Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

ΘΕΩΡΙΑ RAMSEY ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΩΡΩΝ BANACH

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΤΥΡΟΥ

Επιβλέπων: Βασίλης Κανελλόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2010

Ευχαριστείες

Τα τρία χρόνια που διήρκησε το διδακτορικό μου πρόγραμμα θα μπορούσα να τα χαρακτηρίσω ιδιαίτερα ευχάριστα. Ήταν έντονα επιμορφωτικά και μου δόθηκε η ευκαιρία να ανακαλύψω καλά κρυμμένες ομορφιές στο χώρο των μαθηματικών. Περιπλανόμενος στα μονοπάτια της έρευνας γνώρισα αυτό το περίεργο συναίσθημα που καταλαμβάνει ένα μαθηματικό όταν η σκέψη του απομονώνεται από την καθημερινότητα και βυθίζεται στο πρόβλημα του, το πάθος του να το λύσει και στην περίπτωση που το καταφέρνει το ισχυρό αίσθημα χαράς που τον κυριεύει. Επίσης μου δόθηκε η ευκαιρία να βιώσω από κοντά τη μαθηματική κοινότητα και να γνωρίσω αρκετούς ανθρώπους από το χώρο αυτό. Στην πορεία μου αυτή κάποιοι άνθρωποι είχαν ιδιαίτερα έντονη παρουσία και νιώθω χαρά που μπορώ να εκφράσω τις ευχαριστείες μου.

Θα ήθελα να ξεκινήσω με τον επιβλέποντα μου κύριο Βασίλη Κανελλόπουλο Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. Θέλω να ευχαριστήσω τον άνθρωπο αυτό για τα μεγάλα ποσά ενέργειας και χρόνου που ξόδεψε τόσο στις συζητήσεις που είχαμε όλο αυτό το διάστημα όσο και στην προσπάθεια του να βάλει κάποια πειθαρχεία στο γράψιμο μου. Είχα την ευκαιρία να παρακολουθήσω στενά τον τρόπο που αντιμετώπιζε τα διάφορα μαθηματικά προβλήματα και τη διαδικασία αποσαφήνησης των αρχικών αποδείξεων που επιτύγχανε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σπύρο Αργυρό Καθηγητή Ε.Μ.Π. Η καθοδήγηση του μέσα από τις πολύωρες συζητήσεις μας ήταν ιδιαίτερα σημαντική. Τις ιδέες του δε θα μπορούσα παρά να τις χαρακτηρίσω καθοριστικές για την εργασία μου, ενώ η προσπάθεια του να μου υποδείξει τον τρόπο αντιμετώπισης των μαθηματικών προβλημάτων ήταν έντονα επικοδομητική για εμένα.

Θα ήθελα να ευχαρηστήσω τον κύριο Δ. Κραββαρίτη Καθηγητή Ε.Μ.Π. για την ενεργό συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή καθώς και τους Σ. Καρανάσιο Καθηγητή Ε.Μ.Π., Σ. Μερκουράκη Καθηγητή Ε.Κ.Π.Α., Ι. Πολυράκη Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Ι. Σαραντόπουλος Καθηγητή Ε.Μ.Π. για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή για την αξιολόγηση της διδακτορικής μου διατριβής.

Επίσης υπάρχει μια σειρά ατόμων που συνέβαλαν στην δημιουργία ενός ευχάριστου και ζωντανού εργασιακού περιβάλλοντος. Κυρίως θα ήθελα να αναφερθώ στον Αλέξανδρο Αρβανιτάκη Επίκουρο Καθηγητή και στο διδάκτορα Δημήτρη Απατσίδη, με τους οποίου είχα πολλές συζυτήσεις περί μαθηματικών.

Τις βαθύτερες ευχαριστείες νιώθω την ανάγκη να τις εκφράσω στην οικογένεια μου. Οι γονείς μου Δημήτρης και Μαριάννα βρίσκονταν συνεχώς δίπλα μου και με στήριζαν σε κάθε μου βήμα καθόλη τη διάρκεια της ζωής μου. Είχαν ξοδέψει μεγάλα ποσά ενέργειας για να μάθω την προπαίδεια, είχαν δώσει μεγάλη προσοχή στη διαπαιδαγώγιση μου και μου παρείχαν τη δυνατότητα να ασχοληθώ στο βαθμό που ήθελα με τα μαθηματικά τα τελευταία χρόνια. Τέλος θα ήθελα να αναφερθώ στον αδερφό μου Παρασκευά που έχει δείξει μεγάλη υπομονή να του συζητώ για μαθηματικά.

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε κατά τη διάρκεια των ετών 2007-2010 και εντάσεται στα πλαίσια της θεωρίας Ramsey και της θεωρίας χώρων Banach. Το περιεχόμενο της χωρίζεται σε δύο μέρη.

Το πρώτο μέρος φέρει τον τίτλο "Τα spreading models στη θεωρία χώρων Banach". Εδώ ορίζονται τα spreading models υψηλότερης τάξης. Πρώτα ορίζονται οι $\mathcal{F}$-ακολουθίες, όπου $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, και οι πλεγματικές οικογένειες, μια έννοια με καθαρά συνδυαστικό χαρακτήρα. Αυτά είναι τα βασικά συστατικά του ορισμού των $\mathcal{F}$-spreading models. Η απόδειξη της ύπαρξης τους στηρίζεται στις Ramsey ιδιότητες των πλεγματικών οικογενειών. Η περαιτέρω μελέτη των συνδυαστικών ιδιοτήτων των πλεγματικών οικογενειών προσφέρει την δυνατότητα ανεξαρτητοποίησης των $\mathcal{F}$-spreading models από την regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και περιορίζεται η εξάρτηση μόνο στην τάξη της $\mathcal{F}$, που είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στον ορισμό των ξ-spreading models, όπου $\xi < \omega_1$. Έπειτα γίνεται εκτενής μελέτη των ιδιοτήτων των spreading models υψηλότερης τάξης και γενικεύονται αποτελέσματα γνωστά για την περίπτωση των κλασικών spreading models. Το πρώτο μέρος κλείνει με μια σειρά παραδειγμάτων, σκοπός των οποίων είναι να απαντηθούν διάφορα φυσιολογικά ερωτήματα που προκύπτουν από τη σχετική θεωρία και να σκιαγραφηθούν τα όρια της.

Το δεύτερο μέρος φέρει τον τίτλο "Μια διακριτή προσέγγιση του παιχνιδιού του Gowers". Εδώ δίνεται μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος του W.T. Gowers, που έχει σαν συνέπεια την περίφημη διχοτομία του. Η απόδειξη που περιέχεται στο κείμενο αυτό κινείται στις γραμμές της αρχικής απόδειξης του Gowers αλλά είναι προσανατολισμένη να απομονώσει το επιχειρήματα συνδυαστικής φύσης που παίρνουν μέρος σε αυτήν και να χρησιμοποιήσει τις προσεγγίσεις στο πολύ τέλος, ακριβώς δηλαδή τη στιγμή που είναι πραγματικά αναγκαίες. Για το λόγο αυτό ορίζεται το διακριτό παιχνίδι του Gowers που πραγματοποιείται μέσα σε ένα αριθμήσιμο δίκτυο ενός χώρου Banach και το οποίο ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες. Σε αυτό το πλαίσια αποδεικνύεται ένα διακριτό ανάλογο του θεωρήματος του Gowers. Τόσο στο αποτέλεσμα όσο και στην αποδεικτική διαδικασία δεν συμμετέχουν καθόλου οι δ-προσεγγίσεις. Με την κατασκευή ενός δικτύου, που επιπλέον ικανοποιεί μια ιδιότητα που έχει να κάνει με δ-προσεγγίσεις, είμαστε σε θέση να δείξουμε το θεώρημα του Gowers.

Abstract

This thesis developed during the years 2007-2010 and belongs to the area of the Ramsey theory and the Banach space theory. Its context is divided into two parts. The first part is entitled as “The spreading models in the Banach space theory”. The spreading models of higher order are defined here. First the $\mathcal{F}$-sequences, where $\mathcal{F}$ is a regular thin family, and the plegma families, a notion of pure combinatorial nature, are defined. These are the basic ingredients of the definition of the $\mathcal{F}$-spreading models. The proof of their existence is based on the Ramsey properties of the plegma families. The further study of the plegma families allows showing that the $\mathcal{F}$-spreading models of a Banach space actually depend only on the order of the regular family $\mathcal{F}$, which is a countable ordinal number. The latter leads to the definition of the ξ-spreading models, where ξ is a countable ordinal number. We present a detailed study of the properties of the higher order spreading models and we generalize several known results concerning the classical spreading models. The first part concludes with a series of examples illustrating the boundaries of the related theory. The second part is entitled as “A discritized approach to W.T. Gowers' game”. We provide an alternative proof of the theorem of W.T. Gowers, which has as a consequence his famous dichotomy. The proof contained in this text moves along the general principles of the original proof of W.T. Gowers, but it intends to isolate the arguments of combinatorial nature which take part in it and uses the approximations at the very end, at the point that they are really necessary. To this end, we define the discritized analogue of the Gowers' game, which takes place in a countable net in a Banach space and satisfies some certain properties. In this frame we prove a discritized analogue of Gowers' theorem. In both the result and the proving process there are no δ-approximations. By constructing a suitable net, satisfying an additional property related to the δ-approximations, we are able to prove Gowers' theorem in its full generality.

Περιεχόμενα

Μέρος 1

Τα Spreading models στη θεωρία χώρων Banach

Εισαγωγή

Τα spreading models εισήχθησαν από τους A. Brunel και L. Sucheston στα μέσα της δεκαετίας του 70 (βλ. [**9**]) και έκτοτε κατέχουν συνεχή παρουσία στην εξέλιξη της θεωρίας χώρων Banach. Καθώς σκοπός του πρώτου μέρους της διατριβής είναι η επέκταση και η μελέτη της έννοιας αυτής, θα ξεκινήσουμε με τα βασικά στοιχεία του ορισμού και κάποιες συνέπειες του.

1. Τα Brunel-Sucheston spreading models

Ένα spreading model ενός χώρου Banach X είναι μια spreading ακολουθία[1] $(e_n)_n$ σε ένα χώρο με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ που συνδέεται με τον X μέσω μιας *Schreier σχεδόν ισομετρίας* που θα περιγράψουμε. Μια ακολουθία $(x_n)_n$ σε ένα χώρο Banach $(X, \|\cdot\|)$ καλείται *Schreier σχεδόν ισομετρική* με μια ακολουθία $(e_n)_n$ σε ένα χώρο με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$, αν υπάρχει μια μηδενική ακολουθία $(\delta_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών ώστε για κάθε $F = \{n_1 < \ldots < n_k\}$ με $|F| \leq n_1$ και κάθε $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, να έχουμε ότι

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \right\|_* \right| < \delta_{n_1}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε τέτοια ακολουθία $(e_n)_n$ είναι spreading. Μια ακολουθία $(e_n)_n$ είναι spreading model του X αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_n$ στον X που είναι Schreier σχεδόν ισομετρική με την $(e_n)_n$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $(x_n)_n$ παράγει την $(e_n)_n$ σαν spreading model. Με χρήση του θεωρήματος του Ramsey (βλ. [**43**]), οι Brunel και Sucheston απέδειξαν ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_n$ σε ένα χώρο Banach X έχει υπακολουθία $(x_{k_n})_n$ που παράγει spreading model.

Οι spreading ακολουθίες κατέχουν ομαλή δομή. Για παράδειγμα μια spreading ακολουθία $(e_n)_n$ αν είναι αθενώς μηδενική, τότε είναι 1-unconditional. Επιπλέον αν η $(e_n)_n$ είναι unconditional τότε είτε είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή είναι norm Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Η σημασία των spreading models έγκειται στο γεγονός ότι συνδέουν με ένα ασυμπτωτικό τρόπο τη δομή ενός αυθαίρετου χώρου Banach X με τη δομή χώρων που παράγονται από spreading ακολουθίες. Για παράδειγμα κάθε χώρος Banach δέχεται unconditional ακολουθίες σαν spreading model και επιπλέον κάθε ημινορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία σε ένα χώρο Banach X περιέχει μια υπακολουθία που είτε παράγει ℓ^1 σαν spreading model ή είναι norm Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι πρόσφατες ανακαλυψεις (βλ. [**23**], [**24**]) έχουν δείξει ότι παρόμοιες ομαλές δομές δεν υπάρχουν μέσα σε κάθε χώρο Banach.

Από τον ορισμό του spreading model φαίνεται άμεσα ότι περιγράφει κάποιο είδος πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας[2] του χώρου που παράγεται από την ακολουθία $(e_n)_n$ στον χώρο $(X, \|\cdot\|)$. Παρόλα αυτά, υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών εννοιών. Στα πλαίσια της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας υπάρχουν

[1] Μια ακολουθία $(e_n)_n$ σε έναν χώρο με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ καλείται spreading αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k_1 < \ldots < k_n$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε $\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\|_* = \|\sum_{j=1}^n a_j e_{k_j}\|_*$

[2] Ένας χώρος Banach Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X αν για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο F του Y και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $T : F \to Y$ γραμμικός φραγμένος και 1-1 ώστε $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$.

κλασικά επιτεύγματα: το θεώρημα του Dvoretsky (βλ. [**10**]) που εφοδιάζει κάθε χώρο Banach X με την πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα του ℓ^2 και το θεώρημα του Krivine (βλ. [**29**]) που εφοδιάζει κάθε γραμμικώς ανεξάρτητη ακολουθία $(x_n)_n$ στον X με την πεπερασμένη block αναπαραστασιμότητα κάποιου ℓ^p, με $1 \leq p \leq \infty$. Προς την αντίθετη κατεύθυνση οι E. Odell και Th. Schlumprecht (βλ. [**39**]) δείξανε την ύπαρξη ενός αυτοπαθούς χώρου X που δε δέχεται κανεναν ℓ^p σαν spreading model. Συνεπώς τα spreading models ενός χώρου κάθονται γνήσια μεταξύ των χώρων που είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος X και των χώρων που είναι ισόμορφοι με υπόχωρο του X.

Τα spreading models ενός χώρου Banach X μπορούμε να τα αναλογιστούμε σαν ένα σύννεφο χώρων Banach, με πολλά μέλη του να κατέχουν ομαλή δομή, γύρο από τον χώρο X και να προσφέρει πληροφορία, με έναν ασυμπτωτικό τρόπο, για την τοπική δομή του X. Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε το σύννεφο αυτό και να γεμίσουμε το κενό μεταξύ των spreading models και των χώρων που είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι στον X. Ακριβέστερα επεκτείνουμε την Brunel-Sucheston του spreading model και δείχνουμε ότι σύμφωνα με τον νέο ορισμό τα spreading models ενός χώρου Banach X αποτελούν μια ολόκληρη ιεραρχία από κλάσεις χώρων ποσοδειχτισμένες από τους αριθμήσιμους διατακτικούς αριθμούς. Η πρώτη κλάση της ιεραρχίας αυτής αποτελείται από τα κλασικά spreading models.

2. Η επέκταση της έννοιας του spreading models

Ο νέος ορισμός στηρίζεται κυρίως στις ακόλουθες δύο έννοιες. Η πρώτη είναι οι *$\mathcal{F}$-ακολουθίες* $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ όπου $\mathcal{F}$ μια *regular thin* οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Οι $\mathcal{F}$-ακολουθίες θα αντικαταστήσουν τις συνήθεις ακολουθίες. Η δεύτερη είναι οι *πλεγματικές* οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Αυτή είναι μια καινούρια έννοια που κατέχει κρίσιμο ρόλο στην προσέγγιση μας λόγω των Ramsey ιδιοτήτων των οικογενειών αυτών. Να σημειώσουμε επίσης ότι οι πλεγματικές οικογένειες είναι αόρατες στον κλασικό ορισμό των spreading models. Παρακάτω θα περιγράψουμε λεπτομερώς τις παραπάνω έννοιες και τον ορισμό των spreading models. Στη συνέχεια για ένα άπειρο υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ με $[M]^{<\infty}$ (αντ. $[M]^{\infty}$) θα συμβολίζουμε το σύνολο των πεπερασμένων (αντ. άπειρων) υποσυνόλων του M.

Οι thin οικογένειες εισήχθησαν από τον Nash-Williams στο [**37**] και μελετήθηκαν από τους P. Pudlak και V. Rodl στο [**42**]. Μια λεπτομερής παρουσίαση αυτών υπάρχει του δεύτερο μέρος του [**6**]. Εδώ θα θεωρήσουμε μια ειδική κλάση thin οικογενειών που θα τις καλούμε *regular thin* οικογένειες (βλ. Ορισμό 1.3). Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μιας thin οικογένειας $\mathcal{F}$ είναι η τάξη της, που συμβολίζεται ως $o(\mathcal{F})$ και είναι το ύψος του δέντρου $\widehat{\mathcal{F}} = \{t \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \exists s \in \mathcal{F}$ ωιτη $t \sqsubseteq s\}$ (βλ. [**28**], [**42**]). Τυπικά παραδείγματα regular thin οικογενειών είναι οι οικογένεις των k-συνόλων του $\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_k = [\mathbb{N}]^k$ με $o(\mathcal{F}_k) = k$, τα μεγιστικά στοιχεία της Schreier οικογένειας, $\mathcal{F}_\omega = \{s \subset \mathbb{N} : \min s = |s|\}$ με $o(\mathcal{F}_\omega) = \omega$ και για κάθε $\xi < \omega_1$ η οικογένεια $\mathcal{F}_{\omega^\xi}$ αποτελούμενη από τα μεγιστικά στοιχεία της ξ-Schreier οικογένειας $\mathcal{S}_\xi$ (βλ. [**2**]), με $o(\mathcal{F}_{\omega^\xi}) = \omega^\xi$. Θα θεωρούμε τις $\mathcal{F}$-ακολουθίες $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$, σε κάποιο σύνολο, καθώς και τις *$\mathcal{F}$-υπακολουθίες* $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$, όπου $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{F} \upharpoonright L = \{s \in \mathcal{F} : s \subset L\}$.

Οι πλεγματικές οικογένειες είναι κάποιες ειδικού τύπου πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ (βλ. Ορισμός 1.15). Μια πλεγματική οικογένεια είναι μια ακολουθία $(s_1, \ldots, s_l)$ από ξένα ανα δύο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα. Τα πρώτα στοιχεία της $(s_i)_{i=1}^l$ είναι σε αύξουσα σειρά και βρίσκονται πρίν τα δεύτερα στοιχεία τα οποία είναι επίσης σε αύξουσα σειρά και πάει λέγοντας. Δεν είναι απαραίτητο μια πλεγματική οικογένεια να αποτελείται από σύνολα ίδιου μεγέθους. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, θέτουμε $Plm_l(\mathcal{F})$ να είναι το σύνολο όλων των πλεγματικών οικογενειών $(s_1, \ldots, s_l)$ με κάθε $s_i \in \mathcal{F}$. Οι πλεγματικές οικογένειες ικανοποιούν την ακόλουθη Ramsey τύπου ιδιότητα, η οποία είναι καθοριστική για τα ακόλουθα.

Θεωρημα 0.1. Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια. Τότε για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε το $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ να είναι μονοχρωματικό.

Όπως και στην περίπτωση των κλασικών spreading models, η επαναλαμβανόμενη χρήση του παραπάνω θεωρήματος μας οδηγεί στο ότι για κάθε φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα χώρο Banach X υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ και μια ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ στον $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς την οποία η συνήθης Hamel βάση $(e_n)_n$ είναι μια spreading ακολουθία ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα: Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία $((s_i^n)_{i=1}^l)_n$ στο $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $\min s_1^n \to \infty$, έχουμε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_* = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{s_i^n} \Big\|$$

Η ακολουθία $(e_n)_n$ θα καλείται $\mathcal{F}$-*spreading model* του X που *παράγεται από* την $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$.

Ας σημειώσουμε ότι οι $\mathcal{F}$-ακολουθίες με $o(\mathcal{F}) = 1$ ταυτίζονται ουσιαστικά με τις συνήθεις ακολουθίες και οι αντίστοιχες πλεγματικές οικογένειες είναι τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Επομένως ο παραπάνω ορισμός για $o(\mathcal{F}) = 1$ περιγράφει ακριβώς τα κλασικά Brunel-Sucheston spreading models.

Υπάρχουν διάφορες ενδείξεις που συνηγορούν στο ότι ο παραπάνω ορισμός των spreading models αποτελεί την κατάλληλη επέκταση του κλασικού. Η πρώτη είναι ότι ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_n$ εξαρτάται *μόνο* από την τάξη της $\mathcal{F}$. Ειδικότερα ισχύει το ακόλουθο.

Προταση 0.2. Έστω ένας χώρος Banach X και regular thin οικογένειες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. Αν $o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{G})$ τότε η $(e_n)_n$ είναι $\mathcal{F}$-spreading model του X αν και μόνο αν η $(e_n)_n$ είναι $\mathcal{G}$-spreading model του X. Γενικότερα, αν $o(\mathcal{F}) \le o(\mathcal{G})$ και η $(e_n)_n$ είναι $\mathcal{F}$-spreading model του X τότε η $(e_n)_n$ είναι $\mathcal{G}$-spreading model του X.

Το παραπάνω μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε τα spreading models ενός χώρου Banach X σε μια υπερπεπερασμένη ιεραρχία ως εξής.

Ορισμος 0.3. Έστω ένας χώρος Banach X και $1 \le \xi < \omega_1$. Θα λέμε ότι η $(e_n)_n$ είναι ένα ξ-spreading model του X αν υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ με $o(\mathcal{F}) = \xi$ τέτοια ώστε η $(e_n)_n$ είναι $\mathcal{F}$-spreading model του X. Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ξ-spreading models του X ως $\mathcal{SM}_\xi(X)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η Πρόταση 0.2 συνεπάγεται ότι η υπερπεπερασμένη ιεραρχία των spreading models που ορίστηκε παραπάνω είναι αύξουσα, δηλαδή για κάθε χώρο Banach X και $1 \le \zeta < \xi < \omega_1$ έχουμε ότι $\mathcal{SM}_\zeta(X) \subseteq \mathcal{SM}_\xi(X)$. Είναι ανοιχτό πρόβλημα αν η ιεραρχία αυτή σταθεροποιείται, δηλαδή για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός ξ ώστε για κάθε $\zeta > \xi$, $\mathcal{SM}_\zeta(X) = \mathcal{SM}_\xi(X)$·

Το πρόβλημα αυτό είναι ανοιχτό ακόμα και για κλασικούς χώρους όπως οι $L^p(\lambda)$, $1 \le p < \infty$. Για την περίπτωση των ℓ^p, $1 \le p < \infty$, γνωρίζουμε ότι οι κλάσεις $\mathcal{SM}_\xi(\ell^p)$ σταθεροποιούνται για $\xi = 1$. Η περίπτωση του c_0 παρουσιάζει περισότερο ενδιαφέρον. Κάθε spreading model τάξης ένα του c_0 παράγει τον c_0, ενώ κάθε Schauder βασική spreading ακολουθία είναι ισοδύναμη με ένα spreading model τάξης δύο του c_0. Το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύει ότι τα υψηλότερης τάξης spreading mo- dels ενός χώρου Banach είναι πολύ διαφορετικά από τα κλασικά. Παραμένει ωστόσο ανοιχτό αν η κλάση $\mathcal{SM}_\xi(c_0)$ σταθεροποιείται σε κάποιον αριθμήσιμο διατακτικό ξ.

Ας παρατηρήσουμε ότι τα ξ-spreading models του X έχουν ασθενέστερη ασυμπτωτική συσχέτιση με τον χώρο X καθώς το ξ αυξάνει στον ω_1. Μια φυσιολογική ερώτηση που προκύπτει από την παραπάνω συζητηση είναι κατά πόσο τα ξ-spreading models του X, $\xi < \omega_1$, μπορούν να συλλάβουν το θεώρημα του Krivine. Όπως θα δούμε αυτό δεν είναι πάντα σωστό.

3. Άλλες προσεγγίσεις

Υπάρχουν δύο άλλες έννοιες που μοιράζονται αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με τον επεκτεταμένο ορισμό που αναφέραμε παραπάνω. Η πρώτη έρχεται από τους L. Halbeisen και E. Odell στο [**25**] και αφορά τα λεγόμενα ασυμπτωτικά μοντέλα, τα οποία συνδέονται με φραγμένες $[\mathbb{N}]^2$-ακολουθίες ενός χώρου Banach. Τα ασυμπτωτικά μοντέλα δεν είναι απαραιτήτως spreading ακολουθίες.

Η δεύτερη διατυπώνεται στο [**39**] παρόλο που ήταν γνωστή στους ειδικούς της θεωρίας χώρων Banach. Αφορά αυτά που θα καλούμε *ισχυρά* k-spreading models, τα οποία ορίζονται επαγωγικά ως εξής. Πρώτα θα χρειαστούμε κάποιο συμβολισμό από το [**39**]. Έστω X, E χώροι Banach. Θα γράφουμε $X \to E$ αν ο E έχει Schauder βάση η οποία είναι spreading model μιας ημινορμαρισμένης Schauder βασικής ακολουθίας στον X και $X \overset{k}{\to} E$ αν $X \to E_1 \to \ldots \to E_{k-1} \to E$ για κάποια πεπερασμένη ακολουθία $E_1, \ldots, E_{k-1}$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αν $X \overset{k}{\to} E$ τότε ο E έχει μια spreading Schauder βάση. Μια spreading Schauder βασική ακολουθία $(e_n)_n$ θα καλείται *ισχυρό* k-spreading model ενός χώρου Banach X αν θέτοντας $E = \overline{<(e_n)_n>}$ τότε $X \overset{k}{\to} E$. Αν σε κάθε επαγωγικό βήμα θεωρήσουμε block ακολουθίες αντί Schauder βασικών, ορίζουμε με παρόμοιο τρόπο τα *block* ισχυρά k-spreading models ($X \underset{\text{bl}}{\overset{k}{\to}} E$). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα ισχυρά k-spreading models ορίζουν μια αριθμήσιμη ιεραρχία και ένα πρόβλημα που διατυπώθηκε από τους E. Odell και Th. Schlumprecht στο [**39**] είναι αν υπάρχει χώρος Banach X ώστε κανένα ισχυρό k-spreading model του να περιέχει κάποιον ℓ^p, για $1 \le p < \infty$, ή c_0.

Είναι ενδιαφέρον ότι η κλάση των k-spreading models περιέχει τα περισσότερα ισχυρά τάξης k όπως περιγράφεται από το ακόλουθο.

Πρόταση 0.4. *Έστω ένας χώρος Banach X και $k \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε block ισχυρό k-spreading model είναι και k-spreading model. Επιπλέον αν για κάθε $1 \le l < k$, όλα τα ισχυρά l-spreading models είναι αυτοπάθή τότε όλα τα ισχυρά k-spreading models είναι k-spreading models.*

Η πρόταση αυτή, σε συνδυασμό με το ακόλουθο πιο γενικό αποτέλεσμα, απαντά το πρόβλημα που αναφέραμε παραπάνω. Υπάρχει αυτοπαθής χώρος X ώστε κανένας ℓ^p, για $1 \le p < \infty$, ούτε ο c_0 να περιέχεται στον $E = \overline{<(e_n)_n>}$, όπου $(e_n)_n$ ένα spreading model οποιασδήποτε τάξης του X.

Να σημειώσουμε επίσης ότι όλα τα ισχυρά k-spreading models του c_0 παράγουν τον c_0. Από την άλλη μεριά, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η κλάση των spreading models τάξης δύο του c_0 περιέχει μια μεγάλη ποικιλία spreading ακολουθιών. Συνεπώς τα ισχυρά 2-spreading models του c_0 είναι γνήσια υποκλάση του $\mathcal{SM}_2(c_2)$. Επιπλέον για κάθε $k \ge 2$, θα δούμε ότι υπάρχει παράδειγμα αυτοπαθούς χώρου ώστε τα l-spreading models περιέχουν γνήσια τα ισχυρά l-spreading models, για κάθε $l \ge k$.

4. Επισκόπηση των αποτελεσμάτων

Το πρώτο μέρος της διατριβής οργανώνεται σε 14 κεφάλαια και χωρίζεται φυσιολογικά σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος (Κεφάλαια 1-10) περιλαμβάνει τον ορισμό των υψηλότερης τάξης spreading models και τη θεωρία τους. Στο δεύτερο παρουσιάζονται παραδείγματα, που δείχνουν ότι η ιεραρχία των spreading models είναι υπαρκτή και δε καταρρέει και εντοπίζουν τα όρια της θεωρίας του. Θα συνεχίσουμε με μια σύντομη περιγραφή του περιεχομένου του πρώτου μέρους.

Κεφάλαιο 1. Το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με τις regular thin και πλεγματικές οικογένειες, οι οποίες όπως έχουμε ήδη αναφέρει κατέχουν κυρίαρχο ρόλο στην προσέγγιση μας. Τα κύρια αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι το Θεώρημα 0.1, που αφορά τις Ramsey ιδιότητες των πλεγματικών οικογενειών, και τα ακόλουθα δύο θεωρήματα που συμβάλλουν στην περαιτέρω περιγραφή της συμπεριφοράς των οικογενειών αυτών.

Για μια οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, με $Plm(\mathcal{F})$ συμβολίζουμε το σύνολο των πλεγματικών οικογενειών της $\mathcal{F}$, δηλαδή $Plm(\mathcal{F}) = \cup_{l=1}^{\infty} Plm_l(\mathcal{F})$.

Θεωρημα 0.5. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ regular thin οικογένειες. Αν $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$ τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχουν $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \restriction N \to \mathcal{F} \restriction M$ τέτοια ώστε για κάθε $(s_i)_{i=1}^l \in Plm(\mathcal{G} \restriction N)$, έχουμε ότι $(\varphi(s_i))_{i=1}^l \in Plm(\mathcal{F} \restriction M)$.

Μια απεικόνιση φ που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα θα λέμε ότι σέβεται τα πλέγματα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί το συνολοθεωρητικό ανάλογο της Πρότασης 0.2 και μάλιστα αποτελεί το βασικό συστατικό της απόδειξής της. Προς την αντίθετη κατεύθυνση δείχνουμε το ακόλουθο, το οποίο απαγορεύει την ύπαρξη τέτοιων απεικονίσεων από χαμηλότερης σε υψηλότερης τάξης regular thin οικογενειών.

Θεωρημα 0.6. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ regular thin οικογένειες. Αν $o(\mathcal{F}) < o(\mathcal{G})$ τότε για κάθε $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L$ ούτε το $(\phi(s_1), \phi(s_2))$ ούτε το $(\phi(s_2), \phi(s_1))$ είναι πλεγματικό ζεύγος.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 0.6 στηρίζεται στα *πλεγματικά μονοπάτια*, τα οποία είναι πεπερασμένες ακολουθίες $(s_i)_{i=1}^d$ όπου το (s_i, s_{i+1}) είναι ένα πλεγματικό ζεύγος. Ας παρατηρήσουμε ότι η σχέση "το (s_1, s_2) είναι πλεγματικό ζεύγος" δεν είναι ούτε συμμετρική ούτε μεταβατική. Στα πλαίσια της θεωρίας γραφημάτων το παραπάνω θεώρημα εκφράζει την ακόλουθη ιδιότητα. Θεωρώντας τις $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ σαν γραφήματα με ακμές τα τα πλεγματικά ζεύγη της $\mathcal{F}$ και της $\mathcal{G}$ αντίστοιχα, έχουμε ότι για κάθε $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η φ εμφυτεύει το γράφημα της $\mathcal{F} \restriction L$ στο συμπληρωματικό γράφημα της $\mathcal{G}$.

Κεφάλαιο 2. Στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνονται ο επεκτεταμένος ορισμός των spreading models και η ταξινόμηση τους σε μια υπερπεπερασμένη ιεραρχία που έχουμε ήδη συζητήσει. Επιπλέον παρουσιάζεται μια γενική μέθοδος κατασκευής ξ-spreading models που έχει ως εξής.

Έστω $1 \leq \xi < \omega_1$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ και $(e_n)_n$ μια spreading και 1-unconditional ακολουθία σε ένα χώρο Banach $(E, \|\cdot\|)$.

Συμβολίζουμε με $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$ τη συνήθη Hamel βάση του $c_{00}(\mathcal{F})$. Για $x \in c_{00}(\mathcal{F})$ θέτουμε

$$\|x\|_{\mathcal{F}} = \sup\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{l} x(s_i)e_{s_i}\Big\| : l \in \mathbb{N}, (s_i)_{i=1}^l \in Plm_l(\mathcal{F}) \text{ και } l \leq s_1(1)\Big\}$$

και θεωρούμε $X_{\mathcal{F}} = \overline{(c_{00}(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})}$ την πλήρωση του $c_{00}(\mathcal{F})$ ως προς τηην παραπάνω νόρμα.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(e_n)_n$ είναι ένα $\mathcal{F}$-spreading model του $X_{\mathcal{F}}$ που παράγεται από την $\mathcal{F}$-ακολουθία $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$. Συνεπώς θέτοντας $A = \{e_s : s \in \mathcal{F}\}$, έχουμε ότι η $(e_n)_n$ ανήκει στο $\mathcal{SM}_\xi(A)$.

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η $(e_n)_n$ δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0 τότε, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 0.6, μπορεί κανείς να δείξει ότι για κάθε $\zeta < \xi$ και για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$ με $o(\mathcal{G}) = \zeta$, η $(e_n)_n$ δε μπορεί να προκύψει σαν spreading model παραγόμενο από κάποια $\mathcal{G}$-υπακολουθία στο A. Παρόλα αυτά, δεν είναι τόσο άμεση η κατασκευή ενός χώρου X που δέχεται την ακολουθία $(e_n)_n$ σαν ξ-spreading model ενώ για κάθε $\zeta < \xi$ όλος ο χώρος X να μην δέχεται ένα ζ-spreading model ισοδύναμο με την $(e_n)_n$. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο Κεγάλαιο 11.

Κεφάλαιο 3. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια λεπτομερής μελέτη των spreading ακολουθιών. Κατηγοριοποιούνται ως εξής.

Μια spreading ακολουθία $(e_n)_n$ σε ένα χώρο με ημινόρμα $(E, \| \cdot \|_*)$ καλείται *τετριμμένη* αν η ημινόρμα $\| \cdot \|_*$ περιορισμένη στον $Z =< (e_n)_n >$ δεν είναι νόρμα. Στην περίπτωση αυτύ, δείχνεται ότι ο υπόχωρος $N = \{x \in Z : \|x\|_* = 0\}$ είναι συνδιάστασης 1 στον Z και συνεπώς $Z/_N \cong \mathbb{R}$.

Για τις unconditional spreading ακολουθίες παρουσιαζεται μια γνωστή διχοτομία. Συγκεκριμένα, μια unconditional spreading ακολουθία είτε είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή είναι norm Cezáro αθροίσιμη στο μηδέν.

Μια spreading ακολουθία καλείται *ιδιάζουσα* αν είναι μη τετριμμένη και δεν είναι Schauder βασική. Μια ιδιάζουσα spreading δέχεται την ακόλουθη διάσπαση.

Πρόταση 0.7. Έστω $(e_n)_n$ μια ιδιάζουσα spreading ακολουθία και έστω E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_n$. Τότε υπάρχει $e \in E \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε η $(e_n)_n$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο e. Επιπλέον θέτοντας $e'_n = e_n - e$, έχουμε ότι η $(e'_n)_n$ είναι μη τετριμμένη, spreading, 1-unconditional και Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν.

Η τελευταία κλάση αποτελείται από τις Schauder βασικές spreading ακολουθίες που δεν είναι unconditional. Αυτές είναι μη τετριμμένες ασθενως-Cauchy (δηλαδή w^*-συγκλίνουν σε κάποιο στοιχείο του $X^{**} \setminus X$) και επίσης κυριαρχούν την αθροίσιμη βάση του c_0.

Κεφάλαιο 4. Μελετάμε $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Ξεκινάμε με τον ορισμό της σύγκλισης μιας $\mathcal{F}$-υπακολουθίας. Συγκεκριμένα, μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \restriction M}$ σε ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ υπάρχει $m_0 \in M$ ώστε $x_s \in U$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$ με $\min s \geq m_0$.

Ο βασικός στόχος του Κεφαλαίου 4 είναι να οριστούν και να μελετηθούν οι subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθίες.

Ορισμός 0.8. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s \in \mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \restriction M}$ είναι *subordinated* (ως προς τον $(X, \mathcal{T})$) αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \restriction M \to (X, \mathcal{T})$ με $\widehat{\varphi}(s) = x_s$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$.

Να υπενθυμίσουμε ότι το $\widehat{\mathcal{F}}$ συμβολίζει το κλείσιμο της $\mathcal{F}$ ως προς την διάταξη του αρχικού τμήματος. Η οικογένεια $\widehat{\mathcal{F}}$ εφοδιασμένη με την κατά σημείο τοπολογία είναι ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \restriction M}$ σε ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ είναι subordinated και $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \restriction M \to X$ η απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \restriction M}$ συγκλίνει στο $\widehat{\varphi}(\emptyset)$ και η κλειστότητα του συνόλου των τιμών της είναι ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν $o(\mathcal{F}) \geq 2$ και η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \restriction M}$ συγκλίνει σε κάποιο x_0 τότε το σύνολο $\{x_s : s \in \mathcal{F} \restriction M\}$ δεν είναι κατά ανάγκη σχετικά συμπαγές.

Σχετικά με $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε συμπαγείς μετρικοποιήσιμους χώρους έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 0.9. Κάθε $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο περιέχει μια subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Μεταξύ άλλων, το παραπάνω συνεπάγεται ότι σε ένα συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο, κάθε $\mathcal{F}$-ακολουθία έχει συγκλίνουσα $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Κεφάλαιο 5. Ταξινομούμε τα spreading models σε τέσσερις τύπους, συγκεκριμένα έχουμε τα τετριμμένα, unconditional, ιδιάζοντα και Schauder βασικά σύμφωνα με την κλάση που η αντίστοιχη spreading ακολουθία ανήκει, και μελετάμε τις ιδιότητες τους. Κάποια από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι καινούρια ακόμα και στο επίπεδο της κλασικής θεωρίας των spreading models, όπου με λίγες εξαιρέσεις (βλ. για παράδειγμα [**33**] σελ. 1310) τα spreading models παράγονται από Schauder βασικές ακολουθίες. Το πρώτο αποτέλεσμα του κεφαλαίου αφορά τα τετριμμένα spreading models και είναι το ακόλουθο

Θεωρημα 0.10. Έστω ένας χώρος Banach X και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον X που παράγει μια $(e_n)_n$ σαν spreading model. Τότε η $(e_n)_n$ είναι τετριμμένη αν και μόνο αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ περιέχει μια norm συγκλίνουσα $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Σχετικά με τα unconditional spreading models έχουμε το ακόλουθο, το οποίο γενικεύει ένα ευρέως γνωστό αποτέλεσμα για τα κλασικά spreading models. Συγκεκριμένα, οι ημινορμαρισμένες ασθενώς μηδενικές ακολουθίες παράγουν unconditional spreading models. Στη συνέχεια οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθίες σε κάποιον χώρο Banach X, θα εννοούμε πάντα ότι είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X.

Θεωρημα 0.11. Κάθε spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παραγόμενο από μια ημινορμαρισμένη, subordinated και ασθενώς μηδενική $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι unconditional.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα spreading models που παράγονται από ημινορμαρισμένες και ασθενώς μηδενικές $\mathcal{F}$-υπακολουθίες δεν είναι κατά ανάγκη unconditional. Για να φανεί αυτό γίνεται η παρουσίαση ενός conditional spreading model τάξης δύο του c_0 που παράγεται από μια ασθενώς μηδενική $[\mathbb{N}]^2$-ακολουθία. Επομένως, η επιπρόσθετη υπόθεση που θέλει την $\mathcal{F}$-υπακολουθία subordinated είναι αναγκαία.

Εστιάζοντας στις $\mathcal{F}$-υπακολουθίες που παράγουν ιδιάζοντα spreading model, δείχνουμε ότι δέχονται διάσπαση παρόμοια με αυτήν που περιγράφεται στην Πρόταση 0.7.

Θεωρημα 0.12. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα ιδιάζον spreading model παραγόμενο από μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ και $e_n = e'_n + e$ η διάσπαση της ιδιάζουσας spreading ακολουθίας $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχουν $x \in X$ και $L \in [M]^\infty$ τέτοια ώστε $\|x\| = \|e\|$ και θέτονταε $x'_s = x_s - x$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model.

Από την Πρόταση 0.7 έχουμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει ένα unconditional και Cesáro αθροίσιμο στο μηδέν spreading model.

Τέλος δείχνουμε μια ικανή συνθήκη για $\mathcal{F}$-ακολουθίες ώστε να δεχτούν Schauder βασικό spreading model. Αυτό σχετίζεται με την έννοια της Skipped Schauder διάσπασης που περιγράφουμε παρακάτω.

Ορισμος 0.13. Έστω ένα αριθμήσιμο ημινορμαρισμένο υποσύνολο A ενός χώρου Banach X. Θα λέμε ότι το A δέχεται μια Skipped Schauder διάσπαση (SSD) αν υπάρχουν $K > 0$ και μια ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του A ώστε

(i) $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = A$

(ii) Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ που δε περιέχει δύο διαδοχικούς φυσικούς και κάθε ακολουθία $(x_l)_{l\in L}$ με $x_l \in F_l$, για κάθε $l \in L$, η $(x_l)_{l\in L}$ είναι Schauder βασική ακολουθία με σταθερά K.

Θεωρημα 0.14. Έστω ένας χώρος Banach X και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Αν η $\{x_s : s \in \mathcal{F}\}$ δέχεται ένα SSD τότε κάθε μη τετριμμένο $\mathcal{F}$-spreading model που παράγεται από μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι Schauder βασικό.

Κεφάλαιο 6. Είναι γνωστό ότι αν η $(e_n)_n$ είναι ένα spreading model παραγόμενο από μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_n$ σε ένα χώρο Banach X με Schauder βάση τότε η $(e_n)_n$ παράγεται επίσης και από μια ακολουθία της μορφής $\widetilde{x}_n = x + x'_n$ όπου x είναι το ασθενές όριο της $(x_n)_n$ και $(x'_n)_n$ είναι μια block ακολουθία στον X ασθενώς συγκλίνουσα στο μηδέν. Ένας από τους βασικούς στόχους του

Κεφαλαίου 6 είναι να δώσει ανάλογα αποτελέσματα για ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα χώρο Banach X καλείται ασθενώς σχετικά συμπαγής αν το σύνολο $\overline{\{x_s : s \in \mathcal{F}\}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές. Η Πρόταση 0.9 συνεπάγεται την πρώτη βασική ιδιότητα τέτοιων ακολουθιών. Συγκεκριμένα, κάθε ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία έχει μια subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθία. Ο ακόλουθος ορισμός αποτελεί απαραίτητο συστατικό των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου αυτού.

Ορισμος 0.15. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X αποτελούμενη από πεπερασμένα φερόμενα διανύσματα. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι *πλεγματικά ξένα φερόμενη* (αντ. *πλεγματικά block*) αν για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ έχουμε ότι $\mathrm{supp}(x_{s_1}) \cap \mathrm{supp}(x_{s_2}) = \emptyset$ (αντ. $\mathrm{supp}(x_{s_1}) < \mathrm{supp}(x_{s_2})$).

Να υπενθυμίσουμε ότι όταν $o(\mathcal{F}) = 1$ οι πλεγματικές οικογένειες είναι τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Συνεπώς, για κλασικές ακολουθίες ο παραπάνω ορισμός περιγράφει τη συνήθη έννοια της ξένα φερόμενης (αντ. block) ακολουθίας. Επιπλέον, όταν $o(\mathcal{F}) = 1$, οι παραπάνω δύο έννοιες (δηλαδή πλεγματικά ξένα φερόμενες και πλεγματικά block) ταυτίζονται περνώντας, αν είναι απαραίτητο, σε μια περαιτέρω υπακολουθία. Σύμφωνα με την ορολογία αυτή έχουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.16. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση και $(e_n)_n$ ένα $\mathcal{F}$-spreading model παραγόμενο από μια subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ στον X ασθενώς συγκλίνουσα σε κάποιο x. Τότε η $(e_n)_n$ παράγεται επίσης και από μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ της μορφής $\widetilde{x}_s = x + x'_s$ όπου η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated, ασθενώς μηδενική και πλεγματικά ξένα φερόμενη.

Το θεώρημα αυτό γενικεύει το αποτέλεσμα για κλασικές ακολουθίες που αναφερθήκαμε στην αρχή της συζήτησης για το Κεφάλαιο 6. Ας παρατηρήσουμε ότι εν γένει δε θα μπορούσαμε να περιμένουμε την $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να είναι είτε πλήρως ξένα φερόμενη ή πλεγματικά block. Όπως θα δούμε και παρακάτω αν ένας χώρος Banach X δέχεται τον c_0 σαν ξ-spreading model τότε ο c_0 παράγεται επίσης από μια πλεγματικά block $\mathcal{F}$-ακολουθία. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για τον ℓ^1 κάτω από κάποιες επιπρόσθετες υποθέσεις.

Κεφάλαιο 7. Ασχολούμαστε με το φυσιολογικό πρόβλημα του καθορισμού των spreading models κλασικών ακολουθιακών χώρων. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα spreading models του ℓ^p, για κάθε $1 \leq p < \infty$, είναι τα αναμενόμενα. Συγκεριμένα ισχύει το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.17. (i) Έστω $1 < p < \infty$ και $(e_n)_n$ ένα μη τετριμμένο spreading model τάξης ξ του ℓ^p, για κάποιον $\xi < \omega_1$. Τότε ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) Αν η $(e_n)_n$ είναι νορμαρισμένη Schauder βασική τότε είναι ισομετρική με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

(β) Αν η $(e_n)_n$ είναι ιδιάζουσα τότε παράγει χώρο ισομετρικό στον ℓ^p.

(ii) Κάθε μη τεριμμένο spreading model οποιασδήποτε τάξης του ℓ^1 είναι Schauder βασικό και ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

(iii) Για κάθε $1 \leq p < \infty$ έχουμε ότι για κάθε $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(\ell^p)$ υπάρχει μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον ℓ^p ισομετρική με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Επίσης στο Κεφάλαιο 9 θα δούμε ότι οι χώροι Tsirelson T_α, $1 \leq \alpha < \omega_1$, δέχονται τον ℓ^1 σαν μοναδικό spreading model.

Τα spreading models του c_0 περιγράφονται από το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.18. (i) Κάθε διμονότονη Schauder βασική spreading ακολουθία ανήκει στην κλάση των spreading models τάξης δύο του c_0.

(ii) Κάθε ιδιάζον spreading model του c_0 οποιασδήποτε τάξης περιέχεται στην κλάση των spreading models τάξης δύο του c_0.
(iii) Για κάθε μη τετριμμένη spreading ακολουθία $(e_n)_n$ υπάρχει ένα spreading model $(e'_n)_n$ τάξης δύο του c_0 ισοδύναμο με την $(e_n)_n$.

Το (iii) του θεωρήματος δείχνει ότι το σύνολο $\mathcal{SM}_2(c_0)$ είναι ισομορφικά καθολικό για όλες τις spreading ακολουθίες και συνεπώς η ιεραρχία $(\mathcal{SM}_\xi(c_0))_{\xi<\omega_1}$ σταθεροποιείται ισομορφικά για $\xi = 2$. Δεν είναι ξεκάθαρο αν σταθεροποιείται και ισομετρικά για $\xi = 2$.

Κεφάλαιο 8. Παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες σύνθεσης των spreading models. Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεωρημα 0.19. *Έστω ένας χώρος Banach X και $(e_n)_n$ μια Schauder βασική ακολουθία στον $\mathcal{SM}_\xi(X)$, για κάποιο $\xi < \omega_1$. Έστω E ο χώρος που παράγεται από την $(e_n)_n$ και για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, έστω $(\overline{e}_n)_n \in \mathcal{SM}_k(E)$ ένα πλεγματικά block παραγόμενο spreading model του E. Τότε*

$$(\overline{e}_n)_n \in \mathcal{SM}_{\xi+k}(X)$$

Το παραπάνω συνεπάγεται το ακόλουθο όσον αφορά τα ℓ^p spreading models.

Προταση 0.20. *Έστω ένας χώρος Banach X, $(e_n)_n$ ένα ξ-spreading model του X, για κάποιο $\xi < \omega_1$ και έστω E ο χώρος που παράγεται από την $(e_n)_n$. Αν για κάποιο $1 < p < \infty$, ο E περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p τότε ο X δέχεται ένα $(\xi + 1)$-spreading model ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^p.*

Χρησιμοποιώντας επιπλέον την non distortion ιδιότητα του ℓ^1 και του c_0 (βλ. [**26**]) επιτυγχάνουμε το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Προταση 0.21. *Έστω ένας χώρος Banach X, $(e_n)_n$ ένα ξ-spreading model του X, για κάποιο $\xi < \omega_1$ και έστω E ο χώρος που παράγεται από την $(e_n)_n$. Αν ο E περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1 (αντ. του c_0) τότε ο X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 (αντ. c_0) σαν $(\xi + 1)$-spreading model.*

Έχουμε επίσης στην ακόλουθη τριχοτομία.

Θεωρημα 0.22. *Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος και $\xi < \omega_1$. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*
- (i) *Ο χώρος X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $(\xi + 1)$-spreading model.*
- (ii) *Ο χώρος X δέχεται η συνήθη βάση του c_0 σαν $(\xi + 1)$-spreading model.*
- (iii) *Όλα τα ξ-spreading models του X παράγουν αυτοπαθείς χώρους.*

Επιπλέον, κάθε Schauder βασικό spreading model του X είναι unconditional.

Κεφάλαιο 9. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μελέτη των spreading models που είναι ισοδύναμα με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Μεταξύ άλλων δίδονται ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι ένας χώρος Banach δέχεται πλεγματικά block παραγόμενο ℓ^1 spreading model. Θα λέμε ότι ένας χώρος Banach X με Schauder βάση ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένη block ακολουθία $(x_i)_{i=1}^k$ στον X με $\|x_i\| \geq \delta$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ έχουμε ότι $\|\sum_{i=1}^k x_i\| > 1$.

Θεωρημα 0.23. *Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder που ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$. Αν ο X δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model παραγόμενο από μια ασθενώς σχετικά συμπαγή $\mathcal{F}$-υπακολουθία, τότε ο X δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι το κλειδί για να δείξει κανείς την ύπαρξη αυτοπαθούς χώρου που δε δέχεται κανέναν ℓ^p σαν spreading model (βλ. Κεφάλαιο 14). Επίσης, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 13, η επιπλέον υπόθεση που αφορά την ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι απαραίτητη.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τη Cesàro αθροισιμότητα των $[\mathbb{N}^k]$-ακολουθιών. Αρχικά ορίζουμε την k-Cesàro αθροισιμότητα.

Ορισμος 0.24. Έστω ένας χώρος Banach X, $x_0 \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Θα λέμε ότι η $[\mathbb{N}]^k$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0 αν

$$\binom{n}{k}^{-1} \sum_{s\in[M|n]^k} x_s \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x_0$$

όπου $M|n = \{M(1), ..., M(n)\}$.

Δείχνουμε την ακόλουθη επέκταση ενός ευρέως γνωστού αποτελέσματος του H. P. Rosenthal που αντιστοιχεί στην περίπτωση $k = 1$.

Θεωρημα 0.25. Έστω ένας χώρος Banach X, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια ασθενώς συμπαγής $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε να ισχύει τουλάχιστον ένα από τα επόμενα:

(i) Η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M]^k}$ παράγει ένα $[\mathbb{N}]^k$-spreading model ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.
(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0.

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων $k = 1$ και $k \geq 2$. Για $k = 1$ προκύπτει ακριβώς μία από τις δύο εναλλακτικές ενώ για $k \geq 2$ αυτό δε παραμένει αληθές. Επίσης, για $k \geq 2$ η απόδειξη κάνει χρήση του ακόλουθου αποτελέσματος πυκνότητας που αφορά πλεγματικές οικογένειες και είναι συνέπεια του πολυδιάστατου θεωρήματος του Szemeredi που αποδείχτηκε από τους H. Furstenberg και Y. Katznelson (βλ. [**16**]).

Λημμα 0.26. Έστω $\delta > 0$ και $k, l \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε υποσύνολο A των k-συνόλων του $\{1, \ldots, n\}$ με τουλάχιστον $\delta\binom{n}{k}$ στοιχεία, υπάρχει μια πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ στο A.

Κεφάλαιο 10. Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στα c_0-spreading models. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα που αφορά μερική unconditionality σε δέντρα βασικών ακολουθιών. Με τη χρήση αυτού επιτυγχάνεται η ακόλουθη ιδιότητα κυριαρχίας των spreading models.

Θεωρημα 0.27. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ regular thin οικογένειες και $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε κάθε $t \in \mathcal{G} \upharpoonright N$ είναι αρχικό τμήμα κάποιου $s \in \mathcal{F}$. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{F} \upharpoonright N \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright N$, θέτουμε $z_v = \widehat{\varphi}(v)$. Υποθέτουμε ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ και $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright N}$ παράγουν τις $(e_n^1)_n$ και $(e_n^2)_n$ σαν spreading models αντίστοιχα. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j e_j^2 \Big\| \leq \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j e_j^1 \Big\|$$

Το παραπάνω είναι το κλεδί της απόδειξης του ακόλουθου.

Θεωρημα 0.28. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Αν ο X δέχεται τον c_0 σαν spreading model παραγόμενο από μια ασθενώς σχετικά συμπαγή $\mathcal{F}$-υπακολουθία τότε ο X δέχεται τον c_0 και σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model.

Το Θεώρημα 0.28 μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την γνωστή για την κλασική περίπτωση ιδιότητα δυϊκότητας των c_0 και ℓ^1 spreading models.

Πορισμα 0.29. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Αν ο X δέχεται τον c_0 σαν spreading model παραγόμενο από μια ασθενώς σχετικά συμπαγή $\mathcal{F}$-υπακολουθία τότε ο X^* δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model.

Είναι γνωστό ότι το παραπάνω αποτέλεσμα δυϊκότητας δεν ισχύει προς την αντίστροφη κατεύθυνση. Συγκεκριμένα υπάρχουν αυτοπαθείς χώροι που δέχονται τον ℓ^1 σαν κλασικό spreading model και οι δυϊκοί τους δε δέχονται τον c_0 σαν spreading model. Παρουσιάζουμε επίσης ένα ανάλογο παράδειγμα για υψηλότερης τάξης spreading models.

5. Επισκόπηση των παραδειγμάτων

Τα εναπομείναντα κεφάλαια (11-14) του πρώτου μέρους της διατριβής περιέχουν διάφορα παραδείγματα που απαντάνε φυσιολογικά ερωτήματα που προκυπτουν από τον ορισμό και τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Κεφάλαιο 11. Το πρώτο φυσιολογικό ερώτημα είναι κατά πόσο η ιεραρχία των spreading models $(\mathcal{SM}_\xi(X))_{\xi<\omega_1}$ ενός χώρου Banach X είναι υπαρκτή και δε καταρρέει. Δηλαδή υπάρχει, για αυθαίρετα μεγάλο $\xi < \omega_1$, χώρος Banach X_ξ τέτοιος ώστε το $\mathcal{SM}_\xi(X_\xi)$ περιέχει γνήσια το $\cup_{\zeta<\xi}\mathcal{SM}_\zeta(X_\xi)$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο χώρος c_0 κατέχει την ιδιότητα αυτή για $\xi = 2$. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται παραδείγματα αυτοπαθών χώρων που περιγράφονται από τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεωρημα 0.30. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει αυτοπαθής χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ με unconditional βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες. Η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ παράγει τον ℓ^1 σαν $(k+1)$-spreading model και δεν είναι $(k+1)$-Cesàro αθροίσιμη σε κανένα x_0 στον $\mathfrak{X}_{k+1}$. Επιπλέον ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δε δέχεται ℓ^1-spreading model τάξης k.

Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δείχνει ότι η μη $(k+1)$-Cesàro αθροισιμότητα μιας $[\mathbb{N}]^{k+1}$-ακολουθίας δε συνεπάγεται καμιά περαιτέρω πληροφορία σχετικά με τα ℓ^1-spreading models μικρότερης τάξης. Για αυθαίρετα μεγάλους αριθμήσιμους διατακτικούς αριθμούς έχουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.31. Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ με unconditional βάση που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Ο χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ δέχεται τον ℓ^1 σαν ξ-spreading model.
(ii) Για κάθε διατακτικό ζ ώστε $\zeta + 2 < \xi$, ο χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model.

Ειδικότερα, αν ο ξ είναι οριακός αριθμήσιμος διατακτικός, τότε ο χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model για κάθε $\zeta < \xi$.

Κεφάλαιο 12. Στόχος του επόμενου κεφαλαίου είναι να διαχωρίσει για $k > 1$ την κλάση των ισχυρών k-spreading models από αυτήν των k-spreading models.

Θεωρημα 0.32. Για κάθε $1 < p < q < \infty$ και $k > 1$, υπάρχει αυτοπαθής χώρος X με unconditional βάση τέτοιος ώστε ο X δέχεται τον ℓ^q σαν spreading model τάξης k ενώ για κάθε $l \in \mathbb{N}$, κάθε ισχυρό l-spreading model του X είναι ισοδύναμο είτε στη συνήθη βάση του ℓ^1 ή του ℓ^p.

Κεφάλαιο 13. Το επόμενο παράδειγμα αφορά τα πλεγματικά block παραγόμενα ℓ^1 spreading models. Ματαξύ άλλων δείχνει ότι η ιδιότητα $\mathcal{P}$ που εμφανίζεται στο Θεώρημα 0.23 είναι πράγματι απαραίτητη.

Θεωρημα 0.33. Υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος X με unconditional βάση που δέχεται τον ℓ^1 σαν ω-spreading model και δε δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model καμίας τάξης.

Κεφάλαιο 14. Το τελευταίο παράδειγμα αποφαίνεται ότι η ιεραρχία των spreading models δεν είναι σε θέση να οδηγήσουν σε ένα αποτέλεσμα τύπου Krivine (βλ. [**29**]). Συγκεριμένα έχουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.34. *Υπάρχει αυτοπαθής χώρος X με unconditional βάση τέτοιος ώστε για κάθε $\xi < \omega_1$ και κάθε $(e_n)_n \in \mathcal{SM}_\xi(X)$, ο χώρος $E = \overline{<(e_n)_n>}$ δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή του ℓ^p, για κανένα $1 \leq p < \infty$.*

Το τελευταίο απαντά καταφατικά το πρόβλημα που έχουμε ήδη αναφέρει και διατυπώνεται στο [**39**]. Επιπλέον είναι αν η ιεραρχία των spreading models του χώρου X σταθεροποιείται για κάποιο $\xi < \omega_1$. Επιπλέον από το Πόρισμα 0.22 έχουμε ότι κάθε spreading model του X παράγει έναν αυτοπαθή χώρο που δε περιέχει κανέναν ℓ^p, για $1 < p < \infty$. Είναι ανοιχτό κατά πόσο οι χώροι αυτοί σχετίζονται με αυτοπαθείς χώρους που παράγονται με μεθόδους κορεσμού όπως οι χώροι Tsirelson, mixed Tsirelson και οι παραλλαγές τους.

6. Σχόλια πάνω στις πλεγματικές οικογένειες

Στο τελευταίο μέρος της εισαγωγής θα κάνουμε μια συζήτηση για τον σημαντικό ρόλο των πλεγματικών οικογενειών. Οι πλεγματικές οικογένειες έχουν τρεις βασικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι η Ramsey ιδιότητα (Θεώρημα 0.1) η οποία αποτελεί το θεμελιώδες συστατικό που οδηγεί στην ύπαρξη των ανώτερης τάξης spreading models. Η δεύτερη και η τρίτη αφορούν τις απεικονίσεις που σέβονται τα πλέγματα μεταξύ regular thin οικογενειών. Για $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ regular thin οικογένειες με $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$ υπάρχουν $N, M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F} \upharpoonright M$ (Θεώρημα 0.5). Το αποτέλεσμα αυτό έχει δύο θεμελιώδεις συνέπειες. Επιτρέπει να περάσουμε από τα $\mathcal{F}$-spreading models τα ξ-spreading models και επιπλέον καθιστά την ιεραρχία $(\mathcal{SM}_\xi(X))_{\xi<\omega_1}$ αύξουσα. Η τρίτη (Θεώρημα 0.6) εξηγεί ότι η προηγούμενη ιδιότητα δε μπορεί να προκύψει για $o(\mathcal{F}) > o(\mathcal{G})$. Το τελευταίο και ειδικότερα η μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για την απόδειξη του αποτελούν τα εργαλεία κλειδιά για να δείξουμε ότι η ιεραρχία $(\mathcal{SM}_\xi(X))_{\xi<\omega_1}$ δε καταρρέει (Θεώρημα 0.31). Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες των πλεγματικών οικογενειών υποδεικνύουν τη γεωμετρική τους φύση. Πράγματι, οι απεικονίσεις που σέβονται τα πλέγματα διαχωρίζουν τις regular thin οικογένειες σύμφωνα με την τάξη τους.Οι πλεγματικές οικογένειες, που είναι μια καθαρά συνδυαστική έννοια, μοιάζει να αποτελούν και νέα έννοια. Όπως επεσήμανε ο S. Todorcevic, ο E. Specker χρησιμοποίησε στο [**49**] για ζεύγη του $[\mathbb{N}]^3$ μια έννοια που μοιράζεται κάποια κοινά χαρακτηριστικά με τα πλεγματικά ζεύγη.

Από τη σκοπιά των χώρων Banach οι πλεγματικές οικογένειες είναι επίσης καλά κρυμμένες. Πράγματι, στον ορισμό των κλασικών spreading models δεν είναι ορατές καθώς ταυτίζονται με τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Η έννοια των πλεγματικών οικογενειών στο $[\mathbb{N}]^k$ αναδύθηκε στη προσπάθεια να λυθεί το πρόβλημα των Odell και Schlumprecht που αφορά τα ισχυρά k-spreading models (βλ. Παράγραφο 3 παραπάνω). Χρησιμοποιώντας επαγωγή μπορεί να δείξει κανείς ότι χώροι όπως αυτός των Odell και Schlumprecht απαντούν καταφατικά το πρόβλημα του. Συγκεκριμένα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ κάθε ισχυρό k-spreading model δε περιέχει ισομορφικά αντίγραφα του ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, ή του c_0. Επανεξετάζοντας την απόδειξη αντιληφθήκαμε ότι κάθε ισχυρό k-spreading model, το οποίο από τον ορισμό του για $k \geq 2$ δε συνδέεται άμεσα με το χώρο, παράγεται από μια οικογένεια $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ με τον τρόπο που περιγράφεται στον επεκτεταμένο ορισμό των k-spreading models. Η παρατήρηση αυτή αποτέλεσε τη βάση για τους γενικούς ορισμούς των $\mathcal{F}$-ακολουθιών, πλεγματικών οικογενειών καί ανώτερης τάξης spreading models.

7. Συμβολισμοί και ορισμοί

Ξεκινάμε παραθέτοντας κάποιο συμβολισμό σχετικό με τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Ως συνήθως, συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών ως $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Θα ταυτίζουμε τις γνησίως αύξουσες ακολουθίες στο $\mathbb{N}$ με το σύνολο τιμών τους, δηλαδή βλέπουμε κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{N}$ σαν ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και αντίστροφα κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ σαν την ακολουθία που προκύπτει από την αύξουσα διάταξη των στοιχείων της. Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα όπως $L, M, N, ...$ για να συμβολίζουμε άπειρα υποσύνολα και μικρά γράμματα όπως $s, t, u, ...$ για να συμβολίζουμε πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

Για κάθε άπειρο υποσύνολο L του $\mathbb{N}$, με $[L]^{<\infty}$ (αντ. $[L]^{\infty}$) συμβολιζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων (αντ. άπειρων) υποσυνόλων του L. Για ένα $L = \{l_1 < l_2 < ...\} \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ και ένα θετικό ακέραιο $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $L(k) = l_k$. Ομοίως, για ένα πεπερασμένο υποσύνολο $s = \{n_1 < .. < n_m\}$ του $\mathbb{N}$ και για $1 \leq k \leq m$ θέτουμε $s(k) = n_k$. Επίσης για κάθε μη κενό $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $1 \leq k \leq |s|$ θέτουμε $s|k = \{s(1), \ldots, s(k)\}$ και $s|0 = \emptyset$. Επιπλέον για $s, t \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, γράφουμε $t \sqsubseteq s$ (αντ. $t \sqsubset s$) για να πούμε ότι το t είναι ένα αρχικό (αντ. γνήσιο αρχικό) τμήμα του s.

Για ένα $L = \{l_1 < l_2 < ...\} \in [N]^{\infty}$ και ένα πεπερασμένο υποσύνολο $s = \{n_1 < .. < n_k\}$ (αντ. για ένα άπειρο υποσύνολο $N = \{n_1 < n_2 < ...\}$ του $\mathbb{N}$), θέτουμε $L(s) = \{l_{n_1}, ..., l_{n_k}\}$ (αντ. $L(N) = \{l_{n_1}, l_{n_2}, ...\}$).

Για $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ με $|s|$ συμβολίζουμε την πληθυκότητα του s. Για $L \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ και $k \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε ως $[L]^k$ το σύνολο όλων των $s \in [L]^{<\infty}$ με $|s| = k$. Για κάθε $s, t \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ γράφουμε $t < s$ αν είτε ένα τουλάχιστον από αυτά είναι το κενό σύνολο, ή $\max t < \min s$.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης κάποιους συνήθεις συμβολισμούς και ορισμούς από την θεωρία χώρων Banach. Παρόλο που ο συμβολισμός που θα ακολουθήσουμε βρίσκεται στα [**1**], [**30**], για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε.

Με τον όρο χώρο Banach θα εννοούμε πάντα έναν απειροδιάστατο χώρο Banach. Όταν θα λέμε ότι ο Z είναι υπόχωρος του X εννοούμε ότι ο Z είναι ένας κλειστός απειροδιάστατος υπόχωρος του X. Για ένα υπόχωρο Z του X, με B_Z (αντ. S_Z) συμβολίζουμε τη μοναδιαία μπάλα του Z, δηλαδή το σύνολο $\{x \in Z : \|z\| \leq 1\}$ (αντ. τη μοναδιαία σφαίρα Z, δηλαδή το σύνολο $\{x \in Z : \|x\| = 1\}$). Για ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \to Y$, όπου Y είναι ένας χώρος Banach, θα λέμε ότι ο T είναι αυστηρά ιδιάζον αν δεν υπάρχει υπόχωρος Z του X ώστε ο περιορισμός $T|_Z$ του T στον Z να είναι ισομορφική εμφύτευση.

Έστω $(x_n)_n$ μια ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη (αντ. ημινορμαρισμένη) αν υπάρχει $M > 0$ (αντ. $C, c > 0$) ώστε $\|x_n\| \leq M$ (αντ. $c \leq \|x_n\| \leq C$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η $(x_n)_n$ είναι νορμαρισμένη αν $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δύο ακολουθίες $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$, όχι απαραίτητα στον ίδιο χώρο Banach, καλούνται ισοδύναμες αν υπάρχουν $c, C > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$c\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big\| \leq C\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big\|$$

Μια ακολουθία $(e_n)_n$ είναι Schauder βάση του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $(a_n)_n$ πραγματικών αριθμών ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Είναι ευρέως γνωστό ότι οι φυσιολογικές προβολές $(P_n)_n$ πάνω στα αρχικά τμήματα της $(e_n)_n$, που ορίζονται ως $P_n(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ για κάθε $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, είναι ομοιόμορφα φραγμένες και η ποσότητα $\sup_n \|P_n\|$ είναι η σταθερά βάσης της $(e_n)_n$. Μια ακολουθία $(x_n)_n$ στον X καλείται (Schauder) βασική αν η $(x_n)_n$ αποτελεί Schauder βάση για τον υπόχωρο $\overline{<(x_n)_n>}$ του X. Μια ακολουθία $(x_n)_n$ στον X καλείται C-unconditional, όπου $C > 0$, αν για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ και κάθε $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ να συγκλίνει, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{n \in F} a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \Big\|$$

Για μια ακολουθία $(x_n)_n$ στον X θα λέμε ότι μια ακολουθία $(y_n)_n$ είναι block υπακολουθία της $(x_n)_n$ αν υπάρχουν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(p_n)_n$ φυσικών αριθμών και μια ακολουθία $(a_n)_n$ πραγματικών ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k x_k$$

Υποθέτουμε ότι ο X έχει Schauder βάση $(e_n)_n$. Για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in X$ ορίζουμε τον φορέα του x να είναι το σύνολο $\mathrm{supp}(x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ και θα λέμε ότι το x είναι πεπερασμένα φερόμενο αν το $\mathrm{supp}(x)$ είναι πεπερασμένο. Για $x_1, x_2 \in X$ πεπερασμένα φερόμενα, θα γράφουμε $x_1 < x_2$ αν $\mathrm{supp}(x_1) < \mathrm{supp}(x_2)$. Τα διορθογώνια συναρτησιακά $(e_n^*)_n$ της $(e_n)_n$ ορίζονται ως $e_n^*(x) = a_n$ για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Η βάση $(e_n)_n$ καλείται συρρίκνουσα αν $X^* = \overline{< (e_n^*)_n >}^{\|\cdot\|}$. Η βάση $(e_n)_n$ καλείται φραγμένα πλήρης αν για κάθε ακολουθία $(a_n)_n$ πραγματικών ώστε η ακολουθία $(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k)_n$ να είναι φραγμένη, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ συγκλίνει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Regular thin και πλεγματικές οικογένειες

Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στους ορισμούς και την αρχική μελέτη των regular thin και πλεγματικών οικογενειών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή, οι έννοιες αυτές κατέχουν κεντρικό ρόλο στον ορισμό των υψηλής τάξης spreading models. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι συνδυαστικής φύσεως.

1. Regular thin οικογένεις πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$

Στην παράγραφο αυτή δίνεται ο ορισμός των regular thin οικογενειών και παρουσιάζονται κάποιες από τις βασικές ιδιότητες που αφορούν τις οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Ο ορισμός των regular thin οικογενειών βασίζεται σε δύο ευρέως γνωστές έννοιες, τις regular οικογένειες ([**2**]) και τις thin οικογένεις, οι οποίες ορίστηκαν στο [**37**] και μελετήθηκαν εκτεταμένα στο [**42**]. Η σπουδαιότητα των regular thin οικογενειών έγκειται στο γεγονός ότι κατέχουν ισχυρές Ramsey ιδιότητες, ιδίως όσον αφορά τις πλεγματικές οικογένειες που ορίζονται αργότερα στο κεφάλαιο αυτό.

1.1. Βασικοί ορισμοί. Μια οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ καλείται *κληρονομική* αν για κάθε $s \in \mathcal{F}$ και $t \subseteq s$ έχουμε ότι $t \in \mathcal{F}$ και *spreading* αν για κάθε $n_1 < ... < n_k$ και $m_1 < ... < m_k$ με $\{n_1, ..., n_k\} \in \mathcal{F}$ και $n_1 \leq m_1$, ..., $n_k \leq m_k$ έχουμε ότι και το σύνολο $\{m_1, ..., m_k\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}$. Επίσης η $\mathcal{F}$ καλείται *συμπαγής* αν το σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των στοιχείων της $\mathcal{F}$, $\{\chi_s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \ s \in \mathcal{F}\}$, είναι κλειστός υπόχωρος του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Τέλος, η $\mathcal{F}$ καλείται *regular* αν είναι συμπαγής, κληρονομική και spreading.

Για μια οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και ένα άπειρο υποσύνολο $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ θέτουμε

$$\mathcal{F} \upharpoonright L = \{s \in \mathcal{F} : \ s \subseteq L\} = \mathcal{F} \cap [L]^{<\infty}$$

Η *τάξη* μιας οικογένειας $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ ορίζεται ως εξής (βλ. επίσης [**42**]). Αντιστοιχούμε στην $\mathcal{F}$ την ($\sqsubseteq -$)*κλειστότητά* της

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{t \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \exists s \in \mathcal{F} \text{ με } t \sqsubseteq s\}$$

η οποία κάτω από την διάταξη του αρχικού τμήματος αποτελεί ένα δέντρο. Αν το $\widehat{\mathcal{F}}$ δεν είναι καλά θεμελιωμένο (δηλαδή υπάρχει μια άπειρη ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\widehat{\mathcal{F}}$ τέτοια ώστε $s_n \sqsubset s_{n+1}$) τότε θέτουμε $o(\mathcal{F}) = \omega_1$. Αλλιώς, για κάθε μεγιστικό στοιχείο s του $\widehat{\mathcal{F}}$ θέτουμε $o_{\widehat{\mathcal{F}}}(s) = 0$ και επαγωγικά για κάθε s στο $\widehat{\mathcal{F}}$ θέτουμε

$$o_{\widehat{\mathcal{F}}}(s) = \sup\{o_{\widehat{\mathcal{F}}}(t) + 1 : t \in \widehat{\mathcal{F}} \text{ και } s \sqsubset t\}$$

Η τάξη της $\mathcal{F}$ συμβολίζεται με $o(\mathcal{F})$ και ορίζεται να είναι ο διατακτικός αριθμός $o_{\widehat{\mathcal{F}}}(\emptyset)$. Κατά συνθήκη για την κενή οικογένεια $\mathcal{F} = \emptyset$ θέτουμε $o(\mathcal{F}) = -1$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι $o(\mathcal{F}) = o(\widehat{\mathcal{F}})$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\mathcal{F}_{(n)} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : n < \min s \text{ και } \{n\} \cup s \in \mathcal{F}\}$$

όπου $n < s$ σημαίνει ότι είτε $s = \emptyset$ ή $n < \min(s)$.

Παρατηρηση 1.1. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε μη κενή οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$o(\mathcal{F}) = \sup\{o(\mathcal{F}_{(n)}) + 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

Μια οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ καλείται *thin* αν δεν υπάρχουν s, t στην $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε το s να είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του t.

Παρατηρηση 1.2. Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι thin αν και μόνο αν η $\mathcal{F}$ ταυτίζεται με το σύνολο των $\sqsubseteq$-μεγιστικών στοιχείων της $\widehat{\mathcal{F}}$.

Ορισμος 1.3. Μια οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ θα καλείται *regular thin* αν η $\mathcal{F}$ είναι thin και το κλείσιμο της $\widehat{\mathcal{F}}$ είναι μια regular οικογένεια.

Ας παρατηρήσουμε ότι αν η $\mathcal{F}$ είναι μια regular οικογένεια, τότε ο Cantor-Bendixson δείχτης της $\widehat{\mathcal{F}}$, θεωρώντας την ως ένα συμπαγές υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, είναι ίσος με $o(\mathcal{F}) + 1$. Το επόμενο λήμμα επιτρέπει την κατασκευή regular thin οικογενειών από regular. Θα γίνει χρήση του ακόλουθου συμβολισμού. Για μια regular οικογένεια $\mathcal{R}$ θέτουμε $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \{s \in \mathcal{R} : \ s \text{ είναι } \subseteq\text{-μεγιστικό στην } \mathcal{R}\}$.

Λημμα 1.4. Έστω $\mathcal{R}$ μια regular οικογένεια. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(i) $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \{s \in \mathcal{R} : \ s \text{ είναι } \sqsubseteq\text{-μεγιστικό στην } \mathcal{R}\}$.

(ii) $\widehat{\mathcal{M}(\mathcal{R})} = \mathcal{R}$ και επομένως η $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ είναι regular thin με $o(\widehat{\mathcal{M}(\mathcal{R})}) = o(\mathcal{R})$.

Αποδειξη. (i) Έστω $\mathcal{M}_1 = \{s \in \mathcal{R} : s \text{ είναι } \sqsubseteq\text{-μεγιστικό στην } \mathcal{R}\}$. Είναι άμεσο ότι $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_1$. Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει $s \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Τότε υπάρχει $t \in \mathcal{R}$ ώστε το s γνήσιο υποσύνολο του t. Από την spreading ιδιότητα της οικογένειας $\mathcal{R}$, υπάρχει $t' \in \mathcal{R}$ τέτοιο ώστε $s \sqsubset t'$. Επειδή $s \in \mathcal{M}_1$, καταλήγουμε σε άτοπο.

(ii) Επειδή $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ και η $\mathcal{R}$ είναι κληρονομική, άμεσα έπεται ότι $\widehat{\mathcal{M}(\mathcal{R})} \subseteq \mathcal{R}$. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{R} \subseteq \widehat{\mathcal{M}(\mathcal{R})}$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{R}$ υπάρχει $t \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ τέτοιο ώστε $s \sqsubseteq t$ (διαφορετικά η $\mathcal{R}$ δε θα ήταν συμπαγής). $\square$

Οι Schreier οικογένειες που εισήχθηκαν στο [**2**] παρέχουν μια ιεραρχία από regular thin οικογένειες τάξης ω^ξ, $\xi < \omega_1$. Ο ορισμός τους είναι ο ακόλουθος.

Ορισμος 1.5. Οι Schreier οικογένειες $(\mathcal{S}_\xi)_{\xi<\omega_1}$ ορίζονται επαγωγικά ως εξής. Θέτουμε

$$\mathcal{S}_0 = \big\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{\emptyset\}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi < \omega_1$ οι οικογένειες $(\mathcal{S}_\zeta)_{\zeta<\xi}$ έχουν οριστεί. Εάν ο ξ είναι ένας επόμενος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός ζ ώστε $\xi = \zeta + 1$, τότε θέτουμε

$$\mathcal{S}_\xi = \Big\{ \bigcup_{j=1}^{n} F_j : n \in \mathbb{N}, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}_\zeta, F_1 < \dots < F_n \text{ και } \min F_1 \geq n \Big\}$$

Εάν ο ξ είναι ένας οριακός αριθμήσιμος διατακτικός, τότε θέτουμε

$$\mathcal{S}_\xi = \big\{ F \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \min F \geq n \text{ και } F \in \mathcal{S}_{\zeta_n} \big\}$$

όπου $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών συγκλίνουσα στον ξ.

Με επαγωγή στον $\xi < \omega_1$, μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{S}_\xi$ είναι μια regular οικογένεια τάξης ω^ξ. Επομένως, από το Λήμμα 1.4 έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{M}(\mathcal{S}_\xi)$ είναι regular thin τάξης ξ, για κάθε $\xi < \omega_1$.

Στο [**42**], για κάθε $\xi < \omega_1$, έχει οριστεί μια thin οικογένεια τάξης ξ, η οποία εν γένει δεν είναι regular. Παρόλα αυτά, ως είναι γνωστό (βλ. [**6**], [**32**]), μια ελαφρά διαφοροποίηση των ορισμών τους οδηγεί σε regular οικογένειες τάξης ξ και συνεπώς από το Λήμμα 1.4 έχουμε ότι τα αντίστοιχα μεγιστικά στοιχεία συνιστούν regular thin οικογένειες τάξης ξ. Για λόγους πληρότητας θα σκιαγραφηθεί ο ορισμός τους. Το επόμενο λήμμα αποτελεί κατά κάποιο τρόπο το αντίστροφο του Λήμματος 1.4.

Λημμα 1.6. Έστω $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια. Τότε $\mathcal{M}(\widehat{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$.

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{M}_1$ το σύνολο των $\sqsubseteq$-μεγιστικών στοιχείων της $\widehat{\mathcal{F}}$. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι thin, από την Παρατήρηση 1.2 έχουμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{M}_1$. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι regular thin έχουμε ότι η $\widehat{\mathcal{F}}$ είναι regular και συνεπώς από τον ισχυρισμό (i) του Λήμματος 1.4 έχουμε ότι $\mathcal{M}(\widehat{\mathcal{F}}) = \mathcal{M}_1$. Συνεπώς $\mathcal{F} = \mathcal{M}(\widehat{\mathcal{F}})$. □

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τη σχέση μεταξύ των regular thin και των regular οικογενιών.

Προταση 1.7. Η απεικόνιση η οποία στέλνει την $\mathcal{F}$ στην $\widehat{\mathcal{F}}$ είναι 1-1 και επί μεταξύ του συνόλου των regular thin οικογενειών και του συνόλου των regular. Επιπλέον, η αντίστροφη απεικόνιση στέλνει κάθε regular οικογένεια $\mathcal{R}$ στην $\mathcal{M}(\mathcal{R})$.

Αποδειξη. Από τον ορισμό των regular thin οικογενειών, η απεικόνιση $\mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{F}}$ στέλνει κάθε regular thin οικογένεια σε μια regular. Από το Λήμμα 1.6 έχουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι 1-1. Τέλος, από τον ισχυρισμό (ii) του Λήμματος 1.4 καταλήγουμε στο ότι η απεικόνιση είναι επί και η αντίστροφή της απεικονίζει κάθε regular οικογένεια $\mathcal{R}$ στην $\mathcal{M}(\mathcal{R})$. □

Προταση 1.8. Για κάθε $\xi < \omega_1$ υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}_\xi$ με $o(\mathcal{F}_\xi) = \xi$.

Αποδειξη. Από το Λήμμα 1.4, αρκεί να κατασκευάσουμε μια ιεραρχία $\{\mathcal{R}_\xi : \xi < \omega_1\}$ από regular οικογένειες με $o(\mathcal{R}_\xi) = \xi$ και να θέσουμε $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{M}(\mathcal{R}_\xi)$ για κάθε $\xi < \omega_1$. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στον $\xi < \omega_1$. Για $\xi = 0$ θέτουμε $\mathcal{R}_0 = \{\emptyset\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $\xi < \omega_1$ έχουν οριστεί regular οικογένειες $\mathcal{R}_\zeta$ με $o(\mathcal{R}_\zeta) = \zeta$, για κάθε $\zeta < \xi$. Αν ο ξ είναι επόμενος διατακτικός, δηλαδή $\xi = \zeta + 1$, τότε θέτουμε

$$\mathcal{R}_\xi = \Big\{ \{n\} \cup s : \ n \in \mathbb{N}, \ s \in \mathcal{R}_\zeta \text{ και } n < \min s \Big\}$$

Αν ο ξ είναι οριακός διατακτικός, τότε επιλέγουμε μια αύξουσα ακολουθία $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\zeta_n \to \xi$ και θέτουμε

$$\mathcal{R}_\xi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ s \in \mathcal{R}_{\zeta_n} : \min s \geq n \Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_{\zeta_n} \upharpoonright [n, +\infty)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι για κάθε $\xi < \omega_1$ η $\mathcal{R}_\xi$ είναι regular με $o(\mathcal{R}_\xi) = \xi$. □

Παρατηρηση 1.9. Εάν η $\mathcal{F}$ είναι regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{F}) = k < \omega$, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $\mathcal{F} \upharpoonright [n_0, \infty) = \{s \in [\mathbb{N}]^k : \min s \geq n_0\}$. Επομένως, για κάθε $k < \omega$, η οικογένεια $[\mathbb{N}]^k$ είναι ουσιαστικά η μοναδική regular thin οικογένεια τάξης k. Αυτό δεν ισχύει για regular thin οικογένειες τάξης $\xi \geq \omega$. Για παράδειγμα οι οικογένειες $\mathcal{F}_f = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : |s| = f(\min s)\}$, όπου $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι μια μη φραγμένη αύξουσα απεικόνιση, είναι όλες regular thin τάξης ω.

Εύκολα, επίσης, παρατηρεί κανείς ότι για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ το σύνολο των $\sqsubseteq$-μεγιστικών στοιχείων της $\widehat{F} \upharpoonright L$ ταυτίζεται με την οικογένεια $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Αυτό ειδικότερα οδηγεί στη ακόλουθη πρόταση.

Προταση 1.10. Έστω $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ έχουμε ότι $\widehat{\mathcal{F} \upharpoonright L} = \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L$.
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\mathcal{F}_{(n)}$ είναι regular thin και $\widehat{\mathcal{F}_{(n)}} = \widehat{\mathcal{F}}_{(n)}$.
(iii) Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ έχουμε ότι $o(\mathcal{F}) = o(\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L) = o(\mathcal{F} \upharpoonright L)$.

1.2. Ramsey ιδιότητες οικογενειών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Θα κάνουμε χρήση της ακόλουθης ορολογίας, που συναντάται στο [**20**]. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Η $\mathcal{F}$ θα καλείται *large* στο M αν για κάθε $L \in [M]^{\infty}$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $s \subseteq L$. Η $\mathcal{F}$ θα καλείται *very large* στο M αν για κάθε $L \in [M]^{\infty}$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $s \sqsubseteq L$. Το ακόλουθο αποτελεί επαναδιατύπωση (βλ. [**20**]) ενός γνωστού θεωρήματος των Nash-Williams [**37**], F. Galvin και K. Prikry [**17**].

Θεωρημα 1.11. *Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Αν η $\mathcal{F}$ είναι large στο M τότε υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο L.*

Παρατηρηση 1.12. Εάν η $\mathcal{F}$ είναι regular thin τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{F}$ είναι large στο $\mathbb{N}$. Επομένως, από το Θεώρημα 1.11 έχουμε ότι για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ ώστε η $\mathcal{F} \upharpoonright L$ να είναι very large στο L.

Το ακόλουθο Θεώρημα ανήκει επίσης στον Nash-Williams [**37**]. Καθώς κατέχει κεντρικό ρόλο στη συνέχεια, για λόγους πληρότητας δίδεται η απόδειξή του.

Θεωρημα 1.13. *Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ μια thin οικογένεια. Τότε για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$, $(k \geq 2)$ της $\mathcal{F}$ και κάθε $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ υπάρχουν $L \in [M]^{\infty}$ και $1 \leq i_0 \leq k$ ώστε $\mathcal{F} \upharpoonright L = \mathcal{F}_{i_0} \upharpoonright L$.*

Αποδειξη. Αρκεί να δειχθεί για την περίπτωση $k = 2$, καθώς η γενική περίπτωση έπεται εύκολα με χρήση επαγωγής. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ και $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Επομένως, είτε υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}_1 \upharpoonright L = \emptyset$ ή η $\mathcal{F}_1$ είναι large στο M. Στην πρώτη περίπτωση είναι άμεσο ότι $\mathcal{F} \upharpoonright L = \mathcal{F}_2 \upharpoonright L$. Στην δεύτερη περίπτωση από το Θεώρημα 1.11 έχουμε ότι υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ ώστε η $\mathcal{F}_1$ να είναι very large στο L. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{F} \upharpoonright L = \mathcal{F}_1 \upharpoonright L$. Πράγματι, έστω $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$. Επιλέγουμε $N \in [L]^{\infty}$ ώστε $s \sqsubseteq N$ και έστω $t \sqsubseteq N$ τέτοιο ώστε $t \in \mathcal{F}_1$. Τότε τα s, t είναι $\sqsubseteq$-συμβατά στοιχεία της $\mathcal{F}$ και επειδή η $\mathcal{F}$ είναι thin θα είναι ίσα. Επομένως $s = t \in \mathcal{F}_1$ και $\mathcal{F} \upharpoonright L = \mathcal{F}_1 \upharpoonright L$. □

Για δύο οικογένειες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, γράφουμε $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$ (αντ. $\mathcal{F} \sqsubset \mathcal{G}$) αν κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}$ έχει μια επέκταση (αντ. γνήσια επέκταση) στην $\mathcal{G}$ και κάθε στοιχείο της $\mathcal{G}$ έχει ένα αρχικό (αντ. γνήσιο αρχικό) τμήμα στην $\mathcal{F}$. Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί συνέπεια ενός πιο γενικού αποτελέσματος από το [**18**].

Προταση 1.14. *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ regular thin οικογένειες με $o(\mathcal{F}) < o(\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ ώστε $\mathcal{F} \upharpoonright L \sqsubset \mathcal{G} \upharpoonright L$.*

Αποδειξη. Από την Παρατήρηση 1.12 έχουμε ότι υπάρχει $L_1 \in [M]^{\infty}$ τέτοιο ώστε οι οικογένειες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ είναι very large στο L_1. Επομένως για κάθε $L \in [L_1]^{\infty}$ και κάθε $t \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ υπάρχει $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ τέτοιο ώστε τα s, t είναι συμβατά και αντιστρόφως.

Έστω $\mathcal{G}_1$ το σύνολο των στοιχείων της $\mathcal{G}$ τα οποία έχουν ένα γνήσιο αρχικό τμήμα στην $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1$. Από το Θεώρημα 1.13 έχουμε ότι υπάρχουν $i_0 \in \{1, 2\}$ και $L \in [L_1]^{\infty}$ ώστε $\mathcal{G} \upharpoonright L \subseteq \mathcal{G}_{i_0}$. Αρκεί να δειχθεί ότι $i_0 = 1$. Πράγματι, αν $i_0 = 2$ τότε για κάθε $t \in G \upharpoonright L$ υπάρχει $s \in \mathcal{F}$ ώστε $t \sqsubseteq s$. Αυτό σε συνδυασμό με τον ισχυρισμό (iii) της Πρότασης 1.10 έπεται ότι $o(\mathcal{G}) = o(\mathcal{G} \upharpoonright L) \leq o(\mathcal{F})$ το οποίο είναι άτοπο. □

2. Η έννοια των πλεγματικών οικογενειών

Στην παράγραφο αυτή εισάγεται η έννοια των πλεγματικών οικογενειών. Χοντρικά μια πλεγματική οικογένεια είναι μια πεπερασμένη ακολουθία μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με τα στοιχεία τους να εναλλάσονται μεταξύ τους με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο. Η έννοια αυτή είναι το βασικό νέο συστατικό για την επέκταση του ορισμού των spreading models.

Ορισμος 1.15. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $s_1, ..., s_l$ μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Η l-άδα $(s_j)_{j=1}^{l}$ θα καλείται *πλεγματική (ή πλέγμα)* αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $i, j \in \{1, ..., l\}$ και $k \in \mathbb{N}$ με $i < j$ και $k \leq \min(|s_i|, |s_j|)$, έχουμε ότι $s_i(k) < s_j(k)$.

(ii) Για κάθε $i, j \in \{1, ..., l\}$ και $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq \min(|s_i|, |s_j| - 1)$, έχουμε ότι $s_i(k) < s_j(k+1)$.

Παραδείγματος χάρη ένα ζεύγος $(\{n_1\}, \{n_2\})$ από μονοσύνολα είναι πλεγματικό αν και μόνο αν $n_1 < n_2$, ενώ ένα ζεύγος από δισύνολα $(\{n_1, m_1\}, \{n_2, m_2\})$ είναι πλεγματικό αν και μόνο αν $n_1 < n_2 < m_1 < m_2$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι αν το $(s_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματικό τότε για κάθε $1 \leq k \leq l$ και $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq l$ η k-άδα $(s_{j_m})_{m=1}^k$ είναι πλεγματική. Αυτό ειδικότερα έπεται ότι για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 \leq l$ έχουμε ότι $s_{j_1} \cap s_{j_2} = \emptyset$. Επιπλέον εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματική αν και μόνο αν το ζεύγος (s_{j_1}, s_{j_2}) είναι πλεγματικό, για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 \leq l$. Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι εάν η l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματική, τότε για κάθε επιλογή μη κενών αρχικών τμημάτων t_j των s_j, $1 \leq j \leq l$, η l-άδα $(t_j)_{j=1}^l$ είναι επίσης πλεγματική.

Συμβολισμος 1.16. Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και $l \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$Plm_l(\mathcal{F}) = \{(s_j)_{j=1}^l : s_1, ..., s_l \in \mathcal{F} \text{ και } (s_j)_{j=1}^l \text{ πλεγματική}\}$$

και $Plm(\mathcal{F}) = \bigcup_{l=1}^{\infty} Plm_l(\mathcal{F})$.

Λημμα 1.17. Έστω $\mathcal{F}$ thin οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Έστω $(s_j)_{j=1}^l, (t_j)_{j=1}^l \in Plm(\mathcal{F})$ με $|s_1| \leq \ldots \leq |s_l|$, $|t_1| \leq \ldots \leq |t_l|$ και $\cup_{j=1}^l s_j \sqsubseteq \cup_{j=1}^l t_j$. Τότε $(s_j)_{j=1}^l = (t_j)_{j=1}^l$ και συνεπώς $\cup_{j=1}^l s_j = \cup_{j=1}^l t_j$.

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $1 \leq m \leq l$ έχουμε ότι $(s_i)_{i<m} = (t_i)_{i<m}$. Θα δείξουμε ότι $s_m = t_m$. Έστω $F = \cup_{j=m}^l s_j$ και $G = \cup_{j=m}^l t_j$. Επειδή $\cup_{j=1}^l s_j \sqsubseteq \cup_{j=1}^l t_j$, έχουμε ότι $F \sqsubseteq G$. Επιπλέον επειδή $|s_m| \leq \ldots \leq |s_l|$ και $|t_m| \leq \ldots \leq |t_l|$, εύκολα συμπεραίνουμε ότι $s_m(j) = F((j-1)(l-m+1)+1)$, για κάθε $1 \leq j \leq |s_m|$ και ομοίως $t_m(j) = G((j-1)(l-m+1)+1)$, για κάθε $1 \leq j \leq |t_m|$. Συνεπώς, καθώς $F \sqsubseteq G$, έχουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq \min\{|t_m|, |s_m|\}$, $s_m(j) = t_m(j)$. Επομένως τα s_m και t_m είναι $\sqsubseteq$-συμβατά, το οποίο, επειδή η $\mathcal{F}$ είναι thin, έπεται ότι $s_m = t_m$. Από επαγωγή έχουμε ότι $s_j = t_j$ για κάθε $1 \leq j \leq l$. □

Λημμα 1.18. Έστω $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια. Τότε για κάθε $(s_j)_{j=1}^l \in Plm(\mathcal{F})$ έχουμε ότι $|s_1| \leq \ldots \leq |s_l|$.

Αποδειξη. Αρκεί να το δείξουμε για $l = 2$. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}$ με $|s_1| > |s_2|$. Επιλέγουμε $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ τέτοιο ώστε $|s| = |s_1|$, $s_2 \sqsubset s$ και $s(|s_2|+1) > \max s_1$. Από τον ορισμό των πλεγματικών οικογενειών, έχουμε ότι για κάθε $1 \leq k \leq |s_2|$, $s_1(k) < s_2(k) = s(k)$. Συνεπώς, για κάθε $1 \leq k \leq |s_1|$, έχουμε ότι $s_1(k) \leq s(k)$. Από την spreading ιδιότητα της $\widehat{\mathcal{F}}$ έχουμε ότι $s \in \widehat{\mathcal{F}}$. Επειδή το s_2 είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του s έχουμε ότι $s_2 \notin \mathcal{F}$, το οποίο είναι άτοπο. □

Λημμα 1.19. Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{U}_l(\mathcal{F}) = \{\cup_{j=1}^l s_j : (s_j)_{j=1}^l \in Plm_l(\mathcal{F})\}$$

Αν η $\mathcal{F}$ είναι regular thin, τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ η οικογένεια $\mathcal{U}_l(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ είναι thin και η απεικόνιση που στέλνει κάθε πλεγματική l-άδα στην ένωσή της είναι 1-1 και επί.

Αποδειξη. έστω $(s_j)_{j=1}^l \in Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright M) \subseteq Plm_l(\mathcal{F})$. Από το Λήμμα 1.18 έχουμε ότι $|s_1| \leq \ldots \leq |s_l|$. Συνεπώς το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.17. □

Θεωρημα 1.20. Έστω M άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια. Τότε για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright M) = \cup_{j=1}^{p} A_j$, υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και $1 \leq j_0 \leq p$ τέτοια ώστε $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L) \subseteq A_{j_0}$.

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \mathcal{U}_l(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ και για κάθε $1 \leq j \leq p$, θέτουμε $\mathcal{U}^{(j)} = \{\cup_{i=1}^{l} s_i : (s_i)_{i=1}^{l} \in A_j\}$. Τότε $\mathcal{U} = \cup_{j=1}^{p} \mathcal{U}^{(j)}$ και από το Λήμμα 1.19 έχουμε ότι $\mathcal{U}$ είναι μια thin οικογένεια και $\{\mathcal{U}^{(j)}\}_{j=1}^{l}$ είναι μια διαμέριση του $\mathcal{U}$. Συνεπώς από το Θεώρημα 1.13 έχουμε ότι υπάρχουν j_0 και $L \in [M]^\infty$ τέτοια ώστε $\mathcal{U} \upharpoonright L \subseteq \mathcal{U}^{(j_0)}$. Επειδή $L \in [M]^\infty$ έχουμε ότι $\mathcal{U} \upharpoonright L = \mathcal{U}_l(\mathcal{F} \upharpoonright L)$. Άρα $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L) \subseteq A_{j_0}$. □

Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $l \in \mathbb{N}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $A \subseteq Plm_l(\mathcal{F})$. Θα λέμε ότι το A είναι *large* στο M αν για κάθε $L \in [M]^\infty$ έχουμε ότι $A \cap Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L) \neq \emptyset$. Κάτω από την ορολογία αυτή το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.20.

Πορισμα 1.21. Έστω $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $l \in \mathbb{N}$. Έστω $A \subseteq Plm_l(\mathcal{F})$ large στο M. Τότε για κάθε $M' \in [M]^\infty$, υπάρχει $L \in [M']^\infty$ τέτοιο ώστε $Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L) \subseteq A$.

3. Πλεγματικά μονοπάτια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$

Στην παράγραφο αυτή εισάγεται ο ορισμός των *πλεγματικών μονοπατιών* πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητές τους. Τέτοιου είδους μονοπάτια θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη απεικονίσεων με πεδίο ορισμού μια regular thin οικογένεια και πεδίο τιμών τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ που σέβονται τα πλεγματικά μονοπάτια.

Ορισμος 1.22. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $s_0, ..., s_k$ μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Θα λέμε ότι το $(s_j)_{j=0}^{k}$ είναι *πλεγματικό μονοπάτι μήκους k από το s_0 στο s_k*, αν για κάθε $0 \leq j \leq k-1$, το ζεύγος (s_j, s_{j+1}) είναι πλεγματικό. Ομοίως, μια ακολουθία $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ θα καλείται άπειρο πλεγματικό μονοπάτι αν για κάθε $j \in \mathbb{N}$ το ζεύγος (s_j, s_{j+1}) είναι πλεγματικό.

Λημμα 1.23. Έστω s_0, s δύο μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $s_0 < s$. Έστω ότι υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_0, \ldots, s_{k-1}, s)$ μήκους k από το s_0 στο s. Τότε

$$k \geq \min\{|s_i| : 0 \leq i \leq k-1\}$$

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι $k < \min\{|s_i| : 0 \leq i \leq k-1\}$. Τότε $s(1) < s_{k-1}(2) < s_{k-2}(3) < \ldots < s_1(k) < s_0(k+1)$, το οποίο αντιβαίνει την υπόθεση ότι $s_0 < s$. □

Για μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ ένα *πλεγματικό μονοπάτι στην $\mathcal{F}$* είναι ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) πλεγματικό μονοπάτι που αποτελείται από στοιχεία της $\mathcal{F}$. Εύκολα διαπιστώνεται η ύπαρξη άπειρων πλεγματικών μονοπατιών σε μια οικογένεια $\mathcal{F}$ που είναι very large σε ένα άπειρο υποσύνολο L του $\mathbb{N}$. Ειδικότερα έστω $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $j = 1, ..., |s|-1$ υπάρχει $l \in L$ ώστε $s(j) < l < s(j+1)$. Τότε είναι άμεσο ότι υπάρχει $s' \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ τέτοιο ώστε το ζεύγος (s, s') να είναι πλεγματικό και επιπλέον το s' να κατέχει την ίδια ιδιότητα με το s. Βασιζόμενος κανείς σε αυτό μπορεί να κατασκευάσει ένα άπειρο πλεγματικό μονοπάτι στην $\mathcal{F}$ αποτελούμενο από στοιχεία που έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Οι παρατηρήσεις αυτές αποτελούν το κίνητρο για τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 1.24. Για μια οικογένεια $\mathcal{F}$ από πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ θέτουμε

$$\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L = \Big\{ s \in \mathcal{F} \upharpoonright L : \forall j = 1, ..., |s|-1, \exists l \in L \text{ τέτοιο ώστε } s(j) < l < s(j+1) \Big\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αν η $\mathcal{F}$ είναι regular thin και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F} \upharpoonright L$ είναι very large στο L, τότε

$$\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L = \Big\{ s \in \mathcal{F} \upharpoonright L : \exists s' \in \mathcal{F} \upharpoonright L \text{ τέτοιο ώστε το } (s, s') \text{ είναι πλεγματικό} \Big\}$$

Επίσης, από το Λήμμα 1.18, έχουμε ότι τα μήκη των στοιχείων κάθε πλεγματικού μονοπατιού στην $\mathcal{F}$ αποτελούν μια μη φθίνουσα ακολουθία. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί το βασικό συστατικό της απόδειξης της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.25. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο L. Τότε για κάθε $s_0, s \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ με $s_0 < s$ υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_0, \ldots, s_{k-1}, s)$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ μήκους $k = |s_0|$ από το s_0 στο s. Επιπλέον το $k = |s_0|$ είναι το ελάχιστο δυνατό μήκος πλεγματικού μονοπατιού στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ από το s_0 στο s.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα. Για κάθε t στην κλειστότητα $\widehat{\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L}$ της $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ και $s \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ με $t < s$ υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι μήκους $|t|$ από το t στο s τέτοιο ώστε όλα του τα στοιχεία εκτός του t ανήκουν στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος του t. Η περίπτωση $|t| = 1$ είναι άμεση, καθώς το ζεύγος (t, s) είναι ήδη πλεγματικό μονοπάτι μήκους 1 από το t στο s. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ισχύει για όλα τα t στην $\widehat{\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L}$ με $|t| = k$. Έστω $t \in \widehat{\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L}$ με $|t| = k+1$ και $s \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ με $t < s$. Τότε υπάρχουν $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k+1}$ στο $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t = \{L(n_j) : 1 \leq j \leq k+1\}$. Θέτουμε $t_0 = \{L(n_j - 1) : 2 \leq j \leq k+1\}$. Από την spreading ιδιότητα της $\widehat{\mathcal{F}}$ το στοιχείο t_0 ανήκει στην $\widehat{\mathcal{F}}$. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι very large στο L, έχουμε ότι $t_0 \in \widehat{\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L}$. Επομένως από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(t_0, s_1, \ldots, s_{k-1}, s)$ μήκους k από το t_0 στο s με $s_1, \ldots, s_{k-1}, s \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$. Έστω $l = |s_1|$ και $m_1 < \ldots < m_l$ τέτοιο ώστε $s_1 = \{L(m_j) : 1 \leq j \leq l\}$. Από την spreading ιδιότητα της $\mathcal{F}$ είναι εύκολο να δει κανείς τα ακόλουθα:

(i) $|s_1| \geq |t|$, δηλαδή $l \geq k+1$.
(ii) $t_0 \in \widehat{\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L} \setminus \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$.
(iii) Υπάρχει μια (μοναδική) γνήσια επέκταση s_0 του t_0 τέτοια ώστε $s_0 \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ και $s_0 \sqsubseteq t_0 \cup \{L(m_j - 1) : k+1 \leq j \leq l\}$.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα (t, s_0) και (s_0, s_1) είναι πλεγματικά ζεύγη. Επομένως η ακολουθία $(t, s_0, \ldots, s_{k-1}, s)$ πλεγματικό μονοπάτι μήκους $k+1$ από το t στο s με $s_0, \ldots, s_{k-1}, s \in \mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$.

Από τα Λήμματα 1.23 και 1.18, κάθε πλεγματικό μονοπάτι στην $\mathcal{F}$ από το s_0 στο s είναι μήκους τουλάχιστον $|s_0|$. Επομένως το μονοπάτι $(s_0, \ldots, s_{k-1}, s)$ είναι ελαχιστικού μήκους. □

Παρατήρηση 1.26. Σε όρους της θεωρίας γραφημάτων η παραπάνω πρόταση διατυπώνει ότι στο κατευθυνόμενο γράφημα με κόμβους τα στοιχεία της $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ και ακμές τα πλεγματικά ζεύγη (s, t) στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$, η απόσταση μεταξύ δύο κόμβων s_0 και s με $s_0 < s$ είναι ίση με την πληθυκότητα του s_0.

4. Κληρονομικά μη σταθερές απεικονίσεις με πεδίο ορισμού regular thin οικογένειες

Ορισμός 1.27. Έστω σύνολο A, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $\varphi : \mathcal{F} \to A$. Η φ θα καλείται *κληρονομικά μη* στο M αν για κάθε $L \in [M]^\infty$ ο περιορισμός της φ στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ είναι μη σταθερή απεικόνιση. Ειδικότερα αν $M = \mathbb{N}$ τότε θα λέμε η φ είναι κληρονομικά μη σταθερή.

Πρόταση 1.28. Έστω regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, σύνολο A και $\varphi : \mathcal{F} \to A$ κληρονομικά μη σταθερή. Τότε για κάθε $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$, $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.20 υπάρχει $L \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε είτε $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$, για όλα τα πλεγματικά ζεύγη (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$, ή $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$, για όλα τα πλεγματικά ζεύγη (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Η δεύτερη εναλλακτική είναι αδύνατη.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$, για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Μπορούμε να υποθέσουμε επίσης ότι η $\mathcal{F} \upharpoonright L$ είναι very large στην L. Έστω s_0 το μοναδικό αρχικό τμήμα του συνόλου $L_0 = \{L(2\rho) : \rho \in \mathbb{N}\}$ που ανήκει στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ και έστω $k = |s_0|$. Θέτουμε $L_0' = \{L(2\rho) : \rho \in \mathbb{N} \text{ και } \rho > k\}$. Από την Πρόταση 1.25 έχουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_0'$ υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}, s)$ μήκους k στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Τότε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_0'$ έχουμε ότι $\varphi(s) = \varphi(s_{k-1}) = \ldots = \varphi(s_1) = \varphi(s_0)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι η φ είναι κληρονομικά μη σταθερή. □

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.29. *Έστω regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ κληρονομικά μη σταθερή στο M. Έστω επίσης $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$, $\varphi(s_2) - \varphi(s_1) > g(n)$, όπου $\min s_2 = N(n)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.20 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε ένα από τα ακόλουθα να ισχύει:

(i) $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$, για όλα τα πλεγματικά ζεύγη (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$.
(ii) $\varphi(s_1) > \varphi(s_2)$, για όλα τα πλεγματικά ζεύγη (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$.
(iii) $\varphi(s_1) < \varphi(s_2)$, για όλα τα πλεγματικά ζεύγη (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι οι περιπτώσεις (i) και (ii) είναι αδύνατες. Η περίπτωση (i) αποκλείεται εύκολα λόγω της Προτάσεως 1.28. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η περίπτωση (ii). Έστω ένα άπειρο πλεγματικό μονοπάτι $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Τότε η ακολουθία των φυσικών αριθμών $(\varphi(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και αυτό αποτελεί άτοπο. Επομένως, ισχύει η περίπτωση (iii). Επιλέγουμε $N \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq 2$, έχουμε ότι

$$\Big|\Big\{l \in L : N(n-1) < l < N(n)\Big\}\Big| \geq \max_{j \leq n} g(j)$$

Έστω ένα πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$ με $\min s_2 = N(n)$.Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $1 \leq k \leq |s_1|$, έχουμε ότι

$$\Big|\Big\{l \in L : s_1(k) < l < s_2(k)\Big\}\Big| \geq g(n)$$

και για κάθε $|s_1| < k \leq |s_2|$ έχουμε ότι

$$\Big|\Big\{l \in L : s_2(k-1) < l < s_2(k)\Big\}\Big| \geq g(n)$$

Από αυτό έπεται εύκολα ότι υπάρχουν $t_1, \ldots, t_{g(n)} \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ τέτοια ώστε η $(g(n)+2)$-άδα $(s_1, t_1, \ldots, t_{g(n)}, s_2)$ να είναι πλεγματική. Από το (iii) παραπάνω έχουμε ότι $\varphi(s_2) - \varphi(s_1) > g(n)$. □

Πόρισμα 1.30. *Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ κληρονομικά μη σταθερή στο M. Τότε υπάρχει $N \in [M]^\infty$ για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$, $\varphi(s_2) - \varphi(s_1) > 1$.*

5. Σχετικά με απεικονίσεις που σέβονται τα πλέγματα μεταξύ thin οικογενειών

5.1. Απεικονίσεις που σέβονται τα πλέγματα.

Ορισμός 1.31. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $\varphi : \mathcal{F} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Θα λέμε ότι η απεικόνιση φ *σέβεται τα πλέγματα* αν για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και κάθε πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ στην $\mathcal{F}$ η l-άδα $(\varphi(s_j))_{j=1}^l$ είναι επίσης πλεγματική.

Επιπλέον μια απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα $\varphi : \mathcal{F} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$ θα καλείται *κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα* αν ικανοποιεί και τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}$ έχουμε ότι $|\varphi(s_1)| \leq |\varphi(s_2)|$.
(ii) Για κάθε $s \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι $|\varphi(s)| \leq |s|$.

Λημμα 1.32. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $\varphi : \mathcal{F} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Αν για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}$ το ζεύγος $(\varphi(s_1), \varphi(s_2))$ είναι επίσης πλεγματικό, τότε η απεικόνιση φ σέβεται τα πλέγματα.

Αποδειξη. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(s_j)_{j=1}^{l}$ μια πλεγματική l-άδα στην $\mathcal{F}$. Τότε για κάθε $1 \leq i_1 < i_2 \leq l$ έχουμε ότι το ζεύγος (s_{i_1}, s_{i_2}) είναι πλεγματικό και συνεπώς και το ζεύγος $(\varphi(s_{i_1}), \varphi(s_{i_2}))$ είναι πλεγματικό. Επομένως, από τις παρατηρήσεις που ακολουθούν τον ορισμό 1.15, έχουμε ότι η l-άδα $(\varphi(s_j))_{j=1}^{l}$ είναι πλεγματική. □

Λημμα 1.33. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ και $\varphi : \mathcal{F} \upharpoonright M \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$ μια απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα. Τότε υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright L}$ της φ στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ να είναι μια κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα.

Αποδειξη. Από το θεώρημα 1.20 υπάρχει $N \in [M]^{\infty}$ τέτοιο ώστε είτε

(α) $|\varphi(s_1)| \leq |\varphi(s_2)|$, για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$, ή
(β) $|\varphi(s_1)| > |\varphi(s_2)|$, για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$.

Η δεύτερη εναλλακτική δεν μπορεί να προκύψει, καθώς αν αυτό συνέβαινε τότε για ένα άπειρο πλεγματικό μονοπάτι $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$ η ακολουθία $(|\varphi(s_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ θα ήταν μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Από το Θεώρημα 1.20, ξανά, υπάρχει $L \in [N]^{\infty}$ τέτοιο ώστε είτε

(γ) $|\varphi(s)| \leq |s|$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, ή
(δ) $|\varphi(s)| > |s|$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$.

Η δεύτερη εναλλακτική είναι αδύνατη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το (δ) ισχύει. Επειδή η φ πάνω στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ σέβεται τα πλέγματα, είναι εύκολο να επιλέξει κανείς (χρησιμοποιώντας ένα άπειρο πλεγματικό μονοπάτι) s_0, s στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ ώστε $\min(s_0) < \min(s)$ και $\min(\varphi(s_0)) < \min(\varphi(s_{j_0}))$.

Έστω $k_0 = |s_0|$. Τότε από την Πρόταση 1.25 υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_i)_{i=0}^{k_0}$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright\upharpoonright L$ από το s_0 στο $s = s_{k_0}$ μήκους k_0. Επειδή το $(\varphi(s_i))_{i=0}^{k_0}$ είναι επίσης πλεγματικό μονοπάτι μήκους k_0 από το $\varphi(s_0)$ στο $\varphi(s_{k_0})$, από το Λήμμα 1.23 έχουμε ότι

$$\min\{|\varphi(s_i)| : 0 \leq i \leq k_0 - 1\} \leq k_0$$

Αλλά έχοντας υποθέσει ότι η (δ) ισχύει θα είχαμε ότι $|\varphi(s_i)| > |s_i|$ και καθώς η $\mathcal{F}$ είναι μια regular thin οικογένεια θα είχαμε ότι $|s_i| \geq |s_0| = k_0$, για κάθε $0 \leq i \leq k_0 - 1$. Συνεπώς

$$\min\{|\varphi(s_i)| : 0 \leq i \leq k_0 - 1\} > \min\{|s_i| : 0 \leq i \leq k_0 - 1\} \geq k_0$$

το οποίο είναι άτοπο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι η $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι μια κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα. □

Προταση 1.34. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $\varphi : \mathcal{F} \to [\mathbb{N}]^{\infty}$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}^{\infty}]$, υπάρχει $L \in [M]^{\infty}$ ώστε ακριβώς ένα από τα ακόλουθα να ισχύει:

(i) Ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα.
(ii) Για κάθε $(s_1, s_2) \in Plm_2(\mathcal{F} \upharpoonright L)$, ούτε το ζεύγος $(\varphi(s_1), \varphi(s_2))$ ούτε το $(\varphi(s_2), \varphi(s_1))$ είναι πλεγματικό.

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 1.20 υπάρχει $N \in [M]^{\infty}$ ώστε ένα από τα ακόλουθα να ικανοποιείται:

(α) Το ζεύγος $(\varphi(s_1), \varphi(s_2))$ είναι πλεγματικό, για κάθε $(s_1, s_2) \in Plm_2(\mathcal{F} \upharpoonright N)$.
(β) Το ζεύγος $(\varphi(s_2), \varphi(s_1))$ είναι πλεγματικό, για κάθε $(s_1, s_2) \in Plm_2(\mathcal{F} \upharpoonright N)$.
(γ) Για κάθε $(s_1, s_2) \in Plm_2(\mathcal{F} \upharpoonright N)$, ούτε το ζεύγος $(\varphi(s_1), \varphi(s_2))$ ούτε το $(\varphi(s_2), \varphi(s_1))$ είναι πλεγματικό.

Ας παρατηρήσουμε ότι η δεύτερη εναλλακτική είναι αδύνατη. Πράγματι, αν αυτό συνέβαινε τότε για ένα άπειρο πλεγματικό μονοπάτι $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$, η ακολουθία $(\min(s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ θα ήταν μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Επιπλέον αν ισχύει το (α), τότε από το Λήμμα 1.32 έχουμε ότι η $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright N}$ σέβεται τα πλέγματα και από το Λήμμα 1.33 υπάρχει $L \in [N]^\infty$ ώστε η $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα. □

5.2. Απεικονίσεις που δε σέβονται τα πλέγματα. Στόχος της υποπαραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 1.35. Έστω δύο regular thin οικογένειες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$. Αν $o(\mathcal{F}) < o(\mathcal{G})$ Τότε δεν υπάρχει απεικόνιση από την $\mathcal{F}$ στην $\mathcal{G}$ που να σέβεται τα πλέγματα. Ειδικότερα για κάθε $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ ούτε το ζεύγος $(\phi(s_1), \phi(s_2))$ ούτε το $(\phi(s_2), \phi(s_1))$ είναι πλεγματικό.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 1.36. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$. Ορίζουμε

$$\mathcal{F}(L^{-1}) = \Big\{t \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : L(t) \in \mathcal{F}\Big\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν η $\mathcal{F}$ είναι very large στο L, τότε η οικογένεια $\mathcal{F}(L^{-1})$ είναι very large στο $\mathbb{N}$.
(β) Αν η $\mathcal{F}$ είναι regular thin τότε είναι και η οικογένεια $\mathcal{F}(L^{-1})$.
(γ) $o(\mathcal{F}(L^{-1})) = o(\mathcal{F} \upharpoonright L)$. Ειδικότερα αν η $\mathcal{F}$ είναι μια regular thin οικογένεια τότε $o(\mathcal{F}(L^{-1})) = o(\mathcal{F})$.

Λημμα 1.37. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $\varphi : \mathcal{F} \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$ μια απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε αν η $\psi : \mathcal{F}(L^{-1}) \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$ ως εξής: $\psi(t) = \varphi(L(t))$ για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Η ψ είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα.
(β) Για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$ και κάθε $i \leq |\psi(t)|$, έχουμε ότι $\psi(t)(i) > t(i)$.

Αποδειξη. Από το Λήμμα 1.33 υπάρχει $L_1 \in [M]^\infty$ ώστε ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ της φ πάνω στην $\mathcal{F} \upharpoonright L_1$ να είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο L_1. Έστω $\psi_1 = \varphi \circ L_1 : \mathcal{F}(L_1^{-1}) \to [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η ψ_1 είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα.

Ισχυρισμός: Για κάθε $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ και $1 \leq i \leq |\psi_1(u)|$, έχουμε ότι $u(i) \leq \psi_1(u)(i)$.

Αποδιειξη του Ισχυρισμου. Θα δείξουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ισχύει το ακόλουθο: για κάθε $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $i \leq |\psi_1(u)|$, $u(i) \leq \psi_1(u)(i)$. Πράγματι, έστω $i = 1$ και $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$. Αν $u(1) = 1$ τότε προφανώς $\psi_1(u)(1) \geq 1 = u(1)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $u' \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $u'(1) = k$

έχουμε ότι $\psi_1(u')(1) \geq k$. Έστω $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $u(1) = k+1$. Επειδή η $\mathcal{F}(L_1^{-1})$ είναι regular thin και very large στο $\mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $u' \in \mathcal{F}(L_1^{-1})$ με $u' \sqsubseteq u - 1 = \{u(i) - 1 : 1 \leq i \leq |u|\}$. Τότε το (u', u) είναι πλεγματικό ζεύγος και $u'(1) = k$. Επειδή η ψ_1 είναι κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα, έχουμε ότι το ζεύγος $(\psi_1(u'), \psi_1(u))$ είναι πλεγματικό. Συνεπώς $\psi_1(u)(1) > \psi_1(u')(1) \geq u'(1) = k$. Άρα $\psi_1(u)(1) \geq k+1 = u(1)$. Με επαγωγή στο $k = u(1)$, έχουμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$, $u(1) \leq \psi_1(u)(1)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι για κάθε $u' \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $i \leq |\psi_1(u')|$, $u'(i) \leq \psi_1(u')(i)$. Έστω $u \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $i+1 \leq |\psi_1(u)|$. Τότε υπάρχει $u' \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\{u(\rho) - 1 : 2 \leq \rho \leq |u|\} \sqsubseteq u'$. Τότε το ζεύγος (u, u') είναι πλεγματικό, $|u| \leq |u'|$ και $u(i+1) = u'(i) + 1$. Επειδή η ψ_1 κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα, το ζεύγος $(\psi_1(u), \psi_1(u'))$ είναι πλεγματικό και $i+1 \leq |\psi_1(u)| \leq |\psi_1(u')|$. Άρα, $\psi_1(u)(i+1) > \psi_1(u')(i) \geq u'(i) = u(i+1) - 1$, και συνεπώς $\psi_1(u)(i+1) \geq u(i+1)$. Με επαγωγή στο $i \in \mathbb{N}$ ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού. □

Έστω $N_0 = \{2\rho : \rho \in \mathbb{N}\}$ και $L = L_1(N_0)$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$, $N_0(t) = 2t = \{2t(i) : 1 \leq i \leq |t|\}$ και $N_0(t) \in \mathcal{F}(L_1^{-1}) \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$. Έστω $\psi = \varphi \circ L$. Τότε $\psi = \psi_1 \circ N_0$. Πράγματι, για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$

$$\psi(t) = \varphi(L(t)) = \varphi(L_1(N_0(t))) = \psi_1(N_0(t))$$

Τότε για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$ και $1 \leq i \leq |\psi(t)|$ έχουμε ότι $\psi(t)(i) = \psi_1(N_0(t))(i) \geq N_0(t)(i) = 2t(i) > t(i)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.35. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ που σέβεται τα πλέγματα. Από το Λήμμα 1.37 υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε αν η $\psi : \mathcal{F}(L^{-1}) \to \mathcal{G}$ ορίζεται ως εξής: $\psi(t) = \varphi(L(t))$ για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$,τότε ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) Η ψ κανονική απεικόνιση που σέβεται τα πλέγματα.

(β) Για κάθε $t \in \mathcal{F}(L^{-1})$ και κάθε $i \leq |\psi(t)|$, έχουμε ότι $\psi(t)(i) > t(i)$.

Επειδή $o(\mathcal{F}(L^{-1})) = o(\mathcal{F}) < o(\mathcal{G})$, από την Πρόταση 1.14 Έχουμε ότι υπάρχει $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{F}(L^{-1}) \upharpoonright N \sqsubset \mathcal{G} \upharpoonright N \tag{1}$$

Επιλέγουμε $t_0 \in \mathcal{F}(L^{-1}) \upharpoonright N$. Τότε $t_0 \in \widehat{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{G}$. Αλλά από τη σχέση (1), ισχυρισμό (β) παραπάνω και την spreading ιδιότητα της $\widehat{\mathcal{G}}$ έχουμε ότι $\psi(t_0) \in \widehat{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{G}$ το οποίο είναι άτοπο. □

5.3. Εμφυτεύσεις μεταξύ regular thin οικογενειών που σέβονται τα πλέγματα.

Από το Θεώρημα 1.35 έχουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 1.38. Έστω regular thin οικογένειες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$. Αν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ώστε η $\varphi|_{\mathcal{G} \upharpoonright M}$ να σέβεται τα πλέγματα, τότε $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος, δηλαδή αν $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$ υπάρχουν $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F}$ που σέβεται τα πλέγματα. Αρχικά θα χρειαστούμε κάποιες συνδυαστικές ιδιότητες που αφορούν τις regular οικογένειες.

Ορισμός 1.39. Έστω $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$. Ορίζουμε

$$\mathcal{F}(L) = \{L(s) : \ s \in \mathcal{F}\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}(L))$ και αν η $\mathcal{F}$ συμπαγής (αντ. κληρονομική) τότε η $\mathcal{F}(L)$ είναι επίσης συμπαγής (αντ. κληρονομική).

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα, του οποίου η απόδειξη είναι άμεση.

Λημμα 1.40. Έστω $\mathcal{F}$ μια spreading οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Τότε

(i) Για κάθε $L_1 \subseteq L_2$ στο $[\mathbb{N}]^\infty$, έχουμε ότι $\mathcal{F}(L_1) \subseteq \mathcal{F}(L_2)$.
(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $L_1, L_2 \in [\mathbb{N}]^\infty$ με $\{L_1(j) : j > k\} \subseteq \{L_2(j) : j > k\}$, έχουμε ότι $\mathcal{F}_{(k)}(L_1) \subseteq \mathcal{F}_{(k)}(L_2)$ (όπου $\mathcal{F}_{(k)}(L) = \{L(s) : s \in \mathcal{F}_{(k)}\}$).

Προταση 1.41. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ δύο regular οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}(L) \subseteq \mathcal{G}$.

Αποδειξη. Στην περίπτωση $o(\mathcal{F}) = 0$, δηλαδή $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi < \omega_1$ η πρόταση είναι αληθής για κάθε regular οικογένειες $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ τέτοιες ώστε $o(\mathcal{F}') < \xi$ και $o(\mathcal{F}') \leq o(\mathcal{G}')$. Έστω $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ regular με $o(\mathcal{F}) = \xi$ και έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Από την Παρατήρηση 16 έχουμε ότι $o(\mathcal{F}_{(1)}) < o(\mathcal{F})$. Συνεπώς $o(\mathcal{F}_{(1)}) < o(\mathcal{G})$ και επομένως υπάρχει κάποιο $l_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $o(\mathcal{F}_{(1)}) \leq o(\mathcal{G}_{(l_1)})$. Επειδή η $\mathcal{G}$ είναι spreading έχουμε ότι $o(\mathcal{G}_{(l_1)}) \leq o(\mathcal{G}_{(n)})$ για κάθε $n \geq l_1$ και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $l_1 \in M$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι οικογένειες $\mathcal{F}_{(1)}$ και $\mathcal{G}_{(l_1)}$ είναι regular. Συνεπώς από την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $L_1 \in [M]^\infty$ ώστε $\mathcal{F}_{(1)}(L_1) \subseteq \mathcal{G}_{(l_1)}$.

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $l_1 < l_2 < \ldots$ στο M και μια φθίνουσα ακολουθία $M = L_0 \supset L_1 \supset \ldots$ άπειρων υποσυνόλων του M τέτοια ώστε για κάθε $j \geq 1$, ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $l_{j+1} \in L_j$.
(ii) $l_{j+1} > L_j(j)$.
(iii) $\mathcal{F}_{(j)}(L_j) \subseteq \mathcal{G}_{(l_j)}$.

Θέτουμε $L = \{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{F}(L) \subseteq \mathcal{G}$. Πράγματι, από την παραπάνω κατασκευή έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\{L(j)\}_{j>k} \subseteq \{L_k(j)\}_{j>k}$. Επομένως από το δεύτερο μέρος του Λήμματος 1.40 και την τρίτη συνθήκη της κατασκευής έχουμε ότι

$$\mathcal{F}_{(k)}(L) \subseteq \mathcal{F}_{(k)}(L_k) \subseteq \mathcal{G}_{(l_k)} \tag{2}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $\mathcal{F}_{(k)}(L) = \mathcal{F}(L)_{(l_k)}$ και επομένως από την (17) έχουμε ότι $\mathcal{F}(L)_{(l_k)} \subseteq \mathcal{G}_{(l_k)}$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$, καταλήγουμε ότι $\mathcal{F}(L) \subseteq \mathcal{G}$. $\square$

Πορισμα 1.42. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ δύο regular οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε $\mathcal{F}(L) \subseteq \mathcal{G}$ και $\mathcal{G}(L) \subseteq \mathcal{F}$.

Λημμα 1.43. Έστω δύο regular thin οικογένειες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ με $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$. Τότε υπάρχει $L_0 \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχουν $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F} \upharpoonright M$ τέτοια ώστε $L_0(\varphi(t)) \sqsubseteq t$, για κάθε $t \in \mathcal{G} \upharpoonright N$.

Αποδειξη. Από την Πρόταση 1.41 υπάρχει $L_0 \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\widehat{\mathcal{F}}(L_0) \subseteq \widehat{\mathcal{G}}$. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Ας παρατηρήσουμε ότι οι οικογένειες $\mathcal{F}(L_0)$ και $\mathcal{G}$ είναι large στο $L_0(M)$. Συνεπώς από το Θεώρημα 1.11 υπάρχει $N \in [L_0(M)]^\infty$ τέτοιο ώστε οι οικογένειες $\mathcal{F}(L_0)$ και $\mathcal{G}$ να είναι very large το N. Επειδή $\widehat{\mathcal{F}}(L_0) \subseteq \widehat{\mathcal{G}}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(L_0) \upharpoonright N \sqsubseteq \mathcal{G} \upharpoonright N$. Για να ορίσουμε την απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F} \upharpoonright M$, έστω $t \in \mathcal{G} \upharpoonright N$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(L_0) \upharpoonright N$ ώστε $\widetilde{s} \sqsubseteq t$. Θέτουμε $\varphi(t) = s$, όπου το s το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{F}$ με $L_0(s) = \widetilde{s}$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η φ είναι η επιθυμητή. $\square$

Θεωρημα 1.44. Έστω regular thin οικογένειες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ με $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$. Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F} \upharpoonright M$ που σέβεται τα πλέγματα.

Αποδειξη. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Από το Λήμμα 1.43 υπάρχει $L_0 \in [\mathbb{N}]^\infty$, $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F} \upharpoonright M$ ώστε $L_0(\varphi(t)) \sqsubseteq t$, για κάθε $t \in \mathcal{G} \upharpoonright N$. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(t_i)_{i=1}^l \in Plm(\mathcal{G} \upharpoonright N)$. Τότε $L_0(\varphi(t_i)) \sqsubseteq t_i$, για κάθε $1 \leq i \leq l$. Επειδή η l-άδα $(t_i)_{i=1}^l$ είναι πλεγματική, έχουμε ότι και η l-άδα $(L_0(\varphi(t_i)))_{i=1}^l$ είναι πλεγματική. Συνεπώς $(\varphi(t_i))_{i=1}^l \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright M)$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Ιεραρχία των spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται η έννοια του spreading model ανώτερης τάξης, η οποία αποτελεί γενίκευση της κλασικής που δόθηκε από τους A. Brunel και L. Sucheston στο [**9**]. Ο ορισμός βασίζεται στις έννοιες των $\mathcal{F}$-ακολουθιών και των πλεγματικών οικογενειών. Αποδεικνύεται ότι αν ένα spreading model παράγεται από μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X, τότε παράγεται επίσης από μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στον X, όπου $\mathcal{G}$ είναι οποιαδήποτε regular thin οικογένεια τάξης τουλάχιστον την τάξη της $\mathcal{F}$. Αυτό τεκμηριώνει το ότι ένα spreading model που παράγεται από μια $\mathcal{F}$-ακολουθία είναι πλήρως ορισμένο από την τάξη της regular thin οικογένειας $\mathcal{F}$ και επιπλέον ότι τα ξ-spreading models ορίζουν μια αύξουσα ιεραρχία.

1. Ορισμός και ύπαρξη των $\mathcal{F}$-spreading models

Ας αρχίσουμε με τον ορισμό των $\mathcal{F}$-ακολουθιών. Για ένα σύνολο X και μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, με τον όρο *$\mathcal{F}$-ακολουθία* στο X θα αντιλαμβανόμαστε μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{F} \to X$. Μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στο X θα τη συμβολίζουμε ως $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$, όπου $x_s = \varphi(s)$ για κάθε $s \in \mathcal{F}$. Επιπλέον δεδομένου $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{F} \upharpoonright M \to X$ θα καλείται *$\mathcal{F}$-υπακολουθία* της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ και θα συμβολίζεται ως $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$.

Για $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε έναν χώρο Banach X θα κάνουμε χρήση της ακόλουθης ορολογίας. Μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στο X θα καλείται *φραγμένη* (αντ. *ημινορμαρισμένη*) αν υπάρχει $C > 0$ (αντ. $0 < c < C$) ώστε $\|x_s\| \leq C$ (αντ. $c \leq \|x_s\| \leq C$) για κάθε $s \in \mathcal{F}$.

Για το υπόλοιπο της παραγράφου σταθεροποιούμε μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε έναν χώρο Banach X.

Λημμα 2.1. Έστω $l \in \mathbb{N}$, $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\delta > 0$. Τότε υπάρχει $L \in [N]^\infty$ ώστε

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j x_{t_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j x_{s_j} \Big\| \right| \leq \delta$$

για κάθε $(t_j)_{j=1}^l, (s_j)_{j=1}^l \in Plm_l(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ και $a_1, ..., a_l \in [-1, 1]$.

Αποδειξη. Έστω ένα $\frac{\delta}{3l}$-δίκτυο της μοναδιαίας μπάλας το $\mathbb{R}^l$ με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k=1}^{n_0}$. Θέτουμε $N_0 = N$. Με πεπερασμένη επαγωγή στο $1 \leq k \leq n_0$, κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία $N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_{n_0}$ ως εξής. Υποθέτουμε ότι τα $N_0, \ldots, N_{k-1}$ έχουν κατασκευαστεί. Ορίζουμε $g_k : \mathrm{Plm}_l(\mathcal{F} \upharpoonright N_{k-1}) \to [0, lC]$ ώστε $g_k((s_j)_{j=1}^l) = \| \sum_{j=1}^l a_j^k x_{s_j} \|$, όπου $\boldsymbol{\alpha}_k = (a_j^k)_{j=1}^l$. Χωρίζοντας το διάστημα $[0, lC]$ σε ξένα ανά δύο διαστήματα μήκους $\frac{\delta}{3}$, από το Θεώρημα 1.20 έχουμε ότι υπάρχει $N_k \in [N_{k-1}]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε $(t_j)_{j=1}^l, (s_j)_{j=1}^l \in \mathrm{Plm}_l(\mathcal{F} \upharpoonright N_k)$, ισχύει ότι $|g_k((t_j)_{j=1}^l) - g_k((s_j)_{j=1}^l)| < \frac{\delta}{3}$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, καταλήγουμε ότι για κάθε $(s_j)_{j=1}^l, (t_j)_{j=1}^l \in \mathrm{Plm}_l(\mathcal{F} \upharpoonright N_{n_0})$ και $1 \leq k \leq n_0$ έχουμε ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j^k x_{t_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j^k x_{s_j} \Big\| \right| \leq \frac{\delta}{3}$$

Λαμβάνοντας υπόψην ότι το $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k=1}^{n_0}$ αποτελεί ένα $\frac{\delta}{3}$-δίκτυο της μοναδιαίας μπάλας του $(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_\infty)$ συμπεραίνουμε ότι το $L = N_{n_0}$ είναι το επιθυμητό σύνολο. $\square$

Κάνοντας χρήση επιχειρημάτων διαγωνοποίησης έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 2.2. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\delta_n)_n$ και μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε έναν χώρο Banach X. Τότε για κάθε $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $M \in [N]^\infty$ ώστε για κάθε $k \leq l$ στο $\mathbb{N}$, $(t_j)_{j=1}^k, (s_j)_{j=1}^k \in Plm_k(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1), t_1(1) \geq M(l)$ και $a_1, ..., a_k \in [-1, 1]$, έχουμε ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{t_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{s_j} \Big\| \right| \leq \delta_l$$

Επομένως, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία $\big((s_j^n)_{j=1}^l\big)_n$ πλεγματικών l-άδων στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ με $s_1^n(1) \to \infty$ η ακολουθία $(\| \sum_{j=1}^l a_j x_{s_j}^n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, με το όριο να είναι ανεξάρτητο της επιλογής της ακολουθίας $((s_j^n)_{j=1}^l)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ειδικότερα υπάρχει μια ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ ορισμένη στον $c_{00}(\mathbb{N})$ κάτω από την οποία η συνήθης Hamel βάση $(e_n)_n$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι μια spreading ακολουθία και

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{s_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j e_j \Big\|_* \right| \leq \delta_l$$

για κάθε $k \leq l$ στο $\mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in [-1, 1]$ και $(s_j)_{j=1}^k \in Plm_k(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(l)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν φραγμένες $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε χώρους Banach ώστε καμία ημινόρμα που παράγεται από την Πρόταση 2.2 να είναι νόρμα. Να τονίσουμε επίσης ότι ακόμα και αν η $\|\cdot\|_*$ είναι νόρμα, η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι απαραίτητα Schauder βασική. Στη συνέχεια θα δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η παραπάνω ημινόρμα να είναι νόρμα καθώς επίσης η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι Schauder βασική ή ακόμα και unconditional.

Ορισμός 2.3. Έστω χώρος Banach X, regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον X και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Έστω ένας απειροδιάστατος χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ με Hamel βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως $\mathcal{F}$-spreading model αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα. Υπάρχει μια μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{s_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j e_j \Big\|_* \right| \leq \delta_l$$

για κάθε $1 \leq k \leq l$, κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k \in Plm_k(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(l)$ και κάθε επιλογή $a_1, ..., a_k \in [-1, 1]$.

Θα λέμε επίσης ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ δέχεται την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model αν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.

Τέλος, για ένα υποσύνολο A του X, θα λέμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα $\mathcal{F}$-spreading model του A αν υπάρχει μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στο A η οποία δέχεται την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού.

Παρατήρηση 2.4. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε έναν χώρο Banach X. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $k_1<\ldots<k_n$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $\|\sum_{j=1}^n a_je_j\|_*=\|\sum_{j=1}^n a_je_{k_j}\|_*$.
(ii) Για κάθε $M'\in[M]^\infty$ έχουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M'}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.
(iii) Για κάθε $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει $M'\in[M]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M'}$ να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model ως προς την $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(iv) Αν οι $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ είναι δύο ισοδύναμες νόρμες στον X, τότε κάθε $\mathcal{F}$-spreading model του $(X,\|\cdot\|)$ είναι ισοδύναμο με ένα $\mathcal{F}$-spreading model του $(X,|||\cdot|||)$.

Παρατηρηση 2.5. Έστω $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X και $M\in[\mathbb{N}]$. Θέτουμε $y_s=x_{M(s)}$, για κάθε $s\in[\mathbb{N}]^k$. Τότε είναι άμεσο ότι η $[\mathbb{N}]^k$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M]^k}$ παράγει ένα $[\mathbb{N}]^k$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν η $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία $(y_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $[\mathbb{N}]^k$-spreading model.

Παρατηρηση 2.6. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον X και $M\in[\mathbb{N}]^\infty$. Έστω ένας απειροδιάστατος χώρος με ημινόρμα $(E,\|\cdot\|_*)$ με Hamel βάση την ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$\left|\Big\|\sum_{j=1}^{l}a_jx_{s_j}\Big\|-\Big\|\sum_{j=1}^{l}a_je_j\Big\|_*\right|\le\delta_l$$

για κάθε $l\in\mathbb{N}$, κάθε πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l\in Plm_l(\mathcal{F}\restriction M)$ με $s_1(1)\ge M(l)$ και κάθε επιλογή $a_1,...,a_l\in[-1,1]$. Τότε μπορούμε να περάσουμε σε ένα $L\in[M]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Αρκεί να θέσουμε $L=\{M(1+\sum_{j=1}^p j-1):p\in\mathbb{N}\}$. Το σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $l\in\mathbb{N}$ υπάρχουν $l-1$ στοιχεία του M μεταξύ του $L(l)$ και του $L(l+1)$. Συνεπώς για κάθε πλεγματική k-άδα μετά το $L(l)$, με $1\le k\le l$, στην $\mathcal{F}\restriction L$ μπορεί να επεκταθεί σε μια πλεγματική l-άδα μετά το $L(l)\ge M(l)$ στην $\mathcal{F}\restriction M$.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3 έχουμε την ακόλουθη αναδιατύπωση της Πρότασης 2.2.

Θεωρημα 2.7. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και ένας χώρος Banach X. Τότε κάθε φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία του X δέχεται $\mathcal{F}$-spreading model.

Ειδικότερα για κάθε φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον X και κάθε $N\in[\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $M\in[N]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ να παράγει $\mathcal{F}$-spreading model.

2. Spreading models τάξης ξ

Προταση 2.8. Έστω regular thin οικογένειες $\mathcal{F},\mathcal{G}$ με $o(\mathcal{F})\le o(\mathcal{G})$. Έστω ένας χώρος Banach X και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X η οποία δέχεται ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{G}$-ακολουθία $(w_t)_{t\in\mathcal{G}}$ η οποία δέχεται την ίδια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model και ισχύει επίσης ότι $\{w_t:t\in\mathcal{G}\}\subseteq\{x_s:s\in\mathcal{F}\}$.

Αποδειξη. Έστω $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Από το Λήμμα 1.43 υπάρχουν $N\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $\varphi:\mathcal{G}\restriction N\to\mathcal{F}\restriction M$ ώστε $L_0(\varphi(t))\sqsubseteq t$, για κάθε $t\in\mathcal{G}\restriction N$. Με βάση την απεικόνιση φ ορίζουμε μια $\mathcal{G}$-ακολουθία $(w_t)_{t\in\mathcal{G}}$ ως εξής. Για κάθε $t\in\mathcal{G}\restriction N$ θέτουμε $w_t=x_{\varphi(t)}$ και για κάθε $t\in\mathcal{G}\setminus(\mathcal{G}\restriction N)$ έστω x'_t ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $\{x_s:s\in\mathcal{F}\}$. Θα δείξουμε ότι η $(w_t)_{t\in\mathcal{G}\restriction N}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Πράγματι, έστω $(\delta_n)\searrow 0$ ώστε

$$\left|\Big\|\sum_{j=1}^{k}a_jx_{s_j}\Big\|-\Big\|\sum_{j=1}^{k}a_je_j\Big\|_*\right|\le\delta_l$$

για κάθε $1 \leq k \leq l$, κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ με $s_1(1) \geq M(l)$ και κάθε επιλογή $a_1, ..., a_k \in [-1,1]$. Έστω $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq l$, $(t_j)_{j=1}^k$ μια πλεγματική k-άδα στην $\mathcal{G} \upharpoonright N$ με $t_1(1) \geq N(l)$ και $a_1, ..., a_k \in [-1,1]$. Έστω $s_j = \varphi(t_j) \in \mathcal{F} \upharpoonright M$, για κάθε $1 \leq j \leq k$. Από το Θεώρημα 1.44, έχουμε ότι η k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ είναι πλεγματική. Επιπλέον, επειδή $N \in [L_0(M)]^\infty$, έχουμε ότι $s_1(1) \geq M(l)$. Συνεπώς,

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j w_{t_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j e_j \Big\| \right| = \left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{s_j} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j e_j \Big\|_* \right| \leq \delta_l$$

□

Πορισμα 2.9. Έστω χώρος Banach X, $A \subseteq X$ και regular thin οικογένειες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ με $o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{G})$. Τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\mathcal{F}$-spreading model του A αν και μόνο αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\mathcal{G}$-spreading model του A.

Το παραπάνω μας επιτρέπει να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 2.10. Έστω A ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $1 \leq \xi < \omega_1$ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Θα λέμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα ξ-spreading model του A αν υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ με $o(\mathcal{F}) = \xi$ ώστε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι $\mathcal{F}$-spreading model του A. Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ξ-spreading models του A ως $\mathcal{SM}_\xi(A)$.

Από την Πρόταση 2.8 έχουμε επίσης το ακόλουθο.

Πορισμα 2.11. Έστω χώρος Banach X και $A \subseteq X$. Τότε $\mathcal{SM}_\zeta(A) \subseteq \mathcal{SM}_\xi(A)$, για κάθε $1 \leq \zeta < \xi < \omega_1$.

Με βάση το παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα.

Προβλημα 1. Έστω $\xi < \omega_1$. Υπάρχει χώρος Banach X και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_\xi(X)$ ώστε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να μην είναι ισοδύναμη με καμία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{SM}_\zeta(X)$ για κάθε $\zeta < \xi$;

Στο Κεφάλαιο 11, το Πρόβλημα 1 απαντάται καταφατικά για κάθε πεπερασμένο και κάθε αριθμήσιμο οριακό διατακτικό.

Προβλημα 2. Υπάρχει για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X κάποιος $\xi < \omega_1$ ώστε για κάθε $\zeta > \xi$, $\mathcal{SM}_\zeta(X) = \mathcal{SM}_\xi(X)$;

Το Πρόβλημα 2 μπορεί να διατυπωθεί επίσης με την ισομορφική του εκδοχή, δηλαδή κάθε ακολουθία στο $\mathcal{SM}_\zeta(X)$ να είναι ισοδύναμη με μια ακολουθία στο $\mathcal{SM}_\xi(X)$ και αντίστροφα. Κάθε εκδοχή του Προβλήματος 2 παραμένει ανοιχτή.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή δίνοντας ένα παράδειγμα ,το οποίο δείχνει ότι για κάθε $\xi < \omega_1$ υπάρχει ένας χώρος Banach X_ξ του οποίου η βάση παράγει ένα spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τάξης ξ ενώ δε δέχεται την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model τάξης ζ, για κάθε $\zeta < \xi$.

Παραδειγμα 1. Έστω $(e_n)_n$ μια νορμαρισμένη spreading και 1-unconditional ακολουθία σε έναν χώρο Banach $(E, \|\cdot\|)$ μη ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0, $1 \leq \xi < \omega_1$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Συμβολίζουμε ως $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$ τη συνήθη Hamel βάση του $c_{00}(\mathcal{F})$. Για κάθε $x \in c_{00}(\mathcal{F})$ θέτουμε

$$\|x\|_{\mathcal{F}} = \sup\Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^l x(s_i)e_i \Big\| : l \in \mathbb{N}, (s_i)_{i=1}^l \in Plm_l(\mathcal{F}) \text{ και } l \leq s_1(1) \Big\}$$

Θέτουμε $X_{\mathcal{F}} = \overline{(c_{00}(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})}$ και $A = \{e_s : s \in \mathcal{F}\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{SM}_\xi(A)$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_\zeta(A)$ με $\zeta < \xi$, η οποία ορίζει μια νόρμα, είναι ισομετρική με τη συνήθη βάση του c_0.

Πράγματι, έστω $\zeta < \xi$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_\zeta(A)$. Τότε υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$ τάξης ζ, $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(y_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright N}$ στο A που παράγει την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Έστω $\varphi : \mathcal{G} \upharpoonright N \to \mathcal{F}$ ώστε $y_t = e_{\varphi(t)}$, για κάθε $t \in \mathcal{G} \upharpoonright N$. Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζει νόρμα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η φ είναι κληρονομικά μή σταθερή. Από την Πρόταση 1.28 υπάρχει $L \in [N]^\infty$ ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (t_1, t_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$, έχουμε ότι $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Από το Θεώρημα 1.35έχουμε ότι υπάρχει $M \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (t_1, t_2) στην $\mathcal{G} \upharpoonright M$ ούτε το $(\varphi(t_1), \varphi(t_2))$, ούτε το $(\varphi(t_2), \varphi(t_1))$ είναι πλεγματικό ζεύγος. Επομένως, για κάθε $(t_j)_{j=1}^k \in Plm(\mathcal{G} \upharpoonright M)$ και $(s_j)_{j=1}^l \in Plm(\mathcal{F})$ έχουμε ότι

$$\left|\left\{j \in \{1, \ldots, k\} : t_j \in \{s_i : 1 \leq i \leq l\}\right\}\right| \leq 1$$

Αυτό εύκολα έπεται, από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_\xi$, ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j y_{t_j} \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j e_{\varphi(t_j)} \Big\| = \max_{1\leq j\leq k} |a_j|$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ και $(t_j)_{j=1}^k \in Plm(\mathcal{G} \upharpoonright M)$. Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρική στη συνήθη βάση του c_0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Spreading ακολουθίες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει κάθε spreading model οποιασδήποτε τάξης ενός χώρου Banach είναι μια spreading ακολουθία. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τέτοιες ακολουθίες και θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Τα περισσότερα από αυτά είναι ήδη γνωστά (βλ. [**1**], [**30**]). Κατηγοριοποιούμε τις spreading ακολουθίες σε τέσσερις κλάσεις ανάλογα με τις ιδιότητες που αφορούν την νόρμα που φέρουν. Αυτές είναι οι τετριμμένες, οι unconditional, οι ιδιάζουσες και οι μη unconditional Schauder βασικές spreading ακολουθίες. Τέλος, στην τελευταία παράγραφο δίνονται κάποια αποτελέσματα που αφορούν spreading ακολουθίες ισοδύναμες στη συνήθη βάση του ℓ^1.

Θα ξεκινήσουμε ανακαλώντας τον ορισμό των spreading ακολουθιών σε χώρο με ημινόρμα.

Ορισμος 3.1. Έστω ένας χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία E. Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα καλείται spreading αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k_1 < \ldots < k_n$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\|_* = \|\sum_{j=1}^n a_j e_{k_j}\|_*$.

Ας παρατηρήσουμε ότι αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ στο $\mathbb{R}$, $k_1 < \ldots < k_n$ και $l_1 < \ldots < l_n$ στο $\mathbb{N}$, έχουμε ότι $\|\sum_{j=1}^n a_j e_{k_j}\|_* = \|\sum_{j=1}^n a_j e_{l_j}\|_*$.

1. Τετριμμένες spreading ακολουθίες

Ορισμος 3.2. Έστω ένας χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E. Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα καλείται *τετριμμένη* αν

$$\Big\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \Big\|_* = \Big| \sum_{i=1}^n a_i \Big| \cdot \|e_1\|_* \tag{3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Είναι άμεσο ότι κάθε τετριμμένη ακολουθία είναι spreading.

Προταση 3.3. Έστω ένας χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια spreading ακολουθία στον E. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.
(ii) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $\|e_n - e_m\|_* = 0$.
(iii) Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν ώστε

$$\Big\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \Big\|_* = 0$$

Αποδειξη. Η συνεπαγωγή (i)⇒(ii) είναι άμεση. Για να δείξουμε το αντίστροφο, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=2}^n a_i (e_i - e_1) \Big\|_* = 0$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \cdot \|e_1\|_* &= \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \cdot \|e_1\|_* - \Big\|\sum_{i=2}^{n} a_i(e_i - e_1)\Big\|_* \\
&\le \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i(e_i - e_1)\Big\|_* \\
&\le \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \cdot \|e_1\|_* + \Big\|\sum_{i=2}^{n} a_i(e_i - e_1)\Big\|_* = \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \cdot \|e_1\|_*
\end{aligned}$$

Επειδή $\sum_{i=1}^{n} a_i e_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i(e_i - e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\|_* = \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \cdot \|e_1\|$$

Η συνεπαγωγή (ii)⇒(iii) είναι άμεση. Για να δείξουμε το αντίστροφο, έστω $x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν, ώστε $\|x\|_* = 0$. Επειδή η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_j \neq 0$ για κάθε $1 \le j \le n$. Επιπλέον ας παρατηρήσουμε ότι

$$\|x\|_* = \Big\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_n e_n\Big\|_* = \Big\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_n e_{n+1}\Big\|_* = 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\Big\|e_n - e_{n+1}\Big\|_* \le \frac{1}{|a_n|}\left(\Big\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_n e_n\Big\|_* + \Big\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_n e_{n+1}\Big\|_*\right) = 0$$

Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, το αποτέλεσμα έπεται. □

Πορισμα 3.4. Έστω ένας χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια spreading γραμμικώς ανεξάρτητη ακολουθία στον E. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.
(ii) Υπάρχει $x \in < (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ ώστε $x \neq 0$ και $\|x\|_* = 0$. Επομένως η ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ δεν είναι νόρμα.

Πορισμα 3.5. Έστω ένας χώρος με ημινόρμα $(E, \|\cdot\|_*)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια spreading ακολουθία στον E. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητη και η ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ περιορισμένη στον $< (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ είναι νόρμα.

Πορισμα 3.6. Έστω ένας χώρος με νόρμα $(E, \|\cdot\|)$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια spreading ακολουθία στον E. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.
(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένη.

2. Unconditional spreading ακολουθίες

Από το Πόρισμα 3.5 έχουμε ότι μια μη τετριμμένη spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγει πάντα έναν απειροδιάστατο χώρο Banach. Στην παράγραφο αυτή θα μας απασχολήσουν οι unconditional spreading ακολουθίες. Αν και το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ευρέως γνωστό, για λόγους πληρότητας συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξή του.

Πρόταση 3.7. Έστω μια unconditional και spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε είτε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι norm Cesàro αθροίσιμη στο 0 (δηλαδή $\lim \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n} e_j \right\| = 0$).

Απόδειξη. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i e_i \Big\| \leq c \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \Big\|$$

για κάθε $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$. Επίσης επειδή είναι spreading και μη τετριμμένη υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|e_n\| = C$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Τότε θα δείξουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Πράγματι, επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν, υπάρχουν $\theta > 0$ και μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\|\frac{1}{p_n}\sum_{i=1}^{p_n} e_i\| > \theta$, για κάθε $i \in \{1, \dots, p_n\}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει x_n^* νόρμας 1 ώστε $x_n^*(\frac{1}{p_n}\sum_{i=1}^{p_n} e_i) > \theta$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $I_n = \{1, \dots, p_n\}$ και $A_n = \{i \in I_n : \ x_n^*(e_i) > \frac{\theta}{2}\}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\theta < x_n^*\Big(\frac{1}{p_n}\sum_{i\in I_n} e_i\Big) &= \frac{1}{p_n}x_n^*\Big(\sum_{i\in A_n} e_i\Big) + \frac{1}{p_n}x_n^*\Big(\sum_{i\in I_n\setminus A_n} e_i\Big)\\ &\leq \frac{1}{p_n}|A_n|C + \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Άρα $|A_n| \geq \frac{\theta}{2C}p_n \to \infty$. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|A_{n_0}| \geq m$. Τότε

$$\begin{aligned}C\sum_{i=1}^{m}|a_i| \geq \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\| \geq \frac{1}{c}\Big\|\sum_{i=1}^{m}|a_i|e_i\Big\| &= \frac{1}{c}\Big\|\sum_{i=1}^{m}|a_i|e_{A_{n_0}(i)}\Big\|\\ &\geq \frac{1}{c}\cdot x_n^*\Big(\sum_{i=1}^{m}|a_i|e_{A_{n_0}(i)}\Big) \geq \frac{\theta}{2c}\sum_{i=1}^{m}|a_i|\end{aligned}$$

□

Για την απόδειξη της ακόλουθης πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [**1**].

Πρόταση 3.8. Έστω μια μη τετριμμένη spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική, τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional.

Πόρισμα 3.9. Έστω μια μη τετριμμένη spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν.
(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional και μη ισοδύναμη στη συνήθη βάση του ℓ^1.

3. Ιδιάζουσες spreading ακολουθίες

Μια μη τετριμμένη spreading η οποία δεν είναι Schauder βάση του χώρου που παράγει θα καλείται *ιδιάζουσα*. Στη παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η δομή των ιδιαζουσών ακολουθιών. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούν κάποια γνωστά αποτελέσματα της θεωρίας χώρων Banach. Το πρώτο από αυτά είναι ότι κάθε ασθενώς συγκλίνουσα Schauder βασική ακολουθία είναι ασθενώς μηδενική. Ας παρατηρήσουμε ότι από αυτό έπεται ότι μία ακολουθία που είναι μη τετριμμένη, spreading και ασθενώς συγκλίνουσα σε ένα μη μηδενικό στοιχείο είναι ιδιάζουσα. Το δεύτερο είναι ότι κάθε μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy ακολουθία (δηλαδή $x_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$ με $x^{**} \in X^{**} \setminus X$) περιέχει μια Schauder βασική υπακολουθία (βλ. απόδειξη της Πρότασης 2.2 στο [**46**]). Τέλος, θα χρειαστούμε το γνωστο ως ℓ^1 θεώρημα του Rosenthal [**47**] που λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach περιέχει υπακολουθία η οποία είτε είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή είναι ασθενώς-Cauchy.

Ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 3.10. Έστω μια μη τετριμμένη και spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα σε κάποιο στοιχείο $e \in E$ και έστω $e'_n = e_n - e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη, spreading, 1-unconditional και Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν.

Αποδειξη. Επειδή $\|e_n - e_m\| = \|e'_n - e'_m\|$, από την Πρόταση 3.3 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη. Για να δείξουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, έστω $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $k_1 < ... < k_n$ στο $\mathbb{N}$.

Αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, τότε έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i \text{ και } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{k_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{k_i}$$

Επομένως, επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_{k_i}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{k_i}\Big\|$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{k_i}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{l_i}\Big\|$$

για κάθε $k_1 < \ldots < k_n$ και $l_1 < \ldots < l_n$.

Όσον αφορά τη γενική περίπτωση, υποθέτουμε ότι $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$. Επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική, μπορούμε να επιλέξουμε μια block υπακολουθία κυρτών συνδυασμών $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ της $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο μηδέν. Έστω $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_n < \mathrm{supp}(w_m)$ για κάθε $m \geq m_0$. Τότε έχουμε ότι για κάθε $m \geq m_0$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i - \lambda w_m\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{k_i} - \lambda w_m\Big\|$$

και συνεπώς θεωρώντας όρια έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_{k_i}\Big\|$$

Επομένως η ακολουθία $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική είναι και Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν και από την Πρόταση 3.8, είναι 1-unconditional. □

Προταση 3.11. Έστω μια ιδιάζουσα ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει $e \in E \setminus \{0\}$ ώστε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει ασθενώς στο e. Επιπλέον θέτοντας $e'_n = e_n - e$, έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη, spreading, 1-unconditional και Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν.

Αποδειξη. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με όλες τις υπακολουθίες της και δεν είναι Schauder βασική, έχουμε ότι δεν περιέχει Schauder βασική υπακολουθία. Συνεπώς η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν περιέχει μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy υπακολουθία. Επιπλέον, για τους ίδιους λόγους, δεν περιέχει ασθενώς μηδενική υπακολουθία. Από το ℓ^1-θεώρημα του Rosenthal και λαμβάνοντας υπόψην τις παραπάνω παρατηρήσεις, καταλήγουμε στο ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα σε ένα μη μηδενικό στοιχείο $e \in E$. Άρα από το Λήμμα 3.10, έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη, spreading, 1-unconditional και Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν. $\square$

Από τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 3.12. Έστω μία μη τετριμμένη και spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα σε ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Η παραπάνω διάσπαση μιας ιδιάζουσας ακολουθίας $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως $e_n = e'_n + e$, όπου e είναι το ασθενές όριο της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα καλείται *κανονική διάσπαση* της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η επόμενη πρόταση περιγράφει τη σχέση των χώρων που παράγονται απο τις ακολουθίες $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Προταση 3.13. Έστω μία ιδιάζουσα ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω E (αντ. E') ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (αντ. $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Τότε $E = E' \oplus < e >$. Ειδικότερα υπάρχει μία προβολή $P : E \to < e >$ νόρμας 1 τέτοια ώστε για κάθε $z = \sum_{j=1}^n a_j e_j \in < (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$, $P(z) = \sum_{j=1}^n a_j e$.

Αποδειξη. Από το Πόρισμα 3.5 έχουμε ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητη. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $P' :< (e_n)_{n\in\mathbb{N}} > \to < e >$ όπου $P'(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i e$. Είναι άμεσο ότι η P' είναι γραμμική. Θα δείξουμε ότι $\|P'\| \leq 1$. Πράγματι, έστω $z \in < (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$, $z = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $z_k = \sum_{i=1}^n a_i e_{k+j}$. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, έχουμε ότι $\|z_k\| = \|z\|$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, επειδή $e_n \overset{w}{\to} e$, έχουμε επίσης ότι $z_k \overset{w}{\to} P'(z)$. Συνεπώς

$$\|P'(z)\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|z_k\| = \|z\|$$

Άρα $\|P'\| \leq 1$.

Επειδή ο $< (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ είναι πυκνός στο E, ο τελεστής P' έχει μοναδική γραμμική συνεχή επέκταση $P : E \to < e >$ για την οποία θα έχουμε επίση ότι $\|P\| \leq 1$. Επιπλέον, επειδή $e_n \overset{w}{\to} e$, έχουμε ότι $e = P'(e_n) = P(e_n) \overset{w}{\to} Pe$ και συνεπώς $P(e) = e$. Άρα η P είναι προβολή νόρμας 1.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δειχθεί ότι κερ$P = E'$. Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $z = \sum_{i=1}^k a_i e'_i \in < (e'_n)_{n\in\mathbb{N}} >$, έχουμε ότι

$$P(z) = P\Big(\sum_{i=1}^k a_i e'_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^k a_i e_i\Big) - P\Big(\sum_{i=1}^k a_i e\Big) = \sum_{i=1}^k a_i e - \sum_{i=1}^k a_i e = 0$$

Επομένως $E' \subseteq$ κερP.

Για να δείξουμε τον αντίστροφο εκλεισμό θεωρούμε $z \in E$ με $P(z) = 0$. Επιλέγουμε $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $< (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ που συγκλινει στο z. Από τον ορισμό του P', είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $w \in < (e_n)_{n\in\mathbb{N}} >$, $w - P(w) \in E'$. Συνεπώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $z_k - P(z_k) \in E'$ και επειδή η $(z_k - P(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο z, έχουμε ότι $z \in E'$. Άρα $\ker P \subseteq E'$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Ο επόμενος στόχος μας είναι να συσχετίσουμε τους υπόχωρους του E με τους υπόχωρους του E'.

Λημμα 3.14. Έστω μια ιδιάζουσα ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία στον E. Τότε για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχουν μια υπακολουθία $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια block υπακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\|(z_{k_{2n}}-z_{k_{2n-1}})-w_n\|<\delta_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Επειδή ο $<(e_n)_{n\in\mathbb{N}}>$ είναι πυκνός στον E, μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $<(e_n)_{n\in\mathbb{N}}>$ τέτοια ώστε $\|z'_n-z_n\|<\frac{\delta_n}{4}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ ώστε $\|z'_n\|<M$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $P:E\to<e>$ η απεικόνιση που ορίζεται στην Πρόταση 3.13. Τότε $\|P(z'_n)\|<M$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή ο χώρος $<e>$ είναι μονοδιάστατος, μπορούμε να επιλέξουμε $L\in[\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $n_0\in\mathbb{N}$ και $n,m\in L$ με $n,m\geq L(n_0)$, $\|P(z'_n)-P(z'_m)\|<\frac{\delta_{n_0}}{4}$.

Έστω $k_1=L(1)$ και $k_2=L(2)$. Έστω $w_1=z'_{k_2}-z'_{k_2}-(P(z'_{k_2})-P(z'_{k_1}))$. Τότε

$$\|(z_{k_2}-z_{k_2})-w_1\|\leq\|(z_{k_2}-z_{k_2})-(z'_{k_2}-z'_{k_2})\|+\|(z'_{k_2}-z'_{k_2})-w_1\|<3\frac{\delta_1}{4}<\delta_1$$

Υποθέτουμε ότι γα κάποιο $l\in\mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει φυσικούς αριθμούς $k_1<\ldots<k_{2l}$ και $w_1<\ldots<w_l$ στον $<(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}>$ ώστε $\|(z_{k_{2j}}-z_{k_{2j-1}})-w_j\|<\delta_j$, για κάθε $1\leq j\leq l$. Έστω $d=\max\operatorname{supp}(w_l)$. Επειδή ο χώρος $<(e_j)_{j=1}^d>$ είναι μονοδιάστατος, μπορούμε να επιλέξουμε $k_{2l+1}<k_{2l+2}$ στο L, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $k_{2l+1}>k_{2l}$,
(ii) $k_{2l+1}\geq L(l)$ και
(iii) αν $w'=z'_{k_{2l+2}}-z'_{k_{2l+1}}-(P(z'_{k_{2l+2}})-P(z'_{k_{2l+1}}))=\sum_{i=1}^p b_ie'_i$, τότε έχουμε ότι $\|\sum_{i=1}^d b_ie'_i\|<\frac{\delta_{l+1}}{4}$.

Από το (ii) έχουμε ότι $\|P(z'_{k_{2l+2}})-P(z'_{k_{2l+1}})\|<\frac{\delta_{l+1}}{4}$. Θέτουμε $w_{l+1}=w'-\sum_{i=1}^d b_ie'_i$. Είναι άμεσο ότι $w_l<w_{l+1}$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|(z_{2l+2}-z_{2l+1})-w_{l+1}\|\leq&\|(z_{2l+2}-z_{2l+1})-(z'_{2l+2}-z'_{2l+1})\|\\&+\|z'_{k_{2l+2}}-z'_{k_{2l+1}}-(P(z'_{k_{2l+2}})-P(z'_{k_{2l+1}}))-w_{l+1}\|\\&+\|P(z'_{2l+2})-P(z'_{2l+1})\|<\delta_{l+1}\end{aligned}$$

□

Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.14.

Πορισμα 3.15. Έστω μια ιδιάζουσα ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X, $e_n=e'_n+e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και E ο χώρος που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον E υπάρχουν μια υπακολουθία $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια block υπακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε οι ακολουθίες $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(z_{k_{2n}}-z_{k_{2n-1}})_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι ισοδύναμες.

4. Schauder βασικές spreading ακολουθίες που δεν είναι unconditional

Προταση 3.16. Έστω μία spreading μη τετριμμένη ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βάση του E και όχι unconditional.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική, από το Πόρισμα 3.12 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε περιέχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία σε μη μηδενικό στοιχείο του E. Επιπλέον από την Πρόταση 3.8, έχουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ασθενώς μηδενική. Συνεπώς από το θεώρημα του Rosenthal έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy υπακολουθία. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με όλες τις υπακολουθίες της, έχουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη τεριμμένη ασθενώς-Cauchy έχουμε ότι περιέχει μία Schauder βασική υπακολουθία και συνεπώς η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Επιπλέον, επειδή είναι μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy, δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 και από το Πόρισμα 3.9 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι unconditional. $\square$

Παρατηρηση 3.17. Επειδή κάθε Schauder βασική spreading που δεν είναι unconditional είναι μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy, Από την Πρόταση 2.2 του [**46**], έχουμε ότι κάθε τέτοια ακολουθία κυριαρχεί την αθροίσιμη βάση του c_0.

5. Διάσπαση ℓ^1 spreading ακολουθιών

Στην παράγραφο αυτή μελετούνται κάποιες ιδιότητες σταθερότητας των spreading ακολουθιών σε χώρους με ημινόρμα οι οποίες σχετίζονται με την non distortion ιδιότητα του ℓ^1 (βλ. [**26**]).

Προταση 3.18. Έστω τρεις χώροι με ημινόρμα $(E,\|\cdot\|_\circ),(E_1,\|\cdot\|_*),(E_2,\|\cdot\|_{**})$. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}},(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ spreading ακολουθίες στους χωρους E,E_1 και E_2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά $c>0$ (δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $c\sum_{i=1}^n|a_i|\le\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\|_\circ$). Επίσης υποθέτουμε ότι

$$\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\|_\circ\le\|\sum_{i=1}^n a_ie_i^1\|_*+\|\sum_{i=1}^n a_ie_i^2\|_{**}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Αν η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ δε δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση τότε η $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά c.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι η $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ δε δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά c. Τότε υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n|a_i|=1$ ώστε $\|\sum_{i=1}^n a_ie_i^1\|_*<c-\varepsilon$, για κάποιο $\varepsilon>0$. Επειδή η $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading, έχουμε ότι για κάθε $k_1<\ldots<k_n$ στο $\mathbb{N}$

$$\|\sum_{i=1}^n a_ie_{k_i}^1\|_*<c-\varepsilon$$

Επειδή η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ δε δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση, υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και $b_1,\dots,b_m\in\mathbb{R}$ ώστε $\sum_{j=1}^m|b_j|=1$ και $\|\sum_{j=1}^m b_je_j^2\|_{**}<\frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως επειδή η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading έχουμε ότι για κάθε $k_1<\ldots<k_m$ στο $\mathbb{N}$

$$\|\sum_{j=1}^m b_je_{k_j}^2\|_{**}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στις ακόλουθες δύο ανισότητες

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_je_{(i-1)m+j}^1\Big\|_*\le\sum_{j=1}^m|b_j|\Big\|\sum_{i=1}^n a_ie_{(i-1)m+j}^1\Big\|_*<\sum_{j=1}^m|b_j|\cdot(c-\varepsilon)=c-\varepsilon$$

και

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_je_{(i-1)m+j}^2\Big\|_{**}\le\sum_{i=1}^n|a_i|\Big\|\sum_{j=1}^m b_je_{(i-1)m+j}^2\Big\|_{**}<\sum_{j=1}^m|b_j|\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_je_{(i-1)m+j}\Big\|_\circ&\le\Big\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_je_{(i-1)m+j}^1\Big\|_*\\&\quad+\Big\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_je_{(i-1)m+j}^2\Big\|_{**}<c-\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

το οποίο, επειδή $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_i|\cdot|b_j|=1$ και η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά c, οδηγεί σε άτοπο. □

Τα παραπάνω έχουν την ακόλουθη συνέπεια.

Πορισμα 3.19. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και τρεις $\mathcal{F}$-ακολουθίες $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$, $(x_s^1)_{s\in\mathcal{F}}$, $(x_s^2)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα χώρο Banach X ώστε για κάθε $s\in\mathcal{F}$, $x_s=x_s^1+x_s^2$. Έστω $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και ακολουθίες $(e_n)_{n\in\mathbb{N}},(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}},(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ παραγόμενες από τις $\mathcal{F}$-υπακολουθίες $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M},(x_s^1)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^2)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ αντίστοιχα σαν $\mathcal{F}$-spreading models. Υποθέτουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται μια κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά $c>0$. Αν η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ δε δέχεται μια κάτω ℓ^1-εκτίμηση τότε η $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται μία κάτω ℓ^1-εκτίμηση με σταθερά c.

Αποδειξη. Έστω $(E,\|\cdot\|_\circ),(E_1,\|\cdot\|_*),(E_2,\|\cdot\|_{**})$ οι χώροι με ημινόρμα που έχουν σαν Hamel βάσεις τις $(e_n)_{n\in\mathbb{N}},(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα. Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Τοτε για κάθε $(s_j)_{j=1}^n Plm(\mathcal{F}\restriction M)$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}\Big\|\le\Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}^1\Big\|+\Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}^2\Big\|$$

Συνεπώς $\Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_\circ\le\Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j^1\Big\|_*+\Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_{**}$. Το αποτέλεσμα έπεται λόγω της Προτάσης 3.18. □

Από το Πόρισμα 3.19 έχουμε επίσης και το ακόλουθο.

Πορισμα 3.20. Έστω μία regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $x\in X$ και δύο $\mathcal{F}$-ακολουθίες $(x_s)_{s\in\mathcal{F}},(x'_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα χώρο Banach X ώστε για κάθε $s\in\mathcal{F}$, $x_s=x'_s+x$. Έστω $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και ακολουθίες $(e_n)_{n\in\mathbb{N}},(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παραγόμενες από τις $\mathcal{F}$-υπακολουθίες $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ αντίστοιχα σαν $\mathcal{F}$-spreading models. Τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 αν και μόνο αν η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

$\mathcal{F}$-ακολουθίες σε τοπογικούς χώρους

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούνται $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε τοπογικούς χώρους. Στις πρώτες δύο παραγράφους επεκτείνεται ο κλασικός ορισμός των συγκλινουσών και Cauchy και παρουσιάζονται κάποια σχετικά αποτελέσματα. Η τρίτη παράγραφος επικεντρώνεται στη μελέτη $\mathcal{F}$-ακολουθιών με μετρικοποιήσιμη σχετικά συμπαγή εικόνα. Ειδικότερα, εισάγεται η έννοια της *subordinated* $\mathcal{F}$-ακολουθίας με σκοπό την αποκρυστάλλωση του ακόλουθου: Για κάθε απεικόνιση $\varphi : \mathcal{F} \to (X, \mathcal{T})$, με $\overline{\varphi[\mathcal{F}]}$ μετρικοποιήσιμο συμπαγές, και για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια συνεχής επέκταση $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, \mathcal{T})$.

1. Σύγκλιση $\mathcal{F}$-ακολουθιών

Ορισμος 4.1. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $x_0 \in X$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον X. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ συγκλίνει στο x_0 αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ με $\min s \geq M(m)$ έχουμε ότι $x_s \in U$.

Παρατηρηση 4.2.

(i) Είναι άμεσο ότι αν μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ σε ένα τοπολογικό χώρο συγκλίνει σε κάποιο x_0, τότε κάθε περεταίρω $\mathcal{F}$-υπακολουθία της συγκλίνει επίσης στο x_0.

(ii) Ειναι εύκολο επίσης να δει κανείς ότι για οικογένειες $\mathcal{F}$ με $o(\mathcal{F}) \geq 2$, η σύγκλιση μιας $\mathcal{F}$-υπακολουθίας $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δεν συνεπάγεται εν γένει τη σχετική συμπάγεια της εικόνας της.

Προταση 4.3. Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ και μια συνεχής συνάρτηση $f : Y \to X$. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(y_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον Y. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(y_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ συγκλίνει σε κάποιο $y \in Y$. Τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(f(y_s))_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ συγκλίνει στο $f(y)$.

Αποδειξη. Έστω $U_X \in \mathcal{T}_X$, με $f(y) \in U_X$. Από τη συνέχεια της f υπάρχει $U_Y \in \mathcal{T}_Y$ ώστε $y \in U_Y$ και $f[U_Y] \subseteq U_X$. Επειδή η $(y_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ συγκλίνει στο y, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ με $\min s \geq M(m)$ έχουμε ότι $y_s \in U_Y$ και συνεπώς $f(y_s) \in f[U_Y] \subseteq U_X$. □

Ορισμος 4.4. Έστω μετρικός χώρος (X, ρ), regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον Y. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $s_1, s_2 \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ με $\min s_1, \min s_2 \geq M(m)$, έχουμε ότι $\rho(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon$.

Προταση 4.5. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε έναν πλήρη μετρικό χώρο (X, ρ). Τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι Cauchy αν και μόνο αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι συγκλίνουσα.

Αποδειξη. Αν η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι συγκλίνουσα, τότε είναι άμεσο ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι Cauchy. Όσον αφορά το αντίστοφο, έχουμε τα ακόλουθα. Έστω ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι Cauchy. Έστω $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ ώστε $\min s_n \to \infty$. Είναι άμεσο ότι η $(x_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί μια Cauchy ακολουθία στον X. Επειδή ο (X,ρ) είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε η ακολουθία $(x_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλινει στο x. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ συγκλίνει στο x. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι Cauchy, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $t_1, t_2 \in \mathcal{F} \restriction M$ με $\min t_1, \min t_2 \geq M(k_0)$ έχουμε ότι $\rho(x_{t_1}, x_{t_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδή η ακολουθία $(x_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x και $\min s_n \to \infty$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\min s_{n_0} \geq M(k_0)$ και $\rho(x, x_{s_{n_0}}) < \varepsilon/2$. Συνεπώς για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$ με $\min s \geq M(k_0)$, έχουμε ότι $\rho(x,x_s) \leq \rho(x, x_{s_{n_0}}) + \rho(x_{s_{n_0}}, x_s) < \varepsilon$. □

2. Πλεγματικά ε-διαχωρισμένες $\mathcal{F}$-ακολουθίες

Λημμα 4.6. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $L \in [M]^\infty$ υπάρχει ένα πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L$ ώστε $\rho(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon$. Τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ περιέχει μια περαιτέρω Cauchy $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Αποδειξη. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty$. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.20, κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[M]^\infty$, τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L_n$ έχουμε ότι $\rho(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon_n$. Έστω L' ένα διαγώνιο σύνολο των $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $L'(n) \in L_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $L = \{L'(2n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι Cauchy. Πράγματι, ας θεωρήσουμε $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=n_0}^\infty \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω s_0 το μοναδικό αρχικό τμήμα του $\{L(n) : n \geq n_0\}$ που ανήκει στην $\mathcal{F}$. Αν $\max s_0 = L(k)$ τότε θέτουμε $k_0 = k+1$. Τότε για κάθε $s_1, s_2 \in \mathcal{F} \restriction L$ με $\min s_1, \min s_2 \geq L(k_0)$, από την Πρόταση 1.25 υπάρχουν πλεγματικά μονοπάτια $(s_j^1)_{j=1}^{|s_0|}, (s_j^2)_{j=1}^{|s_0|}$ στην $\mathcal{F} \restriction L'$ από το s_0 στα s_1, s_2 αντίστοιχα. Τότε για κάθε $i = 1, 2$ έχουμε ότι

$$\rho(x_{s_0}, x_{s_i}) \leq \sum_{j=0}^{|s_0|-1} \rho(x_{s_j^i}, x_{s_{j+1}^i}) < \sum_{j=0}^{|s_0|-1} \varepsilon_{n_0+j} < \frac{\varepsilon}{2}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\rho(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon$. □

Ορισμος 4.7. Έστω $\varepsilon > 0$, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ). Θα λέμε ότι η υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι πλεγματικά ε-διαχωρισμένη αν για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L$, $\rho(x_{s_1}, x_{s_2}) > \varepsilon$.

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί αναδιατύπωση του Λήμματος 4.6 σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.

Προταση 4.8. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ). Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δεν έχει περαιτέρω Cauchy υπακολουθία.
(ii) Για κάθε $N \in [M]^\infty$ υπάρχει $L \in [N]^\infty$ και $\varepsilon > 0$ ώστε η υπακολυθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ να είναι πλεγματικά ε-διαχωρισμένη.

3. Subordinated $\mathcal{F}$-ακολουθίες και συγκλίνοντα $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρα

Ορισμος 4.9. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$, μία regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι subordinated (ως προς τον $(X,\mathcal{T})$) αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \restriction M \to (X,\mathcal{T})$ με $\widehat{\varphi}(s) = x_s$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$.

Παρατηρηση 4.10. Αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated, τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\widehat{\varphi}:\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M\to(X,\mathcal{T})$ που το πιστοποιεί. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η $\mathcal{F}$ είναι πυκνή στο $\widehat{\mathcal{F}}$. Επίσης για τον ίδιο λόγο, έχουμε ότι

$$\overline{\{x_s : s\in\mathcal{F}\upharpoonright M\}}=\widehat{\varphi}[\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M],$$

όπου $\overline{\{x_s : s\in\mathcal{F}\upharpoonright M\}}$ είναι η $\mathcal{T}$-κλειστότητα της $\{x_s : s\in\mathcal{F}\upharpoonright M\}$ στον X. Συνεπώς το σύνολο $\overline{\{x_s : s\in\mathcal{F}\upharpoonright M\}}$ αποτελεί έναν αριθμήσιμο συμπαγή μετρικοποιήσιμο υπόχωρο του $(X,\mathcal{T})$ με Cantor-Bendixson δείχτη το πολύ $o(\mathcal{F})+1$. Επιπλέον ας παρατηρήσουμε ότι αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated τότε για κάθε $L\in[M]^\infty$, η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated.

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.

Πορισμα 4.11. Έστω τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$, regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated. Έστω $\widehat{\varphi}:\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M\to(X,\mathcal{T})$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Τότε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ συγκλίνει στο $\widehat{\varphi}(\emptyset)$.

Μια έννοια που σχετίζεται με τα παραπάνω είναι αυτή του *συγκλίνοντος $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρου.*

Ορισμος 4.12. Έστω τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$, regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}}$ μια οικογένεια στοιχείων του X. Έστω για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\setminus\mathcal{F}$, $N_t=\{n\in M : t\cup\{n\}\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M\}$. Θα λέμε ότι η $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ είναι ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο, αν για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\setminus\mathcal{F}$, έχουμε ότι η ακολουθία $(x_{t\cup\{n\}})_{n\in N_t}$ συγκλίνει στο x_t. Επιπλέον αν η $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ είναι ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο τότε θα λέμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο.

Είναι άμεσο ότι αν μια $\mathcal{F}$-υπαακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated τότε η οικογένεια $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ που ορίζεται ως $x_t=\widehat{\varphi}(t)$, για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M$ είναι ένα συγκλίνον $\mathcal{F}$-δέντρο. Η επόμενη πρόταση συνεπάγεται το αντίστροφο περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του M.

Προταση 4.13. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο στον X. Τότε υπάρχει $L\in[M]^\infty$ ώστε η απεικόνιση $\widehat{\varphi}:\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L\to X$ που ορίζεται ως $\widehat{\varphi}(t)=x_t$, για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L$ είναι συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $L\in[M]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να είναι subordinated.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στη τάξη της $\mathcal{F}$. Αν $o(\mathcal{F})=1$, το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi<\omega_1$, το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει για κάθε regular thin οικογένεια τάξης μικρότερης του ξ. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ και $M\in[\mathbb{N}]^\infty$. Για κάθε $n\in M$ έχουμε ότι $o(\mathcal{F}_{(n)})<o(\mathcal{F})=\xi$. Έστω $L_0=M$ και $l_1=\min L_0$. Για κάθε $t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}$, θέτουμε $x^1_{t'}=x_{\{l_1\}\cup t'}$. Ας παρατηρήσουμε ότι η οικογένεια $(x^1_{t'})_{t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}\upharpoonright L_0}$ αποτελεί ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $L_1\in[L_0\setminus\{l_1\}]^\infty$ ώστε η απεικόνιση $\widehat{\varphi}_1:\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}\upharpoonright L_1\to X$, με $\widehat{\varphi}_1(t')=x^1_{t'}$ για κάθε $t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}\upharpoonright L_1$, είναι συνεχής. Συνεπώς το σύνολο $\overline{\{x^1_s :\ s\in\mathcal{F}_{(l_1)}\upharpoonright L_1\}}=\{x^1_{t'} : t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}\upharpoonright L_1\}$ αποτελεί έναν συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο. Από το Θεώρημα 1.11 και περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του L_1 αν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{diam}(\{x^1_{t'} :\ t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_1)}}\upharpoonright L_1\})=\mathrm{diam}(\{x^1_s :\ s\in\mathcal{F}_{(l_1)}\upharpoonright L_1\})<1$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, με επαγωγή κατασκευάζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μια φθίνουσα ακολουθία $(L_n)_{n=0}^\infty$ απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε θέτοντας $x^n_{t'}=x_{\{l_n\}\cup t'}$ για κάθε $t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(l_n)}}\upharpoonright L_n$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $l_n = \min L_{n-1}$ και $L_n \in [L_{n-1} \setminus \{l_n\}]^\infty$.

(ii) Η απεικόνιση $\widehat{\varphi}_n : \widehat{\mathcal{F}_{(l_n)}} \upharpoonright L_n \to X$, με $\widehat{\varphi}_n(t') = x^n_{t'}$ για κάθε $t' \in \widehat{\mathcal{F}_{(l_n)}} \upharpoonright L_n$, είναι συνεχής.

(iii) $\operatorname{diam}(\{x^n_{t'} :\ t' \in \widehat{\mathcal{F}_{(l_n)}} \upharpoonright L_n\}) < \frac{1}{n}$.

Έστω $L = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to X$ ως εξής. Για κάθε $s = \emptyset$, θέτουμε $\widehat{\varphi}(\emptyset) = x_\emptyset$ και για κάθε $t \neq \emptyset$, θέτουμε $\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}_n(t \setminus \{l_n\}) = x_t$, όπου $l_n = \min t$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{\widehat{\varphi}(s) :\ s \in \mathcal{F} \upharpoonright L \text{ και } \min s = L(n)\} \to 0$ και $x_{L(n)} \to x_\emptyset$. Συνεπώς η $\widehat{\varphi}$ είναι συνεχής στο $\emptyset$. Σε κάθε άλλο $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L$ η συνέχεια της $\widehat{\varphi}$ έπεται εύκολα από τη συνέχεια της $\widehat{\varphi}_n$. $\square$

Λημμα 4.14. Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Αν το σύνολο $\overline{\{x_s : s \in \mathcal{F} \upharpoonright N\}}$ είναι συμπαγές μετρικοποιήσιμο, τότε υπάρχει $M \in [N]^\infty$, ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να δέχεται ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στην τάξη της regular thin οικογένειας $\mathcal{F}$. Αν $o(\mathcal{F}) = 1$, το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi < o(\mathcal{F})$ το λήμμα ισχύει. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $N \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X, με $Y = \overline{\{x_s : s \in \mathcal{F} \upharpoonright N\}}$ συμπαγές μετρικοποιήσιμο. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $s' \in \mathcal{F}_{(m)} \upharpoonright N$, θέτουμε $z^m_{s'} = x_{\{m\}\cup s'}$. Επειδή $o(\mathcal{F}_{(m)}) < o(\mathcal{F})$, για κάθε $m \in N$, κάνοντας χρήση της επαγωγικής μας υπόθεσης μπορούμε να κατασκευάσουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο N και μια φθίνουσα ακολουθία $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[N]^\infty$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $m_n < \min M_n$

(ii) Η $\mathcal{F}_{(m_n)}$-υπακολουθία $(z^{m_n}_{s'})_{s'\in\mathcal{F}_{(l_n)}\upharpoonright M_n}$ δέχεται την $(z^{m_n}_{t'})_{t'\in\widehat{\mathcal{F}_{(m_n)}}\upharpoonright M_n}$ σαν ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}_{(m_n)}}$-δέντρο στον Y.

Επειδή ο Y είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, έχουμε ότι η ακολουθία $(z^{m_n}_\emptyset)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία $(z^{l_{k_n}}_\emptyset)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα σε κάποιο $x \in Y$. Έστω $M = \{m_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ και $x_\emptyset = x$. Επίσης έστω, για κάθε $m \in M$ και $t' \in \widehat{\mathcal{F}_{(m)}} \upharpoonright M$ (ας παρατηρήσουμε ότι $\widehat{\mathcal{F}_{(m)}} \upharpoonright M \subseteq \widehat{\mathcal{F}_{(m_{k_n})}} \upharpoonright M$, όπου $m = m_{k_n}$), $x_{\{m\}\cup t'} = z^m_{t'}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται την$(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ ως ένα συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο. $\square$

Προταση 4.15. Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X με $\overline{\{x_s :\ s \in \mathcal{F}\}}$ συμπαγή μετρικοποιήσιμο υπόχωρο του $(X, \mathcal{T})$. Τότε για κάθε $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated και αν η $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to X$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί τότε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ συγκλίνει στο $\widehat{\varphi}(\emptyset)$.

Αποδειξη. Από το Λήμμα 4.14 υπάρχει $M \in [N]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να δέχεται συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο. Από την Πρόταση 4.13 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να είναι subordinated. Τέλος από το Πόρισμα 4.11, έχουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ συγκλίνει στο $\widehat{\varphi}(\emptyset)$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ιδιότητες της νόρμας των spreading models

Όπως έχουμε δει οι spreading ακολουθίες και συνεπώς και τα spreading models κατηγοριοποιούνται σε τέσσερις κλάσεις. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται συνθήκες που αφορούν τις $\mathcal{F}$-ακολουθίες οι οποίες καθορίζουν την κλάση που ανήκει το παραγόμενο spreading model.

1. Τετριμμένα spreading models

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η συμπεριφορά των $\mathcal{F}$-ακολουθιών που παράγουν τετριμμένα spreading models. Μεταξύ άλλων αποδεικνύεται ότι μια $\mathcal{F}$-ακολουθία δέχεται ένα τετριμμένο spreading model αν και μόνο αν περιέχει μια norm Cauchy υπακολουθία. Αυτό γενικεύει την κλασική συνθήκη των Brunel και Sucheston για spreading models οποιασδήποτε τάξης.

Θεωρημα 5.1. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Έστω $(E, \|\cdot\|_*)$ ένας απειροδιάστατος χώρος με ημινόρμα με Hamel βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.
(ii) Η ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ δεν είναι νόρμα στον E.
(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγεται σαν $\mathcal{G}$-spreading model από κάθε σταθερή $\mathcal{G}$-ακολουθία $(y_t)_{t\in\mathcal{G}}$ σε οποιοδήποτε χώρο Banach Y, τέτοια ώστε $\|y_t\| = \|e_1\|_*$ για κάθε $t \in \mathcal{G}$ και για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$.
(iv) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ περιέχει μια περαιτέρω norm Cauchy υπακολουθία.
(v) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $L \in [M]^\infty$, η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δεν είναι πλεγματικά ε-διαχωρισμένη.
(vi) Υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε κάθε υπακολουθία της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία συγκλίνουσα στο x.

Αποδειξη. Η ισοδυναμία των (i) και (ii) έπεται από το Πόρισμα 3.4. Επίσης η ισοδυναμία των (i) και (iii) είναι προφανής.

(i)⇒(v): Έστω $\varepsilon > 0$ και $L \in [M]^\infty$. Επειδή η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει την τετριμμένη ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ με $\min s_1 \geq L(n_0)$, έχουμε ότι

$$\Big\|x_{s_1} - x_{s_2}\Big\| = \left|\Big\|x_{s_1} - x_{s_2}\Big\| - \Big\|e_1 - e_2\Big\|_*\right| < \varepsilon$$

και συνεπώς η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δεν είναι πλεγματικά ε-διαχωρισμένη.

(v)⇒(iv): Η συνεπαγωγή αυτή έπεται του Λήμματος 4.6.

(iv)⇒(i): Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $((s_1^n, s_2^n))_{n\in\mathbb{N}}$ από πλεγματικά ζεύγη στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ ώστε $s_1^n(1) \to \infty$ και $\|x_{s_1^n} - x_{s_2^n}\| < \frac{1}{n}$. Συνεπώς

$$\Big\|e_1 - e_2\Big\|_* = \lim_{n\to\infty} \Big\|x_{s_1^n} - x_{s_2^n}\Big\| = 0$$

Επομένως από την Πρόταση 3.3 έχουμε το (i). Από τα παραπάνω έχουμε ότι τα (i)-(v) είναι ισοδύναμα.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα (i) και (vi) είναι ισοδύναμα. Οι συνεπαγωγής (vi) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) είναι άμεσες. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ισχύει το (i). Τότε κάθε υπακολουθία της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Συνεπώς, από την ισοδυναμία των (i) και (iv) και την Πρόταση 4.5, κάθε υπακολουθία της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ περιέχει περαιτέρω συγκλίνουσα υπακολουθία. Αρκεί να δειχθεί ότι όλες οι συγκλίνοντες υπακολουθίες της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ έχουν ένα κοινό όριο. Πράγματι, θεωρούμε $L_1, L_2 \in [M]^\infty$ και $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ συγκλίνει στο x_1 και η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_2}$ στο x_2. Θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $s_1 \in \mathcal{F}\upharpoonright L_1$ με $\min s_1 \geq L_1(n_0)$ και $s_2 \in \mathcal{F}\upharpoonright L_2$ με $\min s_2 \geq L_2(n_0)$ έχουμε ότι $\|x_1 - x_{s_1}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $\|x_2 - x_{s_2}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ας παρατηρήσουμε ότι το n_0 μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλο ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}\upharpoonright M$ με $\min s_1 \geq M(n_0)$,

$$\Big\|x_{s_1} - x_{s_2}\Big\| = \Big|\Big\|x_{s_1} - x_{s_2}\Big\| - \Big\|e_1 - e_2\Big\|_*\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μπορούμε να επιλέξουμε $s_1 \in \mathcal{F}\upharpoonright L_1$ με $\min s_1 \geq L_1(n_0)$ και $s_2 \in \mathcal{F}\upharpoonright L_2$ με $\min s_2 \geq L_2(n_0)$ ώστε το (s_1, s_2) να είναι ένα πλεγματικό ζεύγος. Τότε

$$\Big\|x_1 - x_2\Big\| \leq \Big\|x_1 - x_{s_1}\Big\| + \Big\|x_{s_1} - x_{s_2}\Big\| + \Big\|x_2 - x_{s_2}\Big\| < \varepsilon$$

Συνεπώς $x_1 = x_2$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα έπεται από την ισοδυναμία των (i) και (vi) στο παραπάνω θεώρημα.

Πορισμα 5.2. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ και $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}}$ δύο $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_s = x'_s + x_0$, για κάθε $s \in \mathcal{F}\upharpoonright M$.
(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη αν και μόνο αν η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.

2. Unconditional spreading models

Είναι γνωστό ότι κάθε spreading model που παράγεται από μια ασθενώς μηδενική ημινορμαρισμένη ακολουθία είναι μια unconditional spreading ακολουθία. Στην παράγραφο αυτή δίνεται μια επέκταση του αποτελέσματος αυτού για subordinated ημινορμαρισμένες ασθενώς μηδενικές $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 5.3. Έστω ένας χώρος Banach X, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^n$ regular thin οικογένειες, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$, έστω $\widehat{\varphi}_i : \widehat{\mathcal{F}^i}\upharpoonright L \to (X, w)$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα μη κενά $G^1 \subseteq \mathcal{F}^1\upharpoonright L, \ldots, G^n \subseteq \mathcal{F}_n\upharpoonright L$ και ακολουθίες $(\mu^1_t)_{t\in G^1}, \ldots, (\mu^n_t)_{t\in G^n}$ στο $[0,1]$ τέτοιες ώστε:

(α) Για κάθε $1 \leq i \leq n$, $\sum_{t\in G^i} \mu^i_t = 1$ και $\|\widehat{\varphi}_i(\emptyset) - \sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t)\| < \varepsilon$.
(β) Για κάθε επιλογή $t_i \in G^i$, η n-άδα $(t_1, \ldots, t_n)$ είναι πλεγματική.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στον $\xi_{\max} = \max\{o(\mathcal{F}^i) : 1 \leq i \leq n\}$. Αν $\xi_{\max} = 0$, δηλαδη $\mathcal{F}^i = \{\emptyset\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο. (Έστω $G^i = \mathcal{F}^i$ και $\mu^i_\emptyset = 1$.) Έστω $1 \leq \xi \leq \omega_1$ και υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει για $\xi_{\max} < \xi$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\xi_{\max} = \xi$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^n$ regular thin οικογένειες ώστε $\xi = \max\{o(\mathcal{F}^i) : 1 \leq i \leq n\}$. Έστω επίσης για κάθε $1 \leq i \leq n$, $\widehat{\varphi}_i : \widehat{\mathcal{F}^i}\upharpoonright L \to (X, w)$ μια συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $x^i_s = \widehat{\varphi}_i(s)$, για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $s \in \widehat{\mathcal{F}^i}\upharpoonright L$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}^i$ είναι very large στο L, συνεπώς $\{l\} \in \widehat{\mathcal{F}^i}$ για κάθε $l \in L$ και $1 \leq i \leq n$. Επειδή για κάθε $1 \leq i \leq n$ $w\text{-}\lim_{l\in L} x^i_{\{l\}} = x^i_\emptyset$, μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένα υποσύνολα $F^1 < \ldots < F^n$ οφ L και ακολουθίες $(\lambda^1_l)_{l\in F^1}, \ldots, (\lambda^n_l)_{l\in F^n}$ στο $[0,1]$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$

(i) $\sum_{l\in F^i} \lambda^i_l = 1$ και $\|x^i_\emptyset - \sum_{l\in F^i} \lambda^i_l x^i_{\{l\}}\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Έστω $F = \cup_{i=1}^n F^i = \{l_1 < \ldots < l_m\}$ και $L' = \{l \in L : l > l_m\}$. Για κάθε $1 \leq j \leq m$ θέτουμε i_j το μοναδικό $i \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $l_j \in F^i$. Για κάθε $1 \leq j \leq n$ ορίζουμε $\mathcal{G}^j = \mathcal{F}^{i_j}_{(l_j)}$ και $\widehat{\psi}_j : \widehat{\mathcal{G}^j \upharpoonright L'} \to (X, w)$, με $\widehat{\psi}_j(s) = \widehat{\varphi}_{i_j}(\{l_j\} \cup s)$. Επειδή $o(\mathcal{G}^j) < o(\mathcal{F}^{i_j})$ έχουμε ότι $\max\{o(\mathcal{G}^j) : 1 \leq j \leq m\} < \max\{o(\mathcal{F}^i) : 1 \leq i \leq n\}$ και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης. Άρα υπάρχουν μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα $\widehat{G}^1 \subseteq \mathcal{G}^1 \upharpoonright L', \ldots, \widehat{G}^m \subseteq \mathcal{G}^m \upharpoonright L'$ και ακολουθίες $(\widetilde{\mu}^1_s)_{s\in\widehat{G}^1}, \ldots, (\widetilde{\mu}^m_s)_{s\in\widehat{G}^m}$ στο $[0,1]$ ώστε για κάθε $1 \leq j \leq m$

(ii) $\sum_{s\in\widetilde{G}^j} \widetilde{\mu}^j_s = 1$ και $\|\widehat{\psi}_j(\emptyset) - \sum_{s\in\widetilde{G}^j} \widetilde{\mu}^j_s \widehat{\psi}_j(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(iii) Για κάθε επιλογή $t_j \in \widetilde{G}^j$ η m-άδα $(t_1, \ldots, t_m)$ είναι πλεγματική.

Για κάθε $1 \leq i \leq n$ θέτουμε $G^i = \big\{\{l_j\} \cup s : l_j \in F_i \text{ και } s \in \widetilde{G}^j\big\}$ και για κάθε $t \in G^i$ θέτουμε $\mu^i_t = \lambda^i_{l_j} \cdot \widetilde{\mu}^j_s$, όπου $t = \{l_j\} \cup s$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

(α) Για κάθε $1 \leq i \leq n$, $\sum_{t\in G^i} \mu^i_t = 1$.

(β) Για κάθε επιλογή $t_i \in G^i$, η n-άδα $(t_1, \ldots, t_n)$ είναι πλεγματική.

Μένει να δειχθεί ότι $\|\widehat{\varphi}_i(\emptyset) - \sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t)\| < \varepsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}_i(\emptyset) - \sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t)\| \leq & \|\widehat{\varphi}_i(\emptyset) - \sum_{\{j:i_j=i\}} \lambda^i_{l_j} \widehat{\varphi}_i(\{l_j\})\| \\ & + \|\sum_{\{j:i_j=i\}} \lambda^i_{l_j} \widehat{\varphi}_i(\{l_j\}) - \sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t)\|\end{aligned}$$

Από την (i) παραπάνω έχουμε ότι

$$\|\widehat{\varphi}_i(\emptyset) - \sum_{\{j:i_j=i\}} \lambda^i_{l_j} \widehat{\varphi}_i(\{l_j\})\| = \|x^i_\emptyset - \sum_{l\in F^i} \lambda^i_l x^i_{\{l\}}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επιπλέον

$$\sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t) = \sum_{\{j:i_j=i\}} \sum_{s\in\widetilde{G}^j} \lambda^i_{l_j} \widetilde{\mu}^j_s \widehat{\psi}_j(s)$$

Συνεπώς (ii)

$$\|\sum_{\{j:i_j=i\}} \lambda^i_{l_j} \widehat{\varphi}_i(\{l_j\}) - \sum_{t\in G^i} \mu^i_t \widehat{\varphi}_i(t)\| \leq \sum_{\{j:i_j=i\}} \lambda^i_{l_j} \|\widehat{\psi}_j(\emptyset) - \sum_{s\in\widetilde{G}^j} \widetilde{\mu}^j_s \widehat{\psi}_j(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Θεωρημα 5.4. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία σε ένα χώρο Banach X που παράγει ένα spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F} \upharpoonright L} \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Αν $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$, τότε είτε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη με $\|e_n\|_* = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional (δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\|\sum_{i\in F} a_i e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|$).

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη. Τότε από το Θεώρημα 5.1 έχουμε ότι υπάρχουν $L_1 \in [L]^\infty$ και $x_0 \in X$ ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ να συγκλίνει στο x_0. Από το Πόρισμα 4.11 έχουμε ότι $x_0 = \widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$. Επειδή και η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $\|e_1\|_* = 0$. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading έχουμε ότι $\|e_n\|_* = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq n$ και $a_1,\dots,a_n\in[-1,1]$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i e_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\|$$

Για να δειχθεί αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i e_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\| + \varepsilon$$

Πράγματι, έστω $n\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq n$, $a_1,\dots,a_n\in[-1,1]$ και $\varepsilon>0$. Περνάμε σε ένα $N\in[L]^\infty$ ώστε για κάθε πλεγματική n-άδα $(s_i)_{i=1}^n$ στην $\mathcal{F}\upharpoonright N$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\Big|\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s_i}\Big\| - \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\|\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } \Big|\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i x_{s_i}\Big\| - \Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i e_i\Big\|\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

Έστω $\mathcal{F}^1=\ldots=\mathcal{F}^n=\mathcal{F}$ και $\widehat{\varphi}_1=\ldots=\widehat{\varphi}_n=\widehat{\varphi}|_{\mathcal{F}\upharpoonright N}$. Από το Λήμμα 5.3 υπάρχουν μη κενά και πεπερασμένα $G^1,\dots,G^n\subseteq\mathcal{F}\upharpoonright N$ και ακολουθίες $(\mu_t^1)_{t\in G^1},\dots,(\mu_t^n)_{t\in G^n}$ στο $[0,1]$ ώστε

(α) Για $1\leq i\leq n$, $\sum_{t\in G^i}\mu_t^i=1$ και $\|\sum_{t\in G^i}\mu_t^i x_t\| = \|\widehat{\varphi}(\emptyset)-\sum_{t\in G^i}\mu_t^i\widehat{\varphi}(t)\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(β) Για κάθε επιλογή $t_i\in G^i$, η n-άδα $(t_1,\dots,t_n)$ είναι πλεγματική.

Επιλέγουμε $s_i\in G^i$ για κάθε $1\leq i\leq n$ με $i\neq p$ και θέτουμε $G=G^p$. Άρα έχουμε ότι $\sum_{t\in G}\mu_t^p=1$, $\|\sum_{t\in G}\mu_t^p x_t\|<\frac{\varepsilon}{3}$ και η n-άδα $(s_1,\dots,s_{p-1},t,s_{p+1},\dots,s_n)$ είναι πλεγματική, για κάθε $t\in G$. Επομένως από την (4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i e_i\Big\| &\leq \Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i x_{s_i}\Big\| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i x_{s_i} + a_p\sum_{t\in G}\mu_t^p x_t\Big\| + |a_p|\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\
&\leq \sum_{t\in G}\mu_t^p\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_i x_{s_i} + a_p x_t\Big\| + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \sum_{t\in G}\mu_t^p\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\| + \frac{\varepsilon}{3}\Big) + \frac{2\varepsilon}{3}\\
&= \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Από το Πόρισμα 4.11 το ακόλουθο αποτελεί αναδιατύπωση του παραπάνω θεωρήματος.

Πορισμα 5.5. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $L\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να είναι ημινορμαρισμένη, subordinated και ασθενώς μηδενική. Τότε κάθε spreading model της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι 1-unconditional.

Παρατηρηση 5.6. Επειδή οι ασθενώς μηδενικές ακολουθίες ταυτίζονται με τις subordinated, το παραπάνω πόρισμα αποτελεί επέκταση του κλασικού αποτελέσματος που αφορά τα unconditional spreading models που παράγονται από ημινορμαρισμένες ασθενώς μηδενικές ακολουθίες. Επιπλέον, ας παρατηρήσουμε ότι αν $o(\mathcal{F})\geq 2$ τότε η επιπρόσθετη υπόθεση που απαιτεί την $\mathcal{F}$-ακολουθία να είναι subordinated είναι αναγκαία. Πράγματι, Έστω η $[\mathbb{N}]^2$-ακολουθία στον c_0, που ορίζεται ως

$$x_s=\sum_{n=\min s}^{\max s} e_n$$

για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^2$, όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η συνήθης βάση του c_0. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ είναι νορμαρισμένη και ασθενώς μηδενική. Θα δείξουμε ότι η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ παράγει ένα spreading model που είναι ισοδύναμο με την αθροίσιμη βάση του c_0. Συνεπώς, παρόλο που η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ είναι ημινορμαρισμένη και ασθενώς μηδενική, δεν παράγει unconditional spreading model. Για να δείξουμε ότι η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ παράγει ένα spreading model ισοδύναμο στην αθροίσιμη βάση του c_0, θα δείξουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{l} a_j x_{s_j}\Big\| = \max\Big(\max_{1\leq k\leq l}\Big|\sum_{j=1}^{k} a_j\Big|, \max_{1\leq k\leq l}\Big|\sum_{j=k}^{l} a_j\Big|\Big) \tag{5}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_l \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^l \in Plm([\mathbb{N}]^2)$. Πράγματι, έστω $l \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_l \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^l \in Plm([\mathbb{N}]^2)$. Θέτουμε $z = \sum_{j=1}^l a_j x_{s_j}$. Επειδή η $(s_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματική, έχουμε ότι

$$\min s_1 < \ldots < \min s_l < \max s_1 < \ldots < \max s_l$$

Συνεπώς, έχουμε τα επόμενα:

(i) Αν $1 \leq n \leq \min s_1$ τότε $z(n) = 0$.
(ii) Αν $1 \leq i < l$ και $\min s_i \leq n < \min s_{i+1}$ τότε $z(n) = \sum_{j=1}^i a_j$.
(iii) Αν $\min s_l \leq n \leq \max s_1$ τότε $z(n) = \sum_{j=1}^l a_j$.
(iv) Αν $1 < i \leq l$ και $\max s_{i-1} < n \leq \max s_i$ τότε $z(n) = \sum_{j=i}^l a_j$.
(v) Αν $n > \max s_l$ τότε $z(n) = 0$.

Από τις (i)-(v) έχουμε ότι η σχέση (5) ισχύει.

3. Ιδιάζοντα spreading models

Στην παράγραφο αυτή χαρακτηρίζονται οι $\mathcal{F}$-ακολουθίες που πάραγουν ιδιάζοντα (δηλαδή μη τετριμμένα και όχι Schauder βασικά) spreading models. Αποδεικνύεται ότι η κανονική διάσπαση της ιδιάζουσας spreading ακολουθίας αντανακλάται πίσω στην $\mathcal{F}$-ακολουθία που την παράγει. Ειδικότερα για την περίπτωση των 1-spreading models δείχνεται ότι κάθε ακολουθία που παράγει ένα ιδιάζον spreading model είναι ασθενώς συγκλίνουσα σε ένα μη μηδενικό στοιχείο νόρμας ίσης με τη νόρμα του ασθενούς ορίου της ιδιάζουσας ακολουθίας. Η γενική περίπτωση μιας $\mathcal{F}$-ακολουθίας είναι πιο περίπλοκη.

3.1. Ιδιάζοντα spreading models τάξης ένα.

Λημμα 5.7. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο μη τετριμμένες ακολουθίες που είναι spreading και Cesáro αθροίσιμες στο μηδέν. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i\Big\|$$

Τότε είναι ισομετρικές, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i\Big\|$$

Αποδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Επειδή οι $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμες στο μηδέν, έχουμε ότι

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e_{n+j} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \widetilde{e}_{n+j} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επειδή, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda}{m} = 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\| &= \lim_{m\to\infty} \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i - \frac{\lambda}{m}\sum_{j=1}^m e_{n+j}\Big\| \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{e}_i - \frac{\lambda}{m}\sum_{j=1}^m \widetilde{e}_{n+j}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{e}_i\Big\|\end{aligned}$$

□

Λημμα 5.8. Έστω ένας χώρος Banach X και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία στον X που πάραγει ένα ιδιάζον spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (βλ. Πρόταση 3.11). Έστω x το ασθενές όριο της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και έστω $x'_n = x_n - x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\|x\| = \|e\|$ και $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το μοναδικό (πέρα από ισομετρία) spreading model της $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Αποδειξη. Έστω $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα spreading model που παράγεται από μια υπακολουθία της $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επειδή η $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική, έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional. Από το Πόρισμα 3.9, έχουμε ότι είτε η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη της συνήθους βάσης του ℓ^1, ή είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Η πρώτη εναλλακτική είναι αδύνατη, καθώς αλλιώς από το Πόρισμα 3.20, θα είχαμε ότι το ίδιο ισχύει και για την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Συνεπώς η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Καθώς $x_n = x'_n + x$ και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model παρατηρούμε εύκολα ότι

$$\lim_n \Big\|\frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n}\Big\| = \|x\|$$

Επειδή $e_n = e'_n + e$ και η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν, έχουμε ότι $\|x\| = \|e\|$.

Αρκεί να δείξουμε ότι οι $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικές. Από το Λήμμα 5.7 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_1 = 0$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{e}_i\Big\|$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_1 = 0$. Έστω $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε $|F_k| = n$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και $\min F_k \to \infty$. Τότε

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{F_k(i)}\Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_{F_k(i)}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{e}_i\Big\|$$

□

Προταση 5.9. Έστω ένας χώρος Banach X και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X που παράγει ένα ιδιάζον spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Τότε υπάρχει $x \in X \setminus \{0\}$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_n = x_n - x$, η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το μοναδικό spreading model της $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Αποδειξη. Η απόδειξη διασπάται σε δύο ισχυρισμούς.

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχουν $L_M \in [M]^\infty$ και $x_M \in X \setminus \{0\}$ ώστε $(x_n)_{n\in L_M} \xrightarrow{w} x_M$, $\|x_M\| = \|e\|$, και θέτοντας $x'_n = x_n - x_M$, η $(x'_n)_{n\in L_M}$ παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model.

Αποδειξη του Ισχυρισμου 1. Ας παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν περιέχει καμιά Schauder βασική υπακολουθία, καθώς αν περιείχε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα ήταν Schauder βασική. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Ακολουθώντας επιχειρήματα παρόμοια με αυτά της απόδειξης της Πρότασης 3.11 έχουμε ότι υπάρχουν $L'_M \in [M]^\infty$ και $x_M \in X\setminus\{0\}$ ώστε $(x_n)_{n\in L_M} \stackrel{w}{\to} x_M$. Περνάμε σε ένα $L_M \in [L'_M]^\infty$ ώστε η $(x_n - x_M)_{n\in L_M}$ να παράγει spreading model. Το Λήμμα 5.8 ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Ισχυρισμός 2: Υπάρχει $x \in X$ ώστε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $x_M = x$.

Αποδειξη του Ισχυρισμου 2. Έστω $M_1, M_2 \in [\mathbb{N}]^\infty$. Θα δείξουμε ότι $x_{M_1} = x_{M_2}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading και Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_j\Big\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ και } \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_{n_0+j}\Big\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Έστω $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (αντ. $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$) μια ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων του L_{M_1} (αντ. L_{M_2}) ώστε $|F_k| = n_0$ (αντ. $|G_k| = n_0$) για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\min F_k \to \infty$ (αντ. $\min G_k \to \infty$) και $\max F_k < \min G_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\lim_{k\to\infty}\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} x_{F_k(j)} - x_{M_1}\Big\| = \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_j\Big\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

και

$$\lim_{k\to\infty}\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} x_{G_k(j)} - x_{M_2}\Big\| = \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_j\Big\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} x_{F_k(j)} - \frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} x_{G_k(j)}\Big\| &= \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_j - \frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_{n_0+j}\Big\| \\ &= \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_j - \frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_{n_0+j}\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Συνεπώς $\|x_{M_1} - x_{M_2}\| < \varepsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 έχει ολοκληρωθεί. □

Από τον Ισχυρισμό 2 έχουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία ασθενώς συγκλίνουσα στο x. Αυτό συνεπάγεται ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο x και το Λήμμα 5.8 ολοκληρώνεται την απόδειξη. □

3.2. Ιδιάζοντα spreading models ανώτερης τάξης. Το ακόλουθο είναι το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου.

Θεωρημα 5.10. *Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει ένα ιδιάζον $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχουν $x \in X$ και $L \in [M]^\infty$ ώστε $\|x\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_s = x_s - x$, για κάθε $s \in \mathcal{F}\upharpoonright L$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model.*

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρειαζόμαστε κάποια προεργασία. Ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο.

Λημμα 5.11. *Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει ένα ιδιάζον*

$\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_\varepsilon$ και κάθε $(s_j)_{j=1}^{n+m} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(n+m)$, έχουμε ότι

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{s_{n+j}}\Big\| < \varepsilon$$

Απόδειξη. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της ιδιάζουσας ακολουθίας $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από την Πρόταση 3.11 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e'_i\Big\| < \varepsilon/4$$

Τότε για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_{n+i}\Big\| = \Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e'_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e'_{n+i}\Big\| < \varepsilon/2$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για κατάλληλα μεγάλο $n_\varepsilon \geq n_0$,

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{s_{n+j}}\Big\| < \varepsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_\varepsilon$ και κάθε $(s_j)_{j=1}^{n+m} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(n+m)$. □

Πρόταση 5.12. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_\varepsilon$ και κάθε $(s_j)_{j=1}^{n+m} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(n+m)$ έχουμε ότι

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{s_{n+j}}\Big\| < \varepsilon$$

Τότε υπάρχει $L \in [M]^\infty$ και $x \in X$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $(s_j)_{j=1}^{n} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ με $s_1(1) \geq L(n)$ έχουμε ότι

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - x\Big\| < \varepsilon$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύει η Cauchy έκδοση της παραπάνω πρότασης, δηλαδή ότι υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ και κάθε $(s_j)_{j=1}^{n}, (t_j)_{j=1}^{m} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ με $s_1(1) \geq L(n)$ και $t_1(1) \geq L(m)$ έχουμε ότι

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{t_j}\Big\| < \varepsilon \tag{6}$$

Το παραπάνω συνεπάγεται την ύπαρξη του επιθυμητού $x \in X$. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έστω

$$A_k = \Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{s_i} :\ n \geq k,\ (s_i)_{i=1}^{n} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L) \text{ και } s_1(1) \geq n\Big\}$$

Είναι άμεσο ότι η ακολουθια $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $\mathrm{diam}(A_k) \to 0$. Συνεπώς υπάρχει $x \in X$ ώστε $\cap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k} = \{x\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το x ικανοποιεί το συμπέρασμα.

Περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του M αν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M. Έστω $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k < \infty$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας υπάρχει μια ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_k$ και $(s_j)_{j=1}^{n+m} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright M)$ με $s_1(1) \geq M(n+m)$

$$\Big\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{s_{n+j}} \Big\| < \delta_k$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(1) $\max F_k < \min F_{k+1}$,
(2) $|F_k| = n_k$ και
(3) $\min F_k \geq n_k + n_{k+1}$.

Θέτουμε

$$N = \{M(\max F_k) : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad L = \{N(2p+1) : p \in \mathbb{N}\}$$

Ο ισχυρισμός μας είναι ότι το L ικανοποιεί τη σχέση (6). Χωρίζουμε την απόδειξη σε δύο βήματα.

Βήμα 1. Για κάθε $n \in N$, θεωρούμε k_n τον μοναδικό φυσικό αριθμό ώστε $n = M(\max F_{k_n})$. Επίσης για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N$, θέτουμε $k_s = k_{s(1)} = k_{\min s}$. Τέλος για κάθε $1 \leq j \leq n_{k_s}$, θεωρούμε $v_j^s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{F} \upharpoonright M$ ώστε

$$v_j^s \sqsubseteq \big\{M(F_{k_{s(p)}}(n_{k_{s(p)}} - n_{k_s} + j)) : p = 1, \dots, |s|\big\}$$

(Λαμβάνοντας υπόψην ότι η $\mathcal{F}$ είναι regular thin και very large στο M μπορεί κανείς εύκολα να πιστοποιήσει την ύπαρξη των v_j^s, για κάθε $1 \leq j \leq n_{k_s}$).

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N$ έχουμε ότι $v_{n_{k_s}}^s = s$ και $v_1^s(1) = M(F_{k_s}(1))$.
(β) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $(s_j)_{j=1}^m \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright N)$ έχουμε ότι η $\sum_{j=1}^m n_{k_{s_j}}$-άδα $(v_1^{s_1}, \dots, v_{n_{k_{s_1}}}^{s_1}, v_1^{s_2}, \dots, v_{n_{k_{s_2}}}^{s_2}, \dots, v_1^{s_m}, \dots, v_{n_{k_{s_m}}}^{s_m})$ είναι πλεγματική στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$.

Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι άμεση..

Βήμα 2. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\delta_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$ και $s_0 \in \mathcal{F}$ με $s_0 \sqsubseteq \{N(2p) : p \in \mathbb{N} \text{ και } 2p \geq k_0\}$. Θέτουμε

$$n_0 = \max(n_{k_0}, k_{\max s_0} + 3)$$

Τότε για κάθε $m \geq n_0$ και $(t_j)_{j=1}^m \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ με $t_1(1) \geq L(m)$ έχουμε ότι

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}}}\sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}}} x_{v_j^{s_0}} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{t_j} \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Απόδειξη του Βήματος 2. Έστω $m \geq n_0$ και $(t_j)_{j=1}^m \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ με $t_1(1) \geq L(m)$. Έστω $\widetilde{t}_1 \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\widetilde{t}_1 \sqsubseteq \{N(d_p - 1) : p = 1, \dots, |t_1|\}$$

όπου d_p ορίζεται να είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός ώστε $t_1(p) = N(d_p)$, για κάθε $1 \leq p \leq |t_1|$. Επειδή $t_1 \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ και $L = N(2\mathbb{N}+1)$, έχουμε ότι $\widetilde{t}_1 \in \mathcal{F} \upharpoonright N(2\mathbb{N})$. Επιπλέον, από τον ορισμό του n_0, έχουμε επίσης ότι $\max s < \min \widetilde{t}_1$. Επομένως από την Πρόταση 1.25 έχουμε ότι υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_l)_{l=0}^{|s|}$ από το s_0 στο $\widetilde{t}_1$ μήκους $|s_0|$.

Έστω $1 \leq l \leq |s_0| - 1$. Τότε το (s_l, s_{l+1}) είναι ένα πλεγματικό ζεύγος στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$. Επομένως, από την ιδιότητα (β) του Βήματος 1, έχουμε ότι η $(v_1^{s_l}, \dots, v_{n_{k_{s_j}}}^{s_l}, v_1^{s_{l+1}}, \dots, v_{n_{k_{s_{l+1}}}}^{s_{l+1}})$ είναι πλεγματική. Συνεπώς, η $(v_1^{s_j}, \dots, v_{n_{k_{s_0}}+l}^{s_j}, v_1^{s_{l+1}}, \dots, v_{n_{k_{s_0}}+l+1}^{s_{l+1}})$

είναι πλεγματική στην $\mathcal{F} \restriction M$. Επιπλέον από την ιδιότητα (α) του Βήματος 1 και το γεγονός ότι $\min F_k \geq n_k + n_{k+1}$, παρατηρούμε ότι

$$v_1^{s_l}(1) = M(F_{k_{s_l}}(1)) \geq M(F_{k_{s_0}+l}(1)) \geq M(n_{k_{s_0}+l} + n_{k_{s_0}+l+1})$$

Άρα

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}+l}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}+l}} x_{v_j^{s_l}} - \frac{1}{n_{k_{s_0}+l+1}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}+l+1}} x_{v_j^{s_{l+1}}} \Big\| < \delta_{k_0+l}$$

Συνεπώς

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}}} x_{v_j^{s_0}} - \frac{1}{n_{k_{s_0}+|s_0|}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}+|s_0|}} x_{v_j^{\widetilde{t}_1}} \Big\| < \sum_{j=0}^{|s_0|-1} \delta_{k_0+j} < \sum_{k=k_0}^{\infty} \delta_k$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}+|s_0|}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}+|s_0|}} x_{v_j^{\widetilde{t}_1}} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{t_j} \Big\| < \delta_{k_0}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η $m+1$-άδα $(\widetilde{t}_1, t_1, \ldots, t_m)$ είναι πλεγματική στην $\mathcal{F} \restriction N$ το οποίο συνεπάγεται ότι η $(v_1^{\widetilde{t}_1}, \ldots, v_{n_{k_{s_0}+|s_0|}}^{\widetilde{t}_1}, t_1, \ldots, t_m)$ είναι πλεγματική στην $\mathcal{F} \restriction M$. Συνεπώς, από τις αρχικές μας υποθέσεις για το M, αρκεί να δείξουμε ότι

$$v_1^{\widetilde{t}_1}(1) \geq M(n_{k_{s_0}+|s_0|} + m)$$

Για το σκοπό αυτό ας παρατηρήσουμε ότι

$$v_1^{\widetilde{t}_1}(1) = M(F_{n_{k_{\widetilde{t}_1}}}(1)) \geq M(n_{k_{\widetilde{t}_1}} + n_{k_{\widetilde{t}_1}+1}) = M(n_{k_{\widetilde{t}_1}} + n_{k_{t_1}})$$

και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$n_{k_{\widetilde{t}_1}} + n_{k_{t_1}} > n_{k_{s_0}+|s_0|} + m$$

Πράγματι, επειδή $\widetilde{t}_1 = s_{|s_0|}$, έχουμε ότι $n_{k_{\widetilde{t}_1}} \geq n_{k_{s_0}+|s_0|}$. Επίσης, επειδή

$$M(\max F_{k_{t_1}}) = t_1(1) \geq L(m) = N(2m+1) > N(m) = M(\max F_m)$$

έχουμε ότι $k_{t_1} > m$ το οποίο συνεπάγεται ότι $n_{k_{t_1}} \geq m$. Συνεπώς $n_{k_{\widetilde{t}_1}} + n_{k_{t_1}} > n_{k_{s_0}+|s_0|} + m$ και η απόδειξη του Βήματος 2 έχει ολοκληρωθεί. □

Από το Βήμα 2 έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 στο $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ και $(s_j)_{j=1}^n, (t_j)_{j=1}^m \in \mathcal{F} \restriction L$ με $s_1(1) \geq L(n)$ και $t_1(1) \geq L(m)$ έχουμε ότι

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}}} x_{v_j^{s_0}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} x_{s_j} \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\Big\| \frac{1}{n_{k_{s_0}}} \sum_{j=1}^{n_{k_{s_0}}} x_{v_j^{s_0}} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{t_j} \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Συνεπώς

$$\Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} x_{s_j} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{t_j} \Big\| < \varepsilon$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος αυτής της υποπαραγράφου.

Αποδειξη του Θεωρηματος 5.10. Έστω regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει ένα ιδιάζον $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Λήμμα 5.11 και την Πρόταση 5.12 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ και $x \in X$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{s_j} - x \Big\| < \varepsilon \tag{7}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και $(s_j)_{j=1}^n \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ με $s_1(1) \geq L(n)$. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ θέτουμε

$$x'_s = x_s - x$$

Έστω $e_n = e'_n + e$η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι $\|e\| = \|x\|$. Πράγματι, επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν, έχουμε ότι

$$\lim_n \Big\| \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} - e \Big\| = 0$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $(s_i^n)_{i=1}^n \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)$, με $s_i^n(1) \geq L(n)$. Τότε από τη σχέση (7), έχουμε ότι

$$\lim_n \Big\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{s_i^n} - x \Big\| = 0$$

Επιπλέον, επειδή η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει επίσης την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model, έχουμε ότι

$$\lim_n \Bigg| \Big\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{s_i^n} \Big\| - \Big\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \Big\| \Bigg| = 0$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι

$$\|e\| = \lim_n \Big\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \Big\| = \lim_n \Big\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{s_i^n} \Big\| = \|x\|$$

Ισχυριζόμαστε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model της $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$. Πράγματι, έστω $L' \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L'}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρική με την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x'_{s_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{s_j}$$

Συνεπώς από τη σχέση (7) έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν. Συνεπώς από το Λήμμα 5.7 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_1 = 0$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i \Big\|$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_1 = 0$. Έστω $((s_j^k)_{j=1}^n)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $\mathrm{Plm}_n(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ ώστε $\min s_1^k \to \infty$. Τότε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{s_i^k} \Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_{s_i^k} \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i \Big\|$$

□

Κλείνουμε την υποπαράγραφο αυτή διατυπώνοντας ένα ανάλογο αποτέλεσμα για χώρους με διαχωρίσιμο δυϊκό. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα.

Λημμα 5.13. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Υπόθέτουμε ότι για κάθε $N \in [L]^\infty$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ και $(s_j)_{j=1}^k \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright N)$ ώστε

(i) $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ και

(ii) $\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x'_{s_j} \| < \varepsilon$.

Τότε για κάθε $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ και $N \in [L]^\infty$ υπάρχει $N' \in [N]^\infty$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N'$, $|x^*(x'_s)| < \varepsilon$.

Αποδειξη. Έστω $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ και $N \in [L]^\infty$. Τότε από το Θεώρημα 1.13 υπάρχει $N' \in [N]^\infty$ ώστε να ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(α) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N'$, $|x^*(x'_s)| < \varepsilon$.

(β) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N'$, $x^*(x'_s) \geq \varepsilon$.

(γ) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N'$, $x^*(x'_s) \leq -\varepsilon$.

Θα δείξουμε ότι το (β) είναι αδύνατο. Πράγματι, προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι το (β) ισχύει. Τότε από τις υποθέσεις υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ και $(s_j)_{j=1}^{k} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright N')$ ώστε

(i) $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ και

(ii) $\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x'_{s_j} \| < \varepsilon$.

Τότε

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x'_{s_j} \Big\| \geq x^* \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x'_{s_j} \Big) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^*(x'_{s_j}) \geq \varepsilon$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω του (ii). Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι και το (γ) είναι αδύνατο και συνεπώς ισχύει το (α). □

Κάνοντας χρήση ενός επιχειρήματος διαγωνοποίησης μπορεί να δειχθεί το ακόλουθο.

Λημμα 5.14. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x'_s)_{s \in \mathcal{F}}$μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X με διαχωρίσιμο δυϊκό. Υποθέτουμε ότι για κάθε $N \in [L]^\infty$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ και $(s_j)_{j=1}^{k} \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright N)$ ώστε

(i) $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ και

(ii) $\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x'_{s_j} \| < \varepsilon$.

Τότε υπάρχει $N \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright N}$ είναι ασθενώς μηδενική.

Πορισμα 5.15. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s \in \mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε έναν χώρο Banach X με διαχωρίσιμο δυϊκό τέτοιοα ώστε η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ παράγει ιδιάζον $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε υπάρχουν $x \in X$ και $N \in [M]^\infty$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright N}$ ασθενώς συγκλίνουσα στο x, $\|x\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_s = x_s - x$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright N}$ δέχεται την $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model.

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 5.10, υπάρχουν $x \in X$ και $L \in [M]^\infty$ ώστε $\|x\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_s = x_s - x$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ δέχεται την $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model. Από το Λήμμα 5.14, υπάρχει $N \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x'_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright N}$ είναι ασθενώς μηδενική ή ισοδύναμα η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright N}$ συγκλίνει ασθενώς στο x και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

4. Schauder βασικά spreading models

Στην παράγραφο αυτή δίνονται ικανές συνθήκες για μια $\mathcal{F}$-ακολουθία να παράγει ένα Schauder βασικό spreading model.

Ορισμος 5.16. Έστω A ένα αριθμήσιμο ημινορμαρισμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Θα λέμε ότι το A δέχεται μια *Skipped Schauder διάσπαση* (SSD) αν υπάρχουν $K > 0$ και μια ακολουθία $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του A ώστε

(i) $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = A$

(ii) Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ που δε περιέχει δύο διαδοχικούς φυσικούς και κάθε ακολουθία $(x_l)_{l\in L}$ με $x_l \in F_l$ για κάθε $l \in L$, η ακολυθία $(x_l)_{l\in L}$ είναι Schauder βασική με σταθερά K.

Αν και η ακόλουθη πρόταση είναι γνωστή, για λόγους πληρότητας περιγράφουμε την απόδειξη της.

Πρόταση 5.17. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται SSD με σταθερά $1+\varepsilon$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X έχει Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με σταθερά βάσης 1 (παραδείγματος χάρη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = C[0,1]$). Κάνοντας χρήση επαγωγής και του sliding hump argument, ορίζουμε μια διαμέριση $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}$ σε πεπερασμένα ξένα ανα δύο σύνολα και μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διανυσμάτων με πεπερασμένο φορέα στον X ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Αν $n \in F_k$, $\|x_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

(ii) Αν $k+1 < l$, $n \in F_k$ και $m \in F_l$ τότε $\max\mathrm{supp}(y_n) < \min\mathrm{supp}(y_m)$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι το επιθυμητό SSD. □

Λήμμα 5.18. Έστω A ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach X που δέχεται SSD σταθεράς K. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στο A. Υποθέτουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι κληρονομικά μη σταθερή και η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική με σταθερά K.

Απόδειξη. Έστω $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η διαμέριση του A που πιστοποιεί την SSD ιδιότητά του και $\varphi : \mathcal{F}\restriction M \to \mathbb{N}$, που ορίζεται ως $\varphi(s) = k$ αν $x_s \in F_k$. Ας παρατηρήσουμε ότι η φ είναι κληρονομικά μη σταθερή στο M. Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $N_1 \in [M]^\infty$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F}\restriction N_1$, $x_s \in F_{k_0}$ για κάθε $s \in \mathcal{F}\restriction N_1$. Επειδή το F_{k_0} είναι πεπερασμένο, από το Θεώρημα 1.13 παίρνουμε $N_2 \in [N_1]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction N_2}$ να είναι σταθερή. Επομένως, από το Θεώρημα 5.1, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη, το οποίο είναι άτοπο.

Επειδή η φ είναι κληρονομικά μη σταθερή στο M, από το Πόρισμα 1.30 υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε $\varphi(s_2) - \varphi(s_1) > 1$ για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στο $\mathcal{F}\restriction N$. Επομένως, από την ΣΣΔ ιδιότητα του A έχουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και για κάθε πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ στην $\mathcal{F}\restriction N$ η ακολουθία $(x_{s_j})_{j=1}^l$ είναι Schauder βασική με σταθερά K. Αυτό εύκολα συνεπάγεται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική με σταθερά K. □

Θεώρημα 5.19. Έστω A ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Αν το A δέχεται ένα SSD σταθεράς K, τότε κάθε μη τετριμμένο spreading model οποιασδήποτε τάξης του A είναι Schauder βασικό με σταθερά K.

Απόδειξη. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στο A. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ένα μη τετριμμένο $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι κληρονομικα μη σταθερή. Πράγματι, αλλιώς υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ να είναι σταθερή και συνεπώς από το Θεώρημα 5.1 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τεριμμένη. Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 5.18 και το αποτέλεσμα έπεται. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες και κανονικές δεντροειδείς διασπάσεις

Μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ σε ένα χώρο Banach X θα καλείται <u>*ασθενώς σχετικά συμπαγής*</u> αν η ασθενής κλειστότητα του συνόλου των τιμών της $\overline{\{x_s : s\in\mathcal{F}\}}^w$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X. Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη των spreading models που παράγονται από ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Έπειτα επικεντρωνόμαστε στις ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε χώρους Banach που έχουν Schauder βάση. Δείχνεται ότι προσεγγίζονται από ακολουθίες που ανήκουν στην ίδια κλάση και επιπλέον κατέχουν κανονική δομή. Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι οι ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες αποτελούν το ανώτερης τάξης ανάλογο των κλασικών ασθενώς συγκλινουσών ακολουθιών.

1. Spreading models που παράγονται από ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}-$ακολουθίες

Στην παράγραφο αυτή κατηγοριοποιούμε τα spreading models που παράγονται από ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.1. Έστω ένας χώρος Banach X, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Τότε για κάθε $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L\in[M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $M\in[\mathbb{N}]^\infty$. Επειδή η ασθενής τοπολογία πάνω σε κάθε διαχωρίσιμο ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι μετρικοποιήσιμη, έχουμε ότι το σύνολο $\overline{\{x_s : s\in\mathcal{F}\}}^w$ είναι συμπαγές και μετρικοποιήσιμο. Από την Πρόταση 4.15 το αποτέλεσμα έπεται. $\square$

Ορισμός 6.2. Έστω ένας χώρος Banach X και $\xi<\omega_1$. Ως $\mathcal{SM}^{wrc}_\xi(X)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των spreading ακολουθιών $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για τις οποίες υπάρχει ένα ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο A του X ώστε το A να δέχεται την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν ένα ξ-spreading model. Επίσης Θέτουμε

$$\mathcal{SM}^{wrc}(X)=\bigcup_{\xi<\omega_1}\mathcal{SM}^{wrc}_\xi(X)$$

Πρόταση 6.3. Έστω ένας χώρος Banach X, $\xi<\omega_1$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{SM}^{wrc}_\xi(X)$. Τότε για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$ με $o(\mathcal{G})\ge\xi$ υπάρχουν μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{G}$-ακολουθία $(w_t)_{t\in\mathcal{G}}$ στον X και $L\in[\mathbb{N}]^\infty$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα. Η υπακολουθία $(w_t)_{t\in\mathcal{G}\restriction L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία και παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model.

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{SM}^{wrc}_\xi(X)$ υπάρχει ένα ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο A του X τέτοιο ώστε το A να δέχεται την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν ένα ξ-spreading model. Συνεπώς υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ, μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στο A και $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν ένα $\mathcal{F}$-spreading model. Από την πρόταση 2.8 υπάρχουν μια

$\mathcal{G}$-ακολουθία $(w_t)_{t\in\mathcal{G}}$ και $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $(w_t)_{t\in\mathcal{G}\upharpoonright N}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model και επιπλέον $\{w_t : t \in \mathcal{G}\} \subseteq \{x_s : s \in \mathcal{F}\} \subseteq A$. Συνεπώς η $(w_t)_{t\in\mathcal{G}}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{G}$-ακολουθία. Από την Πρόταση 6.1 υπάρχει $L \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(w_t)_{t\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία. Άρα η $(w_t)_{t\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ παράγει επίσης την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Από την παραπάνω επιτυγχάνουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 6.4. Έστω ένας χώρος Banach X και $1 \leq \zeta < \xi$ ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Τότε $\mathcal{SM}_\zeta^{wrc}(X) \subseteq \mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$.

Η Πρόταση 6.3 διατυπώνει ότι κάθε ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από το $\mathcal{SM}^{wrc}(X)$ παράγεται από μια subordinated $\mathcal{F}$-υπακολουθία. Στα επόμενα δύο λήμματα παρουσιάζονται κάποιες χρήσιμες συνέπειες αυτού του γεγονότος.

Λημμα 6.5. Έστω ένας χώρος Banach X, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ένα μη τετριμμένο $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί.

Αν $\widehat{\varphi}(\emptyset) \neq 0$ τότε είτε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, ή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα.

Αποδειξη. Θέτουμε $x'_s = x_s - \widehat{\varphi}(\emptyset)$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$. Έστω $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα $\mathcal{F}$-spreading model που παράγεται από μια υπακολουθία της $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$. Ας παρατηρήσουμε ότι $\widehat{\varphi}'(\emptyset) = 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα 5.4 έχουμε ότι είτε η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη (με $\|\widetilde{e}_n\|_* = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), ή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional.

Στην πρώτη περίπτωση, από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη, το οποίο είναι άτοπο. Στην δεύτερη περίπτωση, από την Πρόταση 3.7 έχουμε ότι είτε η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Αν η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, τότε από το Πόρισμα 3.20 έχουμε ότι και η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Επίσης, επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, από το Πόρισμα 5.2 ξανά έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι αν η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Schauder βασική.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e'_j\| < \varepsilon$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_j\Big| \cdot \|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| - \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e'_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\| \leq \Big|\sum_{j=1}^n a_j\Big| \cdot \|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| + \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e'_j\Big\|$$

Συνεπώς

$$\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| - \varepsilon \leq \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_j\Big\|$$

και

$$\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_j - \frac{1}{n_0}\sum_{j=n_0+1}^{2n_0} e_j\Big\| \leq 2\varepsilon$$

Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Τότε υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_j\Big\| \leq C\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} e_j - \frac{1}{n_0}\sum_{j=n_0+1}^{2n_0} e_j\Big\|$$

και επομένως από τα παραπάνω, θα είχαμε ότι

$$\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| - \varepsilon \leq 2C\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα $\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| = 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Λημμα 6.6. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ένα ιδιάζον $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί.

Τότε $\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_s = x_s - \widehat{\varphi}(\emptyset)$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model.

Αποδειξη. Όπως είδαμε και στην απόδειξη του Λήμματος 6.5 η απεικόνιση $\widehat{\varphi}'$: $\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$, με $\widehat{\varphi}'(t) = \widehat{\varphi}(t) - \widehat{\varphi}(\emptyset)$ για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M$, πιστοποιεί ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated με $\widehat{\varphi}'(\emptyset) = 0$. Έστω $L \in [M]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη. Συνεπώς, επειδή $\widehat{\varphi}'(\emptyset) = 0$, από το Θεώρημα 5.4 έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιαζουσα, από το Πόρισμα 3.20, έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Από την Πρόταση 3.7, έχουμε ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| = \|e\|$. Έστω $((s^n_j)^n_{j=1})_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ τέτοια ώστε $\min s^n_1 \geq L(n)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν, είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x'_{s^n_j} \Big\| = 0$$

Επιπλέον, επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesáro αθροίσιμη στο μηδέν, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|e\| &= \lim_{n\to\infty} \Big\| e + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e'_j \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_j \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{s^n_j} \Big\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \widehat{\varphi}(\emptyset) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x'_{s^n_j} \Big\| = \|\widehat{\varphi}(\emptyset)\|\end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι οι ακολουθίες $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικές. Από το Λήμμα 5.7 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_1 = 0$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i \Big\|$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Έστω $((s^k_j)^n_{j=1})_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $Plm_n(\mathcal{F} \upharpoonright L)$ ώστε $\min s^k_1 \to \infty$. Τότε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{s^k_i} \Big\| = \lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_{s^k_i} \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{e}_i \Big\|$$

$\square$

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής.

Θεωρημα 6.7. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία που δέχεται μια spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Τότε ακριβώς ένα από τα επόμενα ισχύει:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.
(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε αν $e_n = e'_n + e$ είναι η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$, οριζόμενη ως $x'_s = x_s - x_0$ για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, παράγει την ακολουθία$(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model και $\|x_0\| = \|e\|$.
(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη, δηλαδή υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i). Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από την Πρόταση 6.1 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Είτε $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$, ή $\widehat{\varphi}(\emptyset) \neq 0$. Στην πρώτη περίπτωση, από το Θεώρημα 5.4, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional και στην δεύτερη περίπτωση, από το Λήμμα 6.5 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή ιδιάζουσα. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στο ότι αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική τότε είναι unconditional το οποίο συνεπάγεται το (iii). Τέλος, αν η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα, τότε το Λήμμα 6.6 συνεπάγεται ότι ισχύει το (ii) (με $x_0 = \widehat{\varphi}(\emptyset)$) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

2. Δενδροειδείς διασπάσεις ασθενώς σχετικά συμπαγών $\mathcal{F}$-ακολουθιών

Είναι γνωστό ότι ένα spreading model, που παράγεται από μια ασθενώς μηδενική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα χώρο Banach X με Schauder βάση, παράγεται επίσης από μια block ακολουθία $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία προσεγγίζει επαρκώς την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι ανάλογα φαινόμενα παρουσιάζονται στην περίπτωση των spreading models που παράγονται από ασθενώς σχετικά συμπαγείς $\mathcal{F}$-ακολουθίες στον X. Για να διατυπωθούν τα σχετικά αποτελέσματα θα χρειστούν οι έννοιες των *block δενδροειδών διασπάσεων* και *κανονικών δενδροειδών διασπάσεων* μιας $\mathcal{F}$-ακολουθίας.

2.1. Block δενδροειδείς διασπάσεις μιας $\mathcal{F}$-ακολουθίας.

Ορισμος 6.8. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ μια οικογένεια στοιχείων του X. Θα λέμε ότι η $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ είναι μια block δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ (ή ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ σαν μια block δενδροειδή διάσπαση) αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$, $\widetilde{x}_s = \sum_{k=0}^{|s|} \widetilde{y}_{s|k} = \widetilde{y}_\emptyset + \sum_{k=1}^{|s|} \widetilde{y}_{s|k}$.
(ii) Για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \setminus \{\emptyset\}$, το $\mathrm{supp}(\widetilde{y}_t)$ είναι πεπερασμένο.
(iii) Για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \setminus \mathcal{F} \upharpoonright M$ και l_1, l_2 στο M με $t < l_1 < l_2$ και $t \cup \{l_1\}, t \cup \{l_2\}$ στο $\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M$,
$$\mathrm{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{l_1\}}) < \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{l_2\}})$$

Παρατηρηση 6.9. (i) Ας παρατηρήσουμε ότι ο παραπάνω ορισμός επιτρέπει κάποια από τα στοιχεία $\widetilde{y}_{s|k}$ να είναι μηδενικά (και στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι $\mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s|k}) = \emptyset$).

(ii) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν η οικογένεια $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ είναι μια block δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ τότε για κάθε $L \in [M]^\infty$, η $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ είναι μια block δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$.

Πρόταση 6.10. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δέχεται μια block δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$. Τότε η $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$ είναι η μοναδική block δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στην τάξη της $\mathcal{F}$. Έστω $o(\mathcal{F}) = 1$. Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{F} = [\mathbb{N}]^1$. Έστω $(\widetilde{y}_t)_{t\in[M]^{\leq 1}}$ και $(\widetilde{y}'_t)_{t\in[M]^{\leq 1}}$ δύο block δενδροειδείς διασπάσεις της ακολουθίας $(x_s)_{s\in[M]^1}$. Υποθέτουμε ότι $(\widetilde{y}_t)_{t\in[M]^{\leq 1}} \neq (\widetilde{y}'_t)_{t\in[M]^{\leq 1}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\widetilde{y}_\emptyset \neq \widetilde{y}'_\emptyset$. Έστω $z = \widetilde{y}_\emptyset - \widetilde{y}'_\emptyset \neq 0$. Τότε για κάθε $n \in M$, έχουμε ότι

$$\widetilde{x}_{\{n\}} = \widetilde{y}_{\{n\}} + \widetilde{y}_\emptyset = \widetilde{y}'_{\{n\}} + \widetilde{y}'_\emptyset$$

Συνεπώς για κάθε $n \in M$, έχουμε ότι

$$\widetilde{y}'_{\{n\}} - \widetilde{y}_{\{n\}} = \widetilde{y}_\emptyset - \widetilde{y}'_\emptyset = z$$

Αλλά αυτό έρχεται σε αντίφαση με την τρίτη συνθήκη του Ορισμού 6.8.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi < \omega_1$ και για κάθε regular thin οικογένεια τάξης γνησίως μικρότερης του ξ η πρόταση ισχύει. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον X που δέχεται δύο block δενδροειδείς διασπάσεις $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$ και $(\widetilde{y}'_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $m \in M$, έχουμε $\widetilde{y}_{\{m\}\cup t} = \widetilde{y}'_{\{m\}\cup t}$, για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}_{(m)}} \restriction M$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $m \in M$ και $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{(m)}$. Τότε η $\mathcal{G}$ είναι μια regular thin με $o(\mathcal{G}) < o(\mathcal{F}) = \xi$. Έστω $z_s = x_{\{m\}\cup s}$, για κάθε $s \in \mathcal{G}$. Έστω επίσης $w_t = \widetilde{y}_{\{m\}\cup t}$ και $w'_t = \widetilde{y}'_{\{m\}\cup t}$, για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{G}}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι $(w_t)_{t\in\widehat{\mathcal{G}}\restriction M}$ και $(w'_t)_{t\in\widehat{\mathcal{G}}\restriction M}$ είναι και οι δύο block δενδροειδείς διασπάσεις της $(z_s)_{s\in\mathcal{G}\restriction M}$. Επομένως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $w_t = w'_t$, δηλαδή $\widetilde{y}_{\{m\}\cup t} = \widetilde{y}'_{\{m\}\cup t}$, για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}_{(m)}} \restriction M$. □

Από τον ισχυρισμό έχουμε ότι $\widetilde{y}_{s|k} = \widetilde{y}'_{s|k}$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$ και $1 \leq k \leq |s|$. Επειδή $\widetilde{x}_s = \widetilde{y}_\emptyset + \sum_{k=1}^{|s|} \widetilde{y}_{s|k} = \widetilde{y}'_\emptyset + \sum_{k=1}^{|s|} \widetilde{y}'_{s|k}$ καταλήγουμε στο ότι $\widetilde{y}_\emptyset = \widetilde{y}'_\emptyset$. □

Πρόταση 6.11. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δέχεται μια block δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$. Επίσης υποθέτουμε ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \restriction M \to X$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Τότε έχουμε ότι

$$\widehat{\varphi}(t) = \sum_{t'\sqsubseteq t} \widetilde{y}_{t'}$$

για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \restriction M$. Ειδικότερα $\widehat{\varphi}(\emptyset) = \widetilde{y}_\emptyset$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $o(\mathcal{F}) = 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{F} = \big\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\big\}$. Τότε

$$\widetilde{x}_{\{n\}} = \widehat{\varphi}(\{n\}) = \widetilde{y}_{\{n\}} + \widetilde{x}_\emptyset$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή η $(\widetilde{y}_{\{n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί μια block ακολουθία στον X, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $w_k^*(\widetilde{y}_{\{n\}}) \to 0$. Επομένως, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $w_k^*(\widetilde{y}_\emptyset + \widetilde{y}_{\{n\}}) \to w_k^*(\widetilde{y}_\emptyset)$. Επειδή η $\widehat{\varphi}$ είναι συνεχής ως προς την ασθενή τοπολογία, έχουμε ότι $w_k^*(\widehat{\varphi}(\{n\})) \to w_k^*(\widehat{\varphi}(\emptyset))$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $w_k^*(\widetilde{y}_\emptyset) = w_k^*(\widehat{\varphi}(\emptyset))$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\widetilde{y}_\emptyset = \widehat{\varphi}(\emptyset)$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στην τάξη της $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιεί επιχειρήματα σαν αυτά της απόδειξης του Λήμματος 6.10. □

2.2. Κανονικές δενδροειδείς διασπάσεις των $\mathcal{F}$-ακολουθιών.

Ορισμος 6.12. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Έστω $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ μια οικογένεια στοιχείων του X. Θα λέμε ότι η $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ είναι μια κανονική δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ (ή ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ σαν μια κανονική δενδροειδή διάσπαση) αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Η οικογένεια $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ είναι μια block δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$.

(ii) Για κάθε $s \in \mathcal{F}\upharpoonright L$ και $1 \le k_1 < k_2 \le |s|$,
$$\mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s|k_1}) < \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s|k_2})$$

(iii) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}\upharpoonright L$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) Για κάθε $1 \le k_1 \le |s_1|$ και $1 \le k_2 \le |s_2|$ με $k_1 \le k_2$,
$$\mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s_1|k_1}) < \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s_2|k_2})$$

(β) Για κάθε $1 \le k_1 < k_2 \le |s_1|$,
$$\mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s_2|k_1}) < \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s_1|k_2})$$

Παρατηρηση 6.13. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$. Έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $N \in [L]^\infty$ η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright N}$ σαν μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

(ii) Η κανονική δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι μοναδική. Αυτό έπεται από την Πρόταση 6.10 και και το γεγονός ότι κάθε κανονική δενδροειδής διάσπαση είναι επίσης block δενδροειδής διάσπαση. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι και subordinated με $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L \to X$ να είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε από την Πρόταση 6.11 έχουμε ότι
$$\widehat{\varphi}(t) = \sum_{t'\sqsubseteq t} \widetilde{y}_{t'}$$
για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L$.

Λημμα 6.14. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια block δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$. Τότε υπάρχει $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ σαν μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Αποδειξη. Έστω $M_1 \in [M]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο M_1. Έστω
$$\mathcal{F}_1 = \big\{ s \in \mathcal{F}\upharpoonright M_1 : \ \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s|k_1}) < \mathrm{supp}(\widetilde{y}_{s|k_2}), \text{ για κάθε } 1 \le k_1 < k_2 \le |s| \big\}$$
Χρησιμοποιώντας το (iii) του Ορισμού 6.8 είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{F}_1$ είναι large στο M_1. Επομένως από το Θεώρημα 1.13 υπάρχει $M_2 \in [M_1]^\infty$ ώστε $\mathcal{F}\upharpoonright M_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Άρα η συνθήκη (ii) του Ορισμού 6.12 ικανοποιείται για κάθε $s \in \mathcal{F}\upharpoonright M_2$.

Έστω A το σύνολο όλων των πλεγματικών ζευγών της $\mathcal{F}\upharpoonright M_2$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (iii) του ορισμού 6.12. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το A είναι large στο M_2 και συνεπώς από το Πόρισμα 1.21 υπάρχει $L \in [M_2]^\infty$ ώστε κάθε πλεγματικό ζεύγος στην $\mathcal{F}\upharpoonright L$ να ανήκει στο A. Τέλος, από το (ii) της Παρατήρησης 6.9, έχουμε ότι η $(\widetilde{y}_t)_{t\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι επίσης μια δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$. Συνεπώς η οικογένεια $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ είναι μια κανονική δενδροειδής διάσπαση της $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

2.3. Subordinated $\mathcal{F}$-ακολουθίες και κανονικές δενδροειδείς διασπάσεις.

Θεωρημα 6.15. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Τότε για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, $\|x_s - \widetilde{x}_s\| < \varepsilon_n$, όπου $\min s = L(n)$.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X. Επιπλέον, αν $\widetilde{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, w)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widetilde{\varphi}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset)$.

(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Αποδειξη. Περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του M, αν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M. Έστω μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ και $1 \le k \le |s|$, έστω

$$y_{s|k} = \widehat{\varphi}(s|k) - \widehat{\varphi}(s|k-1)$$

Προφανώς, για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \setminus \mathcal{F} \upharpoonright M$, η ακολουθία $(y_{t\cup\{m\}})_{m\in M}$ είναι ασθενώς μηδενική.

Ισχυρισμός 1. Υπάρχουν $M_1 \in [M]^\infty$ και μια οικογένεια $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M_1}$ ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $\widetilde{y}_\emptyset = y_\emptyset$ και για κάθε $t \in (\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M_1) \setminus \{\emptyset\}$, $\|y_t - \widetilde{y}_t\| < \frac{1}{2^{|t|}}\varepsilon_{n_t}$, όπου $\max t = M_1(n_t)$.

(ii) Για κάθε $t \in (\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M_1) \setminus \{\emptyset\}$, ο φορέας του $\widetilde{y}_t$ είναι πεπερασμένος.

(iii) Για κάθε $t \in (\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M_1) \setminus \widehat{\mathcal{F}}$ και m_1, m_2 στο M_1 με $\max t < m_1 < m_2$, έχουμε ότι $\operatorname{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{m_1\}}) < \operatorname{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{m_2\}})$.

Αποδειξη του Ισχυρισμου 1. Έστω $L_0 = M$ και $\widetilde{y}_\emptyset = y_\emptyset$. Κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[M]^\infty$, μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο M και $(\widetilde{y}_{t\cup\{l\}})_{l\in L_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \subseteq \{l_i : 1 \le i < n\}$ με $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \setminus \mathcal{F} \upharpoonright L$ και $\max t = l_{n-1}$, αν $n > 1$, τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) $l_n = \min L_n$ και $l_n < \min L_{n+1}$.

(β) Για κάθε $t \subseteq \{l_i : 1 \le i < n\}$ με $t \in \widehat{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F}$ και $\max t = l_{n-1}$, αν $n > 1$, έχουμε ότι

  (i) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το στοιχείο $\widetilde{y}_{t\cup\{L_n(k)\}}$ έχει πεπερασμένο φορέα.

  (ii) Για κάθε $k_1 < k_2$ στο $\mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\operatorname{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{L_n(k_2)\}}) < \operatorname{supp}(\widetilde{y}_{t\cup\{L_n(k_2)\}})$$

  (iii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\|y_{t\cup\{L_n(k)\}} - \widetilde{y}_{t\cup\{L_n(k)\}}\| < \frac{1}{2^{|t|+1}}\varepsilon_{n+k-1}$$

Θέτουμε $M_1 = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$. Επειδή η $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι τα M_1 και $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M_1}$ είναι τα επιθυμητά. □

Για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M_1$, θέτουμε $\widetilde{x}_t = \sum_{t'\sqsubseteq t} \widetilde{y}_{t'}$.

Ισχυρισμός 2. Τα επόμενα ικανοποιούνται:

(i) Η οικογένεια $(\widetilde{x}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M_1}$ είναι ένα ασθενώς-συγκλίνον $\widehat{\mathcal{F}}$-δέντρο, δηλαδή η ακολουθία $(\widetilde{x}_{t\cup\{m\}})_{m\in M_1}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο $\widetilde{x}_t$, για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M_1\setminus\mathcal{F}\restriction M_1$.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M_1}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M_1}$ σαν μια block δενδροειδή διάσπαση.

(iii) Για κάθε $s\in\mathcal{F}\restriction M_1\setminus\{\emptyset\}$, $\|x_s-\widetilde{x}_s\|<\varepsilon_{k_s}$, όπου $\min(s)=M_1(k_s)$ και $\widetilde{x}_\emptyset=x_\emptyset$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. (i) Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M\setminus\mathcal{F}\restriction M_1$, η ακολουθία $(y_{t\cup\{m\}})_{m\in M_1}$ είναι ασθενώς μηδενική και από το (i) του Ισχυρισμού 1 έχουμε ότι

$$\lim_m\|y_{t\cup\{m\}}-\widetilde{y}_{t\cup\{m\}}\|=0$$

Άρα και η ακολουθία $(\widehat{y}_{t\cup\{m\}})_{m\in M_1}$ είναι ασθενώς μηδενική και επειδή $\widetilde{x}_{t\cup\{m\}}=\widetilde{x}_t+\widetilde{y}_{t\cup\{m\}}$ το συμπέρασμα έπεται.

(ii) Είναι άμεσο από τα (i) και (ii) του Ισχυρισμού 1.

(iii) Είναι άμεσο ότι $\widetilde{x}_\emptyset=x_\emptyset$. Επίσης, από το (i) του Ισχυρισμού 1, έχουμε ότι

$$\left\|x_s-\widetilde{x}_s\right\|\leq\sum_{\emptyset\neq t\sqsubseteq s}\left\|y_t-\widetilde{y}_t\right\|\leq\varepsilon_{k_s}$$

για κάθε $s\in\mathcal{F}\restriction M_1\setminus\{\emptyset\}$. □

Από το (ii) του Ισχυρισμού 2 και το Λήμμα 6.14 υπάρχει $M_2\in[M_1]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M_2}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M_2}$ σαν μια κανονική δενδροειδή διάσπαση. Επιπλέον, από την Πρόταση 4.13 υπάρχει $M_3\in[M_2]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M_3}$ να είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία.

Θέτουμε $L=M_3$. Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι η επιθυμητή. □

Πορισμα 6.16. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi}:\widehat{\mathcal{F}}\restriction M\to(X,w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Υποθέτουμε επίσης ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχουν $L\in[M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ στον X που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν ένα $\mathcal{F}$-spreading model.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X. Επιπλέον, αν η $\widetilde{\varphi}:\widehat{\mathcal{F}}\restriction L\to(X,w)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widetilde{\varphi}(\emptyset)=\widehat{\varphi}(\emptyset)$.

(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Πορισμα 6.17. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω $\xi<\omega_1$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Τότε υπάρχουν $L\in[\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ στον X που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.

(ii) Είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία.

(iii) Δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.3 υπάρχει μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ και $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model και επιπλέον η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία. Το Πόρισμα 6.16 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή διατυπώνοντας κάποια αποτελέσματα αντίστοιχα με τα παραπάνω, που αφορούν τα στοιχεία του $\mathcal{SM}(X^*)$, όπου X^* είναι ο δυϊκός ενός χώρου Banach X με συρρίκνουσα Schauder βάση. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο ανάλογο του Θεωρήματος 6.15.

Θεωρημα 6.18. Έστω ένας χώρος Banach X, με συρρίκνουσα Schauder βάση $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X^* τέτοια ώστε η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή* τοπολογία του X και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w^*)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Τότε για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X^* που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, $\|x_s^* - \widetilde{x}_s^*\| < \varepsilon_n$, όπου $\min s = L(n)$.
(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή* τοπολογία του X. Επιπλέον, αν η $\widetilde{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, w^*)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widetilde{\varphi}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset)$.
(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση ως προς την $(w_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

Θα παραλείψουμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, καθώς είναι σχεδόν ταυτόσημη με αυτήν του Θεωρήματος 6.15. Τέλος, επειδή κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach εφοδιασμένο με την ασθενή* τοπολογία είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, από την Πρόταση 4.15 και το παραπάνω θεώρημα έχουμε το ακόλουθο ανάλογο του Πορίσματος 6.17.

Πορισμα 6.19. Έστω ένας χώρος Banach X με συρρίκνουσα Schauder βάση $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $\xi < \omega_1$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_\xi(X^*)$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Τότε υπάρχουν $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X^* που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.
(ii) Είναι subordinated ως προς την ασθενή* τοπολογία του X^*.
(iii) Δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση ως προς την $(w_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4. Ξένα κανονικές δενδροειδείς διασπάσεις $\mathcal{F}$-ακολουθιών. Ο επόμενος ορισμός επεκτείνει την κλασική έννοια των ξένα φερόμενων ακολουθιών για $\mathcal{F}$-ακολουθίες σε χώρους Banach με Schauder βάση.

Ορισμος 6.20. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X από πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη αν για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ έχουμε ότι $\mathrm{supp}(x_{s_1}) \cap \mathrm{supp}(x_{s_2}) = \emptyset$.

Σε συνδυασμό με τις κανονικές δενδροειδείς διασπάσεις ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο. Έστω $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία σε έναν χώρο Banach με μια Schauder βάση, η οποία δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη αν και μόνο αν $\widetilde{y}_\emptyset = 0$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ σαν *ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση*.

Παρατηρηση 6.21. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$. Έστω $x'_s = \widetilde{x}_s - \widetilde{y}_\emptyset$ για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$. Τότε ας παρατηρήσουμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(y'_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$σαν μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση, όπου $y'_t = \widetilde{y}_t$, για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \setminus \{\emptyset\}$. Συνεπώς η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι μια πλεγματικά ξένα φερόμενη $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Στη συνέχεια ένα $\mathcal{F}$-spreading model θα καλείται *πλεγματικά ξένα παραγόμενο* αν παράγεται από μια πλεγματικά ξένα φερόμενη $\mathcal{F}$-ακολουθία.

Στο Πόρισμα 6.17 έχουμε δείξει ότι κάθε $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}^{wrc}(X)$, όπου X είναι ένας χώρος Banach με Schauder βάση, παράγεται από μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία που είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία και δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση. Το επόμενο πόρισμα λέει ότι αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επιπλέον Schauder βασική ακολουθία μη ισοδύναμη στη συνήθη βάση του ℓ^1, τότε είναι πλεγματικά ξένα παραγόμενη. Στην περίπτωση που η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, αυτό δε μπορεί εν γένει να επιτευχθεί λόγω του Πορίσματος 3.20. Παρόλα αυτά, το Πόρισμα 3.20 συνεπάγεται μια ισομορφική εκδοχή του προαναφερθένος φαινομένου.

Πορισμα 6.22. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω $\xi < \omega_1$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Schauder βασική ακολουθία στο $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Τότε υπάρχουν $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i) Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, τότε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.

(ii) Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, τότε η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model το οποίο είναι και αυτό ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία.

(iv) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Αποδειξη. Από το Πόρισμα 6.17, έχουμε ότι υπάρχουν $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια subordinated $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ η οποία δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright L}$ και παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Από την Παρατήρηση 6.13 έχουμε ότι $\widehat{\varphi}(\emptyset) = y_\emptyset$.

Αν $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$, τότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Υποθέτουμε ότι $\widehat{\varphi}(\emptyset) \neq 0$. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική, από το Λήμμα 6.5 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ θέτουμε $x'_s = x_s - \widehat{\varphi}(\emptyset)$. Από την παρατήρηση 6.21, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated και δέχεται μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση. Περνάμε σε ένα $L' \in [L]^\infty$ ώστε η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model, το οποίο, από το Πόρισμα 3.20, θα είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τα spreading models των ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, και c_0

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούνται τα spreading models κάποιων κλασικών χώρων. Ειδικότερα, δείχνεται ότι κάθε μη τετριμμένο spreading model του ℓ^p με $1 < p < \infty$ παράγει ένα ισομετρικό αντίγραφο του ℓ^p και κάθε μη τετριμμένο spreading model του ℓ^1 είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Επιπλέον η κλάση των spreading models τάξης δύο του c_0 περιέχει ισομορφικά όλες τις Schauder βασικές spreading ακολουθίες.

1. Τα spreading models του ℓ^p, $1 \leq p < \infty$

Λημμα 7.1. Έστω $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ μια ημινορμαρισμένη πλεγματικά ξένα φερόμενη $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον ℓ^p. Τότε κάθε $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Ειδικότερα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Big\| = \|e_1\| \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος παραλείπεται καθώς είναι παρόμοια με την απόδειξη του ότι κάθε νορμαρισμένη ξένα φερόμενη ακολουθία στον ℓ^p είναι ισομετρική με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

1.1. Τα spreading models των ℓ^p, $1 < p < \infty$.

Λημμα 7.2. Έστω $1 < p < \infty$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s \in \mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθίες στον ℓ^p που παράγει ένα μη τετριμμένο $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Επίσης υποθέτουμε ότι η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (\ell^p, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί.

(i) Αν $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$ τότε η $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Ειδικότερα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Big\| = \|e_1\| \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

(ii) Αν $\widehat{\varphi}(\emptyset) \neq 0$ τότε η $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Ειδικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Big\| = \left(\|e\|^p \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j \Big|^p + \|e_1'\|^p \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

όπου $e_n = e_n' + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Αποδειξη. Από το Πόρισμα 6.16 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

(i) Επειδή $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$ έχουμε ότι η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη. Το Λήμμα 7.1 ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Θέτουμε $x_s' = x_s - \widehat{\varphi}(\emptyset)$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$. Έστω $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s')_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(\widetilde{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Από το Λήμμα 7.2 έχουμε ότι η

$(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Το Πόρισμα 3.20 συνεπάγεται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Από το Λήμμα 6.5 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Από το Λήμμα 6.6 έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model και $\|\widehat{\varphi}(\emptyset)\| = \|e\|$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{F}\restriction L$ με $\min s_n \to \infty$, έχουμε ότι $\|x'_{s_n}\| \to \|e'_1\|$ και $\min\operatorname{supp}(x'_{s_n}) \to \infty$. Από τις παρατηρήσεις αυτές έχουμε ότι η σχέση (8) ισχύει για κάθε επιλογή $k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$. □

Θεωρημα 7.3. Έστω $1<p<\infty$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα spreading model του ℓ^p τάξης ξ, για κάποιο $\xi<\omega_1$. Τότε ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.

(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Στην περίπτωση αυτή αν $e_n = e'_n + e$ είναι η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| = \left(\|e\|^p\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big|\Big)^p + \sum_{j=1}^{n}\|e'_1\||a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Στην περίπτωση αυτή είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Ειδικότερα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| = \|e_1\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Επειδή ο ℓ^p είναι αυτοπαθής, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγεται από μια ασθενώς σχετικά συμπαγή $\mathcal{F}$-ακολουθία. Από την Πρόταση 6.3 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγεται από μια subordinated $\mathcal{F}$-ακολουθία. Το Λήμμα 7.2 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πορισμα 7.4. Έστω $1<p<\infty$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα μη τετριμμένο spreading model του ℓ^p τάξης ξ, για κάποιο $\xi<\omega_1$. Τότε ο χώρος E που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικός με τον ℓ^p.

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 7.3 αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση του ℓ^p. Έστω $T: E\to\ell^p$ ο γραμμικός τελεστής ώστε $T(e_n) = \|e\|u_1 + \|e'_1\|u_{n+1}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο T είναι ισομετρία. Επειδή $T(e_n)\xrightarrow{w}\|e\|u_1$, έχουμε ότι $u_1\in T[E]$ και συνεπώς ο T είναι επί. □

Παρατηρηση 7.5. Από το Θεώρημα 7.3 είναι άμεσο ότι κάθε spreading model του ℓ^p με $1<p<\infty$ οποιασδήποτε τάξης είναι ισομετρικό με μια ακολουθία στον ℓ^p. Επομένως, $\mathcal{SM}_1(\ell^p) = \mathcal{SM}(\ell^p)$, για κάθε $1<p<\infty$.

1.2. Τα spreading models του ℓ^1. Σχετικά με τον ℓ^1 έχουμε τα ακόλουθα.

Θεωρημα 7.6. Κάθε μη τετριμμένο spreading model κάθε τάξης του ℓ^1 είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Αποδειξη. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα μη τετριμμένο spreading model τάξης ξ του ℓ^1, για κάποιο $\xi<\omega_1$. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον ℓ^1 και $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Λόγω του Πορίσματος 6.19 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\restriction M}$. Θέτουμε $x'_s = x_s - y_\emptyset$, για κάθε $s\in\mathcal{F}\restriction M$, και περνάμε σε ένα άπειρο $L\in[M]^\infty$ ώστε η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ να παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη και συνεπώς, περνώντας σε ένα περαιτέρω άπειρο υποσύνολο του L αν αυτό είναι απαραίτητο, η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι ημινορμαρισμένη. Επειδή η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη (βλ. Παρατήρηση 6.21), από το Λήμμα 7.1 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Από το Πόρισμα 3.20 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. □

Παρατηρηση 7.7. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα παρόμοια με αυτά της περίπτωσης των ℓ^p, για $1 < p < \infty$, μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(\ell^1)$ υπάρχουν $c_1, c_2 \geq 0$ ώστε

$$\Big\|\sum_{j=1}^{l} a_j e_j\Big\| = c_1\Big|\sum_{j=1}^{l} a_j\Big| + c_2\sum_{j=1}^{l}|a_j|$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Επομένως, κάθε spreading model κάθε τάξης του ℓ^1 είναι ισομετρικό με μια ακολουθία του ℓ^1. Άρα $\mathcal{SM}_1(\ell^1) = \mathcal{SM}(\ell^1)$.

2. Τα spreading models του c_0

2.1. Τα ασθενώς σχετικά συμπαγώς παραγόμενα spreading models του c_0. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση των ℓ^p, με $1 < p < \infty$, μπορεί να επιτύχει κανείς το ακόλουθο ανάλογο του Θεωρήματος 7.3.

Θεωρημα 7.8. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}^{wrc}(c_0)$. Τότε ένα από τα επόμενα ισχύει:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τετριμμένη.

(ii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα. Στην περίπτωση αυτή, αν $e_n = e'_n + e$ είναι η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| = \max\Big\{\|e\|\cdot\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big|, \|e'_1\|\cdot\max_{1\leq j\leq n}|a_j|\Big\}$$

(iii) Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Στην περίπτωση αυτή είναι ισοδύναμη στη συνήθη βάση του c_0. Ειδικότερα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| = \|e_1\|\cdot\max_{1\leq j\leq n}|a_j|$$

Πορισμα 7.9. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα μη τετριμμένο spreading model στο $\mathcal{SM}^{wrc}(c_0)$. Τότε ο χώρος E που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικός με τον c_0.

2.2. Τα κλασικά spreading models του c_0. Στην υποπαράγραφο αυτή παραθέτουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα που αφορούν τα κλασικά spreading models του c_0. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια αποτελέσματα που σχετίζονται με μη τετριμμένες ασθενώς-Cauchy ακολουθίες στον c_0. Ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 7.10. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σε ένα χώρο Banach. Έστω $v_1 = x_1$ και $v_n = x_n - x_{n-1}$, για κάθε $n > 1$. Υποθέτουμε ότι η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται μια πάνω c_0 εκτίμηση, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} b_j v_j\Big\| \leq c\cdot\max_{1\leq j\leq k}|b_j|$$

Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από την αθροίσιμη βάση του c_0, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\Big\| \leq c\cdot\max_{l\leq k}\Big|\sum_{j=1}^{l} a_j\Big|$$

Αποδειξη. Καταρχήν, ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $x_j = \sum_{i=1}^{j} v_i$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$b_j = \sum_{i=j}^{k} a_i$$

για κάθε $1 \leq j \leq k$. Τότε έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{j} v_i = \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=j}^{k} a_i \Big) v_j = \sum_{j=1}^{k} b_j v_j$$

Συνεπώς

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^{k} b_j v_j \Big\| \leq c \cdot \max_{1 \leq j \leq k} |b_j| = c \cdot \max_{1 \leq j \leq k} \Big| \sum_{i=j}^{k} a_i \Big| \leq 2c \cdot \max_{1 \leq j \leq k} \Big| \sum_{i=1}^{j} a_i \Big|$$

□

Λημμα 7.11. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy ακολουθία στον c_0. Τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που κυριαρχεί την αθροίσιμη βάση του c_0.

Αποδειξη. Για κάθε $x \in \ell^\infty$ και $F \subseteq \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε ως $x|_F$ την ακολουθία του ℓ^∞ για την οποία ισχύει ότι $x|_F(n) = x(n)$, για κάθε $n \in F$, και $x|_F(n) = 0$, για κάθε $n \notin F$.

Επειδή η $y \in \ell^\infty \setminus c_0$, υπάρχουν $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\theta > 0$ ώστε $|y(l)| > \theta$, για κάθε $l \in L$. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} 4\varepsilon_n < \frac{\theta}{2}$. Επαγωγικά επιλέγουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο L και μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $\big\| x_{k_n}|_{\{1,\ldots,l_n\}} - y|_{\{1,\ldots,l_n\}} \big\| < \varepsilon_{n+1}$ και

(ii) $\big\| x_{k_n}|_{\{l_{n+1}, l_{n+1}+1,\ldots\}} \big\| < \varepsilon_{n+1}$.

Έστω $l_1 \in L$. Επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\big\| x_{k_1}|_{\{1,\ldots,l_1\}} - y|_{\{1,\ldots,l_1\}} \big\| < \varepsilon_2$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έχουν επιλεγεί$l_1 < \ldots < l_n$ και $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ ώστε να ικανοποιούν τα (i) και (ii). Έστω $l_{n+1} \in L$ ώστε $l_{n+1} > l_n$ και

$$\big\| x_{k_n}|_{\{l_{n+1},\ldots\}} \big\| < \varepsilon_{n+1}$$

Τέλος, επιλέγουμε $k_{n+1} > k_n$ ώστε

$$\big\| x_{k_n+1}|_{\{1,\ldots,l_{n+1}\}} - y|_{\{1,\ldots,l_{n+1}\}} \big\| < \varepsilon_{n+2}$$

Έστω $F_1 = \{1, \ldots, l_2 - 1\}$ και $F_n = \{l_{n-1} + 1, \ldots, l_{n+1} - 1\}$, για κάθε $n > 1$. Έστω επίσης $u_1 = x_{k_1}|_{F_1}$ και $u_n = (x_{k_n} - x_{k_{n-1}})|_{F_n}$. Τότε έχουμε ότι

$$\|u_1 - x_{k_1}\| = \big\| x_{k_1}|_{\{l_2, l_2+1,\ldots\}} \big\| < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 < 4\varepsilon_1$$

και για κάθε $n > 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|u_n - (x_{k_n} - x_{k_{n-1}})\| &= \big\| (x_{k_n} - x_{k_{n-1}})_{F_n^c} \big\| \\
&\leq \big\| (x_{k_n} - x_{k_{n-1}})|_{\{1,\ldots,l_{n-1}\}} \big\| + \big\| x_{k_n}|_{\{l_{n+1},\ldots\}} \big\| + \big\| x_{k_{n-1}}|_{\{l_{n+1},\ldots\}} \big\| \\
&\leq \big\| (x_{k_n} - y)|_{\{1,\ldots,l_{n-1}\}} \big\| + \big\| (x_{k_{n-1}} - y)|_{\{1,\ldots,l_{n-1}\}} \big\| + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \\
&\leq \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \leq 4\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\|u_1\| \geq |u_1(l_1)| = |x_{k_1}(l_1)| > |y(l_1)| - \varepsilon_2 > \frac{\theta}{2}$$

και για κάθε $n > 1$

$$\|u_n\| \geq |u_n(l_n)| \geq \|x_{k_n}(l_n)| - |x_{k_{n-1}}(l_n)| \geq |y(l_n)| - \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n > \frac{\theta}{2}$$

Επομένως η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ημινορμαρισμένη. Η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι συνέπεια του ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι w^* συγκλίνουσα στο y. Από τον ορισμό της ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι άμεσο ότι οι ακολουθίες $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι block ακολουθίες στον c_0. Συνεπώς, οι ακολουθίες $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες με τη συνήθη βάση του c_0 και έχουν σταθερά βάσης 1. Επειδή $\|u_n\| \geq \frac{\theta}{2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} 4\varepsilon_n < \frac{\theta}{2}$, έχουμε ότι οι $(x_{k_{2n-1}} - x_{k_{2n-2}})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_{k_{2n}} - x_{k_{2n-1}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες με τη συνήθη βάση του c_0, όπου έχουμε θέσει $x_{k_0} = 0$. Αυτό εύκολα συνεπάγεται, κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας της νόρμας, ότι η $(x_n - x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται πάνω c_0 εκτίμηση. Το Λήμμα 7.10 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τέλος διατυπώνουμε το ακόλουθο γνωστό αποτέλεσμα (βλ. Πρόταση 2.2 στο [**46**]).

Πρόταση 7.12. Κάθε μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy ακολουθία σε ένα χώρο Banach περιέχει μια υπακολουθία που κυριαρχεί την αθροίσιμη βάση του c_0.

Από το παραπάνω έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 7.13. Κάθε μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy ακολουθία στον c_0 περιέχει μια υπακολουθία ισοδύναμη με την αθροίσιμη βάση του c_0.

Πρόταση 7.14. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα spreading model τάξης 1 του c_0 που παράγεται από μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε ένα από τα επόμενα ισχύει:

(α) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια ασθενώς συκλίνουσα υπακολουθία. Στην περίπτωση αυτή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί ακριβώς μία από της εναλλακτικές του Θεωρήματος 7.8.

(β) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy υπακολουθία. Στην περίπτωση αυτή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την αθροίσιμη βάση του c_0.

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι ασθενως-Cauchy. Τότε η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι είτε ασθενώς συγκλίνουσα ή μη τετριμμένη ασθενώς-Cauchy. Αν η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα, τότε από το Θεώρημα 7.8 θα προκύψει μια από τις εναλλακτικές (i)-(iii). Στην δεύτερη περίπτωση, από την Πρόταση 7.13, έχουμε ότι η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία ισοδύναμη με την αθροίσιμη βάση του c_0. Επειδή και αυτή η υπακολουθία παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την αθροίσιμη βάση του c_0. □

Παρατηρηση 7.15. Από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στην περίπτωση (α) της παραπάνω πρότασης ολόκληρη η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα.

2.3. Τα spreading models ανώτερης τάξης του c_0. Στην υποπαράγραφο αυτή μελετούνται τα spreading models ανώτερης τάξης του c_0. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η κλάση των spreading models τάξης 2 του c_0 ουσιαστικά περιέχει όλες τις Schauder βασικές spreading ακολουθίες. Επιπλέον δείχνεται ότι ένα ιδιάζον spreading model (οποιασδήποτε τάξης) του c_0 είναι και τάξης δύο.

Λημμα 7.16. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον ℓ^∞. Για κάθε $n < k$ στο $\mathbb{N}$ θέτουμε

$$x_{\{n,k\}} = (x_n(1), \ldots x_n(k), 0, \ldots)$$

Τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$, $k_1 < \ldots < k_l$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{\{n_i,k_i\}} \Big\|_\infty \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i x_{n_i} \Big\|_\infty$$

Απόδειξη. Έστω $l \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$, $k_1 < \ldots < k_l$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $x = \sum_{i=1}^{l} a_i x_{\{n_i,k_i\}}$. Τότε υπάρχει $m_0 \leq k_l$ ώστε $|x(m_0)| = \|x\|_\infty$. Θέτουμε $k_0 = 0$ και έστω $1 \leq j_0 \leq l$ ώστε $k_{j_0-1} < m_0 \leq k_{j_0}$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = |x(m_0)| &= \Big| \sum_{i=j_0}^{l} a_i x_{n_i,k_i}(m_0) \Big| = \Big| \sum_{i=j_0}^{l} a_i x_{n_i}(m_0) \Big| \\ &\leq \Big\| \sum_{i=j_0}^{l} a_i x_{n_i} \Big\|_\infty \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i x_{n_i} \Big\|_\infty \end{aligned}$$

□

Λημμα 7.17. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια spreading ακολουθία στον ℓ^∞. Για κάθε $n < k$ στο $\mathbb{N}$ θέτουμε

$$x_{\{n,k\}} = (e_n(1), \ldots e_n(k), 0, \ldots)$$

Τότε για κάθε spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in[M]^2}$ παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

Έστω $((s_j^n)_{j=1}^l)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $Plm_l([M]^2)$ ώστε $\min s_1^n \to \infty$. Τότε

$$\Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j x_{s_j^n} \Big\| \to \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j e'_j \Big\|$$

Από το Λήμμα 7.16 και επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{s_j^n} \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_{s_j^n(1)} \Big\|_\infty = \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

Επομένως

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\|$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty - \varepsilon \leq \Big| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i(m_0) \Big|$$

Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $(s_j)_{j=1}^l \in Plm([M]^2)$ με $s_1(1) \geq M(k_0)$

$$\Big|\Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j e'_j \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j x_{s_j} \Big\|_\infty \Big| < \varepsilon$$

Έστω $(s_j)_{j=1}^l \in Plm([M]^2)$ με $s_1(1) \geq M(k_0)$ και $s_1(2) \geq m_0$. Τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty &\leq \Big| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i(m_0) \Big| + \varepsilon = \Big| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{s_i}(m_0) \Big| + \varepsilon \\ &\leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{s_i} \Big\| + \varepsilon \leq \Big\| \sum_{j=1}^{l} a_j e'_j \Big\| + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\|$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Πρόταση 7.18. Για κάθε Schauder βασική και spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$ ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ειδικότερα, αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διμονότονη, τότε $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον ℓ^∞. Έστω C η σταθερά βάσης της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Λήμμα 7.17 υπάρχει $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$ ώστε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e'_i \Big\| \leq \max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq (1+C) \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Επομένως οι $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες. Επιπλέον, αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διμονότονη, τότε

$$\max_{1\leq j\leq l} \Big\| \sum_{i=j}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i e_i \Big\|_\infty$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρική με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Πόρισμα 7.19. Έστω $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διμονότονη Schauder βασική spreading ακολουθία και $c > 0$. Ορίζουμε την ακόλουθη νόρμα $|||\cdot|||$ στον $c_{00}(\mathbb{N})$ ως εξής. Θέτουμε

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Big|\Big|\Big| = \max\Big(c \cdot \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j \Big|, \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j e'_j \Big\| \Big)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η συνήθης Hamel βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$. Τότε η νόρμα $|||\cdot|||$ είναι καλά ορισμένη, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μη τετριμμένη spreading ακολουθία και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$.

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι η $|||\cdot|||$ είναι καλά ορισμένη και ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μη τετριμμένη spreading ακολουθία. Επειδή η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια διμονότονη Schauder βασική ακολουθία, από την Πρόταση 7.18, υπάρχει μια $[\mathbb{N}]^2$-ακολουθία $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ στον c_0 που παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν 2-spreading model. Είναι άμεσο ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^2$, $x_s(1) = 0$. Έστω, για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^2$, y_s το στοιχείο του c_0 για το οποίο ισχύει ότι $y_s(1) = c$ και $y_s(n) = x_s(n)$, για κάθε $n > 1$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(y_s)_{s\in[\mathbb{N}]^2}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν 2-spreading model. Επομένως $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$. $\square$

Από την Πρόταση 3.13 και το παραπάνω πόρισμα έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 7.20. Για κάθε ιδιάζουσα spreading ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι υπάρχει $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$ ώστε οι ακολουθίες $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι ισοδύναμες.

Προταση 7.21. Για κάθε ιδιάζουσα ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(c_0)$, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στο $\mathcal{SM}_2(c_0)$. Επιπλέον, αν $e_n = e'_n + e$ είναι η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^k a_j e_j\Big\| = \max\Big\{\|e_1\|\cdot\Big|\sum_{j=1}^k a_j\Big|, \Big\|\sum_{j=1}^k a_j e'_j\Big\|\Big\}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k$.

Αποδειξη. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(c_0)$ μια ιδιάζουσα ακολουθία και $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον c_0 ώστε $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Από το Πόρισμα 5.15, έχουμε ότι υπάρχουν $x\in c_0$ και $N\in[M]^\infty$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ συγκλίνει ασθενώς στο x, $\|x\| = \|e\|$ και θέτοντας $x'_s = x_s - x$, για κάθε $s\in\mathcal{F}\upharpoonright N$, έχουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ δέχεται την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν μοναδικό $\mathcal{F}$-spreading model. Περνάμε σε ένα $L\in[N]^\infty$ ώστε η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Έστω $k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k$. Έστω $((s_j^n)_{j=1}^k)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $Plm(\mathcal{F}\upharpoonright L)$, ώστε $\min s_1^n\to\infty$. Ας παρατηρήσουμε ότι η $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι ασθενώς μηδενική. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^k a_j e_j\Big\| &= \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^k a_j x_{s_j}\Big\| = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^k a_j x + \sum_{j=1}^k a_j x'_{s_j}\Big\| \\ &= \max\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^k a_j x\Big\|, \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^k a_j x'_{s_j}\Big\|\Big\} \\ &= \max\Big\{\|e_1\|\cdot\Big|\sum_{j=1}^k a_j\Big|, \Big\|\sum_{j=1}^k a_j e'_j\Big\|\Big\}\end{aligned}$$

Επειδή η ακολουθία $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional, έχουμε ότι είναι και διμονότονη Schauder βασική. Η παραπάνω σχέση και το Πόρισμα 7.19 συνεπάγονται ότι $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_2(c_0)$. □

Από την Πρόταση 7.18 και το Πόρισμα 7.20 έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 7.22. Το σύνολο $\mathcal{SM}_2(c_0)$ είναι ισομορφικά καθολικό για όλες τις spreading ακολουθίες.

Παρατηρηση 7.23. Στην υποπαράγραφο 2.5 του Κεφαλαίου 9 περιγράφονται τα spreading models των γενικευμένων χώρων Tsirelson T_α, $\alpha<\omega_1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ιδιότητες σύνθεσης των spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες σύνθεσης των spreading models. Μεταξύ άλλων δείχνουμε ότι η κλάση των spreading models, τα οποία καλούμε block ισχυρά k-spreading models και έχουν εισαχθεί στο [**39**] είναι επίσης spreading models της ίδιας τάξης μέσα στο δικό μας πλαίσιο. Επιπλέον, παρουσιάζονται διάφορα σχετικά αποτελέσματα με τα ℓ^p και c_0 spreading models.

1. Η ιδιότητα σύνθεσης

Θα χρειαστούμε την έννοια των πλεγματικά block $\mathcal{F}$-ακολουθιών.

Ορισμος 8.1. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία από πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία του X. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι πλεγματικά block αν για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ έχουμε ότι $\mathrm{supp}(x_{s_1}) < \mathrm{supp}(x_{s_2})$.

Στη συνέχεια ένα $\mathcal{F}$-spreading model θα καλείται *πλεγματικά block παραγόμενο* αν αυτό παράγεται από μια πλεγματικά block $\mathcal{F}$-υπακολουθία.

Θεωρημα 8.2. Έστω ένας χώρος Banach X και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Schauder βασική ακολουθία στο $\mathcal{SM}_\xi(X)$, για κάποιο $\xi < \omega_1$. Έστω E ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα πλεγματικά block παραγόμενο k-spreading model του E, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_{\xi+k}(X)$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 8.3. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\mathcal{G} \oplus \mathcal{F} = \Big\{ s \cup t : s \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{F} \ \text{ και } \ s < t \Big\}$$

Παρατηρηση 8.4. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν οι οικογένειες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι regular thin, τότε και η οικογένεια $\mathcal{G}\oplus\mathcal{F}$ είναι regular thin και $o(\mathcal{G}\oplus\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}) + o(\mathcal{G})$. Ειδικότερα $o([\mathbb{N}]^k \oplus \mathcal{F}) = o(\mathcal{F}) + k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Αποδειξη του Θεωρηματος 8.2. Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{F}) = \xi$, $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.5 μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια πλεγματικά block $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^k}$ η οποία παράγει την $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $[\mathbb{N}]^k$-spreading model.

Για κάθε $t \in [\mathbb{N}]^k$ θέτουμε $F_t = \mathrm{supp}(y_t)$ ως προς την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $l_t = |F_t|$. Τότε για κάθε $t \in [\mathbb{N}]^k$ το διάνυσμα y_t είναι της μορφής

$$y_t = \sum_{j=1}^{l_t} a^t_{F_t(j)} e_{F_t(j)}$$

Θέτουμε $\mathcal{G}=[\mathbb{N}]^k\oplus\mathcal{F}$ και για κάθε $v\in\mathcal{G}$ θέτουμε t_v και s_v τα μοναδικά στοιχεία των οικογενειών $[\mathbb{N}]^k$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα ώστε $v=t_v\cup s_v$ και $t_v<s_v$. Χωρίζουμε την απόδειξη σε τρία βήματα.

Βήμα 1: Θέτουμε

$$\mathcal{G}^*=\Big\{v\in\mathcal{G}:\min s_v\geq M(l_{t_v})\Big\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{G}^*$ είναι large στο M. Επομένως από το Θεώρημα 1.13 υπάρχει $L_0\in[M]^\infty$ ώστε $\mathcal{G}\upharpoonright L_0\subseteq\mathcal{G}^*$. Για κάθε $v\in\mathcal{G}\upharpoonright L_0$ ορίζουμε μια πεπερασμένη ακολουθία $(s_1^v,\dots,s_{l_{t_v}}^v)$ ως εξής. Έστω $s_v=\{M(q_1^v),\dots,M(q_{|s_v|}^v)\}$. Τότε για κάθε $j=1,\dots,l_{t_v}$ θέτουμε s_j^v να είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{F}\upharpoonright M$ ώστε

$$s_j^v\sqsubseteq\Big\{M(q_i^v-l_{t_v}+j):i=1,\dots,|s_v|\Big\}$$

Ορίζουμε την οικογένεια $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright L_0}$ θέτοντας

$$z_v=\sum_{j=1}^{l_{t_v}}a_{F_{t_v}(j)}^{t_v}x_{s_j^v}$$

για κάθε $v\in\mathcal{G}\upharpoonright L_0$.

Βήμα 2: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{A}_n=\Big\{(v_p)_{p=1}^n\in Plm_n(\mathcal{G}\upharpoonright L_0):\ s_1^{v_1}(1)\geq M\Big(\sum_{p=1}^n l_{t_{v_p}}\Big)$$
$$\text{και η }\ (s_j^{v_1})_{j=1}^{l_{t_{v_1}}}{}^\frown\dots{}^\frown(s_j^{v_n})_{j=1}^{l_{t_{v_n}}}\text{ είναι πλεγματική}\Big\}$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι large στο L_0. Επαγωγικά κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.20 κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[L_0]^\infty$ ώστε $Plm_n(\mathcal{G}\upharpoonright L_n)\subseteq\mathcal{A}_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω L ένα διαγώνιο σύνολο των $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $L(n)\in L_n$ για κάθε n.

Βήμα 3: Στο Βήμα αυτό θα δείξουμε ότι η $(z_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ δέχεται την $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $(\xi+k)$-spreading model. Πράγματι, ας παρατηρήσουμε καταρχήν ότι η οικογένεια $\mathcal{G}$ είναι τάξης $\xi+k$. Έστω $(\delta_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ μια μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς $(\delta_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω επίσης $(\delta_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ μια μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η $(y_t)_{t\in[L]^k}$ παράγει την $(\overline{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς $(\delta_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω C η σταθερά βάσης της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K=\sup\{\|y_t\|:t\in[L]^k\}$ και θέτουμε $\delta_n=2CK\delta_n^1+\delta_n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ ικανοποιεί τις συνθήκες της Παρατήρησης 2.6 αναφορικά με την ακολουθία $(\overline{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς τη $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $l\in\mathbb{N}$, $(v_i)_{i=1}^l$ μια πλεγματική l-άδα στη $\mathcal{G}\upharpoonright L$ με $v_1(1)\geq L(l)$ και $b_1,\dots,b_l\in[-1,1]$. Από το Βήμα 2, η $(v_i)_{i=1}^l$ ανήκει στην $\mathcal{A}_l$. Ας παρατηρήσουμε ότι

$$\Big|\Big\|\sum_{i=1}^l b_iz_{v_i}\Big\|-\Big\|\sum_{i=1}^l b_i\overline{e}_i\Big\|\Big|\leq\Big|\Big\|\sum_{i=1}^l b_iz_{v_i}\Big\|-\Big\|\sum_{i=1}^l b_iy_{t_{v_i}}\Big\|\Big|+\Big|\Big\|\sum_{i=1}^l b_iy_{t_{v_i}}\Big\|-\Big\|\sum_{i=1}^l b_i\overline{e}_i\Big\|\Big|\tag{9}$$

Είναι άμεσο ότι

$$\Big|\Big\|\sum_{i=1}^l b_iy_{t_{v_i}}\Big\|-\Big\|\sum_{i=1}^l b_i\overline{e}_i\Big\|\Big|<\delta_l^2\tag{10}$$

Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική με σταθερά βάσης C και για κάθε $t\in[L]^k$, $\|y_t\|\leq K$, έχουμε ότι για κάθε $t\in[L]^k$ και $1\leq j\leq l_t$, $|a_{F_t(j)}^t|\leq 2CK$. Συνεπώς, για κάθε $1\leq i\leq l$, $t\in[L]^k$ και $1\leq j\leq l_t$, έχουμε ότι $b_ia_{F_t(j)}^t\in[-2CK,2CK]$.

Επειδή η $(v_i)_{i=1}^l$ ανήκει στην $\mathcal{A}_l$ έχουμε ότι $v_1(1) \geq M(\sum_{i=1}^l l_{t_{v_i}}) \geq L(\sum_{i=1}^l l_{t_{v_i}})$. Επομένως

$$\begin{aligned}(11)\qquad \Bigg|\Big\|\sum_{i=1}^{l} b_i z_{v_i}\Big\| - \Big\|\sum_{i=1}^{l} b_i y_{t_{v_i}}\Big\|\Bigg| = \Bigg|&\Big\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l_{t_{v_i}}} b_i a^{t_{v_i}}_{F_{t_{v_i}}(j)} x_j^{s_{v_i}}\Big\| \\ &- \Big\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l_{t_{v_i}}} b_i a^{t_{v_i}}_{F_{t_{v_i}}(j)} e_{F_{t_{v_i}}(j)}\Big\|\Bigg| < 2CK\delta_l^1\end{aligned}$$

Οι ανισότητες (9), (10) και (11) συνεπάγονται ότι

$$\Bigg|\Big\|\sum_{i=1}^{l} b_i z_{v_i}\Big\| - \Big\|\sum_{i=1}^{l} b_i \overline{e}_i\Big\|\Bigg| < \delta_l^2 + 2CK\delta_l^1 = \delta_l$$

Επομένως από την Παρατήρηση 2.6, έχουμε ότι για κάποιο $L' \in [L]^\infty$, η $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\restriction L'}$ παράγει την $(\overline{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{G}$-spreading model. □

Παρατηρηση 8.5. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ο X έχει Schauder Βάση, τότε η παραπάνω απόδειξη μας παρέχει περισσότερη πληροφορία για την δομή της ακολουθίας $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\restriction L}$. Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι από το Βήμα 2, έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πλεγματικά ξένα (αντ. block) παραγόμενη από την $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ τότε η $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πλεγματικά ξένα (αντ. block) παραγόμενη από την $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\restriction L'}$.

(ii) Αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δέχεται μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση, τότε και η $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\restriction L}$ δέχεται.

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι για κάθε $v \in \mathcal{G} \restriction L$ έχουμε ότι $|s_j^v| < |v|$, για κάθε $1 \leq j \leq l_{t_v}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι το Θαώρημα 8.2 δε φαίνεται να είναι επεκτάσιμο για αυθαίρετη regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$ αντί της $[\mathbb{N}]^k$. Η κύρια δυσκολία αυτού είναι ότι τα στοιχεία της $\mathcal{G}$ όταν $o(\mathcal{G}) \geq \omega$ δεν είναι ισομήκη. Επομένως στη καινούρια regular thin οικογένεια $\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}$ τα πλεγματικά ζεύγη δεν διασπώνται σε δύο πλεγματικά ζεύγη των οικογενειών $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$. Παρόλα αυτά ένα γενικό αποτέλεσμα σύνθεσης (δηλαδή για αυθαίρετη regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$) μοιάζει να μπορεί να επιτευχθεί με διαφοροποίηση της έννοιας της πλεγματικότητας στην $\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}$, αλλά αυτό ξεφεύγει των σκοπών μας.

2. Ισχυρά k-spreading models

Μια διαφορετική έννοια k-spreading model δίνεται στο [**39**]. Στην παράγραφο αυτή θα συζητηθεί η σχέση της με το παρόν πλαίσιο. Σύμφωνα με το [**39**] έχουμε την ακόλουθη ορολογία

1) Έστω E_0, E χώροι Banach. Θα γράφουμε $E_0 \to E$ αν ο E έχει Schauder βάση η οποία είναι spreading model κάποιας ημινορμαρισμένης βασικής ακολουθίας του E_0 και $E_0 \xrightarrow{k} E$ αν $E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_{k-1} \to E$ για κάποια ακολουθία χώρων Banach $E_1, \ldots, E_{k-1}$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αν $E_0 \xrightarrow{k} E$ τότε ο E έχει μια spreading Schauder βάση.

2) Έστω E_1, E_2 χώροι Banach με Schauder βάσεις $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα. Θα γράφουμε $E_1 \underset{\text{bl}}{\to} E_2$ αν η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι spreading model κάποιας ημινορμαρισμένης block υπακολουθίας της $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω E_0 χώρος Banach και E χώρος Banach με Schauder βάση. Ομοίως για κάποιο $k > 1$, θα λέμε ότι $E_0 \underset{\text{bl}}{\overset{k}{\to}} E$, αν υπάρχει μια ακολουθία $E_1, \ldots, E_{k-1}$ χώρων Banach με Schauder βάσεις $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (e_n^{k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα ώστε $E_0 \to E_1 \underset{\text{bl}}{\to} E_2 \underset{\text{bl}}{\to} \ldots \underset{\text{bl}}{\to} E_{k-1} \underset{\text{bl}}{\to} E$.

Ορισμος 8.6. Έστω E_0, E χώροι Banach και $k \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι ο E είναι ένα *ισχυρό* k-spreading model το E_0 αν $E_0 \xrightarrow{k} E$. Επιπλέον, ο E είναι ένα *block ισχυρό* k-spreading model του E_0 αν $E_0 \underset{\mathrm{bl}}{\xrightarrow{k}} E$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε το ακόλουθο που είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.2.

Πορισμα 8.7. Έστω ένας χώρος Banach X και E ένας χώρος Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $X \underset{\mathrm{bl}}{\xrightarrow{k}} E$, για κάποιο $k > 1$. Τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα k-spreading model του X.

Παρατηρηση 8.8. Στο [**39**] έχει κατασκευαστεί ένας χώρος ο οποίος δεν έχει κανένα ℓ^p, για $1 \leq p \leq \infty$, ή c_0 spreading model. Στο ίδιο άρθρο είχε ερωτηθεί αν υπάρχει χώρος ο οποίος δεν έχει κανένα ℓ^p, για $1 \leq p \leq \infty$, ή c_0 ισχυρό k-spreading model για κανένα $k \in \mathbb{N}$. Στο Κεφάλαιο 14 απαντάται το πρόβλημα αυτό καταφατικά.

Παρατηρηση 8.9. Αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι η κλάση των block ισχυρών k-spreading models είναι γνησίως μικρότερη από αυτήν των πλεγματικά block παραγόμενων k-spreading models. Στο Κεφάλαιο 12 γίνεται η κατασκευή ενός χώρου με την ιδιότητα αυτή.

3. Εφαρμογές στα ℓ^p και c_0 spreading models

3.1. ℓ^p spreading models.

Ορισμος 8.10. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $p \in [1, \infty)$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ℓ^p (αντ. c_0) σαν $\mathcal{F}$-spreading model αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει σαν $\mathcal{F}$-spreading model μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0).

Παρατηρηση 8.11. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ℓ^p σαν $\mathcal{F}$-spreading model αν και μόνο αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model και υπάρχουν $C, c > 0$ ώστε

$$c\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{s_j}\Big\| \leq C\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^n$ πλεγματική n-άδα στην $\mathcal{F} \restriction M$ με $s_1(1) \geq M(n)$. Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για $\mathcal{F}$-υπακολουθίες που παράγουν c_0 σαν spreading model.

Προταση 8.12. Έστω ένας χώρος Banach X, $\xi < \omega_1$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια μη τετριμμένη ακολουθία στο $\mathcal{SM}_\xi(X)$. Υποθέτουμε ότι ο χώρος E που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p (αντ. c_0), για κάποιο $p \in [1, \infty)$. Τότε ο X δέχεται ένα ℓ^p (αντ. c_0) spreading model τάξης $\xi + 1$.

Αποδειξη. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι είτε Schauder βασική ή ιδιάζουσα spreading ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Επειδή ο E περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p για κάποιο $p \in [1, \infty)$ (αντ. c_0), κάνοντας χρήση κλασικών επιχειρημάτων, υπάρχει μια block υπακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0). Ας παρατηρήσουμε ότι κάθε spreading model του $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0) και συνεπώς το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 8.2 για $k = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα spreading ακολουθία. Έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική διάσπαση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και E' ο χώρος Banach που παράγεται από την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0). Από το Πόρισμα 3.15 υπάρχουν μια υπακολουθία $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια block υπακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι ισοδύναμη με τη $(z_{k_{2n}} - z_{k_{2n-1}})_{n\in\mathbb{N}}$. Συνεπώς η $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0). Έστω $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα spreading model (τάξης ένα) που παράγεται από μια υπακολουθία της $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε $(\overline{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_1(E')$, παράγειται από μια block υπακολουθία της $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p (αντ. c_0). Από το Θεώρημα 5.10, η ακολουθία $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{SM}_\xi(X)$. Από το Θεώρημα 8.2 το αποτέλεσμα έπεται. □

3.2. Ισομετρικά ℓ^1 και c_0 spreading models. Το ακόλουθο είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα του R. James (βλ. [**27**]).

Πρόταση 8.13. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια νορμαρισμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach X ισοδύναμη στη συνήθη βάση του ℓ^1 (αντ. c_0). Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια block νορμαρισμένη υπακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία δέχεται κάτω ℓ^1 σταθερά $1-\varepsilon$ (αντ. κάτω c_0 σταθερά $1-\varepsilon$ και πάνω c_0 σταθερά $1+\varepsilon$).

Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα διαγωνοποίησης η παραπάνω πρόταση συνεπάγεται το ακόλουθο.

Πρόταση 8.14. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Αν ο X περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1 (αντ. c_0) τότε ο X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 (αντ. c_0) σαν ένα block παραγόμενο spreading model τάξης ένα.

Η παραπάνω πρόταση, το Θεώρημα 8.2 και η Παρατήρηση 8.5 συνεπάγονται το ακόλουθο.

Πόρισμα 8.15. Έστω ένας χώρος Banach X και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Schauder βασική ακολουθία από το $\mathcal{SM}_\xi(X)$, για κάποιο $\xi < \omega_1$. Υποθέτουμε ότι ο χώρος που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1 (αντ. c_0). Τότε ο X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 (αντ. c_0) σαν $(\xi+1)$-spreading model.

Αν επιπλέον ο X έχει Schauder βάση τότε για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ στον X τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model, υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{G}$-ακολουθία $(z_v)_{v\in\mathcal{G}}$, όπου $\mathcal{G} = [\mathbb{N}]^1 \oplus \mathcal{F}$, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 (αντ. c_0) σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Επιπλέον, αν η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι πλεγματικά block, τότε και η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ είναι πλεγματικά block.

(ii) Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{F}$ ώστε $z_v \in < x_{s_1}, \ldots, x_{s_m} >$ και $|s_j| < |v|$, για κάθε $1 \le j \le m$.

Πόρισμα 8.16. Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(i) Ο χώρος X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν ξ-spreading model, για κάποιο $\xi < \omega_1$.

(ii) Ο χώρος X δέχεται τη συνήθη βάση του c_0 σαν ξ-spreading model, για κάποιο $\xi < \omega_1$.

(iii) Κάθε μη τετριμμένο spreading model κάθε τάξης του X, παράγει έναν αυτοπαθή χώρο.

Επιπλέον κάθε Schauder βασική $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X)$ unconditional.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ούτε το (i) ούτε το (ii) ισχύει. Έστω $1 \le \xi < \omega_1$ και μια μη τετριμμένη $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_\xi(X)$. Θα δείξουμε ότι ο χώρος E που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αυτοπαθής και συνεπώς το (iii) είναι αληθές. Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι ο χώρος E δε μπορεί να περιέχει κάποιο ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή του ℓ^1. Πράγματι, αλλιώς από το Πόρισμα 8.15, ο χώρος X θα δεχόταν τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή του c_0 σαν $(\xi+1)$-spreading model. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Είτε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική ή είναι ιδιάζουσα.

Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική τότε από το Θεώρημα 6.7 έχουμε ότι είναι unconditional. Συνεπώς από το Θεώρημα του James έχουμε ότι ο E είναι αυτοπαθής.

Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ιδιάζουσα και έστω $e_n = e'_n + e$ η κανονική της διάσπαση. Έστω E' ο χώρος που παράγεται από την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional και $E = E' \oplus < e >$. Επειδή ο E δεν περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή του ℓ^1, ούτε και ο E' περιέχει. Επομένως από το θεώρημα του James έχουμε ότι ο E' είναι αυτοπαθής. Επειδή $E = E' \oplus < e >$, έχουμε ότι και ο E είναι αυτοπαθής. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ℓ^1 spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τα ℓ^1 spreading models που παράγονται από $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Στην πρώτη παράγραφο δείχνεται η non distortion ιδιότητα των ℓ^1 spreading models και συνεπώς επεκτείνεται το αντίστοιχο γνωστό αποτέλεσμα για τα κλασικά spreading models. Στην δεύτερη παράγραφο παρουσιάζεται μια τεχνική διαχωρισμού μιας κανονικής δενδροειδούς διάσπασης μιας $\mathcal{F}$-ακολουθίας. Η τεχνική αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή πλεγματικά block παραγόμενων ℓ^1 spreading models. Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου αυτού επεκτείνεται το γνωστό θεώρημα του H.P. Rosenthal που αφορά την Cesàro αθροισιμότητα και τα ℓ^1 spreading models (βλ. [**6**], [**35**]).

1. Σχεδόν ισομετρικά ℓ^1 spreading models

Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $C \geq c > 0$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ *παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερές c, C* αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_n$ το οποίο είναι c, C ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1, δηλαδή

$$c\sum_{j=1}^n |a_j| \leq \Big\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \Big\| \leq C \sum_{j=1}^n |a_j|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα, αν $\|x_s\| \leq 1$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $C = 1$ και στη περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ *παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά c.*

Πρόταση 9.1. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $1 > c > 0$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στη μοναδιαία μπάλα B_X ενός χώρου Banach X. Υποθέτουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά c. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(y_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στην B_X τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(y_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά $1-\varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το $\mathcal{F}$-spreading model που παράγεται από την $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$c\sum_{j=1}^n |a_j| \leq \Big\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \Big\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j|$$

Είναι άμεσο ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$c = \inf\left\{ \Big\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \Big\| : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ και } \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \ \text{ ώστε } \ \sum_{j=1}^n |a_j| = 1 \right\} \tag{12}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $0 < \varepsilon' < c$ ώστε

$$\frac{c-\varepsilon'}{c+2\varepsilon'} > 1-\varepsilon$$

Περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του M, αν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε τα ακόλουθα:

(α) Η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι very large στο M.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in [-1,1]$ και κάθε πλεγματική n-άδα $(s_j)_{j=1}^n$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ με $\min s_1 \geq M(n)$,

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{s_j} \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\| \right| < \varepsilon'$$

Από την (12), υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $b_1, \ldots, b_k \in [-1,1]$ με $\sum_{i=1}^k |b_i| = 1$ ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i e_i \right\| < c + \varepsilon'$$

Συνεπώς από το (β), έχουμε ότι για κάθε πλεγματική k-άδα $(s_i)_{i=1}^k$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ με $\min s_1 \geq M(k)$ έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i x_{s_i} \right\| < c + 2\varepsilon'$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $I_n = \{M(n \cdot k + 1), ..., M((n+1) \cdot k)\}$. Τότε προφανώς ισχύει ότι $\max(I_n) < \min(I_{n+1})$, $|I_n| = k$ και $\min(I_n) > M(n \cdot k)$. Θέτουμε

$$L = \{\max I_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{M((n+1) \cdot k) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Επειδή η $\widehat{\mathcal{F}}$ είναι regular και η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M, είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $1 \leq i \leq k$ υπάρχει μια μοναδική $t_i^s \sqsubseteq \{I_{n_j}(i) : 1 \leq j \leq |s|\}$ με $t_i^s \in \mathcal{F}$. Θέτουμε

$$y_s = \frac{\sum_{j=1}^k b_j x_{t_j^s}}{c + 2\varepsilon'},$$

για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(y_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά $1 - \varepsilon$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in [-1,1]$ και $(s_j)_{j=1}^n$ μια πλεγματική n-άδα στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$ με $s_1(1) \geq L(n)$. Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι η $n \cdot k$-άδα $(t_1^{s_1}, \ldots, t_k^{s_1}, \ldots, t_1^{s_n}, \ldots, t_k^{s_n})$ είναι πλεγματική και $t_1^{s_1}(1) \geq \min I_n > M(n \cdot k)$. Άρα

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j y_{s_j} \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i x_{t_i^{s_j}}}{c + 2\varepsilon'} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_j}{c + 2\varepsilon'} b_i x_{t_i^{s_j}} \right\| \\
&\geq (c - \varepsilon') \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{|a_j| \cdot |b_i|}{c + 2\varepsilon'} = \frac{c - \varepsilon'}{c + 2\varepsilon'} \sum_{j=1}^{n} |a_j| \sum_{i=1}^{k} |b_i| = \frac{c - \varepsilon'}{c + 2\varepsilon'} \sum_{j=1}^{n} |a_j|
\end{aligned}$$

□

Παρατηρηση 9.2. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο χώρος X έχει και Schauder βάση, τότε ακολουθώντας την παραπάνω απόδειξη έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Αν η $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ είναι πλεγματικά block (αντ. πλεγματικά ξένα φερόμενη), τότε και η $(y_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ είναι πλεγματικά block (αντ. πλεγματικά ξένα φερόμενη).

(ii) Αν $(x_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική (αντ. ξένα κανονική) δενδροειδή διάσπαση τότε και η $(y_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright L}$ δέχεται.

2. Πλεγματικά block παραγόμενα ℓ^1 spreading models

2.1. Διαχωρισμοί των κανονικών δενδροειδών διασπάσεων.

Ορισμος 9.3. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέταια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$. Έστω $\mathcal{G}$ μια thin οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright M$. Ορίζουμε $\mathcal{G}$-διαχωρισμό της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ να είναι οι $\mathcal{F}$-υπακολουθίες $\big(x_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ και $(x_s^{(2,\mathcal{G})})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$, οι οποίες ορίζονται ως εξής. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ θέτουμε

$$x_s^{(1,\mathcal{G})} = \sum_{t\sqsubseteq s_{\mathcal{G}}} y_t \ \text{ και } \ x_s^{(2,\mathcal{G})} = \sum_{s_{\mathcal{G}}\sqsubset t\sqsubseteq s} y_t$$

όπου $s_{\mathcal{G}}$ είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ για το οποίο ισχύει $s_{\mathcal{G}} \sqsubset s$.

Παρατηρηση 9.4. Κάτω από τις υποθέσεις του Ορισμού 9.3, εύκολα παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$, $x_s = x_s^{(1,\mathcal{G})} + x_s^{(2,\mathcal{G})}$.

(ii) Οι $\mathcal{F}$-υπακολουθίες $\big(x_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ και $\big(x_s^{(2,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχονται κανονικές δενδροειδείς διασπάσεις $\big(y_t^{(1,\mathcal{G})}\big)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ και $\big(y_t^{(2,\mathcal{G})}\big)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ αντίστοιχα, οι οποίες είναι της ακόλουθης μορφής. Για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{G}}$,

$$y_t^{(1,\mathcal{G})} = y_t \ \text{ και } \ y_t^{(2,\mathcal{G})} = 0$$

ενώ για κάθε $t \in (\widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M) \setminus \widehat{\mathcal{G}}$,

$$y_t^{(1,\mathcal{G})} = 0 \ \text{ και } \ y_t^{(2,\mathcal{G})} = y_t$$

Είναι προφανές ότι $\widetilde{y}_t = \widetilde{y}_t^{(1,\mathcal{G})} + \widetilde{y}_t^{(2,\mathcal{G})}$. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στα $\big(y_t^{(1,\mathcal{G})}\big)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ και $\big(y_t^{(2,\mathcal{G})}\big)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ σαν τον *$\mathcal{G}$-διαχωρισμό της* $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$.

(iii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Τότε οι $\mathcal{F}$-υπακολουθίες $\big(x_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ και $\big(x_s^{(2,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι επίσης subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία. Ακριβέστερα, οι συνεχείς απεικονίσεις $\widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}, \widehat{\varphi}^{(2,\mathcal{G})} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to (X, w)$ που το πιστοποιούν είναι οι ακόλουθες. Για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M$,

$$\widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}(t) = \sum_{t'\sqsubseteq t} y_{t'}^{(1,\mathcal{G})} \ \text{ και } \ \widehat{\varphi}^{(2,\mathcal{G})}(t) = \sum_{t'\sqsubseteq t} y_{t'}^{(2,\mathcal{G})}$$

Είναι άμεσο ότι $\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}(t) + \widehat{\varphi}^{(2,\mathcal{G})}(t)$. Επιπλέον ας παρατηρήσουμε ότι

$$\widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset) \ \text{ και } \ \widehat{\varphi}^{(2,\mathcal{G})}(\emptyset) = 0$$

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στις απεικονίσεις $\widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}$ και $\widehat{\varphi}^{(2,\mathcal{G})}$ ως τον *$\mathcal{G}$-διαχωρισμό της $\widehat{\varphi}$*.

Λημμα 9.5. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{G} \subseteq [M]^{<\infty}$ ώστε $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright M$. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{G}(M^{-1}) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \ M(s) \in \mathcal{G}\}$ είναι regular thin. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση. Τότε κάθε spreading model της $(x_s^{(1,\mathcal{G})})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ ανήκει στο $\mathcal{SM}_{o(\mathcal{G})}(X)$.

Αποδειξη. Έστω $L \in [M]^\infty$ ώστε η $(x_s^{(1,\mathcal{G})})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ να παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θέτουμε $\mathcal{H} = \mathcal{G}(L^{-1}) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \ L(s) \in \mathcal{G}\}$. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που ακολουθούν τον Ορισμό 1.36 έχουμε ότι η $\mathcal{H}$ είναι μια regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{H}) = o(\mathcal{G} \upharpoonright L) = o(\mathcal{G})$. Για κάθε $t \in \mathcal{H}$ θέτουμε $w_t = x_s^{(1,\mathcal{G})}$, όπου $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ και $L(t) \sqsubset s$. Από τον Ορισμό $(x_s^{(1,\mathcal{G})})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ έχουμε ότι το w_t είναι καλά ορισμένο. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(w_t)_{t\in\mathcal{H}}$ παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{H}$-spreading model. $\square$

Από το παραπάνω και το Πόρισμα 3.19 έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 9.6. Έστω ένας χώρος Banach X Schauder βάση. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{SM}^{wrc}(X)$ περιέχει μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 και έστω ξ_0 ο ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ξ ώστε το $\mathcal{SM}^{wrc}_{\xi}(X)$ να περιέχει μια τέτοια ακολουθία.

Έστω $\mathcal{F}$ μια regular thin τάξης ξ_0, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ℓ^1 σαν ένα $\mathcal{F}$-spreading model με κάτω σταθερά c και δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Έστω οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq [M]^{<\infty}$ τέτοια ώστε $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright M$ και $\mathcal{G}(M^{-1}) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : M(s) \in \mathcal{G}\}$ είναι regular thin με $o(\mathcal{G}) < \xi_0$.

Τότε για κάθε $L \in [M]^\infty$ υπάρχει $N \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s^{(2,\mathcal{G})})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ παράγει ℓ^1 σαν ένα $\mathcal{F}$-spreading model με την ίδια κάτω σταθερά c.

2.2. Πλεγματικά κοψίματα regular thin οικογενειών. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$. Για κάθε ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F}$ το *πλεγματικό κόψιμο του s_2 ως προς το s_1* συμβολίζεται ως $s_2/_{s_1}$ και ορίζεται να είναι το σύνολο

$$s_2/_{s_1} = s_2 \cap \{1, \ldots, \max s_1\} = \{s_2(1), \ldots, s_2(|s_1| - 1)\}$$

Είναι άμεσο ότι το $s_2/_{s_1}$ είναι ένα αρχικό τμήμα του s_2 με το μήκος του να εξαρτάται από την επιλογή του s_1. Επιπλέον, τα πλεγματικά κοψίματα ορίζονται και κάθε $s \in \mathcal{F}$ που έχει κενά μεταξύ των στοιχείων του και γενικά δεν είναι μοναδικά καθοριζόμενα. Στη συνέχεια, θα γίνει χρήση κυρίως των πλεγματικών κοψιμάτων με το ελάχιστο ή το μέγιστο μήκος.

Ορισμος 9.7. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $L = \{l_n : n \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$ είναι very large στο L. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}/_L = \Big\{ s/_{s'} : & s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N}) \text{ και αν } s = \{L(2k_1), \ldots, L(2k_m)\} \text{ τότε } s' \in \mathcal{F} \\ & \text{και } s' \sqsubset \{L(1), L(2k_1 + 1), \ldots, L(2k_m + 1)\} \Big\}\end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η $\mathcal{F}/_L$ είναι καλά ορισμένη και αποτελείται από όλα τα πλεγματικά κοψίματα ελάχιστου μήκους που είναι της μορφής $s/_{s'}$, με $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$ και $s' \in \mathcal{F} \upharpoonright L$. Επιπλέον, είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{F}/_L = \Big\{ & \{L(k_1), \ldots, L(k_m)\} : m \in \mathbb{N} \text{ και } \\ & \{L(k_1 + 1), \ldots, L(k_m + 1)\} \in \mathcal{F}_{(L(1))} \upharpoonright L(2\mathbb{N} - 1) \Big\}\end{aligned}$$

Αυτή η αναπαράσταση της $\mathcal{F}/_L$ συνεπάγεται το ακόλουθο.

Προταση 9.8. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο L. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η οικογένεια $\mathcal{F}/_L$ είναι thin και $\mathcal{F}/_L \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$.
(ii) Η οικογένεια $\mathcal{F}/_L(L(2\mathbb{N})^{-1}) = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : L(2s) \in \mathcal{F}/_L\}$ είναι regular thin.
(iii) $o(\mathcal{F}/_L) = o(\mathcal{F}_{(l_1)}) < o(\mathcal{F})$, όπου $l_1 = \min L$.

Το επόμενο λήμμα χρησιμοποιεί πλεγματικά κοψίματα μέγιστου μήκους για να παράξει πλεγματικά block $\mathcal{F}$-υπακολουθίες από $\mathcal{F}$-υπακολουθίες που δέχονται κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Λημμα 9.9. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο M. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X,τέτοια ώστε η $(x_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$. Για κάθε $L \in [M]^\infty$ ορίζουμε μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(z^L_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ ως εξής. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, με $s = \{L(2\rho_1) < \ldots < L(2\rho_k)\}$, θέτουμε s' να είναι το μοναδικό αρχικό τμήμα του $\{L(2\rho_1 - 1) < \ldots < L(2\rho_k - 1)\}$ στην $\mathcal{F}$. Έστω $s^* = s/_{s'}$ και για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, θέτουμε

$$z^L_s = x_s - \sum_{t\sqsubseteq s^*} y_t = \sum_{s^*\sqsubset t\sqsubseteq s} y_t$$

Τότε ικανοποιούνται τα επόμενα:

(α) Για κάθε $L \in [M]^\infty$ η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(z^L_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι πλεγματικά block.

(β) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε είτε

 (i) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x^{(1,\mathcal{F}/L)}_s\| \geq \delta$, ή

 (ii) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x_s - z^L_s\| < \delta$.

Αποδειξη. (α) Έστω $L \in [M]^\infty$ και (s_1, s_2) ένα πλεγματικό ζεύγος στην $\mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$. Τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι η 4-άδα (s'_1, s_1, s'_2, s_2) είναι πλεγματική και συνεπώς $|s_1| \leq |s'_2|$. Επιπλέον ας παρατηρήσουμε ότι

$$\max(s_1 \setminus s_1/_{s'_1}) = \max(s_1) = s_1(|s_1|) \text{ και } \min(s_2 \setminus s_2/_{s'_2}) = s_2(|s'_2|)$$

Από τον ορισμό της κανονικής δενδροειδούς διάσπασης έχουμε ότι $z_{s_1} < z_{s_2}$.

(β) Έστω $\delta > 0$. Από το Θεώρημα 1.20 έχουμε ότι υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε είτε

(1) για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$,

$$\Big\| \sum_{t\sqsubseteq s_2/_{s_1}} y_t \Big\| \geq \delta$$

ή

(2) για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$,

$$\Big\| \sum_{t\sqsubseteq s_2/_{s_1}} y_t \Big\| < \delta$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (1). Επειδή $\mathcal{F}/_L \subseteq \{s/_{s'} : (s', s) \in Plm(\mathcal{F} \upharpoonright L)\}$, από τον ορισμό της $\big(x^{(1,\mathcal{F}/L)}_s\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$, έχουμε ότι το (i) του λήμματος ισχύει. Ομοίως δείχνεται ότι το (2) συνεπάγεται το (ii) του λήμματος. □

2.3. Χώροι Banach που δέχονται τον ℓ^1 σαν μοναδικό spreading model.

Θεωρημα 9.10. Έστω ένας χώρος Banach X με unconditional βάση. Υποθέτουμε ότι κάθε πλεγματικά block παραγόμενο spreading model οποιασδήποτε τάξης του X είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Τότε κάθε , μη τετριμμένο spreading model στο $\mathcal{SM}^{wrc}(X)$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο $1 \leq \xi < \omega_1$. Για $\xi = 1$ έχουμε τα ακόλουθα. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}^{wrc}_1(X)$ μη τετριμμένη. Χρησιμοποιώτας συνήθη επιχειρήματα ή το Πόρισμα 6.17 έχουμε ότι υπάρχουν μια block ακολουθία $(y_n)_{\in\mathbb{N}}$ και $y_\emptyset \in X$ ώστε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που ορίζεται ως $x_n = y_n + y_\emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading model. Έστω $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η υπακολουθία $(y_n)_{n\in L}$ παράγει ένα spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη. Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Από το Πόρισμα 3.20 έχουμε ότι και η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi < \omega_1$ έχουμε ότι για κάθε $\zeta < \xi$, κάθε μη τετριμμένο spreading model στο $\mathcal{SM}^{wrc}_\zeta(X)$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Έστω μια $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη τετριμμένο spreading model στο $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$. Έστω επίσης μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ. Από το Πόρισμα 6.17 υπάρχουν $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ στον X που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Παράγει την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model.
(ii) Είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M \to$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί.
(iii) Δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(y_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$.

Από τα Πορίσματα 3.20 και 5.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_\emptyset = 0$. Έστω $c > 0$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, $\|x_s\| > c$. Από το Λήμμα 9.9 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε είτε

(i) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x_s^{(1,\mathcal{F}/L)}\| \geq \frac{c}{2}$, ή
(ii) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x_s - z_s^L\| < \frac{c}{2}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρώτη εναλλακτική. Τότε η $(x_s^{(1,\mathcal{F}/L)})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι ημινορμαρισμένη. Επιπλέον η $(x_s^{(1,\mathcal{F}/L)})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι ασθενώς μηδενική, καθώς είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο $\widehat{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset) = y_\emptyset = 0$. Επομένως η $(x_s^{(1,\mathcal{F}/L)})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ δε περιέχει καμιά norm συγκλίνουσα $\mathcal{F}$-υπακολουθία. Από το Θεώρημα 5.1 έχουμε ότι η $(x_s^{(1,\mathcal{F}/L)})_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ δέχεται ένα μη τετριμμένο spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Το Λήμμα 9.5 και η επαγωγική υπόθεση συνεπάγονται ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Η unconditionality της βάσης του X συνεπάγεται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η δεύτερη εναλλακτική. Τότε η $(z_s^L)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι ημινορμαρισμένη πλεγματικά block $\mathcal{F}$-υπακολουθία. Από τις υποθέσεις έχουμε ότι κάθε $\mathcal{F}$-spreading model της $(z_s^L)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι ισοδύναμο με τη συνηθη βάση του ℓ^1. Πάλι από την unconditionality της βάσης του X συνεπάγεται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. □

2.4. Χώροι Banach που δέχονται ℓ^1 πλεγματικά block παραγόμενο spreading model. Στην υποπαράγραφο αυτή παρέχονται ικανές συνθήκες για ένα χώρο Banach X με Schauder βάση ώστε τα ℓ^1 spreading models του X να εμφανίζονται και σαν πλεγματικά block παραγόμενα.

Ορισμος 9.11. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Θα λέμε ότι ο X ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$, αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε πεπερασμένη block ακολουθία $(x_j)_{j=1}^k$, με $\|x_j\| \geq \delta$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$, να έχουμε ότι $\|\sum_{j=1}^k x_j\| > 1$.

Παρατηρηση 9.12.

(i) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ιδιότητα $\mathcal{P}$ διατηρείται από ισοδύναμες νόρμες.
(ii) Αν ο X έχει unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε ο X ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ αν και μόνο αν ο c_0 δεν είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον X.

Θεωρημα 9.13. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση που ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$. Αν για κάποιο $\xi < \omega_1$, ο ℓ^1 είναι ένα ξ-spreading model ενός ασθενώς σχετικά συμπαγούς υποσυνόλου του X, τότε ο ℓ^1 είναι πλεγματικά block παραγόμενος σαν ξ-spreading model.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 9.14. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $0 < c \leq 1$. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X, τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά c και δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση. Αν ο X δε δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model τότε για κάθε $0 < \delta < c$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε $\|x_s^{(1,\mathcal{F}/L)}\| \geq \delta$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$.

Αποδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M. Έστω $0 < \delta < c$. Από το Λήμμα 9.9 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε είτε

(i) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x_s^{(1,\mathcal{F}/L)}\| \geq \delta$, ή
(ii) για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L(2\mathbb{N})$, $\|x_s - z_s^L\| < \delta$.

Θα δείξουμε ότι η εναλλακτική (ii) είναι αδύνατη. Πράγματι, αλλιώς θα είχαμε ότι κάθε $\mathcal{F}$-spreading model της $(z_s^L)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_1 με κάτω σταθερά $c-\delta$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ℓ_1 είναι πλεγματικά block παραγόμενος από την $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(z_s^L)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L(2\mathbb{N})}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model, το οποίο είναι άτοπο. □

Αποδειξη του Θεωρηματος 9.13. Υποθέτουμε ότι ο X δε δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model. Από την Παρατήρηση 2.4 και την Παρατήρηση 9.12 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η βάση του X είναι διμονότονη. Έστω $\xi_0 < \omega_1$ ο ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός ξ για τον οποίο υπάρχει ένα ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο A του X που δέχεται τον ℓ^1 σαν ξ-spreading model.

Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ_0. Από τα Πορίσματα 3.20 και 6.17 υπάρχουν $M_1 \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M_1}$ στον X που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Παράγει ένα ℓ^1 $\mathcal{F}$-spreading model με κάτω σταθερά c.
(ii) Είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία και αν $\widehat{\varphi}: \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M_1 \to X$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$.
(iii) Δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Έστω $0 < \delta < c$ και έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε πεπερασμένη block ακολουθία $(x_j)_{j=1}^k$, με $\|x_j\| \geq \delta$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$, $\|\sum_{j=1}^k x_j\| > 1$.

Από το Λήμμα 9.14 υπάρχει $L_1 \in [M_1]^\infty$ ώστε $\|x_s^{(1,\mathcal{F}/L_1)}\| \geq \delta$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_1(2\mathbb{N})$. Επειδή $o(\mathcal{F}/L_1) < \xi_0$, από το Πόρισμα 9.6 υπάρχει $M_2 \in [L_1(2\mathbb{N})]^\infty$ ώστε η $\big(x_s^{(2,\mathcal{F}/L_1)}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M_2}$ να παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με την ίδια κάτω σταθερά c.

Θέτουμε $x_s^2 = x_s^{(2,\mathcal{F}/L_1)}$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M_2$. Ακολουθώντας τα ίδια επειχηρήματα όπως παραπάνω έχουμε ότι υπάρχουν $L_2 \in [M_2]^\infty$ και $M_3 \in [L_2(2\mathbb{N})]^\infty$ τέτοια ώστε $\|x_s^{2(1,\mathcal{F}/L_2)}\| \geq \delta$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_2(2\mathbb{N})$ και η $\big(x_s^{(2,\mathcal{F}/L_2)}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M_3}$ παράγει ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με την ίδια σταθερά c.

Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M_3$, έχουμε ότι

$$x_s^{(1,\mathcal{G}_1)} < x_s^{2\,(1,\mathcal{G}_2)},\ \|x_s^{(1,\mathcal{G}_1)}\| \geq \delta \text{ και } \|x_s^{2\,(1,\mathcal{G}_2)}\| \geq \delta$$

Επιπλέον επειδή για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M_3$ $\|x_s\| \leq 1$, $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$ και η βάση είναι διμονότονη, έχουμε ότι $\|\widetilde{x}_s^{(1,\mathcal{G}_1)} + \widetilde{x}_s^{2\,(1,\mathcal{G}_2)}\| \leq 1$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M_3$. Είναι άμεσο ότι, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μετά από k βήματα η ιδιότητα $\mathcal{P}$ θα μας οδηγήσει σε άτοπο. □

Πορισμα 9.15. Έστω ένας αυτοπαθής χώρος X με Schauder βάση που ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$. Αν για κάποιο $\xi < \omega_1$, ο ℓ^1 είναι ένα ξ-spreading model του X τότε ο ℓ^1 είναι πλεγματικά block παραγόμενο ξ-spreading model του X.

Παρατηρηση 9.16. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 13, η υπόθεση ότι ο χώρος X ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι απαραίτητη στο Θεώρημα 9.13.

2.5. Τα spreading models των χώρων Tsirelson. Ο ορισμός των χώρων Tsirelson T_α, $1 \leq \alpha < \omega_1$ κάνει χρήση των Schreier οικογενειών $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ (βλ. Ορισμό 1.5). Για λόγους πληρότητας θα αποδείξουμε την ακόλουθη ιδιότητα των οικογενειών $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, την οποία και θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Λημμα 9.17. Για κάθε$1 \leq \alpha \leq \omega_1$, έχουμε ότι $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_\alpha$.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο α. Για $\alpha = 1$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\alpha < \omega_1$, $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_{\alpha'}$, για κάθε $1 \leq \alpha' < \alpha$. Αν ο α είναι επόμενος, $\alpha = \beta + 1$, τότε από την επαγωγική υπόθεση και τον ορισμό της $\mathcal{S}_\alpha$, έχουμε ότι $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Για την περίπτωση ενός οριακού α, έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η αύξουσα ακολουθία στο α που συμμετέχει στον ορισμό της $\mathcal{S}_\alpha$. Ας παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{S}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Συνεπώς από την επαγωγική μας υπόθεση, έχουμε ότι $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{S}_\alpha$ □

Είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στον ορισμό των χώρων Tsirelson T_α. Έστω $\alpha \geq 1$ ένας αριθμήσιμος διατακτικός. Έστω W_α το ελάχιστο υποσύνολο του αλγεβρικού δυϊκου $c_{00}(\mathbb{N})^\#$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) $\pm e_n^* \in W_\alpha$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \ldots, f_n \in W_\alpha$ ώστε $f_1 < \ldots < f_n$ και $\{\min \operatorname{supp}(f_i) : 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{S}_\alpha$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i \in W_\alpha$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε στοιχείο του W_a έχει πεπερασμένο φορέα. Επιπλέον για κάθε $f = \sum_{i=1}^n a_i e_i^* \in W_\alpha$ και $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ έχουμε ότι $\sum_{i\in F} a_i e_i^* \in W_\alpha$. Επίσης το W_α είναι συμμετρικό, δηλαδή για κάθε $f \in W_\alpha$ έχουμε ότι $-f \in W_\alpha$.

Έστω $\|\cdot\|_{T_\alpha} : c_{00}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ η νόρμα που ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_{T_\alpha} = \sup\{f(x) : f \in W_\alpha\}$$

Ο χώρος T_α ορίζεται να είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ με την νόρμα $\|\cdot\|_{T_\alpha}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνήθης Hamel βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι unconditional βάση για τον χώρο T_α. Επιπλέον είναι γνωστό ότι οι χώροι T_α, για κάθε $1 \leq \alpha < \omega_1$, είναι αυτοπαθείς. Όσον αφορά τα spreading models των χώρων αυτών έχουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 9.18. Έστω $1 \leq \alpha < \omega_1$. Τότε κάθε μη τετριμμένη spreading model οποιασδήποτε τάξης του T_α είναι ισόδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Από την αυτοπάθεια του χώρου T_α και το Θεώρημα 9.10 αρκεί να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Προταση 9.19. Έστω $1 \leq \alpha < \omega_1$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ μια ημινορμαρισμένη πλεγματικά block $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον T_α. Τότε κάθε $\mathcal{F}$-spreading model της $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Για την απόδειξη της Πρότασης 9.19 θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 9.20. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ μια πλεγματικά block $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον X από μη μηδενικά στοιχεία. Τότε υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, αν $\min s = L(n)$ τότε $\min \operatorname{supp}(x_s) \geq n$.

Αποδειξη. Έστω $M' \in [M]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο M' και $L = M'(2\mathbb{N})$. Τότε το L είναι το επιθυμητό σύνολο. Πράγματι, έστω $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$. Έστω $n_1, \ldots, n_{|s|} \in \mathbb{N}$ ώστε $s(j) = L(n_j)$, για κάθε $1 \leq j \leq |s|$. Τότε $s(j) = M'(2n_j)$, για κάθε $1 \leq j \leq |s|$. Έστω, για κάθε $1 \leq p \leq 2n_1$, $s_p \in \mathcal{F}$ ώστε

$$s_p \sqsubseteq \big\{M'(2n_j + p - 2n_1) : 1 \leq j \leq |s|\big\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το $(s_p)_{p=1}^{2n_1}$ είναι ένα πλεγματικό μονοπάτι και $s = s_{2n_1}$. Συνεπώς

$$1 \leq \min \operatorname{supp}(x_{s_1}) < \ldots < \min \operatorname{supp}(x_{s_{2n_1}}) = \min \operatorname{supp}(x_s)$$

Από αυτό εύκολα βλέπουμε ότι $\min \operatorname{supp}(x_s) \geq 2n_1 \geq n_1$. □

Αποδειξη της Προτασης 9.19. Έστω $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x_s\|_{T_\alpha} > c$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction M$. Περνάμε σε ένα $M' \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M'}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Λήμμα 9.20 υπάρχει $L \in [M']^\infty$ ώστε για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction L$, αν $\min s = L(n)$ τότε $\min \operatorname{supp}(x_s) \geq n$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^n \in Plm(\mathcal{F} \restriction L)$ με $s_1(1) \geq L(n)$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^n a_j x_{s_j} \Big\|_{T_\alpha} \geq \frac{c}{2} \sum_{j=1}^n |a_j|$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^n \in Plm(\mathcal{F} \restriction L)$ με $s_1(1) \geq L(n)$. Επειδή $\|x_{s_i}\|_{T_\alpha} > c$, για κάθε $1 \leq i \leq n$, υπάρχουν $f_1, \dots, f_n \in W_\alpha$ ώστε $f_i(x_{s_i}) > c$. Από τις ιδιότητες του W_α, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq \operatorname{supp}(x_{s_i})$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Επομένως $\min \operatorname{supp}(f_i) \geq \min \operatorname{supp}(x_{s_i})$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Από την επιλογή των $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ και το Λήμμα 9.17, είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\{\min \operatorname{supp}(x_{s_j}) : 1 \leq j \leq n)\} \in \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Συνεπώς από την spreading ιδιότητα της $\mathcal{S}_\alpha$,έχουμε ότι $\{\min \operatorname{supp}(f_j) : 1 \leq j \leq n)\} \in \mathcal{S}_\alpha$. Άρα, αν $\varepsilon_i = \operatorname{sign}(a_i)$, για κάθε $1 \leq i \leq n$, έχουμε ότι $\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \in W_\alpha$. Άρα

$$\Big\| \sum_{j=1}^n a_j x_{s_j} \Big\|_{T_\alpha} \geq \varphi\Big(\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j} \Big) \geq \frac{c}{2} \sum_{j=1}^n |a_j|$$

□

3. k-Cesàro αθροισιμότητα και ℓ^1 k-spreading models

Στην παράγραφο αυτή εστιάζουμε στα spreading models τάξης k, με $k \in \mathbb{N}$, και μελετάμε τη σχέση της k-Cesàro αθροισιμότητας μιας $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθίας και του spreading model που παράγει. Το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής είναι το Θεώρημα 9.30.

Ορισμος 9.21. Έστω ένας χώρος Banach X, $x_0 \in X$ $k \in \mathbb{N}$, $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Θα λέμε ότι η $[\mathbb{N}]^k$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0 αν

$$\binom{n}{k}^{-1} \sum_{s\in[M|n]^k} x_s \ \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}}\ x_0$$

όπου $M|n = \{M(1), ..., M(n)\}$.

Παρατηρηση 9.22. Έστω ένας χώρος Banach X, $x_0 \in X$, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν η $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ συγκλίνει στο x_0, τότε η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0. Επιπλέον αν η $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα και k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι το ασθενές όριο της $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$.

Προταση 9.23. Έστω ένας χώρος Banach X με διαχωρίσιμο δυϊκό, $x_0 \in X$, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, η $(x_s)_{s\in[M]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0. Τότε υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x_s)_{s\in[L]^k}$ να συγκλίνει σαθενώς στο x_0.

Αποδειξη. Καταρχήν ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει ένα $L \in [M]^\infty$ ώστε $|x^*(x_s) - x^*(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $s \in [L]^k$. Έπειτα για ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ του X^* επιλέγουμε επαγωγικά ένα $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s \in [L]^k$ με $\min s \geq L(n)$ έχουμε ότι $|x_i^*(x_s) - x_i^*(x_0)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i = 1 \leq n$. Από αυτό έχουμε ότι η $(x_s)_{s\in[L]^k}$ ασθενώς συγκλίνουσα στο x_0. □

Παρατηρηση 9.24. Παραμένει ανοιχτό αν το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει χωρίς κάποιον περιορισμό για τον X^*.

Θα χρειαστούμε ένα βαθύ θεώρημα πυκνότητας Ramsey των H. Furstenberg και Y. Katznelson (βλ. [**16**]). Θα χρησιμοποιήσουμε μια αναδιατύπωση του που έγινε από τον W. T. Gowers (βλ. [**19**]) και είναι η ακόλουθη.

Θεωρημα 9.25. Έστω $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ και F ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}^k$. Τότε υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N_0$, κάθε υποσύνολο A του $\{1, \ldots, N\}^k$ με τουλάχιστον δN^k στοιχεία έχει υποσύνολο της μορφής $a + dF$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}^k$ και $d \in \mathbb{N}$.

Λημμα 9.26. Έστω $\delta > 0$ και $k, l \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N_0$ και κάθε υποσύνολο A του συνόλου $[\{1, \ldots, N\}]^k$ όλων των k-συνόλων του $\{1, \ldots, N\}$ με τουλάχιστον $\delta\binom{N}{k}$ στοιχεία υπάρχει μια πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ στο A.

Αποδειξη. Για κάθε $1 \leq j \leq l$, έστω $s_j = \big(j, l + j, 2l + j, ..., (k-1)l + j\big)$. Προφανώς η l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματική στο $[\mathbb{N}]^k$. Θέτουμε επίσης $t = (1, \ldots, k)$ και

$$F = \{t, s_1, \ldots, s_l\}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

υπάρχει $N_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N_0'$ και κάθε υποσύνολο A το $[\{1, \ldots, N\}]^k$ με τουλάχιστον $\delta\binom{N}{k}$ στοιχεία έχει πυκνότητα τουλάχιστον $\frac{\delta}{2k!}$ στο $\{1, \ldots, N\}^k$. Συνεπώς από το Θεώρημα 9.25 (για $\frac{\delta}{2k!}$ αντί για δ) έχουμε ότι υπάρχει $N_0 \geq N_0'$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N_0$, κάθε υποσύνολο A του $[\{1, \ldots, N\}]^k$ με τουλάχιστον $\delta\binom{N}{k}$ στοιχεία έχει ένα υποσύνολο της μορφής $a + dF$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}^k$ και $d \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί δείχνοντας ότι η $(a + ds_j)_{j=1}^l$ είναι πλεγματική.

Πράγματι, επειδή $d > 0$, $a(i) + ds_{j_1}(i) < a(i) + ds_{j_2}(i)$, για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $1 \leq j_1 < j_2 \leq l$. Άρα (επειδή $s_j \in [\mathbb{N}]^k$, για κάθε $1 \leq j \leq l$), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq k-1$,

$$a(i) + ds_l(i) < a(i+1) + ds_1(i+1)$$

Πράγματι, έστω ένα τέτοιο i. Επειδή $a + dt \in A \subseteq [\{1, \ldots, N\}]^k$, έχουμε ότι για κάθε $a(i) + dt(i) < a(i+1) + dt(i+1)$ ή $a(i+1) + d > a(i)$. Συνεπώς,

$$a(i) + ds_l(i) = a(i) + d(s_1(i+1) - 1) < a(i+1) + d + ds_1(i+1) - d = a(i+1) + ds_1(i+1)$$

□

Παρατηρηση 9.27. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για $k = 1$ το παραπάνω λήμμα είναι άμεσο (αρκεί να θέσει κανείς $N_0 = \lceil \frac{l}{\delta} \rceil$) και επομένως το Θεώρημα 9.25 χρειάζεται πραγματικά για $k \geq 2$.

Λημμα 9.28. Έστω ένας χώρος Banach X, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια φραγμένη $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M]^k}$ παράγει ένα Cesàro αθροίσιμο στο μηδέν $[\mathbb{N}]^k$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[L]^k}$ είναι k-Cezaro αθροίσιμη στο μηδέν.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε

$$\lim_n \binom{n}{k}^{-1} \Big\| \sum_{s\in[L|n]^k} x_s \Big\| \neq 0$$

Τότε υπάρχει ένα $\theta > 0$ και μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(p_n)_n$ φυσικών αριθμών ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{p_n}{k}^{-1} \Big\| \sum_{s \in [L|p_n]^k} x_s \Big\| > \theta$$

Άρα υπάρχει ένα $x_n^* \in S_{X^*}$ ώστε

$$\binom{p_n}{k}^{-1} x_n^* \Big(\sum_{s \in [L|p_n]^k} x_s \Big) > \theta$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$A_n = \Big\{ t \in [\{1, ..., p_n\}]^k : \, x_n^*(x_{L(t)}) > \frac{\theta}{2} \Big\},$$

όπου $K = \sup\{\|x_s\| : s \in [\mathbb{N}]^k\}$ και $L(t) = \{L(t(1)), \ldots, L(t(|t|))\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\theta \binom{p_n}{k} &< \sum_{s \in [L|p_n]^k} x_n^*(x_s) \\
&= \sum_{t \in A_n} x_n^*(x_{L(t)}) + \sum_{t \in [\{1,\ldots,p_n\}]^k \setminus A_n} x_n^*(x_{L(t)}) \\
&\leq |A_n| K + \frac{\theta}{2} \Big(\binom{p_n}{k} - |A_n| \Big) \leq |A_n| K + \frac{\theta}{2} \binom{p_n}{k}
\end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$|A_n| \geq \frac{\theta}{2K} \binom{p_n}{k}$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ εφαρμόζεται το Λήμμα 9.26 για $\delta = \frac{\theta}{2K}$ και $l = 2m-1$ υπάρχει N_m τέτοιο ώστε για κάθε $N \geq N_m$ υπάρχει μια πλεγματική $(2m-1)$-άδα $(t_j)_{j=1}^{2m-1}$ στο A_N. Ας παρατηρήσουμε ότι η m-άδα $(t_j)_{j=m}^{2m-1}$ είναι πλεγματική με $\min t_m \geq m$ και $x_N^*(x_{L(t_j)}) > \frac{\theta}{2}$, για κάθε $m \leq j \leq 2m-1$. Θέτοντας $s_i = L(t_{m-1+i})$ για κάθε $1 \leq i \leq m$, έχουμε ότι η m-άδα $(s_i)_{i=1}^m$ είναι πλεγματική στο $[L]^k$ με $\min s_1 \geq L(m)$ και

$$\Big\| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{s_j} \Big\| > \frac{\theta}{2}$$

Επειδή η $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν, έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.7 και του Λήμματος 9.28.

Πρόταση 9.29. Έστω ένας χώρος Banach X, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s \in [\mathbb{N}]^k}$ μια φραγμένη $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στο X. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η υπακολουθία $(x_s)_{s \in [M]^k}$ παράγει ένα unconditional $[\mathbb{N}]^k$-spreading model $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα επόμενα ισχύει:

(i) Η ακολουθία $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με στη συνήθη βάση του ℓ^1.
(ii) Για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s \in [L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν.

Θεώρημα 9.30. Έστω ένας χώρος Banach X, $k \in \mathbb{N}$ και $(x_s)_{s \in [\mathbb{N}]^k}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $[\mathbb{N}]^k$-ακολουθία στον X. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε ένα από τα ακόλουθα να ισχύει:

(i) Η υπακολουθία $(x_s)_{s \in [M]^k}$ παράγει ένα $[\mathbb{N}]^k$-spreading model ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1.
(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s \in [L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0.

Αποδειξη. Έστω $M_1 \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M_1]^k}$ παράγει ένα $[\mathbb{N}]^k$-spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από την Πρόταση 4.15 Υπάρχει $M_2 \in [M_1]^\infty$ τέτοιο ώστε η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[M_2]^k}$ είναι subordinated. Έστω $\widehat{\varphi} : [M_2]^k \to (X, w)$η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Έστω $x_0 = \widehat{\varphi}(\emptyset)$. Για κάθε $s \in [M_2]^k$ θέτουμε $x'_s = x_s - \widehat{\varphi}(\emptyset)$. Ας παρατηρήσουμε ότι η απεικόνιση $\widehat{\psi} : [M_2]^k \to (X, w)$ που ορίζεται ως $\widehat{\psi}(t) = \widehat{\varphi}(t) - \widehat{\varphi}(\emptyset)$ είναι συνεχής. Συνεπώς η $(x'_s)_{s\in[M_2]^k}$ είναι subordinated. Επίσης έχουμε ότι $\widehat{\psi}(\emptyset) = 0$. Έστω $M \in [M_2]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x'_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L_2}$ παράγει την $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Από το Θεώρημα 5.4 έχουμε ότι η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional. Από την Πρόταση 9.29 έχουμε ότι είτε η $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x'_s)_{s\in[L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Η πρώτη εναλλακτική και το Πόρισμα 3.20 συνεπάγονται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Η δεύτερη εναλλακτική, καθώς $x_s = x'_s + x_0$, συνεπάγεται ότι για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s\in[L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο x_0. □

Παρατηρηση 9.31. Ας παρατηρήσουμε ότι η περίπτωση $k = 1$ της Πρότασης 9.29 αποτελεί το γνωστό θεώρημα του H. Rosenthal. Επίσης για $k = 1$ οι δύο εναλλακτικές δεν μπορούν να επιτευχθούν ταυτόχρονα. Αυτό όμως δε παραμένει αληθές για $k \geq 2$. Πράγματι, στο Παράδειγμα 1 θέτοντας $\mathcal{F} = [\mathbb{N}]^k$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι η συνήθης βάση του ℓ^1 έχουμε ότι η βάση του χώρου $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ παράγει ένα ℓ^1 spreading model τάξης k. Επιπλέον για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ η υπακολουθία $(e_s)_{s\in[L]^k}$ είναι k-Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Πράγματι, έστω $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε πλεγματική ακολουθία στο $[L|n]^k$ είναι μηκους μικρότερου ή ίσου του n. Άρα

$$\|\tbinom{n}{k}^{-1} \sum\{x_s : s \in [L|n]^k\}\| \leq n\tbinom{n}{k}^{-1} \to 0$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με μια προσπάθεια εισαγωγής μιας υπαρπεπερασμένης Cesàro αθροισιμότητας.

Ορισμος 9.32. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathcal{F} \restriction (M|n) = \{s \in \mathcal{F} : s \subseteq M|n\}$. Μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ σε ένα χώρο Banach X καλείται $\mathcal{F}$-Cesàro αθροίσιμη στο $x_0 \in X$ αν

$$\frac{1}{|\mathcal{F} \restriction (M|n)|} \sum_{s\in\mathcal{F}\restriction(M|n)} x_s \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$$

Το επόμενο πρόβλημα είναι ένα υπερπεπερασμένο ανάλογο του Θεωρήματος 9.30.

Προβλημα 3. Έστω ένας χώρος Banach X,μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στο X. Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε ένα από τα επόμενα να ισχύει:

(i) Η υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model ισοδύναμο στη συνήθη βάση του ℓ^1.

(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $L \in [M]^\infty$ η υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ είναι $\mathcal{F}$-Cesàro αθροίσιμη στο x_0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

c_0 spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούνται τα c_0 spreading models που παράγονται από $\mathcal{F}$-ακολουθίες. Στην πρώτη παράγραφο παρουσιάζεται ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα σχετικά με μερική unconditionality σε δέντρα άπειρης διάσπασης σε χώρους Banach. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό και χρησιμοποιώντας τις τεχνικές διαχωρισμού των κανονικών δενδροειδών διασπάσεων, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, επιτυγχάνεται το αντίστοιχο με τον ℓ^1 αποτέλεσμα για πλεγματικά block παραγόμενα c_0 spreading models. Στην τελευταία παράγραφο αναλύεται η δυϊκότητα μεταξύ των c_0 και ℓ^1 spreading models.

1. Σχετικά με την μερική unconditionality σε δέντρα σε χώρους Banach

Στην παράγραφο παρουσιάζεται ένα Ramsey αποτέλεσμα που αφορά μερική unconditionality σε δέντρα σε Banach. Η προσέγγιση που ακολουθείται σχετίζεται με την αντίστοιχη που ακολουθείται για ακολουθίες αντί δέντρων από διάφορα άρθρα (βλ. [**4**], [**5**], [**12**], [**38**]).

Ας ξεκινήσουμε με κάποιους ορισμούς

Ορισμος 10.1. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\Delta = (N^{(1)}, \dots, N^{(k)})$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε k άπειρα ξένα σύνολα, δηλαδή $N^{(i)} \in [\mathbb{N}]^\infty$ για κάθε $1 \le i \le k$, $N^{(i)} \cap N^{(j)} = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ στο $\{1, \dots, k\}$ και $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^k N^{(i)}$. Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ορίζουμε τη modulo Δ διαμέριση του L να είναι η k-άδα $(L_{(\Delta,1)}, \dots, L_{(\Delta,k)})$, όπου $L_{(\Delta,i)} = L(N^{(i)})$ για κάθε $1 \le i \le k$. Επιπλέον για κάθε μη κενό $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ ορίζουμε τη modulo Δ διαμέριση του F να είναι η k-άδα $(F_{(\Delta,1)}, \dots, F_{(\Delta,k)})$, όπου $F_{(\Delta,i)} = F(\{1, \dots, |F|\} \cap N^{(i)})$ για κάθε $1 \le i \le k$, και για $F = \emptyset$, $\emptyset_{\Delta,i} = \emptyset$, για κάθε $1 \le i \le k$.

Τέλος ορίζουμε την απεκόνιση $i_\Delta : \mathbb{N} \to \{1, \dots, k\}$ ώστε $i_\Delta(n) = i$ αν $n \in N^{(i)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρηση 10.2. Είναι άμεσα ότι ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(Δ1) Για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ έχουμε ότι $L_{(\Delta,i)} = \{L(n) : i_\Delta(n) = i\}$, για κάθε $1 \le i \le k$. Επιπλέον $\cup_{i=1}^k L_{(\Delta,i)} = L$ και $L_{(\Delta,i)} \cap L_{(\Delta,j)} = \emptyset$, για κάθε $i \neq j$.

(Δ2) Για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ με $F \sqsubseteq L$ έχουμε ότι
$$F_{(\Delta,i)} = L_{(\Delta,i)} \cap F \sqsubseteq L_{(\Delta,i)}$$
για κάθε $1 \le i \le k$. Συνεπώς για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και κάθε $L, L' \in [\mathbb{N}]^\infty$ με $F \sqsubseteq L$ και $F \sqsubseteq L'$, έχουμε ότι
$$L_{(\Delta,i)} \cap F = L'_{(\Delta,i)} \cap F = F_{(\Delta,i)}$$
για κάθε $1 \le i \le k$.

(Δ3) Έστω $L, L' \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \neq n_0$ στο $\mathbb{N}$, $L(n) = L'(n)$. Τότε
  (α) Για κάθε $i \neq i_\Delta(n_0)$ στο $\{1, \dots, k\}$, $L_{(\Delta,i)} = L'_{(\Delta,i)}$,
  (β) $L(n_0) \in L_{(\Delta,i_\Delta(n_0))}$ και $L'(n_0) \in L'_{(\Delta,i_\Delta(n_0))}$,
  (γ) $L_{(\Delta,i_\Delta(n_0))} \setminus \{L(n_0)\} = L'_{(\Delta,i_\Delta(n_0))} \setminus \{L'(n_0)\}$.

Ορισμος 10.3. Έστω $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ μια οικογένεια διανυσμάτων ενός χώρου Banach X. Θα λέμε ότι η $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ είναι ένα ασθενώς μηδενικό δέντρο αν για κάθε $t \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, θέτοντας $N_t = \{n \in \mathbb{N} : n > t\}$, έχουμε ότι $(y_{t\cup\{n\}})_{n\in N_t} \xrightarrow{w} 0$. Ένα ασθενώς μηδενικό δέντρο $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ θα καλείται φραγμένο αν η οικογένεια $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ είναι φραγμένη, όπου $x_s = \sum_{t\sqsubseteq s} y_t$ για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$.

Συμβολισμος 10.4. Έστω $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{G}$ μια thin οικογένεια very large στο N. Για κάθε $L \in [N]^\infty$ θέτουμε $I_{\mathcal{G}}(L)$ να είναι το μοναδικό αρχικό τμήμα του L στην $\mathcal{G}$.

Ορισμος 10.5. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\Delta = (N^{(1)}, \dots, N^{(k)})$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε k άπειρα ξένα σύνολα, $N \in [\mathbb{N}]^\infty$, $\mathfrak{G} = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k)$ μια k-άδα από thin οικογένειες οι οποίες είναι very large στο N και $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ ένα φραγμένο ασθενώς μηδενικό δέντρο σε ένα χώρο Banach X. Έστω επίσης $\varepsilon > 0$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

Θα λέμε ότι ένα άπειρο υποσύνολο L του N είναι $(\varepsilon, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})$-καλό (ως προς $k, \Delta, N, \mathfrak{G}$ και $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$) αν για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $y^* \in B_{X^*}$ ώστε, θέτοντας για $1 \le i \le k$, $v_i = I_{\mathcal{G}_i}(L_{(\Delta,i)})$, να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) $\Big|(x^* - y^*)\Big(\sum_{t\sqsubseteq v_i} y_t\Big)\Big| \le \varepsilon$.

(β) Για κάθε $t \in [L]^{<\infty}$ με $v_i \sqsubset t \sqsubseteq L_{(\Delta,i)}$, για κάποιο $i \in \{1, \dots, k\}$, έχουμε ότι $\big|y^*(y_t)\big| \le \delta_{|t|}$.

Ο κύριος στόχος της παραγράφου αυτής είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεωρημα 10.6. Έστω $k, \Delta, N, \mathfrak{G}$ και $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ όπως στον Ορισμο 10.5. Έστω επίσης $\varepsilon > 0$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχει $M \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε κάθε $L \in [M]^\infty$ είναι $(\varepsilon, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})$-καλό.

Για τη συνέχεια σταθεροποιούμε $k, \Delta, N, \mathfrak{G}$ και $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ όπως στον Ορισμό 10.5, $\varepsilon > 0$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Έστω

$$\mathbb{G} = \big\{L \in [N]^\infty : \ L \ \text{είναι} \ (\varepsilon, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})\text{-καλό}\big\}$$

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος είναι εύκολη.

Λημμα 10.7. Το σύνολο $\mathbb{G}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^\infty$.

Λημμα 10.8. Το σύνολο $\mathbb{G}$ είναι πυκνό στο $[N]^\infty$, δηλαδή για κάθε $M \in [N]^\infty$ υπάρχει $L \in \mathbb{G}$ με $L \in [M]^\infty$.

Το Λήμμα 10.7, το Λήμμα 10.8 και το θεώρημα των Galvin και Prikry συνεπάγονται το Θεώρημα 10.6. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε το Λήμμα 10.8.

Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 10.9. Ένα $F \in [N]^{<\infty}$ θα καλείται $\mathfrak{G}$-ελεύθερο αν για κάθε $i = i_\Delta(|F|+1)$ έχουμε ότι $F_{(\Delta,i)} \notin \widehat{\mathcal{G}}_i \setminus \mathcal{G}_i$.

Παρατηρηση 10.10. Ας παρατηρήσουμε ότι από τον Ορισμό 10.1, έχουμε ότι για κάθε $F \in [N]^{<\infty}$ και κάθε $n \in N$ με $F < n$, θέτοντας $F' = F \cup \{n\}$,

$$F'_{(\Delta, i_\Delta(|F'|))} = F_{(\Delta, i_\Delta(|F|+1))} \cup \{n\}$$

Άρα αν το $F \in [N]^{<\infty}$ είναι $\mathfrak{G}$-ελεύθερο τότε $F'_{(\Delta, i_\Delta(|F'|))} \notin \widehat{\mathcal{G}}_{i_\Delta(|F'|)}$.

Έστω για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $x_s = \sum_{t\sqsubseteq s} y_t$ και $K = \sup\{\|x_s\| : s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\}$. Έστω επίσης $\delta_0 > 0$.

Υπολημμα 10.11. Έστω $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ $\mathfrak{G}$-ελεύθερο και $M \in [N]^\infty$ με $F \sqsubseteq M$. Έστω επίσης $((a_t)_{t\sqsubseteq F_{(\Delta,i)}})_{i=1}^k$ και $(b_i)_{i=1,\ i\neq i_0}^k$ στο $[-2K, 2K]$, όπου $i_0 = i_\Delta(|F|+1)$. Για κάθε $L' \in [M]^\infty$ θέτουμε $B^*(L')$ να είναι το σύνολο όλων των $x^* \in B_{X^*}$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $t \sqsubseteq F_{(\Delta,i)}$, $|x^*(y_t) - a_t| \leq \frac{\delta_{|t|}}{2^{|F|+3}}$.

(ii) Για κάθε $1 \leq i \leq k$ με $i \neq i_0$, $|x^*(\sum_{F_{(\Delta,i)} \sqsubset t \sqsubseteq v_i'} y_t) - b_i| \leq \frac{\varepsilon}{2^{|F|+3}}$, όπου $v_i' = I_{\mathcal{G}_i}(L'_{(\Delta,i)})$.

Τότε υπάρχει $L \in [M]^\infty$ με $F \sqsubseteq L$ τέτοιο ώστε για κάθε $L' \in [L]^\infty$ με $F \sqsubseteq L'$ και κάθε $x^* \in B^*(L')$ υπάρχει $y^* \in B^*(L')$ ώστε

$$|y^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{L'(|F|+1)\}})| \leq \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των L' στο $[M]^\infty$ με $F \sqsubset L'$ ώστε για κάθε $x^* \in B^*(L')$ υπάρχει $y^* \in B^*(L')$ τέτοιο ώστε

$$|y^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{L'(|F|+1)\}})| \leq \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$$

Από την ιδιότητα ($\Delta 2$) είναι εύκολο να δει κανείς ότι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι ανοιχτό. Επομένως από το θεώρημα των Galvin και Prikry υπάρχει L στο $[M]^\infty$ με $F \sqsubset L$ τέτοιο ώστε είτε $L' \in \mathcal{A}$ για κάθε $L' \in [L]^\infty$ με $F \sqsubset L'$, ή $L' \notin \mathcal{A}$ για κάθε $L' \in [L]^\infty$ με $F \sqsubset L'$. Θα δείξουμε ότι η δεύτερη εναλλακτική είναι αδύνατη.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι $L' \notin \mathcal{A}$ για κάθε $L' \in [L]^\infty$ με $F \sqsubset L'$. Τότε για κάθε $L' \in [L]^\infty$ με $F \sqsubset L'$ έχουμε ότι $B^*(L') \neq \emptyset$ και για κάθε $y^* \in B^*(L')$

$$|y^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{L'(|F|+1)\}})| > \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$$

Έστω $P = L \setminus F = \{p_1 < p_2 < \ldots\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq j \leq n$ θέτουμε

$$L'_{n,j} = F \cup \{p_j\} \cup \{p_l : l > n\}$$

Από την ιδιότητα ($\Delta 3$) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq j_1, j_2 \leq n$, $B^*(L'_{n,j_1}) = B^*(L'_{n,j_2})$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n^* \in B_{X^*}$ ώστε

$$|y_n^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{p_j\}})| = |y_n^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{L'_{n,j}(|F|+1)\}})| > \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$$

για κάθε $1 \leq j \leq n$. Έστω y^* ένα w^*-όριο της $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε

$$|y^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{p_j\}})| \geq \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$$

το οποίο είναι άδύνατο καθώς η $(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{n\}})_{n > F_{(\Delta,i_0)}}$ είναι ασθενώς μηδενική. $\square$

Πορισμα 10.12. Έστω $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ $\mathfrak{G}$-ελεύθερο και $M \in [N]^\infty$ με $F \sqsubseteq M$. Τότε υπάρχει $L \in [M]^\infty$ με $F \sqsubset L$ τέτοιο ώστε για κάθε $L' \in [M]^\infty$ με $F \sqsubset L'$ και $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $y^* \in B_{X^*}$ ώστε να ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $t \sqsubseteq F_{(\Delta,i)}$, $|x^*(y_t) - y^*(y_t)| \leq \frac{\delta_{|t|}}{2^{|F|+2}}$.

(ii) Για κάθε $1 \leq i \leq k$ με $i \neq i_0$,

$$\Big|(x^* - y^*)\Big(\sum_{F_{(\Delta,i)} \sqsubset t \sqsubseteq v_i'} y_t\Big)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2^{|F|+2}}$$

όπου $v_i' = I_{\mathcal{G}_i}(L'_{(\Delta,i)})$.

(iii) $|y^*(y_{F_{(\Delta,i_0)} \cup \{L'(|F|+1)\}})| \leq \frac{\delta_{|F_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F|+1}}$.

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $t \sqsubseteq F_{(\Delta,i)}$ θεωρούμε A_t ένα $\frac{\delta_{|t|}}{2^{|F|+3}}$-δίκτυο στο $[-2K, 2K]$. Για κάθε $1 \leq i \leq k$ με $i \neq i_0$ θεωρούμε B_i ένα $\frac{\varepsilon}{2^{|F|+3}}$-δίκτυο στο $[-2K, 2K]$. Έστω

$$(((a_t^q)_{t \sqsubseteq F_{(\Delta,i)}})_{i=1}^k, (b_i^q)_{i=1,\, i \neq i_0}^k)_{q=1}^m$$

μια αρίθμηση του συνόλου $(\prod_{i=1}^k (\prod_{t \sqsubseteq F_{(\Delta,i)}} A_t)) \times (\prod_{i=1,\, i \neq i_0}^k B_i)$. Θέτουμε $L_0 = M$ και κατασκευάζουμε επαγωγικά για $q = 1, \ldots, m$, χρησιμοποιώντας το Υπολήμμα

10.11 για $((a_t^q)_{t\sqsubseteq F_{(\Delta,i)}})_{i=1}^k$ και $(b_i^q)_{i=1,\,i\neq i_0}^k$, μια φθίνουσα ακολουθία άπειρων υποσυνόλων $(L_q)_{q=1}^m$ του L_0 με $F\sqsubset L_q$, για κάθε $1\le q\le m$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το L_m είναι το επιθυμητό σύνολο. $\square$

Απόδειξη του Λήμματος 10.8. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία και $\sum_{n=1}^\infty \delta_n<\varepsilon$. Έστω επίσης $\delta_1<\delta_0<\varepsilon/2$ και $M=M_1\in[N]^\infty$. Έστω F_1 ένα $\sqsubseteq$-ελαχιστικό αρχικό τμήμα του M_1 που είναι $\mathfrak{G}$-ελεύθερο. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 10.12 παίρνουμε $M_2\in[M_1]^\infty$ με $F_1\sqsubset M_2$ ώστε να ικανοποιείται το συμπέρασμα του Πορίσματος 10.12 για $F=F_1$ και $L=M_2$. Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(F_n)_n\in\mathbb{N}$ στο $[M_1]^{<\infty}$ και μια ακολουθία $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[M_1]^\infty$ ώστε να ικανοποιούνται για κάθε $n\in\mathbb{N}$ τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $F_n\sqsubset M_n$.
(ii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $F_n\sqsubset F_{n+1}$ και $M_{n+1}\in[M_n]^\infty$.
(iii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το συμπέρασμα του Πορίσματος 10.12 ικανοποιείται για $F=F_n$ και $L=M_{n+1}$.

Θέτουμε $L=\cup_{n=1}^\infty F_n$. Ισχυριζόμαστε ότι το L είναι $(\varepsilon,(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})$-καλό. Πράγματι, έστω $x^*\in B_{X^*}$ και θέτουμε $y_0^*=x^*$. Για κάθε $1\le i\le k$ έστω v_i το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}_i$ ώστε $v_i\sqsubset L_{(\Delta,i)}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε

$$t_i^n=v_i\cap F_n=v_i\cap(F_n)_{(\Delta,i)}$$

και για κάθε $1\le i\le k$ και $v_i\sqsubset t\sqsubset L_{(\Delta,i)}$ θέτουμε

$$n_t=\min\big\{n\in\mathbb{N}: t\subseteq L|(|F_n|+1)\big\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$t=(F_{n_t})_{(\Delta,i)}\cup\{L(|F_{n_t}|+1)\}$$

για κάθε $1\le i\le k$ και $v_i\sqsubset t\sqsubset L_{(\Delta,i)}$. Τέλος θέτουμε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $i_n=i_\Delta(|F_n|+1)$.

Από την κατασκευή $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε μια ακολουθία $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ στην B_{X^*} τέτοια ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $1\le i\le k$ και $t\sqsubseteq(F_n)_{(\Delta,i)}$, $|y_{n-1}^*(y_t)-y_n^*(y_t)|\le\frac{\delta_{|t|}}{2^{|F_n|+2}}$.
(ii) Για κάθε $1\le i\le k$ με $i\neq i_n$,

$$\Big|(y_{n-1}^*-y_n^*)(x_{v_i}-x_{t_i^n})\Big|=\Big|(y_{n-1}^*-y_n^*)\Big(\sum_{(F_n)_{(\Delta,i)}\sqsubset t\sqsubseteq v_i^n}y_t\Big)\Big|\le\frac{\varepsilon}{2^{|F_n|+2}}$$

(iii) $|y_n^*(y_{(F_n)_{(\Delta,i_n)}\cup\{L(|F_n|+1)\}})|\le\frac{\delta_{|(F_n)_{(\Delta,i_n)}|+1}}{2^{|F_n|+1}}$.

Από τα (i) και (ii) έχουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $1\le i\le k$,

$$\begin{aligned}|(y_{n-1}^*-y_n^*)(x_{v_i})|&\le|(y_{n-1}^*-y_n^*)(x_{v_i}-x_{t_i^n})|+\sum_{t\sqsubseteq t_i^n}|(y_{n-1}^*-y_n^*)(y_t)|\\&\le\frac{\varepsilon}{2^{|F_n|+2}}+\sum_{t\sqsubseteq t_i^n}\frac{\delta_{|t|}}{2^{|F_n|+2}}<\frac{\varepsilon}{2^{|F_n|+1}}\end{aligned}$$

Επομένως $|(x^*-y_n^*)(x_{v_i})|<\varepsilon$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Από το (iii) και τον ορισμό του n_t, έχουμε ότι για κάθε $1\le i\le k$ και κάθε $v_i\sqsubset t\sqsubset L_{(\Delta,i)}$,

$$|y_{n_t}^*(y_t)|\le\frac{\delta_{|(F_{n_t})_{(\Delta,i_0)}|+1}}{2^{|F_{n_t}|+1}}=\frac{\delta_{|t|}}{2^{|F_{n_t}|+1}}$$

Άρα από (i) και (iii) για κάθε $1 \leq i \leq k$, $v_i \sqsubset t \sqsubset L_{(\Delta,i)}$ και $n > n_t$, έχουμε ότι $t \sqsubseteq (F_m)_{(\Delta,i)}$, για κάθε $n_t < m \leq n$, και

$$|y_n^*(y_t)| \leq |y_{n_t}^*(y_t)| + \sum_{m=n_t+1}^{n} |(y_{m-1}^* - y_m^*)(y_t)|$$
$$\leq \frac{\delta_{|t|}}{2^{|F_{n_t}|+1}} + \frac{\delta_{|t|}}{2^{|F_m|+2}} \leq \delta_{|t|}$$

Έστω y^* ένα w^*-όριο της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε $y^* \in B_{X^*}$ και για κάθε $1 \leq i \leq k$,

(α) $\Big|(x^* - y^*)(x_{v_i})\Big| \leq \varepsilon$.

(β) Για κάθε $t \in [L]^{<\infty}$ με $v_i \sqsubset t \sqsubset L_{(\Delta,i)}$, για κάποιο $i \in \{1,\dots,k\}$, έχουμε ότι $\big|y^*(y_t)\big| \leq \delta_{|t|}$.

Επειδή για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $y^* \in B_{X^*}$ ώστε να ικανοποιεί τα (α) και (β), έχουμε ότι το L είναι $(\varepsilon, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})$-καλο. □

2. Κυριαρχούμενα spreading models

Θεωρημα 10.13. Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ regular thin οικογένειες και $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\mathcal{G} \upharpoonright N \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright N$. Έστω $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία σε ένα χώρο Banach X τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{F} \upharpoonright N \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright N$, θέτουμε $z_v = \widehat{\varphi}(v)$. Υποθέτουμε ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ και $(z_v)_{v\in\mathcal{G}\upharpoonright N}$ παράγουν τις $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ σαν spreading models αντίστοιχα. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j e_j^2 \Big\| \leq \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j e_j^1 \Big\|$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται σε μια σειρά λημμάτων που παρουσιάζεται παρακάτω.

Λημμα 10.14. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $M \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{s_j} \Big\| \geq \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j} \Big\| - \varepsilon \sum_{j=1}^{k} |a_j|$$

όπου για κάθε $1 \leq j \leq k$, v_j είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε $v_j \sqsubset s_j$.

Αποδειξη. Ορίζουμε ένα φραγμένο ασθενώς μηδενικό δέντρο $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ με τον ακόλουθο τρόπο. Για κάθε $t \notin \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright N$ θέτουμε $y_t = 0$. Θέτουμε επίσης $y_\emptyset = \widehat{\varphi}(\emptyset)$ και για κάθε μη κενό $t \in \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright N$ θέτουμε $y_t = \widehat{\varphi}(t) - \widehat{\varphi}(t^*)$, όπου $t^* = t \setminus \{\max t\}$. Είναι άμεσο ότι η οικογένεια $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ είναι ένα φραγμένο ασθενώς μηδενικό δέντρο. Έστω $\varepsilon > 0$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^\infty \delta_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\Delta^k = (N_k^{(1)}, \dots, N_k^{(k)})$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε ξένα άπειρα σύνολα ώστε $N_k^{(j)} = \{n \in \mathbb{N} : n = j(\mathrm{mod} k)\}$, για κάθε $1 \leq j < k$, και $N_k^{(k)} = \{n \in \mathbb{N} : n = 0(\mathrm{mod} k)\}$. Από το Θεώρημα 10.6 για $k, \Delta^k, N, (\mathcal{G}, \dots, \mathcal{G}), (y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}, \frac{\varepsilon}{2}$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, παίρνουμε $M' \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε κάθε $L \in [M']^\infty$ είναι $(\frac{\varepsilon}{2}, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}})$-καλό.

Θέτουμε $M = \{M'(k \cdot n) : n \in \mathbb{N}\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ υπάρχει $L \in [M']^\infty$ ώστε $s_j \sqsubset L_{(\Delta^k,j)}$, για κάθε $1 \leq j \leq k$. Το σύνολο M είναι το επιθυμητό.

Πράγματι, έστω $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^k$ μια πλεγματική k-άδα στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$. Έστω $L \in [M']^\infty$ ώστε $s_j \sqsubset L_{(\Delta^k,j)}$, για κάθε $1 \leq j \leq k$. Έστω επίσης για κάθε $1 \leq j \leq k$, v_j το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε $v_j \sqsubset s_j$. Τότε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $y^* \in B_{X^*}$ ώστε για κάθε $1 \leq j \leq k$

(i) $|x^*(z_{v_j}) - y^*(z_{v_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και

(ii) $|y^*(y_t)| \leq \delta_{|t|}$, για κάθε $t \sqsupset v_j$.

Από το (ii) και την επιλογή της οικογένειας $(y_t)_{t\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$|y^*(x_{s_j} - z_{v_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $1 \leq j \leq k$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big|y^*\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j x_{s_j}\Big)\Big| &\geq \Big|y^*\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j}\Big)\Big| - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{k}|a_j| \\ &\geq \Big|x^*\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j}\Big)\Big| - \varepsilon\sum_{j=1}^{k}|a_j|\end{aligned} \tag{13}$$

Επειδή για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $y^* \in B_{X^*}$ που ικανοποιεί την (13), έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{s_j}\Big\| \geq \Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j}\Big\| - \varepsilon\sum_{j=1}^{k}|a_j|$$

□

Λημμα 10.15. Για κάθε φθίνουσα μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει $M \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \leq l$ στο $\mathbb{N}$, κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright M$ με $s_1(1) = M(l)$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{s_j}\Big\| \geq \Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j}\Big\| - \varepsilon_l\sum_{j=1}^{k}|a_j|$$

όπου για κάθε $1 \leq j \leq k$, το v_j είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε $v_j \sqsubset s_j$.

Αποδειξη. Κάνοντας χρήση του Λήμματος 10.14 κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(M_l)_{l\in\mathbb{N}}$ στο $[N]^\infty$ τέτοια ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leq k \leq l$, κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στο $\mathcal{F} \upharpoonright M_l$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{s_j}\Big\| \geq \Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j z_{v_j}\Big\| - \varepsilon_l\sum_{j=1}^{k}|a_j|$$

όπου για κάθε $1 \leq j \leq k$, το v_j είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε $v_j \sqsubset s_j$. Έστω $M \in [N]^\infty$ τέτοιο ώστε $M(l) \in M_l$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το M είναι το επιθυμητό. □

Από το παραπάνω λήμμα η απόδειξη του Θεωρήματος 10.13 είναι άμεση.

3. Πλεγματικά block παραγόμενα c_0 spreading models

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι αν X είναι ένας χώρος Banach με Schauder βάση και το $\mathcal{SM}^{wrc}(X)$ περιέχει ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0, τότε ο X δέχεται τον c_0 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model. Ας ξεκινήσουμε με το επόμενο λήμμα.

Λημμα 10.16. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση τέτοιος ώστε το $\mathcal{SM}^{wrc}(X)$ περιέχει μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0 και έστω ξ_0 ο ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός ξ ώστε το $\mathcal{SM}^{wrc}_\xi(X)$ να περιέχει μια τέτοια ακολουθία.

Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ_0, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ παράγει c_0 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Τότε για κάθε ακολουθία $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών υπάρχουν $N \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N$ αν $\min s = N(n)$, τότε $\|z_s - x_s\| < \delta_n$.
(ii) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright N$ έχουμε ότι $z_{s_1} < z_{s_2}$, δηλαδή η $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ είναι μια πλεγματικά block υπακολουθία.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι very large στο M. Από την Πρόταση 4.15 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ είναι subordinated και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, w)$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Επειδή η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ παράγει ένα $\mathcal{F}$-spreading model που είναι Schauder βασικά και μη ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1, άπό το Λήμμα 6.5, έχουμε ότι $\widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$. Από το Θεώρημα 6.15 υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X που ικανοποιούν τα ακόλουθα.

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, $\|x_s - \widetilde{x}_s\| < \delta_n/2$, όπου $\min s = L(n)$.
(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του X. Επιπλέον, αν $\widetilde{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (X, w)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widetilde{\varphi}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset) = 0$.
(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $\delta > 0$ και $L' \in [L]^\infty$ υπάρχει $L'' \in [L']^\infty$ ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L''$ να έχουμε

$$\Big\| \sum_{t \sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \Big\| < \delta$$

όπου $s_2/_{s_1} = s_2 \cap \{1, \dots, \max s_1\}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $\delta > 0$ και $L' \in [L]^\infty$. Τότε από το Θεώρημα 1.20 υπάρχει $L'' \in [L']^\infty$ ώστε είτε

$$\Big\| \sum_{t \sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \Big\| < \delta$$

για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L''$, ή

$$\Big\| \sum_{t \sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \Big\| \geq \delta$$

για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L''$. Θα δείξουμε ότι η δεύτερη εναλλάκτική είναι αδύνατη. Αλλιώς έστω $\mathcal{G} = \mathcal{F}/_{L''}$ (βλ. Ορισμό 9.7) και ας παρατηρήσουμε ότι η $\big(\widetilde{x}_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L''(2\mathbb{N})}$ είναι ημινορμαρισμένη. Επιπλέον η $\big(\widetilde{x}_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L''(2\mathbb{N})}$ είναι subordinated με $\widetilde{\varphi}^{(1,\mathcal{G})}(\emptyset) = \widetilde{\varphi}(\emptyset) = 0$. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα $\mathcal{F}$-spreading model της $\big(\widetilde{x}_s^{(1,\mathcal{G})}\big)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L''(2\mathbb{N})}$. Επομένως από το Θεώρημα 5.4 έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη τετριμμένη και unconditional. Αυτό, λόγω της Πρότασης 10.13, συνεπάγεται ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0. Από το Λήμμα 9.5 ερχόμαστε σε αντίθεση με την υπόθεση της ελαχιστικότητας του ξ_0. □

Κάνοντας χρήση του παραπάνω ισχυρισμού κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[L]^\infty$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L_n$ να έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{t \sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \Big\| < \delta_n/2$$

Έτσω $L_\infty \in [L]^\infty$ ώστε $L_\infty(n) \in L_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $N = L_\infty(2\mathbb{N})$. Έστω $(z_s^N)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ που ορίζεται όπως στο Λήμμα 9.9 (με N στη θέση του L). Τότε η $(z_s^N)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright N}$ είναι πλεγματικά block. Επιπλέον για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright N$ με $\min s = N(n) - L_\infty(2\mathbb{N})$ έχουμε ότι $\|z_s^N - \widetilde{x}_s\| < \frac{\delta_n}{2}$ και συνεπώς $\|z_s^N - x_s\| < \delta_n$. □

Παρατηρηση 10.17. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction N}$ παράγει το ίδιο $\mathcal{F}$-spreading model με την $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$.

Θεωρημα 10.18. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση. Για κάθε $\xi<\omega_1$ έχουμε ότι αν το $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ περιέχει ακολουθία ισοδύναμη με το c_0, τότε ο X δέχεται τον c_0 σαν πλεγματικά block παραγόμενο ξ-spreading model.

4. Δυϊκότητα των c_0 και ℓ^1 spreading models

Το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής είναι το Θεώρημα 10.26 που γενικεύει το κλασικό ότι αν ένας χώρος Banach δέχεται τον c_0 σαν spreading model τότε ο δυϊκός του δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model.

Ορισμος 10.19. Έστω ένας χώρος Banach X, $c>0$, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$, $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια νορμαρισμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}}$ μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X^*. Θα λέμε ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από c αν για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$ και κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στο $\mathcal{F}\restriction M$ με $s_1(1)\geq M(k)$ έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^k a_j x_{s_j}^*\Big(\sum_{j=1}^k \mathrm{sign}(a_j)x_{s_j}\Big)\geq c\sum_{j=1}^k |a_j|$$

Θα λέμε ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1-συναφείς αν επάρχει $c>0$ ώστε οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ να είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από c.

Παρατηρηση 10.20. Υποθέτουμε ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1-συναφείς. Τότε αν η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει c_0 σαν $\mathcal{F}$-spreading model, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε $\mathcal{F}$-spreading model της $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1.

Ορισμος 10.21. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$, $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια νορμαρισμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}}$ μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X^*. Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ καλείται διορθογώνια με την $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ αν για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F}\restriction M$ με $s_1(1)\geq M(k)$ έχουμε ότι

$$x_{s_j}^*(x_{s_i})=\delta_{ij},\ \text{ για κάθε }\ i,j\in\{1,\ldots,k\}$$

Παρατηρηση 10.22. Είναι άμεσο ότι αν η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι διορθογώνια με την $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ τότε οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από 1.

Λημμα 10.23. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια νορμαρισμένη πλεγματικά block $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ διορθωγώνια με την $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ ως προς την $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

Αποδειξη. Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $s\in\mathcal{F}\restriction M$ υπάρχει $\widetilde{x}_s^*\in B_{X^*}$ ώστε $\widetilde{x}_s^*(x_s)=\|x_s\|=1$. Για κάθε $s\in\mathcal{F}\restriction M$ θέτουμε

$$x_s^*=\sum_{n\in\mathrm{range}(x_s)}\widetilde{x}_s^*(e_n)e_n^*$$

όπου $\mathrm{range}(x_s)=\{\min(\mathrm{supp}(x_s)),\ldots,\max(\mathrm{supp}(x_s))\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

Προταση 10.24. Έστω ένας χώρος Banach X με Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν για κάποιο $\xi<\omega_1$ το σύνολο $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ μια ακολουθία ισοδύναμη στη συνήθη βάση του c_0, τότε ο χώρος $\overline{<(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}>}$ δέχεται τον l^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο ξ-spreading model.

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 10.18 υπάρχουν μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ πλεγματικά block παράγει τον c_0 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Υποθέτουμε επίσης ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι νορμαρισμένη. Από το Λήμμα 10.23 υπάρχει μια φραγμένη $\mathcal{F}$-υπακολοουθία $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ διαρθογώνια με την $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ η οποία είναι πλεγματικά block ως προς την $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. Από τις Παρατηρήσεις 10.22 και 10.20 έχουμε ότι η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. $\square$

Λημμα 10.25. Έστω ένας χώρος Banach X, μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια νορμαρισμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}}$ μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X^* ώστε οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ να είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από c, για κάποιο $c > 0$. Έστω $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθθία από θετικούς πραγματικούς αριθμούς και $(z_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια νορμαρισμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X ώστε $\|x_s - z_s\| \leq \delta_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s \in \mathcal{F} \restriction M$ με $\min s = M(n)$. Αν $\sum_{n=1}^\infty \delta_n < \frac{c}{2K}$, όπου $K = \sup\{\|x_s^*\| : s \in \mathcal{F} \restriction M\}$ τότε οι $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ και $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από $c/2$.

Αποδειξη. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και κάθε πλεγματική k-άδα $(s_j)_{j=1}^k$ στην $\mathcal{F} \restriction M$ με $s_1(1) \geq M(k)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k a_j x_{s_j}^* \Big(\sum_{j=1}^k \operatorname{sign}(a_j) z_{s_j} \Big) & \\
&\geq \sum_{j=1}^k a_j x_{s_j}^* \Big(\sum_{j=1}^k \operatorname{sign}(a_j) x_{s_j} \Big) - \sum_{j=1}^k |a_j| \cdot \|x_{s_j}^*\| \Big\| \sum_{i=1}^k \|z_{s_i} - x_{s_i}\Big\| \\
&\geq \frac{c}{2} \sum_{j=1}^k |a_j|
\end{aligned}$$

$\square$

Θεωρημα 10.26. Έστω ένας χώρος Banach X. Αν για κάποιο $\xi < \omega_1$ το σύνολο $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ περιέχει μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0, τότε ο X^* δέχεται τον l^1 σαν ξ-spreading model.

Αποδειξη. Έστω ξ_0 ο ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός ξ τέτοιος ώστε το σύνολο $\mathcal{SM}_\xi^{wrc}(X)$ περιέχει μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0. Ας παρατηρήσουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για $\xi = \xi_0$. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ_0, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει c_0 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Ας παρατηρήσουμε ότι μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι νορμαρισμένη. Έστω Y ένας διαχωρίσιμος (κλειστός) υπόχωρος του X ώστε $\{x_s : s \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ και $T : Y \to C[0,1]$ μια ισομετρική (γραμμική) εμφύτευση. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Schauder βάση του $C[0,1]$. Τότε η $(T(x_s))_{s\in\mathcal{F}}$ είναι μια νορμαρισμένη ασθενώς σχετικά συμπαγής $\mathcal{F}$-ακολουθία στον $C[0,1]$. Έστω $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^\infty \delta_n < \infty$. Από το Λήμμα 10.16 υπάρχουν $L_1 \in [M]^\infty$ και $(\widetilde{z}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L_1}$ ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction L_1$, αν $\min s = L_1(l)$, τότε $\|\widetilde{z}_s - T(x_s)\| < \frac{\delta_l}{2}$.
(ii) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L_1$ έχουμε ότι $\widetilde{z}_{s_1} < \widetilde{z}_{s_2}$.

Για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction L_1$ θέτουμε $z_s = \frac{\widetilde{z}_s}{\|\widetilde{z}_s\|}$. Τότε η $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L_1}$ είναι μια νορμαρισμένη $\mathcal{F}$-υπακολουθία ώστε

(α) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \restriction L_1$, αν $\min s = L_1(l)$, τότε $\|z_s - T(x_s)\| < \delta_l$.
(β) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \restriction L_1$ έχουμε ότι $z_{s_1} < z_{s_2}$.

Από το Λήμμα 10.23 υπάρχει μια $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(z_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ στον $(C[0,1])^*$ διορθογώνια με την $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$. Από την Παρατήρηση 10.22 έχουμε ότι οι $(z_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ και $(z_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L_1}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από 1. Έστω $K = \sup\{\|z_s^*\| : s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_1\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \delta_n < \frac{1}{2K}$ και $L = \{L_1(n) : n \geq n_0\}$. Από το Λήμμα 10.25 οι $(T(x_s))_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ και $(z_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από $\frac{1}{2}$. Αυτό εύκολα συνεπάγεται ότι οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ και $(T^*(z_s^*))_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι ℓ^1-συναφείς πάνω από $\frac{1}{2}$. Ας παρατηρήσουμε ότι η $(T^*(z_s^*))_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι μια φραγμένη $\mathcal{F}$-υπακολουθία στον Y^*. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x_s^* \in X^*$ ώστε $\|x_s^*\| = \|T^*(z_s^*)\|$ και $x_s^*|_Y = T^*(z_s^*)|_Y$. Συνεπώς η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι μια φραγμένη $\mathcal{F}$-υπακολουθία του X^* και οι $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$, $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι ℓ^1-συναφείς (πάνω από $\frac{1}{2}$). Άρα από την Παρατήρηση 10.20 έχουμε ότι η $(x_s^*)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Καθιέρωση της ιεραρχίας των spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη χώρων X που έχουν τον ℓ^1 σαν ξ-spreading model και όχι μικρότερης τάξης. Παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα. Το πρώτο απαντά το πρόβλημα για $\xi < \omega$ και το δεύτερο αφορά υπερπεπερασμένους αριθμήσιμους διατακτικούς αριθμούς.

1. Χώροι που έχουν τον ℓ^1 σαν $k+1$ και όχι σαν k-τάξης spreading model

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έναν χώρο Banach $\mathfrak{X}_{k+1}$, που έχει unconditional βαση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ η οποία παράγει ℓ^1 spreading model τάξης $k+1$ και δεν είναι $(k+1)$-Cesàro αθροίσιμη σε κανένα στοιχείο x_0 στον $\mathfrak{X}_{k+1}$. Επιπλέον ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δεν έχει τον ℓ^1 σαν k-spreading model. Ειδικότερα ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δείχνει ότι η μη $(k+1)$-Cesàro αθροισιμότητα μιας $[\mathbb{N}]^{k+1}$-ακολουθία δεν συνεπάγεται καμία περαιτέρω πληροφορία σχετικά με τα ℓ^1 spreading models του χώρου πέρα από το συμπέρασμα του Θεωρήματος 9.30.

1.1. Ο ορισμός των χώρων $\mathfrak{X}_{k+1}$. Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ ορίζεται ως την πλήρωση του $c_{00}([\mathbb{N}]^{k+1})$ κάτω από μια συγκεκριμένη νόρμα. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 11.1. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Μια οικογένεια $E \subseteq [\mathbb{N}]^{k+1}$ καλείται *επιτρεπτή* να υπάρχουν $F_1 < \ldots < F_{k+1}$ υποσύνολα του $\mathbb{N}$ με $|F_1| = \ldots = |F_{k+1}|$ και $|F_1| \leq \min F_1$ ώστε $E \subseteq F_1 \times \ldots \times F_{k+1}$.

Για παράδειγμα, για κάθε πλεγματική l-άδα $(s_j)_{j=1}^l$ στην $[\mathbb{N}]^{k+1}$ το σύνολο $E = \{s_1, \ldots, s_l\}$ είναι επιτρεπτό. Για $x = \sum_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}} x(s)e_s$ στον $c_{00}([\mathbb{N}]^{k+1})$ θέτουμε

$$\|x\| = \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n \|x|_{E_i}\|_1^2\Big)^{\frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N},\ (E_i)_{i=1}^n \text{ είναι ξένα και για } E_i \text{ είναι επιτρεπτό}\Big\}$$

όπου $\|x|_{E_i}\|_1 = \sum_{s\in E_i} |x(s)|$.

Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ ορίζεται να είναι η πλήρωση του $(c_{00}([\mathbb{N}]^{k+1}), \|\cdot\|)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα norming σύνολο για τον χώρο $\mathfrak{X}_{k+1}$ είναι το σύνολο W_{k+1} που ορίζεται ως εξής. Αρχικά θέτουμε

$$W_{k+1}^0 = \Big\{\sum_{s\in E} \pm e_s^* : E \text{ είναι επιτρεπτό}\Big\}$$

και τότε ορίζουμε

$$W_{k+1} = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i : n \in \mathbb{N},\ \{f_i\}_{i=1}^n \subseteq W_{k+1}^0 \text{ με ανα δύο ξένους φορείς και } \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 1\Big\}$$

είναι άμεσο ότι Hamel βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ του $c_{00}([\mathbb{N}]^{k+1})$ αποτελεί μια unconditional βάση για τον χώρο $\mathfrak{X}_{k+1}$ και ότι παράγει ισομετρικά τον ℓ^1 σαν spreading model τάξης $k+1$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα δείξουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 11.2. Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model τάξης l, για κάθε $1 \leq l \leq k$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 11.2 απαιτεί την επόμενη πρόταση.

Προταση 11.3. Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δε δέχεται κανένα πλεγματικά ξένα παραγόμενο ℓ^1 spreading model τάξης k.

Η απόδειξη της Πρότασης 11.3 θα αναβληθεί για την επόμενη υποπαράγραφο. Δεδομένης της πρότασης αυτής έχουμε την αυτοπάθεια του χώρου $\mathfrak{X}_{k+1}$ και την απόδειξη του Θεωρήματος 11.2 ως εξής.

Πορισμα 11.4. Ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ είναι αυτοπαθής.

Αποδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ είναι φραγμένα πλήρης το οποίο συνεπάγεται ότι ο c_0 δεν περιέχεται στον χώρο $\mathfrak{X}_{k+1}$. Επιπλέον αν ο ℓ^1 περιέχεται στον $\mathfrak{X}_{k+1}$, τότε υπάρχει μια ξένα φερόμενη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την Πρόταση 11.3. Άρα, από το Θεώρημα του James (βλ. [**27**]), ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ είναι αυτοπαθής. $\square$

Αποδειξη του Θεωρηματος 11.2. Από το Πόρισμα 2.11, αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model τάξης k. Πράγματι, προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι τον δέχεται. Έστω $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ μια ακολουθία στον $\mathfrak{X}_{k+1}$ που παράγει ένα ℓ^1 spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τάξης k. Από το Πόρισμα 11.4, η ακολουθία $(x_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής. Συνεπώς από το Θεώρημα 6.22 υπάρχουν $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια υπακολουθία $(x'_s)_{s\in[M]^k}$ στον $\mathfrak{X}_{k+1}$ που παράγει ένα ℓ^1 spreading model και δέχεται μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση. Άτοπο από την Πρόταση 11.3. $\square$

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με το ακόλουθο.

Προταση 11.5. Κάθε υπακολουθία της βάσης $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ του $\mathfrak{X}_{k+1}$ δεν είναι $(k+1)$-Cesàro αθροίσιμη σε κανένα x_0 στον $\mathfrak{X}_{k+1}$.

Αποδειξη. Επειδή ο $\mathfrak{X}_{k+1}$ είναι αυτοπαθής και $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ είναι μια Schauder βάση του $\mathfrak{X}_{k+1}$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{k+1}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο 0. Επομένως από την Παρατήρηση 9.22 αν για κάποιο $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ η υπακολουθία $(e_s)_{s\in[M]^{k+1}}$ ήταν $(k+1)$-Cesàro αθροίσιμη σε κάποιο x_0 στον $\mathfrak{X}_{k+1}$, τότε $x_0 = 0$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο. Πράγματι, έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$y_n = \binom{(k+2)n}{k+1}^{-1} \sum_{s\in[M|(k+2)n]^{k+1}} e_s$$

και για κάθε $1 \leq i \leq k+2$ θέτουμε επίσης

$$F_i^n = \{M((i-1)n+1), \ldots, M(in)\}$$

Επιπλέον, έστω

$$E_n = F_2^n \times \ldots \times F_{k+2}^n \text{ και } \varphi_n = \sum_{s\in E_n} e_s^*$$

Τότε $\varphi_n \in W_{k+1}^0$ και $\|y_n\| \geq \varphi_n(y_n) = n^{k+1} \cdot \binom{(k+2)n}{k+1}^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(k+1)!}{(k+2)^{k+1}}$. $\square$

1.2. Απόδιεξη της Πρότασης 11.3. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ορολογία.

(α) Έστω $s_1, s_2 \in [\mathbb{N}]^{k+1}$. Θα λέμε ότι τα s_1, s_2 είναι *επιτρεπτά* αν το σύνολο $\{s_1, s_2\}$ είναι επιτρεπτό.

(β) Έστω G_1, G_2 υποσύνολα του $[\mathbb{N}]^{k+1}$. Θα λέμε ότι το ζεύγος (G_1, G_2) είναι *ασθενώς επιτρεπτό* αν για κάθε $s_2 \in G_2$ υπάρχει $s_1 \in G_1$ με s_1, s_2 να είναι επιτρεπτό.

(γ) Μια πεπερασμένη ακολουθία $(G_0, \ldots, G_l)$ υποσυνόλων του $[\mathbb{N}]^{k+1}$ θα καλείται *ασθενώς επιτρεπτό μονοπάτι* αν για κάθε $0 \leq i < l$ το ζεύγος (G_i, G_{i+1}) είναι ασθενώς επιτρεπτό.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Ορισμος 11.6. Έστω

$$D = \big\{(\varepsilon, \delta) \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}) \times [0, 1) : \ (1 - 2\varepsilon)^2 + (1 - 2\varepsilon - \delta)^2 \geq 1\big\}$$

και $h : D \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με τον ακόλουθο κανόνα

$$h(\varepsilon, \delta) = (1 - (1 - 2\varepsilon - (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}}$$

Πριν περάσουμε στην απόδειξη της Πρότασης 11.3, ας κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τη συνάρτηση $h(\varepsilon, \delta)$. Καταρχάς ας σημειώσουμε ότι η καμπύλη

$$\mathcal{E} = \{(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}^2 : \ (1 - 2\varepsilon)^2 + (1 - 2\varepsilon - \delta)^2 = 1\}$$

είναι μια έλλειψη, καθως η εικόνα της μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, που ορίζεται ως

$$T(\varepsilon, \delta) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix}$$

είναι ένας κύκλος με κέντρο το $(1, 1)$ και ακτίνα 1. Επιπλέον ας σημειώσουμε ότι $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, 0)$ είναι το πρώτο σημείο τομής της καμπύλης $\mathcal{E}$ και του ε-άξονα. Επίσης το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην $\mathcal{E}$ και ο δ-άξονας είναι η εφαπτόμενη ευθεία της $\mathcal{E}$ στο σημείο $(0, 1)$. Συνεπώς το σύνολο D είναι ένα καμπυλόγραμμο τρίγωνο με πλευρές τα J_1, J_2, J_3, όπου J_1 (αντίστοιχα J_2) είναι τα διαστήματα με άκρα $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, 0)$ και $(0, 0)$ (αντίστοιχα $(0, 0)$ και $(0, 1)$) και J_3 είναι το τόξο της $\mathcal{E}$ που ενώνει το $(0, 1)$ με το $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, 0)$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνάρτηση h είναι καλά ορισμένη στο D. Επιπλέον η h είναι γνησίως αύξουσα στο D κάτω από την ακόλουθη έννοια: για κάθε $(\varepsilon', \delta'), (\varepsilon, \delta) \in D$, με είτε $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ και $0 \leq \delta' \leq \delta$ ή $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$ και $0 \leq \delta' < \delta$, έχουμε ότι $h(\varepsilon', \delta') < h(\varepsilon, \delta)$. Τέλος $h[D] = [0, 1]$, $h^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$ και $h^{-1}(\{1\}) = J_3$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τα ακόλουθα.

Λημμα 11.7. Έστω $(\varepsilon, \delta) \in D$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}_{k+1}$ με ξένους πεπερασμένους φορείς ώστε $\|x_1\|, \|x_2\| \leq 1$ και $\|x_1 + x_2\| > 2 - 2\varepsilon$. Έστω $G_1 \subseteq \text{supp}(x_1)$ ώστε $\|x_1|_{G_1^c}\| \leq \delta$. Τότε υπάρχει $G_2 \subseteq \text{supp}(x_2)$ ώστε να ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(α) Το ζεύγος (G_1, G_2) είναι ασθενώς επιτρεπτό.

(β) $\|x_2|_{G_2^c}\| \leq h(\varepsilon, \delta)$.

Αποδειξη. Επειδή $\|x_1 + x_2\| > 2 - 2\varepsilon$, υπάρχει $\varphi \in W_{k+1}$ ώστε $\varphi(x_1 + x_2) > 2 - 2\varepsilon$. Επειδή $\|x_1\|, \|x_2\| \leq 1$, έχουμε ότι $\varphi(x_1) > 1 - 2\varepsilon$ και $\varphi(x_2) > 1 - 2\varepsilon$. Το συναρτησιακό φ είναι της μορφής $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, όπου τα $f_1, \ldots, f_n$ ανα δύο ξένα φερόμενα στοιχεία του $\mathcal{G}_{k+1}$. Θέτουμε $I = \{1, \ldots, n\}$ και το σπάμε σε I_1 και I_2 ως εξής:

$$I_1 = \{i \in I : \ \text{supp}(f_i) \cap G_1 \neq \emptyset\} \ \text{ και } \ I_2 = I \setminus I_1 = \{i \in I : \ \text{supp}(f_i) \subseteq G_1^c\}$$

Επίσης θέτουμε $\varphi_1 = \sum_{i\in I_1} \lambda_i f_i$ και $\varphi_2 = \sum_{i\in I_2} \lambda_i f_i$. Άρα $\varphi(x_1) \le \|x_1|_{G_1^c}\| \le \delta$ και συνεπώς $\varphi(x_1) > 1 - 2\varepsilon - \delta$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε

$$1 - 2\varepsilon - \delta < \varphi_1(x_1) = \sum_{i\in I_1} \lambda_i f_i(x_1) \le \Big(\sum_{i\in I_1} \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i\in I_1} f_i(x_1)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\sum_{i\in I_1} \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή το $\sum_{i\in I_1} \frac{f_i(x_1)}{(\sum_{j\in I_1} f_j(x_1)^2)^{\frac{1}{2}}} f_i$ ανήκει στο W_{k+1} και $x_1 \le 1$. Επειδή $\sum_{i\in I} \lambda_i^2 \le 1$, έχουμε ότι

$$(\sum_{i\in I_2} \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Επομένως

$$\varphi_2(x_2) = \sum_{i\in I_2} \lambda_i f_i(x_2) \le \Big(\sum_{i\in I_2} \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i\in I_2} f_i(x_2)^2\Big)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα $\varphi_1(x_2) > 1 - 2\varepsilon - (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}}$. Θέτουμε

$$G_2 = \mathrm{supp}(x_2) \cap \mathrm{supp}(\varphi_1)$$

Τότε από τον ορισμό του I_1 είναι άμεσο ότι το ζεύγος (G_1, G_2) είναι επιτρεπτό. Τέλος, επειδή $\|x_2|_{G_2}\|^2 + \|x_2|_{G_2^c}\|^2 \le \|x_2\|^2 \le 1$ και $\|x_2|_{G_2}\| \ge \varphi(x_2) = \varphi_1(x_2)$, έχουμε ότι

$$\|x_2|_{G_2^c}\| \le (1 - (1 - 2\varepsilon - (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}} = h(\varepsilon, \delta)$$

□

Λημμα 11.8. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\delta' \in (0,1)$ υπάρχει $\varepsilon' > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Για κάθε $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$, κάθε ακολουθία $(x_i)_{i=0}^m$ από ξένα και πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία του $\mathfrak{X}_{k+1}$ με $\|x_i\| \le 1$, για κάθε $0 \le i \le m$, αν $\|x_i + x_{i+1}\| > 2 - 2\varepsilon$, για κάθε $0 \le i < m$, τότε υπάρχει ένα επιτρεπτό μονοπάτι $(G_i)_{i=0}^m$ ώστε $G_i \subseteq \mathrm{supp}\, x_i$ και $\|x_i|_{G_i^c}\| < \delta'$, για κάθε $0 \le i \le m$.

Αποδειξη. Έστω $m = 1$ και $\delta' \in (0,1)$. Επειδή $h(0,0) = 0$, από τη συνέχεια της h υπάρχει $\varepsilon' > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$, να έχουμε ότι $(\varepsilon, 0) \in D$ και $h(\varepsilon, 0) < \delta'$. Έστω $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$ και x_0, x_1 με $\|x_0\| \le 1$, $\|x_1\| \le 1$ και $\|x_0 + x_1\| > 2 - 2\varepsilon$. Θέτουμε $G_0 = \mathrm{supp}\, x_0$. Τότε από το Λήμμα 11.7, υπάρχει $G_1 \subseteq \mathrm{supp}\, x_1$ ώστε $\|x_1|_{G_1^c}\| \le h(\varepsilon, 0) < \delta'$ και το αποτέλεσμα έπεται.

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Έστω $\delta' \in (0,1)$. Επειδή $h(0,0) = 0$, από τη συνέχεια της h υπάρχουν $\varepsilon_1 > 0$ και $0 < \delta_1' < \delta'$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1'$, έχουμε ότι $(\varepsilon, \delta_1') \in D$ και $h(\varepsilon, \delta_1') < \delta'$. Έστω $\varepsilon_2' > 0$ ώστε να ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση για το m και δ_1'. Έστω $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_2'\}$. Έστω $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$, $(x_i)_{i=0}^{m+1}$ μια ακολουθία από ξένα και πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία του $\mathfrak{X}_{k+1}$ με $\|x_i\| \le 1$, για κάθε $0 \le i \le m$. Υποθέτουμε ότι $\|x_i + x_{i+1}\| > 2 - 2\varepsilon$, για κάθε $0 \le i < m$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα ασθενώς επιτρεπτό μονοπάτι $(G_i)_{i=0}^m$ ώστε $G_i \subseteq \mathrm{supp}\, x_i$ και $\|x_i|_{G_i^c}\| < \delta_1' < \delta'$, για κάθε $0 \le i \le m$. Από το Λήμμα 11.7 υπάρχει $G_{m+1} \subseteq \mathrm{supp} x_{m+1}$ τέτοιο ώστε $\|x_{m+1}|_{G_{m+1}^c}\| < h(\varepsilon, \delta_1') < \delta'$ και τα G_m, G_{m+1} είναι ασθενώς επιτρεπτά. Άρα το $(G_i)_{i=0}^{m+1}$ είναι ένα ασθενώς επιτρεπτό μονοπάτι και $\|x_i|_{G_i^c}\| < \delta'$, για κάθε $0 \le i \le m+1$. Από επαγωγή ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. □

Λημμα 11.9. Έστω $(G_i)_{i=0}^k$ ένα ασθενώς επιτρεπτό μονοπάτι στο $[\mathbb{N}]^{k+1}$ και $N = \max\{\max s : s \in G_0\}$. Τότε για κάθε $0 \le i \le k$ και $s \in G_i$, $s(1) \le N$.

Αποδειξη. Με επαγωγή στο $0 \le i \le k$ θα δείξουμε ότι για κάθε $s \in G_i$, $s(k+1-i) \le N$, το οποίο εύκολα συνεπάγεται το συμπέρασμα. Από τον ορισμό του N, είναι προφανές ότι για κάθε $t \in G_0$, $s(k+1) \le N$. Υποθέτουμες ότι για κάποιο $0 \le i < m$ έχουμε ότι $s(k+1-i) \le N$ για κάθε $s \in G_i$. Επειδή το ζεύγος (G_i, G_{i+1})

είναι ασθενώς επιτρεπτό, έχουμε ότι για κάθε $s \in G_{i+1}$ υπάρχει $s' \in G_i$ ώστε το σύνολο $\{s', s\}$ να είναι επιτρεπτό. Συνεπώς $s(k+1-(i+1)) < s'(k+1-i) \leq N$. $\square$

Λημμα 11.10. Έστω $f \in W^0_{k+1}$ και $x \in \mathfrak{X}_{k+1}$ με πεπερασμένο φορέα. Τότε είτε

(i) $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(x) = \emptyset$, ή

(ii) $|\mathrm{supp}(f)| \leq n_0^{k+1}$, όπου $n_0 = \max\{s(1) : s \in \mathrm{supp}(x)\}$.

Αποδειξη. Έστω $f \in W^0_{k+1}$. Τότε υπάρχουν $F_1 < \ldots < F_{k+1}$ υποσύνολα του $\mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{supp}(f) \subseteq F_1 \times \ldots \times F_{k+1}$ και $|F_1| \leq \min F_1$. Άρα $|\mathrm{supp}(f)| \leq \min F_1$. Έστω $x \in \mathfrak{X}_{k+1}$ πεπερασμένα φερόμενο ώστε $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(x) \neq \emptyset$. Έστω $s \in \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(x)$. Τότε $s(1) \geq \min F_1$ και $n_0 \geq s(1)$, όπου $n_0 = \max\{s(1) : s \in \mathrm{supp}(x)\}$. Συνεπώς $n_0 \geq \min F_1$ και επομένως $|\mathrm{supp}(f)| \leq n_0^{k+1}$. $\square$

Είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στην απόδειξη της Πρότασης 11.3.

Αποδειξη της Προτασης 11.3. Έστω $\delta' = 0.01$ και επιλέγουμε $0 < \varepsilon < \delta$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Λήμματος 11.8 για $\delta' = 0,01$ και $m = k$. Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι ο χώρος $\mathfrak{X}_{k+1}$ δέχεται ένα πλεγματικά ξένα παραγόμενο ℓ^1 spreading model τάξης k. Από την Πρόταση 9.1 και την Παρατήρηση 9.2 υπάρχει μια ακολουθία $(x_t)_{t \in [\mathbb{N}]^k}$ στη μοναδιαία μπάλα του $\mathfrak{X}_{k+1}$ η οποία πλεγματικά ξένα παράγει ένα ℓ^1 spreading model κάτω σταθεράς μεγαλύτερης του $1-\varepsilon$.

Σταθεροποιούμε για τη συνέχεια το σύνολο $t_0 = \{2, 4, \ldots, 2k\}$. Έστω $t \in [\mathbb{N}]^k \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $t_0 < t$. Από την Πρόταση 1.25 υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(t_j)_{j=0}^k$ στο $[\mathbb{N}]^k$ (που εξαρτάται από την επιλογή του t), από το t_0 στο t μήκους k. Από το Λήμμα 11.8 υπάρχει ένα ασθενώς επιτρεπτό μονοπάτι $(G_i)_{i=0}^k$ ώστε $G_i \subseteq \mathrm{supp}\ x_{t_i}$ και $\|x_{t_i}|_{(G_i)^c}\| < \delta$, για κάθε $i = 0, \ldots, k$. Θέτουμε

$$G_t = G_k, \quad x_t^1 = x_t|_{G_t} \quad \text{και} \quad x_t^2 = x_t - x_t^1$$

Άρα για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και κάθε πλεγματική l-άδα $(t_j)_{j=1}^l$ στο $[\mathbb{N}]^k$ με $s_1(1) > \max\{\max s_0, l-1\}$, έχουμε ότι

$$\Big\| \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} x^1_{t_i} \Big\| > 1 - \varepsilon - \delta \tag{14}$$

Έστω $N_0 = \max\{\max s : s \in G_0\}$. Τότε από το Λήμμα 11.9, έχουμε ότι $s(1) \leq N_0$ για κάθε $s \in \mathrm{supp}(x_t^1) = G_t$ και $t \in [\mathbb{N}]^k \upharpoonright\upharpoonright \mathbb{N}$ με $t_0 < t$.

Έστω $d = \lceil \frac{N_0^{k+1}}{\varepsilon^2} \rceil$ και $l_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{d}{l_0} < \varepsilon$. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(t_j)_{j=1}^l$ μια πλεγματική l-άδα στο $[\mathbb{N}]^k$ με $t_1(1) > \max\{\max t_0, l-1\}$. Θα δείξουμε ότι

$$\Big\| \frac{1}{l_0} \sum_{j=1}^{l_0} x^1_{t_j} \Big\| < 2\varepsilon$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της σχέσης (14).

Πράγματι, έστω $\varphi \in W_{k+1}$, $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ με $\sum_{p=1}^q \lambda_p^2 \leq 1$ και $f_1, \ldots, f_q \in W^0_{k+1}$ ξένα ανα δύο φερόμενα ώστε $\varphi = \sum_{p=1}^q \lambda_p f_p$. Για κάθε $j = 1, \ldots, l_0$ θέτουμε

$$I_j = \Big\{ p \in \{1, \ldots, q\} : \mathrm{supp}(f_p) \cap \mathrm{supp}(x^1_{t_j}) \neq \emptyset \Big\}$$

Θέτουμε επίσης

$$F_1 = \Big\{ j \in \{1, \ldots, l_0\} : \Big(\sum_{p \in I_j} \lambda_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \Big\} \ \text{και} \ F_2 = \{1, \ldots, m\} \setminus F_1$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varphi(\frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0} x^1_{t_j}) &= \sum_{p=1}^{q}\lambda_p f_p(\frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0} x^1_{t_j}) = \frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0}\sum_{p=1}^{q}\lambda_p f_p(x^1_{t_j}) \\
&= \frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0}\sum_{p\in I_j}\lambda_p f_p(x^1_{t_j}) \leq \frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0}\Big(\sum_{p\in I_j}\lambda_p^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{p\in I_j} f_p(x^1_{t_j})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{l_0}\sum_{j\in F_1}\Big(\sum_{p\in I_j}\lambda_p^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{l_0}\sum_{j\in F_2}\Big(\sum_{p\in I_j}\lambda_p^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon|F_1|}{l_0} + \frac{|F_2|}{l_0} \leq \varepsilon + \frac{|F_2|}{l_0}
\end{aligned}$$

Επειδή τα $(x_{t_j})_{j=1}^{l_0}$ είναι ξένα φερόμενα, από το Λήμμα 11.10, έχουμε ότι για κάθε $p = 1,\dots,q$, $|A_p| \leq N_0^{k+1}$, όπου

$$A_p = \big\{j \in \{1,\dots,l_0\} : \operatorname{supp}(f_p)\cap \operatorname{supp}(x^1_{t_j}) \neq \emptyset\big\}$$

Άρα

$$\sum_{j=1}^{l_0}\sum_{p\in I_j}\lambda_p^2 = \sum_{p=1}^{q}\sum_{j\in A_p}\lambda_p^2 \leq N_0^{k+1}\sum_{p=1}^{q}\lambda_p^2 \leq N_0^{k+1}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $|F_2| \leq d$. Συνεπώς $\varphi(\frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0} x^1_{t_j}) \leq \varepsilon + \frac{d}{l_0} < 2\varepsilon$. $\square$

2. Χώροι που δέχονται τον ℓ^1 σαν ξ-spreading model και όχι μικρότερης τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ με μια unconditional βάση που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Ο χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ δέχεται τον ℓ^1 σαν ξ-spreading model.
(ii) Για κάθε διατακτικό ζ ώστε $\zeta + 2 < \xi$, ο χώρος $\mathfrak{X}_\xi$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model.

Επομένως, αν ξ είναι ένας οριακός αριθμήσιμος διατακτικός, τότε ο ξ είναι ο ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός ζ ώστε το συνολο $\mathcal{SM}_\zeta(\mathfrak{X}_\xi)$ να περιέχει μια ακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

2.1. Ο ορισμός του χώρου $\mathfrak{X}_\xi$. Έστω $\xi < \omega_1$ και $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ. Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\| : c_{00}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ θετοντας

$$\|x\| = \sup\left\{\Big(\sum_{i=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{l_i}|x(t^i_j)|\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} : \begin{array}{l} d\in\mathbb{N}, (t^1_j)_{j=1}^{l_1},\dots,(t^d_j)_{j=1}^{l_d} \in Plm(\mathcal{F}) \text{ και} \\ \text{για κάθε } 1\leq i_1 < i_2 \leq d, \\ \{t^{i_1}_j : 1\leq j\leq l_{i_1}\}\cap\{t^{i_2}_j : 1\leq j\leq l_{i_2}\} = \emptyset \end{array}\right\}$$

για κάθε $x \in c_{00}(\mathcal{F})$. Ορίζουμε $X_\xi = \overline{(c_{00}(\mathcal{F}), \|\cdot\|)}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα norming σύνολο για τον χώρο αυτό είναι το μικρότερο $W \subseteq c_{00}(\mathcal{F})^\#$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, κάθε πλεγματική d-άδα $(t_j)_{j=1}^d$ στην $\mathcal{F}$ και $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d \in \{0,1\}$, το συναρτησοειδές $f = \sum_{j=1}^d (-1)^{\varepsilon_j} e^*_{t_j}$ ανήκει στο W και καλείται τύπου I.

(ii) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d \in W$ τύπου I με ξένους φορείς και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{j=1}^{d} a_j^2 \leq 1$, το συναρτησοειδές $\varphi = \sum_{j=1}^{d} a_j f_j$ ανήκει στο W και καλείται τύπου II.

Είναι άμεσο από τον ορισμό του χώρου X_ξ ότι η φυσιολογική του βάση $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι unconditional. Ο πρώτος μας στόχος είναι να δείξουμε ότι ο χώρος X_ξ δεν περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον ακόλουθο συμβολισμό και λήμματα.

Συμβολισμος 11.11. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία του X_ξ. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια $\mathcal{F}$-block ακολουθία αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\max t : t \in \mathrm{supp}(x_n)\} < \min\{\min t : t \in \mathrm{supp}(x_{n+1})\}$$

Το ακόλουθο λήμμα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της νόρμας $\|\cdot\|$ και της παρατήρησης ότι αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια $\mathcal{F}$-block ακολουθία στον X_ξ, τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, με $n \neq m$, δεν υπάρχει κανένα πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2), ώστε $s_1 \in \mathrm{supp}(x_n)$ και $s_2 \in \mathrm{supp}(x_m)$.

Λημμα 11.12. Κάθε ημινορμαρισμένη $\mathcal{F}$-block ακολουθία στον X_ξ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2.

Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει $\mathcal{F}_{[l]} = \{s \in \mathcal{F} : \min s = l\}$. Ορίζουμε $X_l = \overline{< (e_s)_{s\in\mathcal{F}_{[l]}} >}^{\|\cdot\|}$ και $P_l : X_\xi \to X_l$ ώστε για κάθε $x \in c_{00}(\mathcal{F})$, $P_l(x) = \sum_{s\in\mathcal{F}_{[l]}}(x)$. Επειδή για κάθε $l \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει κανένα πλεγματικό ζεύγος στην $\mathcal{F}_{[l]}$, ο χώρος X_l είναι ισομετρικός με τον ℓ^2. Συνεπώς για κάθε $l \in \mathbb{N}$ ο χώρος X_l είναι αυτοπαθής.

Προταση 11.13. Κάθε υπόχωρος Z του X_ξ περιέχει έναν περαιτέρω υπόχωρο W τέτοιο ώστε είτε υπάρχει $l_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η $P_{l_0}|_W$ να είναι μια ισομορφική εμφύτευση, ή ο W είναι ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^2.

Αποδειξη. Είτε υπάρχει ένα $l_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο τελεστής $P_{l_0}|_Z : Z \to X_{l_0}$ να μην είναι αυστηρά ιδιάζον ή για κάθε $l \in \mathbb{N}$ ο τελεστής $P_{l_0}|_Z : Z \to X_{l_0}$ είναι αυστηρά ιδιάζον. Στην πρώτη περίπτωση είναι άμεσο ότι υπάρχει W απειροδιάστατος υπόχωρος του Z ώστε ο τελεστής $P_{l_0}|_W$ να είναι ισομορφική εμφύτευση.

Υποθέτουμε ότι η δεύτερη περίπτωση ισχύει. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αρθμών ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{3}$. Με επαγωγή κατασκευάζουμε μια $\mathcal{F}$-block ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον S_Z ώστε $\|w_n - \widetilde{w}_n\| < \varepsilon_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $w_1 \in S_Z$ και $\widetilde{w}_1 \in c_{00}(\mathcal{F})$ ώστε $\|w_1 - \widetilde{w}_1\| < \varepsilon_1$. Υποθέτουμε ότι $(w_i)_{i=1}^n$ και $(\widetilde{w}_i)_{i=1}^n$ έχουν επιλεγεί. Έστω $l_0 = \max\{\max s : s \in \mathrm{supp}(\widetilde{w}_n)\}$. Επειδή, για κάθε $1 \leq l \leq l_0$, ο τελεστής $P_l|_Z$ είναι αυστηρά ιδιάζον, υπάρχει ένας υπόχωρος W του Z ώστε $\|P_l|_W\| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2l_0}$, για κάθε $1 \leq l \leq l_0$. Έστω $w_{n+1} \in S_W$ και $w'_{n+1} = w_{n+1} - \sum_{l=1}^{l_0} P_l(w_{n+1})$. Επιλεγουμε επίσης $\widetilde{w}_{n+1} \in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$ ώστε $\mathrm{supp}(\widetilde{w}_{n+1}) \subseteq \mathrm{supp}(w'_{n+1})$ και $\|w'_{n+1} - \widetilde{w}_{n+1}\| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $\|w_{n+1} - \widetilde{w}_{n+1}\| < \varepsilon_{n+1}$ και $\max\{\max s : s \in \mathrm{supp}(\widetilde{w}_n)\} < \min\{\min s : s \in \mathrm{supp}(\widetilde{w}_{n+1})\}$.

Είναι άμεσο ότι η ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional και ημινορμαρισμένη. Από την επιλογή της ακολουθίας $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι οι ακολουθίες $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες. Από το Λήμμα 11.12 η ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2. Συνεπώς ο υπόχωρος $\overline{< (w_n)_{n\in\mathbb{N}} >}$ αποτελεί ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^2. □

Πορισμα 11.14. Ο χώρος X_ξ είναι ℓ^2 κορεσμένος.

Επειδή η φυσιολογική βάση $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$ του χώρου X_ξ είναι unconditional, από το θεώρημα του James ([**27**]) και το παραπάνω πόρισμα έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 11.15. Ο χώρος X_ξ είναι αυτοπαθής.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την επόμενη πρόταση που θα τη χρειαστούμε και στη συνέχεια.

Πρόταση 11.16. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ μια ημινορμαρισμένη $\mathcal{G}$-ακολουθία στον X_ξ που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{G}$-υπακολουθία είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη.
(ii) Υπάρχει $K \in \mathbb{N}$ ώστε $\max\{t(1) : t \in \text{supp}(x_s)\} \leq K$ για κάθε $s \in \mathcal{G} \upharpoonright M$.

Τότε κάθε $\mathcal{G}$-spreading model της $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright M}$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^2.

Απόδειξη. Έστω $c, C > 0$ ώστε $c \leq \|x_s\| \leq C$. Έστω επίσης $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ παράγει ένα $\mathcal{G}$-spreading model. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $(s_j)_{j=1}^n$ μια πλεγματική n-άδα στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$ με $s_1(1) \geq L(n)$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Επειδή τα $(a_j \cdot x_{s_j})_{j=1}^n$ είναι ξένα φερόμενα, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}\Big\| \geq \Big(\sum_{j=1}^n \|a_j x_{s_j}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq c\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί δείχνοντας ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}\Big\| \leq CK^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Πράγματι, έστω $\varphi \in W$. Τότε υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d \in W$ τύπου I και $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$, με $\sum_{q=1}^d b_q^2 \leq 1$, ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^d b_q f_q$. Για κάθε $1 \leq q \leq d$ θέτουμε

$$E_q = \big\{j \in \{1, \ldots, n\} : \text{supp}(f_q) \cap \text{supp}(x_{s_j}) \neq \emptyset\big\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $1 \leq q \leq d$ έχουμε ότι $|E_q| \leq K$. Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\varphi\Big(\sum_{j=1}^n a_j x_{s_j}\Big)\Big| &\leq \sum_{q=1}^d \sum_{j=1}^n |b_q a_j f_q(x_{s_j})| = \sum_{q=1}^d \sum_{j\in E_q} |b_q a_j f_q(x_{s_j})| \\ &\leq \Big(\sum_{q=1}^d \sum_{j\in E_q} |b_q|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{q=1}^d \sum_{j\in E_q} |a_j f_q(x_{s_j})|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{q=1}^d |f_q(x_{s_j})|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq K^{\frac{1}{2}} \cdot C\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

2.2. Τα ℓ^1 spreading models του $\mathfrak{X}_\xi$. Στην υποπαράγραφο αυτή μελετάμε τα ℓ^1 spreading models του χώρου $\mathfrak{X}_\xi$. Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της νόρμας του χώρου ότι η φυσιολογική βάση $(e_s)_{s\in\mathcal{F}}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Ο κύριος στόχος της υποπαραγράφου είναι να δειχθεί ότι ο $\mathfrak{X}_\xi$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model για κανένα $\zeta < \omega_1$ ώστε $\zeta + 2 < \xi$. Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτό ακολουθεί την εξής διαδικασία. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{G}) < \xi$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ μια φραγμένη $\mathcal{G}$-ακολουθία από πεπερασμένα φερόμενα στοιχεία του $\mathfrak{X}_\xi$. Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη υποθέτουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{G}$ και $t \in \text{supp}(x_s)$, $|s| < |t|$. Τότε με την επιπλέον υπόθεση ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη, δείχνουμε ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Η δεύτερη περίπτωση είναι η συμπληρωματική της. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{G}$ και $t \in \text{supp}(x_s)$, $|t| \leq |s|$ και δείχνουμε ξανά ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Το τελικό αποτέλεσμα έπεται των δύο παραπάνω περιπτώσεων.

Ας σημειώσουμε ότι μια παρόμοια διαδικασία ακολουθήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.35. Το Θεώρημα 1.35 μπορεί να θεωρηθεί το συνολοθεωρητικό ανάλογο του παρόντος αποτελέσματος.

2.2.1. *Περίπτωση I.* Το ακόλουθο λήμμα είναι παρόμοιο με το Λήμμα 11.7. Για τη συνέχεια θεωρούμε $h : D \to \mathbb{R}$ τη συνάρτηση που ορίστηκε στον Ορισμό11.6.

Λημμα 11.17. Έστω $(\varepsilon, \delta) \in D$, με $\varepsilon > 0$. Έστω επίσης $x_1, x_2 \in B_{X_\xi}$ με ξένους πεπερασμένους φορείς ώστε να ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(α) $\|x_1 + x_2\| > 2 - 2\varepsilon$ και

(β) Για κάθε $t_1 \in \text{supp}(x_1)$ και $t_2 \in \text{supp}(x_2)$ το ζεύγος (t_2, t_1) δεν είναι πλεγματικό.

Τότε για κάθε $G_1 \subseteq \text{supp}(x_1)$ ώστε $\|x_1|_{G_1^c}\| \leq \delta$ υπάρχει $G_2 \subseteq \text{supp}(x_2)$ τέτοιο ώστε

(i) $\|x_2|_{G_2^c}\| \leq h(\varepsilon, \delta)$.

(ii) Για κάθε $t_2 \in G_2$ υπάρχει $t_1 \in G_1$ ώστε το ζεύγος (t_1, t_2) να είναι πλεγματικό.

Αποδειξη. Έστω $\varphi \in W$ ώστε $\varphi(x_1 + x_2) > 2 - 2\varepsilon$. Τότε υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d \in W$ τύπου I με ξένους φορείς και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{q=1}^{d} a_q^2 \leq 1$ ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^{d} a_q f_q$. Είναι άμεσο ότι $\varphi(x_1), \varphi(x_2) > 1 - 2\varepsilon$. Έστω $A_1 = \{q \in \{1, \ldots, d\} : \text{supp}(f_q) \cap G_1 \neq \emptyset\}$ και $A_2 = \{1, \ldots, d\} \setminus A_1$. Ορίζουμε $\varphi_1 = \sum_{q \in A_1} a_q f_q$ και $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 = \sum_{q \in A_2} a_q f_q$. Έστω $G_2 = \text{supp}(x_2) \cap \text{supp}(\varphi_1)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το (ii) ικανοποιείται και $\varphi(x_2|_{G_2}) = \varphi_1(x_2|_{G_2}) = \varphi_1(x_2)$.Ας παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 - 2\varepsilon - \delta < \varphi(x_1|_{G_1}) = \varphi_1(x_1|_{G_1}) &= \sum_{q \in A_1} a_q f_q(x_1|_{G_1}) \\ &\leq \Big(\sum_{q \in A_1} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{q \in A_1} f_q(x_1|_{G_1})^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{q \in A_1} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Επειδή $\sum_{q=1}^{d} a_q^2 \leq 1$, έχουμε ότι

$$\sum_{q \in A_2} a_q^2 < 1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2$$

Επομένως

$$|\varphi_2(x_2)| \leq \sum_{q \in A_2} |a_q f_q(x_2)| \leq \Big(\sum_{q \in A_2} |a_q|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{q \in A_2} |f_q(x_2)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα

$$\|x_2|_{G_2}\| \geq \varphi(x_2|_{G_2}) = \varphi_1(x_2) = \varphi(x_2) - \varphi_2(x_2) > 1 - 2\varepsilon - (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Από τον ορισμό του χώρου X_ξ έχουμε ότι $\|x_2\|^2 \geq \|x_2|_{G_2}\|^2 + \|x_2|_{G_2^c}\|^2$. Συνεπώς $\|x_2|_{G_2^c}\| \leq (1 - (1 - 2\varepsilon - (1 - (1 - 2\varepsilon - \delta)^2)^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}} = h(\varepsilon, \delta)$. □

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος είναι παρόμοια με αυτήν του προηγούμενου.

Λημμα 11.18. Έστω $\varepsilon, \delta, x_1, x_2$ όπως στο Λήμμα 11.17. Τότε για κάθε $G_2 \subseteq \text{supp}(x_2)$ ώστε $\|x_2|_{G_2^c}\| \leq \delta$ υπάρχει $G_1 \subseteq \text{supp}(x_1)$ ώστε

(i) $\|x_1|_{G_1^c}\| \leq h(\varepsilon, \delta)$.

(ii) Για κάθε $t_1 \in G_1$ υπάρχει $t_2 \in G_2$ ώστε το ζεύγος (t_1, t_2) είναι πλεγματικό.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λήμματα έχουμε το ακόλουθο.

Προταση 11.19. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s \in \mathcal{G}}$ μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στη B_{X_ξ} που ικανοποιούν τα επόμενα:

(i) Η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s \in \mathcal{G} \upharpoonright M}$ είναι πλεγματικά ξένα φερόμενη.

(ii) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{G} \restriction M$, κάθε $t_1 \in \text{supp}(x_{s_1})$ και $t_2 \in \text{supp}(x_{s_2})$ το ζεύγος (t_2, t_1) δεν είναι πλεγματικό.

(iii) Για κάθε $s \in \mathcal{G} \restriction M$ και κάθε $t \in \text{supp}(x_s)$ έχουμε ότι $|t| > |s|$.

Τότε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\restriction M}$ δε δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model.

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\restriction M}$ δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Επιλέγουμε επαγωγικά ακολουθίες $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής. Έστω $\delta_0 = 0$ και $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Τότε $(\varepsilon_1, \delta_0) \in D \setminus J_3$ και συνεπώς $0 < h(\varepsilon_1, \delta_0) < 1$. Θέτουμε $\delta_1 = h(\varepsilon_1, \delta_0)$. Υποθέτουμε ότι $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ και $\delta_0, \dots, \delta_n$ έχουν επιλεγεί ώστε για κάθε $1 \leq k \leq n$

$$1 > \delta_k = h(\varepsilon_k, \delta_{k-1}) > 0$$

Επιλέγουμε αρκούντος μικρό $\varepsilon_{n+1} > 0$ ώστε $(\varepsilon_{n+1}, \delta_n) \in D \setminus J_3$. Τότε έχουμε ότι $1 > h(\varepsilon_{n+1}, \delta_n) > 0$ και θέτουμε

$$\delta_{n+1} = h(\varepsilon_{n+1}, \delta_n)$$

Είναι άμεσο ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $0 < \delta_n < 1$.

Έστω $L \in [M]^{\infty}$ ώστε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\restriction L}$ να παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model ως προς την $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέοτυμε, περνώντας σε ένα άπειρο υποσύνολο του L, ότι η $\mathcal{G}$ είναι very large στο L. Έστω $s_0 \in \mathcal{G}$ ώστε $s_0 \sqsubseteq L(2\mathbb{N})$. Θέτουμε

$$K = \max\big\{ \max t : t \in \text{supp}(x_{s_0}) \big\}$$

Ισχυρισμός: Έστω $L_1 = \{m \in L(2\mathbb{N}) : m > \max s_0\}$. Για κάθε $s \in \mathcal{G} \restriction L_1$ υπάρχει $G_s \subseteq \text{supp}(x_s)$ ώστε $\|x_s|_{G_s^c}\| \leq \delta_{|s_0|}$ και για κάθε $t \in G_s$, $t(1) < K$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $s \in \mathcal{G} \restriction L_1$. Τότε το $s \in \mathcal{G} \restriction L(2\mathbb{N})$ με $\max s_0 < \min s$ και συνεπώς από την Πρόταση 1.25 υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s_j)_{j=0}^{|s_0|}$ στην $\mathcal{G} \restriction\restriction L$ από το s_0 στο s. Επειδή η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\restriction L}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model ως προς την $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq |s_0|$,

$$\|x_{s_j} + x_{s_{j-1}}\| > 2 - 2\varepsilon_j$$

Θέτουμε $G_0 = \text{supp}(x_{s_0})$. Κάνοντας χρήση του Λήμματος 11.17 επαγωγικά για $j = 1, \dots, |s_0|$, βρίσκουμε $G_1, \dots, G_{|s_0|}$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) $G_j \subseteq \text{supp}(x_{s_j})$

(ii) $\|x_{s_j}|_{G_j^c}\| \leq \delta_j$ και

(iii) για κάθε $t \in G_j$ υπάρχει $t' \in G_{j-1}$ ώστε το ζεύγος (t', t) να είναι πλεγματικό.

Συνεπώς για κάθε $t \in G_{|s_0|}$ υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(t_j)_{j=0}^{|s_0|}$ μήκους $|s_0|$ ώστε $t_{|s_0|} = t$ και $t_j \in G_j$ για κάθε $0 \leq j \leq |s_0|$. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι regular thin έχουμε ότι $|t_j| \geq |t_0|$, για κάθε $1 \leq j \leq |s_0|$. Συνεπώς από το (iii), έχουμε ότι $|t_j| > |s_0|$ για κάθε $0 \leq j \leq |s_0|$. Άρα

$$t(1) = t_{|s_0|}(1) < t_{|s_0|-1}(2) < \ldots < t_{|s_0|-j}(j+1) < \ldots < t_0(|s_0|+1) \leq K$$

και η απόδειξη του ισχυρισμού έχει ολοκληρωθεί. □

Για κάθε $s \in \mathcal{G} \restriction L_1$ θέτουμε $x_s^1 = x_s|_{G_s}$ και $x_s^2 = x_s - x_s^1$. Επιλέγουμε $L_2 \in [L_1]^{\infty}$ τέτοιο ώστε οι $(x_s^1)_{s\in\mathcal{G}\restriction L_2}$ και $(x_s^2)_{s\in\mathcal{G}\restriction L_2}$ παράγουν τις $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα σαν $\mathcal{G}$-spreading models. Τότε η $(e_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι είτε τετριμμένη ή από το Λήμμα 11.16 και τον παραπάνω ισχυρισμό είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2. Επομένως από το Πόρισμα 3.19 η $(e_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1 και συνεπώς $\|e_1^2\| = 1$. Επειδή $\|x_s^2\| = \|x_s|_{G_s^c}\| \leq \delta_{|s_0|} < 1$, για κάθε $s \in \mathcal{G} \restriction L_2$, έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

2.2.2. *Περίπτωση ΙΙ.*

Λημμα 11.20. Έστω $\mathcal{H}$ μια regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{H}) < o(\mathcal{F})$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Τότε δεν υπάρχει απεικόνιση $\Phi : \mathcal{H} \upharpoonright M \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ που να ικανοποιεί για κάθε $v \in \mathcal{H} \upharpoonright M$ τα ακόλουθα:

(i) $\Phi(v) \neq \emptyset$.
(ii) $|t| \leq |v|$, για κάθε $t \in \Phi(v)$.
(iii) $v(i) \leq t(i)$, για κάθε $t \in \Phi(v)$ και $1 \leq i \leq |t|$.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{H} \upharpoonright M \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ που ικανοποιεί τα (i)-(iii). Από την Πρόταση 1.14 υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε $\mathcal{H} \upharpoonright L \sqsubset \mathcal{F} \upharpoonright L$. Έστω $v \in \mathcal{H} \upharpoonright L$ και $u \in \mathcal{F} \upharpoonright L$ ώστε $v \sqsubset u$. Έστω $t \in \Phi(v)$. Τότε $|t| < |u|$ και $u(i) = v(i) \leq t(i)$, για κάθε $1 \leq i \leq |t|$. Άτοπο καθώς $u \in \mathcal{F}$. $\square$

Προταση 11.21. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια με $o(\mathcal{G}) < \xi$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{G}}$ μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στην B_{X_ξ} που ικανοποιούν τα επόμενα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{G} \upharpoonright M$ το στοιχείο x_s έχει πεπερασμένο φορέα.
(ii) Για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) και κάθε $t_1 \in \text{supp}(x_{s_1})$, $t_2 \in \text{supp}(x_{s_2})$ το ζεύγος (t_2, t_1) δεν είναι πλεγματικό.
(iii) Για κάθε $s \in \mathcal{G} \upharpoonright M$ και $t \in \text{supp}(x_s)$, έχουμε ότι $|t| \leq |s|$.
(iv) Για κάθε $s \in \mathcal{G} \upharpoonright M$ και $t \in \text{supp}(x_s)$, αν $\min s = M(k)$ τότε $t(1) \geq k$.

Τότε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright M}$ δε δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright M}$ δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Έστω $\delta_0 = 0,01$. Επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,0)$ και $h(0,0) = 0$ μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά γνησίως φθίνουσες μηδενικές ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\delta_1 < \delta_0$ και $h(\varepsilon_n, \delta_n) < \delta_{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Περνάμε σε ένα $L \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{G}$ είναι very large στο L και η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{G}\upharpoonright L}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model ως προς την $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το (iv) έχουμε ότι για κάθε $s \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ και $t \in \text{supp}(x_s)$, αν $\min s = L(k)$ τότε $t(1) \geq k$. Θέτουμε

$$\mathcal{H} = \{v \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : L(v) \in \mathcal{G}\}$$

και για κάθε $v \in \mathcal{H}$ θέτουμε $z_v = x_{L(v)}$. Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{H}$-ακολουθία $(z_v)_{v\in\mathcal{H}}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{H}$-spreading model ως προς την $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $v \in \mathcal{H}$ έχουμε ότι $v(1) \leq t(1)$, για κάθε $t \in \text{supp}(z_v)$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι $o(\mathcal{H}) = o(\mathcal{G}) < \xi = o(\mathcal{F})$.

Για κάθε $v \in \mathcal{H} \upharpoonright 2\mathbb{N}$, επιλέγουμε ένα πλεγματικό μονοπάτι $(v_j)_{j=1}^{|v|}$ στην $\mathcal{H}$ ώστε $v_1 = v$ και

$$\big\{n - 1 : n \in v_{j-1} \setminus \{\min v_{j-1}\}\big\} \sqsubseteq v_j$$

για κάθε $1 < j \leq |v|$. Άρα $v_j(1) = v(j) - (j-1)$, για κάθε $1 \leq j \leq |v|$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $1 < j \leq |v|$ έχουμε ότι $\|x_{v_j} + x_{v_{j-1}}\| > 2 - 2\varepsilon_j$. Θέτουμε $G_{|v|} = \text{supp}(z_{v_{|v|}})$ και χρησιμοποιώντας για $j = |v|, \ldots, 2$ το Λήμμα 11.18 παίρνουμε $G_{|v|-1}, \ldots, G_1$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(α) $G_j \subseteq \text{supp}(x_{v_j})$, για κάθε $1 \leq j \leq |v|$.
(β) $\|x_{v_j}|_{G_j^c}\| < \delta_{j-1}$, για κάθε $1 \leq j \leq |v|$.
(γ) Για κάθε $t \in G_j$ υπάρχει $t' \in G_{j+1}$ ώστε το ζεύγος (t, t') να είναι πλεγματικό.

Συνεπώς για κάθε $t_1 \in G_1$ υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(t_j)_{j=1}^{|v|}$ ώστε $t_j \in G_j$, για κάθε $1 \leq j \leq |v|$. Επομένως για κάθε $t_1 \in G_1$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq |t_1| \leq |v|$, $t_1(j) \geq t_j(1) + (j-1) \geq v_j(1) + (j-1) = v_1(j) = v(j)$. Θέτουμε $G_v = G_1$, το οποίο λόγω του (β) είναι μη κενό. Επομένως υπάρχει μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{H} \upharpoonright 2\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $v \in \mathcal{H} \upharpoonright M$ τα ακόλουθα:

(i) $\Phi(v) \neq \emptyset$.
(ii) $|t| \leq |v|$, για κάθε $t \in \Phi(v)$.
(iii) $v(i) \leq t(i)$, για κάθε $t \in \Phi(v)$ και $1 \leq i \leq |t|$.

Άτοπο λόγω του Λήμματος 11.20. □

2.2.3. *Το κύριο αποτέλεσμα.*

Θεωρημα 11.22. Για κάθε $\zeta < \omega_1$, με $\zeta + 2 < \xi$, ο χώρος X_ξ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι για κάποιο $\zeta < \omega_1$ και $\zeta + 2 < \xi$, ο χώρος X_ξ δέχεται τον ℓ^1 σαν ζ-spreading model. Επιλέγουμε $\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ μια επί και 1-1 απεικόνιση ώστε για κάθε $s_1, s_2 \in \mathcal{F}$, αν $\max s_1 < \max s_2$, τότε $\phi(s_1) < \phi(s_2)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $e_n = e_{\phi^{-1}(n)}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο χώρος X_ξ ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ (βλ. Ορισμό 9.11). Επειδή ο X_ξ είναι αυτοπαθής, από το Πόρισμα 9.15 ο χώρος X_ξ δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model τάξης ζ. Από το Πόρισμα 8.15 υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{G}_1$ τάξης $\zeta + 1$, $M_1 \in [M]^\infty$ και μια $\mathcal{G}_1$-ακολουθία $(x_s)_{s \in \mathcal{G}_1}$ στον X_ξ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_1$-spreading model. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η $(x_s)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1}$ είναι νορμαρισμένη. Για κάθε $s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1$ ορίζουμε $G_s^1 = \{t \in \mathrm{supp}(x_s) : |t| \leq |s|\}$, $G_s^2 = \{t \in \mathrm{supp}(x_s) : |t| > |s|\}$, $x_s^1 = x_s|_{G_s^1}$ και $x_s^2 = x_s|_{G_s^2}$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι η $(x_s^1)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_1$-spreading model. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι τον δέχεται. Τότε υπάρχει $M_2 \in [M_1]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(x_s^1)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_2}$ πλεγματικά block παράγει τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_1$-spreading model. Από το Πόρισμα 8.15 υπάρχουν $M_3 \in [M_2]^\infty$ και μια $\mathcal{G}_2$-ακολουθία $(z_v)_{v \in \mathcal{G}_2}$, όπου $\mathcal{G}_2 = [\mathbb{N}]^1 \oplus \mathcal{G}_1$, που ικανοποιούν τα επόμενα:

(i) Η $\mathcal{G}_2$-υπακολουθία $(z_v)_{v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_3}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model.
(ii) Για κάθε $v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_3$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{G}_1$ που ικανοποιούν τα επόμενα:
   (α) $z_v \in < x_{s_1}^1, \ldots, x_{s_m}^1 >$
   (β) $|s_j| < |v|$, για κάθε $1 \leq j \leq m$.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{G}_2$-υπακολουθία $(z_v)_{v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_3}$ είναι νορμαρισμένη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_3$, ορίζουμε $F_v^k = \{t \in \mathrm{supp}(z_v) : \min t < k\}$, $z_v^{1,k} = z_v|_{F_v^k}$ και $z_v^{2,k} = z_v - z_v^{1,k}$. Από την Πρόταση 11.16, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η $\mathcal{G}_2$-υπακολουθία $(z_v^{1,k})_{v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_3}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_2$-spreading model. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.19 κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(M_k')_{k \in \mathbb{N}}$ απείρων υποσυνόλων του M_3 τέτοια ώστε η $(z_v^{2,k})_{v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_k'}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 και $\|z_v^{1,k}\| < \frac{1}{k}$, για κάθε $v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_k'$. Επιλέγουμε $M_4 \in [M_3]^\infty$ ώστε $M_4(k) \in M_k'$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_4$, ορίζουμε $w_v = z_v^{2,k_v}$, όπου $k_v \in \mathbb{N}$ ικανοποιώντας $\min v = M_4(k_v)$. Επειδή $\|w_v - z_v\| < \frac{1}{k_v}$, για κάθε $v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_4$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{G}_2$-υπακολουθία $(w_v)_{v \in \mathcal{G}_2 \upharpoonright M_4}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_2$-spreading model, που αντιτίθεται στην Πρόταση 11.21.

Επειδή η $\mathcal{G}_1$-υπακολουθία $(x_s^1)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_1$-spreading model, από το Πόρισμα 3.19έχουμε ότι η $\mathcal{G}_1$-υπακολουθία $(x_s^2)_{s \in \mathcal{G}_1 \upharpoonright M_1}$ δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}_1$-spreading model, άτοπο λόγω της Πρότασης 11.19. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Τα k-spreading models δεν είναι ισχυρά k-spreading models

Στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζουμε δύο χώρους, ένα μη αυτοπαθή και έναν αυτοπαθή, οι οποίοι δείχνουν ότι για $k > 1$, τα ισχυρά k-spreading models είναι γνήσια υποκλάση των spreading models τάξης k. Αρχικά παρουσιάζουμε και μελετάμε μια γενικότερη κλάση νορμών. Τα επιθυμητά παραδείγματα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της κλάσης αυτής.

1. Η γενική κατασκευή

Έστω $k \in \mathbb{N}$, με $k > 1$. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ Έστω $C_l = \{s \in [\mathbb{N}]^k : \min s = l\}$ και $P_l : c_{00}([\mathbb{N}]^k) \to c_{00}(C_l)$ που ορίζεται ως $P_l(x) = \sum_{s\in C_l} x(s)e_s$, για κάθε $x \in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$. Έστω $(\|\cdot\|_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία νορμών ορισμένες στον $c_{00}(\mathbb{N})$ ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ να ισχύουν τα επόμενα:

(i) Η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_l$.
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_l = 1$.

Από την unconditionality, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τη νόρμα $\|\cdot\|_l$ να ορίζεται πάνω στον $c_{00}(C_l)$. Σταθεροποιούμε $1 < q < p < \infty$. Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_{q,p} : c_{00}([\mathbb{N}]^k) \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\|x\|_{q,p} = \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}|x(s_j^i)|^q\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} : d\in\mathbb{N}, m_i\in\mathbb{N},\ \text{η } (s_j^i)_{j=1}^{m_i} \text{ είναι πλεγματική}$$
$$\text{στο } [\mathbb{N}]^k \text{ για κάθε } 1\le i\le d \text{ και}$$
$$\Big\{s_j^{i_1}(1)\Big\}_{j=1}^{m_{i_1}} \cap \Big\{s_j^{i_2}(1)\Big\}_{j=1}^{m_{i_2}} = \emptyset, \text{για κάθε } 1\le i_1<i_2\le d\Big\}$$

Έστω $\|\cdot\|_{(1)} : c_{00}([\mathbb{N}]^k) \to \mathbb{R}$ η νόρμα που ορίζεται ως

$$\|x\|_{(1)} = \Big(\sum_{l=1}^{\infty}\|P_l(x)\|_l^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$. Επίσης θέτουμε $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{q,p}$. Τέλος ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\| : c_{00}([\mathbb{N}]^k) \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\|x\| = \max\{\|x\|_{(1)}, \|x\|_{(2)}\}$$

για κάθε $x \in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$ και ορίζουμε $X = \overline{(c_{00}([\mathbb{N}]^k), \|\cdot\|)}$. Είναι άμεσο ότι η ακολουθία $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι 1-unconditional βάση για τον χώρο X. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $x \in c_{00}(C_l)$ έχουμε ότι $\|x\| = \|x\|_l$. Άρα ο υπόχωρος $c_{00}(C_l)$ του X είναι ισομετρικός με τον $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_l)$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $X_l = \overline{(c_{00}(C_l), \|\cdot\|)}$.

Συμβολισμος 12.1. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $c_{00}([\mathbb{N}]^k)$. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $[\mathbb{N}]^k$-block αν για κάθε $n_1 < n_2$ στο $\mathbb{N}$ και για κάθε $s_1 \in \mathrm{supp}(x_1)$ και $s_2 \in \mathrm{supp}(x_2)$ έχουμε ότι $\max s_2 < \min s_2$.

Παρατηρηση 12.2. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $[\mathbb{N}]^k$-block ακολουθία στον X, τότε

$$\Big\|\sum_{l=1}^{r} a_l x_l\Big\|_{(i)} = \Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p \cdot \|x_l\|_{(i)}^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $r\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$ και $i\in\{1,2\}$.

Λημμα 12.3. Κάθε ημινορμαρισμένη $[\mathbb{N}]^k$-block ακολουθία στον X είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

Αποδειξη. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη $[\mathbb{N}]^k$-block ακολουθία στον X και $c, C>0$ ώστε $c\le\|x_n\|\le C$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $r\in\mathbb{R}$ και $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$. Τότε από την παρατήρηση 12.2 για κάθε $i\in\{1,2\}$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{l=1}^{r} a_l x_l\Big\|_{(i)} = \Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p \cdot \|x_l\|_{(i)}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p \cdot \|x_l\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le C\Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Άρα

$$\Big\|\sum_{l=1}^{r} a_l x_l\Big\| \le C\Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Έστω $E_1=\{l\in\{1,\ldots,r\}:\|x_l\|_{(1)}\ge\|x_l\|_{(2)}\}$ και $E_2=\{1,\ldots,r\}\setminus E_1$. Έστω επίσης $i_0\in\{1,2\}$ ώστε

$$\Big(\sum_{l\in E_{i_0}} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ge \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Τότε από την Παρατήρηση 12.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{l=1}^{r} a_l x_l\Big\| &\ge \Big\|\sum_{l=1}^{r} a_l x_l\Big\|_{(i_0)} = \Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p \cdot \|x_l\|_{(i_0)}^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\ge \Big(\sum_{l\in E_{i_0}} |a_l|^p \cdot \|x_l\|_{(i_0)}^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{l\in E_{i_0}} |a_l|^p \cdot \|x_l\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\ge c\Big(\sum_{l\in E_{i_0}} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ge \frac{c}{2^{\frac{1}{p}}}\Big(\sum_{l=1}^{r} |a_l|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

□

Το ακόλουθο πόρισμα έπεται από ένα sliding hump argument και το Λήμμα 12.3.

Πορισμα 12.4. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη ακολουθία στον X ώστε $P_l(x_n)\to 0$, για κάθε $l\in\mathbb{N}$. Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

Προταση 12.5. Κάθε υπόχωρος Z του X περιέχει ένα περαιτέρω υπόχωρο W τέτοιο ώστε είτε υπάεχει $l_0\in\mathbb{N}$ ώστε ο $P_{l_0}|_W$ να είναι ισομορμφική εμφύτευση, ή ο W είναι ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p.

Αποδειξη. Είτε υπάρχει ένα $l_0\in\mathbb{N}$ ώστε ο τελεστής $P_{l_0}|_Z : Z\to X_{l_0}$ μα μην είναι αυστηρά ιδιάζον ή για κάθε $l\in\mathbb{N}$ ο τελεστής $P_{l_0}|_Z : Z\to X_{l_0}$ είναι αυστηρά ιδιάζον. Στην πρώτη περίπτωση είναι άμεσο ότι υπάρχει W απειροδίαστατος υπόχωρος του Z ώστε ο τελεστής $P_{l_0}|_W$ να είναι ισομορφική εμφύτευση.

Υποθέτουμε ότι προκύπτει η δεύτερη περίπτωση. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{1}{3}$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια $[\mathbb{N}]^k$-block ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην S_Z ώστε $\|w_n-\widetilde{w}_n\|<\varepsilon_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $w_1\in S_Z$ και $\widetilde{w}_1\in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$ ώστε $\|w_1-\widetilde{w}_1\|<\varepsilon_1$. Υποθέτουμε ότι $(w_i)_{i=1}^n$ και $(\widetilde{w}_i)_{i=1}^n$ έχουν επιλεγεί. Έστω $l_0=\max\{\max s : s\in$

$\mathrm{supp}(\widetilde{w}_n)\}$. Επειδή, για κάθε $1 \leq l \leq l_0$, ο τελεστής $P_l|_Z$ είναι αυστηρά ιδιάζον, υπάρχει ένας υπόχωρος W του Z ώστε $\|P_l|_W\| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2l_0}$, για κάθε $1 \leq l \leq l_0$. Έστω $w_{n+1} \in S_W$ και $w'_{n+1} = w_{n+1} - \sum_{l=1}^{l_0} P_l(w_{n+1})$. Επιλέγουμε επίσης $\widetilde{w}_{n+1} \in c_{00}([\mathbb{N}]^k)$ ώστε $\mathrm{supp}(\widetilde{w}_{n+1}) \subseteq \mathrm{supp}(w'_{n+1})$ και $\|w'_{n+1} - \widetilde{w}_{n+1}\| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\|w_{n+1} - \widetilde{w}_{n+1}\| < \varepsilon_{n+1}$ και $\max\{\max s : s \in \mathrm{supp}(\widetilde{w}_n)\} < \min\{\min s : s \in \mathrm{supp}(\widetilde{w}_{n+1})\}$.

Είναι άμεσο ότι η ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional και ημινορμαρισμένη. Από την επιλογή της ακολουθίας $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι οι ακολουθίες $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες. Από το Λήμμα 12.3 η ακολουθία $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Άρα ο υπόχωρος $< (w_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ αποτελεί ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p. □

Πορισμα 12.6. Τα επόμενα ικανοποιούνται:

(i) Ο χώρος X περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^r (αντ. c_0), για κάθε $r \neq p$, αν και μόνο αν υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε ο χώρος X_l να περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^r (αντ. c_0).

(ii) Ο χώρος X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ο χώρος X_l είναι αυτοπαθής.

Αποδειξη. (i) Έστω $r \in [1, \infty)$, με $r \neq p$. Υποθέτουμε ότι ο χώρος X περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο Z του ℓ^r. Τότε από την Πρόταση 12.5 καταλήγουμε στην ύπαρξη υπόχωρου W του Z τέτοιου ώστε είτε ο W είναι ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^r ή για κάποιο $l \in \mathbb{N}$, ο $P_l|_W$ είναι ισομορφική εμφύτευση του W στον X_l. Επειδή ο W είναι ένας υπόχωρος το Z, περιέχει έναν περαιτέρω υπόχωρο W' ισομορφικό με τον ℓ^r. Συνεπώς η πρώτη εναλλακτική είναι αδύνατη και καταλήγουμε στην ύπαρξη ενός $l \in \mathbb{N}$ τέτοιου ώστε ο X_lπεριέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^r. Αντίστροφα, επειδή για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ο X_l είναι υπόχωρος του X, αν ο X_l περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^r, τότε και ο X περιέχει. Τα επιχειρήματα όσον αφορά την περίπτωση του c_0 είναι ταυτόσημα.

(ii) Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε και κάθε υπόχωρος του είναι. Ειδικότερα, ο X_l είναι αυτοπαθής για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο X_l είναι αυτοπαθής για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Από το (i) έχουμε ότι ο X δεν περιέχει κάνενα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1 ή του c_0. Επειδή ο X έχει unconditional βάση, από το θεώρημα του James (βλ. [**27**]), έχουμε ότι ο X είναι αυτοπαθής. □

Λημμα 12.7. Υποθέτουμε ότι ο χώρος X δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία στον X τέτοια ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(P_l(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι norm συγκλίνουσα. Τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(P_l(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

Αποδειξη. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, έστω $y_l \in X_l$ το όριο της $(P_l(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 12.4 αρκεί να δείξουμε ότι $y_l = 0$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Επειδή η $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι unconditional και ο X δεν περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0 έχουμε ότι η $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι φραγμένα πλήρης.

Για κάθε $l_0 \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\sum_{l=1}^{l_0} P_l(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{l=1}^{l_0} y_l$$

Επομένως η $(\|\sum_{l=1}^{l_0} y_l\|)_{l_0=1}^{\infty}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία και συνεπώς υπάρχει $y \in X$ ώστε $\sum_{l=1}^{l_0} y_l \overset{l_0\to\infty}{\longrightarrow} y$. Άρα για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $P_l(y) = y_l$ και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $y = 0$.

Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι $y \neq 0$ και θέτουμε $z_n = x_n - y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική, έχουμε ότι η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$δεν είναι μηδενική. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $P_l(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Από το Πόρισμα 12.4 μπορούμε να περάσουμε σε μια υπακολουθία $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε η $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Ειδικότερα έχουμε ότι η $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο μηδέν. Επομένως υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε

$$\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} z_{k_n}\Big\| < \frac{\|y\|}{3C} \text{ και } \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} z_{k_n}\Big\| < \frac{\|y\|}{3C}$$

όπου C είναι η σταθερά βάσης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως

$$\frac{2\|y\|}{3} < \Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_{k_n}\Big\| \le C\Big\|\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_{k_n} - \frac{1}{n_0}\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} x_{k_n}\Big\| < \frac{2\|y\|}{3}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 12.8. Ο χώρος X δέχεται τον ℓ^q σαν spreading model τάξης k. Ειδικότερα, η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ του X παράγει τον ℓ^q σαν $[\mathbb{N}]^k$-spreading model.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $(s_j)_{j=1}^n$ μια πλεγματική $n-$άδα στην $[\mathbb{N}]^k$ με $s_1(1) \ge n$. Είναι άμεσο ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_{s_j}\Big\|_{(1)} = \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Έστω $F_1, \dots, F_d$ ξένα ανα δύο υποσύνολα του $\{1, \dots, n\}$. Επειδή $1 < q < p$, έχουμε ότι

$$\Big(\sum_{i=1}^d \Big(\sum_{j\in F_i} |a_j|^q\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^d \Big(\sum_{j\in F_i} |a_j|^q\Big)^{\frac{q}{q}}\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Επομένως

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_{s_j}\Big\| = \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_{s_j}\Big\|_{(2)} = \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

□

2. Η μη αυτοπαθής περίπτωση

Το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 12.9. Για κάθε $1 < q < p < \infty$ και $k > 1$, υπάρχει ένας χώρος Banach $X^k_{1,p,q}$ με μια unconditional βάση τέτοιος ώστε κάθε ημινορμαρισμένη Schauder ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $X^k_{1,p,q}$ περιέχει μια υπακολουθία η οποία είναι ισοδύναμη είτε με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Επιπλέον ο χώρος $X^k_{1,p,q}$ δέχεται τον ℓ^q σαν spreading model τάξης k.

Απόδειξη. Για $1 < q < p$, θέτουμε $X_{1,q,p}$ τον χώρο που προκύπτει από την κατασκευή της προηγούμενης παραγράφου θέτοντας για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_l = \|\cdot\|_{\ell^1}$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία στον X. Τότε ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

- (i) Υπάρχουν $l_0 \in \mathbb{N}$ και $M_0 \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η ακολουθία $(P_{l_0}(x_n))_{n\in M_0}$ να μην περιέχει norm συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (ii) Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, η ακολουθία $(P_l(x_n))_{n\in M}$ περιέχει μια norm συγκλίνουσα υπακολουθία.

Υποθέτουμε ότι το (i) ισχύει. Τότε η $(P_{l_0}(x_n))_{n\in M_0}$ είναι μια ημινορμαρισμένη ακολουθία στον ℓ^1 χωρίς norm Cauchy υπακολουθία. Από το ℓ^1-θεώρημα του Rosenthalκαι την ιδιότητα Schur του ℓ^1, έχουμε ότι υπάρχει $L \in [M_0]^\infty$ τέτοιο ώστε η $(P_{l_0}(x_n))_{n\in L}$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1. Επειδή η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$

είναι unconditional, έχουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in L}$ είναι επίσης ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1.

Υποθέτουμε ότι το (ii) ισχύει. Τότε μπορούμε να περάσουμε σε ένα $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η ακολουθία $(P_l(x_n))_{n\in M}$ να συγκλίνει. Από το Πόρισμα 12.6, έχουμε ότι ο $X^k_{1,p,q}$ δε περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του c_0 και από το Λήμμα 12.7, έχουμε ότι υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $(x_n)_{n\in M}$ ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

Τέλος από την Πρόταση 12.8 έχουμε ότι η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ του χώρου $X^k_{1,p,q}$ παράγει τον ℓ^q σαν k-spreading model. $\square$

Πορισμα 12.10. Ο χώρος $X^k_{1,q,p}$ δε δέχεται τον ℓ^q σαν ισχυρό spreading model καμίας τάξης. Ακριβέστερα, κάθε ισχυρό spreading model οποιασδήποτε τάξης του $X^k_{1,q,p}$ είναι ισοδύναμο είτε με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή στη συνήθη βάση του ℓ^p.

Αποδειξη. Εφόσον για κάθε $r \in [1,\infty)$ κάθε ισχυρό spreading model (τάξης 1) του ℓ^1 ή του ℓ^p είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή του ℓ^p, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ισχυρό spreading model τάξης 1 του X είναι είτε ℓ^1 ή ℓ^p.

Πράγματι, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία στον X που παράγει ένα spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Θεώρημα 12.9 έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη είτε με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή με τη συνήθη βάση του ℓ^p. Επειδή η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ παράγει επίσης την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη είτε με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή με τη συνήθη βάση του ℓ^p. $\square$

3. Η αυτοπαθής περίπτωση

Το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής είναι το ακόλουθο.

Θεωρημα 12.11. Για κάθε $1 < q < p < \infty$ και $k > 1$, υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος $X^k_{T,p,q}$ με unconditional βάση τέτοιος ώστε κάθε ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $X^k_{T,p,q}$ περιέχει υπακολουθία που είτε είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p ή παράγει ένα spreading model (τάξης 1) ισοδύναμο στη συνήθη βάση του ℓ^1. Επιπλέον ο χώρος $X^k_{T,p,q}$ δέχεται τον ℓ^q σαν spreading model τάξης k.

Αποδειξη. Για $1 < q < p$, έστω $X^k_{T,q,p}$ ο χώρος που προκύπτει από την γενική κατασκευή θέτοντας για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_l = \|\cdot\|_T$, όπου $\|\cdot\|_T$ συμβολίζει τη νόρμα του χώρου του Tsirelson. Επειδή ο χώρος του Tsirelson είναι αυτοπαθής, από το Πόρισμα12.6 έχουμε ότι ο $X^k_{T,q,p}$ είναι αυτοπαθής. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία στον $X^k_{T,q,p}$. Επειδή ο $X^k_{T,q,p}$ είναι αυτοπαθής και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική, έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική. Από το sliding hump argument και περνώντας σε μια περαιτέρω υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η σκολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πεπερασμένα ξένα φερόμενη. Ας παρατηρήσουμε ότι ένα από τα επόμενα ισχύει:

(i) Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $P_l(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
(ii) Υπάρχουν $l_0 \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$ και $M_0 \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\|P_{l_0}(x_n)\| > \theta$ για κάθε $n \in M_0$.

Υποθέτουμε ότι το (i) ισχύει. Από το Πόρισμα 12.6, έχουμε ότι ο $X^k_{T,p,q}$ δε περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του c_0 και από το Λήμμα 12.7, έχουμε ότι υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία της $(x_n)_{n\in M_0}$ ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (ii). Τότε η ακολουθία $(P_{l_0}(x_n))_{n\in M_0}$ αποτελεί μια ημινορμαρισμένη block στον χώρο του Tsirelson. Επειδή κάθε spreading model που παράγεται από μια ημινορμαρισμένη Schauder βασική ακολουθία στο χώρο του

Tsirelson είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^1, υπάρχει $L \in [M_0]^\infty$ τέτοιο ώστε η ακολουθία $(P_{l_0}(x_n))_{n\in L}$ παράγει τον ℓ^1 σαν spreading model. Επειδή η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ είναι unconditional, έχουμε ότι και η ακολουθία $(x_n)_{n\in L}$ παράγει τον ℓ^1 σαν spreading model.

Επιπλέον, από την Πρόταση 12.8 έχουμε ότι από η βάση $(e_s)_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ του χώρου $X^k_{T,p,q}$ παράγει τον ℓ^q σαν k-spreading model. □

Η απόδειξη του ακόλουθου πορίσματος είναι παρόμοια με αυτήν του Πορίσματος 12.10.

Πορισμα 12.12. Ο χώρος $X^k_{T,q,p}$ δε δέχεται τον ℓ^q σαν ισχυρό spreading model για οποια δήποτε τάξη. Ακριβέστερα, κάθε ισχυρό spreading model οποιασδήποτε τάξης του $X^k_{T,q,p}$ είναι ισοδύναμο είτε με τη συνήθη βάση του ℓ^1 ή με τη συνήθη βάση του ℓ^p.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Τα spreading models δε λαμβάνονται πάντα σαν πλεγματικά block παραγόμενα

Στο κεφάλαιο αυτό θα κατασκευάσουμε έναν αυτοπαθή χώρο X με unconditional βάση ώστε ο X να δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model (τάξης ω) αλλά όχι σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model (για οποιαδήποτε τάξη). Ο χώρος X δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ (βλ. Ορισμό 9.11) και συνεπώς η συνθήκη που αφορά την ιδιότητα αυτή στο Θεώρημα 9.13 είναι αναγκαία.

1. Η κατασκευή και η αυτοπάθεια του χώρου X

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας ότι η Schreier οικογένεια $\mathcal{S} = \{s \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : |s| = \min s\}$ regular thin τάξης ω. Έστω

$$\mathcal{H} = \left\{(t_j)_{j=1}^k : k \in \mathbb{N}, (t_j)_{j=1}^k \in Plm_k(\widehat{\mathcal{S}}) \text{ και } k-1 \leq |t_1| = \ldots = |t_k|\right\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{S}}$, έχουμε ότι $(t) \in \mathcal{H}$. Επιπλέον για κάθε $(t_j)_{j=1}^k \in \mathcal{H}$, έχουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου $\{t_j : j = 1, \ldots, k\}$ είναι ανα δύο $\sqsubseteq$-ασύμβατα. Έστω $d \in \mathbb{N}$ και για κάθε $1 \leq q \leq d$, έστω $k_d \in \mathbb{N}$ και $(t_j^q)_{j=1}^{k_q} \in \mathcal{H}$. Θα λέμε ότι τα $(t_j^1)_{j=1}^{k_1}, \ldots, (t_j^d)_{j=1}^{k_d}$ είναι *ασύμβατα* αν τα στοιχεία του συνόλου $\cup_{q=1}^d \{t_j^q : 1 \leq j \leq k_q\}$ είναι ανα δύο $\sqsubseteq$-ασύμβατα.

Ορίζουμε την ακόλουθη νόρμα στον $c_{00}(\widehat{\mathcal{S}})$:

$$\|x\| = \sup\left\{\Big(\sum_{q=1}^d \Big(\sum_{j=1}^{k_q} |x(t_j^q)|\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα $d \in \mathbb{N}$ και τα ασύμβατα $(t_j^1)_{j=1}^{k_1}, \ldots, (t_j^d)_{j=1}^{k_d}$ στην $\mathcal{H}$. Θέτουμε $X = \overline{c_{00}(\widehat{\mathcal{S}}, \|\cdot\|)}$. Είναι άμεσο ότι η βάση $(e_t)_{t\in\widehat{\mathcal{S}}}$ είναι 1-unconditional.

Αριθμούμε την βάση του X σαν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής. Έστω $\phi : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathbb{N}$ μια 1-1 και επί απεικόνιση τέτοια ώστε $\phi(\emptyset) = 1$ και για κάθε $t_1, t_2 \in \widehat{\mathcal{S}}$ με $\max t_1 < \max t_2$, $\phi(t_1) < \phi(t_2)$. Θέτουμε $e_n = e_{\phi^{-1}(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο χώρος X δεν έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ (βλ. Ορισμό 9.11). Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $t_j = \{i : k \leq i < k+j\}$, για κάθε $1 \leq j \leq k$. Τότε $\|e_{t_j}\| = 1$, για κάθε $1 \leq j \leq k$, και $\|\sum_{j=1}^k e_{t_j}\| = 1$.

Πρόταση 13.1. Ο χώρος X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν ω-spreading model.

Απόδειξη. Για κάθε $s \in \mathcal{S}$ έστω

$$x_s = \sum_{\emptyset \sqsubset t \sqsubseteq s} e_t$$

Από τον ορισμό της νόρμας είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\|x_s\| = 1$, για κάθε $s \in \mathcal{S}$, και ότι η $(x_s)_{s\in\mathcal{S}}$ παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{S}$-spreading model. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε την αυτοπάθεια του χώρου X. Για το σκοπό αυτό δείχνουμε πρώτα ότι ο χώρος X είναι ℓ^2-κορεσμένος.

Λημμα 13.2. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ημινορμαρισμένη ακολουθία στον X ώστε για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$ να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $t_1 \in \text{supp}x_n$ και $t_2 \in \text{supp}x_m$, τα t_1, t_2 είναι ασύμβατα.
(ii) Για κάθε $t_1 \in \text{supp}x_n$ και $t_2 \in \text{supp}x_m$, ούτε το ζεύγος (t_1, t_2) ούτε το (t_2, t_1) ανήκουν στην $\mathcal{H}$.

Τότε η ακολουθία$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2.

Αποδειξη. Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε ότι αν το (i) (αντ. (ii)) ισχύει τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δέχεται κάτω (αντ. πάνω) ℓ^2 εκτίμηση. □

Συμβολισμος 13.3. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X καλείται $\widehat{\mathcal{S}}$-block αν για κάθε $n < m$ στο $\mathbb{N}$, $t_1 \in \text{supp}x_n$ και $t_2 \in \text{supp}x_m$ έχουμε ότι $t_1, t_2 \neq \emptyset$ και $\max t_1 < \min t_2$.

Το ακόλουθο είναι άμεσο από το προηγούμενο λήμμα.

Πορισμα 13.4. Κάθε ημινορμαρισμένη $\widehat{\mathcal{S}}$-block ακολουθία στον X είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $t \in \widehat{\mathcal{S}}$, έχουμε ορίσει

$$\widehat{\mathcal{S}}_{[t]} = \{t' \in \widehat{\mathcal{S}} : t \sqsubseteq t'\}$$

Προταση 13.5. Για κάθε $n \geq 2$ ο υπόχωρος $\overline{c_{00}(\widehat{\mathcal{S}}_{[\{n\}]})}$ είναι ισόμορφος με τον ℓ^2. Ακριβέστερα, για κάθε $n \geq 2$ η βάση $(e_t)_{t\in\widehat{\mathcal{S}}_{[\{n\}]}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2.

Αποδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο $n \geq 2$. Για $n = 2$ έχουμε τα ακόλουθα. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\Big\|a_0 e_{\{2\}} + \sum_{j=1}^k a_j e_{\{2,2+j\}}\Big\| = \max\Big(|a_0|, \Big(\sum_{j=1}^k a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \leq \Big(\sum_{j=0}^k a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Ας σημειώσουμε επίσης ότι $\max(|a_0|^2, \sum_{j=1}^k a_j^2) \geq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^k a_j^2$. Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{j=0}^k a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|a_0 e_{\{2\}} + \sum_{j=1}^k a_j e_{\{2,2+j\}}\Big\| \leq \Big(\sum_{j=0}^k a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

και η απόδειξη για $n = 2$ έχει ολοκληρωθεί. Έστω $n \geq 2$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ και $t_1, \dots, t_l \in \widehat{\mathcal{S}}_{[\{n\}]}$ έχουμε ότι

$$(\sqrt{2})^{-(n-1)}\Big(\sum_{j=1}^l a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum_{j=1}^l a_j e_{t_j}\Big\| \leq \Big(\sum_{j=1}^l a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι οι δύο 1-unconditional ακολουθίες $(e_t)_{t\in\widehat{\mathcal{S}}_{[\{n\}]}}$ και $(e_t)_{t\in\widehat{\mathcal{S}}_{[\{n+1,n+1+k\}]}}$ είναι 1-ισοδύναμες. Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ και $t_1, \dots, t_l \in \widehat{\mathcal{S}}_{[\{n+1,n+1+k\}]}$ έχουμε ότι

$$(\sqrt{2})^{-(n-1)}\Big(\sum_{j=1}^l a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum_{j=1}^l a_j e_{t_j}\Big\| \leq \Big(\sum_{j=1}^l a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Έστω $a_0 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $1 \leq j \leq k$, έστω $l_j \in \mathbb{N}$, $(a_q^j)_{q=1}^{l_j}$ στο $\mathbb{R}$ και $(t_q^j)_{q=1}^{l_j}$ στην $\widehat{\mathcal{S}}_{[\{n+1,n+1+j\}]}$. Τότε έχουμε ότι

$$\Big\|a_0 e_{\{n+1\}} + \sum_{j=1}^k \sum_{q=1}^{l_j} a_q^j e_{t_q^j}\Big\| = \max\Big\{|a_0|, \Big\|\sum_{j=1}^k \sum_{q=1}^{l_j} a_q^j e_{t_q^j}\Big\|\Big\} \leq \Big(a_0^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{q=1}^{l_j} (a_q^j)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $\max\Big(a_0^2, \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{l_j}(a_q^j)^2\Big) \geq \frac{1}{2}\Big(a_0^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{l_j}(a_q^j)^2\Big)$. Άρα

$$(\sqrt{2})^{-n}\Big(a_0^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{l_j}(a_q^j)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|a_0 e_{\{n+1\}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{l_j} a_q^j e_{t_q^j}\Big\| \leq \Big(a_0^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{l_j}(a_q^j)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

□

Συμβολισμος 13.6. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_l = \overline{c_{00}(\widehat{\mathcal{S}}_{[\{l\}]})}$ και $P_l : X \to X_l$ ώστε $P_l(x) = \sum_{t\in\widehat{\mathcal{S}}_{[\{l\}]}} x(t)e_t$, για κάθε $x \in X$. Επίσης θέτουμε $X_0 =< e_\emptyset >$ και $P_0 : X \to X_0$ ώστε $P_0(x) = x(\emptyset)e_\emptyset$, για κάθε $x \in X$. Προφανώς οι χώροι X_0 και X_1 είναι μονοδιάστατοι και επομένως οι προβολές P_0 και P_1 είναι συμπαγείς.

Προταση 13.7. Ο χώρος X είναι ℓ^2 κορεσμένος.

Αποδειξη. Έστω Y ένας υπόχωρος του X. Τότε είτε υπάρχει $l \geq 2$ τέτοιο ώστε η $P_l|_Y$ δεν είναι αυστηρά ιδιάζουσα ή για κάθε $l \geq 0$ ο τελεστής $P_l|_Y$ είναι αυστηρά ιδιάζον.

Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι η δεύτερη περίπτωση ισχύει. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \frac{1}{3}$. Επειδή ο τελεστής P_0 είναι αυστηρά ιδιάζον, υπάρχει $y_1 \in S_Y$ ώστε $\|P_0(y_1)\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Επιλέγουμε $w_1 \in X$ με πεπερασμένο φορέα ώστε $\mathrm{supp} w_1 \subseteq \mathrm{supp}(y_1 - P_0(y_1))$ και $\|w_1 - (y_1 - P_0(y_1))\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Επομένως $\|y_1 - w_1\| < \varepsilon_1$ και $\emptyset \notin \mathrm{supp} w_1$. Έστω $l_1 = \max\{\max t : t \in \mathrm{supp} w_1\}$. Επειδή ο P_l είναι αυστηρά ιδιάζον για κάθε $0 \leq l \leq l_1$, υπάρχει ένας υπόχωρος Y_1 του Y ώστε $\|P_l|_{Y_1}\| < \frac{\varepsilon_2}{2(l_1+1)}$. Έστω $y_2 \in S_{Y_2}$ και $\widetilde{w}_2 = y_2 - \sum_{l=0}^{l_1} P_l(y_2)$. Τότε $\|\widetilde{w}_2 - y_2\| < \frac{\varepsilon_2}{2}$. Έστω $w_2 \in X$ με πεπερασμένο φορέα ώστε $\mathrm{supp} w_2 \subseteq \mathrm{supp}\widetilde{w}_2$ και $\|w_2 - \widetilde{w}_2\| < \frac{\varepsilon_2}{2}$. Άρα $\|w_2 - y_2\| < \varepsilon_2$ και

$$\max\{\max t : t \in \mathrm{supp} w_1\} < \min\{\min t : t \in \mathrm{supp} w_2\}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νορμαρισμένη ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y και μια $\widehat{\mathcal{S}}$-block ακολουθία $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\|w_n - y_n\| < \varepsilon_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως οι ακολουθίες $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες. Από το Πόρισμα 13.4 έχουμε ότι η $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2. Επομένως η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^2 και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Προταση 13.8. Ο χώρος X είναι αυτοπαθής.

Αποδειξη. Επειδή, από Πρόταση 13.7, ο X είναι ℓ^2 κορεσμένος, έχουμε ότι ο X δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή του ℓ^1. Επειδή ο X έχει unconditional βάση, από το θεώρημα του James (βλ. [**27**]) έχουμε ότι ο X είναι αυτοπαθής. □

2. Ο χώρος X δε δέχεται κανένα πλεγματικά block παραγόμενο ℓ^1 spreading model

Συμβολισμος 13.9. Έστω $\mathcal{G} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $k \geq 2$ και $s_0, \dots, s_k \in \mathcal{G}$. Θα λέμε ότι η $(s_j)_{j=0}^{k}$ είναι ένα 3-πλεγματικό μονοπάτι από το s_0 στο s_k στην $\mathcal{G}$ μήκους k, αν η (s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) είναι πλεγματική για κάθε $0 \leq j \leq k-2$.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ισχυροποίηση της Πρότασης 1.25.

Προταση 13.10. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια και $L \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ ώστε η $\mathcal{G}$ να είναι very large στο L. Τότε για κάθε $s_0, s \in \mathcal{G} \upharpoonright\upharpoonright L(2\mathbb{N})$, με $s_0 < s$, υπάρχει ένα 3-πλεγματικό μονοπάτι από το s_0 στο s στην $\mathcal{G} \upharpoonright\upharpoonright L$ μήκους $2|s_0|$.

Αποδειξη. Από την Πρόταση 1.25 υπάρχει ένα πλεγματικό μονοπάτι $(s'_j)_{j=0}^{|s_0|}$ από το s_0 στο s στην $\mathcal{G} \upharpoonright\upharpoonright L(2\mathbb{N})$ μήκους $|s_0|$. Για κάθε $1 \leq j \leq |s_0|$, αν $s'_j = \{L(n_1^j) < \ldots < L(n^j_{|s'_j|})\}$, θέτουμε $\widetilde{s}_j$ να είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε

$$\widetilde{s}_j \sqsubseteq \{L(n_1^j - 1), \ldots, L(n^j_{|s'_j|} - 1)\}$$

Θέτουμε $s_{2j} = s'_j$, για κάθε $0 \leq j \leq |s_0|$, και $s_{2j-1} = \widetilde{s}_j$, για κάθε $1 \leq j \leq |s_0|$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $(s_j)_{j=0}^{2|s_0|}$ είναι ένα 3-πλεγματικό μονοπάτι από το s_0 στο s στην $\mathcal{G} \upharpoonright\upharpoonright L$ μήκους $2|s_0|$. □

Έστω $W \subseteq c_{00}(\widehat{\mathcal{S}})$ το ελάχιστο σύνολο που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $(t_j)_{j=1}^l \in \mathcal{H}$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l \in \{-1, 1\}$ το συναρτησιακό $f = \sum_{j=1}^l \varepsilon_j e^*_{t_j}$ ανήκει στο W και θα καλείται τύπου I με βάρος $|t_1|$.

(ii) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, κάθε επιλογή $f_1, \ldots, f_d$ από συναρτησιακά τύπου I, ώστε το σύνολο $\cup_{q=1}^d \mathrm{supp}(f_q)$ να αποτελείται από ανα δύο $\sqsubseteq$-ασύμβατα στοιχεία, και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{q=1}^d a_q^2 \leq 1$ το συναρτησιακό $\varphi = \sum_{q=1}^d a_q f_q$ ανήκει στο W και θα καλείται τύπου II.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το σύνολο W είναι ένα norming σύνολο για το χώρο X. Επιπλέον, για $d \in \mathbb{N}$, τα συναρτησιακά $f_1, \ldots, f_d$ τύπου I θα καλούνται ασύμβατα αν τα στοιχεία του συνόλου $\cup_{q=1}^d \mathrm{supp}(f_q)$ είναι ανα δύο $\sqsubseteq$-ασύμβατα.

Λημμα 13.11. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια και $(x_v)_{v \in \mathcal{G}}$ μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στη B_X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ και $t \in \mathrm{supp}(x_v)$, $|t| \leq k_0$ και για κάθε πλεγματικό ζεύγος (v_1, v_2) στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$, να έχουμε ότι $\mathrm{supp}(x_{v_1}) \cap \mathrm{supp}(x_{v_2}) = \emptyset$. Τότε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model.

Αποδειξη. Έστω $L' \in [L]^\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\sqrt{k_0+1}}{l} < \varepsilon$. Επιλέγουμε μια πλεγματική l-άδα $(v_j)_{j=1}^l$ στην $\mathcal{G} \upharpoonright L'$ με $v_1(1) \geq L'(l)$. Θα δείξουμε ότι $\|\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l x_{v_j}\| < \varepsilon$. Πράγματι, για κάθε $\varphi \in W$ υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d$ τύπου I ασύμβατα και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{q=1}^d a_q^2 \leq 1$, ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^d a_q f_q$. Ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\varphi(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l x_{v_j})$. Επειδή για κάθε $t \in \mathrm{supp}(\sum_{j=1}^l x_{v_j})$, $|t| \leq k_0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το βάρος του f_q είναι το πολύ k_0, για κάθε $1 \leq q \leq d$. Για κάθε $1 \leq q \leq d$, θέτουμε

$$E_q = \{j \in \{1, \ldots, l\} : \mathrm{supp}(f_q) \cap \mathrm{supp}(x_{v_j}) \neq \emptyset\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $|E_q| \leq |\mathrm{supp}(f_q)| \leq k_0 + 1$, για κάθε $1 \leq q \leq d$. Έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
\Big|\varphi\Big(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l x_{v_j}\Big)\Big| &\leq \sum_{q=1}^d \Big|\frac{1}{l} a_q f_q\Big(\sum_{j=1}^l x_{v_j}\Big)\Big| \leq \sum_{q=1}^d \sum_{j \in E_q} \big|\frac{1}{l} a_q f_q(x_{v_j})\big| \\
&\leq \Big(\sum_{q=1}^d \sum_{j \in E_q} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{q=1}^d \sum_{j \in E_q} \big(\frac{1}{l} f_q(x_{v_j})\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{k_0+1}\Big(\frac{1}{l^2} \sum_{j=1}^l \sum_{q=1}^d \big(f_q(x_{v_j})\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{k_0+1}}{l} < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Παρατηρηση 13.12. Έστω $x_1, x_2 \in X$ ώστε $x_1 < x_2$ ως προς την $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $e_n = e_{\phi^{-1}(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $F \subseteq \mathrm{supp}(x_2)$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in F$ υπάρχει $t' \in \mathrm{supp}(x_2)$ με $t' \sqsubset t$. Τότε δεν υπάρχει $t_1 \in \mathrm{supp}(x_1)$ και $t_2 \in F$ ώστε το (t_1, t_2) ή το (t_2, t_1) να ανήκει στην $\mathcal{H}$.

Πράγματι, έστω $t_1 \in \text{supp}(x_1)$ και $t_2 \in F$ με $|t_1| = |t_2|$. Το ζεύγος $(t_2, t_1) \notin \mathcal{H}$. Πράγματι, αλλιώς θα είχαμε ότι $\max t_2 < \max t_1$ και συνεπώς $\phi(t_2) < \phi(t_1)$, που αντιβαίνει την υπόθεση ότι $x_1 < x_2$.

Υποθέτουμε ότι το ζεύγος $(t_1, t_2) \in \mathcal{H}$. Τότε το (t_1, t_2) είναι πλεγματικό. Επειδή $t_2 \in F$ υπάρχει $t_2' \in \text{supp}(x_2)$ ώστε $t_2' \sqsubset t_2$. Άρα το (t_1, t_2') είναι πλεγματικό και $|t_1| > |t_2'|$. Αυτό εύκολα συνεπάγεται ότι $\max t_1 > \max t_2'$. Άρα $\phi(t_1) > \phi(t_2')$, που αντιβαίνει την υπόθεση ότι $x_1 < x_2$.

Πορισμα 13.13. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια, $l \in \mathbb{N}$ και $(x_v)_{v \in \mathcal{G}}$ μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στην B_X ώστε για κάθε πλεγματικό ζεύγος (v_1, v_2) στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$, $x_{v_1} < x_{v_2}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ υπάρχουν $F_v^1, F_v^2 \subseteq \text{supp}(x_v)$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in F_v^2$ υπάρχει $t' \in F_v^1$ ώστε $t' \sqsubset t$. Έστω $x_v^2 = x_v|_{F_v^2}$ για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$. Τότε η $(x_v^2)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L}$ δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model.

Αποδειξη. Πράγματι, έστω $L' \in [L]^\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ επιλεγουμε $l_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l_0} < \varepsilon$. Έστω $(v_j)_{j=1}^{l_0}$ μια πλεγματική l_0-άδα στην $\mathcal{G} \upharpoonright L'$. Θα δείξουμε ότι $\|\frac{1}{l_0} \sum_{j=1}^{l_0} x_{v_j}^2\| < \varepsilon$. Πράγματι, έστω $\varphi \in W$. Τότε υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d$ ασύμβατα τύπου I και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{q=1}^d a_1^2 \leq 1$ ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^d a_q f_q$. Για κάθε $1 \leq q \leq d$, θέτουμε $E_q = \{j \in \{1, \ldots, l\} : \text{supp}(f_q) \cap \text{supp}(x_{v_j}^2) \neq \emptyset\}$. Από την Παρατήρηση 13.12 έχουμε ότι $|E_q| \leq 1$ για κάθε $1 \leq q \leq d$. Άρα

$$\begin{aligned}
\Big|\varphi\Big(\frac{1}{l_0}\sum_{j=1}^{l_0} x_{v_j}^2\Big)\Big| &\leq \sum_{q=1}^{d} \Big|\frac{1}{l_0} a_q f_q \Big(\sum_{j=1}^{l_0} x_{v_j}^2\Big)\Big| \leq \sum_{q=1}^{d} \sum_{j \in E_q} \big|\frac{1}{l_0} a_q f_q(x_{v_j}^2)\big| \\
&\leq \Big(\sum_{q=1}^{d} \sum_{j \in E_q} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{q=1}^{d} \sum_{j \in E_q} \big(\frac{1}{l_0} f_q(x_{v_j}^2)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\frac{1}{l_0^2} \sum_{j=1}^{l_0} \sum_{q=1}^{d} \big(f_q(x_{v_j}^2)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{l_0} < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Λημμα 13.14. Έστω $\mathcal{G}$ μια regular thin οικογένεια, $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_v)_{v \in \mathcal{G}}$ μια $\mathcal{G}$-ακολουθία στην B_X. Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ και θέτουμε για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$,

$$\begin{aligned}
F_v^1 &= \{t \in \text{supp}(x_v) : |t| \leq k_0\} \text{ και} \\
F_v^3 &= \{t \in \text{supp}(x_v) : \forall t' \in F_v^1, \ \ t, t' \text{ είναι ασύμβατα}\}
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta < 1$ ώστε για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$, $\|x_v|_{F_v^3}\| \leq \delta$. Τότε η $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L}$ δε δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο $\mathcal{G}$-spreading model.

Αποδειξη. Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ ορίζουμε

$$F_v^2 = \{t \in \text{supp}(x_v) \setminus F_v^1 : \exists t' \in \ F_v^1 \ \text{ ώστε } \ t' \sqsubset t\}$$

Είναι άμεσο ότι για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$, η $(F_v^i)_{i=1}^3$ είναι μια διαμέριση του $\text{supp}(x_v)$ και για κάθε $t \in F_v^2 \cup F_v^3$ έχουμε ότι $|t| > k_0$. Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ και $1 \leq i \leq 3$ έχουμε ότι $x_v^i = x_v|_{F_v^i}$.

Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $L_1 \in [L]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L_1}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Από το Λήμμα 13.11 (αντ. Πόρισμα 13.13) έχουμε ότι η $(x_v^1)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L_1}$ (αντ. $(x_v^2)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L_1}$) δε δέχεται τον ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Επομένως από το Πόρισμα 3.19 η $(x_v^3)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright L_1}$ δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Άτοπο καθώς $\|x_v^3\| \leq \delta < 1$, για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright L_1$. □

Συμβολισμος 13.15. Έστω

$$D = \Big\{(\varepsilon,\delta) \in [0, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}) \times [0,1) : \ (\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\varepsilon)^2 + (1-3\varepsilon-\delta)^2 \geq 3\Big\}$$

και $h : D \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται από τον κανόνα

$$h(\varepsilon,\delta) = (1 - (1-3\varepsilon - (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η καμπύλη $\mathcal{E} = \{(\varepsilon,\delta) \in \mathbb{R}^2 : \ (\sqrt{3}-3\sqrt{3}\varepsilon)^2 + (1-3\varepsilon-\delta)^2 = 3\}$ είναι έλλειψη, καθώς η εικόνα της μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, που ορίζεται ως

$$T(\varepsilon,\delta) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix}$$

είναι κύκλος με κέντρο $(\sqrt{3},1)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$. Επιπλέον ας σημειώσουμε ότι το $(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$ είναι το πρώτο σημείο τομής της καμπύλης $\mathcal{E}$ και του ε-άξονα. Επίσης το σημείο $(0,1)$ ανήκει στο $\mathcal{E}$ και ο δ-άξονας είναι η εφαπτόμενη της $\mathcal{E}$ στο σημείο $(0,1)$. Επομένως το σύνολο D είναι ένα καμπυλόγραμμο τρίγωνο με πλευρές J_1, J_2, J_3, όπου J_1 (αντ. J_2) είναι το διάστημα με άκρα $(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$ και $(0,0)$ (αντ. $(0,0)$ και $(0,1)$) και J_3 είναι το τόξο της $\mathcal{E}$ που ενώνει το $(0,1)$ με το $(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνάρτηση h είναι καλά ορισμένη στο D. Επιπλέον η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο D με την ακόλουθη έννοια: για κάθε $(\varepsilon',\delta'), (\varepsilon,\delta) \in D$, ώστε είτε $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ και $0 \leq \delta' \leq \delta$ ή $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$ και $0 \leq \delta' < \delta$, έχουμε ότι $h(\varepsilon',\delta') < h(\varepsilon,\delta)$. Τέλος $h[D] = [0,1]$, $h^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$ και $h^{-1}(\{1\}) = J_3$.

Λημμα 13.16. Έστω $x_1 < x_2 < x_3$ (ως προς την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $e_n = e_{\phi^{-1}(\{n\})}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) στο B_X και $k_0 \in \mathbb{N}$. Για κάθε $j = 1,2,3$ έστω

$$\begin{aligned} F_j^1 &= \{t \in \mathrm{supp}(x_j) : |t| \leq k_0\} \\ F_j^2 &= \{t \in \mathrm{supp}(x_j) \setminus F_j^1 : \exists t' \in F_j^1 \ \text{ ώστε } \ t' \sqsubset t\} \\ F_j^3 &= \{t \in \mathrm{supp}(x_j) : \forall t' \in F_j^1, \ \ t, t' \ \text{ ασύμβατα}\} \\ x_j^1 &= x_j|_{F_j^1}, x_j^2 = x_j|_{F_j^2} \ \text{ και } \ x_j^3 = x_j|_{F_j^3} \end{aligned}$$

Έστω $(\varepsilon,\delta) \in D$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $\|x_1 + x_2 + x_3\| > 3 - 3\varepsilon$ και
(ii) $\|x_2^3\| < \delta$.

Τότε $\|x_3^3\| < h(\varepsilon,\delta)$.

Αποδειξη. Επειδή $\|x_1+x_2+x_3\| > 3-3\varepsilon$, υπάρχει $\varphi \in W$ ώστε $\varphi(x_1+x_2+x_3) > 3 - 3\varepsilon$. Τότε υπάρχει $d \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d$ ασύμβατα τύπου I και $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, με $\sum_{q=1}^d a_q^2 \leq 1$ ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^d a_q f_q$. Έστω $I = \{1, \ldots, d\}$. Για κάθε $F \subseteq \{1,2,3\}$ μη κενό θέτουμε

$$\begin{aligned} I_F = \{q \in I : \mathrm{supp}(f_q) \cap \mathrm{supp}(x_i) \neq \emptyset, \ \ \forall i \in F, \\ \text{και } \ \mathrm{supp}(f_q) \cap \mathrm{supp}(x_i) = \emptyset, \ \ \forall i \notin F\} \end{aligned}$$

και $\varphi_F = \sum_{q \in I_F} a_q f_q$. Επιπλέον θέτουμε

$$\begin{aligned} &I_{\leq k_0} = \{q \in I_{\{1,2,3\}} : w(f_q) \leq k_0\}, \ \ I_{>k_0} = \{q \in I_{\{1,2,3\}} : w(f_q) > k_0\}, \\ &\varphi_{\leq k_0} = \sum_{q \in I_{\leq k_0}} a_q f_q \ \text{ και } \ \varphi_{>k_0} = \sum_{q \in I_{>k_0}} a_q f_q \end{aligned}$$

Επειδή $\varphi(x_1 + x_2 + x_3) > 3 - 3\varepsilon$ και $\varphi(x_i) \leq 1$, για κάθε $1 \leq i \leq 3$, έχουμε ότι $\varphi(x_i) > 1 - 3\varepsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq 3$. Άρα

$$\begin{aligned}1 - 3\varepsilon < \varphi(x_1) &= \sum_{1\in F\subseteq\{1,2,3\}} \varphi_F(x_1) = \sum_{1\in F\subseteq\{1,2,3\}} \sum_{q\in I_F} a_q f_q(x_1) \\ &\leq \Big(\sum_{1\in F\subseteq\{1,2,3\}} \sum_{q\in I_F} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Άρα

$$\Big(\sum_{q\in I_{\{2\}}\cup I_{\{3\}}\cup I_{\{2,3\}}} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1-3\varepsilon)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ομοίως, επειδή $1 - 3\varepsilon < \varphi(x_3)$ έχουμε ότι

$$\Big(\sum_{q\in I_{\{1\}}\cup I_{\{2\}}\cup I_{\{1,2\}}} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1-3\varepsilon)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Από την Παρατήρηση 13.12 έχουμε ότι $\mathrm{supp}(\varphi_{\{1,2,3\}}) \cap \mathrm{supp}(x_2^2) = \emptyset$. Συνεπώς είναι να δει κανείς ότι

$$\varphi_{\{1,2,3\}}(x_2) = \varphi_{\{1,2,3\}}(x_2^1 + x_2^3) = \varphi_{\leq k_0}(x_2^1) + \varphi_{>k_0}(x_2^3)$$

Επομένως

$$1 - 3\varepsilon < \varphi(x_2) = \sum_{\substack{2\in F\subseteq\{1,2,3\}\\ F\neq\{1,2,3\}}} \sum_{q\in I_F} a_q f_q(x_2) + \varphi_{\leq k_0}(x_2^1) + \varphi_{>k_0}(x_2^3)$$

Επειδή $\|x_2^3\| < \delta$, έχουμε ότι

$$1 - 3\varepsilon - \delta < \Big(\sum_{\substack{2\in F\subseteq\{1,2,3\}\\ F\neq\{1,2,3\}}} \sum_{q\in I_F} a_q^2 + \sum_{q\in I_{\leq k_0}} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Επομένως

$$\Big(\sum_{q\in I_{\{1\}}\cup I_{\{3\}}\cup I_{\{1,3\}}\cup I_{>k_0}} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (1 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$\Big(\sum_{\substack{F\subseteq\{1,2,3\}\\ F\neq\emptyset,\{1,2,3\}}} \sum_{q\in I_F} a_q^2 + \sum_{q\in I_{>k_0}} a_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα

$$\sum_{\substack{F\subseteq\{1,2,3\}\\ F\neq\emptyset,\{1,2,3\}}} \varphi_F(x_3) + \varphi_{>k_0}(x_3) < (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς $\varphi_{\leq k_0}(x_3) > 1 - 3\varepsilon - (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$. Επειδή $\varphi_{\leq k_0}(x_3) = \varphi_{\leq k_0}(x_3^1)$ έχουμε ότι $\|x_3^1\| > 1 - 3\varepsilon - (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$. Επειδή $1 \geq \|x_3\| \geq \|x_3^1 + x_3^3\| \geq (\|x_3^1\|^2 + \|x_3^3\|^2)^{\frac{1}{2}}$, έχουμε ότι

$$\|x_3^3\| < (1 - (1 - 3\varepsilon - (3 - 2(1-3\varepsilon)^2 - (1-3\varepsilon-\delta)^2)^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}} = h(\varepsilon, \delta)$$

$\square$

Επειδή η απόδειξη του επόμενου λήμματος είναι όμοια με αυτήν του παραπάνω, θα παραλειφθεί.

Λημμα 13.17. Έστω $x_1 < x_2 < x_3$ στη B_X και $\varepsilon > 0$ ώστε $(\varepsilon, 0) \in D$ και $\|x_1 + x_2 + x_3\| > 3 - 3\varepsilon$. Θέτουμε

$$k_0 = \max\{|t| : t \in \operatorname{supp}(x_1)\},\ F_3^1 = \{t \in \operatorname{supp}(x_3) : |t| \leq k_0\},$$
$$F_3^3 = \{t \in \operatorname{supp}(x_3) :\ \forall t' \in F_3^1,\ \ t, t' \ \text{ ασύμβατα}\} \ \text{ και } \ x_3^3 = x_3|_{F_3^3}$$

Τότε $\|x_3^3\| < h(\varepsilon, 0)$.

Θεωρημα 13.18. Ο χώρος X δε περιέχει πλεγματικά block παραγόμενο ℓ^1 spreading model.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι ο X δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο ξ-spreading model, για κάποιο $\xi < \omega_1$. Τότε από το Πόρισμα 8.15 ο χώρος X δέχεται τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο $(\xi+1)$-spreading model. Δηλαδή υπάρχει μια regular thin οικογένεια $\mathcal{G}$ τάξης $\xi + 1$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια $\mathcal{G}$-ακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G}}$ τέτοια ώστε η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright M}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{G}$-ακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G}}$ είναι νορμαρισμένη.

Επαγωγικά επιλέγουμε ακολουθίες $(\delta_n)_{n=0}^\infty$ και $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής. Θέτουμε $\delta_0 = 0$ και επιλέγουμε $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Τότε $(\varepsilon_1, \delta_0) \in D \backslash J_3$ και συνεπώς $0 < h(\varepsilon_1, \delta_0) < 1$. Θέτουμε $\delta_1 = h(\varepsilon_1, \delta_0)$. Υποθέτουμε ότι $\varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_n$ και $\delta_0, \ldots, \delta_n$ έχουν επιλεγεί ώστε για κάθε $1 \leq k \leq n$

$$0 < \delta_k = h(\varepsilon_k, \delta_{k-1}) < 1$$

Επιλέγουμε $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, ώστε $(\varepsilon_{n+1}, \delta_n) \in D \setminus J_3$. Επομένως $0 < h(\varepsilon_{n+1}, \delta_n) < 1$ και θέτουμε

$$\delta_{n+1} = h(\varepsilon_{n+1}, \delta_n)$$

Είναι άμεσο ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$ και $0 < \delta_n < 1$.

Περνάμε σε $M_1 \in [M]^\infty$ ώστε η $\mathcal{G}$ να είναι very large στο M_1 και η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright M_1}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model ως προς $(\frac{\varepsilon_n}{2})_{n \in \mathbb{N}}$. Έστω v_0 το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{G}$ ώστε $v_0 \sqsubset M_1(4\mathbb{N})$ και $k_0 = \max\{|t| : t \in \operatorname{supp}(x_{v_0})\}$. Για κάθε $v \in \mathcal{G}$ θέτουμε

$$F_v^1 = \{t \in \operatorname{supp}(x_v) : |t| \leq k_0\},$$
$$F_v^2 = \{t \in \operatorname{supp}(x_v) \setminus F_v^1 :\ \exists t' \in F_v^1 \ \text{ ώστε } \ t' \sqsubset t\},$$
$$F_v^3 = \{t \in \operatorname{supp}(x_v) :\ \forall t' \in F_v^1,\ \ t', t \ \text{ είναι ασύμβατα}\},$$
$$x_v^1 = x_v|_{F_v^1},\ x_v^2 = x_v|_{F_v^2} \ \text{ και } \ x_v^3 = x_v|_{F_v^3}$$

Έστω επίσης $M_2 = \{n \in M_1(4\mathbb{N}) : n > \max v_0\}$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $v \in \mathcal{G} \upharpoonright M_2$ έχουμε ότι $\|x_v^3\| < \delta_{2|v_0|}$.

Αποδειξη του Ισχυρισμου. Έστω $v \in \mathcal{G} \upharpoonright M_2$. Από το Πόρισμα 13.10 υπάρχει ένα 3-πλεγματικό μονοπάτι $(v_j)_{j=0}^{2|v_0|}$ από το v_0 στο v στην $\mathcal{G} \upharpoonright\upharpoonright M_1$ μήκους $2|v_0|$. Επειδή το (v_0, v_1, v_2) είναι πλεγματικό έχουμε ότι $x_{v_0} < x_{v_1} < x_{v_2}$ και $\|x_{v_0} + x_{v_1} + x_{v_2}\| > 3 - 3\varepsilon_1$. Από το Λήμμα 13.17 έχουμε ότι $\|x_{v_1}^3\| < \delta_1$. Επαγωγικά για $j = 1, \ldots, 2|v_0| - 1$ έχουμε ότι η (v_{j-1}, v_j, v_{j+1}) είναι πλεγματική. Συνεπώς, έχουμε ότι $x_{v_{j-1}} < x_{v_j} < x_{v_{j+1}}$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι $\|x_{v_{j-1}} + x_{v_j} + x_{v_{j+1}}\| > 3 - 3\varepsilon_{j+1}$. Έχοντας από επαγωγή ότι $\|x_{v_j}^3\| < \delta_j$ (ας παρατηρήσουμε ότι για $j = 1$ είναι αληθές) από το Λήμμα 13.16 έχουμε ότι $\|x_{v_{j+1}}^3\| < h(\varepsilon_j, \delta_j) = \delta_{j+1}$. Άρα $\|x_v^3\| = \|x_{v_{2|v_0|}}^3\| < \delta_{2|v_0|}$. □

Ο ισχυρισμός και η παρατήρηση ότι η $\mathcal{G}$-υπακολουθία $(x_v)_{v \in \mathcal{G} \upharpoonright M_2}$ πλεγματικά block παράγει τη συνήθη βάση του ℓ^1 σαν $\mathcal{G}$-spreading model μας οδηγούν σε άτοπο, λόγω του Λήμματος 13.14. □

Από την αυτοπάθεια του χώρου X, το Θεώρημα 13.18 και την Πρόταση 10.24 έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 13.19. Ο δυϊκός χώρος X^* του X δε δέχεται τον c_0 σαν spreading model καμίας τάξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Ένας αυτοπαθής χώρος που δε δέχεται ℓ^p και c_0 σαν spreading model

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ενός αυτοπαθούς χώρου X με την ιδιότητα ότι κάθε spreading model, οποιασδήποτε τάξης, του X δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή του ℓ^p, για κανένα $p \in [1, \infty)$. Το παράδειγμα αυτό απαντά καταφατικά το σχετικό πρόβλημα που διατυπώθηκε στο [**39**] και δείχνει ότι η πεπερασμένη block αναπαραστασιμότητα των ℓ^p ή του c_0 που αποφαίνεται το θεώρημα του Krivine [**29**] δε μπορεί να αποτυπωθεί από την έννοια των spreading models.

1. Ο ορισμός του χώρου X

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του χώρου. Η κατασκευή του σχετίζεται στενά με την αντίστοιχη στο [**39**]. Έστω $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ δύο γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} \leq 0,1$.

(ii) Για κάθε $a > 0$, έχουμε ότι $\frac{n_j^a}{m_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(iii) Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\frac{n_j}{n_{j+1}} < \frac{1}{m_j}$.

Θεωρούμε το ελάχιστο υποσύνολο $W \subset (c_{00}(\mathbb{N}))^{\#}$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) $\pm e_n^* \in W$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Συναρτησιακά τύπου Ι: Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $d \leq n_j$ και $f_1 < \ldots < f_d$ στο W, το συναρτησιακό $\varphi = \frac{1}{m_j}\sum_{q=1}^{d} f_q$ ανήκει στο W. Το συναρτησιακό φ ορίζεται ως τύπου Ι με βάρος $w(\varphi) = m_j$.

(iii) Συναρτησιακά τύπου ΙΙ: Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^{d} a_k^2 \leq 1$ και $f_1, \ldots, f_d$ στο W τύπου Ι με ξένα ανα δύο βάρη, το συναρτησιακό $\varphi = \sum_{k=1}^{d} a_k f_k$ ανήκει στο W και ορίζεται ως τύπου ΙΙ.

Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $c_{00}(\mathbb{N})$, θέτοντας για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{N})$

$$\|x\| = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in W\}$$

Έστω X η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ με την παραπάνω νόρμα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η Hamel βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι μια unconditional βάση για τον χώρο X.

Επίσης για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε στον X τη νόρμα $\|\cdot\|_j$ θέτοντας για κάθε $x \in X$

$$\|x\|_j = \sup\{f(x) : \ f \ \text{είναι τύπου Ι με} \ \ w(f) = m_j\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_j$ είναι ισοδύναμες. Ακριβέστερα, δείχνεται εύκολα ότι για κάθε $x \in X$, $\|x\|_j \leq \|x\| \leq m_j\|x\|_j$. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

$$\|x\| = \max\Big\{\|x\|_\infty, \big(\sum_{j=1}^{\infty}\|x\|_j^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ συμβολίζει τη supremum νόρμα. Επομένως για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $w = (\|x\|_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ανήκει στον ℓ^2 και $\big(\sum_{j=1}^{\infty}\|x\|_j^2\big)^{\frac{1}{2}} = \|w\|_{\ell^2} \leq \|x\|$.

2. Σχετικά με τα spreading models του X

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι κάθε spreading model, οποιασδήποτε τάξης , του X δε περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του c_0 ή ℓ^p, για κανένα $p \in [1, \infty)$.

2.1. Ο χώρος X δε δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο X δε δέχεται τον ℓ^1 σαν spreading model καμίας τάξης. Ξεκινάμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λημμα 14.1. Έστω $j > 1$ ένας φυσικός αριθμός και $(x_p)_{p=1}^{m_j}$ μια block ακολουθία στη B_X. Τότε για κάθε f στο W τύπου I με $w(f) < m_j$ έχουμε ότι

$$\Big|f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_{n_j}}{n_j}\Big)\Big| < \frac{2}{w(f)}$$

Αποδειξη. Έστω $j > 0$ και f στο W τύπου I ώστε $w(f) = m_i < m_j$. Τότε υπάρχουν $1 \leq d \leq n_i$ και $f_1 < \ldots < f_d$ στο W, ώστε $f = \frac{1}{m_i}\sum_{q=1}^{d} f_q$. Έστω $(x_p)_{p=1}^{m_j}$ μια block ακολουθία στη B_X. Θέτουμε $I = \{1, \ldots, n_j\}$,

$$A = \{p \in I : \text{υπάρχει το πολύ ένα } q \in \{1, \ldots, n_i\} \text{ ώστε}$$
$$\text{supp} f_q \cap \text{supp} x_p \neq \emptyset\} \text{ και}$$
$$B = \{p \in I : \text{υπάρχουν τουλάχιστον δύο } q \in \{1, \ldots, n_i\} \text{ ώστε}$$
$$\text{supp} f_q \cap \text{supp} x_p \neq \emptyset\}$$

Προφανώς, έχουμε ότι $A \cup B = \emptyset$ και $A \cap B = \emptyset$. Είναι, επίσης, εύκολο να δει κανείς ότι $|B| \leq d - 1 < n_i$ και $|f(x_p)| \leq \frac{1}{m_i}$, για κάθε $p \in A$. Άρα

$$\Big|f\Big(\frac{1}{n_j}\sum_{p=1}^{n_j} x_p\Big)\Big| \leq \frac{1}{n_j}\sum_{p=1}^{n_j}|f(x_p)| = \frac{1}{n_j}\sum_{p\in A}|f(x_p)| + \frac{1}{n_j}\sum_{p\in B}|f(x_p)|$$
$$\leq \frac{1}{m_i} + \frac{n_i}{n_j} \leq \frac{1}{m_i} + \frac{n_i}{n_{i+1}} \leq \frac{2}{m_i} = \frac{2}{w(f)}$$

□

Για την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Δεδομένων $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθιών στον $\ell^2(\mathbb{N})$ θέτουμε $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Επίσης για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ θέτουμε $P_F(\mathbf{a}) = \sum_{n\in F} a_n e_n$.

Προταση 14.2. Ο χώρος X δε δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο spreading model καμίας τάξης.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\mathcal{F}$ regular thin οικογένεια, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ η οποία πλεγματικά block παράγει τον ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_s \in B_X$ για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ και η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ πλεγματικά block παράγει τον ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model με σταθερά $1 - \varepsilon$, όπου $\varepsilon = 0,1$.

Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ ορίζουμε $w_s = (\|x_s\|_j)_{j\in\mathbb{N}}$ που προφανώς ανήκει στη B_{ℓ^2}. Από την αυτοπάθεια του ℓ^2, έχουμε ότι ηε $\mathcal{F}$-ακολουθία $(w_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής. Από την Πρόταση 6.1, υπάρχει $M' \in [M]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(w_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M'}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του ℓ^2 και έστω $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright M' \to \ell^2$ η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί. Έστω $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών ώστε $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 6.15 υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{w}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ στον X ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L$, $\|w_s - \widetilde{w}_s\| < \varepsilon_n$, όπου $\min s = L(n)$.

(ii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{w}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright L}$ είναι subordinated ως προς την ασθενή τοπολογία του ℓ^2. Επιπλέον, αν $\widetilde{\varphi} : \widehat{\mathcal{F}} \upharpoonright L \to (\ell^2, w)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που το πιστοποιεί, τότε $\widetilde{\varphi}(\emptyset) = \widehat{\varphi}(\emptyset)$.

(iii) Η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{w}_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction L}$ δέχεται μια κανονική δενδροειδή διάσπαση.

Έστω $d_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P_{\{d_0+1,\ldots\}}(\widehat{\varphi}(\emptyset))\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Μπορούμε να υποθέσουμε, λόγω του Θεωρήματος 1.13 και περνώντας σε άπειρο υποσύνολο του L αν είναι απαραίτητα, ότι $d < \min\operatorname{supp}(\widetilde{w}_s - \widetilde{\varphi}(\emptyset))$. Επιλέγουμε $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

(i) $j_0 > d_0$.
(ii) $\frac{\lfloor\frac{1}{\varepsilon^2}\rfloor}{n_{j_0}} < \varepsilon$.

Έστω $(s_p)_{p=1}^{n_{j_0}}$ μια πλεγματική n_{j_0}-άδα στην $\mathcal{F}\restriction L$ με $s_1(1) \geq L(n_{j_0})$ ώστε

$$\Big\|\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big\| \geq 1 - 2\varepsilon = 0,8 \tag{15}$$

Προφανώς έχουμε ότι $\|\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\|_\infty \leq \frac{1}{n_{j_0}} < \varepsilon$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι για κάθε φ στο W τύπου II, έχουμε ότι

$$\varphi\Big(\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big) \leq 0,2 + 4\varepsilon = 0,6$$

Πράγματι, έστω φ στο W τύπου II. Τότε υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{q=1}^d a_q \leq 1$ και $f_1,\ldots,f_d$ στο W τύπου I με ξένα ανα δύο βάρη ώστε $\varphi = \sum_{q=1}^d a_q f_q$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w(f_q) = m_q$, για κάθε $1 \leq q \leq d$. Έστω $\mathbf{a} \in B_{\ell^2}$ ώστε $\mathbf{a}(q) = a_q$ για κάθε $1 \leq q \leq d$ και $\mathbf{a}(q) = 0$ για κάθε $q > d$. Έστω επίσης $F_p = \operatorname{supp}(P_{\{d_0+1,\ldots\}}(\widetilde{w}_{s_p}))$, για κάθε $1 \leq p \leq n_{j_0}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\Big|\varphi\Big(\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big)\Big| &\leq \Big|\sum_{q=1}^{d_0} a_q f_q\Big(\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big)\Big| + \Big|\sum_{q=d_0+1}^{d} a_q f_q\Big(\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big)\Big| \\
&\leq 0,2 + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}}\sum_{q=d_0+1}^{d} |a_q|\cdot\|x_{s_p}\|_q \\
&= 0,2 + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}}\sum_{q=d_0+1}^{d} |a_q w_{s_p}(q)| \\
&= 0,2 + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} |<\mathbf{a}, P_{\{d_0+1,\ldots\}}(w_{s_p})>| \\
&\leq 0,2 + \varepsilon + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} |<\mathbf{a}, P_{\{d_0+1,\ldots\}}(\widetilde{w}_{s_p} - \widetilde{\varphi}(\emptyset))>| \\
&= 0,2 + \varepsilon + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} |<\mathbf{a}, P_{F_p}(\widetilde{w}_{s_p} - \widetilde{\varphi}(\emptyset))>| \\
&\leq 0,2 + 2\varepsilon + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} |<\mathbf{a}, P_{F_p}(w_{s_p})>| \\
&\leq 0,2 + 2\varepsilon + \frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} \Big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Έστω $A_1 = \{p \in \{1,\ldots,n_{j_0}\} : \big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\}$ και $A_2 = \{p \in \{1,\ldots,n_{j_0}\} : \big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\big)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\}$. Τότε επειδή $\sum_{q=1} a_q^2 \leq 1$ και $(F_p)_{p=1}^{n_{j_0}}$ είναι ξένα ανα δύο, έχουμε ότι $|A_2| \leq |\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor|$. Άρα

$$\begin{aligned}
\Big|\varphi\Big(\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}} x_{s_p}\Big)\Big| &\leq 0,2+2\varepsilon+\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p=1}^{n_{j_0}}\Big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0,2+2\varepsilon+\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p\in A_1}\Big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n_{j_0}}\sum_{p\in A_2}\Big(\sum_{q\in F_p} a_q^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 0,2+2\varepsilon+\varepsilon+\frac{|A_2|}{n_{j_0}} < 0,2+4\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Κάνοντας χρήση του $\frac{n_j}{m_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο χώρος X ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$ (βλ. Ορισμό 9.11). Αυτό εύκολα συνεπάγεται ότι ο χώρος X δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του c_0. Η Πρόταση 14.2 συνεπάγεται ότι ο χώρος X δε περιέχει ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^1. Επειδή η βάση του χώρου X είναι unconditional καταλήγουμε στο ακόλουθο.

Πορισμα 14.3. Ο χώρος X είναι αυτοπαθής.

Επιπλέον έχουμε το επόμενο.

Πορισμα 14.4. Ο χώρος X δε δέχεται κανένα ℓ^1 spreading model καμίας τάξης.

Αποδειξη. Προς απαγωγή εις άτοπο, υποθέτουμε ότι υποθέτουμε ότι υπάρχουν μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και μια φραγμένη $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ τέτοια ώστε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\restriction M}$ παράγει τον ℓ^1 σαν $\mathcal{F}$-spreading model. Από την αυτοπάθεια X και επειδή η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι φραγμένη, έχουμε ότι η $\mathcal{F}$-ακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής. Επειδή ο X ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$, από το Θεώρημα 9.13 έχουμε ότι ο X δέχεται τον ℓ^1 σαν πλεγματικά block παραγόμενο $\mathcal{F}$-spreading model, το οποίο είναι άτοπο λόγω της Πρότασης 14.2. □

2.2. Ο χώρος X δε δέχεται ℓ^p, για $1<p$, ή c_0 σαν spreading model. Θα δείξουμε ότι ο χώρος X δε δέχεται κανένα ℓ^p, $p>1$, ή c_0 σαν spreading model.

Λημμα 14.5. Για κάθε $p>1$ και κάθε $\delta, c>0$ υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k\geq k_0$ και $(x_j)_{j=1}^{n_k}$ block ακολουθία στον X με $\|x_j\|>\delta$ για κάθε $1\leq j\leq n_k$, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n_k} x_j\Big\| > c n_k^{\frac{1}{p}}$$

Αποδειξη. Επειδή $\frac{n_k^{1-\frac{1}{p}}}{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k\geq k_0$ έχουμε ότι $\frac{n_k^{1-\frac{1}{p}}}{m_k} > \frac{c}{\delta}$. Έστω $(x_j)_{j=1}^{n_k}$ μια block ακολουθία στον X ώστε $\|x_j\|>\delta$ για κάθε $1\leq j\leq n_k$. Έστω $f_1,\ldots,f_{n_k}\in W$ ώστε $f_j(x_j)>\delta$ και $\mathrm{supp}(f_j)\subseteq\mathrm{supp}(x_j)$ για κάθε $1\leq j\leq n_k$. Τότε το συναρτησιακό $f=\frac{1}{m_k}\sum_{j=1}^k f_j$ ανήκει στο W. Άρα

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n_k} x_j\Big\| \geq f\Big(\sum_{j=1}^{n_k} x_j\Big) = \frac{1}{m_k}\sum_{j=1}^{n_k} f_j(x_j) > \frac{n_k}{m_k}\delta > c n_k^{\frac{1}{p}}$$

□

Λημμα 14.6. Έστω $p>1$ και $\xi<\omega_1$. Για κάθε regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$ τάξης ξ, $M\in[\mathbb{N}]^\infty$, $c,\delta>0$ και $\mathcal{F}$-ακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$, τέτοια ώστε $\|\widetilde{x}_s\|>\delta$ για κάθε

$s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$ και η $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται ξένη κανονική δενδροειδή διάσπαση, υπάρχουν $L \in [M]^\infty$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n_k} \widetilde{x}_{s_j} \Big\| > c n_k^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε πλεγματική n_k-άδα $(s_j)_{j=1}^{n_k}$ στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο ξ. Για $\xi = 1$ έχουμε ότι η ακολουθία $(\widetilde{x}_{\{m\}})_{m\in M}$ αποτελεί μια block ακολουθία στον X. Επομένως από το Λήμμα 14.5 το απότέλεσμα έπεται.

Έστω $\xi < \omega_1$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $\zeta < \xi$ το λήμμα είναι αληθές. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το ξ. Πράγματι, έστω $c, \delta > 0$, $\mathcal{F}$ μια regular thin οικογένεια τάξης ξ, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία τέτοια ώστε η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(\widetilde{x}_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια ξένα κανονική δενδροειδή διάσπαση $(\widetilde{y}_t)_{t\in\widehat{\mathcal{F}}\upharpoonright M}$ και $\|\widetilde{x}_s\| > \delta$, για κάθε $s \in \mathcal{F} \upharpoonright M$. Έστω $L_1 \in [M]^\infty$ ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι very large στο L_1. Από το Θεώρημα 1.20 υπάρχει $L_2 \in [L_1]^\infty$ ώστε να ισχύει ένα από τα επόμενα:

(i) $\| \sum_{t\sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \| \leq \frac{\delta}{2}$ για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L_2$,

(ii) $\| \sum_{t\sqsubseteq s_2/_{s_1}} \widetilde{y}_t \| > \frac{\delta}{2}$ για κάθε πλεγματικό ζεύγος (s_1, s_2) στην $\mathcal{F} \upharpoonright L_2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (i). Τότε από το Λήμμα 14.5 υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_0$ και $(x_j)_{j=1}^{n_k}$ block ακολουθία στον X με $\|x_j\| > \frac{\delta}{2}$ για κάθε $1 \leq j \leq n_k$, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n_k} x_j \Big\| > c n_j^{\frac{1}{p}}$$

Έστω $k \geq k_0$ και $(s_j)_{j=1}^{n_k}$ μια πλεγματική n_k-άδα στην $\mathcal{F} \upharpoonright L_2(2\mathbb{N})$. Έστω $L_2 = \{l_1^2, l_2^2, \ldots\}$ και για κάθε $1 \leq j \leq n_k$, έστω $s_j = \{l^2_{2\rho_1}, \ldots, l^2_{2\rho_{|s_j|}}\}$. Για κάθε $1 \leq j \leq n_k$ θέτουμε s_j^* να είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{F} \upharpoonright L_2$ με $s_j^* \sqsubseteq \{l^2_{2\rho_1 - 1}, \ldots, l^2_{2\rho_{|s_j|}-1}\}$ και

$$z_{s_j} = \widetilde{x}_{s_j} - \sum_{t\sqsubseteq s_j/_{s_j^*}} \widetilde{y}_t$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $(z_{s_j})_{j=1}^{n_k}$ αποτελεί μια block ακολουθία στον X ώστε $\|z_{s_j}\| > \frac{\delta}{2}$ για κάθε $1 \leq j \leq n_k$. Επειδή $k \geq k_0$ και η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional, έχουμε ότι

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n_k} \widetilde{x}_{s_j} \Big\| \geq \Big\| \sum_{j=1}^{n_k} z_{s_j} \Big\| > c n_j^{\frac{1}{p}}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (ii). Έστω $\mathcal{G} = \mathcal{F}/_{L_2}$. Για κάθε $t \in \mathcal{G}$, θέτουμε $z_t = \widetilde{x}_s^{(1,\mathcal{G})}$ (βλ. Ορισμό 9.3) όπου $s \in \mathcal{F} \upharpoonright L_2(2\mathbb{N})$ και $t \sqsubset s$. Επειδή $o(\mathcal{G}) < \xi$, από την επαγωγική υπόθεση (για $\zeta = o(\mathcal{G})$, $c, \frac{\delta}{2}$, $(z_t)_{t\in\mathcal{G}}$ και $L_2(2\mathbb{N})$), υπάρχουν $L \in [L_2(2\mathbb{N})]^\infty$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$,

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n_k} z_{s_j} \Big\| > c n_j^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε πλεγματική n_k-άδα $(t_j)_{j=1}^{n_k}$ στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$.

Έστω $(s_j)_{j=1}^{n_k}$ μια πλεγματική n_k-άδα στην $\mathcal{F} \upharpoonright L$. Για κάθε $1 \leq j \leq n_k$, έστω t_j στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$ ώστε $t_j \sqsubset s_j$. Τότε η $(t_j)_{j=1}^{n_k}$ είναι μια πλεγματική n_k-άδα στην $\mathcal{G} \upharpoonright L$ και συνεπώς

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n_k} \widetilde{x}_{s_j} \Big\| \geq \Big\| \sum_{j=1}^{n_k} z_{s_j} \Big\| > c n_j^{\frac{1}{p}}$$

□

Το ακόλουθο είναι άμεσο από το παραπάνω.

Πορισμα 14.7. Έστω μια regular thin οικογένεια $\mathcal{F}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ μια $\mathcal{F}$-ακολουθία στον X. Αν η $\mathcal{F}$-υπακολουθία $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δέχεται μια ξένη κανονική δενδροειδή διάσπασητότε η $(x_s)_{s\in\mathcal{F}\upharpoonright M}$ δε δέχεται κανένα ℓ^p, για $1 < p < \infty$, ή c_0 σαν $\mathcal{F}$-spreading model.

Επιπλέον επειδή ο X είναι αυτοπαθής από το Πόρισμα 6.22 έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 14.8. Ο χώρος X δε δέχεται κανένα ℓ^p, για $1 < p < \infty$, ή c_0 σαν spreading model καμίας τάξης.

2.3. Το κύριο αποτέλεσμα και κάποιες συνέπειες. Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το κύριο απότέλεσμα.

Θεωρημα 14.9. Κάθε spreading model, οποιασδήποτε τάξης, του χώρου X δε περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p, για κανένα $p \in [1, \infty)$, ή του c_0.

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\xi < \omega_1$ ο χώρος X δέχεται ένα spreading model τάξης ξ που περιέχει ένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p (ή του c_0). Επειδή ο X είναι αυτοπαθής, από την Πρόταση 8.12 έχουμε ότι ο X δέχεται τον ℓ^p (αντ. c_0) σαν spreading model τάξης $\xi + 1$, που είναι άτοπο λόγω των Πορισμάτων 14.8 και 14.4. □

Επιπλέον από τα Πορίσματα 14.8, 14.4 και 8.16 έχουμε το ακόλουθο.

Πορισμα 14.10. Για κάθε μη τετριμμένο spreading model $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X, έχουμε ότι ο χώρος E που παράγεται από την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αυτοπαθής.

Λημμα 14.11. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε χώρο Banach E ώστε $X \overset{k}{\longrightarrow} E$, έχουμε ότι $X \underset{\text{bl}}{\overset{k}{\longrightarrow}} E$.

Αποδειξη. Για $k = 1$ το αποτέλεσμα δείχνεται εύκολα, λογω της αυτοπάθειας του χώρου X, με ένα sliding hump argument. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ το λήμμα είναι αληθές. Έστω ένας χώρος Banach E ώστε $X \overset{k+1}{\longrightarrow} E$. Τότε υπάρχει ένας χώρος Banach E' με Schauder $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $X \overset{k}{\longrightarrow} E'$ και $E' \to E$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $X \underset{\text{bl}}{\overset{k}{\longrightarrow}} E'$. Από το Πόρισμα 8.7 έχουμε ότι $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}_k(X)$. Συνεπώς από το Πόρισμα 14.10 έχουμε ότι ο E' είναι αυτοπαθής. Επομένως, από το standard sliding hump argument έχουμε ότι $E' \underset{\text{bl}}{\longrightarrow} E$. Άρα $X \underset{\text{bl}}{\overset{k+1}{\longrightarrow}} E$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$. □

Από το παραπάνω λήμμα, το Πόρισμα 8.7 και το Θεώρημα 14.9 έχουμε το ακόλουθο που απαντά τη σχετική ερώτηση του [**39**].

Πορισμα 14.12. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και χώρο Banach E ώστε $X \overset{k}{\longrightarrow} E$, έχουμε ότι ο E δε περιέχει κανένα ισομορφικό αντίγραφο του ℓ^p, για κανένα $1 \le p \le \infty$, ή του c_0.

Παρατηρηση 14.13. Είναι άμεσο από την αυτοπάθεια του χώρου X, το Πόρισμα 14.4 και το Θεώρημα 10.26 ότι ο δυϊκός χώρος X^* του X δε δέχεται τον c_0 σαν spreading model.

Μέρος 2

Μια διακριτή προσέγγιση του παιχνιδιού του Gowers

Εισαγωγή

Ο W. T. Gowers στο [**21**] (βλ. επίσης [**22**] και [**20**]) απέδειξε ένα θεμελιώδες θεώρημα τύπου Ramsey για block βάσεις σε χώρους Banach το οποίο συνέβαλε σε σημαντικές ανακαλύψεις στη περιοχή της γεωμετρίας χώρων Banach. Μέχρι στιγμής υπάρχει πληθώρα προσεγγίσεων στο θεώρημα αυτό (βλ. [**3, 6, 7, 8, 31, 44**]. Επίσης στα [**14, 34, 40**] υπάρχουν αποδείξεις της διχοτομίας του Gowers και στα [**13, 15, 41, 45**] επεκτάσεις του και περαιτέρω εφαρμογές αυτού).

Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε ένα διακριτό ανάλογο του θεωρήματος του Gowers που δε χρησιμοποιεί προσεγγίσεις. Για να διατυπώσουμε το σχετικό αποτέλεσμα θα χρειαστούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathfrak{X}$ με άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση $(e_n)_n$ Για ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathfrak{X}$ με $< A >$ τη γραμμική θήκη του A. Έστω $\mathfrak{D}$ ένα υποσύνολο του $\mathfrak{X}$. Με $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των block ακολουθιών $(x_n)_n$ με $x_n \in \mathfrak{D}$ για κάθε n. Για μια block ακολουθία $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ θέτουμε $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(Z)$ να είναι το σύνολο όλων των block ακολουθιών του $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ που είναι block υπακολουθίες της Z.

Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ είναι μη κενό και έστω $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$. Ορίζουμε *το $\mathfrak{D}-$παιχνίδι του Gowers στο Z*, συμβολίζοντάς το ως $G_{\mathfrak{D}}(Z)$, ως εξής. Ο παίχτης Ι ξεκινάνει το παιχνίδι επιλέγοντας $W_0 \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(Y)$ και ο παίχτης ΙΙ απαντά με ένα διάνυσμα $w_0 \in < W_0 > \cap \mathfrak{D}$. Τότε ο παίχτης Ι επιλέγει $W_1 \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(Y)$ και ο παίχτης ΙΙ επιλέγει ένα διάνυσμα $w_1 \in < W_1 > \cap \mathfrak{D}$ και συνεχίζεται κατά αυτόν τον τρόπο. Ο παίχτης ΙΙ κερδίζει το παιχνίδι αν η ακολουθία $(w_0, w_1, ...)$ ανήκει στο $\mathcal{G}$.

Υποθέτουμε ότι το $\mathfrak{D}$ είναι υποσύνολο του $\mathfrak{X}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

($\mathfrak{D}$1) (*Ασυμπτωτική ιδιότητα*) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{D} \cap < (e_i)_{i \geq n} > \neq \emptyset$.

($\mathfrak{D}$2) (*Finitization ιδιότητα*) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathfrak{D} \cap < (e_i)_{i<n} >$ είναι πεπερασμένο.

Ο ρόλος της ιδιότητας ($\mathfrak{D}$1) είναι να μην επιτρέψει το σύνολο όλων των block ακολουθιών $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ να είναι κενό. Η ιδιότητα ($\mathfrak{D}$2) συνεπαγεται ότι το σύνολο $\mathfrak{D}$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως, εφοδιάζοντας το $\mathfrak{D}$ με τη διακριτή τοπολογία, έχουμε ότι ο χώρος $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ όλων των άπειρων ακολουθιών του $\mathfrak{D}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικός χώρος. Το κύριο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.14. Έστω $\mathfrak{X}$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με μια άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση $(e_n)_n$ και έστω $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες ($\mathfrak{D}$1) και ($\mathfrak{D}$2). Έστω επίσης $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ ένα αναλυτικό υποσύνολο του $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $U \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ υπάρχει $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(U)$ τέτοια ώστε είτε $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(Z) \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ή ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$.

Παρόλο που το Θεώρημα 0.14 είναι διακριτής φύσεως, μπορεί να οδηγήσει στο αποτέλεσμα του Gowers αν εφοδιάσουμε το $\mathfrak{D}$ με μια επιπλέον ιδιότητα (βλ. Παράγραφο 1 του Κεφαλαίου 2).

Κλείνουμε το δεύτερο μέρος της διατριβής με ένα αποτέλεσμα που αφορά k-άδες block ακολουθιών σε χώρο με νόρμα που έχει Schauder βάση. Συγκεριμένα, έστω $\mathfrak{X}$ ένας χώρος με νόρμα και Schauder βάση $(e_n)_n$. Με $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των block ακολουθιών του $\mathfrak{X}$ και με $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ το σύνολο των block ακολουθιών από στοιχεία της μοναδιαίας μπάλας του $B_{\mathfrak{X}}$ του $\mathfrak{X}$. Δύο block ακολουθίες $Z_1 = (z_n^1)_n$ και $Z_2 = (z_n^2)_n$ στο $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ θα καλούνται *ξένα φερόμενες* αν $\mathrm{supp} z_n^1 \cap \mathrm{supp} z_m^2 = \emptyset$ για κάθε m, n με $n \neq m$. Για ένα θετικό ακέραιο $k \geq 2$ και για κάθε $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty}$, το σύνολο των k-άδων που αποτελούνται από ανα δύο ξένα φερόμενες block υπακολουθίες της Z στο $B_{\mathfrak{X}}$ θα συμβολίζεται με $(\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty}(Z))_{\perp}^k$. Επίσης, για μια οικογένεια $\mathfrak{F} \subseteq (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty})^k$ από k-άδες block ακολουθιών στον $\mathfrak{X}$, το *πάνω κλείσιμο* της $\mathfrak{F}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\mathfrak{F}^{\uparrow} = \big\{ (U_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty})^k \quad : \quad \exists (V_i)_{i=0}^{k-1} \in \mathfrak{F} \text{ ώστε } \\ \forall i \ V_i \text{ να είναι block υπακολουθία της } U_i \big\}$$

Αν $\Delta = (\delta_n)_n$ είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε *η Δ-επέκταση της* $\mathfrak{F}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\mathfrak{F}_{\Delta} = \big\{ (U_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty})^k : \exists (V_i)_{i=0}^{k-1} \in \mathfrak{F} \text{ ώστε } \forall i \ dist(U_i, V_i) \leq \Delta \big\}.$$

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Θεωρημα 0.15. Έστω $\mathfrak{X}$ ένας χώρος με νόρμα και Schauder βάση, $k \geq 2$ και $\mathfrak{F}$ ένα αναλυτικό υποσύνολο του $(\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty})^k$. Τότε για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\Delta = (\delta_n)_n$ υπάρχει $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ ώστε είτε $(\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty}(Y))_{\perp}^k \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ ή $(\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty}(Y))^k \subseteq (\mathfrak{F}_{\Delta})^{\uparrow}$.

Στο παραπάνω θεώρημα η τοπολογία του $\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty}$ είναι η επαγώμενη του γινομένου της τοπολογίας της νόρμας. Το Θεώρημα 0.15 για $k = 2$ και την οικογένεια

$$\mathfrak{F} = \{ (U_1, U_2) \in (\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^{\infty})^2 : U_1, U_2 \text{ είναι } C\text{-ισοδύναμες} \}$$

όπου $C \geq 1$ μια σταθερά, συνεπάγεται τη δεύτερη διχοτομία του Gowers (βλ. Λήμμα 7.3 στο [**21**]).

Συμβολισμός

Έστω $\mathfrak{X}$ ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος με άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση $(e_n)_n$. Για δύο μη μηδενικά στοιχεία x, y στον $\mathfrak{X}$, θα γράφουμε $x < y$ αν $\max \mathrm{supp} x < \min \mathrm{supp} y$, (όπου $\mathrm{supp} x$ είναι ο *φορέας* του x, δηλαδή αν $x = \sum_n \lambda_n e_n$ τότε $\mathrm{supp} x = \{ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \neq 0 \}$). Μια ακολουθία $(x_n)_n$ διανυσμάτων του $\mathfrak{X}$ καλείται *block ακολουθία* (ή *block βάση*) αν $x_n < x_{n+1}$ για κάθε n.

Τα κεφαλαία γράμματα (όπως $U, V, Y, Z, ...$) θα αναφέρονται σε άπειρες block ακολουθίες και τα μικρά γράμματα με γραμμή από πάνω τους (όπως $\overline{u}, \overline{v}, \overline{y}, \overline{z}, ...$) σε πεπερασμένες block ακολουθίες. Θα γράφουμε $Y \preceq Z$ για να συμβολίσουμε ότι η Y είναι *block υπακολουθία* της Z, δελαδή οι $Y = (y_n)_n$, $Z = (z_n)_n$ είναι block ακολουθίες και για κάθε n, $y_n \in < (z_i)_i >$. Οι συμβολισμοί $\overline{y} \preceq Z$ και $\overline{y} \preceq \overline{z}$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο. Για $\overline{x} = (x_n)_{n=0}^k$ και $Y = (y_n)_n$ θα γράφουμε $\overline{x} < Y$, αν $x_k < y_0$. Για $\overline{x} < Y$, το $\overline{x}^\frown Y$ συμβολίζει την block ακολουθία $(z_n)_n$ που ξεκινά με τα στοιχεία της $\overline{x}$ και συνεχίζει με τα στοιχεία της Y. Επίσης για $\overline{x} < \overline{y}$, η πεπερασμένη block ακολουθία $\overline{x}^\frown \overline{y}$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο. Για μια block ακολουθία $Z = (z_n)_n$ και ένα άπειρο υποσύνολο L του $\mathbb{N}$ θέτουμε $Z|_L = (z_n)_{n \in L}$. Επίσης για $k \in \mathbb{N}$, $Z|_k = (z_n)_{n=0}^{k-1}$ (όπου για $k = 0$, $Z|_0 = \emptyset$).

Έστω $\mathfrak{D}$ ένα υποσύνολο του $\mathfrak{X}$. Ως $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ (αντ. $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}$) συμβολίζουμε το σύνολο όλων των άπειρων (αντ. πεπερασμένων) block ακολουθιών $(x_n)_n$ με $x_n \in \mathfrak{D}$ για κάθε n. Το σύνολο όλων των άπειρων (αντ. πεπερασμένων) block ακολουθιών στο $\mathfrak{X}$ συμβολίζεται με $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ (αντ. $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{<\infty}$). Για $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\infty}$ θέτουμε $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Z) = \{ Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty} : Y \preceq Z \}$ και $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(Z) = \{ \overline{y} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty} : \overline{y} \preceq Z \}$. Ομοίως για $\overline{z} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{<\infty}$, $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(\overline{z}) = \{ \overline{y} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty} : \overline{y} \preceq \overline{z} \}$. Για μια block ακολουθία $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$, θέτουμε $< Z >_{\mathfrak{D}} = < Z > \cap \mathfrak{D}$ όπου $< Z >$ είναι η γραμμική θήκη του Z.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διακριτοποίηση του παιχνιδιού του Gowers

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε το διακριτό ανάλογο του παιχνιδιού του Gowers και αποδεικνύουμε το ένα επίσης διακριτό ανάλογο του θεωρήματος του Gowers για αναλυτικές οικογένεις άπειρων block ακολουθιών. Ειδικότερα αποδεικνύουμε το θεώρημα αυτό πρώτα για ανοιχτές οικογένειες και έπειτα περνάμε σε αναλυτικές. Οι αποδείξεις χαρακτηρίζονται από μια πληθώρα διαγωνοποιήσεων και για τον ευκολότερο χειρισμό αυτών εισάγεται η έννοια των *αποδεχτών οικογενειών*. Στο εξής ο $\mathfrak{X}$ θα είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση $(e_n)_n$ και $\mathfrak{D}$ ένα υποσύνολο του $\mathfrak{X}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες $(\mathfrak{D}1)$ και $(\mathfrak{D}2)$ που διατυπώθηκαν στην εισαγωγή. Ας παρατηρήσουμε ότι η $(\mathfrak{D}2)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $U = (u_i)_i \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}((u_i)_{i<n})$ είναι πεπερασμένο.

1. Αποδεχτές οικογένειες από $\mathfrak{D}$-ζεύγη.

Ο σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να αποκρυσταλλώσουμε τις μεθόδους που θα ακολουθήσουμε για τον χειρισμό των διαγωνοποιήσεων που θα προκύψουν παρακάτω στο κεφάλαιο αυτό (βλ. [**21**], [**42**]). Ένα *$\mathfrak{D}$-ζεύγος* είναι ένα ζεύγος της μορφής $(\overline{x}, Y)$ όπου $\overline{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}$ και $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$. Για $U \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$, μια οικογένεια $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(U) \times \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$ θα καλείται *αποδεχτή οικογένεια από $\mathfrak{D}$-ζεύγη στη U* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

($\mathcal{P}1$) (*Κληρονομικότητα*) Αν $(\overline{x}, Y) \in \mathcal{P}$ και $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ τότε $(\overline{x}, Z) \in \mathcal{P}$.

($\mathcal{P}2$) (*Cofinality*) Για κάθε $(\overline{x}, Y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(U) \times \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$, υπάρχει $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ ώστε $(\overline{x}, Z) \in \mathcal{P}$.

Για απλότητα στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε "$\mathfrak{D}$-ζεύγος" με τον όρο "ζεύγος". Συχνά θα εφοδιάζουμε επίσης μια αποδεχτή οικογένεια με την ακόλουθη επιπλέον ιδιότητα:

($\mathcal{P}3$) Αν $(\overline{x}, Y) \in \mathcal{P}$, $\overline{x} < Y$ και $k = \min\{m : \overline{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}((u_i)_{i=1}^m)\}$ τότε για κάθε $\overline{y} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}((u_i)_{i=1}^k)$, $(\overline{x}, \overline{y}^\frown Y) \in \mathcal{P}$.

Το ακόλουθο λήμμα είναι συνέπεια μιας διαγωνοποίησης.

Λημμα 1.1. Έστω $U \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και $\mathcal{P}$ μια αποδεχτή οικογένεια από ζεύγη στην U. Τότε υπάρχει $W \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$ ώστε για κάθε $\overline{w} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W)$ και $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$ με $\overline{w} < Y$, $(\overline{w}, Y) \in \mathcal{P}$. Αν επιπλέον η $\mathcal{P}$ ικανοποιεί την ($\mathcal{P}3$) τότε για κάθε $\overline{w} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W)$, $(\overline{w}, W) \in \mathcal{P}$.

2. Το διακριτό παιχνίδι του Gowers

Δεδομένων μιας $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και μιας οικογένειας άπειρων block ακολουθιών $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$, ορίζουμε το *$\mathfrak{D}-$παιχνίδι του Gowers*, $G_{\mathfrak{D}}(Y)$, ως εξής. Ο παίχτης I ξεκινά το παιχνίδι επιλέγοντας $Z_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ και ο παίχτης II απαντά με ένα διάνυσμα $z_0 \in < Z_0 >_{\mathfrak{D}}$. Τότε ο παίχτης I επιλέγει $Z_1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ και ο παίχτης II επιλέγει ένα διάνυσμα $z_1 \in < Z_1 >_{\mathfrak{D}}$ με $z_0 < z_1$ και συνεχίζεται κατά αυτόν τον τρόπο. Γενικότερα για μια πεπερασμένου μήκους block ακολουθία $\overline{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}$ και $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ το παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Y)$ ορίζεται όπως παραπάνω με την επιπλέον συνθήκη ότι ο παίχτης II στην πρώτη κίνηση του επιλέγει $z_0 > \overline{x}$. Προφανώς το $G_{\mathfrak{D}}(\emptyset, Y)$ ταυτίζεται με το $G_{\mathfrak{D}}(Y)$. Θα λέμε ότι ο παίχτης ΙΙ *κερδίζει το παιχνίδι* $G_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Y)$ *για την* $\mathcal{G}$ να η block ακολουθία $\overline{x}^\frown(z_0, z_1, ...)$ ανήκει στην $\mathcal{G}$.

Η βασική ορολογία που θα ακολουθήσουμε είναι μια προσαρμογή της κλασικής των Galvin και Prikry (βλ. [**17**], [**12**]) στο πλαίσιο του παιχνιδιού του Gowers. Ακριβέστερα, για $\overline{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}$, $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ θα λέμε ότι η Y $\mathcal{G}-$ *δέχεται* την $\overline{x}$ αν ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Y)$ για την $\mathcal{G}$ και ότι η Y $\mathcal{G}-$ *απορρίπτει* την $\overline{x}$ αν δεν υπάρχει $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ που $\mathcal{G}-$ να δέχεται την $\overline{x}$. Θα λέμε επίσης ότι η Y $\mathcal{G}-$ *αποφασίζει* για την $\overline{x}$ αν είτε η Y $\mathcal{G}$-δέχεται την $\overline{x}$ ή η Y $\mathcal{G}$-απορρίπτει την $\overline{x}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι αν $\overline{x} = \emptyset$ τότε το να πούμε ότι " η Y $\mathcal{G}$-δέχεται την κενή ακολουθία" σημαίνει ότι ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Y)$ για την $\mathcal{G}$. Ομοίως το να πούμε ότι " η Y $\mathcal{G}$-απορρίπτει την κενή ακολουθία" σημαίνει ότι για κάθε $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ ο παίχτης ΙΙ δεν έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$. Η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος είναι εύκολη.

Λήμμα 1.2. Για κάθε $U \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$, η οικογένεια

$$\mathcal{P} = \{(\overline{x}, Y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(U) \times \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U) : \text{ η } Y\ \mathcal{G} - \text{δέχεται την } \overline{x}\}$$

είναι μια αποδεχτή οικογένεια ζευγών της U που ικανοποιεί και την ιδιότητα $(\mathcal{P}3)$.

Μάλιστα η οικογένεια $\mathcal{P}$ του παραπάνω λήμματος ικανοποιεί την ισχυρότερη της $(\mathcal{P}3)$ ιδιότητα: Αν $(\overline{x}, Y) \in \mathcal{P}$ και $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ ώστε να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $Z|_{[n,\infty)} \preceq Y$, τότε $(\overline{x}, Z) \in \mathcal{P}$.

Για λόγους απλότητας στη συνέχεια θα παραλείπουμε το γράμμα $\mathcal{G}$ μπροστά από τις λέξεις "δέχεται", 'απορρίπτει" και 'αποφασίζει". Το επόμενο λήμμα είναι συνέχεια του Λήμματος 1.2 και του Λήμματος 1.1.

Λήμμα 1.3. Για κάθε $U \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ υπάρχει $W \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$ τέτοια ώστε για κάθε $\overline{w} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W)$, η W αποφασίζει για την $\overline{w}$.

Το κρίσιμο σημείο στο οποίο οι παραπάνω έννοιες "δέχεται-απορρίπτει" διαφέρουν από τις κλασικές αναδεικνύεται στο επόμενο λήμμα. Εδώ η έννοια της νικητήριας στρατηγικής αντικαθιστά επιτυχώς την αρχή στου περιστεριώνα.

Λήμμα 1.4. Έστω $W \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ τέτοια ώστε η W αποφασίζει για όλες τις $\overline{w} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\overline{w}_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$ τέτοια ώστε η W απορρίπτει την $\overline{w}_0$. Τότε για κάθε $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$ υπάρχει $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ τέτοια ώστε για κάθε $z \in < Z >_{\mathfrak{D}}$ με $\overline{w}_0 < z$, η W απορρίπτει την $\overline{w_0}^\frown z$.

Απόδειξη. Αν το συμπέρασμα δεν είναι αληθές, τότε υπάρχει $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$ τέτοια ώστε για κάθε $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(Y)$ υπάρχει $z \in < Z >_{\mathfrak{D}}$ με $\overline{w}_0 < z$ ώστε η W να δέχεται την $\overline{w_0}^\frown z$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτό σημαίνει ότι ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(\overline{w}_0, Y)$ για την $\mathcal{G}$ και συνεπώς η Y δέχεται την $\overline{w}_0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς $Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$ και η W απορρίπτει την $\overline{w}_0$. □

Λήμμα 1.5. Για κάθε $U \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ υπάρχει $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$ τέτοια ώστε είτε η Z απορρίπτει όλες τις $\overline{z} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(Z)$ ή ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3 υπάρχει $W \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(U)$ τέτοια ώστε για κάθε $\overline{w} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W)$, η W αποφασίζει για την $\overline{w}$. Αν η W δέχεται την κενή ακολουθία τότε έχουμε άμεσα ότι ισχύει η δεύτερη εναλλακτική του συμπεράσματος για $Z = W$. Στην αντίθετη περίπτωση θεωρούμε την ακόλουθη οικογένεια $\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{<\infty}(W) \times \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}(W)$:

$$\mathcal{P} = \{(\overline{x}, Y) : \text{Είτε η } W \text{ δέχεται την } \overline{x} \text{ ή } \forall\, y \in < Y >_{\mathfrak{D}} \text{ με } \overline{x} < y,$$
$$\text{η } W \text{ απορρίπτει την } \overline{x}^\frown y\}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4 μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι η $\mathcal{P}$ είναι μια αποδεχτή οικογένεια στην W που ικανοποιεί και την $(\mathcal{P}3)$. Επομένως από το Λήμμα 1.1 υπάρχει

$Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ ώστε για κάθε $\overline{z} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$, $(\overline{z}, Z) \in \mathcal{P}$. Από υπόθεση έχουμε ότι η W απορρίπτει την κενή ακολουθία. Επομένως καθώς $(\emptyset, Z) \in \mathcal{P}$ έχουμε ότι η W και συνεπώς και η Z απορρίπτει όλες τις $z \in < Z >_{\mathfrak{D}}$. Με επαγωγή στο μήκος των πεπερασμένων block ακολουθιών στο $\mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$, μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι η Z απορρίπτει όλες τις $\overline{z} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$. □

Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{D}$ σαν τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία και το $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο.

Λημμα 1.6. Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ ανοιχτό στο $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $U \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ υπάρχει $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(U)$ τέτοια ώστε είτε $\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z) \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$.

Αποδειξη. Από το Λήμμα 1.5 μπορούμε να βρούμε $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(U)$ τέτοια ώστε είτε η Z απορρίπτει όλες τις $\overline{z} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$, ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η πρώτη εναλλακτική μας οδηγεί στο ότι $\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z) \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Πράγματι, έστω $W = (w_n)_n \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$. Τότε για κάθε k, η Z απορρίπτει την $W|_k = (w_n)_{n<k}$. Συνεπώς υπάρχει κάποια $Z_k \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$ με $W|_k < Z_k$ ώστε $W|_k^\frown Z_k \notin \mathcal{G}$. Επειδή η ακολουθία $(W|_k^\frown Z_k)_k$ συγκλίνει μεσα στο $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ στο W και το συμπλήρωμα της $\mathcal{G}$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $W \notin \mathcal{G}$. □

Περνάμε στην περίπτωση μιας αναλυτικής οικογένειας $\mathcal{G}$. Ας αρχίσουμε με κάποιους βασικούς ορισμούς (βλ. [**28**]). Έστω $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένου μήκους ακολουθιών στο $\mathbb{N}$ και έστω $\mathcal{N}$ ο χώρος του Baire, δηλαδή ο χώρος όλων των άπειρου μήκους ακολουθιών στο $\mathbb{N}$ με την τοπολογία που παράγεται από τα σύνολα $\mathcal{N}_s = \{\sigma \in \mathcal{N} : \exists n \text{ με } \sigma|n = s\}$, $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Ένα υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου X καλείται *αναλυτικό* αν είναι εικόνα μιας συνεχούς συνάρτησης από τον $\mathcal{N}$ στον X.

Για τα επόμενα λήμματα σταθεροποιούμε τα ακόλουθα.

(α) Μια οικογένεια $(\mathcal{G}^s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ τέτοια ώστε για κάθε s, $\mathcal{G}^s = \bigcup_n \mathcal{G}^{s^\frown n}$.

(β) Μια 1-1 και επί απεικόνιση $\varphi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ ώστε $\varphi(\emptyset) = 0$ και για κάθε s, n, $\varphi(s^\frown n) > \varphi(s)$.

Για κάθε $\overline{x}$ στο $\mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}$ θέτουμε $s_{\overline{x}}$ να είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε το $\varphi(s_{\overline{x}})$ να ισούται με το μήκος $\overline{x}$. Για ένα $\mathfrak{D}$-ζεύγος $(\overline{x}, Y)$ θέτουμε

$$\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Y) = \{V \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}} : \exists k \text{ ώστε } V|_k = \overline{x} \text{ και } V|_{[k,\infty)} \preceq Y\}$$

Τέλος, για μια οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ θα λέμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι *large* για το $(\overline{x}, Y)$ αν για κάθε $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Y)$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Z) \neq \emptyset$. Στην περίπτωση $\overline{x} = \emptyset$ θα λέμε απλά ότι η $\mathcal{G}$ είναι large για την Y.

Λημμα 1.7. Για κάθε $U \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ υπάρχει $W \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(U)$ τέτοια ώστε για κάθε $\overline{w} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$, είτε $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, W) = \emptyset$ ή η $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}}$ είναι large για την $(\overline{w}, W)$.

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των ζευγών $(\overline{x}, Y)$ στο $\mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(U) \times \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Y)$ τέτοιων ώστε είτε$\mathcal{G}^{s_{\overline{x}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{x}, Y) = \emptyset$ ή η $\mathcal{G}^{s_{\overline{x}}}$ είναι large για την $(\overline{x}, Y)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{P}$ είναι αποδεχτή οικογένεια που ικανοποιεί και την ιδιότητα$(\mathcal{P}3)$. Άρα το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 1.1. □

Έστω $W \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}$ μια block ακολουθία στο $\mathfrak{D}$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Λήμματος 1.7. Για $\overline{w} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$, θέτουμε $\mathcal{F}(\overline{w})$ να είναι η οικογένεια όλων των $V = (v_i)_i \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ με $\overline{w} < V$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες. Υπάρχουν $m, l \in \mathbb{N}$ με $l \geq 1$ ώστε

(i) $s_{\overline{w}}^\frown m = s_{\overline{x}}$, όπου $\overline{x} = \overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}$

(ii) Η οικογένεια $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}^\frown m}$ είναι large για το $(\overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}, W)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η $\mathcal{F}(\overline{w})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$.

Λημμα 1.8. Έστω $\overline{w} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ και υποθέτουμε ότι η $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}}$ είναι large για το $(\overline{w}, W)$. Τότε η $\mathcal{F}(\overline{w})$ είναι large για την W.

Αποδειξη. Έστω $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$. Επειδή η $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}}$ είναι large για την $(\overline{w}, W)$ υπάρχει $V = (v_i)_i$ ώστε $\overline{w} < V$ και $\overline{w}^\frown V \in \mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, Z) = \bigcup_m \mathcal{G}^{s_{\overline{w}}{}^\frown m} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, Z)$ και συνεπώς για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, $\overline{w}^\frown V \in \mathcal{G}^{s_{\overline{w}}{}^\frown m} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, Z)$. Ας παρατηρήσουμε ότι για $l = \varphi(s^\frown m) - \varphi(s)$ έχουμε ότι $s_{\overline{w}}{}^\frown m = s_{\overline{x}}$, όπου $\overline{x} = \overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}$, και $\overline{w}^\frown V \in \mathcal{G}^{s_{\overline{w}}{}^\frown m} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}, Z)$. Συνεπώς $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}{}^\frown m} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}, W) \neq \emptyset$ το οποίο (από τις ιδιότητες του W) σημαίνει ότι η $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}{}^\frown m}$ είναι large για την $(\overline{w}^\frown (v_i)_{i=0}^{l-1}, W)$. Συνεπώς $V \in \mathcal{F}(\overline{w}) \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$. $\square$

Λημμα 1.9. Υπάρχει $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ τέτοια ώστε για κάθε $\overline{z} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$ έχουμε ότι είτε $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{z}, Z) = \emptyset$ ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την οικογένεια $\mathcal{F}(\overline{z})$.

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{P}$ η οικογένεια των ζευγών $(\overline{w}, Y) \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W) \times \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ ώστε είτε $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, Y) = \emptyset$ ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(Y)$ για την οικογένεια $\mathcal{F}(\overline{w})$.

Από το Λήμμα 1.1 αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μια αποδεχτή οικογένεια στην W που ικανοποιεί και την ιδιότητα $(\mathcal{P}3)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μόνο η ιδιότητα $(\mathcal{P}2)$ χρήζει κάποιας εξήγησης. Έστω $(\overline{w}, Y) \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W) \times \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$. Επειδή $\overline{w} \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ έχουμε ότι είτε $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, W) = \emptyset$, ή η $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}}$ είναι large για την $(\overline{w}, W)$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\mathcal{G}^{s_{\overline{w}}} \cap \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\overline{w}, Y) = \emptyset$ και συνεπώς $(\overline{w}, Y) \in \mathcal{P}$. Στην δεύτερη περίπτωση, το Λήμμα 1.8 συνεπάγεται ότι η $\mathcal{F}(\overline{w})$ είναι large για την W. Επομένως από το Λήμμα 1.6, υπάρχει $V \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Y)$ τέτοια ώστε ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(V)$ για την $\mathcal{F}(\overline{w})$ και συνεπώς $(\overline{w}, V) \in \mathcal{P}$. $\square$

Είμαστε έτοιμοι για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος.

Αποδειξη του Θεωρηματος 0.14: Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει καμιά $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(U)$ ώστε $\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z) \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Επομένως η $\mathcal{G}$ είναι large για την U. Έστω $f : \mathcal{N} \to \mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ μια συνεχής απεικόνιση με $f[\mathcal{N}] = \mathcal{G}$ και για $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έστω $\mathcal{G}^s = f[\mathcal{N}_s]$. Τότε $\mathcal{G}^{\emptyset} = \mathcal{G}$ και $\mathcal{G}^s = \bigcup_n \mathcal{G}^{s^\frown n}$. Ακολουθώντας την διαδικασία των παραπάνω λημμάτων καταλήγουμε σε μια $W \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(U)$ που ικανοποιεί το Λήμμα 1.7 και σε μια $Z \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ που ικανοποιεί το Λήμμα 1.9. Ισχυριζόμαστε ότι ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$.

Πράγματι, από υπόθεση έχουμε ότι η $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\emptyset}$ είναι large στο $\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(Z) = \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(\emptyset, Z)$ και επομένως ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{F}(\emptyset)$. Συνεπώς ο παίχτης II είναι σε θέση, μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων, να κατασκευάσει μια πεπερασμένη block ακολουθία $\overline{y}_0 \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$ τέτοια ώστε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$, με $s_{\overline{y}_0} = (m_0)$ και η $\mathcal{G}^{(m_0)}$ είναι large για το $(\overline{y}_0, W)$. Από το Λήμμα 1.9, ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{F}(\overline{y}_0)$. Επομένως ο παίχτης II μπορεί να επεκτείνει την $\overline{y}_0$ σε μια πεπερασμένη block ακολουθία $\overline{y}_0{}^\frown \overline{y}_1 \in \mathcal{B}^{<\infty}_{\mathfrak{D}}(Z)$ ώστε να υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $s_{\overline{y}_0{}^\frown \overline{y}_1} = (m_0, m_1)$ και $\mathcal{G}^{(m_0, m_1)}$ να είναι large για την $(\overline{y}_0{}^\frown \overline{y}_1, W)$.

Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο ο παίχτης II έχει στρατηγική στο παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ να κατασκευάσει μια block ακολουθία $Y = \overline{y}_0{}^\frown \overline{y}_1{}^\frown \ldots$ ώστε για κάποιο $\sigma = (m_i)_i \in \mathcal{N}$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$, η $\mathcal{G}^{\sigma|k}$ να είναι large για την $((\overline{y}_0{}^\frown \ldots {}^\frown \overline{y}_{k-1}), W)$. Για να δείξουμε ότι αυτό αποτελεί νικητήρια στρατηγική για το $\mathcal{G}$ αρκεί να δείξουμε ότι $Y \in \mathcal{G}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\mathcal{G}^{\sigma|k}$ είναι large για την $((\overline{y}_0{}^\frown \ldots {}^\frown \overline{y}_{k-1}), W)$, έχουμε ότι υπάρχει $Y_k \in \mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{D}}(W)$ ώστε $(\overline{y}_0{}^\frown \ldots {}^\frown \overline{y}_{k-1})^\frown Y_k \in \mathcal{G}^{\sigma|k}$. Επειδή η $(\mathcal{G}^{\sigma|n})_n$ είναι φθίνουσα, $Y = \lim_n (\overline{y}_0{}^\frown \ldots . {}^\frown \overline{y}_{n-1})^\frown Y_n \in \overline{\mathcal{G}^{\sigma|k}}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και συνεπώς $Y \in \cap_k \overline{\mathcal{G}^{\sigma|k}}$. Από τη συνέχεια της f, έχουμε ότι $\cap_k \overline{\mathcal{G}^{\sigma|k}} = \{f(\sigma)\}$ και συνεπώς $Y = f(\sigma) \in \mathcal{G}$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το παιχνίδι του Gowers και εφαρμογές σε k-άδες block ακολουθιών

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε το θεώρημα του Gowers χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Επίσης θα παρουσιάσουμε κάποιες Ramsey ιδιότητες των k-άδων από block ακολουθίες.

1. Το παιχνίδι του Gowers

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πως από το Θεώρημα 0.14 καταλήγουμε στο Ramsey θεώρημα του W. T. Gowers (βλ. Θεώρημα 2.5). Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου ο $\mathfrak{X}$ θα είναι ένας χώρος με νόρμα και Schauder βάση $(e_n)_n$.

Θα χρειαστούμε κάποιους σχετικούς ορισμούς. Έστω $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ (αντ. $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$) το σύνολο των block ακολουθιών στον $\mathfrak{X}$ (αντ. στη μοναδιαία μπάλα $B_{\mathfrak{X}}$ του $\mathfrak{X}$). Έστω $U = (u_n)_n, V = (v_n)_n \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ και $\Delta = (\delta_n)_n$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι οι U, V είναι $\Delta-$*κοντά* και θα γράφουμε $dist(U, V) \leq \Delta$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - v_n\| \leq \delta_n$. Για μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ και μια ακολουθία $\Delta = (\delta_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών, η Δ-*επέκταση* της $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{F}_\Delta = \{U \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}} : \exists V \in \mathcal{F} \text{ ώστε } dist(U, V) \leq \Delta\}$$

Για $Y \in \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ και μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ το παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Y)$ ορίζεται σαν το $\mathfrak{D}$-παιχνίδι του Gowers αντικαθιστώντας το $\mathfrak{D}$ και την $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ με τη μοναδιαία μπάλα $B_{\mathfrak{X}}$ και την $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ αντίστοιχα.

Για τα δύο επόμενα λήμματα σταθεροποιούμε τα ακόλουθα.

(i) Ένα υποσύνολο $\mathfrak{D}$ της $< (e_n)_n >$ που ικανοποιεί την ιδιότητα ($\mathfrak{D}1$).
(ii) Μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ από block ακολουθίες στην $B_{\mathfrak{X}}$,
(iii) Μια ακολουθία $\Delta = (\delta_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών.

Λημμα 2.1. Έστω $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$, $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}) \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ ώστε

$$\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \subseteq (\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}))_\Delta$$

(δηλαδή για κάθε block υπακολουθία $U = (u_n)_n$ της Z με $\|u_n\| \leq 1$ υπάρχει για block υπακολουθία $\widetilde{U} = (\widetilde{u}_n)_n$ της $\widetilde{Z}$ με $\widetilde{u}_n \in \mathfrak{D}$ ώστε $dist(U, \widetilde{U}) \leq \Delta$).

Τότε $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Αποδειξη. Έστω $U \in \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z)$. Από τις υποθέσεις υπάρχει $\widetilde{U} \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ ώστε $dist(U, \widetilde{U}) \leq \Delta$ και $\widetilde{U} \notin \mathcal{G}$. Τότε $U \notin \mathcal{F}$, αλλιώς $\widetilde{U} \in \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ που είναι άτοπο. $\square$

Λημμα 2.2. Έστω $\delta_0 \leq 1$ και $\sum_{j=n+1}^\infty \delta_j \leq \delta_n$, για κάθε n. Έστω $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\Delta/10C} \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$, όπου C είναι η σταθερά βάσης της $(e_n)_n$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο διακριτό παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ για την $\mathcal{G}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ ώστε

$$\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \subseteq (\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}))_{\Delta/10C}$$

Τότε ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $\mathcal{F}_\Delta$.

Απόδειξη. Θα υποδείξουμε μια νικητήρια στρατηγική για τον παίχτη II στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $\mathcal{F}_\Delta$ δεδομένου ότι έχει στο διακριτό παιχνίδι $G_{\mathfrak{D}}(Z)$ για την $\mathcal{G}$. Υποθέτουμε ότι μόλις έχει ολοκληρωθεί η n-στή κίνηση του παιχνιδιού $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ (αντ. του διακριτού παιχνιδιού $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$) και $x_0 < ... < x_{n-1}$ (αντ. $\widetilde{x}_0 < ... < \widetilde{x}_{n-1}$) έχουν επιλεγεί από τον παίχτη II στο $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ (αντ. στο $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$).

Υποθέτουμε ότι στο παιχνίδι $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ ο παίχτης I επιλέγει μια block ακολουθία $Z_n = (z_k^n)_k \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^\infty(Z)$. Νορμάροντας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε k, $\|z_k^n\| = 1$ και συνεπώς από τις υποθέσεις μας για την $\widetilde{Z}$ και την Z υπάρχει $\widetilde{Z}_n = (\widetilde{z}_k^n)_k \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty(\widetilde{Z})$ ώστε $dist(Z_n, \widetilde{Z}_n) \leq \Delta/10C$. Τότε για κάθε k, $\|z_k^n - \widetilde{z}_k^n\| \leq \delta_k/10C$ και συνεπώς $\|\widetilde{z}_k^n\| \geq 1 - \delta_k/10C$. Έστω $k_0 \geq n$ ώστε $x_{n-1} < z_{k_0}^n$ και έστω ότι ο παίχτης I παίζει $\widetilde{Z}_n|_{[k_0,\infty]} = (\widetilde{z}_k^n)_{k\geq k_0}$ στην n-κίνηση του διακριτού παιχνιδιού $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$. Τότε ο παίχτης II επεκτείνει την $(\widetilde{x}_0, ..., \widetilde{x}_{n-1})$ σύμφωνα με τη στρατηγική του στο $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ για την $\mathcal{G}$, επιλέγοντας $\widetilde{x}_n \in < (\widetilde{z}_k^n)_{k\geq k_0} >_{\mathfrak{D}}$. Τότε $\widetilde{x}_n = \sum_{k\in I_n} \lambda_k^n \widetilde{z}_k^n$, όπου I_n είναι ένα πεπερασμένο διάστημα του $\mathbb{N}$ με $\min I_n \geq k_0$ και $\lambda_k^n \in \mathbb{R}$. Γυρνώντας στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$, έστω ότι ο παίχτης II παίζει $x_n = \sum_{k\in I_n} \lambda_k^n z_k^n$. Τότε $x_n > x_{n-1}$ και συνεπώς ο παίχτης II διαμορφώνει με τον τρόπο αυτό μια block ακολουθία στο $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(Z)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $(x_n)_n \in \mathcal{F}_\Delta$. Επειδή $(\widetilde{x}_n)_n \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{\Delta/10C} \subseteq (\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^\infty)_{\Delta/10C}$, έχουμε ότι για κάθε n, $\|\widetilde{x}_n\| \leq 1 + \delta_n/10C$. Συνεπώς

$$|\lambda_k^n| \leq 2C\frac{\|\widetilde{x}_n\|}{\|\widetilde{z}_k^n\|} \leq 2C\frac{1+\delta_n/10C}{1-\delta_k/10C} \leq 2C\frac{1+\delta_0/10C}{1-\delta_0/10C} \leq 4C,$$

για κάθε $k \in I_n$.

Επομένως, $\|x_n - \widetilde{x}_n\| \leq \sum_{k\in I_n} |\lambda_k^n| \|z_k^n - \widetilde{z}_k^n\| \leq 4C \sum_{k\in I_n} \frac{\delta_k}{10C} \leq \frac{4}{5}\delta_{\min I_n} \leq \frac{4}{5}\delta_n$. Επειδή $(\widetilde{x}_n)_n \in \mathcal{F}_{\Delta/10C}$, η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_{\frac{4\Delta}{5}+\frac{\Delta}{10C}} \subseteq \mathcal{F}_\Delta$. □

Τα παραπάνω λήμματα μας οδηγούν στον ορισμό της ακόλουθης ιδιότητας για ένα υποσύνολο $\mathfrak{D}$ του $\mathfrak{X}$ και μια ακολουθία $\Delta = (\delta_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών.

($\mathfrak{D}3$) ($\Delta-$ *block covering ιδιότητα*) Για κάθε $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty$ υπάρχει $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^\infty$ ώστε $\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^\infty(Z) \subseteq (\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty(\widetilde{Z}))_\Delta$.

Στην επόμενη πρόταση δίνεται ένα παράδειγμα υποσυνόλου $\mathfrak{D}$ του $\mathfrak{X}$ που έχει τις ιδιότητες $(\mathfrak{D}1) - (\mathfrak{D}3)$. Μάλιστα δείχνουμε ότι μια πολύ ισχυρότερη της $(\mathfrak{D}3)$ ιδιότητα μπορεί να επιτευχθεί. Ειδικότερα για κάθε $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty$, $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_n)_n$ θέτοντας $Z = (z_n)_n$ με $z_n = \widetilde{z}_{2n} + \widetilde{z}_{2n+1}$ τότε $\mathcal{B}_{B_{\mathfrak{X}}}^\infty(Z) \subseteq (\mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty(\widetilde{Z}))_\Delta$.

Πρόταση 2.3. Για κάθε ακολουθία $\Delta = (\delta_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει $\mathfrak{D} \subseteq B_{\mathfrak{X}} \cap < (e_n)_n >$ που ικανοποιεί τις $(\mathfrak{D}1) - (\mathfrak{D}3)$ και $(e_n)_n \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^\infty$.

Απόδειξη. Έστω $(k_n)_n$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων ώστε για κάθε n, $2^{-k_n+1} \leq \delta_n$. Για $i, l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, θέτουμε

$$\Lambda(i,l) = \{t \cdot 2^{-l\cdot(k_i+1)} :\ t \in \mathbb{Z}\}$$

Για κάθε πεπερασμένο μη κενό διάστημα $I = [n_1, n_2]$ του $\mathbb{N}$, $n_1 \leq n_2$, ορίζουμε $\mathfrak{D}(I) = \mathfrak{D}([n_1, n_2])$ το σύνολο όλων των $x = \sum_{i=n_1}^{n_2} \lambda_i e_i$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n_1 \leq i \leq n_2$, $\lambda_i \in \Lambda(i,l)$, όπου $l = n_2 - n_1 + 1$ είναι το μήκος του I.
(ii) Οι συντελεστές λ_{n_1} και λ_{n_2} είναι και οι δύο μη μηδενικοί.
(iii) $\|x\| \leq 1$.

Τέλος θέτουμε

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n_1 \leq n_2} \mathfrak{D}([n_1, n_2])$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $\mathfrak{D}$ ικανοποιεί τις $(\mathfrak{D}1) - (\mathfrak{D}2)$. Ειδικότερα $(e_n)_n \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το$\mathfrak{D}$ έχει την Δ-block covering ιδιότητα. Μάλιστα θα δείξουμε ότι το $\mathfrak{D}$ έχει μια ισχυρότερη ιδιότητα. Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο.

Ισχυρισμός. Έστω $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{D}}^{\infty}$ και $w \in <\widetilde{Z}>$ ώστε $\mathrm{card}(\mathrm{supp}_{\widetilde{Z}}(w)) \geq 2$ και $\|w\| \leq 1$. Τότε υπάρχει $\widetilde{w} \in <\widetilde{Z}>_{\mathfrak{D}}$ ώστε

(1) $\mathrm{supp}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{w}) = \mathrm{supp}_{\widetilde{Z}}(w)$.
(2) $\|w - \widetilde{w}\| \leq 2^{-k_{m_1}+1}$, όπου $m_1 = \min supp_{\widetilde{Z}}(w)$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_j)_j$ και έστω $(I_j)_j$, $I_j = [n_1(j), n_2(j)]$, $n_1(j) \leq n_2(j)$, η ακολουθία διαδοχικών μη κενών πεπερασμένων διαστημάτων του $\mathbb{N}$ ώστε $\widetilde{z}_j \in \mathfrak{D}(I_j)$. Έστω $m_1 < m_2$ στο $\mathbb{N}$ και $(\mu_j)_{j=m_1}^{m_2}$ συντελεστές τέτοιοι ώστε μ_{m_1}, μ_{m_2} είναι και οι δύο μη μηδενικοί και έστω $w = \sum_{j\in[m_1,m_2]} \mu_j \widetilde{z}_j$ στην $B_{\mathfrak{X}}$.

Έστω $w' = (1-2^{-k_{m_1}})w = \sum_{j\in[m_1,m_2]}(1-2^{-k_{m_1}})\mu_j\widetilde{z}_j$ και $\widetilde{w} = \sum_{j\in[m_1,m_2]} \widetilde{\mu}_j\widetilde{z}_j$, όπου $\widetilde{\mu}_j = s_j \cdot 2^{-(k_{n_1(j)}+1)}$ και αν $\mu_j \geq 0$, $s_j = \lceil (1 - 2^{-k_{m_1}})\mu_j 2^{k_{n_1(j)}+1} \rceil$ ενώ αν $\mu_j < 0$, $s_j = \lfloor (1-2^{-k_{m_1}})\mu_j 2^{k_{n_1(j)}+1} \rfloor$, δηλαδή τα $\widetilde{\mu}_j$ είναι της μορφής $s_j \cdot 2^{-(k_{n_1(j)+1})}$ ώστε $|\widetilde{\mu}_j| \geq |\mu_j(1 - 2^{-k_{m_1}})|$ και $|\widetilde{\mu}_j - (1 - 2^{-k_{m_1}})\mu_j| < 2^{-(k_{n_1(j)}+1)}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\widetilde{\mu}_j = 0$ αν και μόνο αν $\mu_j = 0$ και συνεπώς $\mathrm{supp}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{w}) = \mathrm{supp}_{\widetilde{Z}}(w)$. Επιπλέον για κάθε j, $|(1 - 2^{-k_{m_1}})\mu_j - \widetilde{\mu}_j| \leq 2^{-(k_{n_1(j)}+1)}$ και επομένως

$$(16)\qquad \begin{aligned} \|w' - \widetilde{w}\| &\leq \sum_{j\in[m_1,m_2]} \big|(1 - 2^{-k_{m_1}})\mu_j - \widetilde{\mu}_j\big|\|\widetilde{z}_j\| \\ &\leq \sum_{j\in[m_1,m_2]} 2^{-(k_{n_1(j)}+1)} \leq 2^{-k_{n_1(m_1)}} \end{aligned}$$

και συνεπώς, επειδή $m_1 \leq n_1(m_1)$, $\|w' - \widetilde{w}\| \leq 2^{-k_{m_1}}$. Καθώς $\|w - w'\| \leq 2^{-k_{m_1}}$, έχουμε ότι $\|w - \widetilde{w}\| \leq 2^{-k_{m_1}+1}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\widetilde{w} \in \mathfrak{D}$. Επειδή για κάθε $j \in [m_1, m_2]$, $\widetilde{z}_j \in \mathfrak{D}(I_j)$, έχουμε ότι $\widetilde{z}_j = \sum_{i\in I_j} t_i^j 2^{-l_j(k_i+1)}e_i$, όπου $l_j = n_2(j) - n_1(j) + 1$ είναι το μήκος του I_j και τα $t^j_{n_1(j)}, t^j_{n_2(j)}$ είναι και τα δύο μη μηδενικά. Επομένως θέτοντας $I = [n_1(m_1), n_2(m_2)]$, έχουμε ότι

$$(17)\qquad \widetilde{w} = \sum_{j\in[m_1,m_2]} \widetilde{\mu}_j\widetilde{z}_j = \sum_{j\in[m_1,m_2]} \widetilde{\mu}_j\big(\sum_{i\in I_j} t_i^j 2^{-l_j(k_i+1)}e_i\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

όπου για κάθε $i \in I_j$ και $j \in [m_1, m_2]$, $\lambda_i = t_i^j 2^{-l_j(k_i+1)}\widetilde{\mu}_j$ και $\lambda_i = 0$, για κάθε $i \in I \setminus \bigcup_{j\in[m_1,m_2]} I_j$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (i) του ορισμού του $\mathfrak{D}$, δηλαδή για κάθε $i \in I$, $\lambda_i \in \Lambda(i, l)$ όπου $l = n_2(m_2) - n_1(m_1) + 1$ είναι το μήκος του I. Επειδή $0 \in \Lambda(i, l)$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i \in \bigcup_{j\in[m_1,m_2]} I_j$. Έστω $j \in [m_1, m_2]$ και $i \in I_j$. Τότε

$$(18)\qquad \lambda_i = t_i^j 2^{-l_j(k_i+1)}\widetilde{\mu}_j = t_i^j 2^{-l_j(k_i+1)} s_j 2^{-(k_{n_1(j)}+1)} = \tau_i^j 2^{-l(k_i+1)}$$

όπου $\tau_i^j = t_i^j s_j 2^{(l-l_j)(k_i+1)-(k_{n_1(j)}+1)}$. Επειδή $m_1 < m_2$ έχουμε ότι $l > l_j$. Επίσης $n_1(j) \leq i$ και συνεπώς $(l-l_j)(k_i+1) - (k_{n_1(j)}+1) \geq 0$. Επομένως $\tau_i^j \in \mathbb{Z}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\lambda_i \in \Lambda(i, l)$.

Επιπλέον, επειδή τα $\widetilde{\mu}_{m_1}, \widetilde{\mu}_{m_2}, t^{m_1}_{n_1(m_1)}, t^{m_2}_{n_2(m_2)}$ είναι όλα μη μηδενικά, έχουμε ότι τα $\lambda_{n_1(m_1)}$ και $\lambda_{n_2(m_2)}$ είναι επίσης μη μηδενικά και επομένως ικανοποιείται και η συνθήκη (ii) του ορισμού του $\mathfrak{D}$. Τέλος, από τη σχέση (16), $\|\widetilde{w}\| \leq \|w'\| + 2^{-k_{n_1(m_1)}} \leq 1$ και επομένως ικανοποιείται η συνθήκη (iii). Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\widetilde{w} \in \mathfrak{D}$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού.

Συνεχίζουμε την απόδειξη της πρότασης. Έστω $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_j)_j$ στο $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ και $Z = (z_j)_j$ όπου για κάθε j, $z_j = \widetilde{z}_{2j} + \widetilde{z}_{2j+1}$. Επιλέγουμε $W = (w_i)_i$ στο $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z)$. Τότε για κάθε i υπάρχουν $m^i_1 < m^i_2$ και συντελεστές $(\mu_j)_j$ τέτοιοι ώστε $w_i = \sum_{j \in [m^i_1, m^i_2]} \mu_j \widetilde{z}_j \in B_{\mathfrak{X}}$ και οι $\mu_{m^i_1}, \mu_{m^i_2}$ είναι και οι δύο μη μηδενικοί. Από τον ισχυρισμό, για κάθε i υπάρχουν συντελεστές $(\widetilde{\mu}_j)_j$ ώστε $\widetilde{w}_i = \sum_{j \in [m^i_1, m^i_2]} \widetilde{\mu}_j \widetilde{z}_j \in \mathfrak{D}$ και $\|w_i - \widetilde{w}_i\| \leq 2^{-k_{m^i_1}+1} \leq 2^{-k_i+1} \leq \delta_i$. Θέτουμε $\widetilde{W} = (\widetilde{w}_i)_i$ και έχουμε ότι $\widetilde{W} \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ και $dist(\widetilde{W}, W) \leq \Delta$. Άρα $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \subseteq (\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}))_\Delta$. □

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\rho(x,y) = \|x-y\| + |\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}|$, $x, y \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}$ είναι μια ισοδύναμη μετρική στον $(\mathfrak{X} \setminus \{0\}, \|\cdot\|)$ και ότι η τοπολογία γινόμενο στον $(\mathfrak{X} \setminus \{0\}, \rho)^{\mathbb{N}}$ τον καθιστά Πολωνικό χώρο.

Λημμα 2.4. Έστω $\mathcal{F}$ ένα αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ και $\Delta = (\delta_n)_n$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε

(i) Η οικογένεια $\mathcal{F}_\Delta$ είναι αναλυτική στο $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$.
(ii) Για κάθε αριθμήσιμο $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$, η $\mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ είναι αναλυτική στο $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ (όπου το $\mathfrak{D}$ εφοδιάζεται με την διακριτή τοπολογία).

Αποδειξη. (i) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η οικογένεια $\mathcal{Q} = \{(U,V) : dist(U,V) \leq \Delta\}$ είναι κλειστή στο $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}} \times \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$. Έστω $proj_1$ (αντ. $proj_2$) η προβολή του $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}} \times \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ στην πρώτη (αντ. δεύτερη) συντεταγμένη. Τότε ας παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{F}_\Delta = proj_1[\mathcal{Q} \cap (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \times \mathcal{F})] = proj_1[\mathcal{Q} \cap proj_2^{-1}(\mathcal{F})]$.
(ii) Έστω $I : \mathfrak{D}^{\mathbb{N}} \to \mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε η I είναι προφανώς συνεχής και $\mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}} = I^{-1}(\mathcal{F}_\Delta)$. □

Θεωρημα 2.5. (W. T. Gowers) Έστω $\mathfrak{X}$ ένας χώρος με νόρμα και Schauder βάση. Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ μια αναλυτική οικογένεια από block ακολουθίες στη μοναδιαία μπάλα $B_{\mathfrak{X}}$ του $\mathfrak{X}$. Τότε για κάθε $\Delta > 0$ υπάρχει μια block ακολουθία $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ τέτοια ώστε είτε $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \cap \mathcal{F} = \emptyset$ ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $\mathcal{F}_\Delta$.

Αποδειξη. Έστω $(e_n)_n$ μια νορμαρισμένη Schauder βάση του $\mathfrak{X}$ με σταθερά C. Έστω $\Delta' = (\delta'_n)_n$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\delta'_0 \leq 1$, $\delta'_n \leq \delta_n$, και $\sum_{i>n} \delta'_i \leq \delta'_n$. Από την Πρόταση 2.3, υπάρχει $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ ώστε $(e_n)_n \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ και να ικανοποιεί τις $(\mathfrak{D}1) - (\mathfrak{D}3)$ για $\Delta'/10C$. Έστω επίσης $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\Delta'/10C} \cap \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$. Από το Λήμμα 2.4, η $\mathcal{G}$ είναι αναλυτική στο $\mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$ και από το Θεώρημα 0.14, υπάρχει μια block ακολουθία $\widetilde{Z} \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}$ τέτοια ώστε είτε $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}) \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z})$ για την $\mathcal{G}$. Επιλέγουμε $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ ώστε $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \subseteq (\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{D}}(\widetilde{Z}))_{\Delta'/10C}$. Από τα Λήμματα 2.1 και 2.2, έχουμε ότι είτε $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \cap \mathcal{F} = \emptyset$, ή ο παίχτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $\mathcal{F}_{\Delta'}$ και συνεπώς (καθώς $\Delta' \leq \Delta$) και για την $\mathcal{F}_\Delta$. □

2. Μια Ramsey συνέπεια για k-άδες block ακολουθιών

Ο κύριος στόχος της παραγράφου αυτής είναι το Θεώρημα 0.15. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω $k \geq 2$. Για κάθε $0 \leq i \leq k-1$ και κάθε άπειρο υποσύνολο $L = \{l_0 < l_1 < ...\}$ του $\mathbb{N}$ θέτουμε $L_{i(mod k)} = \{l_{kn+i} : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίζουμε

$$([L]^\infty)^k_\circ = \prod_{i=0}^{k-1}[L_{i(mod k)}]^\infty = \{(L_i)_{i=0}^{k-1} \in ([L]^\infty)^k : \forall i\ L_i \subseteq L_{i(mod k)}\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το $([L]^\infty)^k_\circ$ δεν είναι κληρονομικό, δηλαδή γενικά $([L']^\infty)^k_\circ \nsubseteq ([L]^\infty)^k_\circ$, για $L' \subseteq L$. Έστω, επίσης,

$$([L]^\infty)^k_\perp = \{(L_i)_{i=0}^{k-1} \in ([L]^\infty)^k : \forall i \neq j\ L_i \cap L_j = \emptyset\}$$

Το ακόλουθο λήμμα συσχετίζει τους παραπάνω δύο τύπους γινομένου.

Λημμα 2.6. Έστω $N = \{(2n+1)k : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $([N]^\infty)^k_\perp \subseteq \bigcup_{L\in[\mathbb{N}]^\infty}([L]^\infty)^k_\circ$.

Αποδειξη. Έστω $(M_i)_{i=0}^{k-1} \in ([N]^\infty)^k_\perp$. Έστω $M = \bigcup_{i=0}^{k-1} M_i$ και για κάθε $m \in M$ ορίζουμε το διάστημα $I_m = [m - i_m, m - i_m + k - 1]$ του $\mathbb{N}$ όπου i_m είναι ο μοναδικός φυσικός i ώστε $m \in M_i$. Ας παρατηρήσουμε ότι το μήκος όλων των I_m είναι k ενώ το μήκος ενός διαστήματος με άνισα άκρα στο N είναι τουλάχιστον $2k+1$. Επομένως για $m_1 \neq m_2$, $I_{m_1} \cap I_{m_2} = \emptyset$ και για κάθε $m \in M$, $I_m \cap N = \{m\}$.

Έστω $L = \bigcup_{m\in M} I_m$. Ισχυριζόμαστε ότι $(M_i)_{i=0}^{k-1} \in ([L]^\infty)^k_\circ$. Πράγματι, έστω $L = (l_n)_n$ μια αύξουσα αρίθμηση του L. Για κάθε $0 \le i \le k-1$ και $m \in M$ θέτουμε $I_m(i) = m - i_m + i$ να είναι το i-στοιχείο του I_m. Επειδή η $(I_m)_{m\in M}$ είναι μια ακολουθία από ξένα ανα δύο διαστήματα του $\mathbb{N}$ μήκους k, εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $L_{i(mod k)} = \bigcup_{m\in M} I_m(i)$. Έστω $0 \le i \le k-1$. Τότε $m \in M_i$ αν και μονο αν $i_m = i$ αν και μόνο αν $I_m(i) = m$. Άρα $M_i = \bigcup_{m\in M_i}\{I_m(i)\} \subseteq \bigcup_{m\in M}\{I_m(i)\} = L_{i(mod k)}$. □

Ο παραπάνω συμβολισμός επεκτείνεται για block ακολουθίες στη μοναδιαία μπάλα $B_{\mathfrak{X}}$ ενός χώρου Banach $\mathfrak{X}$ ως εξής. Για κάθε $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ θέτουμε

$$(\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z))^k_\circ = \{(Z_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}})^k :\ \forall i\ \ Z_i \preceq Z|_{\mathbb{N}_{i(mod k)}}\}$$

και γενικά για $L \in [\mathbb{N}]^\infty$, θέτουμε

$$(\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z|_L))^k_\circ = \{(Z_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}})^k :\ \forall i\ \ Z_i \preceq Z|_{L_{i(mod k)}}\}$$

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.6.

Λημμα 2.7. Έστω $Z \in \mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$ και $N = \{(2n+1)k : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε

$$(\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z|_N))^k_\perp \subseteq \bigcup_{L\in[\mathbb{N}]^\infty}(\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z|_L))^k_\circ.$$

Για μια οικογένεια $\mathfrak{F} \subseteq (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}})^k$ θέτουμε

$$\mathcal{F}^{\mathfrak{F}} = \{Z \in \mathcal{B}^\infty_{S_{\mathfrak{X}}} :\ \mathfrak{F} \cap (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z))^k_\circ \neq \emptyset\},$$

όπου $S_{\mathfrak{X}}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathfrak{X}$.

Λημμα 2.8. Αν η $\mathfrak{F}$ είναι αναλυτική στο $(\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}})^k$, τότε η $\mathcal{F}^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}^\infty_{S_{\mathfrak{X}}}$ είναι αναλυτική στο $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}}$.

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{K} = \{(Z, (V_i)_{i=0}^{k-1}) \in \mathcal{B}^\infty_{S_{\mathfrak{X}}} \times (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}})^k :\ (V_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z))^k_\circ\}$. Τότε το $\mathcal{K}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}} \times (\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}})^k$ και $\mathcal{F}^{\mathfrak{F}} = proj_1\big[\big(\mathcal{B}^\infty_{\mathfrak{X}} \times \mathfrak{F}\big) \cap \mathcal{K}\big]$. □

Αποδειξη του Θεωρηματος 0.15: Έστω μια νορμαρισμένη Schauder βάση $(e_n)_n$ του $\mathfrak{X}$ με σταθερά C. Επιλέγουμε $\Delta' = (\delta'_n)_n$ ώστε $0 < \delta'_n \le (4C)^{-1}\delta_n$ και $\sum_{j=n+1}^\infty \delta'_j \le \delta'_n$. Από το Λήμμα 2.8, έχουμε ότι το $\mathcal{F}^{\mathfrak{F}}$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}$ και από το Θεώρημα 2.5 υπάρχει μια block υπακολουθία $Z = (z_n)_n$ τέτοια ώστε είτε $\mathcal{B}^\infty_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \cap \mathcal{F}^{\mathfrak{F}} = \emptyset$ ή ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $(\mathcal{F}^{\mathfrak{F}})_{\Delta'}$. Έστω $Y = Z|_N$, όπου $N = \{(2n+1)k : n \in \mathbb{N}\}$. Ισχυριζόμαστε ότι η Y ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Πράγματι, αν $\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Z) \cap \mathcal{F}^{\mathfrak{F}} = \emptyset$ τότε για κάθε $Z' \in \mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Z)$, $\mathfrak{F} \cap (\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Z'))^k_{\circ} = \emptyset$. Ειδικότερα, για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^{\infty}$, $\mathfrak{F} \cap (\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Z|_L))^k_{\circ} = \emptyset$ το οποίο από το Λήμμα 2.7 συνεπάγεται ότι $\mathfrak{F} \cap (\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Y))^k_{\perp} = \emptyset$.

Επομένως ας υποθέσουμε ότι ο παίχτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι του Gowers $G_{\mathfrak{X}}(Z)$ για την $(\mathcal{F}^{\mathfrak{F}})_{\Delta'}$. Επειδή $Y = Z|_N$ το ίδιο ισχύει και για το παιχνίδι $G_{\mathfrak{X}}(Y)$. Επιλέγουμε $(U_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(Y))^k$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(V_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^{\infty}_{\mathfrak{X}})^k$ ώστε $V_i \preceq U_i$ και $(V_i)_{i=0}^{k-1} \in \mathfrak{F}_{\Delta}$. Θεωρούμε μια εκτέλεση του παιχνιδιού τέτοια ώστε στην n^{th}-κίνηση ο παίχντης Ι παίζει U_i, όπου $n = i(modk)$. Τότε ο Παίχτης ΙΙ δύναται να κατασκευάσει μια block ακολουθία $V = (v_n)_n$ στην $(\mathcal{F}^{\mathfrak{F}})_{\Delta'}$ ώστε $v_n \in U_i$ για κάθε $n = i(modk)$. Επιλέγουμε W στην $\mathcal{F}^{\mathfrak{F}}$ με $dist(V, W) \leq \Delta'$ για κάθε i, $W_i \preceq W|_{\mathbb{N}_{i(modk)}}$ ώστε $(W_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathcal{B}^{\infty}_{B_{\mathfrak{X}}}(W))^k_{\circ} \cap \mathfrak{F}$. Έστω $W = (w_n)_n$ και $W_i = (w^i_n)_n$. Τότε για κάθε $i = 1, ..., k$ υπάρχει μια block ακολουθία $(F^i_n)_n$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}_{i(modk)}$ και μια ακολουθία συντελεστών $(\lambda_j)_j$ ώστε για κάθε i και n, $w^i_n = \sum_{j \in F^i_n} \lambda_j w_j$. Θέτουμε $v^i_n = \sum_{j \in F^i_n} \lambda_j v_j$ και $V_i = (v^i_n)_n$. Τότε για κάθε i, $V_i \preceq V|_{\mathbb{N}_{i(modk)}} \preceq U_i$. Απομένει να δείξουμε ότι $(V_i)_{i=0}^{k-1} \in \mathfrak{F}_{\Delta}$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $dist(V_i, W_i) \leq \Delta$, Για κάθε i. Πράγματι, έστω $0 \leq i \leq k-1$ και $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\|w^i_n\| \leq 1$ και $\|w_j\| = 1$, έχουμε ότι $|\lambda_j| \leq 2C$ και συνεπώς

$$\|v^i_n - w^i_n\| \leq \sum_{j \in F^i_n} |\lambda_j| \|v_j - w_j\| \leq 2C \sum_{j \in F^i_n} \delta'_j \leq 4C\delta'_n \leq \delta_n$$

Άρα $(U_i)_{i=0}^{k-1} \in (\mathfrak{F}_{\Delta})^{\uparrow}$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.

[2] D. E. Alspach, S. A. Argyros, *Complexity of weakly null sequences*, Dissertationes Math., (1992).

[3] G. Androulakis, S. J. Dilworth, and N. J. Kalton, *A new approach to the Ramsey-type games and the Gowers dichotomy in F-spaces*, to appear in Combinatorica.

[4] S. A. Argyros, I. Gasparis, *Unconditional structures of weakly null sequences* Trans. Amer. Math. Soc. 353, (2001), no.5, 2019–2058.

[5] S. A. Argyros, G. Godefroy, H. P. Rosenthal, *Descriptive set theory and Banach spaces* Handbook of the geometry of Banach spaces, North-Holland, Amsterdam, Vol. 2, (2003), 1007–1069.

[6] S.A. Argyros and S. Todorčević, *Ramsey Methods in Analysis*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[7] J. Bagaria and J. Lopez- Abad, *Weakly Ramsey sets in Banach spaces*, Adv. in Math., 160, (2001), 133-174.

[8] J. Bagaria and J. Lopez- Abad, *Determinacy and weakly Ramsey sets in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 354, (2002), 1327-1349.

[9] A. Brunel, L. Sucheston *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory 7 (1974), no. 4, 294–299.

[10] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, 1961 Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960) pp. 123–160 Jerusalem Academic Press, Jerusalem.

[11] E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symb. Logic, 39, (1974), 163-165.

[12] J. Elton, *Weakly null normalized sequences in Banach spaces*, Doctoral thesis, Yale Univercity (1978).

[13] V. Ferenczi and C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces*, J. of Funct. Anal. Journal of Functional Analysis, 257, Issue 1, (2009), 149-193.

[14] T. Figiel, R. Frankiewicz, R. Komorowski, C. Ryll-Nardzewski, *On hereditarily indecomposable Banach spaces*, Annals of Pure and Applied Logic, 126, (2004), 293-299.

[15] T. Figiel, R. Frankiewicz, R. Komorowski, C. Ryll-Nardzewski, *Selecting basic sequences in $\phi-$ stable Banach spaces*, Studia Mathematica, 159, (2003), 499-515.

[16] H. Furstenberg, Y. Katznelson, *An ergodic Szemeredi theorem for commuting transformations* J. Analyse Math. 34 (1978), 275–291.

[17] F. Galvin, K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's theorem*, J. Symbolic Logic, 38, (1973), 193–198.

[18] I. Gasparis, *A dichotomy theorem for subsets of the power set of the natural numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., 129, (2001), no. 3, 759–764.

[19] W.T. Gowers, *Hypergraph regularity and the multidimensional Szemeredi theorem*, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 3, 897–946.

[20] W.T. Gowers, *Ramsey Methods in Banach Spaces*, Handbook of the geometry of Banach Spaces, vol. 2, (2003) Elsevier Science B.V., 1072-1097.

[21] W.T. Gowers, *An Infinite Ramsey Theorem and some Banach-Space Dichotomies*, Ann. of Math, 156, (2002), 797-833.

[22] W.T Gowers, *A New Dichotomy for Banach Spaces*, Geom. Funct. Anal., 6, (1996), 1083-1093.

[23] W.T. Gowers, *A Banach space not containing c_0, l_1 or a reflexive subspace*, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994), no. 1, 407–420.

[24] W.T. Gowers, B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), no. 4, 851–874.

[25] L. Halbeisen, E. Odell, *On asymptotic models in Banach spaces*, Israel J. Math. 139 (2004), 253–291.

[26] R.C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. (2) 80, (1964), 542–550.

[27] R.C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. (2) 52, (1950), 518–527.

[28] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[29] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math (2) 104 (1976), no. 1, 1–29.
[30] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces.*, Springer-Verlag, Vol. 92, (1977).
[31] J. Lopez-Abad, *Coding into Ramsey sets*, Math. Annal., 332, 4, (2005), 775-794.
[32] J. Lopez-Abad, S. Todorcevic, *Pre-compact families of finite sets of integers and weakly null sequences in Banach spaces*, Topology Appl. 156 (2009), no. 7, 1396–1411.
[33] B. Maurey, *Type, cotype and K-convexity*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, (2003),1299-1332.
[34] B. Maurey, *A note on Gowers' dichotomy theorem*, Convex Geometric Analysis, vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999), 149-157.
[35] S. Mercourakis, *On Cesàro summable sequences of continuous functions*, Mathematika 42 (1995), no. 1, 87–104.
[36] K. Milliken, *Ramsey's theorem with sums and unions*, J. Combin. Theory (A), 18, (1975), 276-290.
[37] C.St.J.A. Nash-Williams, *On well quasi-ordering transfinite sequences*, Proc. Cambr. Phil. Soc., 61, (1965), 33-39.
[38] E. Odell, *On Schreier unconditional sequences*, Contemp. Math. 144, (1993), 197–201.
[39] E. Odell, Th. Schlumprecht, *On the richness of the set of p's in Krivine's theorem*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 177–198, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkha"user, Basel, 1995.
[40] A. M. Pelczar, *Some version of Gowers' dichotomy for Banach spaces*, Univ. Iagel. Acta Math., 41, (2003), 235-243.
[41] A. M. Pelczar, *Subsymmetric sequences and minimal spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 765-771.
[42] P. Pudlak, V. Rodl, *Partition theorems for systems of finite subsets of integers*, Discrete Math. 39, (1982), no. 1, 67–73.
[43] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30 (2), (1929), 264-286.
[44] C. Rosendal, *An exact Ramsey principle for block sequences*, to appear in Collectanea Mathematica.
[45] C. Rosendal, *Infinite asymptotic games*, Ann.de l'Inst. Fourier, 59, (2009), 1323–1348.
[46] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing c_0*, J. Amer. Math. Soc. 7, (1994), no. 3, 707–748.
[47] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.
[48] J. Silver, *Every analytic set is Ramsey*, J. Symb. Logic, 35, (1970), 60-64.
[49] E. Specker, *Teilmengen von Mengen mit Relationen*, Comment Math. Helv. 31 (1957), 302-314.