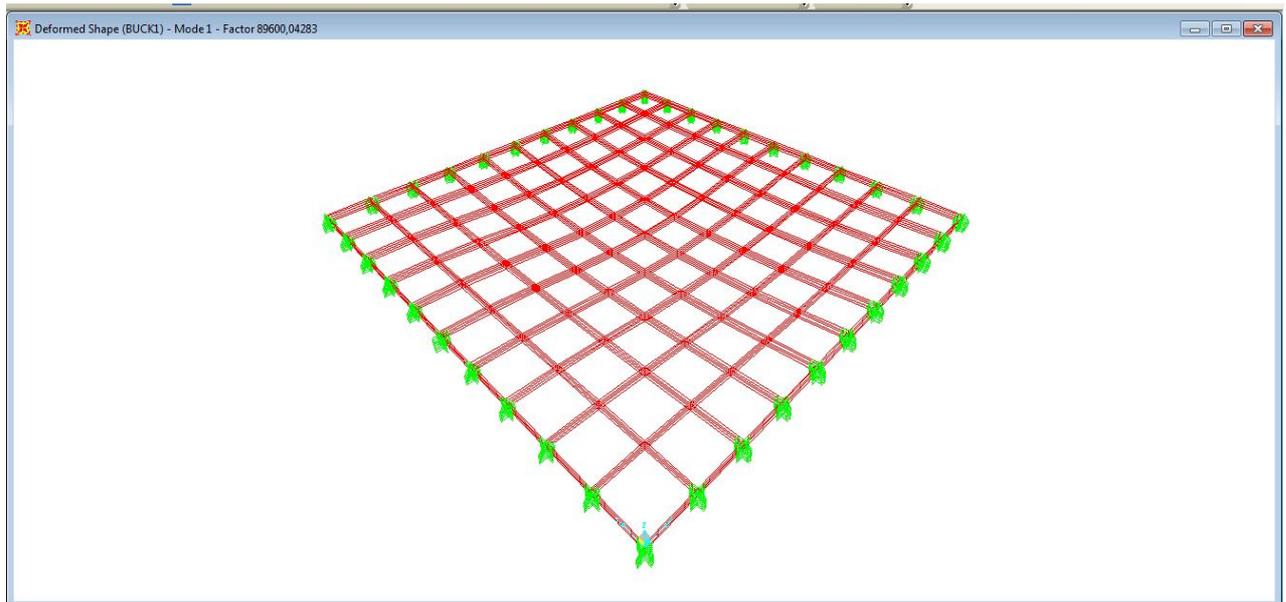
Σχήμα 6.4 Απεικόνιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με στηρίξεις στο μεσαίο κόμβο της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς

	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,02M					
	45/0-0,02M		45/90-0,02M		45/90/0-0,02M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,008051	78784,45	0,007261	92149,78	0,008240	750488,64
2,00 M X 0,50 M	0,003407	187952,91	0,003522	195509,04	0,003338	175857,96
0,50 M X 2,00 M	0,004081	115273,53	0,004188	146107,32	0,003167	110387,75
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,03M					
	45/0-0,03M		45/90-0,03M		45/90/0-0,03M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,004784	165097,71	0,004444	190823,50	0,004861	159989,07
2,00 M X 0,50 M	0,002082	114860,26	0,002051	118284,58	0,002132	145588,03
0,50 M X 2,00 M	0,002352	380468,66	0,001969	439999,57	0,002392	369438,97
	ΠΥΡΗΝΑΣ 0,06M					
	45/0-0,06M		45/90-0,06M		45/90/0-0,06M	
	Ts	Ncr	Ts	Ncr	Ts	Ncr
1,00 M X 1,00 M	0,002047	1258301,36	0,001968	1362318,33	0,002064	1237852,61
2,00 M X 0,50 M	0,001774	802669,42	0,001749	815520,49	0,001777	773447,71
0,50 M X 2,00 M	0,00984	2683851,74	0,000972	2882551,45	0,000992	2642399,23

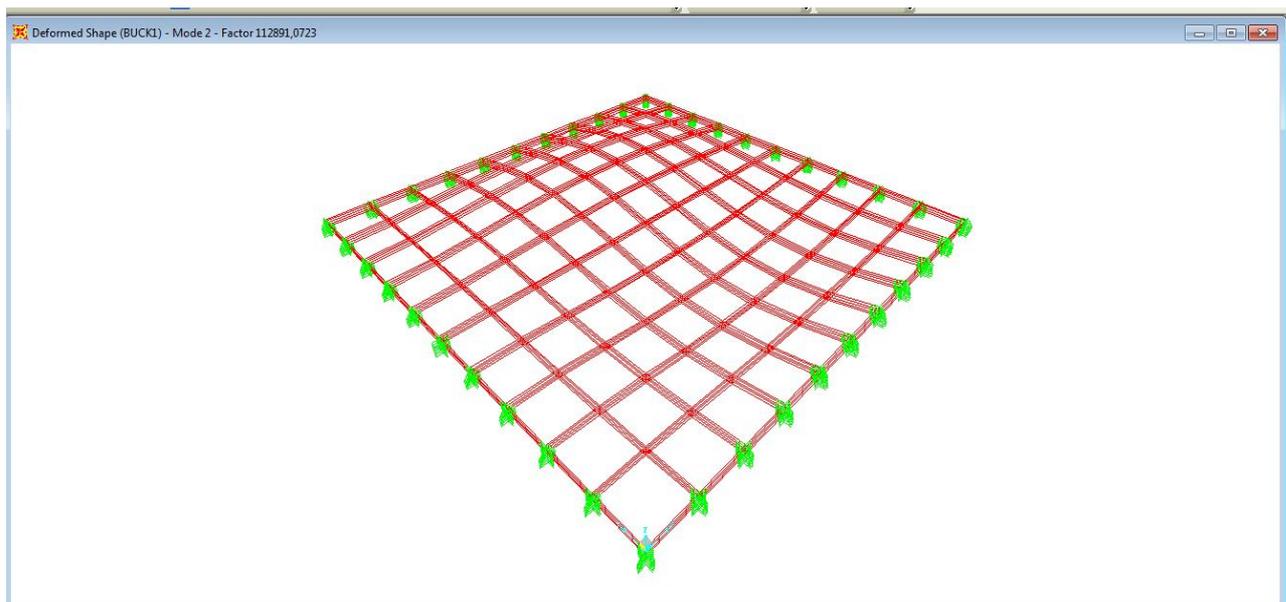
Πίνακας 6.4 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού και Iⁿ ιδιομορφή λυγισμού πλάκας με στηρίξεις στο μεσαίο κόμβο της διατομής της πλάκας τύπου σάντουιτς

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Με τη βοήθεια του προγράμματος SAP 2000 μπορούμε να εξάγουμε διάφορα χρήσιμα αποτελέσματα για τη συμπεριφορά μιας πλάκας σάντουιτς υπό τη φόρτιση κινητού φορτίου. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο παραμορφώνεται η πλάκα στις πρώτες δύο ιδιομορφές λυγισμού (Σχήμα 6.5 και Σχήμα 6.6).



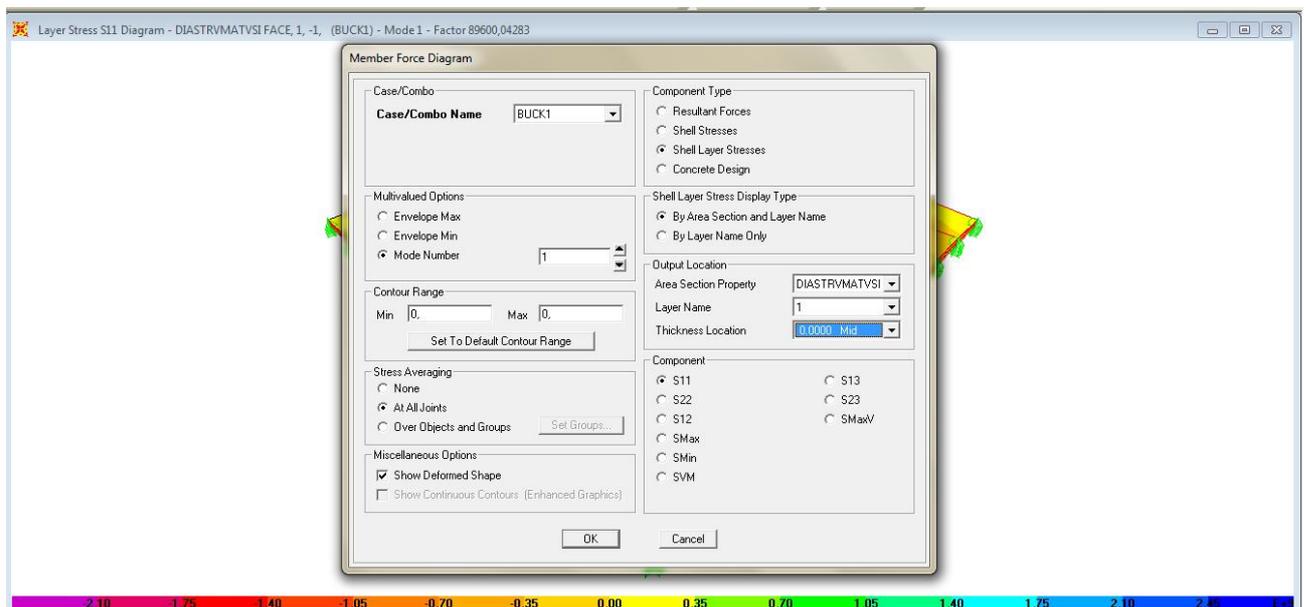
Σχήμα 6.5 Απεικόνιση συμπεριφοράς παραμόρφωσης στη 1^η ιδιοτιμή λυγισμού



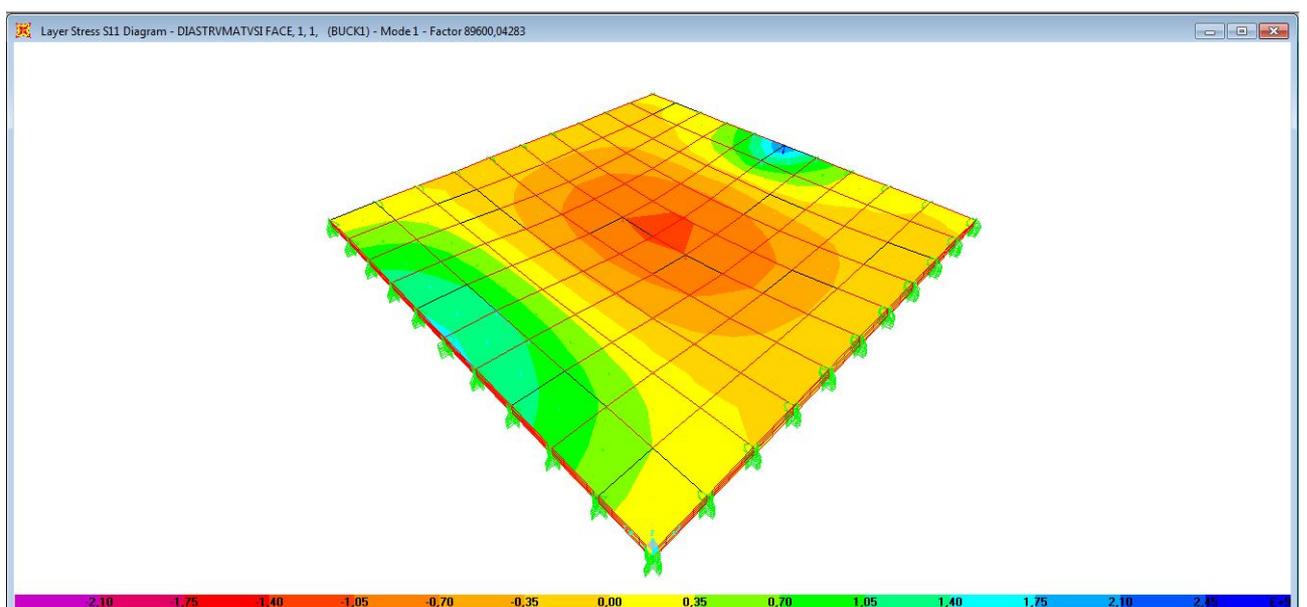
Σχήμα 6.6 Απεικόνιση συμπεριφοράς παραμόρφωσης στη 2^η ιδιοτιμή λυγισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 6.7, Σχήμα 6.8, Σχήμα 6.9, Σχήμα 6.10 και Σχήμα 6.11) παρουσιάζονται στοιχεία για τη συμπεριφορά των στοιχείων που προσομοιάστηκαν ως επιφανειακά στοιχεία δηλαδή οι συμμετρικές διαστρωματώσεις σε διάφορα ύψη της διαστρωμάτωσης καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται μέσω από το μενού του προγράμματος SAP 2000.

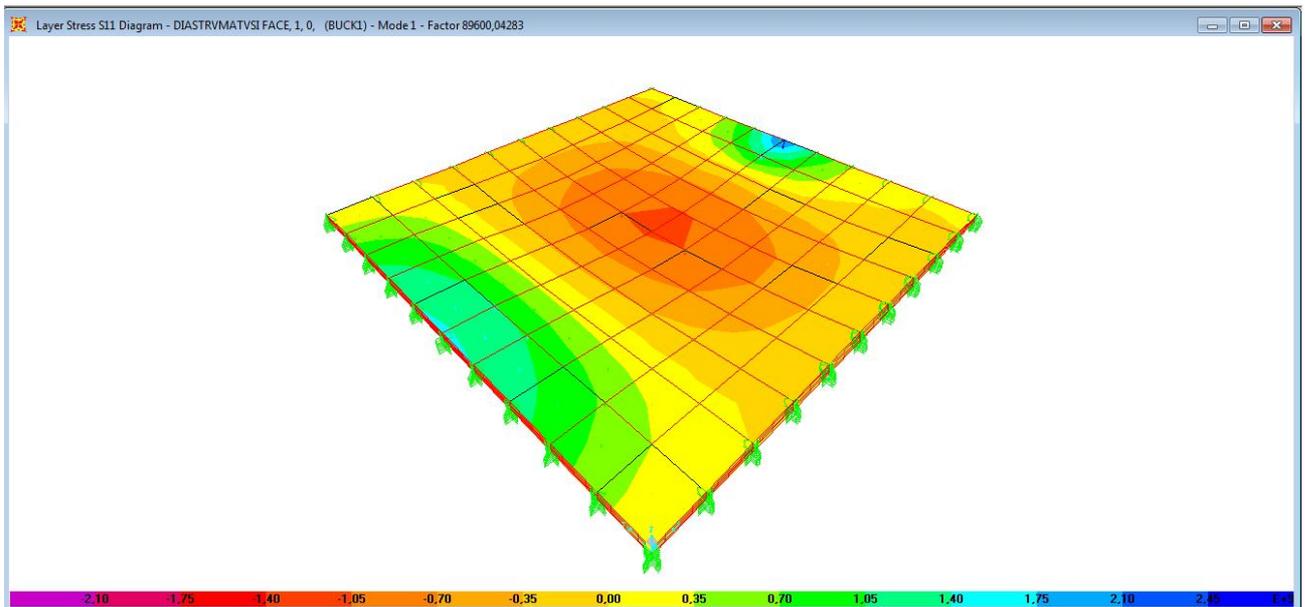


Σχήμα 6.7 Απεικόνιση μενού SAP2000 για επιλογή αποτελεσμάτων επιφανειακών στοιχείων

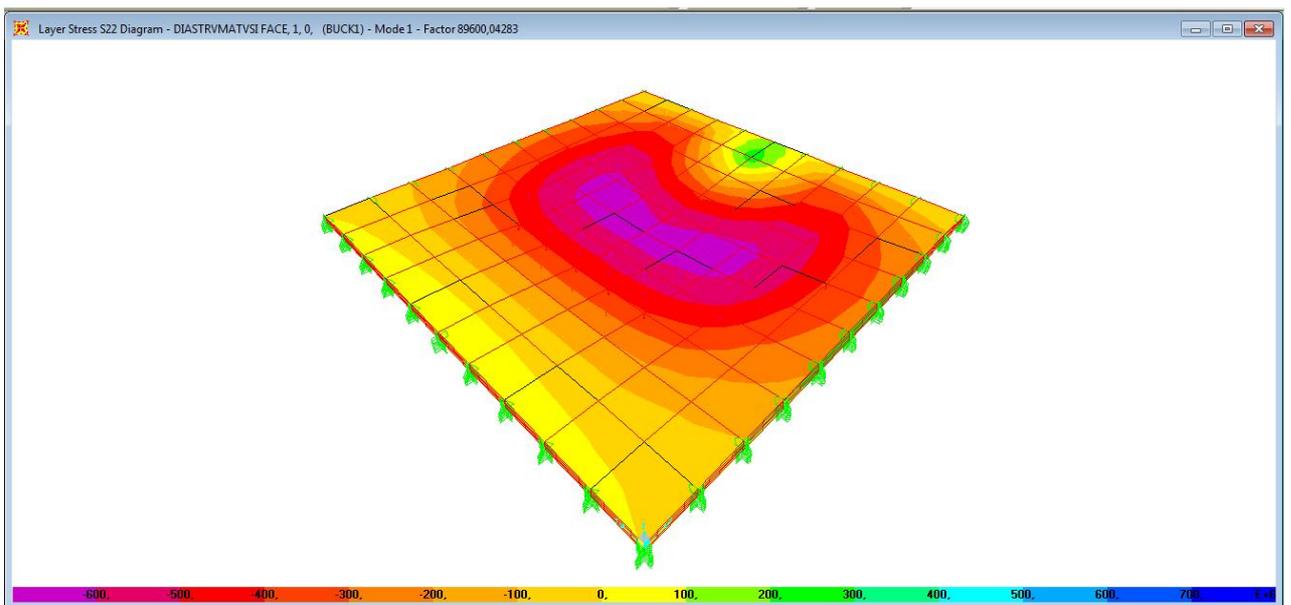


Σχήμα 6.8 Απεικόνιση τάσεων S_{11} πάνω στρώσης διαστρωμάτωσης επιφανειακών στοιχείων

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

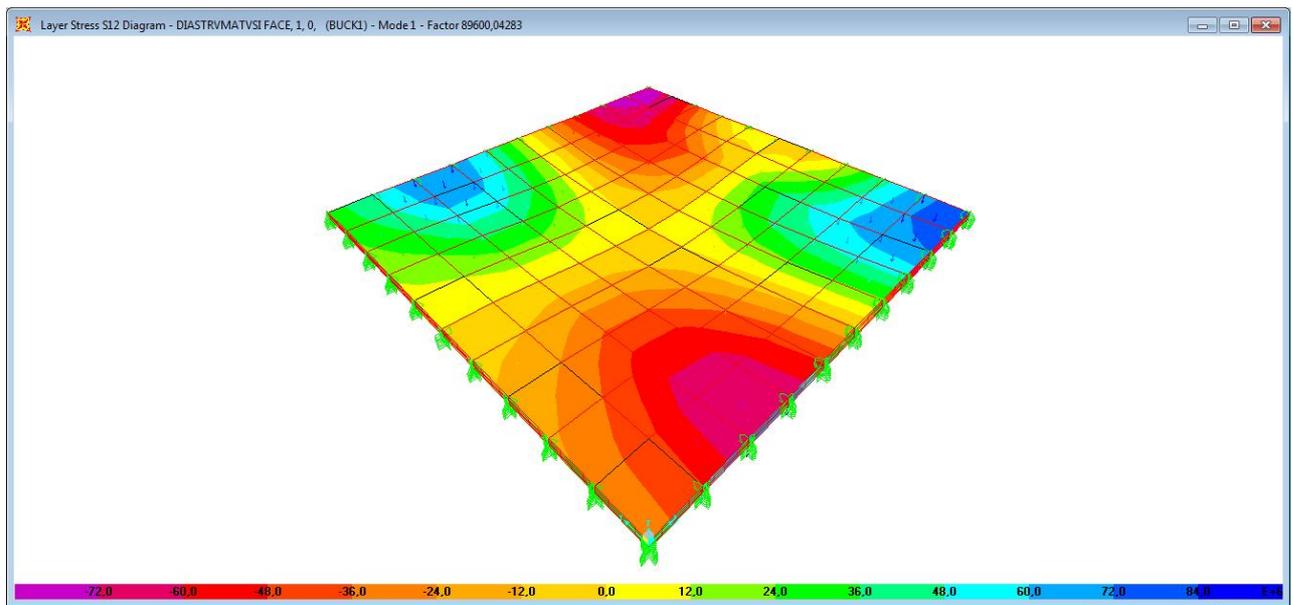


Σχήμα 6.9 Απεικόνιση τάσεων S_{11} κάτω στρώσης διαστρωμάτωσης επιφανειακών στοιχείων



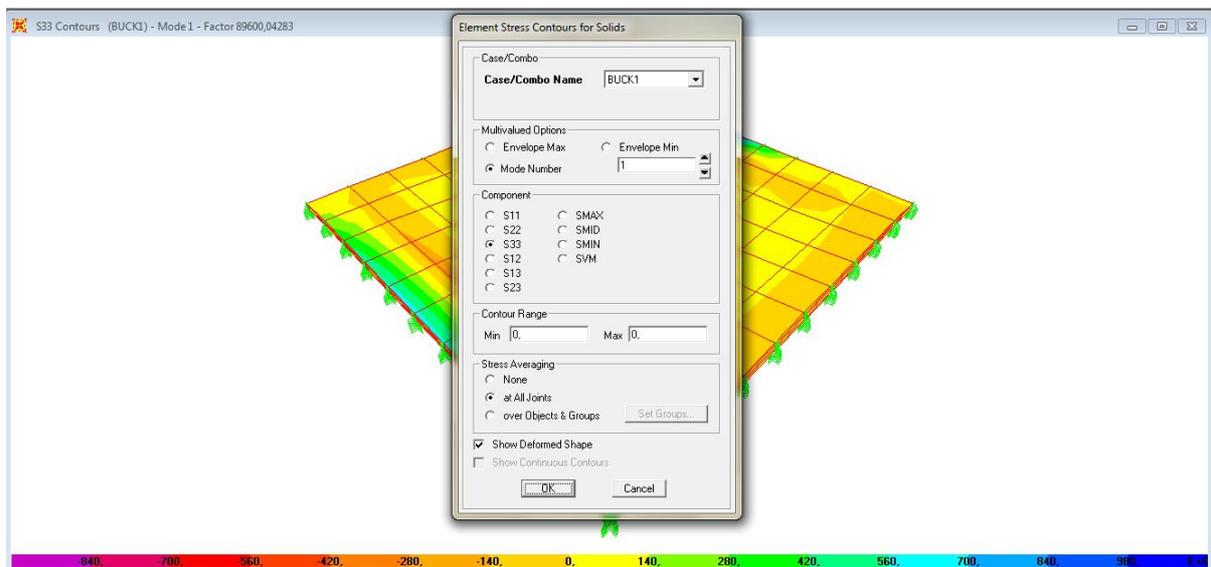
Σχήμα 6.10 Απεικόνιση τάσεων S_{22} κάτω στρώσης διαστρωμάτωσης επιφανειακών στοιχείων

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



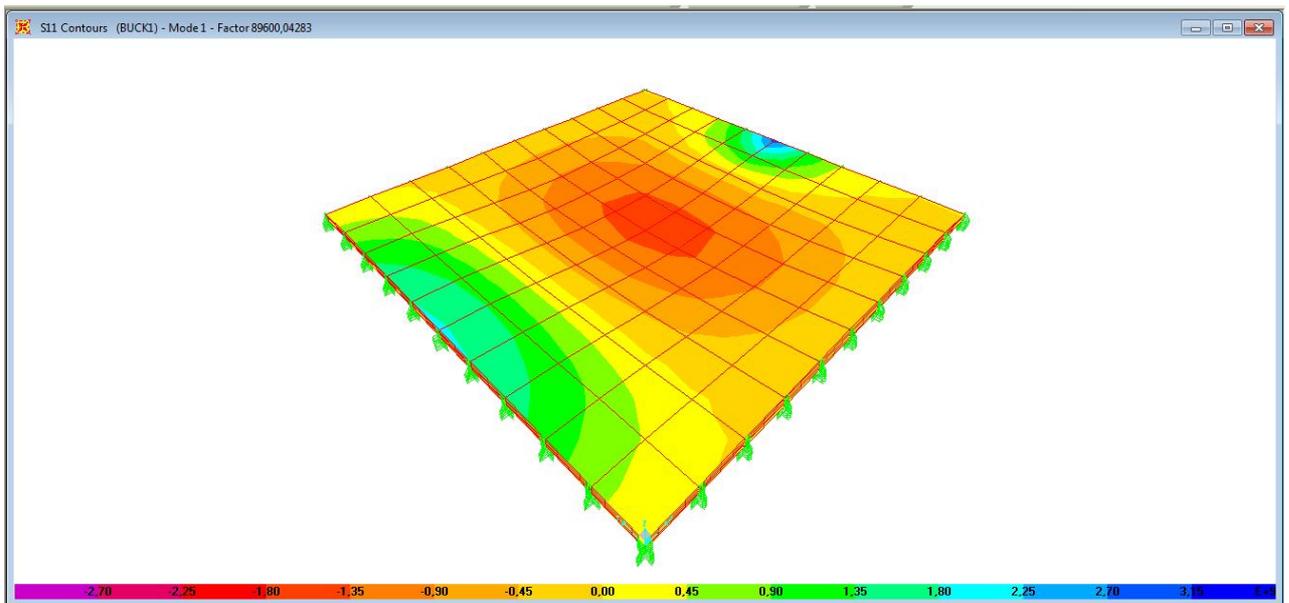
Σχήμα 6.11 Απεικόνιση τάσεων S_{12} κάτω στρώσης διαστρωμάτωσης επιφανειακών στοιχείων

Στα σχήματα (Σχήμα 6.12, Σχήμα 6.13, Σχήμα 6.14 και Σχήμα 6.15) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συμπεριφοράς των στοιχείων που προσομοιάστηκαν ως στερεά στοιχεία δηλαδή ο αφρώδης πυρήνας καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται μέσω από το μενού του προγράμματος SAP 2000.

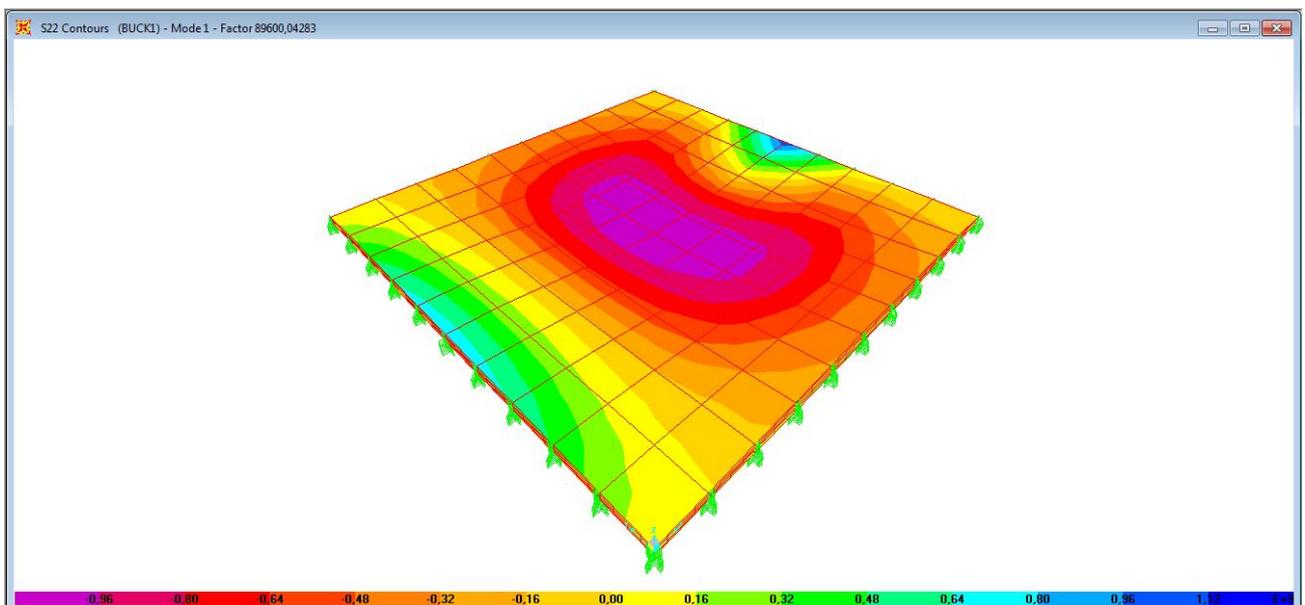


Σχήμα 6.12 Απεικόνιση μενού SAP2000 για επιλογή αποτελεσμάτων στερεών στοιχείων

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

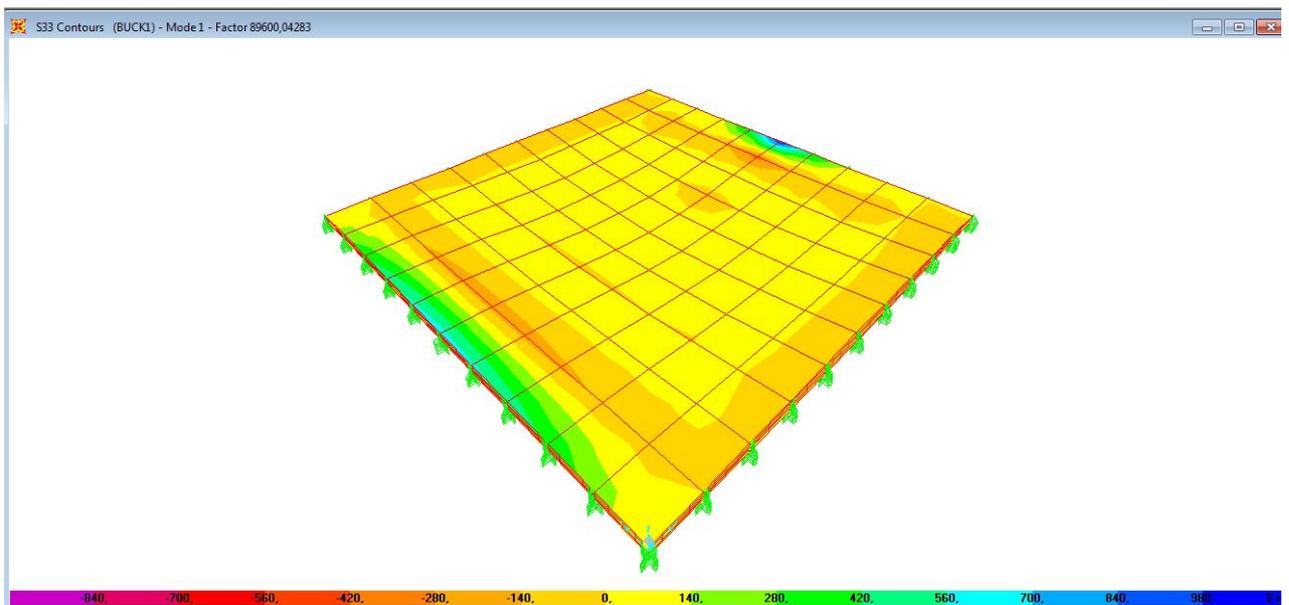


Σχήμα 6.13 Απεικόνιση τάσεων S_{11} στερεών στοιχείων αφρώδη πυρήνα

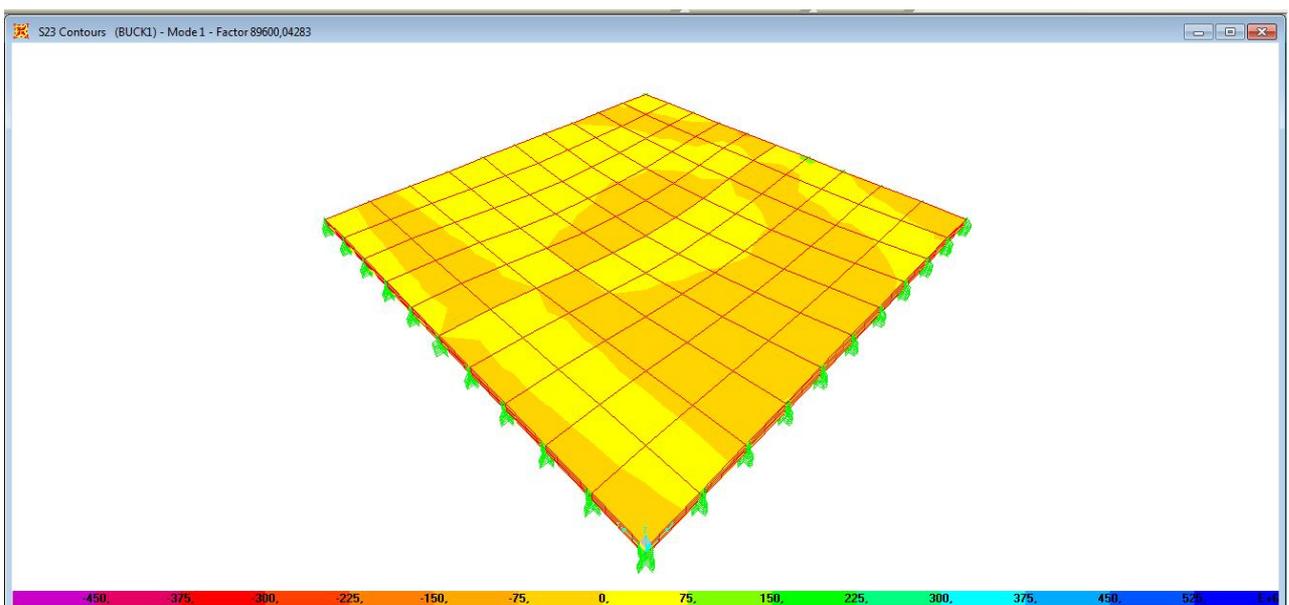


Σχήμα 6.14 Απεικόνιση τάσεων S_{22} στερεών στοιχείων αφρώδη πυρήνα

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



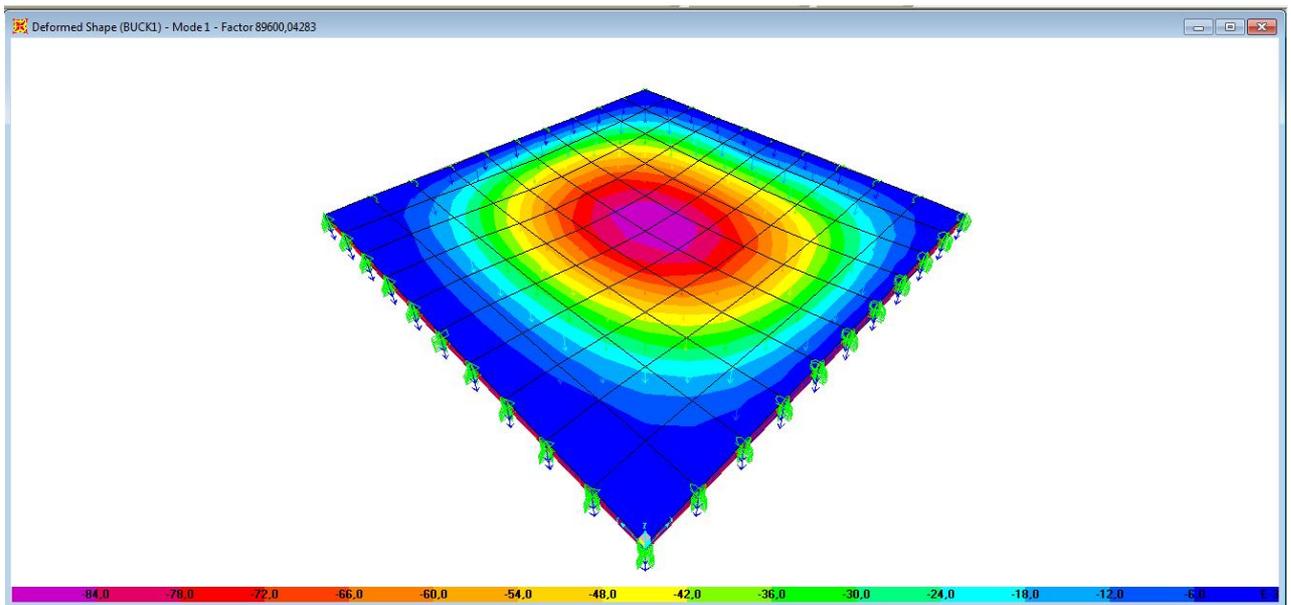
Σχήμα 6.15 Απεικόνιση τάσεων S_{33} στερεών στοιχείων αφρώδη πυρήνα



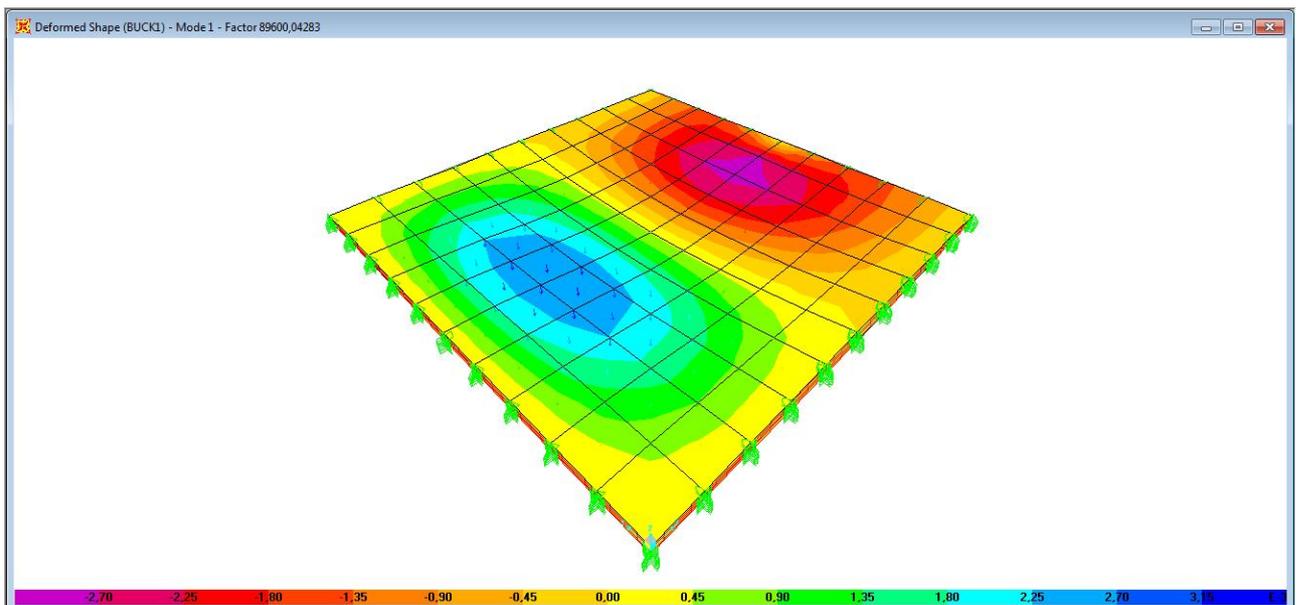
Σχήμα 6.16 Απεικόνιση τάσεων S_{23} στερεών στοιχείων αφρώδη πυρήνα

Στα σχήματα (Σχήμα 6.17, Σχήμα 6.18 και Σχήμα 6.19) απεικονίζονται οι μέγιστες μετατοπίσεις-βυθίσεις της πλάκας σάντουιτς στους τρεις άξονες z-x-y μέσω του μενού του προγράμματος SAP 2000. Ενώ στα Σχήμα 6.20 και Σχήμα 6.21 παρουσιάζονται τα εντατικά μεγέθη σε μια τομή της πλάκας σάντουιτς.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

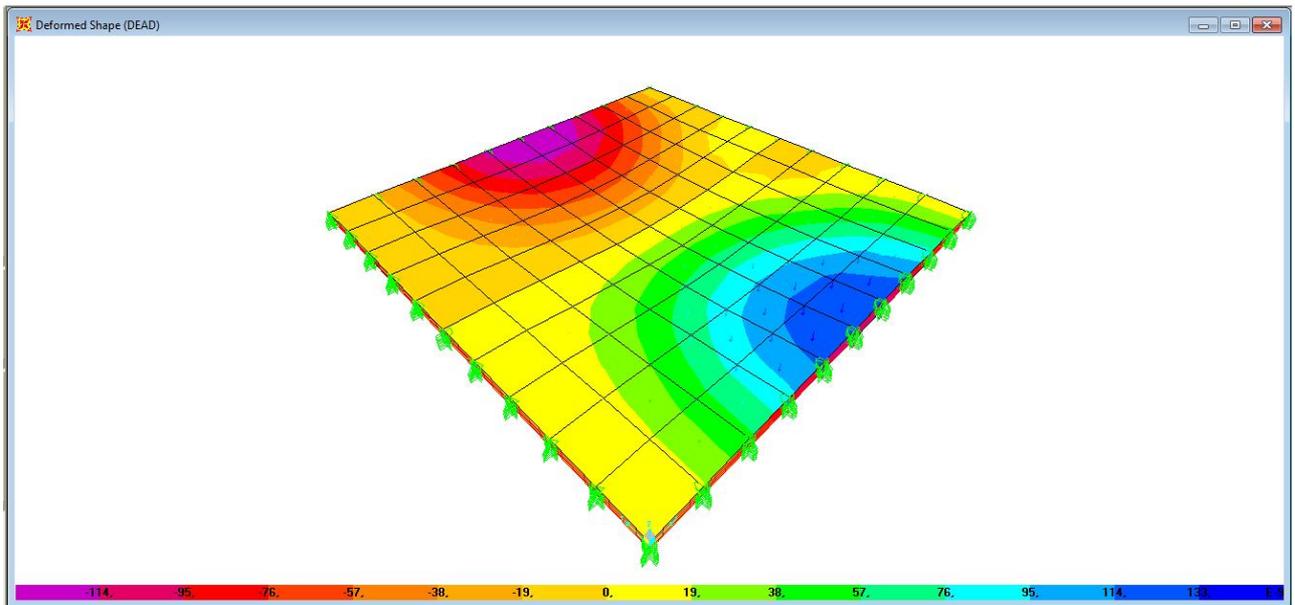


Σχήμα 6.17 Απεικόνιση μέγιστων βυθίσεων κατά τον άξονα z υπό τη φόρτιση του φορτίου λυγισμού

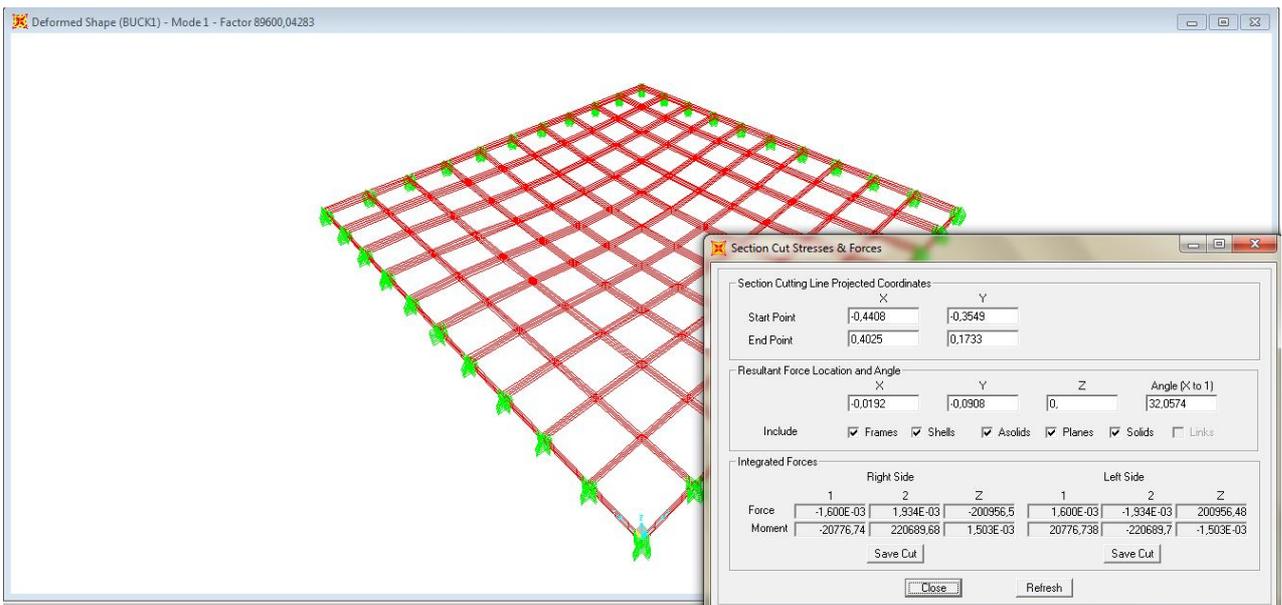


Σχήμα 6.18 Απεικόνιση μέγιστων βυθίσεων κατά τον άξονα x υπό τη φόρτιση του φορτίου λυγισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

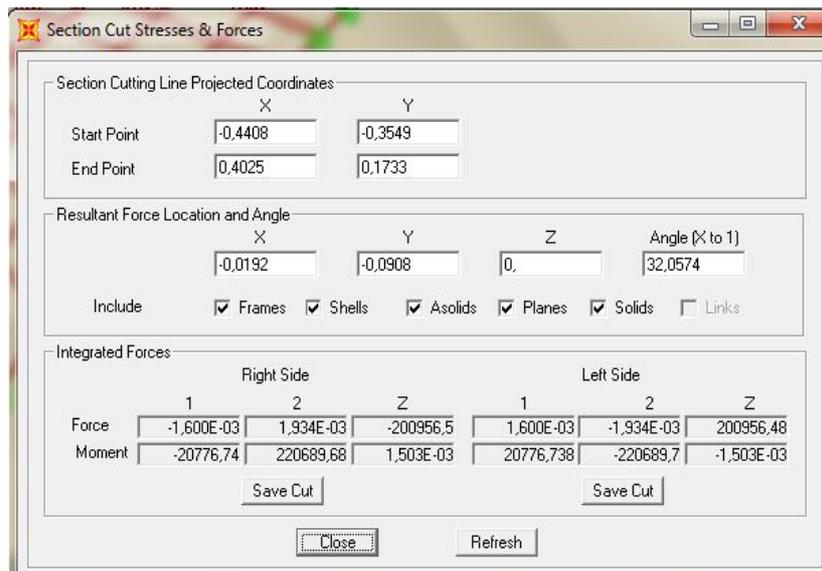


Σχήμα 6.19 Απεικόνιση μέγιστων βυθίσεων κατά τον άξονα y υπό τη φόρτιση του φορτίου λυγισμού



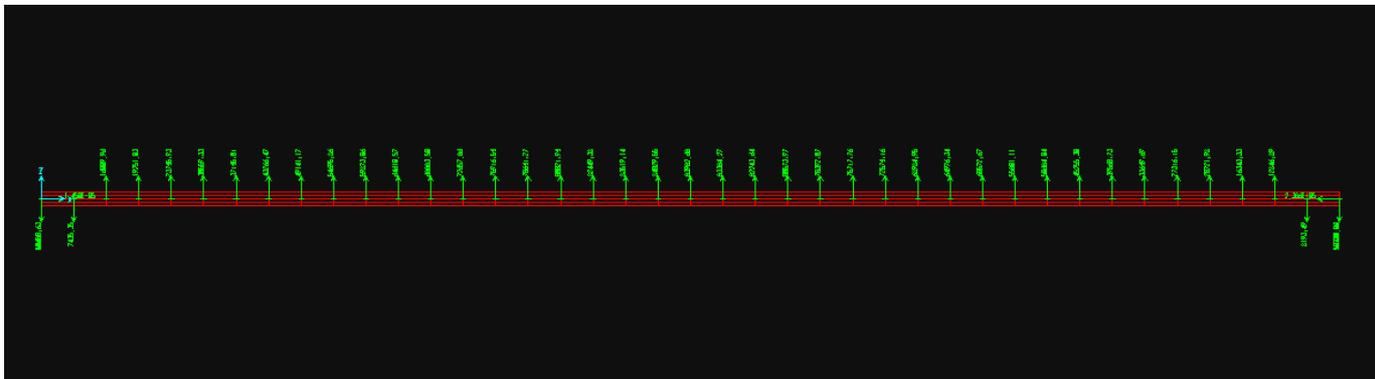
Σχήμα 6.20 Απεικόνιση μέγιστων βυθίσεων κατά τον άξονα y υπό τη φόρτιση του φορτίου λυγισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



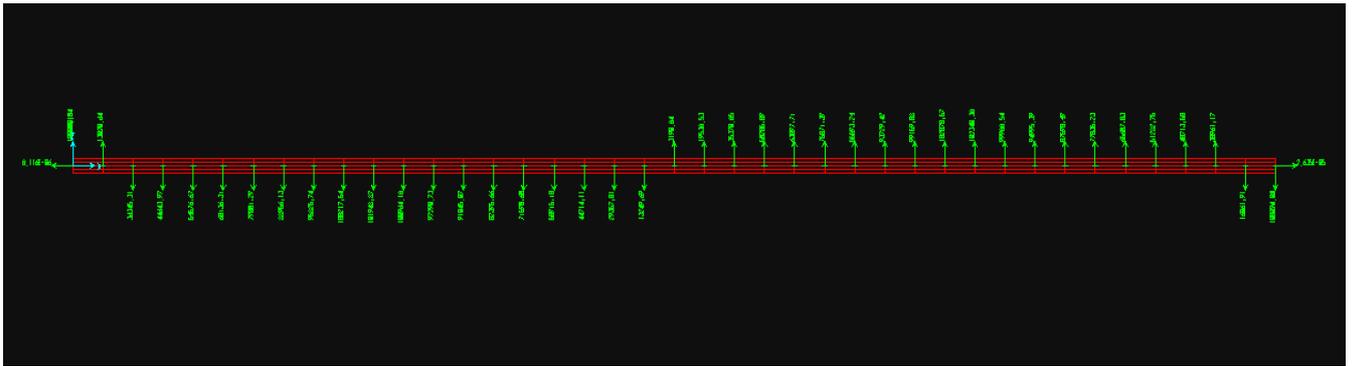
Σχήμα 6.21 Εντατικά μεγέθη τομής πλάκας σάντουιτς

Τέλος μέσω του μενού του προγράμματος SAP 2000 και ειδικότερα της εντολής Display → Show Forces/Stresses → Joints μπορούμε να δούμε τη φορά και το μέγεθος των δυνάμεων στις στηρίξεις των μοντέλων. Παρακάτω παρουσιάζεται για το μοντέλο 2 (2,00 m x 0,50 m) με πάχος αφρώδη πυρήνα 0,02 m για τις 3 πρώτες ιδιομορφές λυγισμού στην όψη της μεγαλύτερης ακμής (Σχήμα 6.22, Σχήμα 6.23 και Σχήμα 6.24).

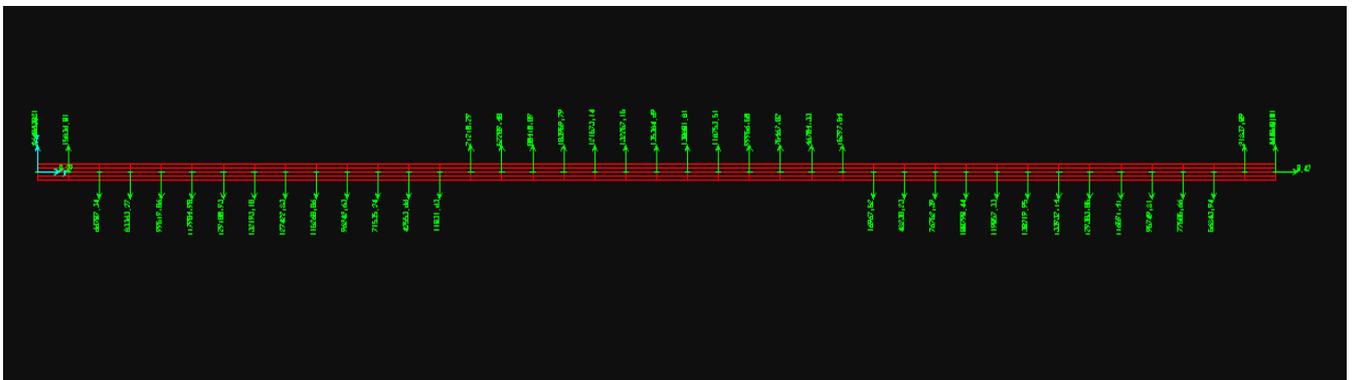


Σχήμα 6.22 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων 2,00 m x 0,50 m, πάχος πυρήνα 0,02 m, όψη παράλληλη στον άξονα y, διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου ss, 1^η ιδιομορφή λυγισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



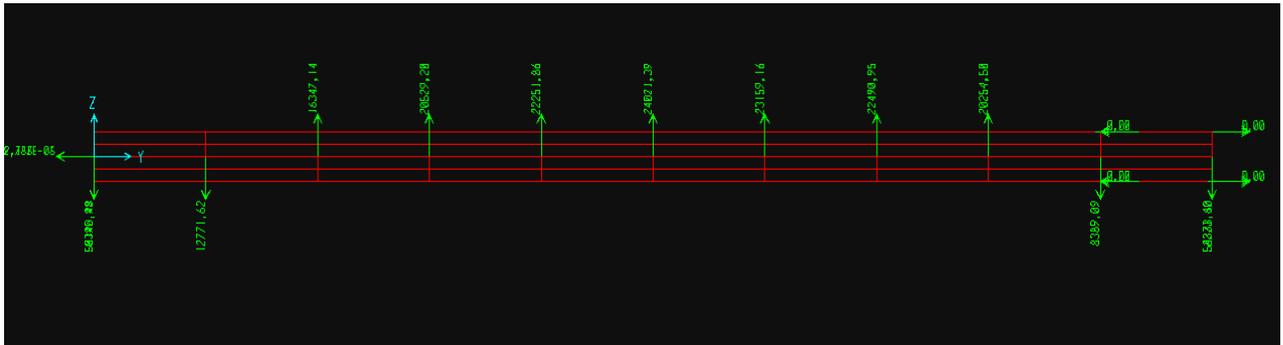
Σχήμα 6.23 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων $2,00\text{ m} \times 0,50\text{ m}$, πάχους πυρήνα $0,02\text{ m}$, όψη παράλληλη στον άξονα y , διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου ss , 2^η ιδιομορφή λυγισμού



Σχήμα 6.24 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων $2,00\text{ m} \times 0,50\text{ m}$, πάχους πυρήνα $0,02\text{ m}$, όψη παράλληλη στον άξονα y , διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου ss , 3^η ιδιομορφή λυγισμού

Με βάση τα παραπάνω σχήματα μπορούμε να διαπιστώσουμε διαφορετική φόρτιση η οποία προκαλεί κυματισμό της άνω και κάτω διαστρωμάτωσης διαφορετικής μορφής ανάλογα την ιδιομορφή. Αυτό ο κυματισμός είναι πρόδρομος τοπικού λυγισμού και στο παραπάνω μοντέλο ισούται με μισό μήκος κύματος στον άξονα y (μεγαλύτερη ακμή μήκους 2 m). Έτσι συγκρίνοντας το με το συνολικό ύψος της πλάκας τύπου σάντουιτς $h=0,02\text{ m}$ ο λόγος $l/h=2/0,02=100 \gg 1$. Γεγονός που δείχνει ότι το πλάτος κύματος είναι μακρύ. Μελετώντας και την άλλη ακμή της πλάκας για το κρίσιμο φορτίο διαπιστώνουμε επίσης ότι το κύμα ταξιδεύει και σε αυτήν την ακμή και το πλάτος κύματος είναι μακρύ επίσης $l/h=0,05/0,02=2,5 > 1$ (Σχήμα 6.25) σε αντίθεση με τη περίπτωση αφρώδη πυρήνα πάχους $0,06\text{ m}$ όπου ο κυματισμός είναι κοντός.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

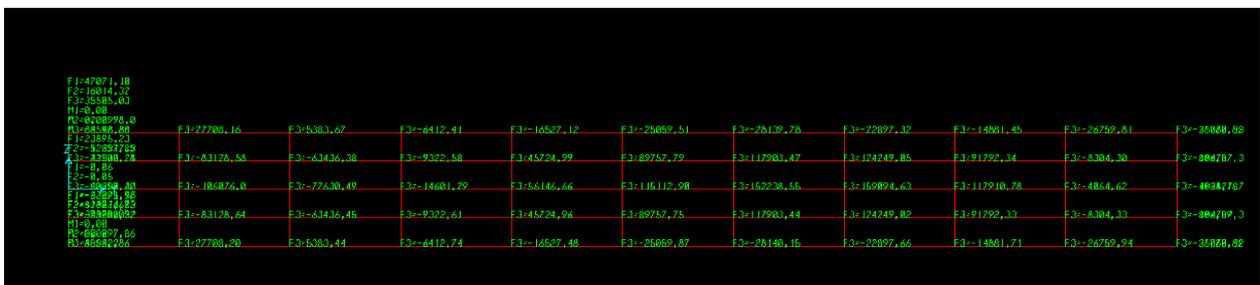


Σχήμα 6.25 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων 2,00 m x 0,50 m, πάχους πυρήνα 0,02 m, όψη παράλληλη στον άξονα x, διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου ss, 1^η ιδιομορφή λυγισμού

Επιπρόσθετα αξίζει να σημειωθεί ότι οι δυνάμεις που δρουν στις όψεις των ακμών διαφέρουν ανάλογα με τον τρόπο στήριξης τους (ss, built-in) γεγονός που οδηγεί σε διαφορετικό κυματισμό των διαστρωματώσεων. Παρακάτω (Σχήμα 6.26 και Σχήμα 6.27) παρουσιάζονται οι δυνάμεις στην ακμή της πλάκας που είναι παράλληλη στον άξονα x για τις δύο περιπτώσεις στήριξης ss και built-in. Στη περίπτωση ss μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μέγεθος αυτών των δυνάμεων είναι σημαντικά μεγαλύτερο άρα αναμένετε ο κυματισμός της άνω και κάτω διαστρωμάτωσης της όψεως να είναι πιο έντονος και οι μετακινήσεις των κόμβων μεγαλύτερες.



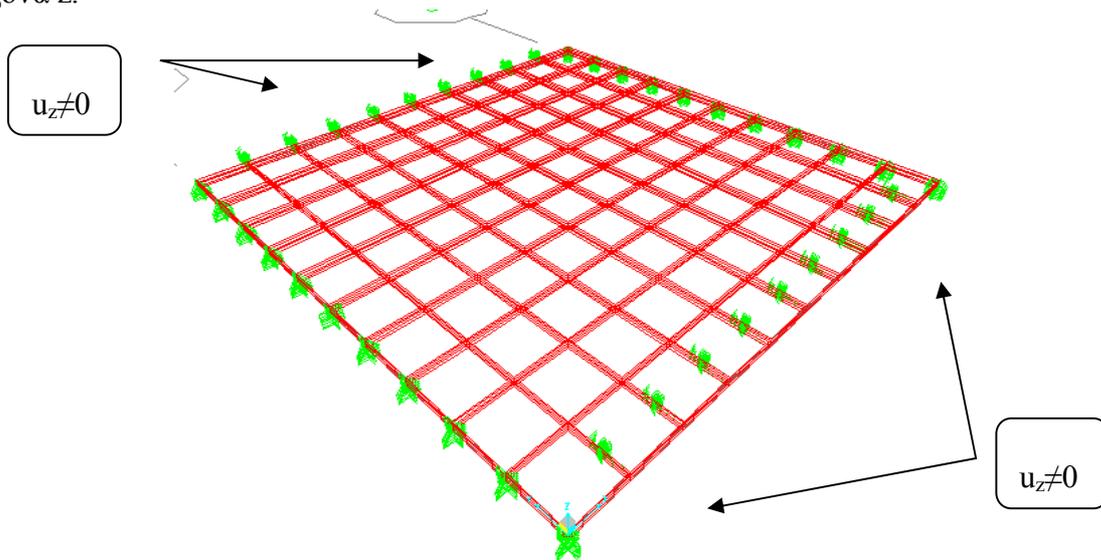
Σχήμα 6.26 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων 2,00 m x 0,50 m, πάχους πυρήνα 0,06 m, όψη παράλληλη στον άξονα x, διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου ss, 1^η ιδιομορφή λυγισμού



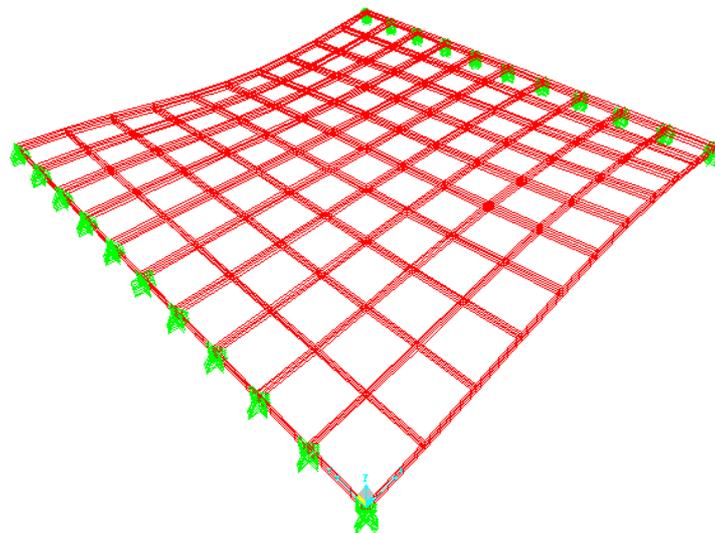
Σχήμα 6.27 Μέγεθος στηρίξεων κόμβων μοντέλου διαστάσεων 2,00 m x 0,50 m, πάχους πυρήνα 0,06 m, όψη παράλληλη στον άξονα x, διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη τύπου built-in, 1^η ιδιομορφή λυγισμού

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Για την διερεύνηση του φαινομένου της ρυτίδωσης των ακμών πλακών τύπου σάντουιτς, της μετακίνησης των κόμβων ακμών των γεωμετρικών μοντέλων διαμορφώθηκαν επιπλέον μοντέλα στα οποία οι κόμβοι ακμών απελευθερώθηκαν και κατά τον άξονα z. Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 6.28, Σχήμα 6.29, Σχήμα 6.30 και Σχήμα 6.31) παρουσιάζεται η στήριξη της πλάκας (διαστάσεων 1,00 m x 1,00 m με συμμετρική διαστρωμάτωση 45/0, στήριξη στη μέση της πλάκας), η φόρτιση της καθώς επίσης η πρώτη ιδιομορφή λυγισμού ($T=0,0041\text{sec}$ $N_{cr}=90000$) και η σχηματική απεικόνιση της μετακίνησης των κόμβων ακμών κατά τον άξονα z.



Σχήμα 6.28 Στήριξη και φόρτιση πλάκα τύπου σάντουιτς

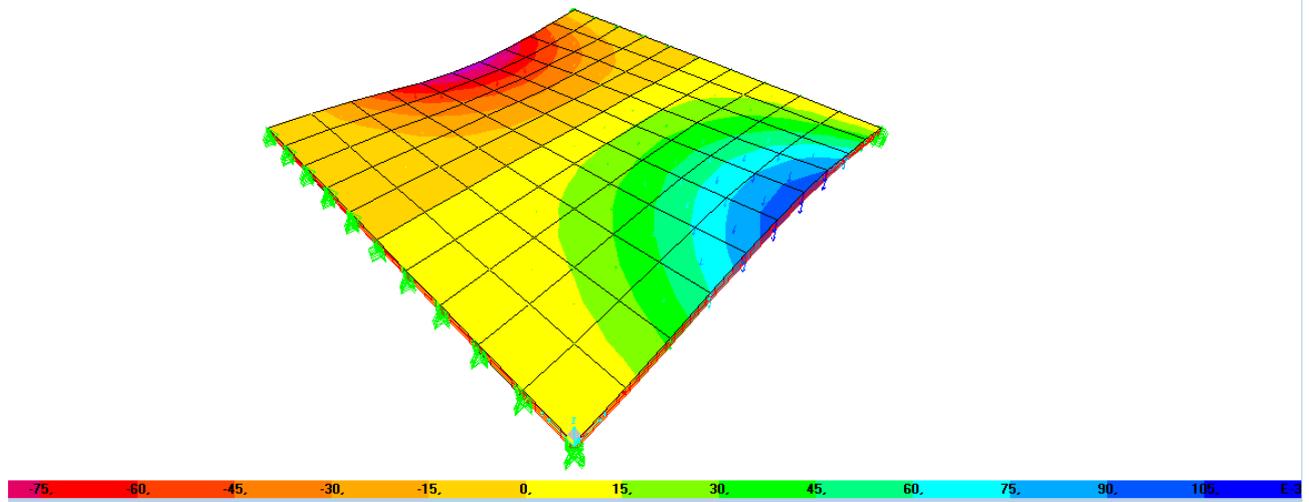


Σχήμα 6.29 Κρίσιμο φορτίο λογισμού πλάκας τύπου σάντουιτς



Σχήμα 6.30 Επίπεδο Xu παράλληλο φόρτισης πλάκας τύπου σάντουιτς

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

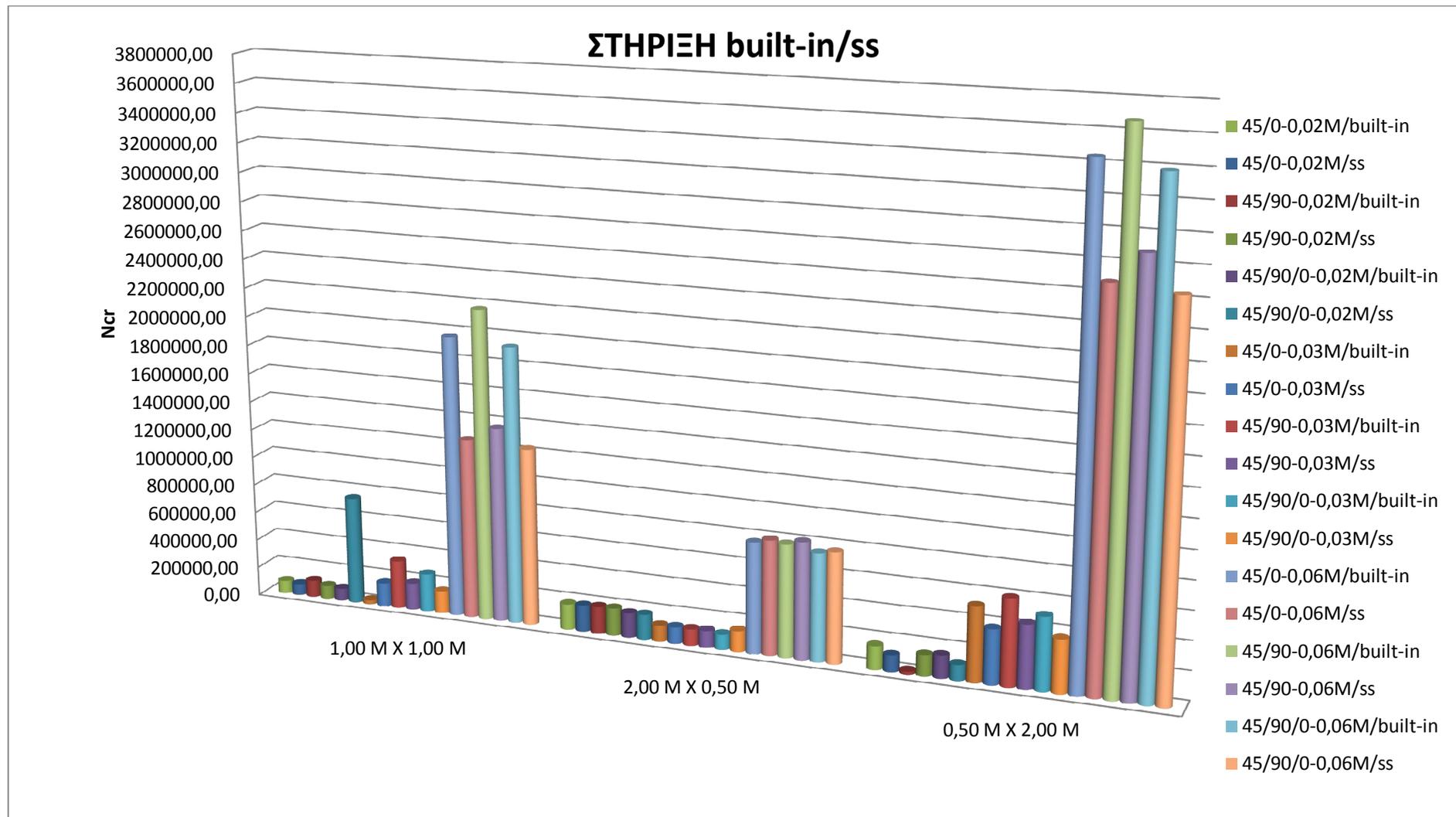


Σχήμα 6.31 Μετατόπιση κόμβων κατά τον άξονα z πλάκας τύπου σάντουιτς

Τέλος στο Σχήμα 6.32 παρατίθεται ένα σχήμα που απεικονίζει τα κρίσιμα φορτία λογισμού όπως προσδιορίστηκαν μέσω του προγράμματος SAP 2000 για τα διαφορετικά γεωμετρικά μοντέλα και τις διαφορετικές περιπτώσεις πάχους αφρώδη πυρήνα.

Όπως παρατηρούμε στο παρακάτω Σχήμα 6.32 στη περίπτωση του γεωμετρικού μοντέλου διαστάσεων 2,00 m x 5,00 m το κρίσιμο φορτίο λογισμού και για τις 2 περιπτώσεις στηρίξεις (ss και built-in) λαμβάνει παρόμοιες τιμές με μεγαλύτερες στη στήριξη ss. Ενώ στα υπόλοιπα γεωμετρικά μοντέλα το N_{cr} είναι μεγαλύτερο όταν η πλάκα στηρίζεται καθ' ύψος σε όλους τους κόμβους των μοντέλων.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΪΤΣ



Σχήμα 6.32 Σύγκριση τρόπου στήριξης στα διάφορα γεωμετρικά μοντέλα με διαφορετικό πάχος αφρώδη πυρήνα (στήριξη μεσαίων κόμβων κάτοψης)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

7. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000 ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα αναλυτικών αναλύσεων για κάποια από τα γεωμετρικά μοντέλα του κεφαλαίου 5, εφαρμόζοντας τις σχέσεις που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4 και διέπουν τις σύνθετες πλάκες τύπου σάντουιτς.

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/O₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,02 m.

- Μητρώα ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-1}$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-2}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-3}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-4}$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$[A]_{tot} = 2*[A] = \begin{bmatrix} 265,18 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 153,85 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-5}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 32,19 & 14,51 & 0,00 \\ 14,51 & 18,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 14,83 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 809769 & 0 \\ 0 & 809769 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-6}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{Εξίσωση 7-7}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1271} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 1269 kN / m, \text{Εξίσωση 7-8}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5084} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 5052 kN / m \quad \text{Εξίσωση 7-9}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	58894,18	-8670,32	-2811,92
	-8670,32	811076,76	435,99
	-2811,92	435,99	810400,99

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 3,86437 * 10^{16}$$

$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 6,57297 * 10^{11}$$

$N_{cr} = 1489$ kN/m.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/0₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,03 m.

- Μητρώο ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-10}$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-11}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-12}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-13}$$

$$[A]_{tot} = 2 * [A] = \begin{bmatrix} 265,18 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 153,85 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-14}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 67,99 & 30,61 & 0,00 \\ 30,61 & 39,48 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 31,30 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1142154 & 0 \\ 0 & 1142154 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-15}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{Εξίσωση 7-16}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2684} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 2678 kN / m, \quad \text{Εξίσωση 7-17}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10737} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 10637 kN / m \quad \text{Εξίσωση 7-18}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	124368,84	-18310,62	-5933,17
	-18310,62	1144915,31	919,94
	-5933,17	919,94	1143486,87

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,624 * 10^{17}$$

$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,30919 * 10^{12}$$

$N_{cr} = 3142 \text{ kN/m.}$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/0₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,06 m.

- Μητρώα ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-19}$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-20}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-21}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-22}$$

$$[A]_{tot} = 2 * [A] = \begin{bmatrix} 265,18 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 153,85 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-23}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 254,95 & 114,71 & 0,00 \\ 114,71 & 147,94 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 117,28 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2143769 & 0 \\ 0 & 2143769 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N / m}, \quad \text{Εξίσωση 7-24}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{Εξίσωση 7-25}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10065} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 10018 \text{ kN / m}, \quad \text{Εξίσωση 7-26}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{40260} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 39517 \text{ kN / m} \quad \text{Εξίσωση 7-27}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	466292,05	-68654,43	-22233,03
	-68654,43	2154123,49	3447,24
	-22233,03	3447,24	2148764,37

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 2,14714 * 10^{18}$$

$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 4,62869 * 10^{12}$$

$$N_{cr} = 11750 \text{ kN/m.}$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/90₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,02 m.

- Μητρώα ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^{90} = \begin{bmatrix} 9,71 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 148,87 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-28}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-29}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-30}$$

$$[A]_{tot} = 2 * [A] = \begin{bmatrix} 153,85 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 265,18 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,91 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-31}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 18,71 & 14,51 & 0,00 \\ 14,51 & 32,19 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 14,83 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 809769 & 0 \\ 0 & 809769 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-32}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{Εξίσωση 7-33}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{739} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 738 kN / m, \quad \text{Εξίσωση 7-34}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2954} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 2944 kN / m \quad \text{Εξίσωση 7-35}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	37959,77	-5325,44	-2864,18
	-5325,44	810544,40	435,99
	-2864,18	435,99	810434,27

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 2,49059 * 10^{16}$$

$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 6,56893 * 10^{11}$$

$N_{cr} = 960 \text{ kN/m.}$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/90₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,03 m.

- Μητρώα ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^{90} = \begin{bmatrix} 9,71 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 148,87 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-36}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-37}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-38}$$

$$[A]_{tot} = 2 * [A] = \begin{bmatrix} 153,85 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 265,18 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,92 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-39}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 39,48 & 30,61 & 0,00 \\ 30,61 & 67,99 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 31,30 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1142154 & 0 \\ 0 & 1142154 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-40}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{Εξίσωση 7-41}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1559} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 1556 kN / m, \quad \text{Εξίσωση 7-42}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6234} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 6200 kN / m \quad \text{Εξίσωση 7-43}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	80100,99	-11237,55	-6043,69
	-11237,55	1143789,60	919,94
	-6043,69	919,94	1143557,22

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,04585 * 10^{17}$$

$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,30799 * 10^{12}$$

$N_{cr} = 2025 \text{ kN/m.}$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Πλάκα διαστάσεων 2,0m x 0,5 m, διαστρωμάτωσης [±45₂/90₁₂/±45₂], πάχος στρώσης 0,0002 m και πάχος αφρώδη πυρήνα 0,06 m.

- Μητρώα ακαμψίας-μεμβρανική ένταση

$$[Q]^{90} = \begin{bmatrix} 9,71 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 148,87 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-44}$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-45}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{Εξίσωση 7-46}$$

$$[A]_{tot} = 2 * [A] = \begin{bmatrix} 153,85 & 119,29 & 0,00 \\ 119,29 & 265,18 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 121,96 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,91 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{Εξίσωση 7-47}$$

$$[D]_{tot} = 0,5 * d^2 * [A] + 2 * [D] = \begin{bmatrix} 147,94 & 114,71 & 0,00 \\ 114,71 & 254,95 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 117,28 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2143769 & 0 \\ 0 & 2143769 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N / m}, \quad \text{Εξίσωση 7-48}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για επιμήκη πλάκα

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{Εξίσωση 7-49}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5841} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 5825 \text{ kN / m}, \quad \text{Εξίσωση 7-50}$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{23362} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 23110 \text{ kN / m} \quad \text{Εξίσωση 7-51}$$

- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για απλά εδραζόμενη πλάκα με ορθότροπη & συμμετρική διαστρωμάτωση

i\j	1		
1	300171,83	-42111,89	-22647,76
	-42111,89	2149899,12	3447,24
	-22647,76	3447,24	2149028,39

$$\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 1,38194 * 10^{18}$$

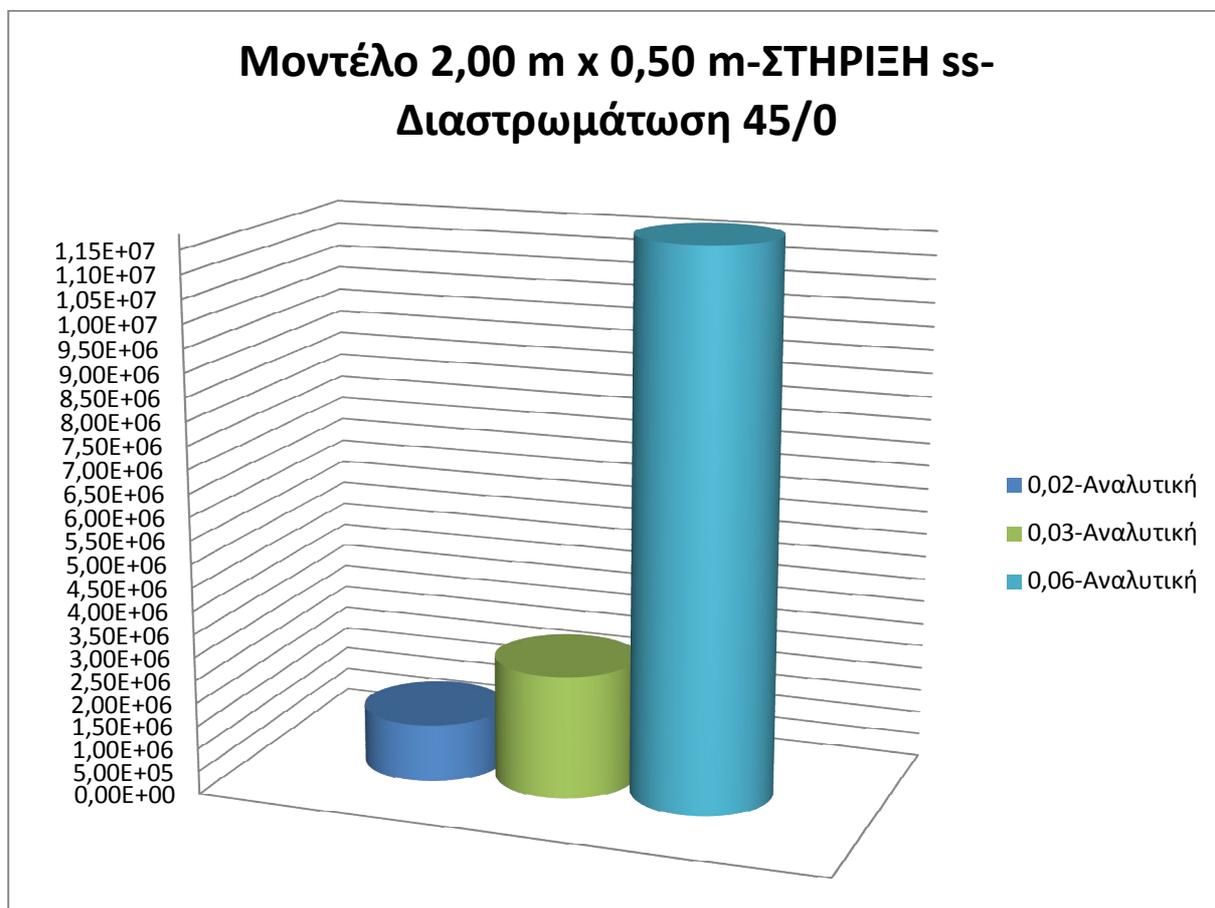
$$\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} = 4,62018 * 10^{12}$$

$$N_{cr} = 7577 \text{ kN/m.}$$

Μετά την ολοκλήρωση των αναλυτικών αναλύσεων όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω και των αναλύσεων μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων SAP 2000 (κεφάλαιο 5) παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο αναλύσεων. Στο σχήμα 7.1 απεικονίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για πάχη πυρήνα 0,02m , 0,03m και 0,06m , της διαστρωμάτωσης 45-0, για το γεωμετρικό μοντέλο 2,00 m x 0,50 m και στήριξη ss ενώ στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 7.1) τα αριθμητικά δεδομένα του.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

Στο Σχήμα 7.2 συγκρίνονται τα κρίσιμα φορτία λυγισμού όπως προέκυψαν μέσω των αναλυτικών αναλύσεων και του προγράμματος SAP 2000.

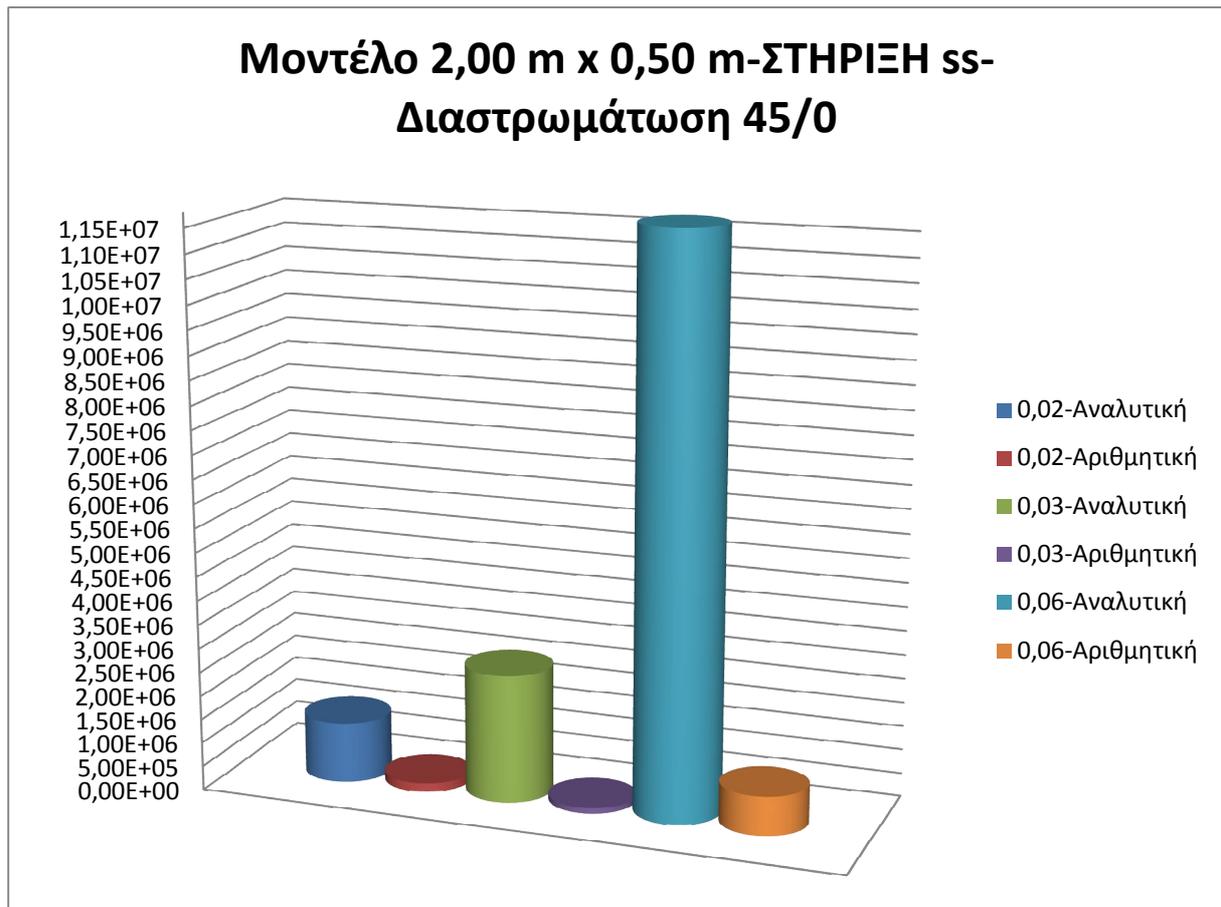


Σχήμα 7.1 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 (μοντέλου 2,00 m x 0,50 m)

Μοντέλο 2,00 m x 0,50 m-Διαστρωμάτωση 45/0-ΣΤΗΡΙΞΗ ss						
	Αναλυτική ανάλυση			Ανάλυση SAP 2000		
Πάχος πυρήνα	0,02-Αναλυτική	0,03-Αναλυτική	0,06-Αναλυτική	0,02-Αριθμητική	0,03-Αριθμητική	0,06-Αριθμητική
N_{cr} (N/m)	1,27E+06	2,68E+06	3,95E+07	1,89E+05	1,16E+05	8,11E+05

Πίνακας 7.1 Αριθμητικά δεδομένα κρίσιμου φορτίου λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 (Μοντέλο 2,00 m x 0,50 m)

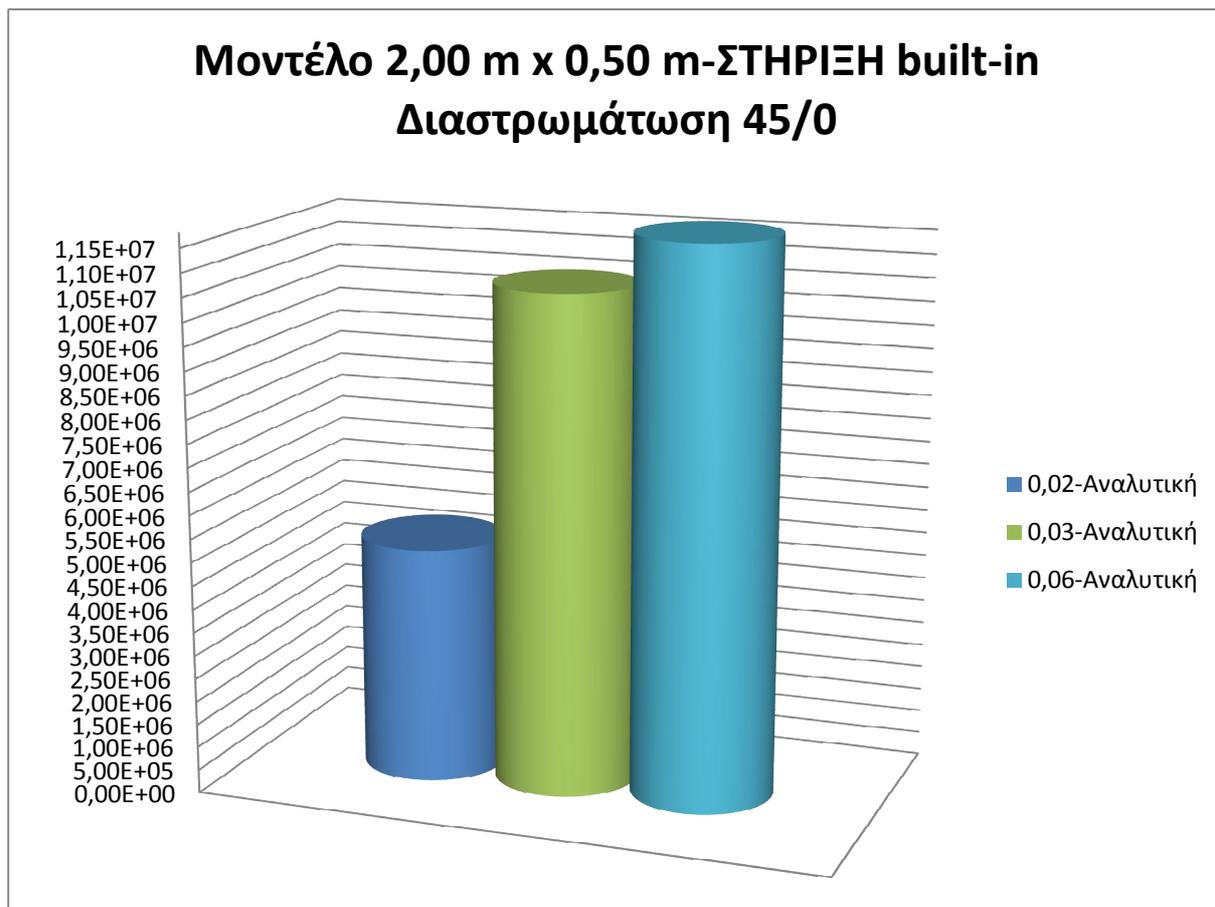
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ



Σχήμα 7.2 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 μέσω αναλυτικών αναλύσεων και αναλύσεων προγράμματος SAP 2000

Στα επόμενα σχήματα και πίνακα (Σχήμα 7.3, Πίνακας 7.2 και Σχήμα 7.4) παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για συμμετρική διαστρωμάτωση 45-0 και στήριξη **built-in**.

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

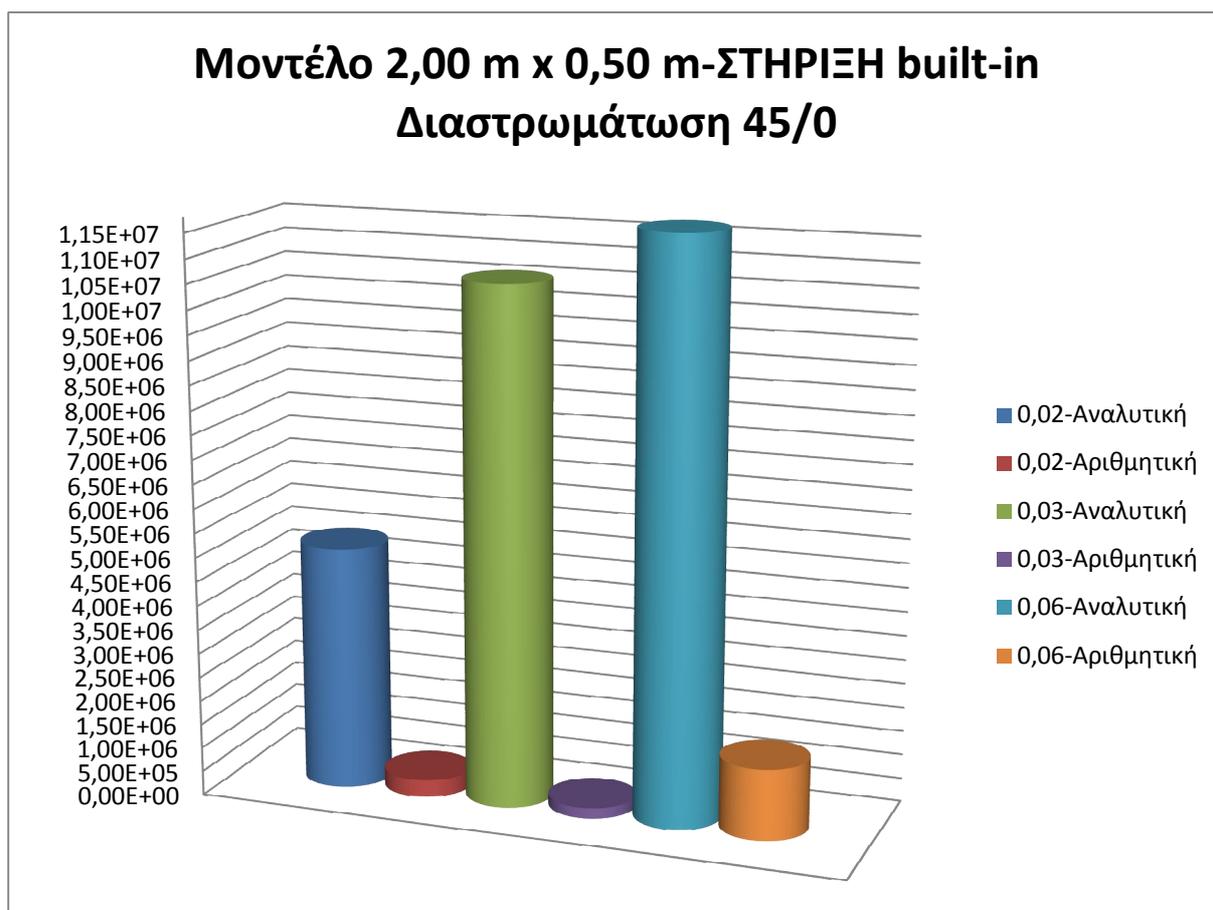


Σχήμα 7.3 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0

Μοντέλο 2,00 m x 0,50 m-Διαστρωμάτωση 45/0-ΣΤΗΡΙΞΗ built-in						
	Αναλυτική ανάλυση			Ανάλυση SAP 2000		
Πάχος πυρήνα	0,02-Αναλυτική	0,03-Αναλυτική	0,06-Αναλυτική	0,02-Αριθμητική	0,03-Αριθμητική	0,06-Αριθμητική
N_{cr} (N/m)	5,05E+06	1,06E+07	3,95E+07	3,70E+05	2,21E+05	1,47E+06

Πίνακας 7.2 Αριθμητικά δεδομένα κρίσιμου φορτίου λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

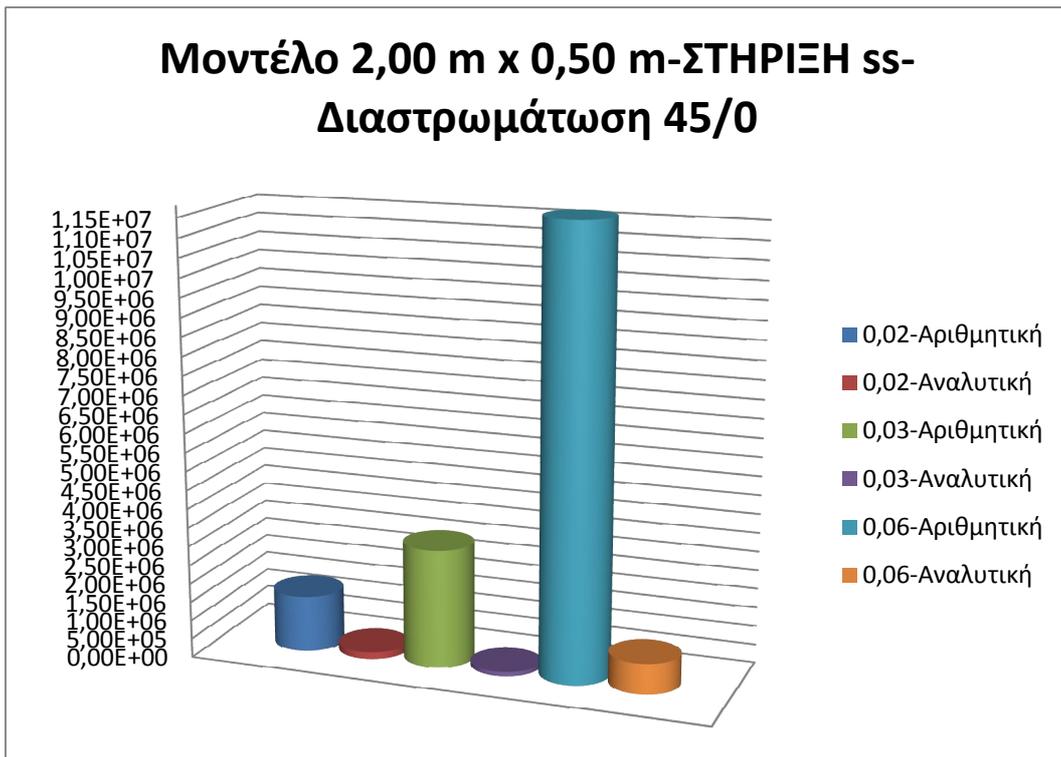


Σχήμα 7.4 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 μέσω αναλυτικών αναλύσεων και αναλύσεων προγράμματος SAP 2000

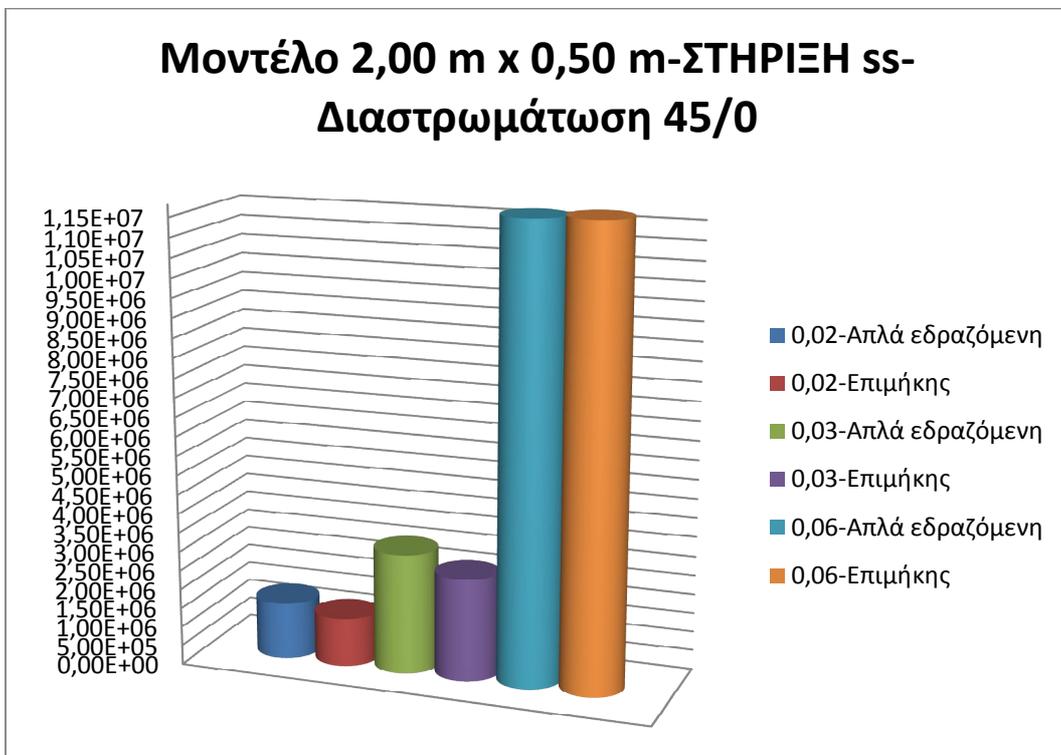
Επομένως, από τα παραπάνω σχήματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις αναλυτικές αναλύσεις είναι μία τάξης μεγαλύτερα και δε λαμβάνουν υπόψη τους διαφορετικούς τρόπους στήριξης (κάτοψη) της επιμήκους πλάκας τύπου σάντουιτς 2,00 m x 0,50 m.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των εξισώσεων για απλά εδραζόμενες πλάκες (ss) με ορθότροπη και συμμετρική διαστρωμάτωση παρατίθεται το παρακάτω συγκριτικό σχήμα για το γεωμετρικό μοντέλο 2,00 m x 0,50 m, διαστρωμάτωσης 45-0 σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ανάλυσης για διάφορα πάχη πυρήνα (Σχήμα 7.5). Ενώ τέλος συγκρίνονται τα αποτελέσματα της αναλυτικής ανάλυσης για επιμήκη και απλά εδραζόμενη πλάκα (Σχήμα 7.6).

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**



Σχήμα 7.5 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 μέσω αναλυτικών αναλύσεων(ss) και αναλύσεων προγράμματος SAP 2000



Σχήμα 7.6 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορα πάχη πυρήνα και διαστρωμάτωση 45-0 μέσω αναλυτικών αναλύσεων(ss) για επιμήκη και απλά εδραζόμενη πλάκας τύπου σάντουιτς

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Ο ρόλος των σύνθετων υλικών στις σύγχρονες κατασκευές αρχίζει να γίνεται όλο και μεγαλύτερος παραμερίζοντας τη χρήση συμβατικών διατομών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα σύνθετα υλικά παρουσιάζουν αρκετά και σημαντικά πλεονεκτήματα όπως ότι προσφέρουν μειωμένο βάρος στην κατασκευή, αυξημένη αντοχή, βελτιωμένη αντοχή σε διάβρωση, εξαιρετική αντοχή σε περιβαλλοντικές και χημικές επιδράσεις.
- Για την καλύτερη προσομοίωση μιας πλάκας τύπου σάντουιτς και των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της, όπου ο πυρήνας της αποτελείται από ισότροπο υλικό (αφρώδης πυρήνας) χαμηλότερου μέτρου ελαστικότητας από εκείνο των συμμετρικών διαστρωμάτων στο άνω και κάτω μέρος της πλάκας οι οποίες αποτελούνται από ορθότροπο υλικό διαφορετικού προσανατολισμού, απαιτείται η χρήση διαφορετικού τύπου στοιχείων (στερεά στοιχεία και επιφανειακά στοιχεία αντίστοιχα) με κατάλληλη διακριτοποίηση αυτών.
- Η γεωμετρική μορφή της πλάκας τύπου σάντουιτς (τετραγωνική ή επιμήκης επηρεάζει τα αποτελέσματα των αριθμητικών αναλύσεων αλλά όχι δραματικά.
- Η διακριτοποίηση των επιφανειακών και στερεών στοιχείων έγινε με γνώμονα την επίτευξη ίδιων διαστάσεων κατά τον άξονα x και y και σύμπτωση κόμβων στις ίδιες θέσεις. Ο λόγος του πάχους του στερεού στοιχείου δια το λόγο του επιφανειακού στοιχείου κυμαίνεται από το 2,5, 3,75 έως 7,5.
- Κατά την ανάλυση των διαφόρων γεωμετρικών μοντέλων και την διακριτοποίησης τους σε επιφανειακά και στερεά στοιχεία όπου υπήρχαν επιφάνειες αλληλοεπικάλυψης (η τελική επιφάνεια του άνω και κάτω μέρους του πυρήνα βρίσκεται στη μέση επιφάνεια της συμμετρικής διαστρωμάτωσης) το πρόγραμμα δε μπορούσε να διαμορφώσει τα μητρώα ακαμψίας με απόλυτη ακρίβεια, απώλεια αριθμού ψηφίων κατά την επίλυση, και για αυτό το λόγο τοποθετήθηκαν στους συγκεκριμένους κόμβους στηρίξεις οι οποίες περιορίζουν τις στροφές τους κατά τον άξονα x και y .
- Η αύξηση του πάχους του αφρώδη πυρήνα οδηγεί σε μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία λυγισμού και η αύξηση αυτή είναι ποιοτικά ίδια στα γεωμετρικά μοντέλα ενώ οι μετακινήσεις της πλάκας κατά τους άξονες x και y είναι μικρότερες.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

- Ο τρόπος στήριξης της πλάκας τύπου σάντουιτς καθ' ύψος του πάχους της ss ή built-in επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων όπως φάνηκε από τα διαφορετικά μοντέλα που αναλύθηκαν με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων SAP 2000. Όταν δεν λήφθηκε υπόψη ο διαφορετικός τρόπος στήριξης (αναλυτική ανάλυση) οι τιμές των κρίσιμων φορτίων λυγισμού που προέκυψαν μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερα από εκείνα των αριθμητικών αναλύσεων.
- Στα γεωμετρικά μοντέλα διαστάσεων 2,00 m x 0,50 m και στις δύο περιπτώσεις στηρίξεων (ss και built-in), το κρίσιμο φορτίο λυγισμού λαμβάνει παρόμοιες τιμές. Ενώ για τα γεωμετρικά μοντέλα διαστάσεων 1,00 m x 1,00 m και 0,50 m x 2,00 m το N_{cr} λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές όταν όλοι οι κόμβοι των ακμών στηρίζονται (built-in).
- Τέλος, παρατηρείται πιο έντονος κυματισμός των ακμών όταν η στήριξη αυτών είναι τύπου ss σε σχέση με αυτών των μοντέλων στα οποία όλοι οι κόμβοι στηρίζονται καθ' ύψος της διατομής.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Mechanics of Composite Structures, Laszlo P.Kollar, George S.springer, Cambridge
- CSI Analysis Reference Manual, Berkeley, California, Usa, June 2008
- Σημειώσεις από το μεταπτυχιακό μάθημα του προγράμματος Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών «Κατασκευές από σύνθετα υλικά», Ραυτογιάννης Ι. , Αθήνα 2007
- Διπλωματική εργασία «Ιδιότητες μελών με διατομή από σύνθετα υλικά-σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων», Χουμανίδης Δ. ,Αθήνα 2011
- Διπλωματική εργασία «Αξονική καταπόνηση κελύφων λεπτού πάχους κυκλικής διατομής ενισχυμένων εσωτερικά με αφρό», Γκαγκαδέλης Ε. , Αθήνα 2008
- Διπλωματική εργασία «Ανάλυση διαστρωματώσεων με και χωρίς οπές», Βλάσσης Ι. ,Αθήνα 2012

ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΟ INTERNET

- CSI knowledge base
<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Home>

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1 ΜΗΤΡΩΑ ΑΚΑΜΨΙΑΣ [A], [B], [C] ΠΛΑΚΩΝ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	25
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 ΜΗΤΡΩΑ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ POISSON ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	31
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3 ΟΡΟΙ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΚΑΜΨΙΑΣ	38
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΡΥΤΙΔΩΣΗΣ ΟΨΕΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	43
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΥΛΙΚΩΝ ΣΤΡΩΣΕΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	49
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ $F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{34}, F_{44}, F_{45}$	52
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΛΙΚΩΝ	59
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ 1 ^η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΘ' ΎΨΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ (BUILT-IN)	75
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ 1 ^η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΟ ΚΟΜΒΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ (SS)	76
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ 1 ^η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΘ' ΎΨΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ (BUILT-IN)	78
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.4 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ 1 ^η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΟ ΚΟΜΒΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	79
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 (ΜΟΝΤΕΛΟ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ)	107
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0	109

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΗΜΑ 2.1 ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΥΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ 1-2-3	19
ΣΧΗΜΑ 3.1 ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ Χ-Υ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ 1-2	22
ΣΧΗΜΑ 3.2 ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ N_x ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	23
ΣΧΗΜΑ 4.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΑΣ ΚΗΡΗΘΡΑΣ	24
ΣΧΗΜΑ 4.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ T_{xz}	26
ΣΧΗΜΑ 4.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ G_{xz}	26
ΣΧΗΜΑ 4.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟ ΑΞΟΝΑ Υ	27
ΣΧΗΜΑ 4.5 ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	30
ΣΧΗΜΑ 4.6 ΕΠΙΜΗΚΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΗ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΑΚΜΗ ΤΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΥΣ ΤΩΝ ΜΑΚΡΩΝ ΑΚΜΩΝ ΤΗΣ	34
ΣΧΗΜΑ 4.7 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΟΚΑΡΙ ΚΑΙ ΠΛΑΚΑ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	36
ΣΧΗΜΑ 4.8 ΠΛΑΚΑ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΘΛΙΠΤΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ	37
ΣΧΗΜΑ 4.9 ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	39
ΣΧΗΜΑ 4.10 ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	39
ΣΧΗΜΑ 4.11 ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ	40
ΣΧΗΜΑ 4.12 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΣΕΩΣ Σ_2	41
ΣΧΗΜΑ 4.13 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΜΑΚΡΩΝ ΑΚΜΩΝ ΤΗΣ ΜΑΚΡΙΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΠΛΑΚΑΣ ΥΠΟ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ	45
ΣΧΗΜΑ 4.14 ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗΡΙΞΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	49
ΣΧΗΜΑ 4.15 ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΘΛΙΠΤΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	52
ΣΧΗΜΑ 5.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1 ^ο (1,00 m x 1,00 m)	57
ΣΧΗΜΑ 5.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ^ο (2,00 m x 0,50 m)	57
ΣΧΗΜΑ 5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 3 ^ο (0,50 m x 2,00 m)	58
ΣΧΗΜΑ 5.4 ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΣΤΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ 0 ^ο	59
ΣΧΗΜΑ 5.5 ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΣΤΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ 45 ^ο	60
ΣΧΗΜΑ 5.6 ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΣΤΡΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ 90 ^ο	60
ΣΧΗΜΑ 5.7 ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ	61
ΣΧΗΜΑ 5.8 ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ (+45/-45/+45/-45/0) ₂	62
ΣΧΗΜΑ 5.9 ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ (+45/-45/+45/-45/90) ₂	62
ΣΧΗΜΑ 5.10 ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ (+45/-45/+45/0/0/90/90/+45/-45/+45)	63
ΣΧΗΜΑ 5.11 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	64
ΣΧΗΜΑ 5.12 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ	64
ΣΧΗΜΑ 5.13 ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS	65
ΣΧΗΜΑ 5.14 ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ BUILT-IN	65

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΣΧΗΜΑ 5.15 ΣΤΗΡΙΞΗ ΚΟΜΒΩΝ ΣΤΗ ΜΕΣΗ	66
ΣΧΗΜΑ 5.16 ΣΤΗΡΙΞΗ ΚΟΜΒΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΑ	66
ΣΧΗΜΑ 5.17 ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΟΜΒΩΝ ΑΚΜΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΗ ΜΕΣΑΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ	67
ΣΧΗΜΑ 5.18 ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΟΜΒΩΝ ΑΚΜΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ	68
ΣΧΗΜΑ 5.19 ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΟΜΒΩΝ ΑΚΜΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΗ SS	68
ΣΧΗΜΑ 5.20 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ	69
ΣΧΗΜΑ 5.21 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	70
ΣΧΗΜΑ 5.22 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΖΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	70
ΣΧΗΜΑ 5.23 ΑΝΑΛΥΣΗ STANDAR SOLVER (ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΕΠΙΛΥΤΗ)	71
ΣΧΗΜΑ 5.24 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	71
ΣΧΗΜΑ 5.25 ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	72
ΣΧΗΜΑ 5.26 ΜΗΝΥΜΑ STANDARD ΕΠΙΛΥΤΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000	73
ΣΧΗΜΑ 5.27 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΟΜΒΩΝ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	73
ΣΧΗΜΑ 6.1 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΘ΄ ΥΨΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	74
ΣΧΗΜΑ 6.2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΟ ΚΟΜΒΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	76
ΣΧΗΜΑ 6.3 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΘ΄ ΥΨΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	77
ΣΧΗΜΑ 6.4 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΜΕ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΟ ΚΟΜΒΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	79
ΣΧΗΜΑ 6.5 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΗ 1 ^η ΙΔΙΟΤΙΜΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	80
ΣΧΗΜΑ 6.6 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΗ 2 ^η ΙΔΙΟΤΙΜΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	80
ΣΧΗΜΑ 6.7 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΝΟΥ SAP2000 ΓΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	81
ΣΧΗΜΑ 6.8 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{11} ΠΑΝΩ ΣΤΡΩΣΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	81
ΣΧΗΜΑ 6.9 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{11} ΚΑΤΩ ΣΤΡΩΣΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	82
ΣΧΗΜΑ 6.10 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{22} ΚΑΤΩ ΣΤΡΩΣΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	82
ΣΧΗΜΑ 6.11 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{12} ΚΑΤΩ ΣΤΡΩΣΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	83
ΣΧΗΜΑ 6.12 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΝΟΥ SAP2000 ΓΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	83
ΣΧΗΜΑ 6.13 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{11} ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ	84
ΣΧΗΜΑ 6.14 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{22} ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ	84
ΣΧΗΜΑ 6.15 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{33} ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ	85
ΣΧΗΜΑ 6.16 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΣΕΩΝ S_{23} ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ	85
ΣΧΗΜΑ 6.17 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΒΥΘΙΣΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Ζ ΥΠΟ ΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	86
ΣΧΗΜΑ 6.18 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΒΥΘΙΣΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Χ ΥΠΟ ΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	86
ΣΧΗΜΑ 6.19 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΒΥΘΙΣΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Υ ΥΠΟ ΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	87
ΣΧΗΜΑ 6.20 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΒΥΘΙΣΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Υ ΥΠΟ ΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	87
ΣΧΗΜΑ 6.21 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΟΜΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	88

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

ΣΧΗΜΑ 6.22 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,02 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Υ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS, 1 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	88
ΣΧΗΜΑ 6.23 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,02 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Υ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS, 2 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	89
ΣΧΗΜΑ 6.24 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,02 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Υ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS, 3 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	89
ΣΧΗΜΑ 6.25 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,02 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Χ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS, 1 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	90
ΣΧΗΜΑ 6.26 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,06 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Χ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ SS, 1 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	90
ΣΧΗΜΑ 6.27 ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ, ΠΑΧΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ 0,06 Μ, ΟΨΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Χ, ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45/0, ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΥΠΟΥ BUILT-IN, 1 ^Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	90
ΣΧΗΜΑ 6.28 ΣΤΗΡΙΞΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΣΗ ΠΛΑΚΑ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	91
ΣΧΗΜΑ 6.29 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	91
ΣΧΗΜΑ 6.30 ΕΠΙΠΕΔΟ ΧΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	91
ΣΧΗΜΑ 6.31 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΟΜΒΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ Ζ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	92
ΣΧΗΜΑ 6.32 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΡΟΠΟΥ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΣΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΠΑΧΟΣ ΑΦΡΩΔΗ ΠΥΡΗΝΑ (ΣΤΗΡΙΞΗ ΜΕΣΑΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΚΑΤΟΨΗΣ)	93
ΣΧΗΜΑ 7.1 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 (ΜΟΝΤΕΛΟΥ 2,00 Μ Χ 0,50 Μ) ..	107
ΣΧΗΜΑ 7.2 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000	108
ΣΧΗΜΑ 7.3 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0	109
ΣΧΗΜΑ 7.4 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000	110
ΣΧΗΜΑ 7.5 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ(SS) ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ SAP 2000	111
ΣΧΗΜΑ 7.6 ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΧΗ ΠΥΡΗΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ 45-0 ΜΕΣΩ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ(SS) ΓΙΑ ΕΠΙΜΗΚΗ ΚΑΙ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΠΛΑΚΑΣ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ	111

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-1	18
$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-2	18
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-3	18
$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_l \partial x_k}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-4	18
$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \tau_{23} \tau_{31} \tau_{12}\}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-5	19
$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_{23} \gamma_{31} \gamma_{12}\}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-6	19
$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-7	19
$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-8	20
$v_{21} = v_{12} * \frac{E_2}{E_1}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-9	20
$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12} * v_{21}}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-10	20
$Q_{12} = \frac{v_{21} * E_1}{1 - v_{12} * v_{21}}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-11	20
$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12} * v_{21}}$	ΕΞΙΣΩΣΗ 2-12	20

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 3-1} \dots\dots\dots 22$$

$$A_{ij} = \sum_{\kappa=1}^N (\overline{Q}_{ij})_{\kappa} * t_{\kappa} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 3-2} \dots\dots\dots 23$$

$$D_{ij} = \sum_{\kappa=1}^N (\overline{Q}_{ij})_{\kappa} * \left[z_{\kappa}^2 * t_{\kappa} + \frac{t_{\kappa}^3}{12} \right] \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 3-3} \dots\dots\dots 23$$

$$[A]=2[A]^T, \quad [B]=0, \quad [D] = \frac{1}{2} * d^2 * [A]^T + 2 * [D]^T + 2 * d * [B]^T \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-1} \dots\dots\dots 25$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{55}^c & \overline{C}_{45}^c \\ \overline{C}_{45}^c & \overline{C}_{44}^c \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{Bmatrix} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-2} \dots\dots\dots 26$$

$$\gamma_{xz}^c = \frac{d}{c} * \gamma_{xz} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-3} \dots\dots\dots 26$$

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{d^2}{c} * \begin{bmatrix} \overline{C}_{55}^c & \overline{C}_{45}^c \\ \overline{C}_{45}^c & \overline{C}_{44}^c \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-4} \dots\dots\dots 27$$

$$w^o = 0, \quad u^o = v^o = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-5} \dots\dots\dots 27$$

$$M_x = M_{xy} = 0, \quad V_x = 0, \quad N_x = N_{xy} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-6} \dots\dots\dots 27$$

$$w^o = 0, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad N_x = N_{xy} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-7} \dots\dots\dots 28$$

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-8} \dots\dots\dots 28$$

$$\tilde{S}_{12} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-9} \dots\dots\dots 29$$

$$[A]^i = \frac{t^i * E^f}{1 - (v^f)^2} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-10} \dots\dots\dots 29$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$[D]^i = \frac{(t^i)^3 * E^f}{12 * (1 - (v^f)^2)} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-11 29}$$

$$\rho = \frac{t^i * (c + t^i) - t^b * (c + t^b)}{2 * (t^i + t^b)} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-12 30}$$

$$d^i = \frac{c}{2} + \frac{t^i}{2} - \rho \quad d^i = \frac{c}{2} + \frac{t^b}{2} + \rho \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-13 30}$$

$$[A] = A^{iso} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-14 31}$$

$$[D] = D^{iso} * \begin{bmatrix} 1 & v^f & 0 \\ v^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v^f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-15 31}$$

$$C_{45}=0, C_{44} = \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-16 31}$$

$$\tilde{S}_{11} = \tilde{S}_{22} = \tilde{S} = \frac{d^2}{c} * \frac{C_{11}^c - C_{12}^c}{2} \quad \text{ΚΑΙ } \tilde{S}_{12} = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-17 31}$$

$$\frac{\partial w^o}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-18 32}$$

$$\frac{dV_x}{dx} + p = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} - V_x = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-19 32}$$

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-20 33}$$

$$-D_{11} * \frac{d^3 \gamma_{xz}}{dx^3} + p = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-21 33}$$

$$D_{11} * \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dx^2} + \bar{S}_{11} * \left(\frac{dw^o}{dx} - \gamma_{xz} \right) = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-22 33}$$

$$\frac{dM_x}{dx} - V_x = 0 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-23 35}$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\frac{dV_x}{dx} - N_{x0} * \frac{d^2 w^0}{dx^2} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-24} \dots\dots\dots 35$$

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-25} \dots\dots\dots 35$$

$$-D_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} - N_{x0} * \frac{d^2 w^0}{dx^2} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-26} \dots\dots\dots 35$$

$$D_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + S_{11} * \left(\frac{dw}{dx} - \gamma \right) = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-27} \dots\dots\dots 35$$

$$-\hat{E}I * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} - \hat{N}_{x0} * \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-28} \dots\dots\dots 35$$

$$\hat{E}_{11} * \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + \hat{S} * \left(\frac{dw}{dx} - \gamma \right) = 0 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-29} \dots\dots\dots 35$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_x * \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right)^2 + N_y * \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right)^2 dy dx \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-30} \dots\dots\dots 37$$

ΕΞΙΣΩΣΗ 4-31 37

$$\left(\lambda_{ij} \right)_{cr} = \frac{1}{N_{x0} * \left(\frac{i\pi}{L_x} \right)^2 + N_{y0} * \left(\frac{j\pi}{L_y} \right)^2} * \begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-32} \dots\dots\dots 38$$

$$\left(\lambda_{ij} \right)_{cr} = \frac{\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{L_y} \right)^2}{N_{x0} * \left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + N_{y0} * \left(\frac{j}{L_y} \right)^2} * \left(N_{D,cr}^{-1} + \tilde{S}^{-1} \right)^{-1} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-33} \dots\dots\dots 38$$

Όπου $N_{D,cr} = \pi^2 * D^{iso} * \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{L_y} \right)^2 \right]$ ΕΞΙΣΩΣΗ 4-34..... 38

$$N_x^f = \frac{N_x}{2}, \quad N_y^f = \frac{N_y}{2}, \quad N_{xy}^f = \frac{N_{xy}}{2} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-35} \dots\dots\dots 39$$

$$\psi_\xi * \frac{\partial^4 w^f}{\partial \xi^4} + N_\xi^f * \frac{\partial^2 w^f}{\partial \xi^2} = \sigma_\xi^f \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-36} \dots\dots\dots 40$$

ΕΞΙΣΩΣΗ 4-37 40

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$w^f = w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-38} \dots\dots\dots 41$$

$$N^f_{\xi} = -\left(N^f_x * \cos^2 a + N^f_y * \sin^2 a + 2 * N^f_{xy} * \cos a * \sin a\right) \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-39} \dots\dots\dots 41$$

$$\sigma^f_z = -\frac{a}{l} * w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l}, \text{ ΟΠΟΥ } a = \frac{2\pi * E_c}{(3 - \nu_c)(2 + \nu_c)} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-40} \dots\dots\dots 42$$

$$\psi_{\xi} * w_0 \frac{\pi^4}{l^4} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} - N^f_{\xi} * w_0 \frac{\pi^2}{l^2} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} = -\frac{a}{l} * w_0 * \sin \frac{\pi \xi}{l}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-41} \dots\dots\dots 42$$

$$\left(N^f_{\xi}\right)_{cr} = \psi_{\xi} * \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{a}{l} * \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-42} \dots\dots\dots 42$$

$$\sigma^f_z = -\sigma_z = -E_c * \varepsilon_z = -w^f \frac{E_c}{c/2}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-43} \dots\dots\dots 42$$

$$\text{ΟΠΟΥ } \varepsilon_z = w^f / (c/2), \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-44} \dots\dots\dots 42$$

$$\psi_{\xi} * w_0 * \frac{\pi^4}{l^4} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} - N^f_{\xi} * w_0 * \frac{\pi^2}{l^2} * \sin \frac{\pi * \xi}{l} = \frac{E_c}{c/2} * w_0 * \sin \frac{\pi * \xi}{l}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-45} \dots\dots\dots 43$$

$$\left(N^f_{\xi}\right)_{cr} = \psi_{\xi} * \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{E_c}{c/2} * \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-46} \dots\dots\dots 43$$

$$\frac{d\left(N^f_{\xi}\right)_{cr}}{dl} = 0, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-47} \dots\dots\dots 43$$

$$\psi_{\xi} = D^{iso} = \frac{E_f * t^3}{12 * (1 - \nu_f^2)}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-48} \dots\dots\dots 44$$

$$\left(N^f_{\xi}\right)_{cr, \min} = t * \left[1.5 * \sqrt[3]{\frac{4 * E_t * E_c * G_c}{3 * (1 - \nu_f^2) * (3 - \nu_c)^2 * (1 + \nu_c)}} \right], \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-49} \dots\dots\dots 44$$

$$\left(N^f_{\xi}\right)_{cr, \min} = t * \left[0.79 * \sqrt[3]{E_t * E_c * G_c} \right], \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-50} \dots\dots\dots 44$$

$$\frac{dV_x}{dx} + \rho * (2 * \pi * f)^2 * w^0 = 0, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-51} \dots\dots\dots 45$$

$$\frac{dM_x}{dx} - V_x = 0, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-52} \dots\dots\dots 45$$

$$M_x = -D_{11} * \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-53} \dots\dots\dots 46$$

$$V_x = \bar{S}_{11} * \gamma_{xz}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-54} \dots\dots\dots 46$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\frac{\partial w^o}{\partial x} = \gamma_{xz} + \chi_{xz}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-55} \dots\dots\dots 46$$

$$-\bar{E}I * \frac{d^3 \chi}{dx^3} + \rho * (2 * \pi * f)^2 * w = 0, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-56} \dots\dots\dots 46$$

$$\bar{E}I * \frac{d^2 \chi}{dx^2} + \tilde{S} * \left(\frac{dw}{dx} - \chi \right) = 0, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-57} \dots\dots\dots 46$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho}{D_{11}} * \frac{L_x^4}{\mu_{Bi}^4} + \frac{\rho}{\tilde{S}_{11}} * \frac{L_x^2}{\mu_{Si}^2} \right)^{-1}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-58} \dots\dots\dots 46$$

$$w^0 = \bar{w}^0 * \sin(2\pi ft), \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-59} \dots\dots\dots 47$$

$$\chi_{xz} = \bar{\chi}_{xz} * \sin(2\pi ft), \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-60} \dots\dots\dots 47$$

$$\chi_{yz} = \bar{\chi}_{yz} * \sin(2\pi ft), \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-61} \dots\dots\dots 47$$

$$\left(\frac{L_x * L_y}{4} * \begin{bmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) * \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ (\gamma_{xz})_{ij} \\ (\gamma_{yz})_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-62} \dots\dots\dots 47$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{vmatrix} * \frac{L_x * L_y}{4}}{\begin{vmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{vmatrix}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-63} \dots\dots\dots 47$$

$$f_{ij} = \frac{1}{\pi} * \sqrt{\frac{\lambda_{ij}}{\rho * L_x * L_y}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-64} \dots\dots\dots 47$$

$$\lambda_{ij} = \frac{L_x * L_y}{4} * \pi^2 * \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{i}{L_y} \right)^2 \right] * (N_{D,ij}^{-1} + \tilde{S}^{-1})^{-1} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-65} \dots\dots\dots 48$$

$$N_{D,ij} = \pi^2 * D^{iso} * \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{i}{L_y} \right)^2 \right], \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-66} \dots\dots\dots 48$$

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} * 10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-67} \dots\dots\dots 50$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N/m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 50$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N/m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 50$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 430,34 & 65,47 & 0,00 \\ 65,47 & 96,34 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 70,08 \end{bmatrix} \times 10^6 N/m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 50$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,16 & 7,96 & 0,0 \\ 7,96 & 11,71 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 8,52 \end{bmatrix} \times 10^3 N/m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 50$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \frac{d^2}{c} * \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18615 & 0 \\ 0 & 18615 \end{bmatrix} \times 10^3 N/m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 50$$

$$\frac{L_y}{L_x} > 3\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 51$$

$$\tilde{w} = \frac{5}{384} * \frac{pL^4}{EI} + \frac{pL^2}{8\tilde{S}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-74} \dots\dots\dots 51$$

$$\tilde{w} = \frac{1}{384} * \frac{pL^4}{EI} + \frac{pL^2}{8\tilde{S}}, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-75} \dots\dots\dots 51$$

$$\tilde{w} = 0.0002 + 0.000134 = 0.000334, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-76} \dots\dots\dots 51$$

$$\tilde{w} = 0.000040 + 0.0001343 = 0.000174, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-77} \dots\dots\dots 51$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{12870} + \frac{1}{18615} \right)^{-1} = 7609 kN/m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 51$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{51481} + \frac{1}{18615} \right)^{-1} = 13672 kN/m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 51$$

$$\left(N_{\xi}^f \right)_{cr, \min} = 2\sqrt{\psi_{\xi} \frac{E_c}{c/2}} = 19036 \frac{kN}{m} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-81} \dots\dots\dots 53$$

$$l_{cr} = \pi \sqrt[4]{\frac{\psi_{\xi} c/2}{E_c}} = 0.0069m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-82} \dots\dots\dots 53$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$(N_{\xi}^f)_{cr, \min} = 1.5^3 \sqrt{\frac{2\psi_{\xi} \alpha^2}{\pi^2}} = 34116 \frac{kN}{m} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-83} \dots\dots\dots 53$$

$$l_{cr} = \sqrt[4]{2 \frac{\pi^4 \psi_{\xi}}{\alpha}} = 0.0063m \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-84} \dots\dots\dots 53$$

$$N_{cr} = 2(N_{\xi}^f)_{cr, \min} = 2 * 19036 = 38072 \frac{kN}{m} \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-85} \dots\dots\dots 54$$

$$\omega_1 = 3064s^{-1} \quad \omega_1 = 4233s^{-1}$$

$$\omega_2 = 8214s^{-1}, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-86} \quad \omega_2 = 8945s^{-1}, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-87} \dots\dots\dots 54$$

$$\omega_3 = 13344s^{-1} \quad \omega_3 = 13791s^{-1}$$

$$f_1 = 488Hz \quad f_1 = 674Hz$$

$$f_2 = 1307Hz, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-88} \quad f_2 = 1424Hz, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-89} \dots\dots\dots 54$$

$$f_3 = 2124Hz \quad f_3 = 2195Hz$$

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-67} \dots\dots\dots 94$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 94$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 94$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} x10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 94$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 95$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 809769 & 0 \\ 0 & 809769 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 95$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{ΕΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 95$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1271} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 1269 kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 95$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5084} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 5052 kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 95$$

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-67} \dots\dots\dots 97$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 97$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 97$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} x10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 97$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 97$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1142154 & 0 \\ 0 & 1142154 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 98$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 98$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2684} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 2678 kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 98$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10737} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 10637 kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 98$$

$$[Q]^0 = \begin{bmatrix} 148,87 & 2,91 & 0,00 \\ 2,91 & 9,71 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 4,55 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-67} \dots\dots\dots 99$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 99$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 99$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 132,59 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 76,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} x10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 99$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 52,91 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 46,24 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 99$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2143769 & 0 \\ 0 & 2143769 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 100$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 3,44 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 100$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10065} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 10018kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 100$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{40260} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 39517kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 100$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 101$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 101$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} x10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 101$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,91 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 101$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 809769 & 0 \\ 0 & 809769 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 102$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 102$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{739} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 738 kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 102$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2954} + \frac{1}{809769} \right)^{-1} = 2944 kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 102$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 103$$

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 103$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} \times 10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 103$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,92 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 103$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1142154 & 0 \\ 0 & 1142154 \end{bmatrix} \times 10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 104$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 104$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1559} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 1556 kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 104$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6234} + \frac{1}{1142154} \right)^{-1} = 6200 kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 104$$

$$[Q]^{45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & 34,79 \\ 36,55 & 45,65 & 34,79 \\ 34,79 & 34,79 & 38,19 \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-68} \dots\dots\dots 105$$

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ**

$$[Q]^{-45} = \begin{bmatrix} 45,65 & 36,55 & -34,79 \\ 36,55 & 45,65 & -34,79 \\ -34,79 & -34,79 & 35,76 \end{bmatrix} x10^9 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-69} \dots\dots\dots 105$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 76,92 & 59,65 & 0,00 \\ 59,65 & 132,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 60,98 \end{bmatrix} x10^6 N / m^2, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-70} \dots\dots\dots 105$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46,24 & 36,79 & 21,15 \\ 36,79 & 52,91 & 21,15 \\ 21,15 & 21,15 & 38,03 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-71} \dots\dots\dots 105$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2143769 & 0 \\ 0 & 2143769 \end{bmatrix} x10^3 N / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-72} \dots\dots\dots 106$$

$$\frac{L_y}{L_x} = 4 > 3 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} = 2,62 \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-73} \dots\dots\dots 106$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5841} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 5825 kN / m, \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-78} \dots\dots\dots 106$$

$$N_{x,cr} = \left(\frac{4L_x^2}{\pi^2 D_{11}} + \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{23362} + \frac{1}{2143769} \right)^{-1} = 23110 kN / m \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ 4-79} \dots\dots\dots 106$$