



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

**«Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση
Κατασκευών»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ
ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ**

Παύλου Α. Ευαγγελία

Επιβλέπων: Δρ. Κωνσταντίνος Β. Σπηλιόπουλος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

**«Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση
Κατασκευών»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ
ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ**



Παύλου Α. Ευαγγελία

Επιβλέπων: Δρ. Κωνσταντίνος Β. Σπηλιόπουλος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2011

Ευχαριστίες...

Με την ευκαιρία της παρουσίασης της μεταπτυχιακής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω αυτούς που με βοήθησαν και με ενθάρρυναν στην ολοκλήρωση της.

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της μεταπτυχιακής μου εργασίας Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Κωνσταντίνο Σπηλιόπουλο. Η αδιάκοπη βοήθεια του οποιαδήποτε ώρα και στιγμή και η συνεχής συνεργασία μας στη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας με ενθάρρυναν έτι περισσότερο να συνεχίσω. Η μετάδοση του πνεύματος και της σκέψης του μηχανικού, ως αποτέλεσμα της άριστης επιστημονικής του κατάρτισης ήταν καθοριστικής σημασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αν. Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Λ. Σταυρίδη του Τομέα Δομοστατικής Ε.Μ.Π. και τον Λέκτορα Ε.Μ.Π. κ. Β. Ριζιώτη του τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. για τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Σπ. Βουτσινά, τον Λέκτορα Ε.Μ.Π. κ. Β. Ριζιώτη και τον υπ. Διδάκτορα κ. Δ. Μανωλά του Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. για την πολύτιμη βοήθειά τους στην κατανόηση και εμπέδωση του ιδιαίτερου θέματος της εργασίας μου.

Θα ήθελα επιπροσθέτως να ευχαριστήσω τον υπ. Διδάκτορα κ. Β. Μελισσιανό για τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη συγγραφή της εργασίας.

Τέλος, είναι προφανείς και ολόθερμες οι ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου, στον πατέρα μου Απόστολο, στη μητέρα μου Ρίτα και στον αδελφό μου Δημήτρη, για την αμέριστη συμπαράσταση, υποστήριξη και ενθάρρυνση που μου προσέφεραν στη διάρκεια εκπόνησης της μεταπτυχιακής εργασίας μου.

Εύα Παύλου

Μάρτιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. – «Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών»

Εισαγωγή στην Ανάλυση Πτερυγίων Ανεμογεννήτριας

Μεταπτυχιακή Εργασία

της Ευαγγελίας Παύλου

Αθήνα, Μάρτιος 2011

Επιβλέπων: Δρ. Κωνσταντίνος Β. Σπηλιόπουλος, Αναπλ. Καθ. ΕΜΠ

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γίνεται μία θεωρητική και πρακτική προσπάθεια εισαγωγής στην ανάλυση πτερυγίων ανεμογεννητριών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται ένας κώδικας πεπερασμένων στοιχείων δοκού που συντάχθηκε στο Εργαστήριο Αεροδυναμικής της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ.

Στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η σπουδαιότητα των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας στη σύγχρονη εποχή, δίνοντας έμφαση στην αιολική ενέργεια (ΑΕ). Επιπλέον, δίνονται στοιχεία για τη διείσδυση της ΑΕ στην παραγωγή ενέργειας τόσο στην Ελλάδα, όσο και στην Ευρωπαϊκή Ένωση. Στο 2^ο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι έννοιες του αιολικού δυναμικού και της αιολικής ισχύος και δίνονται στοιχεία για τις ανεμογεννήτριες οριζόντιου άξονα, που μελετώνται στην παρούσα εργασία.

Το 3^ο κεφάλαιο εμπεριέχει τις βασικές αρχές της μηχανικής και της δυναμικής των κατασκευών, θέτοντας τη θεωρητική βάση για τη μοντελοποίηση των πτερυγίων. Στο 4^ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η κλασική θεωρία της δοκού, η χρήση των πεπερασμένων στοιχείων και τέλος εκτίθενται οι υπολογισμοί όλων των απαραίτητων στοιχείων για τη μοντελοποίηση της διατομής του πτερυγίου.

Στο 5^ο κεφάλαιο διατυπώνονται οι βασικές αρχές των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στις αεροελαστικές αναλύσεις για τον προσδιορισμό των αεροδυναμικών δυνάμεων, με έμφαση στην αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής. Το 6^ο κεφάλαιο πραγματεύεται την ιδιομορφική ανάλυση ανεμογεννητριών και δίνονται αποτελέσματα ιδιομορφικών αναλύσεων σε πτερύγια ανεμογεννήτριας.

Τέλος, στο 7^ο κεφάλαιο παρατίθενται αποτελέσματα αεροελαστικών αναλύσεων σε πτερύγια ανεμογεννήτριας από τα οποία εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για τα πιο σημαντικά παραμορφωσιακά μεγέθη των πτερυγίων.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING

MSc in Analysis and Design of Earthquake Resistant Structures

“Introduction to The Structural Analysis of Wind Turbine Blades ”

Post-graduate Thesis

of Evangelia Pavlou

Athens, March 2011

Supervisor: Dr. Konstantinos Spiliopoulos, Associate Professor NTUA

Abstract

In this post-graduate thesis a theoretical and practical introduction to the analysis of wind turbine blades is attempted. For this reason a finite element code is used, which was written in the Aerodynamics Laboratory of School of the Mechanical Engineering Department of the NTUA.

In the 1st chapter the importance of Renewable Energy in modern times is introduced, focusing on Wind Energy. Also, some information is given about the spread of the Wind Energy in Greece and the European Union. The 2nd chapter deals with the basic principles of wind capacity and wind power. Moreover, the basic characteristics of the wind turbines with horizontal axis which are treated in this thesis, are presented.

The 3rd chapter deals with the basics of the structural mechanics and dynamics, setting the theoretical background for blade modeling. In the 4th chapter the classical beam and its finite element modeling are discussed. Moreover, all the necessary aspects that are used in the blade section modeling are calculated.

The 5th chapter presents the basic principles of turbine modeling for the aeroelastic analysis in order to determine the aerodynamic forces on the structure. The 6th chapter contains results of the eigenmodal analysis of wind turbines and blades.

Finally, in the 7th chapter, results from the aeroelastic analysis of blades are presented from which useful conclusions for their deformations are derived.

Περιεχόμενα

1	Η Θέση του Ανέμου στη Σύγχρονη Εποχή	1
1.1	Γενικά Στοιχεία	2
1.1.1	Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας	2
1.1.2	Χρήση της Αιολικής Ενέργειας στην Ευρώπη	3
1.1.3	Χρήση της Αιολικής Ενέργειας στην Ελλάδα	4
1.2	Άνεμος και Οικονομία	6
1.3	Άνεμος και Έρευνα	7
2	Αιολικό Δυναμικό και Τύποι Ανεμογεννητριών	9
2.1	Αιολική Ισχύς και Μετατροπή της	10
2.1.1	Αιολικό Δυναμικό	10
2.1.2	Αιολική Ισχύς και Μετατροπή	11
2.1.3	Έλεγχος της Αεροδυναμικής Ισχύος	12
2.2	Συστήματα Ανεμογεννητριών	15
3	Βασικά Στοιχεία Μηχανική και Δυναμικής των Κατασκευών	17
3.1	Βασικά Στοιχεία Μηχανικής	18
3.1.1	Τάσεις και Παραμορφώσεις	18
3.1.2	Σύζευξη Έργου-Τάσεων, Εσωτερικών Δυνάμεων και Τελεστής Δυσκαμψίας	21
3.1.3	Εξισώσεις Ισορροπίας	22
3.1.4	Θεώρημα Green	23
3.1.5	Ενεργειακές Αρχές της Θεωρίας των Μεταβολών	23
3.2	Στοιχεία Δυναμικής των Κατασκευών	24
3.2.1	Δυναμική Ισορροπία	24
3.2.2	Ενεργειακή Μέθοδος Hamilton	24
3.2.3	Ιδιομορφική Ανάλυση	25
3.2.4	Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης	26
3.2.5	Μοντελοποίηση της Απόσβεσης στις Κατασκευές κατά Rayleigh	27
3.2.6	Απόσβεση σε Αεροδυναμικά Φαινόμενα	27
4	Θεωρία Μοντελοποίησης Πτερυγίων	29
4.1	Η Κλασική Θεωρία της Δοκού	30
4.1.1	Εισαγωγή	30
4.1.2	Μετατοπίσεις και Ανηγμένες Παραμορφώσεις	30
4.1.3	Φορτία και Τάσεις	31
4.1.4	Εξισώσεις Ισορροπίας	32
4.2	Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Στοιχεία Δοκού	34
4.2.1	Γενικά	34

4.2.2	Συναρτήσεις Σχήματος και Προσεγγίσεις	35
4.2.3	Διαμόρφωση Δυνατού Έργου	37
4.2.4	Διακριτοποίηση	39
4.3	Υπολογισμός Βασικών Χαρακτηριστικών Διατομής πτερυγίου	39
4.3.1	Γενικές Ιδιότητες	40
4.3.2	Στρέψη: Υπολογισμός της Σταθεράς του Saint Venant	41
4.3.3	Κέντρο Διάτμησης	43
5	Μοντελοποίηση Ανεμογεννητριών για Αεροελαστικές Αναλύσεις	45
5.1	Εισαγωγή στην Αεροελαστικότητα	46
5.1.1	Γενικά Στοιχεία για την Αεροελαστικότητα	46
5.1.2	Προσεγγιστική Ποσοτικοποίηση των Αεροελαστικών Επιδράσεων	46
5.2	Υπολογισμός Αεροδυναμικών Φορτίων	47
5.2.1	Το Αρχικό Μοντέλο ONERA	48
5.2.2	Υστέρηση Δυναμικής Απώλειας Στήριξης	50
5.2.3	Το Γενικευμένο Μοντέλο ONERA	51
5.3	Σύνδεση με την Προσομοίωση σε Αεροελαστικές Αναλύσεις	55
6	Ιδιομορφική Ανάλυση: Προσδιορισμός των Δυναμικών Χαρακτηριστικών	57
6.1	Εισαγωγή	58
6.2	Σύγκριση Αποτελεσμάτων Αναλύσεων και Μετρήσεων Πεδίου	58
6.2.1	Ιδιομορφική Ανάλυση Γεννήτριας σε Ακίνησια	58
6.2.2	Δυναμικές Προσομοιώσεις	61
6.3	Αποτελέσματα Ιδιομορφική Ανάλυσης Πτερυγίων	62
7	Αποτελέσματα Αεροελαστικών Αναλύσεων	67
7.1	Στοιχεία Αεροελαστικών Αναλύσεων	68
7.2	Αποτελέσματα Αεροελαστικών Αναλύσεων	69

ΛΕΞΙΚΟ

drag	οπισθέλκουσα ή αντίσταση (αεροδυναμική δύναμη)
edge deflection	μετατόπιση εντός του επιπέδου περιστροφής της έλικας
flap deflection	μετατόπιση εκτός του επιπέδου περιστροφής της έλικας
hub	πλήμνη
lift	άνωση (αεροδυναμική δύναμη)
nacelle	άτρακτος ανεμογεννήτριας
pitch	πρόνευση
pitching moment	ροπή πρόνευσης οφειλόμενη στην αεροδυναμική δύναμη
pitching-heaving airfoil	διατομή με πρόνευση και ανύψωση
shaft	στροφαλοφόρος άξονας ανεμοκινητήρα
stall	απώλεια στήριξης
tilt	εγκάρσια κλίση έλικας
wake	ομόρρους
wind capacity	αιολικό δυναμικό
yawn	εκτροπή

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1.1	Συνολική εγκατεστημένη ισχύς ΑΕ μέχρι το τέλος του 2010. [4]	4
Πίνακας 4.1	Συμβολισμός για τον ορισμό των ιδιοτήτων της διατομής.	40
Πίνακας 6.1	Σύγκριση φυσικών συχνοτήτων ανεμογεννήτριας από μετρήσεις με τα αποτελέσματα μοντελοποίησης με στοιχεία δοκού. [10]	61
Πίνακας 6.2	Αποτελέσματα ιδιομορφικής ανάλυσης και σύγκριση με μετρήσεις πεδίου. [10]	62
Πίνακας 6.3	Ιδιοσυχνότητες και ιδιοπερίοδοι πτερυγίου.	63
Πίνακας 7.1	Μετατροπή της κλίμακας Beaufort. [15]	68
Πίνακας 7.2	Προσανατολισμός πτερυγίων και γωνιακή ταχύτητα έλικας για κάθε ταχύτητα ανέμου στην ανάλυση.	69
Πίνακας 7.3	Μέση τιμή παραμορφώσεων, αεροδυναμικής δύναμης και ισχύος.	74

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1	Συνολική εγκατεστημένη ισχύς ΑΕ μέχρι το τέλος του 2010 (ΜW). [4]	3
Σχήμα 1.2	Στατιστικά στοιχεία αιολικής παραγωγής στην Ελλάδα. (ΔΕΣΜΗΕ)	5
Σχήμα 1.3	Εκτιμώμενη εγκατεστημένη ισχύς των ΑΠΕ στην Ελλάδα μέχρι το 2010. (ΕΛΕΤΑΕΝ)	6
Σχήμα 1.4	Εξέλιξη του μεγέθους και της ισχύος των ανεμογεννητριών. [12]	7
Σχήμα 2.1	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh για την ταχύτητα του ανέμου. [13]	11
Σχήμα 2.2	Σχέση ταχύτητας ανέμου και ισχύος εξόδου. [13]	12
Σχήμα 2.3	Τύποι ανεμοκινητήρων: (α) Τριπτέρυγος Savonius κατακόρυφου άξονα, (β) Τριπτέρυγος οριζοντίου άξονα, (γ) Τριπτέρυγος Darrieus κατακόρυφου άξονα.	13
Σχήμα 2.4	Κύρια μέρη μιας ανεμογεννήτριας. [13]	14
Σχήμα 3.1	Εξωτερικές δυνάμεις σε τυχαίο στερεό σώμα. [9]	18
Σχήμα 3.2	Ορισμός τεχνικής ανηγμένης παραμόρφωσης.	19
Σχήμα 3.3	Συσχέτιση τάσεων και επιφανειακών φορτίων. [11]	23
Σχήμα 4.1	Κινηματική μίας διατομής της δοκού. [11]	30
Σχήμα 4.2	Κινηματική και δυναμική μίας παραμορφώσιμης δοκού. [11]	33
Σχήμα 4.3	Περιγραφή της δοκού με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. [11]	35
Σχήμα 4.4	Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού μίας λεπτότοιχης διατομής. [11]	41
Σχήμα 4.5	Υπολογισμός της διατμητικής ροής.	42
Σχήμα 4.6	Υπολογισμός του κέντρου διάτμησης.	43
Σχήμα 5.1	Αεροδυναμικές δυνάμεις σε μια τυπική διατομή.	47
Σχήμα 5.2	Βασικές συμβάσεις για το μοντέλο ONERA. [10]	50
Σχήμα 5.3	Τροποποίηση της καμπύλης άνωσης με σκοπό τη μοντελοποίηση της υστέρησης εξαιτίας της δυναμικής απώλειας στήριξης. [10]	51
Σχήμα 5.4	Ορισμός των w_0 και w_1 .	52
Σχήμα 5.5	Βασικοί συμβολισμοί στη διατομή πτερυγίου. [10]	56
Σχήμα 6.1	Τυπική κατανομή ιδιοτιμών από ιδιομορφική ανάλυση σε ακινησία. [10]	59
Σχήμα 6.2	Συμμετρική ιδιομορφή πτερύγωσης (αριστερά) και ασύμμετρη (ως προς τον πύργο) ιδιομορφή πτερύγωσης (δεξιά). [10]	60
Σχήμα 6.3	Τοπικοί άξονες σε τυπική διατομή πτερυγίου.	62
Σχήμα 6.4	Πρώτη και δεύτερη ιδιομορφή πτερυγίου.	64
Σχήμα 6.5	Τρίτη και τέταρτη ιδιομορφή πτερυγίου.	64
Σχήμα 6.6	Πέμπτη και έκτη ιδιομορφή πτερυγίου.	65
Σχήμα 6.7	Έβδομη και όγδοη ιδιομορφή πτερυγίου.	65
Σχήμα 6.8	Ένατη και δέκατη ιδιομορφή πτερυγίου.	66
Σχήμα 7.1	Διάγραμμα μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εντός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει του χρόνου.	69
Σχήμα 7.2	Διάγραμμα μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εκτός του	70

	επιπέδου περιστροφής συναρτήσει του χρόνου.	
Σχήμα 7.3	Διάγραμμα μεταβολής της γωνίας στρέψης του πτερυγίου συναρτήσει του χρόνου.	70
Σχήμα 7.4	Διάγραμμα μεταβολής της μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εντός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.	71
Σχήμα 7.5	Διάγραμμα μεταβολής της μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εκτός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.	71
Σχήμα 7.6	Διάγραμμα μεταβολής γωνίας στρέψης του πτερυγίου συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.	72
Σχήμα 7.7	Διάγραμμα μεταβολής αεροδυναμικής δύναμης στα πτερύγια συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.	73
Σχήμα 7.8	Διάγραμμα μεταβολής αεροδυναμικής ισχύος συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.	73

Κεφάλαιο 1

Η ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ

1.1 Γενικά Στοιχεία

1.1.1 Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας

Οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας (ΑΠΕ), γνωστές και ως ήπιες μορφές ενέργειας, είναι μορφές εκμεταλλεύσιμης ενέργειας που προέρχονται από διάφορες φυσικές διαδικασίες. Ο όρος "ήπιες" αναφέρεται στα δύο βασικά γνωρίσματά τους, δηλαδή στο γεγονός ότι δεν απαιτείται κάποια ενεργητική παρέμβαση για την αξιοποίησή τους όπως εξόρυξη, άντληση ή καύση καθώς και στο ότι πρόκειται για καθαρές μορφές ενέργειας, φιλικές προς το περιβάλλον, οι οποίες δεν αποδεσμεύουν διοξείδιο του άνθρακα, υδρογονάνθρακες ή κάποιου άλλου είδους επιβλαβή απόβλητα.

Αν και οι ΑΠΕ είναι οι πρώτες μορφές ενέργειας που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος, μόλις τις τελευταίες τρεις δεκαετίες ανακινήθηκε το ενδιαφέρον για αυτές και την αξιοποίησή τους. Οι λόγοι που έστρεψαν το ενδιαφέρον των ανεπτυγμένων χωρών στην παραγωγή ενέργειας από ΑΠΕ είναι οι πετρελαϊκές κρίσεις της εποχής, η επικείμενη εξάντληση των ορυκτών καυσίμων, η αυξανόμενη μόλυνση του περιβάλλοντος, το φαινόμενο του θερμοκηπίου αλλά και η ανάγκη των κρατών για ανεξάρτητη ενεργειακή πολιτική με την αξιοποίηση των εγχώριων πηγών ενέργειας.

Κάποιες μορφές ενέργειας ανανεώσιμων πηγών είναι:

- **Αιολική ενέργεια:** Παλαιότερα γινόταν χρήση της για άντληση νερού από πηγάδια και για μηχανικές εφαρμογές (ανεμόμυλοι) ενώ πλέον χρησιμοποιείται ευρέως στην παραγωγή ηλεκτρισμού.
- **Ηλιακή ενέργεια:** Χρησιμοποιείται κυρίως σε θερμικές εφαρμογές (ηλιακοί θερμοσίφωνες και φούρνοι) αλλά και στην παραγωγή ηλεκτρισμού.
- **Υδροηλεκτρική ενέργεια:** Είναι η πιο διαδεδομένη μορφή ανανεώσιμης ενέργειας.
- **Βιομάζα:** Μία πηγή ενέργειας με πολλές δυνατότητες και μελλοντικές εφαρμογές που χρησιμοποιεί τους υδατάνθρακες των φυτών μέσω των αποβλήτων της βιομηχανίας του ξύλου, των τροφίμων, της ζάχαρης αλλά και μέσω αστικών αποβλήτων και απορριμμάτων.
- **Γεωθερμική ενέργεια:** Εκμεταλλεύεται τη θερμότητα που παράγεται από τη ραδιενεργό αποσύνθεση πετρωμάτων και ανεβαίνει με φυσικό τρόπο στην επιφάνεια της γης (π.χ. θερμοπίδακες και πηγές θερμού νερού).
- **Ενέργεια από κύματα:** Εκμεταλλεύεται την κινητική ενέργεια των κυμάτων της θάλασσας.
- **Ενέργεια από ωκεανούς:** Εκμεταλλεύεται τη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στα στρώματα του ωκεανού, κάνοντας χρήση θερμικών κύκλων, αλλά βρίσκεται ακόμα σε ερευνητικό επίπεδο.

Γενικότερα, οι ΑΠΕ είναι φιλικές προς το περιβάλλον, έχοντας ουσιαστικά μηδενικά κατάλοιπα και απόβλητα ενώ τα αποθέματά τους ανανεώνονται με φυσικό τρόπο και θεωρούνται πρακτικά ανεξάντλητες. Στον οικονομικό τομέα, αποτελούν την εναλλακτική πρόταση σε σχέση με την οικονομία του πετρελαίου, επιδοτούνται από τις περισσότερες κυβερνήσεις και πλέον ο εξοπλισμός είναι απλός στην κατασκευή και τη συντήρηση και με μεγάλο χρόνο ζωής. Επιπλέον, επειδή είναι διάσπαρτες γεωγραφικά, μπορούν να οδηγήσουν στην αποκέντρωση του ενεργειακού συστήματος μειώνοντας τις αποστάσεις παραγωγής-κατανάλωσης και ελαχιστοποιώντας τις απώλειες λόγω μεταφοράς.

Από την άλλη πλευρά, οι ΑΠΕ έχουν συντελεστή απόδοσης της τάξης του 30% ή και χαμηλότερο και απαιτούν για την εγκατάστασή τους μεγάλη επιφάνεια γης με αποτέλεσμα

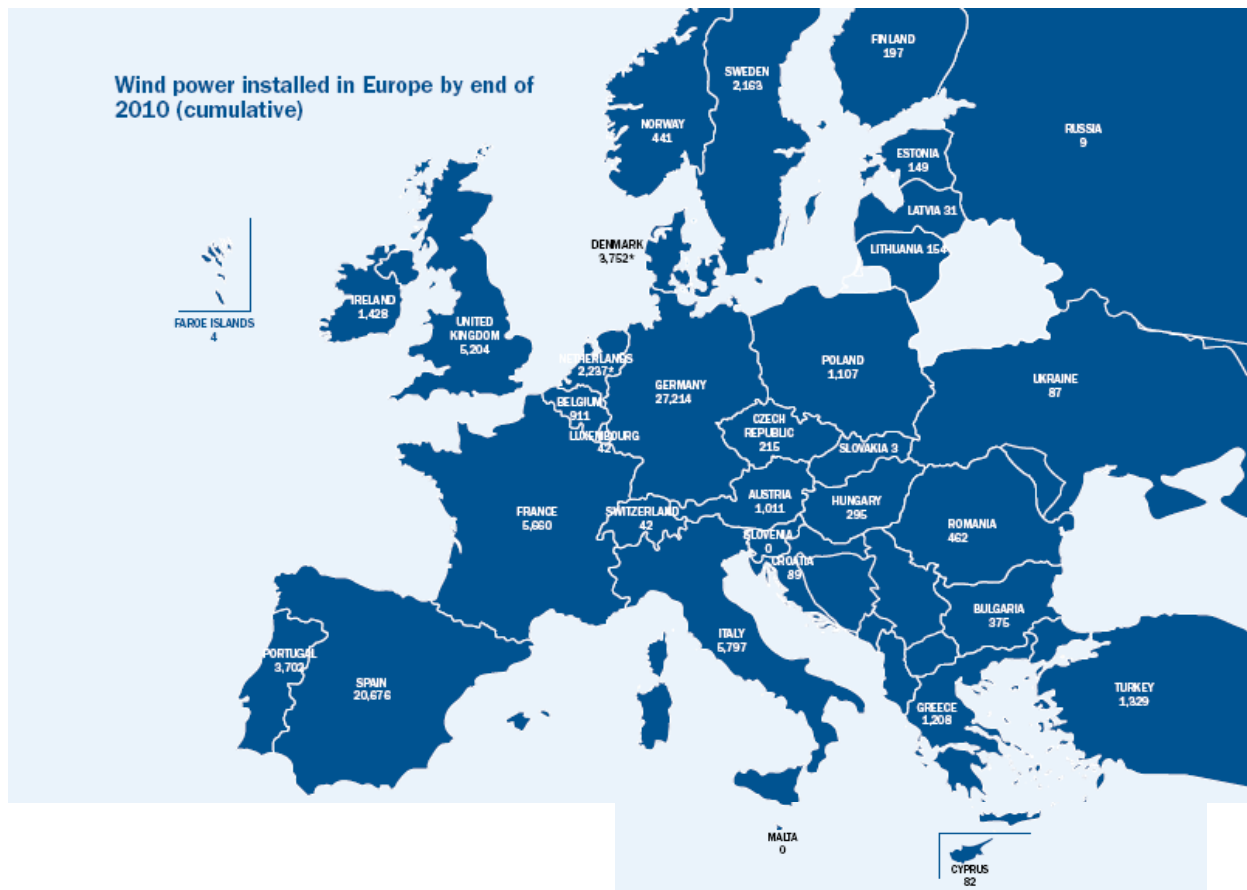
να χρησιμοποιούνται σαν συμπληρωματικές πηγές ενέργειας και να μην μπορούν να καλύψουν τις ανάγκες μεγάλων αστικών κέντρων. Επιπροσθέτως, η παροχή και απόδοση της αιολικής, υδροηλεκτρικής και ηλιακής ενέργειας εξαρτάται από την εποχή του έτους αλλά και από το γεωγραφικό πλάτος και το κλίμα της περιοχής στην οποία εγκαθίστανται.

1.1.2 Χρήση της Αιολικής Ενέργειας στην Ευρώπη

Ευρωπαϊκές οδηγίες θέτουν κατώτατα όρια στη συμμετοχή των ΑΠΕ στη συνολική παραγωγή ενέργειας των κρατών-μελών με στόχο οι ΑΠΕ μέχρι το 2020 να αποτελούν το 40% της ηλεκτροπαραγωγής και το 20% της συνολικής παραγόμενης ενέργειας ώστε να είναι πιο εφικτός ο στόχος της μείωσης εκπομπής αερίων που επηρεάζουν το φαινόμενο του θερμοκηπίου κατά 30%.

Η εκμετάλλευση της αιολικής ενέργειας (ΑΕ) στα αρχικά στάδια της εξέλιξής της ήταν ασύμφορη. Απ’ όλες όμως τις εναλλακτικές μορφές ενέργειας η αιολική είναι η πιο γρήγορα αναπτυσσόμενη. Έτσι, με την πάροδο των χρόνων και την πρόοδο της επιστημονικής έρευνας, είναι δυνατή πλέον η αποδοτική εκμετάλλευση της ΑΕ για την παραγωγή σημαντικού μέρους των ενεργειακών αναγκών αρκετών χωρών.

Ακολουθούν δεδομένα για την ανάπτυξη της αιολικής ενέργειας στην Ευρώπη για το 2010, όπως αυτά δημοσιεύθηκαν από την Ευρωπαϊκή Ένωση Αιολικής Ενέργειας (EWEA):



Σχήμα 1.1: Συνολική εγκατεστημένη ισχύς ΑΕ μέχρι το τέλος του 2010 (MW).

- Οι χώρες με τη μεγαλύτερη ανάπτυξη στον τομέα της ΑΕ είναι η Γερμανία, η Ισπανία, η Ιταλία, η Γαλλία και το Ηνωμένο Βασίλειο.
- Οι εγκαταστάσεις εκμετάλλευσης ΑΕ που δημιουργήθηκαν αποτελούν το 16,7% του συνόλου των νέων εγκαταστάσεων εκμετάλλευσης ΑΠΕ και μπορούν να παράγουν υπό φυσιολογικές ετήσιες συνθήκες 181 TWh, δηλαδή το 5,3% της ζήτησης.
- Το 2010 ήταν η πρώτη χρονιά από το 2007 που οι καινούριες εγκαταστάσεις εκμετάλλευσης ΑΕ δεν ήταν περισσότερες σε αριθμό από τις αντίστοιχες εγκαταστάσεις των υπόλοιπων ΑΠΕ.
- Η ΑΕ αποτελεί το 9,6% της παραγόμενης ενέργειας, με ικανότητα παραγωγής 84.074MW.

Πίνακας 1.1: Συνολική εγκατεστημένη ισχύς ΑΕ μέχρι το τέλος του 2010.

	Installed 2009	End 2009	Installed 2010	End 2010
EU Capacity (MW)				
Austria	0	995	16	1,011
Belgium	149	563	350	911
Bulgaria	57	177	198	375
Cyprus	0	0	82	82
Czech Republic	44	192	23	215
Denmark*	334	3,465	327	3,752
Estonia	64	142	7	149
Finland	4	147	52	197
France	1,088	4,574	1,086	5,660
Germany	1,917	25,777	1,493	27,214
Greece	102	1,086	123	1,208
Hungary	74	201	94	295
Ireland	233	1,310	118	1,428
Italy	1,114	4,849	948	5,797
Latvia	2	28	2	31
Lithuania	37	91	63	154
Luxembourg	0	35	7	42
Malta	0	0	0	0
Netherlands*	39	2,223	15	2,237
Poland	180	725	382	1,107
Portugal	673	3,357	345	3,702
Romania	3	14	448	462
Slovakia	0	3	0	3
Slovenia	0.02	0.03	0	0,03
Spain	2,459	19,160	1,516	20,676
Sweden	512	1,560	604	2,163
United Kingdom	1,077	4,245	962	5,204
Total EU-27	10,315	74,919	9,259	84,074
Total EU-15	9,702	73,346	7,961	81,202
Total EU-12	461	1,574	1,298	2,872
Of which offshore and near shore	582	2,064	883	2,946

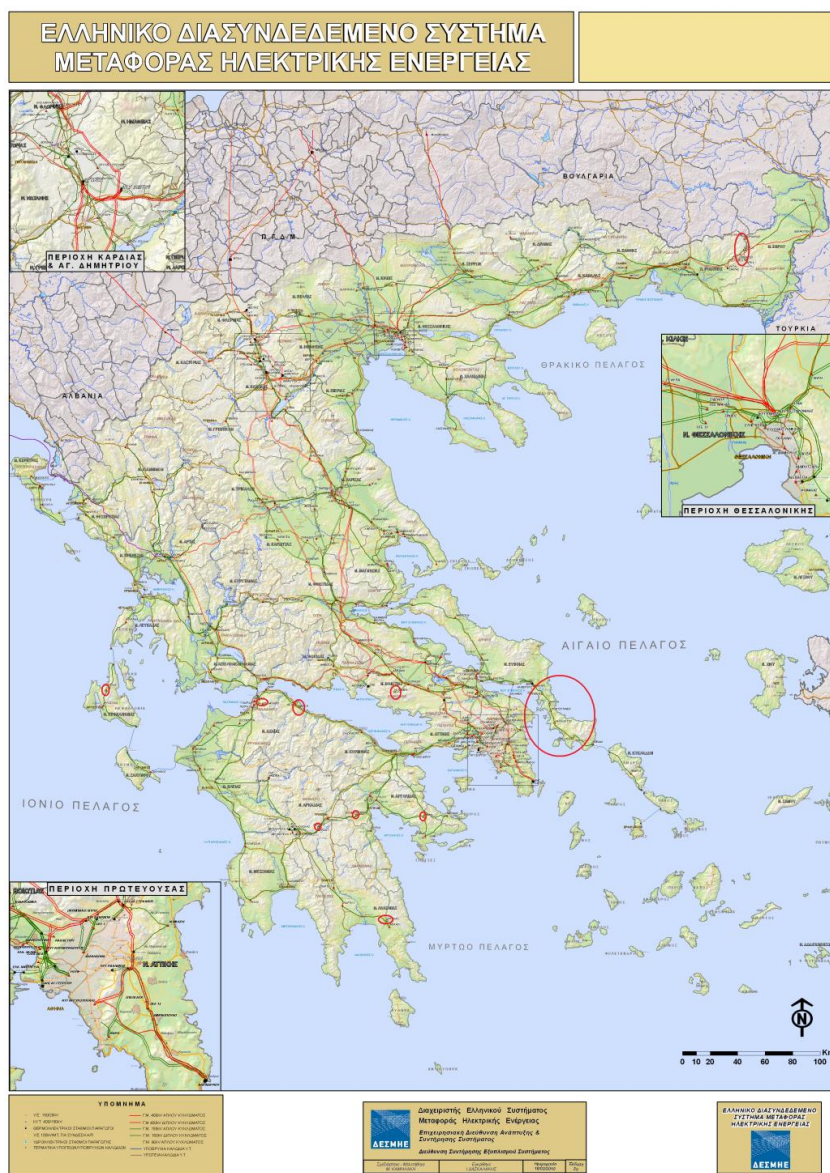
1.1.3 Χρήση της Αιολικής Ενέργειας στην Ελλάδα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η Ελλάδα έχει δεσμευτεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση στη συμμετοχή των ΑΠΕ στο σύστημα ηλεκτροπαραγωγής σε ποσοστό που ισοδυναμεί με τουλάχιστον 3.500 MW εγκατεστημένης ισχύος αιολικών συστημάτων. Το τεχνικά και οικονομικά εκμεταλλεύσιμο αιολικό δυναμικό της χώρας είναι μεγαλύτερο των 3.500 MW,

όμως λόγω έλλειψης καθαρού νομοθετικού πλαισίου και σωστής ενημέρωσης των πολιτών η διείσδυση της ΑΕ στο ενεργειακό σύστημα της χώρας δεν έχει το ρυθμό που θα έπρεπε. Ενδεικτικό είναι πως η εξυπηρέτηση των ενεργειακών αναγκών της χώρας βασίζεται κατά 20% σε στερεά καύσιμα, κατά 75% σε υγρά καύσιμα και κατά 5% σε υδροηλεκτρική ενέργεια παρότι η Ελλάδα χάρη στη μορφολογία και το υψηλό αιολικό δυναμικό αποτελεί ιδανική χώρα για εγκατάσταση αιολικών πάρκων.

Σήμερα οι ανάγκες των νησιών σε ενέργεια καλύπτονται κυρίως από τοπικούς πετρελαϊκούς σταθμούς με εξαίρεση κάποια νησιά κοντά στην ηπειρωτική χώρα, τα οποία έχουν συνδεθεί και τροφοδοτούνται από τα κεντρικά δίκτυα. Ένας αριθμός νησιών έχουν συνδεθεί μεταξύ τους και τροφοδοτούνται από κεντρικούς αυτόνομους σταθμούς. Για πολλά χρόνια ακόμα προβλέπεται ότι τα πιο απομακρυσμένα νησιά θα συνεχίσουν να στηρίζουν την κάλυψη των ενεργειακών τους αναγκών στην αυτόνομη παραγωγή και θα παραμένουν ανεξάρτητα από τα εθνικά δίκτυα.

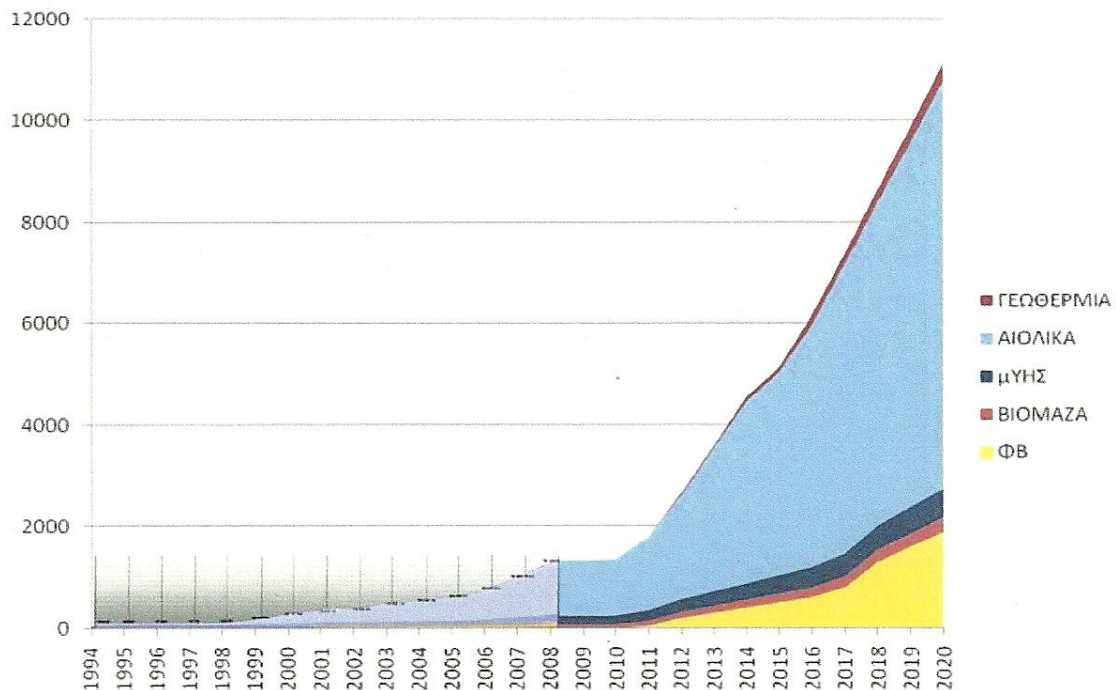
Ακολουθεί χάρτης της χώρας με το ελληνικό διασυνδεδεμένο σύστημα μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, όπου επισημαίνονται τα αιολικά πάρκα σε λειτουργία στο διασυνδεδεμένο σύστημα της ΔΕΗ για το έτος 2009, μια χρονιά κατά την οποία η ζήτηση στην Ελλάδα ανήλθε στις 54 TWh και το ποσοστό διείσδυσης των ΑΠΕ ήταν στο 8%.



Σχήμα 1.2: Στατιστικά στοιχεία αιολικής παραγωγής στην Ελλάδα.

Αξίζει να επισημανθεί ότι το πρώτο αιολικό πάρκο της χώρας που λειτούργησε επί 5 χρόνια και έδωσε σημαντική εμπειρία ήταν το αιολικό πάρκο της Κύθου με 5 ανεμογεννήτριες ονομαστικής ισχύος 20 KW έκαστη. Οι ανεμογεννήτριες αυτές αντικαταστάθηκαν από μεγαλύτερες, ισχύος 33 KW.

Τέλος, στο επόμενο σχήμα φαίνεται η εκτίμηση της εγκατεστημένης ισχύος των ΑΠΕ στην Ελλάδα έως το 2020, με φανερή την κυριαρχία της ΑΕ.



Σχήμα 1.3: Εκτιμώμενη εγκατεστημένη ισχύς των ΑΠΕ στην Ελλάδα μέχρι το 2020.

1.2 Άνεμος και Οικονομία

Η προτίμηση πολλών ευρωπαϊκών χωρών στις ΑΠΕ και ειδικότερα στην ΑΕ μπορεί εύκολα να δικαιολογηθεί χάρη στα πολλά πλεονεκτήματα που προσφέρει. Γενικά μιλώντας, η στροφή προς την ΑΕ μπορεί να δημιουργήσει νέους τομείς οικονομικής δραστηριότητας, νέες θέσεις εργασίας αλλά και ανάπτυξη της πανεπιστημιακής και επιστημονικής έρευνας. Και όλα αυτά χωρίς επιβάρυνση του περιβάλλοντος και της κοινωνίας γενικότερα.

Κάποιοι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την οικονομική βιωσιμότητα μιας αιολικής ενεργειακής μονάδας είναι:

- **Κόστος αγοράς της ανεμογεννήτριας:** Περίπου το 75% του συνολικού κόστους σχετίζεται με την κατασκευή των μηχανικών μερών μιας ανεμογεννήτριας. Όμως το κόστος αυτό είναι αντιστρόφως ανάλογο της τυποποίησης στην κατασκευή της μηχανής και του πλήθους των μηχανών που κατασκευάζονται και πωλούνται.
- **Κόστος γης και υποδομής:** Σημαντικό κόστος μπορεί να αποτελέσει η δημιουργία της κατάλληλης υποδομής για τη μεταφορά, εγκατάσταση και λειτουργία της ανεμογεννήτριας, όπως η διάνοιξη δρόμων που επιτρέπουν την κίνηση μεγάλων γερανών για τη μεταφορά του πύργου, των πτερυγίων ή του κουβουκλίου της ανεμογεννήτριας καθώς και η κατασκευή του ηλεκτρικού υποσταθμού και των γραμμών μεταφοράς.

- **Συντελεστής χωρητικότητας της μηχανής (C.F.):** Ο συντελεστής υποδηλώνει την ποιότητα σχεδίασης και κατασκευής της ανεμογεννήτριας μέσω του λόγου της μέσης ισχύος που στατιστικά φαίνεται να έχει η ανεμογεννήτρια κατά τη διάρκεια ενός έτους προς την ονομαστική της ισχύ.

$$CF = \frac{\bar{P}}{P_R} \quad (1.1)$$

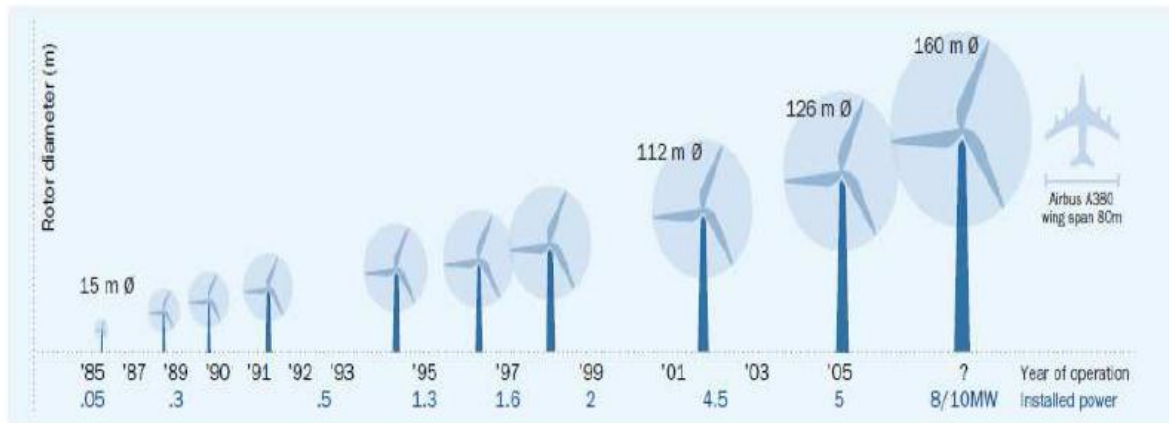
Προφανώς, όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής τόσο μεγαλύτερη η απόδοση της μηχανής και γι' αυτό απαιτείται πολύ καλή αεροδυναμική σχεδίαση που αυξάνει το κόστος.

- **Κόστος της kWh που παράγεται από συμβατικούς ενεργειακούς σταθμούς:** Οι συμβατικοί ενεργειακοί σταθμοί με τυποποιημένη την τεχνολογική σχεδίαση, την κατασκευή και τον αυτοματισμό έχουν πολύ χαμηλό κόστος παραγωγής kWh. Εντούτοις, η αιολική kWh είναι όχι απλώς συγκρίσιμη αλλά και φτηνή σε σχέση με την kWh των συμβατικών πετρελαϊκών σταθμών, γεγονός που πρέπει να μας ωθήσει στην εγκατάσταση αιολικών μηχανών στα νησιά μας.
- **Διάρκεια ζωής της ανεμογεννήτριας:** Τα ετήσια λειτουργικά έξοδα καθώς και τα έξοδα συντήρησης είναι πολύ λίγα και το κόστος αυτό μπορεί πρακτικά να μηδενιστεί.

Σε ευρωπαϊκό επίπεδο φαίνεται από επίσημα στοιχεία σημαντική αύξηση των ιδιωτικών και κρατικών επενδύσεων στην εγκατάσταση και εκμετάλλευση αιολικών πάρκων. Λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη την αύξηση της τιμής του πετρελαίου λόγω συρρίκνωσης των αποθεμάτων αλλά και τα "αόρατα" παράπλευρα οικονομικά κόστη από τη χρήση του πετρελαίου όπως δαπάνες για αποκατάσταση περιβάλλοντος ή περίθαλψη πολιτών, γίνεται αντιληπτό ότι η στροφή στην ΑΕ είναι συνειδητή και κοινωνικά υπεύθυνη και δε βασίζεται απλά στο στενό ταμειακό κόστος.

1.3 Άνεμος και Έρευνα

Είναι βέβαιο ότι δεν έχουν εξεταστεί ακόμα σε όλο το εύρος τους οι τομείς που σχετίζονται με την ανάπτυξη και την εκμετάλλευση της ΑΕ. Για την επίτευξη της μέγιστης εκμετάλλευσης του αιολικού δυναμικού απαιτείται όχι μόνο ο βέλτιστος αεροδυναμικός σχεδιασμός των μηχανικών μερών της ανεμογεννήτριας αλλά και ο εκσυγχρονισμός των μεθόδων ελέγχου των τουρμπινών και της παραγόμενης ισχύος. Ταυτόχρονα πολύ σημαντικός είναι ο σχεδιασμός μεγαλύτερων και πιο αποδοτικών ανεμογεννητριών. Οι προσπάθειες για την πραγματοποίηση των παραπάνω πραγματοποιούνται σε υψηλό επιστημονικό επίπεδο παρά το γεγονός ότι πανευρωπαϊκά μόλις το 1% των κρατικών κονδυλίων για έρευνα διατίθενται στην έρευνα της ΑΕ.



Σχήμα 1.4: Εξέλιξη του μεγέθους και της ισχύος των ανεμογεννητριών.

Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και η πρόοδος των Η/Υ επιτρέπουν την εύκολη και γρήγορη προσομοίωση όχι μόνο των ατμοσφαιρικών συνθηκών κάθε περιοχής αλλά και τη λειτουργία ολόκληρων αιολικών πάρκων και τη διασύνδεσή τους στα εθνικά δίκτυα διανομής ενέργειας. Ήδη, πολλοί οργανισμοί και εταιρίες προσπαθούν να προάγουν την έρευνα στους τομείς που αναφέρθηκαν πρωτίτερα.

Συνοπτικά, η μελλοντική έρευνα επικεντρώνεται στους εξής τομείς:

- **Ατμοσφαιρικές συνθήκες:** Για την πραγματοποίηση της μέγιστης δυνατής αξιοποίησης του αιολικού δυναμικού και των εγκαταστάσεων ενός αιολικού πάρκου απαιτείται πολύ καλή εξέταση των μετεωρολογικών δεδομένων, των προγνώσεων του καιρού και του ανάγλυφου της περιοχής.
- **Τουρμπίνες ανεμογεννητριών:** Αύξηση της αξιοπιστίας και της απόδοσης των τουρμπινών που χρησιμοποιούνται.
- **Διανομή της παραγόμενης ενέργειας:** Αποδοτικότερη και ασφαλέστερη διανομή και μεταφορά της ενέργειας που παράγουν οι ανεμογεννήτριες, με την ανάπτυξη μικρότερων και σταθερών δικτύων.
- **Υπεράκτια αιολικά πάρκα και επέκτασή τους σε άλλες περιοχές:** Η Ευρώπη ηγείται αυτή τη στιγμή των προσπαθειών αυτών, με βασικές προτεραιότητες τα θέματα ασφαλείας, περιβάλλοντος και εκπαίδευσης.

Κεφάλαιο 2

ΑΙΟΛΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ

2.1 Αιολική Ισχύς και Μετατροπή της

2.1.1 Αιολικό Δυναμικό

Οι άνεμοι είναι κινήσεις αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα που προκαλούνται κυρίως από την ηλιακή ακτινοβολία. Πιο συγκεκριμένα είναι αποτέλεσμα των θερμοκρασιακών διαφορών που δημιουργούνται στην Τροπόσφαιρα είτε λόγω διαφορετικού γεωγραφικού πλάτους είτε λόγω διαφορετικής θερμοκρασίας στην επιφάνεια της γης.

Οι άνεμοι που δημιουργούνται λόγω διαφορετικού γεωγραφικού πλάτους είναι φαινόμενα σχεδόν σταθερά ή μεταβλητά με μεγάλη περίοδο μεταβολής (εποχιακά). Οι άνεμοι λόγω διαφορετικής θερμοκρασίας στην επιφάνεια της γης χαρακτηρίζονται από μικρή χρονική διάρκεια, ωριαία ή ημερήσια, και παρατηρούνται είτε κοντά σε ορεινούς όγκους, κοιλάδες ή λεκανοπέδια είτε κοντά σε θάλασσες ή λίμνες, όπου υπάρχει διαφορετικός ρυθμός θέρμανσης και ψύξης του εδάφους και του υδάτινου όγκου.

Εκτιμάται ότι η συνολική αιολική ισχύς στη γη ανέρχεται στα 10^{14} MW, με τη διαθέσιμη προς εκμετάλλευση ισχύ να είναι της τάξης των 10^7 MW. Αυτό καταδεικνύει τις δυνατότητες της ενεργειακής μετατροπής του αιολικού δυναμικού.

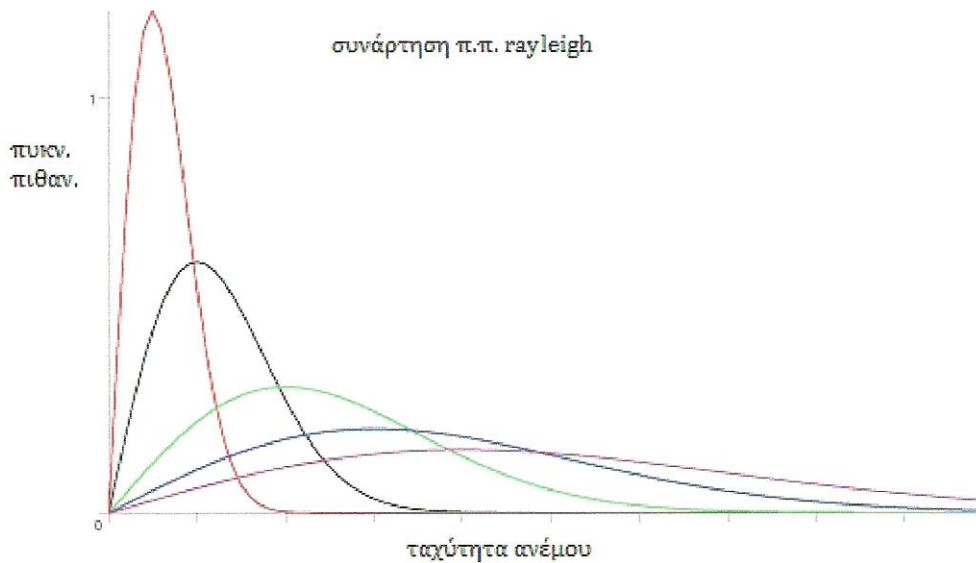
Για τον υπολογισμό του αιολικού δυναμικού μιας θέσης απαιτείται η γνώση της διαθέσιμης αιολικής ενέργειας, η οποία όμως μεταβάλλεται με το χρόνο. Αντιπροσωπευτική τιμή της αιολικής ενέργειας μπορεί να είναι η μέση ετήσια τιμή, για τον υπολογισμό της οποίας απαιτείται η γνώση της διάρκειας πνοής των ανέμων κάθε κατηγορίας ή κλίμακας ταχυτήτων.

Επειδή όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ο άνεμος έχει διακυμάνσεις και δεν παραμένει σταθερός, χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα για την εκτίμηση της πιθανότητας εμφάνισης ανέμου καθώς και της κατανομής του σε ένα χρονικό διάστημα. Από τα διάφορα μοντέλα φαίνεται ότι η αναλυτική σχέση Weibull, μια διπαραμετρική κατανομή, έχει ευρύτατη προσαρμογή και γενικά έχει καθιερωθεί. Η κατανομή εκφράζει το ποσοστό των ωρών του έτους κατά τις οποίες η ταχύτητα του ανέμου έχει τιμές μεταξύ V και $V+dV$, με την εξής αναλυτική έκφραση:

$$P(V) = \left(\frac{k}{c}\right) \times \left(\frac{V}{c}\right)^{k-1} \times e^{-\left(\frac{V}{c}\right)^k} \quad (2.1)$$

όπου V : η ταχύτητα του ανέμου και k , c : οι παράμετροι σχήματος και κλίμακας που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη περιοχή για την οποία γίνονται οι μετρήσεις.

Στη βόρεια Ευρώπη αλλά και σε πολλά άλλα μέρη παγκοσμίως, η παράμετρος σχήματος k θεωρείται ίση με 2. Στην περίπτωση αυτή, η προηγούμενη σχέση αντιπροσωπεύει την κατανομή Rayleigh. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής Rayleigh για διάφορες τιμές της παραμέτρου κλίμακας c :



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh για την ταχύτητα του ανέμου.

2.1.2 Αιολική Ισχύς και Μετατροπή

Η στιγμιαία ισχύς του ανέμου είναι ίση με:

$$P = \frac{1}{2} \times \rho \times S \times V^3 \quad (2.2)$$

όπου ρ : η πυκνότητα του ανέμου, η οποία εξαρτάται από την περιοχή και τις ατμοσφαιρικές συνθήκες, S : η επιφάνεια στην οποία προσπίπτει κάθετα ο άνεμος και V : η ομοιόμορφη στιγμιαία ταχύτητά του. Η ισχύς όμως που πραγματικά δεσμεύεται από την ανεμογεννήτρια είναι:

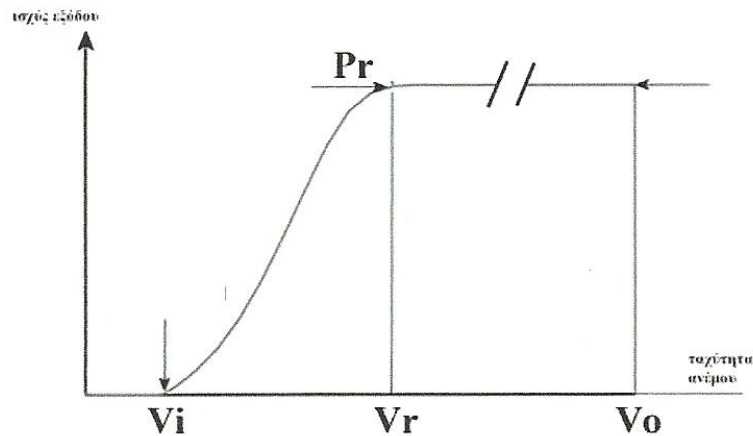
$$P_{A/\Gamma} = \frac{1}{2} \times C_p \times \rho \times S \times V^3 \quad (2.3)$$

όπου C_p : ο συντελεστής ισχύος με μέγιστη τιμή ίση με $\frac{16}{27}$. Η μειωμένη ισχύς οφείλεται σε φαινόμενα συνεκτικότητας, στον πεπερασμένο αριθμό των πτερυγίων και στη συστροφή του ρεύματος του αέρα πίσω από το δρομέα.

Στην πράξη, λόγω των μηχανικών τριβών, των συνθηκών λειτουργίας και των ατελειών της ανεμογεννήτριας η ωφέλιμη μηχανική ισχύς της ανεμογεννήτριας μειώνεται ακόμη περισσότερο μέσω των μειωτικών συντελεστών απόδοσης του μηχανικού συστήματος η_M και ηλεκτρομηχανικής μετατροπής η_E , όπως φαίνεται στη σχέση 2.4:

$$P_E = \frac{1}{2} \times \eta_M \times \eta_E \times C_p \times \rho \times S \times V^3 \quad (2.4)$$

Μια ποιοτική απεικόνιση της σχέσης ταχύτητας ανέμου και ισχύος εξόδου παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2:



Σχήμα 2.2: Σχέση ταχύτητας ανέμου και ισχύος εξόδου.

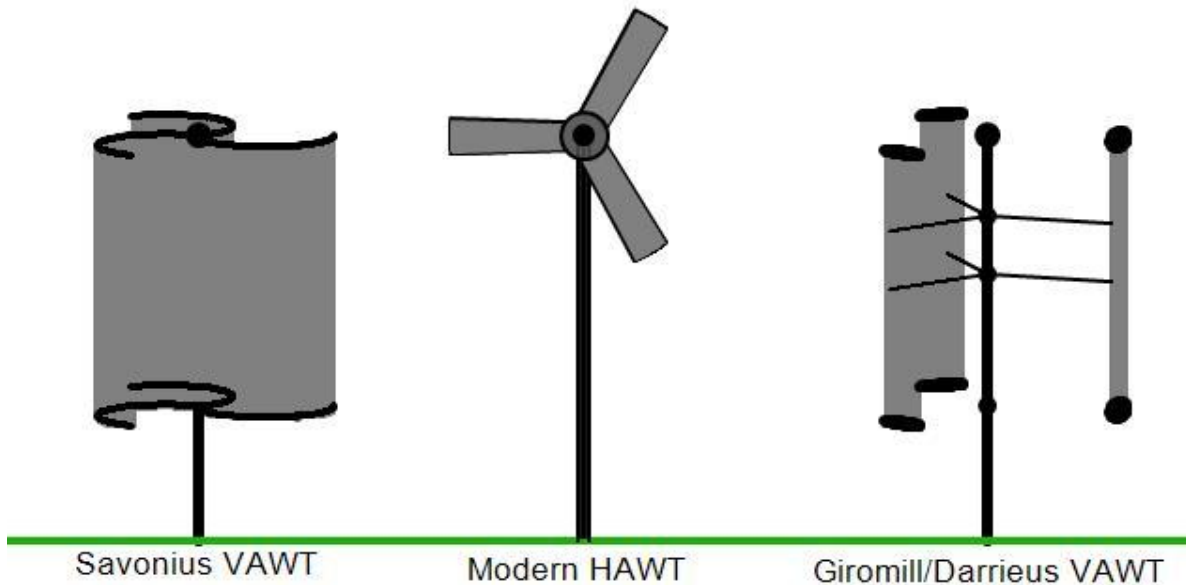
2.1.3 Έλεγχος της Αεροδυναμικής Ισχύος

Στην περίπτωση όπου αναπτύσσονται υψηλές ταχύτητες ανέμου κρίνεται απαραίτητο να καθορίζονται τα όρια της στιγμιαίας προσπίπτουσας ισχύος του ανέμου στην ανεμογεννήτρια. Ο καθορισμός των ορίων αυτών επιτυγχάνεται μέσω του ελέγχου της αεροδυναμικής ισχύος, ο οποίος πραγματοποιείται με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

- **Έλεγχος ταχύτητας περιστροφής δρομέα:** Στοχεύει στη διατήρηση ή επίτευξη της επιθυμητής ταχύτητας περιστροφής. Στην περίπτωση ακραίων ταχυτήτων ανέμου επιβάλλει τον περιορισμό των στροφών στην ονομαστική τιμή ή ακόμα και την αποσύζευξη της ανεμογεννήτριας από το δίκτυο.
- **Έλεγχος προσανατολισμού έλικας:** Προσανατολίζει την έλικα σε πιθανή αλλαγή του ανέμου. Στους ανεμοκινητήρες μικρής ισχύος υπάρχει συνήθως πτερύγιο που ευθυγραμμίζει τον άξονα του δρομέα στον άνεμο, ενώ στους ανεμοκινητήρες μεγάλης ισχύος εφαρμόζονται συστήματα αυτόματης ρύθμισης της σωστής θέσης του δρομέα ως προς τον άνεμο μέσω σερβομηχανισμού.
- **Έλεγχος εξόδου-φορτίου:** Διατηρεί το ισοζύγιο μεταξύ προσλαμβανόμενης ισχύος και τροφοδοτούμενου φορτίου. Μπορεί να είναι αυτόνομος έλεγχος ή να ενσωματωθεί στον έλεγχο ταχύτητας περιστροφής του δρομέα.

2.1.4 Δομικά Χαρακτηριστικά μιας Ανεμογεννήτριας

Στις μέρες μας, ο πιο γνωστός τύπος ανεμογεννήτριας που έχει εφαρμοστεί ευρύτατα στην πράξη είναι με δρομέα οριζοντίου άξονα και θυμίζει έντονα έλικα αεροπλάνου ή ελικόπτερου. Ένας άλλος τύπος ανεμογεννήτριας, με δρομέα κατακόρυφου άξονα αυτή τη φορά, κάνει την εμφάνισή του τη δεκαετία του 1970 και ονομάζεται Darrieus έχοντας τη χαρακτηριστική μορφή που παίρνει ένα σχοινί όταν περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα. Ο τρίτος πιο διαδεδομένος τύπος ανεμογεννήτριας, είναι κατακόρυφου άξονα και καλείται Savonius. Βασίζει την κίνησή του στη ροή και όχι στην άνωση, με αποτέλεσμα το χαμηλό βαθμό απόδοσης συγκριτικά με τους άλλους δύο. Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζονται οι τρεις τύποι ανεμογεννήτριας:

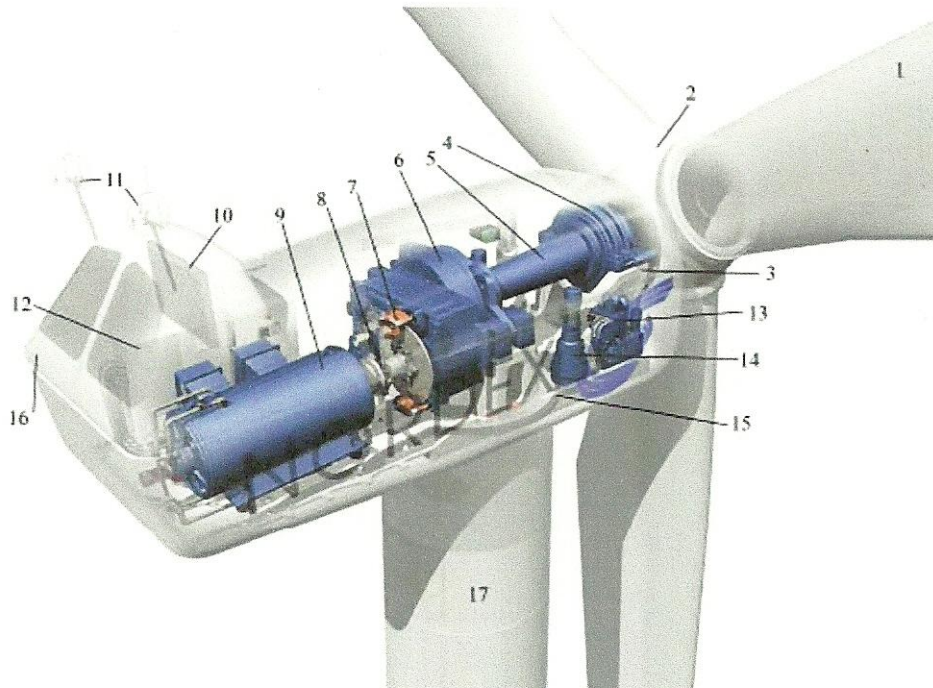


Σχήμα 2.3: Τύποι ανεμοκινητήρων: (α) Τριπτέρυγος Savonius κατακόρυφου άξονα, (β) Τριπτέρυγος οριζοντίου άξονα, (γ) Τριπτέρυγος Darrieus κατακόρυφου άξονα.

Ένας τυπικός ανεμοκινητήρας οριζοντίου άξονα μελετάται στην εργασία αυτή και για το λόγο αυτό ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των μερών που τον αποτελούν:

- **Δρομέας (ρότορας):** Μέσω του ρότορα μεταφέρεται η μηχανική ισχύς για να μετατραπεί σε ηλεκτρική μέσω επαγωγής στη γεννήτρια. Μερικές φορές χρησιμοποιείται σύστημα γραναζιών για την επίτευξη της επιθυμητής συχνότητας περιστροφής.
- **Γεννήτρια:** Παράγει την ηλεκτρική ενέργεια.
- **Κατευθυντήριο σύστημα:** Ρυθμίζει τη σωστή θέση του δρομέα ως προς τον άνεμο για την καλύτερη εκμετάλλευσή του.
- **Σύστημα προστασίας:** Πρόκειται για μηχανισμούς που αποτρέπουν ζημιά από υπερβολικά δυνατούς ανέμους. Μεγάλες ανεμογεννήτριες έχουν σύνθετες ρυθμίσεις που διακόπτουν την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ σε μικρότερες ανεμογεννήτριες αλλάζει ο προσανατολισμός των πτερυγίων ή χρησιμοποιούνται μηχανικά δισκόφρενα για τη μείωση της ταχύτητας περιστροφής του δρομέα.
- **Πύργος:** Πρέπει να είναι ψηλός, γερός, να επιτρέπει την πρόσβαση στην ανεμογεννήτρια αλλά να μην επιβαρύνει το κόστος του συστήματος.

Ακολουθεί το σχήμα 2.4 όπου φαίνονται τα κύρια σημεία μιας ανεμογεννήτριας:



Σχήμα 2.4: Κύρια μέρη μιας ανεμογεννήτριας.

- | | |
|------------------------------|--|
| 1. Πτερύγια | 10. Δοχείο ψύξης γεννήτριας και κιβωτίου ταχυτήτων |
| 2. Πλήμνη άξονα περιστροφής | 11. Ανεμόμετρα |
| 3. Πλαίσιο ατράκτου κινητήρα | 12. Σημείο ελέγχου |
| 4. Κύριο ρουλεμάν | 13. Υδραυλικό σύστημα περιστροφής |
| 5. Άξονας έλικας | 14. Κινητήρας περιστροφής |
| 6. Κιβώτιο ταχυτήτων | 15. Ρουλεμάν περιστροφής |
| 7. Φρένο ασφαλείας | 16. Κέλυφος ατράκτου |
| 8. Σύζευξη με τη γεννήτρια | 17. Πύργος |
| 9. Γεννήτρια επαγωγής | |

2.2 Συστήματα Ανεμογεννητριών

Εφαρμόζοντας εναλλακτικά κριτήρια κατηγοριοποίησης, οι ανεμογεννήτριες διακρίνονται ως εξής:

1. Ανάλογα με την ταχύτητα περιστροφής τους χωρίζονται σε:
 - **Σταθερών στροφών (fixed speed):** Λειτουργούν σε στενό εύρος ταχύτητας περιστροφής, λίγο πάνω από τη σύγχρονη ταχύτητα.
 - **Μεταβλητών στροφών (variable speed):** Λειτουργούν με αποδέσμευση της συχνότητας περιστροφής του δρομέα από την κυκλική συχνότητα που επιβάλλει το δίκτυο.

Μια ανεμογεννήτρια σταθερών στροφών χαρακτηρίζεται από απλότητα στην κατασκευή έχοντας έτσι μικρότερο κόστος. Βέβαια, οι τουρμπίνες της κατασκευάζονται ώστε να αντέχουν σε υψηλές μηχανικές καταπονήσεις αφού λόγω της σταθερής γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δρομέα τυχούσες διακυμάνσεις της ταχύτητας του ανέμου μεταφράζονται αυτομάτως σε διακυμάνσεις ροπής.

Μια ανεμογεννήτρια μεταβλητών στροφών προσφέρει τη μέγιστη αξιοποίηση της αιολικής ενέργειας χάρη στη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής με την ταχύτητα του ανέμου. Επίσης, είναι εύκολος ο έλεγχος αεροδυναμικής ισχύος και οι τουρμπίνες της έχουν μειωμένο ακουστικό θόρυβο. Βέβαια, τα ηλεκτρονικά εξαρτήματα ισχύος παρουσιάζουν ευαισθησία στις πτώσεις τάσης του δικτύου εξ' αιτίας διαταραχών ή σφαλμάτων ζεύξης-απόζευξης, ενώ έχουν και υψηλό κόστος.

2. Ανάλογα με τη φιλοσοφία ελέγχου περιορισμού υψηλών ροπών χωρίζονται σε:
 - **Μεταβλητού βήματος έλικας με έλεγχο της γωνίας πτερυγίου (Pitch controlled):** Διατηρείται η παραγόμενη ισχύς για λειτουργία πάνω από την ονομαστική ταχύτητα του ανέμου, στην ονομαστική ισχύ. Για ταχύτητες ανέμου μικρότερες της ονομαστικής, η γωνία της έλικας ρυθμίζεται σε μια ελάχιστη τιμή, συνήθως 0° ώστε να επιτυγχάνεται μέγιστη αεροδυναμική ισχύς.
 - **Σταθερού βήματος έλικας με αεροδυναμικό έλεγχο της ροπής και της παραγόμενης ισχύος του δρομέα (Stall controlled):** Διαθέτουν πτερύγια σταθερής κλίσης τα οποία σε υψηλές ταχύτητες ανέμου εμφανίζουν απώλεια αεροδυναμικής στήριξης. Έτσι εξαλείφεται η ανάγκη ύπαρξης σχετικού συστήματος ελέγχου.

Οι ανεμογεννήτριες stall controlled παρουσιάζουν απλότητα στην κατασκευή, μειωμένες ανάγκες συντήρησης και έχουν χαμηλότερο κόστος. Από την άλλη πλευρά, οι ανεμογεννήτριες pitch controlled υπερτερούν στον έλεγχο αεροδυναμικής ισχύος και έχουν μεγαλύτερη απόδοση σε χαμηλές ταχύτητες ανέμου.

3. Ανάλογα με τη διαμόρφωση του ηλεκτρικού τους μέρους κατατάσσονται σε διάφορες κατηγορίες, με συνηθέστερες τις εξής:
 - **Σταθερών στροφών με ασύγχρονη γεννήτρια τύπου κλωβού, απευθείας συνδεδεμένη στο δίκτυο:** Χαρακτηριστικά της το μικρό βάρος, η απλότητα στην κατασκευή, η αξιοπιστία και το μειωμένο κόστος λόγω έλλειψης μετατροπέα.
 - **Μεταβλητών στροφών με ασύγχρονη γεννήτρια διπλής τροφοδοσίας:** Είναι αναγκαία η τακτική συντήρηση και η ύπαρξη κιβωτίου ταχυτήτων θεωρείται σημαντικό μειονέκτημα. Βέβαια, ο τύπος της γεννήτριας που χρησιμοποιείται μειώνει το κόστος.

- **Μεταβλητών στροφών με σύγχρονη πολυπολική γεννήτρια, χωρίς κιβώτιο ταχυτήτων:** Σημαντικό μειονέκτημα αποτελεί το μέγεθος, βάρος και πολυπλοκότητα της γεννήτριας καθώς και το γεγονός ότι το 100% της ισχύος διέρχεται από το μετατροπέα.

Κεφάλαιο 3

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

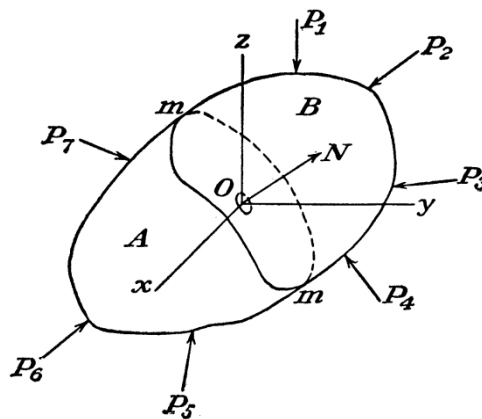
3.1 Βασικά Στοιχεία Μηχανικής

3.1.1 Τάσεις και Παραμορφώσεις

Η στατική είναι ένας από τρεις κλάδους της μηχανικής και ασχολείται με τις δυνάμεις και την ισορροπία αυτών. Η εφαρμογή δυνάμεων σε στερεά σώματα οδηγεί στην παραμόρφωσή τους. Όταν τα σώματα χαρακτηρίζονται ως ελαστικά και οι επιβαλλόμενες δυνάμεις δε ξεπερνούν κάποια όρια, η παραμόρφωση μηδενίζεται με την απομάκρυνση του αιτίου που την προκαλεί, δηλαδή της δύναμης.

Η συσχέτιση φορτίων και παραμορφώσεων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους ανάλογα με το είδος της ανάλυσης που πραγματοποιείται και τις παραδοχές της ανάλυσης. Είναι προφανές, όμως, ότι τα τελικά αποτελέσματα πρέπει να είναι συμβατά.

Εάν θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα B ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ στο οποίο ασκούνται εξωτερικά φορτία P_i και κάνουμε μία τυχαία τομή, για να μπορέσει να ισορροπήσει το σώμα δεχόμαστε ότι αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις. Όλες οι δυνάμεις, εξωτερικές και εσωτερικές, κατανέμονται στην επιφάνεια στην οποία ασκούνται. Το πόσο καταπονεί μία δύναμη ένα σώμα εκφράζεται μέσω των τάσεων, δηλαδή του λόγου δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή $\sigma = P / A$.



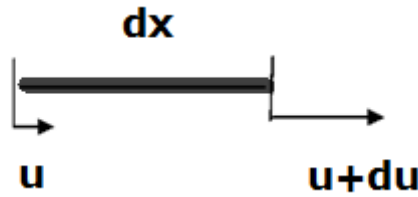
Σχήμα 3.1: Εξωτερικές δυνάμεις σε τυχαίο στερεό σώμα.

Η παραμόρφωση του σώματος B , λόγω της επιβολής των φορτίων P_i , θα οδηγήσει στη μετακίνηση όλων των σημείων του. Το πεδίο μετατοπίσεων όλων των υλικών σημείων περιγράφεται ως εξής:

$$u = x - x_0 \quad (3.1)$$

όπου x_0 και x είναι η θέση του υλικού σημείου πριν και μετά την παραμόρφωση αντίστοιχα.

Είναι εύκολο πλέον να γίνει κατανοητή η έννοια της τροπής ή ανηγμένης παραμόρφωσης. Εξ ορισμού η τεχνική ανηγμένη παραμόρφωση (engineering strain) είναι ο λόγος της μεταβολής του μήκους ενός γραμμικού στοιχείου προς το αρχικό μήκος του, όταν το στοιχείο έχει τεθεί υπό μονοαξονική ένταση.



Σχήμα 3.2: Ορισμός τεχνικής ανηγμένης παραμόρφωσης.

$$\epsilon_E = \frac{l_f - l_o}{l_o} = \frac{(l_o + du) - l_o}{l_o} = \frac{du}{dx} = u' \tag{3.2}$$

όπου $l_o = dx$ το αρχικό μήκος, $l_f = l_o + du$ τελικό μήκος και u' η παράγωγος της μετατόπισης στη διεύθυνση της παραμόρφωσης.

Προκειμένου να περιγραφεί η συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου υλικού χρησιμοποιούνται καταστατικοί νόμοι, οι οποίοι συσχετίζουν τις τάσεις και τις παραμορφώσεις. Σε περίπτωση γραμμικώς ελαστικού υλικού χρησιμοποιείται ο νόμος του Hooke:

$$\sigma = H(\epsilon)$$

ή σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu) \times (1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας Young και ν ο λόγος Poisson.

Στην περίπτωση συνήθων κατασκευών, όπου οι παραμορφώσεις είναι μικρές, μπορούμε να ορίσουμε την τάση ως $\sigma_E = E \times \epsilon_E$, εφόσον το υλικό είναι γραμμικό. Εάν Q είναι η δύναμη που προκαλεί την παραμόρφωση και S το εμβαδόν της διατομής, τότε ισχύει πως η δύναμη είναι:

$$Q = \sigma_E \times S = E \times \epsilon_E \times S = E \times u' \times S \tag{3.4}$$

Εφαρμόζοντας την Αρχή Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε.) για μία δυνατή μετατόπιση du η δύναμη Q εκφράζεται ως ακολούθως:

$$W_{ext} = W_{int} \Rightarrow Q \times du = \sigma_E \times S \times d\epsilon_E \times l_o = \sigma_E \times S \times \frac{du}{l_o} \times l_o \Rightarrow Q = \sigma_E \times S \tag{3.5}$$

Εκτός της ονομαστικής παραμόρφωση ϵ , όπως είναι αλλιώς γνωστή η τεχνική ανηγμένη παραμόρφωση, υπάρχει και η πραγματική παραμόρφωση e , η οποία ορίζεται ως:

$$e = \int_{l_o}^{l_f} \frac{dl_f}{l_f} = \ln\left(\frac{l_f}{l_o}\right) \tag{3.6}$$

Η πραγματική παραμόρφωση e δύναται να εκφραστεί συναρτήσει της ονομαστικής παραμόρφωσης ε , σημειώνοντας ότι $l_f = l_0 + \Delta l$, όπου Δl είναι η συνολική αύξηση του μήκους αναφοράς του γραμμικού στοιχείου:

$$e = \ln\left(\frac{l_f}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon) \quad (3.7)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την Α.Δ.Ε. η δύναμη Q εκφράζεται ως:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \Rightarrow Q \times \delta u = \sigma_L \times S \times \delta e \times l_0 = \sigma_L \times S \times \frac{\delta \varepsilon_E}{(1 + \varepsilon_E)} \times l_0 \Rightarrow Q = \frac{\sigma_L \times S}{(1 + \varepsilon_E)} \quad (3.8)$$

Στην περίπτωση διαξονικής ή τριαξονικής παραμόρφωσης, η τροπή χρησιμοποιείται όπως την έχει ορίσει ο Green:

$$\varepsilon_G = \frac{l_f^2 - l_0^2}{2l_0^2} \quad (3.9)$$

Η συσχέτιση της τροπής κατά Green με την τεχνική ανηγμένη παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_E = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{l_f^2 - l_0^2}{l_0 \times (l_f + l_0)} = \frac{l_f^2 - l_0^2}{l_0^2 \times (2 + \varepsilon_E)} = \frac{2 \times \varepsilon_G}{2 + \varepsilon_E} \Rightarrow \varepsilon_G = \varepsilon_E + \frac{\varepsilon_E^2}{2} \quad (3.10)$$

Χρησιμοποιώντας την Α.Δ.Ε. προκύπτει πάλι η δύναμη Q ίση με:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \Rightarrow Q \times \delta u = \sigma \times S \times \delta \varepsilon_G \times l_0 = \sigma \times S \times \frac{2 \times l_f \times \delta l_f}{2l_0^2} \times l_0 = \sigma \times S \times \frac{l_f \times \delta u}{l_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \sigma \times S \times \frac{l_f}{l_0} \quad (3.11)$$

Συγκρίνοντας, λοιπόν, τις διαφορετικές εκφράσεις του εξωτερικά επιβαλλόμενου φορτίου Q συμπεραίνουμε ότι ανάλογα με τον ορισμό της τροπής που έχουμε χρησιμοποιήσει, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και μία αντίστοιχα ορισμένη τάση, συζευγμένη με το έργο που παράγεται. Επιπλέον, εάν δεν τροποποιήσουμε τον καταστατικό νόμο κάθε φορά, η σχέση μεταξύ εξωτερικού φορτίου και παραμόρφωσης θα είναι διαφορετική. Μόνο στην περίπτωση που οι τροπές είναι μικρές, τα αποτελέσματα τείνουν να είναι ίδια.

Για την πληρότητα των ανωτέρω πρέπει να τονισθεί ότι έχει γίνει παραδοχή πως το εμβαδόν της διατομής S είναι σταθερό και δεν επηρεάζεται από τις παραμορφώσεις, κάτι που ισχύει μόνον στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων. Σε μία πιο γενική περίπτωση θα αλλάζει το εμβαδόν της διατομής, άρα και ο όγκος του στοιχείου. Για αυτό το λόγο εκτός από τη μετατόπιση u θα πρέπει να εισάγουμε και μία μετατόπιση που σχετίζεται με την αλλαγή του εμβαδού της διατομής. Οι τάσεις που αναφέρονται στην παραμορφωμένη διατομή S_f καλούνται Cauchy και είναι πραγματικές τάσεις.

Μεταφέροντας, λοιπόν, τα παραπάνω στις τρεις διευθύνσεις είναι προφανές ότι θα χρησιμοποιήσουμε την παραμόρφωση κατά Green και οι σχέσεις θα παρουσιαστούν σε μητρική μορφή:

$$d[x]^2 - d[x_0]^2 = 2d[x_0]^T \times \varepsilon_G \times d[x_0] \quad (3.12)$$

Επειδή $x = x_0 + u$ ισχύει ότι $dx = J \times dx_0$ με $J = I + D_0$, όπου $D_{0,i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}}$, το οποίο καλείται τανυστής διανυσματικής κλίσης μετατόπισης και δείχνει πως συνδέεται η μετατόπιση δύο σημείων πριν και μετά ή κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης.

Άρα, η παραμόρφωση κατά Green εκφράζεται ως:

$$\epsilon_G = \frac{1}{2} \times (D_0 + D_0^T) + \frac{1}{2} \times D_0^T \times D_0 \quad (3.13)$$

όπου ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στο μη-γραμμικό τμήμα της παραμόρφωσης.

Αξίζει να επαναλάβουμε ότι ο ορισμός του Green γίνεται με βάση την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Εάν θελήσουμε να εκφράσουμε την τροπή ως προς την παραμορφωμένη κατάσταση θα χρησιμοποιηθούν οι τροπές κατά Almansi:

$$\epsilon_A = \frac{l_f^2 - l_0^2}{2l_f^2} \text{ και } \epsilon_G = J^T \times \epsilon_A \times J \quad (3.14)$$

$$d[x]^2 - d[x_0]^2 = 2d[x]^T \times \epsilon_A \times d[x] \Rightarrow \epsilon_A = \frac{1}{2} \times (D + D^T) - \frac{1}{2} \times D^T \times D, \text{ με } D_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

3.1.2 Σύζευξη Έργου-Τάσεων, Εσωτερικών Δυνάμεων και Τελεστής Δυσκαμψίας

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι σημαντική η χρήση συζυγών τάσεων και παραμορφώσεων. Με τον όρο συζυγείς περιγράφονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις οι οποίες εκφράζουν την ενέργεια μίας δεδομένης διαμόρφωσης του σώματος.

Όταν γίνεται χρήση των τροπών κατά Green πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι συζυγείς τάσεις κατά Kirchhoff (σ_c πραγματικές τάσεις Cauchy). Ποιο συγκεκριμένα η δυνατή παραμόρφωση εκφράζεται ως:

$$\delta \epsilon_G = \frac{1}{2} \times (J^T \times \delta D_0 + \delta D_0^T \times J + \delta D_0^T \times \delta D_0) = \frac{1}{2} \times (J^T \times \delta D_0 + \delta D_0^T \times J), \text{ με } \delta D_{0,i,j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial \delta x_{0j}} \quad (3.16)$$

και το δυνατό έργο που παράγεται από μία εξωτερική δύναμη F είναι:

$$\delta W_i = \int_{V_0} \epsilon_G^T \times H \times \delta \epsilon_G dV_0 = \int_{V_0} F^T(u) \times \delta u dV_0 \quad (3.17)$$

Όταν το πρόβλημα είναι διακριτό το ολοκλήρωμα ισοδυναμεί με ένα άθροισμα των δυνατών μετατοπίσεων δu που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος επί των δυνάμεων F που ασκούνται στους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας. Το διαφορικό του δυνατού έργου δW_i ορίζει τη δυσκαμψία του συστήματος:

$$\delta(\delta W_i) = \int_{V_0} \delta \epsilon_G^T \times H \times \delta \epsilon_G dV_0 + \int_{V_0} \epsilon_G^T \times H \times \delta(\delta \epsilon_G) dV_0 = \delta u^T \times K \times \delta u \quad (3.18)$$

Εάν αποφασίσουμε, βέβαια, το δυνατό έργο να εκφράζεται στην παρούσα κατάσταση και όχι στην αρχική απαραμόρφωτη, τότε η μορφή του θα είναι:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_c \times \delta \epsilon_c dV = \int_V \sigma_c^T \times \delta \epsilon_c dV \quad (3.19)$$

Οι πραγματικές δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις $\delta \epsilon_c$ ορίζονται αντιστοίχως:

$$\delta \epsilon_c = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta u^T}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

όπου, όμως, εμφανίζεται ο τανυστής διανυσματικής κλίσης μετατόπισης δD :

$$\delta D = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x_0} \times = \delta D_0 \times J^{-1} \Rightarrow \delta D_0 = \delta D \times J \quad (3.21)$$

Με βάση τα παραπάνω η δυνατή παραμόρφωση $\delta \epsilon$ που ορίστηκε στη σχέση (3.16) παίρνει την εξής μορφή:

$$\delta \epsilon = \frac{1}{2} \times (J^T \times \delta D_0 + \delta D_0 \times J^T) = \frac{1}{2} \times (J^T \times \delta D_0 \times J + J^T \times \delta D_0 \times J^T) = J^T \times \delta \epsilon_c \times J \quad (3.22)$$

και κατά αντιστοιχία το δυνατό έργο που παράγεται είναι:

$$dV = |J| \times dV_0 \quad (3.23)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι οι πραγματικές τάσεις συνδέονται με τις ονομαστικές με τις μητρικές σχέσεις που ακολουθούν:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{V_0} \sigma^T \times \delta \epsilon dV_0 = \int_{V_0} \sigma^T \times J^T \times \delta \epsilon \times J dV_0 = \int_{V_0} J \times \sigma \times J^T \times \delta \epsilon_c \times J dV_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta W_i &= \int_V \frac{1}{|J|} \times J \times \sigma \times J^T \times \delta \epsilon_c dV \end{aligned} \quad (3.24)$$

οπότε:

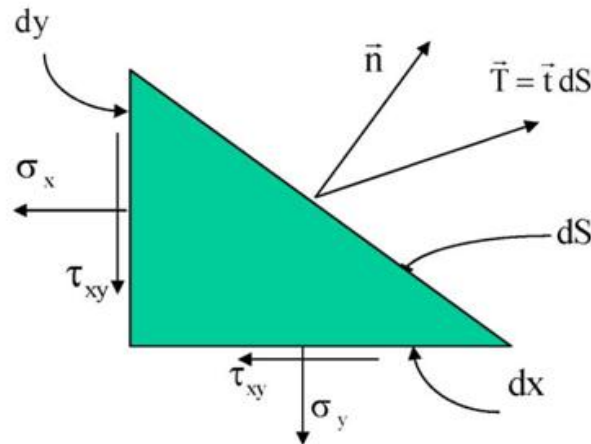
$$\sigma_c = \frac{1}{|J|} \times J \times \sigma \times J^T \text{ και } \sigma_c = |J| \times J^{-1} \times \sigma_c \times J^{-T} \quad (3.25)$$

3.1.3 Εξισώσεις Ισορροπίας

Όταν ένα σώμα ισορροπεί θα πρέπει τα εξωτερικά φορτία να αντισταθμίζονται από τα εσωτερικά, δηλαδή τις αντιδράσεις του σώματος. Τα εξωτερικά φορτία κατηγοριοποιούνται σε φορτία μάζας, δηλαδή φορτία που δρουν στον όγκο του σώματος, όπως η βαρύτητα και σε επιφανειακά φορτία που δρουν στα σύνορα του σώματος, όπως τα αεροδυναμικά. Ουσιαστικά, τα φορτία μάζας είναι ολοκληρώματα όγκου με χρήση της πυκνότητας του συνόλου του σώματος, ενώ τα επιφανειακά φορτία είναι επιφανειακά ολοκληρώματα με χρήση της επιφανειακής πυκνότητας.

Στο σχήμα 3.3 και στη σχέση (3.26) φαίνεται η συσχέτιση των επιφανειακών δράσεων με τις εσωτερικές δυνάμεις:

$$t \times ds = \sigma \times n \times ds \quad (3.26)$$



Σχήμα 3.3: Συσχέτιση τάσεων και επιφανειακών φορτίων.

Είναι αυτονόητη η επιλογή κατάλληλης τάσης ώστε σε συνδυασμό με την εξωτερική φόρτιση να προκύψουν οι σωστές μετατοπίσεις. Για δεδομένη εξωτερική φόρτιση μπορεί να παραχθεί η πραγματική τάση σ_c :

$$t_o \times dS_o = t \times dS = \sigma_1 \times n_o \times dS_o = \sigma_o \times n \times dS \quad (3.27)$$

Με τη χρήση του τανυστή διατμητικής κλίσης J:

$$t_o \times dS_o = \frac{1}{|J|} \times J^T \times n \times dS \Rightarrow \sigma_1 = |J| \times \sigma_c \times J^{-T} = J \times \sigma \quad (3.28)$$

όπου σ_1 είναι η 1^η τάση Piola–Kirchhoff και σ_2 είναι η 2^η τάση Piola–Kirchhoff

Προκειμένου να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις πρέπει να επιλεγεί κάποια μέθοδος. Στη ρευστομηχανική είναι συνήθης η εφαρμογή του θεωρήματος του Green ενώ στη μηχανική των κατασκευών χρησιμοποιούνται ενεργειακές αρχές της θεωρίας των μεταβολών.

3.1.4 Θεώρημα Green

Για ένα σώμα σε στατική ισορροπία ισχύει:

$$\int_V \rho \times \bar{g} dV + \int_{\partial V} \bar{t} dS = 0 \quad \text{και} \quad \int_V \rho \times \bar{g} \times \bar{r} dV + \int_{\partial V} \bar{t} \times \bar{r} dS = 0 \quad (3.29)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, \bar{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας, \bar{r} ο μοχλοβραχίονας που χρησιμοποιήθηκε για τις ροπές και V ένας στοιχειώδης όγκος στο εξεταζόμενο σώμα.

Ο στοιχειώδης όγκος θεωρείται εσωτερικός άρα τα φορτία που ασκούνται στην επιφάνειά του σχετίζονται με την 1^η τάση Piola–Kirchhoff. Σε συνδυασμό με τη σχέση (3.26), δηλαδή τον καταστατικό νόμο του υλικού, οι εξισώσεις ισορροπίας αναφέρονται πλέον στις τροπές και με κατάλληλη μετατροπή στις μετακινήσεις.

3.1.5 Ενεργειακές Αρχές της Θεωρίας των Μεταβολών

Οι ενεργειακές αρχές της θεωρίας των μεταβολών αποτελούν ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης της ισορροπίας με γνωστό το ενεργειακό θεώρημα της μεθόδου Galerkin. Από φυσικής απόψεως, το έργο που παράγεται για οποιαδήποτε μετακίνηση την οποία επιτρέπουν οι συνοριακές συνθήκες του σώματος πρέπει να είναι μηδενικό όταν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία.

Η μέθοδος Galerkin, μια μέθοδος σταθμικών υπολοίπων (weighted residual method) επιχειρεί μια προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων με τη θεώρηση δοκιμαστικών συναρτήσεων για τις χαρακτηριστικές μετατοπίσεις του προβλήματος. Επιχειρείται, δηλαδή, η ικανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης με άμεσο τρόπο, σε αντιδιαστολή με την έμμεση ικανοποίηση μέσω της ολοκληρωτικής διατύπωσης της μεθόδου των μεταβολών.

3.2 Στοιχεία Δυναμικής των Κατασκευών

3.2.1 Δυναμική Ισορροπία

Η αρχή της δυναμικής ισορροπίας του D'Alembert είναι ιδιαίτερα ελκυστική στους μηχανικούς οι οποίοι είναι εξοικειωμένοι με την ισορροπία των δυνάμεων. Η αρχή βασίζεται στην έννοια μιας ιδεατής δύναμης αδράνειας η οποία ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή της και δρα σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της επιτάχυνσης. Με αυτόν τον τρόπο η δυναμική εξίσωση ισορροπίας παίρνει τη μορφή:

$$\int_V \rho \times \vec{g} dV + \int_{\partial V} \vec{t} dS = \int_V \rho \vec{x} dV \quad \text{και} \quad \int_V \rho \times \vec{g} \times \vec{r} dV + \int_{\partial V} \vec{t} \times \vec{r} dS = \int_V \rho \times \vec{x} \times \vec{r} dV \quad (3.30)$$

και σε μητρική μορφή:

$$M \times \ddot{u} + K \times u = Q \quad (3.31)$$

όπου M είναι μητρώο μάζας, K το μητρώο δυσκαμψίας και u το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων.

Εάν προσθέσουμε και τη δύναμη λόγω απόσβεσης ($D \times \dot{u}$), η εξίσωση γίνεται:

$$M \times \ddot{u} + D \times \dot{u} + K \times u = Q \quad (3.32)$$

Γενικότερα, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας δεν είναι γραμμική καθώς το μητρώο M είναι συνάρτηση της μετατόπισης u , το μητρώο K της \dot{u} , ενώ το διάνυσμα Q της \ddot{u} . Μόνο εάν υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι γραμμικό και με τη βοήθεια άλλων παραδοχών το άγνωστο πεδίο μετατοπίσεων ορίζεται από ένα διακριτό αριθμό αγνώστων q ώστε:

$$M \times \ddot{q} + D \times \dot{q} + K \times q = Q \quad (3.33)$$

3.2.2 Ενεργειακή Μέθοδος Hamilton

Η ενεργειακή μέθοδος Hamilton βοηθά στη μόνωση των δυναμικών εξισώσεων ισορροπίας ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Σε κάποιο σύστημα στο οποίο ασκείται άθροισμα μη-συντηρητικών φορτίων, ορίζονται η κινητική ενέργεια T και η ενέργεια παραμόρφωσης U :

$$T = \frac{1}{2} \times \int_V \rho \times \vec{r}^2 dV \quad \text{και}$$

$$U = \frac{1}{2} \times \int_V (\sigma_x \times \epsilon_x + \sigma_y \times \epsilon_y + \sigma_z \times \epsilon_z + \tau_{xy} \times \gamma_{xy} + \tau_{xz} \times \gamma_{xz} + \tau_{yz} \times \gamma_{yz}) dV \quad (3.34)$$

Ακολουθώντας την εξέλιξη του συστήματος από το χρόνο t_1 στο χρόνο t_2 με δυνατές μετατοπίσεις, η συνολική μεταβολή της ενέργειας θα πρέπει να είναι μηδενική.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) - \delta W_{NC}] dt = 0 \quad (3.35)$$

$$\text{όπου } \delta W_{NC} = F_{NC}^T \times \delta u$$

Εάν γίνει χρήση των γενικευμένων βαθμών ελευθερίας $q(t)$, θα πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή ώστε η γεωμετρία, η κινητική και η ενέργεια παραμόρφωσης να εκφράζονται πλήρως μέσω των $q(t)$ και $\dot{q}(t)$:

$$\bar{x} = \bar{x}(q; t): T = T(q, \dot{q}; t) \text{ και } U = U(q, \dot{q}; t) \quad (3.36)$$

Επίσης, για κάθε μία εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη θα πρέπει να υπάρχει σύνδεση με τους γενικευμένους βαθμούς ελευθερίας, ώστε $\delta W_{NC} = Q^T \times \delta q = Q_i \times \delta q_i$.

Τελικά προκύπτει ότι:

$$-\frac{d}{dt} \times \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial(T - U)}{\partial q_i} + Q_i = 0 \quad (3.37)$$

Κάθε εξίσωση αντιπροσωπεύει την κατάσταση ισορροπίας για τον αντίστοιχο βαθμό ελευθερίας. Μάλιστα, εάν ο βαθμός ελευθερίας είναι μετακίνηση η εξίσωση θα περιγράφει τη δυναμική ισορροπία δυνάμεων ενώ εάν ο βαθμός ελευθερίας είναι στροφή, η εξίσωση θα περιγράφει τη δυναμική ισορροπία ροπών.

3.2.3 Ιδιομορφική ανάλυση

Η ιδιομορφική ανάλυση προσδιορίζει τα δυναμικά χαρακτηριστικά μιας κατασκευής, επιβάλλοντας μια αρμονική φόρτιση εύρους και κυκλικής συχνότητας σε ένα σύστημα με σταθερά μητρώα μάζας και δυσκαμψίας.

$$Q = Q_0 \times e^{i\omega t} \Leftrightarrow q = q_0 \times e^{i\omega t} \quad (3.38)$$

Η δυναμική εξίσωση ισορροπίας για ένα δυναμικό βαθμό ελευθερίας παίρνει την εξής μορφή:

$$(-\omega^2 \times M + K) \times q_0 = Q_0 \quad (3.39)$$

Η αναγκαία συνθήκη για την επίλυση του συστήματος είναι:

$$|-\omega^2 \times M + K| \neq 0 \quad (3.40)$$

Εξισώνοντας την παραπάνω σχέση με το μηδέν, προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες ω_i του συστήματος, οι οποίες συνδέονται με τις φυσικές συχνότητές του. Αυτό ισοδυναμεί με το να αφήσουμε το σύστημα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση, δηλαδή χωρίς επιβολή εξωτερικής φόρτισης. Η απόκριση του συστήματος προφανώς δε θα είναι μηδενική, αλλά μια ταλάντωση σε κάποιο συνδυασμό των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος.

Η μορφή της απόκρισης που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοσυχνότητα ορίζει την ιδιομορφή, κάθε μία από τις οποίες θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση:

$$K \times \varphi_i = \omega_i^2 \times M \times \varphi_i \quad (3.41)$$

Σε μια πιο γενική περίπτωση ενός συστήματος με απόσβεση, προκειμένου να επιτύχουμε μείωση τάξης της διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να εισάγουμε ένα διάνυσμα που θα περιλαμβάνει τόσο τις μετατοπίσεις όσο και τις ταχύτητες: $p^T = [\dot{q}^T \ q^T]$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \tilde{\mathbf{M}} \times \dot{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{K}} \times \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Καθώς το μητρώο $\tilde{\mathbf{M}}$ είναι πάντοτε αναστρέψιμο, ορίζοντας τα $\mathbf{A} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \times \tilde{\mathbf{K}}$ και $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \times \tilde{\mathbf{Q}}$ προκύπτει ότι:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{B} \quad (3.43)$$

Τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος πλέον προσδιορίζονται από τις ιδιοσυχνότητες λ_i και τις γραμμικά ανεξάρτητες ιδιομορφές ϕ_i ενός μητρώου \mathbf{A} , όπου $i=1, \dots, n$ με

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \times \mathbf{I}) \times \phi_i = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad |\mathbf{A} - \lambda_i \times \mathbf{I}| = 0 \quad (3.44)$$

Εάν ορίσουμε τον ιδιομορφικό πίνακα Φ με στήλες τις ιδιομορφές ϕ_i και το διαγώνιο μητρώο ιδιοσυχνοτήτων Λ , η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται σε $\mathbf{A} \times \Phi - \Phi \times \Lambda = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{A} = \Phi \times \Lambda \times \Phi^{-1}$. Με τη χρήση βασικών μεθόδων επίλυσης διαφορικών εξισώσεων προκύπτει η λύση:

$$\mathbf{p}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \times \mathbf{p}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \times \mathbf{B} d\tau \quad (3.45)$$

όπου το μητρώο $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ ονομάζεται μητρώο μετάβασης κατάστασης από το χρόνο t_0 στο χρόνο t και χρησιμοποιείται σε προβλήματα με περιοδικούς συντελεστές.

3.2.4 Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

Μια γνωστή μέθοδος χρονικών βημάτων είναι η μέθοδος Newmark. Η μέθοδος ξεκινά με την υπόθεση ότι σε χρόνο $t^{n-1} = (n-1) \times \Delta t$, όπου Δt είναι το χρονικό βήμα του σχήματος ολοκλήρωσης, είναι γνωστά τα στοιχεία $q^{(n-1)}, \dot{q}^{(n-1)}, \ddot{q}^{(n-1)}$ και σε χρόνο εισάγονται τα εξής:

$$q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta t \times \dot{q}^{(n-1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \times \Delta t^2 \times \ddot{q}^{(n-1)} + \beta \times \Delta t^2 \times \ddot{q}^{(n)} \quad (3.46a)$$

$$\dot{q}^{(n)} = \dot{q}^{(n-1)} + (1 - \gamma) \Delta t \times \ddot{q}^{(n-1)} + \gamma \times \Delta t \times \ddot{q}^{(n)} \quad (3.46b)$$

όπου β, γ είναι παράμετροι που καθορίζουν την ακρίβεια και την σταθερότητα του σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, για τιμές των β και γ ίσες με 0,25 και 0,50 αντίστοιχα, επιτυγχάνεται σταθερότητα του σχήματος, αλλά και μηδενική απόσβεση. Στην πραγματικότητα, όμως, όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός βαθμών ελευθερίας, τότε οι τιμές που συνιστώνται είναι $\beta=0,26-0,27$ και $\gamma=0,51$.

Για τον προσδιορισμό του $\ddot{q}^{(n-1)}$ εισάγεται το βοηθητικό-διορθωτικό $\tilde{q}^{(n-1)}$:

$$\tilde{q}^{(n-1)} = \dot{q}^{(n-1)} + (1 - \gamma) \times \Delta t \times \ddot{q}^{(n-1)} \quad (3.47a)$$

$$\tilde{q}^{(n-1)} = q^{(n-1)} + \Delta t \times \dot{q}^{(n-1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \times \Delta t^2 \times \ddot{q}^{(n-1)} \quad (3.47b)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.47) καταλήγει στην ακόλουθη σχέση (3.48):

$$\ddot{q}^{(n)} = \frac{1}{\beta \times \Delta t^2} \times (q^{(n)} - \tilde{q}^{(n)}) \quad (3.48a)$$

$$\dot{q}^{(n)} = \tilde{q}^{(n)} - \frac{Y}{\beta \times \Delta t} \times (q^{(n)} - \tilde{q}^{(n)}) \quad (3.48\beta)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τη σχέση (3.48) στη σχέση (3.33) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα προσδιορισμού των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$K_{\text{eff}} \times q^{(n)} = Q_{\text{eff}} \quad (3.49)$$

$$\text{όπου } K_{\text{eff}} = \frac{1}{\beta \times \Delta t^2} \times M + \frac{Y}{\beta \times \Delta t} \times D + K \text{ και } Q_{\text{eff}} = Q + \left(\frac{1}{\beta \times \Delta t^2} \times M + \frac{Y}{\beta \times \Delta t} \times D \right) \times \tilde{q}^{(n)} - D \times \tilde{q}^{(n)}$$

3.2.5 Μοντελοποίηση της Απόσβεσης στις Κατασκευές κατά Rayleigh

Ένας πρακτικός και αξιόπιστος τρόπος εισαγωγής της απόσβεσης μιας κατασκευής στη δυναμική της ανάλυση είναι μέσω του μητρώου απόσβεσης Rayleigh, καθώς αυτό εκφράζεται συναρτήσει των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας:

$$D_s = a \times M + b \times K \quad (3.50)$$

όπου a και b είναι σταθερές που ορίζονται σε ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας. Για ένα τέτοιο σύστημα οι εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας εκφράζονται ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

3.2.6 Απόσβεση σε Αεροδυναμικά Φαινόμενα

Μέχρι τώρα, η εξωτερική φόρτιση θεωρήθηκε γνωστή και ανεξάρτητη της γενικευμένης συντεταγμένης q . Τα αεροδυναμικά φορτία, όμως, εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις και τις παραγώγους τους $Q(q, \dot{q}, \ddot{q})$. Μέσω της μεθόδου Newmark η γενικευμένη εξίσωση ισορροπίας σε χρόνο t^n γίνεται:

$$M \times \ddot{q}^{(n)} + D \times \dot{q}^{(n)} + K \times q^{(n)} = Q(q^{(n)}, \dot{q}^{(n)}) \quad (3.52)$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέρος της εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$M \times \ddot{q}^{(n)} + \left(D - \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \right) \times \dot{q}^{(n)} + \left(K - \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \times q^{(n)} = Q(q^{(n-1)}, \dot{q}^{(n-1)}) - \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \times \dot{q}^{(n-1)} - \frac{\partial Q}{\partial q} \times q^{(n-1)} \quad (3.53)$$

Οι πρόσθετοι όροι που εμφανίζονται στο αριστερό μέρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν διαφοροποιήσεις της απόσβεσης και της δυσκαμψίας λόγω της σύζευξης με το αεροελαστικό φαινόμενο. Σημαντικότερος είναι ο όρος που αναφέρεται στην απόσβεση, καθώς επηρεάζει σημαντικά την ευστάθεια του συστήματος.

Κεφάλαιο 4

ΘΕΩΡΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ

4.1 Η Κλασική Θεωρία της Δοκού

4.1.1 Εισαγωγή

Η μονοδιάστατη θεώρηση στερεών στοιχείων είναι μια πολύ καλή επιλογή με κύριο περιορισμό όμως ότι το στοιχείο είναι λυγηρό ή ότι οι δύο διαστάσεις είναι σημαντικά μικρότερες από την τρίτη. Η μεγαλύτερη αυτή διάσταση είναι ο άξονας της δοκού, ο οποίος ονομάζεται ελαστικός άξονας. Στην περιγραφή που ακολουθεί ο άξονας θεωρείται ευθύγραμμος.

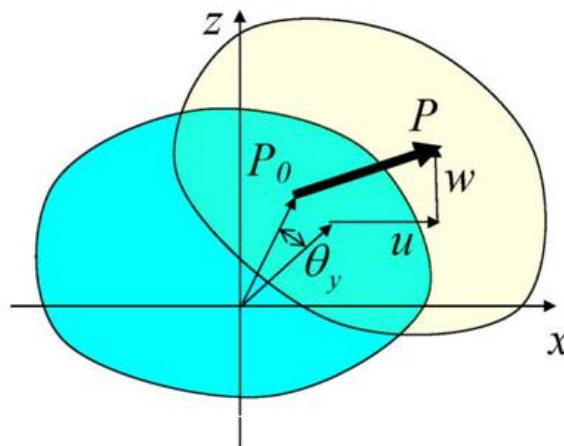
Η κλασική θεωρία δοκού βασίζεται στην παραδοχή ότι οι διατομές κατά μήκος του ελαστικού άξονα είναι κάθετες σε αυτόν, τόσο πριν, όσο και μετά την παραμόρφωση.

4.1.2 Μετατοπίσεις και Ανηγμένες Παραμορφώσεις

Θεωρούμε ότι ο διαμήκης άξονας της δοκού τοποθετείται κατά τον Y άξονα ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος αναφοράς $O(x,y,z)$ και ότι η δοκός υπόκειται σε συνδυασμό κάμψης εντός και εκτός επιπέδου, εφελκυσμού και στρέψης. Για τυχαίο σημείο στη δοκό, τα διανύσματα $r_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ και $r = (x, y, z)^T$ ορίζουν τη θέση του στην απαραμόρφωτη και την παραμορφωμένη γεωμετρία αντίστοιχα. Τέλος, τα διανύσματα $u = (u, v, w)^T$ και $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)^T$ περιγράφουν τις μετατοπίσεις και τις στρόφες του ελαστικού άξονα και είναι συναρτήσεις τόσο του χρόνου, όσο και της θέσης y . Τότε, προκύπτει ότι:

$$U = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + z_0 \times \theta_y \\ v - z_0 \times \theta_x + x \theta_z \\ w - x_0 \times \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = S \times \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε με την παραδοχή μικρής γωνίας στρέψης θ_y ώστε $\sin \theta_y = \theta_y$ και $\cos \theta_y = 1$. Η πορεία του τυχαίου σημείου μιας διατομής φαίνεται στο επόμενο σχήμα 4.1:



Σχήμα 4.1: Κινηματική μίας διατομής της δοκού.

Από τη συνολική γεωμετρία της δοκού ισχύει:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = w' \text{ και } \theta_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = u' \quad (4.2)$$

Βέβαια, πρέπει να τονιστεί ότι η είναι προσεγγιστική σχέση και ισχύει μόνο για μικρές μετατοπίσεις, αφού έχει γίνει παραδοχή ότι το μήκος του ελαστικού άξονα δε μεταβάλλεται.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$r = r_o + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_o \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_o \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_o & 0 & -z_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \end{Bmatrix} = r_o + S^0 \times \tilde{u} + S^1 \times \tilde{u}' \quad (4.3)$$

όπου $\tilde{u} = (u, v, w, \theta_y)^T$ αναφέρονται στον ελαστικό άξονα.

Οι τροπές κατά Green ορίζονται εύκολα πλέον:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (4.4a)$$

$$Y_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.4\beta)$$

$$Y_{yz} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \times \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.4\gamma)$$

όπου οι υπογραμμισμένοι όροι είναι οι γραμμικοί ενώ οι υπόλοιποι οι μη-γραμμικοί.

4.1.3 Φορτία και Τάσεις

Με την υπόθεση ενός γραμμικού υλικού που υπακούει στο νόμο του Hooke και χωρίς να γίνει χρήση των μη-γραμμικών όρων, οι παραγόμενες τάσεις είναι:

$$\sigma_y = E \times \varepsilon_y = E \times \frac{\partial v}{\partial y} = E \times \frac{\partial v}{\partial y} - E \times x \times \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - E \times z \times \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = E \times v' - E \times x \times u'' - E \times z \times w'' \quad (4.5a)$$

$$\tau_{xy} = G \times Y_{xy} = G \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \times z \times \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = G \times z \times \theta_y' \quad (4.5\beta)$$

$$\tau_{yz} = G \times Y_{yz} = G \times \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -G \times x \times \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -G \times x \times \theta_y' \quad (4.5\gamma)$$

Ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων γίνεται μέσω της ολοκλήρωσης των τάσεων σε μια διατομή της δοκού:

$$F_y = \int_A \sigma_y dA = \int_A E \times v' dA = \overline{E \times A} \times v' - \overline{E \times A_z} \times u'' - \overline{E \times A_x} \times w'' \quad (4.6a)$$

$$M_y = \int_A (\tau_{xy} \times z - \tau_{yz} \times x) dA = \int_A G \times (x^2 + z^2) \times \theta_y' dA = \overline{G \times I_t} \times \theta_y' \quad (4.6\beta)$$

$$M_x = -\int_A \sigma_y \times z dA = -\int_A (-E \times x \times z \times u'' - E \times z^2 \times w'') dA = \overline{E \times I_{xz}} \times u'' + \overline{E \times I_{xx}} \times w'' \quad (4.6\gamma)$$

$$M_z = \int_A \sigma_y \times x dA = \int_A (-E \times x^2 \times u'' - E \times x \times z \times w'') dA = -\overline{E \times I_{zz}} \times u'' - \overline{E \times I_{xz}} \times w'' \quad (4.6\delta)$$

όπου η δύναμη F_y και οι ροπές M_x, M_y, M_z είναι συναρτήσεις των y και t :

$$\overline{E \times A} = \int_A E dA, \quad \overline{E \times A_z} = \int_A E \times x dA, \quad \overline{E \times A_x} = \int_A E \times z dA, \quad \overline{G \times I_t} = \int_A G \times (x^2 + z^2) dA$$

$$\overline{E \times I_{xx}} = \int_A E \times z^2 dA, \quad \overline{E \times I_{xz}} = \int_A E \times x \times z dA, \quad \overline{E \times I_{zz}} = \int_A E \times x^2 dA \quad (4.7)$$

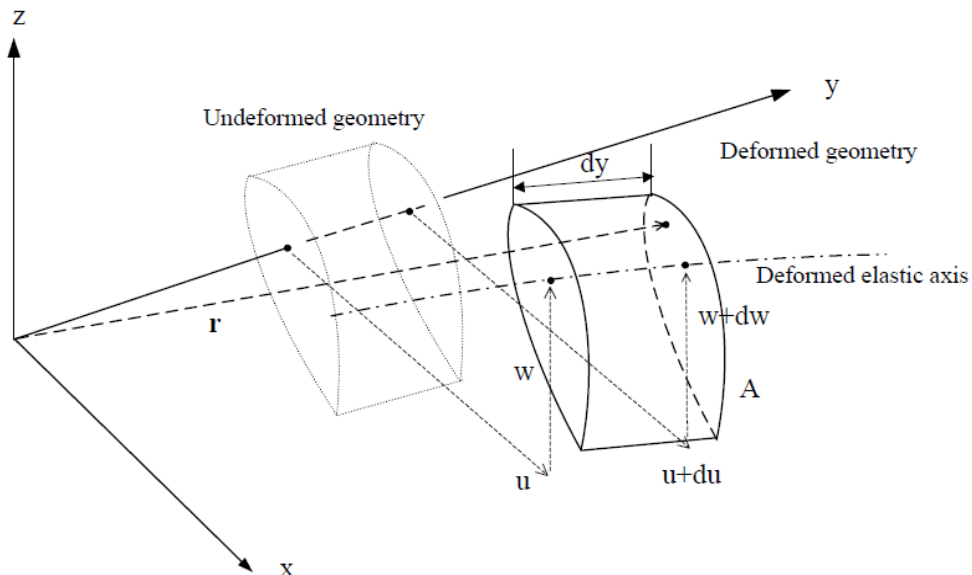
4.1.4 Εξισώσεις Ισορροπίας

Θεωρώντας ένα κομμάτι της δοκού με διατομή A και πάχος dy όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 και με τα επιφανειακά φορτία συμπεριλαμβανόμενων των αεροδυναμικών να δρουν στα όρια του στοιχείου $\delta P = (\delta P_x, \delta P_y, \delta P_z)^T$, οι εσωτερικές δυνάμεις που προκύπτουν είναι $dF = (dF_x, dF_y, dF_z)^T$. Η ισορροπία των δυνάμεων αλλά και η ισορροπία των ροπών ως προς το αριστερό άκρο του στοιχείου (1) δίνουν:

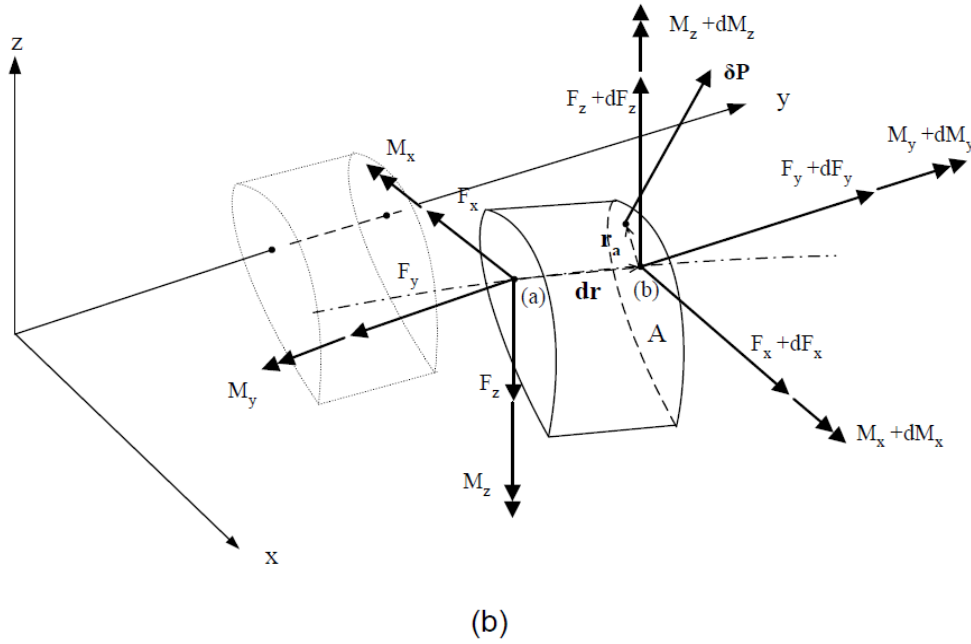
$$\int_A \rho dA \times \ddot{r} dy = dF + \int_A \rho dA \times g dy + \delta P dy \quad (4.8)$$

$$\int_A \rho dA \times r_o \times \ddot{r} dy = dM + dr \times (F + dF) + \int_A \rho dA \times r_o \times g dy + (dr + r_a) \times \delta P dy \quad (4.9)$$

όπου $F + dF$ είναι οι εσωτερικές δυνάμεις στο δεξί άκρο του στοιχείου (2), dM η συνολική ελαστική ροπή και r_a η θέση του αεροδυναμικού κέντρου.



(a)



Σχήμα 4.2: Κινηματική και δυναμική μίας παραμορφώσιμης δοκού.

Με την παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων προκύπτει:

$$r_o = \{du + x + z \times \theta_y, dy, dw + z - x \times \theta_y\}^T \cong \{x + z \times \theta_y, dy, z - x \times \theta_y\}^T \quad (4.10)$$

Στις δύο πλευρικές επιφάνειες του στοιχείου, οι εσωτερικές δράσεις F και M έχουν αποδοθεί στις σχέσεις συναρτήσεως των μετατοπίσεων και των παραγώγων τους. Η ισορροπία των ροπών κατά τους άξονες y και z , θα δώσει τις δυνάμεις dF_x και dF_z . Πιο συγκεκριμένα, η ισορροπία στον άξονα z δίνει:

$$0 = dM_z - F_x \times dy + F_y \times du + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (4.11)$$

οπότε:

$$dF_x = \left(\frac{d^2 M_z}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left(F_y \times \frac{du}{dy} \right) \right) dy \quad (4.12)$$

Κατ' αντιστοιχία, η ισορροπία στη διεύθυνση x δίνει:

$$dF_u = \left(-\frac{d^2 M_x}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left(F_y \times \frac{dw}{dy} \right) \right) dy \quad (4.13)$$

Ο συνδυασμός τους, δίνει τις τελικές εξισώσεις ισορροπίας στη μητρωική τους μορφή:

$$\begin{aligned} & \int_A (\rho dA) \times \Pi_1 \times \ddot{r} - \left(\int_A (\rho dA) \times \Pi_2 \times \dot{r} \right)' = \\ & = [K_{11} \times u']' + [K_{22} \times u'']'' + [K_{12} \times u'']' + [K_{21} \times u']'' + \int_A (\rho dA) \times \Pi_1 \times g + \Pi_a \times \delta P \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & -x \end{bmatrix} & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & -x \end{bmatrix} & \Pi_a &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z_a & 0 & -x_a \end{bmatrix} \\
K_{11} &= \begin{bmatrix} F_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{GI}_t \end{bmatrix} & K_{22} &= \begin{bmatrix} -\overline{EI}_{zz} & 0 & -\overline{EI}_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{EI}_{xz} & 0 & -\overline{EI}_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & (4.15) \\
K_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{EA}_z & 0 & -\overline{EA}_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & K_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -\overline{EA}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{EA}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.2 Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Στοιχεία Δοκού

4.2.1 Γενικά

Έστω ότι η διατύπωση του προβλήματος με το οποίο ασχολούμαστε είναι η εξής:

$$L(x;u)u = f, \quad x \in V \quad (4.16)$$

όπου $u = u(x)$ το άγνωστο πεδίο μετατοπίσεων, $f = f(x)$ γνωστό και $L(x;u)$ ένας διαφορικός τελεστής πιθανώς εξαρτώμενος από το u . Εάν η εξίσωση έχει συνεχή μορφή, η επίλυσή της σημαίνει άπειρες τιμές του u καθορισμένες σε όλα τα σημεία στον όγκο V . Ο στόχος, λοιπόν, είναι η διακριτοποίηση του προβλήματος ώστε να είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός ενός πεπερασμένου αριθμού αγνώστων τιμών.

Σε αυτό το σημείο, προσδιορίζεται ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων x_i μέσα στον όγκο V . Είναι οι κόμβοι στους οποίους η τιμή του u και των παραγώγων θέτονται ως άγνωστοι ή αλλιώς, ως διακριτοί βαθμοί ελευθερίας που συμβολίζονται:

$$\hat{u} = [\hat{u}_j] = [u_1, \partial u_1, u_2, \partial u_2, \dots, u_N, \partial u_N]^T \quad (4.17)$$

Η προσέγγιση του u γίνεται:

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_j \beta_j(x) \hat{u}_j = \beta(x) \times \hat{u}^T \quad (4.18)$$

όπου $\beta_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\partial \beta_i(x_j) = \delta_{ij}$ η συνάρτηση σχήματος με δ_{ij} τον τανυστή Kronecker. Η συνάρτηση σχήματος ορίζεται τμηματικά, διαιρώντας τον όγκο V σε ένα σύνολο μη-επικαλυπτόμενων V_e υποσυνόλων. Οι περιορισμοί των συναρτήσεων σχήματος προσδιορίζονται από τους κόμβους και τους βαθμούς ελευθερίας σε τοπικό επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε να συνδυάζονται στο συνολικό όγκο V και οι βαθμοί ελευθερίας u_h να ικανοποιούν συνθήκες συνέχειας.

Παρά το ότι η έκφραση της είναι διακριτή, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ικανοποίηση της μετά την εισαγωγή της συνάρτησης σχήματος είναι:

$$\int_V L(x;u) \times u(x) \times \beta_i(x) dx = \int_V f(x) \times \beta_i(x) dx \quad \forall i \tag{4.19}$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί μια περιληπτική μορφή του δυνατού έργου. Εάν η σχέση (4.16) ανταποκρίνεται στις εξισώσεις ισορροπίας και είναι μια δυνατή μετατόπιση, το δυνατό έργο που παράγεται και θα πρέπει να ισχύει για κάθε δυνατή μετατόπιση είναι:

$$\int_V L(x;u) \times u(x) \times \delta u(x) dx = \int_V f(x) \times \delta u(x) dx \quad \forall \delta u \tag{4.20}$$

Επειδή ισχύει ότι $\delta u = \sum_j \beta_j(x) \times \delta \hat{u}_j$, εξαλείφοντας το $\delta \hat{u}_j$ από τη σχέση (4.20), προκύπτει η σχέση (4.19).

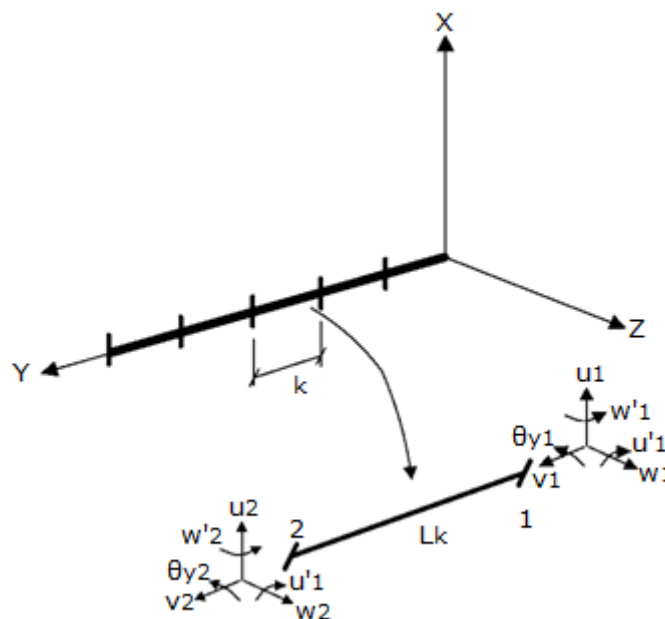
Πρέπει να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα αυτό ισοδυναμεί με μια ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων. Υποθέτοντας γνωστή μέσω επαναληπτικής διαδικασίας την εξάρτηση του $L(\cdot)$ με τους βαθμούς ελευθερίας και συνδυάζοντας τις, προκύπτει ένα καινούριο σύστημα που αναφέρεται στους διακριτούς βαθμούς ελευθερίας \hat{u} :

$$A \times \hat{u} = b, \quad A_{ij} = \int_V L(x;\tilde{u}) \times \beta_j(x) \times \beta_i(x) dx, \quad b_i = \int_V f(x) \times \beta_i(x) dx \tag{4.21}$$

Μετά από κάθε νέα επίλυση της προκύπτει καινούρια τιμή μέχρι την ικανοποίηση των κριτηρίων σύγκλισης της μορφής $\max_i |\hat{u}_i - \hat{u}_i| \leq \epsilon$.

4.2.2 Συναρτήσεις Σχήματος και Προσεγγίσεις

Όπως αναφέρθηκε ήδη στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων οι προσεγγίσεις γίνονται σταδιακά. Έτσι, αντί να οριστεί συνάρτηση σχήματος για ολόκληρο το πεδίο ορισμού, ορίζονται οι περιορισμοί των μη-υπερκαλυπτόμενων αντικειμένων που αποτελούν την προσέγγιση για το πεπερασμένο στοιχείο. Σε στοιχείο δοκού, το πεδίο ορισμού αποτελεί μια πεπερασμένη γραμμή στον χώρο με πολλά κομμάτια όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Περιγραφή της δοκού με χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

Είναι δυνατός ο ορισμός συναρτήσεων σχήματος σε ένα αντιπροσωπευτικό κομμάτι και με κατάλληλη επεξεργασία να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στα υπόλοιπα κομμάτια. Ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια επιλέγεται ο αριθμός των κόμβων και οι βαθμοί ελευθερίας που τους αντιστοιχούν. Ένας βαθμός ελευθερίας αποτελεί την τιμή της συνάρτησης που θέλουμε να προσεγγίσουμε στον κόμβο ενώ οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται είναι γραμμικά πολυώνυμα. Επιλέγοντας τα άκρα των κομματιών ως κόμβους προκύπτει ότι:

$$u(\xi) \approx u_h(\xi) = (1 - \xi) \times \hat{u}_1 + \xi \times \hat{u}_2, \quad \hat{u}_1 = u(0), \quad \hat{u}_2 = u(1) \quad (4.22)$$

όπου $\xi \in [0, 1]$

Οι τιμές των βαθμών ελευθερίας στους κόμβους αποτελούν τους διακριτούς βαθμούς ελευθερίας. Η επιλογή των συναρτήσεων σχήματος $\beta_1(\xi) = 1 - \xi$ και $\beta_2(\xi) = \xi$ έγινε ώστε η προσέγγιση να είναι ακριβής στους κόμβους. Τέτοιου είδους συνάρτηση είναι κατάλληλη για προβλήματα 2^{ης} τάξης. Για προβλήματα 4^{ης} τάξης πρέπει ταυτόχρονα η παράγωγος να είναι συνεχής και γι' αυτό στους κόμβους χρειαζόμαστε εκτός από τα $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$, τις παραγώγους $\{\partial \hat{u}_1, \partial \hat{u}_2\}$ τους καταλήγοντας σε τέσσερις βαθμούς ελευθερίας. Τότε:

$$u(\xi) \approx u_h(\xi) = (1 - 3 \times \xi^2 + 2 \times \xi^3) \times \hat{u}_1 + (3 \times \xi^2 - 2 \times \xi^3) \times \hat{u}_2 + \\ + L(\xi - 2 \times \xi^2 + \xi^3) \times \partial \hat{u}_1 + L(-\xi^2 + \xi^3) \times \partial \hat{u}_2 \quad (4.23)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθες:

$$\beta_0^1(\xi) = 1 - 3 \times \xi^2 + 2 \times \xi^3, \quad \beta_0^2(\xi) = L(\xi - 2 \times \xi^2 + \xi^3), \quad \beta_0^3(\xi) = 3 \times \xi^2 - 2 \times \xi^3 \\ \beta_0^4(\xi) = L(-\xi^2 + \xi^3) \quad (4.24)$$

Στο πρόβλημα της δοκού ζητούμενα αποτελούν οι δύο καμπικές μετατοπίσεις, η αξονική μετατόπιση και η γωνία στρέψης $u = (u, v, w, \theta_\gamma)^T$. Οι διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στους αγνώστους v και θ_γ είναι 2^{ης} τάξης, ενώ εκείνες των u και w είναι 4^{ης} τάξης. Τελικά, σε κάθε κόμβο θα ισχύει:

$$u_h = N \times \hat{u} \quad (4.25)$$

όπου:

$$u_h = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_\gamma \end{Bmatrix}_h$$

$$N = \begin{bmatrix} \beta_1^0 & \beta_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2^0 & \beta_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1^0 & \beta_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2^0 & \beta_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u} = (\hat{u}_1, \partial \hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{w}_1, \partial \hat{w}_1, \hat{\theta}_1, \hat{u}_2, \partial \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{w}_2, \partial \hat{w}_2, \hat{\theta}_2)^T$$

Οι παραπάνω σχέσεις έχουν παραχθεί για ένα τυπικό κομμάτι του στοιχείου. Επειδή όμως θα πρέπει να ισχύουν γενικότερα σε όλο το στοιχείο της δοκού, οι συναρτήσεις σχήματος κρατούν σταθερή μορφή, αλλάζουν όμως τα ανάλογα με το κομμάτι του στοιχείου της δοκού στο οποίο αναφέρονται.

Η διαδικασία ολοκληρώνεται επιβάλλοντας τις απαιτήσεις συνέχειας στις συναρτήσεις ώστε να επιτευχθεί αναφορά στο καθολικό σύστημα αντί για το τοπικό. Έτσι, για ένα δεδομένο στοιχείο e :

$$\gamma_1^e = \gamma_e, \quad L^e = \gamma_{e+1} - \gamma_e$$

$$\hat{u}_1^e \quad (4.26)$$

Και η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$u_h^e(\gamma) = N^e(\gamma) \times \hat{u}_e$$

$$\hat{u}_e = (\hat{u}_e, \hat{u}'_e, \hat{v}_e, \hat{w}_e, \hat{w}'_e, \hat{\theta}_e, \hat{u}_{e+1}, \hat{u}'_{e+1}, \hat{v}_{e+1}, \hat{w}_{e+1}, \hat{w}'_{e+1}, \hat{\theta}_{e+1})^T \quad (4.27)$$

Ενώ στο καθολικό σύστημα είναι:

$$u_h(\gamma) = N(\gamma) \hat{u}, \quad \hat{u} = (\hat{u}_1^T, \hat{u}_2^T, \dots, \hat{u}_i^T, \dots, \hat{u}_{E+1}^T)^T, \quad \hat{u}_i^T = (\hat{u}_i, \hat{u}'_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \hat{w}'_i, \hat{\theta}_i)^T \quad (4.28)$$

4.2.3 Διαμόρφωση Δυνατού Έργου

Για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων 4^{ης} τάξης είναι απαραίτητη η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών. Η διαδικασία απαιτεί αφενός μείωση της τάξης της διαφορικής εξίσωσης, αφετέρου ανεξάρτητη έκφραση των συνοριακών συνθηκών. Αυτά επιτυγχάνονται με τη μέθοδο Galerkin.

Αντιμετωπίζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας ως εξισώσεις δυνάμεων, το δυνατό έργο που θα παράξουν προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων με τις αντίστοιχες δυνατές μετατοπίσεις, ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της δοκού:

$$\int_0^L \delta u^T(\gamma) \times (\text{αεροελαστική σχέση}) dy = 0, \quad \forall \delta u \quad (4.29)$$

Χρησιμοποιώντας τη μητρική έκφραση της σχέσης (4.14) προκύπτει:

$$\int_0^L \delta u^T \left(\int_A (\rho dA) \times \Pi_1 \times \ddot{r} - \left(\int_A (\rho dA) \times \Pi_2 \times \dot{r} \right) \right) dy =$$

$$= \int_0^L \delta u^T \left([K_{11} \times u']' + [K_{22} \times u'']'' + [K_{12} \times u'']' + [K_{21} \times u']'' \right) dy + \quad (4.30)$$

$$+ \int \delta u^T \left(\int_A (\rho dA) \times \Pi_1 \times g \right) dy + \int_0^L \delta u^T \times \Pi_a \times \delta P dy$$

Η ολοκλήρωση κατά μέλη των όρων με παραγώγους μεγαλύτερες της 1^{ης} τάξης δίνει:

$$\int_0^L \delta u^T [K_{11} \times u']' dy = \underline{\delta u^T \times K_{11} \times u'} \Big|_0^L - \int_0^L \delta u^T \times K_{11} \times u' dy$$

$$\int_0^L \delta u^T [K_{22} \times u''] dy = \underline{\delta u^T [K_{22} \times u'']'} - \delta u^T \times K_{22} \times u'' \Big|_0^L - \int_0^L \delta u''' \times K_{22} \times u'' dy \quad (4.31)$$

$$\int_0^L \delta u^T [K_{12} \times u''] dy = \underline{\delta u^T \times K_{12} \times u'' \Big|_0^L} - \int_0^L \delta u' \times K_{12} \times u'' dy$$

$$\int_0^L \delta u^T [K_{21} \times u'] dy = \underline{\delta u^T \times [K_{21} \times u'] \Big|_0^L} - \int_0^L \delta u'' \times [K_{21} \times u'] dy$$

Οι υπογραμμισμένοι όροι αντιστοιχούν σε συννοριακά στοιχεία και αντιπροσωπεύουν το δυνατό έργο που παράγουν οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης της δοκού. Σε ελεύθερο άκρο οι αντιδράσεις είναι μηδενικές, άρα οι όροι αυτοί μηδενίζονται όπως και στην περίπτωση πακτωμένου άκρου.

Το σύνορο περιλαμβάνει τις δυνατές μετατοπίσεις που αντιστοιχούν στις βασικές συννοριακές συνθήκες και φορτία που αντιστοιχούν στις φυσικές συνθήκες. Επιτρέπεται όμως η επιβολή ενός είδους οριακών συνθηκών μόνο και όχι και των δύο ταυτόχρονα. Έτσι, εάν η μετατόπιση δεν επιτρέπεται η δύναμη που θα της αντιστοιχεί θα καθοριστεί σαν αντίδραση και θα αποτελεί μέρος της λύσης. Διαφορετικά, εάν δηλαδή η μετακίνηση είναι επιτρεπόμενη, η δύναμη θα πρέπει να καθοριστεί.

Επιστρέφοντας στη διαδικασία επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων, θα πρέπει να καθοριστούν οι αντιδράσεις και οι ροπές στα άκρα της δοκού. Αυτό επιτυγχάνεται διαχωρίζοντας τις γραμμικές μετατοπίσεις από τις στροφές. Εάν τα $\delta v = (\delta u, \delta v, \delta w)^T$ και $\delta \theta = (\delta u', \delta \theta, \delta w')^T$ υποδηλώνουν τις δυνατές γραμμικές μετατοπίσεις και στροφές που σχετίζονται με την αντίδραση F και τη ροπή M σε ένα από τα δύο άκρα της δοκού, τότε:

$$\begin{aligned} \delta v^T \times F + \delta \theta^T \times M &= \delta u^T \times I_F^0 \times \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} + \delta u'^T \times I_F^1 \times \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \\ &= \delta u^T \times K_{11} \times u' + \delta u^T \times [K_{22} \times u'']' - \delta u'^T \times K_{22} \times u'' + \delta u^T \times K_{12} \times u'' + \delta u^T \times [K_{21} \times u']' \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$I_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με αυτή τη διαδικασία ακριβώς θα μπορούσαν να προσδιοριστούν αντί για την αντίδραση F και τη ροπή M , οι εσωτερικές δυνάμεις στα άκρα κάποιου επιλεγμένου κομματιού της δοκού. Αυτό ισοδυναμεί με παραγωγή του δυνατού έργου ως προς οποιοδήποτε στοιχείο των δv ή $\delta \theta$.

Η προηγούμενη ανάλυση συσχετίζει τις δυνάμεις F και τις ροπές M με τη λύση. Εάν θέλουμε τον προσδιορισμό ή συσχετισμό με την εξωτερική φόρτιση, χρησιμοποιείται η ισορροπία της δοκού. Έτσι για μία πακτωμένη δοκό:

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \int_0^L \left(\int_A \rho \times I_{FM}^a \times g dA + I_{FM}^p \times \delta P - \int_A \rho \times I_{FM}^a \times \ddot{r} dA \right) dy \quad (4.33)$$

$$I_{FM}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Διακριτοποίηση

Για τη διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης, πρώτα διαχωρίζονται τα ολοκληρώματα ανάλογα με την κατανομή των πεπερασμένων στοιχείων στη δοκό και έπειτα αντιστοιχίζεται κάθε ολοκλήρωμα σε κάθε στοιχείο. Αυτό ισοδυναμεί με τη θεώρηση ότι κάθε τμήμα ξεχωριστά είναι σε ισορροπία και μετά να πάρουμε το άθροισμα όλων των στοιχείων. Κάθε ενδιάμεσος συνοριακός όρος θα απαλειφθεί με την άθροιση ώστε στο τέλος να παραμείνουν μόνο οι πραγματικές συνοριακές συνθήκες.

Παίρνοντας μόνο έναν όρο κάθε φορά εξάγονται τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αλλά και το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων για το στοιχείο e :

$$M_e = \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N^T \times II_1 \times SN \right) - \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N^T \times II_2 \times SN' \right) \quad (4.34)$$

$$K_e = \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N'^T \times K_{11} \times N' \right) + \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N''^T \times K_{22} \times N'' \right) +$$

$$\int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N'^T \times K_{12} \times N'' \right) + \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N''^T \times K_{21} \times N' \right) \quad (4.35)$$

$$Q_e = \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N^T \times II_1 \times g \right) + \int_{L_e} dy \left(\int_A dA \rho \times N^T \times II_a \times \delta P \right) \quad (4.35)$$

Αλλά και η εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου e :

$$M_e \times \ddot{\hat{u}}_e + K_e \times \hat{u}_e = Q_e \quad (4.37)$$

Το τελικό «πακέτο» εξισώσεων που θα προκύψει μετά την άθροιση είναι:

$$M \times \ddot{\hat{u}}_e + K \times \hat{u} = Q + \text{όροι στο σύνορο} \quad (4.38)$$

Οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν στα δοθέντα φορτία σε ένα από τα δύο άκρα της δοκού, όπου αυτά επιβάλλονται. Εάν οι κινηματικές συνθήκες είναι μη-μηδενικές θα πρέπει ρητά να εισαχθούν στο συγκεκριμένο κόμβο ή στο συγκεκριμένο βαθμό ελευθερίας.

4.3 Υπολογισμός βασικών χαρακτηριστικών διατομής πτερυγίου

Η διαδικασία που ακολουθεί αναφέρεται σε λεπτότοιχες, πολυκυφελωτές, μη-ομογενείς, κλειστές διατομές οι οποίες αναλύονται με την καμπτική θεωρία κλασικής δοκού και τη θεωρία στρέψης St. Venant.

4.3.1 Γενικές Ιδιότητες

Η διατομή σχήματος αεροτομής αποτελείται από N , όχι καμπύλα, ομογενούς υλικού στοιχεία που καλύπτουν την επιφάνεια, αλλά και τον εσωτερικό ενισχυτικό ιστό. Το πάχος κάθε στοιχείου θεωρείται ομοιόμορφα κατανομημένο στις δύο άκρες της μέσης γραμμής του. Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα στοιχεία που είναι απαραίτητα ως δεδομένα και τα οποία θα θεωρούνται κατά τμήματα σταθερά για τη συγκεκριμένη επίλυση.

Πίνακας 4.1: Συμβολισμός για τον ορισμό των ιδιοτήτων της διατομής.

Ποσότητα	Σύμβολο
μέτρο E (N / m^2)	E_e
μέτρο G (N / m^2)	G_e
πυκνότητα (kg / m^3)	ρ_e
πάχος (m)	t_e
συντεταγμένη x του κόμβου αρχής (m)	X_{1e}
συντεταγμένη y του κόμβου αρχής (m)	Y_{1e}
συντεταγμένη x του κόμβου τέλους (m)	X_{2e}
συντεταγμένη y του κόμβου τέλους (m)	Y_{2e}

Στην αρχή οι συντεταγμένες των κόμβων $X_{1e}, Y_{1e}, X_{2e}, Y_{2e}$ μπορούν να δοθούν ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, αλλά μετά τον υπολογισμό των συντεταγμένων του κέντρου ελαστικής στροφής επιλέγεται αυτό ως σημείο αναφοράς.

Σύμφωνα με τα σύμβολα του σχήματος 4.4 υπολογίζονται οι εξής ποσότητες:

$$\text{Μήκος στοιχείου: } L_e = \sqrt{(X_{2e} - X_{1e})^2 + (Y_{2e} - Y_{1e})^2} \quad (4.39)$$

$$\text{Επιφάνεια ενός στοιχείου: } A_e = L_e \times t_e \quad (4.40)$$

$$\text{Επιφάνεια του υλικού: } A = \sum_e^N A_e \quad (4.41)$$

$$\text{Μέσο μέτρο } E \text{ της επιφάνειας: } E = \frac{\sum_{e=1}^N E_e \times A_e}{A} \quad (4.42)$$

$$\text{Μέσο μέτρο } G \text{ της επιφάνειας: } G = \frac{\sum_{e=1}^N G_e \times A_e}{A} \quad (4.42)$$

$$\text{Μέσο κέντρο με το μέτρο } E: \quad x_{el} = \frac{\sum_{e=1}^N E_e \times A_e \times (X_{1e} + X_{2e}) / 2}{E \times A}$$

$$Y_{el} = \frac{\sum_{e=1}^N E_e \times A_e \times (Y_{1e} + Y_{2e}) / 2}{E \times A} \quad (4.44)$$

Μέση γραμμική πυκνότητα: $\rho = \sum_{e=1}^N \rho_e \times A_e$ (4.45)

Με βάση το ελαστικό κέντρο στροφής ορίζονται τα ακόλουθο χαρακτηριστικά:

Κέντρο μάζας σε σχέση με το: $X_{CM} = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e \times A_e \times (X_{1e} + X_{2e}) / 2}{\rho \times A}$

Ελαστικό κέντρο: $Y_{CM} = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e \times A_e \times (Y_{1e} + Y_{2e}) / 2}{\rho \times A}$ (4.46)

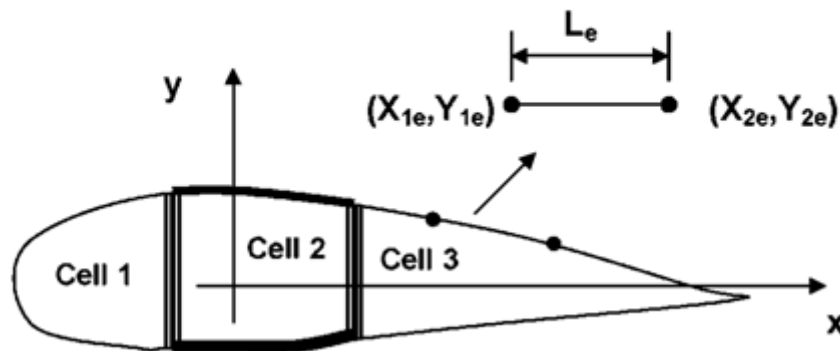
Ακτίνες αδρανείας: $I_x = \frac{\sum_{e=1}^N E_e \times A_e \times \frac{Y_{1e}^2 + Y_{1e} \times Y_{2e} + Y_{2e}^2}{3}}{E}$

$$I_y = \frac{\sum_{e=1}^N E_e \times A_e \times \frac{X_{1e}^2 + X_{1e} \times X_{2e} + X_{2e}^2}{3}}{E} \quad (4.47)$$

Κέντρο μάζας σε σχέση με το

κέντρο διάτμησης: $x_{cm} = X_{CM} - x_{sc}, \quad y_{cm} = Y_{CM} - y_{sc}$ (4.48)

όπου x_{sc} και y_{sc} οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης.



Σχήμα 4.4: Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού μίας λεπτότοιχης διατομής.

4.3.2 Στρέψη: Υπολογισμός της Σταθεράς του Saint Venant

Η σταθερά στρέψης I_t ορίζεται ως ακολούθως:

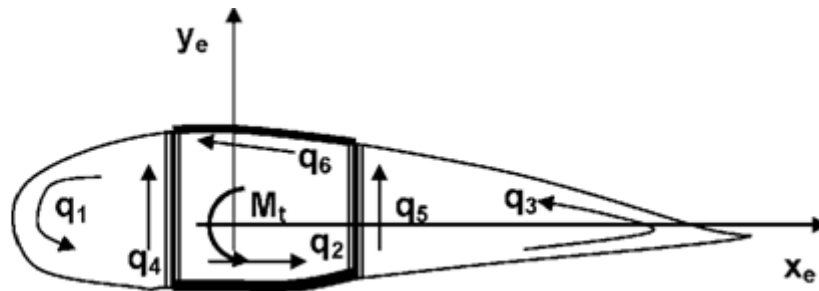
$$I_t = \frac{M_t}{\partial G} \quad (4.49)$$

όπου M_t η ροπή που δρα στο επίπεδο της διατομής και θ η γωνία συστροφής εξαιτίας της ροπής.

Σε μία λεπτότοιχη και πολυκυψελωτή διατομή χρειάζεται να υπολογισθεί πρώτα η διατμητική ροή προκειμένου να προσδιοριστεί η γωνία θ . Για αυτό το λόγο εφαρμόζουμε ισορροπία ροπών, ισορροπία διατμητικών ροών στις ενώσεις των στοιχείων της διατομής και συνθήκες συνέχειας των στρεπτικών παραμορφώσεων για κάθε κυψέλη.

Στο σχήμα 4.5 φαίνεται μία διατομή με τρεις κυψέλες, η οποία αποτελείται από έξι μακροστοιχεία S_{1-6} . Για κάθε κυψέλη j ορίζεται το εμβαδόν C_j και το μέτρο διάτμησης G_j . Η διατμητική ροή q μεταβάλλεται μόνο εάν αλλάξει μία ιδιότητα από στοιχείο σε στοιχείο. Η ισορροπία της διατμητικής ροής θα δώσει:

$$q_1 = q_2 + q_4 \quad \text{και} \quad q_2 = q_3 + q_5 \quad (4.50)$$



Σχήμα 4.5: Υπολογισμός της διατμητικής ροής.

Επιπλέον για μοναδιαία ροπή $M_t = 1$ προκύπτει:

$$2 \times q_1 \times C_1 + 2 \times q_2 \times C_2 + 2 \times q_3 \times C_3 = M_t = 1 \quad (4.51)$$

Εάν ορίσουμε για κάθε μακροστοιχείο το

$$\kappa_i = \oint_{s_i} \frac{ds}{t} = \sum_{e \in S_i} \frac{L_e}{t_e} \quad (4.52)$$

τότε:

$$\frac{1}{2 \times G_1 \times C_1} \times (q_1 \times \kappa_1 + q_4 \times \kappa_4) = \frac{1}{2 \times G_2 \times C_2} \times (q_2 \times (\kappa_2 + \kappa_6) - q_4 \times \kappa_4 + q_5 \times \kappa_5)$$

$$\frac{1}{2 \times G_1 \times C_1} \times (q_1 \times \kappa_1 + q_4 \times \kappa_4) = \frac{1}{2 \times G_3 \times C_3} \times (q_3 \times \kappa_3 - q_5 \times \kappa_5) \quad (4.53)$$

Οι εξισώσεις αυτές δημιουργούν ένα σύστημα εξισώσεων 5×5 από το οποίο δύνανται να προσδιοριστούν οι διατμητικές ροές. Η γωνία συστροφής θ της διατομής ισούται με τη γωνία συστροφής οποιασδήποτε κυψέλης:

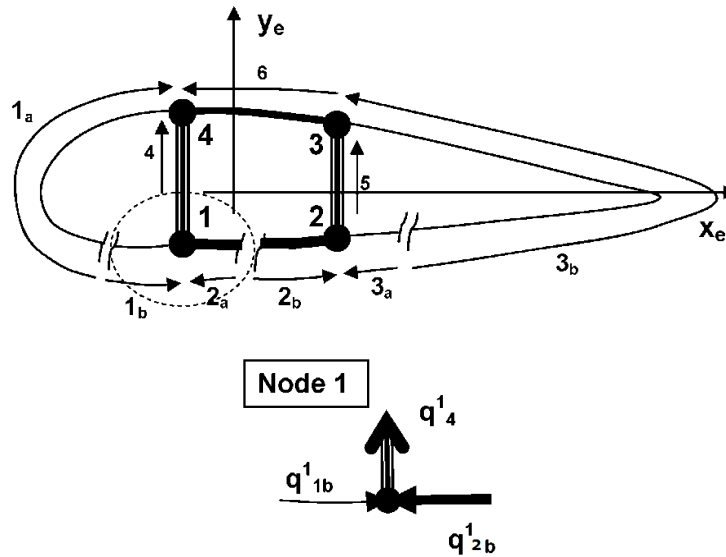
$$\theta = \frac{1}{2 \times G_1 \times C_1} \times (q_1 \times \kappa_1 + q_4 \times \kappa_4) \quad (4.54)$$

Ως εκ τούτου είναι γνωστά όλα τα απαιτούμενα στοιχεία για τον προσδιορισμό της σταθεράς I_t .

4.3.3 Κέντρο Διάτμησης

Ως κέντρο διάτμησης ορίζεται το σημείο εκείνο από το οποίο οφείλει να διέρχεται η συνισταμένη των δυνάμεων ώστε να μην αναπτυχθούν στρεπτικές ροπές στη διατομή. Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του κέντρου διάτμησης υποθέτουμε ότι μία διατμητική δύναμη V δρα σε μία απόσταση d από το κέντρο ελαστικής στροφής.

Η διατομή μας είναι δύο φορές υπεραστατική αφού αποτελείται από τρεις κυψέλες. Για την επίλυση του συστήματος απαιτείται να μετατραπεί σε ισοστατικό μέσω της υλοποίησης τομών σε τυχαίο σημείο σε κάθε μία από τις κυψέλες, ώστε να προκύψει μία λεπτότοιχη ανοικτή διατομή, όπως παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα 4.6:



Σχήμα 4.6: Υπολογισμός του κέντρου διάτμησης.

Προκειμένου να αποκαταστήσουμε τη συνέχεια στις τομές, η διατμητική ροή στην κυψέλη j ορίζεται ως:

$$q_j = q_{j0} + \bar{q}_j \tag{4.55}$$

όπου q_{j0} είναι η διατμητική ροή σε τυχαίο σημείο της περιφέρειας της κυψέλης, με ανοικτές τις οπές, ενώ \bar{q}_j είναι η σταθερή ροή με κλειστές τις οπές. Έτσι, το q_{j0} ορίζεται ως:

$$q_{j0} = \frac{P_y \times I_x - P_x \times I_{xy}}{I_x \times I_y - I_{xy}^2} \times V_x + \frac{P_x \times I_y - P_y \times I_{xy}}{I_x \times I_y - I_{xy}^2} \times V_y \tag{4.56}$$

όπου P_x και P_y ορίζονται ως:

$$P_x = \frac{\int E(s) \times x \times t(s) ds}{E}, \quad P_y = \frac{\int E(s) \times y \times t(s) ds}{E} \tag{4.57}$$

και είναι οι μόνες μεταβλητές ποσότητες που μπορούν να αλλάξουν από σημείο. Αρχίζουμε να δίνουμε τιμές στη ροή q_{j0} από τα σημεία των τομών, όπου είναι μηδενική και κινούμαστε κατά μήκος της περιφέρειας της κυψέλης έως ότου να συναντήσουμε ένα σημείο ένωσης των κυψελών. Στη σχέση (4.57) S είναι η γραμμή που ξεκινά από την τυχαία τομή και τελειώνει στο σημείο που υπολογίζουμε τις ποσότητες P_x και P_y . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή q_{j0} για τα τμήματα 1a, 1b, 2a, 2b, 3a και 3b. Για τα τμήματα 4, 5 και 6 θα πρέπει να συνυπολογισθούν οι πρόσθετες ροές από τα σημεία ένωσης

των κυψελών. Για παράδειγμα στο κομμάτι 4 στον κόμβο, η επιπλέον ροή είναι $q_4^1 = q_{1b}^1 - q_{2a}^1$ και ως εκ τούτου η συνολική ροή με ανοικτές τις οπές είναι:

$$q_{40} = q_4^1 + \frac{P_y \times I_x - P_x \times I_{xy}}{I_x \times I_y - I_{xy}^2} \times V_x + \frac{P_x \times I_y - P_y \times I_{xy}}{I_x \times I_y - I_{xy}^2} \times V_y \quad (4.58)$$

Η συνολική διατμητική ροή προκύπτει ως το αλγεβρικό άθροισμα της ροής q_{j0} και των τριών διορθωτικών ροών \bar{q}_j που δρουν ανεξάρτητα σε κάθε κυψέλη. Η συνολική σχετική στρέβλωση στις τρεις τομές θα είναι μηδενική αν όλες οι κυψέλες είναι κλειστές. Οπότε, η στρεπτική παραμόρφωση είναι μηδενική και ισχύει ότι:

$$\frac{1}{G_j} \times \int_{s_j} q_j \frac{ds}{t} = \frac{1}{G_j} \times \left(\oint_{s_{j0}} q_{j0} \frac{ds}{t} + \bar{q}_j \times \oint_{s_j} \frac{ds}{t} - \bar{q}_i \times \oint_{s_{ji}} \frac{ds}{t} - \bar{q}_k \times \oint_{s_{jk}} \frac{ds}{t} \right) = 0 \quad (4.59)$$

όπου s_{ji} και s_{jk} υποδηλώνει τα κοινά σημεία των κυψελών j , i και j , k αντιστοίχως. Εάν ορίσουμε:

$$\delta_{j0} = \frac{1}{G_j} \times \int_{s_j} q_{j0} \frac{ds}{t}, \quad \delta_{jj} = \frac{1}{G_j} \times \int_{s_j} q_{j0} \frac{ds}{t}, \quad \delta_{ji} = -\frac{1}{G_j} \times \int_{s_{ji}} q_{j0} \frac{ds}{t}, \quad \delta_{jk} = -\frac{1}{G_j} \times \int_{s_{jk}} q_{j0} \frac{ds}{t} \quad (4.60)$$

Τότε, η σχέση (4.59) γίνεται:

$$\delta_{jj} \times \bar{q}_j + \delta_{ji} \times \bar{q}_i + \delta_{jk} \times \bar{q}_k + \delta_{j0} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.61)$$

από όπου υπολογίζονται οι ροές \bar{q}_j . Άρα, η κατανομή της διατμητικής ροής είναι γνωστή σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής. Η ροπή M_0 που προκαλείται από τη διατμητική ροή ως προς το ελαστικό κέντρο στροφής είναι:

$$M_0 = \sum_{e=1}^N q_e \times (X_{1e} \times Y_{2e} - X_{2e} \times Y_{1e}) \quad (4.62)$$

όπου q_e είναι η διατμητική ροή του στοιχείου e .

Αυτή η διαδικασία πρέπει να ακολουθηθεί δύο φορές, καθώς για τον υπολογισμό της συντεταγμένης x απαιτείται επιβολή φορτίου κατά τη διεύθυνση y , ενώ για τον υπολογισμό της συντεταγμένης y απαιτείται επιβολή φορτίου κατά τη διεύθυνση x . Έτσι, προκύπτουν εν τέλει οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης:

$$x_{sc} = \frac{-M_0}{V_y} \quad \text{και} \quad y_{sc} = -\frac{M_0}{V_x} \quad (4.63)$$

Κεφάλαιο 5

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΓΙΑ ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

5.1 Εισαγωγή στην Αεροελαστικότητα

5.1.1 Γενικά Στοιχεία για την Αεροελαστικότητα

Η αεροελαστικότητα σχετίζεται με την απόκριση παραμορφώσιμων κατασκευών υπό διέγερση οφειλόμενη σε ροή ανέμου. Η θεωρία αεροελαστικότητας αναπτύχθηκε αρχικά για την αεροπορική βιομηχανία, όμως με την πάροδο των χρόνων επεκτάθηκε και σε άλλες εφαρμογές με αποτέλεσμα τη γνωστή στις μέρες μας «Ανάλυση Αλληλεπίδρασης Ρευστού-Κατασκευής».

Εν γένει, το πρόθεμα “αερό” σχετίζεται με την αεροδυναμική και συνήθως αναφέρεται σε συμπιεστές ροές. Στις ανεμογεννήτριες όμως, ενώ ο αριθμός Reynolds είναι υψηλός, ο αριθμός Ma είναι τόσο μικρός ώστε τα φαινόμενα συμπιεστότητας να θεωρούνται αμελητέα. Η μέγιστη ταχύτητα σπάνια ξεπερνά τη τιμή των 70 m/sec άρα ο αριθμός Ma είναι περίπου 0,2. Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η αεροελαστικότητα, όπως αναπτύχθηκε για τα αεροσκάφη, δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση των ανεμογεννητριών, σε αντίθεση με τις πληροφορίες που παρέχονται από έρευνες στους έλικες ελικοπτέρων.

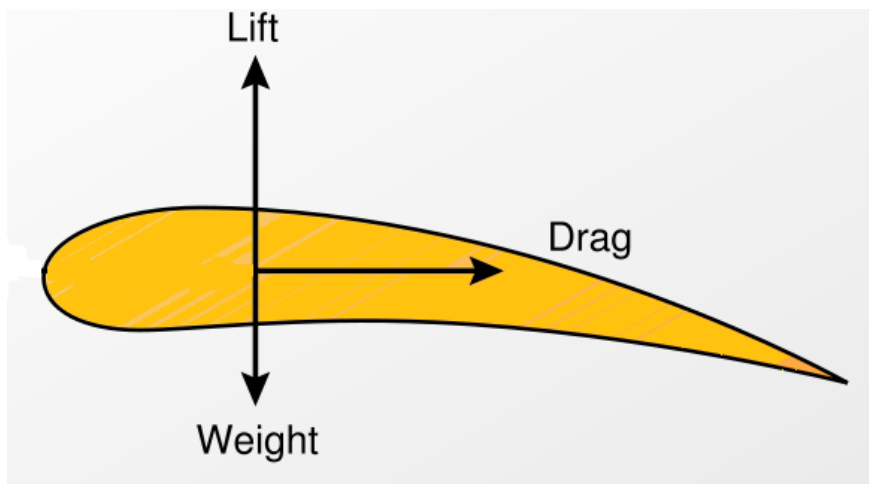
Η ουσία της αεροελαστικότητας έχει να κάνει με την επιρροή της ροής του αέρα σε μια παραμορφώσιμη κατασκευή. Η ύπαρξη στερεών συνόρων μέσα στη ροή του αέρα δημιουργεί τα αεροδυναμικά φορτία. Αυτά τα στερεά σύνορα αποτελούν τη διεπιφάνεια μεταξύ του στερεού και του αέρα και σε αυτά αναπτύσσονται τάσεις. Οι τάσεις προφανώς θα πρέπει να ταυτίζονται και στα δύο μέσα ώστε να διατηρείται η συνέχεια. Η ίδια ταύτιση θα πρέπει να υπάρχει τόσο για τις μετατοπίσεις όσο και για τις ταχύτητες που εμφανίζονται. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες αεροελαστικής σύζευξης συνοψίζονται ως εξής:

$$\sigma^{\text{fluid}} = \sigma^{\text{solid}} \quad u^{\text{fluid}} = u^{\text{solid}} \quad (5.1)$$

Η πρώτη σχέση μπορεί να θεωρηθεί συνθήκη δυναμικής σύζευξης και η δεύτερη κινηματικής σύζευξης, κάτι το συμβατό και με τις πιθανές μορφές των συνοριακών συνθηκών στις κατασκευές. Όπως αναφέρθηκε ήδη, εάν οι μετατοπίσεις και ακολούθως οι χρονικές τους παράγωγοι είναι περιορισμένες, τότε από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν τα φορτία και αντίστροφα. Για ένα συζευγμένο μοντέλο αυτό σημαίνει πως εάν το ένα μέσο δίνει τα φορτία, τότε το άλλο δίνει τις μετατοπίσεις και τις ταχύτητες. Στην αεροδυναμική συνήθως μας ενδιαφέρει η κινηματική των συνοριακών συνθηκών καθώς το κύριο αποτέλεσμα είναι τα φορτία. Αυτή η λογική ακολουθείται και στην αεροελαστικότητα.

5.1.2 Προσεγγιστική Ποσοτικοποίηση των Αεροελαστικών Επιδράσεων

Η ακρίβεια υπολογισμού των αεροδυναμικών φορτίων εξαρτάται από τη μοντελοποίηση της κατασκευής. Εφόσον λοιπόν όλα τα τμήματα της ανεμογεννήτριας προσομοιώνονται με δοκούς, απαιτούνται μόνο τα ολοκληρώματα της αεροδυναμικής φόρτισης.



Σχήμα 5.1: Αεροδυναμικές δυνάμεις σε μια τυπική διατομή.

Στην πράξη, τα φορτία του ανέμου λαμβάνονται υπόψη μόνο στα πτερύγια, επειδή τα φορτία στον πυλώνα και στην άτρακτο είναι αμελητέα σε σύγκριση με αυτά στο ρότορα. Επειδή τα πτερύγια είναι ανυψούμενα σώματα με αεροδυναμικό σχήμα παρόμοιο με αυτό ενός πτερυγίου αεροπλάνου, τα αεροδυναμικά φορτία δίνονται σε όρους αεροδυναμικών χαρακτηριστικών διατομής και πιο συγκεκριμένα των δυνάμεων της άνωσης και της οπισθέλκουσας καθώς και της ροπής. Στο σχήμα 5.1 παρουσιάζεται μια τυπική διατομή πτερυγίου και οι αεροδυναμικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε αυτή λόγω της ροής του ανέμου. Τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της διατομής λαμβάνονται συνήθως από πίνακες κατάλληλα προσαρμοσμένους για διδιάστατο μοντέλο και είναι διαθέσιμα ως συναρτήσεις του αριθμού Reynolds και της γωνίας πρόσπτωσης του ανέμου $\hat{\alpha}$. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνεται άμεσα η αντίστοιχη ακτινική κατανομή του γραμμικού φορτίου ανά μονάδα μήκους. Για παράδειγμα:

$$\frac{dL(r)}{dr} = C_L(\hat{\alpha}; Re) \times c(r) \times q_{\text{eff}}(r), \quad q_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \times \rho_{\text{fl}} \times U_{\text{eff}}^2(r) \quad (5.2)$$

όπου r : η ακτινική απόσταση, q_{eff} : η ενεργός δυναμική πίεση που αντιστοιχεί στην ενεργό ταχύτητα εισροής του ανέμου στο πτερύγιο U_{eff} και $c(r)$: το μήκος της τοπικής χορδής. Πρέπει να σημειωθεί πως το U_{eff} περιλαμβάνει την ταχύτητα εισροής του ανέμου, την ταχύτητα του ομόρρου που αναπτύσσεται, καθώς και την ταχύτητα του πτερυγίου, η οποία εμπεριέχει με τη σειρά της την ταχύτητα παραμόρφωσης.

Η γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha}$ είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης της χορδής και του διανύσματος της ενεργού ταχύτητας. Έτσι είναι προφανές ότι όλες οι εξαρτήσεις του U_{eff} επηρεάζουν και τη γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha}$. Ακολουθώντας επηρεάζονται η γωνία στρέψης, η γωνία πρόνευσης εντός επιπέδου περιστροφής (pitch), η γωνία εκτροπής εκτός επιπέδου περιστροφής (yaw), η γωνία κλίσης της άτρακτου του κινητήρα κ.τ.λ.. Οπότε, η φόρτιση εξαρτάται από τη ταχύτητα παραμόρφωσης μέσω των U_{eff} και $\hat{\alpha}$.

5.2 Υπολογισμός των Αεροδυναμικών Φορτίων

Τα αεροδυναμικά φορτία εξαρτώνται από τις περιστροφές που επηρεάζουν τη θέση και τον προσανατολισμό και σχετίζονται με την εισροή του ανέμου καθώς και με την κίνηση των πτερυγίων που περιλαμβάνει την ταχύτητα παραμόρφωσης. Οπότε, η προκύπτουσα ροή του αέρα περί το πτερύγιο είναι ασταθής. Αυτό σημαίνει ότι η χρήση σταθερών και

στατικών αεροδυναμικών δεδομένων δεν είναι αρκετή και θα πρέπει να προστεθούν τα φαινόμενα αστάθειας.

Τα φαινόμενα αστάθειας οδηγούν σε υστέρηση του φορτίου, το οποίο υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να προσθέσει αρνητική απόσβεση στο σύστημα. Η έναρξη της απώλειας στήριξης είναι ένα τυπικό παράδειγμα, αλλά όχι το μοναδικό. Επίσης, η αεροελαστική σύζευξη μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική απόσβεση ή γενικότερα σε ασταθή λειτουργία του συστήματος. Με σκοπό λοιπόν, να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα αστάθειας αλλά και να διατηρηθεί χαμηλό το υπολογιστικό κόστος, θα πρέπει να εισαχθεί ένα είδος χρονικής καθυστέρησης. Αυτή την κατεύθυνση έχουν ακολουθήσει πολλά ημιεμπειρικά μοντέλα όπως των Leishmann-Beddoes και τα μοντέλα ONERA. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα μοντέλα ONERA που χρησιμοποιούνται και στις αναλύσεις ευστάθειας.

Τα μοντέλα ONERA διατυπώθηκαν με την υπόθεση ότι οι αεροδυναμικές παράμετροι εξαρτώνται από μία ή περισσότερες ελέγξιμες μεταβλητές θ και ικανοποιούν μία εξίσωση 2ας τάξης ως προς το χρόνο. Η γενική μορφή της εξίσωσης για οποιαδήποτε αεροδυναμική παράμετρο C_* θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη:

$$a(\theta_0) \times \delta C_* + b(\theta_0) \times \delta C_*' + c(\theta_0) \times \delta C_*'' = d(\theta_0) \times \delta \theta + e(\theta_0) \times \delta \theta' + f(\theta_0) \times \delta \theta'' \quad (5.3)$$

όπου $\delta C_* = C_* - C_{*,s}$, με $C_{*,s}$ να δηλώνει τη στατική τιμή στις συνθήκες αναφοράς που ορίζονται από το θ_0 : $\delta \theta = \theta - \theta_0$. Οι παράμετροι $a(\theta_0)$, $b(\theta_0)$, $c(\theta_0)$, $d(\theta_0)$, $e(\theta_0)$, $f(\theta_0)$ προσδιορίζονται με προσαρμογή σε μετρηθέντα δεδομένα.

5.2.1 Το Αρχικό Μοντέλο ONERA

Αρχικά το μοντέλο ONERA αναπτύχθηκε για αεροτομές σε πρόνευση. Όλα τα αεροδυναμικά φορτία αναλύονται σε δύο μέρη, έτσι ώστε το καθένα να ικανοποιεί μία διαφορετική εξίσωση. Σε αυτήν την περίπτωση η μεταβλητή ελέγχου θ είναι η γωνία πρόνευσης. Οπότε:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ C_1' + \lambda \times C_1 &= \lambda \times C_{lin} + (\lambda \times s + \sigma) \times \theta' + s \times \theta'' \quad \text{για την άνωση} \\ C_1 &= C_{lin} + (s + \sigma) \times \theta' + s \times \theta'' \quad \text{για την οπισθέλκουσα και τη ροπή} \\ C_2'' + a \times C_2' + r \times C_2 &= -(r \times \Delta C + E \times \theta') \end{aligned} \quad (5.4)$$

Το πρώτο μέρος αναφέρεται στις συνδεδεμένες συνθήκες ροής, ενώ το δεύτερο εισάγει το φαινόμενο της απώλειας στήριξης. Οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς τον αδιάστατο χρόνο $\tau = (2V/c) \times t$, όπου V είναι η σχετική ταχύτητα της εισροής και c είναι το μήκος της χορδής.

Να σημειωθεί, επίσης, πως υπάρχει διάκριση για το C_1 . Για την άνωση το C_1 ικανοποιεί μία διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, ενώ για την οπισθέλκουσα και τη ροπή η αντίστοιχη εξίσωση είναι αλγεβρική. Σε κάθε περίπτωση πάντως το C_1 θα εξαρτάται από το C_{lin} που αντιστοιχεί στην σταθερή τιμή του συντελεστή που λαμβάνεται υπόψη στις συνημμένες συνθήκες και στις παραγωγούς της μεταβλητής ελέγχου. Από την άλλη πλευρά, το C_2 είναι η λύση μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και εξαρτάται από το $\Delta C = C_{lin} - C_{sd}$, όπου το C_{sd} υποδηλώνει την πραγματική σταθερή τιμή, όπως παρέχεται από διδιάστατες μετρήσεις. Οι υπόλοιπες μεταβλητές υποβάλλονται σε βαθμονόμηση και μπορούν επίσης να εξαρτώνται από το ΔC , όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Μοντέλο Άνωσης

$$\begin{aligned}
C_L &= C_{L1} + C_{L2} \\
C'_{L1} + \lambda \times C_{L1} &= \lambda \times C_{Llin} + [\lambda \times s + \sigma(\Delta C_L)] \times \theta' + s \times \theta'' \\
C''_{L2} + a(\Delta C_L) \times C'_{L2} + r(\Delta C_L) \times C_{L2} &= -[r(\Delta C_L) \times \Delta C + E \times \theta']
\end{aligned} \tag{5.5}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0,10 \div 0,40 \\
s &= 0,050 \div 0,150 \\
\sigma &= \sigma_0 \times \theta + \sigma_1 \times |\Delta C_L| \quad \mu\epsilon \quad \sigma_0 = 0,050 \div 0,150, \quad \sigma_1 = 0,00 \div 0,15 \\
\sqrt{r} &= r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50 \\
a &= a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad a_0 = 0,10 \div 0,40, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60 \\
E &= E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad E_2 = 0,00 \div -0,20
\end{aligned}$$

Σημειώνεται πως η γωνία θ εκφράζεται σε μοίρες.

Μοντέλο Οπισθέλκουσας

$$\begin{aligned}
C_D &= C_{D1} + C_{D2} \\
C_{D1} &= C_{Dlin} + [s + \sigma(\theta, \Delta C_L)] \times \theta' + s \times \theta'' \\
C''_{D2} + a(\Delta C_L) \times C'_{D2} + r(\Delta C_L) \times C_{D2} &= -[r(\Delta C_L) \times \Delta C_D + E \times \theta']
\end{aligned} \tag{5.6}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
s &= 0,00 \\
\sigma &= \sigma_0 \times \theta + \sigma_1 \times |\Delta C_L| \quad \mu\epsilon \quad \sigma_0 = 0,000 \div 0,003, \quad \sigma_1 = 0,00 \div -0,05 \\
\sqrt{r} &= r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50 \\
a &= a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad a_0 = 0,00 \div 0,50, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60 \\
E &= E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad E_2 = 0,00 \div -0,05
\end{aligned}$$

Στα ανωτέρω, η συνθήκη $s = 0$ δηλώνει πως η θεωρούμενη συνημμένη οπισθέλκουσα εξαρτάται από την 1^η και όχι τη 2^η παράγωγο της γωνίας πρόνευσης.

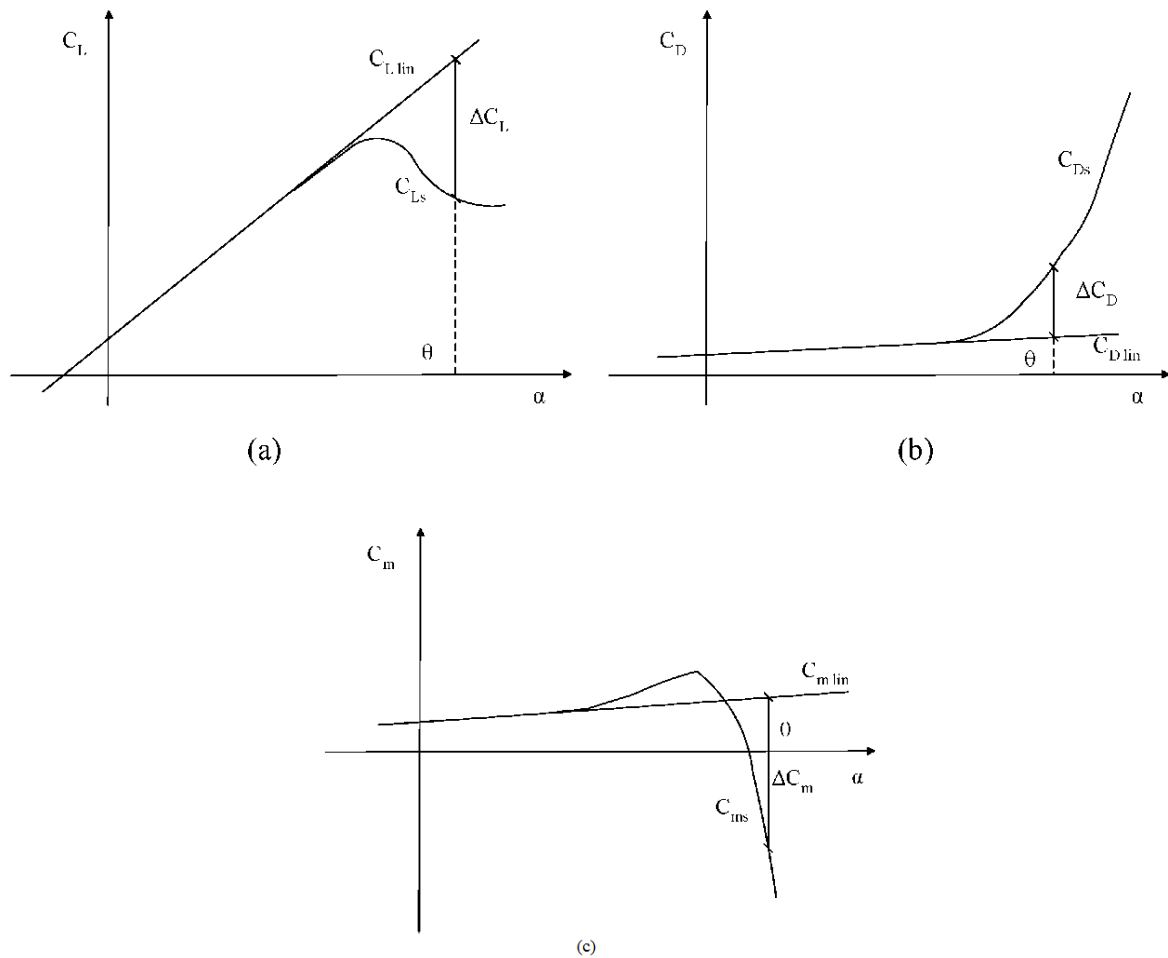
Μοντέλο Ροπής

$$\begin{aligned}
C_m &= C_{m1} + C_{m2} \\
C_{m1} &= C_{mlin} + [s + \sigma(\Delta C_L)] \times \theta' + s \times \theta'' \\
C''_{m2} + a(\Delta C_L) \times C'_{m2} + r(\Delta C_L) \times C_{m2} &= -[r(\Delta C_L) \times \Delta C_m + E \times \theta']
\end{aligned} \tag{5.7}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
s &\cong -0,01 \\
\sigma &= \sigma_0 \times \theta + \sigma_1 \times |\Delta C_L| \quad \mu\epsilon \quad \sigma_0 \cong 0,017, \quad \sigma_1 = 0,00 \div 0,15 \\
\sqrt{r} &= r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50 \\
a &= a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad a_0 = 0,10 \div 0,40, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60 \\
E &= E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \mu\epsilon \quad E_2 = 0,00 \div 0,06
\end{aligned}$$

Στο μοντέλο ροής η εξάρτηση του C_{m1} από τη 2^η παράγωγο της γωνίας πρόνευσης διατηρείται, ενώ το E λαμβάνει θετικές τιμές σε αντίθεση με τα μοντέλα της άνωσης και της οπισθέλκουσας.

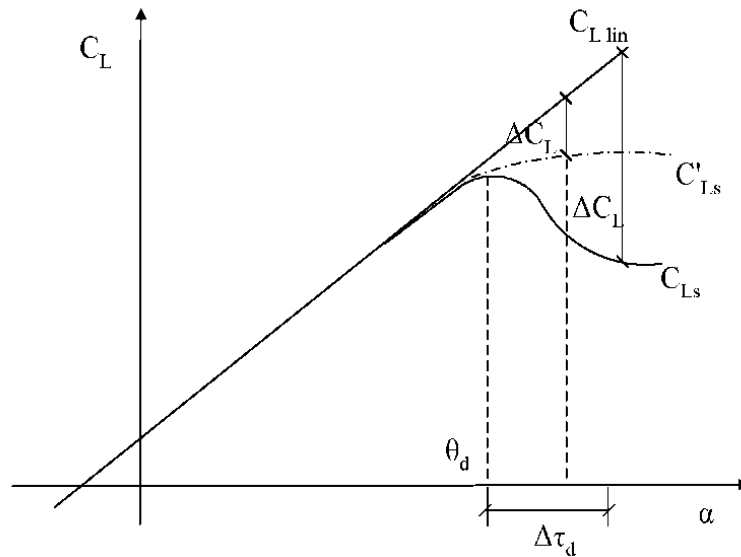


Σχήμα 5.2: Βασικές συμβάσεις για το μοντέλο ONERA.

5.2.2 Υστέρηση Δυναμικής Απώλειας Στήριξης

Η δυναμική απώλεια στήριξης επηρεάζει την υστέρηση στην εξέλιξη των C_L και C_m ενώ αυξάνεται το C_D . Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στην αστάθεια του χαρακτήρα της ροής λόγω της απώλειας στήριξης. Πρακτικά συμβαίνει όταν ξεπεραστεί η κρίσιμη γωνία πρόσπτωσης, η οποία έχει τιμή γύρω στις 15° , αλλά εξαρτάται σημαντικά από την ίδια την αεροτομή και τον αριθμό Reynolds.

Με σκοπό την προσομοίωση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού, η δυναμική καμπύλη άνωσης οδηγεί στην καμπύλη C'_{Ls} που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2. Χρησιμοποιώντας την καμπύλη C'_{Ls} αντί της C_L μπορεί η διαφορά $\Delta C_L = C_{L,lin} - C'_{Ls}$ να λάβει χαμηλότερες τιμές και κατά συνέπεια να καθυστερήσει η έναρξη της απώλειας στήριξης. Η τροποποίηση αρχίζει από το μέγιστο στατικό σημείο της άνωσης που αντιστοιχεί στη διεύθυνση πτώσης θ_d και συνεχίζεται για χρονικό διάστημα Δt_d .



Σχήμα 5.3: Τροποποίηση της καμπύλης άνωσης με σκοπό τη μοντελοποίηση της υστέρησης εξαιτίας της δυναμικής απώλειας στήριξης.

5.2.3 Το Γενικευμένο Μοντέλο ONERA

Το γενικευμένο μοντέλο εξελίχθηκε για να επεκταθεί η χρήση του και σε άλλους τύπους κίνησης, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση ανυψούμενων διατομών. Αναπτύχθηκε αρχικά για την άνωση, αλλά επεκτάθηκε για το συνδυασμό άνωσης και ροπής πρόνευσης, δηλαδή της ροπής που προκαλεί η αεροδυναμική δύναμη στην αεροτομή όταν ασκείται στο αεροδυναμικό κέντρο της διατομής, αντί για το κέντρο ελαστική στροφής. Επιτρέποντας τη διαχείριση διαφορετικών κινήσεων της αεροτομής, η επέκταση του μοντέλου διαφέρει αναφορικά με το αρχικό μοντέλο σε δύο σημεία:

Οι εξισώσεις του μοντέλου εκφράζονται σε όρους κυκλοφορίας αντί για όρους παραμέτρων φορτίου. Η κυκλοφορία εισάγεται διαφορετικά για κάθε φορτίο, οπότε αντί να αντιμετωπίζεται η κυκλοφορία, αντιμετωπίζονται οι παράμετροι κυκλοφορίας.

Αντί για τη γωνία βήματος, εισάγονται δύο νέες μεταβλητές που καλούνται W_0 και W_1 και αφορούν την ταχύτητα. Η W_0 αφορά κανονικά τη συνισταμένη χορδής της σχετικής ταχύτητας ροής υπολογιζόμενη στην απόσταση $c/4$, σύμφωνα με το σχήμα 5.3, ενώ η μεταβλητή W_1 είναι η γραμμική ταχύτητα που αναφέρεται στην κίνηση πρόνευσης και ανύψωσης της διατομής. Έτσι, οι σχέσεις που δίνουν αυτές τις δύο νέες μεταβλητές είναι οι ακόλουθες:

$$W_0 = V \times \sin \theta - \dot{h} \times \cos \theta + \left(\frac{1}{4} - \frac{x_c}{c} \right) \times c \times \dot{\theta}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \times c \times \dot{\theta} \quad (5.8)$$

όπου x_c το κέντρο περιστροφής της αεροτομής και h η ταχύτητά της.

Σε αυτήν την περίπτωση είναι πιθανό να περιλαμβάνεται η κίνηση της διατομής στη διεύθυνση της χορδής. Πρέπει να σημειωθεί πως οι χρονικές παράγωγοι των ανωτέρω σχέσεων λαμβάνονται για τον πραγματικό χρόνο και όχι για τον αδιάστατο χρόνο.

Η επιλογή των συγκεκριμένων παραμέτρων ταχύτητας βασίζεται στη θεωρία λεπτής αεροτομής με ασταθή ροή. Για μία λεπτή αεροτομή σε συνδυασμένες κινήσεις πρόνευσης και ανύψωσης ισχύει ότι:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \times \sin(\omega \times t) \text{ και } h = h_0 + h_1 \times \sin(\omega \times t) \quad (5.9)$$

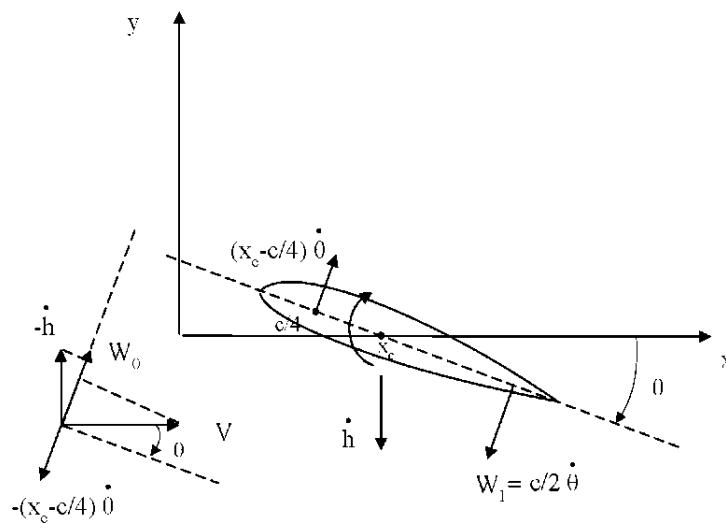
και εν συνεχεία η κυκλοφορία μπορεί να εκφραστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= \frac{2\Gamma_1}{c} = C(k) \times \left[V \times \sin\theta - \dot{h} \times \cos\theta + \left(\frac{1}{4} - \frac{x_c}{c} \right) \times c \times \dot{\theta} + V \times \sin\theta - \dot{h} \times \cos\theta + \left(\frac{1}{4} - \frac{x_c}{c} \right) \times c \times \dot{\theta} \right] = \\ &= C(k) \times [2 \times \pi \times W_0 + W_1] \end{aligned} \quad (5.10)$$

όπου $C(k)$: η συνάρτηση Theodorsen που εισάγει το φαινόμενο του ομόρρου και εξαρτάται από την εισαγόμενη συχνότητα, που ορίζεται ως $k = (\omega \times c) / (2V)$. Η παράμετρος $\tilde{\Gamma}_1$ στη σχέση 5.10 υποδηλώνει τη αδιάστατη κυκλοφορία που αναφέρεται στη χορδή. Ακολουθώντας, σύμφωνα με τη θεωρία αεροτομής ισχύει ότι:

$$L = L_0 + L^* = \frac{\rho \times c}{2} \times V \times \tilde{\Gamma}_1 + \frac{\rho \times c}{2} \times \left[\frac{\pi \times c}{2} \times \dot{W}_0 + \frac{\pi \times c}{4} \times \dot{W}_1 \right] \quad (5.11)$$

όπου ο πρώτος όρος της εξίσωσης αναφέρεται στη στατική ανύψωση και ο δεύτερος λαμβάνει υπ' όψιν του τα φαινόμενα αστάθειας.



Σχήμα 5.4: Ορισμός των W_0 και W_1 .

Η παράμετρος $\tilde{\Gamma}_1$ υπολογίζεται ως η λύση της εξίσωσης 1^{ης} τάξης, παρόμοιας με αυτής του αρχικού μοντέλου. Υπό αυτήν την έννοια θα εξαρτάται από τις χρονικές παραγώγους των W_0 και W_1 , έτσι ώστε το $\tilde{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια και το L θα εξαρτώνται από τις πρώτες και δεύτερες χρονικές παραγώγους της γωνίας πρόσπτωσης. Ο Petot έχει προτείνει την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_1 + \lambda \times \frac{2V}{c} \times \tilde{\Gamma}_1 =$$

$$= \lambda \times \frac{2V}{c} \times \left(\frac{dC_L}{da} \right) \times (W_0 - V \times a_0) + \lambda \times \frac{2V}{c} \times \sigma \times W_1 + \left(a_L \times \left(\frac{dC_L}{da} \right) + d \right) \times \dot{W}_0 + a_L \times \sigma \times \dot{W}_1 \quad (5.12)$$

όπου dC_L / da είναι η σταθερή κλίση της καμπύλης $C_L - a$ και a_0 είναι η μηδενική γωνία πρόσπτωσης της άνωσης.

Τελικώς, μελετώντας τις διάφορες παραμέτρους που έχουν εισαχθεί στην ανωτέρω εξίσωση 5.12 έχουν προταθεί οι ακόλουθες σχέσεις που περιλαμβάνουν, επίσης, εξάρτηση από τον αριθμό Ma :

$$\lambda = 0,17 - 0,13 \times M$$

$$a_L = 0,53 + 0,25 \times (\sqrt{1 - M^2} - 1)$$

$$s = \pi + 5 \times \pi \mp \left[(1 - M^2)^{0,285} - 1 \right]$$

$$\sigma = 2 \times \pi / (\sqrt{1 - M^2})$$

$$d = \sigma_1 \times |\Delta C_L|, \quad \sigma_1 = 0,00 \div 0,15$$

Η άνωση που εξάγεται από τη σχέση (5.11) δεν υπολογίζεται για την απώλεια στήριξης. Στην περίπτωση απώλειας στήριξης, ένας δεύτερος όρος $\tilde{\Gamma}_2$ προστίθεται στο αρχικό μοντέλο. Συσχετίζοντας το $\tilde{\Gamma}_2$ με το $C_{1,2}$ έχουμε ότι:

$$C_{1,2} = \frac{\tilde{\Gamma}_2}{V}$$

και μετά μπορούμε να αναμορφώσουμε την αρχική εξίσωση, έτσι ώστε:

$$\tilde{\Gamma}_2 + a \times \frac{2V}{c} \times \dot{\tilde{\Gamma}}_2 + r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times \tilde{\Gamma}_2 = - \left[r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times \Delta C_L + E \times \frac{2V}{c} \times \dot{W}_0 \right] \quad (5.13)$$

όπου:

$$\sqrt{r} = r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50$$

$$a = a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } a_0 = 0,10 \div 0,40, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60$$

$$E = E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } E_2 = (0,00 \div -0,20) \times \frac{180}{\pi} \quad (5.14)$$

$$\kappa = \frac{\pi}{2} + 1,96 \times \pi \times (\sqrt{1 - M^2} - 1)$$

Τελικώς, λαμβάνουμε ότι η άνωση είναι:

$$L = \frac{\rho \times c}{2} \times \left[V \times (\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2) \frac{s \times c}{2} \times \dot{W}_0 + \frac{s \times c}{2} \times \dot{W}_1 \right] \quad \text{με } \kappa = \frac{\pi}{2} + 1,96 \times \pi \times (\sqrt{1 - M^2} - 1) \quad (5.15)$$

Η επέκταση σε μοντέλα οπισθέλκουσας και ροπής είναι μάλλον εκ των ον ουκ άνευ και σε μεγάλο βαθμό επαφίεται στο αρχικό μοντέλο. Ως εκ τούτου το γενικευμένο μοντέλο δεν αναμένεται να αλλάξει σημαντικά τις προβλέψεις για την οπισθέλκουσα και τη ροπή.

Μοντέλο Οπισθέλκουσας

Η εξίσωση για την οπισθέλκουσα δύναμη να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$D = \frac{\rho \times c}{2} \times \left(V^2 \times C_{Dlin} + \frac{\sigma \times c}{2} \times \dot{W}_0 + V \times \tilde{\Gamma}_{2D} \right) \quad (5.16)$$

όπου:

$$\ddot{\tilde{\Gamma}}_{2D} + a \times \frac{2V}{c} \times \dot{\tilde{\Gamma}}_{2D} + r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times \tilde{\Gamma}_{2D} = - \left[r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times V \times \Delta C_D + E \times \frac{2V}{c} \times \dot{W}_0 \right] \quad (5.17)$$

$$\sigma = \sigma_0 \times \theta + \sigma_1 \times |\Delta C_L| \quad \text{με } \sigma_0 = (0,000 \div 0,003) \times \frac{180}{\pi}, \quad \sigma_1 = (0,00 \div 0,05) \times \frac{180}{\pi}$$

$$\sqrt{r} = r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50$$

$$a = a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } a_0 = 0,00 \div 0,50, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60$$

$$E = E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } E_2 = (0,00 \div -0,05) \times \frac{180}{\pi}$$

(5.18)

Μοντέλο Ροπής

Η εξίσωση για τη ροπή δύναμη να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$M = \frac{\rho \times c^2}{2} \times \left(V^2 \times C_{min} + \frac{(\bar{\sigma} \times d) \times c}{2} \times \dot{W}_0 + \sigma \times V \times W_1 + \frac{s \times c}{2} \times \dot{W}_1 + V \times \tilde{\Gamma}_{2M} \right) \quad (5.19)$$

όπου:

$$\ddot{\tilde{\Gamma}}_{2M} + a \times \frac{2V}{c} \times \dot{\tilde{\Gamma}}_{2M} + r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times \tilde{\Gamma}_{2M} = - \left[r \times \left(\frac{2V}{c} \right)^2 \times V \times \Delta C_m + E \times \frac{2V}{c} \times \dot{W}_0 \right] \quad (5.20)$$

$$s = -\frac{3 \times \pi}{16} \times \left[-1,26 - 1,53 \times \tan^{-1}(15 \times (M - 0,7)) \right]$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \times |\Delta C_L|$$

$$\sigma_0 + s = \frac{\pi}{2} \times [1 + 1,4 \times M^2], \quad \sigma_1 = (0,00 \div 0,15) \times \frac{180}{\pi}$$

$$\bar{\sigma} = -\frac{\pi}{4} \times [1 + 1,4 \times M^2] \quad (5.21)$$

$$d = \sigma_1 \times |\Delta C_L|$$

$$\sqrt{r} = r_0 + r_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } r_0 = 0,10 \div 0,40, \quad r_2 = 0,00 \div 0,50$$

$$a = a_0 + a_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } a_0 = 0,10 \div 0,40, \quad a_2 = 0,00 \div 0,60$$

$$E = E_2 \times \Delta C_L^2 \quad \text{με } E_2 = (0,00 \div -0,06) \times \frac{180}{\pi}$$

5.3 Σύνδεση με την Προσομοίωση σε Αεροελαστικές Αναλύσεις

Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται μία τυπική διατομή πτερυγίου. Τα τοπικά αεροδυναμικά φορτία ανά μέτρο μήκους κατά μήκος του ανοίγματος δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_x &= -L \times \sin(\varphi + \Theta_y) + D \times \cos(\varphi + \Theta_y) \\ P_y &= L \times \cos(\varphi + \Theta_y) + D \times \sin(\varphi + \Theta_y) \\ P_z &= m \end{aligned} \quad (5.22)$$

όπου L , D : οι δυνάμεις άνωσης και οπισθέλκουσας, m : η ροπή πρόνευσης, φ : η τοπική γωνία ροής αναφορικά με το επίπεδο του ρότορα και Θ_y : η τοπική πρόνευση του πτερυγίου που περιλαμβάνει και τη γωνία στρέψης. Όταν, λοιπόν, έχουν υπολογισθεί οι ταχύτητες του αναπτυσσόμενου ομόρρου, τα τοπικά χαρακτηριστικά της ροής (γωνία και ταχύτητα) προσδιορίζονται ως ακολούθως:

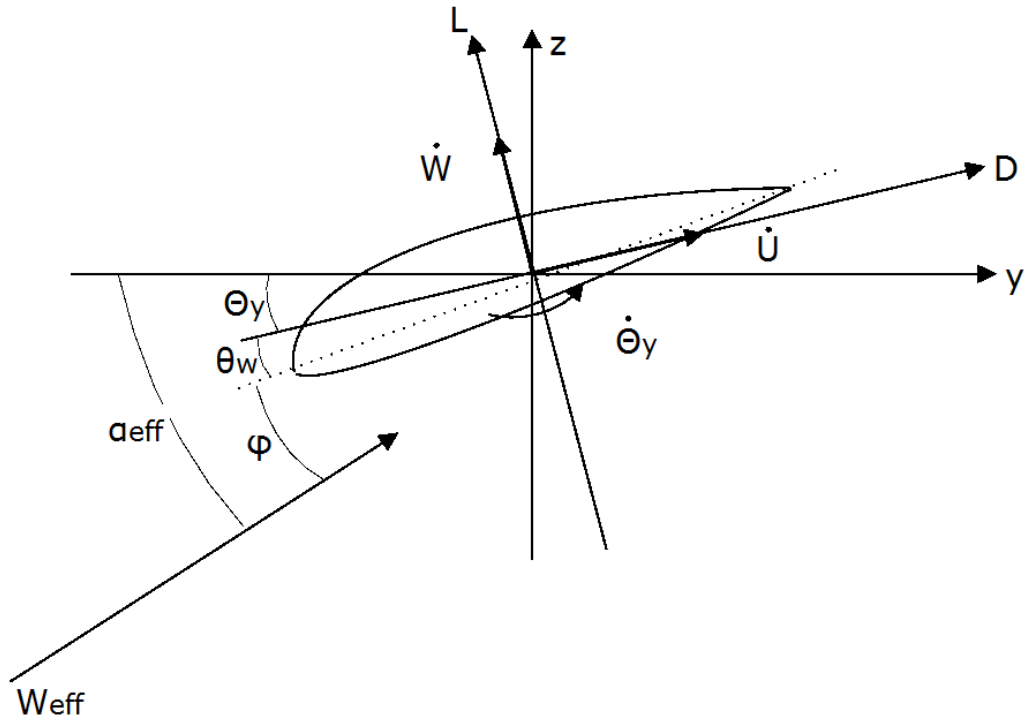
$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{(1-a) \times (U_{wz} - \dot{W} \times \cos \Theta_y + \dot{U} \times \sin \Theta_y)}{(1+a') \times (U_{wz} - \dot{W} \times \sin \Theta_y - \dot{U} \times \cos \Theta_y)} = \frac{U_{\text{eff},z}}{U_{\text{eff},x}} \\ W_{\text{eff}} &= \sqrt{U_{\text{eff},x}^2 + U_{\text{eff},z}^2} \\ a_{\text{eff}} &= \varphi + \theta_w + \Theta_y \end{aligned} \quad (5.23)$$

όπου a και a' : οι τοπικοί επαγωγικοί συντελεστές, W_{eff} και a_{eff} : υποδηλώνουν την τοπική ενεργό ταχύτητα και τη γωνία πρόσπτωσης αντίστοιχα, θ_w : η τοπική συστροφή του πτερυγίου και \dot{U} και \dot{W} : οι τοπικές ταχύτητες του πτερυγίου στη διεύθυνση της άνωσης και οπισθέλκουσας, συμπεριλαμβανομένων και των κινήσεων του στερεού σώματος οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^T \times \dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{A}^T \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{S} \times \mathbf{u}) + \mathbf{A} \times \mathbf{S} \times \dot{\mathbf{u}}) \quad (5.24)$$

Η εξάρτηση του αεροδυναμικού φορτίου από την ταχύτητα παραμόρφωσης, καθώς και από τη στρέψη, είναι σαφής. Να σημειωθεί επίσης, ότι οι σχέσεις αναδεικνύουν το μη γραμμικό χαρακτήρα της αεροελαστικής σύζευξης.

Οι ασταθείς δυνάμεις οπισθέλκουσας και άνωσης και η ροπή πρόνευσης, σύμφωνα με το γενικευμένο μοντέλο ONERA, δίδονται ως συνάρτηση των τεσσάρων συνισταμένων κυκλοφορίας, δύο για την άνωση Γ_{1L} , Γ_{2L} , και από μία για την οπισθέλκουσα Γ_{2D} και για τη ροπή πρόνευσης αντίστοιχα. Οι συνισταμένες κυκλοφορίας Γ_{1L} προσδιορίζονται από την 1^{ης} τάξης χρονική διαφορική εξίσωση, ενώ οι εξισώσεις που δίνουν τα Γ_{2L} , Γ_{2D} και Γ_{2M} είναι 2^{ης} τάξης. Με σκοπό, λοιπόν, να εναρμονίσουμε τη μορφή των εξισώσεων και τις εισάγουμε στις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος, η εξίσωση του Γ_{1L} αναδιατάσσεται ως 2^{ης} τάξης με παραγωγήση.



Σχήμα 5.5: Βασικοί συμβολισμοί στη διατομή πτερυγίου.

Κεφάλαιο 6

ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ

6.1 Εισαγωγή

Τόσο στο παρόν κεφάλαιο, όσο και στο κεφάλαιο 7 παρατίθενται αποτελέσματα διαφόρων αναλύσεων από τον κώδικα τύπου multibody με χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού, που συντάχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran στο Εργαστήριο Αεροδυναμικής του Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π..

Η συνήθης πρακτική, όπως και στην περίπτωση των ανεμογεννητριών, είναι η διαμόρφωση της υπό εξέταση κατασκευής να συνίσταται από πεπερασμένο αριθμό δοκών, για κάθε μία εκ των οποίων ορίζεται μία ξεχωριστή κίνηση. Η διαμόρφωση των δυναμικών χαρακτηριστικών ενός τέτοιου συστήματος, δηλαδή μίας κατασκευής που αποτελείται από διακριτά σώματα, είναι δυνατό να γίνεται με σημείο αναφοράς το καθολικό σύστημα ή την απαραμόρφωτη κατάσταση. Στην πρακτική εφαρμογή φαίνεται ότι είναι ευκολότερη η θεώρηση κάθε τμήματος της κατασκευής ξεχωριστά. Αυτή η ανωτέρω προσέγγιση για την ανάλυση είναι γνωστή ως multibody ανάλυση.

Στην παράγραφο 6.2 γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικών αναλύσεων, με χρήση του κώδικα και μετρήσεων πεδίου με σκοπό τον έλεγχο της αξιοπιστίας του κώδικα. Στη συνέχεια και στην παράγραφο 6.3 παρατίθενται αποτελέσματα ιδιομορφικών αναλύσεων πτερυγίου ανεμογεννήτριας.

Η ανεμογεννήτρια που χρησιμοποιείται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι οριζόντιου άξονα με μεταβλητό βήμα έλικας και έλεγχο της γωνίας πτερυγίου. Τα κυριότερα στοιχεία της ανεμογεννήτριας δίδονται ακολούθως:

Συνολικό μήκος πτερυγίου	61,5m
Διατομές πτερυγίου	na64, du21, du25, du30, du35, du40, cylind_1, cylind_2
Ύψος πύργου	87,6m
Ύψος ατράκτου	5m

6.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων Αναλύσεων και Μετρήσεων Πεδίου

6.2.1 Ιδιομορφική Ανάλυση Γεννήτριας σε Ακίνησια

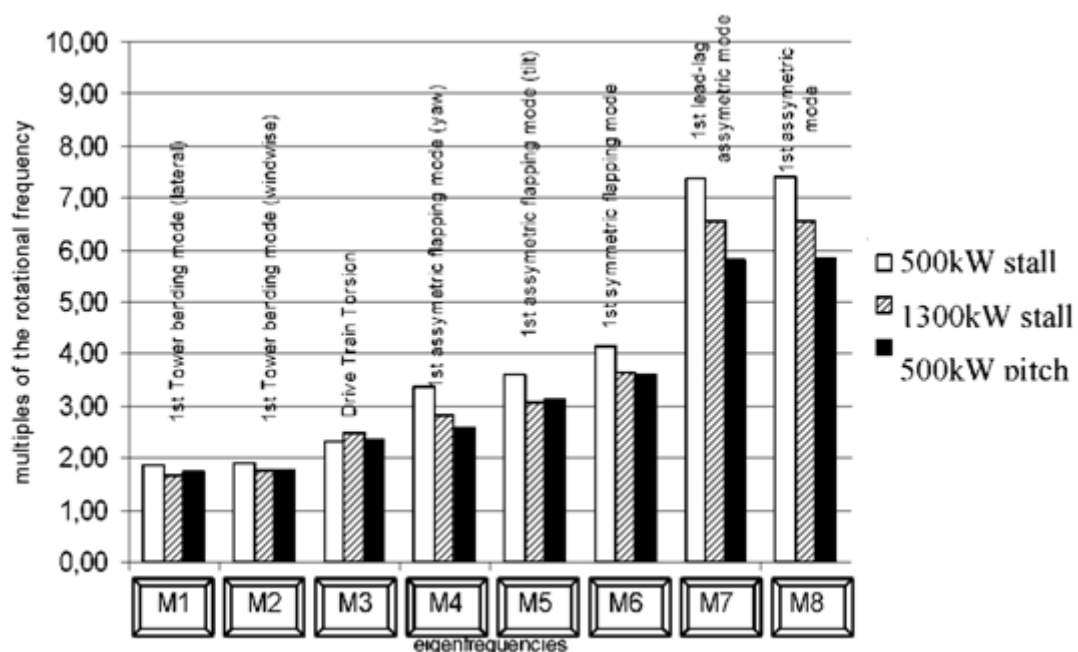
Ο δομικός χαρακτηρισμός μίας ανεμογεννήτριας αναφέρεται συνήθως ως ιδιομορφική ανάλυση σε ακίνησια, αν και στην πραγματικότητα οι ιδιοτιμές που λαμβάνουμε αποτελούν τις φυσικές ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Αρχικά εξετάζεται η περιστροφή ώστε να γίνει ο χαρακτηρισμός του συστήματος και προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος σε ακίνησια. Η ταχύτητα περιστροφής βέβαια είναι σχετικά χαμηλή και δεν επηρεάζει σημαντικά την κατανομή των ιδιοτιμών.

Εξαιτίας της παρουσίας του ρότορα κρίνεται απολύτως απαραίτητη η αποφυγή ύπαρξης ιδιοσυχνοτήτων παρόμοιων με τις βασικές συχνότητες περιστροφής. Για έναν καλά ισορροπημένο ρότορα η βασική συχνότητα περιστροφής είναι η συχνότητα περιστροφής του, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό των πτερυγίων και τα πολλαπλάσια τους. Έτσι, για μία ανεμογεννήτρια με 3 πτερύγια ($3p$) οι συχνότητες που θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να αποφύγουμε είναι οι $3p$ και $6p$, όπου p είναι σε συντομογραφία η συχνότητα περιστροφής του ρότορα.

Η απόκλιση από τα παραπάνω εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, αλλά θα πρέπει να σημειωθεί πως αυτά δεν μπορεί να είναι μεγάλη. Τούτο συμβαίνει επειδή, παρά την ύπαρξη των φυσικών μορφών των στοιχείων της ανεμογεννήτρια, θα εμφανισθεί και συζευγμένες μορφές ως αποτέλεσμα της σύνδεσης των στοιχείων μεταξύ τους.

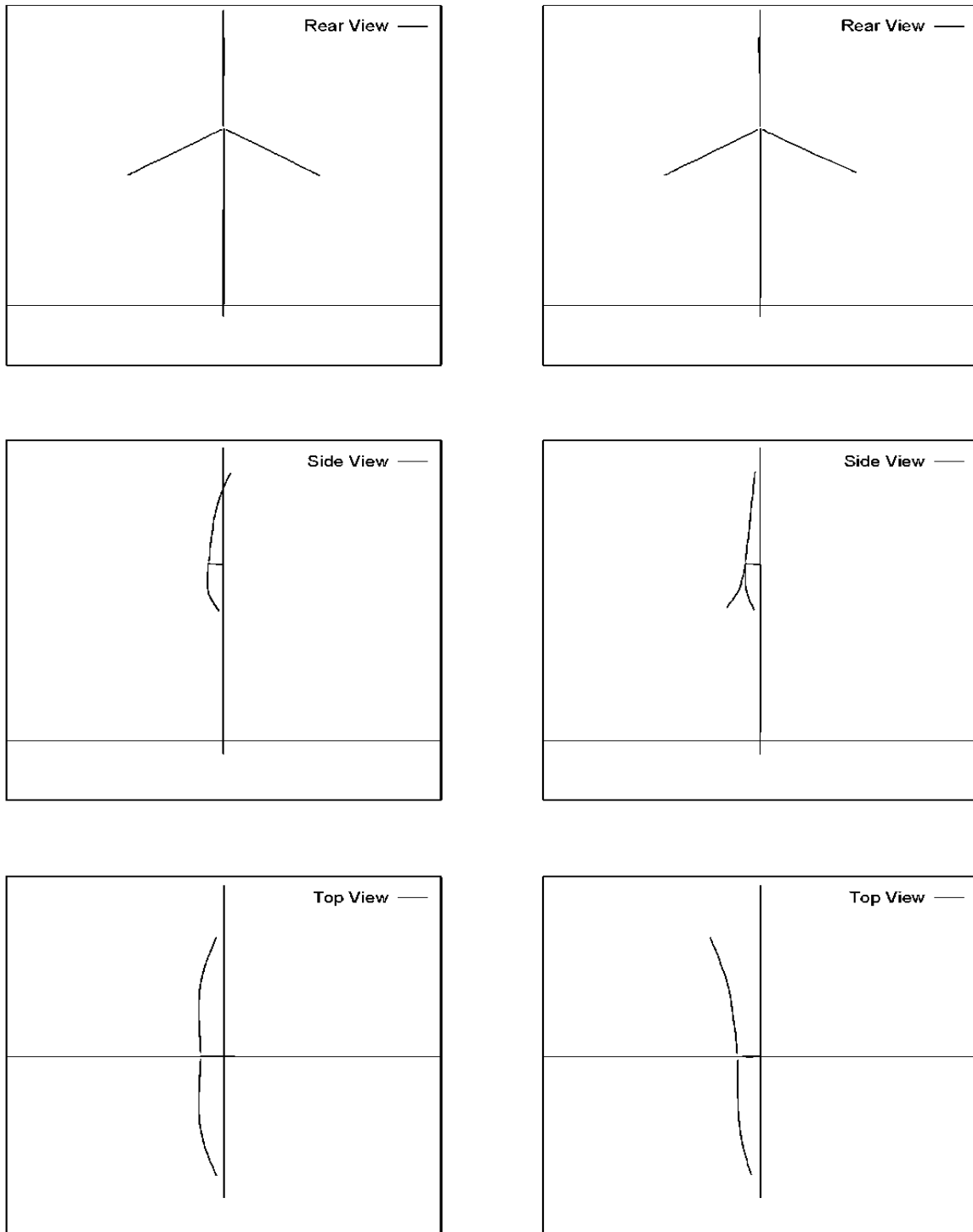
Για παράδειγμα στο σχήμα 6.1 συγκρίνονται οι φυσικές συχνότητες τριών εμπορικών ανεμογεννητριών με 3 πτερύγια από τα τέλη της δεκαετίας του 1990. Εστιάζοντας, λοιπόν, στα πτερύγια παρατηρούμε πως εκτός της συμμετρικής ιδιομορφής πτερύγωσης (flap) M6 υπάρχουν και δύο ακόμα ιδιομορφές πτερύγωσης: μία ασύμμετρη εξαιτίας της σύζευξης της περιστροφής του ρότορα περί κατακόρυφο άξονα και μία άλλη εξαιτίας της σύζευξης της περιστροφής του ρότορα περί τον εγκάρσιο άξονα. Η συμμετρική ιδιομορφή είναι κατά βάση το αποτέλεσμα του δομικού σχεδιασμού του πτερυγίου, ενώ οι άλλες δύο ασύμμετρες εξαρτώνται επίσης από τον πύργο και τα χαρακτηριστικά της μετάδοση κίνησης. Στα συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου όλες οι ανεμογεννήτριες έχουν 4 πτερύγια, η μορφή M6 «πέφτει» κοντά στο 4 π , ενώ οι μορφές M4 και M5 «πέφτουν» κοντά στο 3 π . Σε καθαρά δομικούς όρους, θα απαιτούσε κανείς πιο δύσκαμπτα πτερύγια, αλλά κάτι τέτοιο θα αύξανε το κόστος, που στην περίπτωση των ανεμογεννητριών είναι ο καθοριστικότερος παράγοντας.

Στο εύρος των χαμηλών συχνοτήτων τυπικά αναμένει κανείς τις δύο μορφές του πύργου: την καμπτική εκτός επιπέδου μορφή M2 και την πλευρική (lateral) M1, οι οποίες αναμένεται να είναι πανομοιότυπες λόγω της συμμετρίας του πύργου. Στη συνέχεια ακολουθεί η μορφή μετάδοσης κίνησης M3 η οποία για μία ανεμογεννήτρια με 3 πτερύγια αναμένεται να είναι μικρότερη από 3 π .



Σχήμα 6.1: Τυπική κατανομή ιδιοτιμών από ιδιομορφική ανάλυση σε ακινησία.

Επιπροσθέτως των ιδιοτιμών, η ιδιομορφική ανάλυση δίνει και τις ιδιομορφές οι οποίες σχεδιάζονται για να διερευνηθεί ο χαρακτήρας τους. Το σχήμα 6.2 παρουσιάζει δύο ιδιομορφές πτερύγωσης για ένα ρότορα σε ακινησία.



Σχήμα 6.2 : Συμμετρική ιδιομορφή πτερύγωσης (αριστερά) και ασύμμετρη (ως προς τον πύργο) ιδιομορφή πτερύγωσης (δεξιά).

Τελικά, με σκοπό να υπάρχει μία ιδέα για την ποιότητα της περιγραφής της κατασκευής που αποκτάται με χρήση του μοντέλου δοκού, στον πίνακα 6.1 συγκρίνονται προβλέψεις με στοιχεία μετρήσεων σε κατάσταση ακινησίας. Σημειώνεται πως το μέγιστο σφάλμα είναι της τάξης του 7% για τις δέκα πρώτες ιδιοτιμές.

Πίνακας 6.1: Σύγκριση φυσικών συχνοτήτων ανεμογεννήτριας από μετρήσεις με τα αποτελέσματα μοντελοποίησης με στοιχεία δοκού.

Ιδιομορφές		Φυσική συχνότητα (Hz)		
		Μετρήσεις	Αναλύσεις	Διαφορά (%)
1	1 st lateral tower bending	0,437	0,439	0,5
2	1 st longitudinal tower bending	0,444	0,448	0,9
3	1 st shaft torsion	0,668	0,674	0,9
4	1 st asymmetric flap / yaw	0,839	0,828	-1,3
5	1 st asymmetric flap / tilt	0,895	0,886	-1,0
6	1 st symmetric flap	0,955	1,024	7,2
7	1 st vertical edgewise	1,838	1,909	3,9
8	1 st horizontal edgewise	1,853	1,928	4,0
9	2 nd asymmetric flap / yaw	2,135	2,149	0,7
10	2 nd asymmetric flap / tilt	2,401	2,314	-3,6

6.2.2 Δυναμικές Προσομοιώσεις

Οι δυναμικές προσομοιώσεις αναφέρονται στις περιπτώσεις όπου υπάρχει χρονική διακύμανση της διέγερσης. Στην πραγματικά όλες οι προσομοιώσεις ανεμογεννητριών είναι δυναμικές, αν και υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση της δυσκολίας και της πολυπλοκότητας των αναλύσεων. Έτσι, μία πιθανή κατηγοριοποίηση θα διέκρινε τις διεγέρσεις σε περιοδικές και μη-περιοδικές ή στοχαστικές.

Οι τυπικές περιοδικές διεγέρσεις παράγονται από τη μέση τέμνουσα του ανέμου, την απόκλιση εκτροπής, την αλληλεπίδραση πύργου-πτερυγίων και πιθανότατα τον έλεγχο του συστήματος. Όσον αφορά τις μη-περιοδικές διεγέρσεις, αυτές σχετίζονται με τον τυρβώδη χαρακτήρα του ανέμου, ο οποίος μεταβάλλεται χωρικά και χρονικά εξαιτίας των ατμοσφαιρικών αναταράξεων. Να σημειωθεί πως οι ανεμογεννήτριες λειτουργούν στο κατώτερο στρώμα της ατμόσφαιρας και ως εκ τούτου υπάρχει εξάρτηση από τις εν γένει ιδιαιτερότητες της περιοχής λειτουργίας. Έτσι, είναι πιθανό οι διακυμάνσεις της ταχύτητας του ανέμου και της διεύθυνσής του να είναι ιδιαίτερος έντονος. Σε αυτές τις περιπτώσεις διεξάγονται αναλύσεις χρονοϊστορίας για την απόκριση του συστήματος και τα αποτελέσματά τους συνθέτονται σε όρους απόλυτης φόρτισης και κόπωσης. Βέβαια θα

πρέπει να ληφθούν υπόψη και ειδικές περιπτώσεις φόρτισης, με στοχαστικό τρόπο, οι οποίες μπορεί να δώσουν τη μέγιστη φόρτιση που μπορεί να καταπονήσει την κατασκευή. Τέτοιου είδους φορτίσεις μπορεί να είναι η εκκίνηση ή στάση του ρότορα, αιφνίδιες ριπές ανέμου ή αλλαγή της διεύθυνσης κ.α..

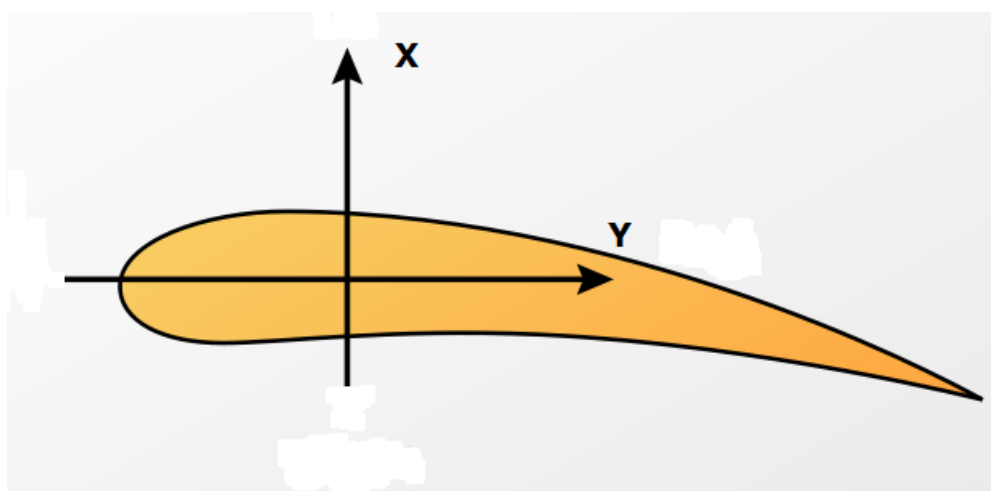
Πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις σε τρεις διαφορετικές ανεμογεννήτριες για μη-περιοδικές φορτίσεις με σκοπό να αναδειχθεί η ποιότητα των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με μετρήσεις πεδίου και για αυτό το λόγο στις αναλύσεις πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και ο τυρβώδης χαρακτήρας της ροής του ανέμου. Ο πίνακας 6.2 δίνει τα αποτελέσματα των ιδιομορφικών αναλύσεων μαζί με τις μετρήσεις πεδίου, πληροφορίες χρήσιμες για τη σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα ιδιομορφικής ανάλυσης και σύγκριση με μετρήσεις πεδίου.

Mode	Case 1 1P=0.5Hz		Case 2 1P=0.5Hz		Case 3 1P=0.23-0.55Hz	
	Calc.	Meas.	Calc.	Meas.	Calc.	Meas.
M1. 1 st tower bending mode (lateral)	0.94	-	0.73	0.77	0.48	-
M2. 1 st tower bending mode (front-back)	0.95	0.94	0.88	0.80	0.49	0.51
M3. 1 st drive train torsion mode	1.15	1.16	0.94	0.97	1.49	-
M4. 1 st asymmetric flap-yaw mode	1.69	1.70	1.54	1.44	1.75	-
M5. 1 st asymmetric flap-tilt mode	1.81	1.80	1.61	1.53	1.81	-
M6. 1 st symmetric flap mode	2.07	2.08	1.90	1.83	2.14	1.89*
M7. 1 st asymmetric rotor mode A	3.69	3.50	3.09	3.00	2.65	2.80*
M8. 1 st asymmetric rotor mode B	3.70	-	3.16	-	2.68	-

6.3 Αποτελέσματα Ιδιομορφικής Ανάλυσης Πτερυγίων

Στον πίνακα 6.3 γίνεται ο χαρακτηρισμός των 10 πρώτων ιδιομορφών που προκύπτουν από την ιδιομορφική ανάλυση του πτερυγίου. Για κάθε ιδιομορφή φαίνεται και η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα και ιδιοπερίοδος. Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται μια τυπική διατομή του πτερυγίου με τους τοπικούς άξονες του στοιχείου για την κατανόηση των χαρακτηρισμών των ιδιομορφών.



Σχήμα 6.3: Τοπικοί άξονες σε τυπική διατομή πτερυγίου.

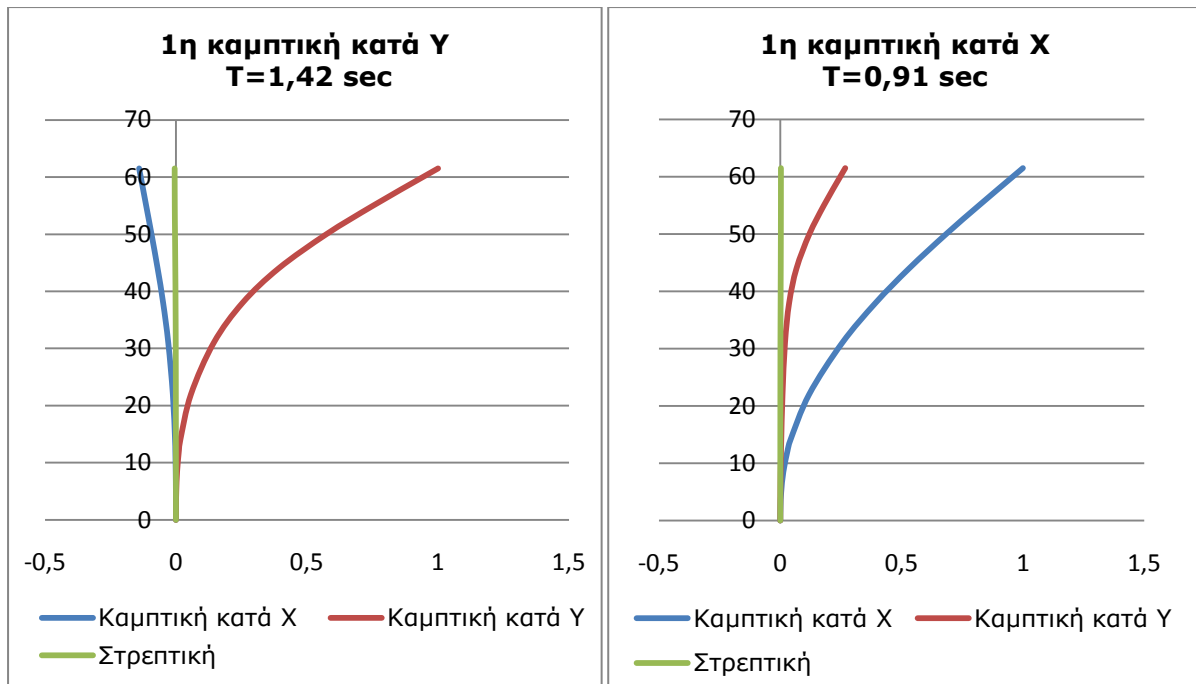
Πίνακας 6.3: Ιδιοσυχνότητες και ιδιοπερίοδοι πτερυγίου.

	Χαρακτηρισμός	f (Hertz)	T (sec)
1^η	1 ^η καμπτική περί Υ	0,70	1,42
2^η	1 ^η καμπτική περί Χ	1,10	0,91
3^η	2 ^η καμπτική περί Υ	1,99	0,50
4^η	2 ^η καμπτική περί Χ	4,00	0,25
5^η	3 ^η καμπτική περί Υ	4,58	0,22
6^η	1 ^η στρεπτική	5,70	0,18
7^η	4 ^η καμπτική περί Υ	8,00	0,13
8^η	3 ^η καμπτική περί Χ	9,43	0,11
9^η	2 ^η στρεπτική	9,78	0,10
10^η	5 ^η καμπτική περί Υ	12,49	0,08

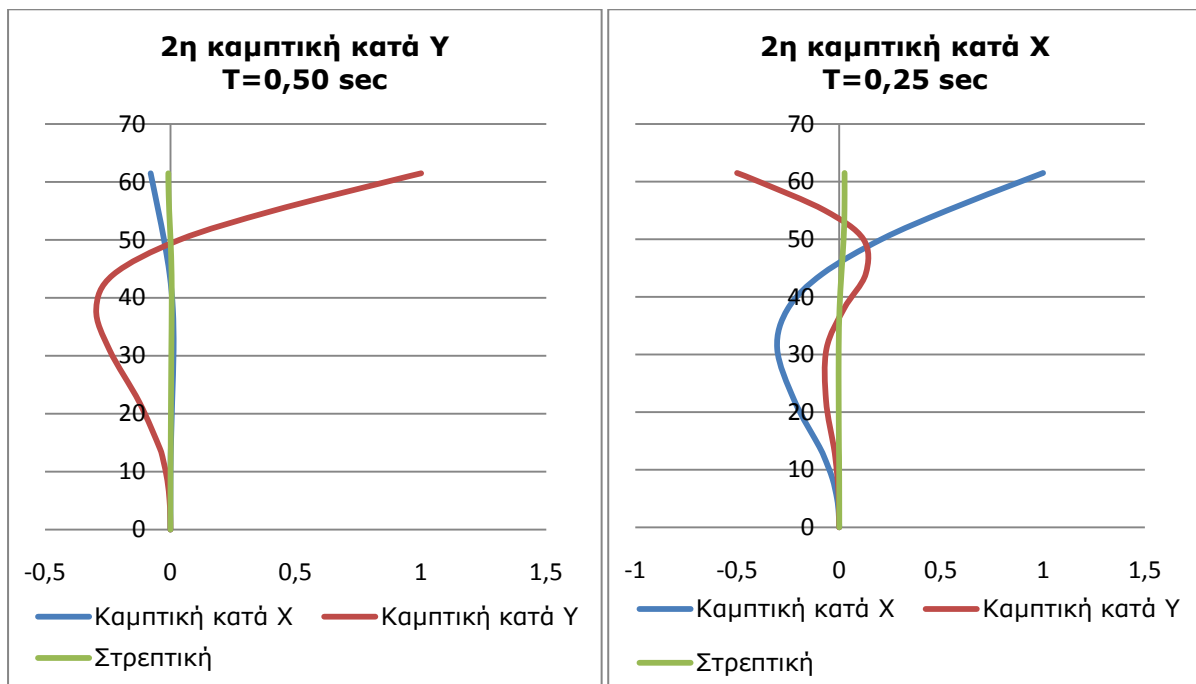
Στα σχήματα 6.4-6.8 παρουσιάζονται οι 10 πρώτες ιδιομορφές των πτερυγίων. Η πρώτη ιδιομορφή είναι αυτή που απαιτεί τη λιγότερη ενέργεια για να πραγματοποιηθεί. Στην περίπτωση του πτερυγίου, αυτό το γεγονός επιβεβαιώνεται ως εξής: η πρώτη του ιδιομορφή είναι καμπτική περί τον άξονα Υ, δηλαδή πρόκειται για κάμψη περί τον ασθενή άξονα της διατομής.

Μία δεύτερη παρατήρηση που μπορεί να γίνει αφορά τη στρεπτική παραμόρφωση και την επιρροή της. Μέχρι και την τέταρτη ιδιομορφή η στρέψη είναι σχεδόν μηδενική, αλλά στην πέμπτη ιδιομορφή όχι μόνο εμφανίζεται σαν μέγεθος αλλά παρατηρείται ταυτόχρονα σύζευξη με την καμπτική παραμόρφωση περί τον άξονα Χ. Το γεγονός οφείλεται στη μικρή διαφορά μεταξύ των φυσικών ιδιοσυχνοτήτων της πέμπτης ιδιομορφής και της έκτης, που είναι η πρώτη στρεπτική του πτερυγίου.

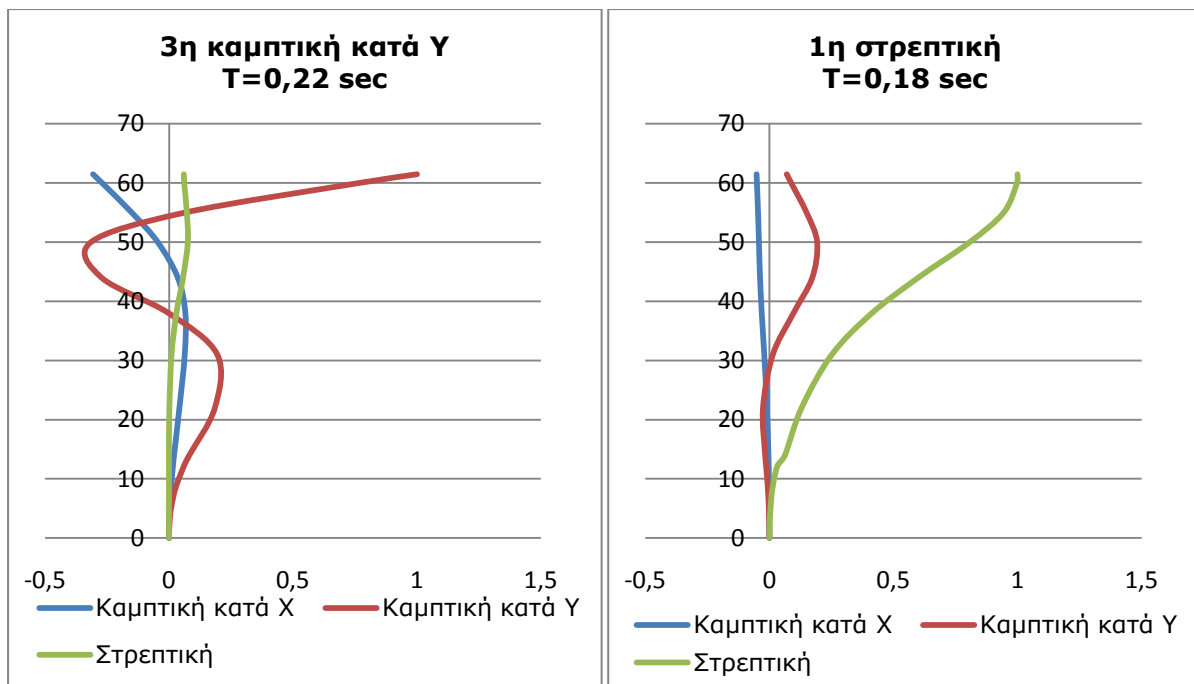
Τέλος, παρατηρείται ότι από τις 10 ιδιομορφές, οι 5 είναι καμπτικές περί τον άξονα Υ, οι 3 καμπτικές περί τον άξονα Χ και οι 2 στρεπτικές, γεγονός που οφείλεται στην τάση του συστήματος να καταναλωθεί η ελάχιστη δυνατή ενέργεια για την ταλάντωσή του.



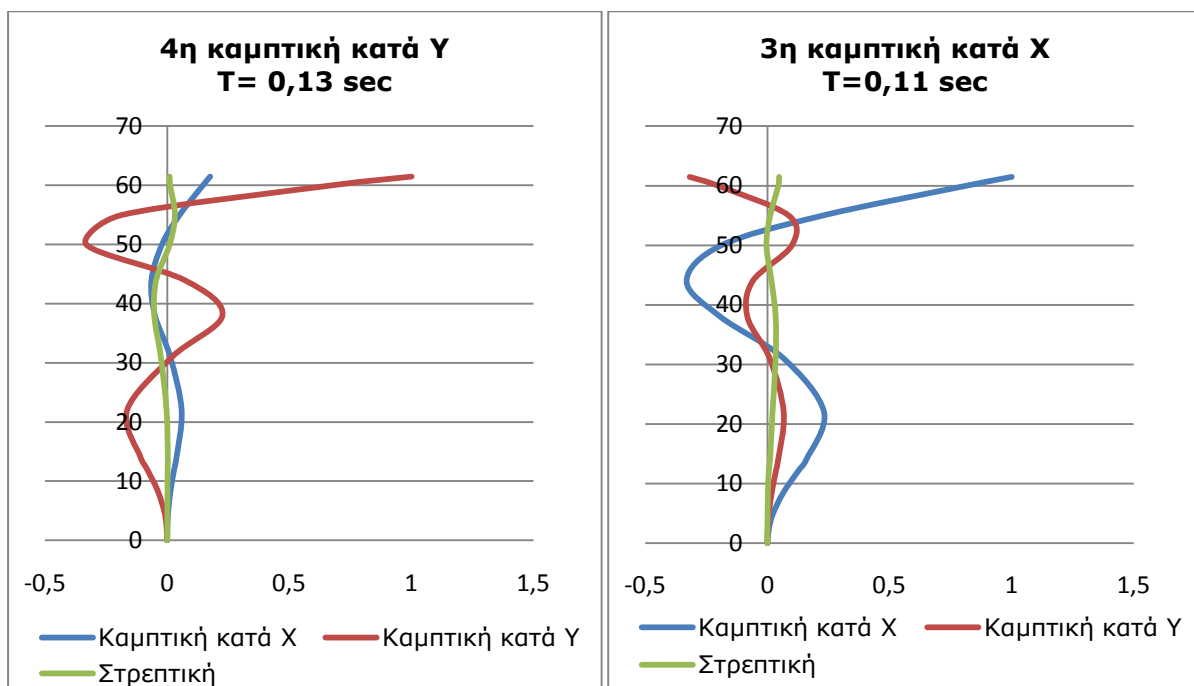
Σχήμα 6.4: Πρώτη και δεύτερη ιδιομορφή πτερυγίου.



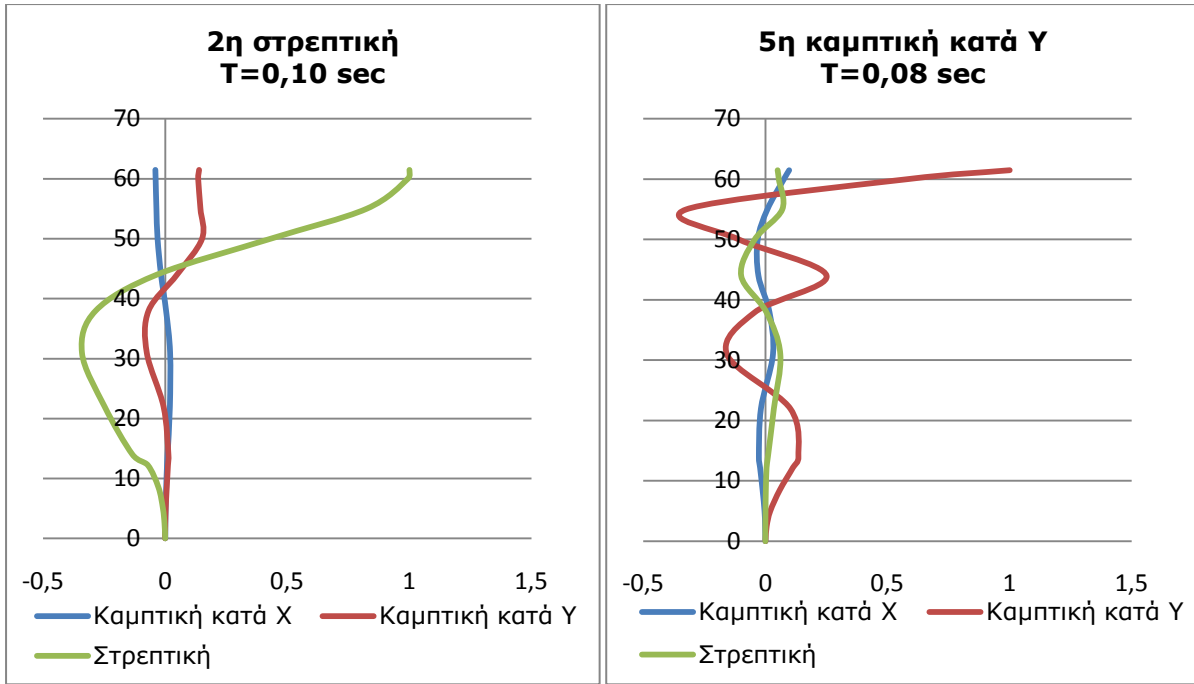
Σχήμα 6.5: Τρίτη και τέταρτη ιδιομορφή πτερυγίου.



Σχήμα 6.6: Πέμπτη και έκτη ιδιομορφή πτερυγίου.



Σχήμα 6.7: Έβδομη και όγδοη ιδιομορφή πτερυγίου.



Σχήμα 6.8: Ένατη και δέκατη ιδιομορφή πτερυγίου.

Κεφάλαιο 7

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

7.1 Στοιχεία Αεροελαστικών Αναλύσεων

Για ιστορικούς λόγους έχει επικρατήσει η μέτρηση της ταχύτητας του ανέμου στην κλίμακα Beaufort αντί του σωστού m/sec. Οι ταχύτητες ανέμου που επιλέχτηκαν για την αεροελαστική ανάλυση αντιστοιχούν σε ισχυρή αύρα, μέτριο άνεμο και ισχυρό άνεμο καθώς αυτών των εντάσεων άνεμοι επικρατούν στον ελλαδικό χώρο λόγω της μορφολογίας της Βαλκανικής Χερσονήσου. Στον πίνακα 7.1 παρουσιάζεται η αντιστοιχία κλίμακας ταχυτήτων ανέμων σε m/sec στο οποίο κάθε κλίμακα αντιστοιχεί καθώς και διάφορες ενδείξεις.

Πίνακας 7.1: Μετατροπή της κλίμακας Beaufort.

Beaufort	Ταχύτητα (m/sec)	Ταχύτητα (knotts)	Ταχύτητα (km/h)	Ονομασία	Ενδείξεις
0	0 - 0,2	< 1	< 2	Νηνεμία	Κάθετη άνοδος καπνού
1	0,3 - 1,5	1 - 3	2 - 6	Ελαφρός αέρας	Η διεύθυνση φαίνεται από τον καπνό, όχι από ανεμοδείκτη
2	1,6 - 3,3	4 - 6	7 - 11	Ήπια αύρα	Γίνεται αισθητή στο πρόσωπο. Η διεύθυνση από ανεμοδείκτη
3	3,4 - 5,4	7 - 10	12 - 19	Μέτρια αύρα	Ξεδιπλώνει σημαία
4	5,5 - 7,9	11 - 16	20 - 30	Δροσερή αύρα	Σηκώνει σκόνη. Τα μικρά κλαδιά κινούνται
5	8,0 - 10,7	17 - 21	31 - 40	Ισχυρή αύρα	Τα μικρά δέντρα ταλαντώνται
6	10,8 - 13,8	22 - 27	41 - 50	Μέτριος άνεμος	Μεγάλα κλωνάρια σε κίνηση. Σφουρίζουν τα καλώδια του τηλεγράφου
7	13,9 - 17,1	28 - 33	51 - 60	Μέσος άνεμος	Όλα τα δέντρα κινούνται
8	17,2 - 20,7	34 - 40	61 - 74	Ισχυρός άνεμος	Μικρά κλαδιά σπάζουν, εμποδίζεται το βάδισμα
9	20,8 - 24,4	41 - 47	75 - 87		Κίνδυνος για ελαφρές κατασκευές
10	24,5 - 28,4	48 - 55	88 - 102		Ξεριζώνει δέντρα
11	28,5 - 32,6	56 - 65	103 - 120	Θύελλα	
12	32,7 - 36,9	> 65	> 120	Καταιγίδα	

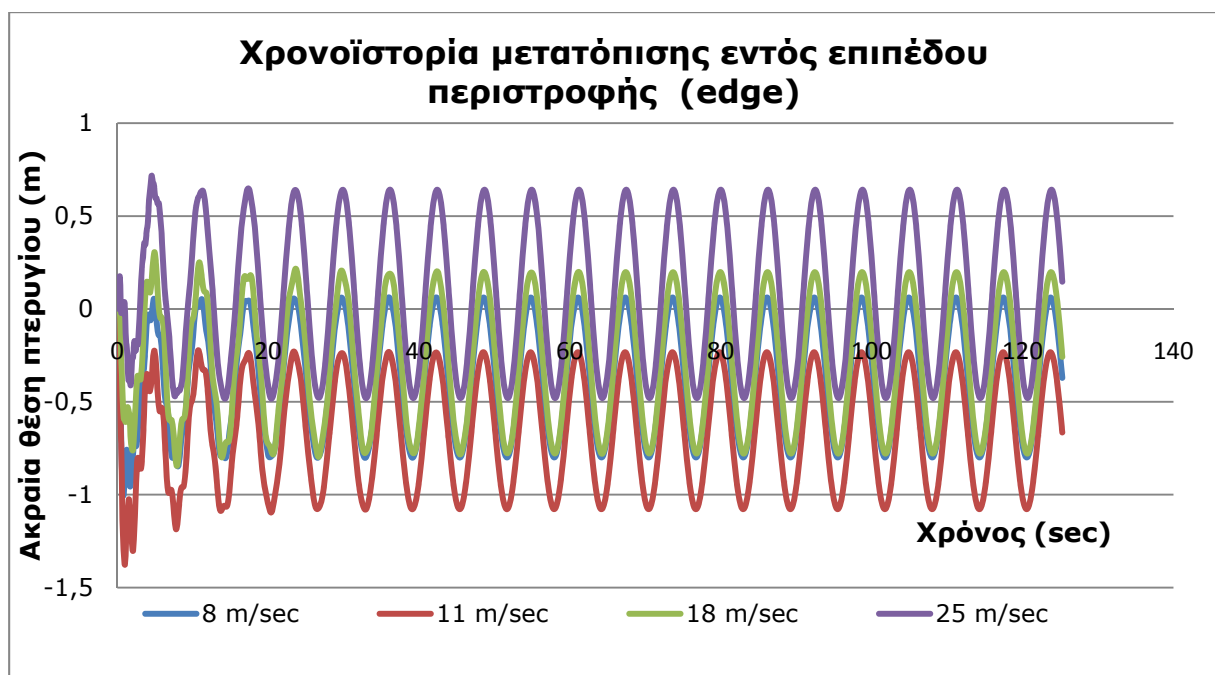
Αν και η ανάλυση που γίνεται είναι μονοπαραμετρική, δηλαδή μεταβάλλοντας μόνο την ταχύτητα του ανέμου παρακολουθούμε τις επιπτώσεις στις παραμορφώσεις των πτερυγίων, είμαστε υποχρεωμένοι από τον κατασκευαστή να μεταβάλλουμε ταυτόχρονα τον προσανατολισμό των πτερυγίων και την ταχύτητα περιστροφής τους, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, για λόγους ελέγχου αεροδυναμικής ισχύος. Στον πίνακα 7.2 παραθέτονται αυτές οι αλλαγές:

Πίνακας 7.2: Προσανατολισμός πτερυγίων και γωνιακή ταχύτητα έλικας για κάθε ταχύτητα ανέμου στην ανάλυση.

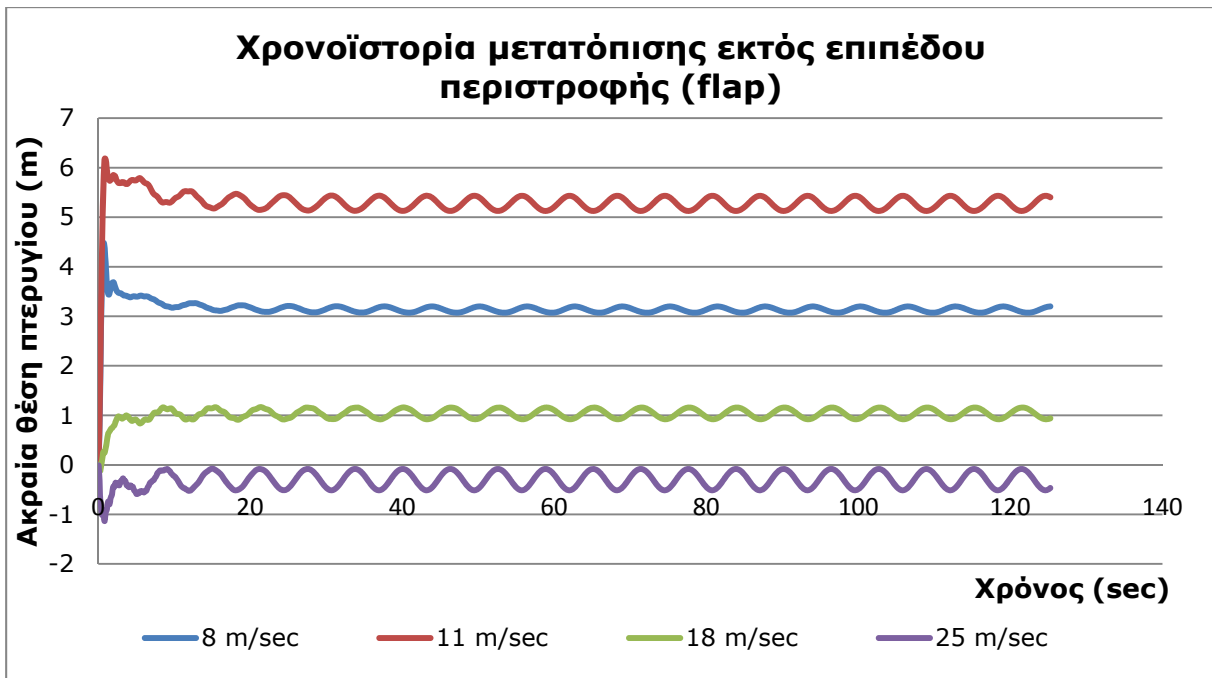
$V_{\text{ανέμου}}$ (m/sec)	8	11	18	25
Pitch (°)	0,00	0,00	14,32	22,00
ω (rad/sec)	1,0032	1,2671	1,2671	1,2671

7.2 Αποτελέσματα Αεροελαστικών Αναλύσεων

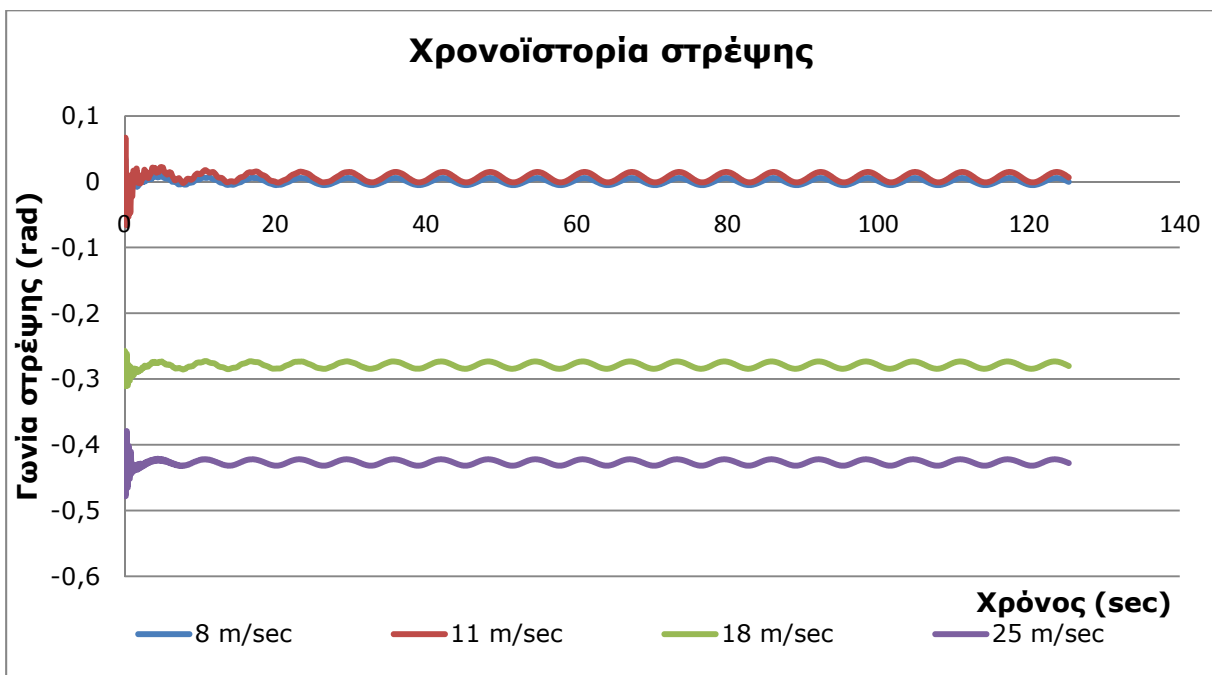
Τα μεγέθη που θεωρούνται κρίσιμα στις αναλύσεις πτερυγίων είναι οι μετατοπίσεις εντός και εκτός του επιπέδου περιστροφής του ρότορα καθώς και η γωνία στρέψης των πτερυγίων. Στα σχήματα 7.1–7.3 που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι μεταβολές των μεγεθών αυτών συναρτήσει του χρόνου. Η αρμονική απόκριση του πτερυγίου είναι προφανώς αποτέλεσμα της αρμονικής διέγερσης του ανέμου, ενώ είναι εμφανή και στα τρία διαγράμματα τόσο το παροδικό τμήμα της ταλάντωσης που εξαρτάται από την αρχική μετατόπιση και ταχύτητα, όσο και το μόνιμο τμήμα που οφείλεται στην εφαρμοζόμενη διέγερση ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών.



Σχήμα 7.1: Διάγραμμα μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εντός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 7.2: Διάγραμμα μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εκτός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει του χρόνου.



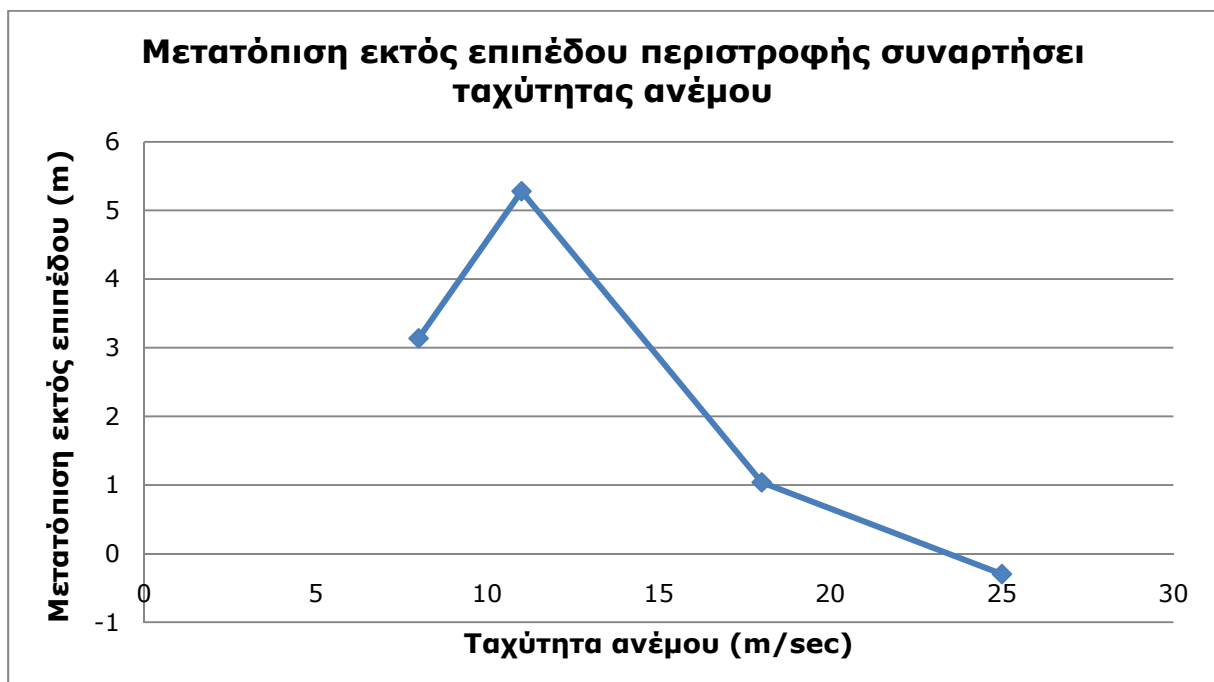
Σχήμα 7.3: Διάγραμμα μεταβολής της γωνίας στρέψης του πτερυγίου συναρτήσει του χρόνου.

Στα σχήματα 7.4–7.6 που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεταβολή των μέσων παραμορφωσιακών μεγεθών συναρτήσει της ταχύτητας ανέμου που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε ανάλυση. Τόσο η μετατόπιση εντός επιπέδου, όσο και η εκτός επιπέδου αυξάνονται μέχρι την ταχύτητα των 11 m/sec όπου επιτυγχάνεται η μέγιστη ισχύς, ενώ οι αλλαγές στον προσανατολισμό των πτερυγίων στις μεγαλύτερες ταχύτητες μειώνουν τις αεροδυναμικές δυνάμεις, άρα και τις παραμορφώσεις αυτές. Αξίζει να επισημανθεί η

αλλαγή πρόσημου στις μετατοπίσεις, η οποία οφείλεται με τη σειρά της στην αλλαγή του προσανατολισμού του πτερυγίου. Η γωνία πρόσπτωσης μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο που αλλάζει η φορά της αεροδυναμικής δύναμης στα άκρα του πτερυγίου.

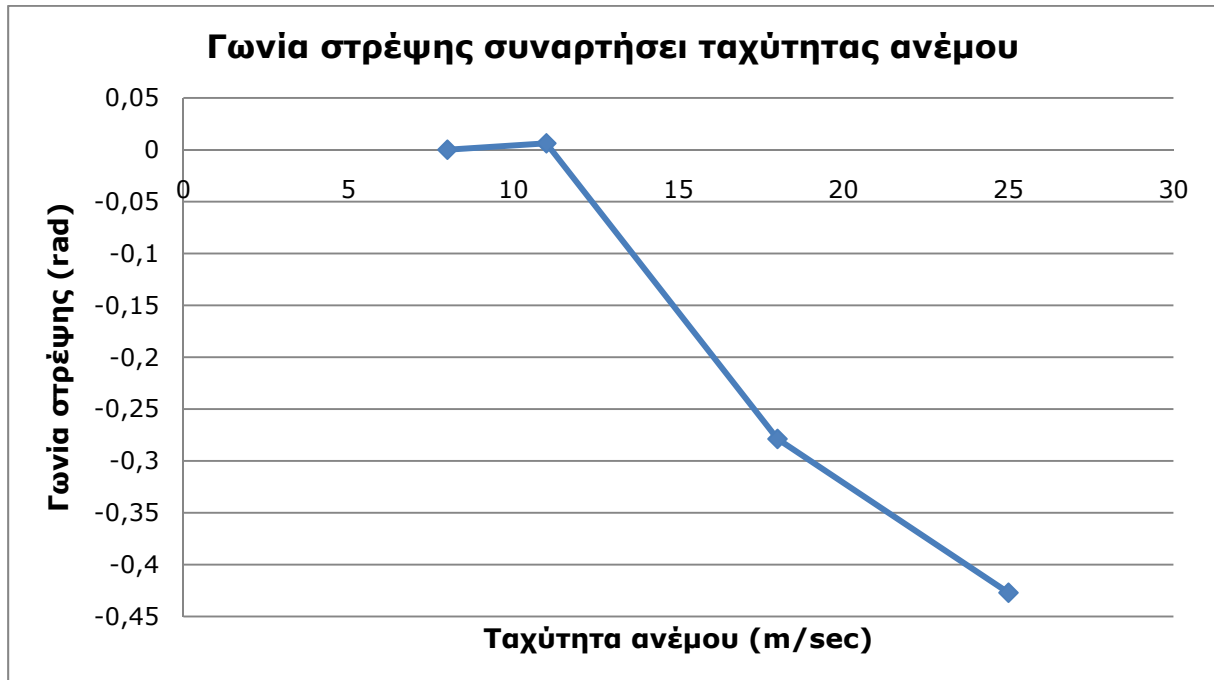


Σχήμα 7.4: Διάγραμμα μεταβολής της μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εντός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.



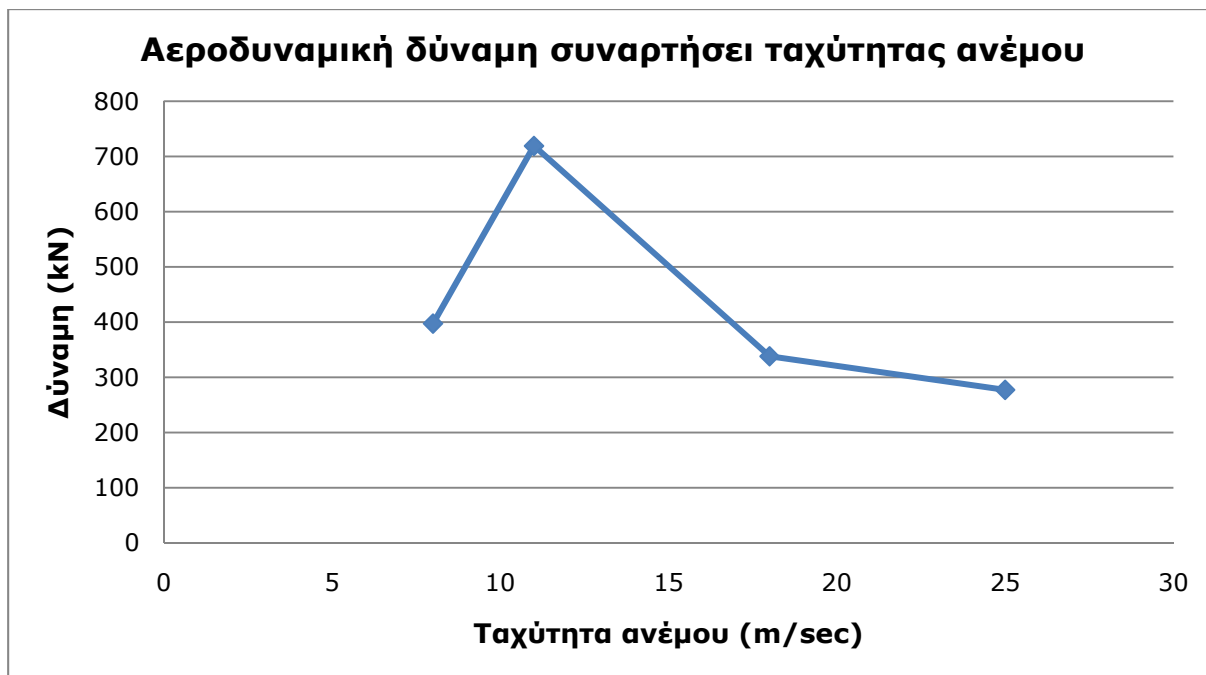
Σχήμα 7.5: Διάγραμμα μεταβολής της μετατόπισης της ακραίας θέσης του πτερυγίου εκτός του επιπέδου περιστροφής συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.

Σε αντίθεση με τις δύο μετακινήσεις που μόλις παρουσιάστηκαν, η γωνία στρέψης παρουσιάζει διαφορετική μεταβολή αφού περιλαμβάνει τη γωνία λόγω αλλαγής προσανατολισμού των πτερυγίων. Μέχρι την ταχύτητα των 11 m/sec έχει σχεδόν σταθερή μέση τιμή και ίση με 0 rad ενώ στις μεγαλύτερες ταχύτητες αυξάνεται με τη μεταβολή του προσανατολισμού των πτερυγίων.



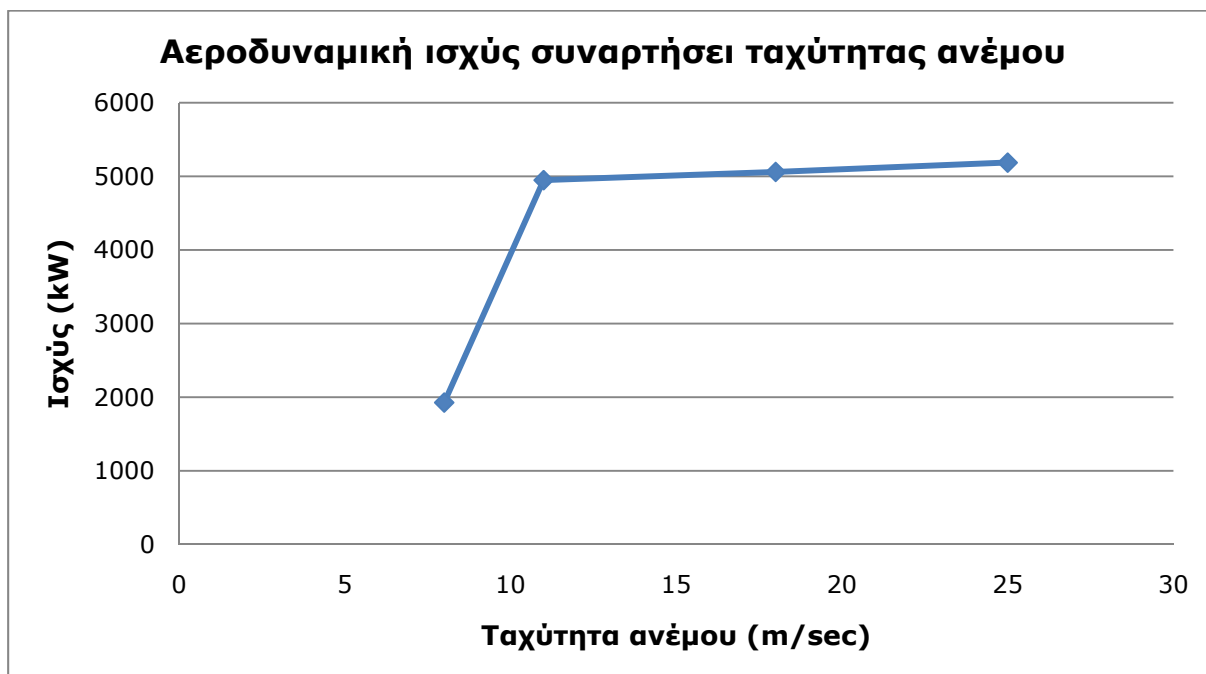
Σχήμα 7.6: Διάγραμμα μεταβολής γωνίας στρέψης του πτερυγίου συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.

Στο σχήμα 7.7 παρουσιάζεται η μεταβολή της αεροδυναμικής δύναμης συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου. Για σταθερό προσανατολισμό πτερυγίων η αύξηση της ταχύτητας του ανέμου συνεπάγεται της αύξηση της αεροδυναμικής δύναμης ενώ η αλλαγή του προσανατολισμού επιφέρει τη μείωση της αεροδυναμικής δύναμης. Η συμπεριφορά αυτή είναι γνωστή και αναμενόμενη, καθώς σε περίπτωση ιδιαίτερα υψηλών ταχυτήτων ανέμου μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ο προσανατολισμός των πτερυγίων ώστε η μείωση της αεροδυναμικής δύναμης είναι τόσο μεγάλη που σταματά η περιστροφή της έλικας για την αποφυγή αστοχίας.



Σχήμα 7.7: Διάγραμμα μεταβολής αεροδυναμικής δύναμης στα πτερύγια συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.

Στο σχήμα 7.8 παρουσιάζεται η μεταβολή της αεροδυναμικής ισχύος συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου. Μέχρι την ταχύτητα των 11 m/sec η ισχύς αυξάνεται μέχρι τη μέγιστη τιμή της, την οποία κρατάμε σχεδόν σταθερή αλλάζοντας τον προσανατολισμό των πτερυγίων.



Σχήμα 7.8: Διάγραμμα μεταβολής αεροδυναμικής ισχύος συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου.

Τέλος, ακολουθεί ο συνοπτικός πίνακας 7.3 όπου παρουσιάζεται η μέση τιμή των μεγεθών που προέκυψαν από κάθε ανάλυση που έγινε.

Πίνακας 7.3: Μέση τιμή παραμορφώσεων, αεροδυναμικής δύναμης και ισχύος.

Νανέμου (m/sec)	8	11	18	25
Μετατόπιση εντός επιπέδου (m)	-0,369	-0,655	-0,290	0,081
Μετατόπιση εκτός επιπέδου (m)	3,136	5,279	1,038	-0,298
Στρέψη (rad)	0,00014	0,00631	-0,27879	-0,42708
Δύναμη (kN)	397,42	719,26	338,08	277,24
Ισχύς (kW)	1926,977	4949,495	5061,361	5188,162

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Bathe K.J.: "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall 1981
- [2] Chopra K. Anil: «Δυναμική των Κατασκευών», Εκδόσεις Μ. Γκιούρδας, Αθήνα 2008
- [3] Crisfield M.A.: "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", John Wiley & Sons 1991
- [4] EWEA: "Wind in power, 2010 European statistics", Φεβρουάριος 2011
- [5] Green A.E., Zerna W.: "Theoretical Elasticity", Clarendon Press, Oxford 1954
- [6] Hodges H.D., Yu W.: "A Rigorous, Engineer-friendly Approach for Modelling Realistic, Composite Rotor Blades", Wind Energ. 2007; 10: 179-193
- [7] Lee Donghoon, Hodges H.D., Patil J. Mayuresh: "Multi-flexible-body Dynamic Analysis of Horizontal Axis Wind Turbines", Wind Energ. 2002; 5:281-300
- [8] Rivello R.M.: "Theory and Analysis of Flight Structures", McGraw Hill, New York 1969
- [9] Timoshenko S., Goodier J.N.: "Theory of Elasticity", McGraw Hill, New York 1951
- [10] Voutsinas G. Spyros, Riziotis A. Vasilis: "Aeroelastic Modeling of Wind Turbines", N.T.U.A.
- [11] Voutsinas G. Spyros, Riziotis A. Vasilis: "Structural Modeling and Dynamics", N.T.U.A.
- [12] Αντώνη Μερλίντα: «Λειτουργία Α/Γ υπό Αυξημένη Γωνιακή Ταχύτητα Δρομέα προς Συμμετοχή της σε ρύθμιση Φορτίου-Συχνότητας», Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2010
- [13] Κωνσταντόπουλος Γεώργιος: «Ανάλυση και Έλεγχος Επαγωγικής Γεννήτριας Διπλής Τροφοδοσίας για Σύστημα Ανεμογεννήτριας», Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2009
- [14] Μαστρογιάννης Ευθύμιος: «Μηχανική των Υλικών», Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999
- [15] Μπεργελές Γεώργιος: «Ανεμοκινητήρες», Εκδόσεις Συμμετρών, Αθήνα 2005
- [16] Παπαδρακάκης Μανόλης: «Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2001
- [17] Παπαδρακάκης Μανόλης: «Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία», Διδακτικές σημειώσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1998
- [18] Τριανταφύλλου Αθανάσιος: «Μηχανική των Υλικών, Μέρος ΙΙ», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2006

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

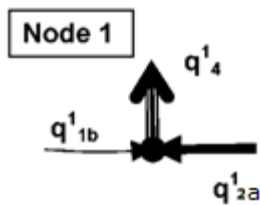
$$[1] \quad U = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + z_o \times \theta_y \\ v - z_o \times \theta_x + x_o \theta_z \\ w - x_o \times \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_o & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_o & 0 & x_o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_o & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = S \times \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

κεφάλαιο 4.1.2, σελ.30

[2] «κατά τους άξονες z και x» αντί για «κατά τους άξονες z και y», στην παράγραφο κάτω από τη σχ. (4.10), σελ.33

$$[3] \quad dF_z = \left(-\frac{d^2 M_x}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left(F_y \times \frac{dw}{dy} \right) \right) dy \quad (4.13)$$

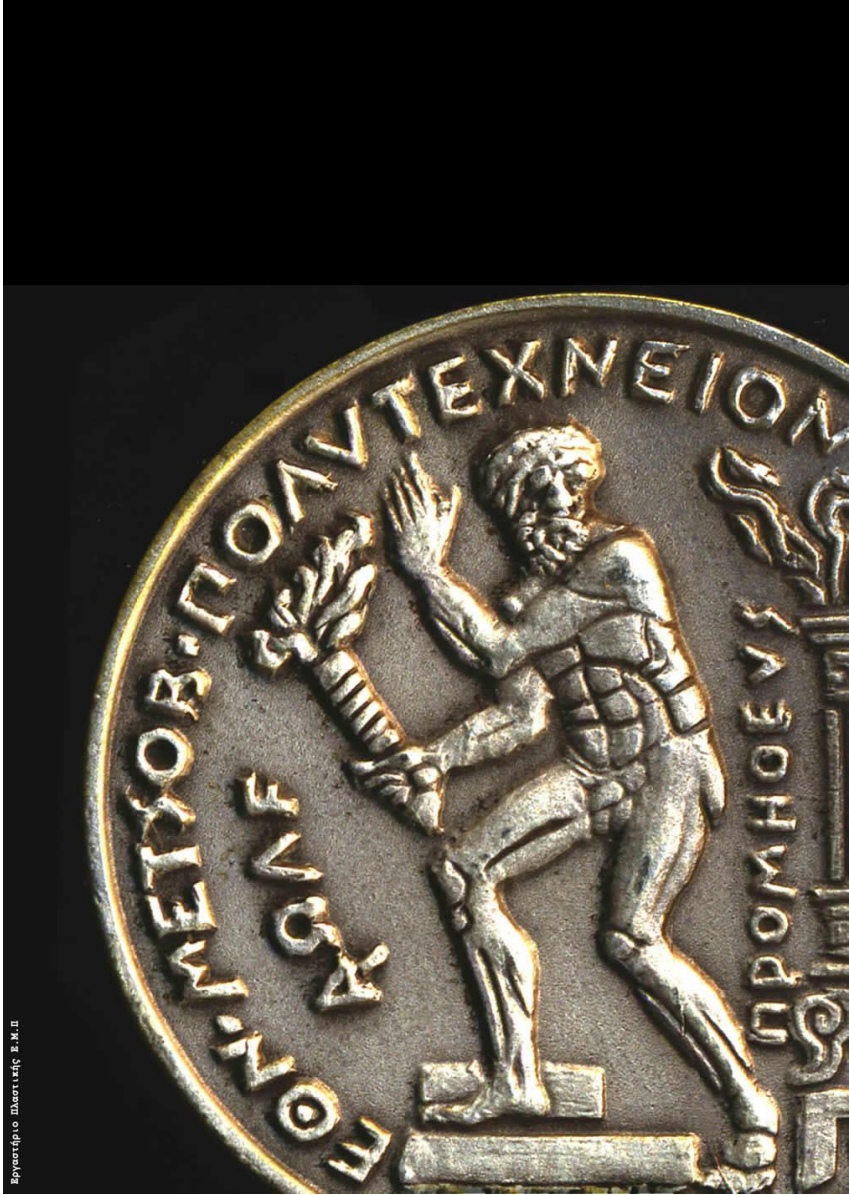
κεφάλαιο 4.1.3, σελ.33



[4]

κεφάλαιο 4.3.3, σελ.43

Σχήμα 4.6



Бронзовый памятник В. М. П.