



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές

Συγγραφέας:
Κουζέλης Ανδρέας

Επιβλέπων καθ.:
Κεχαγιάς Αλέξανδρος

Αθήνα, 2013



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές

Διπλωματική Εργασία του
Κουζέλη Ανδρέα

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....
Κεχαγιάς Αλέξανδρος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Παπαντωνόπουλος Ελευθέριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κουτσούμπας Γεώργιος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2013

.....
Κουζέλης Ανδρέας
Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επι-
στημών



Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 3.0 Ελλάδα

Περίληψη

Η ανακάλυψη του Hawking ότι οι μελανές οπές εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία (γνωστή ως ακτινοβολία Hawking) και σταδιακά εξατμίζονται μέχρι που εξαφανίζονται πλήρως, αφήνοντας πίσω μόνο θερμική ακτινοβολία, οδήγησε σε παράδοξο. Σύμφωνα με τους νόμους της Κβαντομηχανικής, η πληροφορία δεν μπορεί να καταστραφεί, ή με άλλα λόγια μια αρχικά καθαρή κβαντική κατάσταση δεν μπορεί να εξελιχθεί μοναδιακά σε μίκτη κατάσταση. Ένα σύστημα που ήταν αρχικά σε καθαρή κβαντική κατάσταση και έχει καταρρεύσει (βαρυτικά) για να σχηματίσει μια μελανή οπή, θα εξελιχθεί τελικά σε μίκτη κατάσταση της θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμφθηκε, λόγω της πλήρους εξάτμισης της μελανής οπής. Αυτή είναι η πηγή του παραδόξου.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές ακολουθώντας την ημικλασική προσέγγιση (καθώς ακόμα δεν έχει βρεθεί μια πλήρης κβαντική θεωρία της βαρύτητας). Ξεκινάμε με μια εισαγωγή στην Κβαντομηχανική, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο, ώστε να είμαστε σε θέση να καταλάβουμε πως οι μελανές οπές παράγουν την ακτινοβολία Hawking. Μετά εξηγούμε γιατί, σύμφωνα με την Κβαντομηχανική, φαίνεται να υπάρχει απώλεια πληροφορίας. Τέλος, παρουσιάζουμε σύντομα μερικές από τις προτεινόμενες λύσεις του παραδόξου.

Συμπεραίνουμε ότι το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές δεν έχει λυθεί ακόμα και η πλήρης επίλυση του μάλλον απαιτεί την γνώση της κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας. Ωστόσο ελπίζουμε ότι η ενασχόληση με αυτό το ενδιαφέρον πρόβλημα της σύγχρονης φυσικής θα δώσει ενδείξεις για το πως να κάνουμε την ενοποίηση της Κβαντομηχανικής με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δυνατή.

Abstract

The Hawking's discovery that black holes emit thermal radiation (known as Hawking radiation) and slowly evaporate until they disappear completely, leaving behind only the emitted thermal radiation, led to a paradox. According to the laws of Quantum Mechanics, information cannot be destroyed or, in other words, an initial pure quantum state cannot evolve unitarily into a mixed state. A system that was initially in a pure state and has collapsed to form a black hole, will eventually evolve into a mixed state of the emitted thermal radiation, because of a complete evaporation of the black hole. This is the origin of the information loss paradox.

In the current thesis we study the black hole information loss paradox using the semi-classical approach (since we currently don't have a complete theory of quantum gravity). We start by introducing some basic principles of General Relativity, Quantum Mechanics and Quantum Field Theory in curved space-time, in order to be able to understand how the Hawking radiation is produced. Later, we explain why, according to Quantum Mechanics, there seems to be a loss of information. Finally, we briefly present some of the possible resolutions of the paradox: black hole remnants, black hole complementarity, AdS/CFT correspondence and other.

We conclude that the black hole information loss paradox is still unsolved and its resolution probably requires a complete theory of quantum gravity. However we hope that the investigation of this fascinating problem of modern physics will give us clues about how to make the unification of Quantum Mechanics and General Relativity possible.

Περιεχόμενα

1	Κβαντομηχανική	1
1.1	Μήτρα Πυκνότητας	1
1.2	Σύμπλεκτες Καταστάσεις	2
1.3	Ανηγμένη μήτρα πυκνότητας	4
1.4	Εντροπία	5
1.5	Θεώρημα της μη αντιγραφής	6
2	Γενική Σχετικότητα	7
2.1	Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας	7
2.1.1	Πολλαπλότητες	7
2.1.2	Διανύσματα και τανυστές	10
2.1.3	p -μορφές και ολοκλήρωση	15
2.1.4	Διαφορίσιμες απεικονίσεις στις πολλαπλότητες	18
2.1.5	Ολοκληρωτικές καμπύλες και ροή διανυσματικού πεδίου	19
2.1.6	Παράγωγος Lie	20
2.1.7	Μετρικός τανυστής	22
2.1.8	Παράλληλη μετατόπιση και συναλλοίωτη παράγωγος	24
2.1.9	Καμπυλότητα	28
2.1.10	Ισομετρίες και σύμμορφοι μετασχηματισμοί	29
2.2	Εισαγωγή στην Γενική Σχετικότητα	34
2.2.1	Χωρόχρονος και αιτιακή δομή	34
2.2.2	Αρχές της ΓΘΣ	35
2.2.3	Γεωδαισιακές	36
2.2.4	Εξισώσεις του Einstein	38
2.2.5	Λύση Schwarzschild	39
2.2.6	Συντεταγμένες Eddington - Finkelstein	46
2.2.7	Συντεταγμένες Kruskal	48
2.2.8	Διαγράμματα Penrose	53
3	Φαινόμενο Hawking	59
3.1	Κβαντική Θεωρία Πεδίου στον χωροχρόνο Minkowski	59
3.1.1	Κβάντωση βαθμωτού πεδίου στον χωροχρόνο Minkowski	59
3.2	Κβαντική Θεωρία Πεδίου στον καμπυλωμένο χωροχρόνο	64
3.2.1	Κβάντωση βαθμωτού πεδίου στον καμπυλωμένο χωροχρόνο	64
3.2.2	Μετασχηματισμοί Bogolyubov	66
3.3	Ακτινοβολία Hawking	69
3.3.1	Παραγωγή σωματιδίων από βαρυτική κατάρρευση	69

3.3.2	Ακτινοβολία Hawking	71
4	Το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές	81
4.1	Διατήρηση της πληροφορίας	81
4.2	Το παράδοξο	83
4.3	Προτεινόμενες λύσεις	86

1

Κβαντομηχανική

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εισαγωγή στις έννοιες και αποτελέσματα της Κβαντομηχανικής που θα μας χρειαστούν αργότερα στην εργασία αυτή. Πιο συγκεκριμένα, θα ορίσουμε έννοιες όπως μικτή κατάσταση, μήτρα πυκνότητας, ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, σύμπλεκτη κατάσταση, εντροπία και τέλος θα αποδείξουμε το θεώρημα της μη αντιγραφής (no cloning theorem).

1.1 Μήτρα Πυκνότητας

Στην κβαντομηχανική, η κατάσταση ενός συστήματος που περιγράφεται από ένα διάνυσμα (ή ket) στον χώρο Hilbert λέγεται **καθαρή κατάσταση** (pure state). Ισχύει η αντιστοιχία:

$$\text{pure state} \leftrightarrow |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Για την ακρίβεια, η καθαρή κατάσταση είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με το $\text{ray}(|\psi\rangle) = \{e^{ia}|\psi\rangle : a \in \mathbb{R}\}$, όμως επειδή για πρακτικούς σκοπούς η ολική φάση δεν έχει φυσική σημασία, για την αναπαράσταση κάποιας καθαρής κατάστασης χρησιμοποιείται ένα οποιαδήποτε διάνυσμα του ray που αντιστοιχεί στην κατάσταση αυτή, και όχι ολόκληρο το ray.

Όμως υπάρχουν περιπτώσεις που δεν γνωρίζουμε σε ποια ακριβώς καθαρή κατάσταση βρίσκεται το σύστημα και έτσι η περιγραφή του δεν μπορεί να γίνει με ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert. Αυτό που γνωρίζουμε για ένα τέτοιο σύστημα είναι ότι η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_1\rangle$ είναι p_1 , στην $|\psi_2\rangle$ είναι p_2 και ούτω καθεξής. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε μια **μικτή συλλογή** (statistical ensemble) πανομοιότυπων αντιγράφων του συστήματος – ένα σύνολο $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$. Στην περίπτωση αυτή η κατάσταση του συστήματος λέγεται **μικτή κατάσταση** (mixed state) και η περιγραφή του γίνεται με μια **μήτρα πυκνότητας** που ορίζεται ως:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$\sum_i p_i = 1, \quad p_i > 0$$

Γενικά, κάθε τελεστής που είναι θετικά ημιορισμένος ($\langle u|\rho|u \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{H}$), ερμιτιανός ($\rho = \rho^\dagger$) και έχει ίχνος 1 ($\text{Tr}(\rho) = 1$, ανεξαρτήτως της βάσης) λέγεται μήτρα πυκνότητας.

Η μήτρα πυκνότητας μιας καθαρής κατάστασης $|\psi\rangle$ είναι απλώς ο προβολικός τελεστής στην κατεύθυνση του διανύσματος αυτού:

$$\rho_p = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Το ρ_p ως προβολικός τελεστής ικανοποιεί τη σχέση:

$$\rho_p^2 = \rho_p$$

Οπότε

$$\text{Tr}(\rho_p^2) = \text{Tr}(\rho_p) = 1$$

Αποδεικνύεται ([27, σελ. 216]) ότι για μια μίκτη κατάσταση ισχύει:

$$\text{Tr}(\rho_m^2) < 1$$

που σημαίνει ότι $\rho_m^2 \neq \rho_m$, δηλαδή η μήτρα πυκνότητας μιας μίκτης κατάστασης δεν είναι προβολικός τελεστής. Οπότε το ίχνος του ρ^2 αποτελεί ένα καλό κριτήριο για το αν η κατάσταση είναι καθαρή ($= 1$) ή μίκτη (< 1).

Γνωρίζοντας τη μήτρα πυκνότητας ενός συστήματος, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή οποιαδήποτε φυσικού μεγέθους:

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_{i,j} p_j \underbrace{\langle \psi_i | \psi_j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle \psi_j | A | \psi_i \rangle = \sum_i \langle \psi_i | \rho A | \psi_i \rangle = \text{Tr}(\rho A)$$

Στην αναπαράσταση στην οποία η μήτρα πυκνότητας είναι διαγώνια

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \rho_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

οι ιδιοτιμές ρ_i είναι οι πιθανότητες p_i ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i . Ωστόσο, σε αντίθεση με μια καθαρή κατάσταση επαλληλίας, οι σχετικές φάσεις μεταξύ των καταστάσεων $|i\rangle$ είναι τυχαίες. Η διαφορά ανάμεσα σε μια καθαρή κατάσταση υπέρθεσης και μια μίκτη κατάσταση εξηγείται καλύτερα στο [27, σελ. 217].

1.2 Σύμπλεκτες Καταστάσεις

Έστω ότι έχουμε δυο συστήματα (δυο σωματίδια) A και B με χώρους Hilbert \mathcal{H}_A και \mathcal{H}_B αντίστοιχα, και έστω $\{|i\rangle_A\}$ μια βάση του \mathcal{H}_A και $\{|j\rangle_B\}$ του \mathcal{H}_B . Τότε ο χώρος Hilbert του σύνθετου συστήματος $A + B$ είναι $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ με τη βάση

$\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}$. Η γενική έκφραση της καθαρής κατάστασης ενός τέτοιου σύνθετου συστήματος (δισωματιδιακή κατάσταση) είναι:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \quad (1.1)$$

Αν οι συντελεστές C_{ij} είναι διαχωρίσιμοι, δηλαδή $C_{ij} = C_i^A C_j^B$, τότε

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = \sum_i C_i^A |i\rangle_A \otimes \sum_j C_j^B |j\rangle_B = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$$

δηλαδή η κατάσταση $|\Psi\rangle_{AB}$ είναι μια διαχωρίσιμη κατάσταση. Διαφορετικά, αν $C_{ij} \neq C_i^A C_j^B$, η κατάσταση $|\Psi\rangle_{AB}$ είναι μη διαχωρίσιμη ή **σύμπλεκτη** (entangled).

Το ενδιαφέρον με τις σύμπλεκτες καταστάσεις είναι ότι ανάμεσα στα υποσυστήματα του σύνθετου συστήματος εμφανίζονται *χβαντικοί συσχετισμοί*, ακόμα και όταν αυτά τα υποσυστήματα βρίσκονται πολύ μακριά το ένα από το άλλο. Αν ένας παρατηρητής εκτελέσει κάποια μέτρηση στο υποσύστημα A , τότε προφανώς η κατάσταση του υποσυστήματος αυτού γίνεται καθορισμένη (κάποια ιδιοκατάσταση του τελεστή του φυσικού μεγέθους που μέτρησε). Το εντυπωσιακό είναι ότι η κατάσταση του υποσυστήματος B γίνεται επίσης καθορισμένη (ως προς τον παρατηρητή A), χωρίς να εκτελείται καμία μέτρηση σε αυτό.

Για να δούμε ένα άλλο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό των σύμπλεκτων καταστάσεων, θεωρούμε ένα σύστημα δύο σωματιδίων με σπιν $1/2$ το καθένα και ολικό σπιν 0 , γνωστό ως σύστημα EPR (Einstein-Podolsky-Rosen). Ένα τέτοιο σύστημα προκύπτει πχ. από διάσπαση ενός σωματιδίου με σπιν 0 σε δύο άλλα με σπιν $1/2$ το καθένα. Λόγω της διατήρησης της στροφορμής η κατάσταση του συστήματος των δυο σωματιδίων που προκύπτουν από τη διάσπαση αυτή θα είναι μια spin singlet:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

Το αξιοπερίεργο είναι ότι οι καταστάσεις $|\uparrow\rangle$ και $|\downarrow\rangle$ – σπιν “πάνω” και “κάτω” αντίστοιχα – δεν αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμένο άξονα, αλλά σε έναν οποιονδήποτε άξονα (όμως θεωρούμε ότι ο άξονας αυτός, ως προς τον οποίο μετράμε το σπιν, είναι ίδιος και για τα δύο συστήματα). Αυτό οφείλεται στο ότι η κατάσταση μηδενικού ολικού σπιν έχει πλήρη περιστροφική συμμετρία. Η απόδειξη για αυτό είναι η εξής: Ο προσανατολισμός του αυθαίρετου άξονα, ως προς τον οποίο αναφέρονται τα διανύσματα $|\uparrow\rangle$ και $|\downarrow\rangle$, καθορίζεται από τις συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες θ και ϕ :

$$|\uparrow\rangle_{A,B} = \cos(\theta/2) |\uparrow_z\rangle_{A,B} + \sin(\theta/2) e^{+i\phi} |\downarrow_z\rangle_{A,B}$$

$$|\downarrow\rangle_{A,B} = \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |\uparrow_z\rangle_{A,B} - \cos(\theta/2) |\downarrow_z\rangle_{A,B}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B &= [\cos(\theta/2) |\uparrow_z\rangle_A + \sin(\theta/2) e^{+i\phi} |\downarrow_z\rangle_A] [\sin(\theta/2) e^{-i\phi} |\uparrow_z\rangle_B - \cos(\theta/2) |\downarrow_z\rangle_B] \\ &= \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - \cos(\theta/2)^2 |\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B + \\ &+ \sin(\theta/2)^2 |\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{+i\phi} |\downarrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B &= [\sin(\theta/2)e^{-i\phi}|\uparrow_z\rangle_A - \cos(\theta/2)|\downarrow_z\rangle_A] [\cos(\theta/2)|\uparrow_z\rangle_B + \sin(\theta/2)e^{+i\phi}|\downarrow_z\rangle_B] \\
&= \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e^{-i\phi}|\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B + \sin(\theta/2)^2|\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B - \\
&\quad - \cos(\theta/2)^2|\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e^{+i\phi}|\downarrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B - |\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B)$$

Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι, επειδή οι πιθανότητες να βρούμε σπιν “πάνω” ή “κάτω” σε μια μέτρηση του σπιν του ενός σωματιδίου ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση είναι πάντα 50% και 50%, δεν υπάρχει καθαρή (μονοσωματιδιακή) κυματοσυνάρτηση που να περιγράφει μόνο το σωματίδιο αυτό. Γιατί αν για παράδειγμα θεωρούσαμε ως τέτοια κυματοσυνάρτηση την $|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle_A + |\downarrow_z\rangle_A)$, τότε ως προς τον άξονα z θα ήταν – όπως θέλουμε – 50% - 50% για το σπιν “πάνω” ή “κάτω”. Όμως $|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle_A + |\downarrow_z\rangle_A) = |\uparrow_x\rangle$, οπότε αν μετρούσαμε το σπιν ως προς τον άξονα x , θα ήταν “πάνω” με πιθανότητα 100%. Επομένως η περιγραφή των μετρήσεων του ενός εκ των δυο σωματιδίων του σύμπλεκτου συστήματος γίνεται με μια μήτρα πυκνότητας που, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι πανομοιότυπη με την μήτρα πυκνότητας μιας μικτής κατάστασης.

1.3 Ανηγμένη μήτρα πυκνότητας

Για να βρούμε τη μήτρα πυκνότητας που περιγράφει το ένα μόνο από τα δύο σωματίδια ενός σύμπλεκτου ζεύγους, θεωρούμε μια γενική σύμπλεκτη κατάσταση δύο σωματιδίων A και B :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \alpha|0\rangle_A |1\rangle_B + \beta|1\rangle_A |0\rangle_B \\
\rho &= |\psi\rangle\langle\psi|
\end{aligned}$$

Έστω ότι εξετάζουμε χωριστά το σωματίδιο A και μετράμε κάποιο φυσικό μέγεθος \mathcal{O}_A που αφορά μόνο το σωματίδιο A . Τότε, επειδή $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ο τελεστής που αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος αυτό θα είναι $\mathcal{O}_A \otimes I_B$ με μέση τιμή:

$$\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}_A \otimes I_B) = \langle \psi | \mathcal{O}_A \otimes I_B | \psi \rangle = |\alpha|^2 \langle 0 | \mathcal{O}_A | 0 \rangle_A + |\beta|^2 \langle 1 | \mathcal{O}_A | 1 \rangle_A$$

Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα παίρναμε αν είχαμε ένα στατιστικό μίγμα δύο μονοσωματιδιακών καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$ με πιθανότητες $p_1 = |\alpha|^2$ και $p_2 = |\beta|^2$ αντίστοιχα. Επομένως θεωρούμε ότι το σωματίδιο A περιγράφεται από μια μήτρα πυκνότητας που συμβολίζεται με ρ_A και λέγεται **ανηγμένη μήτρα πυκνότητας** (reduced density matrix) του A :

$$\begin{aligned}
\rho_A &= |\alpha|^2 |0\rangle_A \langle 0|_A + |\beta|^2 |1\rangle_A \langle 1|_A \\
\langle \mathcal{O}_A \rangle &= \text{Tr}(\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}_A \otimes I_B)
\end{aligned}$$

Μαθηματικά αυτό εκφράζεται και ως

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$$

όπου Tr_B είναι το **μερικό ίχνος** ως προς B που ορίζεται ως η απεικόνιση

$$\text{Tr}_B : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$$

$$\text{Tr}_B (R \otimes S) = R \text{Tr} (S) \quad , \quad \forall R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \quad , \quad \forall S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

όπου $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ είναι ο χώρος των γραμμικών τελεστών στον \mathcal{H} . Και πράγματι θα είναι:

$$\text{Tr} (\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{Tr} [\text{Tr}_B (\rho) \mathcal{O}_A] = \text{Tr} \{ \text{Tr}_B [\rho \mathcal{O}_A \otimes I_B] \} = \text{Tr} (\rho \mathcal{O}_A \otimes I_B)$$

αφού

$$\text{Tr} [\text{Tr}_B (R \otimes S)] = \text{Tr} [R \text{Tr} (S)] = \text{Tr} (R) \text{Tr} (S) = \text{Tr} (R \otimes S)$$

Θυμίζουμε ότι παρόλο που η περιγραφή του ενός εκ των δυο σύμπλεκτων σωματιδίων γίνεται με μήτρα πυκνότητας πανομοιότυπη με τη μήτρα πυκνότητας μιας μικτής συλλογής, τα δύο σωματίδια μαζί είναι σε μια καθαρή κατάσταση.

1.4 Εντροπία

Στα προηγούμενα είδαμε την διαφορά ανάμεσα στην καθαρή και μικτή κατάσταση. Θα θέλαμε τώρα να ποσοτικοποιήσουμε την απόκλιση της μικτής κατάστασης από την καθαρή. Ορίζουμε για τον σκοπό αυτό την **εντροπία von Neumann**:

$$S(\rho) = -\text{Tr} (\rho \ln \rho)$$

όπου ρ είναι η μήτρα πυκνότητας του συστήματος. Στην βάση $\{|i\rangle\}$ στην οποία η μήτρα πυκνότητας είναι διαγώνια:

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$$

όπου p_i είναι οι ιδιοτιμές της, η εντροπία von Neumann γίνεται:

$$S(\rho) = - \sum_i p_i \ln p_i$$

Όταν η κατάσταση είναι καθαρή, $\rho = \rho^2$, η εντροπία είναι μηδέν:

$$S(\rho) = -\text{Tr} (\rho \ln \rho^2) = 2S(\rho) \Leftrightarrow S(\rho) = 0$$

Η εντροπία γίνεται μέγιστη όταν $p_i = 1/N, \forall i$, όπου N είναι η διάσταση του χώρου Hilbert, δηλαδή όταν όλες οι δυνατές καταστάσεις είναι ισοπίθανες:

$$S_{max} = - \sum_i \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \ln N$$

Γενικά, αν ρ είναι ο προβολικός τελεστής στον υπόχωρο διάστασης n , θα είναι:

$$S = \ln n$$

Επομένως βλέπουμε ότι η εντροπία von Neumann μετρά τον αριθμό των καταστάσεων οι οποίες έχουν μη μηδενική πιθανότητα στην στατιστική συλλογή.

Η εντροπία αποτελεί επίσης το μέτρο του συσχετισμού ανάμεσα στα υποσυστήματα A και B ενός σύνθετου συστήματος AB με μήτρα πυκνότητας ρ_{AB} . Αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$0 \leq S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$$

όπου ρ_A και ρ_B είναι οι ανηγμένες μήτρες πυκνότητας των υποσυστημάτων A και B αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι σε αντίθεση με την κλασική θεωρία, η εντροπία von Neumann ενός σύνθετου συστήματος μπορεί να είναι μικρότερη από το άθροισμα των εντροπιών των μερών του. Μάλιστα στην περίπτωση που το σύνθετο σύστημα AB είναι στην καθαρή σύμπλεκτη κατάσταση, θα είναι $S(\rho_{AB}) = 0$ και $S(\rho_A) = S(\rho_B) > 0$. Αυτό οφείλεται στο ότι τα υποσυστήματα A και B είναι σύμπλεκτα και επομένως το καθένα σωματίδιο χωριστά περιγράφεται από μια ανηγμένη μήτρα πυκνότητας που είναι πανομοιότυπη με μήτρα πυκνότητας μιας μικτής κατάστασης.

1.5 Θεώρημα της μη αντιγραφής

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του “θεωρήματος της μη αντιγραφής” (no cloning theorem). Το θεώρημα αυτό λέει ότι μια άγνωστη κβαντική κατάσταση (που δεν είναι ιδιοκατάσταση κάποιου ερμητιανού τελεστή) δεν μπορεί να αντιγραφεί, δηλαδή δεν υπάρχει μοναδιακός τελεστής αντιγραφής U τέτοιος ώστε $U|\psi\rangle \otimes |\phi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, όπου $|\psi\rangle$ είναι η άγνωστη κβαντική κατάσταση που θέλουμε να αντιγράψουμε και $|\phi_0\rangle$ είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος στο οποίο θα γίνει η αντιγραφή.

Έστω ότι η αντιγραφή μπορεί να γίνει και υπάρχει τέτοιος τελεστής. Τότε αν $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$ είναι δύο τυχαίες άγνωστες κβαντικές καταστάσεις, η αντιγραφή τους θα δώσει:

$$U|\psi_1\rangle \otimes |\phi_0\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle, \quad U|\psi_2\rangle \otimes |\phi_0\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Έστω ότι τώρα αντιγράφουμε την κατάσταση επαλληλίας των $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$:

$$U(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \otimes |\phi_0\rangle = (c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \otimes (c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle)$$

Όμως ο τελεστής U , όπως και κάθε κβαντομηχανικός τελεστής, είναι γραμμικός. Επομένως:

$$\begin{aligned} U(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \otimes |\phi_0\rangle &= c_1(U|\psi_1\rangle \otimes |\phi_0\rangle) + c_2(U|\psi_2\rangle \otimes |\phi_0\rangle) \\ &= c_1|\psi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\ &\neq (c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \otimes (c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \end{aligned}$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση μας ότι υπάρχει τέτοιος τελεστής αντιγραφής δεν αληθεύει.

2

Γενική Σχετικότητα

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εισαγωγή στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ξεκινάμε με μια σχετικά σύντομη παρουσίαση των βασικών εννοιών της Διαφορικής Γεωμετρίας στις οποίες στηρίζεται όλη η ΓΘΣ. Μετά συνεχίζουμε με τις βασικές έννοιες, αρχές και αποτελέσματα της ΓΘΣ και στο τέλος μελετάμε τις μελανές οπές τύπου Schwartzchild σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

2.1 Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας

2.1.1 Πολλαπλότητες

Στην ΓΘΣ ο χωρόχρονος αναπαρίσταται με μια 4-διάσταση πολλαπλότητα που ουσιαστικά είναι ένας χώρος που τοπικά μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^4 (θα δούμε παρακάτω τι ακριβώς εννοούμε με αυτό) αλλά ολικά μπορεί να διαφέρει αρκετά από αυτόν. Επειδή οι πολλαπλότητες είναι τοπολογικοί χώροι με κάποια ειδικά χαρακτηριστικά, προτού ορίσουμε την πολλαπλότητα θα δώσουμε τον ορισμό του τοπολογικού χώρου και κάποιων άλλων σχετικών εννοιών.

Έστω X ένα τυχόν μη κενό σύνολο. Ένα σύνολο \mathcal{T} κάποιων υποσυνόλων του X θα ονομάζεται **τοπολογία** πάνω στο X , αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (ii) Η ένωση αυθαίρετου (πεπερασμένου ή απείρου) αριθμού συνόλων του \mathcal{T} ανήκει στο \mathcal{T} : αν $U_i \in \mathcal{T}$ για $i \in I$ τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
- (iii) Η τομή πεπερασμένου αριθμού συνόλων του \mathcal{T} ανήκει στο \mathcal{T} : αν $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Το ζεύγος (X, \mathcal{T}) ονομάζεται **τοπολογικός χώρος**. Τα στοιχεία του \mathcal{T} ονομάζονται ανοιχτά υποσύνολα του X . Ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό αν το συμπλήρωμα

του $A \setminus X$ είναι ανοιχτό. Ένα υποσύνολο που περιέχει ένα σημείο $p \in X$ ονομάζεται **περιοχή** (neighborhood) του p αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό U με $p \in U \subseteq N$ (το N μπορεί και να μην είναι ανοιχτό, αλλά σε περίπτωση που θα είναι λέγεται ανοιχτή περιοχή).

Ένας τοπολογικός χώρος (X, \mathcal{T}) λέγεται **Hausdorff** αν για κάθε ζεύγος σημείων $p, q \in X$ με $p \neq q$, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ τέτοια ώστε $p \in \mathcal{U}, q \in \mathcal{V}$.

Έστω (X, \mathcal{T}) ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Μια συλλογή $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ ανοιχτών συνόλων της τοπολογίας \mathcal{T} λέγεται **ανοιχτό κάλυμμα** του A αν $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ (αν $A = X$ τότε $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$). Το σύνολο X ονομάζεται **συμπαγές** (compact) αν για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ του X υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του I τέτοιο ώστε το $\{\mathcal{U}_j | j \in J\}$ είναι επίσης κάλυμμα του X (σημείωση: ένα κάλυμμα είναι πάντα υποκάλυμμα του εαυτού του, οπότε αυτό που απαιτούμε είναι το άπειρα σε μέγεθος κάλυμμα να έχει πεπερασμένα υποκάλυμμα).

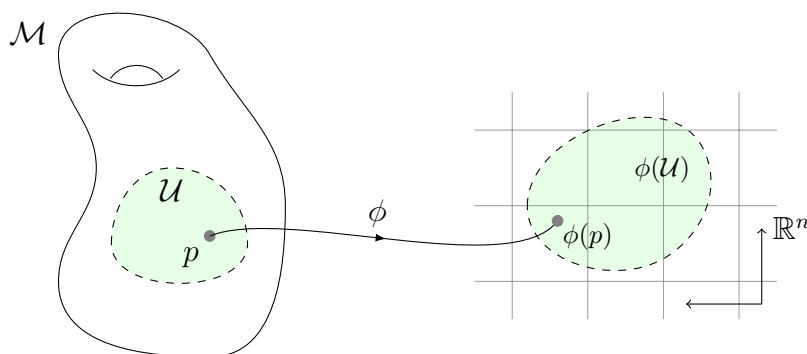
Ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{\mathcal{U}_i\}$ του (X, \mathcal{T}) είναι **τοπικά πεπερασμένο** αν κάθε σημείο $p \in X$ έχει μια ανοιχτή περιοχή N που τέμνεται μόνο με πεπερασμένο αριθμό συνόλων \mathcal{U}_i , δηλαδή το σύνολο $\{i \in I : N \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο. Ο χώρος X λέγεται **παρασυμπαγής** (paracompact) αν για κάθε κάλυμμα $\{\mathcal{U}_i\}$ του X υπάρχει μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του, δηλαδή ένα κάλυμμα $\{\mathcal{V}_j\}$ τέτοιο ώστε κάθε \mathcal{V}_j να περιέχεται σε κάποιο \mathcal{U}_i .

Ένας τοπολογικός χώρος είναι **συνεκτικός** (connected) αν δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένωση δυο ή περισσότερων μη κενών ξένων μεταξύ τους ανοιχτών υποσυνόλων του.

Κάθε μετρικός χώρος (M, d) είναι τοπολογικός χώρος με την τοπολογία που επάγεται από την μετρική του. Δηλαδή, δηλώνουμε ότι $U \subseteq M$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_\epsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \subseteq U$. Στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , με τη μετρική $d(x, y) = |x - y| = [\sum_i^n (x^i - y^i)^2]^{1/2}$, το σύνολο $B_\epsilon(x)$ ονομάζεται ανοιχτή σφαίρα με κέντρο το x και ακτίνα ϵ και επομένως τα ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n είναι ενώσεις των ανοιχτών σφαιρών.

Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y λέγεται **συνεχής** αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U στο Y , η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U) \in X$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X (η απόδειξη υπάρχει στο [26, p. 399]). Αν επιπλέον η f είναι $1 - 1$, επί και η αντίστροφη της $f^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι επίσης συνεχής, τότε η απεικόνιση αυτή λέγεται **ομοιομορφισμός** και οι τοπολογικοί χώροι X, Y λέγονται **ομοιομορφικοί**, $X \cong Y$. Αυτό σημαίνει ότι ο X μπορεί να παραμορφωθεί κατά συνεχή τρόπο στον Y και αντίστροφα. Έτσι, οι ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι έχουν τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες και θεωρούνται τοπολογικά ίδιοι.

Έστω \mathcal{M} ένα σύνολο. **Χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων** είναι ένα ζεύγος (\mathcal{U}, ϕ) όπου \mathcal{U} είναι ένα υποσύνολο του \mathcal{M} και ϕ είναι μια $1 - 1$ απεικόνιση $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε η εικόνα της $\phi(\mathcal{U})$ είναι ανοιχτό σύνολο στο \mathbb{R}^n .

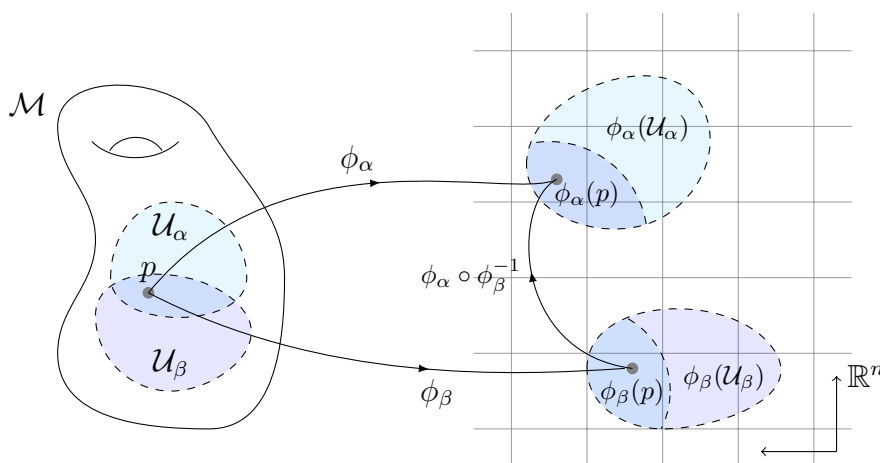


Μια συλλογή $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ των χαρτών στο \mathcal{M} λέγεται C^r άτλας αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$, δηλαδή το $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ είναι ένα κάλυμμα του \mathcal{M} .
- (ii) Αν $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

είναι C^r απεικόνιση από ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n σε ένα άλλο ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .



Κάθε τέτοιο \mathcal{U}_α ονομάζεται **τοπική συντεταγμένη περιοχή** και η αντίστοιχη ϕ_α είναι τοπική συνάρτηση συντεταγμένων που αναπαρίσταται με τις n συναρτήσεις $\{x^1(p), \dots, x^n(p)\}$ που ονομάζονται (τοπικές) **συντεταγμένες** του σημείου p . Η σύνθεση $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ (απεικόνιση μετάβασης) είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων: αν η ϕ_α προσδίδει στο σημείο $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ τις συντεταγμένες $\{x^1(p), \dots, x^n(p)\}$ και η ϕ_β τις $\{y^1(p), \dots, y^n(p)\}$ στο ίδιο σημείο, τότε η $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ ορίζει τις $x^\mu(p) = x^\mu(y^1(p), \dots, y^n(p))$, $\mu = 1, \dots, n$. Απαιτούμε η μετάβαση μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων να είναι τάξης C^r (αν είναι C^∞ τότε λέμε ότι η μετάβαση γίνεται με “λείο” τρόπο).

Δύο C^r άτλαντες \mathcal{A}_1 και \mathcal{A}_2 στο \mathcal{M} είναι συμβατοί αν η ένωση τους $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ είναι επίσης C^r άτλας του \mathcal{M} . Η κλάση ισοδυναμίας των C^r ατλάντων του \mathcal{M} ονομάζεται

διαφορική δομή στο \mathcal{M} . Όλοι οι C^r άτλαντες που είναι συμβατοί μεταξύ τους αποτελούν τον **μέγιστο άτλαντα** και είναι το σύνολο όλων των δυνατών συστημάτων συντεταγμένων που καλύπτουν το \mathcal{M} .

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την έννοια της πολλαπλότητας. Μια C^r n -διάστατη **πολλαπλότητα** \mathcal{M} είναι ένα σύνολο \mathcal{M} μαζί με έναν C^r μέγιστο άτλαντα. Η πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι ένας τοπολογικός χώρος με τοπολογία που ορίζεται με την δήλωση ότι τα ανοιχτά σύνολα του \mathcal{M} είναι τα \mathcal{U}_α του μέγιστου άτλαντα και οι ενώσεις τους. Αυτή η τοπολογία μετατρέπει τις απεικονίσεις ϕ_α σε ομοιομορφισμούς μεταξύ των ανοιχτών συνόλων στην \mathcal{M} και ανοιχτών συνόλων στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n . Αυτός είναι και ο λόγος που λέμε ότι μια πολλαπλότητα μοιάζει τοπικά με τον Ευκλείδειο χώρο: κάθε σημείο στην πολλαπλότητα έχει μια περιοχή ομοιομορφική με τον Ευκλείδειο χώρο.

Ο ορισμός της πολλαπλότητας που δόθηκε είναι πολύ γενικός και για να έχει φυσικό νόημα (ως χωρόχρονος), οι πολλαπλότητες με τις οποίες θα ασχοληθούμε θα είναι συνεκτικές, Hausdorff (διαφορετικά στην πολλαπλότητα θα μπορούσαν να εμφανιστούν διακλαδώσεις και θα παραβιαζόταν η αρχή της τοπικότητας) και παρασυμπαγείς. Επίσης θα υποθέτουμε ότι είναι τάξης C^∞ (και λέγονται λείες πολλαπλότητες).

2.1.2 Διανύσματα και τανυστές

Μια C^k καμπύλη $\gamma(t)$ στην πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι μια απεικόνιση $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ από κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας \mathbb{R} στην \mathcal{M} .

Το εφαπτόμενο (ανταλλοιώτο) διάνυσμα $(\partial/\partial t)_\gamma|_{t_0}$ στο σημείο $\gamma(t_0)$ της C^1 καμπύλης $\gamma(t)$, είναι ένας (διαφορικός) τελεστής που απεικονίζει κάθε συνάρτηση f στο σημείο $\gamma(t_0)$ σε αριθμό $(\partial f/\partial t)_\gamma|_{t_0}$. Δηλαδή το $(\partial f/\partial t)_\gamma|_{t_0}$ είναι η παράγωγος, ως προς την παράμετρο t , της f στην διεύθυνση της $\gamma(t)$.

Αν $\{x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t))\}$ είναι κάποιες τοπικές συντεταγμένες στην περιοχή του $p = \gamma(t_0)$, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη γ στο σημείο p ορίζεται μέσω της δράσης στην συνάρτηση f :

$$\dot{\gamma}_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_\gamma \Big|_{t_0} = \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t_0)}$$

όπου στο δεξί μέλος έχουμε άθροισμα στους επαναλαμβανόμενους δείκτες j (σύμβαση άθροισης του Einstein). Επομένως, κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων των συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει για την περιοχή του σημείου αυτού

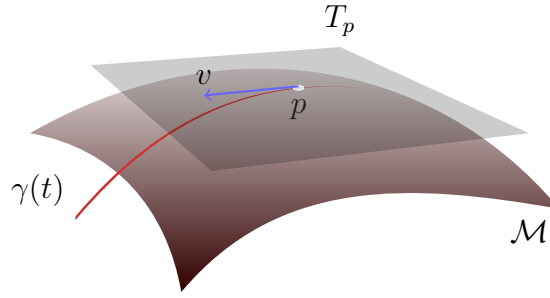
$$\mathbf{X} = X^1(\partial/\partial x^1)|_p + \dots + X^n(\partial/\partial x^n)|_p$$

Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επειδή

$$V^j \partial x^k / \partial x^j = 0 \Leftrightarrow V^k = 0, \quad \forall k$$

οπότε η σχέση $V^j(\partial/\partial x^j)|_p = 0$ ισχύει αν οι συντελεστές V^j είναι όλοι μηδέν.

Ο χώρος όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο p της πολλαπλότητας \mathcal{M} είναι ένας n -διάστατος διανυσματικός χώρος που ονομάζεται **εφαπτόμενος διανυσματικός χώρος** και συμβολίζεται με $T_p(\mathcal{M})$ ή απλώς T_p .



Σχήμα 2.1: Εφαπτόμενος χώρος $T_p(\mathcal{M})$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{V} \in T_p(\mathcal{M})$ κατά μήκος μιας καμπύλης γ που διέρχεται από το p .

Αν $\{\mathbf{E}_a\}$, $a = 1, \dots, n$, είναι μια βάση διανυσμάτων στο σημείο p , ένα οποιαδήποτε διάνυσμα $\mathbf{V} \in T_p$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{V} = V^a \mathbf{E}_a$. Μπορούμε να πάρουμε ως \mathbf{E}_a τα διανύσματα βάσης $(\partial/\partial x^j)|_p$ και έτσι οι συντελεστές V^i θα είναι $V^i = V(x^i) = (dx^i/dt)|_p$, δηλαδή παράγωγοι στην διεύθυνση του \mathbf{V} των συντεταγμένων x^i .

Μια **1-μορφή** (συναλλοίωτο διάνυσμα) ω στο σημείο p είναι μια πραγματική γραμμική συνάρτηση στον χώρο T_p των διανυσμάτων στο p . Αν $\mathbf{X} \in T_p$ τότε $\omega(\mathbf{X}) \mapsto \mathbb{R}$,

$$\omega(\mathbf{X}) \equiv \langle \omega, \mathbf{X} \rangle$$

και λόγω της γραμμικότητας

$$\langle \omega, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle$$

$$\langle \alpha \omega + \beta \eta, \mathbf{X} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \eta, \mathbf{X} \rangle$$

για κάθε 1-μορφή ω, η και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$.

Για κάθε δοσμένη βάση $\{\mathbf{E}_a\}$ στο p , μπορούμε να ορίσουμε ένα μοναδικό σύνολο 1-μορφών $\{\mathbf{E}^a\}$ τέτοιων ώστε το \mathbf{E}^i να απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{X} στην i -οστή συνιστώσα του X_i ως προς τη βάση $\{\mathbf{E}_a\}$. Δηλαδή $\langle \mathbf{E}^a, \mathbf{E}_b \rangle = \delta^a_b$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο $\{\mathbf{E}^a\}$ ως βάση των 1-μορφών καθώς μια οποιαδήποτε 1-μορφή ω μπορεί να γραφεί ως $\omega = \omega_i \mathbf{E}^i$, όπου οι αριθμοί ω_i ορίζονται ως $\langle \omega, \mathbf{E}_i \rangle = \langle \omega_i \mathbf{E}^i, \mathbf{E}_i \rangle = \omega_i \delta^i_i = \omega_i$. Επομένως το σύνολο όλων των 1-μορφών στο σημείο p αποτελούν έναν διανυσματικό χώρο στο p που ονομάζεται **δυϊκός χώρος** T_p^* του T_p . Για κάθε $\omega \in T_p^*$ και $\mathbf{X} \in T_p$ μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό $\langle \omega, \mathbf{X} \rangle$ ως

$$\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \langle \omega_i \mathbf{E}^i, X^i \mathbf{E}_i \rangle = \omega_i X^i$$

(Στην Κβαντομηχανική τα kets $|\psi\rangle$ θεωρούνται ως διανύσματα και τα bras $\langle\psi|$ ως 1-μορφές των οποίων η δράση στα kets συμβολίζεται με $\langle\psi, \psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$ και είναι το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)

Κάθε συνάρτηση f στην \mathcal{M} ορίζει μια 1-μορφή df στο σημείο p ως

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = X(f) \text{ , } \forall \mathbf{X} \in T_p$$

Η 1-μορφή df ονομάζεται **διαφορικό** της f . Αν (x^1, \dots, x^n) είναι κάποιες τοπικές συντεταγμένες και $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ η βάση του T_p , τότε

$$\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \partial x^i / \partial x^j = \delta^i_j$$

Δηλαδή τα διαφορικά (dx^1, \dots, dx^n) αποτελούν βάση του T_p^* των 1-μορφών στο p , δυϊκή ως προς τη βάση $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ των διανυσμάτων στο p . Οπότε το df στη βάση αυτή εκφράζεται ως

$$df = \langle df, \partial/\partial x^i \rangle dx^i = (\partial f/\partial x^i) dx^i$$

Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\partial/\partial x^i = \partial_i$ και $(df)_i = \partial_i f$.

Αν $df \neq 0$ τότε οι επιφάνειες ($f = \text{σταθερά}$) είναι $(n-1)$ -διάστατες πολλαπλότητες. Επειδή τα εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{X} \in T_p$ στις καμπύλες πάνω στην επιφάνεια ($f = \text{σταθερά}$) στο p ικανοποιούν τη σχέση $\langle df, \mathbf{X} \rangle = X(f) = X(\text{σταθερά}) = 0$, μπορούμε να φανταστούμε το df ως κάθετο στην επιφάνεια ($f = \text{σταθερά}$) στο σημείο p .

Από τους χώρους T_p^* και T_p σχηματίζουμε το Καρτεσιανό γινόμενο

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ φορές}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ φορές}}$$

που είναι ένα διατεταγμένο σύνολο $(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$ των 1-μορφών $\boldsymbol{\eta}$ και διανυσμάτων \mathbf{Y} .

Ως τανυστής \mathbf{T} τάξης (r, s) στο σημείο p ορίζεται η απεικόνιση από το Π_r^s στο \mathbb{R} :

$$\mathbf{T} : \Pi_r^s \ni (\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \mapsto \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \in \mathbb{R}$$

που είναι πολυγραμμική, δηλαδή γραμμική ως προς κάθε όρισμά της. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}, \dots, \mathbf{Y}_s) &= \alpha \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{X}, \dots, \mathbf{Y}_s) + \\ &+ \beta \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}, \dots, \mathbf{Y}_s) \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$.

Έτσι, ένα βαθμωτό είναι τανυστής τάξης $(0, 0)$, ένα διάνυσμα είναι τανυστής τάξης $(1, 0)$ (δηλαδή μια απεικόνιση από T_p^* στο \mathbb{R}) και μια 1-μορφή είναι τανυστής τάξης $(0, 1)$ (δηλαδή μια απεικόνιση από T_p στο \mathbb{R}).

Το σύνολο όλων των τανυστών τάξης (r, s) αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης n^{r+s} που συμβολίζεται με:

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes T_p \otimes \dots \otimes T_p}_{r \text{ φορές}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_{s \text{ φορές}}$$

Προσοχή: εδώ το r αναφέρεται στον αριθμό των χώρων T_p ενώ το s στον αριθμό των χώρων T_p^* , δηλαδή ανάποδα απ' ό τι στο Π_r^s , κάτι που έχει να κάνει με το πως οι τανυστές του $T_s^r(p)$ δρουν (έχουν ως όρισμα) στα στοιχεία του Π_r^s (οι 1-μορφές δρουν στα διανύσματα, οπότε πρέπει να έχουμε τον ίδιο αριθμό τους: $r-r$ και $s-s$). Για παράδειγμα, όπως είπαμε μια 1-μορφή στο p είναι τανυστής τάξης $(0, 1)$, με $r=0$ και $s=1$, επομένως ανήκει στο $T_1^0(p) = T_p^*$ και δρα στα στοιχεία του $\Pi_0^1 = T_p$, δηλαδή στα διανύσματα.

Η καινούργια πράξη \otimes ανάμεσα στους τανυστές ονομάζεται τανυστικό γινόμενο και ορίζεται ως εξής: αν \mathbf{T} είναι ένας τανυστής τάξης (r, s) και \mathbf{S} τάξης (p, q) , τότε ο $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$

είναι τανυστής τάξης $(r+p, s+q)$ που απεικονίζει τα στοιχεία $(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^{r+p}, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{s+q}) \in \Pi_{r+p}^{s+q}$ στον αριθμό

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \dots, \boldsymbol{\eta}^{r+p}, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s, \dots, \mathbf{Y}_{s+q}) \\ = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}^{r+1}, \dots, \boldsymbol{\eta}^{r+p}, \mathbf{Y}_{s+1}, \dots, \mathbf{Y}_{s+q}) \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν έχουμε δύο διανύσματα $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_0^1(p) = T_p$ (τανυστές τάξης $(1, 0)$), τότε ο τανυστής $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} \in T_0^2(p)$ έχει τάξη $(2, 0)$ και απεικονίζει το ζεύγος δύο αυθαίρετων 1-μορφών $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}) \in \Pi_2^0 = T_p^* \times T_p^*$ στον αριθμό

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}) = \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\omega} \rangle \langle \mathbf{Y}, \boldsymbol{\eta} \rangle$$

Τώρα με τη βοήθεια του τανυστικού γινομένου \otimes μπορούμε να κατασκευάσουμε μια βάση για τον χώρο όλων των τανυστών τάξης (r, s) . Αν $\{\mathbf{E}_a\}, \{\mathbf{E}^a\}$ είναι οι δυϊκές βάσεις των T_p, T_p^* αντίστοιχα, τότε το σύνολο των n^{r+s} τανυστών

$$\{\mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_r} \otimes \mathbf{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{b_s}\}, \quad a_i, b_j = 1, \dots, n$$

θα είναι βάση του χώρου όλων των τανυστών τάξης (r, s) . Έτσι, ένας αυθαίρετος τανυστής \mathbf{T} τάξης (r, s) μπορεί να εκφραστεί στη βάση αυτή ως:

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_r} \otimes \mathbf{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{b_s}$$

όπου $\{T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}\}$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή \mathbf{T} ως προς τις δυϊκές βάσεις $\{\mathbf{E}_a\}, \{\mathbf{E}^a\}$ και προκύπτουν από την δράση του \mathbf{T} πάνω στα $\{\mathbf{E}_a\}, \{\mathbf{E}^a\}$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{E}^{a_1}, \dots, \mathbf{E}^{a_r}, \mathbf{E}_{b_1}, \dots, \mathbf{E}_{b_s}) &= \\ &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_r} \otimes \mathbf{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{b_s}(\mathbf{E}^{a_1}, \dots, \mathbf{E}^{a_r}, \mathbf{E}_{b_1}, \dots, \mathbf{E}_{b_s}) \\ &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \langle \mathbf{E}^{a_1}, \mathbf{E}_{a_1} \rangle \dots \langle \mathbf{E}^{a_r}, \mathbf{E}_{a_r} \rangle \langle \mathbf{E}^{b_1}, \mathbf{E}_{b_1} \rangle \dots \langle \mathbf{E}^{b_s}, \mathbf{E}_{b_s} \rangle \\ &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \delta^{a_1}_{a_1} \dots \delta^{b_s}_{b_s} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = T(\mathbf{E}^{a_1}, \dots, \mathbf{E}^{a_r}, \mathbf{E}_{b_1}, \dots, \mathbf{E}_{b_s})$$

Επομένως η δράση του τανυστή \mathbf{T} σε ένα αυθαίρετο στοιχείο $(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$ του Π_r^s είναι:

$$T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \eta_{a_1}^1 \dots \eta_{a_r}^r Y_1^{b_1} \dots Y_s^{b_s}$$

όπου $\{\eta_{a_i}^i\}, \{Y_j^{b_j}\}$ είναι οι συνιστώσες των $\boldsymbol{\eta}^i, \mathbf{Y}_j$ ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{E}^a\}, \{\mathbf{E}_a\}$ αντίστοιχα. Αυτός ο ορισμός του τανυστή είναι ανεξάρτητος από σύστημα συντεταγμένων. Αν όμως για το σημείο $p \in \mathcal{M}$ μπορούν να βρεθούν κάποιες συντεταγμένες $\{x^a\}$, τότε θα θεωρούμε ως βάσεις των T_p και T_p^* τις βάσεις συντεταγμένων $\mathbf{E}_a = \partial_a$ και $\mathbf{E}^a = dx^a$ αντίστοιχα. Οπότε ο τανυστής θα γράφεται ως

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_r} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_s}$$

Συνήθως θα συμβολίζουμε τους τανυστές \mathbf{T} απλά με τις συνιστώσες τους $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$. Το ίδιο και οι σχέσεις μεταξύ των τανυστών θα εκφράζονται με τις συνιστώσες τους:

$$(T + T')^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + T'^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$$

$$(\alpha T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = \alpha T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$$

$$(T \otimes T')^{a_1 \dots a_{r+p}}_{b_1 \dots b_{s+q}} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} T'^{a_{r+1} \dots a_{r+p}}_{b_{s+1} \dots b_{s+q}}$$

Ας δούμε τώρα πως μετασχηματίζονται οι συνιστώσες ενός ταυυστή με αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Έστω $x^{a'} = x^{a'}(x^a)$ οι νέες συντεταγμένες στην περιοχή κάποιου σημείου p στην πολλαπλότητα \mathcal{M} . Τότε οι νέες βάσεις των T_p και T_p^* είναι οι $\mathbf{E}_{a'} = \partial_{a'}$ και $\mathbf{E}^{a'} = dx^{a'}$ αντίστοιχα. Οπότε

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_r} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_s}$$

$$= T^{a'_1 \dots a'_r}_{b'_1 \dots b'_s} \partial_{a'_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a'_r} \otimes dx^{b'_1} \otimes \dots \otimes dx^{b'_s}$$

Δηλαδή με την αλλαγή των συντεταγμένων ο ταυυστής δεν αλλάζει (αυτός είναι και ο λόγος που οι εξισώσεις στην $\Gamma\Theta\Sigma$ είναι ταυυστικές εξισώσεις επειδή γενικά στην $\Gamma\Theta\Sigma$ δεν υπάρχουν προτιμώμενα συστήματα συντεταγμένων). Επομένως για να ισχύει αυτό οι συνιστώσες του ταυυστή πρέπει να αλλάζουν:

$$T^{a'_1 \dots a'_r}_{b'_1 \dots b'_s} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_r}$$

$$\otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_s} (dx^{a'_1} \otimes \dots \otimes dx^{a'_r} \otimes \partial_{b'_1} \otimes \dots \otimes \partial_{b'_s})$$

$$= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \langle dx^{a'_1}, \partial_{a_1} \rangle \dots \langle dx^{a'_r}, \partial_{a_r} \rangle \langle dx^{b_1}, \partial_{b'_1} \rangle \dots \langle dx^{b_s}, \partial_{b'_s} \rangle$$

Επομένως ο νόμος μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός ταυυστή κατά την αλλαγή συντεταγμένων $x^a \rightarrow x^{a'}$ είναι:

$$T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \rightarrow T^{a'_1 \dots a'_r}_{b'_1 \dots b'_s} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \frac{\partial x^{a'_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{a'_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{b'_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial x^{b'_s}}$$

Ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα. Συναλλοίωτα διανύσματα:

$$\boldsymbol{\omega} \in T_p^* , \boldsymbol{\omega}(x^a) \rightarrow \boldsymbol{\omega}(x^{a'})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_a dx^a = \omega_{a'} dx^{a'}$$

$$\omega_{a'} = \omega_a dx^a(\partial_{a'}) = \omega_a dx^a(\partial_{a'}) \Rightarrow$$

$$\omega_{a'} = \omega_a \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$$

Διανύσματα:

$$\mathbf{V} \in T_p , \mathbf{V}(x^a) \rightarrow \mathbf{V}(x^{a'})$$

$$\mathbf{V} = V^a \partial_a = V^{a'} \partial_{a'}$$

$$V^{a'} = V^a \partial_{a'}(dx^{a'}) = V^a \partial_a(dx^{a'}) \Rightarrow$$

$$V^{a'} = V^a \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$$

Η **συστολή** (contraction) ενός ταυυστή \mathbf{T} τύπου (r, s) ως προς ένα πάνω δείκτη και ως προς ένα κάτω δείκτη ορίζεται ως η πράξη που μετατρέπει τον ταυυστή \mathbf{T} σε έναν ταυυστή $C(\mathbf{T})$ τύπου $(r-1, s-1)$:

$$C T^{a_1 \dots a_{r-1}}_{b_1 \dots b_{s-1}} = T^{a_1 \dots \sigma \dots a_r}_{b_1 \dots \sigma \dots b_s}$$

Δηλαδή αθροίζουμε ως προς ένα συναλλοίωτο και ένα ανταλλοίωτο δείκτη. Για παράδειγμα η συστολή ενός τανυστή T^a_b τύπου $(1, 1)$ δίνει ένα βαθμωτό: $T^a_a = T^1_1 + \dots + T^n_n$. Η συστολή είναι ανεξάρτητη συστήματος συντεταγμένων.

Το *συμμετρικό μέρος* ενός τανυστή \mathbf{T} τύπου $(2, 0)$ είναι τανυστής $S(\mathbf{T})$ που ορίζεται ως:

$$S(\mathbf{T})(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = \frac{1}{2!} \{T(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + T(\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1)\}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in T_p^*$$

Θα συμβολίζουμε τις συνιστώσες του $S(\mathbf{T})$ με $T^{(ab)}$:

$$T^{(ab)} = \frac{1}{2!} (T^{ab} + T^{ba})$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε το *αντισυμμετρικό μέρος* του T^{ab} με συνιστώσες:

$$T^{[ab]} = \frac{1}{2!} (T^{ab} - T^{ba})$$

Όλα αυτά γενικεύονται σε τανυστές με περισσότερους πάνω και κάτω δείκτες. Για παράδειγμα, έστω τανυστής T^a_{bcde} και το αντισυμμετρικό μέρος του ως προς τους δείκτες b, c, d είναι:

$$T^a_{[bcd]e} = \frac{1}{3!} (T^a_{bcde} + T^a_{dbce} + T^a_{cdbe} - T^a_{bdce} - T^a_{cbde} - T^a_{dcbe})$$

Ένας τανυστής θα λέγεται **συμμετρικός** ως προς κάποιους συγκεκριμένους πάνω και κάτω δείκτες αν ισούται με το συμμετρικό μέρος του ως προς τους δείκτες αυτούς. Αντίστοιχα θα λέγεται **αντισυμμετρικός** αν ισούται με το αντισυμμετρικό μέρος του ως προς τους συγκεκριμένους δείκτες. Για παράδειγμα ο τανυστής τύπου $(2, 0)$ είναι συμμετρικός αν $T_{ab} = T_{(ab)}$ ή $T_{[ab]} = 0$, που σημαίνει ότι $T_{ab} = T_{ba}$. Γενικά μπορούμε να γράψουμε $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$.

Τέλος ας ορίσουμε την έννοια του τανυστικού πεδίου στην πολλαπλότητα που επεκτείνει την έννοια του τανυστή σε ένα σημείο της πολλαπλότητας. **Τανυστικό πεδίο** είναι μια απεικόνιση που επισυνάπτει, σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας, έναν τανυστή. Έτσι για παράδειγμα το *διανυσματικό πεδίο* στην πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι μια απεικόνιση $\mathbf{X} : \mathcal{M} \rightarrow T(\mathcal{M})$ τέτοια ώστε $\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_p$ είναι ένα διάνυσμα στον εφαπτόμενο χώρο $T_p(\mathcal{M})$. Το $T(\mathcal{M})$ είναι η ένωση όλων των $T_p(\mathcal{M})$ σε κάθε σημείο της \mathcal{M} , δηλαδή $T(\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$, και ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** (tangent bundle).

2.1.3 p -μορφές και ολοκλήρωση

Μια σημαντική κατηγορία τανυστών είναι οι τανυστές τύπου $(0, p)$ που είναι αντισυμμετρικοί σε όλα τα p . Τέτοιοι τανυστές ονομάζονται **p -μορφές**. Δηλαδή αν $\boldsymbol{\omega}$ είναι μια p -μορφή, θα ισχύει ότι $\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}$. Έστω $\boldsymbol{\omega}$ μια p -μορφή και $\boldsymbol{\eta}$ μια q -μορφή. Τότε η $p+q$ -μορφή $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\eta}$, όπου \wedge είναι το αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο (wedge product), είναι ένας τανυστής τύπου $(0, p+q)$ με συνιστώσες που ορίζονται ως:

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\eta})_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 \dots a_p} \eta_{b_1 \dots b_q]}$$

Για παράδειγμα, αν ω και η είναι 1-μορφές, τότε

$$\omega \wedge \eta = \omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega,$$

$$(\omega \wedge \eta)_{km} = 2\omega_{[k}\eta_{m]} = \omega_k\eta_m - \omega_m\eta_k$$

Αν ω είναι 1-μορφή και η 2-μορφή, τότε

$$(\omega \wedge \eta)_{klm} = 3\omega_{[k}\eta_{lm]} = \frac{3}{6}(2\omega_k\eta_{lm} + 2\omega_l\eta_{mk} + 2\omega_m\eta_{kl}) = \omega_k\eta_{ml} + \omega_l\eta_{mk} + \omega_m\eta_{kl}$$

Αν ω είναι μια p -μορφή και η μια q -μορφή, τότε ισχύει ότι $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \omega$. Έστω $\{\mathbf{E}^a\}$ μια βάση των 1-μορφών, τότε οι μορφές $\mathbf{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{a_p}$ (το a_i τρέχει από 1 μέχρι n) αποτελούν βάση των p -μορφών, και έτσι κάθε p -μορφή ω γράφεται ως

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_p} \mathbf{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{a_p}, \quad a_1 > \dots > a_p$$

ή σε μια βάση συντεταγμένων

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} = \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{[a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p]}$$

Η αντισυμμετρικότητα των p -μορφών έχει ως συνέπεια ότι, για να έχει μη μηδενικό αποτέλεσμα η δράση μιας p -μορφής σε p διανύσματα, τα διανύσματα αυτά πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, επειδή σε μία n -διάστατη πολλαπλότητα ο αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι $\leq n$, θα είναι $p \leq n$. Επίσης, ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών μιας p -μορφής σε n -διάστατη πολλαπλότητα είναι $\binom{n}{p}$, δηλαδή ο χώρος των p -μορφών σε n διαστάσεις είναι $\binom{n}{p}$ -διάστατος. Για παράδειγμα, μια 2-μορφή ω σε 2 διαστάσεις γράφεται:

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$$

ενώ σε 3 διαστάσεις:

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1$$

Επομένως, μια n -μορφή σε μια n -διάστατη πολλαπλότητα έχει μόνο μία συνιστώσα και γράφεται ως:

$$\omega = \omega_{1 \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

όπου $\omega_{1 \dots n} = \omega(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n)$ και $\{\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n\}$ μια βάση στο T_p . Τώρα, επειδή $\omega \neq 0$, οι συνιστώσες $\omega_{1 \dots n} \neq 0$, και έτσι έχουμε δύο κλάσεις διανυσμάτων βάσεις στο p , μια για την οποία $\omega(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n) > 0$ και μια για την οποία $\omega(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n) < 0$. Αυτές οι δύο κλάσεις διανυσμάτων βάσεις είναι ανεξάρτητες της ω επειδή, αν ω' είναι μια άλλη μη μηδενική στο p n -μορφή, θα υπάρχει μια μη μηδενική συνάρτηση f τέτοια ώστε $\omega' = f\omega$. Οπότε, δύο βάσεις που κάτω από την ω δίνουν θετικό αριθμό, θα δίνουν αριθμό ίδιου προσήμου κάτω από την ω' . Άρα κάθε βάση ανήκει σε μια από τις δύο κλάσεις αυτές (και ονομάζονται δεξιόστροφα και αριστερόστροφα).

Μια πολλαπλότητα αυτή θα λέγεται **προσανατολίσιμη** αν υπάρχει ένα συνεχές πεδίο n -μορφής, παντού μη μηδενικό στην πολλαπλότητα. Αν επιλεγεί ένα τέτοιο

ω , η πολλαπλότητα λέγεται **προσανατολισμένη** και ο προσανατολισμός ορίζεται όπως είπαμε: αν $\omega(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n) > 0$, η βάση $\{\mathbf{E}_i\}$ είναι δεξιόστροφη (ή θετική), ενώ αν $\omega(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_n) < 0$ η βάση $\{\mathbf{E}_i\}$ είναι αριστερόστροφη (ή αρνητική), σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας. Έτσι μπορεί να επιλεγεί μια βάση που να έχει την ίδια χειραλικότητα (handedness) παντού στην πολλαπλότητα.

Ορίζουμε ως **στοιχείο όγκου** την n -μορφή:

$$\epsilon = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

που έχει ως συνιστώσες το σύμβολο Levi-Civita, $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$. Όμως το $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ δεν μετασχηματίζεται ως τανυστής και αποδεικνύεται ότι για να γίνει τανυστής πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}$, όπου g είναι η μετρική (την οποία θα μελετήσουμε αργότερα), δηλαδή ένας πίνακας $n \times n$ με στοιχεία $g_{\mu\nu} = \langle \partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu \rangle$. Έτσι, σε μια δεξιόστροφη συντεταγμένη βάση, το στοιχείο όγκου παίρνει την μορφή:

$$\epsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Συνήθως ο προσανατολισμός μιας πολλαπλότητας εφοδιασμένης με μετρική δίνεται από ένα τέτοιο μετρικό στοιχείο όγκου.

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την ολοκλήρωση ενός πεδίου n -μορφής ω πάνω σε μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα. Για ευκολία θεωρούμε ολοκλήρωση πάνω σε έναν χάρτη της πολλαπλότητας (U, ϕ) . Το ολοκλήρωμα

$$\int_U \omega = \int_U \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ορίζεται μέσω του αντίστοιχου συνήθους n -διάστατου ολοκληρώματος στον $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\int_U \omega = \int_{\phi(U)} \omega_{1\dots n}(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

Κάνοντας χρήση του μετρικού στοιχείου όγκου ϵ , η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης f πάνω στην προσανατολισμένη πολλαπλότητα ορίζεται ως ολοκλήρωση της n -μορφής $f\epsilon$:

$$\int_U f\epsilon = \int_{\phi(U)} f(x^1, \dots, x^n) \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n$$

Οπότε ο όγκος της U είναι απλώς $\int_U \epsilon = \int_U \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n$.

Το **εξωτερικό γινόμενο** (exterior derivative) d ορίζεται ως τελεστής που δρα σε μια p -μορφή και δίνει μια $(p+1)$ -μορφή. Ισχύουν τα παρακάτω:

$$df = \partial_i f dx^i$$

όπου f είναι μια βαθμωτή συνάρτηση (ή 0-μορφή) και το df το γνωστό μας διαφορικό (1-μορφή) που είχαμε ορίσει. Πιο γενικά, αν ω είναι μια p -μορφή, τότε:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}) = d\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \\ &= \partial_k \omega_{a_1 \dots a_p} dx^k \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \end{aligned}$$

$$d(d\omega) = d^2 = 0$$

Τέλος, ας δούμε τη γενίκευση του γνωστού θεωρήματος **Stokes** που γίνεται με τη βοήθεια των διαφορικών μορφών. Έστω μια n -διάστατη προσανατολισμένη πολλαπλότητα \mathcal{M} με σύνορο $\partial\mathcal{M}$ και έστω ω μια $(n-1)$ -μορφή στην \mathcal{M} . Τότε

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

Όλα τα γνωστά θεωρήματα Green, Gauss και Stokes στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο είναι ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου θεωρήματος αυτού.

2.1.4 Διαφορίσιμες απεικονίσεις στις πολλαπλότητες

Στα προηγούμενα είδαμε ότι μια βαθμωτή συνάρτηση (ή πεδίο) f στην πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι μια διαφορίσιμη (C^∞) απεικόνιση $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Ωστόσο αυτός ο ορισμός είναι πολύ γενικός, και για να έχει πρακτική χρησιμότητα εισάγουμε κάποιες συντεταγμένες στην πολλαπλότητα ώστε να μπορούμε να ξεχωρίζουμε τα σημεία της και να προσδώσουμε νόημα στην f . Έτσι σε κάθε συντεταγμένη περιοχή U της \mathcal{M} , με την αντίστοιχη συντεταγμένη συνάρτηση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\phi(p) = \{x^\mu\}$, $p \in U$, κατασκευάζουμε την απεικόνιση

$$f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \supseteq \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

δηλαδή $f \circ \phi^{-1}(x^\mu) = f(\phi^{-1}(x^\mu))$, $x^\mu \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται *τοπική παράσταση της f στο σημείο $p \in \mathcal{M}$* και θα γράφουμε $f(x^\mu) = f \circ \phi^{-1}(x^\mu)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $f : \mathcal{M} \ni p \mapsto f(p) \in \mathcal{N}$, όπου \mathcal{M} είναι μια m -διάστατη πολλαπλότητα και \mathcal{N} μια n -διάστατη πολλαπλότητα. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) των \mathcal{M} και \mathcal{N} αντίστοιχα. Τότε με τη βοήθεια των χαρτών αυτών μπορούμε να κατασκευάσουμε την απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \supseteq \phi(U \cap \psi^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Αν $\phi(p) = \{x^\mu\}$, $p \in U$ και $\psi(f(p)) = \{y^a\}$, $f(p) \in V$, τότε θα συμβολίζουμε την $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ με $y^a = f^a(x^\mu)$ (τοπική συντεταγμένη παράσταση της f). Αν η $f^a(x^\mu)$ είναι C^∞ ως προς κάθε x^μ , τότε η f είναι *διαφορίσιμη* στο p . Η $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ λέγεται **C^r διαφορομορφισμός** (diffeomorphism) αν είναι “ένα προς ένα” C^r απεικόνιση και η αντίστροφη της, h^{-1} , είναι μια C^r απεικόνιση.

Έστω μια διαφορίσιμη απεικόνιση $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ και γ μια C^∞ καμπύλη στην \mathcal{M} . Τότε η $h(\gamma)$ είναι C^∞ καμπύλη στην \mathcal{N} . Η h επάγει μια διαφορίσιμη απεικόνιση h_* (που λέγεται **push-forward**)

$$h_* : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_{h(p)}(\mathcal{N})$$

η οποία απεικονίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $p \in \mathcal{M}$, σε εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $h(p) \in \mathcal{N}$. Για να δούμε πως ακριβώς ορίζεται η h_* , θεωρούμε μια C^∞ βαθμωτή απεικόνιση στην \mathcal{N} , $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η $f \circ h$ είναι C^∞ βαθμωτή απεικόνιση στην \mathcal{M} , $f \circ h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $\mathbf{X}_p \in T_p(\mathcal{M})$, τότε η h_* ορίζεται μέσω της δράσης του $h_*\mathbf{X}_p \in T_{h(p)}$ πάνω στην βαθμωτή συνάρτηση f :

$$(h_*\mathbf{X}_p)f = \mathbf{X}_p(f \circ h)$$

η οποία είναι γραμμική. Έχοντας ορίσει την απεικόνιση μεταξύ διανυσμάτων δυο πολλαπλοτήτων μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να ορίσουμε την απεικόνιση μεταξύ διϊκών διανυσμάτων (1-μορφών) δυο πολλαπλοτήτων, $h^* : T_{h(p)}^*(\mathcal{N}) \rightarrow T_p^*(\mathcal{M})$, που λέγεται **pull-back** (βλέπουμε ότι η απεικόνιση αυτή πάει ανάποδα, από την \mathcal{N} στην \mathcal{M}). Αν $\omega \in T_{h(p)}^*(\mathcal{N})$, τότε η h^* ορίζεται ως:

$$(h^*\omega)\mathbf{X}_p = \omega(h_*\mathbf{X}_p)$$

Αν η h είναι ένας διαφορομορφισμός, η h_* απεικονίζει το $T_p(\mathcal{M})$ σε $T_{h(p)}(\mathcal{N})$ και η $(h^{-1})^*$ απεικονίζει το $T_p^*(\mathcal{M})$ σε $T_{h(p)}^*(\mathcal{N})$. Έτσι μπορούμε να γενικεύσουμε την h_* σε μια απεικόνιση από ταυιστές τύπου (r, s) στην \mathcal{M} σε ταυιστές τύπου (r, s) στην \mathcal{N} , δηλαδή $h_* : T_s^r(p) \rightarrow T_s^r(h(p))$, ως εξής:

$$T(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)|_p = h_*T[(h^{-1})^*\boldsymbol{\eta}^1, \dots, (h^{-1})^*\boldsymbol{\eta}^r, h_*\mathbf{X}_1, \dots, h_*\mathbf{X}_s]|_{h(p)}$$

για κάθε $\mathbf{X}_i \in T_p$ και $\boldsymbol{\eta}^i \in T_p^*$.

2.1.5 Ολοκληρωτικές καμπύλες και ροή διανυσματικού πεδίου

Για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} υπάρχει μοναδική οικογένεια καμπυλών στην \mathcal{M} , τέτοια που σε κάθε σημείο $p \in \mathcal{M}$ το διάνυσμα \mathbf{X} συμπίπτει με το εφαπτόμενο διάνυσμα επί της καμπύλης που περνάει από το σημείο αυτό, δηλαδή $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$. Οι καμπύλες αυτές λέγονται **ολοκληρωτικές καμπύλες** του διανυσματικού πεδίου \mathbf{X} και είναι λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = X^i(x^m(t)) \quad , \quad x^i(0) = x_{p_0}^i$$

όπου οι $x^m(t)$ είναι οι συντεταγμένες της ολοκληρωτικής καμπύλης γ και X^i οι συνιστώσες του \mathbf{X} , σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Το $x^i(0) = x_{p_0}^i$ είναι η αρχική συνθήκη $\gamma(0) = p_0$.

Αν $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathcal{M}$ και $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathcal{M}$ είναι δύο ολοκληρωτικές καμπύλες με την ίδια αρχική συνθήκη p_0 , δηλαδή για $t = 0$ διέρχονται από το p_0 , τότε $\gamma_1 = \gamma_2$ στο $I_1 \cap I_2$. Όλες τέτοιες ολοκληρωτικές καμπύλες $\{\gamma_k : I_k \rightarrow \mathcal{M}\}_{k \in K}$ με την ίδια αρχική συνθήκη p , ορίζουν μια μοναδική μέγιστη (maximal) καμπύλη $\gamma_p : I(p) \rightarrow \mathcal{M}$, όπου $I(p) = \cup_{k \in K} I_k$, τέτοια ώστε $\gamma_p(t) = \gamma_k(t)$ όταν $t \in I_k$. Η καμπύλη γ_p λέγεται μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη επειδή έχει το μέγιστο πεδίο ορισμού $I(p)$.

Έστω \mathbf{X} ένα λείο διανυσματικό πεδίο και p_0 ένα σημείο στην πολλαπλότητα \mathcal{M} . Η **τοπική ροή** (local flow) που παράγεται από το πεδίο \mathbf{X} , ορίζεται ως η απεικόνιση $\sigma : I \times U \rightarrow \mathcal{M}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0 και U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο της \mathcal{M} που περιέχει το p_0 , τέτοια ώστε για κάθε $p \in U$, η καμπύλη $t \mapsto \sigma(t, p)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του \mathbf{X} με αρχική συνθήκη $\sigma(0, p) = p$. Οπότε, η τοπική ροή του \mathbf{X} είναι μια οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών για όλα τα σημεία σε ένα μικρό ανοιχτό σύνολο γύρω από το p_0 , τέτοια ώστε όλες οι καμπύλες αυτές να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού I , ανεξαρτήτως της αρχικής συνθήκης p . Μπορούμε να φανταστούμε την ροή ως εξής: καθώς το t (πχ. χρόνος) μεταβάλλεται, η $\sigma(t, p)$ δίνει τη θέση στη συγκεκριμένη μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma_p(t)$ του \mathbf{X} που περνάει

από το σημείο p . Έτσι αν για $t = 0$ βρισκόμαστε σε κάποιο σημείο $p = \sigma(0, p) = \gamma_p(0)$, τη χρονική στιγμή t θα βρισκόμαστε στο σημείο $\sigma(t, p) = \gamma_p(t)$. Στην περίπτωση που η απεικόνιση σ ορίζεται σε όλη την πολλαπλότητα \mathcal{M} και για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, καλείται *ολική ροή* και το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο καλείται *πλήρες*. Αν η πολλαπλότητα είναι συνεκτική, κάθε διανυσματικό πεδίο είναι πλήρες.

Θεωρώντας το t ως παράμετρο, η ροή $\sigma(t, p)$ είναι ένας διαφορομορφισμός από το \mathcal{M} στο \mathcal{M} :

$$\sigma_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad p \mapsto \sigma_t(p) = \gamma_p(t) = \sigma(t, p)$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\sigma_0(p) = p$$

$$\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$$

$$\sigma_t^{-1} = \sigma_{-t}$$

για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$. Η οικογένεια των ροών $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ που παράγονται από το διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} καλείται *μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών* και το διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} είναι ο απειροστός γεννήτορας της ομάδας αυτής, διότι για απειροστό $t = \epsilon$ έχουμε τον απειροστό μετασχηματισμό:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon X^\mu$$

όπου $x'^\mu = \sigma^\mu(\epsilon, p)$, $x^\mu = \sigma^\mu(0, p)$. Από το ανάπτυγμα Taylor της ροής $\sigma^\mu(t, p)$ γύρω από το $t = 0$ παίρνουμε την εκθετοποίηση του διανυσματικού πεδίου \mathbf{X} :

$$\sigma^\mu(t, p) = \sigma^\mu(0, p) + t \left. \frac{d\sigma^\mu(s, p)}{ds} \right|_{s=0} + \dots = \exp\left(t \frac{d}{ds}\right) \sigma^\mu(s, p)|_{s=0}$$

και έτσι η ροή γράφεται:

$$\sigma^\mu(t, p) = \exp(t\mathbf{X})x^\mu$$

2.1.6 Παράγωγος Lie

Μέχρι τώρα είδαμε πως να παραγωγίζουμε βαθμωτά πεδία στις πολλαπλότητες. Όμως στην παραγωγή των διανυσματικών πεδίων (ή και πιο γενικά, ταυστικών πεδίων) πάνω στις πολλαπλότητες υπάρχει πρόβλημα: η παραγωγή σημαίνει σύγκριση τιμών του πεδίου σε δυο διαφορετικά κοντινά σημεία της πολλαπλότητας, κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε για δύο διανύσματα επειδή αυτά θα βρίσκονται σε διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους της πολλαπλότητας. Ωστόσο, αν υπάρχει ένα δεύτερο διανυσματικό πεδίο πάνω στην πολλαπλότητα, μπορούμε να ορίσουμε την παραγωγή του πρώτου πεδίου στην κατεύθυνση του δεύτερου πεδίου. Αυτή είναι η λεγόμενη Lie παράγωγος.

Έστω $q = \sigma_{-dt}(p)$ έτσι ώστε $p = \sigma_{dt}(q)$. Το σ_{dt^*} απεικονίζει το ταυστικό πεδίο \mathbf{T} τύπου (r, s) στο q σε ταυστικό πεδίο $\sigma_{dt^*}\mathbf{T}$ στο p . Αυτό μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές του ταυστικού πεδίου στο q και στο p . Η **παράγωγος Lie** $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ του ταυστικού πεδίου \mathbf{T} ως προς ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} ορίζεται ως

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}|_p = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{T}|_p - \sigma_{dt^*}\mathbf{T}|_q}{dt} \right]$$

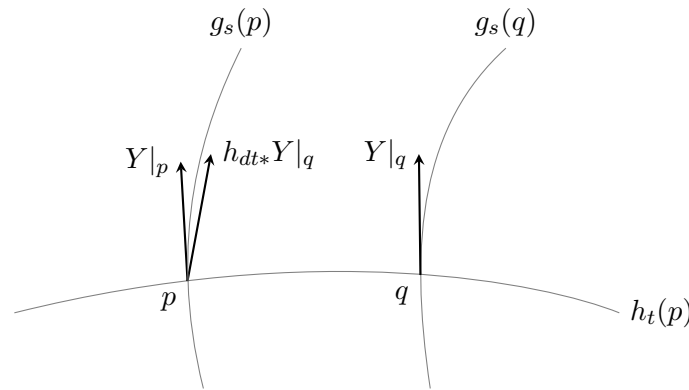
Το $\mathcal{L}_X \mathbf{T}$ είναι τανυστής του ίδιου τύπου (r, s) με τον \mathbf{T} και είναι γραμμικός: $\mathcal{L}_X(a\mathbf{T} + b\mathbf{S}) = a\mathcal{L}_X(\mathbf{T}) + b\mathcal{L}_X(\mathbf{S})$ και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz: $\mathcal{L}_X(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) = \mathcal{L}_X(\mathbf{T}) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \mathcal{L}_X(\mathbf{S})$.

Η παράγωγος Lie της βαθμωτής συνάρτησης $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς το διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} είναι:

$$\mathcal{L}_X f = \mathbf{X}f = X^\mu \partial_\mu f$$

Ενώ η παράγωγος Lie ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{Y} ως προς ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} είναι:

$$\mathcal{L}_X \mathbf{Y}|_p = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{Y}|_p - \sigma_{dt*} \mathbf{Y}|_q}{dt} \right]$$



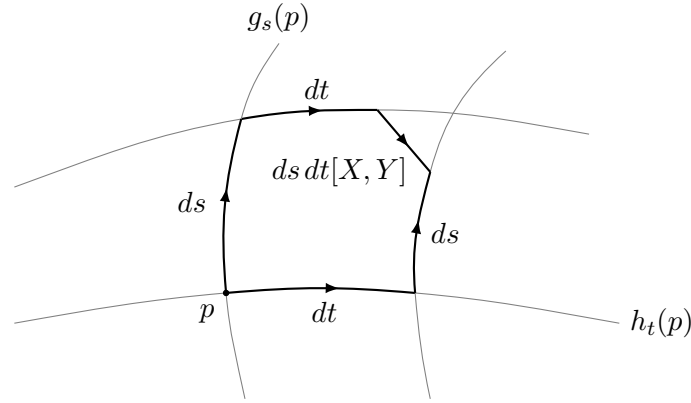
Σχήμα 2.2: Το τ_s είναι η ροή του διανυσματικού πεδίου \mathbf{Y} και το σ_t του \mathbf{X} .

Αποδεικνύεται ([21]) ότι η παράγωγος Lie ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{Y} ως προς ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} είναι ο μεταθέτης των \mathbf{X} και \mathbf{Y} :

$$\mathcal{L}_X \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

Κανένα από τα $X\mathbf{Y}$ και $\mathbf{Y}X$ δεν είναι διανυσματικό πεδίο επειδή περιέχουν παραγώγους δεύτερης τάξης. Ωστόσο στον μεταθέτη $[X, \mathbf{Y}]$ οι παράγωγοι δεύτερης τάξης από τα $X\mathbf{Y}$ και $\mathbf{Y}X$ αλληλοαναιρούνται και μένουν μόνο οι παράγωγοι πρώτης τάξης, με αποτέλεσμα ο μεταθέτης να είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Σε κάποιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $\{\partial_\mu\}$, οι συνιστώσες της παραγώγου Lie είναι:

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{Y})^\mu = [X, \mathbf{Y}]^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu$$



Σχήμα 2.3: Γεωμετρική ερμηνεία του μεταθέτη $[X, Y] \neq 0$.

Η παράγωγος Lie ενός τανυστικού πεδίου τύπου (r, s) ως προς ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} είναι:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= X^c (\partial_c T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}) \\
 &\quad - (\partial_c X^{a_1}) T^{ca_2 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} - \dots - (\partial_c X^{a_r}) T^{a_1 \dots a_{r-1} c}_{b_1 \dots b_s} \\
 &\quad + (\partial_{b_1} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{cb_2 \dots b_s} + \dots + (\partial_{b_s} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_{s-1} c}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.7 Μετρικός τανυστής

Στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n το εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε δυο διανύσματα \mathbf{X} και \mathbf{Y} ορίζεται ως $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$, όπου X_i, Y_i είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών. Η γενίκευση του εσωτερικού γινομένου σε αυθαίρετες πολλαπλότητες γίνεται με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή. Η έννοια της μετρικής είναι πολύ σημαντική, καθώς μας επιτρέπει να μετράμε διάφορες γεωμετρικές ποσότητες, όπως αποστάσεις, γωνίες, εμβαδά και όγκους, πάνω στις πολλαπλότητες.

Έστω \mathcal{M} μια διαφορίσιμη (λεία) πολλαπλότητα. Η **μετρική Riemann** g στην \mathcal{M} είναι μία λεία απεικόνιση η οποία σε κάθε σημείο $p \in \mathcal{M}$ αντιστοιχεί ένα εσωτερικό γινόμενο $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_p(\mathcal{M})$,

$$g_p : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$$

Η μετρική g είναι τανυστικό πεδίο τύπου $(0, 2)$ στην \mathcal{M} και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες σε κάθε σημείο p της \mathcal{M} :

- (i) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$,
- (ii) $g_p(X, X) \geq 0$, με ισότητα μόνο όταν $X = 0$.

για κάθε $X, Y \in T_p(\mathcal{M})$. Η μετρική g καλείται **pseudo-Riemannian** αν δεν είναι απαραίτητα θετικά ορισμένη (ιδιότητα (ii)) αλλά είναι μη-εμφυλισμένη:

- (ii') Αν $g_p(X, Y) = 0, \forall X \in T_p(\mathcal{M})$, τότε $Y = 0$.

Θα μας απασχολήσουν μόνο οι pseudo-Riemannian μετρικές.

Έστω ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^\mu\}$ στην \mathcal{M} . Το g στο σημείο p , ως ταυιστής τύπου $(0, 2)$, γράφεται ως

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.2)$$

Οι συντελεστές του g ως προς τη συντεταγμένη βάση $\{\partial/\partial x^\mu\}$ του $T_p(\mathcal{M})$ είναι:

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)$$

Συνήθως θα παραλείπουμε τους δείκτες p και απλώς θα γράφουμε $g_{\mu\nu}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα $g_{\mu\nu}$ ως στοιχεία ενός $n \times n$ πίνακα. Ο πίνακας αυτός είναι μεγίστου βαθμού (καθώς η μετρική g είναι μη-εκφυλισμένη) και επομένως υπάρχει ο αντίστροφος του, με στοιχεία $g^{\mu\nu}$ τέτοια ώστε:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$$

Ο αντίστροφος $g^{\mu\nu}$ του g είναι ταυιστής τύπου $(2, 0)$. Οι ταυιστές $g_{\mu\nu}$ και $g^{\mu\nu}$ δίνουν έναν ισομορφισμό ανάμεσα στους χώρους $T_p(\mathcal{M})$ και $T_p^*(\mathcal{M})$, τέτοιο ώστε

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu, \quad X^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu, \quad \omega \in T_p^*(\mathcal{M}), X \in T_p(\mathcal{M})$$

δηλαδή με τη βοήθεια τους μπορούμε να “ανεβοκατεβάζουμε” τους δείκτες των ταυιστών. Επίσης

$$T^a{}_b = g^{ac} T_{cb}, \quad T_a{}^b = g^{bc} T_{ac}, \quad T^{ab} = g^{ac} g^{bd} T_{cd}$$

Το **στοιχείο μήκους** ds (μήκος του απειροστού τόξου που αντιστοιχεί στη μετατόπιση $x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu$) προκύπτει αν δράσουμε με την g πάνω στο διάνυσμα της απειροστής μετατόπισης $dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_p(\mathcal{M})$:

$$ds^2 = g \left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu g \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \Rightarrow$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

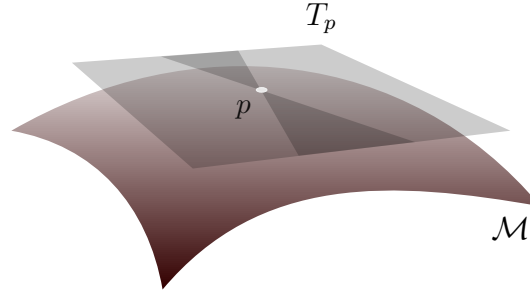
Αυτός είναι και ο κλασικός συμβολισμός της μετρικής 2.2 που θα χρησιμοποιούμε κι εμείς.

Αν η μετρική είναι Riemannian τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι θετικές, ενώ αν είναι pseudo-Riemannian τότε κάποιες από αυτές μπορεί να είναι αρνητικές. Γενικά μπορεί να υπάρχουν i θετικές ιδιοτιμές και $j = n - i$ αρνητικές ιδιοτιμές, και το ζεύγος (i, j) καλείται δείκτης της μετρικής. Στην περίπτωση που $j = 1$, έχουμε τη **μετρική Lorentz**. Κάθε μετρική μπορεί να διαγωνοποιηθεί τοπικά με επιλογή κατάλληλων συντεταγμένων, αφού ο 4×4 πίνακας $g_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός, έτσι ώστε τα στοιχεία της διαγωνίου της να είναι ± 1 (πολλαπλασιάζοντας την διαγωνοποιημένη μετρική με κάποιον σταθερό συντελεστή). Έτσι, μια Riemannian μετρική μπορεί να αναχθεί σε Ευκλείδεια μετρική $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$ και μια μετρική Lorentz σε μετρική Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Είναι όμως φανερό ότι δεν μπορούν να βρεθούν μοναδικές συντεταγμένες στις οποίες η μετρική να είναι επίπεδη για όλο τον καμπυλωμένο χώρο. Αν κάτι τέτοιο ήταν εφικτό θα σήμαινε ότι ο χώρος είναι επίπεδος.

Με τη μετρική Lorentz στην \mathcal{M} , τα μη μηδενικά διανύσματα $X \in T_p(\mathcal{M})$ στο σημείο $p \in \mathcal{M}$ χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- (i) $g_p(X, X) < 0 \rightarrow X$ χρονοειδές διάνυσμα,
- (ii) $g_p(X, X) = 0 \rightarrow X$ φωτοειδές διάνυσμα,
- (iii) $g_p(X, X) > 0 \rightarrow X$ χωροειδές διάνυσμα.

Τα χρονοειδή και τα φωτοειδή διανύσματα αποτελούν το σύνολο των αιτιακών διανυσμάτων ($g_p(X, X) \leq 0$). Τα φωτοειδή διανύσματα σχηματίζουν (διπλό) κώνο στο $T_p(\mathcal{M})$ που διαχωρίζει τα χρονοειδή από τα χωροειδή διανύσματα.



Σχήμα 2.4: Διπλός “κώνος” φωτός στο T_p .

2.1.8 Παράλληλη μετατόπιση και συναλλοίωτη παράγωγος

Η παράγωγος Lie \mathcal{L}_X που είδαμε δεν είναι αρκετή ώστε να χρησιμοποιηθεί ως γενίκευση της έννοιας της μερικής παραγωγίσισης επειδή εξαρτάται από την παραγωγή του ίδιου του διανυσματικού πεδίου X . Έτσι πρέπει να εισάγουμε αξιωματικά ένα άλλο είδος παραγωγίσισης, την λεγόμενη συναλλοίωτη παράγωγο. Άλλα για τον σκοπό αυτό χρειάζεται να εισάγουμε μια πρόσθετη δομή στην πολλαπλότητα, την **αφινική σύνδεση** ∇ , η οποία είναι μια απεικόνιση $\nabla : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, δηλαδή στέλνει κάθε ζεύγος λείων διανυσματικών πεδίων X και Y σε διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (iii) $\nabla_X(fY) = \nabla_X f Y + f\nabla_X Y = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

όπου X, Y, Z είναι λεία διανυσματικά πεδία και f, g είναι λείες συναρτήσεις στην πολλαπλότητα. Από την τρίτη ιδιότητα φαίνεται ότι το $\nabla_X Y$ στο σημείο p της πολλαπλότητας εξαρτάται από την τιμή του X στο p και τις τιμές του Y σε μια περιοχή του p . Το $\nabla_X Y$ καλείται **συναλλοίωτη παράγωγος** του Y στην κατεύθυνση του X . Επειδή η $\nabla_X Y$ δεν είναι γραμμική στο Y , το ∇ δεν είναι τανυστής. Ωστόσο η $\nabla_X Y$ είναι γραμμική στο X , έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον (1,1) τανυστή ∇Y που απεικονίζει το X σε διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$.

Έστω $\{E_a\}$ μια βάση για τα διανυσματικά πεδία. Επειδή το $\nabla_a E_b$ ($\nabla_a \equiv \nabla_{E_a}$) είναι διάνυσμα, θα υπάρχουν συντελεστές (βαθμωτά) Γ^c_{ba} τέτοιοι ώστε

$$\nabla_a E_b = \Gamma^c_{ab} E_c$$

$$\Gamma^c_{ab} = \langle \mathbf{E}^c, \nabla_a \mathbf{E}_b \rangle$$

Οι n^3 στο πλήθος συντελεστές (βαθμωτά) Γ^c_{ba} λέγονται **συντελεστές της σύνδεσης** και καθορίζουν πλήρως τη σύνδεση. Έστω $\mathbf{X} = X^a \mathbf{E}_a$ και $\mathbf{Y} = Y^b \mathbf{E}_b$, τότε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= \nabla_{X^a \mathbf{E}_a} (Y^b \mathbf{E}_b) = X^a \nabla_a (Y^b \mathbf{E}_b) \\ &= \mathbf{X} (Y^b) \mathbf{E}_b + X^a \nabla_a (\mathbf{E}_b) Y^b \\ &= [\mathbf{X} (Y^c) + \Gamma^c_{ab} X^a Y^b] \mathbf{E}_c \end{aligned}$$

και βλέπουμε ότι το $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ καθορίζεται πλήρως από τους συντελεστές της σύνδεσης. Οι συνιστώσες του $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ γράφονται ως

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})^c = [\mathbf{E}_a (Y^c) + \Gamma^c_{ab} Y^b] X^a \equiv Y^c_{;a} X^a$$

όπου $Y^c_{;a}$ είναι οι συνιστώσες του (1, 1) τανυστή $\nabla \mathbf{Y}$:

$$\nabla \mathbf{Y} = Y^c_{;a} \mathbf{E}^a \otimes \mathbf{E}_c$$

$$\nabla_a \mathbf{Y} = Y^c_{;a} \mathbf{E}_c$$

Αν ως βάση πάρουμε τη συντεταγμένη βάση $\{\partial/\partial x^a\}$, θα είναι:

$$Y^c_{;a} = \frac{\partial Y^c}{\partial x^a} + \Gamma^c_{ba} Y^b = Y^c_{,a} + \Gamma^c_{ba} Y^b$$

Με αλλαγή των συντεταγμένων $\{x^a\}$ σε $\{x^{a'}\}$ οι συντελεστές της σύνδεσης Γ^a_{bc} μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{bc} &\rightarrow \Gamma^{a'}_{b'c'} = \left\langle dx^{a'}, \nabla_{b'} \frac{\partial}{\partial x^{c'}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} dx^a, \nabla_{\frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \frac{\partial}{\partial x^b}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \frac{\partial}{\partial x^c} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} dx^a, \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^c} + \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \Gamma^a_{bc} \frac{\partial}{\partial x^a} \right\rangle \\ &= \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \left[\frac{\partial}{\partial x^b} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{c'}} \right) + \frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \Gamma^a_{bc} \right] \\ &= \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \left[\frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{b'} \partial x^{c'}} + \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \Gamma^a_{bc} \right] \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι λόγω του όρου $\frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{b'} \partial x^{c'}}$ οι συντελεστές σύνδεσης δεν μετασχηματίζονται ως συνιστώσες τανυστή και επομένως το Γ^a_{bc} δεν είναι τανυστής. Ωστόσο αν αφαιρέσουμε δύο τέτοιους συντελεστές μεταξύ τους ώστε να φύγουν οι όροι αυτοί, θα πάρουμε έναν τανυστή.

Ο ορισμός της συναλλοίωτης παραγώγου γενικεύεται σε τανυστικά πεδία τύπου (r, s) . Ας δούμε πρώτα την περίπτωση του συναλλοίωτου διανύσματος $\boldsymbol{\eta}$. Η δράση του στο διάνυσμα \mathbf{Y} είναι βαθμωτή συνάρτηση $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})$ για κάθε \mathbf{Y} , οπότε $\nabla_{\mathbf{X}}[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})] = \mathbf{X}[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})]$. Όμως από τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$\nabla_{\mathbf{X}}[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})] = (\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta})(\mathbf{Y}) + \boldsymbol{\eta}[\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})]$$

οπότε

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta})(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})] - \boldsymbol{\eta}[\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})]$$

για κάθε διάνυσμα \mathbf{Y} . Για $\mathbf{X} = \mathbf{E}_a$, $\mathbf{Y} = Y^b \mathbf{E}_b$ και $\boldsymbol{\eta} = \eta_c \mathbf{E}^c$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \boldsymbol{\eta})_b Y^b &= \mathbf{E}_a [Y^b \eta_b] - \eta_c [\nabla_a (Y^b \mathbf{E}_b)]^c \Rightarrow \\ (\nabla_a \boldsymbol{\eta})_b &= \mathbf{E}_a (\eta_b) - \Gamma^c_{ba} \eta_c \end{aligned}$$

Επομένως

$$\nabla_a \mathbf{E}^b = -\Gamma^b_{ca} \mathbf{E}^c$$

και στη συντεταγμένη βάση:

$$(\nabla_a \boldsymbol{\eta})_b \equiv \eta_{b;a} = \eta_{b,a} - \Gamma^c_{ba} \eta_c$$

Τώρα, στην περίπτωση ενός ταυυστή \mathbf{T} τύπου (r, s) έχουμε:

$$\begin{aligned} (\nabla_c \mathbf{T})^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &\equiv T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s, c} + \\ &+ \Gamma^{a_1}_{dc} T^{d \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \dots + \Gamma^{a_r}_{dc} T^{a_1 \dots a_{r-1} d}_{b_1 \dots b_s} - \\ &- \Gamma^d_{b_1 c} T^{a_1 \dots a_r}_{d \dots b_s} - \dots - \Gamma^d_{b_s c} T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_{s-1} d} \end{aligned}$$

Έστω μια καμπύλη $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ και \mathbf{Y} ένα διανυσματικό πεδίο επί της καμπύλης $\gamma(t)$:

$$\mathbf{Y}|_{\gamma(t)} = Y^\mu(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} |_{\gamma(t)}$$

Λέμε ότι το \mathbf{Y} είναι **παράλληλα μεταφερόμενο** κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ αν το \mathbf{Y} ικανοποιεί

$$\nabla_t \mathbf{Y} = 0, \quad \forall t \in I \quad (2.3)$$

όπου $\nabla_t \equiv \nabla_{\partial/\partial t}$. Αν $\mathbf{X} = \frac{dx^a(\gamma(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^a} |_{\gamma(t)}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\gamma(t)$, οι συνιστώσες του $\nabla_t \mathbf{Y}$ είναι :

$$(\nabla_t \mathbf{Y})^a = Y^a_{;b} X^b = Y^a_{,b} X^b + \Gamma^a_{bc} Y^c X^b$$

όπου $X^b = \frac{dx^b(\gamma(t))}{dt}$ και επομένως $Y^a_{,b} X^b = \frac{\partial Y^a}{\partial x^b} \frac{dx^b(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial Y^a}{\partial t}$. Έτσι η 2.3 γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial Y^a}{\partial t} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b(\gamma(t))}{dt} Y^c = 0$$

Η εξίσωση αυτή ουσιαστικά μας λέει ότι το διανυσματικό πεδίο \mathbf{Y} δεν μεταβάλλεται κατά το μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$.

Αν τώρα, το ίδιο το εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{X} στην καμπύλη $\gamma(t)$ είναι παράλληλα μεταφερόμενο κατά μήκος της $\gamma(t)$, δηλαδή:

$$\nabla_X \mathbf{X} = 0$$

τότε η καμπύλη $\gamma(t)$ ονομάζεται **γεωδαισιακή**. Οι γεωδαισιακές είναι κατά κάποιο τρόπο οι ευθυτέρες δυνατές καμπύλες πάνω στην πολλαπλότητα (για παράδειγμα οι μέγιστοι κύκλοι μιας σφαίρας είναι οι γεωδαισιακές της). Η εξίσωση της γεωδαισιακής καμπύλης μπορεί να γραφεί σε μορφή συνιστωσών:

$$X^a_{;b} X^b = X^a_{,b} X^b + \Gamma^a_{bc} X^c X^b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0} \quad (2.4)$$

όπου $\{x^a\}$ είναι οι συντεταγμένες της $\gamma(t)$. Η εξίσωση αυτή αποτελεί ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης για τις n συναρτήσεις $x^a(t)$, και ως γνωστών, αν μας δοθούν οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή ένα σημείο p και ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $V^a = dx^a/dt$ στο σημείο αυτό, υπάρχει πάντα μια μοναδική γεωδαισιακή που περνάει από το p και έχει ως εφαπτόμενο διάνυσμα στο p το V^a .

Μια πιο ασθηνής συνθήκη από την $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = 0$ είναι η $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = f\mathbf{X}$, όπου f είναι βαθμωτή συνάρτηση στην πολλαπλότητα. Δηλαδή απαιτούμε το μεταφερμένο \mathbf{X} να είναι το πολλαπλάσιο του \mathbf{X} . Όμως με κατάλληλη αναπαραμετροποίηση της καμπύλης $t \rightarrow v(t)$, τέτοια ώστε $d^2v/dt^2 = f dv/dt$, η συνθήκη αυτή δίνει την πρώτη. Αυτή η παράμετρος λέγεται **αφινική παράμετρος** και μάλιστα ισχύει ότι η $v' = av + b$ είναι επίσης αφινική παράμετρος.

Αν η πολλαπλότητα μας είναι εφοδιασμένη με μια μετρική g , απαιτούμε η σύνδεση να είναι τέτοια ώστε, αν δύο διανύσματα \mathbf{Y} και \mathbf{Z} μεταφερθούν παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης (οπότε $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} = 0$, όπου \mathbf{X} εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη), το εσωτερικό γινόμενο $g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ να παραμένει αμετάβλητο (έτσι ώστε το μέτρο των διανυσμάτων να είναι αναλλοίωτο κατά την παράλληλη μεταφορά τους). Δηλαδή θέλουμε να ισχύει

$$X^c \nabla_c (g_{ab} Y^a Z^b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$X^c [\nabla_c (g_{ab}) Y^a Z^b + g_{ab} \nabla_c (Y^a) Z^b + g_{ab} Y^a \nabla_c (Z^b)] = X^c Y^a Z^b \nabla_c (g_{ab}) = 0$$

για κάθε X, Y, Z . Επομένως

$$\nabla_c (g_{ab}) = g_{ab;c} = 0$$

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{da} = 0$$

Αν η εξίσωση αυτή ικανοποιείται, η σύνδεση ∇ ονομάζεται **μετρική σύνδεση**. Αν πάρουμε τις κυκλικές μεταθέσεις των (c, a, b) της τελευταίας εξίσωσης και τις συνδυάσουμε με κατάλληλο τρόπο, θα λάβουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$-\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} + T^d_{ca} g_{db} + T^d_{cb} g_{da} - 2\Gamma^d_{(ab)} g_{dc} = 0 \quad (2.5)$$

όπου

$$T^d_{ca} = 2\Gamma^d_{[ca]} = \Gamma^d_{ca} - \Gamma^d_{ac}$$

είναι οι συνιστώσες του **τανυστή στρέψης** που ορίζεται ως:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

Όμως θα ασχοληθούμε μόνο με συνδέσεις για τις οποίες $\mathbf{T} = 0$, έτσι ώστε η σύνδεση να είναι συμμετρική, $\Gamma^d_{ca} = \Gamma^d_{ac}$. Τέτοια σύνδεση ονομάζεται **σύνδεση Levi Civita**. Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι στην περίπτωση αυτή η 2.1, δηλαδή η παράγωγος Lie ενός τανυστικού πεδίου τύπου (r, s) ως προς ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{X} , γίνεται:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} X^c \\ &\quad - T^{ca_2 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} X^{a_1}_{;c} - \dots - T^{a_1 \dots a_{r-1} c}_{b_1 \dots b_s} X^{a_r}_{;c} \\ &\quad + T^{a_1 \dots a_r}_{cb_2 \dots b_s} X^c_{;b_1} + \dots + T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_{s-1} c} X^c_{;b_s} \end{aligned}$$

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)^d &= ([X, Y])^d = Y^d{}_{;c} X^c - X^d{}_{;c} Y^c \\ (\mathcal{L}_X T)_{ab} &= T_{ab;c} X^c + T_{cb} X^c{}_{;a} + T_{ac} X^c{}_{;b} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Τώρα, αν ο ταυιστής στρέψης είναι μηδέν, η 2.5 γίνεται:

$$\boxed{\Gamma^d{}_{(ab)} = \Gamma^d{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})} \quad (2.7)$$

και είναι οι συντελεστές της σύνδεσης Levi Civita που λέγονται **σύμβολα Christoffel**. Έτσι, για να μπορούμε να παίρνουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους, πρέπει πρώτα με τη βοήθεια της μετρικής $g_{\mu\nu}$ να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel.

2.1.9 Καμπυλότητα

Μεταφέροντας παράλληλα ένα εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{X}_p στην κλειστή καμπύλη γ , από το σημείο p πίσω στο p , εν γένει δεν θα πάρουμε το ίδιο διάνυσμα. Επίσης η παράλληλη μεταφορά εξαρτάται από την καμπύλη πάνω στην οποία γίνεται η μεταφορά. Αυτό έχει να κάνει με το ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι εν γένει δεν μετατίθενται. Για να μετρήσουμε αυτή τη μη-μεταθετικότητα, ορίζουμε τον **ταυιστή καμπυλότητας Riemann** ως

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$$

ή σε μορφή συνιστωσών:

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd} X^c Y^d Z^b &= (Z^a{}_{;d} Y^d)_{;c} X^c - (Z^a{}_{;d} X^d)_{;c} Y^c - Z^a{}_{;d} (Y^d{}_{;c} X^c - X^d{}_{;c} Y^c) \\ &= (Z^a{}_{;dc} - Z^a{}_{;cd}) X^c Y^d \end{aligned}$$

όπου $Z^a{}_{;dc} \equiv (Z^a{}_{;d})_{;c}$ και $([X, Y])^d = Y^d{}_{;c} X^c - X^d{}_{;c} Y^c$. Τώρα, επειδή η εξίσωση αυτή ισχύει για τυχαία X, Y , έχουμε:

$$R^a{}_{bcd} Z^b = Z^a{}_{;dc} - Z^a{}_{;cd}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τη μη-μεταθετικότητα της δεύτερης συναλλοίωτης παραγώγου του \mathbf{Z} συναρτήσει του ταυιστή Riemann.

Αποδεικνύεται ([25]) ότι στη βάση συντεταγμένων οι συντελεστές $R^a{}_{bcd}$ είναι:

$$\boxed{R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{db} - \partial_d \Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^a{}_{cf} \Gamma^f{}_{db} - \Gamma^a{}_{df} \Gamma^f{}_{cb}}$$

Βλέπουμε ότι

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc} \Leftrightarrow R^a{}_{b(cd)} = 0$$

και

$$R^a{}_{[bcd]} = 0 \Leftrightarrow R^a{}_{bcd} + R^a{}_{dbc} + R^a{}_{cdb} = 0$$

Επιπλέον, οι συναλλοίωτες παράγωγοι του ταυιστή Riemann ικανοποιούν τις λεγόμενες **ταυτότητες του Bianchi**:

$$R^a{}_{b[cd;e]} = 0 \Leftrightarrow R^a{}_{bcd;e} + R^a{}_{bec;d} + R^a{}_{bde;c} = 0$$

Μέσω της συστολής του τανυστή $R^a{}_{bcd}$ ως προς τον πρώτο και τον τρίτο δείκτη (τον δεύτερο κάτω δείκτη), καταλήγουμε στον $(0, 2)$ **τανυστή του Ricci**:

$$R_{bd} \equiv R^a{}_{bad} = R_{db}$$

Με ανάλογο τρόπο, υπολογίζουμε και το **βαθμωτό του Ricci**:

$$R \equiv g^{ab}R_{ab} = R^a{}_a$$

Μια σχέση που συνδέει τον τανυστή και το βαθμωτό του Ricci προκύπτει από τη συστολή των ταυτοτήτων του Bianchi ως προς το a και το e :

$$R^a{}_{bcd;a} + R^a{}_{bac;d} + R^a{}_{bda;c} = 0 \Leftrightarrow$$

$$R^a{}_{bcd;a} + R_{bc;d} - R_{bd;c} = 0$$

Το μείον στον τρίτο όρο οφείλεται στο ότι ο τανυστής Ricci προκύπτει με συστολή του πάνω δείκτη με τον δεύτερο κάτω δείκτη, επομένως πρέπει να κάνουμε τη μετάθεση $R^a{}_{bda;c} = -R^a{}_{bad;c}$ ώστε ο κάτω δείκτης a να έρθει στη δεύτερη θέση. Η περαιτέρω συστολή (πολλαπλασιασμός με g^{bd}) θα δώσει:

$$R^a{}_{c;a} + R^d{}_{c;d} - R_{;c} = 0 \Leftrightarrow 2R^a{}_{c;a} - R_{;c} = 0$$

ή αλλιώς

$$2\nabla_a R^a{}_c - \nabla_c R = 2\nabla^a R_{ac} - \nabla^a g_{ac}R = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nabla^a (R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ac}R) = 0$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε τον **τανυστή του Einstein**:

$$G_{ac} = R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ac}R \quad (2.8)$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και για τον οποίο ισχύουν οι συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi:

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (2.9)$$

2.1.10 Ισομετρίες και σύμμορφοι μετασχηματισμοί

Έστω (\mathcal{M}, g) μια ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα. Ο διαφορομορφισμός $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μια **ισομετρία** αν διατηρεί τη μετρική:

$$\phi_*g_p = g_{\phi(p)}$$

Οπότε η απεικόνιση $\phi_* : T_p \rightarrow T_{\phi(p)}$ διατηρεί το βαθμωτό γινόμενο:

$$g_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g_{\phi(p)}(\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y})$$

και επομένως διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων.

Αν για κάθε t οι διαφορομορφισμοί ϕ_t (ροές) που παράγονται από ένα διανυσματικό πεδίο ξ είναι ισομετρίες, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο ξ παράγει μια μονοπαραμετρική

ομάδα ισομετριών, το ξ καλείται **διανυσματικό πεδίο Killing**. Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος Lie της μετρικής ως προς το ξ είναι μηδέν:

$$\mathcal{L}_\xi g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g - \phi_* g) = 0$$

αφού $g - \phi_* g = 0$ για κάθε t . Από την 2.6 για $T_{ab} = g_{ab}$ και $X = \xi$ παίρνουμε:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = g_{ab;c} \xi^c + g_{cb} \xi^c{}_{;a} + g_{ac} \xi^c{}_{;b} = \xi_{b;a} + \xi_{a;b} \Rightarrow$$

$$\boxed{\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = \xi_{a,b} + \xi_{b,a} - 2\Gamma^c{}_{ab} \xi_c = 0}$$

όπου $g_{ab;c} = 0$ επειδή θεωρήσαμε ότι η σύνδεση ∇ είναι Levi-Civita και το πρόσημο μείον οφείλεται στο ότι το ξ έχει κάτω δείκτη (δες σελίδα 26). Αυτή είναι η **εξίσωση Killing** την οποία ικανοποιεί το διανυσματικό πεδίο Killing ξ . Αυτό που μας λείπει η εξίσωση Killing $\mathcal{L}_\xi g = 0$ είναι ότι καθώς κινούμαστε κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης του διανυσματικού πεδίου ξ , η τοπική γεωμετρία δεν αλλάζει (η μετρική μένει αναλλοίωτη), οπότε τα διανυσματικά πεδία Killing δείχνουν την διεύθυνση αυτής της συμμετρίας της πολλαπλότητας.

Η εξίσωση Killing είναι ανεξάρτητη της επιλογής των συντεταγμένων επειδή το $\mathcal{L}_\xi g$ είναι τανυστής και αν μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, θα μηδενίζεται και σε οποιαδήποτε άλλο. Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο Killing και Σ μια υπερεπιφάνεια (μια $(n-1)$ -διάστατη υποπολλαπλότητα μιας n -διάστατης πολλαπλότητας) τέτοια ώστε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του ξ να διαπερνά μόνο μια φορά την Σ . Έστω x^i οι συντεταγμένες στην Σ και (λ, x^i) οι συντεταγμένες ενός σημείου σε παραμετρική απόσταση λ στην ολοκληρωτική καμπύλη του ξ που ξεκινάει από ένα σημείο στην Σ με συντεταγμένες x^i . Τότε στο σύστημα συντεταγμένων αυτό είναι $\xi = \partial/\partial\lambda$ και η εξίσωση Killing ανάγεται στην $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \partial g_{ab}/\partial\lambda = 0$. Επομένως, αν υπάρχει ένα διάνυσμα Killing, μπορεί να βρεθεί ένα ειδικό σύστημα συντεταγμένων, τέτοιο ώστε η μετρική να είναι ανεξάρτητη από μια συγκεκριμένη συντεταγμένη x^k . Αντίστροφα, αν οι συντελεστές της μετρικής σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων είναι ανεξάρτητοι από μια συγκεκριμένη συντεταγμένη x^k , το διάνυσμα $\xi^\mu = \delta^\mu{}_k$ (εκφρασμένο στο σύστημα συντεταγμένων αυτό) θα είναι διάνυσμα Killing. Ο μετασχηματισμός $x^k \rightarrow x^k + \epsilon \xi^k$ (πχ. χωρική μεταφορά) θα αφήνει τη μετρική αμετάβλητη (είναι μια ισομετρία) με το αντίστοιχο διάνυσμα Killing να εκτείνεται κατά τη διεύθυνση αυτή.

Ο αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων Killing μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τη διάσταση του χώρου. Προφανώς ο γραμμικώς συνδυασμός των διανυσμάτων Killing είναι επίσης ένα διάνυσμα Killing, οπότε υπάρχουν άπειρα διανύσματα Killing, όμως ο μέγιστος αριθμός των ανεξάρτητων διανυσμάτων Killing που επιδέχεται μια n -διάστατη πολλαπλότητα είναι πεπερασμένος και αποδεικνύεται ότι είναι $n(n+1)/2$.

Για παράδειγμα, στον \mathbb{R}^2 η μετρική $ds^2 = dx^2 + dy^2$ είναι ανεξάρτητη των x και y , επομένως δύο (γραμμικώς ανεξάρτητα) διανύσματα Killing είναι τα $X^\mu = (1, 0)$ και $Y^\nu = (0, 1)$. Όμως ο επίπεδος χώρος \mathbb{R}^2 έχει επιπλέον και περιστροφική συμμετρία γύρω από την αρχή, κάτι που δεν φαίνεται από τη μετρική στην μορφή αυτή. Η περιστροφική αυτή συμμετρία φαίνεται αν γράψουμε τη μετρική σε πολικές συντεταγμένες: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$. Βλέπουμε αμέσως ότι είναι ανεξάρτητη από την γωνία ϕ και έτσι προκύπτει ένα τρίτο διάνυσμα Killing, $(-y, x)$ (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες), το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης (x, y) . Γενικεύοντας σε \mathbb{R}^n , έχουμε n διανύσματα Killing

$\xi_{(i)} = \partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, n$ για τις χωρικές μεταφορές και $n(n-1)/2$ διανύσματα Killing $x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ για τις στροφές σε κάθε επίπεδο (x^i, x^j) .

Ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα, το οποίο θα χρειαστούμε αργότερα, είναι η σφαίρα S^2 . Ως γνωστόν, η μετρική της μοναδιαίας σφαίρας, σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Οπότε έχουμε να λύσουμε το παρακάτω σύστημα τριών μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\xi_{a,b} + \xi_{b,a} - 2\Gamma^c_{ab}\xi_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_\theta \xi_\theta - \Gamma^c_{\theta\theta}\xi_c = 0 \\ \partial_\theta \xi_\phi + \partial_\phi \xi_\theta - 2\Gamma^c_{\theta\phi}\xi_c = 0 \\ \partial_\phi \xi_\phi - \Gamma^c_{\phi\phi}\xi_c = 0 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel από τη σχέση 2.7:

$$\Gamma^c_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^c_{\phi\phi} = -g^{c\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^c_{\theta\phi} = g^{c\phi} \sin \theta \cos \theta$$

Επομένως οι εξισώσεις Killing είναι:

$$\begin{aligned} \partial_\theta \xi_\theta &= 0 \\ \partial_\theta \xi_\phi + \partial_\phi \xi_\theta - 2 \cot \theta \xi_\phi &= 0 \\ \partial_\phi \xi_\phi + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\xi_\theta(\theta, \phi) = f(\phi)$. Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\xi_\phi(\theta, \phi) = -F(\phi) \sin \theta \cos \theta + g(\theta)$$

όπου F είναι η παράγουσα της f . Αντικαθιστούμε τώρα τις ξ_θ και ξ_ϕ στην δεύτερη εξίσωση:

$$\underbrace{\frac{df(\phi)}{d\phi} + F(\phi)}_{-C} + \underbrace{\frac{dg(\theta)}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta)}_C = 0$$

Επομένως έχουμε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d^2 f(\phi)}{d\phi^2} + f(\phi) = 0$$

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta) = C$$

Η πρώτη δίνει $f(\phi) = \xi_\theta = A \sin \phi + B \cos \phi$ και $F(\phi) = -A \cos \phi + B \sin \phi - C$. Μετά τον πολλαπλασιασμό της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης με τον ολοκληρώνοντα παράγοντα $1/\sin^2 \theta$ αυτή γίνεται:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} \right] = \frac{C}{\sin^2 \theta}$$

Ολοκληρώνοντάς την, βρίσκουμε $g(\theta) = (C_1 - C \cot \theta) \sin^2 \theta$. Οπότε

$$\xi_\phi = (A \cos \phi - B \sin \phi) \sin \theta \cos \theta + C_1 \sin^2 \theta$$

Ένα γενικό διάνυσμα Killing ξ είναι:

$$\xi = \xi^\theta \partial\theta + \xi^\phi \partial\phi$$

όπου

$$\begin{aligned}\xi^\theta &= g^{\theta i} \xi_i = \xi_\theta = A \sin \phi + B \cos \phi \\ \xi^\phi &= g^{\phi i} \xi_i = g^{\phi\phi} \xi_\phi = \frac{1}{\sin^2 \theta} \xi_\phi = (A \cos \phi - B \sin \phi) \cot \theta + c_1\end{aligned}$$

Επειδή υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες παράμετροι A, B, C , θα υπάρχουν τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα βάσης και το γενικό διάνυσμα Killing γράφεται:

$$\xi = -B\mathbf{L}_x + A\mathbf{L}_y + c_1\mathbf{L}_z$$

όπου τα διανύσματα βάσης \mathbf{L}_i είναι:

$$\mathbf{L}_x = -\cos \phi$$

$$\mathbf{L}_y = -\cos \phi$$

$$\mathbf{L}_z = \partial_\phi$$

είναι οι απειροστοί γεννήτορες των στροφών γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$ και είναι ακριβώς οι σχέσεις μετάθεσης της ομάδας $SO(3)$ των στροφών στις τρεις διαστάσεις.

Ο διαφορομορφισμός $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ λέγεται **σύμμορφος μετασχηματισμός** αν αφήνει αναλλοίωτη τη μορφή της μετρικής, πέραν της απόκτησης ενός παράγοντα κλίμακας:

$$\phi_* g_p = \Omega^2 g_{\phi(p)}$$

για κάποια μη μηδενική διαφορίσιμη συνάρτηση Ω . Οπότε για $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$:

$$g_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Omega^2 g_{\phi(p)}(\phi_* \mathbf{X}, \phi_* \mathbf{Y})$$

Λέμε ότι οι μετρικές g και \hat{g} είναι σύμμορφες αν

$$\hat{g} = \Omega^2 g$$

$$\hat{g}_{ab}(x) = \Omega(x)^2 g_{ab}(x)$$

Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$ ορίζεται ως

$$\cos \theta = \frac{g_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{g_p(\mathbf{X}, \mathbf{X})g_p(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}}$$

Οπότε αν ϕ είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός, η γωνία θ' μεταξύ των διανυσμάτων $\phi_* \mathbf{X}, \phi_* \mathbf{Y} \in T_{\phi(p)}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\cos \theta' = \frac{g_{\phi(p)}(\phi_* \mathbf{X}, \phi_* \mathbf{Y})}{\sqrt{g_{\phi(p)}(\phi_* \mathbf{X}, \phi_* \mathbf{X})g_{\phi(p)}(\phi_* \mathbf{Y}, \phi_* \mathbf{Y})}} = \frac{\Omega^{-2} g_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{\Omega^{-2} g_p(\mathbf{X}, \mathbf{X})\Omega^{-2} g_p(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}} = \cos \theta$$

επομένως ο ϕ διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων (αλλά, εν γένει, όχι το μήκος τους). Με άλλα λόγια, ο σύμμορφος μετασχηματισμός αλλάζει την κλίμακα αλλά όχι το σχήμα.

Αν (\mathcal{M}, g) είναι μια πολλαπλότητα Lorentz, η δομή του κώνου φωτός στο T_p μένει αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς:

$$g_p(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0, = 0, < 0 \Rightarrow \hat{g}_p(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0, = 0, < 0$$

δηλαδή αν το διάνυσμα \mathbf{X} είναι χωροειδές ή φωτοειδές ή χρονοειδές, το $\phi_*\mathbf{X}$ είναι επίσης χωροειδές ή φωτοειδές ή χρονοειδές, αντίστοιχα.

2.2 Εισαγωγή στην Γενική Σχετικότητα

“Η ύλη λέει στον χωρόχρονο πως να καμπυλωθεί και ο χωρόχρονος λέει στην ύλη πως να κινηθεί” John Wheeler

2.2.1 Χωρόχρονος και αιτιακή δομή

Το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για τον χωρόχρονο είναι μια 4-διάστατη συνεκτική Hausdorff C^∞ πολλαπλότητα Lorentz, (\mathcal{M}, g) (όπου g είναι μετρική Lorentz, δηλαδή έχει μια αρνητική ιδιοτιμή). Τα σημεία της πολλαπλότητας, $p \in \mathcal{M}$, καλούνται **γεγονότα**. Επιπλέον, η πολλαπλότητα \mathcal{M} ως χωρόχρονος, πρέπει να είναι χρονικά προσανατολισμένη. Το τι σημαίνει αυτό εξηγείται στην επόμενη παράγραφο.

Είδαμε στο κεφάλαιο “Μετρικός τανυστής” 2.1.7 ότι σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας Lorentz, τα εφαπτόμενα διανύσματα, με τη βοήθεια της μετρικής, χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: χρονοειδή, φωτοειδή και χωροειδή. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε δύο σχέσεις ισοδυναμίας για τα χρονοειδή διανύσματα: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ αν $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < 0$ και $\mathbf{X} \sim' \mathbf{Y}$ αν $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 0$, όπου $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(\mathcal{M})$ χρονοειδή διανύσματα στο σημείο p της πολλαπλότητας. Έτσι τα χρονοειδή διανύσματα – και γενικά, τα αιτιακά διανύσματα – χωρίζονται σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας: **μελλοντικά** και **παρελθοντικά κατευθυνόμενα** χρονοειδή διανύσματα, αντίστοιχα (η επιλογή για το ποια χρονοειδή διανύσματα θα λέγονται μελλοντικά και παρελθοντικά είναι αυθαίρετη). Η πολλαπλότητα είναι χρονικά προσανατολίσιμη αν μπορεί να γίνει μια συνεχής ταξινόμηση των χρονοειδών διανυσμάτων σε αυτές τις δύο κλάσεις. Ο χρονικός προσανατολισμός καθορίζεται από την επιλογή ενός συνεχούς χρονοειδούς διανυσματικού πεδίου τ , παντού στην πολλαπλότητα. Το διανυσματικό πεδίο τ θα λέγεται χρονικός προσανατολισμός της πολλαπλότητας και η πολλαπλότητα μαζί με το τ θα λέγεται **χρονικά προσανατολισμένη**. Έτσι, ένα τυχαίο χρονοειδές διάνυσμα \mathbf{V} είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο αν $g(\tau, \mathbf{V}) < 0$ και παρελθοντικά κατευθυνόμενο αν $g(\tau, \mathbf{V}) > 0$.

Μια καμπύλη $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ ονομάζεται χρονοειδής (ή φωτοειδής ή χωροειδής) αν σε κάθε της σημείο, το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\gamma}$ είναι χρονοειδές (ή φωτοειδές ή χωροειδές). Οι χρονοειδείς καμπύλες, όπως και τα χρονοειδή διανύσματα, χωρίζονται σε μελλοντικά και παρελθοντικά κατευθυνόμενες καμπύλες, όταν $g(\tau, \dot{\gamma}) < 0$ και $g(\tau, \dot{\gamma}) > 0$ αντίστοιχα.

Οι **σχέσεις αιτιότητας** στην \mathcal{M} ορίζονται ως εξής: Έστω p, q δύο σημεία στην \mathcal{M} , τότε

- $p \ll q$: υπάρχει μια μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη στην \mathcal{M} από το p στο q ,
- $p < q$: υπάρχει μια μελλοντικά κατευθυνόμενη αιτιακή καμπύλη στην \mathcal{M} από το p στο q ,
- $p \leq q$: $p < q$ ή $p = q$.

Το **χρονολογικό μέλλον** ενός σημείου (γεγονότος) $p \in \mathcal{M}$, που συμβολίζεται με $I^+(p)$, είναι το σύνολο των σημείων $q \in \mathcal{M}$ που μπορούν να συνδεθούν με το p με μελλοντικά κατευθυνόμενες χρονοειδής καμπύλες, δηλαδή

$$I^+(p) = \{q \in \mathcal{M} | p \ll q\}$$

Αυτός ο ορισμός γενικεύεται για ένα υποσύνολο $S \subset \mathcal{M}$:

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p)$$

Αν τα σημεία στους παραπάνω ορισμούς συνδέονται με μελλοντικά κατευθυνόμενες αιτιακές καμπύλες αντί των μελλοντικά κατευθυνόμενων χρονοειδών καμπύλων, έχουμε το **αιτιακό μέλλον** σημείου $J^+(p)$ και συνόλου $J^+(S)$. Επίσης, με ανάλογο τρόπο ορίζονται τα **χρονολογικά και αιτιακά παρελθόντα** $I^-(p) = \{q \in \mathcal{M} | q \ll p\}$, $I^-(S)$, $J^-(p)$ και $J^-(S)$. Ένα σύνολο $S \subset \mathcal{M}$ καλείται **άχρονο** αν $I^+(S) \cap S = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία στο S δεν είναι αιτιακά συνδεδεμένα.

Οι μελλοντικά κατευθυνόμενες αιτιακές καμπύλες χωρίζονται σε **εκτατές** και **μη εκτατές**. Μη εκτατές είναι αυτές που δεν έχουν μελλοντικό ή παρελθοντικό τέλος. Ένα σημείο $p \in \mathcal{M}$ λέγεται μελλοντικό τέλος της καμπύλης $\gamma(t)$ αν για κάθε γειτονιά N του p υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $\gamma(t) \in N$ για κάθε $t > t_0$. Οπότε οι μη εκτατές καμπύλες είναι αυτές που εκτείνονται επ άπειρον, παραμένοντας αιτιακές, ή κλείνουν στον εαυτό τους σχηματίζοντας κλειστό αιτιακό βρόχο.

Έστω S ένα κλειστό άχρονο υποσύνολο της \mathcal{M} . Ορίζουμε ως **μελλοντικό πεδίο εξάρτησης** του S , το σύνολο $D^+(S)$ που αποτελείται από σημεία $p \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε κάθε μη παρελθοντικά εκτατή αιτιακή καμπύλη που περνάει από το p , τέμνει το S (ακριβώς μια φορά). Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης $D^-(S)$ με αντικατάσταση της λέξης “παρελθοντικά” με “μελλοντικά”. Έτσι το **ολικό πεδίο εξάρτησης** του S είναι το σύνολο $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$. Αν $D(S) = \mathcal{M}$, το κλειστό άχρονο σύνολο S ονομάζεται **επιφάνεια Cauchy** και συμβολίζεται συνήθως με το Σ . Γνωρίζοντας τις αρχικές συνθήκες στην Σ μπορούμε να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο το παρελθόν και το μέλλον. Η πολλαπλότητα που περιέχει μια επιφάνεια Cauchy καλείται ολικά υπερβολική.

2.2.2 Αρχές της ΓΘΣ

Οι δύο βασικές αρχές της ΓΘΣ είναι:

- 1) Όλοι οι νόμοι της φυσικής έχουν την ίδια μορφή σε οποιαδήποτε σύστημα συντεταγμένων.
- 2) **Αρχή της Ισοδυναμίας**: Είναι πάντα δυνατόν να επιλεγεί τοπικά ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η επίδραση της βαρύτητας μηδενίζεται.

Η Αρχή της Ισοδυναμίας εκφράζεται μαθηματικά ως εξής: αν $g_{ab}(x)$ είναι η μετρική σε ένα σύστημα συντεταγμένων, είναι δυνατόν να βρεθούν άλλες συντεταγμένες x' , στο σημείο p του χωροχρόνου, τέτοιες ώστε

$$g'_{ab}(x'_p) = \eta_{ab} \ , \ \left. \frac{\partial g'_{ab}}{\partial x'^c} \right|_{x=x_p} = 0$$

όπου η_{ab} είναι η μετρική Minkowski του επίπεδου χωροχρόνου. Το σύστημα συντεταγμένων x' που ικανοποιεί αυτές τις δυο εξισώσεις ονομάζεται **τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς** στο σημείο p και οι συντεταγμένες αυτές λέγονται **κανονικές**. Σε αυτές τις συντεταγμένες, τα σύμβολα Christoffel 2.7 μηδενίζονται στο σημείο p

και η εξίσωση γεωδαισιακής 2.4 παίρνει την ίδια μορφή όπως για το ελεύθερο σωματίδιο στον επίπεδο χώρο, δηλαδή της ευθείας:

$$\left. \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} \right|_p = 0$$

όπου τ είναι η αφινική παράμετρος της χρονοειδούς καμπύλης, δηλαδή ο *ιδιόχρονος*. Επομένως, βλέπουμε ότι σε μικρές γειτονίες του σημείου p , οι γεωδαισιακές είναι προσεγγιστικά ευθείες γραμμές.

Ορίζουμε ως **συστήματα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση** το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο όλα τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται κατά μήκος μιας γεωδαισιακής καμπύλης, όχι μόνο σε ένα σημείο πάνω της. Δηλαδή ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση είναι τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς κατά μήκος όλης της γεωδαισιακής καμπύλης.

Έτσι, η Αρχή της Ισοδυναμίας μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: τα ακούντως μικρά συστήματα αναφοράς που είναι σε ελεύθερη πτώση για ακούντως μικρό χρονικό διάστημα, είναι ισοδύναμα με αδρανειακά (μη επιταχυνόμενα) συστήματα αναφοράς στον κενό χώρο (απουσία βαρυτικού πεδίου).

Μια πιο ασθενής εκδοχή της Αρχής της Ισοδυναμίας είναι ότι η αδρανειακή μάζα, που εμφανίζεται στον 2ο νόμο του Νεύτωνα, είναι ίση με τη βαρυτική μάζα, που εμφανίζεται στον νόμο της παγκόσμιας έλξης. Οπότε τα σώματα που πέφτουν ελεύθερα ακολουθούν ακριβώς τις ίδιες τροχιές (τις γεωδαισιακές), ανεξαρτήτως της μάζας τους.

2.2.3 Γεωδαισιακές

Στο κεφάλαιο 2.1.8 ορίσαμε την γεωδαισιακή ως την καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα $X^a = dx^a/dt$ παραμένει παράλληλο ως προς τον εαυτό του κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή $X^a \nabla_a X^b = 0$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι στην περίπτωση που η πολλαπλότητα έχει εφοδιαστεί με μια μετρική, η γεωδαισιακή μεταξύ δυο σημείων είναι η καμπύλη που μεγιστοποιεί τον ιδιόχρονο – για χρονοειδή καμπύλη – και ελαχιστοποιεί το μήκος διαδρομής – για χωροειδή καμπύλη.

Είδαμε στο κεφάλαιο “Μετρικός τανυστής” 2.1.7 ότι αν $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική, το τετράγωνο του μήκους του απειροστού τόξου που αντιστοιχεί στην μετατόπιση $x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu$ είναι $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Επομένως το τετράγωνο του μήκους του απειροστού τόξου μίας καμπύλης $\gamma(t)$ είναι $ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt^2 = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu dt^2$ και έτσι το μήκος τόξου ανάμεσα σε δύο σημεία A και B της καμπύλης είναι το ολοκλήρωμα

$$S_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right|} dt$$

Στην περίπτωση μιας χρονοειδούς καμπύλης ($g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu < 0$), ως παράμετρος επιλέγεται ο ιδιόχρονος τ . Επομένως το μήκος τόξου της χρονοειδούς καμπύλης ανάμεσα σε δύο σημεία A και B , δηλαδή ο *ιδιόχρονος*, είναι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_0^1 \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma$$

όπου σ είναι μια παράμετρος της καμπύλης τέτοια ώστε στο σημείο A είναι $\sigma = 0$ και στο B είναι $\sigma = 1$. Θέτουμε $L = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, όπου $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\sigma$ (το $L^{1/2}$ είναι η Lagrangian). Για να μεγιστοποιείται το τ_{AB} , η καμπύλη πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial x^a} = \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial \dot{x}^a} \right]$$

Οπότε

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{d}{d\sigma} (g_{a\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu a} \dot{x}^\mu) = \frac{dg_{a\nu}}{d\sigma} \dot{x}^\nu + g_{a\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{dg_{\mu a}}{d\sigma} \dot{x}^\mu + g_{\mu a} \ddot{x}^\mu$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας $\frac{dg_{a\nu}}{d\sigma} = \frac{\partial g_{a\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu$ και $\frac{dg_{\mu a}}{d\sigma} = \frac{\partial g_{\mu a}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu$ και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $g^{a\lambda}/2$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} g^{a\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{a\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu a}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \ddot{x}^\lambda \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

όπου $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ είναι τα σύμβολα Christoffel 2.7. Αυτή η εξίσωση είναι η εξίσωση γεωδαισιακής καμπύλης που ορίσαμε στην 2.4. Επομένως, πράγματι, οι γεωδαισιακές είναι καμπύλες μεγίστου ή ελαχίστου μήκους. Για τις φωτοειδής καμπύλες το μήκος είναι μηδέν, επειδή $g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων, $v^i = \dot{x}^i = dx^i/dt \ll 1$ ($\dot{x}^0 = dt/d\tau \approx 1$), και στο όριο των ασθενών πεδίων (όταν μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχή του επιπέδου χώρου) $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, οι εξισώσεις κίνησης 2.4 ανάγονται σε Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης σε βαρυτικό πεδίο. Λόγω των χαμηλών ταχυτήτων οι εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$$

γίνονται

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{00} = 0$$

επειδή όπως είπαμε $\dot{x}^0 \rightarrow 1$ και $\dot{x}^i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. Επίσης υποθέσαμε ότι η μετρική είναι στατική, δηλαδή οι χρονικές της παράγωγοι μηδενίζονται, με αποτέλεσμα $\Gamma^0_{00} = 0$. Επειδή $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, θα είναι

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \eta^{ii} (h_{i0,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = -\frac{1}{2} h_{00,i}$$

όπου αγνοήσαμε τους όρους δεύτερης τάξης των h και λόγω της στατικότητας της μετρικής, τα $h_{i0,0}$, $h_{0i,0}$ είναι μηδέν. Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} h_{00,i}$$

ή αλλιώς

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}$$

όπου γράψαμε παράγωγο ως προς το t , καθώς $t \approx \tau$. Αν ϕ είναι το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό, θέτοντας $h_{00} = -2\phi$ παίρνουμε:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi$$

όπου $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ είναι το βαρυτικό πεδίο. Οπότε βλέπουμε ότι, πράγματι, στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων και ασθενών πεδίων οι εξισώσεις κίνησης 2.4 ανάγονται σε Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης σε βαρυτικό πεδίο.

2.2.4 Εξισώσεις του Einstein

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων και ασθενών πεδίων οι εξισώσεις των γεωδαισιακών ανάγονται σε Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις εξισώσεις του Einstein που γενικεύουν την εξίσωση Poisson την οποία ικανοποιεί το βαρυτικό δυναμικό ϕ στην Νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (2.10)$$

όπου G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και ρ είναι η πυκνότητα μάζας. Στην γενικευμένη περίπτωση απαιτούμε να ικανοποιούνται οι αρχές της ΓΘΣ και στο κλασικό όριο να παίρνουμε την παραπάνω κλασική εξίσωση.

Είδαμε ότι στο κλασικό όριο η συνιστώσα g_{00} του μετρικού ταυστή αντιστοιχεί στο δυναμικό ϕ . Η γενίκευση προκύπτει με την αντικατάσταση του βαρυτικού δυναμικού με τις συνιστώσες του μετρικού ταυστή. Το αριστερό μέλος της 2.10 αντικαθίσταται με τον ταυστή του Einstein που ορίσαμε στην 2.8

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Επίσης η πυκνότητα μάζας αντικαθίσταται με ένα πιο γενικό αντικείμενο, τον **ταυστή ενέργειας - ορμής** $T_{\mu\nu}$. Ο ταυστής αυτός, όπως και ο $G_{\mu\nu}$, είναι συμμετρικός και διατηρείται $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Έτσι καταλήγουμε στις **εξισώσεις του Einstein**:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}} \quad (2.11)$$

Στο κενό, όπου $T_{\mu\nu} = 0$, έχουμε:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

και μετά από συστολή προκύπτει ότι $R = 0$, οπότε οι εξισώσεις του Einstein στο κενό είναι:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Οι εξισώσεις του Einstein συσχετίζουν την καμπυλότητα του χωροχρόνου με την κατανομή της ύλης στον χώρο: στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, ο ταυστής του Einstein είναι ένα καθαρά γεωμετρικό αντικείμενο που αποτελείται από τις συνιστώσες της μετρικής και τις παραγώγους της, ενώ στο δεξί μέλος, ο ταυστής ενέργειας - ορμής περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την κατανομή της ύλης και ενέργειας σε

κάθε σημείο του χώρου. Συνολικά έχουμε 10 εξισώσεις (επειδή οι εμπλεκόμενοι ταυ-
στές είναι συμμετρικοί) και λαμβάνοντας υπόψιν την ταυτότητα Bianchy $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$,
έχουμε να λύσουμε μόνο 6 εξισώσεις του Einstein. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να θεω-
ρηθούν ως δευτεροβάθμιες μερικές διαφορικές εξισώσεις για τις συνιστώσες $g_{\mu\nu}$. Όμως
λόγω της μη γραμμικότητας τους είναι εξαιρετικά δύσκολο να λυθούν, ακόμα και στο
κενό, και έτσι οδηγούμαστε στο να κάνουμε προσεγγίσεις και απλοποιήσεις. Ωστόσο
υπάρχουν μερικές σπάνιες περιπτώσεις στις οποίες είναι δυνατή η ακριβής επίλυση τους
και μια τέτοια περίπτωση είναι η σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση Schwarzschild
με την οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι εξισώσεις του Einstein μπορούν να εξαχθούν με έναν πιο αυστηρό τρόπο από
την αρχή της ελάχιστης δράσης, μεταβάλλοντας την δράση

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{8\pi G} R + \mathcal{L}_M \right)$$

ως προς την μετρική $g_{\mu\nu}$. Για περισσότερα ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [17, p. 114]
ή [?, Chapter 7.10.2].

Τέλος σημειώνουμε ότι μια πιο γενική μορφή των εξισώσεων του Einstein είναι η
παρακάτω:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

όπου Λ είναι μια σταθερά, γνωστή ως **κοσμολογική σταθερά**. Επειδή $\nabla^\mu \Lambda g_{\mu\nu} = 0$,
η τροποποιημένη εξίσωση αυτή είναι συμβατή με την συνθήκη διατήρησης της ενέργειας
 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Τον κοσμολογικό όρο $\Lambda g_{\mu\nu}$ τον εισήγαγε πρώτος ο Einstein ώστε οι εξι-
σώσεις να δίνουν ως λύση ένα στατικό σύμπαν, όμως αργότερα όταν ανακαλύφθηκε ότι
το σύμπαν διαστέλλεται, ο Einstein εγκατέλειψε την ιδέα του στατικού σύμπαντος και
της κοσμολογικής σταθεράς. Ωστόσο δεν υπάρχει κάποιος λόγος για να εγκαταλειφθεί
η κοσμολογική σταθερά και επειδή σύμφωνα με την Κβαντική θεωρία πεδίου το κενό
πρέπει να έχει κάποια ελάχιστη ποσότητα ενέργειας, ο κοσμολογικός όρος μπορεί να
ερμηνευτεί ως η πυκνότητα ενέργειας του κενού. Όμως οι παρατηρήσεις του σύμπαντος
σε μεγάλες κλίμακες δίνουν ένα εξαιρετικά μικρό άνω όριο στην τιμή της κοσμολογικής
σταθεράς κάτι που δεν συμφωνεί με τις προβλέψεις της Κβαντικής θεωρίας πεδίου.

2.2.5 Λύση Schwarzschild

Η σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση, που είναι γνωστή ως λύση Schwarzschild,
προς τιμήν του Karl Schwarzschild που την βρήκε πρώτος το 1915, είναι μια από
της πιο απλές και χρήσιμες (ακριβείς) λύσεις των εξισώσεων του Einstein στο κενό.
Περιγράφει τον χωρόχρονο έξω από μια σφαιρικά συμμετρική και μη περιστρεφόμενη
κατανομή μάζας. Προτού προχωρήσουμε στην εύρεση της λύσης Schwarzschild, πρέπει
να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός
και στατικός.

Ο χωρόχρονος καλείται **στάσιμος** (stationary) αν και μόνο αν υπάρχει ένα χρο-
νοειδές διανυσματικό πεδίο Killing. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να βρεθεί ένα ειδικό
σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μετρική είναι “χρονοανεξάρτητη”, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$,
όπου x^0 είναι μια χρονοειδής συντεταγμένη (δηλαδή το αντίστοιχο διάνυσμα $\partial/\partial x^0$ εί-
ναι χρονοειδές). Τότε στο σύστημα συντεταγμένων αυτό, το $\partial/\partial x^0$ είναι διανυσματικό

πεδίο Killing. Θα συμβολίζουμε τη συντεταγμένη αυτή με t και θα την καλούμε “χρόνος”, αν και τις περισσότερες φορές δεν θα έχει την έννοια του χρόνου που μετράνε τα ρολόγια. Η αντίστοιχη συμμετρία του χωροχρόνου είναι η αμεταβλητότητα της μετρικής στην “χρονική μεταφορά” $t \rightarrow t + \text{σταθ.}$

Η εξίσωση μιας οικογένειας υπερεπιφανειών είναι $f(x^\mu) = \nu$, όπου κάθε υπερεπιφάνεια χαρακτηρίζεται από τον δείκτη ν . Έστω p και q δύο γειτονικά σημεία σε μια υπερεπιφάνεια Σ , με συντεταγμένες x^μ και $x^\mu + dx^\mu$ αντίστοιχα. Επειδή το $x^\mu + dx^\mu$ ανήκει στην Σ , θα ισχύει:

$$\nu = f(x^\mu) = f(x^\mu + dx^\mu) = f(x^\mu) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

σε προσέγγιση πρώτης τάξης. Επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = 0$$

στο σημείο p . Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv f_{,\mu}$ είναι ορθογώνιο στο απειροστό διάνυσμα dx^μ , και επειδή το dx^μ είναι πάνω στην Σ , το $f_{,\mu}$ είναι ορθογώνιο στην Σ στο σημείο p . Επομένως ένα οποιαδήποτε άλλο διανυσματικό πεδίο X^μ είναι παντού ορθογώνιο στην οικογένεια των υπερεπιφανειών αυτή, αν είναι ανάλογο προς το διανυσματικό πεδίο $f_{,\mu}$, δηλαδή

$$X_\mu = \lambda(x) f_{,\mu}$$

όπου $\lambda(x)$ είναι μια σταθερά αναλογίας που εν γένει θα μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Αποδεικνύεται ([20]) ότι κάθε διανυσματικό πεδίο που είναι ορθογώνιο στην οικογένεια υπερεπιφανειών, ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$X_{[\mu} \nabla_\nu X_{\lambda]} = 0$$

και είναι $X_\mu = X^2 f_{,\mu}$, όπου $X^2 = -X_\mu X^\mu$.

Είδαμε ότι όταν ο χωρόχρονος είναι στάσιμος, η μετρική σε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι ανεξάρτητη του χρόνου, όμως εν γένει το στοιχείο μήκους μπορεί να περιέχει μη διαγώνιους όρους της μορφής $dt dx^i$. Όμως για να είναι η μετρική **στατική** (*static*), θέλουμε τα μη διαγώνια στοιχεία αυτά να μην υπάρχουν, ώστε η μετρική να είναι αμετάβλητη στην αντιστροφή του χρόνου $t \rightarrow -t$. Έστω δύο γεγονότα (t, x^1, x^2, x^3) και $(t + dt, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$ στο ειδικό σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει. Τότε το στοιχείο μήκους είναι:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{01} dt dx^1 + g_{11} dx^1$$

Οπότε στην αντιστροφή του χρόνου $t \rightarrow -t$ το ds^2 γίνεται:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - 2g_{01} dt dx^1 + g_{11} dx^1$$

δηλαδή μεταβάλλεται. Επομένως για να μην υπάρχουν οι όροι της μορφής $dt dx^i$ πρέπει $g_{0i} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Τώρα ας δούμε πως συνδέονται τα προηγούμενα με τη συνθήκη ορθογωνιότητας σε μια οικογένεια υπερεπιφανειών, $X_\alpha = X^2 f_{,\alpha}$, για στάσιμο χωροχρόνο με σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το διανυσματικό πεδίο Killing είναι $X^\mu = \delta^\mu_0$. Έχουμε

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = g_{\mu\nu} \delta^\nu_0 = g_{\mu 0}$$

$$X^2 = -X_\mu X^\mu = -g_{\mu 0} \delta^\mu_0 = -g_{00}$$

Οπότε η συνθήκη $X_\mu = X^2 f_{,\mu}$ γίνεται:

$$g_{\mu 0} = -g_{00} f_{,\mu}$$

Για $\mu = 1$ έχουμε $f_{,0} = \partial f / \partial t = 1$, οπότε ολοκληρώνοντας βρίσκουμε το βαθμωτό πεδίο $f(x^\mu)$:

$$f(x^\mu) = t + h(x^i)$$

Θέλουμε να βρούμε συντεταγμένες τέτοιες ώστε $g_{0i} = g_{00} f_{,i} = 0$, ώστε το στοιχείο μήκους να μην έχει όρους της μορφής $dt dx^i$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων $t \rightarrow t' = t + h(x^i)$ και $x^i \rightarrow x'^i = x^i$. Οπότε $f(t', x'^i) = t'$ και οι υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου $f = t' = \nu$ λέγονται χωροειδείς υπερεπιφάνειες. Στο σύστημα συντεταγμένων αυτό θα έχουμε:

$$X'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu = X^\mu = \delta^\mu_0$$

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t'} \frac{\partial x^\beta}{\partial t'} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial(t' - h(x^i))}{\partial t'} \frac{\partial(t' - h(x^i))}{\partial t'} g_{00} = g_{00}$$

$$g'_{0i} = 0$$

$$g'_{\mu\nu,0} = 0$$

Δείξαμε προηγουμένως ότι για ένα διανυσματικό πεδίο ορθογώνιο σε μια οικογένεια υπερεπιφανειών, μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το στοιχείο μήκους να μην περιέχει όρους της μορφής $dt dx^i$. Επομένως, ο χωρόχρονος είναι **στατικός** αν υπάρχει ένα **χρονοειδές** διανυσματικό πεδίο Killing ορθογώνιο σε μια οικογένεια χωροειδών υπερεπιφανειών. Συμπεραίνουμε ότι όταν ο χωρόχρονος είναι στατικός, η μετρική είναι αμετάβλητη στην “χρονική μεταφορά” $t \rightarrow t + \text{σταθ.}$ και στην “χρονική αντιστροφή” $t \rightarrow -t$.

Τέλος, ο χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός αν έχει τις ίδιες συμμετρίες με μια 2-σφαίρα S^2 . Ο αυστηρότερος ορισμός γίνεται με τη βοήθεια των διανυσματικών πεδίων Killing: ο χωρόχρονος είναι **σφαιρικά συμμετρικός** αν έχει τρία διανυσματικά πεδία Killing $\mathbf{X}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{X}_{(j)}] = \epsilon_{ijk} \mathbf{X}_{(k)}$. Τα διανυσματικά πεδία Killing αυτά είναι ίδια με αυτά τις σφαίρας που βρήκαμε στο 2.1.10 και είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας της ομάδας $SO(3)$ των στροφών στις τρεις διαστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα ισομετρίας του χωροχρόνου αυτού έχει μια υποομάδα που είναι ισομορφική με την $SO(3)$ και οι τροχιές της (σύνολο σημείων που προκύπτουν από τη δράση της στο δοσμένο σημείο) είναι σφαίρες S^2 . Οπότε η μετρική του χωροχρόνου αυτού επάγει μια δισδιάστατη μετρική σε κάθε τροχιά S^2 η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί από το εμβαδόν της A . Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$r = (A/4\pi)^{1/2}$$

Οπότε σε σφαιρικές συντεταγμένες (θ, ϕ) η μετρική της κάθε τροχιάς S^2 θα είναι:

$$d\Omega^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Το r προφανώς δεν είναι η ακτίνα της 2-σφαίρας, αφού δεν υπάρχει κάποιο κέντρο της. Ακόμα και αν υπήρχε κάποιο κέντρο, το r δεν έχει καμία σχέση με την απόσταση από αυτό. Είναι εξ' ορισμού η συντεταγμένη που συνδέεται με το εμβαδόν μιας 2-σφαίρας σταθερού r και t .

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην εύρεση της λύσης Schwarzschild. Αρχίζουμε με την υπόθεση ότι ο χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες θ και ϕ θα εμφανίζονται μόνο στο γωνιακό κομμάτι $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ του στοιχείου μήκους ds^2 και πουθενά αλλού. Επιπλέον το στοιχείο μήκους δεν θα περιέχει μη διαγώνιους όρους στις θ και (θ, ϕ) επειδή η μετρική πρέπει να είναι αμετάβλητη στις ανακλάσεις $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ και $\phi \rightarrow -\phi$ (θεωρήσαμε ότι $0 \leq \theta \leq \pi$ και $-\pi < \phi \leq \pi$). Επομένως καταλήγουμε στο γενικό στοιχείο μήκους για τον σφαιρικά συμμετρικά χωρόχρονο:

$$ds^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + 2C(r, t) dt dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

όπου A , B και C είναι κάποιες άγνωστες, προς το παρόν, συναρτήσεις των t και r .

Επικαλούμαστε τώρα τη δεύτερη υπόθεση ότι ο χωρόχρονος είναι στατικός (θα δούμε αργότερα ότι η υπόθεση αυτή δεν είναι απαραίτητη - θεώρημα του Birkhoff). Αυτό απλοποιεί αρκετά τα πράγματα επειδή θα έχουμε $A = A(r)$, $B = B(r)$ και $C = 0$, για τους λόγους που εξηγήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Επομένως η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων $A(r)$ και $B(r)$ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του Einstein στο κενό $R_{\mu\nu} = 0$, την οποία θέλουμε να ικανοποιεί η μετρική $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-A(r), B(r), r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ του σφαιρικά συμμετρικού και στατικού χωροχρόνου. Ο τανυστής Riemann δίνεται από τη σχέση 2.1.9, επομένως ο τανυστής Ricci είναι:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta} \Gamma^\beta{}_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}$$

Οπότε πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.7. Έχουμε:

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2} g^{0\alpha} (\partial_0 g_{0\alpha} + \partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) = \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00} = \frac{\dot{A}(r)}{2A(r)} = 0$$

$$\Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = \frac{1}{2} g^{0\alpha} (\partial_0 g_{1\alpha} + \partial_1 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{01}) = \frac{1}{2} (g^{01} \partial_0 g_{11} + g^{00} \partial_1 g_{00}) = \frac{A'(r)}{2A(r)}$$

όπου συμβολίζουμε τα (t, r, θ, ϕ) με $(0, 1, 2, 3)$ και με την τελεία εννοούμε παραγώγιση ως προς το $x^0 = t$ και με τον τόνο ως προς το $x^1 = r$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τα υπόλοιπα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel:

$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{A'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma^1{}_{11} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma^1{}_{22} = -\frac{r}{B(r)}, \quad \Gamma^1{}_{33} = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)}$$

$$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2{}_{33} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot \theta$$

Έχοντας βρει τα σύμβολα Christoffel, προσδιορίζουμε τις μη τετριμμένες εξισώσεις $R_{\mu\nu} = 0$:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{0\beta} \Gamma^\beta_{\alpha 0} \\ &= \partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} \\ &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} = 0 \Rightarrow \\ 2rAA''B - rAA'B' - r(A')^2B + 4AA'B &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{\alpha 1} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{11} - \Gamma^\alpha_{1\beta} \Gamma^\beta_{\alpha 1} \\ &= -\partial_1 \Gamma^0_{01} - \partial_1 \Gamma^2_{21} - \partial_1 \Gamma^3_{31} + \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{11} \\ &\quad + \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{11} - (\Gamma^0_{01})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 \\ &= -\frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'B'}{4AB} = 0 \Rightarrow \\ -2rAA''B + rAA'B' - r(A')^2B + 4A^2B' &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{22} - \partial_2 \Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{22} - \Gamma^\alpha_{2\beta} \Gamma^\beta_{\alpha 2} \\ &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{32} + \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{32} \\ &= -\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} + 1 - \frac{rA'}{2AB} = 0 \Rightarrow \\ -2AB + rAB' + 2AB^2 - rA'B &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Προσθέτουμε τις (2.12) και (2.13):

$$AB' + BA' = (AB)' = 0 \Rightarrow A(r)B(r) = K$$

όπου K είναι κάποια πραγματική σταθερά. Αλλάζοντας την $t \rightarrow K^{1/2}t$ μπορούμε να θέσουμε $K = 1$. Αντικαθιστούμε αυτό το αποτέλεσμα στην εξίσωση (2.14):

$$rB'(r) = B(1 - B)$$

Είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli. Θέτουμε $f(r) = 1/B(r)$ και η εξίσωση γίνεται:

$$rf' + f = 1 \Rightarrow f(r) = 1 + \frac{C}{r}$$

όπου C είναι μια σταθερά. Επομένως:

$$B(r) = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}, \quad A(r) = 1 + \frac{C}{r}$$

Έχουμε επομένως βρει την γενική λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό για στατικό και σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Παρατηρούμε ότι για $r \rightarrow \infty$, η λύση Schwarzschild είναι **ασυμπτωτικά επίπεδη**, δηλαδή η μετρική προσεγγίζει την επίπεδη μετρική Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμένες $-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Μπορούμε να προσδώσουμε στη σταθερά C φυσικό νόημα αν απαιτήσουμε η μετρική Schwarzschild στο ασθενές όριο ($r \rightarrow \infty$) να δίνει την “Νευτώνεια μετρική”. Είδαμε ότι στο ασθενές όριο $g_{00} \approx \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi$, όπου $\phi = -GM/r$ είναι το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό σε απόσταση r από μια σημειακή μάζα M . Δεν έχουμε παρά να συγκρίνουμε:

$$- \left(1 + \frac{C}{r}\right) = -1 + \frac{2GM}{r}$$

Επομένως $C = -2GM$ και η μετρική Schwarzschild αποκτά την τελική της μορφή:

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} \quad (2.15)$$

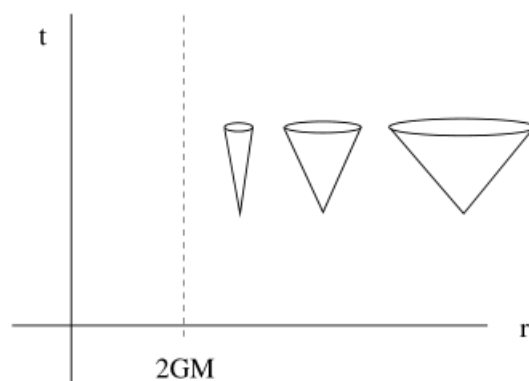
Βλέπουμε ότι για $r = 0$ και $r = 2GM$ οι συντελεστές της μετρικής Schwarzschild απειρίζονται. Στο $r = 0$ έχουμε μια πραγματική φυσική ιδιομορφία (singularity) η οποία δεν μπορεί να αφαιρεθεί με αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Εκεί η καμπυλότητα του χωροχρόνου απειρίζεται (για την ακρίβεια το τετράγωνο του ταυστή Riemann απειρίζεται, και επειδή είναι ένα βαθμωτό, θα απειρίζεται σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων).

Από την άλλη, η ιδιομορφία στο $r = 2GM$ δεν είναι πραγματική, οφείλεται στην ακαταλληλότητα των συγκεκριμένων συντεταγμένων για την περιγραφής της περιοχής αυτής και για το λόγο αυτό ονομάζεται “συντεταγμένη ιδιομορφία”. Ας δούμε τι γίνεται με τις ακτινικές φωτοειδείς καμπύλες (θ, ϕ σταθερές και $ds^2 = 0$):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

Βλέπουμε ότι η κλίση των κώνων φωτός στο $r - t$ επίπεδο εξαρτάται από το r . Στο άπειρο έχουμε τους κώνους φωτός του επιπέδου χώρου με κλίση ± 1 , όμως καθώς το r τείνει στο $r = 2GM$ η κλίση τείνει στο άπειρο και οι κώνοι κλείνουν.



Οπότε αν ένας αστροναύτης που πέφτει προς το $r = 2GM$ στέλνει, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, φωτεινά σήματα προς τα έξω, ένας παρατηρητής μακριά από το $r = 2GM$ θα βλέπει τα σήματα να φτάνουν σε αυτόν με ολοένα και πιο αργό ρυθμό. Επομένως θα δει τον αστροναύτη να προσεγγίζει ασυμπτωτικά το $r = 2GM$ χωρίς το διασχίζει. Όμως αυτή η περιγραφή της κίνησης του αστροναύτη από τον παρατηρητή γίνεται με τη βοήθεια των συντεταγμένων Schwarzschild, με την συντεταγμένη t μακριά από το $r = 2GM$ (για την ακρίβεια στο άπειρο) να είναι ο ιδιόχρονος του παρατηρητή αυτού. Όμως από την σκοπιά του αστροναύτη τα πράγματα είναι διαφορετικά: αυτός θα φτάσει στο $r = 2GM$ και θα το διασχίσει σε πεπερασμένο ιδιόχρονο του. Απλά ο αστροναύτης δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει το t ως ιδιόχρονο του και μάλιστα στο $r = 2GM$ οι συντεταγμένες Schwarzschild δεν είναι κατάλληλες για την περιγραφή του χωροχρόνου εκεί. Πιο κατάλληλες συντεταγμένες θα ήταν πχ. οι Eddington - Finkelstein, στις οποίες η ιδιομορφία στο $r = 2GM$ εξαφανίζεται και οι φωτοειδής και χρονοειδής καμπύλες φτάνουν στο $r = 0$ διασχίζοντας το $r = 2GM$ χωρίς κανένα πρόβλημα.

Παρόλα που το στο $r = 2GM$ δεν υπάρχει μια πραγματική ιδιομορφία, έχει μια ιδιαίτερη φυσική σημασία: είναι η λεγόμενη **ακτίνα Schwarzschild** με αριθμητική τιμή $r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) km$, όπου M_\odot είναι η μάζα του Ήλιου, και η φωτοειδής υπερεπιφάνεια $r = r_s$ ονομάζεται **οριζοντας γεγονότων**. Στην περιοχή $r \leq r_s$ βαρυτική έλξη είναι τόσο ισχυρή που ούτε το φως δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο και επιστρέφει αναπόφευκτα στην ιδιομορφία $r = 0$. Έτσι εάν η ακτίνα ενός άστρου γίνει μικρότερη από την ακτίνα Schwarzschild (λόγω της βαρυτικής του κατάρρευσης), το άστρο αυτό αναπόφευκτα θα καταρρεύσει στην ιδιομορφία $r = 0$ – και θα αποκτήσει μηδενικό μέγεθος και άπειρη πυκνότητα – επειδή πλέον καμία δύναμη δεν θα μπορεί να το κρατάει σε ισορροπία εξισορροπώντας τη δύναμη της βαρύτητας.

Τέλος σημειώνουμε ότι στον προσδιορισμό της λύσης Schwarzschild υποθέσαμε ότι ο χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός και στατικός. Όμως οι εξισώσεις του Einstein στο κενό μπορούν να επιλυθούν για τον σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο χωρίς την υπόθεση της στατικότητας. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι η λύση Schwarzschild είναι η μοναδική λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό για σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο. Αυτό είναι το **θεώρημα του Birkhoff** και ουσιαστικά λέει ότι οι σφαιρικά συμμετρικοί χωρόχρονοι είναι στατικοί. Ωστόσο, η σφαιρικά συμμετρική πηγή δεν είναι απαραίτητα στατική, μπορεί να είναι ένας αστέρας που καταρρέει, εκρήγνυται ή πάλλεται με συμμετρικό τρόπο, αλλά ο χωρόχρονος στο εξωτερικό του θα είναι αναγκαστικά στατικός. Αυτό έχει ως συνέπεια τέτοιοι αστέρες να μην εκπέμπουν βαρυτικά κύματα.

2.2.6 Συντεταγμένες Eddington - Finkelstein

Όπως είδαμε, οι συντεταγμένες Schwarzschild παρουσιάζουν ιδιομορφία στο $r = 2GM$ και έτσι κρίνονται ακατάλληλες για την περιγραφή του χωροχρόνου εκεί. Επίσης η χρονοειδής συντεταγμένη t έχει φυσικό νόημα ως “χρόνος που μετράνε τα ρολόγια” (ιδιόχρονος) μόνο μακριά από τον ορίζοντα γεγονότων (ουσιαστικά στο άπειρο). Οδηγούμαστε λοιπόν στο να βρούμε κάποιες άλλες συντεταγμένες. Θα ξεκινήσουμε με συντεταγμένες οι οποίες είναι προσαρμοσμένες στις ακτινικές φωτοειδείς καμπύλες έτσι ώστε οι κώνοι φωτός να σχηματίζουν πάντα 45° με τον κατακόρυφο άξονα. Εισάγουμε πρώτα μια νέα συντεταγμένη r^* , γνωστή ως **συντεταγμένη “tortoise”**, έτσι ώστε:

$$dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2 = dr^{*2} \Rightarrow$$

$$t = \pm r^* + \text{σταθ.}$$

όπου

$$r^* = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|, \quad -\infty < r^* < \infty$$

Οπότε το στοιχείο γραμμής γίνεται:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2$$

Βλέπουμε ότι πλέον καμία συνιστώσα της μετρικής δεν απειρίζεται για $r = 2GM$. Επίσης οι κώνοι φωτός τώρα δεν κλείνουν και έχουν σταθερή κλίση ± 1 . Αυτό που κάναμε στην ουσία είναι να μετακινήσουμε τον ορίζοντα στο $-\infty$ (καθώς το r τείνει στο $r = 2GM$, το r^* τείνει στο $-\infty$), οπότε αυτό δεν λύνει το πρόβλημα που είχαμε με τις καμπύλες που δεν διαπερνούν ποτέ τον ορίζοντα στις συντεταγμένες Schwarzschild.

Στο επόμενο βήμα ορίζουμε μια νέα συντεταγμένη:

$$u = t + r^*$$

Έτσι ώστε οι εισερχόμενες ακτινικές φωτοειδείς γεωδαισιακές να είναι $u = \text{σταθ.}$ Αντικαθιστούμε τη συντεταγμένη Schwarzschild t με την u στην 2.15:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (du - dr^*)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \\ &\quad - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2 du dr + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

Αυτή είναι η ίδια λύση Schwarzschild αλλά σε **συντεταγμένες Eddington - Finkelstein** (u, r, θ, ϕ). Βρίσκουμε πάλι τις ακτινικές φωτοειδείς καμπύλες θέτοντας $d\theta = d\phi = 0$ και $ds^2 = 0$:

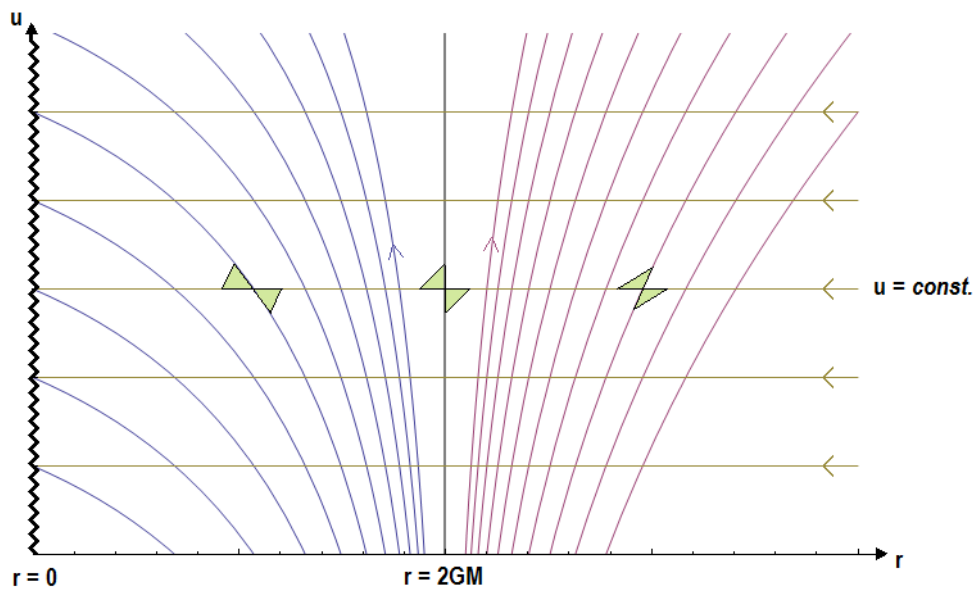
$$- \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2 du dr = 0$$

$$\frac{du}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}$$

και έχουμε τις εξής λύσεις:

$$u = \begin{cases} \text{const.} , \text{ εισερχόμενες, } 0 < r < \infty \\ 2 \left[r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \right] + \text{const.} , \text{ εξερχόμενες, } r > 2GM \\ 2 \left[r + 2GM \ln \left(1 - \frac{r}{2GM} \right) \right] + \text{const.} , \text{ εισερχόμενες, } r < 2GM \end{cases}$$

Επιπλέον, η καμπύλη $r = 2GM$ ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση και περιγράφει στατικές καμπύλες.



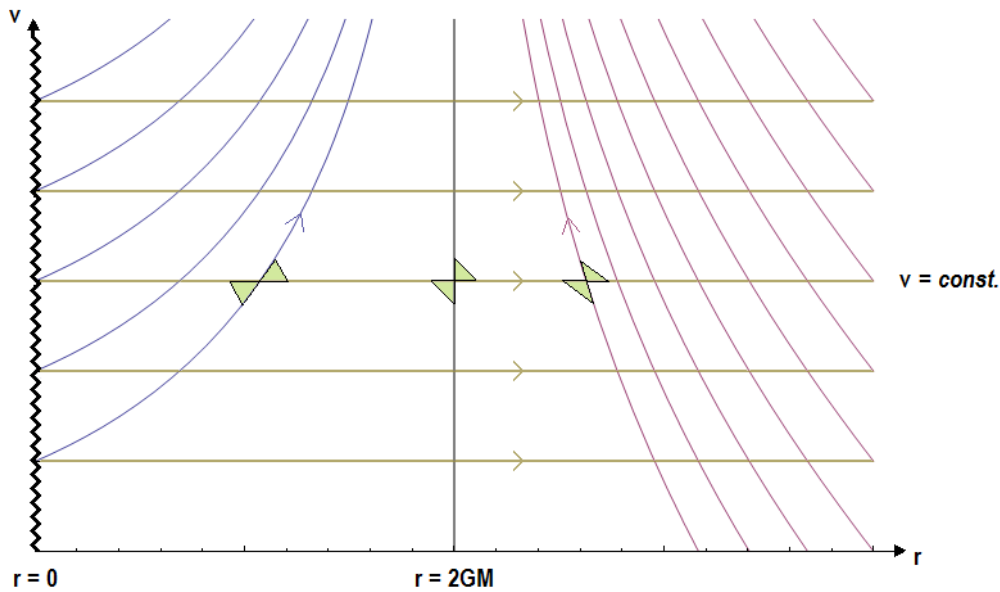
Βλέπουμε ότι για $r < 2GM$ έχουμε μόνο καμπύλες κινούμενες προς το $r = 0$, οπότε τίποτα δεν βγαίνει έξω από εκεί, ούτε καν το φως – εξ' ου και το όνομα **μελανές οπές**. Για $r > 2GM$ έχουμε καμπύλες κινούμενες προς τα έξω αλλά και προς τα μέσα, σε αντίθεση με την εικόνα που είχαμε σε συνταγμένες Schwarzschild. Επίσης οι κώνοι δεν κλείνουν στο $r = 2GM$ όπως στις συνταγμένες Schwarzschild, όμως οι κώνοι στρέφονται σταδιακά προς το $r = 0$ καθώς η ακτίνα τείνει στην τιμή αυτή.

Παρατηρούμε ότι στο σύστημα συντεταγμένων (u, r) οι καμπύλες είναι μελλοντικά κατευθυνόμενες. Όμως η λύση Schwarzschild είναι αναλλοίωτη στην αντιστροφή του χρόνου, οπότε ορίζουμε μια νέα συντεταγμένη:

$$v = t - r^*$$

έτσι ώστε οι εξερχόμενες ακτινικές φωτοειδείς γεωδαισιακές να είναι $v = \text{σταθ}$. Αντικαθιστούμε τη συντεταγμένη Schwarzschild t με την v και η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 - 2 dv dr + r^2 d\Omega^2$$



Βλέπουμε ότι τώρα μόνο οι παρελθοντικά κατευθυνόμενες φωτοειδείς και χρονοειδείς γεωδαισιακές μπορούν να περάσουν τον ορίζοντα από έξω προς τα μέσα. Όλες οι καμπύλες στο $r < 2GM$ κινούνται προς τα έξω, ενώ στο $r > 2GM$ οι κινούμενες προς τα μέσα καμπύλες δεν μπορούν να μπουν μέσα. Έχουμε αυτό που ονομάζετε **λευκή οπή**, το (χρονικό) αντίστροφο της μελανής οπής.

2.2.7 Συντεταγμένες Kruskal

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε ταυτόχρονα και τις δυο συντεταγμένες Schwarzschild t και r με τις συντεταγμένες Eddington - Finkelstein u και v , ώστε να επεκτείνουμε στο μέγιστο τον χωρόχρονο της λύσης Schwarzschild. Παρατηρούμε ότι

$$u + v = 2t \Rightarrow dt^2 = \frac{1}{4}(du + dv)^2$$

$$u - v = 2r^* \Rightarrow dr^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 (du - dv)^2$$

Επομένως η μετρική Schwarzschild γίνεται:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.16)$$

όπου τώρα η $r = r(u, v)$ είναι συνάρτηση των u και v , ορισμένη έμμεσα από τη σχέση:

$$\frac{1}{2}(u - v) = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$$

Στις συντεταγμένες αυτές ο ορίζοντας $r = 2GM$ έχει μετακινηθεί στο άπειρο (στο $u = -\infty$ ή $v = \infty$), όπως είχε γίνει και στις συντεταγμένες tortoise. Μπορούμε όμως

να αλλάξουμε τις συντεταγμένες έτσι ώστε να μετακινήσουμε αυτά τα σημεία σε πεπερασμένες τιμές. Μια καλή επιλογή είναι:

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^{u/4GM} \\ v' &= -e^{-v/4GM} \end{aligned} \right\} r > 2GM$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^{u/4GM} \\ v' &= e^{-v/4GM} \end{aligned} \right\} 0 < r < 2GM$$

Έχουμε $du = 4GM e^{-u/4GM} du'$ και $dv = \pm 4GM e^{v/4GM} dv'$, οπότε:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) 16G^2 M^2 e^{-(u-v)/4GM} du' dv' + r^2 d\Omega^2, \quad r > 2GM$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) 16G^2 M^2 e^{-(u-v)/4GM} du' dv' + r^2 d\Omega^2, \quad 0 < r < 2GM$$

Όμως $u - v = 2r^* = 2r + 4GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$, οπότε:

$$e^{-(u-v)/4GM} = \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|^{-1} e^{-r/2GM}$$

Επομένως σε συντεταγμένες (u', v', θ, ϕ) η μετρική είναι:

$$ds^2 = - \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} du' dv' + r^2 d\Omega^2, \quad r > 0$$

Βλέπουμε ότι τώρα δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στο $r = 2GM$

Οι συντεταγμένες u' και v' μπορούν να γραφούν συναρτήσει των r και t αν αντικαταστήσουμε $u = t + r^*$ και $v = t - r^*$:

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^{(t+r)/4GM} e^{(2GM \ln |\frac{r}{2GM} - 1|)/4GM} = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{(t+r)/4GM} \\ v' &= -e^{(r-t)/4GM} e^{(2GM \ln |\frac{r}{2GM} - 1|)/4GM} = - \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM} \end{aligned} \right\} r > 2GM$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^{(t+r)/4GM} e^{(2GM \ln |\frac{r}{2GM} - 1|)/4GM} = \left(1 - \frac{r}{2GM} \right)^{1/2} e^{(t+r)/4GM} \\ v' &= e^{(r-t)/4GM} e^{(2GM \ln |\frac{r}{2GM} - 1|)/4GM} = \left(1 - \frac{r}{2GM} \right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM} \end{aligned} \right\} 0 < r < 2GM$$

Επειδή $g_{uu} = g_{vv} = 0$, οι συντεταγμένες u' και v' είναι φωτοειδείς. Όμως εμείς θα προτιμούσαμε να έχουμε μια χρονοειδή και μια χωροειδή συντεταγμένη. Ορίζουμε νέες συντεταγμένες U και V , για $r > 2GM$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(u' - v') = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4GM} \frac{(e^{t/4GM} + e^{-t/4GM})}{2} \\ &= \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh \left(\frac{t}{4GM} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(u' + v') = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \frac{(e^{t/4GM} - e^{-t/4GM})}{2} \\ &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \end{aligned}$$

και για $0 < r < 2GM$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(u' - v') = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \frac{(e^{t/4GM} - e^{-t/4GM})}{2} \\ &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(u' + v') = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \frac{(e^{t/4GM} + e^{-t/4GM})}{2} \\ &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \end{aligned}$$

Οι (V, U, θ, ϕ) είναι γνωστές ως **συντεταγμένες Kruskal - Szekeres**. Έχουμε $du' = dU + dV$ και $dv' = -(dU - dV)$, επομένως η μετρική Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal είναι:

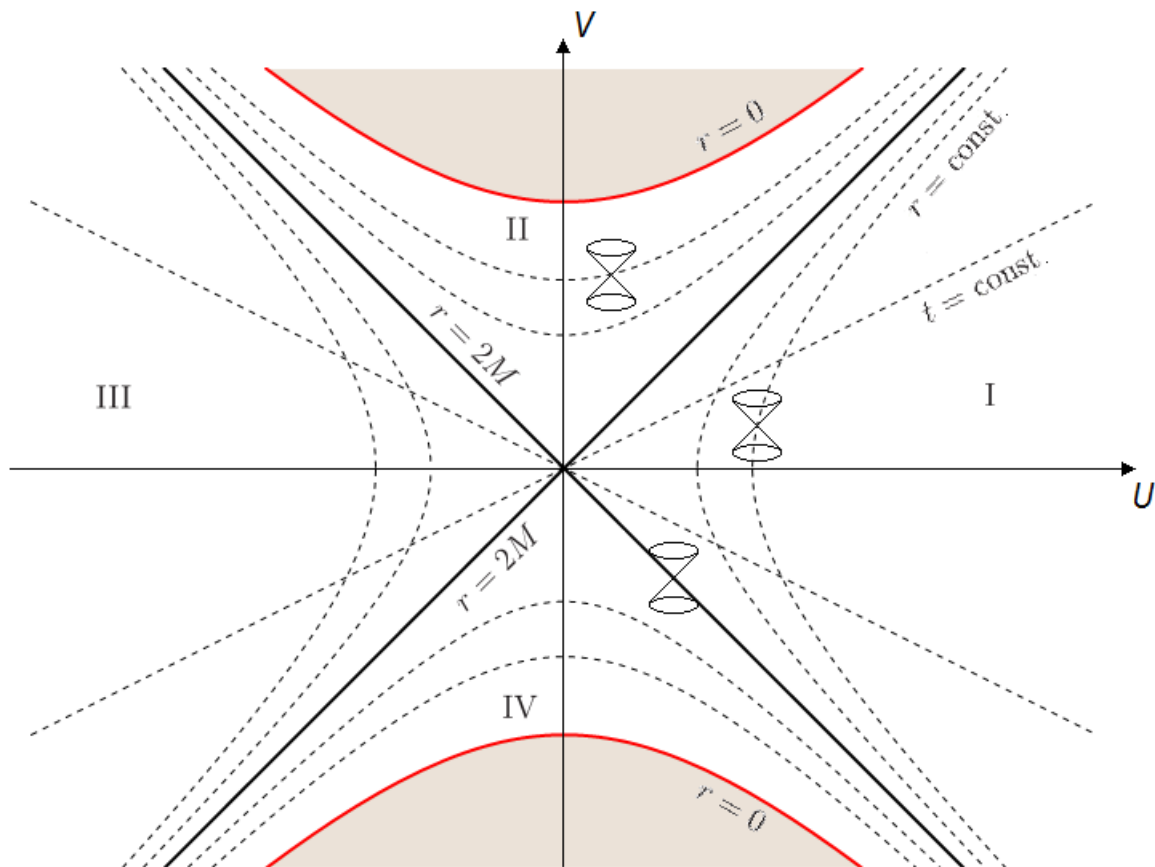
$$\boxed{ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dV^2 + dU^2) + r^2 d\Omega^2, \quad r > 0} \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή η g_{VV} είναι αρνητική και η g_{UU} θετική, η συντεταγμένη V είναι χρονοειδής και η U χωροειδής, για ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους. Το r είναι συνάρτηση των V και U , $r = r(V, U)$, που ορίζεται έμμεσα από την εξίσωση

$$U^2 - V^2 = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM}$$

η οποία προκύπτει από τις σχέσεις ορισμού των V και U συναρτήσει των r , t και το γεγονός ότι $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

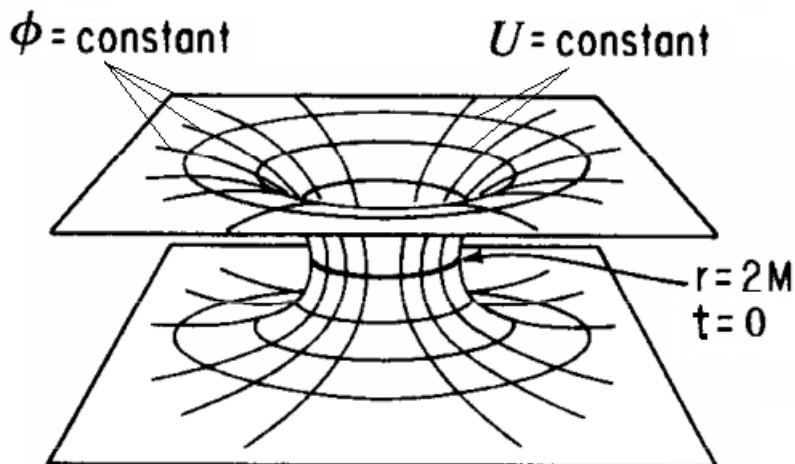
Για να καταλάβουμε καλύτερα την γεωμετρία Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal, σχεδιάζουμε επιφάνειες σταθερού r και t στο επίπεδο UV . Το διάγραμμα που προκύπτει ονομάζεται διάγραμμα Kruskal.



Στο διάγραμμα αυτό κάθε σημείο είναι στην πραγματικότητα μια 2-σφαιρα. Οι επιφάνειες σταθερού r είναι υπερβολές $U^2 - V^2 = \text{σταθ.}$ στο επίπεδο UV . Για $r = 0$ έχουμε δυο υπερβολές, $V = \pm\sqrt{U^2 + 1}$, που αντιστοιχούν σε δυο φυσικές ιδιομορφίες (με κόκκινο χρώμα), μια παρελθοντική (κάτω) και μια μελλοντική (πάνω) ιδιομορφία. Για $r = 2GM$ έχουμε δύο ευθείες, $V = \pm U$, που τέμνονται στην αρχή των αξόνων και σχηματίζουν κλίση 45° με την κατακόρυφο. Οι ευθείες αυτές αναπαριστούν τους οριζόντες γεγονότων, τον παρελθοντικό και τον μελλοντικό. Οι επιφάνειες σταθερού t είναι ευθείες $V = \tanh(t/4GM)U$, $r > 2GM$ και $V = \tanh^{-1}(t/4GM)U$, $r < 2GM$ που περνούν από την αρχή των αξόνων. Για $t = 0$ έχουμε δύο ευθείες, $V = 0$, $r > 2GM$ και $U = 0$, $r < 2GM$, ενώ για $t = \infty$ έχουμε $U = V$ και για $t = -\infty$ έχουμε $U = -V$, δηλαδή τους δυο οριζόντες γεγονότων $r = 2GM$. Τέλος, οι φωτοειδής ακτινικές καμπύλες είναι, όπως και στον επίπεδο χώρο, $V = \pm U + \text{σταθ.}$, και οι κώνοι φωτός σχηματίζουν 45° με την κατακόρυφο.

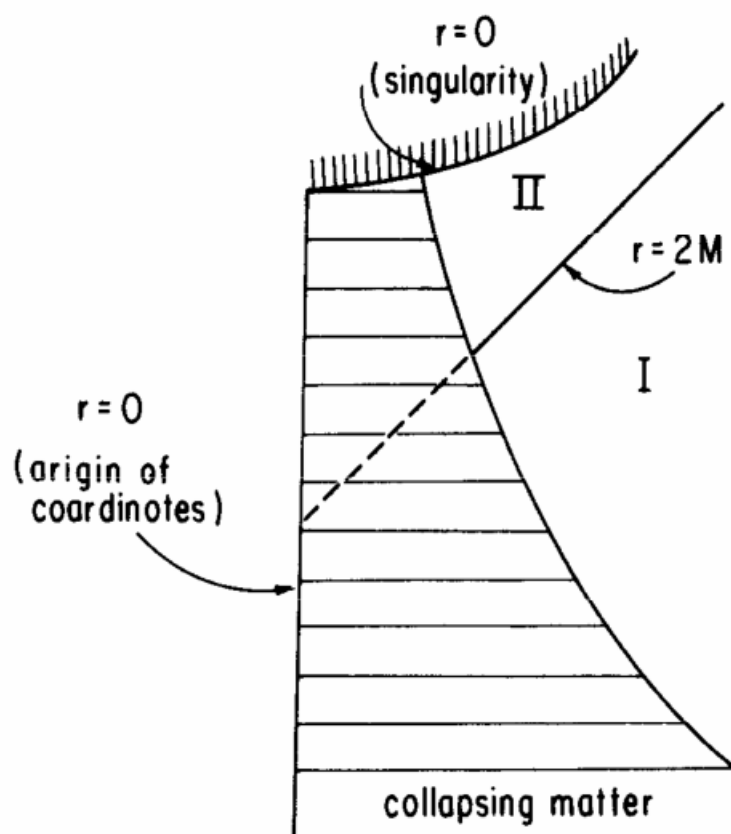
Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Kruskal είναι χωρισμένο σε τέσσερις περιοχές. Η περιοχή I είναι η περιοχή $r > 2GM$, $-\infty < t < +\infty$ σε συντεταγμένες Schwarzschild, δηλαδή η περιοχή στην οποία ζούμε. Η περιοχή II είναι το εσωτερικό της μελανής οπής, $0 < r < 2GM$, $-\infty < u < +\infty$, ενώ η περιοχή IV είναι το εσωτερικό της λευκής οπής, $0 < r < 2GM$, $-\infty < v < +\infty$, σε συντεταγμένες Eddington - Finkelstein. Οπότε οι μελλοντικά κατευθυνόμενες φωτοειδής ακτίνες πάνε από την περιοχή I στην II, ενώ οι παρελθοντικά κατευθυνόμενες, από την περιοχή I στην IV. Η περιοχή III είναι μια περιοχή που δεν έχουμε εξερευνήσει μέχρι τώρα και είναι μια ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή, ακριβώς όπως η I. Για να πάμε από την I στην III πρέπει να ακολουθήσουμε χωροειδείς ακτινικές καμπύλες. Για να δούμε πως συνδέονται οι δύο ασυμπτωτικά

επίπεδες περιοχές I και III, θεωρούμε μια χωροειδή υπερεπιφάνεια $V = 0$ (σε συντεταγμένες Schwarzschild $t = 0, r > 2GM$). Παίρνουμε την τομή της για $\theta = \pi/2$ και ενσωματώνουμε την δισδιάστατη επιφάνεια αυτή στον \mathbb{R}^3 χώρο:



Η επιφάνεια αυτή με μετρική $ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} dU^2 + r^2 d\phi^2$ έχει ίδια τοπολογία με την $\mathbb{R} \times S^2$ (κάθε κύκλος σταθερού U αναπαριστά στην πραγματικότητα μια 2-σφαιρα ακτίνας r). Καθώς κινούμαστε ακτινικά από το $U = +\infty$ μέχρι το $U = -\infty$, το $r = r(U, 0)$ μειώνεται σε μια ελάχιστη τιμή $r = 2GM$ στο $U = 0$ καθ' στη συνέχεια αυξάνεται σε άπειρη τιμή κατά τη δεύτερη ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή. Είναι η λεγόμενη σκουληχότρυπα ή γέφυρα Einstein - Rosen που συνδέει τις δύο ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές I και III. Όμως η σκουληχότρυπα αυτή δεν είναι στατική (η λύση Schwarzschild είναι στατική στις περιοχές I και III, όχι στις II και IV όπου τα χρονοειδή διανύσματα Killing των I και III γίνονται χωροειδή), και καθώς το V κινείται προς μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές, η ελάχιστη ακτίνα του στομίου της σκουληχότρυπας ελαττώνεται μέχρι που κλείνει στο $V = \pm 1$, δηλαδή στην ιδιομορφία $r = 0$, και αργότερα οι περιοχές I και III διαχωρίζονται εντελώς. Το “κλείσιμο” της σκουληχότρυπας είναι τόσο γρήγορο που είναι αδύνατον να διέλθουμε από μέσα της μέσω χρονοειδούς καμπύλης ή ακόμα και φωτοειδούς – όπως φαίνεται από το διάγραμμα Kruskal, τέτοιες καμπύλες αναπόφευκτα καταλήγουν στην ιδιομορφία.

Παρόλο που η ύπαρξη και των τεσσάρων περιοχών του χωροχρόνου που εμφανίζονται σε συντεταγμένες Kruskal (μέγιστη επέκταση της λύσης Schwarzschild) είναι αποδεκτή ως λύση των εξισώσεων του Einstein, σε περιπτώσεις σχηματισμού μελανών οπών από κατάρρευση άστρου, μόνο οι περιοχές I και II (όχι ολόκληρες) θεωρούνται φυσικές. Η ύπαρξη των III και IV θα απαιτούσε ύπαρξη κατάλληλων αρχικών συνθηκών για το σύμπαν, τέτοιων ώστε οι ιδιομορφίες $r = 0$ να υπήρχαν εξαρχής. Όμως δεν έχουμε κανένα λόγο να υποθέσουμε ότι υπάρχουν τέτοιες αρχικές συνθήκες. Επομένως θα θεωρούμε ως φυσικές περιοχές μόνο τις I και II και μελανές οπές που προκύπτουν από κατάρρευση άστρων, όπως στο παρακάτω σχήμα:



2.2.8 Διαγράμματα Penrose

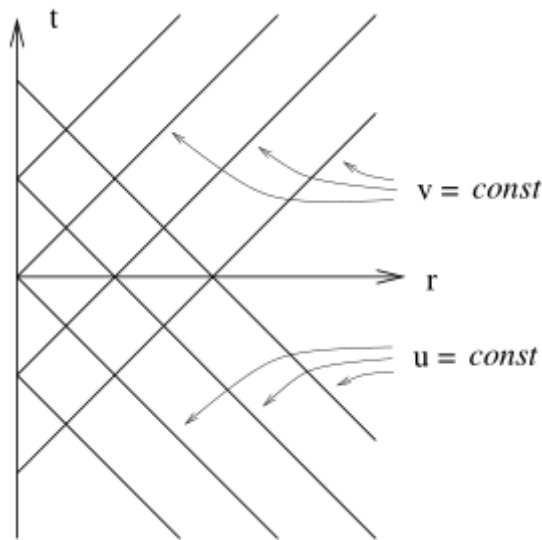
Για να μελετήσουμε ολικά τη αιτιακή δομή του χωροχρόνου, και ιδιαίτερα στο άπειρο, θα θέλαμε να μετασχηματίσουμε την μετρική έτσι ώστε τα σημεία στο άπειρο να αποκτήσουν πεπερασμένες τιμές στις νέες συντεταγμένες, άλλα παράλληλα να μην αλλάξει η αιτιακή δομή του χωροχρόνου. Δηλαδή θα θέλαμε να αλλάξει μόνο η κλίμακα και όχι οι γωνίες στο χωροχρονικό διάγραμμα. Είδαμε στο κεφ. ότι τέτοιοι μετασχηματισμοί ονομάζονται *σύμμορφοι* και η μετρική που προκύπτει μετά από τέτοιο μετασχηματισμό είναι $\tilde{g} = \omega^2(x)g$. Τα διαγράμματα Penrose κάνουν ακριβώς αυτήν την δουλειά, συμπυκνώνοντας το χωροχρονικό διάγραμμα σε ένα δισδιάστατο πεπερασμένο διάγραμμα.

Θα ξεκινήσουμε με το πιο απλό παράδειγμα του επίπεδου χωροχρόνου Minkowski. Η μετρική Minkowski σε πολικές συντεταγμένες είναι $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$. Ο μετασχηματισμός που θα κάνουμε αφορά μόνο τις συντεταγμένες t και r με πεδίο ορισμού $-\infty < t < \infty$ και $0 \leq r < \infty$. Θεωρούμε τις φωτοειδείς συντεταγμένες:

$$u = \frac{1}{2}(t + r)$$

$$v = \frac{1}{2}(t - r)$$

με πεδίο ορισμού $-\infty < u < \infty$ και $0 < v < \infty$, $v \leq u$. Οι φωτοειδείς καμπύλες τώρα δίνονται από τις $u = \text{σταθ.}$ και $v = \text{σταθ.}$



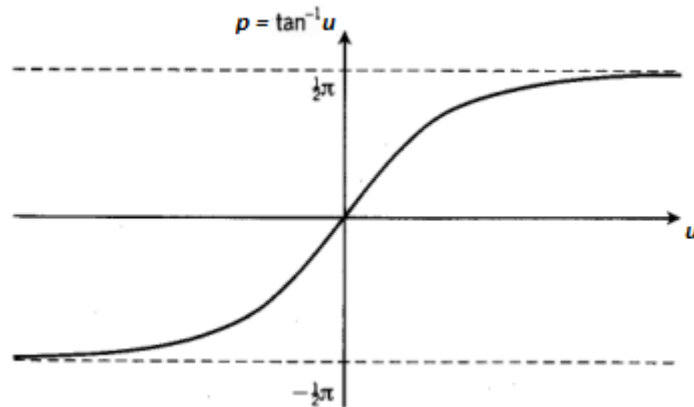
Στις συντεταγμένες αυτές η μετρική είναι:

$$ds^2 = -4 du dv + (u - v)^2 d\Omega^2$$

Για να αποκτήσουν οι συντεταγμένες των σημείων στο άπειρο πεπερασμένες τιμές, χάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς συντεταγμένων:

$$p = \tan^{-1} u$$

$$q = \tan^{-1} v$$



Τώρα τα πεδία ορισμού των συντεταγμένων είναι $-\pi/2 < p < \pi/2$, $-\pi/2 < q < \pi/2$ με $q \leq p$. Για να βρούμε τη μετρική στις συντεταγμένες p και q βρούμε τα διαφορικά du και dv :

$$du = \frac{dp}{\cos^2 p} = \sec^2 p dp, \quad dv = \frac{dq}{\cos^2 q} = \sec^2 q dq$$

Επίσης

$$(u - v)^2 = (\tan p - \tan q)^2 = \frac{(\sin p \cos q - \cos p \sin q)^2}{\cos^2 p \cos^2 q} = \sin^2(p - q) \sec^2 p \sec^2 q$$

Επομένως η μετρική είναι:

$$ds^2 = \sec^2 p \sec^2 q [-4 dp dq + \sin^2(p - q) d\Omega^2]$$

Μπορούμε να βελτιώσουμε τη μετρική αυτή αν μετασχηματίσουμε τις φωτοειδείς συντεταγμένες p και q σε μια χρονοειδή και μια χωροειδή συντεταγμένη η και χ αντίστοιχα:

$$\eta = p + q, \quad -\pi < \eta < \pi$$

$$\chi = p - q, \quad 0 \leq \chi < \pi$$

Επειδή $2dp = d\eta + d\chi$ και $2dq = d\eta - d\chi$, οπότε $4dpdq = d\eta^2 - d\chi^2$, και $\cos(p)\sin(q) = \frac{1}{2}[\cos(\eta) + \cos(\chi)] \equiv \omega$, έχουμε

$$ds^2 = \omega^{-2} [-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2]$$

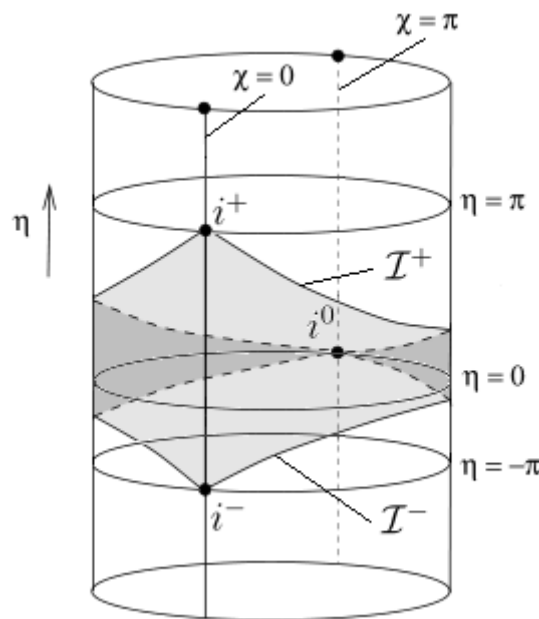
Αυτή είναι η μετρική του επίπεδου χωροχρόνου Minkowski σε συντεταγμένες η και χ . Βλέπουμε αμέσως ότι η μετρική αυτή είναι *σύμμορφη* με τη μετρική:

$$d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2$$

επειδή

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2$$

Η “αφύσιχη” μετρική $d\tilde{s}^2$ δεν είναι μετρική του επιπέδου χωροχρόνου Minkowski, δεν είναι καν λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό. Η μετρική της μορφής αυτής* είναι ακριβώς η Lorentz μετρική του “τετραδιάστατου κύλινδρου” $\mathbb{R} \times S^3$ (κύλινδρος του Einstein) και περιγράφει το στατικό σύμπαν του Einstein (στατική λύση των εξισώσεων του Einstein παρουσία ιδανικού ρευστού και με θετική κοσμολογική σταθερά). Η διαφορά είναι ότι στον $\mathbb{R} \times S^3$ το πεδίο ορισμού της χρονοειδούς συντεταγμένης η είναι $-\infty < \eta < \infty$. Επομένως ο χωρόχρονος Minkowski (\mathbb{R}^4, η_{ab}) είναι *σύμμορφος* με μια *ανοιχτή περιοχή* του στατικού σύμπαντος του Einstein ($\mathbb{R} \times S^3, \tilde{g}_{ab}$). Αν ενσωματώσουμε τον κύλινδρο του Einstein για σταθερές γωνιακές συντεταγμένες στον \mathbb{R}^3 , θα πάρουμε έναν δισδιάστατο κύλινδρο όπως στο παρακάτω σχήμα:



*Η μετρική της 3-σφαιρας είναι $d\tilde{s}^2 = d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2$

Η περιοχή με το γκρι χρώμα αντιπροσωπεύει τον χωρόχρονο Minkowski και το σύνορο της λέγεται **σύμμορφο άπειρο** (conformal infinity) του χωροχρόνου Minkowski. Το σύνορο αυτό χωρίζεται σε πέντε μέρη:

$$i^+ = \text{μελλοντικό χρονοειδές άπειρο } (\eta = \pi, \chi = 0)$$

$$i^0 = \text{χωροειδές άπειρο } (\eta = 0, \chi = \pi)$$

$$i^- = \text{παρελθοντικό χρονοειδές άπειρο } (\eta = -\pi, \chi = 0)$$

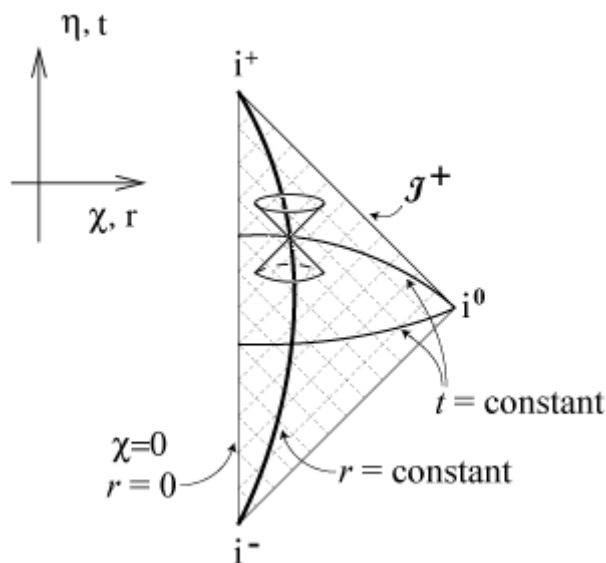
$$\mathcal{I}^+ = \text{μελλοντικό φωτοειδές άπειρο } (\eta = \pi - \chi, 0 < \chi < \pi)$$

$$\mathcal{I}^- = \text{παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο } (\eta = -\pi + \chi, 0 < \chi < \pi)$$

Σημειώνουμε ότι τα i^+ , i^0 , i^- είναι σημεία ενώ τα \mathcal{I}^+ , \mathcal{I}^- τρισδιάστατες φωτοειδείς επιφάνειες ($\mathbb{R} \times S^2$). Όλες οι χρονοειδείς γεωδαισιακές ξεκινούν στο i^- και καταλήγουν στο i^+ , όλες οι χωροειδείς γεωδαισιακές ξεκινούν και καταλήγουν στο i^0 και όλες οι φωτοειδείς γεωδαισιακές ξεκινούν στο \mathcal{I}^- και καταλήγουν στο \mathcal{I}^+ . Οι ακτινικές φωτοειδείς γεωδαισιακές σχηματίζουν γωνίες $\pm 45^\circ$ με την κατακόρυφο. Είναι δυνατόν να υπάρχουν χρονοειδείς καμπύλες που είναι ασυμπτωτικά φωτοειδείς, όταν για παράδειγμα ένα σωματίδιο επιταχύνεται ομοιόμορφα όλο τον χρόνο και η ταχύτητα του τείνει στην ταχύτητα του φωτός για $t \rightarrow \infty$.

Με την βοήθεια του σύμμορφου απείρου γίνεται ο ορισμός του ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου: αν το σύμμορφο άπειρο του είναι ακριβώς ίδιο με το σύμμορφο άπειρο του χωροχρόνου Minkowski, τότε ο χωρόχρονος αυτός είναι ασυμπτωτικά επίπεδος.

Επειδή είναι δύσκολο να σχεδιάζουμε χωροχρονικά διαγράμματα στον κύλινδρο του Einstein, μπορούμε να “ξετυλίξουμε” την περιοχή που αντιστοιχεί στον χωρόχρονο Minkowski ώστε να πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα, γνωστό ως **διάγραμμα Penrose** του χωροχρόνου Minkowski:



Τα διαγράμματα Penrose είναι περισσότερο χρήσιμα για την μελέτη των μελανών οπών, για αυτό και στα επόμενα θα προσδιορίσουμε το διάγραμμα Penrose της λύσης

Kruskal. Στην ουσία θα χρειαστεί να κάνουμε τα ίδια που κάναμε για τον χωρόχρονο Minkowski.

Η μετρική Schwarzschild στις συντεταγμένες u, v (Eddington - Finkelstein) για την περιοχή I είναι (2.16):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) du dv + r^2 d\Omega^2$$

Κάνουμε τον ίδιο μετασχηματισμό συντεταγμένων που κάναμε για τον επίπεδο χωρόχρονο, ώστε να φέρουμε το άπειρο σε πεπερασμένες τιμές συντεταγμένων:

$$u = \tan(p)$$

$$v = \tan(q)$$

$$-\pi/2 < q < p < \pi/2$$

Βρίσκουμε το $du dv$:

$$du dv = \sec^2(p) \sec^2(q) dp dq$$

Επομένως η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = \sec^2(p) \sec^2(q) \left[- \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dp dq + \cos^2(p) \cos^2(q) r^2 d\Omega^2 \right]$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

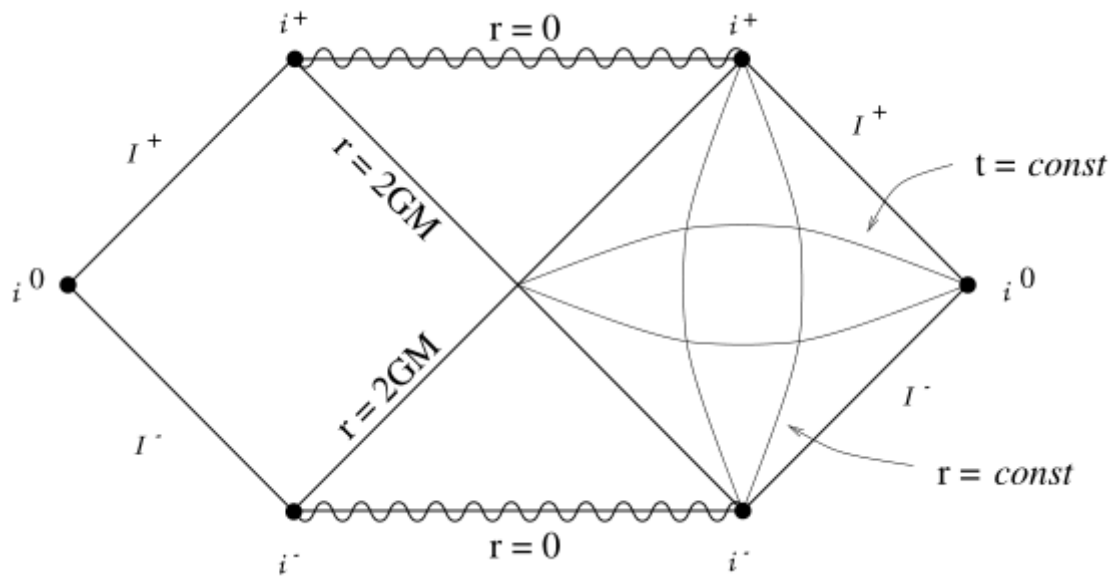
$$r^* = \frac{1}{2}(u - v) = \sin(p - q) \sec(p) \sec(q)$$

έχουμε:

$$d\tilde{s}^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dp dq + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(p - q) d\Omega^2$$

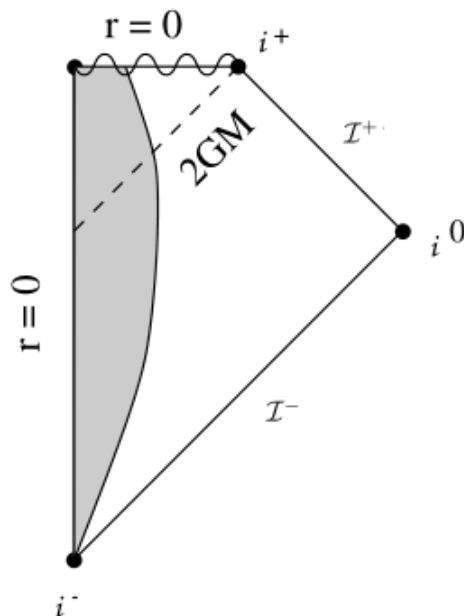
$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2$$

όπου $\omega = \cos(p) \cos(q)$ είναι ο ίδιος σύμμορφος παράγοντας που είχαμε χρησιμοποιήσει για τον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski. Παρατηρούμε ότι επειδή $\lim_{r \rightarrow \infty} r/r^* = 1$, η μετρική αυτή στο άπειρο είναι ακριβώς ίδια με τη σύμμορφη μετρική Minkowski, δηλαδή είναι ασυμπτωτικά επίπεδη, όπως είχαμε πει. Συμπεραίνουμε ότι ο χωρόχρονος Schwarzschild θα έχει το ίδιο σύμμορφο άπειρο με τον χωρόχρονο Minkowski και επομένως τα \mathcal{I}^\pm , i^\pm και i^0 σχεδιάζονται όπως στο διάγραμμα Penrose του χωροχρόνου Minkowski. Οι ιδιομορφίες στο $r = 0$ σχεδιάζονται ως ευθείες γραμμές που εκτείνονται από το χρονοειδές άπειρο του ενός ασυμπτωτικά επιπέδου χωροχρόνου I μέχρι το χρονοειδές άπειρο του III. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα Penrose του χωροχρόνου Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal. Επίσης έχουν σχεδιαστεί δύο χρονοειδείς καμπύλες σταθερού r που καταλήγουν στο i^+ , και δυο χωροειδείς καμπύλες σταθερού t .



Σχήμα 2.5: Διάγραμμα Penrose του χωροχρόνου Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal

Τέλος, παρουσιάζουμε το διάγραμμα Penrose μιας μελανής οπής Schwarzschild που δημιουργείται από σφαιρικά συμμετρική κατάρρευση άστρου. Μας ενδιαφέρει μόνο το εξωτερικό του άστρου και όχι το εσωτερικό του. Η επιφάνεια του άστρου είναι μια χρονοειδής καμπύλη. Ο χωρόχρονος έξω από το άστρο είναι Schwarzschild και επομένως στο διάγραμμα Penrose η περιοχή έξω από το άστρο είναι ίδια με τα αντίστοιχα κομμάτια των περιοχών I και II στο διάγραμμα Penrose για λύση Kruskal. Οι περιοχές III και IV δεν υπάρχουν για τους λόγους που εξηγήσαμε στην παρουσίαση του διαγράμματος Kruskal για σφαιρικά συμμετρική κατάρρευση άστρου.



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα Penrose για σφαιρικά συμμετρική κατάρρευση άστρου

3

Φαινόμενο Hawking

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ότι οι μελανές οπές εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία, γνωστή ως ακτινοβολία Hawking προς τιμήν του Stephen Hawking που το απέδειξε πρώτος, και σταδιακά εξατμίζονται. Θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη εισαγωγή στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου στον επίπεδο και καμπυλωμένο χωροχρόνο.

3.1 Κβαντική Θεωρία Πεδίου στον χωροχρόνο Minkowski

3.1.1 Κβάντωση βαθμωτού πεδίου στον χωροχρόνο Minkowski

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στην Κβαντική θεωρία πεδίου στον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski. Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στα βαθμωτά πεδία.

Ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(t, \mathbf{x})$ ορισμένο σε όλα τα σημεία (t, \mathbf{x}) του 4-διάστατου χωροχρόνου (Minkowski) ικανοποιεί την **εξίσωση Klein - Gordon**:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi = 0 \quad (3.1)$$

όπου m είναι η μάζα ενός κβάντου του πεδίου ϕ (όταν κβαντωθεί) και $\partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu$ όπου $\eta^{\mu\nu}$ είναι η μετρική Minkowski με ίχνος $(-+++)$. Στα επόμενα θα συμβολίζουμε τα σημεία (t, \mathbf{x}) του χωροχρόνου και με το x .

Η εξίσωση Klein - Gordon προκύπτει από την Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein - Gordon:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2) \quad (3.2)$$

Αν απαιτήσουμε η μεταβολή της δράσης

$$S = \int \mathcal{L} d^4x$$

ως προς το ϕ να είναι μηδέν:

$$\delta S = 0$$

Θα πάρουμε την **εξίσωση Euler - Lagrange**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας την Λαγκρανζιανή πυκνότητα 3.2 στην εξίσωση αυτή έχουμε:

$$-m^2 \phi + \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

που είναι ακριβώς η εξίσωση Klein - Gordon 3.1.

Ένα σύνολο λύσεων της 3.1 είναι τα επίπεδα κύματα:

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{ik^\mu x_\mu}$$

όπου $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ είναι το κυματόνισμα και η συχνότητα ω ικανοποιεί τη σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$$

Για να γράψουμε την γενική λύση, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο λύσεων (modes). Για το σκοπό αυτό πρέπει πρώτα ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως προς το οποίο οι λύσεις πρέπει να είναι ορθοκανονικές:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma_t} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^3x \quad (3.4)$$

όπου Σ_t μια χωροειδής υπερεπιφάνεια ταυτοχρονίας για κάποιο t .

Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο αυτό σε δύο επίπεδα κύματα με διαφορετικά κυματόνισμα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)} \rangle &= -i \int_{\Sigma_t} \left[e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \partial_t e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)} - e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)} \partial_t e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] d^3x \\ &= -i \int_{\Sigma_t} \left[i(\omega' + \omega) e^{i(\omega' - \omega)t} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \right] d^3x \\ &= (\omega' + \omega) e^{i(\omega' - \omega)t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

Επομένως ένα ορθοκανονικό σύνολο λύσεων της 3.1 είναι:

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \quad (3.5)$$

$$\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Θα έχουμε πάντα $\omega > 0$ και συμπληρώνουμε το σύνολο των λύσεων αυτών με τις μιγαδικές συζυγείς λύσεις $u_{\mathbf{k}}^*(x)$. Οι λύσεις $u_{\mathbf{k}}(x)$ λέγονται **θετικής συχνότητας** ως προς το t εννοώντας ότι είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\partial/\partial t$:

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}(x) = -i\omega u_{\mathbf{k}}(x), \quad \omega > 0$$

ενώ οι λύσεις $u_{\mathbf{k}}^*(x)$ λέγονται **αρνητικής συχνότητας**:

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}^*(x) = i\omega u_{\mathbf{k}}^*(x) , \quad \omega > 0$$

Οι $u_{\mathbf{k}}(x)$ και $u_{\mathbf{k}}^*$ αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο λύσεων καθώς:

$$\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle = 0 , \quad \langle u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle = -\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Επομένως μπορούμε τώρα να γράψουμε την γενική λύση της εξίσωσης Klein - Gordon 3.1 ως γραμμικώς συνδυασμός των $u_{\mathbf{k}}(x)$ και $u_{\mathbf{k}}^*$:

$$\phi(x) = \int d^3\mathbf{k} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + a_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

Προχωράμε τώρα στην κβάντωση της κλασικής θεωρίας ελεύθερου βαθμωτού πεδίου. Προάγουμε το βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ στον τελεστή $\hat{\phi}(x)$ στην εικόνα του Heisenberg (στην οποία οι τελεστές εξαρτώνται από τον χρόνο και όχι οι κβαντικές καταστάσεις) και επιβάλλουμε τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

όπου $\hat{\pi}(x)$ είναι η συζυγής ορμή του $\hat{\phi}(x)$ που ορίζεται ως:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \dot{\phi}$$

όπου \mathcal{L} είναι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein - Gordon. Η τελευταία σχέση μετάθεσης είναι διάφορη του μηδενός μόνο όταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, κάτι που προκύπτει από την απαίτηση της αιτιότητας: οι τελεστές που είναι χωροειδώς διαχωρισμένοι δεν μπορούν να επηρεάζουν ο ένας τον άλλον.

Ο τελεστής πεδίου $\hat{\phi}(x)$ εκφράζεται ως γραμμικώς συνδυασμός των **τελεστών δημιουργίας** $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ και **καταστροφής** $\hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Ορίζουμε την κατάσταση κενού (ή κατάσταση χωρίς σωματίδια) $|0\rangle$ ως

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 , \quad \forall \mathbf{k}$$

Από την κατάσταση αυτή μπορούν να κατασκευαστούν όλες οι άλλες καταστάσεις που γεννούν τον χώρο Hilbert, δρώντας πάνω της με τους τελεστές δημιουργίας:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$$

όπου $|1_{\mathbf{k}}\rangle$ είναι κατάσταση ενός σωματιδίου με κυματόνυσμα \mathbf{k} . Ομοίως μπορούμε να κατασκευάσουμε πολυσωματιδιακές καταστάσεις αν δράσουμε στην κατάσταση κενού n_1 φορές με τον τελεστή $\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger$, n_2 φορές με τον με τον $\hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger$, και ούτω καθεξής:

$$|n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_j!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_{\mathbf{k}_j}^\dagger)^{n_j} |0\rangle$$

Τέτοιες πολυσωματιδιακές καταστάσεις λέγονται καταστάσεις Fock, στην αναπαράσταση αριθμού κατάληψης, και αποτελούν βάση του χώρου καταστάσεων Fock (άμεσο άθροισμα τανυστικού γινομένου χώρων Hilbert ενός σωματιδίου). Στην κατάσταση αυτή έχουμε n_1 σωματίδια με ορμή \mathbf{k}_1 , n_2 σωματίδια με ορμή \mathbf{k}_2 και ούτω καθεξής. Δρώντας μια φορά με τον τελεστή δημιουργίας σε μια τέτοια κατάσταση, προστίθεται ένα σωματίδιο:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots, n_j\rangle$$

ενώ δρώντας μια φορά με τον τελεστή καταστροφής, αφαιρείται ένα σωματίδιο:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_i} |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_j\rangle$$

Παρατηρούμε ότι αν δράσουμε πρώτα με τον τελεστή καταστροφής και έπειτα με τον τελεστή δημιουργίας (με το ίδιο κυματόνυσμα), παίρνουμε:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j\rangle$$

Δηλαδή η κατάσταση $|n_1, n_2, \dots, n_j\rangle$ και το n_i (αριθμός σωματιδίων στο mode με \mathbf{k}_i) είναι ιδιοκατάσταση και ιδιοτιμή, αντίστοιχα, του τελεστή:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}_i} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i}$$

που λέγεται **τελεστής αρίθμησης** για το mode με \mathbf{k}_i . Επιπλέον ορίζουμε τον τελεστή:

$$\hat{N} = \sum_{\ell} \hat{n}_{\mathbf{k}_\ell} = \sum_{\ell} \hat{a}_{\mathbf{k}_\ell}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_\ell}$$

Τα διανύσματα της βάσης Fock είναι ιδιοδιανύσματα του \hat{N} :

$$\hat{N} |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \sum_{\ell} \hat{n}_{\mathbf{k}_\ell} |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \left(\sum_{\ell} n_{\ell} \right) |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle$$

με ιδιοτιμές $N = \sum_{\ell} n_{\ell}$ που δίνουν τον συνολικό αριθμό σωματιδίων στην συγκεκριμένη κατάσταση Fock.

Η Χαμιλτονιανή του ελευθερου βαθμωτού πεδίου ϕ είναι:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x$$

όπου η Χαμιλτονιανή πυκνότητα \mathcal{H} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

όπου \mathcal{L} είναι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein - Gordon 3.2. Επομένως είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} \int [\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] d^3x$$

Η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί με τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής:

$$H = \frac{1}{2} \int [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] \omega d^3k$$

Με τη βοήθεια της σχέσης μετάθεσης $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ η Χαμιλτονιανή γράφεται ως:

$$\begin{aligned} H &= \int \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \omega d^3k + \frac{1}{2} \int \delta^{(3)}(0) \omega d^3k \\ &= \int \left[\hat{n}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right] \omega d^3k \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται ο τελεστής της ολικής ορμής:

$$P^i = \int \hat{n}_{\mathbf{k}} k^i d^3k$$

Και οι δύο τελεστές H και P^i μετατίθενται με τον τελεστή \hat{N} :

$$[\hat{N}, H] = [\hat{N}, P^i] = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιοκαταστάσεις του \hat{N} είναι ιδιοκαταστάσεις και των H , \mathbf{P} . Για κάθε αύξηση του n_i (μέση τιμή του \hat{n}_i) κατά ένα, οι μέσες τιμές των H και \mathbf{P} αυξάνονται κατά ένα ω_i και \mathbf{k}_i αντίστοιχα. Αυτό δικαιολογεί την υπόθεσή μας ότι το n_i είναι ο αριθμός των σωματιδίων (κβάντων πεδίου) ενέργειας ω_i και ορμής \mathbf{k}_i το καθένα και ότι η κατάσταση $|n_1, n_2, \dots, n_j\rangle$ περιέχει n_1 σωματίδια με ορμή \mathbf{k}_1 , n_2 σωματίδια με ορμή \mathbf{k}_2 κ.ο.κ.

Ας δούμε τις μέσες τιμές των H και \mathbf{P} στο κενό. Η μέση τιμή του τελεστή της ολικής ορμής είναι μηδέν:

$$\langle 0 | \mathbf{P} | 0 \rangle = 0$$

επειδή $\langle 0 | \hat{n}_i | 0 \rangle = 0, \forall i$. Όμως το ίδιο δεν ισχύει για την ενέργεια του κενού. Έχουμε:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \omega d^3k$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αποκλίνει, δηλαδή η πυκνότητα ενέργειας του κενού είναι άπειρη. Ωστόσο το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται εύκολα στον επίπεδο χωρόχρονο. Επειδή μόνο οι διαφορές στην ενέργεια είναι μετρήσιμες, μπορούμε απλώς να αγνοήσουμε τον όρο $\frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\omega$. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως ανακανονικοποίηση (renormalization) της ενέργειας του κενού. Επομένως θα θεωρούμε ότι η Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \int \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \omega d^3k, \quad \langle 0|H|0\rangle = 0$$

3.2 Κβαντική Θεωρία Πεδίου στον καμπυλωμένο χωροχρόνο

3.2.1 Κβάντωση βαθμωτού πεδίου στον καμπυλωμένο χωροχρόνο

Ως γνωστόν, ακόμα δεν έχει βρεθεί η πλήρης κβαντική θεωρία της βαρύτητας και ως εκ τούτου η κβάντωση του πεδίου στον καμπύλο χωροχρόνο γίνεται ακολουθώντας την ημικλασική προσέγγιση. Η δυσκολία στην κβάντωση της θεωρίας οφείλεται στο ότι η βαρύτητα διαφέρει από τις άλλες δυνάμεις της φύσης – το βαρυτικό πεδίο αλληλεπιδρά με τον εαυτό του. Η μετρική $g_{\mu\nu}$ παίζει διπλό ρόλο, από την μία είναι το πεδίο που περιγράφει την βαρυτική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα σωματίδια και από την άλλη είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που περιέχει την πληροφορία για την δομή του χωροχρόνου. Επομένως η κβάντωση της θεωρίας θα απαιτούσε κβάντωση του ίδιου του χωροχρόνου ο οποίος είναι δυναμικός σε αντίθεση με τον χωροχρόνο Minkowski στον οποίο η κβάντωση ήταν δυνατή.

Στην ημικλασική προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε, θα αντικαταστήσουμε την μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ με την πιο γενική μετρική $g_{\mu\nu}$ του καμπυλωμένου χωροχρόνου, χωρίς όμως να την κβαντώσουμε (να την προάγουμε σε τανυστή) – θα κβαντώνουμε μόνο τα πεδία ύλης όπως και στην περίπτωση του επιπέδου χωροχρόνου. Επομένως ο τανυστής ενέργειας - ορμής θα είναι τελεστής και η κλασική μετρική $g_{\mu\nu}$ θα ικανοποιεί τις τροποποιημένες εξισώσεις του Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$$

όπου $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ είναι η μέση (αναμενόμενη) τιμή του τελεστή ενέργειας - ορμής σε κάποια κβαντική κατάσταση της ύλης. Μια τέτοια προσέγγιση είναι καλή στις περισσότερες περιπτώσεις, εκτός από περιοχές κοντά στις χωροχρονικές ιδιομορφίες.

Ξεκινάμε με τον προσδιορισμό της εξίσωσης Klein - Gordon στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου Klein - Gordon στον καμπυλωμένο χωρόχρονο έχει την παρακάτω συναλλοίωτη μορφή:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2)$$

όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$, ϕ είναι το βαθμωτό πεδίο, m είναι η μάζα του κβάντου του πεδίου ϕ , ξ είναι μια αδιάστατη σταθερά σύζευξης και R είναι το βαθμωτό του Ricci. Η Λαγκρανζιανή αυτή μοιάζει αρκετά με αυτήν που είδαμε στην περίπτωση του επιπέδου

χωροχρόνου Minkowski. Η κύρια διαφορά είναι στην ύπαρξη του όρου $\xi R\phi^2$ ο οποίος εκφράζει την αλληλεπίδραση του βαθμωτού πεδίου ϕ με το βαρυτικό πεδίο. Ο συγκεκριμένος όρος έχει προστεθεί επειδή είναι ο μόνος όρος με τις σωστές διαστάσεις. Επίσης για $\xi = (n-2)/(4n-4) = 1/6$, όπου $n = 4$ είναι η διάσταση του χωροχρόνου, η δράση $S = \int \mathcal{L} d^4x$ είναι σύμμορφα αναλλοίωτη στην άμαζη περίπτωση $m = 0$, δηλαδή η Λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν αλλάζει στον σύμμορφο μετασχηματισμό της μετρικής $g_{\mu\nu}$ και του πεδίου ϕ :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} = \omega^{1-n/2} \phi = \omega^{-1} \phi, \quad n = 4$$

$$\mathcal{L}_g[\phi] = \mathcal{L}_{\tilde{g}}[\tilde{\phi}]$$

Στην περίπτωση αυτή η σταθερά ξ ονομάζεται σύμμορφη σταθερά σύζευξης.

Αντικαθιστώντας την Λαγκρανζιανή πυκνότητα αυτή στην εξίσωση Euler - Lagrange 3.3 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}(-m^2 - \xi R)\phi - \partial_\mu(-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) &= 0 \Rightarrow \\ \square\phi - m^2\phi - \xi R\phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου

$$\square = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)}{\sqrt{-g}}$$

Το βαθμωτό γινόμενο 3.4 γενικεύεται σε:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_\Sigma (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma \quad (3.7)$$

όπου n^μ είναι ένα μελλοντικά κατευθυνόμενο μοναδιαίο διάνυσμα, ορθογώνιο στην χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ (που επιλέγεται να είναι μια επιφάνεια Cauchy στον υπερβολικό χωροχρόνο) και $\sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma$ είναι το στοιχείο όγκου στην Σ . Αποδεικνύεται ότι η τιμή του $\langle \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \rangle$ είναι ανεξάρτητη της Σ .

Προχωράμε τώρα στην κβάντωση του πεδίου όπως και στην περίπτωση χωροχρόνου Minkowski, προάγοντας το βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ σε τελεστή $\hat{\phi}(x)$ και επιβάλλοντας τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

όπου η συζυγής ορμή του $\phi(x)$ είναι:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \sqrt{-g} \dot{\phi}$$

Ο τελεστής πεδίου μπορεί να αναπτυχθεί ως:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)]$$

όπου οι τελεστές \hat{a}_i και \hat{a}_i^\dagger ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Οι $u_i(x)$ αποτελούν ένα (αυθαίρετο) πλήρες σύνολο λύσεων της 3.6 οι οποίες είναι ορθοκανονικές ως προς το εσωτερικό γινόμενο 3.7:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \langle u_i^*, u_j^* \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \langle u_i, u_j^* \rangle = 0$$

Η κατασκευή της κατάστασης του κενού, του χώρου Fock, των τελεστών αρίθμησης κτλ. γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση χωροχρόνου Minkowski. Δηλαδή το κενό ορίζεται ως:

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0 \quad , \quad \forall i$$

από το οποίο προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις, δρώντας με τους τελεστές \hat{a}_i και \hat{a}_i^\dagger .

Όμως υπάρχει μια πολύ σημαντική διαφορά από την περίπτωση του χωροχρόνου Minkowski. Τα modes $u_i(x)$ στην περίπτωση του χωροχρόνου Minkowski 3.5, είχαν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι προσαρμοσμένα στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (t, x, y, z) . Πιο συγκεκριμένα, τα $u_i(x)$ ήταν ιδιοσυναρτήσεις του χρονοσειδούς διανυσματικού πεδίου Killing $\partial/\partial t$, ορθογώνιου στις χωροσειδείς υπερεπιφάνειες $t = \text{σταθ.}$ του χωροχρόνου Minkowski, με ιδιοτιμές $-i\omega$ για $\omega > 0$ (modes θετικής συχνότητας). Όμως στην περίπτωση του καμπύλου χωροχρόνου, εν γένει δεν θα υπάρχουν global διανυσματικά πεδία Killing ως προς τα οποία θα μπορούσαμε να ορίσουμε με παρόμοιο τρόπο τα modes θετικής (και αρνητικής) συχνότητας σε όλο τον χωροχρόνο. Με άλλα λόγια η ομάδα Poincare δεν είναι ομάδα συμμετρία στον καμπύλο χωροχρόνο.

3.2.2 Μετασχηματισμοί Bogolyubov

Εξηγήσαμε προηγουμένως ότι το πλήρες ορθοκανονικό σύνολο modes $\{u_i\}$ επιλέχθηκε αυθαίρετα και εν γένει υπάρχουν πολλές άλλες δυνατές επιλογές τέτοιων συνόλων. Ας υποθέσουμε ότι $\{\bar{u}_i\}$ είναι ένα άλλο πλήρες ορθοκανονικό σύνολο από modes. Τότε η ανάπτυξη του πεδίου $\hat{\phi}(x)$ ως προς το σύνολο αυτό θα είναι:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i \left[\hat{b}_i \bar{u}_i(x) + \hat{b}_i^\dagger \bar{u}_i^*(x) \right]$$

Αυτή η ανάπτυξη ορίζει ένα διαφορετικό κενό, $|\bar{0}\rangle$:

$$\hat{b}_i |\bar{0}\rangle = 0 \quad , \quad \forall i$$

και επομένως ορίζεται ένας διαφορετικός χώρος Fock, διαφορετικός τελεστής αρίθμησης κτλ. Δηλαδή ο αριθμός των σωματιδίων (και γενικά η έννοια του σωματιδίου) στον καμπύλο χωροχρόνο δεν είναι μοναδικά ορισμένος – εξαρτάται από την επιλογή του συνόλου των modes στα οποία αναπτύσσουμε το $\hat{\phi}$.

Ας δούμε πως σχετίζονται μεταξύ τους δύο διαφορετικά σύνολα από modes u_i και \bar{u}_i . Επειδή τα σύνολα αυτά είναι πλήρη, μπορούμε να γράψουμε τα modes \bar{u}_i ως γραμμικώς συνδυασμός των u_i και u_i^* :

$$\bar{u}_i = \sum_j (\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^*) \quad (3.8)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων ορθοκανονικότητας των modes βρίσκουμε:

$$\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \sum_{k\ell} \langle (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), (\alpha_{j\ell} u_\ell + \beta_{j\ell} u_\ell^*) \rangle = \sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$AA^\dagger - BB^\dagger = I \quad (3.9)$$

$$\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j^* \rangle = \sum_{k\ell} \langle (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), (\alpha_{j\ell}^* u_\ell^* + \beta_{j\ell}^* u_\ell) \rangle = \sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0 \Rightarrow$$

$$AB^T - BA^T = 0$$

όπου A και B είναι οι πίνακες με στοιχεία τα α_{ij} β_{ij} αντίστοιχα.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να γράψουμε τα modes u_i ως γραμμικώς συνδυασμός των \bar{u}_i και \bar{u}_i^* :

$$u_i = \sum_j (\bar{\alpha}_{ij} \bar{u}_j + \bar{\beta}_{ij} \bar{u}_j^*) \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην 3.8 έχουμε:

$$\bar{u}_i = \sum_j \left[\alpha_{ij} \sum_k (\bar{\alpha}_{jk} \bar{u}_k + \bar{\beta}_{jk} \bar{u}_k^*) + \beta_{ij} \sum_k (\bar{\alpha}_{jk}^* \bar{u}_k^* + \bar{\beta}_{jk}^* \bar{u}_k) \right]$$

$$= \sum_{j,k} [(\alpha_{ij} \bar{\alpha}_{jk} + \beta_{ij} \bar{\beta}_{jk}^*) \bar{u}_k + (\alpha_{ij} \bar{\beta}_{jk} + \beta_{ij} \bar{\alpha}_{jk}^*) \bar{u}_k^*]$$

Επομένως

$$\sum_j (\alpha_{ij} \bar{\alpha}_{jk} + \beta_{ij} \bar{\beta}_{jk}^*) = \delta_{ik} \Rightarrow A\bar{A} + B\bar{B}^* = I$$

$$\sum_j (\alpha_{ij} \bar{\beta}_{jk} + \beta_{ij} \bar{\alpha}_{jk}^*) = 0 \Rightarrow A\bar{B} + B\bar{A}^* = 0$$

Συνδυάζοντας τις τέσσερις σχέσεις που βρήκαμε για τα A , B , \bar{A} και \bar{B} , παίρνουμε:

$$A(\bar{A} - A^\dagger) + B(\bar{B}^* + B^\dagger) = 0$$

$$A(\bar{B} + B^T) + B(\bar{A}^* - A^T) = 0$$

Επομένως

$$\bar{A} = A^\dagger, \quad \bar{B} = -B^T$$

και μπορούμε να ξαναγράψουμε την 3.10 ως:

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*) \quad (3.11)$$

Οι μετασχηματισμοί 3.8 και 3.11, από ένα σύνολο λύσεων στο άλλο, είναι γνωστοί ως **μετασχηματισμοί Bogolyubov**. Οι πίνακες α_{ij} και β_{ij} λέγονται **συντελεστές Bogolyubov** και υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_{ij} = \langle \bar{u}_i, u_j \rangle$$

$$\beta_{ij} = -\langle \bar{u}_i, u_j^* \rangle$$

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Bogolyubov μπορούμε να εκφράσουμε τους τελεστές \hat{a}_i και \hat{a}_i^\dagger ως γραμμικός συνδυασμός των \hat{b}_i , \hat{b}_i^\dagger και αντίστροφα. Έχουμε:

$$\hat{a}_i = \langle \hat{\phi}, u_i \rangle$$

όπου παίρνουμε την ανάπτυξη του $\hat{\phi}$ στα modes u_i . Αναπτύσσουμε τώρα το $\hat{\phi}$ στα modes \bar{u}_i και χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς Bogolyubov για τα \bar{u}_i και \bar{u}_i^* :

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \sum_j \langle (\hat{b}_j \bar{u}_j + \hat{b}_j^\dagger \bar{u}_j^*), u_i \rangle = \sum_j \left(\hat{b}_j \langle \bar{u}_j, u_i \rangle + \hat{b}_j^\dagger \langle \bar{u}_j^*, u_i \rangle \right) \\ &= \sum_{j,k} \left[\hat{b}_j \langle (\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*), u_i \rangle + \hat{b}_j^\dagger \langle (\alpha_{jk}^* u_k^* + \beta_{jk}^* u_k), u_i \rangle \right] \Rightarrow \\ \hat{a}_i &= \sum_j \left(\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το \hat{b}_i :

$$\hat{b}_i = \sum_j \left(\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger \right) \quad (3.13)$$

Από τις σχέσεις 3.12 και 3.13 προκύπτει άμεσα ότι:

$$\hat{a}_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |\bar{1}_j\rangle \neq \hat{a}_i |0\rangle = 0$$

$$\hat{b}_i |0\rangle = -\sum_j \beta_{ij}^* |1_j\rangle \neq \hat{b}_i |\bar{0}\rangle = 0$$

Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την υπόθεσή μας ότι οι καταστάσεις κενού $|0\rangle$ και $|\bar{0}\rangle$ και οι χώροι Fock που προκύπτουν από αυτές είναι διαφορετικοί. Μάλιστα μπορούμε να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές των τελεστών αρίθμησης $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ και $\hat{\bar{n}}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ στο κενό $|\bar{0}\rangle$ και $|0\rangle$ αντίστοιχα:

$$\langle \bar{0} | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \bar{0} \rangle = \sum_j \beta_{ji} \beta_{ji}^* \langle \bar{1}_j | \bar{1}_j \rangle \Rightarrow$$

$$\langle \bar{0} | \hat{n}_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 \neq \langle 0 | \hat{n}_i | 0 \rangle = 0$$

Ομοίως

$$\langle 0 | \hat{n}_i | 0 \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \neq \langle \bar{0} | \hat{n}_i | \bar{0} \rangle = 0$$

Το συμπέρασμα είναι ότι στο κενό $|0\rangle$ ο αριθμός των \bar{u}_1 -σωματιδίων είναι $\sum_j |\beta_{1j}|^2$, των \bar{u}_2 -σωματιδίων $\sum_j |\beta_{2j}|^2$ κ.ο.κ., ενώ ο αριθμός των u_i -σωματιδίων είναι μηδέν, $\forall i$. Ομοίως, στο κενό $|\bar{0}\rangle$ ο αριθμός των u_1 -σωματιδίων είναι $\sum_j |\beta_{j1}|^2$, των u_2 -σωματιδίων $\sum_j |\beta_{j2}|^2$ κ.ο.κ., ενώ ο αριθμός των \bar{u}_i -σωματιδίων είναι μηδέν, $\forall i$. Επομένως αυτό που φαίνεται σαν κενό για έναν παρατηρητή (ή ανιχνευτή σωματιδίων), θα φαίνεται σαν κατάσταση γεμάτη από σωματίδια για έναν άλλον παρατηρητή. Αυτό οφείλεται εν μέρει στο ότι η έννοια του σωματιδίου είναι ορισμένη globally (τα modes ορίζονται σε όλο τον χωροχρόνο) ενώ η ανίχνευση σωματιδίου με μία ανιχνευτική συσκευή είναι διαδικασία τοπικού χαρακτήρα. Για παράδειγμα, αν ένας χωρόχρονος αποτελείται από μια αρχική ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή 1 που ακολουθείται από μια περιοχή με καμπυλότητα 2 και μετά από μία άλλη, τελική, ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή 3, η φυσική ανάπτυξη του $\hat{\phi}$ σε modes θετικής και αρνητικής συχνότητας θα είναι διαφορετική στις περιοχές 1 και 3, με αποτέλεσμα οι τελεστές αρίθμησης και οι καταστάσεις κενού στις περιοχές 1 και 3 να διαφέρουν. Υπενθυμίζουμε ότι στην εικόνα του Heinsenberg από τον χρόνο εξαρτώνται οι τελεστές και όχι οι καταστάσεις, επομένως αν ως αρχική κατάσταση ορίστηκε να είναι η $|0\rangle_1$ (κατάσταση κενού στην περιοχή 1), στην περιοχή 3 θα αλλάξουν μόνο οι τελεστές αρίθμησης, για τους οποίους όμως η κατάσταση $|0\rangle_1$ δεν θα είναι κενή. Επομένως αν ένας παρατηρητής βλέπει κενό στην μια περιοχή, στην άλλη περιοχή θα ανιχνεύει σωματίδια. Επίσης παίζει ρόλο και η κατάσταση κίνησης του ανιχνευτή, αν για παράδειγμα στον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski ένας αδρανειακός παρατηρητής βλέπει κενό, ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής θα ανιχνεύει σωματίδια (φαινόμενο Unruh).

Τέλος αναφέρουμε ότι όταν ο χωρόχρονος είναι στάσιμος, πάντα θα υπάρχει μια φυσική επιλογή των modes θετικής και αρνητικής συχνότητας. Ο λόγος για αυτό είναι ότι, εξ' ορισμού, ο στατικός χωρόχρονος έχει παντού ορισμένο ένα χρονοειδές διανυσματικό πεδίο Killing ξ^μ . Επομένως θα υπάρχει ένα σύνολο λύσεων $\{f_i\}$ της εξίσωσης Klein - Gordon 3.6, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{L}_\xi f_i = -i\omega f_i, \quad \omega > 0$$

$$\mathcal{L}_\xi f_i^* = i\omega f_i^*, \quad \omega > 0$$

παντού στον χωροχρόνο και ανεξαρτήτως της επιλογής συστήματος συντεταγμένων. Οι λύσεις f_i θα ονομάζονται θετικής συχνότητας και οι f_i^* αρνητικής συχνότητας, ως προς το διανυσματικό πεδίο Killing ξ^μ .

3.3 Ακτινοβολία Hawking

3.3.1 Παραγωγή σωματιδίων από βαρυτική κατάρρευση

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το φαινόμενο της παραγωγής σωματιδίων από βαρυτική κατάρρευση, όπως υπολογίστηκε από τον Hawking [;]. Θεωρούμε την πιο απλή

περίπτωση της κατάρρευσης ενός σφαιρικά συμμετρικού, αφόρτιστου και μη περιστρεφόμενου σώματος. Επιπλέον, για να απλοποιήσουμε περαιτέρω τα πράγματα, θεωρούμε ότι το βαθμωτό πεδίο $\hat{\phi}$ είναι άμαζο, $m = 0$. Η βασική ιδέα είναι ότι στο μακρινό παρελθόν ο χωρόχρονος θεωρείται ασυμπτωτικά επίπεδος (περιοχή κοντά στο \mathcal{I}^- , που θα την ονομάζουμε “μέσα περιοχή”), οπότε εκεί μπορεί να οριστεί η κατάσταση κενού $|0\rangle_{in}$ με τον φυσικό τρόπο όπως στον χωροχρόνο Minkowski. Μετά την κατάρρευση του σώματος ο χωρόχρονος είναι Schwarzschild, και στο μακρινό μέλλον (περιοχή κοντά στο \mathcal{I}^+ , που θα την ονομάζουμε “έξω περιοχή”), όπου ο χωρόχρονος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, το κενό $|0\rangle_{out}$ δεν είναι το κενό που έχει οριστεί στην μέσα περιοχή. Επομένως θα έχουμε παραγωγή σωματιδίων και για να βρούμε τον αναμενόμενο αριθμό τους πρέπει να βρούμε τους συντελεστές Bogolubov ανάμεσα στην μέσα και έξω περιοχή.

Ο τελεστής πεδίου $\hat{\phi}$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\square\hat{\phi} = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\hat{\phi}\nabla_\mu\hat{\phi} = 0$$

(έξω από το σώμα είναι $R = 0$, οπότε δεν υπάρχει ο όρος $\xi R\phi$). Κατά τα γνωστά ο τελεστής $\hat{\phi}$ εκφράζεται ως:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [\hat{a}_i f_i(x) + \hat{a}_i^\dagger f_i^*(x)] \quad (3.14)$$

όπου f_i είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης $f_{i;\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$ τέτοιες ώστε στο \mathcal{I}^- να αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύνολο λύσεων θετικής συχνότητας (ως προς την αφινική παράμετρο κατά μήκος των φωτοειδών γεωδαισιακών που γεννούν το \mathcal{I}^-). Οι τελεστές \hat{a}_i και \hat{a}_i^\dagger έχουν την συνήθη φυσική ερμηνεία ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για τα εισερχόμενα σωματίδια (που προέρχονται από το \mathcal{I}^-). Το κενό $|0\rangle_{in}$ ορίζεται ως:

$$\hat{a}_i|0\rangle_{in} = 0, \quad \forall i$$

Επειδή το \mathcal{I}^- είναι μια επιφάνεια Cauchy, τα άμαζα πεδία είναι πλήρως ορισμένα από τις αρχικές συνθήκες στο \mathcal{I}^- και επομένως ο τελεστής πεδίου μπορεί να εκφραστεί στην μορφή 3.14 παντού στον χωροχρόνο.

Η βαρυτική κατάρρευση οδηγεί στον σχηματισμό ορίζοντα γεγονότων \mathcal{H}^+ , οπότε τα εισερχόμενα modes του πεδίου, είτε θα διαπεράσουν τον ορίζοντα είτε θα διαφύγουν προς το \mathcal{I}^+ . Οπότε στην περιοχή έξω από τον ορίζοντα γεγονότων τα άμαζα πεδία μπορούν επίσης να οριστούν πλήρως από τις αρχικές συνθήκες στο \mathcal{H}^+ και \mathcal{I}^+ (που μαζί αποτελούν μια επιφάνεια Cauchy). Επομένως ο τελεστής πεδίου $\hat{\phi}(x)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [\hat{b}_i p_i(x) + \hat{b}_i^\dagger p_i^*(x) + \hat{c}_i q_i(x) + \hat{c}_i^\dagger q_i^*(x)] \quad (3.15)$$

όπου το πλήρες ορθοκανονικό σύνολο λύσεων $\{p_i\}$ αποτελείται μόνο από εξερχόμενα modes (αυτά που διαφεύγουν στο \mathcal{I}^+) θετικής συχνότητας (ως προς την αφινική παράμετρο κατά μήκος των φωτοειδών γεωδαισιακών που γεννούν το \mathcal{I}^+) και οι τελεστές \hat{b}_i , \hat{b}_i^\dagger ερμηνεύονται ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για τα εξερχόμενα σωματίδια. Το πλήρες ορθοκανονικό σύνολο λύσεων $\{q_i\}$ αποτελείται μόνο από εισερχόμενα modes (που διαπερνούν τον ορίζοντα γεγονότων). Όμως τα q_i είναι αυθαίρετα επειδή

δεν υπάρχει φυσική επιλογή συντεταγμένης ως προς την οποία μπορούν να οριστούν modes q_i θετικής συχνότητας όπως στις ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές \mathcal{I}^- και \mathcal{I}^+ (το χρονοειδές διανυσματικό πεδίο Killing δεν είναι ορισμένο παντού στον χωροχρόνο – στον ορίζοντα γεγονότων αλλάζει από χρονοειδές σε χωροειδές μέσα στην μελανή οπή). Ωστόσο, η επιλογή του $\{q_i\}$ δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα του αναμενόμενου αριθμού σωματιδίων στο \mathcal{I}^+ επειδή εκεί η μέση τιμή υπολογίζεται με τη βοήθεια της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας $\rho_{\mathcal{I}^+} = \text{Tr}_{\{q\}}\rho$ ως $\langle O_{\mathcal{I}^+} \rangle = \text{Tr}(\rho_{\mathcal{I}^+} O_{\mathcal{I}^+})$ και είναι ανεξάρτητη της επιλογής των q_i .

Επειδή τα σύνολα $\{f_i\}$, $\{p_i\}$ και $\{q_i\}$ είναι ορθοκανονικά μπορούμε να εκφράσουμε τις λύσεις p_i και q_i ως γραμμικώς συνδυασμός των f_i και f_i^* :

$$p_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*)$$

$$q_i = \sum_j (\gamma_{ij} f_j + \eta_{ij} f_j^*)$$

Αυτοί είναι οι μετασχηματισμοί Bogolubov από τα modes p_i και q_i στα f_i . Οι αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των τελεστών \hat{b}_i , \hat{c}_i και \hat{a}_i , \hat{a}_i^\dagger είναι:

$$\hat{b}_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger)$$

$$\hat{c}_i = \sum_j (\gamma_{ij}^* \hat{a}_j - \eta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger)$$

Ορίσαμε ως αρχική κατάσταση την κατάσταση κενού $|0\rangle_{in}$, η οποία δεν περιέχει σωματίδια στο \mathcal{I}^- . Επειδή οι συντελεστές Bogolubov β_{ij} δεν θα είναι μηδέν εν γένει, η αρχική κατάσταση $|0\rangle_{in}$ δεν θα είναι κατάσταση κενού για έναν παρατηρητή στο \mathcal{I}^+ . Ο αναμενόμενος αριθμός των εξερχόμενων σωματιδίων στο mode p_i θα είναι:

$$\langle 0|_{in} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i |0\rangle_{in} = \sum_j |\beta_{ij}|^2$$

Επομένως για να βρούμε τον αριθμό των σωματιδίων που παράγονται από βαρυτική κατάρρευση έχουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές Bogolubov β_{ij} . Στην επόμενη ενότητα θα βρούμε την ασυμπτωτική μορφή των β_{ij} που εξαρτάται μόνο από την επιφανειακή βαρύτητα.

3.3.2 Ακτινοβολία Hawking

Επειδή ο χωροχρόνος είναι σφαιρικά συμμετρικός, οι λύσεις της εξίσωσης κύματος $\square\phi = 0$ θα είναι της μορφής:

$$\phi \sim r^{-1} R_{\omega\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}$$

όπου $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές και η ακτινική συνάρτηση $R_{\omega\ell}(r)$ ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 R_{\omega\ell}}{dr^{*2}} + \left\{ \omega^2 - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right\} R_{\omega\ell} = 0$$

όπου $r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$ είναι η συντεταγμένη της χελώνας. Στο \mathcal{I}^- και \mathcal{I}^+ , δηλαδή για $r \rightarrow \infty$, η εξίσωση αυτή ανάγεται στην:

$$\frac{d^2 R_{\omega\ell}}{dr^{*2}} + \omega^2 R_{\omega\ell} = 0$$

η οποία έχει ως λύσεις τις $e^{\pm i\omega r^*}$. Επομένως οι λύσεις στο \mathcal{I}^- και \mathcal{I}^+ θα είναι της μορφής:

$$r^{-1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t \pm i\omega r^*}$$

Αν θέσουμε $v = t + r^*$ και $u = t - r^*$ (εισερχόμενη και εξερχόμενη συντεταγμένη Eddington - Finkelstein αντίστοιχα), οι λύσεις f και p γράφονται:

$$f_{\omega\ell m} \sim r^{-1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega v}$$

$$p_{\omega\ell m} \sim r^{-1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega u}$$

Οι σταθερές κανονικοποίησης θα προκύψουν από τις σχέσεις κανονικοποίησης:

$$\langle f_{\omega\ell m}, f_{\omega'\ell'm'} \rangle = \langle p_{\omega\ell m}, p_{\omega'\ell'm'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega')$$

Για παράδειγμα για το f έχουμε:

$$\langle f_{\omega\ell m}, f_{\omega'\ell'm'} \rangle = -i \int_{\Sigma} (f_{\omega\ell m} \partial_{\mu} f_{\omega'\ell'm'}^* - f_{\omega'\ell'm'}^* \partial_{\mu} f_{\omega\ell m}) n^{\mu} \sqrt{-g_{\Sigma}} d\Sigma$$

Η υπερεπιφάνεια Σ είναι η \mathcal{I}^- με μετρική $g_{\Sigma} = \text{diag}[(1 - 2M/r)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta]$, επομένως

$$\begin{aligned} \sqrt{-g_{\Sigma}} &= (2M/r - 1)^{-1/2} r^2 \sin \theta \\ n^{\mu} d\Sigma &= (2M/r - 1)^{1/2} (1, 0, 0, 0) dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Επίσης στο \mathcal{I}^- $v \approx t + r$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle f_{\omega\ell m}, f_{\omega'\ell'm'} \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &\quad \frac{1}{r^2} Y_{\ell m} Y_{\ell'm'}^* \left(e^{-i\omega(t+r)} \partial_t e^{i\omega'(t+r)} - e^{i\omega'(t+r)} \partial_t e^{-i\omega(t+r)} \right) \\ &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} (\omega + \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega')r} dr \\ &= 4\omega\pi \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta Y_{\ell m} Y_{\ell'm'}^* d\varphi d\theta &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} dr &= 2\pi \delta(\omega) \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε τη σταθερά κανονικοποίησης για το p . Τελικά θα είναι:

$$f_{\omega\ell m} = \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{(4\pi\omega)^{1/2} r} e^{-i\omega v} \quad (3.16)$$

$$p_{\omega\ell m} = \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{(4\pi\omega)^{1/2} r} e^{-i\omega u} \quad (3.17)$$

Η ανάπτυξη του $\hat{\phi}$ σε f και f^* θα έχει τη μορφή:

$$\hat{\phi} = \sum_{\ell m} \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_{\omega\ell m} f_{\omega\ell m} + \hat{a}_{\omega\ell m}^\dagger f_{\omega\ell m}^*]$$

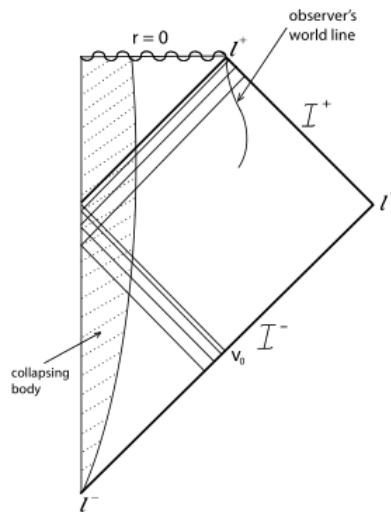
Οι λύσεις $p_{\omega\ell m}$ μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των $f_{\omega\ell m}$ και $f_{\omega\ell m}^*$ ως προς το ω , για τις ίδιες τιμές των ℓ και m (οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τους δείκτες ℓ και m):

$$p_\omega = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*)$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τους συντελεστές Bogolubov $\beta_{\omega\omega'}$. Είναι

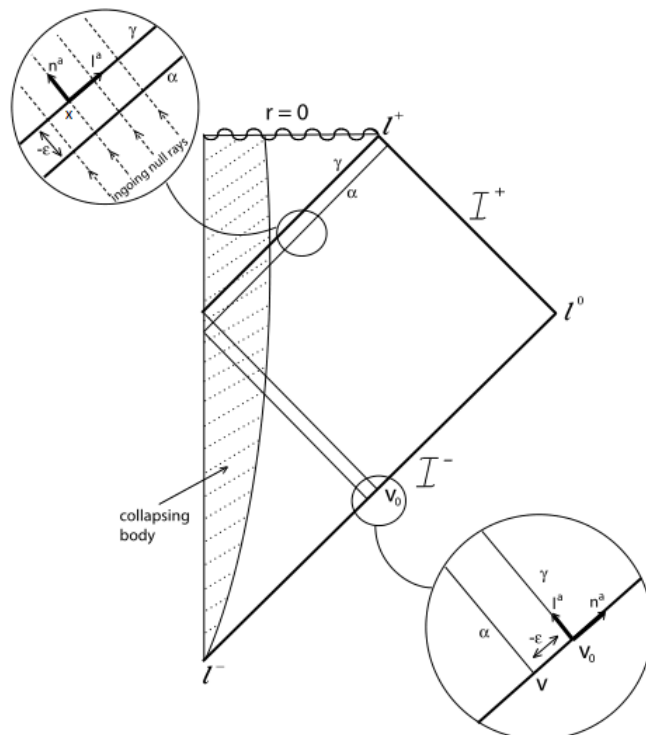
$$\beta_{\omega\omega'} = \langle p_{\omega\ell m}, f_{\omega'\ell m}^* \rangle$$

Όμως για υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο αυτό, τα $f_{\omega\ell m}$ και $p_{\omega\ell m}$ πρέπει να είναι ορισμένα στην ίδια υπερεπιφάνεια Cauchy. Εμείς όμως βρήκαμε τα $f_{\omega\ell m}$ και $p_{\omega\ell m}$ στα \mathcal{I}^- και \mathcal{I}^+ αντίστοιχα (σχέσεις 3.16 και 3.17). Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε την λύση θετικής συχνότητας p_ω στο \mathcal{I}^+ να διαδίδεται πίσω στον χρόνο από το \mathcal{I}^+ . στο \mathcal{I}^- και εκεί να την αναπτύξουμε στις f_ω και f_ω^* . Αυτή η λύση p_ω αποτελείται από δύο μέρη, $p_\omega^{(1)}$ που θα σχεδαστεί από το στατικό πεδίο Schwarzschild έξω από το καταρρέον σώμα και τελικά θα καταλήξει στο \mathcal{I}^- με την ίδια συχνότητα ω , και $p_\omega^{(2)}$ που θα εισέλθει στο καταρρέον σώμα όπου ένα μέρος της θα σχεδαστεί και ένα μέρος θα διαπεράσει το σώμα και θα καταλήξει στο \mathcal{I}^- , με διαφορετική συχνότητα. Είδαμε ότι λύση p_ω είναι εκθετική συνάρτηση της συντεταγμένης u , $p_\omega(u) \sim e^{-i\omega u}$, και επειδή το u απειρίζεται στον ορίζοντα γεγονότων, οι επιφάνειες σταθερής φάσης ωu θα συσσωρεύονται κοντά στον ορίζοντα και ένας παρατηρητής στην επιφάνεια θα βλέπει πολύ μεγάλο blueshift με αποτέλεσμα το κύμα να διαπεράσει το σώμα και να κινηθεί προς το \mathcal{I}^- . Στο \mathcal{I}^- το $p_\omega^{(2)}$ θα έχει άπειρο αριθμό κύκλων κοντά στην φωτοειδή επιφάνεια $v = v_0$ που αργότερα (από το κέντρο του σώματος και μετά) συμπίπτει με τον ορίζοντα γεγονότων.



Σχήμα 3.1: Οι λύσεις p_ω έχουν άπειρο αριθμό κύκλων κοντά στον ορίζοντα γεγονότων και στην επιφάνεια $v = v_0$. Η ανάκλαση στην κατακόρυφο $r = 0$ δεν είναι πραγματική, οι φωτοειδείς καμπύλες είναι ευθείες γραμμές από το I^- στο I^+ .

Επομένως το $p_\omega^{(2)}$ είναι αυτό που έχει ενδιαφέρον και θέλουμε να προσδιορίσουμε τη μορφή του στο I^- , κοντά στο $v = v_0$. Έστω l^a ένα φωτοειδές διάνυσμα εφαπτόμενο στον ορίζοντα γεγονότων (φωτοειδής γεωδαισιακή γ στο παρακάτω σχήμα) και n^a ένα μελλοντικά κατευθυνόμενο φωτοειδές διάνυσμα κάθετο στον ορίζοντα γεγονότων, κανονικοποιημένο έτσι ώστε $n^a l_a = -1$. Το διάνυσμα $-\epsilon n^a$, όπου ϵ είναι μια μικρή και θετική σταθερά, πάντα θα συνδέει τον ορίζοντα με μια φωτοειδή επιφάνεια σταθερού χρόνου u και επομένως με μια επιφάνεια σταθερής φάσης ωu του $p_\omega^{(2)}$ (φωτοειδής γεωδαισιακή α στο παρακάτω σχήμα).



Το διάνυσμα n^a είναι εφαπτόμενο στις εισερχόμενες φωτοειδής γεωδαισιακές κοντά στον ορίζοντα γεγονότων. Έστω λ η αφινική παράμετρος κατά μήκος μιας τέτοιας γεωδαισιακής, τέτοια ώστε $\lambda = 0$ στο σημείο τομής της με τον ορίζοντα (με την γ) και $dx^a/d\lambda = n^a$. Για να δούμε πως η παράμετρος λ συνδέεται με τη συντεταγμένη u , περνάμε στις συντεταγμένες Kruskal $v' = e^{u/4M}$ και $u' = -e^{-u/4M}$ που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2, στις οποίες η μετρική δεν είναι ιδιόμορφη στον ορίζοντα. Η εξίσωση της εισερχόμενης φωτοειδούς γεωδαισιακής στις συντεταγμένες αυτές είναι $d^2u'/d\lambda^2 = 0$, οπότε:

$$\lambda = Cu' = -Ce^{-\kappa u} \Rightarrow$$

$$u = -\frac{1}{\kappa} [\ln(-\lambda) - \ln(C)] , \quad \lambda < 0 , \quad C > 0$$

όπου C είναι κάποια σταθερά αναλογίας και κ είναι η επιφανειακή βαρύτητα με $\kappa = 1/4M$ για μελανή οπή Schwarzschild. Από αυτή την επιλογή της αφινικής παραμέτρου λ προκύπτει ότι για $\lambda = -\epsilon$ η εισερχόμενη φωτοειδής γεωδαισιακή τέμνει την επιφάνεια σταθερής φάσης α . Επομένως το διάνυσμα $-\epsilon n^a$ συνδέει τον ορίζοντα γεγονότων με την επιφάνεια σταθερής φάσης της λύσης $p_\omega^{(2)}$:

$$\omega u = -4M\omega [\ln(\epsilon) - \ln(C)] \quad (3.18)$$

Προχωράμε πίσω στον χρόνο κατά μήκος της γεωδαισιακής γ , από εκεί που τελειώνει ο ορίζοντας γεγονότων μέχρι το \mathcal{I}^- για $v = v_0$, και μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα n^a κατά μήκος του γ . Το διάνυσμα $-\epsilon n^a$ θα συνεχίσει να συνδέει το γ με το α , δηλαδή την επιφάνεια σταθερής φάσης της λύσης $p_\omega^{(2)}$. Στο \mathcal{I}^- το διάνυσμα n^a είναι παράλληλο στο διάνυσμα Killing K^a που είναι εφαπτόμενο στις φωτοειδής γεωδαισιακές, γεννήτορες του \mathcal{I}^- :

$$n^a = DK^a$$

Επομένως στο \mathcal{I}^- για $v_0 - v$ μικρό και θετικό θα είναι:

$$\epsilon = (v_0 - v)/D$$

Αντικαθιστώντας το ϵ αυτό στην 3.18 βρίσκουμε τις φάσεις των λύσεων $p_\omega^{(2)}$:

$$\omega u = -4M\omega [\ln(v_0 - v) - \ln(D) - \ln(C)]$$

Επομένως στο \mathcal{I}^- και για μικρές τιμές του $v_0 - v$ οι λύσεις $p_\omega^{(2)}$ (ως συναρτήσεις της συντεταγμένης v πλέον) είναι:

$$p_\omega^{(2)} \sim (4\pi\omega)^{-1/2} r^{-1} \exp \left[i4M\omega \ln \left(\frac{v_0 - v}{CD} \right) \right] , \quad v < v_0$$

$$p_\omega^{(2)} = 0 , \quad v > v_0$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $p_\omega^{(2)}$ είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\omega^{(2)}(\omega') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega^{(2)}(v) e^{-i\omega'v} dv \\ &= (4\pi\omega)^{-1/2} r^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{v_0} \exp \left[i4M\omega \ln \left(\frac{v_0 - v}{CD} \right) \right] e^{-i\omega'v} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{\omega}^{(2)}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_{\omega}^{(2)}(\omega') e^{i\omega'v} d\omega' = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{\omega}^{(2)}(-\omega') e^{-i\omega'v} d\omega' + \int_0^{\infty} \tilde{p}_{\omega}^{(2)}(\omega') e^{i\omega'v} d\omega' \\
&= (4\pi\omega')^{1/2} r \left[\int \tilde{p}_{\omega}^{(2)}(-\omega') f_{\omega'}(v) d\omega' + \int \tilde{p}_{\omega}^{(2)}(\omega') f_{\omega'}^*(v) d\omega' \right]
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι το $p_{\omega}^{(2)}(v)$ μπορεί να αναπτυχθεί στα $f_{\omega}(v)$ και $f_{\omega}^*(v)$:

$$p_{\omega}^{(2)} = \int d\omega' (\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'}^{(2)} f_{\omega'}^*)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} &= \langle p_{\omega}^{(2)}, f_{\omega'} \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{v_0} \exp \left[i4M\omega \ln \left(\frac{v_0 - v}{CD} \right) \right] e^{i\omega'v} dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD} \right)^{i4M\omega} \int_{-\infty}^{v_0} (v_0 - v)^{i4M\omega} e^{i\omega'v} dv
\end{aligned}$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = -\langle p_{\omega}^{(2)}, f_{\omega'}^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD} \right)^{i4M\omega} \int_{-\infty}^{v_0} (v_0 - v)^{i4M\omega} e^{-i\omega'v} dv$$

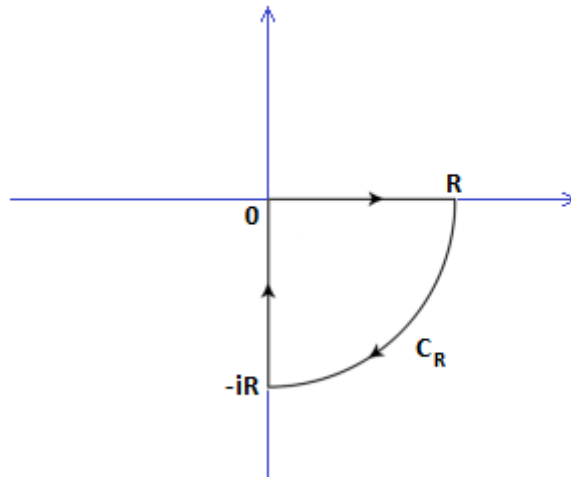
Θα υπολογίσουμε το $\beta_{\omega\omega'}^{(2)}$. Θέτουμε $y = v_0 - v$, οπότε:

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD} \right)^{i4M\omega} e^{-i\omega'v_0} \int_0^{\infty} y^{i4M\omega} e^{i\omega'y} dy$$

Τέλος θέτουμε $t = -i\omega'y$, οπότε:

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega\omega'} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD\omega'} \right)^{i4M\omega} e^{-i\omega'v_0} e^{-2\pi M\omega} \int_0^{-i\infty} t^{i4M\omega} e^{-t} dt$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $i^i = e^{-\pi/2}$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίδιο με το ολοκλήρωμα με όρια από 0 έως ∞ , επειδή αν θεωρήσουμε ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας R στο 4ο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, θα είναι $0 = \int_{-iR}^0 + \int_0^R + \int_{C_R}$ και για $R \rightarrow \infty$ το \int_{C_R} μηδενίζεται (λήμμα Jordan).



Επομένως

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega\omega'}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD\omega'}\right)^{i4M\omega} e^{-i\omega'v_0} e^{-2\pi M\omega} \Gamma(1 + i4M\omega)$$

όπου Γ είναι η γνωστή συνάρτηση γάμμα. Επειδή $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$, έχουμε:

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega\omega'}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD\omega'}\right)^{i4M\omega} e^{-i\omega'v_0} e^{-2\pi M\omega} i4M\omega \Gamma(i4M\omega)$$

Ομοίως βρίσκουμε το $\alpha_{\omega\omega'}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'}^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega\omega'}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{CD\omega'}\right)^{i4M\omega} e^{i\omega'v_0} e^{2\pi M\omega} i4M\omega \Gamma(i4M\omega) \Rightarrow \\ &\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -e^{2i\omega'v_0} e^{4\pi M\omega} \beta_{\omega\omega'}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό σωματιδίων στο \mathcal{I}^+ , δηλαδή:

$$\langle N_\omega \rangle_{\mathcal{I}^+} = \langle 0|_{in} \hat{N}_\omega |0\rangle_{in} = \int_0^\infty |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 d\omega'$$

Οπότε πρέπει πρώτα να βρούμε το $|\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |\Gamma(ix)|^2 &= \frac{\pi}{x \sinh(\pi x)} = \frac{2\pi}{x(e^{\pi x} - e^{-\pi x})}, \quad x \in \mathbb{R} \\ |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\omega\omega'}\right) e^{-4\pi M\omega} (4M\omega)^2 \frac{2\pi}{4M\omega(e^{4\pi M\omega} - e^{-4\pi M\omega})} \\ &= \frac{2M}{\pi\omega'} \left(\frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1}\right) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int_0^\infty |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 = \left(\frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1}\right) \int_0^\infty \frac{2M}{\pi\omega'} d\omega'$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αποκλίνει, δηλαδή σε άπειρο χρόνο παράγεται άπειρος αριθμός σωματιδίων σε κάθε mode στο \mathcal{I}^+ . Αυτό οφείλεται στο ότι ο πεπερασμένος και σταθερός ρυθμός παραγωγής τους συνεχίζεται για άπειρο χρόνο.

Μια πιο χρήσιμη ποσότητα είναι ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων ανά $d\omega$ και ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή ο αριθμός των διακριτών και πεπερασμένων κυματοπακέτων. Ένας τρόπος για να διακριτοποιήσουμε τα modes είναι να τα περιορίσουμε σε ένα κουτί με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Για τους συντελεστές Bogolubov στην διακριτή περίπτωση είχαμε βρει ότι ικανοποιούν τη σχέση 3.9:

$$\sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1$$

Επίσης από την σχέση 3.19 προκύπτει ότι:

$$|\alpha_{\omega\omega'}|^2 = e^{8\pi M\omega} |\beta_{\omega\omega'}|^2$$

Επομένως ο αναμενόμενος αριθμός των σωματιδίων ανά mode είναι:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega'} (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) &= \sum_{\omega'} (e^{8\pi M\omega} - 1) |\beta_{\omega\omega'}|^2 = 1 \Rightarrow \\ \langle N_{\omega} \rangle_{\mathcal{I}^+} &= \sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Από τη Θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι ένα μέλαν σώμα εκπέμπει ακτινοβολία που χαρακτηρίζεται από το φάσμα Planck:

$$\frac{1}{e^{\beta E} - 1}, \quad \beta = 1/T, \quad E = \omega \quad (\hbar = 1)$$

Συγκρίνοντας με την 3.20 συμπεραίνουμε ότι η ακτινοβολία μιας μελανής οπής, γνωστή ως **ακτινοβολία Hawking**, είναι *θερμική* με θερμοκρασία:

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι η εντροπία της μελανής οπής είναι (σε μονάδες Planck):

$$S = \frac{A}{4}$$

όπου A είναι το εμβαδόν του ορίζοντα γεγονότων.

Να σημειώσουμε ότι στον υπολογισμό που κάναμε αγνοήσαμε το φαινόμενο της οπισθοσκέδασης (backscattering) κατά το οποίο ένα μέρος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας $1 - \Gamma(\omega)$ σκεδάζεται από το βαρυτικό πεδίο γύρω από την μελανή οπή, πίσω στην μελανή οπή χωρίς να φτάνει στο \mathcal{I}^+ . Επομένως πρέπει να εισάγουμε στην 3.20 έναν παράγοντα $\Gamma(\omega)$:

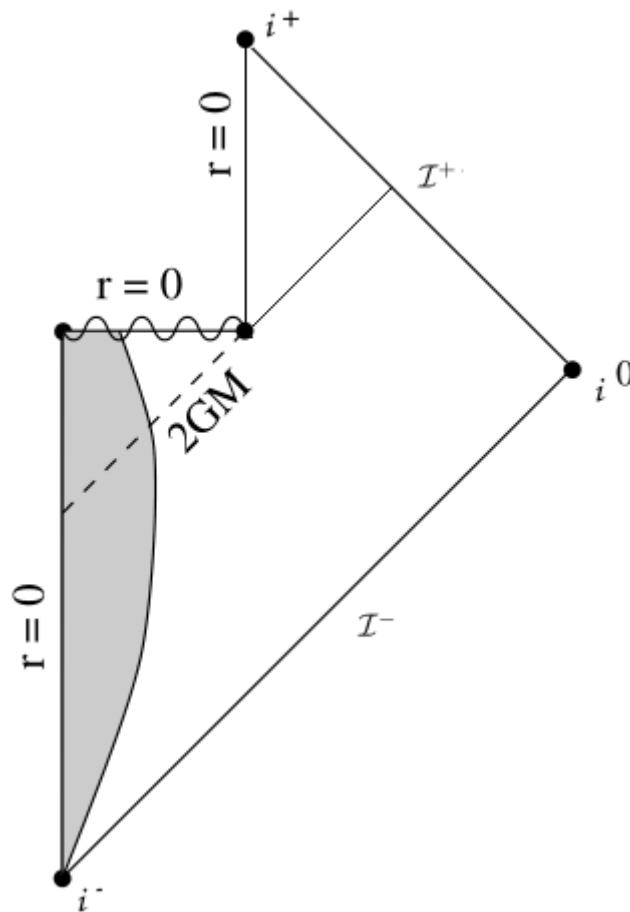
$$\langle N_{\omega} \rangle_{\mathcal{I}^+} = \frac{\Gamma(\omega)}{e^{8\pi M\omega} - 1}$$

Επομένως, επειδή το $\Gamma(\omega)$ εξαρτάται από το ω , το φάσμα δεν θα είναι ακριβώς Planckian. Παρόλαυτά η ακτινοβολία Hawking μπορεί να θεωρηθεί ως θερμική για τον εξής λόγο: Αν υποθέσουμε ότι η μελανή οπή είναι μέσα σε μια θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T_H , ένα μέρος $1 - \Gamma(\omega)$ της εισερχόμενης ακτινοβολίας θα οπισθοσκεδαστεί στο \mathcal{I}^+ από την μελανή οπή. Επομένως ο λόγος της εκπομπής ως προς απορρόφηση ακτινοβολίας ανά mode από την μελανή οπή είναι ανεξάρτητος του $\Gamma(\omega)$ και ίδιος όπως στην περίπτωση ενός μέλανος σώματος και η μελανή οπή θα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με τη θερμική δεξαμενή.

Ο Hawking στο πρωτότυπο του paper [3] επίσης υπολόγισε την εκπομπή σωματιδίων στην περίπτωση φορτισμένης και περιστρεφόμενης μελανής οπής. Το φάσμα που βρήκε είναι:

$$\langle N_{\omega} \rangle = \frac{\Gamma(\omega)}{e^{2\pi(\omega - \mu)/\kappa} \pm 1}$$

όπου κ είναι η επιφανειακή βαρύτητα της μελανής οπής, μ είναι το χημικό δυναμικό και το $+1$ αντιστοιχεί στα φερμιόνια ενώ το -1 στα μποζόνια. Δηλαδή τα σωματίδια που εκπέμπονται είναι φορτισμένα, έχουν μάζα και στροφορμή. Επειδή λοιπόν οι μελανές οπές ακτινοβολούν, υπό κατάλληλες συνθήκες (αν ο ρυθμός απορρόφησης είναι μικρότερος από τον ρυθμό εκπομπής κτλ.) θα χάνουν σταδιακά μάζα και τελικά θα εξατμίζονται πλήρως.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα Penrose για βαρυτική κατάρρευση ακολουθούμενη από σταδιακή εξάτμιση και τελικά εξαφάνιση της μελανής οπής. Ο χωρόχρονος μετά την πλήρη εξάτμιση της μελανής οπής είναι σχεδόν κενός και επίπεδος (το πάνω τρίγωνο)

4

Το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές το οποίο είναι η συνέπεια του γεγονότος ότι οι μελανές οπές εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία και σταδιακά εξατμίζονται μέχρι που εξαφανίζονται πλήρως, αφήνοντας μόνο θερμική ακτινοβολία. Αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές καθαρές κβαντικές καταστάσεις που καταλήγουν μέσα στην μελανή οπή μετατρέπονται σε μικτές καταστάσεις, κάτι που απαγορεύεται από τους νόμους της Κβαντομηχανικής και οδηγεί στην απώλεια της πληροφορίας.

4.1 Διατήρηση της πληροφορίας

Τόσο στην κλασική όσο και στην κβαντική φυσική η πληροφορία διατηρείται στα κλειστά και μονωμένα συστήματα. Στην κλασική φυσική η αρχή αυτή εκφράζεται με το θεώρημα Liouville, σύμφωνα με το οποίο ο όγκος του χώρου των φάσεων διατηρείται. Αν έχουμε περιορισμένη γνώση για την κατάσταση κάποιου συστήματος, στο χώρο των φάσεων αυτό θα καταλαμβάνει κάποια πεπερασμένη περιοχή $\Gamma(0)$ με όγκο V_Γ . Με τον χρόνο η περιοχή $\Gamma(0)$ εξελίσσεται σε κάποια διαφορετική περιοχή $\Gamma(t)$, της οποίας ο όγκος θα είναι ίδιος με τον όγκο της $\Gamma(0)$.

Στην Κβαντομηχανική η αρχή της διατήρησης της πληροφορίας εκφράζεται μέσω της μοναδιακότητας (unitarity) των τελεστών. Η χρονική εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος δίνεται από τον τελεστή $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H}$, όπου H είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος που δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, ο οποίος είναι μοναδιακός:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{-iHt}e^{iHt} = 1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι H είναι ερμιτιανός τελεστής, $H = H^\dagger$. Αν $|\psi_{in}\rangle$ και $|\psi_{out}\rangle$ είναι δύο καταστάσεις του χώρου Hilbert \mathcal{H} και U μοναδιακός τελεστής

χρονικής εξέλιξης $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, τέτοιος ώστε:

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}|\psi_{in}\rangle$$

τότε λόγω του ότι $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1 \Rightarrow \hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ θα έχουμε:

$$|\psi_{in}\rangle = \hat{U}^\dagger|\psi_{out}\rangle$$

Δηλαδή η αρχική κατάσταση $|\psi_{in}\rangle$ μπορεί να ανακτηθεί από την τελική $|\psi_{out}\rangle$ και υπό αυτή την έννοια η πληροφορία διατηρείται. Αυτό οφείλεται στο ότι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης είναι μοναδιακός και επομένως αντιστρέψιμος.

Στην περίπτωση που υπάρχουν αλληλεπιδράσεις, η μετάβαση από την αρχική κατάσταση στην τελική δίνεται από την δράση του τελεστή σκέδασης \hat{S} : $|\psi_{out}\rangle = \hat{S}|\psi_{in}\rangle$, $|\psi_{in}\rangle \in \mathcal{H}_{in}$, $|\psi_{out}\rangle \in \mathcal{H}_{out}$. Στην περίπτωση αυτή η διατήρηση της πληροφορίας εκφράζεται και πάλι από την μοναδιακότητα του S .

Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε την εντροπία von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ η οποία ποσοτικοποιεί την απόκλιση των μιχτών από τις καθαρές καταστάσεις. Επομένως η εντροπία von Neumann μετράει την ελλείπουσα πληροφορία για το σύστημα. Είδαμε ότι για καθαρή κατάσταση είναι $S = 0$ ενώ για μιχτή $S > 0$. Αν ένα σύστημα είναι αρχικά στην καθαρή κατάσταση ρ_p τότε η εξέλιξη της δίνεται με τη δράση του τελεστή σκέδασης:

$$\rho_p \rightarrow \rho = \hat{S}\rho_p\hat{S}^\dagger$$

Η εντροπία της προκύπτουσας κατάστασης είναι:

$$S(\rho) = -\text{Tr} \left[\hat{S}\rho_p\hat{S}^\dagger \ln \left(\hat{S}\rho_p\hat{S}^\dagger \right) \right] = -\text{Tr} \left[\hat{S}\rho_p \ln (\rho_p) \hat{S}^\dagger \right] = -\text{Tr} (\rho_p \ln \rho_p) \Rightarrow$$

$$S(\rho) = S(\rho_p) = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\ln(\hat{S}\rho\hat{S}^\dagger) = \hat{S} \ln(\rho)\hat{S}^\dagger$ και την ιδιότητα της κυκλικότητας του ίχνους. Άρα η προκύπτουσα κατάσταση ρ έχει εντροπία μηδέν και επομένως είναι επίσης καθαρή. Δηλαδή οι καθαρές καταστάσεις εξελίσσονται μοναδιακά μόνο σε καθαρές και όχι σε μιχτές.

Μπορούμε να γενικεύσουμε σε περιπτώσεις σκέδασης που περιέχουν και μήτρες πυκνότητας, κατασκευάζοντας χώρους \mathcal{G}_{in} και \mathcal{G}_{out} που αποτελούνται από μήτρες πυκνότητας στον \mathcal{H}_{in} και \mathcal{H}_{out} αντίστοιχα. Η απεικόνιση $\mathcal{S} : \mathcal{G}_{in} \rightarrow \mathcal{G}_{out}$ που απεικονίζει τις καταστάσεις in σε καταστάσεις out λέγεται superscattering τελεστής. Απαιτούμε ο τελεστής \mathcal{S} να διατηρεί πιθανότητες: $\text{Tr}(\mathcal{S}\rho) = \text{Tr}(\rho)$ και να είναι γραμμικός: $\mathcal{S}(a\rho_1 + b\rho_2) = a\mathcal{S}\rho_1 + b\mathcal{S}\rho_2$.

Θα αποδείξουμε ότι αν ο τελεστής \mathcal{S} είναι 1-1, επί και γραμμικός, τότε απεικονίζει καθαρές καταστάσεις του \mathcal{G}_{in} μόνο σε καθαρές καταστάσεις του \mathcal{G}_{out} και όχι σε μιχτές. Θα υποθέσουμε αρχικά το αντίθετο. Έστω $\rho_p = |\phi\rangle\langle\phi|$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{in}$, μια καθαρή κατάσταση και $\rho_m = \sum_i p_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$, $|\xi_i\rangle \in \mathcal{H}_{out}$, $\forall i$, μια μιχτή κατάσταση του \mathcal{G}_{out} τέτοια ώστε $\mathcal{S}\rho_p = \rho_m$. Τότε επειδή ο \mathcal{S} είναι 1-1 και επί, θα υπάρχει ο αντίστροφος του, \mathcal{S}^{-1} , τέτοιος ώστε $\mathcal{S}^{-1}\rho_m = \rho_p$. Αν $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{in}$ είναι όλες οι ορθογώνιες καταστάσεις στην $|\phi\rangle$, δηλαδή $\langle\phi|\psi\rangle = 0$, τότε

$$0 = \sum_i p_i \langle\psi| (\mathcal{S}^{-1}|\xi_i\rangle\langle\xi_i|) |\psi\rangle \Rightarrow$$

$$\langle \psi | (\mathcal{S}^{-1} |\xi_i\rangle \langle \xi_i|) | \psi \rangle = 0, \quad \forall |\xi_i\rangle \in \mathcal{H}_{out}, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{in}$$

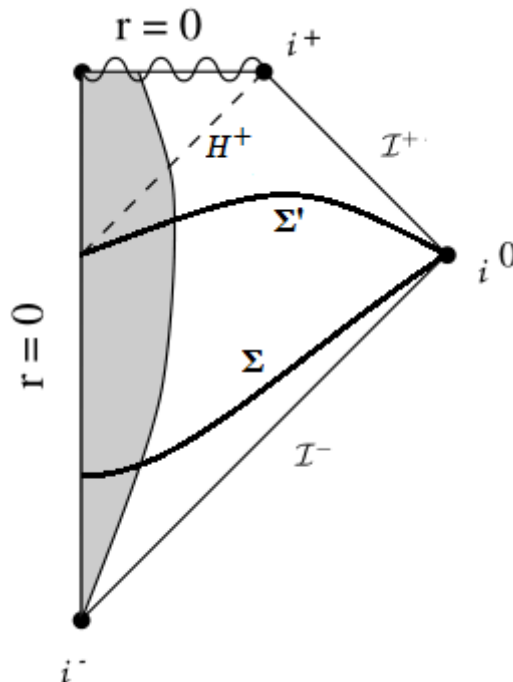
Επομένως συνεπάγεται ότι $\mathcal{S}^{-1} |\xi_i\rangle \langle \xi_i| = |\phi\rangle \langle \phi|$, δηλαδή κάθε καθαρή κατάσταση $|\xi_i\rangle \langle \xi_i|$ απεικονίζεται στην ίδια καθαρή κατάσταση $|\phi\rangle \langle \phi|$. Αυτό όμως αντιτίθεται στην υπόθεση μας ότι ο \mathcal{S} είναι 1-1 και επί, επομένως αποδείξαμε ότι ο \mathcal{S} απεικονίζει καθαρές καταστάσεις μόνο σε καθαρές. Ο Hawking που πρώτος όρισε τον τελεστή \mathcal{S} [4], θεώρησε ότι σε κάποιες περιπτώσεις ο τελεστής \mathcal{S} μπορεί να δίνει εξέλιξη από καθαρές σε μικτές καταστάσεις με μη μοναδιακό τρόπο, όμως αποδείχθηκε αργότερα ότι κάτι τέτοιο θα παραβίαζε τη συμμετρία CPT [5], [6] ή/και διατήρηση της ενέργειας και τοπικότητα [7].

Αυτό που κρατάμε από όλα όσα ειπώθηκαν είναι ότι η μοναδιακή εξέλιξη από μια καθαρή κατάσταση σε μια μικτή απαγορεύεται από τους νόμους της Κβαντομηχανικής και οι μη μοναδιακές μεταβάσεις δεν διατηρούν τις πιθανότητες και επομένως την πληροφορία.

4.2 Το παράδοξο

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το πρόβλημα της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές. Είδαμε στο Κεφάλαιο 3 ότι οι μελανές οπές εκπέμπουν ακτινοβολία Hawking η οποία είναι θερμική. Αυτό σημαίνει ότι η ακτινοβολία αυτή είναι τυχαία, χωρίς συσχετίσεις στις οποίες θα μπορούσε να είναι κωδικοποιημένη κάποια πληροφορία. Με άλλα λόγια η θερμική ακτινοβολία θα περιγράφεται από μια μήτρα πυκνότητας.

Για να δούμε ότι η ακτινοβολία Hawking πράγματι περιγράφεται από μήτρα πυκνότητας, καλύπτουμε τον χωροχρόνο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων με μη-ιδιόμορφες χωροειδείς υπερεπιφάνειες Cauchy Σ (τα λεγόμενα nice slices), ξεκινώντας από την $\Sigma_i = \mathcal{I}^-$ και τελειώνοντας με την $\Sigma_f = H^+ \cup \mathcal{I}^+$, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σε κάθε τέτοια υπερεπιφάνεια Cauchy ορίζουμε ένα χώρο Hilbert των καταστάσεων του πεδίου ύλης. Η χρονική εξέλιξη από μία υπερεπιφάνεια στην άλλη είναι μοναδιακή:

$$|\psi(\Sigma')\rangle = \hat{S}|\psi(\Sigma)\rangle, \quad |\psi(\Sigma)\rangle \in \mathcal{H}_\Sigma, \quad |\psi(\Sigma')\rangle \in \mathcal{H}_{\Sigma'}$$

όπου $\hat{S}\hat{S}^\dagger = 1$. Επομένως η κατάσταση του πεδίου ύλης είναι πλήρως προσδιορισμένη από ένα καταστασιακό διάνυσμα στο χώρο Hilbert ορισμένο σε μια οποιαδήποτε χωροειδή υπερεπιφάνεια Cauchy Σ . Η εξέλιξη αυτή οδηγεί στην τελική καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle_f = |\psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+)\rangle$ στην υπερεπιφάνεια $H^+ \cup \mathcal{I}^+$ στην οποία ο χώρος Hilbert είναι $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_{H^+} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{I}^+}$, δηλαδή τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων του πεδίου στον ορίζοντα γεγονότων και στο μελλοντικό φωτοειδές άπειρο.

Ας δούμε τώρα τι μορφή έχει η κατάσταση $|\psi\rangle_f$. Καταρχάς, λόγω του θεωρήματος της μη - αντιγραφής που αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 1, η κατάσταση $|\psi\rangle_f$ δεν μπορεί να είναι της μορφής $|\psi\rangle_f = |\psi(\Sigma)\rangle \otimes |\psi(\Sigma)\rangle$, όπου Σ είναι προγενέστερη της $\Sigma_f = H^+ \cup \mathcal{I}^+$. Επίσης δεν μπορεί να είναι της μορφής $|\psi(H^+)\rangle \otimes |\psi(\mathcal{I}^+)\rangle$, με $|\psi(H^+)\rangle \neq |\psi(\mathcal{I}^+)\rangle$, επειδή αυτό θα σήμαινε ότι έχουμε χρονική εξέλιξη της μορφής:

$$|\psi(\Sigma)\rangle \rightarrow |\psi(H^+)\rangle \otimes |\psi(\mathcal{I}^+)\rangle$$

Αν δύο διαφορετικές καταστάσεις $|\psi_1(\Sigma)\rangle$ και $|\psi_2(\Sigma)\rangle$ εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο, η υπέρθεση τους εξελίσσεται σε:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1(\Sigma)\rangle + |\psi_2(\Sigma)\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1(H^+)\rangle \otimes |\psi_1(\mathcal{I}^+)\rangle + |\psi_2(H^+)\rangle \otimes |\psi_2(\mathcal{I}^+)\rangle)$$

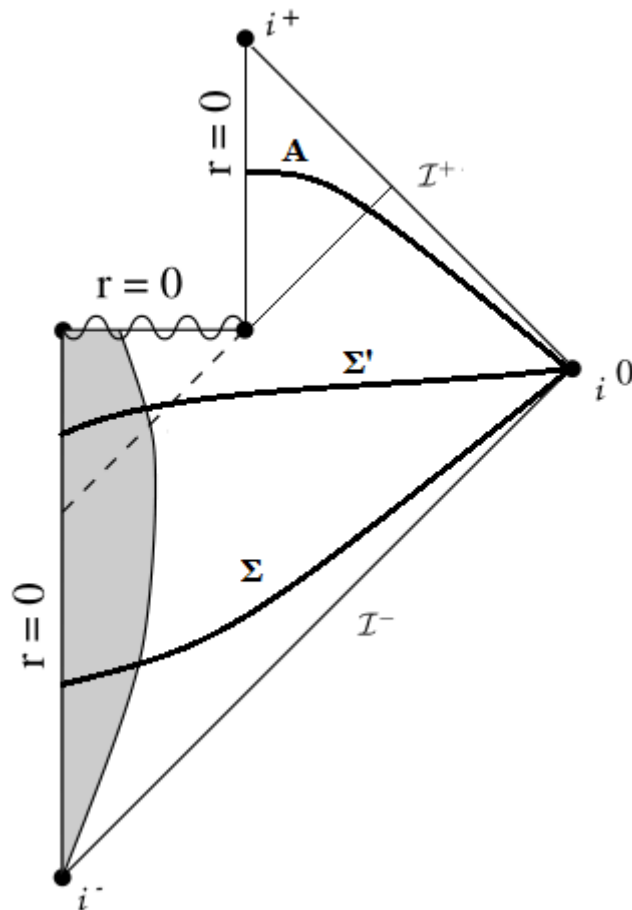
Όμως η κατάσταση αυτή είναι της μορφής $|a\rangle \otimes |b\rangle$ μόνο αν $|\psi_1(H^+)\rangle$ και $|\psi_2(H^+)\rangle$ ή $|\psi_1(\mathcal{I}^+)\rangle$ και $|\psi_2(\mathcal{I}^+)\rangle$ είναι ίδιες. Αυτές οι περιπτώσεις αποκλείονται επειδή διαφορετικά θα σήμαινε ότι δύο οποιοδήποτε διαφορετικές αρχικές καταστάσεις εξελίσσονται σε ίδια κατάσταση στο H^+ ή \mathcal{I}^+ . Επομένως συμπεραίνουμε ότι η κατάσταση $|\psi\rangle_f$ θα είναι σύμπλεκτη κατάσταση, δηλαδή θα υπάρχουν συσχετισμοί ανάμεσα στις καταστάσεις στο H^+ και \mathcal{I}^+ .

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η περιγραφή της τελικής κατάστασης από έναν παρατηρητή στο \mathcal{I}^+ . Επειδή ο παρατηρητής αυτός δεν έχει πρόσβαση στο ορίζοντα γεγονότων H^+ (και στο εσωτερικό του), όλες οι μετρήσεις στο \mathcal{I}^+ περιγράφονται από ανηγμένη μήτρα πυκνότητας:

$$\rho(\mathcal{I}^+) = \text{Tr}_{H^+} \{ |\psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+)\rangle \langle \psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+) | \}$$

όπου το Tr_{H^+} είναι το μερικό ίχνος ως προς τις καταστάσεις στο H^+ . Επειδή για τους λόγους που εξηγήσαμε προηγουμένως η κατάσταση $|\psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+)\rangle$ είναι σύμπλεκτη, η μήτρα πυκνότητας $\rho(\mathcal{I}^+)$ θα είναι πανομοιότυπη με μήτρα πυκνότητας μιας μικτής κατάστασης (δες Κεφάλαιο 1). Επομένως ένας παρατηρητής στο \mathcal{I}^+ θα βλέπει μικτή κατάσταση. Ωστόσο η κατάσταση $|\psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+)\rangle$ είναι καθαρή και επομένως η εξέλιξη $|\psi(\Sigma)\rangle \rightarrow |\psi(H^+ \cup \mathcal{I}^+)\rangle$ από μία προγενέστερη υπερεπιφάνεια Cauchy Σ είναι μοναδιακή. Επομένως δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, έχουμε μοναδιακή εξέλιξη από καθαρή σε καθαρή κατάσταση. Η πληροφορία χάνεται μόνο πρακτικά επειδή από τον ορίζοντα γεγονότων και το εσωτερικό του δεν υπάρχει πρόσβαση στον εξωτερικό του και ένα μέρος της πληροφορίας θα βρισχεται μέσα. Για το λόγο αυτό η μικτή κατάσταση $\rho(\mathcal{I}^+)$ είναι φαινόμενη.

Το πρόβλημα προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι η μελανή οπή εξατμίζεται πλήρως. Στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα Penrose θα είναι όπως παρακάτω:



Έχουμε σχεδιάσει τρεις υπερεπιφάνειες, Σ , Σ' και A η οποία αντιστοιχεί στον χρόνο μετά την πλήρη εξάτμιση της μελανής οπής. Το πρόβλημα είναι ότι μετά την πλήρη εξάτμιση της μελανής οπής ο ορίζοντας γεγονότων και το εσωτερικό του εξαφανίζονται και έτσι το αιτιακό παρελθόν της A δεν περιλαμβάνει τις περιοχές αυτές του χωροχρόνου. Οπότε το A δεν είναι υπερεπιφάνεια Cauchy. Δεν είναι καν δυνατόν να καλύψουμε έναν τέτοιο χωρόχρονο από nice slices κατά συνεχή τρόπο όπως κάναμε στην περίπτωση που δεν είχαμε λάβει υπόψιν την εξάτμιση της μελανής οπής.

Στην χρονική εξέλιξη από την υπερεπιφάνεια Σ στην Σ' δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα – είναι μοναδιακή και η κατάσταση $|\psi(\Sigma)\rangle$ μπορεί να ανακτηθεί από την $|\psi(\Sigma')\rangle$. Αν χωρίσουμε την Σ' σε Σ'_I (στο εσωτερικό της μελανής οπής) και Σ'_{II} (στο εξωτερικό της μελανής οπής), τότε θα έχουμε εξέλιξη από την φαινόμενη μικτή κατάσταση $\rho(\Sigma'_{II})$ στην Σ'_{II} σε πραγματικά μικτή κατάσταση $\rho(A)$ στην A . Η συνολική εξέλιξη από την Σ' στην A θα είναι από καθαρή κατάσταση σε μικτή:

$$|\psi(\Sigma')\rangle\langle\psi(\Sigma')| \rightarrow \rho(A)$$

η οποία δεν μπορεί να είναι μοναδιακή. Επομένως από την $\rho(A)$ δεν μπορεί με κανέναν τρόπο να ανακτηθεί η κατάσταση $|\psi(\Sigma)\rangle$ και υπό αυτή την έννοια η πληροφορία χάνεται.

4.3 Προτεινόμενες λύσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε σύντομα μερικές από τις προτεινόμενες λύσεις του προβλήματος της απώλειας πληροφορίας που είδαμε προηγουμένως.

Η πρώτη λογική υπόθεση που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι ότι η πληροφορία είναι με κάποιο τρόπο κωδικοποιημένη στην ακτινοβολία Hawking. Για παράδειγμα η ακτινοβολία Hawking μπορεί να φαίνεται θερμική μόνο στην αρχή, αλλά στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχουν συσχετισμοί με την ακτινοβολία που εκπέμπεται αργότερα. Ωστόσο ήδη είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι ένα τέτοιο σενάριο δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί επειδή οι καταστάσεις στο εσωτερικό της μελανής οπής θα εξελίσσονταν από μια υπαρεπιφάνεια Cauchy σε μια άλλη χωρίς να αλλάζουν και αυτό θα σήμαινε ότι η πληροφορία περιέχεται μόνο στις καταστάσεις έξω από την μελανή οπή. Δηλαδή για έναν εξωτερικό παρατηρητή, η πληροφορία θα έπρεπε να απομακρύνεται με κάποιο τρόπο από τα σώματα καθώς αυτά διαπερνούν τον ορίζοντα γεγονότων. Όμως από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας γνωρίζουμε ότι ένας παρατηρητής που πέφτει μέσα στην μελανή οπή δεν θα παρατηρήσει τίποτα το ιδιαίτερο στον ορίζοντα γεγονότων – δεν είναι περιοχή ισχυρής καμπυλότητας ή κάτι τέτοιο, ο χωρόχρονος εκεί δεν έχει ιδιομορφίες και είναι συνεχής. Ένας μηχανισμός απομάκρυνσης της πληροφορίας που συμβαίνει στον ορίζοντα γεγονότων προτάθηκε από του Susskind L., Thorlacius L. και Uglum J. με την ιδέα του stretched ορίζοντα και της black hole complementarity. Για περισσότερα ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πρωτότυπο τους άρθρο [10] και στο [11].

Ένα άλλο λογικό σενάριο που θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς είναι ότι οι μελανές οπές δεν εξατμίζονται πλήρως όπως είχαμε υποθέσει. Ο υπολογισμός για την ακτινοβολία Hawking είναι ημικλασικός και μάλλον παύει να ισχύει όταν η μελανή οπή εξατμίζεται μέχρι κλίμακα Planck. Επομένως κανείς μπορεί να υποθέσει ότι τότε η μελανή οπή σταματάει να εκπέμπει ακτινοβολία Hawking και να εξατμίζεται, με αποτέλεσμα στο τέλος να μένει ένα σταθερό απομεινάρει (remnant) μάζας Planck. Οπότε η ελλείπουσα πληροφορία θα βρίσκεται στο remnant αυτό, δηλαδή η ακτινοβολία Hawking που εκπέμφθηκε θα είναι συσχετισμένη με τις εσωτερικές καταστάσεις του remnant και έτσι η κατάσταση της θα είναι φαινόμενη μίκτη, αλλά το σύστημα συνολικά θα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση. Το πρόβλημα με το σενάριο αυτό είναι ότι δεν είναι γνωστός ο μηχανισμός που θα σταματούσε την εκπομπή της ακτινοβολίας Hawking και την εξάτμιση της μελανής οπής. Όμως ακόμα και αν υποθέσουμε ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει, προκύπτει ένα άλλο πρόβλημα. Το αρχικό μέγεθος της μελανή οπή μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο και επομένως οι εσωτερικές καταστάσεις του remnant μεγέθους Planck θα πρέπει να είναι αυθαίρετα πολλές και επομένως η εντροπία του πολύ μεγάλη (ουσιαστικά άπειρη). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα remnants και τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτά, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [12], [13], [14].

Τέλος αναφέρουμε την υπόθεση του Maldacena για την αντιστοιχία *AdS/CFT* της Θεωρίας Χορδών, σύμφωνα με την οποία η χβαντική βαρύτητα στον ασυμπτωτικά anti-de Sitter χωρόχρονο (αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ) είναι ισοδύναμη με την σύμμορφη χβαντική θεωρία πεδίου (*CFT*) στο σύνορο του *AdS*. Για την ακρίβεια, η χβαντική βαρύτητα στον $AdS(5) \otimes S(5)$, όπου $S(5)$ είναι η 5-σφαιρα, είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{N} = 4$, super Yang-Mills θεωρία βαθμίδας στο 4-διάστατο σύμμορφο σύνορο του $AdS(5)$. Για περισσότερα ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πρωτότυπο paper [15]

του Juan Maldacena από τον οποίο προτάθηκε αυτή η υπόθεση της αντιστοιχίας και στα [11], [16]. Η ουσία είναι ότι επειδή η CFT είναι μοναδιακή θεωρία στο σύνορο, η χρονική εξέλιξη στο bulk πρέπει να είναι επίσης μοναδιακή. Επομένως δεν υπάρχει το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές – η ακτινοβολία Hawking δεν είναι ακριβώς θερμική και περιέχει συσχετισμούς στους οποίους είναι κωδικοποιημένη η πληροφορία. Ωστόσο η υπόθεση του Maldacena δεν μας λέει που ακριβώς είναι το λάθος στον υπολογισμό του Hawking και πως γίνεται η μοναδιακή εξέλιξη. Ακόμα χειρότερα, η αντιστοιχία AdS/CFT είναι μια υπόθεση και δεν έχει αποδειχθεί ακόμα.

Συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της απώλειας πληροφορίας στις μελανές οπές ακόμα δεν έχει λυθεί πλήρως και μάλλον απαιτείται η γνώση της κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας για να γίνει αυτό. Ωστόσο ελπίζουμε ότι η ενασχόληση με αυτό το ενδιαφέρον πρόβλημα της σύγχρονης φυσικής θα δώσει ενδείξεις για το πως να κάνουμε την ενοποίηση της Κβαντομηχανικής με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δυνατή.

Βιβλιογραφία

- [1] Birrell N.D., Davies P.C.W., *Quantum fields in curved space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [2] Wald Robert M., *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*.
- [3] Hawking S.W. (1975), *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. 43 (1975) 199-220
- [4] Hawking S.W. (1975), *Breakdown of predictability in gravitational collapse*, Phys. Rev. D 14 (1976), 2460-2473.
- [5] Page Don N., *Is Black-Hole Evaporation Predictable?*, Phys. Rev. Lett. 44, 301-304 (1980).
- [6] Page Don N., *Black Hole Information*, hep-th/9305040.
- [7] Banks T., Peskin M.E., Susskind L., *Difficulties for the evolution of pure states into mixed states*, Nucl. Phys. B 244 (1984), 125-134.
- [8] Preskill J., *Do Black Holes Destroy Information?*, hep-th/9209058.
- [9] Hartle J. B., *Generalized Quantum Theory in Evaporating Black Hole Spacetimes*, gr-qc/9705022.
- [10] Susskind L., Thorlacius L., Uglum J., *The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity*, hep-th/9306069
- [11] Susskind L., Lindesay J., *An Introduction to Black Holes, Information And The String Theory Revolution: The Holographic Universe*.
- [12] Giddings S., *Comments on Information Loss and Remnants*, hep-th/9310101v2.
- [13] Giddings S., *Constraints on Black Hole Remnants*, hep-th/9304027v3.
- [14] Susskind L., *Trouble For Remnants*, hep-th/9501106v1.
- [15] Maldacena Juan M., *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, hep-th/9711200v3.
- [16] Polchinski J., *Introduction to Gauge/Gravity Duality*, 1010.6134v1 [hep-th].
- [17] Carroll Sean M., *Lecture Notes on General Relativity*.

-
- [18] Hartle James B., *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*.
- [19] Wald Robert M., *General Relativity*.
- [20] Ray D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*.
- [21] Hawking S.W., Ellis G.F.R. (1973), *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- [22] Stewart John, *Advanced General Relativity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [23] Townsend P.K., *Black Holes*, Lecture notes, DAMTP, University of Cambridge.
- [24] Penrose Roger, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [25] Nakahara M., *Geometry, Topology, and Physics*, Second Edition.
- [26] Lee John M., *Introduction to Topological Manifolds*, Second Edition.
- [27] Τραχανάς Σ., *Κβαντομηχανική II*.