



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

**Ανάπτυξη Μεθόδου Συνεκτικής-Μη Συνεκτικής
Αλληλεπίδρασης για την Προσομοίωση της Ροής γύρω
από Στρεφόμενα Πτερύγια Ανεμογεννητριών**

Διπλωματική Εργασία

Νικόλαος Δ. Μπεμπεδέλης

Επιβλέπων: Βασίλης Α. Ριζιώτης, Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, 2013

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας μεθόδου για τον υπολογισμό της αεροδυναμικής συμπεριφοράς περιστρεφόμενων πτερυγίων. Η περιστροφική αυτή κίνηση έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση τριδιάστατων φαινομένων στην εξέλιξη της ροής που μεταβάλλουν σημαντικά την αεροδυναμική απόδοση του πτερυγίου. Η πρόλεξη των δυνάμεων που λόγω αεροδυναμικών φαινομένων ασκούνται στις τομές του σώματος γίνεται με τη μέθοδο της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Η ροή στη μη συνεκτική περιοχή υπολογίζεται με τη διδιάστατη διατύπωση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, ενώ στη συνεκτική περιοχή επιλύονται οι μη μόνιμες τριδιάστατες εξισώσεις του οριακού στρώματος σε ολοκληρωματική μορφή. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η διαμόρφωση μιας διδιάστατης διατύπωσης που όμως εμπεριέχει έντονα το στοιχείο της τριδιάστατης ροής, επιτρέποντας την αξιολόγηση της επίδρασης της περιστροφής στη ροή και τελικά την ακριβή πρόλεξη των αεροδυναμικών φορτίων, ενώ συγχρόνως παραμένει μία μέθοδος ιδιαίτερα χαμηλών υπολογιστικών απαιτήσεων.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Section of Fluids
Laboratory of Aerodynamics

Unsteady Quasi-3D Strong Viscous-Inviscid Interaction Method for Rotating Wind Turbine Blades

Diploma Thesis
Nikolaos D. Bempedelis

Supervisor: Vasilis A. Riziotis, Lecturer NTUA
Athens, 2013

Abstract

A computational model for the prediction of the aerodynamic behavior of rotating blades has been developed. As a result of the rotation, the character of the flow becomes three dimensional, thus affecting the aerodynamic performance of the blade. The acting forces on the sections of the body are predicted via the viscous-inviscid interaction technique. The flow in the inviscid region is computed using the 2D panel method, while the governing equations on the viscous region are the unsteady 3D integral boundary layer equations. The abovementioned formulation allows the three-dimensional and rotational viscous effects to be investigated, despite the method practically being two-dimensional. Consequently, the aerodynamic forces acting on the blade are more accurately predicted, while the method retains its computationally cost effective nature.

Ευχαριστίες

Ξεκινώντας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Β.Α. Ριζιώτη, η συνεχής καθοδήγηση του οποίου υπήρξε κομβικής σημασίας για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα ιδιαίτερα επιμορφωτικό και ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για το ότι ήταν πάντα διαθέσιμος και πρόθυμος να βοηθήσει και να μοιραστεί τις γνώσεις του, αφιερώνοντας για το λόγο αυτό ουκ ολίγο χρόνο. Ιδιαίτερης σημασίας για μένα είναι το γεγονός ότι στα πλαίσια της συνεργασίας αυτής, πέραν ενός άξιου καθηγητή γνώρισα έναν αξιόλογο άνθρωπο, στον οποίον από την πλευρά μου εύχομαι τα καλύτερα.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή και επικεφαλής του εργαστηρίου κ. Σ.Γ. Βουτσινά για τις πολύτιμες συμβουλές του καθόλη την περίοδο εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Τον ευχαριστώ καθώς ήταν διαρκώς προσιτός και διατεθειμένος να μεταδώσει τις γνώσεις του γύρω από τον κλάδο της μηχανικής των ρευστών και όχι μόνο, αλλά και γιατί από τα πρώτα κιόλας χρόνια ως καθηγητής με ενέπνευσε να ασχοληθώ με αντικείμενα που παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Σημαντικό ρόλο στην επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας είχαν όλα τα μέλη του εργαστηρίου Αεροδυναμικής, συμβάλλοντας ο καθένας με τον τρόπο του στη δημιουργία ενός πραγματικά ευχάριστου και συνάμα παραγωγικού κλίματος. Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γιώργο Παπαδάκη και το διδάκτορα κ. Π. Χασαπογιάννη για τη βοήθειά τους, αλλά και τους Αλέξιο Θεοφιλόπουλο, Βασίλη Μιχαλόπουλο, Ηλία Πετρόπουλο και Βασίλη Τζιμπλάκη με τους οποίους μοιραστήκαμε γραφεία και αίθουσες τους μήνες αυτούς, για την ωραία παρέα τους.

Σε καμία περίπτωση δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω θερμά όλους τους φίλους μου που ήταν δίπλα μου αυτά τα χρόνια, κάνοντας ειδική αναφορά στο Νίκο Σημηριώτη για τη βοήθειά του οποιαδήποτε στιγμή χρειάστηκε.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, χωρίς την υποστήριξη της οποίας δεν θα μπορούσα να βρίσκομαι σε αυτήν τη θέση. Τους ευχαριστώ για την αμέριστη συμπαράστασή τους, και κυρίως γιατί μου παρείχαν τη δυνατότητα να ακολουθήσω τα όνειρά μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση	1
1.2	Ιστορική αναδρομή	3
1.3	Η επίδραση της περιστροφής	4
1.4	Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας	6
2	Οριακό Στρώμα	9
2.1	Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος	9
2.1.1	Εξίσωση διατήρησης της μάζας	9
2.1.2	Εξίσωση διατήρησης της ορμής	11
2.1.3	Εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας	14
2.1.4	Διαμόρφωση του προβλήματος	19
2.1.5	Τελική μορφή εξισώσεων	23
2.2	Κλείσιμο του προβλήματος	25
2.2.1	Το πρότυπο προσδιορισμού του σημείου μετάβασης	25
2.2.2	Στρωτή ροή	27
2.2.3	Τυρβώδης ροή	27
3	Μη συνεκτική ροή	33
3.1	Η ισοδύναμη μη συνεκτική ροή	33
3.2	Οι εξισώσεις της καθαρά μη συνεκτικής ροής	35
3.3	Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης	38
3.4	Η συνθήκη <i>Kutta</i> στην ακμή εκφυγής	40
4	Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση	43
4.1	Το διακριτό πρόβλημα	43
4.2	Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης	48
4.3	Υπολογισμός των δυνάμεων	50

5	Αποτελέσματα	53
5.1	Αξιολόγηση του εμπειρικού πλαισίου	53
5.2	Υπολογιστικές λεπτομέρειες	65
5.3	Παραμετρική ανάλυση	66
5.3.1	Κυλινδρικοί όροι	66
5.3.2	Περιστροφικοί όροι	69
5.4	Πιστοποίηση της μεθόδου	72
5.4.1	Εφαρμογή για <i>NACA 4418</i>	72
5.4.2	Εφαρμογή για <i>NACA 63-215</i>	77
5.4.3	Δρομέας <i>NREL Phase VI</i>	78
6	Αποτίμηση της εργασίας	81
6.1	Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	81
6.2	Προτάσεις για μελλοντική επέκταση της μεθόδου	82
	Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος για συνδυαστική περιστροφική και μεταφορική κίνηση	83
	Βιβλιογραφία	85

Λίστα συμβόλων

c	χορδή αεροτομής
c/r	λόγος χορδής προς απόσταση από το κέντρο περιστροφής
c_p	συντελεστής πίεσης
c_L	συντελεστής άνωσης
c_D	συντελεστής αντίστασης
$C_{D()}$	συντελεστής διάχυσης
$C_{f()}$	συντελεστής τριβής
C_τ	συντελεστής διατμητικής τάσης
D	πεδίο ροής
F_C	συντελεστής συμπιεστότητας
H	συντελεστής σχήματος οριακού στρώματος
H^*	συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας
H^{**}	συντελεστής σχήματος πυκνότητας
H_k	συντελεστής σχήματος οριακού στρώματος για την ασυμπιεστη ροή
k	διάνυσμα κάθετο στο διδιάστατο επίπεδο $O_G X_G Y_G$
l	μήκος παραγόμενου ομόρρου
m	ταχύτητα αναπνοής (<i>transpiration velocity</i>)
M_0	αδιάστατος αριθμός <i>Mach</i>
\tilde{n}	λογάριθμος του μέγιστου λόγου ενίσχυσης
$O_G X_G Y_G$	γενικό σύστημα συντεταγμένων
p_0	πίεση
Re_0	αδιάστατος αριθμός <i>Reynolds</i>
RO	λόγος περιφερειακής προς σχετική ταχύτητα
s	κατεύθυνση γραμμών ροής της μη συνεκτικής ροής
S	επιφάνεια
t	χρόνος
u_0, U_0	ταχύτητα
x_0	διάνυσμα θέσης

α	γωνία πρόσπτωσης
β_0	γωνία μεταξύ της πραγματικής και της μη συνεκτικής ροής
γ_0	στροβιλότητα
Γ_0	κυκλοφορία
δ	πάχος οριακού στρώματος
δ_0^*	πάχος μετατόπισης οριακού στρώματος
δ_0^{*i}	πάχος μετατόπισης οριακού στρώματος για την ασυμπίεστη ροή
δ_0^{**}	πάχος πυκνότητας οριακού στρώματος
θ, z, r	κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων
ϑ_0	πάχος ορμής οριακού στρώματος
ϑ_0^*	πάχος ενέργειας οριακού στρώματος
λ	αδιάστατη ταχύτητα ακροπτερυγίου
μ_0	δυναμική συνεκτικότητα, ένταση διπόλου
ν_0	κάθετο διάνυσμα
ξ_0	παράμετρος μήκους φύλλου στροβιλότητας
ϱ_0	πυκνότητα
σ	ένταση πηγής
τ_0	εφαπτομενικό διάνυσμα, διατμητική τάση
φ	δυναμικό των ταχυτήτων διαταραχής
Φ	δυναμικό της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής
ψ	ροϊκή συνάρτηση
ω	πεδίο στροβιλότητας
Ω_0	γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

Δείκτες & εκθέτες

$()_b$	σώμα
$()_e$	ισοδύναμη μη-συνεκτική ροή
$()_w$	φύλλο στροβιλότητας στην περιοχή του ομόρρου
$()_{wall}$	σύνορο της αεροτομής
$()_\infty$	άπειρο
$()_0$	επιφάνεια της αεροτομής
$()_1$	περιφερειακή κατεύθυνση
$()_2$	ακτινική κατεύθυνση
$\bar{()}$	σχετικό μέγεθος

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση

Η ακριβής και γρήγορη πρόλεξη της ροής συνεκτικού ρευστού γύρω από διδιάστατες και τριδιάστατες επιφάνειες αποτελεί μείζον πρόβλημα στην αεροδυναμική. Οι συνεχείς εξελίξεις και βελτιώσεις στις υπολογιστικές μεθόδους, σε συνδυασμό με την αύξηση στην ταχύτητα και τη μνήμη των υπολογιστών, καθιστά πλέον εφικτή την εφαρμογή πλεγματικών μεθόδων που επιλύουν τις πλήρεις *Reynolds Averaged Navier-Stokes* εξισώσεις, προσφέροντας σημαντικές πληροφορίες γύρω από τη φυσική και τους μηχανισμούς της ροής. Παρά τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας προσέγγισης, εφαρμογές σχεδιασμού ή αεροελαστικές αναλύσεις απαιτούν πολλαπλούς υπολογισμούς, με επακόλουθο το υπολογιστικό κόστος των μεθόδων αυτών να παραμένει αρκετά υψηλό ώστε να κρίνεται απαγορευτικό.

Εναλλακτική λύση για τον υπολογισμό της συνεκτικής ροής γύρω από αεροτομές και πτέρυγες αποτελεί η μέθοδος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης (*viscous-inviscid interaction*). Αφετηρία της μεθόδου αυτής αποτέλεσε η πρόταση του *Prandtl* [35], ότι για μεγάλους αριθμούς *Reynolds* σε επιμήκη σώματα, τα συνεκτικά φαινόμενα περιορίζονται σε μία λεπτή περιοχή γύρω από το στερεό όριο, η οποία ονομάζεται οριακό στρώμα, ενώ εξωτερικά αυτής μπορούν να αμεληθούν έναντι των δυνάμεων αδράνειας και πίεσης. Η διάκριση της ροής σε δύο ζώνες επιτρέπει τη χρήση διαφορετικών υπολογιστικών μεθόδων για κάθε μία από αυτές. Η εξωτερική μη συνεκτική ροή λαμβάνεται είτε μέσω της επίλυσης των εξισώσεων *Euler* (κυρίως στην περίπτωση συμπιεστών ροών) είτε με χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων (*panel method*), ενώ στην περιοχή του οριακού στρώματος επιλύονται οι απλοποιημένες εξισώσεις *Navier-Stokes*.

Οι μέθοδοι συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο που η ατρίβης ροή “αισθάνεται” την παρουσία του οριακού στρώματος. Στην πρώτη κατηγορία, χαράσσονται τα όρια μεταξύ των ζωνών και ο ατρίβης υπολογισμός γίνεται σε χωρίο που δεν εφάπτεται των στερεών τοιχωμάτων. Σε κάθε επανά-

ληψη, και πριν αρχίσει ο υπολογισμός της ατριβούς ροής, απαιτείται ο ακριβής καθορισμός των (νέων) ορίων της και η γένεση του (νέου) πλέγματος. Το κόστος της διαδικασίας αυτής και οι ενδεχόμενες ανακρίβειες στον καθορισμό του χωρίου της εξωτερικής ροής αποτελούν εμφανή μειονεκτήματα της. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι στις οποίες κάθε υπολογισμός της εξωτερικής ροής γίνεται πάντοτε στο ίδιο υπολογιστικό πλέγμα. Η παρουσία του οριακού στρώματος γίνεται αισθητή με την επιβολή μη μηδενικής οριακής συνθήκης για την κάθετη ταχύτητα στους κόμβους του στερεού ορίου. Η μη μηδενική αυτή ταχύτητα, που ονομάζεται ταχύτητα μετατόπισης (*transpiration velocity*), υπολογίζεται από τα μεγέθη του οριακού στρώματος και σκοπός της είναι να προσθέτει ελεγχόμενα μάζα ρευστού στο πεδίο ροής ώστε να μετατοπιστεί η εξωτερική ροή κατά το πάχος του οριακού στρώματος.

Η μέθοδος που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια ανήκει στην δεύτερη από τις άνωθι κατηγορίες. Η σχετική με τα συνεκτικά φαινόμενα διόρθωση που επιβάλλεται στη μη συνεκτική ροή βασίζεται στη διατύπωση των ελλειμματικών εξισώσεων οριακού στρώματος σε ολοκληρωματική μορφή, στην περιοχή του οριακού στρώματος και των στρωμάτων διάτμησης που αντιστοιχούν στον ομόρροο. Οι ολοκληρωματικές μέθοδοι υπολογισμού των οριακών στρωμάτων επιτρέπουν, στη βάση ενός όγκου εμπειρικής πληροφορίας που προέρχεται από σειρά πειραμάτων και έχουν ενσωματωθεί κατάλληλα σ' αυτές, να δώσουν ταχύτατες απαντήσεις για τη συμπεριφορά του οριακού στρώματος. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι ολοκληρωματικές εξισώσεις για τα οριακά στρώματα είναι παραβολικού τύπου και αδυνατούν να μεταφέρουν πληροφορία στα ανάντι της ροής. Τέτοια πληροφορία μεταδίδεται μόνο από το μοντέλο επίλυσης της ατριβούς ροής και για το λόγο αυτό είναι σημαντική η σωστή επικοινωνία μεταξύ των δύο ζωνών.

Η εξωτερική μη συνεκτική ροή επιλύεται με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, βάση της οποίας αποτελεί το θεώρημα διαχωρισμού του *Helmholtz* που επιτρέπει το διαχωρισμό του πεδίου ταχύτητας σε αστρόβιλο και στροβιλό τμήμα, οπότε και μπορεί να αναπαρασταθεί από διανομές πηγών και στροβιλότητας. Επιπλέον γίνεται η υπόθεση ροής ασυμπίεστου ρευστού. Πρακτικά ασυμπίεστες είναι οι ροές των περισσότερων ροών υγρών καθώς και οι ροές αερίων με $Mach < 0.3$. Ροές αερίων χαμηλού αριθμού *Mach* συναντάμε σε διάφορες αεροδυναμικού τύπου ροές, όπως η περίπτωση ελικοπτέρου σε συνθήκες ανάβασης η κατάβασης, η περίπτωση μικρών και μεσαίων αεροσκαφών, καθώς επίσης και στις ανεμογεννήτριες.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ιδιαίτερη σημασία έχει ο τρόπος σύζευξης των δύο περιοχών. Για τη διαδικασία αυτή έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις [28]: η “άμεση” (*direct*), η “αντίστροφη” (*inverse*), η “ημι-αντίστροφη” (*semi-inverse*), η “ψευδο-ταυτόχρονη” (*quasi-simultaneous*), η “πλήρως ταυτόχρονη” (*fully-simultaneous*) και η “ισχυρή” (*strong*) αλληλεπίδραση, η οποία αποτελεί και τη μέθοδο σύζευξης που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, καθώς χαρακτηρίζεται από υψηλή ευστάθεια ακόμα και στην περίπτωση αποκολ-

λημένων ροών.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται χρήσιμη η ανακεφαλαίωση των παραπάνω, για τη συνοπτική περιγραφή της μεθόδου της ισχυρής συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Κατ' αρχήν, το πεδίο ταχύτητας αναπαρίσταται μέσω επιφανειακών διανομών πηγών και στροβιλότητας κατά μήκος της αεροτομής και του ομόρρου. Η στροβιλότητα του ομόρρου προσεγγίζεται από στοιχεία στροβιλότητας που κινούνται ελεύθερα με την ταχύτητα του πεδίου ροής. Στη συνέχεια η ροή διορθώνεται με τη συνεισφορά της συνεκτικότητας, που για ροές μεγάλου αριθμού Re περιορίζεται στην περιοχή του οριακού στρώματος και στην περιοχή των στρωμάτων διάτμησης που αντιστοιχούν στον ομόρρο. Η διόρθωση βασίζεται στη διατύπωση των ελλειμματικών εξισώσεων οριακού στρώματος σε ολοκληρωματική μορφή. Η αλληλεπίδραση των εξισώσεων της συνεκτικής ροής με αυτές της μη συνεκτικής επιτυγχάνεται μέσω μιας διανομής κάθετης ταχύτητας στο σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρο η οποία αναπαριστά το έλλειμμα μάζας της συνεκτικής ροής σε σχέση με τη μη συνεκτική, στο πάχος του οριακού στρώματος. Οι συζευγμένες μη γραμμικές εξισώσεις του προβλήματος λύνονται ταυτόχρονα, γεγονός που καθιστά τη διαδικασία αλληλεπίδρασής τους ισχυρή και επιτρέπει τη σύγκλιση ακόμα και σε περιπτώσεις με έντονη αποκόλληση.

Στην περίπτωση εμφάνισης αποκόλλησης υπάρχουν δύο διαφορετικές εκδοχές της μεθοδολογίας. Στην πρώτη, που μοιάζει με τις κλασικές μεθόδους συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης και είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, οι εξισώσεις οριακού στρώματος λύνονται σε ολόκληρη της επιφάνεια της αεροτομής και κατά μήκος του ομόρρου που αποβάλλεται από την ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αυτή οι καθ' ύψος διανομές ταχύτητας που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των ολοκληρωμένων στο πάχος του οριακού στρώματος μεγεθών είναι κατάλληλες για την προσομοίωση ροών με αποκόλληση. Στη δεύτερη εκδοχή εφαρμόζεται η αρχή του διπλού ομόρρου και οι εξισώσεις οριακού στρώματος λύνονται μέχρι του σημείου όπου η ροή αποκολλάται. Από το σημείο αυτό αποβάλλεται η στροβιλότητα του δεύτερου φύλλου η οποία μαζί με τη στροβιλότητα του φύλλου που αποβάλλεται από την ακμή εκφυγής διαμορφώνει το πεδίο ταχύτητας μέσα στη ζώνη της αποκόλλησης.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης οι οποίες ως επί το πλείστον έχουν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της μόνιμης ροής γύρω από αεροτομές. Η χρήση τέτοιων μεθόδων άρχισε σχεδόν από τη δεκαετία του '60, η δε εξέλιξή τους στο χρόνο αφορούσε την εξάντληση των δυνατοτήτων πρόλεξης ροών με ισχυρή αποκόλληση. Η δυνατότητα αυτή σχετίζεται κατά κύριο λόγο με τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση των συνεκτικών με τις μη συνεκτικές εξισώσεις

και κατά δεύτερο λόγο με το σχήμα που χρησιμοποιείται στη διαδικασία σύγκλισης των δύο ομάδων εξισώσεων και τα δεδομένα που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής εντός της περιοχής της αποκόλλησης. Δύο από τις πιο πρόσφατες και πλέον διαδεδομένες μεθόδους είναι αυτές των *Drela* [9] και *Le Balleur* [24]. Η πρώτη εκ των δύο έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα στον τομέα της αιολικής ενέργειας στην ανάλυση διδιάστατων ροών γύρω από αεροτομές. Ο *Drela* σε ότι αφορά τη συνεκτική ροή λύνει τις εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας σε ολοκληρωματική μορφή. Οι εξισώσεις αυτές συμπληρώνονται από μια διαφορική εξίσωση για τον προσδιορισμό της θέσης μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Το “τυρβώδες κλείσιμο” γίνεται με τη χρήση των κατακόρυφων διανομών ταχύτητας του *Swafford* [47]. Για την αναπαράσταση του μη συνεκτικού πεδίου έχει αναπτύξει έναν επιλυτή *Euler* (*Drela & Giles*, [8]) και μία μεθοδολογία ιδιόμορφων σημείων [9]. Η επίλυση των συνεκτικών και των μη συνεκτικών εξισώσεων γίνεται ταυτόχρονα σε μια διαδικασία ισχυρής αλληλεπίδρασης. Σε αντίθεση με τη μέθοδο του *Drela*, ο *Le Balleur* μαζί με την εξίσωση ορμής επιλύει μία συνθήκη εισροής (*entrainment*). Το “τυρβώδες κλείσιμο” γίνεται με χρήση των γενικευμένων διανομών ταχύτητας του *Coles* [6]. Οι εξισώσεις οριακού στρώματος λύνονται είτε σε ολοκληρωματική είτε σε διαφορική μορφή. Η σύγκλιση των συνεκτικών-μη συνεκτικών εξισώσεων πραγματοποιείται μέσω μιας ημι-αντίστροφης διαδικασίας. Σημαντικές επίσης εργασίες είναι αυτές των *Lock & Williams* [28] και *Williams & Smith* [50] στις οποίες συστηματικά καταγράφεται ο τρόπος με τον οποίο είναι δυνατό να προσομοιωθεί η κατακόρυφη κλίση πίεσης εντός του οριακού στρώματος, η οποία γίνεται έντονη κυρίως εντός της περιοχής της αποκόλλησης. Επίσης αξιοσημείωτη είναι η εργασία των *Cebeci et al* [4] στην οποία αναπτύσσεται μία διαφορική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται μία επαναληπτική διαδικασία αντίστροφης επίλυσης των συνεκτικών-μη συνεκτικών εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή όπως και οι μέθοδοι των *Drela* και *Le Balleur* δίνει πολύ καλές προλέξεις των χαρακτηριστικών άνωσης και αντίστασης αεροτομών οριακά ακόμα και σε γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της γωνίας μέγιστης άνωσης (*post-stall region*).

1.3 Η επίδραση της περιστροφής

Πτερύγια που εκτελούν περιστροφική κίνηση σταθερής γωνιακής ταχύτητας συναντώνται σε ανεμογεννήτριες και ελικόπτερα. Τόσο σε υπολογισμούς απόδοσης δρομέων ανεμογεννητριών, όσο και για την αεροελαστική ανάλυση περιστρεφόμενων πτερυγίων, οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω της αλληλεπίδρασης με τον αέρα συχνά υπολογίζονται από κάποια μέθοδο βασισμένη στη θεωρία στοιχείων πτερύγωσης. Η άνωση και η οπισθέλκουσα καθορίζονται χρησιμοποιώντας δεδομένα από μελέτες για διδιάστατες αεροτομές, που ως επί το πλείστον προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις σε αεροδυναμικές σήραγγες. Η συγκεκριμένη διαδικασία δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σε περιοχές κοντά στο σημείο σχεδίασης, ωστόσο

σε καταστάσεις απώλειας στήριξης ή ακόμα και μερικής αποκόλλησης της ροής εμφανίζει αδυναμίες, καθώς φέρεται να υπολογίζει μειωμένες τιμές των φορτίων που ασκούνται στα πτερύγια.

Ένας από τους πρώτους ερευνητές που αντιλήφθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν ο *Himmelskamp* [20], όπου μέσω μετρήσεων παρατήρησε την εμφάνιση συντελεστών άνωσης με ιδιαίτερα υψηλές τιμές στα τμήματα πτερυγίων κοντά στη βάση τους. Το πρόβλημα αυτό, αν και σχετικό με κάθε εφαρμογή που περιλαμβάνει περιστρεφόμενες ανωστικές επιφάνειες, είναι ιδιαίτερα σημαντικό στις ανεμογεννήτριες στις οποίες ο έλεγχος ισχύος γίνεται μέσω απώλειας στήριξης (*stall-regulated wind turbines*), όπου η εμφάνιση έντονης αποκόλλησης είναι ο παράγοντας που περιορίζει την αποδιδόμενη ισχύ. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η ακριβής πρόλεξη των αεροδυναμικών μεγεθών είναι απαραίτητη για μία αξιόπιστη ανάλυση. Οι μετρήσεις του *Himmelskamp* ήταν η απαρχή της μελέτης που έχει ακολουθήσει από τότε, τόσο σε πειραματικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο, αναφορικά με τα τριδιάστατα φαινόμενα ροής που αναπτύσσονται γύρω από περιστρεφόμενα πτερύγια. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα που προέκυψαν παρατίθενται εν συντομία στην παρούσα εισαγωγική ενότητα.

Η θεωρητική ανάλυση της επίδρασης της περιστροφής βασίστηκε σε μελέτη του *Sears* [38], ο οποίος διατύπωσε τις εξισώσεις για τη δυναμική ροή γύρω από κυλινδρικά πτερύγια άπειρου μήκους υπό περιστροφή, καταλήγοντας ότι η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι ανεξάρτητη της ακτινικής απόστασης (αρχή της ανεξαρτησίας). Ο *Fogarty* [16] υποστήριξε ότι τα τριδιάστατα χαρακτηριστικά φαινόμενα είναι μικρής έντασης στην περίπτωση προσκολλημένης στρωτής ροής, ενώ επέκτεινε τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε και για την περίπτωση προσκολλημένης τυρβώδους ροής. Η πρόταση αυτή επιβεβαιώθηκε πειραματικά και από τον *McCroskey* [31] ο οποίος βασίστηκε σε μετρήσεις και διαδικασίες οπτικοποίησης της ροής. Επιπλέον, παρατήρησε πως το σημείο αποκόλλησης αλλά και η θέση μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη παραμένουν αμετάβλητα. Ωστόσο, κατέγραψε την παρουσία έντονης δευτερεύουσας ακτινικής ροής στις αποκολλημένες περιοχές, και στην περίπτωση εμφάνισης φουσαλίδας αποκόλλησης στη στρωτή ροή.

Ο *Sørensen* [46] μελέτησε το φαινόμενο επιλύοντας αριθμητικά τις ολοκληρωματικές εξισώσεις οριακού στρώματος για τριδιάστατη ροή γύρω από μία περιστρεφόμενη επιφάνεια, με χρήση της μεθόδου συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των εργασιών που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Έτσι, επιβεβαιώθηκε ότι η θέση μετάβασης της ροής ταυτίζεται με τη θέση που προκύπτει από διδιάστατες μελέτες, καθώς επίσης τονίστηκε η σημαντική διαφορά που προκύπτει στις τιμές των αεροδυναμικών συντελεστών σε περιοχές με ισχυρή αποκόλληση, σε σχέση με τους διδιάστατους υπολογισμούς.

Σύγχρονες μετρήσεις σε περιστρεφόμενα πτερύγια ανεμογεννητριών έχουν επιβεβαιώσει τη σημασία αυτών των φαινομένων, ιδιαίτερα στα εσωτερικά τμήματα του πτερυγίου. Πρόσφατες μελέτες των *Narramore & Vermeland* [33], *Duque et al* [12] και *Fletcher et al* [15], όπου επιλύθηκαν οι πλήρεις *Navier-Stokes* εξισώσεις, επιβεβαίωσαν τη λόγω της περιστροφής του πτερυγίου καθυστερημένη εμφάνιση της απώλειας στήριξης, επισημαίνοντας συγχρόνως τη μικρή τελικά συμβολή των φυγόκεντρων δυνάμεων.

Ως εναλλακτική της δαπανηρής ανάπτυξης και εφαρμογής πλήρως τριδιάστατων μεθόδων, αναπτύχθηκαν διδιάστατες μέθοδοι προσέγγισης, κατάλληλα επεκτεταμένες ώστε να περιλαμβάνουν την επίδραση της περιστροφής. Οι *Lindhout & Veldman* [27] υιοθετώντας υποθέσεις για τις παραγώγους κατά την ακτινική διεύθυνση, τροποποίησαν ένα τριδιάστατο μοντέλο καταλήγοντας σε μια διδιάστατη διατύπωση. Μία ακόμη προσέγγιση αναπτύχθηκε από τους *Snel et al* [45], ο οποίος με χρήση ολοκληρωματικών εξισώσεων κατέληξε σε μια ψευδοτριδιάστατη μέθοδο συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης επιτυγχάνοντας εντυπωσιακά αποτελέσματα. Τέλος, οι *Shen & Sørensen* [41] και *Chaviaropoulos & Hansen* [5], επιλύοντας τις ψευδοτριδιάστατες εξισώσεις *Navier-Stokes*, επιβεβαίωσαν τα παραπάνω αποτελέσματα και αναγνώρισαν ως σημαντικότερη παράμετρο το λόγο της χορδής της αεροτομής προς την ακτινική απόσταση από το κέντρο της περιστροφής.

Κλείνοντας, δίνεται μία φυσική εξήγηση της επίδρασης της περιστροφής. Η περιστροφική κίνηση έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση τριδιάστατων φαινομένων στην εξέλιξη της ροής γύρω από τα πτερύγια. Η εμφάνιση των φαινομένων αυτών σχετίζεται με τις δυνάμεις *Coriolis* και τις φυγόκεντρες δυνάμεις οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση κλίσης πίεσης στην ακτινική κατεύθυνση, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη μιας ισχυρής ακτινικής συνιστώσας ροής. Το μέγεθος της ακτινικής ροής αυξάνει καθώς κινούμαστε προς τη ρίζα του πτερυγίου. Με τον τρόπο αυτό μεταφέρεται ορμή από τις αποκολλημένες περιοχές στη ρίζα του πτερυγίου προς το ακροπτερύγιο, μειώνοντας σημαντικά την πίεση στην πλευρά υποπίεσης των εσωτερικών τμημάτων του πτερυγίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η άνωση σε υψηλές γωνίες πρόσπτωσης να εμφανίζεται σημαντικά αυξημένη σε σχέση με την αντίστοιχη που λαμβάνεται σε μη περιστρεφόμενα πτερύγια.

1.4 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας γρήγορης και υπολογιστικά αποδοτικής μεθόδου για την ακριβή πρόλεξη των αεροδυναμικών φορτίων που ασκούνται σε μια αεροτομή που υπόκειται σε περιστροφή σταθερής γωνιακής ταχύτητας. Η εργασία βασίζεται στον κώδικα συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης *FOIL2W* του εργαστηρίου αεροδυναμικής της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο διαμορφώνονται και παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διέπουν το

πρόβλημα της συνεκτικής ροής στην περιοχή του οριακού στρώματος. Επιπλέον, παρατίθενται οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για το απαραίτητο κλείσιμο του προβλήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο πρόβλημα και τις εξισώσεις της μη συνεκτικής και της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής, όπως αυτές προκύπτουν βάσει της διδιάστατης διατύπωσης της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική αναφορά της διαδικασίας διακριτοποίησης και του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Επιπροσθέτως, παρουσιάζεται ο τρόπος προσδιορισμού των ασκούμενων στο σώμα δυνάμεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο επιχειρείται η αξιολόγηση των εμπειρικών σχέσεων που έχουν προταθεί για το κλείσιμο του προβλήματος. Ακολουθεί παραμετρική ανάλυση για τους σχετικούς με την περιστροφή όρους και γίνεται αναφορά σε υπολογιστικές λεπτομέρειες σχετικά με τη διαχείριση του προβλήματος. Στη συνέχεια, ακολουθεί η πιστοποίηση της μεθόδου μέσω διάφορων εφαρμογών και συγκρίσεων με πειραματικά δεδομένα και άλλες μεθόδους.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο γίνεται η ανακεφαλαίωση και παρουσίαση των συμπερασμάτων που εξήχθησαν κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ενώ ακολουθούν προτάσεις για μελλοντική επέκταση της μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Οριακό Στρώμα

2.1 Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται σε ολοκληρωματική μορφή οι εξισώσεις του οριακού στρώματος, για τη μη μόνιμη ροή γύρω από γεωμετρίες μικρής καμπυλότητας. Η υπόθεση των μικρών καμπυλοτήτων ισχύει με αρκετά καλή ακρίβεια στην περίπτωση των αεροτομών οι οποίες ως επί το πλείστον εμφανίζουν μεγάλες καμπυλότητες μόνο στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης. Στην περιοχή αυτή όμως, λόγω του ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι μικρό, οι όροι που σχετίζονται με τις κλίσεις της γεωμετρίας εμφανίζονται να έχουν αμελητέα συνεισφορά. Οι εξισώσεις γράφονται για τη γενική περίπτωση του συμπιεστού ρευστού, ωστόσο οι υποθέσεις που περικλείουν δεν επιτρέπουν τη χρήση τους σε ροές πολύ υψηλών αριθμών *Mach*.

Έστω λοιπόν σώμα (Σ) και κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (θ, z, r) το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω_z .

2.1.1 Εξίσωση διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας για την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή και τη συνεκτική ροή αντιστοίχως, γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e \bar{u}_{\theta e}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_e \bar{u}_{r e}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_e \bar{u}_{z e}) = 0 \quad (2.1\alpha')$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho \bar{u}_{\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_z) = 0 \quad (2.1\beta')$$

όπου $\mathbf{u} = (u_{\theta}, u_z, u_r)$ η ταχύτητα και ρ η πυκνότητα του ρευστού. Η παύλα στις ταχύτητες χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι είναι σχετικές ταχύτητες κίνησης του ρευστού, ως προς το στερεό σύνορο του σώματος. Και στις υπόλοιπες εξισώσεις του οριακού στρώματος χρησιμοποιούνται οι σχετικές ταχύτητες, οπότε για την απλοποίηση των συμβολισμών στη συνέχεια του κεφαλαίου η παύλα παραλείπεται. Στις παραπάνω εξισώσεις έχουν αμεληθεί

οι καμπυλόγραμμοι όροι, σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Αν αφαιρέσουμε τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη και ολοκληρώσουμε στο πάχος δ του οριακού στρώματος παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e - \rho) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e} - \rho u_\theta) dz + \int_0^\delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_e u_{re} - r \rho u_r) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z} (\rho_e u_{ze} - \rho u_z) dz = 0 \quad (2.2)$$

Υποθέτοντας ότι τα μεγέθη της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής δε μεταβάλλονται σημαντικά κατά το ύψος του οριακού στρώματος (προσέγγιση μηδενικής τάξης) και ότι οι τιμές τους είναι ίσες με αυτές των αντίστοιχων μεγεθών της συνεκτικής ροής στο πάχος δ (θέση πλήρως ανεπτυγμένης ροής) του οριακού στρώματος (σχήμα 2.1) η σχέση (2.2) γράφεται:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e - \rho) dz + \int_0^\delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_e u_{\theta e} - \rho u_\theta) dz + \int_0^\delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e r u_{re} - \rho r u_r) dz + (\rho_e u_{ze} - \rho u_z) \Big|_0^\delta = 0 \quad (2.3)$$

Εισάγοντας τα πάχη μετατόπισης του οριακού στρώματος δ_1^* και δ_2^* κατά τη χορδική και την ακτινική κατεύθυνση αντίστοιχα,

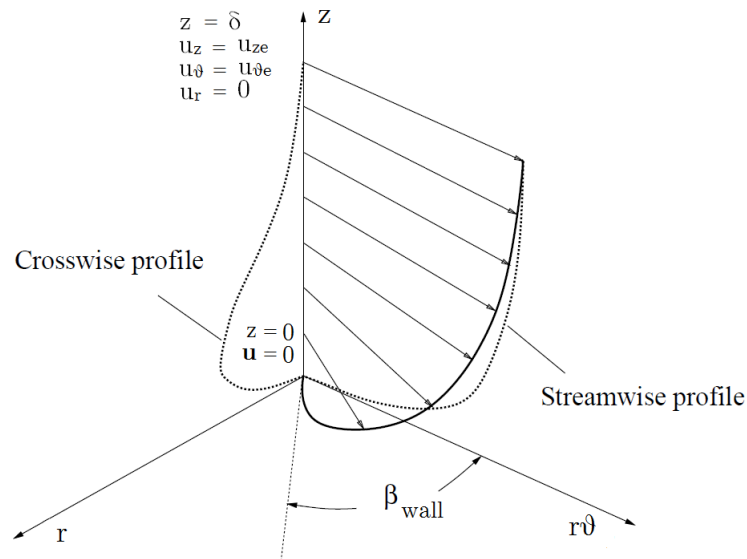
$$\delta_1^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u_\theta}{\rho_e u_{\theta e}} \right) dz \quad (2.4)$$

$$\delta_2^* = - \int_0^\delta \frac{\rho u_r}{\rho_e u_{re}} dz \quad (2.5)$$

και με την επιπλέον θεώρηση ότι ο πρώτος όρος της (2.3) απαλείφεται στην περίπτωση που ο αριθμός *Mach* δεν παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, οπότε η καθ' ύψος μεταβολή της πυκνότητας μέσα στο οριακό στρώμα είναι αμελητέα, η (2.3) απλοποιείται και γράφεται τελικά:

$$(\rho_e u_{ze})_{wall} = \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{re} \delta_2^*) + \frac{1}{r} (\rho_e u_{\theta e} \delta_2^*) \quad (2.6)$$

Για τη διατύπωση της εξίσωσης της συνέχειας στην παραπάνω μορφή έγινε η υπόθεση ότι η ακτινική συνιστώσα της μη συνεκτικής ροής u_{re} είναι μηδενική. Κάτι τέτοιο γίνεται για τη διατήρηση του μη συνεκτικού προβλήματος στις δυο διαστάσεις και συνάδει με τα όσα αναφέρθηκαν στην εισαγωγή σχετικά με τον περιορισμό των τριδιάστατων φαινομένων στην περιοχή του οριακού στρώματος. Μία τέτοια υπόθεση ισχύει με καλή προσέγγιση και σε πραγματικές εφαρμογές όπου η αδιατάρακτη ταχύτητα δεν περιλαμβάνει (σημαντική) ακτινική συνιστώσα (π.χ. ροή αέρα σε ανεμογεννήτριες), και υιοθετείται για την παραγωγή και των υπόλοιπων εξισώσεων του οριακού στρώματος.



Σχήμα 2.1: Οι διανομές ταχυτήτων στο οριακό στρώμα.[32]

2.1.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής

Διατήρηση της ορμής κατά την περιφερειακή κατεύθυνση

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την θ κατεύθυνση για τη μη συνεκτική και τη συνεκτική ροή αντίστοιχα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{\theta e})}{\partial r} + \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e}^2)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e} u_{ze})}{\partial z} \\ + \frac{2\rho_e u_{re} u_{\theta e}}{r} + 2\rho_e \Omega_z u_{re} = - \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.7\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_r u_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho u_\theta^2)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_\theta u_z)}{\partial z} \\ + \frac{2\rho u_r u_\theta}{r} + 2\rho \Omega_z u_r = - \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.7\beta')$$

Με αφαίρεση των εξισώσεων κατά μέλη και ολοκλήρωση στο πάχος δ του οριακού στρώματος:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e} - \rho u_\theta) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{re} u_{\theta e} - \rho u_r u_\theta) dz + \\ \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^2 - \rho u_\theta^2) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z} (\rho_e u_{\theta e} u_{ze} - \rho u_\theta u_z) dz + \\ \int_0^\delta 2\Omega_z (\rho_e u_{re} - \rho u_r) dz + \int_0^\delta \frac{2}{r} (\rho_e u_{re} u_{\theta e} - \rho u_r u_\theta) dz = - \\ \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (p_e - p) dz - \int_0^\delta \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ορίζονται τα πάχη ορμής του οριακού στρώματος ϑ_{11} , ϑ_{21} , ϑ_{22} ,

$$\vartheta_{11} = \int_0^\delta \frac{\rho u_\theta}{\rho_e u_{\theta e}} \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right) dz \quad (2.9)$$

$$\vartheta_{21} = - \int_0^\delta \frac{\rho u_r u_\theta}{\rho_e u_{\theta e}^2} dz \quad (2.10)$$

$$\vartheta_{22} = - \int_0^\delta \frac{\rho u_r^2}{\rho_e u_{\theta e}^2} dz \quad (2.11)$$

όπου με τρόπο ορισμού ανάλογο με τα πάχη μετατόπισης, ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στην περιφερειακή θ κατεύθυνση και ο δείκτης 2 στην ακτινική.

Για την απλοποίηση της εξίσωσης (2.8) θεωρείται ότι ο όρος της κλίσης της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής είναι δεύτερης τάξης οπότε και αμελείται. Ο όρος αυτός σχετίζεται με την καμπυλότητα της γεωμετρίας και την καμπυλότητα των γραμμών ροής κοντά στο σύνορο της γεωμετρίας που εξετάζεται. Σε ότι αφορά την εξάρτηση από την κλίση της γεωμετρίας του συνόρου είναι προφανές ότι για την περίπτωση της ροής γύρω από αεροτομή, η καμπυλότητα του συνόρου λαμβάνει σημαντικές τιμές μόνο στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης. Ωστόσο σε εκείνη την περιοχή τα μεγέθη του οριακού στρώματος παίρνουν πολύ μικρές τιμές. Αντίθετα, καθώς πλησιάζουμε την ακμή εκφυγής, όπου τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος αυξάνουν σημαντικά, οι κλίσεις της γεωμετρίας είναι σχεδόν μηδενικές. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με την κλίση των γραμμών ροής οι οποίες καμπυλώνουν σημαντικά καθώς η ροή αποκολλάται πάνω από το στερεό σύνορο, οπότε γίνεται σαφές ότι σε αποκολλημένες ροές και μέσα στη ζώνη της αποκόλλησης η επίδραση της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής μπορεί να είναι σημαντική (Lock & Williams, [28]).

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η εξίσωση (2.8) γράφεται,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{21}) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^2 (\vartheta_{11} + \delta_1^*)) \\ & - \rho_e u_{\theta e} u_{ze}|_0 + \frac{2}{r} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{21}) + 2\Omega_z \rho_e u_{\theta e} \delta_2^* = \tau_{\theta, wall} \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου $\tau_{\theta, wall} = \mu (\partial u_\theta / \partial z)|_0$ η διατμητική τάση κατά την περιφερειακή κατεύθυνση θ στο σύνορο του σώματος (Σ).

Τέλος, κάνοντας χρήση της εξίσωσης συνέχειας (2.6) και αδιαστατοποιώντας ως προς τη δυναμική πίεση $\rho_e u_{\theta e}^2$ η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά τη περιφερειακή κατεύθυνση

λαμβάνει τη μορφή,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*)}{\partial t} + \frac{\vartheta_{11}}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} + \frac{2\vartheta_{11} + \delta_1^*}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_{11}}{r \partial \theta} + \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{r} \\ & + \frac{\partial \rho_e}{\partial r} \frac{\vartheta_{21} - \delta_2^*}{\rho_e} + \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{u_{\theta e}} + \frac{\partial (\vartheta_{21} - \delta_2^*)}{\partial r} + \frac{2\Omega_z \delta_2^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου $H = \delta_1^*/\vartheta_{11}$ ο συντελεστής σχήματος του οριακού στρώματος και $C_{f\theta} = 2\tau_{\theta,wall}/(\rho_e u_{\theta e})^2$ ο συντελεστής τριβής κατά την περιφερειακή κατεύθυνση.

Διατήρηση της ορμής κατά την ακτινική κατεύθυνση

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική κατεύθυνση διαμορφώνεται με τρόπο ανάλογο της περιφερειακής θ κατεύθυνσης και γράφεται, για τη μη συνεκτική και τη συνεκτική ροή αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho_e u_{re})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{\theta e})}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{ze})}{\partial z} + \frac{\partial (\rho_e u_{re}^2)}{\partial r} \\ & - \rho_e \Omega_z^2 r - 2\rho_e \Omega_z u_{\theta e} + \frac{\rho_e (u_{re}^2 - u_{\theta e}^2)}{r} = - \frac{\partial p_e}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.14\alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho u_r)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_r u_\theta)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_r u_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho u_r^2)}{\partial r} \\ & - \rho \Omega_z^2 r - 2\rho \Omega_z u_\theta + \frac{\rho (u_r^2 - u_\theta^2)}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.14\beta)$$

Με αφαίρεση των δύο παραπάνω εξισώσεων κατά μέλη και ολοκλήρωσή τους στο πάχος δ του οριακού στρώματος:

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{re} - \rho u_r) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{re} u_{\theta e} - \rho u_r u_\theta) dz + \\ & \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{re}^2 - \rho u_r^2) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z} (\rho_e u_{re} u_{ze} - \rho u_r u_z) dz - \\ & \int_0^\delta 2\Omega_z (\rho_e u_{\theta e} - \rho u_\theta) dz + \int_0^\delta \frac{(\rho_e u_{re}^2 - \rho u_r^2) - (\rho_e u_{\theta e}^2 - \rho u_\theta^2)}{r} dz - \\ & \int_0^\delta \Omega_z^2 r (\rho_e - \rho) dz = - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (p_e - p) dz - \int_0^\delta \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (2.15)$$

Για την απλοποίηση των εξισώσεων θεωρούμε ότι:

- ο τελευταίος όρος του πρώτου μέλους αμελείται, για το λόγο ότι σχετίζεται με την καθ' ύψος μεταβολή της διαφοράς πυκνότητας μεταξύ μη συνεκτικής και συνεκτικής ροής, η οποία στην περίπτωση ροών χαμηλού αριθμού *Mach* είναι μικρή.

- ο όρος της κλίσης της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής θεωρείται δεύτερης τάξης. Ο όρος αυτός στην πράξη είναι πολύ μικρός σε περιοχές όπου το πάχος του οριακού στρώματος είναι σχετικά μικρό. Ωστόσο μέσα σε περιοχές αποκόλλησης αποκτά κάποια σημασία (*Lock & Williams, [28]*).

Με εισαγωγή των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος όπως ορίστηκαν προηγουμένως, η εξίσωση παίρνει τελικά τη μορφή,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e} \delta_2^*) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{22}) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{21}) + \frac{\rho_e u_{\theta e} (\vartheta_{22} - \vartheta_{11} - \delta_1^*)}{r} - 2\Omega_z \rho_e u_{\theta e} \delta_1^* = \tau_{r,wall} \quad (2.16)$$

όπου $\tau_{r,wall} = \mu (\partial u_r / \partial z)|_0$ η διατμητική τάση στο σύνορο του σώματος (Σ) κατά την ακτινική διεύθυνση. Ορίζεται ο συντελεστής τριβής κατά την ακτινική κατεύθυνση $C_{fr} = 2\tau_{r,wall} / (\rho_e u_{\theta e})^2$ και η γωνία β ως η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στις γραμμές ροής της εξωτερικής ροής και της πραγματικής ροής, όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.1). Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για τη γωνία β ισχύει:

$$\tan \beta_{wall} = \frac{C_{fr}}{C_{f\theta}} \quad (2.17)$$

Ύστερα από αδιαστατοποίηση ως προς τη δυναμική πίεση η (2.16) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e} \delta_2^*)}{\partial t} + \frac{\vartheta_{22}}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{2\vartheta_{22}}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} + \frac{\vartheta_{22} - \vartheta_{11} - \delta_1^*}{r} + \\ & \frac{\partial \vartheta_{22}}{\partial r} + \frac{\vartheta_{21}}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} + \frac{2\vartheta_{21}}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_{21}}{r \partial \theta} - \frac{2\Omega_z \delta_1^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \tan \beta_{wall} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.3 Εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας

Οι εξισώσεις διατήρησης της κινητικής ενέργειας για τη μη συνεκτική και τη συνεκτική ροή προκύπτουν ως το άθροισμα των εξισώσεων ορμής κατά την περιφερειακή και την ακτινική κατεύθυνση, αφού προηγουμένως η κάθε μία πολλαπλασιαστεί με την ταχύτητα κατά την

αντίστοιχη διεύθυνση:

$$\begin{aligned}
& u_{\theta e} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e})}{\partial t} + u_{\theta e} \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{\theta e})}{\partial r} + u_{\theta e} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e}^2)}{r \partial \theta} + u_{\theta e} \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e} u_{ze})}{\partial z} \\
& + u_{\theta e} \frac{2 \rho_e u_{re} u_{\theta e}}{r} + u_{\theta e} 2 \rho_e \Omega_z u_{re} + \\
& u_{re} \frac{\partial (\rho_e u_{re})}{\partial t} + u_{re} \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{\theta e})}{r \partial \theta} + u_{re} \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{ze})}{\partial z} + u_{re} \frac{\partial (\rho_e u_{re}^2)}{\partial r} \\
& + u_{re} \frac{\rho_e (u_{re}^2 - u_{\theta e}^2)}{r} - u_{re} 2 \rho_e \Omega_z u_{\theta e} - u_{re} \rho_e \Omega_z^2 r = - u_{\theta e} \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} - u_{re} \frac{\partial p_e}{\partial r} \quad (2.19\alpha')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{\theta} \frac{\partial (\rho u_{\theta})}{\partial t} + u_{\theta} \frac{\partial (\rho u_r u_{\theta})}{\partial r} + u_{\theta} \frac{\partial (\rho u_{\theta}^2)}{r \partial \theta} + u_{\theta} \frac{\partial (\rho u_{\theta} u_z)}{\partial z} \\
& + u_{\theta} \frac{2 \rho u_r u_{\theta}}{r} + u_{\theta} 2 \rho \Omega_z u_r + \\
& u_r \frac{\partial (\rho_e u_r)}{\partial t} + u_r \frac{\partial (\rho u_r u_{\theta})}{r \partial \theta} + u_r \frac{\partial (\rho u_r u_z)}{\partial z} + u_r \frac{\partial (\rho u_r^2)}{\partial r} \\
& + u_r \frac{\rho (u_r^2 - u_{\theta}^2)}{r} - u_r 2 \rho \Omega_z u_{\theta} - u_r \rho \Omega_z^2 r = - u_{\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta} - u_r \frac{\partial p}{\partial r} \\
& + u_{\theta} \mu \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} + u_r \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (2.19\beta')
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις με χρήση των εξισώσεων διατήρησης της ορμής μπορούν να γραφούν σε συντηρητική μορφή,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\rho u_{\theta e}^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_e u_{re} u_{\theta e}^2)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e}^3)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho_e u_{\theta e}^2 u_z)}{\partial z} \\
& + \frac{4 \rho_e u_{re} u_{\theta e}^2}{r} + 4 \rho_e \Omega_z u_{re} u_{\theta e} + \\
& \frac{\partial (\rho_e u_{re}^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_e u_{re}^2 u_{\theta e})}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho_e u_{re}^2 u_{ze})}{\partial z} + \frac{\partial (\rho_e u_{re}^3)}{\partial r} \\
& + \frac{2 \rho_e (u_{re}^3 - u_{re} u_{\theta e}^2)}{r} - 4 \rho_e \Omega_z u_{\theta e} u_{re} - 2 \rho_e \Omega_z^2 r u_{re} = - 2 u_{\theta e} \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} - 2 u_{re} \frac{\partial p_e}{\partial r} \quad (2.20\alpha')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\rho u_{\theta}^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_r u_{\theta}^2)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho u_{\theta}^3)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_{\theta}^2 u_z)}{\partial z} \\
& + \frac{4 \rho u_r u_{\theta}^2}{r} + 4 \rho \Omega_z u_r u_{\theta} + \\
& \frac{\partial (\rho_e u_r^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_r^2 u_{\theta})}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_r^2 u_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho u_r^3)}{\partial r} \\
& + \frac{2 \rho (u_r^3 - u_r u_{\theta}^2)}{r} - 4 \rho \Omega_z u_{\theta} u_r - 2 \rho \Omega_z^2 r u_r = - 2 u_{\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta} - 2 u_r \frac{\partial p}{\partial r} \\
& + 2 u_{\theta} \mu \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} + 2 u_r \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (2.20\beta')
\end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη και ολοκληρώνοντας στο πάχος του οριακού στρώματος παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 - \rho u_\theta^2) dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^3 - \rho u_\theta^3) dz - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r u_\theta^2) dz + \\
& \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z} (\rho_e u_{\theta e}^2 u_{ze} - \rho u_\theta^2 u_z) dz - \int_0^\delta \frac{4 \rho u_r u_\theta^2}{r} dz - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_r^2) dz - \\
& \int_0^\delta \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho u_r^2 u_\theta) dz - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r^2 u_z) dz - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^3) dz - \\
& \int_0^\delta \frac{2 \rho (u_r^3 - u_r u_\theta^2)}{r} dz + \int_0^\delta 2 \rho \Omega_z^2 r u_r dz = - \int_0^\delta 2 u_{\theta e} \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} dz + \int_0^\delta 2 u_\theta \frac{\partial p}{r \partial \theta} dz + \\
& \int_0^\delta 2 u_r \frac{\partial p}{\partial r} dz - \int_0^\delta 2 \mu u_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} dz - \int_0^\delta 2 \mu u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} dz
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Για τους όρους πίεσης ισχύει,

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta u_\theta \frac{\partial p}{r \partial \theta} dz - \int_0^\delta u_{\theta e} \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} dz &= \int_0^\delta u_\theta \left(\frac{\partial p}{r \partial \theta} - \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} \right) dz + \int_0^\delta (u_{\theta e} - u_\theta) \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} dz \\
&\simeq \int_0^\delta (u_{\theta e} - u_\theta) \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} dz
\end{aligned} \tag{2.22}$$

και:

$$\int_0^\delta u_r \frac{\partial p}{\partial r} dz = \int_0^\delta u_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial p_e}{\partial r} \right) dz + \int_0^\delta u_r \frac{\partial p_e}{\partial r} dz \simeq \int_0^\delta u_r \frac{\partial p_e}{\partial r} dz \tag{2.23}$$

Για την απλοποίηση της εξίσωσης θεωρείται ότι οι όροι σχετικοί με τις κλίσεις της διαφοράς πίεσης μεταξύ της συνεκτικής και της μη συνεκτικής ροής αμελούνται. Οι όροι που απομένουν υπολογίζονται με χρήση των εξισώσεων ορμής για την αναπτυγμένη ροή, κάνοντας επιπλέον χρήση της εξίσωσης συνέχειας:

$$-\frac{\partial p_e}{r \partial \theta} = \rho_e \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} + \rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \rho_e u_{ze} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial z} \tag{2.24}$$

$$-\frac{\partial p_e}{\partial r} = -\rho_e \Omega_z^2 r - 2 \rho_e \Omega_z u_{\theta e} - \frac{\rho_e u_{\theta e}^2}{r} \tag{2.25}$$

Τελικά οι όροι σχετικοί με την πίεση γράφονται,

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta -2 \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} (u_{\theta e} - u_\theta) dz &= \int_0^\delta 2 \rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}} \right) dz + \int_0^\delta 2 \rho_e u_{\theta e}^2 \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}} \right) dz \\
&+ \int_0^\delta 2 \rho_e u_{ze} u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial z} \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}} \right) dz \\
&= 2 \rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} \delta_1^{*i} + 2 \rho_e u_{\theta e}^2 \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial \theta} \delta_1^{*i}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta 2u_r \frac{\partial p_e}{\partial r} dz &= \int_0^\delta 2\rho_e u_r \Omega_z^2 r dz + \int_0^\delta 2\rho_e u_r u_{\theta e} \Omega_z dz + \int_0^\delta \frac{2\rho_e u_r u_{\theta e}^2}{r} dz \\
&= -2\rho_e u_{\theta e} \delta_2^{*i} \Omega_z^2 r - 2\rho_e u_{\theta e}^2 \delta_2^{*i} \Omega_z - \frac{2\rho_e u_{\theta e}^3 \delta_2^{*i}}{r}
\end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου $\delta_1^{*i}, \delta_2^{*i}$ οι παράμετροι για τα πάχη μετατόπισης της ασυμπίεστης ροής:

$$\begin{aligned}
\delta_1^{*i} &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right) dz \\
\delta_2^{*i} &= - \int_0^\delta \frac{u_r}{u_{\theta e}} dz
\end{aligned} \quad (2.28)$$

Οι όροι διάχυσης γράφονται,

$$2 \int_0^\delta \mu u_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} dz = \underbrace{2\mu u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_0^\delta}_0 - 2 \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 dz = -2\rho_e u_{\theta e}^3 C_{D\theta} \quad (2.29)$$

$$2 \int_0^\delta \mu u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} dz = \underbrace{2\mu u_r \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_0^\delta}_0 - 2 \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 dz = -2\rho_e u_{re}^3 C_{Dr} \quad (2.30)$$

όπου $C_{D\theta}, C_{Dr}$ οι συντελεστές διάχυσης του οριακού στρώματος:

$$C_{D\theta} = \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \int_0^\delta \tau_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \quad (2.31)$$

$$C_{Dr} = \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \int_0^\delta \tau_r \frac{\partial u_r}{\partial z} dz \quad (2.32)$$

Τέλος, ορίζονται οι παράμετροι πάχους ενέργειας του οριακού στρώματος:

$$\vartheta_{11}^* = \int_0^\delta \frac{\rho u_\theta}{\rho_e u_{\theta e}} \left(1 - \left(\frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right)^2\right) dz \quad (2.33)$$

$$\vartheta_{12}^* = \int_0^\delta \frac{\rho u_r}{\rho_e u_{\theta e}} \left(1 - \left(\frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right)^2\right) dz \quad (2.34)$$

$$\vartheta_{21}^* = - \int_0^\delta \frac{\rho u_\theta u_r^2}{\rho_e u_{\theta e}^3} dz \quad (2.35)$$

$$\vartheta_{22}^* = - \int_0^\delta \frac{\rho u_r^3}{\rho_e u_{\theta e}^3} dz \quad (2.36)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση (2.21) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 (\vartheta_{11} + \delta_1^*)) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^3 (\vartheta_{11}^* + \delta_1^*)) - \rho_e u_{\theta e}^2 u_{ze} |_{wall} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{\theta e}^3 (\vartheta_{12}^* + \delta_2^*)) + \\
& \frac{2 \rho_e u_{\theta e}^3 (\vartheta_{12}^* + \delta_2^*)}{r} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{22}) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e}^3 \vartheta_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_e u_{\theta e}^3 \vartheta_{22}^*) + \\
& \frac{2 \rho_e u_{\theta e}^3 \vartheta_{22}^*}{r} - 2 \rho_e u_{\theta e} \delta_2^* \Omega_z^2 r = 2 \rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} \delta_1^{*i} + 2 \rho_e u_{\theta e}^2 \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial s} \delta_1^{*i} - \\
& 2 \rho_e u_{\theta e} \delta_2^{*i} \Omega_z^2 r - 2 \rho_e u_{\theta e}^2 \delta_2^{*i} \Omega_z - \frac{2 \rho_e u_{\theta e}^3 \delta_2^{*i}}{r} + 2 \rho_e u_{\theta e}^3 C_{D\theta} + 2 \rho_e u_{\theta e}^3 C_{Dr}
\end{aligned} \quad (2.37)$$

Υστερα από την αδιαστατοποίηση με τον όρο $\rho_e u_{\theta e}^3$ η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας (2.21) γράφεται:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{11}) + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{22}) + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \delta_1^*) + \frac{2}{u_{\theta e}^2} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} \delta_1^{**} + \\
& \frac{\partial \vartheta_{11}^*}{r \partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_{21}^*}{r \partial \theta} + \frac{3(\vartheta_{11}^* + \vartheta_{21}^*) + 2\delta_1^{**}}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \frac{\vartheta_{11}^* + \vartheta_{21}^*}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} + \frac{\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^*}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \\
& \frac{\partial \vartheta_{12}^*}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta_{22}^*}{\partial r} + \frac{3(\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^*) + 2\delta_2^*}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} + \frac{2(\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^* + \delta_2^*) + \delta_2^{*i}}{r} = 2C_{D\theta} + \\
& 2C_{Dr} + \frac{2\Omega_z^2 \theta}{u_{\theta e}^2} \delta_1^{**} + \frac{2\Omega_z^2 r}{u_{\theta e}^2} \delta_2^{**} - \frac{2\Omega_z}{u_{\theta e}} \delta_2^{*i}
\end{aligned} \quad (2.38)$$

όπου οι παράμετροι δ_1^{**} , δ_2^{**} ονομάζονται πάχη πυκνότητας και ορίζονται από τις σχέσεις,

$$\delta_1^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho u_\theta}{\rho_e u_{\theta e}} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1 \right) dz = \delta_1^* - \delta_1^{*i} \quad (2.39)$$

$$\delta_2^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho u_r}{\rho_e u_{\theta e}} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1 \right) dz = \delta_2^* - \delta_2^{*i} \quad (2.40)$$

Μια βολική έκφραση της εξίσωσης κινητικής ενέργειας λαμβάνεται αν από την (2.38) αφαιρέσουμε την εξίσωση ορμής (2.13) πολλαπλασιασμένη με την παράμετρο $H^* = \vartheta_{11}^*/\vartheta_{11}$ (συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{11}) + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \delta_1^*) + \frac{2}{u_{\theta e}^2} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial t} H^{**} \vartheta_{11} - \frac{H^*}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \delta_1^*) \\
& + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{22}) + \vartheta_{11} \frac{\partial H^*}{r \partial \theta} + (2H^{**} + H^*(1-H)) \frac{\vartheta_{11}}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} - H^* \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{r} \\
& - H^* \frac{\partial \rho_e}{\partial r} \frac{\vartheta_{21} - \delta_2^*}{\rho_e} - H^* \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{u_{\theta e}} - H^* \frac{\partial (\vartheta_{21} - \delta_2^*)}{\partial r} - H^* \frac{2\Omega_z \delta_2^*}{u_{\theta e}} + \frac{\partial \vartheta_{21}^*}{r \partial \theta} \\
& + \frac{3\vartheta_{21}^*}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \frac{\vartheta_{21}^*}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} + \frac{\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^*}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta_{12}^*}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta_{22}^*}{\partial r} + \frac{3(\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^*) + 2\delta_2^*}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} \\
& + \frac{2(\vartheta_{12}^* + \vartheta_{22}^* + \delta_2^*) + \delta_2^{*i}}{r} = 2C_{D\theta} + 2C_{Dr} - H^* \frac{C_{f\theta}}{2} + \frac{2\Omega_z^2 r}{u_{\theta e}^2} \delta_2^{**} - \frac{2\Omega_z}{u_{\theta e}} \delta_2^{*i}
\end{aligned} \quad (2.41)$$

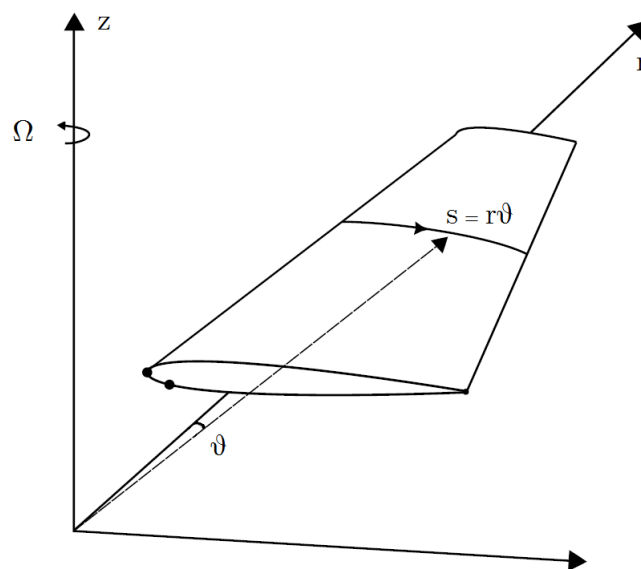
όπου στην (2.41) $H^{**} = \delta_1^{**}/\nu_{11}$ (συντελεστής σχήματος πυκνότητας).

2.1.4 Διαμόρφωση του προβλήματος

Προσέγγιση της γεωμετρίας

Για την απλοποίηση της γεωμετρίας του προβλήματος (σχήμα 2.2) γίνεται η παραδοχή ότι οι γραμμές ροής της εξωτερικής μη συνεκτικής ροής μπορούν να θεωρηθούν τόξα κύκλου. Η πρόταση αυτή είναι αποδεκτή για ακτινικές θέσεις ικανοποιητικά μακριά από το κέντρο περιστροφής και όταν οι γωνίες θ είναι μικρές. Επομένως, για το στοιχειώδες τμήμα του τόξου κύκλου ισχύει:

$$ds = r d\theta \quad (2.42)$$



Σχήμα 2.2: Η γεωμετρία του προβλήματος.[36]

Προσέγγιση του τριδιάστατου πεδίου ταχύτητας

Σύμφωνα με τους *Fogarty & Sears* [17], το τριδιάστατο πεδίο ταχύτητας της εξωτερικής μη συνεκτικής ροής για κυλινδρικά περιστρεφόμενα πτερόγια άπειρου μήκους υπολογίζεται

συναρτήσει ενός διδιάστατου δυναμικού $\varphi(\theta, z)$:

$$u_{\theta e} = \Omega_z r \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (2.43)$$

$$u_{re} = \Omega_z (\varphi - 2\theta) \quad (2.44)$$

$$u_{ze} = \Omega_z r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.45)$$

Η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας προκύπτει λοιπόν ανεξάρτητη της ακτινικής απόστασης, ενώ το διδιάστατο δυναμικό είναι σε κάθε ακτινική θέση όμοιο. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εφαπτομενική στις γραμμές ροής της εξωτερικής ροής συνιστώσα της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$u_{\theta e}(r) = U_{rel}(r) u_{\theta e} \quad (2.46)$$

όπου $U_{rel}(r)$ η συνισταμένη ταχύτητα την οποία “βλέπει” η αεροτομή, η οποία ορίζεται ως,

$$U_{rel}(r) = \sqrt{(\Omega_z r (1 + a'))^2 + (U_{wind} (1 - a))^2} \quad (2.47)$$

όπου a ο συντελεστής αξονικής επαγωγής, a' ο συντελεστής περιφερειακής επαγωγής και U_{wind} η ταχύτητα του ανέμου. Για την ακτινική κλίση της ταχύτητας ισχύει,

$$\frac{\partial u_{\theta e}(r)}{\partial r} = \frac{\partial U_{rel}(r)}{\partial r} u_{\theta e} = \frac{\partial U_{rel}(r)}{\partial r} \frac{u_{\theta e}(r)}{U_{rel}(r)} \quad (2.48)$$

ενώ η κλίση της συνισταμένης ταχύτητας προσεγγίζεται ως,

$$\frac{\partial U_{rel}(r)}{\partial r} = \frac{1}{2U_{rel}(r)} \left(2\Omega_z^2 r (1 + a')^2 \right) \cong \frac{\Omega_z^2 r}{U_{rel}(r)} \quad (2.49)$$

όπου θεωρήθηκε ότι ο συντελεστής περιφερειακής επαγωγής a' παίρνει μικρές τιμές. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην έκφραση για την ακτινική κλίση της περιφερειακής μη συνεκτικής ταχύτητας,

$$\frac{\partial u_{\theta e}(r)}{\partial r} = \frac{u_{\theta e}(r)}{r} \left(\frac{\Omega_z r}{U_{rel}(r)} \right)^2 = \frac{u_{\theta e}(r)}{r} RO^2 \quad (2.50)$$

όπου $RO = \Omega_z r / U_{rel}(r)$ ο λόγος της περιφερειακής ταχύτητας προς τη συνισταμένη.

Ακτινικές κλίσεις παραμέτρων οριακού στρώματος

Στις εξισώσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας του οριακού στρώματος όπως δόθηκαν στις σχέσεις (2.13), (2.18) και (2.41), εμφανίζονται οι παράγωγοι των κάτωθι χαρακτηριστικών

μεγεθών του οριακού στρώματος ως προς την ακτινική κατεύθυνση:

$$\frac{\partial \vartheta_{22}}{\partial r}, \frac{\partial (\vartheta_{21} - \delta_2^*)}{\partial r}, \frac{\partial \vartheta_{12}^*}{\partial r}, \frac{\partial \vartheta_{22}^*}{\partial r} \quad (2.51)$$

Οι όροι αυτοί δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν από το παρόν μοντέλο και συνεπώς αμελούνται. Σύμφωνα με τους *Dumitrescu & Cardoso* [11], οι οποίοι πραγματοποίησαν ανάλυση της τάξης μεγέθους των μεγεθών αυτών, μία τέτοια παραδοχή κρίνεται αποδεκτή καθώς η συνεισφορά των όρων αυτών είναι ελάχιστος σημασίας.

Επιπλέον, αμελούνται οι ακτινικοί όροι στην εξίσωση της συνέχειας (2.6). Αυτό συμβαίνει γιατί η εξίσωση της συνέχειας αποτελεί τη συνθήκη αλληλεπίδρασης μεταξύ της συνεκτικής και της μη συνεκτικής περιοχής, και καθώς ο χαρακτήρας του νόμου αλληλεπίδρασης παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση της μεθόδου, είναι σημαντικό να διατηρηθεί στη μορφή που έχει στο καθαρά διδιάστατο πρόβλημα. Ώστε η εξίσωση της συνέχειας γράφεται στη μορφή:

$$(\rho_e u_{ze})_{wall} = \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_e u_{\theta e} \delta_2^*) \cong \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) \quad (2.52)$$

Η επίδραση της συμπιεστότητας

Στις εξισώσεις του οριακού στρώματος εμφανίζονται όροι σχετικοί με τις κλίσεις της πυκνότητας της μη συνεκτικής ροής ρ_e ως προς τη χορδική και την ακτινική κατεύθυνση. Οι όροι αυτοί μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της πίεσης και της θερμοκρασίας της ροής υποθέτοντας ότι το ρευστό είναι ιδανικό και υπακούει στην καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων $p_e = \rho_e R T_e$,

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} = \frac{1}{p_e} \frac{\partial p_e}{r \partial \theta} - \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{r \partial \theta} \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} = \frac{1}{p_e} \frac{\partial p_e}{\partial r} - \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \quad (2.54)$$

όπου R η σταθερά των τελείων αερίων και T_e η θερμοκρασία του ρευστού.

Με τη θεώρηση της ανεπτυγμένης ροής ως μόνιμης ροής μη συνεκτικού ρευστού εν απουσία πεδίου εξωτερικών δυνάμεων, ισχύουν οι εξισώσεις διατήρησης της ολικής πίεσης και ολικής ειδικής ενθαλπίας στη μορφή,

$$\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{u_{\theta e}^2}{2} + \frac{u_{ze}^2}{2} - \frac{\Omega_z^2 r^2}{2} = const \quad (2.55)$$

$$c_{pa} T_e + \frac{u_{\theta e}^2}{2} + \frac{u_{ze}^2}{2} - \frac{\Omega_z^2 r^2}{2} = const \quad (2.56)$$

όπου c_{pa} η θερμοχωρητικότητα του αέρα υπό σταθερή πίεση. Με χρήση των παραπάνω εξισώσεων υπολογίζονται οι κλίσεις της πίεσης και της θερμοκρασίας,

$$\frac{\partial p_e}{r \partial \theta} = -\rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} - \rho_e u_{ze} \frac{\partial u_{ze}}{r \partial \theta} \cong -\rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = -\rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} - \rho_e u_{ze} \frac{\partial u_{ze}}{\partial r} + \rho_e \Omega_z^2 r \cong -\rho_e u_{\theta e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} + \rho_e \Omega_z^2 r \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial T_e}{r \partial \theta} = -\frac{u_{\theta e}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} - \frac{u_{ze}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{ze}}{r \partial \theta} \cong -\frac{u_{\theta e}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial r} = -\frac{u_{\theta e}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} - \frac{u_{ze}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{ze}}{\partial r} + \Omega_z^2 r \cong -\frac{u_{\theta e}}{c_{pa}} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} + \Omega_z^2 r \quad (2.60)$$

όπου οι όροι $u_{ze} \frac{\partial u_{ze}}{r \partial \theta}$, $u_{ze} \frac{\partial u_{ze}}{\partial r}$ έχουν μικρή συνεισφορά και αμελούνται σύμφωνα με την ανάλυση τάξης μεγέθους του Skøby [40].

Ο αριθμός *Mach* ορίζεται ως,

$$M_e = \frac{u_{\theta e}}{c} = \frac{u_{\theta e}}{\sqrt{\gamma_a R T_e}} \quad (2.61)$$

όπου c_a η ταχύτητα του ήχου, γ_a ο αδιαβατικός συντελεστής για τον αέρα και $c_{pa} = \frac{\gamma_a R}{\gamma_a - 1}$. Ο ορισμός αυτός γίνεται βάση της παραδοχής ότι η ταχύτητα στην κύρια διεύθυνση της ροής είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη δευτερεύουσα οπότε και οι συνιστώσες της κατά την κάθετη z κατεύθυνση μπορούν να αμεληθούν. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.57) και (2.59) στην (2.53), και με χρήση της σχέσης ορισμού του αριθμού *Mach* προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{r \partial \theta} &= -\frac{\rho_e u_{\theta e}}{p_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} + \frac{u_{\theta e}}{c_{pa} T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} = \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{c_{pa}} \right) \frac{u_{\theta e}}{T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} \\ &= \left(-\frac{1}{R} + \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a R} \right) \frac{u_{\theta e}}{T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} = -\frac{u_{\theta e}}{\gamma_a R T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} = -\frac{M_e^2}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} &= -\frac{\rho_e u_{\theta e}}{p_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} + \frac{\rho_e \Omega_z^2 r}{p_e T_e} + \frac{u_{\theta e}}{c_{pa} T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} - \frac{\Omega_z^2 r}{c_{pa} T_e} \\ &= \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{c_{pa}} \right) \left(\frac{u_{\theta e}}{T_e} \frac{\partial u_{\theta e}}{\partial r} - \frac{\Omega_z^2 r}{T_e} \right) = \frac{M_e^2}{r} \left(\left(\frac{\Omega_z r}{u_{\theta e}} \right)^2 - R O^2 \right) \cong 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας

Η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση (2.41), σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η διατύπωση αυτή εμπεριέχει πλειάδα όρων οι οποίοι απαιτούν μοντελοποίηση, ενώ η αξιοπιστία των εμπειρικών πλαισίων που χρησιμοποιούνται για το κλείσιμο του προβλήματος της ακτινικής ροής δεν είναι σαφής. Στα πλαίσια λοιπόν της παρούσας εργασίας οι ακτινικοί όροι αμελούνται, καταλήγοντας τελικά σε μία διδιάστατη διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της κινητικής ενέργειας.

2.1.5 Τελική μορφή εξισώσεων

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, οι ολοκληρωματικές εξισώσεις του οριακού στρώματος, συνοψίζονται στις ακόλουθες:

$$\bullet \quad (\rho_e u_{ze})_{wall} = \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) \quad (2.64)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d(\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*)}{dt} + \frac{d\vartheta_{11}}{ds} + (2 + H - M_e^2) \frac{\vartheta_{11}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} + \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{r} (1 + RO^2) + \frac{2\Omega_z \delta_2^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \quad (2.65)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d(\rho_e u_{\theta e} \delta_2^*)}{dt} + \frac{d\vartheta_{21}}{ds} + \frac{\vartheta_{22} - \vartheta_{11} - \delta_1^*}{r} + \frac{2RO^2 \vartheta_{22}}{r} + (2 - M_e^2) \frac{\vartheta_{21}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} - \frac{2\Omega_z \delta_1^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \tan \beta_{wall} \quad (2.66)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{d}{dt} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{11}) + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}} \frac{d}{dt} (\rho_e \delta_1^*) + \frac{2}{u_{\theta e}^2} \frac{du_{\theta e}}{dt} H^{**} \vartheta_{11} - \frac{H^*}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d}{dt} (\rho_e u_{\theta e}^2 \delta_1^*) + \vartheta_{11} \frac{dH^*}{ds} + (2H^{**} + H^* (1 - H)) \frac{\vartheta_{11}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} = 2C_{D\theta} - H^* \frac{C_{f\theta}}{2} \quad (2.67)$$

Η έκφραση (2.64) παρέχει την επιπλέον κάθετη στο σύνορο ταχύτητα η οποία πρέπει να επιβληθεί στη μη συνεκτική ροή, έτσι ώστε αυτή να είναι ισοδύναμη προς τη συνεκτική ροή, σε ότι αφορά την παροχή μάζας του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Η παραπάνω σχέση αποτελεί επομένως συνοριακή συνθήκη για τη μη συνεκτική ροή.

Από την επίλυση των τριών άλλων προσδιορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος, δ_1^* , ϑ_{11} και $\tan \beta_{wall}$. Οι εξισώσεις αυτές, συμπληρώνονται από μία σειρά εμπειρικών σχέσεων, που δίνουν σε κλειστή μορφή τα υπόλοιπα άγνωστα μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτές, συναρτήσει των βασικών αγνώστων δ_1^* , ϑ_{11} και $\tan \beta_{wall}$, χωριστά για τη στρωτή και την τυρβώδη ροή. Το εμπειρικό αυτό πλαίσιο βασίζεται στην υπόθεση ότι η διανομή της ταχύτητας έχει δεδομένη μορφή και παραμετροποιείται με βάση τα μεγέθη δ_1^* , ϑ_{11} και $\tan \beta_{wall}$. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική κατεύθυνση επιλύεται μόνο στην περιοχή της τυρβώδους ροής, η οποία και αποτελεί την περιοχή στην οποία εμφανίζονται τα τριδιάστατα φαινόμενα. Επίσης στις εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας προστίθεται και μία εξίσωση για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη όπως και μία εξίσωση για τον προσδιορισμό των τυρβωδών τάσεων στο οριακό στρώμα οι οποίες απαιτούνται στον υπολογισμό του συντελεστή διάχυσης $C_{D\theta}$ της τυρβώδους ροής. Η πρώτη από τις δύο αυτές εξισώσεις επιλύεται στην περιοχή της στρωτής ροής ενώ η δεύτερη στην τυρβώδη ροή.

Οι εξισώσεις οριακού στρώματος στον ομόρρο

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναφέρθηκαν για την απλοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας στην παράγραφο (2.1.4), και διατυπώνοντας την εξίσωση συνέχειας στις δύο πλευρές του ομόρρου (σχήμα 2.3), υπό τη μορφή ελλείμματος μεταξύ της πραγματικής και της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής, παίρνουμε:

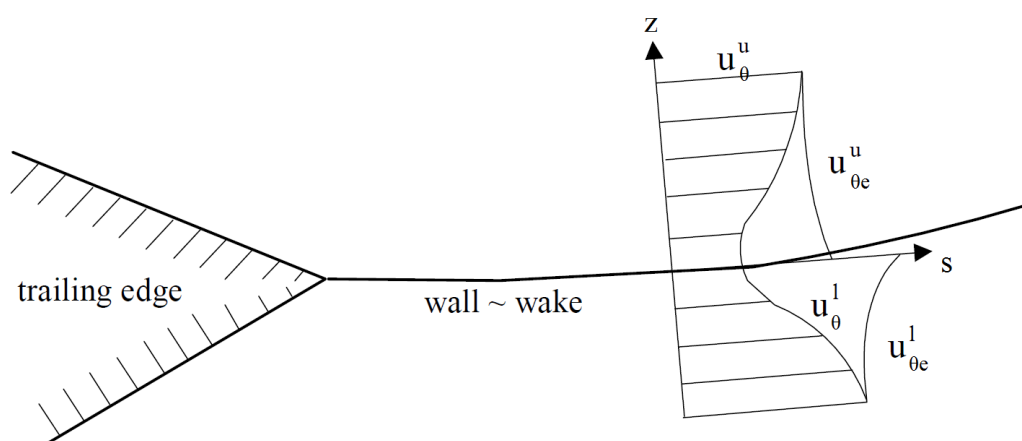
$$(\rho_e u_{ze}^u - \rho u_z^u)_w = \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e}^u \delta_1^{*u}) \quad (2.68)$$

$$-(\rho_e u_{ze}^l - \rho u_z^l)_w = \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e}^l \delta_1^{*l}) \quad (2.69)$$

όπου οι δείκτες (u) και (l) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν μεγέθη που λαμβάνονται στην πάνω και στην κάτω πλευρά του ομόρρου αντίστοιχα και ο δείκτης (w) για να δηλώσει μέγεθος υπολογιζόμενο πάνω στη γραμμή του ομόρρου (σχήμα 2.3). Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε υποθέσει ότι η πυκνότητα του ρευστού ανάμεσα στις δύο πλευρές δε διαφέρει σημαντικά. Αθροίζοντας τις δύο παροχές μάζας παίρνουμε τη συνολική παροχή μάζας στον ομόρρο η οποία είναι:

$$(\rho_e u_{ze}^u - \rho_e u_{ze}^l)_w = \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e}^u \delta_1^{*u}) + \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e}^l \delta_1^{*l}) \quad (2.70)$$

Σε ότι αφορά τις εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας, αυτές επίσης εφαρμόζονται χωριστά για την κάθε πλευρά του ομόρρου, οι δε εκφράσεις που προκύπτουν δεν διαφέρουν από αυτές που περιγράφονται από τις σχέσεις (2.65), (2.66) και (2.67). Η μόνη διαφοροποίηση αφορά το συντελεστή $C_{f\theta}$ ο οποίος στον ομόρρο μηδενίζεται, και συνεπώς οι όροι που σχετίζονται με αυτόν απαλείφονται.



Σχήμα 2.3: Οι διανομές ταχυτήτων στον ομόρρο.[54]

2.2 Κλείσιμο του προβλήματος

Για την επίλυση των εξισώσεων του οριακού στρώματος, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην παράγραφο (2.1.5), απαιτείται ο προσδιορισμός των παραμέτρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές συναρτήσει των ανεξάρτητων μεταβλητών ϑ_{11} , δ_1^* και $\tan \beta_{wall}$. Οι παράμετροι που πρέπει να προσδιορισθούν είναι ο συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας H^* , ο συντελεστής σχήματος πυκνότητας H^{**} , οι συντελεστές τριβής και διάχυσης $C_{f\theta}$ και $C_{D\theta}$ αντίστοιχα, καθώς και τα σχετικά με τη δευτερεύουσα ροή μεγέθη του οριακού στρώματος δ_2^* , ϑ_{21} και ϑ_{22} . Το εμπειρικό αυτό πλαίσιο που συμπληρώνει τις εξισώσεις του οριακού στρώματος παρουσιάζεται ξεχωριστά για τις περιπτώσεις στρωτής και τυρβώδους ροής. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στο πρότυπο προσδιορισμού του σημείου μετάβασης της ροής.

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο να οριστούν ο τοπικός αριθμός *Reynolds* της ροής ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}} = \rho_e u_{\theta e} \vartheta_{11} / \mu_e$ και ο συντελεστής σχήματος για την ασυμπίεστη ροή H_k , ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$H_k = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right) dz / \int_0^\delta \frac{u_\theta}{u_{\theta e}} \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right) dz \quad (2.71)$$

2.2.1 Το πρότυπο προσδιορισμού του σημείου μετάβασης

Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται το πρότυπο e^n για τον προσδιορισμό του σημείου στο οποίο η ροή από στρωτή μετατρέπεται σε τυρβώδη. Η μέθοδος αυτή, η οποία πρωτοεφαρμόστηκε από τους *Smith & Gamberoni* [42] και τον *Ingen* [21], θεωρεί ότι η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη συμβαίνει όταν το πιο ασταθές *Tollmien-Schlichting* κύμα στο οριακό στρώμα αυξάνεται κατά ένα συντελεστή, που λαμβάνεται ίσος με $e^9 \cong 8100$. Για να υπολογιστεί ο συντελεστής ενίσχυσης, ο ρυθμός αύξησης των διαταραχών πρέπει να συσχετιστεί με τα μεγέθη του οριακού στρώματος. Με τη χρήση της οικογένειας διανομών ταχυτήτων των *Falkner-Skan* [14], η εξίσωση των *Orr-Sommerfeld* λύνεται ως προς το ρυθμό αύξησης των διαταραχών για ένα σημαντικό εύρος τιμών του συντελεστή σχήματος του οριακού στρώματος και “ασταθών” συχνοτήτων. Σύμφωνα με τους *Gleyzes et al* [18] ο χάρτης του ολοκληρώματος των ρυθμών ενίσχυσης προσεγγίζεται από ευθείες γραμμές της μορφής,

$$\tilde{n} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_{\vartheta_{11}}} (H_k) (Re_{\vartheta_{11}} - Re_{\vartheta_{110}} (H_k)) \quad (2.72)$$

όπου στην (2.72) \tilde{n} είναι ο λογάριθμος του μέγιστου λόγου ενίσχυσης και $Re_{\vartheta_{110}}$ ο κρίσιμος αριθμός *Reynolds* από τον οποίον οι διαταραχές στο οριακό στρώμα αρχίζουν να αυξάνουν με ρυθμό $d\tilde{n}/dRe_{\vartheta_{11}}$.

Η κλίση $d\tilde{n}/dRe_{\vartheta_{11}}$ και ο κρίσιμος αριθμός *Reynolds* προσεγγίζονται από τις ακόλουθες

εμπειρικές σχέσεις:

$$\frac{d\tilde{n}}{dRe_{\vartheta_{11}}} = 0.01 [(2.4H_k - 3.7 + 2.5 \tanh(1.5H_k - 4.65))^2 + 0.25]^{0.5} \quad (2.73)$$

$$\log_{10} Re_{\vartheta_{110}} = \left(\frac{1.415}{H_k - 1} - 0.489 \right) \cdot \tanh \left(\frac{20}{H_k - 1} - 12.9 \right) + \frac{3.295}{H_k - 1} + 0.44 \quad (2.74)$$

Για όμοιες ροές, όπου η παράμετρος H_k παραμένει σταθερή και ο $Re_{\vartheta_{11}}$ μεταβάλλεται, με τρόπο μοναδικό, συναρτήσει της κατεύθυνσης της ροής s , η παράμετρος \tilde{n} υπολογίζεται άμεσα από τη σχέση (2.72). Η μετάβαση, όπως ήδη ειπώθηκε, λαμβάνεται εκεί όπου ο λόγος ενίσχυσης \tilde{n} γίνεται ίσος με 9. Για ροές που δεν είναι όμοιες, ο λόγος ενίσχυσης υπολογίζεται από την ολοκλήρωση του ρυθμού ενίσχυσης $d\tilde{n}/dRe_{\vartheta_{11}}$ κατάντι του σημείου από όπου ξεκινά η αστάθεια. Οι *Gleyzes et al* [18] ολοκλήρωσαν το ρυθμό αυτό σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{n} = \int_{Re_{\vartheta_{110}}}^{Re_{\vartheta_{11}}} \frac{d\tilde{n}}{dRe_{\vartheta_{11}}} dRe_{\vartheta_{11}} \quad (2.75)$$

Όμως η σχέση (2.75) δεν είναι κατάλληλη για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης στην περίπτωση που έχουμε εμφάνιση φυσαλίδας αποκόλλησης στην περιοχή της στρωτής ροής, καθώς ο $Re_{\vartheta_{11}}$ ελάχιστα μεταβάλλεται στο τμήμα της φυσαλίδας όπου η ροή εμφανίζεται στρωτή. Συνέπεια αυτού είναι να υπολογίζονται μικρές τιμές ενίσχυσης, γεγονός που απέχει από την πραγματικότητα. Μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση είναι να ολοκληρωθεί ο ρυθμός μεταβολής του \tilde{n} ως προς την κατεύθυνση s . Χρησιμοποιώντας ξανά την οικογένεια ταχυτήτων *Falkner-Skan* [14] προκύπτει ότι η χωρική μεταβολή του λόγου ενίσχυσης προσδιορίζεται από τη σχέση,

$$\frac{d\tilde{n}}{ds} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_{\vartheta_{11}}} \cdot \frac{dRe_{\vartheta_{11}}}{ds} \quad (2.76)$$

όπου:

$$\frac{dRe_{\vartheta_{11}}}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} + 1 \right) \frac{\varrho_e u_{\theta e} \vartheta_{11}^2}{\mu_e s} \frac{1}{\vartheta_{11}} \quad (2.77)$$

Στην (2.77) οι όροι $\varrho_e u_{\theta e} \vartheta_{11}^2 / (\mu_e s)$ και $(s/u_{\theta e}) \frac{du_{\theta e}}{ds}$ προσεγγίζονται από εμπειρικές σχέσεις, και εκφράζονται και οι δύο ως συναρτήσεις του H_k :

$$\frac{\varrho_e u_{\theta e} \vartheta_{11}^2}{\mu_e s} = \frac{6.54H_k - 14.07}{H_k^2} \quad (2.78)$$

$$\frac{s}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} = \left(0.058 \frac{(H_k - 4)^2}{H_k - 1} - 0.068 \right) \frac{H_k^2}{6.54H_k - 14.07} \quad (2.79)$$

2.2.2 Στρωτή ροή

Σύμφωνα με τον *Whitfield* [49], η παράμετρος H_k (συντελεστής σχήματος για ασυμπίεστη ροή) μπορεί να υπολογιστεί, για αδιαβατικές ροές, από τη σχέση:

$$H_k = \frac{H - 0.290M_e^2}{1 + 0.113M_e^2} \quad (2.80)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή σχήματος πυκνότητας H^{**} χρησιμοποιείται η σχέση που έχει προταθεί επίσης από τον *Whitfield* [49]:

$$H^{**} = \left(\frac{0.064}{H_k - 0.8} + 0.251 \right) M_e^2 \quad (2.81)$$

Η παραπάνω σχέση έχει εξαχθεί για τυρβώδεις ροές ωστόσο σύμφωνα με τους *Drela* και *Giles* [8], μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση της στρωτής ροής, καθώς η παράμετρος H^{**} έχει πολύ μικρή σημασία σε διηχητικές και υποηχητικές ροές.

Σε ότι αφορά το προφίλ ταχύτητας στη στρωτή περιοχή, χρησιμοποιούνται οι μονοπαραμετρικές διανομές ταχύτητας των *Falkner-Skan* [14], μέσω των οποίων οι υπόλοιπες παράμετροι του προβλήματος γράφονται:

$$H^* = \begin{cases} 1.515 + 0.076 \frac{(4-H_k)^2}{H_k} & , H_k < 4 \\ 1.515 + 0.040 \frac{(H_k-4)^2}{H_k} & , H_k > 4 \end{cases} \quad (2.82)$$

$$Re_{\theta_{11}} \frac{C_{f\theta}}{2} = \begin{cases} -0.067 + 0.01977 \frac{(7.4-H_k)^2}{H_k-1} & , H_k < 7.4 \\ -0.067 + 0.022 \left(1 - \frac{1.4}{H_k-6} \right)^2 & , H_k > 7.4 \end{cases} \quad (2.83)$$

$$Re_{\theta_{11}} \frac{2C_D}{H^*} = \begin{cases} 0.207 + 0.00205(4 - H_k)^{5.5} & , H_k < 4 \\ 0.207 - 0.003 \frac{(H_k-4)^2}{1+0.02(H_k-4)^2} & , H_k > 4 \end{cases} \quad (2.84)$$

2.2.3 Τυρβώδης ροή

Η εμφάνιση της τύρβης έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη πολύπλοκων δομών στη ροή, ενώ συγχρόνως σηματοδοτεί και την απαρχή διαμόρφωσης του τριδιάστατου χαρακτήρα της. Επιπλέον, ο συντελεστής διάχυσης $C_{D\theta}$ αδυνατεί να δοθεί σε κλειστή μορφή, καθώς απαρτίζεται και από τυρβώδεις τάσεις, η μοντελοποίηση των οποίων γίνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης, η οποία παίρνει τη θέση της εξίσωσης για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης της ροής.

Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής σχήματος για την ασυμπίεστη ροή H_k , όπως και ο συντε-

λεστής σχήματος πυκνότητας H^{**} δίνονται και για την περίπτωση της τυρβώδους ροής από τις (2.80) και (2.81) αντίστοιχα.

Χορδικό προφίλ ταχύτητας

Στα τυρβώδη οριακά στρώματα διακρίνονται δύο περιοχές, ανάλογα με τον κύριο μηχανισμό που ελέγχει τη δομή της ροής. Η πρώτη είναι η εσωτερική περιοχή, όπου η συνεκτικότητα παίζει πρωτεύοντα ρόλο, και η δεύτερη είναι η εξωτερική, όπου κυριαρχεί η επίδραση της τύρβης. Συνεπώς, η κατανομή ταχύτητας σε ένα τυρβώδες οριακό στρώμα παρουσιάζει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες.

Σύμφωνα με τον *Swafford* [47] οι κατακόρυφες διανομές ταχύτητας μέσα σε τυρβώδες οριακό στρώμα, μπορούν να παραμετροποιηθούν από την παρακάτω σχέση,

$$\frac{u_\theta}{u_{\theta e}} = \frac{u_\tau}{u_{\theta e}} \frac{C_{f\theta}}{|C_{f\theta}|} \frac{1}{0.09} \arctan(0.09y^+) + \left(1 - \frac{u_\tau}{u_{\theta e}} \frac{C_{f\theta}}{|C_{f\theta}|} \frac{\pi}{0.18}\right) \tanh^{1/2} \left[a \left(\frac{z}{\vartheta_{11}} \right)^b \right] \quad (2.85)$$

όπου $\frac{u_\tau}{u_{\theta e}} = \left| \frac{C_{f\theta}}{2} \right|^{1/2}$ και $y^+ = \frac{\rho_e u_\tau}{\mu_e} z$, ενώ a και b σταθερές.

Ακτινικό προφίλ ταχύτητας

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, όταν η ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη αρχίζει να αποκτάει τριδιάστατο χαρακτήρα. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη η υιοθέτηση ενός προφίλ για το ακτινικό τμήμα της ροής. Σύμφωνα με τον *Mager* [29], η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας σε τυρβώδη οριακά στρώματα μπορεί να δοθεί από την κάτωθι σχέση,

$$\frac{u_r}{u_\theta} = \tan \beta_{wall} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2 \quad (2.86)$$

η οποία συσχετίζει το ακτινικό προφίλ με αυτό της κύριας συνιστώσας της ροής, και έχει παρόμοια μορφή με αυτήν που παρουσιάζεται στο σχήμα (2.1). Μία δεύτερη προσέγγιση είναι το τριγωνικό προφίλ του *Johnston* [22] σύμφωνα με το οποίο η ακτινική ροή χωρίζεται σε δύο περιοχές, μία κοντά στην επιφάνεια όπου,

$$\frac{u_r}{u_\theta} = \tan \beta_{wall} \quad (2.87)$$

ενώ για το υπόλοιπο κομμάτι του οριακού στρώματος ισχύει,

$$\frac{u_r}{u_{\theta e}} = A \left(1 - \frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right) \quad (2.88)$$

όπου η παράμετρος A σχετίζεται την ένταση της ακτινικής ροής και συσχετίζεται με τη γωνία β_{wall} από τη σχέση που έχει εξάγει ο *Smith* [44]:

$$A = \tan \beta_{wall} \frac{\sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1 + 0.18M_e^2)}}{0.1 - \sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1 + 0.18M_e^2)}} \quad (2.89)$$

Ακτινικά πάχη οριακού στρώματος

Η πρώτη προσέγγιση όσον αφορά τα πάχη του οριακού στρώματος, αφού πλέον η ακτινική ροή έχει συσχετιστεί με τη χορδική, είναι η αριθμητική ολοκλήρωση της σχέσης προσδιορισμού του κάθε μεγέθους με βάση τα χορδικά προφίλ ταχύτητας του *Swafford* [47].

Μία δεύτερη προσέγγιση, καθώς όπως θα δειχθεί στη συνέχεια η έκφραση των σχετικών με την ακτινική κατεύθυνση παραμέτρων του οριακού στρώματος με βάση το προφίλ του *Swafford* παρουσιάζει δυσκολίες, είναι η χρησιμοποίηση για την μοντελοποίηση των παραμέτρων αυτών και μόνο, του εκθετικού χορδικού προφίλ ταχύτητας για τυρβώδη οριακά στρώματα των *Lakshminarayana* και *Govindan* [23]:

$$\frac{u_\theta}{u_{\theta e}} = \left(\frac{z}{\delta} \right)^{\frac{H-1}{2}} \quad (2.90)$$

Με βάση το παραπάνω προφίλ ταχύτητας, οι παράμετροι του οριακού στρώματος μοντελοποιούνται συναρτήσει των βασικών παραμέτρων του προβλήματος ως εξής,

$$\delta_2^* = -\frac{16H\vartheta_{11} \tan \beta_{wall}}{(H-1)(H+3)(H+5)} \quad (2.91)$$

$$\vartheta_{21} = -\frac{2\vartheta_{11} \tan \beta_{wall}}{(H-1)(H+2)} \quad (2.92)$$

$$\vartheta_{22} = -\frac{24\vartheta_{11} \tan^2 \beta_{wall}}{(H-1)(H+2)(H+3)(H+4)} \quad (2.93)$$

$$\vartheta_{12}^* = -\frac{16H\theta_{11} \tan \beta_{wall}}{(3H-3)(3H-1)(3H+1)} - \delta_2^* \quad (2.94)$$

$$\vartheta_{21}^* = -\frac{256H\vartheta_{11} \tan^2 \beta_{wall}}{(H-1)(3H-1)(3H+1)(3H+5)(3H+7)} \quad (2.95)$$

$$\vartheta_{22}^* = -\frac{10240H\theta_{11} \tan^3 \beta_{wall}}{(H-1)(H+3)(3H-1)(3H+1)(3H+5)(3H+7)(3H+11)} \quad (2.96)$$

$$C_{Dr} = \mu \frac{\tan^2 \beta_{wall} (H-1)}{\rho_e u_{\theta e} H \vartheta_{11} (H+1)(2H-3)(2H-1)(2H+1)} \quad (2.97)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις έχει αντικατασταθεί το πάχος δ του οριακού στρώματος από τη σχέση:

$$\delta = \frac{H(H+1)\vartheta_{11}}{(H-1)} \quad (2.98)$$

Μία τρίτη προσέγγιση είναι η χρήση της σχέσης των *Drela* και *Giles* [8] αντί της σχέσης (2.98) για το πάχος του οριακού στρώματος:

$$\delta = \vartheta_{11} \left(3.15 + \frac{1.72}{H_k - 1} \right) + \delta_1^* \quad (2.99)$$

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται το προφίλ του *Johnston*, τα ακτινικά χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος προκύπτουν,

$$\delta_2^* = \vartheta_{21} (H - H_{\vartheta_e}) \quad (2.100)$$

$$\vartheta_{21} = -A\vartheta_{11} \quad (2.101)$$

$$\vartheta_{22} = -A(\vartheta_{21} - \delta_2^*) \quad (2.102)$$

$$\delta_2^{**} = A(\vartheta_e - \delta_1^{**}) \quad (2.103)$$

$$\vartheta_{12}^* = \vartheta_{21} (H^* - 1) - \delta_2^* \quad (2.104)$$

$$\vartheta_{21}^* = -\vartheta_{22} - A\vartheta_{12}^* \quad (2.105)$$

$$\vartheta_{22}^* = -A(\vartheta_{21}^* - \vartheta_{22}) \quad (2.106)$$

$$C_{Dr} = \left(\frac{|A|}{14667c_{D\theta} + 3.0} \right)^{\frac{|A|+10.0}{1020c_{D\theta}+4.0}} \quad (2.107)$$

όπου η ολοκλήρωση έχει γίνει χρησιμοποιώντας μόνο το προφίλ της εξωτερικής περιοχής του οριακού στρώματος, όπως αυτό δίνεται από τη σχέση (2.88).

Στις παραπάνω σχέσεις εισάγεται και το βοηθητικό πάχος πυκνότητας ϑ_e το οποίο ορίζεται,

$$\vartheta_e = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_e} \right) dz \quad (2.108)$$

ενώ ο βοηθητικός συντελεστής σχήματος πυκνότητας H_{ϑ_e} υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση του *Donagan* [7]:

$$H_{\vartheta_e} = M_e^2 (0.185H_k + 0.150) \quad (2.109)$$

Συντελεστής τριβής

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ στο στερεό τοίχωμα χρησιμοποιείται η εμπειρική σχέση του *Swafford* [47],

$$F_c C_{f\theta} = 0.3e^{-1.33H_k} \left[\log_{10} \left(\frac{Re_{\vartheta_{11}}}{F_c} \right) \right]^{-1.74-0.31H_k} + 0.00011 \left[\tanh \left(4 - \frac{H_k}{0.875} \right) - 1 \right] \quad (2.110)$$

όπου $F_c = (1 + 0.2M_e^2)^{1/2}$ ο συντελεστής συμπίεστούτητας. Επίσης, εξετάζεται και η σχέση των *Lakshminarayana* και *Govindan* [23],

$$C_{f\theta} = 0.172 Re_{\vartheta_{11}}^{-0.268} 10^{-0.678H} \left(1 + B_1 \sqrt{\tan \beta_{wall} (s - s_{tr}) / c} \right) \quad (2.111)$$

όπου $B_1 = 0.52$ και s_{tr} η απόσταση μεταξύ του σημείου ανακοπής και του σημείου μετάβασης.

Συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας

Οι σχέσεις (2.85) και (2.110) για καθορισμένες τιμές των παραμέτρων $Re_{\vartheta_{11}}$ και H_k δίνουν συγκεκριμένες τιμές των σταθερών a και b και επομένως συγκεκριμένη σχέση για τον προσδιορισμό της κατακόρυφης διανομής ταχυτήτων. Έτσι χρησιμοποιώντας κανείς τις δύο παραπάνω σχέσεις και τη σχέση ορισμού της παραμέτρου H^* είναι δυνατό να καταλήξει σε μία συσχέτιση αυτής με τις παραμέτρους $Re_{\vartheta_{11}}$ και H_k . Μια τέτοια σχέση προτείνεται από τους *Drela* και *Giles* [8] και είναι η ακόλουθη:

$$H^* = \begin{cases} 1.505 + \frac{4}{Re_{\vartheta_{11}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{Re_{\vartheta_{11}}^{1/2}} \right) \frac{(H_0 - H_k)^{1.6}}{H_k} & , H_k < H_0 \\ 1.505 + \frac{4}{Re_{\vartheta_{11}}} + (H_k - H_0)^2 \left(\frac{0.04}{H_k} + \frac{0.007 \ln Re_{\vartheta_{11}}}{\left(H_k - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\vartheta_{11}}} \right)^2} \right) & , H_k > H_0 \end{cases} \quad (2.112)$$

όπου,

$$H_0 = \begin{cases} 4 & , Re_{\vartheta_{11}} < 400 \\ 3 + \frac{4}{Re_{\vartheta_{11}}} & , Re_{\vartheta_{11}} > 400 \end{cases} \quad (2.113)$$

Συντελεστής διάχυσης

Ο συντελεστής διάχυσης $C_{D\theta}$ στην τυρβώδη ροή εκφράζεται ως το σταθμισμένο άθροισμα της συνεισφοράς της διάτμησης λόγω της επαφής του ρευστού με το στερεό σύνορο, η οποία εκφράζεται μέσω του συντελεστή διατμητικής τάσης $C_{f\theta}$ και της διάτμησης ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού, λόγω των τυρβωδών τάσεων *Reynolds*, το μέτρο της οποίας δίνει ο συντελεστής διατμητικής τάσης C_τ . Έτσι ο συντελεστής διάχυσης γράφεται στη μορφή:

$$C_{D\theta} = \frac{C_{f\theta}}{2} U_S + C_\tau (1 - U_S) \quad (2.114)$$

όπου U_S είναι μια ισοδύναμη κανονικοποιημένη ταχύτητα ολίσθησης στον τοίχο η οποία σύμφωνα με τους *Drela* και *Giles* [8] ορίζεται από τη σχέση:

$$U_S = \frac{H^*}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{H_k - 1}{H} \right) \quad (2.115)$$

Ο συντελεστής διατμητικής τάσης C_τ , εξαιτίας του γεγονότος ότι οι τάσεις *Reynolds* εμφανίζουν αργή σχετικά απόκριση στην αλλαγή των εξωτερικών συνθηκών (ιδιαίτερα στους χαμηλούς αριθμούς *Reynolds*), δεν είναι δυνατό να γραφτεί ως απ' ευθείας συνάρτηση των τοπικών συνθηκών στη θέση υπολογισμού του. Η υστέρηση στην απόκριση που εμφανίζει ο C_τ προσομοιώνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης (*Green et al*, [19]), η οποία αποτελεί μια απλοποιημένη έκφραση της εξίσωσης μεταφοράς των διατμητικών τάσεων των *Bradshaw* και *Ferriss* [3]:

$$\frac{\delta}{C_\tau} \frac{dC_\tau}{ds} = 5.6 (C_{\tau eq}^{1/2} - C_\tau^{1/2}) + 2\delta \left\{ \frac{4}{3\delta_1^*} \left[\frac{C_{f\theta}}{2} - \left(\frac{H_k - 1}{6.7H_k} \right)^2 \right] - \frac{1}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} \right\} \quad (2.116)$$

Στην παραπάνω εξίσωση δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος (όπως δίνεται από τη σχέση (2.99)) και $C_{\tau eq}$ ο συντελεστής διάτμησης για οριακό στρώμα σε ισορροπία (*equilibrium boundary layer*) ο οποίος δίνεται από τη σχέση των *Drela* και *Giles* [8]:

$$C_{\tau eq} = H^* \frac{0.015}{1 - U_S} \frac{(H_k - 1)^3}{H_k^2 H} \quad (2.117)$$

Κεφάλαιο 3

Μη συνεκτική ροή

3.1 Η ισοδύναμη μη συνεκτική ροή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα της μη μόνιμης ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής γύρω από κινούμενη αεροτομή, ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζονται και οι διορθώσεις που απαιτούνται, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη στις εξισώσεις αυτές η επίδραση της συνεκτικότητας. Οι εξισώσεις της μη συνεκτικής ροής σε συνδυασμό με τις εξισώσεις οριακού στρώματος και τις απαραίτητες συνεκτικές διορθώσεις, συνιστούν ένα πρόβλημα συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης, από την επίλυση του οποίου λαμβάνεται η ισοδύναμη προς την πραγματική (ως προς το πεδίο πίεσης γύρω από την αεροτομή), μη συνεκτική ροή (*equivalent inviscid flow*).

Η διατύπωση που παρουσιάζεται στη συνέχεια βασίζεται στη θεώρηση ότι το πεδίο ροής είναι παντού αστρόβιλο εκτός από συγκεκριμένες καμπύλες οι οποίες αποτελούν και το σύνορο του προβλήματος. Οι καμπύλες αυτές, στις οποίες διανέμεται ιδιόμορφα η στροβιλότητα, είναι το σύνορο της αεροτομής και η γραμμή (φύλλο στροβιλότητας) που εκφεύγει από την ακμή εκφυγής και σχηματίζει τον ομόρρο, η οποία θεωρείται επιπλέον και γραμμή ασυνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας.

Έστω S το σύνορο της αεροτομής και D το εξωτερικό χωρίο της αεροτομής που αποτελεί και το πεδίο ροής. Το πεδίο ταχύτητας της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής $\vec{u}_e(\cdot; t)$ προκύπτει ως επαλληλία των πεδίων ταχύτητας της καθαρά μη συνεκτικής ροής $\vec{u}(\cdot; t)$ και της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot; t)$:

$$\vec{u}_e(\vec{x}; t) = \vec{u}(\vec{x}; t) + \vec{u}^*(\vec{x}; t), \quad \vec{x} \in D \quad (3.1)$$

Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αποτελούν οι κάτωθι σχέσεις:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \vec{u}(\vec{x}; t) = \vec{U}_\infty(t) \quad (3.2)$$

$$\left(\vec{u}_e(\vec{x}; t) - \vec{U}_b(\vec{x}; t) \right) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) = \vec{u}_e(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) = (\bar{u}_{ze})_{wall} \quad (3.3)$$

όπου $\vec{U}_\infty(t)$ η επ' άπειρον ταχύτητα του ρευστού, U_b η ταχύτητα κίνησης της αεροτομής, εκφρασμένη ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O_G X_G Y_G$ και $\vec{\nu}(\cdot; t)$ το κάθετο διάνυσμα στην S (σχήμα 3.1). Η πρώτη από τις δύο συνθήκες εκφράζει το μηδενισμό των ταχυτήτων διαταραχής της καθαρά μη συνεκτικής ροής στο άπειρο, ενώ η δεύτερη εισάγει την κάθετη ταχύτητα που επιβάλλεται στην S ώστε η μη συνεκτική ροή να είναι ισοδύναμη προς τη συνεκτική ροή σε ότι αφορά την παροχή μάζας του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Αποτελεί επομένως μία τροποποιημένη συνθήκη μη εισχώρησης η οποία αναλύεται στις ακόλουθες ξεχωριστές συνοριακές συνθήκες για κάθε ένα από τα πεδία $\vec{u}(\cdot; t)$ και $\vec{u}^*(\cdot; t)$,

$$\vec{u}(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) = \vec{U}_b \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) \quad (3.4)$$

$$\vec{u}^*(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) = (\bar{u}_{ze})_{wall} \quad (3.5)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι για μεν το καθαρά μη συνεκτικό πεδίο $\vec{u}(\cdot; t)$ επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης, το δε πεδίο $\vec{u}^*(\cdot; t)$ προκύπτει ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (2.64).

Επιπλέον, θεωρείται S_w η επιφάνεια του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει από την ακμή εκφυγής και \vec{x}_w ένα τυχαίο σημείο πάνω σε αυτήν. Με $\vec{\nu}_w(\cdot, t)$ συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα και με $\xi_w(t)$ η παράμετρος μήκους του φύλλου στροβιλότητας. Η κινηματική συνθήκη που περιγράφει την εξέλιξη του ομόρρου είναι η ακόλουθη:

$$\frac{D\vec{x}_w(\xi_w; t)}{Dt} = \vec{u}_e(\vec{x}_w; t), \quad \vec{x}_w \in S_w \quad (3.6)$$

που σημαίνει ότι τα σημεία της επιφάνειας του φύλλου στροβιλότητας είναι υλικά σημεία κινούμενα ελεύθερα με την ταχύτητα του πεδίου ροής.

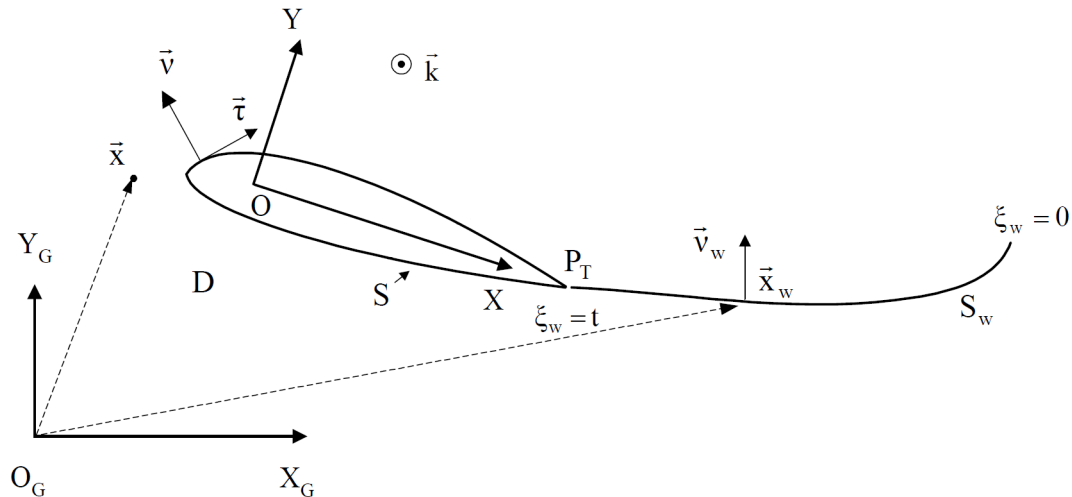
Οι δυναμικές συνθήκες που συμπληρώνουν το πρόβλημα είναι η συνθήκη *Kelvin*,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (3.7)$$

η οποία εκφράζει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας Γ γύρω από την αεροτομή, και η

συνθήκη μηδενικού “πηδήματος” πίεσης στην ακμή εκφυγής:

$$[[p]]_{\xi_w=t} = 0 \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.1: Βασικοί συμβολισμοί του προβλήματος.[54]

3.2 Οι εξισώσεις της καθαρά μη συνεκτικής ροής

Σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του *Helmholtz* κάθε πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\cdot; t)$ αναλύεται σε άθροισμα ενός αστρόβιλου $\vec{u}_\Delta(\cdot; t)$ μηδενικού στροβιλισμού και ενός στροβιλού πεδίου $\vec{u}_\omega(\cdot; t)$ μηδενικής απόκλισης:

$$\vec{u}(\vec{x}; t) = \vec{U}_\infty(t) + \vec{u}_\Delta(\vec{x}; t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}; t) = \vec{U}_\infty(t) + \nabla\varphi(\vec{x}; t) + \nabla \times (\psi(\vec{x}; t) \cdot \vec{k}), \quad \vec{x} \in D \quad (3.9)$$

όπου $\varphi(\cdot; t)$ το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής, $\psi(\cdot; t)$ η ροϊκή συνάρτηση του σωληνοειδούς πεδίου και \vec{k} το κάθετο στο διδιάστατο πεδίο διάνυσμα. Θεωρώντας ροή ασυμπίεστη (ή χαμηλών υποηχητικών ταχυτήτων), προκύπτει ότι το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}; t) = \nabla\vec{u}_\Delta(\vec{x}; t) = 0, \quad \vec{x} \in D \quad (3.10)$$

$$\nabla^2\psi(\vec{x}; t) \cdot \vec{k} = \nabla \times \vec{u}_\omega(\vec{x}; t) = -\omega(\vec{x}; t) \cdot \vec{k}, \quad \vec{x} \in D \quad (3.11)$$

όπου $\omega(\cdot; t)$ το πεδίο στροβιλότητας του χωρίου D .

Οι συνοριακές συνθήκες για τον προσδιορισμό των αγνώστων αυτών πεδίων είναι η συνθήκη

μηδενισμού των ταχυτήτων διαταραχής στο άπειρο (3.2),

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\vec{x}; t) = 0 \quad (3.12)$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \nabla \times (\psi(\vec{x}; t) \cdot \vec{k}) = 0 \quad (3.13)$$

και η συνθήκη μη εισχώρησης (3.4),

$$\vec{u}(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) = \vec{U}_b(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) \quad (3.14)$$

Από την εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας του *Green* στις εξισώσεις (3.10) και (3.11) παίρνουμε την ολοκληρωματική αναπαράσταση του δυναμικού $\varphi(\cdot; t)$ και της ροϊκής συνάρτησης $\psi(\cdot; t)$ διαταραχής στην τυχαία θέση \vec{x}_0 του πεδίου ροής D . Η αναπαράσταση των δύο πεδίων βασίζεται στη διατύπωση πηγών για το δυναμικό και στροβιλότητας για τη ροϊκή συνάρτηση (*Ριζιώτης*, [55]) αντίστοιχα και είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(\vec{x}_0; t) = \int_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right] (\vec{x}; t) \cdot G(\vec{x}_0 - \vec{x}) \, dS(\vec{x}) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_0; t) &= \int_S \left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right] (\vec{x}; t) \cdot G(\vec{x}_0 - \vec{x}) \, dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right]_w (\vec{x}; t) \cdot G(\vec{x}_0 - \vec{x}) \, dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου στις (3.15) και (3.16), $G(\cdot)$ είναι η συνάρτηση *Green*, η οποία στις δύο διαστάσεις γράφεται:

$$G(\vec{x}_0 - \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}_0 - \vec{x}| \quad (3.17)$$

Στην (3.15), το $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right] (\cdot; t)$ εκφράζει “πήδημα” κάθετης ταχύτητας στην επιφάνεια της αεροτομής και αναπαριστά μία διανομή πηγών $\sigma(\cdot; t)$ κατά μήκος της S ,

$$\sigma(\vec{x}; t) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right] (\vec{x}; t), \quad \vec{x} \in S \quad (3.18)$$

Στην (3.16) τα $\left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right] (\cdot; t)$ και $\left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right]_w (\cdot; t)$ εκφράζουν το “πήδημα” της εφαπτομενικής ταχύτητας στην επιφάνεια της αεροτομής και κατά μήκος του ομόρρου και αναπαριστούν διανομές στροβιλότητας $\gamma(\cdot; t)$ και $\gamma_w(\cdot; t)$ κατά μήκος των S και S_w αντίστοιχα.

$$\gamma(\vec{x}; t) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right] (\vec{x}; t), \quad \vec{x} \in S \quad (3.19)$$

$$\gamma_w(\vec{x}; t) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right]_w (\vec{x}; t), \quad \vec{x} \in S_w \quad (3.20)$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η (3.15) προκύπτει με την υπόθεση ότι ο ομόρρους στη μη συνεκτική ροή αποτελεί γραμμή ασυνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας μόνο, και ότι το “πήδημα” της κάθετης ταχύτητας πάνω σε αυτόν είναι μηδέν. Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε παροχή ρευστού κάθετα στην καμπύλη S_w , γεγονός που παραβιάζει την αρχή διατήρησης της μάζας. Έτσι, με βάση την παρατήρηση αυτή, λαμβάνονται μηδενικές πηγές πάνω στην S_w . Επίσης η (3.16) λαμβάνεται με την υπόθεση ότι το πεδίο ροής είναι αστρόβιλο με κυκλοφορία (ιδιόμορφα στροβιλό). Αυτό σημαίνει ότι η στροβιλότητα διανέμεται πάνω σε συγκεκριμένες γραμμές του πεδίου D έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\omega(\cdot; t) = 0$.

Από τα δύο πεδία διαταραχής $\varphi(\cdot; t)$ και $\psi(\cdot; t)$ παίρνοντας την κλίση και την περιστροφή αντίστοιχα προκύπτει η καθαρά μη συνεκτική ταχύτητα διαταραχής $\vec{u}(\cdot; t)$. Παραγωγίζοντας ως προς κάποιο σημείο του χώρου \vec{x}_0 τα πεδία $\varphi(\cdot; t)$ και $\psi(\cdot; t)$ παίρνουμε:

$$\nabla_0 \varphi(\vec{x}_0; t) = \int_S \sigma(\vec{x}; t) \cdot \nabla_0 \left(\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}_0 - \vec{x}| \right) dS(\vec{x}) = \int_S \sigma(\vec{x}; t) \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla_0 \psi(\vec{x}_0; t) &= \int_S \gamma(\vec{x}; t) \cdot \nabla_0 \times \left(\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}_0 - \vec{x}| \right) dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} \gamma_w(\vec{x}; t) \cdot \nabla_0 \times \left(\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}_0 - \vec{x}| \right) dS_w(\vec{x}) \\ &= \int_S \gamma(\vec{x}; t) \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} \gamma_w(\vec{x}; t) \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου ο δείκτης (0) στον τελεστή ∇ υποδηλώνει παραγωγή ως προς \vec{x}_0 .

Θέτοντας τις (3.21) και (3.22) στη συνθήκη μη εισχώρησης (3.4) παίρνουμε την ακόλουθη ολοκληρωματική συνθήκη για το τυχαίο σημείο $\vec{x}_0 \in S$:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}_0 \cdot \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) + \int_S \gamma(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}_0 \cdot \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) + \\ \int_{S_w} \gamma_w(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}_0 \cdot \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS_w(\vec{x}) = \left(\vec{U}_b(\vec{x}_0; t) - \vec{U}_\infty \right) \cdot \vec{\nu}_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου $\vec{\nu}_0$ το κάθετο διάνυσμα στη θέση \vec{x}_0 της επιφάνειας της αεροτομής.

Η παραπάνω εξίσωση που ισχύει για την καθαρά μη συνεκτική ροή, έχει ως αγνώστους

τη διανομή πηγών $\sigma(\cdot; t)$ πάνω στην αεροτομή και τις διανομές στροβιλότητας $\gamma(\cdot; t)$ και $\gamma_w(\cdot; t)$ πάνω στην αεροτομή και τον ομόρρου αντίστοιχα. Το πρόβλημα της αμιγώς μη συνεκτικής ροής, συμπληρώνεται από την εξίσωση που αφορά την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot; t)$, για να δώσει την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή $\vec{u}_e(\cdot; t)$.

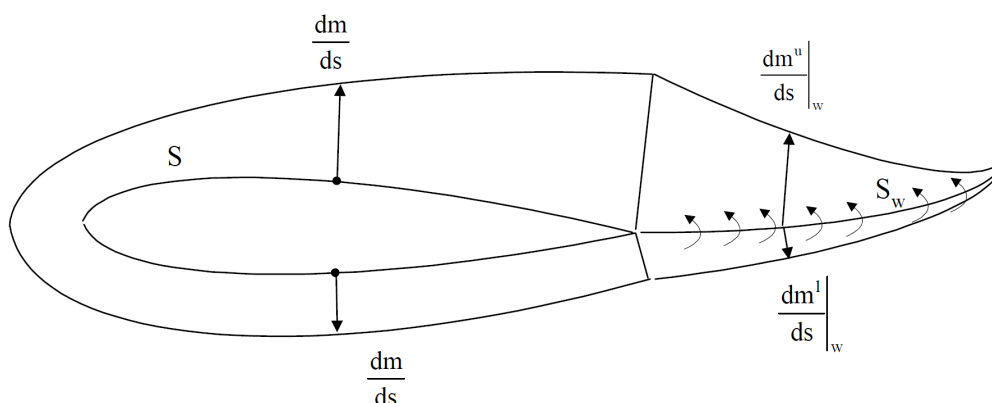
3.3 Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης

Η εξίσωση για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot; t)$ λαμβάνεται από την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (3.5), όπου η κάθετη ταχύτητα στο σύνορο της αεροτομής και το “πήδημα” αυτής στον ομόρρου με βάση τις (2.64) και (2.70) δίνεται από τις:

$$u_\nu^*(\vec{x}; t) = (\bar{u}_{ze})_{wall} = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e \bar{u}_{\theta e} \delta_1^*) \cong \frac{dm}{ds} \quad (3.24)$$

$$[[u_\nu^*(\vec{x}; t)]]_w = [[\bar{u}_{ze}]]_w = (\bar{u}_{ze}^u - \bar{u}_{ze}^l)_w = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e \bar{u}_{\theta e}^u \delta_1^{*u}) + \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e \bar{u}_{\theta e}^l \delta_1^{*l}) \cong \frac{dm^u}{ds} + \frac{dm^l}{ds} \quad (3.25)$$

όπου $m = \bar{u}_{\theta e} \delta_1^*$, $m^u = \bar{u}_{\theta e}^u \delta_1^{*u}$ και $m^l = \bar{u}_{\theta e}^l \delta_1^{*l}$ (σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και τον ομόρρου.[54]

Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot; t)$, σε κάποιο σημείο \vec{x}_0 του πεδίου D , δίνεται από την ακόλουθη ολοκληρωματική αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} \vec{u}^*(\vec{x}_0; t) &= \int_S \vec{u}^*(\vec{x}; t) \cdot \vec{\tau}(\vec{x}; t) \cdot \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ &+ \int_S \vec{u}^*(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t) \cdot \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} [[\vec{u}^*(\vec{x}; t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}; t)]]_w \cdot \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}) \times \vec{k}}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

όπου $\vec{\tau}(\cdot; t)$ το εφαπτομενικό διάνυσμα σε κάποιο σημείο της S .

Η συνθήκη (3.26) προκύπτει με παραγωγή ενός δυναμικού διαταραχής $\varphi^*(\cdot; t)$, του οποίου η αναπαράσταση δίνεται από την άμεση διατύπωση (μέσω της δεύτερης ταυτότητας του Green):

$$\vec{u}^*(\vec{x}_0; t) = \nabla_0 \varphi^*(\vec{x}_0; t) \quad (3.27)$$

$$\varphi^*(\vec{x}_0; t) = \int_{S+S_w} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu}(\vec{x}; t) \cdot G(\vec{x}_0 - \vec{x}) \, dS(\vec{x}) - \int_{S+S_w} \varphi^*(\vec{x}; t) \cdot \frac{\partial G}{\partial \nu}(\vec{x}_0 - \vec{x}) \, dS(\vec{x}) \quad (3.28)$$

όπου ο δείκτης (0) στον τελεστή ∇ υποδηλώνει παραγωγή ως προς \vec{x}_0 .

Στην αναπαράσταση (3.26) η ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής εκφράζεται συναρτήσει της εφαπτομενικής και κάθετης διανομής της πάνω στο σύνορο της αεροτομής και του “πηδήματος” της κάθετης διανομής στον ομόρρο. Στον ομόρρο υποθέτουμε ότι η εφαπτομενική συνιστώσα της \vec{u}^* δεν παρουσιάζει ασυνέχεια, ότι δηλαδή η ασυνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας στον ομόρρο οφείλεται αποκλειστικά στη στροβιλότητα γ_w του μη συνεκτικού πεδίου ταχύτητας.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.26) για κάποιο σημείο \vec{x}_0 της S και προβάλλοντας την ταχύτητα στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\tau}_0$ της S , στο συγκεκριμένο σημείο \vec{x}_0 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{u}_\tau^*(\vec{x}_0; t) &= \int_S \vec{u}_\tau^*(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{\nu}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} \, dS(\vec{x}) \\ &+ \int_S \vec{u}_\nu^*(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{\tau}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} \, dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} \llbracket \vec{u}_\nu^*(\vec{x}; t) \rrbracket_w \cdot \frac{\vec{\tau}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} \, dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

όπου $u_\nu^*(\cdot; t) = \vec{u}^*(\cdot; t) \cdot \vec{\nu}(\cdot; t)$ η κάθετη και $u_\tau^*(\cdot; t) = \vec{u}^*(\cdot; t) \cdot \vec{\tau}(\cdot; t)$ η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Η (3.29) αποτελεί μία ολοκληρωματική εξίσωση, που δίνει την εφαπτομενική ταχύτητα στο τυχαίο σημείο της S , ως συνάρτηση μιας διανομής κάθετων ταχυτήτων στην επιφάνεια της αεροτομής και στον ομόρρο. Η επίλυση της (3.29), με τη χρήση της συνοριακής συνθήκης (3.5), δίνει την επιπλέον διανομή της εφαπτομενικής ταχύτητας στην S , η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της παροχής μάζας από το σύνορο (2.64) και τον ομόρρο (2.70) στην περίπτωση της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.

Θέτοντας τις (3.24) και (3.25) στην (3.29) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{u}_\tau^*(\vec{x}_0; t) &= \int_S \vec{u}_\tau^*(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{v}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ &+ \int_S \frac{dm}{ds}(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{\tau}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ &+ \int_{S_w} \frac{d(m^u + m^l)}{ds}(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{\tau}_0 \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Η συνθήκη (3.30) καθορίζει την εφαπτομενική στο σύνορο της αεροτομής συνιστώσα της $\vec{u}^*(\cdot; t)$ έτσι ώστε η κάθετη συνιστώσα αυτής στην αεροτομή και τον ομόρροο να ικανοποιεί τις (3.24) και (3.25).

Η αναπαράσταση του πεδίου $\vec{u}^*(\cdot; t)$ καθορίζει το νόμο αλληλεπίδρασης μεταξύ του συνεκτικού και του μη συνεκτικού προβλήματος. Η ολοκληρωματική αναπαράσταση που ορίζεται από την (3.26) διευκολύνει σημαντικά τη σύγκλιση των εξισώσεων του οριακού στρώματος, εντός της αποκολλημένης περιοχής, σε περιπτώσεις όπου εμφανίζεται ισχυρή αποκόλληση της ροής.

3.4 Η συνθήκη *Kutta* στην ακμή εκφυγής

Η εφαρμογή της εξίσωσης *Bernoulli* για δύο σημεία στην περιοχή της ακμής εκφυγής P_T , όπου το μεν πρώτο βρίσκεται στην πάνω πλευρά της αεροτομής, το δε δεύτερο στην κάτω (σχήμα 3.3), δίνει:

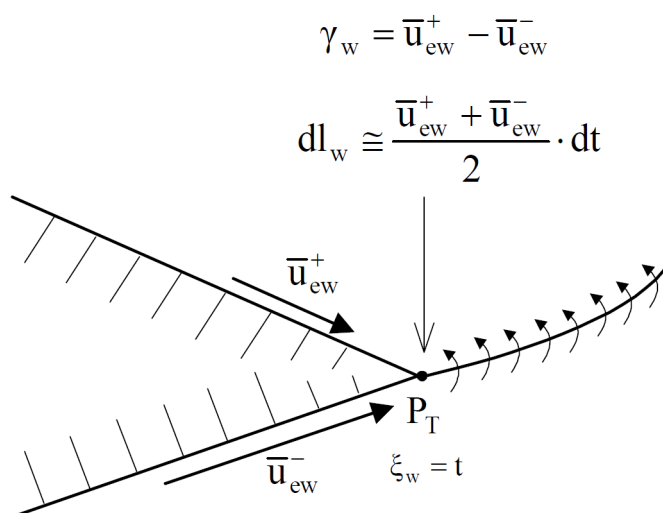
$$\frac{\partial \Phi_w^+}{\partial t} + \frac{p_w^+}{\rho} + \frac{\vec{u}_{ew}^{+2}}{2} - \frac{\vec{U}_{bW}^{+2}}{2} = \frac{\partial \Phi_w^-}{\partial t} + \frac{p_w^-}{\rho} + \frac{\vec{u}_{ew}^{-2}}{2} - \frac{\vec{U}_{bW}^{-2}}{2} \quad (3.31)$$

όπου με + συμβολίζουμε τα μεγέθη που αφορούν το σημείο της πάνω πλευράς και με - της κάτω. Επίσης, Φ είναι το συνολικό δυναμικό της ροής (με βάση τον ορισμό $\vec{u}_e = \nabla \Phi$) και \vec{u}_e είναι η σχετική ταχύτητα της ροής στην επιφάνεια της αεροτομής ($\vec{u}_e = \vec{u} - \vec{U}_b$). Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας της πίεσης (3.8) παίρνουμε:

$$\frac{\vec{u}_{ew}^{-2}}{2} - \frac{\vec{u}_{ew}^{+2}}{2} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_w^+ - \Phi_w^-) \quad (3.32)$$

Η χρονική παράγωγος του δεύτερου μέλους εκφράζει τη χρονική μεταβολή της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή αφού,

$$\Gamma = \Phi_w^+ - \Phi_w^- \quad (3.33)$$



Σχήμα 3.3: Η εφαρμογή της συνθήκης Kutta στην ακμή εκφυγής.[54]

Με τη διαπίστωση αυτή, η (3.32) γίνεται,

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = (\bar{u}_{ew}^+ - \bar{u}_{ew}^-) \frac{\bar{u}_{ew}^+ + \bar{u}_{ew}^-}{2} \quad (3.34)$$

όπου $\bar{u}_e = \vec{u}_e \cdot \vec{\tau}$.

Η παραπάνω σχέση δίνει την έκφραση του ρυθμού μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή. Όμως σύμφωνα με τη συνθήκη του Kelvin (3.7) ο ρυθμός μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή, είναι ίσος και αντίθετος με το ρυθμό παραγωγής στροβιλότητας στον ομόρρο. Δηλαδή,

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) \frac{dl_w}{dt} \quad (3.35)$$

όπου l_w το μήκος του παραγόμενου ομόρρου. Αν όμως λάβουμε υπόψη ότι,

$$\frac{dl_w}{dt} \cong \frac{\bar{u}_{ew}^+ + \bar{u}_{ew}^-}{2} \quad (3.36)$$

από τις (3.34) και (3.35) άμεσα προκύπτουν οι συνθήκες για την ένταση της παραγόμενης στροβιλότητας ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του Kelvin.

$$\gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) = \bar{u}_{ew}^+ - \bar{u}_{ew}^- \quad (3.37)$$

Σε ότι αφορά την εξέλιξη της στροβιλότητας στον ομόρρο, από τη στιγμή που αυτή παράγεται, σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz, διατηρείται υλικά. Έτσι, στο οποιοδήποτε

σημείο του ομόρρου ισχύει,

$$\gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w; t); t) = \gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) \quad (3.38)$$

η δε κινηματική του ομόρρου περιγράφεται από τη συνθήκη (3.6).

Σε ότι αφορά τις γωνίες αποβολής το φύλλο στροβιλότητας εκφεύγει εφαπτομενικά προς την κάτω πλευρά της αεροτομής αν η κυκλοφορία γύρω από αυτή είναι θετική και εφαπτομενικά προς την πάνω αν είναι αρνητική. Η παραπάνω υπόθεση διατυπώθηκε από τους *Basu* και *Hancock* [2] και συνδέεται με το γεγονός ότι στην ακμή εκφυγής και στο πλαίσιο μιας δυναμικής θεώρησης της ροής έχουμε την εμφάνιση σημείου ανακοπής της ταχύτητας στην πάνω πλευρά της αεροτομής όταν η κυκλοφορία είναι θετική και στην κάτω όταν είναι αρνητική με αποτέλεσμα το φύλλο στροβιλότητας να εκφεύγει εφαπτομενικά προς την αντίθετη πλευρά από αυτήν που η ταχύτητα μηδενίζεται.

Κεφάλαιο 4

Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μία συνοπτική περιγραφή του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης, αφού προηγουμένως παρουσιαστεί το πρόβλημα σε διακριτή μορφή. Ακολούθως, γίνεται αναφορά στον τρόπο προσδιορισμού των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Τα παραπάνω αναπτύσσονται εκτενέστερα από το Ριζιώτη [54].

4.1 Το διακριτό πρόβλημα

Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Η αεροτομή χωρίζεται σε N το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα $\Delta S^i, i = 1, N$ τα οποία ορίζουν $N + 1$ σημεία πάνω σε αυτήν, τους κόμβους $\vec{x}_g^I(x_g^I, y_g^I), I = 1, N + 1$. Η αρίθμηση των κόμβων και των τμημάτων ξεκινά από την κάτω πλευρά της αεροτομής, και από την ακμή εκφυγής, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Πάνω σε κάθε τμήμα ΔS^i της αεροτομής ορίζεται το μέσο του $\vec{x}_{cp}^i(x_{cp}^i, y_{cp}^i), i = 1, N$ το οποίο αποτελεί σημείο ελέγχου για την ικανοποίηση των διακριτών εξισώσεων, και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα \vec{v}^i και $\vec{\tau}^i$ αντίστοιχα. Πιο πυκνή διακριτοποίηση λαμβάνεται στην ακμή πρόσπτωσης και την ακμή εκφυγής, στη μεν πρώτη διότι οι κλίσεις των ταχυτήτων είναι μεγάλες, στη δε δεύτερη για την καλύτερη προσέγγιση των ταχυτήτων εκφυγής και επομένως των μεγεθών στον ομόρρου.

Πάνω στο φύλλο του ομόρρου λαμβάνονται N_w το πλήθος τμήματα με μήκη $\Delta S_w^{i_w}, i_w = 1, N_w$. Τα τμήματα αυτά ορίζουν τους κόμβους του πλέγματος του ομόρρου $\vec{x}_{gw}^{I_w}, I_w = 1, N_w + 1$, η αρίθμηση των οποίων ξεκινά από το σημείο εκφυγής του φύλλου. Για κάθε τμήμα ορίζουμε το μέσο του $\vec{x}_{cpw}^{i_w}, i_w = 1, N_w$ (σημείο ελέγχου) και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{v}_w^{i_w}$ και $\vec{\tau}_w^{i_w}$ αντίστοιχα. Πιο πυκνή διακριτοποίηση λαμβάνεται στο τμήμα του ομόρρου που βρίσκεται κοντά στο σημείο εκφυγής, καθώς σε αυτήν την περιοχή η κλίση των διαφορών μεγεθών είναι μεγαλύτερη.

Επιπλέον πάνω στην αεροτομή και στο φύλλο του ομόρρου ορίζουμε μία παράμετρο μήκους

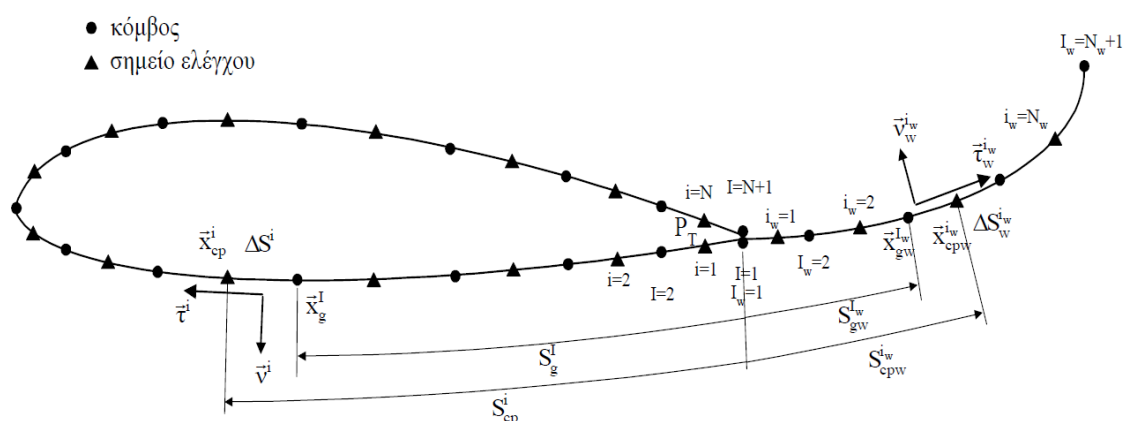
S , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Η τιμή αυτής της παραμέτρου για τον εκάστοτε κόμβο της αεροτομής δίνεται από τη σχέση:

$$S_g^I = \sum_{m=1}^{I-1} \Delta S^m = \sum_{m=1}^{I-1} \sqrt{(y_g^{m+1} - y_g^m)^2 + (x_g^{m+1} - x_g^m)^2}, \quad I = 1, N + 1 \quad (4.1)$$

ενώ για τα σημεία ελέγχου:

$$S_{cp}^i = \sum_{m=1}^{i-1} \Delta S^m + \frac{\Delta S^i}{2} = \sum_{m=1}^{i-1} \sqrt{(y_g^{m+1} - y_g^m)^2 + (x_g^{m+1} - x_g^m)^2} + \sqrt{(y_{cp}^i - y_g^i)^2 + (x_{cp}^i - x_g^i)^2}, \quad i = 1, N \quad (4.2)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η παράμετρος μήκους για τους κόμβους $S_{gw}^{I_w}$, $I_w = 1, N_w + 1$ και τα σημεία ελέγχου $S_{cpw}^{i_w}$, $i_w = 1, N_w$ στον ομόρρου.



Σχήμα 4.1: Διακριτοποίηση της γεωμετρίας.[54]

Διακριτοποίηση των εξισώσεων του οριακού στρώματος

Οι διαφορικές εξισώσεις του οριακού στρώματος διακριτοποιούνται με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών, και επιλύονται στην επιφάνεια της αεροτομής και στον ομόρρου. Η επίλυση τους ξεκινά από το σημείο ανακοπής και οδεύει ξεχωριστά, κατά μήκος της πάνω και της κάτω πλευράς της αεροτομής, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3. Οι εξισώσεις λύνονται μέχρι την ακμή εκφυγής και για τις δύο πλευρές της αεροτομής, και στη συνέχεια στην πάνω και την κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας.

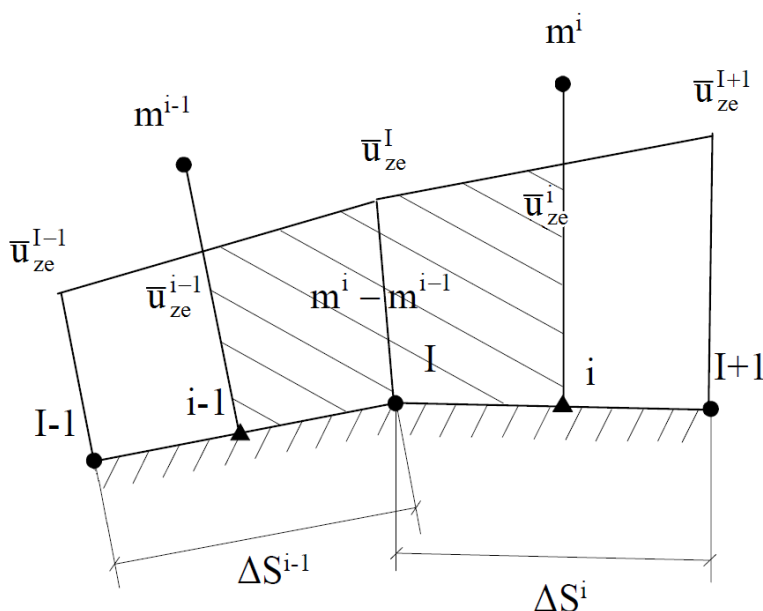
Η εξίσωση της συνέχειας σε μορφή διαφορών γράφεται (σχήμα 4.2):

$$dm = \int \bar{u}_{ze} ds \rightarrow m^i - m^{i-1} = \frac{\bar{u}_{ze}^{i-1} + \bar{u}_{ze}^I}{2} \frac{\Delta S^{i-1}}{2} + \frac{\bar{u}_{ze}^I + \bar{u}_{ze}^i}{2} \frac{\Delta S^i}{2} \quad (4.3)$$

όπου η κάθετη ταχύτητα \bar{u}_{ze} υπολογίζεται στους κόμβους της αεροτομής ενώ οι τιμές του μεγέθους m είναι γνωστές στα σημεία ελέγχου. Θεωρώντας γραμμική μεταβολή της \bar{u}_{ze} πάνω στα τμήματα και εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για το πήδημα της κάθετης ταχύτητας στον ομόρροο καταλήγουμε στην κάτωθι μητρική έκφραση για την κάθετη ταχύτητα,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D^m & 0 \\ 0 & D_w^m \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^m} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} m^i \\ (m^u + m^l)_w^{i_w} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} D^{u_{ze}} & 0 \\ 0 & D_w^{u_{ze}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^{u_{ze}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_{ze}^I \\ \llbracket \bar{u}_{ze} \rrbracket_w^I \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_{ze}} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_{ze} = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{m} \quad (4.4)$$

όπου το μητρώο \mathbf{D}^* εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής και του ομόρρου.



Σχήμα 4.2: Σχήμα διακριτοποίησης για τον υπολογισμό της κάθετης ταχύτητας.[54]

Οι εξισώσεις ορμής, κινητικής ενέργειας και υπολογισμού του σημείου μετάβασης ή του συντελεστή διατμητικών τάσεων, διακριτοποιούνται στο χρόνο χρησιμοποιώντας προς τα πίσω δεύτερης τάξης διαφορές, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα,

$$\frac{dA}{dt} \cong \frac{3A^n - 4A^{n-1} + A^{n-2}}{2\Delta t} \quad (4.5)$$

όπου A η εκάστοτε ποσότητα, n η τρέχουσα χρονική στιγμή και Δt το χρονικό βήμα της αριθμητικής διαδικασίας. Σε ότι αφορά τη διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων, στην περίπτωση της στρωτής ροής χρησιμοποιούνται προς τα πίσω διαφορές ενώ στην περίπτωση της τυρβώδους ροής χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές.

Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν ένα μη γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους, $\underline{x}_v^{ib} = \left\{ \tilde{n} \text{ ή } C_\tau^{1/2}, \delta_1^*, \vartheta_{11}, \tan \beta_{wall}, \bar{u}_{\theta e} \right\}^{ib}$ για κάθε σημείο ελέγχου (ib) της αεροτομής και του ομόρρου. Κάθε εξίσωση του συστήματος εξαρτάται από τις τιμές των παραπάνω αγνώστων μεγεθών σε δύο γειτονικά σημεία ελέγχου. Έτσι αν

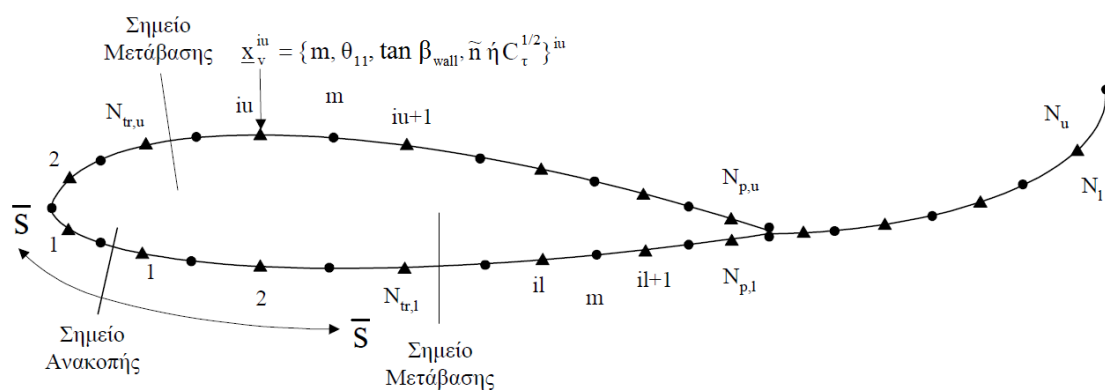
- F_1 Η εξίσωση για το \tilde{n} ή το C_τ ανάλογα με το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης
- F_2 Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά τη χορδική κατεύθυνση
- F_3 Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική διεύθυνση
- F_4 Η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας

το μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_v) = \begin{cases} F_1^{ib}(\underline{x}_v; \underline{x}_v^{ib+1}) \\ F_2^{ib}(\underline{x}_v; \underline{x}_v^{ib+1}) \\ F_3^{ib}(\underline{x}_v; \underline{x}_v^{ib+1}) \\ F_4^{ib}(\underline{x}_v; \underline{x}_v^{ib+1}) \end{cases} = 0, \quad i = 0, N_b - 1, b = u, l \quad (4.6)$$

όπου \mathbf{x}_v το συνολικό διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων του οριακού στρώματος και N_u, N_l ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου της πάνω και της κάτω πλευράς της αεροτομής και του ομόρρου.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, μέσω των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής η ταχύτητα $\bar{u}_{\theta e}$ εκφράζεται συναρτήσει της ποσότητας m . Επομένως η $\bar{u}_{\theta e}$ αποτελεί εξαρτημένη μεταβλητή για τις εξισώσεις του οριακού στρώματος. Έτσι το διάνυσμα των αγνώστων σε κάθε κόμβο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\underline{x}_v^{ib} = \left\{ \tilde{n} \text{ ή } C_\tau^{1/2}, \vartheta_{11}, \tan \beta_{wall}, m \right\}^{ib}$, όπου η $\bar{u}_{\theta e}$ απαλείφεται και το πάχος μετατόπισης δ_1^* αντικαθίσταται από το μέγεθος m για λόγους που διευκολύνουν τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσης.



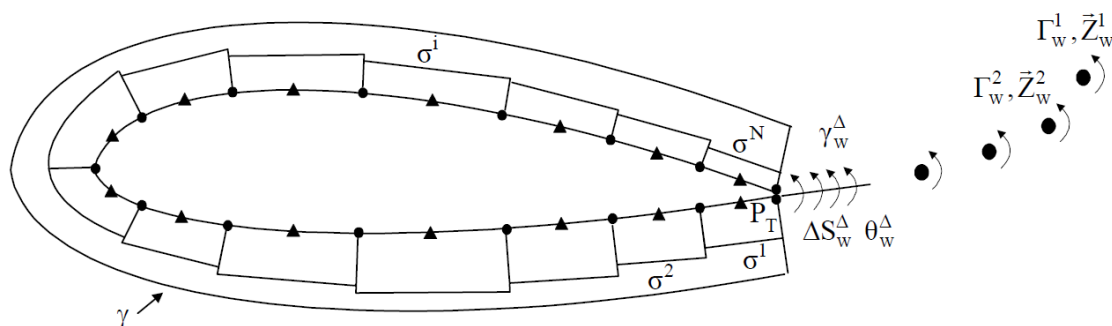
Σχήμα 4.3: Συμβολισμοί διακριτών εξισώσεων οριακού στρώματος.[54]

Διακριτοποίηση των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής

Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής λαμβάνουμε τμηματικά σταθερή διανομή πηγών σ και στροβιλότητας γ πάνω στο σύνορο της αεροτομής. Για τις πηγές, υποθέτουμε N διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας σ^i , $i = 1, N$ για κάθε τμήμα ΔS^i της αεροτομής. Η στροβιλότητα γ λαμβάνει ένα βαθμό ελευθερίας κατά μήκος του συνόρου S (σχήμα 4.4). Για τη στροβιλότητα του ομόρρου υποθέτουμε ότι τα κοντινά τμήματα αυτού, στα οποία διανέμεται η στροβιλότητα που παράγεται από την ακμή εκφυγής P_T τη χρονική στιγμή t , και για χρόνο Δt , φέρει σταθερή ένταση γ_w^Δ . Το τμήμα αυτό του ομόρρου λαμβάνεται ευθύγραμμο με μήκος ΔS_w^Δ και κατεύθυνση θ_w^Δ . Για το μακρινό ομόρρου λαμβάνεται μία στοιχειακή προσέγγιση της μορφής:

$$\gamma_w(\vec{x}_w; t) = \sum_{k=1}^K \Gamma_w^k \cdot \delta(\vec{x}_w - \vec{Z}_w^k) \quad (4.7)$$

όπου Γ_w^k οι σημειακές δίνες που απαρτίζουν το φύλλο της ακμής εκφυγής, K το συνολικό πλήθος των δινών και \vec{Z}_w^k οι θέσεις αυτών (σχήμα 4.4). Οι δίνες του μακρινού ομόρρου κινούνται υλικά, με την ταχύτητα του πεδίου ροής, οι δε εντάσεις τους, βάσει του θεωρήματος *Helmholtz*, όπως εκφράζεται από τη σχέση (3.38) διατηρούνται αμετάβλητες στο χρόνο. Επομένως σε κάθε χρονική στιγμή t μόνο η ένταση της στροβιλότητας του κοντινού τμήματος του ομόρρου είναι άγνωστη, ενώ οι εντάσεις των σημειακών δινών του μακρινού ομόρρου είναι γνωστές από προηγούμενους χρόνους.



Σχήμα 4.4: Οι διακριτοί βαθμοί ελευθερίας της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.[54]

4.2 Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης γίνεται με βηματική ολοκλήρωση στο χρόνο, σε διαδοχικά χρονικά βήματα Δt . Η διαδικασία ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ με την επίλυση της μόνιμης, ασυμπίεστης και μη συνεκτικής ροής γύρω από την αεροτομή, με σκοπό τον προσδιορισμό της αρχικής κυκλοφορίας γύρω από αυτή, η οποία αποτελεί αρχική συνθήκη του προβλήματος. Στη συνέχεια και σε κάθε χρονικό βήμα Δt , οι μη γραμμικές εξισώσεις της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής όπως και αυτές του οριακού στρώματος λύνονται ταυτόχρονα με τη χρήση επαναληπτικού σχήματος για τη σύγκλιση της γεωμετρίας του κοντινού ομόρρου.

Τα άγνωστα μεγέθη της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής, σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη ειπωθεί, συνοψίζονται στις N τμηματικά σταθερές διανομές πηγών σ^i , στην ένταση της στροβιλότητας πάνω στην αεροτομή γ , στην ένταση της στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου γ_w^Δ , στη γεωμετρία του κοντινού ομόρρου ΔS_w^Δ , θ_w^Δ και στις N τιμές της εφαπτομενικής ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης u_τ^{*i} . Οι εξισώσεις της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής γραμμικοποιούνται με την υπόθεση ότι η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου είναι γνωστή εκ των προτέρων, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Με βάση την παραπάνω υπόθεση οι εξισώσεις (3.23), (3.37), (3.35) και (3.30) γραμμένες σε διακριτή μορφή συνιστούν ένα γραμμικό σύστημα $2N + 2$ εξισώσεων. Από την αντιστροφή του συστήματος των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής προκύπτει μία γραμμική εξάρτηση των βαθμών ελευθερίας αυτής συναρτήσει της ποσότητας $m = \bar{u}_{\theta e} \delta_1^*$, δηλαδή συναρτήσει βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων οριακού στρώματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύστημα των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής γράφεται:

$$\begin{bmatrix}
 \text{Συνθήκη μη εισχώρησης} \\
 \text{Συνθήκη Κατα στο } P_T \\
 \text{Συνθήκη Κελύφης} \\
 \text{Συνθήκη για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \sigma^1 \\
 \sigma^2 \\
 \dots \\
 \sigma^N \\
 \gamma \\
 \gamma_w^\Delta \\
 u_\tau^{*1} \\
 \dots \\
 u_\tau^{*N}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \text{Θ} & \text{Θ} \\
 \text{Θ} & \text{Θ}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 m^1 \\
 \dots \\
 m^N \\
 m_w^N
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \text{Θ} \\
 \text{Θ}
 \end{bmatrix}$$

όπου η διαγράμμιση στην παραπάνω σχηματική αναπαράσταση του συστήματος υποδηλώνει τμήματα του μητρώου που είναι πλήρη.

Οπότε από την,

$$\mathbf{A}_{\text{inv}}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{x}_{\text{inv}}^{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{inv}}^0 \\ \mathbf{A}_{\text{inv}}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{\text{inv}}^{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\text{inv}}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{inv}}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\text{inv}}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{B}_{\text{inv}}^{\text{eq}} \quad (4.8)$$

παίρνουμε:

$$\mathbf{x}_{\text{inv}}^{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{inv}}^0 \\ \mathbf{u}_{\tau}^* \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{inv}}^{\text{eq}}{}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{\text{inv}}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{A}_{\text{inv}}^{\text{eq}}{}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\text{inv}}^{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{inv}}^0 \\ \mathbf{D}_{\text{inv}}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{inv}}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και των εξισώσεων του οριακού στρώματος επιτυγχάνεται μέσω της εξάρτησης των βαθμών ελευθερίας της μη συνεκτικής ροής από την παράμετρο m . Με αντικατάσταση της σχέσης (4.9) στις διακριτοποιημένες σχέσεις υπολογισμού της εφαπτομενικής ταχύτητας παίρνουμε ότι:

$$\bar{\mathbf{u}}_{\theta e} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{F} \quad (4.10)$$

Η παραπάνω γραμμική σχέση εκφράζει το νόμο αλληλεπίδρασης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής.

Με την (4.10) η ταχύτητα $\bar{\mathbf{u}}_{\theta e}$ απαλείφεται από το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος οι οποίες τελικά γράφονται στη μορφή:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_v) = \left\{ \begin{array}{l} F_1^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib-1}, \vartheta_{11}^{ib-1}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib}, \vartheta_{11}^{ib}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib}, \mathbf{m}^T) \\ F_2^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib-1}, \vartheta_{11}^{ib-1}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib}, \vartheta_{11}^{ib}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib}, \mathbf{m}^T) \\ F_3^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib-1}, \vartheta_{11}^{ib-1}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib}, \vartheta_{11}^{ib}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib}, \mathbf{m}^T) \\ F_4^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib-1}, \vartheta_{11}^{ib-1}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_{\tau}^{1/2ib}, \vartheta_{11}^{ib}, \tan \beta_{\text{wall}}^{ib}, \mathbf{m}^T) \end{array} \right\} = 0, \quad i = 0, N_b - 1, b = u, l \quad (4.11)$$

Το μη γραμμικό σύστημα (4.11) επιλύεται με τη μέθοδο *Newton-Raphson*. Σημειώνεται ότι η μορφή του γραμμικού τελεστή \mathbf{D} στο νόμο αλληλεπίδρασης (4.10) παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση της μεθόδου *Newton-Raphson* ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε ροές με ισχυρή αποκόλληση. Για να επιτευχθεί η σύγκλιση απαιτείται το μητρώο \mathbf{D} να είναι θετικά ορισμένο με ισχυρή κύρια διαγώνιο. Η παραπάνω απαίτηση επιτυγχάνεται μέσω της ολοκληρωματικής αναπαράστασης που χρησιμοποιείται στην έκφραση της ταχύτητας συνεκτικής διάρθησης.

Ο αλγόριθμος της επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης ολοκληρώνεται με την επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας του κοντινού ομόρρου (μήκος και κατεύθυνση). Σε κάθε χρονική στιγμή η επαναληπτική δια-

δικασία αυτή ξεκινά λαμβάνοντας τα παραπάνω δεδομένα από την προηγούμενη χρονική στιγμή. Στο τέλος κάθε επανάληψης που περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων (4.9) και (4.11) τα δεδομένα αυτά επανεκτιμώνται η δε επαναληπτική διαδικασία τερματίζει όταν επιτευχθεί σύγκλιση. Με τη διαδικασία αυτή των εσωτερικών επαναλήψεων εκμεταλλευόμεστε τη γραμμικότητα του συστήματος των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής ώστε να μειώσουμε το μέγεθος του συστήματος των μη γραμμικών εξισώσεων που πλέον περιλαμβάνει μόνο τις εξισώσεις οριακού στρώματος.

4.3 Υπολογισμός των δυνάμεων

Για τον υπολογισμό της πίεσης κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής εφαρμόζουμε την εξίσωση *Bernoulli* η οποία στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής γράφεται:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}_e^2}{2} + \vec{u}_e \cdot \vec{U}_b + \frac{p}{\rho} = c(t) \quad (4.12)$$

Η παραπάνω εξίσωση, εκφρασμένη ως προς τη σχετική ταχύτητα $\vec{u}_e = \vec{u} - \vec{U}_b$ γίνεται,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}_e^2}{2} - \frac{\vec{U}_b^2}{2} + \frac{p}{\rho} = c(t) \quad (4.13)$$

όπου στις (4.12) και (4.13) Φ είναι το συνολικό δυναμικό της ροής ($\vec{u}_e = \nabla \Phi$), σε αντίθεση με το δυναμικό διαταραχής φ που ορίστηκε στην παράγραφο (3.2).

Υποθέτοντας ως συνθήκες αναφοράς την πίεση και την ταχύτητα στο άπειρο $p_\infty(t)$, $\vec{U}_\infty(t)$ παίρνουμε,

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{\vec{U}_\infty^2}{2} - \frac{\vec{u}_e^2}{2} + \frac{\vec{U}_b^2}{2} - \frac{\partial(\Phi - \Phi_\infty)}{\partial t} \quad (4.14)$$

όπου $\Phi_\infty = U_{\infty x} \cdot x + U_{\infty y} \cdot y$ το δυναμικό στο άπειρο.

Για τον υπολογισμό του συνολικού δυναμικού του πεδίου ροής υποθέτουμε ότι αυτό συντίθεται από το άθροισμα των στοιχειωδών δυναμικών των διανομών ιδιόμορφων σημείων που λαμβάνονται κατά μήκος της αεροτομής και του ομόρρου,

$$\Phi = \Phi_\infty + \varphi_\sigma + \varphi_\gamma + \varphi_{\gamma wake} + \varphi^* \quad (4.15)$$

όπου φ_σ το δυναμικό της διανομής πηγών κατά μήκος της αεροτομής, φ_γ το δυναμικό της διανομής στροβιλότητας στην αεροτομή, $\varphi_{\gamma wake}$ το δυναμικό της στροβιλότητας του ομόρρου και φ^* το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης. Το φ_σ υπολογίζεται μέσω της ολοκληρωματικής έκφρασης (3.15) για την τμηματικά σταθερή διανομή πηγών. Σε ότι αφορά το δυναμικό που επάγεται από το στροβιλό τμήμα της ροής ορίζεται μία διανομή

διπόλων ισοδύναμη προς τη διανομή στροβιλότητας, η οποία λαμβάνεται στην αεροτομή και στο φύλλο του ομόρρου. Η ισοδυναμία μιας διανομής στροβιλότητας με μια διανομή διπόλων εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$\gamma = \llbracket \vec{u} \rrbracket = \llbracket \nabla_s \varphi \rrbracket = \nabla_s \llbracket \varphi \rrbracket = -\nabla_s \mu \quad (4.16)$$

όπου το ∇_s είναι η παράγωγος κατά μήκος καμπύλης s .

Το δυναμικό στο τυχαίο σημείο \vec{x}_0 του πεδίου ροής από μια συνεχή διανομή διπόλων κατά μήκος της αεροτομής και του ομόρρου, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(\vec{x}_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_S \mu(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS(\vec{x}) \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{S_w} \mu_w(\vec{x}; t) \cdot \frac{\vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|^2} dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Από την ολοκλήρωση της τμηματικά σταθερής διανομής στροβιλότητας κατά μήκος της αεροτομής προκύπτει μία τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mu^{I+1} = \mu^I - \gamma^i \Delta S^i \quad (4.18)$$

Η ολοκλήρωση της (4.18) ξεκινά από την ακμή εκφυγής στην κάτω πλευρά της αεροτομής όπου υποθέτουμε ότι $\mu^1 = 0$ και οδεύει κατά μήκος του στερεού συνόρου μέχρι την ακμή εκφυγής στην πάνω πλευρά.

Για την ολοκλήρωση της (4.18) κατά μήκος του ομόρρου υποθέτουμε πλέγμα ως κόμβοι του οποίου λαμβάνονται τα μέσα των αποστάσεων μεταξύ δύο διαδοχικών στο χρόνο δινών (σχήμα 4.5). Από την ολοκλήρωση της στροβιλότητας του ομόρρου λαμβάνεται επίσης μια γραμμική διανομή διπόλων σύμφωνα με τη σχέση,

$$\mu_w^{I+1} = \mu_w^I - \Gamma_w^i \quad (4.19)$$

η ολοκλήρωση της οποίας ξεκινά από την ακμή εκφυγής, όπου ως συνοριακή συνθήκη λαμβάνεται $\mu_w^1 = -\gamma S_g^{N+1}$.

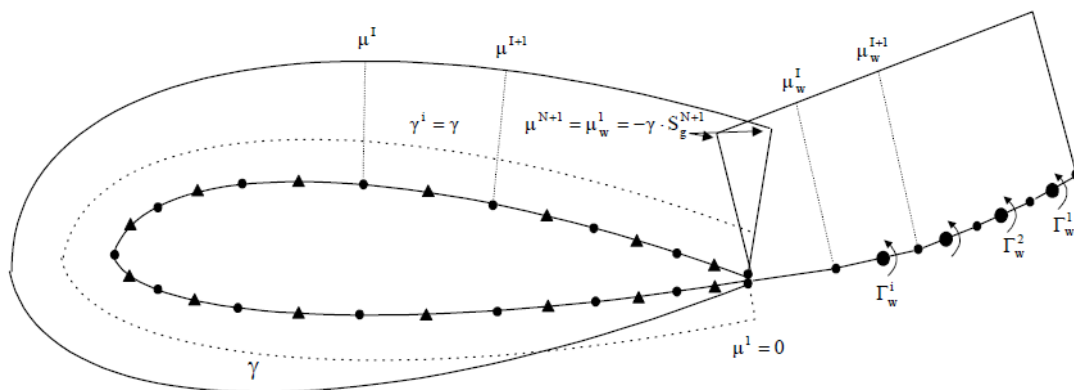
Τέλος σε ότι αφορά το δυναμικό φ^* της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης υπολογίζεται με απευθείας ολοκλήρωσης του αντίστοιχου πεδίου ταχύτητας u_τ^* κατά μήκος της αεροτομής.

Για τον υπολογισμό της χρονικής παραγωγού του δυναμικού λαμβάνονται προς τα πίσω

διαφορές πρώτης τάξης,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cong \frac{\Phi(t) - \Phi(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.20)$$

Τα αεροδυναμικά φορτία πάνω στην αεροτομή υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά μήκος αυτής των δυνάμεων πίεσης και των δυνάμεων τριβής.



Σχήμα 4.5: Ορισμός της ισοδύναμης διανομής διπόλων.[54]

Σε ότι αφορά την αντίσταση της αεροτομής, πιο ακριβής τρόπος υπολογισμού της, τουλάχιστον στην περίπτωση της μόνιμης ροής, είναι αυτός που βασίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής. Με εφαρμογή του ολοκληρωματικού θεωρήματος της ορμής σε ένα χωρίο που περικλείει την αεροτομή παίρνουμε ότι:

$$c_D = 2 \frac{\vartheta_\infty}{c} \quad (4.21)$$

όπου c η χορδή της αεροτομής και ϑ_∞ η παράμετρος πάχους ορμής του οριακού στρώματος, κατάντι της αεροτομής και σε μεγάλη απόσταση από αυτήν. Το ϑ_∞ συσχετίζεται με το πάχος ορμής ϑ_w σε κάποια άλλη θέση στην ομόρρου όπου η ταχύτητα είναι $u_{\theta e}$ μέσω της σχέσης του Young [51],

$$\vartheta_\infty = \vartheta_w \left(\frac{u_{\theta e}}{U_\infty} \right)^{(H+5)/2} \quad (4.22)$$

οπότε:

$$c_D = 2 \frac{\vartheta_w}{c} \left(\frac{u_{\theta e}}{U_\infty} \right)^{(H+5)/2} \quad (4.23)$$

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

5.1 Αξιολόγηση του εμπειρικού πλαισίου

Η ολοκλήρωση κατά την κάθετη στην επιφάνεια της αεροτομής κατεύθυνση συνεπάγεται απώλεια πληροφορίας σχετικά με τη συμπεριφορά της ροής στην περιοχή του οριακού στρώματος, η οποία συμπληρώνεται από κάποιο εμπειρικό πλαίσιο. Το εμπειρικό πλαίσιο αποτελεί σημαντικό κομμάτι κάθε ολοκληρωματικής μεθόδου υπολογισμού οριακών στρωμάτων και στην παρούσα παράγραφο γίνεται μια προσπάθεια σύγκρισης και αξιολόγησης των εμπειρικών πλαισίων που προτείνονται για το κλείσιμο του προβλήματος, όπως παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Η πληροφορία αυτή συνίσταται ουσιαστικά από τα προφίλ ταχύτητας στην περιοχή του οριακού στρώματος, ένα για κάθε μία από τις συνιστώσες της ροής. Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, βασική υπόθεση για τη μελέτη του τριδιάστατου χαρακτήρα της ροής στα πλαίσια μιας ψευδοτριδιάστατης μεθόδου, είναι η συσχέτιση της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας με αυτήν της χορδικής. Για τη συσχέτιση αυτή χρησιμοποιούνται τα προφίλ ταχύτητας που έχουν προταθεί από τον *Mager* (2.86) και τον *Johnston* (2.88), ενώ για τη χορδική συνιστώσα της ροής χρησιμοποιούνται τα προφίλ του *Swafford* (2.85) και των *Lakshminarayana & Govindan* (2.90). Οι συνδυασμοί των προφίλ ταχύτητας που εξετάζονται παρατίθενται συνοπτικά στον πίνακα 5.1.

Οι περιπτώσεις 1 και 2 διαφέρουν όσον αφορά τη σχέση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πάχους του οριακού στρώματος. Συγκεκριμένα, το πάχος του οριακού στρώματος προκύπτει αντίστοιχα για κάθε περίπτωση από τις σχέσεις,

$$\delta = \vartheta_{11} \frac{H(H+1)}{(H-1)} \quad (5.1)$$

$$\delta = \vartheta_{11} \left(3.15 + \frac{1.72}{H_k - 1} \right) + \delta_1^* \quad (5.2)$$

ενώ όσον αφορά τα προφίλ ταχύτητας του *Swafford* το πάχος του οριακού στρώματος υπολογίζεται αριθμητικά ως η τιμή της κάθετης στην επιφάνεια της αεροτομής απόστασης στην οποία η ροή έχει αναπτυχθεί πλήρως ($u_\theta \simeq 0.99u_{\theta e}$).

	Ακτινικό προφίλ	Χορδικό προφίλ
Περίπτωση 1	<i>Mager</i>	<i>Lakshminarayana & Govindan</i>
Περίπτωση 2	<i>Mager</i>	<i>Lakshminarayana & Govindan</i>
Περίπτωση 3	<i>Mager</i>	<i>Swafford</i>
Περίπτωση 4	<i>Johnston</i>	<i>Swafford</i>

Πίνακας 5.1: Χρησιμοποιούμενα προφίλ ταχύτητας για την εξαγωγή σχέσεων για τα πάχη του οριακού στρώματος κατά την ακτινική διεύθυνση.

Χαρακτηριστικά μεγέθη οριακού στρώματος

Ανεξάρτητα από το ακτινικό προφίλ ταχύτητας που επιλέγεται για το κλείσιμο του προβλήματος οι σχέσεις υπολογισμού των σχετικών με την ακτινική ροή χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος λαμβάνουν τη μορφή:

$$\delta_2^* = F_2(\cdot; \cdot) \tan \beta_{wall} \quad (5.3)$$

$$\vartheta_{21} = F_{21}(\cdot; \cdot) \tan \beta_{wall} \quad (5.4)$$

$$\vartheta_{22} = F_{22}(\cdot; \cdot) \tan^2 \beta_{wall} \quad (5.5)$$

Ειδικότερα, για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, οι βοηθητικές συναρτήσεις $F_2(\cdot; \cdot)$, $F_{21}(\cdot; \cdot)$ και $F_{22}(\cdot; \cdot)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$F_2(\cdot; \cdot) = \begin{cases} F_2(H, \vartheta_{11}) & = -\frac{16H\vartheta_{11}}{(H-1)(H+3)(H+5)} \\ F_2(H, \delta) & = -\frac{16\delta}{(H+1)(H+3)(H+5)} \\ F_2(H, Re_{\vartheta_{11}}) & = -\int_0^\delta \frac{u_\theta}{u_{\theta e}} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2 dz \\ F_2(H, Re_{\vartheta_{11}}, \beta_{wall}, M_e) & = -\frac{\sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1+0.18M_e^2)}}{0.1 - \sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1+0.18M_e^2)}} \vartheta_{11} (H - H_{\theta_e}) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$F_{21}(\cdot; \cdot) = \begin{cases} F_{21}(H, \vartheta_{11}) & = -\frac{2\vartheta_{11}}{(H-1)(H+2)} \\ F_{21}(H, \delta) & = -\frac{2\delta}{H(H+1)(H+2)} \\ F_{21}(H, Re_{\vartheta_{11}}) & = -\int_0^\delta \left(\frac{u_\theta}{u_{\theta e}}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2 dz \\ F_{21}(H, Re_{\vartheta_{11}}, \beta_{wall}, M_e) & = -\frac{\sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1+0.18M_e^2)}}{0.1 - \sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall} (1+0.18M_e^2)}} \vartheta_{11} \end{cases} \quad (5.7)$$

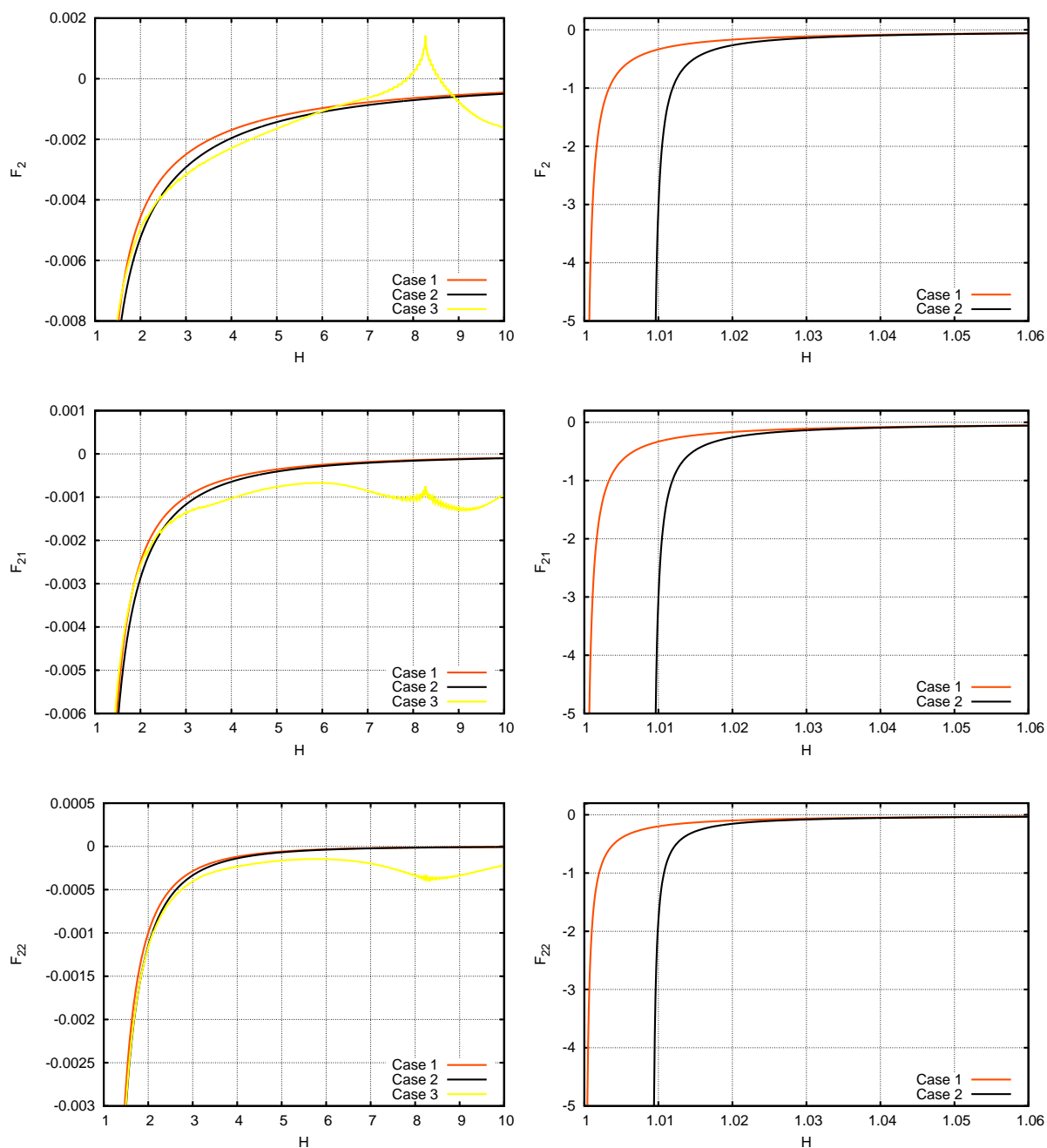
$$F_{22}(\cdot; \cdot) = \begin{cases} F_{22}(H, \vartheta_{11}) & = -\frac{24\vartheta_{11}}{(H-1)(H+2)(H+3)(H+4)} \\ F_{22}(H, \delta) & = -\frac{24\delta}{H(H+1)(H+2)(H+3)(H+4)} \\ F_{22}(H, Re_{\vartheta_{11}}) & = -\int_0^\delta \left(\frac{u_\theta}{u_{\theta_e}}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^4 dz \\ F_{22}(H, Re_{\vartheta_{11}}, \beta_{wall}, M_e) & = \left(\frac{\sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall}(1+0.18M_e^2)}}{0.1 - \sqrt{C_{f\theta} \cos \beta_{wall}(1+0.18M_e^2)}}\right)^2 \vartheta_{11} (1 + H - H\theta_e) \end{cases} \quad (5.8)$$

Για την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται το ακτινικό προφίλ ταχύτητας του *Johnston*, είναι προφανές ότι οι σχέσεις υπολογισμού των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος είναι μη γραμμικές ως προς τη γωνία β_{wall} , κάτι που συνεπάγεται την αδυναμία έκφρασης των βοηθητικών συναρτήσεων $F_2(\cdot; \cdot)$, $F_{21}(\cdot; \cdot)$ και $F_{22}(\cdot; \cdot)$ ανεξάρτητα της γωνίας που σχηματίζει η ροή.

Προκειμένου να υπάρξει κοινή εποπτεία των υπόλοιπων τριών σχέσεων πρέπει να γίνουν κάποιες υποθέσεις ώστε αυτές να εκφραστούν συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H και μιας δεύτερης κοινής μεταβλητής, έστω του πάχους ορμής ϑ_{11} . Έτσι για τον υπολογισμό του πάχους δ του οριακού στρώματος χρησιμοποιείται η σχέση (5.2) ενώ για τον αριθμό *Reynolds* ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}}$ γίνεται η υπόθεση ότι η μη συνεκτική ταχύτητα ισούται με την ταχύτητα της επ' άπειρον ροής $u_{\theta_e} \simeq U_\infty$. Υποθέτοντας επιπλέον τον αριθμό *Reynolds* της ροής $Re = 1 \cdot 10^6$ αλλά και την επ' άπειρον ταχύτητα $U_\infty = 1m/s$ προσδιορίζεται εύκολα η σχέση συσχετισμού του αριθμού *Reynolds* ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}}$ με το πάχος ορμής ϑ_{11} . Στο σχήμα 5.1 παρουσιάζονται γραφικά οι σχέσεις (5.6-5.8) συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H για πάχος ορμής $\vartheta_{11} = 0.005$.

Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα 5.1 οι βοηθητικές συναρτήσεις για τις περιπτώσεις 1 και 2 παρουσιάζουν παρόμοια μορφή ενώ για σημαντικό εύρος τιμών του συντελεστή σχήματος H προσεγγίζουν και τις καμπύλες που έχουν εξαχθεί χρησιμοποιώντας το προφίλ του *Swafford* (περίπτωση 3). Καθώς όμως οι τιμές του συντελεστή σχήματος αυξάνουν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές και αλλαγή της κλίσης των βοηθητικών συναρτήσεων για την τρίτη περίπτωση.

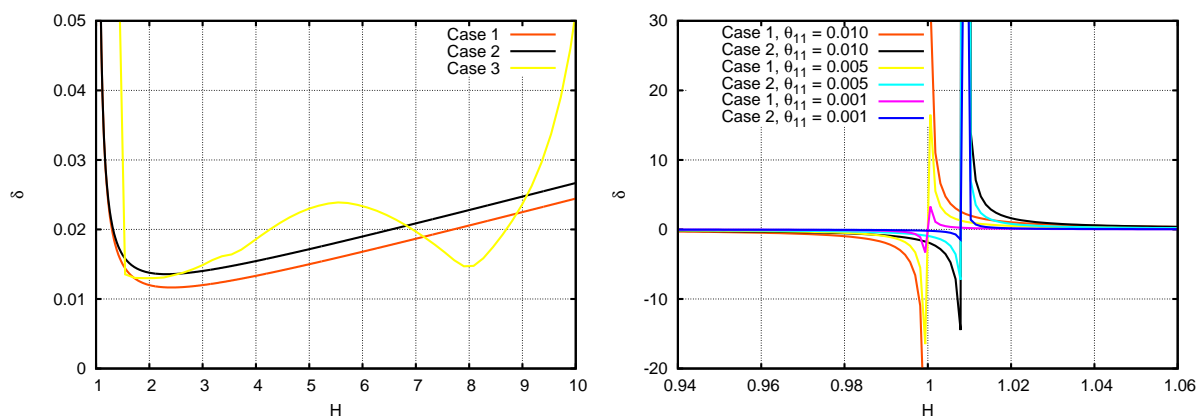
Γεννάται εύλογα λοιπόν το ερώτημα σχετικά με την αιτία αυτής της διαφοροποίησης. Αναφέρεται επιπροσθέτως όσων παρουσιάζονται στα σχήματα, η ολοένα και μεγαλύτερη απόκλιση που παρουσιάζουν οι σχέσεις για περαιτέρω αύξηση των τιμών του συντελεστή σχήματος H . Μια πρώτη διερεύνηση αφορά τις εκάστοτε σχέσεις υπολογισμού του πάχους δ του οριακού στρώματος. Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται το πάχος του οριακού στρώματος για τις τρεις περιπτώσεις ((5.1),(5.2), αριθμητική ολοκλήρωση των προφίλ του *Swafford*) συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H για αριθμό *Reynolds* ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}} = 2000$. Επιπλέον, οι δύο πρώτες περιπτώσεις συγκρίνονται για διαφορετικές τιμές του πάχους ορμής ώστε να επιβεβαιωθεί η ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων από αυτό. Είναι άλλωστε σαφές



Σχήμα 5.1: Κατανομές των $F_2(\cdot; \cdot)$, $F_{21}(\cdot; \cdot)$, $F_{22}(\cdot; \cdot)$ συναρτήσεων του συντελεστή σχήματος H για πάχος ορμής $\vartheta_{11} = 0.005$ για τις διαφορετικές περιπτώσεις εμπειρικών πλαισίων.

από τις μαθηματικές εκφράσεις των σχέσεων υπολογισμού τους ότι τα ακτινικά μεγέθη του οριακού στρώματος συναρτώνται γραμμικώς της δεύτερης παραμέτρου τους.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 5.2, οι σχέσεις (5.1) και (5.2) δίνουν σύμφωνα αποτελέσματα σε όλο το εύρος τιμών του συντελεστή σχήματος H που εξετάζεται, κάτι που δεν μπορεί να ειπωθεί για το πάχος του οριακού στρώματος όπως υπολογίζεται κατά την ολοκλήρωση των προφίλ του Swafford. Μάλιστα, η κατανομή που ακολουθεί είναι παρόμοια με αυτή των



Σχήμα 5.2: Κατανομή του πάχους δ του οριακού στρώματος συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H και του πάχους ορμής ϑ_{11} για τις διαφορετικές περιπτώσεις εμπειρικών πλαισίων.

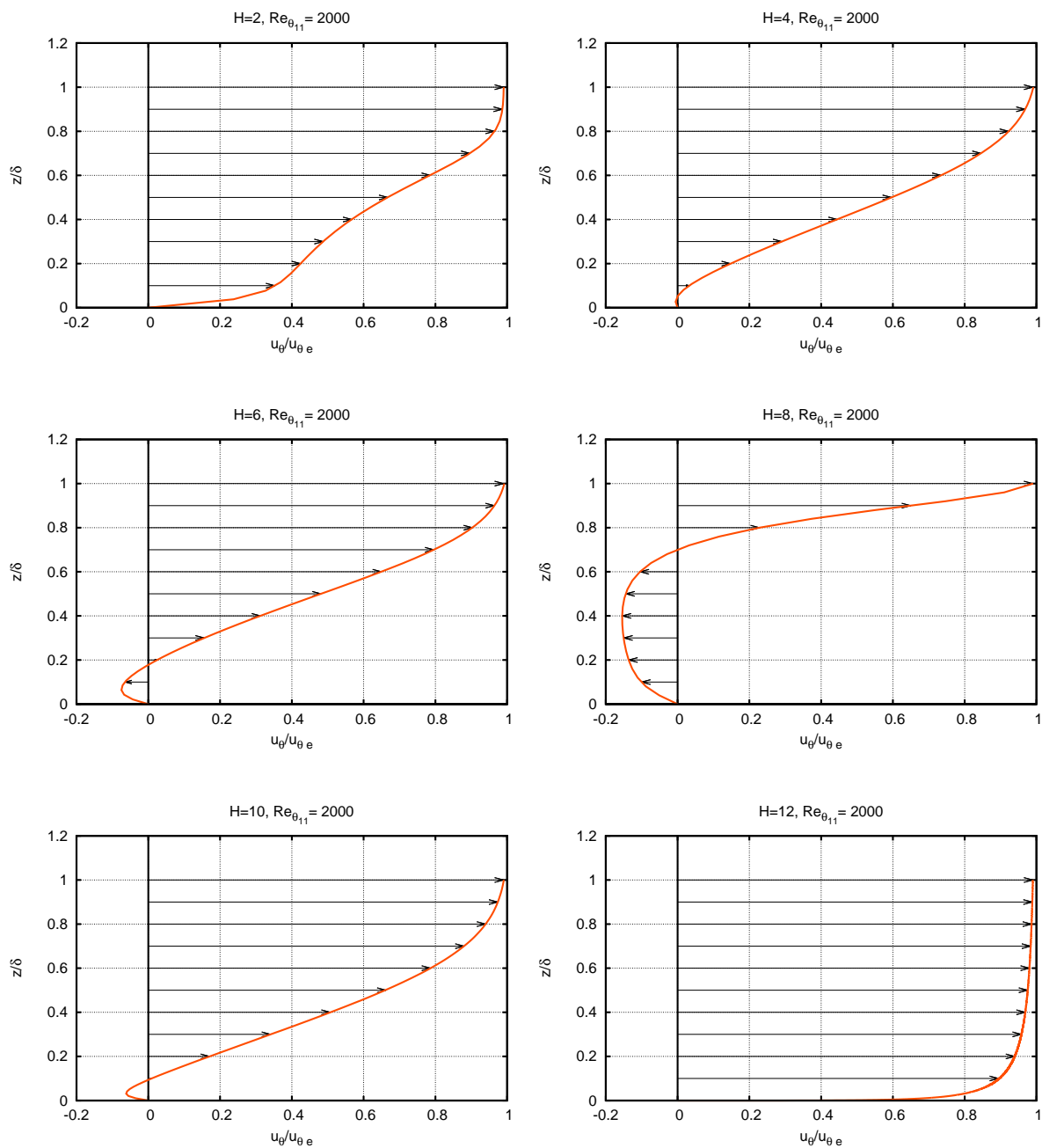
αντίστοιχων βοηθητικών συναρτήσεων (σχήμα 5.1). Δίνεται έτσι η αφορμή για τη διερεύνηση και αξιολόγηση των προφίλ ταχύτητας του *Swafford*.

Το προφίλ ταχύτητας του *Swafford*

Τα προφίλ του *Swafford* είναι διπαραμετρικά προφίλ ($u_\theta/u_{\theta_e} = f(H, Re_{\vartheta_{11}})$) που έχουν εξαχθεί για τον υπολογισμό αποκολλημένων τυρβωδών οριακών στρωμάτων ύστερα από συσχετίσεις με πειραματικά αποτελέσματα. Τα πειράματα αυτά όμως δεν έχουν διεξαχθεί για περιπτώσεις ισχυρής αποκόλλησης (όπως εμφανίζεται στις εφαρμογές που μελετώνται), με αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές του συντελεστή σχήματος H να παρουσιάζονται σημαντικές ανακρίβειες. Τα παραπάνω αποτυπώνονται και στο σχήμα 5.2 όπου το πάχος του οριακού στρώματος παρουσιάζεται γραφικά συναρτήσει του συντελεστή σχήματος. Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζονται τα προφίλ ταχύτητας που προκύπτουν για διάφορες τιμές του συντελεστή σχήματος H και αριθμό *Reynolds* ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}} = 2000$.

Παρατηρούμε ότι για ροές με ισχυρή αποκόλληση και ειδικότερα για $H > 7$ τα προφίλ ταχύτητας που προκύπτουν δεν παρουσιάζουν την αναμενόμενη μορφή (η ροή φαίνεται να επανακολλάται) και ως συνέπεια τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος που εξάγονται ολοκληρώνοντας τα προφίλ αυτά δεν υπολογίζονται σωστά. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως αυτό οφείλεται στο σχετικά μικρό εύρος πειραματικών δεδομένων με βάση τα οποία τα προφίλ συσχετίστηκαν και εξήχθησαν. Έτσι δε συνίσταται να ολοκληρώνονται αριθμητικά για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος για τιμές των παραμέτρων έξω από την περιοχή αυτή.

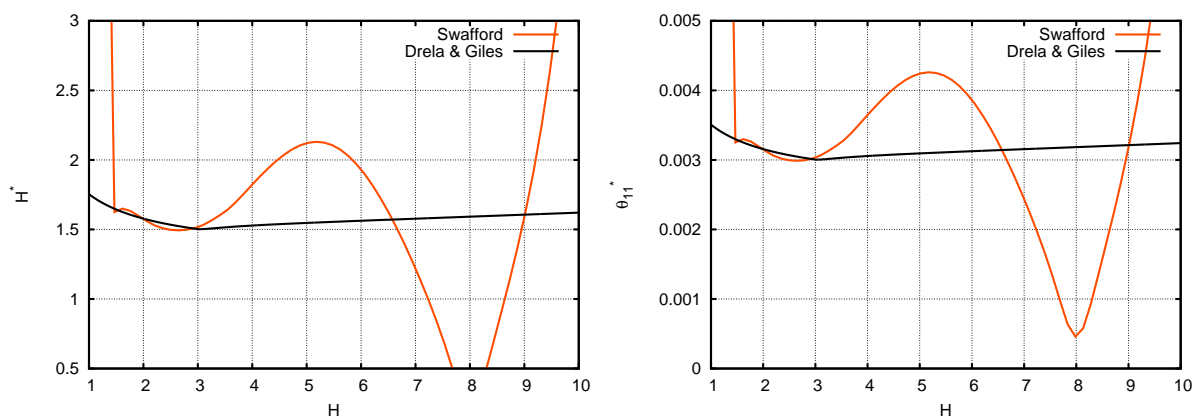
Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω αδυναμία των προφίλ του *Swafford* ακολουθεί μια διερεύνηση για τα εξαγόμενα από τα προφίλ αυτά χορδικά χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος. Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζονται ο συντελεστής κινητικής ενέργειας H^* και



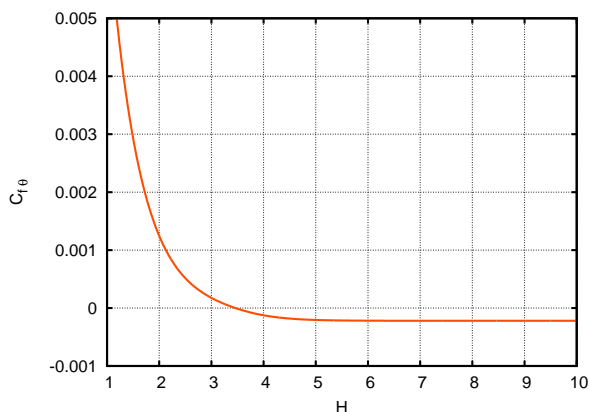
Σχήμα 5.3: Προφίλ ταχύτητας κατά Swafford για διάφορες τιμές του συντελεστή σχήματος H και αριθμό Reynolds ως προς το πάχος ορμής $Re_{\theta_{11}} = 2000$.

το πάχος ενέργειας ϑ_{11}^* συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H για αριθμό Reynolds ως προς το πάχος ορμής $Re_{\theta_{11}} = 2000$ σε σύγκριση με την εμπειρική σχέση (2.112) των Drela και Giles [8].

Τα προφίλ του Swafford χρησιμοποιούνται επίσης για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ (σχέση (2.110)), ο οποίος παρουσιάζεται συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H στο σχήμα 5.5:



Σχήμα 5.4: Κατανομή του συντελεστή σχήματος κινητικής ενέργειας H^* και του πάχους ενέργειας ϑ_{11}^* συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H για αριθμό Reynolds ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}} = 2000$.



Σχήμα 5.5: Κατανομή του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ κατά Swafford συναρτήσει του συντελεστή σχήματος H για αριθμό Reynolds ως προς το πάχος ορμής $Re_{\vartheta_{11}} = 2000$.

Σε ότι αφορά το πάχος ενέργειας ϑ_{11}^* και το συντελεστή σχήματος κινητικής ενέργειας H^* παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ της εμπειρικής σχέσης των *Drela* και *Giles* και της αριθμητικής ολοκλήρωσης των προφίλ του *Swafford*. Και για τις δύο περιπτώσεις παρατηρείται αντιστοιχία με τις κατανομές πάχους του οριακού στρώματος (σχήμα 5.2). Σχετικά με το συντελεστή τριβής (σχήμα 5.5), μπορεί να γίνει η παρατήρηση ότι για ροές ισχυρά αποκολλημένες οδηγείται ασυμπτωτικά σε μία αρνητική τιμή, οπότε και δεν εισάγει κάποιου είδους ασυνέπεια στο πρόβλημα.

Συμπερασματικά, αναφέρεται ότι η χρήση των προφίλ του *Swafford* για την αριθμητική ολοκλήρωση και εξαγωγή των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος δε συνίσταται καθώς η εξάρτησή τους από τις πειραματικές συσχετίσεις είναι ιδιαίτερα έντονη. Αντ' αυτού προτιμάται η χρήση ημι-εμπειρικών σχέσεων, (όπως η σχέση (2.112) των *Drela* και *Giles* [8]), οι οποίες βασιζόμενες ποιοτικά στα προφίλ του *Swafford* προσεγγίζουν ομαλώς και χωρίς

περιορισμούς όσον αφορά το εύρος χρήσης τους τα μεγέθη αυτά.

Εφαρμογή για περιστρεφόμενα πτερύγια

Στην παρούσα υποπαράγραφο λαμβάνεται μία πρώτη εικόνα για τη συμπεριφορά των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος σε μια αεροτομή περιστρεφόμενου πτερυγίου. Η εφαρμογή αφορά την αεροτομή *s809*, όπου η ελεύθερη ροή αριθμού *Reynolds* $Re = 1 \cdot 10^6$ και αριθμού *Mach* $M = 0.150$ την προσεγγίζει υπό γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 4^\circ$. Οι σχετικές με την περιστροφή αδιάστατες παράμετροι RO και c/r λαμβάνουν τις τιμές $RO = 0.800$ και $c/r = 0.200$. Η μετάβαση της ροής στην πλευρά υποπίεσης γίνεται εξαναγκασμένα στη θέση $s = 0.05c$.

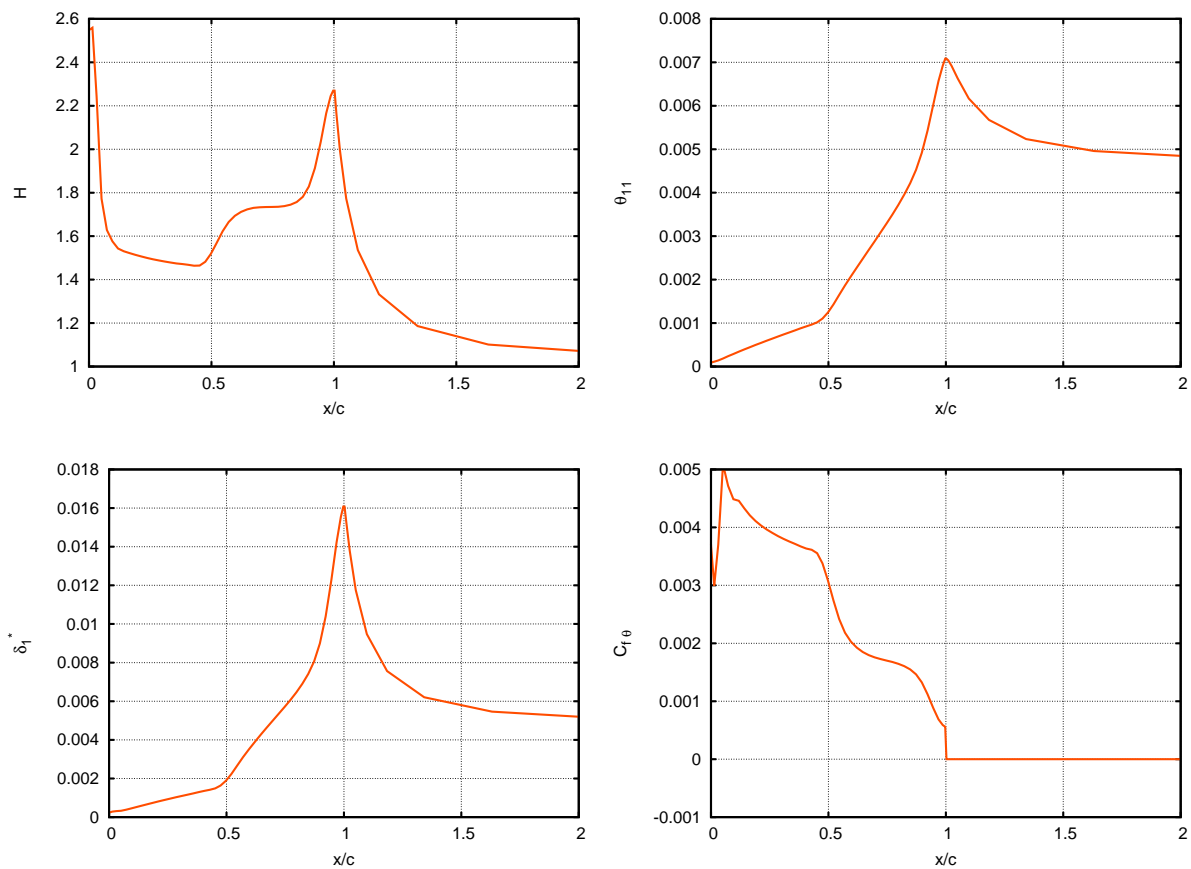
Η μεθοδολογία της ανάλυσης που ακολουθεί περιλαμβάνει την επίλυση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική διεύθυνση ξεχωριστά από τις υπόλοιπες εξισώσεις του οριακού στρώματος. Αυτό επιτυγχάνεται λαμβάνοντας ως δεδομένα τα (χορδικά) χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος από τη διδιάστατη εκδοχή του κώδικα. Τα παραπάνω σημαίνουν ουσιαστικά τη μη σύζευξη των εξισώσεων, όμως στο σημείο αυτό κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο, αφού στόχος είναι η μελέτη της επίδρασης των διαφορετικών εμπειρικών πλαισίων. Μία τέτοια προσέγγιση μπορεί να γίνει μόνο για μικρές γωνίες πρόσπτωσης όπου η αλληλεπίδραση των εξισώσεων δεν είναι απαραίτητη καθώς η επίδραση της περιστροφής είναι μικρή και μπορεί να αμεληθεί. Παρά το μέγεθος των παραπάνω παραδοχών λαμβάνονται σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος.

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος κατά τη χορδική κατεύθυνση (όπως προκύπτουν από τη διδιάστατη εκδοχή του κώδικα) παρουσιάζονται στο σχήμα 5.6. Στη συνέχεια (σχήμα 5.7), παρουσιάζεται το πάχος του οριακού στρώματος όπως υπολογίζεται από τις σχέσεις (5.1), (5.2) και ολοκληρώνοντας αριθμητικά τα προφίλ του *Swafford* σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του *FOIL2W*.

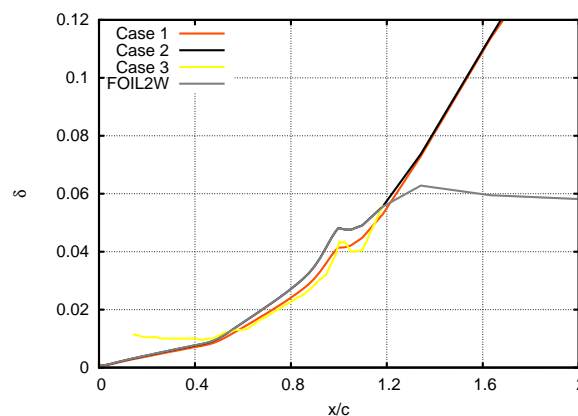
Παρατηρείται ότι καμία από τις σχέσεις που εξετάζονται (αντίθετα με τα αποτελέσματα του *FOIL2W*) δεν παρουσιάζουν την αναμενόμενη από φυσικής απόψεως συμπεριφορά σχετικά με την εξέλιξη του οριακού στρώματος. Έτσι, το πάχος του οριακού στρώματος προκύπτει συνεχώς αυξανόμενο στην περιοχή του ομόρρου, κάτι που δεν ισχύει καθώς αναμένουμε σταδιακή αποκατάσταση της ροής. Σχετικά με τα αποτελέσματα του *FOIL2W* αναφέρεται ότι πρόκειται ουσιαστικά για τη σχέση (5.2), προσαρμοσμένη κατάλληλα ώστε να προσεγγίζει τη φυσική του προβλήματος, με μία διόρθωση της μορφής:

$$\delta \propto \vartheta_{11} \cdot 10^{-1} \quad (5.9)$$

Στο σχήμα 5.8 παρουσιάζονται ο συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας και το πάχος

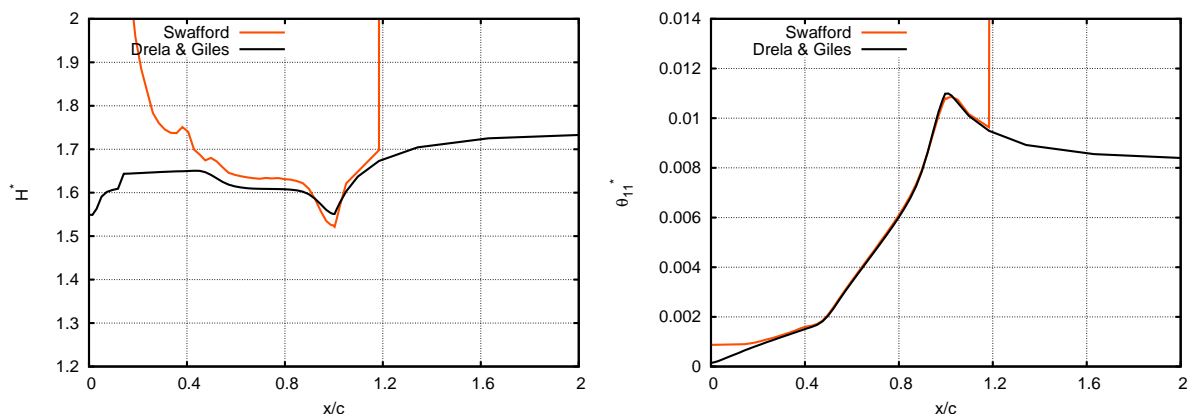


Σχήμα 5.6: Κατανομές των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής s809 και στον ομόρρου για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 4^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $M = 0.150$, $RO = 0.800$ και $c/r = 0.200$.



Σχήμα 5.7: Κατανομή του πάχους του οριακού στρώματος στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής s809 και στον ομόρρου για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 4^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $M = 0.150$, $RO = 0.800$ και $c/r = 0.200$.

ενέργειας όπως προκύπτουν από την ολοκλήρωση των προφίλ του Swafford και τη χρήση της εμπειρικής σχέσης των Drela & Giles [8].



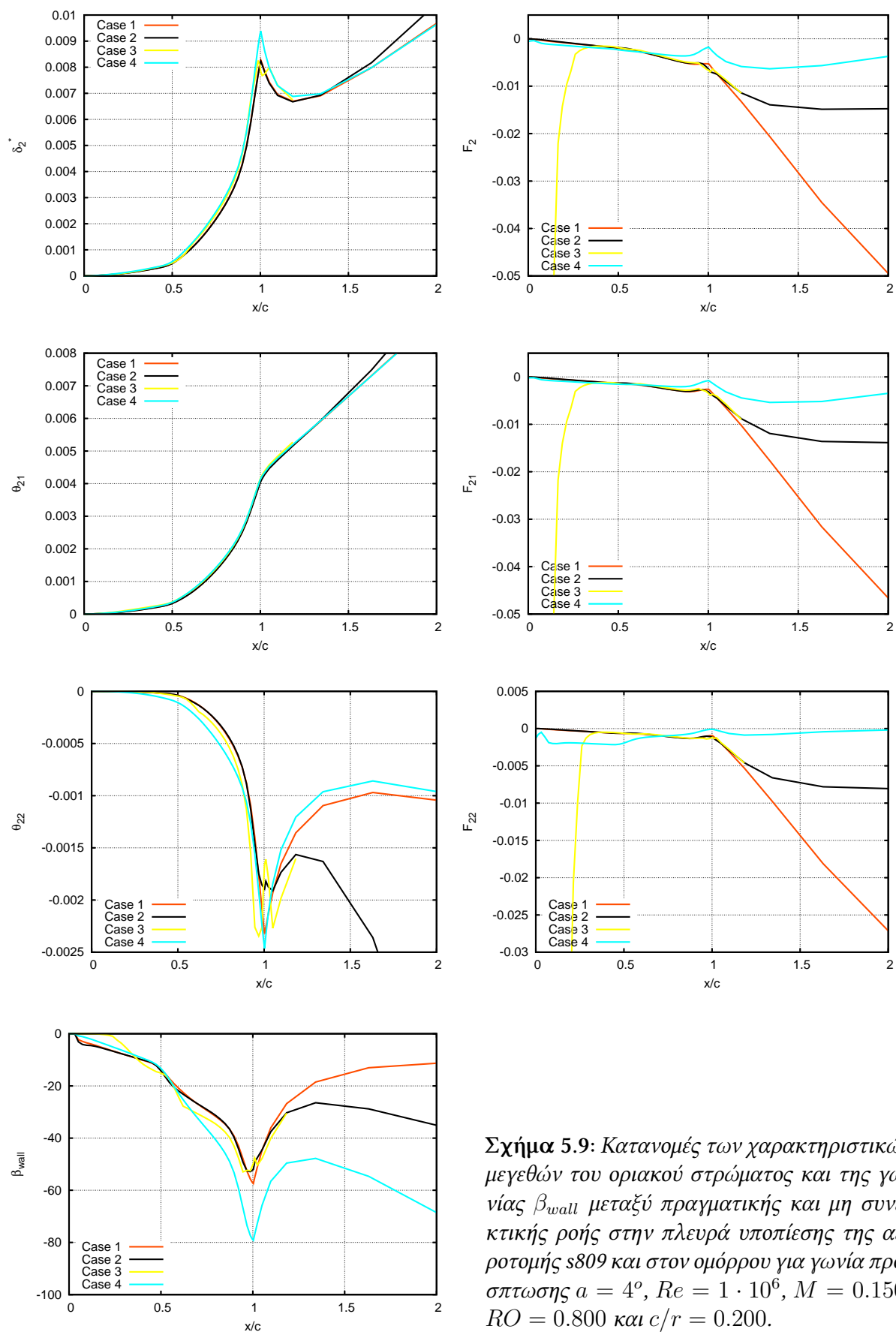
Σχήμα 5.8: Κατανομή του συντελεστή σχήματος κινητικής ενέργειας και του πάχους ενέργειας του οριακού στρώματος στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής s809 και στον ομόρρου για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 4^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $M = 0.150$, $RO = 0.800$ και $c/r = 0.200$.

Τέλος, στο σχήμα 5.9 παρουσιάζονται τα σχετικά με την ακτινική ροή χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος, οι βοηθητικές συναρτήσεις $F_2(\cdot; \cdot)$, $F_{21}(\cdot; \cdot)$, $F_{22}(\cdot; \cdot)$ και η κατανομή της γωνίας β_{wall} μεταξύ της πραγματικής και της μη συνεκτικής ροής στην επιφάνεια της αεροτομής και στον ομόρρου.

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος παρουσιάζουν κοινή συμπεριφορά παρά τις σημαντικές διαφορές των σχέσεων υπολογισμού τους για το εκάστοτε εμπειρικό πλαίσιο. Όστε φαίνεται να υπάρχει ανεξαρτησία από την επιλογή των προφίλ ταχύτητας που θα χρησιμοποιηθούν για το κλείσιμο του προβλήματος, τουλάχιστον για την εφαρμογή που εξετάζεται (μικρή γωνία πρόσπτωσης). Αυτό συμβαίνει καθώς η διαδικασία της ολοκλήρωσης έχει ως συνέπεια τη μείωση των διαφορών μεταξύ των προφίλ ταχύτητας.

Σχετικά με το ακτινικό προφίλ ταχύτητας του *Johnston*, είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί σε μία μέθοδο βασισμένη στη λογική του απλού ομόρρου, για την περιοχή του φύλλου στροβιλότητας στη σχέση συσχέτισης των δύο προφίλ ταχύτητας οφείλεται να ληφθεί μη μηδενική τιμή για το συντελεστή τριβής (στην παρούσα μέθοδο έγινε χρήση της σχέσης του *Swafford* (2.110)). Σε αντίθετη περίπτωση, όπως γίνεται σαφές και από τις σχέσεις που εξήχθησαν, τα σχετικά με την ακτινική ροή χαρακτηριστικά μεγέθη προκύπτουν μηδενικά.

Βάσει του σχήματος 5.9 μπορεί να γίνει μία σημαντική παρατήρηση όσον αφορά τη συμπεριφορά των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος. Στην περιοχή του ομόρρου, σε αναντιστοιχία με τα χορδικά μεγέθη, τα ακτινικά πάχη μετατόπισης και ορμής δεν παρουσιάζουν φθίνουσα ασυμπτωτική συμπεριφορά. Καθώς όμως κινούμαστε κατάντι της αεροτομής και η ροή σταδιακά αποκαθίσταται, κάτι τέτοιο δεν αναμενόταν. Μία πιθανή αιτία είναι ότι οι παραδοχές που έχουν γίνει κατά τη διαμόρφωση του προβλήματος οδηγούν σε



Σχήμα 5.9: Κατανομές των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος και της γωνίας β_{wall} μεταξύ πραγματικής και μη συνεκτικής ροής στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής s809 και στον ομόρρου για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 4^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $M = 0.150$, $RO = 0.800$ και $c/r = 0.200$.

αδυναμία της μεθόδου να συλλάβει τη συμπεριφορά της ακτινικής συνιστώσας της ροής στην περιοχή του ομόρρου. Είναι επίσης πιθανό για τη συμπεριφορά αυτή να ευθύνεται το εμπειρικό πλαίσιο, καθώς εξαρτάται έντονα από το συντελεστή σχήματος H όπου στην περιοχή του ομόρρου τείνει στη μονάδα ($H \rightarrow 1$). Προκειμένου να καταστεί σαφής η πορεία εξέλιξης του ακτινικού κομματιού της ροής στην περιοχή αυτή και όχι μόνο, θα ήταν ενδιαφέρον να εξαχθεί σχετική πληροφορία από εργαλεία υψηλής ακρίβειας (CFD-RANS). Στη βάση αυτή μπορεί να γίνει κάποιου είδους εμπειρική διόρθωση ώστε να προσεγγιστεί η επιθυμητή συμπεριφορά, η οποία μπορεί να λαμβάνει αντίστοιχη με την (5.9) μορφή:

$$\delta_2^* \propto (const) \cdot \delta_1^* \quad (5.10)$$

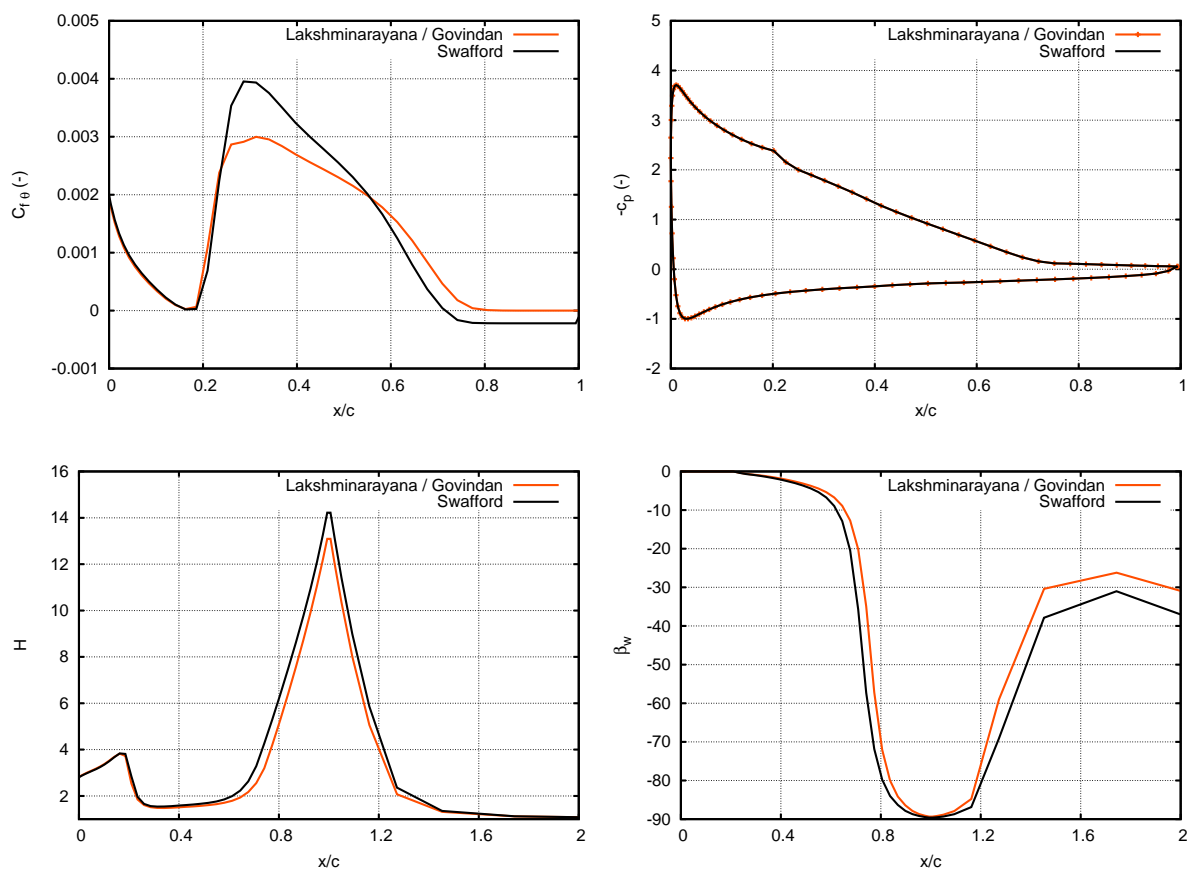
Συμπερασματικά, όλα τα προφίλ παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά, τουλάχιστον για την περίπτωση όπου εξετάστηκε (μικρή γωνία πρόσπτωσης, προσκολλημένη ροή). Στην περίπτωση αποκολλημένων ροών, κάποιες διαφορές αναμένεται να εμφανιστούν, όμως η αδυναμία των προφίλ του *Swafford* να περιγράψουν τη μορφή του οριακού στρώματος για ροές έντονα αποκολλημένες αποτρέπει τη χρήση τους. Έτσι, καθώς το προφίλ των *Mager* σε συνδυασμό με το προφίλ των *Lakshminarayana & Govindan* παρουσιάζουν ομαλότερη συμπεριφορά και δύναται να εφαρμοστούν καθολικά σε περισσότερες καταστάσεις ροής, επιλέγεται για την υλοποίηση της μεθόδου στη συνέχεια η εξαγωγή των σχετικών με την ακτινική ροή χαρακτηριστικών μεγεθών βάσει των προφίλ αυτών.

Η επίδραση του συντελεστή τριβής

Στην παρούσα υποπαράγραφο εξετάζεται η επίδραση των σχέσεων προσδιορισμού του συντελεστή τριβής στην περιοχή τυρβώδους ροής (σχήμα 5.10). Οι προς εξέταση σχέσεις είναι οι σχέσεις του *Swafford* (2.110) και των *Lakshminarayana & Govindan* (2.111). Η επίλυση των εξισώσεων γίνεται πλέον συζευγμένα. Η εφαρμογή αφορά την αεροτομή *NACA 4418*, όπου η ελεύθερη ροή αριθμού *Reynolds* $Re = 0.5 \cdot 10^6$ και αριθμού *Mach* $M = 0.150$ την προσεγγίζει υπό γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 13^\circ$. Η μετάβαση της ροής γίνεται ελεύθερα με όριο στο μέσο της χορδής και οι σχετικές με την περιστροφή αδιάστατες παράμετροι RO και c/r λαμβάνουν τις τιμές $RO = 0.850$ και $c/r = 0.200$.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 5.10 υπάρχει σημαντική διαφορά όσον αφορά τις τιμές του συντελεστή τριβής όπως αυτές προκύπτουν από τις δύο σχέσεις, ακόμα και στην περιοχή όπου η ροή είναι προσκολλημένη. Η διαφορά δε που εντοπίζεται στο αποκολλημένο κομμάτι της ροής είναι αναμενόμενη καθώς οι σχέσεις των *Lakshminarayana & Govindan* αδυνατούν να μοντελοποιήσουν την αντιστροφή της ροής κατά την αποκόλληση.

Οι διαφορές που εντοπίζονται στο συντελεστή τριβής ανάμεσα στις δύο σχέσεις απεικονίζονται και στις καμπύλες του συντελεστή σχήματος H όμως δε μεταφράζονται σε ορατή (στην



Σχήμα 5.10: Κατανομή του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α και του συντελεστή σχήματος H , του συντελεστή πίεσης c_p και του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ για τις σχέσεις προσδιορισμού του συντελεστή τριβής κατά Swafford και Lakshminarayana & Govindan για την αεροτομή NACA 4418 υπό γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 13^\circ$, $Re = 0.5 \cdot 10^6$, $M = 0.150$, $RO = 0.850$ $c/r = 0.200$.

κλίμακα αυτή) μεταβολή του συντελεστή πίεσης c_p . Όσον αφορά το συντελεστή άνωσης c_L , όπως αναμένεται βάσει του σχήματος 5.10, εμφανίζεται αυξημένος στην περίπτωση χρήσης της σχέσης προσδιορισμού του συντελεστή τριβής των Lakshminarayana & Govindan, αναφέροντας ενδεικτικά για τη γωνία αυτή μια αύξηση από την τιμή 1.54 σε 1.58 ($\approx 2\%$).

5.2 Υπολογιστικές λεπτομέρειες

Η φυσαλίδα στρωτής αποκόλλησης

Σε υψηλές γωνίες πρόσπτωσης η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται με την εμφάνιση φυσαλίδας στρωτής αποκόλλησης. Στην περιοχή αυτή σύμφωνα με τον McCroskey [31] έχει παρατηρηθεί η εμφάνιση ακτινικής ροής, την οποία το παρόν μοντέλο αδυνατεί να προλέξει καθώς οι διανομές ταχύτητας των Falkner και Skan [14] που χρησιμοποιούνται για το κλείσιμο του προβλήματος στη στρωτή ροή αδυνατούν να μοντελοποιήσουν αποκολλη-

μένες ροές. Έτσι, στην περίπτωση εμφάνισης φουσαλίδας στρωτής αποκόλλησης, η επίλυση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική διεύθυνση ξεκινάει μόλις η τυρβώδης ροή επανακολληθεί.

5.3 Παραμετρική ανάλυση

Στην παρούσα εργασία και σε σχέση με τη διδιάστατη διατύπωση του προβλήματος έχουν εισαχθεί δυο επιπλέον αδιάστατες παράμετροι (RO , c/r) οι οποίες σχετίζονται με την περιστροφική κίνηση του πτερυγίου. Για λόγους πληρότητας υπενθυμίζεται ότι η πρώτη ορίζεται ως ο λόγος της περιφερειακής ταχύτητας $\Omega_z r$ προς τη συνισταμένη σχετική ταχύτητα U_{rel} , ενώ η δεύτερη ως ο λόγος της χορδής της αεροτομής προς την απόστασή της από το κέντρο περιστροφής.

Η παράμετρος RO σχετίζεται με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πτερυγίου Ω_z , που για τις εφαρμογές που εξετάζονται (σύγχρονες ανεμογεννήτριες οριζόντιου άξονα) εξαρτάται από το σημείο λειτουργίας της ανεμογεννήτριας (όπως προκύπτει βάσει της αδιάστατης ταχύτητας ακροπτερυγίου λ).

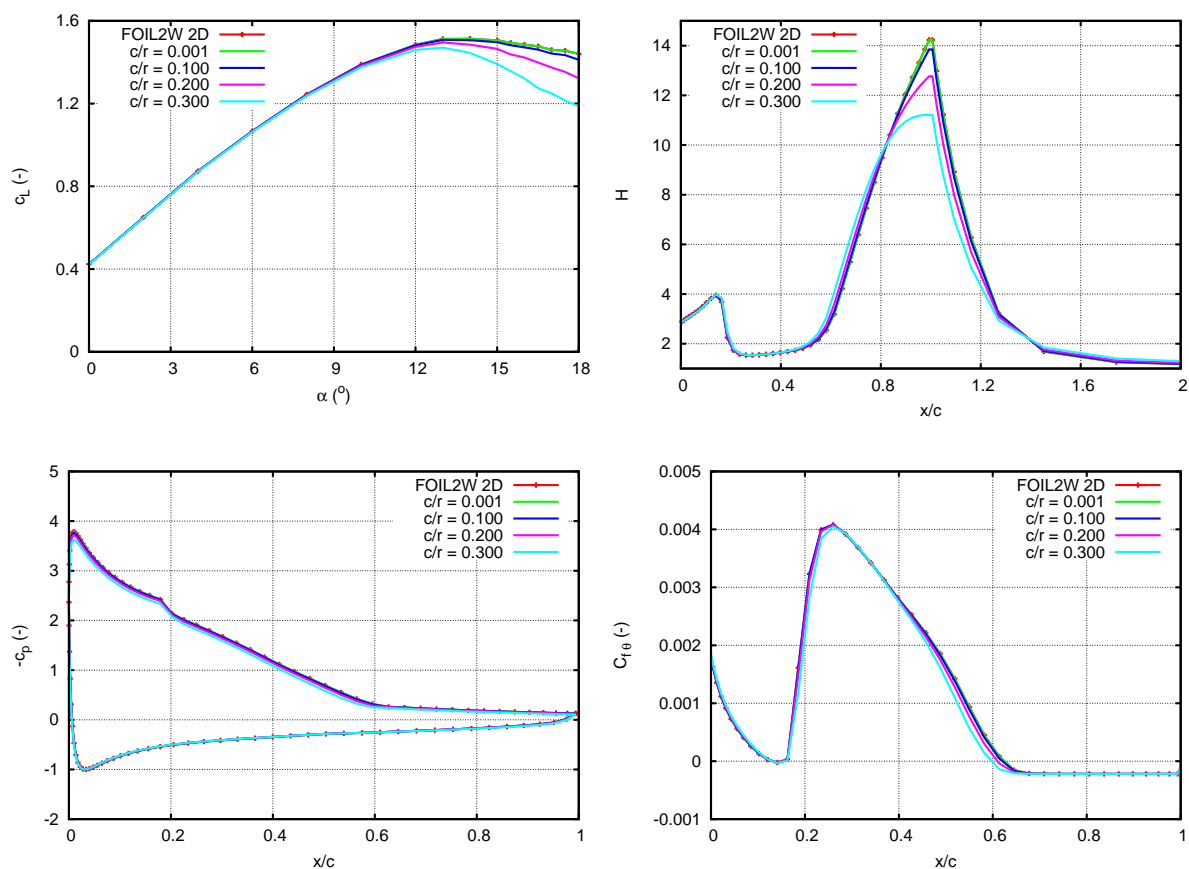
Όσον αφορά την παράμετρο c/r υπενθυμίζεται ότι σχετίζεται με τη προσέγγιση της γεωμετρίας του προβλήματος και ουσιαστικά με τη διαμόρφωση του προβλήματος σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Καθώς όμως η θεώρηση ότι οι γραμμές ροής είναι τόξα κύκλου ισχύει υπό περιορισμούς, έχει ενδιαφέρον να ερευνηθούν τα όρια αυτής της υπόθεσης.

5.3.1 Κυλινδρικοί όροι

Οι επιπλέον μεταφορικοί όροι που προκύπτουν από το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι σταθμισμένοι με την ποσότητα c/r , η οποία πρακτικά δείχνει τη θέση της αεροτομής στο πτερύγιο. Προφανώς όταν η παράμετρος c/r τείνει στο 0 ($c/r \rightarrow 0$), το πρόβλημα εκφυλίζεται στη διδιάστατη εκδοχή του. Λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία διαφόρων πτερυγίων η παράμετρος αυτή αναμένεται να λαμβάνει τιμές που (στο αεροδυναμικό κομμάτι του πτερυγίου) δεν ξεπερνάνε την τιμή $c/r \simeq 0.4$.

Η επίδραση των κυλινδρικών όρων, η διαφοροποίηση ουσιαστικά που προκύπτει από τη διαμόρφωση του προβλήματος στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, θα μελετηθεί αφαιρώντας την επίδραση των περιστροφικών όρων. Πρακτικά δηλαδή θα μελετηθεί η περίπτωση που το πτερύγιο δεν περιστρέφεται ($RO = 0.000$). Στο σχήμα 5.11 παρουσιάζονται για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου c/r , ο συντελεστής άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α και ο συντελεστής σχήματος H , ο συντελεστή πίεσης c_p και ο συντελεστής τριβής $C_{f\theta}$ για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 14^\circ$.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 5.11 τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος (και

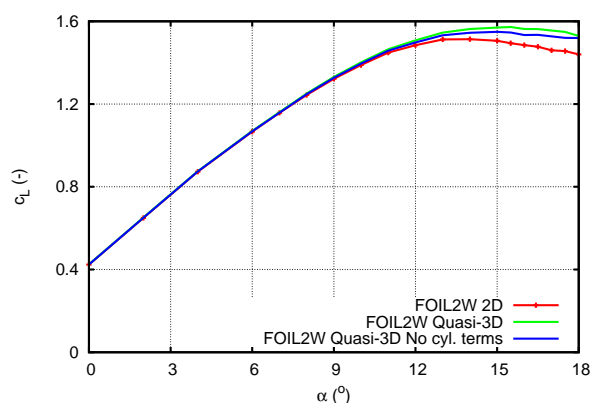


Σχήμα 5.11: Κατανομή του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α και του συντελεστή σχήματος H , του συντελεστή πίεσης c_p και του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 14^\circ$ για διάφορες τιμές της αδιάστατης ακτινικής απόστασης c/r για την αεροτομή NACA 4418.

ως συνέπεια ο συντελεστής άνωσης) μεταβάλλονται έντονα καθώς η παράμετρος c/r αυξάνει. Ειδικότερα για την περίπτωση όπου $c/r = 0.300$ και σε υψηλές γωνίες πρόσπτωσης, παρουσιάζεται σημαντική μείωση του συντελεστή σχήματος και του συντελεστή άνωσης c_L .

Η παρατήρηση αυτή σχετίζεται με την εγκυρότητα της υπόθεσης σχετικά με τη θεώρηση των γραμμών ροής της εξωτερικής μη συνεκτικής ροής ως τόξα κύκλου. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, κάτι τέτοιο μπορεί να ισχύει είτε αρκετά μακριά από το κέντρο περιστροφής, είτε για μικρές γωνίες θ . Σε υψηλές τιμές όμως της παραμέτρου c/r και καθώς κινούμαστε κατάντι της αεροτομής η υπόθεση αυτή σταματάει να ισχύει καθώς οι γραμμές ροής της μη συνεκτικής ροής και τα τόξα κύκλου παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση. Αυτό έχει ως συνέπεια η γωνία β μεταξύ της πραγματικής και της μη συνεκτικής ροής να μεγαλώνει σημαντικά στην περιοχή του ομόρρου, και έτσι να μεταβάλλονται έντονα οι παράμετροι του οριακού στρώματος στην περιοχή αυτή. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι κυλινδρικοί όροι είναι πιθανές πηγές αστάθειας στο σύστημα των εξισώσεων του οριακού στρώματος.

Για το λόγο αυτό στη συνέχεια (σχήματα 5.12, 5.13) παρουσιάζονται για τις περιπτώσεις όπου οι κυλινδρικοί όροι είτε αμελούνται είτε όχι ο συντελεστής άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α και ο συντελεστής σχήματος H , ο συντελεστή πίεσης c_p και ο συντελεστής τριβής $C_{f\theta}$ για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 13^\circ$. Η εφαρμογή αφορά την αεροτομή *NACA 4418* για ροή αριθμού *Reynolds* $Re = 0.5 \cdot 10^6$ και αριθμού *Mach* $M = 0.150$, όπου οι σχετικές με την περιστροφή αδιάστατες παράμετροι λαμβάνουν τις τιμές $RO = 0.941$ και $c/r = 0.160$. Η μετάβαση της ροής γίνεται ελεύθερα με όριο στο μέσο της χορδής.



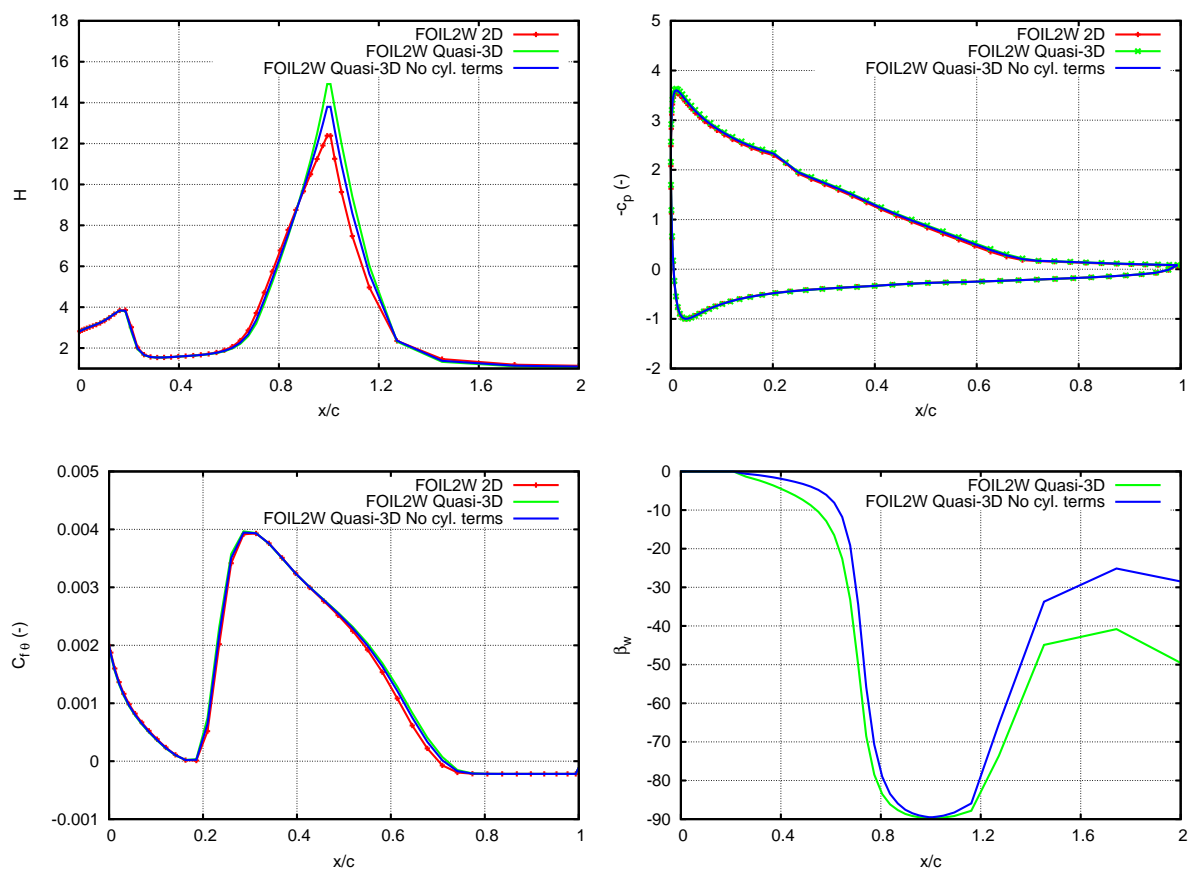
Σχήμα 5.12: Κατανομή του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για την αεροτομή *NACA 4418* όπου $RO = 0.941$ και $c/r = 0.160$.

Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα 5.12 ο συντελεστής άνωσης προκύπτει ελαφρώς μικρότερος για την περίπτωση όπου οι κυλινδρικοί όροι αμελούνται. Ωστε η διαμόρφωση του προβλήματος σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οδηγεί σε ελαφρά υποεκτίμηση της επίδρασης της περιστροφής. Μεταβολές προκύπτουν και στα μεγέθη που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.13, όμως οι διαφορές τους είναι μικρές. Όπως θα φανεί στη συνέχεια η επίδραση των κυλινδρικών όρων (τουλάχιστον για μικρές γωνίες πρόσπτωσης) δεν είναι σημαντική.

Στο σχήμα 5.14 παρουσιάζεται το σχετικό μέγεθος των κυλινδρικών όρων για την περίπτωση της αεροτομής *NACA 63-215*. Η εφαρμογή αφορά πλήρως τυρβώδη ροή αριθμού *Reynolds* $Re = 2 \cdot 10^6$ και αριθμού *Mach* $M = 0.150$ για διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής RO και c/r . Πέραν της αίσθησης που θα αποκομιστεί περί της σημασίας των κυλινδρικών όρων, η διερεύνηση αυτή μπορεί να χρησιμεύσει για την αξιολόγηση της πιθανότητας να αμεληθούν οι όροι αυτοί, κάτι που πιθανώς συνάδει περισσότερο με το χαρακτήρα της μεθόδου.

- Σχετικό μέγεθος κυλινδρικών όρων - θ ορμή:

$$\frac{CYL_{\theta}}{CONV} = \frac{(2\vartheta_{21} - \delta_2^*)/r}{\left| \frac{d\vartheta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\vartheta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.11)$$



Σχήμα 5.13: Κατανομή του συντελεστή σχήματος H , του συντελεστή πίεσης c_p , του συντελεστή τριβής $C_{f\theta}$ και της γωνίας β_{wall} για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 13^\circ$ για την αεροτομή NACA 4418 όπου $RO = 0.941$ και $c/r = 0.160$.

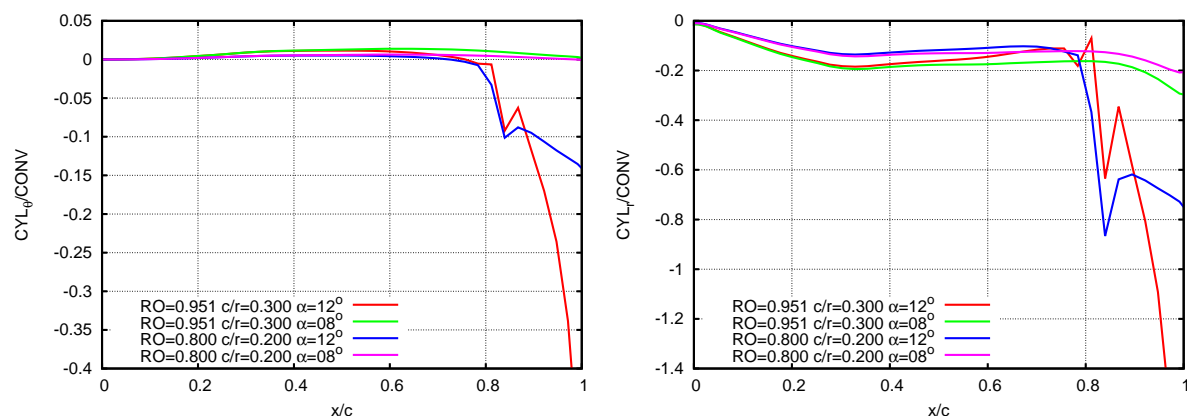
- Σχετικό μέγεθος κυλινδρικών όρων - r ορμή:

$$\frac{CYL_r}{CONV} = \frac{(\vartheta_{22} - \vartheta_{11} - \delta_1^*)/r}{\left| \frac{d\vartheta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\vartheta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.12)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.14, το σχετικό μέγεθος των κυλινδρικών όρων στη χορδική ορμή (από την οποία λαμβάνεται πρακτικά η μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος) είναι μικρό. Η σημασία των όρων αυτών είναι μεγαλύτερη στην εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την ακτινική διεύθυνση, όπου συνεισφέρουν έντονα στην αύξηση της γωνίας β που σχηματίζει η ροή και άρα στην αύξηση του μεγέθους της ακτινικής συνιστώσας της.

5.3.2 Περιστροφικοί όροι

Ως περιστροφικοί όροι λογίζονται οι όροι μεταφοράς που σχετίζονται με τις φυγόκεντρες επιταχύνσεις και τις επιταχύνσεις *Coriolis* και εισάγονται στο πρόβλημα λόγω της περι-



Σχήμα 5.14: Κατανομή του σχετικού μεγέθους των κυλινδρικών όρων στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής NACA 63-215 για διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r και γωνίας πρόσπτωσης α .

στροφικής κίνησης. Κατά τη διαμόρφωση των ολοκληρωματικών εξισώσεων του οριακού στρώματος οι φυγόκεντροι όροι αμελούνται καθώς σχετίζονται με την καθ' ύψος μεταβολή της διαφοράς πυκνότητας μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής, η οποία στην περίπτωση ροών χαμηλού αριθμού $Mach$ είναι μικρή. Κατά την προσέγγιση όμως του όρου της ακτινικής κλίσης της ταχύτητας της μη συνεκτικής ροής εμφανίζεται ένας όρος φυγόκεντρου τύπου,

$$\frac{1}{u_{\theta e}} \frac{\partial u_{\theta e}(r)}{\partial r} = \frac{RO^2}{r} = \frac{\Omega_z^2 r}{U_{rel}^2(r)} = \Omega_z^2 r \quad (5.13)$$

αφού $U_{rel}(r) = 1$. Στην παρούσα υποπαράγραφο παρουσιάζεται το σχετικό μέγεθος των περιστροφικών όρων ως προς τους όρους μεταφοράς ώστε να αξιολογηθεί η συνεισφορά τους στη διαμόρφωση του πεδίου ροής (σχήμα 5.15). Οι υπολογισμοί έγιναν για την αεροτομή NACA 63-215 σε ελεύθερο ρεύμα αέρα αριθμού $Reynolds$ $Re = 2 \cdot 10^6$ και αριθμού $Mach$ $M = 0.150$. Η ροή στην επιφάνεια της αεροτομής είναι πλήρως τυρβώδης ενώ εξετάζονται διάφορες περιπτώσεις όσον αφορά τις σχετικές με την περιστροφής αδιάστατες παραμέτρους.

- Σχετικό μέγεθος όρων *Coriolis* - θ ορμή:

$$\frac{COR_{\theta}}{CONV} = \frac{2\Omega_z \delta_2^* / u_{\theta e}}{\left| \frac{d\theta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\theta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.14)$$

- Σχετικό μέγεθος όρων *Coriolis* - r ορμή:

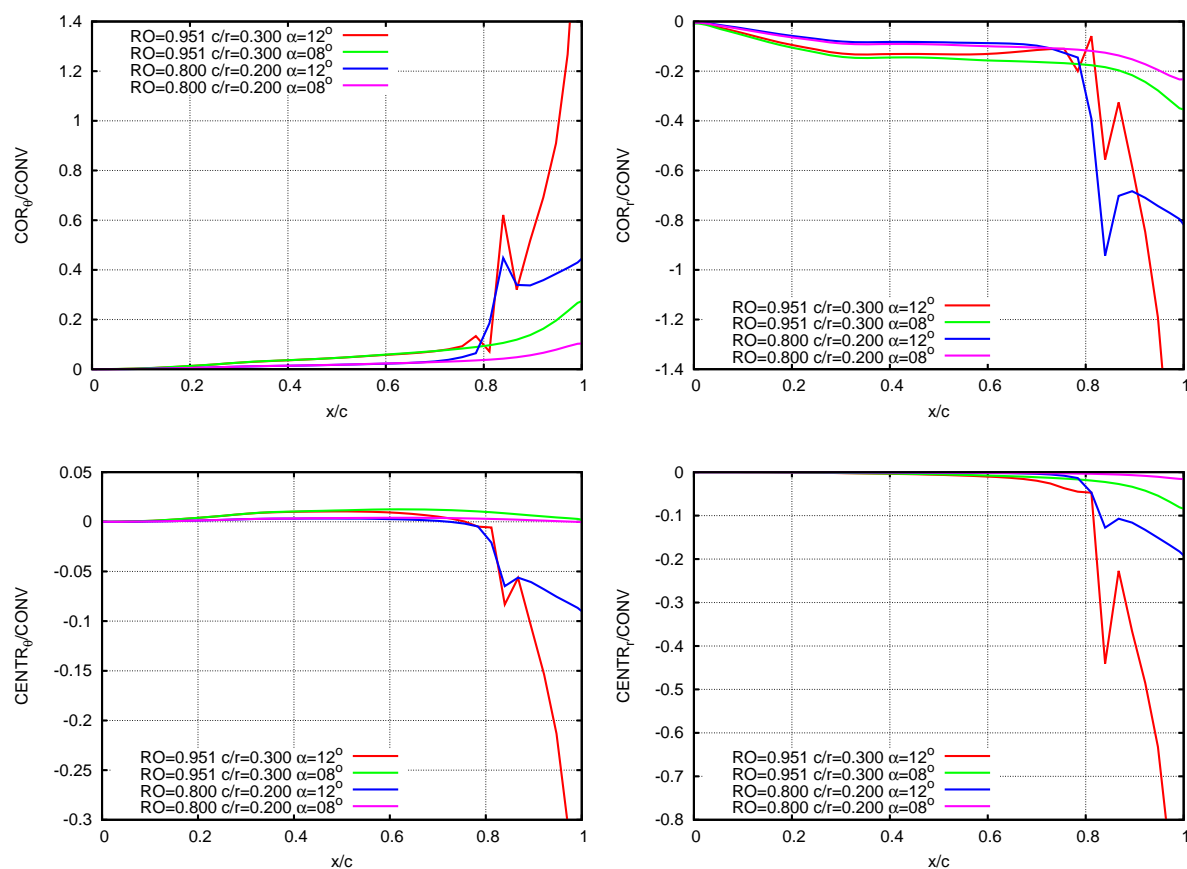
$$\frac{COR_r}{CONV} = \frac{-2\Omega_z \delta_1^* / u_{\theta e}}{\left| \frac{d\theta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\theta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.15)$$

- Σχετικό μέγεθος φυγόκεντρων όρων - θ ορμή:

$$\frac{CEN_{\theta}}{CONV} = \frac{(2\vartheta_{21} - \delta_2^*) RO^2/r}{\left| \frac{d\vartheta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\vartheta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.16)$$

- Σχετικό μέγεθος φυγόκεντρων όρων - r ορμή:

$$\frac{CEN_r}{CONV} = \frac{2RO^2\vartheta_{22}/r}{\left| \frac{d\vartheta_{11}}{ds} \right| + \left| \frac{d\vartheta_{21}}{ds} \right|} \quad (5.17)$$



Σχήμα 5.15: Κατανομή του σχετικού μεγέθους των περιστροφικών όρων στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής NACA 63-215 για διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r και γωνίας πρόσπτωσης α .

Βάσει του σχήματος 5.15 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι πιο σημαντικοί περιστροφικοί όροι είναι οι όροι *Coriolis*. Οι όροι αυτοί είναι που μέσω της χορδικής ορμής εισάγουν την επίδραση της περιστροφής οδηγώντας στην αύξηση του συντελεστή άνωσης (οι κυλινδρικοί και οι φυγόκεντροι στη χορδική ορμή οδηγούν σε μείωσή του). Βέβαια το μέγεθος των όρων *Coriolis* στη χορδική ορμή σχετίζεται με την ένταση της ακτινικής ροής, και στο σχήμα μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι *Coriolis* και οι φυγόκεντροι όροι συμβάλλουν κατά ισάξιο με

τους κυλινδρικούς όρους τρόπο στην αύξηση της έντασης της ακτινικής συνιστώσας της ροής.

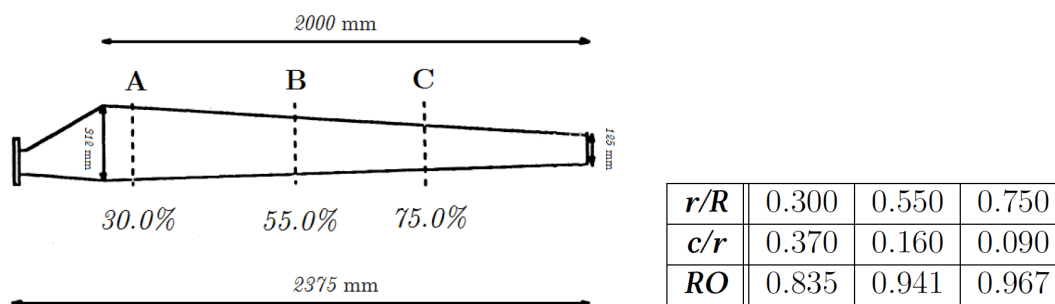
5.4 Πιστοποίηση της μεθόδου

5.4.1 Εφαρμογή για NACA 4418

Στην παρούσα εφαρμογή εξετάζεται η αεροτομή NACA 4418 σε συγκεκριμένες καταστάσεις ροής (πίνακας 5.2) και για διαφορετικές ακτινικές θέσεις πάνω στο πτερύγιο (σχήμα 5.16). Η μετάβαση της ροής είναι ελεύθερη με όριο στο μέσο της χορδής της αεροτομής. Τα αποτελέσματα της μεθόδου όπως παρουσιάζονται στα σχήματα 5.17-5.22 συγκρίνονται με αυτά της μεθόδου των Snel *et al* [45].

Γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (<i>rpm</i>)	158.83
Ταχύτητα επ' άπειρον ροής (<i>m/s</i>)	8.81
Αριθμός <i>Reynolds</i> της ροής	$0.5 \cdot 10^6$
Αεροτομή	NACA 4418

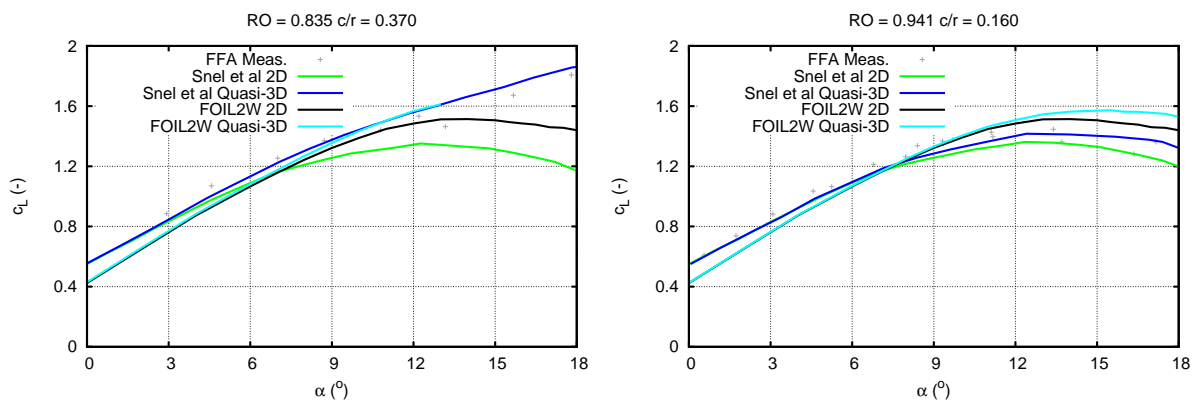
Πίνακας 5.2: Στοιχεία της ροής και του πτερυγίου.



Σχήμα 5.16: Εξεταζόμενες αδιάστατες ακτινικές θέσεις της αεροτομής και τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής για κάθε περίπτωση.

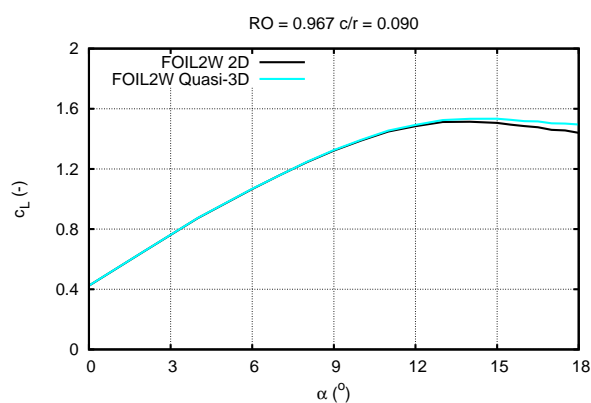
Στο σχήμα 5.17 παρουσιάζεται ο συντελεστής άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για τις αδιάστατες ακτινικές θέσεις $r/R = 0.300$ και $r/R = 0.550$.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε (*FOIL2W Quasi-3D*) φαίνεται ότι υποεκτιμά την επίδραση της περιστροφής συγκριτικά με το υπολογιστικό πρότυπο των Snel *et al* στην ακτινική θέση $r/R = 0.300$. Επισημαίνεται επιπλέον, όπως αναφέρεται και από τους ίδιους, ο υπολογισμός ιδιαίτερα υψηλών συντελεστών άνωσης για μικρές γωνίες πρόσπτωσης. Στην περίπτωση όπου εξετάζεται η ακτινική θέση $r/R = 0.550$, η επίδραση της περιστροφικής κίνησης αξιολογείται κατά όμοιο τρόπο, καθώς οι καμπύλες του συντελεστή άνωσης παρουσιάζουν σύμφωνη αύξηση.



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για τις αδιάστατες ακτινικές θέσεις $r/R = 0.300$ και $r/R = 0.550$ για την αεροτομή NACA 4418.

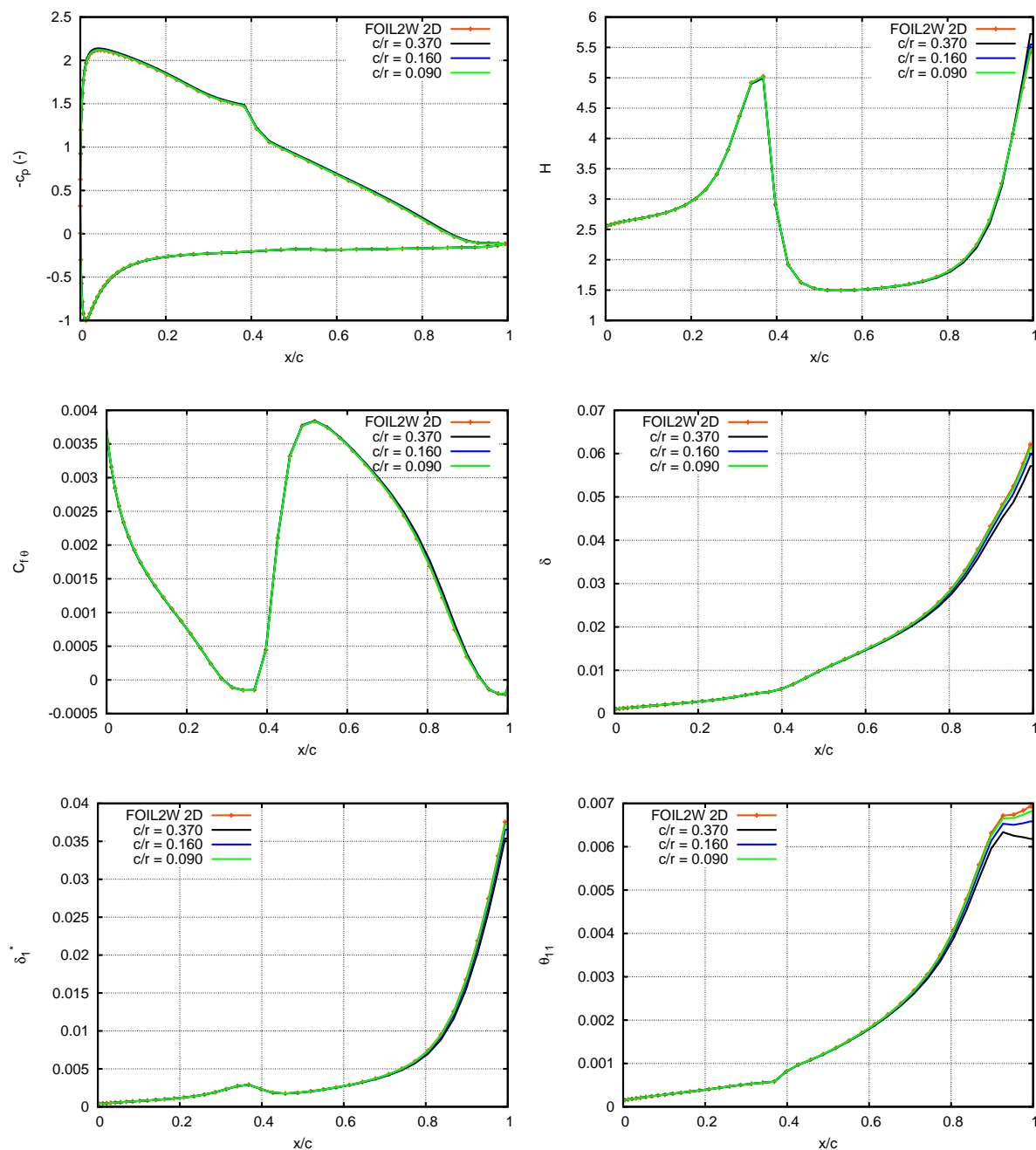
Σχετικά με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, επισημαίνεται ότι παρουσιάζει αριθμητικές φύσεως δυσκολίες στη σύγκλιση για σχετικά υψηλές τιμές της παραμέτρου c/r όπως γίνεται φανερό για την περίπτωση $c/r = 0.370$. Αυτό πιθανώς να σχετίζεται με την εγκυρότητα της υπόθεσης περί διατύπωσης του προβλήματος στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, όπως σχολιάστηκε προηγουμένως. Βέβαια στην παρούσα φάση δεν έχει αμεληθεί κανένας όρος που πιθανολογείται ότι προκαλεί τις αριθμητικές αστάθειες κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Στη συνέχεια στο σχήμα 5.18 παρουσιάζεται το διάγραμμα συντελεστή άνωσης - γωνίας πρόσπτωσης για την αδιάστατη ακτινική θέση $r/R = 0.750$ όπου παρατηρείται ότι η επίδραση της περιστροφικής κίνησης στην αεροδυναμική συμπεριφορά της αεροτομής είναι πλέον πολύ μικρή.



Σχήμα 5.18: Διάγραμμα του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για την αδιάστατη ακτινική θέση $r/R = 0.750$ για την αεροτομή NACA 4418.

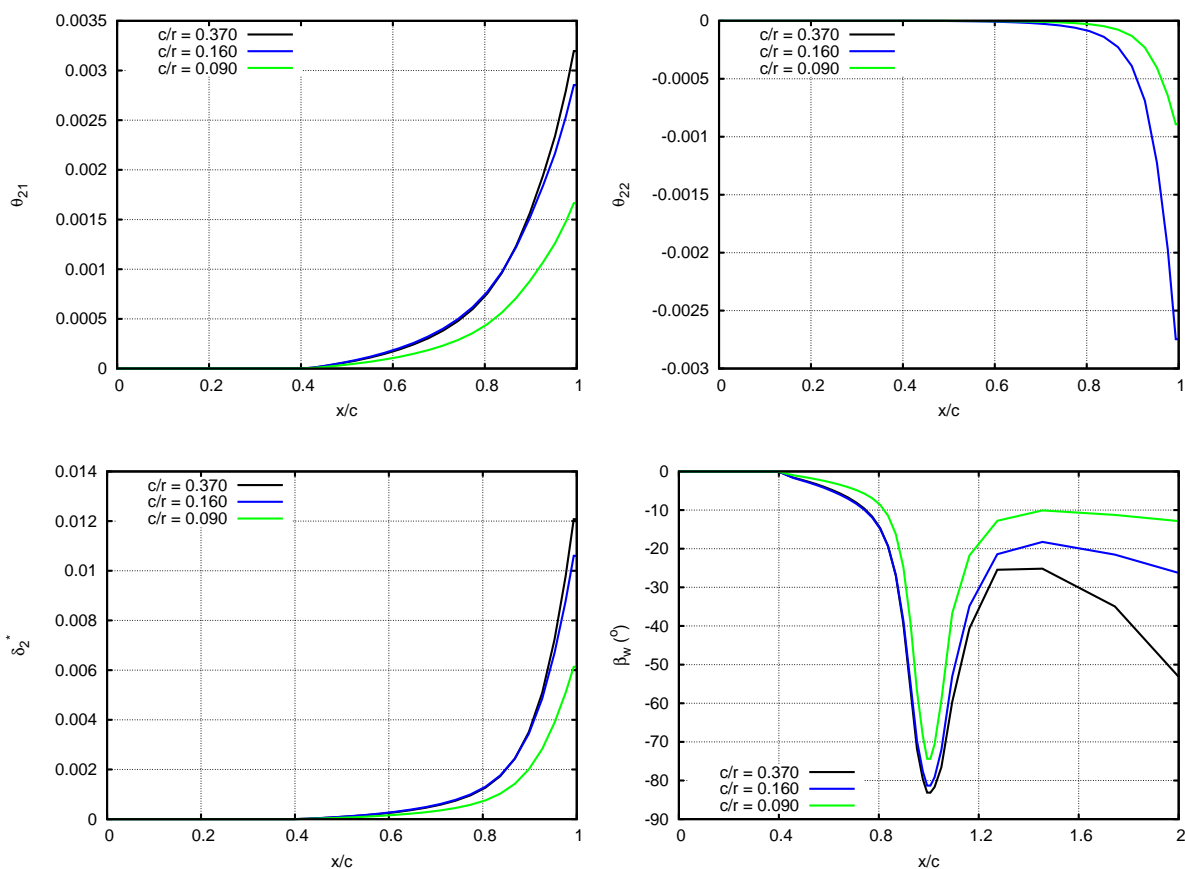
Στα σχήματα 5.19 και 5.20 παρουσιάζονται ο συντελεστής πίεσης c_p , ο συντελεστής τριβής $c_{f\theta}$ και τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος για την αεροτομή NACA 4418

για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 08^\circ$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r . Όπως γίνεται φανερό, η επίδραση της περιστροφής είναι πολύ μικρή ακόμα και για την περίπτωση όπου βρισκόμαστε πολύ κοντά στη ρίζα του πτερυγίου ($r/R = 0.300$).



Σχήμα 5.19: Κατανομές του συντελεστή πίεσης c_p , του συντελεστή τριβής $c_{f\theta}$ και των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος για την αεροτομή NACA 4418 για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 08^\circ$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r .

Στη συνέχεια (σχήματα 5.21 και 5.22), παρουσιάζονται ο συντελεστής πίεσης c_p , ο συντελεστής τριβής $c_{f\theta}$ και τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος για την αεροτομή



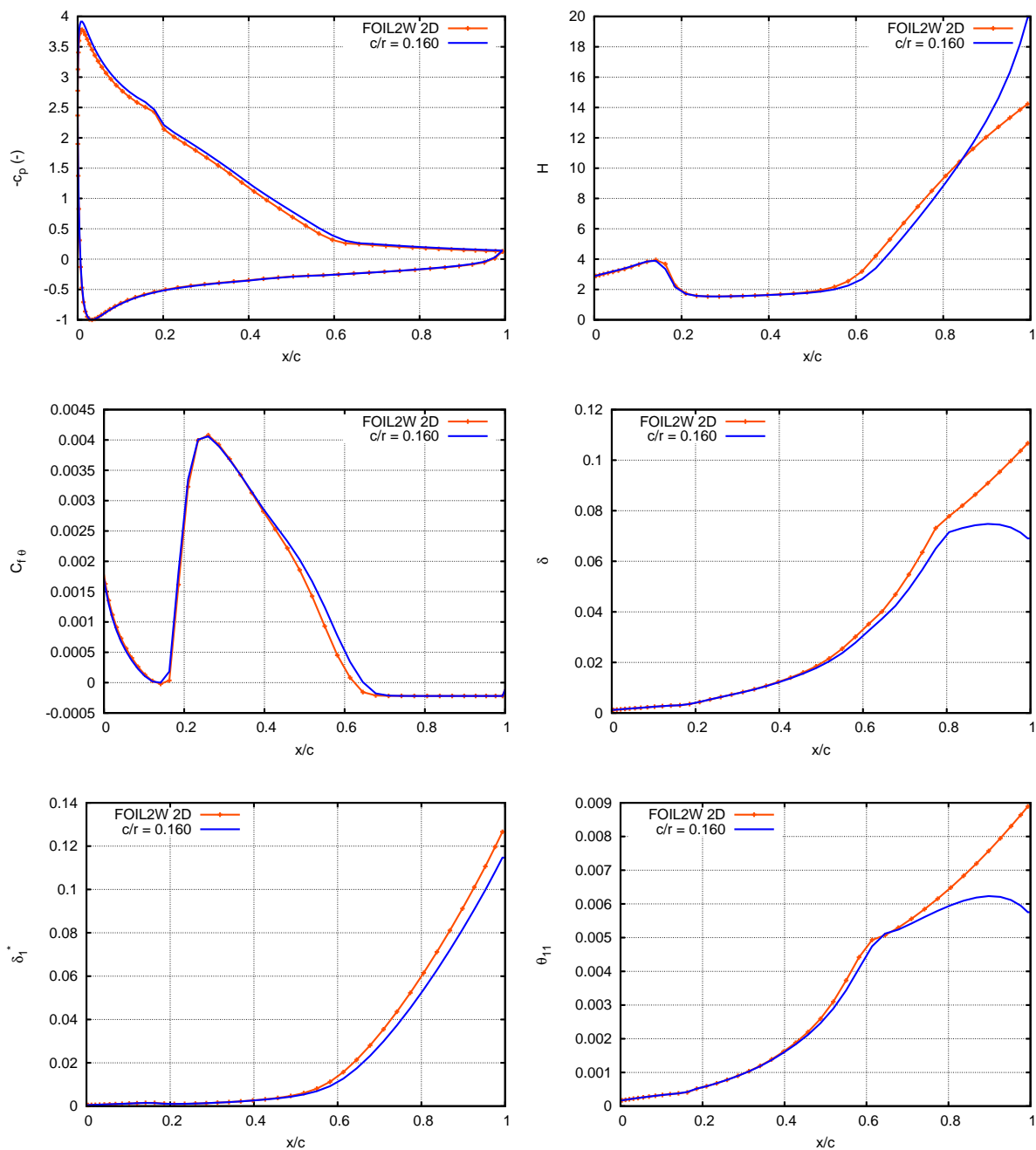
Σχήμα 5.20: Κατανομή των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής NACA 4418 για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 08^\circ$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r .

NACA 4418 για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 14^\circ$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων RO , c/r . Ειδικότερα στο σχήμα 5.21 παρατηρείται η επίδραση της περιστροφής στα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος, ενώ στο σχήμα 5.22 παρουσιάζεται η μεταβολή των σχετικών με την περιστροφή μεγεθών κατά την αύξηση της γωνίας πρόσπτωσης από $\alpha = 08^\circ$ σε $\alpha = 14^\circ$. Όπως γίνεται φανερό, η επίδραση της περιστροφικής κίνησης στην αεροδυναμική απόδοση της αεροτομής είναι πλέον σημαντική.

Βάσει του σχήματος 5.21 μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η περιστροφή έχει ως συνέπεια την καθυστέρηση της εμφάνισης του σημείου αποκόλλησης. Η καθυστέρηση αυτή συμβάλει, εν μέρει, στην παρατηρούμενη αύξηση του συντελεστή άνωσης c_L .

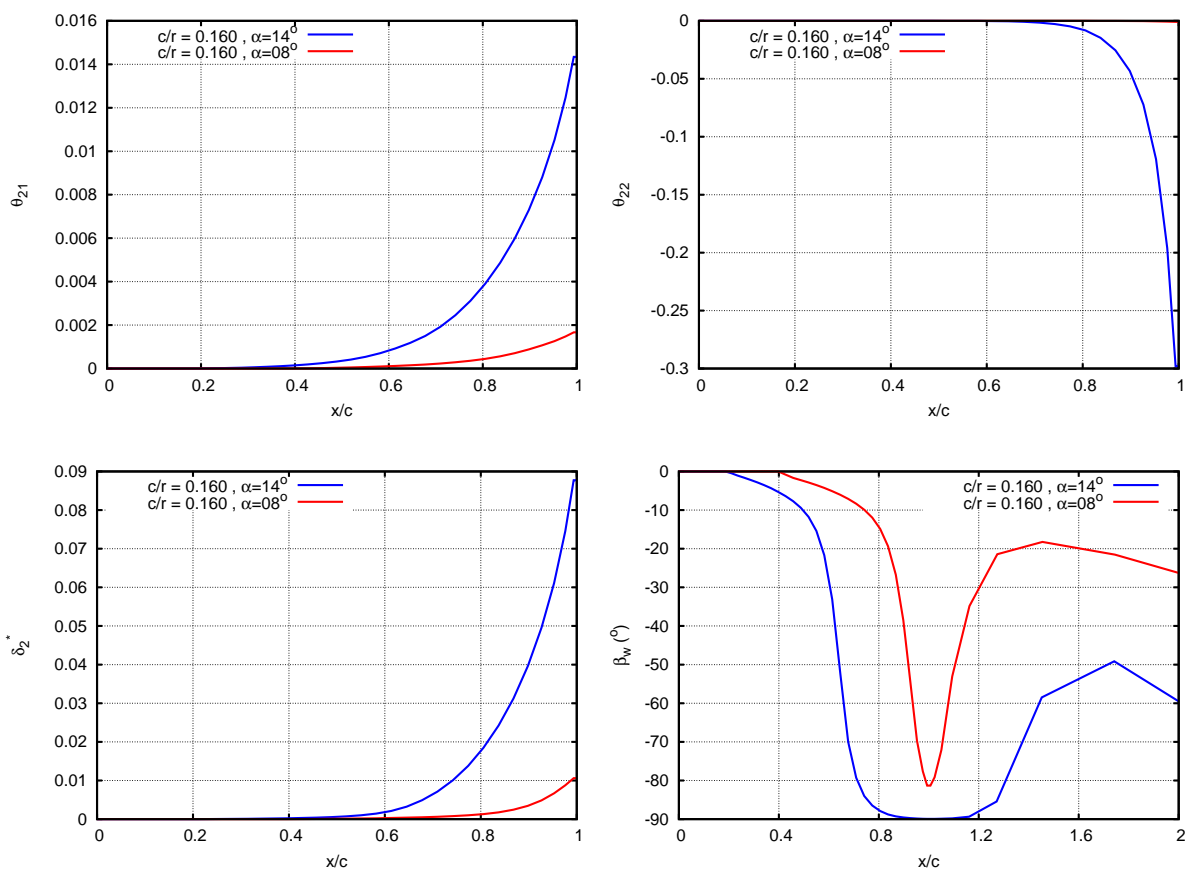
Ενδιαφέρον έχει να παρατηρηθεί η αναμενόμενη μείωση του πάχους δ του οριακού στρώματος (συμπύκνωση του οριακού στρώματος) καθώς και το γεγονός ότι η ροή για υψηλές γωνίες πρόσπτωσης στην περιοχή κοντά στην ακμή εκφυγής είναι πλήρως ακτινική.

Στο σχήμα 5.22 μπορεί να παρατηρηθεί η πιθανώς υπέρμετρη αύξηση του πάχους ορμής



Σχήμα 5.21: Κατανομές του συντελεστή πίεσης c_p , του συντελεστή τριβής $c_{f\theta}$ και των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος για την αεροτομή NACA 4418 για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 14^\circ$ και $c/r = 0.160$.

ϑ_{22} λόγω των ιδιαίτερα υψηλών τιμών της γωνίας β_{wall} από το τετράγωνο της οποίας συναρτάται. Μάλιστα, η αύξηση αυτή παρατηρείται στο σημείο όπου η ροή είναι πλήρως ακτινική ($\beta_{wall} = 90^\circ$), και η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας της ροής τείνει στο άπειρο ($\tan \beta_{wall} \rightarrow \infty$). Έχει ενδιαφέρον πάντως να αναφερθεί ότι οι *Snel et al* έχουν αμελήσει τον όρο αυτόν ως μικρότερης τάξης μεγέθους συγκριτικά με τους υπόλοιπους όρους.

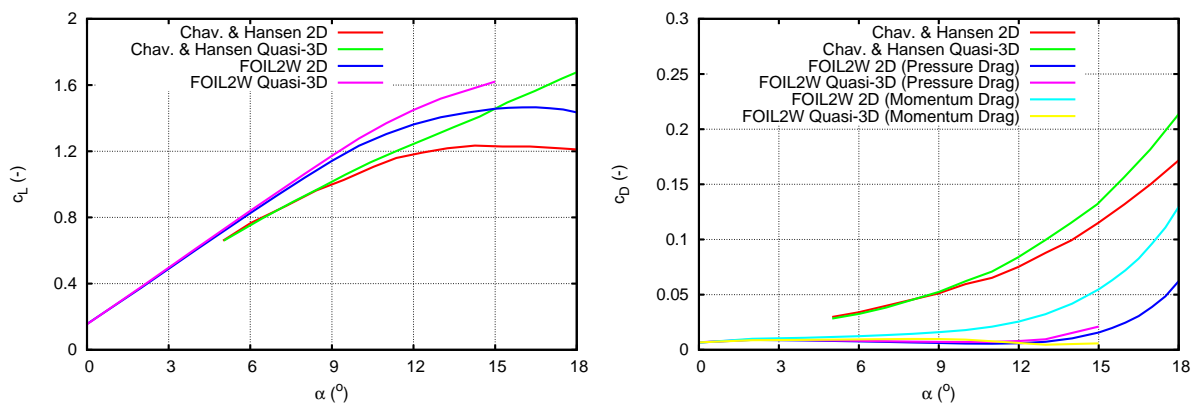


Σχήμα 5.22: Κατανομή των χαρακτηριστικών μεγεθών του οριακού στρώματος στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής NACA 4418 για γωνίες πρόσπτωσης $\alpha = 08^\circ$, $\alpha = 14^\circ$ και $c/r = 0.160$.

5.4.2 Εφαρμογή για NACA 63-215

Στην παρούσα εφαρμογή εξετάζεται η αεροτομή NACA 63-215 με τις αδιάστατες παραμέτρους περιστροφής RO και c/r να λαμβάνουν τις τιμές $RO = 0.951$ και $c/r = 0.300$ αντίστοιχα. Για την ελεύθερη ροή θεωρείται αριθμός *Reynolds* $Re = 2 \cdot 10^6$, ενώ η ροή στην αεροτομή είναι πλήρως τυρβώδης. Τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των *Chaviaropoulos & Hansen* [5] και παρουσιάζονται στο σχήμα 5.23.

Όπως προκύπτει από το σχήμα 5.23 η επίδραση της περιστροφής στους αεροδυναμικούς συντελεστές της αεροτομής είναι σημαντική. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε φέρεται να υποεκτιμά την αύξηση που προκαλείται στο συντελεστή άνωσης c_L , όμως όπως θα δειχθεί στην επόμενη εφαρμογή η μέθοδος των *Chaviaropoulos & Hansen* προλέγει ιδιαίτερα υψηλές τιμές για τους συντελεστές αυτούς. Όσον αφορά το συντελεστή αντίστασης c_D οι διαφορές των δύο μεθόδων είναι μεγάλες καθώς το υπολογιστικό πρότυπο *FOIL2W* υποεκτιμά σημαντικά την αντίσταση. Κάποια σχόλια περί τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης και την επίδραση της περιστροφικής κίνησης στη συμπεριφορά του θα γίνουν στην επόμενη παρά-



Σχήμα 5.23: Διάγραμμα του συντελεστή άνωσης c_L και του συντελεστή αντίστασης c_D συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής $RO = 0.951$ και $c/r = 0.300$ για την αεροτομή NACA 63-215.

γραφο.

5.4.3 Δρομέας NREL Phase VI

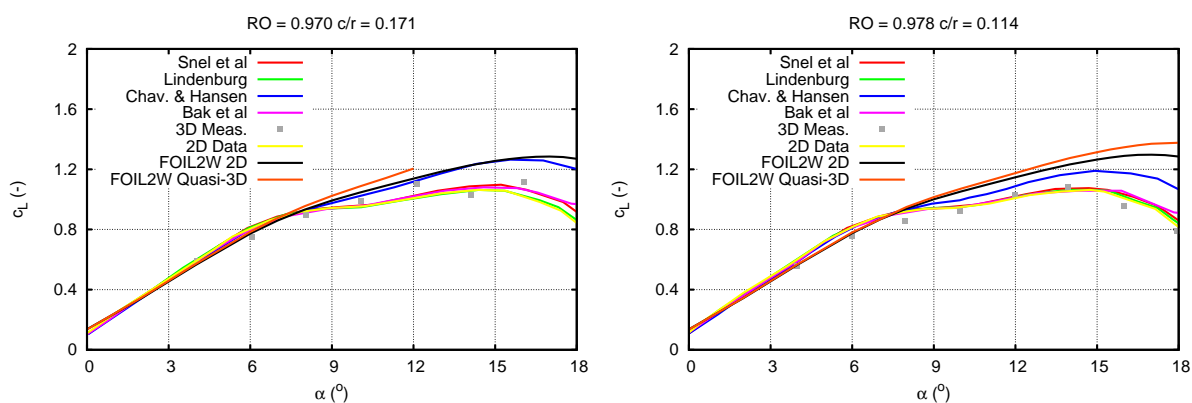
Στην παρούσα υποπαράγραφο εξετάζεται ο δίπτερος δρομέας NREL Phase VI, τα χαρακτηριστικά του οποίου παρουσιάζονται στον πίνακα 5.3. Οι εξεταζόμενες αδιάστατες ακτινικές θέσεις του πτερυγίου και τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται στον πίνακα 5.4. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα από εργασίες διαφόρων ερευνητών (Snel et al [45], Lindenburg [26], Chaviaropoulos & Hansen) [5], τα οποία και θα αποτελέσουν τη βάση για την πιστοποίηση της μεθόδου στην παρούσα εφαρμογή.

Αριθμός πτερυγίων	2
Διάμετρος δρομέα (m)	10.058
Γωνιακή ταχύτητα (rpm)	71.63
Αδιάστατη ταχύτητα ακροπτερυγίου λ	6.3

Πίνακας 5.3: Χαρακτηριστικά του δρομέα NREL/NASA Ames.

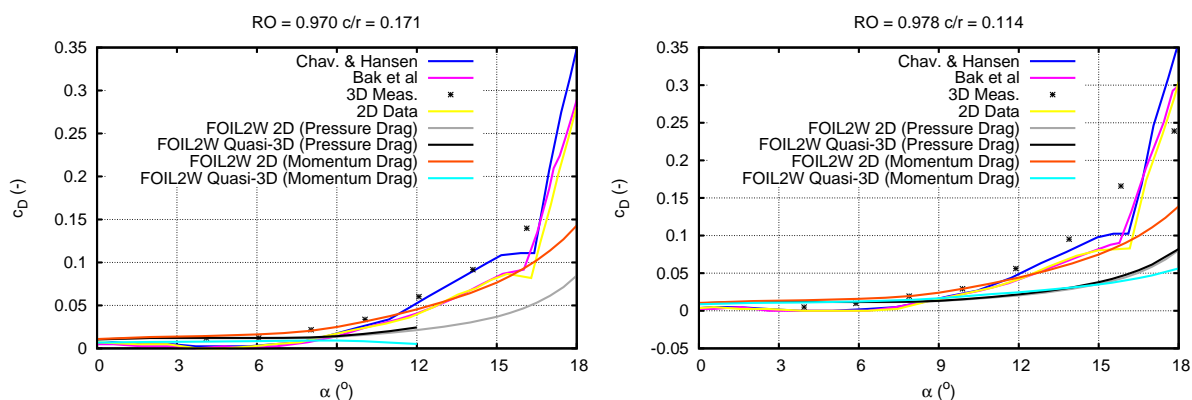
Αεροτομή	s809	s809
r/R	0.631	0.800
c/r	0.171	0.114
RO	0.970	0.978
Re	854111.15	849375.51

Πίνακας 5.4: Εξεταζόμενες αδιάστατες ακτινικές θέσεις του πτερυγίου και τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής για κάθε περίπτωση.



Σχήμα 5.24: Διάγραμμα του συντελεστή άνωσης c_L συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής για την αεροτομή s809.

Σύμφωνα με τα όσα παρουσιάζονται στο σχήμα 5.24 ο συντελεστής άνωσης εμφανίζεται αυξημένος λόγω της επίδρασης της περιστροφής, ακόμα και σε ακτινικές θέσεις αρκετά κοντά στο ακροπτερύγιο. Οι εμπειρικές σχέσεις με τις οποίες γίνεται η σύγκριση (πλην της σχέσης των *Chaviaropoulos & Hansen*) φαίνεται να υποεκτιμούν σε σύγκριση με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε το φαινόμενο στις περιπτώσεις αυτές. Στο σχήμα 5.25 παρουσιάζεται ο συντελεστής αντίστασης c_D συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης:



Σχήμα 5.25: Διάγραμμα του συντελεστή αντίστασης c_D συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης α για διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων περιστροφής για την αεροτομή s809.

Όσον αφορά το σχήμα 5.25 μπορούν να γίνουν ορισμένα ενδιαφέροντα σχόλια. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο υπολογισμός της αντίστασης στο υπολογιστικό πρότυπο *FOIL2W* μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι η ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης και ο δεύτερος με χρήση του ολοκληρωματικού θεωρήματος της ορμής. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι οι δύο τρόποι παρουσιάζουν διαφορετικού χαρακτήρα μεταβολή για το συντελεστή αντίστασης. Ειδικότερα, όταν γίνεται ολοκλήρωση των δυνάμεων

πίεσης παρατηρείται ότι ο συντελεστής αντίστασης αυξάνει, ενώ με τη χρήση του ολοκληρωματικού θεωρήματος της ορμής λαμβάνεται μείωση στην αντίσταση του σώματος. Αυτό συμβαίνει καθώς η περιστροφική κίνηση έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του χορδικού πάχους ορμής ν_{11} βάσει του οποίου υπολογίζεται ο συντελεστής αντίστασης. Οι εμπειρικές σχέσεις πάντως που έχουν προταθεί και παρουσιάζονται στο σχήμα 5.25 φανερώνουν αύξηση του συντελεστή αντίστασης. Αξίζει πάντως να αναφερθεί ότι άλλοι ερευνητές (*Du & Selig [10]*) υπολογίζουν μείωση στην αντίσταση του σώματος. Η επίδραση λοιπόν της περιστροφικής κίνησης στο συντελεστή αντίστασης δεν είναι σαφής, οπότε και μπορεί να μελετηθεί εκτενέστερα σε μελλοντική εργασία.

Κεφάλαιο 6

Αποτίμηση της εργασίας

6.1 Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Το υπολογιστικό πρότυπο συνεκτικής μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης *FOIL2W* του εργαστηρίου Αεροδυναμικής επεκτάθηκε κατάλληλα ώστε να συμπεριλαμβάνει την επίδραση της περιστροφικής κίνησης των πτερυγίων. Αφετηρία της μελέτης που έγινε αποτέλεσε η μαθηματική διαμόρφωση του προβλήματος για την περιοχή του οριακού στρώματος στην περίπτωση μόνιμων και μη μόνιμων ροών, καθώς και η υπολογιστική υλοποίησή του. Στη συνέχεια, αναγνωρίζοντας τη σημασία τους σε κάθε ολοκληρωματική μέθοδο, έγινε αξιολόγηση των εμπειρικών σχέσεων που προτείνονται για το “τυρβώδες” κλείσιμο του προβλήματος. Ακολούθησε διερεύνηση σχετικά με τις υποθέσεις που έγιναν κατά τη διαμόρφωση και μοντελοποίηση του προβλήματος και έγινε προσπάθεια για την αξιολόγησή τους. Ακόμα, αναλύθηκε η επίδραση και η σημασία των κυλινδρικών όρων και των όρων περιστροφής. Τέλος ακολούθησε η πιστοποίηση της μεθόδου, για την περίπτωση μόνιμων ροών. Παρά τις αριθμητικές δυσκολίες που παρουσιάστηκαν, η μέθοδος φαίνεται ότι έχει τη δυνατότητα να αξιολογεί ικανοποιητικά την επίδραση των τριδιάστατων και περιστροφικών φαινομένων στη ροή. Βάσει των εφαρμογών που εξετάστηκαν εξήχθησαν ιδιαίτερα ενδιαφέροντα συμπεράσματα, τα οποία και αναφέρονται στη συνέχεια:

Η περιστροφική κίνηση έχει σημαντική επίδραση στο οριακό στρώμα της ροής γύρω από ένα πτερύγιο. Καθυστερεί την εμφάνιση του σημείου αποκόλλησης, ειδικότερα για τα εσωτερικά τμήματα του πτερυγίου. Αναγνωρίστηκε ότι τα τριδιάστατου χαρακτήρα φαινόμενα δεν είναι σημαντικά στην περιοχή προσκολλημένου τυρβώδους ροής, ενώ κυριότερο λόγο στη διαμόρφωση του πεδίου ροής έχουν οι όροι *Coriolis*. Ως σημαντικότερη από τις σχετικές με την περιστροφή αδιάστατες παραμέτρους αναγνωρίστηκε ο λόγος της χορδής της αεροτομής προς την απόστασή της από το κέντρο περιστροφής c/r . Εν κατακλείδι, η περιστροφική κίνηση έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της αεροδυναμικής απόδοσης του πτερυγίου και την καθυστερημένη εμφάνιση του φαινομένου της απώλειας στήριξης.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική επέκταση της μεθόδου

Η περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, όπως έγινε φανερό κατά το σχολιασμό των αποτελεσμάτων. Ένα πρώτο βήμα είναι η αριθμητική σταθεροποίηση του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος ώστε η μέθοδος να λειτουργεί αποδοτικότερα σε περισσότερες καταστάσεις ροής. Η διαδικασία αυτή θα επιτρέψει παράλληλα τη μελέτη της επίδρασης της περιστροφής για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης σε περιπτώσεις όπου οι σχετικές με την περιστροφή αδιάστατες παράμετροι λαμβάνουν υψηλές τιμές. Επιπλέον, ο αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων του οριακού στρώματος επιδέχεται επιτάχυνση ώστε η μέθοδος να γίνει ακόμα πιο αποδοτική όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η μέθοδος έχει διαμορφωθεί κατάλληλα ώστε να προλέγει μόνιμες και μη μόνιμες ροές, όμως στα πλαίσια της παρούσας εργασίας εξετάστηκε η λειτουργία και αξιοπιστία της για μόνιμες ροές. Ως εκ τούτου, η πιστοποίηση της μεθόδου για περιπτώσεις μη μόνιμων ροών και συνδυαστικής κίνησης του σώματος μπορεί να ακολουθήσει σε μελλοντική εργασία.

Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση της συμπεριφοράς της ακτινικής συνιστώσας της ροής στις περιπτώσεις αποκόλλησης και στον ομόρρο, ώστε να αξιολογηθεί η αξιοπιστία των ακτινικών προφίλ ταχύτητας και για τις περιπτώσεις αυτές. Σχετική πληροφορία μπορεί να εξαχθεί από υπολογιστικά εργαλεία υψηλής ακρίβειας, και βάσει αυτής πιθανώς να ακολουθήσει κάποιου είδους εμπειρική διόρθωση ώστε να προσεγγιστεί η επιθυμητή συμπεριφορά.

Τέλος, εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη και αξιολόγηση της επίδρασης των καμπυλόγραμμων όρων. Οι όροι αυτοί, οι οποίοι στην παρούσα εργασία έχουν αμεληθεί, είναι ιδιαίτερα σημαντικοί για αεροτομές σημαντικού πάχους και καμπυλότητας, όπως οι αεροτομές που συναντώνται σε ανεμογεννήτριες κοντά στη ρίζα των πτερυγίων.

Παράρτημα Α΄

Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος για συνδυαστική περιστροφική και μεταφορική κίνηση

Στην περίπτωση όπου η αεροτομή εκτελεί επιπλέον μεταφορική και περιστροφική κίνηση γωνιακής ταχύτητας Ω_r γύρω από άξονα κάθετο στο διδιάστατο επίπεδό της οι εξισώσεις του οριακού στρώματος καταλήγουν στη μορφή:

$$\bullet (\rho_e u_{ze})_{wall} = \frac{d}{ds} (\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*) \quad (A'.1)$$

$$\bullet \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d(\rho_e u_{\theta e} \delta_1^*)}{dt} + \frac{d\vartheta_{11}}{ds} + (2 + H - M_e^2) \frac{\vartheta_{11}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} + \frac{2\vartheta_{21} - \delta_2^*}{r} (1 + RO^2) + \frac{2\Omega_z \delta_2^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \quad (A'.2)$$

$$\bullet \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d(\rho_e u_{\theta e} \delta_2^*)}{dt} + \frac{d\vartheta_{21}}{ds} + \frac{\vartheta_{22} - \vartheta_{11} - \delta_1^*}{r} + \frac{2RO^2 \vartheta_{22}}{r} + (2 - M_e^2) \frac{\vartheta_{21}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} - \frac{2\Omega_z \delta_1^*}{u_{\theta e}} = \frac{C_{f\theta}}{2} \tan \beta_{wall} \quad (A'.3)$$

$$\bullet \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^3} \frac{d}{dt} (\rho_e u_{\theta e}^2 \vartheta_{11}) + \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}} \frac{d}{dt} (\rho_e \delta_1^*) + \frac{2}{u_{\theta e}^2} \frac{du_{\theta e}}{dt} H^{**} \vartheta_{11} - \frac{H^*}{\rho_e u_{\theta e}^2} \frac{d}{dt} (\rho_e u_{\theta e}^2 \delta_1^*) + \vartheta_{11} \frac{dH^*}{ds} + (2H^{**} + H^* (1 - H)) \frac{\vartheta_{11}}{u_{\theta e}} \frac{du_{\theta e}}{ds} - \frac{4\Omega_r}{u_{\theta e}} \Theta_z = 2C_{D\theta} + \frac{2a}{u_{\theta e}^2} \delta_1^* - H^* \frac{C_{f\theta}}{2} \quad (A'.4)$$

όπου στις εξισώσεις ορμής οι επιπλέον όροι *Coriolis* (σχετικοί με την περιστροφή γύρω από τον άξονα r) αμελούνται καθώς σχετίζονται με το έλλειμμα μάζας στην κάθετη κατεύθυνση, το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μικρό. Επιπλέον οι φυγόκεντροι όροι σχετίζονται με την καθ' ύψος μεταβολή της διαφοράς πυκνότητας μεταξύ της μη συνεκτικής και της συνεκτικής ροής, η οποία στην περίπτωση ροών χαμηλού αριθμού *Mach* είναι μικρή.

Οι επιπλέον όροι που προκύπτουν στη διδιάστατη διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της κινητικής ενέργειας από την επιπλέον μεταφορική και περιστροφική κίνηση του σώματος περιλαμβάνουν την παράμετρο Θ_z η οποία ορίζεται από τη σχέση,

$$\Theta_z = \frac{1}{\rho_e u_{\theta e}^2} \int_0^\delta (\rho_e u_{\theta e} u_{ze} - \rho u_{\theta} u_z) dz \quad (A'.5)$$

καθώς και την παράμετρο a η οποία ορίζεται:

$$a = \Omega_r^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial t} R_{OPz} - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2} \cong \Omega_r^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial t} (R_{OPz} + z) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2} \quad (A'.6)$$

Μία πρώτη προσέγγιση για την παράμετρο Θ_z σύμφωνα με τον *East* [13] είναι:

$$\Theta_z \cong (\vartheta_{11} + \delta_1^*) \frac{d\delta_1^*}{ds} \quad (A'.7)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Bak, C., Johansen J. and Andersen P.B., *Three-dimensional corrections of airfoil characteristics based on pressure distributions*, Proceedings of the European Wind Energy Conference, Athens, Greece, 2006.
- [2] Basu, B.C. and Hancock, G.J., *The unsteady motion of a two-dimensional airfoil in incompressible inviscid flow*, Journal of Fluid Mechanics, part 1, pp. 159-178, 1978.
- [3] Bradshaw, P. and Ferriss, D.H., *Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation: compressible flow on adiabatic walls*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 46, part 1, pp. 83-110, 1970.
- [4] Cebeci, T., Jau, J., Vitiello, D. and Chang, K.C., *Prediction of post-stall flows on airfoils*, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows, vol. IV, Springer, Berlin, 1990.
- [5] Chaviaropoulos, P.K. and Hansen, M.O.L., *Investigating three-dimensional and rotational effects on wind turbine blades by means of a quasi-3D Navier Stokes solver*, J. ASME Fluids Engineering, 2000.
- [6] Coles, D.E., *The law of the wake in the turbulent boundary layer*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 1, part 2, 1956.
- [7] Donegan, T., *Unsteady viscous-inviscid interaction procedures for transonic airfoil flows*, M.S. Thesis, The University of Tennessee, Knoxville, TN, December 1983.
- [8] Drela, M. and Giles, M., *Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils*, Journal AIAA, vol. 25, no. 10, pp. 1347-1355, 1987.
- [9] Drela, M., *An analysis and design systems for low Reynolds number airfoils*, Conference on Low Reynolds Number Aerodynamics, University of Notre Dame, 1989.
- [10] Du, Z. and Selig, M.S., *The effect of rotation on the boundary layer of a wind turbine blade*, Renewable Energy, 2000.

-
- [11] Dumitrescu, H., Cardoso, V. and Dumitrache, A., *Modelling of inboard stall delay due to rotation*, Journal of Physics, The Science of Making Torque from Wind, Conference Series, 2007.
- [12] Duque, E.P.N., Burkland, M.D. and Johnson, W., *Navier-Stokes and comprehensive analysis performance predictions of the NREL phase VI experiment*, Journal of Solar Energy Engineering, vol. 125, no.4, pp. 457-467, 2003.
- [13] East, L.F., *A representation of second order boundary layer effects in the momentum integral equation and in viscous-inviscid interactions*, RAE Tech. Report, 1981.
- [14] Falkner, V.M. and Skan, S.W., *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Phil. Mag, vol. 12, pp. 865, 1931.
- [15] Fletcher, T.M., Brown, R.E., Kim, D.H. and Kvon, O.J., *Predicting wind turbine blade load using vorticity transport and RANS methodologies*, European Wind Energy Conference and Exhibition, Marseille, March, 2009.
- [16] Fogarty, L.E., *The laminar boundary layer on a rotating blade*, Journal of Aeronautical Sciences, vol.18, no. 4, pp. 247-252, 1951.
- [17] Fogarty, L.E. and Sears, W.R., *Potential flow around a rotating, advancing cylindrical blade*. Journal of Aero. Sci., 17, 1950.
- [18] Gleyzes, C., Cousteix, JR. and Bonnet, J.L., *Theoretical and experimental study of low Reynolds number transitional separation bubbles*, Presented at the Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics, University of Notre Dame, Notre Dame, 1985.
- [19] Green, J.E., Weeks, D.J. and Brooman, J.W.F., *Prediction of turbulent boundary layers and wakes in compressible flow by a lag-entrainment method*, ARC R&M Report no. 3791, HMSO, London, England, 1977.
- [20] Himmelskamp, H., *Profile investigations on a rotating airscrew*, PhD Dissertation, MAP Volkenrode, Report and Translation no. 832, 1947.
- [21] Ingen, J.L. van, *A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region*, Delft University of Technology, Dept. Of Aerospace Engineering, Rept. VTH-74, 1956.
- [22] Johnston, J.P., *On the three-dimensional turbulent boundary layer generated by secondary flow*, J. Basic Engng, Series D, Trans. ASME, vol. 82, pp. 233-246, 1960.
- [23] Lakshminarayana, B. and Govindan, T.R., *Analysis of turbulent boundary layer on cascade and rotor blades of turbomachinery*, AIAA Journal, 19:1333-1341, 1981.
-

-
- [24] LeBalleur, J.C., *Strong matching method for computing transonic viscous flows including wakes and separation*. Lifting Airfoils, Recherche Aerospaciale, no. 1981-3, 1981.
- [25] LeBalleur, J.C., *New possibilities of viscous-inviscid numerical techniques for solving viscous flow equations with massive separation*, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, vol. IV, Springer, Berlin, 1990.
- [26] Lindenburg, C., *Modelling of rotational augmentation based on engineering considerations and measurements*, European Wind Energy Conference, London, 22-25 November 2004.
- [27] Lindhout, J.P.F., Veldman, A.E.P. and Boer, E. de, *VISIAN: a Viscous-inviscid Strong-interaction Analysis System*, National Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, 1988.
- [28] Lock, R.C. and Williams, B.R., *Viscous-inviscid interactions in external aerodynamics*, Prog. Aerospace Sci., vol. 23, pp. 51-171, 1987.
- [29] Mager, A., *Generalization of boundary layer momentum integral equations to three-dimensional flows including these of rotating system*, NACA R 1067, 1952.
- [30] Martinez, G.G., Sørensen, J.N. and Shen, W.Z., *3D boundary layer study of a rotating wind turbine blade*. Journal of Physics: Conference Series 75 012032, 25, 2007.
- [31] McCroskey, W.J. Nash, J.F. and Hicks, J.G., *Turbulent boundary layer flow over a rotating flat plat blade*, 1971.
- [32] Mughal, B. and Drela, M., *A calculation method for the three-dimensional boundary layer equations in integral form*, AIAA 93-0786, 1993.
- [33] Narramore, J.C. and Vermeland, R., *Navier-Stokes calculations of inboard stall delay due to rotation*, Journal of Aircraft, vol. 29, no. 1, 1992.
- [34] Nishida, B. and Drela, M., *Fully simultaneous coupling for three-dimensional viscous/inviscid flows*, AIAA 95-1806-C, 1995.
- [35] Prandtl, L., *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Proceedings International Mathematical Congress, pp. 484-491, 1904.
- [36] Ramos García, N.R., Sørensen, J.N. and Shen, W.Z., *A strong viscous–inviscid interaction model for rotating airfoils*, Wind Energy, 2013.
- [37] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1979.
- [38] Sears, W.R., *Potential flow around a rotating cylindrical blade*, Journal of Aeronautical Sciences, vol. 17, no. 9, pp. 183-184, 1950.
-

-
- [39] Sears, W.R., *Boundary layers in three-dimensional flow*, Applied Mechanics Reviews, 7, 1954.
- [40] Skøby, C., *Solution of boundary layer flows about rotating wings*, 2008.
- [41] Shen, W.Z. and Sørensen, J.N., *Quasi-3D Navier-Stokes model for a rotating airfoil*, Journal of Computational Physics, 150, pp. 518-549, 1999.
- [42] Smith, A.M.O. and Gamberoni, N., *Transition pressure gradient and stability theory*, Douglas Aircraft Co., Rept. ES26388, 1956.
- [43] Smith, P.D., *Calculation methods for three-dimensional turbulent boundary layers*, ARC R&M 3523, 1966.
- [44] Smith, P.D., *An integral method for three-dimensional compressible turbulent boundary layers*, ARC R&M 3739, 1972.
- [45] Snel, H., Hounwik, R. and Bosschers, J., *Sectional prediction of lift coefficients on rotating wind turbine blades in stall*, Rep. no. ECN-C-93-052, Netherlands Energy Research Foundation ECN, 1994.
- [46] Sørensen, J.N., *Three-level, viscous-inviscid interaction technique for the prediction of separated flow past rotating wing*, PhD Thesis, Technical University of Denmark, 1986.
- [47] Swafford, T.W., *Analytical approximation of two-dimensional separated turbulent boundary-layer velocity profiles*, Journal AIAA, vol. 21, no. 6, Technical Notes, pp. 923-926, 1983.
- [48] Whitfield, D.L., *Analytical description of the complete two-dimensional turbulent boundary layer velocity profile*, Arnold Air Force Station, AEDC-TR-77-79 (ADA 045033), 1977.
- [49] Whitfield, D.L., *Integral solution of compressible turbulent boundary layers using improved velocity profiles*, Arnold Air Force Station, AEDC-TR-78-42, 1978.
- [50] Williams, B.R. and Smith, P.D., *Coupling procedures for viscous-inviscid interaction for attached and separated flows on swept and tapered wings*, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows, vol. IV, Springer, Berlin, 1990.
- [51] Young, A.D., *Boundary layers*, BSP Professional Books, pp. 207, 1989.
- [52] Βουτσινάς, Σ.Γ., *Μη μονιμη αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αεροακουστική*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΕΜΠ.
-

-
- [53] Γιαννάκογλου, Κ.Χ., *Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές*, Πανεπιστημιακές παραδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 2004.
- [54] Ριζιώτης, Β.Α., *Αεροδυναμική και αεροελαστική ανάλυση της απώλειας στήριξης σε δρομείς ΑΓΟΑ*, Διδακτορική Διατριβή, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ, 2003.
- [55] Ριζιώτης, Β.Α., *Διερεύνηση της δυνατότητας προσομοίωσης της απώλειας στήριξης με στροβιλές μεθόδολογίες*, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ, 1994.
- [56] Τσαγγάρης, Σ., *Μηχανική των ρευστών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005.
-