



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

---

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

## Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό φορτίο



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Ε. Βαονάκης

Επιβλέπων: Τάσος Αβραάμ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

ΕΜΚ ΔΕ 2013/82



Βαονάκης Ν. Ε. (2013).  
Πλευρικός λυγισμός δοκών υπό κάμψη και αξονικό φορτίο.  
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2013/82  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Vaonakis N. E. (2013).  
Lateral buckling under bending and axial load.  
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2013/82  
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διπλωματική εργασία  
Νικόλαος Ε. Βαονάκης

Επιβλέπων: Τάσος Αβραάμ

ΠΛΕΥΡΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΟΚΩΝ ΥΠΟ ΚΑΜΨΗ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

## Περίληψη

Κύρια επιδίωξη σήμερα στα δομικά έργα είναι η οικονομικότητα των κατασκευών. Συγκεκριμένα, στα σιδηρά δομικά έργα, ο οικονομικός σχεδιασμός είναι άμεσα συνυφασμένος με τη χρήση λεπτών μεταλλικών στοιχείων. Δεδομένου ότι σε μια μεταλλική κατασκευή ο συνηθέστερος τρόπος αστοχίας είναι η απώλεια της ευστάθειας της και ότι ο κίνδυνος αυτός αυξάνεται με τη χρήση λεπτών μεταλλικών ελασμάτων, καταλαβαίνουμε ότι ο Πολιτικός Μηχανικός κατά το σχεδιασμό πρέπει να λάβει σοβαρά υπ' όψιν του το γεγονός ότι η ευστάθεια και η οικονομικότητα συνδέονται ανταγωνιστικά σε μια μεταλλική κατασκευή.

Χαρακτηριστική περίπτωση μεταξύ των διαφόρων τύπων απώλειας της ευστάθειας μιας κατασκευής είναι ο πλευρικός λυγισμός που αφορά στοιχεία καταπονούμενα σε κάμψη, με ή χωρίς αξονική δύναμη.

Η προσπάθειά μας για ακριβή μαθηματική λύση των φαινομένων αστάθειας είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Αυτό οφείλεται στο ότι χρειάζεται να επιλύσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων των οποίων η ολοκλήρωση για την κατάληξη σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις είναι μια εξαιρετικά δυσχερής διαδικασία. Καλούμαστε λοιπόν, να αναπτύξουμε και να αναζητήσουμε διάφορες προσεγγιστικές λύσεις.

Για τον πλευρικό λυγισμό με τον οποίο θα ασχοληθούμε, αναζητούμε προσεγγιστικές λύσεις και καταλήγουμε στην επιλογή της κατάλληλης, αναλόγως την φόρτιση με την οποία καταπονείται το μεταλλικό στοιχείο. Στη συνέχεια, θα προσομοιωθούν και θα μελετηθούν τα στατικά αυτά προσομοιώματα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων που εφαρμόσαμε.





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING  
DIVISION OF STRUCTURAL ENGINEERING  
LABORATORY OF STEEL STRUCTURES

**Diploma Thesis**

**By Nikolaos.E.Vaonakis**

**Supervisor: Tassos Avraam**

**LUTERAL BUCKLING UNDER BENDING AND AXIAL LOAD**

### **Abstract**

One of the main goals in the construction industry of today is the production of highly economic structures, which meet the set standards and codes of practice.

In the case of steelwork construction, “economical” is usually linked to the extensive use of thin metal sections, which can slash costs by considerably reducing self-weights. But thin metal sections have been known to often fail in buckling unless extra care is taken at the design stage to avert this danger. Civil engineers need to resolve this contradiction, and find the right balance in each case.

Characteristic mode of failure of thin metal elements is lateral buckling, which concerns members subjected to bending concurrent with axial or not.

Reaching exact closed mathematical relations in such cases is very involved indeed requiring, sometimes, the solution of impossible cases of differential equations, resulting in considerable calculation expense. Because of this, engineers seek approximate solutions or the so called “relaxation methods” in order to tackle everyday calculation challenges in an approximate, yet adequate way.

Depending on loading conditions, this study seeks to assure appropriate approximate solutions for the lateral buckling problem of thin metal elements. Further on in the study, the foresaid methods will be checked for validity against Finite Element Simulations of the same using the F.E.M package Adina.





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής κ. Τάσο Αβραάμ, Λέκτορα του τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθεια που προσέφερε, τη στήριξη και καθοδήγηση που επέδειξε κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Ζαχαρία Φασουλάκη για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε και τη βοήθειά που μου παρείχε στην επίλυση προβλημάτων που ανέκυψαν κατά τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina.

Βαονάκης Νικόλαος, ΕΜΠ 2013



## Περιεχόμενα

	<b>Σελ.</b>
<b>Περίληψη</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Ευχαριστίες</b>	<b>III</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	
<b>Εισαγωγή – Σκοπός και Δομή της Εργασίας</b>	<b>1</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	
<b>Μορφές Αστοχίας Καμπτόμενης Συμπαγούς Δοκού</b>	<b>2</b>
2.1 Γενικά	2
2.2 Είδη Λυγισμού Μελών	3
2.3 Περιγραφή του Φαινομένου του Πλευρικού Λυγισμού	5
2.3.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη	7
2.3.2 Στρεπτοκαμπτικός (ή Πλευρικός) λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα	8
2.3.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη	9
2.4 Μορφές Ισορροπίας	10
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	
<b>Καθορισμός και Αντιμετώπιση του Προβλήματος του Πλευρικού Λυγισμού</b>	<b>12</b>
3.1 Γενικά	12
3.2 Βασικές Παραδοχές	12
3.3 Μόρφωση της Διαφορικής Εξίσωσης Ισορροπίας	14

3.4 Αντιμετώπιση του Προβλήματος	16
3.4.1 Ά Εθνικό συνέδριο μεταλλικών κατασκευών	17
3.4.1 Χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης	18

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

<b>Εφαρμογές Μεθόδων – Παραδείγματα</b>	<b>20</b>
4.1 Αμφιέρειστη Δοκός Υποβαλλόμενη σε Ζεύγος Ροπών Κάμψεως στα Άκρα	20
4.1.1 Χωρίς αξονική δύναμη	20
4.1.2 Με αξονική δύναμη	26
4.2 Αμφιέρειστη Δοκός Υποβαλλόμενη σε Ομοιόμορφα Κατανεμημένο Φορτίο Εντάσεως $q$	30
4.2.1 Χωρίς αξονική δύναμη	30
4.2.2 Με αξονική δύναμη	37
4.3 Αμφιέρειστη Δοκός Υποβαλλόμενη (ή μη) σε Ζεύγος Ροπών Κάμψης στα Άκρα με Ταυτόχρονη Δράση Συγκεντρωμένου Φορτίου στο Μέσον της	51
4.3.1 Χωρίς αξονική δύναμη	51
4.3.2 Με αξονική δύναμη	61
4.4 Αμφιέρειστη Δοκός Υποβαλλόμενη σε Ζεύγος Ροπών Κάμψης στα Άκρα με Ταυτόχρονη Δράση Δύο Συγκεντρωμένων Φορτίων στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του Μήκους	77

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

<b>Αριθμητικές Εφαρμογές Μεθόδου – Σύγκριση με Adina</b>	<b>91</b>
5.1 Παρουσίαση του Adina	91
5.2 Αριθμητικές Εφαρμογές – Γραμμική Ανάλυση λυγισμού και Σύγκριση	

---

με Adina	106
5.3 Μη γραμμική Ανάλυση Γεωμετρίας του Φορέα στο Adina	114
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b>	
<b>Συμπεράσματα</b>	<b>123</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>125</b>



## 1.Εισαγωγή-Σκοπός και Δομή της Εργασίας

Ο σκοπός της διπλωματικής αυτής είναι να μελετηθεί το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σε μέλη από χάλυβα. Σε πολλές περιπτώσεις φόρτισης του μέλους με κάμψη περί τον ισχυρό άξονα αδράνειας του και ταυτόχρονη ή μη επιβολή αξονικού θλιπτικού φορτίου, αυτό ενδέχεται να χάσει την ευστάθειά του προτού εξαντληθεί η αντοχή του.

Η προσπάθειά μας για ακριβή μαθηματική λύση των φαινομένων του πλευρικού λυγισμού είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Αυτό οφείλεται στο ότι χρειάζεται να επιλύσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων των οποίων η ολοκλήρωση για την κατάληξη σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις είναι μια εξαιρετικά δυσχερής διαδικασία. Καλούμαστε λοιπόν να αναπτύξουμε και να αναζητήσουμε διάφορες προσεγγιστικές λύσεις.

Στην παρούσα διπλωματική, γίνεται η προσπάθεια μελέτης των φαινομένων του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σε θεωρητικό επίπεδο. Θα μελετηθεί, αρχικά, ένα πλήθος συνδυασμών φορτίσεων σε αμφιέριστη μεταλλική δοκό, με σκοπό τον προσδιορισμό των κρίσιμων φορτίων αστοχίας σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό ανά περίπτωση. Στη συνέχεια, θα προσομοιωθούν και θα μελετηθούν τα στατικά αυτά προσομοιώματα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων που εφαρμόσαμε.

Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο επεξηγείται η δομή του λυγισμού και η μεγάλη σημασία του για την οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τον σχεδιασμό μιας κατασκευής από χάλυβα. Διακρίνονται τα είδη του λυγισμού από τα οποία κινδυνεύει να αστοχήσει ένα μέλος. Τέλος, γίνεται περιγραφή του φαινομένου του πλευρικού λυγισμού.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές που αφορούν στο πρόβλημα του πλευρικού λυγισμού. Αναφέρεται η διαφορική εξίσωση ισορροπίας του πλευρικού λυγισμού και γίνεται εισαγωγή των προσδιοριστικών μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται η εφαρμογή των μεθόδων σε διάφορους συνδυασμούς φορτίσεων που δρουν σε αμφιέριστη μεταλλική δοκό, διατομής διπλού ταυ. Οι φορτίσεις είναι είτε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, είτε κάμψη και ταυτόχρονη αξονική δύναμη.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές επί των αποτελεσμάτων που προέκυψαν στο κεφάλαιο 4. Επίσης, γίνεται προσομοίωση των στατικών συστημάτων (φορέας-φόρτιση) του κεφαλαίου 4 στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, με σκοπό τα αποτελέσματα που προκύπτουν να συγκριθούν με τα αντίστοιχα που προέκυψαν με την εφαρμογή των προσδιοριστικών μεθόδων.





## 2.Μορφές Αστοχίας Καμπτόμενης Συμπαγούς Δοκού.

### 2.1 Γενικά

Το κυριότερο δομικό στοιχείο θεωρείται η δοκός, η οποία αποτελείται από ευθύγραμμο άξονα, με μήκος πολύ μεγαλύτερο συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής. Γίνεται χρήση της δοκού διότι υποκείμενη σε εγκάρσια φόρτιση προβάλλει καμπτική, διατμητική, και σε κάποιες περιπτώσεις και στρεπτική αντίσταση.

Ο σχεδιασμός των δοκών προσανατολίζεται για την ασφαλή ανάληψη της καμπτικής έντασης από την οποία καταπονείται συνήθως. Εκτός όμως από κάμψη, μία δοκός μπορεί να καταπονείται από θλίψη, διάτμηση και στρέψη ή ένα συνδυασμό αυτών. Σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή της διατομής καθορίζει και την αντοχή ολόκληρου μέλους (π.χ. εφελκυσμός, κάμψη πλευρικά προστατευόμενων δοκών. Δεν είναι λίγες οι φορές όπου μια δοκός αναλόγως την εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται δεν εξαντλεί την αντοχή της ως διατομή αλλά προηγούνται φαινόμενα αστάθειας των μελών όπως τοπικός λυγισμός, πλευρικός λυγισμός, στρεπτοκαμπτικός λυγισμός κ.ά.

Είναι γνωστό ότι για την αύξηση της φέρουσας ικανότητας μιας διατομής σε κάμψη, διαμορφώνουμε διατομές με συγκεντρωμένο το μεγαλύτερο μέρος του εμβαδού τους, όσο το δυνατόν πιο μακριά από τον ουδέτερο άξονα της κάμψης. Κατά την προσπάθεια μας αυτή, καταλήγουμε να διαμορφώνουμε υψίκορμες διατομές και διατρέχουμε μεγαλύτερο κίνδυνο να μην μπορέσει η διατομή αυτή να εξαντλήσει την φέρουσα ικανότητά της σε κάμψη διότι πριν φτάσει σε αυτή την κατάσταση, το θλιβόμενο πέλμα χάνει την ευστάθειά του, με αποτέλεσμα να εκτραπεί εκτός του επιπέδου του.

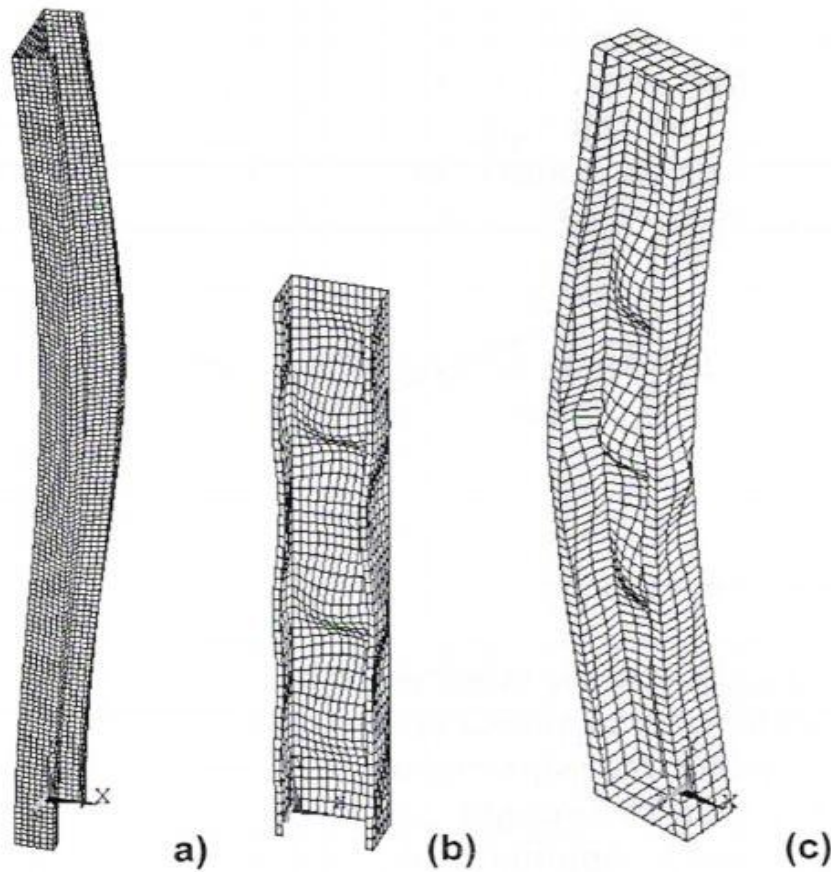
Μετά την εκτροπή αυτή, η δοκός, εκτός από την αρχική καμπτική παραμόρφωση περί τον κύριο άξονα αδρανείας, έχει επιπλέον υποστεί στροφή (με παράλληλη καμπτική παραμόρφωση περί του κύριου άξονα αδρανείας).

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό του λυγισμού, εξετάζεται η ισορροπία του μέλους στην παραμορφωμένη κατάσταση αμέσως μετά το λυγισμό. Η μικρότερη στάθμη φόρτισης για την οποία η ισορροπία είναι εφικτή αποτελεί τη φόρτιση λυγισμού, η οποία, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εκφράζει την αντοχή του μέλους. Το φορτίο λυγισμού μπορεί να υπολογιστεί επίσης πειραματικά. Στις μεταλλικές κατασκευές, ειδικότερα, μια τέτοια ανάλυση είναι αυξημένης σημασίας, δεδομένου ότι σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή των μελών δεν προκύπτει από την αντοχή των διατομών τους, αλλά απαιτείται η θεώρηση όλου του μέλους ως στοιχείο αναφοράς.

## 2.2 Είδη Λυγισμού Μελών

Σε αυτό το σημείο, είναι χρήσιμο να γίνει μία σύντομη αναφορά στα είδη λυγισμού, όπου η κατηγοριοποίηση τους προκύπτει με κριτήριο στην έκταση του φαινομένου του λυγισμού.

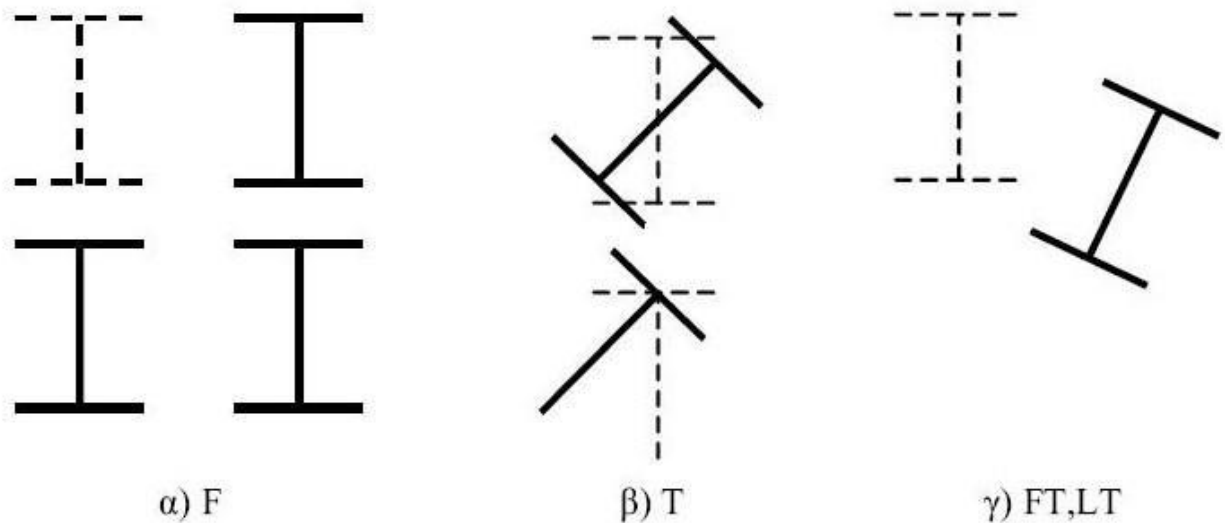
- *Καθολικός λυγισμός:* Χαρακτηρίζεται από φαινόμενα καθολικής αστάθειας, τα οποία υποβιβάζουν την αντοχή των μελών. Κατά τις αστάθειες αυτές, παρατηρείται το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της φόρτισης, οι διατομές υπόκεινται σε παραμορφώσεις στερεού σώματος (ως διαφράγματα), οι οποίες αποτελούνται από μετατοπίσεις γύρω από τους κύριους άξονες και από στροφές. Καθολικός λυγισμός εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις (Σχ 2.1a).
- *Τοπικός λυγισμός:* Τα μέλη ενός φορέα διατρέχουν γενικά τον κίνδυνο να υποστούν λυγισμό μέλους βάσει της ολικής λυγηρότητάς τους. Υπάρχει, όμως, συγχρόνως ο κίνδυνος κάποια επιμέρους στοιχεία της διατομής του φορέα να λυγίσουν τοπικά πριν την εμφάνιση καθολικού λυγισμού για μικρότερη τιμή φορτίου. Η εμφάνιση τοπικού λυγισμού σε μείωση της αντοχής του μέλους με την εμφάνιση ανομοιομόρφων τάσεων και πολύ συχνά στην αστοχία του. Κατά τον τοπικό λυγισμό, οι διατομές παραμορφώνονται με μεταβολή του γεωμετρικού σχήματός, ενώ ο άξονας του μέλους παραμένει απαραμόρφωτος. Ο τοπικός λυγισμός εμφανίζεται συνήθως στις λεπτότοιχες διατομές κατηγορίας 4. Στις διατομές αυτές εμφανίζεται τοπικός λυγισμός πριν προλάβει να αναπτυχθεί η τάση διαρροής. Το πολύ μειωμένο πάχος τους σε σχέση με το πλάτος τους, καθιστά τους αντίστοιχους φορείς και ασταθείς με ιδιαίτερη μη γραμμική συμπεριφορά. Σε μια αμφιέριστη δοκό διπλού ταυ, τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στο θλιβόμενο άνω πέλμα και στο άνω θλιβόμενο τμήμα του κορμού, όταν ο λόγος πλάτος πέλματος προς πάχος πέλματος είναι μεγάλος. Στην περίπτωση αυτή, ο τοπικός λυγισμός είναι αποτέλεσμα των ορθών τάσεων λόγω της κάμψης. Ως μορφή τοπικού λυγισμού θεωρείται και η εμφάνιση διατμητικού λυγισμού σε υψίκορμες δοκούς με μειωμένο πάχος κορμού. Στις περιπτώσεις αυτές, ο τοπικός λυγισμός εντοπίζεται στον κορμό της δοκού, στις θέσεις μέγιστης τέμνουσας. (Σχ 2.1b).
- *Καθολικός και τοπικός λυγισμός:* Αποτελεί συνδυασμό των δυο παραπάνω ειδών λυγισμού και εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους και λεπτότοιχες διατομές (Σχ 2.1c).



Σχήμα 2.1 Είδη λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Ο καθολικός λυγισμός είναι αυτός, όπου ανάλογα με τη θέση της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση διακρίνεται στις εξής μορφές λυγισμού:

- *Καμπτικός λυγισμός (Flexural buckling)*: Οι διατομές υπόκεινται σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, χωρίς να εμφανίζονται στροφές (Σχ 2.2α).
- *Στρεπτικός λυγισμός (Torsional buckling)*: Οι διατομές υπόκεινται μόνο σε στροφές, χωρίς να εμφανίζονται μετατοπίσεις (Σχ 2.2β).
- *Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός (FT ή LT)*: Οι διατομές υπόκεινται τόσο σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, όσο και σε στροφές (Σχ 2.2γ).



Σχήμα 2.2 Μορφές καθολικού λυγισμού και αντίστοιχες παραμορφώσεις.

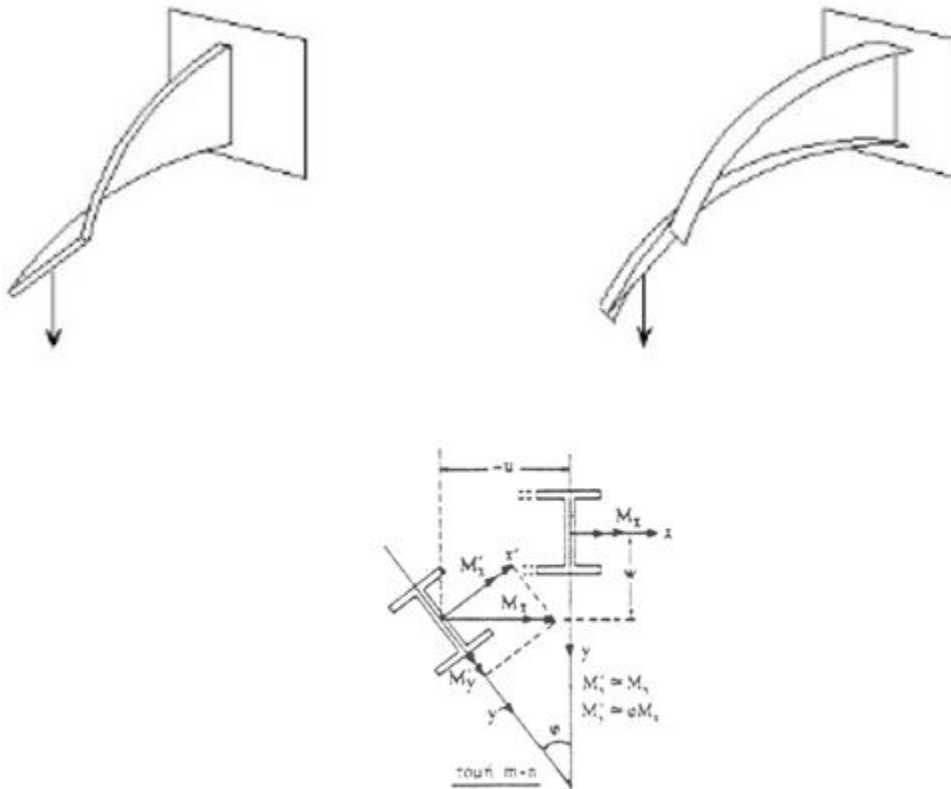
Λόγω του αντικειμένου ενασχόλησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα αναπτύξουμε περαιτέρω την έννοια του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, και θα διακρίνουμε τις εξής τρεις κατηγορίες αυτού.

### 2.3 Περιγραφή του Φαινομένου του Πλευρικού Λυγισμού

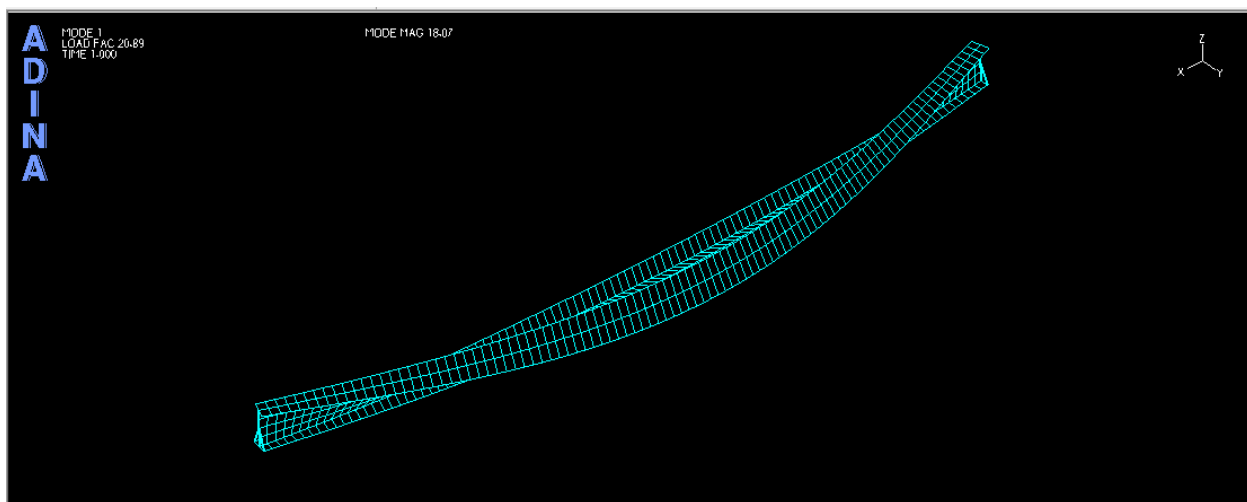
Πλευρικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία, οι διατομές υπόκεινται μετά το λυγισμό σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη πλευρική μετατόπιση. Εάν το μέλος υπόκειται όχι μόνο σε εγκάρσια φορτία, αλλά και σε αξονική θλίψη, κίνδυνος πλευρικού λυγισμού είναι μεγαλύτερος και τότε ονομάζεται στρεπτοκαμπτικός λυγισμός. Διατομές οι οποίες είναι ευαίσθητες σε πλευρικό λυγισμό είναι διατομές διπλού ταυ ή U καθώς διαθέτουν μικρή στρεπτική δυσκαμψία και είναι ευαίσθητες σε στρέβλωση. Οι κλειστές διατομές, όπως οι κοίλες κυκλικές και οι κοίλες ορθογωνικές, διαθέτουν μεγάλη στρεπτική δυσκαμψία και δεν είναι ευπαθείς σε πλευρικό λυγισμό.

Το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχει την εξής ποιοτική περιγραφή: Εάν μία δοκός μη προστατευόμενη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, το ένα πέλμα της διατομής θλίβεται και αναπτύσσονται λόγω κάμψης ορθές θλιπτικές τάσεις. Το πέλμα αυτό ως θλιβόμενο έχει την τάση να λυγίσει, όμως ο κορμός παρεμποδίζει το λυγισμό του θλιβόμενου πέλματος περί τον ασθενή άξονα του πέλματος, λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού κατά τον άξονα αυτό. Τελικά, το θλιβόμενο πέλμα λυγίζει

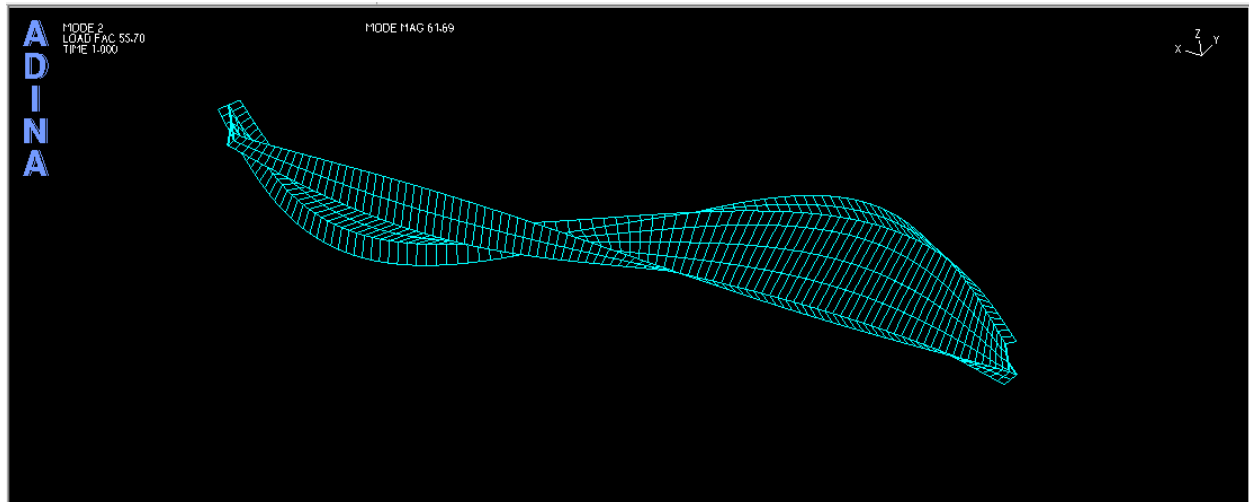
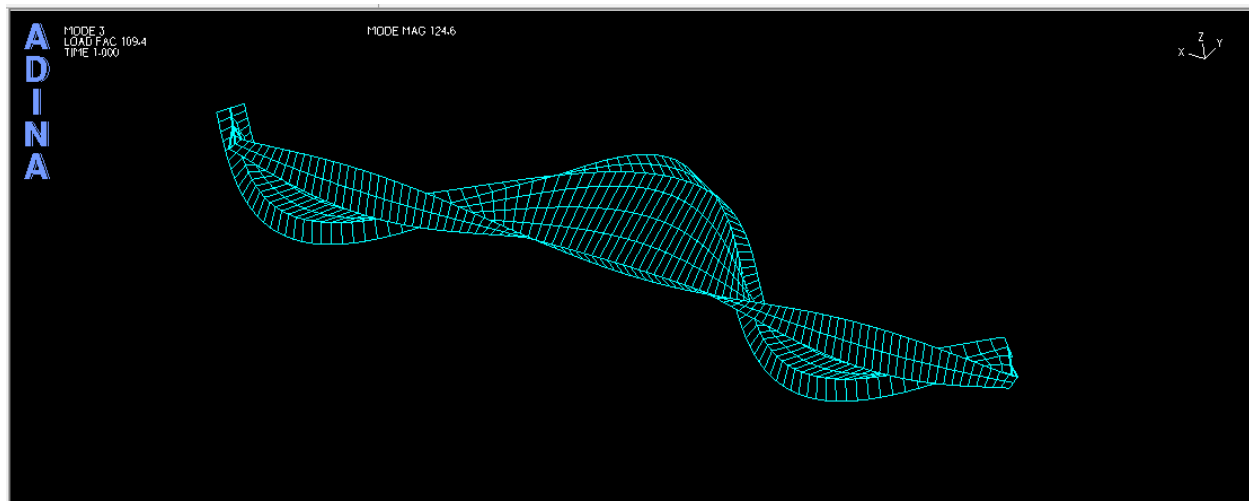
περί τον ισχυρό άξονα του πέλματος για αρκετά υψηλότερες τιμές φορτίου, εκτρέπεται πλευρικά. Το εφελκόμενο πέλμα δεν έχει την τάση να λυγίσει, συνδέεται όμως μέσω του κορμού με το θλιβόμενο πέλμα, το οποίο εκτρέπεται πλευρικά. Αποτέλεσμα είναι η στροφή της διατομής περί τον διαμήκη άξονα (Σχ 2.3).



Σχήμα 2.3 Εικόνα Πλευρικού Λυγισμού



1<sup>η</sup> Ιδιομορφή λυγισμού

2<sup>η</sup> Ιδιομορφή λυγισμού3<sup>η</sup> Ιδιομορφή λυγισμού

Σχήμα 2.4 Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές λυγισμού για αμφιέριστη δοκό μήκους 10m

### 2.3.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη.

Μέλη σταθερής διατομής που καταπονούνται ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης περί τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα της διατομής, αποτελούν τη γενική περίπτωση καταπόνησης, ιδιαίτερα σε ότι αφορά κατακόρυφα μέλη πλαισιωτών χωρικών φορέων. Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμα και για την απλή ελαστική συμπεριφορά, καθιστώντας κλειστές μαθηματικές σχέσεις όπου η επίλυση αυτών

είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Έτσι καταφεύγουμε στην ανάπτυξη και χρήση διάφορων προσεγγιστικών μεθόδων ώστε να οδηγηθούμε σε μια αποδεκτή λύση.

### **2.3.2 Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα.**

Όταν μια δοκός μη προστατευόμενη περί πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη, λόγω ροπών ή λόγω εγκάρσιων φορτίων, περί τον ισχυρό άξονα της διατομής της, τότε αναλόγως τον προσανατολισμό των δρώντων φορτίων, ένα από τα από τα πέλματά της θλίβεται και καθίσταται επομένως επιρρεπές σε λυγισμό. Ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος στο επίπεδο του κορμού παρεμποδίζεται λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού στο επίπεδο του, ενώ το υπόλοιπο μισό της διατομής χαρακτηρίζεται, ως εφελκόμενο στοιχείο ευσταθές. Ως συνέπεια, ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος εκδηλώνεται εκτός του επιπέδου του κορμού (περί τον ισχυρό άξονα του θλιβόμενου πέλματος), με ταυτόχρονη στροφή των κύριων αξόνων της διατομής σε σχέση με την αρχική τους θέση. Η παραμόρφωση που προκύπτει, είναι επομένως, συνδυασμός στρέψης και πλευρικής κάμψης (πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός ή απλώς πλευρικός λυγισμός). Βέβαια, εάν εφαρμοστεί ταυτόχρονα και αξονική θλιπτική δύναμη στη δοκό, αυτή θα επιτείνει το φαινόμενο, διότι συμβάλλει στην κάμψη (κατά τον λυγισμό) περί τον ασθενή άξονα της διατομής. Η αντιμετώπιση των φαινομένων αυτών αστάθειας είναι πολύπλοκη διαδικασία, όπως προαναφέραμε στο κεφάλαιο 2.3.1 .

Κατά την μελέτη και την αντιμετώπιση των φαινομένων του τοπικού λυγισμού, έχει μεγάλη σημασία να παρουσιάσουμε από ποιους παράγοντες εξαρτάται η κρίσιμη τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης, σε μια δοκό, η οποία φορτίζεται κατά την ισχυρή διεύθυνση κάμψης.

Οι κυριότεροι παράγοντες είναι οι εξής:

- Το είδος και η θέση των φορτίων, τα οποία επηρεάζουν την κατανομή της ροπής κατά μήκος της δοκού (δηλαδή τη μορφή του διαγράμματος των καμπτικών ροπών).
- Το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής (κέντρο βάρους, άνω πέλμα, κάτω πέλμα κ.α.).
- Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού και σε ενδιάμεσες θέσεις της (περιορισμός κάμψης, στρέψης και στρέβλωσης).
- Η ύπαρξη ή όχι συνέχειας στις στηρίξεις.
- Η μορφή της διατομής.
- Οι τυχόν ασυνέχειες στη διατομή (π.χ. αλλαγή διατομής, ανοίγματα κλπ).
- Οι ιδιότητες του υλικού.
- Οι γεωμετρικές ατέλειες και οι παραμένουσες τάσεις.

### 2.3.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη.

Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται ουσιαστικά όπως ο στρεπτικός λυγισμός. Παρουσιάζεται δηλαδή μια μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά οποία οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω στρεπτικού λυγισμού παρατηρείται σε ανοιχτές διατομές, ενώ δεν υφίστανται σε κλειστές διατομές λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Επιπλέον σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνθήκες δέσμευσης των άκρων του μέλους σε στρέψη και στρέβλωση.

Στον παρακάτω πίνακα (Πίν.2.1) παρουσιάζονται συνοπτικά τα διάφορα είδη και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις του καθολικού λυγισμού, ως συνάρτηση της φόρτισης και του τύπου της διατομής.



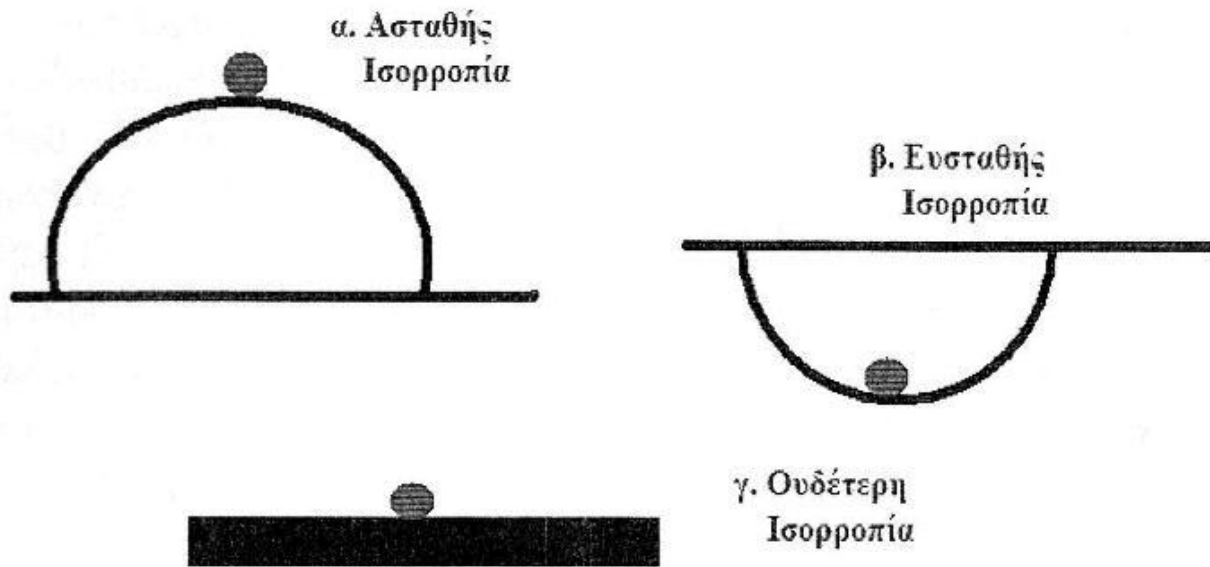
Είδος καθολικού λυγισμού	Φόρτιση	Είδη διατομών	Παραμορφώσεις
Καμπτικός λυγισμός	N N + M <sub>y</sub> N + M <sub>z</sub> N + M <sub>y</sub> + M <sub>z</sub>	όλες	v w v v, w
Στρεπτικός λυγισμός	N	ανοικτές	$\phi$
Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	N M <sub>y</sub> N + M <sub>y</sub> N + M <sub>y</sub> + M <sub>z</sub>	ανοικτές	v, w, $\phi$

Πίνακας 2.1 Είδη και παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού.

## 2.4 Μορφές Ισορροπίας

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια διάκριση των εννοιών *ευσταθής*, *ουδέτερη* και *ασταθής* ισορροπία. Αυτό θα γίνει με την βοήθεια του σχήματος 2.5, όπου παρουσιάζεται η ισορροπία μιας τελείως άκαμπτης σφαίρας σε τρεις διαφορετικές θέσεις μιας ομαλής επιφάνειας.



Σχήμα 2.5 Μορφές ελαστικής ισορροπίας.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ η σφαίρα ισορροπεί και στις τρεις θέσεις, υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των τριών καταστάσεων ισορροπίας. Συγκεκριμένα, στο Σχ.2.5α αν η σφαίρα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας της τότε δε θα επιστρέψει στη θέση αυτή ακόμα και όταν αφαιρεθεί η δύναμη που την μετακίνησε, αλλά αντίθετα θα συνεχίσει να κινείται απομακρυνόμενη από την αρχική της θέση. Η συμπεριφορά αυτή χαρακτηρίζεται ως *ασταθής ισορροπία*. Στο Σχ.2.5β, βλέπουμε ότι αν η σφαίρα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας της, θα επιστρέψει σε αυτή μόλις αφαιρεθεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση (αφού πρώτα εκτελέσει κάποιες συνεχώς μειωμένου εύρους, παλινδρομήσεις). Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται ως *ευσταθής ισορροπία*. Τέλος η Τρίτη μορφή ισορροπίας (Σχ.2.5γ) ονομάζεται *ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία* και σε αυτή την περίπτωση, η σφαίρα, μόλις αφαιρεθεί η δύναμη που της ασκήθηκε, δεν επιστρέφει στην αρχική της θέση, αλλά ούτε και συνεχίζει να απομακρύνεται, παρά, μένει στη θέση στην οποία τη μετακίνησε η εφαρμοσθείσα δύναμη.

Έτσι, καθώς μία αμφιέρειστη δοκός περνάει από την ασταθή (ευθύγραμμη) μορφή ισορροπίας στην ευσταθή (ελαφρώς καμπυλωμένη λόγω λυγισμού), υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μεταβατική ισορροπία, η οποία καλείται ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία. Ο προσδιορισμός της κρίσιμης φόρτισης γίνεται με βάση την ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας.

### 3.Καθορισμός και Αντιμετώπιση του Προβλήματος του Λυγισμού

#### 3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε σε θεωρητικό επίπεδο το πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού (ή πλευρικού) λυγισμού μίας δοκού καταπονούμενης σε κάμψη, είτε λόγω συγκεντρωμένων ροπών στα άκρα είτε λόγω εγκάρσιων φορτίων, με την ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικού θλιπτικού φορτίου.

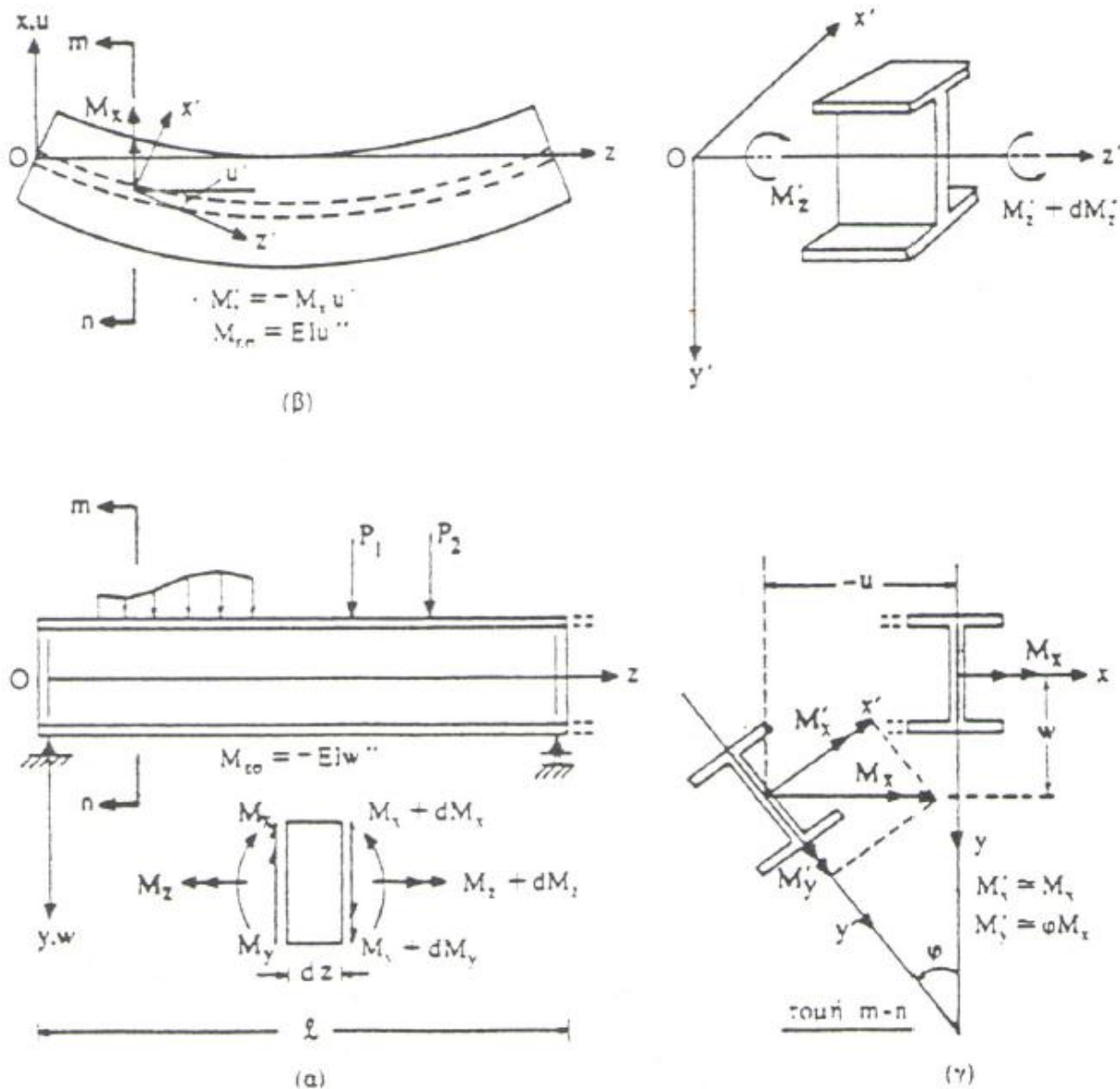
Θεωρώντας ότι η κάμψη γίνεται περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, αφού πρώτα κάνουμε τις κατάλληλες παραδοχές θα προχωρήσουμε στη μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας. Σκοπός μας, να φανεί η δυσχέρεια επίλυσης του προβλήματος που ανάγεται στην προσπάθεια μας να επιλύσουμε πολύπλοκα συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

#### 3.2 Βασικές Παραδοχές

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές, στην στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, αντιστοιχούν δυο διακεκριμένες απείρως γειτονικές θέσεις ισορροπίας. Το μικρότερο φορτίο που ικανοποιεί το κριτήριο γειτονικής ισορροπίας είναι το κρίσιμο φορτίο πλευρικού λυγισμού.

Για την μελέτη της ελαστικής ευστάθειας της επίπεδης μορφής ισορροπίας υψίκορμων δοκών, θα θεωρήσουμε μια αμφιέριστη δοκό με διατομή που έχει δύο επίπεδα συμμετρίας. Η δοκός υποβάλλεται σε τυχούσα φόρτιση που υποθέτουμε ότι δρά στο επίπεδο  $zy$ , ως προς το οποίο έχει τη μέγιστη καμπτική αντίσταση. Θεωρούμε ότι τα άκρα της δοκού δεν μπορούν να στραφούν περί τον κεντροβαρικό άξονα  $z$ . Θα εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια στάθμη των εξωτερικών φορτίων για την οποία η δοκός μπορεί να ισορροπήσει σε παραμορφωμένη κατάσταση, εάν δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις παραμορφώσεως  $w(z)$ ,  $u(z)$ ,  $\varphi(z)$  που να αποτελούν μη μηδενικές λύσεις του διαφορικού συστήματος ισορροπίας της δοκού.

Στο Σχ 3.1γ που παρουσιάζεται παρακάτω, βλέπουμε τη διατομή  $m-n$  που παριστάνει την παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας. Η εξαγωγή των σχετικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με την υιοθέτηση εκτός του σταθερού συστήματος ορθογωνίων αξόνων και ενός κινητού  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  που διέρχεται από το κέντρο βάρους της τυχούσας αυτής διατομής  $m-n$ .



Σχήμα 3.1 Δοκός διατομής  $I$  σε ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού.

Οι βασικές παραδοχές που αφορούν τα προβλήματα πλευρικού λυγισμού δοκών είναι οι ακόλουθες:

- i. Το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και ακολουθεί το νόμο του Hooke.
- ii. Η δοκός δεν έχει αρχικές παραμορφώσεις (δεν υπάρχει αρχικό βέλος ή στρόφη).
- iii. Μέχρι της στάθμης λυγισμού, οι αναπτυσσόμενες τάσεις παραμένουν χαμηλότερες του ορίου αναλογίας.

- iv. Ισχύει η θεωρία των μικρών μετατοπίσεων (βελών και στροφών) κατά την οποία οι μετατοπίσεις είναι αρκετά μικρές συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής, ώστε να ισχύουν οι απλοποιημένοι τύποι καμπυλότητας της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως  $\pm \frac{d^2 w}{dz^2}$  και  $\pm \frac{d^2 u}{dz^2}$  όπου  $w$  και  $u$  τα βέλη κάμψεως κατά τους άξονες  $y(w)$  και  $x(u)$  αντιστοίχως. Για μικρές γωνίες  $\varphi$  δεχόμαστε ότι οι προηγούμενες καμπυλότητες ισχύουν και για τα αντίστοιχα επίπεδα μετά την παραμόρφωση.
- v. Η συνδεόμενη από κάμψη και στρέψη παραμόρφωση της δοκού δεν επιφέρει μεταβολή της γεωμετρίας της διατομής.
- vi. Τα εξωτερικά φορτία (που δρουν στο επίπεδο με την μέγιστη καμπτική αντίσταση) παραμένουν παράλληλα προς την αρχική τους διεύθυνση, όταν τα σημεία εφαρμογής τους μετακινούνται.

Η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας, όπως αναφέραμε, στην παραμορφωμένη κατάσταση διευκολύνεται με την εισαγωγή εκτός του σταθερού συστήματος αξόνων  $x, y, z$  και ενός κινητού  $x', y', z'$  όπου οι άξονες  $x', y'$  είναι οι κύριοι άξονες αδράνειας της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, ενώ ο άξονας  $z'$  είναι εφαπτόμενος της ελαστικής γραμμής της δοκού μετά τον πλευρικό λυγισμό. Η μετατόπιση του κέντρου βάρους της διατομής ορίζεται από τις συνιστώσες  $w$  και  $u$  κατά τις διευθύνσεις των αξόνων  $y$  και  $x$  αντιστοίχως (που είναι θετικές όταν έχουν την διεύθυνση των αντίστοιχων αξόνων) και από την γωνία στροφής  $\varphi$  της διατομής περί τον άξονα  $z$  (που είναι θετική στην διατομή  $z+dz$ , εάν η φορά της είναι δεξιόστροφη).

Επειδή υποθέτουμε ότι η δοκός φορτίζεται στο επίπεδο  $yz$ , αρχικά υπάρχουν μόνο ροπές κάμψεως  $M_x$ . Όταν η δοκός λυγίσει αναπτύσσονται επιπλέον καμπτικές ροπές  $M_y$  αλλά και στρεπτικές ροπές  $M_z$  λόγω μετατοπίσεως (εκτός επιπέδου φορτίσεως) των σημείων εφαρμογής των κατακόρυφων φορτίων.

### 3.3 Μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας

Αν με  $M'_x, M'_y, M'_z$  συμβολίζουμε τις ροπές που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας, εφαρμόζοντας την συνθήκη ισορροπίας εξωτερικών-εσωτερικών ροπών μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y \tag{3.1}$$

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - ECw \frac{d^3\phi}{dz^3} = M'z$$

Όπου  $I_x, I_y$ , οι κύριες ροπές αδράνειας της διατομής κατά τους άξονες  $x, y$  αντιστοίχως για τις οποίες εξ υποθέσεως οι ροπές  $M'x, M'y$  παριστάνουν ροπές κάμψεως ως προς τους ίδιους άξονες με θετικές τις φορές τους, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Επίσης, οι τιμές των σταθερών στρέψεως  $J$  και στρεβλώσεως  $Cw$  δίνονται για κάθε διατομή από αντίστοιχους πίνακες.

Σημειώνεται, ότι η τρίτη των ανωτέρω εξισώσεων ισχύει για δοκούς με λεπτότοιχη ανοικτή διατομή, όπως για δοκούς διατομής  $I$ . Ενώ, για λεπτές ορθογωνικές διατομές ή διατομές αποτελούμενες από λεπτά ορθογωνικά στοιχεία που τέμνονται σε ένα σημείο π.χ.  $L, V, +$ , η σταθερά στρέβλωσης μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν.

Με την βοήθεια των σχημάτων που προστέθηκαν υπολογίζουμε τις ροπές  $M'x, M'y, M'z$ . Οι ροπές αυτές, εκφράζονται συναρτήσει της  $Mx$  (ροπή της αρχικής της αρχικής καταστάσεως της παραμορφώσεως κατά την οποία η δοκός κάμπτεται μόνο στο επίπεδο του κορμού της).

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} M'x &= Mx \cos(x', x) = Mx \cos\varphi \approx Mx \\ M'y &= Mx \sin(y', x) = Mx \sin\varphi \approx Mx\varphi \\ M'z &= -Mx \sin(z', z) = -Mx \sin \frac{du}{dz} \approx -Mx \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των  $M'x, M'y, M'z$  στις σχέσεις (3.1) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} EIx \frac{d^2w}{dz^2} &= -Mx \\ EIy \frac{d^2u}{dz^2} &= -Mx\varphi \\ GJ \frac{d\phi}{dz} - ECw \frac{d^3\phi}{dz^3} &= -Mx \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Από την πρώτη εξίσωση, της παραπάνω ομάδας εξισώσεων, καταλαβαίνουμε ότι το βέλος κάμψεως  $w$  στο κύριο επίπεδο κάμψεως  $zy$ , δεν επηρεάζει τη γωνία στροφής  $\varphi$ . Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις (3.3), φαίνεται η αλληλεξάρτηση των  $u$  και  $\varphi$ . Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς  $z$  και αντικαθιστώντας την έκφραση της ποσότητας  $\frac{d^2u}{dz^2}$  από την δεύτερη των εξισώσεων (3.3) λαμβάνουμε:

$$ECw \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{Mx^2 \cdot \phi}{EIy} = M'_x(z) \frac{du}{dz} \quad (3.4)$$

Αν η ροπή  $Mx$  είναι σταθερή ποσότητα (ανεξάρτητη του  $z$ ) - περίπτωση σταθερής κάμψεως, τότε η επίλυση της ομογενούς αυτής διαφορικής εξίσωσης 4<sup>ης</sup> τάξεως με σταθερούς συντελεστές είναι απλή. Η επίλυση αυτή θα δειχθεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Το πρόβλημα δυσχεραίνεται όμως ιδιαίτερα όταν η ροπή αυτή είναι μεταβλητή κατά μήκος της δοκού, οπότε η διαφορική εξίσωση δεν έχει όλους τους συντελεστές της σταθερούς. Η λύση της μπορεί να επιτευχθεί με προσεγγιστικές μεθόδους.

### 3.4 Αντιμετώπιση του προβλήματος

Το θέμα αυτό, της εύρεσης προσεγγιστικών μεθόδων ώστε να οδηγηθούμε σε ικανοποιητικές λύσεις, είχε απασχολήσει τους Timoshenko και Gere (Theory of elastic stability, 1961). Είχε αποδειχθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, ότι το φορτίο λυγισμού σε μια γενική περίπτωση μπορεί να προσδιοριστεί βάσει μιας επαναληπτικής διαδικασίας θεωρώντας για τις παραμορφώσεις, στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, αυθαίρετες συναρτήσεις ικανοποιούσες τις συνοριακές συνθήκες. Βέβαια πολλές φορές, η χρήση μιας αυθαίρετης συνάρτησης, δεν είναι και ο καταλληλότερος τρόπος, καθώς οδηγούμαστε σε πολύπλοκα συστήματα εξισώσεων και η μέθοδος αυτή χάνει τον σκοπό της. Τότε, θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιου άλλου είδους προσέγγιση, όπως τη χρήση μιας αυθαίρετης συνάρτησης σε κάποιο τμήμα της προκύπτουσας διαφορικής εξίσωσης. Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, το πρόβλημα μας δεν έχει κάποια συγκεκριμένη μέθοδο αντιμετώπισης όσον αφορά στον τρόπο που προσεγγίζουμε κάποια μετατόπιση ή στροφή μιας διατομής. Θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να λαμβάνουμε υπόψη τον τρόπο που καταπονείται ο φορέας αλλά και τον τρόπο έδρασης αυτού, επιδιώκοντας βέβαια την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών.

Στην παρούσα διπλωματική, θα κάνουμε χρήση κυρίως των προσδιοριστικών μεθόδων:

- Προσεγγιστικό πολώνυμο για την γωνία στροφής  $\varphi$  που αναπτύχθηκε στο Ά εθνικό συνέδριο σιδηρών κατασκευών από τους καθηγητές του ΕΜΠ, Α.Κουνάδη και Γ.Ιωαννίδη.
- Χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης για την προσέγγιση της γωνίας στροφής  $\varphi$ .

Κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις, είναι καταλληλότερη-αποδοτικότερη σε κάθε μοντέλο, αναλόγως με τον τρόπο φόρτισης του φορέα. Εξαρτάται από την ύπαρξη ή μη αξονικού φορτίου.

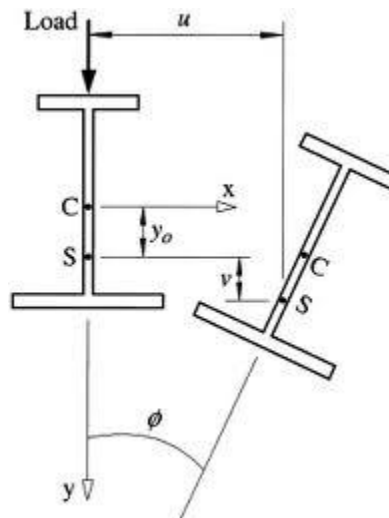
### 3.4.1 'Α Εθνικό Συνέδριο Σιδηρών Κατασκευών .

Στο συγκεκριμένο συνέδριο, αναπτύχθηκε μια τεχνική, η οποία αντίθετα από τις κλασσικές αναλύσεις, απαιτεί στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις απλών ολοκληρώσεων αλγεβρικών πολυωνύμων.

Όπως προαναφέραμε στο κεφάλαιο (3.3), η τέταρτης τάξεως διαφορική εξίσωση από την οποία προσδιορίζεται το κρίσιμο φορτίο πλευρικού λυγισμού, είναι η εξίσωση (3.4).

Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, υποθέτουμε ως γωνία στροφής της διατομής  $\varphi$  (Σχ 3.2) μια οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιούσα τις συνοριακές συνθήκες. Παραδείγματα αναλυτικά θα συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Πριν όμως ξεκινήσει η ειδικότερη ανάλυση της κάθε περίπτωσης ξεχωριστά, καλό είναι να αναφερθούμε στο πολυώνυμο που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της γωνίας  $\varphi$  κατά μήκος της αμφιέρειστης δοκού.



Σχήμα 3.2 Γωνία στροφής της διατομής κατά τον πλευρικό λυγισμό.

Έτσι για την περίπτωση αυτή με την βοήθεια του αδιάστατου συντελεστή  $\xi = \frac{z}{l}$ ,

θεωρούμε τη γενική μορφή:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$



Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

- $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$
- $\varphi''(0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$
- $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_4 - \alpha_3$
- $\varphi''(1) = 0 \Rightarrow 12\alpha_4 + 6\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$

Και το πολυώνυμο γίνεται:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (3.5)$$

Έστω τώρα  $\varphi_0$  η άγνωστη στροφή στο μέσο της δοκού, δηλαδή:  $\varphi_0 = \varphi(\frac{1}{2})$ .

Από την εξίσωση (3.5), για  $\xi = \frac{1}{2}$  έχουμε:

$$\varphi_0 = \alpha_4 \left( \frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \varphi_0 = \alpha_4 \frac{5}{16} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{16}{5} \varphi_0$$

Και η τελική μορφή του πολυωνύμου είναι:

$$\blacktriangleright \varphi(\xi) = \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (3.6)$$

Παρατηρούμε ότι η μορφή αυτή είναι ανεξάρτητη της φόρτισης της δοκού και είναι συνάρτηση μόνο της επιβαλλόμενης στήριξης. Από εδώ και στο εξής, θα γίνεται όπου κρίνεται σκόπιμο, χρήση της σχέσης (3.6) χωρίς σχετική απόδειξη.

### 3.4.2 Χρήση Τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, γίνεται χρήση της συνάρτησης  $\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi\xi)$ . Η μέθοδος αυτή, παρουσιάστηκε επίσης από τους καθηγητές Α.Κουνάδη και Γ.Ιωαννίδη, σε δημοσίευση της τον Απρίλιο του 1994. Παραδείγματα αναλυτικά για την χρήση αυτής προσέγγισης, θα συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.



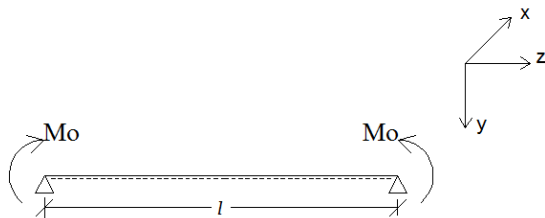
## 4.Εφαρμογές μεθόδων-Παραδείγματα

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν συγκεκριμένα παραδείγματα για την κατανόηση των μεθόδων που μόλις αναφέρθηκαν καθώς και για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Θα γίνει εφαρμογή σε αμφιέρειστες δοκούς, διατομής ( $I$ ), υποβαλλόμενες σε διάφορους τύπους φόρτισης. Θα ξεκινήσουμε από την απλούστερη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί, αυτή της αμφιέρειστης δοκού διατομής ( $I$ ) που υπόκειται σε *καθαρή κάμψη λόγω δυο ίσων και αντίθετων ροπών στα άκρα της*.

### 4.1 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα.

Θα εξεταστούν οι περιπτώσεις με ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης. Θα γίνει χρήση της καταλληλότερης ανά περίπτωση προσεγγιστικής μεθόδου.

#### 4.1.1 Χωρίς αξονική δύναμη.



Σχήμα 4.1 Αμφιέρειστη δοκός-σταθερή ροπή

Στην περίπτωση αυτή, όπως προαναφέραμε, η ροπή  $M_0$  είναι σταθερή ποσότητα, ανεξάρτητη του  $z$  και η επίλυση της ομογενούς αυτής διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας (3.4) με σταθερούς συντελεστές είναι απλή. Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε την κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού με την καθαρά απλή μαθηματική επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας αλλά και με την προσεγγιστική μέθοδο, που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για την κατανόηση αυτής στην απλούστερη μορφή της.

#### ► Μαθηματική επίλυση.

Οι ροπές που θα αναπτυχθούν μετά την απώλεια ευστάθειας του καμπτικού επιπέδου σε τυχαία διατομή, όπως προαναφέραμε, από τις συνιστώσες της  $M_0$  στους άξονες  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ως εξής:

$$M'x = M_0$$

$$M'y = M_0 \cdot \varphi \quad (4.1)$$

$$M'z = -M_0 \frac{du}{dz}$$

Και η εξίσωση λυγισμού, βάσει της εξίσωσης (4.1) γίνεται:

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_x^2 \phi}{EI_y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_x^2 \phi}{EC_w EI_y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_0^2 \phi}{EC_w EI_y} = 0$$

Θέτω:  $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w}$ ,  $k^4 = \frac{M_0^2}{EC_w EI_y}$  και παίρνω την εξίσωση:

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \beta^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} - k^4 \phi = 0$$

Η οποία είναι διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές με γενικό ολοκλήρωμα:

$$\varphi(z) = C_1 \cosh pz + C_2 \sinh pz + C_3 \cos \bar{p}z + C_4 \sin \bar{p}z$$

$$p = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}} \quad \text{και} \quad \bar{p} = \sqrt{-\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}}$$

Οι σταθερές  $C_1, C_2, C_3, C_4$  θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού θεωρώντας ότι η στροφή  $\varphi$  περί τον άξονα  $z$  είναι αδύνατη στα δυο άκρα της δοκού τα οποία όμως είναι ελεύθερα να υποστούν στρέβλωση. Μπορούμε όμως να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi(0) = \frac{d^2 \phi(0)}{dz^2} = 0, \text{ από την εφαρμογή των οποίων βρίσκουμε ότι } C_1 = C_3 = 0$$

Και

$$\phi(l) = \frac{d^2\phi(l)}{dz^2} = 0, \text{ από την εφαρμογή των οποίων βρίσκουμε } C_2 \sinh pl + C_4 \sin \bar{p}l = 0$$

$$\text{και } C_2 p^2 \sinh pl - C_4 \bar{p}^2 \sin \bar{p}l = 0$$

Επειδή οι δυο σταθερές  $C_2, C_4$  δεν μπορεί συγχρόνως να είναι μηδέν, θα πρέπει η ορίζουσα αυτών να ισούται με μηδέν, δηλαδή θα πρέπει:

$$(\bar{p}^2 + p^2) \sinh pl \cdot \sin \bar{p}l = 0 \quad (4.2)$$

Η σχέση (4.2) επειδή  $p > 0$  και  $\sinh \bar{p}l \neq 0$ , οδηγεί στην εξίσωση πλευρικού λυγισμού, την  $\sin \bar{p}l = 0$  οπότε,  $\bar{p}l = n\pi (n = 1, 2, 3, \dots)$  όπου για  $n=1$ , προκύπτει η κρίσιμη φόρτιση και έχω:

$$\bar{p} = \frac{\pi}{l} = \sqrt{-\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}} \quad (4.3)$$

Αντικαθιστώντας τους όρους  $\beta^2, k^4$  προκύπτει:

$$\blacktriangleright M_{0cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EC_w}{GJ}\right)}. \quad (4.4)$$

**▶ Προσεγγιστική επίλυση-Προσδιοριστική μέθοδος.**

Αν θεωρήσουμε ότι στα άκρα μιας δοκού διατομής  $I$  ασκούνται δυο ίσες και αντίθετες ροπές, όπως στο Σχ.4.1, τότε οι ροπές κάμψεως και στρέψεως που θα αναπτυχθούν μετά την απώλεια ευστάθειας του καμπτικού επιπέδου σε τυχαία διατομή είναι:

$$M_x = M_0$$

$$M_y = M_z = 0$$

Οι αντίστοιχες ροπές  $M'_x, M'_y, M'_z$  έχουν τις εκφράσεις που προαναφέρθηκαν στο σύστημα εξισώσεων (4.1).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις  $M'_x, M'_y, M'_z$  στις σχέσεις (3.1) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} &= -M_0 \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= -M_0 \phi \\ GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} &= -M_0 \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Παραγωγίζω την τελευταία εκ των σχέσεων (4.5):

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = -M_0 \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  από την δεύτερη εξίσωση των σχέσεων (4.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= -M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_0^2 \phi}{EC_w EI_y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Θέτω  $\xi = \frac{z}{l}$ , όπου  $\xi$  αδιάστατη μεταβλητή.

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dz} &= \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \\ \frac{d^2 \phi}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2 \phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \\ \frac{d^3 \phi}{dz^3} &= \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} \\ \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.6) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} - \frac{M_0^2}{EC_w EI_y} \phi(\xi) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} - \frac{M_0^2 l^4}{EC_w EI_y} \phi(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Θέτω:  $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$ ,  $k^4 = \frac{M_0^2}{EC_w EI_y} l^4$  και η (4.7) γίνεται:

$$\phi''''(\xi) - \beta^2 \phi''(\xi) - k^4 \phi(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.8)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\phi(0) = \phi''(0) = 0$$

Και

$$\phi(1) = \phi'(1) = 0$$

Μια πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής  $\varphi$  μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\phi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Υπενθυμίζουμε ότι, η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην εξίσωση (3.6):

$$\phi(\xi) = \frac{16}{5} \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi), \text{ όπου } \phi_0 \text{ είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού. Η}$$

μορφή αυτή είναι για αμφιέρειστη δοκό και είναι ανεξάρτητη της φόρτισης της δοκού.

Συνεχίζοντας, εάν αντικαταστήσουμε τη διαφορική εξίσωση (4.8) με την παραπάνω έκφραση της  $\varphi(\xi)$ , μέσω δυο ολοκληρώσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - \beta^2 \phi''(\xi) &= \frac{16}{5} k^4 \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi''''(\xi) - \beta^2 \phi'(\xi) &= \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - 2\frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^2}{2} \right) + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi''(\xi) - \beta^2 \phi(\xi) &= \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

- Για  $\xi=0$  από (4.9)  $\Rightarrow \phi''(0) - \beta^2 \phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$
- Για  $\xi=1$  από (4.9)  $\Rightarrow \phi''(1) - \beta^2 \phi(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{8}{25} k^4 \phi_0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές  $C_1, C_2$  στη σχέση (4.9) θα έχουμε:

$$\phi''(\xi) - \beta^2 \phi(\xi) = \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{10} \right)$$

Μέσω πάλι δυο ολοκληρώσεων και αντικαθιστώντας την έκφραση της  $\varphi(\xi)$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi''(\xi) &= \frac{16}{5} \beta^2 \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{10} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi'(\xi) &= \frac{16}{5} \beta^2 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^2}{20} \right) + C'_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi(\xi) &= \frac{16}{5} \phi_0 \beta^2 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + \frac{16}{5} k^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - \frac{\xi^3}{60} \right) + C'_1 \xi + C'_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

- Για  $\xi=0$  από την (4.10)  $\Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow C'_2 = 0$
- Για  $\xi=1$  από την (4.10)  $\Rightarrow \phi(1) = 0 \Rightarrow C'_1 = -0.32\beta^2\phi_0 + 0.032k^4\phi_0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές  $C'_1, C'_2$  στη σχέση (4.10) θα προκύψει η τελική έκφραση της  $\phi(\xi)$  που είναι:

$$\phi(\xi) = \frac{16}{5}\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{10}\right) + \frac{16}{5}k^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - \frac{\xi^3}{60} + 0,010125\xi\right) \quad (4.11)$$

- Για  $\xi = \frac{1}{2}$  από την (4.11)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_0 = \frac{16}{5}\beta^2\phi_0\left[\frac{(0.5)^6}{30} - \frac{(0.5)^5}{10} + \frac{(0.5)^3}{6} - \frac{(0.5)}{10}\right] +$$

$$+ \frac{16}{5}k^4\phi_0\left[\frac{(0.5)^8}{1680} - \frac{(0.5)^7}{420} + \frac{(0.5)^5}{120} - \frac{(0.5)^3}{60} + 0.010125\right]$$

$$\Rightarrow 1 = -0.10167\beta^2 + 0.0103k^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^4 = 97.09 + 9.87\beta^2$$

Αντικαθιστώντας τα  $\beta^2, k^4$  (με  $M_0 = M_{0cr}$ ) στην παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$\frac{M_{0cr}^2 l^4}{EC_w EI_y} = 97.09 + 9.87 \frac{GJ}{EC_w} l^2 \quad (4.12)$$

Αν τώρα πάρουμε τη σχέση (4.4) που αποδείξαμε με την καθαρά μαθηματική επίλυση και την φέρουμε στην αντίστοιχη μορφή της σχέσης (4.12) έχουμε:

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EC_w}{GJ}\right)} \Rightarrow M_{0cr}^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \left[ EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EC_w}{GJ}\right) \right] \Rightarrow$$

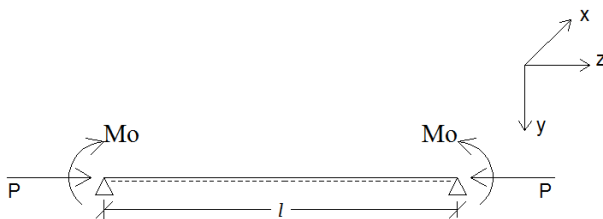
$$M_{0cr}^2 = \frac{\pi^2}{l^2} EI_y GJ + \pi^4 EC_w EI_y \Rightarrow$$

$$\frac{M_{0cr}^2 l^4}{EC_w EI_y} = \pi^4 + \pi^2 \frac{GJ}{EC_w} l^2 \xrightarrow{\pi \approx 3.14} \frac{M_{0cr}^2 l^4}{EC_w EI_y} = 97,40 + 9,869 \frac{GJ}{EC_w} l^2$$



Συγκρίνοντας την προκύπτουσα εξίσωση με την εξίσωση (4.12) παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό αυτό της μαθηματικής επίλυσης.

#### 4.1.2 Με αξονική δύναμη.

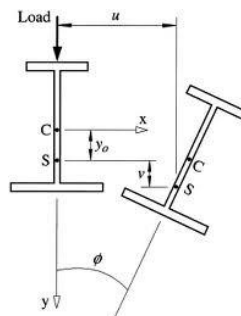


Σχήμα 4.2 Αμφιέριστη δοκός-σταθερή ροπή και αξονική δύναμη.

Ας θεωρήσουμε μια δοκό διατομής  $I$ . Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ( $I_x > I_y$ ), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα  $y$  και τον διαμήκη άξονα  $z$  (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Η δοκός υπόκειται σε ομοιόμορφη ροπή κάμψης  $M_0$  που ασκείται στα δύο άκρα αυτής, και σε σταθερή αξονική δύναμη που ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Για όσο η  $M_0$  αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η  $P$  παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- i. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- ii. Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής  $M_0 = M_{0cr}$ , η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη, της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα  $z$  και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις  $w$  και  $u$  του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ.4.3).



Σχήμα 4.3 Γωνία στροφής  $\phi$  και μετακινήσεις  $w, u$   
του κέντρου βάρους της διατομής.

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό (Timoshenko και Gere, 1961) είναι:

$$EI_x w'' + Pw = -M_0 \cos \phi \approx -M_0 \quad (4.13)$$

$$EI_y u'' + Pu = M_0 \sin \phi \approx M_0 \phi \quad (4.14)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -M_0 u' \quad (4.15)$$

Όπου η παραγωγή είναι ως προς  $z$  και  $EI_x, EI_y$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού, αντιστοίχως.

Σε αρχικό στάδιο, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (4.14) και (4.15) σε αδιαστατοποιημένη μορφή ως εξής:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \bar{M}_0 \phi \quad (4.16)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) - p^2 \bar{M}_0 v'(\xi) = 0 \quad (4.17)$$

όπου:  $v = \frac{u}{l}$ ,  $\xi = \frac{z}{l}$ ,  $\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI_y}$ ,  $\bar{M}_0 = \frac{M_0 l}{EI_y}$ ,  $\lambda^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$  και  $p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}$ .

- Αν παραγωγίσουμε την (4.16) μια φορά τότε θα έχουμε:

$$v'''(\xi) + \beta^2 v'(\xi) = \bar{M}_0 \phi' \quad (4.18)$$

- Από την (4.17) και (4.18) προκύπτει:

$$v''' - \beta^2 \frac{\lambda^2 \phi' - \phi'''}{p^2 \bar{M}_0} = \bar{M}_0 \phi' \quad (4.19)$$

- Παραγωγίζοντας την (4.17) δυο φορές έχουμε:

$$\phi'''' - \lambda^2 \phi''' - p^2 \bar{M}_0 v'' = 0 \quad (4.20)$$

- Από τις εξισώσεις (4.19) και (4.20) καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\phi'''' - \lambda^2 \phi'''}{p^2 \bar{M}_0} - \beta^2 \frac{\lambda^2 \phi' - \phi'''}{p^2 \bar{M}_0} &= \bar{M}_0 \phi' \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi'''' - (\lambda^2 - \beta^2) \phi''' - (\beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_0^2) \phi' &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η γενική λύση της (4.21) είναι:

$$\phi(\xi) = C_1 \sin k\xi + C_2 \cos k\xi + C_3 \sinh \bar{k}\xi + C_4 \cosh \bar{k}\xi + C_5$$

όπου  $k$  και  $\bar{k}$  είναι θετικές πραγματικές ποσότητες και ισούνται:

$$k = \sqrt{-\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_0^2}} \quad (4.22 \alpha)$$

Και

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_0^2}} \quad (4.22 \beta)$$

- Η γενική λύση  $\phi(\xi) = C_1 \sin k\xi + C_2 \cos k\xi + C_3 \sinh \bar{k}\xi + C_4 \cosh \bar{k}\xi + C_5$

$$\phi'(\xi) = C_1 k \cos k\xi - C_2 k \sin k\xi + C_3 \bar{k} \cosh \bar{k}\xi + C_4 \bar{k} \sinh \bar{k}\xi \quad (4.23 \alpha)$$

$$\phi''(\xi) = -C_1 k^2 \sin k\xi - C_2 k^2 \cos k\xi + C_3 \bar{k}^2 \sinh \bar{k}\xi + C_4 \bar{k}^2 \cosh \bar{k}\xi \quad (4.23 \beta)$$

$$\phi'''(\xi) = -C_1 k^3 \cos k\xi + C_2 k^3 \sin k\xi + C_3 \bar{k}^3 \cosh \bar{k}\xi + C_4 \bar{k}^3 \sinh \bar{k}\xi \quad (4.23 \gamma)$$

$$\phi''''(\xi) = C_1 k^4 \sin k\xi + C_2 k^4 \cos k\xi + C_3 \bar{k}^4 \sinh \bar{k}\xi + C_4 \bar{k}^4 \cosh \bar{k}\xi \quad (4.23 \delta)$$

- Οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στην αμφιέριστη δοκό, όπως έχουμε αναφέρει, είναι:

$$\phi(0) = \phi''(0) = 0$$

και

$$\phi(1) = \phi''(1) = 0$$

- Παραγωγίζοντας μια φορά την εξίσωση (4.17) έχουμε:

$$\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi) - p^2 \bar{M}_0 v''(\xi) = 0$$

- Για  $\xi=0$  γνωρίζουμε ότι  $\phi''=0$  και  $v''=0$ , αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\phi''''(0) = 0$$

Αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες και την εξίσωση  $\phi''''(0) = 0$  που μόλις προέκυψε και αντικαθιστώντας τα στην (4.23) έχουμε:

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow -C_2 k^2 + C_4 \bar{k}^2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_4$$

$$\phi''''(0) = 0 \Rightarrow C_2 k^4 + C_4 \bar{k}^4 = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 + C_5 = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$\phi(1) = 0 \Rightarrow C_1 \sin k + C_3 \sinh \bar{k} = 0 \Rightarrow C_1 \sin k = -C_3 \sinh \bar{k}$$

$$\phi''(1) = 0 \Rightarrow -C_1 k^2 \sin k + C_3 \bar{k}^2 \sinh \bar{k} = 0 \xrightarrow{C_1 \sin k = -C_3 \sinh \bar{k}} 2C_3 \bar{k}^2 \sinh \bar{k} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

- Επομένως έχουμε  $C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$  και  $\sin k = 0 \Rightarrow k = n\pi, n = 1, 2, \dots$

Για  $n=1$  (η μικρότερη δυνατή τιμή) έχουμε  $k=\pi$

- ▶ Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.21) μπορεί να γραφτεί υπό τη μορφή:

$$\phi(\xi) = \phi_0 \sin \pi \xi \quad (4.24)$$

όπου  $\phi_0$  είναι η άγνωστη (αλλά διαφορετική του μηδενός) γωνία στροφής της διατομής στο μέσον της δοκού. Από τις εξισώσεις (4.22) και (4.24) καταλήγουμε στην κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού  $M_0 = M_{0cr}$

$$\pi = k \Rightarrow \pi^2 = k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^2 = -\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_{0cr}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^2 + \frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} = \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_{0cr}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^4 + \pi^2(\lambda^2 - \beta^2) = \beta^2 \lambda^2 + p^2 \bar{M}_{0cr}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{0cr}^2 p^2 = (\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - \beta^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{0cr}^2 = \frac{1}{p^2} (\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - \beta^2)$$

Μετά από αντικατάσταση:

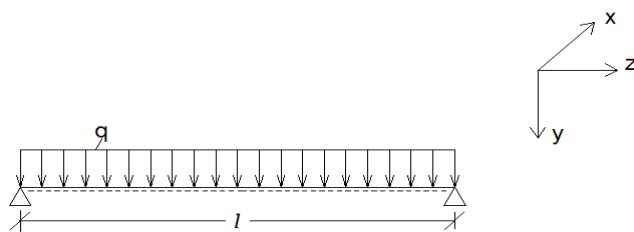
$$\left( \frac{M_{0cr} l}{EI_y} \right)^2 = \frac{C_w}{I_y l^2} \left( \pi^2 + \frac{GJ}{EC_w} l^2 \right) \left( \pi^2 - \frac{Pl^2}{EI_y} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr} = \sqrt{\frac{EI_y EC_w}{l^4} \left( \pi^2 + \frac{GJ}{EC_w} l^2 \right) \left( \pi^2 - \frac{Pl^2}{EI_y} \right)}.$$

## 4.2 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο εντάσεως $q$ .

Θα εξεταστούν οι περιπτώσεις με ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης. Θα γίνει χρήση της καταλληλότερης ανά περίπτωση προσεγγιστικής μεθόδου.

### 4.2.1 Χωρίς αξονική δύναμη.



Σχήμα 4.4 Αμφιέρειστη δοκός-ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο.

Θα εξετάσουμε την αμφιέρειστη δοκό διατομής  $I$  (Σχ 4.4), η οποία φορτίζεται από ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο  $q$ . Το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής αυτής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψεως  $zy$  παύει να είναι ευσταθές. Προτού προχωρήσουμε σε υπολογισμούς θα πρέπει να υποθέσουμε, ότι κατά τη διάρκεια της κάμψεως, τα άκρα της δοκού (τα σημεία στήριξης), μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες  $x$  και  $y$ , με αδύνατη όμως στροφή περί τον κεντροβαρικό άξονα-κέντρο βάρους της διατομής  $z$ .

Λόγω ύπαρξης της συμμετρίας στην φόρτιση, άρα και στο διάγραμμα καμπτικών ροπών, δουλεύουμε με το μισό μήκος της αμφιερείστου, θεωρώντας ότι στο άλλο μισό μήκος ισχύουν τα ίδια.

Έτσι λοιπόν, η ροπή που ασκείται σε μια τυχαία διατομή  $z$  της δοκού στο επίπεδο κάμψεως  $zy$ , την οποία και συμβολίζουμε  $M_x$ , σύμφωνα με τους άξονες (Σχ 4.4), γράφεται ως εξής:

$$M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_x(z) = -\frac{qz}{2}(l-z)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_x(z)\phi(z) = \frac{qz}{2}(l-z)\phi(z)$$

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M'_z(z) = M_t(z) - M_x(z) \frac{du}{dz} = -q \int_0^l u(z) dz + q \int_0^z u(z) dz - \frac{qz}{2}(l-z) \frac{du}{dz}$$

Αν παραγωγίσουμε την τελευταία εξίσωση μια φορά, έχουμε:

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = qu(z) - \left( \frac{ql}{2} - qz \right) \frac{du}{dz} - \left( \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Από τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας του άξονα  $y$  της διατομής, παίρνουμε:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{qz(l-z)}{2EI_y} \phi$$

Επομένως:

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{q^2 z^2}{4} (l-z)^2 \frac{\phi}{EI_y} = -qu(z) + q \left( \frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz}$$

### ➤ Α Τρόπος αντιμετώπισης

Επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, που καταλήξαμε. Σκοπός η εύρεση του κρίσιμου φορτίου  $q_{cr}$ , πέρα της τιμής του οποίου, η δοκός εκτρέπεται πλευρικά. Έτσι λοιπόν, έχουμε την εξής ομογενή διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{q^2 z^2}{4} (l-z)^2 \frac{\phi}{EI_y} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{q^2 l^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \phi}{4EI_y EC_w} &= 0 \quad \text{με } 0 \leq z \leq \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\text{Θέτουμε: } \xi = 1 - \frac{z}{l}$$

Είναι:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.25) έχουμε:

$$\frac{1}{l^4} \frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \frac{q^2 l^4 (1-\xi)^2 \xi^2 \phi}{4EI_y EC_w} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \frac{q^2 l^8 \xi^2 (1-\xi)^2 \phi}{4EI_y EC_w} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi''''(\xi) - \beta^2 \phi''(\xi) - k^4 \xi^2 (1-\xi)^2 \phi = 0$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{GJ l^2}{EC_w} \quad \text{και} \quad k^4 = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}$$

Οι συνοριακές συνθήκες για την μισή δοκό, λόγω συμμετρίας, που επιλέξαμε να ασχοληθούμε είναι:

$$\phi(0) = \phi''(0) = 0$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\beta^2} \phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Έτσι μια προσεγγιστική λύση, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, βρίσκεται αν θεωρήσουμε τη γενική μορφή της γωνίας στροφής  $\phi$  της διατομής κατά το στρεπτοκαμπτικό λυγισμό ως εξής:

$$\phi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4\xi^3 + 3\alpha_3\xi^2 + 2\alpha_2\xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4\xi^2 + 6\alpha_3\xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4\xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$$

Επομένως:  $\phi(\xi) = \alpha_4(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$

Για  $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = 0,3125\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 3,2\phi_0$

$$\phi(\xi) = 3,2\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

όπου  $\phi_0$  είναι η στροφή στο μέσον της δοκού ( $\xi = 1/2$ ).

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της  $\phi(\xi)$  στην εξίσωση  $\phi''''(\xi) - \beta^2\phi''(\xi) - k^4\xi^2(1-\xi)^2\phi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi''''(\xi) - \beta^2\phi''(\xi) = 3,2k^4\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2)(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi''''(\xi) - \beta^2\phi''(\xi) = 3,2k^4\phi_0(\xi^8 - 4\xi^7 + 5\xi^6 - \xi^5 - 2\xi^4 + \xi^3)$$

Αν ολοκληρώσουμε δυο φορές την παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$\phi''(\xi) - \beta^2\phi(\xi) = 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{9} - \frac{\xi^8}{2} + 5\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{6} - 2\frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^4}{4}\right) + C_1 \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \phi'(\xi) - \beta^2\phi(\xi) = 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{10} - \frac{\xi^9}{18} + 5\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^5}{20}\right) + C_1\xi + C_2 \quad (4.27)$$



- Για  $\xi=0$  από (4.27)  $\xrightarrow{\text{Συνορ.Συνθήκες}} C_2 = 0$
- Για  $\xi=1/2$  από (4.26)  $\xrightarrow{\text{Συνορ.Συνθήκες}} C_1 = -0,013968k^4\phi_0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $C_1, C_2$  στη σχέση (4.27) έχουμε:

$$\phi''(\xi) = 3,2\beta^2\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{90} - \frac{\xi^9}{18} + 5\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^5}{20} - 0,004365\xi\right)$$

Μέσω δυο ολοκληρώσεων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi'(\xi) &= 3,2\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^{11}}{990} - \frac{\xi^{10}}{180} + 5\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105}\right) + \\ &+ 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{120} - 0,004365\frac{\xi^2}{2}\right) + C_1' \end{aligned} \quad (4.28)$$

και

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^{12}}{11880} - \frac{\xi^{11}}{1980} + \frac{\xi^{10}}{1008}\right) + \\ &+ 3,2k^4\phi_0\left(-\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^7}{840} - 0,004365\frac{\xi^3}{6}\right) + C_1'\xi + C_2' \end{aligned} \quad (4.29)$$

έτσι,

- Για  $\xi=0$  από την (4.29)  $\phi(0) = 0 \Rightarrow C_2' = 0$
- Για  $\xi=1/2$  από την (4.28)  $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1' = -0,32\beta^2\phi_0 + 0,015584k^4\phi_0$

Τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= 3,2\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi\right) + \\ &+ 3,2k^4\phi_0\left(\frac{\xi^{12}}{11880} - \frac{\xi^{11}}{1980} + \frac{\xi^{10}}{1008} - \frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^7}{840} - 0,004365\frac{\xi^3}{6} + 0,000487\xi\right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

- Για  $\xi=1/2$  από την παραπάνω εξίσωση και λόγω της συνοριακής συνθήκης  $\phi(1/2)=\phi_0$  έχουμε:

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = -0,101667\beta^2\phi_0 + 0,0005034k^4\phi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^4 = 1986,49 + 201,96\beta^2$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις τιμές των  $k^4$  και  $\beta^2$  για  $q=q_{cr}$  τότε:

$$\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w} = 1986,49 + 201,96 \frac{GJ^2}{EC_w}$$

Η μέγιστη ροπή στην περίπτωση του εν λόγω στατικού προσομοιώματος (στήριξη δοκού- επιβαλλόμενο φορτίου) εμφανίζεται στο μέσον της δοκού με τιμή :  $ql^2/8$

Επομένως:

$$M_{0cr} = \frac{q_{0cr} l^2}{8}$$

Οπότε:

$$\frac{16M_{0cr}^2 l^4}{EI_y EC_w} = 1986,49 + 201,96 \frac{GJ^2}{EC_w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr}^2 = \frac{124,155EI_y EC_w}{l^4} + \frac{12,623EI_y GJ}{l^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr}^2 = \frac{EI_y}{l^2} \left( \frac{124,155EC_w}{l^2} + 12,623GJ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr} = \sqrt{\frac{EI_y}{l^2} \left( \frac{124,155EC_w}{l^2} + 12,623GJ \right)}$$

### **B' Τρόπος Αντιμετώπισης.**

Έχουμε τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση ισορροπίας του εν λόγω στατικού συστήματος, η οποία είναι η εξής:

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{q^2 z^2}{4} (l-z)^2 \frac{\phi}{EI_y} = -qu(z) + q \left( \frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz}$$

Όπως προαναφέρθηκε, μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση που να προσεγγίζει τη γωνία στροφής της διατομής κατά την εκτροπή της, αρκεί να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στήριξης του φορέα. Ας θεωρήσουμε την ίδια πολυωνυμική συνάρτηση με αυτή που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, με όμοιο τρόπο θα προκύψει:

$$\phi(z) = \phi_0 (z^4 - 2lz^3 + l^3 z)$$

όπου  $\phi_0$  είναι η στροφή στο μέσον της δοκού. Τότε:

$$24EC_w \phi_0 - GJ \phi_0 (12z^2 - 12lz) - \frac{q^2 z^2}{4} (l-z)^2 \frac{\phi_0 (z^4 - 2lz^3 + l^3 z)}{EI_y} = -qu(z) + q \left( \frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz}$$

Θα αναζητήσουμε την *κρίσιμη εξίσωση* πλευρικού λυγισμού για το εν λόγω στατικό σύστημα που εξετάζουμε στην εφαρμογή μας. Προφανώς, το κρισιμότερο σημείο της αμφιέριστης δοκού, μήκους  $l$ , είναι στο μέσον της δοκού. Επομένως για  $z=l/2$ , η παραπάνω διαφορική εξίσωση ισορροπίας γίνεται:

$$24EC_w \phi_0 + 3GJl^2 \phi_0 - \frac{q^2 l^4}{64EI_y} \phi_0 = -qu_0$$

όπου  $u_0$  και  $\phi_0$  είναι το βέλος κατά τον άξονα  $x$  και η στροφή περί τον άξονα  $z$  αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό, θα συσχετίσουμε το βέλος  $u_0$  με τη γωνία στροφής  $\phi_0$  στο μέσον της διατομής. Έχουμε την εξίσωση ισορροπίας κατά τον άξονα  $y$ , όπως διατυπώθηκε προηγουμένως:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{qz}{2} (l-z) \phi(z)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση  $\phi(z)$  με την πολυωνυμική συνάρτηση που προαναφέρθηκε, έχουμε:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{qz}{2} (l-z) \phi_0 (z^4 - 2lz^3 + l^3 z) \Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{qz}{2EI_y} (l-z) \phi_0 (z^4 - 2lz^3 + l^3 z)$$

Αν κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω διαφορική εξίσωση, συμπεριλαμβανομένου τις συνοριακές συνθήκες στήριξης καταλήγουμε:

$$u(z) = \frac{1}{2} \frac{q\phi_0 \left( -\frac{1}{56} z^8 + \frac{1}{14} lz^7 - \frac{1}{15} l^2 z^6 - \frac{1}{20} l^3 z^5 + \frac{1}{12} l^4 z^4 \right)}{EI_y} - \frac{17}{1680} \frac{q\phi_0 l^7 z}{EI_y}$$

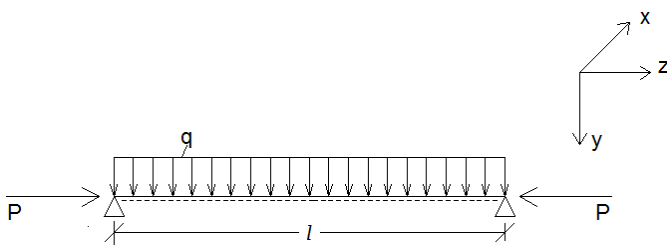
Για  $z=l/2$ , έχουμε:

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = u_0 = -\frac{1511}{430080} \frac{q\phi_0 l^8}{EI_y}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} 24EC_w\phi_0 + 3GJl^2\phi_0 - \frac{q^2 l^4}{64EI_y}\phi_0 &= -qu_0 \Rightarrow 24EI_y + 3GJl^2 - \frac{q^2 l^4}{64EI_y} = -q \frac{u_0}{\phi_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow 24EC_w + 3GJl^2 - \frac{q^2 l^4}{64EI_y} &= \frac{1511q^2 l^8}{430080EI_y} \Rightarrow \\ \Rightarrow 10321920EC_w EI_y &= 1290240GJl^2 = q^2 (6720l^4 + 1511l^8) \Rightarrow \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{1}{(6720l^4 + 1511l^8)} (10321920EC_w EI_y + 1290240GJl^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow q_{cr} &= \sqrt{\frac{1}{(6720l^4 + 1511l^8)} (10321920EC_w EI_y + 1290240GJl^2)} \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Με αξονική δύναμη



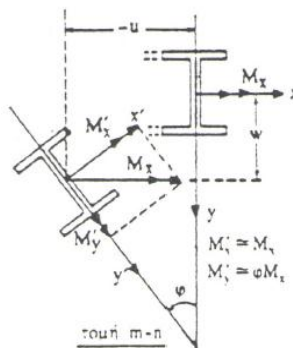
Σχήμα 4.5 Αμφιέρειστη δοκός υπό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο και αξονική δύναμη.

Ας θεωρήσουμε μια αμφιέριστη δοκό διατομής  $I$  (Σχ 4.5), η οποία καταπονείται από σταθερή αξονική δύναμη  $P$  και ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q$ . Θεωρούμε ότι τα φορτία  $P$  και  $q$  εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους της διατομής αυτής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψεως  $zy$  παύει να είναι ευσταθές. Προτού, προχωρήσουμε σε υπολογισμούς θα πρέπει να υποθέσουμε, ότι κατά τη διάρκεια της κάμψεως, τα άκρα της δοκού (τα σημεία στήριξης), μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες  $x$  και  $y$ , με αδύνατη όμως στροφή περί τον κεντροβαρικό άξονα-κέντρο βάρους της διατομής  $z$ .

Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ( $I_x > I_y$ ), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα  $y$  και τον διαμήκη άξονα  $z$  (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Για όσο το  $q$  αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η  $P$  παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- i. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- ii. Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής  $M_{cr}$ , η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα  $z$  και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις  $w$  και  $u$  του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ.4.6).



Σχήμα 4.6 Τυχαία διατομή  $mn$  και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x w'' + Pw = -\frac{qz}{2}(l-z)$$

(4.31α)

$$EI_y u'' + Pu = \frac{qz}{2}(l-z)\phi \quad (4.31\beta)$$

$$GJ\phi' - EC_w\phi'' = -\frac{qz}{2}(l-z)u' \quad (4.31\gamma)$$

Όπου η παραγώγιση είναι ως προς  $z$  και  $EI_x, EI_y$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού αντιστοίχως. Σε αρχικό στάδιο μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (4.31β) και (4.31γ) σε αδιαστατοποιημένη μορφή.

$$\text{Έτσι αν θέσουμε: } \xi = \frac{z}{l}$$

Είναι:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3}$$

- Η (4.31β) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$EI_y u'' + Pu = \frac{qz}{2}(l-z)\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Pu = \frac{qz}{2}(l-z)\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{d^2 u}{l^2 d\xi^2} + Pu = \frac{q}{2} \xi l (l - \xi l) \phi \Rightarrow EI_y \frac{ld^2 v}{l^2 d\xi^2} + Plv = \frac{q}{2} l^2 (\xi - \xi^2) \phi \xrightarrow{v=\frac{u}{l}}$$

$$\Rightarrow \frac{EI_y}{l} v''(\xi) + Plv(\xi) = \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \phi \Rightarrow v''(\xi) + \frac{Pl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{ql^3}{2EI_y} (\xi - \xi^2) \phi$$

- Η (4.31γ) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$\begin{aligned}
EC_w \phi'''' - GJ \phi' &= \frac{qz}{2} (l-z) u' \Rightarrow EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} - GJ \frac{d\phi}{dz} = \frac{qz}{2} (1-z) \frac{du}{dz} \Rightarrow \\
\Rightarrow EC_w \frac{d^3 \phi}{l^3 d\xi^3} - GJ \frac{d\phi}{ld\xi} &= \frac{q}{2} \xi l (1-\xi) \frac{du}{ld\xi} \Rightarrow \frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \frac{du}{d\xi} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\phi}{d\xi} &= \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \frac{dv}{d\xi} \Rightarrow \phi''''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \phi'(\xi) = \frac{ql^5}{2EC_w} (\xi - \xi^2) v'(\xi)
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας:

$$v''(\xi) + \frac{Pl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{ql^3}{2EI_y} (\xi - \xi^2) \phi$$

και

$$\phi''''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \phi'(\xi) = \frac{ql^5}{2EC_w} (\xi - \xi^2) v'(\xi)$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI_y}, \bar{q} = \frac{ql^3}{2EI_y}, p^2 = \frac{l^2 I_y}{C_w}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w} \quad \text{οπότε έχουμε:}$$

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \bar{q} (\xi - \xi^2) \phi \tag{4.32}$$

$$\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = p^2 \bar{q} (\xi - \xi^2) v'(\xi) \tag{4.33}$$

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να σχολιάσουμε ότι η εξίσωση (4.31 α) είναι ανεξάρτητη, δηλαδή δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες. Αντίθετα, θα μπορούσαμε να επιλύσουμε τις (4.31β) και (4.31γ) και να εκλάβουμε τις συναρτήσεις της μετακίνησης  $u$  (κατά τον άξονα  $x$ ) και της στροφής  $\phi$  (περί τον άξονα  $z$ ) του κέντρου βάρους της διατομής. Επομένως, ασχολούμαστε με τις εξισώσεις (4.31) και συγκεκριμένα με τις (4.32) και (4.33) που είναι σε αδιαστατοποιημένη μορφή των παραπάνω.

Σε πρώτη φάση λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την εξίσωση  $v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \bar{q} (\xi - \xi^2) \phi$

Όπως είχαμε προαναφέρει στο κεφάλαιο (3.4), θα πρέπει να κάνουμε χρήση μιας προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής  $\varphi$  της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Αν θέσουμε:

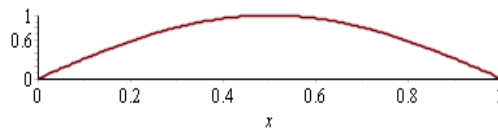
$$\phi(z) = \phi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), 0 \leq z \leq l$$

ή

$$\phi(\xi) = \phi_0 \sin(\pi\xi), 0 \leq \xi \leq 1$$

Παρατηρούμε από το διάγραμμα (Σχ 4.7) του  $\sin(\pi x)$  ότι ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στήριξης της δοκού.

`plot(sin(pi*x), x=0..1)`



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα  $\sin(\pi x)$  στο διάστημα  $[0,1]$

Έχουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$\phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

οι οποίες πράγματι ικανοποιούνται από τη συνάρτηση “ $\sin(\pi x)$ ” και αυτό επιβεβαιώνεται και με το διάγραμμα που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Με αντικατάσταση της φράσης της  $\phi(\xi)$  στην εξίσωση (4.32) έχουμε:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \phi_0 \bar{q} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi)$$

Λόγω της πολυπλοκότητας και του μεγέθους που θα έχει η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα κάνουμε μια αντικατάσταση του  $\sin(\pi\xi)$  με τη σειρά “Maclaurin”, Maclaurin 18<sup>ος</sup> αιώνας. Έτσι:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

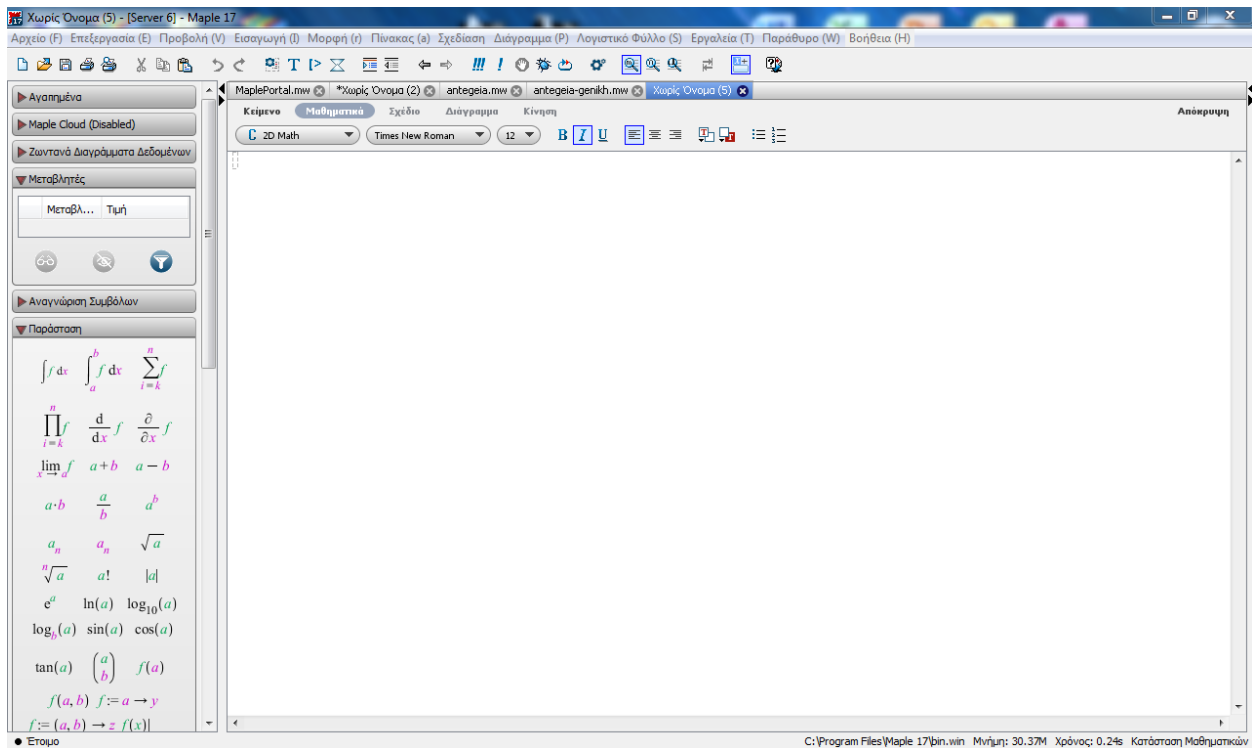
Αν κάνουμε χρήση μόνο των δύο πρώτων όρων κάθε έκφρασης (για να μειώσουμε το βαθμό του πολυωνύμου) θα έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση καθώς το σφάλμα προσέγγισης δεν είναι πάνω από  $x^5/5!$  για την  $\sin(x)$  και  $x^4/4!$  για την  $\cos(x)$ .



Συνοψίζοντας, έχουμε να επιλύσουμε την εξίσωση:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \phi_0 \bar{q}(\xi - \xi^2) \left( \pi \xi - \frac{(\pi \xi)^3}{3!} \right) \quad (4.34)$$

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, αλλά και για παρακάτω επιλύσεις, θα κάνουμε χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple 17 της Maplesoft (Σχ.4.8).



Σχήμα 4.8 Το περιβάλλον του Maple 17 της Maplesoft.

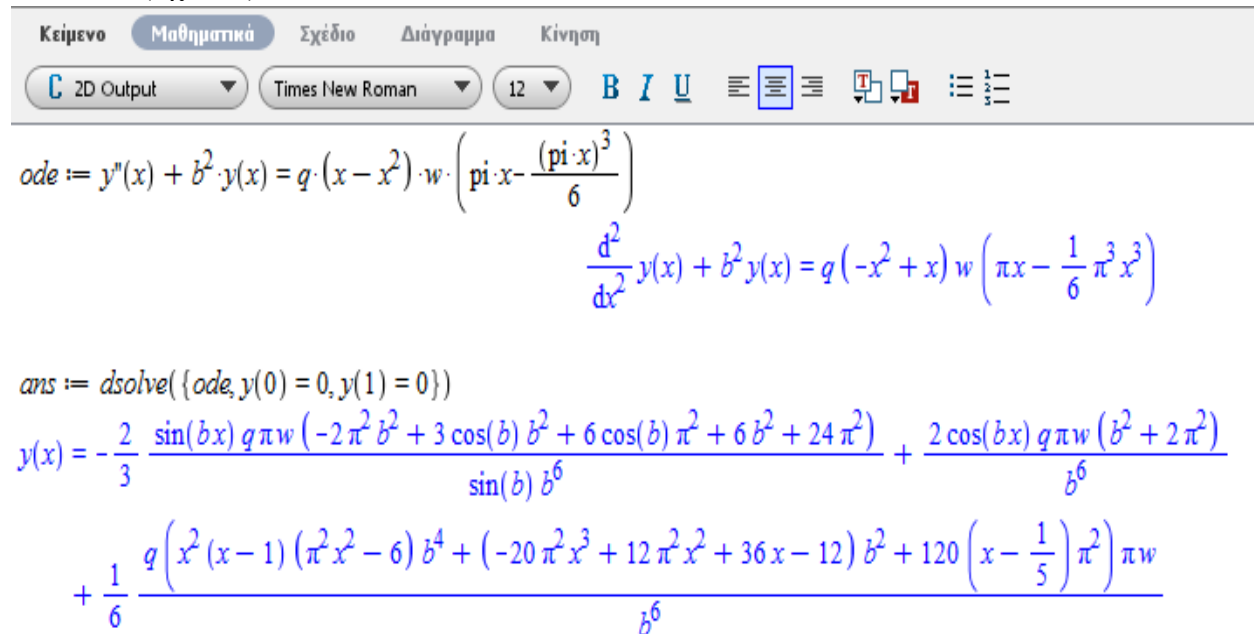
Η γενική λύση της εξίσωσης (4.34) υπολογίζεται μέσω του Maple. Έτσι λοιπόν, ορίζοντας στο λογισμικό την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, προκύπτει το εξής παρακάτω αποτέλεσμα (Σχ.4.9):

Σχήμα 4.9 Εύρεση γενικής λύσης της εξίσωσης (4.34)

Η γενική λύση που προκύπτει είναι:

$$v(\xi) = C_2 \sin(\beta\xi) + C_1 \cos(\beta\xi) + \frac{1}{6} \frac{\phi_0 \bar{q} (\xi^2 (\xi - 1) (\pi^2 \xi^2 - 6) \beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12) \beta^2 + 120\pi^2 \left(\xi - \frac{1}{5}\right)) \pi}{\beta^6}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι στις στηρίξεις (στα άκρα της δοκού) δεν επιτρέπεται καμία μετακίνηση κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  παρά μόνο στροφή περί τον άξονα  $z$ , μπορούμε να κάνουμε χρήση των συνοριακών συνθηκών  $v(0)=v(1)=0$  και να υπολογίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης  $C_1$  και  $C_2$  (Σχ 4.10).



Κείμενο Μαθηματικά Σχέδιο Διάγραμμα Κίνηση

2D Output Times New Roman 12 B I U

$$ode := y''(x) + b^2 \cdot y(x) = q \cdot (x - x^2) \cdot w \cdot \left( \pi \cdot x - \frac{(\pi \cdot x)^3}{6} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + b^2 y(x) = q (-x^2 + x) w \left( \pi x - \frac{1}{6} \pi^3 x^3 \right)$$

$$ans := dsolve(\{ode, y(0) = 0, y(1) = 0\})$$

$$y(x) = -\frac{2}{3} \frac{\sin(bx) q \pi w (-2\pi^2 b^2 + 3 \cos(b) b^2 + 6 \cos(b) \pi^2 + 6 b^2 + 24 \pi^2)}{\sin(b) b^6} + \frac{2 \cos(bx) q \pi w (b^2 + 2 \pi^2)}{b^6}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{q \left( x^2 (x - 1) (\pi^2 x^2 - 6) b^4 + (-20 \pi^2 x^3 + 12 \pi^2 x^2 + 36 x - 12) b^2 + 120 \left( x - \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right) \pi w}{b^6}$$

Σχήμα 4.10 Λύση της δ.ε (4.34)

Έχουμε λοιπόν τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.34) που είναι:

$$v(\xi) = -\frac{2 \sin(\beta\xi) \bar{q} \pi \phi_0 (-2\pi^2 \beta^2 + 3 \cos(\beta) \beta^2 + 6 \cos(\beta) \pi^2 + 6\beta^2 + 24\pi^2)}{3 \sin(\beta) \beta^6} + \frac{2 \cos(\beta\xi) \bar{q} \pi \phi_0 (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6} + \frac{1}{6} \frac{\phi_0 \bar{q} (\xi^2 (\xi - 1) (\pi^2 \xi^2 - 6) \beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12) \beta^2 + 120\pi^2 \left(\xi - \frac{1}{5}\right)) \pi}{\beta^6}$$

Αν κάνουμε χρήση των σειρών Maclaurin και τις αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τα εξής:

$$\sin(\beta\xi) = \beta\xi - \frac{(\beta\xi)^3}{3!}$$

και

$$\cos(\beta\xi) = 1 - \frac{(\beta\xi)^2}{2!}$$

Τότε:

$$v(\xi) = -\frac{2}{3} \frac{\left(\beta\xi - \frac{(\beta\xi)^3}{6}\right) \bar{q} \pi \phi_0 (-2\pi^2 \beta^2 + 3\cos(\beta)\beta^2 + 6\cos(\beta)\pi^2 + 6\beta^2 + 24\pi^2)}{\sin(\beta)\beta^6} +$$

$$+ \frac{2\left(1 - \frac{(\beta\xi)^2}{2}\right) \bar{q} \pi \phi_0 (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6} +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\phi_0 \bar{q} (\xi^2 (\xi - 1)(\pi^2 \xi^2 - 6)\beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12)\beta^2 + 120\pi^2 \left(\xi - \frac{1}{5}\right)) \pi}{\beta^6}$$

Παραγωγίζοντας μια φορά την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης έχουμε:

$$v'(\xi) = -\frac{2}{3} \frac{\left(\beta - \frac{\beta^3 \xi^2}{2}\right) \bar{q} \pi \phi_0 (-2\pi^2 \beta^2 + 3\cos(\beta)\beta^2 + 6\cos(\beta)\pi^2 + 6\beta^2 + 24\pi^2)}{\sin(\beta)\beta^6} -$$

$$- \frac{2\xi \phi_0 \bar{q} \pi (2\pi^2 + \beta^2)}{\beta^4} +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\pi \phi_0 \bar{q} ((5\pi^2 \xi^4 - 4\pi^2 \xi^3 - 18\xi^2 + 12\xi)\beta^4 + (-60\pi^2 \xi^2 + 24\pi^2 \xi + 36)\beta^2 + 120\pi^2)}{\beta^6}$$

Μετά από απλοποίηση της έκφρασης  $v'(\xi)$ , μέσω του maple έχουμε:

$$simplify(\pi)$$

$$t(x) = \frac{1}{6} \frac{1}{\sin(b) b^6} (q \pi (5 \pi^2 \sin(b) b^4 w x^4 - 4 \pi^2 \sin(b) b^4 w x^3 - 4 \pi^2 b^5 w x^2 + 12 \pi^2 \cos(b) b^3 w x^2 + 6 \cos(b) b^5 w x^2 - 60 \pi^2 \sin(b) b^2 w x^2 + 48 \pi^2 b^3 w x^2$$

$$- 18 \sin(b) b^4 w x^2 + 12 b^5 w x^2 + 24 \pi^2 \sin(b) b^2 w x + 12 \sin(b) b^4 w x + 8 \pi^2 b^3 w - 24 \pi^2 \cos(b) b w - 12 \cos(b) b^3 w - 12 x w (2 \pi^2 + b^2) \sin(b) b^2$$

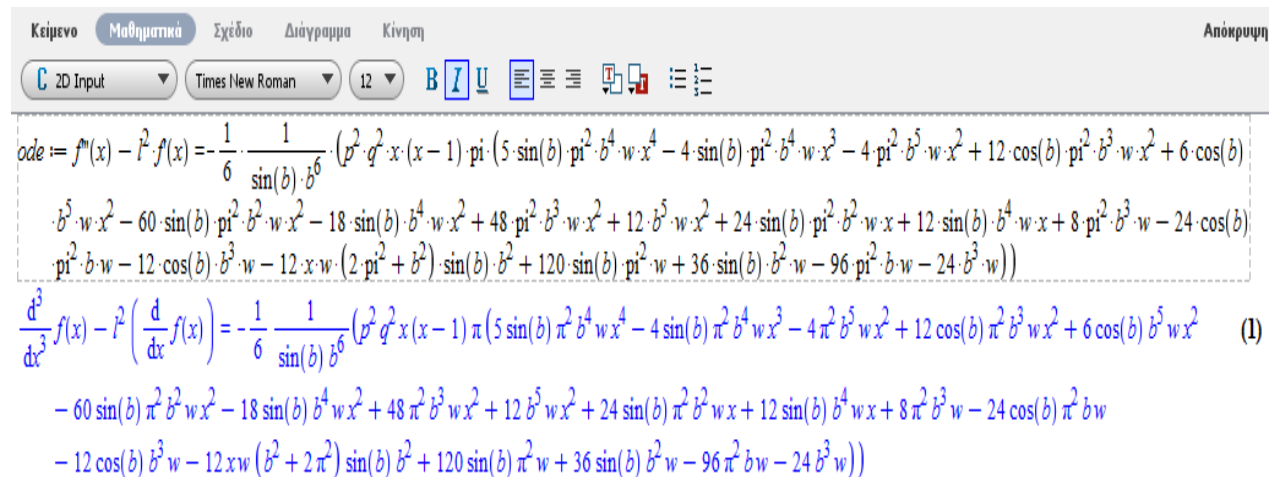
$$+ 120 \pi^2 \sin(b) w - 96 \pi^2 b w + 36 \sin(b) b^2 w - 24 b^3 w))$$

Σχήμα 4.11 Απλοποίηση της  $v'(\xi)$  μέσω Maple.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την παραπάνω έκφραση της  $v'(\xi)$  στην εξίσωση (4.33), έχουμε να επιλύσουμε την εξής διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi) = & -\frac{1}{6} \frac{1}{\sin(\beta)\beta^6} \left( p^2 \bar{q}^2 \phi_0 \pi \xi (\xi - 1) \left( 5 \sin(\beta) \pi^2 \beta^4 \xi^4 - 4 \sin(\beta) \pi^2 \beta^4 \xi^3 - 4 \pi^2 \beta^5 \xi^2 + \right. \right. \\ & + 12 \cos(\beta) \pi^2 \beta^3 \xi^2 + 6 \cos(\beta) \beta^5 \xi^2 - 60 \sin(\beta) \pi^2 \beta^2 \xi^2 - 18 \sin(\beta) \beta^4 \xi^2 + 48 \pi^2 \beta^3 \xi^2 + \\ & + 12 \beta^5 \xi^2 + 24 \sin(\beta) \pi^2 \beta^2 \xi + 12 \sin(\beta) \beta^4 \xi + 8 \pi^2 \beta^3 - 24 \cos(\beta) \pi^2 \beta - 12 \cos(\beta) \beta^3 - \\ & \left. \left. - 12(\beta^2 + 2\pi^2) \sin(\beta) \beta^2 \xi + 120 \sin(\beta) \pi^2 + 36 \sin(\beta) \beta^3 - 96 \pi^2 \beta - 24 \beta^3 \right) \right) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του μαθηματικού μας εργαλείου (Maple 17), θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Έτσι λοιπόν, αν θεωρήσουμε τις μεταβλητές (για λόγους ευκολίας)  $f, x, p, q, b, l, w$  αντί των μεταβλητών  $\phi, \xi, p, q, \beta, \lambda, \phi_0$  αντίστοιχα, μορφώνουμε τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση (Σχ.4.12):



$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} f(x) - l^2 \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) = & -\frac{1}{6} \frac{1}{\sin(b) b^6} \left( p^2 q^2 x (x - 1) \pi \left( 5 \sin(b) \pi^2 b^4 w x^4 - 4 \sin(b) \pi^2 b^4 w x^3 - 4 \pi^2 b^5 w x^2 + 12 \cos(b) \pi^2 b^3 w x^2 + 6 \cos(b) \right. \right. \\ & \left. \left. b^5 w x^2 - 60 \sin(b) \pi^2 b^2 w x^2 - 18 \sin(b) b^4 w x^2 + 48 \pi^2 b^3 w x^2 + 12 b^5 w x^2 + 24 \sin(b) \pi^2 b^2 w x + 12 \sin(b) b^4 w x + 8 \pi^2 b^3 w - 24 \cos(b) \right. \right. \\ & \left. \left. \pi^2 b w - 12 \cos(b) b^3 w - 12 x w (2 \pi^2 + b^2) \sin(b) b^2 + 120 \sin(b) \pi^2 w + 36 \sin(b) b^2 w - 96 \pi^2 b w - 24 b^3 w \right) \right) \quad (1) \\ & - 60 \sin(b) \pi^2 b^2 w x^2 - 18 \sin(b) b^4 w x^2 + 48 \pi^2 b^3 w x^2 + 12 b^5 w x^2 + 24 \sin(b) \pi^2 b^2 w x + 12 \sin(b) b^4 w x + 8 \pi^2 b^3 w - 24 \cos(b) \pi^2 b w \\ & - 12 \cos(b) b^3 w - 12 x w (b^2 + 2\pi^2) \sin(b) b^2 + 120 \sin(b) \pi^2 w + 36 \sin(b) b^2 w - 96 \pi^2 b w - 24 b^3 w \end{aligned}$$

Σχήμα 4.12 Μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης (4.33) στο Maple.

Επομένως προκύπτει η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, ως εξής (Σχ.4.13):

```

ans := dsolve(ode)
f(x) =  $\frac{1}{6} \frac{1}{b^6 l^8 \sin(b)} (-12 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^2 b^3 l^6 + 12 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^4 b^3 l^6 - 12 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^3 b^3 l^6 + 144 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^2 b^3 l^4$ 
 $- 72 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x b^3 l^4 - 24 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^2 b l^6 + 24 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x b l^6 - 36 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x b^5 l^4 + 12 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x b^3 l^6$ 
 $+ 6 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^4 b^5 l^6 - 6 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^3 b^5 l^6 + 72 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^2 b^5 l^4 - 9 p^2 \pi^3 q^2 w x^5 b^4 l^6 \sin(b) - 60 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^2 l^6 \sin(b)$ 
 $+ 4 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^4 l^6 \sin(b) + 60 q^2 p^2 \pi^3 w x^3 b^2 l^6 \sin(b) + 150 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^4 l^4 \sin(b) - 180 q^2 p^2 \pi^3 w x^3 b^4 l^4 \sin(b) + 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^4 l^4 \sin(b)$ 
 $- 720 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^2 l^4 \sin(b) + 360 p^2 \pi^3 q^2 w x b^2 l^4 \sin(b) - 1080 p^2 \pi^3 q^2 w x b^4 l^2 \sin(b) + 1800 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^4 l^2 \sin(b) - 18 q^2 p^2 \pi w x^4 b^4 l^6 \sin(b)$ 
 $+ 36 q^2 p^2 \pi w x^2 b^2 l^6 \sin(b) + 18 q^2 p^2 \pi w x^3 b^4 l^6 \sin(b) - 36 q^2 p^2 \pi w x b^2 l^6 \sin(b) - 216 q^2 p^2 \pi w x^2 b^4 l^4 \sin(b) + 108 q^2 p^2 \pi w x b^4 l^4 \sin(b)$ 
 $+ 5 p^2 \pi^3 q^2 w x^6 b^4 l^6 \sin(b) + 3600 p^2 \pi^3 q^2 w b^4 \sin(b) + 240 p^2 \pi^3 q^2 w l^4 \sin(b) + 48 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^3 l^6 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^3 b^3 l^6 + 576 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^3 l^4$ 
 $- 288 p^2 \pi^3 q^2 w x b^3 l^4 - 96 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b l^6 + 96 p^2 \pi^3 q^2 w x b l^6 - 4 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^5 l^6 + 4 q^2 p^2 \pi^3 w x^3 b^5 l^6 + 8 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^3 l^6 - 8 p^2 \pi^3 q^2 w x b^3 l^6$ 
 $+ 24 p^2 \pi^3 q^2 w x b^5 l^4 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^5 l^4 + 12 q^2 p^2 \pi w x^4 b^5 l^6 - 12 q^2 p^2 \pi w x^3 b^5 l^6 + 144 q^2 p^2 \pi w x^2 b^5 l^4 - 24 q^2 p^2 \pi w x^2 b^3 l^6 - 72 q^2 p^2 \pi w x b^5 l^2$ 
 $+ 24 q^2 p^2 \pi w x b^3 l^6 + 6 e^{lx} {}_C2 b^6 l^8 \sin(b) + 6 e^{-lx} {}_C1 b^6 l^8 \sin(b) + 288 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) b^3 l^2 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) b l^4 + 144 q^2 p^2 \pi w \cos(b) b^5 l^2$ 
 $- 24 q^2 p^2 \pi w \cos(b) b^3 l^4 + 96 p^2 \pi^3 q^2 w b^4 l^2 \sin(b) - 1440 p^2 \pi^3 q^2 w b^2 l^2 \sin(b) - 432 q^2 p^2 \pi w b^4 l^2 \sin(b) + 72 q^2 p^2 \pi w b^2 l^4 \sin(b)$ 
 $+ 120 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 l^6 \sin(b) - 120 p^2 \pi^3 q^2 w x l^6 \sin(b) - 48 q^2 p^2 \pi w b^3 l^4 + 1152 p^2 \pi^3 q^2 w b^3 l^2 + 288 q^2 p^2 \pi w b^5 l^2 - 96 p^2 \pi^3 q^2 w b^5 l^2$ 
 $+ 16 p^2 \pi^3 q^2 w b^3 l^4 - 192 p^2 \pi^3 q^2 w b l^4) dx + {}_C3$ 

```

Σχήμα 4.13 Γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.33) μέσω του Maple.

Μετά από απλοποιήσεις, η τελική μορφή που θα μπορούσαμε να φέρουμε την παραπάνω επίλυση, είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) = & \frac{p^2 \bar{q}^2 \pi \phi_0}{6 \beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[ \frac{5}{7} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 \xi^7 - \frac{9}{6} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 \xi^6 + \left( \frac{12}{5} \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + \frac{6}{5} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 \right. \right. \\
& - 12 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + \frac{4}{5} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 30 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - \frac{18}{5} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + \frac{48}{5} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 - \\
& \left. - \frac{4}{5} \pi^2 \beta^5 \lambda^6 + \frac{12}{5} \beta^5 \lambda^6 \right) \xi^5 + \left( -3 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 - \frac{6}{4} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 + 15 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - \right. \\
& \left. - 45 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + \frac{18}{4} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 - 12 \pi^2 \beta^3 \lambda^6 + \pi^2 \beta^5 \lambda^6 - 3 \beta^5 \lambda^6 \right) \xi^4 + \left( -4 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + \right. \\
& + 48 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 - 8 \pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^6 + 24 \cos(\beta) \beta^5 \lambda^4 + 16 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - 240 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 + \\
& + 600 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 + 12 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - 72 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + 192 \pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 32 \pi^2 \beta \lambda^6 + \frac{8}{3} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 - \\
& \left. - 16 \pi^2 \beta^5 \lambda^4 + 48 \beta^5 \lambda^4 - 8 \beta^3 \lambda^6 + 40 \pi^2 \sin(\beta) \lambda^6 \right) \xi^3 + \left( -36 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 + 12 \pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^6 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -18\cos(\beta)\beta^5\lambda^4 + 6\cos(\beta)\beta^3\lambda^6 + 180\pi^2\sin(\beta)\beta^2\lambda^4 - 540\pi^2\sin(\beta)\beta^4\lambda^2 - 18\sin(\beta)\beta^2\lambda^6 + \\
& + 54\sin(\beta)\beta^4\lambda^4 - 144\pi^2\beta^3\lambda^4 + 48\pi^2\beta\lambda^6 - 4\pi^2\beta^3\lambda^6 + 12\pi^2\beta^5\lambda^4 - 36\beta^5\lambda^4 + 12\beta^3\lambda^6 - \\
& - 60\pi^2\sin(\beta)\lambda^6)\xi^2 + (3600\pi^2\sin(\beta)\beta^4 + 240\pi^2\sin(\beta)\lambda^4 + 288\pi^2\cos(\beta)\beta^3\lambda^2 - \\
& - 48\pi^2\cos(\beta)\beta\lambda^4 + 144\cos(\beta)\beta^5\lambda^2 - 24\cos(\beta)\beta^3\lambda^4 + 96\pi^2\sin(\beta)\beta^4\lambda^2 - 1440\pi^2\sin(\beta)\beta^2\lambda^2 \\
& - 432\sin(\beta)\beta^4\lambda^2 + 72\sin(\beta)\beta^2\lambda^4 - 48\beta^3\lambda^4 + 1152\pi^2\beta^3\lambda^2 + 288\beta^5\lambda^2 - 96\pi^2\beta^5\lambda^2 + \\
& + 16\pi^2\beta^3\lambda^4 - 192\pi^2\beta\lambda^4)\xi ] + \frac{C_2 e^{\lambda\xi}}{\lambda} - \frac{C_1 e^{-\lambda\xi}}{\lambda} + C_3
\end{aligned}$$

Υπολογισμός των σταθερών ολοκλήρωσης:

Θα αξιοποιήσουμε τις εξής τρεις συνοριακές συνθήκες:

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi'(0) = 0$$

$$\phi''(1) = 0$$

Από τα παραπάνω, έχουμε:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6\beta^6\lambda^8\sin(\beta)} [C_2 6\beta^6\lambda^7\sin(\beta) - C_1 6\beta^6\lambda^7\sin(\beta)] + C_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_2}{\lambda} - \frac{C_1}{\lambda} + C_3 = 0 \Rightarrow C_2 - C_1 = -\lambda C_3$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6\beta^6\lambda^8\sin(\beta)} (-C_1 6\beta^6\lambda^9\sin(\beta) + p^2\bar{q}^2\phi_0(-1080\pi^3\beta^4\lambda^2\sin(\beta) -$$

$$- 288\pi^3\beta^3\lambda^4 + 360\pi^3\beta^2\lambda^4\sin(\beta) - 36\pi\beta^2\lambda^6\sin(\beta) + 108\pi\beta^4\lambda^4\sin(\beta) - 72\pi^3\cos(\beta)\beta^3\lambda^4 +$$

$$+ 24\pi^3\cos(\beta)\beta\lambda^6 - 36\pi\cos(\beta)\beta^5\lambda^4 + 12\pi\cos(\beta)\beta^3\lambda^6 + 96\pi^3\cos(\beta)\beta\lambda^6 - 8\pi^3\beta^3\lambda^6 +$$

$$+ 24\pi\beta^3\lambda^6 - 120\pi^3\lambda^6\sin(\beta)) + C_2 6\beta^6\lambda^9\sin(\beta) = 0 \xrightarrow{C_2 - C_1 = -\lambda C_3}$$

$$\Rightarrow -C_3 6\beta^6\lambda^{10}\sin(\beta) + 2p^2\bar{q}^2\pi\phi_0\beta\lambda [-540\pi^2\beta^3\lambda\sin(\beta) - 144\pi^2\beta^2\lambda^3 + 180\pi^2\beta\lambda^3\sin(\beta) -$$

$$\begin{aligned}
& -18\beta\lambda^5 \sin(\beta) + 54\beta^3\lambda^3 \sin(\beta) - 36\pi^2\beta^2\lambda^3 \cos(\beta) + 12\pi^2\lambda^5 \cos(\beta) - 18\beta^4\lambda^3 \cos(\beta) + \\
& + 6\beta^2\lambda^5 \cos(\beta) + 48\pi^2\lambda^5 \cos(\beta) - 4\pi^2\beta^2\lambda^5 + 12\pi^2\beta^4\lambda^3 - 36\beta^4\lambda^3 + 12\beta^2\lambda^5 - \\
& - 60\pi^2 \frac{\lambda^5}{\beta} \sin(\beta) \Big] = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = \frac{1}{3} p^2 \bar{q}^2 \pi \phi_0 \Bigg[ & \frac{-540\pi^2}{\beta^2\lambda^8} - \frac{144\pi^2}{\beta^3\lambda^6 \sin(\beta)} + \frac{180\pi^2}{\beta^4\lambda^6} - \frac{18}{\beta^4\lambda^4} + \frac{54}{\beta^2\lambda^6} - \frac{36\pi^2 \cot(\beta)}{\beta^3\lambda^6} + \frac{12\pi^2 \cot(\beta)}{\beta^5\lambda^4} \\
& - \frac{18\cot(\beta)}{\beta\lambda^6} + \frac{6\cot(\beta)}{\beta^3\lambda^4} + \frac{48\pi^2 \cot(\beta)}{\beta^5\lambda^4} - \frac{4\pi^2}{\beta^3\lambda^4 \sin(\beta)} + \frac{12\pi^2}{\beta\lambda^6 \sin(\beta)} - \frac{36}{\beta\lambda^6 \sin(\beta)} + \frac{12}{\beta^3\lambda^4 \sin(\beta)} \\
& \left. - \frac{60\pi^2}{\beta^6\lambda^4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi''(1) = 0 \Rightarrow & \frac{p^2 q^2 \pi \phi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left( \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 12\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + 6\cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 - \right. \\
& - 60\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + 156\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - 18\sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 56\pi^2 \beta^3 \lambda^6 - 4\pi^2 \beta^5 \lambda^6 + 12\beta^5 \lambda^6 - \\
& - 12\cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + 216\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 - 24\pi^2 \cos(\beta) \lambda^6 + 108\cos(\beta) \beta^5 \lambda^4 - 1080\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 + \\
& + 2520\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 + 36\sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - 324\sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + 864\pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 96\pi^2 \beta \lambda^6 - 72\pi^2 \beta^5 \lambda^4 + \\
& + 216\beta^5 \lambda^4 - 24\beta^3 \lambda^6 + 120\pi^2 \sin(\beta) \lambda^6 + C_2 \lambda e^\lambda - C_1 \lambda e^{-\lambda} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow A + C_2 \lambda e^\lambda - C_1 \lambda e^{-\lambda} = 0 \Rightarrow & C_2 = C_1 e^{-2\lambda} - \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Σημείωση: Στο εξής, η χρήση της μεταβλητής  $A$  είναι ισοδύναμη με τη χρήση της παράστασης:

$$\begin{aligned}
A(p^2, \bar{q}, \beta, \lambda, \phi_0) = & \\
= & \frac{p^2 q^2 \pi \phi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left( \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 12\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + 6\cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 - \right. \\
& - 60\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + 156\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - 18\sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 56\pi^2 \beta^3 \lambda^6 - 4\pi^2 \beta^5 \lambda^6 + 12\beta^5 \lambda^6 - \\
& - 12\cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + 216\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 - 24\pi^2 \cos(\beta) \lambda^6 + 108\cos(\beta) \beta^5 \lambda^4 - 1080\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 + \\
& + 2520\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 + 36\sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - 324\sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + 864\pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 96\pi^2 \beta \lambda^6 - 72\pi^2 \beta^5 \lambda^4 + \\
& \left. + 216\beta^5 \lambda^4 - 24\beta^3 \lambda^6 + 120\pi^2 \sin(\beta) \lambda^6 \right)
\end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές  $C_1$ ,  $C_2$ , επιλύοντας το εξής σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν παραπάνω:

$$C_2 - C_1 = -\lambda C_3$$

$$C_2 = C_1 e^{-2\lambda} - \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda}$$

όπου, οι σταθερές  $A$  και  $C_3$  είναι γνωστές (προσδιορίστηκαν παραπάνω).

Από την επίλυση του συστήματος έχουμε:

$$C_1 = \frac{1}{(e^{-2\lambda} - 1)} \left( -\lambda C_3 + \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda} \right)$$

και

$$C_2 = -\frac{e^{-2\lambda}}{(e^{-2\lambda} - 1)} \lambda C_3 + \frac{A e^{-\lambda} (e^{-2\lambda} - 1)}{\lambda}$$

Έχουμε ορίσει πλήρως τη συνάρτηση  $\phi(\xi)$  της γωνίας στροφής της διατομής ( $l$ ) σε όλες τις θέσεις  $\xi$  της αμφιέρειστης δοκού.

Θα αναζητήσουμε την *κρίσιμη εξίσωση* πλευρικού λυγισμού για το εν λόγω στατικό σύστημα που εξετάζουμε στην εφαρμογή μας. Προφανώς, το κρισιμότερο σημείο της αμφιέρειστης δοκού, μήκους  $l$ , είναι στο μέσον της δοκού. Επομένως, για  $\xi=1/2$  η γωνία στροφής της διατομής στο μέσον της δοκού είναι:

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \phi_0 = \frac{p^2 \bar{q}^2 \pi \phi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[ -\frac{96}{5376} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 - \frac{3}{160} \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 - \frac{36}{640} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 + \right. \\ \left. \frac{18}{32} \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - \frac{4}{32} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + \frac{108}{640} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 - \frac{134}{120} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 + \frac{6}{160} \pi^2 \beta^5 \lambda^6 - \frac{18}{160} \beta^5 \lambda^6 \right. \\ \left. + \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 - 8\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 + 2\pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^6 - \frac{12}{8} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^4 + \frac{120}{8} \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 - \right. \\ \left. - \frac{480}{8} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 - 3\sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + \frac{36}{8} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - 4\pi^2 \beta^3 \lambda^4 + 8\pi^2 \beta \lambda^6 + \pi^2 \beta^5 \lambda^4 - 3\beta^5 \lambda^4 + \right. \\ \left. 2\beta^3 \lambda^6 - 10\pi^2 \sin(\beta) \lambda^6 + 1800\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 + 120\pi^2 \sin(\beta) \lambda^4 + 144\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^2 - 24\pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^4 \right. \\ \left. + 72\cos(\beta) \beta^5 \lambda^2 - 12\cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 + 48\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 - 720\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^2 - 216\sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 36 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 - 24 \beta^3 \lambda^4 + 576 \pi^2 \beta^3 \lambda^2 + 144 \beta^5 \lambda^2 - 48 \pi^2 \beta^5 \lambda^2 - \frac{192}{2} \pi^2 \beta \lambda^4 \left] + C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \right. \\
& - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} + C_3 \Rightarrow \\
\Rightarrow \phi_0 = & \frac{p^2 \bar{q}^2 \pi \phi_0}{6 \beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[ 0,24 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + (0,82 \cos(\beta) - 9,02) \beta^3 \lambda^6 + (-0,05625 \cos(\beta) + 0,26) \beta^5 \lambda^6 \right. \\
& + 2,55 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + 3,27 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + (-41,6 \cos(\beta) - 63,5) \beta^3 \lambda^4 + (19,74 \cos(\beta) + 78,96) \beta \lambda^6 + \\
& + (-1,5 \cos(\beta) + 6,87) \beta^5 \lambda^4 + 184,04 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 - 334,44 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 - 98,69 \sin(\beta) \lambda^6 + \\
& + (17765,3 \beta^4 + 1184,35 \lambda^4) \sin(\beta) + (1421,22 \cos(\beta) + 5684,9) \beta^3 \lambda^2 + (-236,87 \cos(\beta) - 947,5) \beta \lambda^4 \\
& \left. - 7106,12 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^2 - 329,74 \beta^5 \lambda^2 \right] + C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} + C_3
\end{aligned}$$

Η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη εξίσωση πλευρικού λυγισμού είναι:

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{p^2 \bar{q}^2 \pi}{6 \beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[ 0,24 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + (0,82 \cos(\beta) - 9,02) \beta^3 \lambda^6 + (-0,05625 \cos(\beta) + 0,26) \beta^5 \lambda^6 + \right. \\
& + 2,55 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + 3,27 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + (-41,6 \cos(\beta) - 63,5) \beta^3 \lambda^4 + (19,74 \cos(\beta) + 78,96) \beta \lambda^6 + \\
& + (-1,5 \cos(\beta) + 6,87) \beta^5 \lambda^4 + 184,04 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 - 334,44 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 - 98,69 \sin(\beta) \lambda^6 + \\
& + (17765,3 \beta^4 + 1184,35 \lambda^4) \sin(\beta) + (1421,22 \cos(\beta) + 5684,9) \beta^3 \lambda^2 + (-236,87 \cos(\beta) - 947,5) \beta \lambda^4 \\
& \left. - 7106,12 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^2 - 329,74 \beta^5 \lambda^2 \right] + \Gamma_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \Gamma_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} + \Gamma_3
\end{aligned} \tag{4.35}$$

όπου:

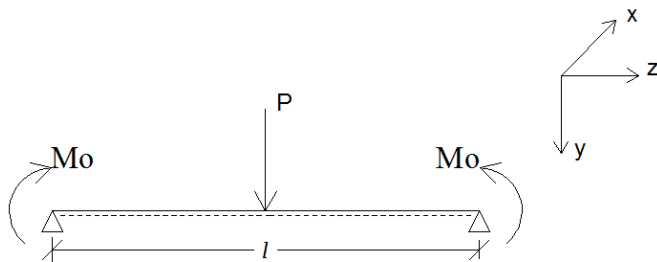
$$\Gamma_1 = \frac{C_1}{\phi_0}, \Gamma_2 = \frac{C_2}{\phi_0}, \Gamma_3 = \frac{C_3}{\phi_0}$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.35), περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του ομοιόμορφα κατανομημένου φορτίου  $q$  με την αντίστοιχη ταυτόχρονη τιμή της αξονικής δύναμης που δρά στο φορέα, για τα οποία έχουμε πλευρική εκτροπή. Στο Κεφάλαιο 5 θα γίνει αριθμητική εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης για συγκεκριμένη διατομή και μήκος φορέα, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την προσομοίωση του στατικού συστήματος αυτού στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Παρόλο που η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω, κρίνεται απαραίτητο να μην προβούμε σε απλοποίηση για να αποφύγουμε, όσο γίνεται, την απόκλιση των αποτελεσμάτων που θα λαμβάνουμε.

### 4.3 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη (ή μη) σε ζεύγος ροπών κάμψης στα άκρα με ταυτόχρονη δράση συγκεντρωμένου φορτίου στο μέσον της.

Θα εξεταστούν οι περιπτώσεις με ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης. Θα γίνει χρήση της καταλληλότερης ανά περίπτωση προσεγγιστικής μεθόδου.

#### 4.3.1 Χωρίς αξονική δύναμη.



Σχήμα 4.14 Αμφιέρειστη δοκός-σταθερή ροπή-συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον.

Ας θεωρήσουμε μια αμφιέρειστη δοκό (Σχ.4.14) διατομής ( $I$ ), η οποία καταπονείται από σταθερή ροπή  $M_0$  και ταυτόχρονη δράση συγκεντρωμένου φορτίου  $P$  που εφαρμόζεται σε απόσταση  $a$  (στη γενική των περιπτώσεων) από το κέντρο βάρους της διατομής.

Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου και κατά συνέπεια της κρίσιμης ροπής του πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψης  $zy$  παύει να είναι ευσταθές. Θα υποθέσουμε ότι κατά την κάμψη, τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες  $x$  και  $y$ , ενώ η στρόφη τους είναι αδύνατη περί τον κεντροβαρικό άξονα  $z$ . Για να προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, θα θεωρήσουμε πρώτα ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο  $zy$  και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία  $\varphi$  περί τον άξονα  $z$ .

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$  κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και  $M'_x, M'_y, M'_z$  κατά το κινητό σύστημα αξόνων που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας σε τυχαία διατομή  $mn$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ 4.15).

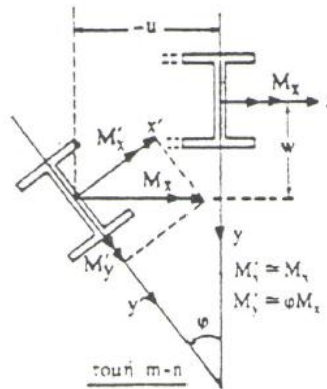
Έτσι για τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$  ισχύει:

$$M_x = M_0 + \frac{P}{2}z$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = \frac{P}{2}(u - u_M)$$

Όπου,  $u_M$  είναι το βέλος στο μέσον της αμφιέριστης δοκού.



Σχήμα 4.15 Τυχαία διατομή  $mn$  και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Στην παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού, εφαρμόζοντας την συνθήκη ισοροπίας εξωτερικών-εσωτερικών δυνάμεων, έχουμε:

- $EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$
- $EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y$
- $GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M'_z$

Ακόμα έχουμε:

- $M'_x = M_x \cos \phi \approx M_x$
- $M'_y = M_x \sin \phi \approx M_x \phi$
- $M'_z = -M_x \sin \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u - u_M) \approx -M_x \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u - u_M)$

Με δεδομένο ότι  $M_x = (M_0 + \frac{P}{2}z)$  έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_0 - \frac{P}{2}z \quad (4.36\alpha)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = +M_0 \phi + \frac{P}{2}z\phi = +\left(M_0 + \frac{P}{2}z\right)\phi \quad (4.36\beta)$$

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = -M_0 \frac{du}{dz} - \frac{P}{2}z \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u - u_M) \quad (4.36\gamma)$$

Αν τώρα παραγωγίσουμε ως προς  $z$  τη σχέση (4.36γ) θα έχουμε:

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = -M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{P}{2}z \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{P}{2} \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} \left( \frac{du}{dz} - \frac{du_M}{dz} \right)$$

Επειδή  $\frac{du_M}{dz} = 0$  ( $u_M$  σταθερά, ανεξάρτητη του  $z$ ) έχουμε:

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = -\left(M_0 + \frac{P}{2}z\right) \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (4.37)$$

Η εξίσωση (4.37), λόγω της (4.36β) γίνεται:

$$(4.36\beta): \frac{d^2 u}{dz^2} = +\left(M_0 + \frac{P}{2}z\right) \frac{\phi}{EI_y}$$

Άρα (4.37):

$$\begin{aligned} GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= -\left(M_0 + \frac{P}{2}z\right)^2 \frac{\phi}{EI_y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} &= +\left(M_0 + \frac{P}{2}z\right)^2 \frac{\phi}{EI_y EC_w} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Θέτουμε:  $\xi = \frac{z}{l}$

Είναι:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\phi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\phi}{d\xi^4}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.38), θα έχουμε:

$$\frac{1}{l^4} \frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \left( M_0 + \frac{P\xi l}{2} \right)^2 \frac{\phi}{EI_y EC_w} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ l^2}{EC_w} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \left( M_0 + \frac{P\xi l}{2} \right)^2 \frac{l^4\phi}{EI_y EC_w} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ l^2}{EC_w} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \left( M_0^2 + M_0 P \xi l + \frac{P^2 \xi^2 l^2}{4} \right) \frac{\phi^4}{EI_y EC_w} = 0$$

Θέτουμε:

$$K^4 = \frac{M_0^2 l^4}{EI_y EC_w}, \quad \Lambda^4 = \frac{M_0 P l^5}{EI_y EC_w}, \quad M^4 = \frac{P^2 l^6}{4EI_y EC_w}, \quad \beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$$

Επομένως καταλήγουμε:

$$\phi''''(\xi) - \beta^2 \phi''(\xi) - (K^4 + \Lambda^4 \xi + M^4 \xi^2) \phi(\xi) = 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες για την μισή δοκό, λόγω συμμετρίας, που επιλέξαμε να ασχοληθούμε είναι:

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-GJ\phi'\left(\frac{1}{2}\right) + EC_w\phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

(στην ειδική περίπτωση που το φορτίο  $P$  εφαρμόζεται πάνω στον άξονα  $z$  ( $\alpha=0$ ), δηλαδή στο κέντρο βάρους της διατομής ( $I$ ).

Οπότε και:

$$\phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Στη γενική όμως περίπτωση που το φορτίο, για παράδειγμα, βρίσκεται άνω του κέντρου βάρους της διατομής και σε απόσταση  $a$  από αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned} -GJ\phi'\left(\frac{l}{2}\right) + EC_w\phi'''\left(\frac{l}{2}\right) &= -\frac{P}{2}a\phi_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi'''\left(\frac{l}{2}\right) &= -\bar{P}\phi_0 \quad \text{όπου} \\ \bar{P} &= \frac{Pl^3a}{2EC_w} \end{aligned}$$

Έτσι μια προσεγγιστική λύση, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, βρίσκεται αν θεωρήσουμε τη γενική μορφή της γωνίας στροφής  $\varphi$  της διατομής κατά το στρεπτοκαμπτικό λυγισμό ως εξής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4\xi^4 + \alpha_3\xi^3 + \alpha_2\xi^2 + \alpha_1\xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4\xi^3 + 3\alpha_3\xi^2 + 2\alpha_2\xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4\xi^2 + 6\alpha_3\xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4\xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$$

Επομένως:  $\phi(\xi) = \alpha_4(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$

Για  $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = 0,3125\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 3,2\phi_0$

$$\phi(\xi) = 3,2\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

όπου  $\phi_0$  είναι η στροφή στο μέσον της δοκού ( $\xi = 1/2$ ).

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της  $\phi(\xi)$  στην εξίσωση:

$$\phi''''(\xi) - \beta^2 \phi''(\xi) - (K^4 + \Lambda^4 \xi + M^4 \xi^2) \phi(\xi) = 0$$

Έχουμε:

$$\phi''''(\xi) - \beta^2 \phi'(\xi) = 3,2K^4 \phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 3,2\Lambda^4 \phi_0(\xi^5 - 2\xi^4 + \xi^2) + 3,2M^4 \phi_0(\xi^6 - 2\xi^5 + \xi^3)$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - \beta^2 \phi'(\xi) &= \\ &= 3,2K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - 2\frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^2}{2} \right) + 3,2\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{6} - 2\frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^3}{3} \right) + 3,2M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{7} - 2\frac{\xi^6}{6} + \frac{\xi^4}{4} \right) + C_1 \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''(\xi) - \beta^2 \phi(\xi) &= \\ &= 3,2K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 3,2\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} \right) + 3,2M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} \right) + C_1 \xi + C_2 \quad (4.40) \end{aligned}$$

- Η εξίσωση (4.40) για  $\xi=0$  μας δίνει:

$$C_2 = 0$$

- Η εξίσωση (4.39) για  $\xi=1/2$  μας δίνει:

$$C_1 = -\bar{p}\phi_0 + (-0,32K^4 - 0,102\Lambda^4 - 0,037M^4)\phi_0$$

Αντικαθιστώντας στην (4.40) τις παραπάνω σταθερές ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi''(\xi) = & 3,2\beta^2\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 3,2K^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi\right) + \\ & + 3,2\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} - 0,0319\xi\right) + 3,2M^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} - 0,0116\xi\right) - \bar{p}\phi_0\xi \end{aligned}$$

Αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση δυο φορές έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi'(\xi) = & 3,2\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + 3,2K^4\phi_0\left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} - 0,1\frac{\xi^2}{2}\right) + 3,2\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105} + \right. \\ & \left. + \frac{\xi^5}{60} - 0,0319\frac{\xi^2}{2}\right) + 3,2M^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120} - 0,0116\frac{\xi^2}{2}\right) - \bar{p}\phi_0\frac{\xi^2}{2} + C_1' \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = & 3,2\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + 3,2K^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6}\right) + 3,2\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{735} + \right. \\ & \left. + \frac{\xi^6}{360} - 0,0319\frac{\xi^3}{6}\right) + 3,2M^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0116\frac{\xi^3}{6}\right) - \bar{p}\phi_0\frac{\xi^3}{6} + \\ & C_1'\xi + C_2' \end{aligned} \quad (4.42)$$

- Η εξίσωση (4.42) για  $\xi=0$  μας δίνει:



$$C_2' = 0$$

- Η εξίσωση (4.41) για  $\xi=1/2$  μας δίνει:

$$C_1' = (-0,32\beta^2 + 0,0324K^4 + 0,0113\Lambda^4 + 0,0043M^4)\phi_0 + 0,125\bar{p}\phi_0$$

Επομένως η εξίσωση (4.42) γίνεται:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = & 3,2\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi\right) + 3,2K^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6} + 0,0102\xi\right) + \\ & + 3,2\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360} - 0,0319\frac{\xi^3}{6} + 0,0035\xi\right) + \\ & + 3,2M^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0116\frac{\xi^3}{6} + 0,00134\xi\right) - \bar{p}\phi_0\frac{\xi^3}{6} + 0,125\bar{p}\phi_0\xi \end{aligned} \quad (4.43)$$

Αν θέσουμε  $\xi=1/2$  στην εξίσωση (4.43) τότε:

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_0 & \Rightarrow \phi_0 = -0,101667\beta^2\phi_0 + 0,010435K^4\phi_0 + 0,0036\Lambda^4\phi_0 + 0,001397M^4\phi_0 + \\ & + 0,04167\bar{p}\phi_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 = & -0,101667\beta^2 + 0,010435K^4 + 0,0036\Lambda^4 + 0,001397M^4 + 0,04167\bar{p} \Rightarrow \\ \Rightarrow M^4 = & 721 + 73,30\beta^2 - 7,52K^4 - 2,6\Lambda^4 - 30,04\bar{p} \end{aligned}$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων  $\beta^2$ ,  $K^4$ ,  $\Lambda^4$ ,  $M^4$ , έχουμε:

$$\frac{P^2l^6}{4EI_y EC_w} = 721 + 73,30\frac{GJl^2}{EC_w} - 7,52\frac{M_0^2l^4}{EI_y EC_w} - 2,6\frac{M_0Pl^5}{EI_y EC_w} - 30,04\frac{Pl^3a}{2EC_w} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P^2 &= \frac{2884EI_y EC_w}{l^6} + \frac{293,2EI_y GJ}{l^4} - \frac{30,08M_0^2}{l^2} - \frac{10,4M_0 P}{l} - \frac{60,08PEI_y a}{l^3} \Rightarrow \\
\Rightarrow P^2 &= \frac{2884EI_y EC_w}{l^6} + \frac{293,2EI_y GJ}{l^4} - 30,08 \frac{M_0^2}{l^2} - \left( \frac{10,4M_0 l^2 + 60,08EI_y a}{l^3} \right) P \Rightarrow \\
\Rightarrow P^2 + \left( \frac{10,4M_0 l^2 + 60,08EI_y a}{l^3} \right) P + \left( \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3} \right)^2 &= \\
&= \frac{2884EI_y EC_w}{l^6} + \frac{293,2EI_y GJ}{l^4} - 30,08 \frac{M_0^2}{l^2} + \left( \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3} \right)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \left( P + \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3} \right)^2 &= \\
&= \frac{2884EI_y EC_w}{l^6} + \frac{293,2EI_y GJ}{l^4} - 30,08 \frac{M_0^2}{l^2} + \left( \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3} \right)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow P_{cr} &= \sqrt{\frac{2884EI_y EC_w}{l^6} + \frac{293,2EI_y GJ}{l^4} - \frac{30,08M_0^2}{l^2} + \left( \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3} \right)^2} - \\
&\quad - \frac{5,2M_0 l^2 + 30,04EI_y a}{l^3}
\end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} l}{4}$$

Τότε:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{180,25EI_y EC_w}{l^4} + \frac{18,325EI_y GJ}{l^2} - 1,88M_0^2 + \left( \frac{1,3M_0 l^2 + 7,51EI_y a}{l^2} \right)^2} -$$

$$-\frac{1,3M_0l^2 + 7,51EI_y a}{l^2}$$

Όπου  $M_{cr}$ , είναι η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού που αναζητήσαμε με την προσδιοριστική μέθοδο στο συγκεκριμένο φορέα και φόρτιση αυτού.

### Παρατηρήσεις

Είναι προφανές ότι από τον παραπάνω γενικό τύπο που καταλήξουμε, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την τιμή της κρίσιμης ροπής για διάφορους τρόπους φόρτισης (υποκατηγορίες της γενικής περίπτωσης), όπως:

- Όταν ο φορέας δεν καταπονείται από ροπή στα άκρα ( $M_0=0$ ), τότε:

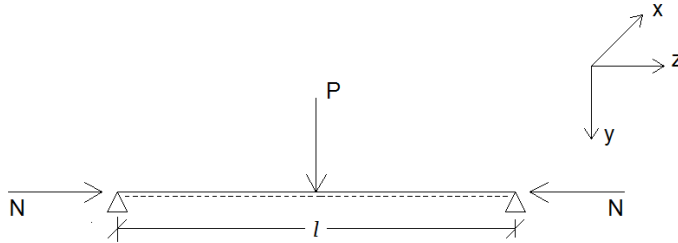
$$M_{cr} = \sqrt{\frac{180,25EI_y EC_w}{l^4} + \frac{18,325EI_y GJ}{l^2} + \left( \frac{56,4E^2 I_y^2 a^2}{l^4} \right)} - 7,51 \frac{EI_y a}{l^2}$$

- Όταν ο φορέας δεν καταπονείται από ροπή στα άκρα ( $M_0=0$ ) και η κατακόρυφη δύναμη  $P$  εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής ( $\alpha=0$ ), τότε:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{180,25EI_y EC_w}{l^4} + \frac{18,325EI_y GJ}{l^2}}$$

Αλλά και διάφοροι άλλοι συνδυασμοί των εμπλεκόμενων φορτίσεων του παραδείγματός μας.

### 4.3.2 Με αξονική δύναμη



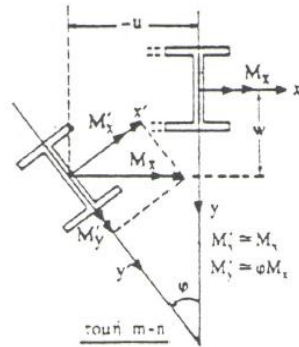
Σχήμα 4.16 Αμφιέρειστη δοκός-συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  και αξονική δύναμη  $N$ .

Ας θεωρήσουμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής  $I$  (Σχ 4.16), η οποία καταπονείται από σταθερή αξονική δύναμη  $N$  και συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ . Θεωρούμε ότι τα φορτία  $P$  και  $N$  εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους της διατομής αυτής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψεως  $zy$  παύει να είναι ευσταθές. Προτού προχωρήσουμε σε υπολογισμούς θα πρέπει να υποθέσουμε, ότι κατά τη διάρκεια της κάμψεως, τα άκρα της δοκού (τα σημεία στήριξης) μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες  $x$  και  $y$ , με αδύνατη όμως στροφή περί τον κεντροβαρικό άξονα-κέντρο βάρους της διατομής  $z$ .

Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ( $I_x > I_y$ ), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα  $y$  και τον διαμήκη άξονα  $z$  (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Για όσο το  $P$  αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η  $N$  παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- iii. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- iv. Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής  $M_{cr}$ , η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη, της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα  $z$  και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις  $w$  και  $u$  του κέντρου βάρους της διατομής, αλλά, και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ.4.17).



Σχήμα 4.17 Τυχαία διατομή  $mn$  και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$  κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και  $M'_x, M'_y, M'_z$  κατά το κινητό σύστημα αξόνων που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας σε τυχαία διατομή  $mn$  όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (Σχ 4.17).

Έτσι για τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$  ισχύει:

$$M_x = \frac{P}{2} z, M_y = M_z = 0$$

Στην παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού, εφαρμόζοντας την συνθήκη ισορροπίας εξωτερικών-εσωτερικών δυνάμεων, έχουμε:

- $EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$
- $EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y$
- $GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M'_z$

Ακόμα έχουμε:

- $M'_x = M_x \cos \phi \approx M_x$
- $M'_y = M_x \sin \phi \approx M_x \phi$
- $M'_z = -M_x \sin \frac{du}{dz}$

Με δεδομένο ότι  $M_x = \frac{P}{2}z$ , μορφώνουμε τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση κατά τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό του εν λόγω στατικού συστήματος:

$$EI_x w'' + Nw = -\frac{P}{2}z \quad (4.44\alpha)$$

$$EI_y u'' + Nu = \frac{P}{2}z\phi \quad (4.44\beta)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -\frac{P}{2}zu' \quad (4.44\gamma)$$

Όπου η παραγωγή είναι ως προς  $z$  και  $EI_x, EI_y$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού αντιστοίχως. Σε αρχικό στάδιο μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (4.44β) και (4.44γ) σε αδιαστατοποιημένη μορφή.

$$\text{Έτσι αν θέσουμε: } \xi = \frac{z}{l}$$

Είναι:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3}$$

- Η (4.44.β) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$EI_y u'' + Nu = \frac{P}{2}z\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Nu = \frac{P}{2}z\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{d^2 u}{l^2 d\xi^2} + Nu = \frac{P}{2}l\xi\phi \xrightarrow{v=\frac{u}{l}}$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{ld^2v}{l^2 d\xi^2} + Nlv = \frac{P}{2} l\xi\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EI_y}{l} v''(\xi) + INv(\xi) = \frac{P}{2} l\xi\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v''(\xi) + \frac{Nl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{P}{2} \frac{l^2 \xi\phi}{EI_y}$$

- Η (4.44γ) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$EC_w \phi''' - GJ\phi' = \frac{P}{2} zu' \Rightarrow EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} - GJ \frac{d\phi}{dz} = \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC_w \frac{d^3\phi}{l^3 d\xi^3} - GJ \frac{d\phi}{ld\xi} = \frac{P}{2} l\xi \frac{du}{ld\xi} \xrightarrow{v=\frac{u}{l}} \frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{Pl}{2} \frac{dv}{d\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \phi'(\xi) = \frac{Pl^4}{2EC_w} \xi v'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \phi'(\xi) = \frac{Pl^2}{2EI_y} \frac{I_y l^2}{C_w} \xi v'(\xi)$$

Συνοψίζοντας:

$$v''(\xi) + \frac{Nl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{P}{2} \frac{l^2 \xi\phi}{EI_y}$$

και

$$\phi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \phi'(\xi) = \frac{Pl^2}{2EI_y} \frac{I_y l^2}{C_w} \xi v'(\xi)$$

Θέτουμε:

$$n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, \quad p = \frac{Pl^2}{2EI_y}, \quad \bar{q}^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, \quad \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, \quad \text{οπότε έχουμε:}$$

$$v''(\xi) + n^2 v(\xi) = p\xi\phi \quad (4.45)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = p\bar{q}^2 \xi v'(\xi) \quad (4.46)$$

Σε αυτό το σημείο, αντίστοιχα με τον τρόπο αντιμετώπισης των εξισώσεων στο κεφάλαιο 4.2.2, θα πρέπει να σχολιάσουμε ότι η εξίσωση (4.44 α) είναι ανεξάρτητη, δηλαδή δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες. Αντίθετα, θα μπορούσαμε να επιλύσουμε τις (4.44β) και (4.44γ) και να εκλάβουμε τις συναρτήσεις της μετακίνησης  $u$  (κατά τον άξονα  $x$ ) και της στροφής  $\phi$  (περί τον άξονα  $z$ ) του κέντρου βάρους της διατομής.

Σε πρώτη φάση λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την εξίσωση

$$v''(\xi) + n^2 v(\xi) = p\xi\phi$$

Όπως είχαμε προαναφέρει στο κεφάλαιο (3.4), θα πρέπει να κάνουμε χρήση μιας προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής  $\phi$  της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Αν θέσουμε:

$$\phi(z) = \phi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), 0 \leq z \leq l$$

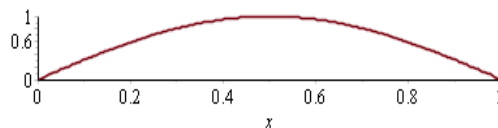
ή

$$\phi(\xi) = \phi_0 \sin(\pi\xi), 0 \leq \xi \leq 1$$

όπου  $\phi_0$ , είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέριστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Παρατηρούμε από το διάγραμμα (Σχ 4.18) του  $\sin(\pi x)$  ότι ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στήριξης της δοκού.

`plot(sin(pi*x), x=0..1)`



Σχήμα 4.18 Διάγραμμα  $\sin(\pi x)$  στο διάστημα  $[0,1]$

Έχουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$\phi(0) = \phi(1) = \phi'(1) = \phi''(0) = \phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$



οι οποίες πράγματι ικανοποιούνται από τη συνάρτηση “ $\sin(\pi x)$ ” και αυτό επιβεβαιώνεται και με το διάγραμμα που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Όπως και στην περίπτωση του κεφαλαίου 4.2.2, έτσι και στην παρούσα, λόγω της πολυπλοκότητας και του μεγέθους που θα έχει η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα κάνουμε μια αντικατάσταση του  $\sin(\pi \xi)$  με τη σειρά “Maclaurin”, Maclaurin 18<sup>ος</sup> αιώνας.

Έτσι:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots. \text{για όλα τα } x.$$

Αν κάνουμε χρήση μόνο των δύο πρώτων όρων κάθε έκφρασης (για να μειώσουμε το βαθμό του πολυωνύμου) θα έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση καθώς το σφάλμα προσέγγισης δεν είναι πάνω από  $x^5/5!$  για την  $\sin(x)$  και  $x^4/4!$  για την  $\cos(x)$ .

Συνοψίζοντας, έχουμε να επιλύσουμε την εξίσωση:

$$v''(\xi) + n^2 v(\xi) = \phi_0 p \left( \pi \xi^2 - \frac{\pi^3 \xi^4}{6} \right) \quad (4.47)$$

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα γίνει χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple της Maplesoft. Έτσι λοιπόν, λαμβάνουμε την γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

Σχήμα 4.19 Εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης (4.47)

Η γενική λύση που παίρνουμε λοιπόν είναι:

$$v(\xi) = C_2 \sin(n\xi) + C_1 \cos(n\xi) - \frac{1}{6} \phi_0 p \pi \frac{(n^4 \pi^2 \xi^4 - 6n^4 \xi^2 - 12n^2 \pi^2 \xi^2 + 12n^2 + 24\pi^2)}{n^6}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι στις στηρίξεις (στα άκρα της δοκού) δεν επιτρέπεται καμία μετακίνηση κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  παρά μόνο στροφή περί τον άξονα  $z$ , μπορούμε να κάνουμε

χρήση των συνοριακών συνθηκών  $v(0)=v(1)=0$  και να υπολογίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης  $C_1$  και  $C_2$  (Σχ 4.20).

$$\begin{aligned} \text{ans1} &:= \text{dsolve}(\{\text{ode1}, h(0)=0, h(1)=0\}) \\ h(x) &= -\frac{1}{6} \frac{\sin(nx) \wp \pi (-n^4 \pi^2 + 6n^4 + 12n^2 \pi^2 + 12 \cos(n) \pi^2 - 12n^2 - 24\pi^2)}{\sin(n)n^6} + \frac{2 \cos(nx) \wp \pi (n^2 + 2\pi^2)}{n^6} \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\wp \pi (n^4 \pi^2 x^4 - 6n^4 x^2 - 12n^2 \pi^2 x^2 + 12n^2 + 24\pi^2)}{n^6} \end{aligned}$$

Σχήμα 4.20 Λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.47).

Έτσι, η λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.47) που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= -\frac{1}{6} \frac{\sin(n\xi) \phi_0 \wp \pi (-n^4 \pi^2 + 6n^4 + 12n^2 \pi^2 + 12 \cos(n) \pi^2 - 12n^2 - 24\pi^2)}{\sin(n)n^6} + \\ &\quad + \frac{2 \cos(n\xi) \phi_0 \wp \pi (n^2 + 2\pi^2)}{n^6} - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\phi_0 \wp \pi (n^4 \pi^2 \xi^4 - 6n^4 \xi^2 - 12n^2 \pi^2 \xi^2 + 12n^2 + 24\pi^4)}{n^6} \end{aligned}$$

‘Αν κάνουμε χρήση των σειρών Maclaurin και τις αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τα εξής:

$$\sin(n\xi) = n\xi - \frac{(n\xi)^3}{3!}$$

και

$$\cos(n\xi) = 1 - \frac{(n\xi)^2}{2!}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= -\frac{1}{6} \frac{\left( n\xi - \frac{(n\xi)^3}{6} \right) \phi_0 \wp \pi (-n^4 \pi^2 + 6n^4 + 12n^2 \pi^2 + 12 \cos(n) \pi^2 - 12n^2 - 24\pi^2)}{\sin(n)n^6} + \\ &\quad + \frac{2 \left( 1 - \frac{(n\xi)^2}{2} \right) \phi_0 \wp \pi (n^2 + 2\pi^2)}{n^6} - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \frac{\phi_0 p \pi (n^4 \pi^2 \xi^4 - 6n^4 \xi^2 - 12n^2 \pi^2 \xi^2 + 12n^2 + 24\pi^4)}{n^6}$$

Παραγωγίζοντας μια φορά την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης έχουμε:

$$v'(\xi) = -\frac{1}{6} \frac{\left(n - \frac{1}{2} n^3 \xi^2\right) \phi_0 p \pi (-n^4 \pi^2 + 6n^4 + 12n^2 \pi^2 + 12 \cos(n) n^2 + 24 \cos(n) \pi^2 - 12n^2 - 24\pi^2)}{\sin(n) n^6}$$

$$-\frac{2\xi \phi_0 p \pi (2\pi^2 + n^2)}{n^4} - \frac{1}{6} \frac{\phi_0 p \pi (4\pi^2 n^4 \xi^3 - 24\pi^2 n^2 \xi - 12n^4 \xi)}{n^6}$$

Μετά από απλοποίηση της έκφρασης  $v'(\xi)$ , μέσω του maple έχουμε:

$$\text{simplify}(tt)$$

$$t(x) = \frac{1}{12} \frac{1}{n^5 \sin(n)} (w p \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 + 2 n^4 \pi^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 12 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2))$$

Σχήμα 4.21 Απλοποίηση της  $v'(\xi)$  μέσω του Maple.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την παραπάνω έκφραση της  $v'(\xi)$  στην εξίσωση (4.46), έχουμε να επιλύσουμε την εξής διαφορική εξίσωση:

$$\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = p \bar{q}^2 \xi \frac{1}{12} \frac{1}{n^5 \sin(n)} (\phi_0 p \pi (-\pi^2 n^6 \xi^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 \xi^3 + 12 \pi^2 n^4 \xi^2 + 6 n^6 \xi^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 \xi^2 + 12 \cos(n) n^4 \xi^2 + 2 n^4 \pi^2 - 24 n^2 \pi^2 \xi^2 - 12 n^4 \xi^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2))$$

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση των μεταβλητών  $f$ ,  $x$ ,  $l$ , αντί των μεταβλητών  $\phi$ ,  $\xi$ ,  $\lambda$  αντίστοιχα, προχωράμε στην εξαγωγή της γενικής λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μέσω του Maple 17 (Σχ.4.22 και Σχ.4.23).

$$\begin{aligned}
 \text{ode2} := f''(x) - l^2 f(x) &= p \cdot q^2 \cdot x \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^5 \sin(n)} \cdot (w \cdot p \cdot \pi (-\pi^2 \cdot n^6 \cdot x^2 - 8 \cdot \pi^2 \cdot \sin(n) \cdot n^3 \cdot x^3 + 12 \cdot \pi^2 \cdot n^4 \cdot x^2 + 6 \cdot n^6 \cdot x^2 + 24 \cdot \pi^2 \cdot \cos(n) \cdot n^2 \cdot x^2 + 12 \cdot \cos(n) \cdot n^4 \cdot x^2 + 2 \\
 &\quad \cdot n^4 \cdot x^2 - 24 \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot x^2 - 12 \cdot n^4 \cdot x^2 - 24 \cdot n^2 \cdot \pi^2 - 12 \cdot n^4 - 48 \cdot \cos(n) \cdot \pi^2 - 24 \cdot \cos(n) \cdot n^2 + 48 \cdot \pi^2 + 24 \cdot n^2)) \\
 \frac{d^3}{dx^3} f(x) - l^2 \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) &= \frac{1}{12} \frac{1}{n^5 \sin(n)} (p^2 q^2 x w \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 \\
 &\quad - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2)) \quad (6)
 \end{aligned}$$

Σχήμα 4.22 Μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης στο Maple 17.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Επίσης φαίνονται οι αναμενόμενες σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες θα προσδιοριστούν στη συνέχεια με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών στήριξης που ισχύουν για το συγκεκριμένο στατικό σύστημα. Οι συνοριακές συνθήκες αναφέρθηκαν παραπάνω.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \text{ans2} := \text{dsolve}(\text{ode2}) \\
 f(x) = \int \left( -\frac{1}{24} \frac{1}{n^5 l \sin(n)} \left( -24 e^{lx} \_C2 n^5 l \sin(n) - 24 e^{-lx} \_C1 n^5 l \sin(n) - p^2 q^2 w \left( \int e^{-lx} x \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) dx \right) e^{lx} + e^{-lx} p^2 q^2 w \left( \int e^{lx} x \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 \right. \right. \\
 \left. \left. - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) dx \right) dx + \_C3
 \end{aligned}$$

Σχήμα 4.23 Λύση της διαφορικής εξίσωσης μέσω του Maple.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi) = \int \left( -\frac{1}{24} \frac{1}{n^5 \lambda \sin(n)} \left( -24 e^{\lambda \xi} C_2 n^5 \lambda \sin(n) - 24 e^{-\lambda \xi} C_1 n^5 \lambda \sin(n) - p^2 \bar{q}^2 \phi_0 \left( \int e^{-\lambda \xi} \xi \pi \left( -\pi^2 n^6 \xi^2 - \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 \xi^3 + 12 \pi^2 n^4 \xi^2 + 6 n^6 \xi^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 \xi^2 + 12 \cos(n) n^4 \xi^2 - 10 n^4 \xi^2 - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - 24 n^2 \pi^2 \xi^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) d\xi \right) e^{\lambda \xi} + \\
 \left. + e^{-\lambda \xi} p^2 \bar{q}^2 \phi_0 \left( \int e^{\lambda \xi} \xi \pi \left( -\pi^2 n^6 \xi^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 \xi^3 + 12 \pi^2 n^4 \xi^2 + 6 n^6 \xi^2 + \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 \xi^2 + 12 \cos(n) n^2 \xi^2 - 10 n^4 \xi^2 - 24 n^2 \pi^2 \xi^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) d\xi \right) \right) d\xi + C_3
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια προχωράμε στην απλοποίηση της παραπάνω λύσης. Είναι:

$$\phi(\xi) = \int \left( -\frac{1}{24} \frac{1}{n^5 \lambda \sin(n)} \left( -24e^{\lambda\xi} C_2 n^5 \lambda \sin(n) - 24e^{-\lambda\xi} C_1 n^5 \lambda \sin(n) + \right. \right. \\ \left. \left. + p^2 \bar{q}^2 \phi_0 \left( -e^{\lambda\xi} I_1 + e^{-\lambda\xi} I_2 \right) \right) \right) d\xi + C_3$$

Όπου:

$$I_1 = \int e^{-\lambda\xi} \left( -\pi^3 n^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(n) n^3 \xi^4 + 12\pi^3 n^4 \xi^3 + 6\pi n^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(n) n^2 \xi^3 + \right. \\ \left. + 12\pi \cos(n) n^4 \xi^3 - 10\pi n^4 \xi^3 - 24\pi^3 n^2 \xi^3 - 12\pi n^4 \xi - 48\pi^3 \cos(n) \xi - 24\pi \cos(n) n^2 \xi + \right. \\ \left. + 48\pi^3 \xi + 24\pi n^2 \xi \right) d\xi = \int e^{-\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi$$

$$\text{Με } \Pi(\xi) = -\pi^3 n^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(n) n^3 \xi^4 + 12\pi^3 n^4 \xi^3 + 6\pi n^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(n) n^2 \xi^3 + \\ + 12\pi \cos(n) n^4 \xi^3 - 10\pi n^4 \xi^3 - 24\pi^3 n^2 \xi^3 - 12\pi n^4 \xi - 48\pi^3 \cos(n) \xi - 24\pi \cos(n) n^2 \xi + \\ + 48\pi^3 \xi + 24\pi n^2 \xi$$

Επομένως:

$$I_1 = \int e^{-\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) + \int \left( \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi'(\xi) \right) d\xi = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \int \left( \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi''(\xi) \right) d\xi \\ = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \int \left( \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi'''(\xi) \right) d\xi = \\ = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \int \left( \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi''''(\xi) \right) d\xi = \\ = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(n) n^3$$

Και

$$I_2 = \int e^{\lambda\xi} \left( -\pi^3 n^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(n) n^3 \xi^4 + 12\pi^3 n^4 \xi^3 + 6\pi n^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(n) n^2 \xi^3 + \right. \\ \left. + 12\pi \cos(n) n^4 \xi^3 - 10\pi n^4 \xi^3 - 24\pi^3 n^2 \xi^3 - 12\pi n^4 \xi - 48\pi^3 \cos(n) \xi - 24\pi \cos(n) n^2 \xi + \right.$$

$$+ 48\pi^3 \xi + 24\pi^2 \xi) d\xi = \int e^{\lambda \xi} \Pi(\xi) d\xi$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^{\lambda \xi} \Pi(\xi) d\xi = \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \int \left( \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi'(\xi) \right) d\xi = \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \int \left( \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^2} \Pi''(\xi) \right) d\xi = \\ &= \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \int \left( \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^3} \Pi'''(\xi) \right) d\xi = \\ &= \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \int \left( \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^4} \Pi''''(\xi) \right) d\xi = \\ &= \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(n)n^3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} -I_1 e^{\lambda \xi} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{1}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \frac{1}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{192\pi^3 \sin(n)n^3}{\lambda^5} \\ I_2 e^{-\lambda \xi} &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{1}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{1}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{192\pi^3 \sin(n)n^3}{\lambda^5} \end{aligned}$$

Οπότε:

$$-e^{\lambda \xi} I_1 + e^{-\lambda \xi} I_2 = \frac{2}{\lambda} \Pi(\xi) + \frac{2}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{384\pi^3 \sin(n)n^3}{\lambda^5},$$

$$\begin{aligned} \text{Όπου } \Pi''(\xi) &= -6\pi^3 n^6 \xi - 96\pi^3 \sin(n)n^3 \xi^2 + 72\pi^3 n^4 \xi + 36\pi^6 \xi + 144\pi^3 \cos(n)n^2 \xi + \\ &+ 72\pi \cos(n)n^4 \xi - 60\pi^4 \xi - 144\pi^3 n^2 \xi \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \int \left( -\frac{1}{24 n^5 \lambda \sin(n)} \left( -24e^{\lambda \xi} C_2 n^5 \lambda \sin(n) - 24e^{-\lambda \xi} C_1 n^5 \lambda \sin(n) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p^2 \bar{q}^{-2} \phi_0 \left( -e^{\lambda \xi} I_1 + e^{-\lambda \xi} I_2 \right) \right) \right) d\xi + C_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left( -\frac{1}{24} \frac{1}{n^5 \lambda \sin(n)} \left( -24e^{\lambda \xi} C_2 n^5 \lambda \sin(n) - 24e^{-\lambda \xi} C_1 n^5 \lambda \sin(n) + \right. \right. \\
&+ p^2 \bar{q}^2 \phi_0 \left( \frac{2}{\lambda} \left( -\pi^3 n^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(n) n^3 \xi^4 + 12\pi^3 n^4 \xi^3 + 6\pi n^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(n) n^2 \xi^3 + \right. \right. \\
&+ 12\pi \cos(n) n^4 \xi^3 - 10\pi n^4 \xi^3 - 24\pi^3 n^2 \xi^3 - 24\pi^3 n^2 \xi - 48\pi^3 \cos(n) \xi - 24\pi \cos(n) n \xi + \\
&+ 48\pi^3 \xi + 24\pi n^2 \xi \left. \right) + \frac{2}{\lambda^3} \left( -6\pi^3 n^6 \xi - 96\pi^3 \sin(n) n \xi^2 + 72\pi^3 n^4 \xi + 32\pi^6 n^4 \xi + \right. \\
&\left. \left. + 144\pi^3 \cos(n) n^2 \xi + 72\pi \cos(n) n^4 \xi - 60\pi n^4 \xi - 144\pi^3 n^2 \xi \right) - \frac{384\pi^3 \sin(n) n}{\lambda^5} \right)
\end{aligned}$$

Η τελική μορφή που παίρνει η συνάρτηση της γωνίας στροφής  $\phi(\xi)$  της διατομής ( $I$ ), που μελετάμε κατά τον πλευρικό λυγισμό για τον συγκεκριμένο στατικό σύστημα στήριξη δοκού-φόρτιση, είναι:

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= C_2 \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\lambda \xi}}{\lambda} - \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} \left[ -\frac{16}{5} \frac{\pi^3 \sin(n) n^3}{\lambda} \xi^5 + \left( -\frac{\pi^3 n^6}{2\lambda} + \frac{6\pi^3 n^4}{\lambda} + \frac{3\pi n^6}{\lambda} + \right. \right. \\
&\frac{12\pi^3 \cos(n) n^2}{\lambda} + \frac{6\pi \cos(n) n^4}{\lambda} - \frac{5\pi n^4}{\lambda} - \frac{12\pi^3 n^2}{\lambda} \left. \right) \xi^4 + \left( -\frac{64\pi^3 \sin(n) n}{\lambda^3} \right) \xi^3 + \\
&+ \left( -\frac{24\pi^3 n^2}{\lambda} - \frac{12\pi n^4}{\lambda} - \frac{48\pi^3 \cos(n)}{\lambda} - \frac{24\pi \cos(n)}{\lambda} + \frac{48\pi^3}{\lambda} + \frac{24\pi n^2}{\lambda} + \frac{72\pi^3 n^4}{\lambda^3} + \frac{32\pi^6}{\lambda^3} + \right. \\
&\left. \frac{144\pi^3 \cos(n) n^2}{\lambda^3} - \frac{6\pi^3 n^6}{\lambda^3} + \frac{72\pi \cos(n) n^4}{\lambda^3} - \frac{60\pi n^4}{\lambda^3} - \frac{144\pi^3 n^2}{\lambda^3} \right) \xi^2 - \frac{384\pi^3 \sin(n) n^3}{\lambda^5} \xi \left. \right] + \\
&+ C_3
\end{aligned}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, προκύπτουν τρεις σταθερές ολοκλήρωσης. Ο προσδιορισμός των σταθερών αυτών γίνεται αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στήριξης. Παρακάτω θα γίνει χρήση των εξής συνθηκών:

- i.  $\phi(0) = 0$
- ii.  $\phi''(0) = 0$

- iii. Μετά από διπλή παραγώγιση της εξίσωσης (4.44.β), κάνοντας χρήση ότι  $\phi''(1) = u''(1) = 0 \Rightarrow \phi''''(1) = 0$

Οπότε:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow \frac{C_2}{\lambda} - \frac{C_1}{\lambda} = -C_3 \Rightarrow C_2 - C_1 = -C_3 \lambda$$

$$\begin{aligned} \phi''(0) = 0 \Rightarrow C_2 \lambda - C_1 \lambda = \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} & \left( \frac{48\pi^3 n^2}{\lambda} + \frac{24\pi n^4}{\lambda} + \frac{96\pi^3 \cos(n)}{\lambda} + \frac{48\pi \cos(n)n}{\lambda} - \right. \\ & \left. - \frac{96\pi^3}{\lambda} - \frac{48\pi n^2}{\lambda} - \frac{144\pi^3 n^4}{\lambda^3} - \frac{64\pi^6}{\lambda^3} - \frac{288\pi^3 \cos(n)n^2}{\lambda^3} + \frac{12\pi^3 n^6}{\lambda^3} - \frac{144\pi \cos(n)n^4}{\lambda^3} \right. \\ & \left. + \frac{120\pi n^4}{\lambda^3} + \frac{288\pi^3 n^2}{\lambda^3} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_3 = \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{\sin(n)} & \left( -\frac{2\pi^3}{n^3 \lambda^4} - \frac{\pi}{n \lambda^4} - \frac{4\pi^3 \cos(n)}{n^5 \lambda^4} - \frac{2\pi \cos(n)}{n^4 \lambda^4} + \frac{4\pi^3}{n^5 \lambda^4} + \frac{2\pi}{n^3 \lambda^4} + \frac{6\pi^3}{n \lambda^6} + \frac{16\pi^6}{6n^5 \lambda^6} + \right. \\ & \left. + \frac{12\pi^3 \cos(n)}{n^3 \lambda^6} - \frac{\pi^3 n}{2\lambda^6} + \frac{6\pi \cos(n)}{n \lambda^3} - \frac{5\pi}{n \lambda^6} - \frac{12\pi^3}{n^3 \lambda^6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''''(1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 e^\lambda C_2 - \lambda^3 e^{-\lambda} C_1 + \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0 16\pi^3}{n^2 \lambda^2} - \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} & \left( -\frac{12\pi^3 n^6}{\lambda} + \frac{144\pi^3 n^4}{\lambda} + \frac{72\pi n^6}{\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{144\pi \cos(n)n^4}{\lambda} - \frac{120\pi n^4}{\lambda} - \frac{288\pi^3 n^2}{\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda^3 e^\lambda C_2 - \lambda^3 e^{-\lambda} C_1 + A = 0 \Rightarrow C_2 = e^{-2\lambda} C_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3} A$$

Σημείωση: Στο εξής, η χρήση της μεταβλητής  $A$  είναι ισοδύναμη με τη χρήση της παράστασης:

$$A(p^2, \bar{q}, n, \lambda, \phi_0) =$$

$$= \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0 16\pi^3}{n^2 \lambda^2} - \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} \left( -\frac{12\pi^3 n^6}{\lambda} + \frac{144\pi^3 n^4}{\lambda} + \frac{72\pi n^6}{\lambda} + \frac{144\pi \cos(n)n^4}{\lambda} - \right.$$



$$\left. -\frac{120\pi^4}{\lambda} - \frac{288\pi^3 n^2}{\lambda} \right) = 0$$

Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές  $C_1$ ,  $C_2$ , επιλύοντας το εξής σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν παραπάνω:

$$C_2 - C_1 = -C_3 \lambda$$

$$C_2 = e^{-2\lambda} C_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3} A$$

όπου, οι σταθερές  $A$  και  $C_3$  είναι γνωστές (προσδιορίστηκαν παραπάνω).

Από την επίλυση του συστήματος έχουμε:

$$C_1 = \frac{1}{(e^{-2\lambda} - 1)} \left( -\lambda C_3 + \frac{A}{\lambda^3} e^{-\lambda} \right)$$

$$C_2 = -\frac{e^{-2\lambda}}{(e^{-2\lambda} - 1)} \lambda C_3 + \frac{e^{-\lambda} A}{(e^{-2\lambda} - 1) \lambda^3}$$

Έχουμε ορίσει πλήρως τη συνάρτηση  $\phi(\xi)$  της γωνίας στροφής της διατομής ( $l$ ) σε όλες τις θέσεις  $\xi$  της αμφιέριστης δοκού.

Θα αναζητήσουμε την *κρίσιμη εξίσωση* πλευρικού λυγισμού για το εν λόγω στατικό σύστημα που εξετάζουμε στην εφαρμογή μας. Προφανώς, το κρισιμότερο σημείο της αμφιέριστης δοκού, μήκους  $l$ , είναι στο μέσον της δοκού. Επομένως, για  $\xi=1/2$  η γωνία στροφής της διατομής στο μέσον της δοκού είναι:

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{2}\right) = & C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} \left( -3,1 \frac{\sin(n)n^3}{\lambda} - 0,97 \frac{n^6}{\lambda} + 11,62 \frac{n^4}{\lambda} + 0,59 \frac{n^6}{\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{23,25 \cos(n)n^2}{\lambda} + \frac{1,18 \cos(n)n^4}{\lambda} - \frac{0,98n^4}{\lambda} - \frac{23,25n^2}{\lambda} - \frac{248,1 \sin(n)n}{\lambda^3} - \frac{186,04n^2}{\lambda} - \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9,42n^4}{\lambda} - \frac{372,1\cos(n)}{\lambda} - \frac{18,85\cos(n)n}{\lambda} + \frac{372,1}{\lambda} + \frac{18,85n^2}{\lambda} + \frac{558,1n^4}{\lambda^3} + \frac{7691,1}{\lambda^3} + \\
& \frac{1116,2\cos(n)n^2}{\lambda^3} - \frac{46,51n^6}{\lambda^3} + \frac{56,55\cos(n)n^4}{\lambda^3} - \frac{47,12n^4}{\lambda^3} - \frac{1116,22n^2}{\lambda^3} - \\
& \left. - \frac{5953,21\sin(n)n^3}{\lambda^5} \right) + C_3 \Rightarrow \\
\Rightarrow \phi_0 = & C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 \bar{q}^2 \phi_0}{24n^5 \lambda \sin(n)} \left[ -\frac{(3,1\lambda^4 + 5953,21)\sin(n)n^3}{\lambda^5} + \frac{(-0,38\lambda^2 - 46,51)n^6}{\lambda^3} + \right. \\
& + \frac{(23,25\lambda^2 + 1116,2)\cos(n)n^2}{\lambda^3} + \frac{(1,22\lambda^2 + 511)n^4}{\lambda^3} + \frac{(1,18\lambda^2 + 56,55)\cos(n)n^4}{\lambda^3} - \\
& \left. - \frac{(190,44\lambda^2 + 1116,22)n^2}{\lambda^3} + \frac{(372,10\lambda^2 + 7961,1)}{\lambda^3} - \frac{(372,1 + 18,85n)\cos(n)}{\lambda} - \frac{248,1\sin(n)n}{\lambda^3} \right] + \\
& + C_3
\end{aligned}$$

Η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη εξίσωση πλευρικού λυγισμού είναι:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 1 = & \Gamma_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \Gamma_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 \bar{q}^2}{24n^5 \lambda \sin(n)} \left[ -\frac{(3,1\lambda^4 + 5953,21)\sin(n)n^3}{\lambda^5} + \frac{(-0,38\lambda^2 - 46,51)n^6}{\lambda^3} + \right. \\
& + \frac{(23,25\lambda^2 + 1116,2)\cos(n)n^2}{\lambda^3} + \frac{(1,22\lambda^2 + 511)n^4}{\lambda^3} + \frac{(1,18\lambda^2 + 56,55)\cos(n)n^4}{\lambda^3} - \\
& \left. - \frac{(190,44\lambda^2 + 1116,22)n^2}{\lambda^3} + \frac{(372,10\lambda^2 + 7961,1)}{\lambda^3} - \frac{(372,1 + 18,85n)\cos(n)}{\lambda} - \frac{248,1\sin(n)n}{\lambda^3} \right] + \\
& + \Gamma_3
\end{aligned} \tag{4.48}$$

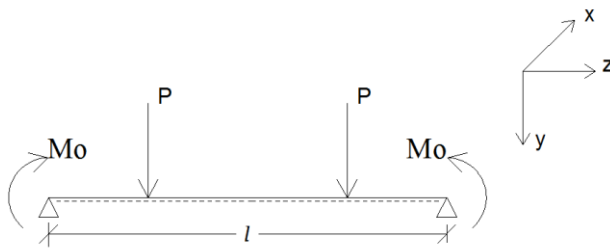
Όπου:

$$\Gamma_1 = \frac{C_1}{\phi_0}, \Gamma_2 = \frac{C_2}{\phi_0}, \Gamma_3 = \frac{C_3}{\phi_0}$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.48), περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου  $P$  με την αντίστοιχη ταυτόχρονη τιμή της αξονικής δύναμης που δρά στο φορέα, για τα οποία έχουμε πλευρική εκτροπή. Στο Κεφάλαιο 5 θα γίνει αριθμητική εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης για συγκεκριμένη διατομή και μήκος φορέα, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την προσομοίωση του στατικού συστήματος αυτού στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Παρόλο που η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω, κρίνεται απαραίτητο να μην προβούμε σε απλοποίηση για να αποφύγουμε, όσο γίνεται, την απόκλιση των αποτελεσμάτων που θα λαμβάνουμε.

#### 4.4 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψης στα άκρα της με ταυτόχρονη δράση δύο συγκεντρωμένων φορτίων στο $1/4$ και $3/4$ του μήκους της.

Ας θεωρήσουμε την αμφιέρειστη δοκό διατομής ( $I$ ) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ.4.24). Η δοκός φορτίζεται από δύο συγκεντρωμένα φορτία  $P$  που εφαρμόζονται στο  $1/4$  και  $3/4$  του μήκους  $l$  της δοκού.



Σχήμα 4.24 Αμφιέρειστη δοκός-σταθερή ροπή-συγκεντρωμένα φορτία στα  $l/4$  από τις στηρίξεις της δοκού.

Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου και κατά συνέπεια της κρίσιμης ροπής του πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψης  $zy$  παύει να είναι ευσταθές. Θα υποθέσουμε ότι κατά την κάμψη, τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες  $x$  και  $y$ , ενώ η στροφή τους είναι αδύνατη περί τον κεντροβαρικό άξονα  $z$ . Για να προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, θα θεωρήσουμε πρώτα ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο  $zy$  και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία  $\varphi$  περί τον άξονα  $z$ .

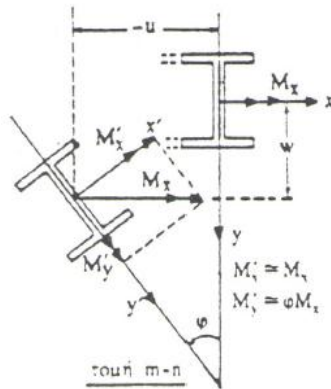
Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$  κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και  $M'_x, M'_y, M'_z$  κατά το κινητό σύστημα αξόνων που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας σε τυχαία διατομή  $m$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ.4.25).

Λόγω συμμετρίας στήριξης και φόρτισης του φορέα, θα ασχοληθούμε με το μισό μήκος  $l/2$  της δοκού, κάνοντας την παραδοχή ότι ισχύουν ακριβώς τα ίδια και στο υπόλοιπο μισό.

Έτσι, στο σταθερό σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$ , για τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M_x, M_y, M_z$ , ισχύει:

- $M_x = Pz + M_0, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$
- $M_x = \frac{Pl}{4} + M_0, \quad \frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$
- $M_y = 0, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$
- $M_z = P(u - u_k), \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$  (όπου  $u_k$  είναι το βέλος κάμψης στο σημείο  $l/4$ ).
- $M_z = 0, \quad \frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$

Στο κινητό σύστημα συντεταγμένων  $x', y', z'$ , για τις αναπτυσσόμενες ροπές  $M'_x, M'_y, M'_z$  ισχύει:



Σχήμα 4.25 Τυχαία διατομή  $mn$  και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

- $M'_x = M_x \cos \phi \approx M_x$

$$\text{Άρα: } M'_x = M_0 + Pz, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$M'_x = M_0 + \frac{Pl}{4}, \quad \frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$$

- $M'_y = M_x \sin \phi \approx M_x \phi$

$$\text{Άρα: } M'_y = (M_0 + Pz)\phi, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$M'_y = \left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right)\phi, \quad \frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$\bullet \quad M'_z = -M_x \frac{du}{dz} + P(u - u_k)$$

$$\text{Άρα: } M'_z = -(M_0 + Pz) \frac{du}{dz}, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$M'_z = -\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right) \frac{du}{dz}, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

Παρακάτω, θα μορφώσουμε και θα μελετήσουμε τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων για τα εξής δυο διαστήματα:

- $0 \leq z \leq \frac{l}{4}$
- $\frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$
- Για το διάστημα  $0 \leq z \leq \frac{l}{4}$  έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x = -(M_0 + Pz)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y = (M_0 + Pz)\phi$$

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M'_z = -(M_0 + Pz) \frac{du}{dz} + P(u - u_k)$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία εξίσωση ως προς  $z$ :

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = P \frac{du}{dz} - P \frac{du_k}{dz} - M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - P \frac{du}{dz} - Pz \frac{d^2 u}{dz^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = -(M_0 + Pz) \frac{d^2 u}{dz^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= -(M_0 + Pz)^2 \frac{\phi}{EI_y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_x} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{(M_0 + Pz)^2}{EI_y EC_w} \phi \end{aligned}$$

- Για το διάστημα  $\frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$  έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right) \phi$$

$$GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} = -\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right) \frac{du}{dz}$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία εξίσωση ως προς  $z$  και έχουμε:

$$\begin{aligned} GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= -\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right) \frac{d^2 u}{dz^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} &= -\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right)^2 \frac{\phi}{EI_y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{\left(M_0 + \frac{Pl}{4}\right)^2}{EI_y EC_w} \phi \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} = (M_0^2 + 2M_0 Pz + P^2 z^2) \frac{\phi}{EI_y EC_w}, \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

και

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \left(M_0^2 + M_0 \frac{Pl}{2} + \frac{P^2 l^2}{16}\right) \frac{\phi}{EI_y EC_w}, \quad \frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{2}$$

Αν θέσουμε  $\xi = \frac{z}{l}$ , όπου  $\xi$ : αδιάστατη μεταβλητή

Είναι:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\phi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{l} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\phi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\phi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\phi}{d\xi^4}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις δυο προηγούμενες σχέσεις, θα έχουμε:

$$\frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \left( M_0^2 l^4 + 2M_0 P l^5 \xi + P^2 l^6 \xi^2 \right) \frac{\phi}{EI_y EC_w}$$

και

$$\frac{d^4\phi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \left( M_0^2 l^4 + \frac{M_0 P l^5}{2} + \frac{P^2 l^6}{16} \right) \frac{\phi}{EI_y EC_w}$$

Θέτουμε:  $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2, K^4 = \frac{M_0^2 l^4}{EI_y EC_w}, \Lambda^4 = \frac{2M_0 P l^5}{EI_y EC_w}, M^4 = \frac{P^2 l^6}{EI_y EC_w}$ , οπότε προκύπτουν οι

εξής δυο αδιαστατοποιημένες διαφορικές εξισώσεις :

$$\bullet \quad \phi_1'''(\xi) - \beta^2 \phi_1''(\xi) = \left( K^4 + \Lambda^4 \xi + M^4 \xi^2 \right) \phi_1(\xi) \quad (4.49)$$

$$\bullet \quad \phi_2'''(\xi) - \beta^2 \phi_2''(\xi) = \left( K^4 + \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{M^4}{16} \right) \phi_2(\xi) \quad (4.50)$$

Οι συνοριακές συνθήκες για την μισή δοκό, λόγω συμμετρίας, που επιλέξαμε να ασχοληθούμε είναι:

$$\phi(0) = \phi''(0) = 0$$



$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\beta^2} \phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Έτσι μια προσεγγιστική λύση, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, βρίσκεται αν θεωρήσουμε τη γενική μορφή της γωνίας στροφής  $\varphi$  της διατομής κατά το στρεπτοκαμπτικό λυγισμό ως εξής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\phi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$$

Επομένως:  $\phi(\xi) = \alpha_4(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$

Για  $\xi = \frac{1}{4} : \phi\left(\frac{1}{4}\right) = \phi_0 \Rightarrow \alpha_4 = 4,49\phi_0$ , όπου  $\phi_0$  είναι η στροφή της διατομής κατά τον πλευρικό

λυγισμό στο  $z = \frac{l}{4} : \xi = \frac{1}{4}$ .

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της  $\varphi(\xi)$  στην εξίσωση:

$$\phi_1''''(\xi) - \beta^2 \phi_1''(\xi) = (\mathbf{K}^4 + \mathbf{L}^4 \xi + \mathbf{M}^4 \xi^2) \phi_1(\xi),$$

θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_1''''(\xi) - \beta^2 \phi_1''(\xi) = \\ = 4,49\mathbf{K}^4 \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 4,49\mathbf{L}^4 \phi_0 (\xi^5 - 2\xi^4 + \xi^2) + 4,49\mathbf{M}^4 \phi_0 (\xi^6 - 2\xi^5 + \xi^3) \end{aligned}$$

Αν τώρα, κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_1'''(\xi) - \beta^2 \phi_1'(\xi) &= 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - 2 \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^2}{2} \right) + 4,49\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{6} - 2 \frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^3}{3} \right) + \\ &+ 4,49M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{7} - 2 \frac{\xi^6}{6} + \frac{\xi^4}{4} \right) + C_1 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \phi_1''(\xi) - \beta^2 \phi_1(\xi) &= 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 4,49\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} \right) + \\ &+ 4,49M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} \right) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Όπως προαναφέραμε ισχύει:  $\phi_1''(0) = \phi_1(0) = 0$ , οπότε:

$$\text{Για } \xi=0: \phi_1''(0) - \beta^2 \phi_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Για } \xi = \frac{1}{4}: \phi_1''\left(\frac{1}{4}\right) - \beta^2 \phi_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0,01129K^4 \phi_0 + 0,0014\Lambda^4 \phi_0 + 0,00021M^4 \phi_0 + 0,25C_1$$

$$\phi_1''\left(\frac{1}{4}\right) - \beta^2 \phi_1'\left(\frac{1}{4}\right) = 0,13242K^4 \phi_0 + 0,02118\Lambda^4 \phi_0 + 0,00406M^4 \phi_0 + C_1$$

Αν τώρα, αντικαταστήσουμε την έκφραση της  $\phi(\xi)$  στην εξίσωση (4.52), έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_1''(\xi) &= 4,49\beta^2 \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 4,49\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} \right) + \\ &+ 4,49M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} \right) + C_1 \xi \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω εξίσωση δύο φορές:

$$\begin{aligned} \phi_1'(\xi) &= 4,49\beta^2 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} \right) + 4,49\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105} - \frac{\xi^5}{60} \right) + \\ &+ 4,49M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120} \right) + C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) = & 4,49\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + 4,49K^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120}\right) + 4,49\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360}\right) + \\ & + 4,49M^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840}\right) + C_1\frac{\xi^3}{6} + C_3\xi + C_4\end{aligned}$$

- Για  $\xi = 0$ :  $\phi_1(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

- Για  $\xi = \frac{1}{4}$ :

$$\phi_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0,01129\beta^2\phi_0 + 4*10^{-5}K^4\phi_0 + 3*10^{-6}\Lambda^4\phi_0 + 3*10^{-7}M^4\phi_0 + 0,0026C_1 + 0,25C_2$$

$$\phi_1'\left(\frac{1}{4}\right) = 0,1324\beta^2\phi_0 + 71*10^{-5}K^4\phi_0 + 7*10^{-5}\Lambda^4\phi_0 + 9*10^{-6}M^4\phi_0 + 0,031C_1 + C_3$$

Όπως χειριστήκαμε την εξίσωση (4.49), αντίστοιχα, αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της  $\phi(\xi)$  στην εξίσωση:

$$\phi_2''''(\xi) - \beta^2\phi_2''(\xi) = \left(K^4 + \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{M^4}{16}\right)\phi_2(\xi)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi_2''''(\xi) - \beta^2\phi_2''(\xi) &= \\ &= 4,49K^4\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 1,12\Lambda^4\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 0,28M^4\phi_0(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)\end{aligned}$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned}\phi_2''''(\xi) - \beta^2\phi_2''(\xi) &= 4,49K^4\phi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + 1,12\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + \\ &+ 0,28M^4\phi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + C_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2''(\xi) - \beta^2\phi_2(\xi) &= 4,49K^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + 1,12\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + \\ &+ 0,28M^4\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + C_5\xi + C_6\end{aligned}$$

➤ Για  $\xi = \frac{1}{2}$

$$\phi_2''' \left( \frac{1}{2} \right) - \beta^2 \phi_2' \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,449K^4 \phi_0 + 0,112\Lambda^4 \phi_0 + 0,028M^4 \phi_0 + C_5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_5 = -0,449K^4 \phi_0 - 0,112\Lambda^4 \phi_0 - 0,028M^4 \phi_0$$

➤ Για  $\xi = \frac{1}{4}$

$$\phi_2'' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2 \phi_2 \left( \frac{1}{4} \right) = 0,01129K^4 \phi_0 + 0,00282\Lambda^4 \phi_0 + 0,00007M^4 \phi_0 + 0,25C_5 + C_6$$

$$\begin{aligned} \phi_2''' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2 \phi_2' \left( \frac{1}{4} \right) &= 0,13242K^4 \phi_0 + 0,03303\Lambda^4 \phi_0 + 0,00826M^4 \phi_0 + C_5 = \\ &= -0,31658K^4 \phi_0 - 0,07897\Lambda^4 \phi_0 - 0,01974M^4 \phi_0 \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την φράση της  $\phi(\xi)$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_2''(\xi) &= 4,49\beta^2 \phi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 1,12\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + \\ &+ 0,28M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_5 \xi + C_6 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε δυο φορές την παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \phi_2'(\xi) &= 4,49\beta^2 \phi_0 \left( \frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} \right) + 1,12\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} \right) + \\ &+ 0,28M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} \right) + C_5 \frac{\xi^2}{2} + C_6 \xi + C_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi) &= 4,49\beta^2 \phi_0 \left( \frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 4,49K^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} \right) + 1,12\Lambda^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} \right) + \\ &+ 0,28M^4 \phi_0 \left( \frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} \right) + C_5 \frac{\xi^3}{6} + C_6 \frac{\xi^2}{2} + C_7 \xi + C_8 \end{aligned}$$

➤ Για  $\xi = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\phi_2' \left( \frac{1}{2} \right) = 0 &\Rightarrow 0,449\beta^2\phi_0 - 0,04543K^4\phi_0 - 0,01133\Lambda^4\phi_0 - 0,00283M^4\phi_0 + 0,5C_6 + C_7 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_7 = -0,449\beta^2\phi_0 + 0,04543K^4\phi_0 + 0,01133\Lambda^4\phi_0 + 0,00283M^4\phi_0 - 0,5C_6\end{aligned}$$

➤ Για  $\xi = \frac{1}{4}$

$$\phi_2' \left( \frac{1}{4} \right) = 0,13242\beta^2\phi_0 - 0,01332K^4\phi_0 + 0,00332\Lambda^4\phi_0 + 0,0083M^4\phi_0 + 0,25C_6 + C_7$$

$$\phi_2 \left( \frac{1}{4} \right) = -0,10096\beta^2\phi_0 + 0,01022K^4\phi_0 + 0,00255\Lambda^4\phi_0 + 0,00064M^4\phi_0 - 0,094C_6 + C_8$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι στο σημείο επιβολής του φορτίου  $P$  ( $\xi=1/4$ ) έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις που θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα, επομένως θα πρέπει να εξασφαλίσουμε την συνέχεια στο σημείο αυτό.

Έτσι, προφανώς για τη στροφή της διατομής θα πρέπει να ισχύει  $\phi_1 \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2 \left( \frac{1}{4} \right)$ , αλλά

και ο ρυθμός μεταβολής αυτής θα πρέπει να είναι ίδιος, δηλαδή  $\phi_1' \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2' \left( \frac{1}{4} \right)$ .

Ακόμα, θα πρέπει να επιβάλλουμε ώστε οι διαφορικές εξισώσεις (4.49) και (4.50) να ικανοποιούνται ταυτόχρονα, δηλαδή να είναι ίσες στο σημεία αυτό, άρα και οι εξισώσεις που προκύπτουν από την ολοκλήρωση αυτών:

$$\phi_1'' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2\phi_1 \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2'' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2\phi_2 \left( \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \phi_1'' \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2'' \left( \frac{1}{4} \right)$$

και

$$\phi_1''' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2\phi_1' \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2''' \left( \frac{1}{4} \right) - \beta^2\phi_2' \left( \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \phi_1''' \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2''' \left( \frac{1}{4} \right)$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω σχέσεων, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης που προέκυψαν προηγουμένως.

$$\begin{aligned}\phi_1''' \left( \frac{1}{4} \right) = \phi_2''' \left( \frac{1}{4} \right) &\Rightarrow 0,13242K^4\phi_0 + 0,02181\Lambda^4\phi_0 + 0,00406M^4\phi_0 + C_1 = \\ &= -0,31658K^4\phi_0 - 0,07897\Lambda^4\phi_0 - 0,01974M^4\phi_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1 = -0,449K^4\phi_0 - 0,1\Lambda^4\phi_0 - 0,0238M^4\phi_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1''\left(\frac{1}{4}\right) &= \phi_2''\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 0,01129K^4\phi_0 + 0,0014\Lambda^4\phi_0 + 0,00021M^4\phi_0 + 0,25C_1 = \\
&= 0,01129K^4\phi_0 + 0,00282\Lambda^4\phi_0 + 0,0007M^4\phi_0 + 0,25C_5 + C_6 \Rightarrow \\
\Rightarrow -0,10096K^4\phi_0 - 0,0236\Lambda^4\phi_0 - 0,00574M^4\phi_0 &= \\
-0,10096K^4\phi_0 - 0,0251\Lambda^4\phi_0 - 0,0063M^4\phi_0 + C_6 &\Rightarrow \\
\Rightarrow C_6 &= 0,00158\Lambda^4\phi_0 + 0,00056M^4\phi_0
\end{aligned}$$

$$\phi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_7 = -0,449\beta^2\phi_0 + 0,04543K^4\phi_0 + 0,01054\Lambda^4\phi_0 + 0,00255M^4\phi_0$$

$$\begin{aligned}
\phi_1'\left(\frac{1}{4}\right) &= \phi_2'\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 0,1324\beta^2\phi_0 + 0,00071K^4\phi_0 + 0,00007\Lambda^4\phi_0 + 0,000009M^4\phi_0 + \\
&+ 0,03125C_1 + C_3 = 0,13242\beta^2\phi_0 - 0,01332K^4\phi_0 - 0,00332\Lambda^4\phi_0 - \\
-0,00083M^4\phi_0 + 0,25C_6 + C_7 &\Rightarrow 0,13242\beta^2\phi_0 - 0,01332K^4\phi_0 - \\
-0,00306\Lambda^4\phi_0 - 0,00073M^4\phi_0 + C_3 &= -0,31658\beta^2\phi_0 + 0,03211K^4\phi_0 + \\
&+ 0,0762\Lambda^4\phi_0 + 0,00186M^4\phi_0 \Rightarrow \\
\Rightarrow C_3 &= -0,449\beta^2\phi_0 + 0,04543K^4\phi_0 + 0,01066\Lambda^4\phi_0 + 0,00259M^4\phi_0
\end{aligned}$$

$$\phi_1\left(\frac{1}{4}\right) = \phi_2\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow C_8 = 0$$

Η τελική μορφή των  $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi)$  είναι :

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= 4,49\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi\right) + 4,49K^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6} + 0,01012\xi\right) + \\
&+ 4,49\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} - \frac{\xi^7}{360} - 0,02227\frac{\xi^3}{6} + 0,00237\xi\right) + \\
&+ 4,49M^4\phi_0\left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0053\frac{\xi^3}{6} + 0,000587\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(\xi) &= 4,49\beta^2\phi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi\right) + 4,49K^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6} + 0,01012\xi\right) + \\
&+ 1,12\Lambda^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6} + 0,00141\frac{\xi^2}{2} + 0,01012\xi\right) +
\end{aligned}$$

$$+ 0,28M^4\phi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1\frac{\xi^3}{6} + 0,002\frac{\xi^2}{2} + 0,00911\xi\right)$$

$$\triangleright \text{Για } \xi = \frac{1}{4} : \phi_1\left(\frac{1}{4}\right) = \phi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -0,10096\beta^2 + 0,01023K^4 + 0,00262\Lambda^4 + 0,000576M^4$$

$$\triangleright \text{Για } \xi = \frac{1}{4} : \phi_2\left(\frac{1}{4}\right) = \phi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -0,10096\beta^2 + 0,01023K^4 + 0,00262\Lambda^4 + 0,000576M^4$$

Προφανώς, στη θέση  $\xi = \frac{1}{4}$  οι διαφορικές εξισώσεις (4.49) και (4.50) ταυτίζονται, όπως φάνηκε και παραπάνω. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται η μέγιστη στροφή  $\phi_0$  της διατομής κατά τον πλευρικό λυγισμό. Έτσι, αξιοποιώντας την παραπάνω κρίσιμη – αδιαστατοποιημένη εξίσωση και αντικαθιστώντας σε αυτή τις αδιάστατες μεταβλητές που ορίσαμε στην αρχή του προβλήματος, έχουμε:

$$M^4 = 1706,4 + 172,3\beta^2 - 17,46K^4 - 4,47\Lambda^4$$

$$\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w}l^2, K^4 = \frac{M_0^2l^4}{EI_yEC_w}, \Lambda^4 = \frac{2M_0Pl^5}{EI_yEC_w}, M^4 = \frac{P^2l^6}{EI_yEC_w},$$

$$\frac{P^2l^6}{EI_yEC_w} = 1706,4 + 172,3\frac{GJ}{EC_w}l^2 - 17,46\frac{M_0^2l^4}{EI_yEC_w} - 4,47\frac{2M_0Pl^5}{EI_yEC_w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{1706,4EI_yEC_w}{l^6} + \frac{172,3EI_yGJ}{l^4} - \frac{17,46M_0^2}{l^2} - \frac{8,94M_0P}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^2 + \frac{8,94M_0P}{l} + \left(\frac{4,47M_0}{l}\right)^2 = \frac{1706,4EI_yEC_w}{l^6} + \frac{172,3EI_yGJ}{l^4} - \frac{17,46M_0^2}{l^2} + \frac{19,98M_0^2}{l^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(P + \frac{4,47M_0}{l}\right)^2 = \frac{1706,4EI_yEC_w}{l^6} + \frac{172,3EI_yGJ}{l^4} + \frac{2,52M_0^2}{l^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \sqrt{\frac{1706,4EI_yEC_w}{l^6} + \frac{172,3EI_yGJ}{l^4} + \frac{2,52M_0^2}{l^2}} - \frac{4,47M_0}{l} \Rightarrow$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} l}{4}$$

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{106,7EI_y EC_w}{l^4} + \frac{10,77EI_y GJ}{l^2} + 0,158M_0^2 - 1,12M_0}$$

Όπου  $M_{cr}$ , είναι η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού που αναζητήσαμε με την προσδιοριστική μέθοδο στο συγκεκριμένο φορέα και φόρτιση αυτού.

Είναι προφανές, ότι από τον παραπάνω γενικό τύπο της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού μπορούμε να προσδιορίσουμε την κρίσιμη ροπή για τον ίδιο φορέα ο οποίος καταπονείται μόνο από τα δυο συγκεντρωμένα φορτία στα  $l/4$  και  $3l/4$  του μήκους του ( $M_0=0$ ), δηλαδή:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{106,7EI_y EC_w}{l^4} + \frac{10,77EI_y GJ}{l^2}}$$



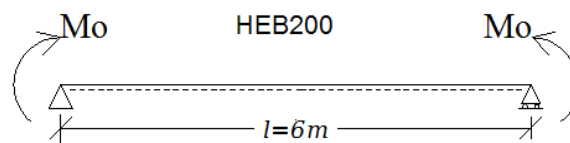
## 5.Αριθμητικές εφαρμογές μεθόδου-Σύγκριση με Adina

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν και θα συγκριθούν οι τιμές των κρίσιμων φορτίων που προέκυψαν από τις προσδιοριστικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 4 με τις αντίστοιχες τιμές κρίσιμων φορτίων που μας δίνει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Συγκεκριμένα, θα γίνουν αριθμητικά παραδείγματα για αμφιέριστες δοκούς με διάφορους τύπους φόρτισης, που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο 4. Για τις αριθμητικές εφαρμογές θα γίνει χρήση πρότυπων διατομών διπλής συμμετρίας, τύπου ταυ. Επίσης, η προσομοίωση της καμπτόμενης δοκού στο Adina θα γίνει με στοιχεία κελύφους (shell elements).

Πριν προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί ο τρόπος και η μέθοδος προσομοίωσης του φορέα στο Adina, καθώς κατά τη διεξαγωγή των αναλύσεων, προέκυψαν διάφορα ζητήματα που αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης και έρευνας για την καλύτερη δυνατή έκβαση των αποτελεσμάτων. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις συνοριακές συνθήκες για την προσομοίωση αμφιέριστης χαλύβδινης δοκού στο πρόγραμμα. Παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι προσομοίωσης που εξετάστηκαν και θα γίνει η επιλογή του βέλτιστου τρόπου σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

### 5.1 Παρουσίαση του Adina-Προσομοίωση δοκού με στοιχεία κελύφους

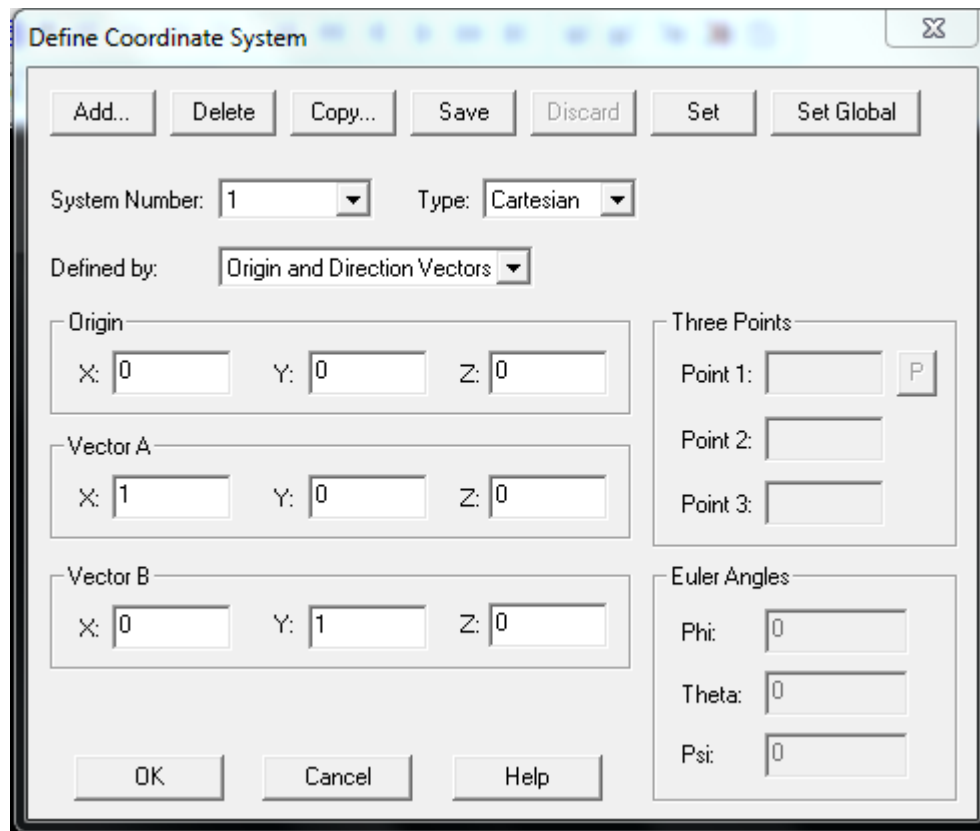
Η παρουσίαση του προγράμματος θα γίνει μέσω μίας εφαρμογής, έτσι ώστε να έχουμε κάποια συγκρίσιμα αποτελέσματα και να καταλήξουμε στο βέλτιστο τρόπο προσομοίωσης σχετικά με τις συνοριακές συνθήκες, όπως προαναφέραμε. Έτσι επιλέγουμε να μελετήσουμε αμφιέριστη δοκό διατομής HEB200 και μήκους 6m που υποβάλλεται σε ζεύγος ροπών κάμψης που εφαρμόζεται στα άκρα της δοκού (Σχ 5.1). Για τη δοκό αυτή θα αναζητήσουμε την κρίσιμη ροπή, για τη οποία εκτρέπεται πλευρικά.



Σχήμα 5.1 Αμφιέριστη δοκός –HEB200

#### ➤ Καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων

Αρχικά ορίζεται το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα γίνει η προσομοίωση της καμπτόμενης αμφιέριστης δοκού. Αυτό γίνεται με την εντολή Geometry → Coordinate Systems και έτσι ορίζουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (System Number 1), πάνω στο οποίο θα ασχολούμαστε, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων.

➤ *Μόρφωση της γεωμετρίας*

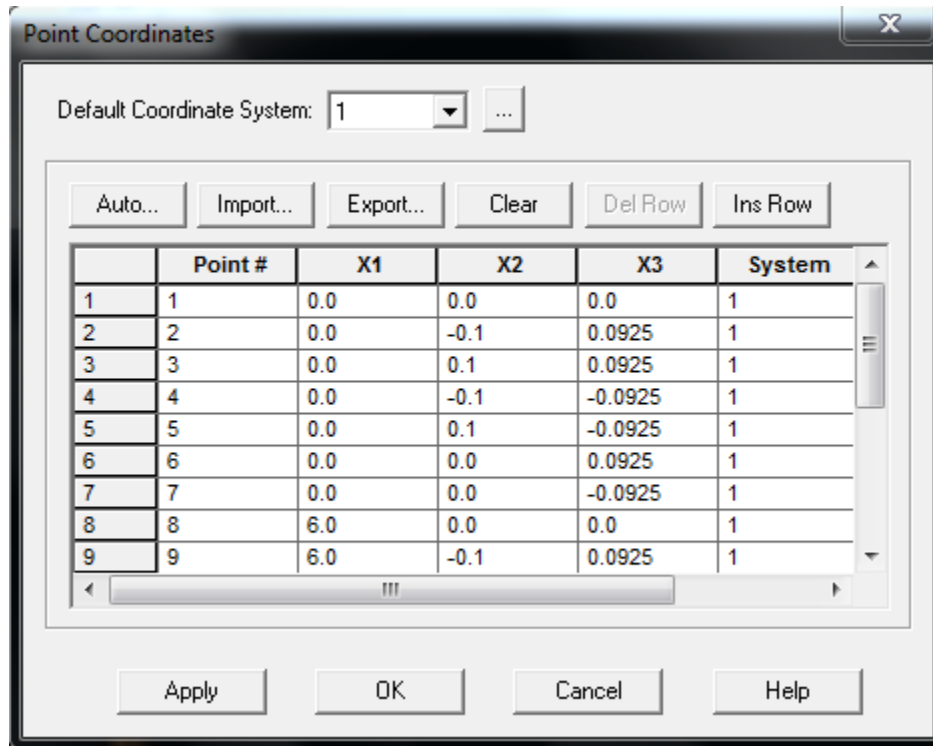
Πρέπει να ορίσουμε τα σημεία της διατομής της δοκού με την εντολή Geometry → Points. Για κάθε ένα σημείο ορίζουμε τις συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  καθώς και το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφέρονται (το σύστημα συντεταγμένων ορίστηκε προηγουμένως) όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3.

Με την εντολή Geometry → Lines → Define → Add ορίζονται οι γραμμές της δοκού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5

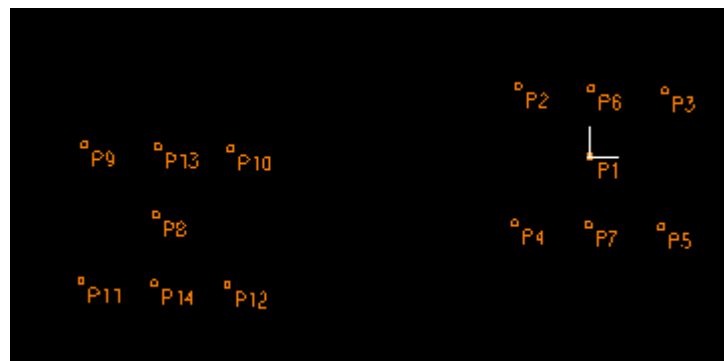
Στη συνέχεια,

Με την εντολή Geometry → Surfaces → Define → Add (Σχ.5.6) ορίζουμε τις επιφάνειες του κορμού και των πελμάτων της δοκού. Ορίζουμε 2 επιμέρους ίσες επιφάνειες για κάθε πέλμα προκειμένου να είναι πιο ομαλή η διακριτοποίηση που θα ακολουθήσει. Επίσης δημιουργούμε 2 επιφάνειες και για τον κορμό.

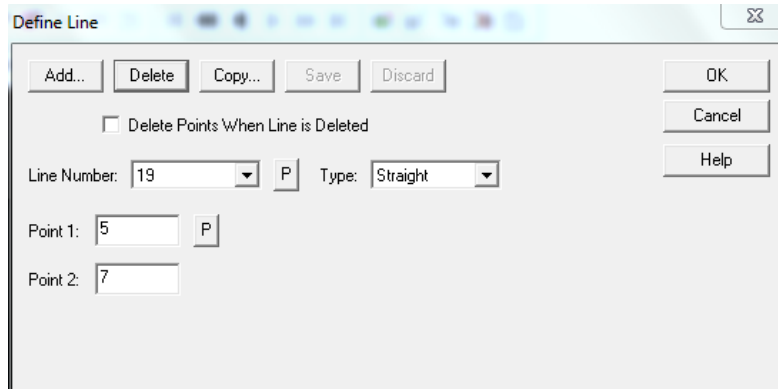
Τέλος, για να ολοκληρωθεί η μόρφωση της γεωμετρίας, ορίζουμε το πάχος των επιφανειών που δημιουργήθηκαν μέσω της εντολής Geometry → Surfaces → Thickness, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7.



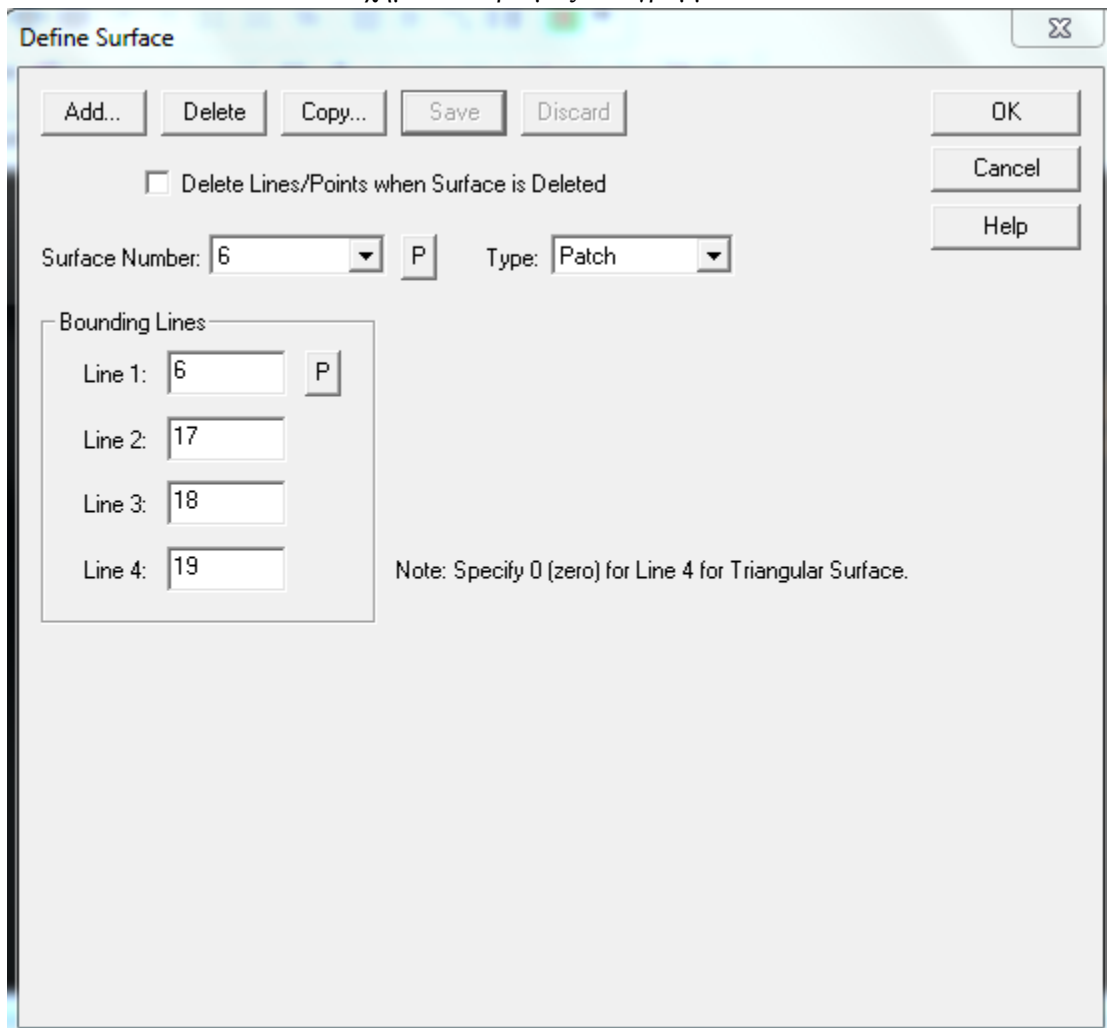
Σχήμα 5.3 Ορισμός σημείων



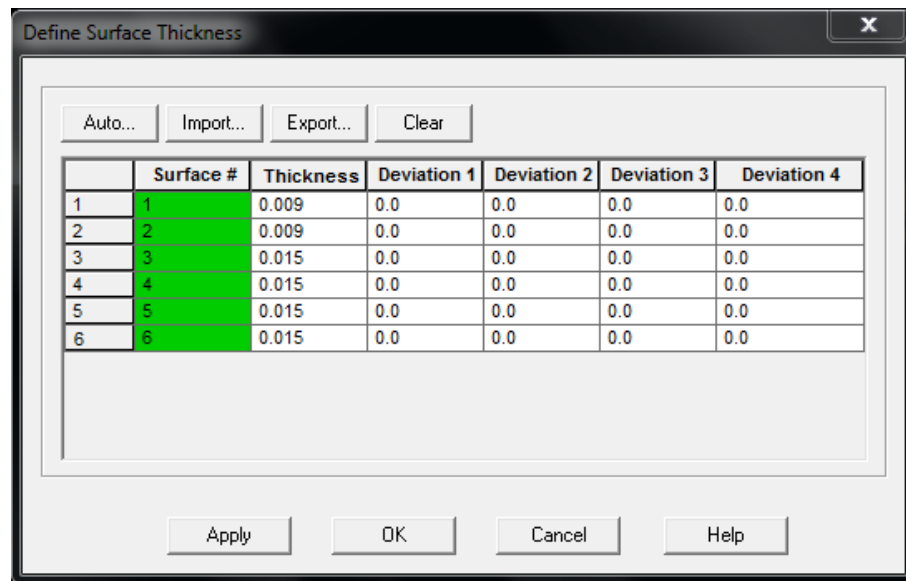
Σχήμα 5.4 Οι 19 κόμβοι του προσομοιώματος



Σχήμα 5.5 Ορισμός των γραμμών

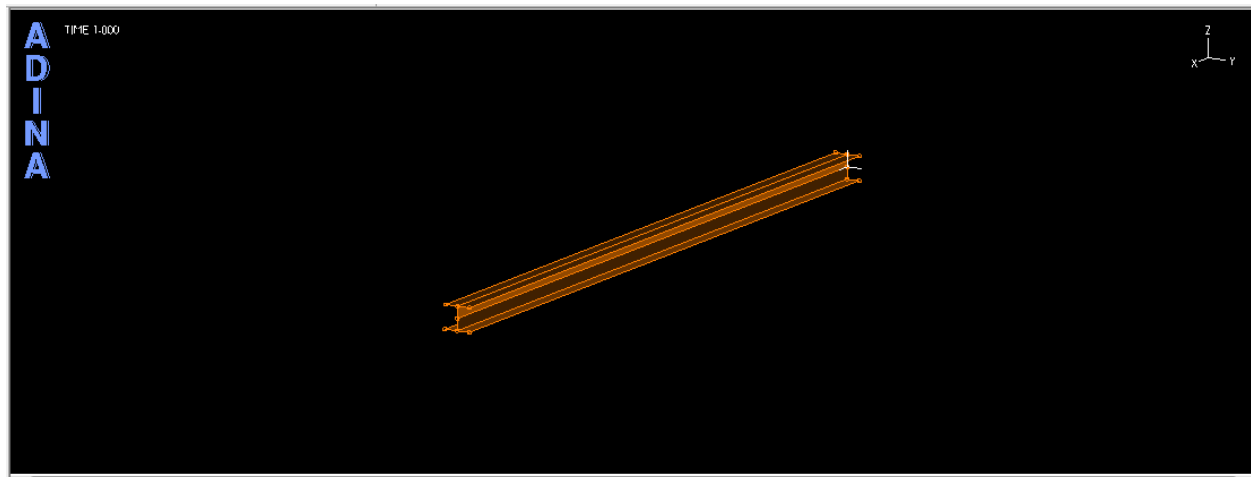


Σχήμα 5.6 Ορισμός των επιφανειών



Σχήμα 5.7 Καθορισμός του πάχους επιφανειών

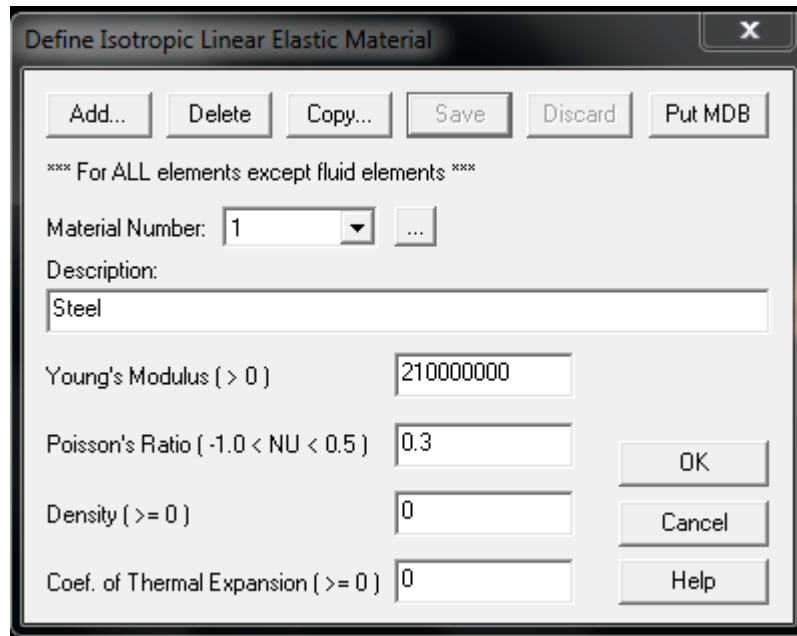
Μετά από τα παραπάνω βήματα, προκύπτει η γεωμετρία του φορέα, η οποία φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8 Τελική γεωμετρία του φορέα.

- Ορισμός του υλικού του φορέα.

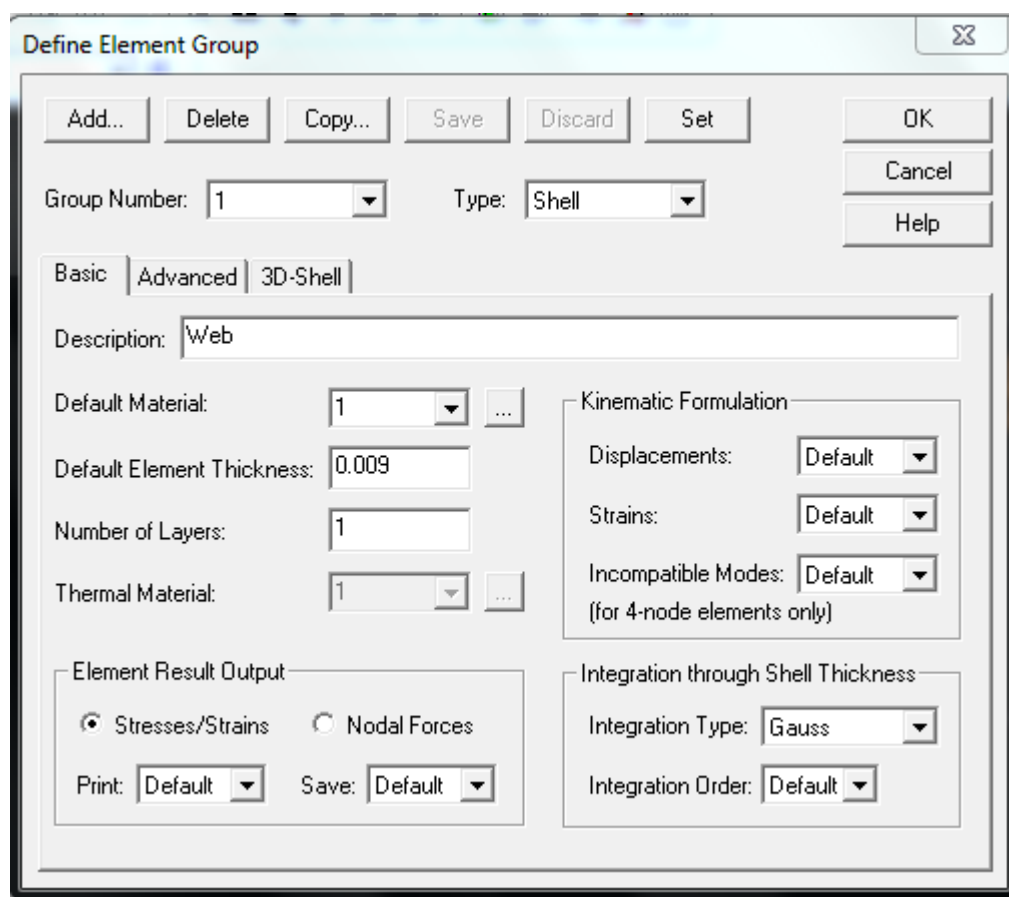
Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και τον λόγο Poisson  $\nu$ . Με την εντολή Model → Materials → Manage Materials → Elastic → Isotropic → Add, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.9



Σχήμα 5.8 Καθορισμός υλικού

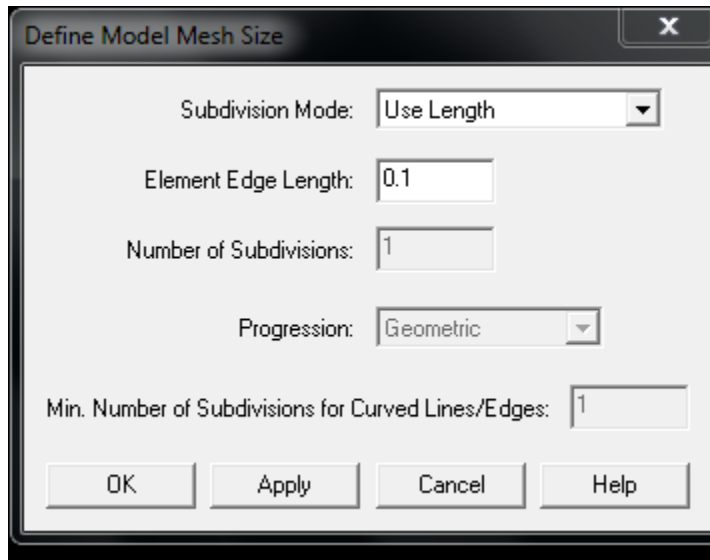
➤ *Καθορισμός των πεπερασμένων στοιχείων*

Σε αυτό το στάδιο, ορίζουμε τις ιδιότητες του φορέα, καθορίζουμε δηλαδή το είδος των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό είναι τύπου *Shell* (Shell elements-στοιχεία κελύφους), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.9. Καθορίζουμε διαφορετικό “Element Groups” για τα πέλματα και τον κορμό της διατομής. Αυτό γίνεται με την εντολή Meshing → Element Groups → Add (Type:Shell). Επίσης στο κελί “Default Element Thickness” πληκτρολογούμε το πάχος των επιφανειών που αναφερόμαστε (Web ή Flange).



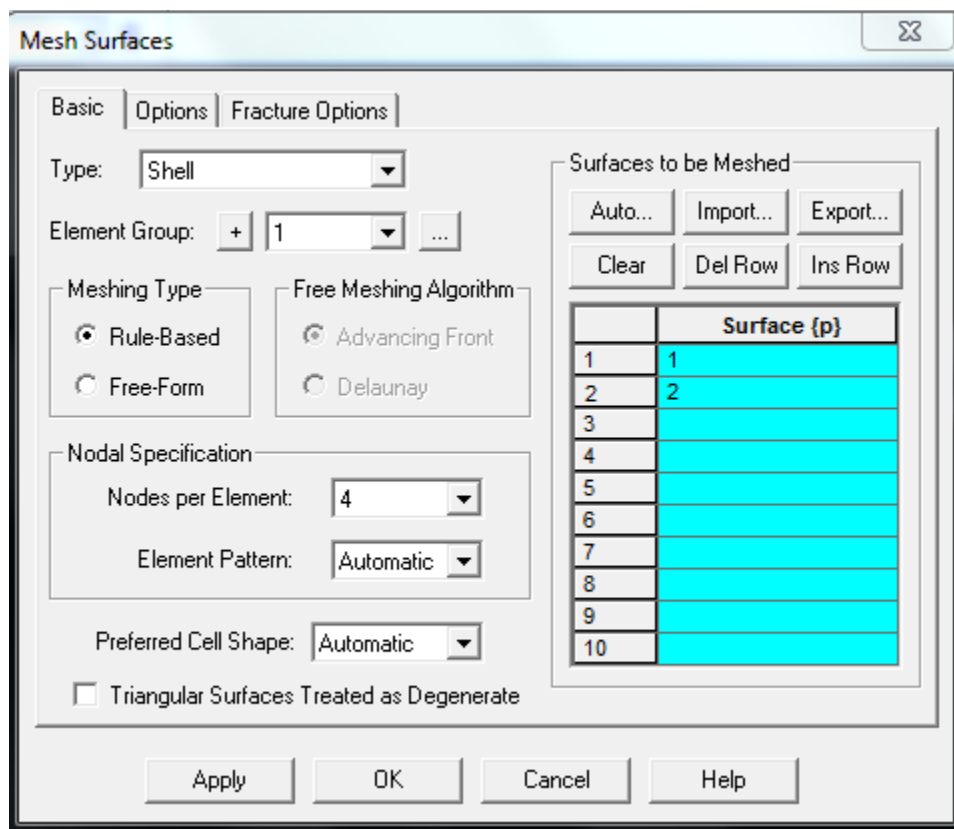
Σχήμα 5.9 Καθορισμός τύπου πεπερασμένων στοιχείων

Ολοκληρώνουμε το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του φορέα. Από το μενού Meshing → Mesh Density → Complete model, επιλέγουμε “Subdivision Mode: Use Length” και πληκτρολογούμε το μέγεθος κάθε στοιχείου (Σχήμα 5.10).



Σχήμα 5.10  
Ολοκλήρωση δικτύου πεπερασμένων στοιχείων

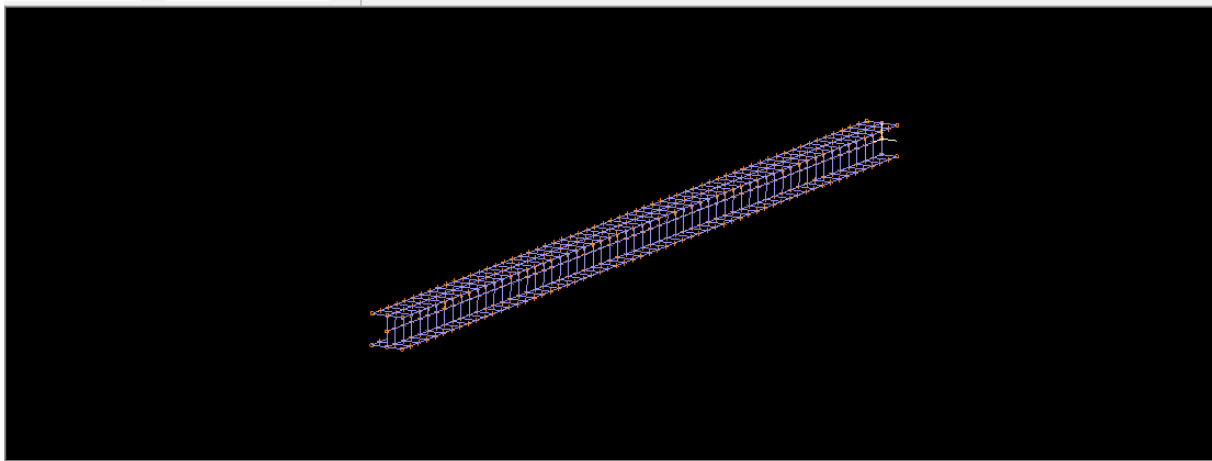
Από το μενού Meshing → Create Mesh → Surface επιλέγουμε σε ποιο “Element Group” αντιστοιχεί η κάθε επιφάνεια που ορίσαμε στην αρχή, όπως το Σχήμα 5.11.





## Σχήμα 5.11 Διακριτοποίηση επιφανειών

Μετά την ολοκλήρωση των παραπάνω βημάτων, προκύπτει το αποτέλεσμα του σχήματος 5.12

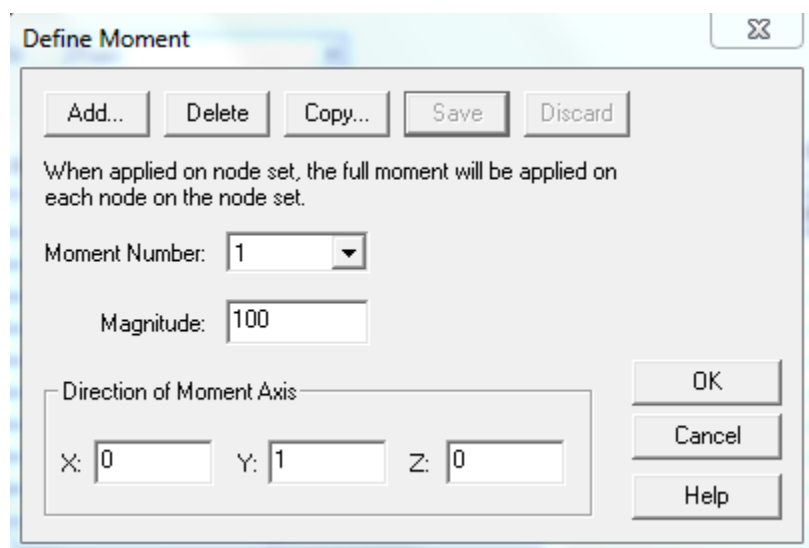


Σχήμα 5.12 Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων

➤ Φόρτιση του φορέα

Η επιβολή της φόρτισης του φορέα γίνεται ως εξής: Model → Loading → Apply. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επιβολή σταθερής ροπής στα άκρα της δοκού, έτσι επιλέγουμε στο Load Type: Moment

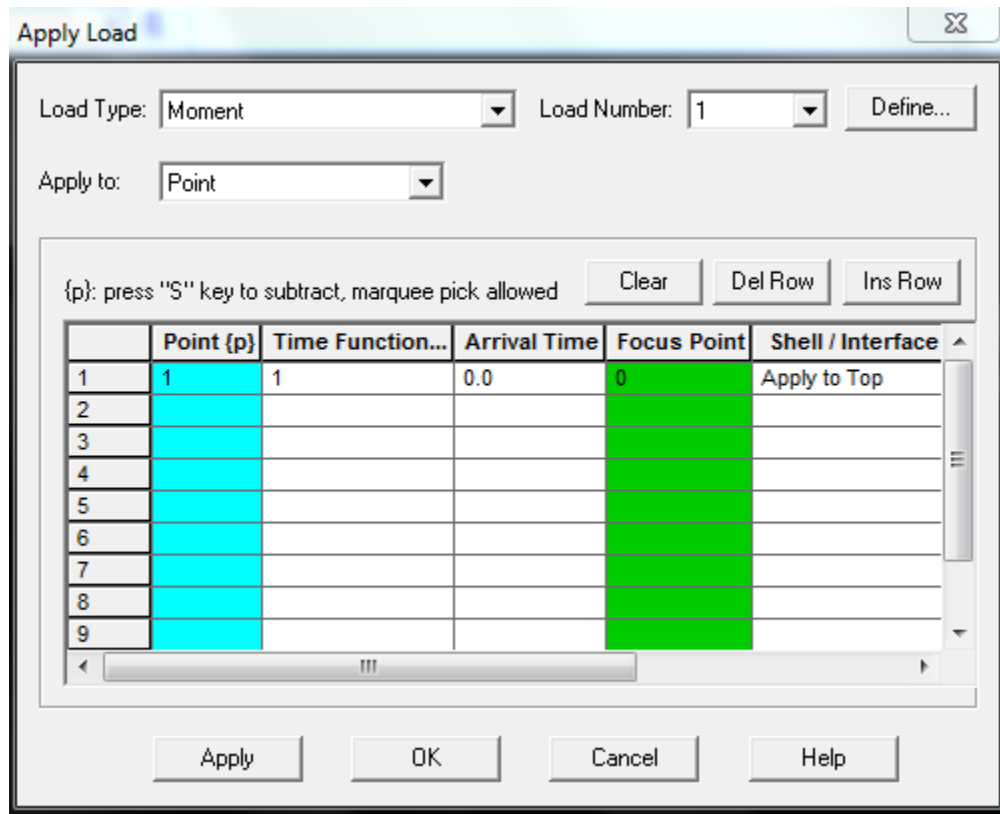
Με την επιλογή Define → Add επιλέγουμε το μέγεθος του φορτίου καθώς και το διάνυσμα που καθορίζει τη διεύθυνση αυτού (Σχήμα 5.13).



Σχήμα 5.13 Μέγεθος και κατεύθυνση επιβολής

του φορτίου.

Επιστρέφοντας στο πρώτο παράθυρο, ορίζουμε σε ποιο σημείο “Point” υποβάλλεται το φορτίο που μόλις ορίσαμε.



Σχήμα 5.14 Καθορισμός του σημείου επιβολής του φορτίου.

#### ➤ Στήριξη του φορέα-Συνοριακές συνθήκες

Αρχικά, ορίζουμε τις στηρίξεις του φορέα, ως εξής: Model → Boundary Conditions → Define Fixity και δημιουργούμε τους τύπους στήριξης που έχουμε στον φορέα (μια κύλιση και μία άρθρωση) με τις αντίστοιχες δεσμεύσεις μετακινήσεων και στροφών, σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν στο Κεφάλαιο 3 (απαγόρευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής), όπως φαίνεται στο σχήματα 5.15(α) και 5.15(β).

Στη συνέχεια καθορίζουμε σε ποιο σημείο και το είδος της στήριξης (από αυτές που δημιουργήσαμε προηγουμένως ) θα τοποθετηθούν (Σχήμα 5.16), ως εξής: Model → Boundary Conditions → Apply Fixity.

Το πρόβλημά μας όμως είναι όσο γίνεται καλύτερη προσομοίωση, όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες στήριξης της καμπτόμενης δοκού. Θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε στην βέλτιστη προσομοίωση. Θα γίνει χρήση των rigid links (άκαμπτων συνδέσμων). Θα

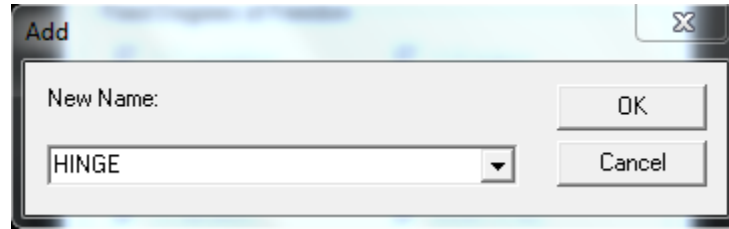
ορίσουμε δηλαδή, ως “master” ένα κόμβο (αυτόν που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής) και μετά θα ορίσουμε ως “slave” τα σημεία (points) ή τις γραμμές (lines) της διατομής που θέλουμε να «υπακούουν» στο “master”, διότι θα έχουν συνδεθεί μέσω rigid links με αυτόν. Για το λόγο ότι δεν ξέρουμε ποιος συνδυασμός “master-slave” είναι ο βέλτιστος, είναι δηλαδή αυτός που προσεγγίζει περισσότερο μία αμφιέριστη δοκό με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα της στα άκρα της δοκού, θα εξετάσουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Χρήση των rigid links για όλους τους κόμβους της διατομής.

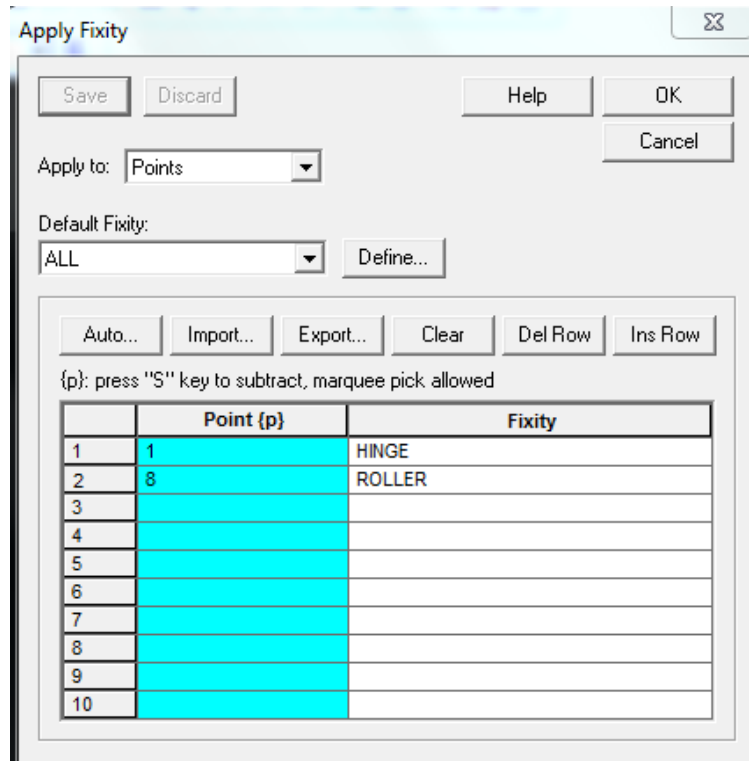
Η διαδικασία έχει ως εξής: Model → Constraints → Rigid Links. Στο παράδειγμά μας τοποθετούμε ως “master” το point 1 που είναι το σημείο που βρίσκεται στο κέντρο βάρους της διατομής που ορίσαμε και ως “slave” τις lines 1-8-13-5-16-19 που ουσιαστικά είναι όλη η διατομή μας (αντίστοιχα ορίζουμε και την διατομή της άλλης άκρης του φορέα με “master” το point 8). Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται και στο Σχήμα 5.17.



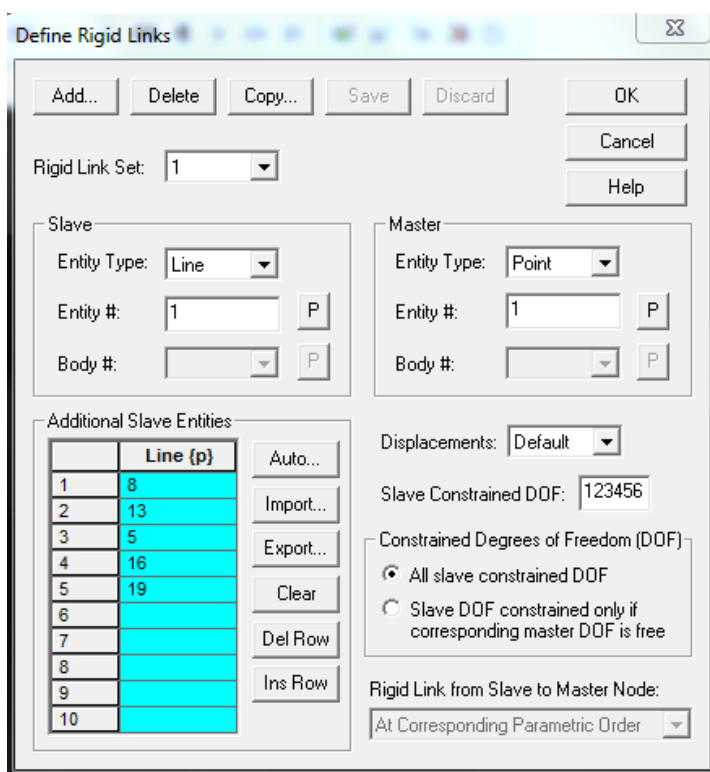
Σχήμα 5.15(α) Δημιουργία στήριξης



Σχήμα 5.15(β) Δημιουργία στήριξης



Σχήμα 5.16 Ορισμός των στηρίξεων

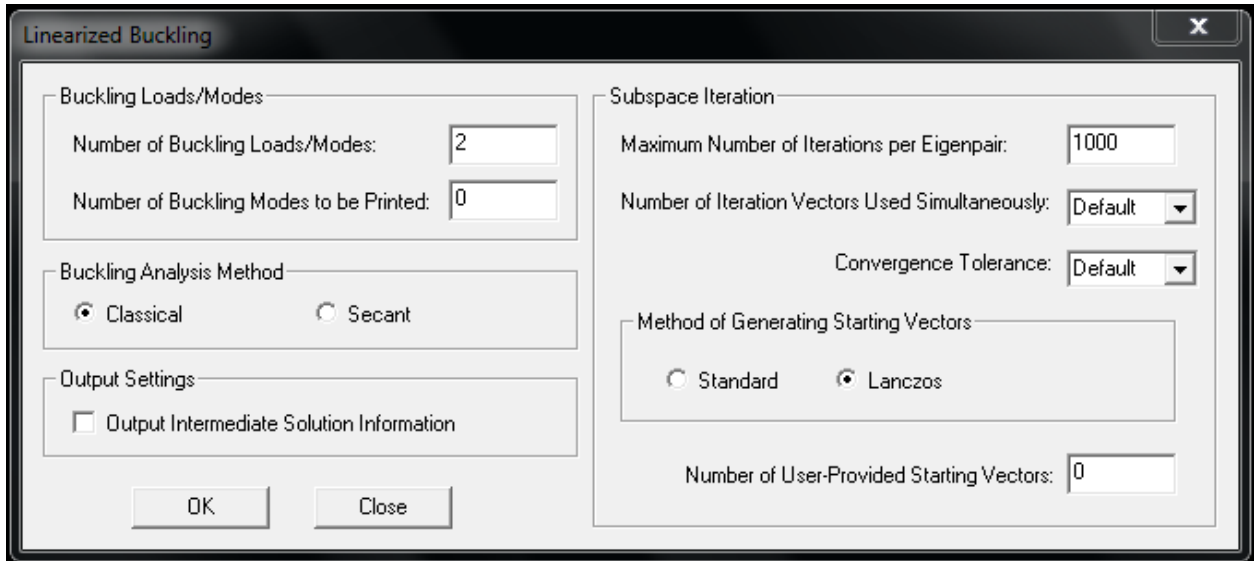


Σχήμα 5.17 Καθορισμός των rigid links.

2. Χρήση των rigid links μόνο για τον κορμό της διατομής
3. Χρήση των rigid links για το κάτω πέλμα και τον κορμό της διατομής

➤ *Ανάλυση του φορέα*

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού πραγματοποιείται εάν στη θέση “Analysis Type” επιλέξουμε “Linearized Buckling” και στο εικονίδιο “Analysis Options” ορίσουμε τον αριθμό των απαιτούμενων ιδιομορφών καθώς και τον αριθμό των επαναλήψεων που θα πραγματοποιήσει το πρόγραμμα για την εύρεσή τους (Σχήμα 5.18).



Σχήμα 5.18 Επιλογή αριθμού των ιδιομορφών

Για την πραγματοποίηση γραμμικής ανάλυσης λυγισμού, είναι απαραίτητη η ενεργοποίηση μεγάλων παραμορφώσεων, μέσω της εντολής: Control → Analysis Assumptions → Kinematics και επιλέγοντας στη θέση “Displacements/Rotations”: Large.

Το μοντέλο είναι έτοιμο για ανάλυση, η οποία πραγματοποιείται με την εντολή: Solution → Data File /Run.

Στο σημείο αυτό, θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις αναλύσεις για τις τρεις περιπτώσεις των συντοριακών συνθηκών στήριξης (συνδυασμός των κόμβων “master-slave”) με την κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού που προκύπτει από την μέθοδο προσδιορισμού που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση που εξετάζουμε, από το Κεφ.4.1.1 η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού είναι:  $M_{ocr} = \frac{1}{l} \sqrt{EI_y (97,09EC_w + 9,87GJ)}$ .

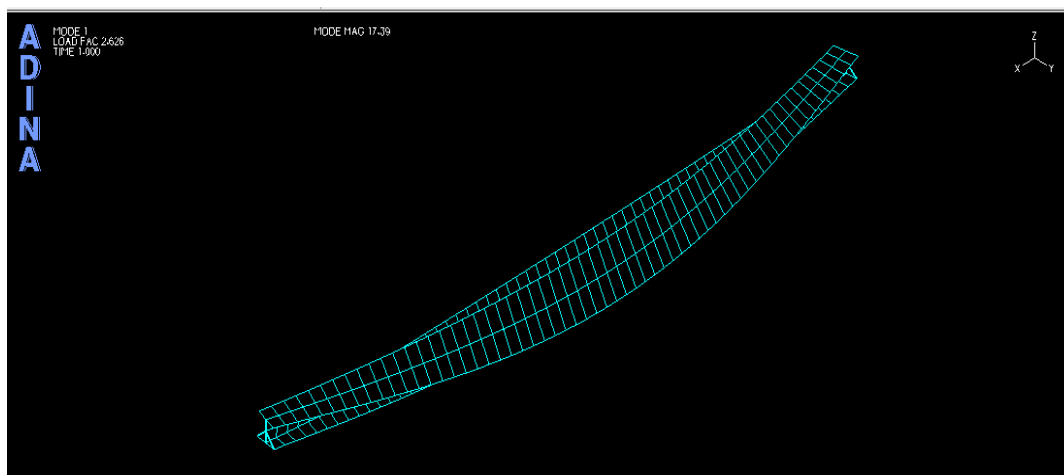
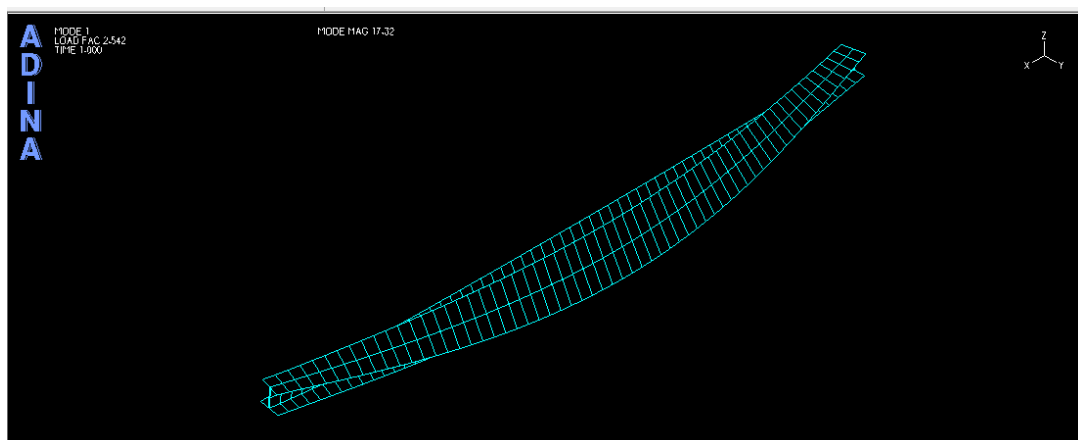
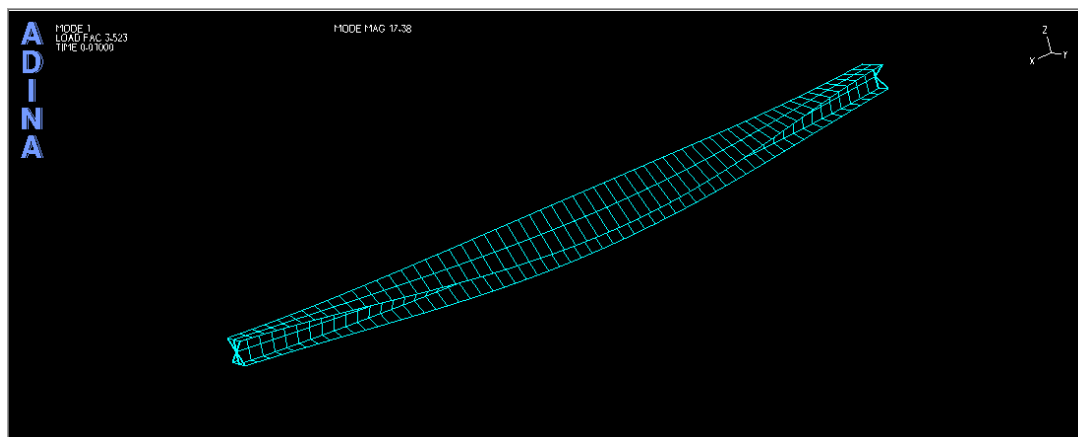
Επομένως, για μια δοκό μήκους 6m και διατομής HEB200, η κρίσιμη ροπή που προκύπτει είναι:  $M_{ocr} = 259.71KNm$ .

Συγκεντρωτικά, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Μέθοδος	A	B	Γ	Προσδ/κή
$M_{ocr}$ (KNm)	352.3	254.2	262.6	259.71

Πίνακας 5.1 Αποτελέσματα μεθόδων

Από τις αναλύσεις στο Adina, προκύπτει η εξής 1<sup>η</sup> ιδιομορφή για κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις προσομοίωσης:



Σχήμα 5.19 (α,β,γ) 1<sup>η</sup> ιδιομορφή των τριών περιπτώσεων προσομοίωσης της στήριξης του φορέα αντίστοιχα.

Όπου:

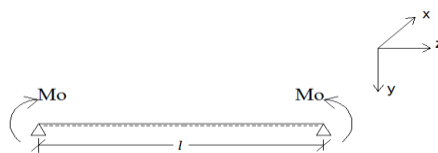
- A: Χρήση των rigid links για όλους τους κόμβους της διατομής.
- B: Χρήση των rigid links μόνο για τον κορμό της διατομής.
- Γ: Χρήση των rigid links για το κάτω πέλμα και τον κορμό της διατομής.

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι μέθοδος προσομοίωσης Γ είναι αυτή που προσεγγίζει σε μεγαλύτερο βαθμό την προσδιοριστική μέθοδο που χρησιμοποιούμε, επομένως η χρήση των rigid links για το κάτω πέλμα και τον κορμό της διατομής είναι αυτή που προσομοιάζει ικανοποιητικά τις συνοριακές συνθήκες της αμφιέριστης δοκού. Τέλος αξίζει να σχολιάσουμε το γεγονός ότι η τιμή η οποία απέχει αρκετά από το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο πλευρικού λυγισμού με βάση την προσδιοριστική μέθοδο που αναπτύξαμε είναι αυτή που προκύπτει με την εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης Α. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτή τη μέθοδο δημιουργήθηκαν άκαμπτες συνδέσεις για ολόκληρη την ακραία διατομή, η παρουσία των οποίων εμποδίζει την ελεύθερη στρέβλωση των άκρων. Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή είναι αντίθετη με τις αρχικές μας υποθέσεις, ότι δηλαδή τα άκρα είναι ελεύθερα να στρεβλωθούν. Για το λόγο αυτό, θεωρούνται περισσότερο αξιόπιστες οι μέθοδοι Β και Γ. Στη συνέχεια, για τις επόμενες αναλύσεις που θα κάνουμε στο Adina, υιοθετούμε την μέθοδο Γ.

## 5.2 Αριθμητικές εφαρμογές-Γραμμική ανάλυση λυγισμού και σύγκριση με Adina.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει εφαρμογή των αποτελεσμάτων που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 4 για τις διάφορες περιπτώσεις φόρτισης πρότυπων διατομών I. Επίσης, θα γίνει ανάλυση των ίδιων περιπτώσεων με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, κάνοντας χρήση της μεθόδου Γ που αναφέρθηκε παραπάνω.

- Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα.



Σχήμα 5.20 Σταθερή ροπή-χωρίς αξονική δύναμη

Στο Κεφάλαιο 4.1.1 προέκυψε η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου, ως εξής:  $M_{ocr} = \frac{1}{l} \sqrt{EI_y (97,09EC_w + 9,87GJ)}$

Στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζεται η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού που προέκυψε από την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων αλλά και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE με διάφορα μήκη της δοκού.

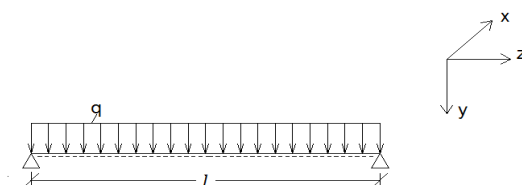


Η απόκλιση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το Adina σε σχέση με τα αντίστοιχα της προσδιοριστικής μεθόδου, δεν ξεπερνάει το 3,5%.

Διατομή		Μήκος		
		6 metres	8 metres	10 metres
IPE 300	Πρ.Μέθοδος	$M_{0cr} = 90.47 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 63.11 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 48.6 \text{ KNm}$
	Adina	$M_{0cr} = 92.04 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 62.62 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 47.39 \text{ KNm}$
IPE 400	Πρ.Μέθοδος	$M_{0cr} = 229.8 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 156.3 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 118.7 \text{ KNm}$
	Adina	$M_{0cr} = 227.5 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 151.0 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 112.4 \text{ KNm}$
IPE 500	Πρ.Μέθοδος	$M_{0cr} = 439.3 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 284.7 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 208.9 \text{ KNm}$
	Adina	$M_{0cr} = 421.7 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 283.4 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 208.8 \text{ KNm}$
IPE 600	Πρ.Μέθοδος	$M_{0cr} = 762.1 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 511.3 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 368.0 \text{ KNm}$
	Adina	$M_{0cr} = 793.4 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 498.0 \text{ KNm}$	$M_{0cr} = 372.4 \text{ KNm}$

Πίνακας 5.2 Αριθμητικές εφαρμογές για αμφιέρειστη δοκό υποβαλλόμενη σε σταθερή-αντίθετη ροπή κάμψης στα άκρα της.

- Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο.



Σχήμα 5.21 Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο

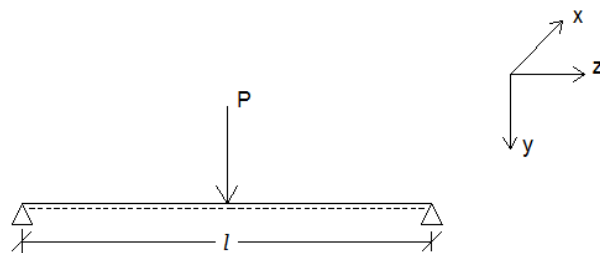
Στο Κεφάλαιο 4.2.1 προέκυψε η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού, με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου, ως εξής:  $q_{cr} = \frac{8}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{l^2} \left( \frac{124,155EC_w}{l^2} + 12,623GJ \right)}$

Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζεται η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού που προέκυψε από την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων (Α) και (Β) αλλά και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE με διάφορα μήκη της δοκού.

Διατομή \ Μήκος		Μήκος		
		6 metres	8 metres	10 metres
IPE 300	Πρ.Μέθοδος (A)	$q_{cr} = 22.7\text{KN/m}$	$q_{cr} = 8.91\text{KN/m}$	$q_{cr} = 4.4\text{KN/m}$
	Πρ.Μέθοδος (B)	$q_{cr} = 22.7\text{KN/m}$	$q_{cr} = 9.0\text{KN/m}$	$q_{cr} = 4.5\text{KN/m}$
	Adina	$q_{cr} = 23.2\text{KN/m}$	$q_{cr} = 8.8\text{KN/m}$	$q_{cr} = 4.3\text{KN/m}$
IPE 400	Πρ.Μέθοδος (A)	$q_{cr} = 58.3\text{KN/m}$	$q_{cr} = 19.7\text{KN/m}$	$q_{cr} = 9.16\text{KN/m}$
	Πρ.Μέθοδος (B)	$q_{cr} = 56.3\text{KN/m}$	$q_{cr} = 19.31\text{KN/m}$	$q_{cr} = 9.88\text{KN/m}$
	Adina	$q_{cr} = 56.9\text{KN/m}$	$q_{cr} = 21.2\text{KN/m}$	$q_{cr} = 10.1\text{KN/m}$
IPE 500	Πρ.Μέθοδος (A)	$q_{cr} = 105.9\text{KN/m}$	$q_{cr} = 39.51\text{KN/m}$	$q_{cr} = 18.9\text{KN/m}$
	Πρ.Μέθοδος (B)	$q_{cr} = 103.7\text{KN/m}$	$q_{cr} = 39.24\text{KN/m}$	$q_{cr} = 18.9\text{KN/m}$
	Adina	$q_{cr} = 108.8\text{KN/m}$	$q_{cr} = 40.12\text{KN/m}$	$q_{cr} = 18.96\text{KN/m}$
IPE 600	Πρ.Μέθοδος (A)	$q_{cr} = 191.3\text{KN/m}$	$q_{cr} = 70.35\text{KN/m}$	$q_{cr} = 33.3\text{KN/m}$
	Πρ.Μέθοδος (B)	$q_{cr} = 186.4\text{KN/m}$	$q_{cr} = 69.53\text{KN/m}$	$q_{cr} = 33.22\text{KN/m}$
	Adina	$q_{cr} = 196.1\text{KN/m}$	$q_{cr} = 71.62\text{N/m}$	$q_{cr} = 33.48\text{KN/m}$

Πίνακας 5.3 Αριθμητικές εφαρμογές για αμφιέρειστη δοκό υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση.

- Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της.



Σχήμα 5.22 Συγκεντρωμένο φορτίο στο στο μέσον της δοκού.

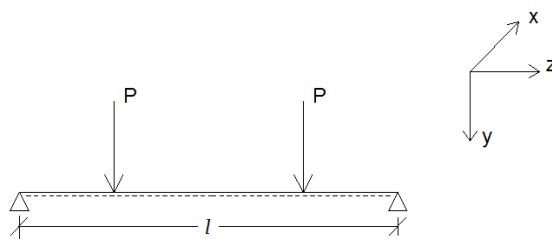
Στο Κεφάλαιο 4.3.1 προέκυψε η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού, με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου, ως εξής:  $P_{cr} = \frac{4}{l} \sqrt{\frac{180,25EI_y EC_w}{l^4} + \frac{18,325EI_y GJ}{l^2}}$

Διατομή \ Μήκος		6 metres	8 metres	10 metres
IPE 300	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 82.14\text{KN}$	-	-
	Adina	$P_{cr} = 81.33\text{KN}$	-	-
IPE 400	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 208.6\text{KN}$	$P_{cr} = 105.5\text{KN}$	-
	Adina	$P_{cr} = 197,8\text{KN}$	$P_{cr} = 103.8\text{KN}$	-
IPE 500	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 382.8\text{KN}$	$P_{cr} = 190.4\text{KN}$	$P_{cr} = 110.7\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 375\text{KN}$	$P_{cr} = 184.6\text{KN}$	$P_{cr} = 113.8\text{KN}$
IPE 600	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 691.63\text{KN}$	$P_{cr} = 339\text{KN}$	$P_{cr} = 200\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 670.3\text{KN}$	$P_{cr} = 324\text{KN}$	$P_{cr} = 198\text{KN}$

Πίνακας 5.4 Αριθμητικές εφαρμογές για αμφιέριστη δοκό υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη φόρτιση στο μέσον της.

Στον Πίνακα 5.4 παρουσιάζεται η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού που προέκυψε από την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων αλλά και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE με διάφορα μήκη της δοκού.

- Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στα  $1/4$  και  $3/4$  του μήκους της.



Σχήμα 5.23 Δύο συγκεντρωμένα φορτία  $1/4$  και  $3/4$  του μήκους.

Στο Κεφάλαιο 4.4 προέκυψε η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού, με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου, ως εξής: 
$$P_{cr} = \sqrt{\frac{1706,4EI_y EC_w}{l^6} + \frac{172,3EI_y GJ}{l^4}}$$

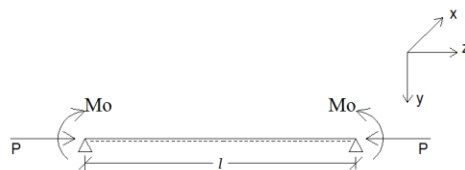
Διατομή \ Μήκος		6 metres	8 metres	10 metres
IPE 300	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 63\text{KN}$	$P_{cr} = 33\text{KN}$	$P_{cr} = 20.3\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 62.9\text{KN}$	$P_{cr} = 32.4\text{KN}$	$P_{cr} = 19.8\text{KN}$
IPE 400	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 160.1\text{N}$	$P_{cr} = 81.7\text{KN}$	$P_{cr} = 49.6\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 151.8\text{KN}$	$P_{cr} = 79\text{KN}$	$P_{cr} = 46.3\text{KN}$
IPE 500	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 294\text{KN}$	$P_{cr} = 146.2\text{KN}$	$P_{cr} = 87.3\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 287\text{KN}$	$P_{cr} = 144\text{KN}$	$P_{cr} = 86.1\text{KN}$
IPE 600	Πρ.Μέθοδος	$P_{cr} = 531.3\text{KN}$	$P_{cr} = 260.6\text{KN}$	$P_{cr} = 153.9\text{KN}$
	Adina	$P_{cr} = 522.2\text{KN}$	$P_{cr} = 255\text{N}$	$P_{cr} = 151\text{KN}$

Πίνακας 5.5 Αριθμητικές εφαρμογές για αμφιέρειστη δοκό υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στα  $\frac{1}{4}$  και  $\frac{3}{4}$  του μήκος της.

Στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζεται η κρίσιμη τιμή του φορτίου πλευρικού λυγισμού που προέκυψε από την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων αλλά και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE με διάφορα μήκη της δοκού.

Η απόκλιση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το Adina σε σχέση με τα αντίστοιχα της προσδιοριστικής μεθόδου, δεν ξεπερνάει το 3,5%.

- Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών και ταυτόχρονη αξονική δύναμη.



Σχήμα 5.24 Ζεύγος ροπών-αξονική δύναμη

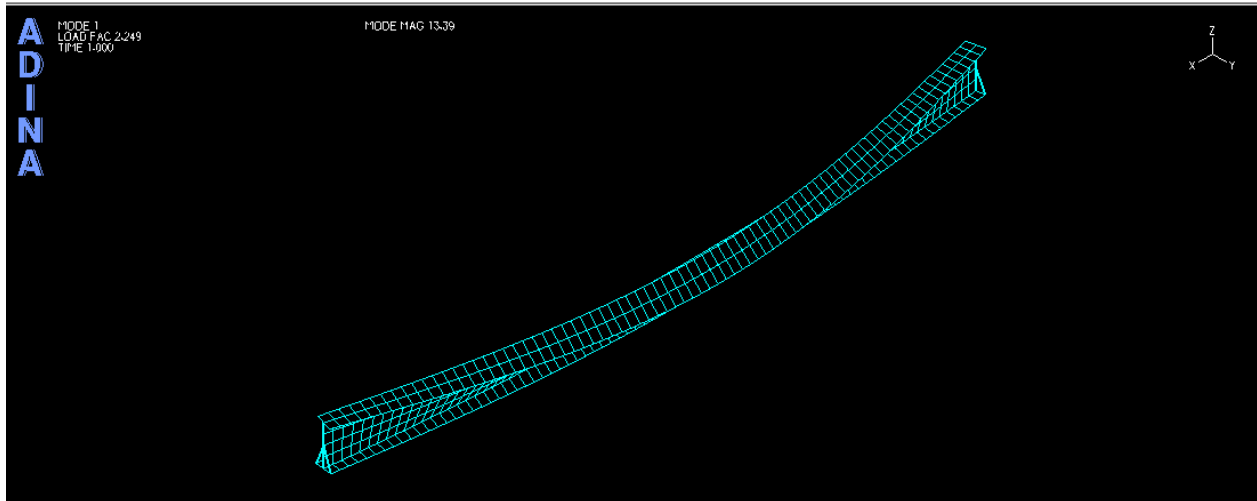
Ας θεωρήσουμε μία αμφιέρειστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε ζεύγος ροπών στα άκρα της και ταυτόχρονη αξονική δύναμη που δρά στο κέντρο βάρους της διατομής. Αναζητούμε κρίσιμους συνδυασμούς ροπής – αξονικής δύναμης ( $M_0 - P$ ) για τους οποίους η δοκός εκτρέπεται πλευρικά. Στόχος μας είναι να βρούμε την απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων και από την προσέγγιση του αντίστοιχου στατικού συστήματος μέσω της προσδιοριστικής μεθόδου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4.1.2.

Έτσι λοιπόν, ένας κρίσιμος συνδυασμός που προκύπτει από το Adina είναι:

$$M_0=244.9\text{KNm}$$

$$P=244.9\text{KN}$$

Στο Σχήμα 5.25 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα που προέκυψε από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,449 για ταυτόχρονη δράση ζεύγους ροπών  $M_0=100\text{KNm}$  και αξονικού φορτίου  $P=100\text{KN}$ .



Σχήμα 5.25 Κρίσιμος συνδυασμός ροπής – αξονικής δύναμης από Adina

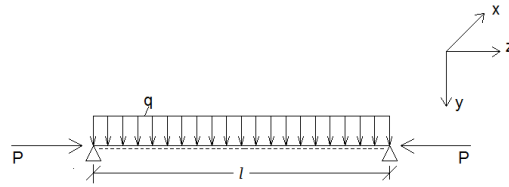
Αντίστοιχα, η προσδιοριστική μέθοδος μας δίνει:

$$M_{ocr} = \sqrt{\frac{EI_y EC_w}{l^4} \left( \pi^2 + \frac{GJ}{EC_w} l^2 \right) \left( \pi^2 - \frac{Pl^2}{EI_y} \right)}$$

Αν στον παραπάνω τύπο θεωρήσουμε  $P=244.9\text{KN}$ , η κρίσιμη ρπή πλευρικού λυγισμού που προκύπτει είναι  $M_{ocr}=243.2\text{KNm}$

Παρατηρούμε ότι, η απόκλιση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν είναι λιγότερη από 1%.

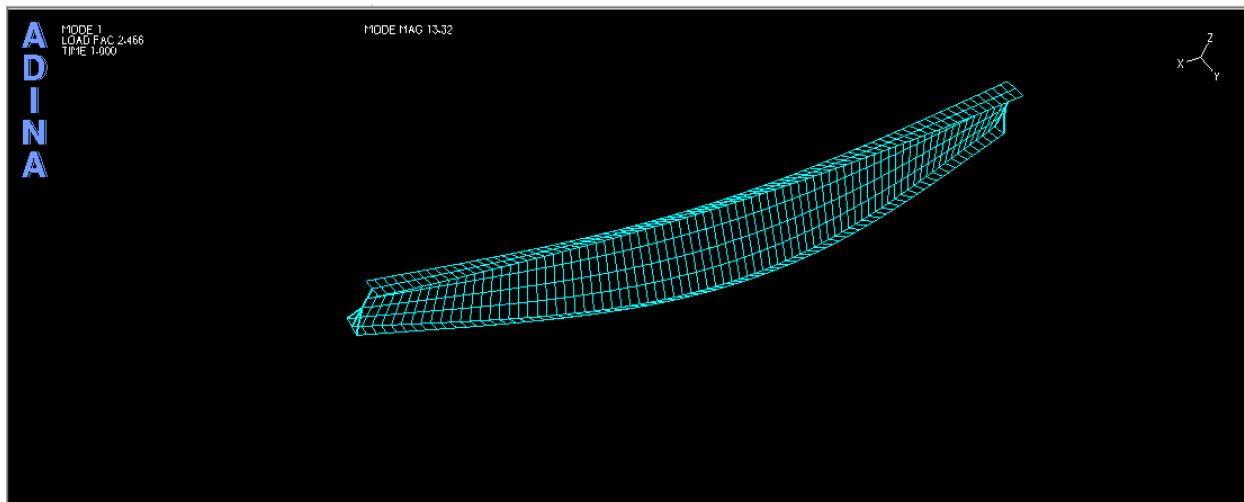
- Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και ταυτόχρονη αξονική φόρτιση



Σχήμα 5.26 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και αξονική δύναμη.

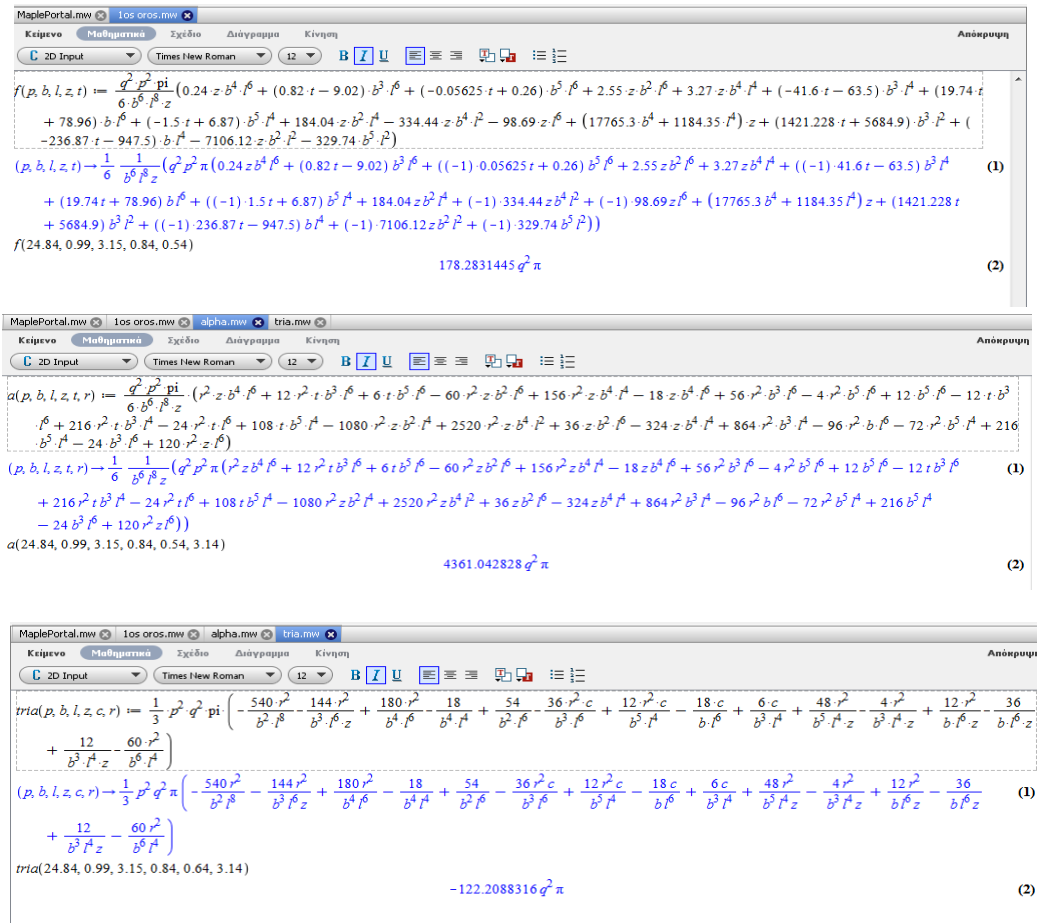
Ας θεωρήσουμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και ταυτόχρονη αξονική δύναμη που δρά στο κέντρο βάρους της διατομής. Αναζητούμε κρίσιμους συνδυασμούς φορτίου  $q$  – αξονικής δύναμης ( $q - P$ ) για τους οποίους η δοκός εκτρέπεται πλευρικά.

Στο σχήμα 5.27 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα που προέκυψε από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,446 για ταυτόχρονη δράση φορτίου  $q = 12.5 \text{ KN/m}$  (αντιστοιχεί σε ροπή 100KNm στο μέσον της δοκού) και ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης 100KN. Έτσι, ένας κρίσιμος συνδυασμός που προκύπτει από το Adina είναι:  $q(\text{KN/m}) - P(\text{KN}) = 30.6 - 244.6$



Σχήμα 5.27 Κρίσιμος συνδυασμός φορτίου  $q$  – Αξονικής δύναμης στο Adina.

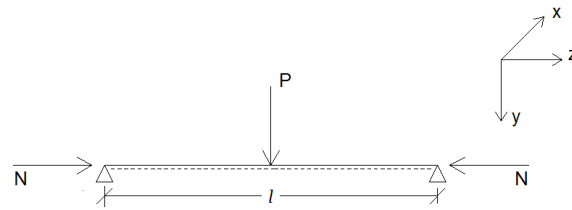
Αντίστοιχα, με τη χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple, θα θεωρήσουμε αξονικό φορτίο  $P = 244.6 \text{ KN}$  και θα αναζητήσουμε το κρίσιμο φορτίο  $q$  που προκύπτει από την προσδιοριστική μέθοδο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4.2.2



Σχήμα 5.28 Φόρμες χρήσης της κρίσιμης αδιαστατοποιημένης εξίσωσης στο Maple.

Έτσι, από την εξίσωση (4.35) του κεφαλαίου 4.2.2, με τη χρήση των φόρμουλων που στήθηκαν στο Maple, για αξονικό φορτίο  $P = 244.6 \text{ KN}$  προέκυψε  $q_{cr} = 31.7 \text{ KN/m}$ . Η απόκλιση από το αντίστοιχο αποτέλεσμα που προέκυψε από το Adina είναι 3.6%. Το σχετικά μεγάλο μέγεθος της απόκλισης οφείλεται στις θεωρήσεις που έγιναν για την απλοποίηση και την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων στο κεφάλαιο 4.2.2.

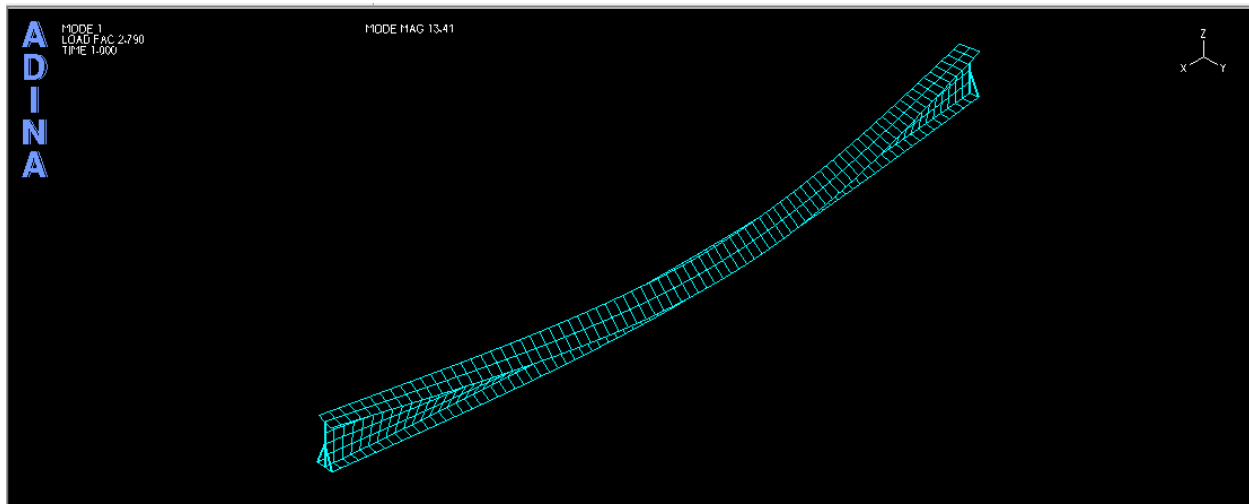
- Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσον της, με ταυτόχρονη αξονική δύναμη  $N$ .



Σχήμα 5.29 Συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον και ταυτόχρονη αξονική δύναμη.

Ας θεωρήσουμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσον της και ταυτόχρονη αξονική δύναμη  $N$  που δρά στο κέντρο βάρους της διατομής. Αναζητούμε κρίσιμους συνδυασμούς φορτίου  $P - N$  αξονικής δύναμης ( $P - N$ ) για τους οποίους η δοκός εκτρέπεται πλευρικά.

Στο σχήμα 5.30 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα που προέκυψε από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,790 για ταυτόχρονη δράση φορτίου  $P = 50\text{KN}$  (αντιστοιχεί σε ροπή  $100\text{KNm}$  στο μέσον της δοκού) και ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης  $100\text{KN}$ . Έτσι, ένας κρίσιμος συνδυασμός που προκύπτει από το Adina είναι:  $P(\text{KN}) - N(\text{KN}) = 139.5 - 279$



Σχήμα 5.30 Κρίσιμος συνδυασμός φορτίου  $P - N$  Αξονικής δύναμης  $N$  στο Adina.

Αντίστοιχα, με τη χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple, θα θεωρήσουμε αξονικό φορτίο  $N = 279\text{KN}$  και θα αναζητήσουμε το κρίσιμο φορτίο  $P$  που προκύπτει από την προσδιοριστική μέθοδο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4.3.2.

Έτσι, από την εξίσωση (4.48) του κεφαλαίου 4.3.2, με τη χρήση φόρμουλων που στήθηκαν στο Maple, για αξονικό φορτίο  $N = 279\text{KN}$  προέκυψε κρίσιμη τιμή συγκεντρωμένου φορτίου  $P = 144.2\text{KN}$ . Η απόκλιση από το αντίστοιχο αποτέλεσμα που προέκυψε από το Adina είναι 3.4%. Το σχετικά μεγάλο μέγεθος της απόκλισης οφείλεται στις θεωρήσεις που έγιναν για



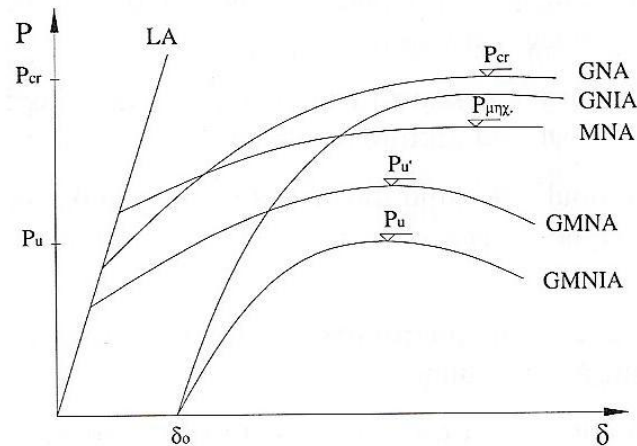
την απλοποίηση και την επίλυση των συνθετων διαφορικών εξισώσεων που αντιμετωπίστηκαν στο κεφάλαιο 4.3.2.

### 5.3 Μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας του φορέα στο Adina.

Όπως προαναφέρθηκε, η τεχνική θεωρία κάμψης αναφέρεται στην ελαστική συμπεριφορά του φορέα και βασίζεται στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων (ελαστική ανάλυση 1<sup>ης</sup> τάξεως). Η ελαστική ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις διατομών, ανεξαρτήτων αν η αντοχή τους προσδιορίζεται με βάση την ελαστική ή πλαστική αντοχή τους. Αντιθέτως, η πλαστική ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις και για να είναι δυνατή η εφαρμογή της, θα πρέπει να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Η πλαστική ανάλυση αναφέρεται στη *μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού* λόγω διαρροής του χάλυβα. Επίσης, υπάρχει και η *γεωμετρική μη γραμμικότητα* λόγω μεγάλων μετατοπίσεων. Τις περισσότερες φορές η πραγματική γεωμετρία αποκλίνει από την ιδεατή λόγω ατελειών κατά τη διαδικασία παραγωγή και ανέγερσης των δομικών μελών, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται παραμένουσες τάσεις στην αφόρτιστη κατάσταση. Οι μέθοδοι ανάλυσης σύμφωνα με την ορολογία του Ευρωκώδικα 3 περί σχεδιασμού κελυφών, είναι οι εξής:

- Γραμμική ελαστική ανάλυση (Linear Analysis – LA): Οι παραμορφώσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις του φορέα είναι μικρές, ώστε η συμπεριφορά να είναι μικρή και η επίλυση να γίνεται με βάση την αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία του φορέα (ανάλυση με θεωρία 1<sup>ης</sup> τάξεως)
- Πλαστική ανάλυση (Material Non - Linear Analysis – MNA): Οι παραμορφώσεις του φορέα είναι μικρές, αλλά οι ανηγμένες παραμορφώσεις είναι μεγάλες. Η επίλυση γίνεται με βάση την απαραμόρφωτη γεωμετρία του φορέα, αλλά λαμβάνονται υπόψη οι ανελαστικές παραμορφώσεις (ανάλυση με θεωρία 1<sup>ης</sup> τάξεως).
- Γεωμετρικώς μη γραμμική ελαστική ανάλυση (Geometrically Non – Linear Analysis – GNA): Οι ανηγμένες παραμορφώσεις του φορέα είναι μικρές, αλλά οι παραμορφώσεις είναι μεγάλες. Η ανάλυση είναι ελαστική και η επίλυση γίνεται με βάση την παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα. Η σχέση ροπών – καμπυλοτήτων είναι μη γραμμική. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και μη γραμμική θεωρία ευστάθειας ή ανάλυση με θεωρία 3<sup>ης</sup> (ή ανωτέρας) τάξεως, ενώ δίνει λύσεις και πέρα του φορτίου λυγισμού. Σε επιφανειακούς φορείς είναι αναγκαία η εφαρμογή της όταν αναζητείται το οριακό φορτίο, όπου παίζει σημαντικό ρόλο η μεταλυγισμική συμπεριφορά.
- Γεωμετρικώς μη γραμμική πλαστική ανάλυση (Geometrically and Materially Non – Linear Analysis – GMNA): Οι παραμορφώσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις είναι μεγάλες
- Γεωμετρικώς μη γραμμική ελαστική ανάλυση με αρχικές ατέλειες (GNIA): Είναι ίδια με την GNA με την παρουσία γεωμετρικών ατελειών.

- Γεωμετρικώς μη γραμμική πλαστική ανάλυση με αρχικές ατέλειες (GMNIA): Αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων και δίνει τα πραγματικά οριακά φορτία του εξεταζόμενου μέλους.

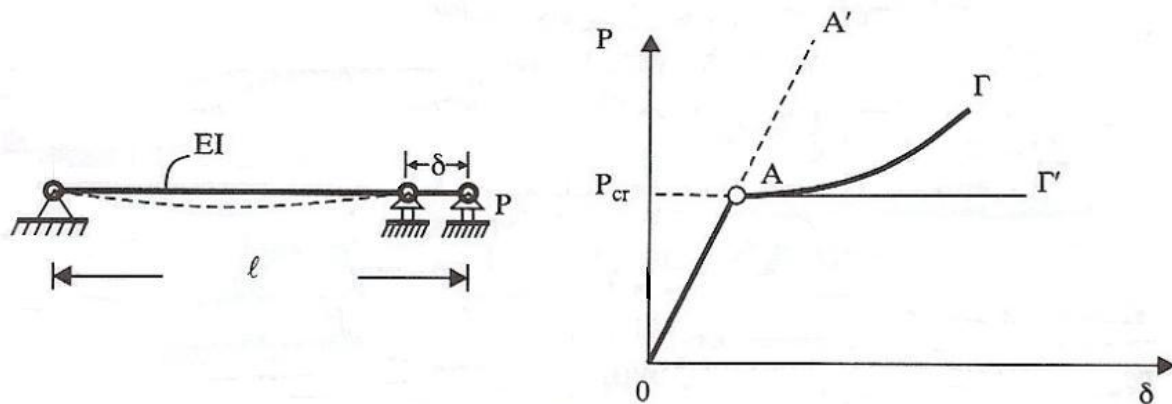


Σχήμα 5.31 Καμπύλες P-δ για τα είδη αναλύσεων

Κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας (δηλαδή του διαγράμματος φορτίου – μετατοπίσεως) αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας. Υπάρχουν δύο είδη λυγισμού που εκφράζονται με διαφορετική μορφή των δρόμων ισορροπίας τους:

- Λυγισμός με οριακό σημείο: Η δυσκαμψία της κατασκευής (κλίση του διαγράμματος  $P - \delta$ ) μειώνεται με την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου. Όταν το φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο φορτίο αστοχίας επέρχεται η αστοχία του μέλους ή της κατασκευής.
- Λυγισμός με σημείο διακλαδώσεως: Όταν το φορτίο φτάσει την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στον αντίστοιχο δρόμο ισορροπίας, οι μετατοπίσεις συνεχίζουν να αυξάνονται ακολουθώντας διαφορετική πορεία από αυτή του προλυγισμικού σταδίου.

Υπάρχει και η περίπτωση λυγισμού με σημείο διακλαδώσεως κατά την οποία ο φορέας μπορεί να φέρει φορτίο μεγαλύτερο από το φορτίο λυγισμού, έχει επομένως μεταλυγισμική αντοχή. Περιπτώσεις θλιβόμενων ράβδων μεγάλου μήκους και θλιβόμενων πλακών.



Σχήμα 5.32 Δρόμος ισορροπίας θλιβόμενης δοκού υπό αξονικό φορτίο.

Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε χρήση γραμμικής ανάλυσης, δηλαδή η δοκός θεωρήθηκε τέλειος επίπεδος φορέας και το υλικό θεωρήθηκε ελαστικό. Με βάση τη γραμμική ανάλυση λυγισμού μπορούμε να λάβουμε πληροφορίες για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού καθώς και για τις ιδιομορφές λυγισμού. Για να εξάγουμε συμπεράσματα για τη μεταλυγισμική αντοχή του φορέα, πρέπει να πραγματοποιηθεί *μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας*, η οποία βασίζεται στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων και στην οποία εισάγεται στη δοκό γεωμετρική ατέλεια κατά το σχήμα κάποιας ιδιομορφής ή συνδυασμού ιδιομορφών.

Πραγματοποιείται μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με τη μέθοδο Arc – Length (collapse analysis) όπου θεωρείται ως σημείο αναφοράς ο κόμβος της μεσαίας διατομής στο σημείο συνένωσης του κορμού και του κάτω πέλματος. Δίνεται αρχική ατέλεια κατά τη διεύθυνση  $x$ , σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή που προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Η ατέλεια γίνεται στο σημείο συνένωσης του κορμού και του άνω πέλματος της μεσαίας διατομής της δοκού, στον κόμβο δηλαδή που η συγκεκριμένη ιδιομορφή παρουσιάζει μέγιστη μετακίνηση.

Επομένως, θα πραγματοποιήσουμε μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας σε στατικά συστήματα που μελετήθηκαν με γραμμική ανάλυση στο κεφάλαιο 5.2, ώστε τα διαγράμματα που προκύπτουν (δρόμοι ισορροπίας) να είναι συγκρίσιμα με τις κρίσιμες τιμές των φορτίων πλευρικού λυγισμού (ή ισοδύναμα των συντελεστών φόρτισης “load fac”) που λάβαμε από την ανάλυση αυτή.

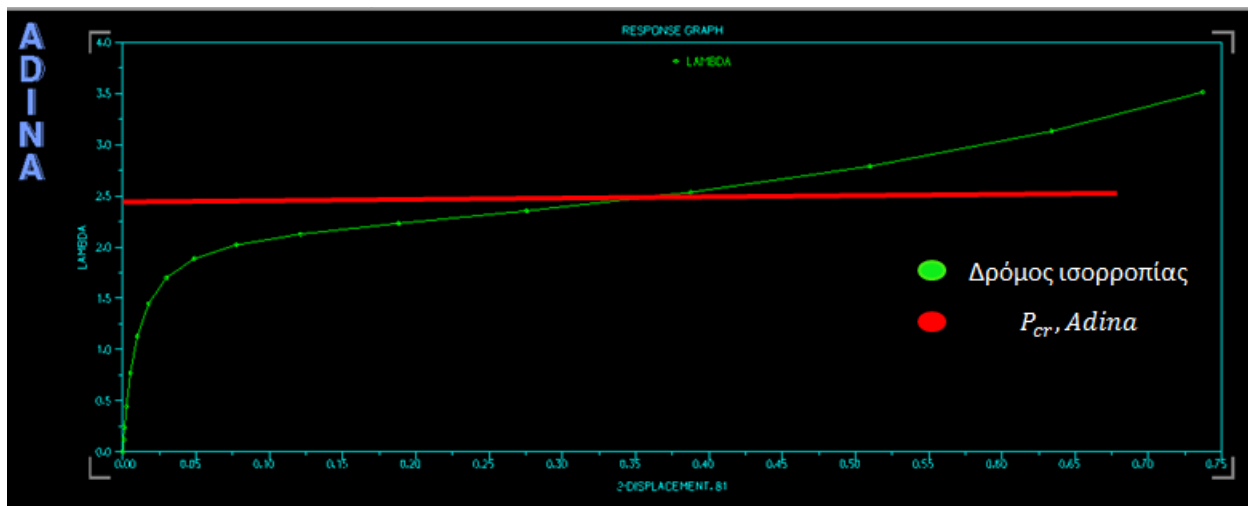
- Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών και ταυτόχρονη αξονική δύναμη.



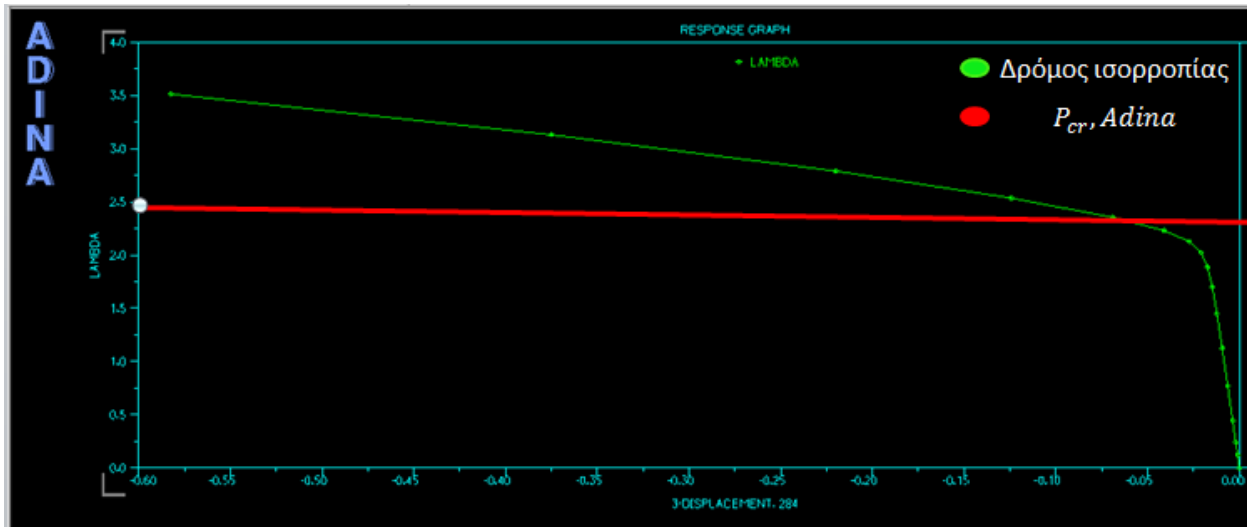
Σχήμα 5.33 Ζεύγος ροπών-αξονική δύναμη

Ας θεωρήσουμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε ζεύγος ροπών στα άκρα της και ταυτόχρονη αξονική δύναμη που δρά στο κέντρο βάρους της διατομής. Από τη γραμμική ανάλυση στο Adina, βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,449 για ταυτόχρονη δράση ζεύγους ροπών  $M_0=100\text{KNm}$  και αξονικού φορτίου  $P=100\text{KN}$ .

Από τη μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας προέκυψε:



Σχήμα 5.34 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $x$  μετατόπισης του κόμβου όπου δόθηκε η ατέλεια.

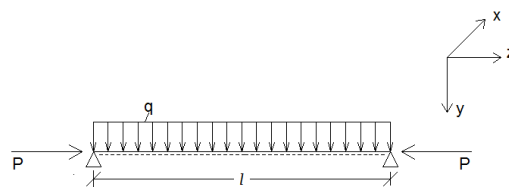


Σχήμα 5.35 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $y$  μετατόπισης (κατακόρυφη μετατόπιση) του κόμβου αναφοράς.

Από το δρόμο ισορροπίας της μη γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας παρατηρούμε ότι για συντελεστή φόρτισης ίσο περίπου με 2,25 έχουμε σημαντική μείωση της κλίσης του διαγράμματος, που αντιστοιχεί σε μείωση της δυσκαμψίας της δοκού, λόγω του λυγισμού. Η τιμή αυτή είναι λίγο μικρότερη από την τιμή του κρίσιμου συντελεστή φόρτισης λυγισμού όπως έχει υπολογιστεί από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού ( $\lambda_{cr}=2,449$ ) λόγω της ύπαρξης της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας, η οποία επιταχύνει την εμφάνιση πλευρικού λυγισμού στη δοκό.

Χαρακτηριστικό είναι ότι ο φορέας διαθέτει μεταλυσισμική αντοχή όπως φαίνεται από τον ανοδικό κλάδο του διαγράμματος, καθώς στην ανάλυση αυτή δεν έχει υπεισέλθει η μη γραμμικότητα υλικού.

- Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και ταυτόχρονη αξονική φόρτιση.

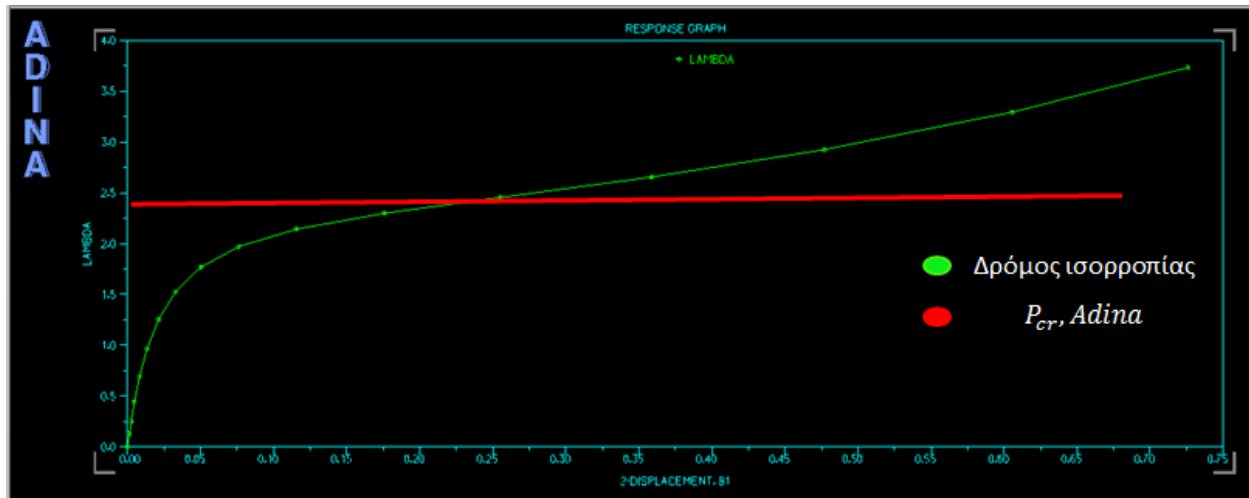


Σχήμα 5.36 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και αξονική δύναμη.

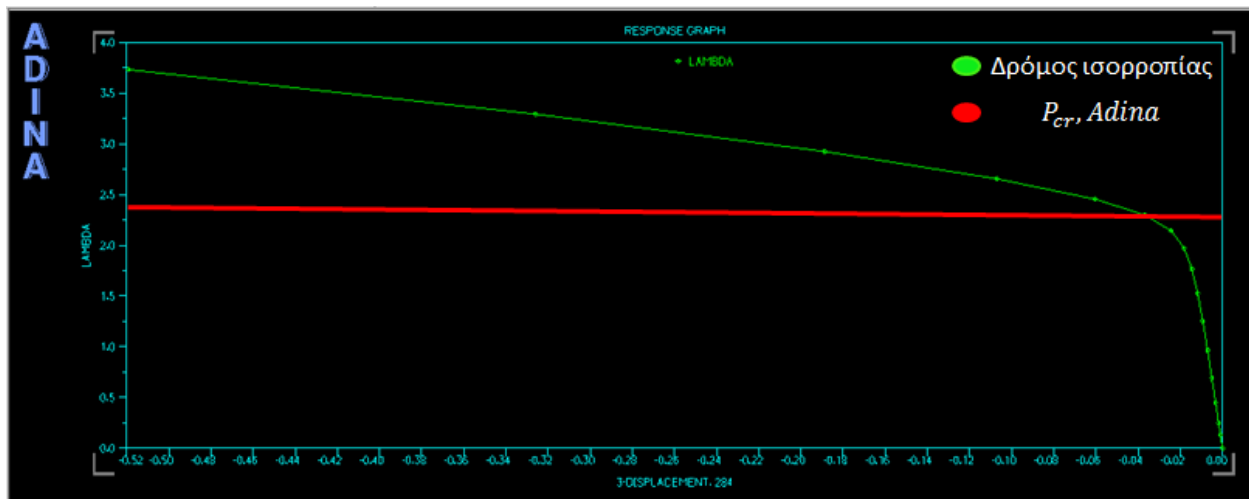
Ας θεωρήσουμε μία αμφιέρειστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και ταυτόχρονη αξονική δύναμη που δρά στο

κέντρο βάρους της διατομής. Από τη γραμμική ανάλυση στο Adina, βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,446 για ταυτόχρονη δράση ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q = 12.5$  KN/m (αντιστοιχεί σε ροπή 100KNm στο μέσον της δοκού) και αξονικού φορτίου  $P=100$ KN.

Από τη μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας προέκυψε:



Σχήμα 5.37 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $x$  μετατόπισης του κόμβου όπου δόθηκε η ατέλεια.



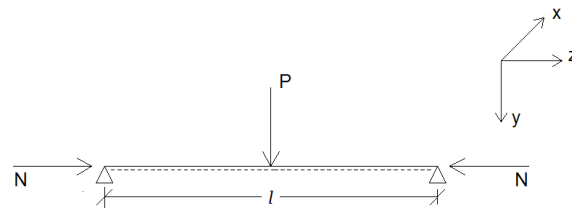
Σχήμα 5.38 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $y$  μετατόπισης (κατακόρυφη μετατόπιση) του κόμβου αναφοράς.

Από το δρόμο ισορροπίας της μη γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας παρατηρούμε ότι για συντελεστή φόρτισης ίσο περίπου με 2,25 έχουμε σημαντική μείωση της κλίσης του διαγράμματος, που αντιστοιχεί σε μείωση της δυσκαμψίας της δοκού, λόγω του λυγισμού. Η τιμή αυτή είναι λίγο μικρότερη από την τιμή του κρίσιμου συντελεστή φόρτισης λυγισμού όπως

έχει υπολογιστεί από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού ( $\lambda_{cr}=2,446$ ) λόγω της ύπαρξης της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας, η οποία επιταχύνει την εμφάνιση πλευρικού λυγισμού στη δοκό.

Χαρακτηριστικό είναι ότι ο φορέας διαθέτει μεταλυγισμική αντοχή όπως φαίνεται από τον ανοδικό κλάδο του διαγράμματος, καθώς στην ανάλυση αυτή δεν έχει υπεισέλθει η μη γραμμικότητα υλικού.

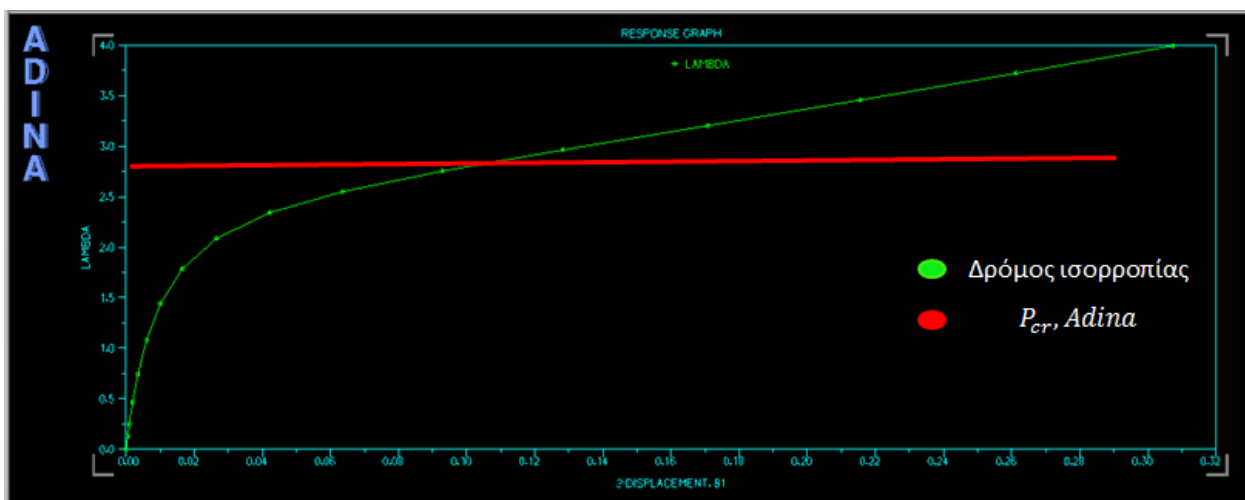
- Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσον της, με ταυτόχρονη αξονική δύναμη  $N$ .



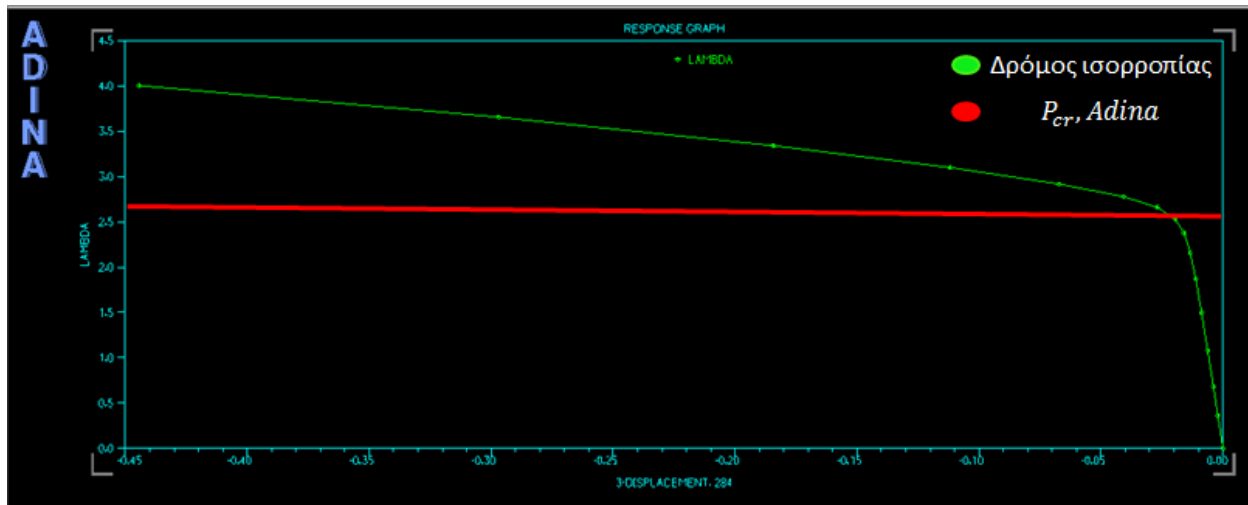
Σχήμα 5.39 Συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον και ταυτόχρονη αξονική δύναμη.

Ας θεωρήσουμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 8m και διατομής IPE500. Η δοκός υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσον της και ταυτόχρονη αξονική δύναμη  $N$  που δρά στο κέντρο βάρους της διατομής. Από τη γραμμική ανάλυση στο Adina βρέθηκε συντελεστής φόρτισης “load fac” 2,790 για ταυτόχρονη δράση φορτίου  $P = 50\text{KN}$  (αντιστοιχεί σε ροπή 100KNm στο μέσον της δοκού) και ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης 100KN.

Από τη μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας προέκυψε:



Σχήμα 5.40 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $x$  μετατόπισης του κόμβου όπου δόθηκε η ατέλεια.



Σχήμα 5.41 Δρόμος ισορροπίας φορτίου (συντελεστή φόρτισης) –  $y$  μετατόπισης (κατακόρυφη μετατόπιση) του κόμβου αναφοράς.

Από το δρόμο ισορροπίας της μη γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας παρατηρούμε ότι για συντελεστή φόρτισης ίσο περίπου με 2,50 έχουμε σημαντική μείωση της κλίσης του διαγράμματος, που αντιστοιχεί σε μείωση της δυσκαμψίας της δοκού, λόγω του λυγισμού. Η τιμή αυτή είναι λίγο μικρότερη από την τιμή του κρίσιμου συντελεστή φόρτισης λυγισμού όπως έχει υπολογιστεί από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού ( $\lambda_{cr}=2,790$ ) λόγω της ύπαρξης της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας, η οποία επιταχύνει την εμφάνιση πλευρικού λυγισμού στη δοκό.

Χαρακτηριστικό είναι ότι ο φορέας διαθέτει μεταλυγισμική αντοχή όπως φαίνεται από τον ανοδικό κλάδο του διαγράμματος, καθώς στην ανάλυση αυτή δεν έχει υπεισέλθει η μη γραμμικότητα υλικού.



## 6. Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο συνοψίζονται οι παρατηρήσεις των προηγούμενων κεφαλαίων με σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την εργασία που πραγματοποιήθηκε.

Όσον αφορά στις προσδιοριστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού, έχει αποδειχθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο ότι το φορτίο λυγισμού σε προβλήματα αστάθειας προσδιορίζεται βάσει μιας επαναληπτικής διαδικασίας η οποία από τον πρώτο κύκλο μας δίνει τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Σκοπός η εφαρμογή και ανάπτυξη μιας τυποποιημένης μεθοδολογίας για την αντιμετώπιση του προβλήματος του πλευρικού λυγισμού.

Στην παρούσα διπλωματική αναπτύχθηκε προσδιοριστική μέθοδος για την εύρεση του ελαστικού κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού σε αμφιέριστες καμπτόμενες δοκούς, με διάφορους τύπους φόρτισης (με ταυτόχρονη ή όχι εφαρμογή αξονικού φορτίου). Στην συνέχεια, έγινε γραμμική ελαστική ανάλυση των ίδιων στατικών συστημάτων με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν με τα αντίστοιχα των προσδιοριστικών μεθόδων. Στην περίπτωση που στον φορέα δεν υπήρχε ταυτόχρονη εφαρμογή αξονικής θλιπτικής δύναμης, η απόκλιση κυμαινόταν από 1,5% - 2,5% και σε καμία περίπτωση δεν ξεπερνούσαν το 3,5%. Στην περίπτωση της ταυτόχρονης εφαρμογής αξονικής θλιπτικής δύναμης στον φορέα, η απόκλιση ήταν λίγο μεγαλύτερη, κυμαινόταν 3%-4%. Αυτό οφείλεται, από τη μια σε κάποιες παραδοχές που έγιναν πάνω στις διαφορικές εξισώσεις που προέκυπταν και από την άλλη, στον τρόπο προσομοίωσης των εκάστοτε στατικών συστημάτων στο Adina.

Επίσης πραγματοποιήθηκε μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας, όπου δόθηκε μία αρχική ατέλεια σε κόμβο της μεσαίας διατομής (διατομή με τις μεγαλύτερες μετατοπίσεις) της δοκού. Σκοπός ήταν η εύρεση του δρόμου ισορροπίας ώστε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για την συμπεριφορά του φορέα για τιμές πάνω της ελαστικής κρίσιμης τιμής πλευρικού λυγισμού. Συγκεκριμένα στη με γραμμική ανάλυση οι φορείς παρουσιάζουν μεταλυγισμική αντοχή. Αυτό φαίνεται από τον ανοδικό κλάδο του δρόμου ισορροπίας που εμφανίζεται μετά την περιοχή του διαγράμματος στην οποία αντιστοιχεί η ελαστική κρίσιμη τιμή πλευρικού λυγισμού.

Όσον αφορά στη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina, σημαντικό ζήτημα ήταν η επιλογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών για την προσομοίωση αμφιέριστης δοκού. Επειδή, στις προσδιοριστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν, θεωρήθηκε ότι τα άκρα της δοκού μπορούν να στρεβλωθούν ελεύθερα, κρίθηκε πιο αξιόπιστη η δέσμευση μόνο του κορμού και του κάτω πέλματος (ή τουλάχιστον μόνο του κορμού) και όχι ολόκληρης της διατομής. Σε όλες τις αριθμητικές αναλύσεις που έγιναν στο Adina, ο μεσαίος κόμβος της μιας ακραίας διατομής δεσμεύεται ως προς τις μετατοπίσεις προς όλες τις διευθύνσεις και τη στροφή ως προς τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής. Στην άλλη ακραία διατομή, στον μεσαίο κόμβο, γίνονται οι ίδιες δεσμεύσεις, με τη διαφορά ότι επιτρέπεται η οριζόντια μετακίνηση στο άκρο αυτό. Για την κατάλληλη προσομοίωση έγινε χρήση άκαμπτων συνδέσμων –“rigid links”- που

συνδέουν τον μεσαίο κόμβο μιας διατομής με τους υπόλοιπους κόμβους του κορμού και του κάτω πέλματος.



## Βιβλιογραφία

1. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας" , εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση – Αθήνα 1997).
2. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας με στοιχεία από τη Θεωρία Καταστροφών" εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση – Αθήνα 2004).
3. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα", εκδ. Κλειδάριθμος, 2011.
4. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σιδηρές Κατασκευές – Ανάλυση και Διαστασιολόγηση", εκδ. Κλειδάριθμος, 2009.
5. Χάρης Γαντές: Σημειώσεις διαλέξεων "Μη Γραμμικής Συμπεριφοράς Μεταλλικών Κατασκευών", 2012.
6. Λεωνίδας Θ. Σταυρίδης: "Στατική των Δομικών Φορέων, Μέρος Α" εκδ. Κλειδάριθμος, 2006.
7. A N. Kounadis and G.I. Ioannidis: "Lateral Postbuckling Analysis Of Beam Columns", paper of the "Journal of Engineering Mechanics", Vol.120, No.4, April 1994. Σελ 695-705.
8. Timoshenko and Gere: "Theory of Elastic Stability", 1961.
9. Ευρωκώδικας 3, Κατασκευές από χάλυβα, (ENV 1993).
10. Α. Κουνάδης, Γ. Ιωαννίδης: Μια απλοποιημένη και αποτελεσματική μέθοδος, για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου πλευρικού και στρεπτοκαμπτικού λυγισμού", 1991.
11. Adina Systems 8.5 Online Manuals, Adina R&D, Inc (February 2008).