

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ –
ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΛΛΕΥΤΙΚΗΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ ΤΣΟΠΕΛΑ

**Χαρακτηρισμός και προσομοίωση της
μηχανικής και υδρομηχανικής
συμπεριφοράς ρωγματωμένων
πετρωμάτων**

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

RACHID ABABOU, Institut National Polytechnique
de Toulouse

ΠΑΥΛΟΣ ΝΟΜΙΚΟΣ, Σχολή Μηχ. Μεταλλείων-
Μεταλλουργών, Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΠΡΟΛΟΓΟΣ / ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος ERASMUS, στο Institut National Polytechnique de Toulouse, στη Γαλλία υπό την καθοδήγηση του κ. Rachid Ababou.

Από τη θέση αυτή, θεωρώ επιβεβλημένο να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Παύλο Νομικό, για τις χρήσιμες επισημάνσεις του σε όλα τα στάδια της δημιουργίας της παρούσας διπλωματικής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υπεύθυνο καθηγητή μου στη Γαλλία, κ. Rachid Ababou, για την καθοδήγηση του καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, έγινε προσπάθεια προσομοίωσης της μηχανικής και υδραυλικής συμπεριφοράς ρωγματωμένων δειγμάτων πετρώματος με τη μέθοδο διακριτών στοιχείων και συγκεκριμένα με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC. Στόχο της εργασίας αποτέλεσε η εξαγωγή των ισοδύναμων ελαστικών σταθερών, στο πλαίσιο της θεώρησης του δείγματος ως ένα ισοδύναμο συνεχές και ελαστικό μέσο. Εξετάστηκε η συμπεριφορά των δειγμάτων υπό τη δράση ορθών και διατμητικών τάσεων (μηχανική συμπεριφορά) καθώς και υπό τη δράση σταθερής βαθμίδας πίεσης, λόγω της ροής υγρού μέσω των ασυνεχειών των διαφορετικών δειγμάτων (υδραυλική συμπεριφορά). Πιο συγκεκριμένα, αναλύεται η προσπάθεια εύρεσης των κατάλληλων οριακών συνθηκών για την ομαλή διεξαγωγή των προσομοιώσεων και εξετάζεται η καταλληλότητα αυτών μέσω της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων και της σύγκρισης με τα αναμενόμενα θεωρητικά αποτελέσματα. Στην εργασία εξετάστηκαν συμμετρικά ρωγματωμένα δείγματα πετρώματος, με σκοπό την διερεύνηση του αριθμητικού κώδικα 3DEC και τη μελλοντική προσομοίωση και πρόβλεψη της συμπεριφοράς δειγμάτων πετρώματος τα οποία διατέμνονται από ασυνέχειες τυχαίου προσανατολισμού. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς των υπό εξέταση δειγμάτων, λόγω προβλημάτων που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης συγκεκριμένων περιπτώσεων (π.χ. δείγμα με μία κεκλιμένη ασυνέχεια). Για το λόγο αυτό, αναλύονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις: δείγμα άρρηκτου, ελαστικού πετρώματος, δείγμα ελαστικού πετρώματος που διατέμνεται από μία οριζόντια ασυνέχεια και τέλος δείγμα ελαστικού πετρώματος με τρεις κάθετες μεταξύ τους ασυνέχειες. Παρουσιάζονται συνεπώς, οι οριακές συνθήκες που επιλέχθηκαν, οι οποίες περιλαμβάνουν την επιβολή τάσεων και μετατοπίσεων στις εξωτερικές πλευρές του δείγματος, καθώς και η περαιτέρω ερμηνεία των άμεσων αποτελεσμάτων που λήφθηκαν από τον αριθμητικό κώδικα 3DEC για την εξαγωγή των ισοδύναμων μηχανικών και υδραυλικών συντελεστών των δειγμάτων και την εξέταση της εγκυρότητας και αντικειμενικότητας των αριθμητικών προσομοιώσεων.

ABSTRACT

In the present diploma thesis there has been an attempt to simulate the mechanical and hydraulic behavior of 3D fractured rock samples. Objective of this effort was the estimation of the equivalent elastic coefficients under the consideration of the sample as an equivalent continuum elastic medium. The behavior of the samples was investigated when subjected to normal and shear stresses (mechanical behavior) and to fixed total pressure gradient, due to the fracture fluid flow (hydraulic behavior). In details, an attempt was made towards the determination of the most suitable boundary conditions for the realization of the simulations, whose suitability is discussed through the evaluation of the obtained results. In the following thesis, symmetrically fractured rock samples were examined in order to investigate the 3DEC code and to potentially be able to simulate and predict the behavior of non-symmetrically fractured rock samples. Particular attention was given to the simulation of the mechanical behavior of the samples under consideration, due to problems encountered during the simulation of certain samples (e.g. sample including an inclined joint). Therefore, three different cases were analysed: non fractured elastic rock sample, elastic rock sample traversed by a single horizontal joint, elastic rock sample traversed by three orthogonal joints. The selected boundary conditions are presented, which consist of imposing both stress and displacement along the boundary faces of the sample. In addition, further interpretation of the results obtained by 3DEC was carried out, in order to examine the validity and objectivity of the simulations through the comparison of the calculated equivalent elastic coefficients with the ones predicted theoretically.

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων	5
Πίνακας σχημάτων	8
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	11
1.1 Ο κώδικας διακριτών στοιχείων 3DEC	12
1.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς.....	14
1.2.1 Σκοπός.....	14
1.2.2 Μεθοδολογία και εργαλεία.....	14
1.3 Προσομοίωση μηχανικής συμπεριφοράς.....	17
1.3.1 Σκοπός.....	17
1.3.2 Θεωρητική βάση / Upscaling μηχανικής συμπεριφοράς	17
1.3.3 Μεθοδολογία και εργαλεία.....	17
2 Υδραυλική αγωγιμότητα κερματισμένου πετρώματος	19
2.1 Δείγμα αδιαπέρατου πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια	19
2.1.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας Kij για δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια	19
2.1.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC	22
2.2 Αδιαπέρατο δείγμα πετρώματος με τρεις καθετές μεταξύ τους ασυνέχειες, ευθυγραμμισμένες με τους καρτεσιανούς άξονες	26
2.2.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας για δείγμα πετρώματος με τρεις κάθετες μεταξύ τους ασυνέχειες.....	26
2.2.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες, με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC	29
2.3 Σύστημα τριών τεμνόμενων ασυνεχειών σε δείγμα πετρώματος (συμπεριλαμβανομένης και μίας εσωτερικής ασυνέχειας)	32
2.3.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας για δείγμα πετρώματος με τρεις τεμνόμενες ασυνέχειες	32
2.3.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με ένα σύστημα ασυνεχειών που περιλαμβάνει μία εσωτερική ασυνέχεια, με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC	35
2.4 Προσδιορισμός της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας Kij από τα αποτελέσματα του 3DEC και σύγκριση με τη θεωρητική ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα	36
2.4.1 Δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια	36
2.4.2 Δείγμα πετρώματος με τρεις ασυνέχειες ευθυγραμμισμένες με τους τρεις άξονες (3D cross)	37

2.4.3	Σύστημα τριών τεμνόμενων ασυνεχειών, συμπεριλαμβανομένης και μίας «εσωτερικής» ασυνέχειας	37
3	Ισοδύναμες ελαστικές σταθερές ρωγματωμένου πετρώματος με τον κώδικα 3DEC	38
3.1	Περιγραφή και διερεύνηση διαφορετικών ειδών φόρτισης για διάφορες οριακές συνθήκες.....	38
3.1.1	Το πρόβλημα της περιστροφής του μοντέλου στον κώδικα 3DEC.....	40
3.1.2	Παραδείγματα περιστροφών στο 3DEC για διάφορα είδη φόρτισης ...	41
3.1.3	Υπολογισμός των μακροσκοπικών τροπών και τάσεων στον αριθμητικό κώδικα 3DEC	46
3.2	Προσομοίωση μηχανικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με συνδυασμένες οριακές συνθήκες τάσης και μετατόπισης.....	52
3.2.1	Συνδυασμός ορθής ή διατμητικής τάσης και άρθρωσης των πλευρικών επιφανειών του δείγματος	52
3.2.2	Συνδυασμός ορθής ή διατμητικής τάσης και συνθηκών κύλισης.....	54
3.2.3	Γενικευμένος νόμος του Hooke και μητρώο ενδοτικότητας C_{ijkl} 4 ^{ης} τάξης	55
3.2.4	Προσομοίωση συμπεριφοράς άρρηκτου ελαστικού και ισότροπου δείγματος πετρώματος σε θλίψη/διάτμηση στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)	56
3.2.5	Προσομοίωση συμπεριφοράς ελαστικού δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια υπό τη δράση ορθής/διατμητικής τάσης στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)	68
3.2.6	Προσδιορισμός των ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας δείγματος ελαστικού πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια.....	89
3.2.7	Προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος ελαστικού πετρώματος με τρεις ασυνέχειες (3D cross) σε θλίψη και διάτμηση στο 3DEC (συνθήκες κύλισης) 98	
4	Συμπεράσματα.....	117
4.1	Συμπεράσματα από την προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος υπό σταθερή υδραυλική κλίση.....	117
4.2	Συμπεράσματα από την προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος σε θλίψη και διάτμηση	119
5	Βιβλιογραφία	123
6	Παραρτήματα	126
6.1	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Θεωρητική ανάλυση των τροπών και τάσεων, λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή του στερεού σώματος.....	126
6.2	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανάλυση του τανυστή της τροπής σε σφαιρική και αποκλίνουσα συνιστώσα, και έκφραση του μητρώου ενδοτικότητας για την περίπτωση ελαστικού και ισότροπου υλικού	128

6.2.1	Ανάλυση του νόμου του Hooke σε σφαιρική και αποκλίνουσα συνιστώσα	128
6.2.2	Τανυστική διατύπωση (C_{ijkl})	129
6.3	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Προβολή συμμετρικού τανυστή τάσης πεδίου σ_{ij}^∞ σε δείγμα τριων διαστάσεων και ανάλυση σε όρους διανυσματικών τάσεων	131

Πίνακας σχημάτων

Σχήμα 2-1: Τομή σε επίπεδο (x,z) και οριακές συνθήκες για ροή κατά τη διεύθυνση x (οριζόντια ασυνέχεια).	24
Σχήμα 2-2: Τρισδιάστατη όψη, οριακές συνθήκες για την περίπτωση ροής στη διεύθυνση x.....	24
Σχήμα 2-3: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC όπου διακρίνονται και τα διανύσματα της ειδικής παροχής για ροή κατά τη διεύθυνση x.....	25
Σχήμα 2-4: Επίπεδο ροής (flow plane), ζώνες ροής (flow zones) και τα διανύσματα της ειδικής παροχής (discharge rate vectors).	25
Σχήμα 2-5: Τρισδιάστατο μοντέλο του δείγματος με τρεις ασυνέχειες στο 3DEC.	30
Σχήμα 2-6: Επίπεδα ροής (flow planes) και διανύσματα της ειδικής παροχής για ροή κατά τη διεύθυνση x.	30
Σχήμα 3-7: Επιβολή διατμητικών τάσεων $\sigma_{13} > \sigma_{31}$ που οδηγεί σε περιστροφή του μοντέλου (άρρηκτο, ελαστικό, ισότροπο δείγμα).	44
Σχήμα 3-8: Επιβολή διατμητικών τάσεων $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ που οδηγεί σε περιστροφή του μοντέλου (δείγμα με μία κεκλιμένη ασυνέχεια).....	44
Σχήμα 3-9: Μοντέλο στο 3DEC στο οποίο ασκείται τάση $\sigma = 1/50E$	45
Σχήμα 3-10: Τελική θέση του μοντέλου μετά από περιστροφή περίπου 270° (δε φαίνεται εδώ) και με σημαντική παραμόρφωση.....	45
Σχήμα 3-11: Πλευρές στο μοντέλο του 3DEC όπως ορίστηκαν παραπάνω.	47
Σχήμα 3-12: Απομόνωση οριακών ζωνών για την αριστερή (γαλάζιο χρώμα) και δεξιά (πράσινο χρώμα) πλευρά του μοντέλου στο 3DEC.	48
Σχήμα 3-13: Τομή σε επίπεδο (x,z), επιβολή τάσης σ_{33} , άρθρωση των κόμβων των πλευρικών επιφανειών και αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή), λόγω πάκτωσης των πλευρικών επιφανειών.	53
Σχήμα 3-14: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.....	53
Σχήμα 3-15: Παράδειγμα επιβολής ορθής τάσης. Τομή σε επίπεδο (x,z): συνθήκες κύλισης, αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή).....	54
Σχήμα 3-16: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.....	54
Σχήμα 3-17: Παράδειγμα επιβολής διατμητικής τάσης. Τομή σε επίπεδο (x,z): συνθήκες κύλισης, αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή).....	55
Σχήμα 3-18: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.....	55
Σχήμα 3-19: Σύνθήκες φόρτισης και μετατόπισης για επιβολή τάσης σ_{33}	58
Σχήμα 3-20: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή της ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}).	60
Σχήμα 3-21: Τομή σε επίπεδο (x,z): παράδειγμα επιβολής συμμετρικών διατμητικών τάσεων (σ_{31} και σ_{13}) και εφαρμογή συνθηκών κύλισης μόνο στην «πάνω» και «κάτω» πλευρά του δείγματος.....	64
Σχήμα 3-22: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31} (σ_{zx}) και σ_{13} (σ_{xz}).	66
Σχήμα 3-23: Τομή σε επίπεδο (x,y). Συνθήκες φόρτισης για τις διατμητικές τάσεις σ_{12} και σ_{21} και συνθήκες κύλισης ($u_x=0 \rightarrow e_{xx}=0$).	67
Σχήμα 3-24: Τομή σε επίπεδο (y,z). Συνθήκες φόρτισης για τις διατμητικές τάσεις σ_{23} και σ_{32} και συνθήκες κύλισης ($u_y=0 \rightarrow e_{yy}=0$).	67

Σχήμα 3-25: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC ελαστικού δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια.	70
Σχήμα 3-26: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}).	72
Σχήμα 3-27: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{11} (σ_{xx}).	73
Σχήμα 3-28: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{22} (σ_{yy}).	74
Σχήμα 3-29: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31}/σ_{13} σε δείγμα με μία οριζόντια ασυνέχεια, τομή σε επίπεδο (x,z). Εφαρμογή συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα z.	75
Σχήμα 3-30: Εφαρμογή συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα x.	75
Σχήμα 3-31: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{zx})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.	80
Σχήμα 3-32: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{zx})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.	81
Σχήμα 3-33: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{yz}/σ_{zy} , τομή σε επίπεδο (y,z). Πείραμα No. [2*]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	82
Σχήμα 3-34: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{yz}/σ_{zy} , τομή σε επίπεδο (y,z). Πείραμα No. [2**]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.	82
Σχήμα 3-35: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	83
Σχήμα 3-36: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.	84
Σχήμα 3-37: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{xy}/σ_{yx} , τομή σε επίπεδο (x,y). Πείραμα No. [3*]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.	85
Σχήμα 3-38: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{xy}/σ_{yx} , τομή σε επίπεδο (x,y). Πείραμα No. [3**]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	85
Σχήμα 3-39: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.	87
Σχήμα 3-40: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	88
Σχήμα 3-41: Μοντέλο στο 3DEC για την περίπτωση 3D cross.	99
Σχήμα 3-42: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης $\sigma_{33}(\sigma_{zz})$	101
Σχήμα 3-43: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης $\sigma_{11}(\sigma_{xx})$	102
Σχήμα 3-44: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης $\sigma_{22}(\sigma_{yy})$	103

Σχήμα 3-45: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{zx})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.	107
Σχήμα 3-46: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{zx})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.	108
Σχήμα 3-47: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	110
Σχήμα 3-48: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.	111
Σχήμα 3-49: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.	113
Σχήμα 3-50: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.	114
Σχήμα 3-51: Τομή σε επίπεδο (x,z): επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} και συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y (x2).....	121

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο κύριος στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η προσομοίωση της μηχανικής και υδραυλικής συμπεριφοράς κερματισμένων πετρωμάτων και η εξαγωγή των ισοδύναμων ελαστικών σταθερών υπό τη θεώρηση του πετρώματος ως ένα συνεχές ελαστικό μέσο. Πιο συγκεκριμένα, ο στόχος είναι η ανάπτυξη άμεσων «αριθμητικών πειραμάτων» χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό κώδικα 3DEC προκειμένου να υπολογιστούν οι ισοδύναμες Υδραυλικές και Μηχανικές σταθερές του ισοδύναμου συνεχούς μέσου στην περίπτωση ρωγματωμένων πετρωμάτων.

Το πλαίσιο του ευρύτερου έργου με το οποίο σχετίζεται η συγκεκριμένη εργασία—, αφορά σ'ένα πιθανό υπόγειο χώρο απόθεσης πυρηνικών αποβλήτων στην περιοχή Meuse/Haute Marne (MHM) στη Γαλλία. Οι παράμετροι του πετρώματος που χρησιμοποιήθηκαν κατά τους υπολογισμούς για την εξαγωγή των ισοδύναμων υδραυλικών και μηχανικών σταθερών ρωγματωμένου πετρώματος προέρχονται από μετρήσεις στο υπόγειο εργαστήριο “MHM Underground Research Laboratory” το οποίο λειτουργεί από την εθνική γαλλική υπηρεσία για τη διαχείριση ραδιενεργών αποβλήτων, ANDRA (Agence Nationale pour la Gestion Des Déchets Radioactifs).

Ως εκ τούτου, μια πιθανή εφαρμογή αυτής της εργασίας είναι η δυνατότητα προσομοίωσης σε τρεις διαστάσεις της Υδρο-Μηχανικής συμπεριφοράς της ζώνης του πετρώματος, που έχει υποστεί ζημία λόγω της εκσκαφής (Excavated Damaged Zone, EDZ), γύρω από υπόγειες στοές απόθεσης πυρηνικών αποβλήτων σε βαθείς γεωλογικούς σχηματισμούς (High Activity / Long Lifetime radioactive waste). Επιπλέον, υπάρχουν πολλές άλλες πιθανές εφαρμογές αυτής της εργασίας σε έργα πολιτικού μηχανικού, στη Μεταλλευτική, καθώς και στην υπόγεια αποθήκευση ενεργειακών πόρων (υπόγειοι χώροι αποθήκευσης πετρελαίου ή φυσικού αερίου).

Η ακόλουθη εργασία είναι οργανωμένη σε δύο μέρη:

- Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς πετρώματος και Upscaling
- Προσομοίωση μηχανικής συμπεριφοράς πετρώματος και Upscaling.

Η υδραυλική και μηχανική συμπεριφορά του πετρώματος εξετάστηκαν και αναλύθηκαν ως ξεχωριστό κομμάτι. Η συμπεριφορά του πετρώματος υπό ταυτόχρονη δράση Υδρο-Μηχανικών διεργασιών δεν εξετάζεται στην παρούσα εργασία.

1.1 Ο κώδικας διακριτών στοιχείων 3DEC

Όπως προαναφέρθηκε, ο κώδικας διακριτών στοιχείων 3DEC (3 Dimensional Distinct Element Code) της εταιρείας ITASCA (Itasca, 2007) επιλέχθηκε για την ανάπτυξη των αριθμητικών πειραμάτων σε μοντέλα πετρώματος με ασυνέχειες. Το 3DEC αποτελεί ένα αριθμητικό πρόγραμμα σε τρεις διαστάσεις και βασίζεται στη μέθοδο διακριτών στοιχείων για τη μοντελοποίηση ασυνεχών μέσων. Η μέθοδος διακριτών στοιχείων που είναι ενσωματωμένη στο 3DEC έχει εξελιχθεί για χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από 35 έτη, ξεκινώντας με την αρχική παρουσίαση από τον Cundall (1971) για την επίλυση προβλημάτων βραχομηχανικής.

Το 3DEC αποτελεί επέκταση του αριθμητικού κώδικα διακριτών στοιχείων UDEC σε δυο διαστάσεις (Itasca 2004), και βασίζεται σε μία εκτενώς δοκιμασμένη αριθμητική διατύπωση, για την προσομοίωση της συμπεριφοράς ασυνεχών μέσων είτε υπό στατική είτε υπό δυναμική φόρτιση. Το ασυνεχές μέσο, όπως για παράδειγμα η κερματισμένη βραχομάζα, προσομοιώνεται ως ένα σύνολο διακριτών τεμαχών (blocks) τριών διαστάσεων, ενώ οι ασυνέχειες αντιμετωπίζονται ως διακριτά όρια αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών των τμημάτων. Κάθε τεμάχος δύναται να συμπεριφέρεται ως άκαμπτο υλικό ή ως παραμορφώσιμο υλικό. Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς παραμορφώσιμων τεμαχών, αυτά υποδιαιρούνται σε δίκτυο στοιχείων πεπερασμένων διαφορών (finite difference elements) και το κάθε στοιχείο αποκρίνεται σύμφωνα με την προκαθορισμένη σχέση τάσης – τροπής, η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Το 3DEC διαθέτει εντολή για την αυτόματη δημιουργία ζωνών (στοιχείων πεπερασμένων διαφορών) για τη διακριτοποίηση των παραμορφώσιμων τεμαχών. Επομένως, τα παραμορφώσιμα τεμάχη συντίθενται από τετραεδρικές ζώνες εντός των οποίων υπολογίζονται οι αλλαγές των μηχανικών συνθηκών (τάση/τροπή). Οι γωνίες των τετραεδρικών ζωνών αντιστοιχούν σε κόμβους (gridpoints),

τέσσερις για κάθε ζώνη, για καθένα από τα οποία καθορίζονται οι συντεταγμένες x, y, z δηλώνοντας τη θέση των ζωνών.

Όσον αφορά στην προσομοίωση της υδραυλικής συμπεριφοράς ρωγματωμένου πετρώματος, ο αριθμητικός κώδικας 3DEC παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης της ροής ρευστού μέσα στις ασυνέχειες, κυρίως λόγω της ανάγκης για μοντελοποίηση της συνδυασμένης υδρο-μηχανικής συμπεριφοράς κερματισμένου πετρώματος.

Στην παρούσα εργασία η προσομοίωση της συμπεριφοράς ρωγματωμένου πετρώματος έγινε στα πλαίσια στατικής ανάλυσης. Η στατική επίλυση στο 3DEC επιτυγχάνεται με την απόσβεση των εξισώσεων κίνησης, έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του μοντέλου να τείνει σε μία αμελητέα τιμή. Έτσι, στο στάδιο της στατικής επίλυσης, το μοντέλο θα βρίσκεται είτε σε κατάσταση ισορροπίας δυνάμεων είτε σε κατάσταση σταθερής ροής υλικού στην περίπτωση που κάποια ποσότητα ή όλο το υλικό αστοχεί (είναι ασταθές) υπό τις επιβαλλόμενες συνθήκες φόρτισης.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του αριθμητικού κώδικα 3DEC αποτελεί η ενσωματωμένη γλώσσα προγραμματισμού FISH, που επιτρέπει στο χρήστη να εισάγει και να εξετάσει νέες μεταβλητές και συναρτήσεις στο πρόγραμμα.

1.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς

1.2.1 Σκοπός

Ο στόχος των αριθμητικών προσομοιώσεων υδραυλικής συμπεριφοράς σε μοντέλα δειγμάτων πετρωμάτων με ασυνέχειες, είναι να υπολογιστεί η μέση συνολική παροχή σε m^3/s στην κλίμακα του δείγματος, υπολογίζοντας μέσω του 3DEC τη συνολική εισροή ή εκροή [m^3/s] δια μέσω των ασυνεχειών που διατέμνουν το υπό εξέταση δείγμα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε στη συνέχεια να εξάγουμε το ισοδύναμο μητρώο υδραυλικής αγωγιμότητας του δείγματος.

1.2.2 Μεθοδολογία και εργαλεία

Η τυπική ανάλυση που εκτελείται στο 3DEC ως προεπιλογή είναι η μηχανική ανάλυση. Για την εκτέλεση διαφορετικής ανάλυσης η εντολή **CONFIG** (configuration) θα πρέπει να προηγείται των υπόλοιπων εντολών. Στην περίπτωση ροής ρευστού στις ασυνέχειες, η λέξη **gwflow** θα πρέπει να ακολουθεί την εντολή **CONFIG**. Κατά τη διάρκεια των υπολογισμών για ροή ρευστού, οι ασυνέχειες αντιμετωπίζονται ως αντικείμενα δύο διαστάσεων και χαρακτηρίζονται από καταστατικές σχέσεις και από τις σχετικές τους ιδιότητες στην μακροσκοπική κλίμακα, ενώ τα μεμονωμένα τεμάχια θεωρούνται αδιαπέρατα. Δίνεται στο χρήστη η επιλογή προσομοίωσης της ροής για ασυμπίεστο ή συμπιεστό ρευστό και για σταθερή (steady-state) ή χρονικά μεταβαλλόμενη ροή. Για τα αριθμητικά πειράματα που περιγράφονται στην παρούσα εργασία το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο και η ροή σταθερή.

Για τον υπολογισμό της παροχής ανά μονάδα πλάτους της εκάστοτε ασυνέχειας, χρησιμοποιείται στο 3DEC η «τροποποιημένη» κυβική σχέση (modified cubic law, Witherspoon, 1980):

$$q_i = -\frac{u_m^3 \rho g}{12\mu F} \varphi, i$$

όπου: ρ η πυκνότητα του ρευστού [kg/m^3]

g η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας [m/s^2]

μ το δυναμικό ιξώδες [$Pa \times s$]

φ το υδραυλικό φορτίο ($\varphi = z + \frac{p}{\rho g}$) [m]

u_m το «μηχανικό άνοιγμα» (mechanical aperture) της ασυνέχειας [m]

F συντελεστής διόρθωσης: $u_h = f u_m = u_{h0} + f \Delta u_m$ και $f = \frac{1}{F^{1/3}}$

και u_h το «υδραυλικό άνοιγμα» (hydraulic aperture) της ασυνέχειας [m] ως συνάρτηση του αρχικού «υδραυλικού ανοίγματος» και της παραμόρφωσης της ασυνέχειας [m]

Ο δείκτης i δηλώνει την εκάστοτε θέση οποιουδήποτε σημείου στο επίπεδο της ασυνέχειας.

Το μοντέλο για τη ροή ρευστού (flow model) στο 3DEC αποτελείται από τα εξής βασικά γεωμετρικά στοιχεία:

- Flow plane: επίπεδο πολύγωνο που αντιστοιχεί σε επαφή των εδρών μεταξύ δύο διαφορετικών τεμαχών
- Flow pipe: σύνδεση μεταξύ ενός ή περισσότερων flow planes
- Flow knot: σύνδεση μεταξύ ενός ή περισσότερων flow pipes

Με την εισαγωγή της εντολής `CONFIG gwflow` και μετά τη δημιουργία του στερεού μοντέλου στο 3DEC, η γεωμετρία του μοντέλου ροής (flow model) δημιουργείται αυτόματα σαν συνάρτηση του στερεού μοντέλου με τα επίπεδα ροής να αναγνωρίζονται αμέσως ως επαφές εδρών των τεμαχών .

Το επίπεδο ροής διακριτοποιείται σε ζώνες ροής (flow zones) και σύμφωνα με τα παραπάνω, η ειδική παροχή σε m^2/s υπολογίζεται για κάθε ζώνη ροής με τη βοήθεια της ενσωματωμένης στο 3DEC συνάρτησης `flowrate (flowplane, flowzone, i)` όπου $i=1,2,3$ είναι η x, y και z συνιστώσα αντίστοιχα της ειδικής παροχής Q_s . Για τον υπολογισμό της παροχής σε m^3/s αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την τιμή της ειδικής παροχής με την αντίστοιχη διάσταση του επιπέδου ροής, που είναι κάθετη στη διεύθυνση της ροής.

Για την προσομοίωση της υδραυλικής συμπεριφοράς στον αριθμητικό κώδικα 3DEC επιβάλλουμε αρχικά διαφορετικές τιμές πίεσης του νερού των πόρων σε δύο αντικριστές πλευρές του μοντέλου, ανάλογα με την επιθυμητή διεύθυνση ροής. Έτσι, η καθεμία από τις δύο αυτές πλευρές αντιπροσωπεύει την περιοχή εισροής και εκροής ανάλογα με την επιβληθείσα τιμή πίεσης και

υπό την υπόθεση ότι οι ασυνέχειες θεωρούνται πλήρως κορεσμένες με το εκάστοτε ρευστό και η ροή λαμβάνει χώρα προς συγκεκριμένη διεύθυνση. Με τη βοήθεια ενός προσαρμοσμένου αρχείου FISH ορίζουμε δύο εύρη σημείων, ένα για κάθε πλευρά που υπόκειται σε πίεση του νερού των πόρων. Για κάθε ζώνη ροής που ανήκει σε ένα από τα δύο εύρη σημείων που έχουμε ορίσει, υπολογίζεται η ειδική παροχή και το εμβαδό της ζώνης. Μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη συνολική ειδική παροχή στην είσοδο και στην έξοδο από το δείγμα ως τη μέση τιμή των ειδικών παροχών των ζωνών που ανήκουν στο εύρος της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας ως συντελεστή βαρύτητας το εμβαδό της κάθε ζώνης (Thoraval A. προσωπική επικοινωνία) :

$$q_{in,out} [m^2/s] = \frac{\sum_{fzone=1}^n flowrate(fplane,fzone,i)*surface(fzone)}{\sum_{fzone=1}^n surface(fzone)} \quad (\text{Εξ. 1-1})$$

Όπου n είναι ο αριθμός των ζωνών ροής (flow zones) της διατομής εισόδου του δείγματος.

Τελικά, η συνολική παροχή Q_{in} και Q_{out} υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την ειδική παροχή με το πλάτος της διατομής εισόδου ή εξόδου του δείγματος:

$$Q_{in} [m^3/s] = Q_{s,in} L_{\perp flow} \quad (\text{Εξ. 1-3})$$

$$Q_{out} [m^3/s] = Q_{s,out} L_{\perp flow} \quad (\text{Εξ. 1-4})$$

1.3 Προσομοίωση μηχανικής συμπεριφοράς

1.3.1 Σκοπός

Ο στόχος των αριθμητικών προσομοιώσεων μηχανικής συμπεριφοράς σε δείγμα ρωγματωμένου πετρώματος είναι ο υπολογισμός των μέσων τιμών των τάσεων και των παραμορφώσεων στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος και η εξαγωγή ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας προκειμένου να συγκριθούν με τα αποτελέσματα της θεωρίας upscaling.

1.3.2 Θεωρητική βάση / Upscaling μηχανικής συμπεριφοράς

Ουσιαστικά, η συγκεκριμένη θεωρία βασίζεται σε μία μέθοδο υπέρθεσης των τροπών υπό την επίδραση σταθερού τανυστή τάσης. Υπολογίζεται έτσι το ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας C_{ijkl} για την περίπτωση κερματισμένου, ελαστικού δείγματος πετρώματος.

1.3.3 Μεθοδολογία και εργαλεία

Για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του πετρώματος, ως καταστατικό μοντέλο συμπεριφοράς του άρρηκτου πετρώματος επιλέχθηκε το ελαστικό και ισότροπο μοντέλο που είναι ενσωματωμένο στο 3DEC. Η σχέση τάσης-τροπής είναι γραμμική και σύμφωνα με τον νόμο του Hooke εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta\varepsilon_{ij} + a_2\Delta\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

όπου: $a_2 = K - \frac{2}{3}G$

και G το μέτρο διάτμησης [Pa]

K το μέτρο συμπίεστικότητας [Pa]

δ_{ij} το Δέλτα του Kronecker

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Όσον αφορά στη συμπεριφορά των ασυνεχειών, επιλέχθηκε ελαστικό μοντέλο, που δεν επιτρέπει ολίσθηση ή αστοχία του υλικού.

Για τους σκοπούς της παρούσης εργασίας ως ο καταλληλότερος τύπος φόρτισης θεωρήθηκε αρχικά η επιβολή ενός τανυστή τάσης, ο οποίος θα προβάλλεται στις εξωτερικές επιφάνειες του δείγματος στον αριθμητικό κώδικα 3DEC. Ωστόσο, λόγω τεχνικών δυσκολιών (μεταξύ των οποίων και προβλήματα λόγω ανεξέλεγκτης περιστροφής του τρισδιάστατου μοντέλου) διερευνήθηκαν και άλλες συνθήκες επιβολής φορτίσεων. Εξαιτίας των διαφορετικών τύπων αριθμητικών πειραμάτων, η περιγραφή του εκάστοτε πειράματος και ο τρόπος υπολογισμού των τάσεων και τροπών στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος, περιγράφονται αναλυτικά στην ενότητα της προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς του πετρώματος.

Υπενθυμίζεται ότι στη συγκεκριμένη εργασία δε γίνεται προσπάθεια ανάλυσης της πλήρως συζευγμένης υδρο-μηχανικής συμπεριφοράς του κερματισμένου δείγματος, αλλά μόνο της μηχανικής του συμπεριφοράς

2 Υδραυλική αγωγιμότητα κερματισμένου πετρώματος

2.1 Δείγμα αδιαπέρατου πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια

2.1.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας K_{ij} για δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια

Στη συγκεκριμένη υποενότητα, παρουσιάζεται η θεωρητική τιμή της παροχής Q [m^3/s], η ταχύτητα V [m/s], και η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα K [m/s] για ένα δείγμα πετρώματος διαστάσεων L_x , L_y , L_z με μία οριζόντια ασυνέχεια ευθυγραμμισμένη με έναν από τους τρεις άξονες (x, y, z).

Η θεωρία βασίζεται στο απλό μοντέλο ροής σύμφωνα με το νόμο του Poiseuille μεταξύ των παράλληλων, επίπεδων και λείων τοιχωμάτων της ασυνέχειας. Για την κατανόηση της μεθοδολογίας και των υπολογισμών σημειώνεται ότι:

- Η συνολική παροχή Q_{global} [m^3/s] είναι δυνατό να οριστεί δια μέσω οποιασδήποτε εσωτερικής διατομής του δείγματος ή μέσω οποιασδήποτε εξωτερικής του επιφάνειας (boundary face).
- Η παροχή μίας δεδομένης ασυνέχειας Q_{joint} [m^3/s] μπορεί να οριστεί ως η ποσότητα εισροής ή εκροής προς και από την ασυνέχεια.
- Η διανυσματική ταχύτητα \mathbf{V} [m/s] μέσα στην ασυνέχεια, αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της εγκάρσιας ταχύτητας που αναπτύσσεται από τοίχωμα σε τοίχωμα. Ως εκ τούτου, η ταχύτητα \mathbf{V} [m/s] ορίζεται στο επίπεδο της ασυνέχειας. Αν η ασυνέχεια είναι οριζόντια τότε $\mathbf{V} = [V_x, V_y, 0]$ m/s .
- Η ειδική παροχή μέσα στην ασυνέχεια, \mathbf{Q}_s [m^2/s], είναι το γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{V}$ όπου “ a ” είναι η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων της ασυνέχειας (aperture).
- Η φαινόμενη ταχύτητα ή μακροσκοπική ταχύτητα (flux density vector or Darcy velocity), \mathbf{q} [m/s], χρησιμοποιείται για να ορίσει τη σχέση μεταξύ

της παροχής Q και της υδραυλικής κλίσης με τη βοήθεια ενός «ισοδύναμου» νόμου του Darcy, ο οποίος εφαρμόζεται στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος διαστάσεων L_x, L_y, L_z .

Έστω ένα ορθογώνιο δείγμα πετρώματος διαστάσεων L_x, L_y, L_z , όπου $L_x \neq L_y \neq L_z$. Στο πλαίσιο της θεώρησης του κερματισμένου πετρώματος ως ένα ισοδύναμο συνεχές και πορώδες μέσο και με δεδομένη την θεώρηση αδιαπέρατου άρρηκτου πετρώματος, θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε την ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του δείγματος ξεκινώντας από την εξίσωση που περιγράφει την παροχή μίας ασυνέχειας σύμφωνα με το νόμο του Poiseuille (ροή ανάμεσα σε δύο επίπεδα και λεία τοιχώματα).

Θα εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση για διεύθυνση ροής παράλληλη με τον άξονα x . Η παροχή μίας ασυνέχειας θα εκφράζεται ως εξής (R. Ababou, personal communication):

$$Q_x = \frac{1}{12\mu} a^3 L_y \frac{\Delta P}{L_x} \left[m^3/s \right] \quad (\text{Εξ. 2-1})$$

Εισάγουμε στην εξίσωση το γινόμενο ρg προκειμένου να εμφανιστεί ο όρος της υδραυλικής κλίσης και θεωρούμε τη διατομή $A_x = L_y L_z$ ως την ισοδύναμη διατομή εισροής ή εκροής για όλο το δείγμα. Διαιρώντας με αυτή τη διατομή λαμβάνουμε την ισοδύναμη φαινόμενη ταχύτητα ροής:

$$Q_x = \frac{\rho g}{12\mu} a^3 L_y \frac{\Delta P}{L_x \rho g} \xrightarrow{/A_x} q_x^{BLOCK} = \frac{\rho g}{12\mu} a^3 \frac{1}{L_z} \frac{\Delta P}{\rho g} \frac{1}{L_x} \quad (\text{Εξ. 2-2})$$

όπου: g η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας [m/s^2]

ν το κινηματικό ιξώδες [m^2/s]

μ το δυναμικό ιξώδες [$Pa \cdot s$]

a η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων της ασυνέχειας [m]

A_x η ισοδύναμη διατομή του δείγματος [m^2]

L_x το μήκος του δείγματος στη διεύθυνση x [m]

L_y το μήκος του δείγματος στη διεύθυνση y [m]

L_z το μήκος του δείγματος στη διεύθυνση z [m]

ρ η πυκνότητα του ρευστού [kg/m³]

ΔP η διαφορά πίεσης [Pa]

και $\frac{\Delta P}{\rho g L_x} = J_x$ (Εξ 2-3), είναι η υδραυλική κλίση μεταξύ των παράλληλων πλευρών του δείγματος, οι οποίες είναι κάθετες ως προς τον άξονα x.

Ο ισοδύναμος νόμος του Darcy εκφράζεται ως:

$$q_x^{BLOCK} = K_{xx} J_x \quad (\text{Εξ. 2-4})$$

όπου: q_x^{BLOCK} η φαινόμενη ταχύτητα [m/s]

K_{xx} η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα [m/s]

J_x η υδραυλική κλίση κατά τη διεύθυνση x [m/m]

Βάσει των Εξισώσεων 2-2 και 2-3, η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα στη διεύθυνση x, του δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια (ευθυγραμμισμένη με τον άξονα x) θα είναι:

$$K_{xx}^{BLOCK} = \frac{g}{12\nu} \left(\frac{a}{L_z} \right) a^2 \quad (\text{Εξ. 2-5})$$

Και η ισοδύναμη παροχή Q [m³/s] του δείγματος στην περίπτωση διεύθυνσης ροής παράλληλης με τον άξονα x δίνεται ως:

$$Q_x^{BLOCK} = q_x^{BLOCK} L_y L_z \quad (\text{Εξ. 2-6α})$$

ή

$$Q_x^{BLOCK} = \frac{a^3}{12\nu} \frac{\Delta P}{\rho L_x} L_y \quad (\text{Εξ. 2-6β})$$

ή

$$Q_x^{BLOCK} = \frac{g}{12\nu} a^3 L_y J_x \quad (\text{Εξ. 2-6γ})$$

Παρομοίως, για διεύθυνση ροής παράλληλη με τον άξονα y , θα έχουμε:

$$K_{yy}^{BLOCK} = \frac{g}{12\nu} \left(\frac{a}{L_z} \right) a^2 \quad (\text{Εξ. 2-7})$$

και

$$Q_y^{BLOCK} = \frac{g}{12\nu} a^3 L_x J_y \quad (\text{Εξ. 2-8})$$

2.1.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφορά δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC

Στην περίπτωση της οριζόντιας ασυνέχειας, πραγματοποιούνται δύο αριθμητικά πειράματα, ένα για ροή κατά τη διεύθυνση x και ένα για ροή κατά τη διεύθυνση y , προκειμένου να υπολογίσουμε για κάθε πείραμα τη συνολική εισροή και εκροή [m^3/s] της ασυνέχειας και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την τιμή της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας K_{ij} για το δείγμα. Λόγω της οριζόντιας θέσης της ασυνέχειας, η παροχή για ροή κατά τη διεύθυνση z θα είναι μηδενική.

Ας υπενθυμίσουμε σ' αυτό το σημείο ότι στον αριθμητικό κώδικα 3DEC, όλες οι ασυνέχειες θεωρούνται κορεσμένες με ρευστό (νερό στην περίπτωση μας), ενώ το άρρηκτο πέτρωμα αντιμετωπίζεται ως αδιαπέρατο. Έτσι, εφαρμόζοντας μια διαφορά πίεσης κατά μήκος του δείγματος, λαμβάνει χώρα ροή κατά την επιθυμητή διεύθυνση στις κορεσμένες ασυνέχειες.

Παράμετροι, διαστάσεις δείγματος, ιδιότητες άρρηκτου πετρώματος, ασυνέχειας και υγρού:

Διαστάσεις του υπό εξέταση δείγματος

Μήκος του δείγματος στη διεύθυνση x $L_x = 3\text{m}$

Μήκος του δείγματος στη διεύθυνση y $L_y = 2\text{m}$

Μήκος του δείγματος στη διεύθυνση z $L_z = 1\text{m}$

Ιδιότητες ρευστού

Μέτρο συμπίεστικότητας ρευστού	$K_f = 2e9 \text{ Pa}$
Πυκνότητα	$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$
Κινηματικό ιξώδες	$\nu = 1e-6 \text{ m}^2/\text{s}$
Δυναμικό ιξώδες	$\mu = 1e-3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Ιδιότητες άρρηκτου πετρώματος

Πυκνότητα άρρηκτου πετρώματος	$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
Μέτρο διάτμησης	$G = 2e9 \text{ Pa}$
Μέτρο συμπίεστικότητας	$K_m = 5e9 \text{ Pa}$

Ιδιότητες ασυνέχειας

Ορθή δυστροπία	$K_n = 10e9 \text{ Pa/m}$
Διατμητική δυστροπία	$K_s = 1e9 \text{ Pa/m}$
Άνοιγμα	$\alpha = 1e-4 \text{ m}$

<i>Διαφορά πίεσης</i>	$\Delta P = 3e4 \text{ Pa}$
------------------------------	-----------------------------

Αφού εισάγουμε τη γεωμετρία του τρισδιάστατου μοντέλου στο 3DEC και αναγνωριστούν τα γεωμετρικά στοιχεία του μοντέλου ροής, εφαρμόζουμε μία διαφορά πίεσης $\Delta P=3e4\text{Pa}$ χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές:

```
boundary x range y range z range ppressure 0
```

```
boundary x range y range z range ppressure 3e4
```

το εύρος (range) ορίζεται ανάλογα με το εκάστοτε αριθμητικό πείραμα και την επιθυμητή διεύθυνση ροής.

Στην περίπτωση μας, το επίπεδο της ασυνέχειας αποτελεί το μοναδικό επίπεδο ροής (flow plane) του μοντέλου.

Ροή κατά τη διεύθυνση x

Για την προσομοίωση της ροής κατά τη διεύθυνση x, η διαφορά πίεσης εφαρμόζεται μεταξύ των πλευρών του μοντέλου, οι οποίες είναι κάθετες ως προς τον άξονα x. Πιο συγκεκριμένα, εισάγουμε τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$P = 0 \quad -0.1 \text{ m} \leq x \leq 0.1 \text{ m}$$

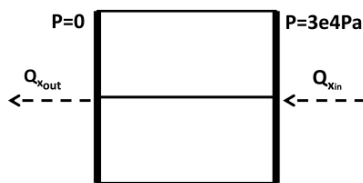
$$-0.1 \text{ m} \leq y \leq 2.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq z \leq 1.1 \text{ m}$$

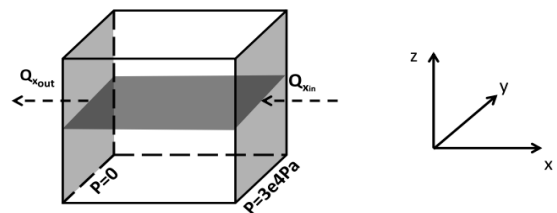
$$P = 3e4 \text{ Pa} \quad 2.9 \text{ m} \leq x \leq 3.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq y \leq 2.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq z \leq 1.1 \text{ m}$$



Σχήμα 2-1: Τομή σε επίπεδο (x,z) και οριακές συνθήκες για ροή κατά τη διεύθυνση x (οριζόντια ασυνέχεια).



Σχήμα 2-2: Τρισδιάστατη όψη, οριακές συνθήκες για την περίπτωση ροής στη διεύθυνση x.

Είναι προφανές ότι για ροή κατά τη διεύθυνση x, το πλάτος της ισοδύναμης διατομής του δείγματος θα είναι το L_y , και η παροχή υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$Q_{x_{in}} [m^3/s] = Q_{s,x_{in}} L_y \quad (\text{Εξ. 2-9})$$

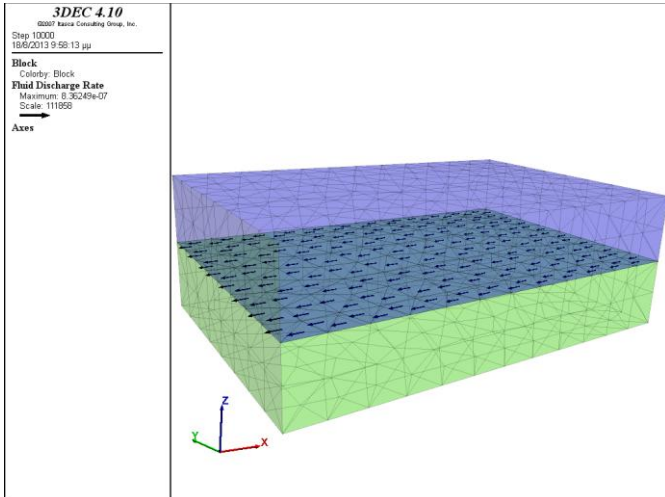
$$Q_{x_{out}} [m^3/s] = Q_{s,x_{out}} L_y \quad (\text{Εξ. 2-10})$$

Μετά από την προσομοίωση με το 3DEC και αφού χρησιμοποιήσουμε το αρχείο με τις εντολές FISH για τον υπολογισμό της συνολικής παροχής Q, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

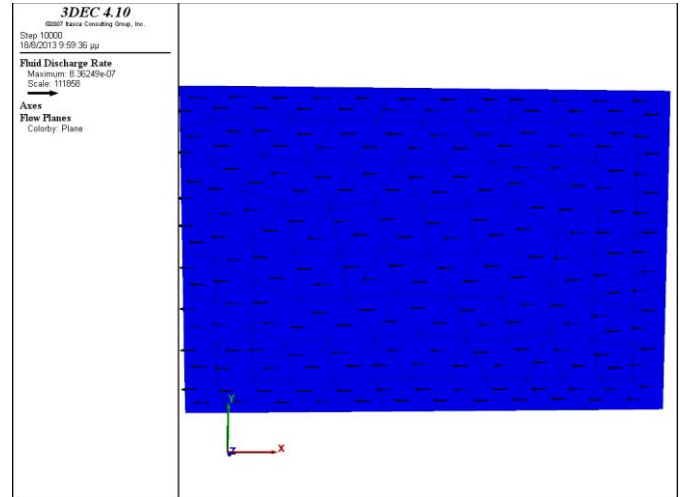
$$Q_{xin} = -1.66691e-006 \text{ (real)}$$

$$Q_{xout} = -1.66686e-006 \text{ (real)}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο: $Q_{xin} = Q_{xout} = Q_{xtotal}$



Σχήμα 2-3: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC όπου διακρίνονται και τα διανύσματα της ειδικής παροχής για ροή κατά τη διεύθυνση x.



Σχήμα 2-4: Επίπεδο ροής (flow plane), ζώνες ροής (flow zones) και τα διανύσματα της ειδικής παροχής (discharge rate vectors).

Ροή κατά τη διεύθυνση y

Για την προσομοίωση της ροής κατά τη διεύθυνση y εφαρμόζουμε διαφορά πίεσης μεταξύ των πλευρών του μοντέλου, οι οποίες είναι ορθές ως προς τον άξονα y. Πιο συγκεκριμένα εισάγουμε τις εξής οριακές συνθήκες:

$$P = 0 \text{ Pa} \quad -0.1 \text{ m} \leq x \leq 3.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq y \leq 0.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq z \leq 1.1 \text{ m}$$

$$P = 3e4 \text{ Pa} \quad -0.1 \text{ m} \leq x \leq 3.1 \text{ m}$$

$$1.9 \text{ m} \leq y \leq 2.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq z \leq 1.1 \text{ m}$$

Στην περίπτωση αυτή το πλάτος της ισοδύναμης διατομής του δείγματος είναι το L_x και η παροχή υπολογίζεται ως εξής:

$$Q_{y_{in}} [m^3/s] = Q_{s,y_{in}} L_x \quad (\text{Εξ. 2-11})$$

$$Q_{y_{out}} [m^3/s] = Q_{s,y_{out}} L_x \quad (\text{Εξ. 2-12})$$

Με τη βοήθεια του 3DEC η εισροή και η εκροή υπολογίζονται ως εξής:

Qyin = -3.7502e-006 (real)
Qyout = -3.75022e-006 (real)

Για ακόμα μία φορά, όπως αναμενόταν: $Q_{y_{in}} = Q_{y_{out}} = Q_{y_{total}}$

Το πείραμα προσομοίωσης της ροής κατά τη διεύθυνση z δεν είναι απαραίτητο σ'αυτή την περίπτωση, καθώς λόγω της αδιαπερατότητας του άρρηκτου πετρώματος και του προσανατολισμού της ασυνέχειας, δεν παρατηρείται ροή.

2.2 Αδιαπέρατο δείγμα πετρώματος με τρεις καθετές μεταξύ τους ασυνέχειες, ευθυγραμμισμένες με τους καρτεσιανούς άξονες

2.2.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας για δείγμα πετρώματος με τρεις κάθετες μεταξύ τους ασυνέχειες

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η προκύπτουσα ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα είναι μία γενίκευση της προηγούμενης περίπτωσης (βλ. οριζόντια ασυνέχεια). Πράγματι, πραγματοποιώντας τρία πειράματα προσομοίωσης της ροής κατά τη διεύθυνση των τριών αξόνων (x,y,z), λαμβάνουμε αντίστοιχα τα K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} , από τα οποία προκύπτει στη συνέχεια το διαγώνιο μητρώο:

$$\underline{\underline{K}} = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & K_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & K_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 2-13})$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες της υδραυλικής αγωγιμότητας K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} όπως περιγράφεται παρακάτω.

Για το ορθογώνιο δείγμα πετρώματος που περιλαμβάνει τρεις ασυνέχειες οι οποίες τέμνονται στο κέντρο του δείγματος, σχηματίζοντας έναν τρισδιάστατο «σταυρό» (3D cross), θεωρούμε το δείγμα ως ένα περιοδικό «κελί», τέτοιο ώστε το μήκος L_x αντιπροσωπεύει την απόσταση μεταξύ των ασυνεχειών (οικογένεια ασυνεχειών) που είναι ορθές ως προς τον άξονα x, το μήκος L_y , την απόσταση μεταξύ των ασυνεχειών που είναι ορθές ως προς τον άξονα y και το μήκος L_z την απόσταση μεταξύ των ασυνεχειών που είναι ορθές ως προς τον άξονα z.

Μπορούμε να καθορίσουμε τους τρεις όρους του μητρώου K_{ij} με τη βοήθεια των εξισώσεων των συνολικών παροχών για κάθε διεύθυνση ροής.

Ροή κατά τη διεύθυνση x:

$$Q_{x(x)} = (Q_x)_y + (Q_x)_z \quad (\text{Εξ. 2-14})$$

όπου: $Q_{x(x)}$ η συνολική παροχή για ροή κατά τη διεύθυνση x

$(Q_x)_y$ η παροχή της οικογένειας ασυνεχειών που είναι ορθές ως προς τον άξονα y και συμβάλλουν στη συνολική παροχή

$(Q_x)_z$ η παροχή της οικογένειας ασυνεχειών που είναι ορθές ως προς τον άξονα z και συμβάλλουν στη συνολική παροχή

Διαρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με την ισοδύναμη διατομή $A_x = L_y L_z$ για ροή κατά τη διεύθυνση x, έχουμε:

$$q_{x(x)} = \frac{(Q_x)_y}{L_y L_z} + \frac{(Q_x)_z}{L_y L_z} \quad (\text{Εξ. 2-15})$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας με τη x-συνιστώσα της υδραυλικής κλίσης:

$$\widehat{K}_{xx} = \frac{\frac{(Q_x)_y + (Q_x)_z}{L_y L_z}}{J_x} \quad (\text{Εξ. 2-16α})$$

Βάσει των Εξισώσεων 2-1 και 2-3, για $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ και σύμφωνα με το νόμο του Darcy, έχουμε:

$$\widehat{K}_{xx} = \frac{g}{12\nu} \frac{a_y^3}{L_y} + \frac{g}{12\nu} \frac{a_z^3}{L_z} \quad (\text{Εξ. 2-16β})$$

Όπου το a_y είναι το άνοιγμα των ασυνεχειών οι οποίες είναι ορθές ως προς τον άξονα y και a_z είναι το άνοιγμα των ασυνεχειών οι οποίες είναι ορθές ως προς τον άξονα z . Όπως αναφέρθηκε και οι δύο οικογένειες ασυνεχειών συμβάλλουν στη συνολική παροχή στην περίπτωση ροής κατά τη διεύθυνση x .

Παρόμοια, για την περίπτωση ροής κατά τη διεύθυνση y και κατά τη διεύθυνση z , οι οικογένειες ασυνεχειών που θα συμβάλλουν στη συνολική παροχή θα είναι αυτές που είναι ορθές ως προς τους άξονες x και z (με απόσταση τοιχωμάτων a_x και a_z αντίστοιχα) για τη ροή κατά τη διεύθυνση y και αυτές που είναι ορθές ως προς τους άξονες x και y για τη ροή κατά τη διεύθυνση z .

Επομένως, ακολουθώντας τα ίδια βήματα, προκύπτουν οι σχέσεις για τα \widehat{K}_{yy} και \widehat{K}_{zz} :

$$\widehat{K}_{yy} = \frac{g}{12\nu} \frac{a_x^3}{L_x} + \frac{g}{12\nu} \frac{a_z^3}{L_z} \quad (\text{Εξ. 2-17})$$

$$\widehat{K}_{zz} = \frac{g}{12\nu} \frac{a_x^3}{L_x} + \frac{g}{12\nu} \frac{a_y^3}{L_y} \quad (\text{Εξ. 2-18})$$

Ενώ, οι αντίστοιχες συνολικές παροχές (Q_x , Q_y , Q_z) για τις τρεις περιπτώσεις ροής είναι:

$$Q_{x(x)} = \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta P}{L_x} \left(\frac{a_y^3}{L_y} + \frac{a_z^3}{L_z} \right) \quad (\text{Εξ. 2-19})$$

$$Q_{y(y)} = \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta P}{L_y} \left(\frac{a_x^3}{L_x} + \frac{a_z^3}{L_z} \right) \quad (\text{Εξ. 2-20})$$

$$Q_{z(z)} = \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta P}{L_z} \left(\frac{a_y^3}{L_y} + \frac{a_x^3}{L_x} \right) \quad (\text{Εξ. 2-21})$$

2.2.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες, με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC

Θα πραγματοποιηθούν τρία αριθμητικά πειράματα για την προσομοίωση της ροής στις τρεις διευθύνσεις και περιμένουμε για κάθε διαφορετική διεύθυνση ροής, μόνο δύο από τις τρεις ασυνέχειες να συμβάλλουν στη συνολική παροχή.

Οι διαστάσεις του υπό εξέταση δείγματος καθώς και οι ιδιότητες του υλικού και του ρευστού παραμένουν ίδιες με την περίπτωση της οριζόντιας ασυνέχειας. Στις ασυνέχειες του δείγματος αποδίδεται όμοια ορθή (K_n) και διατμητική (K_s) δυσκαμψία όπως επίσης και όμοια απόσταση τοιχωμάτων (aperture), $a=1e-4m$.

Ροή κατά τη διεύθυνση x

Εισάγουμε τις ίδιες οριακές συνθήκες, όπως για την περίπτωση της οριζόντιας ασυνέχειας, για την προσομοίωση της ροής κατά τη διεύθυνση x.

Για την ειδική περίπτωση όπου δύο εκ των τριών ασυνεχειών συμβάλλουν στη συνολική παροχή, αυτή υπολογίζεται ως:

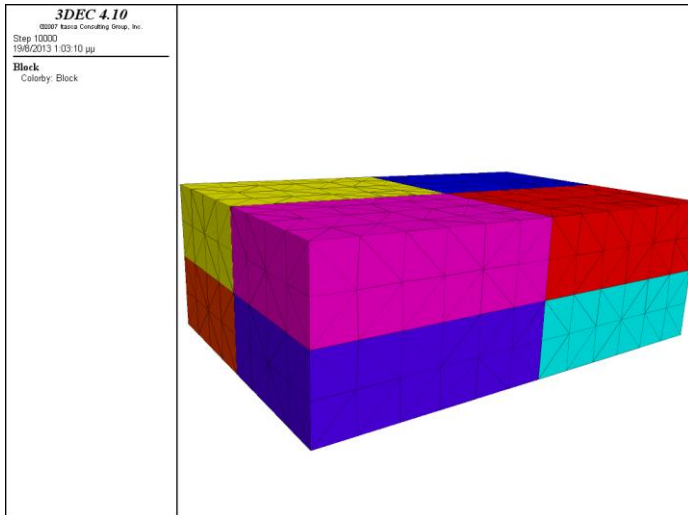
$$Q_{x_{in}} [m^3/s] = Q_{s,x_{in}} (L_y + L_z) \quad (\text{Εξ. 2-22})$$

$$Q_{x_{out}} [m^3/s] = Q_{s,x_{out}} (L_y + L_z) \quad (\text{Εξ. 2-23})$$

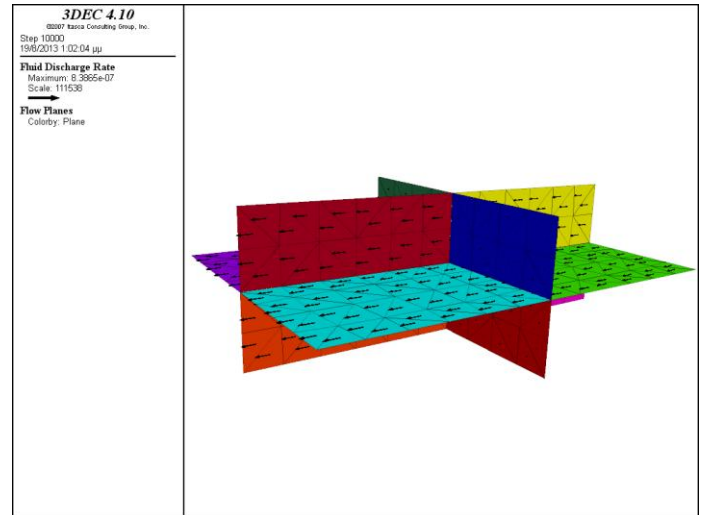
Όπου L_y είναι το πλάτος της ισοδύναμης διατομής, αν θεωρήσουμε ότι μόνο η ασυνέχεια που είναι ορθή ως προς τον άξονα z διατέμνει το δείγμα, και L_z είναι το πλάτος της ισοδύναμης διατομής, αν θεωρήσουμε ότι η μόνη ασυνέχεια που διατέμνει το δείγμα είναι αυτή που είναι ορθή ως προς τον άξονα y.

Μέσω του 3DEC, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα για την εισροή και εκροή σε m^3/s :

$Q_{xin} = -2.49999e-006$ (real)
$Q_{xout} = -2.50019e-006$ (real)



Σχήμα 2-5: Τρισδιάστατο μοντέλο του δείγματος με τρεις ασυνέχειες στο 3DEC.



Σχήμα 2-6: Επίπεδα ροής (flow planes) και διανύσματα της ειδικής παροχής για ροή κατά τη διεύθυνση x.

Ροή κατά τη διεύθυνση y

Για τις ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση (οριζόντια ασυνέχεια) οριακές συνθήκες, οι ασυνέχειες που θα συμβάλλουν στη συνολική παροχή θα είναι η ασυνέχεια που είναι ορθή ως προς τον άξονα x και η ασυνέχεια που είναι ορθή ως προς τον άξονα z. Η συνολική παροχή υπολογίζεται:

$$Q_{y_{in}} [m^3/s] = Q_{s,y_{in}} (L_x + L_z) \quad (\text{Εξ. 2-24})$$

$$Q_{y_{out}} [m^3/s] = Q_{s,y_{out}} (L_x + L_z) \quad (\text{Εξ. 2-25})$$

Όπου L_x είναι το πλάτος της ισοδύναμης διατομής, αν θεωρήσουμε ότι μόνο η ασυνέχεια που είναι ορθή ως προς τον άξονα z διατέμνει το δείγμα, και L_z είναι το πλάτος της ισοδύναμης διατομής, αν θεωρήσουμε ότι η μόνη ασυνέχεια που διατέμνει το δείγμα είναι αυτή που είναι ορθή ως προς τον άξονα x.

Μέσω του 3DEC λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$Q_{yin} = -5.00018e-006$ (real) $Q_{yout} = -5.00025e-006$ (real)

Ροή κατά τη διεύθυνση z

Για την προσομοίωση της ροής κατά τη διεύθυνση z, εισάγουμε τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$\mathbf{P} = \mathbf{0 Pa} \quad -0.1 \text{ m} \leq x \leq 3.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq y \leq 2.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq z \leq 0.1 \text{ m}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{3e4 Pa} \quad -0.1 \text{ m} \leq x \leq 3.1 \text{ m}$$

$$-0.1 \text{ m} \leq y \leq 2.1 \text{ m}$$

$$0.9 \text{ m} \leq z \leq 1.1 \text{ m}$$

Για τη συγκεκριμένη διεύθυνση ροής, οι ασυνέχειες που συμβάλλουν στη συνολική παροχή, είναι οι ασυνέχειες που είναι ορθές ως προς τους άξονες x και y. Η συνολική παροχή θα υπολογίζεται:

$$Q_{z_{in}} [m^3/s] = Q_{s,z_{in}} (L_x + L_y) \quad (\text{Εξ. 2-26})$$

$$Q_{z_{out}} [m^3/s] = Q_{s,z_{out}} (L_x + L_y) \quad (\text{Εξ. 2-27})$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το 3DEC είναι:

$Q_{zin} = -1.25004e-005 \text{ (real)}$
$Q_{zout} = -1.25003e-005 \text{ (real)}$

2.3 Σύστημα τριών τεμνόμενων ασυνεχειών σε δείγμα πετρώματος (συμπεριλαμβανομένης και μίας εσωτερικής ασυνέχειας)

2.3.1 Θεωρητική έκφραση της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας για δείγμα πετρώματος με τρεις τεμνόμενες ασυνέχειες

Στο Σχήμα 2-7 φαίνεται η γεωμετρία του υπό εξέταση δείγματος σε τομή. Η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση (“3D cross”) έγκειται στην παρουσία μίας «εσωτερικής» ασυνέχειας, η οποία δεν τέμνει τις εξωτερικές επιφάνειες του δείγματος κατά τη διεύθυνση x .

Θεωρώντας για παράδειγμα την περίπτωση ροής κατά τη διεύθυνση z και εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία του συγκεκριμένου συστήματος, έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε αναλυτικά αυτό το πρόβλημα ροής στο επίπεδο (x,z) χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:

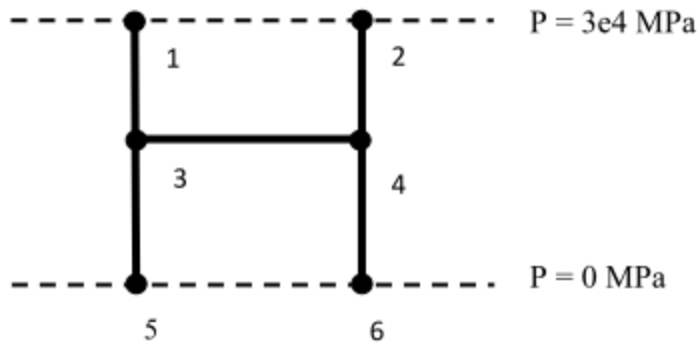
- 1) **Αρχή διατήρησης της μάζας σε κάθε κόμβο:** το αλγεβρικό άθροισμα των παροχών από όλους τους κόμβους “ i ” προς ένα δεδομένο κόμβο “ j ” πρέπει να είναι μηδενικό για κάθε κόμβο “ j ”.

Σημείωση: Οι παροχές Q_{ij} είναι σε $[m^2/s]$ όταν χρησιμοποιούμε αυτές τις εξισώσεις για μία επίπεδη διατομή (x,z) . Ωστόσο, γνωρίζοντας ότι το πραγματικό πρόβλημα είναι σε τρεις διαστάσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή Q_{ij} σε m^3/s πολλαπλασιάζοντας την με το μήκος του δείγματος στη διεύθυνση y , δηλαδή με το L_y ($Q_{ij} \leftarrow Q_{ij} \times L_y$).

- 2) **Νόμος του Poiseuille για κάθε τμήμα μεταξύ δύο κόμβων:** η παροχή Q_{ij} μεταξύ δύο κόμβων (i, j) είναι ανάλογη της διαφοράς πίεσης $(P_j - P_i)$ μεταξύ των δύο κόμβων.

Σημείωση: η πίεση “ P ” αντιπροσωπεύει στην ουσία την ολική πίεση ($P = p + \rho g z$).

Προκύπτει έτσι ένα σχετικά μικρό σύστημα εξισώσεων, το οποίο μπορούμε να λύσουμε με το χέρι όπως περιγράφεται παρακάτω.



Σχήμα 2-7: Τομή σε επίπεδο (x,z) όπου φαίνονται αριθμημένοι οι κόμβοι του συστήματος.

Για τον υπολογισμό της παροχής κάθε τμήματος μεταξύ δύο κόμβων είναι απαραίτητη η γνώση της τιμής της πίεσης σε κάθε κόμβο.

Σύμφωνα με το νόμο του Poiseuille (ροή μεταξύ δύο παράλληλων και λείων επιπέδων), λαμβάνουμε:

$$Q_{ij} = -A_{ij} \frac{(P_j - P_i)}{L_{ij}} \quad (\text{Εξ. 2-28})$$

Όπου: $A_{ij} = \frac{1}{12\mu} (a_{ij})^3 L_y$ (Εξ. 2-29) και $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P_5 = P_6 = P_{OUT} \quad (\text{Εξ. 2-30α})$$

$$P_1 = P_2 = P_{IN} \quad (\text{Εξ. 2-30β})$$

Poiseuille:

$$Q_{13} = -A_{13} \left(\frac{P_3 - P_{IN}}{L_{13}} \right) \xrightarrow{A = -\frac{A_{13}}{L_{13}}} Q_{13} = A(P_3 - P_{IN}) \quad (\text{Εξ. 2-31α})$$

$$Q_{35} = -A_{35} \left(\frac{P_{OUT} - P_3}{L_{35}} \right) \xrightarrow{B = -\frac{A_{35}}{L_{35}}} Q_{35} = B(P_{OUT} - P_3) \quad (\text{Εξ. 2-31β})$$

$$Q_{24} = -A_{24} \left(\frac{P_4 - P_{IN}}{L_{24}} \right) \xrightarrow{C = -\frac{A_{24}}{L_{24}}} Q_{24} = C(P_4 - P_{IN}) \quad (\text{Εξ. 2-31}\gamma)$$

$$Q_{46} = -A_{46} \left(\frac{P_{OUT} - P_4}{L_{46}} \right) \xrightarrow{D = -\frac{A_{46}}{L_{46}}} Q_{46} = D(P_{OUT} - P_4) \quad (\text{Εξ. 2-31}\delta)$$

$$Q_{34} = -A_{34} \left(\frac{P_4 - P_3}{L_{34}} \right) \xrightarrow{E = -\frac{A_{34}}{L_{34}}} Q_{34} = E(P_4 - P_3) \quad (\text{Εξ. 2-31}\epsilon)$$

Αρχή διατήρησης της μάζας σε κάθε κόμβο:

$$\text{κόμβος 3: } Q_{13} = Q_{35} + Q_{34} \quad (\text{Εξ. 2-32}\alpha)$$

$$\text{κόμβος 4: } Q_{46} = Q_{34} + Q_{24} \quad (\text{Εξ. 2-32}\beta)$$

αντικαθιστώντας τους όρους των Εξισώσεων 2-32α και 2-32β από το σύστημα των εξισώσεων 2-31, έχουμε:

$$2-32\alpha \rightarrow P_3 = \frac{1}{A+B+E} (BP_{OUT} + AP_{IN} + EP_4) \quad (\text{Εξ. 2-33}\alpha)$$

$$2-32\beta \rightarrow P_4 = \frac{1}{E+C+D} (DP_{OUT} + CP_{IN} + EP_3) \quad (\text{Εξ. 2-33}\beta)$$

Μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την παροχή σε κάθε τμήμα μεταξύ δύο κόμβων και συνεπώς τη συνολική παροχή του συστήματος.

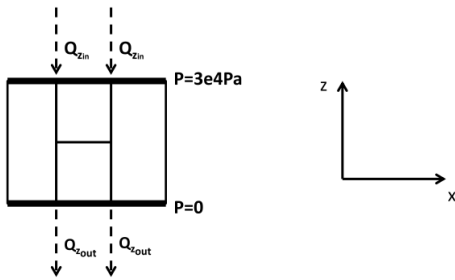
$$Q_{IN} = Q_{OUT} = Q_{TOTAL} \quad (\text{Εξ. 2-34})$$

$$Q_{IN} = Q_{13} + Q_{24} \quad (\text{Εξ. 2-34}\alpha)$$

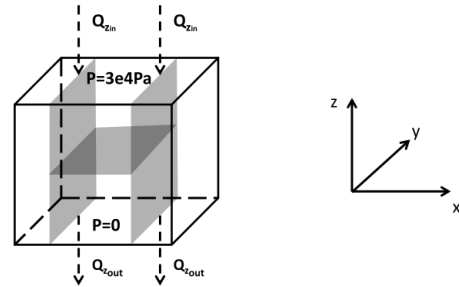
$$Q_{OUT} = Q_{35} + Q_{46} \quad (\text{Εξ. 2-34}\beta)$$

Τελικά, εργαζόμενοι όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του δείγματος (διεύθυνση z) θα είναι:

$$K_{ZZ}^{BLOCK} = \frac{Q_z^{BLOCK}}{A_{DOMAIN} J_z} \quad (\text{Εξ. 2-35})$$



Σχήμα 2-8: Τομή σε επίπεδο (x,z) για την περίπτωση συτήματος ασυνεχειών με μία εσωτερική ασυνέχεια.



Σχήμα 2-9: Τρισδιάστατη όψη του υπό εξέταση δείγματος.

2.3.2 Προσομοίωση υδραυλικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με ένα σύστημα ασυνεχειών που περιλαμβάνει μία εσωτερική ασυνέχεια, με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC

Θα εξετάσουμε το συγκεκριμένο δείγμα για την περίπτωση ροής στη διεύθυνση z. Διατηρώντας τις ίδιες διαστάσεις δείγματος και τις ίδιες ιδιότητες του άρρηκτου πετρώματος, του ρευστού και των ασυνεχειών, εισάγουμε τις οριακές συνθήκες, όπως αυτές προσδιορίστηκαν για την προηγούμενη περίπτωση (3D cross).

Η συνολική εισροή και εκροή για το δείγμα θα είναι το άθροισμα της παροχής δύο ασυνεχειών και η συνολική παροχή υπολογίζεται ως εξής:

$$Q_{z_{in}} [m^3/s] = Q_{s,z_{in}} (2L_y) \quad (\text{Εξ. 2-36})$$

$$Q_{z_{out}} [m^3/s] = Q_{s,z_{out}} (2L_y) \quad (\text{Εξ. 2-37})$$

Τα αποτελέσματα από την προσομοίωση στο 3 DEC έχουν ως εξής:

```
Qzin = -1.00012e-005 (real)
Qzout = -1.00012e-005 (real)
```

2.4 Προσδιορισμός της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας K_{ij} από τα αποτελέσματα του 3DEC και σύγκριση με τη θεωρητική ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα

2.4.1 Δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια

Για την περίπτωση του δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια το μητρώο της θεωρητικής ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας K_{ij} , σύμφωνα με τις εξισώσεις (2-5) και (2-7), είναι:

	-8.18	0	0	
$K_{ij}^{THEORETICAL} = 1e - 7$	0	-8.18	0	[m/s]
	0	0	0	

Δεν παρατηρείται ροή στη διεύθυνση z και συνεπώς η z-συνιστώσα της υδραυλικής αγωγιμότητας θα είναι ίση με μηδέν.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προσομοίωση στον αριθμητικό κώδικα 3DEC, η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του δείγματος είναι:

	-8.17607	0	0	
$K_{ij}^{3DEC} = 1e - 7 \times$	0	-8.17546	0	[m/s]
	0	0	0	

όπου:

$$K_{xx}^{3DEC} = \frac{Q_x^{3DEC}}{A_x J_x} \quad (\text{Εξ. 2-38})$$

$$K_{yy}^{3DEC} = \frac{Q_y^{3DEC}}{A_y J_y} \quad (\text{Εξ. 2-39})$$

Η σύγκριση μεταξύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων και αυτών που προέκυψαν από το 3DEC είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική.

2.4.2 Δείγμα πετρώματος με τρεις ασυνέχειες ευθυγραμμισμένες με τους τρεις άξονες (3D cross)

Η θεωρητική ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του δείγματος με τρεις κάθετες μεταξύ τους ασυνέχειες είναι σύμφωνα με τις εξισώσεις (2-16β), (2-17) και (2-18):

	-1.23	0	0	
$K_{ij}^{THEORETICAL} = 1e - 6$	0	-1.09	0	[m/s]
	0	0	-0.68	

Ενώ μέσω της προσομοίωσης με το 3DEC λαμβάνουμε τελικά:

	-1.22629	0	0	
$K_{ij}^{3DEC} = 1e - 6 \times$	0	-1.09005	0	[m/s]
	0	0	-0.68127	

Όπου K_{xx}^{3DEC} , K_{yy}^{3DEC} και K_{zz}^{3DEC} υπολογίζονται από τις εξισώσεις (2-38) και (2-39) με κατάλληλη αντικατάσταση των τιμών της παροχής.

Για ακόμα μία φορά οι θεωρητικές και οι τιμές που λήφθηκαν μέσω του 3DEC είναι πολύ κοντά.

2.4.3 Σύστημα τριών τεμνόμενων ασυνεχειών, συμπεριλαμβανομένης και μίας «εσωτερικής» ασυνέχειας

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε μόνο την ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του δείγματος στη διεύθυνση z, K_{zz} .

Θεωρητική ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα βάσει της εξίσωσης (2-35):

$$K_{zz}^{THEORETICAL} = 5.45e - 7 \text{ m/s}$$

«Πειραματική» τιμή της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας βάσει της προσομοίωσης στο 3DEC:

$$K_{zz}^{3DEC} = 5.45065e - 7 \text{ m/s}$$

Για την περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα είναι και πάλι σύμφωνα.

3 Ισοδύναμες ελαστικές σταθερές ρωγματωμένου πετρώματος με τον κώδικα 3DEC

Μια σειρά από διαφορετικά είδη φόρτισης θα πραγματοποιηθούν με τη βοήθεια του 3DEC προκειμένου να προσδιοριστούν οι ισοδύναμες ελαστικές σταθερές στην κλίμακα μεγέθους ενός δείγματος πετρώματος 1.5m x 1.5m x 1.5m. Θα εξεταστεί η μηχανική συμπεριφορά του δείγματος στην περίπτωση ενός ελαστικού, ισότροπου δείγματος, χωρίς ασυνέχειες, στην περίπτωση όπου μία οριζόντια ασυνέχεια διατέμνει το δείγμα και τέλος στην περίπτωση όπου τρεις ασυνέχειες, κάθετες μεταξύ τους διατέμνουν το δείγμα (3D cross).

Ο αριθμητικός κώδικας 3DEC μας δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε ένα τρισδιάστατο μοντέλο με την επιθυμητή γεωμετρία και με προκαθορισμένες ιδιότητες και συμπεριφορά του πετρώματος. Υποβάλουμε το προσομοίωμα στο 3DEC σε ορθές και διατμητικές τάσεις σε συγκεκριμένες πλευρές του μοντέλου. Από την επίλυση του μοντέλου και με τη βοήθεια των ενσωματωμένων συναρτήσεων της γλώσσας προγραμματισμού FISH, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τροπές σε μακροσκοπική κλίμακα $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, από τη μέση τιμή των μετατοπίσεων των πλευρών του μοντέλου.

3.1 Περιγραφή και διερεύνηση διαφορετικών ειδών φόρτισης για διάφορες οριακές συνθήκες

Στην παρούσα υποενότητα, πρόκειται να διερευνηθούν και να παρουσιαστούν διαφορετικές συνθήκες φόρτισης, καθώς και τα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν για το κάθε είδος φόρτισης.

Όσον αφορά στην επιλογή των συνθηκών φόρτισης (τάσεις, μετατοπίσεις, ή συνδυασμός αυτών) επιδιώκεται κυρίως η επιβολή ενός σταθερού τανυστή τάσης πεδίου και η προβολή του στις εξωτερικές επιφάνειες του μοντέλου στο 3DEC.

Ωστόσο, η επιβολή συγκεκριμένων ειδών φόρτισης οδηγούσε σε πολλές περιπτώσεις, στην ανεξέλεγκτη περιστροφή του μοντέλου. Το πρόβλημα αυτό ήταν πιο έντονο όταν:

- i. ο αριθμός των «βαθμών ελευθερίας» της μετατόπισης των εξωτερικών επιφανειών του μοντέλου αυξανόταν (άρθρωση ορισμένων πλευρών → συνθήκες κύλισης → πλήρως ελεύθερες πλευρές)
- ii. η ασυμμετρία του δείγματος αυξανόταν (ομοιογενές, άρρηκτο δείγμα → ασύμμετρα ή ακανόνιστα ρωγματωμένο δείγμα)

Ως εκ τούτου, επιδιώκουμε την επιβολή τάσεων μόνο στις εξωτερικές επιφάνειες του δείγματος και στη συνέχεια τον υπολογισμό των αντίστοιχων τροπών. Ας σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι όταν ορίζουμε έναν τανυστή τάσης $\sigma_{ij}(\infty)$ ο εκκυστής σε μία επίπεδη επιφάνεια "B", η οποία χαρακτηρίζεται από το ορθό μοναδιαίο διάνυσμα $n_i(B)$, είναι ένα διάνυσμα τάσης $\Sigma_i(B)$ που λαμβάνεται μέσω της προβολής του τανυστή $\sigma_{ij}(\infty)$ στην B:

$\Sigma_i(B) = \sigma_{ij}(\infty) n_j(B)$ ή σε τανυστική/διανυσματική μορφή:

$$\underline{\Sigma}(B) = \underline{\sigma}(\infty) \underline{n}(B)$$

Ας σημειωθεί σ' αυτό το σημείο ότι στην παρούσα εργασία, οι ορθές τάσεις είναι αρνητικές όταν είναι θλιπτικές, ενώ όσον αφορά στις διατμητικές τάσεις, όταν σε μία εδρα κύβου η αρνητική ορθή τάση έχει αντίθετη φορά από τον θετικό ημιάξονα του καρτεσιανού συστήματος, τότε οι αρνητικές διατμητικές τάσεις έχουν αντίθετη φορά από τους αντίστοιχους θετικούς ημιάξονες.

3.1.1 Το πρόβλημα της περιστροφής του μοντέλου στον κώδικα 3DEC

Κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης με τον αριθμητικό κώδικα 3DEC, και για ορισμένες οριακές συνθήκες φόρτισης που αναπτύσσονται στη συνέχεια, παρατηρήθηκε περιστροφή του μοντέλου, με την μορφή της περιστροφής στερεού σώματος, επιπλέον της παραμόρφωσης του πετρώματος του μοντέλου.

Στο Παράρτημα 6.1 (*R. Ababou, προσωπική επικοινωνία*) φαίνεται η θεωρητική ανάλυση του τανυστή της παραμόρφωσης $D_{ij} = dU_i/dx_j$ στον τανυστή της τροπής (E_{ij} ή ϵ_{ij}) και στον τανυστή της περιστροφής στερεού σώματος (R_{ij} ή τ_{ij}). Εξ' ορισμού, ο τανυστής της παραμόρφωσης D_{ij} είναι η κλίση του διανύσματος της μετατόπισης (U_i ή u_i). Ο τανυστής της τροπής μπορεί επίσης να αναλυθεί στον τανυστή ογκομετρικής ή σφαιρικής τροπής και στον τανυστή αποκλίνουσας τροπής (Παράρτημα 6.2).

Με την προϋπόθεση της επίτευξης ισορροπίας στο μοντέλο, τα αποτελέσματα από τα αριθμητικά πειράματα διαβεβαιώνουν ότι για συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης και για γεωμετρικά ασύμμετρο μοντέλο, αυτό περιστρέφεται.

Το πρόβλημα αυτό έγινε αντιληπτό και από άλλους ερευνητές, όπως ο A. Thoraval (INERIS Nancy, προσωπική επικοινωνία), ο οποίος τόνισε ότι μία πιθανή λύση για την αντιμετώπιση των περιστροφών είναι ο περιορισμός ορισμένων σημείων του μοντέλου, δηλαδή η απόδοση σε αυτά μηδενικού διανύσματος μετατόπισης ($u_x=u_y=u_z=0$). Ωστόσο, κάτι τέτοιο θα προκαλούσε άλλα προβλήματα όπως είναι η ανομοιογενής κατανομή των τάσεων γύρω από τα συγκεκριμένα σημεία.

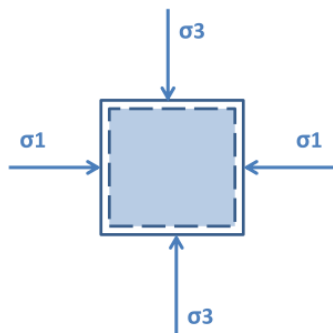
Λαμβάνοντας υπόψη το σκοπό του upscaling, οι μετρούμενες τάσεις και παραμορφώσεις στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος, είναι δυνατόν να επηρεαστούν σε μεγάλο βαθμό από αυτά τα σημεία μηδενικής μετατόπισης, καθώς αυτό που επιδιώκεται είναι η εξαγωγή μέσω των τιμών τροπής ή/και τάσης που θα αντιπροσωπεύουν ομοιογενείς συνθήκες παραμόρφωσης ή και φόρτισης του μοντέλου, έτσι ώστε ο λόγος τροπή/τάση (ενδοτικότητα) να είναι ανεξάρτητος από κάθε είδος φόρτισης.

3.1.2 Παραδείγματα περιστροφών στο 3DEC για διάφορα είδη φόρτισης

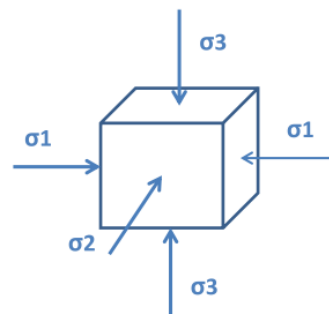
Ας θεωρήσουμε αρχικά την επιβολή ορθών τάσεων στο τρισδιάστατο μοντέλο, η οποία επιτυγχάνεται μέσω της επιβολής ενός διαγωνίου 3×3 τανυστή τάσης: $\sigma_{ij}(\infty) = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$

3.1.2.1 Άρρηκτο δείγμα πετρώματος (επιβολή ορθών τάσεων)

Ο παραπάνω διαγώνιος τανυστής εφαρμόστηκε στις εξωτερικές επιφάνειες του ελαστικού και ισότροπου άρρηκτου δείγματος πετρώματος. Το μοντέλο στο 3DEC είναι ευθυγραμμισμένο με τους άξονες x_1, x_2, x_3 ή x, y, z αντίστοιχα. Η επιβολή του τανυστή $\sigma_{ij}(\infty) = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$ αποτελεί ουσιαστικά την επιβολή των ορθών διανυσμάτων της τάσης ($\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3$) στα τρία ζεύγη των εξωτερικών επιφανειών του μοντέλου, όπου $\underline{\sigma}_1 = -\sigma_{11} \underline{n}_1$, $\underline{\sigma}_2 = -\sigma_{22} \underline{n}_2$ και $\underline{\sigma}_3 = -\sigma_{33} \underline{n}_3$ και \underline{n}_1 , το εξωτερικό ορθό μοναδιαίο διάνυσμα της επίπεδης επιφάνειας που είναι κάθετη στον άξονα x_1 , \underline{n}_2 το εξωτερικό ορθό μοναδιαίο διάνυσμα της επίπεδης επιφάνειας που είναι κάθετη στον άξονα x_2 και \underline{n}_3 το εξωτερικό ορθό μοναδιαίο διάνυσμα της επίπεδης επιφάνειας που είναι κάθετη στον άξονα x_3 .



Σχήμα 3-1: Τομή σε επίπεδο (x, z), όπου φαίνονται οι ορθές τάσεις και η αναμενόμενη παραμόρφωση του δείγματος (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 3-2: Όψη σε τρεις διαστάσεις.

Στον αριθμητικό κώδικα 3DEC, οι συνθήκες φόρτισης στο μοντέλο εφαρμόζονται μέσω του προσδιορισμού ενός συγκεκριμένου εύρους σημείων του μοντέλου και ενός τανυστή τάσης που θα ασκείται στο εύρος αυτό. Μόνο

έξι από τους εννέα όρους του τανυστή απαιτούνται για τον προσδιορισμό του στο 3DEC, λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία του τανυστή και η αντίστοιχη εντολή στο 3DEC είναι της μορφής:

boundary stress sxx syy szz sxy sxz syz range x y z

Έτσι για το άρρηκτο δείγμα πετρώματος (1.5m×1.5m×1.5m), εισάγουμε τις παρακάτω εντολές:

```
bound stress -0.5e6 0 0 0 0 0 range x 1.49 1.51
bound stress -0.5e6 0 0 0 0 0 range x -0.01 0.01
bound stress 0 -0.5e6 0 0 0 0 range y 1.49 1.51
bound stress 0 -0.5e6 0 0 0 0 range y -0.01 0.01
bound stress 0 0 -1e6 0 0 0 range z 1.49 1.51
bound stress 0 0 -1e6 0 0 0 range z -0.01 0.01
```

που είναι ισοδύναμες με την επιβολή του παρακάτω τανυστή σε όλο το δείγμα:

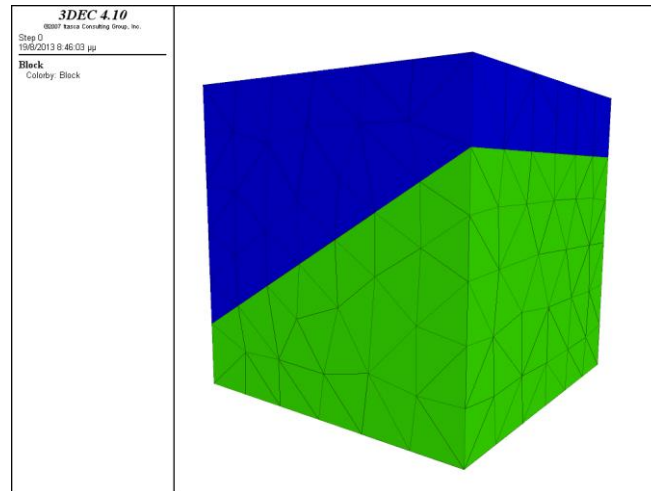
$$\sigma[Pa] = \begin{bmatrix} -0.5e6 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5e6 & 0 \\ 0 & 0 & -1e6 \end{bmatrix}$$

Μέσω του συγκεκριμένου παραδείγματος, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις ισοδύναμες ελαστικές σταθερές του δείγματος, οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να συγκριθούν με το μέτρο ελαστικότητας του υλικού $E=5\text{GPa}$ και το λόγο του Poisson $\nu=0.3$, προκειμένου να επαληθευτούν, όπως περιγράφεται στις επόμενες ενότητες.

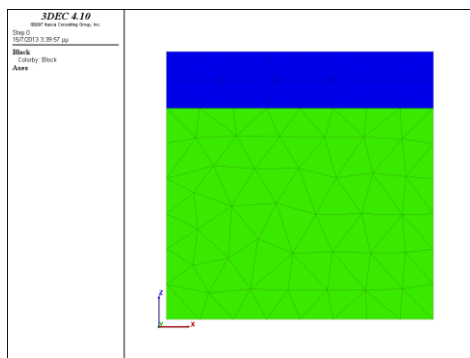
3.1.2.2 Ρωγματωμένο δείγμα πετρώματος (επιβολή ορθών τάσεων)

Το παραπάνω παράδειγμα περιγράφηκε για λόγους σύγκρισης καθώς δεν παρατηρείται περιστροφή του μοντέλου κατά την εκτέλεσή του. Ωστόσο, στην περίπτωση δείγματος με ίδιες διαστάσεις και ιδιότητες και για τις ίδιες συνθήκες φόρτισης ($s_{xx}=-0.5e6\text{Pa}$, $s_{yy}=-0.5e6\text{Pa}$, $s_{zz}=-1e6\text{Pa}$, $s_{xy}=0$, $s_{yz}=0$, $s_{xz}=0$), με μόνη διαφορά την παρουσία μίας κεκλιμένης ασυνέχειας, το πρόβλημα της περιστροφής είναι ιδιαίτερα έντονο. Η ασυνέχεια χαρακτηρίζεται από ορθή δυσκαμψία $K_n=10e9 \text{ Pa/m}$ και διατμητική δυσκαμψία $K_s=1e9 \text{ Pa/m}$. Με το πέρας της προσομοίωσης το μοντέλο έχει

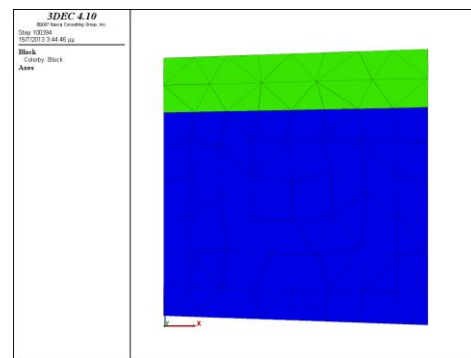
περιστραφεί κατά 180°, γύρω από τον άξονα x, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3-4 και 3-5:



Σχήμα 3-3: Ρωγματωμένο δείγμα πετρώματος με μία κεκλιμένη ασυνέχεια (κλίση=30°, διεύθυνση κλίσης=0°). Το άρρηκτο πέτρωμα θεωρείται ελαστικό.



Σχήμα 3-4: Αρχική θέση του μοντέλου με μία κεκλιμένη ασυνέχεια, στο 3DEC.



Σχήμα 3-5: Τελική θέση του μοντέλου: με το πέρας της προσομοίωσης, το μοντέλο έχει περιστραφεί κατά 180° γύρω από τον άξονα x.

Είναι φανερό λοιπόν ότι το μοντέλο έχει περιστραφεί και οι τροπές που υπολογίστηκαν είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με το μέγεθος των ασκούμενων τάσεων και τις ιδιότητες της ασυνέχειας, εξαιτίας της περιστροφής κατά 180°:

```

zzstrain_ = 1.99861 (real)
xxstrain_ = -0.00380574 (real)
yystrain_ = 2.00337 (real)
yzstrain_ = 0.0121819 (real)
zxstrain_ = -0.0264524 (real)
xystrain_ = 0.0919548 (real)

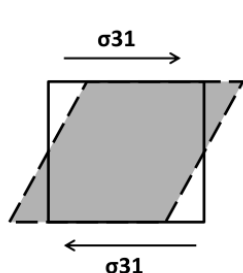
```

Η περιστροφή του μοντέλου σ'αυτή την περίπτωση προκαλείται από την παρουσία της κεκλιμένης ασυνέχειας (γεωμετρική ασυμμετρία) και της προκληθείσας διατμητικής τάσης στο επίπεδό της.

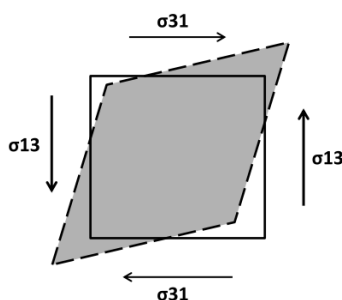
Ο τρόπος υπολογισμού των τροπών στο 3DEC, καθώς και ο τρόπος υπολογισμού των τάσεων στο μοντέλο, που θα μας χρησιμεύσει αργότερα, περιγράφονται αναλυτικά στο τέλος της παρούσας ενότητας.

3.1.2.3 Άρρηκτο δείγμα πετρώματος και δείγμα με μία κεκλιμένη ασυνέχεια (επιβολή διατμητικών τάσεων)

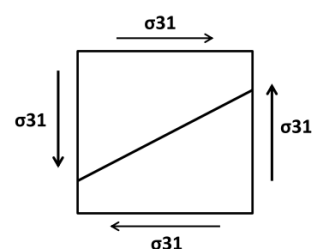
Παρόμοια προβλήματα περιστροφής του μοντέλου, παρατηρήθηκαν και κατά την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του μοντέλου υπό τη δράση διατμητικών τάσεων. Για τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 3-6, Σχήμα 3-7, Σχήμα 3-8) το πρόβλημα ήταν για ακόμα μία φορά έντονο.



Σχήμα 3-6: Επιβολή διατμητικής τάσης που οδηγεί σε περιστροφή του μοντέλου (άρρηκτο, ελαστικό, ισότροπο δείγμα).



Σχήμα 3-7: Επιβολή διατμητικών τάσεων $\sigma_{13} > \sigma_{31}$ που οδηγεί σε περιστροφή του μοντέλου (άρρηκτο, ελαστικό, ισότροπο δείγμα).

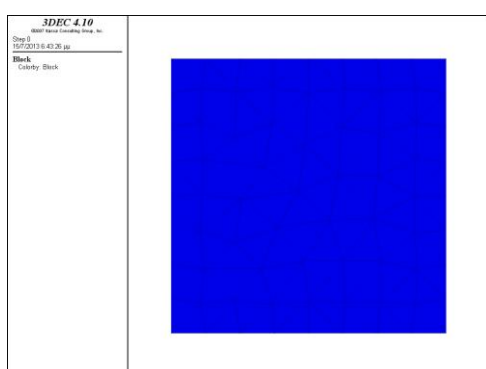


Σχήμα 3-8: Επιβολή διατμητικών τάσεων $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ που οδηγεί σε περιστροφή του μοντέλου (δείγμα με μία κεκλιμένη ασυνέχεια).

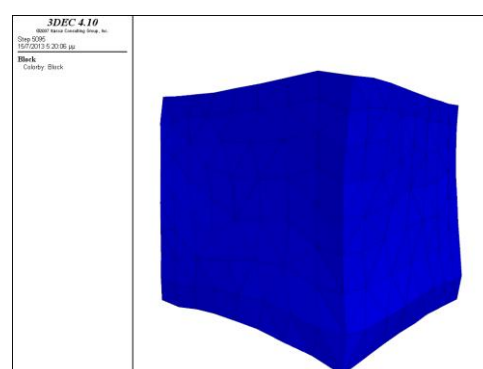
Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 3-6) το δείγμα περιστρέφεται εξαιτίας της επιβαλλόμενης διατμητικής τάσης (σ_{31}). Για την απλή περίπτωση του άρρηκτου δείγματος, το μοντέλο δεν περιστρέφεται όταν ταυτόχρονα ασκείται και η συμμετρική συνιστώσα της τάσης σ_{31} , η σ_{13} . Αν εφαρμόσουμε τις τάσεις σ_{31} και σ_{13} και θεωρήσουμε ότι $\sigma_{31} \neq \sigma_{13}$, προκειμένου να προσομοιώσουμε την ύπαρξη κάποιας κεκλιμένης ασυνέχειας που θα επιδρούσε στη συμπεριφορά του μοντέλου, τότε θα παρατηρείτο και πάλι ανεπιθύμητη περιστροφή. Συνεπώς και για το μοντέλο που διατέμνεται από

μία κεκλιμένη ασυνέχεια παρατηρείται αναπόφευκτη και ανεξέλεγκτη περιστροφή.

Θα αναφερθούμε εν συντομία σ' αυτό το σημείο, στην περιστροφή του μοντέλου που δεν προκύπτει λόγω γεωμετρικών ασυμμετριών αλλά λόγω επιβολής τάσης της τάξης του $1/50$ του E (μέτρο ελαστικότητας άρρηκτου πετρώματος). Εκτός της περιστροφής, παρατηρήθηκε και σημαντική παραμόρφωση του μοντέλου, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 3-9 και 3-10):



Σχήμα 3-9: Μοντέλο στο 3DEC στο οποίο ασκείται τάση $\sigma=1/50E$.



Σχήμα 3-10: Τελική θέση του μοντέλου μετά από περιστροφή περίπου 270° (δε φαίνεται εδώ) και με σημαντική παραμόρφωση.

Είναι επομένως φανερό, ότι δε μπορούμε να ελέγξουμε την περιστροφή του μοντέλου για δεδομένες ασυμμετρίες, αν και στην περίπτωση ενός περισσότερο πολύπλοκου συστήματος ασυνεχειών η ασυμμετρία δε θα είναι το ίδιο κυρίαρχη λόγω του μεγάλου αριθμού ασυνεχειών με διαφορετικό προσανατολισμό. Ωστόσο, ο προσανατολισμός της κάθε ασυνέχειας αποτελεί σημαντική παράμετρο και επηρεάζει σημαντικά την ισοδύναμη μηχανική συμπεριφορά του πετρώματος.

Για την αποφυγή του προβλήματος της περιστροφής, προσπαθήσαμε να εισάγουμε οριακές συνθήκες μετατόπισης σε ορισμένες εξωτερικές επιφάνειες του μοντέλου. Οι υποενότητες που ακολουθούν παρουσιάζουν ορισμένους τρόπους φόρτισης του δείγματος ενώ διασφαλίζονται τα παρακάτω κριτήρια:

- (i) Παρεμπόδιση της περιστροφής του δείγματος,
- (ii) Επιβολή τάσεων αντί της επιβολής μετατοπίσεων (αν είναι δυνατό)

- (iii) Διατήρηση της ομοιογένειας των επιβαλλόμενων τάσεων και μετατοπίσεων στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος.

3.1.3 Υπολογισμός των μακροσκοπικών τροπών και τάσεων στον αριθμητικό κώδικα 3DEC

Υπολογισμός των μακροσκοπικών τροπών στο 3DEC

Οι μακροσκοπικές τροπές $\langle \mathbf{eij} \rangle_{\text{SAMPLE}}$ υπολογίζονται (στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος) μέσω της μέσης τιμής των μετατοπίσεων συγκεκριμένων σημείων για κάθε πλευρά του δείγματος $\langle \mathbf{ui} \rangle_{\text{FACE}}$:

→ Έτσι για κάθε πλευρά, τα διανύσματα μετατόπισης έντεκα (11) σημείων (gridpoints) υπολογίζονται μέσω της συνάρτησης του 3DEC: $gp_xdis(i)$, $gp_ydis(i)$ και $gp_zdis(i)$. Η μέση τιμή για κάθε συνιστώσα του διανύσματος της μετατόπισης για δεδομένη πλευρά του δείγματος θα είναι:

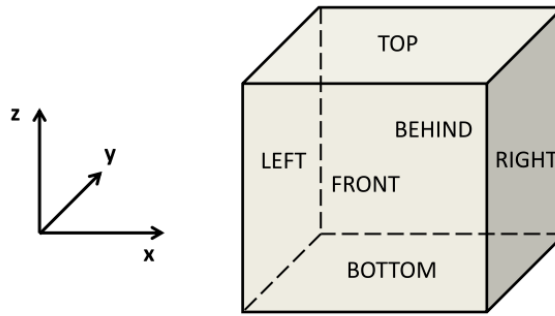
$$\langle u_x \rangle_{\text{FACE}} = \sum_{i=1}^{11} gp_xdis(i) / 11 \quad (\text{Εξ. 3-1}\alpha)$$

$$\langle u_y \rangle_{\text{FACE}} = \sum_{i=1}^{11} gp_ydis(i) / 11 \quad (\text{Εξ. 3-1}\beta)$$

$$\langle u_z \rangle_{\text{FACE}} = \sum_{i=1}^{11} gp_zdis(i) / 11 \quad (\text{Εξ. 3-1}\gamma)$$

Μπορούμε να ορίσουμε στο 3DEC τα παρακάτω:

- “**Top** face” και “**bottom** face”, είναι οι αντικριστές πλευρές του δείγματος που είναι ορθές ως προς τον άξονα z.
- “**Behind** face” and “**front** face”, είναι οι αντικριστές πλευρές του δείγματος που είναι ορθές ως προς τον άξονα y.
- “**Right** face” and “**left** face”, είναι οι αντικριστές πλευρές του δείγματος που είναι ορθές ως προς τον άξονα x.
- L_x , L_y , L_z είναι οι διαστάσεις του δείγματος στη διεύθυνση x, y και z αντίστοιχα.



Σχήμα 3-11: Πλευρές στο μοντέλο του 3DEC όπως ορίστηκαν παραπάνω.

→ Μέσες τροπές στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος $\langle \epsilon_{ij} \rangle_{SAMPLE}$ από τις μέσες τιμές των μετατοπίσεων κάθε πλευράς:

Σύμφωνα με τη σχέση:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{Εξ. 3-2})$$

Οι μέσες ορθές τροπές υπολογίζονται ως εξής:

$$\langle \epsilon_{xx} \rangle_{SAMPLE} = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{\langle u_x \rangle_{RIGHT} - \langle u_x \rangle_{LEFT}}{L_x} \quad (\text{Εξ. 3-3α})$$

$$\langle \epsilon_{yy} \rangle_{SAMPLE} = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \frac{\langle u_y \rangle_{BEHIND} - \langle u_y \rangle_{FRONT}}{L_y} \quad (\text{Εξ. 3-3β})$$

$$\langle \epsilon_{zz} \rangle_{SAMPLE} = \frac{\Delta u_z}{\Delta z} = \frac{\langle u_z \rangle_{TOP} - \langle u_z \rangle_{BOTTOM}}{L_z} \quad (\text{Εξ. 3-3γ})$$

Ενώ οι διαμητικές τροπές:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{yz} \rangle_{SAMPLE} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta u_y}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{\Delta u_z}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\langle u_y \rangle_{TOP} - \langle u_y \rangle_{BOTTOM}}{L_z} + \frac{\langle u_z \rangle_{BEHIND} - \langle u_z \rangle_{FRONT}}{L_y} \right] \quad (\text{Εξ. 3-3δ}) \end{aligned}$$

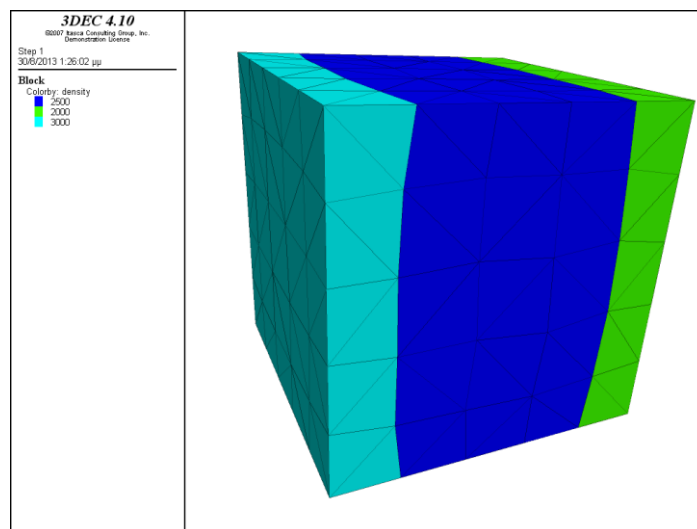
$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{zx} \rangle_{SAMPLE} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta u_z}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta u_x}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\langle u_z \rangle_{RIGHT} - \langle u_z \rangle_{LEFT}}{L_x} + \frac{\langle u_x \rangle_{TOP} - \langle u_x \rangle_{BOTTOM}}{L_z} \right] \end{aligned} \quad (\text{Εξ. 3-3ε})$$

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{xy} \rangle_{SAMPLE} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta u_x}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\langle u_x \rangle_{BEHIND} - \langle u_x \rangle_{FRONT}}{L_y} + \frac{\langle u_y \rangle_{RIGHT} - \langle u_y \rangle_{LEFT}}{L_x} \right] \end{aligned} \quad (\text{Εξ. 3-3στ})$$

Υπολογισμός των μακροσκοπικών τάσεων στο 3DEC

Οι μακροσκοπικές τάσεις στο 3DEC $\langle \sigma_{ij} \rangle_{SAMPLE}$ στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος υπολογίζονται μέσω της μέσης τιμής των τάσεων που ασκούνται στις τετραεδρικές ζώνες πεπερασμένων διαφορών που συνορεύουν με τις εξωτερικές πλευρές του μοντέλου. Τετραεδρικές ζώνες είναι τα στοιχεία στα οποία διακριτοποιείται το μοντέλο 3DEC.

Ορίζουμε πάλι έξι διαφορετικά εύρη σημείων (ένα για κάθε πλευρά), τα οποία θα περιλαμβάνουν τις «οριακές» τετραεδρικές ζώνες. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3-12) φαίνεται η απομόνωση των οριακών ζωνών (boundary zones) της αριστερής (“left” face) και της δεξιάς πλευράς (“right” face) του μοντέλου στο 3DEC.



Σχήμα 3-12: Απομόνωση οριακών ζωνών για την αριστερή (γαλάζιο χρώμα) και δεξιά (πράσινο χρώμα) πλευρά του μοντέλου στο 3DEC.

Αφού έχουν οριστεί τα εύρη σημείων, μέσω ενός αρχείου FISH, το 3DEC αναγνωρίζει τα συγκεκριμένα εύρη με τη βοήθεια της συνάρτησης `find_range('range')`. Στη συνέχεια, εξετάζονται οι συντεταγμένες των κέντρων όλων των ζωνών στις οποίες έχει διακριτοποιηθεί το μοντέλο και μέσω της συνάρτησης `in_range('range','object')` εξετάζεται αν το κέντρο κάθε ζώνης ανήκει σ'ένα από τα προκαθορισμένα εύρη. Εφόσον ανήκει, ανακτώνται οι έξι συνιστώσες του τανυστή της τάσης (σxx, σyy, σzz, σxy, σyz, σxz) που ασκείται στη συγκεκριμένη ζώνη με τη βοήθεια των συναρτήσεων:

`z_sxx('zone')`

`z_syy('zone')`

`z_szz('zone')`

`z_sxy('zone')`

`z_syz('zone')`

`z_sxz('zone')`

καθώς επίσης και η αντίστοιχη μάζα της κάθε ζώνης, η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως συντελεστής βαρύτητας στον υπολογισμό της μέσης τιμής των τάσεων που ασκούνται σε κάθε ορισμένο εύρος. Η συνολική μάζα των οριακών ζωνών που αντιστοιχούν σε κάθε πλευρά του δείγματος είναι:

$$total_mass_{FACE} = \sum_{zone=1}^n z_mass(zone) \quad (\text{Εξ. 3-4})$$

Ενώ το άθροισμα των γινομένων τάση*συντελεστής βαρύτητας (μάζα) των οριακών ζωνών για κάθε πλευρά είναι:

$$total_sigmaxx_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_sxx(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5α})$$

$$total_sigmayy_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_syy(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5β})$$

$$total_sigmazz_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_szz(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5γ})$$

$$total_sigmaxy_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_sxy(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5δ})$$

$$total_sigmayz_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_syz(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5ε})$$

$$total_sigmaxz_{FACE} = \sum_{zone=1}^n [z_sxz(zone) * z_mass(zone)] \quad (\text{Εξ. 3-5στ})$$

Επομένως, για τον υπολογισμό των τάσεων $\langle \sigma_{ij} \rangle_{FACE}$ ΠΟΥ ΘΑ ΑΣΚΟΥΝΤΑΙ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΛΕΥΡΑ, ΘΑ ΕΧΟΥΜΕ:

$$\langle \sigma_{xx} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmaxx_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6α)$$

$$\langle \sigma_{yy} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmayy_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6β)$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmazz_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6γ)$$

$$\langle \sigma_{xy} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmaxy_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6δ)$$

$$\langle \sigma_{yz} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmayz_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6ε)$$

$$\langle \sigma_{xz} \rangle_{FACE} = \frac{total_sigmaxz_{FACE}}{total_mass_{FACE}} \quad (Εξ. 3-6στ)$$

Η συνολική μάζα που αντιστοιχεί στις οριακές ζώνες όλου του δείγματος, δηλαδή και των έξι πλευρών, θα είναι:

$$total_mass_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_mass_{FACE} \quad (Εξ. 3-7)$$

και το άθροισμα των γινομένων τάση×μάζα για τις οριακές ζώνες όλου του δείγματος θα είναι:

$$total_sigmaxx_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigmaxx_{FACE} \quad (Εξ. 3-8α)$$

$$total_sigmayy_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigmayy_{FACE} \quad (Εξ. 3-8β)$$

$$total_sigmazz_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigmazz_{FACE} \quad (Εξ. 3-8γ)$$

$$total_sigmaxy_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigmaxy_{FACE} \quad (Εξ. 3-8δ)$$

$$total_sigmayz_{SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigmayz_{FACE} \quad (Εξ. 3-8ε)$$

$$total_sigma_{xz_SAMPLE} = \sum_{FACE=1}^6 total_sigma_{xz_FACE} \quad (\text{Εξ. 3-8}\sigma\tau)$$

Είναι κατανοητό ότι για κάθε πλευρά θα έχουμε υπολογίσει τον τανυστή της τάσης που θα ασκείται στη συγκεκριμένη πλευρά του δείγματος. Για τον υπολογισμό του τανυστή της τάσης που θα ασκείται σ'όλο το δείγμα, έχουμε:

$$\langle \sigma_{xx} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{xx_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\alpha)$$

$$\langle \sigma_{yy} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{yy_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\beta)$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{zz_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\gamma)$$

$$\langle \sigma_{xy} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{xy_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\delta)$$

$$\langle \sigma_{yz} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{yz_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\epsilon)$$

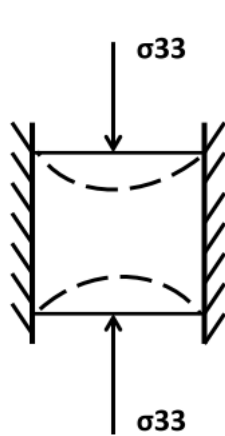
$$\langle \sigma_{xz} \rangle_{SAMPLE} = \frac{total_sigma_{xz_SAMPLE}}{total_mass_{SAMPLE}} \quad (\text{Εξ. 3-9}\sigma\tau)$$

3.2 Προσομοίωση μηχανικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με συνδυασμένες οριακές συνθήκες τάσης και μετατόπισης

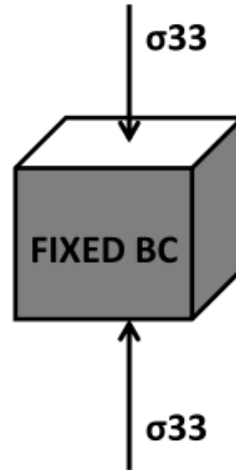
Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εξαιτίας του προβλήματος της περιστροφής του μοντέλου στο 3DEC για διάφορες συνθήκες φόρτισης, θα εξετάσουμε σε αυτό το σημείο τη δυνατότητα αποφυγής της περιστροφής μέσω της πραγματοποίησης αριθμητικών πειραμάτων όπου πέρα από την επιβολή τάσεων, θα εισάγουμε και οριακές συνθήκες μετατόπισης. Οι οριακές συνθήκες μετατόπισης αφορούν κυρίως στην απόδοση μηδενικής ταχύτητας σε συγκεκριμένες πλευρές του μοντέλου, ανάλογα με την εκάστοτε τάση που ασκείται και τη φύση του αριθμητικού πειράματος.

3.2.1 Συνδυασμός ορθής ή διατμητικής τάσης και άρθρωσης των πλευρικών επιφανειών του δείγματος

Αρχικά, επιλέχθηκε η εφαρμογή αρθρώσεων σε όλους τους κόμβους των πλευρών του δείγματος στις οποίες δεν ασκείται καμία τάση. Ορίζοντας κάθε συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας για τους συγκεκριμένους κόμβους ίση με το μηδέν, παρεμποδίζεται η μετατόπιση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση όλων των κόμβων της πλευράς. Για παράδειγμα στην περίπτωση επιβολής τάσης σ_{33} ή σ_{zz} , το διάνυσμα της ταχύτητας των τεσσάρων πλευρών που περιβάλλουν τις επιφάνειες όπου ασκείται η τάση σ_{33} , θα είναι μηδενικό. Η επιβολή αυτών των οριακών συνθηκών οδηγεί αναπόφευκτα σε πάκτωση των πλευρών αυτών, όπως φαίνεται στο σχήμα 3-13



Σχήμα 3-13: Τομή σε επίπεδο (x,z), επιβολή τάσης σ_{33} , άρθρωση των κόμβων των πλευρικών επιφανειών και αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή), λόγω πάκτωσης των πλευρικών επιφανειών.



Σχήμα 3-14: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.

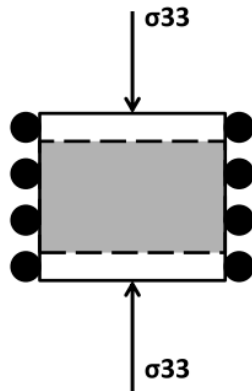
Είναι προφανές ότι λόγω της άρθρωσης των κόμβων των πλευρών, είναι αναγκαίο να εκτιμήσουμε τις αντίστοιχες τάσεις που θα ασκούνται στις πλευρές με μηδενική μετατόπιση, με το πέρας της προσομοίωσης. Η εκτίμηση των τάσεων έγινε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα 3.1.4.

Προκειμένου να ελέγξουμε την καταλληλότητα των παραπάνω οριακών συνθηκών, εξετάσαμε την απλή περίπτωση του άρρηκτου, ελαστικού και ισότροπου δείγματος. Για δεδομένη λοιπόν ορθή τάση, το μοντέλο δεν περιστρέφεται, όπως ήταν αναμενόμενο. Ωστόσο, λόγω του περιορισμού των πλευρικών μετατοπίσεων, το δείγμα παρουσιάζει μη γραμμικά «προφίλ» μετατόπισης στις επιφάνειες που δέχονται την ορθή τάση (Σχήμα 3-13). Παρόμοια συμπεριφορά διπιστώθηκε και στην περίπτωση επιβολής διαμητικής τάσης στο δείγμα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, η μέση τιμή της τροπής που υπολογίστηκε στο 3DEC σύμφωνα με τη σχέση $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ να έχει σημαντική απόκλιση από τη θεωρητική τιμή.

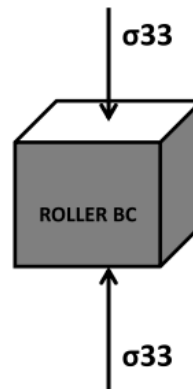
3.2.2 Συνδυασμός ορθής ή διατμητικής τάσης και συνθηκών κύλισης

Θεωρώντας ακατάλληλες τις συνθήκες άρθρωσης των κόμβων των πλευρικών επιφανειών για τους παραπάνω λόγους, διερευνήσαμε τη δυνατότητα διαφορετικών οριακών συνθηκών μετατόπισης, με την επιβολή συνθηκών κύλισης.

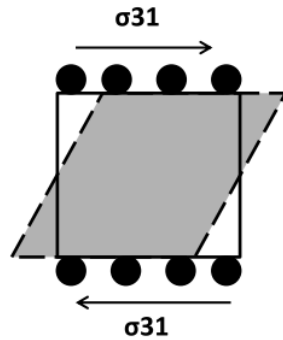
Για αυτού του είδους τα αριθμητικά πειράματα, η κοινή συνθήκη μεταξύ αυτών που πραγματοποιούνται για δεδομένη ορθή τάση και αυτών που πραγματοποιούνται για διατμητική τάση, είναι το γεγονός ότι οι συνθήκες κύλισης εφαρμόζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπεται η μετατόπιση προς την ίδια διεύθυνση με αυτή της επιβαλλόμενης τάσης (ορθή ή διατμητική), όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (Σχήματα 3-15, 3-16 και 3-17, 3-18).



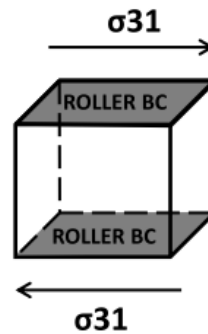
Σχήμα 3-15: Παράδειγμα επιβολής ορθής τάσης. Τομή σε επίπεδο (x,z): συνθήκες κύλισης, αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 3-16: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.



Σχήμα 3-17: Παράδειγμα επιβολής διατμητικής τάσης. Τομή σε επίπεδο (x,z): συνθήκες κύλισης, αναμενόμενη παραμόρφωση (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 3-18: Τρισδιάστατη όψη του δείγματος.

Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε πλευρά στην οποία επιβάλλονται συνθήκες κύλισης, μόνο η ορθή ως προς το επίπεδο της πλευράς, συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας ορίζεται ίση με μηδέν, μηδενίζοντας κατά συνέπεια και την τροπή στην ίδια κατεύθυνση. Και σ' αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητη η εκτίμηση των τάσεων που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος.

Στις επόμενες υποενότητες, περιγράφεται μια σειρά από αριθμητικά πειράματα στο 3DEC με συνθήκες κύλισης και ερμηνεύονται τα αποτελέσματα για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, προκειμένου να προσδιοριστούν οι ισοδύναμες ελαστικές σταθερές του δείγματος.

3.2.3 Γενικευμένος νόμος του Hooke και μητρώο ενδοτικότητας C_{ijkl} 4^{ης} τάξης

Ο κύριος σκοπός της προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς ενός δείγματος πετρώματος είναι ο προσδιορισμός των ισοδύναμων συντελεστών του μητρώου ενδοτικότητας 4^{ης} τάξης, μέσω του γενικευμένου νόμου του Hooke, για την περίπτωση ανισότροπου, ελαστικού υλικού:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, (i,j,k,l) \in \{1,2,3\} \text{ (Εξ. 3-10)}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-11})$$

Το μητρώο ενδοτικότητας C_{ijkl} περιλαμβάνει 81 ($3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$) ανεξάρτητους όρους. Ωστόσο, λόγω των συμμετριών:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

που οφείλονται στους συμμετρικούς όρους των τανυστών τάσης και τροπή, οι ανεξάρτητοι όροι του μητρώου ενδοτικότητας μειώνονται στους 21.

Το σύστημα των εξισώσεων από την παραπάνω σχέση (Εξ. 3-10) προκύπτει ως:

$$\varepsilon_{11} = C_{1111}\sigma_{11} + C_{1122}\sigma_{22} + C_{1133}\sigma_{33} + C_{1123}\sigma_{23} + C_{1131}\sigma_{31} + C_{1112}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11α})$$

$$\varepsilon_{22} = C_{2211}\sigma_{11} + C_{2222}\sigma_{22} + C_{2233}\sigma_{33} + C_{2223}\sigma_{23} + C_{2231}\sigma_{31} + C_{2212}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11β})$$

$$\varepsilon_{33} = C_{3311}\sigma_{11} + C_{3322}\sigma_{22} + C_{3333}\sigma_{33} + C_{3323}\sigma_{23} + C_{3331}\sigma_{31} + C_{3312}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11γ})$$

$$\varepsilon_{23} = C_{2311}\sigma_{11} + C_{2322}\sigma_{22} + C_{2333}\sigma_{33} + C_{2323}\sigma_{23} + C_{2331}\sigma_{31} + C_{2312}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11δ})$$

$$\varepsilon_{31} = C_{3111}\sigma_{11} + C_{3122}\sigma_{22} + C_{3133}\sigma_{33} + C_{3123}\sigma_{23} + C_{3131}\sigma_{31} + C_{3112}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11ε})$$

$$\varepsilon_{12} = C_{1211}\sigma_{11} + C_{1222}\sigma_{22} + C_{1233}\sigma_{33} + C_{1223}\sigma_{23} + C_{1231}\sigma_{31} + C_{1212}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-11στ})$$

3.2.4 Προσομοίωση συμπεριφοράς άρρηκτου ελαστικού και ισότροπου δείγματος πετρώματος σε θλίψη/διάτμηση στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Ας θεωρήσουμε ένα ελαστικό και ισότροπο άρρηκτο δείγμα πετρώματος κυβικού σχήματος. Στην περίπτωση ελαστικού και ισότροπου υλικού η Εξίσωση (3-10) γίνεται:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{Εξ. 3-12})$$

Και η Εξίσωση (3-11) συναρτήσει των E , ν (μέτρο ελαστικότητας και λόγος του Poisson):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-13})$$

Το σύστημα εξισώσεων απλοποιείται σε:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-13α})$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-13β})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-13γ})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-13δ})$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-13ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-13στ})$$

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι για ελαστικό και ισότροπο υλικό (ή τουλάχιστον ορθότροπο), μπορούμε να διατυπώσουμε το νόμο του Hooke ως δύο διαφορετικές σχέσεις:

- Τη «σφαιρική» σχέση μεταξύ τάσης/τροπής
- Την αποκλίνουσα (διαμητική) σχέση μεταξύ τάσης/τροπής

Στο Παράρτημα 6.2 φαίνεται η ανάλυση των τροπών και των τάσεων σε σφαιρικές και διαμητικές συνιστώσες για την περίπτωση ελαστικού και ισότροπου υλικού. Επιπλέον, παρουσιάζεται και η αναδιατύπωση της σχέσης τάσης/τροπής συναρτήσει του μητρώου ενδοτικότητας C_{ijkl} .

Για το άρρηκτο δείγμα πετρώματος και δεδομένων των συνθηκών κύλισης, μόνο ένα αριθμητικό πείραμα απαιτείται για τον προσδιορισμό των ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας συναρτήσει των E , ν . Ωστόσο, έξι πειράματα θα πραγματοποιηθούν, ένα για κάθε συνιστώσα του τανυστή της τάσης προκειμένου να εξεταστούν οι συνθήκες κύλισης που επιλέχθηκαν.

Για τα αριθμητικά πειράματα που ακολουθούν, ορίσαμε:

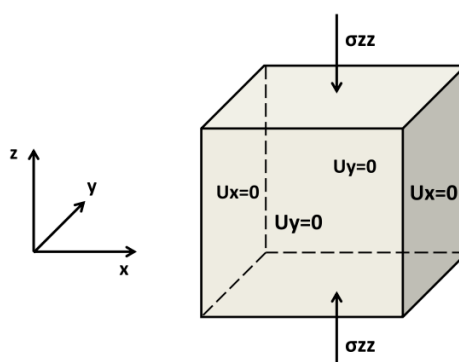
- Μέτρο ελαστικότητας άρρηκτου πετρώματος: $E = 5e9Pa$
- Λόγος του Poisson άρρηκτου πετρώματος: $\nu = 0.3$
- Μέτρο διάτμησης άρρηκτου πετρώματος: $G = 1.92e9Pa$

Ενώ το δείγμα είναι κυβικό με διαστάσεις $1.5m \times 1.5m \times 1.5m$.

3.2.4.1 Επιβολή ορθής τάσης στο δείγμα άρρηκτου, ελαστικού και ισότροπου πετρώματος στο 3DEC (συνθήκες κύλισης) και προσδιορισμός των ελαστικών σταθερών

Επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}) = $-1e6 Pa$

Για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του δείγματος υπό τη δράση ορθής τάσης $\sigma_{33} = -1e6 Pa$, η ορθή τάση με διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα z εφαρμόζεται στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον ίδιο άξονα. Στις πλευρικές επιφάνειες του δείγματος εφαρμόζονται συνθήκες κύλισης οι οποίες περιορίζουν τη μετατόπιση της κάθε επιφάνειας προς την κάθετη στο επίπεδο αυτής διεύθυνση. Οι συνθήκες φόρτισης και μετατόπισης στο δείγμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3-19):



Σχήμα 3-19: Σύνθήκες φόρτισης και μετατόπισης για επιβολή τάσης σ_{33} .

Συνεπώς, ο τανυστής της τάσης που εφαρμόζεται, είναι ο εξής:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1e6 \end{bmatrix} Pa$$

Το δείγμα θα συμπιεστεί κατά τη διεύθυνση z ($\epsilon_{zz} \neq 0$) ενώ οι ορθές τροπές ϵ_{xx} και ϵ_{yy} θα είναι μηδενικές λόγω των συνθηκών κύλισης. Επομένως, η Εξίσωση 3-13 και το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+1}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-14})$$

$$0 = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-14α})$$

$$0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-14β})$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-14γ})$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-14δ})$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-14ε})$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-14στ})$$

Λύνοντας τις εξισώσεις 3-14α και 3-14γ ως προς ν και E , έχουμε:

$$(3-14α) \rightarrow \nu = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22} + \sigma_{33}}$$

$$(3-14β) \rightarrow E = \frac{-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{33}}{\epsilon_{33}}$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC και σύμφωνα με τον τρόπο υπολογισμού των μακροσκοπικών τάσεων και τροπών (υποενότητα 3.1.4), λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Μακροσκοπικές τροπές	
zzstrain_	= 0.000148559 (real)
xxstrain_	= 0 (real)
yystrain_	= 0 (real)
yzstrain_	= -1.21145e-006 (real)
zxstrain_	= -3.97636e-007 (real)

```
xystrain = 1.83657e-011 (real)
```

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι ορθές τροπές στις διευθύνσεις x και y είναι μηδενικές. Όσον αφορά στον ταυστή της τάσης που θα ασκείται σ'όλο το δείγμα στο τέλος της προσομοίωσης, αυτός θα είναι:

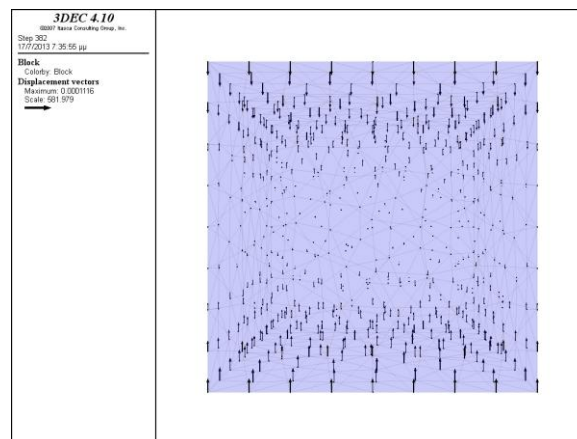
Μακροσκοπικές τάσεις	
total_sxx	= -428571 (real)
total_syy	= -428571 (real)
total_szz	= -1e+006 (real)
total_sxy	= 0.0203999 (real)
total_syz	= -4.84452 (real)
total_sxz	= -0.820946 (real)

Παρατηρούμε ότι $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}$, ενώ οι διαμητικές τάσεις είναι σχεδόν μηδενικές ή αμελητέες συγκριτικά με την τιμή της τάσης που επιβλήθηκε ($\sigma_{zz}=-1\text{e}6\text{Pa}$).

Βάσει των τροποποιημένων εξισώσεων 3-14α και 3-14γ επαληθεύουμε τα αποτελέσματα του 3DEC και τελικά θα έχουμε:

ν	3.00E-01
E	5.00E+09

Οι τιμές των E, ν που προέκυψαν είναι ίδιες με αυτές που ορίσαμε εξ'αρχής για το άρρηκτο δείγμα πετρώματος.



Σχήμα 3-20: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή της ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}).

Επιβολή ορθής τάσης σ_{11} (σ_{xx}) = $-1e6$ Pa

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην περίπτωση επιβολής ορθής τάσης και με τις συνθήκες κύλισης θα έχουμε $\epsilon_{xx} \neq 0$ και $\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}=0$ και το σύστημα εξισώσεων 3-13 θα είναι:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-15α})$$

$$0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-15β})$$

$$0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-15γ})$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-15δ})$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-15ε})$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-15στ})$$

Ενώ ο τανυστής της τάσης που εφαρμόζεται σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -1e6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Λύνοντας και πάλι τις εξισώσεις 3-15β και 3-15γ ως προς E και ν , έχουμε:

$$(3-15β) \rightarrow \nu = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11} + \sigma_{33}}$$

$$(3-15γ) \rightarrow E = \frac{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\epsilon_{11}}$$

Τα αποτελέσματα από την προσομοίωση στο 3DEC για την περίπτωση επιβολής ορθής τάσης σ_{11} (σ_{xx}) είναι:

Μακροσκοπικές τροπές	
zzstrain_	= -1.81379e-011 (real)
xxstrain_	= 0.000148559 (real)
yystrain_	= 0 (real)
yzstrain_	= -1.42146e-011 (real)
zxstrain_	= -1.07871e-006 (real)
xystrain_	= -7.08054e-007 (real)

Μακροσκοπικές τάσεις	
total_sxx	= -1e+006 (real)
total_syy	= -428571 (real)
total_szz	= -428571 (real)
total_sxy	= 3.34233 (real)
total_syz	= -0.0270742 (real)
total_sxz	= 3.92628 (real)

Λύνοντας τις τροποποιημένες εξισώσεις 3-15β και 3-15γ θα προκύψουν πάλι οι ίδιες περίπου τιμές για το E και ν:

ν	3.00E-01
E	5000421247

Επιβολή ορθής τάσης σ₂₂ (σγγ) = -1e6 Pa

Παρομοίως, σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε $\epsilon_{yy} \neq 0$ και $\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz} = 0$, και το σύστημα των εξισώσεων (3-13) διαμορφώνεται ως εξής:

$$0 = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-16α})$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-16β})$$

$$0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-16γ})$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-16δ})$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-16ε})$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-16στ})$$

Ο ταυστής της τάσης για την περίπτωση επιβολής ορθής τάσης σ₂₂ είναι:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1e6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Λύνουμε τις εξισώσεις (3-16β) και (3-16α) ως προς E και ν:

$$(3-16α) \rightarrow \nu = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22} + \sigma_{33}}$$

$$(3-16β) \rightarrow E = \frac{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})}{\epsilon_{22}}$$

Και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το 3DEC είναι:

Μακροσκοπικές τροπές	
zzstrain_	= 0 (real)
xxstrain_	= 0 (real)
yystrain_	= -0.00014856 (real)
yzstrain_	= 1.30349e-006 (real)
zxstrain_	= 1.87863e-011 (real)
xystrain_	= 1.4859e-006 (real)

Μακροσκοπικές τάσεις	
total_sxx	= -428571 (real)
total_syy	= -1e+006 (real)
total_szz	= -428571 (real)
total_sxy	= -0.392535 (real)
total_syz	= 4.87551 (real)
total_sxz	= 0.0188678 (real)

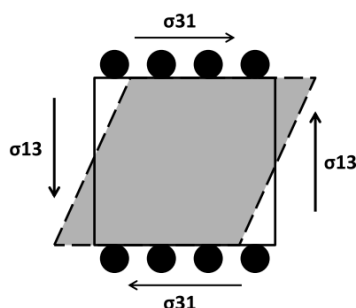
Και σε αυτή την περίπτωση επαληθεύθηκαν τα αποτελέσματα από την προσομοίωση στο 3DEC:

v	3.00E-01
E	5000387588

3.2.4.2 Επιβολή διατμητικής τάσης στο δείγμα άρρηκτου, ελαστικού και ισότροπου πετρώματος στο 3DEC (συνθήκες κύλισης) και προσδιορισμός των ελαστικών σταθερών

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του ελαστικού και ισότροπου άρρηκτου δείγματος πετρώματος υπό τη δράση διατμητικής τάσης, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η συμμετρία του τανυστή της τάσης όσον αφορά στις διατμητικές συνιστώσες, που σημαίνει ότι στην κλίμακα μεγέθους του μοντέλου πρέπει να ασκούνται ταυτόχρονα και οι δύο συμμετρικές συνιστώσες (π.χ. σ_{31} και σ_{13}) στις αντίστοιχες πλευρές. Ας υπενθυμίσουμε ότι για τα αριθμητικά πειράματα διάτμησης στο 3DEC, εφαρμόζουμε συνθήκες κύλισης στις πλευρές του δείγματος στις οποίες ασκείται η εκάστοτε διατμητική τάση, επιτρέποντας έτσι τη μετατόπιση των σημείων των πλευρών αυτών προς την κατεύθυνση της άσκησης της διατμητικής τάσης χωρίς να προκαλείται περιστροφή. Στην περίπτωση επιβολής διατμητικών τάσεων είναι φανερό ότι στις τέσσερις από τις έξι πλευρές του δείγματος θα έπρεπε

κανονικά να εφαρμοστούν συνθήκες κύλισης, κάτι το οποίο θα οδηγούσε στην άρθρωση των αντίστοιχων πλευρών και τελικά σε μη γραμμικά «προφίλ» μετατοπίσεων. Στην προσπάθεια μας να αποφύγουμε την πάκτωση των τεσσάρων πλευρών του δείγματος, επιλέξαμε να εφαρμόσουμε συνθήκες κύλισης στις δύο μόνο από τις τέσσερις πλευρές του δείγματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-21:



Σχήμα 3-21: Τομή σε επίπεδο (x,z): παράδειγμα επιβολής συμμετρικών διατμητικών τάσεων (σ_{31} και σ_{13}) και εφαρμογή συνθηκών κύλισης μόνο στην «πάνω» και «κάτω» πλευρά του δείγματος.

Προς το παρόν, η επιλογή αυτή δεν επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα καθώς πρόκειται για απόλυτα συμμετρικό και ομοιογενές δείγμα. Ωστόσο θα δούμε σε επόμενες υποενότητες ότι τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται ανάλογα με τη θέση εφαρμογής συνθηκών κύλισης στο μοντέλο στην περίπτωση διατμητικών τάσεων. Η προσπάθεια επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος περιγράφεται αναλυτικά στις αντίστοιχες υποενότητες.

Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31}/σ_{13} (σ_{zx}/σ_{xz}) = $-1e6$ Pa

Επιλέγουμε στην περίπτωση της επιβολής των διατμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} την εφαρμογή των συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα z επιδιώκοντας έτσι μηδενική μετατόπιση των πλευρών αυτών στη διεύθυνση που είναι παράλληλη με τον άξονα z ($\epsilon_{zz}=0$). Ο τανυστής της τάσης για την περίπτωση επιβολής διατμητικής τάσης σ_{13}/σ_{31} ορίζεται ως:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1e6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1e6 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Η εξίσωση (3-13) και το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων γίνονται:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\nu+1)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-17})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-17α})$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-17β})$$

$$0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-17γ})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-17δ})$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-17ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-17στ})$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Μακροσκοπικές τροπές	
zzstrain_	= 0 (real)
xxstrain_	= 1.42302e-005 (real)
yystrain_	= -1.04861e-007 (real)
yzstrain_	= 6.32207e-009 (real)
zxstrain_	= -0.000260017 (real)
xystrain_	= 3.89661e-006 (real)

Όπως ήταν αναμενόμενο η τροπή ezz είναι ίση με μηδέν.

Μακροσκοπικές τάσεις	
total_sxx	= 549.703 (real)
total_syy	= 32.2681 (real)
total_szz	= 1045.64 (real)
total_sxy	= -0.0447422 (real)
total_syz	= -0.721345 (real)
total_sxz	= -999995 (real)

Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση (3-17ε) μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του μέτρου διάτμησης G:

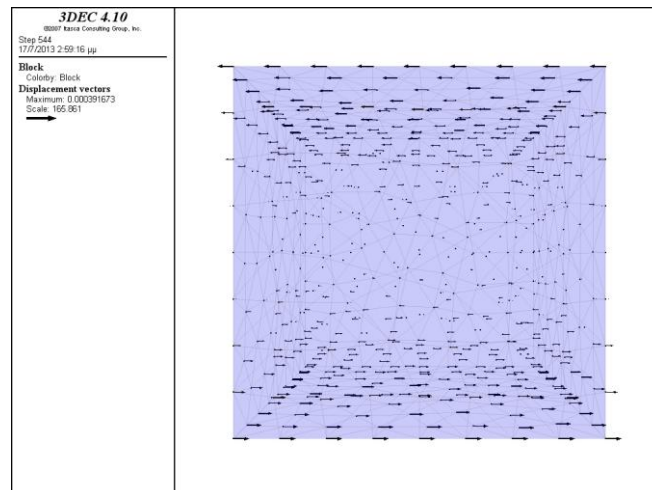
$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G} \sigma_{31} \xrightarrow[\sigma_{31} = -999995 \text{ Pa}]{\varepsilon_{31} = -0.000260017} G = \mathbf{1923059911 \text{ Pa}}$$

Υπολογίζουμε με αυτό τον τρόπο το μέτρο διάτμησης το οποίο είναι ίδιο με αυτό που ορίσαμε αρχικά. Για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας E και του λόγου Poisson ν, λύνουμε την εξίσωση (3-17ε) και την εξίσωση (3-14γ) ως προς E και αφού τις εξισώσουμε προκύπτει:

$$\nu = \frac{\sigma_{33} \varepsilon_{31}^* - \sigma_{31}^* \varepsilon_{33}}{\varepsilon_{31}^* (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{31}^* \varepsilon_{33}} \quad (\text{Εξ. 3-18})$$

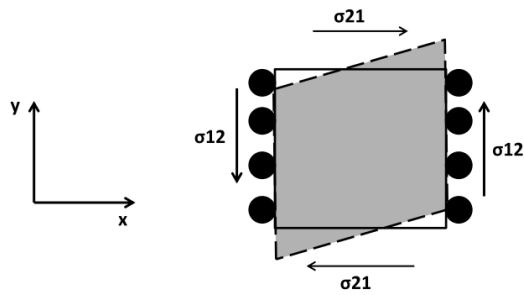
όπου οι όροι με τον αστερίσκο αναφέρονται στις τιμές των τάσεων και τροπών που προέκυψαν από το πείραμα επιβολής των διατμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} . Τελικά λύνοντας ως προς ν και αντικαθιστώντας την τιμή του στην εξίσωση (3-17ε) διαπιστώνουμε ότι για ακόμα μία φορά οι τιμές των E και ν είναι ίδιες με αυτές που ορίσαμε αρχικά:

ν	0.30004828
E	5000141465

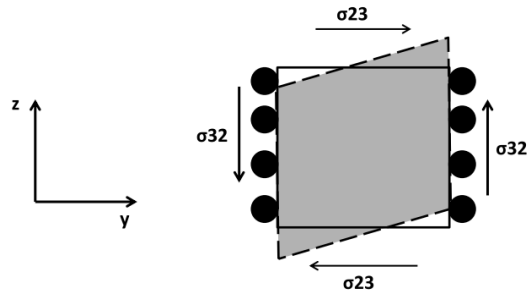


Σχήμα 3-22: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31} (σ_{zx}) και σ_{13} (σ_{xz}).

Για τα αριθμητικά πειράματα όπου ασκούνται οι διατμητικές τάσεις σ_{12}/σ_{21} και σ_{23}/σ_{32} , στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 3-23 και Σχήμα 3-24) φαίνονται οι συνθήκες φόρτισης και μετατόπισης για την κάθε περίπτωση.



Σχήμα 3-23: Τομή σε επίπεδο (x,y). Συνθήκες φόρτισης για τις διατμητικές τάσεις σ_{12} και σ_{21} και συνθήκες κύλισης ($u_x=0 \rightarrow \epsilon_{xx}=0$).



Σχήμα 3-24: Τομή σε επίπεδο (y,z). Συνθήκες φόρτισης για τις διατμητικές τάσεις σ_{23} και σ_{32} και συνθήκες κύλισης ($u_y=0 \rightarrow \epsilon_{yy}=0$).

Για τον προσδιορισμό των E και ν και για την εξακρίβωση των αποτελεσμάτων που λήφθηκαν από το 3DEC, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, όπως για την περίπτωση των διατμητικών τάσεων σ_{31}/σ_{13} . Και για τις δύο περιπτώσεις (σ_{12}/σ_{21} και σ_{23}/σ_{32}) οι τιμές των E , ν συμφωνούν με τις τιμές που ορίσαμε αρχικά.

Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{23}/σ_{32} (σ_{yz}/σ_{zy})

G	1923045119
ν	0.300052281
E	5000118387

Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{12}/σ_{21} (σ_{xy}/σ_{yx})

G	1922850913
ν	0.3001048
E	4999815390

Αφού εξάγουμε τη μέση τιμή των E , ν που υπολογίστηκαν από τα αριθμητικά πειράματα επιβολής ορθών και διατμητικών τάσεων, μπορούμε να εκφράσουμε το μητρώο ενδοτικότητας C_{ijkl} για την περίπτωση του ελαστικού και ισότροπου άρρηκτου δείγματος πετρώματος (Εξίσωση 3-13):

	2	-0.6	-0.6	0	0	0
	-0.6	2	-0.6	0	0	0
$C_{ijkl} = 1e-10 \times$	-0.6	-0.6	2	0	0	0
	0	0	0	2.6	0	0
	0	0	0	0	2.6	0
	0	0	0	0	0	2.6

3.2.5 Προσομοίωση συμπεριφοράς ελαστικού δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια υπό τη δράση ορθής/διατμητικής τάσης στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς δείγματος ελαστικού πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια στον αριθμητικό κώδικα 3DEC πραγματοποιείται και πάλι μία σειρά αριθμητικών πειραμάτων, τόσο για τις ορθές τάσεις όσο και για τις διατμητικές. Η διαδικασία είναι η ίδια όσον αφορά στην επιβολή ορθών τάσεων. Ωστόσο, για την επιβολή των διατμητικών τάσεων, θα παρατηρήσουμε ότι οι τιμές των τροπών διαφοροποιούνται ανάλογα με τις πλευρές στις οποίες εφαρμόζονται οι συνθήκες κύλισης, εξαιτίας της παρουσίας της οριζόντιας ασυνέχειας. Για το λόγο αυτό, θα τροποποιήσουμε τον τρόπο διεξαγωγής των αριθμητικών πειραμάτων για την επιβολή διατμητικών τάσεων στην προσπάθειά μας να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα.

Το ρωγματωμένο δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια, περιμένουμε ότι θα συμπεριφέρεται ως ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό εφόσον η ασυνέχεια είναι ευθυγραμμισμένη με έναν από τους τρεις άξονες x , y , z . Εν τούτοις, για λόγους διατήρησης της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι το υλικό είναι ορθότροπο, με αποτέλεσμα να έχει εννέα ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Ένα τέτοιο υλικό θα μπορούσε να προκύψει από την μικροδομή του άρρηκτου πετρώματος, ή στην περίπτωση της βραχομάζας από την παρουσία τριών αμοιβαία κάθετων συνόλων ασυνεχειών με διαφορετικές

ιδιότητες και/ή συχνότητες. Λόγω της παρουσίας μίας μόνο ασυνέχειας στις προσομοιώσεις αυτής της παραγράφου, κάποιες από τις ελαστικές σταθερές θα είναι ίσες.

Για ένα ορθότροπο υλικό, η εξίσωση (3-11) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-19})$$

όπου: E_{11} το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στη διεύθυνση x_1 (x)

E_{22} το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στη διεύθυνση x_2 (y)

E_{33} το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στη διεύθυνση x_3 (z)

G_{23} το μέτρο διάτμησης του υλικού υπό τη δράση διατμητικής τάσης σ_{23} (σyz)

G_{31} το μέτρο διάτμησης του υλικού υπό τη δράση διατμητικής τάσης σ_{31} (σzx)

G_{12} το μέτρο διάτμησης του υλικού υπό τη δράση διατμητικής τάσης σ_{12} (σxy)

ν_{21} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x_1 προς την τροπή στη διεύθυνση x_2 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{22}

ν_{31} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x_1 προς την τροπή στη διεύθυνση x_3 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{33}

ν_{12} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x_2 προς την τροπή στη διεύθυνση x_1 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{11}

ν_{32} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x_2 προς την τροπή στη διεύθυνση x_3 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{33}

ν_{13} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x_3 προς την τροπή στη

διεύθυνση x1 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{11}

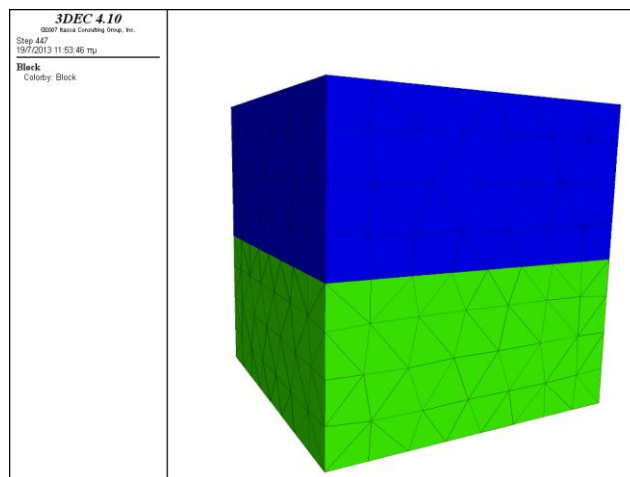
ν_{23} ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση x3 προς την τροπή στη διεύθυνση x2 εξαιτίας της δράσης της τάσης σ_{22}

Η συμμετρία του μητρώου ενδοτικότητας επιβάλλει να ισχύει ότι $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$.

3.2.5.1 Επιβολή ορθής τάσης στο ελαστικό δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, για την επιβολή των ορθών τάσεων θα πραγματοποιηθούν τρία αριθμητικά πειράματα (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}) προκειμένου να προσδιοριστούν οι ισοδύναμοι συντελεστές ενδοτικότητας του δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια, οι οποίοι αντιστοιχούν στις ορθές τάσεις και τροπές. Οι διαστάσεις του δείγματος παραμένουν οι ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση (1.5m×1.5m×1.5m) καθώς και οι ιδιότητες του άρρηκτου πετρώματος ($E=5\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $G=E/(2(\nu+1))=1.92\text{GPa}$), ενώ οι ιδιότητες της ασυνέχειας ορίζονται ως εξής:

- Ορθή δυστροπία **$K_n=10\text{GPa/m}$**
- Διατμητική δυστροπία **$K_s=1\text{GPa/m}$**



Σχήμα 3-25: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC ελαστικού δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια.

Η ασυνέχεια είναι οριζόντια και εκτείνεται στο επίπεδο (x,y). Μπορούμε από τώρα να προβλέψουμε ότι η συνιστώσα του ισοδύναμου μητρώου ενδοτικότητας, C_{3333} θα αυξηθεί συγκριτικά με την αντίστοιχη του άρρηκτου

δείγματος, καθώς λόγω της παρουσίας της οριζόντιας ασυνέχειας το μέτρο ελαστικότητας του ρωγματομένου πετρώματος στην κατακόρυφη διεύθυνση (x3) θα είναι «αποδυναμωμένο».

Επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}) = -1e6 Pa

Ορίζοντας ακριβώς τις ίδιες οριακές συνθήκες, όπως στην επιβολή ορθής τάσης σ_{33} ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13} = 0, 0, -1e6 \text{ Pa}, 0, 0, 0$) σε άρρηκτο δείγμα πετρώματος (Σχήμα 3-19) θα έχουμε:

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, και η Εξίσωση (3-19) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-20})$$

Ενώ το σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$0 = \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20α})$$

$$0 = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20β})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20γ})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-20δ})$$

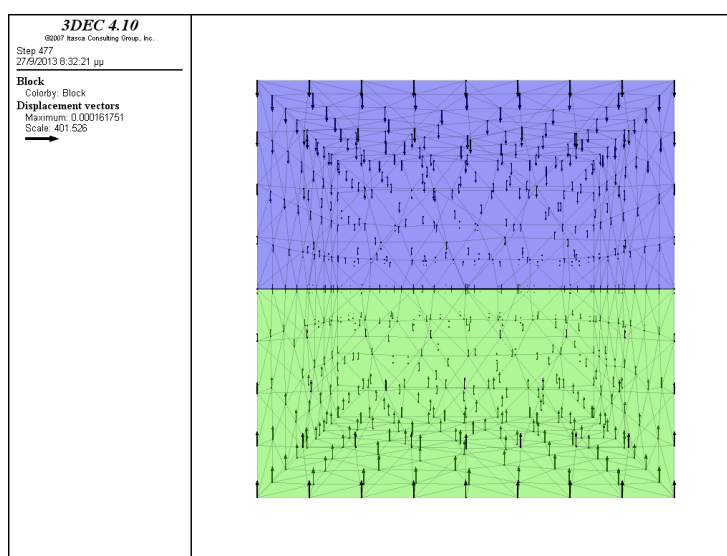
$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-20ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-20στ})$$

Εξαιτίας, των περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών E_{ij}, ν_{ij}, G_{ij} είναι απαραίτητο σ'αυτή την περίπτωση να συνδυάσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τα τρία διαφορετικά πειράματα επιβολής ορθών τάσεων, όπως περιγράφεται στην υποενότητα 3.2.6.

Μετά από την προσομοίωση στο 3DEC υπολογίστηκαν οι παρακάτω μακροσκοπικές τάσεις και τροπές:

Επιβολή τάσης σ_{33}	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
$zzstrain_ = -0.000215226$ (real) $xxstrain_ = 0$ (real) $yystrain_ = 0$ (real) $yzstrain_ = 1.86089e-007$ (real) $zxstrain_ = -2.05468e-007$ (real) $xystrain_ = 1.67336e-011$ (real)	$total_sxx = -428571$ (real) $total_syy = -428571$ (real) $total_szz = -1e+006$ (real) $total_sxy = 0.000574981$ (real) $total_syz = 0.452813$ (real) $total_sxz = 6.12999$ (real)



Σχήμα 3-26: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}).

Επιβολή ορθής τάσης σ_{11} (σ_{xx}) = $-1e6$ Pa

Αντίστοιχα για το αριθμητικό πείραμα επιβολής ορθής τάσης σ_{11} (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{23} , σ_{13} = $-1e6$ Pa, 0, 0, 0, 0, 0) θα έχουμε: $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-21α})$$

$$0 = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-21β})$$

$$0 = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-21γ})$$

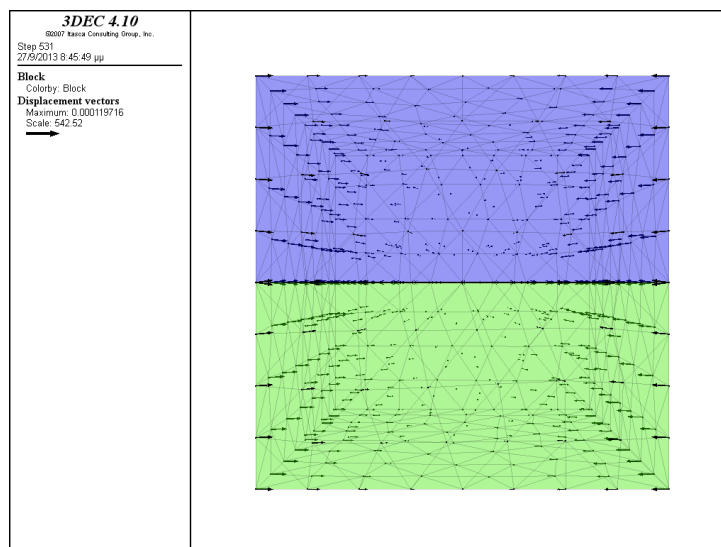
$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-21δ})$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-21ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-21στ})$$

Έπειτα από τους υπολογισμούς στο 3DEC, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Επιβολή τάσης σ11	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = -999979 (real)
xxstrain_ = -0.000157518 (real)	total_syy = -394090 (real)
yystrain_ = 0 (real)	total_szz = -313657 (real)
yzstrain_ = -2.32391e-008 (real)	total_sxy = -0.363455 (real)
zxstrain_ = -1.03473e-006 (real)	total_syz = 0.0233866 (real)
xystrain_ = -2.47054e-007 (real)	total_sxz = 4.40327 (real)



Σχήμα 3-27: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ11 (σχη).

Επιβολή ορθής τάσης σ22 (σγγ)

Τέλος, για το πείραμα επιβολής της ορθής τάσης σ22 (σ11, σ22, σ33, σ12, σ23, σ13 = 0, -1e6 Pa, 0, 0, 0, 0) έχουμε: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$0 = \frac{1}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-22α})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}}\sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-22β})$$

$$0 = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}}\sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-22γ})$$

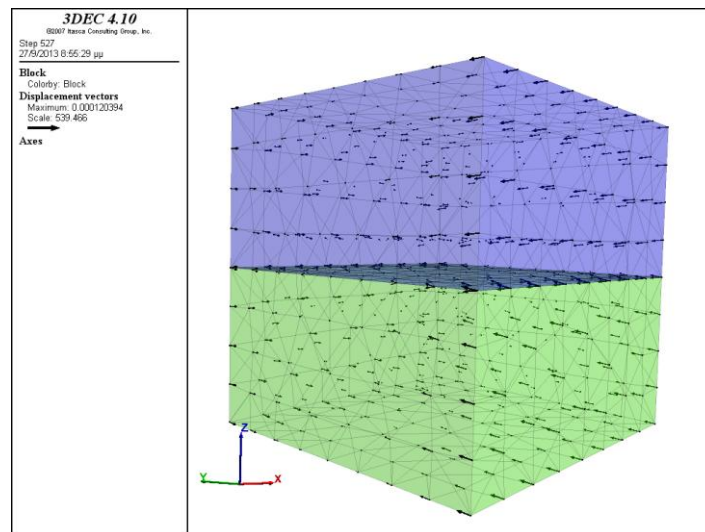
$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}}\sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-22δ})$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}}\sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-22ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}}\sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-22στ})$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC για επιβολή τάσης σ_{22} , οι μακροσκοπικές τροπές και τάσεις υπολογίζονται ως εξής:

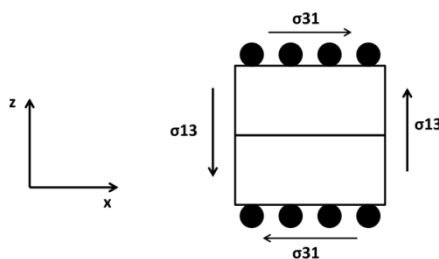
Επιβολή τάσης σ_{22}	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = -394091 (real)
xxstrain_ = 0 (real)	total_syy = -999980 (real)
yystrain_ = -0.000157517 (real)	total_szz = -313661 (real)
yzstrain_ = 1.75264e-007 (real)	total_sxy = -0.425492 (real)
zxstrain_ = -1.06238e-007 (real)	total_syz = 4.46106 (real)
xystrain_ = -1.10591e-006 (real)	total_sxz = -0.03456 (real)



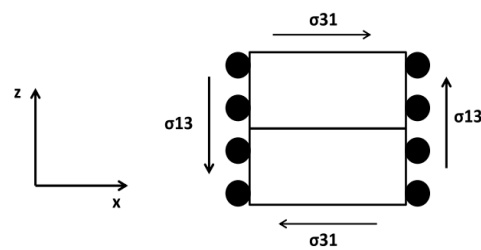
Σχήμα 3-28: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{22} (συγ).

3.2.5.2 Επιβολή διατμητικών τάσεων στο ελαστικό δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια

Όπως έχει προαναφερθεί, ανάλογα με τις θέσεις στις οποίες εφαρμόζονται οι συνθήκες κύλισης, για δεδομένη δράση συμμετρικών διατμητικών τάσεων, οι τιμές των τροπών διαφοροποιούνται εξαιτίας της οριζόντιας ασυνέχειας που διατέμνει το δείγμα. Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 3-26 και Σχήμα 3-27) φαίνεται η διαφορετική δυνατή θέση εφαρμογής των συνθηκών κύλισης στο δείγμα.



Σχήμα 3-29: Επιβολή διατμητικών τάσεων σ_{31}/σ_{13} σε δείγμα με μία οριζόντια ασυνέχεια, τομή σε επίπεδο (x,z). Εφαρμογή συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα z.



Σχήμα 3-30: Εφαρμογή συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα x.

Η διαφοροποίηση στην τιμή της τροπής παρατηρήθηκε μέσω της επιβολής στο συγκεκριμένο μοντέλο στο 3DEC τάσης σ_{31} χωρίς ταυτόχρονη δράση της συμμετρικής τάσης σ_{13} με τις συνθήκες κύλισης να εφαρμόζονται στις επιφάνειες στις οποίες ασκείται η σ_{31} και στη συνέχεια της επιβολής της σ_{13} χωρίς τη δράση της συμμετρικής σ_{31} και τις συνθήκες κύλισης να εφαρμόζονται στις επιφάνειες όπου ασκείται η σ_{13} . Τα αποτελέσματα από τις παραπάνω δοκιμές όσον αφορά στις τροπές φαίνονται παρακάτω:

Μακροσκοπικές τροπές	
σ_{31} (σ_{zx})	σ_{13} (σ_{xz})
zzstrain_ = 0 (real)	zzstrain_ = -1.55557e-005 (real)
xxstrain_ = -1.56779e-006 (real)	xxstrain_ = 0 (real)
yystrain_ = 5.48589e-005 (real)	yystrain_ = 4.85451e-005 (real)
yzstrain_ = 2.48515e-005 (real)	yzstrain_ = 2.67849e-005 (real)
zxstrain_ = -0.000602658 (real)	zxstrain_ = -0.000383761 (real)
xystrain_ = 3.0064e-005 (real)	xystrain_ = 2.03702e-005 (real)

Μπορούμε αμέσως να παρατηρήσουμε τη συγκριτικά μεγάλη διαφορά μεταξύ της τροπής $ezx = -0,000602033$ και της τροπής $exz = -0,000384178$. Προσπαθώντας όμως να διατηρήσουμε τη συμμετρία του τανυστή της τάσης στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος, επιδιώκεται η ταυτόχρονη δράση των συμμετρικών τάσεων (π.χ. σ_{31} και σ_{13}). Με την ταυτόχρονη επιβολή των συμμετρικών τάσεων παραγματοποιούμε ξανά δύο αριθμητικά πειράματα, το ένα με εφαρμογή των συνθηκών κύλισης στις επιφάνειες όπου ασκείται η σ_{31} και το άλλο με εφαρμογή των συνθηκών κύλισης στις επιφάνειες όπου ασκείται η σ_{13} . Οι τιμές των τροπών για κάθε πείραμα θα είναι και πάλι διαφορετικές μεταξύ τους και παρόμοιες με αυτές που προέκυψαν από τη ξεχωριστή επιβολή των διατμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} .

Για να ερμηνεύσουμε λοιπόν τα αριθμητικά πειράματα επιβολής διατμητικών τάσεων στο 3DEC και για να προσδιορίσουμε τελικά τους ισοδύναμους συντελεστές ενδοτικότητας του δείγματος, θα πραγματοποιήσουμε τρία ζεύγη πειραμάτων διάτμησης (δύο για κάθε ζεύγος διατμητικών τάσεων) με τις συνθήκες κύλισης να εφαρμόζονται όπως περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο.

Είναι κατανοητό ότι τα πείραμα διάτμησης σ_{12}/σ_{21} (σ_{xy}/σ_{yx}) και η αντίστοιχη συμπεριφορά του δείγματος δε θα επηρεάζεται από την ύπαρξη της οριζόντιας ασυνέχειας επειδή αυτή εκτείνεται στο επίπεδο (x,y) . Αυτό γίνεται φανερό και κατά τον προσδιορισμό των συντελεστών ενδοτικότητας στην υποενότητα 3.2.6.

Ας υπενθυμίσουμε σ' αυτό το σημείο ότι για συμμετρικά δείγματα πετρώματος (άρρηκτο δείγμα και δείγμα με μία οριζόντια ασυνέχεια) οι συνθήκες κύλισης δεν είναι απαραίτητες καθώς η επιβολή συμμετρικών διατμητικών τάσεων δεν προκαλεί περιστροφές. Ωστόσο, με την προοπτική της μελλοντικής εφαρμογής των αριθμητικών αυτών πειραμάτων σε δείγματα με πιο πολύπλοκη γεωμετρία (π.χ τυχαίος προσανατολισμός ασυνέχειας), όπου παρατηρείται περιστροφή του δείγματος, είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε την καταλληλότητα τους μέσω απλούστερων περιπτώσεων.

Ζεύγη αριθμητικών πειραμάτων επιβολής διατμητικών τάσεων στο 3DEC

Θα παρουσιάσουμε σ' αυτό το σημείο την προσπάθεια ερμηνείας των ζευγών πειραμάτων για την επιβολή διατμητικών τάσεων. Αναφέραμε ότι για κάθε ζεύγος διατμητικών τάσεων, θα εκτελούνται δύο πειράματα. Ο τανυστής της τάσης που ασκείται σ' όλο το δείγμα θα είναι συμμετρικός και ίδιος για τα δύο πειράματα. Αυτό που θα αλλάζει θα είναι η θέση εφαρμογής των συνθηκών κύλισης στο δείγμα.

Υπενθυμίζεται, ότι με την εφαρμογή συνθηκών κύλισης σε μία επιφάνεια, περιορίζεται η κάθετη προς το επίπεδο της επιφάνειας μετατόπιση, θέτοντας την αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος ταχύτητας ίση με μηδέν.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα των συμμετρικών διατμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} . Το Σχήμα 3-26 θα αποτελεί το πείραμα No. [1*] και το Σχήμα 3-27 θα αποτελεί το πείραμα No. [1**]. Θα προσπαθήσουμε μέσα από μία μέθοδο υπέρθεσης των μακροσκοπικών τροπών και τάσεων, να συνδυάσουμε τα πειράματα **No. [1*]** και **No. [1**]** και να εξάγουμε τιμές τάσεων και τροπών που θα αντιπροσωπεύουν ένα ενιαίο πείραμα, το **No. [1]** για τις διατμητικές τάσεις σ_{31} και σ_{13} .

Οι συνθήκες φόρτισης ανεξάρτητα από τις συνθήκες κύλισης για τα πειράματα No. [1*] και No. [1**] θα είναι οι ίδιες, με τον τανυστή τάσης να ορίζεται ως εξής (κλίμακα μεγέθους του δείγματος):

	0	0	$\langle \sigma_{xz} \rangle^\infty$
$\sigma =$	0	0	0
	$\langle \sigma_{zx} \rangle^\infty$	0	0

Οι τανυστές της τάσης για το κάθε πείραμα μετά το τέλος της προσομοίωσης θα είναι αντίστοιχα:

	$\langle \sigma_{xx} \rangle^*$	$\langle \sigma_{xy} \rangle^*$	$\langle \sigma_{xz} \rangle^\infty$
$\sigma[1^*]=$	$\langle \sigma_{yx} \rangle^*$	$\langle \sigma_{yy} \rangle^*$	$\langle \sigma_{yz} \rangle^*$
	$\langle \sigma_{zx} \rangle^\infty$	$\langle \sigma_{zy} \rangle^*$	$\langle \sigma_{zz} \rangle^*$

	$\langle \sigma_{xx} \rangle^{**}$	$\langle \sigma_{xy} \rangle^{**}$	$\langle \sigma_{xz} \rangle^{\infty}$
$\sigma[1^{**}] =$	$\langle \sigma_{yx} \rangle^{**}$	$\langle \sigma_{yy} \rangle^{**}$	$\langle \sigma_{yz} \rangle^{**}$
	$\langle \sigma_{zx} \rangle^{\infty}$	$\langle \sigma_{zy} \rangle^{**}$	$\langle \sigma_{zz} \rangle^{**}$

Όπου $\sigma[1^*]$ και $\sigma[1^{**}]$ είναι συμμετρικοί τανυστές της τάσης. Οι όροι που συμβολίζονται ως $\langle \rangle^*$ και $\langle \rangle^{**}$ είναι οι μακροσκοπικές τάσεις στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος που υπολογίστηκαν μέσω του 3DEC για τα πειράματα No. [1*] και No. [1**] αντίστοιχα, ενώ οι τάσεις $\langle \sigma_{xz} \rangle^{\infty} = \langle \sigma_{zx} \rangle^{\infty} = -1 \text{e6Pa}$ είναι οι διατμητικές τάσεις που επιβλήθηκαν εξ'αρχής στο δείγμα.

Όσον αφορά στους τανυστές των τροπών μετά το τέλος της προσομοίωσης, αυτοί θα διαμορφώνονται ως εξής:

	$\langle \varepsilon_{xx} \rangle^*$	$\langle \varepsilon_{xy} \rangle^*$	$\langle \varepsilon_{xz} \rangle^*$
$\varepsilon[1^*] =$	$\langle \varepsilon_{yx} \rangle^*$	$\langle \varepsilon_{yy} \rangle^*$	$\langle \varepsilon_{yz} \rangle^*$
	$\langle \varepsilon_{zx} \rangle^*$	$\langle \varepsilon_{zy} \rangle^*$	0

Ο συμμετρικός τανυστής της τροπής για το πείραμα No. [1*] περιλαμβάνει τις υπολογισμένες μακροσκοπικές τροπές με την προϋπόθεση ότι λόγω των συνθηκών κύλισης ($u_z=0$) θα έχουμε:

$$\langle \varepsilon_{zz} \rangle^* = 0 \text{ και } \langle \varepsilon_{xz} \rangle^* = \langle \varepsilon_{zx} \rangle^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x_x} + \frac{\partial u_x}{\partial x_z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial x_z},$$

$$\text{καθώς } u_z = 0 \rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial x_x} = 0$$

Ο τανυστής της τροπής για το πείραμα No. [1**] θα είναι:

	0	$\langle \varepsilon_{xy} \rangle^{**}$	$\langle \varepsilon_{xz} \rangle^{**}$
$\varepsilon[1^{**}] =$	$\langle \varepsilon_{yx} \rangle^{**}$	$\langle \varepsilon_{yy} \rangle^{**}$	$\langle \varepsilon_{yz} \rangle^{**}$
	$\langle \varepsilon_{zx} \rangle^{**}$	$\langle \varepsilon_{zy} \rangle^{**}$	$\langle \varepsilon_{zz} \rangle^{**}$

Αντίστοιχα λόγω των συνθηκών κύλισης ($u_x=0$) θα έχουμε:

$$\langle \varepsilon_{xx} \rangle^{**} = 0 \text{ και } \langle \varepsilon_{xz} \rangle^{**} = \langle \varepsilon_{zx} \rangle^{**} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x_x} + \frac{\partial u_x}{\partial x_z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x_x},$$

$$\text{καθώς } u_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x_z} = 0$$

Επομένως ο τανυστής $\varepsilon[1^*]$ δεν θα είναι ίδιος με τον τανυστή $\varepsilon[1^{**}]$. Προκειμένου να εξαγάγουμε ένα και μοναδικό τανυστή τάσης και κυρίως τροπής, οι οποίοι θα αντιπροσωπεύουν ένα ενιαίο πείραμα No. [1] προσθέτουμε τους τανυστές της τροπής που προέκυψαν από τα πειράματα $[1^*]$ και $[1^{**}]$:

$$\varepsilon[1] = \varepsilon[1^*] + \varepsilon[1^{**}] \quad (\text{Εξ. 3-23})$$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και για τους τανυστές της τάσης των πειραμάτων No. $[1^*]$ και No. $[1^{**}]$:

$$\sigma[1] = \sigma[1^*] + \sigma[1^{**}] \quad (\text{Εξ. 3-24})$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την παραπάνω ερμηνεία, για τον προσδιορισμό των ισοδύναμων ελαστικών σταθερών του δείγματος με μία οριζόντια ασυνέχεια, θα πραγματοποιηθούν τρία ζεύγη πειραμάτων:

- Πείραμα No. $[1^*]$ και πείραμα No. $[1^{**}]$ → **πείραμα No.[1]** (σ_{xz}/σ_{xz})
- Πείραμα No. $[2^*]$ και πείραμα No. $[2^{**}]$ → **πείραμα No.[2]** (σ_{yz}/σ_{zy})
- Πείραμα No. $[3^*]$ και πείραμα No. $[3^{**}]$ → **πείραμα No.[3]** (σ_{xy}/σ_{yx})

Πείραμα No.[1] (σ_{xz}/σ_{xz}):

Ο τανυστής που θα εφαρμοστεί και στα δύο πειράματα, No. $[1^*]$ και No. $[1^{**}]$ είναι ο παρακάτω:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1e6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1e6 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

→ **Πείραμα No.[1*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z)**

Λόγω των συνθηκών κύλισης που περιορίζουν τη μετατόπιση του δείγματος στη διεύθυνση z θα έχουμε: $\varepsilon_{33}^{[1^*]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι:

$$\varepsilon_{11}^{[1^*]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[1^*]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[1^*]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[1^*]} \quad (\text{Εξ. 3-25α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[1^*]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[1^*]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[1^*]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[1^*]} \quad (\text{Εξ. 3-25β})$$

$$0 = C_{3311}\sigma_{11}^{[1^*]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[1^*]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[1^*]} \quad (\text{Εξ. 3-25γ})$$

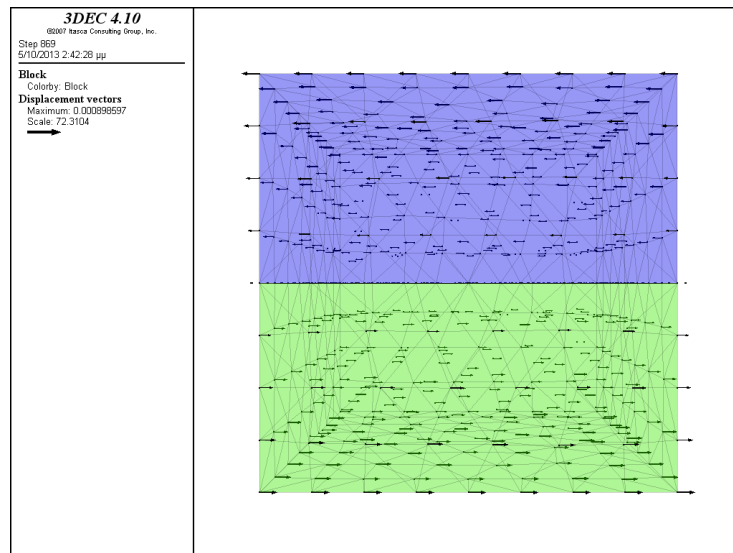
$$\varepsilon_{23}^{[1^*]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[1^*]} \quad (\text{Εξ. 3-25δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[1*]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[1*]} \quad (\text{Εξ. 3-25ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[1*]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[1*]} \quad (\text{Εξ. 3-25στ})$$

Για το πείραμα No.[1*] λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά στις υπολογισμένες τροπές και τάσεις από το 3DEC:

Πείραμα No.[1*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = 1162.53 (real)
xxstrain_ = -1.27593e-006 (real)	total_syy = 32.4307 (real)
yystrain_ = -1.70252e-007 (real)	total_szz = 1360.25 (real)
yzstrain_ = 1.57673e-008 (real)	total_sxy = 0.0645949 (real)
zxstrain_ = -0.00059339 (real)	total_syz = 1.38415 (real)
xystrain_ = -2.95339e-005 (real)	total_sxz = -999993 (real)



Σχήμα 3-31: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης σ_{31} (σxz)/ σ_{13} (σxz), επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.

→ **Πείραμα No.[1**] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x)**

Σ'αυτή την περίπτωση περιορίζεται η μετατόπιση του δείγματος στη διεύθυνση x ($\varepsilon_{11}^{[1**]} = 0$) και το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$0 = C_{1111}\sigma_{11}^{[1**]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[1**]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[1**]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[1**]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[1**]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26β})$$

$$\varepsilon_{33}^{[1**]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[1**]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[1**]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26}\gamma)$$

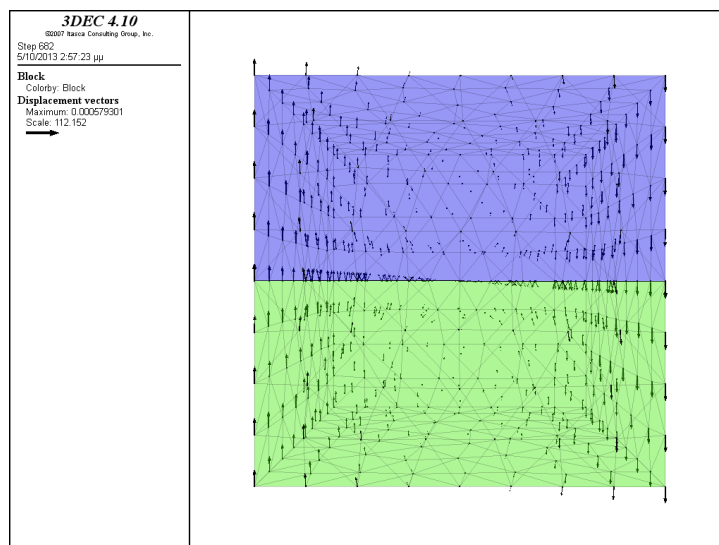
$$\varepsilon_{23}^{[1**]} = C_{3223}\sigma_{23}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26}\delta)$$

$$\varepsilon_{31}^{[1**]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26}\epsilon)$$

$$\varepsilon_{12}^{[1**]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[1**]} \quad (\text{Εξ. 3-26}\sigma\tau)$$

Από την προσομοίωση στο 3DEC, υπολογίζονται οι παρακάτω μακροσκοπικές τροπές και τάσεις:

Πείραμα No.[1**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -7.39109e-006 (real)	total_sxx = 1730.16 (real)
xxstrain_ = 0 (real)	total_syy = -753.317 (real)
yystrain_ = -8.94365e-006 (real)	total_szz = -1973.96 (real)
yzstrain_ = -6.45008e-006 (real)	total_sxy = 341.379 (real)
zxstrain_ = -0.000349515 (real)	total_syz = -134.151 (real)
xystrain_ = -3.50614e-006 (real)	total_sxz = -1.03847e+006 (real)



Σχήμα 3-32: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διαμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{zx})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.

Συνδυάζοντας τα πειράματα [1*] και [1**] σύμφωνα με τον τρόπο που έχει περιγραφεί παραπάνω (εξισώσεις 3-23 και 3-24), λαμβάνουμε:

$$\varepsilon_{11}^{[1]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[1]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[1]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\alpha)$$

$$\varepsilon_{22}^{[1]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[1]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[1]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\beta)$$

$$\varepsilon_{33}^{[1]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[1]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[1]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\gamma)$$

$$\varepsilon_{23}^{[1]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\delta)$$

$$\varepsilon_{31}^{[1]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\epsilon)$$

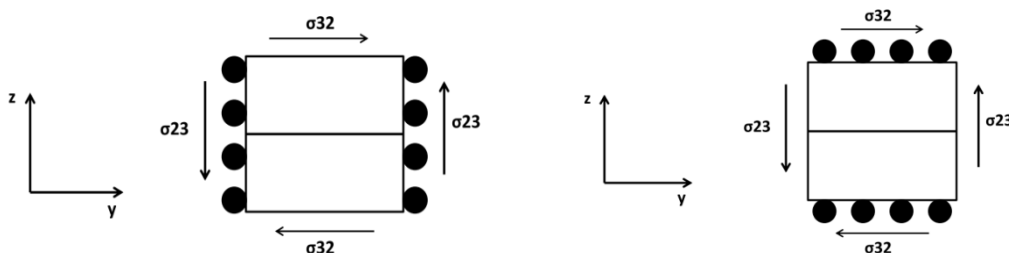
$$\varepsilon_{12}^{[1]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[1]} \quad (\text{Εξ. 3-27}\sigma\tau)$$

Πείραμα Νο.[2] (σyz/σzy)

Ο τανυστής που θα εφαρμοστεί στα πειράματα Νο.[2*] και Νο.[2**] είναι:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1e6 \\ 0 & -1e6 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Ενώ οι οριακές συνθήκες μετατόπισης (συνθήκες κύλισης) φαίνονται στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 3-33 και Σχήμα 3-34).



Σχήμα 3-33: Επιβολή διατμητικών τάσεων σyz/σzy, τομή σε επίπεδο (y,z). Πείραμα Νο. [2*]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.

Σχήμα 3-34: Επιβολή διατμητικών τάσεων σyz/σzy, τομή σε επίπεδο (y,z). Πείραμα Νο. [2**]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.

→ **Πείραμα Νο.[2*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y)**

Οι συνθήκες κύλισης σ'αυτή την περίπτωση περιορίζουν τη μετατόπιση του δείγματος στη διεύθυνση y. Συνεπώς $\varepsilon_{22}^{[2*]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$\varepsilon_{11}^{[2*]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[2*]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[2*]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28}\alpha)$$

$$0 = C_{2211}\sigma_{11}^{[2*]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[2*]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28}\beta)$$

$$\varepsilon_{33}^{[2*]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[2*]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[2*]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28}\gamma)$$

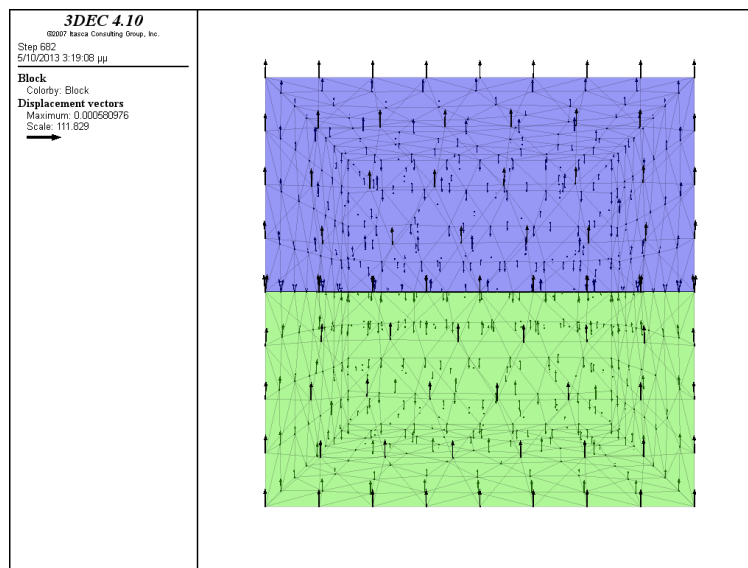
$$\varepsilon_{23}^{[2*]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[2*]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[2*]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[2*]} \quad (\text{Εξ. 3-28στ})$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πείραμα Νο.[2*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -1.96491e-006 (real)	total_sxx = 814.935 (real)
xxstrain_ = -6.7232e-006 (real)	total_syy = 3118.09 (real)
yystrain_ = 0 (real)	total_szz = -1055.5 (real)
yzstrain_ = -0.000349264 (real)	total_sxy = -713.59 (real)
zxstrain_ = -4.83144e-006 (real)	total_syz = -1.03765e+006 (real)
xystrain_ = 8.10118e-006 (real)	total_sxz = 1013.08 (real)



Σχήμα 3-35: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διαμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.

→ Πείραμα Νο.[2**] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z)

Λόγω των συνθηκών κύλισης, περιορίζεται η μετατόπιση και συνεπώς η τροπή του δείγματος στη διεύθυνση z ($\varepsilon_{33}^{[2**]} = 0$) και το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$\varepsilon_{11}^{[2**]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[2**]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[2**]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[2**]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[2**]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[2**]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29β})$$

$$0 = C_{3311}\sigma_{11}^{[2**]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[2**]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29γ})$$

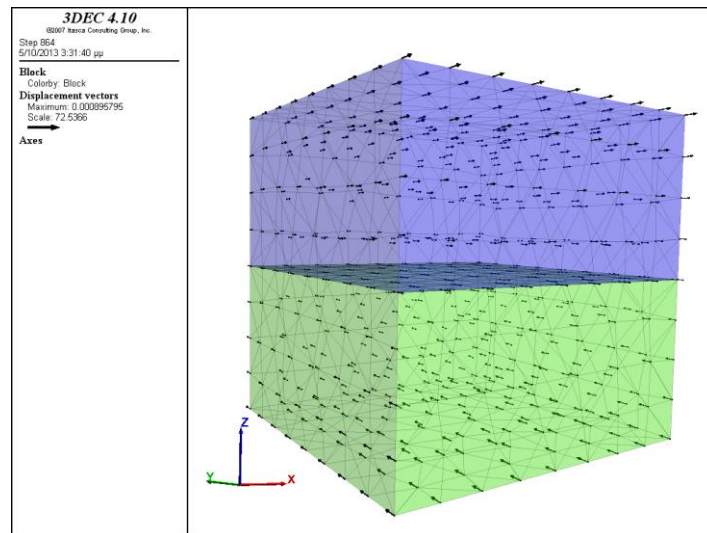
$$\varepsilon_{23}^{[2**]} = C_{3223}\sigma_{23}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[2**]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[2**]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[2**]} \quad (\text{Εξ. 3-29στ})$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC, οι μακροσκοπικές τροπές και τάσεις υπολογίζονται ως εξής:

Πείραμα No.[2**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = 34.619 (real)
xxstrain_ = 1.38041e-008 (real)	total_syy = 1199.19 (real)
yystrain_ = -6.27581e-005 (real)	total_szz = 1385.8 (real)
yzstrain_ = -0.00059329 (real)	total_sxy = 7.61955 (real)
zxstrain_ = -3.31107e-009 (real)	total_syz = -999994 (real)
xystrain_ = 2.86393e-005 (real)	total_sxz = -4.54159 (real)



Σχήμα 3-36: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διαμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, το σύστημα των εξισώσεων για το πείραμα No. [2] θα είναι:

$$\varepsilon_{11}^{[2]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[2]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[2]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[2]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[2]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[2]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30β})$$

$$\varepsilon_{33}^{[2]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[2]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[2]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30γ})$$

$$\varepsilon_{23}^{[2]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[2]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30ε})$$

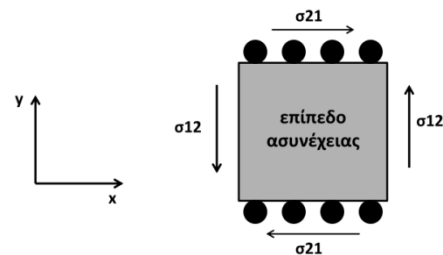
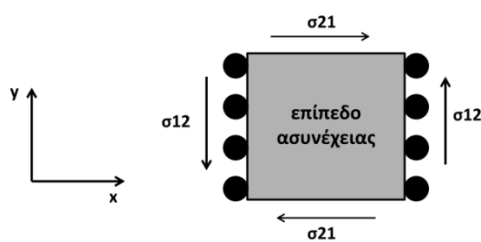
$$\varepsilon_{12}^{[2]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[2]} \quad (\text{Εξ. 3-30στ})$$

Πείραμα No.[3] (σxy/σyx)

Ο τανυστής της τάσης που θα εφαρμοστεί αρχικά στο δείγμα για τα πειράματα No.[3*] και No.[3**] είναι ο εξής:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1e6 & 0 \\ -1e6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Οι συνθήκες μετατόπισης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3-37).



Σχήμα 3-37: Επιβολή διατμητικών τάσεων σxy/σyx, τομή σε επίπεδο (x,y). Πείραμα No. [3*]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.

Σχήμα 3-38: Επιβολή διατμητικών τάσεων σxy/σyx, τομή σε επίπεδο (x,y). Πείραμα No. [3**]: συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y.

→ Πείραμα No.[3*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x)

Οι συνθήκες κύλισης σ'αυτή την περίπτωση περιορίζουν τη μετατόπιση του δείγματος στη διεύθυνση x, οπότε θα έχουμε ($\varepsilon_{11}^{[3*]} = 0$) και το σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$0 = C_{1111}\sigma_{11}^{[3*]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[3*]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[3*]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[3*]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[3*]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31β})$$

$$\varepsilon_{33}^{[3*]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[3*]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[3*]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31γ})$$

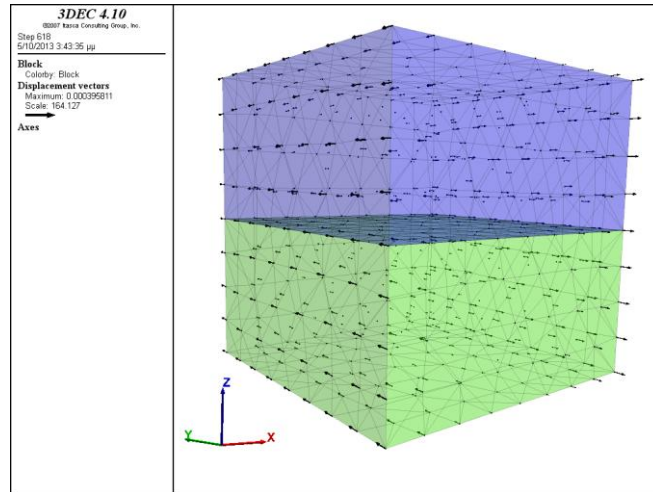
$$\varepsilon_{23}^{[3*]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[3*]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[3*]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[3*]} \quad (\text{Εξ. 3-31στ})$$

Από την προσομοίωση στο 3DEC λαμβάνουμε:

Πείραμα No.[3*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -1.79987e-007 (real)	total_sxx = 1028.96 (real)
xxstrain_ = 0 (real)	total_syy = 540.647 (real)
yystrain_ = -4.73021e-006 (real)	total_szz = 27.6103 (real)
yzstrain_ = -4.84369e-006 (real)	total_sxy = -1e+006 (real)
zxstrain_ = 4.87355e-008 (real)	total_syz = 2.68798 (real)
xystrain_ = -0.000260003 (real)	total_sxz = 0.813314 (real)



Σχήμα 3-39: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διαμητρικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.

→ **Πείραμα No.[3**]** (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y)

Λόγω των συνθηκών κύλισης, η μετατόπιση του δείγματος περιορίζεται στη διεύθυνση y ($\varepsilon_{22}^{[3**]} = 0$) και το σύστημα των εξισώσεων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\varepsilon_{11}^{[3**]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[3**]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[3**]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32α})$$

$$0 = C_{2211}\sigma_{11}^{[3**]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[3**]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32β})$$

$$\varepsilon_{33}^{[3**]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[3**]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[3**]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32γ})$$

$$\varepsilon_{23}^{[3**]} = C_{3223}\sigma_{23}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32δ})$$

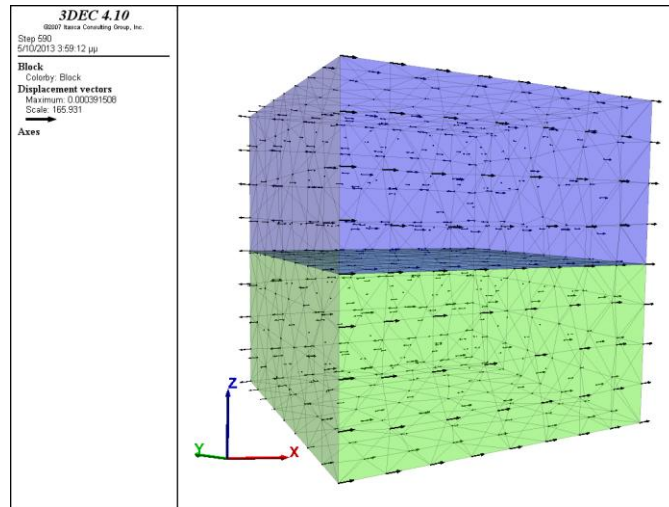
$$\varepsilon_{31}^{[3**]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[3**]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[3**]} \quad (\text{Εξ. 3-32στ})$$

Οι μακροσκοπικές τροπές και τάσεις υπολογίζονται ως εξής μέσω του 3DEC:

Πείραμα No.[3**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -6.72106e-008 (real)	total_sxx = 541.908 (real)
xxstrain_ = -6.56935e-006 (real)	total_syy = 1027.67 (real)
yystrain_ = 0 (real)	total_szz = 27.8069 (real)

yzstrain_ = 7.49219e-009 (real)	total_sxy = -999996 (real)
zxstrain_ = 1.01646e-006 (real)	total_syz = 1.10945 (real)
xystrain_ = -0.000259999 (real)	total_sxz = 1.53153 (real)



Σχήμα 3-40: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y .

Το σύστημα των εξισώσεων για το πείραμα No. [3] θα είναι:

$$\varepsilon_{11}^{[3]} = C_{1111}\sigma_{11}^{[3]} + C_{1122}\sigma_{22}^{[3]} + C_{1133}\sigma_{33}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33α})$$

$$\varepsilon_{22}^{[3]} = C_{2211}\sigma_{11}^{[3]} + C_{2222}\sigma_{22}^{[3]} + C_{2233}\sigma_{33}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33β})$$

$$\varepsilon_{33}^{[3]} = C_{3311}\sigma_{11}^{[3]} + C_{3322}\sigma_{22}^{[3]} + C_{3333}\sigma_{33}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33γ})$$

$$\varepsilon_{23}^{[3]} = C_{2323}\sigma_{23}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33δ})$$

$$\varepsilon_{31}^{[3]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33ε})$$

$$\varepsilon_{12}^{[3]} = C_{1212}\sigma_{12}^{[3]} \quad (\text{Εξ. 3-33στ})$$

3.2.6 Προσδιορισμός των ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας δείγματος ελαστικού πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια

→ Ισοδύναμοι συντελεστές ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε ορθές τάσεις και τροπές

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών της πρώτης γραμμής του μητρώου ενδοτικότητας, θα απομονώσουμε τις εξισώσεις (3-20α), (3-21α), (3-22α), και θα λύσουμε το προκύπτον σύστημα εξισώσεων:

$$0 = C_{1111}\sigma_{11}[z] + C_{1122}\sigma_{22}[z] + C_{1133}\sigma_{33}[z] \quad (3-20\alpha)$$

$$\varepsilon_{11}[x] = C_{1111}\sigma_{11}[x] + C_{1122}\sigma_{22}[x] + C_{1133}\sigma_{33}[x] \quad (3-21\alpha)$$

$$0 = C_{1111}\sigma_{11}[y] + C_{1122}\sigma_{22}[y] + C_{1133}\sigma_{33}[y] \quad (3-22\alpha)$$

Οι άγνωστοι είναι τρεις, όσες και οι εξισώσεις.

Απομονώνοντας το συντελεστή C_{1111} από την εξίσωση (3-20α) λαμβάνουμε:

$$(3-20\alpha) \rightarrow C_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}[z]} (-C_{1122}\sigma_{22}[z] - C_{1133}\sigma_{33}[z])$$

Μέσω της εξίσωσης (3-20α) η εξίσωση (3-22α) γίνεται:

$$(3-22\alpha) \rightarrow C_{1122} = \frac{\sigma_{11}[y]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[y]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[y]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[y]\sigma_{22}[z]} C_{1133}$$

Τέλος, με αντικατάσταση των C_{1111} και C_{1122} στην εξίσωση (3-21α), έχουμε:

$$C_{1133} = \frac{\varepsilon_{11}[x]}{B\sigma_{11}[x] + A\sigma_{22}[x] + \sigma_{33}[x]}$$

Όπου:

$$A = \frac{\sigma_{11}[y]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[y]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[y]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[y]\sigma_{22}[z]}$$

$$B = \frac{-A\sigma_{22}[z] - \sigma_{33}[z]}{\sigma_{11}[z]}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (3-20α), (3-21α), (3-22α) ως προς C_{1111} , C_{1122} και C_{1133} έχουμε:

C1111	2.00E-10 Pa⁻¹
C1122	-6.00E-11 Pa⁻¹
C1133	-6.00E-11 Pa⁻¹

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη σειρά του μητρώου ενδοτικότητας απομονώνουμε τις εξισώσεις (3-20β), (3-21β), (3-22β) και λύνοντας την εξίσωση (3-20β) ως προς C₂₂₁₁ λαμβάνουμε:

$$(3-20\beta) \rightarrow C_{2211} = \frac{1}{\sigma_{11}[z]} (-C_{2222}\sigma_{22}[z] - C_{2233}\sigma_{33}[z])$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3-20β), η εξίσωση (3-21β) γίνεται:

$$(3-21\beta) \rightarrow C_{2222} = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[z]} C_{2233}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές C₂₂₁₁, C₂₂₂₂ στην εξίσωση (3-22β) λαμβάνουμε:

$$C_{2233} = \frac{\varepsilon_{22}[y]}{D\sigma_{11}[y] + C\sigma_{22}[y] + \sigma_{33}[y]}$$

Όπου:

$$C = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[z]}$$

$$D = \frac{-C\sigma_{22}[z] - \sigma_{33}[z]}{\sigma_{11}[z]}$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το 3DEC και αντικαθιστώντας τις τιμές των αντίστοιχων τάσεων και τροπών, λαμβάνουμε:

C2211	-6.00E-11 Pa⁻¹
C2222	2.00E-10 Pa⁻¹
C2233	-6.00E-11 Pa⁻¹

Παρομοίως για την τρίτη σειρά του ισοδύναμου μητρώου ενδοτικότητας απομονώνουμε τις εξισώσεις (3-20γ), (3-21γ), (3-22γ) και λύνουμε την εξίσωση (3-21γ) ως προς C₃₃₁₁ και προκύπτει:

$$(3-21\gamma) \rightarrow C_{3311} = \frac{1}{\sigma_{11}[x]} (-C_{3322}\sigma_{22}[x] - C_{3333}\sigma_{33}[x])$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας το C3311 στην εξίσωση (3-22γ), λαμβάνουμε:

$$(3-22\gamma) \rightarrow C_{3322} = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[y] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[y]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[y] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[y]} C_{3333}$$

Τέλος με αντικατάσταση των C3311, C3322 στην εξίσωση (3-20γ), ο συντελεστής C3333 είναι:

$$C_{2233} = \frac{\varepsilon_{33}[z]}{F\sigma_{11}[z] + E\sigma_{22}[z] + \sigma_{33}[z]}$$

Όπου:

$$E = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[y] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[y]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[y] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[y]}$$

$$F = \frac{-E\sigma_{22}[x] - \sigma_{33}[x]}{\sigma_{11}[x]}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των τάσεων και τροπών που υπολογίστηκαν από το 3DEC, λαμβάνουμε τους παρακάτω συντελεστές ενδοτικότητας:

C3311	-6.00E-11 Pa⁻¹
C3322	-6.00E-11 Pa⁻¹
C3333	2.67E-10 Pa⁻¹

→ Ισοδύναμοι συντελεστές ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε διατμητικές τάσεις και τροπές

Όσον αφορά στους συντελεστές ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε διατμητικές τάσεις και τροπές, μόνο οι C_{2323} , C_{3131} , C_{1212} δεν είναι μηδενικοί. Συνεπώς, για τον υπολογισμό καθενός απ'αυτούς, χρειαζόμαστε μόνο μία εξίσωση.

Για την εύρεση του ισοδύναμου συντελεστή ενδοτικότητας ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφεται στην υποενότητα 3.2.5.2 όπως φαίνεται παρακάτω:

Πείραμα No.[1]

Από το Πείραμα No.[1] υπολογίζεται ο ισοδύναμος συντελεστής ενδοτικότητας C3131.

→ **Πείραμα Νο.[1*]**

Από το πείραμα Νο.[1*], ο τανυστής της τάσης στην κλίμακα μεγέθους του δείγματος διαμορφώνεται ως εξής:

	1115,61	622,277	-1000000
$\sigma[1^*] =$	622,277	729,915	-1685,99
	-1,00E+06	-1685,99	3105,72

Ενώ, ο τανυστής της τροπής είναι:

	-1,81E-06	2,79E-05	-0,00059
$\varepsilon[1^*] =$	2,79E-05	5,69E-05	2,45E-05
	-0,00059	2,45E-05	0

→ **Πείραμα Νο.[1**]**

Αντίστοιχα για το πείραμα Νο.[1**] λαμβάνουμε:

	5753,39	22,5282	-1,00E+06
$\sigma[1^{**}] =$	22,5282	-2048,45	-478,38
	-1000000	-478,38	-3900,83

	0	1,86E-05	-0,00035
$\varepsilon[1^{**}] =$	1,86E-05	4,43E-05	1,75E-05
	-0,00035	1,75E-05	-1,13E-05

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, οι τανυστές της τάσης και της τροπής για το Πείραμα Νο.[1] υπολογίζονται βάσει των εξισώσεων (3-23) και (3-24). Έτσι έχουμε:

	6869	644,8052	-2000000
$\sigma[1] =$	644,8052	-1318,54	-2164,37
	-2000000	-2164,37	-795,11

	-1,81E-06	4,64E-05	-9,40E-04
$\varepsilon[1] =$	4,64E-05	1,01E-04	4,21E-05
	-9,40E-04	4,21E-05	-1,13E-05

Από την εξίσωση (3-27ε) η συνιστώσα C_{3131} υπολογίζεται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\varepsilon_{31}^{[1]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[1]} \rightarrow C_{3131} = \frac{\varepsilon_{31}^{[1]}}{\sigma_{31}^{[1]}} = \frac{-9,40e - 04}{-2000000 \text{ Pa}} = 4.70e - 10 \text{ Pa}^{-1}$$

Πείραμα No.[2]

μέσω του πειράματος No.[2], υπολογίζεται ο ισοδύναμος συντελεστής ενδοτικότητας C2323.

→ Πείραμα No.[2*]

Για το Πείραμα No.[2*], οι τανυστές της τάσης και της τροπής, όπως υπολογίστηκαν από το 3DEC, διαμορφώνονται ως εξής:

	1734,05	-1152,89	2242,82
$\sigma[2^*] =$	-1152,89	4833,88	-1,00E+06
	2242,82	-1000000	-2591,59

	4,84E-05	3,66E-05	1,88E-05
$\varepsilon[2^*] =$	3,66E-05	0	-0,00035
	1,88E-05	-0,00035	-3,80E-06

→ Πείραμα No.[2**]

Για το Πείραμα No.[2**] υπολογίζονται οι εξής τανυστές τάσης και τροπής:

	1714,16	518,736	-1619,18
$\sigma[2^{**}] =$	518,736	2711,82	-1000000
	-1619,18	-1,00E+06	1596,72

	5,57E-05	6,01E-05	2,74E-05
$\varepsilon[2^{**}] =$	6,01E-05	-1,84E-06	-0,00059
	2,74E-05	-0,00059	0

Συνδυάζοντας τα πειράματα [2*] και [2**] σύμφωνα με τις εξισώσεις (3-23) και (3-24) προκύπτουν οι παρακάτω τανυστές:

	3448,21	-634,154	623,64
$\sigma[2] =$	-634,154	7545,7	-2000000
	623,64	-2000000	-994,87

	1,04E-04	9,67E-05	4,62E-05
$\varepsilon[2] =$	9,67E-05	-1,84E-06	-9,40E-04
	4,62E-05	-9,40E-04	-3,80E-06

Από την εξίσωση (3-28δ) υπολογίζεται η συνιστώσα C_{2323} :

$$\varepsilon_{23}^{[2]} = C_{2323} \sigma_{23}^{[2]} \rightarrow C_{2323} = \frac{\varepsilon_{23}^{[2]}}{\sigma_{23}^{[2]}} = \frac{-9,40e - 04}{-2000000 Pa} = 4,70e - 10 Pa^{-1}$$

Πείραμα No.[3]

Από το Πείραμα No.[3] υπολογίζεται ο συντελεστής ενδοτικότητας C_{1212} .

→ Πείραμα No.[3*]

Από το 3DEC υπολογίστηκαν οι παρακάτω τανυστές τάσης και τροπής για το Πείραμα No.[3*]:

	1085,43	-1,00E+06	127,376
$\sigma[3^*] =$	-1,00E+06	1459,39	-554,2
	127,376	-5,54E+02	272,63

	0	-0,00026	2,24E-05
$\varepsilon[3^*] =$	-0,00026	1,93E-06	2,76E-05
	2,24E-05	2,76E-05	5,30E-05

→ Πείραμα No.[3**]

Αντίστοιχα για το Πείραμα No.[3**] λήφθηκαν οι ακόλουθοι τανυστές τάσης και τροπής:

	578,008	-1000000	-182,313
$\sigma[3^{**}] =$	-1,00E+06	2804,88	-298,29
	-182,313	-298,29	-619,56

	1,69E-05	-0,00026	1,40E-05
$\varepsilon[3^{**}] =$	-0,00026	0	2,33E-05
	1,40E-05	2,33E-05	5,16E-05

Έτσι, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3-23) και (3-24), για το Πείραμα No.[3] λαμβάνουμε:

	1663,438	-2000000	-54,937
$\sigma[3] =$	-2000000	4264,27	-852,49
	-54,937	-852,49	-346,93

	1,69E-05	-5,20E-04	3,64E-05
$\varepsilon[3] =$	-5,20E-04	1,93E-06	5,09E-05
	3,64E-05	5,09E-05	1,05E-04

Και από την εξίσωση (3-29στ) η συνιστώσα C_{1212} :

$$\varepsilon_{12}^{[3]} = C_{1212} \sigma_{12}^{[3]} \rightarrow C_{1212} = \frac{\varepsilon_{12}^{[3]}}{\sigma_{12}^{[3]}} = \frac{-5,20E - 04}{-2000000 Pa} = 2.60e - 10 Pa^{-1}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας για το δείγμα ελαστικού πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια θα είναι:

	2	-0.6	-0.6	0	0	0	
	-0.6	2	-0.6	0	0	0	
$C_{ijkl}=1E-10 \times$	-0.6	-0.6	2.67	0	0	0	[1/Pa]
	0	0	0	4.7	0	0	
	0	0	0	0	4.7	0	
	0	0	0	0	0	2.6	

Ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Η δομή του «υποπίνακα» N_{ij} , του μητρώου ενδοτικότητας που αντιστοιχεί σε ορθές τάσεις και τροπές, για την περίπτωση ορθότροπου υλικού είναι:

$$N_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} \end{pmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-34})$$

Ενώ, η δομή του «υποπίνακα» S_{ij} , του μητρώου ενδοτικότητας που αντιστοιχεί σε διαμητικές τάσεις και τροπές, για την περίπτωση ορθότροπου υλικού είναι:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \quad (\text{Εξ. 3-35})$$

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα συγκρίνοντας τις ισοδύναμες ελαστικές σταθερές του δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια με τις αντίστοιχες σταθερές για την περίπτωση του άρρηκτου δείγματος πετρώματος. Οι ιδιότητες του υλικού για την περίπτωση άρρηκτου δείγματος πετρώματος (ίδιες για το άρρηκτο πέτρωμα του κερματισμένου δείγματος) είναι:

$E = 5e9Pa$ (Young's modulus)

$\nu = 0.3$ (Poisson's ratio)

$G = 1.92e9Pa$ (Lame's shear coefficient)

Δείγμα με μία οριζόντια ασυνέχεια:

- «οριζόντιο» μέτρο ελαστικότητας

$$E_{11} = \frac{1}{C_{1111}} = E_{22} = \frac{1}{C_{2222}} = \frac{1}{2e - 10Pa^{-1}} = 5e9Pa = E_{matrix}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, το μέτρο ελαστικότητας στη διεύθυνση x και y του δείγματος είναι το ίδιο με το μέτρο ελαστικότητας του άρρηκτου πετρώματος,

καθώς η παρουσία της οριζόντιας ασυνέχειας δεν επηρεάζει τη μηχανική συμπεριφορά του δείγματος σ'αυτές τις διευθύνσεις.

- «κατακόρυφο» μέτρο ελαστικότητας

$$E_{33} = \frac{1}{C_{3333}} = \frac{1}{2.67e - 10Pa^{-1}} = 3.75e9Pa < E_{matrix}$$

Το μέτρο ελαστικότητας στη διεύθυνση z είναι προσεγγιστικά $(5-3.75)/5 \times 100\% = 25\%$ μικρότερο από αυτό του άρρηκτου πετρώματος εξαιτίας της οριζόντιας ασυνέχειας η οποία αυξάνει την ενδοτικότητα του δείγματος σ'αυτή τη διεύθυνση.

- Λόγος του Poisson

Η ιδιότητα v_{ij} ορίζεται ως ο λόγος της τροπής στη διεύθυνση j προς την τροπή στη διεύθυνση i λόγω της δράσης ορθής τάσης στη διεύθυνση i.

$$v_{21} = -C_{1122}E_{22} = 0.3 = v_{matrix}$$

$$v_{31} = -C_{1133}E_{33} = 0.225 < v_{matrix}$$

$$v_{12} = -C_{2211}E_{11} = 0.3 = v_{matrix}$$

$$v_{32} = -C_{2233}E_{33} = 0.225 < v_{matrix}$$

$$v_{13} = -C_{3311}E_{11} = 0.3 = v_{matrix}$$

$$v_{23} = -C_{3322}E_{22} = 0.3 = v_{matrix}$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η παρουσία της οριζόντιας ασυνέχειας επηρεάζει τη συμπεριφορά του δείγματος μόνο στη διεύθυνση z (x3), έτσι για δεδομένη τάση σ_{33} η τροπή ϵ_{33} άρρηκτου δείγματος πετρώματος θα είναι μικρότερη από την τροπή ϵ_{33} του δείγματος με την ασυνέχεια. Τα v_{31} , v_{32} ορίζονται ως εξής:

$$v_{31} = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}$$

$$v_{32} = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}}$$

Επομένως, εξαιτίας της αυξημένης τροπής ϵ_{33} σε σχέση με αυτή του άρρηκτου δείγματος για δεδομένη δράση τάσης σ_{33} , είναι λογικό οι συγκεκριμένοι λόγοι Poisson να είναι μειωμένοι.

- Μέτρο διάτμησης

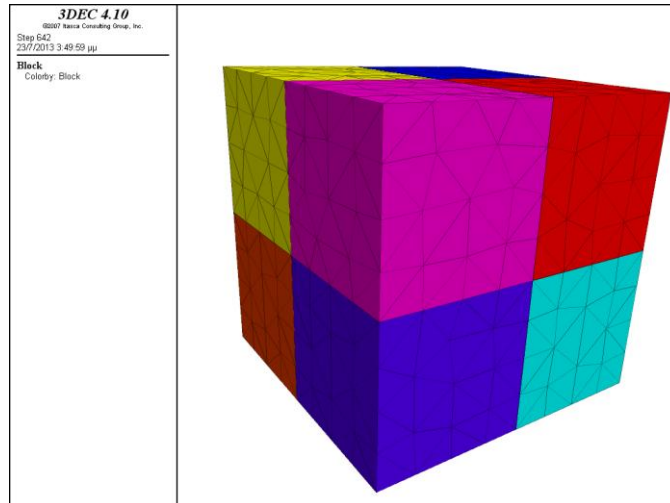
$$\rightarrow G_{23} = \frac{1}{2c_{2323}} = G_{31} = \frac{1}{2c_{3131}} = 1.06e9 \text{ Pa} < G_{matrix}$$

$$\rightarrow G_{12} = \frac{1}{2c_{1212}} = 1.92e9 \text{ Pa} = G_{matrix}$$

Κανονικά, η οριζόντια ασυνέχεια ευθύνεται για τη μείωση της αντοχής του δείγματος σε διάτμηση μόνο στην περίπτωση εφαπτομενικής δύναμης που ασκείται σε επίπεδο το οποίο χαρακτηρίζεται από το κάθετο σ'αυτό μοναδιαίο διάνυσμα $n=(n_1,n_2,n_3)=(0,0,1)$. Συνεπώς, μόνο οι συντελεστές ενδοτικότητας που σχετίζονται με τις εφαπτομενικές τάσεις σ_{31} και σ_{23} επηρεάζονται από την παρουσία της ασυνέχειας. Γι'αυτό και τα αντίστοιχα μέτρα διάτμησης G_{31} και G_{23} είναι φανερά «αποδυναμωμένα», ενώ το G_{12} δεν μεταβάλλεται.

3.2.7 Προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος ελαστικού πετρώματος με τρεις ασυνέχειες (3D cross) σε θλίψη και διάτμηση στο 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Στη συγκεκριμένη υποενότητα, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα όσον αφορά στο ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας για δείγμα ελαστικού πετρώματος με τρεις ασυνέχειες οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους και τέμνονται στο κέντρο του δείγματος. Σ'αυτή την περίπτωση, αναμένουμε το δείγμα να συμπεριφέρεται ως ένα ορθότροπο υλικό εφόσον οι ασυνέχειες είναι αμοιβαία κάθετες και ευθυγραμμισμένες με τους τρεις άξονες x, y, z .



Σχήμα 3-41: Μοντέλο στο 3DEC για την περίπτωση 3D cross.

Η εξίσωση που περιγράφει τη σχέση τροπή/τάσης θα είναι η εξίσωση (3-19) (ορθότροπο υλικό).

Διατηρούμε τις ίδιες διαστάσεις δείγματος, $1.5\text{m} \times 1.5\text{m} \times 1.5\text{m}$ και τις ίδιες ιδιότητες άρρηκτου πετρώματος, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ($E=5e9 \text{ Pa}$, $\nu=0.3$, $G=1.92e9 \text{ Pa}$). Οι ιδιότητες των τριών ασυνεχειών θα είναι επίσης ίδιες μ'αυτές που είχαμε ορίσει παραπάνω ($K_n=10e9 \text{ Pa/m}$, $K_s=1e9 \text{ Pa/m}$).

Για την περίπτωση των τριών τεμνόμενων και κάθετων μεταξύ τους ασυνεχειών θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία διεξαγωγής των προσομοιώσεων και ερμηνείας των αποτελεσμάτων όπως έχει αναλυθεί παραπάνω (περίπτωση οριζόντιας ασυνέχειας). Συνεπώς, θα διεξαχθούν τρία αριθμητικά πειράματα επιβολής ορθών τάσεων και τρία ζευγάρια αριθμητικών πειραμάτων για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του δείγματος κερματισμένου πετρώματος σε διάτμηση.

3.2.7.1 Προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες (3D cross) σε θλίψη με το 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}) = $-1e6$ Pa

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του πετρώματος σε θλίψη, πραγματοποιήθηκε αρχικά το αριθμητικό πείραμα επιβολής τάσης σ_{33} , και ο τανυστής της τάσης που ορίστηκε μέσω του 3DEC είναι ο παρακάτω:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1e6 \end{bmatrix} Pa$$

Οι οριακές συνθήκες μετατόπισης θα είναι και σ'αυτή την περίπτωση συνθήκες κύλισης στις εξωτερικές πλευρές του δείγματος στις οποίες δεν ασκείται καμία τάση, δηλαδή στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x και y. Στο Σχήμα 3-19 φαίνονται οι συνθήκες φόρτισης και μετατόπισης για την προσομοίωση επιβολής τάσης σ_{33} .

Επομένως, το σύστημα των εξισώσεων, θεωρώντας το υλικό ορθότροπο, θα είναι το ίδιο με το σύστημα εξισώσεων 3-20.

$$0 = \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20α})$$

$$0 = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20β})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33} \quad (\text{Εξ. 3-20γ})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} \quad (\text{Εξ. 3-20δ})$$

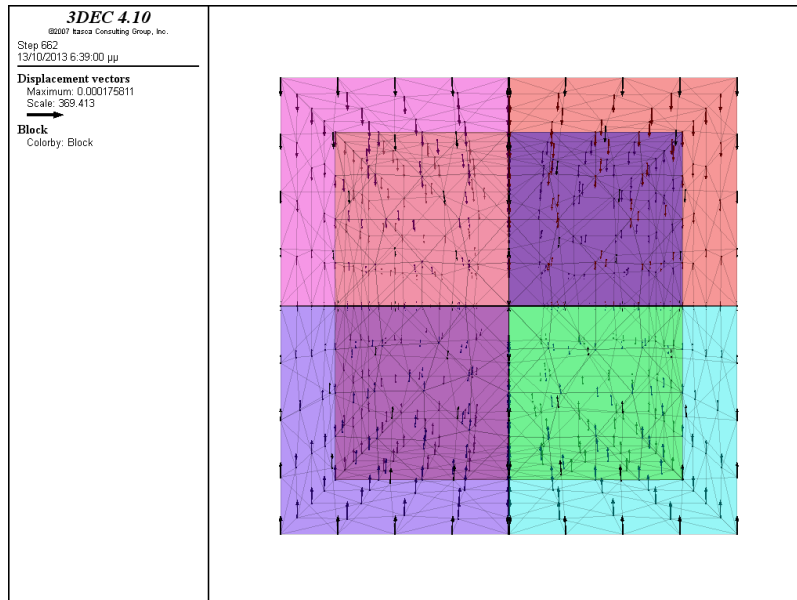
$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}} \sigma_{31} \quad (\text{Εξ. 3-20ε})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} \quad (\text{Εξ. 3-20ε})$$

Με το πέρας της προσομοίωσης στο 3DEC, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά στις μακροσκοπικές τροπές και τάσεις:

Επιβολή ορθής τάσης σ_{33}	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
<code>zzstrain_ = -0.000231806 (real)</code> <code>xxstrain_ = 0 (real)</code>	<code>total_sxx = -290295 (real)</code> <code>total_syy = -290306 (real)</code>

yystrain_ = 0 (real)	total_szz = -999960 (real)
yzstrain_ = -4.95604e-007 (real)	total_sxy = 0.704108 (real)
zxstrain_ = -1.11623e-007 (real)	total_syz = -0.742529 (real)
xystrain_ = 1.93066e-008 (real)	total_sxz = 1.23256 (real)



Σχήμα 3-42: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{33} (σ_{zz}).

Επιβολή ορθής τάσης σ_{11} (σ_{xx}) = $-1e6$ Pa

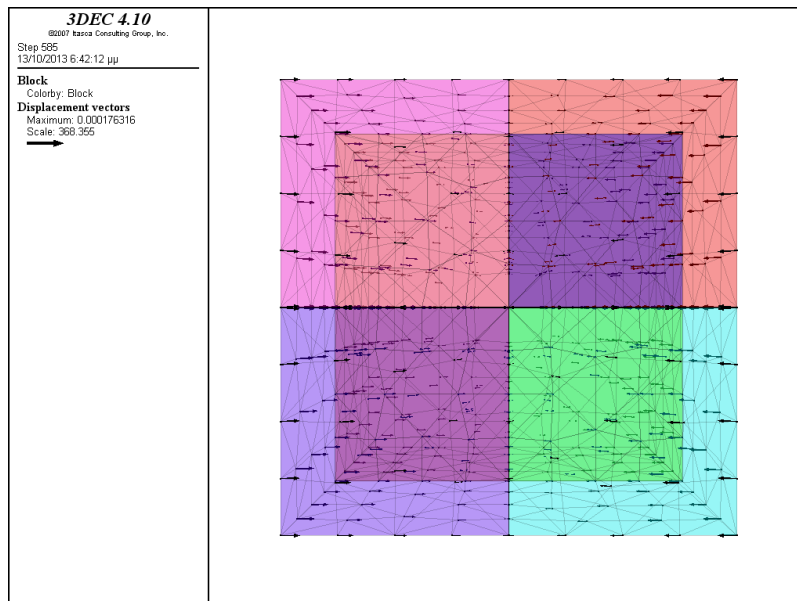
Στη συνέχεια, εξετάζεται η συμπεριφορά του δείγματος κερματισμένου πετρώματος υπό την επιβολή του παρακάτω τανυστή της τάσης:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -1e6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Οι συνοριακές συνθήκες μετατόπισης σ'αυτή την περίπτωση θα εμποδίζουν τη μετατόπιση των σημείων που ανήκουν στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στους άξονες y και z. Συνεπώς θα έχουμε $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι ίδιο με το σύστημα (3-21) (περίπτωση οριζόντιας ασυνέχειας).

Οι μακροσκοπικές τροπές και τάσεις που υπολογίστηκαν μέσω του 3DEC φαίνονται παρακάτω:

Επιβολή ορθής τάσης σ_{11}	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
$zzstrain_ = 0$ (real) $xxstrain_ = -0.000231806$ (real) $yystrain_ = 0$ (real) $yzstrain_ = 8.71159e-007$ (real) $zxstrain_ = 4.14748e-008$ (real) $xystrain_ = -5.82271e-009$ (real)	$total_sxx = -999961$ (real) $total_syy = -290304$ (real) $total_szz = -290305$ (real) $total_sxy = 4.50708$ (real) $total_syz = 0.427388$ (real) $total_sxz = 4.75537$ (real)



Σχήμα 3-43: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{11} (σxx).

Επιβολή ορθής τάσης σ_{22} (σyy) = $-1e6$ Pa

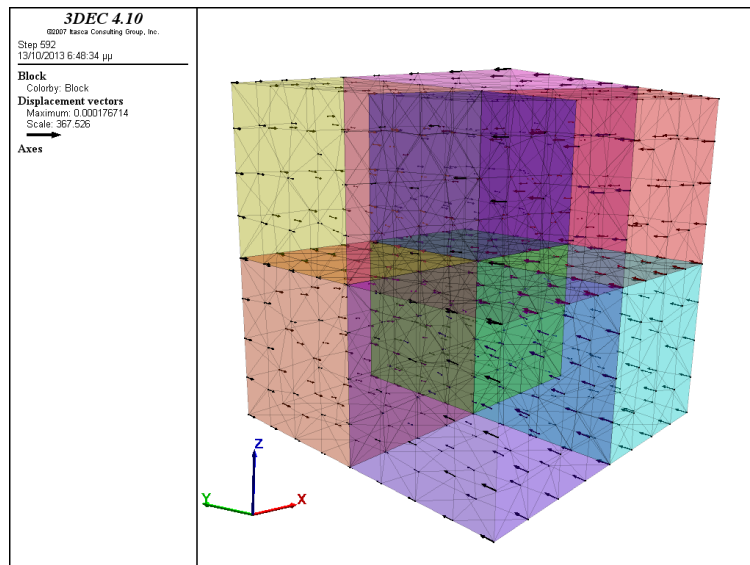
Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του δείγματος πετρώματος υπό την ορθή τάση σ_{22} , εφαρμόζεται ο παρακάτω τανυστής της τάσης:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1e6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Ενώ το σύστημα των εξισώσεων, δεδομένων των συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στους άξονες x και z θα είναι το ίδιο με το σύστημα εξισώσεων (3-22) της προηγούμενης περίπτωσης.

Μετά το τέλος της προσομοίωσης στο 3DEC, λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Επιβολή ορθής τάσης σ_{22}	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
$zzstrain_ = 0$ (real) $xxstrain_ = 0$ (real) $yystrain_ = -0.000231806$ (real) $yzstrain_ = -1.18335e-006$ (real) $zxstrain_ = -9.10034e-007$ (real) $xystrain_ = 1.32088e-007$ (real)	$total_sxx = -290311$ (real) $total_syy = -999962$ (real) $total_szz = -290309$ (real) $total_sxy = 1.25857$ (real) $total_syz = 5.70154$ (real) $total_sxz = -0.0362649$ (real)



Σχήμα 3-44: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή ορθής τάσης σ_{22} (συγ).

Για τον προσδιορισμό των ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε ορθές τάσεις και τροπές λειτουργούμε με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του δείγματος κερματισμένου πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια.

Για την εύρεση των συντελεστών της πρώτης σειράς του ισοδύναμου μητρώου ενδοτικότητας απομονώνουμε τις εξισώσεις (3-20α), (3-21α) και (3-22α). Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στις τροποποιημένες εξισώσεις, όπως αυτές περιγράφονται στην υποενότητα 3.2.6, τις αντιστοιχες τιμές των υπολογισμένων τάσεων και τροπών, προσδιορίζονται οι ισοδύναμοι συντελεστές.

$$(3-20\alpha) \rightarrow C_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}[z]} (-C_{1122}\sigma_{22}[z] - C_{1133}\sigma_{33}[z])$$

$$(3-22\alpha) \rightarrow C_{1122} = \frac{\sigma_{11}[y]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[y]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[y]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[y]\sigma_{22}[z]} C_{1133}$$

Τέλος, με αντικατάσταση των C1111 και C1122 στην εξίσωση (3-21α), έχουμε:

$$(3-21\alpha) \rightarrow C_{1133} = \frac{\varepsilon_{11}[x]}{B\sigma_{11}[x]+A\sigma_{22}[x]+\sigma_{33}[x]}$$

Όπου:

$$A = \frac{\sigma_{11}[y]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[y]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[y]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[y]\sigma_{22}[z]}$$

$$B = \frac{-A\sigma_{22}[z]-\sigma_{33}[z]}{\sigma_{11}[z]}$$

Τελικά λαμβάνουμε:

C1111	2.67E-10 Pa⁻¹
C1122	-6.00E-11 Pa⁻¹
C1133	-6.00E-11 Pa⁻¹

Για τους συντελεστές της δεύτερης σειράς του ισοδύναμου μητρώου ενδοτικότητας για την περίπτωση δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(3-20\beta) \rightarrow C_{2211} = \frac{1}{\sigma_{11}[z]} (-C_{2222}\sigma_{22}[z] - C_{2233}\sigma_{33}[z])$$

$$(3-21\beta) \rightarrow C_{2222} = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[z]-\sigma_{33}[x]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[z]-\sigma_{11}[x]\sigma_{22}[z]} C_{2233}$$

$$(3-22\beta) \rightarrow C_{2233} = \frac{\varepsilon_{22}[y]}{D\sigma_{11}[y]+C\sigma_{22}[y]+\sigma_{33}[y]}$$

Όπου:

$$C = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[z] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[z]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[z] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[z]}$$

$$D = \frac{-C\sigma_{22}[z] - \sigma_{33}[z]}{\sigma_{11}[z]}$$

Και οι ισοδύναμοι συντελεστές ενδοτικότητας της δεύτερης σειράς θα είναι:

C2211	-6.00E-11 Pa⁻¹
C2222	2.67E-10 Pa⁻¹
C2233	-6.00E-11 Pa⁻¹

Αντίστοιχα οι συντελεστές της τρίτης σειράς του ισοδύναμου μητρώου ενδοτικότητας προσδιορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(3-21\gamma) \rightarrow C_{3311} = \frac{1}{\sigma_{11}[x]} (-C_{3322}\sigma_{22}[x] - C_{3333}\sigma_{33}[x])$$

$$(3-22\gamma) \rightarrow C_{3322} = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[y] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[y]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[y] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[y]} C_{3333}$$

$$(3-20\gamma) \rightarrow C_{2233} = \frac{\varepsilon_{33}[z]}{F\sigma_{11}[z] + E\sigma_{22}[z] + \sigma_{33}[z]}$$

Όπου:

$$E = \frac{\sigma_{11}[x]\sigma_{33}[y] - \sigma_{33}[x]\sigma_{11}[y]}{\sigma_{22}[x]\sigma_{11}[y] - \sigma_{11}[x]\sigma_{22}[y]}$$

$$F = \frac{-E\sigma_{22}[x] - \sigma_{33}[x]}{\sigma_{11}[x]}$$

Οι ισοδύναμοι συντελεστές της τρίτης σειράς θα είναι:

C3311	-6.00E-11 Pa⁻¹
C3322	-6.00E-11 Pa⁻¹
C3333	2.67E-10 Pa⁻¹

3.2.7.2 Προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες (3D cross) σε διάτμηση με το 3DEC (συνθήκες κύλισης)

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του δείγματος πετρώματος με τρεις ασυνέχειες σε διάτμηση πραγματοποιούνται τρία ζευγάρια πειραμάτων. Οι συνοριακές συνθήκες μετατόπισης και φόρτισης για τα αριθμητικά πειράματα επιβολής διατμητικής τάσης θα είναι οι ίδιες με την περίπτωση του δείγματος πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια. Σύμφωνα με όσα έχουν περιγραφεί στην υποενότητα 3.2.5.2, οι οριακές συνθήκες μετατόπισης αφορούν στην επιβολή συνθηκών κύλισης στις δύο από τις τέσσερις πλευρές του δείγματος στις οποίες ασκείται η εκάστοτε διατμητική τάση.

Τα τρία ζεύγη αριθμητικών πειραμάτων που πραγματοποιήθηκαν είναι τα εξής:

- Πείραμα No.[1*] και πείραμα No.[1**] → **πείραμα No.[1]** (σ_{zx}/σ_{xz})

- Πείραμα No.[2*] και πείραμα No.[2**] → **πείραμα No.[2]** (σyz/σzy)
- Πείραμα No.[3*] και πείραμα No.[3**] → **πείραμα No.[3]** (σxy/σyx)

Πείραμα No.[1] (σxz/σxz)

Όπως και στην περίπτωση του δείγματος με μία οριζόντια ασυνέχεια,, ο τανυστής της τάσης που εφαρμόζεται στο δείγμα με τρεις ασυνέχειες για τα πειράματα No.[1*] και No.[1**], είναι:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1e6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1e6 & 0 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Και οι συνθήκες μετατόπισης για τα δύο πειράματα διακρίνονται στα Σχήματα 3-29 και 3-30.

→ Πείραμα No.[1*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z)

Για το πείραμα No.[1*], οι εφαρμοζόμενες συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z, περιορίζουν τη μετατόπιση των σημείων των συγκεκριμένων πλευρών στη διεύθυνση z. Συνεπώς, $\varepsilon_{33}^{[1*]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι το ίδιο με το σύστημα εξισώσεων (3-25).

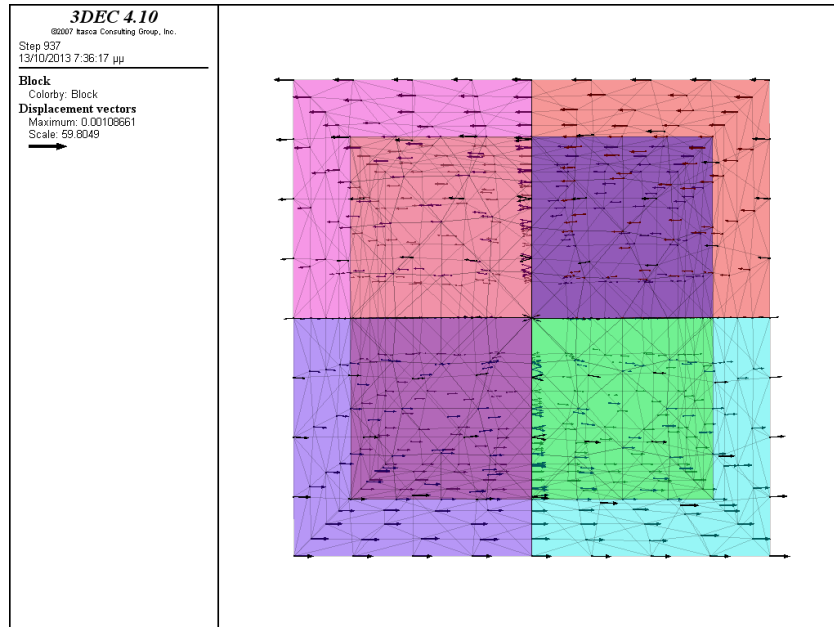
Μετά από την προσομοίωση στο 3DEC, λαμβάνουμε τις παρακάτω μακροσκοπικές τροπές και τάσεις:

Πείραμα No.[1*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = 3625.1 (real)
xxstrain_ = -4.95305e-007 (real)	total_syy = -276.087 (real)
yystrain_ = -6.80132e-006 (real)	total_szz = 3473.5 (real)
yzstrain_ = -2.37586e-006 (real)	total_sxy = 970.912 (real)
zxstrain_ = -0.000683921 (real)	total_syz = 209.429 (real)
xystrain_ = -2.90445e-005 (real)	total_sxz = -1.03753e+006 (real)

Επομένως, οι τανυστές της τάσης και της τροπής για το Πείραμα No.[1*] διαμορφώνονται ως εξής:

	3625,1	970,912	-1,00E+06
$\sigma^{[1*]} =$	970,912	-276,087	209,429
	-1,00E+06	209,429	3473,5

	-4,95E-07	-2,90E-05	-0,00068
$\varepsilon_{11}^{[1^*]} =$	-2,90E-05	-6,80E-06	-2,38E-06
	-0,00068	-2,38E-06	0



Σχήμα 3-45: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{xz})/\sigma_{13}(\sigma_{zx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.

→ Πείραμα No.[1**] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x)

Σ'αυτή την περίπτωση, οι συνθήκες κύλισης εφαρμόζονται στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x περιορίζοντας τη μετατόπιση των σημείων των συγκεκριμένων πλευρών στη διεύθυνση z. Έτσι, $\varepsilon_{11}^{[1^{**}]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι το ίδιο με το σύστημα εξισώσεων (3-26).

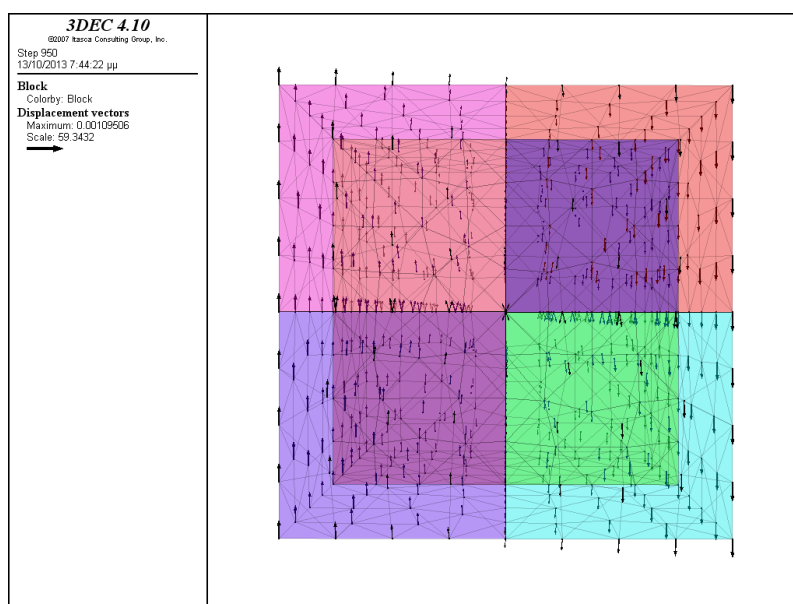
Παρακάτω φαίνονται οι υπολογισμένες μακροσκοπικές τροπές και τάσεις μέσω του 3DEC.

Πείραμα No.[1**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 4.34284e-006 (real)	total_sxx = 2016.18 (real)
xxstrain_ = 0 (real)	total_syy = -121.591 (real)
yystrain_ = -7.64622e-006 (real)	total_szz = 889.545 (real)
yzstrain_ = -1.77309e-006 (real)	total_sxy = -201.854 (real)
zxstrain_ = -0.000684928 (real)	total_syz = -58.6479 (real)
xystrain_ = 9.62254e-006 (real)	total_sxz = -1.03543e+006 (real)

Επομένως, οι τανυστές της τάσης και της τροπής διαμορφώνονται ως εξής:

	2016,18	-201,854	-1,00E+06
$\sigma[1^{**}] =$	-201,854	-121,591	-58,6479
	-1,00E+06	-58,6479	889,545

	0	9,62E-06	-0,00068
$\varepsilon[1^{**}] =$	9,62E-06	-7,65E-06	-1,77E-06
	-0,00068	-1,77E-06	4,34E-06



Σχήμα 3-46: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{31}(\sigma_{xz})/\sigma_{13}(\sigma_{xz})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία ερμηνείας των αριθμητικών πειραμάτων, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3-23) και (3-24), οι τανυστές της τάσης και της τροπής για το Πείραμα Νο.[1], διαμορφώνονται ως εξής:

	5641,28	769,058	-2000000
$\sigma[1] =$	769,058	-397,678	150,7811
	-2000000	150,7811	4363,045

	-5E-07	-1,9E-05	-0,00137
$\varepsilon[1] =$	-1,9E-05	-1,4E-05	-4,2E-06
	-0,00137	-4,2E-06	4,34E-06

Ο ισοδύναμος συντελεστής ενδοτικότητας **C3131** υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (3-27ε) ως εξής:

$$\varepsilon_{31}^{[1]} = C_{3131}\sigma_{31}^{[1]} \rightarrow C_{3131} = \frac{\varepsilon_{31}^{[1]}}{\sigma_{31}^{[1]}} = \frac{-1.37e-03}{-2000000 \text{ Pa}} = \mathbf{6.84e-10 \text{ Pa}^{-1}}$$

Πείραμα No.[2] (σyz/σzy)

Για τα πειράματα No.[2*] και No.[2**] εφαρμόζεται ο παρακάτω τανυστής της τάσης:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1e6 \\ 0 & -1e6 & 0 \end{bmatrix} Pa$$

Και οι οριακές συνθήκες μετατόπισης για τα πειράματα No.[2*] και No.[2**] φαίνονται στα Σχήματα 3-33 και 3-34.

→ **Πείραμα No.[2*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y)**

Στο Πείραμα No.[2*] οι συνθήκες κύλισης που εφαρμόζονται, περιορίζουν τη μετατόπιση στη διεύθυνση y των σημείων των πλευρών που είναι κάθετες στον άξονα y, οπότε ισχύει $\varepsilon_{22}^{[2*]} = 0$ και το σύστημα εξισώσεων θα είναι το ίδιο με το σύστημα (3-28).

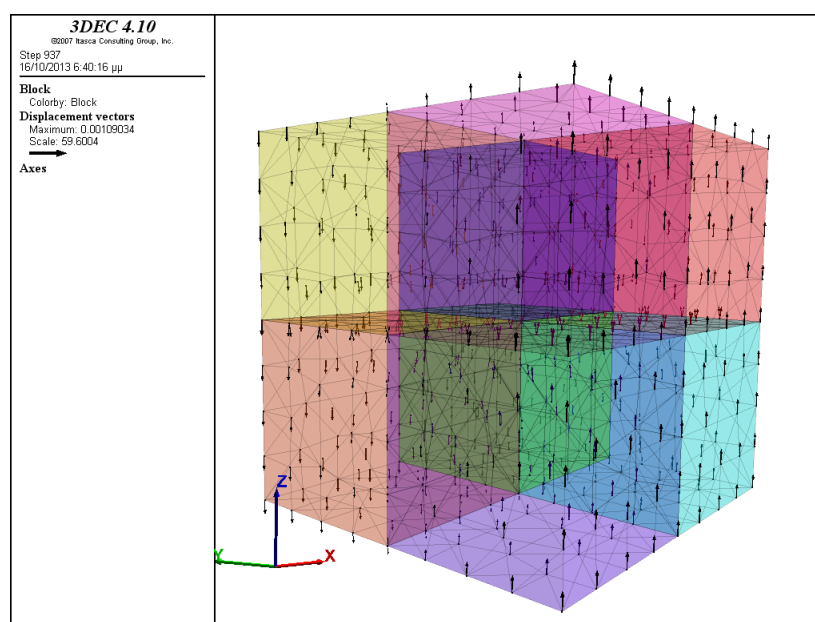
Έπειτα από τους υπολογισμούς στο 3DEC, οι μακροσκοπικές τροπές και τάσεις διαμορφώνονται ως εξής:

Πείραμα No.[2*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 7.0163e-006 (real)	total_sxx = -134.876 (real)
xxstrain_ = -6.70449e-006 (real)	total_syy = 1613.56 (real)
yystrain_ = 0 (real)	total_szz = 839.519 (real)
yzstrain_ = -0.000683235 (real)	total_sxy = 63.7029 (real)
zxstrain_ = 3.33634e-005 (real)	total_syz = -1.0365e+006 (real)
xystrain_ = -4.23213e-007 (real)	total_sxz = 53.6706 (real)

Οι τανυστές της τάσης και της τροπής διαμορφώνονται ως εξής:

	-134,876	63,7029	53,6706
$\sigma[2^*] =$	63,7029	1613,56	-1,00E+06
	53,6706	-1,00E+06	839,519

	-6,71E-06	-4,23E-07	3,34E-07
$\varepsilon[2^*] =$	-4,23E-07	0	-0,00068
	3,34E-07	-0,00068	7,016E-06



Σχήμα 3-47: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y .

→ **Πείραμα Νο.[2**]** (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z)

Λόγω των συνθηκών κύλισης που εφαρμόζονται στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z , εμποδίζεται η μετατόπιση στη διεύθυνση z . Οπότε ($\varepsilon_{33}^{[2**]} = 0$) και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι το ίδιο με το σύστημα εξισώσεων (3-29).

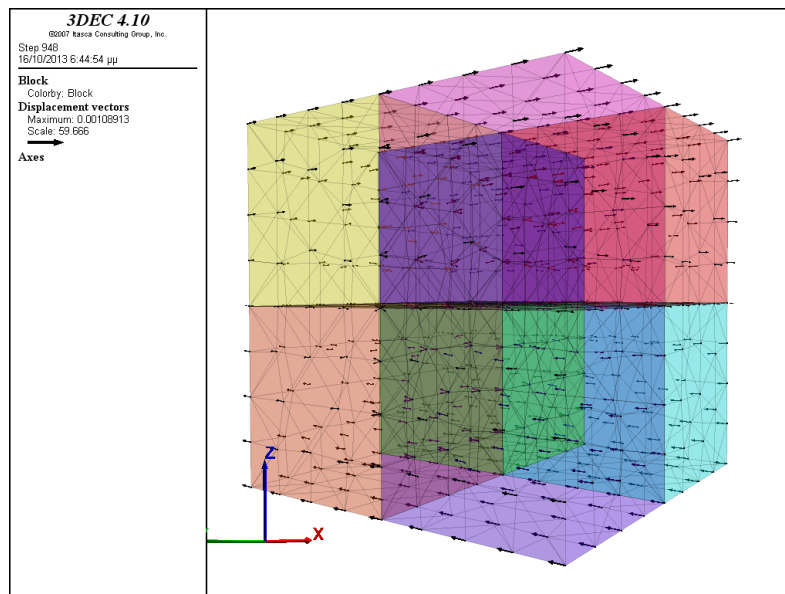
Μετά από την προσομοίωση στο 3DEC, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά στις υπολογισμένες μακροσκοπικές τάσεις και τροπές:

Πείραμα No.[2**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = 0 (real)	total_sxx = 1060.62 (real)
xxstrain_ = -7.94719e-006 (real)	total_syy = 1692.06 (real)
yystrain_ = -7.62024e-006 (real)	total_szz = 6832.81 (real)
yzstrain_ = -0.000683326 (real)	total_sxy = 404.097 (real)
zxstrain_ = 1.19608e-005 (real)	total_syz = -1.03709e+006 (real)
xystrain_ = 3.30606e-005 (real)	total_sxz = -638.134 (real)

Επομένως οι τανυστές της τάσης και της τροπής διαμορφώνονται όπως φαίνεται παρακάτω:

	1060,62	404,097	-638,134
$\sigma[2^{**}] =$	404,097	1692,06	-1,00E+06
	-638,134	-1,00E+06	6832,81

	-7,95E-06	3,31E-05	1,20E-05
$\varepsilon[2^{**}] =$	3,31E-05	7,62E-06	-0,00068
	1,20E-05	-0,00068	0



Σχήμα 3-48: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{23}(\sigma_{yz})/\sigma_{32}(\sigma_{zy})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z.

Έτσι, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3-23) και (3-24) και τη διαδικασία που έχει περιγραφεί στην υποενότητα 3.2.5.2 οι τανυστές της τάσης και της τροπής για το Πείραμα No.[2] θα είναι οι εξής:

	925,744	467,7999	-584,463
$\sigma_{23}^{[2]} =$	467,7999	3305,62	-2000000
	-584,463	-2000000	7672,329

	-1,47E-05	3,27E-05	1,23E-05
$\varepsilon_{23}^{[2]} =$	3,27E-05	7,62E-06	-1,37E-03
	1,23E-05	-1,37E-03	7,02E-06

Και ο ισοδύναμος συντελεστής ενδοτικότητας C2323 υπολογίζεται από την εξίσωση (3-28δ):

$$\varepsilon_{23}^{[2]} = C_{2323} \sigma_{23}^{[2]} \rightarrow C_{2323} = \frac{\varepsilon_{23}^{[2]}}{\sigma_{23}^{[2]}} = \frac{-1.37e-03}{-2000000 \text{ Pa}} = 6.84e-10 \text{ Pa}^{-1}$$

Πείραμα No.[3] (σxy/σyx)

Ο τανυστής της τάσης που εφαρμόζεται για τα πειράματα No.[3*] και No.[3**] είναι ο εξής:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1e6 & 0 \\ -1e6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

Οι οριακές συνθήκες μετατόπισης για τα πειράματα No.[3*] και No.[3**] φαίνονται στα Σχήματα 3-37 και 3-38.

→ Πείραμα No.[3*] (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x)

Οι συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x, περιορίζουν τη μετατόπιση στη διεύθυνση x. Συνεπώς, $\varepsilon_{11}^{[3*]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων είναι: το ίδιο με το σύστημα των εξισώσεων (3-31).

Τα αποτελέσματα από την προσομοίωση στο 3DEC φαίνονται παρακάτω:

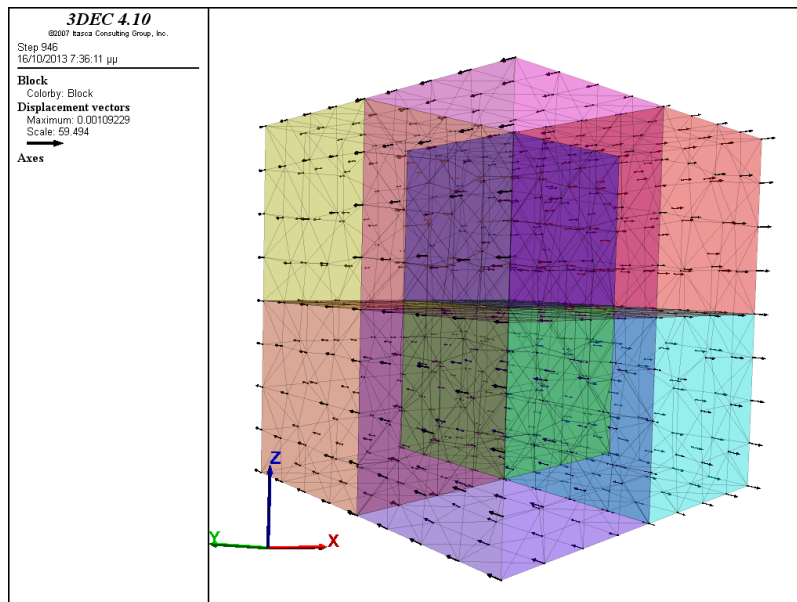
Πείραμα No.[3*]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -9.54585e-006 (real)	total_sxx = -1403.8 (real)
xxstrain_ = 0 (real)	total_syy = 4012.15 (real)
yystrain_ = 3.38447e-006 (real)	total_szz = 233.963 (real)
yzstrain_ = -4.03227e-006 (real)	total_sxy = -1.03483e+006 (real)
zxstrain_ = -1.15718e-006 (real)	total_syz = -69.5633 (real)

xystrain = -0.000683612 (real)	total sxz = -664.014 (real)
---------------------------------------	-----------------------------

Οπότε, οι ταυιστές της τάσης και της τροπής διαμορφώνονται ως εξής:

	-1403,8	-1,00E+06	-664,014
$\sigma[3^*] =$	-1,00E+06	4012,15	-69,563
	-664,014	-69,563	233,963

	0	-0,00068	-1,16E-06
$\varepsilon[3^*] =$	-0,00068	3,38E-06	-4,03E-06
	-1,16E-06	-4,03E-06	-9,55E-06



Σχήμα 3-49: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διατμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα x.

→ **Πείραμα Νο.[3**]** (συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y)

Σ'αυτή την περίπτωση, οι συνθήκες κύλισης εμποδίζουν τη μετατόπιση στη διεύθυνση y. Οπότε $\varepsilon_{22}^{[3**]} = 0$ και το σύστημα των εξισώσεων θα είναι το ίδιο με το σύστημα (3-32).

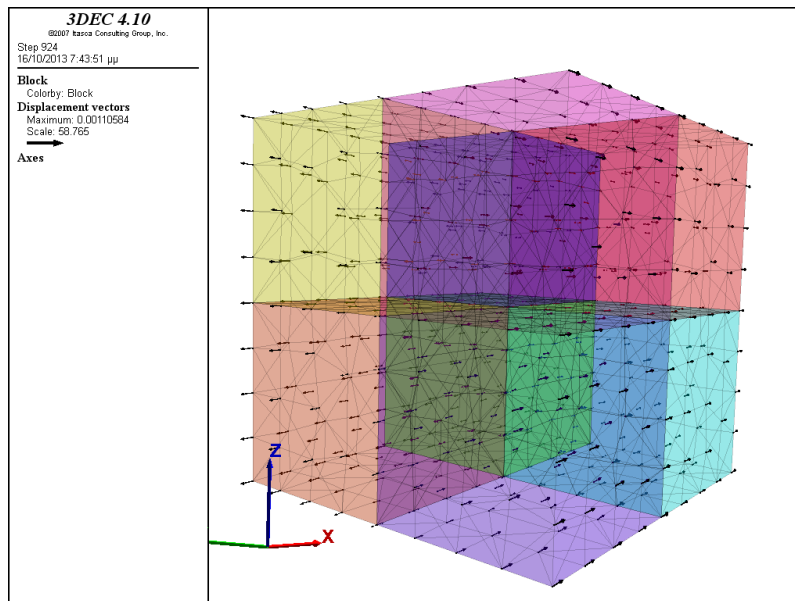
Μετά από την προσομοίωση στο 3DEC λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πείραμα No.[3**]	
Μακροσκοπικές τροπές	Μακροσκοπικές τάσεις
zzstrain_ = -7.6227e-006 (real)	total_sxx = -344.44 (real)
xxstrain_ = -8.14753e-006 (real)	total_syy = 8472.15 (real)
yystrain_ = 0 (real)	total_szz = 834.758 (real)
yzstrain_ = -9.98152e-007 (real)	total_sxy = -1.03923e+006 (real)
zxstrain_ = 1.94874e-006 (real)	total_syz = 493.349 (real)
xystrain_ = -0.000687667 (real)	total_sxz = 575.177 (real)

Οπότε οι τανυστές της τάσης και της τροπής θα είναι:

	-344,44	-1,00E+06	575,177
$\sigma[3^{**}] =$	-1,00E+06	8472,15	493,349
	575,177	493,349	834,758

	-8,15E-06	-0,00068	1,95E-06
$\varepsilon[3^{**}] =$	-0,00068	0	-9,98E-07
	1,95E-06	-9,98E-07	-7,62E-06



Σχήμα 3-50: Τρισδιάστατο μοντέλο στο 3DEC και τα διανύσματα μετατόπισης για την επιβολή διαμητικής τάσης $\sigma_{12}(\sigma_{xy})/\sigma_{21}(\sigma_{yx})$, επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y .

Τελικά σύμφωνα με τις εξισώσεις (3-23) και (3-24) οι τανυστές της τάσης και της τροπής για το Πείραμα No.[3] είναι:

	-1748,24	-2000000	-88,837
$\sigma_{[3]} =$	-2000000	12484,3	423,786
	-88,837	423,786	1068,721

	-8,2E-06	-0,00137	7,9E-07
$\varepsilon_{[3]} =$	-0,00137	3,38E-06	-5E-06
	7,9E-07	-5E-06	-1,7E-05

Ο ισοδύναμος συντελεστής ενδοτικότητας C_{1212} υπολογίζεται από την εξίσωση (3-29στ):

$$\varepsilon_{12}^{[3]} = C_{1212} \sigma_{12}^{[3]} \rightarrow C_{1212} = \frac{\varepsilon_{12}^{[3]}}{\sigma_{12}^{[3]}} = \frac{-1.37e - 03}{-2000000 \text{ Pa}} = 6.84e - 10 \text{ Pa}^{-1}$$

Καταλήγοντας, το ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας είναι το εξής:

	2.67	-0.6	-0.6	0	0	0	
	-0.6	2.67	-0.6	0	0	0	
$C_{ijkl}=1E-10 \times$	-0.6	-0.6	2.67	0	0	0	[1/Pa]
	0	0	0	6.84	0	0	
	0	0	0	0	6.84	0	
	0	0	0	0	0	6.84	

Παρατηρήσεις:

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές ενδοτικότητας $C_{1111}^{3D \text{ cross}}$, $C_{2222}^{3D \text{ cross}}$, $C_{3333}^{3D \text{ cross}}$ είναι ίσοι μεταξύ τους και ίσοι με το συντελεστή ενδοτικότητας $C_{3333} = 2.67e - 10 \text{ Pa}^{-1}$ της περίπτωσης του δείγματος με μία οριζόντια ασυνέχεια. Συμπεραίνουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος με τρεις ασυνέχειες είναι ίδιο για όλες τις διευθύνσεις και αποδυναμωμένο σε σχέση μ'αυτό του άρρηκτου πετρώματος ($E_{11} = E_{22} = E_{33} = 3.75e9 \text{ Pa} < E_{\text{matrix}}$).

Οι συντελεστές $C_{1122}^{3D \text{ cross}} = C_{1133}^{3D \text{ cross}} = C_{2211}^{3D \text{ cross}} = C_{2233}^{3D \text{ cross}} = C_{3311}^{3D \text{ cross}} = C_{3322}^{3D \text{ cross}} = -0.6 \text{ Pa}^{-1}$ είναι ίσοι με τους αντίστοιχους της προηγούμενης περίπτωσης, Ωστόσο εξαιτίας του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας σ'όλες τις διευθύνσεις θα έχουμε:

$$v_{21} = v_{31} = v_{12} = v_{32} = v_{13} = v_{23} = 0.225 < v_{\text{matrix}}$$

Καθώς οποιαδήποτε τροπή ε_{ii} που προκαλείται από ορθή τάση που δρα σε διεύθυνση i (σ_{ii}) θα είναι αυξημένη σε σχέση με την αντίστοιχη τροπή άρρηκτου πετρώματος.

Όσον αφορά στους συντελεστές $C_{2323}^{3D\ cross} = C_{3131}^{3D\ cross} = C_{1212}^{3D\ cross} = 6.84e - 10Pa^{-1}$, αυτοί είναι αυξημένοι δηλώνοντας τη μείωση του μέτρου διάτμησης για τα επίπεδα διάτμησης (x,y), (y,z) και (z,x). Το μέτρο διάτμησης θα είναι σ'αυτή την περίπτωση:

$$G_{23} = G_{12} = G_{31} = 7.31e8Pa < G_{matrix}$$

Λόγω της παρουσίας των ασυνεχειών στα επίπεδα διάτμησης (x,y), (y,z) και (z,x).

4 Συμπεράσματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη αριθμητικών πειραμάτων χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό κώδικα 3DEC για τον υπολογισμό των ισοδύναμων υδραυλικών και ελαστικών σταθερών κερματισμένων δειγμάτων πετρώματος. Τα πειράματα αυτά θα πρέπει να είναι εφαρμόσιμα σε δείγματα πολύπλοκης γεωμετρίας του συστήματος ασυνεχειών, όπως για παράδειγμα σ'ένα δείγμα πετρώματος με ασυνέχειες τυχαίου προσανατολισμού η καθεμία.

4.1 Συμπεράσματα από την προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος υπό σταθερή υδραυλική κλίση

Στην Ενότητα 2 περιγράφεται ο τρόπος έκφρασης της ισοδύναμης θεωρητικής υδραυλικής αγωγιμότητας για τρία διαφορετικά δείγματα ρωγματωμένου πετρώματος (οριζόντια ασυνέχεια, 3D cross, σύστημα τεμνόμενων ασυνεχειών με μία «εσωτερική» ασυνέχεια) υπό σταθερή υδραυλική κλίση. Επίσης περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού της συνολικής παροχής στον αριθμητικό κώδικα 3DEC και βάσει των αποτελεσμάτων η εύρεση της τιμής του ισοδύναμου συντελεστή υδραυλικής αγωγιμότητας.

Για τις τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, τα αποτελέσματα από την προσομοίωση της συμπεριφοράς του πετρώματος υπό σταθερή υδραυλική κλίση σχετικά με την ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα των τριών δειγμάτων, ήταν σε συμφωνία με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές. Παρακάτω φαίνεται συνοπτικός πίνακας σύγκρισης των θεωρητικών αποτελεσμάτων και των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τον αριθμητικό κώδικα 3DEC.

		Θεωρητική τιμή [m/s]	Τιμή από το 3DEC [m/s]
οριζόντια ασυνέχεια	K_{xx}	-8.18e-7	-8.17607e-7
	K_{yy}	-8.18e-7	-8.17546e-7
3D cross	K_{xx}	-1.23e-6	-1.22629e-6
	K_{yy}	-1.09e-6	-1.09005e-6
	K_{zz}	-0.68e-6	-0.68127e-6
σύστημα ασυνεχειών με μία «εσωτερική» ασυνέχεια	K_{zz}	-5.45e-7	-5.45065e-7

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της συνολικής παροχής ασυνέχειας στο 3DEC και τον προσδιορισμό της ισοδύναμης υδραυλικής αγωγιμότητας του δείγματος στο πλαίσιο της θεώρησης του ως ένα συνεχές και πορώδες μέσο, δεν εφαρμόστηκε για την περίπτωση δείγματος πετρώματος με ασυνέχειες τυχαίου προσανατολισμού καθώς δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στην προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς διαφόρων δειγμάτων και στην προσπάθεια εύρεσης των κατάλληλων συνθηκών διεξαγωγής των αντίστοιχων αριθμητικών πειραμάτων.

4.2 Συμπεράσματα από την προσομοίωση συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος σε θλίψη και διάτμηση

Όσον αφορά στην προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς δείγματος πετρώματος στο 3DEC, εντοπίστηκε αρχικά το πρόβλημα της περιστροφής του δείγματος που είχε ως συνέπεια την προσπάθεια επιλογής συνοριακών συνθηκών εκτέλεσης των προσομοιώσεων, τέτοιων ώστε να αποφευχθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα. Το πρόβλημα της περιστροφής εντοπίστηκε κυρίως σε δείγματα με κεκλιμένες ασυνέχειες. Επομένως, με κύριο σκοπό τη μελλοντική εφαρμογή των αριθμητικών πειραμάτων που θα εφαρμόζονταν σε πιο γενικές και συνεπώς πιο περίπλοκες περιπτώσεις ρωγματωμένου πετρώματος, εξετάσαμε δύο τρόπους αποτροπής της περιστροφής του μοντέλου εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες μετατόπισης:

- Άρθρωση των κόμβων ορισμένων πλευρών του δείγματος. Τα αποτελέσματα από τα αριθμητικά πειράματα που διεξάχθηκαν μ' αυτό τον τρόπο δεν ήταν ικανοποιητικά καθώς το προφίλ των μετατοπίσεων των σημείων της κάθε ελεύθερης πλευράς δεν ήταν γραμμικό.
- Συνθήκες κύλισης σε ορισμένες πλευρές του δείγματος. Με την κύλιση εμποδίζεται η μετατόπιση της πλευράς προς την κάθετη προς το επίπεδο της διεύθυνση.

Θεωρώντας τη δεύτερη λύση καταλληλότερη για τη διεξαγωγή των αριθμητικών πειραμάτων, πραγματοποιήθηκαν με αυτό τον τρόπο οι προσομοιώσεις προκειμένου να εξεταστεί η συμπεριφορά του πετρώματος σε θλίψη και διάτμηση.

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του πετρώματος σε θλίψη, τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Λήφθηκαν οι ισοδύναμοι συντελεστές ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε ορθές τάσεις και τροπές και λήφθηκαν ή επαληθεύτηκαν οι (ισοδύναμες) ελαστικές σταθερές για το δείγμα στο πλαίσιο της θεωρησής του ως ένα ισοδύναμο συνεχές, ελαστικό μέσο.

Σχετικά με την προσομοίωση της συμπεριφοράς του πετρώματος σε διάτμηση, παρουσιάστηκαν προβλήματα τα οποία οφείλονταν στις

επιβληθείσες συνθήκες κύλισης στο δείγμα με την οριζόντια ασυνέχεια και στο δείγμα με τις τρεις ασυνέχειες (3D cross). Αφού περιγράφηκε η προσπάθεια ερμηνείας και επίλυσης του προβλήματος, τελικά για το δείγμα με την οριζόντια ασυνέχεια οι συντελεστές ενδοτικότητας C_{2323}^{3DEC} και C_{3131}^{3DEC} που επηρεάζονται ουσιαστικά από την ασυνέχεια, δεν ήταν ικανοποιητικοί. Ένας τρόπος ελέγχου των συγκεκριμένων αποτελεσμάτων είναι η διεξαγωγή των αντίστοιχων πειραμάτων διάτμησης χωρίς οριακές συνθήκες μετατόπισης, καθώς όπως έχει επαναληφθεί τα δείγματα που εξετάσαμε δεν περιστρέφονται υπό την επιβολή διατμητικών τάσεων. Έτσι για το δείγμα πετρώματος με μία οριζόντια ασυνέχεια και χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τη μετατόπιση των εξωτερικών του σημείων (free boundaries) λαμβάνουμε το παρακάτω ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας:

	2	-0.6	-0.6	0	0	0	
	-0.6	2	-0.6	0	0	0	
$C_{ijkl}=1E-10 \times$	-0.6	-0.6	2.67	0	0	0	[1/Pa]
	0	0	0	5.93	0	0	
	0	0	0	0	5.93	0	
	0	0	0	0	0	2.6	

Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε ορθές τάσεις και τροπές καθώς και ο συντελεστής C_{1212}^{3DEC} , είναι ίδιοι με αυτούς που λήφθηκαν για την περίπτωση επιβολής συνθηκών κύλισης.

Ωστόσο, παρατηρούμε ότι χωρίς τις συνθήκες κύλισης, οι συντελεστές ενδοτικότητας C_{2323}^{3DEC} και C_{3131}^{3DEC} είναι αυξημένοι κατά 26% περίπου. Συμπεραίνουμε, ότι οι οριακές συνθήκες μετατόπισης επηρεάζουν τη συμπεριφορά της ασυνέχειας υπό τη δράση διατμητικών τάσεων στο δείγμα επηρεάζοντας συνεπώς και τη συμπεριφορά του κερματισμένου πετρώματος και η περαιτέρω ερμηνεία των αποτελεσμάτων που περιγράφηκε παραπάνω δεν είναι κατάλληλη ούτε επαρκής.

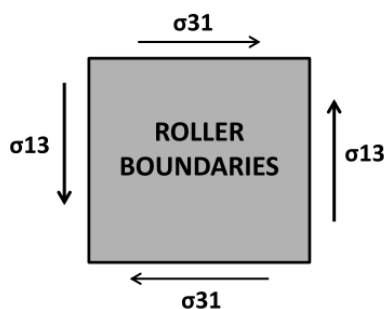
Αυτό φαίνεται και από την περίπτωση του δείγματος με τρεις ασυνέχειες όπου όλοι οι συντελεστές ενδοτικότητας που αντιστοιχούν σε διατμητικές τάσεις και τροπές επηρεάζονται από την παρουσία των ασυνεχειών. Έτσι για το δείγμα πετρώματος με τρεις ασυνέχειες και χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τη

μετατόπιση των εξωτερικών του σημείων (free boundaries) λαμβάνουμε το παρακάτω ισοδύναμο μητρώο ενδοτικότητας:

	2.67	-0.6	-0.6	0	0	0
	-0.6	2.67	-0.6	0	0	0
$C_{ijkl}=1E-10 \times$	-0.6	-0.6	2.67	0	0	0
	0	0	0	9.27	0	0
	0	0	0	0	9.27	0
	0	0	0	0	0	9.27

Και σ'αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές ενδοτικότητας των τριών πρώτων σειρών του μητρώου συμφωνούν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα αριθμητικά πειράματα με την επιβολή συνθηκών κύλισης. Οι συντελεστές C_{2323} , C_{3131} , C_{1212} είναι αυξημένοι κατά 35.5% περίπου.

Μια άλλη σκέψη όσον αφορά στις οριακές συνθήκες μετατόπισης για την αποφυγή της περιστροφής του μοντέλου ήταν η επιβολή συνθηκών κύλισης στις πλευρές του δείγματος όπου δεν ασκείται καμία διαμητική τάση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για την περίπτωση διαμητικών τάσεων σ_{13} και σ_{31} (Σχήμα 3-33):



Σχήμα 3-51: Τομή σε επίπεδο (x,z): επιβολή διαμητικών τάσεων σ_{31} και σ_{13} και συνθήκες κύλισης στις πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y (x_2).

Όπως φαίνεται, επιβάλλονται συνθήκες κύλισης στις πλευρές του δείγματος που είναι κάθετες στον άξονα x_2 (στο συγκεκριμένο σχήμα). Οι συνθήκες αυτές εξετάστηκαν για την περίπτωση της οριζόντιας ασυνέχειας και των τριών ασυνεχειών και τα αποτελέσματα είναι ίδια με αυτά που προέκυψαν από τα πειράματα όπου δεν υπήρχε κανένας περιορισμός όσον αφορά στη

μετατόπιση των σημείων των πλευρών του δείγματος. Ωστόσο, για την περίπτωση δείγματος πετρώματος με μία κεκλιμένη ασυνέχεια (Σχήμα 3-3) για τις ίδιες συνθήκες, το δείγμα δεν περιστρέφεται ανεξέλεγκτα αλλά παρουσιάζει μία μετατόπιση η οποία δε σχετίζεται εξ'ολοκλήρου με την τροπή. Συμπερασματικά, με κύριο στόχο την ανάπτυξη συνθηκών διεξαγωγής αριθμητικών πειραμάτων για μελλοντική εφαρμογή σε δείγματα πετρώματος με τυχαίο προσανατολισμό ασυνεχειών, δε μπορέσαμε να καταλήξουμε στις κατάλληλες οριακές συνθήκες μετατόπισης για την αποφυγή της περιστροφής και την ταυτόχρονη εξαγωγή αντιπροσωπευτικών τιμών τροπής για την περαιτέρω επεξεργασία και τον τελικό προσδιορισμό των ισοδύναμων συντελεστών ενδοτικότητας ενός κερματισμένου δείγματος πετρώματος, με εξαίρεση τους συντελεστές που αντιστοιχούν σε ορθές τάσεις και τροπές, οι τιμές των οποίων ήταν ικανοποιητικές.

5 Βιβλιογραφία

Νομικός, Π., Σοφιανός, Α. (2011) «Σημειώσεις μηχανικής πετρωμάτων». Σημειώσεις πανεπιστημιακών παραδόσεων Ε.Μ.Π., Αθήνα

Ababou R., I. Cañamón, A. Poutrel (2012+): "Equivalent Upscaled Hydro-Mechanical Properties of a Damaged and Fractured Claystone Around a Gallery (Meuse/Haute-Marne Underground Research Laboratory)". *Geological Society Special Publications – GeolSoc Book (submitted, November 2012)*

Ababou R., I. Cañamon Valera, A. Poutrel (2011): "Macro-Permeability Distribution and Anisotropy in a 3D Fissured and Fractured Clay Rock: 'Excavation Damaged Zone' around a Cylindrical Drift in Callovo-Oxfordian Argillite (Bure)". Special Issue "Clays in Natural & Engineered Barriers for Radioactive Waste Confinement" (4th Internat. Meeting Clays 2010, Nantes, 29 March – 1st April 2010). *Journal of Physics & Chemistry of the Earth* (ISSN 1474-7065, DOI: 10.1016/j.pce.2011.07.032).

Ababou R., I. Cañamón, F. J. Elorza, 2005 : Thermo-Hydro-Mechanical simulation of a 3D fractured porous rock: preliminary study of coupled matrix-fracture hydraulics. Proceedings, FEMLAB 2005 Conference : "Une conférence multiphysique". Paris, France, 15 November 2005, pp.193-198.

Ababou R., A. Millard, E. Treille, M. Durin, F. Plas, 1994.a: Continuum Modeling of Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes in Fractured Rock, in *Computational Methods in Water Resources*, Kluwer Acad. Publishers, A. Peters et al. eds., Vol.1, Chap.6, pp.651-658, 1994.

Ababou R., A. Millard, E. Treille, M. Durin, 1994.b: *Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Modeling for the Near Field Benchmark Test 3 (BMT3) of DECOVALEX Phase 2 --Progress Report*, Rapport DMT/93/488 (17 mai 1994), Comm. Energie Atomique, Saclay, France, 202 pp.

ANDRA (R5, 2012) [internal report] - Ababou R. & I. Canamon 2012: "R5 : *Homogénéisation Couplée Hydro-Mécanique 3D de l'EDZ fissurée et fracturée.*" Rapport R5 de l'étude MPS2 de l'UPS4 (Projet HAVL) "Elaboration de Modèles Mécaniques et Hydromécaniques Homogénéisés de l'EDZ au champ proche d'un ouvrage de stockage". Identif. ANDRA : C.RP.0IMF.11.0003 (date initiale: 15/11/2011 ; version applicable: 31/07/2012). (188 p.)

Bacon Ch., J. Pouyet, 2000: *Mécanique des solides déformables*. Hermès Science Publications, Paris, 2000, 310 pp.

Blum P., (2004), Upscaling of Hydro-Mechanical Processes in Fractured Rock, Ph. D Thesis. The University of Birmingham: U.K

Cañamón Valera I., 2009: *Coupled phenomena in 3D fractured media (analysis and modeling of thermo-hydro-mechanical processes)*. VDM Verlag Dr. Müller, 2009, 204 pp. (ISBN:978-3-639-18997-1).

Cañamón Valera I., 2006: *Analysis and Modeling of Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Phenomena in 3D Fractured Media (Analyse et Modélisation des Phénomènes Couplés Thermo-Hydro-Mécaniques en Milieux Fracturés 3D)*. Thèse de doctorat (en anglais). IMFT - Institut National Polytech. de Toulouse & Universidad Politécnica de Madrid (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas). [Thèse co-dirigée par R.Ababou, IMFT].

Charlez Ph. A., 1991: *Rock Mechanics, Volume 1, Theoretical Fundamentals*. Eds. Technip, Paris, 1991, 333 pp.

Itasca Consulting Group, Inc., 2007. 3DEC: User's manual. Minneapolis , Minnesota, USA

Kelvin (Lord Kelvin / W. Thomson), 1878 : *Elasticity*. Encyclopedia Britannica, vol. 7, 9th ed., Adam and Charles Black, London, Edinburgh, 1878, pp. 796–825.

Oda M., K. Suzuki, T. Maeshibu, 1984: Elastic compliance for rock like materials with random cracks. *Soils and Foundations, Japanese Soc. Soil Mech. & Foundation Engg.*, 24(3), pp.27-40.

Sadegh A.M., S.C. Cowin, 1991 : The Proportional Anisotropic Elastic Invariants. *Transactions of the ASME, J. Applied Mechanics*, Vol.58, pp. 50-57, March 1991.

Stietel A., A. Millard, E. Treille, E. Vuillod, A. Thoraval, R. Ababou (1996) : Continuum Representation of Coupled Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media : Homogenisation and Parameter Identification. *Developments in Geotech. Engg.*: Coupled Thermo-Hydro-Mecha. processes - DECOVALEX project for radioact. waste repositories (O.Stephansson, L.Jing, C-F.Tsang eds.), 79:135-164, 1996, Elsevier.

Thoraval A., Cappa F., Guglielmi Y. 2010: Impact of simplifications on the modeling of the hydromechanical behavior of a fractured porous carbonate outcrop. Proceedings, Symposium: Stabilité des versants rocheux Rock Slope Stability RSS 2010. Paris, France, 24-25 novembre 2010, pp

Thoraval A., Renaud V., 2004: Hydro-Mechanical Upscaling of a Fractured Rockmass Using A 3D Numerical Approach, in Ove Stephanson, Editor(s), Elsevier Geo-Engineering Book Series, Elsevier, 2004, Volume 2, Pages 275-280, ISSN 1571-9960, ISBN 9780080445250, [http://dx.doi.org/10.1016/S1571-9960\(04\)80053-3](http://dx.doi.org/10.1016/S1571-9960(04)80053-3)

Thoraval A., 2004 : Evaluation des effets hydromécaniques lors du creusement et de l'exploitation de galeries de stockage en milieu fracturé à l'aide du logiciel 3DEC

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

6 Παραρτήματα

6.1 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Θεωρητική ανάλυση των τροπών και τάσεων, λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή του στερεού σώματος

Στο συγκεκριμένο παράρτημα ορίζεται ο τανυστής της παραμόρφωσης D_{ij} , ο τανυστής της τροπής E_{ij} ή e_{ij} , και ο τανυστής της περιστροφής R_{ij} ή r_{ij} . Επιπλέον, αναλύεται ο τανυστής της περιστροφής συναρτήσει του διανύσματος περιστροφής Ω_i ή ω_i .

Πηγή: *R. Ababou (προσωπική επικοινωνία)*.

Θεωρούμε το διάνυσμα της μετατόπισης \vec{u} [m] και τον τανυστή της παραμόρφωσης:

$$D_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Όπου: $\text{ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ} = \overrightarrow{\text{GRAD}} \otimes \vec{u}$

Ο τανυστής της παραμόρφωσης αναλύεται:

- Στο συμμετρικό τανυστή της τροπής, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- Στον αντι-συμμετρικό τανυστή της περιστροφής, που ορίζεται ως:

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Τελικά, θα έχουμε:

$$D_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + r_{ij}$$

Προκειμένου να αναλυθεί ο τανυστής της περιστροφής R_{ij} συναρτήσει του διανύσματος μετατόπισης, ορίζουμε το διάνυσμα περιστροφής $\vec{\omega}$ ή το διάνυσμα του ρυθμού περιστροφής $\vec{\dot{\omega}}$, έτσι ώστε:

$$\dot{\omega}_i = \varepsilon_{ijk} \dot{r}_{kj}$$

Ή με αναστροφή:

$$\dot{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_k$$

Όπου ε_{ijk} είναι ο εναλλασσόμενος μοναδιαίος τανυστής:

$$\varepsilon_{ijk} = +1, \text{ εάν } ijk=123, 231, 312$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1, \text{ εάν } ijk=321, 132, 213$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \text{ εάν δύο ή περισσότεροι δείκτες είναι ίδιοι}$$

Το διανυσματικό γινόμενο (vector product):

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}: w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

$$\text{και ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου } \vec{w} = \overrightarrow{Rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \Rightarrow w_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Ο ρυθμός περιστροφής λαμβάνεται ως:

$$[\dot{r}_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & +\dot{\omega}_3 & -\dot{\omega}_2 \\ -\dot{\omega}_3 & 0 & +\dot{\omega}_1 \\ +\dot{\omega}_2 & -\dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω τανυστής αποτελεί αντι-συμμετρικό τανυστή, τέτοιο ώστε:

$$(\dot{r})^T = -(\dot{r})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν εφαρμόσουμε τον τανυστή $\underline{\underline{r}}$ σ'ένα διάνυσμα $\underline{\underline{a}}$, λαμβάνουμε το διανυσματικό γινόμενο των $\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{\omega}}$:

$$\underline{\underline{r}} \underline{\underline{a}} \rightarrow r_{ij} a_j = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k a_j \Rightarrow \underline{\underline{r}} \underline{\underline{a}} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{\omega}}$$

6.2 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανάλυση του τανυστή της τροπής σε σφαιρική και αποκλίνουσα συνιστώσα, και έκφραση του μητρώου ενδοτικότητας για την περίπτωση ελαστικού και ισότροπου υλικού

Στο συγκεκριμένο παράρτημα φαίνεται η ανάλυση της τροπής σε σφαιρική και αποκλίνουσα συνιστώσα στην περίπτωση ελαστικού και ισότροπου υλικού. Επίσης παρουσιάζεται η διαμόρφωση του νόμου του Hooke συναρτήσει του μητρώου ενδοτικότητας C_{ijkl} .

Πηγή: R. Ababou, *προσωπική επικοινωνία (Ababou & Bergez's course in applied mathematics for hydraulic engineers, INPT-ENSEEIH, Toulouse, France)*.

Θεωρούμε το νόμο του Hooke για την περίπτωση ελαστικού υλικού σε τρεις διαστάσεις ($i=1,2,3 ; j=1,2,3$) :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος του Poisson.

6.2.1 Ανάλυση του νόμου του Hooke σε σφαιρική και αποκλίνουσα συνιστώσα

Θέλουμε να δείξουμε, ότι ο νόμος του Hooke είναι δυνατό να εκφραστεί ως ένα σύστημα δύο ανεξάρτητων νόμων, του νόμου για τη σφαιρική συνιστώσα και του νόμου για την αποκλίνουσα συνιστώσα.

Σφαιρική συνιστώσα:

Θεωρούμε την ογκομετρική τροπή $\varepsilon_{VOL} = \varepsilon_{kk} = (\Delta Vol / Vol)$ και την «υδροστατική πίεση» $\sigma_H = \sigma_{kk}/3$. Χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις άθροισης των απαναλαμβανόμενων δεικτών και του Einstein γράφουμε:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{kk} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{kk} - \frac{\nu}{E}\sigma_{nn}\delta_{kk} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{kk} - \frac{\nu}{E}\sigma_{nn}3 = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_{kk}$$

$$\varepsilon_{VOL} \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk} = \frac{1}{K}\sigma_H$$

Όπου το K είναι το μέτρο συμπιεστότητας : $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

Αποκλίνουσα συνιστώσα:

Ορίζουμε την αποκλίνουσα τροπή $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_{kk}/3$ και την αποκλίνουσα τάση $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}/3$.

Ορίζουμε:

$$s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij};$$

$$e_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} - (\varepsilon_{kk}/3)\delta_{ij};$$

Αποκλίνουσα τροπή e_{ij}

$$\begin{aligned} e_{ij} &\equiv \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) - \left(\frac{\sigma_{kk}}{9K} \right) \delta_{ij} \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{9E} \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} \frac{1+\nu}{3E} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}) = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} \end{aligned}$$

Όπου G είναι το μέτρο διάτμησης : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ και $G = \mu$.

6.2.2 Τανυστική διατύπωση (Cijkl)

Ο νόμος του Hooke μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής: $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl}$, όπου C_{ijkl} είναι το μητρώο ενδοτικότητας 4ης τάξης.

Προκειμένου να εκφράσουμε το μητρώο C_{ijkl} συναρτήσει των E , ν , εργαζόμαστε όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεωρούμε ξεχωριστά τα δύο μέρη της τροπής ε_{ij} στο νόμο του Hooke.

$$1\text{ος όρος: } -\frac{\nu}{E} \sigma_{nn} \delta_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kl} \delta_{kl} \delta_{ij} \quad \text{καθώς:}$$

$$\sigma_{kl} \delta_{kl} = \sigma_{nn} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

$$2\text{ος όρος: } \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ki} \delta_{lj} \sigma_{kl} \quad \text{καθώς:}$$

$$\delta_{ki} \delta_{lj} \sigma_{kl} = \sigma_{ij}$$

Τελικά λαμβάνουμε:

$$\varepsilon_{kl} = C_{ijkl} \sigma_{ij} \quad \text{with} \quad C_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \delta_{ki} \delta_{lj}$$

6.3 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Προβολή συμμετρικού τανυστή τάσης πεδίου σ_{ij}^∞ σε δείγμα τριών διαστάσεων και ανάλυση σε όρους διανυσματικών τάσεων

Θεωρούμε το συμμετρικό τανυστή της τάσης σ_{ij}^∞ ο οποίος ασκείται σε δείγμα τριών διαστάσεων. Ας αναλύσουμε για παράδειγμα την προβολή του τανυστή στην πλευρά B1 του δείγματος (η πλευρά B1 είναι κάθετη στον άξονα $X1 \equiv X$) με μοναδιαίο ορθό εξωτερικό διάνυσμα $\vec{n} = (1,0,0)$.

Η διανυσματική τάση που ασκείται στην πλευρά B1 είναι:

$$\vec{\sigma}_{(B1)} = \sigma_{ij}^{(\infty)} n_j^{(B1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

Γενικά έχουμε:

$$n_j^{(Ak)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\delta_{jk}$$

$$n_j^{(Bk)} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} = +\delta_{jk}$$

Επομένως:

$$\vec{\sigma}_{(Ak)} = \sigma_{ij}^\infty n_j^{(Ak)} = -\sigma_{ij}^\infty \delta_{jk} = -\sigma_{ik}$$

$$\vec{\sigma}_{(Bk)} = \sigma_{ij}^\infty n_j^{(Bk)} = +\sigma_{ij}^\infty \delta_{jk} = +\sigma_{ik}$$

Συμπεραίνοντας, η διανυσματική τάση σε κάθε πλευρά (Ak, Bk) είναι:

$$\vec{\sigma}(Ak \text{ or } Bk) = \pm \sigma_{ik}$$

με “+” θετικό πρόσημο για Bk και “-“ αρνητικό πρόσημο για Ak.

Ας θεωρήσουμε τη διανυσματική τάση $\vec{\sigma}_{(Bk)}$, θα έχουμε:

$$\vec{\sigma}_{(Bk)} : \sigma_{i(Bk)} = \sigma_{ik}^\infty$$

Για την πλευρά B2 για παράδειγμα (η πλευρά B2 είναι κάθετη στον άξονα $X2 \equiv Y$) με $\vec{n} = (1,0,0)$:

$$\vec{\sigma}_{(B2)}: \sigma_{i(B2)} = \sigma_{i2}^{\infty} \rightarrow \vec{\sigma}_{(B2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{12}^{(\infty)} \\ \sigma_{22}^{(\infty)} \\ \sigma_{32}^{(\infty)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{(B2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{12}^{(\infty)} \\ 0 \\ \sigma_{32}^{(\infty)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^{(\infty)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{(B2)} = \vec{\tau}_{SHEAR}^{(B2)} + \vec{\sigma}_{NORMAL}^{(B2)}$$