



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

---

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές.  
Εφαρμογή στο βέλτιστο έλεγχο της έκλυσης στροβίλων  
γύρω από κύλινδρο

---

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Σ. Καπέλλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2013





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

---

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές.  
Εφαρμογή στο βέλτιστο έλεγχο της έκλυσης στροβίλων  
γύρω από κύλινδρο

---

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Σ. Καπέλλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2013

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) για τον ενεργητικό έλεγχο (active flow control) περιοδικής, στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού γύρω από κύλινδρο, με στόχο την ελαχιστοποίηση των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτόν, εξαιτίας της εμφάνισης των στροβίλων von Karman.

Οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, όπου η τελευταία εκφράζει τη χρονικά μέση τιμή του τετραγώνου των δυνάμεων, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο ενεργητικός έλεγχος της ροής επιτυγχάνεται με δέσμες έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού (jets), οι οποίες τοποθετούνται σε ισαπέχουσες θέσεις σε όλη την περιφέρεια του κυλίνδρου. Οι παράμετροι

της ταχύτητας κάθε δέσμης, δηλαδή το πλάτος ταλάντωσης, η φάση και η συχνότητα, αποτελούν και τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος βελτιστοποίησης. Οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες και οι παράγωγοι ευαισθησίας προκύπτουν από την παραγωγή της συνάρτησης κόστους επαυξημένης με το χωρικό, σε όλο το πεδίο, και το χρονικό, σε μια περίοδο του φαινομένου, ολοκλήρωμα του γινομένου των εξισώσεων κατάστασης (Navier-Stokes) και των συζυγών μεταβλητών. Οι συζυγείς εξισώσεις διακριτοποιούνται και επιλύονται με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες και έτσι προκύπτει το πεδίο των συζυγών μεταβλητών. Έπειτα υπολογίζεται η παράγωγος ευαισθησίας για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, με βάση την οποία αυτή ανανεώνεται, σύμφωνα με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούνται δύο συναρτήσεις κόστους, που αφορούν στη μέση τιμή, σε εύρος μιας περιόδου του φαινομένου, του τετραγώνου κάθε δύναμης, της άνωσης ή της οπισθέλκουσας κατά περίπτωση. Για κάθε συνάρτηση κόστους μελετώνται δύο περιπτώσεις συνδιασμών μεταβλητών σχεδιασμού, όπου στην πρώτη μεταβάλλονται τα πλάτη ταλάντωσης και στη δεύτερη τα πλάτη ταλάντωσης και οι φάσεις των δεσμών ρευστού. Με το πέρας των κύκλων βελτιστοποίησης εξάγονται συμπεράσματα για την επίδραση που έχει το πλάτος ταλάντωσης και η φάση κάθε δέσμης στο βέλτιστο έλεγχο της ροής.

Κατά τη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου εμφανίζονται όροι οι οποίοι εξαρτώνται της χρονικής στιγμής αφετηρίας υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος της αντικειμενικής συνάρτησης, κάτι που οφείλεται στο ότι με την επίδραση των δεσμών ρευστού η περίοδος του φαινομένου ταυτίζεται με την περίοδο των jets που αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού. Έτσι, λοιπόν, εξετάζεται η εξάρτηση που έχει η παράγωγος ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα, μέσω της εφαρμογής της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε μονοδιάστατο πρόβλημα υποθετικής περιοδικής ροής με αναλυτική λύση, όπου η περίοδος της αποτελεί και αυτή μεταβλητή σχεδιασμού. Από αυτήν την ανάλυση προκύπτουν συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της παραγωγού ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα για περιπτώσεις περιοδικών ροών, που η περίοδος αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluid Section**  
**Lab of Thermal Turbomachines**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

---

**The continuous adjoint method for periodic flows.  
Application in the optimal flow control of vortex shedding  
around a cylinder**

---

Diploma Thesis

**Chris S. Kapellos**

Advisor: Kyriacos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2013

Abstract

This diploma thesis aims at the adaptation and use of continuous adjoint methods for the active flow control of a periodic, laminar and incompressible flow around a cylinder. The purpose of flow control is the minimization of the forces that act on the cylinder, caused by the induced vortices, also known as, the von Karman vortices.

The adjoint method is used to compute the derivatives of the objective function which, in this case, is the mean square of the forces acting on the cylinder, with respect to the design variables. Active flow control is implemented via pulsating jets, which are equidistributed across the whole surface of the cylinder. The jet velocity parameters, which are the amplitude, phase and frequency, constitute the design variables. The continuous adjoint equations, the corresponding boundary conditions and the sensitivity derivatives are derived with the use of the objective

function, augmented with the field and time integral of the product of the state equations (Navier-Stokes) with the time-dependent adjoint variables, during a period of the phenomenon. The adjoint equations are discretized and solved together with the corresponding boundary conditions to determine the field of the adjoint variables and, through them, the sensitivity derivatives of the problem. Then, the value of each design variable is updated with the use of its sensitivity derivative, accordingly to the steepest decent method.

The objective functions used in this diploma thesis are the mean square of lift or drag acting on the cylinder, during a period of the phenomenon. For each force and, thus, objective function, two cases are studied. In the first one, only the amplitude of each jet is free to change while, in the second case, both amplitude and phase of each jet are considered as design variables. After the completion of the optimization cycles, conclusions can be drawn about the effect that amplitude and phase of each jet have in the optimal flow control.

When the jets act on the cylinder, the period of the phenomenon becomes equal to the period of the jets. In the continuous adjoint formulation, this leads to the derivation of terms that depend on the limits of the time integral of the objective function. This dependency is studied by virtue of the adaptation of the continuous adjoint method to a hypothetical, one-dimensional periodic flow problem, where the period is also a design variable. Useful conclusions are drawn about the behaviour of the sensitivity derivative with respect to the period.

# Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας σηματοδοτεί την ολοκλήρωση μιας σημαντικής περιόδου της ζωής μου, συνυφασμένης με τα πέντε χρόνια φοίτησής μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Έτσι, λοιπόν, κρίνω απαραίτητο να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα άτομα που με στήριξαν και με βοήθησαν τόσο κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, όσο και κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω θερμά για την καθοδήγηση και τις υποδείξεις του καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, καθώς και για τις γνώσεις που μου μετέδωσε από το πρώτο κιόλας έτος.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β για το ευχάριστο κλίμα που έχουν δημιουργήσει και για την προθυμία τους να βοηθήσουν σε οποιοδήποτε ζήτημα. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γιάννη Καββαδία, για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε για να απαντήσει σε απορίες μου και να μου δώσει τις απαραίτητες οδηγίες. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή, για τη σημαντική του καθοδήγηση, ένα χρόνο νωρίτερα, στην πρώτη μου επαφή με το OpenFOAM, αλλά και για τις καίριες παρατηρήσεις και συμβουλές του για τη διπλωματική μου εργασία.

Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Σωτήρη και Ελένη, για τη στήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια σε όλες τις επιλογές μου. Δεν θα μπορούσα να αμελήσω τον αδερφό μου Θωδωρή, ο οποίος πάντα θέτει ψηλά τον πήχη και με παροτρύνει να προσπαθώ όλο και περισσότερο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου Γιώργο Καλορίτη και Νίκο Σημηριώτη, που συνετέλεσαν στο να περάσουν τα πέντε χρόνια της φοίτησής μας ευχάριστα και δημιουργικά.





*Στον Ασημάκη Α. Πατάκη*



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Το φαινόμενο της έκλυσης στροβίλων von Karman . . . . .	1
1.2	Έλεγχος της έκλυσης στροβίλων von Karman . . . . .	2
1.2.1	Παθητικός Έλεγχος . . . . .	4
1.2.2	Ενεργητικός Έλεγχος . . . . .	5
1.3	Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων στη ΜΠΥΡ&Β . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Η συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμες, ασυμπίεστες, στρωτές ροές</b>	<b>9</b>
2.1	Εξισώσεις της ροής . . . . .	9
2.2	Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών . . . . .	11
2.3	Επιλογή της συνάρτησης κόστους . . . . .	14
2.4	Διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων του πεδίου ροής . . . .	16
2.5	Οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος & Παράγωγοι Ευαι- σθησίας . . . . .	20
2.5.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου $\Gamma_I$ . . . . .	20
2.5.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εξόδου $\Gamma_O$ . . . . .	21
2.5.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο τοίχωμα $\Gamma_w$ . . . . .	22
2.5.4	Παράγωγοι Ευαισθησίας . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Διακριτοποίηση των εξισώσεων &amp; αλγόριθμοι επίλυσής τους</b>	<b>25</b>
3.1	Διακριτοποίηση με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων . . . . .	25
3.1.1	Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης . . . . .	26
3.1.2	Διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς . . . . .	27
3.2	Διακριτοποίηση και επίλυση του συστήματος εξισώσεων Navier-Stokes	31
3.2.1	Γραμμικοποίηση της εξίσωσης της ορμής . . . . .	31
3.2.2	Σύζευξη πίεσης-ταχύτητας και ο αλγόριθμος PISO . . . . .	32

3.3	Αποθήκευση των χρονικών βημάτων με την μέθοδο checkpointing . . .	34
<b>4</b>	<b>Πρόλεξη της ροής</b>	<b>35</b>
4.1	Γεωμετρία του προβλήματος . . . . .	35
4.2	Πρόλεξη της ροής γύρω από κύλινδρο . . . . .	35
4.3	Τοποθέτηση των δεσμών ρευστού . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης</b>	<b>41</b>
5.1	Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ . . . . .	42
5.2	Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ και τις φάσεις $t_0^k$ . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας</b>	<b>57</b>
6.1	Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ . . . . .	58
6.2	Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ και τις φάσεις $t_0^k$ . . . . .	65
6.3	Διερεύνηση της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα $f_{jets}$	71
<b>7</b>	<b>Μελέτη της εξάρτησης της <math>\frac{\delta F}{\delta T}</math> από τη χρονική αφετηρία <math>a</math></b>	<b>79</b>
7.1	Διατύπωση του προβλήματος . . . . .	80
7.2	Διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης . . . . .	81
7.3	Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων . . . . .	82
7.4	Αναλυτικός υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	86
7.5	Διακριτοποίηση & αριθμητική επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος	89
7.5.1	Όρος μεταφοράς . . . . .	90
7.5.2	Όρος πηγής & χρονικός όρος . . . . .	92
7.5.3	Αριθμητική επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος . . . . .	92
7.6	Διακριτοποίηση & επίλυση του συζυγούς προβλήματος . . . . .	96
7.6.1	Όρος μεταφοράς . . . . .	96
7.6.2	Υπόλοιποι όροι . . . . .	98
7.6.3	Αριθμητική επίλυση του συζυγούς προβλήματος . . . . .	99

7.7	Υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta c}$ με τη συνεχή συζυγή μέθοδο . . . . .	102
7.8	Υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta T}$ με τη συνεχή συζυγή μέθοδο . . . . .	103
7.9	Συμπεράσματα . . . . .	108
8	Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	111
A'	Περί περιοδικότητας της συνάρτησης $\frac{\delta v}{\delta T}$ - Ένα παράδειγμα κατανόησης	117
	Βιβλιογραφία	121



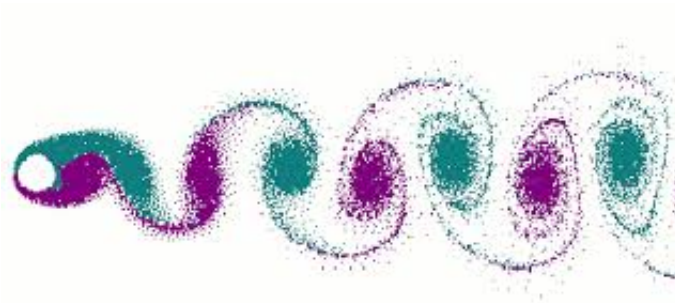
# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Το φαινόμενο της έκλυσης στροβίλων von Karman

Στη δυναμική των ρευστών, η έκλυση στροβίλων von Karman αναφέρεται στο φαινόμενο της περιοδικής αποκόλλησης εναλλασσόμενων στροβίλων γύρω από μη-αεροδυναμικά σώματα, τα οποία βρίσκονται εν μέσω μιας ροής, δημιουργώντας έτσι έναν μη-μόνιμο, περιοδικό ομόρροο. Κατά συνέπεια, εμφανίζονται ταλαντώμενες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Οι στρόβιλοι αυτοί έχουν αντίθετη ένταση, δηλαδή ίσο μέτρο και αντίθετη φορά περιστροφής, και σχηματίζουν ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό μοτίβο που είναι εμφανές και σε μεγάλη απόσταση από το σώμα, καθώς δεν αναμειγνύονται με την εξωτερική ροή και 'καταστρέφονται' από τη συνεκτικότητα πολύ αργότερα.



Σχήμα 1.1: Στρόβιλοι von Karman που σχηματίζονται γύρω από κύλινδρο<sup>[21]</sup>.

Έπειτα από πειράματα <sup>[24]</sup>, παρατηρήθηκε πως η έκλυση στροβίλων εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds, και μάλιστα εμφανίζεται σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών του. Η μορφή του πεδίου της ροής γύρω από κύλινδρο για διάφορους αριθμούς Reynolds, παρουσιάζεται στο σχήμα 1.2. Για χαμηλούς αριθμούς  $Re$  (1.2α'), η ροή εμφανίζει συμμετρία πάνω και κάτω από τον κύλινδρο. Αυξάνοντας τον αριθμό  $Re$  η συμμετρία αυτή χάνεται, ενώ η ροή κατάντι του κυλίνδρου διαταρράσσεται περισσότερο (1.2β'). Για αριθμό  $Re = 4$  εμφανίζεται επανακυκλοφορία της ροής στον ομόρρο, η οποία αυξάνεται με την αύξηση του  $Re$ , δημιουργώντας σε αυτόν ταλαντώσεις (1.2γ'). Οι ταλαντώσεις αυτές, για  $Re = 40$  (1.2δ') είναι αρκετά ισχυρές ώστε ο ένας από τους δύο στροβίλους να αποκολληθεί από τον κύλινδρο. Ο δεύτερος στρόβιλος αποκολλάται με τη σειρά του όταν ο πρώτος σχηματίζεται ξανά. Η έκλυση αυτή γίνεται με σταθερή συχνότητα η οποία εξαρτάται μόνο από τον αριθμό  $Re$ , και εκφράζεται μέσω του αδιάστατου αριθμού Strouhal

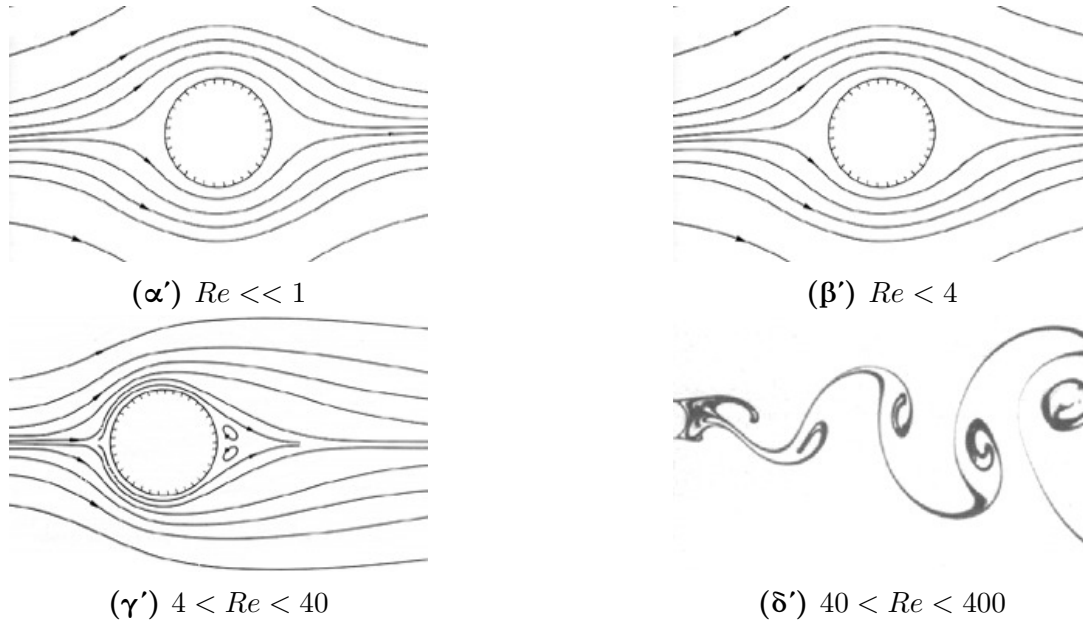
$$Str = \frac{fL}{V} \quad (1.1.1)$$

οπου  $f$  είναι η συχνότητα ταλάντωσης,  $L$  το μήκος αδιαστατοποίησης (στην περίπτωση του κύλινδρου είναι η διάμετρος του) και  $V$  η ταχύτητα της της αδιατάραχης ροής. Τα πειραματικά αποτελέσματα που σχετίζουν τον αριθμό  $Str$  με τον αριθμό  $Re$  παρουσιάζονται στο σχήμα 1.3. Τέλος, για αριθμούς  $Re > 400$  οι στρόβιλοι αυτοί εξαφανίζονται, λόγω της δημιουργίας της τύρβης.

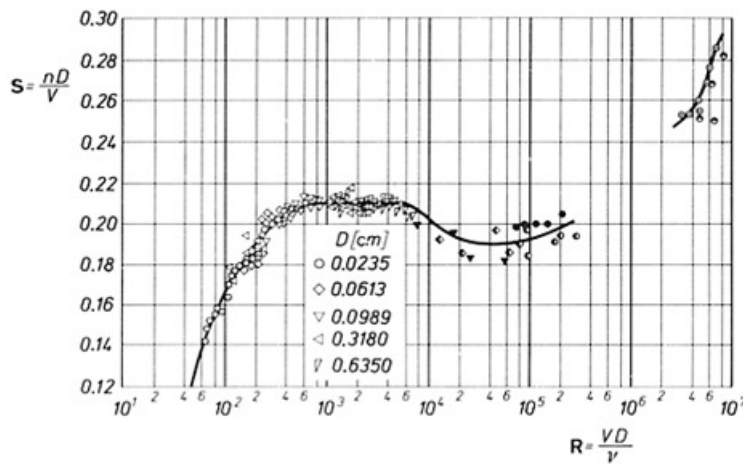
## 1.2 Έλεγχος της έκλυσης στροβίλων von Karman

Το φαινόμενο της έκλυσης στροβίλων, εμφανίζεται στη φύση σε πολλές περιπτώσεις, όπως στη ροή του αέρα γύρω από νησιά, που μπορεί να οπτικοποιηθεί με τη βοήθεια των σχηματισμών που έχουν τα σύννεφα, και ακόμα και στον πτερυγισμό πολλών εντόμων, που έχουν αναπτύξει μηχανισμούς ώστε να εκμεταλλεύονται την ενέργεια των δημιουργούμενων στροβίλων. Δυστυχώς όμως, η έκλυση στροβίλων δεν έχει πάντα όμορφα ή επιθυμητά αποτελέσματα, καθώς μπορεί να είναι υπεύθυνη για την κατάρρευση πολλών κατασκευών, από περισκόπια υποβρυχίων έως ουρανοξύστες, όταν αυτές οδηγούνται σε αστάθεια, εξαιτίας της ταύτισης της συχνότητας της ταλάντωσης των δυνάμεων που ασκούνται με τις ιδιοσυχνότητες των κατασκευών. Έτσι



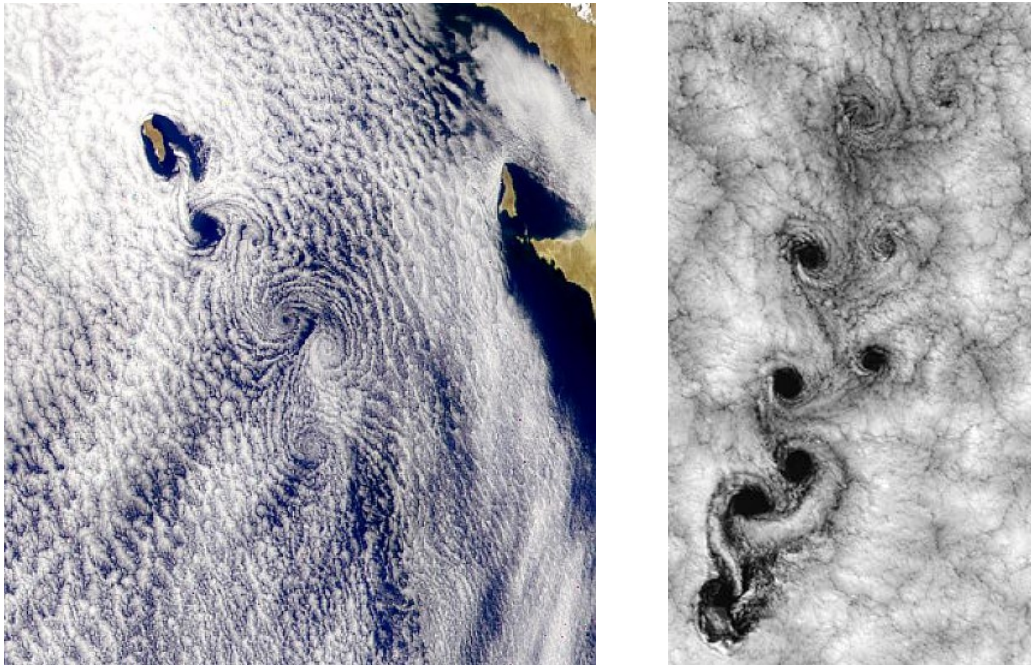


Σχήμα 1.2: Ροή γύρω από κύλινδρο για διάφορους αριθμούς Reynolds<sup>[23]</sup>.



Σχήμα 1.3: Πειραματικά δεδομένα που σχετίζουν τον αριθμό  $Re$  με τον αριθμό  $Str$ <sup>[24]</sup>.

λοιπόν, καλείται εδώ ο μηχανικός να μελετήσει και να 'ελέγξει' τέτοια φαινόμενα, ώστε να αποφευχθούν τα δυσάρεστα, όπως ήταν η κατάρρευση τριών πύργων φύξης το 1965 στο εργοστάσιο παραγωγής ενέργειας Ferrybridge, εξαιτίας της ταλάντωσης που δημιουργήθηκε από ισχυρούς ανέμους.

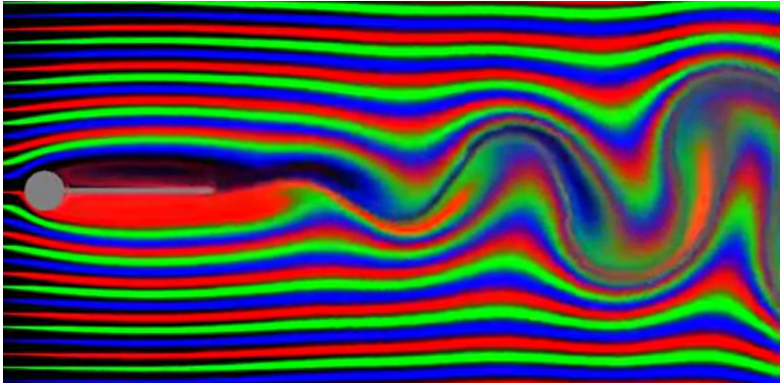


**Σχήμα 1.4:** Φωτογραφίες από δορυφόρο, που δείχνουν το σχηματισμό στρόβιλων νοση Kartman γύρω από νησιά<sup>[21]</sup>.

### 1.2.1 Παθητικός Έλεγχος

Για την αποφυγή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς κυλινδρικών σωμάτων, έχει μελετηθεί η τοποθέτηση ενός οριζόντιου πτερυγίου, μεγαλύτερου μήκους από τη διάμετρο του κυλίνδρου, κατάντι της ροής. Με αυτόν τον τρόπο οι δύο στρόβιλοι που δημιουργούνται δεν μπορούν να αλληλεπιδράσουν και, κατά συνέπεια, παραμένουν προσκολλημένοι στο σώμα.

Για μεγαλύτερες κατασκευές και όπου η κατεύθυνση της ροής δεν είναι σταθερή, χρησιμοποιούνται ελικοειδή πτερύγια, που δημιουργούν ασυμμετρία στη ροή, αποτρέποντας έτσι την εναλλασσόμενη έκλυση στροβίλων <sup>[25]</sup>. Αυτή η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί σε ψηλούς πύργους και σε κεραίες αυτοκινήτων. Ακόμα, σε ψηλά κτίρια, χρησιμοποιείται και η μεταβαλλόμενη καθ' ύψος διάμετρος, έτσι ώστε να αποφευχθεί η ταυτόχρονη ταλάντωση όλης της κατασκευής.



**Σχήμα 1.5:** Παθητικός έλεγχος των στροβίλων von Karman, με οριζόντιο και ελικοειδές πτερόγιο.<sup>[22]</sup>

### 1.2.2 Ενεργητικός Έλεγχος

Ο ενεργητικός έλεγχος προϋποθέτει πρόσδοση ενέργειας στη ροή μέσω κάποιου ενεργητή. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ενεργητικός έλεγχος επιτυγχάνεται με δέσμες περιοδικής έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού. Με αυτόν τον τρόπο προσδίδεται ενέργεια στο οριακό στρώμα ανανεώνοντάς το και αποτρέποντας την αποκόλληση των στροβίλων. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό να εφαρμοσθεί σε μεγάλες κατασκευές, λόγω προβλημάτων στην υλοποίηση και λόγω της μεγάλης ποσότητας ενέργειας που απαιτείται. Παρόλα αυτά, η μελέτη σε αυτόν τον τομέα μπορεί να φέρει χρήσιμα αποτελέσματα για το γενικότερο πεδίο του ελέγχου ροής, για τις περιπτώσεις που αυτή είναι μη-μόνιμη.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθεί ο έλεγχος της ροής και της έκλυσης στροβίλων von Karman γύρω από έναν κύλινδρο, με δέσμες ρευστού και θα αναζητηθεί η βέλτιστη τιμή των παραμέτρων της ταχύτητας κάθε δέσμης, οι οποίες

είναι το πλάτος, η φάση και η περίοδος.

### 1.3 Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων στη ΜΠΥΡ&Β

Οι συζυγείς διατυπώσεις<sup>[1]</sup> είναι μαθηματικά-υπολογιστικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του προβλήματος (εξισώσεις κατάστασης), που στην περίπτωση που μελετά η παρούσα διπλωματική εργασία είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes.

Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται στη συνεχή και στη διακριτή συζυγή μέθοδο. Η ειδοποιός διαφορά της διακριτής συζυγούς μεθόδου είναι ότι η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις του προβλήματος πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται και στη συνέχεια παράγεται η, προς επίλυση, συζυγής εξίσωση. Αντίθετα, η συνεχής συζυγής μέθοδος βασίζεται στην επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση  $F_{aug}$ , η οποία συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και από το ολοκλήρωμα σε όλο το χωρίο και στο χρόνο (στην περίπτωση των μη-μόνιμων προβλημάτων) των εξισώσεων κατάστασης πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών. Στη συνέχεια, εντοπίζονται οι ποσότητες που πρέπει να μηδενισθούν και αυτό παράγει τις συζυγείς εξισώσεις και τις οριακές τους συνθήκες.

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη συζυγών μεθόδων για τον υπολογισμό πρώτης και μεγαλύτερης τάξης παραγώγων αντικειμενικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, έχει αποτελέσει μια από τις κύριες δραστηριότητες της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ).

Στις εργασίες [3], [4] και [5] η συνεχής συζυγής διατύπωση οδήγησε σε εκφράσεις παραγώγων ελεύθερες από ολοκληρώματα σε όλο το πεδίο ροής, ακόμα και αν η συνάρτηση κόστους είναι πεδιακό ολοκλήρωμα, κάτι ιδιαίτερα συμφέρον, καθώς ο υπολογισμός και η χρήση πεδιακών ολοκληρωμάτων έχει ως συνέπεια αυξημένο υπολογιστικό κόστος και μειωμένη ακρίβεια της παραγωγού. Ακόμα, στην εργασία [5] παρουσιάζεται μια αυστηρή μαθηματική διατύπωση, για δομημένα και μη πλέγματα,

που θεωρείται γενίκευση προηγούμενης εργασίας που αφορούσε μόνο σε δομημένα πλέγματα.

Στην εργασία [6] η συνεχής συζυγής μέθοδος εφαρμόστηκε σε εξισώσεις τύρβης (Spalart-Allmaras) παρακάμπτοντας την πολύ συχνή υπόθεση της 'παγωμένης' τυρβώδους συνεκτικότητας, όπου αμελούνται οι μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας. Αποδείχθηκε μάλιστα πως η μη-επίλυση του συζυγούς προβλήματος για τις εξισώσεις της τύρβης, όχι μόνο μπορεί να οδηγήσει σε ανακριβείς παραγώγους, αλλά ακόμα χειρότερα και σε παραγώγους με λανθασμένο πρόσημο, που προφανώς μπορεί να επηρεάσει τη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Στο πεδίο του βέλτιστου ελέγχου ροής, οι εργασίες [7] και [8] πρότειναν τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου ως ένα εργαλείο χαμηλού κόστους για την εξαγωγή πληροφοριών σχετικά με τη βέλτιστη τοποθέτηση μόνιμων δεσμών ρευστού, αναρρόφησης ή έγχυσης, που χρησιμοποιούνται για την αποτροπή της αποκόλλησης της ροής. Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί επέκταση των εργασιών αυτών σε μη-μόνιμες ροές.

Στην εργασία [10] εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμες ροές στον έλεγχο της ροής και στη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιούνται συνήθεις τεχνικές check-pointing για τη μείωση των απαιτήσεων σε χωρητικότητα. Επιπρόσθετα, στο πεδίο των συχνοτήτων βρίσκεται σε εξέλιξη έρευνα που εστιάζει στη μέθοδο της αρμονικής ισορροπίας και στην εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε αυτή.

---



## Κεφάλαιο 2

# Η συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμες, ασυμπίεστες, στρωτές ροές

Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό από το κεφάλαιο 1, οι συζυγείς μέθοδοι είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (gradient-based optimization methods), καθώς η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αυτή που θα οδηγήσει στη λύση που εξασφαλίζει την ελάχιστη τιμή αυτής. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, εφαρμόζεται η μέθοδος της απότομης καθόδου, κατά την οποία οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ανανεώνονται με βάση την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης και, πιο συγκεκριμένα, από τη σχέση <sup>[1]</sup>

$$b_i^{new} = b_i^{old} - \eta_i \frac{\delta F}{\delta b_i}$$

όπου με  $b_i$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και με  $\frac{\delta F}{\delta b_i}$  η παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους ως προς τη μεταβλητή  $b_i$ , η οποία υπολογίζεται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Ο συντελεστής  $\eta_i$  είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη βαθμωτή ποσότητα που ρυθμίζει το μήκος βήματος.

### 2.1 Εξισώσεις της ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν τη μηχανική του συνεχούς, ασυμπίεστου Νευτώνιου ρευστού και αφορούν στην περιγραφή των ροών που μελετώνται στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes, που διατυπώνονται ως εξής:

$$R^p = -\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$R_i^v = \frac{\partial v_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2(3) \quad (2.1.2)$$

όπου με  $v_i$  συμβολίζονται οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας,  $p$  είναι η στατική πίεση διαιρεμένη με την σταθερή πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού και  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα, που είναι επίσης σταθερή. Ως διάνυσμα μεταβλητών της ροής νοείται το διάνυσμα  $\mathbf{U} = [p, v_i]^T$

Οι οριακές συνθήκες που 'κλείνουν' μαθηματικά το πρόβλημα στα όρια του πεδίου ροής, για την περίπτωση της εσωτερικής αεροδυναμικής, είναι:

(i) στην είσοδο του χωρίου ροής  $\Gamma_I$ :

- ταχύτητα: συνθήκη Dirichlet, που καθορίζει την τιμή της ταχύτητας της ροής που εισέρχεται στο χωρίο.
- πίεση: μηδενική συνθήκη Neumann.

(ii) στην έξοδο χωρίου ροής  $\Gamma_O$ :

- ταχύτητα: μηδενική συνθήκη Neumann.
- πίεση: μηδενική συνθήκη Neumann.

(iii) στα στερεά τοιχώματα του χωρίου ροής  $\Gamma_w$ :

- ταχύτητα: μηδενική συνθήκη Dirichlet.
- πίεση: μηδενική συνθήκη Neumann.

Προφανώς, στα στερεά τοιχώματα, η μηδενική συνθήκη Dirichlet αντικαθίσταται με την ταχύτητα της εκεί δέσμης ρευστού (έγχυσης ή αναρρόφησης), αν υπάρχει μια τέτοια δέσμη στην συγκεκριμένη θέση. Στην παρούσα εργασία, η ταχύτητα μιας δέσμης  $k$  δίνεται από την σχέση

$$v_i^k = A^k (\sin(2\pi f_{jets}(t - t_0^k)) - 1) n_i, \quad i = 1, 2(3) \quad (2.1.3)$$



όπου  $A^k$  είναι το πλάτος και  $t_0^k$  η φάση της ταχύτητας της κάθε δέσμης  $k$ , ενώ  $f_{jets}$  είναι η συχνότητα, κοινή για όλες τις δέσμες. Θετικό πλάτος  $A^k$  αφορά σε δέσμη έγχυσης, ενώ αρνητικό πλάτος  $A^k$  σε δέσμη αναρρόφησης. Η σχέση 2.1.3 αντιστοιχεί σε δέσμη με κατεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα.

## 2.2 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών

Το πρόβλημα του βέλτιστου έλεγχου ροής με δέσμες ρευστού (jets), είναι, στην ουσία, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αντίστροφου σχεδιασμού<sup>[2]</sup>, ως προς ένα προκαθορισμένο κριτήριο, εκφρασμένο μαθηματικά από μια συνάρτηση κόστους  $F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$ , και υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης  $F$  στο χώρο λύσεων των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{b}$ . Η συνάρτηση κόστους συναρτάται των μεταβλητών της ροής  $\mathbf{U}$  και των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{b}$ , οι οποίες για την συγκεκριμένη μελέτη είναι οι παράμετροι της ταχύτητας της κάθε δέσμης ρευστού, δηλαδή

- το πλάτος  $A^k$  της κάθε δέσμης
- η φάση  $t_0^k$  της κάθε δέσμης
- η κοινή, για όλες τις δέσμες, συχνότητα  $f_{jets}$

Η εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι διττή<sup>[2]</sup>, καθώς η τιμή της εξαρτάται αφενός άμεσα από τις μεταβλητές σχεδιασμού και αφετέρου έμμεσα μιας και κάθε αλλαγή στις μεταβλητές σχεδιασμού οδηγεί σε διαφορετικό πεδίο ροής και, κατά συνέπεια, σε διαφορετική τιμή της συνάρτησης κόστους.

Αφετηρία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος<sup>[1]</sup> αποτελεί ο ορισμός της επαυξημένης συνάρτησης κόστους  $L$ . Αυτή δημιουργείται από την πρόσθεση στη συνάρτηση κόστους, του χωρικού (σε όλο το πεδίο ροής) και χρονικού (σε μία περίοδο του φαινομένου) ολοκληρώματος, των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με τα πεδία των πολλαπλασιαστών Lagrange. Οι τελευταίοι ταυτίζονται με τις λεγόμενες συζυγείς μεταβλητές (adjoint ή co-state variables) και εκ των πραγμάτων μεταβάλλονται χωρικά αλλά και χρονικά. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η επαυξημένη συνάρτηση

κόστους ορίζεται ως:

$$L = F + \int_T \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} q R^p d\Omega dt \quad (2.2.1)$$

όπου  $u_i$  είναι η συζυγής ταχύτητα της  $v_i$  και  $q$  η συζυγής πίεση της  $p$ , ενώ  $T$  είναι η περίοδος του φαινομένου, στην οποία γίνεται η χρονική ολοκλήρωση.

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{b}}$  οι οποίες εκφράζουν τις μεταβολές της συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς ενδεχόμενες μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{b}$ .

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να γίνει αναφορά στη σχέση που έχουν οι παράμετροι της ταχύτητας των jets, δηλαδή οι μεταβλητές σχεδιασμού, με το φαινόμενο της έκλυσης στροβίλων. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, η περίοδος της έκλυσης των στροβίλων von Karman εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds της ροής. Παρόλα αυτά, όταν στο σώμα που μελετάται αρχίζουν να επιδρούν οι δέσμες ρευστού, το φαινόμενο αυτό τείνει να εξαλειφθεί. Πιο συγκεκριμένα, τα πεδία ταχυτήτων και πίεσης της ροής αποκτούν τοπικά την περίοδο της ταχύτητας των jets, ενώ με την αύξηση του πλάτους  $A^k$  των δεσμών, ο ομόρρους γίνεται σχεδόν μόνιμος. Είναι εμφανές λοιπόν, ότι σε αυτήν την περίπτωση, η περίοδος στην οποία υπολογίζονται τα χρονικά ολοκληρώματα της επαυξημένης συνάρτησης (περίοδος του φαινομένου  $T$ ), ταυτίζεται με τη μεταβλητή σχεδιασμού  $T_{jets}^1$  και κατά συνέπεια, απαιτείται η εφαρμογή του γενικευμένου κανόνα του Leibniz για τον υπολογισμό της ολικής μεταβολής τους ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού  $f_{jets}$ . Στη συνέχεια, το σύμβολο  $T$  θα αναφέρεται πάντα στην περίοδο του φαινομένου, ανεξάρτητα από το αν αυτή ταυτίζεται ή όχι με την περίοδο των jets. Ακόμα, οποιαδήποτε ανάλυση της μεταβολής της συνάρτησης κόστους θα λαμβάνει υπόψη ότι η περίοδος αυτή αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού.

Ο κανόνας του Leibniz για μια γενική συνάρτηση  $F(\mathbf{x}, t)$  γράφεται

$$\frac{\delta}{\delta \theta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} F(\mathbf{x}, t) dt = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial \theta} dt + F(\mathbf{x}, b(\theta)) \frac{\delta b}{\delta \theta} - F(\mathbf{x}, a(\theta)) \frac{\delta a}{\delta \theta} \quad (2.2.2)$$

<sup>1</sup>Η μεταβλητή σχεδιασμού, όπως έχει αναφερθεί, είναι η συχνότητα  $f_{jets}$  των δέσεων ρευστού, αλλά προφανώς ισχύει ότι  $T_{jets} = \frac{1}{f_{jets}}$ .

Ακόμα, η ολική μεταβολή οποιασδήποτε ροϊκής ποσότητας  $\Phi$  είναι

$$\delta\Phi = \partial\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \delta t \quad (2.2.3)$$

όπου με  $\delta$  συμβολίζεται η ολική μεταβολή, ενώ με  $\partial$  συμβολίζεται η μερική μεταβολή. Η μεταβολή  $\partial\Phi$  αντιστοιχεί στην άμεση επίδραση της αλλαγής μιας εκ των μεταβλητών σχεδιασμού, στο  $\Phi$ . Η μεταβολή  $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \delta x_i$  αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά, στην ολική μεταβολή, της αλλαγής της γεωμετρίας, θεωρώντας ότι το πεδίο ροής παραμένει αμετάβλητο. Δεδομένου ότι στη βελτιστοποίηση ελέγχου ροής, το χωρίο επίλυσης  $\Omega$  της ροής και το συσχετιζόμενο πλέγμα (στη διακριτή θεώρηση του προβλήματος) παραμένουν αμετάβλητα, ο όρος αυτός είναι μηδέν. Τέλος, ο όρος  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} \delta t$ , αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά, στην ολική μεταβολή, της αλλαγής της θέσης μιας χρονικής στιγμής  $t$  μέσα σε μια περίοδο, όταν η τελευταία μεταβάλλεται, θεωρώντας ότι το πεδίο ροής παραμένει αμετάβλητο.

Έτσι, για την παρούσα μελέτη, η ολική μεταβολή κάθε ροϊκής ποσότητας γράφεται

$$\delta\Phi = \partial\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \delta t \quad (2.2.4)$$

Με βάση τον κανόνα του Leibniz, η ολική μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους  $L$  (εξίσωση 2.2.1), αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta F + \int_a^{a+T} \int_{\Omega} u_i \partial R_i^v d\Omega dt + \int_a^{a+T} \int_{\Omega} q \partial R^p d\Omega dt \\ &+ \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \Big|_{a+T} + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \Big|_a \\ &+ \int_{\Omega} q R^p d\Omega \Big|_{a+T} + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \Big|_a \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

όπου  $a$  ορίζεται η χρονική στιγμή-αφετηρία υπολογισμού κάθε χρονικού ολοκληρώματος. Είναι εμφανές, ότι με την εφαρμογή του κανόνα του Leibniz προκύπτουν όροι που υπολογίζονται στα όρια της χρονικής ολοκλήρωσης, δηλαδή στην αφετηρία  $a$  και στη χρονική στιγμή  $a + T$ . Παρόλο που στην προκειμένη περίπτωση εκ ταυτότητας ισχύει  $R_i^v = R^p = 0, \forall t$ , και κατά συνέπεια οι όροι αυτοί απαλείφονται, θα δειχθεί

αργότερα ότι αντίστοιχοι όροι εμφανίζονται και στη μεταβολή της συνάρτησης κόστους, και είναι σημαντική η διερεύνηση ως προς τη διαχείριση τους.

Τελικά η 2.2.5 γράφεται

$$\delta L = \delta F + \int_a^{a+T} \int_{\Omega} u_i \partial R_i^v d\Omega dt + \int_a^{a+T} \int_{\Omega} q \partial R^p d\Omega dt \quad (2.2.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση (2.2.6) εκφράζει την ολική μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b$ , στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η περίοδος  $T$ .

## 2.3 Επιλογή της συνάρτησης κόστους

Στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η ελαχιστοποίηση της χρονικά μέσης άνωσης και της χρονικά μέσης οπισθέλκουσας που ασκούνται στο σώμα λόγω της έκλυσης στροβίλων, σε μία περίοδο του φαινομένου. Επειδή όμως, μαθηματικά, η ελαχιστοποίηση μιας εκ των δύο δυνάμεων μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική τιμή αυτής, κάτι που δεν είναι θεμιτό, η συνάρτηση κόστους ορίζεται τελικά ως η μέση τιμή του τετραγώνου της άνωσης ή της οπισθέλκουσας.

Έτσι, τελικά, η συνάρτηση κόστους δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{1}{2T} \int_a^{a+T} g^2 dt \quad (2.3.1)$$

με

$$g = \int_{\Gamma_w} \left[ -\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + p n_i - |v_j n_j| v_i \right] r_i d\Gamma$$

όπου  $r_i$  είναι οι συνιστώσες μοναδιαίου διανύσματος, παράλληλου με την ταχύτητα της ροής, στην περίπτωση που μελετάται η οπισθέλκουσα, και κάθετου στην ταχύτητα της ροής, στην περίπτωση που μελετάται η άνωση. Ακόμα, ο πρώτος όρος της  $g$  αφορά στις συνεκτικές δυνάμεις, ο δεύτερος στις δυνάμεις πίεσης, ενώ ο τρίτος

αφορά στις δυνάμεις ορμής λόγω των δεσμών ρευστού, που ασκούνται το σώμα.

Η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{b}$ , στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η περίοδος ολοκλήρωσης  $T$ , αναλύεται σύμφωνα με τον κανόνα ολοκλήρωσης του Leibniz και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}\delta F &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} g \partial g dt + \left[ \frac{1}{2T} g^2 \Big|_{t=a+T} - \frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} g^2 dt \right] \delta T - \frac{1}{2T} g^2 \Big|_a \delta a \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} g \partial g dt + \left[ \frac{1}{2T} g^2 \Big|_{t=a+T} - \frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} g^2 dt \right] \delta T\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

Από την εφαρμογή του κανόνα του Leibniz προέκυψε στην εξίσωση 2.3.2 ο όρος  $\frac{1}{2T} g^2 \Big|_{t=a+T} \delta T$ , ο οποίος είναι εκφρασμένος για τη χρονική στιγμή  $a + T$  και αφορά στη στιγμιαία τιμή της συνάρτησης κόστους. Εύλογα λοιπόν, δημιουργείται η απορία, για το κατά πόσο η ολική μεταβολή της παραγωγού ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα των δεσμών ρευστού  $f_{jets}$  είναι ανεξάρτητη της χρονικής αφετηρίας υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος  $a$ . Παρόλο που η παράγωγος  $\frac{\delta F}{\delta f_{jets}}$  αναμένεται να είναι ανεξάρτητη του  $a$ , αποτελείται από έναν όρο άμεσα εκφρασμένο στη χρονική στιγμή  $a + T$ , ο οποίος λόγω περιοδικότητας θα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Σε επόμενα κεφάλαια γίνεται διεξοδική ανάλυση σε σχέση με αυτό το ζήτημα.

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης 2.3.2 αναλύεται περαιτέρω ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_a^{a+T} g \partial g dt &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} g \int_{\Gamma_w} \left[ -\nu \partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \partial p n_i - |v_j n_j| \partial v_i \right. \\ &\quad \left. - v_i \partial (|v_j n_j|) \right] r_i d\Gamma dt \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \int_{\Gamma_w} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] n_j + \partial p n_i - |v_j n_j| \partial v_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_j v_i \partial v_j \right) g r_i d\Gamma dt\end{aligned}\quad (2.3.3)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, η συνάρτηση κόστους ορίστηκε ως η μέση τιμή του τετραγώνου

της άνωσης ή της οπισθέλκουσας, που ασκείται πάνω στον κύλινδρο, σε εύρος μιας περιόδου. Όταν οι δέσμες ρευστού επιδρούν στο σώμα, η περίοδος αυτή παύει να εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ροής (αριθμό Reynolds) και ταυτίζεται με την περίοδο της ταχύτητας των δέσμεων  $T_{jets}$ , η οποία είναι μεταβλητή σχεδιασμού. Σε αυτήν την περίπτωση, η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \int_{\Gamma_w} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] n_j + \partial p n_i - |v_j n_j| \partial v_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_j v_i \partial v_j \right) g r_i d\Gamma dt + \left[ -\frac{1}{2 f_{jets}} g^2 \right]_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt \Big] \delta f_{jets} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

όπου, επειδή  $T = \frac{1}{f_{jets}}$ , ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \delta T &= \frac{1}{2} f_{jets} \delta \left( \frac{1}{f_{jets}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_{jets}} \delta f_{jets} \\ -\frac{1}{2T^2} \delta T &= -\frac{1}{2} f_{jets}^2 \delta \left( \frac{1}{f_{jets}} \right) = \frac{1}{2} \delta f_{jets} \end{aligned}$$

## 2.4 Διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων του πεδίου ροής

Στη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, εξίσωση 2.2.6, εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των υπολοίπων των εξισώσεων ροής, δηλαδή οι ποσότητες  $\partial R^p$  και  $\partial R_i^v$ . Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι εν λόγω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφορίση,  $\partial()$ , των εξισώσεων της ροής 2.1.1 και 2.1.2. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \partial R^p &= -\partial \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_j) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned}
\partial R_i^u &= \partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \partial \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \partial \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \partial \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\partial v_i) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \partial v_j + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial p) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] \right), \quad i = 1, 2, (3)
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 2.3.4, 2.4.1 και 2.4.2 στην 2.2.6 προκύπτει η έκφραση:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{1}{T} \int_T \int_{\Gamma_w} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] n_j + \partial p n_i - |v_j n_j| \partial v_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_j v_i \partial v_j \right) g r_i d\Gamma dt + \left[ -\frac{1}{2 f_{jets}} g^2 \Big|_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_T g^2 dt \right] \delta f_{jets} \\
&\quad + \int_T \int_{\Omega} u_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\partial v_i) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \partial v_j + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial p) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] \right) \right] d\Omega dt \\
&\quad - \int_T \int_{\Omega} q \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_j) \right] d\Omega dt
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Κάθε όρος της 2.4.3 μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω με τη χρήση του θεωρήματος Green-Gauss, όπου

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

ή, σε ταυστική γραφή,

$$\iiint_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV = \iint_S F_i n_i dS \tag{2.4.4}$$

Επίσης, χρησιμοποιείται η ιδιότητα ενός διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  και μιας διαφορίσιμης βαθμωτής συνάρτησης  $f$ , όπου

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F}$$

ή, σε ταυστική γραφή,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f F_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} F_i + f \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \tag{2.4.5}$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα της εξίσωσης 2.2.6,  $\int_T \int_\Omega q \partial R^p d\Omega dt$ , δίνει

$$-\int_T \int_\Omega q \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_j) d\Omega dt = -\int_T \int_\Gamma q \partial v_j n_j d\Gamma dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial x_j} \partial v_j d\Omega dt \quad (2.4.6)$$

Η ανάλυση του χρονικού όρου του ολοκληρώματος  $\int_T \int_\Omega u_i \partial R_i^v d\Omega dt$  δίνει

$$\int_\Omega \int_a^{a+T} u_i \frac{\partial}{\partial t} (\partial v_i) dt d\Omega = \left[ \int_\Omega u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} \partial v_i d\Omega dt \quad (2.4.7)$$

Η ανάλυση των μη-συνεκτικών όρων του ίδιου ολοκληρώματος δίνει

$$\int_T \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) d\Omega dt = \int_T \int_\Gamma u_i v_j \partial v_i n_j d\Gamma dt - \int_T \int_\Omega v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \partial v_i d\Omega dt \quad (2.4.8)$$

$$\int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial p) d\Omega dt = \int_T \int_\Gamma u_i \partial p n_i d\Gamma dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \partial p d\Omega dt \quad (2.4.9)$$

Στη σχέση 2.4.8, ο δεύτερος όρος προέκυψε μετά από χρήση της εξίσωσης της συνέχειας  $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\right)$ .

Η ανάλυση των συνεκτικών όρων του ίδιου ολοκληρώματος δίνει

$$\begin{aligned} \int_T \int_\Omega -u_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\partial v_i) d\Omega dt &= -\int_T \int_\Gamma u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) n_j d\Gamma dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) d\Omega dt \\ &= -\int_T \int_\Gamma u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) n_j d\Gamma dt + \int_T \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \partial v_i n_j d\Gamma dt \\ &\quad - \int_T \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \nu \partial v_i d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} -\int_T \int_\Omega u_i \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\partial v_j) d\Omega dt &= -\int_T \int_\Gamma u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) n_j d\Gamma dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) d\Omega dt \\ &= -\int_T \int_\Gamma u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) n_j d\Gamma dt + \int_T \int_\Gamma \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \nu \partial v_j n_i d\Gamma dt \\ &\quad - \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \partial v_j d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.4.11)$$



Αντικαθιστώντας τις 2.4.6 έως 2.4.11 στην 2.4.3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_T \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial u_i}{\partial t} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} \partial v_i d\Omega dt \\
& - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \partial p d\Omega dt \\
& + \int_T \int_\Gamma \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\
& + \int_T \int_\Gamma u_i \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\
& + \int_T \int_{\Gamma_w} \frac{g r_i}{T} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\
& - \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ \frac{g r_i}{T} |v_j n_j| + \frac{g r_j}{T} v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\
& + \left[ \int_\Omega u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} + \left[ -\frac{1}{2 f_{jets}} g^2 \right]_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt \Big] \delta f_{jets} \quad (2.4.12)
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση 2.4.12, γίνεται αντιληπτό ότι η μεταβολή της συνάρτησης κόστους έχει πλέον εκφραστεί συναρτήσει των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεγεθών  $\partial p$  και  $\partial v_i$ , στο εσωτερικό και στα όρια του χωρίου ροής. Δεδομένου ότι οι μεταβολές αυτές δεν είναι επιθυμητό να υπολογισθούν, πρέπει να γίνει απαλοιφή των ολοκληρωμάτων που τις εμπεριέχουν. Έτσι προκύπτουν οι **συζυγείς πεδριακές εξισώσεις**, που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4.13)$$

$$-\frac{\partial u_i}{\partial t} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.4.14)$$

## 2.5 Οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος & Παράγωγοι Ευαισθησίας

Με την απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων, η παράγωγος ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης καθίσταται ανεξάρτητη των άμεσων μεταβολών των ροϊκών ποσοτήτων στο χωρίο ροής. Έτσι, η σχέση που δίνει την ολική μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους γράφεται:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_T \int_\Gamma \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\
& + \int_T \int_\Gamma u_i \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\
& + \int_T \int_{\Gamma_w} \frac{g r_i}{T} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\
& - \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ \frac{g r_i}{T} |v_j n_j| + \frac{g r_j}{T} v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\
& + \left[ \int_\Omega u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} + \left[ -\frac{1}{2 f_{jets}} g^2 \right]_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt \quad (2.5.1)
\end{aligned}$$

Καθιστώντας την παραπάνω εξίσωση ανεξάρτητη των μεταβολών των μεταβλητών ροής στα όρια της ολοκλήρωσης, θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συνεχούς συζυγούς προβλήματος και ότι απομένει θα είναι η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

### 2.5.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου $\Gamma_I$

Στα όρια εισόδου, όπως έχει αναφερθεί και στην ενότητα 2.1, η ταχύτητα  $v_i$  δίνεται από συνθήκη τύπου Dirichlet. Έτσι, η ολική μεταβολή της ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι μηδέν ( $\delta v_i = 0$ ). Ακόμα, επειδή η τιμή της ταχύτητας εισόδου είναι ανεξάρτητη του χρόνου, ισχύει ότι  $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ . Άρα, από τη σχέση 2.2.4 προκύπτει ότι  $\partial v_i = 0$ .

Έτσι λοιπόν, στα όρια εισόδου, απομένει ο όρος της ολικής μεταβολής της επαυξη-

μένης συνάρτησης κόστους

$$\int_T \int_{\Gamma_I} u_i \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt$$

ο οποίος για να απαλειφθεί, επιβάλλεται στα όρια εισόδου του χωρίου μηδενική συνθήκη Dirichlet για τη συζυγή ταχύτητα,  $u_i = 0$ . Πρακτικά, και χωρίς να απορρέει από τις παραπάνω απαλοιφές, επιβάλλεται για τη συζυγή πίεση στην είσοδο του χωρίου μηδενική συνθήκη Neumann  $\frac{\partial q}{\partial x_i} n_i = 0$ .

### 2.5.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εξόδου $\Gamma_O$

Ο όρος της ολικής μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης κόστους στα όρια εξόδου είναι

$$\begin{aligned} \int_T \int_{\Gamma_O} \left\{ \left( u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right) \partial v_i - u_i \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j \right. \\ \left. + u_i \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) \right\} d\Gamma dt \quad (2.5.2) \end{aligned}$$

Ο όρος  $\int_T \int_{\Gamma_O} -u_i \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j d\Gamma dt$  της παραπάνω έκφρασης έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, ενδεχομένως, λόγω του ότι η θέση του ορίου στην έξοδο είναι τέτοια ώστε εκεί το πεδίο ταχύτητας να διέπεται από ικανοποιητική ομοιογένεια.

Η τιμή της κάθετης συζυγούς ταχύτητας στην έξοδο παράγεται από το μηδενισμό του δεύτερου όρου της σχέσης 2.5.2, ως

$$u_i n_i = 0 \Rightarrow u_{\langle n \rangle} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας τον πρώτο όρο της εξίσωσης 2.5.2 με το μοναδιαίο κάθετο,  $n_i$ , και το μοναδιαίο εφαπτομενικό,  $t_i$ , ως προς την επιφάνεια διάνυσμα, η συνθήκη αυτή

γράφεται στο οριόδετο σύστημα. Προκύπτουν λοιπόν οι σχέσεις

$$q = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i$$

$$0 = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i$$

όπου  $v_{(n)} = v_i n_i$  και  $v_{(t)} = v_i t_i$ , ενώ αντίστοιχα ισχύουν και για τη συζυγή ταχύτητα.

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς πίεσης  $q$  με βάση τις τιμές των συζυγών μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης και η δεύτερη εξίσωση για τον προσδιορισμό του μέτρου της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας  $u_{(t)}$ .

### 2.5.3 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο τοίχωμα $\Gamma_w$

Οι όροι που αφορούν στο όριο του τοιχώματος και έχουν απομείνει από τη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους είναι

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_T \int_{\Gamma_w} u_i \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\ & + \int_T \int_{\Gamma_w} \frac{gr_i}{T} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial v_i) \right] n_j + \partial p n_i \right) d\Gamma dt \\ & - \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ \frac{gr_i}{T} |v_j n_j| + \frac{gr_j}{T} v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\ & + \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Από αυτούς, οι δύο πρώτοι όροι απαλείφονται, δίνοντας έτσι την οριακή συνθήκη της συζυγούς ταχύτητας στο τοίχωμα

$$u_i = -\frac{gr_i}{T} \quad (2.5.4)$$

Για τη συζυγή πίεση επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann  $\frac{\partial q}{\partial x_i} n_i = 0$ . Οι όροι που απομένουν στην 2.5.3 συναρτώνται των  $\partial v_i$  (και οι τελευταίες συνδέονται με τα

χαρακτηριστικά των δεσμών) και, άρα, συνεισφέρουν στις παραγώγους ευαισθησίας.

### 2.5.4 Παράγωγοι Ευαισθησίας

Οι εναπομείναντες όροι σχηματίζουν την παράγωγο ευαισθησίας

$$\begin{aligned} \delta F &= - \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ \frac{gr_i}{T} |v_j n_j| + \frac{gr_j}{T} v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\ &+ \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - qn_i \right\} \partial v_i d\Gamma dt \\ &+ \left[ -\frac{1}{2f_{jets}} g^2 \Big|_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt \right] \delta f_{jets} + \left[ \int_{\Omega} u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Στο όριο  $\Gamma_w$  η ταχύτητα είναι είτε μηδενική, λόγω της συνθήκης μη-ολίσθησης, είτε ίση με την ταχύτητα της δέσμης ρευστού, στην περίπτωση που υπάρχει δέσμη ελέγχου σε κάποια θέση. Έτσι ο υπολογισμός της μερικής μεταβολής της ταχύτητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι εύκολος και γίνεται αναλυτικά. Πιο συγκεκριμένα, για την δέσμη ρευστού  $k$  είναι

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial A^n} = \delta_n^k [\sin(2\pi f_{jets}(t - t_0^k)) - 1] n_i \quad (2.5.6)$$

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial t_0^n} = -\delta_n^k 2\pi f_{jets} A^k \cos(2\pi f_{jets}(t - t_0^k)) n_i \quad (2.5.7)$$

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial f_{jets}} = \delta_n^k 2\pi(t - t_0^k) A^k \cos(2\pi f_{jets}(t - t_0^k)) n_i \quad (2.5.8)$$

όπου  $\delta_n^k$  είναι το σύμβολο του Kronecker.

Ο τελευταίος όρος της παραγώγου ευαισθησίας 2.5.5, σύμφωνα με τη σχέση του ολικού διαφορικού μιας οποιασδήποτε ροϊκής ποσότητας (2.2.4), αναλύεται περαιτέρω ως εξής:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} &= \left[ \int_{\Omega} u_i \left( \delta v_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta t \right) d\Omega \right]_a^{a+T} \\ &= \left[ \int_{\Omega} u_i \delta v_i d\Omega \right]_T^{a+T} - \left[ \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta t d\Omega \right]_a^{a+T} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

<sup>1</sup>Η περιοδικότητα της συνάρτησης  $\frac{\delta v_i}{\delta f_{jets}}$  αναλύεται περαιτέρω στο Παράρτημα Α'.

Όμως ο πρώτος όρος της 2.5.9 είναι μηδέν, λόγω της περιοδικότητας<sup>1</sup> των συναρτήσεων  $u_i$  και  $\delta v_i$ , που προφανώς έχουν την ίδια περίοδο. Ακόμα ισχύει

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta(a+T)}{\delta f_{jets}} &= -\frac{1}{f_{jets}^2} \\ \frac{\delta a}{\delta f_{jets}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow - \left[ \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta t d\Omega \right]_{t=a}^{t=a+T} = \frac{1}{f_{jets}^2} \left[ \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \right]_{t=a+T} \delta f_{jets}$$

Έτσι, τελικά,

$$\left[ \int_{\Omega} u_i \partial v_i d\Omega \right]_a^{a+T} = \frac{1}{f_{jets}^2} \left[ \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \right]_{t=a+T} \delta f_{jets} \quad (2.5.10)$$

Αντικαθιστώντας την 2.5.10 και μια εκ των 2.5.6, 2.5.7 και 2.5.8, ανάλογα με τη μεταβλητή σχεδιασμού που αφορούν, η παράγωγος ευαισθησίας γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \int_T \int_{\Gamma_w} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + u_i |v_j n_j| + u_j v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Gamma dt \\ &+ \left[ \frac{1}{f_{jets}^2} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \right]_{t=a+T} - \frac{1}{2 f_{jets}^2} g^2 \Big|_{t=a+T} + \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt \Big] \frac{\delta f_{jets}}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

## Κεφάλαιο 3

# Διακριτοποίηση των εξισώσεων & αλγόριθμοι επίλυσής τους

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος με την οποία γίνεται η διακριτοποίηση του χωρίου επίλυσης, καθώς και των εξισώσεων του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος<sup>[12, 13, 15, 16]</sup>. Ακόμα, γίνεται αναφορά στον αλγόριθμο επίλυσης των εξισώσεων<sup>[12, 15]</sup> και στη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε με στόχο τη μείωση της απαιτούμενης χωρητικότητας σε υπολογιστική μνήμη για την αποθήκευση των πεδίων της ταχύτητας και της πίεσης σε κάθε χρονικό βήμα<sup>[17, 19, 20]</sup>, απαραίτητα για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Με την ανάγνωση του κεφαλαίου αυτού, γίνεται αντιληπτό ένα πλεονέκτημα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, καθώς οι συζυγείς εξισώσεις που προέκυψαν δεν απαιτούν διαφορετική διαχείριση στην διακριτοποίηση και επίλυση τους σε σχέση με τις εξισώσεις της ροής.

### 3.1 Διακριτοποίηση με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος αποσκοπεί στον μετασχηματισμό των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα αντίστοιχο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Από την επίλυση του συστήματος αυτού προκύπτει ένα σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στην λύση των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου και του χρόνου. Το πεδίο επίλυσης χωρίζεται λοιπόν σε έναν πεπερασμένο αριθμό διακριτών περιοχών ή, αλλιώς, όγκων ελέγχου, οι οποίοι περιλαμβάνουν τις θέσεις των σημείων, όπου και αναζητείται η

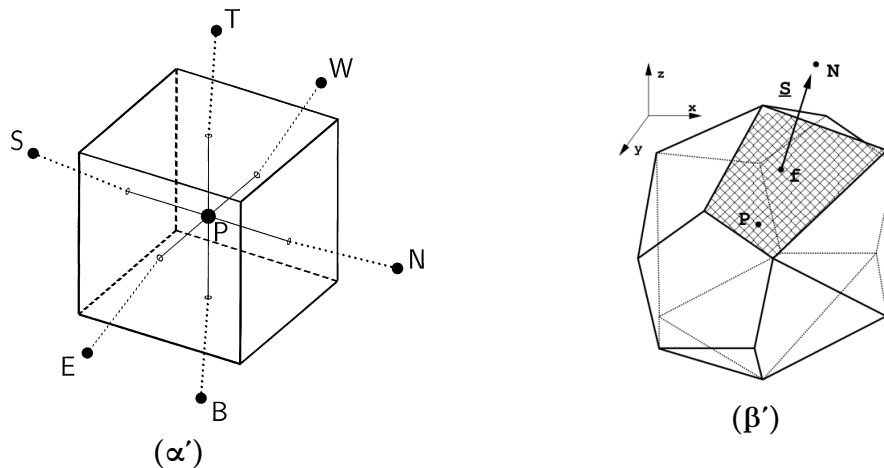
λύση. Ο χρόνος αντίστοιχα χωρίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό χρονικών βημάτων.

### 3.1.1 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, από τη διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης προκύπτει το υπολογιστικό πλέγμα στο οποίο επιλύονται οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής. Η λύση στον χρόνο προκύπτει με προέλαση σε αυτόν, ξεκινώντας από μια δοσμένη αρχική συνθήκη και με ένα ορισμένο χρονικό βήμα.

Η διακριτοποίηση στον χώρο γίνεται με τη διαίρεση του πεδίου επίλυσης σε όγκους ελέγχου, οι οποίοι έχουν πολυεδρικό σχήμα, δεν υπερβαίνουν τα όρια του άλλου και συμπληρώνουν πλήρως το πεδίο. Για κάθε όγκο-κυψέλη ορίζεται ένα σύνολο επίπεδων επιφανειών (faces) που το περιβάλλουν, ενώ κάθε όγκος μοιράζεται κάθε τέτοια επιφάνεια με μια μόνο γειτονική του κυψέλη. Τέλος, το σημείο που υπολογίζεται η λύση είναι το κέντρο  $P$  του όγκου ελέγχου, με συντεταγμένες  $\mathbf{x}_P$ , έτσι ώστε:

$$\int_{V_p} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) dV = 0$$



Σχήμα 3.1: Εξαεδρικός και Πολυεδρικός Όγκος Ελέγχου<sup>[14]</sup>.



### 3.1.2 Διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς

Για μια βαθμωτή ποσότητα  $\phi$ , η εξίσωση μεταφοράς γράφεται

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{\text{Χρονική Παράγωγος}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)}_{\text{Όρος Μεταφοράς}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi)}_{\text{Όρος Διάχυσης}} = \underbrace{S_{\phi}(\phi)}_{\text{Όρος Πηγής}} \quad (3.1.1)$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων απαιτεί η εξίσωση 3.1.1 να ικανοποιείται σε έναν όγκο ελέγχου  $V_P$  με κέντρο  $P$  στην ολοκληρωματική μορφή

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \phi dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi) dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_P} S_{\phi}(\phi) dV dt \quad (3.1.2)$$

Η εξίσωση αυτή είναι δεύτερης τάξης, καθώς ο όρος διάχυσης περιέχει δεύτερη παράγωγο της ταχύτητας ως προς τον χώρο. Για αυτόν τον λόγο, πρέπει η διακριτοποίηση να είναι ίσης ή μεγαλύτερης τάξης, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται καλή ακρίβεια. Πιο συγκεκριμένα, αναλύεται το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο  $P$  για μια βαθμωτή συνάρτηση  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}_P) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla)_P + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)^2 : (\nabla \nabla \phi)_P \\ &+ \frac{1}{3!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)^3 :: (\nabla \nabla \nabla \phi)_P + \dots \end{aligned}$$

όπου ο τελεστής  $\underbrace{\quad}_{n} ::$  συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο τανυστών  $n^{\text{οστής}}$  τάξης.

Έτσι λοιπόν, η μεταβολή της ποσότητας  $\phi$  στον χώρο και στον χρόνο γύρω από το σημείο  $P$  θεωρείται γραμμική, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται δεύτερης τάξης ακρίβεια, αφού, σε αυτήν την περίπτωση, το σφάλμα αποκοπής είναι δεύτερης τάξης. Αντίστοιχη ανάλυση γίνεται και στην μεταβολή της ποσότητας  $\phi$  ως προς τον χρόνο και, τελικά, προκύπτει

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_P) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla)_P$$

και

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \Delta t \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t$$

Έτσι, ο υπολογισμός ενός χωρικού ολοκληρώματος μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \phi(\mathbf{x}) dV &= \int_{V_P} \phi(\mathbf{x}_P) dV + \int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla)_P dV \\ &= \phi(\mathbf{x}_P) \int_{V_P} dV + \left[ \int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \right] \cdot (\nabla)_P dV \\ &= \phi(\mathbf{x}_P) V_P \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Ακόμα, με τη χρήση του θεωρήματος Gauss τα χωρικά ολοκληρώματα μπορούν να μετατραπούν σε επιφανειακά, στις οριακές επιφάνειες δηλαδή του όγκου ολοκλήρωσης.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} \quad (3.1.4)$$

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \phi \quad (3.1.5)$$

όπου  $\partial V$  είναι η κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο ελέγχου  $V$  και  $d\mathbf{S}$  το απειροστό επιφανειακό στοιχείο με κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια  $\partial V$  και φορά προς τα έξω.

### Όρος Μεταφοράς

Με βάση τα προαναφερθέντα ο όρος μεταφοράς γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV &= \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) \\ &= \sum_{\text{faces}} \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U})_f \phi_f \\ &= \sum_{\text{faces}} F_f \phi_f \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

όπου οι όροι με δείκτη  $f$  αφορούν στην τιμή στο κέντρο της κάθε έδρας του όγκου ελέγχου, ενώ η συνάρτηση  $F_f = \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U})_f$  είναι η ροή μάζας που διέρχεται από την αντίστοιχη επιφάνεια. Στην σχέση 3.1.6 χρειάζεται η τιμή της ποσότητας  $\phi$  στο κέντρο της έδρας της κυψέλης, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με το σχήμα διακριτοποίησης του όρου μεταφοράς.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αυτός ο όρος διακριτοποιήθηκε με ένα σχήμα ανάντι παραγωγίσις δεύτερης τάξης (Upwind Scheme).

### Όρος Διάχυσης

Ομοίως με προηγουμένως, ο όρος διάχυσης γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV &= \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) \\ &= \sum_{\text{faces}} \mathbf{S} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f \end{aligned}$$

Ο όρος  $\sum \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f$  μπορεί να διακριτοποιηθεί με δύο τρόπους. Στην περίπτωση που τα διανύσματα  $\mathbf{d}$  και  $\mathbf{S}$  είναι παράλληλα μπορεί να γραφεί ότι

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \quad (3.1.7)$$

Ακόμα συνδιάζοντας τις σχέσεις 3.1.3 και 3.1.5 προκύπτει ότι

$$(\nabla \phi)_P V_P = \sum \mathbf{S} \phi_f$$

Έτσι με παρεμβολή μπορεί να προκύψει η τιμή στο κέντρο της έδρας

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f = \mathbf{S} \cdot [\gamma (\nabla \phi)_P + (1 - \gamma) (\nabla \phi)_N] \quad (3.1.8)$$

Ενώ και η 3.1.7 και η 3.1.8 είναι σχήματα δεύτερης τάξης, η δεύτερη αφορά σε μεγαλύτερο υπολογιστικό τμήμα και, κατα συνέπεια, έχει μικρότερη ακρίβεια. Έτσι λοιπόν για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πρώτος τρόπος διακριτοποίησης, ο οποίος μπορεί

να εφαρμοσθεί μόνο σε ορθογώνια πλέγματα, ο όρος  $\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f$  αναλύεται σε

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f = \mathbf{l} \cdot (\nabla\phi)_f + \mathbf{m} \cdot (\nabla\phi)_f$$

όπου τα  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{m}$  είναι κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα, έτσι ώστε  $\mathbf{l} + \mathbf{m} = \mathbf{S}$  και το  $\mathbf{l}$  παράλληλο του  $\mathbf{d}$ . Με αυτό τον τρόπο ο πρώτος όρος αφορά σε ορθογώνιο πλέγμα και, κατά συνέπεια, διακριτοποιείται σύμφωνα με την 3.1.7 ενώ ο δεύτερος σύμφωνα με την 3.1.8. Η επιλογή των διανυσμάτων  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{m}$  ξεφεύγει από την παρούσα διπλωματική εργασία.

### Όροι Πηγής

Όσοι όροι δεν μπορούν να γραφούν στην μορφή των όρων μεταφοράς και διάχυσης και του χρονικού όρου γράφονται σαν όροι πηγής. Πριν την διακριτοποίηση ο όρος γραμμικοποιείται, σε περίπτωση που είναι μη-γραμμικός, και ύστερα διακριτοποιείται κατά τα γνωστά.

$$S_\phi = S_u + S_p\phi$$

$$\int_{V_P} S_\phi dV = V_P S_u + V_P S_p \phi_P$$

### Χρονικός Όρος

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η διακριτοποίηση του χρονικού όρου πρέπει να είναι και αυτή δεύτερης τάξης. Ένα τέτοιο σχήμα παράγεται από την ανάλυση του αναπτύγματος Taylor στον χρόνο για την επόμενη και την προηγούμενη χρονική στιγμή. Έτσι για  $\phi(t + \Delta t) = \phi^n$  έχουμε

$$\phi(t) = \phi^o = \phi^n - \Delta t \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3)$$

$$\phi(t - \Delta t) = \phi^{oo} = \phi^n - 2\Delta t \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + 2\Delta t^2 \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3)$$

και τελικά αφαιρώντας κατάλληλα κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{3\phi^n - 4\phi^o + \phi^{oo}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$


---

Έτσι η εξίσωση 3.1.2 γράφοντας τους χωρικούς όρους σε πεπλεγμένη μορφή ως προς τον χρόνο και θεωρώντας πως οι όγκοι ελέγχου δεν μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο μετατρέπεται στη διακριτοποιημένη της μορφή

$$\frac{\frac{3}{2}\phi^n - 2\phi^o + \frac{1}{2}\phi^{oo}}{\Delta t} + \sum_{\text{faces}} F_f \phi_f^n + \sum_{\text{faces}} \mathbf{S} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f^n = V_P S_u + V_P S_p \phi_P^n \quad (3.1.9)$$

Η εξίσωση 3.1.9 αποτελεί ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που επιλύεται ως προς τις ποσότητες  $\phi_P^n$ .

## 3.2 Διακριτοποίηση και επίλυση του συστήματος εξισώσεων Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes 2.1.1 και 2.1.2, μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p \quad (3.2.2)$$

Είναι εμφανές πως το σύστημα αυτό είναι μη-γραμμικό, ενώ ακόμα απαιτείται η σύζευξη της ταχύτητας και της πίεσης.

### 3.2.1 Γραμμικοποίηση της εξίσωσης της ορμής

Ο όρος μεταφοράς της ταχύτητας,  $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ , διακριτοποιείται σύμφωνα με τη σχέση 3.1.6, ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) &= \sum_{\text{faces}} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{U})_f (\mathbf{U})_f \\ &= \sum_{\text{faces}} F(\mathbf{U})_f \mathbf{U}_P \\ &= a_P \mathbf{U}_P + \sum_N a_N \mathbf{U}_N \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

όπου με δείκτη  $P$  ορίζονται οι ταχύτητες στο κέντρο του μελετούμενου όγκου ελέγχου, ενώ με δείκτη  $N$  οι ποσότητες στους γειτονικούς όγκους. Οι συντελεστές  $a_P$  και  $a_N$  είναι συναρτήσεις της ταχύτητας  $\mathbf{U}$ , όπως είναι και η ροή μάζας  $F(\mathbf{U})_f$ . Η γραμμικοποίηση του όρου μεταφοράς γίνεται με τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_P$  και  $a_N$  με την χρήση του ήδη υπάρχοντος πεδίου ταχύτητας  $\mathbf{U}$ .

### 3.2.2 Σύζευξη πίεσης-ταχύτητας και ο αλγόριθμος PISO

Για να προκύψει ρητή εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης, δεδομένου ότι δεν υπάρχει, η εξίσωση της ορμής γράφεται σε μια ημι-διακριτοποιημένη μορφή ως εξής:

$$a_P \mathbf{U}_P = \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \nabla p \quad (3.2.4)$$

Ο όρος  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  αποτελείται από το μητρώο των συντελεστών για κάθε γειτονικό κύτταρο, πολλαπλασιασμένο με τις αντίστοιχες ταχύτητες, που έχει προκύψει από την διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και διάχυσης (υποενότητα 3.1.2) και από το μητρώο με τους συντελεστές της διακριτοποίησης του χρονικού όρου και κάθε όρου πηγής.

Η εξίσωση της συνέχειας διακριτοποιείται ως εξής:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_f = 0 \quad (3.2.5)$$

Γράφοντας την εξίσωση 3.2.4 ως προς  $\mathbf{U}_P$ , προκύπτει

$$\mathbf{U}_P = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p \quad (3.2.6)$$

Οι ταχύτητες στις έδρες του κάθε όγκου ελέγχου υπολογίζονται με παρεμβολή:

$$\mathbf{U}_f = \left( \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f \quad (3.2.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 3.2.7 στην διακριτοποιημένη εξίσωση της συνέχειας

3.2.5 προκύπτει η εξίσωση της πίεσης:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{a_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f \quad (3.2.8)$$

Η διακριτοποιημένη μορφή του συστήματος των εξισώσεων Navier-Stokes, όπως προέκυψε είναι:

$$a_P \mathbf{U}_P = \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \sum_{faces} \mathbf{S}(p)_f \quad (3.2.9)$$

$$\sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f = \sum_{faces} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f \quad (3.2.10)$$

Τέλος, η ροή μάζας σε κάθε έδρα δίνεται από τη σχέση:

$$F = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_f = \mathbf{S} \cdot \left[ \left( \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \nabla p \right)_f \right] \quad (3.2.11)$$

Η σύζευξη πίεσης-ταχύτητας γίνεται μέσω του αλγορίθμου PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators)<sup>[18]</sup>.

- (i) Επιλύεται η διακριτοποιημένη εξίσωση ορμής 3.2.9, με τη χρήση του ήδη υπάρχοντος πεδίου πίεσης και προκύπτει μια εκτίμηση του πεδίου ταχύτητας.
- (ii) Με το πεδίο ταχύτητας του προηγούμενου βήματος, σχηματίζεται το μητρώο  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  και επιλύεται η εξίσωση της πίεσης 3.2.10. Έτσι προκύπτει μια εκτίμηση του πεδίου πίεσης.
- (iii) Με το νέο πεδίο πίεσης και μέσω της σχέσης 3.2.11 υπολογίζεται η ροή μάζας σε κάθε έδρα των όγκων ελέγχου. Μέσω της σχέσης 3.2.6 διορθώνεται το πεδίο ταχύτητας.

Τα βήματα (ii) και (iii) επαναλαμβάνονται μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης.

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις της ροής (2.1.1 και 2.1.2), με τις αντίστοιχες που προέκυψαν από την συζυγή διατύπωση (2.4.13 και 2.4.14), είναι εμφανής η ομοιότητα ως προς τους όρους από τους οποίους αποτελούνται, και κατά συνέπεια, η μέθοδος

διακριτοποίησης και επίλυσης που αναλύθηκε για τις εξισώσεις Navier-Stokes μπορεί να εφαρμοσθεί και στις συζυγείς εξισώσεις. Ο επιπλέον όρος της εξίσωσης 2.4.14,  $u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ , αντιμετωπίζεται ως όρος πηγής, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα.

### 3.3 Αποθήκευση των χρονικών βημάτων με την μέθοδο checkpointing

Η συνεχής συζυγής μέθοδος για τις χρονικά μη-μόνιμες ροές απαιτεί το πεδίο ταχύτητας και πίεσης να είναι γνωστό για κάθε χρονικό βήμα επίλυσης. Είναι εμφανές λοιπόν, πως για προβλήματα πολλών χρονικών βημάτων, όπως είναι και το μελετούμενο πρόβλημα στην παρούσα διπλωματική εργασία, απαιτείται μεγάλη χωρητικότητα μνήμης, που συνήθως δεν είναι ρεαλιστικό. Για την αποφυγή της αποθήκευσης του πεδίου ροής σε κάθε χρονική στιγμή, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος checkpointing.

Με αυτήν την μέθοδο, κατά την επίλυση του ευθέως προβλήματος, γίνεται μερική επιλεκτική αποθήκευση του πεδίου ροής σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Έτσι, κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, για κάθε χρονικό βήμα για το οποίο δεν έχουν αποθηκευτεί οι λύσεις του ευθέως προβλήματος, γίνεται ξανά πρόλεξη της πρωτεύουσας ροής ξεκινώντας από το τελευταίο αποθηκευμένο στιγμιότυπο (checkpoint). Η κατανομή των δεικτών μνήμης γίνεται με την μέθοδο του διωνυμικού checkpointing (binomial checkpointing)<sup>[19, 20]</sup>.

---



# Κεφάλαιο 4

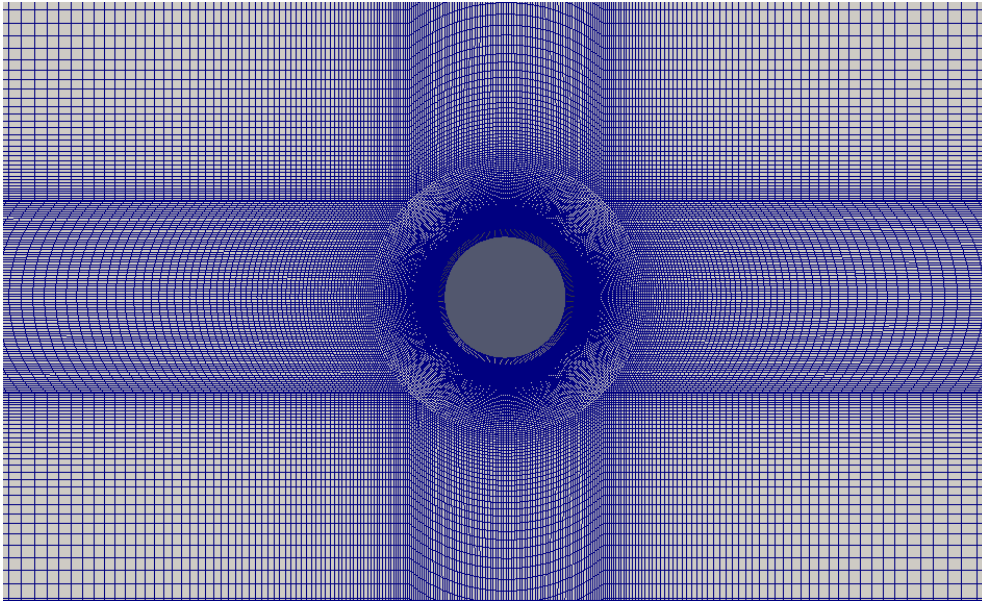
## Πρόλεξη της ροής

### 4.1 Γεωμετρία του προβλήματος

Στο πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία, μελετάται η ροή γύρω από έναν κύλινδρο, διαμέτρου  $D = 1\text{cm}$ . Η πρόλεξη της ροής έγινε με τη χρήση του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM. Το πλέγμα, η γένεση του οποίου έγινε με την βοήθεια του εργαλείου blockMesh, αποτελείται από 80000 κυψέλες-όγκους ελέγχου και παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1. Αξίζει να σημειωθεί, πως το χρησιμοποιούμενο λογισμικό επιλύει μόνο τριδιάστατα προβλήματα, και για αυτό, το πλέγμα είναι τριδιάστατο, με τις κατάλληλες συνθήκες συμμετρίας, ώστε να του προσδίδουν διδιάστατο χαρακτήρα.

### 4.2 Πρόλεξη της ροής γύρω από κύλινδρο

Αφού δόθηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας του προβλήματος, ακολουθεί η επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή. Για το παρόν πρόβλημα, όπως έχει προαναφερθεί, η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και στρωτή, ενώ η επ'άπειρον ταχύτητα της ροής τέθηκε ίση με  $U_\infty = 0.1\text{m/s}$ , δίνοντας έτσι τον αριθμό Reynolds ίσο με  $Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = 100$ .



Σχήμα 4.1: Πλέγμα γύρω από κύλινδρο, ακτίνας  $D = 1\text{cm}$ .

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος, έχουν δοθεί στο κεφάλαιο 2, και είναι

(i) στην είσοδο της εξωτερικής επιφάνειας του περιβάλλοντος χωρίου  $\Gamma_\infty$

- ταχύτητα:  $U_\infty = 0.1\text{m/s}$
- στατική πίεση:  $\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0$

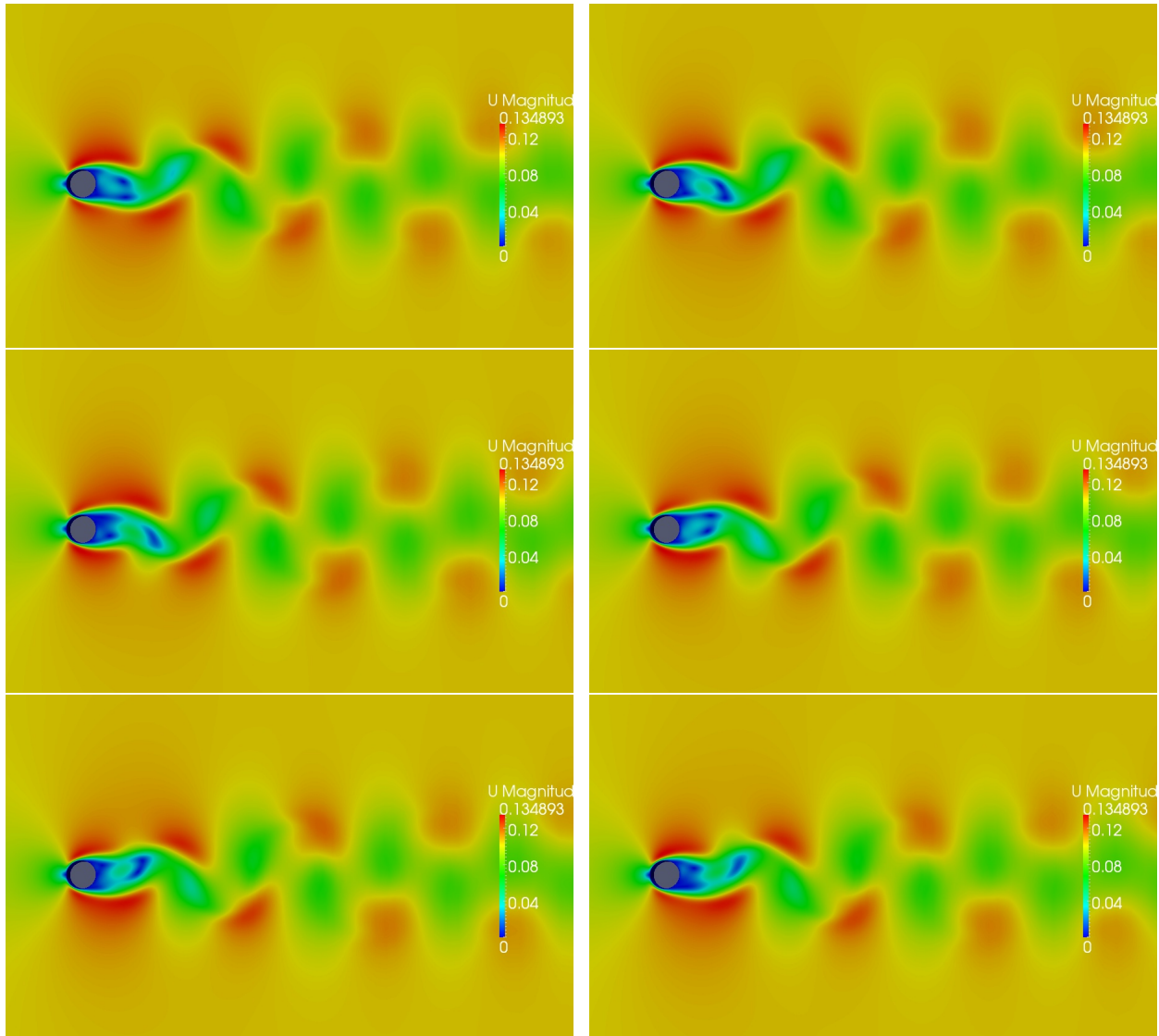
(ii) στην έξοδο της εξωτερικής επιφάνειας του περιβάλλοντος χωρίου  $\Gamma_\infty$

- ταχύτητα:  $\frac{\partial v_i}{\partial n_j} n_j = 0$
- στατική πίεση:  $\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0$

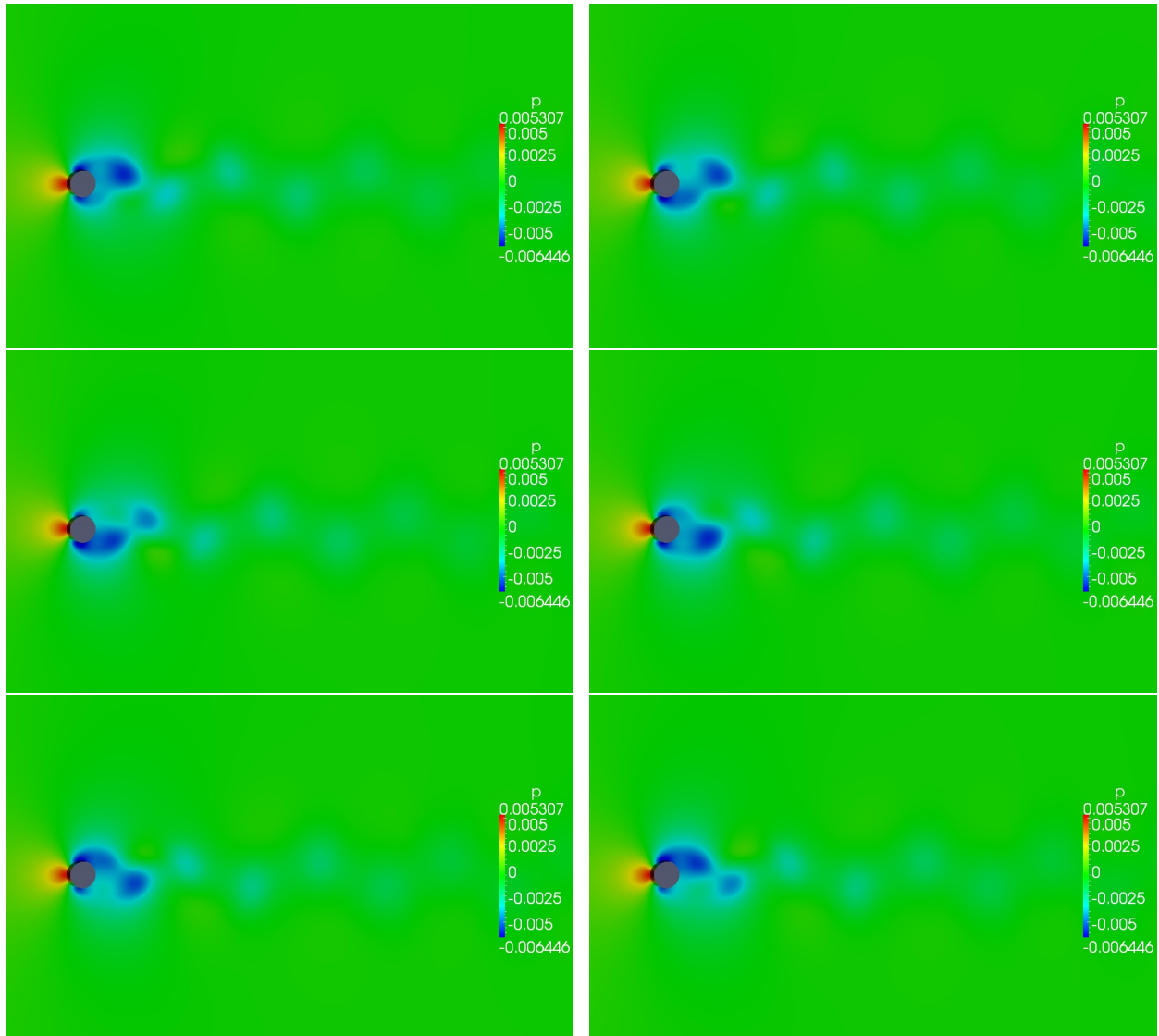
(iii) στο στερεό τοίχωμα του κυλίνδρου  $\Gamma_w$

- ταχύτητα:  $U_\infty = 0\text{m/s}$
- στατική πίεση:  $\frac{\partial p}{\partial n_j} n_j = 0$

Με βάση τις οριακές συνθήκες, επιλύονται οι εξισώσεις της ροής και προκύπτουν τα πεδία ταχυτήτων και πίεσης, που παρουσιάζονται στα σχήματα 4.2 και 4.3 αντίστοιχα, για έξι στιγμιότυπα σε μια περίοδο.



**Σχήμα 4.2:** Μη-ελεγχόμενη περίπτωση, χωρίς αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού από τις δέσμες. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου ταχύτητας σε μια περίοδο του φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .



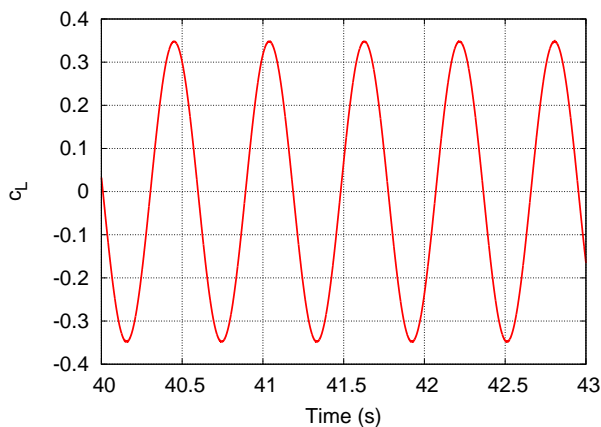
**Σχήμα 4.3:** Μη-ελεγχόμενη περίπτωση, χωρίς αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού από τις δέσμες. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου πίεσης σε μια περίοδο του φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .

Είναι εμφανής η έκλυση στροβίλων, με περίοδο  $T \approx 0.59s$ . Ο αριθμός Strouhal, ο οποίος περιγράφει περιοδικές ροές, δίνεται από τη σχέση

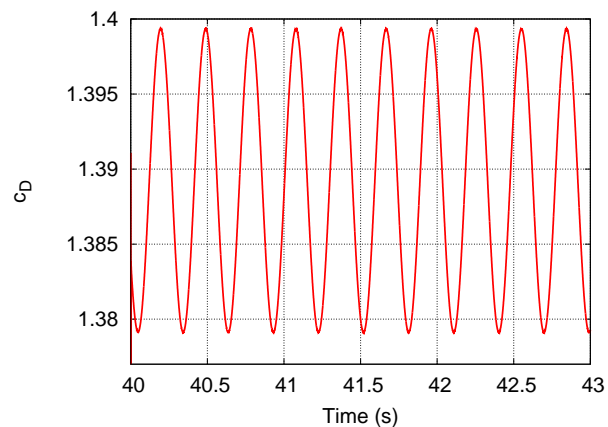
$$Str = \frac{fD}{V_\infty} \approx 0.166 \quad (4.2.1)$$

όπου  $f$  είναι η συχνότητα έκλυσης στροβίλων,  $D$  το μήκος αδιαστατοποίησης, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η διάμετρος του κυλίνδρου και  $V_\infty$  η επ'άπειρον ταχύτητα. Από αντίστοιχα πειράματα έχει δειχθεί πως για αριθμό Reynolds  $Re = 100$ , ο αριθμός Strouhal είναι περίπου ίσος με 0.165, ίσος δηλαδή με αυτόν που προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής.

Στα σχήματα 4.4α' και 4.4β' δίνονται οι στιγμιαίοι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας, αντίστοιχα. Η άνωση που ασκείται στον κύλινδρο έχει την περίοδο του φαινομένου, ενώ η οπισθέλκουσα έχει εύλογα τη μισή. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί λόγω του ότι η άνωση σε μια περίοδο αλλάζει φορά, καθώς παίρνει και αρνητικές τιμές, ενώ η οπισθέλκουσα έχει πάντα την φορά της αδιατάραχης ροής και, κατά συνέπεια, όταν η άνωση βρίσκεται στις αρνητικές τιμές, η οπισθέλκουσα ολοκληρώνει άλλη μια περίοδο.



(α')



(β')

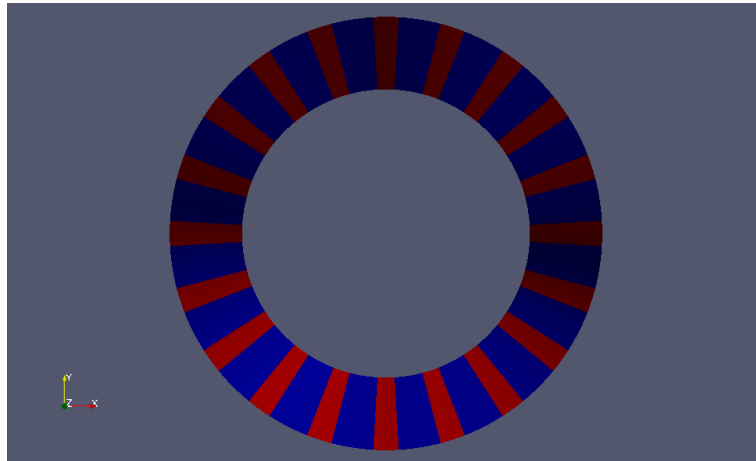
**Σχήμα 4.4:** Μη-ελεγχόμενη περίπτωση, χωρίς αναρρόφηση ή έγχυση ρευστού από τις δέσμες. Στιγμαίοι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας.

Οι τιμές της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης και της οπισθέλκουσας, δηλαδή η συνάρτηση κόστους για κάθε δύναμη, υπολογίζονται αντίστοιχα:

$$F_L = \frac{1}{2T} \int_a^{a+T} c_L^2 dt = 0.0303 \quad \text{και} \quad F_D = \frac{1}{2T} \int_a^{a+T} c_D^2 dt = 0.9656$$

### 4.3 Τοποθέτηση των δεσμών ρευστού

Ο βέλτιστος έλεγχος της ροής που θα ακολουθήσει, γίνεται με δέσμες έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού. Αυτό επιτυγχάνεται πρακτικά με την αφαίρεση μέρους του στερεού τοιχώματος του κυλίνδρου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η έγχυση ή αναρρόφηση ρευστού σε αυτό το σημείο, με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού. Στην προσομοίωση του προβλήματος, η μοντελοποίηση των δεσμών γίνεται μέσω των οριακών συνθηκών στο στερεό τοίχωμα. Πλέον, η ταχύτητα στο σύνορο του κυλίνδρου, λαμβάνει την τιμή της ταχύτητας της κάθε δέσμης (σχέση 2.1.3), στην περίπτωση που υπάρχει σε αυτή την θέση, διαφορετικά είναι μηδενική, όπως ορίζει η συνθήκη μη ολίσθησης. Έτσι, τοποθετήθηκαν στον κύλινδρο 20 δέσμες ρευστού, ισομοιρασμένες σε όλη την περιφέρεια, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5. Δεδομένης της συμμετρίας του προβλήματος, οι δέσμες που βρίσκονται αντικατοπτρικά ως προς την οριζόντια διάμετρο του κυλίνδρου, θεωρούνται ως μία, καθώς αναμένεται να λαμβάνουν ίδιες τιμές ταχύτητας.



**Σχήμα 4.5:** Κύλινδρος με δέσμες ρευστού. Με κόκκινο χρώμα είναι οι θέσεις, όπου έχουν τοποθετηθεί τα jets, ενώ με μπλε το τοίχωμα του κυλίνδρου.

## Κεφάλαιο 5

# Ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο της ροής, με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης επιλύεται το ευθύ πρόβλημα με τις νέες μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν προκύψει και, ύστερα, επιλύεται το συζυγές πρόβλημα, αντίστροφα στον χρόνο. Μετά την αλλαγή των μεταβλητών σχεδιασμού, που αποτελούν παραμέτρους των οριακών συνθηκών στο στερεό τοίχωμα, η περιοδικότητα επιτυγχάνεται πάλι, έπειτα από κάποιο αριθμό περιόδων που χαρακτηρίζουν τη μεταβατική φάση του φαινομένου. Έτσι, για μια περίοδο όπου η περιοδικότητα έχει αποκατασταθεί και στο ευθύ και στο συζυγές πρόβλημα, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, με βάση τις οποίες υπολογίζονται οι νέες μεταβλητές σχεδιασμού, σύμφωνα με την μέθοδο της απότομης καθόδου.

Οι δέσμες ρευστού έχουν τοποθετηθεί, όπως έχει δειχθεί στην ενότητα 4.3, ενώ οι τιμές των παραμέτρων της ταχύτητας κάθε δέσμης για τον πρώτο κύκλο της βελτιστοποίησης είναι

$$A^k = 0 \text{ m/s}, t_0^k = 0 \text{ s}, f_{jets} = 10 \text{ Hz}$$

Η πρόλεξη της ροής σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης γίνεται για 16s, ενώ τα πρώτα 6s της πρωτεύουσας και της συζυγούς ροής δεν χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, λόγω του μεταβατικού φαινομένου που περιγράφηκε παραπάνω. Τέλος, το χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε είναι  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Οι κύκλοι βελτιστοποίησης έγιναν για τους παρακάτω συνδιασμούς των μεταβλητών σχεδιασμού:

- Μεταβαλλόμενο πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  της κάθε δέσμης ρευστού ( $t_0^k$  και  $f_{jets}$  σταθερές)
- Μεταβαλλόμενο πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  και μεταβαλλόμενη φάση  $t_0^k$  της κάθε δέσμης ρευστού ( $f_{jets}$  σταθερή)

## 5.1 Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$

Έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης για την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης, η τιμή αυτής σε μια περίοδο έχει μηδενιστεί, ενώ η μέση τιμή του τετραγώνου της οπισθέλκουσας έχει μειωθεί. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση κόστους κάθε δύναμης είναι:

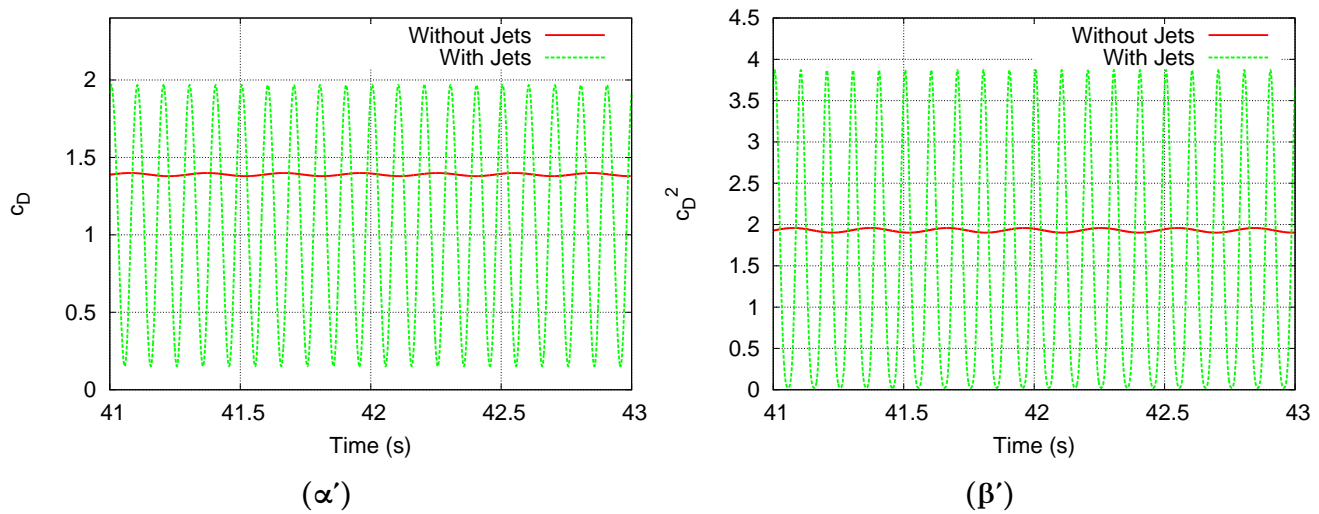
$$F_L = 2 \cdot 10^{-13} \text{ και } F_D = 0.7892$$

Προφανώς, για τον υπολογισμό των παραπάνω τιμών έχουν χρησιμοποιηθεί και εδώ οι αδιάστατοι συντελεστές των δυνάμεων,  $c_L$  και  $c_D$ , ενώ, αξίζει να σημειωθεί, πως η μείωση της συνάρτησης κόστους που αφορά στην οπισθέλκουσα, προέκυψε χωρίς να αποτελεί στόχο της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε.

Η στιγμιαία τιμή της οπισθέλκουσας και του τετραγώνου της, που προέκυψαν για την βέλτιστη λύση, παρουσιάζονται στα σχήματα 5.1α' και 5.1β' αντίστοιχα. Παρόλο που η μέση τιμή της οπισθέλκουσας έχει μειωθεί, έχει αυξηθεί σημαντικά το πλάτος ταλάντωσης της, ενώ, όπως αναμένεται, η περίοδος της ταυτίζεται πλέον με την περίοδο των jets.

Τα πεδία ταχύτητας και πίεσης της βέλτιστης λύσης που προκύπτει έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης, παρουσιάζονται στα σχήματα 5.2 και 5.3, για έξι στιγμιότυπα στο εύρος μιας περιόδου του φαινομένου, που πλέον ισούται με την περίοδο των jets. Είναι εμφανές, ότι η έκλυση στροβίλων έχει πλέον εξαλειφθεί,





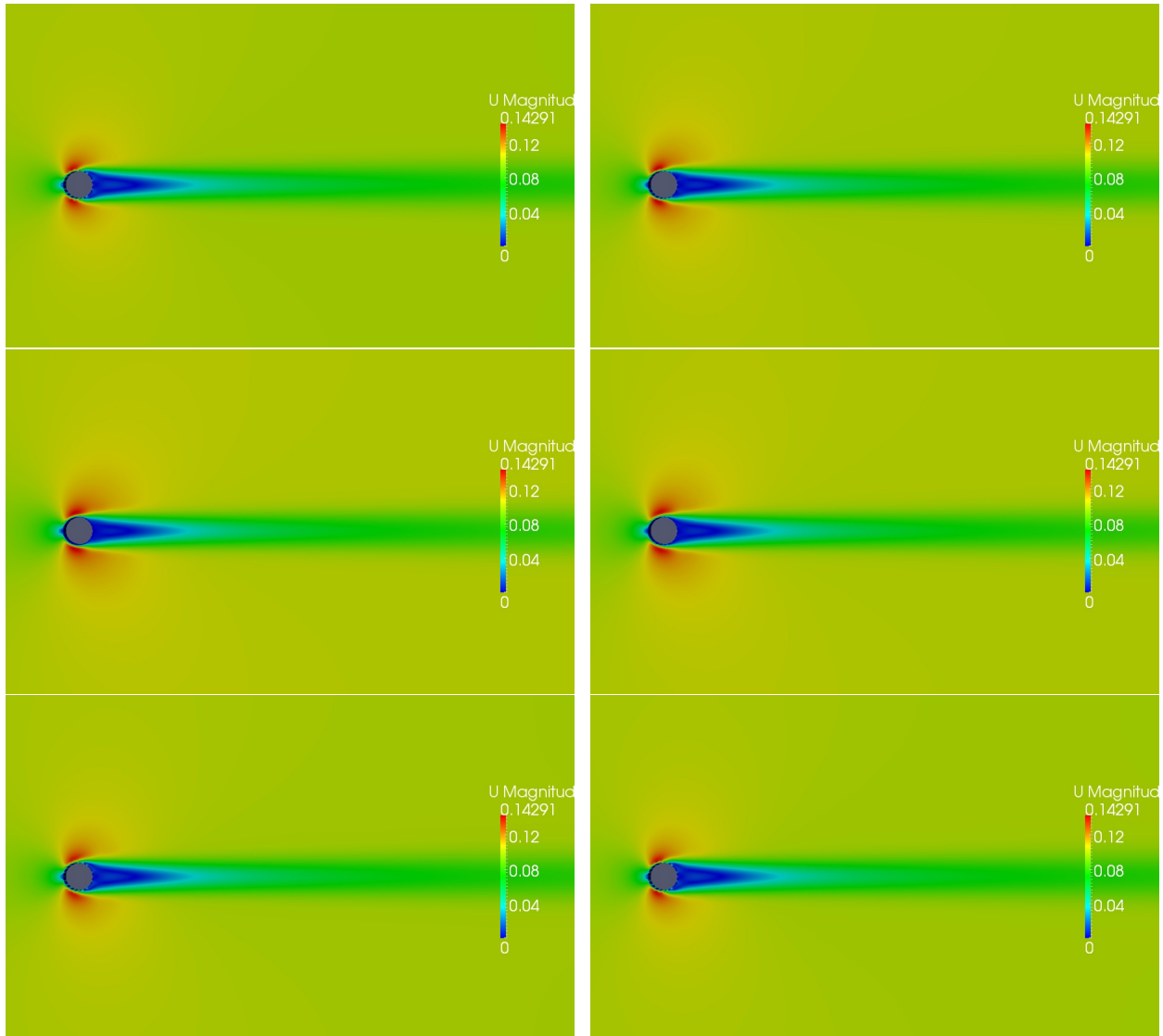
**Σχήμα 5.1:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Στιγμαίσιες τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας και του τετραγώνου του, για τη βέλτιστη λύση

οδηγώντας έτσι σε έναν σχεδόν μόνιμο ομόρρου.

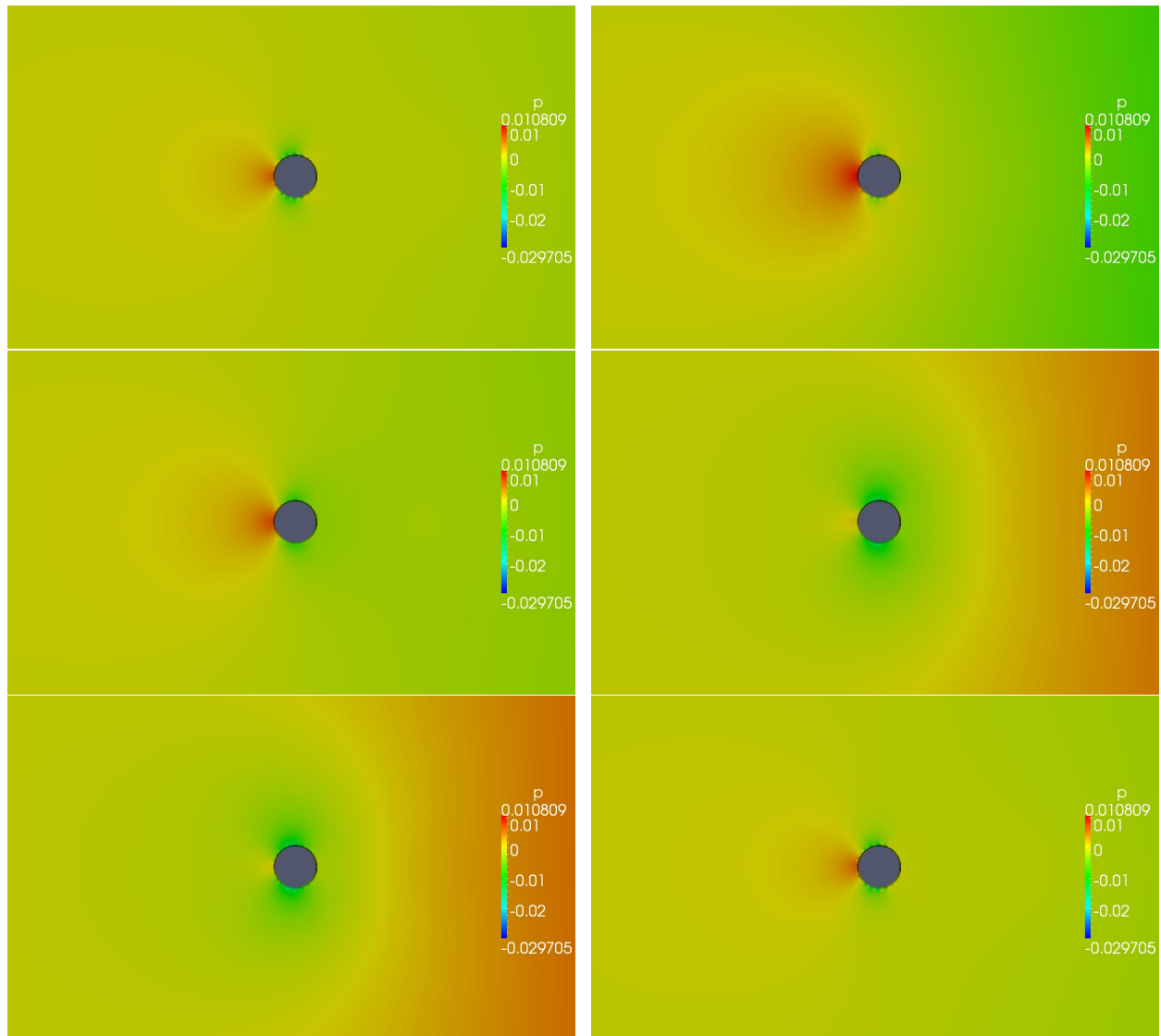
Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να παρατηρήσει κανείς στο σχήμα 5.3, πως το πεδίο της πίεσης είναι συμμετρικό ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κυλίνδρου, κάτι που εξηγεί το μηδενισμό της άνωσης που ασκείται στον κύλινδρο. Ακόμα, είναι εμφανής η περιοδικότητα της πίεσης, με περίοδο  $T = 0.1s$ , που ταυτίζεται με αυτή των δεσμών ρευστού.

Στα σχήματα 5.4 και 5.5 παρουσιάζονται τα πεδία της συζυγούς ταχύτητας και συζυγούς πίεσης αντίστοιχα για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, σε έξι χρονικά στιγμιότυπα στο εύρος της περιόδου του πρωτεύοντος φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .

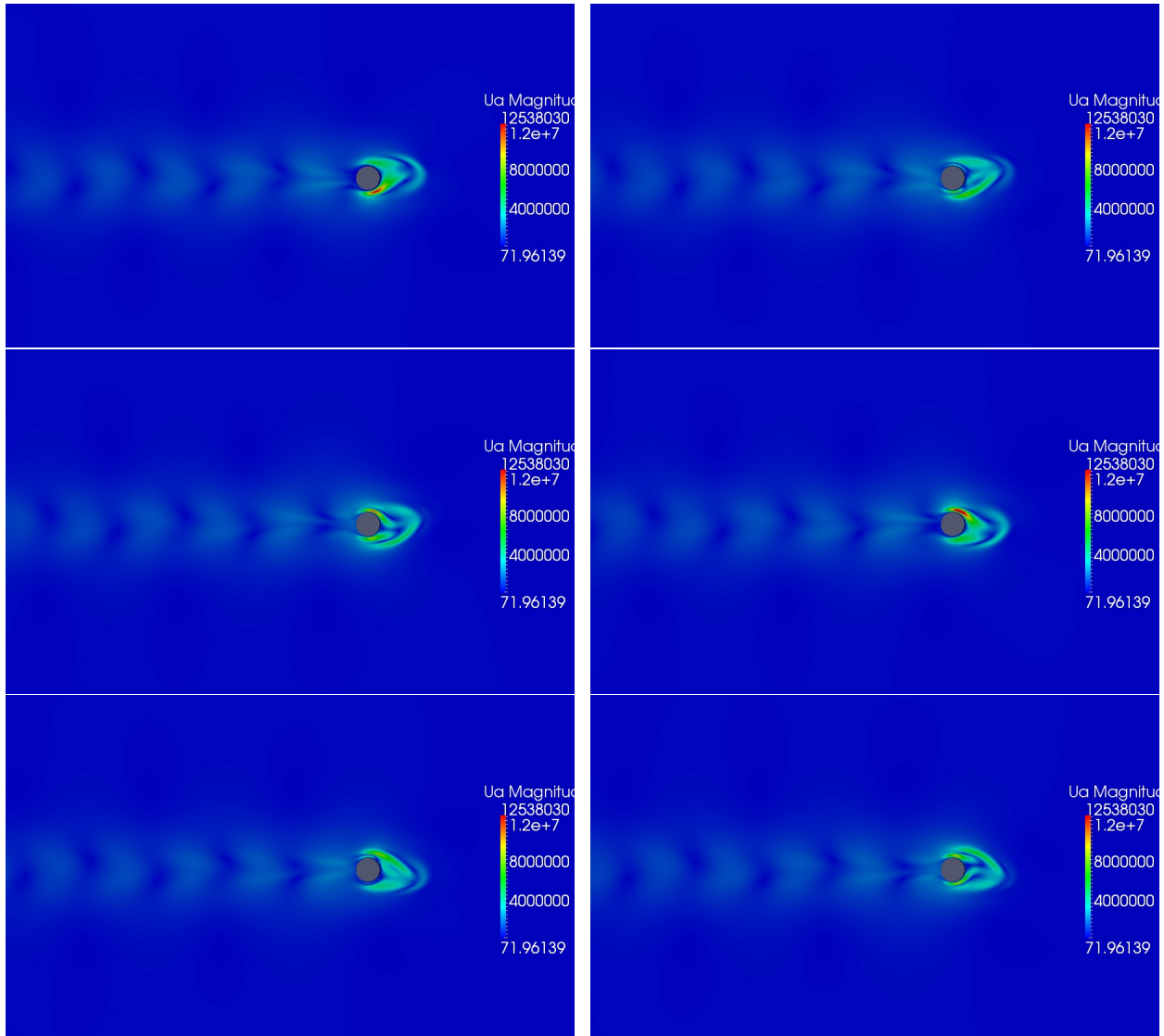
Για λόγους σύγκρισης, στο σχήμα 5.6 παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς ταχύτητας, υπολογισμένο στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης. Οι τιμές του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας είναι εμφανώς μειωμένες, καθώς, η 'είσοδος' του συζυγούς χωρίου είναι το στερεό τοίχωμα, όπου η ταχύτητα λαμβάνει τιμή από τη δύναμη που τίθεται προς ελαχιστοποίηση (Σχέση 2.5.4). Έτσι, η τιμή της άνωσης κοντά στο μηδέν οδηγεί και στις μικρές τιμές της συζυγούς ταχύτητας.



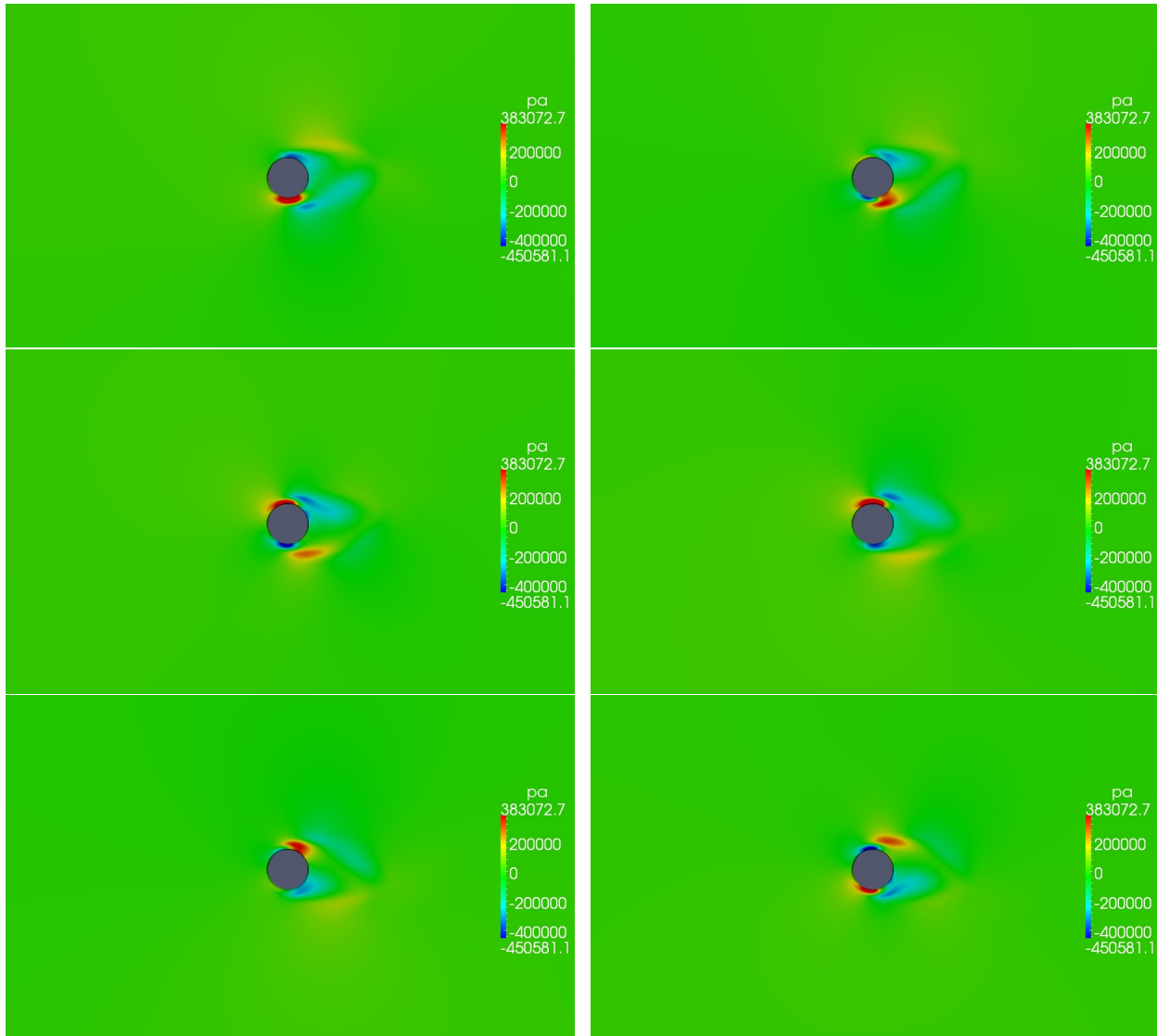
**Σχήμα 5.2:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του βέλτιστου πεδίου ταχύτητας σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταυτίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .



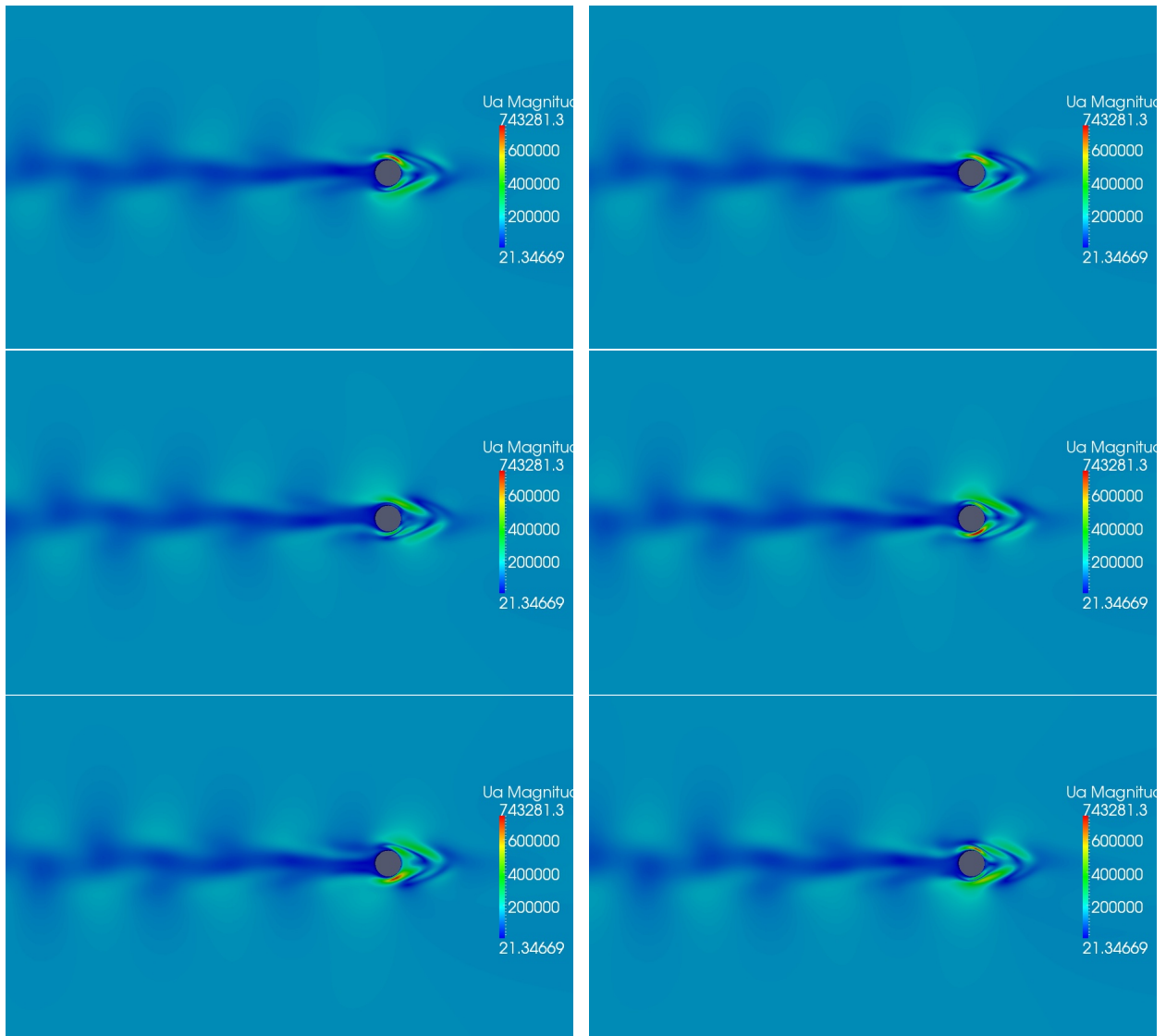
**Σχήμα 5.3:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του βέλτιστου πεδίου πίεσης σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταυτίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$



**Σχήμα 5.4:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμότυπα του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας, υπολογισμένο για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του πρωτεύοντος φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .



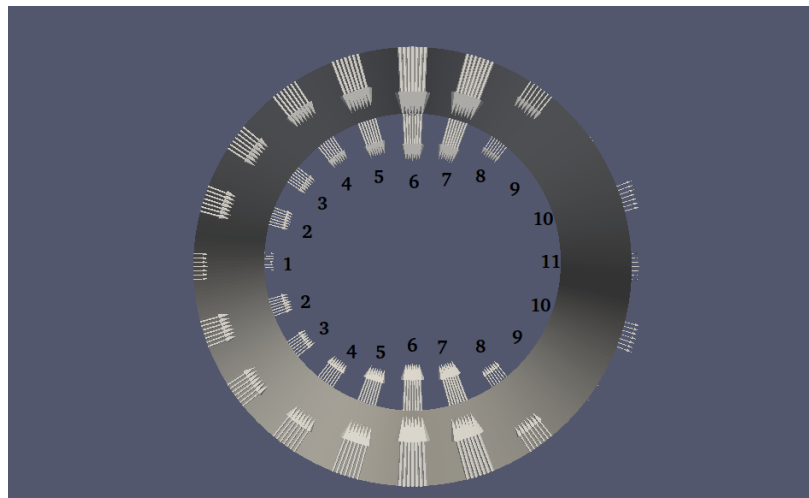
**Σχήμα 5.5:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου της συζυγούς πίεσης, υπολογισμένο στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του πρωτεύοντος φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .



**Σχήμα 5.6:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας, υπολογισμένο στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταυτίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$

Στο σχήμα 5.7 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές για το πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  της κάθε δέσμης ρευστού, που προέκυψαν για βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Υπενθυμίζεται ότι λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, ελέγχεται μόνο η σειρά δεσμών ρευστού στο άνω μέρος της περιφέρειας του κύλινδρου, ενώ οι τιμές της κάτω σειράς λαμβάνονται αντικατοπτρικά ίσες. Οι οκτώ πρώτες δέσμες κατά την κατεύθυνση της ροής, είναι δέσμες αναρρόφησης, όπως φαίνεται και από το πρόσημο του πλάτους τους, ενώ οι υπόλοιπες είναι έγχυσης. Με την περιοδική αναρρόφηση ρευστού σε μεγάλη έκταση της περιφέρειας του κυλίνδρου, καθυστερείται και, τελικά, εξαλείφεται η μη-μόνιμη αποκόλληση της ροής και, κατά συνέπεια, η έκλυση των στροβίλων von Karman, που ευθύνονται για τη δημιουργία της άνωσης. Έτσι, εξηγείται η μονιμότητα του ομόρρου στις περιοχές που δεν επηρεάζονται από την περιοδικότητα των δεσμών ρευστού, και η μηδενική άνωση, που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενα σχήματα.

Δέσμη Ρευστού	Πλάτος $A^k$
1	-0.0102
2	-0.0207
3	-0.0221
4	-0.0269
5	-0.0372
6	-0.0475
7	-0.0426
8	-0.0205
9	0.0011
10	0.0108
11	0.0052

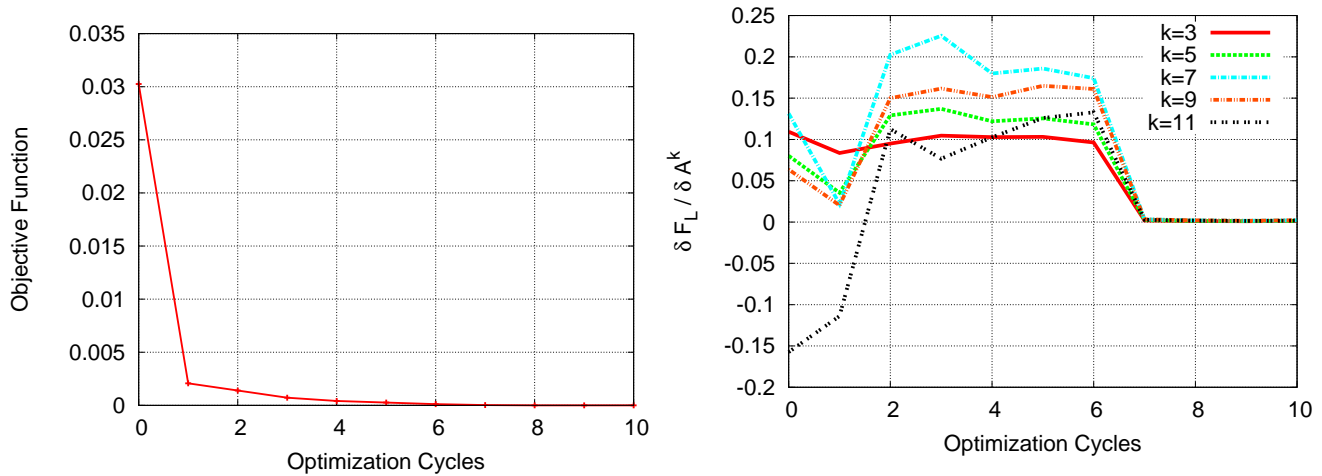


**Σχήμα 5.7:** Βέλτιστες τιμές για κάθε πλάτος ταλάντωσης  $A^k$ , με συνάρτηση κόστους τη μέση τιμή του τετραγώνου της άνωσης.

Στο σχήμα 5.8α' παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Συνολικά, ολοκληρώθηκαν 30 κύκλοι βελτιστοποίησης, παρόλο που, όπως φαίνεται και στο προαναφερθέν σχήμα, η σύγκλιση έχει επιτευχθεί πολύ νωρίτερα. Ακόμα, στο σχήμα 5.8β' παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, για πέντε δέσμες ρευστού, στις θέσεις 3, 5, 7,

9 και 11, με την αρίθμηση να ταυτίζεται με αυτή του σχήματος 5.7.

Η ταλαντωτική συμπεριφορά που παρουσιάζει η σύγκλιση της παραγώγου ευαισθησίας κάθε δέσμης, οφείλεται στο ότι η τιμή του συντελεστή  $\eta$  που έχει επιλεχθεί για τη μέθοδο της απότομης καθόδου, είναι κοινή για όλες τις δέσμες. Δεδομένου ότι η υπολογιζόμενη παράγωγος ευαισθησίας κάθε δέσμης είναι ανεξάρτητη των άλλων, θα ήταν μάλλον ιδανικό οι τιμές των παραμέτρων κάθε δέσμης να ανανεώνονται με ξεχωριστό  $\eta$ . Αυτό όμως, προϋποθέτει ξεχωριστή μελέτη για την επιλογή της τιμής του  $\eta$  για κάθε δέσμη, που προφανώς, λόγω του πλήθους τους δεν είναι εφικτό.



(α') Σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης

(β') Σύγκλιση των παραγώγων ευαισθησίας, για πέντε δέσμες ρευστού.

**Σχήμα 5.8:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης, με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης  $A^k$ .

## 5.2 Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ και τις φάσεις $t_0^k$

Έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης, η μέση τιμή του τετραγώνου της άνωσης σε μια περίοδο έχει μηδενιστεί, ενώ η μέση τιμή του τετραγώνου της οπι-



σθέλκουσας, όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, έχει μειωθεί. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση κόστους κάθε δύναμης είναι:

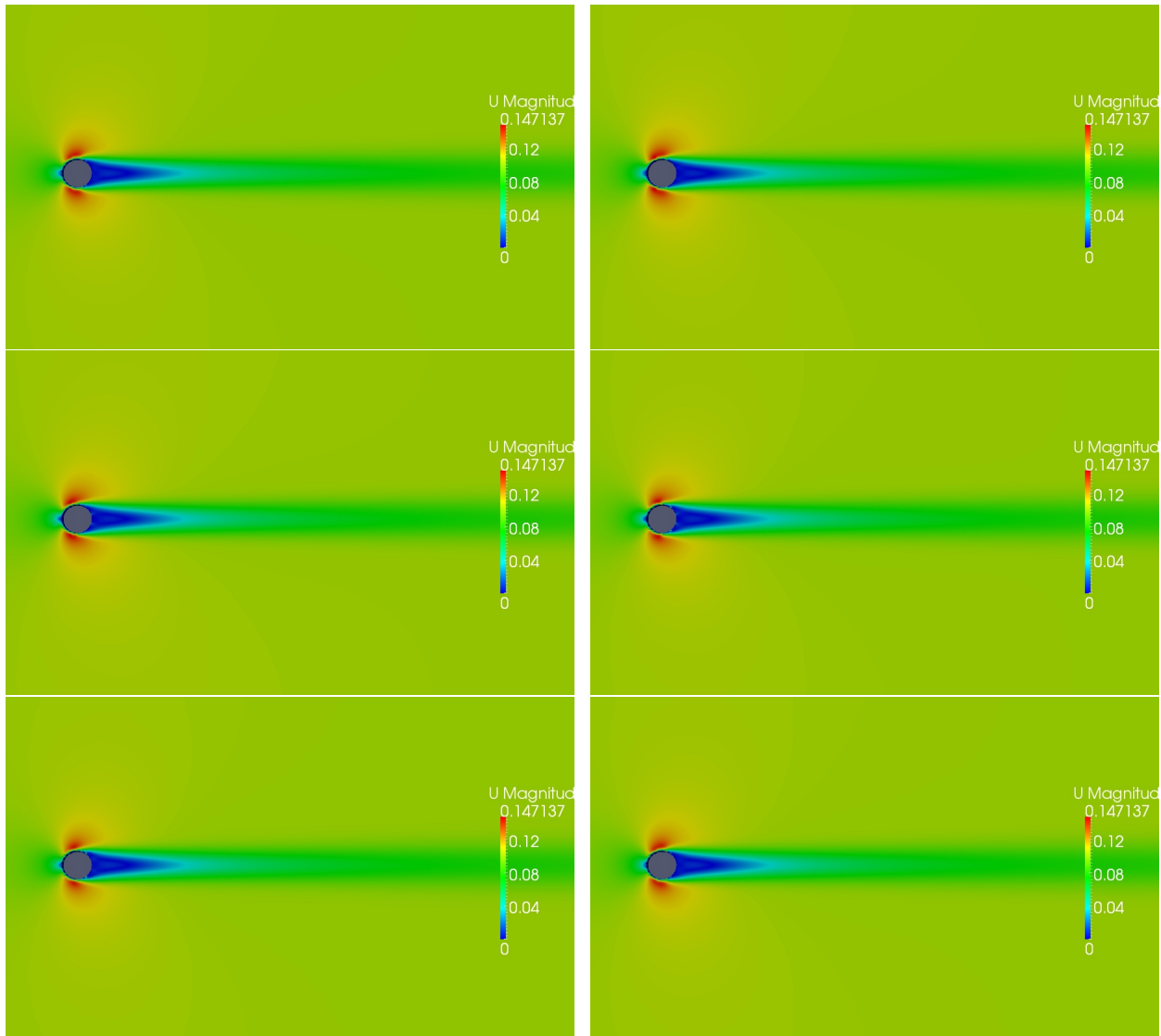
$$F_L = 5 \cdot 10^{-15} \text{ και } F_D = 0.6045$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω τιμών έχουν χρησιμοποιηθεί και εδώ οι αδιάστατοι συντελεστές των δυνάμεων,  $c_L$  και  $c_D$ . Συγκριτικά με την περίπτωση που μεταβλητές σχεδιασμού ήταν μόνο τα πλάτη  $A^k$ , η μείωση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης και της οπισθέλκουσας είναι αρκετά μεγαλύτερη. Πρέπει να σημειωθεί, ότι και εδώ, η μείωση της συνάρτησης κόστους της οπισθέλκουσας προέκυψε, παρόλο που η ελαχιστοποίηση αφορούσε στη δύναμη της άνωσης, χωρίς δηλαδή να αποτελεί στόχο της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε.

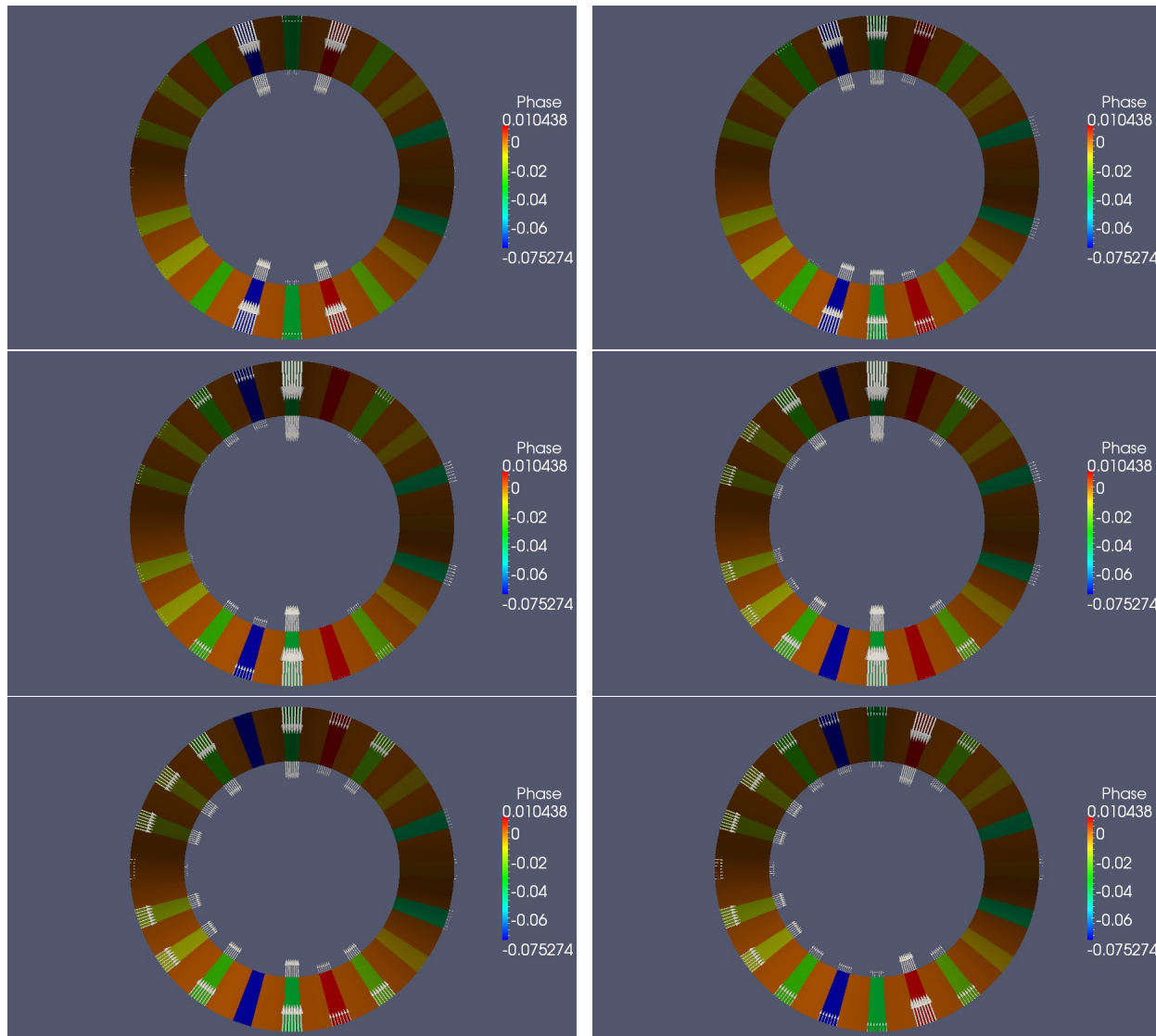
Το πεδίο ταχύτητας της βέλτιστης λύσης που προκύπτει έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.9. Το πεδίο αυτό δεν εμφανίζει μεγάλες διαφορές σε σχέση με το πεδίο ταχύτητας που προέκυψε για τη βέλτιστη λύση της περίπτωσης που εξετάστηκε στην ενότητα 5.1. Και εδώ, η επίδραση των δεσμών ρευστού έχει σαν αποτέλεσμα το μηδενισμό της άνωσης, καθώς η έκλυση στροβίλων έχει εξαλειφθεί και ο ομόρρους έχει γίνει σχεδόν μόνιμος.

Στο σχήμα 5.10, παρουσιάζονται το διάνυσμα και η φάση της ταχύτητας κάθε δέσμης ρευστού, σε έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα, στο εύρος μιας περιόδου,  $T_{jets} = 0.1s$ .

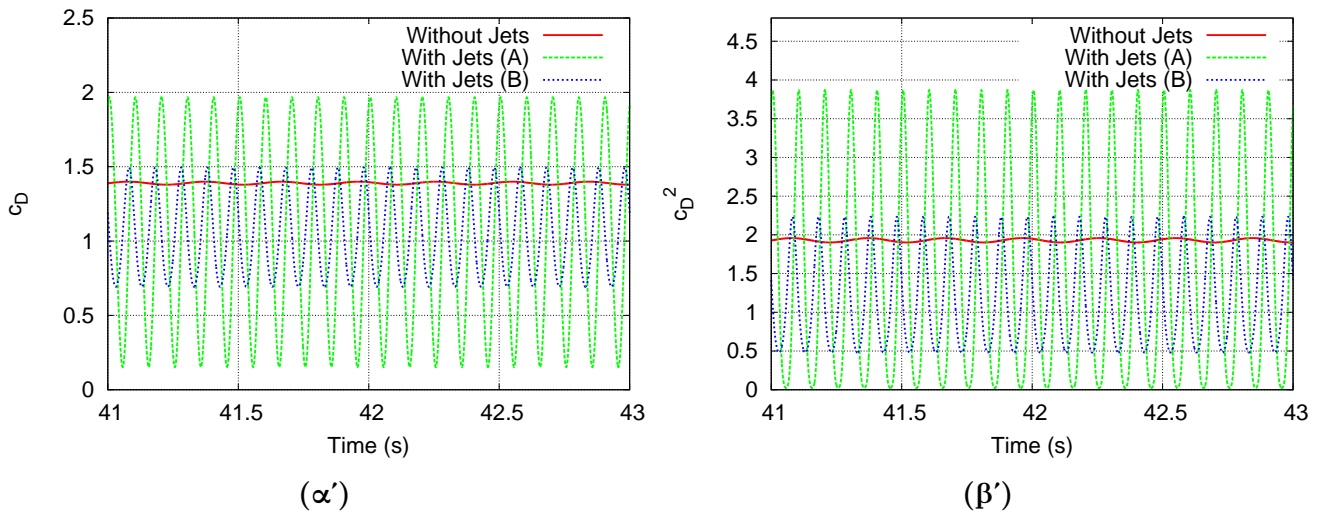
Η στιγμιαία τιμή της οπισθέλκουσας και του τετραγώνου της, που προέκυψαν για τη βέλτιστη λύση, παρουσιάζονται στα σχήματα 5.11α' και 5.11β', μαζί με τις αντίστοιχες τιμές της βέλτιστης λύσης της ενότητας 5.1. Μεταβάλλοντας μαζί με το πλάτος και τη φάση κάθε δέσμης ρευστού, έχει επιτευχθεί η μείωση του πλάτους ταλάντωσης της οπισθέλκουσας, που όπως σημειώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ήταν αρκετά αυξημένο.



**Σχήμα 5.9:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης και οι φάσεις των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμότυπα του βέλτιστου πεδίου ταχύτητας σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταντίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .



**Σχήμα 5.10:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης και οι φάσεις των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμότυπα του διανύσματος της ταχύτητας των δεσμών ρευστού για τη βέλτιστη λύση, στο εύρος μιας περιόδου,  $T = 0.1s$ . Ο κύλινδρος έχει χρωματιστεί ανάλογα με την τιμή της φάσης που έχει η ταχύτητα της δέσμης ρευστού σε κάθε θέση. Προφανώς στο τοίχωμα του κυλίνδρου, όπου δεν υπάρχει δέσμη ρευστού, η τιμή είναι μηδέν (πορτοκαλί χρώμα).



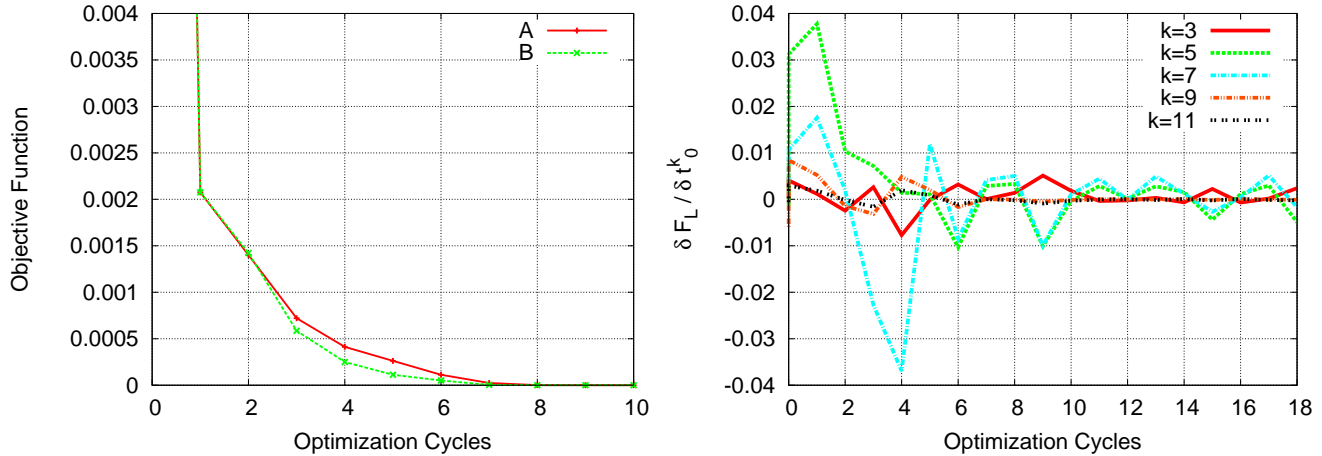
**Σχήμα 5.11:** Στιγμαίαιες τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας και του τετραγώνου του, για την περίπτωση που δεν υπάρχει έλεγχος με δέσμες ρευστού, και για το βέλτιστο έλεγχο που προέκυψε με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης, για την περίπτωση που μεταβάλλεται μόνο το πλάτος  $A^k$  κάθε δέσμης (A) και για την περίπτωση που μεταβάλλεται το πλάτος  $A^k$  και η φάση  $t_0^k$  κάθε δέσμης (B).

Στον πίνακα 5.1, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, που προέκυψαν για τις δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Το βέλτιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε δέσμης είναι σχεδόν ίσο και στις δύο περιπτώσεις. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί, πως στη δεύτερη περίπτωση που η φάση κάθε δέσμης ήταν μεταβλητή σχεδιασμού, η φάση της πρώτης δέσμης στον κύλινδρο, διατηρήθηκε σταθερή και ίση με μηδέν, για να αποφευχθεί τυχούσα 'ολίσθηση' όλων των φάσεων προς μια κατεύθυνση, καθώς σημασία έχει η διαφορά φάσης που έχουν οι δέσμες μεταξύ τους.

Στο σχήμα 5.12α' παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Στην περίπτωση που μεταβάλλεται και η φάση  $t_0^k$  μαζί με την ένταση  $A_0^k$  κάθε δέσμης παρατηρείται ελαφρώς ταχύτερη σύγκλιση. Ακόμα, στο σχήμα 5.12β' παρουσιάζονται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τη φάση  $t_0^k$ , που υπολογίστηκαν σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, για πέντε δέσμες ρευστού, στις θέσεις 3, 5, 7, 9 και 11, με την αρίθμηση να ταυτίζεται με αυτή του σχήματος 5.7. Και εδώ εμφανίζεται η ταλαντωτική συμπεριφορά των παραγώγων που οφείλεται στον συντελεστή  $\eta$  που έχει επιλεγεί για τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Δέσμη Ρευστού	Μεταβλητές Σχεδιασμού		
	1η Περίπτωση	2η Περίπτωση	
	Πλάτος $A^k$	Πλάτος $A^k$	Φάση $t_0^k$
1	-0.0102	-0.0108	0
2	-0.0207	-0.0218	-0.0125
3	-0.0221	-0.0231	-0.0106
4	-0.0269	-0.0278	-0.0245
5	-0.0372	-0.0387	-0.0761
6	-0.0475	-0.0503	-0.0381
7	-0.0426	-0.0444	0.0143
8	-0.0205	-0.0220	-0.0186
9	0.0011	0.0008	-0.0077
10	0.0108	0.0111	-0.0435
11	0.0052	0.0053	-0.0025

**Πίνακας 5.1:** Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για μεταβαλλόμενο πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  κάθε δέσμης (1η Περίπτωση) και για μεταβαλλόμενο πλάτος  $A^k$  και μεταβαλλόμενη φάση  $t_0^k$  κάθε δέσμης (2η Περίπτωση).



(α') Σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, για (β') Σύγκλιση των παραγώγων ευαισθησίας ως προς μεταβλητή σχεδιασμού κάθε δέσμης το πλάτος  $A^k$  (A), τη φάση  $t_0^k$ , για πέντε δέσμες ρευστού και τον συνδιασμό του πλάτους  $A^k$  και της φάσης  $t_0^k$  (B).

**Σχήμα 5.12:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης, με μεταβλητή σχεδιασμού για κάθε δέσμη ρευστού  $k$ , το πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  και τη φάση  $t_0^k$ .



## Κεφάλαιο 6

# Ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο της ροής, με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, επιλύεται το ευθύ πρόβλημα με τις νέες μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν προκύψει, και ύστερα, επιλύεται το συζυγές πρόβλημα, αντίστροφα στον χρόνο. Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται για μια περίοδο, που η περιοδικότητα του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος έχει αποκατασταθεί.

Οι δέσμες ρευστού έχουν τοποθετηθεί όπως και στην προηγούμενη περίπτωση που αναλύθηκε στην ενότητα 5, ενώ οι τιμές των παραμέτρων της ταχύτητας της κάθε δέσμης στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης είναι και πάλι

$$A^k = 0 \text{ m/s}, t_0^k = 0 \text{ s}, f_{jets} = 10 \text{ Hz}$$

Η πρόλεξη της ροής σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης γίνεται για 16s, ενώ τα πρώτα 6s της πρωτεύουσας και της συζυγούς ροής δεν χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, λόγω του μεταβατικού φαινομένου που περιγράφηκε παραπάνω. Τέλος, το χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε είναι  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Οι κύκλοι βελτιστοποίησης έγιναν για διάφορους συνδιασμούς των μεταβλητών σχεδιασμού:

- Μεταβαλλόμενο πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  της κάθε δέσμης ρευστού ( $t_0^k$  και  $f_{jets}$

σταθερές)

- Μεταβαλλόμενο πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  και μεταβαλλόμενη φάση  $t_0^k$  της κάθε δέσμης ρευστού ( $f_{jets}$  σταθερή)
- Μεταβαλλόμενη συχνότητα  $f_{jets}$  ( $A^k$  και  $t_0^k$  σταθερά)

## 6.1 Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$

Έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης η μέση τιμή του τετραγώνου της οπισθέλκουσας έχει μειωθεί αισθητά, ενώ, η μέση τιμή του τετραγώνου της άνωσης έχει μηδενισθεί. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές της συνάρτησης κόστους για κάθε δύναμη, υπολογισμένες για τους αδιάστατους συντελεστές  $c_D$  και  $c_L$  είναι:

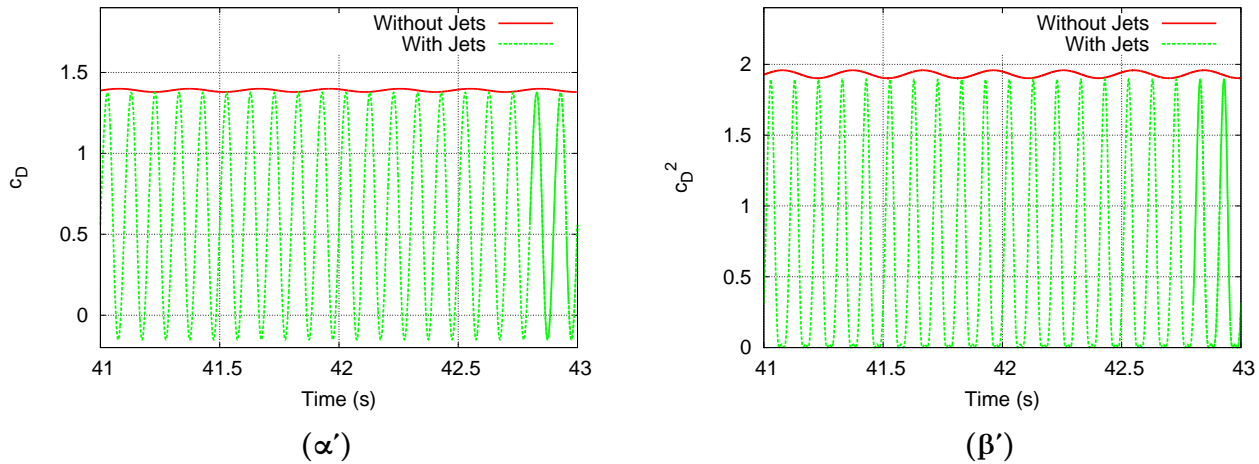
$$F_D = 0.3382 \text{ και } F_L = 0.0$$

Αξίζει να σημειωθεί, πως ο μηδενισμός της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης προέκυψε χωρίς να αποτελεί σε αυτήν την περίπτωση, στόχο της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε.

Η στιγμιαία τιμή του συντελεστή της αντίστασης και του τετραγώνου του για την περίπτωση που η ταχύτητα της κάθε δέσμης ρευστού λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή για την ένταση της, φαίνεται στα σχήματα 6.1α' και 6.1β'. Με την επίδραση των jets στη ροή, η μέση τιμή της οπισθέλκουσας μειώνεται αισθητά, αλλά το πλάτος ταλάντωσης είναι αρκετά αυξημένο. Στο σχήμα 6.1α', φαίνεται πως με το βέλτιστο έλεγχο της ροής η τιμή της στιγμιαίας οπισθέλκουσας είναι πάντα μικρότερη από την αντίστοιχη της μη-ελεγχόμενης περίπτωσης, ενώ, για ένα μέρος της περιόδου λαμβάνει αρνητικές τιμές.

Το πεδίο ταχύτητας για τη βέλτιστη λύση που προέκυψε παρουσιάζεται στο σχήμα 6.4, σε έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα στο εύρος μια περιόδου, που πλέον ταυτίζεται με αυτή των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ . Τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν ποιοτικά από αυτά που προέκυψαν για την ελαχιστοποίηση της άνωσης. Οι δέσμες ρευστού προσδίδουν





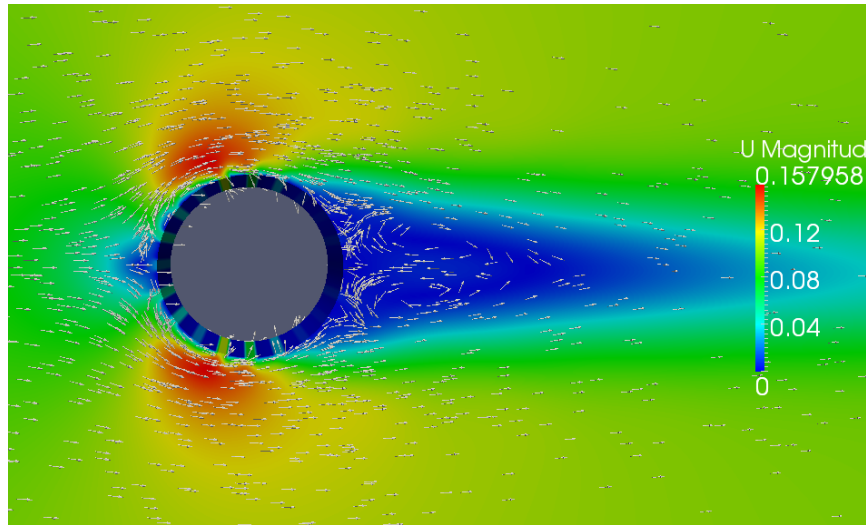
**Σχήμα 6.1:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Στιγμαίαιες τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας και του τετραγώνου του, για τη βέλτιστη λύση

ενέργεια στο ρευστό, 'φρεσκάροντας' το οριακό στρώμα και αποτρέποντας την αποκόλληση των δύο δημιουργούμενων στροβίλων. Έτσι ο ομόρρους αποτελείται από τις δύο περιοχές ανακυκλοφορίας, που εμφανίζονται σε ροές μικρότερων αριθμών  $Re$ , όπως περιγράφηκε στην ενότητα 1.1 και παρουσιάζεται στο σχήμα 6.2.

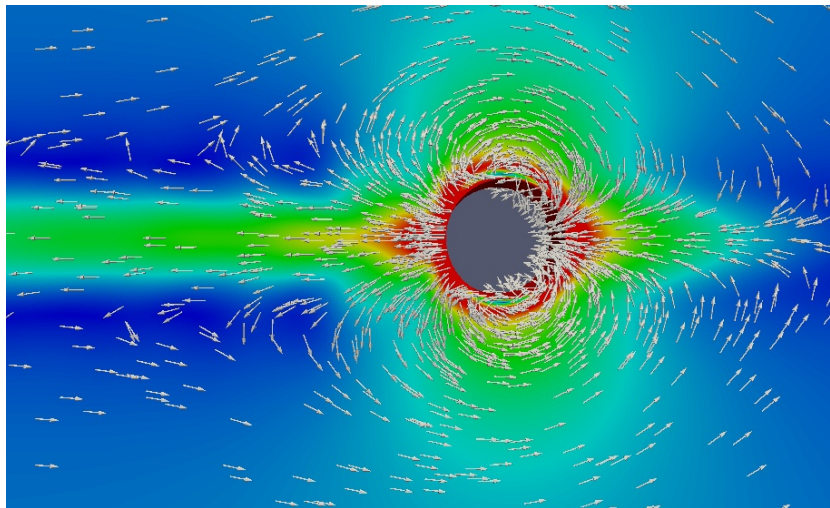
Στο σχήμα 6.5 παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς ταχύτητας για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, στο εύρος μιας περιόδου του φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ , ενώ στο σχήμα 6.6 παρουσιάζεται το ίδιο πεδίο υπολογισμένο στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης. Στον πρώτο κύκλο, υπήρχε ένας περιοδικός ομόρρους, κατ'αντιστοιχία με την πρωτεύουσα ροή, ο οποίος στην πορεία της βελτιστοποίησης χάνει την περιοδικότητά του.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι γραμμές ροής της συζυγούς ταχύτητας κοντά στον κύλινδρο. Λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, το στερεό τοίχωμα του κυλίνδρου αποτελεί την είσοδο και έξοδο του χωρίου, δεδομένου ότι στα όρια του περιβάλλοντος χωρίου η συζυγής ταχύτητα λαμβάνει την τιμή μηδέν. Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζονται οι γραμμές ροής της συζυγούς ταχύτητας, που έχουν τη μορφή διπόλου, καθώς η συζυγής ροή που εισέρχεται από το αριστερό ημισφαίριο του κυλίνδρου, στρέφεται και εξέρχεται από το δεξί. Ο ομόρρους αριστερά

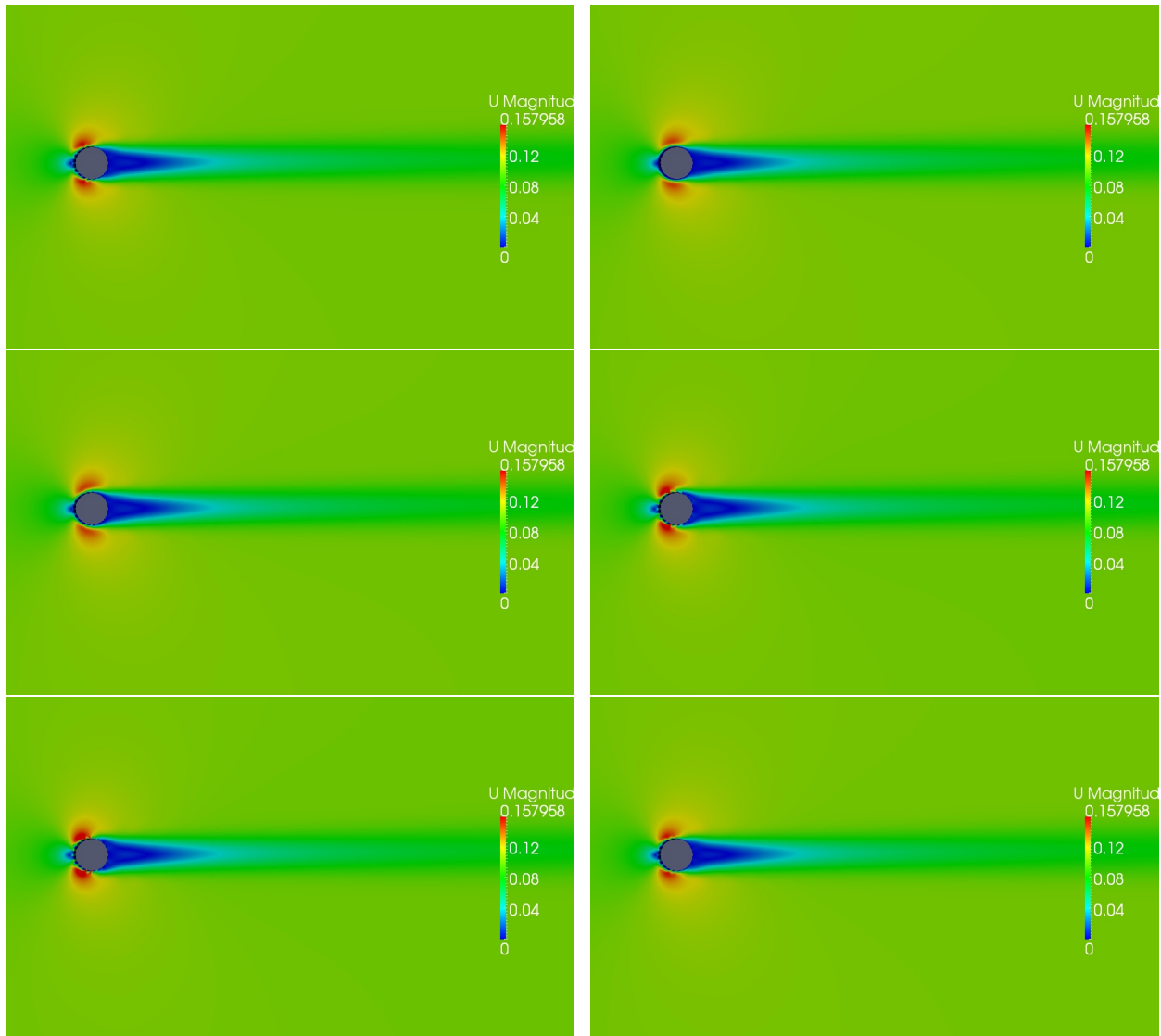
του κυλίνδρου βρίσκεται μεταξύ δύο στρωμάτων μηδενικής συζυγούς ταχύτητας, καθώς, εσωτερικά η ταχύτητα έχει φορά προς τα αριστερά, ενώ εξωτερικά η συζυγής ταχύτητα 'επιστρέφει' προς τον κύλινδρο.



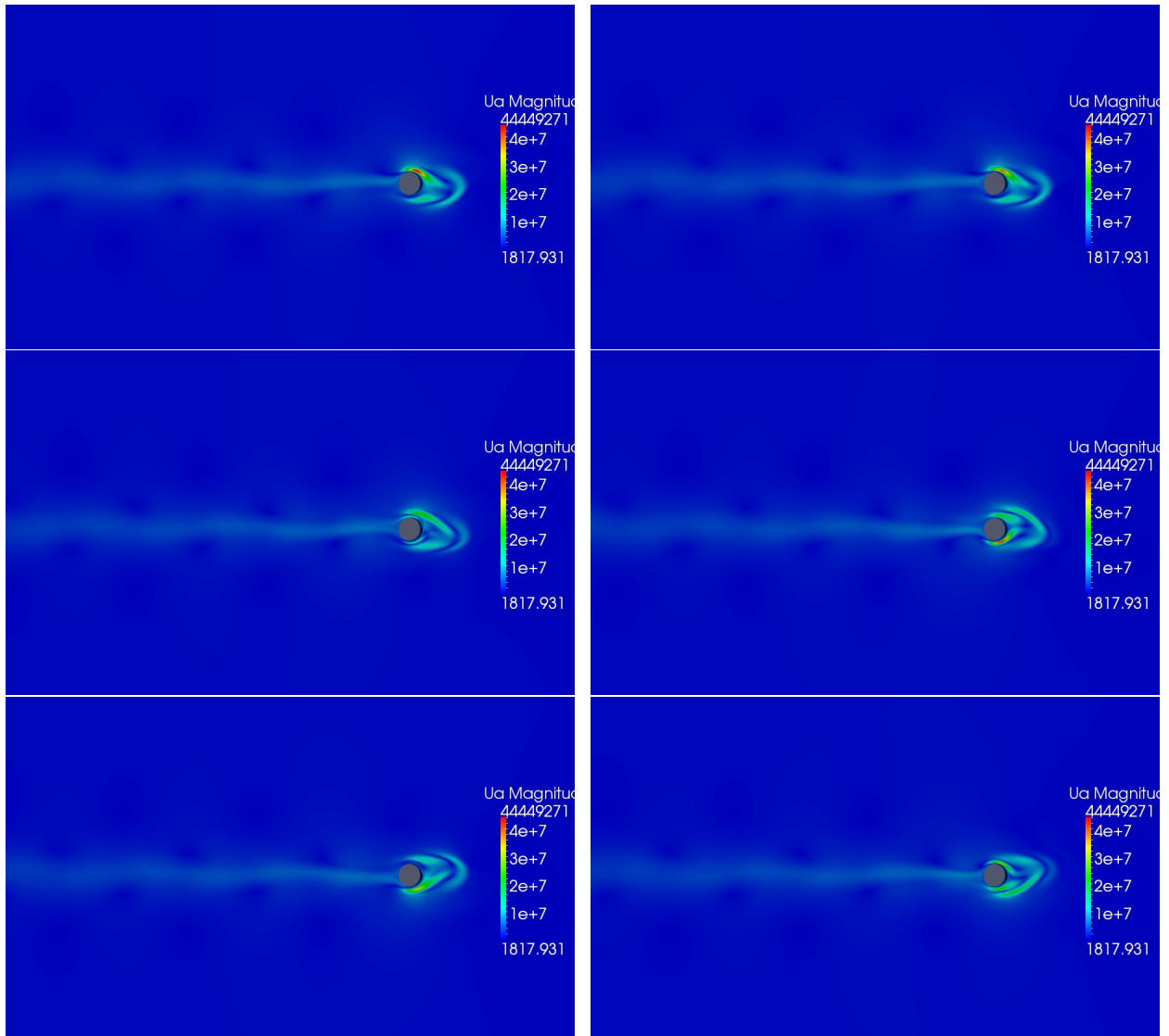
**Σχήμα 6.2:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Πεδίο ταχύτητας και γραμμές ροής για το βέλτιστο έλεγχο της ροής.



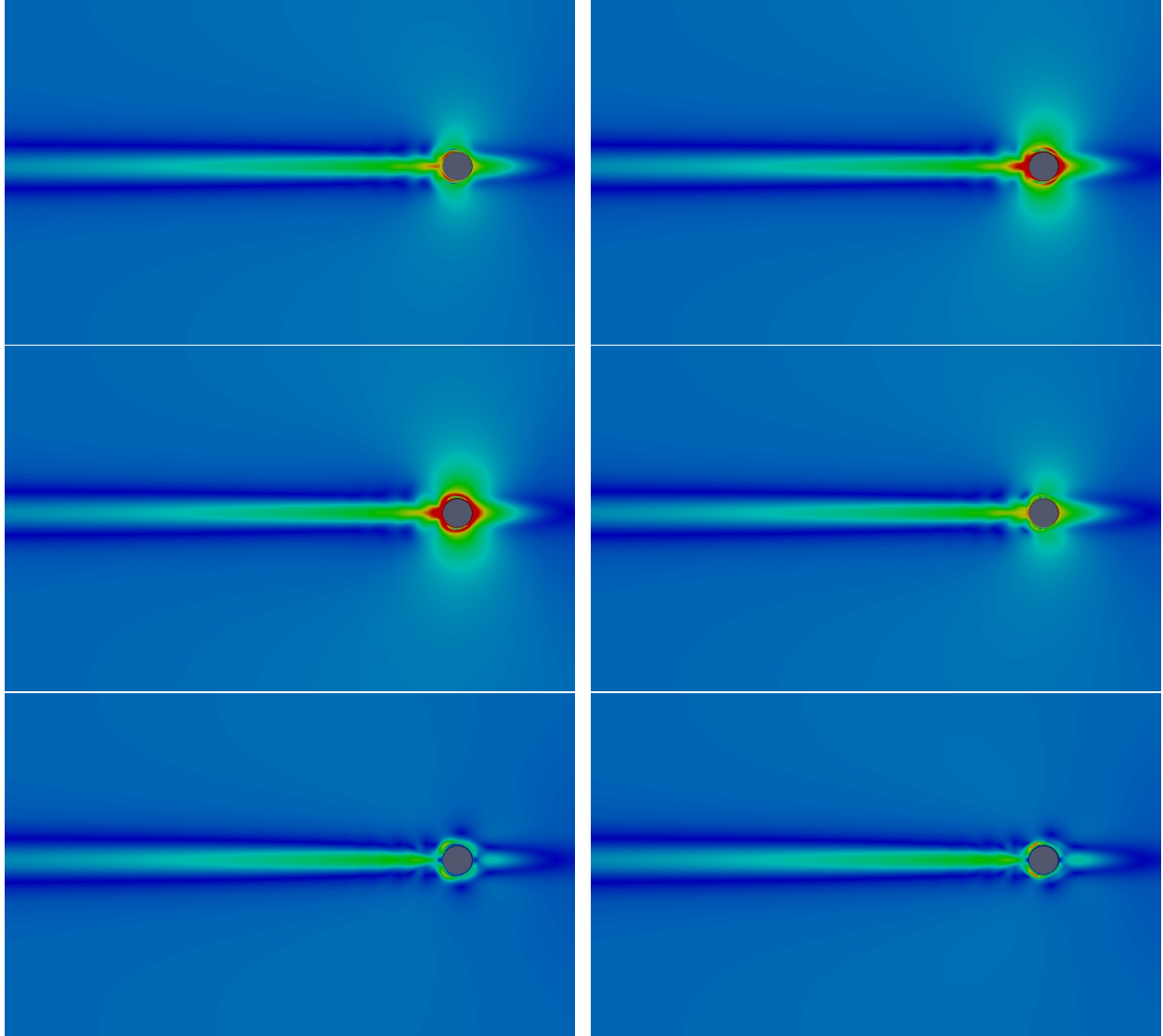
**Σχήμα 6.3:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Πεδίο συζυγούς ταχύτητας και γραμμές ροής για το βέλτιστο έλεγχο της ροής.



**Σχήμα 6.4:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του βέλτιστου πεδίου ταχύτητας σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταντίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .



**Σχήμα 6.5:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμότυπα του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας, υπολογισμένο στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του πρωτεύοντος φαινομένου,  $T \approx 0.59s$ .

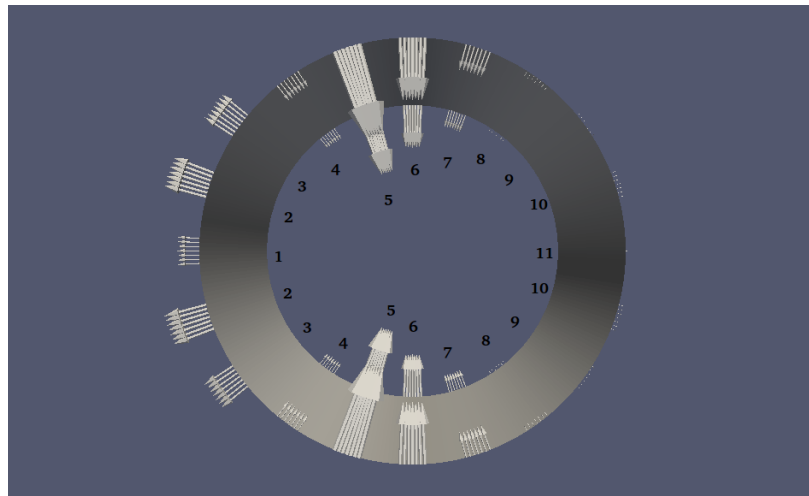


**Σχήμα 6.6:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας, υπολογισμένο στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταυτίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .

Στο σχήμα 6.7 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές για το πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  της κάθε δέσμης ρευστού, που προέκυψαν για βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Οι τιμές που λαμβάνουν τα πλάτη σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύ μεγαλύτερες. Οι τελευταίες 3 δέσμες (θέσεις 9, 10 και 11) έχουν πολύ μικρή τιμή συγκριτικά με τις υπόλοιπες και κατά πάσα πιθανότητα δεν επηρεάζουν πολύ το αποτέλεσμα. Ακόμα, οι δέσμες στις θέσεις 1, 2 και 3, που στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης της άνωσης ήταν δέσμες αναρρόφησης, σε αυτήν την περίπτωση είναι έγχυσης, κάτι που προφανώς έχει να κάνει με τη μείωση της οπισθέλκουσας.

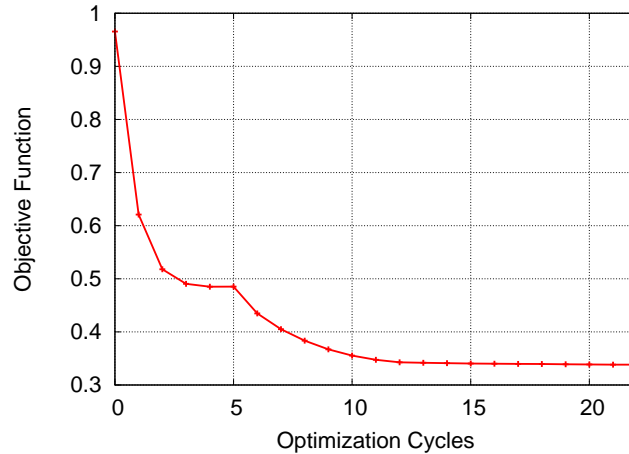
Επίσης, η μέγιστη τιμή του πλάτους στην περίπτωση της αναρρόφησης και της έγχυσης είναι  $-0.122$  και  $0.0569$  αντίστοιχα και αφορούν στη μέγιστη τιμή της ταχύτητας της δέσμης. Δεδομένου ότι η ταχύτητα της επ'άπειρον ροής είναι  $v_\infty = 0.1m/s$ , είναι εμφανές πως προσδίδεται μεγάλη ποσότητα ενέργειας για τον έλεγχο, και μπορούν να δικαιολογηθούν οι αρνητικές τιμές οπισθέλκουσας που προέκυψαν, υποδεικνύοντας πως η δύναμη λόγω ορμής από τις δέσμες υπερέρχει αυτών της πίεσης και της συνεκτικότητας.

Δέσμη Ρευστού	Πλάτος $A^k$
1	0.0285
2	0.0569
3	0.0440
4	-0.025
5	-0.122
6	-0.082
7	-0.035
8	-0.008
9	0.0040
10	0.0070
11	0.0018



**Σχήμα 6.7:** Βέλτιστες τιμές για κάθε πλάτος ταλάντωσης  $A^k$ , με συνάρτηση κόστους τη μέση τιμή του τετραγώνου της οπισθέλκουσας.

Στο σχήμα 6.8 παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε για 30 κύκλους.



**Σχήμα 6.8:** Σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας, με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης  $A^k$ .

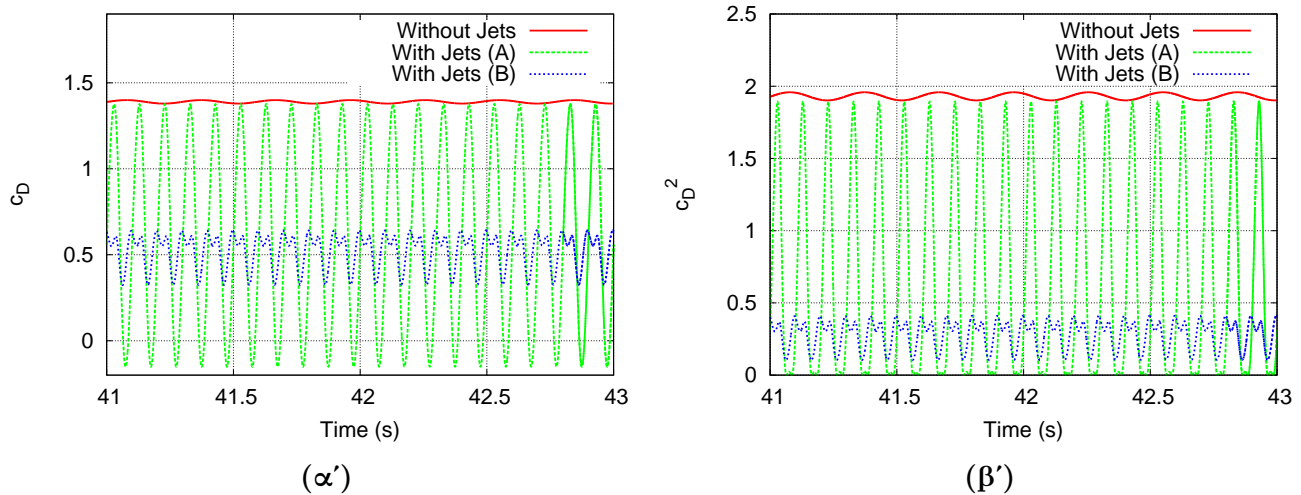
## 6.2 Βέλτιστος έλεγχος με μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης $A^k$ και τις φάσεις $t_0^k$

Έπειτα από την υλοποίηση του βρόχου βελτιστοποίησης η μέση τιμή του τετραγώνου της οπισθέλκουσας έχει μειωθεί ακόμα περισσότερο σε σχέση με την περίπτωση της ενότητας 6.1, ενώ, η μέση τιμή του τετραγώνου της άνωσης έχει μηδενισθεί και πάλι. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές της συνάρτησης κόστους για κάθε δύναμη, υπολογισμένες για τους αδιάστατους συντελεστές  $c_D$  και  $c_L$  είναι:

$$F_D = 0.1023 \text{ και } F_L = 0.0$$

Η στιγμιαία τιμή του συντελεστή της αντίστασης και του τετραγώνου του για την περίπτωση που η ταχύτητα της κάθε δέσμης ρευστού λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή για το πλάτος ταλάντωσης και τη φάση της, φαίνεται στα σχήματα 6.1α' και 6.1β'. Με τη

μεταβολή της φάσης κάθε δέσμης, μαζί με μεγάλη μείωση της μέσης χρονικά τιμής της, έχει επιτευχθεί και μεγάλη μείωση στη διακύμανση της στιγμιαίας οπισθέλκουσας.

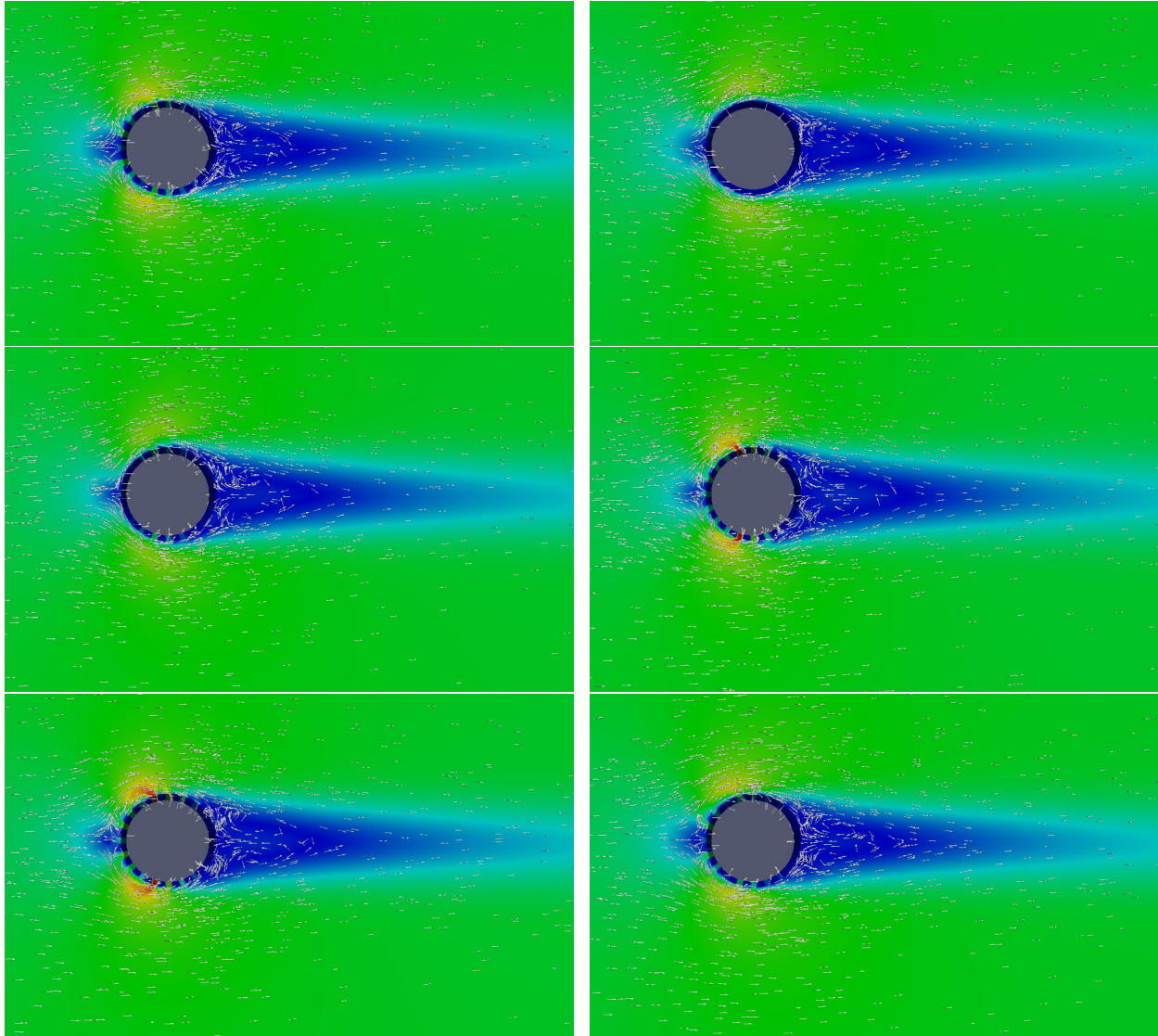


**Σχήμα 6.9:** Στιγμαίες τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας και του τετραγώνου του, για την περίπτωση που δεν υπάρχει έλεγχος με δέσμες ρευστού, και για το βέλτιστο έλεγχο που προέκυψε με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας, για την περίπτωση που μεταβάλλεται μόνο το πλάτος  $A^k$  κάθε δέσμης (A) και για την περίπτωση που μεταβάλλεται το πλάτος  $A^k$  και η φάση  $t_0^k$  κάθε δέσμης (B).

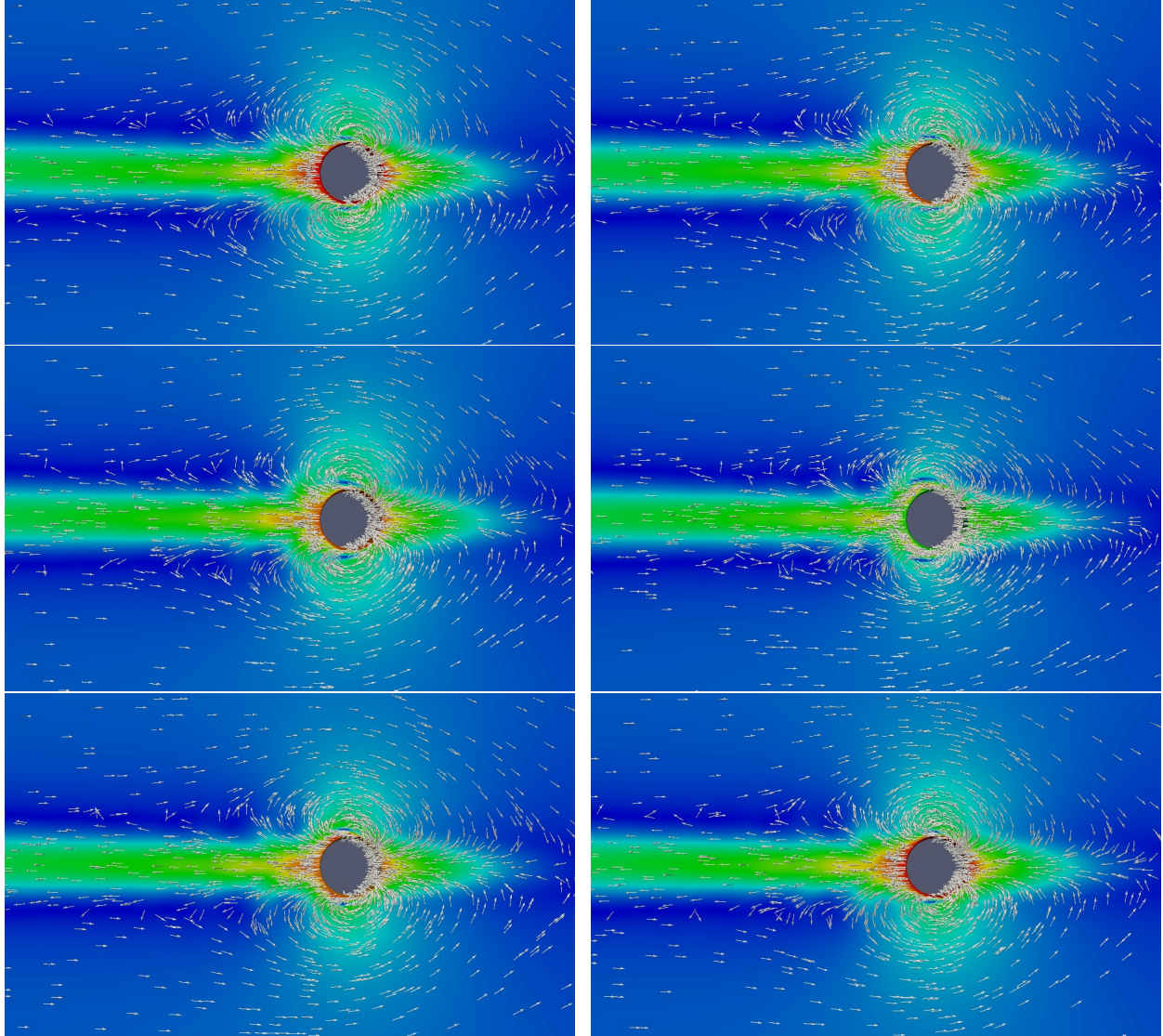
Το πεδίο ταχύτητας μεγενθυμένο κοντά στον κύλινδρο και οι γραμμές ροής για το βέλτιστο έλεγχο παρουσιάζονται στο σχήμα 6.10. Παρατηρώντας το σχήμα, είναι εμφανές πως η ένταση της ταχύτητας είναι αισθητά μειωμένη σε σχέση με την περίπτωση που μελετήθηκε στην ενότητα 6.1, ενώ και εδώ εμφανίζονται οι περιοχές ανακυκλοφορίας, στον ομόρρο του κυλίνδρου.

Στο σχήμα 6.11 παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς ταχύτητας που υπολογίστηκε για τον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, μαζί με τις γραμμές ροής. Τα αποτελέσματα μοιάζουν ποιοτικά με την περίπτωση που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

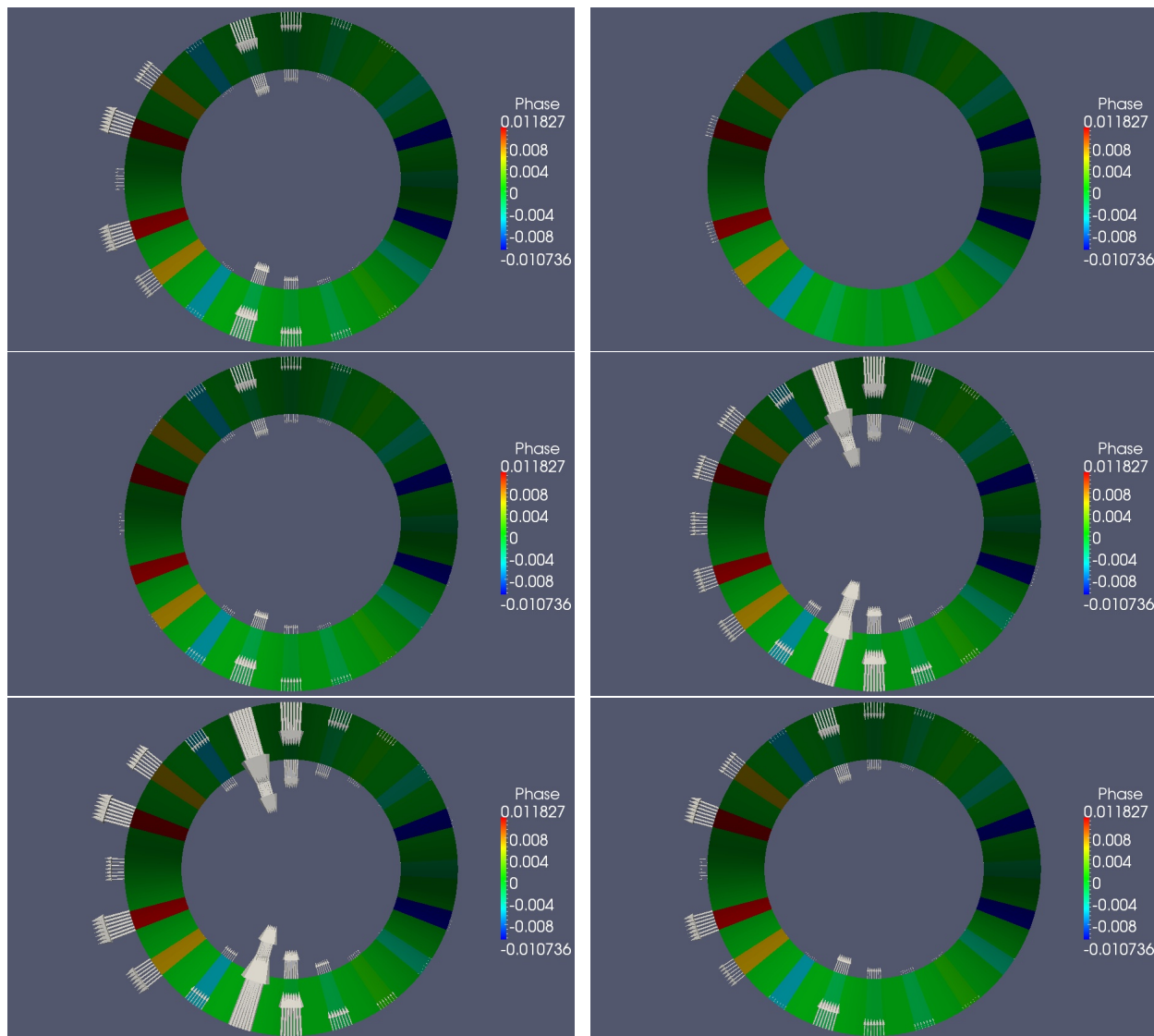




**Σχήμα 6.10:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης και τις φάσεις των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου ταχύτητας και των γραμμών ροής για βέλτιστο έλεγχο σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταυτίζεται με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .



**Σχήμα 6.11:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητός σχεδιασμός: Τα πλάτη ταλάντωσης και τις φάσεις των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του πεδίου της συζυγούς ταχύτητας και των γραμμών ροής υπολογισμένα στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, σε μια περίοδο του φαινομένου που, πλέον, ταντίζει με την περίοδο των jets,  $T_{jets} = 0.1s$ .



**Σχήμα 6.12:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Μεταβλητές σχεδιασμού: Τα πλάτη ταλάντωσης και οι φάσεις των δεσμών. Έξι ισαπέχοντα στιγμιότυπα του διανύσματος της ταχύτητας των δεσμών ρευστού για τη βέλτιστη λύση, στο εύρος μιας περιόδου,  $T = 0.1s$ . Ο κύλινδρος έχει χρωματιστεί ανάλογα με την τιμή της φάσης που έχει η ταχύτητα της δέσμης ρευστού σε κάθε θέση. Προφανώς στο τοίχωμα του κυλίνδρου, όπου δεν υπάρχει δέσμη ρευστού, η τιμή είναι μηδέν (πράσινο χρώμα).

Δέσμη Ρευστού	Μεταβλητές Σχεδιασμού		
	1η Περίπτωση	2η Περίπτωση	
	Πλάτος $A^k$	Πλάτος $A^k$	Φάση $t_0^k$
1	0.0285	0.0345	0
2	0.0569	0.0667	0.0118
3	0.0440	0.0492	0.0073
4	-0.025	-0.0323	-0.0058
5	-0.122	-0.1396	-0.0019
6	-0.082	-0.0785	-0.0010
7	-0.035	-0.0363	-0.0019
8	-0.008	-0.0142	0.0014
9	0.0040	-0.0051	-0.0035
10	0.0070	0.0054	-0.0107
11	0.0018	-0.0006	-0.0021

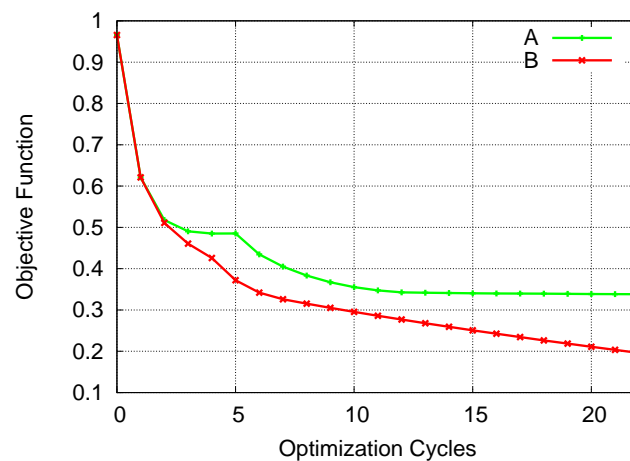
**Πίνακας 6.1:** Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για μεταβαλλόμενο πλάτος  $A^k$  κάθε δέσμης (1η Περίπτωση) και για μεταβαλλόμενο πλάτος  $A^k$  και μεταβαλλόμενη φάση  $t_0^k$  κάθε δέσμης (2η Περίπτωση).

Στον πίνακα 6.1, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, που προέκυψαν για τις δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Στην δεύτερη περίπτωση, όπου μεταβάλλεται και η φάση κάθε δέσμης, τα πλάτη  $A^k$  των περισσότερων δεσμών είναι μεγαλύτερα σε σχέση με αυτά που προέκυψαν στην πρώτη περίπτωση.

Επιπρόσθετα, πραγματοποιήθηκε πρόλεξη της ροής, με τις δέσμες να λαμβάνουν την τιμή του πλάτους που προέκυψε για τη δεύτερη περίπτωση, με μηδενική όμως φάση, και η συνάρτηση κόστους υπολογίστηκε  $F_D = 0.34$ . Είναι εμφανές λοιπόν, ότι η φάση που έχουν μεταξύ τους οι δέσμες επιτρέπει την περαιτέρω αύξηση του πλάτους ταλάντωσης της κάθε δέσμης, χωρίς να υπάρχει αύξηση της μέσης οπισθέλκουσας, παρόλο που η μέγιστη διαφορά φάσης που προέκυψε είναι μόλις το 11.8% της περιόδου.

Στο σχήμα 6.13 παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγόριθμου βελτιστοποίησης για την περίπτωση που μελετήθηκε σε αυτήν την ενότητα και στην ενότητα 6.1. Είναι εμφανές, πως μεταβάλλοντας και τις φάσεις των δεσμών μαζί με τα πλάτη ταλάντωσης

επιτυγχάνονται μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους, ακόμα και για τους πρώτους κύκλους της βελτιστοποίησης. Η σύγκλιση βέβαια εμφανίζεται για μεγαλύτερο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης, κάτι που φαίνεται από τη σχετικά μεγάλη κλίση που έχει η καμπύλη σύγκλισης. Παρόλα αυτά, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την περίπτωση που μεταβλητές σχεδιασμού είναι τα πλάτη και οι φάσεις των δεσμών, θα είναι πάντα μικρότερη σε σχέση με την περίπτωση που μεταβάλλονται μόνο τα πλάτη ταλάντωσης.



**Σχήμα 6.13:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, για μεταβλητή σχεδιασμού κάθε δέσμης το πλάτος  $A^k$  (A), και τον συνδιασμό του πλάτους  $A^k$  και της φάσης  $t_0^k$  (B).

### 6.3 Διερεύνηση της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα $f_{jets}$

Για τη μελέτη της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα χρησιμοποιήθηκαν οι βέλτιστες τιμές των πλατών ταλάντωσης των δεσμών που προέκυψαν στην ενότητα 6.1. Σε αυτήν την περίπτωση, η συχνότητα του φαινομένου ταυτίζεται με τη συχνότητα των δεσμών ρευστού.

Όπως έχει αναφερθεί, κατά τη συνεχή συζυγή διατύπωση εμφανίζονται στην έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας όροι, οι οποίοι εξαρτώνται της χρονικής αφετηρίας  $a$  υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα, οι τέσσερις όροι που αποτελούν την παράγωγο ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα είναι:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \int_a^{a+T} \int_{\Gamma_w} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + u_i |v_j n_j| + u_j v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \frac{\partial v_i}{\partial f_{jets}} d\Gamma dt \\
 H_2 &= \frac{1}{f_{jets}^2} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \Big|_{t=a+T} \\
 H_3 &= -\frac{1}{2f_{jets}} g^2 \Big|_{t=a+T} \\
 H_4 &= \frac{1}{2} \int_a^{a+T} g^2 dt
 \end{aligned}$$

Ο όρος  $H_4$  είναι η τιμή της συνάρτησης κόστους, πολλαπλασιασμένη με την περίοδο του φαινομένου  $T$ , που ταυτίζεται με την περίοδο των δεσμών, και είναι ανεξάρτητος του  $a$ , καθώς αφορά σε ολοκλήρωμα περιοδικής συνάρτησης. Ο όρος  $H_3$  είναι η τιμή της συνάρτησης κόστους τη χρονική στιγμή  $a + T$ , πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή  $\frac{1}{2f_{jets}}$  και αναμένεται να εξαρτάται περιοδικά του  $a$ . Οι όροι  $H_1$  και  $H_2$  εξαρτώνται άμεσα από τις συζυγείς μεταβλητές. Παρακάτω και για λόγους πληρότητας, παρουσιάζεται και ο όρος  $H_1^*$ , που είναι η στιγμιαία τιμή του  $H_1$ , δηλαδή

$$H_1^* = \int_{\Gamma_w} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + u_i |v_j n_j| + u_j v_j \frac{v_m n_m}{|v_r n_r|} n_i \right\} \frac{\partial v_i}{\partial f_{jets}} d\Gamma$$

Στο σχήμα 6.14 παρουσιάζονται οι τέσσερις όροι που υπολογίστηκαν συναρτήσει της χρονικής αφετηρίας  $a$  υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος της συνάρτησης κόστους. Οι όροι  $H_2$  και  $H_3$  είναι καθαρά περιοδικοί, σε αντίθεση με τον όρο  $H_1$ , ο οποίος ταλαντώνεται με μεταβλητό πλάτος και σταθερή περίοδο και προκύπτει από την τμηματική ολοκλήρωση σε εύρος μιας περιόδου του  $H_1^*$  (Σχήμα 6.14α').

Στο σχήμα 6.15 παρουσιάζονται ξανά οι τρεις μη-μόνιμοι όροι, ο όρος  $H_4$ , που είναι σταθερός και ίσος με 0.03922 και η παράγωγος ευαισθησίας, που στην ουσία

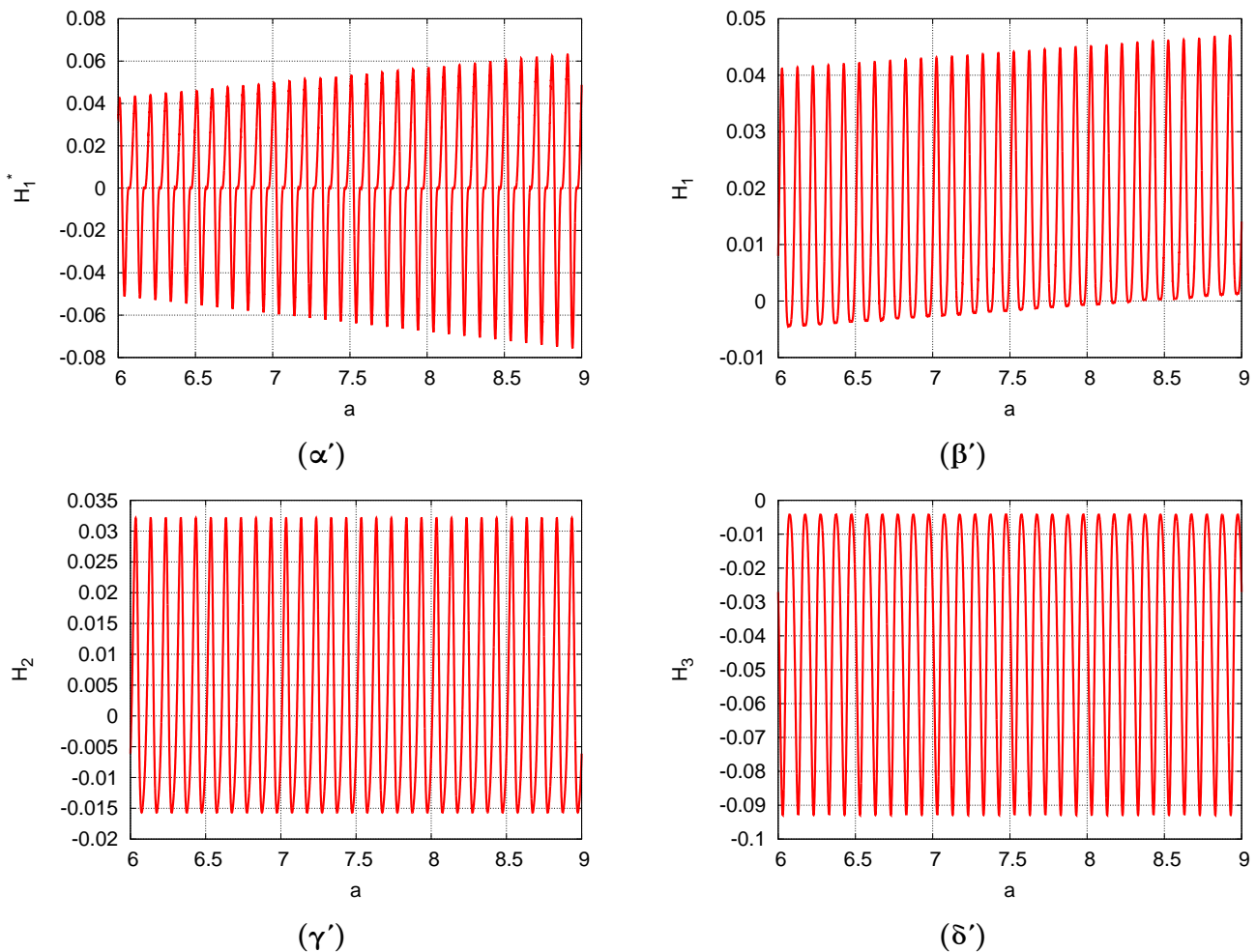
είναι το άθροισμα των προαναφερθέντων όρων, συναρτήσει της χρονικής αφετηρίας  $a$ . Η υπολογιζόμενη παράγωγος ευαισθησίας εμφανίζει μια περιοδικότητα, η οποία σε σύγκριση με τους όρους που την αποτελούν, είναι αμελητέα (Σχήμα 6.15α'). Παρόλα αυτά, όπως είναι εμφανές και στο σχήμα 6.15β', η συμπεριφορά της παραγώγου συναρτήσει του  $a$  μοιάζει με αυτήν του όρου  $H_1$ , δηλαδή παρουσιάζει μια αύξηση, αυξανόμενου του  $a$ . Ακόμα, είναι εμφανής η απόκλιση που υπάρχει από την παράγωγο ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα, υπολογισμένη με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Η μη-αναμενόμενη συμπεριφορά της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα, και κατ'επέκταση η απόκλισή της από την τιμή που υπολογίσθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, μπορεί να προσεγγισθεί και εξηγηθεί ως προς δύο τομείς, την κλίση των ευθειών στην οποία είναι φραγμένη η παράγωγος και την υπερεκτίμησή της. Η περιοδικότητα που εμφανίζει (Σχήμα 6.15β'), είναι αμελητέα και πιθανώς δεν μπορεί να αποφευχθεί, δεδομένου ότι η παράγωγος ευαισθησίας αποτελεί άθροισμα συναρτήσεων που προκύπτουν από αριθμητική επίλυση, και κατά συνέπεια οποιοδήποτε αριθμητικό σφάλμα θα δημιουργεί αντίστοιχη ταλάντωση στην άθροιση.

Η κλίση των ευθειών στην οποία είναι φραγμένη η παράγωγος ευαισθησίας, προφανώς, οφείλεται κυρίως στον όρο  $H_1$ . Ο όρος  $H_1$  προέρχεται από τμηματική αριθμητική ολοκλήρωση του όρου  $H_1^*$  σε εύρος μιας περιόδου (Σχήμα 6.14α').

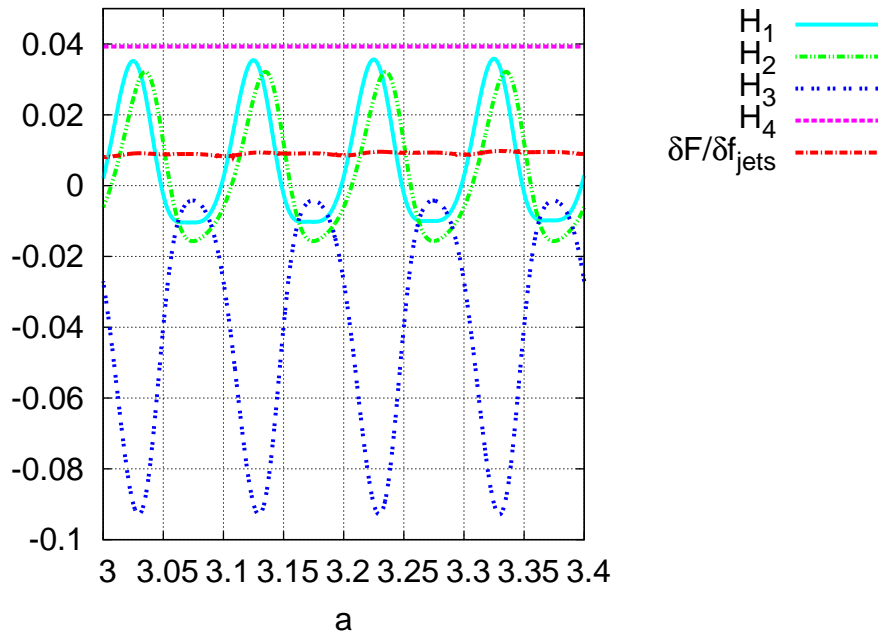
Η υπερεκτίμηση της παραγώγου ευαισθησίας μπορεί να εξηγηθεί μελετώντας ξεχωριστά τον όρο  $H_2$ . Ο όρος αυτός αφορά στο χωρικό ολοκλήρωμα, σε όλο το πεδίο, του εσωτερικού γινομένου της συζυγούς ταχύτητας με τη χρονική παράγωγο της πρωτεύουσας ταχύτητας. Όπως θα περίμενε κανείς, στην περιοχή 'μακρυστά' του κυλίνδρου η ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα της αδιατάραχης ροής και κατά συνέπεια σταθερή. Έτσι, λοιπόν, είναι λογικό η τιμή της χρονικής παραγώγου σε τέτοια μέρη του χωρίου να είναι μηδέν, ή αριθμητικά, πολύ μικρής τάξης μεγέθους, κάτι που όντως συμβαίνει, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.17α'. Παρόλα αυτά, λαμβάνοντας υπόψη την, αντίστοιχα, μεγάλη τάξη μεγέθους της συζυγούς ταχύτητας (Σχήμα 6.16β') προκύπτει λογικά το συμπέρασμα ότι το εσωτερικό γινόμενο της συζυγούς ταχύτητας με τη χρονική παράγωγο της πρωτεύουσας ταχύτητας θα λαμβάνει τιμές σε περιοχές που

θα έπρεπε να είναι μηδέν. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το σχήμα 6.17β' στο οποίο παρουσιάζεται το μελετούμενο εσωτερικό γινόμενο σε κάθε κυψέλη, πολλαπλασιασμένο με τον όγκο της κυψέλης. Ενώ, θεωρητικά, λόγω της μηδενικής χρονικής παραγώγου στις περιοχές μακριά του κυλίνδρου θα έπρεπε αντίστοιχα και η τιμή του όρου  $u_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$  να είναι μηδέν, στην πράξη λαμβάνει τιμή, κάτι, που κατά τη χωρική ολοκλήρωση οδηγεί στην υπερεκτίμηση του όρου  $H_2$  και κατ'επέκταση της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα.

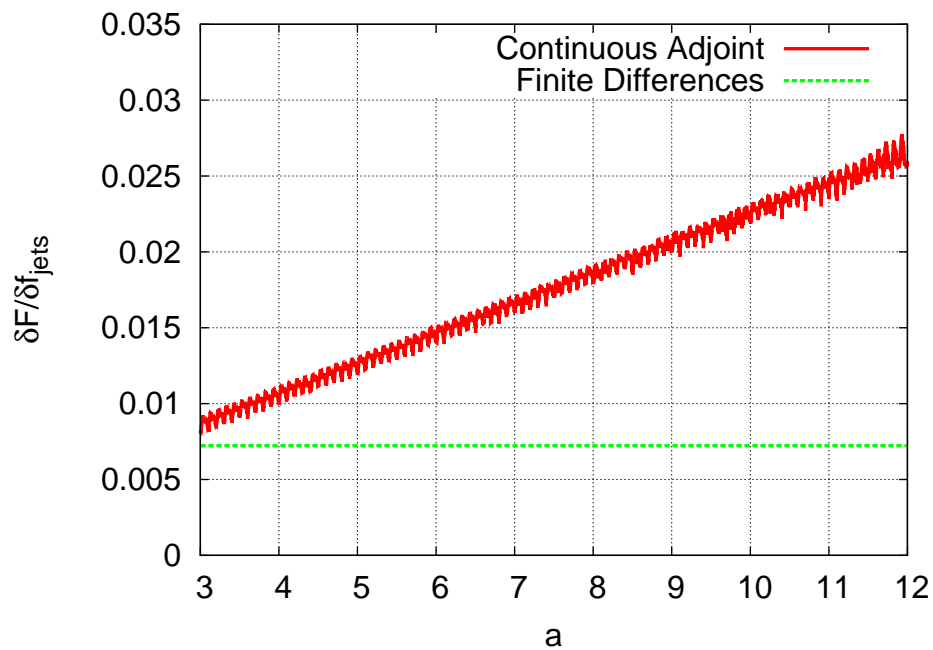


**Σχήμα 6.14:** Οι όροι  $H_1^*$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  και  $H_3$  συναρτήσει της αρχικής στιγμής  $a$  υπολογισμού του ολοκληρώματος της  $F$ .





(α')

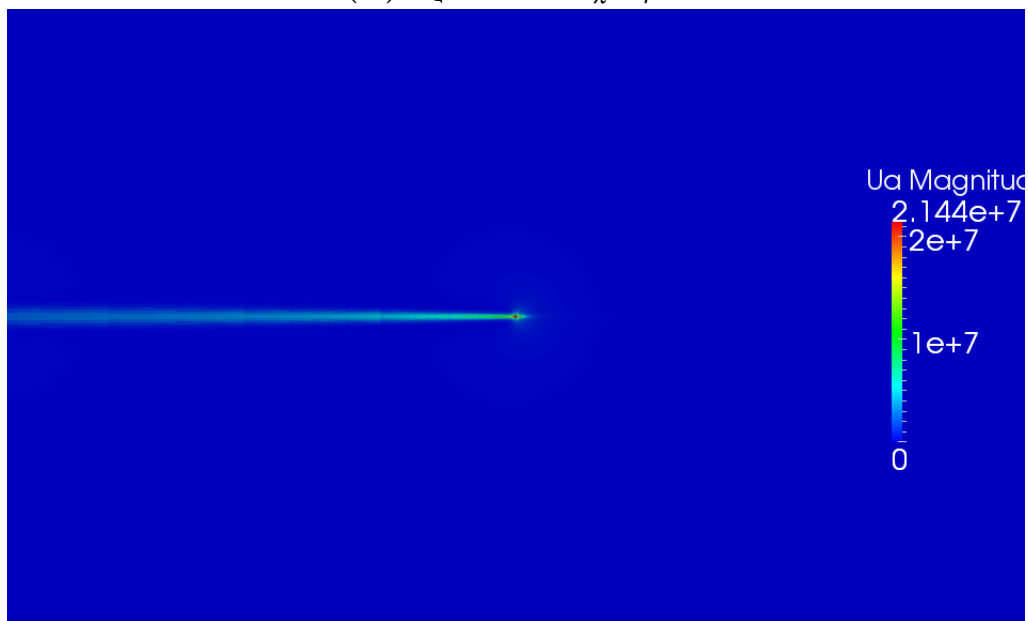


(β')

**Σχήμα 6.15:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Υπολογιζόμενη παράγωγος ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα  $f_{jets}$  συναρτήσει της χρονικής αφετηρίας  $a$

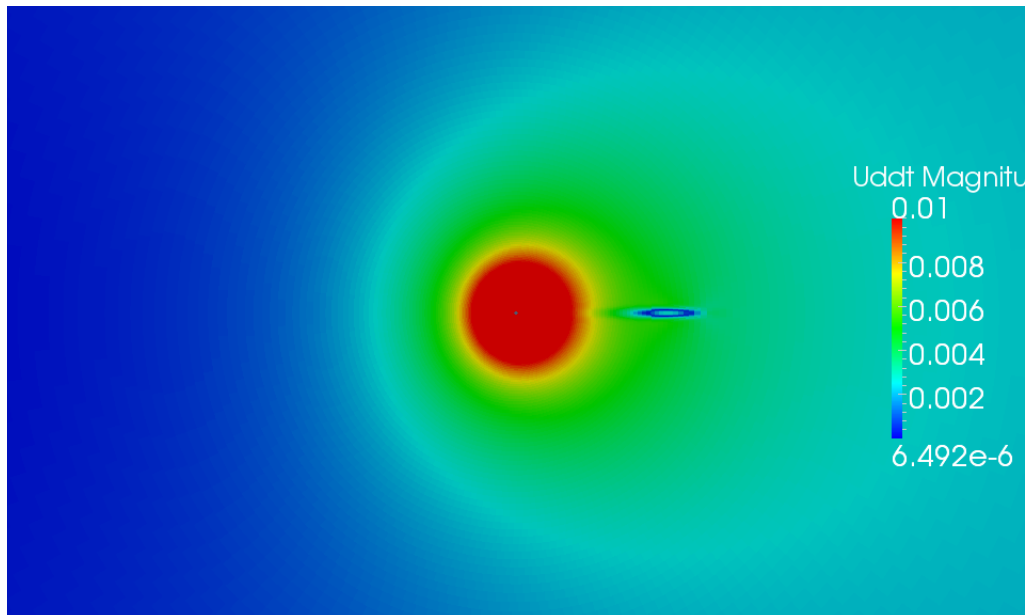


(α') Πρωτεύουσα ταχύτητα.

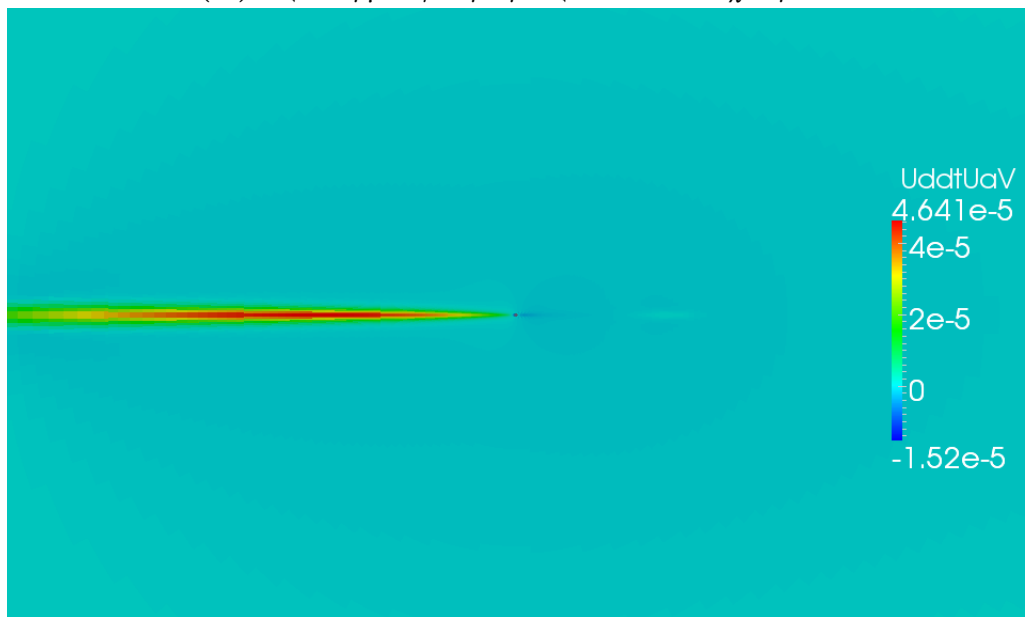


(β') Συζυγής ταχύτητα.

**Σχήμα 6.16:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Διάφορα πεδία της πρωτεύουσας και συζυγούς ροής υπολογισμένα σε μια τυχαία χρονική στιγμή.



(α') Χρονική μεταβολή της πρωτεύουσας ταχύτητας.

(β') Εσωτερικό γινόμενο της συζυγούς ταχύτητας με τη χρονική μεταβολή της πρωτεύουσας ταχύτητας, πολλαπλασιασμένο με τον όγκο της εκάστοτε κυψέλης,  $u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} V_P$ .

**Σχήμα 6.17:** Βελτιστοποίηση με στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Διάφορα πεδία της πρωτεύουσας και συζυγούς ροής υπολογισμένα σε μια τυχαία χρονική στιγμή. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ότι, παρόλο που η χρονική μεταβολή της πρωτεύουσας ροής είναι αριθμητικά μηδέν, λόγω της μεγάλης τάξης μεγέθους της συζυγούς ταχύτητας τελικά το εσωτερικό τους γινόμενο λαμβάνει τιμές μη αμελητέες.



## Κεφάλαιο 7

# Μελέτη της εξάρτησης της $\frac{\delta F}{\delta T}$ από τη χρονική αφετηρία $a$

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να επαναδιατυπώσει τη συνεχή συζυγή μέθοδο για χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα, τα οποία είναι περιοδικά, αλλά με την **περίοδο  $T$**  να αποτελεί και αυτή μια **μεταβλητή σχεδιασμού**. Μετά τη διατύπωση της μεθόδου, ακολουθεί διερεύνηση της ανεξαρτησίας του αποτελέσματος από την αφετηρία της χρονικής περιόδου ολοκλήρωσης της συνάρτησης στόχου. Η διερεύνηση αφορά χωριστά σε κάθε όρο-ολοκλήρωμα που προκύπτει στην έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας.

Η μελέτη ως προς το κατά πόσο η παράγωγος  $\frac{\delta F}{\delta T}$  είναι ανεξάρτητη της τιμής του  $a$  έχει ιδιαίτερη σημασία, αφού τα φαινόμενα που εξετάζονται είναι περιοδικά, αλλά η περιοδικότητα επιτυγχάνεται μετά από άγνωστο αριθμό περιόδων που χαρακτηρίζουν τη μεταβατική φάση του φαινομένου. Επίσης, από τη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου προκύπτουν όροι, που εξαρτώνται άμεσα από την χρονική αφετηρία  $a$ , κάτι που έγινε αντιληπτό σε προηγούμενο κεφάλαιο. Άρα, έχει σημασία ο καθορισμός του  $a$  και μας ενδιαφέρει όντως το κατά πόσο η παράγωγος  $\frac{\delta F}{\delta T}$  εξαρτάται από την επιλεγείσα τιμή του  $a$ .

## 7.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ευθύς αγωγός μήκους  $L$  και μονοδιάστατη θεώρηση μιας υποθετικής ροής σε αυτόν. Επιλέγεται η παρακάτω συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ), η οποία έχει σκοπό να μιμηθεί ένα αντίστοιχο μονοδιάστατο πρόβλημα ροής,

$$R^v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \phi = 0 \quad (7.1.1)$$

όπου  $v = v(x, t)$  είναι μια υποθετική ταχύτητα και  $\phi = \phi(x, t)$  ένας όρος πηγής. Το μαθηματικό πρόβλημα 'κλείνει' με τις οριακές συνθήκες στα άκρα του αγωγού, όπου

- $v(x = 0, t) = v_0 = const$
- $\frac{\partial v}{\partial x}(x = L, t) = 0$

που ισχύουν για κάθε χρονική στιγμή. Δεν δίνεται έμφαση στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος μιας και επιδιώκεται η μελέτη ενός περιοδικού φαινομένου, δηλαδή μιας υποθετικής περιοδικής ροής με ταχύτητα  $v(x, t)$ , η οποία θα προκύψει μετά τη μεταβατική φάση. Η περιοδικότητα αποκαθίσταται μετά από, πρακτικά άγνωστο, αριθμό περιόδων.

Επιλέγεται ως όρος πηγής  $\phi$  ο

$$\phi(x, t) = 2\pi c x \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + c^2 T^2 x \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \right]^2 + cT v_0 \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \right] \quad (7.1.2)$$

όπου  $c$  ένας συντελεστής και  $T$  η περίοδος.

Λόγω της επιλογής 7.1.2, η αναλυτική έκφραση της ταχύτητας-λύσης της ΣΔΕ 7.1.1 είναι η

$$v(x, t) = A(x, T) \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \right] + v_0 \quad (7.1.3)$$

όπου  $A(x, T) = c x T$ .

## 7.2 Διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης

Θα λυθεί το πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού, με αγνώστους το συντελεστή  $c$  και την περίοδο  $T$ , άρα ορίζονται δύο μεταβλητές σχεδιασμού:

$$\vec{b} = (b_1, b_2) = (c, T) \quad (7.2.1)$$

Η συνάρτηση κόστους που τίθεται ως προς ελαχιστοποίηση είναι η χρονικά μέση τιμή του χωρικού ολοκληρώματος του τετραγώνου της απόκλισης της ταχύτητας  $v(x, t)$  από μια προκαθορισμένη ταχύτητα στόχο  $v_{tar}(x)$ ,

$$F = \frac{1}{2T} \int_a^{a+T} \int_0^L (v(x, t) - v_{tar}(x))^2 dx dt \quad (7.2.2)$$

Η  $v_{tar}$  είναι, προφανώς, ανεξάρτητη του χρόνου. Το χρονικό ολοκλήρωμα αφορά σε μία περίοδο  $T$ , που υπενθυμίζεται πως αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού, ενώ  $a$  είναι μια χρονική στιγμή στην οποία το περιοδικό φαινόμενο έχει αποκατασταθεί και μπορεί πλέον να ξεκινήσει ο υπολογισμός της  $F$ . Η παρακάτω μελέτη εστιάζει με έμφαση στο αν η έκφραση 7.2.2 εξαρτάται από την επιλεγείσα τιμή  $a$ .

Στόχος της βελτιστοποίησης θα μπορούσε, κάλλιστα, να είναι, η χρονικά μέση τιμή της ταχύτητας στο εύρος μιας περιόδου να πλησιάζει κατά το δυνατόν μια προκαθορισμένη κατανομή-στόχο. Σε αυτήν την περίπτωση η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση κόστους είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης της χρονικά μέσης τιμής της ταχύτητας  $v(x, t)$  από μια προκαθορισμένη κατανομή στόχο  $v_{tar}(x)$ , που εκφράζεται μαθηματικά ως

$$F = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{1}{T} \int_a^{a+T} v(x, t) dt - v_{tar}(x) \right]^2 dx \quad (7.2.3)$$

Βασικός στόχος της μελέτης που ακολουθεί είναι να διερευνήσει αν οι παράγωγοι της  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, υπολογισμένες με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, είναι ανεξάρτητες της χρονικής αφετηρίας υπολογισμού του ολοκληρώματος  $a$  και, κατά συνέπεια, η επιλογή μιας εκ των προαναφερθεισών συναρτήσεων κόστους δεν επηρεάζει ποιοτικά το αποτέλεσμα, αρκεί η επιλεγείσα συνάρτηση κόστους να

περιέχει ένα χρονικό ολοκλήρωμα στην περίοδο, που είναι μεταβλητή σχεδιασμού.

### 7.3 Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων

Σύμφωνα με τη συνήθη διαδικασία διατύπωσης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ορίζεται η επαυξημένη συνάρτηση

$$L = F + \int_a^{a+T} \int_0^L u(x, t) R^v(x, t) dx dt$$

όπου  $u(x, t)$  είναι η συζυγής ταχύτητα, ενώ  $R^v(x, t)$  η συνάρτηση 7.1.1, δηλαδή η εξίσωση που διέπει την υποθετική ροή (εξίσωση κατάστασης, state or primal equation).

Υπολογίζοντας τη μεταβολή  $\delta$  της συνάρτησης  $L$  που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενες μεταβολές τιμών του διανύσματος  $\vec{b}$  προκύπτει

$$\delta L = \delta F + \delta \left[ \int_a^{a+T} \int_0^L u(x, t) \delta R^v(x, t) dx dt \right] \quad (7.3.1)$$

Οι όροι της 7.3.1 αναλύονται περαιτέρω σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz, μιας και μια από τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι η περίοδος  $T$  η οποία καθορίζει και το άνω όριο της χρονικής ολοκλήρωσης. Είναι

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar}) \partial v dx dt \\ &+ \left[ -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt + \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \Big|_{t=a+T} \right] \delta T \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

και

$$\begin{aligned} \delta \left[ \int_a^{a+T} \int_0^L u(x, t) R^v(x, t) dx dt \right] &= \int_a^{a+T} \int_0^L u(x, t) \partial R^v(x, t) dx dt \\ &+ \delta T \int_0^L v(x, a+T) R^v(x, a+T) dx \end{aligned} \quad (7.3.3)$$



όπου  $\partial$  είναι το σύμβολο της μερικής μεταβολής, ενώ  $\delta$  είναι το σύμβολο της ολικής μεταβολής.

Ο τελευταίος όρος της 7.3.3 είναι εκ ταυτότητος μηδέν, καθώς  $R^v(x, t) = 0, \forall t$ , άρα είναι και  $R^v(x, a + T) = 0$ . Έτσι η 7.3.3 χρησιμοποιώντας την 7.1.1 αναλύεται περαιτέρω ως

$$\delta \int_a^{a+T} \int_0^L u R^v dx dt = \int_a^{a+T} \int_0^L \left[ \underbrace{u \frac{\partial}{\partial t} (\partial v)}_{I_1} + \underbrace{uv \frac{\partial}{\partial x} (\partial v)}_{I_2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \partial v - u \partial \phi \right] dx dt \quad (7.3.4)$$

όπου

$$I_1 = \int_a^{a+T} \int_0^L u \frac{\partial}{\partial t} (\partial v) dx dt = - \int_a^{a+T} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \partial v dx dt + \left[ \int_0^L u \partial v dx \right]_{t=a}^{t=a+T}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^{a+T} \int_0^L uv \frac{\partial}{\partial x} (\partial v) dx dt \\ &= - \int_a^{a+T} \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial x} \partial v dx dt - \int_a^{a+T} \int_0^L v \frac{\partial u}{\partial x} \partial v dx dt + \left[ \int_a^{a+T} uv \partial v dt \right]_{x=0}^{x=L} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις 7.3.2 και 7.3.4 στην 7.3.1 προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_a^{a+T} \int_0^L \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{T} (v - v_{tar}) \right\} \partial v dx dt \\ &\quad - \int_a^{a+T} \int_0^L u \partial \phi dx dt \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt + \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \Big|_{t=a+T} \right] \delta T \\ &\quad + \left[ \int_a^{a+T} uv \partial v dt \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ \int_0^L u \partial v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Επειδή, σε κάθε θέση και κάθε χρονική στιγμή, για την ολική μεταβολή  $\delta v$  ισχύει ότι

$$\delta v = \partial v + \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \quad (7.3.6)$$

οι δύο τελευταίοι όροι της 7.3.5 γράφονται

$$\begin{aligned} \left[ \int_a^{a+T} uv \partial v dt \right]_{x=0}^{x=L} &= \left[ \int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \Big|_{x=L} - \int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^L u \partial v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} &= \left[ \int_0^L u \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dx \right]_{t=a}^{t=a+T} \\ &= \left[ \int_0^L u \delta v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} + \left[ \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta T} dx \Big|_{t=a} - \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta T} dx \Big|_{t=a+T} \right] \delta T \end{aligned}$$

Όμως, για  $x = 0$ , η ταχύτητα δίνεται από Dirichlet συνθήκη, ανεξάρτητη του χρόνου ( $v_0(x = 0, t) = \text{const}, \forall t$ ) και, κατά συνέπεια,

$$\left. \begin{aligned} \delta v(x = 0) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x = 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow - \int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \Big|_{x=0} = 0$$

Ακόμη, για κάθε περιοδική συνάρτηση  $H(t)$  ισχύει  $H(t) = H(t + T)$ , όπου  $T$  είναι η περίοδος της συνάρτησης.<sup>1</sup> Έτσι, επειδή οι  $u$  και  $\delta v$  είναι περιοδικές συναρτήσεις με την ίδια περίοδο,

$$\left[ \int_0^L u \delta v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} = 0$$

άρα,

$$\left[ \int_0^L u \partial v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} = - \left[ \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta T} dx \right]_a^{t=a+T} \delta T$$

Τέλος, οι ολικές μεταβολές των δύο ορίων της χρονικής ολοκλήρωσης ως προς την

<sup>1</sup>Η περιοδικότητα της συνάρτησης  $\frac{\delta v}{\delta T}$  αναλύεται περαιτέρω στο Παράρτημα Α'.

περίοδο  $T$ , δίνουν

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta(a+T)}{\delta T} &= 1 \\ \frac{\delta a}{\delta T} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \int_0^L u \partial v dx \right]_{t=a}^{t=a+T} = - \left[ \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} dx \right]_{t=a+T} \delta T$$

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, η 7.3.5 γράφεται τελικά ως

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_a^{a+T} \int_0^L \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{T}(v - v_{tar}) \right\} \partial v dx dt \\ &- \int_a^{a+T} \int_0^L u \partial \phi dx dt \\ &+ \left[ -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt + \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \right]_{t=a+T} \delta T \\ &+ \int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \Big|_{x=L} - \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta T} dx \Big|_{t=a+T} \delta T \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

- Μηδενίζοντας τους συντελεστές της μερικής μεταβολής  $\partial v$  προκύπτει η συζυγής πεδριακή εξίσωση

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{T}(v - v_{tar}) = 0 \quad (7.3.8)$$

έχοντας, προφανώς, λάβει υπόψη ότι το  $\phi$  είναι ανεξάρτητο του  $v$  και, συνεπώς, η μερική μεταβολή  $\partial \phi$  δεν συνεισφέρει στο συντελεστή του  $\partial v$ .

- Από τον όρο  $\int_a^{a+T} uv \left( \delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) dt \Big|_{x=L}$  προκύπτει η οριακή συνθήκη  
 $u(x = L, t) = 0, \forall t$ .
- Οι εναπομείναντες όροι σχηματίζουν την παράγωγο ευαισθησίας

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_a^{a+T} \int_0^L -u \partial \phi dx dt \\ &+ \left[ -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt + \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \right]_{t=a+T} \delta T \\ &- \left[ \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} dx \right]_{t=a+T} \delta T \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Η μερική μεταβολή της συνάρτησης  $\phi(x, t)$  υπολογίζεται αναλυτικά ως

$$\begin{aligned}
 \partial\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\phi}{\partial T}\delta T \\
 &= \left\{ 2\pi x c \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 2cT^2 x \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]^2 + v_0 T \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \right\} \delta c \\
 &+ \left\{ 4\pi^2 t c x \frac{1}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 2c^2 T x \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]^2 - 4\pi t c^2 x \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \right. \\
 &+ \left. v_0 c \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] - v_0 c \frac{1}{T} 2\pi t c \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right\} \delta T
 \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

## 7.4 Αναλυτικός υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας

Η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση κόστους ορίσθηκε από τη σχέση 7.2.2. Γνωρίζοντας ότι η αναλυτική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης 7.1.1 περιγράφεται από την εξίσωση 7.1.3 μπορεί εύκολα να προκύψει η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης  $F$  και της ολικής μεταβολής της, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί  $v_0 = 0$  και  $v_{tar} = C_{tar} = const.$  Έτσι

$$\begin{aligned}
 (v - v_{tar})^2 &= \left( A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + A - C_{tar} \right)^2 \\
 &= A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + A^2 + C_{tar}^2 + 2A^2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 2AC_{tar} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 2AC_{tar}
 \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι, εδώ,  $A = A(x, t) = cxT$ , η ολοκλήρωση των όρων της 7.4.1 σε μια περίοδο  $T$  κατά μήκος του αγωγού δίνει

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+T} \int_0^L A^2 dx dt &= \int_a^{a+T} \int_0^L c^2 x^2 T^2 dx dt = \int_a^{a+T} \frac{1}{3} c^2 L^3 T^2 dt \\
 &= \frac{1}{3} c^2 L^3 T^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} \int_0^L A^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt &= \int_a^{a+T} \int_0^L c^2 x^2 T^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt \\
&= \int_a^{a+T} \frac{1}{3} c^2 L^3 T^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt \\
&= \frac{1}{3} c^2 L^3 T^2 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin \left( \frac{4\pi t}{T} \right)}{\frac{8\pi}{T}} \right]_T^{a+T} \\
&= \frac{1}{6} c^2 L^3 T^3
\end{aligned}$$

$$\int_a^{a+T} \int_0^L C_{tar}^2 dx dt = \int_a^{a+T} \int_0^L C_{tar}^2 L dt = C_{tar}^2 LT$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} \int_0^L 2A^2 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt &= \int_a^{a+T} \int_0^L 2c^2 x^2 T^2 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt \\
&= \int_a^{a+T} \frac{2}{3} c^2 L^3 T^2 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} \int_0^L 2AC_{tar} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt &= \int_a^{a+T} \int_0^L 2cxTC_{tar} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dx dt \\
&= \int_a^{a+T} cL^2TC_{tar} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = 0
\end{aligned}$$

$$\int_a^{a+T} \int_0^L 2AC_{tar} dx dt = \int_a^{a+T} \int_0^L 2cxTC_{tar} dx dt = \int_a^{a+T} cL^2TC_{tar} dt = cL^2T^2C_{tar}$$

Τελικά, η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης κόστους είναι

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2T} \left[ \frac{1}{6} c^2 L^3 T^3 + \frac{1}{3} c^2 L^3 T^3 - cL^2 T^2 C_{tar} + LTC_{tar}^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} c^2 L^3 T^2 - \frac{1}{2} cL^2 T C_{tar} + \frac{1}{2} LC_{tar}^2
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Η αναλυτική έκφραση της ολικής μεταβολής της συνάρτησης  $F$  ως προς τις μετα-

βλητές σχεδιασμού, δηλαδή τον συντελεστή  $c$  και την περίοδο  $T$ , είναι

$$\frac{\delta F}{\delta c} = \frac{1}{2}cL^3T^2 - \frac{1}{2}L^2TC_{tar} \quad (7.4.2)$$

και

$$\frac{\delta F}{\delta T} = \frac{1}{2}c^2L^3T - \frac{1}{2}cL^2C_{tar} \quad (7.4.3)$$

Χρήσιμη, για τη μελέτη που θα ακολουθήσει, είναι και η ανάλυση των όρων της ολικής μεταβολής της  $F$  ως προς την περίοδο  $T$ , όπως αναπτύσσεται σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz και έχει ήδη δοθεί στην εξίσωση 7.3.2. Γνωρίζοντας την αναλυτική λύση  $v(x, t)$ , σχέση 7.1.3, οι επιμέρους όροι της μεταβολής της  $F$ , εξίσωσης 7.3.2, υπολογίζονται ένας-ένας αναλυτικά,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar}) \frac{\partial v}{\partial T} dx dt = \frac{7}{12}c^2L^3T - \frac{1}{2}cL^2C_{tar} + \frac{1}{2}cL^2C_{tar} \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) \\ &\quad - \frac{1}{3}c^2L^3T \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) + \frac{1}{6}c^2L^3T \sin^2\left(\frac{2\pi a}{T}\right) \\ H_2 &= \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \Big|_{t=a+T} = \frac{1}{6}c^2L^3T - \frac{1}{2}cL^2C_{tar} - \frac{1}{2}cL^2C_{tar} \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}c^2L^3T \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) - \frac{1}{6}c^2L^3T \sin^2\left(\frac{2\pi a}{T}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2T}LC_{tar}^2 \\ H_3 &= -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt = -\frac{1}{4}c^2L^3T + \frac{1}{2}cL^2C_{tar} - \frac{1}{2T}LC_{tar}^2 \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{\partial v}{\partial T} = cx \left[ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \right] - \frac{2\pi txc}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (7.4.4)$$

Προφανώς,

$$\frac{\delta F}{\delta T} = H_1 + H_2 + H_3 = \frac{1}{2}c^2L^3T - \frac{1}{2}cL^2C_{tar} \quad (7.4.5)$$

Οι σχέσεις 7.4.5 και 7.4.3 πρέπει να και όντως δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Για την ανάλυση που ακολουθεί οι σταθερές του προβλήματος έχουν λάβει ενδεικτικά τις εξής τιμές (σε συμβατές μονάδες):

- Μήκος Αγωγού  $L = 1$
- Περίοδος  $T = 0.1$
- Συντελεστής  $c = 1$
- Κατανομή Στόχος  $v_{tar} = C_{tar} = 1$

Ανακεφαλαιώνοντας, για τις παραπάνω τιμές των σταθερών, οι αναλυτικοί υπολογισμοί δίνουν τιμή της  $F$  και παραγώγους της αυτές του πίνακα 7.1

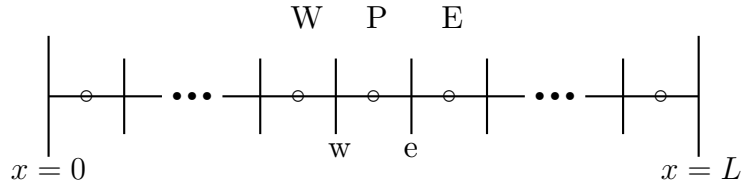
Συνάρτηση Κόστους	$F$	0.452500
Ολική Μεταβολή ως προς $c$	$\frac{\delta F}{\delta c}$	-0.04500
Ολική Μεταβολή ως προς $T$	$\frac{\delta F}{\delta T}$	-0.4500

**Πίνακας 7.1:** Τιμές της Αντικειμενικής Συνάρτησης και των Παραγώγων Εναισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως προκύπτουν με βάση την αναλυτική λύση.

## 7.5 Διακριτοποίηση & αριθμητική επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος

Ο αγωγός χωρίζεται σε  $N$  ίσα διαστήματα ελέγχου (Σχήμα 7.1), στο κέντρο  $P$  καθενός εκ των οποίων αναζητείται η λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης. Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκυψελική (cell-centered) διατύπωση, που θα εφαρμοσθεί στη μονοδιάστατη μορφή της, απαιτεί η εξίσωση 7.1.1 να ικανοποιείται σε έναν όγκο ελέγχου  $C_P$  με κέντρο  $P$ , στην ολοκληρωματική μορφή

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_P} v dx + \int_{C_P} \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} dx \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{C_P} \phi dx dt \quad (7.5.1)$$



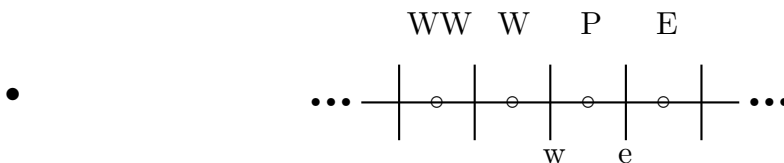
**Σχήμα 7.1:** Διακριτοποιημένος μονοδιάστατος αγωγός σε ίσους όγκους ελέγχου, όπου με κύκλο συμβολίζονται τα κέντρα τους (σημεία υπολογισμού των τιμών της  $v$ ) και με κάθετες γραμμές τα όριά τους (κόμβοι του πλέγματος). Κάθε κέντρο έχει δύο όρια, το ανατολικό  $e$  και το δυτικό  $w$ , ενώ συνορεύει με τους όγκους ελέγχου με κέντρα τα  $E$  και  $W$ .

### 7.5.1 Όρος μεταφοράς

Το χωρικό ολοκλήρωμα του όρου μεταφοράς γράφεται

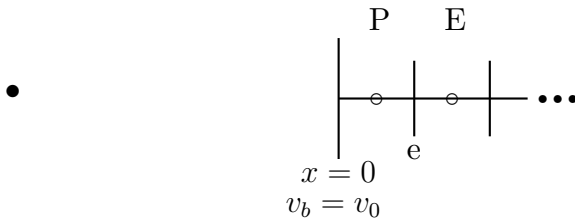
$$\int_{C_P} \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} dx = \frac{1}{2} v v \Big|_e - \frac{1}{2} v v \Big|_w = \frac{1}{4} (v_P^* + v_E^*) v_e - \frac{1}{4} (v_P^* + v_W^*) v_w$$

όπου  $e$  είναι το ανατολικό (κατάντι) και  $w$  το δυτικό (ανάντι) όριο της καμπύλης ελέγχου, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1, και με αστερίσκο δηλώνονται οι ταχύτητες που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη εσωτερική επανάληψη στην ίδια χρονική στιγμή. Οι εσωτερικές επαναλήψεις γίνονται σε κάθε πέρασμα από το  $t$  στο  $\Delta t$ , μιας και έγινε γραμμικοποίηση του όρου μεταφοράς. Ένώ, λοιπόν, η μεταφερόμενη ταχύτητα υπολογίζεται με κεντρικό σχήμα (μέσος όρος των τιμών των κέντρων των εκατέρωθεν όγκων ελέγχου), και δεδομένου ότι αυτή είναι θετική, οι μεταφερόμενες ταχύτητες υπολογίζονται με ανάντι διαφοράση δεύτερης τάξης και διακρίνονται οι τέσσερις περιπτώσεις:



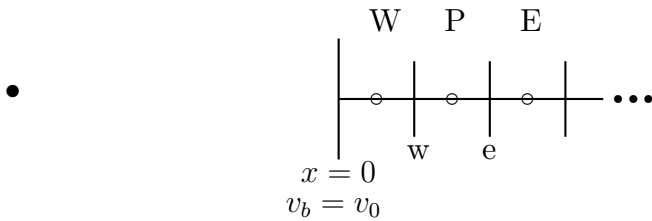


$$\begin{cases} v_e = v_P + \overline{Pe} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_E - v_W}{2\Delta x} = v_P + \frac{1}{4}v_E - \frac{1}{4}v_W \\ v_w = v_W + \overline{Ww} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_W = v_W + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_P - v_{WW}}{2\Delta x} = v_W + \frac{1}{4}v_P - \frac{1}{4}v_{WW} \end{cases} \quad (7.5.2)$$

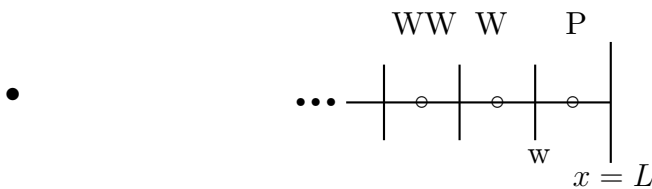


$$\begin{cases} v_e = v_P + \overline{Pe} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_e - v_b}{\Delta x} = \frac{5}{4}v_P + \frac{1}{4}v_E - \frac{1}{2}v_b \\ v_w = v_b \end{cases} \quad (7.5.3)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι  $v_e = \frac{v_E + v_P}{2}$ .



$$\begin{cases} v_e = v_P + \overline{Pe} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_E - v_W}{2\Delta x} = v_P + \frac{1}{4}v_E - \frac{1}{4}v_W \\ v_w = v_W + \overline{Ww} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_W = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_w - v_b}{\Delta x} = \frac{5}{4}v_W + \frac{1}{4}v_P - \frac{1}{2}v_b \end{cases} \quad (7.5.4)$$



$$\begin{cases} v_e = v_P + \overline{Pe} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_e - v_w}{\Delta x} = \frac{5}{4}v_P - \frac{1}{4}v_W \\ v_w = v_W + \overline{Ww} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_W = v_W + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_P - v_{WW}}{2\Delta x} = v_W + \frac{1}{4}v_P - \frac{1}{4}v_{WW} \end{cases} \quad (7.5.5)$$

όπου λόγω της διακριτοποίησης της μηδενικής Neumann οριακής συνθήκης  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , ισχύει  $v_e = v_P$ , ενώ ομοίως με πριν χρησιμοποιήθηκε  $v_w = \frac{v_W + v_P}{2}$ .

### 7.5.2 Όρος πηγής & χρονικός όρος

Το χωρικό ολοκλήρωμα του όρου πηγής μπορεί να γραφεί

$$\int_{C_P} \phi dx = \phi_P \Delta x \quad (7.5.6)$$

Η χρονική παράγωγος διακριτοποιείται με σχήμα πίσω διαφόρισης στο χρόνο ακρίβειας δεύτερης τάξης,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_P} v dx = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_P \Delta x = \frac{3v_P^n - 4v_P^{n-1} + v_P^{n-2}}{2\Delta t} \Delta x \quad (7.5.7)$$

### 7.5.3 Αριθμητική επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος

Αντικαθιστώντας τις 7.5.2, 7.5.3, 7.5.4, 7.5.5, 7.5.6 και 7.5.7 στην 7.5.1 και επιλέγοντας πεπλεγμένη διατύπωση ως προς τον χώρο, προκύπτει το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

---

$$\begin{bmatrix} C_{P1} & C_{E1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{W2} & C_{P2} & C_{E2} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & C_{WWi} & C_{Wi} & C_{Pi} & C_{Ei} & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & C_{WWN} & C_{WN} & C_{PN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_{N-1}^n \\ v_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} \quad (7.5.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} C_{P1} &= \frac{3 \Delta x}{2 \Delta t} + \frac{5}{16}(v_1^* + v_2^*) \\ C_{E1} &= \frac{1}{16}(v_1^* + v_2^*) \\ C_{W2} &= -\frac{5}{16}v_1^* - \frac{3}{8}v_2^* - \frac{1}{16}v_3^* \\ C_{P2} &= \frac{3 \Delta x}{2 \Delta t} - \frac{1}{16}v_1^* - \frac{3}{16}v_2^* + \frac{1}{4}v_3^* \\ C_{E2} &= -\frac{1}{16}(v_2^* + v_3^*) \\ C_{WWi} &= \frac{1}{16}(v_i^* + v_{i-1}^*) \\ C_{Wi} &= -\frac{1}{4}v_{i-1}^* - \frac{5}{16}v_i^* - \frac{1}{16}v_{i+1}^* \\ C_{Pi} &= \frac{3 \Delta x}{2 \Delta t} - \frac{1}{16}v_{i-1}^* - \frac{3}{16}v_i^* + \frac{1}{4}v_{i+1}^* \\ C_{Ei} &= \frac{1}{16}(v_i^* + v_{i+1}^*) \\ C_{WWN} &= \frac{1}{16}(v_N^* + v_{N-1}^*) \\ C_{WN} &= -\frac{1}{8}v_{N-1}^* - \frac{5}{8}v_N^* \\ C_{PN} &= \frac{3 \Delta x}{2 \Delta t} - \frac{7}{16}v_{N-1}^* - \frac{17}{16}v_N^* \\ S_1 &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_1^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} v_1^{n-2} + \frac{1}{8}(v_1^o + v_2^o)v_b + \frac{1}{2}v_b^2 + \phi_1^n \\ S_2 &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_2^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} v_2^{n-2} - \frac{1}{8}(v_2^o + v_3^o)v_b + \phi_2^n \\ S_i &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_i^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} v_i^{n-2} + \phi_i^n \end{aligned}$$

$$S_N = 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_N^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} v_N^{n-2} + \phi_i^N$$

Σύμφωνα με την αναλυτική λύση, το αρχικό πεδίο της ταχύτητας  $v$  είναι

$$v(x, 0) = xT$$

Το σύστημα 7.5.8, για μια χρονική στιγμή  $n$ , επιλύεται επαναληπτικά με έναν τετραδιαγώνιο επιλύτη, με κριτήριο σύγκλισης το υπόλοιπο της διακριτοποιημένης εξίσωσης της 7.1.1 να είναι μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο. Σε κάθε τέτοια εσωτερική επανάληψη, το νέο πεδίο ταχυτήτων  $v^n$  που υπολογίζεται αποτελεί το πεδίο ταχυτήτων  $v^*$  της επόμενης επανάληψης. Όταν πληρείται το προαναφερθέν κριτήριο, η χρονική στιγμή  $n$  αυξάνεται κατά ένα και το συγκλιμένο πεδίο ταχυτήτων αποτελεί την παλιά λύση  $v^{n-1}$ . Ο αλγόριθμος επίλυσης παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω.

Η επίλυση έγινε για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.00025$  και αριθμό όγκων ελέγχου  $N = 400$ , διακριτοποίηση κατά την οποία έχει προηγηθεί έλεγχος ότι εξασφαλίζεται ανεξαρτησία πλέγματος. Όπως προαναφέρθηκε, οι υπόλοιπες σταθερές που επιλέγησαν είναι το μήκος αγωγού  $L = 1$ , η οριακή συνθήκη στο ένα άκρο  $v_0 = 0$ , η περίοδος  $T = 0.1$  και ο συντελεστής  $c = 1$ . Αποτελέσματα και συγκρίσεις φαίνονται στο σχήμα 7.5.3. Η αναλυτική και η αριθμητική λύση ταυτίζονται.

---

**Αλγόριθμος 1:** Αλγόριθμος επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Με  $N$  συμβολίζεται το πλήθος των χρονικών βημάτων και με  $r$  η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης, προκαθορισμένη από τον χρήστη.

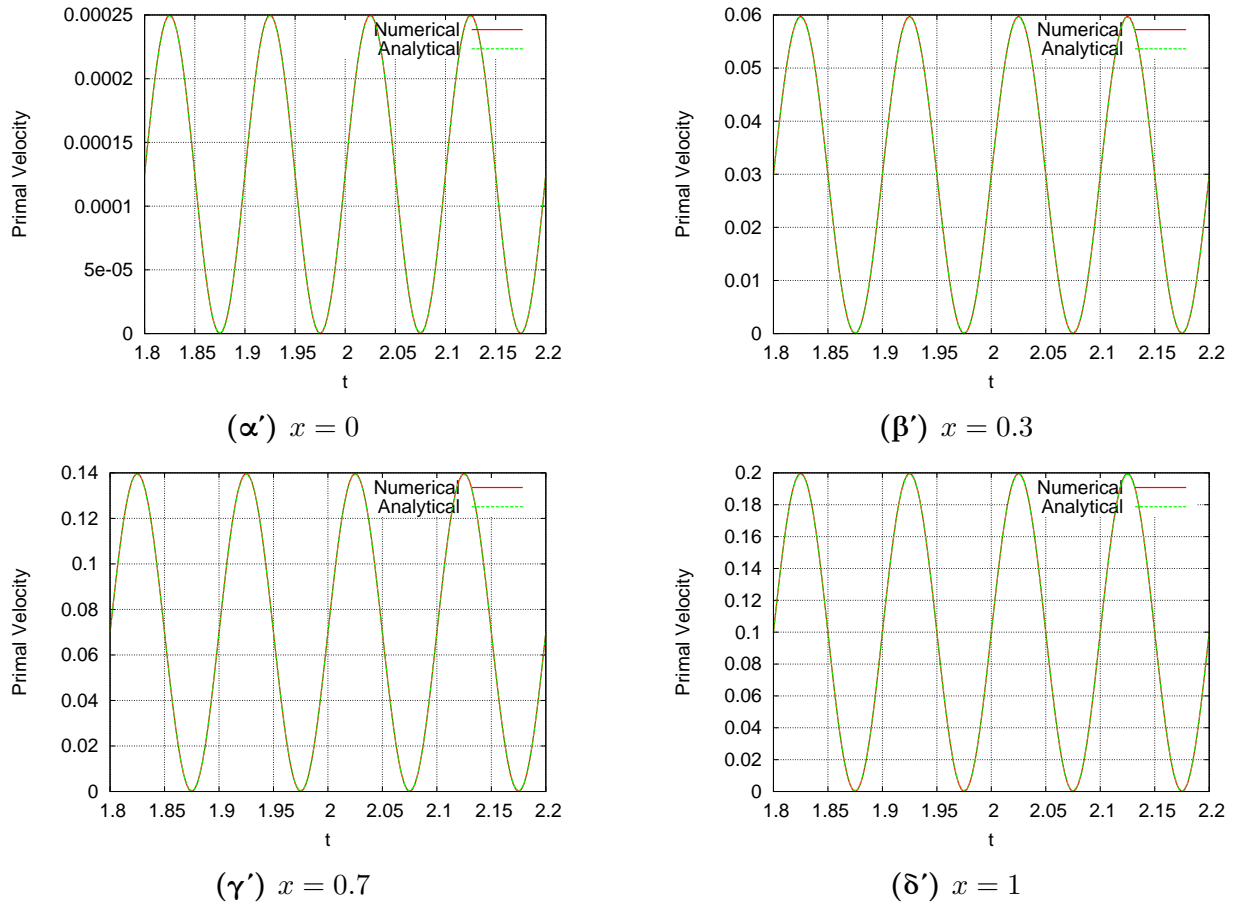
---

```

n ← 0
v^n ← v(x, 0) (Αρχική Συνθήκη)
while n < N do
  v* ← v^n
  n ← n + 1
  R ← 1012
  while R > r do
    Επίλυση Τετραδιαγώνιου Συστήματος 7.5.8
    v* ← v^n
    Υπολογισμός Υπολοίπου R

```

---



**Σχήμα 7.2:** Σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης σε διάφορες θέσεις του αγωγού συναρτήσει του χρόνου.

## 7.6 Διακριτοποίηση & επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Η συζυγής ΣΔΕ 7.6.1 γράφεται σε συντηρητική μορφή ως

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(-vu)}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{T}(v - v_{tar}) \quad (7.6.1)$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκυβελική διατύπωση που θα εφαρμοσθεί στη μονοδιάστατη μορφή της, απαιτεί η εξίσωση 7.6.1 να ικανοποιείται σε κάθε όγκο ελέγχου  $C_P$  με κέντρο P στην ολοκληρωματική μορφή

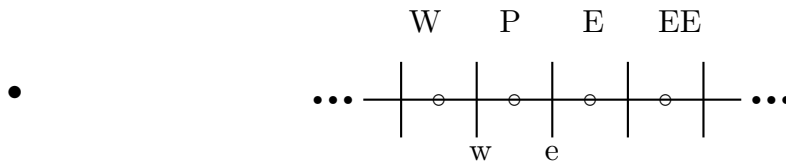
$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_P} u dx + \int_{C_P} \frac{\partial(-vu)}{\partial x} dx + \int_{C_P} u \frac{\partial v}{\partial x} dx \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{C_P} -\frac{1}{T}(v - v_{tar}) dx dt$$

### 7.6.1 Όρος μεταφοράς

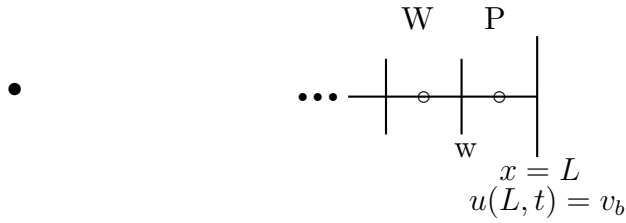
Το χωρικό ολοκλήρωμα του όρου μεταφοράς γράφεται

$$\int_{C_P} \frac{\partial(-vu)}{\partial x} dx = -vu|_e + vu|_w = -\frac{1}{2}(v_P + v_E)u_e + \frac{1}{2}(v_P + v_W)u_w$$

Η χωρική διακριτοποίηση του όρου μεταφοράς γίνεται με ανάντι διαφόριση δεύτερης τάξης. Επειδή η ταχύτητα στην οποία μεταφέρεται η συζυγής ταχύτητα είναι αντίθετη της  $v$ , η πληροφορία μεταφέρεται από τα κατάντι της πρωτεύουσας ροής προς τα ανάντι. Ομοίως, διακρίνονται οι τέσσερις περιπτώσεις, ανάλογα με τη θέση του όγκου ελέγχου:

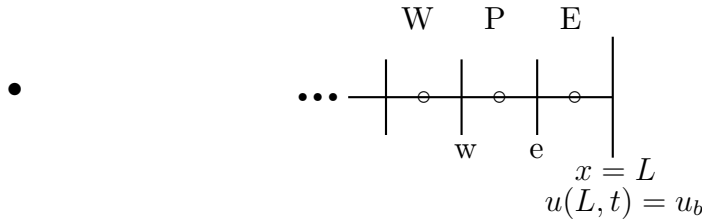


$$\begin{cases} u_e = u_E + \overline{Ee} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_E = u_E + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{EE} - u_P}{2\Delta x} = u_E + \frac{1}{4}u_{EE} - \frac{1}{4}u_P \\ u_w = u_P + \overline{Pw} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = u_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_E - u_W}{2\Delta x} = u_P + \frac{1}{4}u_E - \frac{1}{4}u_W \end{cases} \quad (7.6.2)$$



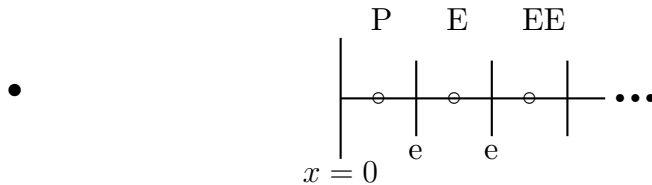
$$\begin{cases} u_e = u(x = L) = u_b \\ u_w = u_W + \overline{Ww} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_W = u_W + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_b - u_w}{\Delta x} = \frac{3}{4}u_P - \frac{1}{4}u_W + \frac{1}{2}u_b \end{cases} \quad (7.6.3)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι  $u_w = \frac{u_P + u_W}{2}$ .



$$\begin{cases} u_e = u_E + \overline{Ee} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_E = u_E + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_b - u_e}{\Delta x} = \frac{3}{4}u_E - \frac{1}{4}u_P + \frac{1}{2}u_b \\ u_w = u_P + \overline{Pw} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = u_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_E - u_W}{2\Delta x} = u_P + \frac{1}{4}u_E - \frac{1}{4}u_W \end{cases} \quad (7.6.4)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι  $u_e = \frac{u_E + u_P}{2}$ .



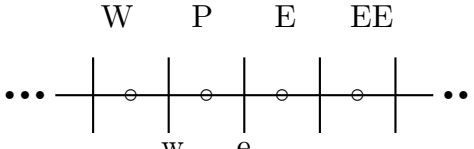
$$\begin{cases} u_e = u_E + \overline{Ee} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_E = u_E + \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{EE} - u_P}{2\Delta x} = u_E + \frac{1}{4}u_{EE} - \frac{1}{4}u_P \\ v_w = v_P + \overline{Pw} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P = v_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{v_e - v_w}{\Delta x} = \frac{3}{2}v_P - \frac{1}{2}v_E \end{cases} \quad (7.6.5)$$

### 7.6.2 Υπόλοιποι όροι

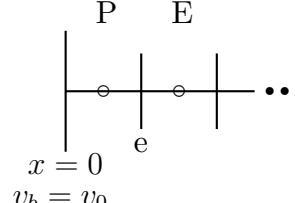
Το χωρικό ολοκλήρωμα του όρου πηγής μπορεί να γραφεί

$$\int_{C_P} \frac{1}{T}(v - v_{tar})dx = \frac{1}{T}(v - v_{tar}) \Big|_P \Delta x \quad (7.6.6)$$

Το χωρικό ολοκλήρωμα του επιπλέον όρου που προέκυψε από τη συντηρητική μορφή της συζυγούς εξίσωσης 7.6.1 και εκφράζει τη μεταφορά της πρωτεύουσας ταχύτητας  $v$  μέσω της συζυγούς ταχύτητας  $u$  γράφεται

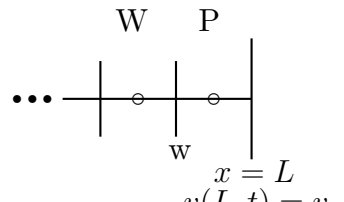
• 

$$\int_{C_P} u \frac{\partial v}{\partial x} dx = u \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P \Delta x = u_P \frac{v_E - v_W}{2\Delta x} \Delta x = u_P \frac{v_E - v_W}{2} \quad (7.6.7)$$

• 

$x = 0$   
 $v_b = v_0$

$$\int_{C_P} u \frac{\partial v}{\partial x} dx = u \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P \Delta x = u_P \frac{v_e - v_b}{\Delta x} \Delta x = u_P \left( \frac{1}{4}v_E + \frac{1}{4}v_P - \frac{1}{2}v_b \right) \quad (7.6.8)$$

• 

$x = L$   
 $v(L, t) = v_P$

$$\int_{C_P} u \frac{\partial v}{\partial x} dx = u \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P \Delta x = u_P \frac{v_e - v_w}{\Delta x} \Delta x = u_P \left( v_P - \frac{v_W + v_P}{2} \right) = u_P \left( \frac{v_P - v_W}{2} \right) \quad (7.6.9)$$



Η χρονική παράγωγος διακριτοποιείται με πίσω διαφορές δεύτερης τάξης

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_P} v dx = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_P \Delta x = \frac{3u_P^n - 4v_P^{n+1} + u_P^{n+2}}{2\Delta t} \Delta x \quad (7.6.10)$$

### 7.6.3 Αριθμητική επίλυση του συζυγούς προβλήματος

Έτσι, τελικά, προκύπτει το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} C_{P1} & C_{E1} & C_{EE1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & C_{Wi} & C_{Pi} & C_{Ei} & C_{EEi} & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & C_{W(N-1)} & C_{P(N-1)} & C_{E(N-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{WN} & C_{PN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix}$$

όπου

$$C_{P1} = \frac{3\Delta x}{2\Delta t} + \frac{1}{8}(v_1^n + v_2^n) + \frac{1}{2}(v_2^n + v_1^n) + \frac{3}{2}v_b$$

$$C_{E1} = -\frac{1}{2}(v_1^n + v_2^n) - \frac{1}{2}v_b$$

$$C_{EE1} = -\frac{1}{8}(v_1^n + v_2^n)$$

$$C_{Wi} = -\frac{1}{8}(v_i^n + v_{i-1}^n)$$

$$C_{Pi} = \frac{3\Delta x}{2\Delta t} + \frac{1}{2}v_{i-1}^n + \frac{5}{8}v_i^n + \frac{1}{8}v_{i+1}^n + \frac{1}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n)$$

$$C_{Ei} = \frac{1}{8}v_{i-1}^n - \frac{3}{8}v_i^n - \frac{1}{2}v_{i+1}^n$$

$$C_{EEi} = -\frac{1}{8}(v_i^n + v_{i+1}^n)$$

$$C_{W(N-1)} = -\frac{1}{8}(v_{N-1}^n + v_{N-2}^n)$$

$$C_{P(N-1)} = \frac{3\Delta x}{2\Delta t} + \frac{1}{2}v_{N-2}^n + \frac{5}{8}v_{N-1}^n + \frac{1}{8}v_N^n + \frac{1}{2}(v_N^n - v_{N-2}^n)$$

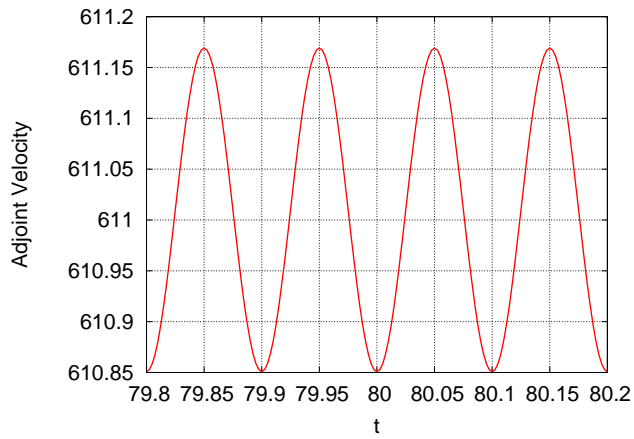
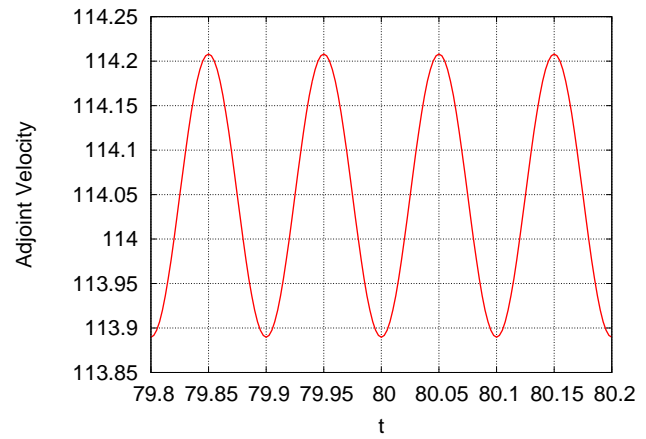
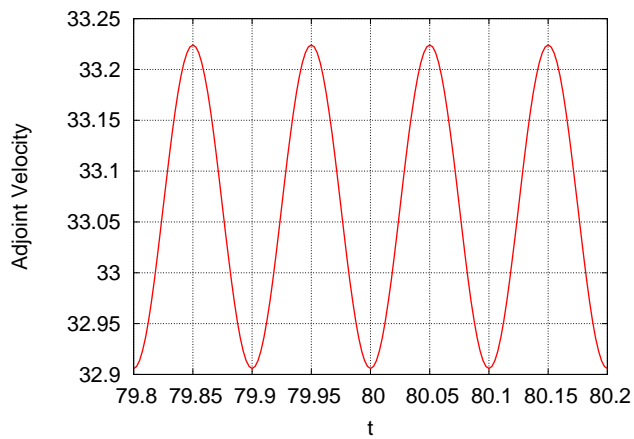
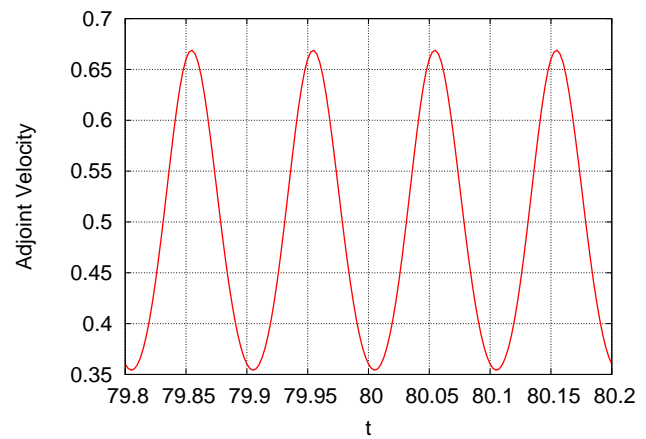
$$C_{E(N-1)} = \frac{1}{8}v_{N-2}^n - \frac{1}{4}v_{N-1}^n - \frac{3}{8}v_N^n$$

$$\begin{aligned}
C_{WN} &= -\frac{1}{8}(v_N^n + v_{N-1}^n) \\
C_{PN} &= \frac{3}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{3}{8}(v_N^n + v_{N-1}^n + v_N^n - v_{N-1}^n) \\
S_1 &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} u_1^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} u_1^{n+2} + \frac{1}{T}(v_1^n - v_{tar_1}^n) \\
S_i &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} u_i^{n+2} + \frac{1}{T}(v_i^n - v_{tar_i}^n) \\
S_{N-1} &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} u_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} u_{N-1}^{n+2} + \frac{1}{4}(v_{N-1}^n + v_N^n)u_b + \frac{1}{T}(v_i^n - v_{tar_{N-1}}^n) \\
S_N &= 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} u_N^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} u_N^{n+2} + \frac{5}{4}v_N^n - \frac{3}{4}v_{N-1}^n + \frac{1}{T}(v_{N-1}^n - v_{tar_N}^n)
\end{aligned}$$

Η αρχική τιμή δίνεται αυθαίρετα

$$u(x, 0) = 0$$

Το σύστημα 7.6.3 είναι τετραδιαγώνιο και αντίθετα με το σύστημα της πρωτεύουσας ροής είναι γραμμικό. Κατά συνέπεια, δεν χρειάζονται εσωτερικές επαναλήψεις για κάθε χρονική στιγμή. Ακόμα, λόγω της φύσης της συζυγούς ταχύτητας, η οποία μεταφέρεται από το τέλος  $x = L$  του αγωγού προς την αρχή, δηλαδή ανάντι της πρωτεύουσας υποθετικής ροής, στο τετραδιαγώνιο σύστημα, η τέταρτη διαγώνιος εμφανίζεται στα δεξιά της κεντρικής διαγωνίου, αντίθετα με πριν που εμφανιζόταν στα αριστερά. Η επίλυση έγινε και πάλι για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.00025$  και αριθμό όγκων ελέγχου  $N = 400$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 7.3.

 $(\alpha') x = 0$  $(\beta') x = 0.3$  $(\gamma') x = 0.7$  $(\delta') x = 1$ 

Σχήμα 7.3: Συζυγείς ταχύτητες σε διάφορες θέσεις του αγωγού συναρτήσει του χρόνου

## 7.7 Υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta c}$ με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τον συντελεστή  $c$  είναι

$$\frac{\delta F}{\delta c} = \int_a^{a+T} \int_0^L -u \frac{\partial \phi}{\partial c} dx dt$$

καθώς οι υπόλοιποι όροι της 7.3.9 μηδενίζονται λόγω του ότι  $\frac{dT}{dc} = 0$ .

Στον πίνακα 7.2 παρουσιάζεται η παράγωγος ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta c}$  υπολογισμένη με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, για διάφορες τιμές του  $a$ .

Χρονική Αφετηρία Υπολογισμού της $F$	$\frac{\delta F}{\delta c}$
$a$	-0.0453631
$a + \frac{T}{4}$	-0.0453693
$a + \frac{T}{2}$	-0.0453630
$a + \frac{3T}{4}$	-0.0453568

**Πίνακας 7.2:** Παράγωγος ευαισθησίας της  $F$  ως προς την περίοδο  $c$ , υπολογισμένη με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για διάφορες τιμές του  $a$ .

Είναι εμφανές, ότι η παράγωγος ευαισθησίας της  $F$  ως προς τον συντελεστή  $c$ , είναι ανεξάρτητη της αφετηρίας υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος της συνάρτησης κόστους.

Στον πίνακα 7.3 παρουσιάζονται οι τιμές της παραγώγου ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta c}$ , όπως προκύπτουν από την αναλυτική λύση, από πεπερασμένες διαφορές και από τον υπολογισμό με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Αναλυτική Λύση	-0.045
Συνεχής Συζυγής Μέθοδος	-0.045363
Πεπερασμένες Διαφορές	-0.0449033

Πίνακας 7.3: Παράγωγος Ευαισθησίας της  $F$  ως προς τον συντελεστή  $c$ .

## 7.8 Υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta T}$ με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Όπως προέκυψε στην ενότητα 7.4, η αναλυτική λύση για τους όρους της 2.3.4 είναι

$$H_1 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar}) \frac{\partial v}{\partial T} dx dt = -0.44166 + 0.4667 \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) - 0.0166 \sin^2\left(\frac{2\pi a}{T}\right)$$

$$H_2 = \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \Big|_{t=a+T} = -4.5166 - 0.4667 \sin\left(\frac{2\pi a}{T}\right) + 0.0166 \sin^2\left(\frac{2\pi a}{T}\right)$$

$$H_3 = -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt = -4.525$$

Ενώ οι όροι  $H_1$  και  $H_2$  μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο, το άθροισμα τους είναι σταθερό και, άρα, η παράγωγος ευαισθησίας είναι ανεξάρτητη του  $a$  και έχει την ακριβή τιμή

$$\frac{\delta F}{\delta T} = H_1 + H_2 + H_3 = -0.4500$$

όπως έχει ήδη παρουσιασθεί στον πίνακα 7.1

Οι όροι της  $\frac{\delta F}{\delta T}$  που προκύπτουν από τη συζυγή διατύπωση (εξίσωση 7.3.9) είναι

$$G_1 = \int_a^{a+T} \int_0^L -u \frac{\partial \phi}{\partial T} dx dt$$

$$G_2 = \frac{1}{2T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx \Big|_{t=a+T}$$

$$G_3 = -\frac{1}{2T^2} \int_a^{a+T} \int_0^L (v - v_{tar})^2 dx dt$$

$$G_4 = - \left[ \int_0^L u \frac{\partial v}{\partial t} dx \right]_{t=a}^{t=a+T}$$

Συγκρίνοντας με τις προηγούμενες αναλυτικές εκφράσεις είναι εμφανής η αντιστοιχία των όρων  $G$  και  $H$ , ως εξής:  $H_2 = G_2$ ,  $H_3 = G_3$  και  $H_1 = G_1 + G_4$ .

Για μια τυχαία χρονική στιγμή έναρξης  $a$  της περιόδου  $T$  της χρονικής ολοκλήρωσης της συνάρτησης κόστους, όπου η περιοδικότητα του πραγματικού και του συζυγού φαινομένου έχει αποκατασταθεί, υπολογίζονται οι όροι  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  και  $G_4$ . Ο όρος  $G_3$  είναι ανεξάρτητος της χρονικής στιγμής υπολογισμού και υπολογίστηκε  $G_3 = -4.5227$ . Η παράγωγος ευαισθησίας σύμφωνα με την αναλυτική λύση είναι  $\frac{\delta F}{\delta T} = -0.45$ , ενώ υπολογισμένη με πεπερασμένες διαφορές είναι  $\frac{\delta F}{\delta T} = -0.4500675$ . Στην τελευταία στήλη του πίνακα 7.4 παρουσιάζεται η παράγωγος υπολογισμένη με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Χρονική Αφετηρία Υπολογισμού της $F$	$G_1$	$G_2$	$G_4$	$\frac{\delta F}{\delta T}$
$a$	146.383	4.5093	-146.827	-0.46033
$a + \frac{T}{4}$	-140.444	4.669	139.848	-0.45171
$a + \frac{T}{2}$	-47.794	4.09	47.48	-0.46031
$a + \frac{3T}{4}$	-148.276	4.524	147.826	-0.45161

**Πίνακας 7.4:** Παράγωγος ευαισθησίας της  $F$  ως προς την περίοδο  $T$ , υπολογισμένη με τη συνεχή συζυγή μέθοδο για διάφορες τιμές του  $a$ . Ο όρος  $G_3$  έχει τιμή ανεξάρτητη του  $a$  και δεν πινακοποιείται.

Η παράγωγος ευαισθησίας που υπολογίζεται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο είναι πολύ κοντά στην τιμή που προέκυψε αναλυτικά, αλλά φαίνεται να μην είναι τελείως ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής  $a$ , κάτι που εξηγείται παρακάτω.

Γίνεται η σύγκριση των όρων  $H$ , που προκύπτουν από την αναλυτική λύση, με τους όρους  $G$ , που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση, συναρτήσει της χρονικής αφετηρίας  $a$  υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στο σχήμα 7.5β' είναι εμφανές πως υπάρχει πλήρης ταύτιση του όρου  $H_2$  που προκύπτει από την αναλυτική λύση με τον όρο  $G_2$  που προκύπτει από την αριθμητική

επίλυση.

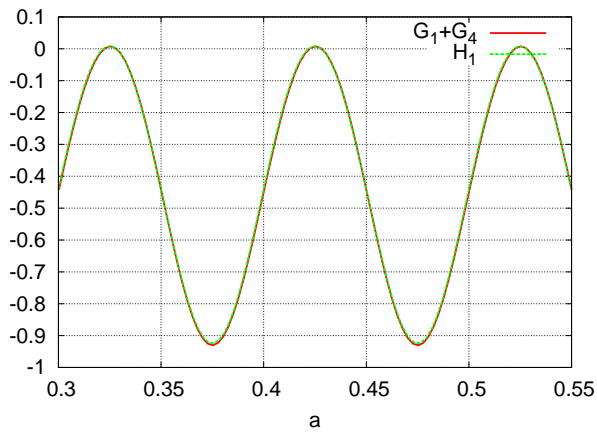
Το σχήμα 7.4 παρουσιάζει την σύγκριση των όρων  $G_1 + G_4$  με την αναλυτική λύση τους  $H_1$ . Παρατηρείται πως για  $a$  κοντά στο μηδέν οι δύο όροι είναι πολύ κοντά, ενώ για μεγαλύτερες χρονικές στιγμές η διαφορά τους αυξάνεται αρκετά.

Στο σχήμα 7.5α' παρουσιάζονται οι όροι  $G_1$  και  $G_4$  συναρτήσει του  $a$  και φαίνεται πως είναι μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τους υπόλοιπους όρους.

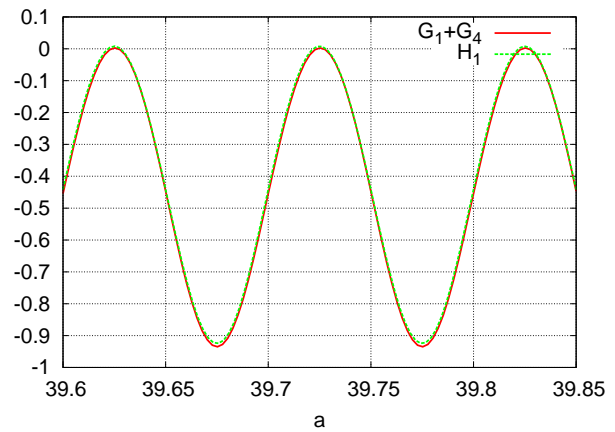
Παρατηρώντας την καμπύλη που διέρχεται από όλα τα μέγιστα σημεία της συνάρτησης  $G_1$  (σχήμα 7.6α'), είναι εμφανής μια πολύ μικρή μείωση στην τιμή των ακρότατων του  $G_1$  κατά περίπου 0.02 που οδηγεί τελικά στην μικρή απόκλιση της υπολογισμένης παραγώγου ευαισθησίας από την αναλυτική λύση. Η μείωση αυτή οφείλεται στο ότι η συνάρτηση  $G_1$  δεν είναι απόλυτα περιοδική, όπως αναμενόταν.

Το άθροισμα των όρων  $G_1, G_2, G_3$  και  $G_4$  δίνει την παράγωγο ευαισθησίας συναρτήσει της χρονικής αφετηρίας υπολογισμού του ολοκληρώματος της συνάρτησης κόστους. Το αποτέλεσμα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση περιόδου  $T$ , φραγμένης στα όρια που ορίζουν οι δύο καμπύλες που φαίνονται στο σχήμα 7.6β'. Για οποιαδήποτε χρονική αφετηρία  $a$  το σφάλμα της μεθόδου παραμένει κάτω του 6%, κάτι που μειώνεται ακόμα περισσότερο με την αύξηση του αριθμού των κόμβων, δηλαδή με πυκνότερο πλέγμα, και με τη μείωση του χρονικού βήματος.

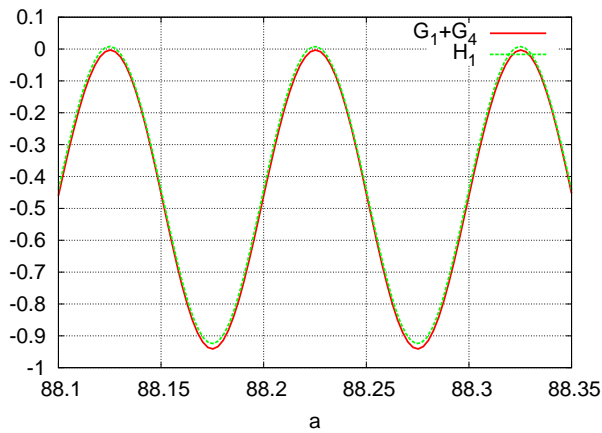
---



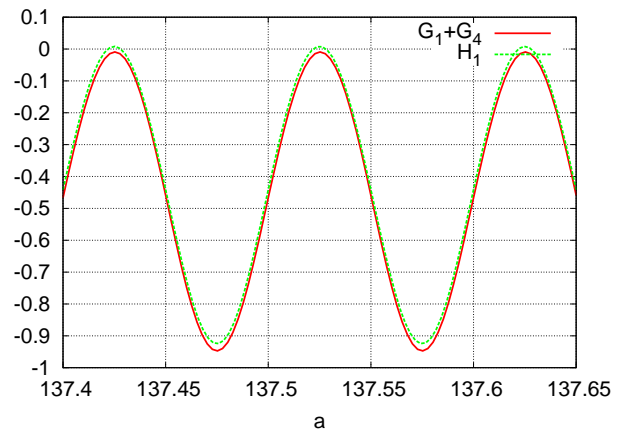
(α')



(β')



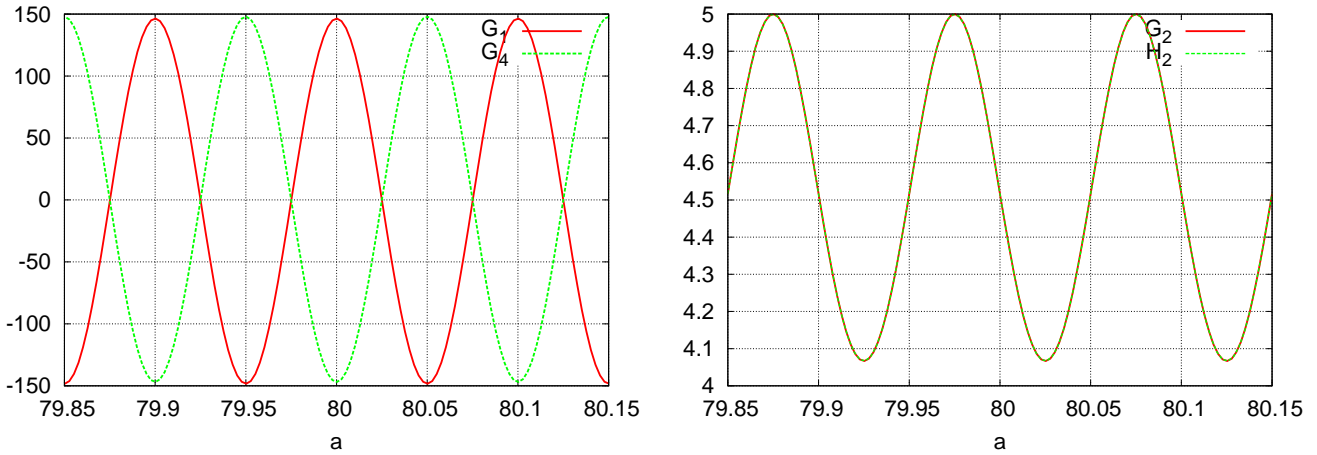
(γ')



(δ')

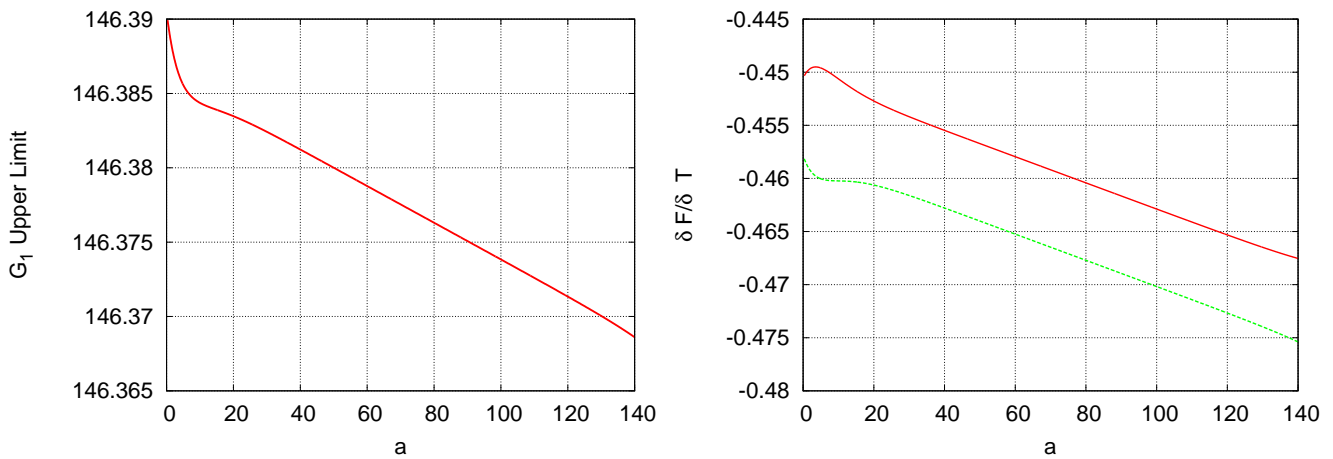
**Σχήμα 7.4:** Οι όροι  $H_1$  και  $G_1 + G_4$  συναρτήσει της αρχικής στιγμής  $a$  υπολογισμού του ολοκληρώματος της  $F$ .





(α') Οι όροι  $G_1$  και  $G_4$  συναρτήσει της χρονικής στιγμής  $a$ . (β') Οι όροι  $H_2$  και  $G_2$  συναρτήσει της αρχικής στιγμής  $a$  υπολογισμού του ολοκληρώματος της  $F$ .

Σχήμα 7.5



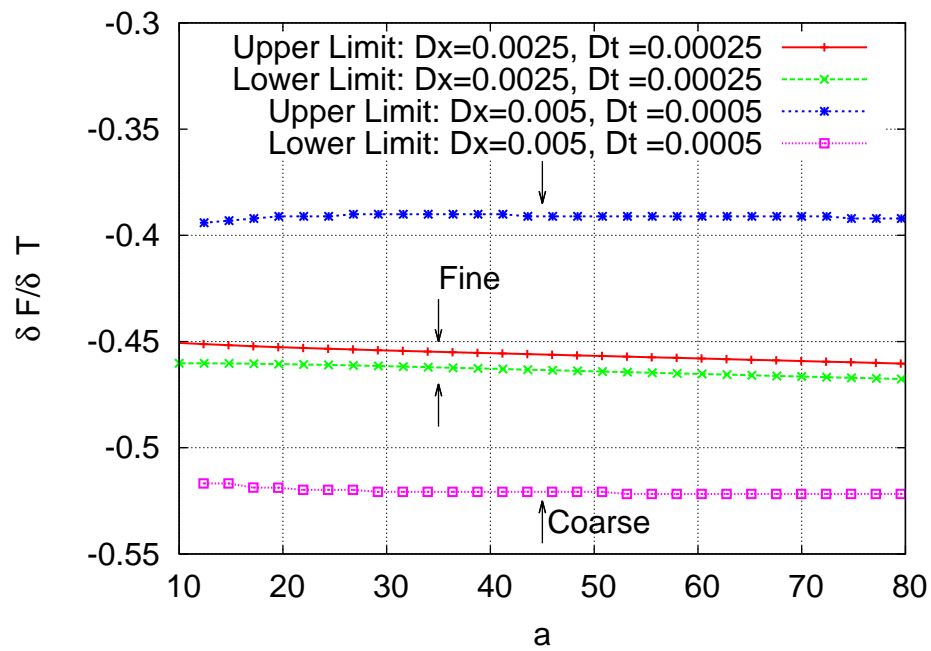
(α') Διερχόμενη καμπύλη από τα μέγιστα του όρου  $G_1$ . (β') Άνω και κάτω όριο της παραγώγου ευαισθησίας. Είναι αξιοσημείωτη η πολύ μικρή διαφορά τιμών στον  $\frac{\delta F}{\delta T}$  συναρτήσει της αρχικής στιγμής  $a$  υπολογισμού του ολοκληρώματος της  $F$ .

Σχήμα 7.6

## 7.9 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση που έγινε στην ενότητα 7.7 για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας της  $F$  ως προς τον συντελεστή  $c$ , είναι εμφανές πως η συζυγής μέθοδος είναι απόλυτα ακριβής, με σφάλμα μικρότερο του 0.5%, στοιχείο που εξασφαλίζει την ορθότητα της λύσης που προέκυψε για τη συζυγή εξίσωση.

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στην ενότητα 7.8, και λαμβάνοντας υπόψη την ορθότητα των συζυγών μεταβλητών που προέκυψαν από την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης, είναι δυνατόν να εξαχθεί το συμπέρασμα πως η συνεχής συζυγής μέθοδος προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά τη σωστή παράγωγο ευαισθησίας της  $F$  ως προς την περίοδο. Η ελάχιστη διαφορετική τιμή της παραγώγου ευαισθησίας που προκύπτει για διαφορετική χρονική στιγμή αφετηρίας  $a$  υπολογισμού του χρονικού ολοκληρώματος της συνάρτησης κόστους οφείλεται στο ότι αυτή υπολογίζεται από άθροιση περιοδικών συναρτήσεων, που επιπροσθέτως είναι σημαντικά διαφορετικής τάξης μεγέθους. Έτσι μια μικρή απόκλιση λόγω αριθμητικού σφάλματος, οδηγεί στη φαινομενικά εξαρτώμενη τιμή της παραγώγου ευαισθησίας από τη χρονική στιγμή  $a$ . Αυτό επιβεβαιώνεται και από τη μείωση των ορίων στα οποία είναι φραγμένη η υπολογιζόμενη παράγωγος συναρτήσει της στιγμής  $a$  (βλ. ενοτ. 7.8), με την αύξηση της διακριτοποίησης του χωρικού πλέγματος και του βήματος της χρονοπροέλασης, όπως φαίνεται και από το σχήμα 7.7.



**Σχήμα 7.7:** Άνω και κάτω όρια της παραγώγου εναισθησίας ως προς την περίοδο  $T$ , υπολογισμένα με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, για πυκνό (*Fine*) και και αραιό (*Coarse*) πλέγμα.



## Κεφάλαιο 8

### Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόστηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον ενεργητικό έλεγχο της μη-μόνιμης ροής γύρω από κύλινδρο, με δέσμες έγχυσης και αναρρόφησης ρευστού και με στόχο την ελαχιστοποίηση της χρονικά μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης και της οπισθέλκουσας. Οι δύο αυτές περιπτώσεις εξετάστηκαν ξεχωριστά. Οι δέσμες ρευστού τοποθετήθηκαν σε ισαπέχουσες θέσεις σε όλη την περιφέρεια του κυλίνδρου και οι παράμετροι της ταχύτητας κάθε δέσμης, οι οποίες αποτελούν και τις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι το πλάτος ταλάντωσης  $A^k$  και η φάση  $t_0^k$  κάθε δέσμης και, η κοινή για όλες τις δέσμες, συχνότητα  $f_{jets}$ . Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων βρέθηκαν με την εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου, όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίστηκαν μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Για την αποθήκευση των πεδίων της ταχύτητας και της πίεσης της πρωτεύουσας ροής, που είναι απαραίτητα για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του διωνυμικού checkpointing (binomial checkpointing).

Οι συναρτήσεις κόστους αφορούν στη χρονικά μέση τιμή των δυνάμεων, δηλαδή στο χρονικό ολοκλήρωμα σε μια περίοδο του φαινομένου. Με την επίδραση όμως των δεσμών ρευστού, η περίοδος του φαινομένου ταυτίζεται με την περίοδο ταλάντωσης της ταχύτητας των δεσμών, η οποία αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού, και κατά συνέπεια κατά τη συνεχή συζυγή διατύπωση εμφανίζονται νέοι όροι, απαραίτητοι για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας ως προς τη συχνότητα  $f_{jets}$ . Ιδιαίτερη σημασία έχει η εξάρτηση των όρων αυτών από τη χρονική αφετηρία υπολογισμού  $a$  του χρονικού ολοκληρώματος, καθώς, η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή σχεδιασμού και, άρα, και τη συχνότητα  $f_{jets}$ , αναμένεται να είναι ανεξάρτητη του  $a$ .

Για τη μελέτη της εξάρτησης της παραγωγού  $\frac{\delta F}{\delta T}$  από τη χρονική αφετηρία  $a$  υπολογισμού του ολοκληρώματος, αναπτύχθηκε κώδικας για την επίλυση μιας υποθετικής μονοδιάστατης, περιοδικής ροής, όπου η περίοδος της αποτελεί και αυτή μεταβλητή σχεδιασμού. Έπειτα από την επαναδιατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων και οριακών συνθηκών, κατά την οποία προέκυψαν, προφανώς, και πάλι νέοι αντίστοιχοι όροι εξαρτώμενοι του  $a$ , υπολογίστηκε η παράγωγος ευαισθησίας ως προς την περίοδο και έγινε διερεύνηση για κάθε επιμέρους όρο χωριστά.

Το πλεονέκτημα σε αυτήν τη μελέτη ήταν ότι λόγω της απλότητας του προβλήματος και της κατάλληλης διαχείρισής του, ήταν εφικτός ο αναλυτικός υπολογισμός της παραγωγού ευαισθησίας και των επιμέρους όρων της. Έτσι λοιπόν, η αναλυτική λύση έδειξε πως παρόλο που οι όροι της παραγωγού ευαισθησίας εξαρτώνται, και μάλιστα περιοδικά, του  $a$ , το άθροισμα τους δίνει μια σταθερή τιμή, και κατά συνέπεια η παράγωγος  $\frac{\delta F}{\delta T}$  είναι **σταθερή και ανεξάρτητη του  $a$** . Η παράγωγος ευαισθησίας που υπολογίστηκε με τη συνεχή συζυγή μέθοδο προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά τη σωστή τιμή, αλλά εμφανίζει μια μικρή εξάρτηση από τη χρονική αφετηρία  $a$ . Μετά από τη σύγκριση των επιμέρους όρων της που υπολογίστηκαν αριθμητικά, με την ακριβή τιμή τους που προκύπτει από την αναλυτική λύση, εξάγεται το συμπέρασμα πως επειδή η τελική παράγωγος ευαισθησίας αποτελεί άθροισμα περιοδικών συναρτήσεων, σημαντικά διαφορετικής τάξης μεγέθους, μια μικρή απόκλιση λόγω αριθμητικού σφάλματος, οδηγεί στη φαινομενικά εξαρτώμενη τιμή της από τη χρονική στιγμή  $a$ .

Όσον αφορά στο βέλτιστο έλεγχο της ροής γύρω από τον κύλινδρο, έγινε προγραμματισμός και επέκταση του ήδη υπάρχοντος λογισμικού που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β και αποτελεί μέρος του ελεύθερου λογισμικού OpenFOAM, έτσι ώστε, εκτός από τις παραγωγούς ευαισθησίας ως προς τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών ρευστού, να υπολογίζει και τις παραγωγούς ευαισθησίας των φάσεων και της συχνότητας. Έπειτα, πραγματοποιήθηκαν οι απαραίτητοι κύκλοι βελτιστοποίησης με στόχους την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης και την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας. Για κάθε συνάρτηση κόστους μελετήθηκαν οι εξής συνδιασμοί μεταβλητών σχεδιασμού:

- 1η Περίπτωση: Μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης των δεσμών ρευστού
- 2η Περίπτωση: Μεταβλητές σχεδιασμού τα πλάτη ταλάντωσης και οι φάσεις των δεσμών ρευστού

Στον πίνακα 8.1 παρουσιάζονται οι τιμές των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας και των τετραγώνων τους για τη μη-ελεγχόμενη περίπτωση και για τις βέλτιστες τιμές που προέκυψαν για όλες τις περιπτώσεις βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Υπενθυμίζεται ότι τα μέσα τετράγωνα των συντελεστών είναι και οι συναρτήσεις κόστους σε κάθε περίπτωση, οι οποίες τίθενται προς ελαχιστοποίηση.

	Ελαχιστοποίηση της Μέσης Άνωσης				Ελαχιστοποίηση της Μέσης Οπισθέλκουσας			
	$\bar{c}_L$	$\bar{c}_L^2$	$\bar{c}_D$	$\bar{c}_D^2$	$\bar{c}_L$	$\bar{c}_L^2$	$\bar{c}_D$	$\bar{c}_D^2$
Χωρίς Έλεγχο	0.0	0.0303	1.3892	0.9656	0.0	0.0303	1.3892	0.9656
1η Περίπτωση	0.0	0.0	1.0630	0.7892	0.0	0.0	0.6119	0.3382
2η Περίπτωση	0.0	0.0	1.0946	0.6045	0.0	0.0	0.4902	0.1023

**Πίνακας 8.1:** Συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας για τις βέλτιστες τιμές που προέκυψαν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Καταρχάς, κατά την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της άνωσης, επιτεύχθηκε πλήρης μηδενισμός της συνάρτησης κόστους, ενώ παράλληλα υπήρξε μείωση και της οπισθέλκουσας, χωρίς να είναι στόχος της συγκεκριμένης βελτιστοποίησης. Αντίστοιχα, κατά την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της οπισθέλκουσας, υπήρξε μηδενισμός των συντελεστών της άνωσης, χωρίς πάλι να αποτελεί στόχο της βελτιστοποίησης. Ακόμα, είναι εμφανές, πως με τη μεταβολή της φάσης κάθε δέσμης επιτυγχάνεται πολύ μικρότερη τιμή των συντελεστών της οπισθέλκουσας, κάτι που φαίνεται περισσότερο στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης της οπισθέλκουσας.

Συμπερασματικά, η ροή μπορεί να ελεγχθεί με αρκετά αυξημένη τιμή του πλάτους ταλάντωσης κάθε δέσμης, μέχρι όμως ένα όριο, καθώς περαιτέρω αύξηση συνεπάγε-

ται και αύξηση της οπισθέλκουσας. Με τη βοήθεια της φάσης κάθε δέσμης, αυτό το όριο μπορεί να ξεπεραστεί, επιτρέποντας μεγαλύτερες τιμές έντασης της ταχύτητας, με ταυτόχρονη μείωση της μέσης οπισθέλκουσας. Αυτό φαίνεται και στον πίνακα 8.2, όπου παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων της ταχύτητας κάθε δέσμης που προέκυψαν για όλες τις περιπτώσεις βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Ο πλήρης μηδενισμός των συντελεστών της άνωσης για όλες τις περιπτώσεις και η μείωση της συνάρτησης κόστους στην ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας κατά 65% και 89% για την 1η και 2η περίπτωση αντίστοιχα, φανερώνει την αξία της βελτιστοποίησης, καθώς αποτελεί ένα εργαλείο χαμηλού κόστους που καθιστά εφικτή την εξαγωγή πληροφοριών σχετικά με τον σχεδιασμό της βέλτιστης διάταξης ενεργητικού ελέγχου που επιφέρει σημαντική μείωση των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο. Ακόμα περισσότερο, η χρήση διαφορετικής φάσης για κάθε δέσμη, κάτι που μελετάται για πρώτη φορά σε αυτήν την εργασία, κρίνεται απόλυτα απαραίτητη, καθώς, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία σε πρακτικά θέματα υλοποίησης, επιτυγχάνεται σημαντικά καλύτερος έλεγχος της ροής.

Δέσμη Ρευστού	Ελαχιστοποίηση της Μέσης Άνωσης			Ελαχιστοποίηση της Μέσης Οπισθέλκουσας		
	1η Περίπτωση	2η Περίπτωση		1η Περίπτωση	2η Περίπτωση	
	Πλάτος Ταλάντωσης $A^k$	Πλάτος Ταλάντωσης $A^k$	Φάση $t_0^k$	Πλάτος Ταλάντωσης $A^k$	Πλάτος Ταλάντωσης $A^k$	Φάση $t_0^k$
1	-0.0102	-0.0108	0	0.0285	0.0345	0
2	-0.0207	-0.0218	-0.0125	0.0569	0.0667	0.0118
3	-0.0221	-0.0231	-0.0106	0.0440	0.0492	0.0073
4	-0.0269	-0.0278	-0.0245	-0.025	-0.0323	-0.0058
5	-0.0372	-0.0387	-0.0761	-0.122	-0.1396	-0.0019
6	-0.0475	-0.0503	-0.0381	-0.082	-0.0785	-0.0010
7	-0.0426	-0.0444	0.0143	-0.035	-0.0363	-0.0019
8	-0.0205	-0.0220	-0.0186	-0.008	-0.0142	0.0014
9	0.0011	0.0008	-0.0077	0.0040	-0.0051	-0.0035
10	0.0108	0.0111	-0.0435	0.0070	0.0054	-0.0107
11	0.0052	0.0053	-0.0025	0.0018	-0.0006	-0.0021

**Πίνακας 8.2:** Βέλτιστες τιμές των παραμέτρων της ταχύτητας κάθε δέσμης, που προέκυψαν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.



Μελλοντικά, θα είχε ενδιαφέρον η μελέτη ως προς τη βέλτιστη τοποθέτηση των δεσμών ρευστού, έτσι ώστε μαζί με τις τιμές των παραμέτρων της ταχύτητας κάθε δέσμης να προκύπτει και η θέση της. Ακόμα, θα ήταν ιδιαίτερα σημαντικό, να ληφθεί υπόψη και η ενέργεια που καταναλώνεται από τις δέσμες ρευστού στη συνάρτηση κόστους, καθώς δεν πρέπει να αμελούνται και οι μεγάλες τιμές της ταχύτητας που προέκυψαν, που σε αρκετές περιπτώσεις ξεπερνούσαν την ταχύτητα της αδιατάραχης ροής.

---



## Παράρτημα Α΄

### Περί περιοδικότητας της συνάρτησης $\frac{\delta v}{\delta T}$ - Ένα παράδειγμα κατανόησης

Η ανάλυση που ακολουθεί γίνεται για ένα μονοδιάστατο εικονικό πεδίο ταχύτητας απλοϊκής μορφής, χωρίς βλάβη της γενικότητας, δεδομένου ότι κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε σειρά ημιτονοειδών συναρτήσεων με πλάτος ανεξάρτητο του χρόνου.

Έστω περιοδική λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ) με περίοδο  $T$  της μορφής

$$v(x, t) = 5 + x \sin \left( x - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (\text{Α΄.0.1})$$

Η παραγωγή της εικονικής ταχύτητας της σχέσης Α΄.0.1 ως προς  $T$  δίνει τη **μερική παράγωγο** της  $v(x, t)$  ως προς  $T$

$$\frac{\partial v}{\partial T}(x, t) = \frac{2\pi t}{T^2} x \cos \left( x - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (\text{Α΄.0.2})$$

Στα άκρα μιας περιόδου, λογιζόμενης από την αφετηρία  $a$  ως το τέλος  $a + T$ , είναι

$$\frac{\partial v}{\partial T}(x, t = a) = \frac{2\pi a}{T^2} x \cos \left( x - \frac{2\pi a}{T} \right)$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial T}(x, t = a + T) &= \frac{2\pi(a + T)}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T} - 2\pi\right) \\ &= \frac{2\pi a}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right)\end{aligned}$$

Έτσι φαίνεται ότι

$$\frac{\partial v}{\partial T}(x, t = a) \neq \frac{\partial v}{\partial T}(x, t = a + T)$$

και άρα η συνάρτηση  $\frac{\partial v}{\partial T}(x, t)$  **δεν είναι περιοδική**. Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και, αλλάζοντας την περίοδο  $T$ , οι εικονικές ταχύτητες στις στιγμές  $t = a$  και  $t = a + T$  αλλάζουν 'διαφορετικά'.

Από την άλλη πλευρά, η **ολική παράγωγος** της  $v(x, t)$  είναι

$$\frac{\delta v}{\delta T}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta T} \quad (\text{A'.0.3})$$

όπου το  $\frac{\partial v}{\partial t}$  δίνεται από τη σχέση A'.0.2 και η παραγώγιση της A'.0.1 δίνει

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = -\frac{2\pi x}{T} \cos\left(x - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

Στα άκρα μιας περιόδου, δηλαδή για  $t = a$  και  $t = a + T$ , είναι

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t = a) = -\frac{2\pi x}{T} \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right)$$

και

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t = a + T) = -\frac{2\pi x}{T} \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T} - 2\pi\right)$$

ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\delta t}{\delta T}(t = a) = 0$$


---

$$\frac{\delta t}{\delta T}(t = a + T) = 1$$

Άρα, για οποιοδήποτε  $x$  και  $t = a$ , η ολική παράγωγος  $\frac{\delta v}{\delta T}$  γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta v}{\delta T}(x, t = a) &= \frac{2\pi a}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) - \frac{2\pi x}{T} \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) \frac{\delta t}{\delta T}(t = a) \\ &= \frac{2\pi a}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) \end{aligned}$$

ενώ για το ίδιο  $x$  και  $t = a + T$ , είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta v}{\delta T}(x, t = a + T) &= \frac{2\pi a}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) \\ &\quad - \frac{2\pi}{T} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) \frac{\delta t}{\delta T}(t = a + T) \\ &= \frac{2\pi a}{T^2} x \cos\left(x - \frac{2\pi a}{T}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\frac{\delta v}{\delta T}(x, t = a) = \frac{\delta v}{\delta T}(x, t = a + T)$$

και, άρα, η συνάρτηση  $\frac{\delta v}{\delta T}(x, t)$  είναι περιοδική, ενώ η  $\frac{\partial v}{\partial T}(x, t)$  δεν είναι.



# Βιβλιογραφία

- [1] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα 2006.
- [2] Α.Σ. Ζυμάρης, Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 2010.
- [3] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, "Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation", ASME Paper GT-2006/90466, 2006.
- [4] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, "A Continuous Adjoint Formulation with Emphasis to Aerodynamic-Turbomachinery Optimization", ECCOMAS CFD 2006 Conference, Egmond Aan Zee, Sept. 2006.
- [5] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, "A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows", Computers & Fluids, 36, 325-341, 2007.
- [6] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, C. Othmer, "Continuous Adjoint Approach to the Spalart-Allmaras Turbulence Model for Incompressible Flows", Computers & Fluids, 38, 1528-1538, 2009.
- [7] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, C. Othmer, "Optimal Location of Suction or Blowing Jets Using the Continuous Adjoint Approach", ECCOMAS CFD 2010, 5th European Conference on CFD, Lisbon, June 2010.
- [8] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou, C. Othmer: "The Continuous Adjoint Method as a Guide for the Design of Flow Control Systems Based on Jets", Engineering Computations, to appear 2013.

- 
- [9] A. Carnarius, F. Thiele, E. Ozkaya, A. Nemili, N.R. Gauger, "Optimal Control of Unsteady Flows Using a Discrete and a Continuous Adjoint Approach", 2012.
- [10] I.S. Kavvadias, G. Karpouzas, E.M. Papoutsis-Kiachagias, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, "", EUROGEN 2013, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, October 7 - 9, 2013.
- [11] Σωκράτης Τσαγγάρης, Μηχανική των Ρευστών, Αθήνα 2005.
- [12] Γ. Μπεργελές, Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Αθήνα 2012.
- [13] OpenFoam, Programmer's Guide, Version 1.6, July 2009.
- [14] OpenFoam, User Guide, Version 1.6, July 2009.
- [15] H. Jasak, Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial college, London, 1998.
- [16] F. Juretic, Error Analysis in Finite Volume CFD, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial college, London, 2004.
- [17] Α.Β. Τάτσης, Βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμες ροές με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και checkpointing, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα 2012.
- [18] R.I. Issa, "Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting", J. Comp. Physics, 62:40–65, 1986.
- [19] Q.Wang, P.Moin, "Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation", 2008, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 2008.
- [20] A. Griewank and A. Walther, "Algorithm 799: Revolve: An Implementation of Checkpointing for the Reverse or Adjoint Mode of Computational Differentiation", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 26, No. 1., March 2000.
-



- 
- [21] Goddath Earth Sciences Data and Information Services Center,  
[http://disc.sci.gsfc.nasa.gov/education-and-outreach/additional/science-focus/ocean-color/science\\_focus.shtml/vonKarman\\_vortices.shtml](http://disc.sci.gsfc.nasa.gov/education-and-outreach/additional/science-focus/ocean-color/science_focus.shtml/vonKarman_vortices.shtml)
- [22] Wikipedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n\\_vortex\\_street](http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street)
- [23] Enseiht, [http://hmf.enseiht.fr/travaux/CD0102/travaux/optmfn/gpfmho/01-02/grp1/phy\\_know.htm](http://hmf.enseiht.fr/travaux/CD0102/travaux/optmfn/gpfmho/01-02/grp1/phy_know.htm)
- [24] S. Goldstein , Modern Developments in Fluid Dynamics. Clarendon Press: Oxford. 1938.
- [25] P.A. Irwin, Vortices and tall buildings: A recipe for resonance, Physics Today (American Institute of Physics), September 2010.
-