



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών

Βελτιστοποίηση σχεδιασμού μετωπικών εσωτερικών και εξωτερικών
οδοντώσεων

Διπλωματική εργασία

Νικόλαος Θ. Παρασκευόπουλος

Επιβλέπων: Λέκτορας Β. Σπιτάς

Αθήνα 2013

Πρόλογος

Η ζήτηση της βιομηχανίας για παραγωγή βελτιστοποιημένων προϊόντων είτε ως προς την αντοχή τους, το μέγεθος τους, ή ως προς την λειτουργικότητα τους, μας ώθησε στην δημιουργία μιας μεθόδου σχεδιασμού μετωπικών εξωτερικών και εσωτερικών οδοντώσεων με στόχο τη βελτίωση της αντοχής της βαθμίδας των οδοντωτών τροχών. Η μέθοδος που αναλύεται στο παρακάτω κείμενο μεταβάλλει τον συντελεστή πάχους των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών, ο οποίος έχει ευρεθεί πρωθύστερα με ανάλυση μέσω πεπερασμένων στοιχείων και μέσω της πειραματικής μεθόδου ανάλυσης των τάσεων της φωτοελαστικότητας. Για την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία έγινε κατασκευή 3D μοντέλων κάνοντας χρήση του λογισμικού Autodesk Inventor (CAD). Τα 3D μοντέλα δημιουργήθηκαν από τον κώδικα εξαγωγής 2D μοντέλων, ο κώδικας γράφτηκε στο λογισμικό Matlab. Για την ανάλυση των μοντέλων με φωτοελαστικότητα έγινε κατασκευή μοντέλων από πολυκαρβονικό υλικό. Η κατασκευή των μοντέλων για το πείραμα της φωτοελαστικότητας έγινε σε κέντρο κατεργασιών (CNC) τύπου Mazak με λογισμικό Vero (CAM). Όλα τα μοντέλα των οδοντωτών τροχών μελετήθηκαν για φορτίο ασκούμενο στο μέγιστο σημείο μονής επαφής (H.P.S.T.C.). Τέλος παρατίθενται σε κατάλληλα διαγράμματα τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα των αναλύσεων καθώς και η σύγκριση των δύο μεθόδων.

Abstract

Due to the industry demand of production enhanced components regarding the strength, the size and the functionality of the products, more sophisticated methods were developed in the design of internal and external gears, in order to optimize the geometry and improve the performance of the gear teeth. The aforementioned method is thoroughly discussed in the subsequent text and it is analyzed the rate of change of the thickness of the meshing gears. The performance of each proposed gear tooth geometry was examined by employing the Finite Element Analysis (FEA) method and the numerical analysis results were compared against experimental results by conducting photoelasticity tests on the models. The gear tooth models were created by initially producing the 2D gear tooth geometry by developing mathematical models in Matlab. Then, the 2D geometry was imported in the Autodesk Inventor software and the 3D CAD models were produced. For the photoelasticity experiments on the gear teeth geometries, the models were manufactured in a CNC milling machine and the material that used for the models was a polycarbonate (PCB) photosensitive material. Then, the pinion models were studied under loading at the Highest Point of Single Tooth Contact (HPSTC). Finally, all the results that derived from the experimental and numerical analyses were plotted in suitable graphs and the results were discussed by comparing the outcomes of both methods that used in this project.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
Abstract	iii
1 Εισαγωγή στους οδοντωτούς τροχούς	6
1.1 Γενικά στοιχεία για τους οδοντωτούς τροχούς	6
1.2 Βασικός νόμος της οδοντώσεως	9
1.3 Βασικά σχεδιαστικά χαρακτηριστικά οδοντωτών τροχών	12
1.4 Κατασκευή οδοντωτών τροχών εξειλιγμένης καμπύλης	16
1.5 Εύρεση του σημείου που αναπτύσσεται η μέγιστη καταπόνηση στους οδοντωτούς τροχούς	21
2 Υπολογισμός της αντοχής των οδόντων στην επικίνδυνη διατομή του ποδός	27
2.1 Κατασκευή 3D μοντέλων των επιλεγμένων δοκιμίων	27
2.2 Ανάλυση των 3D μοντέλων με F.E.A.	30
2.3 Αποτελέσματα	35
3 Πείραμα φωτοελαστικότητας	38
3.1 Εισαγωγή στη φωτοελαστικότητα	38
3.2 Το κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου	38
3.3 Υπολογισμός της φωτοτασεοπτικής σταθεράς	39
3.4 Διαδικασία κοπής δοκιμίων φωτοελαστικότητας	41
3.5 Πειραματική μέθοδος	43
3.6 Αποτελέσματα	44
4 Συμπεράσματα	III
Παραρτήματα	IV
Παράρτημα I	IV
Παράρτημα II	IX
Παράρτημα III	XIV
Παράρτημα IV	XXII
Παράρτημα V	XXX
Παράρτημα VI	XL
Βιβλιογραφία	XLV

Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 1 - Ισοδυναμία δύο συνεργαζόμενων μετωπικών οδοντωτών τροχών με δύο κυλινδρικούς τροχούς.	6
Εικόνα 2 - Εφαπτομενικές ταχύτητες, τριβή και η δύναμη της πίεσης επιφανείας.....	7
Εικόνα 3 - Οδοντωτός κανόνας ως κοπτικό εργαλείο οδοντωτών τροχών	8
Εικόνα 4 - Συνεργαζόμενες κατατομές.....	9
Εικόνα 5 - Βασικός νόμος της οδοντώσεως	10
Εικόνα 6 - Η κοινή κάθετος N - N των κατατομών στο σημείο επαφής E τέμνει την διάκεντρο στο σημείο C	11
Εικόνα 7 - Οδοντώσεις με ίδιο αριθμό οδόντων και διαφορετικό module.....	12
Εικόνα 8 - Μεγέθη εξωτερικών οδοντώσεων	13
Εικόνα 9 - Μεγέθη εσωτερικών οδοντώσεων.....	14
Εικόνα 10 - Η εμφάνιση του προβλήματος των υποκοπών στις εσωτερικές οδοντώσεις	14
Εικόνα 11 - Η εμφάνιση του προβλήματος των υποκοπών στις εξωτερικές οδοντώσεις.....	14
Εικόνα 12 - Φθορά στην κεφαλή του οδοντωτού τροχού εσωτερικής οδόντωσης για την αποφυγή υποκοπών	14
Εικόνα 13 - Χαρακτηριστικά μεγέθη βαθμίδας με στεφάνη εσωτερικής οδόντωσης	15
Εικόνα 14 - Εσωτερική και εξωτερική οδόντωση με ίδια γωνία εξειλιγμένης, ίδιο αριθμό οδόντων και ίδιο module.....	20
Εικόνα 15 - Τμήμα επαφών σε βαθμίδα με εξωτερικές οδοντώσεις	21
Εικόνα 16 - Τμήμα επαφών σε βαθμίδα με εσωτερική οδόντωση	22
Εικόνα 17 - Σημεία που εξάγει ο κώδικας.....	27
Εικόνα 18 – Κατασκευή 3D μοντέλου οδοντωτού τροχού: α) 2D σχέδιο κατατομής, β) 3D μοντέλο μισού δοντιού, γ) αντιγραφή κατά το επίπεδο συμμετρίας, δ) αντιγραφή κατά τον άξονα περιστροφής	28
Εικόνα 19 - Κατασκευή 3D μοντέλου οδοντωτού τροχού εσωτερικής οδόντωσης: α) 2D σχέδιο της κατατομής, β) αντιγραφή του 2D μοντέλου κατά το επίπεδο συμμετρίας , γ) 3D μοντέλου στεφάνης, δ) αφαίρεση του 2D σχεδίου της κατατομής από το 3D μοντέλο της στεφάνης, ε) αντιγραφή κατά τον άξονα περιστροφής, ζ) δημιουργία και αντιγραφή των υποκοπών στις κεφαλές των οδόντων	29
Εικόνα 20 - Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων σε οδόντα.....	35
Εικόνα 21 - Ανάλυση τάσεων και εύρεση της μέγιστης κύριας τάσης με F.E.A. σε οδόντα	35
Εικόνα 22 - Το πολωσισκόπιο του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών [10].....	39
Εικόνα 23 - Ιδιοσυσκευή κάμψης: α) σύστημα βαρών και μοχλών, β) δοκίμιο, γ) γέφυρα στήριξης, δ) μετρητικό ρολόι.....	40
Εικόνα 24 - Κροσσοί συμβολής	41
Εικόνα 25 - Εύρεση του ουδέτερου άξονα και μέτρηση των κροσσών συμβολής.....	43

Περιεχόμενα πινάκων

Πίνακας 1 - Συνοπτικός πίνακας 3D μοντέλων	30
Πίνακας 2 - Συγκεντρωτικός πίνακας συνεργασιών, βαθμού επικάλυψης και θέσεων εφαρμογής του φορτίου P_N	32
Πίνακας 3 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αλλαγής του πάχους	36
Πίνακας 4 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αύξησης της αντοχής	37
Πίνακας 5 - Συνοπτικός πίνακας δοκιμίων φωτοελαστικότητας	42
Πίνακας 6 - Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων πειράματος φωτοελαστικότητας	44
Πίνακας 7 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αλλαγής του πάχους	I
Πίνακας 8 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αύξησης της αντοχής	II

Περιεχόμενα σχημάτων

Σχήμα 1 - Κατατομή οδόντος κοπτικού κανόνα: α) κοπτικός κανόνας με $C_c = 0$, β) κοπτικός κανόνας με $C_c = 0.25$, γ) κοπτικός κανόνας με $C_c = \max$	16
Σχήμα 2 - Απεικόνιση της συνεργασίας του οδοντωτού τροχού με τον κοπτικό κανόνα	17
Σχήμα 3 - Συνεργαζόμενη κατατομή κοπτικού κανόνα	18
Σχήμα 4 - Προσδιορισμός του μέγιστου σημείου μονής επαφής	23
Σχήμα 5 - Προσδιορισμός του μέγιστου σημείου μονής επαφής σε εσωτερικές οδοντώσεις	25

Περιεχόμενα διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1 – Το φορτίο P_N που εμφανίζεται σε έναν οδόντα οδοντωτού τροχού κατά το μήκος επαφής του [2]	22
Διάγραμμα 2 - Σύγκριση των μετρήσεων ενός ζεύγους για διαφορετικούς συντελεστές πάχους	36
Διάγραμμα 3 – Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων του πειράματος της φωτοελαστικότητας	45

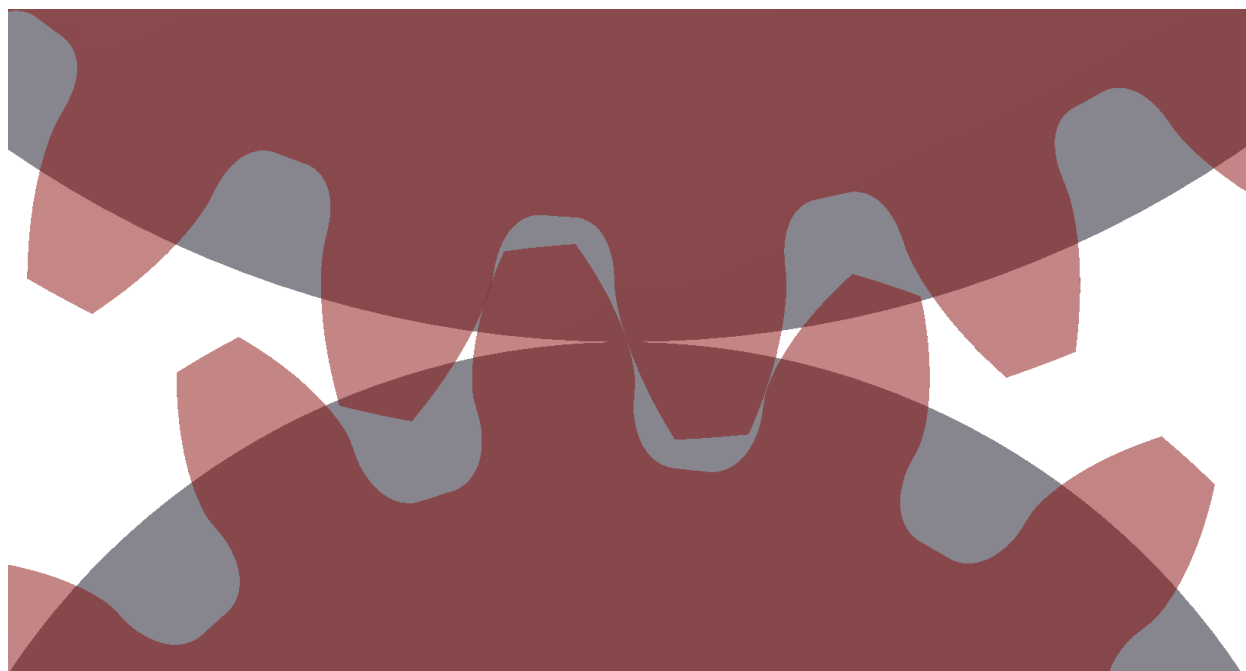
1 Εισαγωγή στους οδοντωτούς τροχούς

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τους οδοντωτούς τροχούς, καθώς και ο βασικός νόμος της οδοντώσεως. Επίσης παρουσιάζονται τα βασικά σχεδιαστικά και κατασκευαστικά χαρακτηριστικά των οδοντωτών τροχών.

1.1 Γενικά στοιχεία για τους οδοντωτούς τροχούς

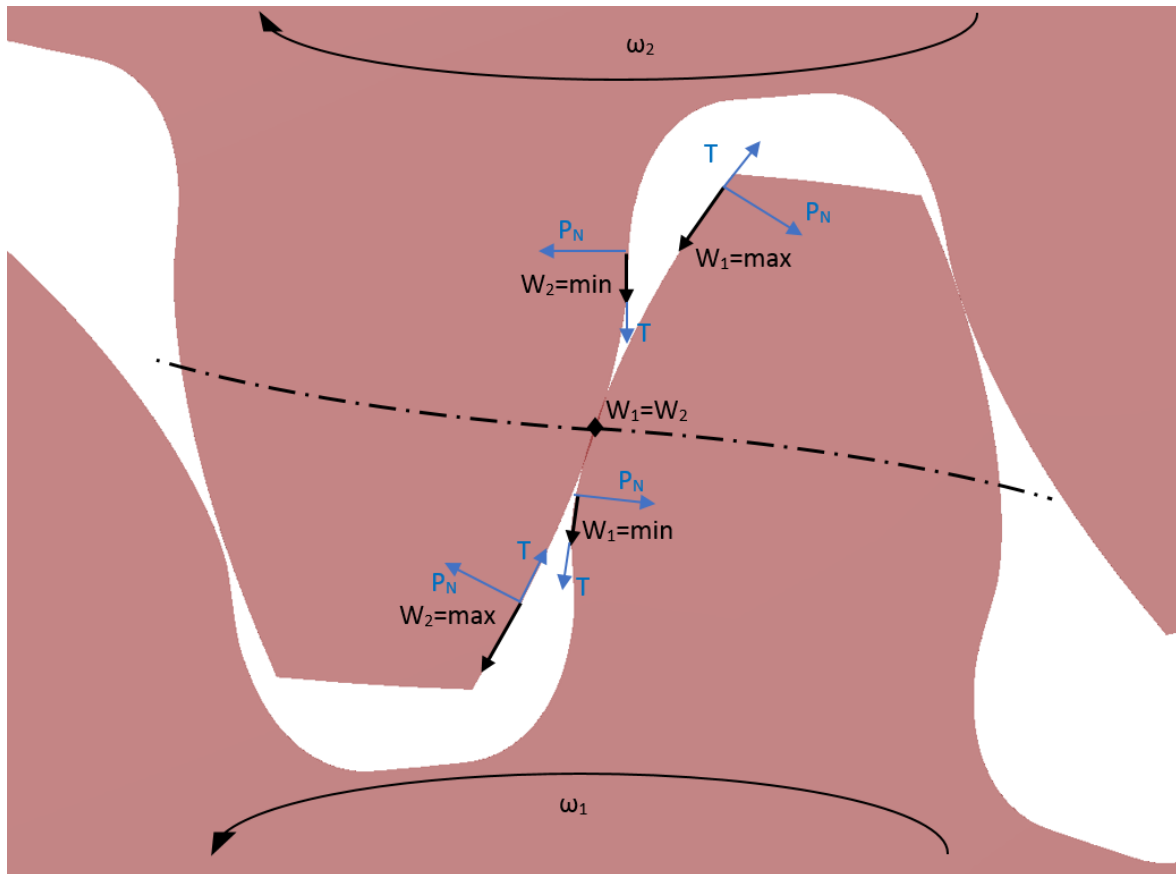
Οι οδοντωτοί τροχοί είναι στοιχεία μηχανών που επιτυγχάνουν την μετάδοση κίνησης και τη μεταφορά ισχύος με εμπλοκή των συνεργαζόμενων οδόντων. Σε πολλές εφαρμογές οι οδοντωτοί τροχοί δεν είναι απαραίτητοι για την μετάδοση κίνησης. Παρ' όλα αυτά, η ανάγκη μεταφοράς μεγάλης στρεπτικής ροπής και σταθερής μετάδοσης κίνησης κάνουν την ύπαρξη των οδοντωτών τροχών αναγκαία.

Από κινηματικής πλευράς δύο συνεργαζόμενοι μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί ισοδυναμούν με δύο κυλινδρικούς τροχούς. Οι κυλιόμενες επιφάνειες των κυλινδρικών τροχών καθορίζουν επιφάνειες μεγάλης σημασίας για τους οδοντωτούς τροχούς. Αυτές οι επιφάνειες χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη μελέτη των οδοντωτών τροχών και αντιστοιχούν με τους λεγόμενους αρχικούς κυλίνδρους των μετωπικών τροχών.



Εικόνα 1 - Ισοδυναμία δύο συνεργαζόμενων μετωπικών οδοντωτών τροχών με δύο κυλινδρικούς τροχούς

Για να εξασφαλισθεί σταθερή σχέση μετάδοσης και μεταφοράς μεγάλης ισχύος είναι αναγκαία η ύπαρξη οδόντων. Η κίνηση μεταδίδεται όχι μέσω τριβής των κυλιόμενων αρχικών κυλίνδρων, αλλά με την επαφή και την συνεργασία των πλευρικών επιφανειών των οδοντωτών τροχών. Αυτή η εμπλοκή των οδόντων πρέπει να εξασφαλίζει ομαλή και χωρίς ολίσθηση κύλιση των αρχικών κυλίνδρων και σταθερή σχέση μετάδοσης κίνησης, που αποτελούν τις βασικές προϋποθέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι συνεργαζόμενες κατατομές των δύο οδοντωτών τροχών. Η ανυπαρξία ολίσθησης των αρχικών κυλίνδρων δεν συνεπάγεται και ανυπαρξία ολίσθησης των κατατομών μεταξύ τους σε όλα τα σημεία επαφής τους.



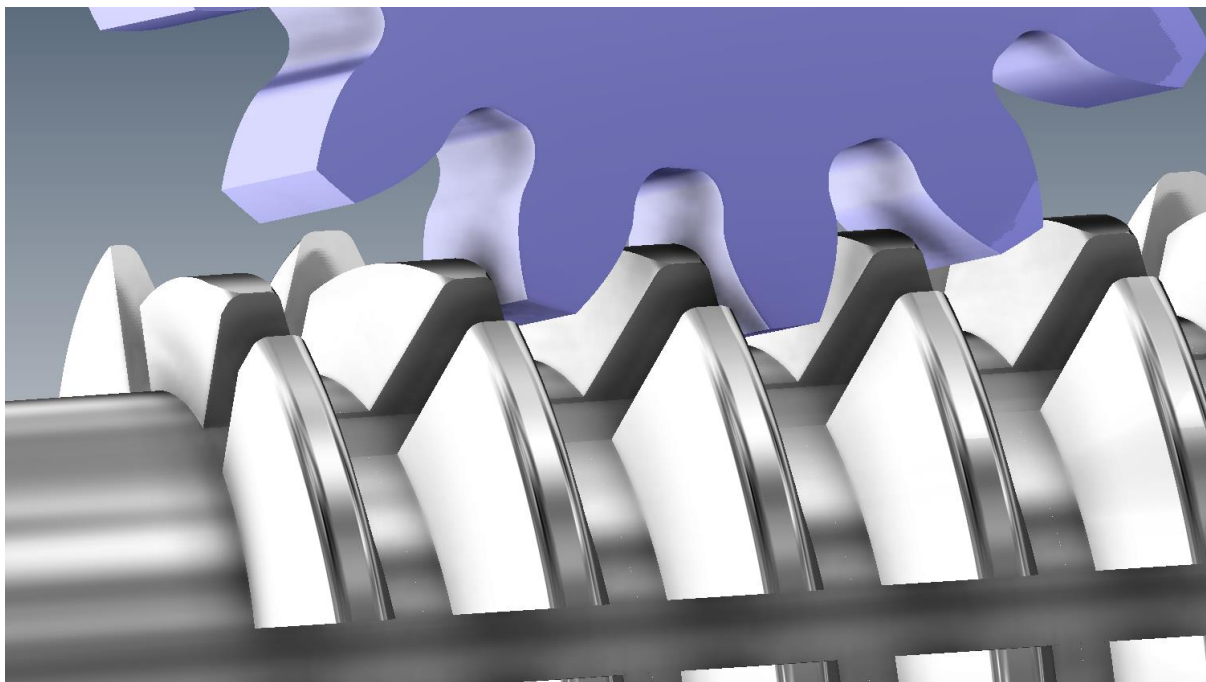
Εικόνα 2 - Εφαπτομενικές ταχύτητες, τριβή και η δύναμη της πίεσης επιφανείας

Η ομοιόμορφη μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος από τον κινητήριο στον κινούμενο οδοντωτό τροχό εξασφαλίζεται με τον βασικό νόμο της οδοντώσεως, κατά τον οποίο οι συνεργαζόμενες κατατομές των οδοντωτών τροχών πρέπει να είναι τέτοιες έτσι ώστε η κοινή κάθετος των κατατομών στο τυχόν σημείο επαφής τους να διέρχεται δια του σημείου κυλίσεως των τροχών. Με βάση αυτόν τον νόμο και με δεδομένη την γεωμετρία της μίας κατατομής, αποδεικνύεται ότι μπορεί να ευρεθεί η γεωμετρία της άλλης κατατομής. Οι κατατομές αυτές ονομάζονται συνεργαζόμενες με την έννοια ότι κατά την συνεργασία τους ακολουθούν τον βασικό νόμο της οδοντώσεως. Η αναζήτηση των αποδοτικότερων συνεργαζόμενων κατατομών αποτέλεσε ένα από τα βασικότερα αντικείμενα της θεωρίας των οδοντώσεων. Έτσι έχουν χρησιμοποιηθεί ως κατατομές οδόντων διάφορες καμπύλες, όπως είναι η εξειλιγμένη καμπύλη, τόξα κύκλου, διάφορες κυκλοειδείς καμπύλες, σπείρα και άλλες.

Η αναλυτική μέθοδος βασίζεται στη γενική θεωρία οδοντώσεως, της οποίας οι βάσεις τέθηκαν από τον E. Buckingham [1]. Κατά αυτήν γίνεται χρήση του γεγονότος ότι υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της κατατομής του οδόντος του ενός τροχού, της κατατομής του οδόντος του συνεργαζόμενου τροχού και της τροχιάς επαφών τους. Έτσι, εάν δοθεί ένα από τα παραπάνω τα άλλα δύο υπολογίζονται αναλυτικά με την αναπτυσσόμενη θεωρία οδοντώσεως, η οποία ονομάζεται γενικευμένη διότι εξετάζει την κατατομή κατά γενικό τρόπο, ανεξάρτητα αν η κατατομή είναι εξειλιγμένη ή οποιαδήποτε άλλη καμπύλη. Αυτός ο τρόπος εξέτασης της γεωμετρίας συνεργαζόμενων κατατομών έχει πολλά πλεονεκτήματα που γίνονται φανερά κατά την σχεδίαση και ειδικότερα κατά την βελτιστοποίηση των οδοντωτών τροχών.

Είναι απαραίτητο, για λόγους τυποποίησης, οι οδοντωτοί τροχοί να έχουν εναλλαξιμότητα. Αυτό σημαίνει ότι, ανεξάρτητα από τον αριθμό των οδόντων, όλοι οι οδοντωτοί τροχοί με τα ίδια χαρακτηριστικά (γωνία

εξειλιγμένης και module) θα πρέπει να συνεργάζονται τόσο μεταξύ τους όσο και με τον οδοντωτό κανόνα που έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτούς τους οδοντωτούς τροχούς.



Εικόνα 3 - Οδοντωτός κανόνας ως κοπτικό εργαλείο οδοντωτών τροχών

Λόγο της εναλλαξιμότητας και της μοναδικότητας του κανόνα σε ένα δεδομένο οδοντωτό τροχό είναι φανερή η αντιστοιχία μεταξύ της κατατομής του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού, της κατατομής του οδόντος του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού, της τροχιάς επαφών τους, και της κατατομής του οδόντος του κανόνα. Η βελτιστοποίηση οδοντώσεων αναφέρεται κυρίως στη μελέτη του οδοντωτού κανόνα, δεδομένου ότι ο κανόνας αποτελεί κατά βάση το κοπτικό εργαλείο όλων των τροχών της οικογένειας του.

1.2 Βασικός νόμος της οδοντώσεως

Οι συνεργαζόμενες κατατομές 1 και 2 της Εικόνα 4 εφάπτονται στο σημείο E και περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 γύρω από τα σημεία O_1 και O_2 .

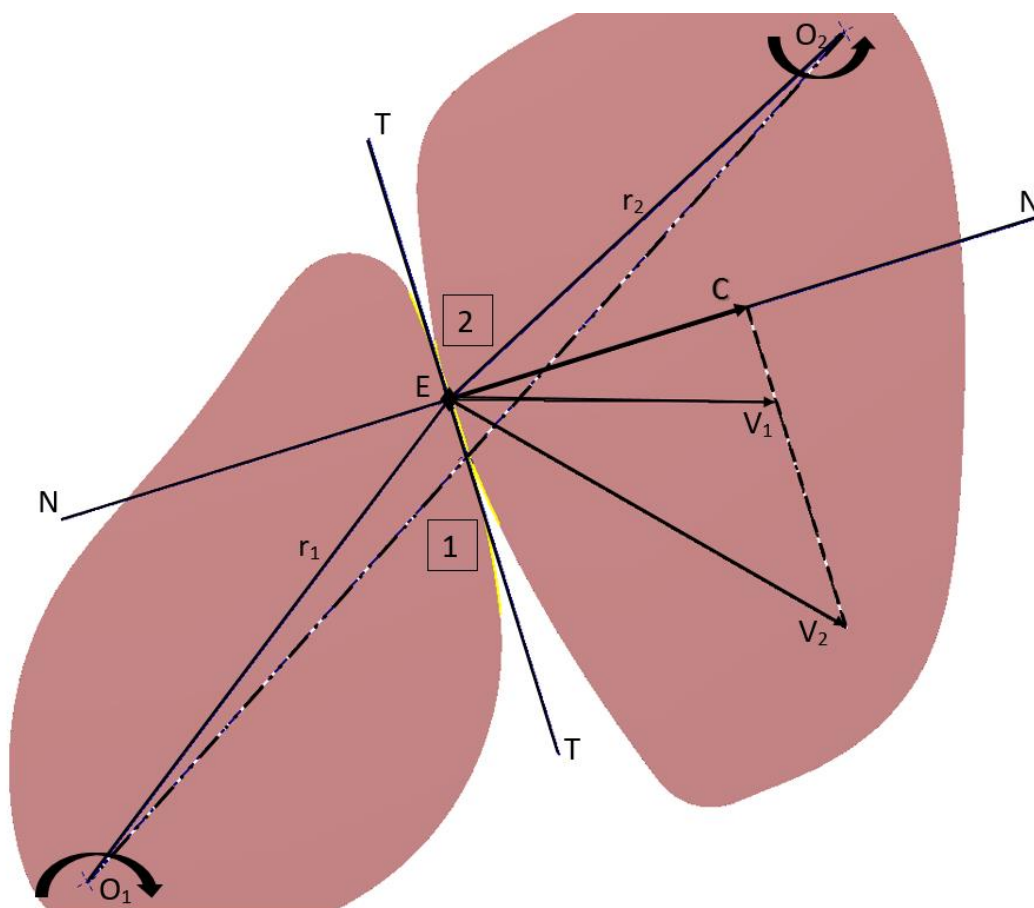
Όταν θεωρούμε το σημείο επαφής E ως σημείο της κατατομής 1 τότε αυτό έχει περιφερειακή ταχύτητα:

$$V_1 = \omega_1 \cdot R_1 \quad (1.1)$$

και ως σημείο της κατατομής 2 έχει περιφερειακή ταχύτητα:

$$V_2 = \omega_2 \cdot R_2 \quad (1.2)$$

Εάν T – T είναι η κοινή εφαπτομένη των κατατομών στο σημείο E και N – N η κοινή κάθετος των κατατομών στο ίδιο σημείο E, τότε οι προβολές C_1 και C_2 των ταχυτήτων V_1 και V_2 πάνω στην N – N πρέπει να είναι ίσες. Αυτή είναι η προϋπόθεση της συνεχούς επαφής των κατατομών, οι οποίες πρέπει να έχουν συνεργασία εξασφαλίζοντας την ομαλή και χωρίς ολίσθηση κύλιση των αρχικών κύκλων των κατατομών [1].



Εικόνα 4 - Συνεργαζόμενες κατατομές

Εάν η C_1 και η C_2 ήταν διαφορετικές τότε οι κατατομές θα έπαυαν να συνεργάζονται. Αυτή η διαφορά θα έκανε τις κατατομές είτε να απομακρύνονται, είτε να εισχωρεί η μία στην άλλη. Οι παραπάνω ανεπιθύμητες καταστάσεις αποφεύγονται με την συνθήκη που περιγράφεται από την εξίσωση (1.3).

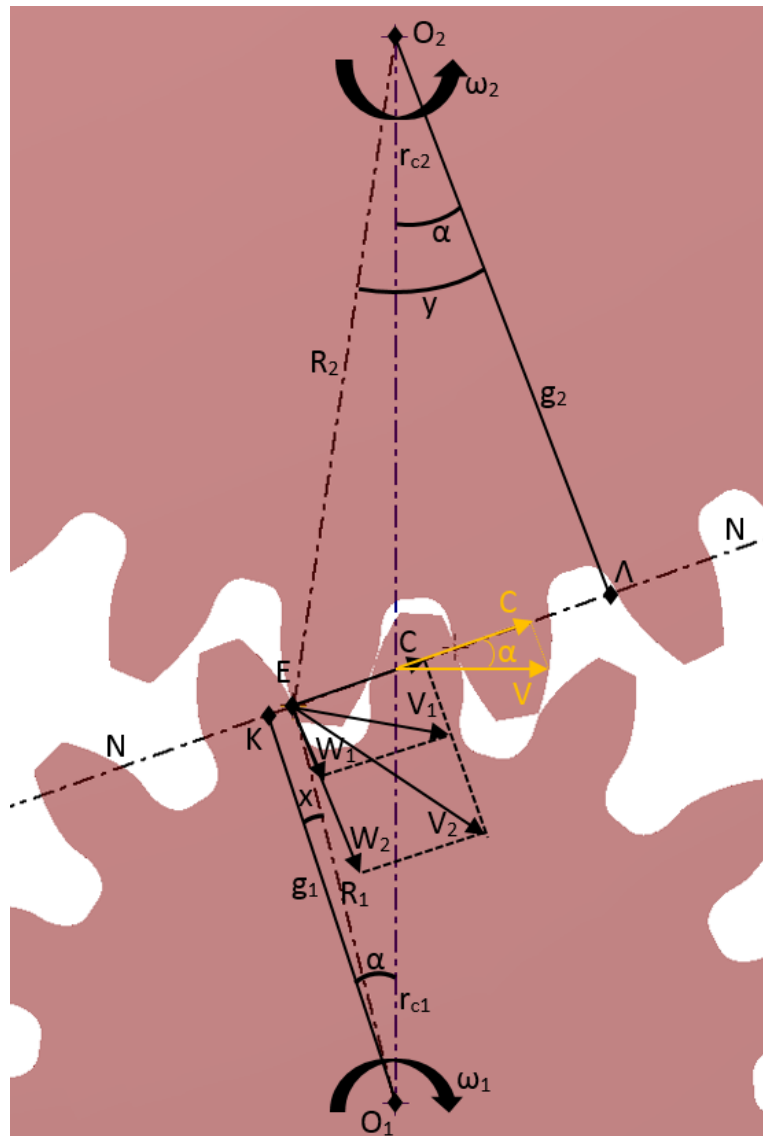
$$C_1 = C_2 = C \quad (1.3)$$

Από το σχέδιο της Εικόνα 5 προκύπτει ότι:

$$C = V_1 \cos(x) = \frac{g_1}{R_1} V_1 = V_2 \cos(y) = \frac{g_2}{R_2} V_2 \quad (1.4)$$

Όμως, βάση των σχέσεων (1.1) και (1.2) η εξίσωση (1.4) γίνεται:

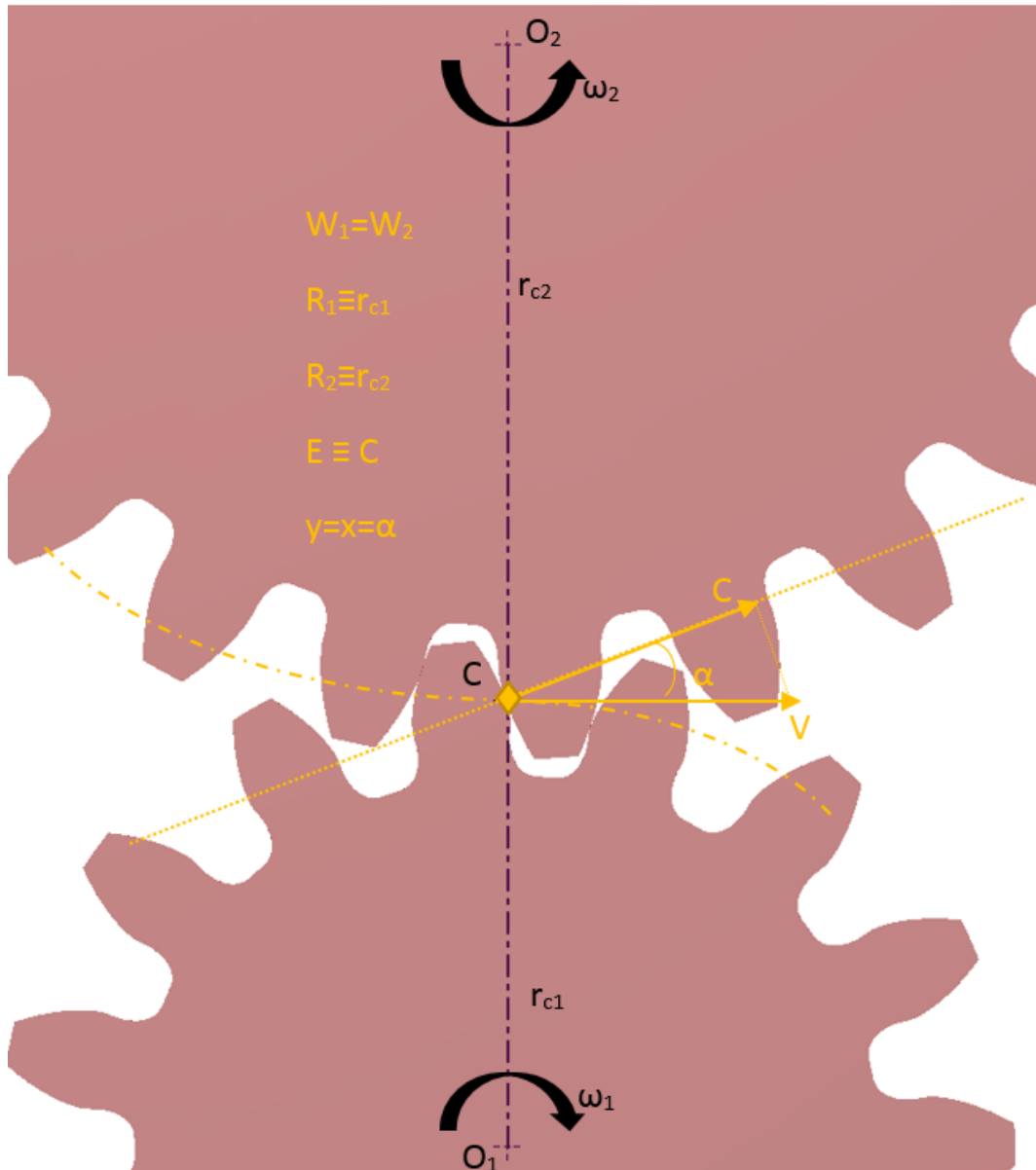
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{g_1}{g_2} \quad (1.5)$$



Εικόνα 5 - Βασικός νόμος της οδοντώσεως

Εάν η κοινή κάθετος N – N των κατατομών στο σημείο επαφής E του σχήματος της Εικόνα 6 τέμνει την διάκεντρο $O_1 O_2$ στο σημείο C' , τότε από τις ομοιότητες των τριγώνων $KC'O_1$ και $LC'O_2$ θα ισχύει ότι:

$$\frac{O_1 C'}{O_2 C'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{g_1}{g_2} \quad (1.6)$$



Εικόνα 6 - Η κοινή κάθετος $N - N$ των κατατομών στο σημείο επαφής E τέμνει την διάκεντρο στο σημείο C

Σχέση η οποία κανονικά ισχύει μόνο για ένα σημείο της διακέντρου, το οποίο είναι το σημείο επαφής των αρχικών κύκλων. Το σημείο C' ταυτίζεται με το σημείο κλίσεως C . Επομένως ο βασικός νόμος της οδοντώσεως διατυπώνεται ως εξής: Για την ομαλή μετάδοση κίνησης και την ομαλή μεταφορά ισχύος από τον κινητήριο στον κινούμενο οδοντωτό τροχό θα πρέπει σε κάθε σημείο επαφής των συνεργαζόμενων κατατομών των οδόντων η κοινή κάθετος να διέρχεται από το σημείο κλίσεως [1].

1.3 Βασικά σχεδιαστικά χαρακτηριστικά οδοντωτών τροχών

Για να μπορέσει να σχεδιαστεί ή να κατασκευαστεί ένας οδοντωτός τροχός πρέπει να είναι γνωστός ο αριθμός οδόντων Z , η γωνία εξειλιγμένης α_0 και το module m . Από τα παραπάνω καθορίζονται όλα τα μεγέθη της οδοντώσεως του οδοντωτού τροχού. Ένα από τα μεγέθη αυτά είναι το βήμα t_0 στον αρχικό κύκλο. Ισχύει ότι:

$$t_0 = \frac{\pi d_0}{Z} \quad (1.7)$$

με $d_0 = 2 r_0$,

όπου r_0 είναι η ακτίνα του αρχικού κύκλου.

Το module είναι γεωμετρικό μέγεθος και λαμβάνει τυποποιημένες τιμές σε mm. Επίσης το module έχει και το ρόλο του συντελεστή ομοιότητας (scale factor), όπως αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 7.



Εικόνα 7 - Οδοντώσεις με ίδιο αριθμό οδόντων και διαφορετικό module

Στις τυποποιημένες οδοντώσεις το ύψος κεφαλής ισούται με $1 \times \text{module}$ ενώ το ύψος ποδός είναι ίσο με $1,25 \times \text{module}$, με βάση τα παραπάνω η ακτινική χάρη ισούται με $0,25 \times \text{module}$. Οι παρακάτω σχέσεις μας καθορίζουν την διάμετρο του κύκλου κεφαλής d_k και τη διάμετρο του κύκλου ποδός d_f .

$$d_k = (Z + 2) m \quad (1.8)$$

$$d_f = (Z - 2,5) m \quad (1.9)$$

Το εργαζόμενο ύψος του δοντιού είναι ίσο με 2x module.

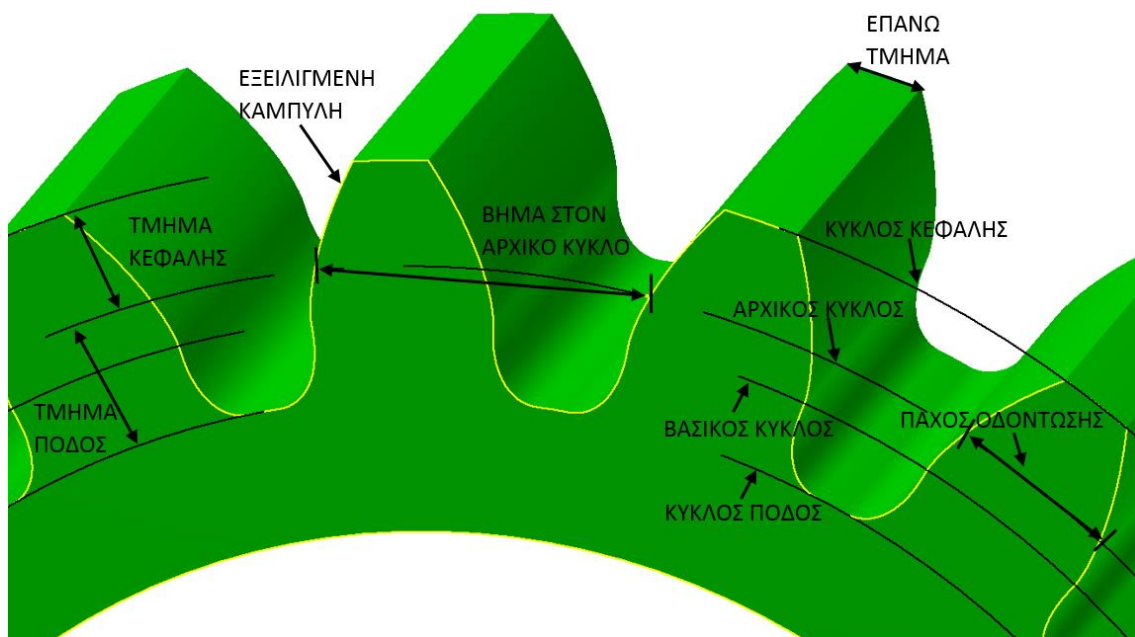
Οι δύο συνεργαζόμενοι οδοντωτοί τροχοί θα πρέπει να έχουν το ίδιο βήμα. Ακόμη, εάν Z_1 και Z_2 οι αριθμοί των οδόντων των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών εξωτερικής οδόντωσης (χωρίς μετατόπιση), η απόσταση των αξόνων των τροχών αυτών βρίσκεται από τη σχέση [1],[2]:

$$a_{12} = r_{01} + r_{02} = (1 + i_{12}) \frac{m Z_1}{2} \quad (1.10)$$

όπου i_{12} είναι η σχέση μετάδοσης της βαθμίδας.

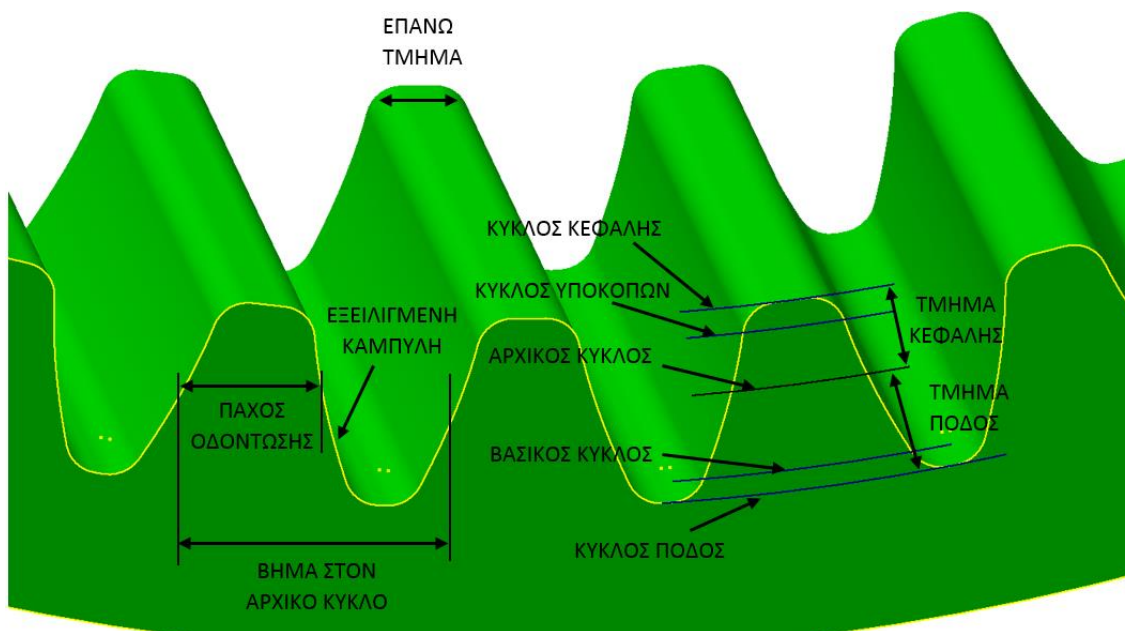
$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{02}}{d_{01}} \quad (1.11)$$

όπου n_1 και n_2 οι αριθμοί των στροφών των οδοντωτών τροχών.



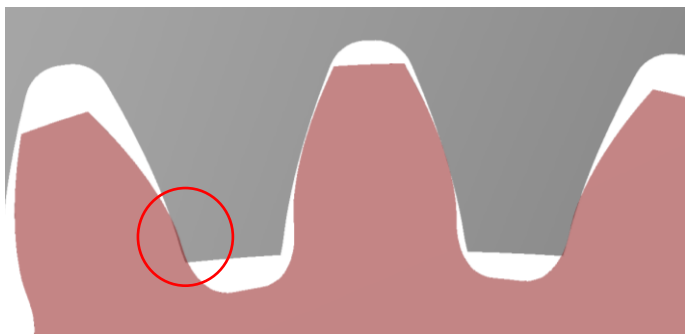
Εικόνα 8 - Μεγέθη εξωτερικών οδοντώσεων

Στις εσωτερικές οδοντώσεις δεν έχουμε μεγάλες διαφορές. Η διαφορά είναι ότι ο κύκλος κεφαλής βρίσκεται 2x module κάτω από τον αρχικό κύκλο, ενώ ο κύκλος ποδός βρίσκεται 2,5x module πάνω από τον αρχικό κύκλο (Εικόνα 9). Τέλος, όταν έχουμε συνεργασία εσωτερικής με εξωτερική οδόντωση, η απόσταση αξόνων είναι η διαφορά των ακτινών των αρχικών κύκλων και όχι το άθροισμα όπως είναι στην περίπτωση συνεργασίας οδοντώσεων με εξωτερική οδόντωση.

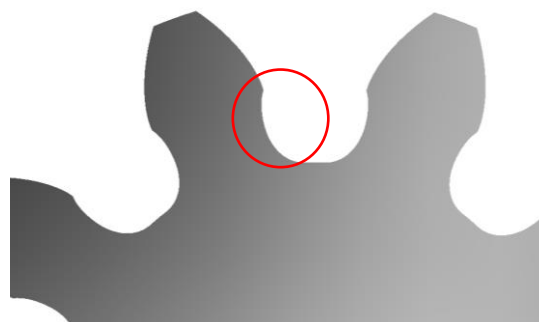


Εικόνα 9 - Μεγέθη εσωτερικών οδοντώσεων

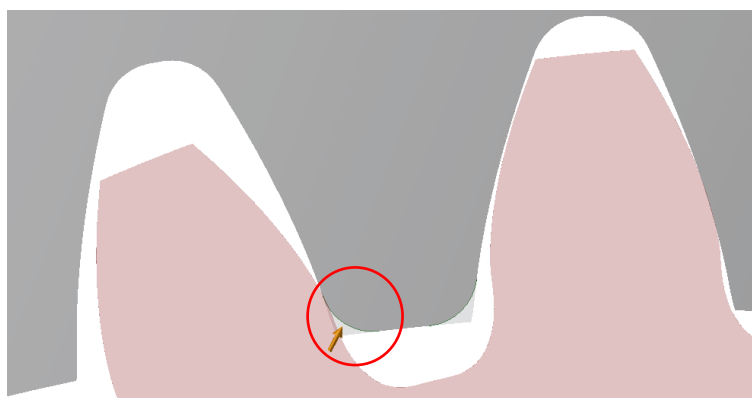
Όπως στις εξωτερικές οδοντώσεις υπάρχει ο κίνδυνος των υποκοπών έτσι και στις εσωτερικές οδοντώσεις υπάρχει παρόμοιος κίνδυνος, που οφείλεται στην συνέχεια επαφής του κοπτικού εργαλείου με την κατατομή του οδόντος του οδοντωτού τροχού, όπως αυτός εμφανίζεται στις Εικόνα 10 και Εικόνα 11 [1]. Για τον παραπάνω λόγο προκαλείται φθορά στην κεφαλή του οδοντωτού τροχού εσωτερικής οδόντωσης όπως αυτή απεικονίζεται στην Εικόνα 12.



Εικόνα 10 - Η εμφάνιση του προβλήματος των υποκοπών στις εσωτερικές οδοντώσεις



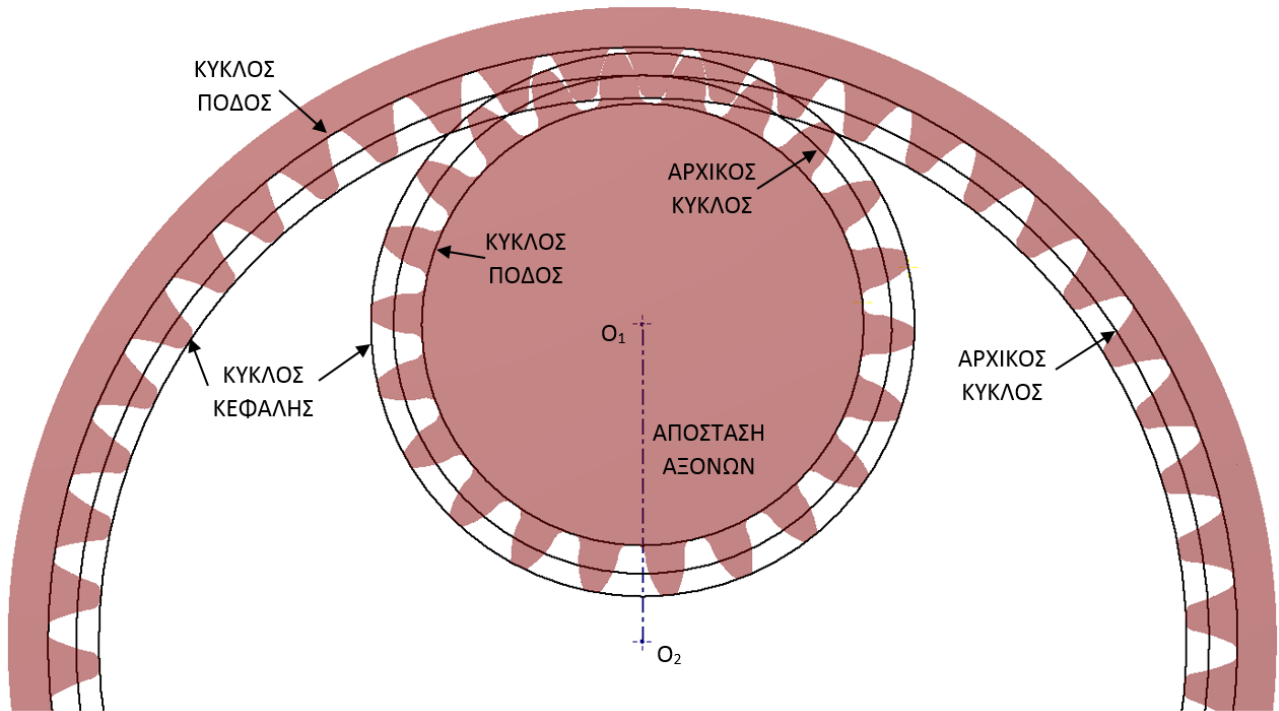
Εικόνα 11 - Η εμφάνιση του προβλήματος των υποκοπών στις εξωτερικές οδοντώσεις



Εικόνα 12 - Φθορά στην κεφαλή του οδοντωτού τροχού εσωτερικής οδόντωσης για την αποφυγή υποκοπών

Σε μία βαθμίδα που αποτελείται από ένα οδοντωτό τροχό εξωτερικής οδόντωσης και από ένα οδοντωτό τροχό εσωτερικής οδόντωσης, το πινιόν (ο μικρός τροχός) θα έχει την εξωτερική οδόντωση και θα βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού ο οποίος θα έχει εσωτερική οδόντωση.

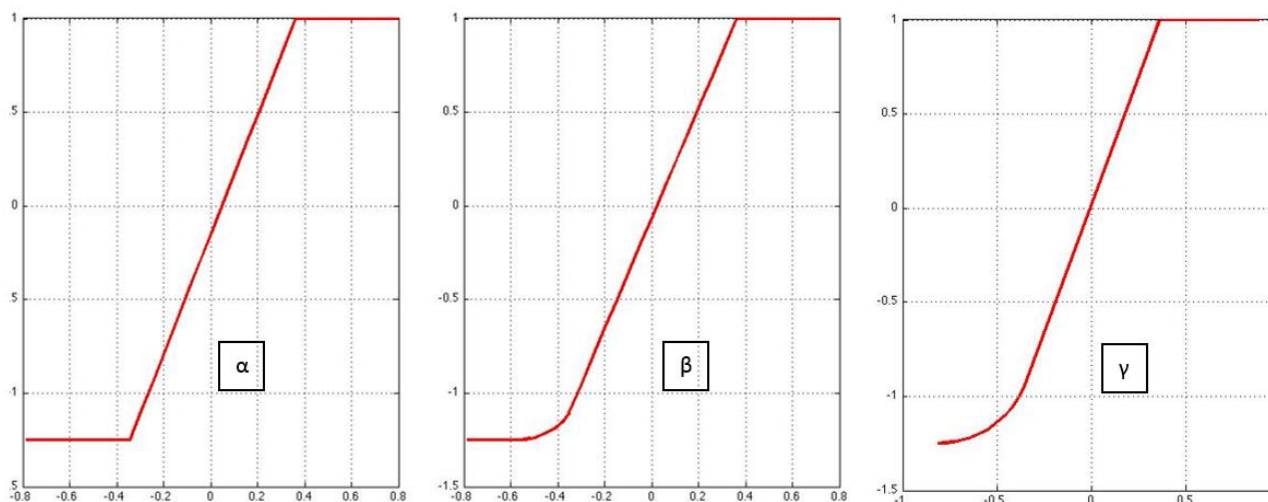
Στην εσωτερική οδόντωση η εργαζόμενη κατατομή του οδόντος έχει κοίλη μορφή, ενώ στην εξωτερική οδόντωση η εργαζόμενη κατατομή του οδόντος έχει κυρτή μορφή. Ο κύκλος ποδός στις εσωτερικές οδοντώσεις είναι ο μεγαλύτερος κύκλος, ενώ ο κύκλος κεφαλής είναι ο μικρότερος κύκλος.



Εικόνα 13 - Χαρακτηριστικά μεγέθη βαθμίδας με στεφάνη εσωτερικής οδόντωσης

1.4 Κατασκευή οδοντωτών τροχών εξειλιγμένης καμπύλης

Η βασική διαφορά, διαφόρων συστημάτων κατασκευής οδοντωτών τροχών αναφέρεται στη γωνία εξειλιγμένης, η οποία μπορεί να 14,5°, 20°, 25° ή ακόμα και 30°. Στον κανόνα η γωνία εξειλιγμένης είναι η ημιγωνία οδόντος του. Είναι πολύ σημαντικό το ύψος κεφαλής οδόντος του κανόνα, το οποίο ρυθμίζει το ύψος ποδός του οδόντος του οδοντωτού τροχού και την ακτινική χάρη των οδοντωτών τροχών μίας βαθμίδας. Στην περίπτωση των κατατομών εξειλιγμένης καμπύλης ο κοπτικός κανόνας έχει κατατομή οδόντος ευθεία γραμμή.



Σχήμα 1 - Κατατομή οδόντος κοπτικού κανόνα: α) κοπτικός κανόνας με $C_c = 0$, β) κοπτικός κανόνας με $C_c = 0.25$, γ) κοπτικός κανόνας με $C_c = \max$

Γενικά θεωρούμε ότι ο οδοντωτός κανόνας έχει κατατομή οδόντων όπως το Σχήμα 1 – α. Όμως όλες οι περιπτώσεις πραγματικών οδοντωτών κανόνων έχουν κατατομή οδόντων όπως το Σχήμα 1 – β, ενώ σε ακραίες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται οδοντωτοί κανόνες με κατατομή οδόντος όπως το Σχήμα 1 – γ όπου η ακτίνα καμπυλότητας r_c λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Το ύψος κεφαλής του οδοντωτού κανόνα είναι:

$$h_k = m C_k \quad (1.12)$$

Το ύψος ποδός του οδοντωτού κανόνα είναι:

$$h_f = m C_f \quad (1.13)$$

και η ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$r_c = m C_c \quad (1.14)$$

όπου m είναι το module και C_k , C_f και C_c είναι συντελεστές.

Το πάχος του οδόντος του οδοντωτού τροχού στον αρχικό κύκλο είναι:

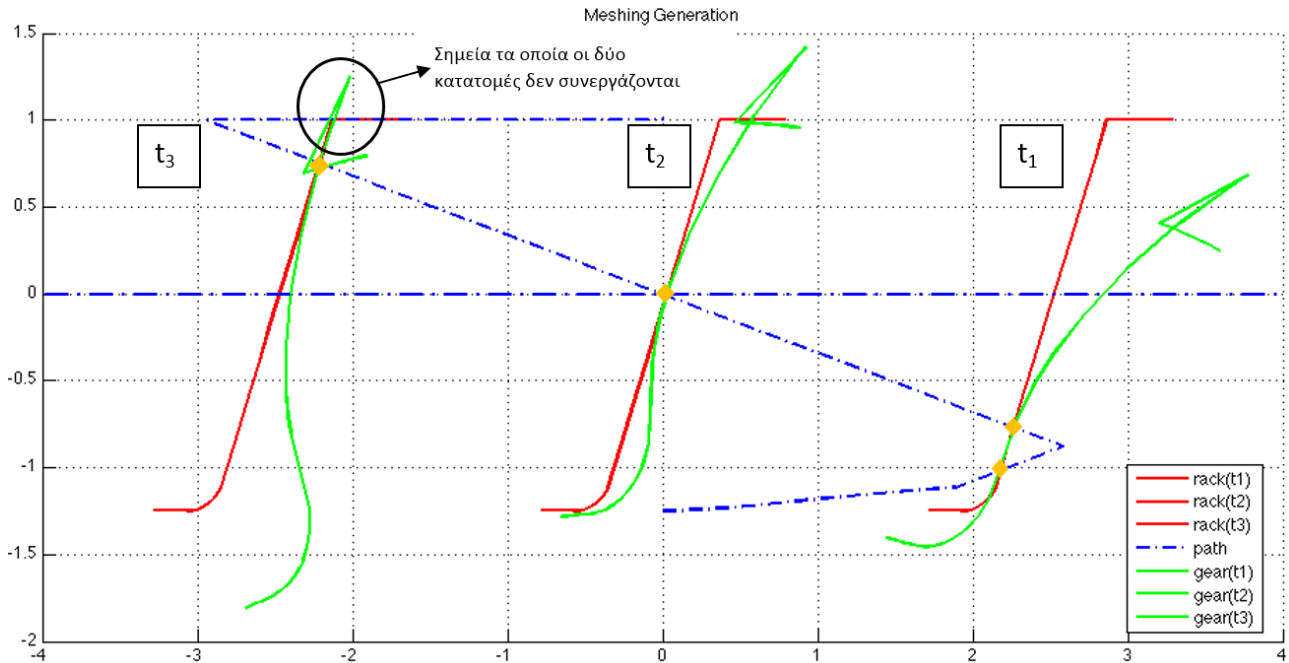
$$S_0 = t_0 C_s = C_s \pi m \quad (1.15)$$

όπου C_s είναι ο συντελεστής πάχους του οδόντος του οδοντωτού τροχού στον αρχικό κύκλο.

Συνεπώς, το διάκενο μεταξύ των οδόντων του τροχού στον αρχικό κύκλο είναι:

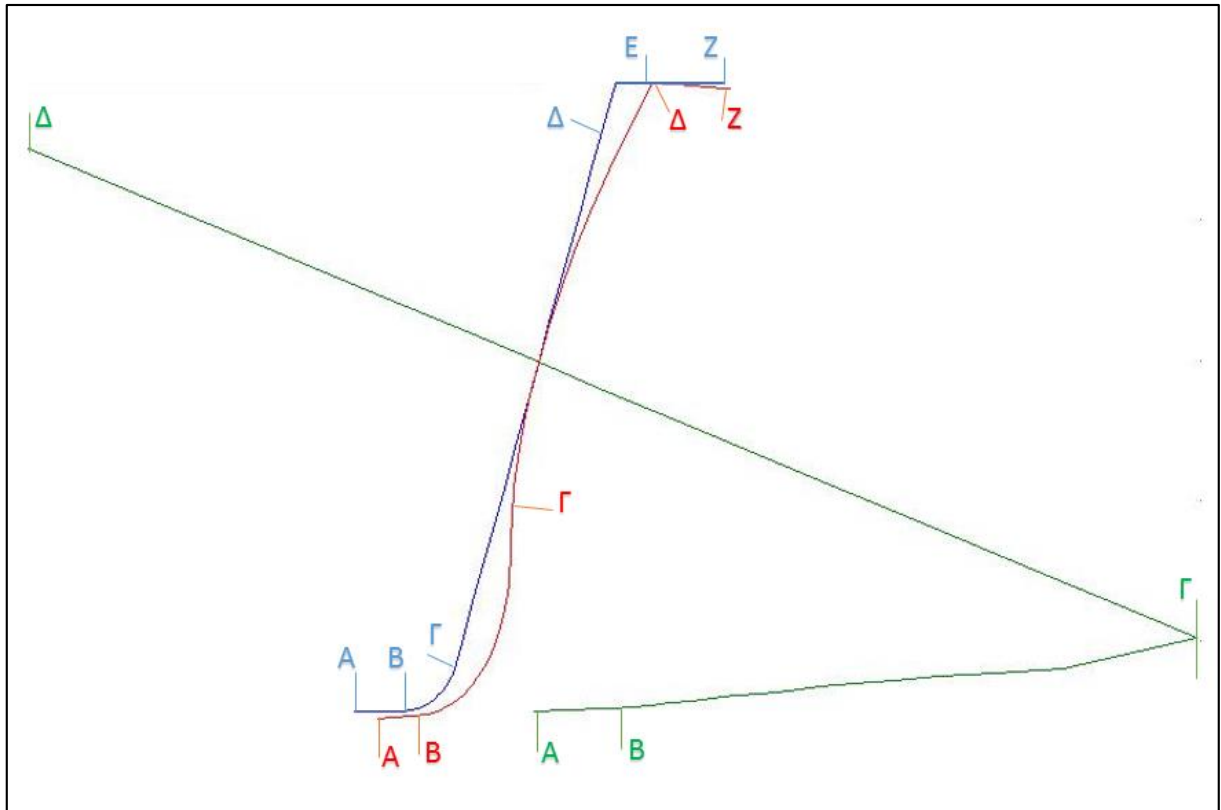
$$l_0 = t_0 - S_0 = (1 - C_s) t_0 \quad (1.16)$$

όπου l_0 είναι και το πάχος των οδόντων του οδοντωτού κανόνα στην αρχική γραμμή.



Σχήμα 2 - Απεικόνιση της συνεργασίας του οδοντωτού τροχού με τον κοπτικό κανόνα

Στο Σχήμα 2 υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά σημεία στην κατατομή του οδοντωτού κανόνα, τα οποία ουσιαστικά ρυθμίζουν την λειτουργία του. Αυτό συμβαίνει διότι, ενώ κατά τη διάρκεια της κοπής του τροχού ολόκληρη η κατατομή του κοπτικού κανόνα χρησιμοποιείται για να κόψει την κατατομή του οδοντωτού τροχού, αλλά μετά την αφαίρεση του υλικού, εάν ο οδοντωτός τροχός και ο κοπτικός κανόνας έρθουν σε συνεργασία παρατηρείται ότι υπάρχουν κάποια τμήματα της κατατομής του κοπτικού κανόνα τα οποία δεν έρχονται σε επαφή με τον τροχό και μας δίνουν ψεύτικα σημεία στην απεικόνιση της συνεργασίας του οδοντωτού τροχού με τον κοπτικό κανόνα [1],[2],[4],[6].



Σχήμα 3 - Συνεργαζόμενη κατατομή κοπτικού κανόνα

- Το τμήμα A – B παράγει το τόξο ποδός του οδοντωτού τροχού.
- Το τμήμα B – Γ παράγει το τροχειδές στο πόδα του οδόντος του οδοντωτού τροχού.
- Το τμήμα Γ – Δ παράγει την εξειλιγμένη του οδόντος του οδοντωτού τροχού.
- Το τμήμα Δ – Ε δεν παράγει κάποιο τμήμα του οδόντος του οδοντωτού τροχού.
- Το τμήμα Ε – Ζ παράγει το τόξο κεφαλής του οδόντος του οδοντωτού τροχού.

Για να παραχθούν τα σημεία της κατατομής του οδόντος του τροχού θα πρέπει να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία:

1. Δημιουργία του μητρώου των σημείων της κατατομής του οδοντωτού κανόνα:

$$X_{rack} = X - \left(C_s \frac{\pi}{2} \right), Y_{rack} = Y - C_f \quad (1.17)$$

2. Δημιουργία του μητρώου των σημείων του τμήματος επαφών (κοπτικού εργαλείου – οδοντωτού τροχού):

$$X_{path} = Y * \frac{\frac{dy}{dx} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad Y_{path} = Y_{rack} \quad (1.18)$$

3. Κατασκευή του μητρώου μετατόπισης του κοπτικού κανόνα:

$$K = X + Y \frac{dy}{dx} \quad (1.19)$$

4. Κατασκευή του μητρώου περιστροφής του οδοντωτού τροχού:

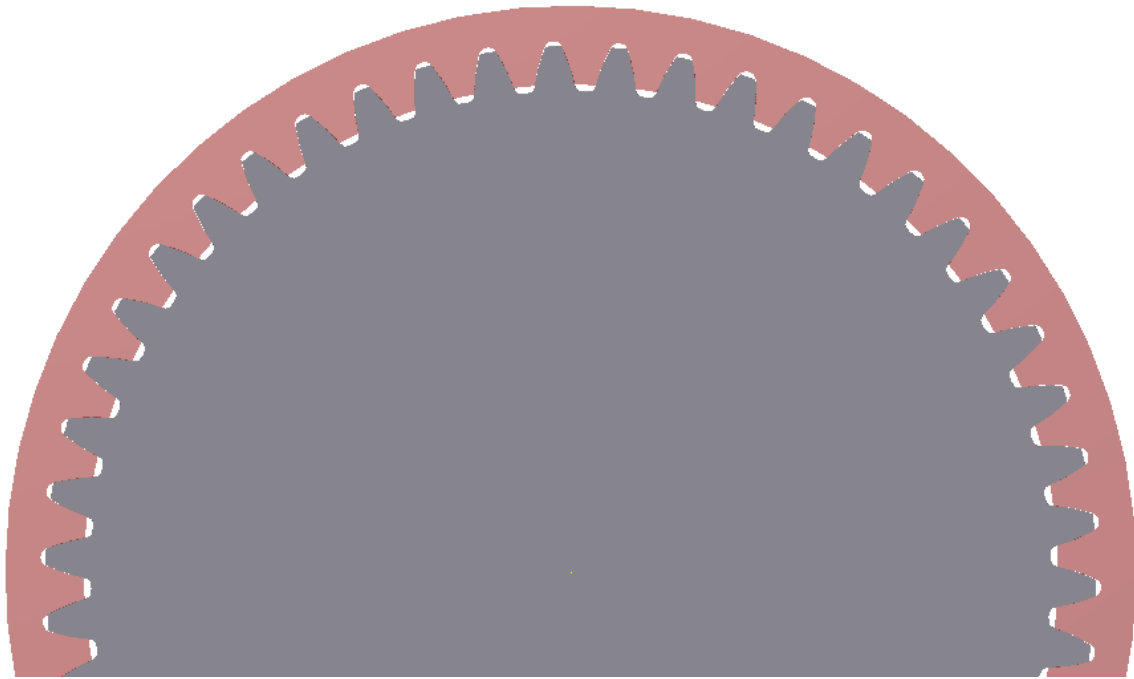
$$\theta = \frac{K}{a_{12}} \quad (1.20)$$

5. Εύρεση του μητρώου των σημείων της κατατομής του οδόντος του οδοντωτού τροχού:

$$\begin{pmatrix} X_{gear} \\ Y_{gear} + a_{12} \end{pmatrix} = X_{path} * \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + (Y_{path} + a_{12}) * \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

* Ο κώδικας που εξάγει τα σημεία των μητρώων της κατατομής του οδοντωτού κανόνα, της τροχιάς επαφών και της κατατομής του οδοντωτού τροχού βρίσκεται στα παραρτήματα VI.

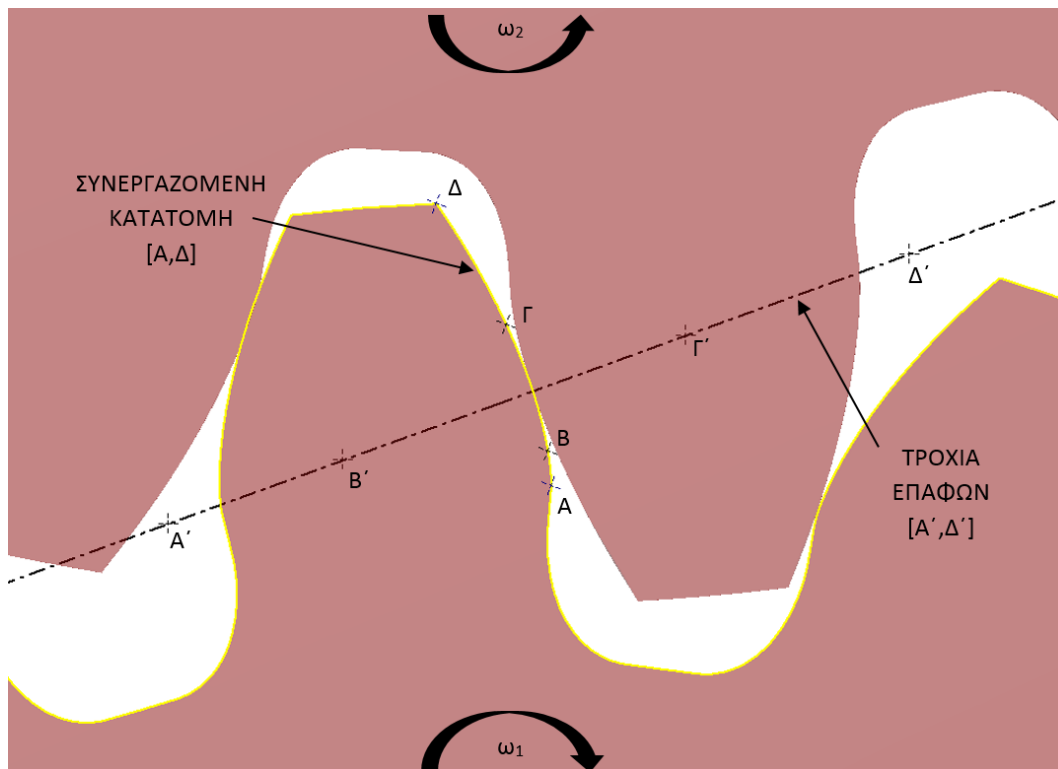
Έχουν ήδη αναφερθεί τα βασικά σχεδιαστικά χαρακτηριστικά των οδοντωτών τροχών και ο τρόπος εύρεσης της κατατομής ενός οδοντωτού τροχού καθώς και η τροχιά επαφών. Η κατατομή του οδόντος μίας εσωτερικής οδόντωσης είναι ίδια με την κατατομή του οδόντος μίας εξωτερικής οδόντωσης, όταν αυτές έχουν ίδια γωνία εξειλιγμένης, ίδιους αριθμούς οδόντων και είναι ίδιο module. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην εσωτερική οδόντωση το δόντι είναι το διάκενο μεταξύ των δοντιών της εξωτερικής οδόντωσης και ότι η στήριξη της γίνεται στην εξωτερική στεφάνη.



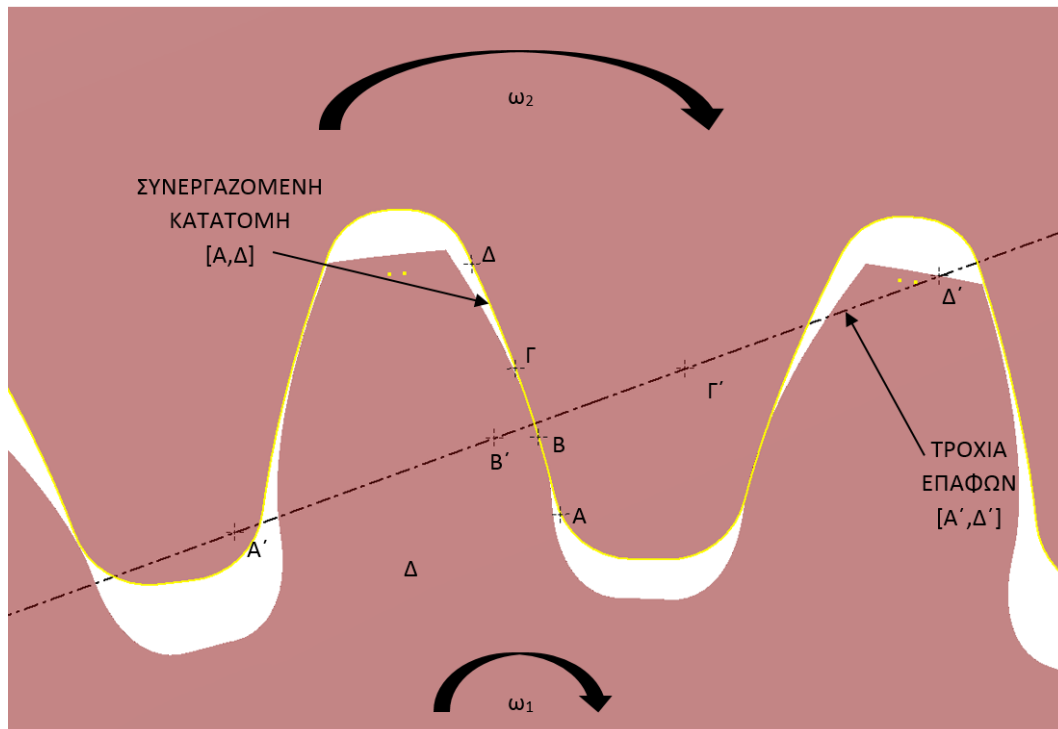
Εικόνα 14 - Εσωτερική και εξωτερική οδόντωση με ίδια γωνία εξειλιγμένης, ίδιο αριθμό οδόντων και ίδιο module

1.5 Εύρεση του σημείου που αναπτύσσεται η μέγιστη καταπόνηση στους οδοντωτούς τροχούς

Η ολική δύναμη στο δόντι ενός οδοντωτού τροχού είναι η P_N και ασκείται κατά την τροχιά επαφών της κατατομής (Εικόνα 2). Θεωρώντας το δόντι του οδοντωτού τροχού ως πακτωμένη δοκό στον κύκλο ποδός, φαίνεται ότι η μέγιστη καταπόνηση του οδόντος συμβαίνει όταν η δύναμη P_N ασκείται στον κύκλο κεφαλής του οδόντος. Όμως, στον κύκλο κεφαλής η δύναμη P_N δεν έχει τη μέγιστη τιμή της. Αποδεικνύεται από τις Εικόνα 15 και Εικόνα 16 ότι στα τμήματα AB και ΓΔ του τμήματος επαφών εργάζονται συνεχώς δύο οδόντες από κάθε οδοντωτό τροχό ενώ στο διάστημα ΒΓ εργάζεται μόνο ένα δόντι από οδοντωτό τροχό. Αυτό σημαίνει ότι στα τμήματα AB και ΓΔ το φορτίο P_N μοιράζεται και στα δύο ζευγάρια οδόντων, ενώ στο τμήμα ΒΓ το φορτίο P_N παραλαμβάνεται μόνο από ένα ζευγάρι οδόντων. Το σημείο Β του τμήματος ΒΓ, είναι το σημείο το οποίο αναπτύσσεται το μέγιστο φορτίο [2].

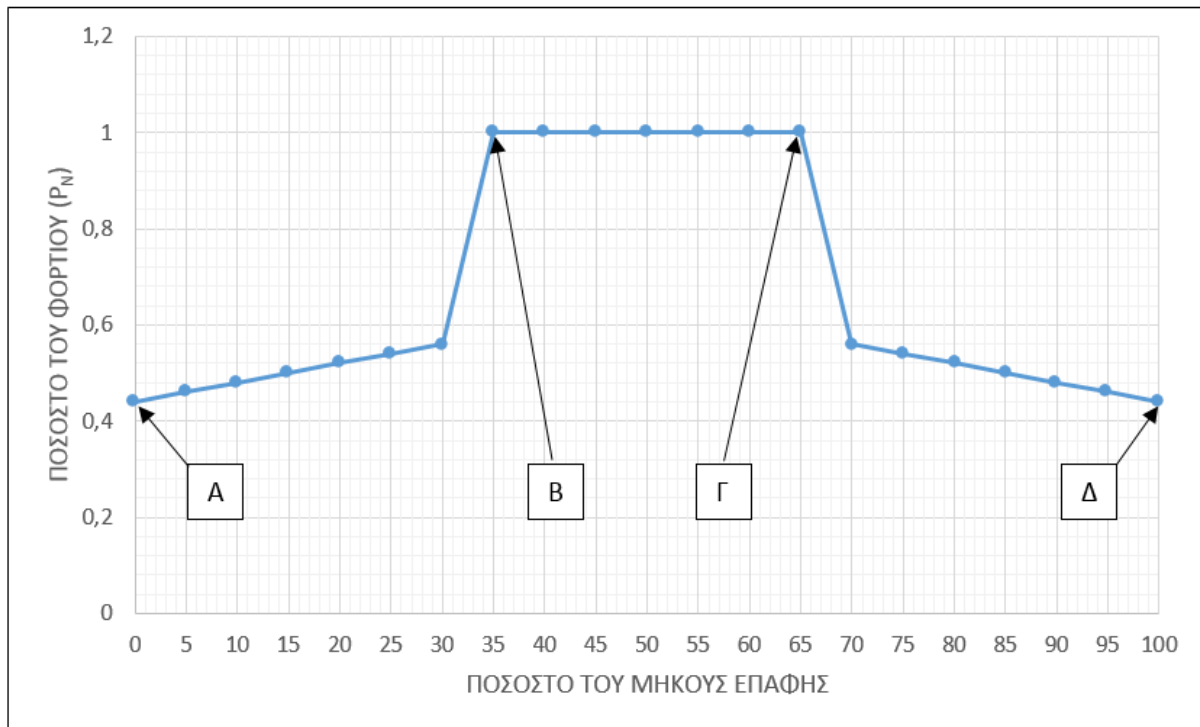


Εικόνα 15 - Τμήμα επαφών σε βαθμίδα με εξωτερικές οδοντώσεις



Εικόνα 16 - Τμήμα επαφών σε βαθμίδα με εσωτερική οδόντωση

Στην Εικόνα 15 όπου απεικονίζεται το πινιόν, το σημείο Γ ονομάζεται μέγιστο σημείο μονής επαφής (Highest Point of Single Tooth Contact – H.P.S.T.C.) και το σημείο Β είναι το ελάχιστο σημείο μονής επαφής (Lowest Point of Single Tooth Contact – L.P.S.T.C.). Ενώ στην Εικόνα 16 όπου απεικονίζεται ο συνεργαζόμενος οδοντωτός τροχός, το σημείο Β ονομάζεται μέγιστο σημείο μονής επαφής (H.P.S.T.C.) και το σημείο Γ ονομάζεται ελάχιστο σημείο μονής επαφής (L.P.S.T.C.).

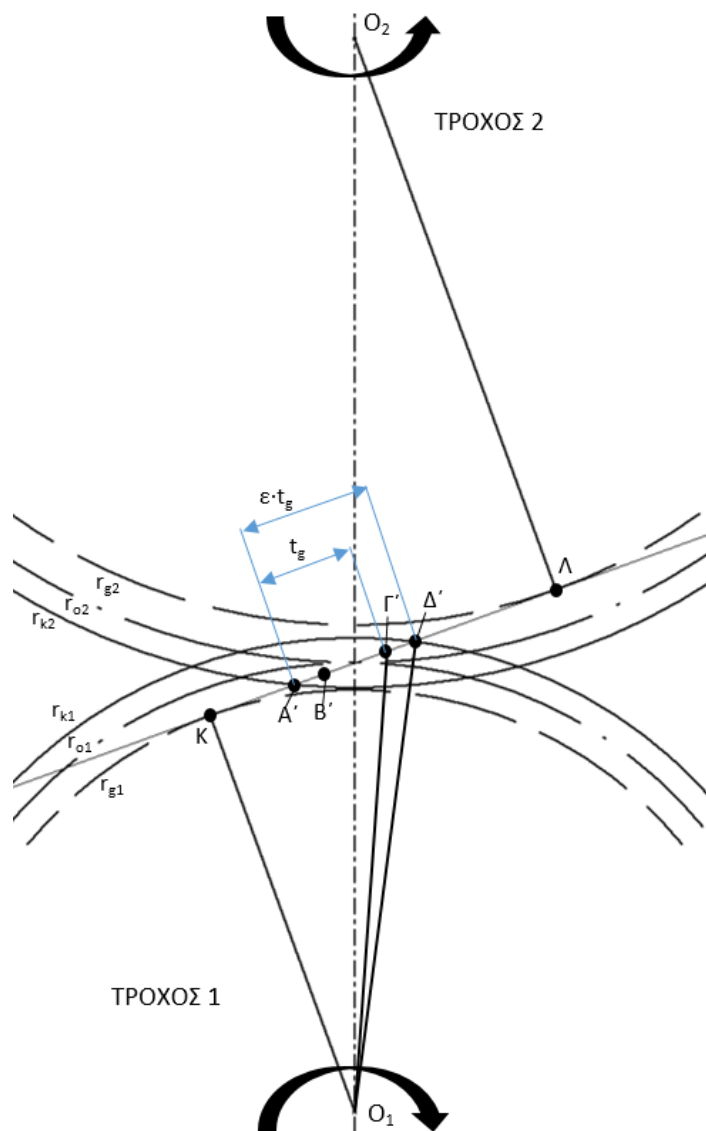


Διάγραμμα 1 – Το φορτίο P_N που εμφανίζεται σε έναν οδόντα οδοντωτού τροχού κατά το μήκος επαφής του [2]

Οι παραπάνω αναλύσεις μας δείχνουν ότι το μέγιστο σημείο μονής επαφής είναι το σημείο το οποίο κατά τη συνεργασία των οδοντωτών τροχών προκαλεί τη μέγιστη καταπόνηση στους οδόντες τους (Διάγραμμα 1). Η μέγιστη καταπόνηση στο σημείο αυτό έχει ως αποτέλεσμα την φθορά των συνεργαζόμενων κατατομών λόγω της αυξημένης πίεσης επιφανείας (που προκαλείται από την δύναμη P_N) ή την θραύση των οδόντων των οδοντωτών τροχών λόγω κάμψης. Η κάμψη στους οδόντες εμφανίζεται στην περιοχή του ποδός. Τα μεγέθη των δυνάμεων που καταπονούν τους οδοντωτούς τροχούς μπορούν να αλλάξουν μόνο εάν μειωθεί η δύναμη P_N (το οποίο σημαίνει αλλαγή του σημείου λειτουργίας της βαθμίδας) ή αλλαγή της θέσης του μέγιστου σημείου μονής επαφής (το οποίο σημαίνει αλλαγή του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού). Για τους παραπάνω λόγους είναι σημαντικό να μπορούμε να γνωρίζουμε την τοποθεσία του μέγιστου σημείου μονής επαφής για κάθε συνεργασία οδοντωτών τροχών.

Η θέση του μέγιστου σημείου μονής επαφής για συνεργασία οδοντωτών τροχών με εξωτερικές οδοντώσεις βρίσκεται από την ανάλυση που ακολουθεί.

Θεωρούμε τη συνεργασία των οδοντωτών τροχών 1 και 2. Οι οδοντωτοί τροχοί 1 και 2 περιστρέφονται γύρω από τα κέντρα τους O_1 και O_2 αντίστοιχα, οι κύκλοι κυλίσεως τους είναι οι r_{o1} και r_{o2} , ενώ η συνεργασία των οδόντων τους γίνεται στο ευθύγραμμο τμήμα $A'D'$ της τροχιάς επαφών όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4 - Προσδιορισμός του μέγιστου σημείου μονής επαφής

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $O_1K\Delta'$ (Σχήμα 4):

$$K\Delta' = \sqrt{O_1\Delta'^2 - O_1K^2} \quad (1.22)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$K\Gamma' = K\Delta' - \Delta'\Gamma' \quad (1.23)$$

Όμως,

$$\Delta'\Gamma' = A'\Delta' - A'\Gamma' = (\varepsilon - 1) t_g \quad (1.24)$$

Η σχέση (1.23) λόγω των σχέσεων (1.22) και (1.24) γίνεται:

$$K\Gamma' = \sqrt{O_1\Delta'^2 - O_1K^2} - (\varepsilon - 1) t_g \quad (1.25)$$

Όμοια από το ορθογώνιο τρίγωνο $O_1K\Gamma'$ (Σχήμα 4) έχουμε ότι:

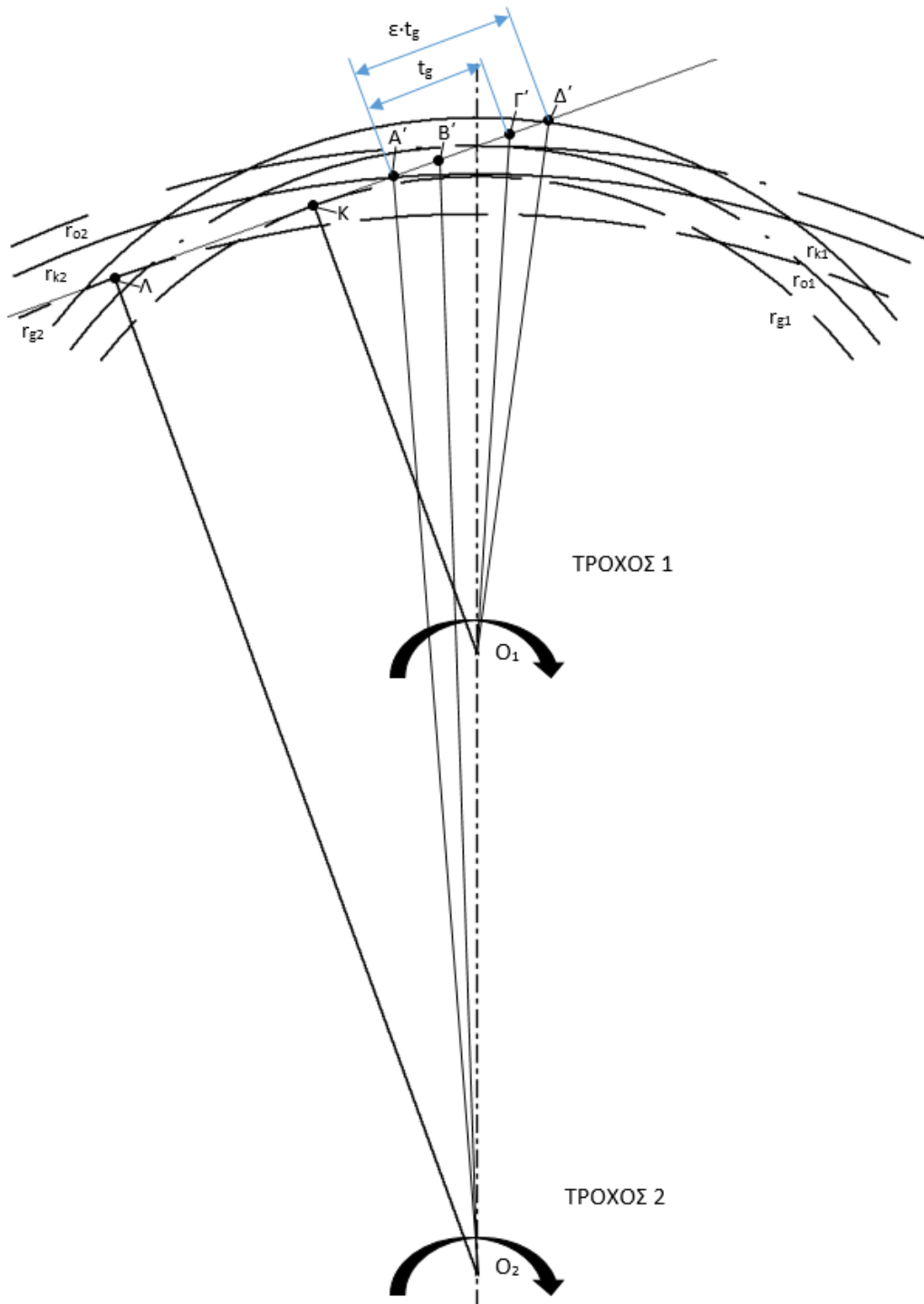
$$O_1\Gamma' = \sqrt{O_1K^2 + O_1\Gamma'^2} \quad (1.26)$$

Αντικαθιστώντας το $K\Gamma'$ από τη σχέση (1.25) στην (1.26), έχουμε τελικά:

$$r_{HPSTC,1} = O_1\Gamma' = \sqrt{r_{k1}^2 + (\varepsilon - 1) t_g \left[(\varepsilon - 1) t_g - 2 \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \right]} \quad (1.27)$$

Η ακτίνα r_{HPSTC} προσδιορίζει τη θέση του μέγιστου σημείου μονής επαφής (H.P.S.T.C.) για τον οδοντωτό τροχό 1. Η θέση του σημείου αυτού εξαρτάται μόνον από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του οδοντωτού τροχού 1 και το βαθμό επικάλυψης της βαθμίδας. Ο βαθμός επικάλυψης έχει ως παραμέτρους όλα τα χαρακτηριστικά του οδοντωτού τροχού 2 και τα γεωμετρικά στοιχεία της βαθμίδας.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το μέγιστο σημείο μονής επαφής για οδοντωτούς τροχούς με εσωτερική οδόντωση (Σχήμα 5).



Σχήμα 5 - Προσδιορισμός του μέγιστου σημείου μονής επαφής σε εσωτερικές οδοντώσεις

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $O_2\Lambda B'$ (Σχήμα 5):

$$\Lambda B' = \sqrt{O_2B'^2 - O_2\Lambda^2} \quad (1.28)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\Lambda B' = \Lambda A' + A'B' \quad (1.29)$$

Όμως,

$$A'B' = A'\Delta' - B'\Delta' = \varepsilon \cdot t_g - t_g = (\varepsilon - 1) t_g \quad (1.30)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $O_2\Lambda A'$ (Σχήμα 5) έχουμε ότι:

$$\Lambda A' = \sqrt{O_2A'^2 - O_2\Lambda^2} \quad (1.31)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.30) και (1.31) στην (1.29), έχουμε:

$$\Lambda B' = \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} + (\varepsilon - 1) t_g \quad (1.32)$$

Τελικά η ακτίνα r_{HPSTC} που προσδιορίζει τη θέση του μέγιστου σημείου μονής επαφής (H.P.S.T.C.) για τον οδοντωτό τροχό 2 βρίσκεται από την σχέση (1.33).

$$r_{HPSTC,2} = \sqrt{\left[\sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} + (\varepsilon - 1) t_g \right]^2 + r_{g2}^2} \quad (1.33)$$

2 Υπολογισμός της αντοχής των οδόντων στην επικίνδυνη διατομή του ποδός

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία κατασκευής των 3D μοντέλων των επιλεγμένων οδοντωτών τροχών. Επίσης η διαδικασία φόρτισης των δοκιμίων και τα αποτελέσματα της ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

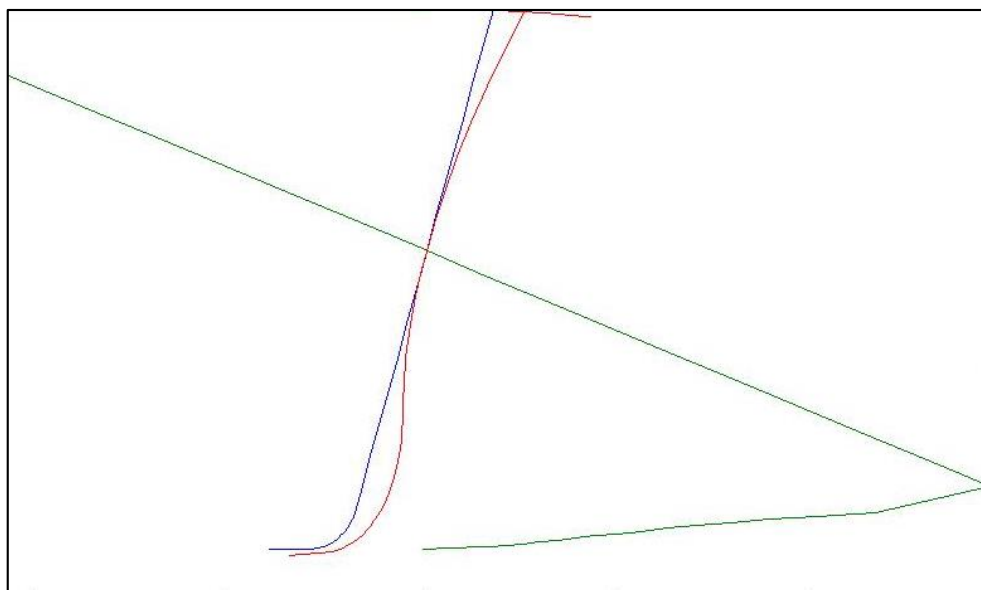
2.1 Κατασκευή 3D μοντέλων των επιλεγμένων δοκιμίων

Για την κατασκευή των 3D μοντέλων χρειάστηκε να δημιουργηθεί κώδικας στο λογισμικό Matlab, ο οποίος να περιγράφει το βασικό νόμο των οδοντώσεων. Ο κώδικας αυτός λαμβάνει ως δεδομένα εισόδου τα εξής:

1. Τη γωνία κλίσης του κοπτικού κανόνα,
2. τον αριθμό οδόντων του οδοντωτού τροχού,
3. τον συντελεστή πάχους του κοπτικού κανόνα,
4. τον συντελεστή ύψους ποδός του κοπτικού κανόνα,
5. τον συντελεστή ύψους κεφαλής του κοπτικού κανόνα,
6. τον συντελεστή της ακτίνας καμπυλότητας του κοπτικού κανόνα,
7. τον αριθμό των σημείων του τμήματος της κατατομής στον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού,
8. τον αριθμό των σημείων του τμήματος που εκφράζει το τροχοειδές του οδοντωτού τροχού,
9. τον αριθμό των σημείων του τμήματος που εκφράζει την εξειλιγμένης καμπύλης του οδοντωτού τροχού,
10. τον αριθμό των σημείων του κύκλου κεφαλής του οδοντωτού τροχού.

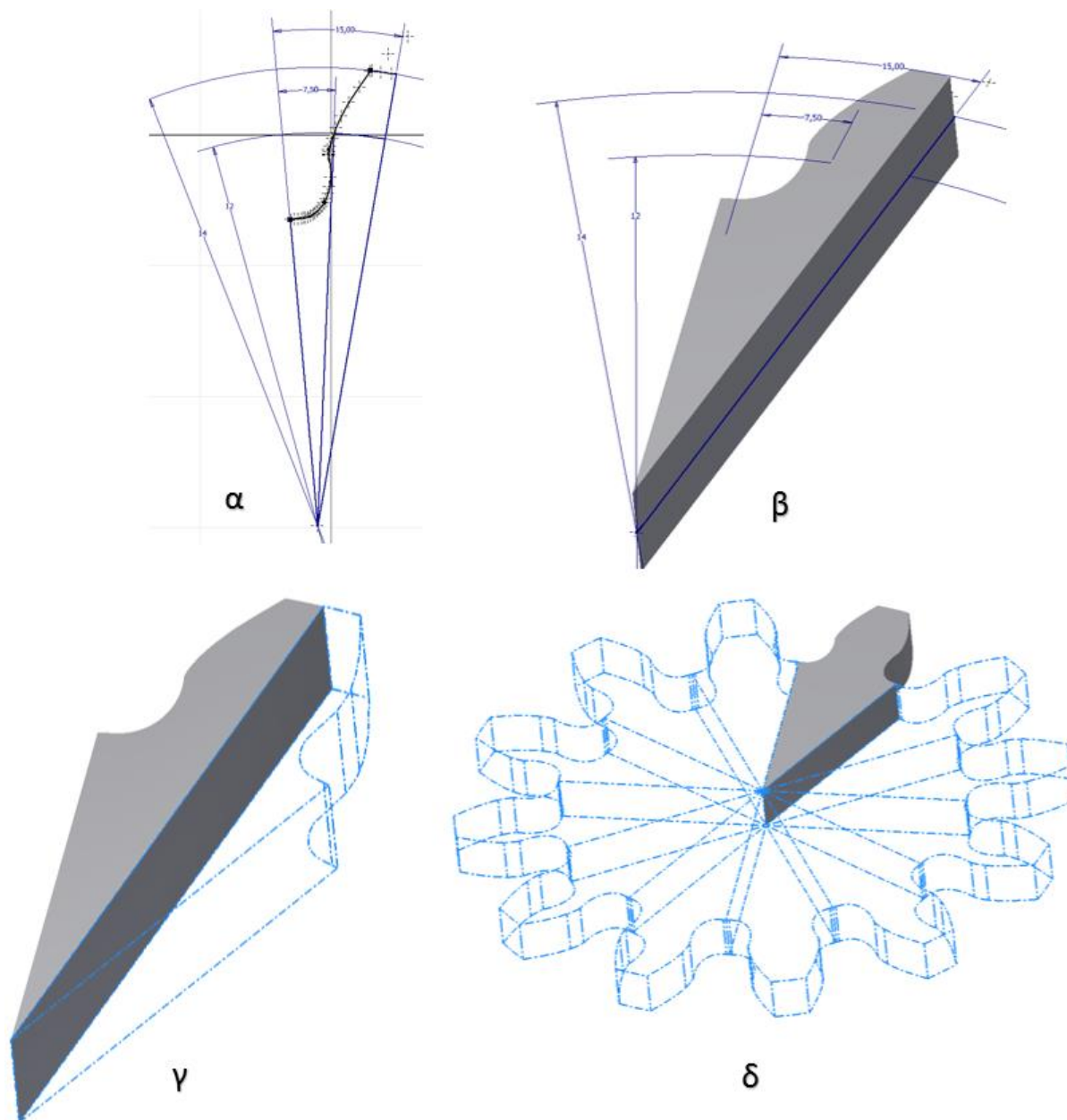
Αφού καθοριστούν τα δεδομένα εισόδου, ο κώδικας μπορεί να μας δώσει ως έξοδο τα εξής:

1. Τα σημεία της κατατομής του κοπτικού κανόνα,
2. τα σημεία της τροχιάς επαφών,
3. τα σημεία της κατατομής του δοντιού του οδοντωτού τροχού που θα σχεδιαστεί.



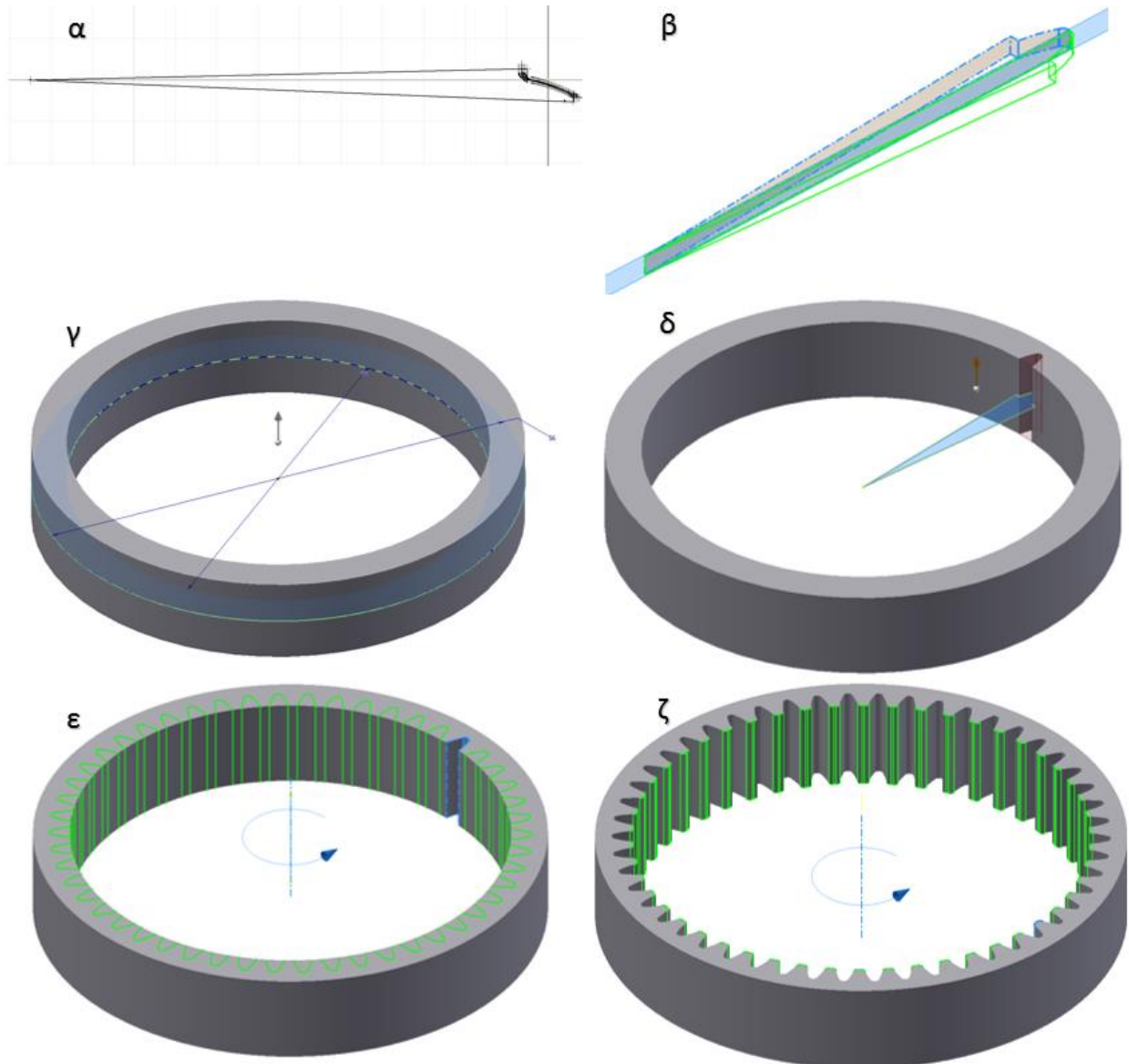
Εικόνα 17 - Σημεία που εξάγει ο κώδικας

Η κατασκευή των 3D μοντέλων έγινε στο σχεδιαστικό πρόγραμμα Autodesk Inventor. Έχοντας τα σημεία της κατατομής του δοντιού, όπως αυτά απεικονίζονται στην Εικόνα 17, τα σημεία εισάγονται στο σχεδιαστικό πρόγραμμα και έπειτα κατασκευάζεται το 2D σχέδιο (Εικόνα 18 – α). Εφόσον κατασκευαστεί το 2D σχέδιο, κατασκευάζεται το 3D μοντέλο του μισού δοντιού (Εικόνα 18 – β). Το επόμενο βήμα είναι να αντιγραφεί κατά το επίπεδο συμμετρίας το μισό δόντι και έτσι δημιουργείται το ένα δόντι του οδοντωτού τροχού (Εικόνα 18 – γ). Τέλος, αντιγράφεται το δόντι κατά τον άξονα περιστροφής του οδοντωτού τροχού τόσες φορές όσες είναι και ο αριθμός οδόντων του οδοντωτού τροχού (Εικόνα 18 – δ).



Εικόνα 18 – Κατασκευή 3D μοντέλου οδοντωτού τροχού: α) 2D σχέδιο κατατομής, β) 3D μοντέλο μισού δοντιού, γ) αντιγραφή κατά το επίπεδο συμμετρίας, δ) αντιγραφή κατά τον άξονα περιστροφής

Η κατασκευή των 3D μοντέλων των εσωτερικών οδοντώσεων έχει διαφορετική διαδικασία (Εικόνα 1 Εικόνα 19). Η διαφορά στην διαδικασία κατασκευής είναι ότι για το 2D σχέδιο της κατατομής χρησιμοποιείται το σχέδιο μίας εσωτερικής οδόντωσης η οποία έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την εσωτερική οδόντωση που στοχεύεται να σχεδιαστεί (ίδιο αριθμό οδόντων, module, και ίδια γωνία εξειλιγμένης), αλλά έχει μεγαλύτερο ύψος κεφαλής για να μπορέσει να έχει ακτινική χάρη κατά την συνεργασία (Εικόνα 19 – α). Τέλος στην κατασκευή των 3D μοντέλων των εσωτερικών οδοντώσεων πρέπει να γίνεται και ο έλεγχος των υποκοπών (Εικόνα 19 – ζ).



Εικόνα 19 - Κατασκευή 3D μοντέλου οδοντωτού τροχού εσωτερικής οδόντωσης: α) 2D σχέδιο της κατατομής, β) αντιγραφή του 2D μοντέλου κατά το επίπεδο συμμετρίας, γ) 3D μοντέλου στεφάνης, δ) αφαίρεση του 2D σχεδίου της κατατομής από το 3D μοντέλο της στεφάνης, ε) αντιγραφή κατά τον άξονα περιστροφής, ζ) δημιουργία και αντιγραφή των υποκοπών στις κεφαλές των οδόντων

2.2 Ανάλυση των 3D μοντέλων με F.E.A.

Για την ανάλυση των 3D μοντέλων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (F.E.A.) έγινε η κατασκευή 3D μοντέλων των επιλεγμένων προς ανάλυση οδοντωτών τροχών. Για την κατασκευή των 3D μοντέλων ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 2.1. Οι οδοντωτοί τροχοί που επιλέχθηκαν αναγράφονται στον ακόλουθο (Πίνακας 1).

Πίνακας 1 - Συνοπτικός πίνακας 3D μοντέλων

a/a	Περιγραφή	C _s
1	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,50
2	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,40
3	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,35
4	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,30
5	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,50
6	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,40
7	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,35
8	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,30
9	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,50
10	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,40
11	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,35
12	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,30
13	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,50
14	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,40
15	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,35
16	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,30
17	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,50
18	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,60
19	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,65
20	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,70
21	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,50

a/a	Περιγραφή	C _s
22	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,60
23	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,65
24	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,70
25	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,50
26	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,60
27	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,65
28	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,70
29	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,50
30	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,60
31	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,65
32	Οδοντωτός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,70

Τα επιλεγόμενα 3D μοντέλα των οδοντωτών τροχών μας δίνουν τα ζευγάρια συνεργασίας που εμφανίζονται στον Πίνακα 2. Τα ζευγάρια συνεργασίας αυτά μελετήθηκαν στα μέγιστα σημεία μονής επαφής (H.P.S.T.C.). Για την φόρτιση των οδόντων των ζευγαριών χρειάστηκε να βρεθεί το μέγιστο σημείο μονής επαφής σε κάθε οδοντωτό τροχό για κάθε συνεργασία χρησιμοποιώντας την μέθοδο που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1.5. Η αδιαστατοποίηση του εφαρμοζόμενου φορτίου έγινε από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_{πραγμ} = \frac{\sigma_{αδιαστ} P_N}{b \cdot m} \quad (2.1)$$

Το φορτίο που εφαρμόστηκε είναι το φορτίο που αναπτύσσεται κατά την συνεργασία των ζευγαριών, δηλαδή εφαρμόστηκε η δύναμη P_N εφαρμόζεται στην επαπτομένη των κατατομών στο σημείο συνεργασίας (βλ. Εικόνα 2). Για την ανάλυση το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόστηκε είναι 1 Newton (P_N), επίσης όλοι οι οδοντωτοί τροχοί έχουν ίδια τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά: 1 module (m), 20° γωνία εξειλιγμένης, ύψος οδόντος 2,25 x module, και πάχος οδόντος 1 mm (b), και δεν έχουν καμία μετατόπιση (για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά βλ. κεφάλαιο 1.3). Τέλος στις συνεργασίες που επιλέχθηκαν το πινιόν είναι πάντα εξωτερικής οδόντωσης, ενώ ο συνεργαζόμενος οδοντωτός τροχός είναι πάντα εσωτερικής οδόντωσης.

Πίνακας 2 - Συγκεντρωτικός πίνακας συνεργασιών, βαθμού επικάλυψης και θέσεων εφαρμογής του φορτίου P_N

α/α	Περιγραφή συνεργασιών	ε	$\Gamma_{HPSTC,1} / \Gamma_{HPSTC,2}$
1	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,50$	1,59	6,133 / 24,414
2	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,40$	1,59	6,133 / 24,414
3	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,35$	1,59	6,133 / 24,414
4	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,30$	1,59	6,133 / 24,414
5	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,50$	1,62	7,631 / 24,439
6	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,40$	1,62	7,631 / 24,439
7	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,35$	1,62	7,631 / 24,439
8	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,30$	1,62	7,631 / 24,439
9	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,50$	1,64	9,130 / 24,458
10	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,40$	1,64	9,130 / 24,458
11	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,35$	1,64	9,130 / 24,458
12	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,30$	1,64	9,130 / 24,458
13	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,50$	1,67	11,129 / 24,479
14	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,40$	1,67	11,129 / 24,479
15	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,35$	1,67	11,129 / 24,479
16	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 50, C_{s,2} = 0,30$	1,67	11,129 / 24,479
17	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,50$	1,60	6,116 / 29,468
18	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,40$	1,60	6,116 / 29,468
19	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,35$	1,60	6,116 / 29,468
20	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,30$	1,60	6,116 / 29,468
21	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,50$	1,63	7,615 / 29,494
22	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,40$	1,63	7,615 / 29,494
23	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,35$	1,63	7,615 / 29,494
24	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,30$	1,63	7,615 / 29,494

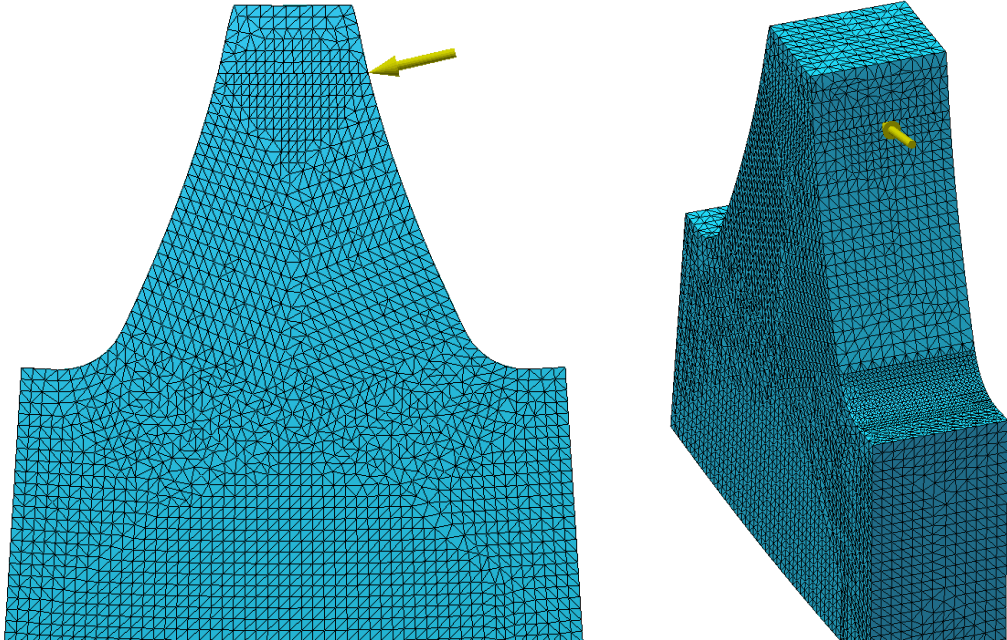
α/α	Περιγραφή συνεργασιών	ε	$\Gamma_{HPSTC,1} / \Gamma_{HPSTC,2}$
25	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,50$	1,66	9,114 / 29,515
26	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,40$	1,66	9,114 / 29,515
27	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,35$	1,66	9,114 / 29,515
28	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,30$	1,66	9,114 / 29,515
29	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,50$	1,68	11,113 / 29,538
30	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,40$	1,68	11,113 / 29,538
31	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,35$	1,68	11,113 / 29,538
32	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 60, C_{s,2} = 0,30$	1,68	11,113 / 29,538
33	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,50$	1,62	6,093 / 39,530
34	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,40$	1,62	6,093 / 39,530
35	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,35$	1,62	6,093 / 39,530
36	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,30$	1,62	6,093 / 39,530
37	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,50$	1,65	7,592 / 39,558
38	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,40$	1,65	7,592 / 39,558
39	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,35$	1,65	7,592 / 39,558
40	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,30$	1,65	7,592 / 39,558
41	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,50$	1,68	9,091 / 39,581
42	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,40$	1,68	9,091 / 39,581
43	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,35$	1,68	9,091 / 39,581
44	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,30$	1,68	9,091 / 39,581
45	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,50$	1,70	11,091 / 39,604
46	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,40$	1,70	11,091 / 39,604
47	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,35$	1,70	11,091 / 39,604
48	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 80, C_{s,2} = 0,30$	1,70	11,091 / 39,604
49	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,50$	1,64	6,078 / 49,566

α/α	Περιγραφή συνεργασιών	ε	$\Gamma_{HPSTC,1} / \Gamma_{HPSTC,2}$
50	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,40$	1,64	6,078 / 49,566
51	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,35$	1,64	6,078 / 49,566
52	$Z_1 = 12, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,30$	1,64	6,078 / 49,566
53	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,50$	1,67	7,577 / 49,595
54	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,40$	1,67	7,577 / 49,595
55	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,35$	1,67	7,577 / 49,595
56	$Z_1 = 15, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,30$	1,67	7,577 / 49,595
57	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,50$	1,69	9,077 / 49,618
58	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,40$	1,69	9,077 / 49,618
59	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,35$	1,69	9,077 / 49,618
60	$Z_1 = 18, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,30$	1,69	9,077 / 49,618
61	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,50 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,50$	1,72	11,076 / 49,642
62	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,60 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,40$	1,72	11,076 / 49,642
63	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,65 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,35$	1,72	11,076 / 49,642
64	$Z_1 = 22, C_{s,1} = 0,70 / Z_2 = 100, C_{s,2} = 0,30$	1,72	11,076 / 49,642

2.3 Αποτελέσματα

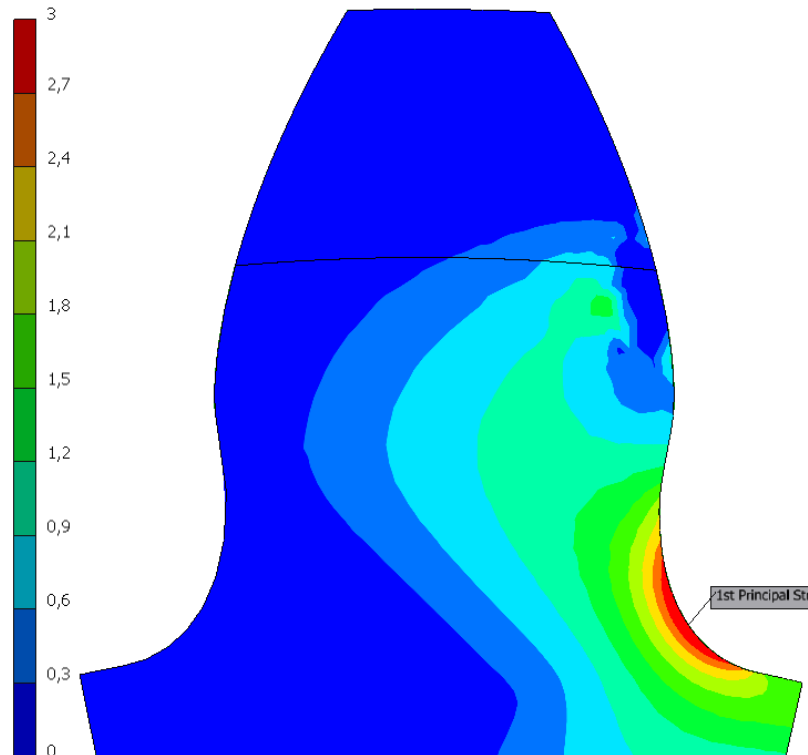
Μετά τη διεξαγωγή της ανάλυσης των 3D μοντέλων που αναφέρονται στο κεφάλαιο 2.2, η διαδικασία εξαγωγής των αποτελεσμάτων είναι η εξής:

1. Φόρτιση δοκιμίων,
2. κατασκευή πλέγματος,



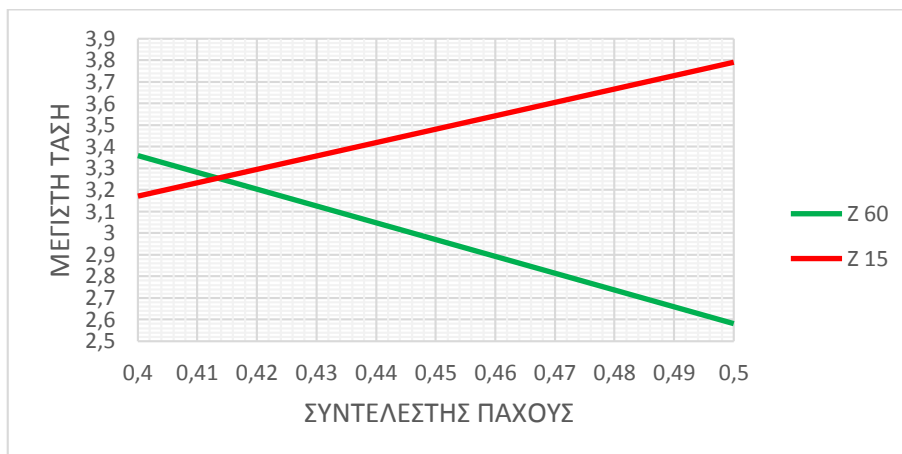
Εικόνα 20 - Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων σε οδόντα

3. εύρεση των κύριων τάσεων με ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (F.E.A.),
4. εύρεση του σημείου (κόμβου) με τη μέγιστη κύρια τάση,



Εικόνα 21 - Ανάλυση τάσεων και εύρεση της μέγιστης κύριας τάσης με F.E.A. σε οδόντα

5. σύγκριση μετρήσεων των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών με διαφορετικούς συντελεστές πάχους (Cs).



Διάγραμμα 2 - Σύγκριση των μετρήσεων ενός ζεύγους για διαφορετικούς συντελεστές πάχους

* Το σύνολο των μετρήσεων και των διαγραμμάτων των αποτελεσμάτων βρίσκεται στα παραρτήματα III,IV,V.

Πίνακας 3 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοτών αλλαγής του πάχους

Περιγραφή συνεργασιών	Βέλτιστος συντελεστής πάχους Cs_1 / Cs_2	Ποσοστό αλλαγής του πάχους (%)
$Z_1 = 12 / Z_2 = 50$	0,588 / 0,412	17,6
$Z_1 = 15 / Z_2 = 50$	0,586 / 0,414	17,2
$Z_1 = 18 / Z_2 = 50$	0,521 / 0,479	4,2
$Z_1 = 22 / Z_2 = 50$	0,541 / 0,459	8,2
$Z_1 = 12 / Z_2 = 60$	0,586 / 0,414	17,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 60$	0,586 / 0,414	17,2
$Z_1 = 18 / Z_2 = 60$	0,538 / 0,462	7,6
$Z_1 = 22 / Z_2 = 60$	0,554 / 0,446	10,8
$Z_1 = 12 / Z_2 = 80$	0,586 / 0,414	17,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 80$	0,588 / 0,412	17,6
$Z_1 = 18 / Z_2 = 80$	0,534 / 0,466	6,8
$Z_1 = 22 / Z_2 = 80$	0,554 / 0,446	10,8

Περιγραφή συνεργασιών	Βέλτιστος συντελεστής πάχους Cs_1 / Cs_2	Ποσοστό αλλαγής του πάχους (%)
$Z_1 = 12 / Z_2 = 100$	0,598 / 0,402	19,6
$Z_1 = 15 / Z_2 = 100$	0,600 / 0,400	20,0
$Z_1 = 18 / Z_2 = 100$	0,550 / 0,450	10,0
$Z_1 = 22 / Z_2 = 100$	0,574 / 0,426	14,8

Πίνακας 4 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αύξησης της αντοχής

Περιγραφή συνεργασιών	Βέλτιστος συντελεστής πάχους Cs_1 / Cs_2	Ποσοστό αύξησης της αντοχής του οδόντος (%)
$Z_1 = 12 / Z_2 = 50$	0,588 / 0,412	21,7
$Z_1 = 15 / Z_2 = 50$	0,586 / 0,414	14,6
$Z_1 = 18 / Z_2 = 50$	0,521 / 0,479	3,6
$Z_1 = 22 / Z_2 = 50$	0,541 / 0,459	4,7
$Z_1 = 12 / Z_2 = 60$	0,586 / 0,414	21,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 60$	0,586 / 0,414	14,0
$Z_1 = 18 / Z_2 = 60$	0,538 / 0,462	6,6
$Z_1 = 22 / Z_2 = 60$	0,554 / 0,446	6,4
$Z_1 = 12 / Z_2 = 80$	0,586 / 0,414	21,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 80$	0,588 / 0,412	14,2
$Z_1 = 18 / Z_2 = 80$	0,534 / 0,466	5,7
$Z_1 = 22 / Z_2 = 80$	0,554 / 0,446	6,2
$Z_1 = 12 / Z_2 = 100$	0,598 / 0,402	23,7
$Z_1 = 15 / Z_2 = 100$	0,600 / 0,400	16,0
$Z_1 = 18 / Z_2 = 100$	0,550 / 0,450	8,1
$Z_1 = 22 / Z_2 = 100$	0,574 / 0,426	8,1

3 Πείραμα φωτοελαστικότητας

Στο κάτωθι κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας, εν συνεχεία η πειραματική διάταξη και η διαδικασία διεξαγωγής του πειράματος. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού αναλύεται η μέθοδος μέτρησης των μέγιστων τάσεων που αναπτύσσονται στα δοκίμια των οδόντων των οδοντωτών τροχών και τα αποτελέσματα αυτών.

3.1 Εισαγωγή στη φωτοελαστικότητα

Η φωτοελαστικότητα ως πειραματική μέθοδος μέτρησης του τασικού πεδίου σε οδοντώσεις έχει χρησιμοποιηθεί έως σήμερα σε αρκετές έρευνες.

Για την πειραματική διάταξη απαιτούνται ένα μοντέλο, μία πηγή φωτός και δύο πολωτές για τη δημιουργία πολωμένου φωτός. Στη φωτοελαστικότητα χρησιμοποιούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης, της διάθλασης και της πόλωσης του φωτός.

Για τον υπολογισμό των τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό ενός φορτιζόμενου στερεού σώματος, η μέθοδος της φωτοελαστικότητας συνήθως χρησιμοποιείται για την ποιοτική περιγραφή του τασικού πεδίου. Η περιγραφή αυτή παρέχει πληροφορίες για τη διαφορά των κύριων τάσεων σε κάθε σημείο και όχι για την τιμή της κάθε κύριας τάσης ξεχωριστά, οπότε απαιτείται επεξεργασία των μετρήσεων με γραφική ολοκλήρωση ή με αριθμητική ανάλυση προκειμένου να εξαχθούν χρήσιμα αποτελέσματα. Η δυσκολία αυτή γίνεται εμφανής στην περίπτωση ενός συγκεντρωμένου φορτίου, όπου αναπτύσσεται πλήθος κροσσών συμβολής, οι οποίοι γίνονται δυσδιάκριτοι, με αποτέλεσμα να είναι πρακτικά αδύνατος ο υπολογισμός του συγκεντρωμένου αυτού φορτίου. Η μέθοδος της φωτοελαστικότητας υπερέχει στην περίπτωση του προσδιορισμού της μέγιστης τάσης λόγω κάμψης, η οποία αναπτύσσεται στο αφόρτιστο όριο του σώματος [3].

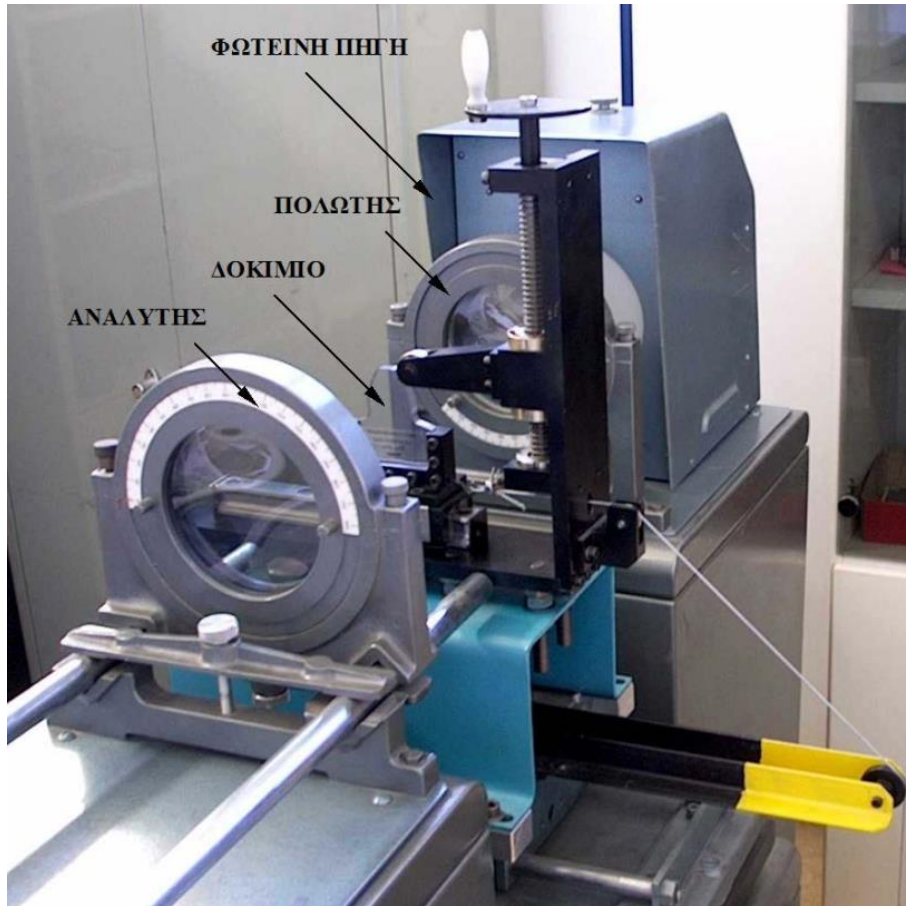
3.2 Το κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου

Για τον πειραματικό προσδιορισμό της μέγιστης τάσης ενός δοκίμιου με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας χρησιμοποιείται το κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου. Με το κυκλικό πολωσισκόπιο λαμβάνεται το δίκτυο των ισόχρωμων κροσσών και απαλείφεται το δίκτυο των ισοκλινών. Το κυκλικό πολωσισκόπιο αποτελείται από τα ακόλουθα βασικά στοιχεία [2],[3]:

- Την πηγή φυσικού φωτός. Το λευκό φως είναι η λυχνία πυρακτώσεως και το μονοχρωματικό φως είναι η λυχνία ατμών Na.
- Έναν επίπεδο πολωτή τύπου Polaroid με κατακόρυφο άξονα πόλωσης που ονομάζεται πολωτής.
- Έναν κυκλικό πολωτή $\lambda/4$ με τον ταχύ άξονα σε γωνία 45° δεξιά του άξονα του πολωτή, που ονομάζεται 1η πλάκα τετάρτου μήκους κύματος.
- Το δοκίμιο
- Έναν κυκλικό πολωτή $\lambda/4$ με τον ταχύ άξονα σε γωνία 45° αριστερά του άξονα του πολωτή, που ονομάζεται 2η πλάκα τετάρτου μήκους κύματος.
- Έναν επίπεδο πολωτή τύπου Polaroid με άξονα πόλωσης κάθετο σε εκείνον του πολωτή, που ονομάζεται αναλύτης.

Το πολωσισκόπιο του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών είναι αγγλικής κατασκευής της εταιρίας SHARPLES και διαθέτει τον ακόλουθο εξοπλισμό:

1. Λυχνία πυρακτώσεως (ή λυχνία Hg) η οποία μπορεί να δώσει το λευκό φως και για το μονοχρωματικό φως διαθέτει λυχνία Na.
2. Πολωτή, αναλυτή και δύο πλάκες τετάρτου μήκους κύματος τύπου Polaroid διαμέτρου 125 mm.
3. Ιδιοσυσκευή φόρτισης δοκιμών οδόντων οδοντωτών τροχών.



Εικόνα 22 - Το πολωσισκόπιο του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών [10]

Η αρχή λειτουργίας της ιδιοσυσκευής φόρτισης είναι η ακόλουθη. Το δοκίμιο τοποθετείται πάνω στη σταθερή αρπάγη και συσφίγγεται στη θέση του με το κινητό τμήμα της αρπάγης. Η βάση του δοκιμίου μπορεί να κινείται ευθύγραμμα πάνω σε ένσφαιρο γραμμικό έδρανο. Στο άκρο της διαδρομής υπάρχει ο βραχίονας άσκησης του φορτίου, ο οποίος φέρει στο ελεύθερο άκρο του το διπλό ένσφαιρο αυτορρυθμιστο έδρανο. Η ρύθμιση του ύψους της άσκησης του φορτίου γίνεται μέσω του κοχλία κίνησης. Η άσκηση της οριζόντιας συνιστώσας του φορτίου σε οποιαδήποτε θέση πάνω στη κατατομή του δοκιμίου γίνεται με τη βοήθεια συρματόσχοινο και των αναρτημένων βαρών [2].

3.3 Υπολογισμός της φωτοτασεοπτικής σταθεράς

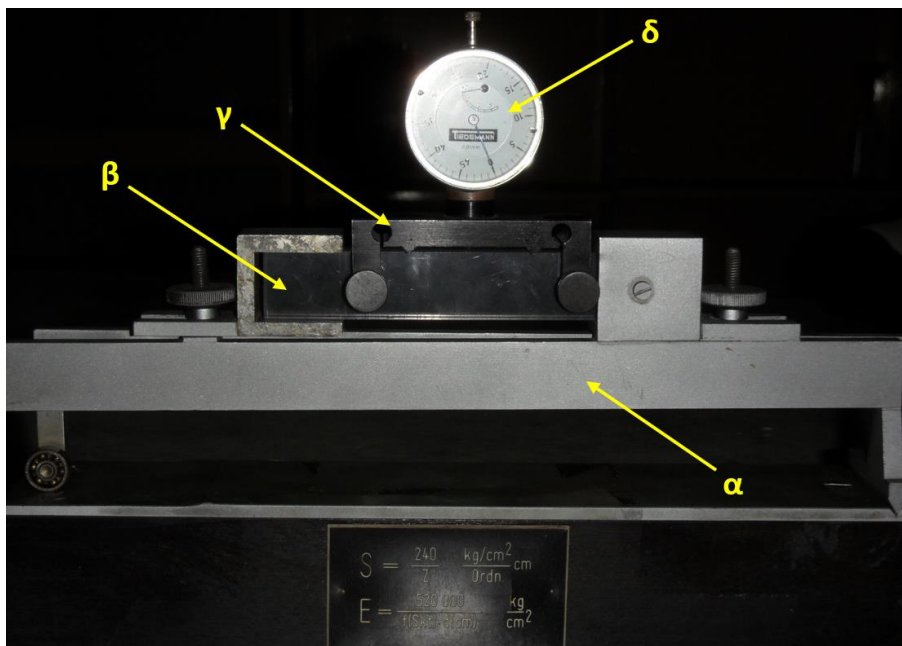
Η φωτοτασεοπτική σταθερά του υλικού υπολογίζεται πειραματικά, με πείραμα απλού εφελκυσμού ή θλίψης ή πείραμα καθαρής κάμψης. Για τον υπολογισμό της έγινε πείραμα καθαρής κάμψης. Στο πείραμα της καθαρής κάμψης, υπάρχει μια μόνο κύρια τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα του δοκιμίου. Οι εμφανιζόμενοι ισόχρωμοι κροσσοί είναι παράλληλοι προς τον άξονα του δοκιμίου. Ο μαύρος κροσσός που συμπίπτει με τον ουδέτερο άξονα του δοκιμίου είναι ο μηδενικής τάξης ($N=0$), διότι η τάση εκεί είναι μηδέν. Από την θεωρία της καθαρής κάμψης προκύπτει η σχέση [3]:

$$\sigma = \frac{M}{I} y = N \frac{f_{\sigma}}{d} \quad (3.1)$$

Για τον υπολογισμό της φωτοτασεοπτικής σταθεράς του υλικού και το μέτρο ελαστικότητας του, εκτελέστηκε πείραμα στο πρισματικό δοκίμιο. Στο πείραμα αυτό χρησιμοποιήθηκε η πειραματική διάταξη που φαίνεται στην Εικόνα 22 και που περιλαμβάνει ένα σύστημα βαρών και μοχλών (Εικόνα 23 – α), ώστε το δοκίμιο που τοποθετείται σε αυτή να υπόκειται σε απλή κάμψη. Επάνω στο δοκίμιο προσαρμόζεται η γέφυρα με το μετρητικό ρολόι (Εικόνα 23 – γ, δ) Μετά το δοκίμιο (Εικόνα 23 – β) φορτίζεται με συγκεκριμένη ροπή, όπου διαβάζεται η ένδειξη του ρολογιού σε 0,01 mm. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού προσδιορίζεται από την σχέση:

$$E = \frac{520.000}{f d} \quad (3.2)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού σε $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, f η ένδειξη του μετρητικού ρολογιού σε 0,01 mm και d το πάχος του υλικού σε cm.

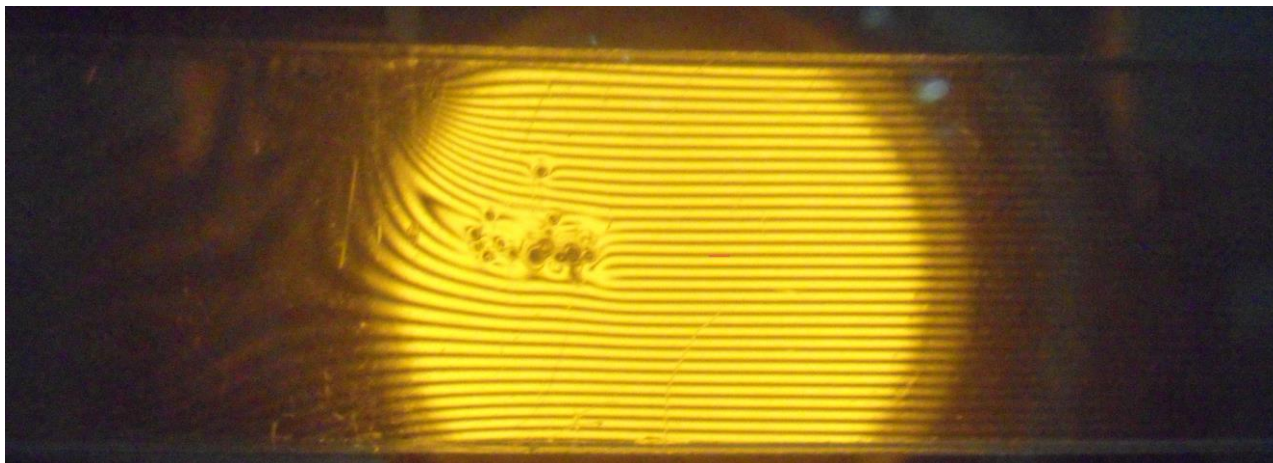


Εικόνα 23 - Ιδιοσυσκευή κάμψης: α) σύστημα βαρών και μοχλών, β) δοκίμιο, γ) γέφυρα στήριξης, δ) μετρητικό ρολόι

Αφού μετρηθεί το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στη συνέχεια η συσκευή με το δοκίμιο αλλά χωρίς το μετρητικό ρολόι τοποθετείται στο πολωσισκόπιο. Στην Εικόνα 24 με το μονοχρωματικό φως αριθμούνται οι κροσσοί από τον μηδενικής τάξης προς τα έξω, οπότε και καθορίζεται η τάξη του εξωτερικού κροσσού. Η φωτοτασεοπτική σταθερά για το συγκεκριμένο υλικό και το συγκεκριμένο μήκος κύματος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{240}{Z} \quad (3.3)$$

όπου S η φωτοτασεοπτική σταθερά σε (kg/cm/Ord n) και Z η τάξη του εξωτερικού κροσσοῦ συμβολής.



Εικόνα 24 - Κροσσοί συμβολής

3.4 Διαδικασία κοπής δοκιμίων φωτοελαστικότητας

Τα δοκίμια είναι κατασκευασμένα από ειδικό φωτοευαίσθητο υλικό τύπου Lexan Clear Plastic Polycarbonate Solid Sheet της εταιρίας Bayer. Είναι ένα πολυκαρβονικό πλαστικό υλικό, το οποίο ενδείκνυται για πειράματα επίπεδης φωτοελαστικότητας στην ελαστική περιοχή, διότι παρουσιάζει εξαιρετική κατεργασιμότητα, έχει υψηλό μέτρο ελαστικότητας και υψηλή οπτική ευαισθησία.

Η διαδικασία κατασκευής των δοκιμίων είναι η ακόλουθη:

1. Κοπή ορθογωνικών τεμαχίων διαστάσεων 90 mm x 100 mm x 10 mm σε πριονοκορδέλα, με ψύξη αέρα.
2. Παραλληλία των τεμαχίων και τελική μορφή σε κέντρο κατεργασιών CNC τύπου Mazak. Η κοπή των δοκιμίων έγινε με 4-φτερο κονδύλι carbide $\varnothing 6$, με ψύξη αέρα και φάσεις κατεργασίας τις εξής: α) Ξεχόνδρισμα με ταχύτητα 3.000 rpm και πρόωση 800 mm/min. β) φινίρισμα με βάθος κοπής 0,1 mm, ταχύτητα 3.000 rpm και πρόωση 1.000 mm/min.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των 20 συνολικά δοκιμίων που κατασκευάστηκαν δίνονται παρακάτω (βλ. Πίνακας 5)

Πίνακας 5 - Συνοπτικός πίνακας δοκιμών φωτοελαστικότητας

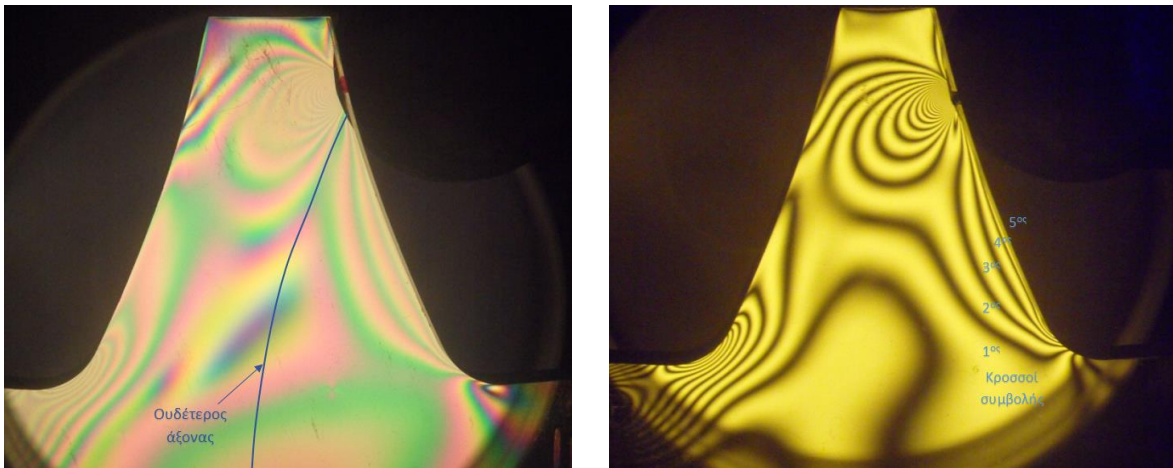
α/α	Περιγραφή	C _s
1	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,50
2	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,40
3	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,35
4	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,30
5	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,50
6	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,40
7	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,35
8	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,30
9	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,50
10	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,40
11	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,35
12	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,30
13	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,50
14	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,40
15	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,35
16	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,30
17	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,50
18	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,50
19	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,50
20	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,50

(Σημείωση: $a_0 = 20 \text{ deg}$, $C_c = 0,25\text{mm}$, $C_f = 1,25\text{mm}$, $C_k = 1,00\text{mm}$, $x = 0\text{mm}$ και $\text{module} = 20 \text{ mm}$)

3.5 Πειραματική μέθοδος

Η διαδικασία διεξαγωγής του πειράματος βασίζεται στα παρακάτω βήματα:

1. Μέτρηση του μέτρου ελαστικότητας (E) του υλικού και της φωτοελαστικής σταθεράς (S). Η μέτρηση αυτή γίνεται στην ιδιοσυσκευή φόρτισης και με διαδικασία αυτή που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3.3. Το αποτέλεσμα της μέτρησης αυτής είναι $E=4,25$ GPa και $S=16$ KPa/fringe/m (Εικόνα 23, Εικόνα 24)
2. Φόρτιση των δοκιμίων και, η φωτογραφική αποτύπωση με λευκό και με μονοχρωματικό φως. Το φορτίο των δοκιμίων ανέρχεται στις 50 lbs (Εικόνα 22).
3. Εύρεση του ουδέτερου άξονα
4. Μέτρηση των κροσσών συμβολής και αντιστοίχιση αυτών με την πρώτη κύρια τάση.



Εικόνα 25 - Εύρεση του ουδέτερου άξονα και μέτρηση των κροσσών συμβολής

5. σύγκριση μετρήσεων των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών με διαφορετικούς συντελεστές πάχους (C_s) (Διάγραμμα 3).

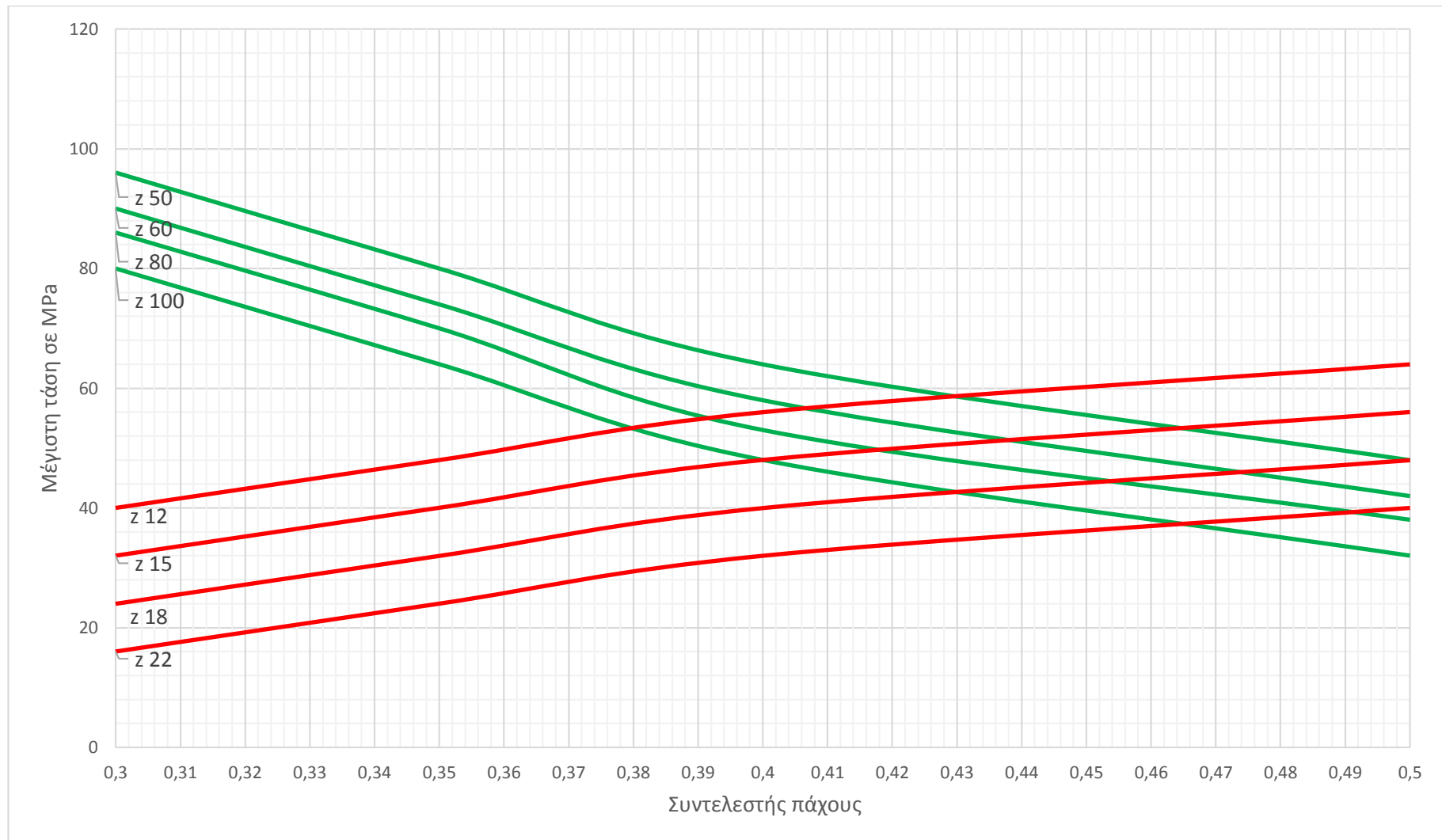
* Το σύνολο των μετρήσεων των αποτελεσμάτων βρίσκεται στα παραρτήματα I,II,V.

3.6 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από το πείραμα της φωτοελαστικότητας εμφανίζονται στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα (βλ. Πίνακας 6):

Πίνακας 6 - Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων πειράματος φωτοελαστικότητας

α/α	Περιγραφή	C_s	σ_{\max} (MPa)
1	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,50	48
2	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,40	64
3	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,35	80
4	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες	0,30	96
5	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,50	48
6	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,40	56
7	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,35	72
8	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες	0,30	88
9	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,50	32
10	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,40	48
11	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,35	72
12	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες	0,30	88
13	Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,50	32
14	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,40	48
15	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,35	64
16	Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες	0,30	80
17	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες	0,50	64
18	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες	0,50	56
19	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες	0,50	48
20	Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες	0,50	40



Διάγραμμα 3 – Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων του πειράματος της φωτοελαστικότητας

* Ο συντελεστής πάχους για τις εξωτερικές οδοντώσεις είναι $C_{s,pinion} = 1 - C_s$.

Πίνακας 7 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αλλαγής του πάχους

Περιγραφή συνεργασιών	Βέλτιστος συντελεστής πάχους Cs_1 / Cs_2	Ποσοστό αλλαγής του πάχους (%)
$Z_1 = 12 / Z_2 = 50$	0,570 / 0,430	14,0
$Z_1 = 15 / Z_2 = 50$	0,535 / 0,465	7,0
$Z_1 = 18 / Z_2 = 50$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 22 / Z_2 = 50$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 12 / Z_2 = 60$	0,594 / 0,406	18,8
$Z_1 = 15 / Z_2 = 60$	0,563 / 0,437	12,6
$Z_1 = 18 / Z_2 = 60$	0,527 / 0,473	5,4
$Z_1 = 22 / Z_2 = 60$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 12 / Z_2 = 80$	0,609 / 0,391	21,8
$Z_1 = 15 / Z_2 = 80$	0,583 / 0,417	16,6
$Z_1 = 18 / Z_2 = 80$	0,547 / 0,453	9,4
$Z_1 = 22 / Z_2 = 80$	0,509 / 0,491	1,8
$Z_1 = 12 / Z_2 = 100$	0,621 / 0,379	24,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 100$	0,600 / 0,400	20,0
$Z_1 = 18 / Z_2 = 100$	0,570 / 0,430	14,0
$Z_1 = 22 / Z_2 = 100$	0,535 / 0,465	7,0

Πίνακας 8 – Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων και ποσοστών αύξησης της αντοχής

Περιγραφή συνεργασιών	Βέλτιστος συντελεστής πάχους Cs_1 / Cs_2	Ποσοστό αύξησης της αντοχής του οδόντος (%)
$Z_1 = 12 / Z_2 = 50$	0,570 / 0,430	9,4
$Z_1 = 15 / Z_2 = 50$	0,535 / 0,465	3,6
$Z_1 = 18 / Z_2 = 50$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 22 / Z_2 = 50$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 12 / Z_2 = 60$	0,594 / 0,406	12,5
$Z_1 = 15 / Z_2 = 60$	0,563 / 0,437	7,2
$Z_1 = 18 / Z_2 = 60$	0,527 / 0,473	4,2
$Z_1 = 22 / Z_2 = 60$	0,500 / 0,500	0,0
$Z_1 = 12 / Z_2 = 80$	0,609 / 0,391	14,1
$Z_1 = 15 / Z_2 = 80$	0,583 / 0,417	10,7
$Z_1 = 18 / Z_2 = 80$	0,547 / 0,453	8,3
$Z_1 = 22 / Z_2 = 80$	0,509 / 0,491	2,5
$Z_1 = 12 / Z_2 = 100$	0,621 / 0,379	17,2
$Z_1 = 15 / Z_2 = 100$	0,600 / 0,400	14,3
$Z_1 = 18 / Z_2 = 100$	0,570 / 0,430	12,5
$Z_1 = 22 / Z_2 = 100$	0,535 / 0,465	7,5

4 Συμπεράσματα

Μετά το πέρας της τηρηθείσας διαδικασίας προκύπτει ότι αυξάνοντας το συντελεστή πάχους στις εξωτερικές οδοντώσεις και ταυτόχρονα μειώνοντας το συντελεστή πάχους του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού (που εν προκειμένω είναι τροχός εσωτερικής οδόντωσης), αυξάνεται η αντοχή του συνεργαζόμενου ζεύγους, όπως στο παράδειγμα: σε ένα ζεύγος με $Z_1=12$, $Z_2=50$ με $C_{s,1}=0,50$, $C_{s,2}=0,50$ η διαστασιολόγηση του ζεύγους γίνεται με την αντοχή του πινιόν, ενώ στο ίδιος ζεύγος με $C_{s,1}=0,588$, $C_{s,2}=0,412$, η διαστασιολόγηση γίνεται με την αντοχή και των δύο (για αυτούς τους συντελεστές πάχους έχουν ίδια αντοχή) και παρατηρείται αύξηση της αντοχής του συνεργαζόμενου ζεύγους στο 21,7%.

Από το σύνολο των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι μεγαλύτερη αύξηση αντοχής παρατηρείται όταν ο αριθμός των οδόντων είναι χαμηλός, ενώ όταν αυξάνεται ο αριθμός των οδόντων αυτόματα μειώνεται το ποσοστό αύξησης της αντοχής.

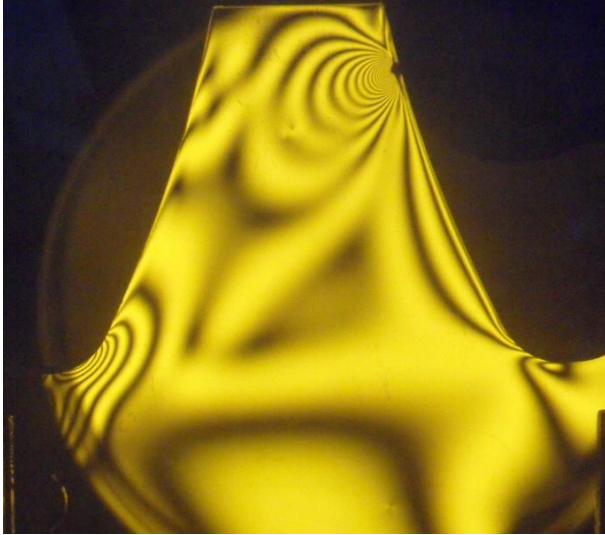
Όσον αφορά την μέθοδο της φωτοελαστικότητας παρατηρήθηκε ότι υπάρχει δυσκολία στην εύρεση της ακριβούς τιμής της κύριας τάσης αλλά ως προς την οπτική απεικόνιση της μορφολογίας των τάσεων στο δοκίμιο τα αποτελέσματα είναι πλήρως ικανοποιητικά. Ενώ η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων υστερεί ως προς την οπτική απεικόνιση της μορφολογίας των τάσεων στα μοντέλα, αλλά ως προς την εύρεση της ακριβούς τιμής της κύριας τάσης τα αποτελέσματα έχουν την μέγιστη ακρίβεια.

Και από τις δύο μεθόδους συμπεραίνεται ότι ο σχεδιασμός οδοντωτών τροχών (συνεργασία εσωτερικής – εξωτερικής οδόντωσης) με βέλτιστο συντελεστή πάχους δίνει ζεύγη οδοντωτών τροχών με αυξημένη αντοχή.

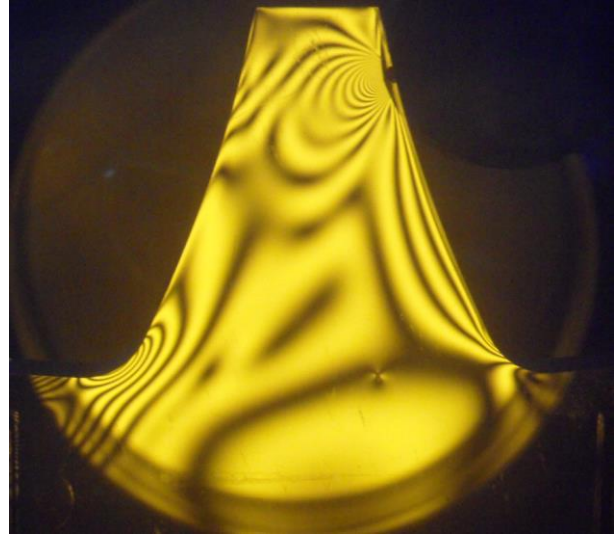
Παράρτημα

Παράρτημα I

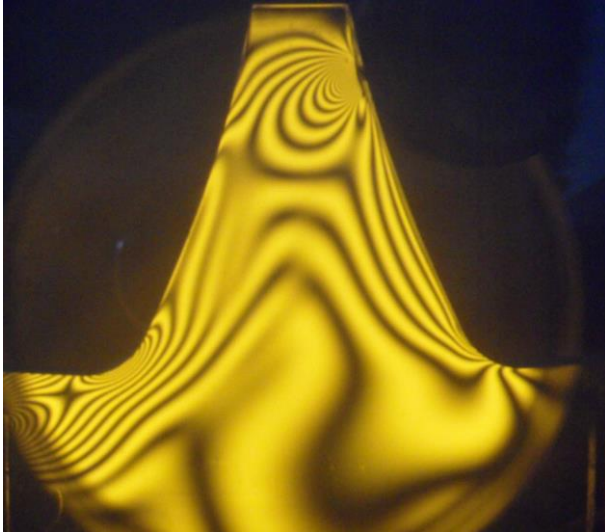
Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται τα αποτελέσματα μέτρησης με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας με χρήση μονοχρωματικού φωτός (λυχνία ατμών Na – κίτρινο φως).



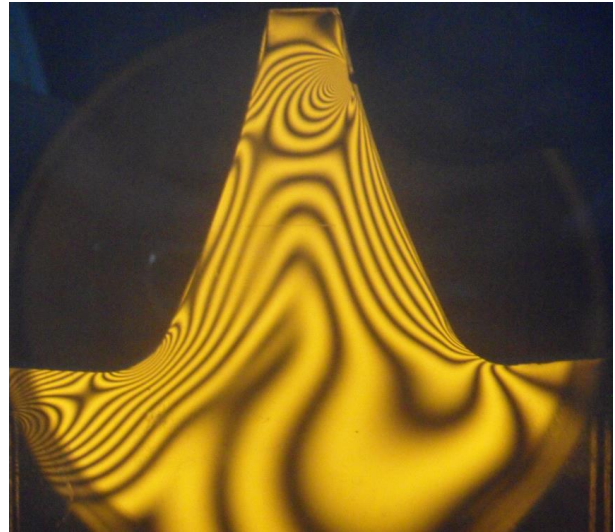
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες
– $C_s=0,50$



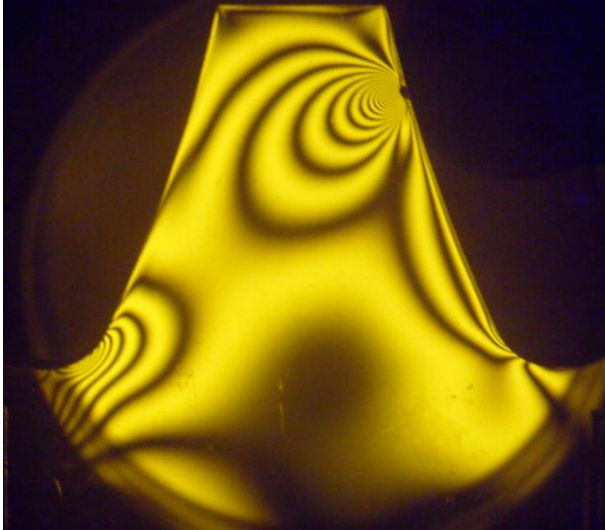
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s=0,40$



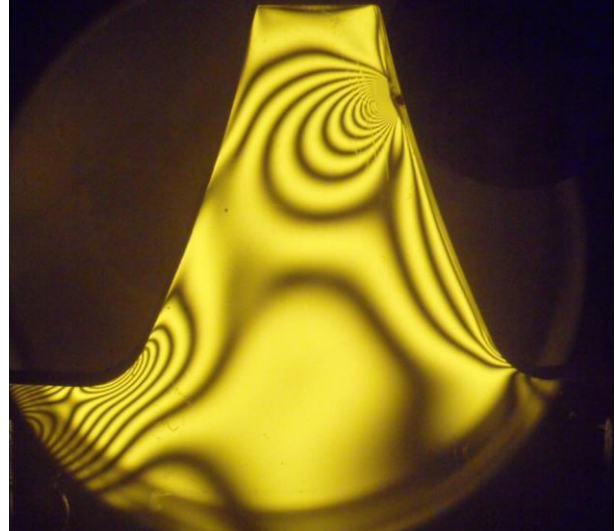
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s=0,35$



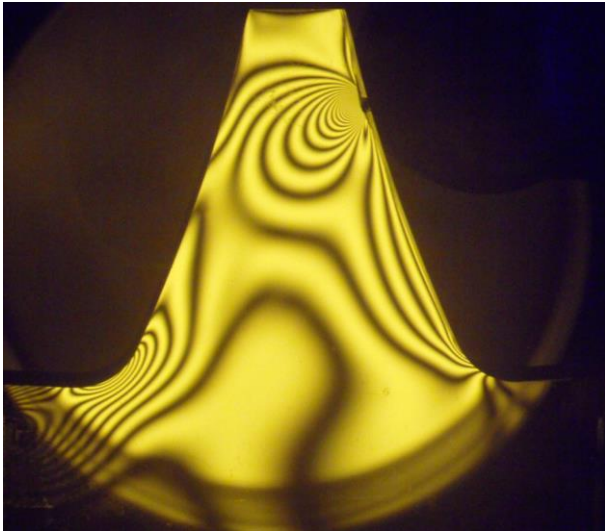
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s=0,30$



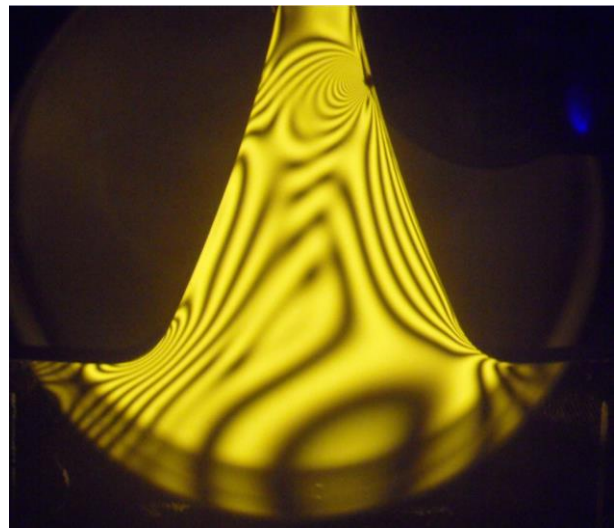
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες
– $C_s = 0,50$



Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s = 0,40$



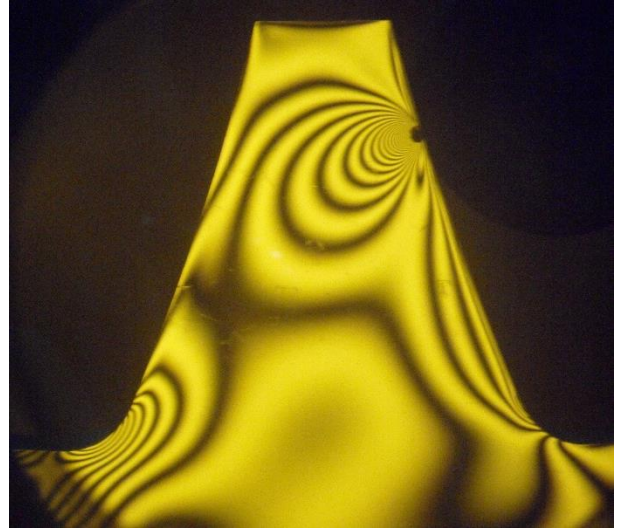
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s = 0,35$



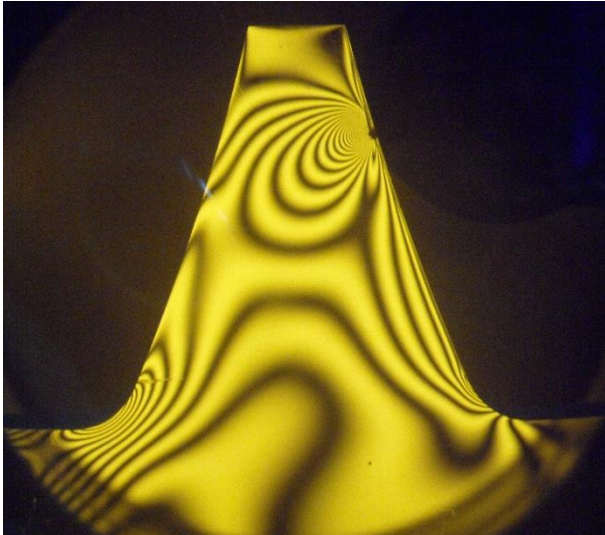
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s = 0,30$



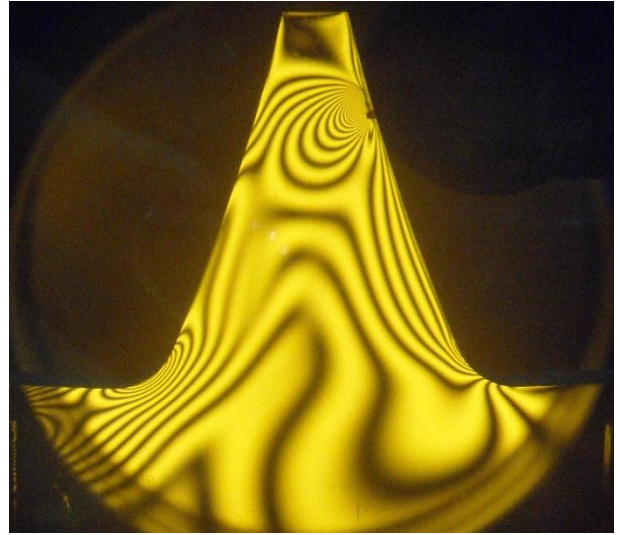
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες
– $C_s=0,50$



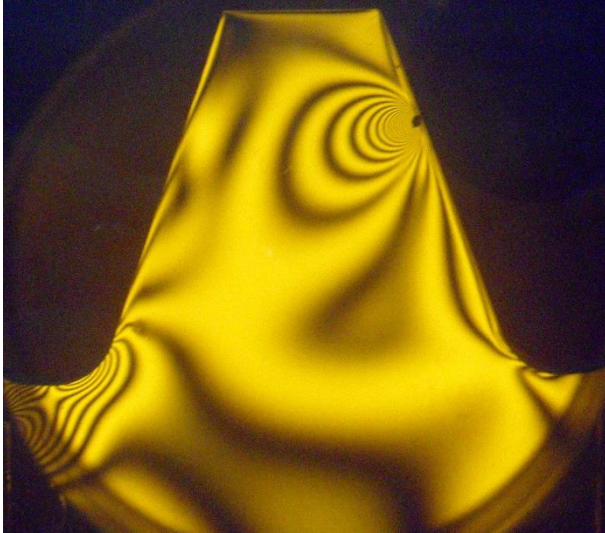
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,40$



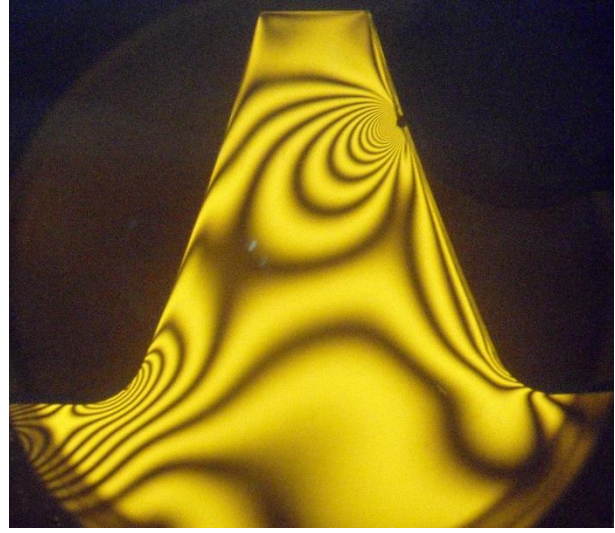
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,35$



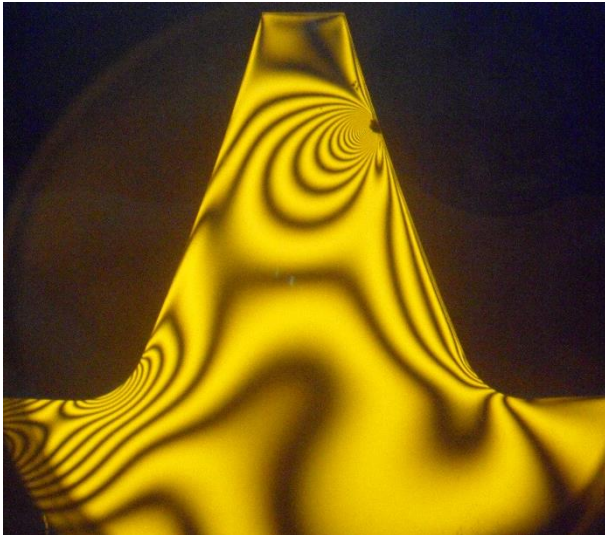
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,30$



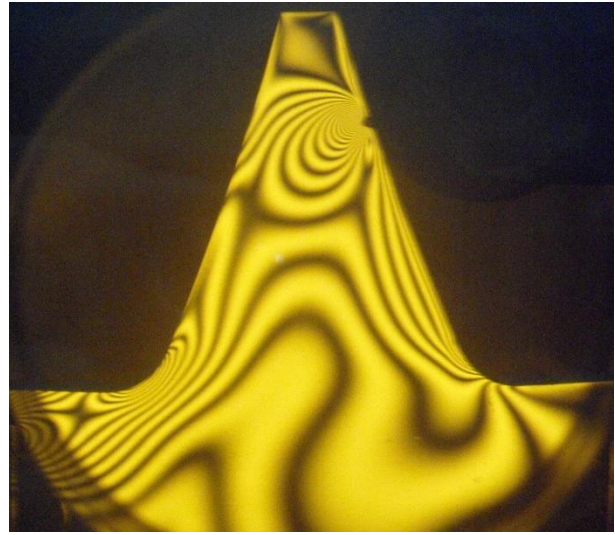
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,50$



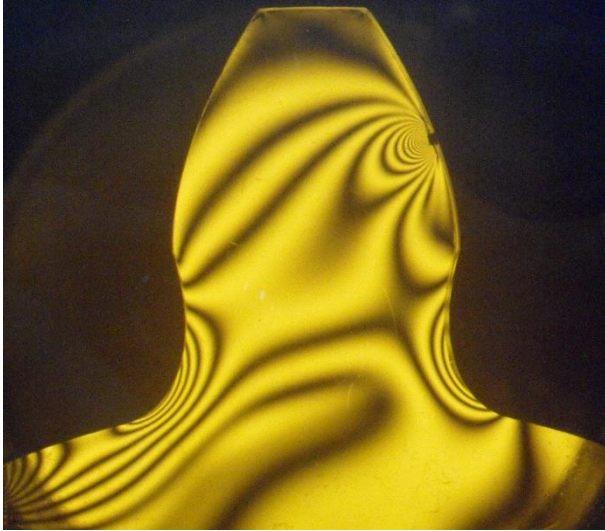
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,40$



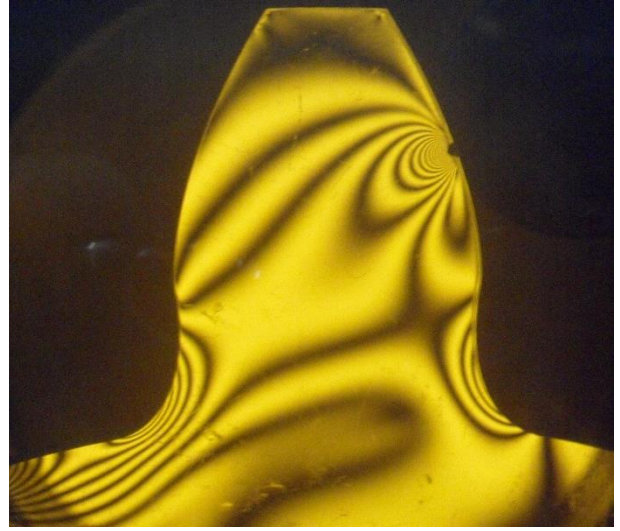
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,35$



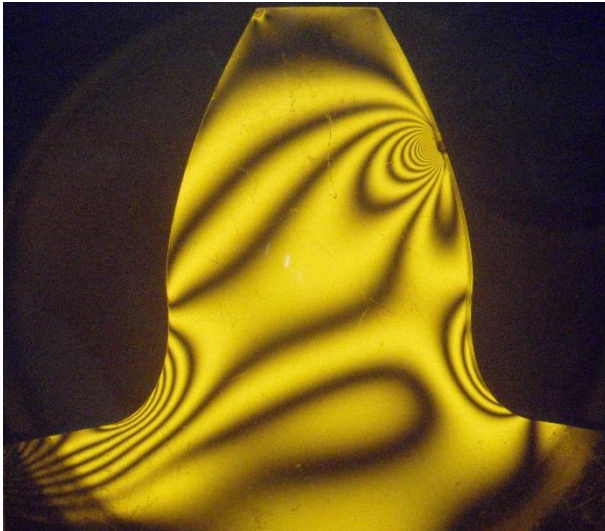
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,30$



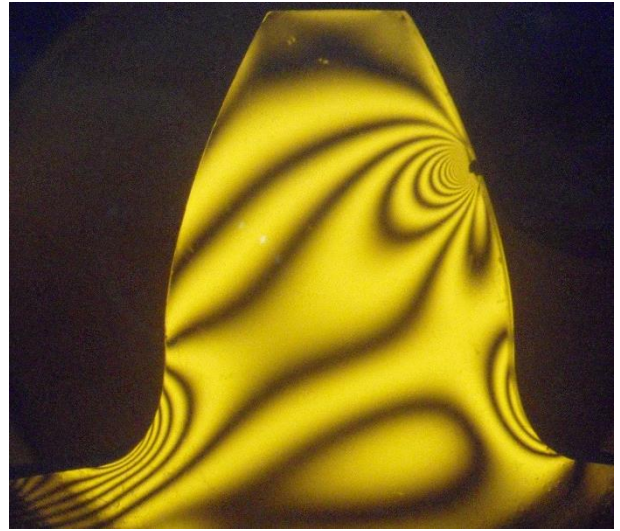
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες
– $C_s=0,50$



Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες
– $C_s=0,50$



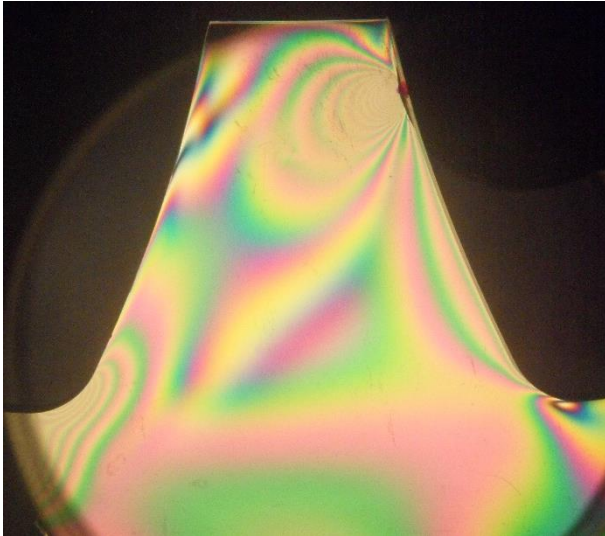
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες
– $C_s=0,50$



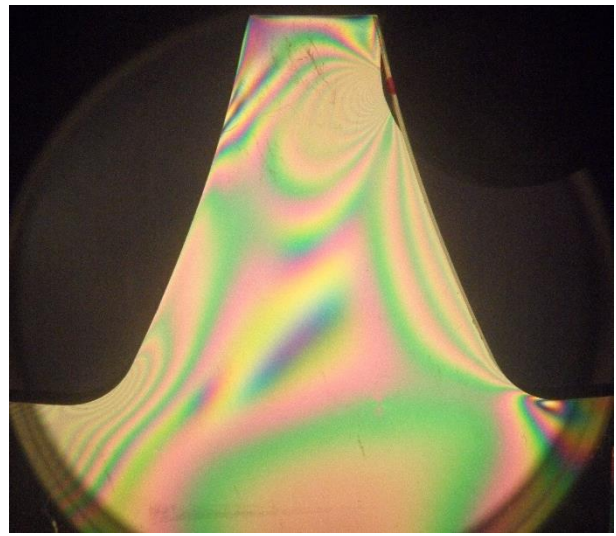
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες
– $C_s=0,50$

Παράρτημα II

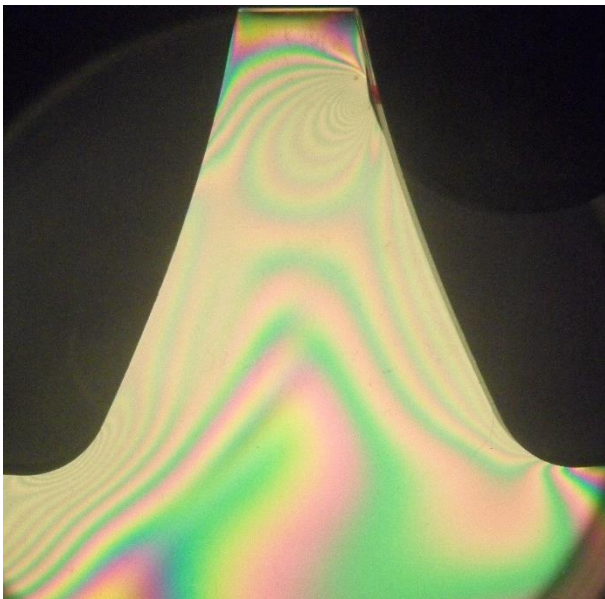
Παρατίθενται τα αποτελέσματα μέτρησης με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας με χρήση λευκού φωτός (λαμπτήρας πυρακτώσεως).



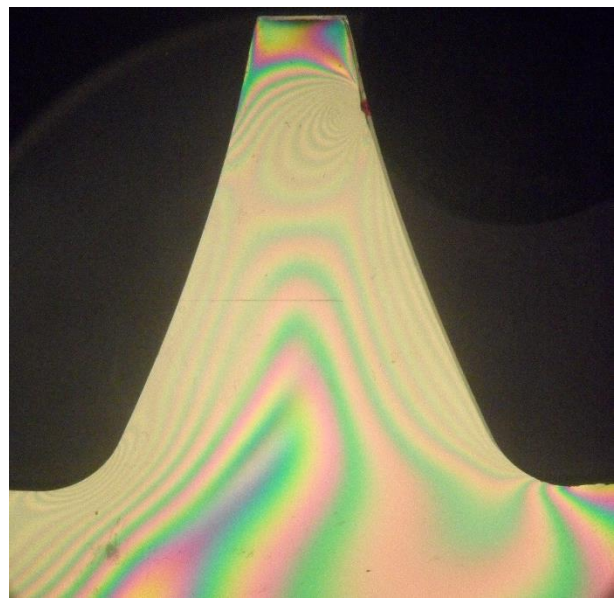
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες
– $C_s = 0,50$



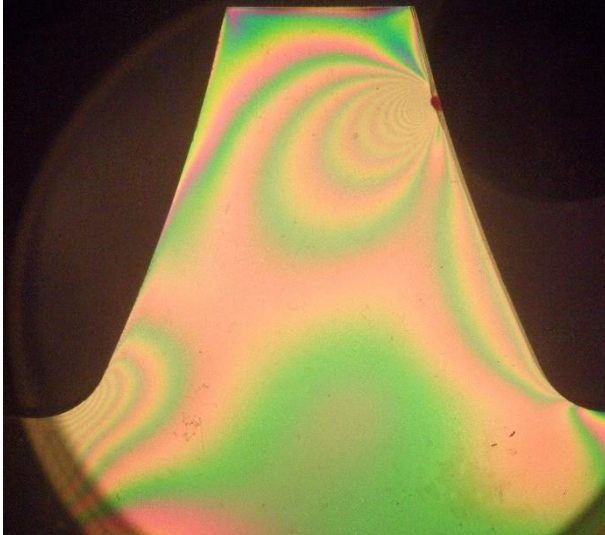
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s = 0,40$



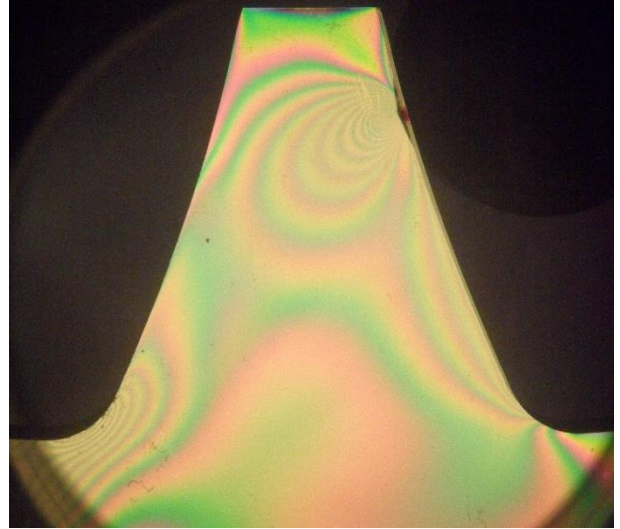
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s = 0,35$



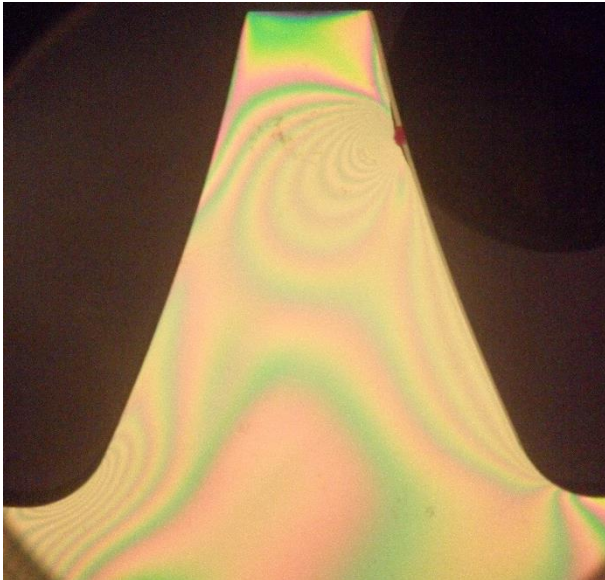
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες –
 $C_s = 0,30$



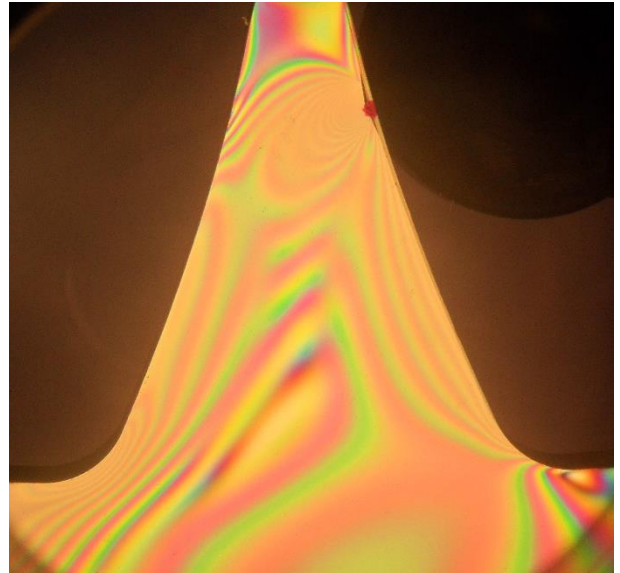
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες
– $C_s=0,50$



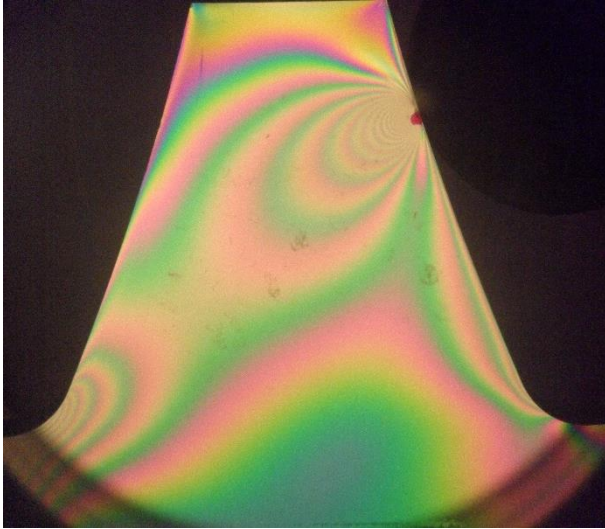
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s=0,40$



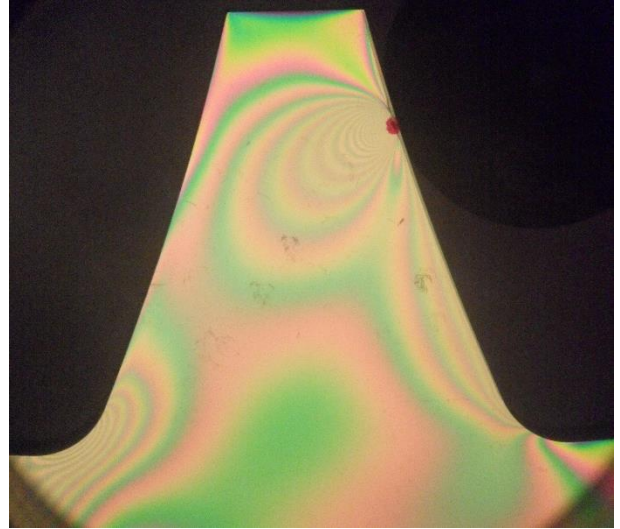
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s=0,35$



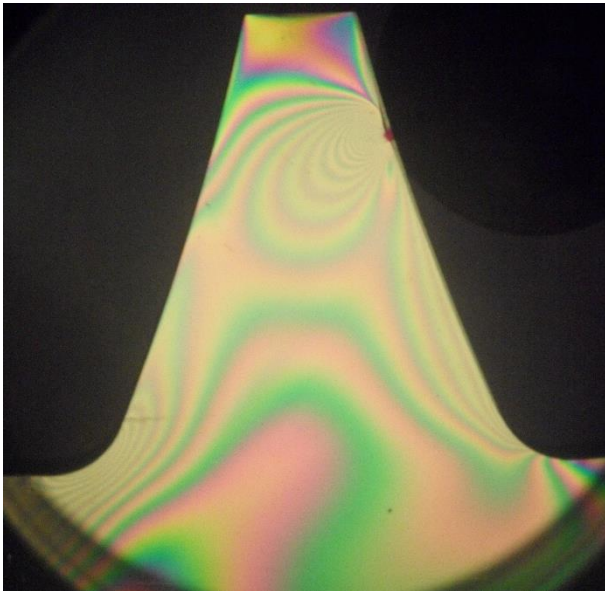
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες –
 $C_s=0,30$



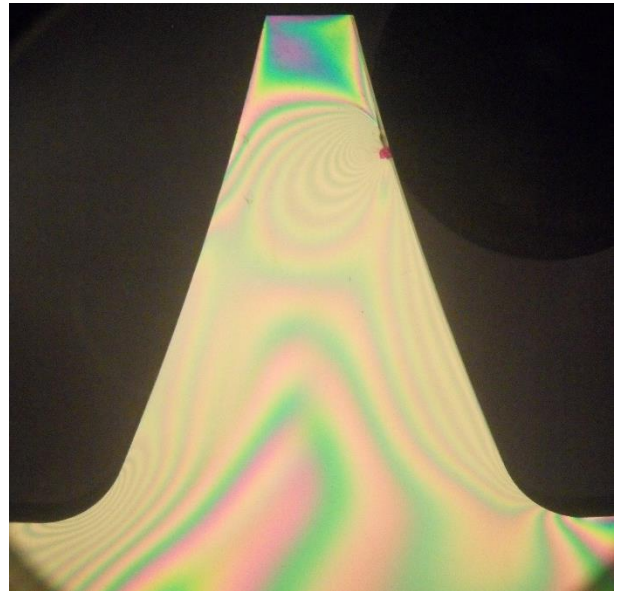
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες
– $C_s=0,50$



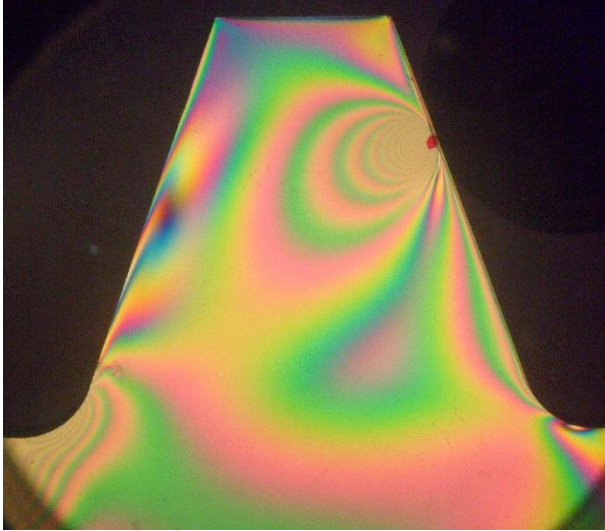
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,40$



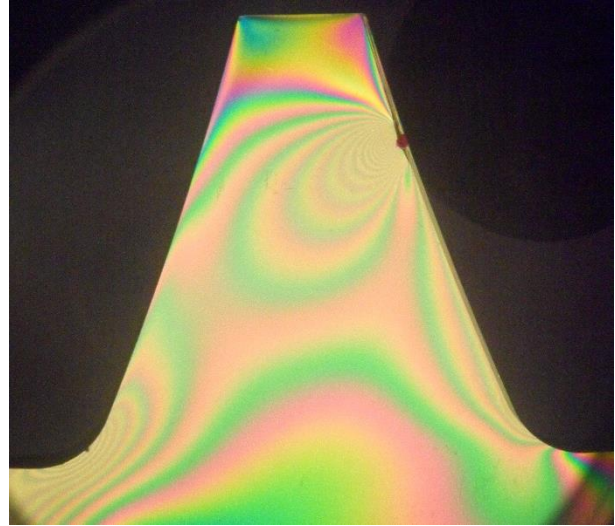
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,35$



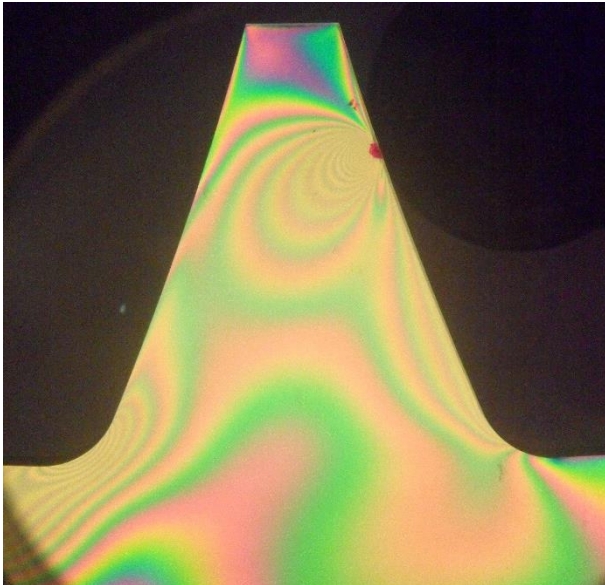
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες –
 $C_s=0,30$



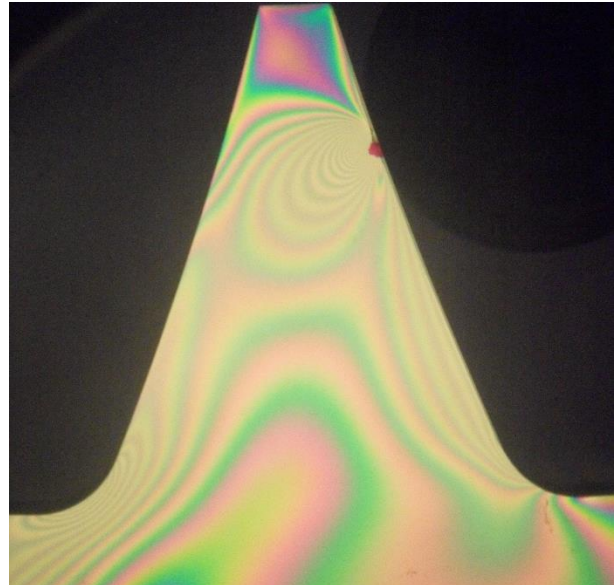
Κανονικός τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,50$



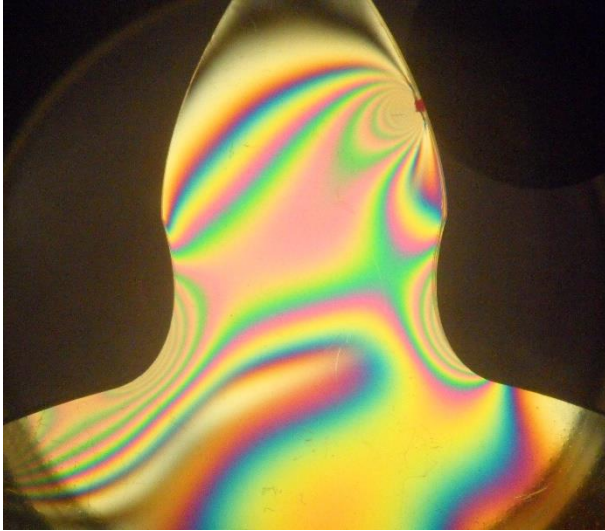
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,40$



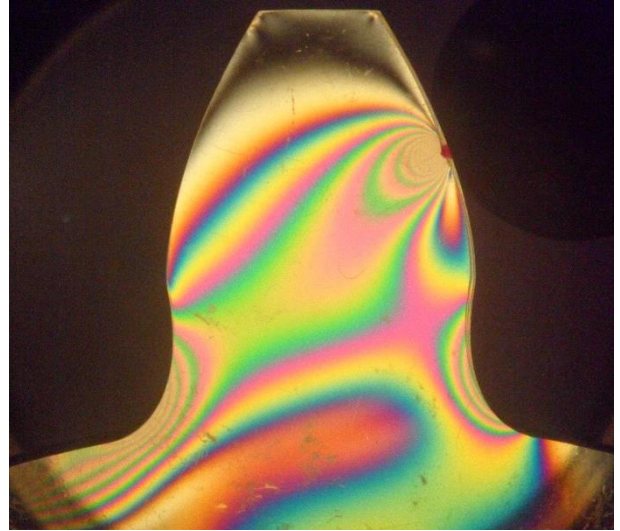
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,35$



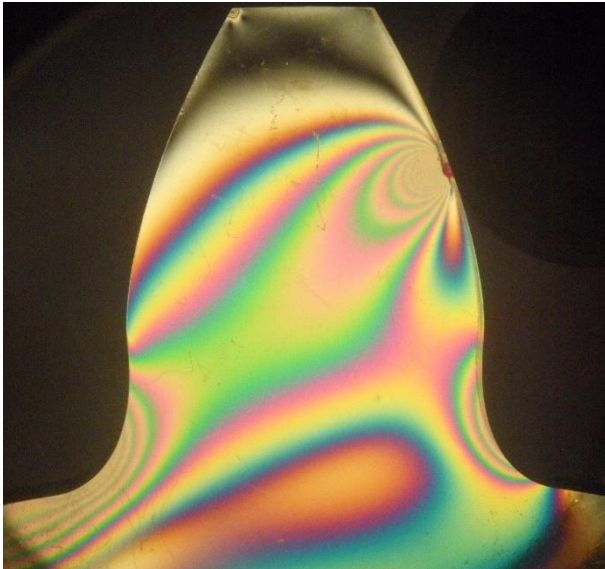
Τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $C_s = 0,30$



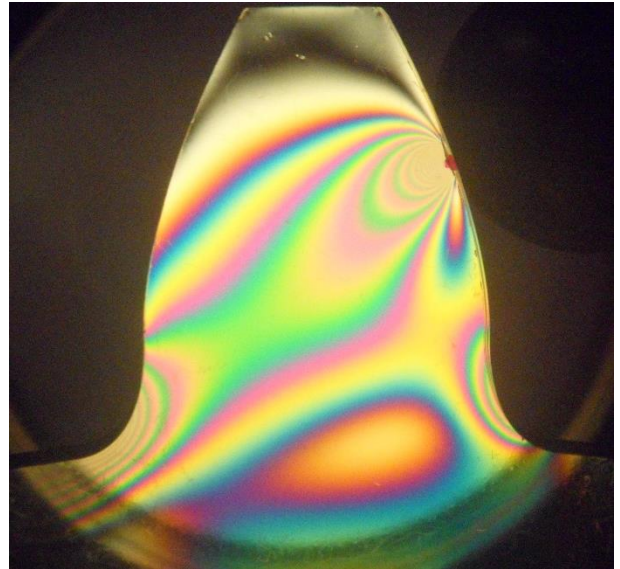
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 12 οδόντες
– $C_s = 0,50$



Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 15 οδόντες
– $C_s = 0,50$



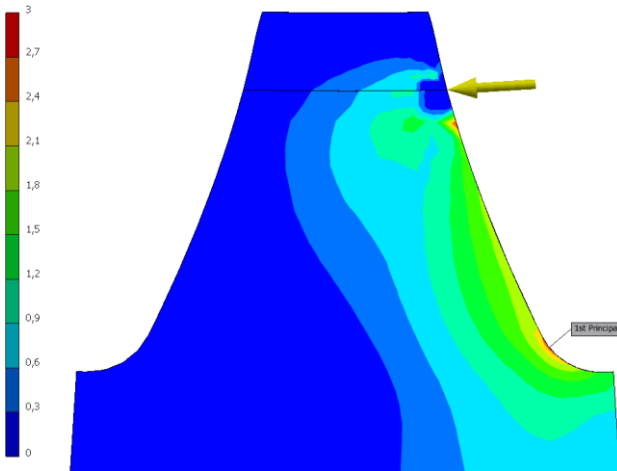
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 18 οδόντες
– $C_s = 0,50$



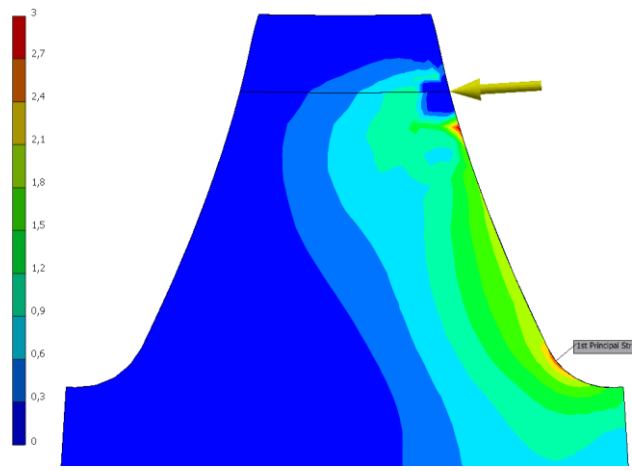
Κανονικός τροχός εξωτερικής οδόντωσης με 22 οδόντες
– $C_s = 0,50$

Παράρτημα III

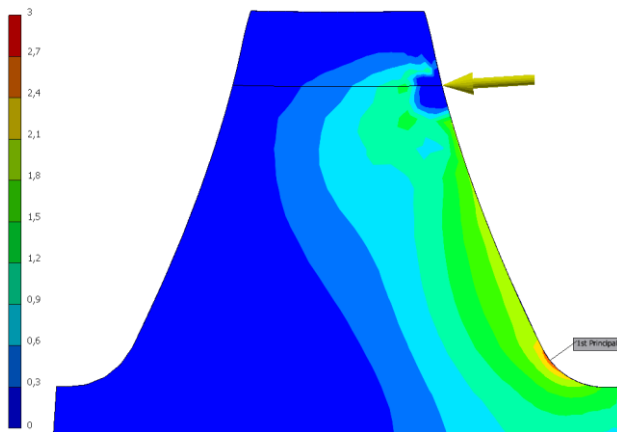
Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται τα αποτελέσματα μέτρησης των εσωτερικών οδοντώσεων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



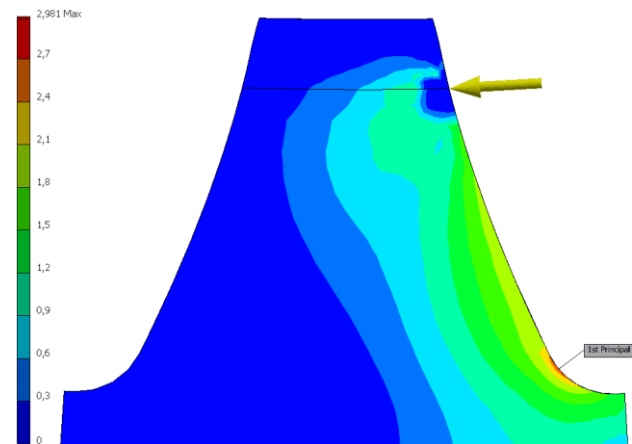
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 22 οδόντες
– $\varepsilon = 1,67$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,84$ MPa



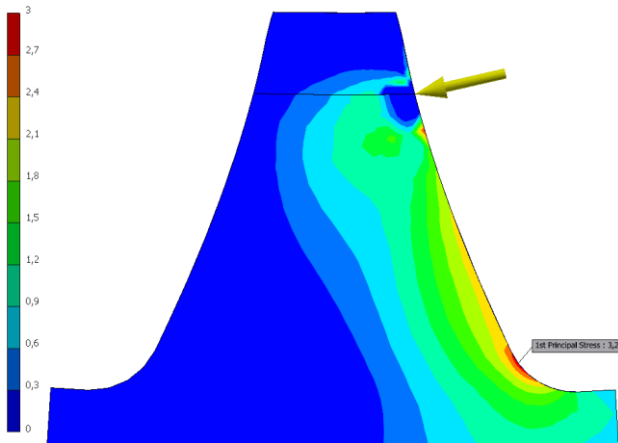
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 18 οδόντες
– $\varepsilon = 1,64$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,86$ MPa



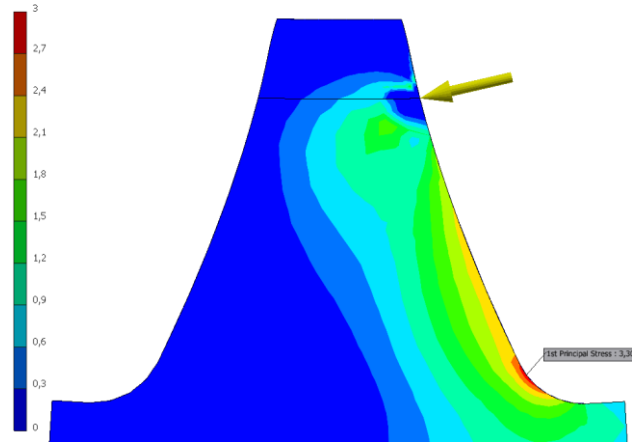
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 15 οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,89$ MPa



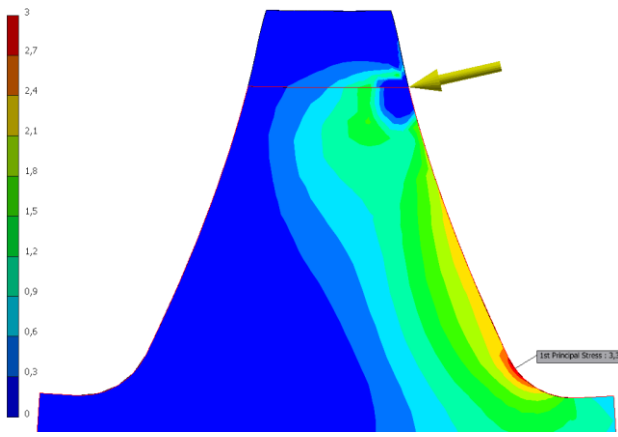
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 12 οδόντες – $\varepsilon = 1,59$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,91$ MPa



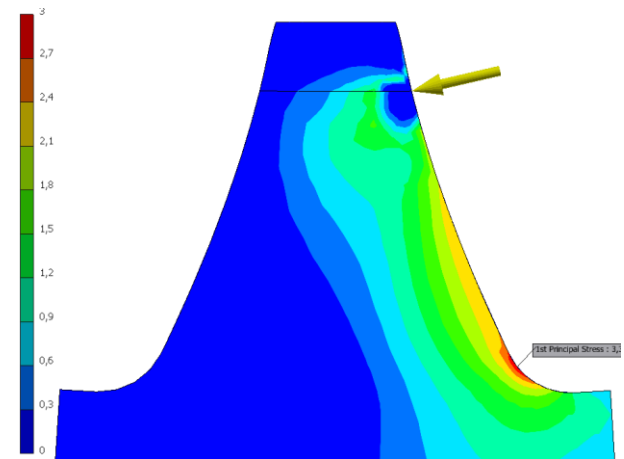
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 22 οδόντες
– $\epsilon = 1,67$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,28$ MPa



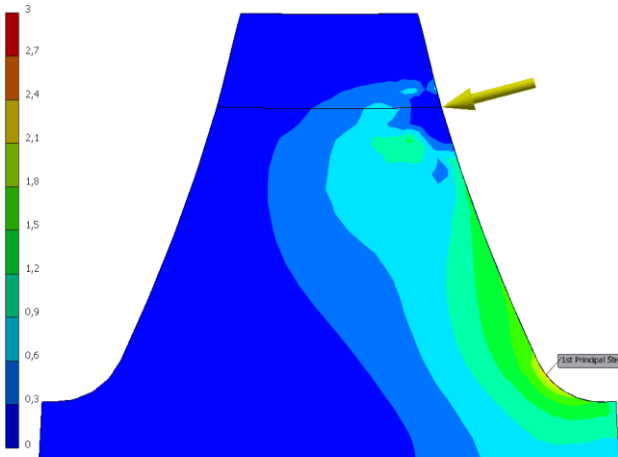
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 18 οδόντες
– $\epsilon = 1,64$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,30$ MPa



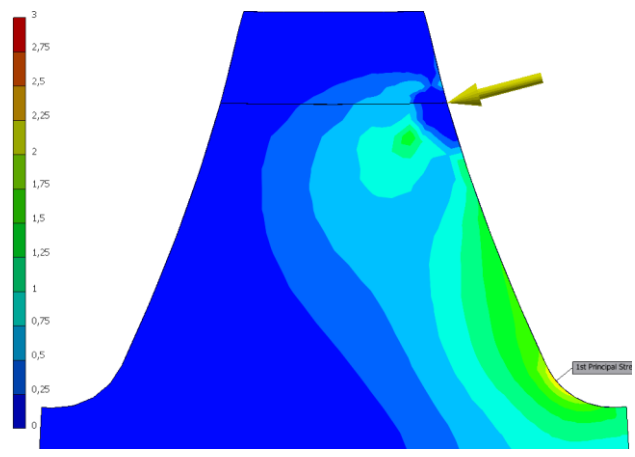
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 15 οδόντες – $\epsilon = 1,62$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,34$ MPa



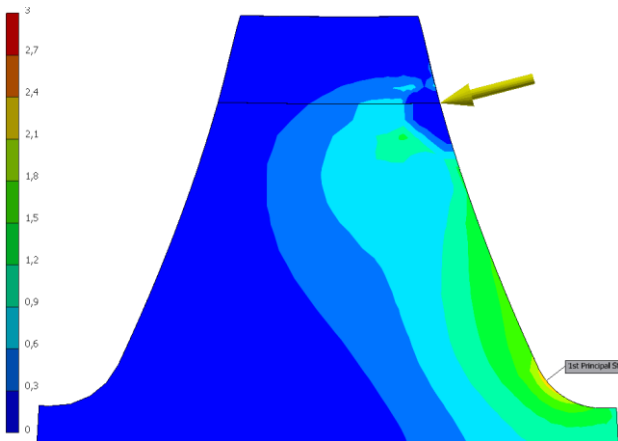
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 12 οδόντες – $\epsilon = 1,59$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,38$ MPa



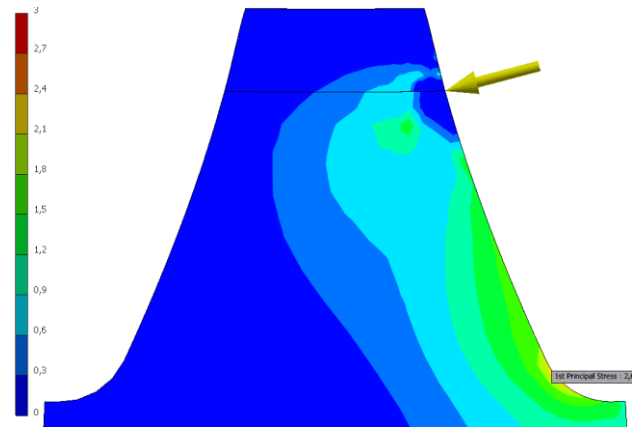
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 22 οδόντες
– $\epsilon = 1,68$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,53$ MPa



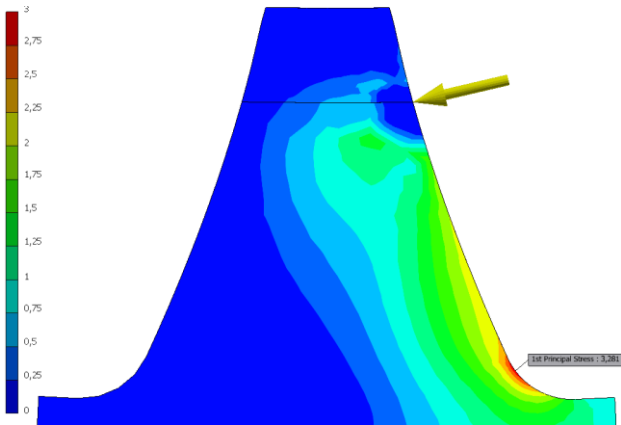
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 18 οδόντες
– $\epsilon = 1,66$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,56$ MPa



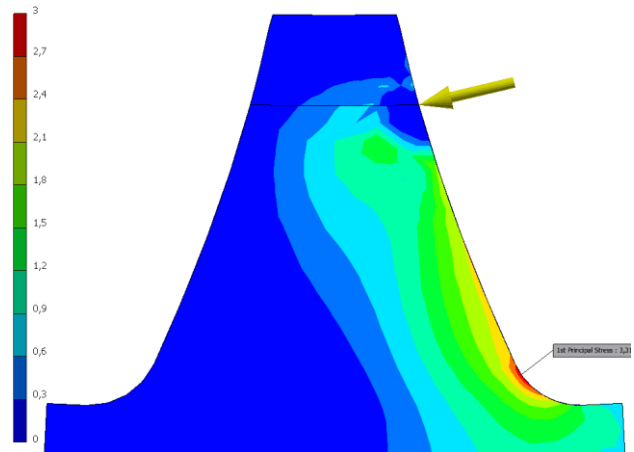
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 15 οδόντες – $\epsilon = 1,63$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,58$ MPa



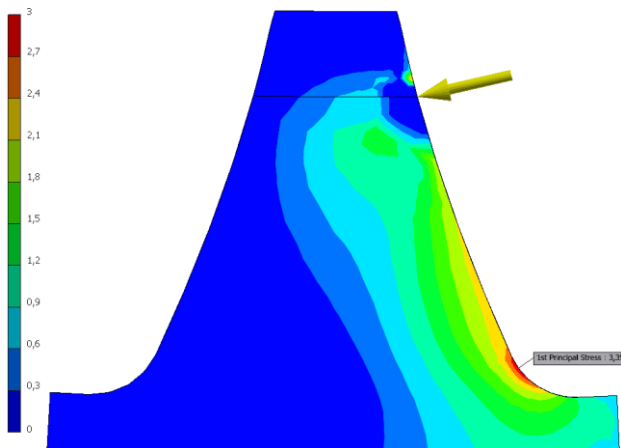
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 12 οδόντες – $\epsilon = 1,60$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,61$ MPa



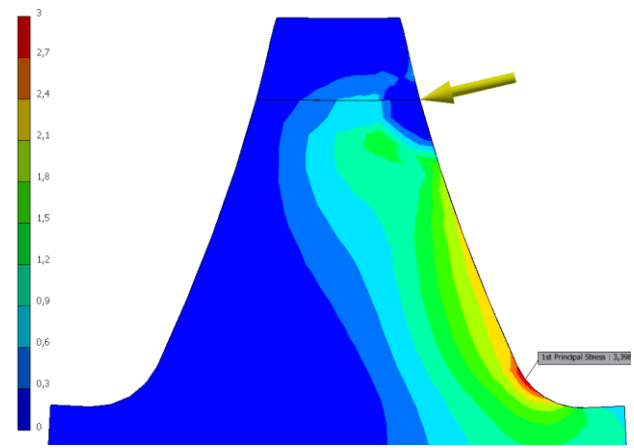
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 22 οδόντες
– $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,28$ MPa



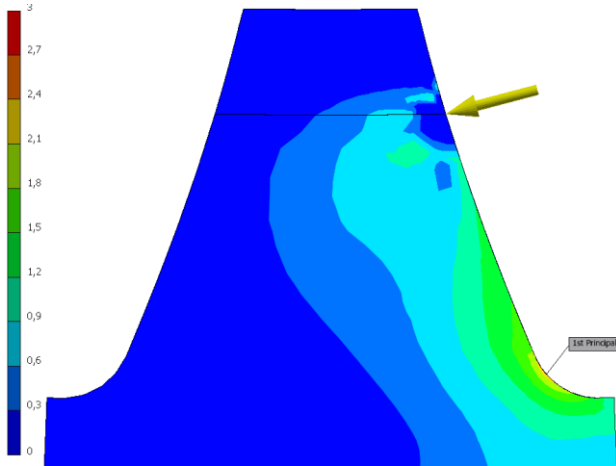
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 18 οδόντες
– $\varepsilon = 1,66$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,32$ MPa



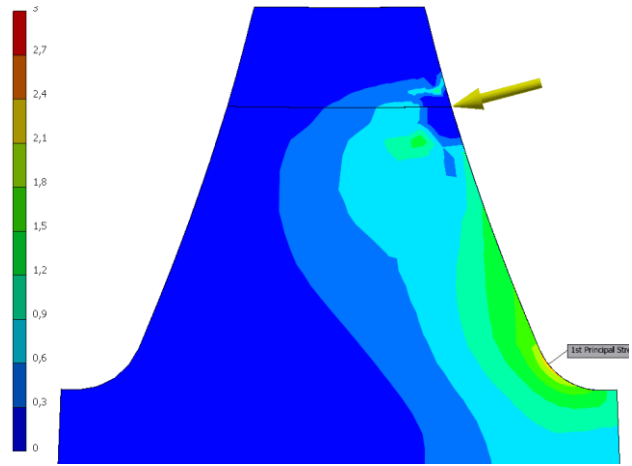
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 15 οδόντες – $\varepsilon = 1,63$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,36$ MPa



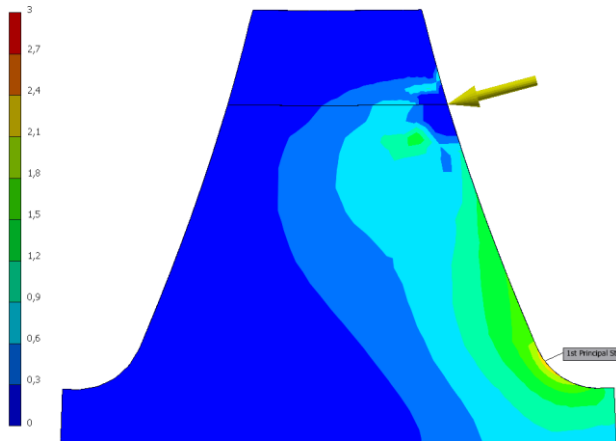
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 12 οδόντες – $\varepsilon = 1,60$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,40$ MPa



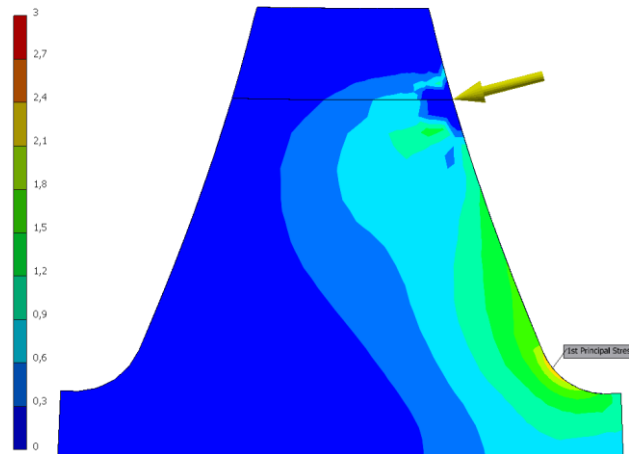
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 22 οδόντες
– $\varepsilon = 1,70$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,57$ MPa



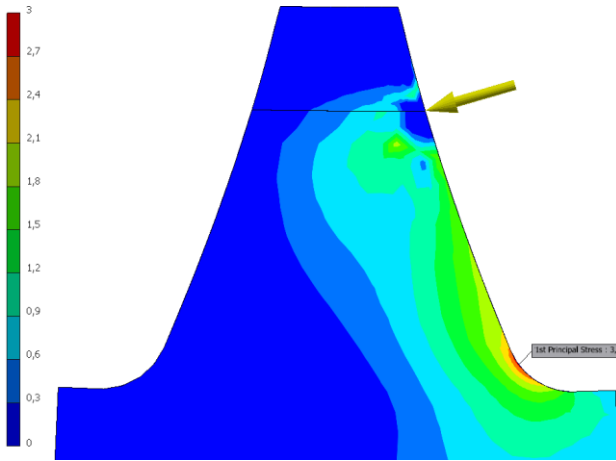
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 18 οδόντες
– $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,59$ MPa



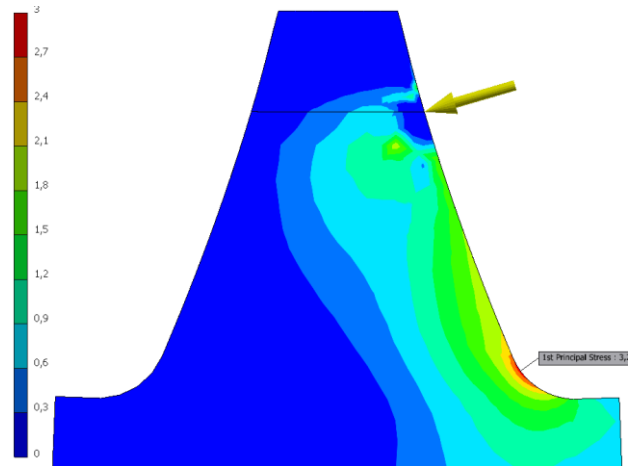
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 15 οδόντες – $\varepsilon = 1,65$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,61$ MPa



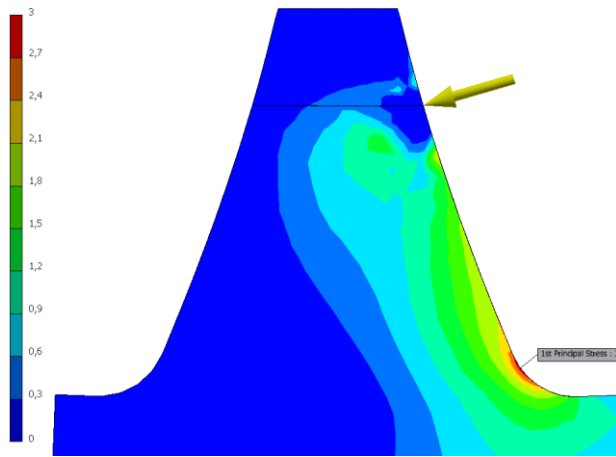
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 12 οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,66$ MPa



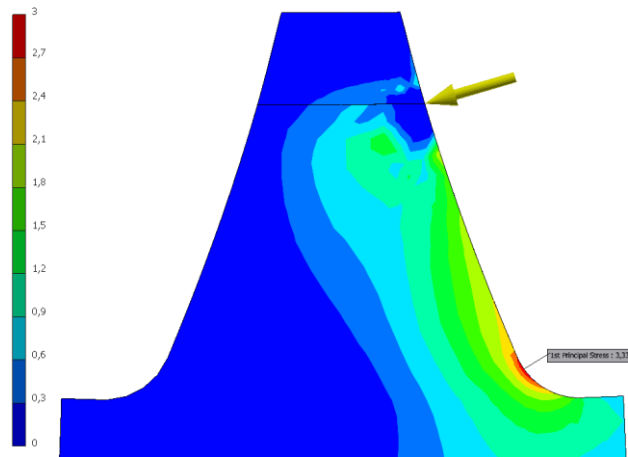
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 22 οδόντες
– $\varepsilon = 1,70$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,18$ MPa



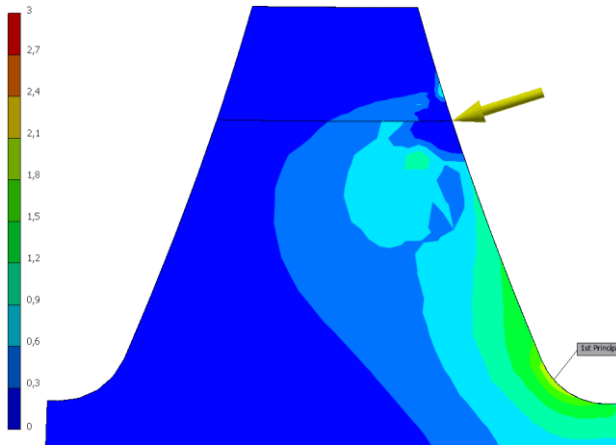
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 18 οδόντες
– $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,23$ MPa



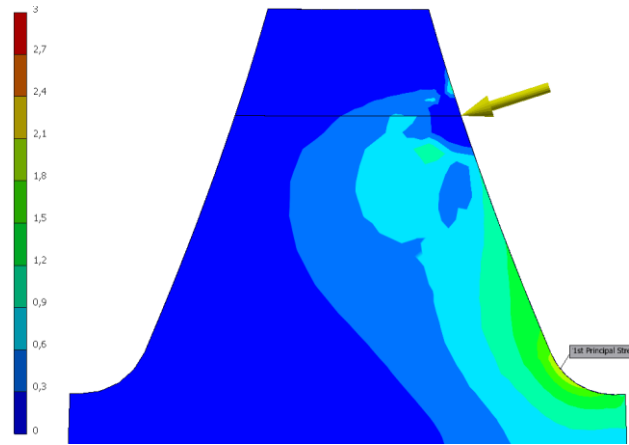
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 15 οδόντες – $\varepsilon = 1,65$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,28$ MPa



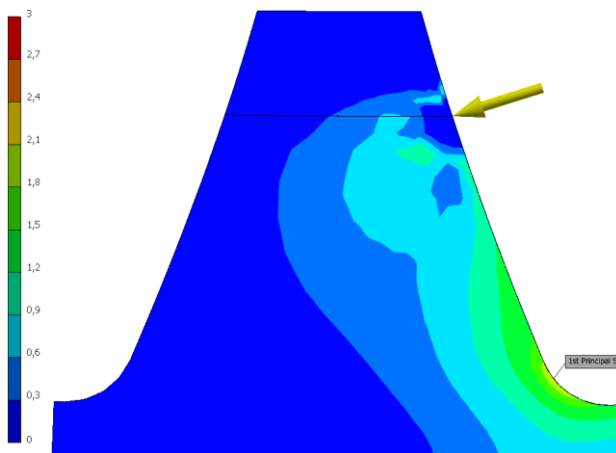
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες σε συνεργασία με πινión με 12 οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,34$ MPa



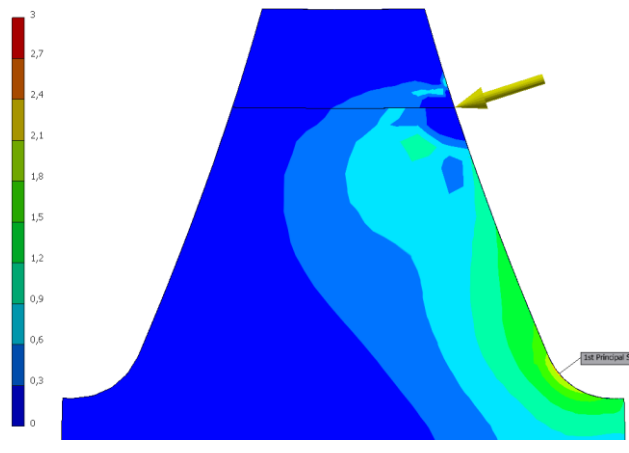
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 22 οδόντες
– $\epsilon = 1,72$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,37$ MPa



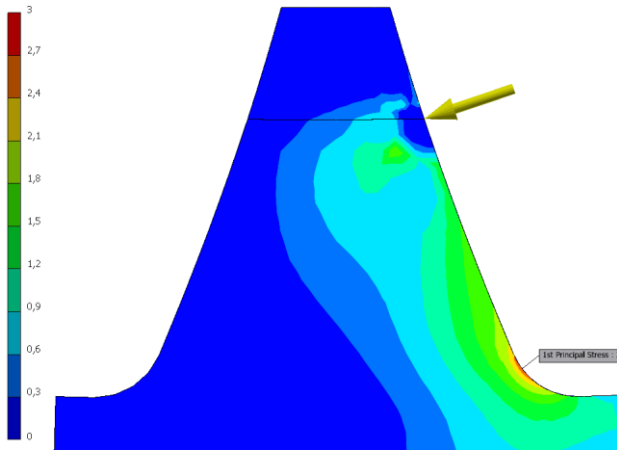
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 18 οδόντες
– $\epsilon = 1,69$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,40$ MPa



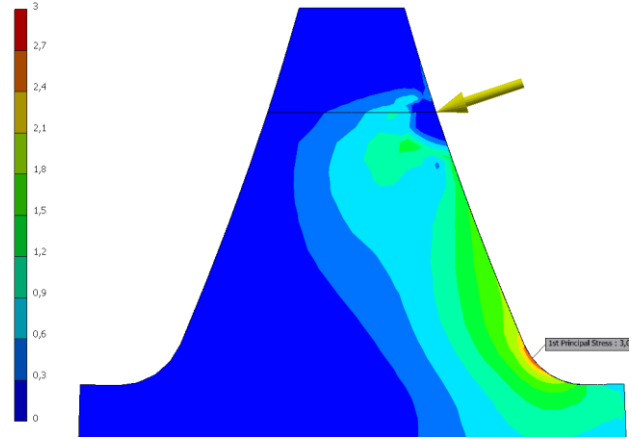
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 15 οδόντες – $\epsilon = 1,67$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,43$ MPa



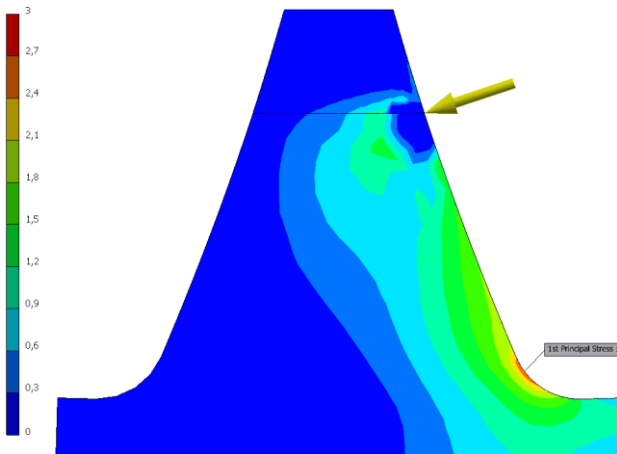
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 12 οδόντες – $\epsilon = 1,64$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,47$ MPa



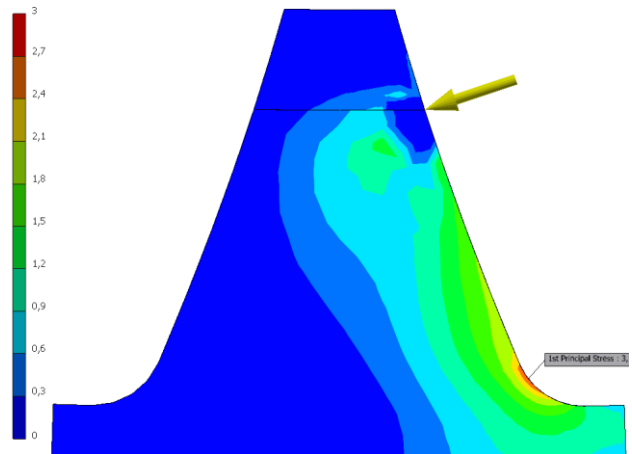
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 22 οδόντες
– $\varepsilon = 1,72$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 2,98$ MPa



Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 18 οδόντες
– $\varepsilon = 1,69$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,02$ MPa



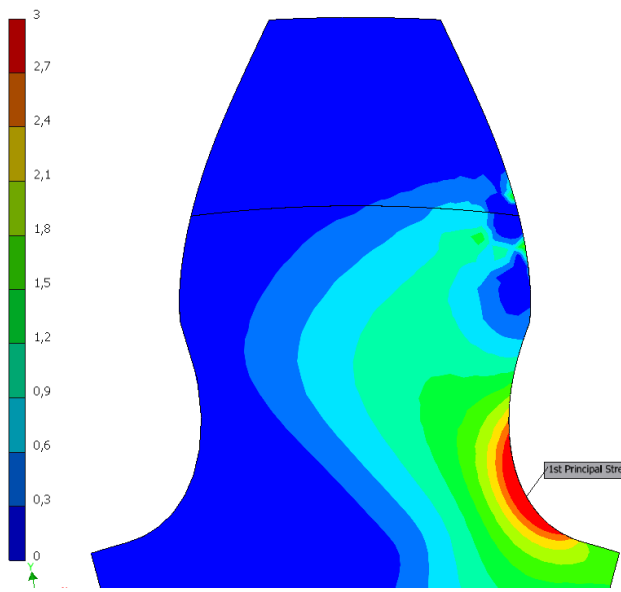
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 15 οδόντες – $\varepsilon = 1,67$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,10$ MPa



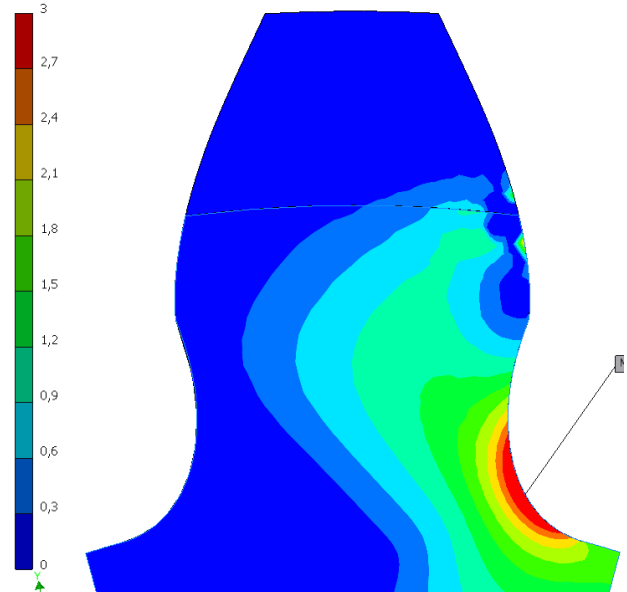
Συνεργαζόμενος τροχός εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες σε συνεργασία με πινιόν με 12 οδόντες – $\varepsilon = 1,64$ – $C_s = 0,40$ – $\sigma_{\max} = 3,11$ MPa

Παράρτημα IV

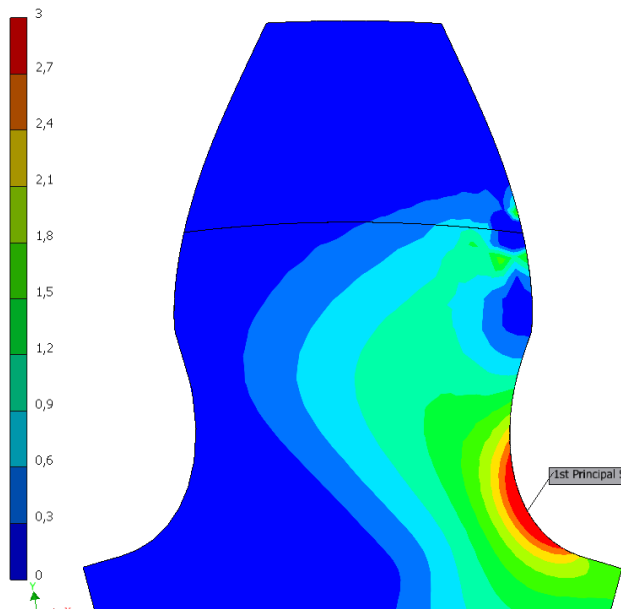
Παρατίθενται τα αποτελέσματα μέτρησης των εξωτερικών οδοντώσεων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



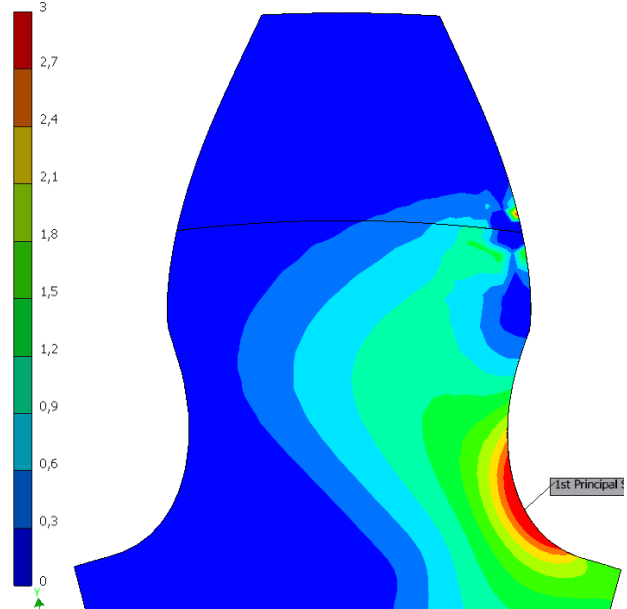
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\varepsilon = 1,59$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 4,24$ MPa



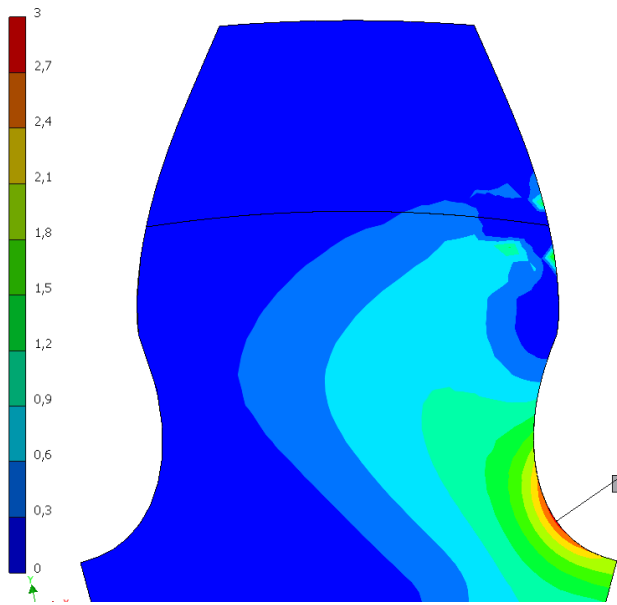
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\varepsilon = 1,60$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 4,19$ MPa



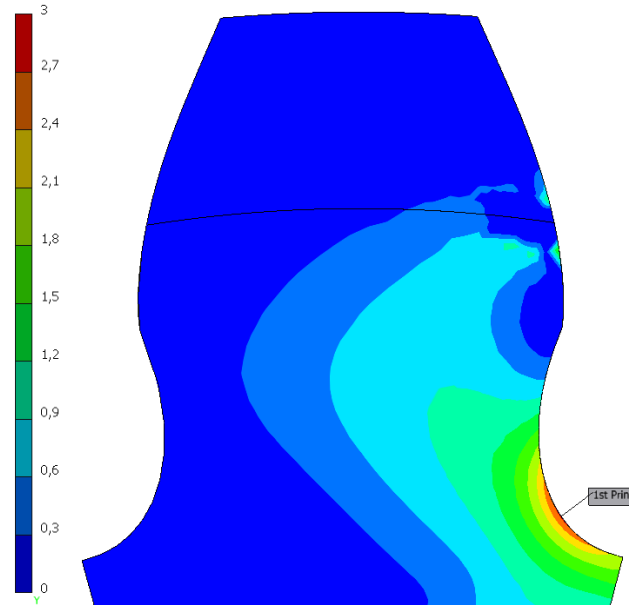
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 4,11$ MPa



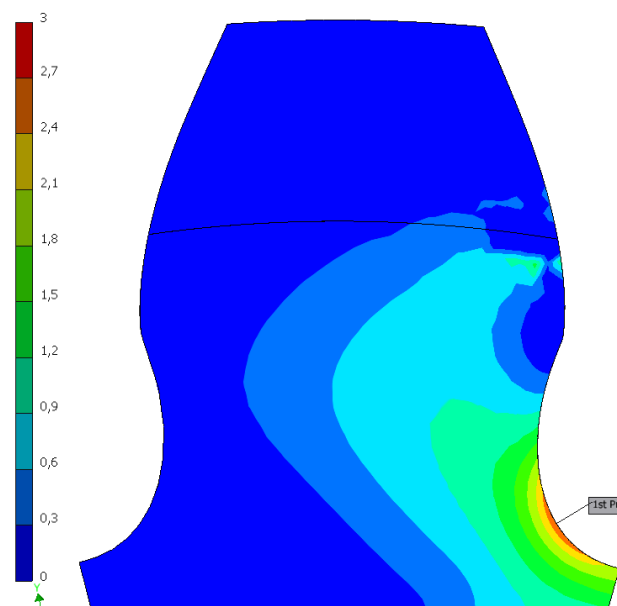
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\varepsilon = 1,64$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 4,06$ MPa



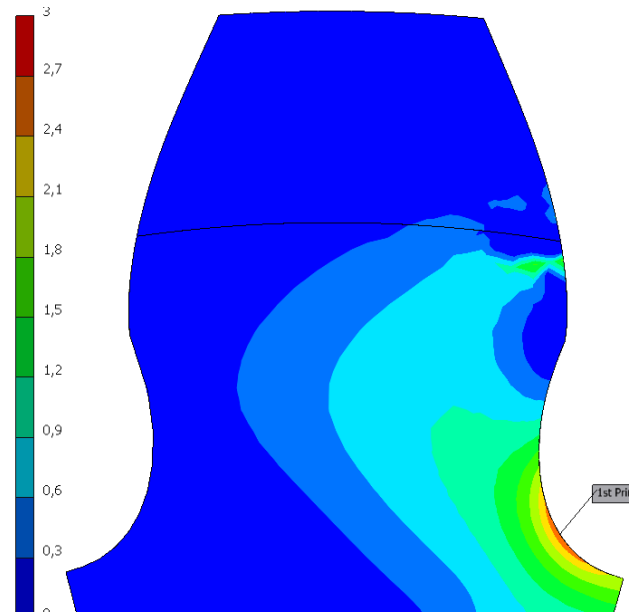
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\epsilon = 1,59$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,19$ MPa



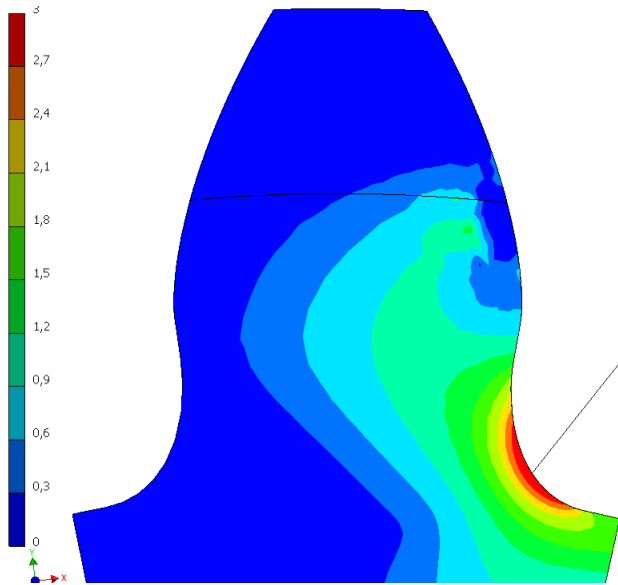
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\epsilon = 1,60$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,15$ MPa



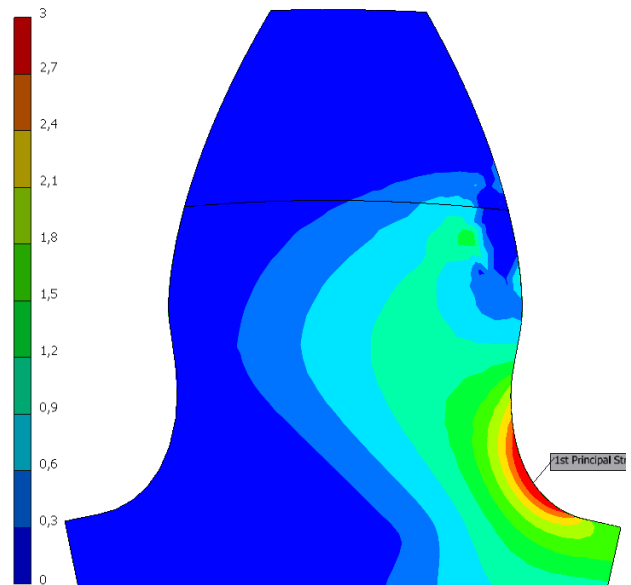
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\epsilon = 1,62$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,10$ MPa



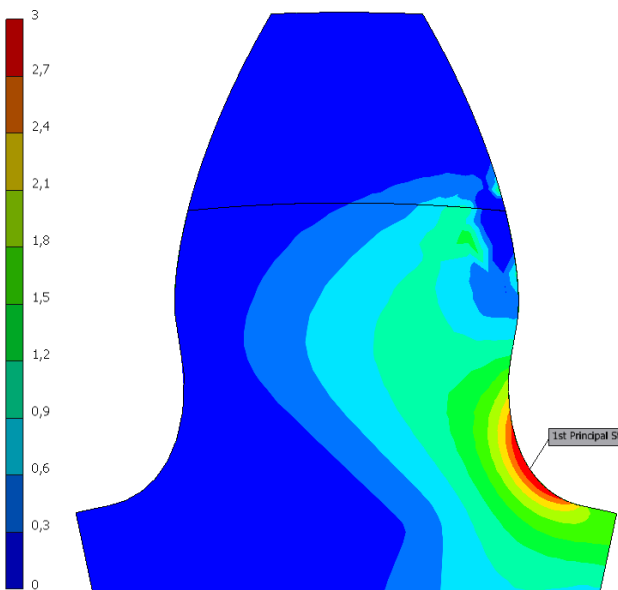
Πινιόν με 12 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\epsilon = 1,64$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,07$ MPa



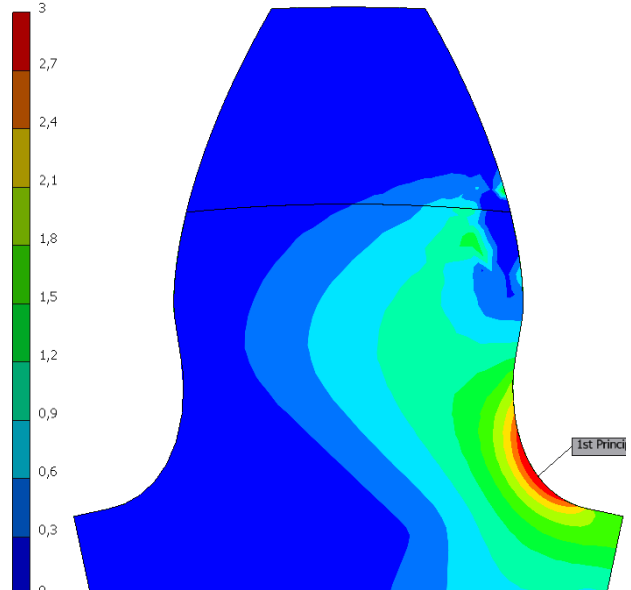
Πινιόν με 15 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,84$ MPa



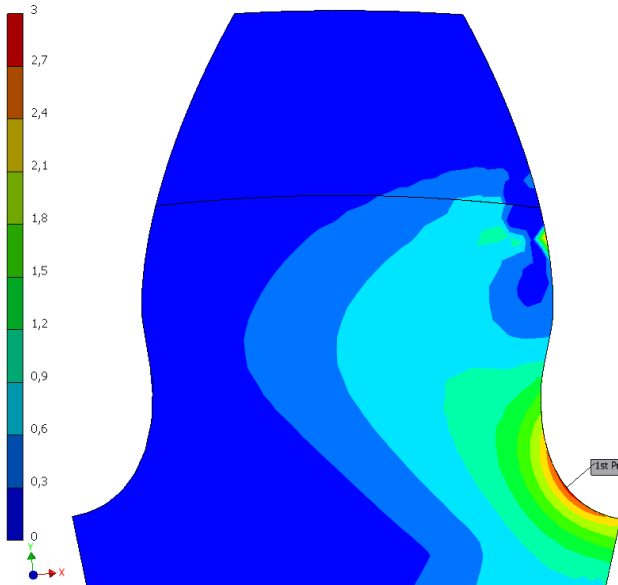
Πινιόν με 15 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\varepsilon = 1,63$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,79$ MPa



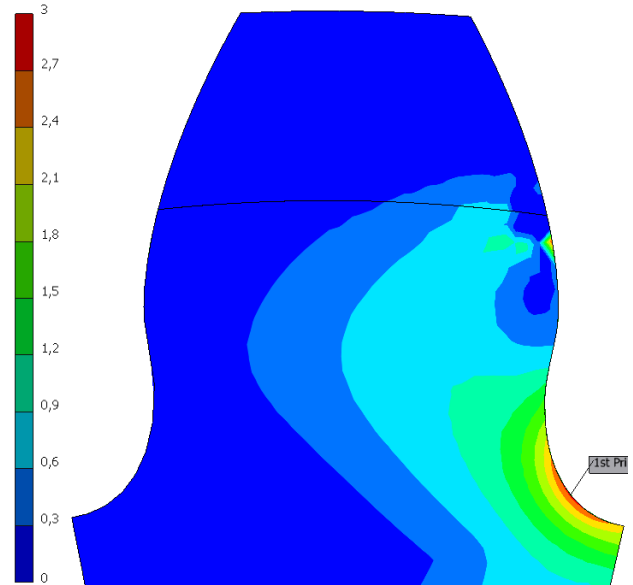
Πινιόν με 15 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\varepsilon = 1,65$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,73$ MPa



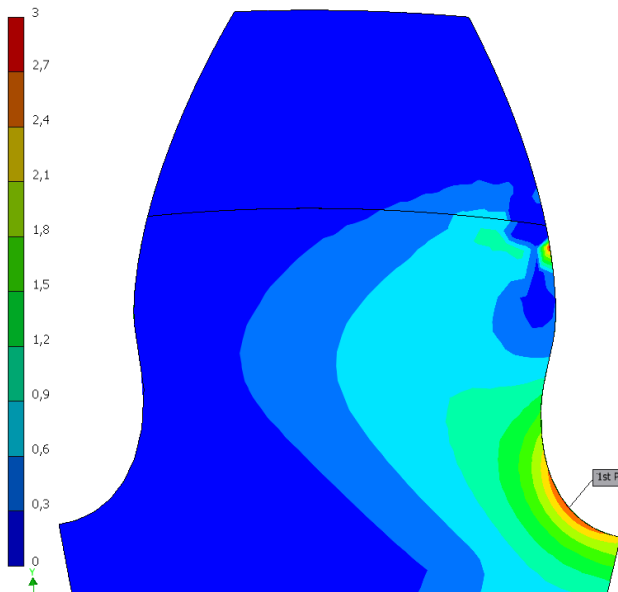
Πινιόν με 15 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\varepsilon = 1,67$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,69$ MPa



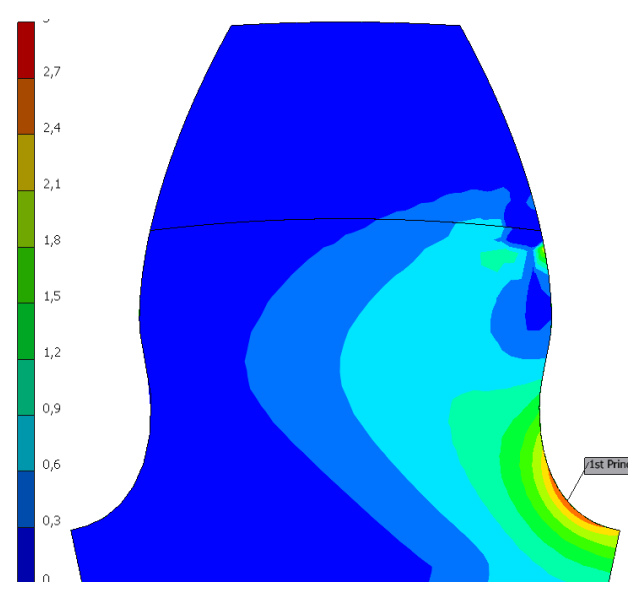
Πιόνι με 15 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50
οδόντες – $\varepsilon = 1,62$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,19$ MPa



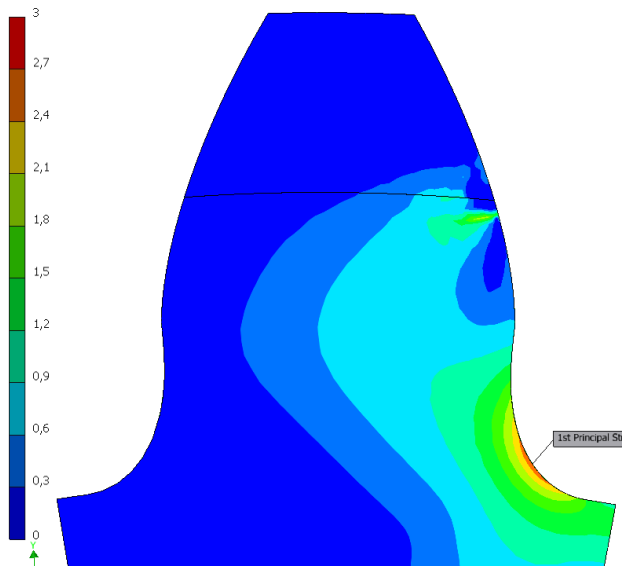
Πιόνι με 15 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60
οδόντες – $\varepsilon = 1,63$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,17$ MPa



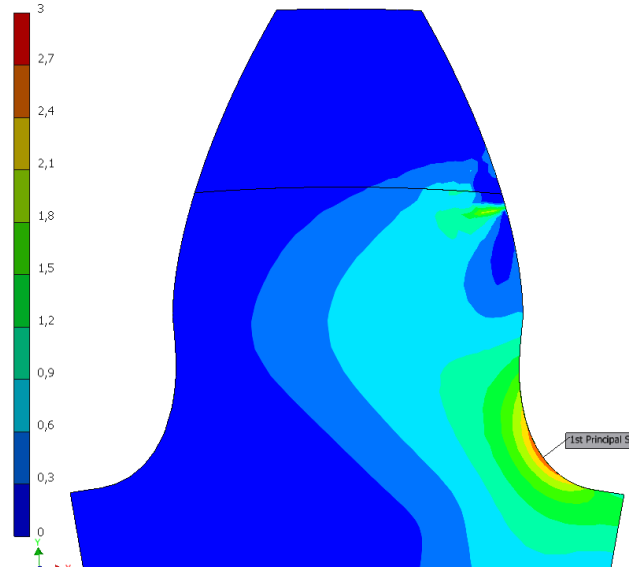
Πιόνι με 15 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80
οδόντες – $\varepsilon = 1,65$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,13$ MPa



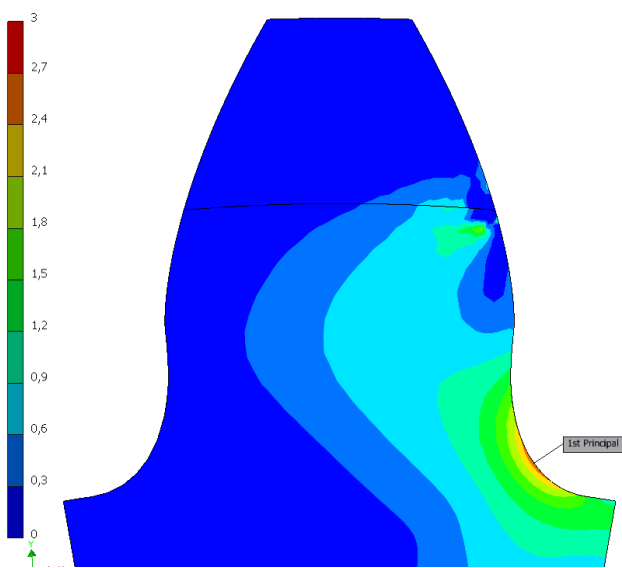
Πιόνι με 15 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με
100 οδόντες – $\varepsilon = 1,67$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 3,11$ MPa



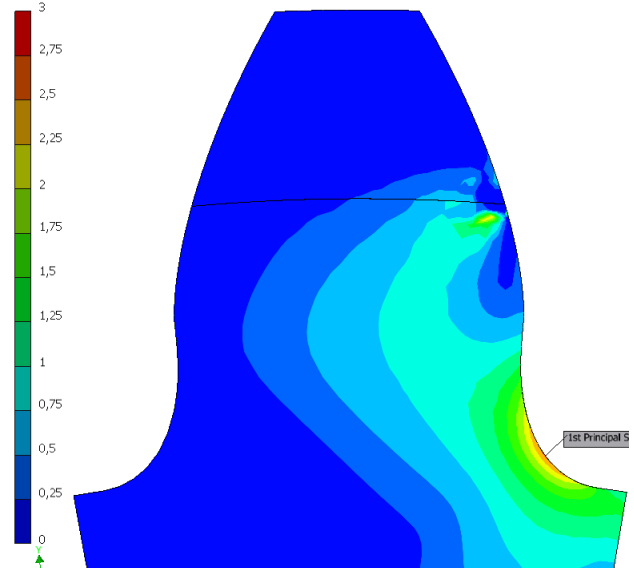
Πινιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\varepsilon = 1,64$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,06$ MPa



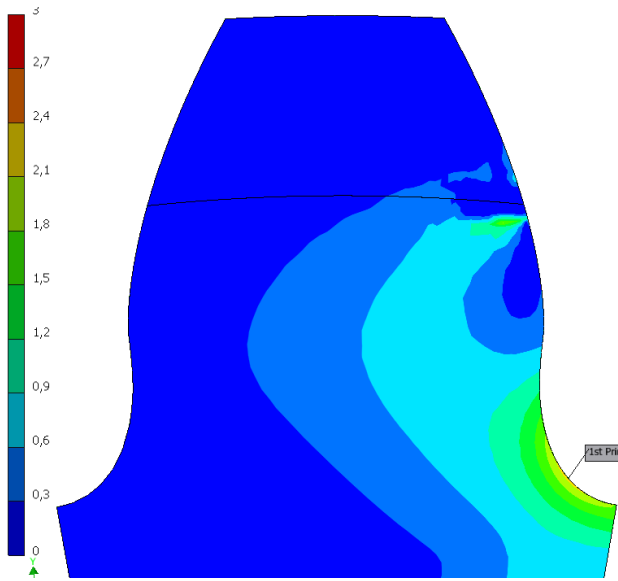
Πινιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\varepsilon = 1,66$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,05$ MPa



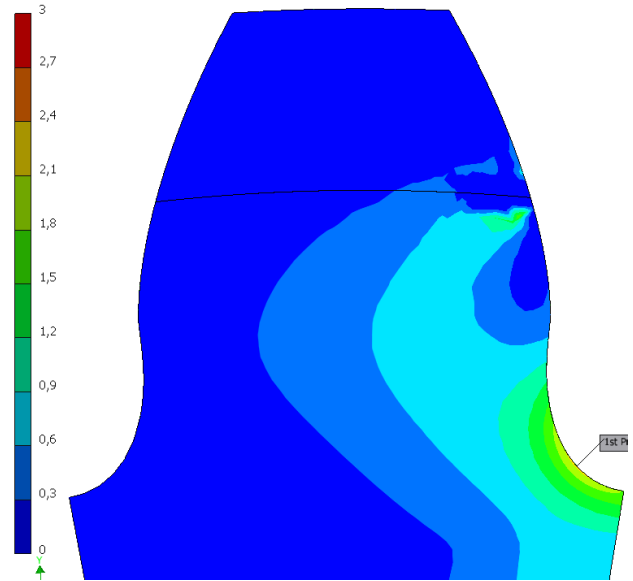
Πινιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,98$ MPa



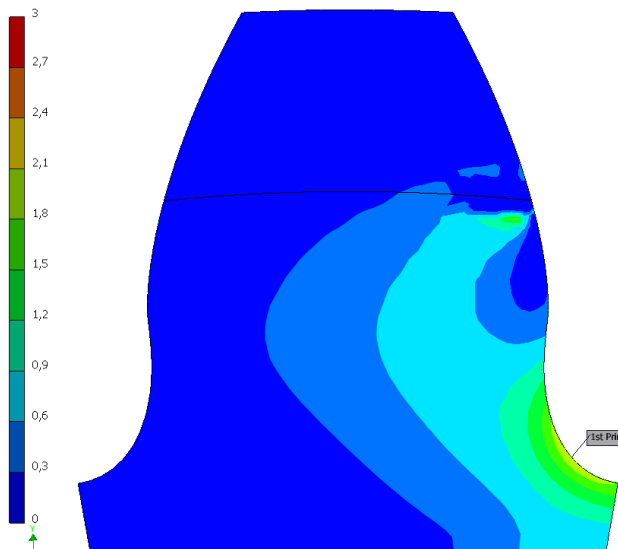
Πινιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\varepsilon = 1,69$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 2,95$ MPa



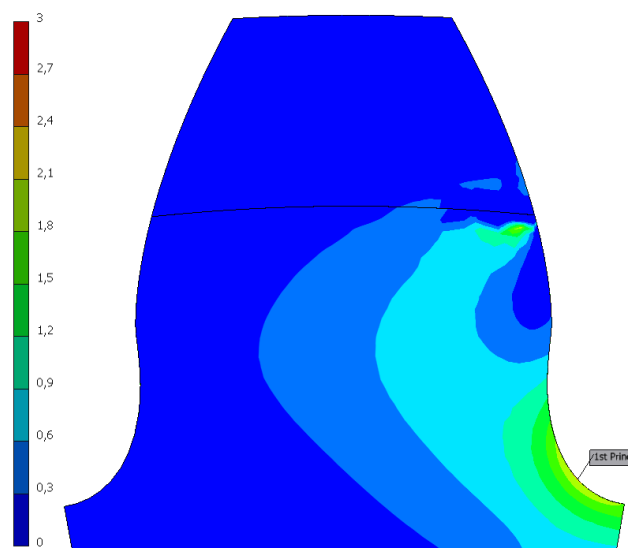
Πιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\varepsilon = 1,64$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 2,53$ MPa



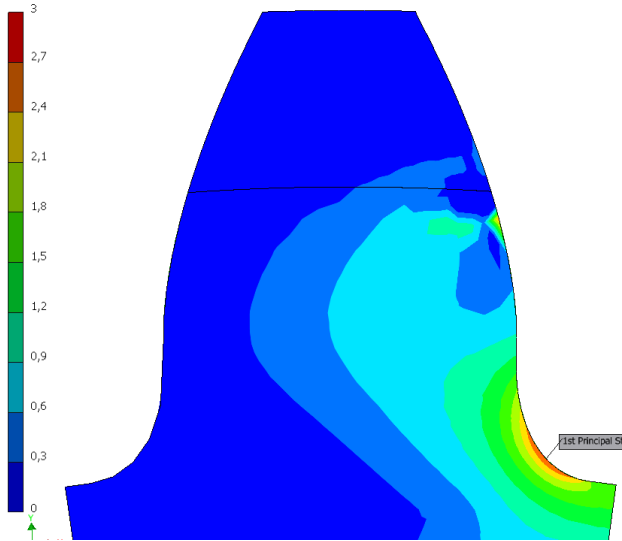
Πιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\varepsilon = 1,66$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 2,51$ MPa



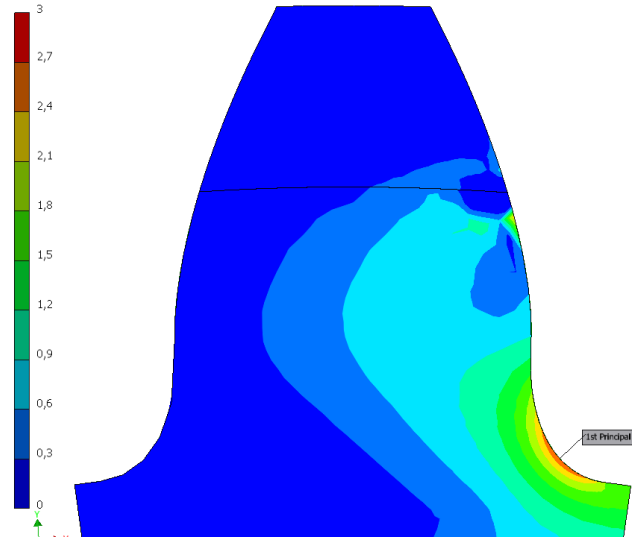
Πιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 2,48$ MPa



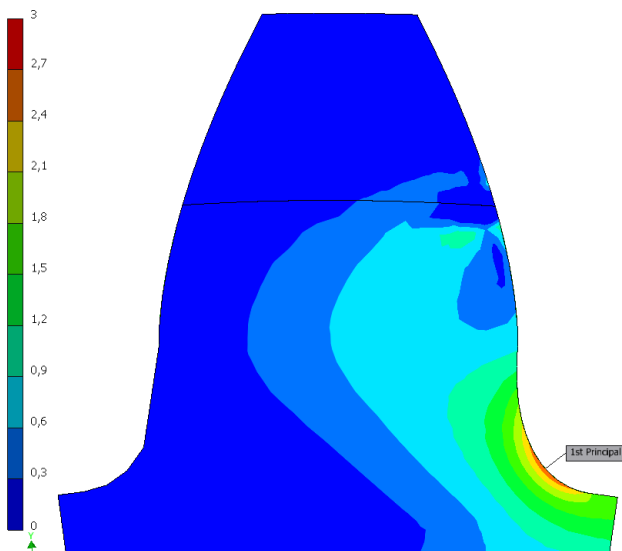
Πιόν με 18 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\varepsilon = 1,69$ – $C_s = 0,60$ – $\sigma_{\max} = 2,46$ MPa



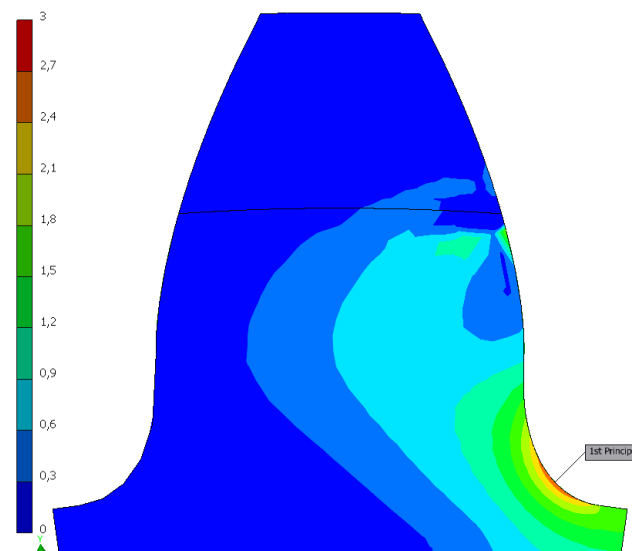
Πιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50 οδόντες – $\varepsilon = 1,67$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,17$ MPa



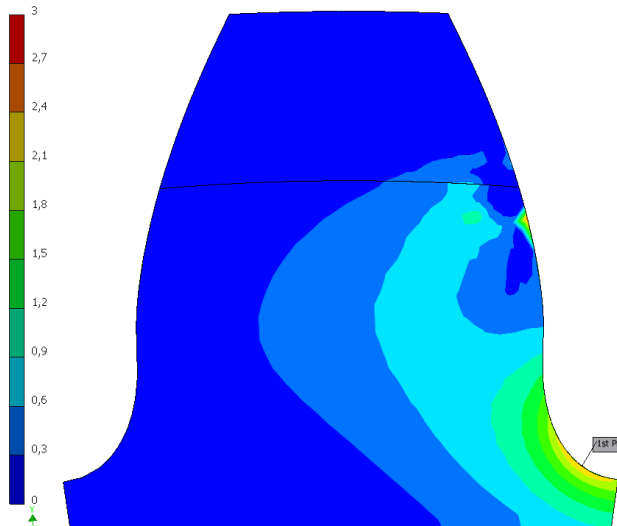
Πιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60 οδόντες – $\varepsilon = 1,68$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,13$ MPa



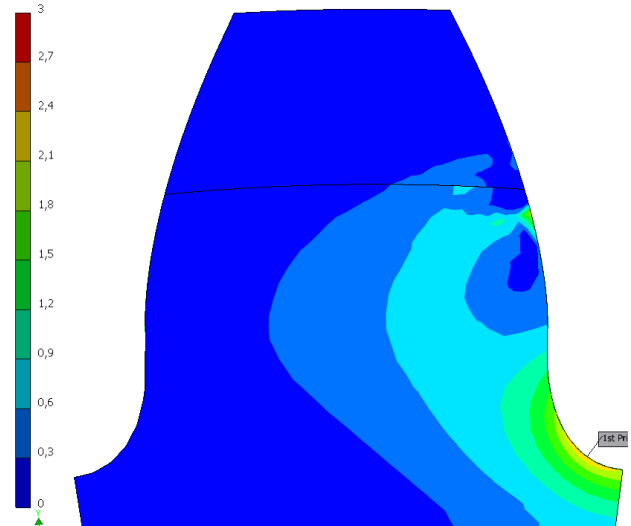
Πιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80 οδόντες – $\varepsilon = 1,70$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,09$ MPa



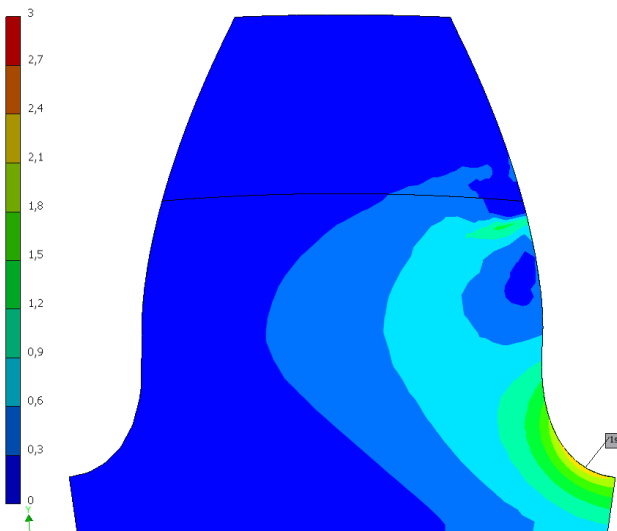
Πιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 100 οδόντες – $\varepsilon = 1,72$ – $C_s = 0,50$ – $\sigma_{\max} = 3,07$ MPa



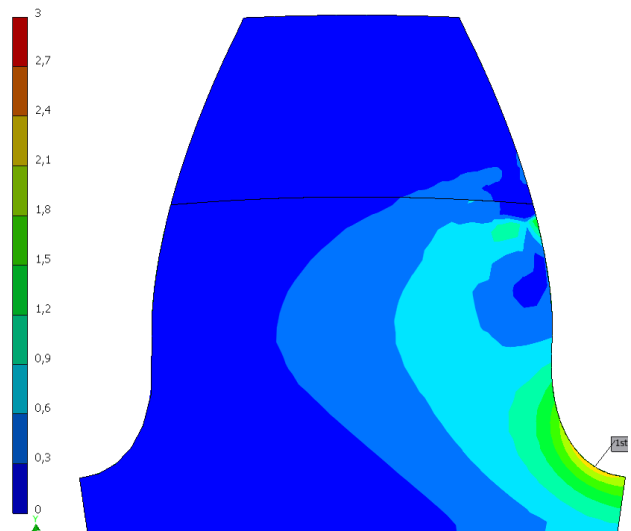
Πινιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 50
οδόντες – $\varepsilon=1,67$ – $C_s=0,60$ – $\sigma_{\max}=2,81$ MPa



Πινιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 60
οδόντες – $\varepsilon=1,68$ – $C_s=0,60$ – $\sigma_{\max}=2,76$ MPa



Πινιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με 80
οδόντες – $\varepsilon=1,70$ – $C_s=0,60$ – $\sigma_{\max}=2,74$ MPa

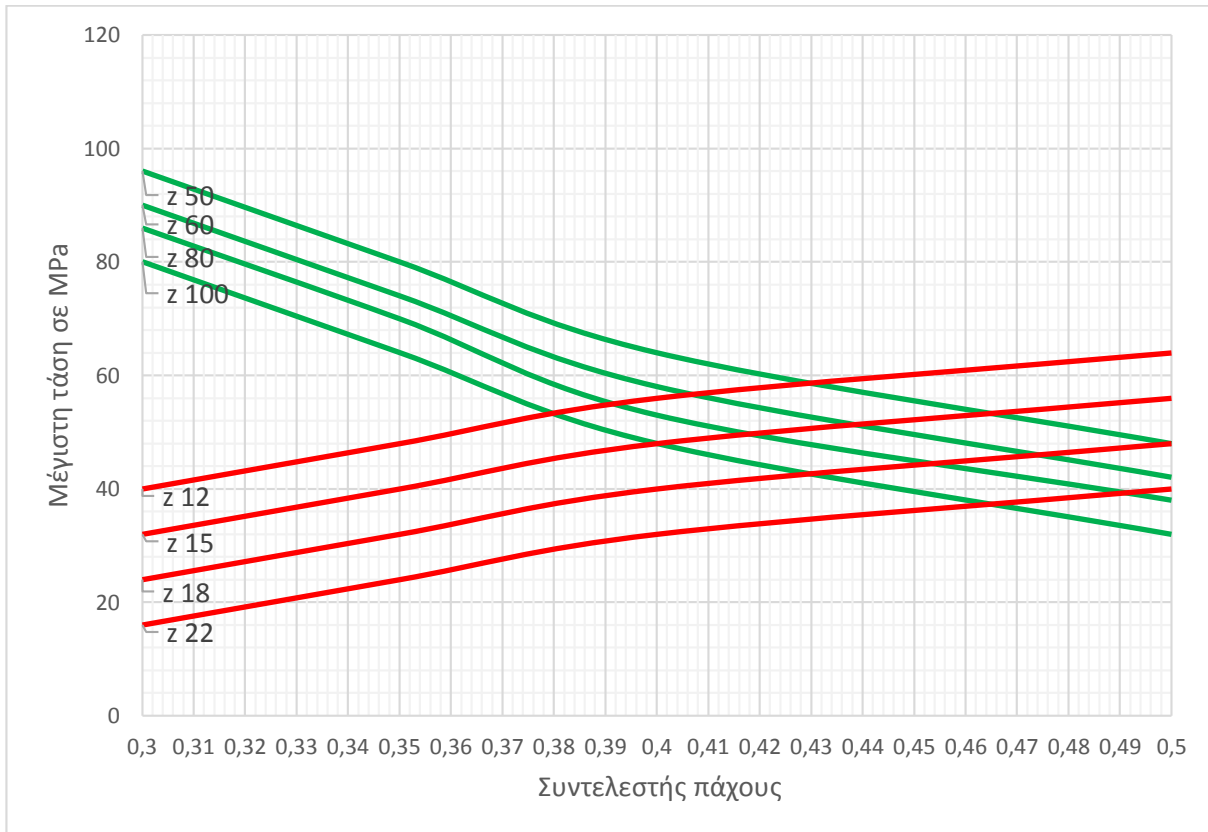


Πινιόν με 22 οδόντες σε συνεργασία με
συνεργαζόμενο τροχό εσωτερικής οδόντωσης με
100 οδόντες – $\varepsilon=1,72$ – $C_s=0,60$ – $\sigma_{\max}=2,73$ MPa

Παράρτημα V

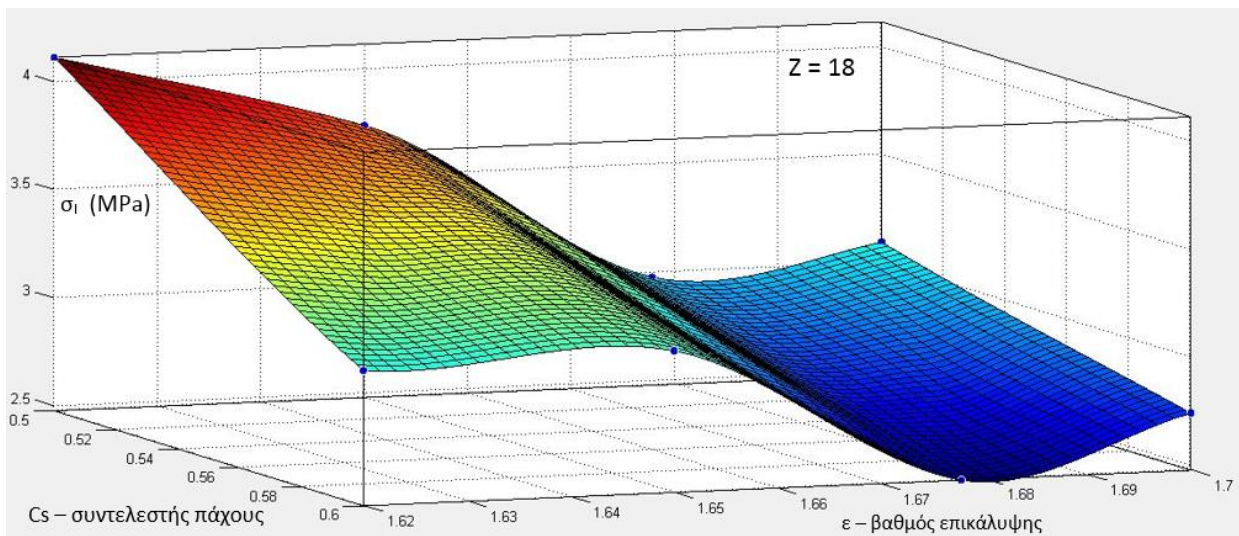
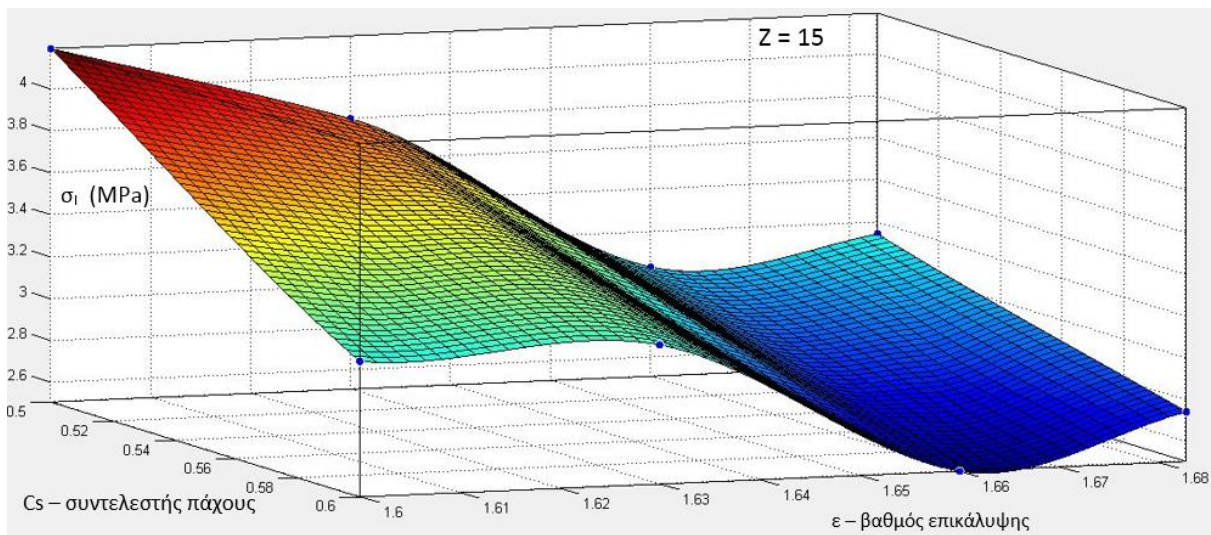
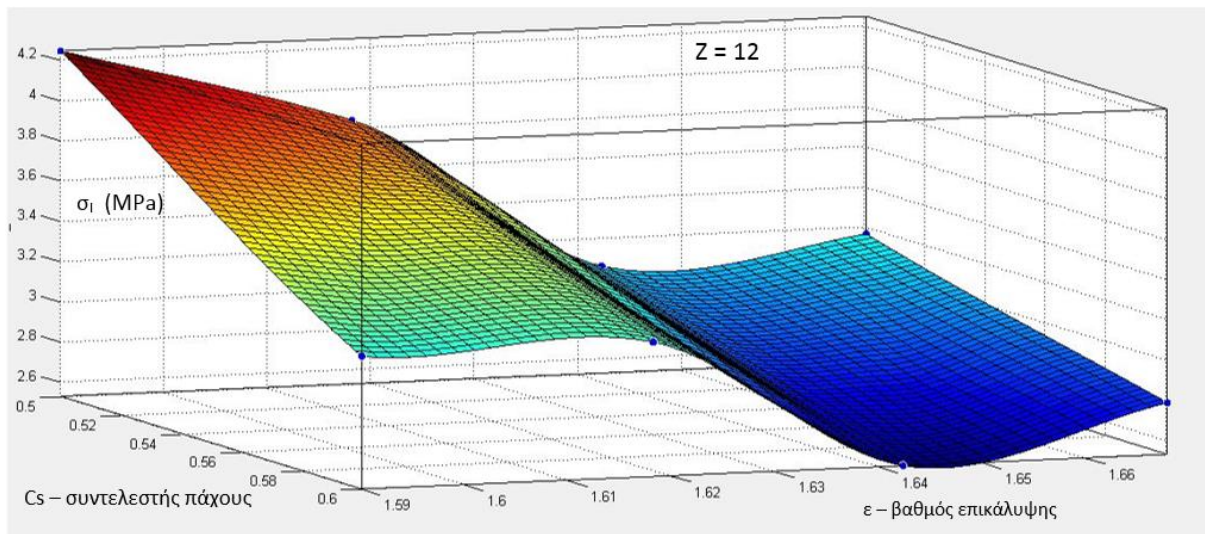
Παρατίθενται τα συγκεντρωτικά διαγράμματα των αναλύσεων.

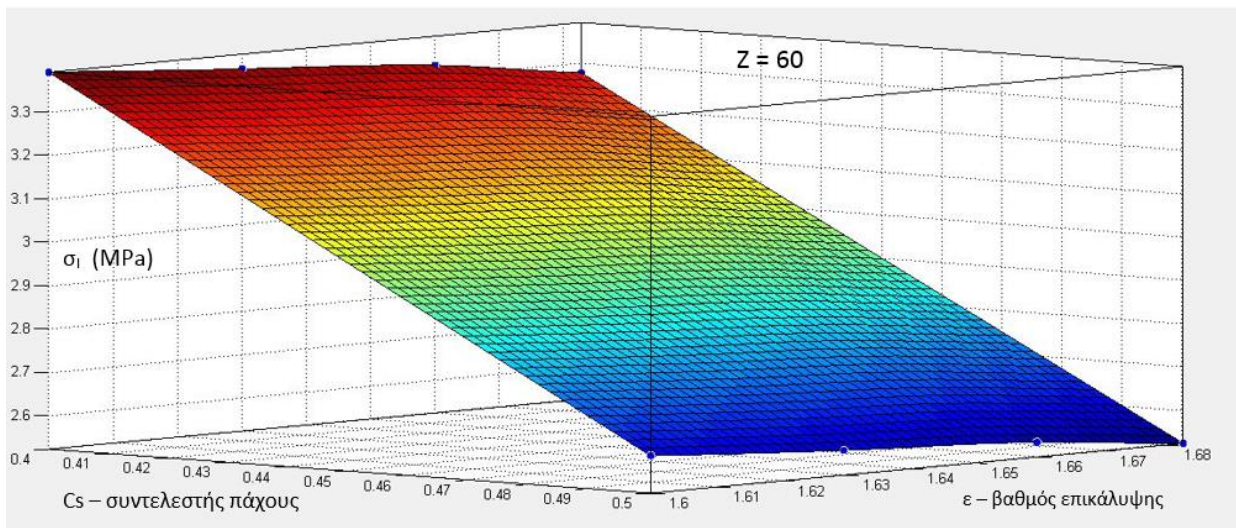
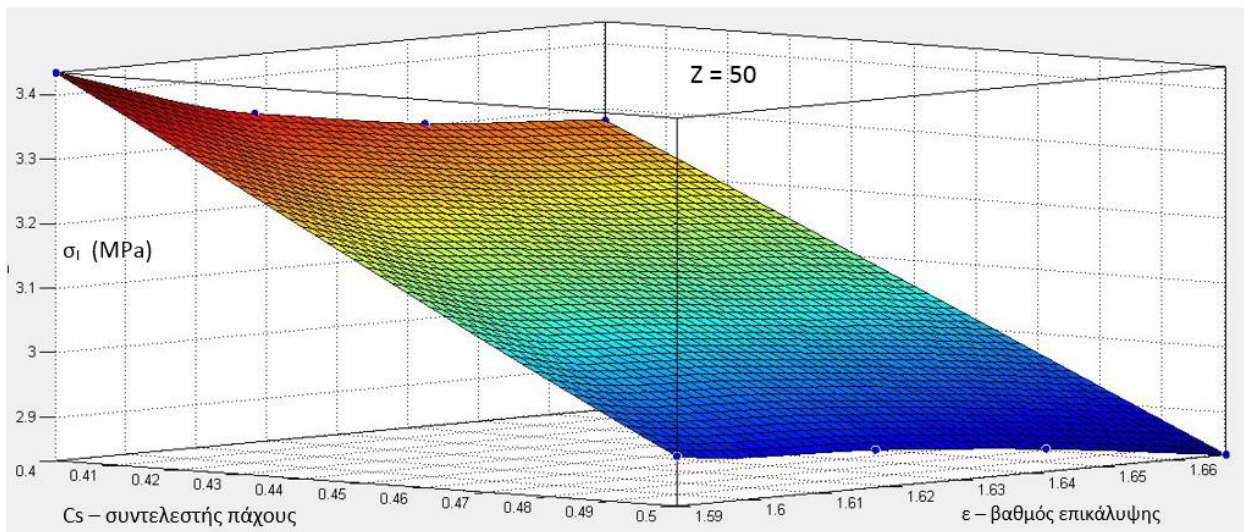
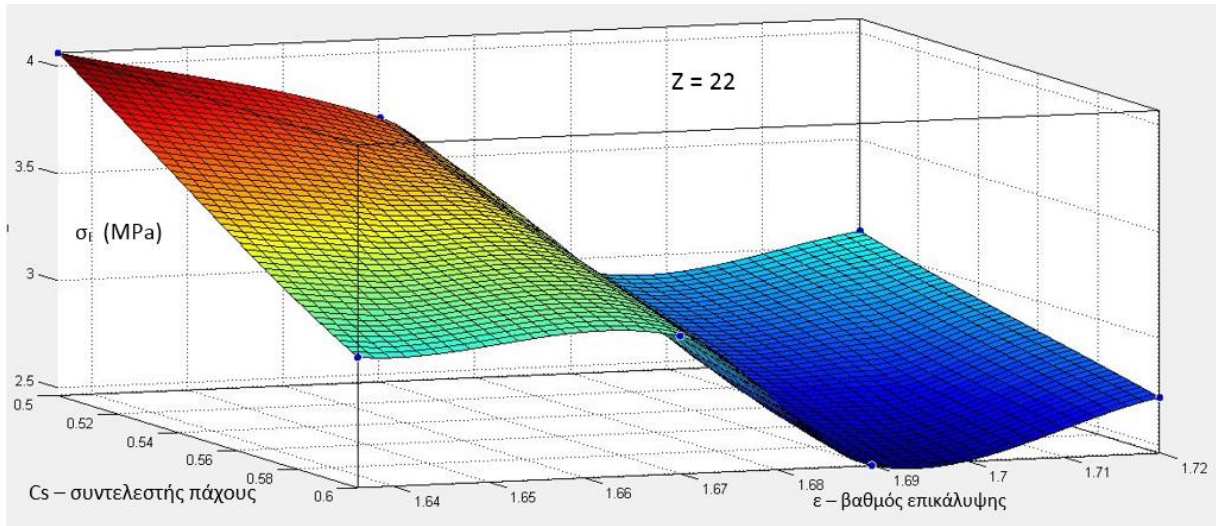
Συνοπτικό διάγραμμα των αναλύσεων με την μέθοδο της φωτοελαστικότητας:

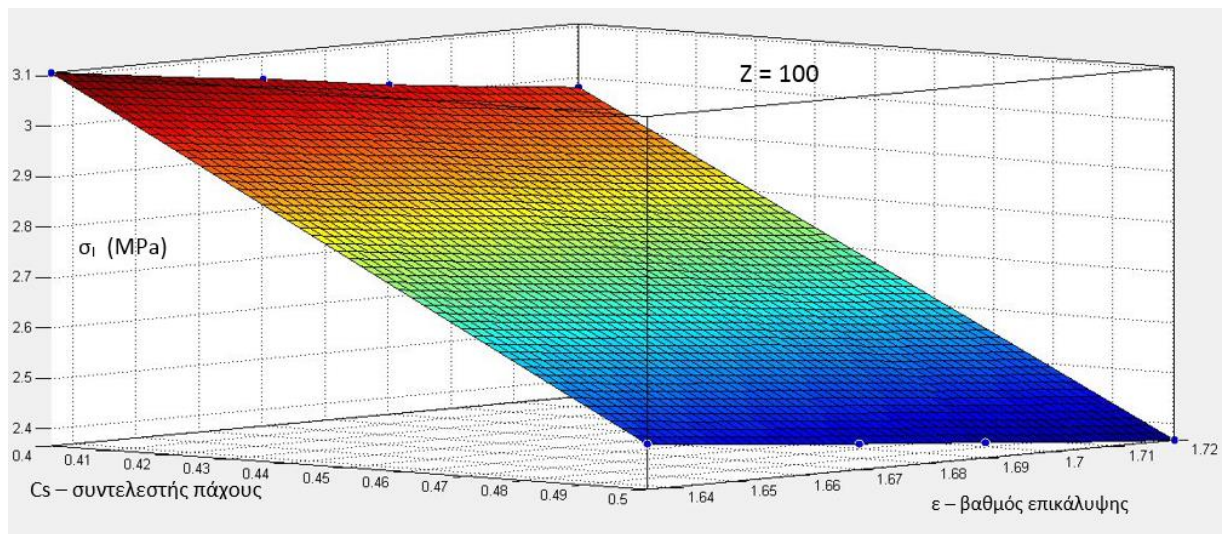
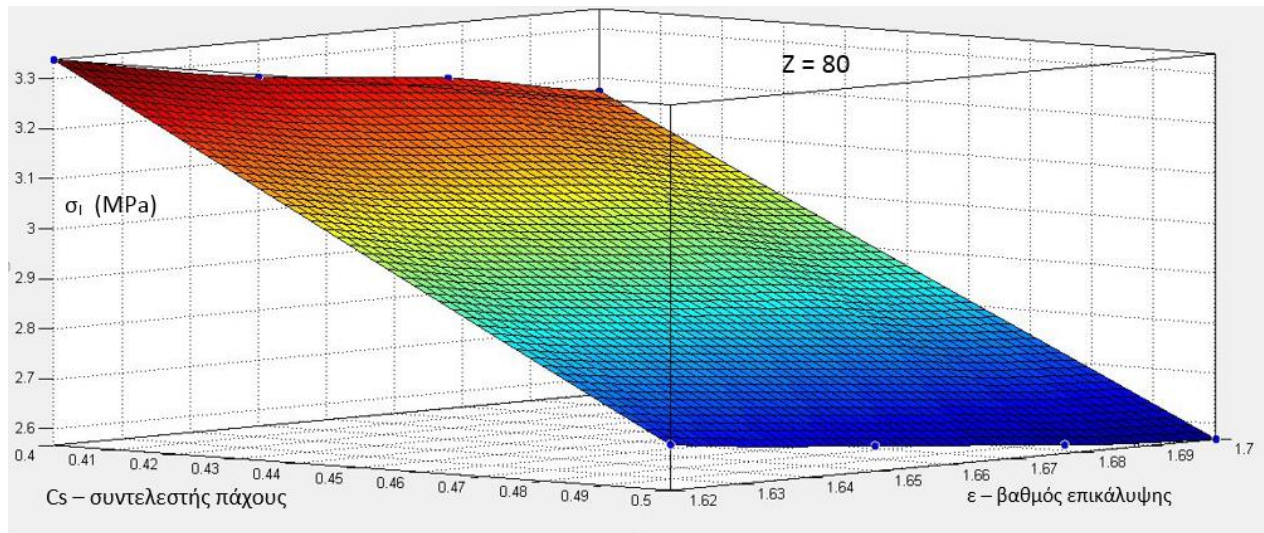


* Ο συντελεστής πάχους για τις εξωτερικές οδοντώσεις είναι $C_{s,pinion} = 1 - C_s$.

Διάγραμμα των αναλύσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων:

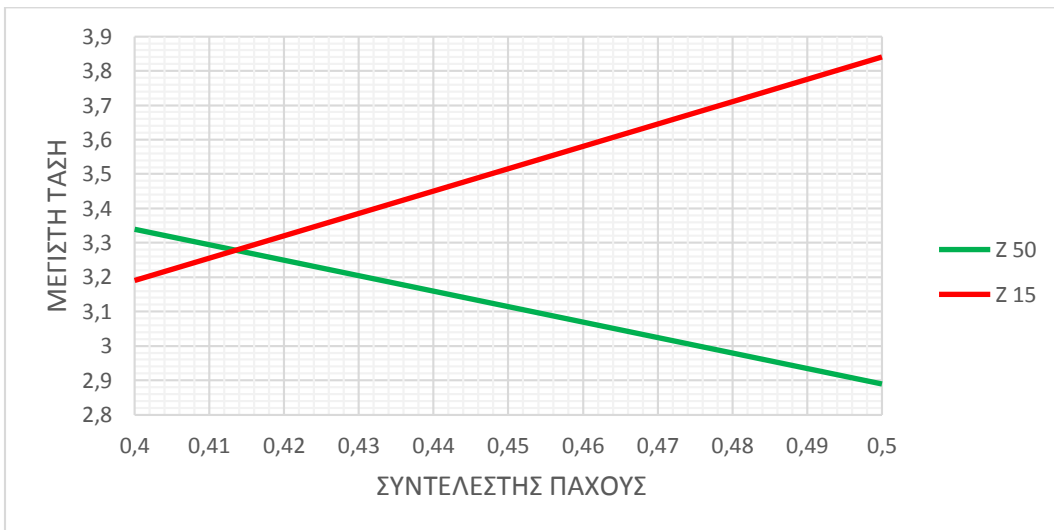
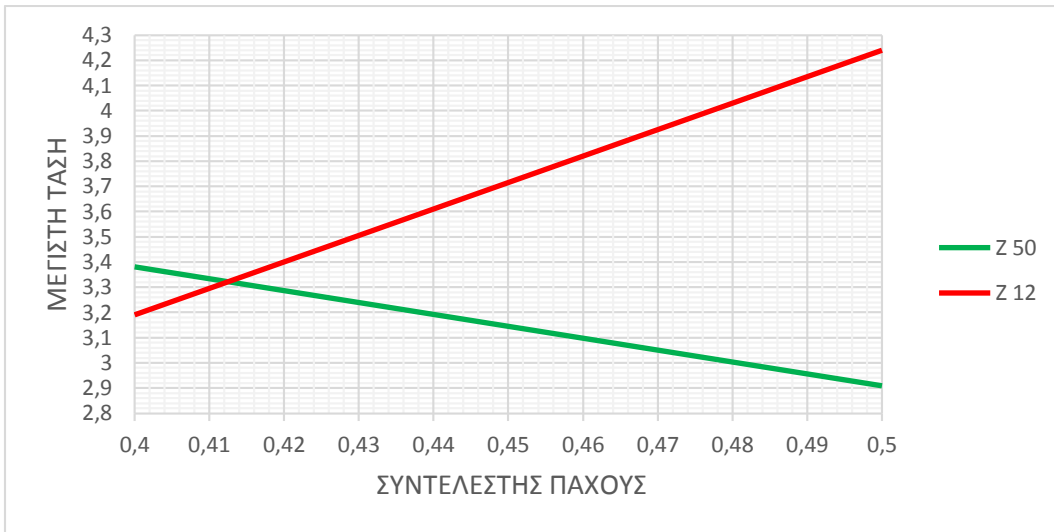


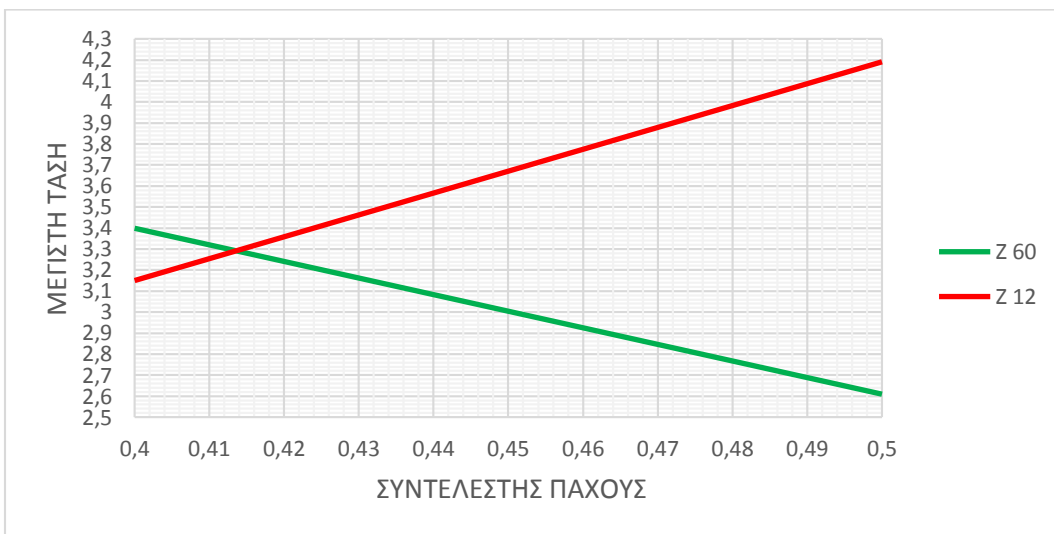
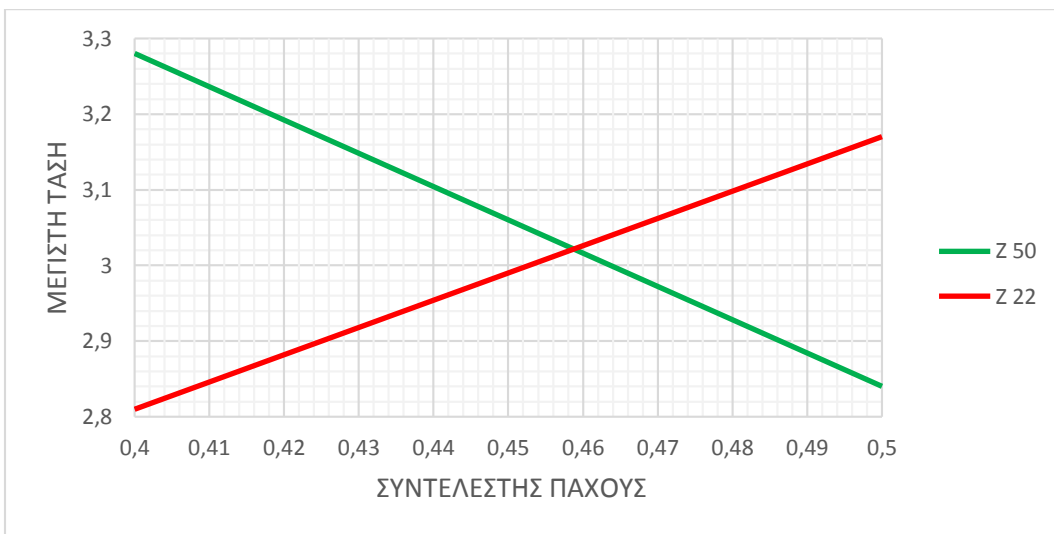
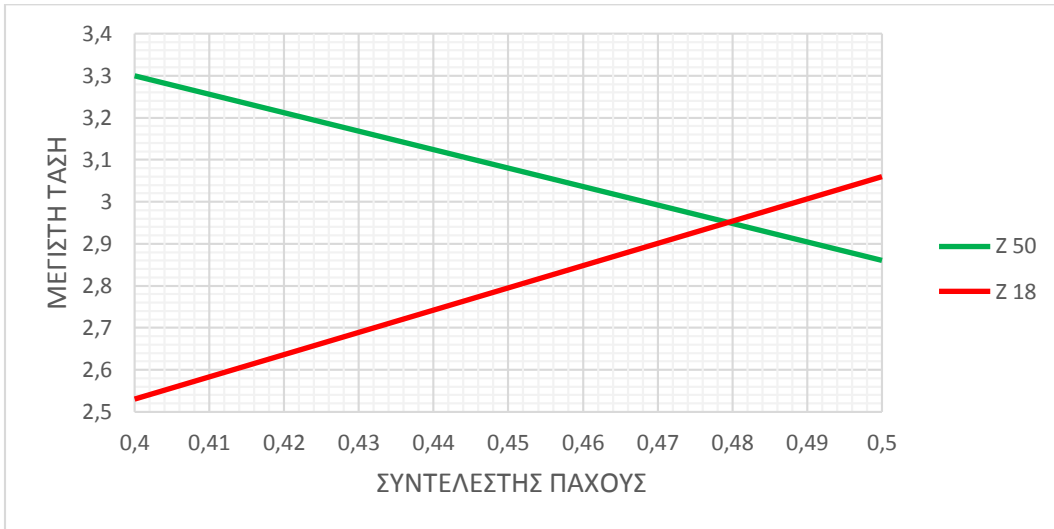


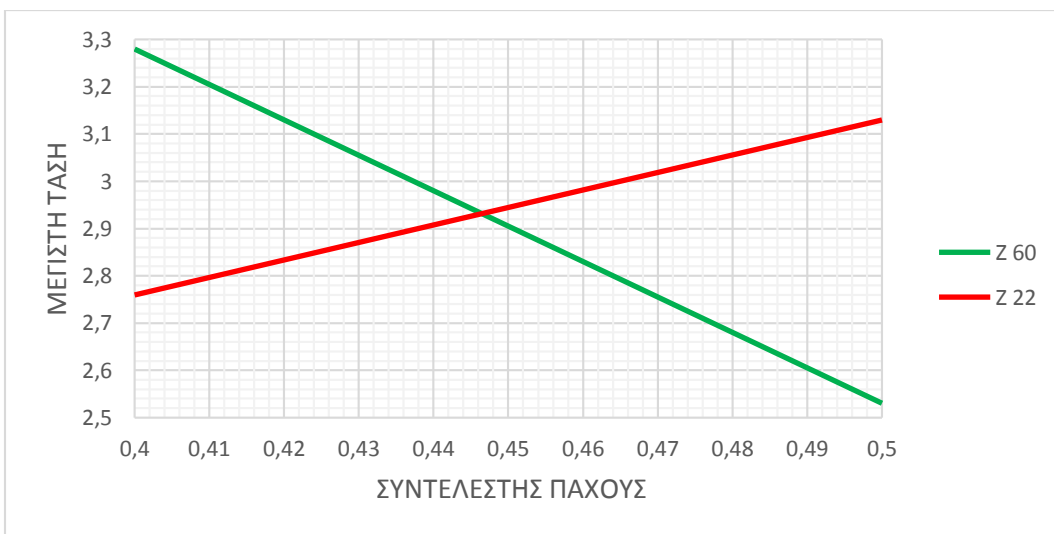
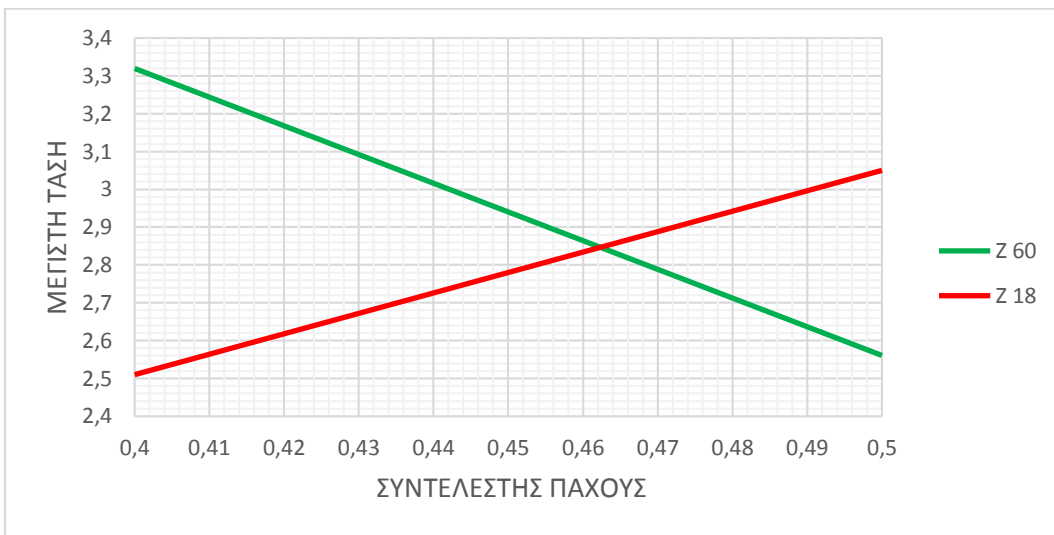
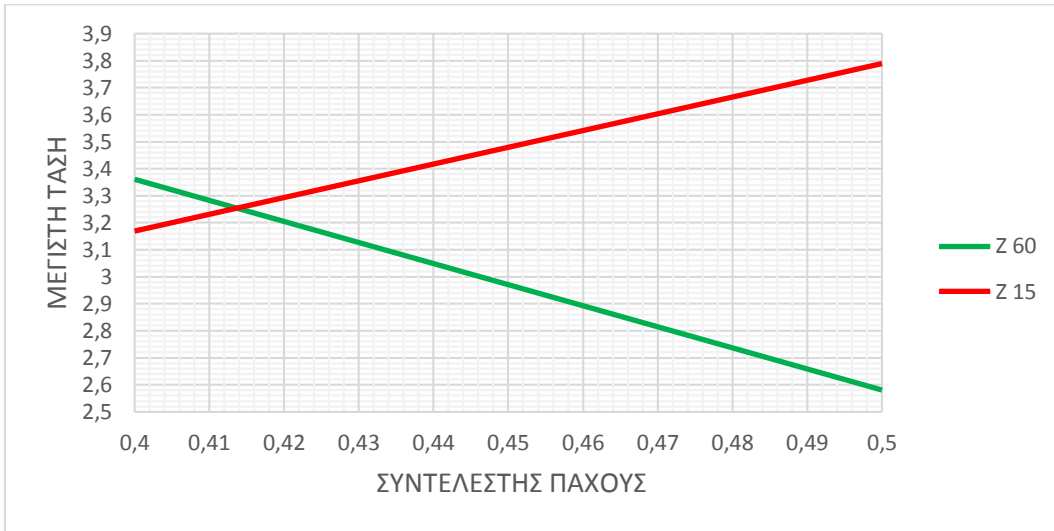


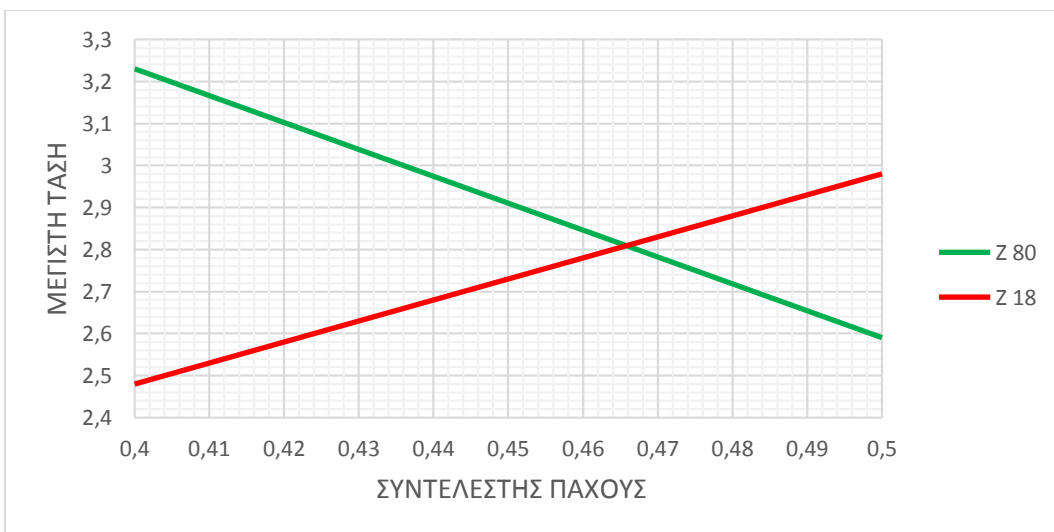
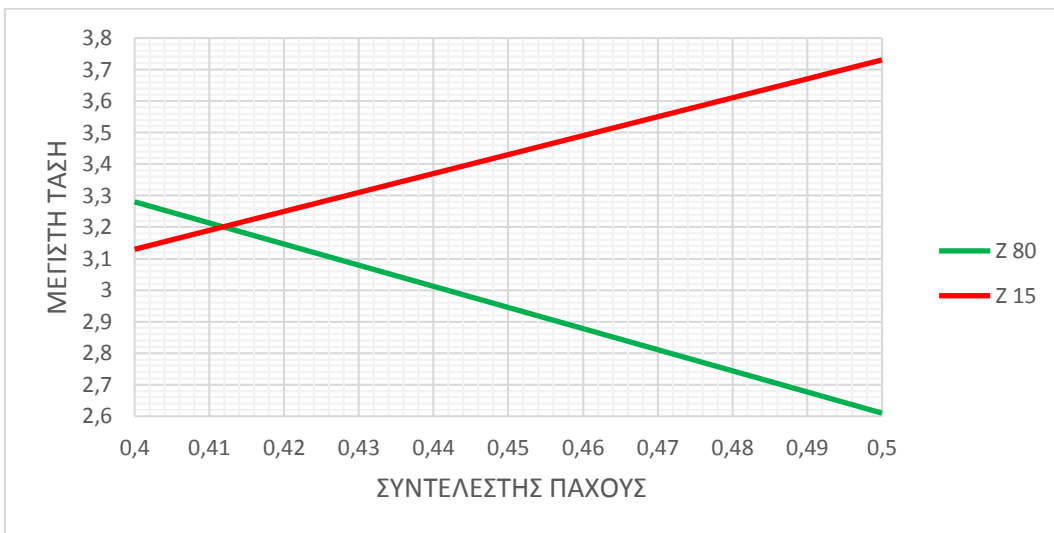
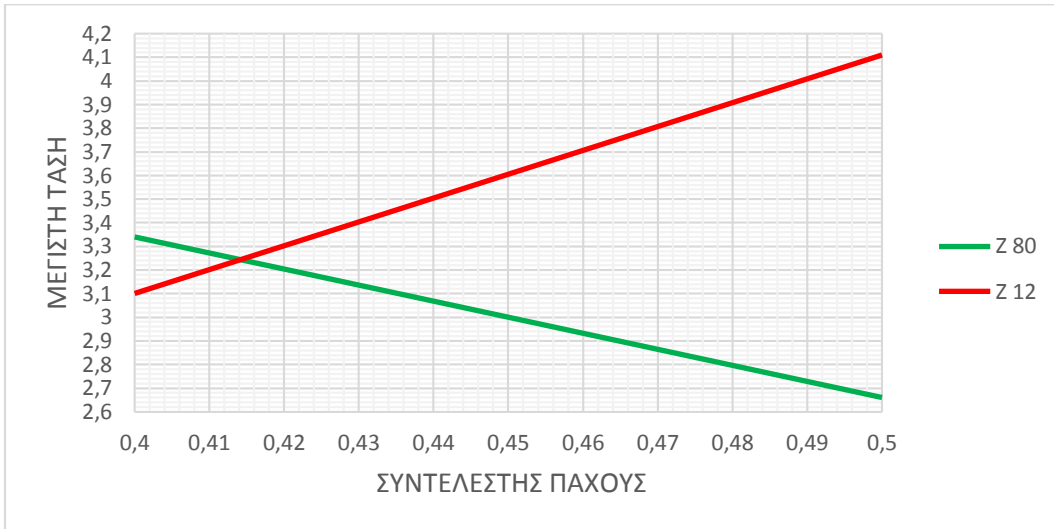
Συγκριτικά διαγράμματα των μετρήσεων των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών με διαφορετικούς συντελεστές πάχους (C_s):

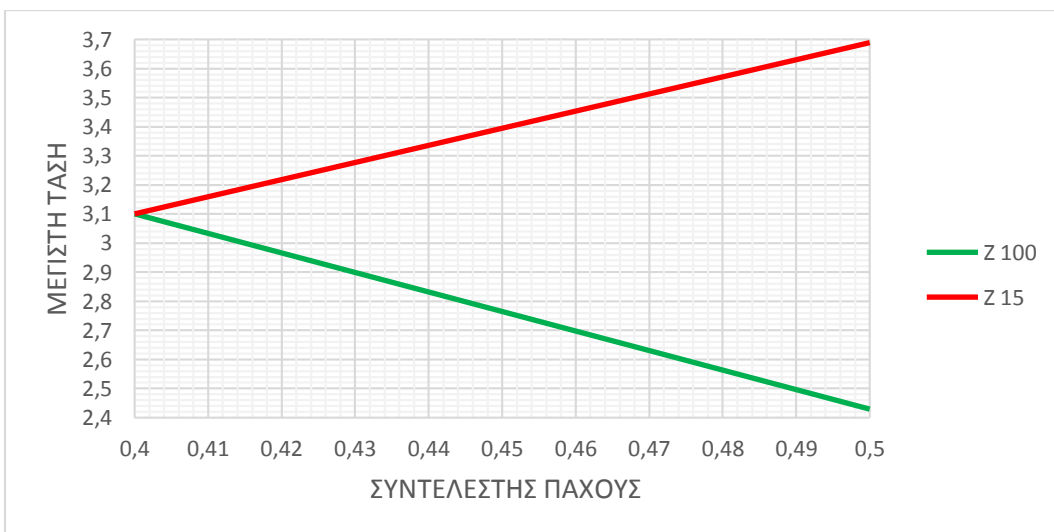
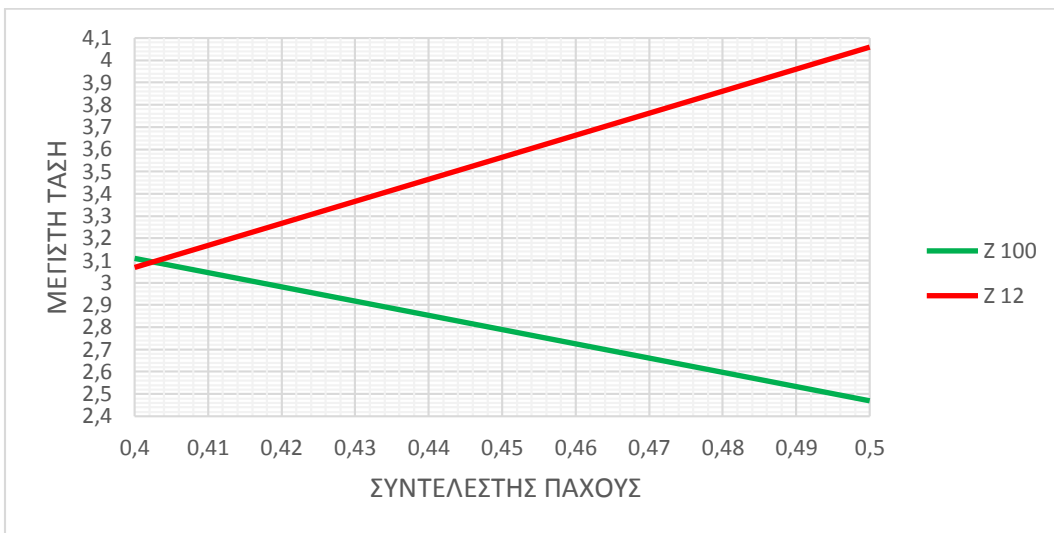
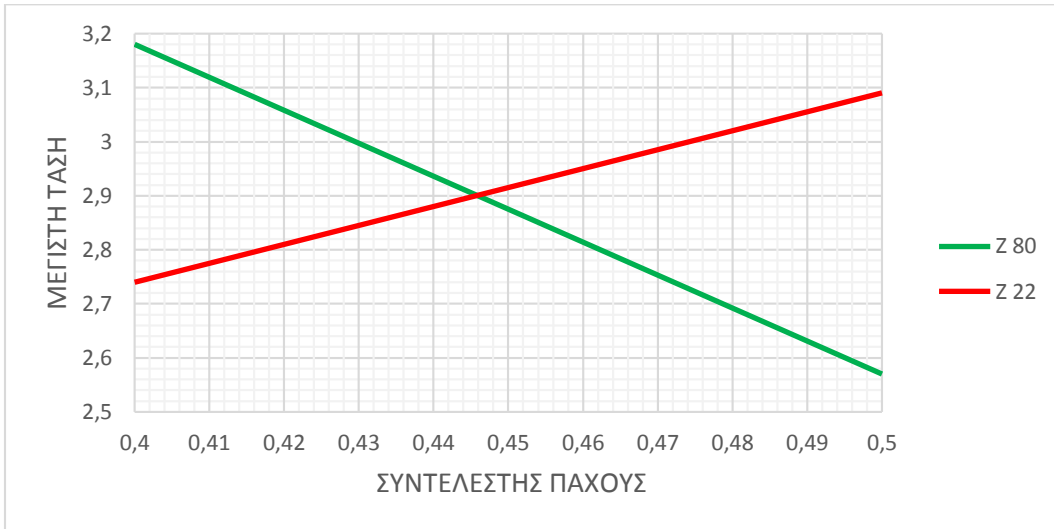
* Ο συντελεστής πάχους για τις εξωτερικές οδοντώσεις είναι $C_{s, \text{pinion}} = 1 - C_s$.

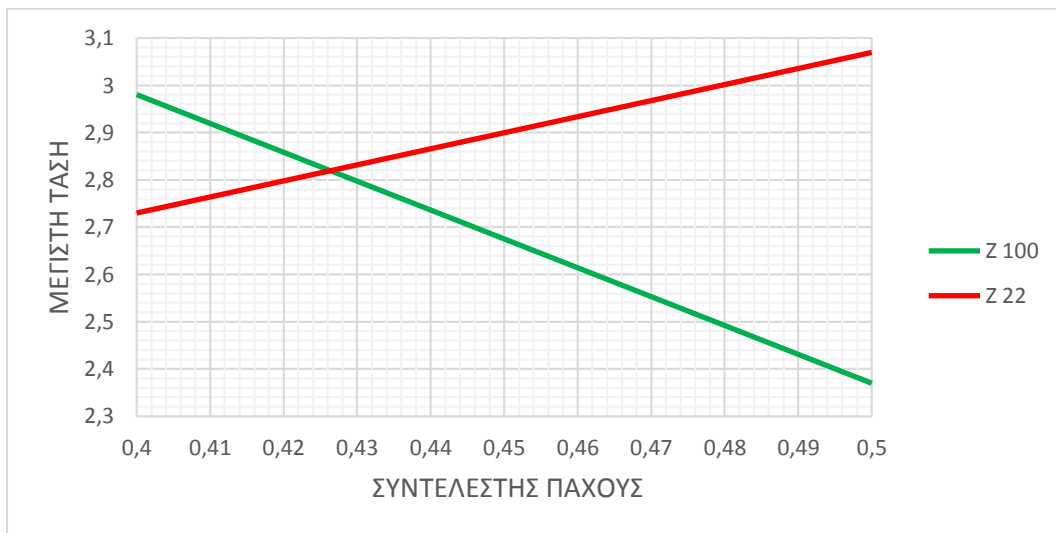
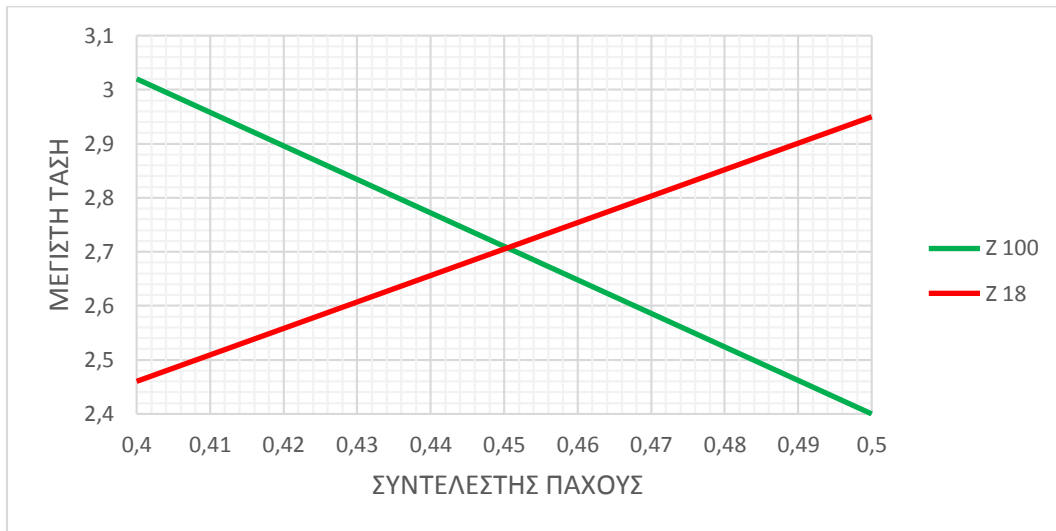












Παράρτημα VI

Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται ο κώδικας εξαγωγής των κατατομών των οδοντωτών τροχών.

```
function gear = Geargenerator(ao, r0, Cc, Cs, Cf, Ck, s1, s2, s3, s4)
%
%
%ao = gwnia piesis
%r0 = aktina tou arxikou kuklou
%Cc = aktina kefalis
%Cs = suntelestis paxous
%Cf = suntelestis tou upsous podos
%Ck = suntelestis tou upsous kefalis
%s1 = arithmos ton simion tou tmimatos A - B /to toxo podos
%s2 = arithmos ton simion tou tmimatos B - C / to troxoides
%s3 = arithmos ton simion tou tmimatos C - D / exeligmeni
%s4 = arithmos ton simion tou tmimatos D - Z / to toxo kefalis
%to = to vima ston arxiko kuklo
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
to = pi;
Ccmax = (2*Cf*sin(ao)+Cs*to*(2*(sin(ao/2)^2)-1))/(2*sin(ao)-2);
%
th = (pi/2) - (ao);
%
d= Ccmax*sin(th)-Cc*sin(th);
%
X1 = linspace(0,d,s1);
Y1 = 0*ones(size(X1));
%
X2 = zeros(1, s2);
Y2 = zeros(1, s2);
th1= zeros(1, s2);
for k = 2:s2;
    dth1 = th/s2;
```

```

th1(k) = th1(k-1)+dth1;
    if th1(k) <= th;
        Y2(k) = Cc-Cc*cos(th1(k));
        X2(k) = d+Cc*sin(th1(k));
    end
end
%
Y3 = linspace(Y2(end),Ck+Cf,s3);
X3 = linspace(X2(end),(Cs*to/2)+(Ck*tan(ao)),s3);
%
X4 = linspace(X3(end),to/2,s4);
Y4 = (Cf+Ck)*ones(size(X4));
%
Xrack = [X1 X2(2:end) X3(2:end) X4(2:end)]';
Yrack = [Y1 Y2(2:end) Y3(2:end) Y4(2:end)]';
%
DX = zeros(1,s1+s2-1+s3-1+s4-1);
DY = zeros(1,s1+s2-1+s3-1+s4-1);
l = zeros(1,s1+s2-1+s3-1+s4-1);
for i = 2:s1+s2-1+s3-1+s4-1;
    DX(i) = Xrack(i) - Xrack(i-1);
    DY(i) = Yrack(i) - Yrack(i-1);
    l(i) = DY(i)/DX(i);
end
%
dydx = l';
%*****
%
%change rack coordinates's reference point
%
%*****
x1 = zeros(1, s1);
x2 = zeros(1, s2);
x3 = zeros(1, s3);
x4 = zeros(1, s4);

```

```

y1 = zeros(1, s1);
y2 = zeros(1, s2);
y3 = zeros(1, s3);
y4 = zeros(1, s4);

for i = 1:s1;
x1(i) = X1(i) - pi/4;
y1(i) = Y1(i) - 1.25;
end

for i = 1:s2;
x2(i) = X2(i) - pi/4;
y2(i) = Y2(i) - 1.25;
end

for i = 1:s3;
x3(i) = X3(i) - pi/4;
y3(i) = Y3(i) - 1.25;
end

for i = 1:s4;
x4(i) = X4(i) - pi/4;
y4(i) = Y4(i) - 1.25;
end

xrack = [x1 x2(2:end) x3(2:end) x4(2:end)]';
yrack = [y1 y2(2:end) y3(2:end) y4(2:end)]';
%*****
%
%Compute N
%
%*****

```

```

for i=1:s1+s2+s3+s4-3;
Nx(i) = dydx(i) / (sqrt(1+dydx(i)^2));
Ny(i) = -1 / (sqrt(1+dydx(i)^2));
end
Nx = Nx';
Ny = Ny';
%*****
%
%Compute K, theta2
%
%*****
for i=1:s1+s2+s3+s4-3;
K(i) = -xrack(i) -yrack(i)*dydx(i);
end
K = K';
for i=1:s1+s2+s3+s4-3;
th2(i) = K(i)/r0;
end
th2 = th2';
%*****
%
%Compute path coordinates
%
%*****
for i=1:s1+s2+s3+s4-3;
xpath(i) = yrack(i)*Nx(i)/Ny(i);
ypath(i) =yrack(i);
end
xpath =xpath';
ypath =ypath';
%
%*****
%
%Compute gear coordinates
%
```

```
%*****  
for i=1:s1+s2+s3+s4-3;  
xgear(i) = xpath(i) * cos(th2(i)) - (ypath(i)+r0) * sin(th2(i));  
ygear(i) = xpath(i) * sin(th2(i)) + (ypath(i)+r0) * cos(th2(i)) - r0;  
end  
xgear =xgear';  
ygear =ygear';  
  
% OUTPUT  
gear =  
[Xrack, Yrack, dydx, xrack, yrack, Nx, Ny, K, th2, xpath, ypath, xgear, ygear]  
;  
end
```

Βιβλιογραφία

1. Θ. Ν. Κωστόπουλος, Οδοντώσεις και μειωτήρες στροφών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005
2. Β. Α. Σπιτάς, Διδακτορική διατριβή, Ανάλυση και σχεδιασμός βέλτιστων οδοντωτών τροχών με χρήση αναλυτικών, αριθμητικών και πειραματικών μεθόδων, Ε.Μ.Π. , Αθήνα 2000
3. Γ. Α. Παπαδόπουλος, Πειραματική μηχανική των θραύσεων, Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2007
4. V. A. Spitas, T. N. Costopoulos, C. A. Spitas, Fast modeling of conjugate gear tooth profiles using discrete presentation by involute segments, Elsevier, Mechanism and Machine Theory, NTUA, Athens 2006
5. V. A. Spitas, C. A. Spitas, T. N. Costopoulos, Reduction of Tooth Fillet Stresses Using Novel One – sided Involute Asymmetric Gear Design, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2009
6. G. K. Sfantos, V. A. Spitas, Application of the theory of ‘Gear Tooth Flank Involutization’ on external modified involute gear teeth, Technical Report, NTUA, Athens 2002
7. G. K. Sfantos, V. A. Spitas, T. N. Costopoulos, G. A. Papadopoulos, Load Sharing of Spur Gears in Mesh an Analytical and Experimental Study, Technical Report, NTUA, Athens 2003
8. G. K. Sfantos, V. A. Spitas, T. N. Costopoulos, Optimized Asymmetric Gear Tooth Design, Technical Report, NTUA, Athens 2003
9. G. K. Sfantos, V. A. Spitas, G. A. Papadopoulos, T. N. Costopoulos, Determination of the stress intensity factors (K_I , K_{II}) in loaded cracked spur gear teeth by the optical method of caustics, Technical Report, NTUA, Athens 2002
10. V. A. Spitas, C. A. Spitas, Numerical and experimental comparative study of strength – optimized AGMA and FZG spur gears, Acta Mechanica, Crete 2007