



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΒΟΙΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ ΡΟΗ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ

ΤΣΟΥΜΑ Γ.ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Καθηγητής Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

Διευθυντής του Εργαστηρίου Βιορευστομηχανικής

και Βιοϊατρικής Τεχνολογίας

Αθήνα, Φεβρουάριος 2011

Περιεχόμενα

Περίληψη – Abstract.....	1
Κεφάλαιο 1 : Βιβλιογραφική Επισκόπηση.	
1.1 Θεωρητική και πειραματική μελέτη των Slutsky et al.....	3
1.2 Πειραματική μελέτη Kurzweg και Jaeger.....	7
1.3 Πειραματική μελέτη των Joshi et al.....	12
1.4 Πειραματική μελέτη των Kurzweg, Howell και Jaeger.....	19
1.5 Πειραματική μελέτη του U.H Kurzweg.....	20
1.6 Πειραματική μελέτη των A.A. Lambert, S. Cuevas, J.A. del Rio, M. Lopez de Haro.....	21
Κεφάλαιο 2 : Εξαναγκασμένη διάχυση σε μόνιμη και ταλαντούμενη ροή νευτώνιου ρευστού σε αγωγούς.	
2.1 Θεωρία του Taylor.....	23
2.2 Η γενική θεωρία του E.J Watson	28
Κεφάλαιο 3 : Εξαναγκασμένη διάχυση σε ταλαντούμενη ροή ιξωδοελαστικού ρευστού μεταξύ παράλληλων πλακών.	
3.1 Γενικά για τη μοντελοποίηση των ρεολογικών ιδιοτήτων του ανθρωπίνου αίματος και ανάλυση του μοντέλου του ιξωδοελαστικού ρευστού της παρούσας εργασίας.....	35
3.2 Το πρόβλημα της διάχυσης μιας ουσίας μέσα σε ιξωδοελαστικό ρευστό Jeffrey σε ταλαντούμενη ροή εντός δισδιάστατου καναλιού παραλλήλων πλακών.....	42
3.3 Αποτελέσματα και συμπεράσματα.....	48
Διαγράμματα (Δ1-Δ16).....	62-93
Παραρτήματα	
Παράρτημα I.....	94
Παράρτημα II.....	110
Παράρτημα III.....	116
Βιβλιογραφία.....	119

Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται το φαινόμενο της εξαναγκασμένης διάχυσης μιας ουσίας η οποία βρίσκεται διαλυμένη σε ιξωδοελαστικό ρευστό που ταλαντώνεται μεταξύ παραλλήλων πλακών. Το φαινόμενο της εξαναγκασμένης διάχυσης συνίσταται στην ταυτόχρονη συναγωγή και διάχυση ουσιών μέσα σε κινούμενα ρευστά, το οποίο μελετήθηκε για πρώτη φορά με την εργασία του G.I. Taylor. Όπως έδειξε ο Taylor μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέθοδος προσδιορισμού του συντελεστή διάχυσης ουσιών σε ιξώδη ρευστά και ότι το φαινόμενο της εξαναγκασμένης διάχυσης έχει μεγάλη σημασία στη φυσιολογία, για το κυκλοφορικό και το πνευμονικό σύστημα των οργανισμών και φυσικά του ανθρώπου. Το φαινόμενο της εξαναγκασμένης διάχυσης έχει σύγχρονες εφαρμογές στην επιστήμη της ιατρικής, κύρια με την εισαγωγή των υψηλής συχνότητας αναπνευστήρων. Επιπλέον, μετρήσεις της ταχύτητας του αίματος που γίνονται με βάση το χρόνο που απαιτείται για να μεταφερθεί μια ουσία από ένα σημείο μιας αρτηρίας ή φλέβας σε κάποιο άλλο, στηρίζονται θεωρητικά στη μελέτη του φαινομένου αυτού.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται μερικές από τις πιο σημαντικές πειραματικές εργασίες για τη μελέτη του φαινομένου καθώς και σχετικές θεωρητικές απόψεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη θεωρία του Taylor για την περίπτωση της διασποράς της ουσίας μέσα σε ένα νευτώνειο ρευστό, που κινείται με μόνιμη ροή μέσα σε κυλινδρικό αγωγό. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η εργασία του Watson στην οποία μελετάται η ταλαντωτική ροή ενός νευτώνειου ρευστού μέσα σε αγωγό τυχαίας διατομής.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται γενικές απόψεις για τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του αίματος. Γίνεται αναφορά στις μονοκατευθυντικές ροές διάτμησης (unidirectional shear flows) οι οποίες είναι αυτές με βάση τις οποίες εξετάζονται πειραματικά οι ιδιότητες των ρευστών. Αναλύεται επίσης το μοντέλο του ιξωδοελαστικού ρευστού του Jeffreys για το οποίο μελετάται στη παρούσα εργασία η εξαναγκασμένη διάχυση μιας ουσίας, όταν αυτό ταλαντώνεται μεταξύ παραλλήλων πλακών. Παρουσιάζονται οι υπολογισμοί και τα αποτελέσματα. Κρίσιμο σημείο για τους υπολογισμούς θεωρείται η εισαγωγή των παραμέτρων ξ, ξ_1 , και ξ_2 ώστε να προκύψουν εκφράσεις παρόμοιες με αυτές του Watson και παρουσιάζονται τα σχετικά διαγράμματα για το ποσοστό αύξησης του συντελεστή διάχυσης.

Τέλος, στο παράρτημα παρουσιάζονται οι υπολογισμοί που γίνονται για τις κατάλληλες εκφράσεις του R_v (συντελεστή επαυξημένης διάχυσης) και τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των διαγραμμάτων $\Delta 1$ - $\Delta 16$.

Abstract

In this thesis we examine the phenomenon of forced diffusion of a substance which is dissolved in a viscoelastic fluid that oscillates between parallel plates. The phenomenon of forced diffusion consists of simultaneous convection and diffusion of substances in moving fluids, which was first studied by G.I. Taylor. As shown by Taylor the phenomenon of forced diffusion can be used as a method for determining the diffusion coefficient of substances in viscous fluids and has great importance in physiology, for the circulatory and pulmonary system of organisms and of course the humans. The phenomenon of forced diffusion has applications in modern medical science, mainly by introducing high-frequency ventilators. In addition, measurements of the speed of blood which are based on the time required to transfer a substance from one point of an artery or vein to another, are based on the theoretical study of this phenomenon.

In the *first chapter* we present some of the most important experimental studies the phenomenon.

The *second chapter* is a reference to Taylor's theory for the case of dispersion of a substance in Newtonian fluid, moving with steady flow in a cylindrical pipe. Then, we present Watson's work which studied the oscillatory flow of a Newtonian fluid in a random cross-section pipe.

Chapter three presents general perspectives for modeling the behavior of blood. Also, there is reference to unidirectional shear flows, with which we examine experimentally the properties of fluids. We also analyze the model of Jeffrey's viscoelastic fluid for which it is studied in this thesis, the forced dispersion of a substance when it oscillates between parallel plates. We present the calculations and the results and we consider critical for the calculations the parameters ξ, ξ_1 and ξ_2 in order to have expressions similar to those of Watson, and the charts for the percentage increase in the rate of diffusion.

Finally, *the Annex* presents the calculations which are made for the expressions of the augmented diffusion coefficient R_v and the programs used to calculate the diagrams D1-D16.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βιβλιογραφική Επισκόπηση.

1.1 Θεωρητική και πειραματική μελέτη των Slutsky et al.

A. Slutsky, J.M. Drazen, R.H. Ingram, R.D. Kamm, A.H. Shapiro, J.J.Fredberg, S.H Loring, J.Lehr Effective pulmonary ventilation with small-volume oscillations at high frequency. Science 209, 609-611, 1980

Ο αερισμός των πνευμόνων αφορά την απαγωγή διοξειδίου του άνθρακα και προσαγωγή οξυγόνου. Η εναλλαγή των αερίων φυσιολογικά γίνεται μέσω δύο διαφορετικών περιοχών των πνευμόνων, τον νεκρό χώρο (dead space) που αποτελείται από τους αεραγωγούς (βρογχιόλια) και στον οποίο η μεταφορά των αερίων γίνεται κυρίως δια συναγωγής και τον κυψελιδικό χώρο (alveolar space) όπου κύριος μηχανισμός της μεταφοράς αερίων είναι η διάχυση. Επομένως, για να γίνεται ικανοποιητική εναλλαγή αερίων θα πρέπει ο εισερχόμενος προς τους πνεύμονες αέρας (tidal volume) να έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο του νεκρού χώρου. Λίγο πριν το 1980, αποδείχτηκε όμως ότι ικανοποιητικός αερισμός του κυψελιδικού χώρου μπορεί να συμβεί με όγκο αερισμού πολύ μικρότερου από αυτόν του νεκρού χώρου εάν η συχνότητα αναπνοής είναι αρκούτσως μεγάλη και συγκεκριμένα εμπίπτει σε ένα τυπικό διάστημα τιμών 4 έως 20 Hz.

Στο εν προκειμένω εξεταζόμενο άρθρο που παρουσιάστηκε στο περιοδικό Science το 1980, παρουσιάστηκε ένα θεωρητικό μοντέλο εξήγησης του φαινομένου αυτού βασισμένο στην έννοια της ενισχυμένης διασποράς μέσω ταυτόχρονης μεταφοράς και διάχυσης, όπως αναλύθηκε από τον Taylor (1953) για πρώτη φορά (για περιπτώσεις μονίμου στρωτής και τυρβώδους ροής) και από τον Chatwin (1975) για την περίπτωση παλλόμενης στρωτής ροής. Γενικά, η αυξημένη μεταφορά μάζας μέσω του φαινομένου αυτού, μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν τρόπο ανάλογο με αυτό της μοριακής διάχυσης μέσω αντικατάστασης του συντελεστή μοριακής διάχυσης D_{mol} με έναν συντελεστή D_{eff} (ενεργός συντελεστής).

Δομή του μοντέλου :

Ο πνεύμονας θεωρείται ως ένα δίκτυο διακλαδιζόμενων σωλήνων. Σε κάθε σωλήνα η παροχή όγκου ενός συστατικού, που διασκορπίζεται μέσω μεταφοράς και διάχυσης, είναι ανάλογη προς τις διαφορές μεταξύ των συγκεντρώσεων (εν προκειμένου εκφράζονται ως ποσοστό όγκου) του συστατικού στα άκρα του σωλήνα. Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από το μήκος και τη διατομή του σωλήνα και από τον ενεργό συντελεστή D_{eff} και το αντίστροφο μέγεθος μπορεί να θεωρηθεί ως «αντίσταση» R του σωλήνα στην ενισχυμένη διάχυση, δηλαδή στην διασπορά της ουσίας.

$$V'_{constinent} = \frac{(F_{inlet} - F_{outlet})}{R}, R = \frac{L}{AD_{eff}}$$

Όπου $V'_{constinent}$ η παροχή του συστατικού (όγκος/χρόνο) μέσω του σωλήνα, F_{inlet} και F_{outlet} οι συγκεντρώσεις κατά όγκο του συστατικού στην είσοδο και την έξοδο του σωλήνα, A η επιφάνεια της διατομής και L το μήκος του σωλήνα. Η αντίσταση στην διασπορά της ουσίας για ολόκληρο ή ένα τμήμα βρογχικού δέντρου των πνευμόνων υπολογίζεται όπως και η αντίσταση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, εξαιτίας της αναλογίας που υπάρχει μεταξύ των μεγεθών του προβλήματος της διάχυσης και των μεγεθών της τάσης, του ρεύματος και της αντίστασης σε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Ο συντελεστής ενισχυμένης διάχυσης D_{eff} είναι διαφορετικός για τη στρωτή και την τυρβώδη ροή και υπολογίζεται στο μοντέλο με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα του Chatwin για τη παλλόμενη στρωτή ροή και τη θεωρία του Taylor και τα πειραματικά αποτελέσματα του Scherer et al. για καλώς αναμεμειγμένη ροή (τυρβώδη) από τους παρακάτω τύπους :

$$\frac{D_{eff}}{D_{mol}} = 1 + K_1 \left(\frac{ud}{D_{mol}} \right) \quad \text{εάν } Re \geq Re_c \quad (\text{τύπος 1})$$

$$\frac{D_{eff}}{D_{mol}} = 1 + \left(\frac{1}{192} \right) \left(\frac{ud}{D_{mol}} \right)^2 \quad \text{εάν } Re < Re_c, a < 1 \quad (\text{τύπος 2})$$

$$\frac{D_{eff}}{D_{mol}} = 1 + \left(\frac{K_2}{192} \right) \left(\frac{ud}{D_{mol}} \right)^2 a^{-7} \quad \text{εάν } Re < Re_c, a \gg 1 \quad (\text{τύπος 3})$$

Τα K_1 και K_2 είναι αδιάστατες παράμετροι τάξεως μονάδας.

Φαίνεται λοιπόν ότι το D_{eff} εξαρτάται κυρίως από δύο παραμέτρους :

- Την παράμετρο του Womersley, $a = d \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{f}{\nu}}$ όπου d είναι η διάμετρος του σωλήνα, f η συχνότητα των ταλαντώσεων και ν η κινηματική συνεκτικότητα
- Τον αριθμό Reynolds, $Re = \frac{ud}{\nu}$ που υπολογίζεται με βάση την χωρικά σταθμισμένη μέση τετραγωνική (root-mean-square) ταχύτητα.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι στους τύπους 1 και 2, που αναφέρονται στην τυρβώδη μόνιμη ροή και τη στρωτή μόνιμη ροή δεν υπεισέρχεται όπως είναι φυσικό επίδραση της παραμέτρου του Womersley, γεγονός που σημαίνει ότι η χρησιμοποίησή τους για καθορισμό της διασποράς του διαχεόμενου συστατικού σε ταλαντούμενη ροή υπονοεί ότι δεν εξαρτάται από τη συχνότητα. Όπως αναφέρεται στην επόμενη παράγραφο, αυτή ακριβώς η παρατήρηση είναι που οδήγησε τους Jaeger και Kurzweg στη διεξαγωγή της μελέτης τους για καθορισμό του ενεργού συντελεστή διάχυσης σε τυρβώδεις ροές, ειδικά για μεγάλους αριθμούς Womersley.

Στο μοντέλο γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός Reynolds Re_c , σταθερός για κάθε αγωγό του βρογχικού δέντρου με βάση τον οποίο καθορίζεται το αν η ροή είναι στρωτή ή καλώς αναμεμειγμένη, δηλαδή τυρβώδης.

Σύμφωνα με το μοντέλο προβλέπεται ότι η απαγωγή του διοξειδίου του άνθρακα θα αυξηθεί καθώς το πλάτος της παροχής της παλλόμενης ροής αυξάνεται, ανεξάρτητα από τις τιμές της συχνότητας και του όγκου εμβολισμού (stroke volume) αρκεί η συχνότητα να είναι αρκετά μικρή ώστε η τιμή του αριθμού Womersley να είναι μικρή για τις περιοχές των πνευμόνων που η ροή είναι στρωτή. Επίσης, αναφέρεται ότι το μοντέλο υποδεικνύει ότι η απαγωγή του διοξειδίου του άνθρακα συναρτήσει της ροής της τραχείας είναι σχετικώς ανεξάρτητη από το μέγεθος του ζώου ή τον όγκο του πνεύμονα για ένα ζώο, αρκεί οι γεωμετρίες των πνευμόνων να είναι όμοιες. Αναφέρεται ως παράδειγμα ότι εάν όλες οι γραμμικές διαστάσεις των αεραγωγών αυξηθούν κατά ένα παράγοντα 3, σύμφωνα με το μοντέλο η απαγωγή του οξυγόνου θα αλλάξει περίπου μόνο κατά 15%.

Το φαινόμενο εκτός από τη θεωρητική αντιμετώπιση του εξετάστηκε και πειραματικά με σκοπό την πιστοποίηση της αξιοπιστίας του μοντέλου. Τα πειράματα έγιναν σε τέσσερα σκυλιά για τα οποία μεταβαλλόταν η συχνότητα και ο όγκος εμβολισμού. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η λογική του πειράματος περιγράφεται αναλυτικά στο άρθρο και στο παρόν παραλείπεται.

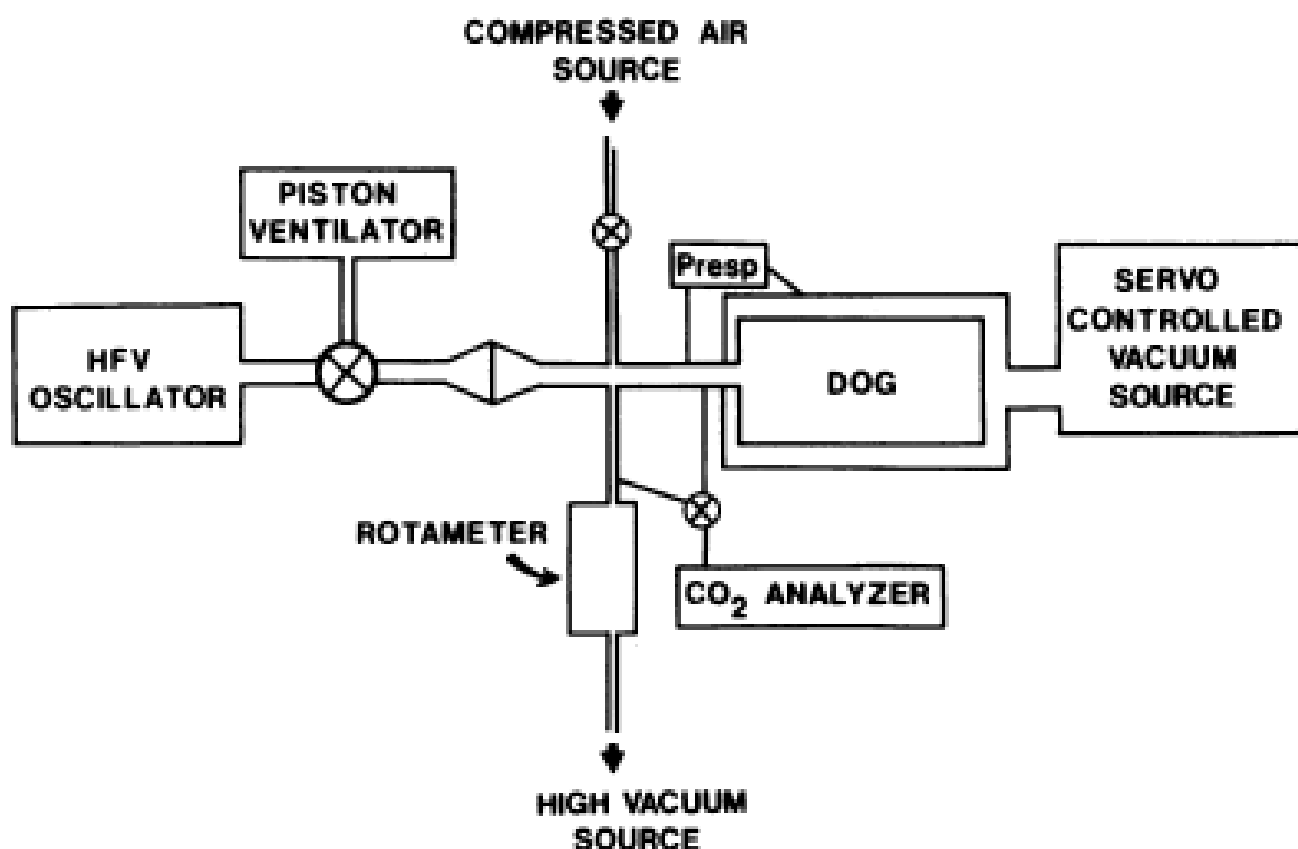


FIGURE 1 Schematic diagram of experimental setup.

Παρατηρήθηκε λοιπόν πειραματικά και θεωρητικά μέσω του μοντέλου ότι :

- Αν αυξηθεί η συχνότητα για συγκεκριμένο όγκο εμβολισμού αυξάνεται η απαγωγή CO₂.
- Αν αυξηθεί ο όγκος εμβολισμού για συγκεκριμένη συχνότητα αυξάνεται η απαγωγή επίσης .

- Για οποιονδήποτε σταθερό γινόμενο συχνότητας επί όγκο εμβολισμού η απαγωγή παραμένει σταθερή.

Υπολογίζεται για το λόγο αυτό η άποψη, ότι η σημαντική παράμετρος που επιδρά στην αποδοτικότητα της εναλλαγής των αερίων είναι το πλάτος της παροχής της παλλόμενης ροής, δηλαδή το γινόμενο της συχνότητας επί τον όγκο εμβολισμού και όχι οι μεμονωμένες τιμές συχνότητας και όγκου εμβολισμού.

Ουσιαστικά το μοντέλο προβλέπει λοιπόν ότι $V_{CO_2}' \propto fV$, με συντελεστή αναλογίας που μειώνεται με την αύξηση του κρίσιμου αριθμού Reynolds.

Δίνονται τα δύο παρακάτω διαγράμματα, το ένα με πειραματικές τιμές και το άλλο με τις προβλεπόμενες από το μοντέλο, της παροχής του CO_2 σε συνάρτηση της μέσης τετραγωνικής τιμής της παλλόμενης ροής. Η μέση τετραγωνική τιμή της παροχής της παλλόμενης ροής είναι ανάλογη του fV , δηλαδή του πλάτους της παροχής της παλλόμενης ροής. Παρατηρείται μια ασυμφωνία όσον αφορά το γεγονός ότι η πειραματική ευθεία φαίνεται να μην περνά από το (0,0). Επίσης, φαίνεται ότι η κλίση των καμπύλων παρουσιάζει κάποια σχετικά σημαντική διαφορά.

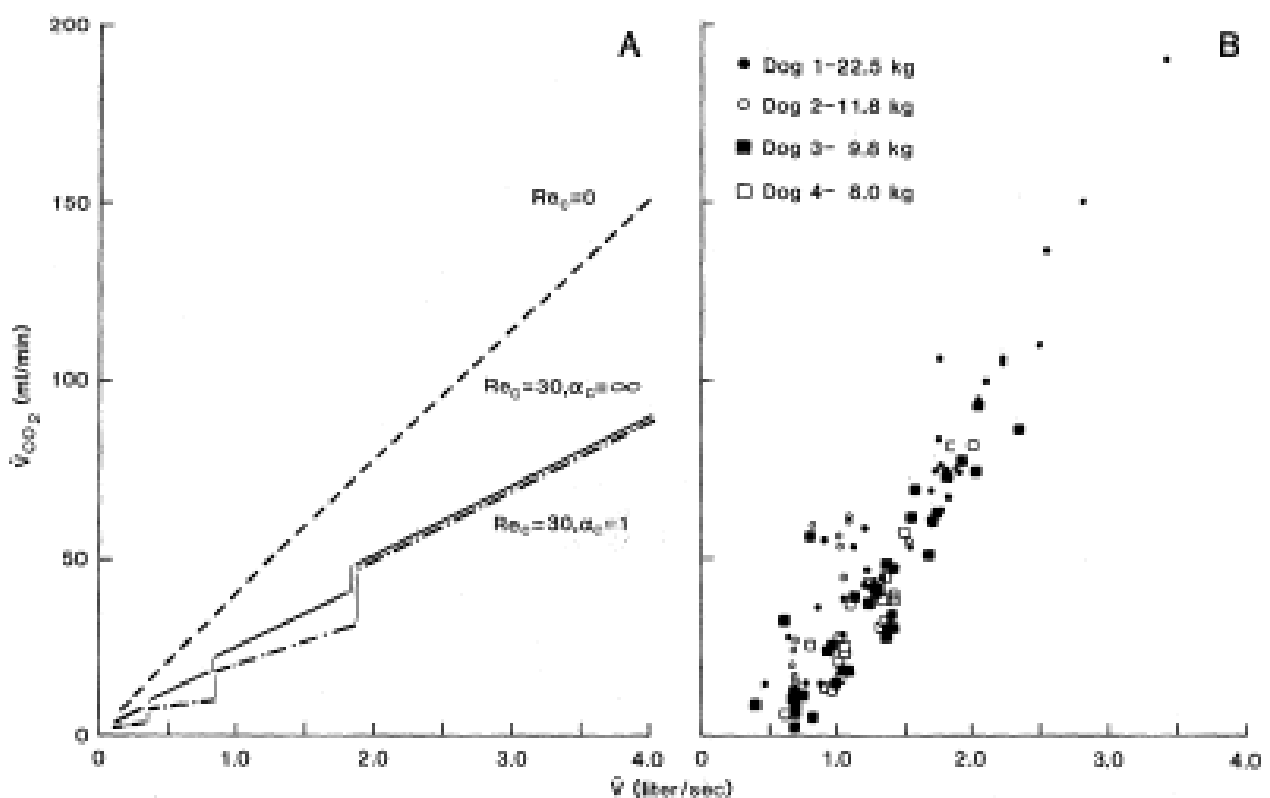


Fig. 1. (A) Predicted values of CO_2 elimination (V_{CO_2}) versus root-mean-square tracheal flow for three cases: (i) $Re_c = 0$; (ii) $Re_c = 30, \alpha_c = \infty$; and (iii) $Re_c = 30, \alpha_c = 1$. For all cases the oscillation frequency was constant at 30 Hz. (B) Experimental measurements of CO_2 elimination versus tracheal flow for four dogs.

Συμπέρασμα του άρθρου είναι ότι, αποδοτική εναλλαγή αερίων μπορεί να λάβει χώρα για όγκους αερισμού ακόμη και εάν είναι 20% του νεκρού χώρου, προϋποτιθέμενου ότι η συχνότητα είναι

αρκετά υψηλή για να διατηρήσει το πλάτος της ροής (γινόμενο όγκου εμβολισμού επί συχνότητα) στην τραχεία πάνω από ένα κρίσιμο επίπεδο. Συμπεραίνεται τελικώς, ότι οι συνδυασμένες επιδράσεις της μοριακής διάχυσης και της συναγωγής μπορούν να εξηγήσουν την πειραματικώς παρατηρούμενη μεταφορά αερίων.

1.2 Πειραματική μελέτη Jaeger και Kurzweg.

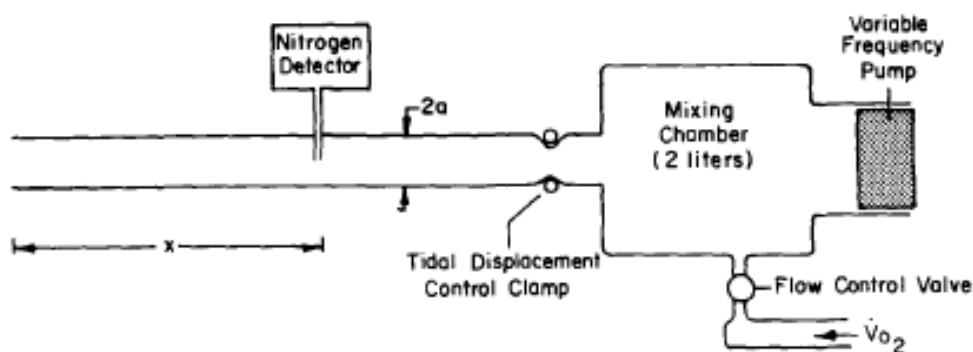
M.J. Jaeger and U.H. Kurzweg, Determination of the longitudinal dispersion coefficient in flows subjected to high frequency oscillations, Phys. Fluids 26, 1380-1382, 1983

Σε άρθρο που παρουσιάστηκε το 1983 στο περιοδικό Phys. Fluids από τους Jaeger και Kurzweg, αμφισβητήθηκε η αξιοπιστία του παραπάνω μοντέλου εξαιτίας του τρόπου καθορισμού του συντελεστή ενισχυμένης διάχυσης και παρουσιάστηκαν πειραματικές μετρήσεις με σκοπό τον ακριβή καθορισμό του μεγέθους του. Υποστηρίχθηκε η άποψη ότι ο υπολογισμός του συντελεστή ενισχυμένης διάχυσης με βάση τα αποτελέσματα του Taylor αναφέρεται για μόνιμη τυρβώδη ροή, γεγονός που καθιστά μη αξιόπιστα για τη περίπτωση της παλλόμενης ροής, αφού οι κατανομές της ταχύτητας διαφέρουν σημαντικά από τον τυπικό λογαριθμικό νόμο που ισχύει σε μόνιμες τυρβώδεις ροές και επίσης, στις παλλόμενες ροές το ρευστό αναμιγνύεται κατά την ακτινική κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της αντιστροφής της ροής. Κύριος σκοπός της εργασίας αναφέρεται ότι ήταν ο πειραματικός προσδιορισμός του διαμήκους συντελεστή διασποράς αερίων ουσιών σε γοργά ταλαντούμενη ροή και ο καθορισμός της εξάρτησης του από το πλάτος και τη συχνότητα ταλάντωσης. Σύμφωνα, με το προηγούμενο μοντέλο (τύπος 1) ο συντελεστής διασποράς θεωρείται ανεξάρτητος της συχνότητας, γεγονός που με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα αποδείχθηκε μη ανταποκρινόμενο στην πραγματικότητα .

Οι Jaeger και Kurzweg ασχολήθηκαν με μεγάλης συχνότητας ταλαντώσεις, υπό την έννοια ότι ο αριθμός Womersley είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας. Η πειραματική διαδικασία των μετρήσεων τους αναλύεται παρακάτω.

Πειραματική διαδικασία των Jaeger και Kurzweg :

Το κύριο ρευστό που χρησιμοποίησαν ήταν οξυγόνο σε καθαρή μορφή και οι μετρήσεις αφορούσαν τον τρόπο διασποράς του αζώτου του αέρα του εργαστηρίου μέσα στη μάζα του οξυγόνου, η οποία υποβλήθηκε σε ειδικού τύπου ταλαντωτική ροή που περιγράφεται στη συνέχεια. Για τις μετρήσεις τους χρησιμοποιήθηκε η διάταξη του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα: Συσκευή προσδιορισμού της διαμήκους διάχυσης.

Στην είσοδο του σωλήνα δεξιά, διοχετεύεται καθαρό οξυγόνο με σταθερή παροχή όγκου, ενώ η έξοδος του στα αριστερά καταλήγει στον αέρα. Μετράται η συγκέντρωση του αζώτου σε κάποια συγκεκριμένη απόσταση x από την έξοδο του σωλήνα. Είναι φυσικό, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα να μην υπάρχει άζωτο μέσα στο σωλήνα, αφού «ξεπλύνεται» συνεχώς με καθαρό οξυγόνο, οπότε η μετρούμενη συγκέντρωση βρίσκεται ίση με μηδέν.

Στη συνέχεια και ενώ δε σταματά η σταθερή παροχή οξυγόνου, τίθεται σε λειτουργία η αντλία σταθερής μετατόπισης (έμβολο που ταλαντώνεται μεταξύ δύο σταθερών θέσεων), η οποία υποβάλλει μια ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη πίεση στο οξυγόνο που βρίσκεται στο θάλαμο μίξης (mixing chamber) και έτσι το οξυγόνο ταλαντώνεται μέσα στο σωλήνα με συχνότητα ίση με αυτή της λειτουργίας της αντλίας. Το πλάτος της ταλαντώσεως του ρευστού μέσα στο σωλήνα, που είναι το μισό της παλιρροιακής μετατόπισης (tidal displacement) η οποία μετράται από ένα ανεμόμετρο στην έξοδο του σωλήνα, ελέγχεται από τον σφικτήρα που υπάρχει στην είσοδο του σωλήνα, μεταβάλλοντας στο σημείο εκείνο τη διάμετρο του σωλήνα. Η ροή λοιπόν μέσα στο σωλήνα μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως υπέρθεση δύο επιμέρους ροών, της σταθερής παροχής οξυγόνου και της ταλαντωτικής ροής και των επακόλουθων φαινομένων ακτινικής μίξης κατά την αναστροφή της ροής, την οποία θα προκαλούσε το έμβολο αν δεν υπήρχε η σταθερή παροχή οξυγόνου.

Παρατηρήθηκε ότι ενώ κατά την μόνιμη ροή οξυγόνου προς την έξοδο του σωλήνα απομακρύνθηκε το άζωτο, μέσα σε μερικά δευτερόλεπτα από τη στιγμή που τέθηκε σε λειτουργία η αντλία εμφανίστηκε άζωτο κατά μήκος του σωλήνα και φυσικά στο σημείο μέτρησης παρόλο που θα περίμενε κανείς να μην συμβεί κάτι τέτοιο γιατί οι παλιρροιακές μετατοπίσεις του ρευστού ρυθμίστηκαν να είναι μικρότερες από το μήκος μεταξύ της εξόδου και του σημείου μέτρησης της συγκέντρωσης του αζώτου.

Κατά συνέπεια, η διασπορά του αζώτου μέχρι το σημείο μέτρησης δεν οφείλεται σε συναγωγή αλλά σε κάποιο τρόπο διασποράς.

Από τη στιγμή που εμφανιζόταν άζωτο στο σημείο μέτρησης, η συγκέντρωση του αυξανόταν έως μια σταθερή τιμή. Η συγκέντρωση της μόνιμης αυτής κατάστασης παρατηρήθηκε ότι :

- Αυξάνεται, όταν αυξάνεται η συχνότητα f και το πλάτος $\Delta x/2$ της ταλάντωσης.
- Μειώνεται, όταν αυξηθεί η παροχή καθαρού οξυγόνου \dot{V}_{O_2} και η απόσταση x του σημείου μέτρησης από την έξοδο του σωλήνα, γεγονός που είναι αναμενόμενο.
- Δεν υπάρχει μεταβολή της συγκέντρωσης του αζώτου κατά την ακτινική διεύθυνση, δηλαδή υφίσταται μια ομοιόμορφη κατανομή σε κάθε διατομή στη μόνιμη κατάσταση.

Οι Jaeger και Kurzweg, περιέγραψαν ποσοτικά το φαινόμενο, θεωρώντας ουσιαστικά τα εξής :

- Ότι η ροή είναι υπέρθεση των δύο προαναφερθέντων τύπων ροής και ότι κατά τη μεν πρώτη μεταφέρεται άζωτο προς την έξοδο ενώ κατά την δεύτερη δεν υφίσταται μεταφορά αζώτου προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.
- Ότι η μεταφορά της ουσίας (άζωτο) προς το σημείο μέτρησης γίνεται με κάποιο τρόπο διασποράς κατά τον οποίο η παροχή της ποσοτικά μπορεί να εκφραστεί από ένα νόμο της

μορφής $-AD \frac{\partial c}{\partial x}$, όπου A είναι η επιφάνεια διαμέσου της οποίας παρέχεται η ουσία, από την περιοχή της υψηλής προς την περιοχή της χαμηλής συγκέντρωσης.

Στη προκειμένη περίπτωση, ο όγκος του αζώτου που μεταφέρεται προς την έξοδο είναι $C \dot{V}_{O_2}$ και η διασπορά του προς την αντίθετη κατεύθυνση είναι ίση με $-\pi a^2 D \frac{\partial c}{\partial x}$, που στη μόνιμη κατάσταση θα πρέπει να είναι ίσες. Όποτε,

$$-\pi a^2 D \frac{\partial c}{\partial x} = C \dot{V}_{O_2}$$

Από όπου προκύπτει εύκολα με ολοκλήρωση ότι :

$$D = \frac{x \dot{V}_{O_2}}{\pi a^2 \ln\left(\frac{C_o}{C}\right)}$$

Που είναι μια σχέση με βάση την οποία μπορεί να γίνει ο υπολογισμός του D από τις πειραματικές μετρήσεις .

Με βάση τα αποτελέσματα της πειραματικής έρευνας, οι Jaeger και Kurzweg, θεώρησαν ότι ο συντελεστής της διασποράς D μπορεί να προκύψει από μια σχέση της μορφής $D = D(f, \Delta x, \nu, D_m)$, γιατί :

- Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι το D εξαρτάται οπωσδήποτε από τη συχνότητα f και το Δx , αλλά πιθανότατα όχι από την ακτίνα του σωλήνα
- Έκαναν την υπόθεση ότι το D μπορεί να εξαρτάται από την κινηματική συνεκτικότητα ν και το συντελεστή μοριακής διάχυσης D_m , χωρίς να την εξετάσουν πειραματικά.

Η αδιάστατη έκφραση της $D = D(f, \Delta x, \nu, D_m)$ είναι η $\frac{D}{D_m} = F\left(S, \frac{\Delta x^2 f}{\nu}\right)$, όπου $S = \frac{\nu}{D_m}$ είναι

ο αριθμός Schmidt, η οποία είναι μια σχέση που διαφέρει από τις εκφράσεις του D που λαμβάνονται από τα θεωρητικά αποτελέσματα του Chatwin για τη παλλόμενη στρωτή ροή καθώς και τη θεωρία του Taylor για τη μόνιμη στρωτή ή τυρβώδη ροή και τα πειραματικά αποτελέσματα του Scherer et al. για καλώς αναμεμειγμένη ροή (τυρβώδη). Στη περίπτωση που θεωρήσει κανείς ότι ο συντελεστής διασποράς εξαρτάται από την ακτίνα του σωλήνα είναι

$D = D(f, \Delta x, \nu, D_m, a)$ προκύπτει η αδιάστατη μορφή $\frac{D}{D_m} = F\left(S, \frac{\Delta x^2 f}{\nu}, \frac{\Delta x}{a}\right)$. Επισημαίνεται ότι

τα αποτελέσματα προκύπτουν όταν ο αριθμός Womersley είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας. Για παράδειγμα, οι μετρήσεις που παριστάνονται με κύκλους στο παραπάνω διάγραμμα γίνονται με

$$f=10.63\text{Hz}, \nu=0,16 \text{ cm}^2/\text{sec}, a=0.79\text{cm} \text{ οπότε } a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 16.14.$$

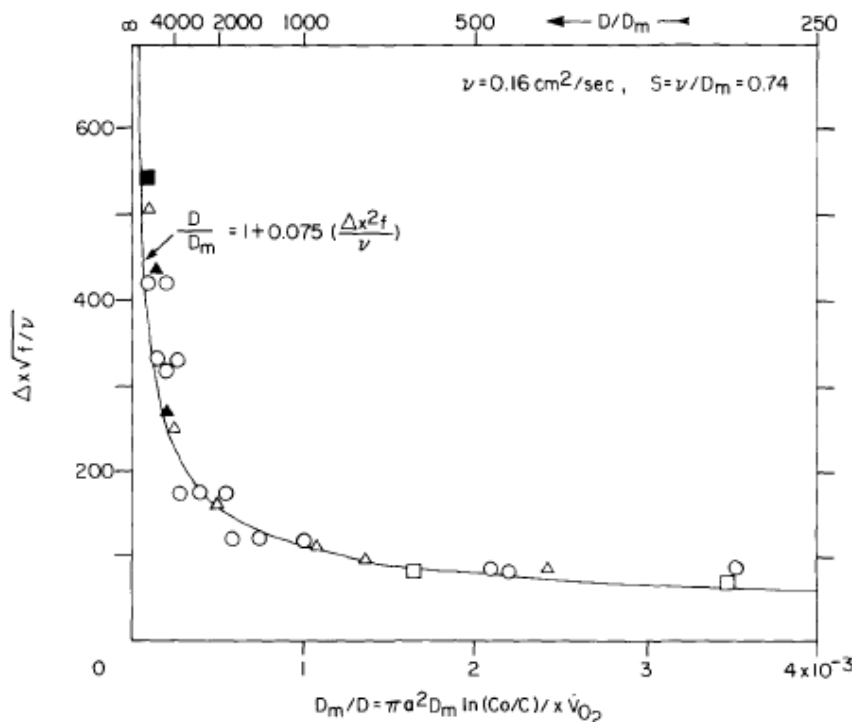


FIG. 2. Measured value of the dispersion coefficient as a function of the parameter $f\Delta x^2/\nu$. \circ - $f = 10.63$ Hz, $\dot{V}_{O_2} = 12$ cm³/sec, $a = 0.79$ cm, $10 < x < 110$ cm; \triangle - $f = 10.63$ Hz, $\dot{V}_{O_2} = 4.6$ cm³/sec, $a = 0.79$ cm, $x = 62$ cm; \square - $f = 2.03$ Hz, $\dot{V}_{O_2} = 4.6$ cm³/sec, $a = 0.79$ cm, $x = 62$ cm; \blacktriangle - $f = 21.3$ Hz, $\dot{V}_{O_2} = 4.6$ cm³/sec, $a = 0.63$ cm, $x = 62$ cm; and \blacksquare - $f = 10.63$ Hz, $\dot{V}_{O_2} = 4.6$ cm³/sec, $a = 0.63$ cm, $x = 62$ cm.

Ο αριθμός Schmidt στην περίπτωση των πειραμάτων είναι $S = \frac{\nu}{D_m} = 0.74$, αλλά μονοσήμαντα

καθορισμένος για όλες τις μετρήσεις. Για το λόγο αυτό προσπάθησαν μάλλον να θεωρήσουν ότι η

συνάρτηση F στη σχέση $\frac{D}{D_m} = F\left(S, \frac{\Delta x^2 f}{\nu}\right)$ είναι η απλούστερη δυνατή, δηλαδή γραμμική ως προς

την ανεξάρτητη μεταβλητή και να την προσαρμόσουν στα πειραματικά τους αποτελέσματα. Θέλοντας να προσδιορίσουν άμεσα το ποσοστό αύξησης του συντελεστή διασποράς ως προς το μέγεθος του συντελεστή μοριακής διάχυσης βρήκαν ότι είναι δυνατό να προσαρμοσθεί με σχετική

επιτυχία η έκφραση $\frac{D}{D_m} = 1 + 0.075 \frac{\Delta x^2 f}{\nu}$, έχοντας προφανώς τη δυνατότητα μεταβολής μόνον

του συντελεστού αναλογίας στο δεύτερο προσθετέο. Οι τιμές του $\frac{D}{D_m}$ που μέτρησαν κυμαίνονταν μεταξύ 300-8000.

Οι Jaeger και Kurzweg επιχειρούν μια ποσοτική σύγκριση με τα αποτελέσματα του Taylor για τυρβώδη διασπορά μόνιμης ροής μέσα σε σωλήνα, όπως δέχονται οι Slutsky et al. (βλ. παράγραφο 1.1) με βάση τη μέση τετραγωνική τιμή της ταχύτητας. Κατά Taylor είναι για τη μόνιμη τυρβώδη ροή

$\frac{D_{eff}}{D_{mol}} = 1 + K_1 \left(\frac{ud}{D_{mol}} \right)$ εάν $Re \geq Re_c$, όπου K_1 είναι μια αδιάστατη παράμετρος της τάξεως της

μονάδος και Re_c είναι ο κρίσιμος αριθμός Reynolds μετά τον οποίο γίνεται η μετάβαση στην τυρβώδη ροή, που συνήθως η ελάχιστη τιμή του είναι 2300 για ροή σε σωλήνα.

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως $\frac{D_{eff}}{D_{mol}} = 1 + K_1 S Re$, οπότε με τη χρησιμοποίηση ενός $Re_{effective}$

που ορίζεται χρησιμοποιώντας τη μέση τετραγωνική ταχύτητα \bar{u} (χωρικά σταθμισμένη) της ταλαντούμενης ροής

$$Re = \frac{ud}{\nu} \xrightarrow{u \rightarrow \bar{u}_m} Re_{effective} = a \frac{2\bar{u}_{rms}}{\nu}$$

Και προκύπτει ίσος με $Re_{effective} = a \frac{\Delta x f}{\nu}$, συγκρίνουν τις προβλέψεις των δύο παρακάτω σχέσεων :

$$\frac{D}{D_m} = 1 + K_1 S \left(a \frac{\Delta x f}{\nu} \right) \quad \text{Taylor}$$

$$\frac{D}{D_m} = 1 + 0.075 \frac{\Delta x^2 f}{\nu} \quad \text{Jaeger και Kurzweg}$$

Για $Re_{effective} = 2000 \Rightarrow \frac{Re_{effective}}{a} \gg 250 - 500$ όπου η ροή είναι τυρβώδης σύμφωνα με τους Merkli & Thomann (1975) και τον Sergeev (1966), οι Jaeger και Kurzweg αναφέρουν ότι βρέθηκε πειραματικά για $f=10.63\text{Hz}$ και $a=0.79\text{cm}$ το $\frac{D}{D_m} = 4800$.

Πάντως μπορεί να δει κανείς ότι με τα δεδομένα αυτά η σχέση παρεμβολής που χρησιμοποιούν προβλέπει $\frac{D}{D_m} = 7234$ γιατί $a \frac{\Delta x f}{\nu} = 2000 \Rightarrow \Delta x = \frac{0.16 \cdot 2000}{0.79 \cdot 10.63} = 38.1\text{cm}$.

Αντίθετα σύμφωνα με τον Taylor για τον ίδιο αριθμό Reynolds προβλέπεται ότι $\frac{D}{D_m} = 2100$.

Η αύξηση αυτή του D είναι μεγαλύτερη καθώς και ο $Re_{effective}$ αυξάνεται και κατά συνέπεια συμπεραίνουν ότι η διασπορά υπό παλλόμενη τυρβώδη ροή είναι πιο μεγάλη σε σχέση με αυτήν που υφίσταται στις μόνιμες τυρβώδεις ροές, γεγονός που μπορεί να δειχθεί και από τις παραπάνω δύο σχέσεις. Πράγματι αν γραφούν ως :

$$\frac{D}{D_m} = 1 + K_1 S Re \quad \text{Taylor}$$

$$\frac{D}{D_m} = 1 + 0.075 \frac{\Delta x}{a} Re \quad \text{Jaeger και Kurzweg}$$

Για τα δεδομένα της πειραματικής διαδικασίας προκύπτει ότι με σταθερή ακτίνα και αυξανόμενο $Re > 2000$ (effective) το $0.075 \frac{\Delta x}{a} \gg K_1 S$.

Τελικώς διατυπώνουν την άποψη ότι ο ακριβής μηχανισμός της είναι άγνωστος, αλλά πιθανότητα περιλαμβάνει φαινόμενα έντονης διάχυσης μέσα των λεπτών οριακών στρωμάτων στα τοιχώματα του σωλήνα που υπάρχουν στις τυρβώδεις ροές. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται κατά τη γνώμη τους από το γεγονός ότι η παράμετρος $\Delta x \sqrt{\frac{f}{\nu}}$ είναι ανάλογη προς το λόγο της παλιρροιακής μετατόπισης προς το πάχος του οριακού στρώματος, δείχνοντας μια πιθανή συσχέτιση.

1.3 Πειραματική μελέτη των Joshi et al.

Joshi, C.H. Kamm, R.D. Drazen, J.M. Slutsky, A.S. J. Fluid Mech. 114,379 (1983)

An experimental study of gas exchange in laminar oscillatory flow.

Οι παραπάνω παρουσίασαν την εργασία τους παράλληλα με τη θεωρητική μελέτη του Watson, με σκοπό την πειραματική επαλήθευση των θεωρητικών προβλέψεών του. Διεξήγαγαν πειράματα για τον καθορισμό της ενεργούς αξονικής διαχυσιμότητας ενός αερίου ρύπανσης (μεθάνιο) του ατμοσφαιρικού αέρα, μέσω ενός σωλήνα κυκλικής διατομής εσωτερικής διαμέτρου 10mm και μήκους 1.2m, όπου το μείγμα αέρας-μεθάνιο υποβαλλόταν κυρίως σε ταλαντωτική ροή. Τα πειράματα τους είναι παρόμοια με το πείραμα των Jaeger και Kurzweg που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και επομένως διαφέρουν από τη θεωρητική μελέτη του Watson ως προς το γεγονός ότι η ροή είναι υπέρθεση μιας μονίμου και μιας ταλαντωτικής ροής, όπως θα περιγραφούν πληρέστερα κατωτέρω, όπως επίσης και στο γεγονός ότι υφίσταται και μια εξ' ανώσεως επαγόμενη ροή εξαιτίας των χωρικών μεταβολών της πυκνότητας του αερίου μείγματος. Βρήκαν όμως, ότι η επίδραση των δύο αυτών διαφορών από το θεωρητικό μοντέλο ροής είναι αμελητέα όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο τελικά διασκορπίζεται το μεθάνιο μέσα στο μείγμα, ο οποίος περιγράφεται από τον ενεργό συντελεστή διαχυσιμότητας.

Πριν παρουσιαστεί η πειραματική διαδικασία που χρησιμοποίησαν, αναφέρονται οι ενδιαφέρουσες θεωρητικές απόψεις που παρουσιάζονται στην εισαγωγή της εργασίας τους αφενός μεν για το φαινόμενο στη μόνιμη ροή και αφετέρου στην ταλαντωτική ροή.

Μια ομοιόμορφη συγκέντρωση ενός συστατικού που είναι διαλυμένο εντός ενός ρευστού που ρέει μόνιμα και στρωτά μέσα σε ένα σωλήνα ομοιόμορφης κυκλικής διατομής (γενικότερα τυχαίας διατομής) εκτείνεται σε μια αυξανόμενη αξονική απόσταση με ρυθμό που εξαρτάται από την αξονική συναγωγή της ουσίας και την ακτινική μοριακή διάχυση. Συγκεκριμένα, τα αναλυτικά αποτελέσματα για την επαυξημένη διάχυση στη μόνιμη ροή μπορούν να τεθούν στη μορφή ενός ενεργού συντελεστή αξονικής διάχυσης K (που περιλαμβάνει και την αξονική μοριακή διάχυση), ο οποίος για χρόνους μεγαλύτερους από το χρόνο που απαιτείται για την ακτινική μοριακή διάχυση έχει τη μορφή (Aris 1956) :

$$K = \kappa(1 + R_s)$$

Όπου το R_s έχει δειχθεί από τον Taylor (1953) ότι είναι ίσο με :

$$R_s = \frac{1}{48} \frac{\overline{u_s^2} a^2}{\kappa^2}$$

Όπου $\overline{u_s}$ η μέση ταχύτητα του ρευστού, a η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού και κ ο συντελεστής μοριακής διάχυσης.

Αυτός ο συνδυασμός μηχανισμών μεταφοράς ονομάζεται επαυξημένη διάχυση (augmented diffusion). Όπως υπονοείται από τον όρο αυτό, ο ρυθμός αξονικής μεταφοράς είναι μεγαλύτερος από αυτόν που θα περίμενε κανείς αν υφίσταται μόνο μοριακή διάχυση. Αντίθετα, η ακτινική μοριακή διάχυση δρα για να μειώσει τον καθαρό ρυθμό διασποράς από αυτόν που θα συνέβαινε αν υφίσταται μόνο συναγωγή, γεγονός που οφείλεται στη μετανάστευση των διασκορπιζόμενων συστατικών μεταξύ της περιοχής της ταχείας κινήσεως του ρευστού, πλησίον του άξονα του αγωγού, και των βραδέως κινούμενων περιοχών πλησίον του τοιχώματος. Κατά συνέπεια η διασπορά που παρατηρείται στη μόνιμη ροή θα μπορούσε επίσης να περιγραφεί ως μειωμένη συναγωγική μεταφορά λόγω διάχυσης (diffusion convective transport).

Όσον αφορά το φαινόμενο της επαυξημένης αξονικής διασποράς σε ταλαντωτικές ροές (shear augmented axial dispersion in oscillatory flows) οι μηχανισμοί συναγωγής και διάχυσης είναι όμοιοι με αυτούς της μόνιμης ροής, αλλά τα αποτελέσματα διαφέρουν σημαντικά γιατί τότε για πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές της αδιάστατης συχνότητας (παραμέτρου του Womersley) η αύξηση στη διασπορά γίνεται μηδενική, αν όλες οι άλλες συνθήκες παραμένουν σταθερές. Πάντοτε υποτίθεται ότι η ακτινική διάχυση γίνεται αρκετά γρήγορα ώστε να φτάσει στη μόνιμη κατάσταση σε χρόνο πολύ μικρότερο από το χρόνο που απαιτείται για τη συναγωγή της ουσίας σε απόσταση όσο το πλάτος της ροής (τυπικά: περίοδος της ταλάντωσης). Σημειώνεται ότι οι απόψεις στο σημείο αυτό δεν είναι και πολύ ξεκάθαρες με τον τρόπο που διατυπώνονται, γιατί αν ο όγκος εμβολισμού παραμένει σταθερός για παράδειγμα, και η παράμετρος του Womersley αυξάνει τότε αυξάνεται θεωρητικά (κατά Watson για τη στρωτή ταλαντούμενη ροή) μέχρι το άπειρο το ποσοστό αύξησης του συντελεστή επαυξημένης διάχυσης. Επίσης ακριβώς το ίδιο φαίνεται από τη σχέση

$$\frac{D}{D_m} = 1 + 0.075 \frac{\Delta x^2 f}{\nu}$$

για τυρβώδεις ταλαντούμενες ροές που εξήγαγαν πειραματικά οι Jaeger και

Kurzweg, από όπου προκύπτει καθαρά ότι η αύξηση της συχνότητας συνεπάγεται άμεση επαύξηση της διασποράς. Αντίθετα, αυτό που μάλλον φαίνεται να υποστηρίζεται είναι το γεγονός ότι, όπως προκύπτει από τη θεωρία του Watson και τη σχέση των Jaeger και Kurzweg, για σταθερή κλίση πίεσης ο όγκος εμβολισμού γίνεται μηδενικός (άρα και το Δx) σε μεγάλες συχνότητες και επομένως $R \rightarrow 0$, ενώ για σταθερό όγκο εμβολισμού σε μικρές συχνότητες είναι επίσης $R \rightarrow 0$.

Ο Watson έδειξε ότι σε ένα μακρύ αγωγό ομοιόμορφης διατομής, η χρονικά μέση παροχή κάποιου συστατικού που βρίσκεται διαλυμένο μέσα σε ένα ταλαντούμενο νευτώνειο ρευστό και του οποίου η μέση κατανομή της συγκέντρωσης είναι γραμμική, διαμέσου μια στάσιμης διατομής του αγωγού δίνεται από την :

$$\overline{q_c} = -K \frac{d\overline{\theta}}{dx}$$

Όπου $\bar{\theta}$ είναι η χρονικά μέση τιμή της συγκέντρωσης του συστατικού επί μιας διατομής και το K είναι ο ενεργός συντελεστής αξονικής διάχυσης για την ταλαντούμενη ροή, ο οποίος βρίσκεται από τις σχέσεις :

$$\frac{K}{\kappa} = 1 + f(a, Sc)Pe^2$$

$$\frac{K}{\kappa} = 1 + h(a, Sc)\left(\frac{V}{a^3}\right)^2$$

Αναφέρεται ότι οι παραπάνω σχέσεις εφαρμόζονται αυστηρά μόνο για την περίπτωση καθαρώς ταλαντούμενης ροής μέσα σε ένα απείρωσ μακρύ αγωγό με μόνιμες συντοριακές συνθήκες και μετά από αρκετό χρόνο ώστε το φαινόμενο να φτάσει στη μόνιμη κατάσταση, όπου η αξονική κλίση (axial gradient) της μέσης συγκέντρωσης $\bar{\theta}$ να είναι σχεδόν γραμμική (Smith 1982, Allen 1981).

Παρατήρηση :

Κατά τη θεωρία του Watson η κατανομή της μέσης τιμής της συγκέντρωσης πρέπει να είναι γραμμική, δηλαδή η αξονική κλίση πρέπει να είναι σταθερή όταν η ροή είναι αμιγώς ταλαντωτική. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που υπερτίθεται και μόνιμη ροή όπως θα δειχθεί παρακάτω, τότε θεωρητικά η μόνιμη κατανομή της συγκέντρωσης προκύπτει εκθετικής μορφής, αντίστοιχα όπως και στο πείραμα των Jaeger και Kurzweg. Τονίζεται όμως ότι στα δύο αυτά άρθρα δεν παρουσιάζονται μετρήσεις της συγκέντρωσης κατά μήκος του αγωγού στη μόνιμη κατάσταση.

Οι Joshi, Kamm, Drazen, Slutsky χρησιμοποίησαν τη διάταξη του παρακάτω σχήματος όπου στο αριστερό άκρο του διαφανούς quartz σωλήνα διοχετεύεται ομοιόμορφα και με σταθερή παροχή μέσω κατάλληλης συσκευής το μεθάνιο, το οποίο έχει συντελεστή διάχυσης $\kappa=0.17 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Η έξοδος του σωλήνα, δηλαδή το δεξί άκρο, είναι ανοικτό στον ατμοσφαιρικό αέρα του εργαστηρίου στον οποίο η συγκέντρωση του μεθανίου είναι σχεδόν μηδενική.

Στο αριστερό άκρο του σωλήνα υπάρχει ο μηχανισμός δημιουργίας ταλαντώσεων αερίων (μεθανίου και αέρα) μέσα στο σωλήνα, που αποτελείται από ένα κινητήρα που οδηγεί ένα πιστόνι από γραφίτη μέσα σε ένα γυάλινο κύλινδρο. Ο γυάλινος κύλινδρος συνδέεται στο αριστερό άκρο του σωλήνα με ένα χωνί, ώστε η ροή να προκύπτει κατά το δυνατόν ομοιόμορφη. Οι Joshi, Kamm, Drazen, Slutsky θεωρούν (όπως και οι Jaeger και Kurzweg) ότι η ροή είναι υπέρθεση δύο επιμέρους ροών, μιας μόνιμου ροής των αερίων μαζών προς την έξοδο του σωλήνα που οφείλεται στη μόνιμη έγχυση μεθανίου στο αριστερό άκρο του σωλήνα και της ταλαντωτικής ροής που δημιουργείται από το μηχανισμό με το έμβολο. Παρατηρούμε ότι ο τύπος της ροής που χρησιμοποιήθηκε είναι ακριβώς ίδιος με τον τύπο της ροής στο πείραμα των Jaeger και Kurzweg. Η διαφορά των δύο πειραμάτων έγκειται στο γεγονός ότι στο πείραμα των Jaeger και Kurzweg (τυρβώδεις ροές) το αέριο που ενδιαφέρει που είναι το άζωτο, δηλαδή ουσιαστικά ο αέρας, κινείται προς το εσωτερικό του σωλήνα, ενώ στη περίπτωση των Joshi, Kamm, Drazen, Slutsky (στρωτές ροές) το αέριο που ενδιαφέρει, δηλαδή το μεθάνιο, κινείται προς την έξοδο.

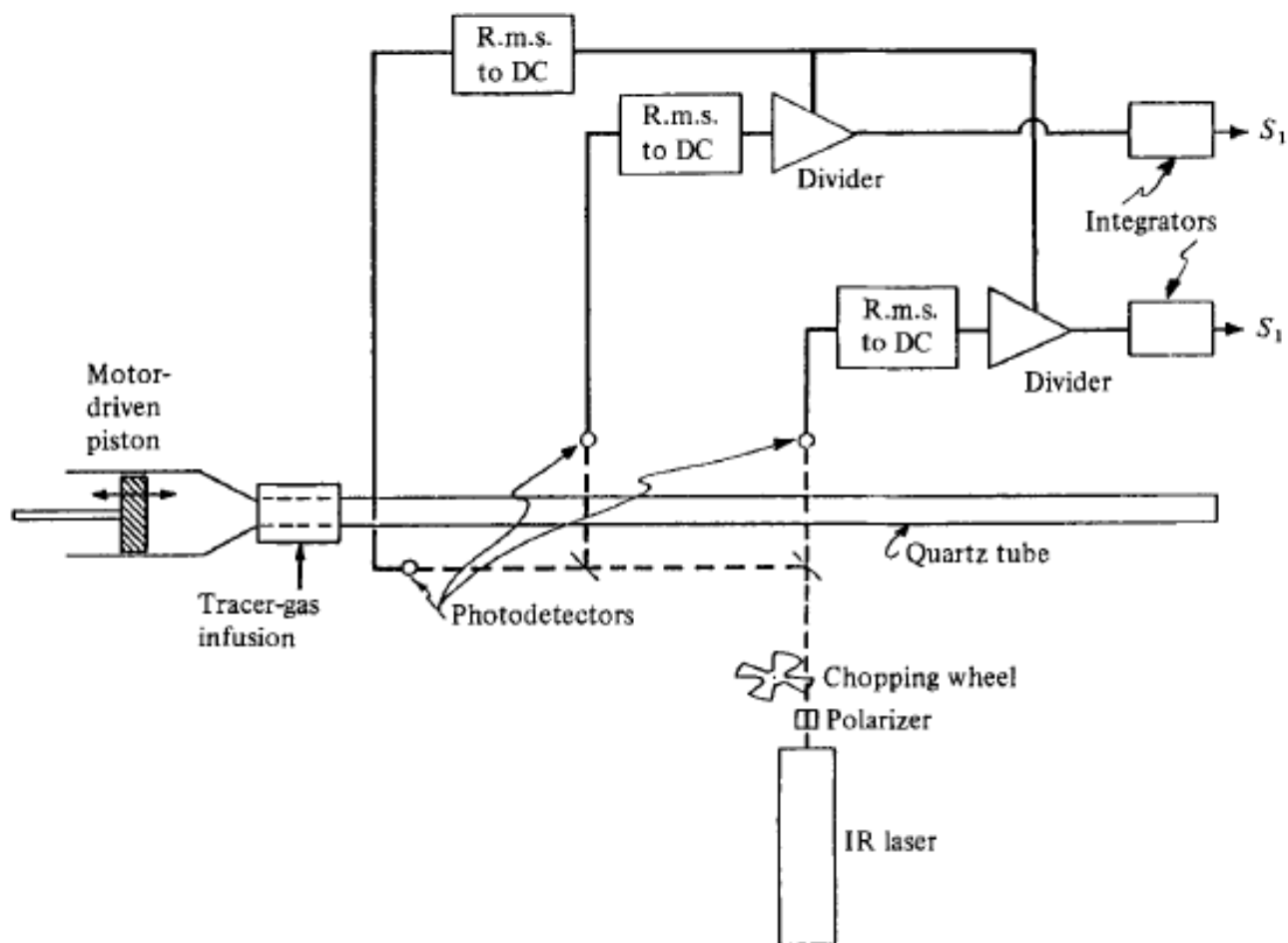


FIGURE 1. Experimental apparatus with signal-conditioning components.

Επομένως θεωρούνται δύο συνιστώσες της ταχύτητας :

- Μια μέση τιμή ταχύτητας χωρικά σταθμισμένη επί της διατομής και χρονικά σταθμισμένη σε μια περίοδο, από τα αριστερά προς τα δεξιά, που οφείλεται προφανώς στη μόνιμη παροχή του μεθανίου αφού η ταλαντωτική ροή έχει αντίστοιχη μέση τιμή μηδέν.
- Στην περιοδικής φύσης ταχύτητας της ταλαντωτικής ροής που επάγεται από το έμβολο.

Ο άξονας x λαμβάνεται κατά το μήκος του σωλήνα με φορά προς την έξοδο του στον ατμοσφαιρικό αέρα. Προφανώς, οι ταλαντώσεις του μίγματος των αερίων θα πρέπει να ήταν μικρές ώστε η διαφορά του μεθανίου προς την έξοδο του σωλήνα να μην οφείλεται σε καμία περίπτωση μόνο σε συναγωγή αλλά ταυτόχρονα σε συναγωγή εξαιτίας της μόνιμου ροής και σε επαυξημένη διάχυση. Η μέση παροχή του μεθανίου \bar{q}_c λοιπόν μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\bar{q}_c = \bar{\theta} \bar{u} - K \frac{d\bar{\theta}}{dx} \quad (1.3.1)$$

Η οποία είναι μια παντελώς όμοια εξίσωση με αυτή που χρησιμοποιούν οι Jaeger και Kurzweg, μόνο που στην περίπτωση του πειράματος τους αυτή είναι ίση με το μηδέν. Προφανώς, θα πρέπει να είναι κατά τα γνωστά :

$$\frac{d\bar{q}_c}{dx} = \frac{d\bar{\theta}}{dx} u - K \frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} = -A \frac{d\bar{\theta}}{dt} = 0$$

Δηλαδή η παροχή του μεθανίου είναι σταθερή και ίση με αυτή στην αριστερή είσοδο του σωλήνα, αφού το φαινόμενο εξετάζεται στη μόνιμη κατάσταση.

Οι Joshi, Kamm, Drazen, Slutsky φτάνουν στην εξίσωση (1.3.1) με πιο αναλυτικό τρόπο ώστε να συσχετίσουν και τυπικά το αποτέλεσμα τους με τη θεωρία του Watson. Ειδικότερα από αυτήν την άποψη, είναι σημαντική η τελευταία πρόταση στη σελίδα 247 του περιοδικού, όπου διατυπώνεται η παρατήρηση ότι η ανάλυση του Watson ισχύει ανεξάρτητα από το πώς η ροή μεταβάλλεται με το χρόνο και πρέπει να αναφέρονται στην παρατήρηση του Watson ότι η μόνιμη και η ταλαντωτική ροή δρουν κατά ένα προσθετικό τρόπο όσον αφορά τη διασπορά του συστατικού (βλ. κεφ.2 και άρθρο Watson σελ 244).

Σημειώνεται επίσης, ότι η ολοκλήρωση της (1.3.1) χρειάζεται προσοχή γιατί πρέπει να μην χρησιμοποιηθεί αρχικά η οριακή συνθήκη στο αριστερό άκρο του αγωγού $\bar{q}_c = \bar{u}$ (το $\bar{\theta}$ λαμβάνεται ως αδιάστατη συγκέντρωση δηλαδή ως ποσοστό όγκου), αλλά μια αυθαίρετη. Τελικώς, προκύπτει ότι αν είναι γνωστή η συγκέντρωση $\bar{\theta}_1$ σε μια θέση x_1 του αγωγού, τότε θα πρέπει στη μόνιμη κατάσταση η συγκέντρωση να είναι :

$$\bar{\theta} = 1 - (1 - \bar{\theta}_1) \exp \left[\frac{\bar{q}_c}{K} (x - x_1) \right]$$

Οπότε το K μπορεί να βρεθεί αν είναι γνωστές οι συγκεντρώσεις σε δύο σημεία του αγωγού.

Η μέτρηση των συγκεντρώσεων μεθανίου βασίστηκε στο φαινόμενο της έντονης απορροφητικότητας του σε ένα ορισμένο εύρος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που παραγόταν από μια συσκευή Laser και η οποία εξασθενούσε καθώς περνούσε μέσα από το ρευστό ανάλογα με τη συγκέντρωση του μεθανίου που βρισκόταν στη διαδρομή της.

Επειδή η δέσμη του Laser έδινε κατά τον τρόπο αυτό το διαμετρικό μέσο όρο της συγκέντρωσης, οι Joshi, Kamm, Drazen, Slutsky υπολόγισαν από τα θεωρητικά αποτελέσματα του Watson τα προφίλ κατανομής της συγκέντρωσης σε διάφορες φάσεις ώστε να καθορίσουν πιθανό λάθος στις μετρήσεις. Αποδείχθηκε ότι το θεωρητικό λάθος στη χειρότερη των περιπτώσεων ήταν γύρω στο 5%.

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι πειραματικές μετρήσεις και οι αντίστοιχες πειραματικές καμπύλες. Διαπιστώνεται συμφωνία με τη θεωρία. Περαιτέρω διευκρινήσεις δε δίνονται στο σημείο αυτό γιατί παρόμοια διαγράμματα (εκτός από το πρώτο) υπολογίζονται στο κεφ.3.

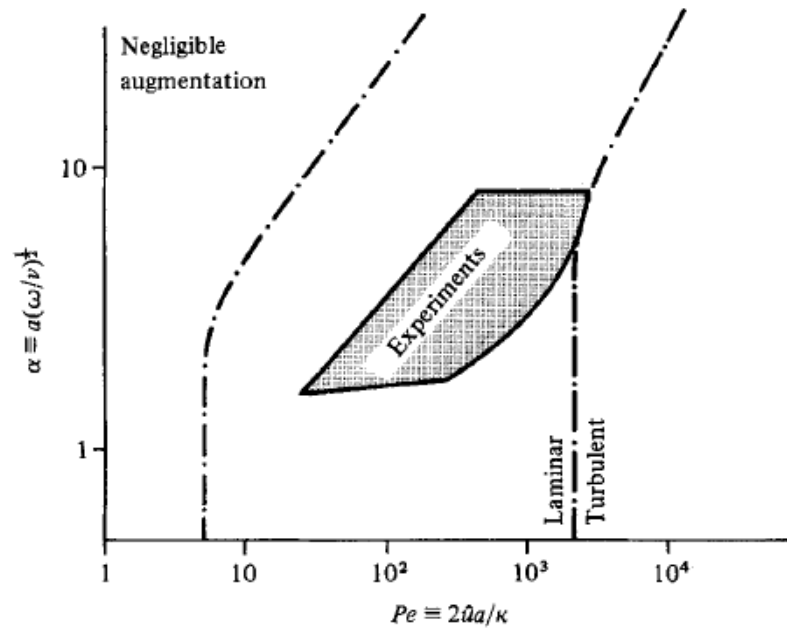


FIGURE 2. A mapping of the range of experiments. The extended 'laminar-turbulent' transition line is for $\sigma \equiv \nu/\kappa = 1$. For low α , the transition line is based on the root-mean-square velocity.

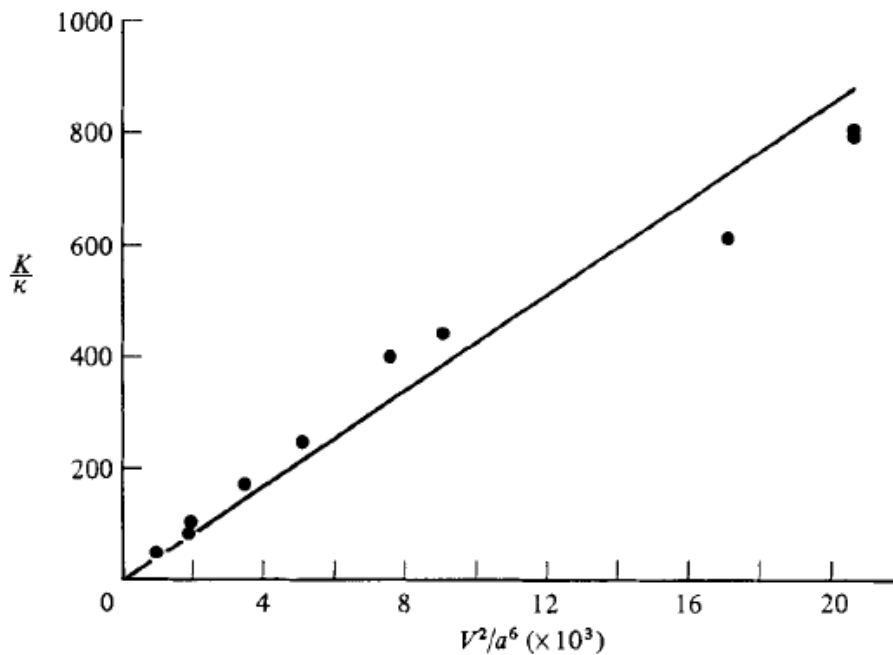


FIGURE 3. Results for one series of tests in which the frequency was held constant while the stroke volume was varied. The six points (superimposed) at $V^2/a^6 = 2.02 \times 10^4$ and the two points at $V^2/a^6 = 3380$ were obtained for a range of methane flow rates (see text). Solid line, theoretical predictions for corresponding values of V^2/a^6 , (10).

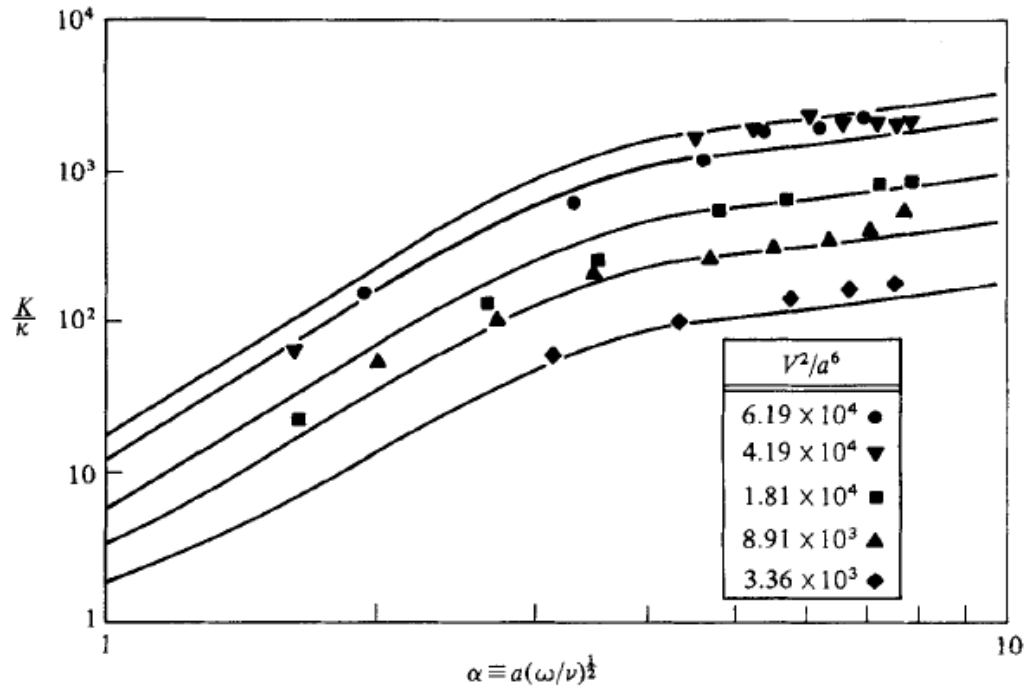


FIGURE 4. Results for several test sequences in which the stroke volume was held constant while the oscillation frequency was varied. Solid lines, theoretical prediction, (10).

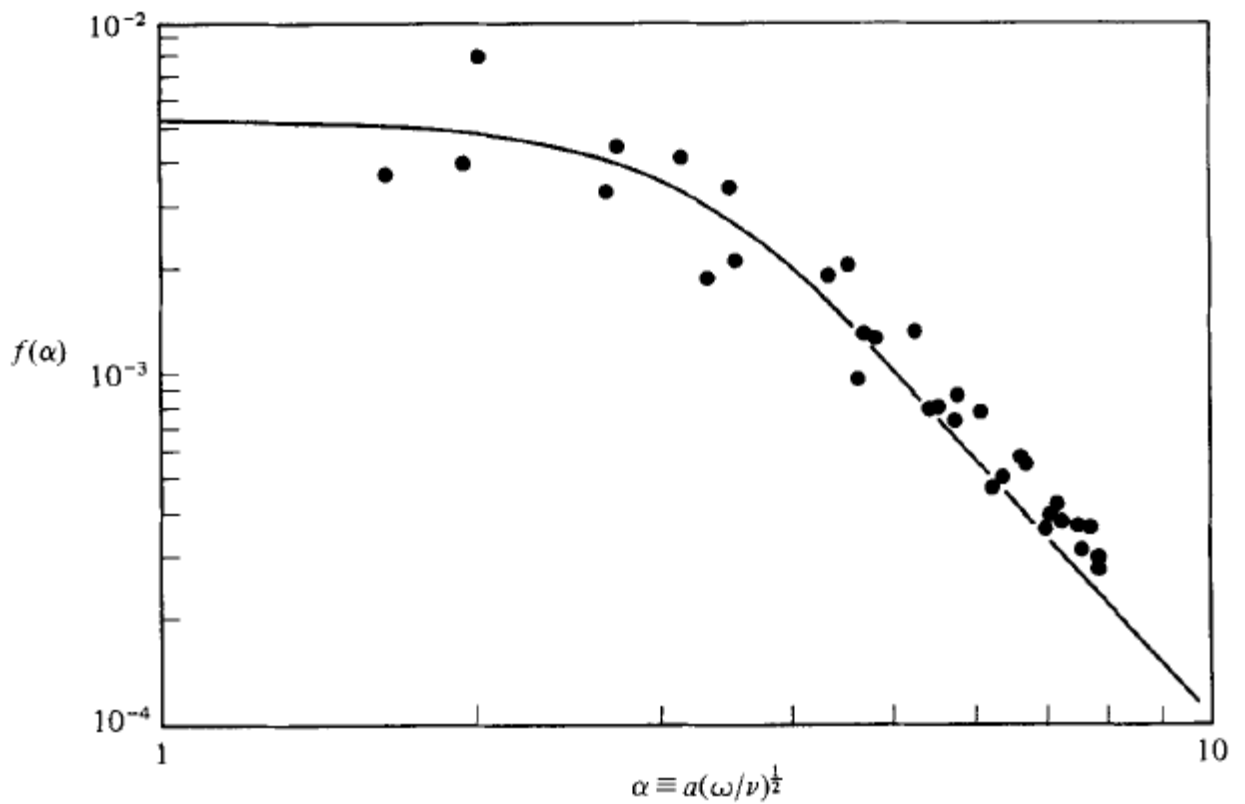


FIGURE 5. All the results from figures 3 and 4 plotted according to (11). Solid line, theoretical prediction.

1.4 Πειραματική μελέτη των Kurzweg, Howell και Jaeger.

U.H. Kurzweg, G. Howell, M.J. Jaeger, Phys. Fluids 27, 1046 (1984)

Enhanced dispersion in oscillatory flows

Μετά τη θεωρητική αντιμετώπιση του Watson, οι Kurzweg, Howell, Jaeger δημοσίευσαν μια νέα εργασία με σκοπό να συγκρίνουν τις παλαιότερες, καθώς και τις νέες μετρήσεις τους με τις προβλέψεις της θεωρίας. Οι μετρήσεις έγιναν για τυρβώδεις ταλαντωτικές ροές αλλά είχε ήδη προταθεί στην πρώτη τους εργασία ότι η διασπορά οφειλόταν σε ένα μηχανισμό που περιλαμβάνει φαινόμενα έντονης διάχυσης μέσω των λεπτών οριακών στρωμάτων στα τοιχώματα του σωλήνα που υπάρχουν σε αυτού του τύπου τις ροές. Η άποψη αυτή προήλθε βασικά από τις σημαντικές διαφορές που παρατηρήθηκαν κατά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με τις προβλέψεις του Taylor για τη μόνιμη τυρβώδη ροή προσαρμοσμένες στην ταλαντωτική κίνηση. Επιπρόσθετα η άποψη τους αυτή ενισχύθηκε από το γεγονός ότι προσαρμόστηκε με σχετική επιτυχία η έκφραση

$$\frac{D}{D_m} = 1 + 0.075 \frac{\Delta x^2 f}{\nu} \quad \text{στην οποία η κύρια παράμετρος } \Delta x \sqrt{\frac{f}{\nu}} \text{ είναι ανάλογη προς το λόγο της}$$

παλιρροιακής μετατόπισης προς το πάχος του οριακού στρώματος όπου η ροή είναι στρωτή, δείχνοντας μια πιθανή συσχέτιση. Τα αποτελέσματα δείχνονται συνολικά στο παρακάτω διάγραμμα.

Στο διάγραμμα αυτό συγκρίνεται μια αδιάστατη παράμετρος $P=P(a,S)$, που υπολογίζεται με βάση τον πειραματικά μετρούμενο επαυξημένο συντελεστή διάχυσης από τη σχέση :

$$P(a) = \left(\frac{D}{D_m} - 1 \right) \left(\frac{16a^2}{(\Delta z S)^2} \right)$$

Και της οποίας η έκφραση υπολογίζεται θεωρητικά, με βάση τα αποτελέσματα του Watson.

Οι πειραματικές και οι θεωρητικές τιμές της παραμέτρου για αριθμό Schmidt $Sc=0.74$ κρίνεται ότι συμφωνούν μεταξύ τους, παρόλο που τα θεωρητικά αποτελέσματα αναφέρονται σε στρωτή ροή και τα πειραματικά σε τυρβώδη, γεγονός που επιβεβαιώνει την αρχική υπόθεση ότι ο μηχανισμός περιλαμβάνει κυρίως διασπορά μέσω των οριακών στρωμάτων.

Επίσης αναφέρεται ότι από μετρήσεις του συντελεστή διασποράς σε διακλαδωμένα συστήματα σωλήνων και στην κοιλότητα του βρογχικού δέντρου σκύλων προκύπτει ότι το D εξαρτάται από το τετράγωνο της παλιρροιακής μετατόπισης και την πρώτη δύναμη της συχνότητας, για αριθμούς Womersley στο διάστημα $5 < \alpha < 12$. Αυτό αποτελεί μια ένδειξη ότι η διαδικασία του μηχανικώς υποβοηθούμενου υψηλής συχνότητας αερισμού του πνευμονικού συστήματος μπορεί κατά ένα μεγάλο μέρος να οφείλεται σε ένα παρόμοιο μηχανισμό στρωτής διασποράς (laminar dispersion) και να μην επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τις ανωμαλίες της ροής στους κόμβους διακλαδώσεων.

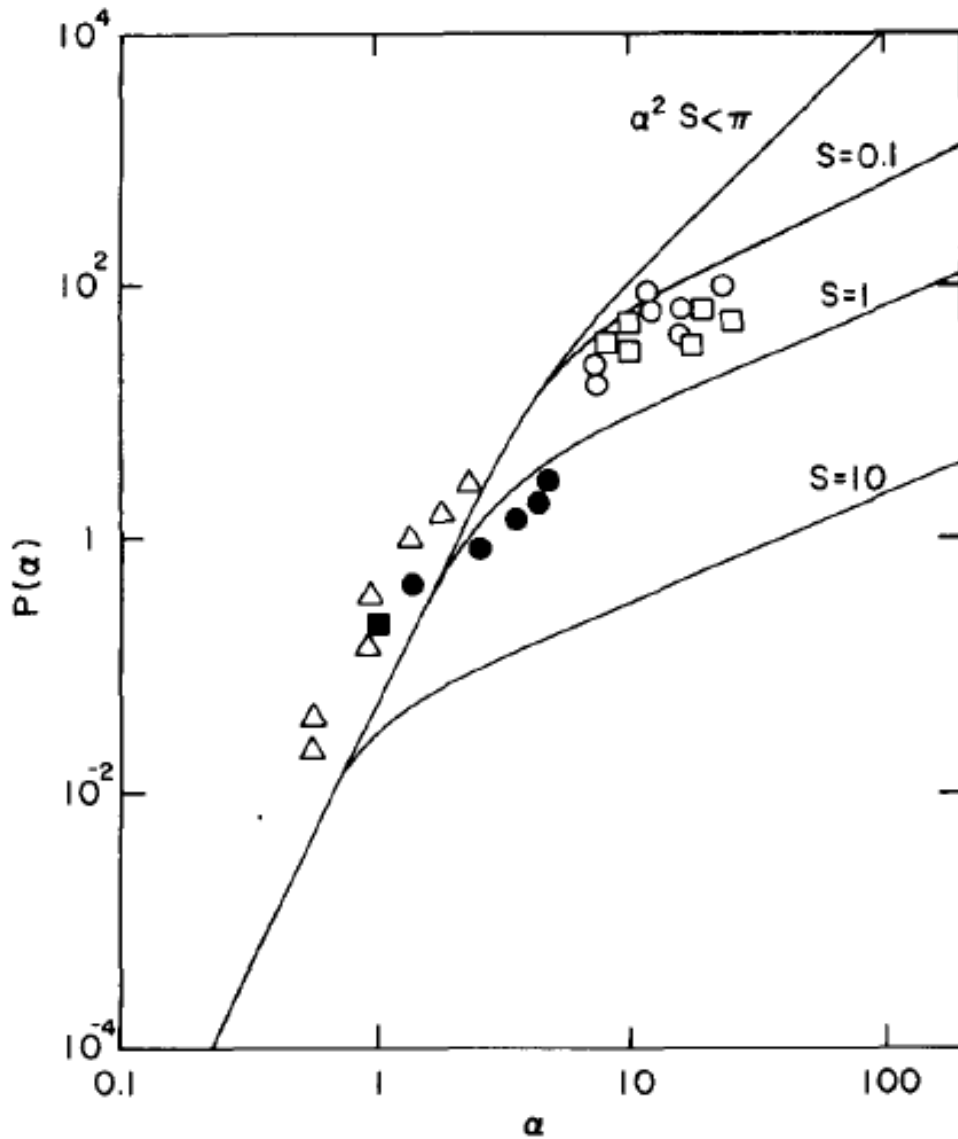


FIG. 1. Comparison of the experimentally measured enhanced dispersion coefficients in oscillatory pipe flows with those predicted analytically. The experimental points correspond to the following: \circ —thick walled flexible tubes with $a = 0.79$ cm or $a = 0.64$ cm; \square —rigid acrylic pipes with $a = 0.79$ cm and of 150 cm length; \blacksquare —capillary bundle with $a = 0.047$ cm; \triangle —3 mm diameter beads with $a = 0.06$ cm; \bullet —silt loam experiments of Ref. 3, effective radius $a = 0.08$ cm.

1.5 Πειραματική μελέτη του U.H Kurzweg.

Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels, J. Fluid Mech (1985) vol 156, 291-300

Είναι γνωστό ότι για στρωτή ροή μέσα σε τριχοειδείς σωλήνες η αξονική διάχυση ουσιών σε μόνιμη αλλά και ταλαντούμενη ροή (Taylor 1953, Aris 1956, Chatwin 1975, Jaeger 1983, Watson 1983, Joshi 1983) είναι σημαντικά μεγαλύτερη σε σχέση με την απουσία ροής. Αυτή η ενισχυμένη μεταφορά προκύπτει από την αλληλεπίδραση του ακτινικά εξαρτώμενου αξονικού προφίλ ταχύτητας και του αντίστοιχα ακτινικά διαφορετικού προφίλ συγκέντρωσης και μπορούν να οδηγήσουν σε μεγαλύτερης τάξης μεγέθους συντελεστή ενεργού αξονικής διάχυσης από την αντίστοιχη τιμή του συντελεστή μοριακής διάχυσης. Ο Kurzweg σε παλαιότερη εργασία του (1983) είχε προτείνει πως παρόμοια διαδικασία διασποράς θα πρέπει να ισχύει και στη μεταφορά θερμότητας λόγω της ομοιότητας των εξισώσεων της διάχυσης και της θερμικής αγωγιμότητας. Πράγματι, με εξαίρεση κάποιες πιο σύνθετες οριακές συνθήκες στο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας, τα αποτελέσματα του προβλήματος της διάχυσης ουσιών είναι άμεσα εφαρμόσιμα. Η μελέτη περιορίζεται αυστηρά στη ταλαντούμενη ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών, αλλά σε αντίθεση με τις προηγούμενες μελέτες δεν θέτει περιορισμούς για τη συχνότητα ταλάντωσης ή την αγωγιμότητα των τοιχωμάτων. Στόχος της μελέτης είναι ο καθορισμός της ενισχυμένης αξονικής θερμικής διαχυσιμότητας σαν συνάρτηση του αδιάστατου αριθμού Womersley και του αριθμού Prandtl του ρευστού και της αναλογίας του ρευστού προς την αγωγιμότητα των τοιχωμάτων.

1.6 Πειραματική μελέτη των A.A. Lambert, S. Cuevas, J.A. del Rio, M. Lopez de Haro.

Heat transfer enhancement in oscillatory flows of Newtonian and viscoelastic fluids. International Journal of Heat and Mass Transfer 52 (2009) 5472–5478.

Ανάμεσα στις διάφορες μεθόδους απορρόφησης, η χρήση ταλαντούμενης ροής χρίζει ιδιαίτερης σημασίας. Έχει διαπιστωθεί πως η ύπαρξη μιας ταλαντούμενης ροής μπορεί να βελτιώσει μια δεδομένη διαδικασία μεταφοράς. Για παράδειγμα η αξονική διασπορά ουσιών για στρωτή ταλαντούμενη ροή εντός τριχοειδών αγωγών είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη που προκύπτει από καθαρή μοριακή διάχυση σε περίπτωση απουσίας της ροής. Επιπλέον, ότι η δυναμική διαπερατότητα του ιξωδοελαστικού ρευστού που ρέει μέσα σε αγωγό μπορεί να ενισχυθεί σημαντικά για συγκεκριμένες συχνότητες συντονισμού ταλάντωσης. Άρα μπορεί να επιτευχθεί βελτιωμένη ταχύτητα ροής υπό ορισμένες συνθήκες. Λόγω της αναλογίας μεταξύ θερμότητας και μεταφοράς μάζας, έχει διαπιστωθεί από τον Kurzweg ότι σε μηδενική μέση ταλάντωση ροής νευτώνειου ρευστού σε αγωγό που συνδέει δύο δεξαμενές ρευστού σε διαφορετικές θερμοκρασίες, η ενεργή θερμική διαχυτότητα φτάνει σε ένα μέγιστο για συγκεκριμένη συχνότητα ταλάντωσης. Αυτό οδηγεί σε ενισχυμένη διαμήκη μεταφορά θερμότητας, η οποία δε περιλαμβάνει καθαρή μεταφορά μάζας όσο η ροή παραμένει στρωτή. Λόγω της παρουσίας διαμήκους κλίσης της θερμοκρασίας η απορρόφηση προκύπτει από το συνδυασμό δύο μηχανισμών μεταφοράς θερμικής ενέργειας, της μεταφοράς λόγω πλευρικής διάχυσης στα οριακά στρώματα και τα τοιχώματα και της μεταφοράς λόγω περιοδικής διαμήκους συναγωγής. Αυτό μπορεί να οδηγήσει

σε σημαντική αύξηση της ικανότητας του ρευστού για διαμήκη μεταφορά θερμότητας, όταν επιτυγχάνονται συγκεκριμένες συνθήκες. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτής της μεθόδου μεταφοράς θερμότητας διατηρούνται με την προϋπόθεση ότι η ροή είναι αυστηρά στρωτή και κατά συνέπεια εφαρμόζεται και για ροές με μικρό αριθμό Reynolds. Μια σημαντική παρατήρηση της μελέτης αυτής είναι πως οι ροές με υψηλές συχνότητες και μικρούς αριθμούς Reynolds μπορούν να χαρακτηριστούν ρεολογικές. Η μελέτη των A.A. Lambert, S. Cuevas, J.A. del Rio, M. Lopez de Haro γενικεύει την μελέτη του Kurzweg (παρ. 1.5) με δύο τρόπους. Πρώτα, παρέχοντας αναλυτική λύση για τη θερμοκρασία του ρευστού μέσα σε κυλινδρικό αγωγό με μονωμένα τοιχώματα, που μπορεί να εφαρμοστεί τόσο για νευτώνεια ρευστά όσο και για το ρευστό του Maxwell για ταλαντούμενες ροές και με μικρές τροποποιήσεις μπορεί να εφαρμοστεί σε μια ποικιλία ιξωδοελαστικών ρευστών λόγω του προτεινόμενου γραμμικού συστήματος. Δεύτερον, χρησιμοποιώντας τα αναλυτικά προφίλ της ταχύτητας και της θερμοκρασίας του ρευστού υπολογίζουν μια ρητή έκφραση της ενεργής θερμικής διαχυσιμότητας για το ρευστό του Maxwell και διερευνούν τη συμπεριφορά της για ένα ευρύ φάσμα αριθμών Womersley και Pradlt. Η ανάλυση της ενεργής θερμικής διαχυσιμότητας δίνει την δυνατότητα να αποδείξει την ύπαρξη πολλαπλών συχνοτήτων συντονισμού για μεταφορά θερμότητας ταλαντούμενων ιξωδοελαστικών ρευστών. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν πως όταν ο χρόνος χαλάρωσης τείνει στο μηδέν, τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά της μελέτης του Kurzweg. Μάλιστα επέκτειναν την μελέτη του Kurzweg δίνοντας αναλυτικά αποτελέσματα για κάθε γινόμενο του τετραγώνου του αριθμού Womersley επί τον αριθμό Pradlt, λογαριάζοντας επίσης τις ιξωδοελαστικές ιδιότητες του ρευστού του Maxwell, οδηγώντας σε ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά που δεν συναντώνται στα νευτώνεια ρευστά. Ειδικότερα για αρκετές συχνότητες υπάρχει σημαντική βελτίωση της ενεργής θερμικής διαχυσιμότητας όταν χρησιμοποιείται ιξωδοελαστικό ρευστό. Στη περίπτωση αυτή εκτός από την εξάρτηση από τους αριθμούς Womersley και Pradlt υπάρχει εξάρτηση και από τον αριθμό Deborah (αριθμός ελαστικότητας). Η μέγιστη τιμή της ενεργής θερμικής διαχυσιμότητας ως συνάρτηση του αριθμού Womersley μπορεί να είναι μεγαλύτερη από εκείνη για νευτώνειο ρευστό για τον ίδιο αριθμό Pradlt. Βλέπουμε λοιπόν πως όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Deborah τόσο μεγαλύτερο είναι το μέγιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εξαναγκασμένη διάχυση σε μόνιμη και ταλαντούμενη ροή νευτώνειου ρευστού μεταξύ σε αγωγούς.

2.1 Θεωρία του Taylor.

Η μελέτη του φαινομένου του διασκορπισμού μιας διαλυτής ουσίας μέσα σε ένα ρευστό μέσο εμπίπτει στο γενικότερο πρόβλημα της ανάμειξης ρευστών και ουσιών. Ένα από τα φαινόμενα είναι αυτό που παρατήρησε πειραματικά ο Griffiths και εξήγησε θεωρητικά ο Taylor. Η θεωρία του Taylor είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα από μαθηματικής απόψεως και για το λόγο αυτό κέντρισε το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, με συνέπεια να δημοσιευτεί στη συνέχεια μια πληθώρα εργασιών σχετικά με το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Περιγραφή του φαινομένου :

Αν σε ρευστό που ρέει μέσα σε σωλήνα μικρής διατομής με μικρή ταχύτητα βρίσκεται διαλυμένη μια «στήλη» ουσίας (π.χ. άλας, χρωστική), τότε η στήλη της ουσίας κινείται σα στερεό με τη μέση ταχύτητα της ροής και διαχέεται συμμετρικά κατά την αξονική κατεύθυνση.

Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε πρώτη φορά από τον Griffiths σε πειράματα που διεξήγαγε για τον προσδιορισμό του ιξώδους του νερού σε πολύ μικρές ταχύτητες ροής μέσα σε τριχοειδικό σωλήνα. Τοποθετούσε μια σταγόνα φθορίζουσας ουσίας στο ρευστό με αποτέλεσμα να απλώνεται κατά ένα συμμετρικό γύρω από ένα σημείο που κινείται με τη μέση ταχύτητα του νερού. Για την εξήγηση του φαινομένου χρησιμοποίησε τα εξής επιχειρήματα :

- Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι εάν η ένταση του χρώματος ήταν σταθερή σε μια διατομή του σωλήνα, τότε το χρώμα θα διερχόταν κατά μήκος του σωλήνα, ακριβώς σαν το νερό να ταξίδευε ως στερεά στήλη, με άλλα λόγια ο διασκορπισμός της ουσίας οφείλεται μόνο στη μοριακή διάχυση.
- Αν υποθέσουμε ότι παρέχουμε νερό στο σωλήνα με σταθερό ρυθμό και για κάποιο χρονικό διάστημα αντικαθιστούμε το νερό με διάλυμα της χρωστικής φθορίζουσας ουσίας, τότε η στήλη της χρωστικής φθορίζουσας ουσίας που κινείται με σταθερή και μικρή ταχύτητα θα αυξάνει σε μήκος αργά, εξαιτίας της αξονικής διάχυσης και είναι φανερό ότι το κέντρο της στήλης θα κινείται με τη μέση ταχύτητα του ρευστού.

Όπως πρώτος παρατήρησε ο Taylor τα επιχειρήματα αυτά δεν ευσταθούν γιατί η κατανομή της ταχύτητας του κάθε ιξώδους ρευστού (στη συγκεκριμένη περίπτωση νερό) είναι παραβολική. Κατά συνέπεια, επειδή η ταχύτητα στο κέντρο του αγωγού είναι διπλάσια από τη μέση ταχύτητα του ρευστού με την οποία κινείται η «στήλη» της ουσίας θα πρέπει το καθαρό νερό που βρίσκεται πριν από τη στήλη να εισχωρεί σε αυτή και στη συνέχεια να εξέρχεται, οπότε όταν θα βρίσκεται μέσα στη στήλη αρχικά θα πρέπει να χρωματίζεται και στη συνέχεια να αποχρωματίζεται. Το γεγονός αυτό πράγματι συμβαίνει, είναι αξιοσημείωτο, όπως επίσης και το ότι η ουσία διασκορπίζεται συμμετρικά γύρω από ένα σημείο που κινείται με τη μέση ταχύτητα του νερού.

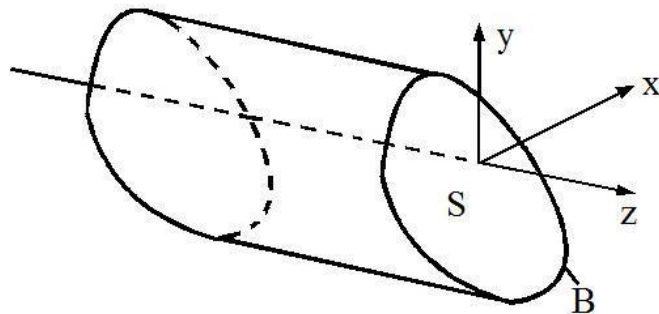
Ο Taylor απέδειξε μέσω ενός μαθηματικού μοντέλου ότι το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί χωρίς να είναι αναγκαία η υπόθεση της αξονικής διάχυσης, αν θεωρηθεί ότι η διασπορά της οφείλεται κυρίως στη συνδυασμένη δράση δύο μηχανισμών :

- i. Αξονικής συναγωγής της ουσίας εξαιτίας της ροής και
- ii. Μοριακής διάχυσης της ουσίας κατά την ακτινική κατεύθυνση.

Επίσης έδειξε ότι η διασπορά της ουσίας, δηλαδή το άπλωμα της γύρω από το σημείο Σ , είναι μεγαλύτερη από αυτή που θα υπήρχε αν οφειλόταν μόνο στη μοριακή διάχυση κατά την αξονική κατεύθυνση, δηλαδή αν το ρευστό κινούταν ως στερεά στήλη και ότι το μέγεθος της είναι δυνατόν να περιγραφεί μέσω ενός εικονικού συντελεστή διαχυσιμότητας (virtual coefficient of diffusivity), ο οποίος μπορεί να προσδιοριστεί από πειραματικές μετρήσεις. Επομένως, τα αποτελέσματα της εργασίας του Griffiths για τον προσδιορισμό του ιξώδους του νερού ήταν οπωσδήποτε λανθασμένα.

Η θεωρία του Taylor :

Η θεωρητική ανάλυση του Taylor συσχετίζει τη διαμήκη διαχυσιμότητα με το συντελεστή μοριακής διάχυσης. Κατά συνέπεια είναι δυνατόν να προσδιοριστεί πειραματικά ο συντελεστής μοριακής διάχυσης με βάση αυτό το φαινόμενο γεγονός που εκμεταλλεύτηκε ο Taylor για να διαπιστώσει την ορθότητα της θεωρίας του. Στα πειράματα που διεξήγαγε ο Taylor χρησιμοποιήθηκε υπερμαγγανικό κάλιο (KMnO_4), που είναι ουδέτερο άλας και τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν τη θεωρία του. Σημειώνεται ότι στην εργασία του αυτή πρότεινε ότι τα αποτελέσματα μπορεί να είναι χρήσιμα σε φυσιολόγους που μπορεί να επιθυμούν να γνωρίζουν πως μια διαλυμένη ουσία διασκορπίζεται σε ροές αίματος. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί το μαθηματικό μοντέλο του Taylor με τρόπο ώστε να γίνει φανερό η συσχέτιση του με τη θεωρία του Watson, η οποία αναλύεται στην επόμενη παράγραφο, της οποίας άλλωστε αποτελεί ειδική περίπτωση.



Σχήμα: Σχηματική παράσταση αγωγού σταθερής διατομής S

Οι εξισώσεις του προβλήματος για διαμορφωμένη ροή σε αγωγό σταθερής διατομής S είναι οι εξής:

$$\nu \nabla^2 w - \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{στο } S \quad \text{με } w = w(x, y, t), \quad w = 0, \quad \forall (x, y) \in B \quad (2.1.1)$$

$$\kappa \nabla^2 \theta - \frac{\partial \theta}{\partial t} = w \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \text{στο } S \quad \text{με } \theta = \theta(x, y, z, t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in B \quad (2.1.2)$$

Όπου S η διατομή του αγωγού και B η περίμετρος της διατομής.

Στη παρούσα περίπτωση το $\frac{\partial p}{\partial z}$ δεν είναι συνάρτηση του χρόνου αλλά μια σταθερά, αφού η ροή είναι μόνιμη. Η λύση λοιπόν της πρώτης εξίσωσης είναι η γνωστή παραβολική κατανομή της ροής Poiseuille σε κυλινδρικό αγωγό :

$$w(r) = \frac{2\bar{w}(a^2 - r^2)}{a^2} \quad (2.1.3)$$

Όπου \bar{w} είναι η μέση ταχύτητα του ρευστού, a η ακτίνα του αγωγού και r η ακτίνα στην οποία υπολογίζεται η ταχύτητα.

Η εξίσωση (2.1.2) σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2.1.4)$$

Αν δεν υφίσταται μοριακή διάχυση, δηλαδή $\kappa = 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται η απλούστερη εξίσωση υπερβολικού τύπου :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2.1.5)$$

η οποία ως γνωστό δέχεται λύσεις της μορφής $\theta = \theta(z - wt)$ που στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν ως παράμετρο την ακτίνα r . Ο Taylor εξέτασε αυτό το πρόβλημα που αφορά μόνο συναγωγή της ουσίας από το ρευστό βρίσκοντας τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η κατανομή της μέσης συγκέντρωσης επί διατομής του κατά μήκος του αγωγού και με το πέρασμα του χρόνου, για διάφορες περιπτώσεις αρχικών κατανομών όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Όπως προκύπτει από τη μια τέτοια μελέτη, η μέση συγκέντρωση επί της διατομής μιας αρχικής ομοιόμορφης στήλης ουσίας μήκους X μετατοπίζεται προς τα κατάντι της ροής με τη μέση ταχύτητα και ταυτόχρονα απλώνεται συμμετρικά γύρω από το μέσο της.

Στη συνέχεια έκανε δύο υποθέσεις για να μπορέσει να φθάσει σε μια λύση του προβλήματος όταν υφίσταται και η μοριακή διάχυση. Κατά πρώτον θεώρησε ότι η αξονική μεταφορά της ουσίας οφείλεται κυρίως στη συναγωγή και όχι στην αξονική διάχυση και δεύτερον ότι η κατανομή της συγκέντρωσης επί μιας διατομής γίνεται ομοιόμορφη πολύ γρηγορότερα από το χρόνο που απαιτείται για να προκληθούν σημαντικές μεταβολές της εξαιτίας της συναγωγής, που όμως φαίνεται από το διάγραμμα A3 του ακόλουθου σχήματος, είναι της τάξης του $\frac{L}{u_o}$ όπου L είναι το μήκος της στήλης (X) και u_o η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού.

Από μαθηματικής απόψεως η πρώτη υπόθεση επιβάλλει ότι $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \rightarrow 0$ οπότε η (2.1.4) παίρνει τη μορφή :

$$\frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial t} + w(r) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (2.1.6)$$

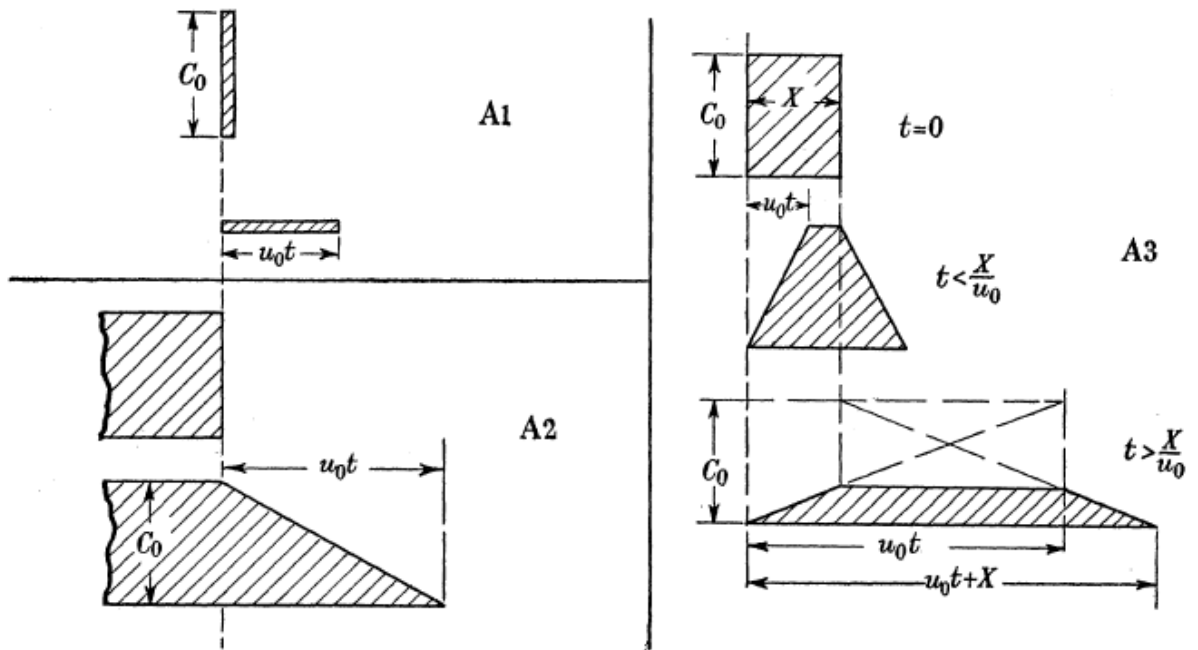


FIGURE 1. Distribution of mean concentration in three cases in absence of molecular diffusion.

Η δεύτερη υπόθεση εκφράζεται με το γεγονός ότι ο χρόνος $\frac{L}{u_0}$ είναι πολύ μεγαλύτερος από το χρόνο που απαιτείται για την εξάλειψη των ανομοιομορφιών της συγκέντρωσης επί μιας διατομής, τον οποίο ο Taylor εκτιμά επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση θέτοντας τον συναγωγικό όρο $w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ και επιβάλλει ότι η συγκέντρωση σε μια διατομή φθάνει στη μόνιμη κατάσταση πολύ γρήγορα όπου $\frac{\partial \theta(r,t)}{\partial t} \approx 0$ δηλαδή ότι $\theta = \theta(r)$.

Τελικά, θεωρεί τη διασπορά της ουσίας σε ένα κινούμενο με τη μέση ταχύτητα της ροής σύστημα συντεταγμένων ($z_1 = z - \bar{w}t$), όπου η (2.1.6) γράφεται :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \{w(r) - \bar{w}\} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (2.1.7)$$

και εξαιτίας της δεύτερης υπόθεσης θέτει $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ και ότι $\frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \text{σταθ.}$ δηλαδή η εξίσωση γίνεται :

$$\{w(r) - \bar{w}\} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \text{σταθ.} \quad (2.1.8)$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι στην ουσία βασίζεται στην αναζήτηση λύσεων της μορφής $\theta = \theta(z_1, r, t)$ που εκφράζουν το γεγονός ότι η ουσία συνεπάγεται $\theta = \theta(z_1)$, συμμετρικά

περί τον άξονα του σωλήνα $\theta = \theta(r)$ και μεταβάλλεται με το χρόνο $\theta = \theta(t)$. Πραγματικά, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.1.6) προκύπτει η εξίσωση (2.1.7). Εξαιτίας του ότι η ακτινική διάχυση λοιπόν γίνεται πολύ γρήγορα, θέτει τη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο ίση με το μηδέν.

Επιπλέον, η κλίση της συγκέντρωσης μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερά $\frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \text{σταθ.}$ σε όλη τη

διατομή, δηλαδή ανεξάρτητη του r .

Η λύση της εξίσωσης (2.1.8) βρίσκεται ίση με $\theta = \theta_{z_1} + \frac{\bar{w}}{4\kappa} \frac{\partial \theta_{z_1}}{\partial z_1} \left(r^2 - \frac{1}{2a^2} r^4 \right)$ όπου θ_{z_1} είναι η τιμή

της συγκέντρωσης του συστατικού επί της τομής του άξονα του αγωγού με την κινούμενη διατομή και επομένως είναι της μορφής που αναμένεται, δηλαδή $\theta = \theta(z_1, r)$.

Στη συνέχεια, ο Taylor υπολογίζει την παροχή της ουσίας μέσα από τη διατομή z_1 η οποία βρίσκεται ίση με :

$$Q = -\frac{\pi a^4 \bar{w}^2}{48\kappa} \frac{\partial \theta_{z_1}}{\partial z_1}$$

και θεωρεί ότι $\frac{\partial \theta_{z_1}}{\partial z_1} = \frac{\partial \theta_m}{\partial z_1}$ όπου θ_m είναι η μέση συγκέντρωση επί της διατομής.

Αφού η μεταβολή της παροχής μεταξύ δύο κινούμενων επιπέδων z_1 και $z_1 + dz_1$ δίνει την αύξηση της συγκέντρωσης του συστατικού στο μεταξύ τους χώρο θα είναι $\frac{\partial Q}{\partial z_1} = -A \frac{\partial \theta_m}{\partial t}$.

Καταλήγει λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η μέση συγκέντρωση διασκορπίζεται σε σχέση με ένα επίπεδο που κινείται με τη μέση ταχύτητα της ροής σαν να διαχέεται με μια διαδικασία που ικανοποιεί τον ίδιο νόμο όπως και η μοριακή διάχυση, δηλαδή την εξίσωση :

$$K \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z_1^2} = \frac{\partial \theta_m}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

αλλά με ένα συντελεστή διάχυσης ίσο με $K = D_{eff} = \frac{a^2 \bar{w}^2}{48\kappa}$. Είναι λοιπόν $\frac{D_{eff}}{\kappa} = R_s$ όπου

$R_s = \frac{1}{48} \frac{\bar{w}^2 a^2}{\kappa^2}$ και κ είναι ο συντελεστής της μοριακής διάχυσης.

Επομένως μπορεί να δει κανείς ότι το αποτέλεσμα του μπορεί να τεθεί στη συνήθως χρησιμοποιούμενη μορφή $D_{eff} = \kappa(1 + R_s)$ για την περίπτωση που υπάρχει ταυτόχρονα και μια μέση κλίση της συγκέντρωσης του συστατικού κατά το μήκος του σωλήνα (προσθέτουμε τη συνεισφορά της διαμήκου μοριακής διάχυσης).

Ουσιαστικά, φαίνεται λοιπόν ότι η ουσία της θεωρίας του Taylor είναι η πρόβλεψη του μετακινούμενου κύματος της ουσίας όπως αυτό αναπαρίσταται από τη μέση τιμή της συγκέντρωσης της επί της εγκάρσιας διατομής του αγωγού. Επίσης φαίνεται από τη σχέση

$$K = D_{eff} = \frac{a^2 \bar{w}^2}{48\kappa}$$

ότι η εξομάλυνση του κύματος της μέσης τιμής της συγκέντρωσης στις δύο περιοχές που αυτή έχει σταθερή κλίση όταν απλά συνεπάγεται, είναι τόσο μικρότερη όσο ο συντελεστής μοριακής διάχυσης είναι μεγαλύτερος, δηλαδή η διασπορά του συστατικού γίνεται με τρόπο που να μοιάζει ολοένα λιγότερο με διάχυση (η κατανομή τύπου error function γίνεται πιο οξεία).

2.2 Η γενική θεωρία του E.J Watson (1983).

Στη παρούσα παράγραφο γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση της γενικής θεωρίας του E.J.Watson (1983), όπως αυτή παρουσιάζεται στην εργασία του. Η θεωρία του Watson αναφέρεται στο πρόβλημα της διάχυσης μιας ουσίας σε ρευστό που ταλαντώνεται μέσα σε έναν αγωγό τυχαίας διατομής και που διέπεται από τις εξισώσεις (2.1.1) και (2.1.2). Η θεωρία επιβεβαιώθηκε από πειράματα που περιγράφονται στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ειδική περίπτωση κυλινδρικών αγωγών και καναλιών, για τις περιπτώσεις των οποίων εξήγαγε ακριβείς αναλυτικές λύσεις.

Η βασική ιδέα της θεωρίας του E.J.Watson έγκειται ουσιαστικά στην υπόθεση ότι η συγκέντρωση είναι μια συνάρτηση της μορφής :

$$\theta = \sum_{m=0}^n \left\{ \theta_{1m}(z) + \theta_{2m}(x, y) e^{i(m\omega)t} \right\}$$

όταν η κλίση της πίεσης είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, η ροή διαμορφωμένη, οπότε και η ταχύτητα είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\lambda} P_k e^{i(k\omega)t} \quad \text{και} \quad w = \sum_{k=0}^{\lambda} w_k(x, y) e^{i(k\omega)t}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση εξαναγκασμένης διάχυσης για διαμορφωμένη ροή (2.1.2) προκύπτουν οι εξισώσεις :

$$\sum_{m=0}^n \left\{ \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta_{1m}}{\partial z^2} + \nabla^2 \theta_{2m} e^{i(m\omega)t} \right) - im\omega \theta_{2m} e^{i(m\omega)t} \right\} = \sum_{m=0}^n \frac{\partial \theta_{1m}}{\partial z} \cdot \sum_{k=0}^{\lambda} w_k e^{i(m\omega)t}$$

Από την οποία φαίνεται ότι αν τεθεί κάθε $\frac{\partial \theta_{1m}}{\partial z_1} = \text{σταθ.}$ και $\lambda = n$ τότε $\frac{\partial^2 \theta_{1m}}{\partial z^2} = 0$, οπότε

προκύπτουν οι εξισώσεις :

$$k\nabla^2\theta_{2k} - ik\omega\theta_{2k} = c w_k, \quad \forall k = 0 \dots \lambda \quad \text{όπου} \quad c = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{\partial\theta_{1k}}{\partial z}.$$

Επομένως, πρέπει η συγκέντρωση να είναι συνάρτηση της μορφής :

$$\theta = -cz + c \sum_{k=0}^{\lambda} g_k(x, y) e^{ik\omega t} \quad \text{όπου} \quad k\nabla^2 g_k = ik\omega g_k - w_k, \quad \forall k = 0 \dots \lambda \quad (2.2.1)$$

η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί και την οριακή συνθήκη μηδενισμού της παραγώγου στα τοιχώματα, άρα και η κάθε συνάρτηση g_k .

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει κανείς ότι η θεωρία του Watson περιέχει ως ειδική περίπτωση αυτή του Taylor θέτοντας $k=0$, οπότε προκύπτει η εξίσωση και η συνθήκη (2.1.8) που λύνει ο Taylor, αφού

$$\frac{\partial\theta}{\partial(z - \bar{w}t)} = \frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Σημειώνεται ότι αυτή η κατανομή της συγκέντρωσης ισοδυναμεί με τη θεώρηση

ότι η αξονική μοριακή διάχυση προκαλεί αξονική μεταφορά της ουσίας αλλά σε καμία περίπτωση δε συνεισφέρει στο μηχανισμό της ενισχυμένης διάχυσης αφού $\frac{\partial^2\theta_{1m}}{\partial z^2} = 0$. Για το λόγο αυτό το πεδίο επίλυσης της εξίσωσης της διάχυσης είναι η διατομή και όχι το εσωτερικό του αγωγού.

Ο Watson (1983) στη γενική θεωρία του εξετάζει το πρόβλημα της διάχυσης σε ένα αγωγό τυχαίας διατομής, όταν εφαρμόζεται η διέγερση :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -P \cos(\omega t)$$

Και έτσι το πρόβλημα τίθεται στη μορφή σύμφωνα με τα παραπάνω, δηλαδή προκαλείται κίνηση του ρευστού που χαρακτηρίζεται από την κατανομή της ταχύτητας :

$$w(x, y, t) = \text{Re} \left[f(x, y) e^{i\omega t} \right]$$

Και η ουσία διαχέεται έτσι ώστε η συγκέντρωση εκφράζεται από τη συνάρτηση :

$$\theta = -\gamma z + \text{Re} \left\{ \gamma g(x, y) e^{i\omega t} \right\}$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις f και g , ικανοποιούν λοιπόν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$i\omega f = \frac{P}{\rho} + \nu \nabla^2 f \quad \text{στο } S \quad \text{και} \quad f = 0 \quad \text{στο } B$$

$$i\omega g - f = k\nabla^2 g \quad \text{στο } S \quad \text{και} \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B$$

Η f έχει διαστάσεις ταχύτητας και η g διαστάσεις μήκους. Ο τελεστής ∇^2 έχει διαστάσεις $1/\mu\kappa\omicron\varsigma^2$. Το ωf εκφράζει τις αδρανειακές δυνάμεις, το $\frac{P}{\rho}$ τις εξασκούμενες δυνάμεις πίεσης και το $\nu \nabla^2 f$ τις δυνάμεις συνεκτικότητας και από τα τρία αυτά μεγέθη τα δύο είναι ανεξάρτητα αφού εμπλέκονται σε μια εξίσωση, οπότε σχηματίζουν δύο ανεξάρτητους αδιάστατους λόγους.

Το ωg εκφράζει τη χρονική εξέλιξη της συγκέντρωσης, το f το μηχανισμό συναγωγής και το $k \nabla^2 g$ εκφράζει το μηχανισμό της διάχυσης και αυτά τα μεγέθη σχηματίζουν επίσης δύο ανεξάρτητους αδιάστατους λόγους.

Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων μπορεί να γίνει γράφοντας τις γραμμικές εξισώσεις :

$$\begin{aligned} f &= a_1 F + a_2 \\ g &= b_1 G + b_2 \end{aligned}$$

Όπου η F και η G να θεωρούνται αδιάστατες συναρτήσεις, οι σταθερές a_1 και a_2 να έχουν διαστάσεις ταχύτητας και οι σταθερές b_1 και b_2 να έχουν διαστάσεις μήκους. Τα παρακάτω μεγέθη είναι δυνατόν να εκφραστούν μέσω των συναρτήσεων f και g είτε μέσω των συναρτήσεων F και G , όπου μπορεί να δειχθεί ότι οι απλούστερες εκφράσεις για αυτά όπως και για τις διαφορικές εξισώσεις, προκύπτουν αν τεθεί :

$$\begin{aligned} f &= \frac{iP}{\omega\rho}(F-1) \\ g &= \frac{P}{\omega^2\rho}(G-1) \end{aligned}$$

Η αδιάστατη ποσότητα $\frac{\omega\rho f}{P}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο αντίστροφος του αριθμού Euler, ο οποίος εκφράζει το λόγο δυνάμεων πίεσης προς τις αδρανειακές δυνάμεις του ρευστού. Η αδιάστατη ποσότητα $\frac{\omega^2\rho g}{P}$ επί τον αριθμό Euler είναι ίση με την ποσότητα $\frac{\omega g}{f}$ που εκφράζει το λόγο της χρονικής μεταβολής της συγκέντρωσης προς το μέτρο της συναγωγής. Ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας $\frac{\omega d^2}{\nu}$ είναι ο αριθμός Womersley, όπου d μπορεί να ληφθεί ως μια χαρακτηριστική απόσταση της διατομής.

Τα κύρια μεγέθη που υπολογίζει στη θεωρία ο Watson είναι:

- Η στιγμιαία παροχή της ουσίας μέσα σε ένα επίπεδο z =σταθερό από τα $-z$ προς τα $+z$ είναι ίση με :

$$\iint_S \left(w\theta - \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx dy .$$

- Η μέση παροχή της ουσίας μέσα σε ένα επίπεδο z=σταθερό από τα -z προς τα +z είναι ίση με :

$$\frac{\int_0^T \iint_S \left(w\theta - \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx dy dt}{T} = \iint_S \left[\kappa \gamma + \frac{1}{4} (f \bar{g} + \bar{f} g) \right] dx dy$$

όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

- Το ποσοστό αύξησης R του μοριακού συντελεστή διάχυσης που εκφράζει το μηχανισμό της διασποράς της ουσίας, υπολογίζεται μέσω του επαυξημένου συντελεστή διάχυσης K που βρίσκεται από τη σχέση :

$$-K \frac{\partial \theta}{\partial z} A = \frac{\int_0^T \iint_S \left(w\theta - \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx dy dt}{T}$$

$$R = \frac{K - \kappa}{\kappa}$$

$$R = \frac{1}{4\kappa A} \iint_S (f \bar{g} + \bar{f} g) dx dy$$

$$R = \frac{1}{4i(1+Sc^{-1})\omega A_B} \int \left[(\bar{g} + \lambda) \frac{\partial f}{\partial n} - (g + \lambda) \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} \right] ds = \frac{1}{2A} \iint_S \left(\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy$$

$$R = \frac{P^2}{4(1+Sc^{-1})\omega^4 \rho^2 A_B} \int \left(G \frac{\partial \bar{F}}{\partial n} + \bar{G} \frac{\partial F}{\partial n} \right) ds = \frac{P^2}{2\omega^4 \rho^2 A} \iint_S \text{grad}(G) \cdot \text{grad}(\bar{G}) dx dy$$

όπου A το εμβαδόν της διατομής και T η περίοδος της ταλάντωσης.

- Η στιγμιαία παροχή του ρευστού μέσα από μια διατομή είναι ίση με (η μέση παροχή είναι μηδενική) :

$$\iint_S w dx dy$$

- Ο όγκος εμβολισμού (tidal volume) είναι ο όγκος που διέρχεται μέσα από μια διατομή προς μια κατεύθυνση μέσα σε μισή περίοδο και είναι ίσος με

$$V = \int_t^{t+T/2} \iint_S w dx dy dt$$

$$V = \frac{2P}{\omega^2 \rho} \left| A + \frac{iv}{\omega} \int_B \frac{\partial F}{\partial n} ds \right| = \frac{2P}{\omega^2 \rho} \left| \iint_S (F - 1) dx dy \right|$$

όπου A το εμβαδόν της διατομής.

- Η στιγμιαία ισχύς που προσδίδεται στο ρευστό ανά μονάδα μήκους είναι ίση με :

$$\iint_S w \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dy$$

- Η μέση ισχύς που προσδίδεται στο ρευστό ανά μονάδα μήκους είναι ίση με :

$$\frac{\int_0^T \iint_S w \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dy}{T}$$

$$W = \frac{\nu P^2}{4\omega^2 \rho} \int_B \left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial n} \right) ds = \frac{iP^2}{4\omega^2 \rho} \iint_S (F - \bar{F}) dx dy$$

όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Επειδή προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις ότι $R \propto \frac{P^2}{\omega^4 \rho^2 d^2}$ και $V \propto \frac{PA}{\omega^4 \rho}$, όπου d είναι μια χαρακτηριστική απόσταση της διατομής του αγωγού.

Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι :

$$R = f_s \left(\frac{\omega d^2}{\nu}, Sc \right) \left(\frac{V^2}{Ad} \right)$$

Όπου φαίνεται πως το R εξαρτάται από τον αριθμό Womersley $\left(\frac{\omega d^2}{\nu} \right)$, τον αριθμό Schmidt $\{Sc\}$ και τον όγκο εμβολισμού $\{V\}$. Επίσης, αποδεικνύει ότι το R είναι πάντα θετικός αριθμός, που σημαίνει ότι η ύπαρξη ροής συνεπάγεται οπωσδήποτε ενίσχυση της διασποράς του συστατικού σε σχέση με αυτή που θα υπήρχε αν οφειλόταν μόνο στο μηχανισμό της μοριακής διάχυσης.

Παρατήρηση

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι το R δεν εξαρτάται από την αξονική κλίση συγκέντρωσης γ που τίθεται αρχικά στη λύση $\theta = -\gamma z + \text{Re}\{\gamma g(x, y)e^{i\omega t}\}$. Αυτό το γεγονός μπορεί να υποθέσει κανείς ότι συνεπάγεται πως για μια οποιαδήποτε αρχική μέση κατανομή συγκέντρωσης g η οποία δεν είναι απαραίτητα γραμμική, η εξέλιξη της διασποράς της γίνεται με βάση ένα νόμο της μορφής :

$$K \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_m}{\partial t}$$

όπου το $K = R\kappa = \frac{1}{4A} \iint_S (f \bar{g} + \bar{f} g) dx dy$, σε αναλογία με τη θεωρία του Taylor.

Πράγματι αυτό μπορεί να δειχθεί έστω και τυπικά, με βάση τις υποθέσεις :

- Η ταχύτητα είναι της μορφής $w(x, y, t) = \text{Re}[f(x, y)e^{i\omega t}]$.
- Σχεδόν στιγμιαία επέρχεται μόνιμη κατάσταση της ακτινικής συγκέντρωσης θ_s που λόγω της περιοδικότητας του φαινομένου είναι περιοδική, δηλαδή $\theta_s = \psi \text{Re}\{r(x, y)e^{i\omega t}\}$ όπου ψ είναι σταθερά.
- Η στιγμιαία κλίση της συγκέντρωσης κατά την αξονική κατεύθυνση είναι ανεξάρτητη από τη θέση επί της διατομής (από μεταβλητές x, y) και άρα ισούται με τη κλίση της μέσης συγκέντρωσης, δηλαδή είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial \theta}{\partial z}(z, t) = \frac{\partial \theta_m}{\partial z}(z, t) = -w \\ \frac{\partial \theta_m(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{A} \iint_S \theta(x, y, z, t) dx dy \right) = \frac{1}{A} \iint_S \left\{ \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right\} (z, t) dx dy = \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right\} (z, t) \iint_S dx dy = \left\{ \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right\} (z, t) \end{aligned}$$

Προκύπτει από τις τρεις παραπάνω υποθέσεις ότι η εξίσωση για την ακτινική συγκέντρωση γράφεται :

$$\begin{aligned} \kappa \nabla^2 \theta_s - \frac{\partial \theta_s}{\partial t} &= w \frac{\partial \theta_m}{\partial z} \\ \kappa \psi \nabla^2 g - i\omega \psi g &= -\omega f \end{aligned}$$

Όπου θέτοντας $\psi = \varpi$ προκύπτει η γνωστή εξίσωση που λύνει ο Watson.

Το γεγονός ότι θέτουμε $\psi = \varpi$ δεν σημαίνει τίποτα γιατί αν $\theta_s = \text{Re}\{r(x, y)e^{i\alpha t}\}$ τότε θα προέκυπτε μια εξίσωση για λόγο $\frac{g(x, y)}{\varpi}$.

Ο όρος $\kappa \nabla^2 \theta_s - \frac{\partial \theta_s}{\partial t}$ περιγράφει το πώς κατανέμεται περιοδικά η ακτινική συγκέντρωση, πηγή της οποίας είναι ο περιοδικός όρος $w \frac{\partial \theta_m}{\partial z}$ που μετράει το ποσό του συστατικού που προσδίδεται στη διατομή εξαιτίας της συναγωγής.

Η χρονικά μέση παροχή της ουσίας μέσα από μια ακίνητη διατομή θα είναι :

$$\bar{Q} = \iint_s w \theta dx dy = \frac{\varpi}{4} \iint_s (f \bar{g} + \bar{f} g) dx dy$$

Και επομένως επειδή :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} = -A \frac{\partial \theta_m}{\partial t}$$

Προκύπτει ότι :

$$K \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_m}{\partial t}$$

Με $K = \frac{1}{4} \iint_s (f \bar{g} + \bar{f} g) dx dy$ (Η παύλα ανάλογα με την περίπτωση σημαίνει μέση τιμή ή συζυγή).

Αν, επιπλέον προσθέσουμε και την αξονική διάχυση, τότε η διάχυση θα γίνεται με συντελεστή $\kappa + K$. Δηλαδή, το αποτέλεσμα του Watson μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι δυνατό να περιγράψει τη διασπορά μιας ουσίας γενικά, και όχι μόνο στην περίπτωση που υφίσταται μια σταθερή κλίση της συγκέντρωσης κατά μήκος του αγωγού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εξαναγκασμένη διάχυση σε ταλαντούμενη ροή ιξωδοελαστικού ρευστού μεταξύ παράλληλων πλακών.

3.1 Γενικά για τη μοντελοποίηση των ρεολογικών ιδιοτήτων του ανθρωπίνου αίματος και ανάλυση του μοντέλου του ιξωδοελαστικού ρευστού της παρούσας εργασίας.

Κατά τον Thurston (1979) οι παράμετροι της ρεολογίας του αίματος μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κλάσεις, τις ρεολογικές και τις φυσιολογικές. Οι κύριες ρεολογικές παράμετροι είναι η διατμητική τάση, ο ρυθμός παραμόρφωσης και ο χρόνος. Συνήθως από πειράματα σε μόνιμες ροές μελετάται η συνεκτικότητα και καθορίζεται το ιξώδες και σε μεταβατικές ροές μελετούνται οι χρόνοι χαλάρωσης των τάσεων. Αντίθετα, οι φυσιολογικές παράμετροι που ενδιαφέρουν κυρίως την κλινική πρακτική και είναι για παράδειγμα ο αιματοκρίτης, η οσμωλικότητα, η θερμοκρασία, η κατάσταση της υγείας του δότη κλπ .

Η συσχέτιση μεταξύ των ρεολογικών και των φυσιολογικών παραμέτρων αποτελεί ένα εξαιρετικά ευρύ πεδίο έρευνας. Η διερεύνηση της αλληλεξάρτησης τους απαιτεί πειράματα όπως αυτά που αναφέρθηκαν, στα οποία λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των φυσιολογικών ιδιοτήτων. Ταυτόχρονα, είναι δυνατόν να προσεγγίσει κανείς το θέμα αυτό θεωρητικά συσχετίζοντας τη μικροδομή του αίματος (πχ. Συγκέντρωση, γεωμετρία, στιβαρότητα, rouleaux ερυθροκυττάρων) με τις φυσιολογικές και τις ρεολογικές παραμέτρους, οπότε θα προκύψει και η μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Εναλλακτικά, η θεωρητική αντιμετώπιση του θέματος μπορεί να γίνει φαινομενολογικά, δηλαδή με την ταυτοποίηση ενός μαθηματικού μοντέλου που τίθεται υπό μορφή καταστατικής εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή συσχετίζει το πεδίο των τάσεων που αναπτύσσονται στη μάζα του ρευστού με το ρυθμό με τον οποίο παραμορφώνεται και περιέχει ορισμένες παραμέτρους που ονομάζονται ρεολογικές.

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, το κατά πόσον μια καταστατική εξίσωση είναι επιτυχής καθορίζεται κυρίως από το αν είναι δυνατόν να περιγράψει διάφορους τύπους ροών για σταθερές φυσιολογικές παραμέτρους γεγονός που εξαρτάται κατά βάση από τη μορφή της και αυτό ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία. Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται κατά τον Thurston (1979), μια επιπλέον πολυπλοκότητα γιατί οι ρεολογικές παράμετροι δεν είναι ανεξάρτητες από τη φύση της ροής. Κατά τον Thurston είναι σκόπιμο να ορίσει κανείς τις καταστάσεις ρεολογικής ισορροπίας στις οποίες γίνεται η υπόθεση ότι οι ρεολογικές παράμετροι παραμένουν σταθερές. Οι καταστάσεις αυτές μπορεί να είναι μόνιμες ή δυναμικές.

Για να εξηγηθεί πληρέστερα το γεγονός αυτό δίνονται αρχικά οι παρακάτω ορισμοί.

- Η ροή διάτμησης (shear flow) ορίζεται από τις δύο παρακάτω συνθήκες :
 1. Υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια υλικών επιφανειών (επιφάνειες διάτμησης) που κινούνται ισομετρικώς, δηλαδή η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο γειτονικών σημείων που βρίσκονται επί μιας τέτοιας επιφάνειας παραμένει σταθερή.
 2. Η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών επιφανειών διάτμησης παραμένει σταθερή (ανεξάρτητα από το αν το ρευστό είναι συμπιεστό ή ασυμπίεστο ο όγκος διατηρείται)
- Η μονοκατευθυντική ροή διάτμησης ικανοποιεί επιπλέον τη συνθήκη :
 3. Οι γραμμές διάτμησης (είναι η μονοπαραμετρική οικογένεια των καμπύλων επί μια επιφάνειας διάτμησης που είναι σε κάθε σημείο τους εφαπτομενικές προς την κατεύθυνση που γίνεται η διάτμηση) είναι υλικές γραμμές. Οι γραμμές διάτμησης σε μια τέτοια περίπτωση δεν είναι κατά ανάγκη ευθείες γραμμές και μπορεί να είναι κλειστές καμπύλες ή ανοικτές απείρου μήκους.
- Η ρεολογικώς μόνιμη διατμητική ροή ικανοποιεί επιπλέον τη συνθήκη :
 4. Ο ρυθμός διάτμησης είναι ανεξάρτητος του χρόνου για ένα δοθέν σωματίδιο του ρευστού που διαφορετικά εκφράζεται από το γεγονός ότι πρέπει η ιστορία της ροής για κάθε ένα σωματίδιο να είναι απλά μόνιμη διάτμηση όταν παρατηρείται από τους άξονες διάτμησης του σωματιδίου.
- Η απλή μόνιμη ροή διάτμησης (steady simple shear flow) φαίνεται παραστατικά στο παρακάτω σχήμα.
- Τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων διάτμησης που ορίζονται επί ενός σωματιδίου του ρευστού και τα οποία κινούνται μαζί του αλλάζοντας γενικά διευθύνσεις στο χώρο, είναι το δ_1 που δείχνει προς την κατεύθυνση που γίνεται η διάτμηση, το δ_2 που είναι κάθετο στο επίπεδο διάτμησης στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο και το δ_3 που ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο των δύο άλλων. Η έννοια του σωματιδίου προκύπτει αν θεωρήσει κανείς το συναγόμενο (convective) ή κατά Lagrange σύστημα συντεταγμένων το οποίο ορίζεται από υλικές επιφάνειες και κατά συνέπεια παραμορφώνεται μαζί με το ρευστό.
- Εάν το ρευστό κινείται προς μια μόνο κατεύθυνση του όποιου συστήματος συντεταγμένων και η ταχύτητα του μεταβάλλεται μόνο κατά μια από τις άλλες δύο κατευθύνσεις τότε η κατεύθυνση της κίνησης ονομάζεται (1), η κατεύθυνση μεταβολής της ταχύτητας (2) και η άλλη ουδέτερη κατεύθυνση ονομάζεται (3). Αν τ_{ij} είναι η διατμητική τάση στο επίπεδο κάθετο στον άξονα i με διεύθυνση τον άξονα j , τότε η διαφορά των ορθών διατμητικών τάσεων $\tau_{11} - \tau_{22}$ ονομάζεται κύρια και η άλλη διαφορά $\tau_{22} - \tau_{33}$ είναι η δευτερεύουσα. Πληροφορικά αναφέρεται ότι παλαιότερα πιστευόταν πως $\tau_{22} - \tau_{33} = 0$ (υπόθεση Weissenberg) που δεν θεωρείται πλέον ορθό.

Συνήθως, στην πειραματική ρεολογία γίνονται πειράματα μονοκατευθυντικών διατμητικών ροών (unidirectional shear flows) που φαίνονται παραστατικά στα παρακάτω σχήματα, στα οποία αποδεικνύεται ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες των διατμητικών τάσεων είναι τέσσερις (τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , $\tau_{21} = \tau_{12}$) και ότι μπορούν να μετρηθούν η διατμητική τάση τ_{21} και οι δύο διαφορές των ορθών διατμητικών τάσεων (Weissenberg effect) που είναι η κύρια $\tau_{11} - \tau_{22}$ και η δευτερεύουσα $\tau_{22} - \tau_{33}$

τ_{33} . Από τους τύπους των ρών που παρουσιάζονται και επεξηγούνται στο ίδιο το σχήμα, μόνο η πρώτη (a) είναι μόνιμη. Οι υπόλοιπες είναι μη μόνιμες ροές (b-h). Τα θεωρητικώς ανεξάρτητα και μετρήσιμα μεγέθη τ_{21} , $\tau_{11} - \tau_{22}$ και $\tau_{22} - \tau_{33}$ είναι οι τάσεις που αναπτύσσονται στο ρευστό εξαιτίας του γεγονότος ότι παραμορφώνεται συνεχώς λόγω της ροής του και κατά συνέπεια εξαρτώνται από τη φύση του. Η εξάρτηση αυτή γίνεται όπω είναι γνωστό με τη συσχέτιση των τάσεων με το ρυθμό παραμόρφωσης.

Εν συνεχεία θα αναφερθεί ο τρόπος με τον οποίο συσχετίζεται η διατμητική τάση τ_{21} με το ρυθμό παραμόρφωσης για τα δύο κρίσιμα πειράματα (a) και (b) επειδή αυτή είναι η τάση που ενδιαφέρει περισσότερο. Επίσης οι ροές αυτές χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον στις μελέτες της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του αίματος και υπάρχουν αρκετά πειραματικά αποτελέσματα. Ένας επιπλέον λόγος είναι ότι οι ροές αυτές χαρακτηρίζονται από τον Thurston (1979) ως μόνιμες και δυναμικές καταστάσεις ρεολογικής ισορροπίας, αντίστοιχα.

Για τη μόνιμη διατμητική ροή (a) ορίζεται η υλική συνάρτηση μ που ονομάζεται φαινομενική συνεκτικότητα και ορίζεται από τη σχέση :

$$\tau_{yx} = \mu \dot{\gamma}_{yx}$$

Όπου $\dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (u η ταχύτητα προς τα θετικά x).

Επειδή η ροή είναι μόνιμη αυτό σημαίνει ότι η τάση και ο ρυθμός παραμόρφωσης θα είναι σταθερές στο χρόνο και επομένως η μ θα εξαρτάται στη γενική περίπτωση μόνο από το ρυθμό παραμόρφωσης, δηλαδή $\mu = \mu(\dot{\gamma}_{yx})$. Στο ενδεχόμενο που το ρευστό παρουσιάζει τάση ροής η φαινομενική συνεκτικότητα απειρίζεται. Για την μικρού πλάτους ταλαντωτική διατμητική ροή (b) όπου συνήθως για ευνόητους λόγους η διατμητική τάση και ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου της ίδιας συχνότητας, που περιγράφονται από τις σχέσεις :

$$\dot{\gamma}_{yx} = \text{Re} \left\{ \dot{\gamma}_{yx}^o e^{i\omega t} \right\}$$

$$\tau_{yx} = \text{Re} \left\{ \tau_{yx}^o e^{i\omega t} \right\}$$

Ορίζεται η υλική συνάρτηση μ^* που ονομάζεται μιγαδική συνεκτικότητα ή ιξωδοελαστικότητα (κατά Thurston) από τη σχέση :

$$\tau_{yx}^o = \mu^* \dot{\gamma}_{yx}^o$$

Επειδή η ροή είναι μη μόνιμη, αλλά περιοδική, αυτό σημαίνει ότι η τάση και ο ρυθμός παραμόρφωσης θα μεταβάλλονται στο χρόνο και επομένως η μ^* θα εξαρτάται στη γενική περίπτωση από το ρυθμό παραμόρφωσης και από τη συχνότητα δηλαδή $\mu^* = \mu^*(\omega, \dot{\gamma}_{yx}^o)$. Για πολύ μικρά πλάτη όμως, όπου το ρευστό κατά Thurston βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση ρεολογικής ισορροπίας, μελετάται η συναρτησιακή σχέση $\mu^* = \mu^*(\omega)$. Η μιγαδική συνεκτικότητα γράφεται αναλυμένη στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος ως

$$\mu^* = \mu' - i\mu''$$

Συνήθως στα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζουν τα μ' και μ'' (συμβολιζόμενα διαφορετικά). Το μ' είναι η ιξώδης συνιστώσα που συνδέεται με την απώλεια ενέργειας και το μ'' η ελαστική συνιστώσα που σχετίζεται με την αποθήκευση ενέργειας γιατί αν το $\dot{\gamma}_{yx}$ είναι πραγματικός και θετικός αριθμός τότε :

$$\dot{\gamma}_{yx} = \dot{\gamma}_{yx}^o \cos(\omega t)$$

$$\tau_{yx} = \mu' \dot{\gamma}_{yx}^o \cos(\omega t) + \mu'' \dot{\gamma}_{yx}^o \sin(\omega t)$$

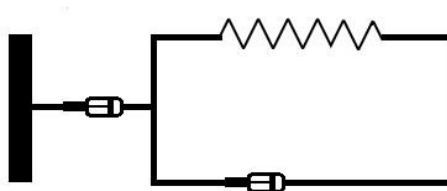
δηλαδή ο όρος με το μ' είναι σε φάση με το ρυθμό παραμόρφωσης και ο όρος με το μ'' είναι αντίθετης φάσης. Οι απλούστερες καταστατικές εξισώσεις που μπορεί κανείς να μελετήσει που να προβλέπουν ότι $\mu^* = \mu^*(\omega)$ (η συχνότητα δεν αλλάζει) είναι οι γραμμικές εξισώσεις με παραγώγους στο χρόνο της τάσης και του ρυθμού παραμόρφωσης και χαρακτηρίζονται ως εξισώσεις γραμμικού ιξωδοελαστικού ρευστού. Το απλούστερο ρευστό αυτού του τύπου είναι το γνωστό ρευστό του Maxwell. Σημειώνεται ότι τα γραμμικά ιξωδοελαστικά ρευστά είναι μια υποκατηγορία των λεγόμενων γενικευμένων γραμμικών ιξωδοελαστικών ρευστών που όλα προβλέπουν ότι $\mu^* = \mu^*(\omega)$.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον μοντέλο είναι το γραμμικό ιξωδοελαστικό ρευστό του H. Jeffreys που περιέχει δύο χρονικές σταθερές λ_1 και λ_2 , το οποίο για μια συνιστώσα του ταυστή των τάσεων γράφεται:

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu_o \left(\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right)$$

Η σταθερά λ_1 είναι η σταθερά χαλάρωσης της τάσης. Όσο πιο μεγάλη είναι τόσο πιο αργά χαλαρώνει η τάση. Η σταθερά λ_2 είναι η σταθερά χαλάρωσης του ρυθμού παραμόρφωσης. Όσο πιο μεγάλη είναι τόσο πιο αργά χαλαρώνει ο ρυθμός παραμόρφωσης. Αυτό μπορεί να το δει κανείς θέτοντας το δεξιό και το αριστερό μέλος της εξίσωσης ίσο με το μηδέν, αντίστοιχα.

Το μηχανικό ανάλογο του ρευστού του Jeffreys είναι :



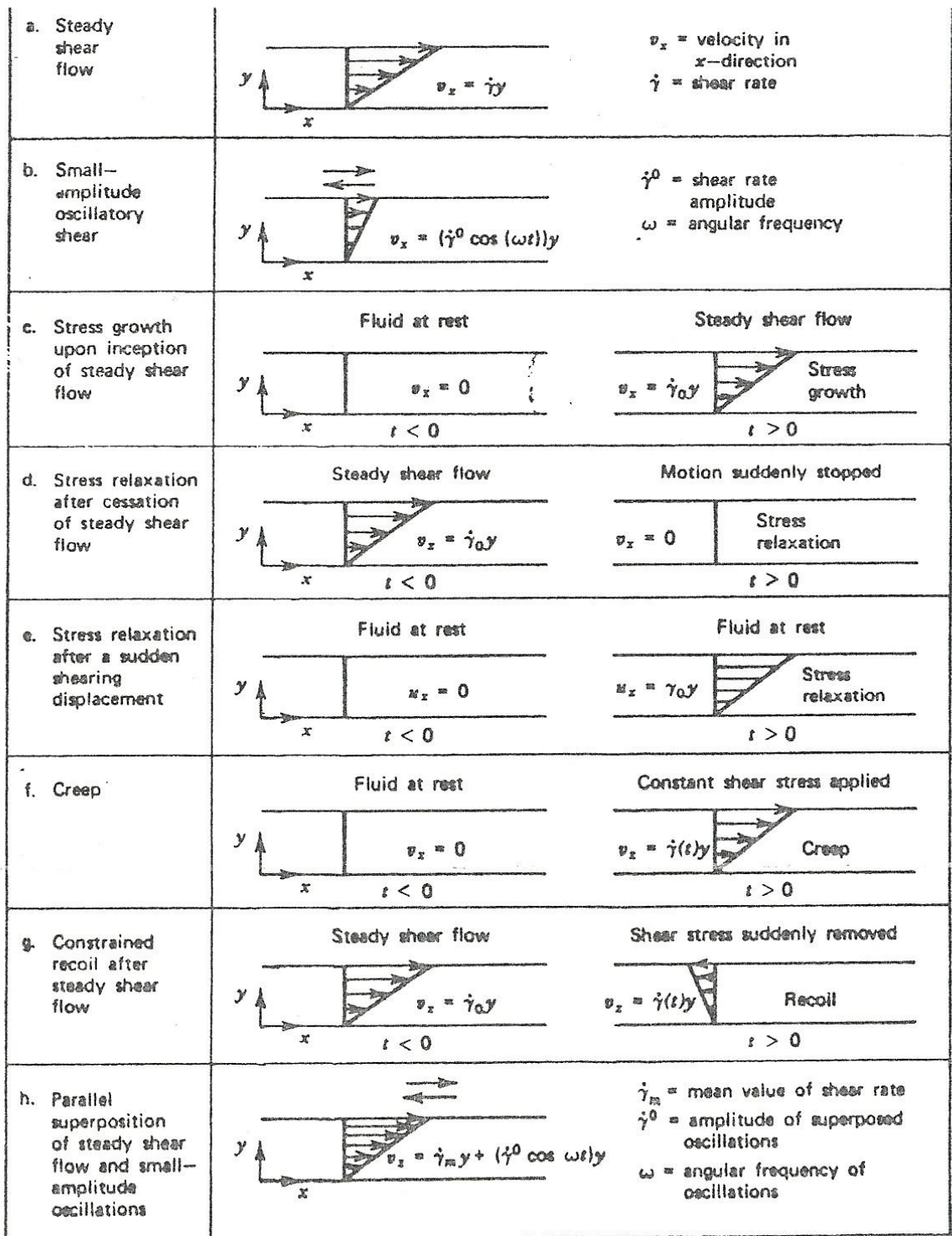


FIGURE 4.3-1. Various types of unidirectional shear flow experiments used in rheology. The shear rate $\dot{\gamma}$ (as defined by Eq. 4.1-4) is identical with $\dot{\gamma}_{yx}$ in the shear flow experiments. For the shearing displacement experiment in (e) u_x is the displacement of a particle in the x -direction measured from its position just before $t = 0$; also the "magnitude of shear" γ_0 in that part is the shear-displacement gradient and $\gamma_0 = \int_0^t \dot{\gamma}(t') dt'$.

Για το μοντέλο του Jeffreys ισχύουν τα εξής :

- Είναι γραμμικό και επομένως μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της ροής του εύκολα, όμως η ισχύς του περιορίζεται σε μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας του ρευστού και οι οποίες δεν γίνονται πολύ γρήγορα.
- Δεν περιγράφει σωστά την εξάρτηση του μιγαδικού συντελεστή αντίστασης από το μέγεθος του ρυθμού παραμόρφωσης, που όμως δεν αποτελεί κακή προσέγγιση για μικρούς ρυθμούς διάτμησης.
- Κατά τους W.M. Phillips και S. Deutsch (1975) η εξίσωση του Jeffreys είναι προτιμότερη από το μοντέλο του Maxwell διότι στο τελευταίο υπάρχει το φαινόμενο της χαλάρωσης της τάσης αλλά όχι της χαλάρωσης του ρυθμού παραμόρφωσης (2 χρονικές σταθερές αντί 1 στο Maxwell). Επίσης, μπορεί να γενικευτεί κατά τις απόψεις του Oldroyd, δηλαδή σε εξισώσεις που το περιγράφουν με αντικειμενικό τρόπο ανεξάρτητα από τον παρατηρητή (σύστημα συντεταγμένων) χωρίς να προκύπτουν παράδοξα. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι αν επιχειρηθεί γενίκευση της εξίσωσης του Maxwell κατά τον Oldroyd τότε η φαινομενική συνεκτικότητα τείνει προς το μηδέν καθώς ο ρυθμός παραμόρφωσης τείνει στο άπειρο.
- Οι Frohlich και Sack βρήκαν ότι η εξίσωση του Jeffreys περιγράφει τη συμπεριφορά ενός αραιού αιωρήματος ελαστικών σφαιρών σε ένα νευτώνειο ρευστό συνεκτικότητας μ_0 για μικρούς ρυθμούς παραμόρφωσης, όταν $\lambda_1 > \lambda_2$. Στη περίπτωση που τα λ_1, λ_2 τείνουν να γίνουν ίσα τότε η συμπεριφορά του ρευστού τείνει ολοένα περισσότερο προς τη συμπεριφορά ενός νευτώνειου ρευστού με συνεκτικότητα μ_0 . Σημειώνεται ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το πώς οριζόταν ο ταυιστής των διατμητικών τάσεων (το πρόσημο του) και ο ταυιστής των παραμορφώσεων (κατά ένα σταθερό παράγοντα 2).
- Οι W.M. Phillips και S. Deutsch (1975) αναφέρουν ότι κατά τον Thurston (1979) το αίμα είναι ένα μη γραμμικό ιξωδοελαστικό ρευστό. Συμπεριφέρεται όμως σαν γραμμικό ιξωδοελαστικό ρευστό σε ρυθμούς διάτμησης ($< 2/\text{sec}$).

Τα παραπάνω δικαιολογούν την επιλογή του ρευστού του Jeffreys για τη μελέτη του φαινομένου της ενισχυμένης διάχυσης, που επιλύεται στην επόμενη παράγραφο για ταλαντούμενη ροή μέσα σε κανάλι. Ο συμβολισμός διαφέρει λίγο.

Σημειώνεται ότι από την ανάλυση στην επόμενη παράγραφο για το ρευστό Jeffreys είναι :

$$\mu^* = \mu \frac{1 + i\lambda_2\omega}{1 + i\lambda_1\omega}$$

Όπου έχουμε θέσει $\mu \equiv \mu_0$ σύμφωνα με το συμβολισμό εκεί.

$$\text{Είναι λοιπόν } \mu^* = \mu' - i\mu'' \text{ όπου } \mu' = \mu \frac{1 + \lambda_1\lambda_2\omega^2}{1 + \lambda_1^2\omega^2} \text{ και } \mu'' = \mu\omega \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1^2\omega^2}.$$

Κατά την παρατήρηση (4) που διατυπώνεται προηγούμενα, αφού $\lambda_1 > \lambda_2$ προκύπτει ότι

$0 < \mu' < \mu$ και $\mu'' > 0$. Στα δύο παρακάτω σχήματα (λογαριθμικοί άξονες) παρουσιάζονται πειραματικές τιμές για τα μ' , μ'' , των Chien et al (1975) στα οποία συμβολίζονται με η' και η'' αντίστοιχα, με παράμετρο την κυτταρική συγκέντρωση στο πλάσμα.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά παρόμοια διαγράμματα. Από αυτά μόνο χονδρική εκτίμηση των χρονικών σταθερών και του μ , του μοντέλου του Jeffreys, είναι δυνατόν να γίνει. Σημειώνεται ότι διαπιστώθηκε ότι η μορφή του πραγματικού μέρους της ιξωδοελαστικότητας του μοντέλου του Jeffreys (για σταθερή συχνότητα μ) προκύπτει παρόμοια με την πειραματική σε κάποιο εύρος συχνοτήτων, ενώ όσον αφορά το φανταστικό μέρος αυτό μπορεί να προσεγγιστεί για συχνότητες μεγαλύτερες από μια συγκεκριμένη τιμή μεγίστου. Με άλλα λόγια η φανταστική συνιστώσα παρουσιάζει μέγιστο σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα.

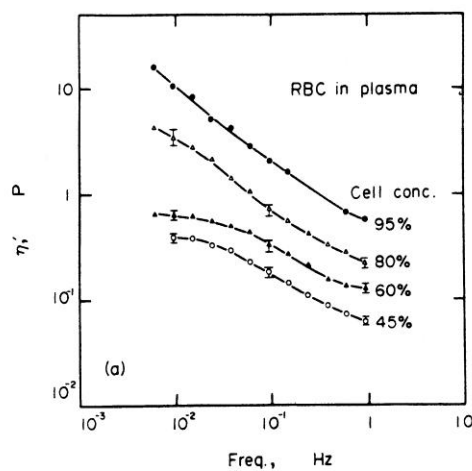


Fig. 1(A).

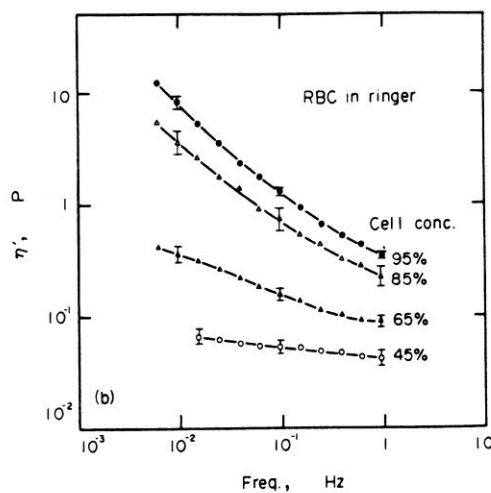
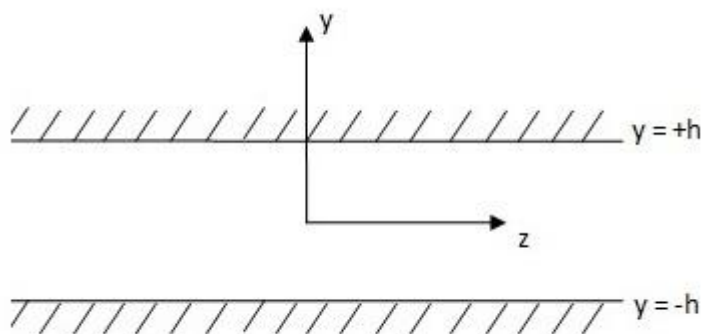


Fig. 1(B).

Fig. 1. Log-log plots showing the relation between the viscous component (η') of the complex viscosity and the frequency of oscillatory tests. The hematocrit value (cell concentration) of each sample is given next to the curve. Vertical bars represent S.E.M. (A). Suspensions of red cells in plasma. (B). Suspensions of red cells in A-Ringer solution.

3.2 Το πρόβλημα της διάχυσης μιας ουσίας μέσα σε ιζωδοελαστικό ρευστό Jeffrey σε ταλαντούμενη ροή εντός δισδιάστατου καναλιού παραλλήλων πλακών.

Το ρευστό θεωρείται ιζωδοελαστικό σύμφωνα με το μοντέλο που περιγράφηκε στη προηγούμενη παράγραφο. Η γεωμετρία του προβλήματος για ροή κατά άξονα z σε κανάλι μεταξύ παραλλήλων πλακών, απόστασης $2h$ είναι :



και διέπεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)$$

Στην προκειμένη περίπτωση περιοριζόμαστε στη μελέτη της απλής ταλάντωσης του ρευστού με μία συχνότητα αν και γενικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι :

$$w = \sum_{k=0}^n f_k(x, y) e^{i(k\omega)t}, -\frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{k=0}^n P_k e^{i(k\omega)t}, \tau_{yz} = \sum_{k=0}^n c_k e^{i(k\omega)t}$$

οπότε τότε προκύπτουν οι εξισώσεις :

$$ik\omega f_k = \frac{P_k}{\rho} + \mu \frac{1 + \lambda_2 ik\omega}{1 + \lambda_1 ik\omega} \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2}, \quad \forall k$$

και στη συνέχεια μια κατανομή της συγκέντρωσης σύμφωνα με τα αναφερόμενα στη παράγραφο 2.2.

Δεν εξετάζονται μεταβατικά φαινόμενα, αλλά η κατάσταση της ταλαντούμενης ροής και κατά συνέπεια αν θέσουμε $-\frac{\partial p}{\partial z} = P e^{i\omega t}$, $w = f e^{i\omega t}$ με $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ και $\tau_{yz} = c e^{i\omega t}$ τότε προκύπτουν οι :

$$i\omega f = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial y}$$

$$c = \frac{\partial f}{\partial y} \mu \frac{1+i\lambda_2\omega}{1+i\lambda_1\omega}$$

από όπου είναι φανερό ότι $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$.

Επομένως, είναι :

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \mu \frac{1+i\lambda_2\omega}{1+i\lambda_1\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Οπότε η f ικανοποιεί την εξίσωση :

$$i\omega f = \frac{P}{\rho} + \nu \frac{1+i\lambda_2\omega}{1+i\lambda_1\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Το πρόβλημα λοιπόν του καθορισμού του πεδίου ροής ανάγεται στο πρόβλημα της επίλυσης της :

$$i\omega f = \frac{P}{\rho} + \eta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{με } f=0 \text{ στο σύνορο}$$

όπου :

$$\eta = \nu \frac{1+i\lambda_2\omega}{1+i\lambda_1\omega}$$

Είναι μια ποσότητα που μπορεί να χαρακτηριστεί ως μινιαδική κινηματική συνεκτικότητα.

Είναι $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ η κινηματική συνεκτικότητα και η αδιάστατη ποσότητα $\frac{\eta}{\nu} = \frac{1+i\lambda_2\omega}{1+i\lambda_1\omega}$ γράφεται ως

συνάρτηση των **αδιάστατων αριθμών Weissenberg** :

$$we_1 = \lambda_1\omega$$

$$we_2 = \lambda_2\omega$$

ως εξής :

$$We = \frac{\eta}{\nu} = \frac{1+iwe_2}{1+iwe_1}$$

Τίθεται βάσει της θεωρίας Watson (εξ. 2.2.1) :

$$\theta(x, y, z, t) = -\gamma z + \gamma g(x, y)e^{i\omega t}$$

και με αντικατάσταση στην εξίσωση διασποράς της ουσίας $\kappa \nabla^2 \theta - \frac{\partial \theta}{\partial t} = w \frac{\partial \theta}{\partial z}$ προκύπτει η εξίσωση :

$$i\omega g - f = \kappa \nabla^2 g$$

με συνοριακή συνθήκη $\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} = 0$ στα τοιχώματα του καναλιού, όπου η διαφόριση γίνεται επί του επιπέδου των x, y .

Εξαιτίας της συμμετρίας του προβλήματος θα είναι $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Το πρόβλημα λοιπόν τίθεται στη μορφή :

$$i\omega f = \frac{P}{\rho} + \eta \frac{d^2 f}{dy^2} \quad \text{στο S και} \quad f=0 \quad \text{στο B}$$

$$i\omega g - f = \kappa \frac{d^2 g}{dy^2} \quad \text{στο S και} \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{στο B}$$

Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων αυτών μπορεί να γίνει με βάση τη λογική που αναφέρεται στην περιγραφή της γενικής θεωρίας του Watson, στην παράγραφο 2.2. Τίθεται λοιπόν,

$$f(y) = \frac{iP}{\omega\rho} [F(y) - 1]$$

$$g(y) = \frac{P}{\omega^2 \rho} [G(y) - 1]$$

Με τον τρόπο αυτόν το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο ακόλουθο σύστημα συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων :

$$\frac{i\omega}{\eta} F = \frac{d^2 F}{dy^2} \quad \text{στο S και} \quad F=1 \quad \text{στα } y = \pm h$$

$$\frac{i\omega}{\kappa} (G - F) = \frac{d^2 G}{dy^2} \quad \text{στο S και} \quad \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } y = \pm h$$

Μπορεί να δειχθεί ότι οι λύσεις στα παραπάνω προβλήματα συνοριακών τιμών είναι :

$$F(y) = \frac{\cosh \left[y \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2} \right]}{\cosh \left[h \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2} \right]} = \frac{\cosh(y^*)}{\cosh(h^*)}$$

$$\begin{cases} G(y) = \frac{Sc}{Sc-1} \left[F(y) - \frac{\tanh(h^*)}{Sc^{1/2}} \frac{\cosh(y^* Sc^{1/2})}{\sinh(h^* Sc^{1/2})} \right], & Sc \neq 1 \\ G(y) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}(h^*) \left[(h^* \coth(h^*) + 1) \cosh(y^*) - y^* \sinh(y^*) \right], & Sc = 1 \end{cases}$$

όπου

$$Sc = \frac{\eta}{\kappa}$$

είναι ο **μικαδικός αριθμός Schmidt**. ($\operatorname{sech}(x) = \cosh(x)^{-1}$)

Στην προκειμένη περίπτωση το R (που στο εξής θα συμβολίζεται με R_v για το ιξωδοελαστικό ρευστό) μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση :

$$R_v = \frac{P^2}{4\omega^4 \rho^2 h} I$$

όπου :

$$I = \int_{-h}^{+h} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} dy .$$

Πράγματι, κατά τελείως παρόμοιο τρόπο με τη μέθοδο του Watson, προκύπτει ότι :

$$R_v = \frac{P^2}{2\omega^4 \rho^2 A} \iint_s \nabla G \cdot \nabla \bar{G} dx dy \quad \text{όπου } A = 2h$$

οπότε αφού $\nabla G = \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j}$ και $\nabla \bar{G} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} \vec{j}$ είναι :

$$R_v = \frac{P^2}{4\omega^4 \rho^2 h} \int_{-0.5}^{+0.5} dx \int_{-h}^{+h} \nabla G \cdot \nabla \bar{G} dy \Rightarrow$$

$$R_v = \frac{P^2}{4\omega^4 \rho^2 h} \int_{-h}^{+h} \nabla G \cdot \nabla \bar{G} dy \Rightarrow$$

$$R_v = \frac{P^2}{4\omega^4 \rho^2 h} I$$

Υπολογισμός του R_V στην περίπτωση που $Sc \neq 1 \Rightarrow \eta \neq \kappa$ δηλαδή αν $\gamma \neq \delta$.

Με βάση τους υπολογισμούς που παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα, το R_V βρίσκεται ίσο με

$$R_V = \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right]$$

όπου είναι η μιγαδική κινηματική συνεκτικότητα η:

$$\eta = \eta' + i\eta''.$$

και επίσης οι ποσότητες στην εξίσωση αυτή είναι

$$\gamma = \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2}, \quad \delta = \left(\frac{i\omega}{k} \right)^{1/2}, \quad \xi = \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2}$$

$$\xi_1 = \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} > 0, \quad \xi_2 = \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} > 0, \quad \tau = h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2}$$

$$\Psi_1 = \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 \cdot \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)} - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \frac{\sinh(\tau) - \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}$$

$$\Psi_2 = \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)} - |Sc|^{1/2} \frac{\sinh(\tau) + \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}$$

$$|\tanh(\gamma h)|^2 = \frac{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)}$$

Ο τύπος αυτός είναι όμοιος με το τύπο (70) του Watson, όπως φαίνεται από τα παρακάτω, όταν η κινηματική συνεκτικότητα είναι πραγματικός αριθμός, που είναι ταυτόσημος αν $Sc \in R$.

Αν είναι $Sc \in R \Leftrightarrow \eta \in R$ τότε $Sc = |Sc| \equiv Sc_0, \xi_1 = \sqrt{\frac{|\eta| + \beta}{|\eta|}} = 1 = \xi_2$ αφού $\eta = \eta' + i\eta'' = \nu \in R$

και $\eta' > 0$ και επίσης $\xi \equiv \beta = h \left(\frac{2\omega}{\eta} \right)^{1/2}$. Εδώ το β είναι η αδιάστατη συχνότητα όπως ορίζεται

στην εργασία του Watson. Επίσης είναι $\tau = \xi |Sc|^{1/2} = \beta Sc_0^{1/2}$.

Οπότε ο συντελεστής αύξησης του συντελεστή διάχυσης, ο οποίος για το **νευτώνειο ρευστό** συμβολίζεται ως R_N ,

$$\begin{aligned}
R_N &= \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right] = \\
&= \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4} \frac{1}{\beta^6} \frac{Sc_o^2}{(Sc_o^2 - 1)^2} |\tanh(\gamma h)|^2 (Sc_o^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\beta} = \\
&= \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4} \frac{1}{\beta^6} \frac{Sc_o^2}{(Sc_o^2 - 1)} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \left[\frac{2Sc_o}{\beta} \frac{1}{\cosh(\beta) - \cos(\beta)} \frac{\sinh(\beta) - \sin(\beta)}{\cosh(\beta) - \cos(\beta)} - \frac{1}{\beta Sc_o^{1/2}} \frac{\sinh(\beta Sc_o^{1/2}) - \sin(\beta Sc_o^{1/2})}{\cosh(\beta Sc_o^{1/2}) - \cos(\beta Sc_o^{1/2})} \right] = \\
&= \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4} \frac{1}{\beta^6} \frac{Sc_o^2}{(Sc_o^2 - 1)} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \left[C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2}) \right] = \frac{4}{\beta^6} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \frac{C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2})}{1 - Sc_o^{-2}} \frac{P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4}
\end{aligned}$$

Δηλαδή, προκύπτει :

$$R_N = \frac{4}{\beta^6} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \frac{C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2})}{1 - Sc_o^{-2}} \frac{P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4} \quad (\text{τύπος (70) Watson})$$

Είναι δυνατόν να εκφραστεί ο συντελεστής αύξησης R_N σε συνάρτηση με τον όγκο εμβολισμού, για τον οποίο μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι για το μοντέλο του ρευστού που χρησιμοποιούμε και τον τύπο της ροής που μελετάται δίδεται από την έκφραση

$$V_1 = \frac{2P}{\omega^2 \rho} \left| A + \frac{i\eta}{\omega} \int_B \frac{\partial F}{\partial n} ds \right|$$

Από την οποία προκύπτει η πολύ σημαντική σχέση που συνδέει την εφαρμοζόμενη κλίση πίεσης με τον όγκο εμβολισμού :

$$V_1^2 = \frac{256P^2 h^{10}}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^8} \left[1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi \xi_1) + \xi_2 \sin(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi \xi_1) - \cos(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} \right]$$

Επομένως για να εκφραστεί το R_N σε συνάρτηση με τον όγκο εμβολισμού V_1 διαιρούμε τις εκφράσεις τους και τελικώς προκύπτει ότι το ποσοστό αύξησης του συντελεστή διάχυσης είναι :

$$R_N = \frac{\frac{\xi^4}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right] [\cosh(\xi \xi_1) - \cos(\xi \xi_2)]}{\xi^2 [\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)] - 2\xi [\xi_1 \sinh(\xi \xi_1) + \xi_2 \sin(\xi \xi_2)] + 2[\cosh(\xi \xi_1) - \cos(\xi \xi_2)]} \frac{V_1^2}{(2h)^4}$$

Για $\xi_1 = \xi_2 = 1$ προκύπτουν οι εκφράσεις (72) και (73) του Watson, όπως και αναμένεται.

Για $\xi \rightarrow 0$ είναι

$$R_V = \frac{P^2 h^6 |Sc|^2}{\rho^2 |\eta|^4 945} \left\{ 1 - \frac{13}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^2 - \left(\frac{5|Sc|^2 + 350\xi_1^2 \xi_2^2 - 268}{1980} - \frac{-444 + 115\xi_1^2 \xi_2^2 + 326\xi_1^4 \xi_2^4 + 3\xi_1^6 \xi_2^6}{\{|Sc|^2 + 1\}^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2} \right) \xi^4 + O(\xi^6) \right\}$$

που δίνει την οριακή έκφραση :

$$R_V \rightarrow \frac{1}{945} Sc_o^2 \frac{1 + we_1^2}{1 + we_2^2} \frac{P^2 h^6}{\rho^2 \nu^4}$$

και :

$$R_V = \frac{\xi^4 |Sc|^2}{420} \left\{ 1 - \frac{1}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^2 - \left[\frac{32 + 175|Sc|^2}{69300} + \frac{1}{3960} \frac{(\xi_1^2 \xi_2^2 - 1)(444 + 329\xi_1^2 \xi_2^2 + 3\xi_1^4 \xi_2^4)}{|Sc^2 - 1|^2} \right] \xi^4 + O(\xi^6) \right\} \left\{ \frac{V_1^2}{(2h)^4} \right\}$$

που δίνει την οριακή έκφραση $R_V \rightarrow \frac{1}{1680} \left(\frac{V_1 \omega}{\kappa} \right)^2$ η οποία είναι ακριβώς η ίδια για το νευτώνειο ρευστό (τύπος 78 του Watson).

3.3 Αποτελέσματα και συμπεράσματα

1. Μεταβλητές

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις που προέκυψαν για τη κατανομή της ταχύτητας στο κανάλι και για το ποσοστό αύξησης του συντελεστή μοριακής διάχυσης R, ο οποίος ως γνωστόν ορίζεται από τη σχέση :

$$K = \kappa(1 + R)$$

Εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι σημαντικότερες μεταβλητές για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η αδιάστατη συχνότητα που ονομάζεται αριθμός Womersley, και ο οποίος ορίζεται ως :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

και οι αδιάστατοι αριθμοί του Weissenberg :

$$we_1 = \lambda_1 \omega, we_2 = \lambda_2 \omega$$

Στα παρακάτω είναι χρήσιμο να οριστεί η αδιάστατη ποσότητα που ονομάζουμε **αριθμό Taylor** :

$$Ta = \frac{Ph^3}{\rho\nu^2}$$

Όλες οι κύριες μεταβλητές του προβλήματος εξαρτώνται από αυτές τις μεταβλητές όπως παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω.

Η παράμετρος $\xi = h \left(\frac{2\omega}{|\eta|} \right)^{1/2}$ είναι μια συνάρτηση του β και των αδιάστατων αριθμών του

$$\text{Weissenberg επειδή } We = \frac{\eta}{\nu} = \frac{1+iwe_2}{1+iwe_1} \text{ οπότε } \xi = \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2} = h \left(\frac{2\omega}{\nu|We|} \right)^{1/2} = \beta \frac{1}{|We|^{1/2}}.$$

Είναι επίσης,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{|\eta + \eta'|}{|\eta|} \right)^{1/2} = \sqrt{1 + \frac{\text{Im}(We)}{|We|}} \\ \xi_2 &= \left(\frac{|\eta - \eta'|}{|\eta|} \right)^{1/2} = \sqrt{1 - \frac{\text{Im}(We)}{|We|}} \\ \tau &= h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2} = \xi |Sc|^{1/2} = \beta Sc_o^{1/2} \end{aligned}$$

όπου με Sc_o συμβολίζεται ο πραγματικός αριθμός Schmidt (με Sc συμβολίζεται ο μιγαδικός αριθμός Schmidt).

$$Sc = \frac{\eta}{\kappa} = \frac{\eta}{\nu} \frac{\nu}{\kappa} = We \cdot Sc_o \quad \boxed{Sc_o = \frac{\nu}{\kappa}}$$

Ο αριθμός We γράφεται :

$$We = \frac{\eta}{\kappa} = \frac{1+iwe_2}{1+iwe_1} = \frac{we_2 - i}{we_1 - i} = \frac{1+we_1we_2}{1+we_1^2} + i \frac{we_2 - we_1}{1+we_1^2}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\begin{aligned} |We| &= \left(\frac{1+we_2^2}{1+we_1^2} \right)^{1/2} \\ \text{Im}(We) &= \frac{we_2 - we_1}{1+we_1^2} \\ We^2 &= \frac{(1-we_1we_2)^2 - (we_2 - we_1)^2}{(1+we_1^2)^2} + i \frac{2(1+we_1we_2)(we_2 - we_1)}{(1+we_1^2)^2} \\ \text{Re}(We^2) &= \frac{1+4we_1we_2 + (we_1we_2)^2 - we_1^2 - we_2^2}{(1+we_1^2)^2} \end{aligned}$$

Επίσης, από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$\xi_1 \xi_2 = \beta \left[\frac{|We| + \text{Im}(We)}{|We|^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_1 \xi_2 = \beta \left[\frac{|We| - \text{Im}(We)}{|We|^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi_1 \xi_2 = \left[1 - \frac{\text{Im}^2(We)}{|We|^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_1^2 - \xi_2^2 = 2 \frac{\text{Im}(We)}{|We|}$$

Αν είναι $we_1=we_2$ ή $\xi_1=\xi_2=1$ τότε ο We είναι πραγματικός αριθμός. Οπότε το ιξωδοελαστικό και το νευτώνειο ρευστό συμπεριφέρονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Αν ο We είναι φανταστικός αριθμός τότε θα είναι $\text{Im}(We) = \pm |We|$ από την οποία προκύπτει ότι $we_1 we_2 = -1$. Επομένως αν είναι $we_1 > 0$ τότε $\text{Im}(We) < 0$ δηλαδή $\text{Im}(We) = -|We|$ και κατά συνέπεια $\xi_1 = 0$ και $\xi_2 = \sqrt{2}$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι $\xi_2 = 0$ και $\xi_1 = \sqrt{2}$. Πάντως, είναι προφανές ότι φυσικό νόημα έχουν μόνο οι θετικοί αριθμοί Weissenberg.

II. Συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των κυρίων μεγεθών

Παρουσιάζονται συνοπτικά και με κατάλληλο τρόπο οι συναρτησιακές σχέσεις που λύνουν το πρόβλημα της ροής και της διασποράς μιας ουσίας και για τις δυο περιπτώσεις ρευστών (ιξωδοελαστικού και νευτώνειου) ώστε να είναι δυνατή η συγκριτική μελέτη του φαινομένου. Οι εκφράσεις για το νευτώνειο ρευστό προκύπτουν αν τεθούν στους αντίστοιχους τύπους για το ιξωδοελαστικό οι τιμές $\xi_1=\xi_2=1$ ή ισοδύναμα $we_1=we_2$ και $\xi=\beta$.

Οι τύποι διαχωρίζονται ουσιαστικά σε αυτούς που εκφράζουν τα μεγέθη σε ροές όπου καθορίζεται η κλίση της πίεσης και σε αυτούς που εκφράζουν τα μεγέθη σε ροές όπου καθορίζεται ο όγκος εμβολισμού .

Κατανομή ταχύτητας

Για ροές όπου καθορίζεται η κλίση της πίεσης, η αδιάστατη κατανομή της ταχύτητας W εκφράζεται από τη σχέση:

$$W = \frac{2hw}{v} = W_o \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad W_o = \frac{4}{\beta^2} A_o Ta \quad , \quad Ta = \frac{Ph^3}{\rho v^2}$$

όπου :

$$A_o = \sqrt{1 + \frac{\cosh\left(\frac{y}{h} \xi_1\right) + \cos\left(\frac{y}{h} \xi_2\right)}{\cosh(\xi_1) + \cos(\xi_2)} - 2 \frac{\cosh\left(\frac{\xi_1}{2} \left(\frac{y}{h} + 1\right)\right) \cos\left(\frac{\xi_2}{2} \left(\frac{y}{h} - 1\right)\right) + \cosh\left(\frac{\xi_1}{2} \left(\frac{y}{h} - 1\right)\right) \cos\left(\frac{\xi_2}{2} \left(\frac{y}{h} + 1\right)\right)}{\cosh(\xi_1) + \cos(\xi_2)}}$$

$$f_v = f_v(\beta, we_1, we_2) = \frac{1}{|We|^4 \xi^8} \left(1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi_2)}{\cosh(\xi_1) + \cos(\xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi_1) - \cos(\xi_2)}{\cosh(\xi_1) + \cos(\xi_2)} \right)$$

Για ροές όπου καθορίζεται ο όγκος εμβολισμού, η αδιάστατη κατανομή της ταχύτητας W για δοσμένο αδιάστατο όγκο εμβολισμού $V/(2h)^2$ εκφράζεται από τη σχέση .

$$W = \frac{2hw}{v} = \left\{ \frac{A_o}{\beta^2 \sqrt{f_v}} \right\} \frac{V}{(2h)^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όπου f_v δίνεται από τη σχέση:

$$v = f_v(\beta, we_1, we_2) = \frac{1}{|We|^4 \xi^8} \left(1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi \xi_1) + \xi_2 \sin(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi \xi_1) - \cos(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} \right)$$

Εκφράσεις του R (βλ. παράγραφο 3.2)

Για ροές όπου καθορίζεται η κλίση της πίεσης, μια κατάλληλη έκφραση για το R που να δείχνει την εξάρτηση του από τις μεταβλητές β, we_1, we_2 προκύπτει από τη σχέση

$$R_v = \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right]$$

Αν τεθεί $\eta = v \cdot We$ οπότε :

$$R_v = \frac{P^2 h^6}{\rho^2 v^4} \left\{ \frac{1}{\xi^6} \frac{4}{|We|^4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right] \right\}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε :

$$R_v = \frac{P^2 h^6}{\rho^2 v^4} T_{v1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)$$

$$\text{όπου: } T_{v1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2) = \left\{ \frac{1}{\xi^6} \frac{4}{|We|^4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right] \right\}$$

για $\beta \rightarrow 0$ που συνεπάγεται $\xi \rightarrow 0$ η συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$T_{V1} = \frac{Sc_o^2}{945|We|^2} \left\{ 1 - \frac{13}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^2 - \left(\frac{5|Sc|^2 + 350\xi_1^2\xi_2^2 - 268}{1980} - \frac{-444 + 115\xi_1^2\xi_2^2 + 326\xi_1^4\xi_2^4 + 3\xi_1^6\xi_2^6}{(|Sc|^2 + 1)^2 - 4|Sc|^2\xi_1^2\xi_2^2} \right) \xi^4 + O(\xi^6) \right\}$$

Ως **αριθμός Taylor** ορίζεται η αδιάστατη ποσότητα :

$$Ta = \frac{Ph^3}{\rho\nu^2}.$$

Για ροές όπου καθορίζεται ο όγκος εμβολισμού η κατάλληλη έκφραση για το R είναι η σχέση

$$R_V = T_{V2}(\beta; Sc_o, we_1, we_2) \frac{V_1^2}{(2h)^4}$$

όπου :

$$T_{V2}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{\frac{\xi^4}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \left[(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right] [\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)]}{\xi^2 [\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)] - 2\xi [\xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2)] + 2[\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)]}$$

για $\beta \rightarrow 0$ που συνεπάγεται $\xi \rightarrow 0$ η συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$T_{V2} = \frac{\xi^4 Sc_o^2 |We|^2}{420} \left\{ 1 - \frac{1}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^2 - \left(\frac{32 + 175|Sc|^2}{69300} + \frac{1}{3960} \frac{(\xi_1^2\xi_2^2 - 1)(444 + 329\xi_1^2\xi_2^2 + 3\xi_1^4\xi_2^4)}{|Sc^2 - 1|^2} \right) \xi^4 + O(\xi^6) \right\}$$

Όσον αφορά το νευτώνιο ρευστό (σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Watson), η κατανομή ταχύτητας και οι εκφράσεις του R προκύπτουν από τους αντίστοιχους τύπους του ιξωδοελαστικού όταν τεθεί $we_1 = we_2$, δηλαδή $\xi_1 = \xi_2 = 1$ και $\beta \equiv \xi$.

Το R εκφράζεται σε συνάρτηση με τον αριθμό Taylor με τον παρακάτω τύπο,

$$\frac{R_N}{Ta^2} = \frac{R_N(\beta, Sc_o)}{Ta^2} = T_{N1}(\beta, Sc_o) = \begin{cases} \frac{4}{\beta^6} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \frac{C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2})}{(1 - Sc_o^{-2})} \\ \frac{Sc_o^2}{945} \left\{ 1 - \frac{5Sc_o^2 + 82}{1980} \beta^4 \right\}, \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

Ένα διάγραμμα σε συνάρτηση του αριθμού Taylor, που είναι χρήσιμο για να αναδειχθούν ορισμένα χαρακτηριστικά της εξάρτησης του R από την αδιάστατη συχνότητα όταν αυτή γίνεται πολύ μεγάλη προκύπτει από τις εξισώσεις :

$$\frac{R_N}{R_o} = \frac{R_N}{R_o}(\beta, Sc_o) = T_{N12}(\beta, Sc_o) = \begin{cases} \frac{3780}{(Sc_o^2 - 1)} \frac{1}{\beta^6} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} \left\{ C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2}) \right\} \\ 1 - \frac{5Sc_o^2 + 82}{1980} \beta^4, \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

όπου :

$$R_o = \frac{Sc_o^2}{945} Ta^2$$

Το R_N υπολογίζεται σε συνάρτηση με τον αδιάστατο όγκο εμβολισμού από τον τύπο (73) του Watson και από τον τύπο :

$$R_N = \frac{\beta^4 Sc_o^2}{420} \left[1 - \frac{175 Sc_o^2 + 32}{69300} \beta^4 + O(\beta^8) \right] \frac{V_1^2}{(2h)^4}, \quad \beta \rightarrow 0$$

Ο τύπος (77) του Watson είναι λάθος. Είναι λοιπόν,

$$\left\{ \frac{V^2}{(2h)^4} \right\}^{-1} R_N = \left\{ \frac{V^2}{(2h)^4} \right\}^{-1} R_N(\beta, Sc_o) = T_{N2}(\beta, Sc_o) = \begin{cases} \frac{\frac{\beta^4}{4} [\cosh(\beta) - \cos(\beta)] [C(\beta) - C(\beta Sc_o^{1/2})]}{\beta^2 [\cosh(\beta) + \cos(\beta)] - 2\beta [\sinh(\beta) + \sin(\beta)] + 2[\cosh(\beta) - \cos(\beta)]} \frac{1}{(1 - Sc_o^{-2})} \\ \frac{\beta^4 Sc_o^2}{420} \left(1 - \frac{175 Sc_o^2 + 32}{69300} \beta^4 \right), \quad \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

III. Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Η παρουσίαση μπορεί να γίνει είτε για την τιμή του λόγου $\frac{K}{\kappa} = (1 + R)$ είτε για το R , για το οποίο είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι εξαρτάται σε κάθε περίπτωση από το τετράγωνο των αδιάστατων παραμέτρων (Taylor, αδιάστατου όγκου εμβολισμού).

Αρχικά μπορούν να παρουσιαστούν για το νευτώνειο ρευστό (για το οποίο υπενθυμίζεται ότι το R_N είναι θετικός):

- Διαγράμματα για το $Ta^{-2} R_N = Ta^{-2} R_N(\beta; Sc_o)$ δηλαδή σε συνάρτηση με την αδιάστατη συχνότητα και παράμετρο Sc_o και αφορούν ροές για τις οποίες καθορίζεται η κλίση της πίεσης, η οποία εκφράζεται μέσω του αριθμού Taylor.

- Διαγράμματα για το $\left\{ \frac{V}{(2h)^2} \right\}^{-2} R_N = \left\{ \frac{V}{(2h)^2} \right\}^{-2} R_N(\beta; Sc_o)$ που αφορούν ροές για τις

οποίες καθορίζεται ο όγκος εμβολισμού, ο οποίος εκφράζεται μέσω της παραμέτρου $\frac{V}{(2h)^2}$.

Για το ξωδοελαστικό ρευστό είναι δυνατό να δοθούν διαγράμματα του R_V/R_N σε συνάρτηση με την αδιάστατη συχνότητα β και παραμέτρους τα Sc_0, we_1 και we_2 , με το ίδιο σκεπτικό όπως και παραπάνω. Όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι της μορφής $f(\beta, Sc_0, we_1, we_2)$.

Επειδή είναι $we_1 = \lambda_1 \omega, we_2 = \lambda_2 \omega, \beta = h \left(\frac{2\omega}{v} \right)^{1/2}$ προκύπτει ότι :

$$we_1 = \left\{ \frac{v\lambda_1}{2h^2} \right\} \beta^2$$

$$we_2 = \left\{ \frac{v\lambda_2}{2h^2} \right\} \beta^2$$

Επομένως αν θέσουμε :

$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2}$$

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε $f(\beta, Sc_0, we_1, we_2) = g(\beta, Sc_0, De_1, De_2)$. Επομένως, τα παρακάτω διαγράμματα μπορούν να ληφθούν είτε με παραμέτρους τα Sc_0, we_1, we_2 είτε με τα Sc_0, De_1, De_2 . Ο αδιάστατος αριθμός ομοιότητας De ονομάζεται **αριθμός Deborah** ή **αριθμός ελαστικότητας (Elasticity Number)**.

Αναλυτικότερα, μπορούν να παρουσιαστούν :

- Διαγράμματα του $\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor}$, δηλαδή του λόγου των ποσοστών αύξησης του συντελεστή μοριακής διάχυσης, όταν το R_N και το R_V υπολογίζονται με τον ίδιο αριθμό Taylor.
- Διαγράμματα του $\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{[v/(2h)^2]}$, δηλαδή του λόγου των ποσοστών αύξησης του συντελεστή μοριακής διάχυσης, όταν το R_N και το R_V υπολογίζονται με τον ίδιο αριθμό αδιάστατου όγκου εμβολισμού.

Ενδιαφέρουσες είναι οι σχέσεις μεταξύ αυτών των ποσοτήτων, γιατί όπως θα δειχθεί αμέσως παρακάτω οι μεταξύ τους λόγοι είναι ανεξάρτητοι του Sc_0 .

Είναι :

$$W2 = 1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)}$$

$$W1 = \left(|Sc|^2 - 1 \right) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi}$$

(βλ. παράρτημα υπολογισμού R_V σε συνάρτηση του όγκου εμβολισμού) και ορίζουμε επίσης τις αντίστοιχες ποσότητες για το νευτώνειο ρευστό :

$$W2' = 1 - \frac{2}{\beta} \frac{\sinh(\beta) + \sin(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)} + \frac{2}{\beta^2} \frac{\cosh(\beta) - \cos(\beta)}{\cosh(\beta) + \cos(\beta)}$$

$$W1' = (Sc_0^2 - 1) \left[C(\beta) - C(\beta Sc_0^{1/2}) \right]$$

Τότε προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{\frac{R_V}{Ta_V^2}}{\frac{R_N}{Ta_N^2}} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} = \frac{T_{V1}(\beta, Sc_0, we_1, we_2)}{T_{V1}(\beta, Sc_0, we_1 = we_2)} = \begin{cases} \frac{|We| (Sc_0^2 - 1)^2 \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \cosh(\beta) + \cos(\beta) W1}{|Sc^2 - 1|^2 \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \cosh(\beta) - \cos(\beta) W1'} \\ \frac{1}{|We|^2} \left[1 - \frac{13}{30} \frac{\text{Im}(We)}{|We|^2} \beta^2 \right], \quad \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{\frac{R_V}{\left(\frac{V}{(2h)^2} \right)_V^2}}{\frac{R_N}{\left(\frac{V}{(2h)^2} \right)_N^2}}}{\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{\left[\frac{V}{(2h)^2} \right]}} = \frac{T_{V2}(\beta, Sc_0, we_1, we_2)}{T_{V2}(\beta, Sc_0, we_1 = we_2)} = \begin{cases} \frac{|We| (Sc_0^2 - 1)^2 \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \cosh(\beta) + \cos(\beta) W1 W2'}{|Sc^2 - 1|^2 \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \cosh(\beta) - \cos(\beta) W1' W2} \\ 1 - \frac{13}{30} \frac{\text{Im}(We)}{|We|^2} \beta^2, \quad \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

Επομένως, άμεσα φαίνεται ότι :

$$\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{\left[\frac{V}{(2h)^2} \right]} = \begin{cases} \frac{W2'}{W2} \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} \\ |We|^2 \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} \end{cases} = 1, \quad \beta \rightarrow 0$$

Τελικώς, σε καταστάσεις ενδιαφέροντος (β, we_1, we_2) είτε (β, De_1, De_2) είναι δυνατόν να δοθούν διαγράμματα για την κατανομή της ταχύτητας επί της διατομής του καναλιού ώστε να γίνει συσχέτιση του μεγέθους του R με την κίνηση του ρευστού. Αυτό μπορεί να γίνει με σκοπό να διαπιστωθεί κατά πόσον παράμετροι της κατανομής της ταχύτητας επηρεάζουν το R και πως αυτές οι παράμετροι εξαρτώνται από τις ιδιότητες του ρευστού.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν διαγράμματα όπως περιγράφονται παραπάνω με την εξής λογική : επειδή δεν έχουμε ακριβή στοιχεία για τιμές των σταθερών του μοντέλου του Jeffreys που να έχουν ταχτοποιηθεί με τη συμπεριφορά του αίματος, θα εξεταστεί η επίδραση που έχει στο μέγεθος του ποσοστού αύξησης της μοριακής διάχυσης R, το σχετικό μέγεθος των παραμέτρων δηλαδή

- Αν $\lambda_1 > \lambda_2$ (τυπικά λαμβάνεται $\lambda_2 = \lambda_1/2$)
- Αν $\lambda_2 > \lambda_1$ (τυπικά λαμβάνεται $\lambda_1 = \lambda_2/2$)

Αυτό μπορεί να γίνει θέτοντας $\frac{we_1}{we_2} = 2$ είτε θέτοντας $\frac{De_1}{De_2} = 2$ για την πρώτη περίπτωση και ανάλογα για τη δεύτερη. Σημειώνεται ότι οι W.M.Phillips και S.Deutsch (1975) στην εργασία τους λαμβάνουν περίπου την ίδια τιμή για το λόγο $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Τυπικές τιμές για τις παραμέτρους του αίματος θα μπορούσαν να ληφθούν οι παρακάτω

- Συνεκτικότητα $\mu = 4cP = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Newton} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2}$
- Πυκνότητα $\rho = 1,06 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Κινηματική συνεκτικότητα $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 3,744 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$

Τυπικά θα ληφθεί $\kappa = 5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$ οπότε $Sc_0 = 754,717$.

Τυπικές τιμές για τις χρονικές σταθερές λαμβάνονται της τάξης του ενός δευτερολέπτου π.χ. αν $\lambda_1 = 1$ sec και υποθέσουμε ότι αναφερόμαστε σε κανάλι πλάτους 10μm, τότε $h = 5\mu\text{m}$ τότε προκύπτει η τυπική τιμή $De_1 = 7,547 \cdot 10^4$.

Βέβαια, κρίσιμη είναι η ταυτοποίηση των τριών ρεολογικών παραμέτρων του μοντέλου του Jeffreys και προς αυτή την κατεύθυνση οι παραπάνω τιμές μπορούν να ληφθούν ως μία βάση ως προς την οποία να επιλεγούν τελικά αποδεκτές τιμές για τα λ_1 , λ_2 και μ , διότι από μια διαδικασία τακτοποίησης αναμένεται να προκύψουν αρκετές τριάδες τιμών των παραμέτρων που να ικανοποιούν τα τυχόν κριτήρια ταυτοποίησης, δηλαδή να προσεγγίζουν τη συμπεριφορά του αίματος. Επειδή, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, δεν είναι δυνατόν στη παρούσα φάση να ταυτοποιηθούν οι ρεολογικές παράμετροι του μοντέλου θα γίνει μια συγκριτική

μελέτη του τρόπου με τον οποίο διασπείρεται η ουσία μέσα σε ένα νευτώνειο και στο ιξωδοελαστικό ρευστό του Jeffreys. Προς αυτή την κατεύθυνση είναι ενδιαφέρον να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εύρος μεταβολής των σχετικών παραμέτρων. Τα σχετικά διαγράμματα παρουσιάζονται στα επόμενα φύλλα.

Συμπεράσματα

Στα παρακάτω σημειώνεται ότι ο αδιάστατος όγκος $\frac{V}{(2h)^2}$ και ο αριθμός Taylor για το νευτώνειο ρευστό θα συμβολίζονται O_N και Ta_N αντίστοιχα, ενώ για το ιξωδοελαστικό θα συμβολίζονται O_V και Ta_V .

Δ1. Νευτώνειο ρευστό. Διάφορες τιμές του αριθμού Sc .

Διάγραμμα Α

Είναι $T_{N1}(\beta, Sc_0) = \frac{R_N}{Ta^2}$. Αν υποθεθεί ότι $Ta = const$ τότε για $\beta \rightarrow 0$ προκύπτει ότι $R_N \rightarrow const > 0$ δηλαδή τείνει προς μία σταθερή ποσότητα που φαίνεται ότι είναι και μέγιστη, γεγονός που είναι λογικό αφού για $\beta \rightarrow 0$ με $Taylor = const$ ο αδιάστατος όγκος γίνεται άπειρη ποσότητα. Για $\beta \rightarrow \infty$ με $Taylor = const$ προκύπτει ότι $R_N \rightarrow 0$ και σε αυτή τη περίπτωση ο αδιάστατος όγκος τείνει επίσης προς το μηδέν, γεγονός που σημαίνει ότι οι ταχύτητες των στοιχείων του ρευστού τείνουν να γίνουν επίσης μηδενικές. Επομένως, η ουσία διασπείρεται κατά κύριο λόγο εξαιτίας της αξονικής διάχυσης. Η διασπορά της ουσίας φαίνεται ότι είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Schmidt, γεγονός που σημαίνει ότι είτε η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού είναι μεγάλη είτε ο συντελεστής μοριακής διάχυσης είναι μικρός. Αν εξετάσουμε ένα ρευστό και μέσα σε αυτό διάφορες διαλυμένες ουσίες που η κάθε μία έχει διαφορετικό συντελεστή μοριακής διάχυσης τότε το αποτέλεσμα είναι λογικό, γιατί όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής μοριακής διάχυσης τόσο περισσότερο έντονα διαχέεται προς την ακτινική κατεύθυνση η ουσία και επομένως η διασπορά της προς την αξονική κατεύθυνση μειώνεται. Στη περίπτωση που εξετάζουμε διαφορετικά ρευστά για μια ουσία η οποία σε όλα συμβαίνει να έχει τον ίδιο συντελεστή μοριακής διάχυσης, τότε προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κινηματική συνεκτικότητα τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά της ουσίας. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι για σταθερό αριθμό Taylor, όσο μεγαλύτερη είναι η κινηματική συνεκτικότητα τόσο μεγαλύτερες είναι οι ταχύτητες των στοιχείων του ρευστού (βλ. Π2).

Διάγραμμα Β

Είναι $T_{N2}(\beta, Sc_0) = \left\{ \frac{V^2}{(2h)^4} \right\}^{-1} R_N$. Αν $\frac{V^2}{(2h)^4} = const$ τότε για $\beta \rightarrow 0$ προκύπτει ότι $R_N \rightarrow 0$,

δηλαδή για σταθερό όγκο εμβολισμού και μικρή συχνότητα η επαύξηση στη διασπορά της ουσίας είναι αμελητέα. Αυτό είναι λογικό εφόσον σε μια τέτοια περίπτωση περιμένει κανείς εκτός από μια ως επί το πλείστον ομαλή κατανομή της ταχύτητας επί της διατομής του καναλιού επιπλέον ότι οι

ταχύτητες θα είναι πάρα πολύ μικρές. Αντίθετα για $\beta \rightarrow \infty$ τότε οι ταχύτητες των στοιχείων του ρευστού θα πρέπει να τείνουν προς το άπειρο για $\frac{V^2}{(2h)^4} = \text{const}$, με συνέπεια η διασπορά της ουσίας να είναι ολοένα και πιο έντονη. Με την ίδια λογική όπως και προηγουμένα, η διασπορά της ουσίας προκύπτει ότι είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Schmidt.

Δ2-Δ5. Σύγκριση της διασποράς μιας ουσίας διαλυμένης μέσα σε ιξωδοελαστικό και σε νευτώνειο ρευστό με παραμέτρους τους αριθμούς Weisenberg, we_1 και we_2 .

Αρχικά πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον οι αριθμοί Weisenberg παραμένουν σταθεροί σε κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα, αυτό σημαίνει ότι για διαφορετικές συχνότητες συγκρίνονται διαφορετικά ιξωδοελαστικά ρευστά του Jeffreys. Επομένως, τα διαγράμματα αυτά δεν πρέπει να θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν ένα μόνο ιξωδοελαστικό ρευστό, αλλά μια οικογένεια τέτοιων ρευστών.

Στις σελίδες Δ2,Δ4 καταγράφεται αντίστοιχα, ο τρόπος μεταβολής των δύο συναρτήσεων

$$\frac{\frac{R_V}{Ta_V^2}}{\frac{R_N}{Ta_N^2}} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} = \frac{T_{V1}}{T_{N1}}$$

$$\frac{\frac{R_V}{\left(\frac{V}{(2h)^2}\right)_V^2}}{\frac{R_N}{\left(\frac{V}{(2h)^2}\right)_N^2}} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{\left[\frac{V}{(2h)^2}\right]} = \frac{T_{V2}}{T_{N2}}$$

στη περίπτωση όπου $we_2 = \frac{1}{2}we_1$, δηλαδή όταν η σταθερά χαλάρωσης των τάσεων είναι διπλάσια από τη σταθερά χαλάρωσης του ρυθμού παραμόρφωσης. Στις σελίδες Δ3,Δ5 υπάρχουν τα αντίστοιχα διαγράμματα για την περίπτωση όπου $we_1 = \frac{1}{2}we_2$, δηλαδή όταν η σταθερά χαλάρωσης των τάσεων είναι μισή από τη σταθερά χαλάρωσης του ρυθμού παραμόρφωσης.

1. Για τον ίδιο αριθμό Taylor και για τα ιξωδοελαστικά ρευστά και για το νευτώνειο, προκύπτει ότι

$$T_{V2}/T_{N2} / T_{V1}/T_{N1} = \frac{O_N^2}{O_V^2}$$

και από τα διαγράμματα φαίνεται πως :

$$\frac{O_N^2}{O_V^2} = \begin{cases} < 1, we_2 = \frac{1}{2} we_1 \\ > 1, we_1 = \frac{1}{2} we_2 \end{cases}$$

Από τα διαγράμματα στη σελίδα Δ2 (αφορούν τις περιπτώσεις όπου $we_2 = \frac{1}{2} we_1$) προκύπτει ότι $R_N > R_N$ για τον ίδιο αριθμό Taylor και αρκετά μεγάλους αριθμούς Schmidt. Αυτό το γεγονός μπορεί να ερμηνευθεί με βάση την παραπάνω σχέση όπου φαίνεται ότι ο όγκος εμβολισμού του ιξωδοελαστικού ρευστού είναι μεγαλύτερος από τον όγκο εμβολισμού του νευτώνειου για την ίδια συχνότητα. Είναι περίεργο όμως το γεγονός ότι για μικρά (Sc) και μεγάλες σχετικά τιμές της αδιάστατης συχνότητας του Womersley, η διασπορά στην περίπτωση του νευτώνειου είναι μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση του ιξωδοελαστικού, ενώ ισχύει $O_V > O_N$. Περιμένει κανείς ότι για μικρά (Sc) ο συντελεστής μοριακής διάχυσης (κ) θα είναι μεγάλος και κατά συνέπεια ότι η συγκέντρωση της ουσίας θα είναι αρκετά αυξημένη σε περιοχές κοντά στα τοιχώματα του αγωγού. Επομένως, θα πρέπει σε αυτή τη περίπτωση να είναι αρκετά μεγαλύτερες οι ταχύτητες του νευτώνειου ρευστού από τις ταχύτητες του ιξωδοελαστικού ρευστού για περιοχές κοντά στα τοιχώματα, τόσο περισσότερο μάλιστα όσο αυξάνεται η αδιάστατη συχνότητα.

Αντίθετα στη περίπτωση όπου $we_1 = \frac{1}{2} we_2$ είναι $O_N > O_V$. Φαίνεται από τα διαγράμματα στη σελίδα Δ3, ότι όπως είναι φυσικό για μικρές συχνότητες και για οποιοδήποτε (Sc), η διασπορά της ουσίας είναι μεγαλύτερη για το νευτώνειο ρευστό από ότι για οποιοδήποτε ιξωδοελαστικό. Με τη μείωση όμως του (Sc) και την αύξηση της συχνότητας, προκύπτει ότι η διασπορά της ουσίας μπορεί να γίνει μεγαλύτερη για την περίπτωση του ιξωδοελαστικού ρευστού από ότι στη περίπτωση του νευτώνειου ρευστού, παρά το γεγονός ότι $O_N > O_V$. Πρέπει να δεχθεί κανείς ότι οι ταχύτητες του ιξωδοελαστικού ρευστού για μεγάλες συχνότητες είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές του νευτώνειου ρευστού για περιοχές κοντά στα τοιχώματα.

2. Από τα διαγράμματα στη σελίδα Δ4, προκύπτει ότι για ίδιο και σταθερό όγκο εμβολισμού $O_N = O_V$, η διασπορά της ουσίας είναι αυξημένη σε σχέση με τη διασπορά του νευτώνειου ρευστού για όλες τις αδιάστατες συχνότητες για μεγάλα (Sc) και μειώνεται με τη μείωση του (Sc), όπου μπορεί να φτάσει να είναι και μικρότερη από τη διασπορά στο νευτώνειο ρευστό (σε μεγάλες αδιάστατες συχνότητες).

Το αξιοπερίεργο γεγονός και στη περίπτωση αυτή είναι ότι, παρόλο που ο αδιάστατος όγκος εμβολισμού είναι ο ίδιος και για τις δύο περιπτώσεις ρευστών, η διασπορά της ουσίας διαφέρει. Λογικά, για μεγάλα (Sc) περιμένει κανείς ότι η συγκέντρωση της ουσίας θα είναι μεγαλύτερη προς το κέντρο του αγωγού από ότι σε μικρά (Sc).

Επομένως, φαίνεται ότι στην περίπτωση που $we_2 = \frac{1}{2} we_1$ θα πρέπει η ταχύτητα του ιξωδοελαστικού ρευστού για μεγάλες συχνότητες να είναι μεγαλύτερη στην κεντρική περιοχή του αγωγού από τις ταχύτητες του νευτώνειου, οι οποίες θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες από αυτές του ιξωδοελαστικού σε περιοχές κοντά στα τοιχώματα. Πράγματι, η άποψη αυτή ενισχύεται από το ότι

για μικρά (Sc) η διασπορά της ουσίας γίνεται μεγαλύτερη για το νευτώνειο ρευστό, από ότι στο ιξωδοελαστικό για τον ίδιο όγκο εμβολισμού.

Ακριβώς παρόμοια είναι η εξήγηση των διαγραμμάτων στη σελίδα Δ5 που αφορούν την περίπτωση όπου $we_1 = \frac{1}{2} we_2$. Στη περίπτωση αυτή οι ταχύτητες του ιξωδοελαστικού ρευστού θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες από αυτές του νευτώνειου ρευστού για μεγάλες συχνότητες κοντά στα τοιχώματα και μικρότερες σε περιοχές κοντά στο κέντρο του αγωγού.

Αυτές οι εξηγήσεις συμφωνούν με τις αντίστοιχες απόψεις στο 1.

Δ6-Δ9. Σύγκριση της διασποράς μιας ουσίας διαλυμένης μέσα σε ιξωδοελαστικό και σε νευτώνειο ρευστό με παραμέτρους τους αριθμούς De_1 και De_2 .

Αντίθετα με τα προηγούμενα διαγράμματα με παραμέτρους τους αριθμούς Weisenberg, όπου συγκρίνεται μια οικογένεια ιξωδοελαστικών ρευστών, στα διαγράμματα με παραμέτρους τους αριθμούς De_1, De_2 είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύεται ένα μόνο ιξωδοελαστικό ρευστό για διαφορετικές συχνότητες ταλάντωσης του μέσα στο κανάλι.

Στα διαγράμματα αυτά παρουσιάζονται οι ίδιες ακριβώς συναρτήσεις όπως και προηγούμενα.

Η σημαντικότερη παρατήρηση έγκειται στο γεγονός ότι φαίνεται πως έχει πολύ μεγαλύτερη σημασία ο λόγος των αριθμών De_1, De_2 παρά το απόλυτο μέγεθος τους, τουλάχιστον για μια περιοχή τιμών από 10^{-10} έως 10^5 . Επίσης, φαίνεται πως για μεγάλους αριθμούς Weisenberg, οι συναρτήσεις στα προηγούμενα διαγράμματα με παραμέτρους τα we_1, we_2 τείνουν να γίνουν ίδιες με αυτές όπου ως σταθερές λαμβάνονται τα De_1, De_2 .

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι για σταθερό λόγο De_2/De_1 και αυξανόμενου του απόλυτου μεγέθους των παραμέτρων, η συνάρτηση T_{v1}/T_{N1} τείνει να γίνει ασυνεχής.

Προκύπτουν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα όπως και για τα διαγράμματα Δ2-Δ5.

Δ10-Δ16. Σύγκριση της διασποράς μιας ουσίας διαλυμένης μέσα σε ιξωδοελαστικό και σε νευτώνειο ρευστό με παραμέτρους τους αριθμούς De_1 και De_2 , για διάφορες τιμές του λόγου τους.

Τυπικά λαμβάνεται η περίπτωση $Sc = 1.1$. Ανάλογα συμπεράσματα ακριβώς θα ισχύουν και για τις περιπτώσεις διαφορετικών τιμών.

Από τα διαγράμματα στη σελίδα Δ10 προκύπτει ότι όσο περισσότερο αποκλίνει η συμπεριφορά του ρευστού Jeffreys από αυτή ενός νευτώνειου ρευστού, δηλαδή όσο ο λόγος De_1/De_2 διαφέρει από τη μονάδα τόσο περισσότερο διαφέρει ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διασπορά της ουσίας.

Προκύπτει από το πρώτο πάνω αριστερά διάγραμμα ότι για μικρές συχνότητες πως όσο μικρότερος γίνεται ο λόγος De_2/De_1 ,τόσο περισσότερο αυξημένη είναι η διασπορά της ουσίας για το ιξωδοελαστικό ρευστό, γεγονός που είναι λογικό.

Όμως σε μεγαλύτερες συχνότητες προκύπτει ότι η διασπορά της ουσίας είναι μικρότερη για μικρότερο λόγο De_2/De_1 ,γεγονός που είναι αξιοπερίεργο γιατί ενώ ο όγκος εμβολισμού και η συχνότητα αυξάνονται η διασπορά της ουσίας μειώνεται. Επειδή γενικά αναμένεται η συγκέντρωση της ουσίας να είναι πάντα μεγαλύτερη προς τις κεντρικές περιοχές του αγωγού παρά προς τα τοιχώματα, θα πρέπει το ιξωδοελαστικό ρευστό να ρέει πολύ εντονότερα κοντά στα τοιχώματα για υψηλές συχνότητες όσο ο λόγος De_2/De_1 μειώνεται.

Αυτό προκύπτει και από το πάνω δεξιά διάγραμμα, όπου φαίνεται ότι για τον ίδιο αδιάστατο όγκο εμβολισμού, η διασπορά της ουσίας μειώνεται όσο μειώνεται ο λόγος De_2/De_1 .

Για τα διαγράμματα στη σελίδα Δ11 ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα. Η συμπεριφορά του ιξωδοελαστικού ρευστού στην περίπτωση αυτή είναι αντίστροφη.

Οι απόψεις που παρουσιάστηκαν επιβεβαιώνονται από τα διαγράμματα που παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες από Δ12-Δ16.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ1

Δ1Α

Διαγράμματα του λόγου : $\frac{R_N}{Ta^2} = T_{N1}(\beta, Sc_o)$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley : $\beta = h\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^{1/2}$

Παράμετρος : ο αριθμός Schmidt, $Sc_o = \frac{\nu}{\kappa}$.

Κατακόρυφος Άξονας : Λογαριθμικός

Οριζόντιος Άξονας : Γραμμικός

Δ1Β

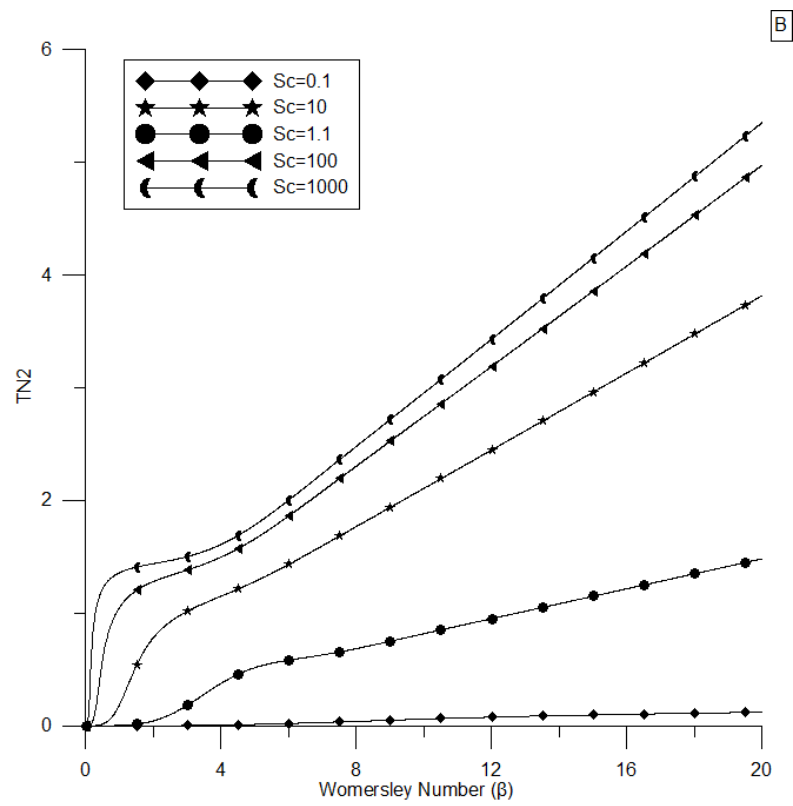
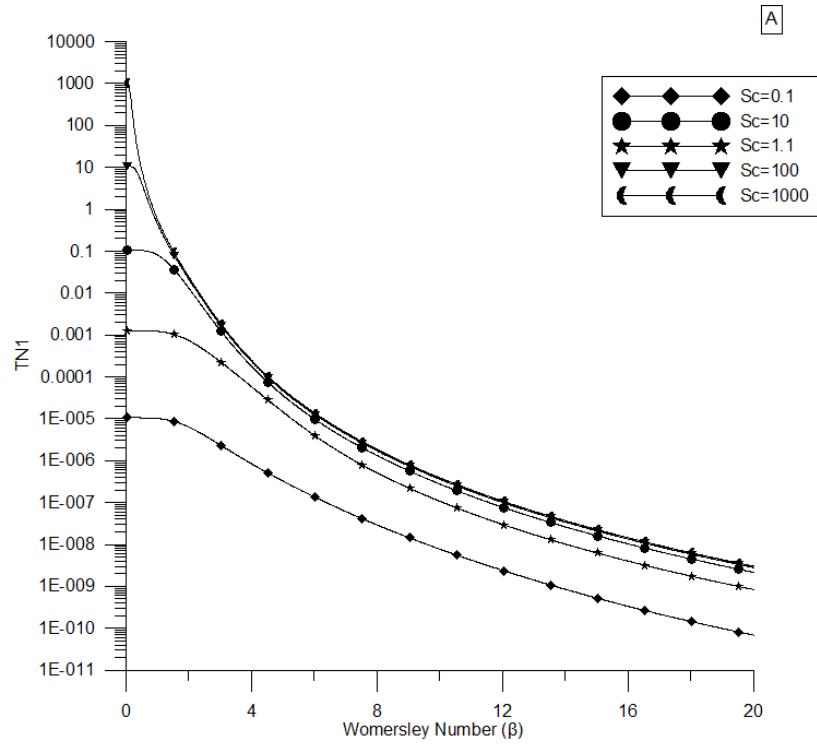
Διαγράμματα του λόγου : $\left\{ \frac{V^2}{(2h)^4} \right\}^{-1} R_N = T_{N2}(\beta, Sc_o)$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley: $\beta = h\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^{1/2}$

Παράμετρος : ο αριθμός Schmidt, $Sc_o = \frac{\nu}{\kappa}$.

Κατακόρυφος Άξονας : Γραμμικός

Οριζόντιος Άξονας : Γραμμικός



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ2

Στα διαγράμματα Δ2 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V1}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{Ta_V^2}$$

$$T_{N1}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{Ta_N^2}$$

$$Ta = \frac{\rho h^3}{\rho \nu^2}$$

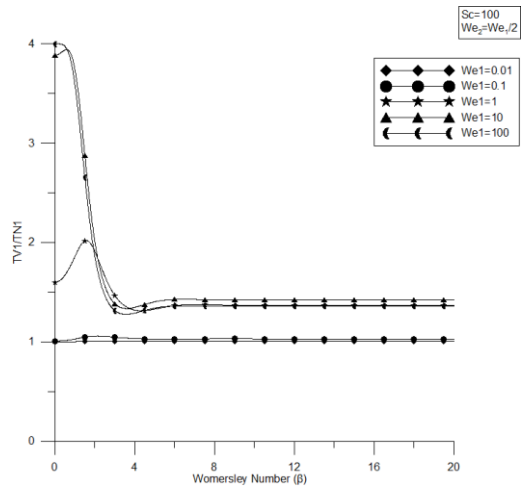
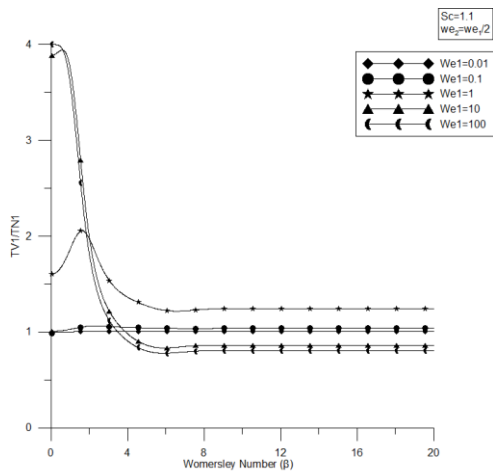
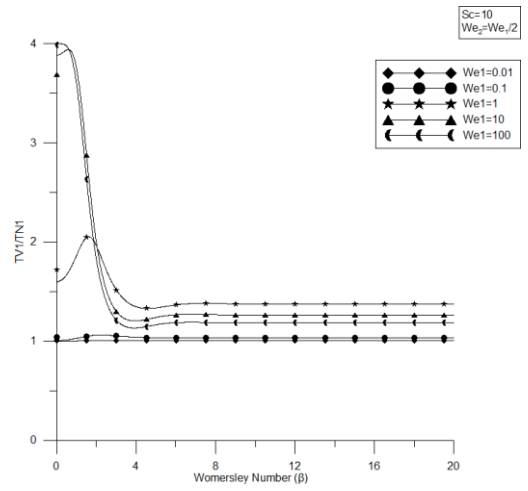
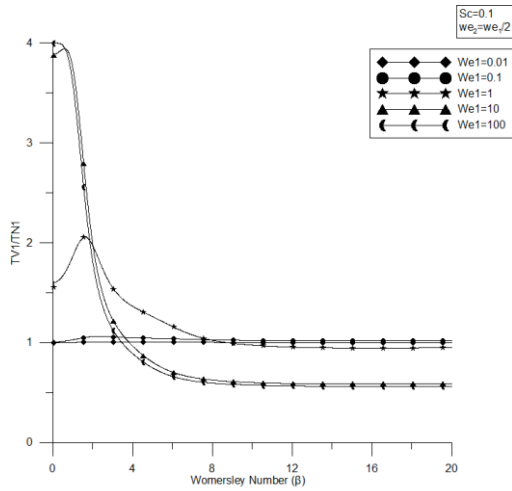
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_1 = \lambda_1 \omega = \begin{cases} 0.01 \\ 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_2 = \lambda_2 \omega = \frac{we_1}{2}$$

Άξονες : Γραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το we_1 είναι οι εξής :

$we_1 = 0.01$

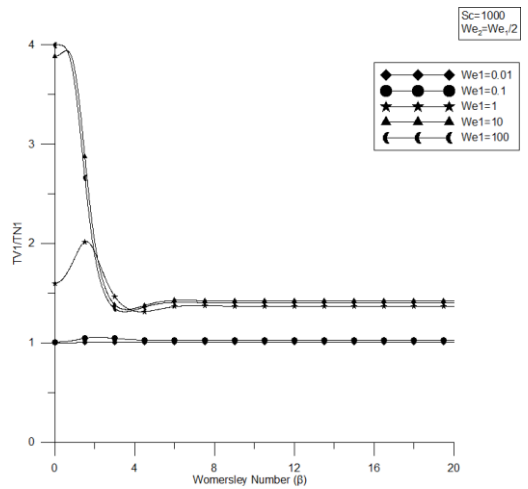
$we_1 = 0.1$

$we_1 = 1$

$we_1 = 10$

$we_1 = 100$

Οι τιμές αντιστοιχούν στις καμπύλες όπως φαίνεται στο πρώτο διάγραμμα. Όσο μεγαλύτερο το we_1 τόσο υψηλότερες τιμές λαμβάνει η συνάρτηση για τιμές του (β) κοντά στο μηδέν. Επιπλέον όσο μειώνεται το (Sc) τόσο μικρότερες τιμές λαμβάνει η συνάρτηση για μεγάλα (β)



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ3

Στα διαγράμματα Δ3 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V1}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{Ta_V^2}$$

$$T_{N1}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{Ta_N^2}$$

$$Ta = \frac{\rho h^3}{\rho \nu^2}$$

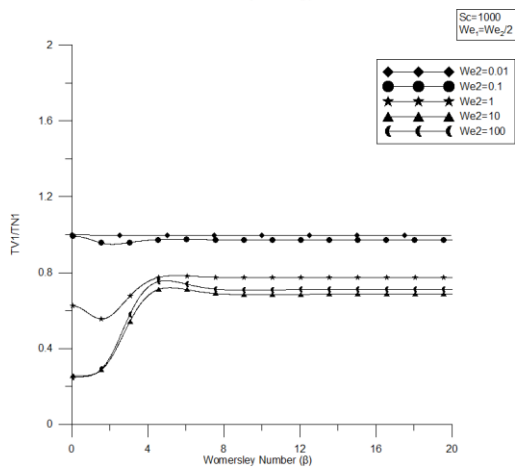
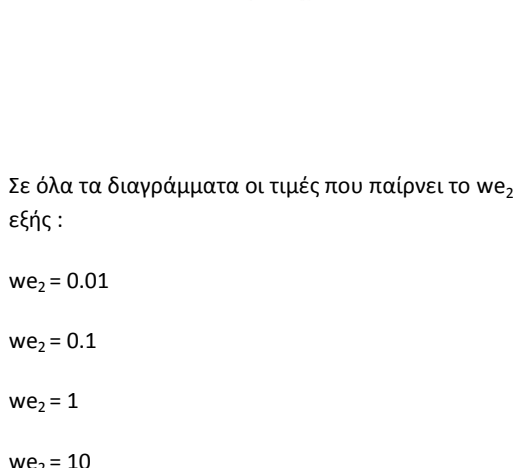
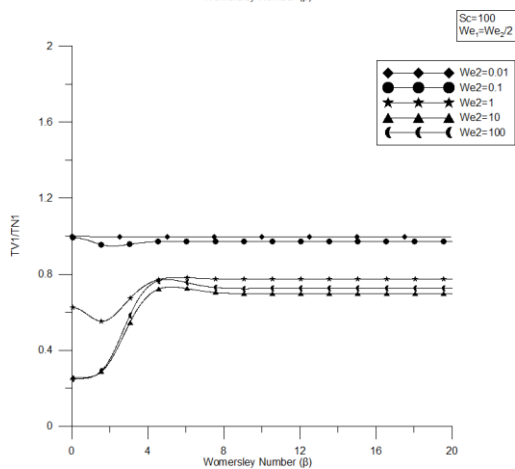
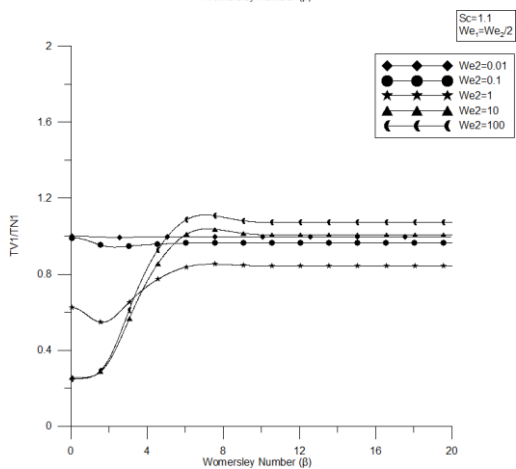
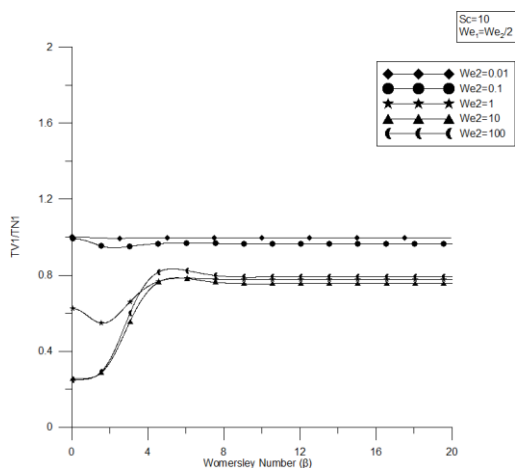
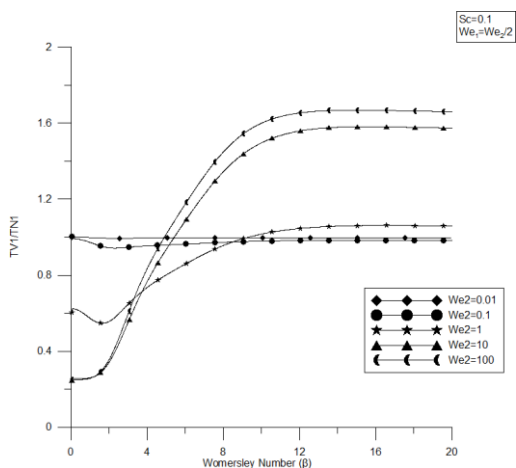
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_2 = \lambda_2 \omega = \begin{cases} 0.01 \\ 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_1 = \lambda_1 \omega = \frac{we_2}{2}$$

Άξονες : Γραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το we_2 είναι οι εξής :

$we_2 = 0.01$

$we_2 = 0.1$

$we_2 = 1$

$we_2 = 10$

$we_2 = 100$

Οι τιμές αντιστοιχούν στις καμπύλες όπως φαίνεται στο πρώτο διάγραμμα. Όσο μεγαλύτερο το we_1 τόσο υψηλότερες τιμές λαμβάνει η συνάρτηση για τιμές του (β) κοντά στο μηδέν. Επιπλέον όσο μειώνεται το (Sc) τόσο μικρότερες τιμές λαμβάνει η συνάρτηση για μεγάλα (β)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ4

Στα διαγράμματα Δ4 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V2}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{(O_V)^2}$$

$$T_{N2}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{(O_N)^2}$$

Αδιάστατος όγκος εμβολισμού : O_V ή $O_N = \frac{V}{(2h)^2}$

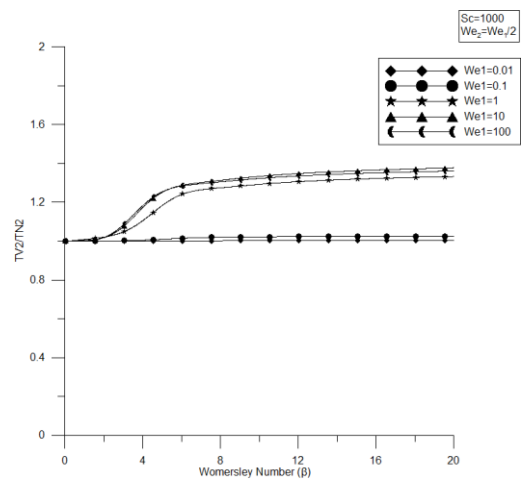
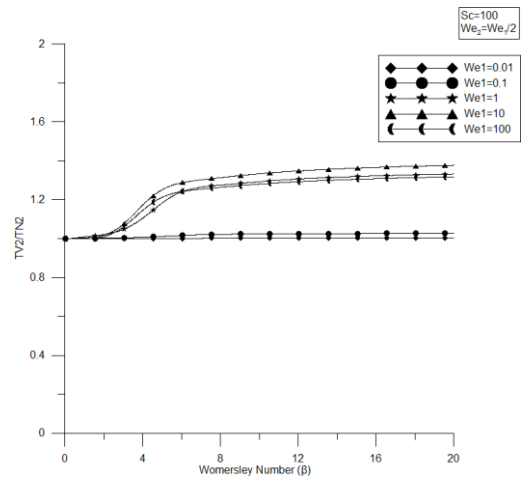
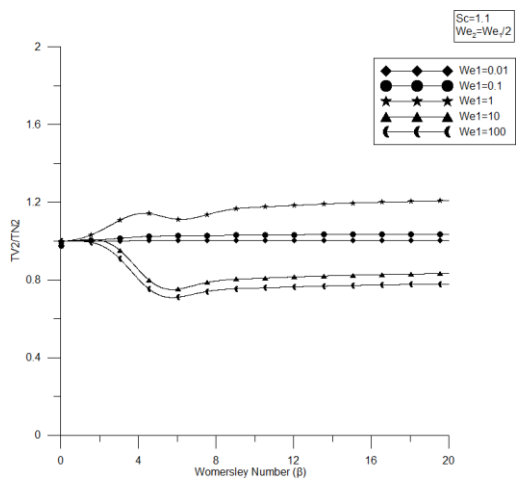
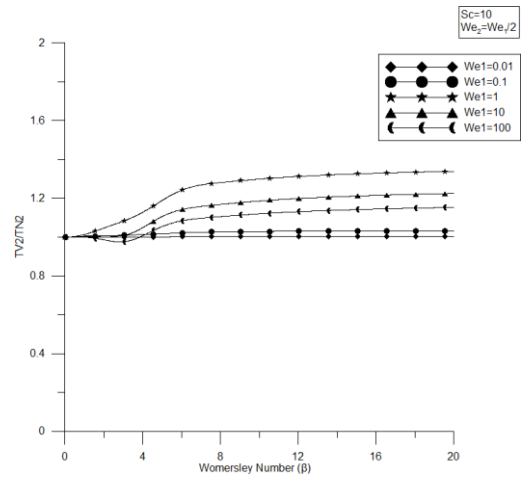
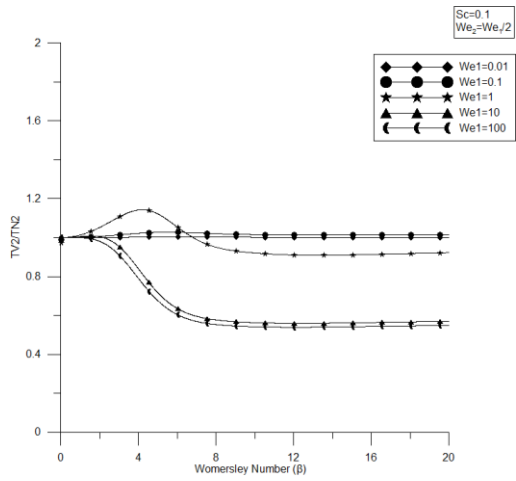
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_1 = \lambda_1 \omega = \begin{cases} 0.01 \\ 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_2 = \lambda_2 \omega = \frac{we_1}{2}$$

ΆξονεςΓραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το we_1 είναι οι εξής :

$we_1 = 0.01$

$we_1 = 0.1$

$we_1 = 1$

$we_1 = 10$

$we_1 = 100$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ5

Στα διαγράμματα Δ5 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V2}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{(O_V)^2}$$

$$T_{N2}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{(O_N)^2}$$

Αδιάστατος όγκος εμβολισμού : O_V ή $O_N = \frac{V}{(2h)^2}$

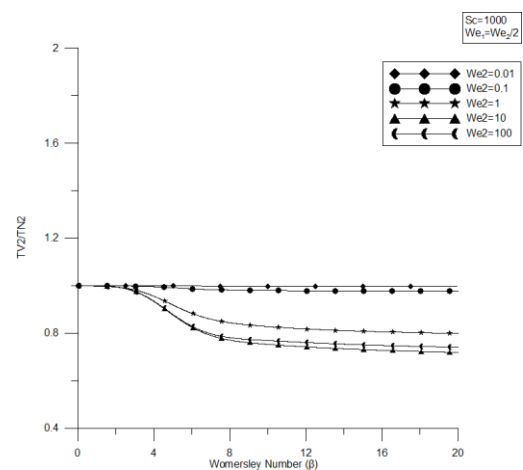
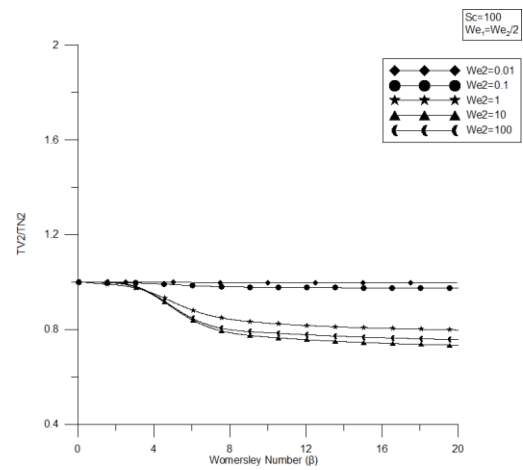
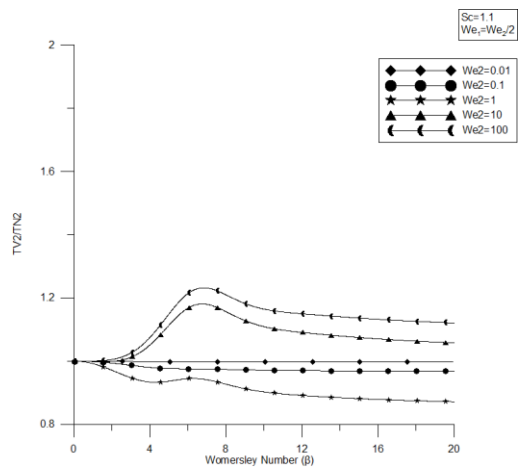
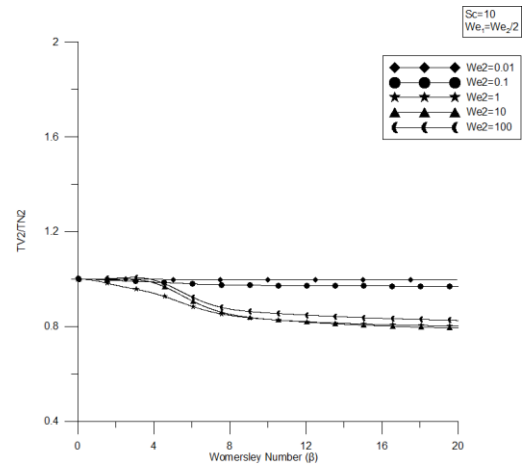
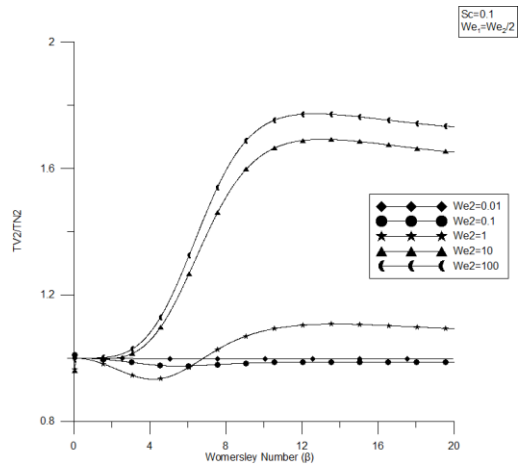
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_2 = \lambda_2 \omega = \begin{cases} 0.01 \\ 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Weissenberg, } we_1 = \lambda_1 \omega = \frac{we_2}{2}$$

ΆξονεςΓραμμικο



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το we_2 είναι οι εξής :

$we_2 = 0.01$

$we_2 = 0.1$

$we_2 = 1$

$we_2 = 10$

$we_2 = 100$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ6

Στα διαγράμματα Δ6 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V1}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{(Ta_V)^2}$$

$$T_{N1}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{(Ta_N)^2}$$

$$Ta = \frac{Ph^3}{\rho\nu^2}$$

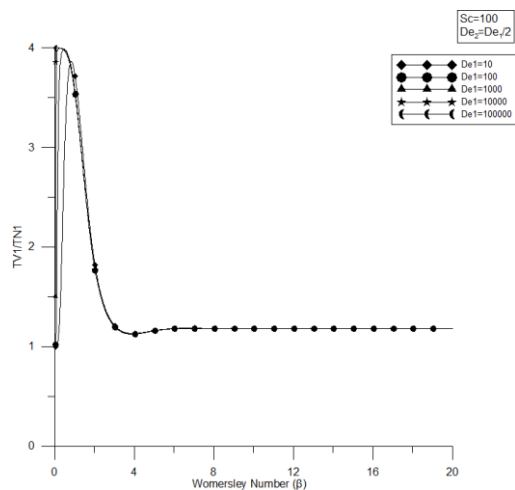
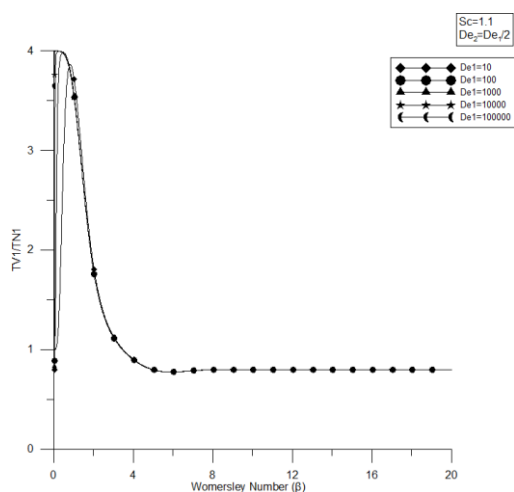
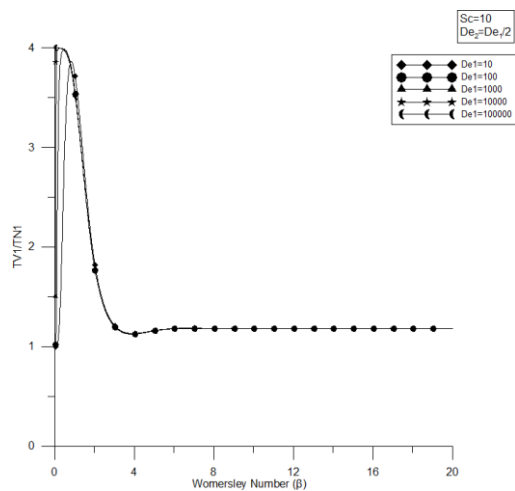
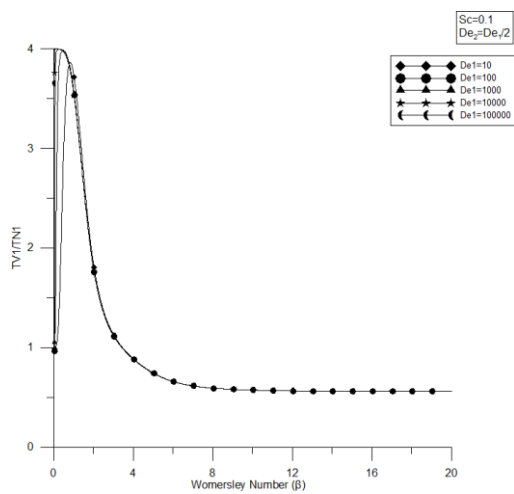
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_1 = \frac{\lambda_1 \nu}{2h^2} = \begin{cases} 100000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 100 \\ 10 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_2 = \frac{\lambda_2 \nu}{2h^2} = \frac{De_1}{2}$$

Άξονες : Γραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το De_1 είναι οι εξής :

$De_1 = 100000$

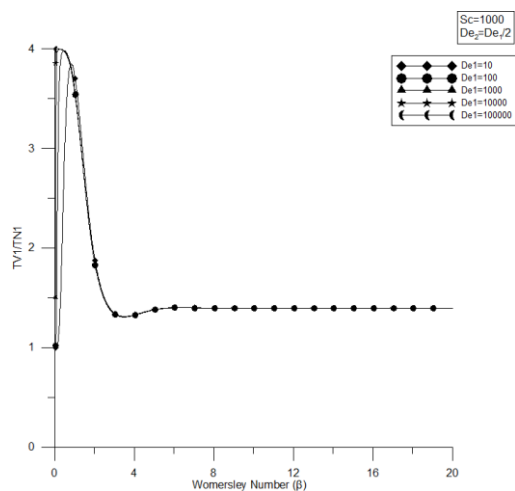
$De_1 = 10000$

$De_1 = 1000$

$De_1 = 100$

$De_1 = 10$

Όσο μεγαλύτερο το De_1 τόσο πιο απότομα μεταβάλλεται η συνάρτηση για τιμές του (β) κοντά στο μηδέν.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ7

Στα διαγράμματα Δ7 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V1}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{Ta_V^2}$$

$$T_{N1}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{Ta_N^2}$$

$$Ta = \frac{Ph^3}{\rho\nu^2}$$

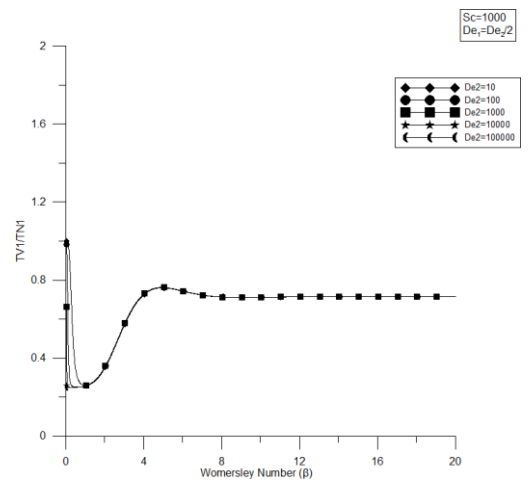
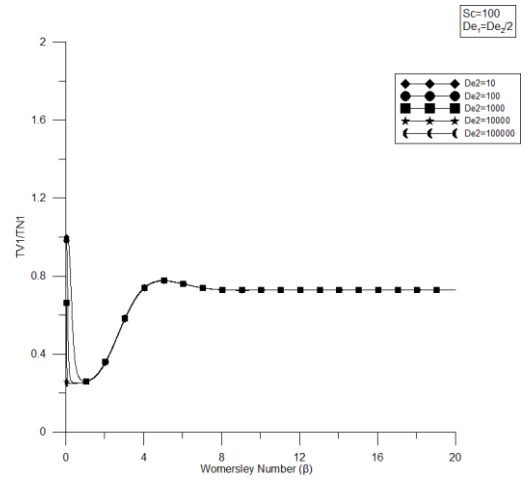
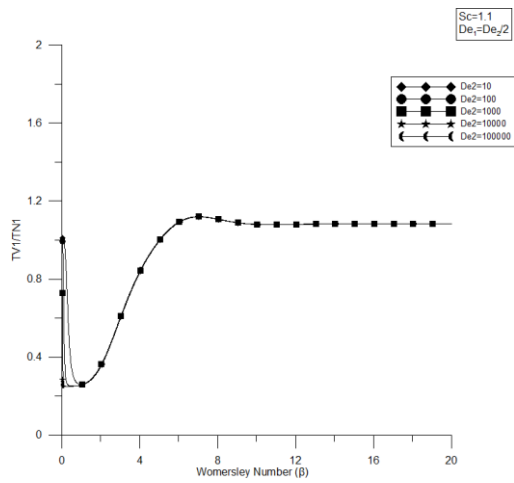
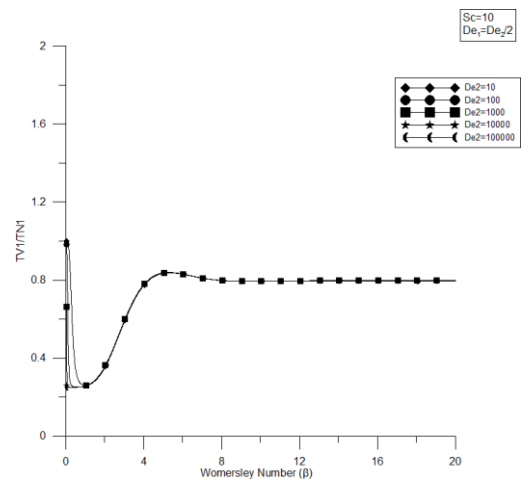
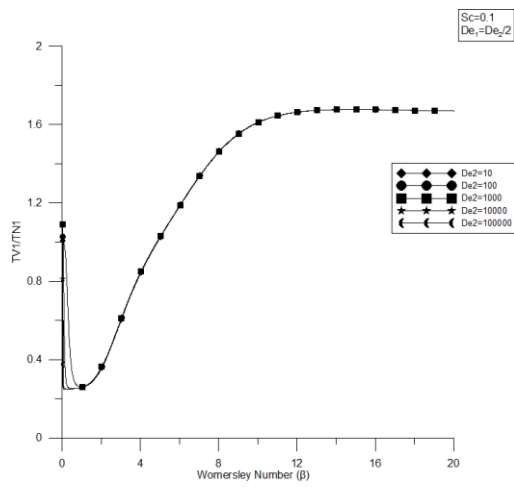
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_2 = \frac{\lambda_2 \nu}{2h^2} = \begin{cases} 100000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 100 \\ 10 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_1 = \frac{\lambda_1 \nu}{2h^2} = \frac{De_2}{2}$$

Άξονες : Γραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το De_2 είναι οι εξής :

$De_2 = 100000$

$De_2 = 10000$

$De_2 = 1000$

$De_2 = 100$

$De_2 = 10$

Οι συναρτήσεις μεταβάλλονται πιο απότομα όσο το De_2 αυξάνει.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ8

Στα διαγράμματα Δ8 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V2}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{(O_V)^2}$$

$$T_{N2}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{(O_N)^2}$$

Αδιάστατος όγκος εμβολισμού : O_V ή $O_N = \frac{V}{(2h)^2}$

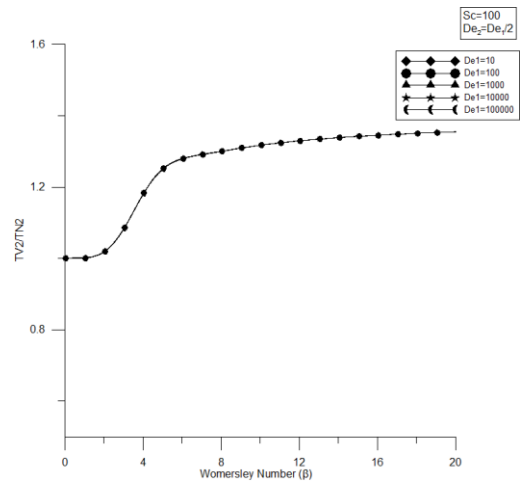
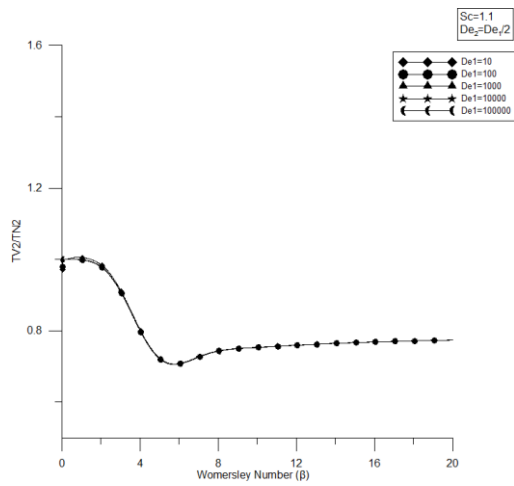
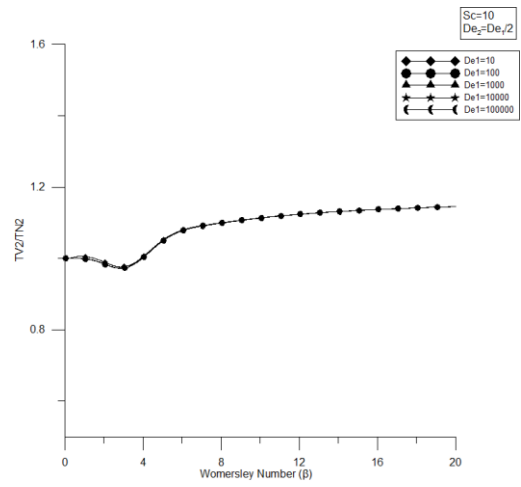
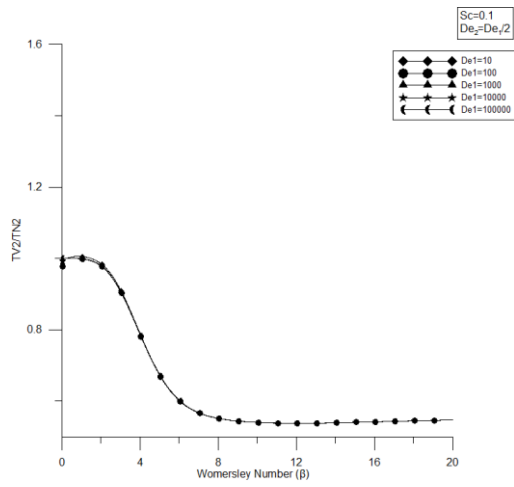
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_1 = \frac{\lambda_1 \nu}{2h^2} = \begin{cases} 100000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 100 \\ 10 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_2 = \frac{\lambda_2 \nu}{2h^2} = \frac{De_1}{2}$$

ΆξονεςΓραμμικο



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το De_1 είναι οι εξής :

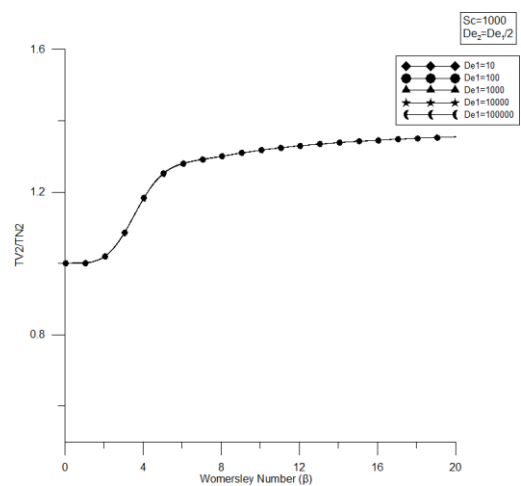
$De_1 = 100000$

$De_1 = 10000$

$De_1 = 1000$

$De_1 = 100$

$De_1 = 10$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ9

Στα διαγράμματα Δ9 παρουσιάζεται η συνάρτηση :

$$\frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$

Σε συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας του Womersley :

$$\beta = h \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^{1/2}$$

Όπου :

$$T_{V2}(\beta, Sc_o, we_1, we_2) = \frac{R_V}{(O_V)^2}$$

$$T_{N2}(\beta, Sc_o) = \frac{R_N}{(O_N)^2}$$

Αδιάστατος όγκος εμβολισμού : O_V ή $O_N = \frac{V}{(2h)^2}$

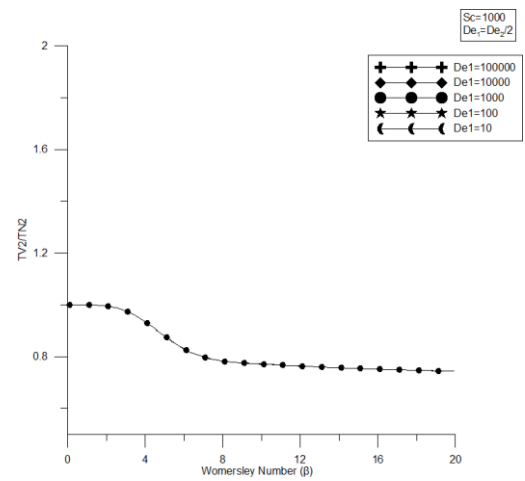
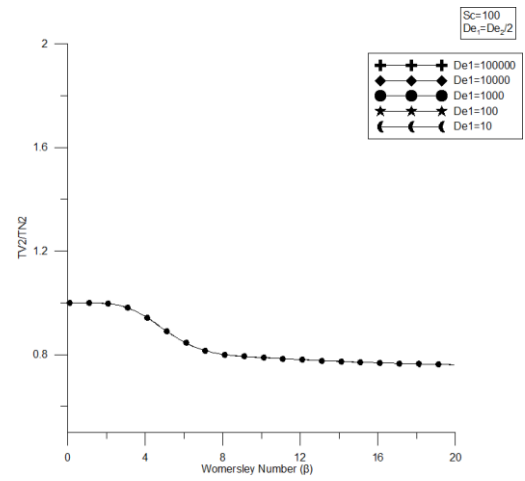
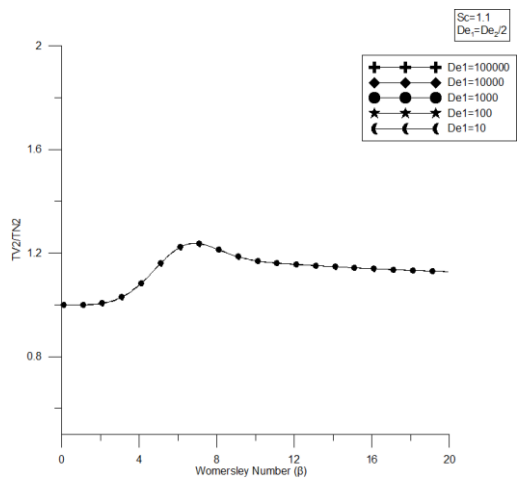
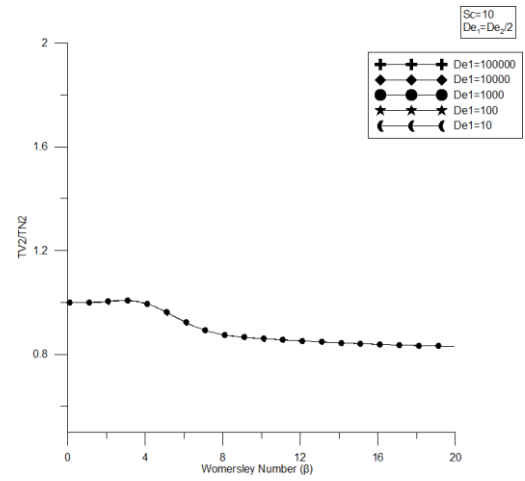
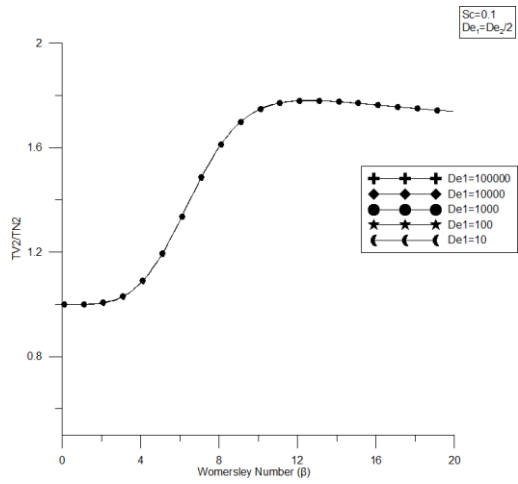
Παράμετροι είναι :

$$1. \text{ Ο αριθμός Schmidt, } Sc_o = \frac{\nu}{\kappa} = \begin{cases} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1.1 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$2. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_2 = \frac{\lambda_2 \nu}{2h^2} = \begin{cases} 100000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 100 \\ 10 \end{cases}$$

$$3. \text{ Ο αριθμός Deborah, } De_1 = \frac{\lambda_1 \nu}{2h^2} = \frac{De_2}{2}$$

Άξονες : Γραμμικοί



Σε όλα τα διαγράμματα οι τιμές που παίρνει το De_2 είναι οι εξής :

$De_2 = 100000$

$De_2 = 10000$

$De_2 = 1000$

$De_2 = 100$

$De_2 = 10$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ10

Σε όλα τα διαγράμματα είναι :

$$Sc_o = 1.1$$

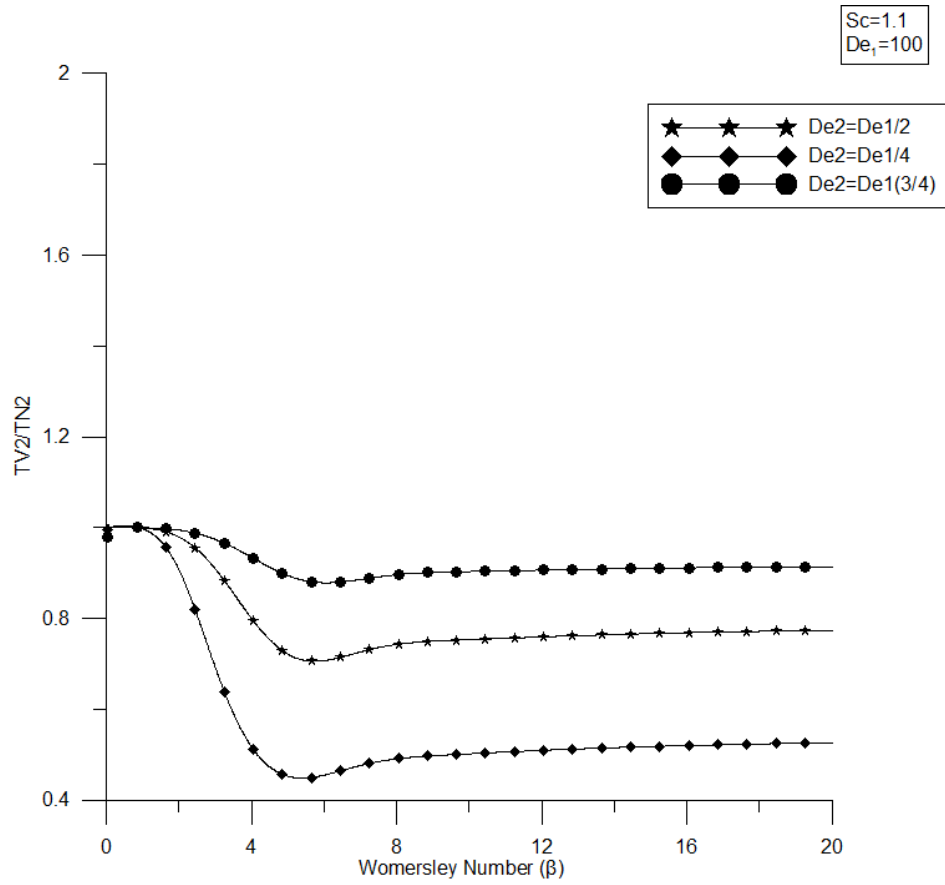
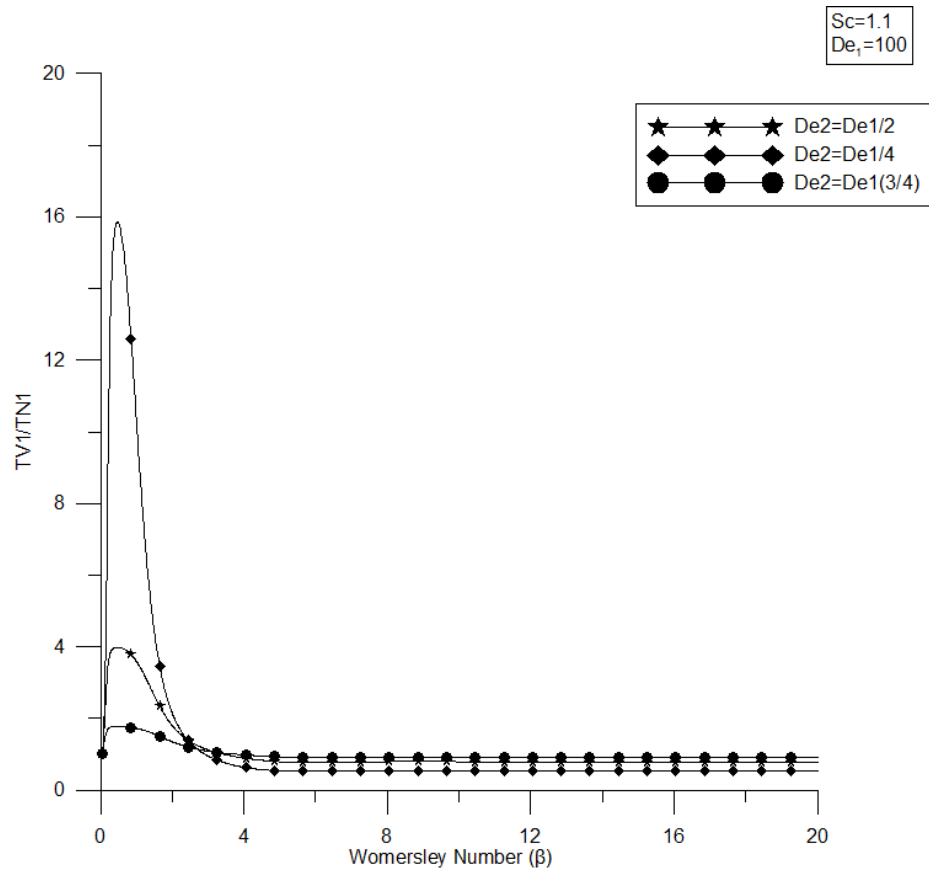
$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2} = 100000$$

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2} = \begin{cases} \frac{3}{4}De_1 \\ \frac{1}{2}De_1 \\ \frac{1}{4}De_1 \end{cases}$$

Παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$

$$2. \frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$



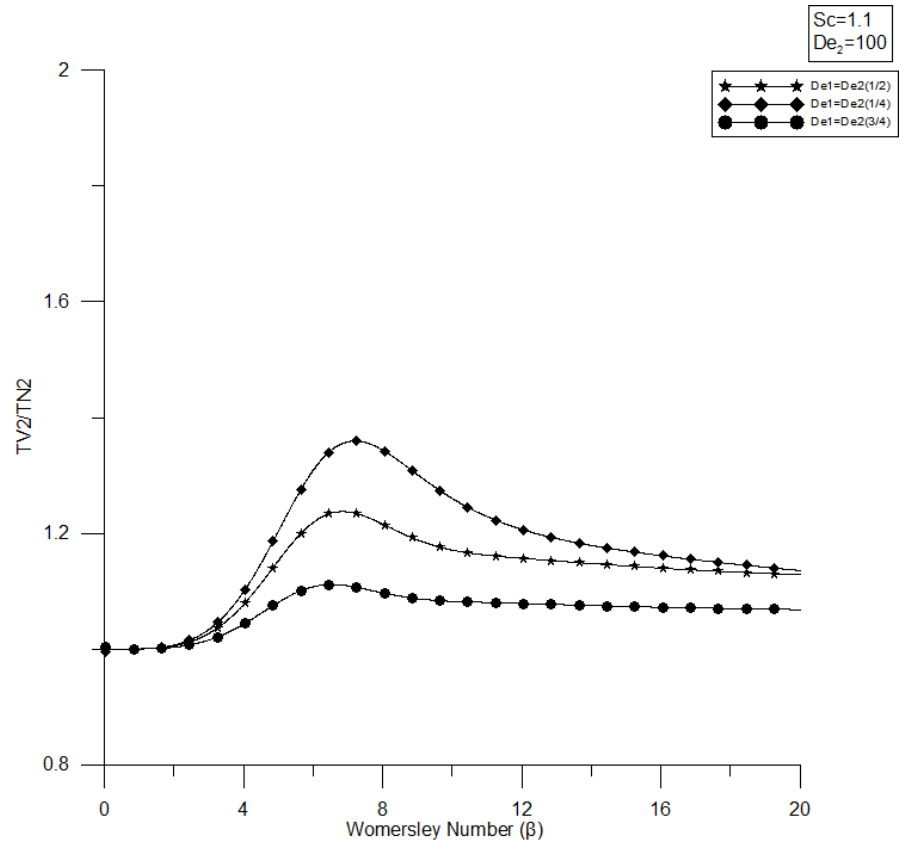
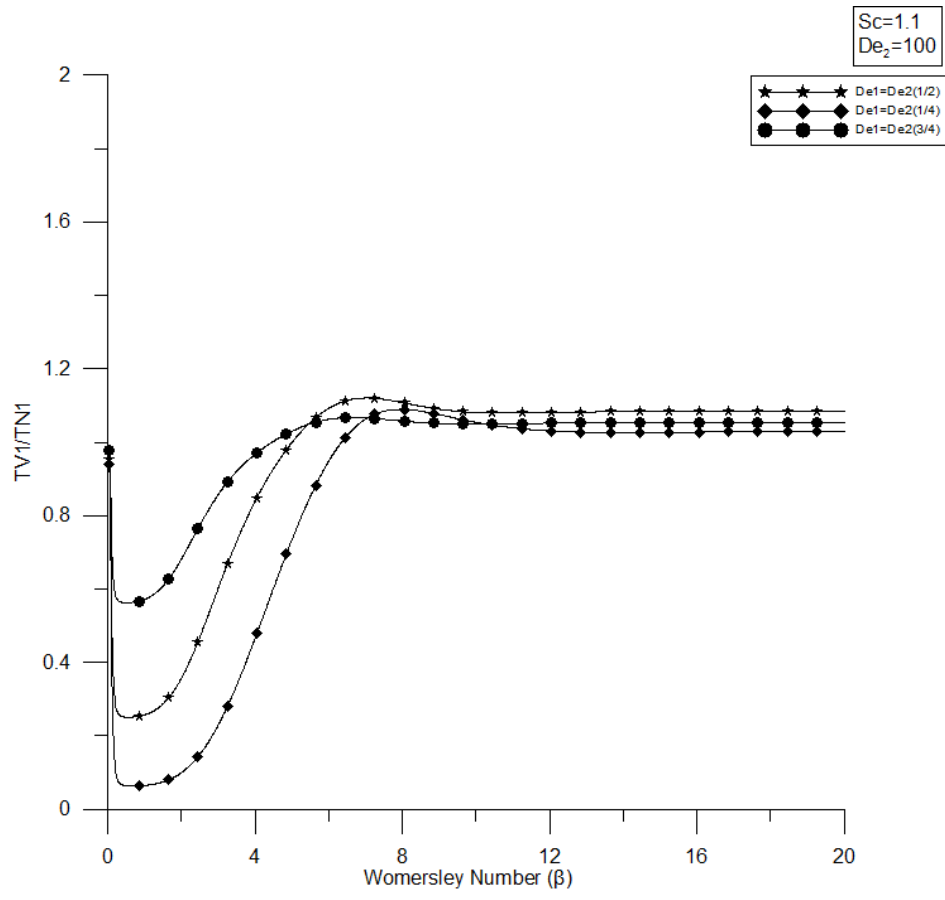
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ11

Σε όλα τα διαγράμματα είναι :

$$Sc_o = 1.1$$
$$De_2 = \frac{\nu \lambda_2}{2h^2} = 100000$$
$$De_1 = \frac{\nu \lambda_1}{2h^2} = \begin{cases} \frac{3}{4} De_2 \\ \frac{1}{2} De_2 \\ \frac{1}{4} De_2 \end{cases}$$

Παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

- $$1. \frac{T_{V1}}{T_{N1}} = \frac{T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N1}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{Ta_N}{Ta_V} \right\}^2$$
- $$2. \frac{T_{V2}}{T_{N2}} = \frac{T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)}{T_{N2}(\beta, Sc_o)} = \left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\} \left\{ \frac{O_N}{O_V} \right\}^2$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ12

Στα διαγράμματα Δ12 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \frac{W_o}{Ta} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

$$2. \frac{W_o}{O_v} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

Σε συνάρτηση του λόγου $-1 < \frac{y}{h} < 1$

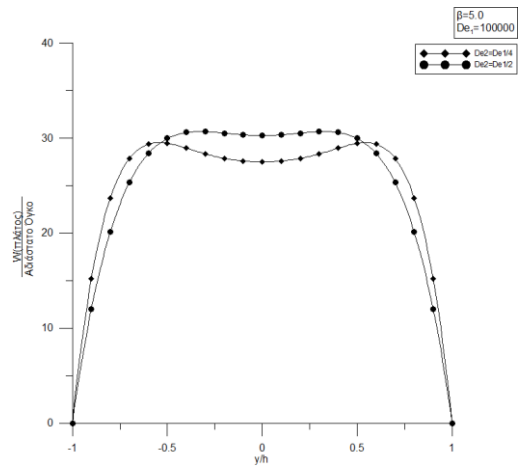
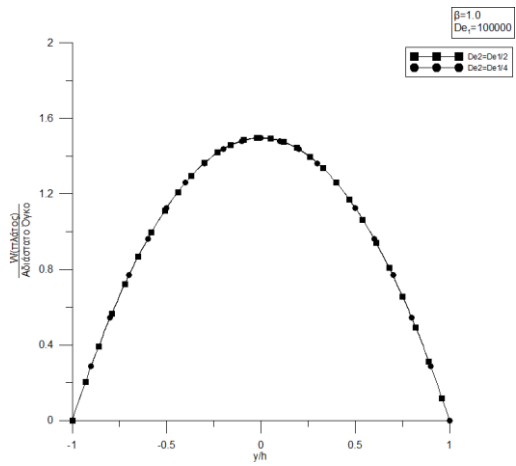
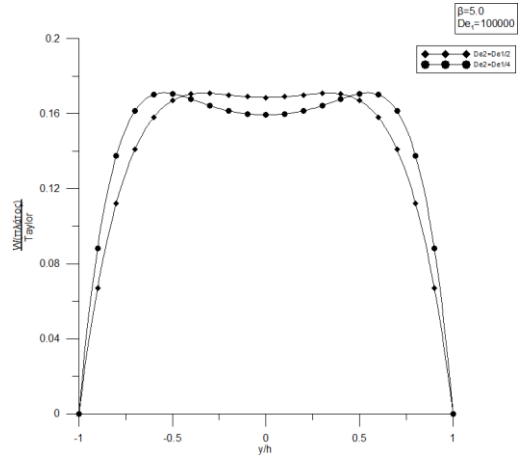
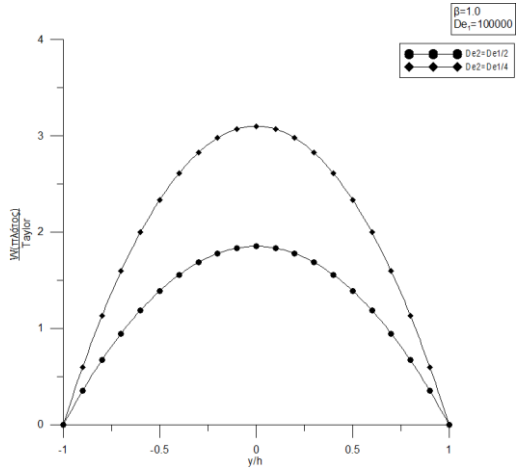
Υπενθύμιση : h = μισό του πλάτους του καναλιού.

Παράμετροι :

$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2} = 100000$$

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} De_1 \\ \frac{1}{4} De_1 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ13

Στα διαγράμματα Δ13 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \frac{W_o}{Ta} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

$$2. \frac{W_o}{O_v} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

Σε συνάρτηση του λόγου $-1 < \frac{y}{h} < 1$

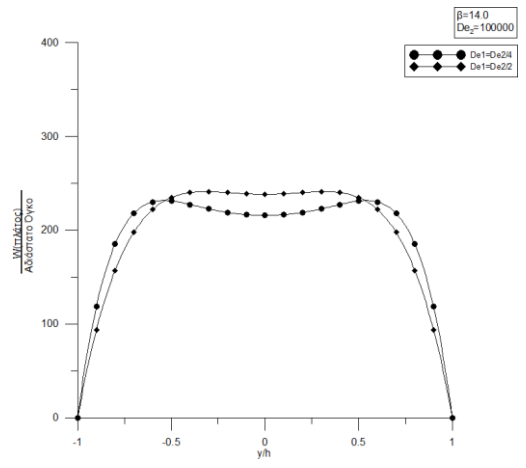
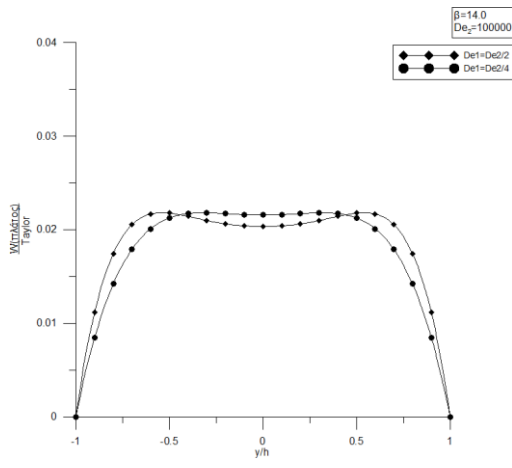
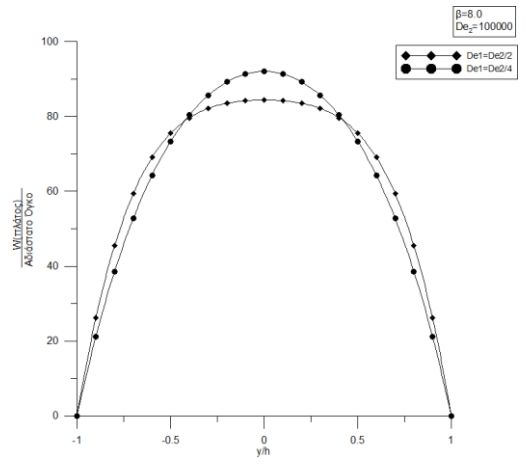
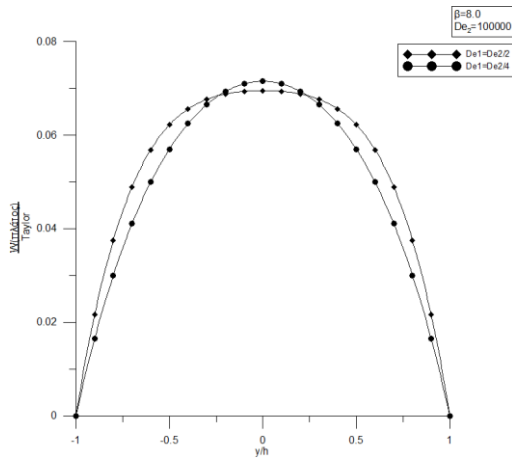
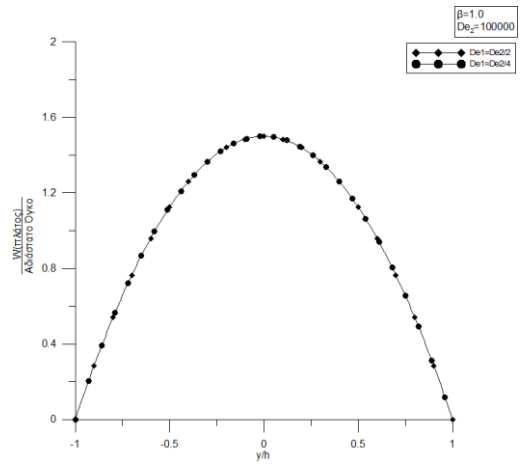
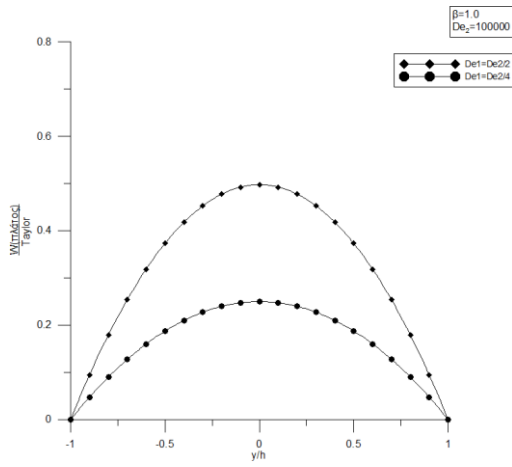
Υπενθύμιση : h = μισό του πλάτους του καναλιού.

Παράμετροι :

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2} = 100000$$

$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} De_2 \\ \frac{1}{4} De_2 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 \\ 8 \\ 14 \end{cases}$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ14

Στα διαγράμματα Δ14 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \frac{W_o}{Ta} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

$$2. \frac{W_o}{O_v} \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$$

Σε συνάρτηση του λόγου $-1 < \frac{y}{h} < 1$

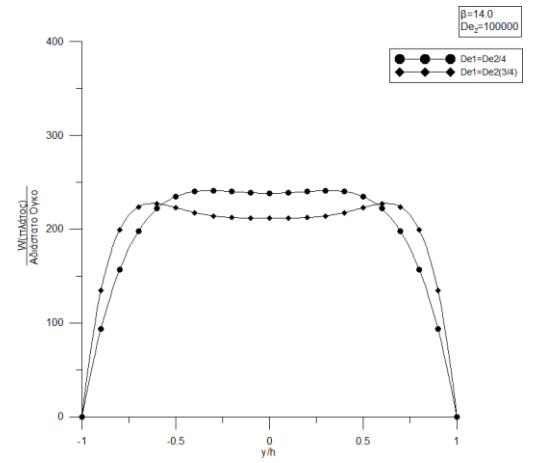
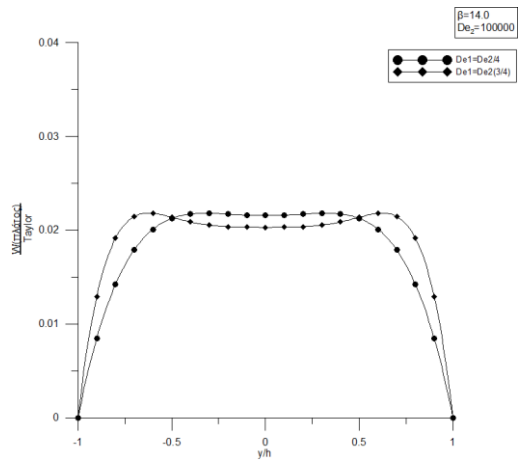
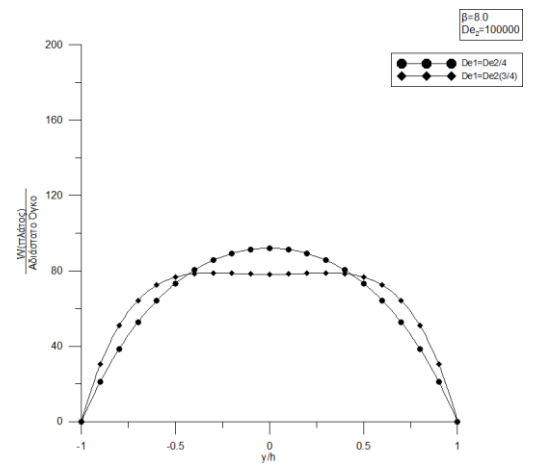
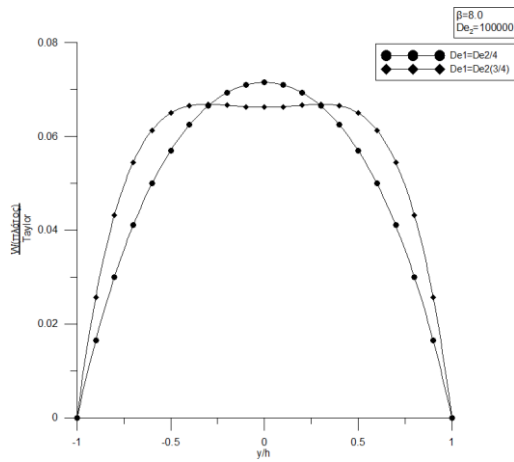
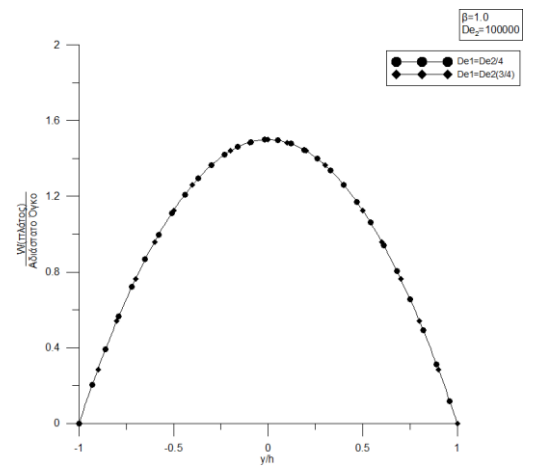
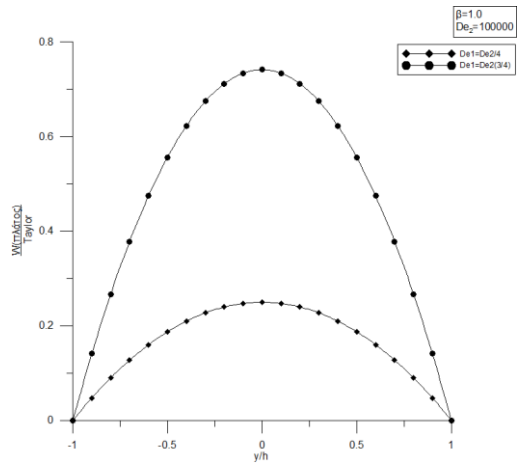
Υπενθύμιση : h = μισό του πλάτους του καναλιού.

Παράμετροι :

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2} = 100000$$

$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2} = \begin{cases} \frac{3}{4} De_2 \\ \frac{1}{4} De_2 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 \\ 8 \\ 14 \end{cases}$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ15

Στα διαγράμματα Δ15 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \text{ Φάση } \phi = \phi\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$2. \frac{W_o}{Ta}\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$3. \frac{W_o}{O_v}\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$4. \frac{W}{Ta}\left(\frac{y}{h}; \omega t, \beta, De_1, De_2\right)$$

$$5. \frac{W}{O_v}\left(\frac{y}{h}; \omega t, \beta, De_1, De_2\right)$$

Σε συνάρτηση του λόγου $-1 < \frac{y}{h} < 1$

Υπενθύμιση : h = μισό του πλάτους του καναλιού.

Παράμετροι για όλες τις συναρτήσεις 1-5 :

$$De_1 = \frac{\nu \lambda_1}{2h^2} = 100000$$

$$De_2 = \frac{\nu \lambda_2}{2h^2} = 50000$$

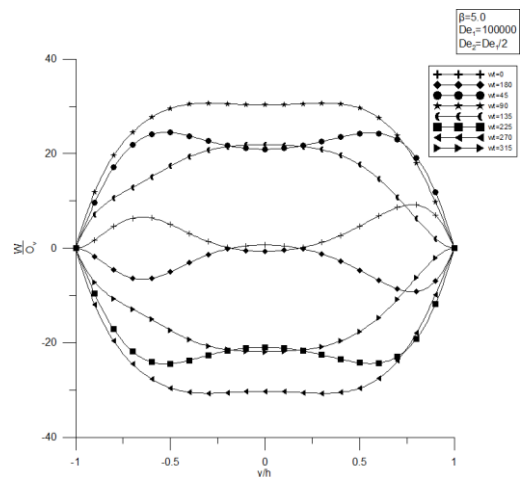
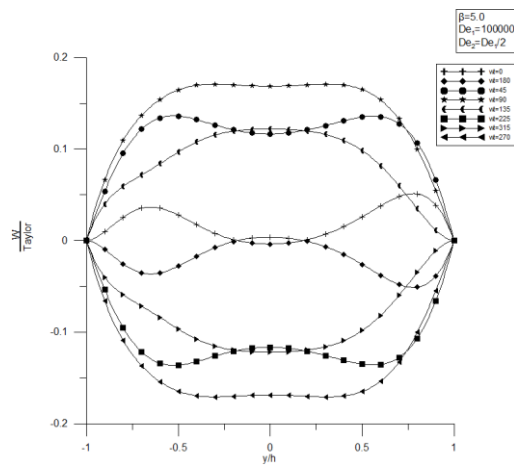
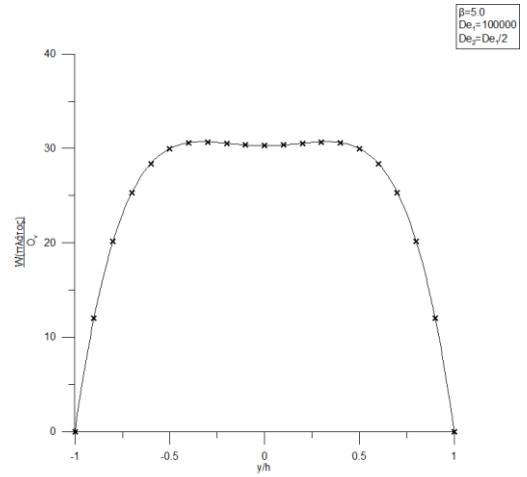
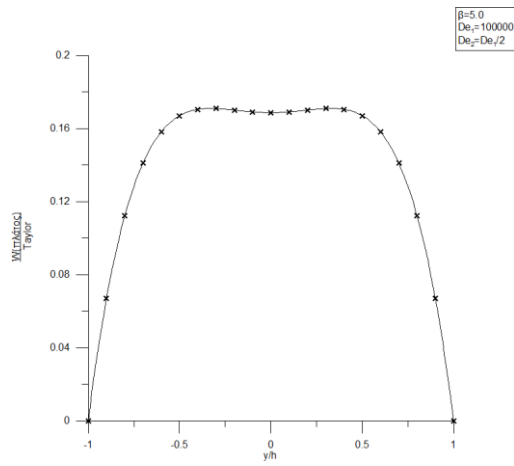
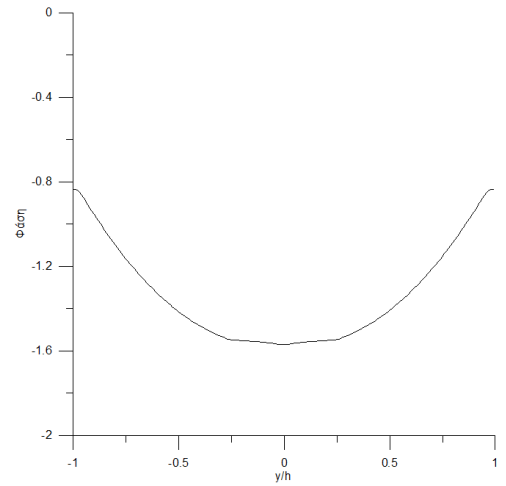
$$\beta = 5$$

Για τις συναρτήσεις 4 και 5 η φασική γωνία λαμβάνεται να είναι πολλαπλάσια των 45°

$\beta = 5.0$

$De_1 = 100000$

$De_2 = \frac{1}{2} De_1$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Δ16

Στα διαγράμματα Δ16 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις :

$$1. \text{ Φάση } \phi = \phi\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$2. \frac{W_o}{Ta}\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$3. \frac{W_o}{O_v}\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$$

$$4. \frac{W}{Ta}\left(\frac{y}{h}; \omega t, \beta, De_1, De_2\right)$$

$$5. \frac{W}{O_v}\left(\frac{y}{h}; \omega t, \beta, De_1, De_2\right)$$

Σε συνάρτηση του λόγου $-1 < \frac{y}{h} < 1$

Υπενθύμιση : h = μισό του πλάτους του καναλιού.

Παράμετροι για όλες τις συναρτήσεις 1-5 :

$$De_1 = \frac{v\lambda_1}{2h^2} = 50000$$

$$De_2 = \frac{v\lambda_2}{2h^2} = 100000$$

$$\beta = 5$$

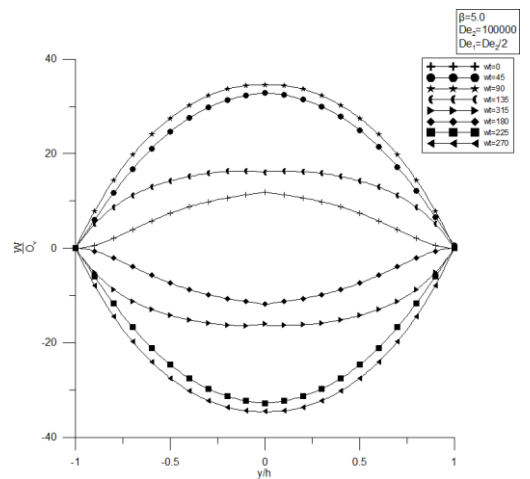
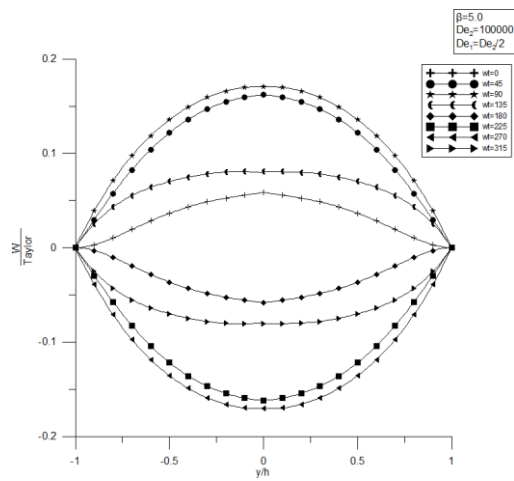
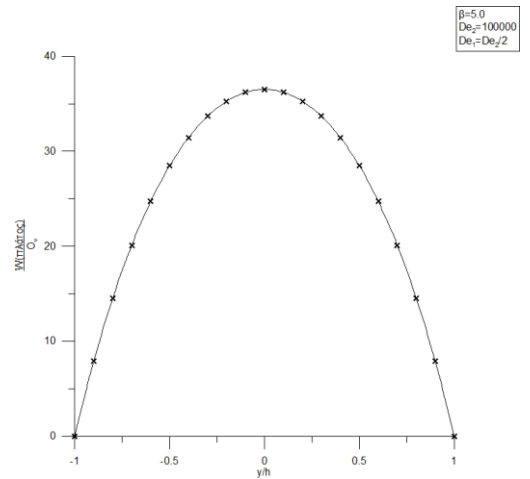
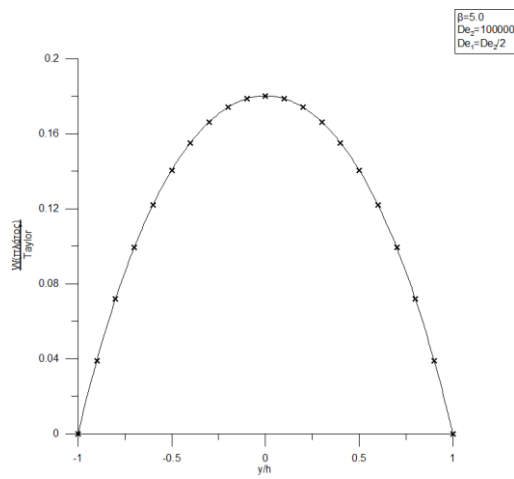
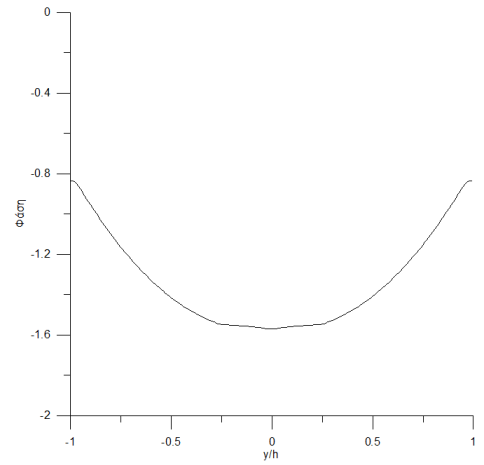
Για τις συναρτήσεις 4 και 5 η φασική γωνία λαμβάνεται να είναι πολλαπλάσια των 45°

$\beta = 5.0$

$\Delta 16$

$$De_2 = 100000$$

$$De_1 = \frac{1}{2} De_2$$



Παράρτημα Ι

Υπολογισμός του R, στη περίπτωση που $Sc \neq 1$, δηλαδή αν $\gamma \neq \delta$.

Στα παρακάτω οι λύσεις γράφονται ως :

$$F(y) = \frac{\cosh\{\gamma y\}}{\cosh\{\gamma h\}}$$

$$\begin{cases} G(y) = \frac{Sc}{Sc-1} \left\{ F(y) - \frac{\gamma}{\delta} \tanh(\gamma h) \frac{\cosh(\delta y)}{\sinh(\delta h)} \right\}, Sc \neq 1 \\ G(y) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}(\gamma h) \{ (\gamma h \coth(\gamma h) + 1) \cosh(\gamma y) - \gamma y \sinh(\gamma y) \}, Sc = 1 \end{cases}$$

των οποίων οι παράγωγοι είναι :

$$\frac{dF(y)}{dy} = \gamma \frac{\sinh\{\gamma y\}}{\cosh\{\gamma h\}}$$

$$\begin{cases} \frac{dG(y)}{dy} = \frac{Sc}{Sc-1} \gamma \left\{ \frac{\sinh(\gamma y)}{\cosh(\gamma h)} - \frac{\sinh(\gamma h)}{\cosh(\gamma h)} \frac{\sinh(\delta y)}{\cosh(\delta h)} \right\}, Sc \neq 1 \\ \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{2} \gamma \operatorname{sech}(\gamma h) \{ \gamma h \coth(\gamma h) \sinh(\gamma y) - \gamma y \cosh(\gamma y) \}, Sc = 1 \end{cases}$$

είναι ,

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{Sc}{Sc-1} \left\{ \frac{\sinh(\gamma y)}{\cosh(\gamma h)} - \tanh(\gamma h) \frac{\sinh(\delta y)}{\sinh(\delta h)} \right\} \frac{d\bar{G}(y)}{dy} = \frac{\bar{Sc}}{Sc-1} \gamma \left\{ \frac{\sin(\bar{\gamma} y)}{\cosh(\bar{\gamma} h)} - \tanh\left(\bar{\gamma} h \frac{\sinh(\bar{\delta} y)}{\sinh(\bar{\delta} h)}\right) \right\}$$

οπότε,

$$\frac{dG}{dy} \cdot \frac{d\bar{G}}{dy} = \frac{Sc \cdot \bar{Sc}}{(Sc-1) \cdot (\bar{Sc}-1)} \gamma \bar{\gamma} (A + B - \Gamma - \Delta)$$

$$A = \frac{\sinh(\gamma y)}{\cosh(\gamma h)} \frac{\sinh(\bar{\gamma} y)}{\cosh(\bar{\gamma} h)},$$

$$B = \frac{\tanh(\gamma h)}{\sinh(\delta h)} \frac{\tanh(\bar{\gamma} h)}{\sinh(\bar{\delta} h)} \sinh(\delta y) \sinh(\bar{\delta} y),$$

$$\Gamma = \frac{\tanh(\gamma h)}{\sinh(\delta h) \cosh(\bar{\gamma} h)} \sinh(\delta y) \sinh(\bar{\gamma} y), \quad \Delta = \frac{\tanh(\bar{\gamma} h)}{\sinh(\bar{\delta} h) \cosh(\gamma h)} \sinh(\bar{\delta} y) \sinh(\gamma y)$$

$$\alpha\alpha, \quad I = \frac{Sc\bar{Sc}}{(Sc-1)(\bar{Sc}-1)} \gamma\bar{\gamma} \left\{ \int_{-h}^{+h} A dy + \int_{-h}^{+h} B dy - \int_{-h}^{+h} \Gamma dy - \int_{-h}^{+h} \Delta dy \right\}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στην έκφραση αυτή γίνεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} A dy &= \int_{-h}^{+h} \frac{\sinh(\gamma y)}{\cosh(\gamma h)} \frac{\sinh(\bar{\gamma} y)}{\cosh(\bar{\gamma} h)} dy = \frac{1}{\cosh(\gamma h) \cosh(\bar{\gamma} h)} \int_{-h}^{+h} \sinh(\gamma y) \sinh(\bar{\gamma} y) dy = \\ &= \frac{1}{\cosh(\gamma h) \cosh(\bar{\gamma} h)} \frac{2}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \left[\gamma \cosh(\gamma h) \sinh(\bar{\gamma} h) - \bar{\gamma} \sinh(\gamma h) \cosh(\bar{\gamma} h) \right] = \\ &= \frac{2}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \left[\gamma \tanh(\bar{\gamma} h) - \bar{\gamma} \tanh(\gamma h) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} B dy &= \int_{-h}^{+h} \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\sinh(\delta h) \sinh(\bar{\delta} h)} \sinh(\delta y) \sinh(\bar{\delta} y) dy = \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\sinh(\delta h) \sinh(\bar{\delta} h)} \int_{-h}^{+h} \sinh(\delta y) \sinh(\bar{\delta} y) dy = \\ &= \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\sinh(\delta h) \sinh(\bar{\delta} h)} \frac{2}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} \left[\delta \cosh(\delta h) \sinh(\bar{\delta} h) - \bar{\delta} \sinh(\delta h) \cosh(\bar{\delta} h) \right] = \\ &= \frac{2}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} \tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h) \left[\frac{\delta}{\tanh(\delta h)} - \frac{\bar{\delta}}{\tanh(\bar{\delta} h)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} \Gamma dy &= \frac{\tanh(\gamma h)}{\sinh(\delta h) \cosh(\bar{\gamma} h)} \int_{-h}^{+h} \sinh(\delta y) \sinh(\bar{\gamma} y) dy = \\ &= \frac{\tanh(\gamma h)}{\sinh(\delta h) \cosh(\bar{\gamma} h)} \frac{2}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \left[\delta \cosh(\delta h) \sinh(\bar{\gamma} h) - \bar{\gamma} \sinh(\delta h) \cosh(\bar{\gamma} h) \right] = \\ &= \frac{2}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \tanh(\gamma h) \left[\delta \frac{\tanh(\bar{\gamma} h)}{\tanh(\delta h)} - \bar{\gamma} \right] = \frac{2\delta}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\tanh(\delta h)} - \frac{2\bar{\gamma}}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \tanh(\gamma h) \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{+h} \Delta dy = \int_{-h}^{+h} \bar{\Gamma} dy = \frac{2\bar{\delta}}{\bar{\delta}^2 - \gamma^2} \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\tanh(\bar{\delta} h)} - \frac{2\gamma}{\bar{\delta}^2 - \gamma^2} \tanh(\bar{\gamma} h)$$

Άρα θα είναι,

$$I = \frac{Sc\bar{Sc}}{(Sc-1)(\bar{Sc}-1)} \gamma\bar{\gamma} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\gamma}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \tanh(\bar{\gamma} h) - \frac{2\bar{\gamma}}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \tanh(\gamma h) + \frac{2\delta}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} - \\ &\frac{2\bar{\delta}}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\bar{\delta} h)} - \frac{2\delta}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} + \frac{2\bar{\gamma}}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \tanh(\gamma h) - \\ &-\frac{2\bar{\delta}}{\bar{\delta}^2 - \gamma^2} \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\bar{\delta} h)} + \frac{2\gamma}{\bar{\delta}^2 - \gamma^2} \tanh(\bar{\gamma} h) \end{aligned} \right\}$$

$$I = \frac{Sc\bar{Sc}}{(Sc-1)(\bar{Sc}-1)} \gamma\bar{\gamma} \left\{ \left[\frac{2\bar{\gamma}}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} - \frac{2\bar{\gamma}}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \right] \tanh(\gamma h) + \left[\frac{2\gamma}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} + \frac{2\bar{\gamma}}{\delta^2 - \gamma^2} \right] \tanh(\bar{\gamma} h) + \right. \\ \left. + \left[\frac{2\delta}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} - \frac{2\delta}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \right] \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} + \left[-\frac{2\bar{\delta}}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} - \frac{2\bar{\delta}}{\delta^2 - \gamma^2} \right] \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\bar{\delta} h)} \right\}$$

$$I = \frac{2Sc\bar{Sc}}{(Sc-1)(\bar{Sc}-1)} \gamma\bar{\gamma} \left\{ \gamma\bar{\gamma} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} \right] \tanh(\gamma h) + \gamma\bar{\gamma} \left[\frac{\gamma}{\gamma^2 - \bar{\gamma}^2} - \frac{\gamma}{\delta^2 - \gamma^2} \right] \tanh(\bar{\gamma} h) + \right. \\ \left. + \gamma\bar{\gamma} \left[\frac{\delta}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} - \frac{\delta}{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \right] \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\tanh(\delta h)} + \gamma\bar{\gamma} \left[-\frac{\bar{\delta}}{\delta^2 - \bar{\delta}^2} - \frac{\bar{\delta}}{\delta^2 - \gamma^2} \right] \frac{\tanh(\gamma h) \tanh(\bar{\gamma} h)}{\tanh(\bar{\delta} h)} \right\}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές των όρων του αθροίσματος με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων,

$$\left. \begin{array}{l} \gamma^2 = \frac{i\omega}{\nu} \quad , \quad \bar{\gamma}^2 = -\frac{i\omega}{\nu} \\ \delta^2 = \frac{i\omega}{\kappa} \quad , \quad \bar{\delta}^2 = -\frac{i\omega}{\kappa} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2}{\gamma^2} = Sc \quad , \quad \frac{\delta^2}{\bar{\gamma}^2} = -\bar{Sc}, \quad \frac{\bar{\delta}^2}{\delta^2} = -1 \\ \frac{\gamma^2}{\bar{\gamma}^2} = -\frac{\bar{Sc}}{Sc} \quad , \quad \frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{1}{Sc}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{Sc^{1/2}} \end{array} \right\},$$

Οπότε ο συντελεστής του $\tanh(\gamma h)$ είναι ίσος με :

$$\gamma \frac{\bar{Sc}(Sc-1)}{(Sc+\bar{Sc})(\bar{Sc}+1)}$$

Ενώ του $\tanh(\bar{\gamma} h)$ είναι ίσος με τον συζυγή του $\tanh(\gamma h)$, δηλαδή ίσος με :

$$\bar{\gamma} \frac{Sc(\bar{Sc}-1)}{(Sc+\bar{Sc})(Sc+1)}$$

Ο συντελεστής του $\frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)}$ είναι ίσος με :

$$-\bar{\gamma} \frac{(\bar{Sc}-1)Sc^{-1/2}}{2(\bar{Sc}+1)}$$

και ο συντελεστής του $\frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\bar{\delta} h)}$ είναι ο συζυγής του προηγούμενου, ίσος με :

$$-\gamma \frac{(Sc-1)\overline{Sc}^{-1/2}}{2(Sc+1)}$$

Κατά συνέπεια θα είναι :

$$I = \frac{2Sc\overline{Sc}}{(Sc-1)(\overline{Sc}-1)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-}{\gamma} \frac{Sc(\overline{Sc}-1)}{(Sc+\overline{Sc})(Sc+1)} \tanh(\overline{\gamma}h) + \gamma \frac{\overline{Sc}(Sc-1)}{(Sc+\overline{Sc})(\overline{Sc}+1)} \tanh(\gamma h) - \\ & -\gamma \frac{(Sc-1)Sc^{-1/2}}{2(Sc+1)} \frac{\tanh(\overline{\gamma}h)\tanh(\gamma h)}{\tanh(\overline{\delta}h)} - \frac{-}{\gamma} \frac{(\overline{Sc}-1)\overline{Sc}^{-1/2}}{2(\overline{Sc}+1)} \frac{\tanh(\overline{\gamma}h)\tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \end{aligned} \right\}$$

$$I = 2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\overline{Sc}^2 Sc}{(Sc+\overline{Sc})(\overline{Sc}^2-1)} \gamma \tanh(\gamma h) + \frac{Sc^2 \overline{Sc}}{(Sc+\overline{Sc})(Sc^2-1)} \overline{\gamma} \tanh(\overline{\gamma}h) - \frac{(Sc\overline{Sc})^{1/2}}{2(\overline{Sc}+1)(Sc-1)} \overline{Sc}^{1/2} \overline{\gamma} \frac{\tanh(\overline{\gamma}h)\tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} - \\ & - \frac{(Sc\overline{Sc})^{1/2}}{2(Sc+1)(\overline{Sc}-1)} Sc^{1/2} \gamma \frac{\tanh(\overline{\gamma}h)\tanh(\gamma h)}{\tanh(\overline{\delta}h)} \end{aligned} \right\}$$

Μας ενδιαφέρει να εκφράσουμε το I/2 μέσω πραγματικών αριθμών, για τον τελικό υπολογισμό του R. Έχουμε λοιπόν,

$$\frac{I}{2} = \left\{ \Sigma_1 \tanh(\gamma h) + \overline{\Sigma}_1 \tanh(\overline{\gamma}h) - \Sigma_2 \frac{\tanh(\gamma h)\tanh(\overline{\gamma}h)}{\tanh(\delta h)} - \overline{\Sigma}_2 \frac{\tanh(\gamma h)\tanh(\overline{\gamma}h)}{\tanh(\overline{\delta}h)} \right\}$$

$$\frac{I}{2} = 2 \left\{ \operatorname{Re}\left\{ \Sigma_1 \tanh(\gamma h) \right\} - \operatorname{Re}\left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\gamma h)\tanh(\overline{\gamma}h)}{\tanh(\delta h)} \right\} \right\}$$

$$\text{όπου } \Sigma_1 = \frac{\overline{Sc}^2 Sc}{(Sc+\overline{Sc})(\overline{Sc}^2-1)} \gamma, \Sigma_2 = \frac{(Sc\overline{Sc})^{1/2}}{2(\overline{Sc}+1)(Sc-1)} \overline{Sc}^{1/2} \overline{\gamma}$$

Για την πραγματοποίηση αυτού του υπολογισμού εκφράζουμε κατάλληλα τις ποσότητες $\tanh(\gamma h)$ και $\tanh(\delta h)$. Η μιγαδική κινηματική συνεκτικότητα γράφεται ως $\eta = \eta' + i\eta''$.

Τα $\gamma = \left(\frac{i\omega}{\eta}\right)^{1/2}$, $\delta = \left(\frac{i\omega}{\kappa}\right)^{1/2}$ λαμβάνονται ως θετικές ρίζες, για τις οποίες είναι εύκολο να δειχθούν

οι παρακάτω χρήσιμες σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 = \frac{i\omega}{\nu} \quad , \quad \overline{\gamma}^2 = -\frac{i\omega}{\nu} \\ \delta^2 = \frac{i\omega}{\kappa} \quad , \quad \overline{\delta}^2 = -\frac{i\omega}{\kappa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2}{\gamma^2} = Sc \quad , \quad \frac{\delta^2}{\overline{\gamma}^2} = -\overline{Sc} \quad , \quad \frac{\overline{\delta}^2}{\delta^2} = -1 \\ \frac{\gamma^2}{\overline{\gamma}^2} = -\frac{\overline{Sc}}{Sc} \quad , \quad \frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{1}{Sc} \quad , \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{Sc^{1/2}} \end{aligned} \right\}$$

Το γh και το δh εκφράζονται ως εξής :

$$\begin{aligned}\gamma h &= h \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2} = h \left(\frac{i\omega\bar{\eta}}{\eta\bar{\eta}} \right)^{1/2} = h \frac{1}{|\eta|} (i\omega\bar{\eta})^{1/2} = h \frac{\omega^{1/2}}{|\eta|} (i\bar{\eta})^{1/2} = h \frac{\omega^{1/2}}{|\eta|} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \text{sign}(\eta') \sqrt{|\eta| + \eta''} + i \sqrt{|\eta| - \eta''} \right\} = \\ &= \text{sign}(\eta') \left[\frac{\omega h^2}{2|\eta|} \frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right]^{1/2} + i \left[\frac{\omega h^2}{2|\eta|} \frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right]^{1/2} = \text{sign}(\eta') \left(\frac{\omega h^2}{2|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} + i \left(\frac{\omega h^2}{2|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} \\ \delta h &= h \left(\frac{i\omega}{\kappa} \right)^{1/2} = h \left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^{1/2} i^{1/2} = h \left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = h \left(\frac{\omega}{2\kappa} \right)^{1/2} + ih \left(\frac{\omega}{2\kappa} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

Ακόμα προκύπτει ότι :

$$\tanh(\gamma h) = \frac{\sinh \left(\text{sign}(\eta') \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} \right) + i \sin \left(\left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} \right)}{\cosh \left(\text{sign}(\eta') \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} \right) + \cos \left(\left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2} \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} \right)}$$

Και :

$$\frac{1}{\tanh(\delta h)} = \frac{\sinh \left(h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \right) - i \sin \left(h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \right)}{\cosh \left(h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \right) - \cos \left(h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \right)}$$

Θέτουμε λοιπόν, $\xi = \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2}$, $\xi_1 = \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2}$, $\xi_2 = \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2}$, $\tau = h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2}$, (όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πραγματικοί) οπότε γράφουμε :

$$\begin{aligned}\tanh(\gamma h) &= \frac{\sinh(\text{sign}(\eta') \xi \xi_1) + i \sin(\xi \xi_2)}{\cosh(\text{sign}(\eta') \xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} = \frac{\sinh(\text{sign}(\eta') \xi \xi_1) + i \sin(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)} \\ \frac{1}{\tanh(\delta h)} &= \frac{\sinh(\tau) - i \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να παρουσιαστούν ορισμένες σχέσεις που χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στους υπολογισμούς που γίνονται περαιτέρω για την έκφραση του R με όρους πραγματικών αριθμών. Ισχύουν λοιπόν,

$$\xi = \left(\frac{2\omega h^2}{|\eta|} \right)^{1/2}, \quad \xi_1 = \left(\frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} > 0, \quad \xi_2 = \left(\frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} \right)^{1/2} > 0,$$

$$\xi^2 = \frac{2\omega h^2}{|\eta|}, \quad \xi_1^2 = \frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|}, \quad \xi_2^2 = \frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|}, \quad \tau^2 = h^2 \frac{\omega}{2\kappa}$$

$$\xi^4 = \frac{4\omega^2 h^4}{|\eta|^2}, \quad |\eta| = \frac{2\omega h^2}{\xi^2} \rightarrow |\eta|^2 = \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4}, \quad |\eta|^2 = \eta'^2 + \eta''^2$$

Η σημαντική ταυτότητα $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} + \frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} = 2$

Εκφράσεις για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής κινηματικής συνεκτικότητας

$$\xi_1^2 \xi_2^2 = \frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} \frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} = \frac{|\eta|^2 - \eta''^2}{|\eta|^2} = \frac{\eta'^2}{|\eta|^2} \Rightarrow \eta'^2 = |\eta|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \Rightarrow \eta' = \text{sign}(\eta') |\eta| \xi_1 \xi_2$$

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = \frac{|\eta| + \eta''}{|\eta|} - \frac{|\eta| - \eta''}{|\eta|} = 2 \frac{\eta''}{|\eta|} \Rightarrow \eta'' = \xi_1^2 |\eta| - |\eta| = |\eta| (\xi_1^2 - 1)$$

Και επίσης οι σχέσεις

$$\tau = h \left(\frac{2\omega}{\kappa} \right)^{1/2}, \quad \tau^2 = h^2 \frac{2\omega}{\kappa}, \quad \tau = \xi |Sc|^{1/2}, \quad \tau^2 = \xi^2 |Sc|,$$

$$\kappa = \frac{2h^2 \omega}{\tau^2} \Rightarrow \kappa^2 = \frac{4h^4 \omega^2}{\tau^4} = \frac{4h^4 \omega^2}{\xi^4 |Sc|^2}$$

Υπολογισμός του $\text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\}$

Αρχικά γράφουμε το Σ_1 ως εξής :

$$\Sigma_1 = \frac{Sc \bar{Sc}^2}{(Sc + \bar{Sc})(\bar{Sc}^2 - 1)} \gamma = \frac{Sc \bar{Sc}}{(Sc + \bar{Sc})(\bar{Sc}^2 - 1)} \frac{\bar{Sc} \gamma}{\bar{Sc}} = \frac{Sc \bar{Sc}}{(Sc + \bar{Sc})} \frac{\bar{Sc} \gamma (Sc^2 - 1)}{|Sc^2 - 1|^2}$$

Θέτουμε $A_1 = \frac{Sc \bar{Sc}}{(Sc + \bar{Sc}) |Sc^2 - 1|^2} \in R$

Επομένως $\Sigma_1 = A_1 \gamma \bar{Sc} (Sc^2 - 1) = A_1 \gamma (|Sc|^2 Sc - \bar{Sc})$

1) $\gamma = \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2} = \left(\frac{i\omega \bar{\eta}}{\eta \bar{\eta}} \right)^{1/2} = \frac{1}{|\eta|} (i\omega \bar{\eta})^{1/2} = \frac{\omega^{1/2}}{|\eta|} (i\bar{\eta})^{1/2} = \frac{\omega^{1/2}}{|\eta|} \frac{\sqrt{|\eta|}}{\sqrt{2}} (\text{sign}(\eta') \xi_1 + i \xi_2) = \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} (\text{sign}(\eta') \xi_1 + i \xi_2)$

2) $|Sc|^2 Sc - \bar{Sc} = |Sc|^2 \frac{\eta}{\kappa} - \frac{\bar{\eta}}{\kappa} = |Sc|^2 \frac{\eta' + i\eta''}{\kappa} - \frac{\eta' - i\eta''}{\kappa} = \frac{\eta' (|Sc|^2 - 1)}{\kappa} + i \frac{\eta'' (|Sc|^2 + 1)}{\kappa}$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 \gamma(|Sc|^2 Sc - \overline{Sc}) &= \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} (\text{sign}(a)\xi_1 + i\xi_2) \left[\frac{\eta'(|Sc|^2 - 1)}{k} + i \frac{\eta''(|Sc|^2 + 1)}{k} \right] \\
 \gamma(|Sc|^2 Sc - \overline{Sc}) &= \left(\frac{\omega}{2|\eta|k^2} \right)^{1/2} \left\{ \text{sign}(\eta')\xi_1\eta'(|Sc|^2 - 1) - \xi_2\eta''(|Sc|^2 + 1) + i[\text{sign}(\eta')\xi_1\eta''(|Sc|^2 + 1) + \xi_2\eta'(|Sc|^2 - 1)] \right\} = \\
 &= \left(\frac{\omega}{2|\eta|k^2} \right)^{1/2} \left\{ \left[\text{sign}(\eta')\xi_1 \cdot \text{sign}(\eta')\xi_1\xi_2|\eta|(|Sc|^2 - 1) - \xi_2|\eta|(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) \right] + \right. \\
 &= \left(\frac{\omega|\eta|}{2k^2} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \xi_1^2\xi_2(|Sc|^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) + i[\text{sign}(\eta')\xi_1(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) + \text{sign}(\eta')\xi_1\xi_2^2(|Sc|^2 - 1)] \right\} = \\
 &= \left(\frac{\omega|\eta|}{2k^2} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \xi_1^2\xi_2(|Sc|^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) + i\text{sign}(\eta')[\xi_1(1 - \xi_2^2)(|Sc|^2 + 1) + \xi_1\xi_2^2(|Sc|^2 - 1)] \right\}
 \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε ότι :

$$\gamma(|Sc|^2 Sc - \overline{Sc}) = \left(\frac{\omega|\eta|}{2k^2} \right)^{1/2} \left\{ \left[\xi_1^2\xi_2(|Sc|^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) \right] + i\text{sign}(\eta') \left[\xi_1(1 - \xi_2^2)(|Sc|^2 + 1) + \xi_1\xi_2^2(|Sc|^2 - 1) \right] \right\}$$

Το πραγματικό μέρος είναι :

$$\begin{aligned}
 \xi_1^2\xi_2(|Sc|^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)(|Sc|^2 + 1) &= \xi_1^2\xi_2|Sc|^2 - \xi_1^2\xi_2 - \xi_1^2\xi_2|Sc|^2 - \xi_1^2\xi_2 + \xi_2|Sc|^2 + \xi_2 = \\
 &= \xi_2(1 + |Sc|^2 - 2\xi_1^2)
 \end{aligned}$$

Επειδή είναι $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2 \rightarrow \xi_1^2 = 2 - \xi_2^2 \rightarrow -2\xi_1^2 = -4 + 2\xi_2^2$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\xi_2(1 + |Sc|^2 - 2\xi_1^2) = \xi_2(1 + |Sc|^2 - 4 + 2\xi_2^2) = \xi_2(2\xi_2^2 - 3 + |Sc|^2)$$

και το φανταστικό μέρος είναι :

$$\begin{aligned}
 \xi_1(1 - \xi_2^2)(|Sc|^2 + 1) + \xi_1\xi_2^2(|Sc|^2 - 1) &= \xi_1|Sc|^2 + \xi_1 - |Sc|^2\xi_1\xi_2^2 - \xi_1\xi_2^2 + |Sc|^2\xi_1\xi_2^2 - \xi_1\xi_2^2 = \\
 &= \xi_1(1 + |Sc|^2 - 2\xi_2^2) = \xi_1(|Sc|^2 - 3 + 2\xi_1^2)
 \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\gamma(|Sc|^2 Sc - \overline{Sc}) = \left(\frac{\omega|\eta|}{2k^2} \right)^{1/2} \left\{ \xi_2(2\xi_2^2 - 3 + |Sc|^2) + i\text{sign}(\eta')\xi_1(2\xi_1^2 - 3 + |Sc|^2) \right\}$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τις δύο παρακάτω σχέσεις, ο υπολογισμός λοιπόν του $\text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\}$ είναι εφικτός :

$$\Sigma_1 = A_1 \gamma \left(|Sc|^2 Sc - \overline{Sc} \right) \quad \text{και} \quad \tanh(\gamma h) = \frac{\sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) + i \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} &= \\ &= A_1 \left(\frac{\omega |\eta|}{2\kappa^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\xi_2 (2\xi_2^2 - 3 + |Sc|^2) \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 (2\xi_1^2 - 3 + |Sc|^2) \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} = \\ &= A_1 \left(\frac{\omega |\eta|}{2\kappa^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\xi_2 (2\xi_2^2 - 3 + |Sc|^2) \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 (2\xi_1^2 - 3 + |Sc|^2) \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} = \\ &= A_1 \left(\frac{\omega |\eta|}{2\kappa^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\xi_2 (2\xi_2^2 - 2 + |Sc|^2 - 1) \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 (2\xi_1^2 - 2 + |Sc|^2 - 1) \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} = \\ &= A_1 \left(\frac{\omega |\eta|}{2\kappa^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{(|Sc|^2 - 1) [\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2)] - 2(\xi_1^2 - 1) [\text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2)]}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} \end{aligned}$$

Αφού είναι $\xi_2^2 - 1 = 1 - \xi_1^2 = -(\xi_1^2 - 1)$

Επίσης, $\left(\frac{\omega |\eta|}{2\kappa^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\omega |\eta|^2}{2\kappa^2 |\eta|} \right)^{1/2} = \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} |Sc| = \frac{\xi}{2h} |Sc|$

κατά συνέπεια θα είναι:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} &= \\ &= \frac{\xi}{2h} |Sc| A_1 \left\{ \frac{(|Sc|^2 - 1) [\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2)] - 2(\xi_1^2 - 1) [\text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2)]}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} \end{aligned}$$

με

$$\Pi_1 = \left\{ \frac{(|Sc|^2 - 1) [\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2)] - 2(\xi_1^2 - 1) [\text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2)]}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\}$$

$$\underline{\text{Υπολογισμός του}} \operatorname{Re} \left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma}h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\}$$

$$\text{Γράφουμε το } \Sigma_2 \text{ ως εξής: } \Sigma_2 = \frac{(Sc \bar{Sc})^{1/2}}{2(\bar{Sc}+1)(Sc-1)} \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} = \frac{|Sc|(Sc+1)(\bar{Sc}-1)}{2|\bar{Sc}+1|^2 |Sc-1|^2} \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma}$$

$$\text{Θέτουμε } A_2 = \frac{|Sc|}{2|\bar{Sc}+1|^2 |Sc-1|^2} \text{ οπότε είναι } \Sigma_2 = A_2 (Sc+1)(\bar{Sc}-1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma}$$

$$1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} = \left(\bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} \right) = \left(\frac{\eta i \omega}{\kappa \eta} \right)^{1/2} = \left(\frac{i \omega}{\kappa} \right)^{1/2} = \left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^{1/2} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\omega}{2\kappa} \right)^{1/2} (1-i)$$

$$2) (Sc+1)(\bar{Sc}-1) = \left(\frac{\eta}{\kappa} + 1 \right) \left(\frac{\bar{\eta}}{\kappa} - 1 \right) = \frac{1}{\kappa^2} (\eta + \kappa)(\bar{\eta} - \kappa) = \frac{1}{\kappa^2} (|\eta|^2 - \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa)$$

Άρα,

$$(Sc+1)(\bar{Sc}-1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} = \left(\frac{\omega}{2\kappa^5} \right)^{1/2} (|\eta|^2 - \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa) (1-i) = \left(\frac{\omega}{2\kappa^5} \right)^{1/2} \left[(|\eta|^2 - \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa) + i(-|\eta|^2 + \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa) \right]$$

$$|\eta|^2 - \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa = \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4} - \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} - 2 \frac{2\omega h^2}{\xi^2 |Sc|} \frac{2\omega h^2}{\xi^2} (\xi_1^2 - 1) = \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} \left[-1 + |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1) \right]$$

$$-|\eta|^2 + \kappa^2 - 2\eta^* i \kappa = -\frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4} + \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} - 2 \frac{2\omega h^2}{\xi^2 |Sc|} \frac{2\omega h^2}{\xi^2} (\xi_1^2 - 1) = \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} \left[1 - |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1) \right]$$

Κατά συνέπεια,

$$(Sc+1)(\bar{Sc}-1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} = \left(\frac{\omega}{2\kappa^5} \right)^{1/2} \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} \left[(-1 + |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1)) + i(1 - |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1)) \right]$$

Είναι, $\Sigma_2 = A_2 (Sc+1)(\bar{Sc}-1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma}$ και κατά συνέπεια

$$\operatorname{Re} \left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma}h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} = A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \operatorname{Re} \left\{ (Sc+1)(\bar{Sc}-1) \bar{Sc}^{1/2} \bar{\gamma} \frac{1}{\tanh(\delta h)} \right\}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma}h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} = A_2 \left(\frac{\omega}{2\kappa^5} \right)^{1/2} \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \left[(-1 + |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1)) + i(1 - |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi_1^2 - 1)) \right] \frac{1}{\tanh(\delta h)} \right\}$$

Είναι :

$$\begin{aligned} A_2 \left(\frac{\omega}{2k^5} \right)^{1/2} \frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2} &= A_2 \left(\frac{\omega \xi^2 |Sc|}{2h^2 2\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{4\omega^2 h^4}{\xi^4 |Sc|^2 k^2} \right) = A_2 \left(\frac{\omega \xi^2 |Sc|}{2h^2 2\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{4\omega^2 h^4 \xi^4 |Sc|^2}{\xi^4 |Sc|^2 4\omega^2 h^4} \right) = \\ &= A_2 \frac{\xi^5 |Sc|^{1/2}}{2h \xi^4} = A_2 \frac{\xi |Sc|^{1/2}}{2h} \end{aligned}$$

και επίσης :

$$\frac{1}{\tanh(\delta h)} = \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)} - i \frac{\sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}$$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο για το πραγματικό μέρος που θέλουμε να υπολογίσουμε :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} &= \\ &= A_2 \frac{\xi |Sc|^{1/2}}{2h} \frac{|\tanh(\gamma h)|^2}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)} \left\{ (-1 + |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi^2 - 1)) \sinh(\tau) + (1 - |Sc|^2 - 2|Sc|(\xi^2 - 1)) \sin(\tau) \right\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} = A_2 \frac{\xi |Sc|^{1/2}}{2h} |\tanh(\gamma h)|^2 \frac{\left\{ (Sc^2 - 1) [\sinh(\tau) - \sin(\tau)] - 2|Sc|(\xi^2 - 1) [\sinh(\tau) + \sin(\tau)] \right\}}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}$$

$$\text{με } \Pi_2 = \frac{\left\{ (Sc^2 - 1) [\sinh(\tau) - \sin(\tau)] - 2|Sc|(\xi^2 - 1) [\sinh(\tau) + \sin(\tau)] \right\}}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο παρακάτω σχέσεις :

$$1) A_2 = \frac{|Sc|}{2|\overline{Sc} + 1|^2 |Sc - 1|^2} \text{ και βρίσκουμε ότι :}$$

$$A_1 = \frac{Sc \overline{Sc}}{(Sc + \overline{Sc}) |Sc^2 - 1|^2} = \frac{|Sc|^2}{(Sc + \overline{Sc}) |Sc - 1|^2 |Sc + 1|^2} = \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{|Sc|}{2|Sc - 1|^2 |Sc + 1|^2} = \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} A_2$$

2)

$$\begin{aligned} |\tanh(\gamma h)|^2 &= \frac{\sinh^2(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) + \sin^2(\xi_1 \xi_2)}{(\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2))^2} = \frac{\sinh^2(\xi_1 \xi_2) + \sin^2(\xi_1 \xi_2)}{(\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2))^2} = \frac{\cosh^2(\xi_1 \xi_2) - 1 + 1 - \cos^2(\xi_1 \xi_2)}{(\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2))^2} = \\ &= \frac{(\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2))(\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2))}{(\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2))^2} = \frac{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι,

$$\frac{I}{2} = 2 \left\{ \text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} - \text{Re}\left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} \right\}$$

και έτσι θα είναι με βάση τους υπολογισμούς :

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} - \text{Re}\left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} &= \frac{\xi}{2h} |Sc| A_1 \Pi_1 - A_2 \frac{\xi |Sc|^{1/2}}{2h} |\tanh(\gamma h)|^2 \Pi_2 = \\ &= \frac{\xi}{2h} |Sc| \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc})} A_2 \Pi_1 - A_2 \frac{\xi |Sc|^{1/2}}{2h} |\tanh(\gamma h)|^2 \Pi_2 = \frac{\xi}{2h} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc}) |\tanh(\gamma h)|^2} \Pi_1 - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \Pi_2 \right\} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} - \text{Re}\left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\bar{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} = \frac{\xi}{2h} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc}) |\tanh(\gamma h)|^2} \Pi_1 - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \Pi_2 \right\}$$

Είναι :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc}) |\tanh(\gamma h)|^2} \Pi_1 - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \Pi_2 \right\} = \\ &= \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc})} \frac{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)} \left\{ \left[|Sc|^2 - 1 \right] \left[\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \text{sign}(\eta') \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2) \right] - 2(\xi_1^2 - 1) \left[\xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) \right] \right\} - \\ &- \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \left\{ \left[|Sc|^2 - 1 \right] \sinh(\tau) - \sin(\tau) \right\} - 2|Sc| (\xi_1^2 - 1) \left\{ \sinh(\tau) + \sin(\tau) \right\} = \\ &= \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc})} \left(|Sc|^2 - 1 \right) \frac{\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) - \xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)} - \frac{2|Sc|}{(Sc + \bar{Sc})} 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)} - \\ &- \frac{\left(|Sc|^2 - 1 \right) \sinh(\tau) - \sin(\tau)}{|Sc|^{1/2} \cosh(\tau) - \cos \tau} + \frac{2|Sc| (\xi_1^2 - 1) \sinh(\tau) + \sin(\tau)}{|Sc|^{1/2} \cosh(\tau) - \cos \tau} = \end{aligned}$$

$$\left(|Sc|^2 - 1 \right) \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1^{\xi_1}) - \xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_2^{\xi_2})}{\cosh(\xi_1^{\xi_1}) - \cos(\xi_2^{\xi_2})} - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \frac{\sinh(\tau) - \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos \tau} \right\} -$$

$$- 2(\xi_1^2 - 1) \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_2^{\xi_2}) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1^{\xi_1})}{\cosh(\xi_1^{\xi_1}) - \cos(\xi_2^{\xi_2})} - |Sc|^{1/2} \frac{\sinh(\tau) + \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos \tau} \right\}$$

με

$$\Psi_1 = \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1^{\xi_1}) - \xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_2^{\xi_2})}{\cosh(\xi_1^{\xi_1}) - \cos(\xi_2^{\xi_2})} - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \frac{\sinh(\tau) - \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos \tau} \right\}$$

$$\Psi_2 = \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{\xi_1 \text{sign}(\eta') \sin(\xi_2^{\xi_2}) + \xi_2 \sinh(\text{sign}(\eta') \xi_1^{\xi_1})}{\cosh(\xi_1^{\xi_1}) - \cos(\xi_2^{\xi_2})} - |Sc|^{1/2} \frac{\sinh(\tau) + \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos \tau} \right\}$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι,

$$R_v = \frac{P^2 I}{4 \omega^4 \rho^2 h}$$

και επειδή $\omega^4 = (\omega^2)^2 = \frac{|\eta|^4 \xi^8}{4 \cdot 4h^8}$ μπορούμε να γράψουμε

$$R_v = \frac{P^2 I}{4} \frac{4 \cdot 4h^8}{\rho^2 h |\eta|^4 \xi^8} = \frac{I}{4} \frac{P^2 4^2 h^7}{\rho^2 |\eta|^4 \xi^8}$$

όπου,

$$\frac{I}{4} = \text{Re}\{\Sigma_1 \tanh(\gamma h)\} - \text{Re}\left\{ \Sigma_2 \frac{\tanh(\overline{\gamma} h) \tanh(\gamma h)}{\tanh(\delta h)} \right\} = \frac{\xi}{2h} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ \frac{2|Sc|}{(Sc + \overline{Sc})} \frac{1}{|\tanh(\gamma h)|^2} \Pi_1 - \frac{1}{|Sc|^{1/2}} \Pi_2 \right\} =$$

$$= \frac{\xi}{2h} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \Psi_1 - 2(\xi_1^2 - 1) \Psi_2 \right\}$$

Επομένως προκύπτει :

$$\begin{aligned}
 R_V &= \frac{P^2 I}{4} \frac{4 \cdot 4h^8}{\rho^2 h |\eta|^4 \xi^8} = \frac{P^2 4^2 h^7}{\rho^2 |\eta|^4 \xi^8} \frac{\xi}{2h} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \Psi_1 - 2(\xi_1^2 - 1) \Psi_2 \right\} = \\
 &= \frac{4^2 P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{2 \xi^7} |Sc| A_2 |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \Psi_1 - 2(\xi_1^2 - 1) \Psi_2 \right\} = \\
 &= \frac{4^2 P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{2 \xi^7} |Sc| \frac{|Sc|}{2 |\overline{Sc} + 1|^2 |Sc - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \Psi_1 - 2(\xi_1^2 - 1) \Psi_2 \right\} = \\
 &= \frac{4^2 P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\alpha\phi\acute{o}\upsilon \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad |\overline{Sc} + 1|^2 |Sc - 1|^2 = |Sc + 1|^2 |Sc - 1|^2 = |(Sc + 1)((Sc - 1))|^2 = |Sc^2 - 1|^2$$

Δηλαδή καταλήξαμε στον τύπο

$$R_V = \frac{4^2 P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ (|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right\}$$

$$\acute{o}\pi\upsilon \quad |\tanh(\gamma h)|^2 = \frac{\cosh(\xi \xi_1) - \cos(\xi \xi_2)}{\cosh(\xi \xi_1) + \cos(\xi \xi_2)}$$

Υπολογισμός του R_V στη σε συνάρτηση του όγκου εμβολισμού.

Ο όγκος εμβολισμού ανά μονάδα πλάτους του καναλιού δίνεται από την έκφραση

$$V_1 = \frac{2P}{\omega^2 \rho} \left| A + \frac{i\eta}{\omega} \int_B \frac{\partial F}{\partial n} ds \right|$$

Είναι $F(y) \frac{\cosh\{\gamma y\}}{\cosh\{\gamma h\}}$ με $\frac{dF(y)}{dy} = \gamma \frac{\sinh\{\gamma y\}}{\cosh\{\gamma h\}}$ όπου $\gamma = \left(\frac{i\omega}{\eta} \right)^{1/2}$ οπότε προκύπτει

$$\int_B \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{\partial F}{\partial y}(h) - \frac{\partial F}{\partial y}(-h)$$

και επειδή $\frac{\partial F}{\partial y}(-h) = -\frac{\partial F}{\partial y}(h)$ είναι τελικά :

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{\partial F}{\partial n} ds &= 2 \frac{\partial F}{\partial y}(h) = 2\gamma \tanh(\gamma h) \\
V_1 &= \frac{2P}{\omega^2 \rho} \left| A + \frac{i\eta}{\omega} 2\gamma \tanh(\gamma h) \right| \Rightarrow \\
\Rightarrow V_1^2 &= \frac{4P^2}{\omega^4 \rho^2} \left| A + \frac{i\eta}{\omega} 2\gamma \tanh(\gamma h) \right|^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow V_1^2 &= \frac{4P^2}{\omega^4 \rho^2} \left(A + \frac{i\eta}{\omega} 2\gamma \tanh(\gamma h) \right) \left(A - \frac{i\bar{\eta}}{\omega} 2\bar{\gamma} \overline{\tanh(\gamma h)} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow V_1^2 &= \frac{4P^2}{\omega^4 \rho^2} \left\{ A^2 + \frac{2Ai}{\omega} \left(\eta\gamma \tanh(\gamma h) - \bar{\eta}\bar{\gamma} \overline{\tanh(\gamma h)} \right) + \frac{4|\eta|^2}{\omega^2} |\gamma|^2 |\tanh(\gamma h)|^2 \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow V_1^2 &= \frac{4P^2}{\omega^4 \rho^2} \left\{ 4h^2 - \frac{8h}{\omega} \operatorname{Im}\{\eta\gamma \tanh(\gamma h)\} + \frac{4|\eta|^2}{\omega^2} |\gamma|^2 |\tanh(\gamma h)|^2 \right\}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις :

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta' + i\eta'' = \operatorname{sign}(\eta') |\eta| \xi_1 \xi_2 + i |\eta| (\xi_1^2 - 1) \\
\gamma &= \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} (\operatorname{sign}(\eta') \xi_1 + i \xi_2) \\
\tanh(\gamma h) &= \frac{\sinh(\operatorname{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) + i \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)}
\end{aligned}$$

Βρίσκει κανείς ότι,

$$\begin{aligned}
\eta\gamma \tanh(\gamma h) &= \frac{|\eta| \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2}}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \left\{ (\sinh(\operatorname{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2) + i \sin(\xi_1 \xi_2)) (\operatorname{sign}(\eta') \xi_1 + i \xi_2) (\operatorname{sign}(\eta') \xi_1 \xi_2 |\eta| + i |\eta| (\xi_1^2 - 1)) \right\} = \\
&= \frac{|\eta| \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2}}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \left\{ \operatorname{sign}(\eta') (\xi_2 \sinh(\xi_1 \xi_2) - \xi_1 \sin(\xi_1 \xi_2)) + i (\xi_1 \sinh(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sin(\xi_1 \xi_2)) \right\}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\{\eta\gamma \tanh(\gamma h)\} &= |\eta| \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\xi_1 \sinh(\xi_1 \xi_2) + \xi_2 \sin(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)} \right\} \\
|\eta\gamma \tanh(\gamma h)|^2 &= \omega |\eta| \frac{\cosh(\xi_1 \xi_2) - \cos(\xi_1 \xi_2)}{\cosh(\xi_1 \xi_2) + \cos(\xi_1 \xi_2)}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές και χρησιμοποιώντας σχέσεις του παραρτήματος προκύπτει,

$$V_1^2 = \frac{4P^2}{\omega^4 \rho^2} \left\{ 4h^2 - \frac{8h}{\omega} |\eta| \left(\frac{\omega}{2|\eta|} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} \right\} + \frac{4}{\omega^2} \omega |\eta| \frac{\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} \right\}$$

$$V_1^2 = \frac{256P^2 h^{10}}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^8} \left\{ 1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} \right\}$$

Επομένως για να εκφραστεί το R_v σε συνάρτηση με τον όγκο εμβολισμού V_1 διαιρούμε τις εκφράσεις με τις οποίες εκφράζονται.

Αρχικά τίθεται :

$$W2 = 1 - \frac{2}{\xi} \frac{\xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{\cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)}$$

$$W1 = (|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi}$$

ώστε να είναι :

$$V_1^2 = \frac{256P^2 h^{10}}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^8} W2$$

$$R_v = \frac{4^2 P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 W1$$

$$\frac{R_v}{V_1^2} = \frac{\xi^2}{64h^4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \frac{W1 \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{W2 \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} \Rightarrow R_v = \frac{\xi^2}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \frac{W1 \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2)}{W2 \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2)} \frac{V_1^2}{(2h)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_v = \frac{\frac{\xi^2}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} W1 \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}}{\xi^2 W2 \{ \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \}} \frac{V_1^2}{(2h)^4}$$

Όπου :

$$\xi^2 W2 \{ \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \} = \xi^2 \{ \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \} - 2\xi \{ \xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2) \} + 2 \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}$$

Και τελικώς προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το ποσοστό αύξησης του συντελεστή διάχυσης :

$$R_v = \frac{\frac{\xi^2}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \left\{ (|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right\} \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}}{\xi^2 \{ \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \} - 2\xi \{ \xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2) \} + 2 \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}} \frac{V_1^2}{(2h)^4}$$

Θέτουμε $x = \xi\xi_1, y = \xi\xi_2$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2\xi^2 & x^2 - y^2 &= \xi^2(\xi_1^2 - \xi_2^2) \\x^4 + y^4 &= 2\xi^4(2 - \xi_1^2\xi_2^2) & x^4 - y^4 &= 2\xi^4(\xi_1^2 - \xi_2^2) \\x^6 + y^6 &= 2\xi^6(4 - 3\xi_1^2\xi_2^2) & x^6 - y^6 &= \xi^6(\xi_1^2 - \xi_2^2)(4 - \xi_1^2\xi_2^2) \\x^8 + y^8 &= 2\xi^8(8 - 8\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^4\xi_2^4) & x^8 - y^8 &= 4\xi^8(\xi_1^2 - \xi_2^2)(2 - \xi_1^2\xi_2^2) \\x^{10} + y^{10} &= \xi^{10}(32 - 40\xi_1^2\xi_2^2 + 10\xi_1^4\xi_2^4) & x^{10} - y^{10} &= 4\xi^{10}(\xi_1^2 - \xi_2^2)(4 - 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^4\xi_2^4)\end{aligned}$$

Όταν $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ και $\tau \rightarrow 0$, δηλαδή όταν $\xi \rightarrow 0$ τότε :

$$\begin{aligned}\frac{\sinh(x)}{x} &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 + \frac{1}{39916800}x^{10} + O(x^{12}) \\ \frac{\sinh(y)}{y} &= 1 - \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{120}y^4 - \frac{1}{5040}y^6 + \frac{1}{362880}y^8 - \frac{1}{39916800}y^{10} + O(y^{12}) \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{3628800}x^{10} + O(x^{12}) \\ \cos(y) &= 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{720}y^6 + \frac{1}{40320}y^8 - \frac{1}{3628800}y^{10} + O(y^{12}) \\ \frac{\sinh(x)}{x} - \frac{\sinh(y)}{y} &= \frac{1}{6}(x^2 + y^2) + \frac{1}{120}(x^4 - y^4) + \frac{1}{5040}(x^6 + y^6) + \frac{1}{362880}(x^8 - y^8) + \frac{1}{39916800}(x^{10} + y^{10}) + O(x^{12} + y^{12}) \\ \frac{\sinh(x)}{x} + \frac{\sinh(y)}{y} &= 2 + \frac{1}{6}(x^2 - y^2) + \frac{1}{120}(x^4 + y^4) + \frac{1}{5040}(x^6 - y^6) + \frac{1}{362880}(x^8 + y^8) + \frac{1}{39916800}(x^{10} - y^{10}) + O(x^{12} + y^{12})\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω η 1^η ποσότητα βρίσκεται περίπου ίση με :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\xi^2 + \frac{1}{60}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^4 + \frac{1}{2520}(4 - 3\xi_1^2\xi_2^2)\xi^6 + \frac{1}{90720}(2 - \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^8 + \frac{1}{39916800}(32 - 40\xi_1^2\xi_2^2 + 10\xi_1^4\xi_2^4)\xi^{10} \\ \xi^2 + \frac{1}{12}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^4 + \frac{1}{360}(4 - 3\xi_1^2\xi_2^2)\xi^6 + \frac{1}{10080}(2 - \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^8 + \frac{1}{3628800}(32 - 40\xi_1^2\xi_2^2 + 10\xi_1^4\xi_2^4)\xi^{10}\end{aligned}$$

που επειδή $\xi \rightarrow 0$ το ρητό αυτό κλάσμα ισούται με :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{90}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^2 + \left(\frac{1}{630} - \frac{2}{945}\xi_1^2\xi_2^2\right)\xi^4 - \frac{1}{453600}(24 - 48\xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^6 + \left(\frac{1}{149688} - \frac{1}{37422}\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{2}{93555}\xi_1^4\xi_2^4\right)\xi^8 + O(\xi^{10})$$

που για $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ισούται με :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{1890}\xi^4 + \frac{1}{748440}\xi^8 + O(\xi^{10})$$

Η 2^η ποσότητα βρίσκεται λοιπόν να είναι περίπου ίση με :

$$\frac{2 + \frac{1}{6}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^2 + \frac{1}{60}(2 - \xi_1^2\xi_2^2)\xi^4 + \frac{1}{5040}(4 - \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^6 + \frac{1}{362880}(16 - 16\xi_1^2\xi_2^2 + 2\xi_1^4\xi_2^4)\xi^8 + \frac{1}{39916800}(\xi_1^2 - \xi_2^2)(4 - 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^4\xi_2^4)\xi^{10}}{\xi^2 + \frac{1}{12}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^4 + \frac{1}{360}(4 - 3\xi_1^2\xi_2^2)\xi^6 + \frac{1}{10080}(2 - \xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^8 + \frac{1}{3628800}(32 - 40\xi_1^2\xi_2^2 + 10\xi_1^4\xi_2^4)\xi^{10}}$$

που επειδή $\xi \rightarrow 0$ το ρητό αυτό κλάσμα ισούται με :

$$\frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{90}\xi^2 - \frac{1}{1890}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^4 + \left(\frac{1}{12600} - \frac{1}{9450}\xi_1^2\xi_2^2\right)\xi^6 + \frac{1}{29937600}(\xi_1^2 - \xi_2^2)(364 - 489\xi_1^2\xi_2^2 + 3\xi_1^4\xi_2^4)\xi^8 + O(\xi^{10})$$

που για $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ισούται με :

$$\frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{90}\xi^2 - \frac{1}{37800}\xi^6 + O(\xi^{10})$$

Η 3^η ποσότητα υπολογίζεται :

$$\frac{1}{\tau} \frac{\sinh(\tau) - \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1890}\tau^4 + \frac{1}{748440}\tau^8 + O(\tau^{10}) = \frac{1}{3} - \frac{|Sc|^2}{1890}\xi^4 + \frac{|Sc|^4}{748440}\xi^8 + O(\xi^{10})$$

Η 4^η ποσότητα υπολογίζεται :

$$\frac{|Sc|}{\tau} \frac{\sinh(\tau) + \sin(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\tau)} = \frac{|Sc|}{\tau} \left(2 + \frac{1}{90}\tau^4 - \frac{1}{37800}\tau^8 + O(\tau^{10}) \right) = \frac{1}{\xi^2} \left(2 + \frac{|Sc|^2}{90}\xi^4 - \frac{|Sc|^4}{37800}\xi^8 + O(\xi^{10}) \right)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει μετά από πράξεις ότι :

$$\left(|Sc|^2 - 1 \right) \frac{\Psi_1}{\xi} = \left(|Sc|^2 - 1 \right) \left\{ -\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{90}\xi^2 + \left(\frac{1}{630} - \frac{1}{945}\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{|Sc|^2}{1890} \right)\xi^4 - \frac{(24 - 48\xi_1^2\xi_2^2)}{453600}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^6 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{149688} - \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{37422} + \frac{2\xi_1^4\xi_2^4}{93555} - \frac{|Sc|^4}{748440} \right)\xi^8 \right\}$$

και ότι :

$$2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} = (\xi_1^2 - \xi_2^2) \frac{\Psi_2}{\xi} = -\frac{1}{90}(|Sc|^2 - 1)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^2 - \frac{1}{1890}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^4 + \left(\frac{1}{12600} - \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{9450} + \frac{|Sc|^2}{37800} \right)(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^6 + \\ + \frac{(364 + 489\xi_1^2\xi_2^2 + 3\xi_1^4\xi_2^4)}{29937600}(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi^8$$

Όποτε έχουμε ότι :

$$\left(|Sc|^2 - 1\right) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - \xi_2^2) \frac{\Psi_2}{\xi} = A\xi^4 + B\xi^6 + \Gamma\xi^8 + O(\xi^{10})$$

$$A = \frac{1}{1890} \left\{ \left(|Sc|^2 + 1\right)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}$$

$$B = -\frac{1}{37800} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \left\{ \left(|Sc|^2 + 1\right)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}$$

$$\Gamma = \left(|Sc|^2 - 1\right) \left(\frac{1}{149688} - \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{37422} + \frac{2\xi_1^4 \xi_2^4}{93555} - \frac{|Sc|^4}{748440} \right) - \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}{29937600} (364 + 489\xi_1^2 \xi_2^2 + 3\xi_1^4 \xi_2^4)$$

Επίσης, το ανάπτυγμα του τετραγώνου του μέτρου της εφαπτομένης είναι :

$$|\tanh(\gamma h)|^2 = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^4 + \left(\frac{17}{360} - \frac{1}{15} \xi_1^2 \xi_2^2 \right) \xi^6 + O(\xi^8)$$

Οπότε τελικώς βρίσκουμε ότι :

$$\frac{4}{\xi^6} |\tanh(\gamma h)|^2 \left(|Sc|^2 - 1\right) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - \xi_2^2) \frac{\Psi_2}{\xi} = \Sigma_o + \Sigma_1 \xi^2 + \Sigma_2 \xi^4 + O(\xi^6)$$

$$\Sigma_o = \frac{1}{945} \left\{ \left(|Sc|^2 + 1\right)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}$$

$$\Sigma_1 = -\frac{52}{226800} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \left\{ \left(|Sc|^2 + 1\right)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}$$

$$\frac{\Sigma_2}{\Sigma_o} = -\frac{5|Sc|^2 + 350\xi_1^2 \xi_2^2 - 268}{1980} + \frac{-444 + 115\xi_1^2 \xi_2^2 + 326\xi_1^4 \xi_2^4 + 3\xi_1^6 \xi_2^6}{\left\{ \left(|Sc|^2 + 1\right)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}}$$

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_o} = -\frac{13}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2)$$

Άρα βρίσκουμε :

$$R_v = \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} |\tanh(\gamma h)|^2 \left\{ \left(|Sc|^2 - 1\right) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - \xi_2^2) \frac{\Psi_2}{\xi} \right\} \Rightarrow$$

$$R_v = \frac{4P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{1}{\xi^6} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \Sigma_o \left\{ 1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_o} \xi^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_o} \xi^4 + O(\xi^6) \right\}$$

Αλλά είναι :

$$\frac{\Sigma_o}{|Sc^2 - 1|^2} = \frac{1}{945} |Sc^2 - 1|^2 = (Sc^2 - 1)(\overline{Sc^2 - 1}) = |Sc|^4 - (Sc^2 + Sc^2) + 1 = |Sc|^4 - 2\operatorname{Re}\{Sc^2\} + 1 \text{ και}$$

$$\operatorname{Re}\{Sc^2\} = |Sc|^2 \{2\xi_1^2 \xi_2^2 - 1\} \text{ οπότε } |Sc^2 - 1|^2 = \left\{ (|Sc|^2 + 1)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}$$

Τελικώς, λαμβάνουμε την έκφραση :

$$R_v = \frac{P^2 h^6}{\rho^2 |\eta|^4} \frac{|Sc|^2}{945} \left\{ 1 - \frac{13}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^2 - \left(\frac{5|Sc|^2 + 350\xi_1^2 \xi_2^2 - 268}{1980} - \frac{-444 + 115\xi_1^2 \xi_2^2 + 326\xi_1^4 \xi_2^4 + 3\xi_1^6 \xi_2^6}{\left\{ (|Sc|^2 + 1)^2 - 4|Sc|^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \right\}} \right) \xi^4 + O(\xi^6) \right\}$$

Υπολογισμός του R_v σε συνάρτηση του όγκου εμβολισμού στην περίπτωση που $\sigma \neq 1$, δηλαδή αν $\gamma \neq \delta$, όταν $\xi \rightarrow 0$ που σημαίνει ότι $\tau \rightarrow 0$, $\xi\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi\xi_2 \rightarrow 0$.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι είναι λάθος ο τύπος (77) του Watson :

$$R_N = \frac{Sc^2}{420} \left\{ \beta^{-4} - \frac{175Sc^2 + 32}{69300} + O(\beta^4) \right\} \frac{V_1^2}{(2h)^4} \quad (77)$$

και ο σωστός είναι :

$$R_N = \frac{\beta^4 Sc^2}{420} \left\{ 1 - \frac{175Sc^2 + 32}{69300} \beta^4 + O(\beta^8) \right\} \frac{V_1^2}{(2h)^4}$$

Από εδώ προκύπτει ότι :

$$R_N \rightarrow \frac{\beta^4 Sc^2}{420} \frac{V_1^2}{(2h)^4} = \frac{1}{1680} \left(\frac{V_1 \omega}{k} \right)^2 \text{ τύπος (78) του Watson.}$$

Το γεγονός αυτό φαίνεται και από φυσικής απόψεως, αφού αν η συχνότητα τείνει προς το μηδέν, τότε ο όγκος εμβολισμού γίνεται άπειρος για πεπερασμένο πλάτος της κλίσης της πίεσης P , ενώ το R τείνει προς την τιμή που καθορίζεται από τον τύπο (75) και που εξάλλου εκφράζεται από την (78).

Ο τύπος (77) έτσι όπως είναι τυπωμένος συνεπάγεται σε αυτήν την περίπτωση ότι το R τείνει προς το άπειρο, που είναι αδύνατον.

Το R_V είναι ίσο με :

$$R_V = \frac{\frac{\xi^4}{4} \frac{|Sc|^2}{|Sc^2 - 1|^2} \left\{ (|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - 1) \frac{\Psi_2}{\xi} \right\} \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}}{\xi^2 \{ \cosh(\xi\xi_1) + \cos(\xi\xi_2) \} - 2\xi \{ \xi_1 \sinh(\xi\xi_1) + \xi_2 \sin(\xi\xi_2) \} + 2 \{ \cosh(\xi\xi_1) - \cos(\xi\xi_2) \}} \frac{V_1^2}{(2h)^2}$$

Το ανάπτυγμα του $(|Sc|^2 - 1) \frac{\Psi_1}{\xi} - 2(\xi_1^2 - \xi_2^2) \frac{\Psi_2}{\xi}$ είναι γνωστό.

Το ανάπτυγμα του παρανομαστή είναι :

$$\frac{1}{18} \xi^4 - \frac{1}{540} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi^6 + \left(\frac{1}{4200} - \frac{1}{2835} \xi_1^2 \xi_2^2 \right) \xi^8 + O(\xi^{10})$$

και τελικώς μετά από πράξεις προκύπτει ότι :

$$R_V = \frac{\xi^4 |Sc|^2}{420} \left\{ 1 - \frac{1}{60} (\xi_1^2 - \xi_2^2) - \left(\frac{32 + 175 |Sc|^2}{69300} + \frac{1}{3960} \frac{(\xi_1^2 \xi_2^2 - 1)(444 + 329 \xi_1^2 \xi_2^2 + 3 \xi_1^4 \xi_2^4)}{|Sc^2 - 1|^2} \right) \xi^4 + O(\xi^6) \right\} \frac{V_1^2}{(2h)^2}$$

Παράρτημα III

Τα παρακάτω προγράμματα υπολογίζουν τα διαγράμματα με παραμέτρους τους αδιάστατους αριθμούς Weissenberg : we_1, we_2 .

Πρόγραμμα All_ we_1 , All_ we_2

Είσοδος : $Sc_o \neq 1, we_1, we_2$

Έξοδος :

NTAYLOR.dat.....	$R_N / Ta^2 = T_{N1}(\beta; Sc_o)$
NTAYLOR2.dat.....	$T_{N12}(\beta, Sc_o) = \{945/Sc_o\} T_{N1}(\beta; Sc_o)$
NVOLUME.dat.....	$[V/(2h)^2]^{-2} R_N = T_{N2}(\beta; Sc_o)$
VTAYLOR.dat.....	$R_V / Ta^2 = T_{V1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)$
VTAYLOR2.dat.....	$T_{V12}(\beta, Sc_o) = \{945/Sc_o\} T_{V1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)$
VVOLUME.dat.....	$[V/(2h)^2]^{-2} R_V = T_{V2}(\beta; Sc_o, we_1, we_2)$
LTAYLOR.dat.....	$\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} = T_{V1}(\beta; Sc_o, we_1, we_2) / T_{N1}(\beta; Sc_o)$
LVOLUME.dat.....	$\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{[V/(2h)^2]} = T_{V2}(\beta; Sc_o, we_1, we_2) / T_{N2}(\beta; Sc_o)$

Τα παρακάτω προγράμματα υπολογίζουν τα διαγράμματα με παραμέτρους τους αριθμούς ελαστικότητας (Deborah ή elasticity numbers): De_1, De_2 .

Πρόγραμμα All_De₁, All_De₂

Είσοδος: $Sc_o \neq 1, De_1, De_2$

Έξοδος : NTAYLOR.dat..... $R_N / Ta^2 = T_{N1}(\beta; Sc_o)$

NTAYLOR2.dat..... $T_{N12}(\beta, Sc_o) = \{945/Sc_o\} T_{N1}(\beta; Sc_o)$

NVOLUME.dat..... $[V/(2h)^2]^{-2} R_N = T_{N2}(\beta; Sc_o)$

VTAYLOR.dat..... $R_V / Ta^2 = T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)$

VTAYLOR2.dat..... $T_{V12}(\beta, Sc_o) = \{945/Sc_o\} T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)$

VVOLUME.dat..... $[V/(2h)^2]^{-2} R_V = T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2)$

JTAYLOR.dat..... $\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{Taylor} = T_{V1}(\beta; Sc_o, De_1, De_2) / T_{N1}(\beta; Sc_o)$

JVOLUME.dat..... $\left\{ \frac{R_V}{R_N} \right\}_{[V/(2h)^2]} = T_{V2}(\beta; Sc_o, De_1, De_2) / T_{N2}(\beta; Sc_o)$

Πρόγραμμα Veloc

Είσοδος: β, De_1, De_2

Έξοδος : REYTAYL.dat..... $W_o / T\alpha$

REYVOL.dat..... $W_o / \left[\frac{V}{(2h)^2} \right]$

FASH.dat..... $\phi = \phi\left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2\right)$

Πρόγραμμα Velocity

Είσοδος: β, De_1, De_2

Έξοδος: REYTAYL.dat..... $W_o / T\alpha$

REYVOL.dat..... $W_o / \left[\frac{V}{(2h)^2} \right]$

FASH.dat..... $\phi = \phi \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$

PROFTAYL.dat..... $W / T\alpha$

(8 διαγράμματα προφίλ της ταχύτητας σε φάσεις ανά $\pi/4$)

PROFVOL.dat..... $W / \left[\frac{V}{(2h)^2} \right]$

(8 διαγράμματα προφίλ της ταχύτητας σε φάσεις ανά $\pi/4$)

Πρόγραμμα Jelocity

Είσοδος: β, De_1, De_2

Έξοδος: REYTAYL.dat..... $W_o / T\alpha$

REYVOL.dat..... $W_o / \left[\frac{V}{(2h)^2} \right]$

FASH.dat..... $\phi = \phi \left(\frac{y}{h}; \beta, De_1, De_2 \right)$

PROFTAYL.dat..... $W / T\alpha$

(8 διαγράμματα προφίλ της ταχύτητας σε φάσεις ανά $\pi/4$)

PROFVOL.dat..... $W / \left[\frac{V}{(2h)^2} \right]$

(8 διαγράμματα προφίλ της ταχύτητας σε φάσεις ανά $\pi/4$)

Βιβλιογραφία

- Aris, R.**, On the dispersion of a solute in pulsating flow through a tube, Proc. Roy. Soc. London, A259, 370-376, 1960
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O.**, Dynamics of polymeric Liquids, J. Wiley & Sons, 1977
- Bowden, K.F.**, Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, J. Fluid. Mech. 21, 83-95. 1965
- Chatwin, P.C.**, On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillatory flows in tubes, J. Fluid Mech., 71/3, 513-527, 1975
- Chien, S., King, R.G., Skalak, R., Usami, S. & Copley, A.L.**, Viscoelastic properties of human blood and red cells suspensions, Biorheology 12, 341-346, 1975
- Jaeger, M.J. & Kurzweg, U.H.**, Determination of the longitudinal dispersion coefficient in flows subjected to high frequency oscillations, Phys. Fluids 26, 1380-1382, 1983
- Joshi, C.H., Kamm, R.D., Drazen, J.M. & Slutsky, A.S.**, An experimental study of gas exchange in laminar oscillatory flow, J. Fluid Mech. 133, 245-254, 1983
- Kurzweg, U.H., Howell, G. & Jaeger, M.J.**, Enhanced dispersion in oscillatory flows, Phys. Fluids. 27, 1046-1048, 1984
- Kurzweg, U.H.**, Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels, J. Fluid. Mech. 156, 291-300, 1985
- Lambert, A.A., Cuevas, S., del Rio, J.A., Lopez de Haro, M.**, Heat transfer enhancement in oscillatory flows of Newtonian and viscoelastic fluids, International Journal of Heat and Mass Transfer 52, 5472-5478, 2009
- Merkli, P. & Thomann, H.** Transition to turbulence in oscillatory pipe flow J. Fluid. Mech. 68, 567-575
- Phillips, W.M. & Deutsch S.**, Toward a constitutive equation for blood, Biorheology 12, 383-389, 1975
- Sergeev, S.I.** Fluid oscillations in pipes at moderate Reynolds numbers , Fluid. Dyn. 1, 121, 1966
- Slutsky A.S., Drazen, J.M., Ingram, R.H. Jr., Kamm, R.D., Shapiro, A.H., Fredberg, J.J., Loring, S.H. & Lehr J.**, Effective pulmonary ventilation with small-volume oscillations at high frequency. Science 209 ,609-611, 1980
- Smith, R.**, Contaminat dispersion of oscillatory flow, J. Fluid Mech., 114, 379-398, 1982
- Taylor, G.I.**, Dispersion of salts injected into large pipes or the blood vessels of animals, Appl. Mech. Rev 6, 256, 1953
- Taylor, G.I.**, Dispersion of a soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proc. Roy. Soc. A219, 186-203, 1953
- Thurston, G.B.**, Viscoelasticity of human blood, Biophys. J. 12, 1205-1217 , 1972

Thurston, G.B., Rheological parameters for viscosity, viscoelasticity and thixotropy of blood, *Biorheology* 16, 149-162, 1979

Tsangaris S., Athanassiadis N., Diffusion in oscillatory flow in an annular pipe, *Z.A.M.M.*, 65/4, T252-T254, 1985

Watson, E.J., Diffusion in oscillatory pipe flow, *J. Fluid Mech.* 133, 233-244, 1983