



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**Εφαρμογές θεωρίας σύνθετων συστημάτων (complex systems)
και fractal γεωμετρίας σε θέματα ανάπτυξης δικτύων
ηλεκτρικής ενέργειας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φανή Μπαράκου

Επιβλέπων : Νικόλαος Δ. Χατζηαργυρίου

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Άρης Δημέας

Δρ. Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**Εφαρμογές θεωρίας σύνθετων συστημάτων (complex systems)
και fractal γεωμετρίας σε θέματα ανάπτυξης δικτύων
ηλεκτρικής ενέργειας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φανή Μπαράκου

Επιβλέπων : Νικόλαος Δ. Χατζηαργυρίου

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Άρης Δημέας

Δρ. Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17^η Δεκεμβρίου 2013.

.....

Ν. Χατζηαργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Σ. Παπαθανασίου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Π. Γεωργιλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

.....

Φανή Μπαράκου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Φανή Μπαράκου, 2013

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνεύονται ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν κατά την εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή μου κ. Νικόλαο Χατζηαργυρίου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την εργασία αυτή, και κυρίως για τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Δρ. Δημέα Άρη και στην υποψήφια Διδάκτορα Δέσποινα Κουκουλά για τη συνεχή τους καθοδήγηση και την εξαιρετική μας συνεργασία, που ήταν καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση της εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την Δρ. Προβατά Αστέρω του Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος για την πολύτιμη βοήθειά της στο κομμάτι των fractal.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την εργασία αυτή στην οικογένειά μου, η οποία με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται μία αρχική προσπάθεια να εφαρμοστεί η fractal γεωμετρία στο σχεδιασμό, την ανάπτυξη και την επέκταση των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν διάφορα μοντέλα fractal ανάπτυξης και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης τους συγκρίθηκαν με τις διαθέσιμες εικόνες δικτύων έτσι ώστε να διαπιστωθεί, αρχικά αν μοιάζουν με δίκτυα και στη συνέχεια για να επιλεγεί το κατάλληλο μοντέλο.

Το πρώτο στάδιο της εργασίας περιλαμβάνει τη βιβλιογραφική διερεύνηση δύο θεματικών ενοτήτων: των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας και της fractal γεωμετρίας. Στη θεματική ενότητα των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας περιγράφεται αναλυτικά η δομή τους και γίνεται αναφορά στους βασικούς άξονες σύμφωνα με τους οποίους υλοποιείται η ανάπτυξη του ηλεκτρικού δικτύου καθώς και κάποια έργα ενισχύσεων-βελτιώσεων του. Στο τμήμα της fractal γεωμετρίας μέσω παραδειγμάτων (τόσο μαθηματικών όσο και φυσικών) δίνεται ο ορισμός ενός fractal αντικειμένου και των χαρακτηριστικών του. Ορίζεται επίσης η fractal διάσταση, παρουσιάζεται ο θεωρητικός τρόπος εύρεσης της και εφαρμόζεται σε κάποια γνωστά ντετερμινιστικά fractal σχήματα. Εξηγείται ακόμη η διαφορά μεταξύ ντετερμινιστικών και στοχαστικών fractal καθώς τα ηλεκτρικά δίκτυα εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία. Τέλος γίνεται αναφορά σε όλες τις πρακτικές μεθόδους προσδιορισμού fractal διαστάσεων σε αναπτυσσόμενες δομές και πιο συγκεκριμένα αναλύεται η μέθοδος box-counting που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Σε δεύτερο στάδιο αναλύονται όλα τα μοντέλα fractal ανάπτυξης που θα χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση αναπαράστασης ηλεκτρικών δικτύων και τα οποία είναι: το Diffusion-Limited Aggregation Model (DLA), το Dielectric Breakdown Model (DBM) και οι διάφορες παραλλαγές τους. Γίνεται λεπτομερής περιγραφή τόσο του αλγορίθμου ανάπτυξης που ακολουθεί το κάθε μοντέλο όσο και του τρόπου υλοποίησης του στο λογισμικό Matlab.

Στο τρίτο στάδιο μετράται η fractal διάσταση κάποιων διαθέσιμων ηλεκτρικών δικτύων με τη χρήση του box-counting αλγορίθμου. Παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα της προσομοίωσης όλων των μοντέλων fractal ανάπτυξης και των fractal διαστάσεων τους. Τέλος επιλέγεται το καταλληλότερο μοντέλο για την προσομοίωση αναπαράστασης δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την ανάπτυξη και επέκταση δικτύου.

Λέξεις Κλειδιά: δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας, ανάπτυξη και επέκταση δικτύου, fractal γεωμετρία, fractal διάσταση, box-counting method, Diffusion-Limited Aggregation Model (DLA), Dielectric Breakdown Model (DBM)

Abstract

This thesis presents an initial attempt to apply fractal geometry in the design, development and expansion of electrical grids. For this reason, various fractal growth models were designed and the simulation results were compared with the available images of grids to determine whether they resemble grids and then to select the appropriate model.

The first section, of this thesis includes the literature investigation of two parts: electrical grids and fractal geometry. In the first part the structure of the electrical grids is described, and the basic rules of the development of the grid are introduced. In the second part a fractal object and its characteristics are defined through examples (both mathematical and physical). The fractal dimension is also specified and the theoretical way of its determination is presented and applied to a few known deterministic fractal shapes. Moreover, the difference between deterministic and stochastic fractals is explained as electrical networks fall into the second category. Finally, all the practical methods for determining fractal dimensions in growing structures are presented and the box-counting method is analyze more specifically.

In the second section, the fractal growth models to be used for the simulation of electrical grids is analyzed which are: the Diffusion-Limited Aggregation Model (DLA), the Dielectric Breakdown Model (DBM) and their modified versions. The algorithms of its model are developed using Matlab.

In the third section, the fractal dimension of the available electrical grids is measured using the box-counting algorithm. There is also the presentation and the comparison of the result structures of all the fractal growth models and their fractal dimension. Finally the most appropriate model for simulating electrical grids is selected its results, for network growth and expansion, is presented.

Key-words: electrical grid, planning of electrical grid, fractal geometry, fractal dimension, box-counting method, Diffusion-Limited Aggregation Model (DLA), Dielectric Breakdown Model (DBM)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	5
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ABSTRACT	8
ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ	12
ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	17
ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	17
1.1 Γενικά.....	17
1.2 Όρια Συστήματος-Δικτύου Διανομής.....	18
1.2.1 Διασυνδεδεμένο σύστημα	18
1.2.2 Μη-διασυνδεδεμένα νησιά.....	19
1.3 Δομή Υποσταθμών υποβιβασμού 150KV/MT	19
1.3.1 Επαρχιακή χώρα.....	19
1.3.2 Αττική.....	20
1.3.3 Θεσσαλονίκη.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	22
ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΔΙΑΝΟΜΗΣ.....	22
2.1 Γενικά.....	22
2.2 Εξοπλισμός Δικτύων Διανομής.....	22
2.3 Δίκτυο Μέσης Τάσης (MT)	23
2.3.1 Δομή του δικτύου Μέσης Τάσης.....	23
2.3.2 Επίπεδα Τάσεων στο δίκτυο Μέσης Τάσης	30
2.3.3 Βασική τυποποίηση δικτύων Μέσης Τάσης	31
2.4 Δίκτυο Χαμηλής Τάσης (XT).....	31
2.4.1 Δομή του δικτύου Χαμηλής Τάσης.....	31
2.5 Μήκη δικτύου MT και XT και πλήθος υποσταθμών MT/XT	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	36
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ	36
3.1 Βασικοί άξονες.....	36
3.2 Ανάπτυξη έργων υποδομής στο δίκτυο.....	37
3.2.1 Ενισχύσεις-Βελτιώσεις του δικτύου.....	37
3.2.2 Κατασκευή νέων Υποσταθμών ΥΤ/MT	38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	41
Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTAL	41
4.1 Το τριαδικό σύνολο Cantor	41
4.2 Η έννοια της κλιμάκωσης	42
4.3 Ανιχνεύοντας τη Γεωμετρία της φύσης	44
4.4 Ορισμός αντικειμένου fractal και διάστασης fractal	46
4.4.1 Ορισμός ενός fractal.....	46
4.4.2 Το παράδοξο της καμπύλης του Koch	46

4.4.3	Τρόπος εύρεσης διάστασης fractal.....	51
4.4.4	Ορισμός διάστασης fractal	52
4.5	Υπολογισμός διάστασης γνωστών fractal σχημάτων	53
4.5.1	Τριαδικό σύνολο cantor	53
4.5.2	Καμπύλη του Koch.....	54
4.5.3	Το "τρυπητό" του Sierpinski	56
4.6	Ο ρόλος της αυτοομοιότητας	57
4.7	Η διάσταση Hausdorff.....	57
4.8	Αλγοριθμικά (ντετερμινιστικά) και τυχαία fractals	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5		64
ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ		
FRACTAL.....		64
5.1	Μέτρηση διάστασης fractal σε πειράματα.....	64
5.2	Αξιολόγηση των αριθμητικών δεδομένων.....	67
5.3	Μέθοδοι υπολογισμού fractal διάστασης.....	69
5.3.1	Μέθοδος box-counting	69
5.3.2	Μέθοδος density-density correlation.....	70
5.4	Μοντέλα ανάπτυξης fractal δομών	71
5.4.1	Μοντέλο Eden	71
5.4.2	Μοντέλο DLA(Diffusion-Limited Aggregation)	73
5.4.3	Μοντέλο DBM (Dielectric Breakdown Model)	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6		75
ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ FRACTAL ΔΟΜΩΝ ΚΑΙ DIFFUSION-LIMITED ΑΝΑΠΤΥΞΗ		
6.1	Κατασκευή ντετερμινιστικών fractal.....	75
6.2	Κατασκευή στοχαστικών Fractal.....	80
6.3	Diffusion-Limited ανάπτυξη	81
6.3.1	Μοντέλο Diffusion-limited Aggregation (DLA).....	82
6.3.1.1	Απλό μοντέλο DLA	82
6.3.1.2	Παραλλαγές του Μοντέλου DLA.....	85
6.3.1.3	Μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια	87
6.3.2	Dielectric Breakdown Model (DBM).....	87
6.3.2.1	Απλό μοντέλο (DBM)	87
6.3.2.2	Μοντέλο DBM με φυσικούς περιορισμούς.....	91
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7		93
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ FRACTAL ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ		
7.1	Μοντέλο DLA (Diffusion-Limited Aggregation).....	93
7.1.1	Περιγραφή.....	93
7.1.2	Διάγραμμα ροής	94
7.2	Μοντέλο DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης.....	96
7.3	Μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια.....	96
7.4	Μοντέλο DBM (Dielectric Breakdown Model).....	97
7.4.1	Περιγραφή.....	97

7.4.2	Διάγραμμα ροής	99
7.5	Μοντέλο DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς	100
7.6	Μοντέλο DBM με δρόμους και πόλεις	101
7.7	Η γεωμετρία των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας.....	101
7.8	Επιλογή του κατάλληλου μοντέλου fractal ανάπτυξης	103
7.9	Συσχετισμός παραμέτρων του μοντέλου DBM με τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας.....	104
7.10	Επέκταση δικτύου με τη χρήση του DBM αλγόριθμου	105
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8		107
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		107
8.1	Μέτρηση fractal διάστασης ηλεκτρικών δικτύων.....	107
8.1.1	Fractal διάσταση δικτύων XT	107
8.1.2	Fractal διάσταση δικτύων MT.....	110
8.2	Αποτελέσματα DLA αλγόριθμου	112
8.2.1	Αποτελέσματα απλού μοντέλου DLA.....	112
8.2.2	Αποτελέσματα μοντέλου DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης	114
8.2.3	Αποτελέσματα μοντέλου DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια	116
8.3	Αποτελέσματα DBM αλγόριθμου	118
8.3.1	Αποτελέσματα απλού DBM μοντέλου.....	118
8.3.2	Αποτελέσματα μοντέλου DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς.....	122
8.3.3	Αποτελέσματα Μοντέλου DBM με δρόμους και πόλεις.....	125
8.3.4	Αποτελέσματα Μοντέλου DBM για την επέκταση δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας.....	130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9		135
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....		135
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		138

Λίστα Εικόνων

ΕΙΚΟΝΑ 1.1 ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΔΙΑΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ. [3]	18
ΕΙΚΟΝΑ 1.2 ΌΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΑΓΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΣΤΟ ΔΙΑΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ. [3]	19
ΕΙΚΟΝΑ 2.1 ΑΚΤΙΝΙΚΟ ΑΠΛΟ ΕΝΑΕΡΙΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΤ. [3]	25
ΕΙΚΟΝΑ 2.2 ΒΡΟΧΟΕΙΔΕΣ ΑΠΛΟ ΕΝΑΕΡΙΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΤ. [3]	26
ΕΙΚΟΝΑ 2.3 ΒΡΟΧΟΕΙΔΕΣ ΑΠΛΟ ΥΠΟΓΕΙΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΤ. [3]	27
ΕΙΚΟΝΑ 2.4 ΒΡΟΧΟΕΙΔΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΗ ΜΤ. [3]	28
ΕΙΚΟΝΑ 2.5 ΑΡΑΧΝΟΕΙΔΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΗ ΜΤ. [3]	29
ΕΙΚΟΝΑ 2.6 ΑΤΡΑΚΤΟΕΙΔΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΗ ΜΤ. [3]	29
ΕΙΚΟΝΑ 2.7 ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΧΤ. [2]	32
ΕΙΚΟΝΑ 2.8 ΑΚΤΙΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΗ ΧΤ (ΕΝΑΕΡΙΑ ΔΙΚΤΥΑ). [3]	33
ΕΙΚΟΝΑ 2.9 ΥΠΟΓΕΙΑ ΚΑΛΩΔΙΑΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΧΤ ΑΚΤΙΝΙΚΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ. [3]	33
ΕΙΚΟΝΑ 3.1 ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΤ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΤΑΞΗ ΝΕΟΥ Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ. [3]	39
ΕΙΚΟΝΑ 4.1 ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΤΡΙΑΔΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ CANTOR. [4]	42
ΕΙΚΟΝΑ 4.2 Η ΦΤΕΡΗ ΤΟΥ BARNSLEY. [4]	43
ΕΙΚΟΝΑ 4.3 ΟΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΕΝΟΣ ΜΕΓΑΛΟΥ ΔΕΝΤΡΟΥ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΠΟΛΥ ΕΝΤΟΝΑ ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ. [4]	44
ΕΙΚΟΝΑ 4.4 (Α) ΟΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΝΕΥΡΩΝ ΕΝΟΣ ΦΥΛΛΟΥ, (Β) ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΝΕΥΡΩΝΑ. [4]	44
ΕΙΚΟΝΑ 4.5 ΚΟΡΥΦΟΓΡΑΜΜΕΣ ΒΟΥΝΩΝ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΠΑΡΟΜΟΙΑΣ ΜΟΡΦΗΣ ΟΣΟ ΤΙΣ ΠΛΗΣΙΑΖΟΥΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ. [4]	45
ΕΙΚΟΝΑ 4.6 Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΤΟΥ ΚΟΧ. [11]	47
ΕΙΚΟΝΑ 4.7 ΤΟ ΝΗΣΙ ΤΟΥ ΚΟΧ. [11]	48
ΕΙΚΟΝΑ 4.8 ΤΟ ΝΗΣΙ ΤΟΥ ΚΟΧ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ. [11]	48
ΕΙΚΟΝΑ 4.9 ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ ΛΕΓΟΜΕΝΟ Δ-ΜΕΤΡΟ ΤΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ S ΤΟ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΜΕ ΤΟΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΡΙΘΜΟ $N(L, \lambda)$ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΠΛΕΥΡΑΣ λ . [4]	51
ΕΙΚΟΝΑ 4.10 ΑΠΟ ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΕ ΜΙΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΗ: ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΤΟΥ ΚΟΧ. [4]	55
ΕΙΚΟΝΑ 4.11 ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ ΣΤΑΔΙΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ "ΤΡΥΠΗΤΟΥ" ΤΟΥ SIERPINSKI. [4]	56
ΕΙΚΟΝΑ 4.12 Ο ΠΟΤΑΜΟΣ ΑΜΑΖΟΝΙΟΣ. [5]	59
ΕΙΚΟΝΑ 4.13 ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΥΣΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ FRACTALS: Α) ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΧΡΥΣΟΥ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ, Β) ΜΕΛΑΝΙ ΣΕ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΟ ΧΑΡΤΙ, Γ) ΑΓΓΕΙΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΑΜΦΙΦΛΕΙΣΤΡΟΕΙΔΟΥΣ ΧΙΤΩΝΑ ΤΟΥ ΜΑΤΙΟΥ ΚΑΙ Δ) ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΚΚΕΝΩΣΗ (ON GLASS PLATE). [5]	60
ΕΙΚΟΝΑ 4.14 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΗΜΙΑΓΩΓΟΥ. [5]	61
ΕΙΚΟΝΑ 4.15 FRACTAL LAKE NASER (ΑΙΓΥΠΤΟΣ, ΑΠΟ ΔΟΥΡΥΦΟΡΟ). [5]	61
ΕΙΚΟΝΑ 5.1 ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΠΙΠΤΟΥΣΑΣ ΚΑΙ ΣΚΕΔΑΖΟΜΕΝΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ. [8]	65

ΕΙΚΟΝΑ 5.2 Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΤΑ ΤΡΙΑ ΚΥΡΙΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ FRACTAL ΜΕΓΕΘΩΝ. [8].....	66
ΕΙΚΟΝΑ 5.3 ΣΧΗΜΑΤΙΚΟ LOG-LOG ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΠΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ $N(R)$ ΠΟΥ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΕ ΕΝΑ FRACTAL ΚΑΙ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΜΙΑ ΣΦΑΙΡΑ ΑΚΤΙΝΑΣ R . ΑΝ Η ΑΚΤΙΝΑ R ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ Η ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΗΣ FRACTAL ΔΟΜΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΜΙΑ ΠΕΡΙΕΡΓΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ. Η FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΣΤΗΝ ΣΩΣΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ. [8].....	68
ΕΙΚΟΝΑ 5.4 DENSITY-DENSITY CORRELATION ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ FRACTAL ΔΟΜΕΣ. [8].....	71
ΕΙΚΟΝΑ 5.5 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΙΑΣ ΕΔΕΝ ΔΟΜΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ ΜΕ "ΣΠΟΡΟ" ΕΝΑ ΜΟΝΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....	72
ΕΙΚΟΝΑ 5.6 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΙΑΣ ΕΔΕΝ ΔΟΜΗΣ ΜΕ "ΣΠΟΡΟ" ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ..	72
ΕΙΚΟΝΑ 5.7 ΜΙΑ ΕΔΕΝ ΔΟΜΗ ΠΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΗΚΕ ΑΠΟ ΕΝΑ "ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ-ΣΠΟΡΟ" ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 1500 ΚΑΤΕΙΛΗΜΜΕΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ.....	73
ΕΙΚΟΝΑ 5.8 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΙΑΣ DLA -ΔΟΜΗΣ. [12].....	74
ΕΙΚΟΝΑ 6.1 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ P ΣΤΟ P' ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (6.3) ΚΑΙ ΣΤΟ P'' ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΑΦΙΝΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (6.4). [4].....	76
ΕΙΚΟΝΑ 6.2 ΟΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΣΥΣΤΟΛΗΣ w_1, w_2, w_3 ΟΤΑΝ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥΝ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ A_0 ΠΛΕΥΡΑΣ 1 ΣΤΟ (Α) ΔΙΝΟΥΝ ΣΤΟ (Β) ΤΡΙΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΑ ΠΛΕΥΡΑΣ 12 . Ο ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΥΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ (6.9) ΑΚΟΛΟΥΘΩΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΖΕΙ ΤΟ (Β) ΣΤΑ 9 ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΟΥ (Γ) ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΠΟΛΛΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΟΔΗΓΕΙ ΤΕΛΙΚΑ ΣΤΟ ΓΝΩΣΤΟ ΤΡΥΠΗΤΟ ΤΟΥ SIERPINSKI, ΟΠΩΣ ΗΔΗ ΑΡΧΙΖΕΙ ΝΑ ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΚΑΘΑΡΑ ΑΠΟ ΤΟ (ΣΤ). [4].....	78
ΕΙΚΟΝΑ 6.3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ. [5].....	80
ΕΙΚΟΝΑ 6.4 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DLA ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ. Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΞΕΚΙΝΑΕΙ ΑΠΟ ΤΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ-ΣΠΟΡΟ. ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΤΗ ΔΟΜΗ ΜΑΣ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΑΥΡΟ, ΕΝΩ ΟΙ ΠΙΘΑΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΜΕ ΑΣΠΡΟ. ΣΤΟ ΣΧΗΜΑ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΤΡΟΧΙΕΣ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ, ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΦΤΑΝΕΙ ΠΟΛΥ ΜΑΚΡΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΡΕΦΕΤΑΙ. [11]	83
ΕΙΚΟΝΑ 6.5 ΜΙΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΙΚΡΗ ΔΟΜΗ DLA ΑΠΟΤΕΛΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟ 3000 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ. ΤΑ ΠΡΩΤΑ 1500 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΦΑΙΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΑΥΡΟ ΧΡΩΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ 1500 ΜΕ ΓΚΡΙ. [8].....	84
ΕΙΚΟΝΑ 6.6 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ DLA ΕΚΤΟΣ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΜΕ 50.000 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ. [8].....	86
ΕΙΚΟΝΑ 6.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DBM. [11]	89
ΕΙΚΟΝΑ 7.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA (ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ MATLAB).....	95
ΕΙΚΟΝΑ 7.2 ΑΡΧΙΚΕΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DBM: ΜΑΥΡΟ: $\phi=1$ ΓΚΡΙ: $\phi=0$. [17].....	97
ΕΙΚΟΝΑ 7.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM (ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ MATLAB).....	99
ΕΙΚΟΝΑ 8.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΧΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΙΑ.....	108
ΕΙΚΟΝΑ 8.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΧΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΙΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ BOX-COUNTING ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.	108
ΕΙΚΟΝΑ 8.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΧΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΠΑΤΡΑΣ.	109

ΕΙΚΟΝΑ 8.4 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΧΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΠΑΤΡΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ BOX-COUNTING ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.	110
ΕΙΚΟΝΑ 8.5 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΧΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΜΑΡΚΟΠΟΥΛΟΥ.....	111
ΕΙΚΟΝΑ 8.6 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΤ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΜΑΡΚΟΠΟΥΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ BOX-COUNTING ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.	111
ΕΙΚΟΝΑ 8.7 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 500×500 ΜΕ 10000 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ).	112
ΕΙΚΟΝΑ 8.8 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DLA ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.	113
ΕΙΚΟΝΑ 8.9 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΚΟΛΛΗΣΗΣ $p=0,5$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 500×500 ΜΕ 10000 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ).....	114
ΕΙΚΟΝΑ 8.10 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΚΟΛΛΗΣΗΣ $p=0,1$	115
ΕΙΚΟΝΑ 8.11 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΚΟΛΛΗΣΗΣ $p=0,01$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 500×500 ΜΕ 10000 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ).....	115
ΕΙΚΟΝΑ 8.12 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΚΟΛΛΗΣΗΣ.	116
ΕΙΚΟΝΑ 8.13 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΜΕ ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΛΑΝΩΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 300×300 ΜΕ 921 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ).	117
ΕΙΚΟΝΑ 8.14 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DLA ΜΕ ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΛΑΝΩΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ BOX-COUNTING ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.....	117
ΕΙΚΟΝΑ 8.15 ΜΙΑ ΤΥΠΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ $H=1$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 300×300 ΜΕ 4049 ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ).	118
ΕΙΚΟΝΑ 8.16 ΤΥΠΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ (Α) $H=1$ (Β) $H=1,5$ (Γ) $H=1,7$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 150×150).	119
ΕΙΚΟΝΑ 8.17 ΤΥΠΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ (Α) $H=2$ (Β) $H=3$ (Γ) $H=4$ (Δ) $H=5$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 150×150).	120
ΕΙΚΟΝΑ 8.18 ΤΥΠΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ (Α) $H=0,75$ (Β) $H=0,5$ (Γ) $H=0,25$ (Δ) $H=0$ (ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑ 150×150).	121
ΕΙΚΟΝΑ 8.19 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	123
ΕΙΚΟΝΑ 8.20 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	124
ΕΙΚΟΝΑ 8.21 ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM.....	125
ΕΙΚΟΝΑ 8.22 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1$, $\eta_\pi = 1,5$ ΚΑΙ $\eta = 2$	126
ΕΙΚΟΝΑ 8.23 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1,2$, $\eta_\pi = 1,5$ ΚΑΙ $\eta = 2$	126
ΕΙΚΟΝΑ 8.24 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1,3$, $\eta_\pi = 1,5$ ΚΑΙ $\eta = 2$	127
ΕΙΚΟΝΑ 8.25 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1,4$, $\eta_\pi = 1,5$ ΚΑΙ $\eta = 2$	127
ΕΙΚΟΝΑ 8.26 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1,5$, $\eta_\pi = 1,5$ ΚΑΙ $\eta = 2$	128
ΕΙΚΟΝΑ 8.27 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1,3$, $\eta_\pi = 1,7$ ΚΑΙ $\eta = 2$	128

ΕΙΚΟΝΑ 8.28 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1, 5$, $\eta_\pi = 1, 7$ ΚΑΙ $\eta = 2$	129
ΕΙΚΟΝΑ 8.29 ΑΡΧΙΚΗ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΠΕΚΤΑΣΗ.	131
ΕΙΚΟΝΑ 8.30 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1, 4$, $\eta_\pi = 1, 6$ ΚΑΙ $\eta = 2$ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΠΕΚΤΑΣΗ.....	131
ΕΙΚΟΝΑ 8.31 ΔΥΟ ΝΕΕΣ ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ.....	132
ΕΙΚΟΝΑ 8.32 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1, 5$, $\eta_\pi = 1, 7$ ΚΑΙ $\eta = 2$ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ.	132
ΕΙΚΟΝΑ 8.33 ΜΙΑ ΝΕΑ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ.....	133
ΕΙΚΟΝΑ 8.34 ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DBM ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $\eta_\delta = 1, 5$, $\eta_\pi = 1, 7$ ΚΑΙ $\eta = 2$ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ.	133
ΕΙΚΟΝΑ 9.1 ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΧΡΟΝΩΝ ΤΡΕΞΙΜΑΤΟΣ ΚΑΠΟΙΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ FRACTAL ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ.	137

Λίστα Πινάκων

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1 ΜΗΚΟΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΤ & ΧΤ ΕΤΟΥΣ 2008 (ΣΕ ΚΜ).....	34
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1 Η ΔΙΑΣΤΑΣΗ FRACTAL (D) ΤΩΝ ΔΟΜΩΝ ΤΟΥ DLA ΣΕ ΠΛΕΓΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ $2 \leq D \leq 6$. Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ D ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΣΤΗ ΔΙΠΛΑ ΣΤΗΛΗ. [8].....	85
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗ (D) ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΑΓΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DLA. [8]	87
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ Η ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DBM. ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΑΡΩΗΚΑΝ ΓΙΑ ΔΟΜΕΣ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ Ν ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑΤΑ D-ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ (WIESMANN ΚΑΙ ΡΙΕΤΡΟΝΕΡΟ 1986). [8].....	91
ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DLA ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....	113
ΠΙΝΑΚΑΣ 8.2 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ DBM ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ H.	122
ΠΙΝΑΚΑΣ 8.3 ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΤΙΣ ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.	125
ΠΙΝΑΚΑΣ 8.4 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	129
ΠΙΝΑΚΑΣ 8.5 FRACTAL ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	134

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Δομή των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας

1.1 Γενικά

Συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας είναι το σύνολο των εγκαταστάσεων και των μέσων που χρησιμοποιούνται για την παροχή ηλεκτρικής ενέργειας σε εξυπηρετούμενες περιοχές κατανάλωσης. Βασικές προϋποθέσεις καλής λειτουργίας ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ) είναι να παρέχει ηλεκτρική ενέργεια οπουδήποτε υπάρχει ζήτηση με το ελάχιστο δυνατό κόστος και τις ελάχιστες οικολογικές επιπτώσεις, εξασφαλίζοντας σταθερή συχνότητα, σταθερή τάση και υψηλή αξιοπιστία τροφοδότησης.

Η τροφοδότηση των καταναλωτών με ηλεκτρική ενέργεια προϋποθέτει τρεις ξεχωριστές λειτουργίες του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας: την παραγωγή, τη μεταφορά και τη διανομή. Η ηλεκτρική ενέργεια, από το σημείο που θα παραχθεί μέχρι το σημείο που θα καταναλωθεί, βρίσκεται σε μία συνεχή ροή και επειδή δεν μπορεί να αποθηκευθεί, πρέπει να παράγεται τη στιγμή ακριβώς που καταναλώνεται.

Η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται στους Σταθμούς Παραγωγής. Η σύγχρονη βιομηχανία ηλεκτρικής ενέργειας έχει θεμελιωθεί σε μία σειρά εφευρέσεων και τεχνικών εξελίξεων στη μετατροπή της θερμικής ενέργειας των ορυκτών καυσίμων (άνθρακα, πετρελαίου, φυσικού αερίου) και της μηχανικής ενέργειας των υδάτινων ροών και υδατοπτώσεων σε ηλεκτρική ενέργεια. Η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας σε μεγάλες ποσότητες από τα εργοστάσια παραγωγής προς τις περιοχές κατανάλωσης γίνεται με τις γραμμές υψηλής και υπερυψηλής τάσης, οι οποίες μεταφέρουν την ηλεκτρική ενέργεια σε κεντρικά σημεία του δικτύου, τους υποσταθμούς, από όπου ξεκινούν τα δίκτυα διανομής μέσης τάσης που διανέμουν την ηλεκτρική ενέργεια στους καταναλωτές διαμέσου των υποσταθμών διανομής και των γραμμών χαμηλής τάσης.

Οι εγκαταστάσεις παραγωγής και μεταφοράς είναι συνήθως οικονομικά εξαρτημένες μεταξύ τους και για τον λόγο αυτόν ο τεχνικός και οικονομικός σχεδιασμός των σταθμών παραγωγής, των κύριων γραμμών μεταφοράς και των κεντρικών υποσταθμών πρέπει να είναι ενιαίος, με κύριο στόχο την ικανοποίηση των ενεργειακών αναγκών της κατανάλωσης με το ελάχιστο δυνατό κόστος και τη μεγαλύτερη δυνατή αξιοπιστία τροφοδότησης. Η διανομή είναι συνήθως μία διαφορετική λειτουργία, η οποία σχεδιάζεται και αναπτύσσεται ανεξάρτητα και

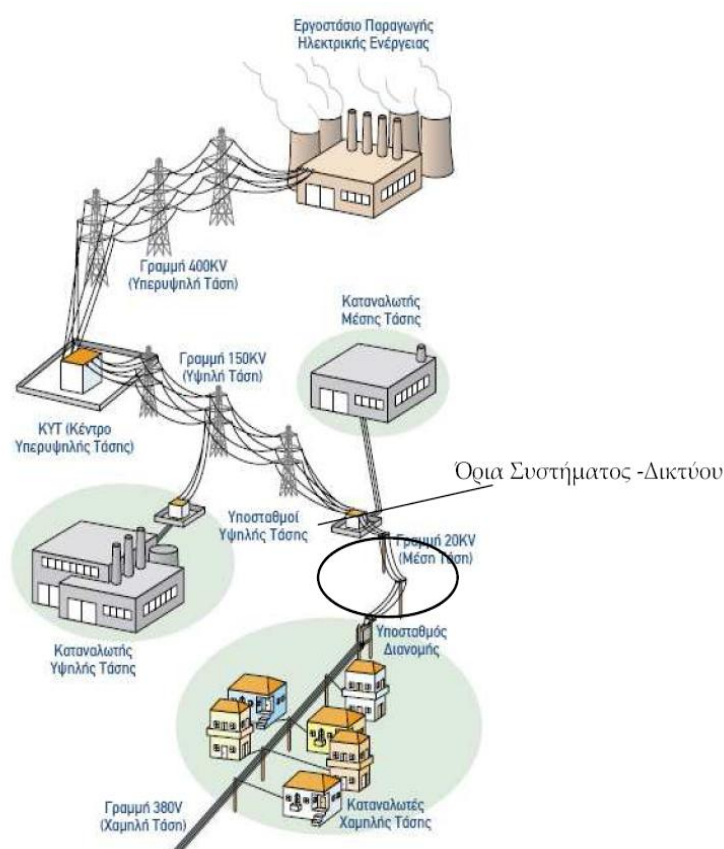
εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της περιοχής και των καταναλωτών τους οποίους εξυπηρετεί. [1]

1.2 Όρια Συστήματος-Δικτύου Διανομής

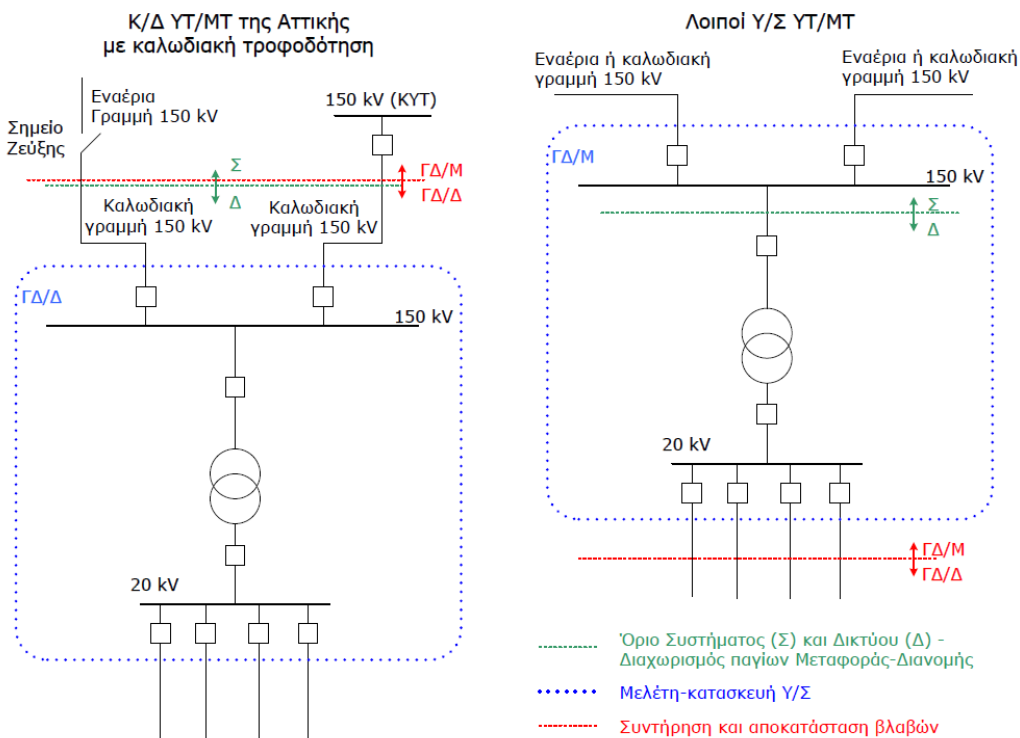
Όπως αναφέραμε και παραπάνω τα δίκτυα διανομής αναπτύσσονται ανεξάρτητα από το υπόλοιπο σύστημα και διακρίνονται από αυτό σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες.

1.2.1 Διασυνδεδεμένο σύστημα

Τα Δίκτυα Διανομής του διασυνδεδεμένου συστήματος περιλαμβάνουν το σύνολο των μετασχηματιστών (Μ/Σ) υποβιβασμού 150 kV Μέσης Τάσης (ΜΤ) με το διακοπτικό στοιχείο τους στην πλευρά της υψηλής τάσης των 150 kV και όλες τις κατάντη εγκαταστάσεις υποσταθμών (Υ/Σ) ή γραμμών μέχρι τους πελάτες. Ακόμη περιλαμβάνει τις υπόγειες καλωδιακές γραμμές των 150 kV της Αττικής. (Εικόνα 1.1, Εικόνα 1.2)



Εικόνα 1.1 Σχηματική αναπαράσταση του ελληνικού διασυνδεδεμένου συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. [3]



Εικόνα 1.2 Όρια κατανομής παγίων μεταξύ Μεταφοράς και Διανομής στο διασυνδεδεμένο σύστημα. [3]

1.2.2 Μη-διασυνδεδεμένα νησιά

Τα Δίκτυα Διανομής των μη-διασυνδεδεμένων νησιών περιλαμβάνουν όλες τις εγκαταστάσεις γραμμών (ΥΤ, ΜΤ ΧΤ) και τους Υ/Σ υποβιβασμού ανεξαρτήτως επιπέδου τάσης.

1.3 Δομή Υποσταθμών υποβιβασμού 150KV/MT

1.3.1 Επαρχιακή χώρα

Οι Υ/Σ υποβιβασμού 150 kV/MT, που εξυπηρετούν φορτία της Διανομής σε όλη την επαρχιακή χώρα, είναι κατά κανόνα υπαιθρίου τύπου, τροφοδοτούνται από εναέριες πύλες ΥΤ και περιλαμβάνουν συνήθως δύο Μ/Σ ισχύος 40/50 MVA συνδεσμολογίας τρίγωνο-αστέρα (Dy1), ενώ υπάρχουν και Υποσταθμοί με Μ/Σ ισχύος 20/25 MVA. Επιπρόσθετα, Μ/Σ ισχύος που εξυπηρετούν φορτία της Διανομής υφίστανται:

- σε χώρους υποσταθμών ανύψωσης τάσης συμβατικών σταθμών παραγωγής,
- εντός των Κέντρων Υψηλής Τάσης (ΚΥΤ) συνδεδεμένοι στην πλευρά 150 kV,
- σε χώρους εντός των Ορυχείων,
- σε υποσταθμούς που εξυπηρετούν και τη σύνδεση ΑΠΕ.

Σήμερα, η πλευρά ΜΤ αποτελείται από μεταλλοεπενδυμένους (metalclad) πίνακες συρομένου φορείου, οι οποίοι εγκαθίστανται μέσα σε κτήριο. Το βασικό σχήμα περιλαμβάνει απλούς ζυγούς 1600 Α και ανά Μ/Σ ισχύος έναν κεντρικό διακόπτη, οχτώ αναχωρήσεις και μία πύλη για σύνδεση πυκνωτή καθώς και μία διασύνδεση ζυγών ΜΤ. Σε παλαιότερους υποσταθμούς ο εξοπλισμός ΜΤ είναι υπαίθριος (ζυγοί και διακόπτες) και υπάρχουν κύριοι και βοηθητικοί ζυγοί ΜΤ.

Στο Διασυνδεδεμένο σύστημα, το όριο μεταξύ Συστήματος-Δικτύου βρίσκεται στους ακροδέκτες ΥΤ του Μ/Σ και ο έλεγχος των διακοπών αυτών είναι στην αρμοδιότητα του ΑΔΜΗΕ ως Διαχειριστή του Συστήματος.

Στα μη διασυνδεδεμένα νησιά οι Υ/Σ υποβιβασμού 150 kV/ΜΤ ανήκουν εξολοκλήρου στο Δίκτυο και ο έλεγχός τους γίνεται στην Κρήτη από το ΚΚΦ Κρήτης και στη Ρόδο από το τοπικό Κέντρο Κατανομής.

1.3.2 Αττική

Στην περιοχή της Αττικής σήμερα λειτουργούν συνολικά 33 υποσταθμοί 150/20 kV. Από αυτούς οι 14 είναι υποσταθμοί υποβιβασμού κλειστού τύπου, οι οποίοι έχουν εξοπλισμό ΥΤ μόνωσης αερίου SF₆ (Gas Insulated Substations - GIS) και υπόγεια τροφοδότηση. Οι υποσταθμοί αυτοί έχει καθιερωθεί να ονομάζονται Κέντρα Διανομής (Κ/Δ).

Στην περιφέρεια του Λεκανοπεδίου και στην υπόλοιπη Αττική λειτουργούν 18 ακόμη υποσταθμοί 150/20 kV με εναέρια τροφοδότηση από την υψηλή τάση (12 υπαίθριου και 6 ημίκλειστου τύπου) καθώς και ο κλειστός υποσταθμός (GIS) του Ολυμπιακού Χωριού. Η δομή των υποσταθμών αυτών είναι ίδια με αυτή της υπόλοιπης επαρχιακής χώρας (με έναν κεντρικό διακόπτη, οχτώ αναχωρήσεις και μία πύλη για σύνδεση πυκνωτή ανά Μ/Σ ισχύος, καθώς και μία διασύνδεση ζυγών ΜΤ).

Επιπλέον, υπάρχουν 6 υποσταθμοί 150/22 kV που τροφοδοτούν το παλιό σύστημα 22 kV της Πρωτεύουσας. Οι 5 εξ αυτών συστεγάζονται με υποσταθμούς 150/20 kV (ο 6ος είναι ο υποσταθμός 150/22 kV ΑΗΣ Αγ. Γεωργίου).

Τα Κ/Δ τροφοδοτούνται μέσω του καλωδιακού δικτύου 150 kV αρμοδιότητας Διανομής, ακτινικά από τα σημεία έγχυσης ισχύος από το Σύστημα, δηλαδή τα 4 κέντρα υψηλής τάσης (ΚΥΤ) 400/150 kV του «πετάλου» 400 kV περιμετρικά της Αττικής, τη ζεύξη 150 kV Αργυρούπολης και τους υποσταθμούς 150/22 kV Χαλκηδόνας, Ρουφ και ΑΗΣ Αγ. Γεωργίου.

Στα περισσότερα κέντρα διανομής η ισχύς των εγκατεστημένων Μ/Σ είναι 100 MVA, ενώ στα κέντρα διανομής Βριλησίων, Φαλήρου και Ελληνικού είναι 50 MVA. Ο σχεδιασμός της ΜΤ που εφαρμόστηκε στα κέντρα διανομής με Μ/Σ 100 MVA περιλαμβάνει δύο κεντρικούς διακόπτες ανά Μ/Σ και ημιζυγούς 1250 Α με εκατέρωθεν τομές ή διασυνδέσεις. Ο σχεδιασμός αυτός εφαρμόστηκε και στα νέα κέντρα διανομής Βριλησίων, Φαληρικού Δέλτα, Ελληνικού με Μ/Σ 50 MVA.

Στους υπόλοιπους υποσταθμούς υπαιθρίου τύπου της Αττικής είναι εγκατεστημένοι Μ/Σ σύνδεσης αστέρα-αστέρα (Υγ0) ισχύος 50 MVA και η ανάπτυξη της ΜΤ είναι ίδια με αυτή που εφαρμόζεται στην υπόλοιπη επαρχιακή χώρα (απλοί ζυγοί 1600 Α και ανά Μ/Σ ισχύος έναν κεντρικό διακόπτη, οχτώ αναχωρήσεις και μία πύλη για σύνδεση πυκνωτή καθώς και μία διασύνδεση ζυγών ΜΤ) εκτός από τον υποσταθμό Μαρκοπούλου.

Στην Αττική ο έλεγχος των διακοπών ΥΤ στα 14 κέντρα διανομής είναι στην αρμοδιότητα του Δικτύου. Επίσης, όλοι οι Μ/Σ εντός της Αττικής είναι συνδεσμολογίας Υγ0.

1.3.3 Θεσσαλονίκη

Στην πόλη της Θεσσαλονίκης η πλειονότητα των υποσταθμών 150 kV/ΜΤ είναι υπαιθρίου τύπου με την ίδια σύνθεση με τους υποσταθμούς της υπόλοιπης επαρχιακής χώρας, εκτός από 4 υποσταθμούς οι οποίοι είναι κλειστού τύπου (GIS) και έχουν δομή ίδια με αυτή των κέντρων διανομής της Αττικής. [3]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαμόρφωση των Δικτύων Διανομής

2.1 Γενικά

Κατασκευαστικά τα Δίκτυα Διανομής (ΔΔ) ΜΤ και ΧΤ διακρίνονται σε εναέρια και σε καλωδιακά υπόγεια.

Τα εναέρια δίκτυα είναι πολύ πιο φτηνά από τα υπόγεια, αλλά και πιο εύκολα στην εκμετάλλευσή τους. Καταλαμβάνουν όμως περισσότερο χώρο, για αυτό απαντώνται κυρίως στην ύπαιθρο. Τα τελευταία χρόνια η εξέλιξη της τεχνικής των καλωδίων επιτρέπει τη χρησιμοποίηση εναέριων καλωδίων αντί γυμνών αγωγών, κυρίως στη ΧΤ αλλά και στη ΜΤ. Το κόστος των εναέριων δικτύων ΧΤ με καλώδια δεν υπερτερεί των γυμνών αγωγών, ενώ τα πρώτα έχουν μικρότερη δαπάνη εγκατάστασης, αφού μπορούν να στηριχθούν και σε προσόψεις κτιρίων. Οι λόγοι αυτοί έχουν οδηγήσει στην επικράτηση των καλωδίων στη ΧΤ.

Τα υπόγεια καλωδιακά δίκτυα απαντώνται κυρίως στις πόλεις όπου υπάρχει μεγάλη πυκνότητα φορτίου. Κατασκευάζονται σε μεγαλύτερες διατομές από αυτές των εναέριων ώστε να αντέχουν να μεταφέρουν μεγαλύτερη ισχύ. Στα περίχωρα των πόλεων συναντώνται μικρά δίκτυα τόσο ΜΤ όσο και ΧΤ τα οποία αποτελούνται από τμήματα υπόγεια και εναέρια. [2]

2.2 Εξοπλισμός Δικτύων Διανομής

Η ανάγκη για χειρισμούς και η προστασία των χειριστών και της εγκατάστασης οδήγησε σε ορισμένα βασικά είδη διακοπών, που χρησιμοποιούνται στους πίνακες ΜΤ των ηλεκτρικών εταιριών καθώς και σε εκείνους των καταναλωτών ΜΤ. Οι διακόπτες είναι οι εξής:

1. Οι Αποζεύκτες (Isolators ή Disconnectors).
2. Οι Διακόπτες Φορτίου (Switches).
3. Οι Διακόπτες Ισχύος (Circuit Breakers)

Αποζεύκτες (Α/Ζ) ονομάζονται οι συσκευές που απομονώνουν από την παροχή ένα κύκλωμα που έχει ήδη τεθεί εκτός τάσης λειτουργίας ή διαρρέεται από αμελητέο ρεύμα. Το ρεύμα αυτό οφείλεται κυρίως στα χωρητικά ρεύματα των μονωτήρων, των ζυγών και των μετασχηματιστών. Οι αποζεύκτες δεν έχουν ισχύ διακοπής.

Διακόπτες Φορτίου (Δ/Φ) ονομάζονται οι συσκευές που έχουν την ικανότητα να διακόπτουν ή να αποκαθιστούν εντάσεις υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας του κυκλώματος. Δεν μπορούν όμως να διακόπτουν τα ρεύματα βραχυκύκλωσης. Στα δίκτυα διανομής υπάρχουν δύο είδη τέτοιων διακοπών τα οποία είναι:

1. Οι διακόπτες Απομόνωσης (Sectionalizing Switches). Οι διακόπτες αυτοί συνδέουν δύο τμήματα γραμμών της ίδιας γραμμής τροφοδοσίας.
2. Οι Διακόπτες Διασύνδεσης (Tie Switches). Σε συνθήκες κανονικής λειτουργίας, οι διακόπτες αυτοί είναι ανοικτοί. Όταν κλείσουν μπορούν να συνδέσουν δύο διαφορετικές γραμμές τροφοδοσίας δημιουργώντας κάποιο βρόχο.

Και τα δύο αυτά είδη διακοπών φορτίου συμβάλλουν στον ανασχηματισμό (επαναδιαμόρφωση) του δικτύου όσον αφορά τη λειτουργία του.

Διακόπτες Ισχύος (Δ/I) ονομάζονται οι συσκευές που έχουν την ικανότητα να διακόπτουν ή να αποκαθιστούν τις εντάσεις υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας του κυκλώματος, όπως βέβαια και οι Δ/Φ . Επιπλέον προστατεύουν την εγκατάσταση σε περίπτωση βραχυκυκλώματος. Οι Δ/I έχουν μεγαλύτερη ισχύ διακοπής από τους Δ/Φ .

Τα Μέσα Προστασίας που χρησιμεύουν για την αυτόματη απομόνωση τμημάτων του δικτύου σε περίπτωση σφάλματος και στην προστασία στοιχείων του κυκλώματος είναι:

1. Οι Δ/I , όταν δέχονται εντολές από Ηλεκτρονόμους Προστασίας.
2. Οι Ασφάλειες (ΑΣΦ).

Στην πράξη χρησιμοποιούνται συνδυασμοί των παραπάνω στοιχείων όπως είναι:

1. $\Delta/\Phi - A/Z$, ώστε όταν βρίσκεται ανοικτός ο Δ/Φ να μπορεί να απομονώσει ο A/Z . Αντίστροφα, όταν ο A/Z κλείσει να ακολουθήσει και ο Δ/Φ .
2. $A/Z - \Delta/I$, ώστε με το άνοιγμα των επαφών του Δ/I και την ενδεχόμενη δημιουργία τόξου να εξασφαλίζεται βέβαιη απομόνωση του κυκλώματος μέσω του A/Z .
3. $\Delta/\Phi - AΣΦ$, ώστε με τον Δ/Φ να υπάρχει δυνατότητα χειρισμών, αλλά και προστασία έναντι βραχυκυκλώματος μέσω των ΑΣΦ.

2.3 Δίκτυο Μέσης Τάσης (MT)

2.3.1 Δομή του δικτύου Μέσης Τάσης

Το δίκτυο MT περιλαμβάνει τις πύλες αναχωρήσεων MT στους υποσταθμούς υποβιβασμού ΥΤ/MT, τις γραμμές MT καθώς και τον εξοπλισμό που αφορά στη λειτουργία και τον έλεγχό τους (Διακόπτες Αυτόματης Επαναφοράς, Διακόπτες Απομόνωσης, Ασφαλειοαποζεύκτες, πυκνωτές MT, ρυθμιστές τάσης κλπ.), τα

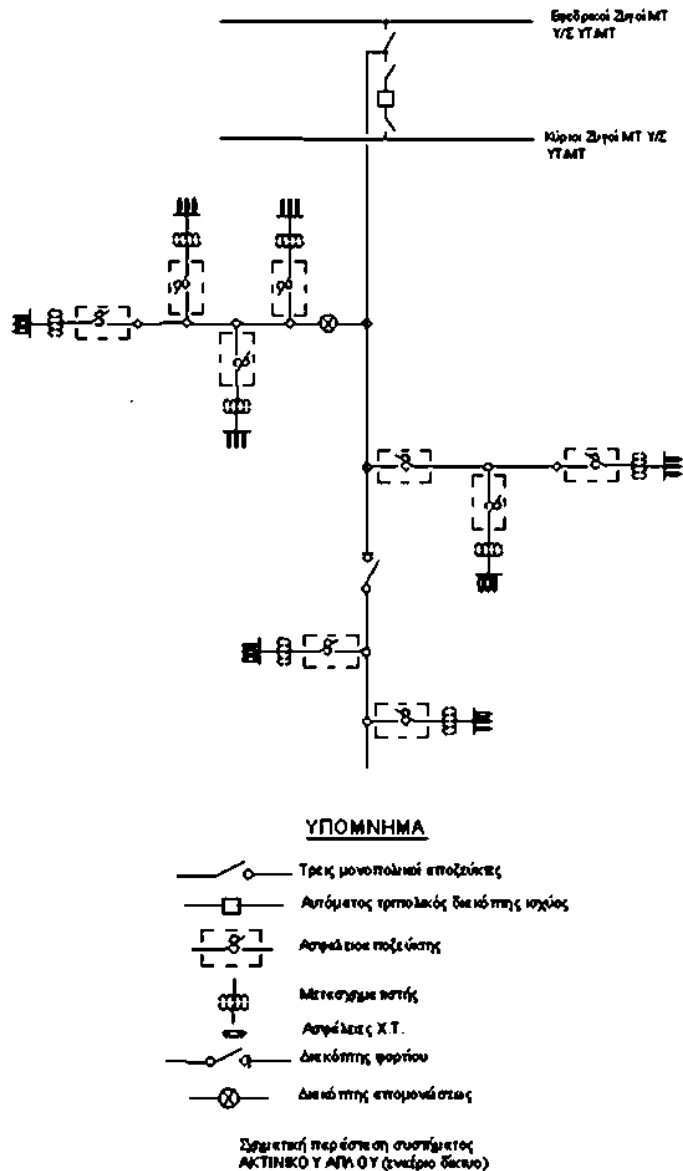
υποβρύχια καλώδια ΜΤ και τον εξοπλισμό ζεύξης τους καθώς και τους υποσταθμούς Διανομής ΜΤ/ΧΤ.

Η δομή του ελληνικού δικτύου ΜΤ μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ως εξής:

- ακτινικό δίκτυο (κυρίως σε νησιά και δυσπρόσιτα σημεία),
- βροχοειδές δίκτυο,
- δίκτυο αραχνοειδούς δομής (αστικό δίκτυο κυρίως στην Αττική).

Το ακτινικό δίκτυο εφαρμόζεται κυρίως στα εναέρια δίκτυα και αποτελείται από μία κεντρική γραμμή, τον «κορμό», που κατασκευάζεται από αγωγούς μεγάλης διατομής και τις διακλαδώσεις, οι οποίες συνδέονται συνήθως με τον υποσταθμό ΜΤ/ΧΤ. Οι διακλαδώσεις κατασκευάζονται με αγωγούς μικρότερης διατομής από ότι ο κορμός, αφού σε αυτές μεταφέρεται μικρότερη ισχύ από ότι στον κορμό.

Η τροφοδότηση της γραμμής του κορμού στο ένα άκρο της, γίνεται από τους ζυγούς ΜΤ του υποσταθμού ΥΤ/ΜΤ μέσω ενός Δ/Ι εξοπλισμένου με τις κατάλληλες προστασίες, ενώ στο άλλο άκρο της μπορεί να διασυνδέεται μετά από χειρισμό με άλλη γραμμή του ίδιου ή και άλλου υποσταθμού ΥΤ/ΜΤ. Κατά μήκος του κορμού μπορούν να εγκαθίστανται όλα τα είδη των διακοπών. Ειδικότερα οι Α/Ζ και οι Δ/Φ εγκαθίστανται ώστε ο κορμός να απομονώνεται κατά τμήματα ενώ τα υπόλοιπα τμήματα να μπορούν να τροφοδοτούνται κανονικά. (Εικόνα 2.1)

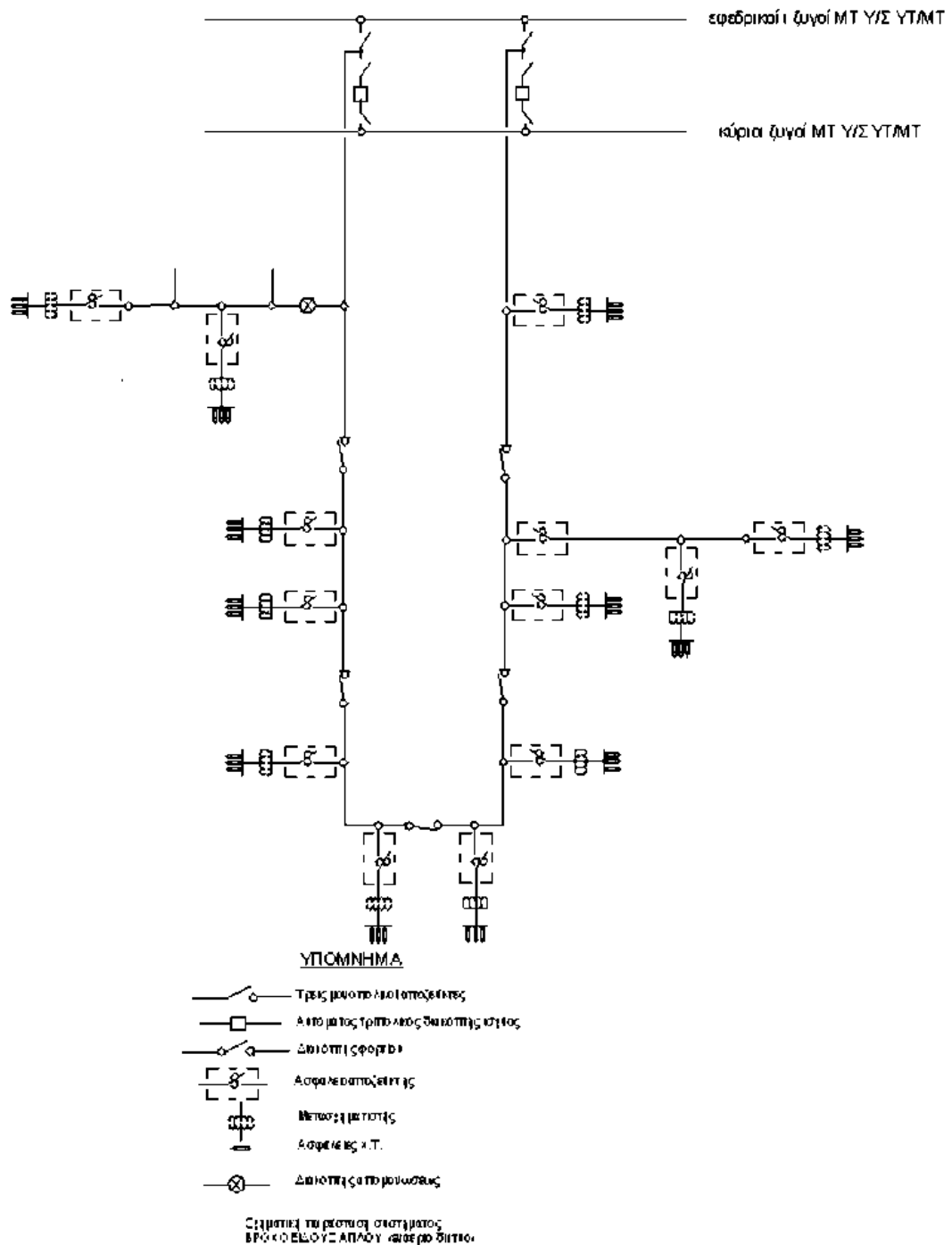


Εικόνα 2.1 Ακτινικό απλό εναέριο δίκτυο ΜΤ. [3]

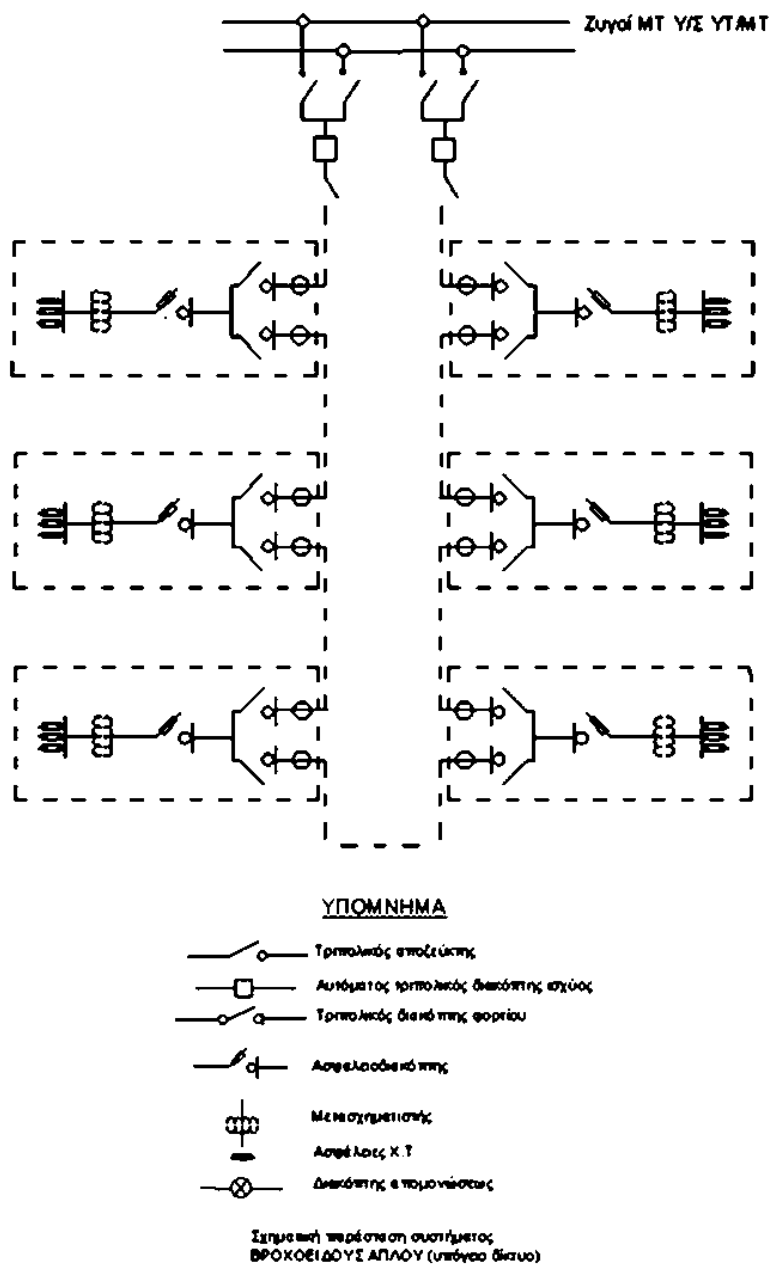
Στα υπόγεια δίκτυα ΜΤ η δυσκολία εύρεσης της βλάβης, αλλά και η δύσκολη και χρονοβόρα αποκατάσταση της, σε σχέση με τα εναέρια, οδήγησε σε δίκτυα με πιο σύνθετες τοπολογίες από την ακτινική. Σε αυτές τις τοπολογίες ακολουθείται ο κανόνας να υπάρχει δυνατότητα, μετά από βλάβη, να είναι δυνατή η επανατροφοδότηση των υποσταθμών ΜΤ/ΧΤ από άλλη οδό, μετά την εκτέλεση ορισμένων χειρισμών ή και αυτόματα, χωρίς να προηγείται κατά ανάγκη επισκευή της βλάβης.

Τέτοια τοπολογία παρουσιάζεται στο βροχοειδές δίκτυο το οποίο είναι όμοιο με το ακτινικό με τη διαφορά ότι οι γραμμές του σχηματίζουν τμήματα βρόχου, που αρχίζουν και τελειώνουν στον ίδιο ή και σε διαφορετικό υποσταθμό ΥΤ/ΜΤ. Στις

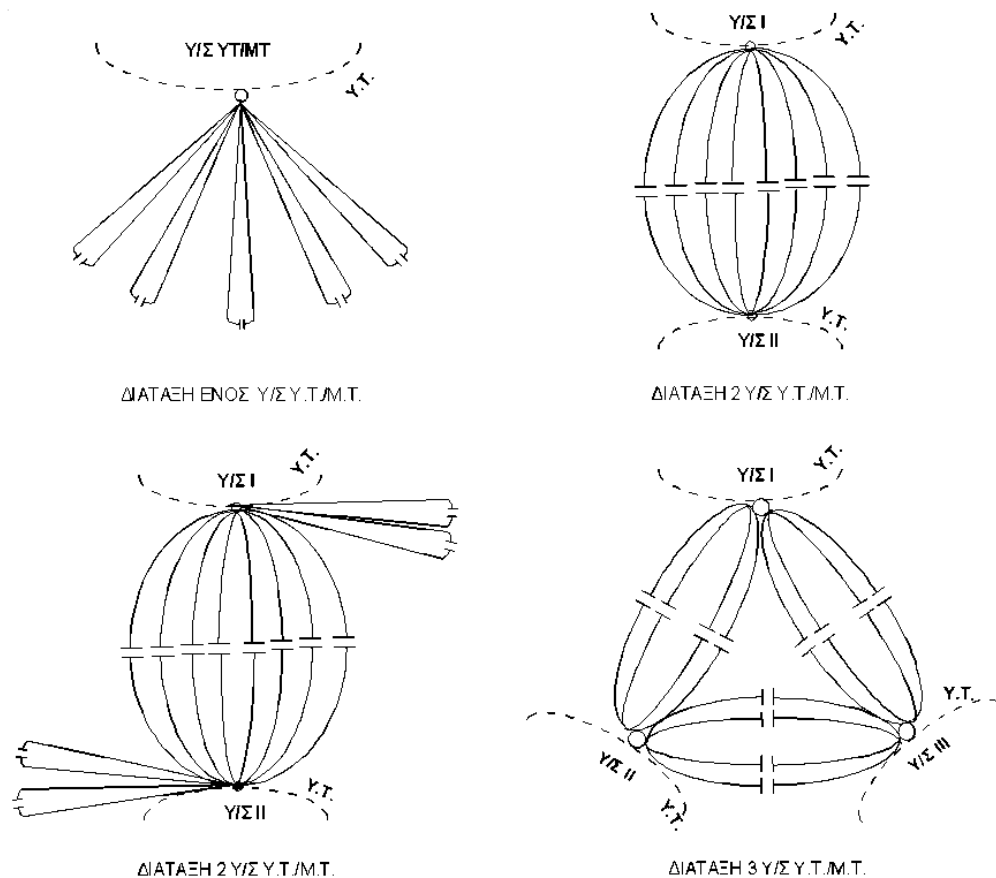
Εικόνα 2.2 και Εικόνα 2.3 παρουσιάζονται το εναέριο και υπόγειο βροχοειδές δίκτυο αντίστοιχα. Στην Εικόνα 2.4 παρουσιάζεται η δομή του βροχοειδούς δικτύου με έναν, δύο ή τρεις Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ.



Εικόνα 2.2 Βροχοειδές απλό εναέριο δίκτυο ΜΤ. [3]



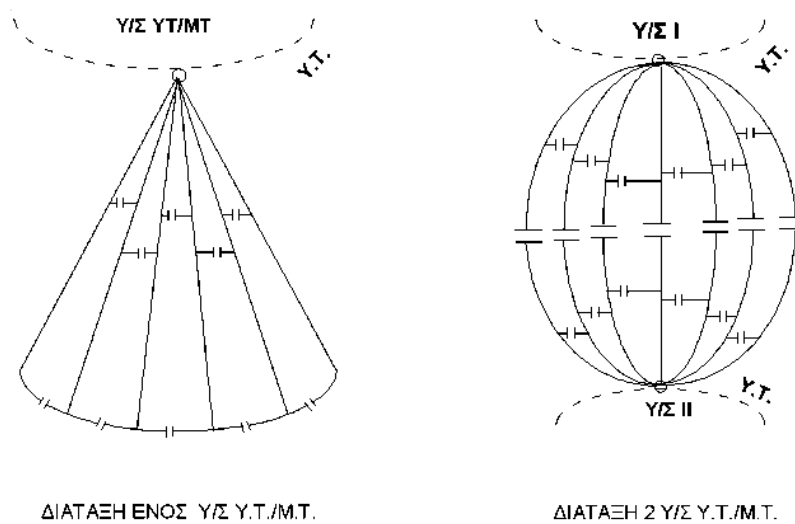
Εικόνα 2.3 Βροχοειδές απλό υπόγειο δίκτυο ΜΤ. [3]



Εικόνα 2.4 Βροχοειδές σύστημα στη ΜΤ. [3]

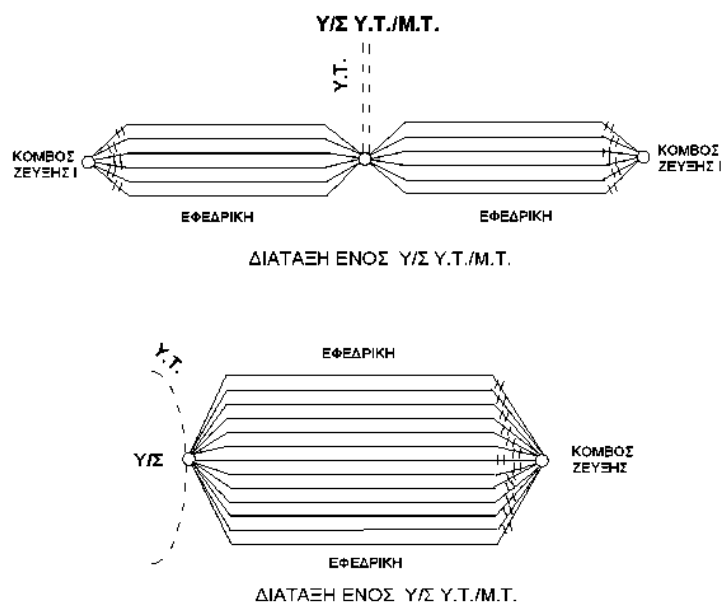
Κατά την λειτουργία ενός βροχοειδούς ΔΔ δεν ενδείκνυται ο παραλληλισμός των υποσταθμών τροφοδοσίας, δηλαδή η ταυτόχρονη τροφοδότηση μίας γραμμής από δύο ή περισσότερους υποσταθμούς ΥΤ/ΜΤ. Έτσι, στα βροχοειδή σχήματα ένας από τους Δ/Φ εισόδου ή εξόδου σε έναν υποσταθμό ΥΤ/ΜΤ πρέπει να παραμένει ανοικτός. [2]

Παρόμοια τοπολογία παρουσιάζει το αραχοειδές δίκτυο το οποίο είναι στην ουσία βροχοειδές με τη διαφορά ότι οι συνεργαζόμενες γραμμές είναι τρεις και υπάρχουν πλευρικές συνδέσεις. Σε περίπτωση βλάβης μίας εκ των γραμμών, οι άλλες δύο αναλαμβάνουν την κάλυψη των φορτίων. Στην Εικόνα 2.5 παρουσιάζεται η δομή του αραχοειδούς δικτύου με έναν ή δύο υποσταθμούς ΥΤ/ΜΤ.



Εικόνα 2.5 Αραγοειδές σύστημα στη ΜΤ. [3]

Τέλος, υπάρχει και το δίκτυο ατρακτοειδούς δομής (Εικόνα 2.6) όπου ομάδες γραμμών που αναχωρούν από τον υποσταθμό ΥΤ/ΜΤ απολήγουν σε έναν υποσταθμό ζεύξης. Ο αριθμός των γραμμών δεν πρέπει να υπερβαίνει τις έξι, αλλιώς μειώνεται η αξιοπιστία του δικτύου. Στα ατρακτοειδή σχήματα παραμένουν συχνά ανοιχτοί οι διακόπτες των ζυγών ΜΤ των υποσταθμών ΥΤ/ΜΤ ή του υποσταθμού Ζεύξης για κάθε γραμμή. Σε περίπτωση σφάλματος σε οποιοδήποτε σημείο της γραμμής προκαλείται άνοιγμα του Δ/Ι που προστατεύει την γραμμή στην αναχώρηση της από τον υποσταθμό ΥΤ/ΜΤ. Στη συνέχεια αφού η θέση του σφάλματος εντοπιστεί, το αντίστοιχο τμήμα απομονώνεται, με το άνοιγμα των εκατέρωθεν Δ/Φ, και τα λοιπά τμήματα επανατροφοδοτούνται. [3]



Εικόνα 2.6 Ατρακτοειδές σύστημα στη ΜΤ. [3]

2.3.2 Επίπεδα Τάσεων στο δίκτυο Μέσης Τάσης

A. Διασυνδεδεμένο σύστημα

Το σύνολο των δικτύων ΜΤ της ηπειρωτικής χώρας λειτουργεί στα 20 kV, με μόνη εξαίρεση την Αττική όπου μαζί με το σύστημα των 20 kV εξακολουθεί να συνυπάρχει και το παλαιό σύστημα 22/6,6 kV.

Στα διασυνδεδεμένα με το ηπειρωτικό σύστημα νησιά το δίκτυο ΜΤ λειτουργεί επίσης στα 20 kV εκτός της πόλης της Κέρκυρας, όπου οι εργασίες αλλαγής τάσης από 15 kV σε 20 kV βρίσκονται σε εξέλιξη, και τα Κύθηρα, τα οποία τροφοδοτούνται από το ηπειρωτικό σύστημα μέσω υποβρύχιας διασύνδεσης στα 20 kV, η οποία όμως υποβιβάζεται με ΑΜΣ 20/15 kV στα 15 kV επί του νησιού.

B. Μη διασυνδεδεμένα νησιά

Στα νησιά η κατάσταση σήμερα έχει ως εξής:

Στη Κρήτη σημαντικό τμήμα του δικτύου ΜΤ λειτουργεί στα 20 kV (νομός Ρεθύμνου, Λασιθίου, εκτός της Σητείας, και μεγάλα τμήματα των νομών Ηρακλείου και Χανίων), ενώ στα 15 kV λειτουργούν τα δίκτυα της πόλης των Χανίων και το μεγαλύτερο τμήμα της πόλης Ηρακλείου.

Στη Ρόδο όλοι οι Υ/Σ λειτουργούν στα 15 kV, εκτός των Υ/Σ Αφάντου και Γενναδίου που λειτουργούν στα 20 kV. Παρότι δεν υπάρχει μέχρι σήμερα συγκεκριμένο χρονοδιάγραμμα αναβάθμισης της τάσης στα 20 kV, θα πρέπει άμεσα να συνδυασθεί με την αναβάθμιση του συστήματος της Ρόδου από τα 66 kV στα 150 kV.

Τα δίκτυα των υπολοίπων μη διασυνδεδεμένων νησιών λειτουργούν στα 15 kV εκτός από την Κω και τη Λέσβο όπου το δίκτυο λειτουργεί στα 20 kV.

Τέλος, σε κάποια μικρά νησιά όπως η Αμοργός, η Ανάφη, η Δονούσα και το Αγαθονήσι υπάρχουν γραμμές ΜΤ 6,6 kV.

Γ. Δίκτυο ΜΤ Αττικής

Η ευρύτερη περιοχή της Αθήνας (λεκανοπέδιο Αθηνών) ηλεκτροδοτείται από δύο συστήματα διανομής μέσης τάσης που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους: Το σύστημα 20 kV, το οποίο είναι το κυρίαρχο δίκτυο ΜΤ στο οποίο εντάσσονται όλες οι νέες γραμμές ΜΤ και Υ/Σ ΜΤ/ΧΤ, καθώς και το παλαιό σύστημα των 22/6,6 kV.

Το σύστημα 22/6,6 kV

Το σύστημα 22/6,6 kV είναι το πρώτο που εγκαταστάθηκε στο λεκανοπέδιο Αθηνών. Τροφοδοτείται από 6 Υ/Σ 150/22 kV (Ρουφ, Χαλκηδόνα, ΑΗΣ Αγ. Γεωργίου, Ν. Σμύρνη, Ψυχικό, Ελευθερία) συνολικής εγκατεστημένης ισχύος 1150 MVA.

Το δίκτυο 22 kV είναι ουσιαστικά ένα δίκτυο υπομεταφοράς, από το οποίο τροφοδοτούνται σήμερα 65 συνολικά Υ/Σ 22/6,6 kV στην ευρύτερη περιοχή της

Αθήνας. Εκτός από τη λειτουργία του ως δίκτυο υπομεταφοράς, το σύστημα Υ/Σ 22/6,6 kV ηλεκτροδοτεί κατευθείαν από το δίκτυο 22 kV ορισμένους πελάτες ΜΤ και ορισμένους Υ/Σ Διανομής. Δηλαδή το σύστημα 22/6,6 kV τροφοδοτεί τρία είδη φορτίων: τους πελάτες ΜΤ στα 6,6 kV, τους Υ/Σ 22/0,4 kV και τους Υ/Σ 6,6/0,4 kV.

Το σύστημα 22/6,6 kV περιλαμβάνει παλιό εξοπλισμό, που απαιτεί αυξημένες δαπάνες συντήρησης, υπάρχει δυσκολία εύρεσης ανταλλακτικών και αρκετοί Υ/Σ είναι χαμηλά φορτισμένοι, ενώ προβλέπεται η σταδιακή κατάργησή του με μεταφορά των φορτίων του στο σύστημα των 20 kV . [3]

2.3.3 Βασική τυποποίηση δικτύων Μέσης Τάσης

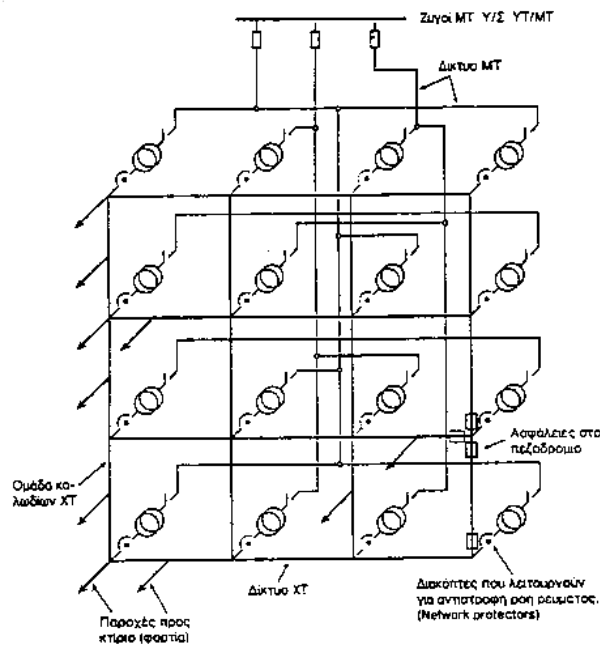
Στα εναέρια δίκτυα ΜΤ χρησιμοποιούνται αγωγοί ACSR διατομής 95 mm² στους κορμούς και 35 mm² στις διακλαδώσεις, ενώ έχουν καταργηθεί οι αγωγοί διατομής 16 mm². Στα υπόγεια δίκτυα ΜΤ εγκαθίστανται καλώδια XLPE αλουμινίου διατομής 3x240 mm².

Τα τυποποιημένα μεγέθη των Μ/Σ ΜΤ/ΧΤ είναι τα ακόλουθα: 50, 100, 160, 250, 400, 630 και 1000 kVA. [3]

2.4 Δίκτυο Χαμηλής Τάσης (ΧΤ)

2.4.1 Δομή του δικτύου Χαμηλής Τάσης

Στην πλειοψηφία τους τα ΔΔ ΧΤ, τόσο τα εναέρια όσο και τα υπόγεια καλωδιακά, λειτουργούν ακτινικά. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, ιδιαίτερα σε αστικές περιοχές, που απαντώνται τα κλειστά δίκτυα λειτουργίας. Τα κλειστά δίκτυα λειτουργίας είναι κυρίως υπόγεια και έρχονται να καλύψουν την απαίτηση του πολύ υψηλού βαθμού συνέχειας στην τροφοδότηση των καταναλωτών, όπως συμβαίνει στις μεγαλουπόλεις. Αυτά τα δίκτυα είναι ουσιαστικά δικτυωτά πλέγματα ΧΤ (Εικόνα 2.7)



Εικόνα 2.7 Σχηματική διάταξη κλειστού δικτύου ΧΤ. [2]

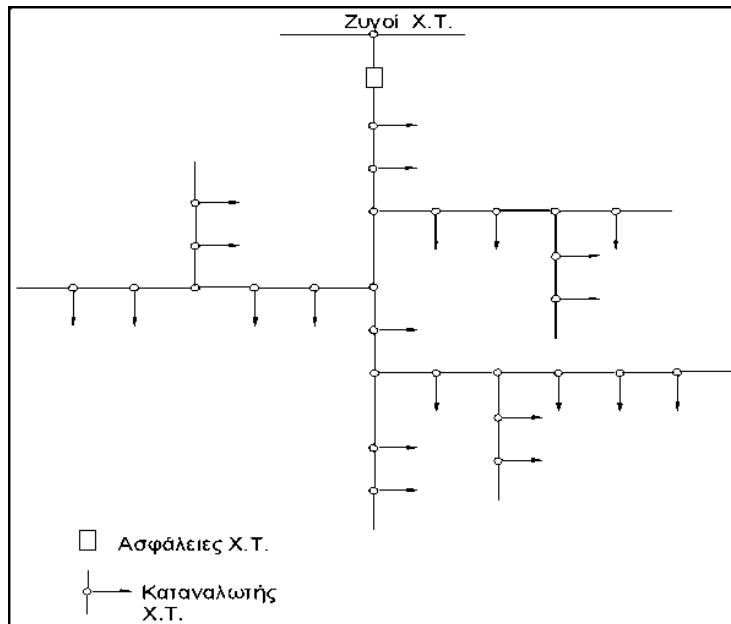
Στο κλειστό δίκτυο πρέπει να λαμβάνεται ιδιαίτερη μέριμνα όσον αφορά την προστασία έναντι σφαλμάτων που συμβαίνουν στη γραμμή ΜΤ, όσο και στο ίδιο το δίκτυο. Στην περίπτωση που συμβεί σφάλμα (βραχυκύκλωμα) σε μία γραμμή ΜΤ προκαλείται αυτόματα άνοιγμα των Δ/I ΧΤ των υποσταθμών ΜΤ/ΧΤ, ώστε να αποφευχθεί η αντίστροφη ροή ρεύματος στους υποσταθμούς ΜΤ/ΧΤ και ουσιαστικά η ανακύκλωση του βραχυκυκλώματος. Η τροφοδοσία βέβαια δεν χρειάζεται να διακοπεί, εφόσον οι υπόλοιπες γραμμές ΜΤ επαρκούν και εφόσον η νέα διαμόρφωση του δικτύου που θα προκύψει δεν επιτρέπει την ύπαρξη τοπικών υπερφορτίσεων. Η προστασία στη ΧΤ γίνεται μέσω ΑΣΦ, οι οποίες απομονώνουν τη γραμμή ΧΤ που έγινε το σφάλμα. Τα κλειστά δίκτυα έχουν εν γένει τις λιγότερες απώλειες, αλλά απαιτούν πολύ στενή παρακολούθηση της ανακατανομής φορτίων με το χρόνο.

Η ακτινική λειτουργία των $\Delta\Delta$ ΧΤ, υλοποιείται σε διάφορες τοπολογίες. Πρώτα στα εναέρια δίκτυα των οποίων η τοπολογία περιγράφεται από το ακτινικό σχήμα (Εικόνα 2.8) και κατόπιν στα υπόγεια καλώδια δίκτυα. Τα βασικά σχήματα που περιγράφουν τις τοπολογίες των υπόγειων $\Delta\Delta$ ΧΤ είναι:

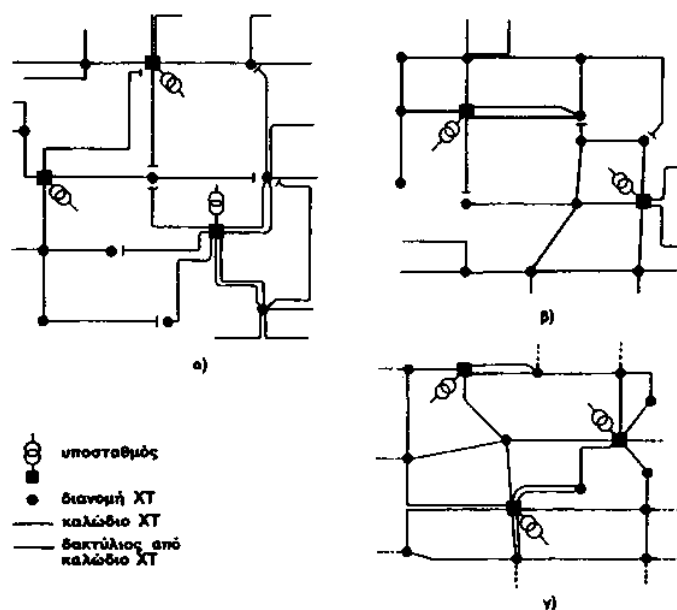
1. Το ακτινικό (Εικόνα 2.9α), στο οποίο μπορεί να χρησιμοποιούνται καλώδια πολλών διατομών, ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί φόρτισης και πτώσης τάσης, χωρίς όμως την ύπαρξη εφεδρείας. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι ότι σε περιόδους αιχμής, μπορεί να παρουσιαστεί μεγάλη πτώση τάσης.
2. Το δακτυλιοειδές (Εικόνα 2.9β), στο οποίο οι γραμμές ξεκινούν από έναν υποσταθμό ΜΤ/ΧΤ και αποτελούν τμήματα δακτυλίων, για λόγους αύξησης της εφεδρείας και μείωσης της πτώσης τάσης. Η επιμέρους τροφοδότηση των

καταναλωτών γίνεται ακτινικά με καλώδια προερχόμενα από τους δακτυλίους, μικρότερης διατομής ή και ίδιας για λόγους ομοιομορφίας.

3. Το διασυνδεδεμένο (Εικόνα 2.9γ), στο οποίο ενώνονται όλοι οι υποσταθμοί ΜΤ/ΧΤ μεταξύ τους. Το δίκτυο διαμορφώνεται ώστε να υπάρχει δυνατότητα διπλής τροφοδότησης μετά από χειρισμούς λόγω της ύπαρξης βρόχων. Η αυξημένη εφεδρεία και η διατήρηση μικρής πτώσης τάσης στα καλώδια είναι τα κύρια πλεονεκτήματα του.



Εικόνα 2.8 Ακτινικό σύστημα στη ΧΤ (εναέρια δίκτυα). [3]



Εικόνα 2.9 Υπόγεια καλωδιακά δίκτυα ΧΤ ακτινικής λειτουργίας. [3]

Το διασυνδεδεμένο δίκτυο προσφέρει το μεγαλύτερο βαθμό εξυπηρέτησης από τα άλλα δύο σχήματα, το οποίο όμως οδηγεί σε μεγαλύτερη δαπάνη κατασκευής, λόγω αυξημένης πολυπλοκότητας. Το δακτυλιοειδές από άποψη εξυπηρέτησης και κατασκευής βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο σχημάτων. Ένα άλλο πλεονέκτημα του διασυνδεδεμένου δικτύου είναι η δυνατότητα επέκτασης του, κάτι που το κάνει να βρίσκει εφαρμογές σε περιοχές με μεγάλη πυκνότητα φορτίου. Τέλος, σε όλα τα είδη ΔΔ ΧΤ οι γραμμές είναι τριφασικές (με ουδέτερο), με εξαίρεση περιπτώσεις εναέριων δικτύων που μπορεί να υπάρξουν μονοφασικές γραμμές (μία φάση και ουδέτερος). [2]

2.5 Μήκη δικτύου ΜΤ και ΧΤ και πλήθος υποσταθμών ΜΤ/ΧΤ

Το συνολικό μήκος του δικτύου ΜΤ σε όλη την επικράτεια ήταν, στο τέλος του 2008, 102.503 km (Πίνακας 2.1). Τα τελευταία έτη το δίκτυο αυτό αυξάνεται ετησίως κατά 1.800 km περίπου, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι αντικαταστάσεις υφιστάμενων δικτύων, λόγω ενίσχυσης με αγωγούς ή καλώδια μεγαλύτερης διατομής καθώς και οι αντικαταστάσεις με αγωγούς ίδιας διατομής, λόγω ανακαίνισης. Στο συνολικό μήκος του δικτύου ΜΤ συμπεριλαμβάνονται και 953 km υποβρυχίων γραμμών ΜΤ. Αφαιρουμένων αυτών, το ποσοστό του υπογείου δικτύου ΜΤ ανέρχεται σήμερα σε 8,4% πανελλαδικά (56% στην Αττική που αντιπροσωπεύει το 62% του συνολικού υπογείου δικτύου ΜΤ πανελλαδικά)

Για το έτος 2008, το δίκτυο που κατασκευάστηκε με υπόγειο καλώδιο συμμετέχει σε ποσοστό που πλησιάζει το 30% του συνολικώς κατασκευασθέντος δικτύου ΜΤ κατά το έτος αυτό.

Σε ότι αφορά στο δίκτυο ΧΤ, το μήκος του δικτύου στο τέλος του 2008 ήταν 115.572 km, ενώ η αύξησή του είναι της τάξης των 2.400 km ετησίως, δίχως να λαμβάνονται υπόψη οι αντικαταστάσεις. Το ποσοστό του υπογείου δικτύου ΧΤ ανέρχεται σε 10% πανελλαδικά (30% στην Αττική που αντιπροσωπεύει το 50% του συνολικού υπογείου δικτύου ΧΤ πανελλαδικά).

Πίνακας 2.1 Μήκος δικτύου ΜΤ & ΧΤ έτους 2008 (σε km)

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΕ Σ	ΜΤ				ΧΤ				ΣΥΝΟΛΟ ΜΤ & ΧΤ			
	ΕΝΑΕΡΙ Ο	ΥΠΟΓΕΙ Ο	Υ/Β	ΣΥΝΟΛΟ	ΕΝΑΕΡΙ Ο	ΥΠΟΓΕΙ Ο	Υ/Β	ΣΥΝΟΛΟ	ΕΝΑΕΡΙ Ο	ΥΠΟΓΕΙ Ο	Υ/Β	ΣΥΝΟΛΟ
ΔΠΑ	4.165	5.307	91	9.563	13.609	5.763	0	19.372	17.774	11.070	91	28.935
ΔΠΜ-Θ	27.183	1.207	13 3	28.523	24.109	2.299	0	26.408	51.292	3.506	13 3	54.931
ΔΠΠ-Η	25.504	545	16 6	26.215	32.618	1.490	2, 4	34.110	58.122	2.035	16 8	60.325
ΔΠΚΕ	23.738	892	92	24.722	18.489	1.568	0	20.057	42.227	2.460	92	44.779
ΔΠΝ	12.408	601	47 1	13.480	15.091	534	0	15.625	27.499	1.135	47 1	29.105
ΣΥΝΟΛΟ												
ΔΙΑΝΟΜΗ Σ	92.998	8.552	95 3	102.50 3	103.91 6	11.654	2, 4	115.57 2	196.91 4	20.206	95 5	218.07 5

Για το έτος 2008, το δίκτυο που κατασκευάστηκε με υπόγειο καλώδιο συμμετέχει σε ποσοστό που πλησιάζει το 25% του συνολικός κατασκευασθέντος δικτύου ΧΤ κατά το έτος αυτό.

Επίσης στο σύνολο του εναερίου δικτύου ΧΤ, το ποσοστό συμμετοχής των δικτύων με συνεστραμμένα καλώδια έχει φθάσει στο 44% το 2008.

Τα νέα εναέρια δίκτυα ΧΤ κατασκευάζονται αποκλειστικά με συνεστραμμένα καλώδια, με αποτέλεσμα το ποσοστό συμμετοχής των δικτύων με συνεστραμμένα καλώδια στο συνολικό μήκος του εναερίου δικτύου ΧΤ να αυξάνεται κατά 2% ετησίως.

Το συνολικό μήκος των δικτύων ΜΤ & ΧΤ στο τέλος του 2008 ήταν 218.075 km και, αφαιρουμένων των υποβρυχίων γραμμών, το συνολικό ποσοστό του υπογείου δικτύου ανέρχεται πανελλαδικά σε 9,3% (38% στην Αττική, που αντιπροσωπεύει το 55% του συνολικού υπογείου δικτύου ΜΤ πανελλαδικά).

Αναφορικά με το πλήθος των Υ/Σ ΜΤ/ΧΤ, στο τέλος του 2008 ήταν 145.941 Υ/Σ, με συνολική εγκατεστημένη ισχύ 25.101 MVA. Η αύξηση των Υ/Σ είναι της τάξης του 2% ετησίως, μη συμπεριλαμβανομένων των αντικαταστάσεων, ενώ η αύξηση της εγκατεστημένης ισχύος είναι της τάξης του 3%.

Οι Υ/Σ εσωτερικού χώρου και οι Υ/Σ συνεπτυγμένου τύπου αποτελούν το 5% του συνόλου των Υ/Σ πανελλαδικά (το 26% στην Αττική, που αντιπροσωπεύει το 45% των Υ/Σ πανελλαδικά) ενώ η αύξησή τους ετησίως είναι της τάξης του 4% ως προς το πλήθος και 5% ως προς την εγκατεστημένη ισχύ.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι τα νέα δίκτυα ΜΤ και ΧΤ σε αστικό δομημένο περιβάλλον, για ηλεκτροδοτήσεις, παραλλαγές ή ενισχύσεις-βελτιώσεις, κατασκευάζονται πλέον εξαρχής υπόγεια, ενώ υπογειοποίηση υπάρχοντων δικτύων για λόγους αισθητικής γίνεται μόνο με την ένταξή τους στο πρόγραμμα αισθητικής αναβάθμισης, με συμμετοχή των Δήμων κατά 50% στο κόστος του έργου. [3]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάπτυξη του Δικτύου

3.1 Βασικοί άξονες

Η ανάπτυξη του δικτύου υλοποιείται με άξονες:

- την επάρκεια και αξιοπιστία τροφοδότησης
- την πρόσβαση όλων των χρηστών
- την ασφάλεια των εγκαταστάσεων
- τη βελτίωση της ποιότητας της παρεχόμενης ενέργειας
- τη μείωση των απωλειών
- το σεβασμό προς το περιβάλλον
- τη μέγιστη απορρόφηση ενέργειας από ΑΠΕ

Πρέπει να τονιστεί ότι, η ανάπτυξη μιας περιοχής και η βελτίωση του βιοτικού επιπέδου συνοδεύεται από την ανάγκη επέκτασης και αναβάθμισης των υποδομών του δικτύου, ώστε να καλύπτονται οι αυξημένες ανάγκες τροφοδότησης.

Η ποιότητα της παρεχόμενης ηλεκτρικής ενέργειας προσδιορίζεται από ένα σύνολο δεικτών και παραγόντων, κυριότεροι από τους οποίους είναι η διάρκεια και η συχνότητα των διακοπών.

Οι βασικοί δείκτες που παρακολουθούνται επί πολλά έτη είναι οι ακόλουθοι:

- Χρόνος διακοπών στη Μέση και στη Χαμηλή Τάση.
- Πλήθος διακοπών στη Μέση και στη Χαμηλή Τάση ανά 100 km δικτύου.

Τα τελευταία χρόνια επιπρόσθετα παρακολουθούνται, σύμφωνα και με το πρότυπο EN50160, οι πιο σύγχρονοι δείκτες:

- Ετήσιος χρόνος διακοπής ανά πελάτη (**SAIDI**). Ο δείκτης SAIDI είναι η μέση διάρκεια διακοπής κάθε εξυπηρετούμενου καταναλωτή και υπολογίζεται ως εξής:
$$SAIDI = \frac{\text{sum of all costumer interruption durations}}{\text{total number of costumers served}}$$
- Ετήσιο πλήθος διακοπών ανά πελάτη (**SAIFI**). Ο δείκτης SAIFI είναι η μέση τιμή των διακοπών που θα υποστεί ένας καταναλωτής και υπολογίζεται ως εξής:
$$SAIFI = \frac{\text{total number of costumer interruptions}}{\text{total number of costumers served}}$$

που λαμβάνουν υπόψη τους τη διακοπτόμενη εγκατεστημένη ισχύ ανά διακοπή και είναι πιο αντιπροσωπευτικοί για τον προσδιορισμό της ποιότητας ισχύος.

Για τον υπολογισμό των δεικτών ποιότητας ενέργειας δεν συνυπολογίζονται οι διακοπές που έχουν χαρακτηριστεί εξαιρούμενες (π.χ. έκτακτα γεγονότα που εμποδίζουν την πρόσβαση στο σημείο της βλάβης, όπως πυρκαγιά, πλημμύρα, χιονόπτωση και κατολίσθηση, υπερβολικό πλήθος βλαβών λόγω έντονης κακοκαιρίας, επέμβαση τρίτου στο δίκτυο, πρόβλημα σε εγκατάσταση πελάτη), ή διακοπές ειδικών καταστάσεων (αγροτικού ή εποχιακού καταναλωτή εκτός περιόδου ενδιαφέροντός του).

3.2 Ανάπτυξη έργων υποδομής στο δίκτυο

Οι βασικές επιλογές για την ανάπτυξη του δικτύου παρουσιάζονται με ιεραρχική σειρά στη συνέχεια, ξεκινώντας από την επίλυση τοπικών κατ' αρχήν προβλημάτων και στη συνέχεια αντιμετώπιση αναγκών σε μεγαλύτερη γεωγραφική περιοχή και πιο μακροπρόθεσμα.

1. Ενισχύσεις-βελτιώσεις του δικτύου MT
 - επεμβάσεις στις υφιστάμενες εναέρια γραμμές MT
 - εγκατάσταση αποζεύξιμων πυκνωτών και ρυθμιστών τάσης
 - αντικατάσταση αγωγών σε γραμμές MT
 - δημιουργία νέων γραμμών MT (και του αντίστοιχου δικτύου XT)
2. Επαύξηση εγκατεστημένης ισχύος σε υφιστάμενους Υ/Σ ΥΤ/MT
 - αντικαταστάσεις και προσθήκες Μ/Σ ισχύος
 - πλήρης ανάπτυξη των αναχωρήσεων MT και δημιουργία νέων γραμμών MT
3. Κατασκευή νέων Υ/Σ ΥΤ/MT

3.2.1 Ενισχύσεις-Βελτιώσεις του δικτύου

Η υλοποίηση των έργων ενισχύσεων-βελτιώσεων συνδέεται με την ασφάλεια του Δικτύου, είναι απαραίτητη από τεχνική άποψη για την επάρκεια του δικτύου (θερμικό όριο αγωγών, αντοχή Μ/Σ, πτώση τάσης, συνθήκη ουδετέρωσης), έχει οικονομική σκοπιμότητα (μείωση τεχνικών απωλειών, μείωση μη διανεμόμενης ενέργειας, μείωση δαπανών εκμετάλλευσης), ενώ συμβάλει και στη βελτίωση της ποιότητας ενέργειας (μείωση βλαβών, μείωση χρόνου αποκατάστασης μετά από διακοπή με τη δημιουργία βρόχων και διασυνδέσεων, μείωση ατελώς διανεμόμενης ενέργειας).

Ειδικότερα η ενίσχυση-βελτίωση των υποδομών περιλαμβάνει τις εξής δράσεις:

- ανάπτυξη νέων υπόγειων αναχωρήσεων MT από τους νέους Υ/Σ ΥΤ/MT και διασύνδεση με τους υφιστάμενους
- ανακαίνιση του υφιστάμενου δικτύου MT με αντικαταστάσεις καλωδίων χαμηλού βαθμού αξιοπιστίας λόγω παλαιότητας και εμφάνισης αυξημένου

πλήθους βλαβών, κυρίως στα αρχικά τμήματα των αναχωρήσεων επιβαρυσμένων Κ/Δ

- αύξηση του βαθμού υπογειοποίησης του υφισταμένου δικτύου, ιδιαίτερα σε περιοχές με έντονο αστικό χαρακτήρα για λειτουργικούς λόγους
- πύκνωση Υ/Σ ΜΤ/ΧΤ και επαύξηση ισχύος σε υφιστάμενους Υ/Σ ΜΤ/ΧΤ, με αντικατάσταση Μ/Σ και ασφαλειοκιβωτίων
- κατασκευή νέων γραμμών ΜΤ.
- ενίσχυση τμημάτων γραμμών ΜΤ
- διασύνδεση γραμμών ΜΤ
- αναβάθμιση του δικτύου ΧΤ

Για τη βέλτιστη υλοποίηση του προϋπολογισμού επενδύσεων που αφορά στις ενισχύσεις-βελτιώσεις τα μεγάλα έργα ενισχύσεων προκρίνονται βάσει τεchnοοικονομικής μελέτης σκοπιμότητας.

Συγκεκριμένα για έργα ενίσχυσης μεγάλου κόστους εκπονούνται μελέτες κόστους-οφέλους, όπου λαμβάνεται υπόψη το κόστος επένδυσης και συντήρησης του έργου και το όφελος ανά έτος (από μείωση απωλειών, μείωση ατελώς διανεμόμενης ενέργειας, μείωση μη διανεμόμενης ενέργειας, μείωση δαπανών εκμετάλλευσης κλπ) εκφρασμένα σε παρούσα αξία.

Από τη μελέτη εξάγονται οι οικονομικοί δείκτες του έργου (επιτόκιο εσωτερικής απόδοσης, σχέση οφέλους /κόστους, χρόνος απόσβεσης δαπάνης έργου κλπ) με βάση τους οποίους αποφασίζεται η σκοπιμότητα κατασκευής του έργου.

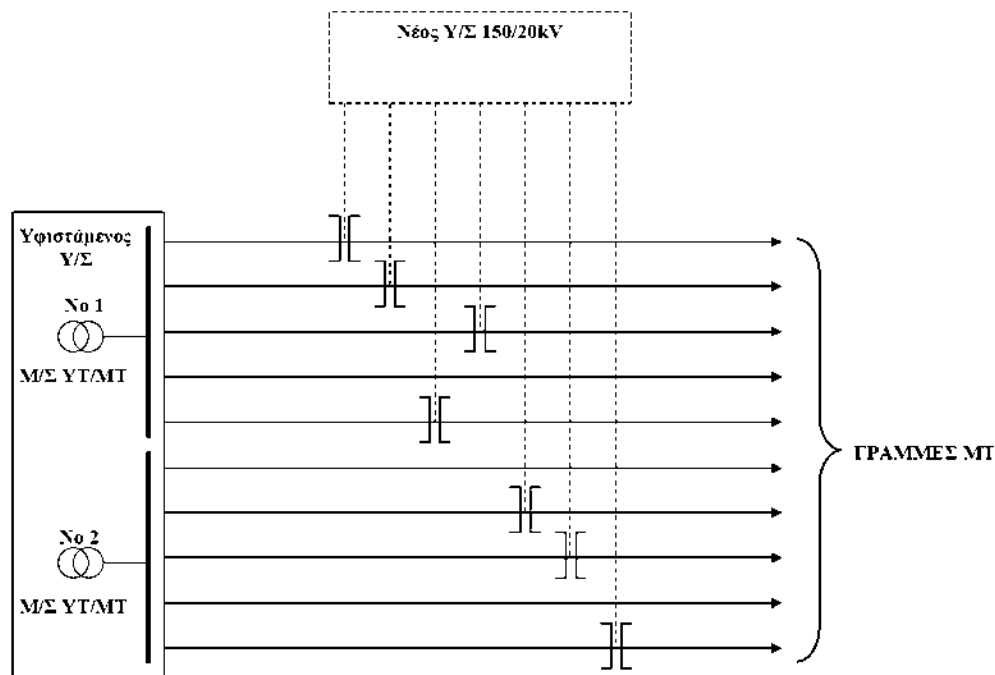
3.2.2 Κατασκευή νέων Υποσταθμών ΥΤ/ΜΤ

Η ανάγκη για κατασκευή νέων Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ προκύπτει κυρίως στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- στις αστικές περιοχές σε κεντροβαρική θέση ως προς τα φορτία
 - αύξηση της ζήτησης (π.χ. ταυτόχρονη χρήση κλιματιστικών)
 - νέα αιτήματα σύνδεσης μεγάλων πελατών (π.χ. εμπορικά κέντρα, συγκροτήματα κατοικιών, οδικές σήραγγες)
 - οικοδομική ανάπτυξη πόλεων περιφερειακά
- στις τουριστικές περιοχές
 - κατακόρυφη αύξηση ζήτησης τους θερινούς μήνες
 - οικοδομική ανάπτυξη κυρίως σε ξενοδοχειακές μονάδες
- στο επαρχιακό δίκτυο
 - μετάβαση από ακτινικά δίκτυα σε βροχοειδή (δυνατότητα εναλλακτικής τροφοδότησης των δικτύων ΜΤ από διαφορετικούς Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ)
 - αποφυγή γραμμών ΜΤ μεγάλου μήκους (προβλήματα ποιότητας τάσης)

Οι επιπτώσεις από την καθυστέρηση κατασκευής νέων Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ ή δικτύων ΜΤ είναι οι ακόλουθες:

- Μερική κάλυψη ή ακόμη και αδυναμία τροφοδότησης νέων αιτημάτων μεγάλης ισχύος.
- Μη βέλτιστες τεχνοοικονομικές λύσεις (π.χ. κατασκευή νέων γραμμών ΜΤ, οι οποίες δεν θα κατασκευάζονταν σε περίπτωση κατασκευής νέου Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ).
- Δυσκολία στη βελτίωση της ποιότητας της παρεχόμενης ενέργειας στους χρήστες του Δικτύου.
- Δυσκολία βέλτιστου μακροχρόνιου προγραμματισμού ανάπτυξης του δικτύου.



Εικόνα 3.1 Σχηματική αναπαράσταση αναδιάταξης του δικτύου ΜΤ με την ένταξη νέου Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ. [3]

Προκειμένου να επιλεγεί η θέση και η σύνθεση ενός νέου Υ/Σ ΥΤ/ΜΤ (Σχήμα 1.10) εκπονείται τεχνοοικονομική μελέτη με κατάλληλο πρόγραμμα (π.χ. PRAO) όπου λαμβάνονται υπόψη οι ακόλουθες παράμετροι:

- ρυθμός αύξησης της ζήτησης
- φύση των φορτίων (π.χ. αστικά, τουριστικά)
- περίοδος εμφάνισης μεγίστου στην περιοχή
- κόστος των απωλειών ενέργειας και ισχύος

Στη συνέχεια γίνεται διερεύνηση μεταξύ διαφορετικών εναλλακτικών λύσεων και για την επιλογή της βέλτιστης λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα κριτήρια:

- επιτρεπτά επίπεδα πτώσης τάσης στους καταναλωτές

- διατήρηση των ορίων φόρτισης των γραμμών MT και των εγκατεστημένων Μ/Σ ΥΤ/ΜΤ
- θετική καθαρά παρούσα αξία εντός 15ετίας

Θα πρέπει να τονιστεί ότι έχει εκτιμηθεί ότι η απομάκρυνση ενός Υ/Σ 150 MVA κατά 1 km ως προς την κεντροβαρική θέση ισοδυναμεί με αύξηση των απωλειών κατά 1 εκατομμύριο kWh/έτος ή ενέργεια για 200 νοικοκυριά. [3]

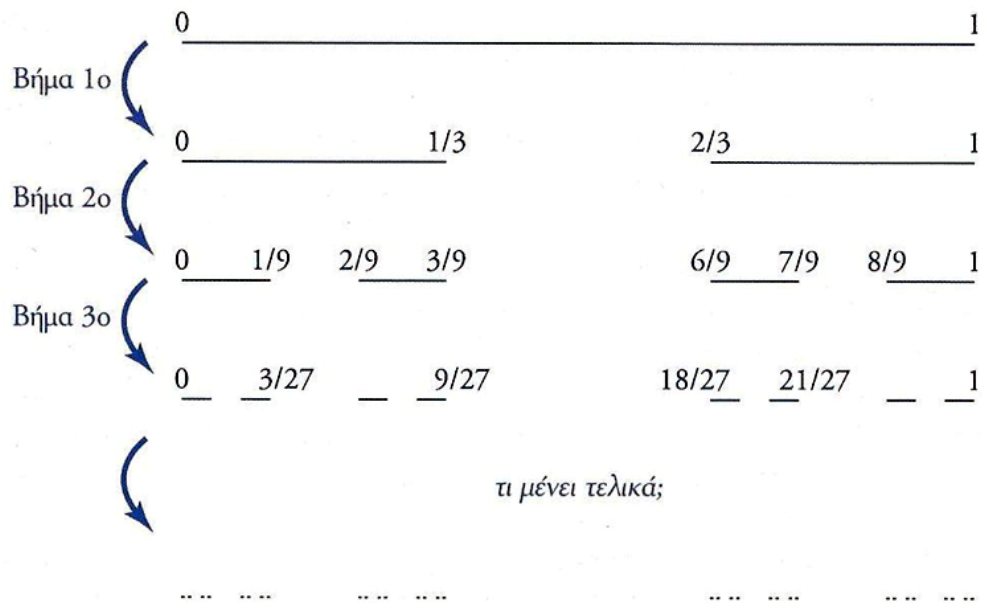
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η Γεωμετρία των Fractal

Όπως οι κωνικές τομές των Αρχαίων Ελλήνων χρησιμοποιήθηκαν από τον Kepler και τον Newton για να εξηγηθούν οι ελλειπτικές τροχιές των πλανητών, και η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein βασίστηκε στη Γεωμετρία του Riemann, έτσι και οι ανακαλύψεις των fractal θεμελιώθηκαν πάνω στις μεγαλοφυείς θεωρίες των Γερμανών Μαθηματικών Georg Cantor (1845-1918) και Felix Hausdorff (1868-1942) και των Γάλλων Gaston Julia (1893-1978) και Pierre Fatou (1878-1929). Πρώτοι οι μεγάλοι αυτοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τα μυστικά της πολυπλοκότητας, ξεκινώντας από την φαινομενικά απλή έννοια των συνεχών μεγεθύνσεων ενός αντικειμένου. Σαν αποτέλεσμα τέτοιων μεγεθύνσεων κάποια σχήματα εμφανίζουν "δομή μέσα σε δομή", αποκαλύπτοντας μία αλληλουχία εικόνων που δεν έχει τέλος.

4.1 Το τριαδικό σύνολο Cantor

Ας πάρουμε για παράδειγμα το περίφημο τριαδικό σύνολο Cantor, που φαίνεται στην Εικόνα 4.1: Ξεκινώντας με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, πάνω στη ευθεία των αριθμών μεταξύ του 0 και 1, αφαιρούμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας το μεσαίο τρίτο του, δηλαδή το διάστημα μεταξύ των αριθμών $1/3$ και $2/3$. Ακολούθως, αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο των δύο τμημάτων που απομένουν, δηλαδή τα διαστήματα μεταξύ των αριθμών $1/9$, $2/9$ και $7/9$, $8/9$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο την κατασκευή αυτή αφαιρώντας σε κάθε βήμα από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα το μεσαίο τρίτο τους. Καθώς η διαδικασία διαίρεσης και αφαίρεσης επαναλαμβάνεται επ' άπειρον δημιουργείται ένα σύνολο απομονωμένων μεταξύ τους σημείων που χωρίζονται από μεγάλα κενά.



Εικόνα 4.1 Τα πρώτα βήματα της κατασκευής του τριαδικού συνόλου Cantor. [4]

Παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα δύο ζεύγη τμημάτων που έχουν δημιουργηθεί στο Βήμα 2 είναι πανομοιότυπο με τα δύο τμήματα του Βήματος 1, αν τα σμικρύνει κανείς κατά $1/3$. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για όλα τα ζεύγη τμημάτων του Βήματος 3, σε σχέση με τα αντίστοιχα ζεύγη του Βήματος 2 από τα οποία προήλθαν. Το φαινόμενο αυτό που παρατηρείται μεταξύ όλων των διαδοχικών τμημάτων της κατασκευής του συνόλου Cantor, ονομάζεται αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας και η συγκεκριμένη κλίμακα που συνδέει εδώ τα διαδοχικά ζεύγη τμημάτων είναι το $1/3$.

4.2 Η έννοια της κλιμάκωσης

Με το παράδειγμα αυτό, μόλις εισάγαμε μία από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες των fractal, την έννοια της κλιμάκωσης. Δείξαμε ότι η πολυπλοκότητα ενός σύνθετου αντικειμένου (όπως το σύνολο του Cantor της Εικόνα 4.1) μπορεί να ανιχνευθεί μέσω μίας διαδικασίας σμικρύνσεων (ή μεγεθύνσεων) κατά μία συγκεκριμένη κλίμακα.

Για καλύτερη κατανόηση θα εξετάσουμε κάτι πολύ πιο γνωστό από την καθημερινή ζωή όπως είναι το μεγάλο μίσχο της "φτέρης του Barnsley" που φαίνεται στην Εικόνα 4.2.



Εικόνα 4.2 Η φτέρη του Barnsley. [4]

Συγκρίνοντας το μεγάλο μίσχο με τα αμέσως μικρότερα κλαδιά και εκείνα με τα πιο μικρά που είναι επάνω τους, κ.ο.κ. παρατηρούμε ότι η Εικόνα 4.2 χαρακτηρίζεται και αυτή από αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας. Βέβαια το ποιά είναι η κλίμακα αυτή δεν είναι το ίδιο εύκολο να απαντηθεί, όπως στην περίπτωση του τριαδικού συνόλου του Cantor.

Υπάρχουν πολλά πράγματα γύρω μας που εμφανίζουν αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας, όπως οι διακλαδώσεις των δέντρων και των βρογχικών σωλήνων του πνεύμονα, οι ανώμαλες επιφάνειες των πετρωμάτων, τα σύννεφα, οι ακτές μιας παραλίας κ.α. Πρακτικά, όταν λέμε ότι ένα αντικείμενο χαρακτηρίζεται από αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας σημαίνει ότι, αν πάρουμε ένα τέτοιο αντικείμενο κόψουμε ένα κομμάτι του και στη συνέχεια το καταστρέψουμε, το αντικείμενο που θα προκύψει ως αποτέλεσμα θα φαίνεται ίδιο με το αρχικό. Για παράδειγμα, αν τραβήξουμε φωτογραφία την ακτογραμμή της Αγγλίας από ένα αεροπλάνο θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα μία καμπύλη με συνολική εμφάνιση σχεδόν ίδια με την εικόνα που θα πάρουμε όταν στεκούμενοι στο έδαφος κοιτάζουμε ένα βραχώδες μέρος της ακτογραμμής. Ανάλογα, το κλαδί ενός δέντρου που έχει πάνω του πολλά μικρότερα κλαδάκια, φαίνεται σαν ολόκληρο δέντρο αν το κοιτάζουμε από μεγαλύτερη απόσταση. Γενικά πίσω από την πολυπλοκότητα πολλών αντικειμένων κρύβονται κάποια πρότυπα που επαναλαμβάνονται σε διαφορετικές κλίμακες μέσω συγκεκριμένων διαδικασιών, συνθέτοντας έτσι την τελική εικόνα του αντικειμένου που εμείς παρατηρούμε.

4.3 Ανιχνεύοντας τη Γεωμετρία της φύσης

Παντού μπορούμε να συναντήσουμε παραδείγματα αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας. Αν για παράδειγμα παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο κορμός του δέντρου της Εικόνα 4.3 χωρίζεται σε μεγάλα κλαδιά και εκείνα με τη σειρά τους διακλαδίζονται σε μικρότερα, εκείνα σε πιο μικρά, κ.ο.κ.



Εικόνα 4.3 Οι διακλαδώσεις ενός μεγάλου δέντρου που έχει πολύ έντονα τα χαρακτηριστικά της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας. [4]

Αν συγκρίνουμε τα μήκη των κλαδιών μεταξύ τους, θα δούμε ότι μικραίνουν περίπου με την ίδια κλίμακα από "γενιά" σε "γενιά". Το ίδιο θα παρατηρήσουμε αν προσέξουμε τον τρόπο που μικραίνουν οι μίσχοι της φτέρης της Εικόνα 4.2, ή ακόμα οι δενδρίτες του νευρικού κυττάρου της Εικόνα 4.4(α), τα νεύρα του φύλλου της Εικόνα 4.4(β) ή η κορυφογραμμή της Εικόνα 4.5, όσο πλησιάζουμε περισσότερο τα βουνά και αποκαλύπτονται οι λεπτομέρειες τους.



Εικόνα 4.4 (α) Οι διακλαδώσεις των νεύρων ενός φύλλου, (β) το σχήμα του ανθρώπινου νευρώνα. [4]



Εικόνα 4.5 Κορυφογραμμές βουνών που εμφανίζουν πολυπλοκότητα παρόμοιας μορφής όσο τις πλησιάζουμε περισσότερο. [4]

Φυσικά κανείς δε μπορεί να ισχυριστεί ότι κάθε ένα από τα φαινόμενα αυτά χαρακτηρίζεται από μία και μοναδική κλίμακα. Όπως άλλωστε φαίνεται και με απλή παρατήρηση, κάθε μία από τις παραπάνω εικόνες δείχνει ότι είναι αποτέλεσμα συνύπαρξης πολλών κλιμάκων. Γενικά οι λέξεις κλιμάκωση και αυτοομοιότητα αποδεικνύεται ότι είναι οι πιο κατάλληλες για να περιγράψουν εικόνες που εμφανίζουν, υπό συνεχείς μεγεθύνσεις, χαρακτηριστικά παρόμοια με το αρχικό σχήμα.

Η έννοια της κλιμάκωσης χρησιμοποιείται πολύ συχνά στις Θετικές Επιστήμες για να δηλώσει τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών που συνδέονται μεταξύ τους με ένα νόμο δύναμης (δηλαδή το ένα μεταβάλλεται ως δύναμη του άλλου). Ένας τέτοιος νόμος έχει τη μορφή

$$Y = c \cdot X^{\alpha} \quad (4.1)$$

όπου X και Y είναι τα δύο (θετικά) μεγέθη, c μία θετική σταθερά αναλογίας και α λέγεται ο εκθέτης της κλιμάκωσης. Αν ο α είναι θετικός, τότε τα μέτρα των δύο μεγεθών αυξάνονται ταυτόχρονα, ενώ αν είναι αρνητικός τα Y μικραίνουν καθώς αυξάνεται το X . Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα μιας τέτοιας σχέσης κλιμάκωσης είναι ο νόμος της βαρυτικής έλξης δύο σωμάτων Y ως προς τη μεταξύ τους απόσταση X , με $\alpha = -2$ και το c το γινόμενο των μαζών τους επί μία παγκόσμια σταθερά.

Ο τρόπος που επιβεβαιώνουμε στην πράξη ότι ισχύει μία σχέση της μορφής (4.1) είναι παίρνοντας τη λογαριθμική της έκφραση

$$\log Y = \alpha \cdot \log X + \log c \quad (4.2)$$

(η βάση των λογαρίθμων μπορεί να είναι οποιαδήποτε) και σχεδιάζοντας σε λογαριθμική κλίμακα τη γραφική παράσταση του $\log Y$ ως προς $\log X$. Αν ισχύει η εξίσωση (4.1) θα βρούμε μία ευθεία με κλίση α που τέμνει τον κάθετο άξονα στο $\log c$.

Για κάποιο άγνωστο λόγο, τα παραδείγματα φαινομένων που διέπονται από νόμους της μορφής (4.1) είναι ανεξάντλητα: Από το πλήθος των γαλαξιών συναρτήσει της απόστασης τους από τη γη και τα μέγιστα ύψη της στάθμης του νερού του Νείλου συναρτήσει της συχνότητας με την οποία εμφανίζονται, μέχρι την ενέργεια που καταναλώνει ένας ζωντανός οργανισμός ως προς το μέγεθος του και τη σχέση μεταξύ των διαμέτρων των αιμοφόρων αγγείων στο σώμα μας, η φύση φαίνεται να ακολουθεί τους νόμους της μορφής (4.1). [4]

4.4 Ορισμός αντικειμένου fractal και διάστασης fractal

4.4.1 Ορισμός ενός fractal

Γενικά αν και δεν είναι καθόλου εύκολο να δώσουμε ένα σύντομο και αυστηρό ορισμό, fractal θα ονομάζουμε κάθε σύνολο σημείων που χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

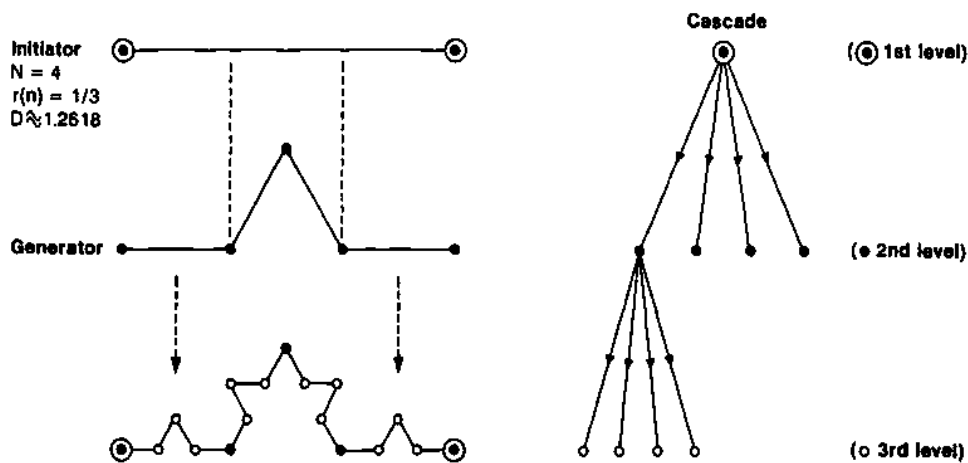
- i. Εμφανίζει "δομή μέσα σε δομή", δηλαδή νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθυνσης.
- ii. Επί μέρους τμήματα του είναι παρόμοια με άλλα τμήματα του συνόλου σε διαφορετική κλίμακα, παρουσιάζει δηλαδή αυτό που ονομάζουμε αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας.
- iii. Η αυτοομοιότητα ενός fractal δεν είναι απαραίτητα ακριβής και δεν είναι γενικά αποτέλεσμα αλλαγής μίας μόνο κλίμακας. Ένα fractal μπορεί να περιγράφεται από μία άπειρη ακολουθία κλιμάκων η δε αυτοομοιότητα του μπορεί να είναι και στατιστική ιδιότητα του συνόλου.
- iv. Συχνά ένα fractal κατασκευάζεται ή δημιουργείται μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας, σε κάθε βήμα της οποίας εφαρμόζονται οι ίδιοι μαθηματικοί μετασχηματισμοί (αλλαγή κλίμακας, μετάθεση και στροφή)

4.4.2 Το παράδοξο της καμπύλης του Koch

Για να κατασκευάσουμε απλά fractal τα οποία ικανοποιούν πλήρως το κριτήριο της αυτοομοιότητας θα ακολουθήσουμε τον Mandelbrot (1983) και θα ξεκινήσουμε με ένα γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο θα ονομάζουμε "εκκινητή" (initiator). Σε αυτόν θα εφαρμόσουμε ένα μοτίβο το οποίο θα επαναλαμβάνεται σε όλο και μικρότερες κλίμακες και θα ονομάζουμε "μετασχηματισμό" (generator). Κατασκευάζουμε ένα fractal εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στον εκκινητή. Από τη διαδικασία αυτή εξάγουμε ένα αντικείμενο που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε μικρότερη κλίμακα αποτελείται από πολλούς εκκινητές. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού για άλλη μία

φορά σε αυτήν την καινούρια κλίμακα έχει σαν αποτέλεσμα μία περαιτέρω λεπτομέρεια στη γεωμετρία του αντικειμένου σε μία ακόμη μικρότερη κλίμακα. Στην επόμενη επανάληψη ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται στους εκκινητές που έχουν δημιουργηθεί στην καινούρια κλίμακα κ.ο.κ. Τα τέλεια μαθηματικά fractal παράγονται μετά από άπειρο αριθμό τέτοιων επαναλήψεων. Στην πράξη όμως, όταν κατασκευάζουμε ένα μαθηματικό fractal, οι επαναλήψεις σταματάνε όταν τα μικρότερα αντίγραφα του αρχικού αντικειμένου είναι σε τόσο μικρή κλίμακα που η ανάλυση της εικόνας δεν μας επιτρέπει να προχωρήσουμε άλλο, όταν δηλαδή φτάσουμε σε κάποιο όριο ανάλυσης πέρα από το οποίο δεν μπορούμε να διακρίνουμε περαιτέρω διαφορά. Έτσι ουσιαστικά τα πραγματικά fractal υπάρχουν μόνο στο όριο, και αυτό που εμείς βλέπουμε είναι απλά μία προσέγγιση τους.

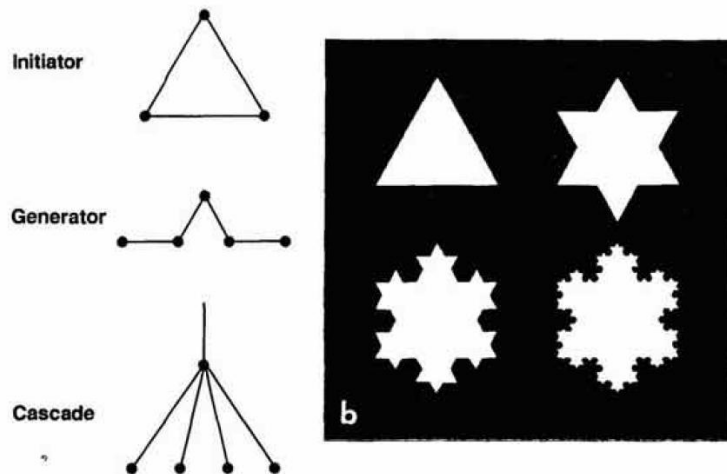
Η παραπάνω διαδικασία απεικονίζεται στην Εικόνα 4.6 για μία καμπύλη που παρουσιάστηκε από τον Helge von Koch το 1904 και ονομάζεται καμπύλη του Koch. Όπως φαίνεται και στην εικόνα ο εκκινητής είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και ο μετασχηματισμός αντικαθιστά το ευθύγραμμο αυτό τμήμα με τέσσερα αντίγραφα του διατεταγμένα σε μία τεθλασμένη γραμμή αλλά υπό τέτοια κλίμακα ώστε κάθε αντίγραφο να έχει μήκος ίσο με το ένα τρίτο του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.



Εικόνα 4.6 Η κατασκευή της καμπύλης του Koch. [11]

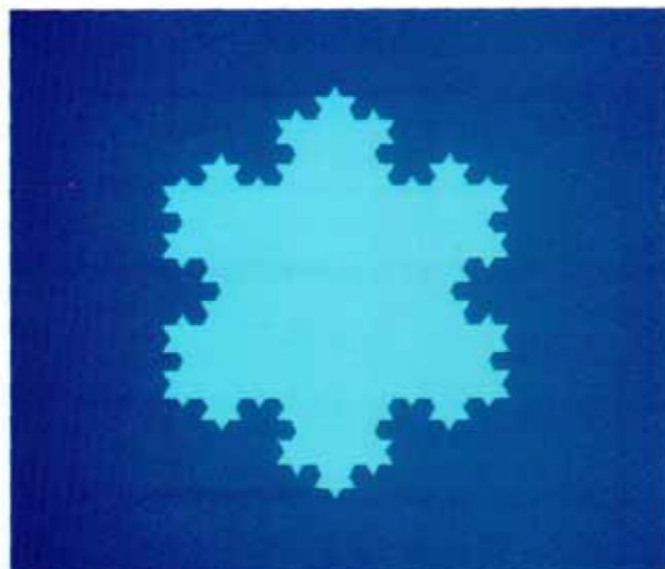
Η καμπύλη του Koch είναι ένα τέλει παράδειγμα μίας γραμμής της οποίας το μήκος αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, μέσω της αντικατάστασης κάθε ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο λειτουργεί ως εκκινητής, με μία τεθλασμένη γραμμή, αποτελούμενη από τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, και συνολικού μήκους ίσου με τα τέσσερα τρίτα του μήκους του εκκινητή. Μία ακόμα καλύτερη απεικόνιση της διαδικασίας κατασκευής fractal δίνεται από το νησί του Koch, του οποίου η κατασκευή και τα πρώτα τρία επίπεδα επαναλήψεων φαίνονται στην Εικόνα 4.7. Στην περίπτωση αυτή ο εκκινητής είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο - το νησί. Για μετασχηματισμό χρησιμοποιούμε τον ίδιο με αυτόν της καμπύλης του Koch και τον

εφαρμόζουμε σε κάθε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου. Έτσι κάθε πλευρά του νησιού του Koch είναι μία καμπύλη του Koch η οποία στο όριο ορίζει ένα fractal. Είναι εύκολο να δούμε ότι το νησί του Koch αποτελείται από όλο και μικρότερα νησιά τα οποία είναι πανομοιότυπα μοτίβα σε αλλαγές κλίμακας. Με αυτή την έννοια μιλάμε για αυτοομοιότητα.



Εικόνα 4.7 Το νησί του Koch. [11]

Επίσης στην Εικόνα 4.8 φαίνεται καλύτερα το νησί του Koch μετά από τέσσερις επαναλήψεις.



Εικόνα 4.8 Το νησί του Koch μετά από τέσσερις επαναλήψεις. [11]

Στην καμπύλη του Koch, τα ατελείωτα επαναλαμβανόμενα μοτίβα είναι αυστηρά αυτοόμοια με την έννοια ότι οι αλλαγές κλίμακας που επιβάλλονται από τον μετασχηματισμό δεν εκτείνουν το αντικείμενο περισσότερο προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση.

Το νησί του Koch αντιπροσωπεύει ένα από τα καλύτερα fractal μέσω του οποίου μπορούμε να δείξουμε τα διάφορα παράδοξα που θέτουν υπό αμφισβήτηση την Ευκλείδεια αντίληψη μας για τον χώρο και τις διαστάσεις. Η Εικόνα 4.6 υποδηλώνει ότι το μήκος της καμπύλης του Koch, όπως και η ακτογραμμή της Βρετανίας, είναι απείρως μεγάλα, ενώ η Εικόνα 4.7 και Εικόνα 4.8 υποδηλώνουν ότι το εμβαδόν του νησιού του Koch που αποτελείται από τρεις καμπύλες του Koch, είναι στην πραγματικότητα οριοθετημένο. Θα δείξουμε τις παραπάνω υποθέσεις και πιο τυπικά παρακάτω. Έστω ότι το μήκος της καμπύλης του Koch ορίζεται ως r . Όπως υποδηλώνει η Εικόνα 4.6, κάθε ένα από τα τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα του μετασχηματισμού έχει μήκος $r/3$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το αυξανόμενο μήκος της καμπύλης ως ακολούθως. Το μήκος της αρχικής γραμμής είναι

$$L_0 = r \quad (4.3)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στον εκκινήτη έχουμε σαν αποτέλεσμα μία γραμμή L_1 , η οποία είναι $4/3$ του μήκους της L_0

$$L_1 = \frac{4}{3} \cdot L_0 = \frac{4}{3} \cdot r \quad (4.4)$$

και η επόμενη επανάληψη δίνει

$$L_2 = \frac{4}{3} \cdot L_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot r \quad (4.5)$$

⋮

$$L_k = \frac{4}{3} \cdot L_{k-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot r \quad (4.6)$$

Είναι φανερό ότι όσο $k \rightarrow \infty$, έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot r \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

Κατ' ουσία, η γραμμή είναι απείρου μήκους, όπως και η ακτογραμμή της Βρετανίας στις αρχικές αναφορές του Mandelbrot για τα fractal.

Αν τώρα εξετάσουμε το νησί του Koch της Εικόνα 4.7, τότε είναι φανερό ότι η περίμετρος του νησιού είναι τρεις φορές το μήκος μίας καμπύλης του Koch και έτσι πρέπει να αντικαταστήσουμε το μήκος r με $3r$ στις εξισώσεις (4.3) έως (4.7) παραπάνω. Προκύπτει λοιπόν ότι η περίμετρος του νησιού τείνει στο άπειρο καθώς $k \rightarrow \infty$. Θα εξετάσουμε τώρα το εμβαδόν του νησιού και θα δείξουμε ότι παρόλο που έχει περίμετρο άπειρου μήκους, το εμβαδόν του συγκλίνει σε μία πεπερασμένη τιμή.

Για να το δείξουμε αυτό, πρώτα ας ορίσουμε το εμβαδόν του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου ως A_0 και αφού κάθε πλευρά έχει μήκος r , το εμβαδόν είναι

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 \quad (4.8)$$

Στην πρώτη επανάληψη τρία ισόπλευρα τρίγωνα προστίθενται σε κάθε μία από τις τρεις πλευρές του εκκινητή και το εμβαδόν του καθενός ορίζεται ως \widetilde{A}_1 και είναι

$$\widetilde{A}_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}r\right)^2 \quad (4.9)$$

και το εμβαδόν και των τριών αυτών τριγώνων A_1 δίνεται ως

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \quad (4.10)$$

Είναι προφανές ότι $A_1 < A_0$ και έτσι το άθροισμα των εμβαδών μέχρι τώρα δίνεται ως \overline{A}_1

$$\overline{A}_1 = A_0 + A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \quad (4.11)$$

Σε κάθε στάδιο της επανάληψης $3 \times 4^{k-1}$ τρίγωνα θα προστίθενται και το συνολικό εμβαδόν μετά από k επαναλήψεις θα είναι

$$\overline{A}_k = A_0 + A_1 + 4A_2 + \dots + 4^{k-1}A_k \quad (4.12)$$

Με το A_k να ορίζεται ως

$$A_k = \frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{1}{3^{k-1}} A_0 \quad (4.13)$$

και αυτό απλοποιείται σε

$$A_k = \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \quad (4.14)$$

Το συνολικό εμβαδόν που θα προκύψει μετά από k επαναλήψεις μπορεί να γραφεί ως

$$\overline{A}_k = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \cdot \left\{1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\right\} \quad (4.15)$$

Η εξίσωση (4.15) μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα

$$\overline{A}_k = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{4}{9}\right)^j \quad (4.16)$$

Ο όρος της συνάθροισης στην εξίσωση (4.16) είναι μία συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά που μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το άθροισμα της είναι $9/5$ καθώς $k \rightarrow \infty$, και έτσι το όριο της εξίσωσης (4.12) δίνεται ως

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A}_k = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} r^2 = \frac{8}{5} A_0 \quad (4.17)$$

4.4.3 Τρόπος εύρεσης διάστασης fractal

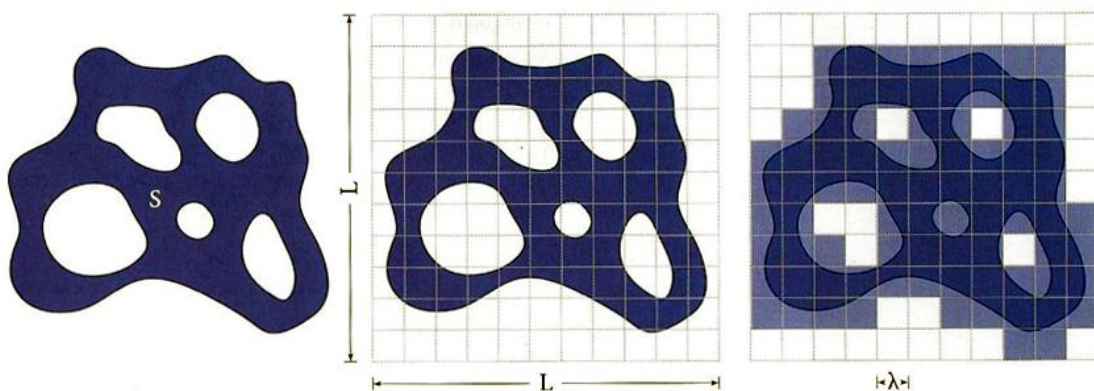
Στο νησί του Koch είχαμε το εξής παράδοξο: παρόλο που το μήκος της καμπύλης που περιέκλειε το νησί αύξανε επ' άπειρον (δεν ήταν φραγμένο) όσο η κλίμακα γινόταν όλο και μικρότερη, το εμβαδόν του νησιού σύγκλινε σε μία πεπερασμένη τιμή, η οποία ήταν ίση με $0,693 \cdot r^2$. Αν το μήκος της καμπύλης σύγκλινε, τότε η διάσταση της θα ήταν ίση με ένα και η διάσταση του εμβαδού που θα περιέκλειε ίση με δύο. Στην περίπτωση όμως της καμπύλης του Koch, είναι προφανές ότι το μήκος που μετρήθηκε χρησιμοποιώντας τη συμβατική Ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι φραγμένο, και άρα η έννοια της Ευκλείδειας διάστασης δεν είναι αρκετή για να περιγράψει τέτοιου είδους αντικείμενα. [11]

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της διάστασης fractal θα ξεκινήσουμε από έναν απλό ορισμό, που είναι πρακτικά εύχρηστος και δίνει τη σωστή απάντηση για όλα τα σχήματα και αντικείμενα της καθημερινής μας εμπειρίας, είτε αυτά είναι fractal είτε όχι και στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον αυστηρό ορισμό της διάστασης που διατύπωσε το 1919 ο Γερμανός Μαθηματικός Felix Hausdorff.

Θεωρούμε ένα αντικείμενο S "εμβυθισμένο" σε $d=2$ διαστάσεις όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.9, όπου d είναι η λεγόμενη διάσταση εμβύθισης. Διαιρούμε ένα τετράγωνο πλευράς L που περιέχει πλήρως το S σε ένα πλέγμα $(L/\lambda) \times (L/\lambda)$, μικρών τετραγώνων πλευράς λ και μετράμε το πλήθος $N(L, \lambda)$ των τετραγώνων που περιέχουν ένα τουλάχιστον σημείο του S στο εσωτερικό τους. Κατόπιν υπολογίζουμε το λεγόμενο δ -μέτρο του S από τον τύπο

$$M_\delta = N(L, \lambda) \cdot \lambda^\delta \quad (4.18)$$

και το εμβαδόν του S προσδιορίζεται θέτοντας $\delta=2$ και παίρνοντας $\lambda \rightarrow 0$, οπότε φυσικά ο αριθμός των τετραγώνων $N(L, \lambda) \rightarrow \infty$.



Εικόνα 4.9 Για να υπολογίσουμε το λεγόμενο δ -μέτρο του αντικειμένου S το καλύπτουμε με τον ελάχιστο αριθμό $N(L, \lambda)$ τετραγώνων πλευράς λ . [4]

Όπως είναι φανερό, το αποτέλεσμα βρίσκεται μέσω μίας οριακής διαδικασίας κατά την οποία το μέγεθος των τετραγώνων μικραίνει διαρκώς (ενώ παράλληλα αυξάνει το πλήθος τους) ώστε να βρεθεί το εμβαδόν του S με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Θέτουμε $\delta=2$ στην εξίσωση (4.18) καθώς υποθέτουμε ότι το αντικείμενο που μελετάμε είναι 2-διάστατο, καταλαμβάνει δηλαδή ένα μέρος του επιπέδου του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν.

Αν μεν η ως άνω οριακή διαδικασία, με $\delta=2$, συγκλίνει και δώσει πεπερασμένο, μη μηδενικό αποτέλεσμα σημαίνει ότι το αντικείμενο που εξετάζουμε είναι δύο διαστάσεων. Υπάρχει όμως και η πιθανότητα να προκύψει ως αποτέλεσμα $M_2 = 0$, αν ο αριθμός λ^2 της εξίσωσης (4.18) τείνει στο 0 γρηγορότερα από ότι ο αριθμός $N(L, \lambda)$ τείνει στο άπειρο.

Αν εξετάζαμε, για παράδειγμα, μία καλλιέργεια S που αποτελείται από ένα τεράστιο 1-διάστατο μακρομόριο αναδιπλωμένο τόσο πυκνά που να μοιάζει 2-διάστατο, τότε η εξίσωση (4.18) με $\delta=2$ στο όριο $\lambda \rightarrow 0$, $N(L, \lambda) \rightarrow \infty$ σίγουρα θα έδινε 0, αφού το S δεν καταλαμβάνει τμήμα δύο διαστάσεων. Αν θέταμε $\delta=1$ στην εξίσωση (4.18) θα υπολογίζαμε, μέσω της M_1 , το συνολικό μήκος του S , χρησιμοποιώντας άπειρα ευθύγραμμα τμήματα των οποίων το μήκος λ τείνει στο μηδέν. Στην περίπτωση όμως που το μακρομόριο S είναι τόσο πυκνά τυλιγμένο που ο αριθμός $N(L, \lambda)$ τείνει στο άπειρο γρηγορότερα από ότι το λ στο μηδέν θα προέκυπτε ότι το συνολικό μήκος M_1 του S είναι άπειρο. Έτσι για να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε τη σωστή διάσταση της καλλιέργειας S πρέπει να βρούμε μία άλλη τιμή για το δ η οποία θα είναι μεταξύ του ένα και του δύο.

Είναι απαραίτητο λοιπόν να παραδεχτούμε ότι υπάρχουν στη φύση αντικείμενα τόσο πολύπλοκα που η διάστασή τους δεν είναι ακέραια και δεν ανήκει επομένως σε καμία από τις γνωστές ακέραιες διαστάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

4.4.4 Ορισμός διάστασης fractal

Ορίζουμε ως διάσταση χωρητικότητας, D_c , ενός αντικειμένου S την τιμή εκείνη του δ για την οποία έχουμε

$$M_\delta = \lim_{\lambda \rightarrow 0} N(L, \lambda) \cdot \lambda^\delta = \begin{cases} 0 & , \quad \text{για } \delta > D_c \\ 0 < c < \infty & , \quad \text{για } \delta = D_c \\ \infty & , \quad \text{για } \delta < D_c \end{cases} \quad (4.19)$$

Απαλλάσσοντας μάλιστα το αποτέλεσμα αυτό από τις διαστάσεις μήκους εισάγουμε την ποσότητα

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L} > 0 \quad (4.20)$$

και γράφουμε το πραγματικό "μέτρο" του S στη μορφή

$$N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{D_c} = K, \quad \text{με } \varepsilon \rightarrow 0, N(\varepsilon) \rightarrow \infty \text{ και } 0 < K < \infty$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ένας ιδιαίτερα χρήσιμος τύπος για το ελάχιστο πλήθος "κουτιών" πλευράς ε που καλύπτουν ένα οποιοδήποτε αντικείμενο S στη σωστή του διάσταση $\delta = D_c$:

$$N(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{-D_c}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

Για να δώσει ο υπολογισμός αυτός αποτέλεσμα που δεν υπερεκτιμά (ούτε υποεκτιμά) το "μέτρο" του S θα πρέπει τα $N(\varepsilon)$ αυτά κουτιά να μην επικαλύπτονται και να μην αφήνουν εκτός τους σημεία του S . Δεν πρέπει δηλαδή κάποιο σημείο του S να περιέχεται σε δύο κουτάκια, ή να μην περιέχεται σε κανένα κουτί της κάλυψης $N(\varepsilon)$. Παρατηρούμε επίσης ότι καταλήξαμε και εδώ, μέσω της εξίσωσης (4.21), σε μία σχέση κλιμάκωσης μεταξύ του $N(\varepsilon)$ και του ε , παρόμοια με αυτή της εξίσωσης (4.1).

Για να υπολογίσουμε τη διάσταση χωρητικότητας D_c θα πάρουμε λογαρίθμους (με οποιαδήποτε βάση) και στις δύο πλευρές της εξίσωσης (4.21). Έτσι γίνεται

$$\log N(\varepsilon) = \log K - D_c \cdot \log \varepsilon \quad (4.22)$$

και βρίσκουμε

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (4.23)$$

θεωρώντας ότι στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, ο όρος $\log K / \log \varepsilon$ τείνει στο μηδέν, αφού το K είναι ένας πεπερασμένος αριθμός και το $\log \varepsilon$ τείνει στο άπειρο.

Γενικά ο τύπος (4.23) είναι ο πλέον κατάλληλος για τον προσδιορισμό της D_c για όλα τα fractal που κατασκευάζονται από μία επαναληπτική διαδικασία και χαρακτηρίζονται από μία μόνο κλίμακα αυτοομοιότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι ανεξάρτητος της διάστασης εμβύθισης d στην οποία έχουμε τοποθετήσει το αντικείμενο S που μας ενδιαφέρει.

4.5 Υπολογισμός διάστασης γνωστών fractal σχημάτων

4.5.1 Τριαδικό σύνολο cantor

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα τη διάσταση του τριαδικού συνόλου Cantor που φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Παρατηρούμε ότι στο n -οστό βήμα της κατασκευής ο ελάχιστος αριθμός ευθυγράμμων τμημάτων μήκους

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

που καλύπτουν τα σημεία του είναι

$$N_n = 2^n \quad (4.25)$$

(χρησιμοποιούμε ευθύγραμμα τμήματα επειδή η διάσταση εμβύθισης στο παράδειγμα είναι $d=1$).

Θέτοντας τώρα

$$N(\varepsilon) = 2^n \text{ και } \varepsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

στην εξίσωση (4.23) βρίσκουμε

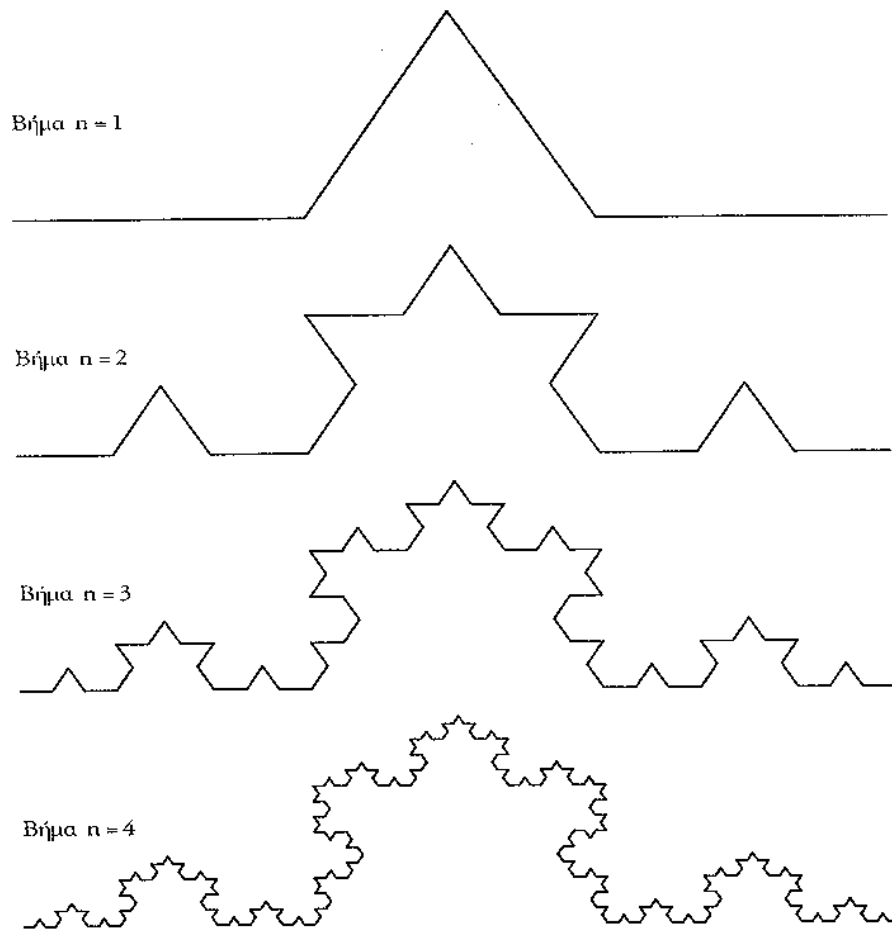
$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 2}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \quad (4.26)$$

που είναι και η διάσταση χωρητικότητας του τριαδικού συνόλου Cantor.

Ας υπολογίσουμε τώρα τη διάσταση D_c για δύο ακόμη δημοφιλή και πολύ χαρακτηριστικά σύνολα fractal: την καμπύλη του Koch και το "τρυπητό" του Sierpinski.

4.5.2 Καμπύλη του Koch

Σε προηγούμενη παράγραφο, για να δείξουμε ότι υπάρχουν σχήματα που χαρακτηρίζονται από μη ακέραια διάσταση χρησιμοποιήσαμε ως παράδειγμα την καμπύλη του Koch. Εδώ θα δούμε πιο αναλυτικά την κατασκευή της καμπύλης αλλά και τον υπολογισμό της διάστασης της. Η καμπύλη του Koch κατασκευάζεται με τον ακόλουθο τρόπο: Σε ένα μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ στο επίπεδο (διάσταση εμβύθισης $d=2$) αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, προσθέτοντας στη θέση του δύο άλλα τμήματα μήκους $1/3$, όπως δείχνει η Εικόνα 4.10 στο βήμα $n=1$. Συνεχίζουμε, αφαιρώντας από κάθε ευθύγραμμο τμήμα της τεθλασμένης καμπύλης που δημιουργείται το μεσαίο τρίτο του και τοποθετώντας στη θέση του, δύο ίσα τμήματα μήκους $\varepsilon_n = (1/3)^n$, στα βήματα $n=2,3,\dots$, πάντα σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου (Εικόνα 4.10).



Εικόνα 4.10 Από μία απλή καμπύλη σε μία πολύπλοκη: τα πρώτα βήματα κατασκευής της καμπύλης του Koch. [4]

Στο όριο της διαδικασίας αυτής, καθώς $n \rightarrow \infty$, θα σχηματιστεί μία άπειρα πολύπλοκη καμπύλη.

Για τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της καμπύλης, προσθέτουμε το μήκος όλων των τμημάτων που την αποτελούν, στο n -οστό βήμα, και παίρνουμε το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$: Ο υπολογισμός αυτός δίνει μήκος καμπύλης

$$L_n = 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (4.27)$$

που τείνει στο άπειρο, καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα. Δηλαδή, η καμπύλη του Koch, παρόλο που είναι περιορισμένη σε ένα σχετικά μικρό χώρο του επιπέδου, αν μετρήσουμε όλες τις προεξοχές και εγχοπές της, φαίνεται να έχει συνολικά άπειρο μήκος.

Άρα η καμπύλη του Koch φαίνεται να είναι κάτι παραπάνω από μία απλή καμπύλη διάστασης $d=1$. Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τη διάσταση χωρητικότητας D_c . Έτσι, θέτοντας στην εξίσωση (4.23) $\varepsilon = \varepsilon_n = (1/3)^n$ και

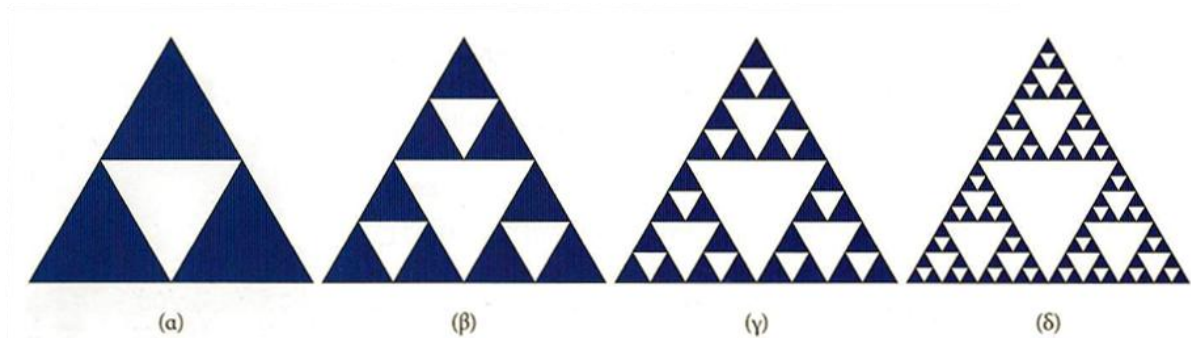
$N(\varepsilon) = N(\varepsilon_n) = 4^n$ (δηλαδή καλύπτοντας την καμπύλη στο n -οστό βήμα με 4^n "κουτάκια" διαμέτρου $\varepsilon_n = (1/3)^n$) βρίσκουμε

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 4}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618595 \quad (4.28)$$

Όπως αποδεικνύεται λοιπόν η καμπύλη του Koch είναι πράγματι κάτι παραπάνω από καμπύλη αφού επεκτείνεται πέραν της διάστασης ένα και δημιουργεί ένα fractal με διάσταση χωρητικότητας (4.28). Βέβαια η τιμή αυτή του D_c είναι μικρότερη του δύο που σημαίνει ότι η καμπύλη του Koch δεν καλύπτει πλήρως ένα 2-διάστατο τμήμα του επιπέδου.

4.5.3 Το "τρυπητό" του Sierpinski

Για την κατασκευή του "τρυπητού" του Sierpinski θα ξεκινήσουμε με ένα σχήμα δύο διαστάσεων και θα ακολουθήσουμε μία αφαιρετική διαδικασία παραμένοντας πάντα σε διάσταση εμβύθισης $d=2$. Συγκεκριμένα, παίρνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 και αφαιρούμε το μεσαίο τριγωνικό κομμάτι που έχει ως κορυφές τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου (Εικόνα 4.11(α)). Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα τρία συμπαγή τρίγωνα που έμειναν στην Εικόνα 4.11(α) το μεσαίο τους κομμάτι, δηλαδή ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $1/4$, όπως δείχνει και η Εικόνα 4.11(β), κατόπιν από κάθε ένα από τα εννιά συμπαγή τρίγωνα που μένουν αφαιρούμε το μεσαίο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $1/8$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.11 (γ), κ.ο.κ.



Εικόνα 4.11 Τα πρώτα τέσσερα στάδια της κατασκευής του "τρυπητού" του Sierpinski. [4]

Για τον υπολογισμό του συνολικού εμβαδού, υπολογίζουμε το εμβαδό όλων των τριγώνων, E_n , στο n -οστό βήμα της κατασκευής και παίρνουμε το όριο.

Έτσι βρίσκουμε

$$E_n = 3^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (4.29)$$

δηλαδή το συνολικό εμβαδόν του "τρυπητού" Sierpinski είναι μηδέν και επομένως το σύνολο σημείων που απομένει καταλαμβάνει ένα μέρος του επιπέδου διάστασης λιγότερο από δύο. Για να βρούμε την ακριβή διάσταση χωρητικότητας D_c του "τρυπητού" του Sierpinski χρησιμοποιούμε πάλι τον τύπο (4.23) , με $\varepsilon = \varepsilon_n = (1/2)^n$ και $N(\varepsilon) = N(\varepsilon_n) = 3^n$. Το αποτέλεσμα είναι :

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 3}{n \cdot \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496 \quad (4.30)$$

Έτσι, συγκρίνοντας τις διαστάσεις (4.28) και (4.30) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το "τρυπητό" του Sierpinski είναι αρκετά πιο πυκνό από την καμπύλη του Koch, αφού η διάσταση χωρητικότητας του είναι αρκετά μεγαλύτερη.

4.6 Ο ρόλος της αυτοομοιότητας

Η πιο σημαντική ιδιότητα των παραπάνω σχημάτων είναι αυτή της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας, η οποία επιβεβαιώνει άλλωστε και τον χαρακτηρισμό τους σαν σύνολα fractal. Πράγματι, παρατηρούμε ότι, σε όλα τα βήματα της κατασκευής τους

- Από κάθε τμήμα του τριαδικού συνόλου Cantor παράγονται $M=2$ μικρότερα κατά μία κλίμακα $r = 1/3$ (Εικόνα 4.1)
- Από κάθε πλευρά της καμπύλης Koch παράγονται $M=4$ μικρότερες κατά μία κλίμακα $r = 1/3$ (Εικόνα 4.10)
- Από κάθε τρίγωνο του "τρυπητού" του Sierpinski παράγονται $M=3$ μικρότερα κατά μία κλίμακα $r = 1/2$ (Εικόνα 4.11)

Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι, για απλά fractal, που σε κάθε βήμα μεγέθυνσης δημιουργούνται M φορές περισσότερα τμήματα, όμοια με εκείνα του προηγούμενου βήματος αλλά μικρότερα κατά μία κλίμακα r ($0 < r < 1$), η διάσταση χωρητικότητας D_c δίνεται από την έκφραση

$$D_c = \frac{\log M}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (4.31)$$

Ο τύπος αυτός είναι αρκετά απλούστερος από τον (4.23) αφού δεν απαιτεί τη γνώση των ε_n και $N(\varepsilon_n)$ σε κάθε στάδιο και τον υπολογισμό του ορίου $n \rightarrow \infty$. Μάλιστα για λόγους που αναφέρθηκαν πιο πάνω η διάσταση D_c λέγεται συχνά στη βιβλιογραφία και διάσταση ομοιότητας ενός fractal.

4.7 Η διάσταση Hausdorff

Ένας πιο αυστηρός ορισμός της διάστασης ενός συνόλου είναι αυτός που χρησιμοποίησε ο Felix Hausdorff το 1919. Αντί για το δ-μέτρο ενός συνόλου S , θα εισαγάγουμε το x -μέτρο του Hausdorff με τον ορισμό:

$$M_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{K(\varepsilon)} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^x \right\} \quad (4.32)$$

Θεωρούμε μία οποιαδήποτε διαμέριση ή κάλυψη του συνόλου S , $K(\varepsilon)$, με κουτάκια διαμέτρου $\varepsilon_i < \varepsilon$, για κάποιο συγκεκριμένο $\varepsilon > 0$. Καλύπτουμε δηλαδή πλήρως το S , με όποιο τρόπο εμείς θέλουμε (χρησιμοποιώντας κυβικά, σφαιρικά κουτάκια, κ.λπ.) και με όποιο πλήθος κουτιών θέλουμε. Ο αριθμός αυτός μπορεί να γίνει και άπειρος, αν πάρουμε τα κουτάκια μας να γίνονται ολοένα και πιο μικρά σε περιοχές που αυξάνεται η πυκνότητα του συνόλου. Κατόπιν υψώνουμε τα μήκη αυτά στη δύναμη $x > 0$, η οποία (όταν πάρει την τιμή της σωστής διάστασης του S) δίνει μέσω του αθροίσματος των ε_i^x μία εκτίμηση του γενικευμένου όγκου του συνόλου, σε βαθμό διακριτικότητας ε .

Όμως η συγκεκριμένη κάλυψη που διαλέξαμε, $K(\varepsilon)$, μπορεί να είναι ιδιαίτερα "γενναϊόδωρη" και να περιλαμβάνει πολλά σημεία που δεν ανήκουν στο S . Για το λόγο αυτό αναζητούμε, για κάθε ε , την ακριβέστερη τέτοια κάλυψη, εκείνη δηλαδή για την οποία το άθροισμα μέσα στις αγκύλες της εξίσωσης (4.32) γίνεται ελάχιστο και αυτό είναι το νόημα των γραμμάτων Inf (που προέρχονται από τη λατινική λέξη *Infimum* = ελάχιστο) μπροστά από τις αγκύλες της (4.32).

Όσα κάναμε μέχρι εδώ αφορούν στο βαθμό διακριτικότητας ε . Αφού λοιπόν κάποια κουτάκια έχουν μέχρι και διάμετρο ε , το πιθανότερο είναι να περιέχουν και σημεία που δεν ανήκουν στο S , ιδίως μάλιστα όταν το σύνολο είναι fractal. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να πάρουμε και το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ αυτού του αποτελέσματος, για να καταλήξουμε έτσι στην ακριβέστερη δυνατή εκτίμηση του x -μέτρου του Hausdorff για το σύνολο S .

Είναι σαφές, βέβαια, ότι ο πιο σύνθετος αυτός τύπος του x -μέτρου, (4.32), ανάγεται εύκολα στον απλούστερο τύπο (4.19) για το δ -μέτρο συνόλου που καλύπτεται από κουτάκια ίδιας πλευράς λ . Πάντως, όπως συμβαίνει για το M_δ , έτσι και το M_x είναι 0 για μεγάλες τιμές του x όπου τα ε_i^x τείνουν στο μηδέν γρηγορότερα από ότι το πλήθος τους τείνει στο άπειρο. Αντίστοιχα, όταν το x είναι μικρό, τα ε_i^x πάνε αργά στο 0 και έτσι το άπειρο πλήθος τους υπερτερεί και οδηγεί τελικά στο $M_x = \infty$. Έτσι, το x -μέτρο του Hausdorff σαν συνάρτηση του x έχει μία μόνο ασυνέχεια στο σημείο $x = D_H$ όπου το M_x μπορεί να πάρει μία οποιαδήποτε τιμή, δηλαδή

$$M_x = \begin{cases} 0 & , \text{ για } x > D_H \\ 0 < c < \infty & , \text{ για } x = D_H \\ \infty & , \text{ για } x < D_H \end{cases} \quad (4.33)$$

Ο αριθμός αυτός D_H ονομάζεται διάσταση Hausdorff και είναι ακριβώς η τιμή του x που δίνει την πιο αξιόπιστη εκτίμηση του μέτρου του συνόλου που μελετάμε.

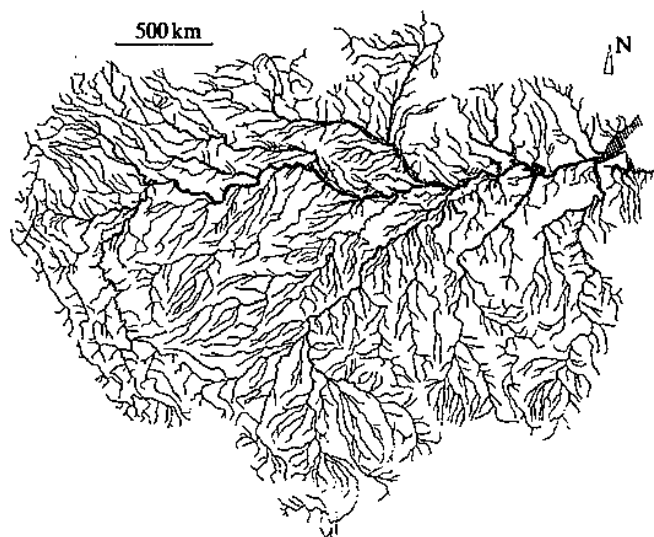
Η ακριβής τιμή του M_x , βέβαια, για $x = D_H$ θα πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά, αφού προσδιορίσουμε πρώτα το D_H . Αν μεν είναι πεπερασμένη, τότε το μέτρο αυτό που υπολογίσαμε έχει το νόημα γενικευμένου όγκου του συνόλου που εξετάζουμε. Αν όμως $M_x = \infty$ για $x = D_H$, τότε είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να εξαγάγουμε κανένα χρήσιμο συμπέρασμα. Γενικά, πρέπει να πούμε, για όλα αυτά τα μέτρα συνόλων που περιγράψαμε (το M_δ και το M_x) ότι αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει

είναι η ασυνέχεια τους (στο $\delta = D_c$ και $x = D_H$ αντίστοιχα) και όχι τόσο η τιμή τους στα σημεία αυτά. [4]

4.8 Αλγοριθμικά (ντετερμινιστικά) και τυχαία fractals

Όλα τα παραδείγματα των γεωμετρικών μορφοκλασματικών δομών που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους έχουν δημιουργηθεί μέσω ενός μαθηματικού αλγορίθμου και δεν υπάρχει κανένα ίχνος τυχειότητας στην δομή τους. Έτσι είναι γνωστά με τον όρο deterministic fractals, ενώ η ελληνική τους απόδοση θα μπορούσε να είναι αλγοριθμικά fractals ή ντετερμινιστικά fractals.

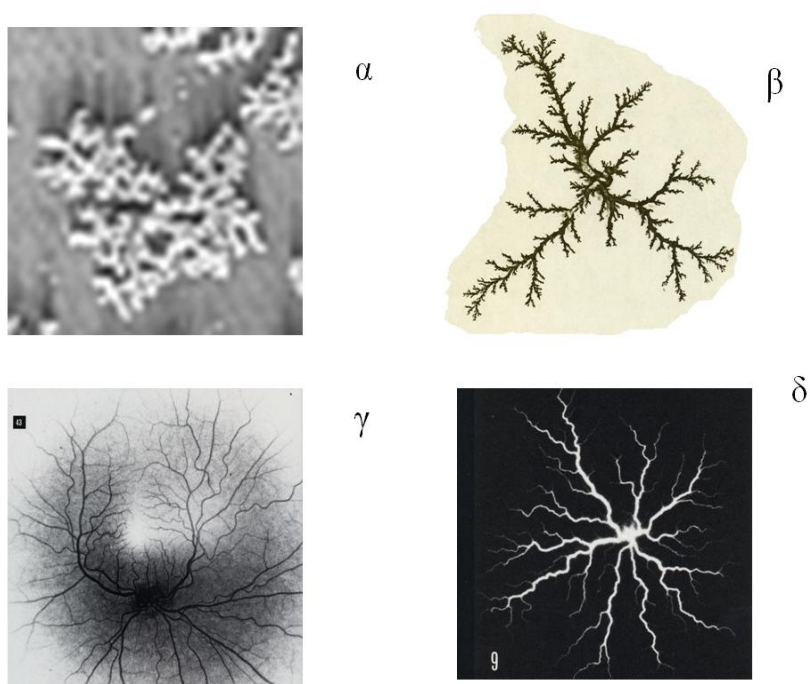
Σε αντίθεση με τα αλγοριθμικά fractals στην φύση συναντώνται τυχαία "αντικείμενα" που το σχήμα και η δομή τους έχουν μορφοκλασματικό χαρακτήρα. Δηλαδή ο όγκος και το μήκος τους συνδέονται με μία σχέση της μορφής $V=L^D$, όπου το $D < d$ και d είναι η ακέραια διάσταση του χώρου στον οποίο είναι εμβυθισμένο το αντικείμενο. Σαν παράδειγμα θεωρούμε την δομή ενός φυλλοβόλου δένδρου τον χειμώνα. Κάθε κορμός έχει πολλά μεγάλα κλαδιά, από κάθε μεγάλο κλαδί ξεφυτρώνουν πολλά μικρότερα τα οποία με την σειρά τους έχουν ακόμα μικρότερα κλαδιά κοκ. Μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια "στατιστική ή τυχαία αυτοομοιότητα" στην δομή ενός τέτοιου δένδρου. Πράγματι, έχει μετρηθεί η σχέση όγκου και μήκους στα φυλλοβόλα δένδρα και έχει βρεθεί ότι η fractal διάσταση είναι $D=1.4$ περίπου. Ένα δεύτερο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η ροή των ποταμών. Το σχήμα του ποταμού Αμαζονίου δίδεται στην Εικόνα 4.12.



Εικόνα 4.12 Ο ποταμός Αμαζόνιος. [5]

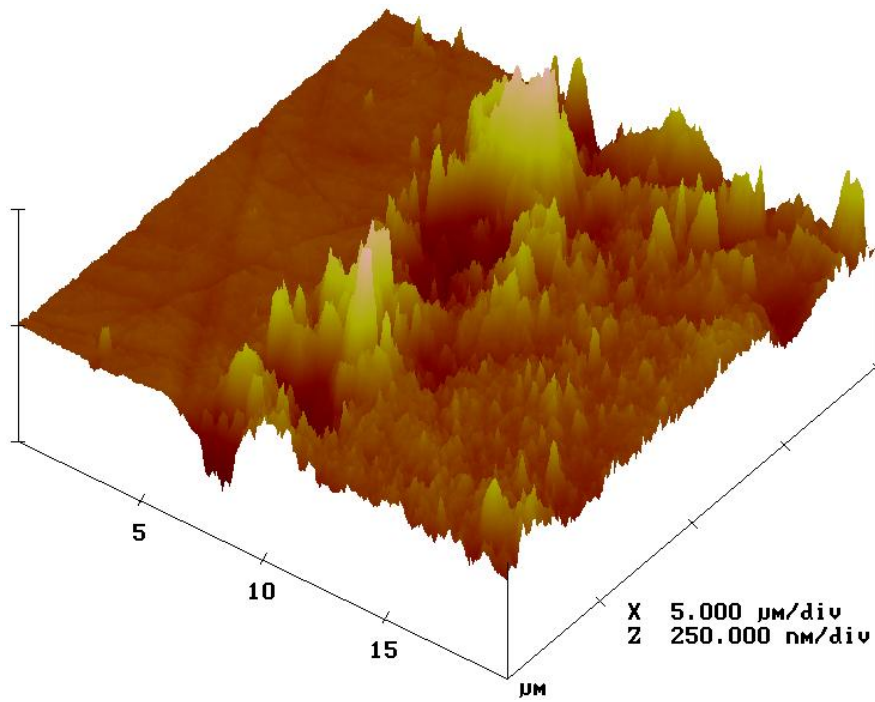
Η fractal διάσταση του Αμαζονίου είναι $D=1.3$. Μάλιστα όλοι οι ποταμοί έχουν παρόμοιο σχήμα ροής και η fractal διάστασή τους κυμαίνεται από 1.1 έως 1.3. Αξίζει να σημειωθεί ότι η Εικόνα 4.12 έχει παρόμοια δομή με δίκτυα ροής του αίματος σε φλέβες ή αρτηρίες αλλά και σε δίκτυα νευρώνων στον εγκέφαλο (ροή ηλεκτρικών και μαγνητικών σημάτων). Μάλιστα η fractal διάσταση όλων αυτών των δομών έχει παρόμοια τιμή.

Άλλα fractals εύκολα αναγνωρίσιμα βρίσκουμε στις νιφάδες χιονιού (όπου είναι σχεδόν ντετερμινιστικά fractals), στους κεραυνούς, στην ηλεκτρο-εναπόθεση κλπ (βλέπε Εικόνα 4.13).



Εικόνα 4.13 Διάφορα Φυσικά και Πειραματικά Fractals: α) σωματίδια χρυσού σε επιφάνεια υγρού, β) μελάνι σε απορροφητικό χαρτί, γ) αγγειόγραμμα του αμφιφλειστροειδούς χιτώνα του ματιού και δ) ηλεκτρική εκκένωση (on glass plate). [5]

Η επιφάνεια ενός τυχαίου υλικού, όπως π.χ. το οξείδιο του Τιτανίου TiO_2 είναι φτιαγμένη από εναποθέσεις συσσωματωμάτων οξειδίου του Τιτανίου. Κάθε συσσωμάτωμα είναι ένωση μικρότερων συσσωματωμάτων και κόκκων οι οποίοι με την σειρά τους αποτελούνται από μόρια TiO_2 . Εξ' άλλου τα μεγάλα συσσωματώματα συνενώνονται σε όλο και μεγαλύτερα μεγέθη φτιάχνοντας μια επιφάνεια που αποτελείται από «βουνά» και «κοιλιάδες». Η συνολική επιφάνεια του συσσωματώματος έχει την μορφή «Αλπικού» φυσικού τοπίου με βουνά και κοιλιάδες. Έχουμε βρει ότι η fractal διάσταση της επιφάνειας του TiO_2 κυμαίνεται από $D=2.5-2.7$ ανάλογα με το δείγμα και την μέθοδο παρασκευής (Εικόνα 4.14). [5]



Εικόνα 4.14 Επιφάνεια Ημιαγωγού. [5]



Εικόνα 4.15 Fractal Lake Naser (Αίγυπτος, από δορυφόρο). [5]

Μπορούμε επίσης να παράγουμε απλά στοχαστικά fractal χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή ντετερμινιστικών fractal, εισάγοντας μία παράμετρο τυχαιότητας.

Η ιδιότητα της αυτοομοιότητας μπορεί άμεσα να ελεγχθεί για ένα ντετερμινιστικό fractal το οποίο κατασκευάζεται μέσω συνεχών επαναλήψεων. Στην περίπτωση όμως των τυχαίων δομών χρειαζόμαστε άλλες μεθόδους για να διακρίνουμε τα fractal χαρακτηριστικά του προς εξέταση αντικείμενου. Στην πραγματικότητα, τα τυχαία fractal είναι αυτοόμοια μόνο με την στατιστική έννοια (όχι ακριβώς). Φυσικά, για να αποδείξουμε την ύπαρξη fractal κλιμάκωσης θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό που βασίζεται στην κάλυψη της δοσμένης δομής με μπάλες (ή κουτιά) μεταβλητής ακτίνας. Εκτός του ορισμού αυτού, όμως, είναι περισσότερο αποτελεσματικό να υπολογίσουμε τη λεγόμενη density-density correlation function

$$c(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (4.34)$$

η οποία είναι η αναμενόμενη τιμή του γεγονότος ότι δύο σημεία που απέχουν μεταξύ τους διανυσματική απόσταση \vec{r} ανήκουν στην δομή. Για αναπτυσσόμενα fractal ο όγκος του αντικείμενου είναι $V=N$, όπου N είναι ο αριθμός των σωματιδίων που αποτελούν τη δομή, και η εξίσωση (4.34) δίνει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σωματίδιο στην θέση $\vec{r} + \vec{r}'$, αν υπάρχει ήδη ένα σωματίδιο στη θέση \vec{r}' . Στην εξίσωση (4.34) ρ είναι η τοπική πυκνότητα, δηλαδή, $\rho(\vec{r}) = 1$ αν το σημείο \vec{r} ανήκει στο αντικείμενο, αλλιώς είναι ίσο με μηδέν. Τα συνήθη fractal είναι κατά κανόνα ισοτροπικά και η συσχέτιση (correlation) δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση, που σημαίνει ότι οι συσχετίσεις πυκνότητας (density correlations) εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r και έτσι $c(\vec{r}) = c(r)$.

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την density-density correlation function που παρουσιάσαμε παραπάνω σαν κριτήριο για την fractal γεωμετρία. Ένα αντικείμενο είναι σε σημαντικό βαθμό αυτοόμοιο αν η συνάρτηση συσχέτισης του (correlation function) που υπολογίστηκε σύμφωνα με την εξίσωση (4.34) παραμένει αμετάβλητη μέχρι μία σταθερή τιμή μετά από ανακλιμάκωση των μηκών μέσω ενός αυθαίρετου παράγοντα b

$$c(br) \sim b^{-a} c(r) \quad (4.35)$$

με a έναν μη ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο του μηδενός και μικρότερο του d . Μπορεί να δείχτεί ότι η μόνη εξίσωση που ικανοποιεί την (4.35) είναι ο νόμος δύναμης του $c(r)$ στο r

$$c(r) \sim r^{-a} \quad (4.36)$$

που αντιστοιχεί στην αλγεβρική αποσύνθεση της τοπικής πυκνότητας μέσα σε ένα τυχαίο fractal, μιας και η density-density correlation function είναι ανάλογη της κατανομής της πυκνότητας γύρω από ένα δοσμένο σημείο. Το γεγονός αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε τη διάσταση fractal μέσω του εκθέτη a . Για να το δείξουμε αυτό για αναπτυσσόμενα fractal, υπολογίζουμε τον αριθμό των σωματιδίων $N(L)$ μέσα σε μία σφαίρα ακτίνας L από την κατανομή της πυκνότητας

$$N(L) \sim \int_0^L c(r) d^d r \sim L^{d-a} \quad (4.37)$$

όπου η άθροιση στην εξίσωση (4.34) έχει αντικατασταθεί από ολοκλήρωση. Συγκρίνοντας τις (4.37) και (4.21) φτάνουμε στην επιθυμητή σχέση

$$D = d - a \quad (4.38)$$

που είναι ένα αποτέλεσμα που χρησιμοποιείται ευρέως για τον προσδιορισμό του D σε τυχαία fractal. [8]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μέθοδοι προσδιορισμού Fractal διαστάσεων και μοντέλα ανάπτυξης Fractal

Όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε τη διάσταση fractal αναπτυσσόμενων δομών στην πράξη, συνήθως αποδεικνύεται ότι η απευθείας εφαρμογή των ορισμών της διάστασης D που δόθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι αναποτελεσματική ή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αντί αυτού, μπορούν να μετρηθούν ή να υπολογιστούν ποσότητες, που μπορεί να αποδειχτεί ότι σχετίζονται με τη διάσταση fractal των δομών.

Τρεις κύριες προσεγγίσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων: η πειραματική, η υπολογιστική και η θεωρητική. Τα πειράματα αποτελούν έναν παραδοσιακό τρόπο εξέτασης φαινομένων σε οποιοδήποτε τομέα της φυσικής και παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της έρευνας που αφορά στην ανάπτυξη των fractal. Για τις άλλες δύο προσεγγίσεις η κατάσταση είναι λιγότερο τυπική. Από τη στιγμή που η φύση των fractal δεν διαθέτει μία ενοποιημένη θεωρητική περιγραφή, το μεγαλύτερο κομμάτι της έρευνας σε θεωρητικό επίπεδο βασίζεται σε υπολογιστική προσομοίωση.

5.1 Μέτρηση διάστασης fractal σε πειράματα

Έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετές πειραματικές τεχνικές για τη μέτρηση της fractal διάστασης δομών, που παρουσιάζουν αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας και έχουν αναπτυχθεί σε διάφορα πειράματα. Οι πλέον διαδεδομένες μέθοδοι έχουν χωριστεί στις παρακάτω κατηγορίες: α) ψηφιακή επεξεργασία εικόνας για εικόνες δύο διαστάσεων, β) πειράματα σκέδασης, και γ) απ' ευθείας μέτρηση φυσικών ιδιοτήτων σχετιζόμενων με τη διάσταση fractal.

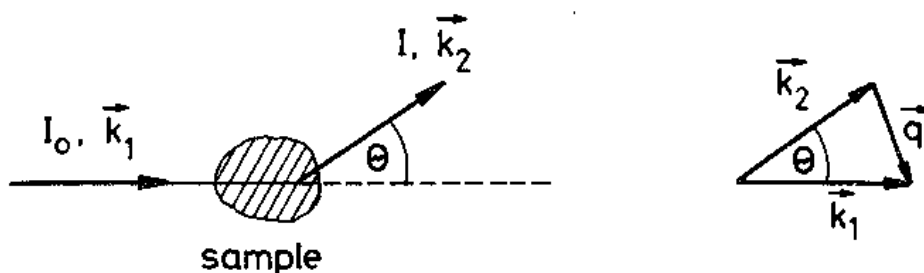
A) Η ψηφιοποίηση της εικόνας ενός fractal αντικειμένου είναι ένας κλασικός τρόπος για να ληφθούν ποσοτικά δεδομένα για γεωμετρικά σχήματα. Η πληροφορία συλλέγεται από ένα scanner ή μία ψηφιακή κάμερα και μεταφέρεται στη μνήμη ενός υπολογιστή. Τα δεδομένα αποθηκεύονται στη μορφή ενός διδιάστατου πίνακα pixel όπου τα μη-μηδενικά (μηδενικά) στοιχεία αντιστοιχούν σε περιοχές κατειλημμένες (μη κατειλημμένες) από την εικόνα. Τα δεδομένα μπορούν να αξιολογηθούν

χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο, όπου γίνεται λόγος για τον υπολογισμό της διάστασης D δομών που κατασκευάζονται σε υπολογιστή.

Το μόνο βασικό ερώτημα που ανακύπτει όσον αφορά την επεξεργασία εικόνων είναι αν μπορούμε να συμπεριλάβουμε εικόνες δύο διαστάσεων από αντικείμενα που στην πραγματικότητα είναι εμβυθισμένα σε τρεις διαστάσεις. Είναι γνωστό ότι, η fractal διάσταση της προβολής σε ένα επίπεδο ($d - m$)-διαστάσεων είναι ίδια με την πραγματική του fractal διάσταση, αν $D < (d - m)$. Δυστυχώς δεν υπάρχουν ισχυρά επιχειρήματα για να υποστηρίξουν την υπόθεση αυτή, και μπορεί να προκύψουν αρκετές διακυμάνσεις από αυτή, ειδικά όταν το D είναι μόνο λίγο μικρότερο από το $(d - m)$. Επιπλέον, αν $D > (d - m)$ η μέθοδος αυτή καταρρέει εντελώς, μιας και στην περίπτωση αυτή η προβολή είναι απλά ένα αντικείμενο $(d - m)$ διαστάσεων.

Β) Τα πειράματα σκέδασης αποτελούν μία πολύ ισχυρή μέθοδο για την μέτρηση της διάστασης fractal μικροσκοπικών δομών (Teixeira 1986). Ανάλογα με τη διάσταση του προς μελέτη αντικειμένου, για να βρεθούν fractal ιδιότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί η οπτική σκέδαση, η σκέδαση με ακτίνες X ή η σκέδαση νετρονίων. Υπάρχουν μία σειρά από δυνατότητες για την διεξαγωγή ενός πειράματος σκέδασης. Ένα τέτοιο πείραμα μπορεί να ερευνησει i) τον δομικό παράγοντα ενός απλού fractal αντικειμένου, ii) τη σκέδαση πολλών δομών αναπτυσσόμενων στο χρόνο, iii) τη σκεδασμένη δέσμη από μία επιφάνεια fractal, κ.α.

Στα πειράματα σκέδασης μία δέσμη έντασης I_0 κατευθύνεται προ το δείγμα και η ένταση της σκέδασης μετράται σαν συνάρτηση της γωνίας θ μεταξύ της προσπίπτουσας και στις σκεδαζόμενης δέσμης. Ας ορίσουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις δύο αυτές δέσμες ως $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ (Εικόνα 5.1)



Εικόνα 5.1 Σχηματική αναπαράσταση της προσπίπτουσας και σκεδαζόμενης δέσμης σε ένα πείραμα σκέδασης. [8]

Στην περίπτωση μικρού θ (μικρής γωνίας σκέδασης) η κύρια συνεισφορά στην ένταση της σκέδασης προέρχεται από ψευδοελαστικές διαδικασίες με $|\vec{k}_1| = |\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης.

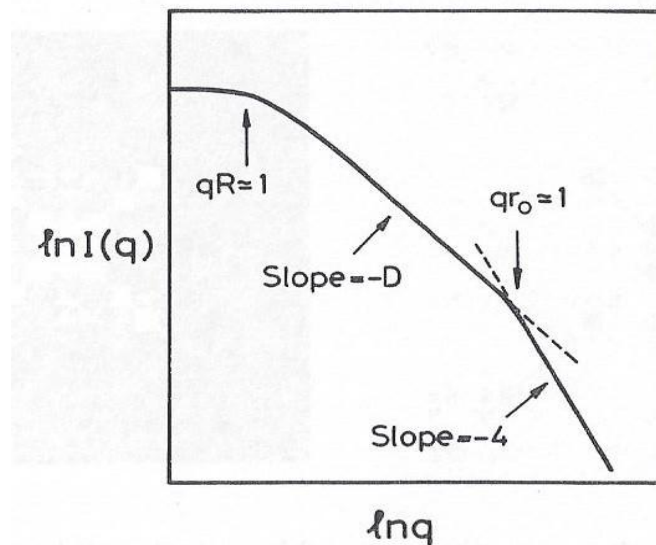
Επομένως, από την Εικόνα 5.1 έχουμε

$$q = |\vec{q}| = 2k \sin(\theta/2) \quad (5.1)$$

Οι περισσότερες fractal δομές που εξετάζονται πειραματικά είναι κατασκευασμένες από μικρά σφαιρικά σωματίδια. Γενικά αποδεικνύεται ότι η ένταση της σκέδασης εξαρτάται από τον παράγοντα q (για ένα δεδομένο εύρος τιμών του q) ως εξής:

$$I(q) \sim q^{-D} \quad (5.2)$$

Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που συνήθως χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της fractal διάστασης ενός πειραματικού αντικειμένου. Υπάρχει μόνο μία περιοχή τιμών του q όπου ισχύει η εξίσωση (5.2) και στην περίπτωση αυτή η διάσταση fractal μπορεί να υπολογιστεί από την κλίση του $\ln I(q)$ ως προς το $\ln q$ όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5.2.



Εικόνα 5.2 Η καμπύλη που σχηματίζεται με το πείραμα σκέδασης στην οποία φαίνονται τα τρία κύρια τμήματα που παρατηρούνται για ένα σύνολο fractal μεγεθών. [8]

Όπως παρατηρούμε υπάρχουν άλλα δύο μέρη στην καμπύλη όπου η κλίση τους δεν είναι ίση με την διάσταση D .

Γ) Για τον πειραματικό καθορισμό της διάστασης D μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και μετρήσεις των φυσικών ιδιοτήτων των fractal αντικειμένων. Μία σειρά από μεθόδους έχει προταθεί, εκ των οποίων οι περισσότερες βασίζονται σε ηλεκτρικές ιδιότητες συμπεριλαμβανομένου μετρήσεων του ρεύματος, της

ηλεκτρομαγνητικής κατανάλωσης ισχύος και της εξάρτησης από την συχνότητα της σύνθετης αντίστασης των δομών fractal.

5.2 Αξιολόγηση των αριθμητικών δεδομένων

Στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι η πληροφορία για τις στοχαστικές δομές fractal είναι αποθηκευμένη στη μορφή ενός πίνακα d-διαστάσεων ο οποίος έχει τις διαστάσεις ενός πλέγματος, σε κάθε θέση του οποίου αντιστοιχεί μία τιμή από κάποια συνάρτηση. Στην περίπτωση που εξετάζουμε μόνο τις γεωμετρικές ιδιότητες ενός αντικείμενου, η τιμή της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε ένα σημείο με γνωστές συντεταγμένες (το σημείο καθορίζεται μέσω των δεικτών του πίνακα) είναι είτε 1 (όταν το σημείο ανήκει στο fractal) είτε 0 (όταν η θέση είναι κενή). Γενικά, τέτοιου είδους δεδομένα λαμβάνονται από δύο κύριες μεθόδους: i) μέσω ψηφιοποίησης εικόνων από αντικείμενα που παράγονται σε πειράματα ii) μέσω αριθμητικών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση διάφορων φαινομένων ανάπτυξης.

Στην προηγούμενη παράγραφο συζητήσαμε κάποιες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να συλλέξουμε πληροφορίες από μία πειραματικά αναπτυσσόμενη δομή. Αναλόγως, υπάρχουν πολλοί τρόποι για τον προσδιορισμό της fractal διάστασης D από αριθμητικά δεδομένα. Παρακάτω θα συζητήσουμε πως μετράμε τη διάσταση D για ένα μεμονωμένο αντικείμενο. Για να κάνουμε τις εκτιμήσεις πιο ακριβείς συνήθως υπολογίζουμε τη διάσταση fractal πολλών παρόμοιων δομών και βγάζουμε μία μέση τιμή της διάστασης από τα αποτελέσματα.

Ίσως η πιο απλή μέθοδος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της διάστασης D όπως δόθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο μέσω των εξισώσεων:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_c} \quad (4.21)$$

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (4.23)$$

όπου $\varepsilon = \frac{\lambda}{L}$ και για μοναδιαίο μήκος $\lambda=1$ οι εξισώσεις γίνονται

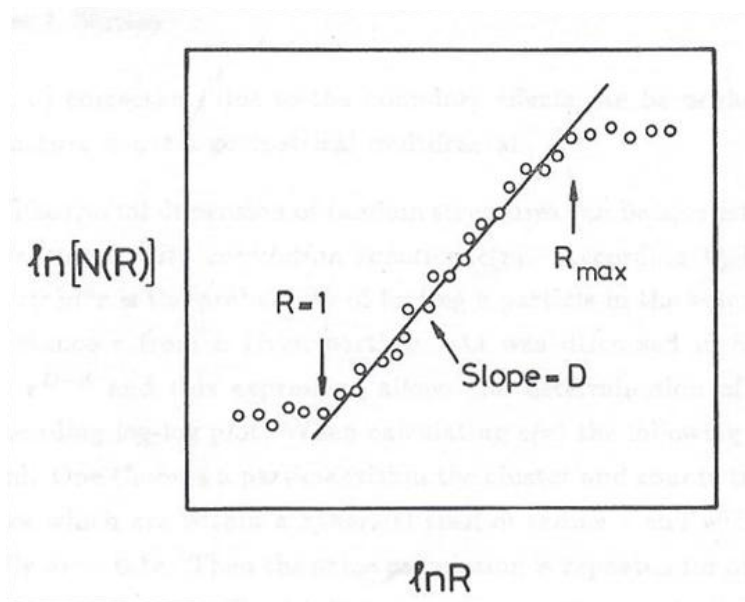
$$N(L) \sim L^{D_c} \quad (5.3)$$

$$D_c = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log(L)} \quad (5.4)$$

Στην περίπτωση μας το μοναδιαίο μήκος αντιστοιχεί στη σταθερά του πλέγματος, και ο αριθμός των σφαιρών μοναδιαίου όγκου $N(R)$ που χρειάζονται για να καλύψουν τη δομή μέσα σε μία σφαίρα ακτίνας R είναι ίδιος με τον αριθμό των θέσεων στις οποίες η τιμή της συνάρτησης-θέσης είναι 1 μέσα στο πλέγμα. Μιας και για αναπτυσσόμενα fractal ισχύει $N(R) \sim R^{D_c}$, αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα του $\ln N(R)$ ως προς το $\ln(R)$ θα πάρουμε μία καμπύλη η οποία θα έχει ασυμπτωτική κλίση ίση με D_c .

Αυστηρά μιλώντας, η σχέση $N(R) \sim R^{D_c}$ είναι έγκυρη μόνο για ομοιόμορφα fractal και όχι για fractal πολλών κλιμάκων.

Έτσι η διάσταση fractal μπορεί να υπολογιστεί με την τοποθέτηση μίας ευθείας γραμμής στο ασυμπτωτικό μέρος των $N(R)$ δεδομένων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων. Στην πράξη αρχικά επιλέγουμε ένα σημείο το οποίο να ανήκει στη δομή fractal (συνήθως κοντά στο κέντρο του πλέγματος) και μετράμε τον αριθμό των θέσεων που ανήκουν στον δομή και είναι εντός μίας αλληλουχίας σφαιρών αυξανόμενης ακτίνας. Αντί για σφαίρες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και κουτιά (boxes) διάστασης L . Στην Εικόνα 5.3 φαίνεται το διάγραμμα που είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας που περιγράψαμε παραπάνω. Από την Εικόνα 5.3 παρατηρούμε την παραμόρφωση των δεδομένων όταν το R γίνει μικρότερο από τη σταθερά του πλέγματος και όταν γίνει μεγαλύτερο από το μέγεθος της δομής.



Εικόνα 5.3 Σχηματικό log-log διάγραμμα από αριθμητικά καθορισμένο αριθμό σωματιδίων $N(R)$ που ανήκουν σε ένα fractal και βρίσκονται μέσα σε μία σφαίρα ακτίνας R . Αν η ακτίνα R είναι μικρότερη από το μέγεθος των σωματιδίων ή μεγαλύτερη από το μέγεθος της fractal δομής παρατηρείται μία περίεργη συμπεριφορά. Η fractal διάσταση προκύπτει με την προσαρμογή μίας ευθείας γραμμής στην σωστή περιοχή των δεδομένων. [8]

Αν το fractal αντικείμενο αποτελείται από μικρά, σχεδόν πανομοιότυπα σωματίδια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το $N(R)$ είναι ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται μέσα σε μία περιοχή με όγκο R^d . Δηλαδή $N(R) \sim M(R)$, όπου $M(R)$ είναι η μάζα της δομής μέχρι μία ακτίνα R . Για ευκολία, στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιούμε συχνά την ορολογία "σωματίδιο" για μία θέση του πλέγματος η οποία ανήκει στο fractal (έχει καταληφθεί) και συσσωμάτωμα ή δομή fractal για τα αντικείμενα που αποτελούνται από συνδεδεμένα ("κολλημένα") μεταξύ τους σωματίδια.

Μία παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου χρησιμοποιείται συχνά αν ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων μέσα σε μία fractal δομή καταγράφεται κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης. Τέτοια περίπτωση είναι συνηθισμένη όταν η δομή ουσιαστικά αναπτύσσεται από την συνεχή προσθήκη σωματιδίων στο αντικείμενο. Στην προσέγγιση αυτή αρχικά υπολογίζουμε την ποσότητα $R_g(N)$ που ονομάζεται ακτίνα περιστροφής χρησιμοποιώντας την έκφραση

$$R_g(N) = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N r_i^2 \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

Όπου r_i είναι η απόσταση του i -οστού σωματιδίου της δομής από το κέντρο του πλέγματος και N είναι ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων της fractal δομής σε ένα συγκεκριμένο στάδιο της διαδικασίας ανάπτυξης. Ύστερα, υποθέτουμε ότι

$$R_g(N) \sim N^\nu \quad (5.6)$$

Όπου $\nu = 1/D$. Επομένως, η τιμή $1/D$ μπορεί να υπολογιστεί από την κλίση του διαγράμματος του $\ln R_g$ ως προς το $\ln N$. Η εξίσωση (5.5) αντιστοιχεί στις παραδοχές ότι i) στο ασυμπτωτικό μέρος του διαγράμματος η ακτίνα R_g είναι ανάλογη της συνολικής ακτίνας της δομής, ii) διορθώσεις εξαιτίας της επίδρασης των ορίων μπορούν να παραμεληθούν και iii) η δομή δεν είναι πολυφρακταλική (multifractal). [8]

5.3 Μέθοδοι υπολογισμού fractal διάστασης

Παρακάτω θα αναλύσουμε λίγο περισσότερο τις πρακτικές μεθόδους μέτρησης της fractal διάστασης, box-counting και density-density correlation.

5.3.1 Μέθοδος box-counting

Κάποιες από τις πρώτες αριθμητικές εκτιμήσεις της fractal διάστασης ελήφθησαν με την box-counting μέθοδο. Για τον υπολογισμό της box-counting διάστασης χωρίζουμε τον χώρο εμπύθισης σε ένα πλέγμα που αποτελείται από κουτιά μεγέθους r . Στη συνέχεια μετράμε τον αριθμό των κουτιών $n(r)$ στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται τουλάχιστον ένα σημείο (σωματίδιο) της δομής (αντικειμένου) του οποίου θέλουμε να βρούμε τη διάσταση. Η κλιμάκωση $n(r) \sim r^{-D_0}$ ορίζει την box-counting διάσταση, που τυπικά ορίζεται από το όριο της εξίσωσης (4.23). Υπάρχουν μερικές δυσκολίες, ωστόσο, στην άμεση εφαρμογή της εξίσωσης (4.23) σε οποιοδήποτε πειραματικό fractal, που θέλουμε να εξετάσουμε.

Πεπερασμένη ανάλυση

Για ένα πειραματικό fractal αντικείμενο, μόνο μία πεπερασμένη ανάλυση είναι διαθέσιμη, και έτσι δεν μπορούμε να πάρουμε το όριο $r \rightarrow 0$ που λείπει ο ορισμός. Μία

φυσική και άμεση προσέγγιση είναι να εφαρμόσουμε την εξίσωση (4.23) άμεσα αλλά με το μικρότερο διαθέσιμο r . Έτσι έχουμε,

$$D_0 \approx \frac{\log n(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Το πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι συγκλίνει με λογαριθμική μείωση στο r . Για παράδειγμα, $n(r) = n_0 r^{-D_0}$ δίνει

$$\frac{\log[n_0 r^{-D_0}]}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{-D_0 \log r + \log n_0}{-\log r} = D_0 + \frac{\overbrace{\log\left(\frac{1}{n_0}\right)}^{\text{slow to vanish as } r \rightarrow 0}}{\log r} \approx D_0$$

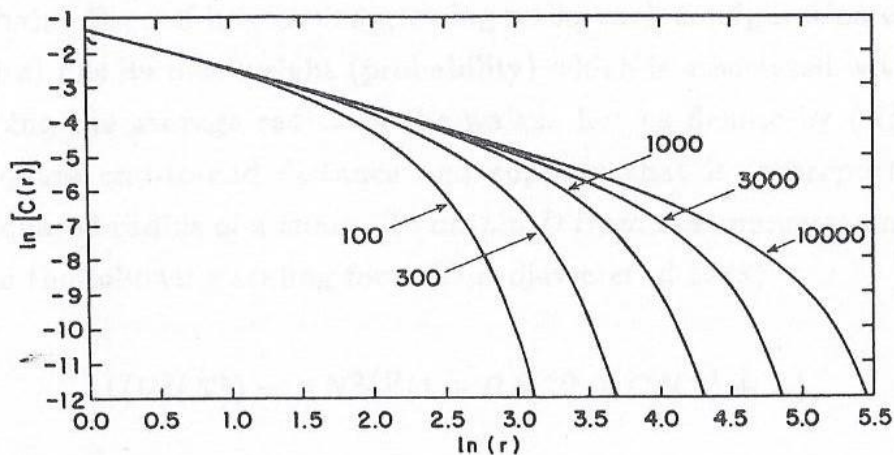
Αντ' αυτού, συνήθως σχεδιάζουμε το $\log n(r)$ συναρτήσει του $\log r$. Η αρνητική κλίση της καμπύλης θα μας δώσει το D_0 για μικρά r :

$$D_0 \approx \frac{-\Delta[\log n(r)]}{\Delta(\log r)}$$

Το κριτήριο επιλογής της καλύτερης δυνατής κλίσης δεν είναι αμέσως εμφανές. Είναι βέβαια φανερό ότι, όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος τόσο το καλύτερο, αλλά το εύρος αυτό είναι περιορισμένο από τη μία λόγω της πεπερασμένης ανάλυσης και από την άλλη λόγω του πεπερασμένου μεγέθους του ίδιου του fractal αντικειμένου. [18]

5.3.2 Μέθοδος density-density correlation

Η διάσταση fractal τυχαίων δομών μπορεί ακόμη να υπολογιστεί από την πυκνότητα τους - συνάρτηση συσχέτισης πυκνότητας $c(r)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της (4.34), $c(r)d^d r$ είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σωματίδιο στον όγκο $d^d r$, εβρισκόμενο σε απόσταση r από ένα δεδομένο σωματίδιο. Έχουμε δείξει ότι ισχύει $c(r) \sim r^{D-d}$ και αυτή η σχέση επιτρέπει τον προσδιορισμό της διάστασης D από το αντίστοιχο log-log διάγραμμα όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.4.



Εικόνα 5.4 Density-density correlation εξισώσεις για τριών διαστάσεων fractal δομές. [8]

Για τον υπολογισμό του $c(r)$ ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία. Επιλέγεται ένα σωματίδιο εντός της δομής και μετρείται ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται εντός ενός σφαιρικού κελύφους ακτίνας r και πλάτους δ_r , όπου συνήθως $\delta_r \cong 0,1r$. Ο ίδιος υπολογισμός επαναλαμβάνεται και για άλλα σωματίδια και το αποτέλεσμα κανονικοποιείται λαμβάνοντας υπ' όψιν τον αριθμό των κέντρων και του όγκου των κελυφών που χρησιμοποιήθηκαν. Για την αποφυγή ανεπιθύμητων αποτελεσμάτων που προκαλούνται από συνεισφορές που εμφανίζονται στην άκρη της δομής, πρέπει να μην επιλέγονται, ως κέντρα, σωματίδια κοντά στην περιοχή του συνόρου.

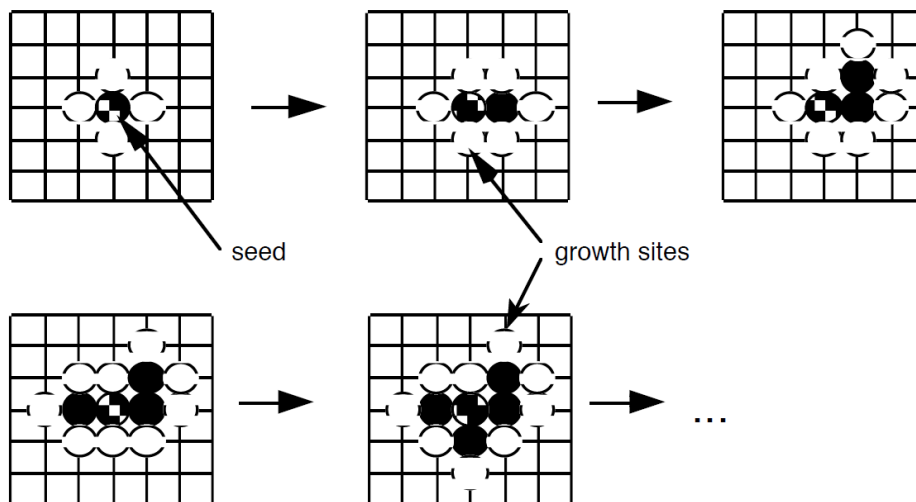
Ο υπολογισμός της συνάρτησης συσχέτισης προφανώς σχετίζεται στενά με τις προηγούμενες μεθόδους. Μετρώντας τον αριθμό των σωματιδίων εντός των κελυφών αντιστοιχεί στον προσδιορισμό της παραγώγου του $N(r)$. Το πιο επωφελές χαρακτηριστικό στον υπολογισμό της διάστασης D μέσω του υπολογισμού του $c(r)$ παρέχεται από το γεγονός ότι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αυτή συνυπολογίζει πολλά σημεία σε μία δομή κάτι που αναμένεται να βελτιώσει τις στατιστικές. [8]

5.4 Μοντέλα ανάπτυξης fractal δομών

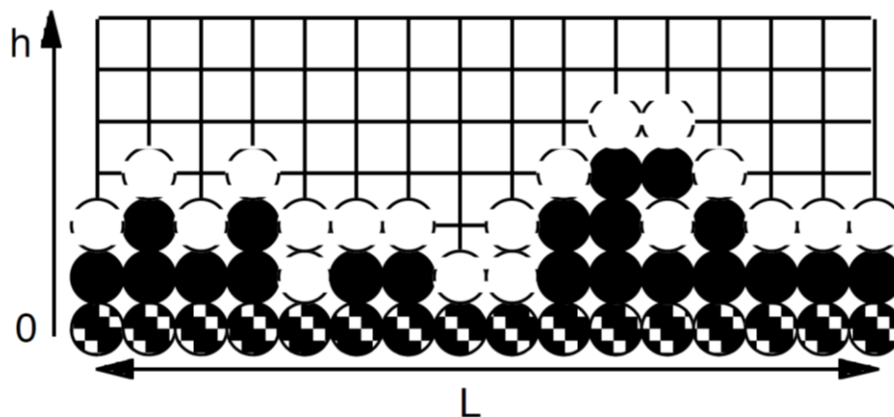
5.4.1 Μοντέλο Eden

Το μοντέλο ανάπτυξης Eden προτάθηκε αρχικά από τον Murray Eden και περιγράφει την ανάπτυξη συγκεκριμένων τύπων δομών όπως αποικίες βακτηριδίων και εναπόθεσης υλικών. Στην απλούστερη εκδοχή του, το μοντέλο κατασκευάζει συσσωματώματα σε ένα πλέγμα. Ένα συσσωμάτωμα αποτελείται από θέσεις του πλέγματος συνδεδεμένες μεταξύ τους, όπου δύο θέσεις μπορούν να συνδεθούν αν είναι γειτονικές. Η ανάπτυξη της δομής πραγματοποιείται όταν μία άδεια θέση του πλέγματος, που ονομάζεται υποψήφια θέση ανάπτυξης, καταληφθεί. Στο Eden μοντέλο, οι υποψήφιες θέσεις ανάπτυξης, G , είναι οι γειτονικές των ήδη

κατειλημμένων θέσεων (Εικόνα 5.5). Η διαδικασία ξεκινάει με ένα "σπόρο", ο οποίος θα μπορούσε να είναι ένα μόνο σωματίδιο (Εικόνα 5.5) ή και μία ολόκληρη γραμμή σωματιδίων όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.6. Η επιλογή της θέσης που θα καταληφθεί, ανάμεσα στις υποψήφιες θέσεις ανάπτυξης γίνεται τυχαία. Δηλαδή όλες οι υποψήφιες θέσεις έχουν την ίδια πιθανότητα να καταληφθούν.

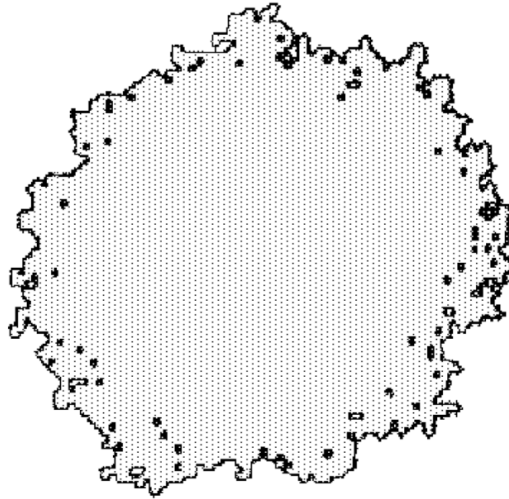


Εικόνα 5.5 Κατασκευή μίας Eden δομής σε ένα τετραγωνικό πλέγμα με "σπόρο" ένα μόνο σωματίδιο στο κέντρο του πλέγματος.



Εικόνα 5.6 Ανάπτυξη μίας Eden δομής με "σπόρο" μία ευθεία γραμμή σωματιδίων..

Από την παραγωγή μίας Eden δομής, μέσω προσομοίωσης στον υπολογιστή, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μία σχεδόν συμπαγής επιφάνεια με λίγα κενά σημεία κοντά στα όρια της επιφάνειας όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5.7. [12]



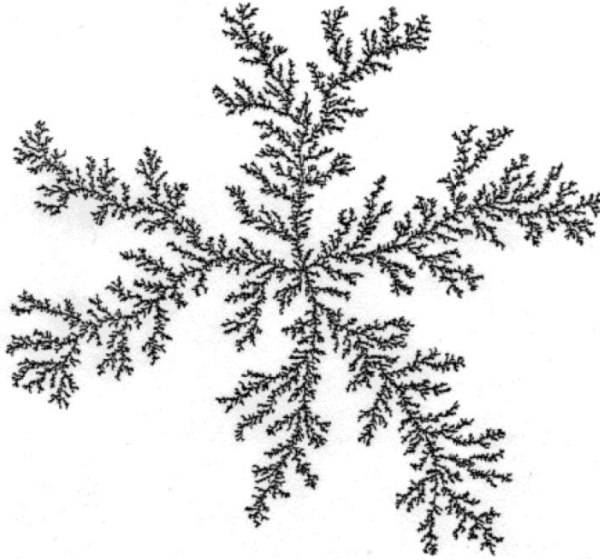
Εικόνα 5.7 Μία Eden δομή που κατασκευάστηκε από ένα "σωματίδιο-σπόρο" και αποτελείται από 1500 κατειλημμένες θέσεις.

5.4.2 Μοντέλο DLA(Diffusion-Limited Aggregation)

Ο όρος Diffusion-Limited Aggregation (DLA) αναφέρεται σε έναν αλγόριθμο απλής ανάπτυξης στον οποίο ένα συσσωμάτωμα αυξάνει το μέγεθος του μέσω μεμονωμένων σωματιδίων τα οποία προστίθενται σε αυτό ένα κάθε φορά. Ξεκινώντας από ένα σωματίδιο-σπόρο, το οποίο είναι σταθερό και βρίσκεται στο κέντρο ενός πλέγματος d -διαστάσεων, ένα καινούριο σωματίδιο εκτοξεύεται από μία τυχαία θέση, μακριά από το κέντρο του πλέγματος, και ξεκινάει να κάνει έναν τυχαίο περίπατο (Brownian motion). Όταν αυτό το τυχαία περιπλανώμενο σωματίδιο έρθει σε επαφή με την αναπτυσσόμενη δομή, η οποία αρχικά αποτελείται μόνο από το σωματίδιο-σπόρο, ενσωματώνεται στη δομή. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι η αναπτυσσόμενη δομή να φτάσει τον επιθυμητό αριθμό σωματιδίων.

Το μοντέλο αυτό αρχικά προτάθηκε από τους Witten και Sander το 1981, για την ανάπτυξη τυχαίων συσσωματωμάτων. Το μοντέλο DLA παράγει μία ποικιλία δομών που κυμαίνονται από δενδριτικές δομές με πολλές διακλαδώσεις με fractal ιδιότητες μέχρι πολυεδρικά κρύσταλλα με πολύπλοκη γεωμετρία.

Μία DLA-δομή, επίσης γνωστή και ως Brownian δέντρο, είναι ένα fractal συσσωμάτωμα που δημιουργείται από τον αλγόριθμο του DLA. Το σχήμα της δομής αυτής ελέγχεται από την πιθανότητα των σωματιδίων να φτάσουν το αναπτυσσόμενο συσσωμάτωμα μέσω του τυχαίου τους περιπάτου. Κατά τη διάρκεια της τυχαίας περιπλάνησης ενός σωματιδίου, είναι πιο πιθανό το σωματίδιο να ενσωματωθεί στις εξωτερικές περιοχές της δομής παρά στις εσωτερικές. Ένα παράδειγμα φαίνεται στην Εικόνα 5.8. [12]



Εικόνα 5.8 Απεικόνιση μίας DLA -δομής. [12]

5.4.3 Μοντέλο DBM (Dielectric Breakdown Model)

Το Dielectric Breakdown Model είναι γνωστό ότι είναι ένα μακροσκοπικό μαθηματικό μοντέλο που συνδυάζει το μοντέλο DLA με το ηλεκτρικό πεδίο. Το μοντέλο DBM αναπτύχθηκε από τους Niemeyer, Pietronero, και Wiesmann το 1984.

Στη μέθοδο του DBM, χρησιμοποιείται ένα πλέγμα d-διαστάσεων στο οποίο το κέντρο υπάρχει αρχικά ένα ηλεκτρόδιο με ηλεκτρικό δυναμικό $\varphi=0$ V. Υπάρχει επίσης και ένα άλλο ηλεκτρόδιο σε μία συγκεκριμένη απόσταση από το πρώτο το οποίο έχει ηλεκτρικό δυναμικό $\varphi=1$ V. Υπολογίζεται το δυναμικό για όλες τις θέσεις του πλέγματος λύνοντας την διακριτή εξίσωση Laplace με γνωστές οριακές συνθήκες. Η πιθανότητα p της δομής να αναπτυχθεί από ένα σημείο με συντεταγμένες (i, j) προς ένα σημείο με συντεταγμένες (i', j') εκφράζεται ως εξής:

$$p(i, j \rightarrow i', j') = \frac{(\varphi_{i', j'})^\eta}{\sum (\varphi_{i', j'})^\eta} \quad (5.7)$$

Εδώ υποθέτεται ότι η παράμετρος η περιγράφει τη σχέση μεταξύ του τοπικού πεδίου και της πιθανότητας. Όπως θα δούμε και αργότερα, η παράμετρος η είναι μία σημαντική παράμετρος για τον έλεγχο του αριθμού των διακλαδώσεων της δομής. Οι δείκτες (i, j) και (i', j') υποδηλώνουν τις συντεταγμένες πλέγματος των σημείων που ανήκουν στο μοτίβο εκκένωσης ($\varphi=0$ V) και των υποψήφιων θέσεων ανάπτυξης, αντίστοιχα. Επίσης, το άθροισμα στον παρονομαστή της εξίσωσης (4.1) αναφέρεται σε όλες τις πιθανές θέσεις ανάπτυξης (i', j') που είναι γειτονικές όλων των κατειλημμένων θέσεων (i, j) . Ανάλογα με την πιθανότητα p , μία υποψήφια θέση ανάπτυξης επιλέγεται τυχαία και προστίθεται στο μοτίβο εκκένωσης (δηλαδή στη δομή fractal). Χρησιμοποιώντας το νέο αυτό μοτίβο εκκένωσης, επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία. [15] [16]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Τρόποι κατασκευής Fractal δομών και diffusion-limited ανάπτυξη

6.1 Κατασκευή ντετερμινιστικών fractal

Η κατασκευή πολύπλοκων εικόνων που μοιάζουν με ντετερμινιστικά fractal μπορεί να πραγματοποιηθεί με την εφαρμογή διαφόρων μετασχηματισμών σε απλά γεωμετρικά σχήματα.

Προκειμένου να κατανοηθεί αυτός ο τρόπος κατασκευής fractal αντικειμένων θα χρειαστεί να εισαγάγουμε μερικές γενικότερες έννοιες για μετασχηματισμούς σχημάτων σε ένα επίπεδο (x,y) , όπως αυτό της Εικόνα 6.1. Ορίζουμε ως γραμμικό μετασχηματισμό σημείων $P(x,y), P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ κ.λπ. στο επίπεδο αυτό, την απεικόνιση F που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2) \quad (6.1)$$

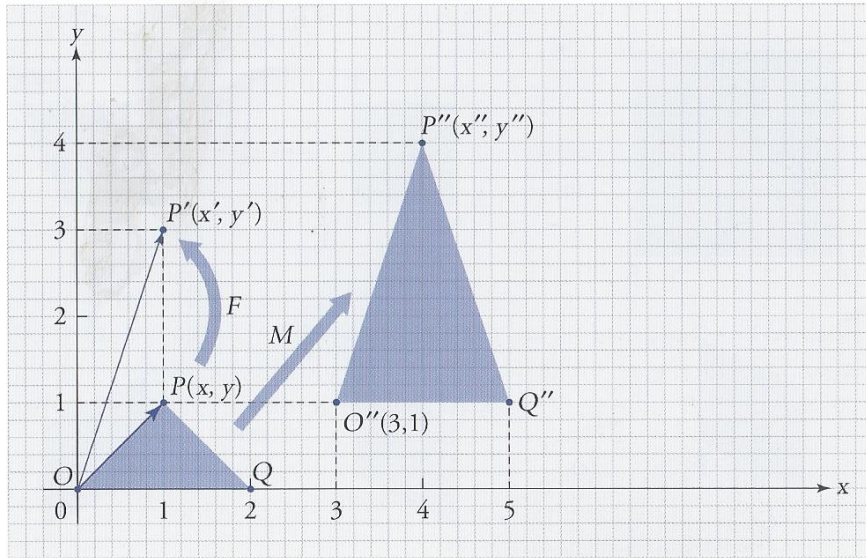
$$F(\lambda P) = \lambda F(P) \quad (6.2)$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Για παράδειγμα η απεικόνιση F :

$$F: \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad (6.3)$$

που απεικονίζει το σημείο P στο P' στην Εικόνα 6.1, είναι γραμμική αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι έχει τις ιδιότητες (6.1) και (6.2). Η δράση της στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι να μετασχηματίζει το διάστημα OP στο OP' στρέφοντας το συγχρόνως και αυξάνοντας το μήκος του. Παρατηρούμε ότι το σημείο O στην αρχή των αξόνων $(0,0)$ δεν μετατοπίζεται αφού η (6.3) το απεικονίζει στον εαυτό του.



Εικόνα 6.1 Μετασχηματισμός ενός σημείου P στο P' μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού (6.3) και στο P'' μέσω του αφινικού μετασχηματισμού (6.4). [4]

Αν στις δράσεις της περιστροφής και επιμήκυνσης (ή συστολής) ευθυγράμμων τμημάτων προσθέσουμε και την παράλληλη μεταφορά τους, τότε θα έχουμε αυτό που ονομάζουμε αφινικό μετασχηματισμό στο επίπεδο (x, y) .

Για παράδειγμα, αν αντί της (6.3) θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό M :

$$M: \begin{cases} x'' = 2x - y + 3 \\ y'' = x + 2y + 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

που αντιστοιχεί το σημείο (x, y) στο (x'', y'') στην Εικόνα 6.1 έχουμε μία απεικόνιση που εκτός από τα χαρακτηριστικά της (6.3) έχει την ιδιότητα να μεταφέρει κάθε σημείο του επιπέδου προσθέτοντας τρεις μονάδες στον οριζόντιο άξονα και μία στην κάθετη συνιστώσα του.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο γενικός αφινικός μετασχηματισμός σημείων του επιπέδου (x, y) γράφεται στη μορφή

$$w: \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \quad (6.5)$$

όπου a, b, c, d, e, f , έξι αυθαίρετες πραγματικές παράμετροι που εκφράζουν τον μετασχηματισμό w . Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους αυτές για να συνθέσουμε όποιο νέο σχήμα θέλουμε από τις μεταμορφώσεις που μπορεί να επιφέρει ο μετασχηματισμός (6.5).

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τα σημεία A, B, Γ να είναι στις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή το A στο $(0, 1)$, το B στο $(0, 0)$ και το Γ στο $(1, 0)$, όπως

φαίνεται στην Εικόνα 6.2 και ως θεωρήσουμε σαν αρχικό μας σχήμα, A_0 , το τετράγωνο της εικόνας με πλευρά 1.

Αν εφαρμόσουμε τώρα σε όλα τα σημεία του A_0 την παρακάτω απεικόνιση συστολής που ονομάζουμε

$$w_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (6.6)$$

παίρνουμε από όλα τα σημεία του A_0 , το τετράγωνο $w_1(A_0)$ της Εικόνα 6.2(β). Παρατηρούμε επίσης ότι αν εφαρμόσουμε στο A_0 τις απεικονίσεις

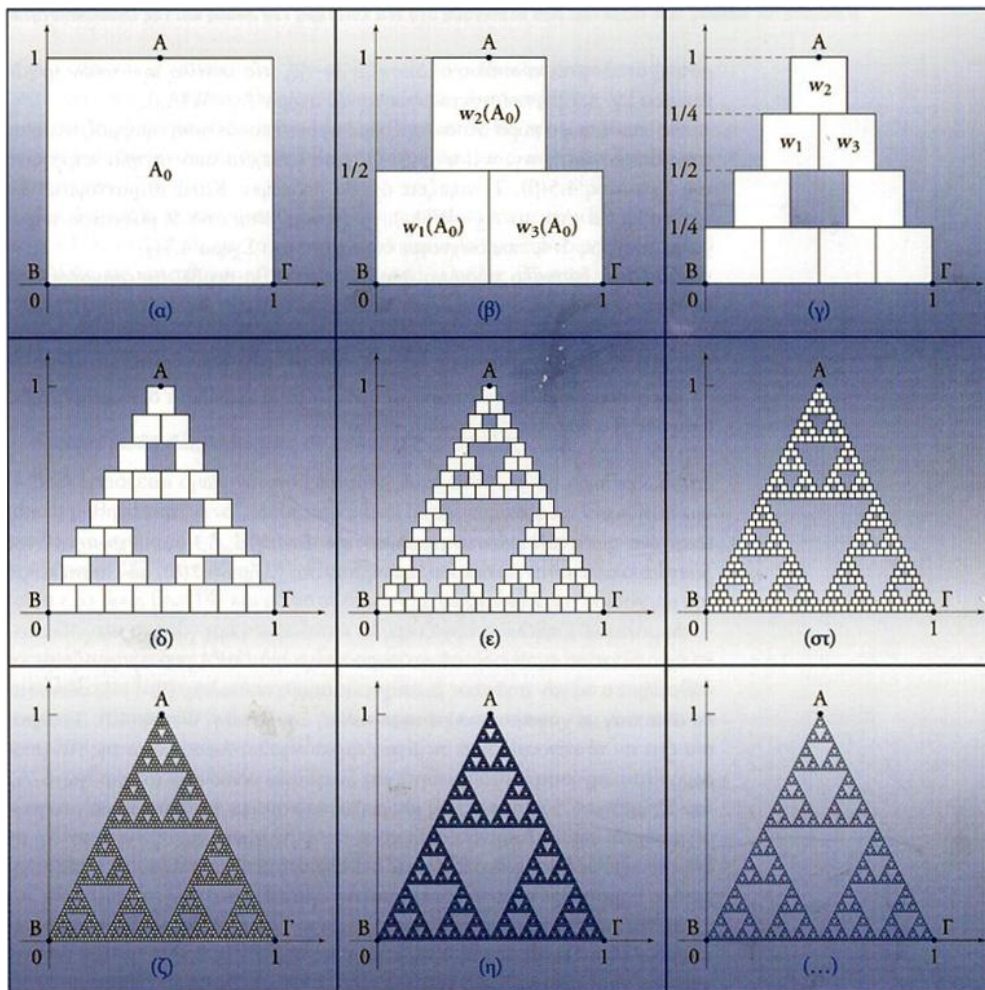
$$w_2: \begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \\ y' = \frac{y+1}{2} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$w_3: \begin{cases} x' = \frac{x+1}{2} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases} \quad (6.8)$$

θα πάρουμε αντίστοιχα τα μικρότερα τετράγωνα $w_2(A_0)$ και $w_3(A_0)$ της Εικόνα 6.2(β). Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε έναν συνολικό μετασχηματισμό του A_0 :

$$W(A_0) = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_3(A_0) \quad (6.9)$$

ο οποίος απεικονίζει το A_0 στο σύνολο των τριών τριγώνων της Εικόνα 6.2(β), παίρνοντας έτσι το νέο σχήμα $A_1 = W(A_0)$.



Εικόνα 6.2 Οι απεικονίσεις συστολής w_1, w_2, w_3 όταν εφαρμοστούν στο τετράγωνο A_0 πλευράς 1 στο (α) δίνουν στο (β) τρία μικρότερα πλευράς $1/2$. Ο συνολικός αυτός μετασχηματισμός (6.9) ακολούθως απεικονίζει το (β) στα 9 τετράγωνα του (γ) και μετά από πολλές επαναλήψεις οδηγεί τελικά στο γνωστό τρυπητό του Sierpinski, όπως ήδη αρχίζει να φαίνεται καθαρά από το (στ). [4]

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή εφαρμόζοντας τις τρεις απεικονίσεις w_1, w_2, w_3 (6.6)-(6.8) σε κάθε ένα από τα τρία τετράγωνα της Εικόνα 6.2(β), το νέο σχήμα που θα προκύψει θα είναι το $A_2 = W(A_1)$, που αποτελείται από εννιά μικρότερα τετράγωνα, πλευράς $1/4$, που φαίνονται σκιασμένα στην Εικόνα 6.2(γ).

Επαναλαμβάνοντας ξανά και ξανά τον μετασχηματισμό W παίρνουμε την ακολουθία σχημάτων

$$A_{n+1} = W(A_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Και το όριο της ακολουθίας αυτής

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (6.11)$$

είναι ένα fractal γνωστό από προηγούμενη παράγραφο σαν τρυπητό του Sierpinski. Για την κατασκευή του πολύπλοκου αυτού σχήματος χρησιμοποιήσαμε μία διαδικασία, σε κάθε βήμα της οποίας, εφαρμόσαμε έναν από τους μετασχηματισμούς συστολής (6.6)-(6.8), που ουσιαστικά είναι σαν να χρησιμοποιήσαμε τη συνολική απεικόνιση W της (6.9).

Από την παραπάνω διαδικασία παραλείψαμε μία σημαντική παράμετρο-προϋπόθεση, καθώς πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι μία τέτοια διαδικασία έχει μοναδικό όριο. Στο παράδειγμα κατασκευής του τρυπητού του Sierpinski η διαδικασία είχε μοναδικό όριο αλλά αυτό δεν συμβαίνει πάντα, αν δηλαδή αλλάξουμε τους μετασχηματισμούς w_i , ή το σχήμα A_0 με το οποίο ξεκινήσαμε.

Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός W που ορίσαμε στην (6.9) αποτελείται από την ένωση ενός συνόλου μετασχηματισμών, w_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A) \quad (6.12)$$

κάθε ένας από τους οποίους μειώνει (ή συστέλλει) ένα επίπεδο σχήμα A . Ο συνολικός μετασχηματισμός W , σύμφωνα με το θεώρημα που απέδειξε ο Αυστραλός Μαθηματικός J.Hutchinson, ανήκει σε μία κατηγορία απεικονίσεων που λέγονται τελεστές συστολής. Αν δηλαδή δράσουμε με τον W σε δύο σχήματα του επιπέδου, A και B , η απόσταση μεταξύ των σχημάτων που θα προκύψουν, $W(A)$ και $W(B)$, είναι μικρότερη από εκείνη μεταξύ των A, B , αφού ισχύει:

$$h(W(A), W(B)) \leq \rho \cdot h(A, B) \quad (6.13)$$

με $0 \leq \rho < 1$, όπου h είναι μία συνάρτηση που μετράει την απόσταση.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τον αριθμό $0 \leq \rho < 1$ για μία ακολουθία σχημάτων $A_{n+1} = W(A_n)$ που τείνει στο όριο $A_\infty = W(A_\infty)$. Αν θέσουμε $A = A_n$ και $B = A_{n-1}$ στην (6.13) παίρνουμε:

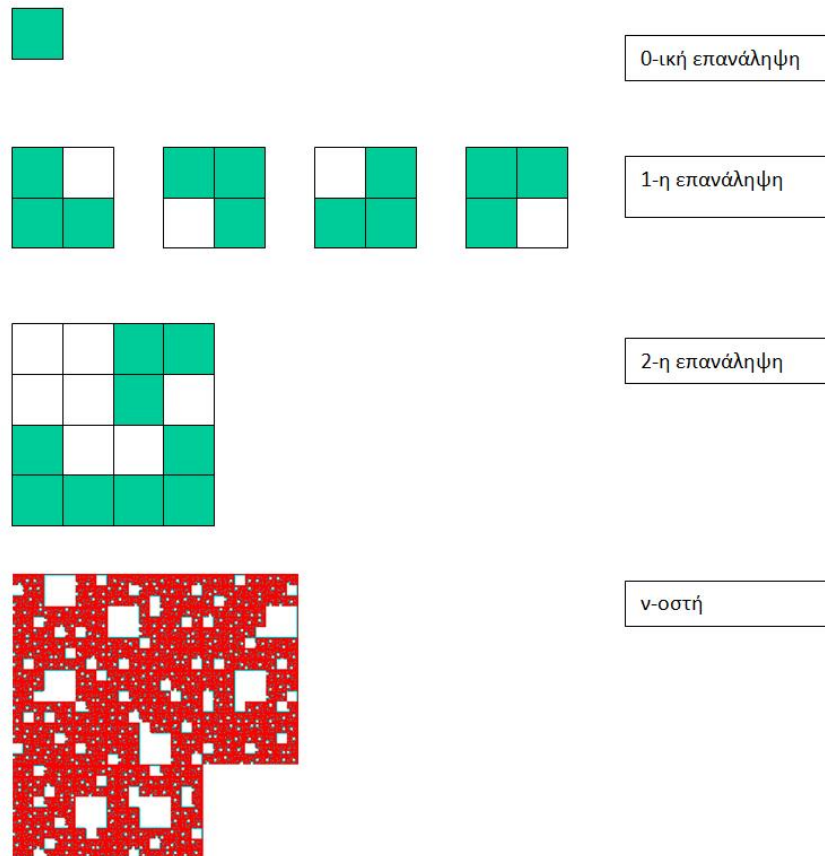
$$h(A_{n+1}, A_n) \leq \rho \cdot h(A_n, A_{n-1}) \leq \rho^2 \cdot h(A_{n-1}, A_{n-2}) \leq \dots \leq \rho^n \cdot h(A_1, A_0) \quad (6.14)$$

και επομένως συμπεραίνουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών σχημάτων της ακολουθίας (όσο πολύπλοκα και αν είναι αυτά) μικραίνει με ρυθμό ρ^n . Μάλιστα όσο μικρότερος είναι ο αριθμός $\rho > 0$ από το 1, τόσο γρηγορότερα πλησιάζουμε στο όριο $A_n \rightarrow A_\infty$ (αφού $\rho^n \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$).

Τέλος, αφού κανείς δεν περιορίζει τον αριθμό των μετασχηματισμών w_i στην (6.12) ή το συγκεκριμένο είδος τους (φτάνει να περιέχουν συστολή) εύκολα καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε με τον τρόπο αυτό να ενσωματώσουμε ένα μεγάλο ποσό πληροφορίας στον τελεστή W και να επιτύχουμε μέσω συνεχών επαναλήψεων του, ένα απέραντο πλήθος από πολύπλοκες εικόνες (ντετερμινιστικά fractal), ξεκινώντας από ένα αυθαίρετο επίπεδο σχήμα A_0 . [4]

6.2 Κατασκευή στοχαστικών Fractal

Υπάρχουν πολλοί τρόποι κατασκευής στοχαστικών (τυχαίων) fractal τόσο απλοί όσο και σύνθετοι. Μπορούμε και αλγοριθμικά να κατασκευάσουμε τυχαία fractals που έχουν ακριβώς την ίδια fractal διάσταση με τα ντετερμινιστικά, αλλά η δομή τους είναι στοχαστική, χρησιμοποιώντας γεννήτριες τυχαίων αριθμών. Η μέθοδος είναι η ακόλουθη.



Εικόνα 6.3 Επαναληπτική διαδικασία για την δημιουργία τυχαίας μορφοκλασματικής δομής. [5]

Ξεκινάμε την μηδενική απεικόνιση με ένα τετράγωνο (στις δύο διαστάσεις). Στην πρώτη επανάληψη διπλασιάζουμε το μέγεθος του τετραγώνου (m φορές στην γενική περίπτωση) τόσο στην x όσο και στην y διεύθυνση. Όμως φροντίζουμε το μέγεθος του να αυξηθεί μόνο κατά 3 φορές (n φορές στη γενική περίπτωση, όπου $n < m^2$). Παρατηρούμε όμως ότι το να αυξηθεί το μέγεθος κατά 3 φορές μπορεί να επιτευχθεί με 4 διαφορετικούς τρόπους όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.3. Στη γενική περίπτωση μπορεί να γίνει αυτό σε $Q = \frac{m^2!}{n!(m^2-n)!}$ διαμορφώσεις.

Ως πρώτη επανάληψη διαλέγουμε με τυχαίο τρόπο μία από τις Q διαμορφώσεις. Για να προχωρήσουμε στην δεύτερη επανάληψη κάθε φορά αντικαθιστούμε ένα γεμάτο

τετράγωνο με ένα από τα σχήματα της πρώτης επανάληψης, διαλέγοντας με τυχαίο τρόπο. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε και στην n -ιοστή επανάληψη, όπου βλέπουμε να εμφανίζεται το «κόκκινο» σχήμα. Το σχήμα της n -ιοστής επανάληψης φαίνεται σε πρώτη όψη τυχαίο. Παρατηρείται όμως μία αυτομοιότητα στη δομή του, κι από την επαναληπτική διαδικασία από την οποία είναι φτιαγμένο είναι ξεκάθαρο ότι όταν η μάζα αυξάνεται κατά 3 φορές το μέγεθος αυξάνεται κατά 2. Έτσι είναι καθαρή μορφοκλασματική δομή με fractal διάσταση $D_c = \frac{\log 3}{\log 2}$ (όπου $D_c = \frac{\log m}{\log n}$ στη γενική περίπτωση).

Φυσικά, η κατασκευή αυτή αντιπροσωπεύει μόνο μία απλή (ίσως την απλούστερη) εκδοχή πιθανών τυχαίων fractal. Για παράδειγμα, δεν είναι μόνο η θέση των διαφόρων κομματιών (στην παραπάνω περίπτωση, των τετραγώνων) που μπορεί να ποικίλει, αλλά και ο αριθμός αυτών των μονάδων και/ή το μέγεθος τους. Στην γενική περίπτωση, για τη fractal διάσταση τυχαίων fractal δομών δεν υπάρχει κάποιος σαφής ορισμός και η διάσταση D πρέπει να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τις διάφορες θεωρητικές και αριθμητικές τεχνικές που συζητήθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Παρακάτω μελετώνται δύο μοντέλα κατασκευής στοχαστικών fractal, που χρησιμοποιούνται κυρίως για την προσομοίωση διαφόρων φυσικών φαινομένων ανάπτυξης. [5]

6.3 Diffusion-Limited ανάπτυξη

Πολλές από τις διαδικασίες ανάπτυξης στη φύση επηρεάζονται από την χωρική κατανομή μίας ποσότητας που είναι εγγενώς μη-τοπική. Δηλαδή σε ένα προς ανάπτυξη σύστημα, η τιμή της ποσότητας αυτής σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο στο χώρο επηρεάζεται τόσο από τα μακρινά του σημεία όσο και από τα γειτονικά του. Για παράδειγμα, τέτοια συμπεριφορά παρατηρείται στην κατανομή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της στερεοποίησης, στην πιθανότητα να βρεθεί ένα τυχαία περιπλανώμενο σωματίδιο ή ολόκληρη δομή σωματιδίων σε μία συγκεκριμένη θέση, καθώς και στο ηλεκτρικό δυναμικό γύρω από ένα φορτισμένο αγωγό.

Η χωρική εξάρτηση των ποσοτήτων αυτών με διάφορες προσεγγίσεις ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με μεταβαλλόμενες οριακές συνθήκες. Η συσσωμάτωση (aggregation) των τυχαία περιπλανώμενων σωματιδίων περιγράφεται επίσης από την εξίσωση Laplace και όλες οι προαναφερθείσες κατηγορίες διαδικασιών συχνά αποκαλούνται diffusion-limited growth. Η diffusion-limited κίνηση των σωμάτων τυπικά οδηγεί στη δημιουργία πολύ περίπλοκων fractal αντικειμένων με διακλαδώσεις, λόγω της ασταθούς φύσης αυτής της ανάπτυξης. Έτσι, σαν αποτέλεσμα ενός αυτό-οργανωμένου μηχανισμού κατευθυνόμενου από την εξίσωση Laplace, μπορούν να προκύψουν δομές με πλούσια γεωμετρία, από ένα ομοιογενές χωρίς δομή μέσο. [8]

6.3.1 Μοντέλο Diffusion-limited Aggregation (DLA)

6.3.1.1 Απλό μοντέλο DLA

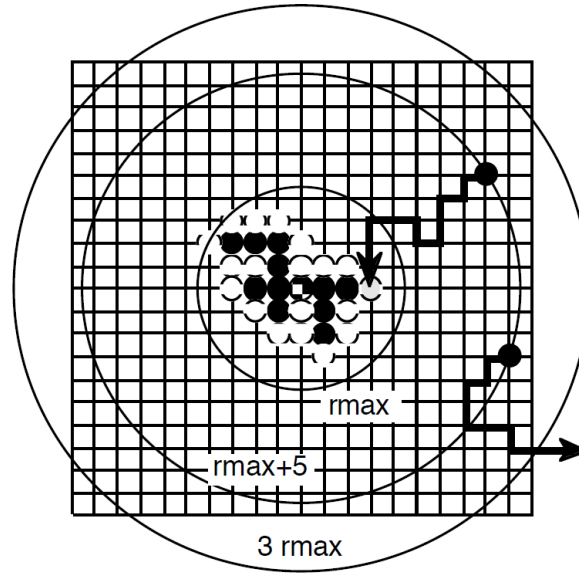
Θεωρούμε έναν ηλεκτρολύτη που περιέχει θετικά ιόντα μετάλλων σε μικρή συγκέντρωση, και ένα αρνητικά φορτισμένο ηλεκτρόδιο. Όταν ένα τυχαία περιπλανώμενο ιόν χτυπήσει το ηλεκτρόδιο ή τα ήδη υπάρχοντα άτομα μετάλλου που βρίσκονται στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου, σταματάει να κινείται και κολλάει στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου λόγω της ηλεκτροστατικής έλξης. Το πείραμα αυτό δίνει σαν αποτέλεσμα μία πολύπλοκη, δένδροειδή δομή που παρουσιάζει στοιχεία αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας.

Το μοντέλο που ονομάζεται diffusion-limited aggregation (DLA) παρουσιάστηκε αρχικά από τους Witten και Sander (1981) προκειμένου να προσομοιώσουν σε υπολογιστή φαινόμενα που σχετίζονται με την παραπάνω διαδικασία. Οι κανόνες του μοντέλου αυτού είναι απλοί:

Αρχικά τοποθετούμε ένα σωματίδιο-σπόρο στο κέντρο ενός τετραγωνικού πλέγματος. Θεωρούμε μία κυκλική τροχιά με κέντρο το σωματίδιο-σπόρο και ακτίνα σχετικά μεγάλη. Από ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς αυτής εκτοξεύουμε ένα σωματίδιο, και για το λόγο αυτό την ονομάζουμε περιοχή εκτόξευσης. Ακόμη ορίζουμε μία δεύτερη κυκλική τροχιά στο μοντέλο με ακτίνα πολύ μεγαλύτερη από αυτή της περιοχής εκτόξευσης την οποία ονομάζουμε ζώνη καταστροφής. Όταν πραγματοποιηθεί η εκτόξευση, το σωματίδιο ξεκινάει έναν τυχαίο περίπατο στο τετραγωνικό πλέγμα, κινούμενο κατά μία μονάδα πλέγματος τη φορά. Δύο είναι οι πιθανές εκβάσεις αυτού του τυχαίου περιπάτου:

- i. Αν το σωματίδιο κινούμενο ξεπεράσει το όριο της ζώνης καταστροφής το εγκαταλείπουμε, δηλαδή καταστρέφεται.
- ii. Αν το σωματίδιο κινούμενο φτάσει σε μία θέση δίπλα από το σωματίδιο-σπόρο "κολλάει" πάνω του, ο περίπατος του τερματίζεται και πλέον η αρχική δομή που περιείχε μόνο ένα σωματίδιο μετατρέπεται σε μία δομή δύο σωματιδίων.

Μετά το τέλος οποιασδήποτε από τις δύο παραπάνω ενέργειες, ένα άλλο σωματίδιο εκτοξεύεται από την περιοχή εκτόξευσης το οποίο είτε θα καταστραφεί είτε θα προσκολληθεί όταν φτάσει δίπλα σε οποιοδήποτε από τα σωματίδια υπάρχουν ήδη κ.ό.κ. (Εικόνα 6.4)



Εικόνα 6.4 Διάγραμμα του μοντέλου DLA σε τετραγωνικό πλέγμα. Η ανάπτυξη ξεκινάει από το σωματίδιο-σπόρο. Τα σημεία τα οποία ανήκουν στη δομή μας φαίνονται με μαύρο, ενώ οι πιθανές θέσεις ανάπτυξης της δομής με άσπρο. Στο σχήμα φαίνονται οι τροχιές δύο σωματιδίων, ένα από τα οποία φτάνει πολύ μακριά από τη δομή και καταστρέφεται. [11]

Παρόλο που το μοντέλο του DLA βασίζεται σε αλγορίθμους που προσομοιώνουν τον τυχαίο περίπατο, ο αρχικός ορισμός του μοντέλου από τους Witten και Sander (1983) παρουσιάστηκε με πιο μαθηματικούς όρους όπως φαίνεται παρακάτω:

Σε ένα τετραγωνικό πλέγμα του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται σαν (x, y) η πιθανότητα ένα περιπλανώμενο σωματίδιο να επισκεφτεί το σημείο (x, y) που συμβολίζεται ως $u(x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \cdot [u(x + 1, y) + u(x - 1, y) + u(x, y + 1) + u(x, y - 1)] \quad (6.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την διακριτή προσέγγιση της συνεχούς εξίσωσης Laplace

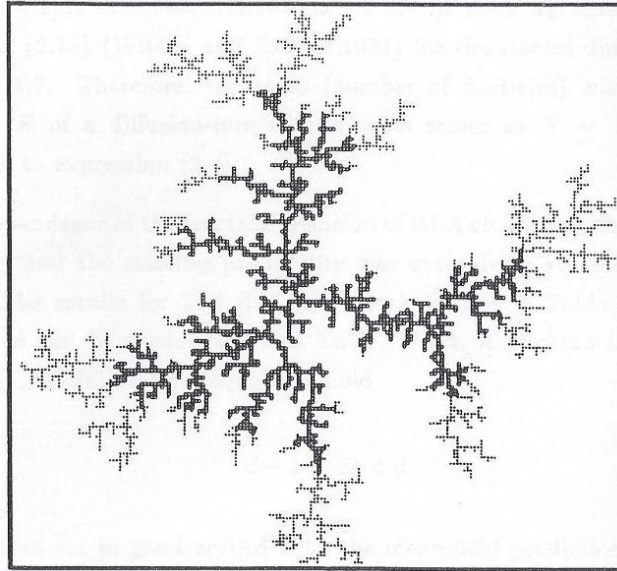
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (6.16)$$

Η ανάπτυξη αυτή υπόκειται και σε κάποιες οριακές συνθήκες. Στις θέσεις (x, y) του πλέγματος οι οποίες έχουν καταληφθεί από σωματίδια ισχύει $u(x, y) = 0$. Αυτό γίνεται προκειμένου να αποκλείσουμε την εκ νέου κατάληψη μίας θέσης η οποία είναι ήδη κατειλημμένη. Επίσης στην κυκλική τροχιά που αποτελεί πηγή δημιουργίας των περιπλανώμενων σωματιδίων ισχύει $u(x, y) = 1$. Το μοντέλο μπορεί μετά να λυθεί από την εξίσωση (6.15) υπακούοντας τις δύο αυτές οριακές συνθήκες. [11]

Στην Εικόνα 6.5 φαίνεται μία τυπική δομή DLA με 3000 σωματίδια. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι αυτά τα αντικείμενα i) έχουν ανοιχτή δομή με πολλές τυχαίες διακλαδώσεις ii) χαρακτηρίζονται από στοχαστική αυτοομοιότητα.

Όταν λέμε εδώ στοχαστική αυτοομοιότητα εννοούμε το παρακάτω:

Αν συρρικνώσουμε ένα μεγάλο κλαδί και παραλείψουμε τις μικρές λεπτομέρειες θα καταλήξουμε σε μία δομή η οποία θα έχει την ίδια εμφάνιση με ένα πολύ μικρότερο κλαδί.



Εικόνα 6.5 Μία σχετικά μικρή δομή DLA αποτελούμενη από 3000 σωματίδια. Τα πρώτα 1500 σωματίδια φαίνονται με μαύρο χρώμα και τα υπόλοιπα 1500 με γκρι. [8]

Από την εικόνα επίσης παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα του μοντέλου έχει δενδριτική μορφή με πολλές διακλαδώσεις που ξεκινούν από το σωματίδιο-σπόρο και όσο προστίθενται περισσότερα σωματίδια η δομή ανοίγει όλο και περισσότερο. Δεν είναι αμέσως εμφανές γιατί συμβαίνει αυτό, αλλά είναι γνωστό ότι όταν ένα σωματίδιο "κολλήσει" σε ένα άλλο, η πιθανότητα περισσότερα σωματίδια να "κολλήσουν" στη γειτονιά αυτή είναι πολύ αυξημένη. Έτσι αρχίζουν να σχηματίζονται μακριά κλαδιά από σωματίδια γύρω από το σωματίδιο-σπόρο, κάνοντας ακόμη πιο πιθανό τα καινούρια σωματίδια να "κολλήσουν" στις άκρες των υπαρχόντων κλαδιών όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6.5.

Μπορούμε ακόμη να δούμε ότι η δενδριτική δομή που σχηματίζει το μοντέλο DLA δεν γεμίζει τελείως την επιφάνεια στην οποία αναπτύσσεται. Επίσης δεν είναι τόσο αραιή όσο μία γραμμή από σωματίδια. Με λίγα λόγια η διάσταση της δομής αυτής δεν είναι ακέραιη και διέπεται από τους κανόνες της γεωμετρίας των fractal με διάσταση D για την οποία ισχύει $1 < D < 2$.

Οι Witten και Sander (1983) υποστήριξαν ότι η διάσταση fractal των μορφών του DLA είναι σταθερή και ίση με $D=1,70 \pm 0,02$ και αυτό έχει επιβεβαιωθεί από πολλές άλλες προσομοιώσεις και πραγματικά πειράματα (Jullien και Botet, 1987).

Η εξάρτηση της fractal διάστασης D , των δομών του DLA, από την διάσταση εμφύθισης d και την πιθανότητα προσκόλλησης μελετήθηκε εκτενώς από τον Meakin

(1983). Τα αποτελέσματα για $2 \leq d \leq 6$ συνοψίζονται στον Πίνακα 6.1. Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι για όλες τις διαστάσεις d ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$d - 1 < D < d \quad (6.17)$$

Από τον πίνακα ακόμη παρατηρούμε ότι οι πειραματικές μετρήσεις της fractal διάστασης D είναι πολύ κοντά στην τιμή που προκύπτει από τον θεωρητικό τύπο (Tokuyama και Kawasaki 1984)

$$D = \frac{d^2+1}{d+1} \quad (6.18)$$

Πίνακας 6.1 Η διάσταση fractal (D) των δομών του DLA σε πλέγματα διαστάσεων $2 \leq d \leq 6$. Η θεωρητική τιμή της διάστασης D φαίνεται συγκριτικά στη δίπλα στήλη. [8]

d	D	$(d^2 + 1)/(d + 1)$
2	1.70 ± 0.06	1.667
3	2.53 ± 0.06	2.500
4	3.31 ± 0.10	3.400
5	4.20 ± 0.16	4.333
6	5.3	5.286

Παρόλα αυτά τα τελευταία χρόνια υπάρχει μία υπόθεση και μερικές αποδείξεις ότι η fractal διάσταση D δεν εξαρτάται μόνο από την διάσταση d αλλά και από το μέγεθος του πλέγματος, τον αριθμό των σωματιδίων που περιέχονται και τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της. [8]

6.3.1.2 Παραλλαγές του Μοντέλου DLA

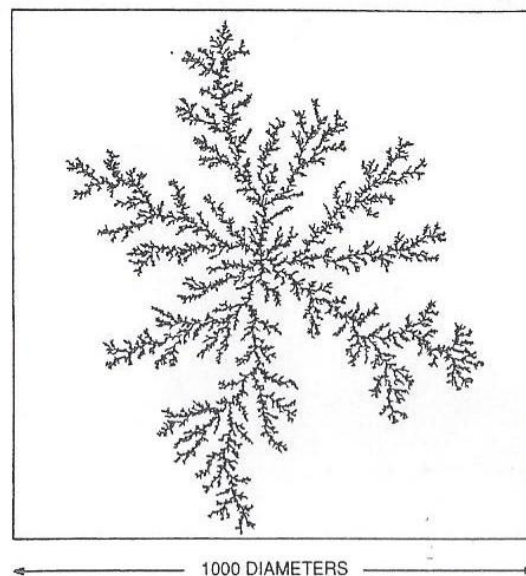
Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο υπάρχουν ενδείξεις ότι η διάσταση fractal του μοντέλου DLA δεν εξαρτάται μόνο από την διάσταση εμβύθισης d αλλά μπορεί να αλλάζει ανάλογα με τον τύπο και το μήκος του πλέγματος, την αλληλεπίδραση με τους γείτονες κ.α. Προκειμένου λοιπόν να βρεθεί αν όντως η διάσταση fractal των DLA δομών αλλάζει, ερευνήθηκαν διάφορες παραλλαγές του αρχικού μοντέλου.

Σαν μία πρώτη προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό δημιουργήθηκαν οι παρακάτω εκδοχές του diffusion-limited aggregation μοντέλου (Witten και Sander 1983, Meakin 1983)

1. DLA με πιθανότητα προσκόλλησης μικρότερη από 1. Στην παραλλαγή αυτή το μοντέλο είναι ακριβώς ίδιο με το απλό DLA με τη διαφορά ότι όταν το

περιπλανώμενο σωματίδιο φτάσει δίπλα από μία κατειλημμένη θέση δεν είναι σίγουρο ότι θα κολλήσει. Υπάρχει λοιπόν μία πιθανότητα p_s το σωματίδιο να κολλήσει και $1 - p_s$ να συνεχίσει τον περίπατο του.

2. DLA με αλληλεπίδραση με τους γείτονες (next-to-nearest neighbour interaction)
3. DLA εκτός πλέγματος. Κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων της παραλλαγής αυτής το κέντρο του περιπλανώμενου σφαιρικού σωματιδίου μετακινείται με την ίδια πιθανότητα σε οποιοδήποτε σημείο που απέχει απόσταση ίση με τη διάμετρο του σωματιδίου. Αν κάποια στιγμή το σωματίδιο που κινείται τύχει να επικαλύψει κάποιο άλλο υπάρχον σωματίδιο, γυρίζει στην πιο κοντινή θέση στην οποία δεν επικαλύπτει καθόλου το σωματίδιο και κολλάει σε αυτό. Στην Εικόνα 6.6 φαίνεται μία δομή DLA εκτός πλέγματος με 50.000 σωματίδια. Στην εικόνα αυτή φαίνεται καλύτερα ότι το αποτέλεσμα του DLA είναι ένα στοχαστικό αυτοόμοιο σχήμα.



Εικόνα 6.6 Μία τυπική δομή DLA εκτός πλέγματος με 50.000 σωματίδια. [8]

Από τις τρεις αυτές εκδοχές του DLA η πρώτη παραλλαγή με μεταβαλλόμενη πιθανότητα προσκόλλησης παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς η μεταβολή της πιθανότητας επηρεάζει τη διάσταση fractal του αποτελέσματος. Έχει παρατηρηθεί ότι όταν η πιθανότητα προσκόλλησης είναι πολύ μικρή μεγαλώνει αρκετά η διάσταση fractal του αποτελέσματος.

Τα αποτελέσματα των διαστάσεων και για τις τρεις παραλλαγές φαίνονται στον Πίνακα 6.2 (Meakin 1983a). Αν συγκρίνουμε τον Πίνακα 6.1 και Πίνακα 6.2 είναι φανερό ότι η διάσταση fractal δεν μεταβάλλεται πολύ. [8]

Πίνακας 6.2 Fractal διάσταση (D) των παραλλαγών του μοντέλου DLA. [8]

Model	D
d=2, $p_s=0.25$	1.72 ± 0.06
d=2, o-1	1.71 ± 0.07
d=2, nnn	1.72 ± 0.05
d=3, $p_s=0.25$	2.49 ± 0.12
d=3, o-1	2.50 ± 0.08

6.3.1.3 Μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια

Μέσω της παραλλαγής του DLA με μεταβαλλόμενη πιθανότητα προσκόλλησης παρατηρούμε ότι μπορούμε να μεταβάλλουμε τη διάσταση fractal των αποτελεσμάτων. Στο μοντέλο όμως αυτό η μεταβολή της πιθανότητας επέφερε μόνο αύξηση της διάστασης fractal σε σχέση με την φυσιολογική τιμή της διάστασης του DLA ($D > 1,7$). Υπάρχει και μία άλλη παραλλαγή του DLA με την οποία η διάσταση fractal των αποτελεσμάτων γίνεται μικρότερη από το 1,7.

Η παραλλαγή αυτή του μοντέλου ονομάζεται DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια και μοιάζει πολύ με το κανονικό μοντέλο DLA. Οι διαφορές τους έγκεινται στα εξής σημεία:

1. Αντί κάθε φορά να εκτοξεύεται ένα σωματίδιο, από μία τυχαία θέση πάνω στην τροχιά εκτόξευσης προκειμένου να ξεκινήσει τον τυχαίο του περίπατο, θα εκτοξεύονται δύο σωματίδια ταυτόχρονα από δύο τυχαίες θέσεις και θα ξεκινάει το κάθε ένα τον τυχαίο του περίπατο.
2. Στο κανονικό μοντέλο DLA μία θέση στο πλέγμα καταλαμβάνεται μόλις το περιπλανώμενο σωματίδιο φτάσει δίπλα σε μία ήδη κατειλημμένη θέση. Στο μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια πρέπει και τα δύο περιπλανώμενα σωματίδια να φτάσουν στην ίδια θέση στο πλέγμα (η οποία θα είναι δίπλα από μία ήδη κατειλημμένη) προκειμένου η θέση αυτή να καταληφθεί.

Αυτή η παραλλαγή του DLA παράγει αποτελέσματα με αισθητά μικρότερη διάσταση fractal από αυτή του κανονικού DLA. [13]

6.3.2 Dielectric Breakdown Model (DBM)

6.3.2.1 Απλό μοντέλο (DBM)

Το μοντέλο DBM αρχικά παρουσιάστηκε προκειμένου να προσομοιωθούν διάφορα φαινόμενα που περιελάμβαναν ηλεκτρικές εκκενώσεις όπως οι κεραυνοί στην

ατμόσφαιρα, τα ηλεκτρικά δέντρα στα πολυμερή κ.τ.λ. Παρόλο που η ακριβής φυσική διαδικασία μπορεί να διαφέρει μεταξύ των φαινομένων αυτών, οι γενικές ιδιότητες των μοτίβων εκκένωσης τις οποίες έχουν σαν αποτέλεσμα είναι πολύ παρόμοιες. Έχουν μία ανοιχτή δενδριτική δομή με τυχαίες διακλαδώσεις που μοιάζει πολύ με αυτή του DLA.

Πριν περιγράψουμε το μοντέλο ας πούμε λίγα λόγια για τη διαδικασία της ηλεκτρικής εκκένωσης. Όταν ένα μονωτικό υλικό εκτεθεί σε ένα ηλεκτρικό πεδίο που υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή δημιουργείται μία αγωγή φάση, επειδή ένα πολύ μεγάλο πεδίο δημιουργεί κινούμενους φορείς φορτίων. Η κίνηση τους στην επιφάνεια του υλικού ελέγχεται από το ηλεκτρικό πεδίο και είναι στοχαστική στο χρόνο. Στο μοντέλο DBM (Niemeyer *et al* 1984) οι πολύπλοκες λεπτομέρειες των παραπάνω φυσικών διαδικασιών που υπάρχουν στις άκρες του μοτίβου εκκένωσης δεν λαμβάνονται υπόψη, και οι αντίστοιχες εξισώσεις αντικαθίστανται από τις υποθέσεις:

- i. $\varphi = \varphi_0 = 0$ στην αγωγή φάση, όπου φ είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (6.19)$$

- ii. η ταχύτητα ανάπτυξης είναι στοχαστικά ανάλογη με την τιμή του τοπικού ηλεκτρικού πεδίου υψωμένο σε κάποιον εκθέτη η

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad (6.20)$$

Η φαινομενική αναλογία μεταξύ των μοντέλων DLA και DBM μπορεί να κατανοηθεί στο επίπεδο των εξισώσεων οι οποίες καθορίζουν τη συμπεριφορά των δύο μοντέλων. Αν ο εκθέτης είναι $\eta=1$ η πιθανότητα ανάπτυξης και στα δύο μοντέλα είναι ανάλογη της τιμής της λαπλασιανής, ∇^2 , μίας κατανομής που ικανοποιεί την εξίσωση (6.19). Και αυτό γιατί η πιθανότητα να βρεθεί ένα σωματίδιο που πραγματοποιεί τυχαίο περίπατο σε μία συγκεκριμένη θέση στο πλέγμα δίνεται επίσης από την εξίσωση Laplace (Witten και Sander 1981).

Το πραγματικό μοντέλο DBM είναι σχεδιασμένο σε ένα πλέγμα d-διαστάσεων και ο τελεστής της εξίσωσης Laplace, ∇^2 , αντικαθίσταται από την διακριτή του εκδοχή. Για παράδειγμα, σε δύο διαστάσεις, η εξίσωση (6.19) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \cdot (\varphi(x + 1, y) + \varphi(x - 1, y) + \varphi(x, y + 1) + \varphi(x, y - 1)) \quad (6.21)$$

όπου $\varphi(x,y)$ είναι η τιμή του δυναμικού φ στις συντεταγμένες του πλέγματος (x,y) .

Οι οριακές συνθήκες του μοντέλου είναι οι ακόλουθες:

- i. Ισχύει $\varphi(x,y)=0$ στις θέσεις του πλέγματος στις οποίες έχει πραγματοποιηθεί εκκένωση, έχουν δηλαδή καταληφθεί.

- ii. Ισχύει $\varphi(x,y)=1$ στις θέσεις του πλέγματος οι οποίες απέχουν απόσταση από το σωματίδιο-σπόρο μεγαλύτερη από μία συγκεκριμένη ακτίνα r_0 την οποία ορίζουμε εμείς ως εξωτερικό όριο του συστήματος

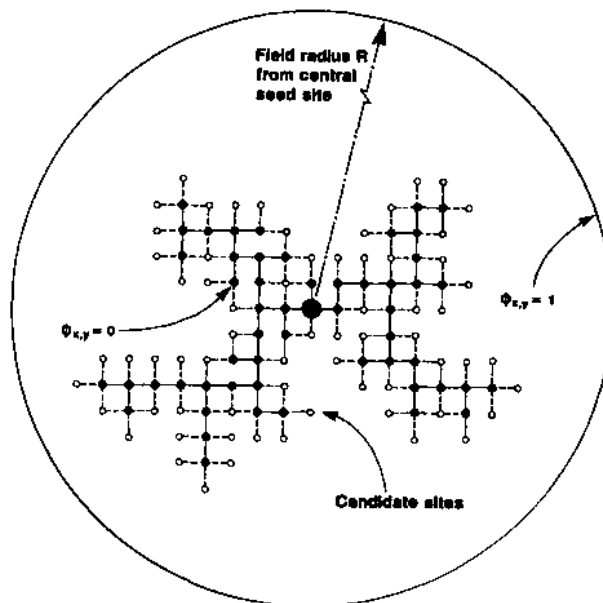
Η πιθανότητα ανάπτυξης του συσσωματώματος σωματιδίων προς μία από τις υποψήφιες θέσεις ανάπτυξης με συντεταγμένες (x,y) δίνεται από τον τύπο:

$$p(x,y) = C \cdot \varphi^\eta(x,y) \quad (6.22)$$

όπου ο συντελεστής κανονικοποίησης C υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{C} = \sum_k \varphi^\eta(i,j) \quad (6.23)$$

Η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις υποψήφιες θέσεις ανάπτυξης (k), δηλαδή όλες τις θέσεις που είναι γειτονικές με μία ήδη κατειλημμένη θέση (Εικόνα 6.7).



Εικόνα 6.7 Μέθοδος ανάπτυξης της δομής του μοντέλου DBM. [11]

Ο εκθέτης η είναι που δίνει μία σημαντική επιπλέον ιδιότητα στο μοντέλο DBM σε σχέση με το μοντέλο DLA. Όπως έχει αποδειχτεί η παράμετρος η επηρεάζει την τιμή της διάστασης fractal των δομών που παράγει το μοντέλο DBM (Niemeyer et al 1984). Υπάρχει επίσης και μία άλλη μικρή διαφορά στις οριακές συνθήκες των δύο μοντέλων. Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν στο DLA ορίζουν μηδενική τιμή στο δυναμικό (και κατ' επέκταση στην πιθανότητα) στις θέσεις που είναι γειτονικές αυτών που ανήκουν στο συσσωμάτωμα σωματιδίων, και όχι στις θέσεις που είναι κατειλημμένες από σωματίδια όπως συμβαίνει στο μοντέλο DBM.

Η προσομοίωση του μοντέλου DBM ξεκινάει με ένα σωματίδιο-σπόρο στο κέντρο του πλέγματος. Το δυναμικό φ για κάθε θέση του πλέγματος που βρίσκεται μέσα στο κυκλικό όριο του συστήματος, ακτίνας r_0 , υπολογίζεται χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους. Η εξίσωση (6.21) αντιπροσωπεύει ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (μία εξίσωση για κάθε θέση στο πλέγμα) και μπορεί να λυθεί μέσω επαναλήψεων. Σχετικά καλή σύγκλιση μπορεί να επιτευχθεί με την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel η οποία σε ένα τετραγωνικό πλέγμα έχει τη μορφή:

$$\varphi_{x,y}^{(\kappa+1)} = \varphi_{x,y}^{(\kappa)} + \omega \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\varphi_{x-1,y}^{(\kappa+1)} + \varphi_{x,y-1}^{(\kappa+1)} + \varphi_{x+1,y}^{(\kappa)} + \varphi_{x,y+1}^{(\kappa)} \right) - \varphi_{x,y}^{(\kappa)} \right] \quad (6.24)$$

Στην παραπάνω εξίσωση η παράμετρος ω ονομάζεται παράμετρος χαλάρωσης και βρίσκοντας μία ιδανική τιμή για την παράμετρο αυτή, μέσω δοκιμών και παρακολούθησης σφαλμάτων η σύγκλιση μπορεί να επιταχυνθεί αισθητά.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα ανάπτυξης p μέσω της εξίσωσης (6.22) για όλες τις υποψήφια θέσεις ανάπτυξης. Ύστερα επιλέγεται τυχαία μία υποψήφια θέση ανάπτυξης (x,y) με πιθανότητα ανάπτυξης $p(x,y)$. Επίσης επιλέγεται και ένας τυχαίος αριθμός r από μία ομοιόμορφη κατανομή τυχαίων αριθμών μεταξύ 0 και p_{max} όπου p_{max} είναι η μεγαλύτερη πιθανότητα ανάπτυξης. Αν ισχύει $r < p(x,y)$ τότε η υποψήφια θέση με συντεταγμένες (x,y) καταλαμβάνεται και όλη η διαδικασία ξεκινάει ξανά υπολογίζοντας την κατανομή του δυναμικού φ έχοντας πλέον δύο σωματίδια στην δομή μας.

Η διαδικασία αυτή, προκειμένου να καταληφθούν N θέσεις του πλέγματος, απαιτεί πολύ περισσότερο υπολογιστικό χρόνο από ότι θα χρειαστεί το μοντέλο DLA για να καλύψει τον ίδιο αριθμό θέσεων. Και αυτό γιατί στο μοντέλο DBM πρέπει να λυθεί η εξίσωση Laplace N φορές σε μία μεγάλη περιοχή ακτίνας r_0 .

Οι προσομοιώσεις για τιμή εκθέτη $\eta=1$ οδηγούν σε δομές με διάσταση $D \cong 1,7$ τιμή που μοιάζει πολύ με αυτή του DLA, κάτι που ήταν αναμενόμενο. Μεταβάλλοντας τον εκθέτη η έχουμε αρκετά σημαντική αλλαγή στις fractal διαστάσεις των αποτελεσμάτων (Wiesmann και Pietronero 1986). Η ιδιότητα αυτή κάνει το μοντέλο DBM ιδιαίτερα ενδιαφέρον και από θεωρητικής πλευράς, αν και δεν έχει καταστεί δυνατό να εδραιωθεί κάποια σημαντική σύνδεση μεταξύ του εκθέτη η και κάποιας φυσικής ποσότητας. Ο Πίνακας 6.3 δείχνει τη μεταβολή της fractal διάστασης D ανάλογα με την τιμή του η όπως είχαν υπολογίσει οι Wiesmann και Pietronero, τόσο για δύο όσο και για τρεις διαστάσεις ($d=2, d=3$).

Πίνακας 6.3 Fractal διαστάσεις για διάφορες τιμές της παραμέτρου ελέγχου η του μοντέλου DBM. Τα δεδομένα πάρθηκαν για δομές που αποτελούνται από N σωματίδια και παράγονται σε πλέγματα d -διαστάσεων (Wiesmann και Pietronero 1986). [8]

d	η	D	N
2	0	2.00	20000
2	0.5	1.92	30000
2	1	1.70	10000
2	2	1.43	3000
3	0	3.00	20000
3	0.5	2.78	10000
3	1	2.65	4000
3	2	2.26	1500

Όπως αναφέραμε προηγουμένως στο μοντέλο DLA υπάρχει ένας θεωρητικός τύπος μέσω του οποίου μπορεί να υπολογιστεί η διάσταση fractal του μοντέλου ανάλογα με τη διάσταση εμβύθισης d . Ο τύπος αυτός μπορεί να γενικευτεί προκειμένου να λαμβάνει υπόψη τις επιπτώσεις που έχει η παράμετρος η στην ανάπτυξη των δομών. Έτσι προκύπτει η παρακάτω τροποποίηση (Matsushita et al 1986)

$$D(\eta) = \frac{d^2 + \eta \cdot (D_w - 1)}{d + \eta \cdot (D_w - 1)} \quad (6.25)$$

Συγκρίνοντας με τις τιμές του πίνακα 6.3 παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι πολύ καλή. Για παράδειγμα για $d=3$ και $\eta=2$ ο τύπος (6.25) δίνει $D=2,2$ ενώ από τον Πίνακα 6.3 βλέπουμε ότι $D \cong 2,26$. [8]

6.3.2.2 Μοντέλο DBM με φυσικούς περιορισμούς

Η διάσταση fractal αλλάζει αισθητά καθώς η παράμετρος ελέγχου η μεταβάλλεται από πολύ μικρές μέχρι πολύ μεγάλες θετικές τιμές. Εκτός αυτού όμως η διάσταση fractal επηρεάζεται και από το σχήμα την περιοχής μέσα στην οποία πρόκειται να αναπτυχθεί. Αν ξεκινήσουμε με μια κυκλική περιοχή (μέσα στην οποία έχουμε το τετραγωνικό μας πλέγμα) και συστηματικά μειώνουμε το μέγεθος της βγάζοντας όλο και μεγαλύτερους τομείς η ανάπτυξη του συσσωματώματος σωματιδίων θα αναγκάζεται να περιορίζεται όλο και περισσότερο στον διαθέσιμο χώρο. Οριακά, θα μπορούσαμε να αποκλείσουμε έναν τομέα που πλησιάζει σχεδόν την ίδια την κυκλική περιοχή, με αποτέλεσμα ο μόνος διαθέσιμος χώρος ανάπτυξης του συσσωματώματος να είναι μόνο μία ευθεία γραμμή. Έτσι, όσο αφαιρούμε τομείς από την αρχική κυκλική περιοχή ανάπτυξης, ακόμα και αν κρατήσουμε σταθερή την παράμετρο ελέγχου, έστω $\eta=1$, η διάσταση fractal του συσσωματώματος θα μειώνεται σταδιακά από $D=1,7$ (όταν δεν έχουμε αφαιρέσει κανέναν τομέα στην κυκλική περιοχή) έως $D=1$ (στην περίπτωση που μείνει μόνο μία γραμμή). Αυτή η επίδραση στην διάσταση

fractal, παρόλα αυτά, δεν είναι τόσο εύκολα κατανοητή όσο αρχικά πιστεύαμε καθώς εξαρτάται πολύ από το μέγεθος του τετραγωνικού πλέγματος.

Τα θεωρητικά fractal χαρακτηρίζονται από αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας, αλλά το τετραγωνικό πλέγμα, μέσα στο οποίο αναπτύσσεται το μοντέλο DBM, συμπιέζεται σε μία κλίμακα. Αυτό λοιπόν δείχνει ότι, παρόλο που υποστηρίζουμε ότι η fractal διάσταση είναι το μέτρο της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας, είναι ακόμα εξαρτημένη από τη μικρότερη διαθέσιμη κλίμακα, που στην περίπτωση μας είναι το μέγεθος του πλέγματος. [11]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Υλοποίηση των μοντέλων ανάπτυξης fractal και συσχετισμός τους με τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας

7.1 Μοντέλο DLA (Diffusion-Limited Aggregation)

7.1.1 Περιγραφή

Για την υλοποίηση του αλγόριθμου του DLA χρειαζόμαστε αρχικά ένα πλέγμα $N \times N$ διαστάσεων πάνω στο οποίο θα κινούνται τα σωματίδια, και του οποίου τις θέσεις θα καταλαμβάνουν. Για τον ορισμό του πλέγματος αυτού χρησιμοποιήσαμε έναν $N \times N$ πίνακα τον οποίο ονομάσαμε `map`. Στη συνέχεια το σωματίδιο-σπόρος καταλαμβάνει την κεντρική θέση του πίνακα `map` και μέχρι στιγμής η δομή μας αποτελείται από μόνο ένα σωματίδιο. Για να μειώσουμε τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται, τα υπόλοιπα σωματίδια εκτοξεύονται από μία κυκλική τροχιά (`radiusCreation`) που βρίσκεται πέντε βήματα πλέγματος πιο μακριά από την μέγιστη ακτίνα που σχηματίζει μέχρι στιγμής η δομή των σωματιδίων (`Rm`). Επίσης η κυκλική τροχιά πέρα από την οποία τα σωματίδια θα καταστρέφονται (`radiusKill`) έχει ακτίνα τρεις φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς εκτόξευσης των σωματιδίων. Με λίγα λόγια οι ακτίνες των δύο αυτών τροχιών έχουν αρχικά πολύ μικρή τιμή και όσο προστίθενται σωματίδια στη δομή οι ακτίνες μεγαλώνουν.

Ορίζουμε ακόμη τον αριθμό των σωματιδίων (`numparticles`) τα οποία θέλουμε να αποτελέσουν τη δομή μας. Ύστερα εκτοξεύουμε ένα σωματίδιο από την κυκλική τροχιά (`radiusCreation`) και αυτό ξεκινάει να κινείται τυχαία πάνω στο πλέγμα. Έχει δηλαδή ίση πιθανότητα να κινηθεί σε οποιοδήποτε από τα τέσσερα γειτονικά κελιά του πίνακα `map` (πάνω, κάτω, αριστερά, δεξιά). Μετά από κάθε κίνηση του σωματιδίου ελέγχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- Ελέγχουμε αν το σωματίδιο βρίσκεται σε μία θέση του πίνακα `map` έξω από την ακτίνα καταστροφής (`radiusKill`). Αν αυτό αληθεύει το σωματίδιο αυτό καταστρέφεται και εκτοξεύουμε το επόμενο σωματίδιο από την τροχιά εκτόξευσης (`radiusCreation`).

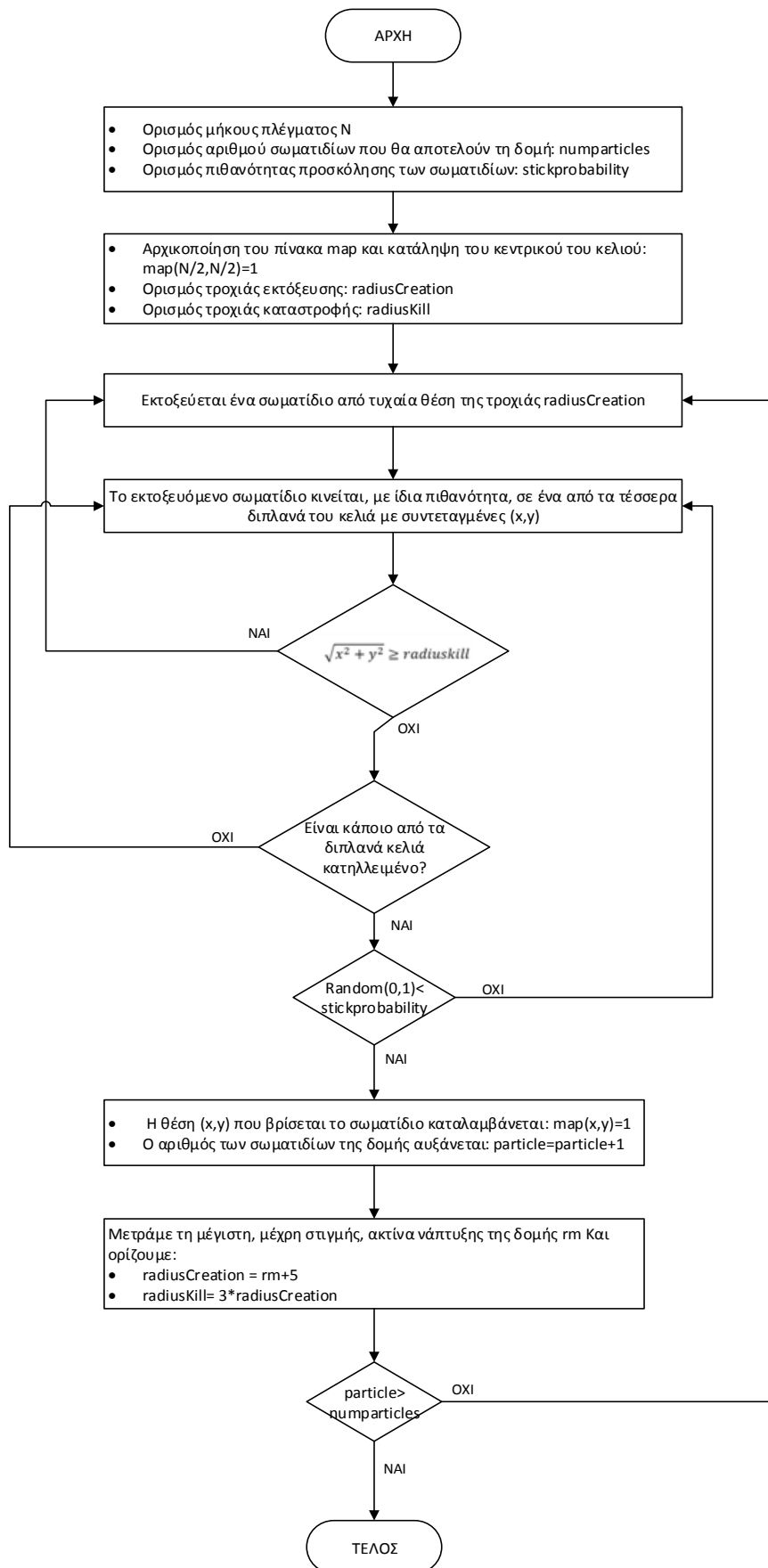
- Ελέγχουμε αν κάποια από τις τέσσερις γειτονικές θέσεις του σωματιδίου είναι ήδη κατειλημμένη από κάποιο άλλο σωματίδιο. Αν αυτό αληθεύει το περιπλανώμενο σωματίδιο "κολλάει" με το ήδη υπάρχον σωματίδιο, η θέση του πλέγματος στην οποία βρίσκεται καταλαμβάνεται, και εκτοξεύεται το επόμενο σωματίδιο από την τροχιά εκτόξευσης

Αν κανένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα δεν αληθεύει το σωματίδιο συνεχίζει με την τυχαία κίνηση του.

Η παραπάνω διαδικασία σταματάει είτε όταν συμπληρωθεί ο αριθμός των σωματιδίων που έχουμε ορίσει (numparticles) στην δομή είτε όταν μία βοηθητική μεταβλητή (escape) μας δείξει ότι ο αριθμός των σωματιδίων που έχουμε επιλέξει να ενσωματωθούν στη δομή είναι πολύ μεγάλος και υπερβαίνει τα όρια του πλέγματος. Στην δεύτερη περίπτωση η προσομοίωση σταματάει όταν φτάσουμε στον μέγιστο αριθμό σωματιδίων με τον οποίο δεν υπερβαίνουμε τα όρια του πλέγματος.

7.1.2 Διάγραμμα ροής

Το παρακάτω διάγραμμα ροής παρουσιάζει τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε τόσο στο απλό μοντέλο DLA όσο και στο μοντέλο DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων έγκειται στην τιμή της παραμέτρου `stickProbability` όπου για το απλό μοντέλο ισχύει πάντα `stickProbability=1` με αποτέλεσμα να ισχύει πάντα η συνθήκη `random(0,1)<stickProbability`.



Εικόνα 7.1 Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου DLA (υλοποίηση σε Matlab).

7.2 Μοντέλο DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης

Η υλοποίηση της παραλλαγής του απλού DLA, με πιθανότητα προσκόλλησης μικρότερη του ένα είναι ίδια με αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως εκτός από δύο σημεία. Αρχικά στο μοντέλο ορίζουμε μία επιπλέον μεταβλητή (`stickProbability`) η οποία αντιπροσωπεύει την πιθανότητα με την οποία το περιπλανώμενο σωματίδιο θα κολλήσει με κάποιο άλλο ήδη υπάρχον σωματίδιο. Η κύρια διαφοροποίηση μεταξύ των δύο μοντέλων εντοπίζεται στο σημείο όπου, κατά τη διάρκεια της τυχαίας κίνησης του σωματιδίου κάποια από τις τέσσερις γειτονικές θέσεις είναι ήδη κατειλημμένη από κάποιο άλλο σωματίδιο. Σε αυτήν την περίπτωση αντί το περιπλανώμενο σωματίδιο να κολλήσει σίγουρα με το υπάρχον σωματίδιο, θα κολλήσει με την πιθανότητα (`stickProbability`) που ορίσαμε στην αρχή. Έτσι προκύπτουν τα δύο παρακάτω ενδεχόμενα:

- Αν το περιπλανώμενο σωματίδιο "κολλήσει" στο υπάρχον τότε η θέση στην οποία βρίσκεται καταλαμβάνεται και εκτοξεύεται το επόμενο σωματίδιο από την τροχιά εκτόξευσης (`radiusCreation`).
- Αν το περιπλανώμενο σωματίδιο δεν "κολλήσει" στο υπάρχον τότε συνεχίζει τον τυχαίο περίπατο του είτε μέχρι να κολλήσει σε κάποιο υπάρχον σωματίδιο είτε μέχρι να καταστραφεί.

7.3 Μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια

Η υλοποίηση της παραλλαγής του DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια μοιάζει πολύ με αυτή του κανονικού DLA καθώς οι κύριες μεταβλητές παραμένουν ίδιες. Έχουμε αρχικά τον NxN πίνακα `map` ο οποίος προσομοιώνει το πλέγμα μας και ένα σωματίδιο-σπόρο στο κέντρο του. Η πρώτη αλλαγή στην υλοποίηση αυτού του μοντέλου είναι ότι η κυκλική τροχιά εκτόξευσης (`radiusCreation`) και η κυκλική τροχιά καταστροφής (`radiusKill`) των σωματιδίων έχουν σταθερές ακτίνες που δεν μεταβάλλονται με την ανάπτυξη της δομής όπως στα προηγούμενα μοντέλα.

Αρχικά εκτοξεύουμε ταυτόχρονα από διαφορετικά σημεία της τροχιάς εκτόξευσης (`radiusCreation`) δύο σωματίδια τα οποία ξεκινούν να κάνουν τυχαίο περίπατο.

- Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης τους έστω ένα από τα δύο σωματίδια βρεθεί έξω από την τροχιά καταστροφής (`radiusKill`) καταστρέφουμε και τα δύο σωματίδια και εκτοξεύουμε δύο καινούρια σωματίδια.
- Αν το ένα περιπλανώμενο σωματίδιο φτάσει σε κάποιο γειτονικό κελί μίας ήδη κατειλημμένης θέσης, πριν το άλλο, σταματάμε τον τυχαίο του περίπατο. Αντίθετα ο τυχαίος περίπατος του άλλου σωματιδίου συνεχίζεται μέχρι να φτάσει και αυτό δίπλα σε ένα ήδη υπάρχον σωματίδιο.

Όταν και τα δύο περιπλανώμενα σωματίδια "κολλήσουν" κάπου ελέγχουμε αν βρίσκονται στην ίδια θέση πλέγματος. Αν το παραπάνω αληθεύει η θέση αυτή καταλαμβάνεται, αν όχι και τα δύο σωματίδια καταστρέφονται. Στο τέλος οποιασδήποτε από τις δύο περιπτώσεις εκτοξεύονται εκ νέου δύο σωματίδια από την

τροχιά εκτόξευσης για να ξεκινήσουν τον τυχαίο τους περίπατο. Οι συνθήκες τερματισμού είναι ίδιες με αυτές του απλού DLA.

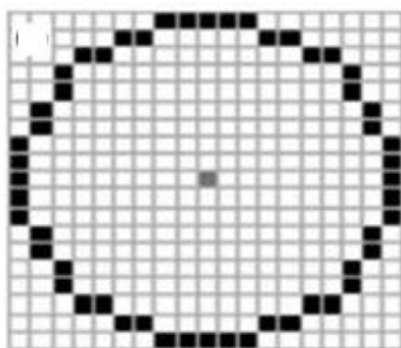
7.4 Μοντέλο DBM (Dielectric Breakdown Model)

7.4.1 Περιγραφή

Για την υλοποίηση του απλού μοντέλου DBM χρειαζόμαστε ένα πλέγμα διαστάσεων $N \times N$ το οποίο και εδώ θα το προσομοιάσουμε ως έναν $N \times N$ πίνακα map . Θα ορίσουμε ακόμη την ακτίνα του ορίου μας από την κεντρική θέση του πίνακα ως

$$R_m = \frac{N}{2} - 1 \quad (7.1)$$

πέρα από το οποίο δεν γίνεται να αναπτυχθεί το μοντέλο. Πολύ σημαντικός είναι επίσης ο ορισμός της παραμέτρου ελέγχου $d_parameter$ η τιμή της οποίας επηρεάζει πολύ την μορφή της δομής και τη διάσταση fractal του μοντέλου. Ορίζουμε ακόμη τον πίνακα ϕ που θα μας δίνει την τιμή του δυναμικού ϕ για κάθε κελί του πίνακα map . Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία προσέγγιση από τις αρχικές οριακές συνθήκες του μοντέλου, οι οποίες μεταβάλλονται όσο αναπτύσσεται το μοντέλο.



Εικόνα 7.2 Αρχικές οριακές συνθήκες του μοντέλου DBM: μαύρο: $\phi=1$ γκρι: $\phi=0$. [17]

Οι τελείες αντιπροσωπεύουν τα κελιά τα οποία έχουν θετικό δυναμικό ($\phi=1$). Έτσι στο μοντέλο μας όσα κελιά βρίσκονται σε ακτίνα ίση ή μεγαλύτερη του R_m έχουν δυναμικό $\phi=1$. Οι γκρι τελείες αντιπροσωπεύουν τα κελιά τα οποία έχουν αρνητικό δυναμικό ($\phi=0$). Έτσι αρχικά το κεντρικό κελί του πίνακα map έχει δυναμικό $\phi=0$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το δυναμικό ϕ για όλα τα κελιά του πίνακα που βρίσκονται εντός της ακτίνας R_m λύνοντας τη διακριτή μορφή της εξίσωσης Laplace η οποία υπόκειται στις οριακές συνθήκες που είπαμε παραπάνω.

$$\text{phi}(x, y) = \frac{1}{4} \cdot [\text{phi}(x + 1, y) + \text{phi}(x - 1, y) + \text{phi}(x, y + 1) + \text{phi}(x, y - 1)] \quad (7.2)$$

Όπου x είναι η γραμμή και y η στήλη του κελιού του πίνακα `map`. Για να λύσουμε την εξίσωση (7.2) χρησιμοποιήσαμε την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel με την εξής μορφή.

$$\text{phi}_{x,y}^{(k+1)} = \text{phi}_{x,y}^{(k)} + \omega \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (\text{phi}_{x-1,y}^{(k+1)} + \text{phi}_{x,y-1}^{(k+1)} + \text{phi}_{x+1,y}^{(k)} + \text{phi}_{x,y+1}^{(k)}) - \text{phi}_{x,y}^{(k)} \right] \quad (7.3)$$

όπου ω είναι μία σταθερά μεγαλύτερη του ένα και χρησιμοποιείται για την ταχύτερη σύγκλιση της μεθόδου.

Η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία σταματάει όταν η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής σε κάθε κελί του πίνακα είναι μικρότερη του 0,5%. Μετά τον υπολογισμό του δυναμικού phi , σε όλες τις θέσεις του πλέγματος, βάζουμε σε έναν πίνακα (`candidate_site`) όλες τις πιθανές θέσεις ανάπτυξης της δομής. Υπολογίζουμε στη συνέχεια την πιθανότητα ανάπτυξης p σε όλες τις πιθανές θέσεις ανάπτυξης από τον τύπο:

$$p_{x,y} = \frac{\text{phi}_{x,y}^{d_parameter}}{\sum_{\text{for all candidate_sites}} \text{phi}^{d_parameter}} \quad (7.4)$$

Ύστερα πολλαπλασιάζουμε τη μέγιστη τιμή του πίνακα των πιθανοτήτων p_{max} με έναν τυχαίο αριθμό (μεταξύ 0 και 1) οπότε έχουμε

$$r = p_{max} \cdot \text{random}(0,1) \quad (7.5)$$

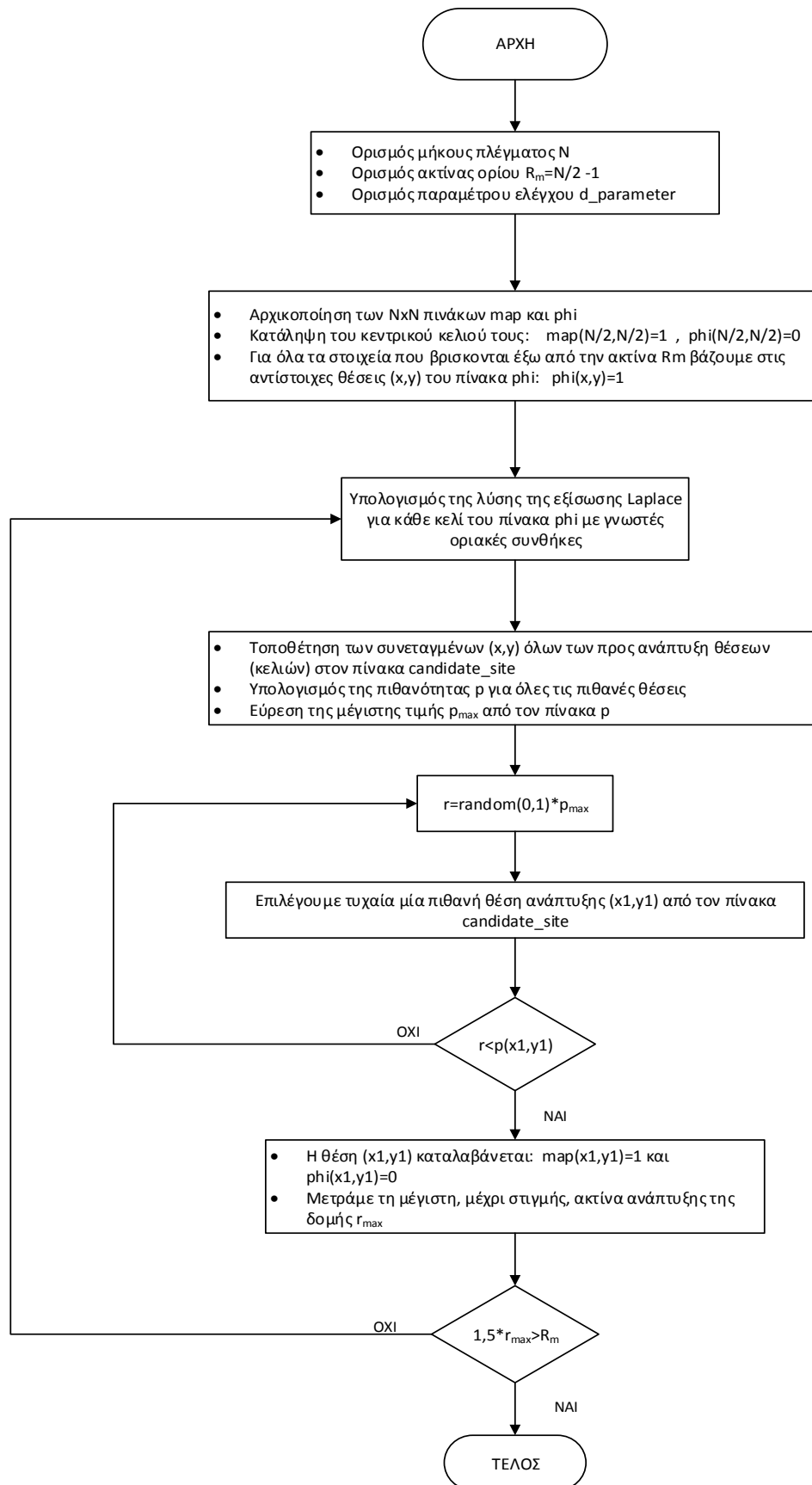
Και επιλέγουμε τυχαία μία πιθανή θέση ανάπτυξης από τον πίνακα `candidate_site`. Αν η τιμή της πιθανότητας στη θέση αυτή είναι μεγαλύτερη από το r που υπολογίσαμε παραπάνω, αυτό το κελί του πίνακα καταλαμβάνεται και το δυναμικό του γίνεται $\text{phi}(x,y)=0$.

Στη συνέχεια λύνουμε εκ νέου την εξίσωση Laplace με τις νέες οριακές συνθήκες (στη θέση όπου έχει καταληφθεί έχουμε επιπλέον $\text{phi}=0$) και η όλη παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται. Ο αλγόριθμος σταματάει όταν ικανοποιηθεί η παρακάτω συνθήκη:

$$1,5 \cdot r_{max} > R_m \quad (7.6)$$

Όπου R_m είναι η ακτίνα του ορίου μας και r_{max} είναι η μέγιστη μέχρι στιγμής ακτίνα της δομής των σωματιδίων

7.4.2 Διάγραμμα ροής



Εικόνα 7.3 Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου DBM (υλοποίηση σε Matlab).

7.5 Μοντέλο DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς

Για την υλοποίηση του μοντέλου DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς εκτός από τον $N \times N$ πίνακα map , που προσομοιώνει το τετραγωνικό πλέγμα, θα ορίσουμε και έναν πίνακα boundary_map ίδιων διαστάσεων, ο οποίος θα μας δείχνει ποιοι είναι οι γεωγραφικοί μας περιορισμοί. Δηλαδή όταν στις περιοχές-κελιά του πίνακα map θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιο φυσικό εμπόδιο όπως βουνό, λίμνη, θάλασσα κτλ και άρα δεν θέλουμε το δίκτυο μας να αναπτυχθεί προς τα εκεί, βάζουμε μία συγκεκριμένη τιμή στο αντίστοιχο κελί του πίνακα boundary_map .

Ο βοηθητικός αυτός πίνακας boundary_map θα μας χρησιμεύει στον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης Laplace ως εξής:

Πριν λύσουμε την εξίσωση Laplace με τη μέθοδο Gauss-Seidel, μέσω της σχέσης (7.3) για κάθε κελί του πίνακα map , ελέγχουμε αν το αντίστοιχο κελί του boundary_map βρίσκεται μέσα στα πλαίσια κάποιου γεωγραφικού περιορισμού. Αν αυτό είναι αληθές δεν ορίζεται τιμή για το δυναμικό ϕ στο κελί αυτό, είναι δηλαδή σαν να μην υπάρχει.

Για τα κελιά που βρίσκονται εκτός των γεωγραφικών περιορισμών έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν στο κελί που εξετάζουμε και τα τέσσερα διπλανά του κελιά είναι εκτός των γεωγραφικών περιορισμών η λύση της εξίσωσης Laplace υπολογίζεται κανονικά από την εξίσωση (7.3) χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο και των τεσσάρων διπλανών τιμών του πίνακα ϕ .
- Αν στο κελί που εξετάζουμε ένα από τα διπλανά κελιά είναι εντός των γεωγραφικών περιορισμών τότε η λύση της εξίσωσης Laplace υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο των υπόλοιπων τριών διπλανών τιμών του πίνακα ϕ , χωρίς να λαμβάνεται καθόλου υπόψη το τέταρτο κελί. Δηλαδή ο τύπος υπολογισμού του δυναμικού γίνεται:

$$\phi_{x,y}^{(\kappa+1)} = \phi_{x,y}^{(\kappa)} + \omega \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (\phi_1^{(\kappa)} + \phi_2^{(\kappa)} + \phi_3^{(\kappa)}) - \phi_{x,y}^{(\kappa)} \right] \quad (7.7)$$

- Αντίστοιχα αν δύο από τα διπλανά κελιά ανήκουν σε κάποιο γεωγραφικό περιορισμό στη λύση της εξίσωσης Laplace λαμβάνεται υπόψη ο μέσος όρος των άλλων δύο σημείων, και η εξίσωση γίνεται:

$$\phi_{x,y}^{(\kappa+1)} = \phi_{x,y}^{(\kappa)} + \omega \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\phi_1^{(\kappa)} + \phi_2^{(\kappa)}) - \phi_{x,y}^{(\kappa)} \right] \quad (7.8)$$

- Τέλος αν μόνο ένα σημείο δεν ανήκει στους γεωγραφικούς περιορισμούς η εξίσωση Laplace γίνεται:

$$\phi_{x,y}^{(\kappa+1)} = \phi_{x,y}^{(\kappa)} + \omega \cdot [\phi_1^{(\kappa)} - \phi_{x,y}^{(\kappa)}] \quad (7.9)$$

Η συνέχεια του αλγορίθμου είναι ίδια με αυτή του απλού DBM απλά επειδή στα σημεία του γεωγραφικού περιορισμού δεν ορίζεται τιμή για το δυναμικό το μοντέλο δεν αναπτύσσεται προς τα εκεί.

7.6 Μοντέλο DBM με δρόμους και πόλεις

Για την υλοποίηση αυτού του τροποποιημένου μοντέλου DBM εκτός από τον NxN πίνακα `map` ορίζουμε και έναν ακόμη NxN πίνακα `population_map`. Ο πίνακας αυτός είναι ένα είδος χάρτη που μας δείχνει προς τα πού εκτείνονται δρόμοι και πού υπάρχουν πόλεις, προκειμένου η δομή του μοντέλου να αναπτυχθεί πιο πολύ προς τα εκεί όπως είναι αναμενόμενο να συμβεί και κατά την ανάπτυξη του ηλεκτρικού δικτύου.

Η μόνη διαφορά που παρουσιάζει αυτό το μοντέλο σε σχέση με το απλό DBM είναι η μεταβολή της παραμέτρου ελέγχου `d_parameter` ανάλογα με τις συντεταγμένες των υποψήφιων θέσεων ανάπτυξης.

Πιο συγκεκριμένα, μετά τον υπολογισμό του δυναμικού ϕ_i σε όλα τα κελιά του πίνακα `map` πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα p για όλες τις υποψήφιες θέσεις ανάπτυξης του μοντέλου σύμφωνα με τη σχέση (7.4). Στο μοντέλο αυτό η παράμετρος ελέγχου αλλάζει ανάλογα με το αν η υποψήφια θέση ανάπτυξης είναι μέσα στα όρια μίας πόλης ή ενός δρόμου. Δηλαδή ορίζουμε τρεις διαφορετικές τιμές για την παράμετρο ελέγχου: μία που θα χρησιμοποιούμε στους δρόμους, μία για τις πόλεις και μία για όλες τις υπόλοιπες θέσεις. Έτσι πριν τον υπολογισμό του πίνακα των πιθανοτήτων ελέγχουμε κάθε μία υποψήφια θέση ανάπτυξης αν βρίσκεται εντός των ορίων κάποιας πόλης ή δρόμου και δίνουμε την αντίστοιχη τιμή στην παράμετρο ελέγχου, `d_parameter`.

Επειδή θέλουμε το μοντέλο μας να αναπτυχθεί προς την κατεύθυνση των δρόμων και των πόλεων που ορίσαμε στον πίνακα `population_map` στις θέσεις εκείνες ορίζουμε μικρότερη τιμή στην παράμετρο ελέγχου από αυτή που ορίσαμε σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε αυξημένη πιθανότητα το μοντέλο να αναπτυχθεί προς τις συγκεκριμένες περιοχές.

7.7 Η γεωμετρία των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας

Σύμφωνα με τις αρχές της Ευκλείδειας γεωμετρίας, κάθε μορφή έχει μία διάσταση, αυτή της εικόνας (σημείο, γραμμή, επίπεδο κτλ) η οποία βρίσκεται σε μονοσήμαντη αντιστοιχία με τη μορφή (Farard, 1950). Η Ευκλείδεια διάσταση είναι επομένως αμετάβλητη, και αποτελεί ένα χαρακτηριστικό μίας ομάδας μορφών. Οι διαστάσεις συστημάτων όπως το δίκτυο των δρόμων, αποχέτευσης, φυσικού αερίου, ηλεκτρισμού κλπ, δεν είναι παγκοσμίως γνωστές με μία Ευκλείδεια προσέγγιση, εκτός και αν ισχυριστούμε ότι ένα δίκτυο είναι μία περισσότερο ή λιγότερο πολύπλοκη οργάνωση από γραμμές, η κάθε μία από τις οποίες έχει μοναδιαία διάσταση. Έτσι δεν αποτελεί έκπληξη ότι ένα δίκτυο, μέχρι την εμφάνιση της fractal

γεωμετρίας, οριζόταν ως ένα σύστημα σχέσεων (μοντελοποιημένο με θεωρία γραφημάτων) και όχι σαν μία ολοκληρωμένη γεωμετρική μορφή. Η fractal γεωμετρία καθιστά δυνατό να χαρακτηρίσουμε οποιαδήποτε μορφή λαμβάνοντας υπόψη μετρήσεις τόσο του περιεχομένου όσο και του περιγράμματος της.

Η εφαρμογή των fractal στην μοντελοποίηση ενός τεχνικού δικτύου έχει μία επίδραση στον γεωμετρικό ορισμό της μορφολογίας του, η οποία νοείται ως η μορφή που προκύπτει από την τοποθέτηση ενός συνόλου κόμβων σε σχέση με ένα σύνολο γραμμών. Η τοποθέτηση αυτή του συνόλου των κόμβων σε μία συσχέτιση μέσω ενός συνόλου γραμμών σχηματίζει ένα χώρο-περιοχή που μπορεί να διαστασιοποιηθεί. Αυτό είναι το δομικό συστατικό του δικτύου, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντικείμενο γεωμετρικής μέτρησης και μοντελοποίησης. Έτσι ένα οδικό δίκτυο αναπαρίσταται μέσω της χωρικής οργάνωσης των οδών, των δρόμων κλπ. Ένα δίκτυο φυσικού αερίου ή αποχέτευσης είναι μία οργάνωση από σωλήνες και ένα ηλεκτρικό δίκτυο είναι μία οργάνωση στύλων και καλωδίων.

Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τη γεωμετρία των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας τα οποία οργανώνονται με μία ιεραρχία τριών επιπέδων. Στο πρώτο επίπεδο της ιεραρχίας αυτής βρίσκονται τα δίκτυα YT και YYT τα οποία ξεκινούν από κάποια σημεία που ονομάζονται Σταθμοί Παραγωγής και εκτείνονται, καλύπτοντας πολύ μεγάλες αποστάσεις, ως κάποια κεντρικά σημεία του δικτύου, τους Υποσταθμούς YT/MT. Στο δεύτερο επίπεδο της ιεραρχίας βρίσκονται τα δίκτυα MT τα οποία ξεκινούν από τους Υποσταθμούς YT/MT του δικτύου και εκτείνονται, καλύπτοντας σχετικά μεγάλες αποστάσεις, ως τους Υποσταθμούς διανομής MT/XT. Στο τρίτο επίπεδο της ιεραρχίας βρίσκονται τα δίκτυα XT τα οποία ξεκινούν από τους Υποσταθμούς διανομής MT/XT και εκτείνονται, καλύπτοντας μικρές αποστάσεις, ως τους καταναλωτές-κατοικίες που τροφοδοτούν. Και στα τρία αυτά ιεραρχικά επίπεδα η μεταφορά και διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται μέσω καλωδίων (εναέριων ή υπόγειων) τα οποία δεν είναι συνεχή αλλά συνδέονται και διακλαδίζονται μέσω κάποιων κόμβων-στύλων. Η γεωμετρική διαφοροποίηση των τριών αυτών επιπέδων έγκειται στις αποστάσεις μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων, δηλαδή στο διαφορετικό μήκος του καλωδίου διασύνδεσης δύο κόμβων. Όσο ανεβαίνουμε ιεραρχικό επίπεδο οι αποστάσεις αυτές όλο και μεγαλώνουν. Αν απομονώσουμε κομμάτια ηλεκτρικού δικτύου καθενός από τα τρία επίπεδα τάσης (YT, MT, XT) θα παρατηρήσουμε ότι μοιάζουν πολύ μεταξύ τους, αλλά βρίσκονται σε διαφορετική κλίμακα. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας παρουσιάζουν ένα απλοϊκό είδος αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας. Παρόλα αυτά, στην παρούσα διπλωματική, θα εξετάσουμε κάθε επίπεδο τάσης χωριστά και πιο συγκεκριμένα θα υπολογίσουμε τις διαστάσεις fractal δικτύων MT και XT, και αυτά θα προσπαθήσουμε να προσομοιώσουμε μέσω κατάλληλων μοντέλων ανάπτυξης fractal.

Όπως είναι φανερό τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας δεν γεμίζουν το χώρο μέσα στον οποίο υπάρχουν και αναπτύσσονται και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως σχεδόν δεν αγγίζουν την τρίτη διάσταση. Υπάρχουν περιοχές στις οποίες δεν έχουν αναπτυχθεί, όχι μόνο λόγω φυσικών περιορισμών που αποκλείουν το δίκτυο

ηλεκτρικής ενέργειας να αναπτυχθεί εκεί, αλλά και λόγω της ίδιας της διαδικασίας της ανάπτυξης η οποία πραγματοποιείται αργά και σταδιακά με κατάλληλο σχεδιασμό. Έτσι λοιπόν, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η fractal διάσταση των ηλεκτρικών δικτύων βρίσκεται μεταξύ 1 και 2.

7.8 Επιλογή του κατάλληλου μοντέλου fractal ανάπτυξης

Η ανάπτυξη ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας πραγματοποιείται από σημεία με υψηλό "δυναμικό" σε σημεία με χαμηλό "δυναμικό", όπου το σημείο με το υψηλότερο δυναμικό, "κεντρικό σημείο", είναι ένας σταθμός παραγωγής, στην περίπτωση ενός δικτύου ΥΤ, ή ένας υποσταθμός, στην περίπτωση δικτύων ΜΤ και ΧΤ. Το μοντέλο DLA είναι κάπως διαφορετικό. Το υψηλότερο δυναμικό βρίσκεται πολύ μακριά από το κεντρικό σημείο, και μόλις μία θέση καταληφθεί, το δυναμικό για ανακατάληψη γίνεται μηδενικό. Στην πραγματικότητα, το δυναμικό στο μοντέλο DLA μετράει την ποσότητα του διαθέσιμου προς κατάληψη χώρου σε μία απόσταση από το κεντρικό σημείο και αυτό δημιουργεί την αντίληψη ότι είναι το περιβάλλον γύρω από το δίκτυο που είναι η πηγή της ανάπτυξης, και όχι το ίδιο το δίκτυο.

Παρόλα αυτά ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας αναπτύσσεται βρίσκοντας περιοχές υψηλότερου δυναμικού δίπλα στο ήδη υπάρχον αναπτυσσόμενο δίκτυο, και αυτό περιορίζει το δίκτυο να παραμείνει ένας συνεκτικός γράφος. Το μοντέλο DLA είναι ένα λιγότερο χρήσιμο ανάλογο απ' ότι το μοντέλο DBM επειδή η διαδικασία του τυχαίου περιπάτου είναι λιγότερο ρεαλιστική από τη διαδικασία εκκένωσης, όσον αφορά την αστική δομή και ανάπτυξη και κατ' επέκταση την ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού δικτύου. Όπως έχουν επίσης δηλώσει οι Nittman, Daccord και Stanley: "Το μοντέλο DLA έχει το καθαρό φαινομενολογικό μειονέκτημα ότι η ανάπτυξη της δομής πραγματοποιείται με συσσωμάτωση, ενώ στο μοντέλο DBM, η ανάπτυξη προέρχεται από το κέντρο της δομής". Είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε ότι η συνάρτηση δυναμικού $\varphi(x, y)$ αντικατοπτρίζει τον διαθέσιμο χώρο στην άμεση γειτονιά της θέσης (x, y) αλλά επίσης επηρεάζεται από την ανάπτυξη της δομής. Με αυτήν την έννοια είναι φανερό ότι οι άκρες των κλαδιών που σχηματίζονται στη δομή είναι πιο κοντά στα σημεία με το υψηλότερο δυναμικό, και είναι εύκολο να δούμε γιατί η ανάπτυξη συμβαίνει εκεί, ενισχύοντας την δενδριτική φύση της δομής. Αν μία θέση καταληφθεί η τιμή του δυναμικού της γίνεται μηδέν, και αυτό βεβαιώνει την μη-αναστρεψιμότητα της διαδικασίας.

Με απλά λόγια το μοντέλο DLA δεν συνίσταται για την προσομοίωση της ανάπτυξης ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας γιατί τα σωματίδια που αποτελούν τη δομή εκτοξεύονται από μία κυκλική τροχιά μακριά από το κεντρικό σημείο και πραγματοποιούν τυχαίο περίπατο μέχρι να φτάσουν δίπλα σε κάποιο υπάρχον σωματίδιο και να κολλήσουν πάνω του. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η εντύπωση ότι η ανάπτυξη της δομής δεν γίνεται από μέσα προς τα έξω (από το κεντρικό σημείο προς τα έξω) όπως συμβαίνει και στα πραγματικά ηλεκτρικά δίκτυα, αλλά από έξω προς τα μέσα. Αντίθετα, στο μοντέλο DBM η ανάπτυξη πραγματοποιείται από το

κεντρικό προς τα έξω, καθώς κάθε φορά καταλαμβάνεται μία γειτονική θέση από μία ήδη κατειλημμένη σύμφωνα με μία συνάρτηση πιθανότητας. Με τον ίδιο τρόπο και στα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας η ανάπτυξη ξεκινάει από ένα κεντρικό σημείο, υποσταθμό, και κάθε φορά προστίθεται ένας στύλος (διασύνδεση σε θέση διπλανή με κάποιον υπάρχον στύλο σύμφωνα με τη θέση των καταναλωτών που τροφοδοτούν.

Θεωρούμε επίσης ότι το μοντέλο DBM είναι καταλληλότερο για την ανάπτυξη ηλεκτρικών δικτύων καθώς μέσω της παραμέτρου ελέγχου η μας δίνονται δύο επιπλέον σημαντικές δυνατότητες που δεν υπήρχαν στο DLA μοντέλο. Πρώτον, μπορούμε μέσω της παραμέτρου ελέγχου να μεταβάλλουμε πολύ την fractal διάσταση της τελικής δομής και αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, η διάσταση fractal δικτύων XT διαφέρει πολύ από τη διάσταση δικτύων MT και άρα με το DBM μοντέλο μπορούμε να προσομοιώσουμε και τις δύο περιπτώσεις. Δεύτερον, στο μοντέλο DBM μπορούμε κατά κάποιο τρόπο να ελέγξουμε και να κατευθύνουμε την ανάπτυξη σε μέρη που πιστεύουμε ότι είναι πιο πιθανό αυτή να πραγματοποιηθεί (π.χ. σε μεγάλες πόλεις, οδικό δίκτυο κτλ).

7.9 Συσχετισμός παραμέτρων του μοντέλου DBM με τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας.

Παρότι έχει γίνει λεπτομερής περιγραφή των αλγορίθμων προσομοίωσης της στοχαστικής fractal ανάπτυξης πρέπει να κάνουμε και το συσχετισμό κάποιων παραμέτρων από τους αλγορίθμους με στοιχεία που συναντάμε στα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας.

Αρχικά στο μοντέλο ανάπτυξης DBM τοποθετούμε ένα σωματίδιο-σπόρο στο κέντρο του πλέγματος και από το σημείο αυτό ξεκινάει η ανάπτυξη όπου σύμφωνα με μία συνάρτηση πιθανότητας καταλαμβάνεται μία από τις τέσσερις γειτονικές του θέσεις. Έτσι θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε το σωματίδιο-σπόρο με έναν σταθμό παραγωγής ή έναν υποσταθμό και αντίστοιχα τις αρχικές πιθανές θέσεις ανάπτυξης ως τον αριθμό των αναχωρήσεων του. Ακόμη οι θέσεις του πλέγματος οι οποίες καταλαμβάνονται θα μπορούσαν να αποτελούν τους στύλους των ηλεκτρικών δικτύων. Βέβαια στο μοντέλο DBM δύο διπλανές κατειλημμένες θέσεις δεν απέχουν κάποια απόσταση μεταξύ τους και κατά συνέπεια δεν συνδέονται μέσω κάποιας γραμμής όπως συμβαίνει στα ηλεκτρικά δίκτυα. Τέλος είναι σημαντικό να συσχετίσουμε την παράμετρο ελέγχου η με κάποιο χαρακτηριστικό της ανάπτυξης των ηλεκτρικών δικτύων μιας και, όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, δεν έχει καταστεί δυνατό να εδραιωθεί κάποια σημαντική σύνδεση μεταξύ του εκθέτη η και κάποιας φυσικής ποσότητας.

Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $\eta = 1$ ως το "μοντέλο βάση" όπου η συνάρτηση του χωρικού δυναμικού παραμένει αναλλοίωτη. Όσο $\eta \rightarrow 0$, οι θέσεις που μπορούν να καταληφθούν γύρω από το όριο της δομής γίνονται περισσότερο ομοιόμορφα κατανεμημένες, με αποτέλεσμα η δομή να αναπτύσσεται με πολύ λιγότερο δενδροειδές τρόπο. Όταν $\eta \gg 1$, θα προκύψουν μέσα

στο χώρο δομές βασισμένες σε ευθείες γραμμές από σωματίδια καλύπτοντας μικρό μέρος του, και αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα η fractal διάσταση D να τείνει προς το 1. Με άλλα λόγια, θα παράγονται σχεδόν "γραμμικά δίκτυα" για $\eta \gg 1$, δενδριτικά για $\eta = 1$ και σχεδόν "κυκλικά δίκτυα" που καλύπτουν σχεδόν όλο το χώρο για $\eta \rightarrow 0$. Μία μεγάλη ποικιλία μορφών θα προκύψει, καθώς η παράμετρος η θα κυμαίνεται μεταξύ 0 και ∞ και αντίστοιχα η fractal διάσταση θα μεταβάλλεται από 2 έως 1. Σύμφωνα με τα παραπάνω αλλά και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των δικτύων XT και MT η παράμετρος ελέγχου η θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει μία παράμετρο διαφοροποίησης μεταξύ των επιπέδων τάσης των ηλεκτρικών δικτύων (YT,MT,XT) καθώς, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η διάσταση fractal αλλάζει αισθητά μεταξύ δικτύων XT και MT. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, ανεξάρτητα από το είδος του ηλεκτρικού δικτύου, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο η ως ένα μέτρο του πληθυσμού που κατοικεί στην περιοχή που μελετάμε. Για παράδειγμα αν η προς μελέτη περιοχή είναι πυκνοκατοικημένη θα υπάρχουν πολλοί καταναλωτές και άρα θα υπάρχει ανάγκη για πιο πυκνό ηλεκτρικό δίκτυο (περισσότερες διασυνδέσεις, στύλους κλπ) και έτσι θα επιλέξουμε μία αντίστοιχη τιμή για το η , $\eta < 1$. Σε αντίθετη περίπτωση, αν εξετάζουμε μία αραιοκατοικημένη περιοχή, θα ήταν πιο σωστό να επιλέξουμε μία τιμή για το η μεγαλύτερη του 1.

7.10 Επέκταση δικτύου με τη χρήση του DBM αλγόριθμου

Προκειμένου να ελέγξουμε αν τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας έχουν fractal ιδιότητες, μετρήσαμε τις fractal διαστάσεις από διάφορες εικόνες δικτύων, τις συγκρίναμε με τις δομές που παράγονται από τα μοντέλα DLA και DBM και καταλήξαμε ότι τα ηλεκτρικά δίκτυα μοιάζουν με fractal και θα μπορούσαν να περιγραφούν ανάλογα. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα μοντέλα fractal ανάπτυξης, και κυρίως το DBM, μας δίνεται η δυνατότητα να προσομοιώσουμε την ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού δικτύου από το μηδέν αλλά και να επεκτείνουμε ένα ήδη υπάρχον.

Πιο συγκεκριμένα η μελλοντική επέκταση του ηλεκτρικού δικτύου περιέχει στοχαστικότητα σε πολλά επίπεδα. Για παράδειγμα σε μία βραχυπρόθεσμη επέκταση του δικτύου θα έχουμε δεδομένο το ρυθμό ανάπτυξης, τις θέσεις εγκατάστασης των υποσταθμών, του φορτίου, των διεσπαρμένων πηγών κτλ. Έτσι, αρκεί να επιλέξουμε τα σημεία από τα οποία θα περάσει το δίκτυο προκειμένου να φτάσει στις γνωστές θέσεις εγκατάστασης. Μία τέτοια επιλογή σημείων θα μπορούσε να γίνει σύμφωνα με τους αλγόριθμους fractal ανάπτυξης αν μέσα σε αυτούς καταφέρουμε να ενσωματώσουμε κάποια τεχνικά κριτήρια, όπως το μήκος και το είδος του καλωδίου, οι απώλειες ισχύος κτλ, έτσι ώστε να πετυχαίνεται η βέλτιστη δυνατή επιλογή σημείων ανάλογα με τα υλικά που διαθέτουμε. Σε μακροπρόθεσμη βάση, όμως, δεν θα έχουμε δεδομένες τις θέσεις και τον αριθμό των νέων υποσταθμών και φορτίων. Έτσι παράλληλα με τον αλγόριθμο τοποθέτησης των σημείων από τα οποία θα περάσει το δίκτυο απαιτείται και ένας αλγόριθμος που θα επιλέγει τις

καταλληλότερες θέσεις για τους νέους υποσταθμούς και φορτία (λαμβάνοντας υπόψη κάποιους γεωγραφικούς περιορισμούς κλπ).

Στην παρούσα εργασία η επέκταση του δικτύου μελετήθηκε μόνο γεωγραφικά, έχοντας δεδομένη την κατεύθυνση και τις περιοχές μελλοντικής ανάπτυξης του δικτύου, χωρίς όμως να εμπλέκονται κάποια τεχνικά χαρακτηριστικά (θέσεις εγκατάστασης φορτίων, μήκη καλωδίων κλπ) στον τρόπο ανάπτυξης του. Για το λόγο αυτό η επέκταση που πραγματοποιήσαμε περιέχει πολύ έντονα το στοιχείο της στοχαστικότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Παρουσίαση αποτελεσμάτων και Συμπεράσματα

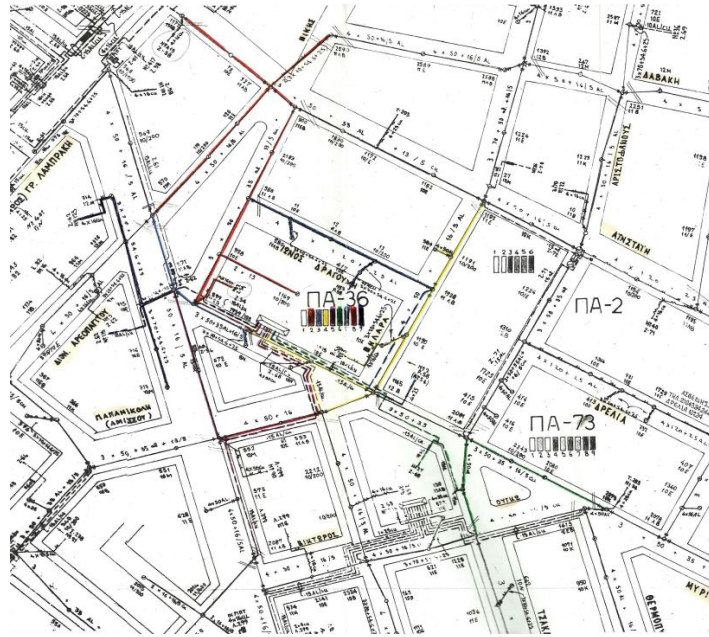
8.1 Μέτρηση fractal διάστασης ηλεκτρικών δικτύων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υποθέσαμε ότι η χωροταξική fractal διάσταση ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας βρίσκεται μεταξύ 1 και 2. Χρησιμοποιώντας τον box-counting αλγόριθμο θα υπολογίσουμε την fractal διάσταση διαφόρων δικτύων ΧΤ και ΜΤ ώστε να διαλέξουμε το καταλληλότερο μοντέλο για την προσομοίωση τους. Όπως είναι φυσικό, τα ηλεκτρικά δίκτυα δεν παρουσιάζουν τέλεια αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας αλλά στοχαστική, και η διάσταση fractal που θα υπολογιστεί μέσω του box-counting αλγορίθμου θα είναι προσεγγιστική.

8.1.1 Fractal διάσταση δικτύων ΧΤ

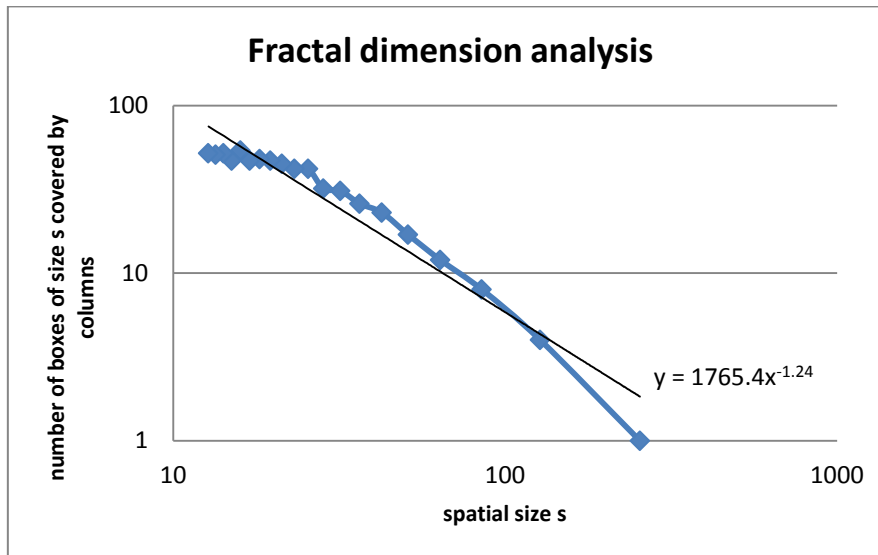
Αρχικά θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τη fractal διάσταση δύο δικτύων ΧΤ, στην περιοχή του Πειραιά και της Πάτρας (Εικόνα 8.1 και Εικόνα 8.3 αντίστοιχα). Τα ηλεκτρικά αυτά δίκτυα απεικονίζονται με αρκετά παρόμοια κλίμακα.

Για το δίκτυο ΧΤ στην περιοχή του Πειραιά που φαίνεται στην Εικόνα 8.1 θα μετρήσουμε τη fractal διάσταση των οχτώ αναχωρήσεων του υποσταθμού ΜΤ/ΧΤ ΠΑ-36 οι οποίες είναι χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία.



Εικόνα 8.1 Ηλεκτρικό δίκτυο ΧΤ στην περιοχή του Πειραιά.

Στον box-counting αλγόριθμο που χρησιμοποιήσαμε δώσαμε σαν είσοδο τις συντεταγμένες των στύλων και σαν έξοδο πήραμε το παρακάτω διάγραμμα. (Εικόνα 8.2).



Εικόνα 8.2 Λογαριθμικό διάγραμμα για τη μέτρηση της fractal διάστασης του δικτύου ΧΤ στην περιοχή του Πειραιά με τη χρήση του box-counting αλγορίθμου.

Γενικά ο box-counting αλγόριθμος μετράει τον αριθμό, N , των κουτιών διάστασης s που περιέχουν έστω και ένα μικρό κομμάτι του δικτύου. Τα μεγέθη αυτά συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$N \cong s^D \quad (8.1)$$

και λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$\log N \cong D \cdot \log s \quad (8.2)$$

Αν τα ηλεκτρικά δίκτυα ήταν αυστηρά αυτοόμοια σχήματα έστω και μία τέτοια μέτρηση θα αρκούσε για τον υπολογισμό της fractal διάστασης τους ως εξής:

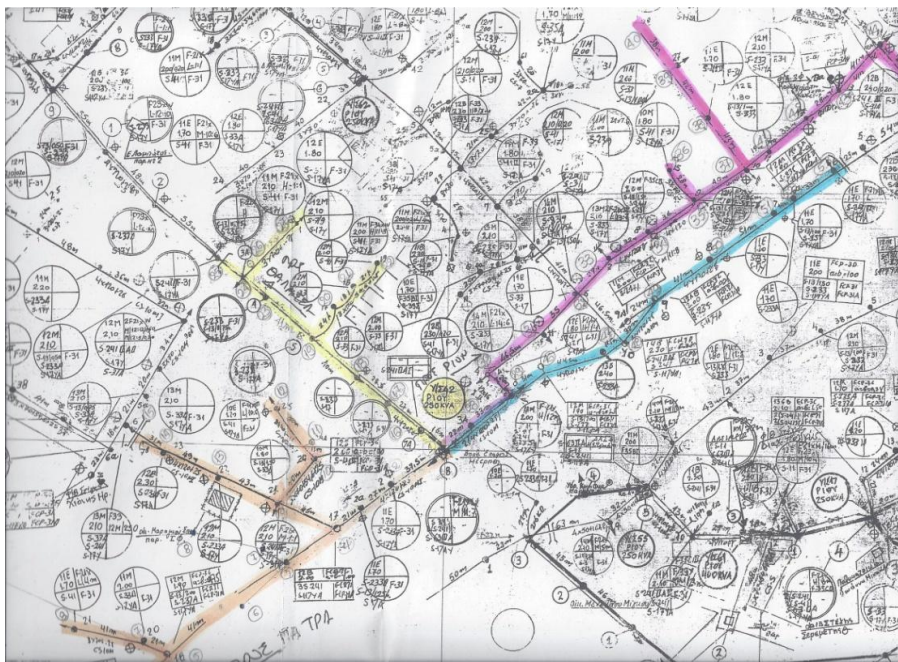
$$D = \frac{\log(N)}{\log(s)} \quad (8.3)$$

Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να μας δίνει σαν αποτέλεσμα είκοσι συνδυασμούς N-s, τους οποίους απεικονίζουμε ως είκοσι σημεία σε ένα διάγραμμα με λογαριθμικούς άξονες N (κατακόρυφος άξονας) και s (οριζόντιος άξονας).

Άρα η fractal διάσταση D προκύπτει από την κλίση των παραπάνω είκοσι σημείων, και για το δίκτυο της Εικόνα 8.1 είναι ίση με D=1,24.

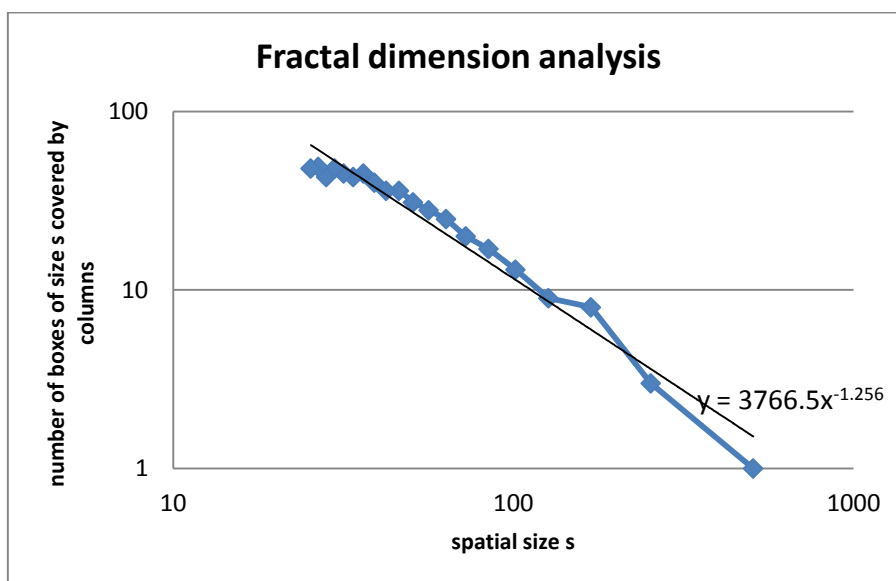
Επειδή, όπως είπαμε, τα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας δεν παρουσιάζουν αυστηρή αυτοομοιότητα τα είκοσι σημεία που προκύπτουν σαν έξοδος του box-counting αλγόριθμου δεν συνδέονται εντελώς γραμμικά μεταξύ τους, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 8.2, και άρα οι διαστάσεις fractal που θα υπολογίζουμε θα είναι προσεγγιστικές.

Μετρήσαμε επίσης τη fractal διάσταση ενός δικτύου ΧΤ στην περιοχή της Πάτρας (Εικόνα 8.3) από τον υποσταθμό του οποίου ξεκινούν τέσσερις αναχωρήσεις.



Εικόνα 8.3 Ηλεκτρικό δίκτυο ΧΤ στην περιοχή της Πάτρας.

Στην Εικόνα 8.4 φαίνεται το διάγραμμα που πήραμε σαν έξοδο από τον box-counting αλγόριθμο.



Εικόνα 8.4 Λογαριθμικό διάγραμμα για τη μέτρηση της fractal διάστασης του δικτύου XT στην περιοχή της Πάτρας με τη χρήση του box-counting αλγορίθμου.

Και η fractal διάσταση του συγκεκριμένου δικτύου XT είναι ίση με $D=1,256$.

Παρατηρούμε ότι οι fractal διαστάσεις των δύο αυτών δικτύων είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και έτσι για την προσομοίωση-ανάπτυξη δικτύων XT θα χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο που να μας δίνει σαν έξοδο δομή παρόμοιας διάστασης.

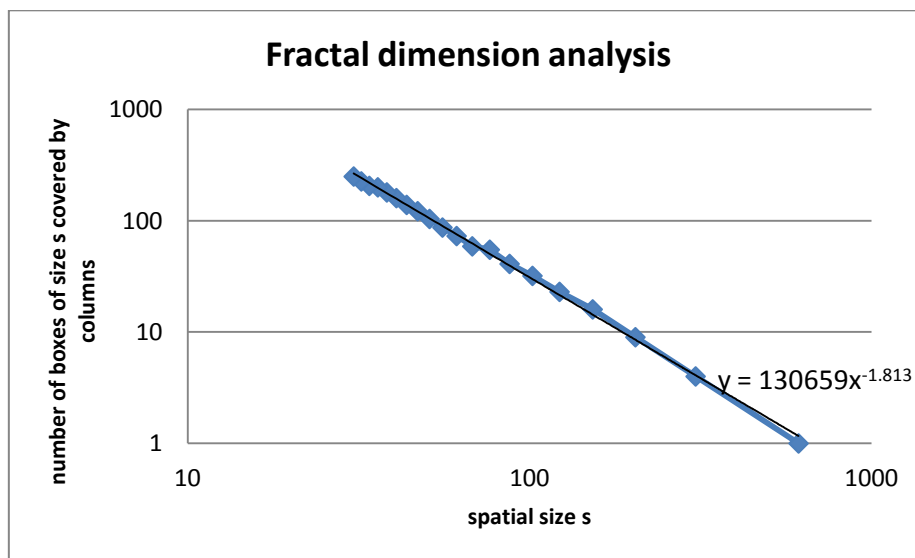
8.1.2 Fractal διάσταση δικτύων MT

Για τη μέτρηση της fractal διάστασης των δικτύων MT, προκειμένου να επιλέξουμε το κατάλληλο μοντέλο ανάπτυξης, χρησιμοποιήσαμε το δίκτυο MT στην περιοχή του Μαρκόπουλου (Εικόνα 8.5).



Εικόνα 8.5 Ηλεκτρικό δίκτυο ΧΤ στην περιοχή του Μαρκόπουλου.

Στην Εικόνα 8.6 φαίνεται το διάγραμμα που πήραμε σαν έξοδο από τον box-counting αλγόριθμο.



Εικόνα 8.6 Λογαριθμικό διάγραμμα για τη μέτρηση της fractal διάστασης του δικτύου MT στην περιοχή του Μαρκόπουλου με τη χρήση του box-counting αλγορίθμου.

Επομένως η fractal διάσταση του συγκεκριμένου δικτύου MT είναι ίση με $D=1,813$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει πολύ μεγάλη απόκλιση μεταξύ των fractal διαστάσεων στα δίκτυα ΧΤ και ΜΤ, που κυμαίνεται από 1,2 έως 1,8. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστούμε ένα μοντέλο fractal ανάπτυξης που να μπορεί να μας προσφέρει αυτή τη διαφοροποίηση.

8.2 Αποτελέσματα DLA αλγόριθμου

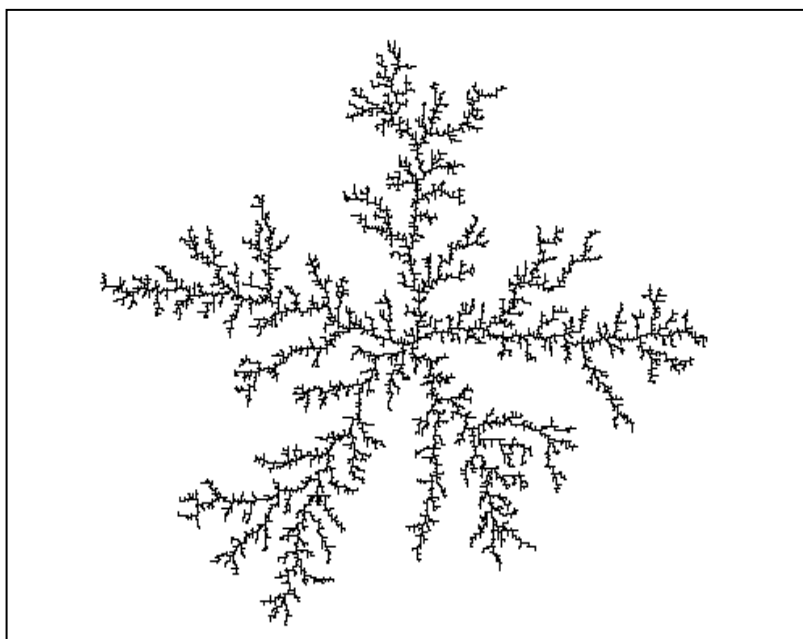
Οι δομές που παράγονται από το μοντέλο DLA έχουν δενδριτική μορφή, αρχίζουν να αναπτύσσονται από ένα σωματίδιο-σπόρο, εκδηλώνουν αυτοομοιότητα σε πολλές κλίμακες, και οι ιδιότητες κλιμάκωσης τους υποδηλώνουν ότι είναι fractal. Η μεγάλη δύναμη των τεχνικών αυτών είναι ότι συνδέουν την ανάπτυξη με συγκεκριμένες γεωμετρικές μορφές οι οποίες μοιάζουν με τις εικόνες των δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας. Εκτός όμως από την σχηματική ομοιότητα που παρατηρούμε πρέπει να εξετάσουμε τις δομές αυτές ως προς τη fractal διάσταση.

8.2.1 Αποτελέσματα απλού μοντέλου DLA

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη λειτουργία του απλού DLA μοντέλου, αλλά πρέπει να σημειώσουμε ότι οριστικά αποτελέσματα που αφορούν την fractal διάσταση D τέτοιων μοντέλων υπολογίζονται από το μέσο όρο των διαστάσεων που προκύπτουν μετά από πολλά τρεξίματα. Μία τυπική DLA δομή φαίνεται στην Εικόνα 8.7. Η δομή αυτή αποτελείται από $M=10.000$ σωματίδια γύρω από το σωματίδιο-σπόρο που βρίσκεται στο κέντρο ενός 500×500 τετραγωνικού πλέγματος.

Normal Diffusion-Limited Aggregation Model

$M= 10000$ $R= 194.99$



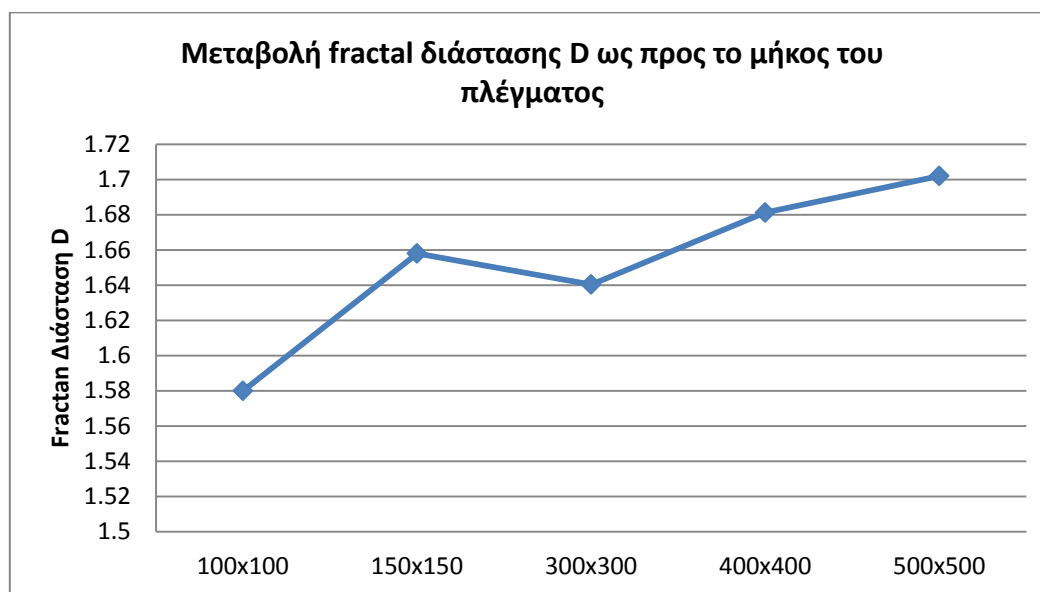
Εικόνα 8.7 Μία τυπική προσομοίωση του απλού αλγορίθμου DLA (βασισμένη σε πλέγμα 500×500 με 10000 σωματίδια).

Για κάθε τρέξιμο του αλγορίθμου παράγονται διαφορετικές δομές και αυτό οφείλεται στον μηχανισμό του τυχαίου περιπάτου που είναι χαρακτηριστικό του μοντέλου. Επίσης υπάρχει από πολλούς η πεποίθηση ότι η fractal διάσταση των δομών αυτών εξαρτάται και από το μήκος του πλέγματος μέσα στο οποίο αναπτύσσονται. Για το λόγο αυτό μετρήσαμε τις διαστάσεις DLA δομών για διάφορα μήκη πλέγματος όπου ως διάσταση D θεωρήσαμε τον μέσο όρο μετά από δέκα τρεξίματα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 8.1.

Πίνακας 8.1 Fractal διάσταση του μοντέλου DLA συναρτήσει του μήκους του πλέγματος.

Διάσταση πλέγματος	Μέση τιμή διάστασης D	Τυπική απόκλιση
100×100	1,58	0,01
150×150	1,658	0,019235
300×300	1,6404	0,016009
400×400	1,6812	0,035024
500×500	1,702	0,034254

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται επίσης και στην Εικόνα 8.8.



Εικόνα 8.8 Διάγραμμα μεταβολής της fractal διάστασης του απλού μοντέλου DLA ως προς το μήκος του πλέγματος.

Παρατηρούμε μία μικρή αύξηση στη fractal διάσταση, καθώς μεγαλώνει το μήκος του πλέγματος αλλά, αν εξαιρέσουμε τη διάσταση για το πολύ μικρό μήκος πλέγματος 100 × 100, είναι σχεδόν αμελητέα. Βέβαια όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του πλέγματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η ανάλυση του μοντέλου και έτσι έχουμε καλύτερη προσέγγιση στα αποτελέσματα.

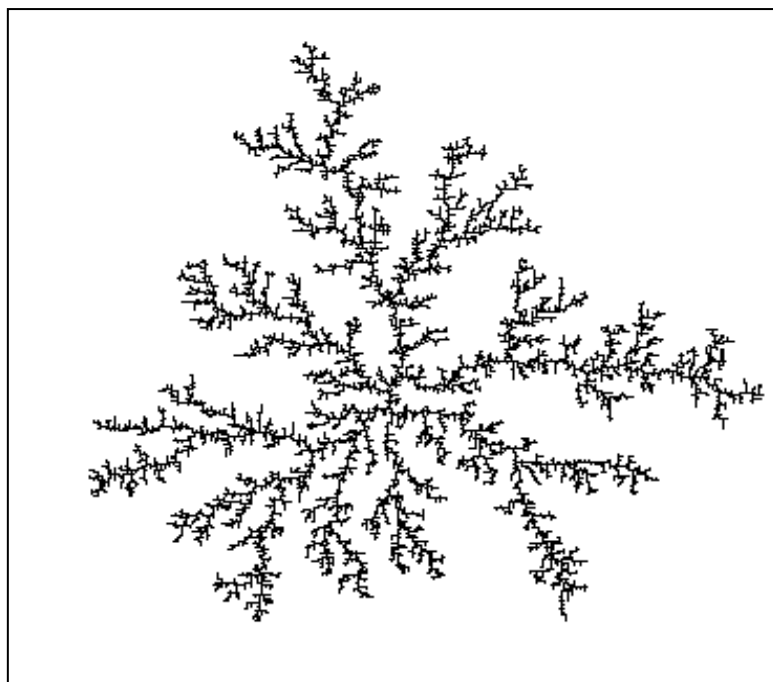
Επομένως η διάσταση του απλού μοντέλου DLA είναι σχεδόν σταθερή και ίση με $D \cong 1,7$. Η διάσταση αυτή βρίσκεται κοντά με την αντίστοιχη που μετρήσαμε για τα δίκτυα MT αλλά διαφέρει πολύ από την fractal διάσταση των δικτύων XT.

8.2.2 Αποτελέσματα μοντέλου DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης

Η αλλαγή της πιθανότητας ένα περιπλανώμενο σωματίδιο να κολλήσει δίπλα σε ένα ήδη υπάρχον σωματίδιο, έχει μία πολύ σημαντική επίδραση στη μορφή των δομών που παράγονται, και κατά συνέπεια στην μετρούμενη fractal διάσταση. Μειώνοντας την πιθανότητα προσκόλλησης, είναι πιο εύκολο για ένα περιπλανώμενο σωματίδιο να κινείται μεταξύ των κλαδιών της δομής. Μπορεί να φτάσει δίπλα σε ένα ήδη υπάρχον σωματίδιο, σε μία θέση στην άκρη των κλαδιών της δομής, χωρίς απαραίτητα να κολλήσει και έτσι μπορεί να συνεχίσει τον περίπατο του βαθύτερα προς το εσωτερικό της δομής. Κάποια αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα φαίνονται στις Εικόνα 8.9 έως Εικόνα 8.11.

Diffusion-Limited Aggregation Model with stick Probability $p=0,5$

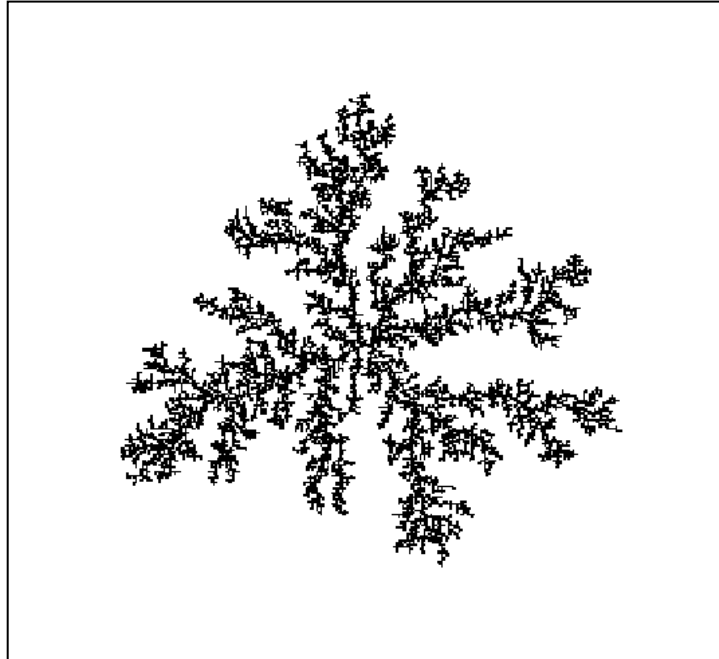
$M= 10000$ $R= 179.51$



Εικόνα 8.9 Μία τυπική δομή του αλγορίθμου DLA με πιθανότητα προσκόλλησης $p=0,5$ (βασισμένη σε πλέγμα 500×500 με 10000 σωματίδια).

Diffusion-Limited Aggregation Model with stick Probability $p=0,1$

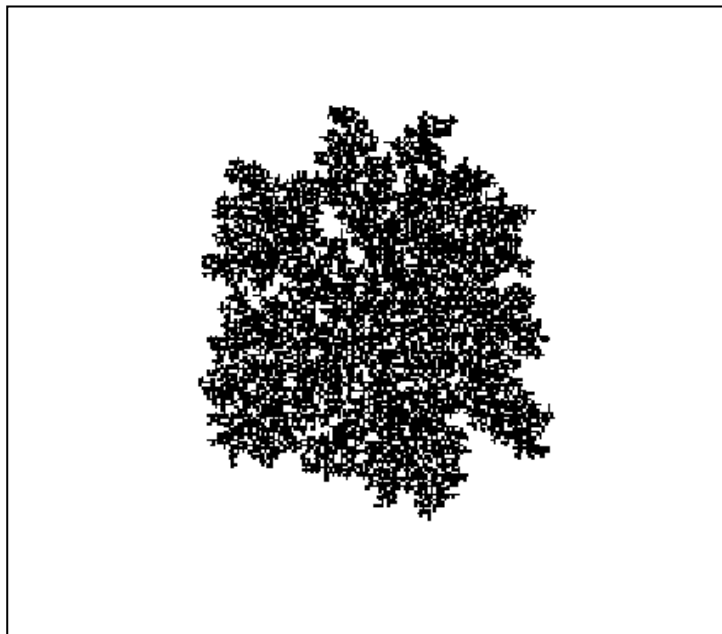
$M= 10000$ $R= 128.50$



Εικόνα 8.10 Μία τυπική δομή του αλγορίθμου DLA με πιθανότητα προσκόλλησης $p=0,1$

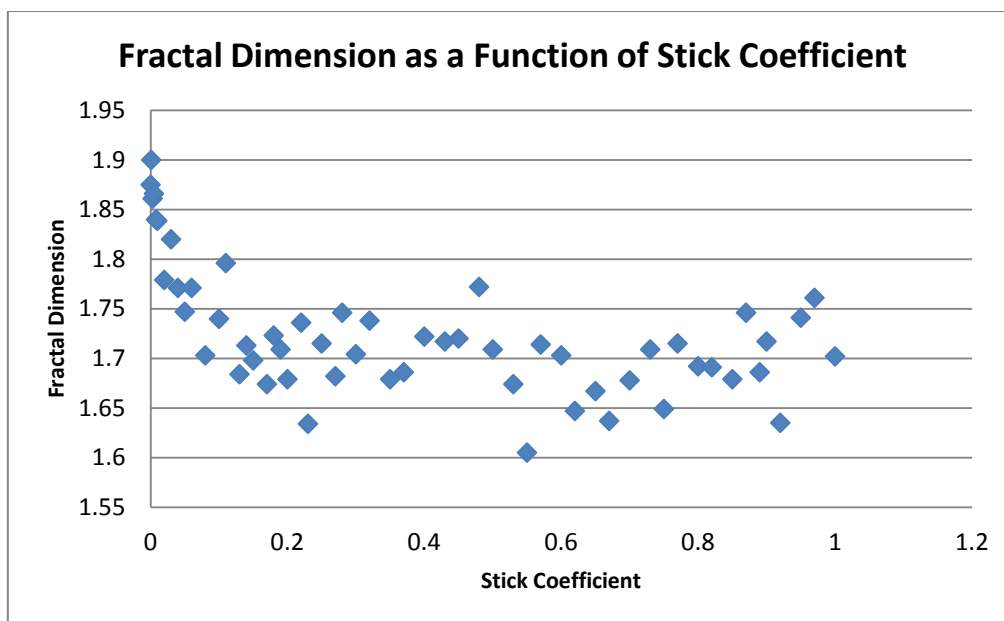
Diffusion-Limited Aggregation Model with stick Probability $p=0,01$

$M= 10000$ $R= 79.21$



Εικόνα 8.11 Μία τυπική δομή του αλγορίθμου DLA με πιθανότητα προσκόλλησης $p=0,01$ (βασισμένη σε πλέγμα 500×500 με 10000 σωματίδια).

Η επίδραση της μεταβλητής πιθανότητας προσκόλλησης στην fractal διάσταση των δομών φαίνεται στην Εικόνα 8.12. Παρατηρούμε ότι σχεδιάζοντας την fractal διάσταση ως συνάρτηση της πιθανότητας προσκόλλησης προκύπτει σαν αποτέλεσμα μία σχεδόν λογαριθμική καμπύλη.



Εικόνα 8.12 Διάγραμμα μεταβολής της fractal διάστασης του αλγορίθμου DLA ως προς την πιθανότητα προσκόλλησης.

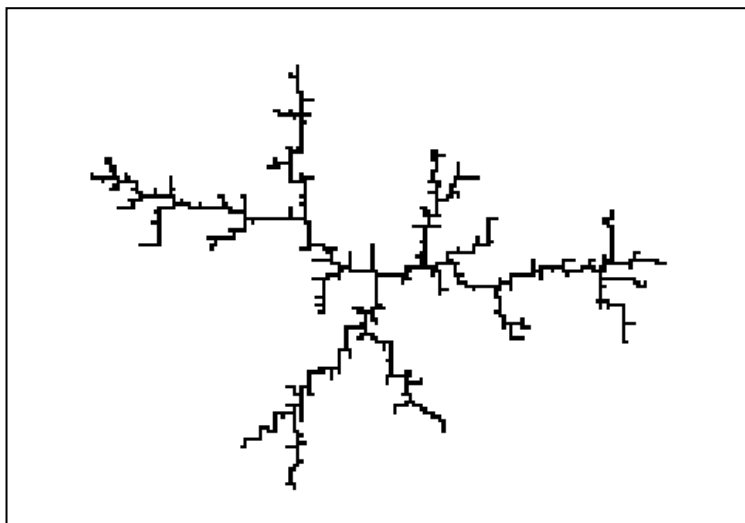
Είναι φανερό επίσης ότι η fractal διάσταση των αποτελεσμάτων δεν μειώνεται με κάποια μεταβολή της πιθανότητας προσκόλλησης, αλλά μόνο αυξάνεται όταν η πιθανότητα πάρει πολύ μικρές τιμές. Επομένως ούτε αυτή η παραλλαγή του μοντέλου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση δικτύων XT.

8.2.3 Αποτελέσματα μοντέλου DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια

Προκειμένου να μειώσουμε τη fractal διάσταση των δομών που παίρνουμε ως αποτελέσματα, δημιουργήσαμε ένα νέο μοντέλο το οποίο επίσης προσομοιώνει τον τυχαίο περίπατο, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιούμε δύο περιπλανώμενα σωματίδια. Στην Εικόνα 8.13 φαίνεται μία τυπική δομή αυτού του μοντέλου η οποία αποτελείται από 921 σωματίδια γύρω από το σωματίδιο σπόρο ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο ενός 300×300 τετραγωνικού πλέγματος.

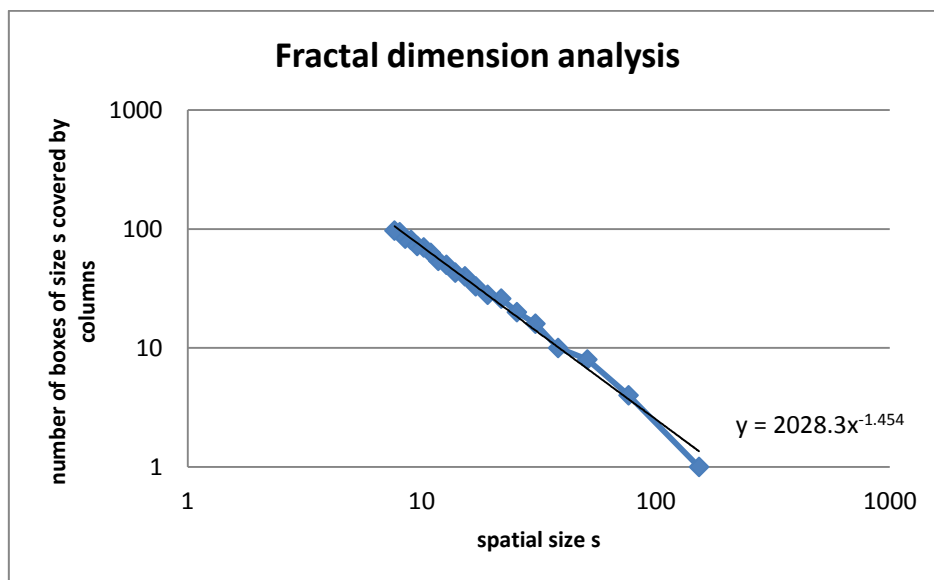
Diffusion-Limited Aggregation Model with two walkers

M= 921 R= 83.4865



Εικόνα 8.13 Μία τυπική δομή του αλγορίθμου DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια (βασισμένη σε πλέγμα 300×300 με 921 σωματίδια).

Και η fractal διάσταση της παραπάνω δομής είναι ίση με $D=1,454$.



Εικόνα 8.14 Λογαριθμικό διάγραμμα για τη μέτρηση της fractal διάστασης της δομής του αλγορίθμου DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια με τη χρήση του box-counting αλγορίθμου.

Παρατηρούμε ότι η διάσταση αυτή πλησιάζει πολύ περισσότερο αυτή των δικτύων XT.

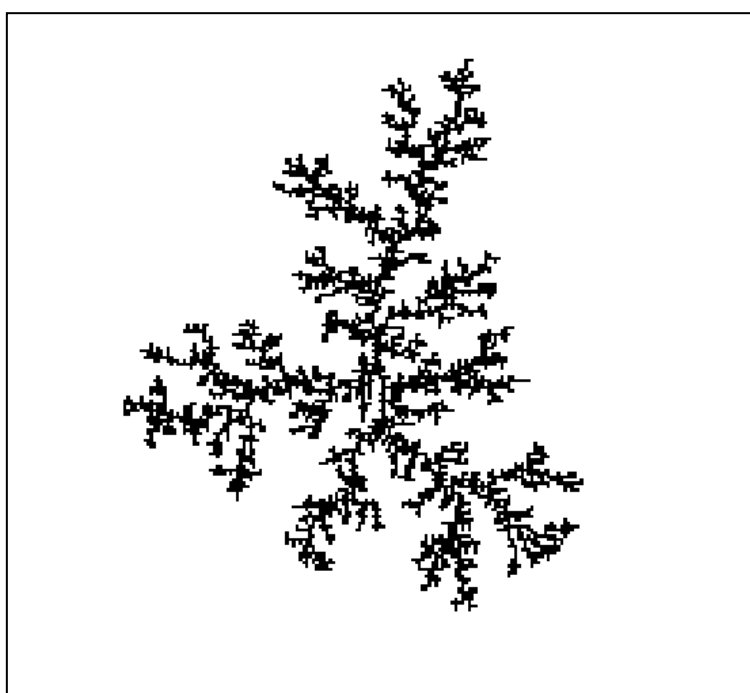
8.3 Αποτελέσματα DBM αλγορίθμου

8.3.1 Αποτελέσματα απλού DBM μοντέλου

Τη δυνατότητα μεταβολής της fractal διάστασης από 1 έως 2 των αποτελεσμάτων, μας τη δίνει το μοντέλο DBM μέσω της μεταβολής της παραμέτρου ελέγχου η . Στις προηγούμενες προσομοιώσεις, του DLA μοντέλου, χρησιμοποιούσαμε τετραγωνικό πλέγμα με 500×500 σημεία στο οποίο αναπτύσσονταν δομές αποτελούμενες από 10.000 σωματίδια. Επειδή η πολυπλοκότητα του DBM αλγορίθμου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή του DLA ήταν αδύνατον να χρησιμοποιήσουμε στις προσομοιώσεις πλέγμα τόσο μεγάλων διαστάσεων. Έτσι έπρεπε να δουλέψουμε με μικρότερα πλέγματα και κατ' επέκταση με μικρότερες δομές. Ως παράδειγμα θα δείξουμε αρχικά μία προσομοίωση του μοντέλου DBM με $\eta = 1$ για ένα 300×300 τετραγωνικό πλέγμα με μία δομή 4049 σωματιδίων (Εικόνα 8.15)

Dielectric Breakdown Model $\eta=1$

M= 4049 R= 99.62



Εικόνα 8.15 Μία τυπική δομή του αλγορίθμου DBM με παράμετρο ελέγχου $\eta=1$ (βασισμένη σε πλέγμα 300×300 με 4049 σωματίδια).

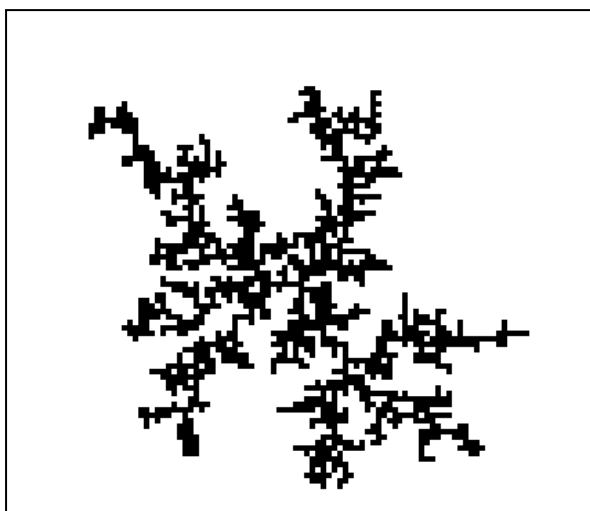
Μετρήσαμε τη διάσταση της δομής αυτής χρησιμοποιώντας τον box-count αλγόριθμο και τη βρήκαμε ίση με $D=1,683$.

Επειδή όμως και αυτή η προσομοίωση χρειάστηκε πολύ χρόνο για να ολοκληρωθεί, για την εκτεταμένη ανάλυση που θα ακολουθήσει σε αυτή την παράγραφο

αναγκαστήκαμε να μειώσουμε την ανάλυση του πλέγματος ακόμα περισσότερο σε 150×150 . Οι δομές για διάφορες τιμές της παραμέτρου η φαίνονται στις Εικόνα 8.16 έως Εικόνα 8.18, και οι fractal διαστάσεις τους στον Πίνακα 8.2. Ως fractal διάσταση D θεωρήσαμε τον μέσο όρο μετά από δέκα τρεξίματα και ο αλγόριθμος DBM τερμάτιζε εφόσον η δομή μας έφτανε σε ακτίνα R ίση με 50.

Dielectric Breakdown Model $\eta=1$

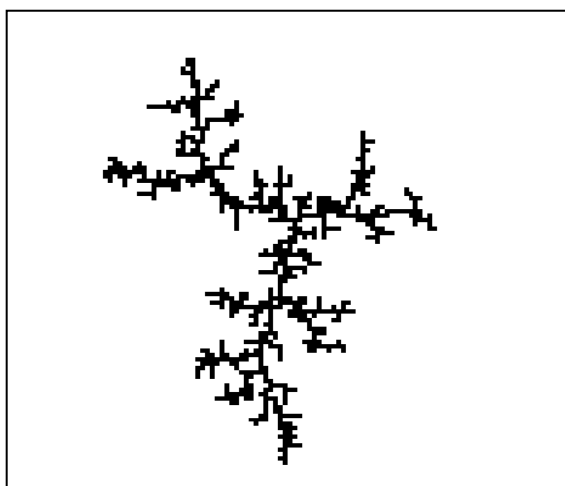
$M=1328$ $R=49.41$



(α)

Dielectric Breakdown Model $\eta=1,5$

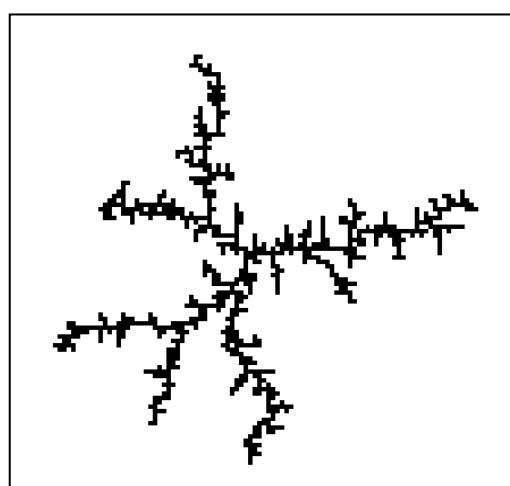
$M=782$ $R=49.66$



(β)

Dielectric Breakdown Model $\eta=1,7$

$M=831$ $R=50.01$

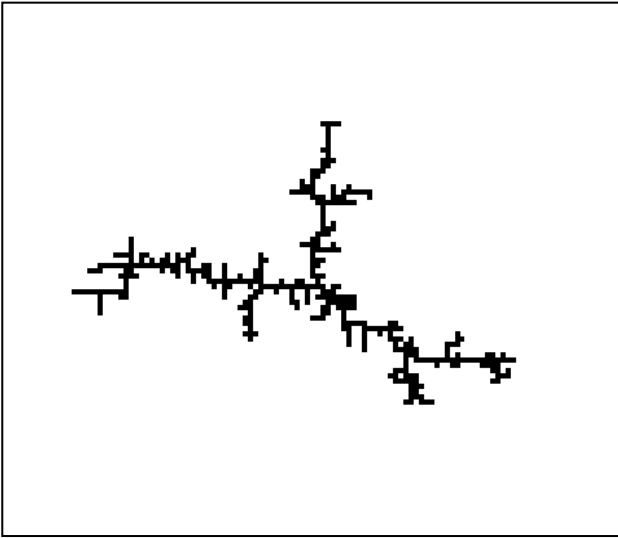


(γ)

Εικόνα 8.16 Τυπικές δομές του αλγορίθμου DBM με παράμετρο ελέγχου (α) $\eta=1$ (β) $\eta=1,5$ (γ) $\eta=1,7$ (βασισμένες σε πλέγμα 150×150).

Dielectric Breakdown Model $\eta=2$

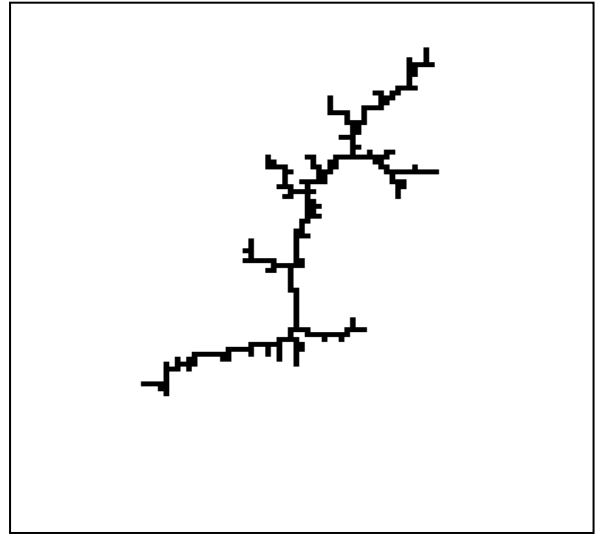
M= 393 R= 50.01



(α)

Dielectric Breakdown Model $\eta=3$

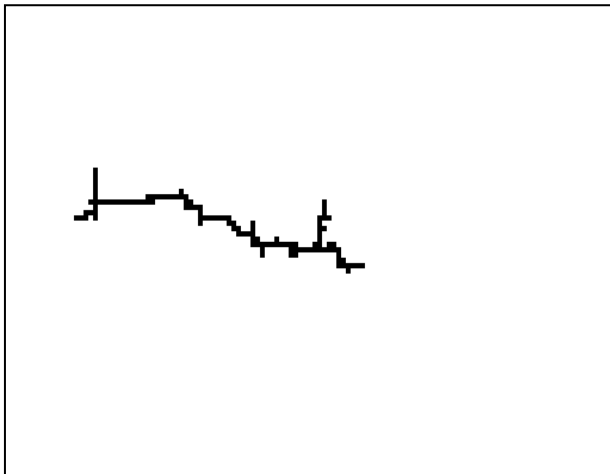
M= 271 R= 49.65



(β)

Dielectric Breakdown Model $\eta=4$

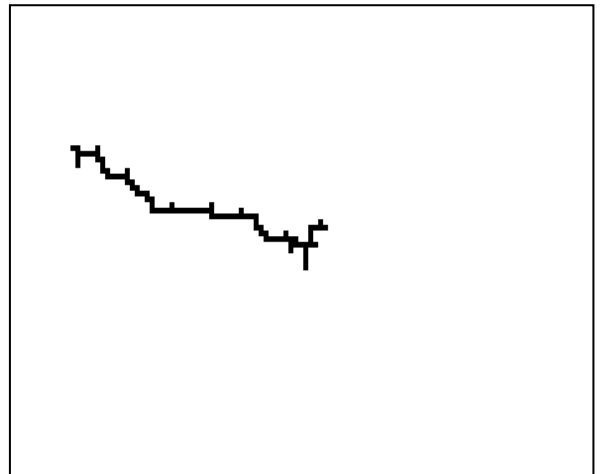
M= 116 R= 50.25



(γ)

Dielectric Breakdown Model $\eta=5$

M= 88 R= 49.98

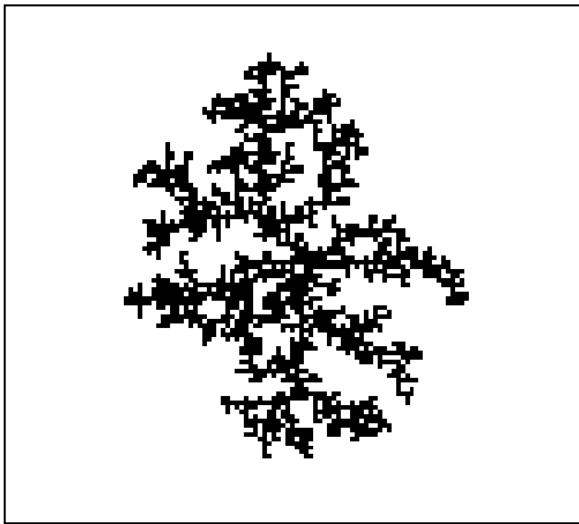


(δ)

Εικόνα 8.17 Τυπικές δομές του αλγορίθμου DBM με παράμετρο ελέγχου (α) $\eta=2$ (β) $\eta=3$ (γ) $\eta=4$ (δ) $\eta=5$ (βασισμένες σε πλέγμα 150×150).

Dielectric Breakdown Model $\eta=0,75$

M= 1879 R= 49.37



(α)

Dielectric Breakdown Model $\eta=0,5$

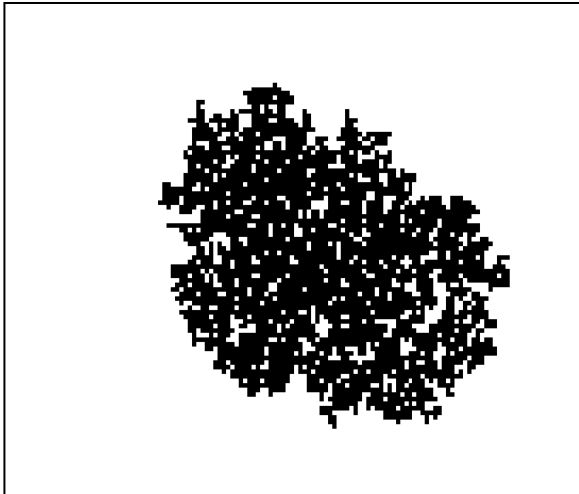
M= 2192 R= 50.09



(β)

Dielectric Breakdown Model $\eta=0,25$

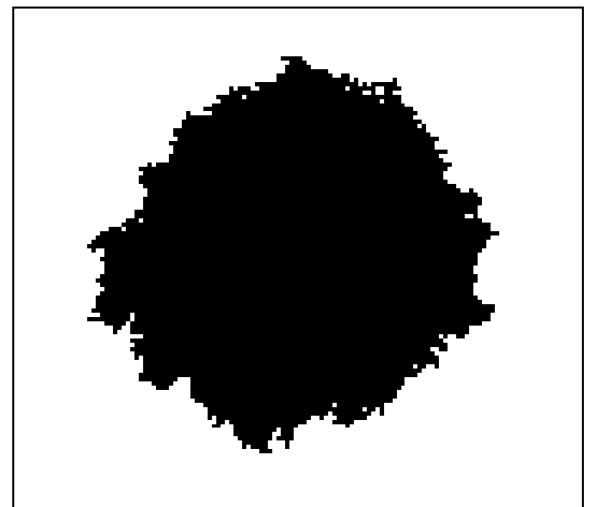
M= 3290 R= 49.66



(γ)

Dielectric Breakdown Model $\eta=0$

M= 5647 R= 49.73



(δ)

Εικόνα 8.18 Τυπικές δομές του αλγορίθμου DBM με παράμετρο ελέγχου (α) $\eta=0,75$ (β) $\eta=0,5$ (γ) $\eta=0,25$ (δ) $\eta=0$ (βασισμένες σε πλέγμα 150×150).

Πίνακας 8.2 Fractal διάσταση του μοντέλου DBM συναρτήσει της παραμέτρου ελέγχου η .

Παράμετρος ελέγχου η	Μέση τιμή διάστασης D	Τυπική απόκλιση
0	1,838	0,03254
0,25	1,804	0,04336
0,5	1,77	0,01414
0,75	1,706	0,05225
1	1,66	0,01673
1,5	1,5144	0,02963
1,7	1,53	0,03162
2	1,44	0,02739
3	1,308	0,03633
4	1,242	0,06380
5	1,1675	0,04787

Παρατηρούμε ότι με το μοντέλο αυτό μπορούμε να παράγουμε δομές οποιασδήποτε διάστασης θέλουμε, απλά μεταβάλλοντας κατάλληλα την παράμετρο ελέγχου η .

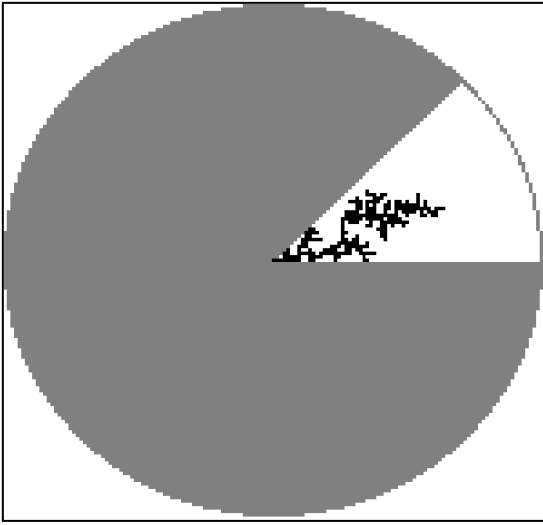
Συγκρίνοντας τόσο τις fractal διαστάσεις όσο και τις εικόνες των δομών που παρήχθησαν από το μοντέλο DBM, για διάφορες τιμές της παραμέτρου η , η καταλληλότερη τιμή της παραμέτρου για την προσομοίωση δικτύων MT είναι $\eta = 1$ ενώ για την προσομοίωση δικτύων XT είναι καταλληλότερη η παράμετρος $\eta = 3$.

8.3.2 Αποτελέσματα μοντέλου DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς

Όπως όλες οι διαδικασίες ανάπτυξης στη φύση, έτσι και η ανάπτυξη δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας υπόκεινται σε ορισμένους γεωγραφικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά δίκτυα δεν μπορούν να αναπτυχθούν σε βουνά, θάλασσες, λίμνες δάση κλπ. Μέσω μίας παραλλαγής του μοντέλου DBM μας δίνεται η δυνατότητα να ορίσουμε περιοχές στις οποίες η δομή δεν μπορεί να αναπτυχθεί. Έτσι λοιπόν θα χωρίσουμε την κυκλική περιοχή στην οποία αναπτύσσεται το μοντέλο σε οχτώ ίσους τομείς, και θα εφαρμόσουμε το "μοντέλο βάσης" ($\eta = 1$) για τις ακόλουθες μοίρες του κυκλικού τόξου: 2π (το κανονικό "μοντέλο βάσης"), $1,75\pi$, $1,5\pi$, π , $0,75\pi$, $0,5\pi$ και $0,25\pi$. Οι δομές που παράγονται από τις προσομοιώσεις σε αυτές τις οχτώ περιοχές φαίνονται στις Εικόνα 8.19 και Εικόνα 8.20.

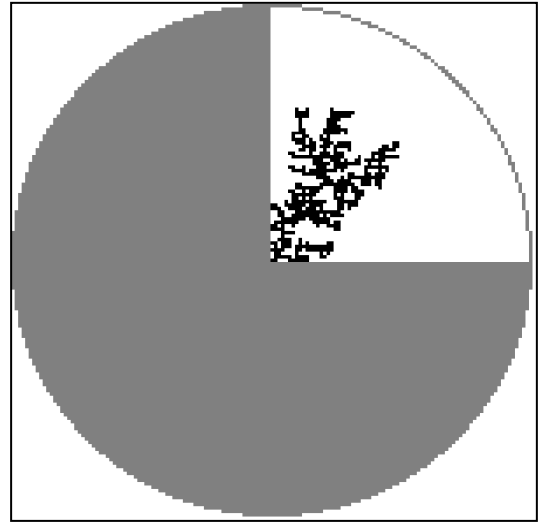
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=0,25\pi$ M= 242 R= 49.34



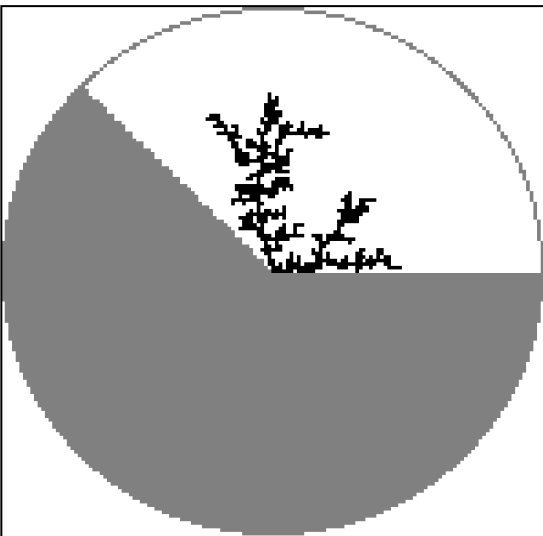
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=0,5\pi$ M= 512 R= 49.52



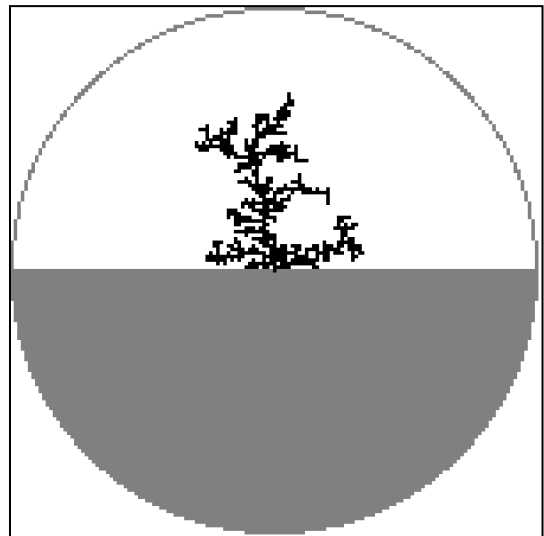
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=0,75\pi$ M= 555 R= 50.01



Dielectric Breakdown Model with physical constraints

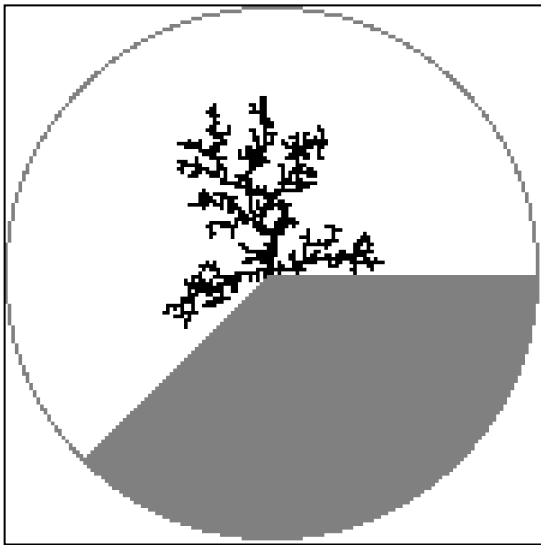
$\theta=\pi$ M= 577 R= 50.16



Εικόνα 8.19 Προσομοιώσεις αλγορίθμου DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς.

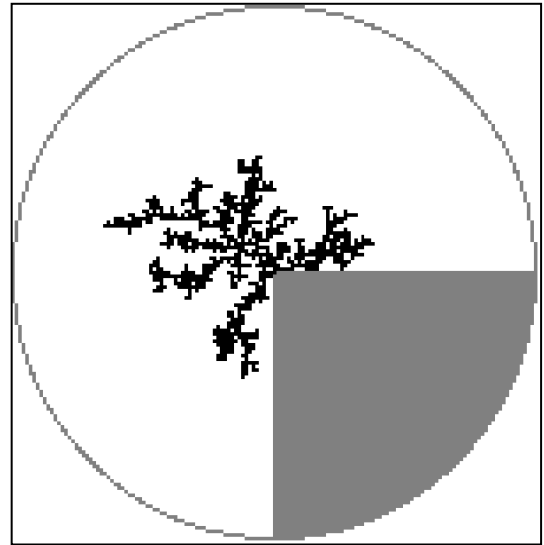
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=1,25\pi$ M= 845 R= 49.65



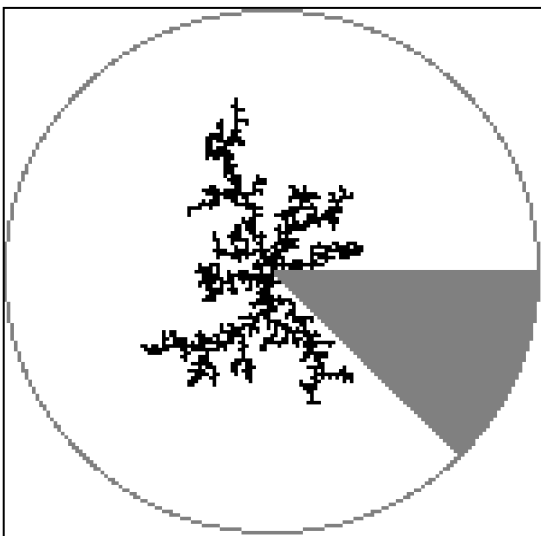
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=1,5\pi$ M= 890 R= 49.73



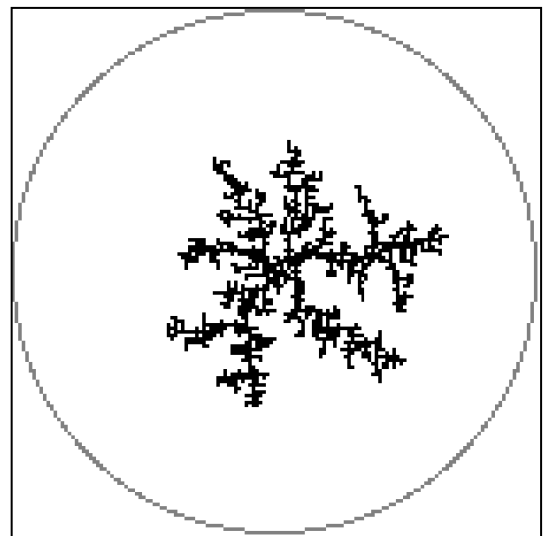
Dielectric Breakdown Model with physical constraints

$\theta=1,75\pi$ M= 1051 R= 50.01



Dielectric Breakdown Model with physical constraints

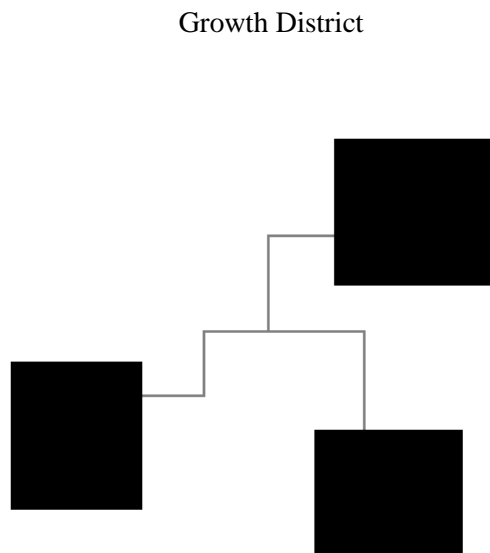
$\theta=2\pi$ M= 1348 R= 50.01



Εικόνα 8.20 Προσομοιώσεις αλγορίθμου DBM με γεωγραφικούς περιορισμούς.

8.3.3 Αποτελέσματα Μοντέλου DBM με δρόμους και πόλεις

Επίσης, μέσω του DBM αλγόριθμου μας δίνεται η δυνατότητα να ελέγξουμε, κατά κάποιο τρόπο, προς ποιά περιοχή θα αναπτυχθεί η δομή μας. Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε μία περιοχή όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.21.



Εικόνα 8.21 Επιθυμητή περιοχή ανάπτυξης της δομής του αλγόριθμου DBM.

Όπου με γκρι χρώμα είναι οι κεντρικοί δρόμοι και με μαύρο είναι κατοικημένες περιοχές (πόλεις). Σε μία τέτοια περίπτωση θα θέλαμε το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας να ακολουθήσει τους δρόμους και να αναπτυχθεί περισσότερο στις κατοικημένες περιοχές. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της παραμέτρου ελέγχου η , ορίζοντας διαφορετική τιμή για κάθε χρωματισμένη περιοχή στην εικόνα 8.21.

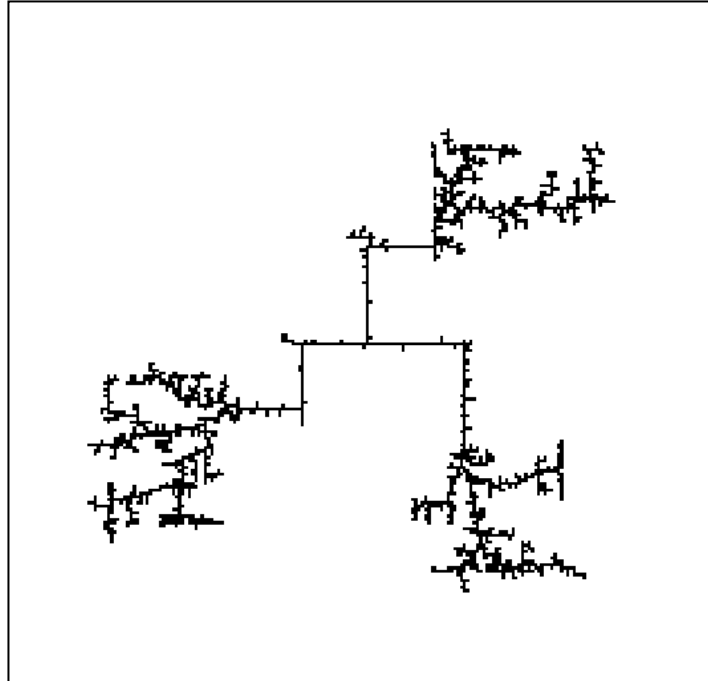
Αρχικά ορίσαμε τιμή παραμέτρων, $\eta_\delta = 1$ για τους δρόμους (γκρι περιοχή), $\eta_\pi = 1,5$ για τις πόλεις (μαύρες περιοχές) και $\eta = 2$ για όλη την υπόλοιπη περιοχή, και το αποτέλεσμα φαίνεται στην Εικόνα 8.22. Στη συνέχεια πήραμε και άλλους συνδυασμούς τιμών οι οποίοι φαίνονται στον Πίνακας 8.3 και στις αντίστοιχες εικόνες. Η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε σε πλέγμα 300×300 και στις πρώτες δύο περιπτώσεις ο αλγόριθμος DBM τερμάτιζε εφόσον η δομή μας έφτανε σε ακτίνα R ίση με 100 ενώ στις υπόλοιπες, επειδή θέλαμε λίγο μεγαλύτερες δομές, τερμάτιζε όταν η δομή έφτανε σε ακτίνα R ίση με 115.

Πίνακας 8.3 Αντιστοιχία παραμέτρων ελέγχου με τις εικόνες των αποτελεσμάτων.

Εικόνα	η_δ	η_π	η
8.23	1,2	1,5	2
8.24	1,3	1,5	2
8.25	1,4	1,5	2
8.26	1,5	1,5	2
8.27	1,3	1,7	2
8.28	1,5	1,7	2

Dielectric Breakdown Model

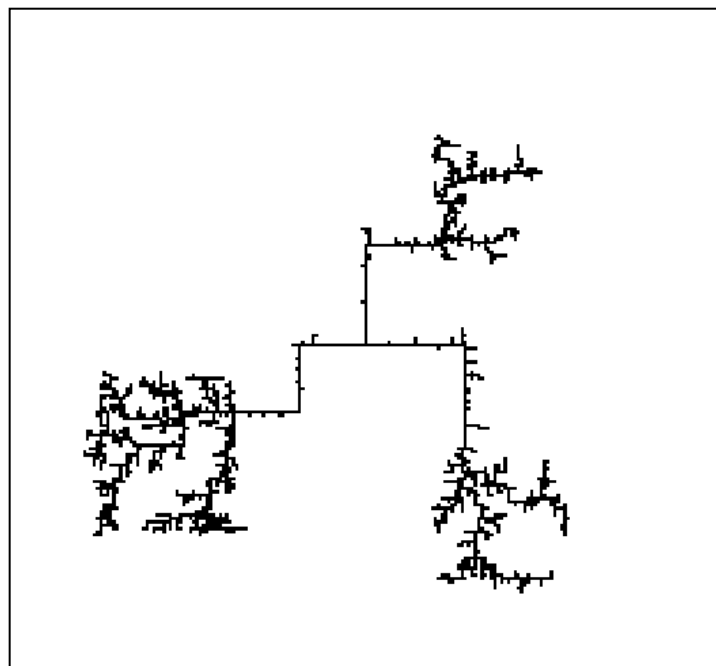
M= 1852 R= 99.81



Εικόνα 8.22 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1$, $\eta_\pi = 1,5$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

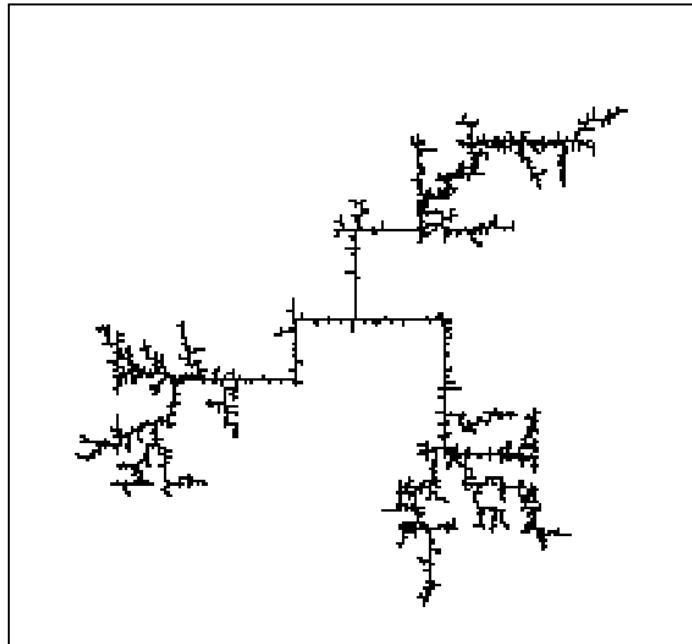
M= 1653 R= 99.86



Εικόνα 8.23 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,2$, $\eta_\pi = 1,5$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

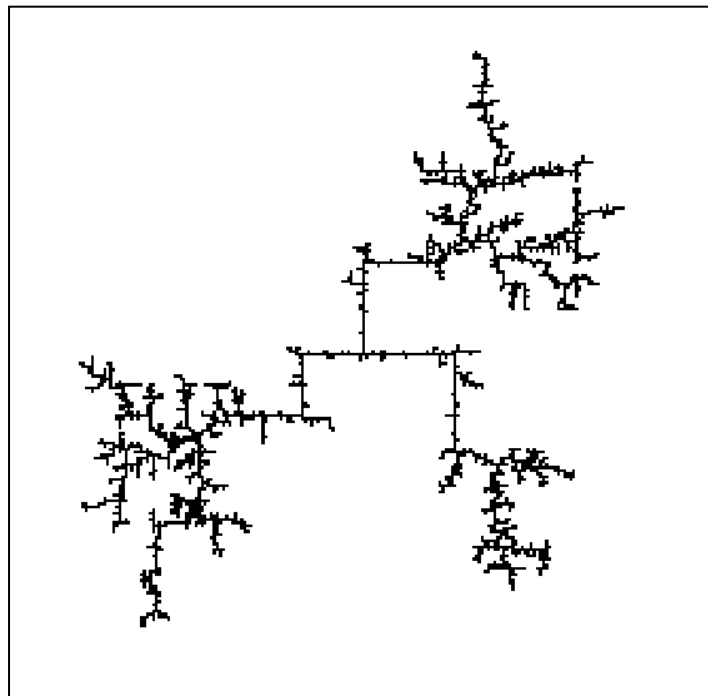
M= 2227 R= 114.81



Εικόνα 8.24 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,3$, $\eta_\pi = 1,5$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

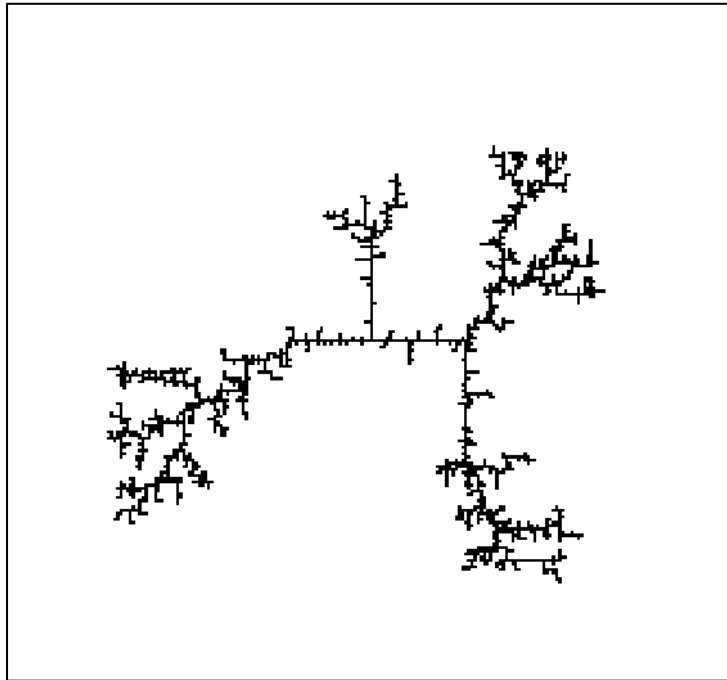
M= 2457 R= 115.11



Εικόνα 8.25 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,4$, $\eta_\pi = 1,5$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

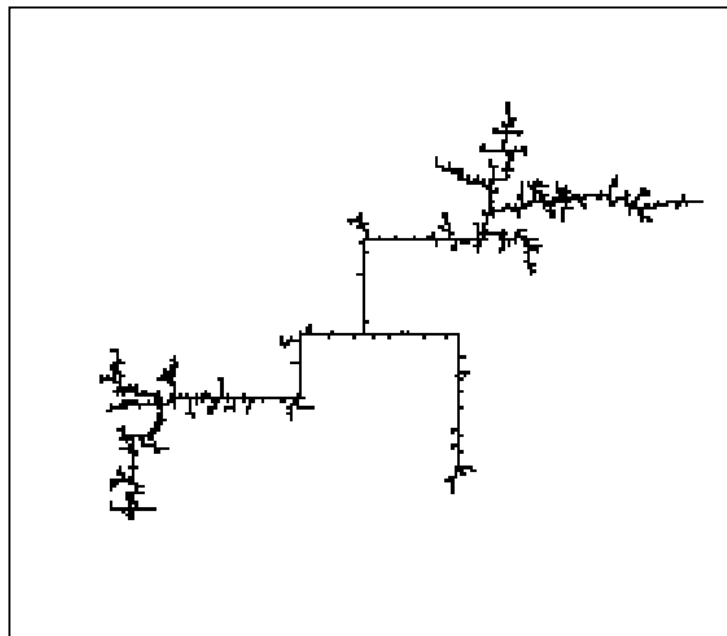
M= 1880 R= 99.86



Εικόνα 8.26 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,5$, $\eta_\pi = 1,5$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

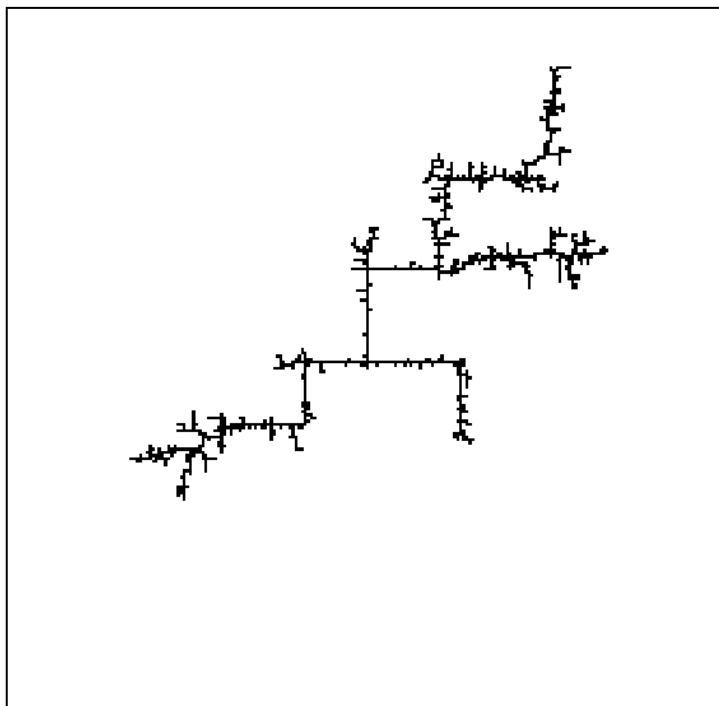
M= 1195 R= 114.95



Εικόνα 8.27 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,3$, $\eta_\pi = 1,7$ και $\eta = 2$.

Dielectric Breakdown Model

M= 1080 R= 115.11



Εικόνα 8.28 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,5$, $\eta_\pi = 1,7$ και $\eta = 2$.

Οι fractal διαστάσεις των παραπάνω δομών παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.4.

Πίνακας 8.4 Fractal διαστάσεις των εικόνων.

Εικόνα	Fractal διάσταση
8.22	1,554
8.23	1,558
8.24	1,537
8.25	1,56
8.26	1,566
8.27	1,368
8.28	1,386

Παρατηρούμε ότι και στις πέντε περιπτώσεις όπου $\eta_\pi = 1,5$ η fractal διάσταση των δομών είναι παρόμοια. Η μεταβολή του η_δ δεν επηρεάζει την τιμή της διάστασης αλλά όσο αυξάνεται η παράμετρος αυτή αυξάνεται και η στοχαστικότητα στην ανάπτυξη των δρόμων, δηλαδή υπάρχουν περισσότερα σωματίδια που συνδέονται με τις γραμμές των δρόμων αλλά δεν ανήκουν σε αυτές. Επίσης στην Εικόνα 8.26 γίνεται φανερό ότι δεν αναπτύσσεται πλήρως η δομή των δρόμων που έχουμε ορίσει και αυτό πιθανότατα οφείλεται στην σχετικά μεγάλη τιμή του η_δ η οποία είναι ίση με το η_π αλλά και στην αβεβαιότητα του μοντέλου. Στις δύο περιπτώσεις όπου $\eta_\pi =$

1,7 παρατηρείται μία μείωση στην fractal διάσταση η οποία οφείλεται από τη μία στην αύξηση της παραμέτρου αλλά κυρίως στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος τερματίστηκε πριν προλάβει να αναπτυχθεί η δομή σε όλες τις επιθυμητές περιοχές. Αυτό συμβαίνει καθώς η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων η_π και η μικραίνει και έτσι μειώνεται η προτεραιότητα ανάπτυξης των πόλεων σε σχέση με πριν.

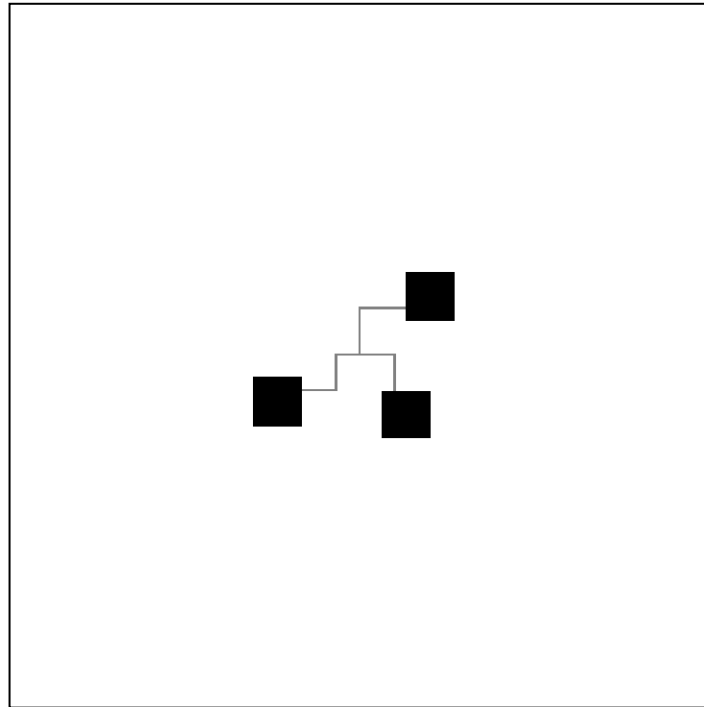
8.3.4 Αποτελέσματα Μοντέλου DBM για την επέκταση δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας

Με τη χρήση του DBM αλγορίθμου προσπαθήσαμε να προσομοιώσουμε ένα σχέδιο επέκτασης του δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας το οποίο πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια:

- Αρχικά τρέξαμε τον DBM αλγόριθμο με δρόμους και πόλεις (Εικόνα 8.29) με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,4$ στους δρόμους, $\eta_\pi = 1,6$ στις πόλεις και $\eta = 2$ για όλη την υπόλοιπη περιοχή για $M=1000$ σωματίδια και προέκυψε η δομή που φαίνεται στην Εικόνα 8.30.
- Στη συνέχεια προσθέσαμε δύο επιπλέον περιοχές στις οποίες θέλαμε να αναπτυχθεί η παραπάνω δομή με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,5$ στους δρόμους, $\eta_\pi = 1,7$ στις πόλεις και $\eta = 2$ για την υπόλοιπη περιοχή για $M=850$ σωματίδια (Εικόνα 8.31) και αποκλείσαμε την ανάπτυξη προς άλλες κατευθύνσεις. Το αποτέλεσμα της προσομοίωσης αυτής φαίνεται στην Εικόνα 8.32.
- Τέλος προσθέσαμε άλλη μία περιοχή ανάπτυξης του δικτύου με τις ίδιες παραμέτρους (Εικόνα 8.33) επίσης αποκλείοντας την ανάπτυξη προς άλλες κατευθύνσεις και το αποτέλεσμα της προσομοίωσης φαίνεται στην Εικόνα 8.34.

Η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε σε πλέγμα 300×300 . Η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου ήταν όταν η δομή μας θα έφτανε σε ακτίνα R ίση με 135. Επίσης, οι fractal διαστάσεις των παραγόμενων δομών φαίνονται στον Πίνακα 8.5.

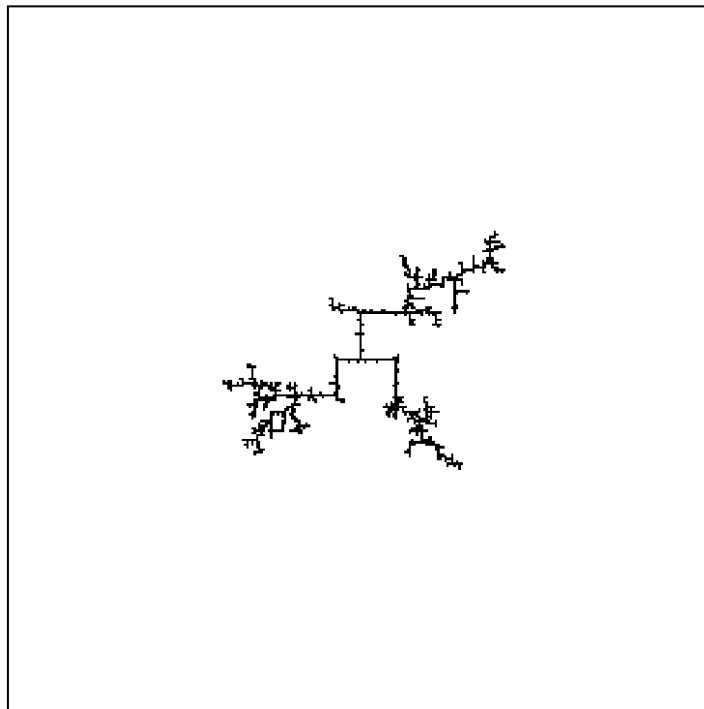
Growth District



Εικόνα 8.29 Αρχική επιθυμητή περιοχή ανάπτυξης της δομής του αλγόριθμου DBM πριν την επέκταση.

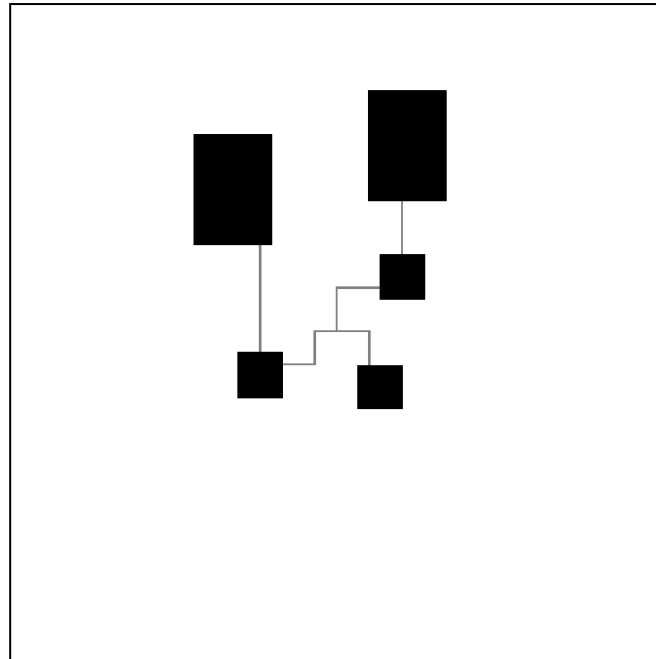
Dielectric Breakdown Model

M= 1000 R= 78.57



Εικόνα 8.30 Παραγόμενη δομή του αλγόριθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,4$, $\eta_\pi = 1,6$ και $\eta = 2$ πριν την επέκταση.

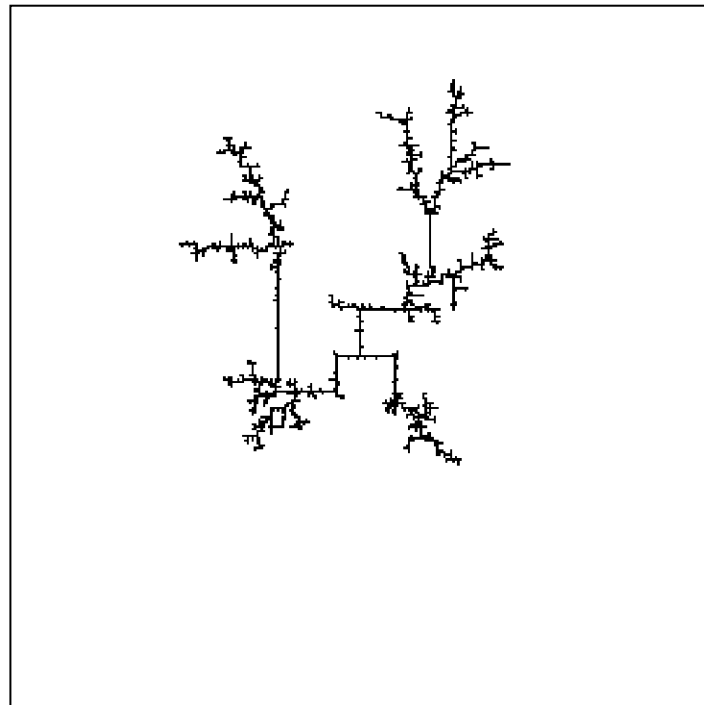
Growth District



Εικόνα 8.31 Δύο νέες επιθυμητές περιοχές επέκτασης της δομής.

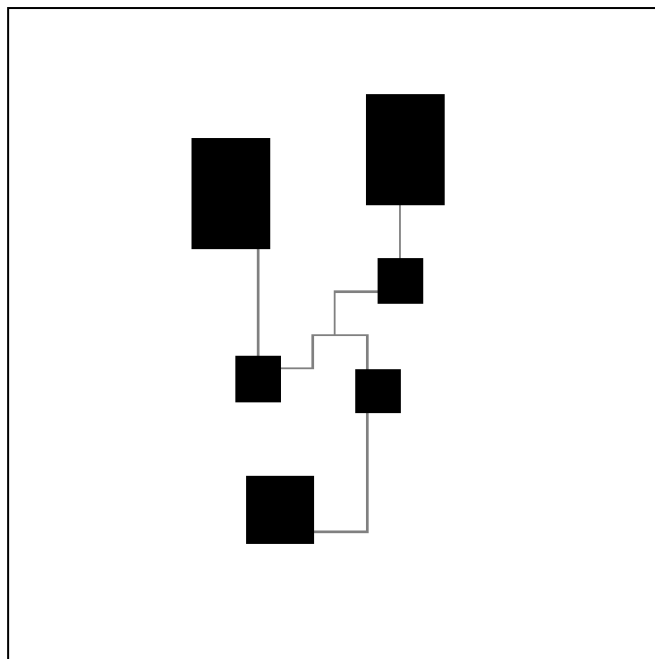
Dielectric Breakdown Model

M= 1850 R= 124.60



Εικόνα 8.32 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,5$, $\eta_\pi = 1,7$ και $\eta = 2$ μετά την πρώτη επέκταση.

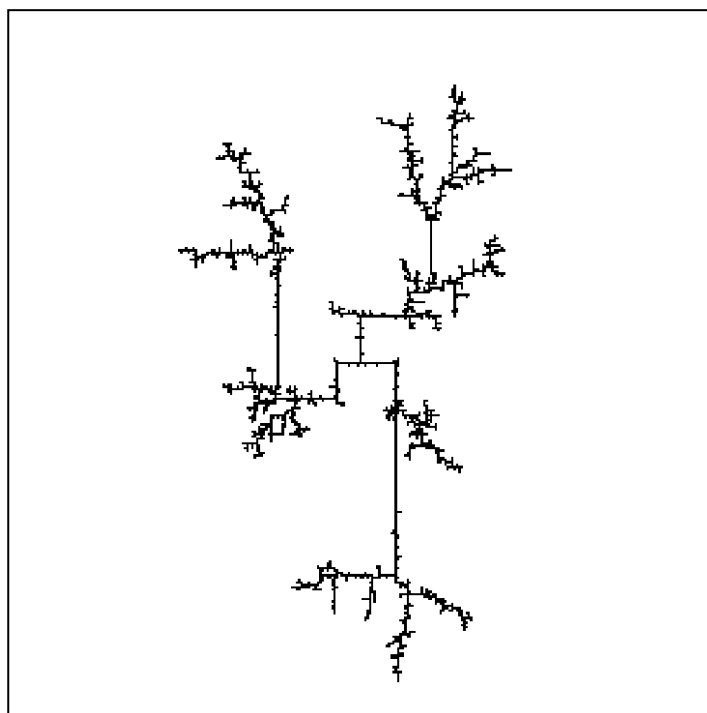
Growth District



Εικόνα 8.33 Μία νέα επιθυμητή περιοχή επέκτασης της δομής.

Dielectric Breakdown Model

M= 2289 R= 135.94



Εικόνα 8.34 Παραγόμενη δομή του αλγορίθμου DBM με παραμέτρους $\eta_\delta = 1,5$, $\eta_\pi = 1,7$ και $\eta = 2$ μετά την δεύτερη επέκταση.

Πίνακας 8.5 Fractal διαστάσεις των εικόνων.

Εικόνα	Fractal Διάσταση
8.29	1,487
8.31	1,498
8.33	1,466

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Συμπεράσματα

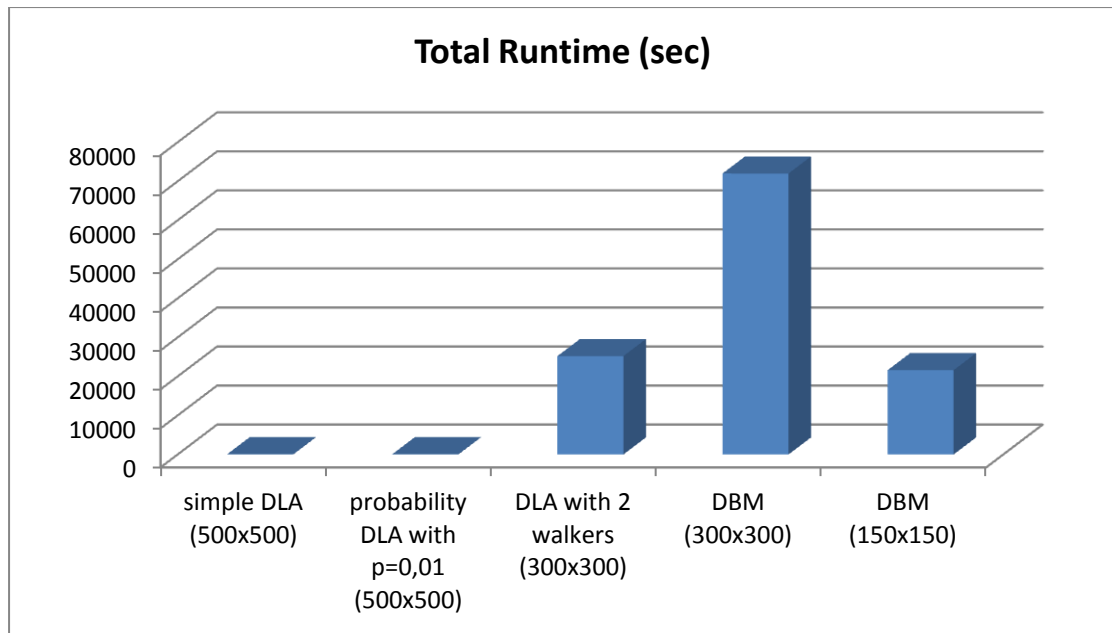
Η fractal γεωμετρία έχει αναδειχθεί ως άμεση απάντηση στην ανάγκη για καλύτερη μαθηματική περιγραφή της πραγματικότητας, και δεν υπάρχει αμφιβολία ότι παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για την ερμηνεία και την απόδοση φυσικών συστημάτων. Εκτός του ότι με τη γεωμετρία αυτή μας δίνεται η δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε τόσο φυσικά όσο και τεχνητά συστήματα, τα fractal μας αποτυπώνουν την έμφυτη πολυπλοκότητα και αβεβαιότητα του κόσμου στον οποίο ζούμε. Με αυτή την έννοια, ένα είδος αβεβαιότητας - αυτής που αφορά την αδυναμία εφαρμογής της Ευκλείδειας γεωμετρίας σε πολλά πραγματικά συστήματα - έχει αντικατασταθεί με ένα άλλο - μία καταλληλότερη γεωμετρία για την προσομοίωση της πραγματικότητας, η οποία όμως βασίζεται στην ιδέα ότι η ίδια η πραγματικότητα έχει άπειρη πολυπλοκότητα με την γεωμετρική έννοια.

Στην εργασία αυτή υποστηρίξαμε ότι το ίδιο το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας είναι fractal, και η νέα αυτή γεωμετρία είναι το εμφανές μέσο για την προσομοίωση του. Έτσι υπολογίσαμε, μέσω του box-counting αλγορίθμου, την fractal διάσταση των ηλεκτρικών δικτύων XT και MT, και χρησιμοποιήσαμε κάποια μοντέλα fractal ανάπτυξης για την προσομοίωση τους. Η επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου για την προσομοίωση ηλεκτρικών δικτύων έγινε με κριτήρια: (α) την fractal διάσταση των αποτελεσμάτων του, η οποία έπρεπε να πλησιάζει τη διάσταση που μετρήσαμε στα δίκτυα, (β) την εικόνα της παραγόμενης δομής, η οποία έπρεπε να μοιάζει οπτικά με τις εικόνες των δικτύων, και (γ) την δυνατότητα ελέγχου του μοντέλου ως προς την κατεύθυνση ανάπτυξης και επέκτασης των παραγόμενων δομών.

Τα κυριότερα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από την ανάλυση έχουν ως εξής:

- Η fractal διάσταση των δικτύων XT και MT μπορεί να υπολογιστεί ικανοποιητικά μέσω του box-counting αλγορίθμου. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση των δικτύων XT, στα οποία είχαμε διαθέσιμες δύο εικόνες δικτύων, η μετρούμενη διάσταση ήταν παρόμοια και στα δύο δίκτυα και ίση με $D \cong 1,25$, γεγονός που μας έκανε να υποψιαστούμε ότι η διάσταση αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό των δικτύων XT. Στην περίπτωση των δικτύων MT είχαμε στη διάθεση μας μόνο μία εικόνα αλλά και πάλι υποθέσαμε πως η διάσταση που μετρήσαμε, $D \cong 1,813$, εκφράζει το σύνολο των δικτύων MT.

- Το μοντέλο DLA προσομοιώνει ικανοποιητικά τα ηλεκτρικά δίκτυα MT τόσο ως προς την εμφάνιση όσο και ως προς τη fractal διάσταση. Στο μοντέλο αυτό, όμως, η fractal διάσταση είναι σταθερή και ίση με $D \cong 1,7$ με αποτέλεσμα να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση δικτύων XT. Για να μπορέσουμε να μεταβάλλουμε τη fractal διάσταση του DLA αναπτύξαμε το μοντέλο DLA με μεταβλητή πιθανότητα προσκόλλησης, αλλά παρατηρήσαμε ότι η fractal διάσταση έπαιρνε την ελάχιστη τιμή της για πιθανότητα προσκόλλησης $p=1$ και αυξανόταν πολύ όταν η πιθανότητα p έπαιρνε πολύ μικρές τιμές. Επομένως, ούτε αυτό το μοντέλο μπορούσε να προσομοιώσει δίκτυα XT. Αναπτύξαμε επίσης μία δεύτερη παραλλαγή του DLA, το μοντέλο DLA με δύο περιπλανώμενα σωματίδια του οποίου οι δομές έχουν fractal διάσταση $D \cong 1,4$ και μοιάζουν περισσότερο με δίκτυα XT. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα αυτών των μοντέλων έγκειται στο γεγονός ότι η διαδικασία του "τυχαίου περιπάτου" είναι καθαρά στοχαστική με αποτέλεσμα να υπάρχει αδυναμία ελέγχου της ανάπτυξης των παραγόμενων δομών.
- Στο μοντέλο DBM μας δίνεται η δυνατότητα, μέσω της παραμέτρου ελέγχου η , να αλλάζουμε τις μορφές των παραγόμενων δομών, των οποίων οι fractal διαστάσεις μπορούν να κυμαίνονται από 1 έως 2. Έτσι με το μοντέλο DBM μπορούμε να προσομοιώσουμε ηλεκτρικά δίκτυα MT και XT. Επίσης μας δίνεται η δυνατότητα να ορίσουμε κάποιους γεωγραφικούς περιορισμούς, όπως βουνά, θάλασσες, λίμνες κλπ, μέρη στα οποία δεν μπορεί να αναπτυχθεί το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας. Εκτός όμως από τον ορισμό περιοχών στις οποίες το δίκτυο δεν μπορεί να αναπτυχθεί, μπορούμε να ορίσουμε και περιοχές προς τις οποίες θα θέλαμε το δίκτυο να αναπτυχθεί περισσότερο. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται μέσω της παραμέτρου ελέγχου η , αν στις επιθυμητές περιοχές ανάπτυξης ορίσουμε μικρότερη τιμή στο η σε σχέση με την τιμή που θα οριστεί στο υπόλοιπο μέρος του πλέγματος.
- Ως καταλληλότερο μοντέλο για την προσομοίωση δικτύων ηλεκτρικής ενέργειας θεωρήσαμε το Dielectric Breakdown Model (DBM), λόγω της δυνατότητας μεταβολής της fractal διάστασης και του ελέγχου της κατεύθυνσης ανάπτυξης των παραγόμενων δομών. Για την προσομοίωση δικτύων MT χρησιμοποιήσαμε παράμετρο ελέγχου $\eta = 1$ ενώ στα δίκτυα XT είναι καταλληλότερη η επιλογή της παραμέτρου $\eta = 3$.
- Το μοντέλο DBM παρουσιάζει ένα σοβαρό μειονέκτημα και αυτό είναι η πολύ μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα και κατά συνέπεια ο πολύς χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί η προσομοίωση. Για το λόγο αυτό δεν μπορούμε να δουλέψουμε με μεγάλα πλέγματα, όπως στο μοντέλο DLA, και έτσι οι δομές είναι μικρότερες και όχι τόσο λεπτομερείς. Στο παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζονται προσεγγιστικοί χρόνοι τρεξίματος κάποιων μοντέλων.



Εικόνα 9.1 Ιστόγραμμα χρόνων τρεξίματος κάποιων μοντέλων fractal ανάπτυξης.

Με την ολοκλήρωση της εργασίας αναδείχτηκαν τα παρακάτω θέματα τα οποία είναι σκόπιμο να διερευνηθούν μελλοντικά:

- Η βελτιστοποίηση του αλγορίθμου DBM προκειμένου να μειωθεί όσο περισσότερο γίνεται ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται, κυρίως στον υπολογισμό του δυναμικού φ μέσω της εξίσωσης Laplace, και έτσι να μπορούν να πραγματοποιηθούν προσομοιώσεις σε μεγαλύτερα πλέγματα.
- Η αρίθμηση των σωματιδίων-στύλων και η δημιουργία πίνακα με τις μεταξύ τους διασυνδέσεις.
- Η σύνδεση κάποιων τεχνικών χαρακτηριστικών του δικτύου (όπως είναι οι αντιστάσεις R και οι αυτεπαγωγές X των γραμμών, οι τύποι των μετασχηματιστών, οι ροές ισχύος κλπ) με την δομή εξόδου των αλγορίθμων fractal ανάπτυξης.
- Στην παρούσα διπλωματική εξετάζουμε κάθε επίπεδο τάσης ξεχωριστά (XT, MT) και προσπαθούμε να βρούμε το κατάλληλο μοντέλο για το κάθε ένα. Θα ήταν χρήσιμη η δημιουργία ενός μοντέλου που θα συνδέει το δίκτυο MT με το δίκτυο XT.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Βουρνά και Γ. Κονταξή, «Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας», έκδοση ΕΜΠ, 2006
- [2] Μιχ. Π. Παπαδόπουλος, «Δίκτυα Διανομής Ηλεκτρικής Ενέργειας», Τόμος Ι, έκδοση ΕΜΠ, 1994
- [3] Ειρήνη Λεωνιδάκη, «Δομή και ανάπτυξη του δικτύου», Απρίλιος 2010
- [4] Τάσος Μπουντής, «Ο θαυμαστός κόσμος των fractal», εκδόσεις Leader Books A.E., 2004
- [5] Αστέρω Προβατά, «Μορφοκλασματικές δομές», Ομάδα Πολύπλοκων Συστημάτων και Εφαρμογών (ΟΠΣΕ) & Ινστιτούτο Φυσικοχημείας, ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος, Οκτώβριος 2007
- [6] Benguigui I., and Daoud m. «Is the suburban railway system a fractal?», Geographical Analysis, 23-4, 1991
- [7] Serge Thibault, and Judith Crews, «The morphology and growth of urban technical networks: a fractal approach», In: Flux n°19, 1995. pp. 17-30.
- [8] Tamás Vicsek, «Fractal Growth Phenomena», Singapore: World Scientific, 1989
- [9] Mohammad Hashim, and Philip I. Thomas, «Computational Analysis of Diffusion as a Stochastic System», Washington University in St. Louis Department of Physics, 27 September 2012
- [10] Pia M. Ketisch, Juan D. Rodriguez, and Alfred W. Hubler, «Modeling the degree distribution of a fractal transportation network with a minimum spanning tree graph», Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, August 28, 2008
- [11] Michael Batty, and Paul Longley, «Fractal cities», San Diego: Academic Press INC., 1994
- [12] Aleena Tasneem Khan, and Rabia Aslam Chaudary, Supervisor: Dr. Fakhar-ul-Inam, «Experimental and Simulated Study of Diffusion Limited Aggregation of Magnetic Microspheres», LUMS School of Science and Engineering, November 21, 2011
- [13] Nataliya Ausheva, and Anatoliy Demchyshyn, «Fractal modeling of vacuum arc cathode spots», Department of design automation of power objects and systems, National Technical University of Ukraine “KPI”, Kyiv, Ukraine

- [14] Bodil Oust, «Laplacian growth patterns», Thesis submitted for the degree Master of Science, Physics of Geological Processes, Department of Physics, University of Oslo, Norway, May 2009
- [15] Liu Xiaojing, Deng Chang, and Liu Caihong, «Mathematical model analysis and improvement of Lightning simulation», Proceedings of the 2009 International Symposium on Information Processing (ISIP'09), Huangshan, P. R. China, August 21-23, 2009, pp. 025-028
- [16] Jun-Won Kim and Young-Su Roh, «Simulation on Surface Tracking Pattern using the Dielectric Breakdown Model», Journal of Electrical Engineering & Technology Vol. 6, No. 3, pp. 391~396, 2011
- [17] Dulan Amarasinghe and Upul Sonnadara, «Fractal characteristics of simulated electrical discharges», Department of Physics, Faculty of Science, University of Colombo, Colombo 03, September 2007
- [18] James Theiler, «Estimating fractal dimension», Lincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, Massachusetts, November 1989
- [19] Antonio Napolitano, Sara Ungania and Vittorio Cannata, «Fractal Dimension Estimation Methods for Biomedical Images», Department of Occupational Health and Safety, Medical Physics, Bambino Gesù Children's Hospital, Rome, Italy
- [20] L. Niemeyer, L. Pietronero, and H. J. Wiesmann, «Fractal Dimension of Dielectric Breakdown», Physical Review Letters, vol.52, n0.12, pp.1033-1036, March 1984
- [21] B. Mandelbrot, «The Fractal Geometry of Nature», W.H.Freeman and Company, New York, 1983
- [22] T.Witten and L. Sander, «Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon », Physical Review Letters, vol. 47, no. 19, pp. pp. 1400– 1403, 1981.
- [23] B. Mandelbrot and C. Evertsz, «The potential distribution around growing fractal clusters», Nature, vol. 348, pp. L143–L145, 1990.