

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

***Μελέτη του κρίσιμου συντελεστή  
έντασης των τάσεων συναρτήσει  
του πάχους του δοκιμίου.***

Της Φοιτήτριας  
**Τριγγιλίδα Φ. Αικατερίνης**

Επιβλέπων  
**Ανδριανόπουλος Π. Νίκος, Καθηγητής,**  
**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**

**Αθήνα, Φεβρουάριος 2011**



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	4
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b>	6
<b>ABSTRACT</b>	7
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ</b>	
1.1 Εισαγωγή	10
1.2 Ορισμοί - Σχόλια	11
1.3 Οι συντελεστές έντασης των τάσεων ως κριτήριο αστοχίας	13
1.4 Παρατηρήσεις	15
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</b>	
2.1 Εισαγωγή	20
2.2 Υλικό που χρησιμοποιήσαμε	21
2.3 Καταστατική εξίσωση του προβλήματος	21
2.4 Γεωμετρία του προβλήματος	23
2.5 Επίλυση του προβλήματος	24
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	
3.1 Εισαγωγή	32
3.2 Πρόβλημα δύο διαστάσεων	32
3.3 Ορισμός του $K_I$ στις τρεις διαστάσεις	34
3.4 Γραμμικό πρόβλημα τριών διαστάσεων	36
3.5 Μη γραμμικό πρόβλημα τριών διαστάσεων	40
3.6 Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις	44
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ</b>	
Παράρτημα Α	50
Παράρτημα Β	60
Βιβλιογραφία	74

# Πρόλογος

Η διπλωματική αυτή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος κρύβει κάποιους βαθύτερους λόγους που με ώθησαν να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο αντικείμενο και να προσπαθήσω να το αναπτύξω. Συγκεκριμένα, όπως δηλώνει και ο τίτλος αυτής της διπλωματικής πρόκειται για μία μελέτη, κάτι που είναι πολύ σημαντικό και ενδιαφέρον για το ξεκίνημα ενός νέου μηχανικού. Επίσης το θέμα αυτό ενδείκνυται για περαιτέρω έρευνα και ασχολία, καθώς η μέθοδος που ακολουθήθηκε αποτελεί μία από τις πιο αξιόπιστες μεθόδους για τον προσδιορισμό και την μέτρηση των Συντελεστών Έντασης των Τάσεων.

Αυτή η διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε με στόχο την διασαφήνιση, την επαλήθευση και την επιβεβαίωση κάποιων από εκείνες τις θεωρίες και τις υποθέσεις γύρω από την συμπεριφορά των υλικών. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού έγινε χρήση των προγραμμάτων Ansys και Excel.

Από τη θέση αυτή επιθυμώ να ευχαριστήσω αυτούς που ενέπνευσαν και παρότρυναν τη συγγραφή του παρόντος και ιδιαίτερος όλους εκείνους που συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην αποπεράτωση αυτής της εργασίας.

Συγκεκριμένα, πολλές και θερμές ευχαριστίες ανήκουν στο διδάκτορα Βασίλειο Μανωλόπουλο για την υπομονή, την καθοδήγηση, την στήριξη και τις διορθώσεις κατά την διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας. Οι κώδικες του Ansys που χρησιμοποιήθηκαν για την επεξεργασία των δεδομένων είναι προσωπικό του επίτευγμα και χωρίς την πολύτιμη βοήθειά του δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής.

Ταυτόχρονα θέλω να ευχαριστήσω όλους τους συμφοιτητές, μεταπτυχιακούς φοιτητές και υποψήφιους διδάκτορες με τους οποίους μου δόθηκε η ευκαιρία να συνεργαστώ αλλά και με βοήθησαν σε προβλήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της εργασίας.

Ευχαριστίες ανήκουν και σε όλους τους καθηγητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Όμως ιδιαίτερη μνεία αξίζει σε έναν άνθρωπο, ο οποίος όλο αυτό τον καιρό ακούραστα συμμερίστηκε τις αγωνίες

μου και είχε πάντα την πόρτα του γραφείου του ανοιχτή για να μοιραστεί μαζί μου την βαθιά επιστημονική του κατάρτιση, την πολυετή πειραματική του εμπειρία αλλά και την μηχανική του διαίσθηση. Δεν πρόκειται για άλλον παρά για τον υπεύθυνο καθηγητή αυτής της διπλωματικής εργασίας, τον καθηγητή του τομέα μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών κ. Νίκο Π. Ανδριανόπουλο. Τον ευχαριστώ λοιπόν θερμά που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με την μηχανική των υλικών, που με έκανε να την αγαπήσω, που μου παρείχε απλόχερα την αμέριστη συμπαράστασή του και το χρόνο του αλλά και για την διαρκή υποστήριξη, τις διορθώσεις και την ευρύτερη προσφορά του.

# Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια. Επίσης, στο τέλος των κεφαλαίων αυτών υπάρχουν δύο παραρτήματα, καθώς και η βιβλιογραφία από την οποία αντλήθηκαν γνώσεις για την πραγμάτωση αυτής της εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο λοιπόν, επειδή όπως δηλώνει και ο τίτλος της εργασίας ασχοληθήκαμε με τους Συντελεστές Έντασης των Τάσεων, γίνεται μία ουσιαστική και αρκετά λεπτομερής ανάλυση γύρω από αυτό. Το κεφάλαιο ξεκίνησε αρχικά με μία εισαγωγή γύρω από βασικές αρχές, γνώσεις και θεωρίες της μηχανικής (§ 1.1 – 1.2). Εν συνεχεία έγινε μία προσπάθεια να αναπτυχθούν, όσο πιο αναλυτικά γίνεται στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας, οι βασικότερες θεωρίες που αφορούν τους Συντελεστές Έντασης των Τάσεων (§ 1.3 – 1.4).

Στο δεύτερο κεφάλαιο επιδιώκουμε μία σύντομη περιγραφή της διαδικασίας (§ 2.1 – 2.4). Κάνουμε επίσης μία αναφορά στο απαραίτητο εργαλείο για τη λήψη αποτελεσμάτων που δεν είναι άλλο από το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε και τέλος παραθέτουμε τη μέθοδο με την οποία εργαστηρήκαμε (§ 2.5).

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο που είναι ίσως και το σημαντικότερο απ' όλα, από την άποψη ότι η λήψη και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων είναι κάτι το μοναδικό για έναν νέο μηχανικό, παρουσιάζονται μία σύντομη εισαγωγή (§ 3.1) καθώς και τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προέκυψαν (§ 3.2 – 3.5).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μετά το τέλος των κεφαλαίων αυτών ακολουθούν δύο παραρτήματα στα οποία παρουσιάζεται ο κώδικας του Ansys που χρησιμοποιήθηκε. Επίσης, ακολουθεί και η σχετική βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

# Abstract

This dissertation is constituted by three chapters. Also at the end of these chapters there are two appendices, as well as dictionary of technical terms and the bibliography from which was drawn knowledge for the facture of this dissertation.

In the first chapter, as declares the title of this dissertation, becomes an essential and enough in detail analysis around Stress Intensity Factors. The first chapter began initially with an introduction around basic knowledge and theories of mechanics (§ 1.1 - 1.2). Thereinafter became an effort to develop, as analytically was possible in the frames of this dissertation, the most basic theories that concern Stress Intensity Factors (§ 1.3 - 1.4).

In the second chapter we pursue a description of the process (§ 2.1 - 2.4). We also make a report in the essential tool for the received results that it is not other than the application that it was used. Finally, we mention the method with which we worked (§ 2.5).

In the third and last chapter which is perhaps the most important of all, from the point of view that the results' receipt and their process are something unique for a new engineer, is presented a short introduction (§ 3.1) as well as the conclusions that resulted from their process (§ 3.2 - 3.5).

As it was reported before, at the end of these chapters follow two appendices where is presented the programming code of Ansys that was used. Also, follows the relative bibliography that was used in this dissertation.

# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

## ***Οι Συντελεστές Έντασης των Τάσεων***

1.1 Εισαγωγή

1.2 Ορισμοί – Σχόλια

1.3 Οι συντελεστές έντασης των τάσεων ως κριτήρια αστοχίας

1.4 Παρατηρήσεις





## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

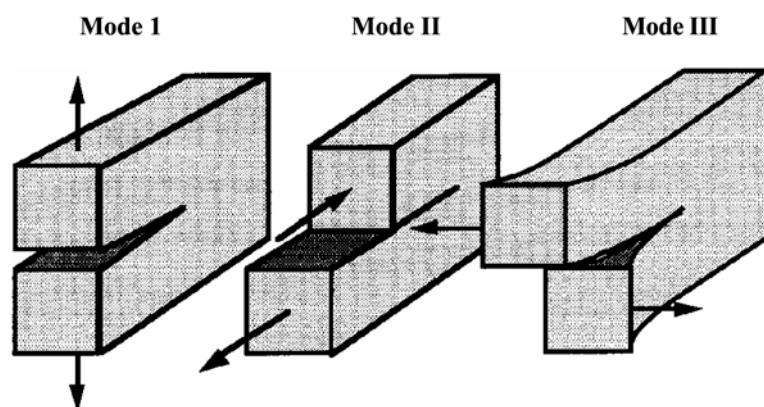
Ιστορικά η Μηχανική των Θραύσεων συνδέθηκε με την ψαθυρή διάδοση των ρωγμών όπου, σε πρώτη προσέγγιση, η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να θεωρηθεί γραμμικά ελαστική. Έτσι, προβλήματα της Μηχανικής των Θραύσεων αντιμετωπίστηκαν στα πλαίσια της Γραμμικής Ελαστικότητας, σχηματίζοντας τη λεγόμενη Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEMF). Η εφαρμογή των μεθόδων της Γραμμικής Ελαστικότητας σε εκ των προτέρων ρηγματωμένα υλικά οδήγησε σε απειρισμό των τάσεων ακριβώς στην αιχμή της ρωγμής, συμπεριφορά που δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή. Βεβαίως, αυτός ο αφύσικος απειρισμός των τάσεων οδηγεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι τα υλικά πολύ κοντά στην αιχμή της ρωγμής δεν είναι δυνατόν να συμπεριφέρονται γραμμικά ελαστικά. Αλλά τα μη γραμμικά προβλήματα είναι πολύ πιο δύσκολα στην επίλυση τους από τα γραμμικά. Η συμβιβαστική λύση που ακολουθήθηκε ήταν η εισαγωγή των λεγόμενων συντελεστών έντασης των τάσεων (Stress Intensity Factors, SIF). Οι συντελεστές αυτοί είναι ένα μέτρο της 'έντασης' των τάσεων στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής, δηλαδή του πόσο έντονα αυξάνουν οι τάσεις καθώς πλησιάζουμε (αλλά ποτέ δεν φτάνουμε) στην αιχμή.

Έτσι, στη Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων δεχόμαστε ότι σε ένα ρηγματωμένο σώμα η ρωγμή θα διαδοθεί και το σώμα θα αστοχήσει, όταν η 'ένταση' των τάσεων (και όχι οι τάσεις αυτές καθ' εαυτές) φτάσει στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής σε ένα κρίσιμο επίπεδο. Επομένως, κάθε υλικό έχει μια κρίσιμη τιμή για κάθε συντελεστή έντασης των τάσεων. Προς το παρόν δεν απαντούμε στο ερώτημα αν αυτοί οι κρίσιμοι συντελεστές συνδέονται μεταξύ τους ή εάν είναι πράγματι μηχανικές ιδιότητες των υλικών. Απλώς, παρατηρούμε ότι δεν είναι εμφανές πώς θα μπορούσε να περιγραφεί η αστοχία ενός αρηγμάτωτου υλικού με όρους της Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων.

## 1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ – ΣΧΟΛΙΑ

Μελετώντας το εντατικό πεδίο πολύ κοντά στην αιχμή της ρωγμής, καταλήγουμε σε τρεις δυνατές ανεξάρτητες εντατικές καταστάσεις. Αυτές είναι:

- ο Εφελκυσμός στο επίπεδο  $xy$  της ρωγμής, που καλείται συνεπίπεδος (in-plane) εφελκυστικός τρόπος ή τρόπος-I (Mode-I).
- ο Διάτμηση στο ίδιο επίπεδο, που καλείται συνεπίπεδος (in plane) διατμητικός τρόπος ή τρόπος-II (Mode-II).
- ο Διάτμηση σε επίπεδο κάθετο προς το επίπεδο της ρωγμής, που καλείται αντεπίπεδος (out of plane) διατμητικός τρόπος ή τρόπος-III (Mode-III).



**Εικόνα 1.1**

Αυτά τα τρία ανεξάρτητα τασικά πεδία στην αιχμή της ρωγμής συνδέονται με την σχετική μετατόπιση των χειλέων της, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Πάντως οι εκφράσεις των τάσεων είναι προβληματικές ακριβώς πάνω στην αιχμή της ρωγμής για  $r=0$ , αφού εκεί οι τάσεις είτε απειρίζονται είτε μηδενίζονται. Αυτή η συμπεριφορά των τάσεων που καλείται ιδιόμορφη ώθησε τον Irwin το 1955 να εισάγει την έννοια του συντελεστή έντασης των τάσεων (Stress Intensity Factor, SIF) ως εξής για τους τρεις τρόπους:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim [(2\pi r)^{1/2} \sigma_y (0^\circ)] \\
 K_{II} &= \lim [(2\pi r)^{1/2} \tau_{xy} (0^\circ)] \\
 K_{III} &= \lim [(2\pi r)^{1/2} \tau_{zy} (0^\circ)]
 \end{aligned}
 \tag{Εξ. 1.1}$$

Απλή σύγκριση των τελευταίων εξισώσεων με εκείνες που δίνουν τις ιδιόμορφες τάσεις  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  και  $\tau_{zy}$ , οδηγεί στις εξής εκφράσεις για τους τρεις συντελεστές έντασης των τάσεων:

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad , \quad K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a} \quad , \quad K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi a}
 \tag{Εξ. 1.2}$$

οπότε οι αντίστοιχες για κάθε τύπο καταπόνησης τάσεις γράφονται γενικώς ως:

$$\sigma_{ij,L} = \frac{K_L}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij,L}(\theta)
 \tag{Εξ. 1.3}$$

όπου  $L=I,II,III$  και  $i,j=x,y,z$ . Η  $f_{ij,L}(\theta)$  είναι μία τριγωνομετρική συνάρτηση που εξαρτάται από την γεωμετρία και τον τρόπο φόρτισης. Έτσι, για παράδειγμα, προκύπτει:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right)
 \tag{Εξ. 1.4}$$

Παρατηρήσεις:

- Το μέγεθος κάθε τάσης σε κάθε σημείο  $(r,\theta)$  εξαρτάται από τον συντελεστή έντασης των τάσεων, δηλαδή, διπλασιασμός του συντελεστή έντασης των τάσεων διπλασιάζει τις τάσεις κοντά στην αιχμή.
- Για τη ίδια τάση στο άπειρο, το μέγεθος των τοπικών τάσεων μεταβάλλεται κατ' αντίστροφη αναλογία προς την ρίζα του μήκους της ρωγμής.
- Η εξάρτηση των τάσεων από τη γωνία  $\theta$  είναι, σχετικώς, ασθενής. Συναρτήσε μόνο του  $\theta$ , οι τάσεις κυμαίνονται περίπου στο πεδίο  $-\sigma_\infty \leq \sigma_{ij} \leq \sigma_\infty$ .
- Η μικρότερη εξάρτηση των τοπικών τάσεων παρουσιάζεται συναρτήσε της απόστασης  $r$  από την αιχμή της ρωγμής, αφού αυτές

από  $\sigma_{\infty}$  ή μηδέν για μεγάλες τιμές του  $r$ , απειρίζονται θετικά ή αρνητικά για  $r \rightarrow 0$ , ανάλογα με το πρόσημο της  $f_{ij,L}(\theta)$ . Οι τοπικές τάσεις παρουσιάζουν, όπως λέγεται, ιδιομορφία τάξης  $(-1/2)$  ως προς το  $r$ , αφού εξαρτώνται από αυτό με την σχέση  $r^{-1/2}$ .

- e) Οι εκφράσεις των τάσεων δεν ισχύουν όταν η καταπόνηση στο άπειρο είναι θλιπτική, αφού τότε τα χείλη της ρωγμής πλησιάζουν μεταξύ τους και παύουν να είναι ελεύθερα τάσεων.
- f) Τέλος, οι σχέσεις της μορφής που αντιπροσωπεύει η εξίσωση (1.3) δεν ισχύουν για οποιοδήποτε  $r$ .

### 1.3 ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΩΣ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΣΤΟΧΙΑΣ

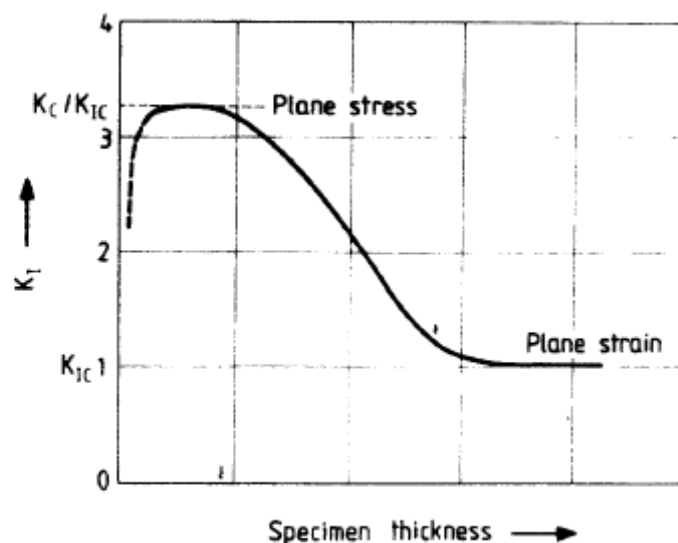
Αφού οι συντελεστές έντασης των τάσεων είναι μέτρο του μεγέθους των τάσεων πολύ κοντά στην αιχμή της ρωγμής, είναι, κατ' αρχήν θεμιτό να θεωρήσει κανείς ότι μπορεί να περιγράψει τις συνθήκες αστοχίας ενός υλικού συναρτήσει των συντελεστών αυτών κατ' ευθείαν, χωρίς αναφορά στις αντίστοιχες τάσεις. Ως αστοχία υλικού θεωρείται η εκκίνηση και ασταθής διάδοση της προϋπάρχουσας ρωγμής, ώστε τελικώς, η κατασκευή να απωλέσει την ικανότητά της να φέρει φορτία. Η διατύπωση ενός τέτοιου κριτηρίου είναι προφανής:

Η ρωγμή θα ξεκινήσει όταν ο συντελεστής έντασης των τάσεων  $K_L (L=I, II, III)$  λάβει μια κρίσιμη τιμή, έστω  $K_{LC}$ . Επομένως ορίζονται τρεις κρίσιμες τιμές για τον συντελεστή έντασης των τάσεων, οι  $K_{IC}$ ,  $K_{IIC}$ ,  $K_{IIIC}$ , μία για κάθε τύπο φόρτισης. Ανακύπτει όμως το εξής πρόβλημα:

Εξαρτημένες μεταξύ τους ή ανεξάρτητες, αυτές οι τρεις κρίσιμες τιμές μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανικές ιδιότητες υλικού; Παραμένουν, δηλαδή, σταθερές ανεξάρτητα από την γεωμετρία του δοκιμίου και το είδος φόρτισης; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι αρνητική, παρ' όλον ότι πολλοί προσποιούνται πως το αγνοούν!!

Για την διαλεύκανση του ερωτήματος θα περιορισθούμε μόνον στον κρίσιμο συντελεστή πρώτου τύπου  $K_{IC}$ , αφού τα ίδια θα μπορούσαν, κατ'αναλογία, να ισχύουν και για τους άλλους δύο. Εξάλλου ο πρώτος τύπος καταπόνησης είναι ο περισσότερο συνηθισμένος στην πράξη και ο περισσότερο επικίνδυνος.

Ο μόνος τρόπος προσδιορισμού μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών είναι η άμεση ή έμμεση πειραματική μέτρηση. Εάν εκτελεσθεί σειρά πειραμάτων με ρηγματωμένα δοκίμια συγκεκριμένης γεωμετρίας αλλά διαφορετικού πάχους, διαπιστώνεται ότι ο  $K_{IC}$  εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου. Καθώς το πάχος του δοκιμίου αυξάνεται, ο κρίσιμος συντελεστής παρουσιάζει σχετικώς ταχεία πτώση, από μία περίπου σταθερή αρχική τιμή  $K_C$  που αντιστοιχεί σε συνθήκες επίπεδης έντασης. Για μεγάλες τιμές του πάχους του δοκιμίου (όπου θεωρείται ότι επικρατούν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης) σταθεροποιείται πάλι σε μια χαμηλή τιμή που συμβολίζεται με  $K_{IC}$ . Για πολύ μικρά πάχη  $b$  δεν είναι με σαφήνεια γνωστή η συμπεριφορά του, φαίνεται όμως ότι μειώνεται ραγδαία σε τιμές, ίσως, χαμηλότερες από εκείνη των μεγάλων παχών. Η συμπεριφορά αυτή του κρίσιμου συντελεστή έντασης των τάσεων δεν μπορεί να αποδοθεί σε πειραματικά σφάλματα, αφού ο  $K_C$  είναι σημαντικά και συστηματικά μεγαλύτερος από τον  $K_{IC}$ . Για χάλυβες π.χ. ισχύει:  $K_C=3 K_{IC}$ .

**Εικόνα 1.2**

Το συμπέρασμα, λοιπόν, που εξάγεται από τα πειράματα είναι ότι ο κρίσιμος συντελεστής έντασης των τάσεων δεν είναι μηχανική ιδιότητα του υλικού, αφού εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου που χρησιμοποιήθηκε. Και βεβαιώς το πάχος δεν μπορεί να θεωρηθεί μηχανική ιδιότητα του υλικού!

Η συμπεριφορά αυτή του κρίσιμου συντελεστή έντασης των τάσεων βλάπτει την γενική αξιοπιστία αλλά δεν εξαφανίζει την πρακτική του χρησιμότητα – κυρίως σε καταστάσεις επίπεδης παραμόρφωσης - όπου, γενικώς, δείχνει αξιοπρεπή συμπεριφορά.

## 1.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η εισαγωγή των συντελεστών έντασης των τάσεων έδωσε τεράστια ώθηση στη Μηχανική των Θραύσεων . Επέτρεψε την κομψή περιγραφή του μεγέθους του τασικού πεδίου στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής, η οποία, με τη σειρά της, έδωσε τη δυνατότητα χειρισμού των απειριζομένων

τάσεων και διατύπωσης των πρώτων κριτηρίων εκκίνησης ρωγμών. Μέχρι σήμερα είναι αναντικατάστατοι ως μέτρα της έντασης των τάσεων.

Είναι, όμως, άλλο πράγμα ο συντελεστής έντασης των τάσεων,  $K_I$ , και άλλο ο κρίσιμος συντελεστής έντασης των τάσεων,  $K_{IC}$ . Ο πρώτος περιγράφει μια εντατική κατάσταση ενώ ο δεύτερος αναλαμβάνει το ρόλο 'ορίου' ή 'σταθεράς'. Τέτοια μεγέθη, όμως, πρέπει να είναι μηχανικές ιδιότητες του υλικού.

Η γοητεία των συντελεστών έντασης των τάσεων εμπόδισε την αναγνώριση ότι τα υλικά δεν αλλάζουν τον χαρακτήρα και τις μηχανικές τους ιδιότητες επειδή υπάρχει στο σώμα μια ρωγμή. Γιατί, λοιπόν, να μην υπάρχουν τα κλασικά κριτήρια αστοχίας και στα ρηγματωμένα στελέχη; Η ίδια συμπεριφορά των κρίσιμων τιμών του  $K_{IC}$  έδειξε ότι ο  $K_{IC}$  δεν μπορεί να είναι μηχανική ιδιότητα εκτός εάν το πάχος του δοκιμίου (από το οποίο και εξαρτάται ο  $K_{IC}$ ) είναι. Εάν πρόκειται να διατυπωθεί οποιοδήποτε κριτήριο αστοχίας θα πρέπει κάποιο μηχανικό μέγεθος να εξισωθεί με κάποιο 'όριο', το οποίο εξαρτάται μόνον από το χαρακτήρα του υλικού και όχι του δοκιμίου. Αλλιώς πώς μπορεί να διατυπωθεί ένα κριτήριο αστοχίας ανεξάρτητο από μία έστω μηχανική ιδιότητα του υλικού, που να ορίζει και να σχετίζεται με την αστοχία του;

Επομένως, πρέπει να θεωρούμε τους κρίσιμους συντελεστές έντασης των τάσεων ως πολύ χρήσιμες εμπειρικές-πειραματικές σταθερές σε εφαρμογές όπου υπάρχει απλή φόρτιση (mode-I, II, III). Ακόμα και τότε, όμως, δημιουργούνται ερωτήματα για τη λογική έδραση των μεθόδων πειραματικού προσδιορισμού της τιμής του  $K_{IC}$ .





# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

## ***Περιγραφή του προβλήματος***

**2.1** Εισαγωγή

**2.2** Υλικό που χρησιμοποιήσαμε

**2.3** Καταστατική εξίσωση του προβλήματος

**2.4** Γεωμετρία του προβλήματος

**2.5** Επίλυση του προβλήματος



## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι σημαντικό για έναν πειραματιστή, ειδικά αν ο τελευταίος είναι νέος, να διακατέχεται από την άποψη ότι το πείραμα δεν είναι τεχνική επαλήθευση μιας θεωρίας, αλλά η πηγή γνώσεων, συστηματοποίηση των οποίων οδηγεί στη διαμόρφωση θεωριών. Και αυτό γιατί νέες θεωρίες ανατρέπουν παλιές ενώ νέα πειράματα δεν ανατρέπουν παλιά. Ανατροπές πειραμάτων οφείλονται σε ανεπάρκεια του πειραματιστή ή των μέσων που χρησιμοποιεί. Επομένως εκτέλεση ενός πειράματος δεν είναι η διεκπεραίωση μιας διαδικασίας, αλλά η ιεροτελεστία που απαιτείται από τη φύση για να απαντήσει στην ερώτηση που της γίνεται.

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη και ο υπολογισμός του κρίσιμου συντελεστή έντασης των τάσεων σε διδιάστατες και τρισδιάστατες εντατικές καταστάσεις.

Στόχος μας είναι να σχηματίσουμε τις καμπύλες του συντελεστή έντασης των τάσεων  $K_I$  και του πάχους του δοκιμίου για υλικά γραμμικά ελαστικά και μη γραμμικά.

## 2.2 ΥΛΙΚΟ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΑΜΕ

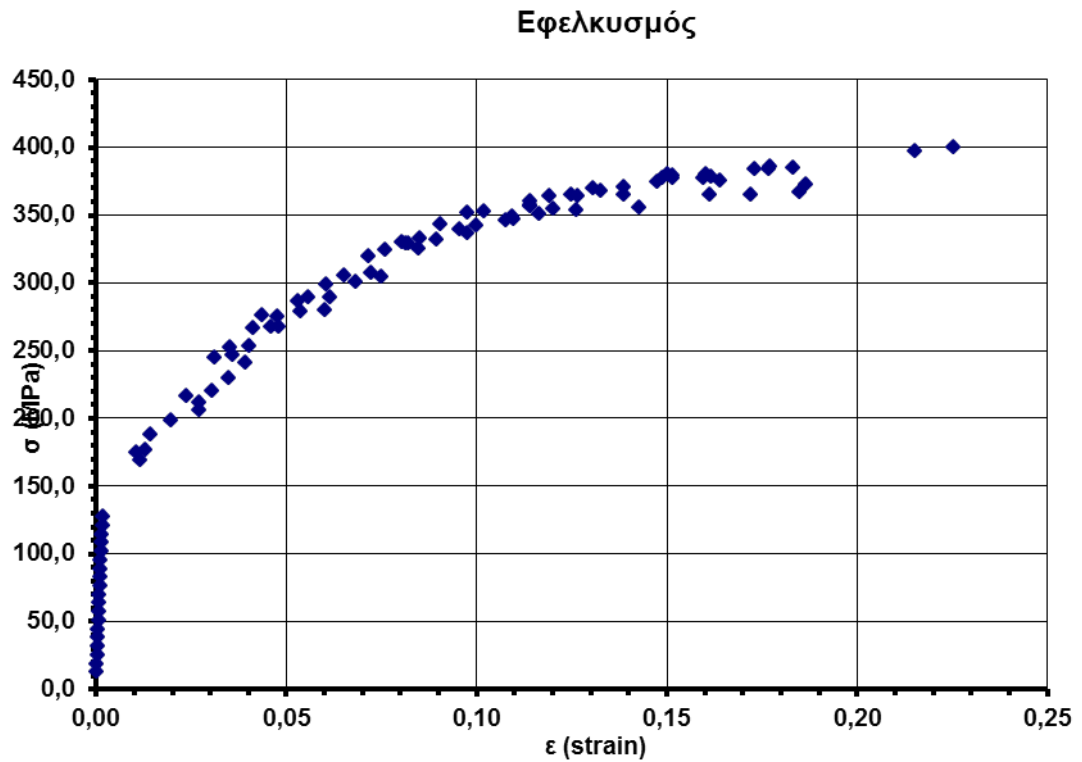
Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε είναι το ναυπηγικό Αλουμίνιο 5083 (Al 5083). Οι μηχανικές του ιδιότητες μετρήθηκαν και υπολογίστηκαν κατά ASTM με πειράματα εφελκυσμού, θλίψης και στρέψης.

Ιδιότητα	Τιμή
Μέτρο ελαστικότητας (εφελκ.)	$E = 70.2 \text{ GPa}$
Λόγος Poisson	$\nu = 0.3$
Τάση διαρροής	$\sigma_{\Delta} = 125 \text{ MPa}$
Τάση θραύσης (eng.)	$\sigma_{\theta} = 320 \text{ MPa}$
Επιμήκυνση θραύσης (eng.)	$\varepsilon_{\theta} = 25\%$
Μέτρο ελαστικότητας (θλίψη)	$E = 76.2 \text{ GPa}$
Μέτρο διάτμησης	$G = 28.1 \text{ GPa}$

Πίνακας 2.1

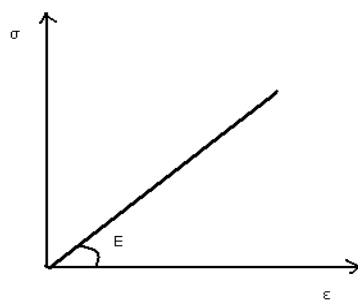
## 2.3 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω το πρόβλημα αφορά σε μοντέλα γραμμικά και μη γραμμικά ελαστικά. Η καταστατική εξίσωση του πραγματικού μοντέλου περιγράφεται από το σχήμα 2.1.

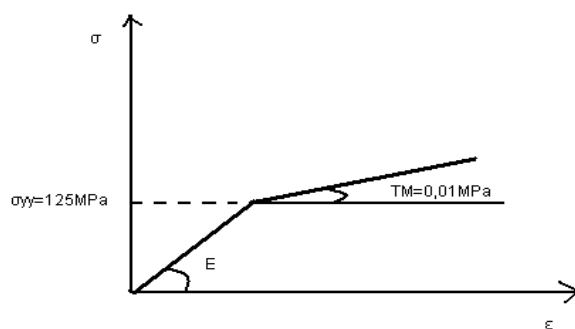


**Σχήμα 2.1**

Παρόλα αυτά εμείς το προσομοιώσαμε με ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό μοντέλο τα οποία φαίνονται στα σχήματα 2.2 και 2.3 αντίστοιχα.

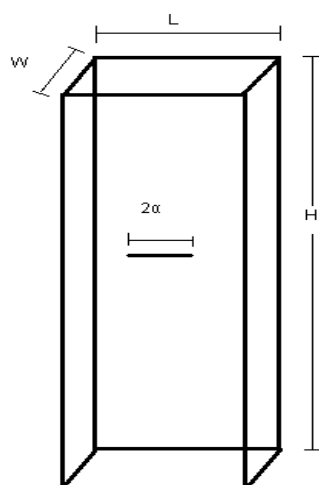


**Σχήμα 2.2**

**Σχήμα 2.3**

## 2.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

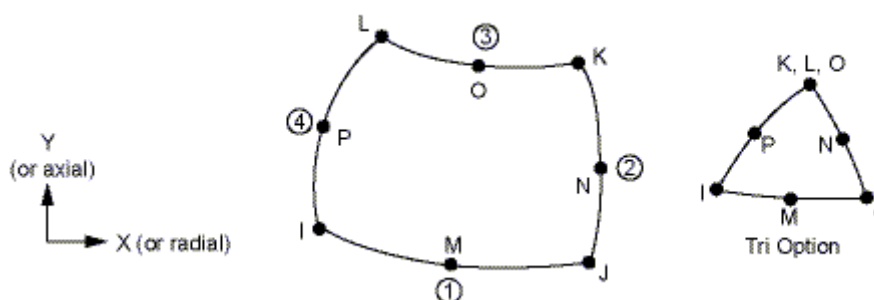
Στο πείραμα χρησιμοποιήθηκε δοκίμιο με διαστάσεις: μήκος  $H=0,20\text{m}$ , πλάτος  $L=0.071\text{m}$  και μήκος ρωγμής  $2a=0.01\text{m}$ . Το πάχος  $W$  του δοκιμίου μεταβάλλεται από  $0.001\text{m}$  έως  $0.071\text{m}$ .

**Σχήμα 2.4**

## 2.5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

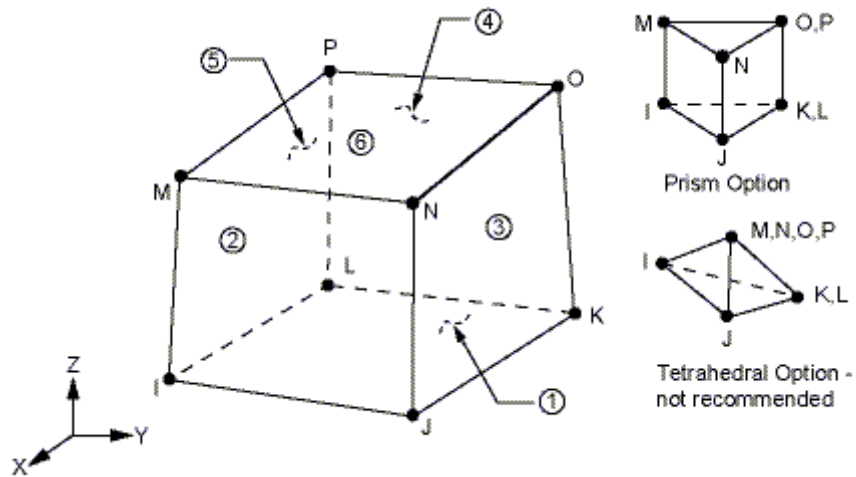
Για το πρόβλημά μας χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Ansys που λύνει γραμμικά και μη γραμμικά ελαστικά προβλήματα. Το γεγονός ότι το πείραμα δεν γίνεται σε εργαστηριακό χώρο, αλλά σε προγραμματιστικό περιβάλλον μας επιτρέπει να περιγράψουμε την αποστειρωμένη από ατέλειες και αδυναμίες διαδικασία χωρίς αυτή να επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες. Δεν μπορούμε όμως να μην λάβουμε υπ'όψιν τυχόν αποκλίσεις από την πραγματικότητα ή μη προβλεπόμενες απώλειες που ίσως ανακλύψουν σε ένα εργαστηριακό περιβάλλον όπως το Ansys.

Η γεωμετρία που χρησιμοποιήσαμε όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες είναι plane 82 για το επίπεδο πρόβλημα και solid 185 για την τρισδιάστατη περίπτωση.



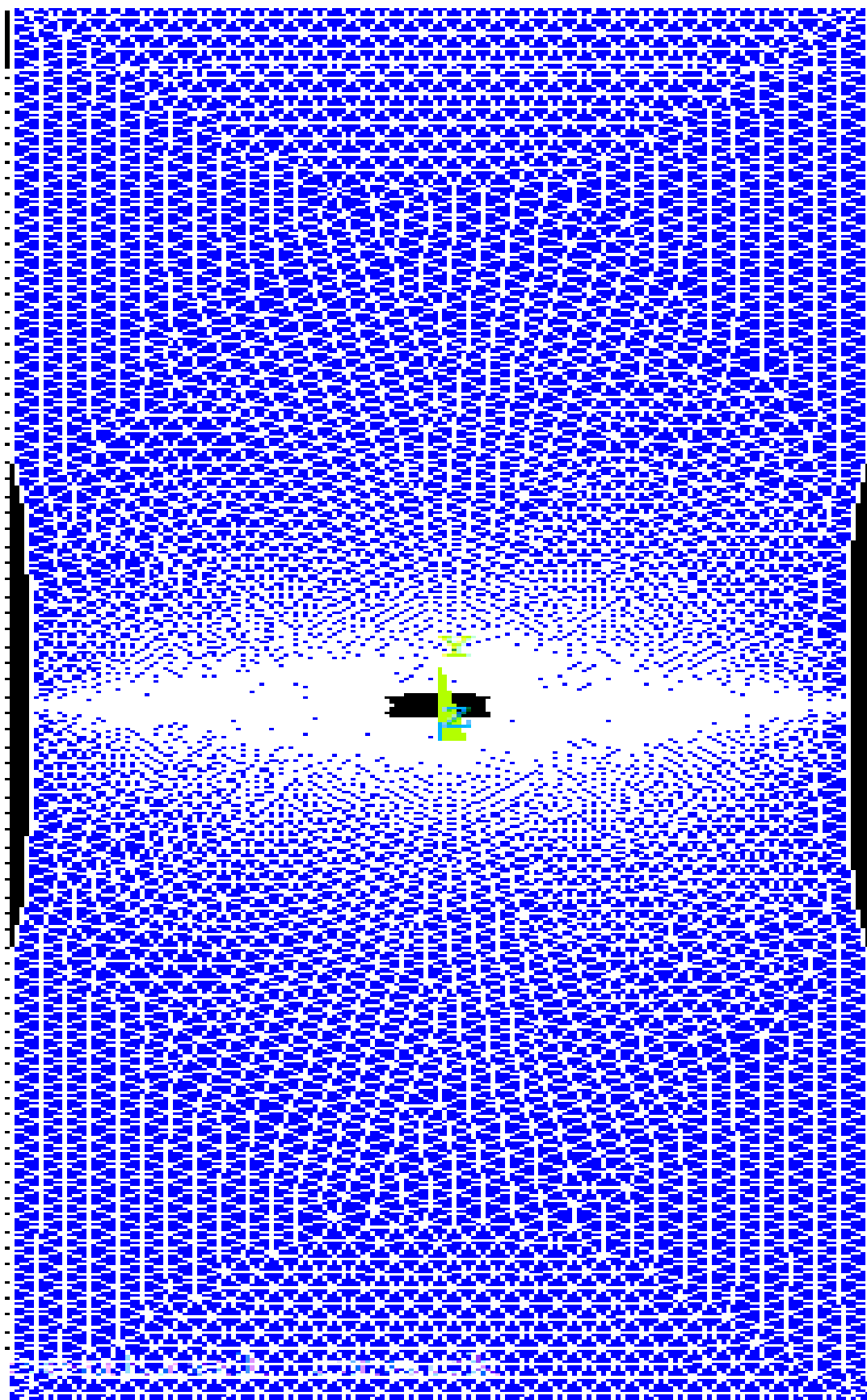
**Σχήμα 2.5: Γεωμετρία του plane82**

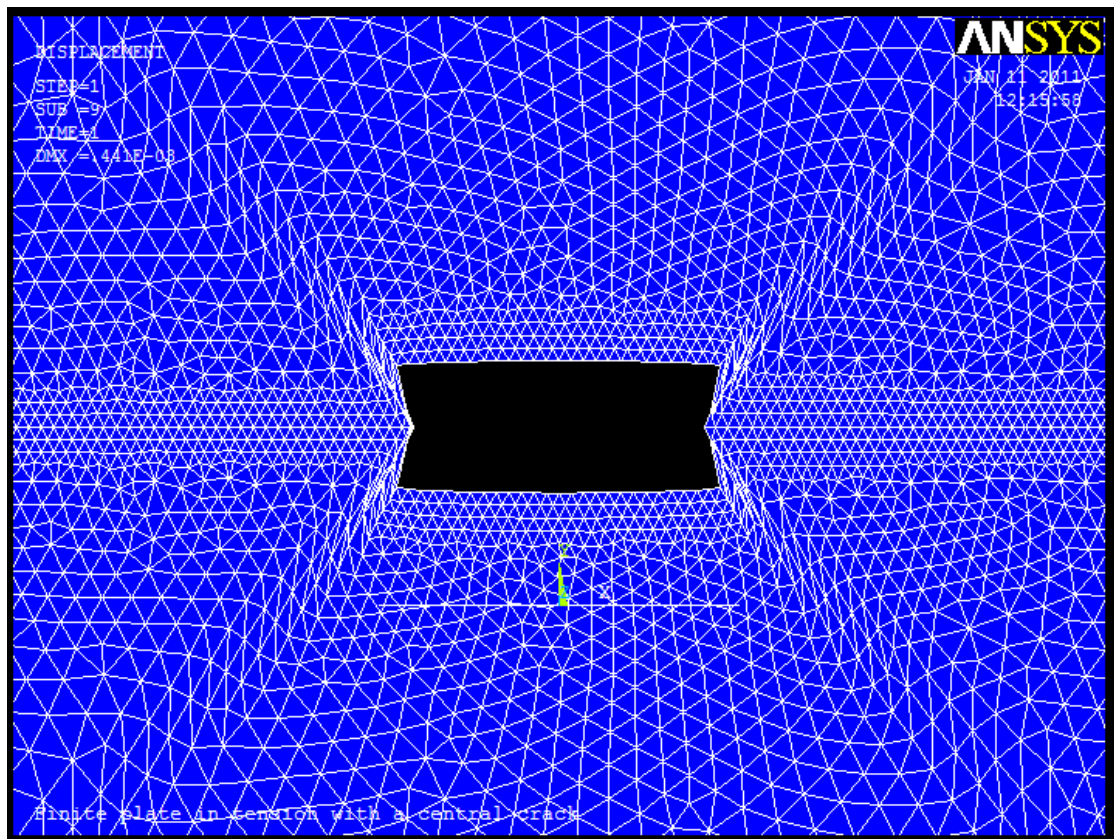




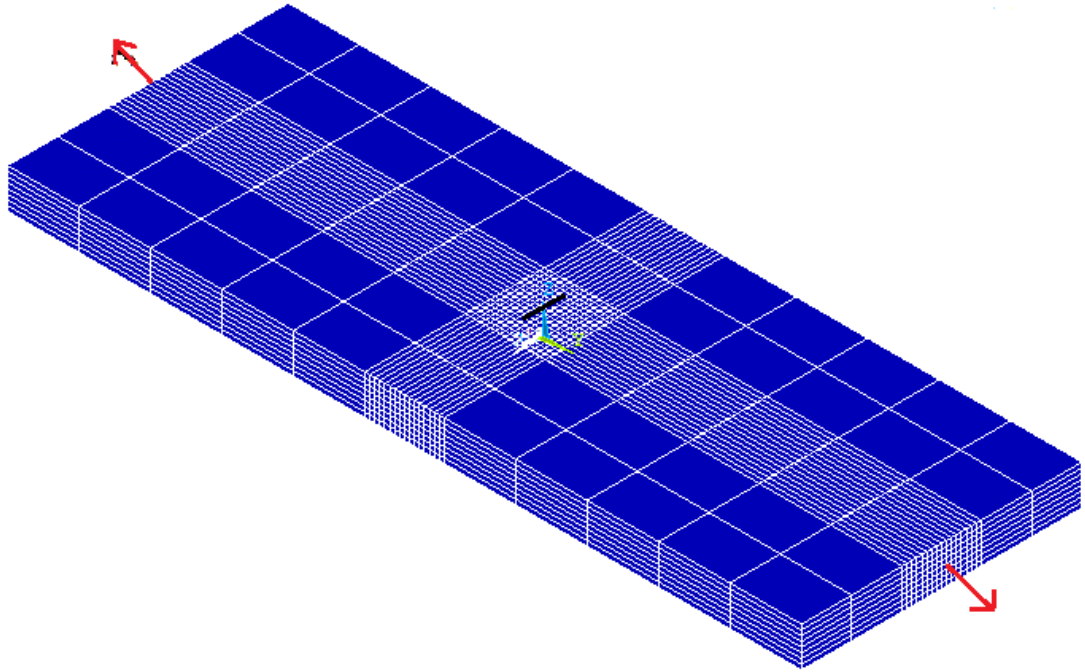
**Σχήμα 2.6: Γεωμετρία του solid185**

Ακολουθούν οι εικόνες από τον κάνναβο που είχαμε ώστε να φαίνεται η διακριτοποίηση που απαιτήσαμε στις δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα.

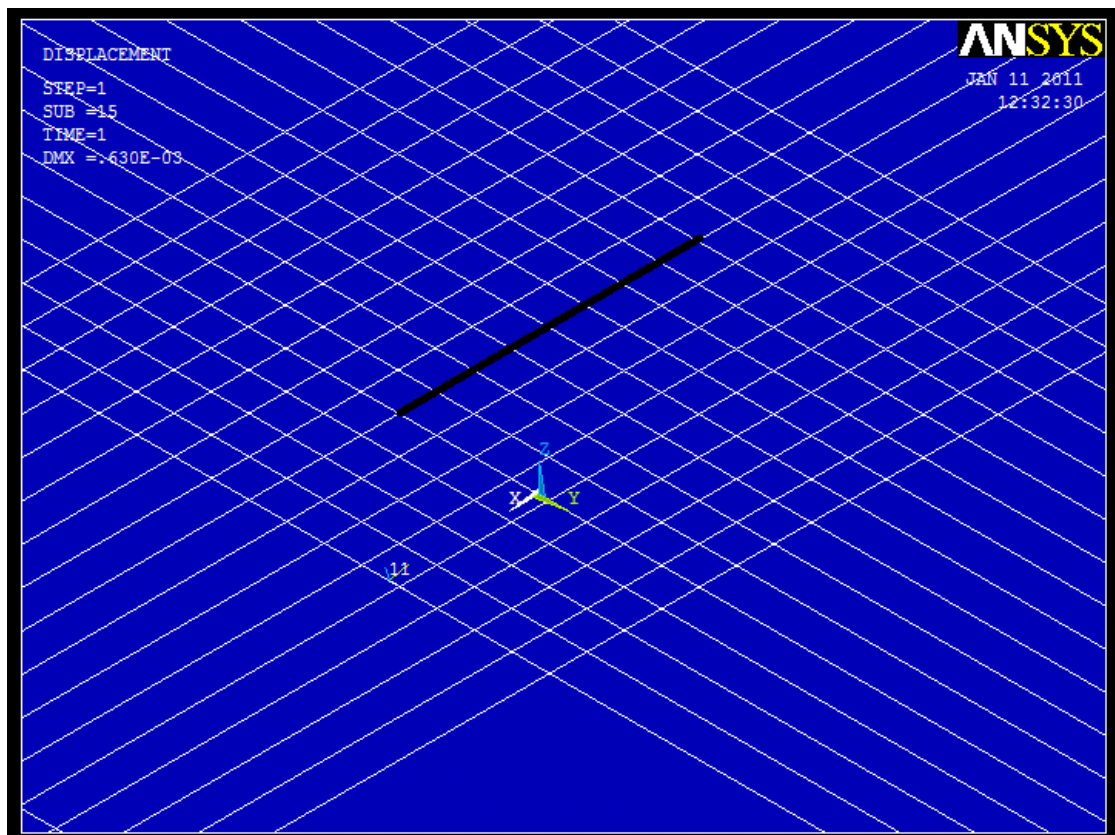
**Εικόνα 2.1**



**Εικόνα 2.2**



Εικόνα 2.3



Εικόνα 2.4



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### ***Αποτελέσματα - Συμπεράσματα***

**3.1** Εισαγωγή

**3.2** Πρόβλημα δύο διαστάσεων

**3.3** Ορισμός του  $K_1$  στις τρεις διαστάσεις

**3.4** Γραμμικό πρόβλημα τριών διαστάσεων

**3.5** Μη γραμμικό πρόβλημα τριών διαστάσεων

**3.6** Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις



### 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός μας στο σημείο αυτό είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών έντασης των τάσεων ώστε να γίνει η σύγκριση των τιμών αυτών με τις θεωρητικά προβλεπόμενες από την βιβλιογραφία. Παράλληλα, στόχος ήταν ο προσδιορισμός της μορφής που ακολουθούν οι τιμές των συντελεστών έντασης των τάσεων καθώς και η γραφική απεικόνιση των τιμών αυτών.

### 3.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στα επίπεδα προβλήματα αφού ολοκληρώθηκε η εκτέλεση του προγράμματος καταγράψαμε την τιμή της τάσης στο άκρο της ρωγμής. Η τάση αυτή, την οποία θέτουμε ως  $\sigma_y$  είναι παράλληλη στην εξωτερική φόρτιση. Γνωρίζοντας την αριθμητική τιμή της  $\sigma_y$  υπολογίσαμε από τη σχέση  $K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a}$  τον συντελεστή έντασης των τάσεων. Η διαδικασία αυτή ακολουθήθηκε για τις δύο περιπτώσεις γραμμικού και μη-γραμμικού υλικού και για επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση.

Ο κώδικας του Ansys που χρησιμοποιήθηκε στις δύο διαστάσεις παρατίθεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Η πλήρης επεξήγηση και λειτουργία του κώδικα θεωρείται ανούσια στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Από τα αποτελέσματα που λάβαμε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας και το επόμενο διάγραμμα. Ας σημειωθεί εδώ ότι σε όλα τα διαγράμματα που παρατίθενται ο κάθετος άξονας  $y$  έχει αναχθεί ως προς τον θεωρητικό συντελεστή  $K_{I0} = 15.65 \text{ MPa} \sqrt{m}$  για την επίπεδη παραμόρφωση.



2 - D			
		$K_I$	$K_I/K_{I0}$
Linear	Stress	17.54 MPa $\sqrt{m}$	1.12
	Strain	15.98 MPa $\sqrt{m}$	1.02
Non - Linear	Stress	51.99 MPa $\sqrt{m}$	3.32
	Strain	28.96 MPa $\sqrt{m}$	1.85

Πίνακας 3.1

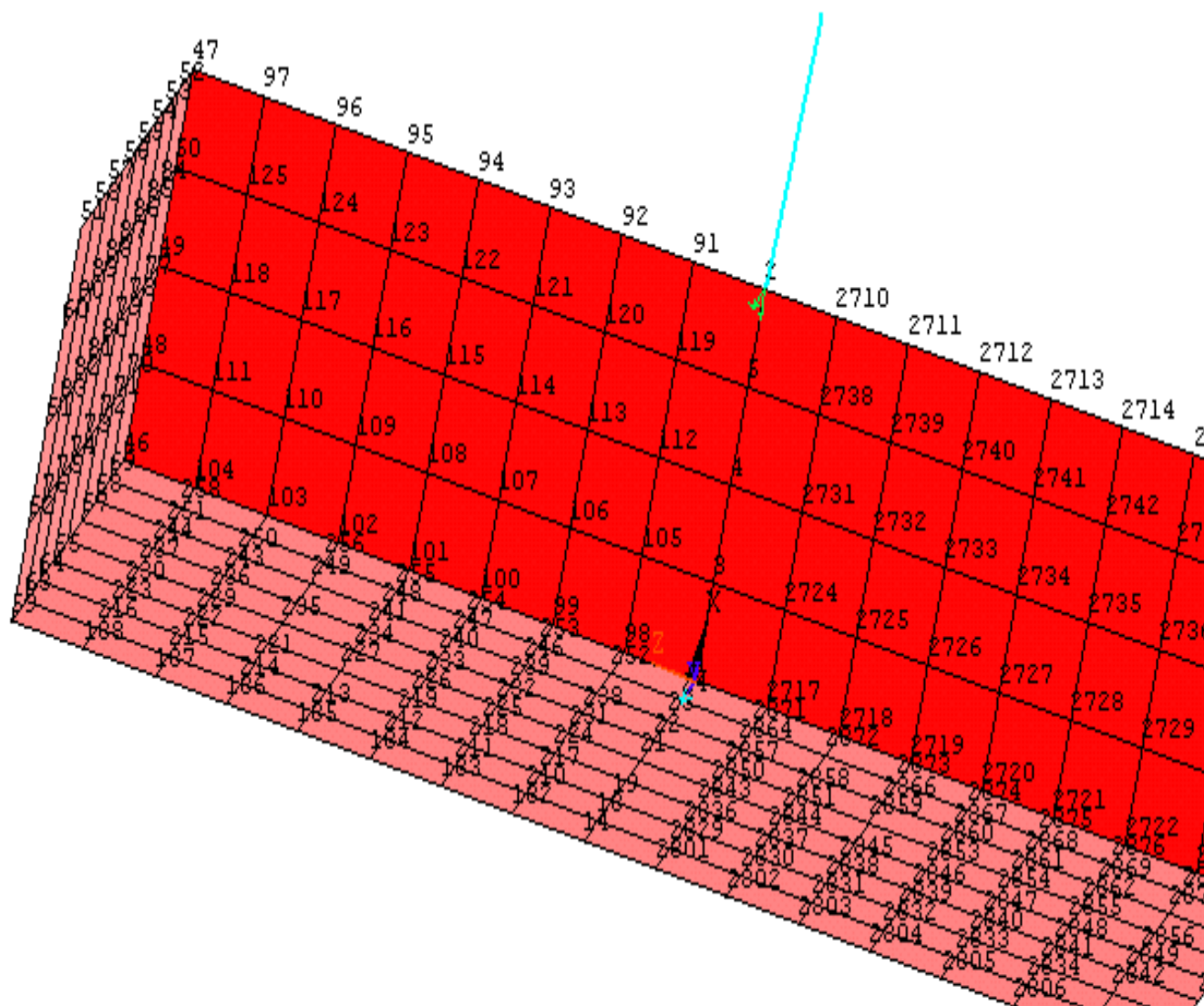


Σχήμα 3.1

### 3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $K_I$ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στις τρεις διαστάσεις δεν υπάρχει κανένας ορισμός για το  $K_I$ . Για το λόγο αυτό ακολουθήσαμε την εξής διαδικασία: Κατ'αναλογία του  $K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a}$  υπολογίσαμε την τοπική τάση  $\sigma_y$ . Συνεπώς έχουμε μια ειδική εικόνα του τι γίνεται σε κάθε σημείο του δοκιμίου μας. Έχουμε μετρήσεις για όλους τους κόμβους στο κεντρικό επίπεδο του δοκιμίου, δηλαδή σε ύψος  $H=0,10\text{m}$  από το κεντρικό επίπεδο της ρωγμής (node 2) μέχρι την επιφανειακή τομή (node 47). Στο σημείο αυτό αναφέρουμε πως τα αποτελέσματα που παραθέτουμε αφορούν σε πάχη  $0 \leq z \leq W/2$ . Παρόλα αυτά έχουν ελεγχθεί και τα αντίστοιχα αποτελέσματα για πάχη  $-W/2 \leq z \leq 0$ . Οι τιμές ήταν συμμετρικές.

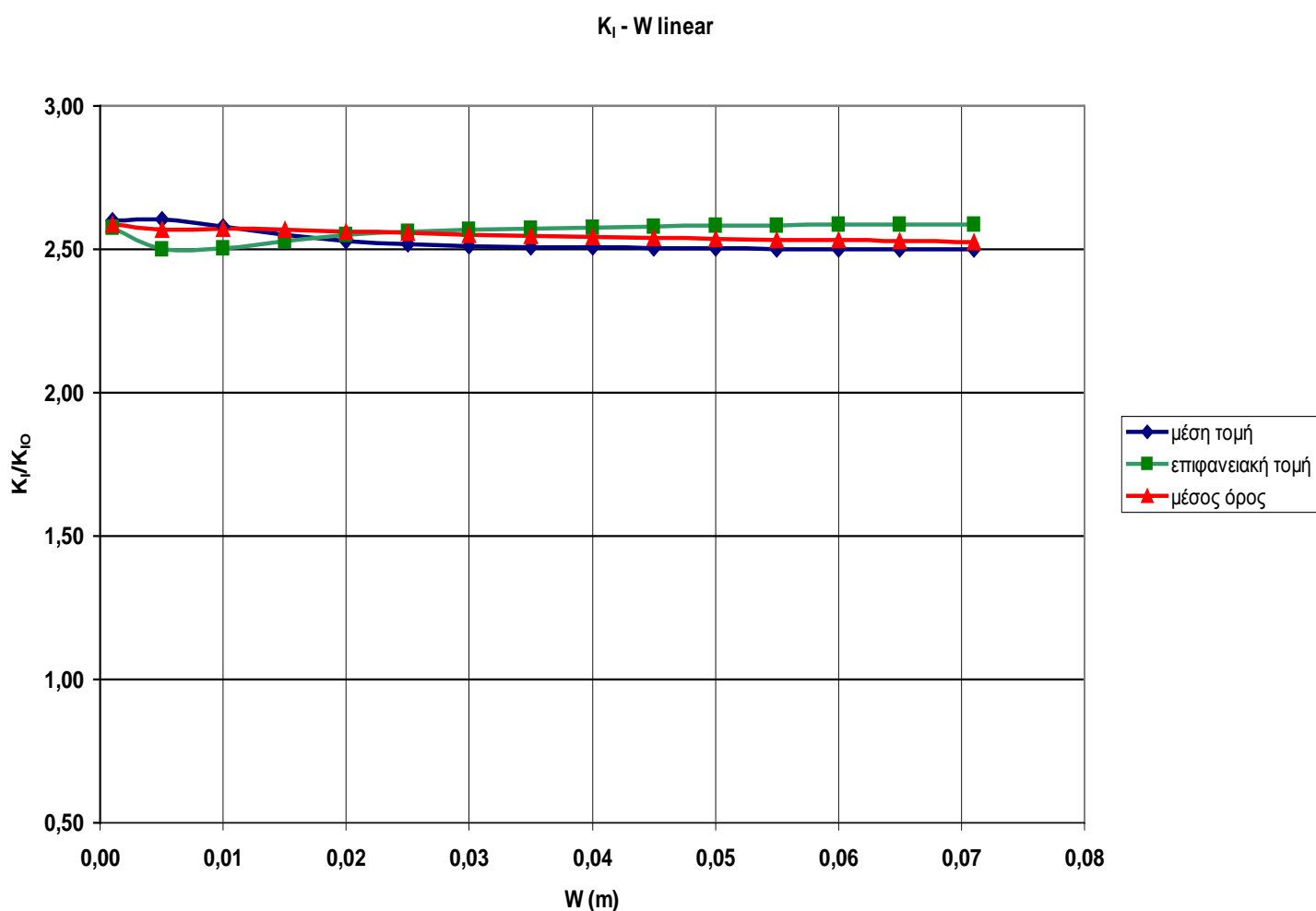
Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω, ακολουθεί η εικόνα όπου φαίνονται η ρωγμή, η μέση και επιφανειακή τομή του υλικού μας.



Εικόνα 3.1

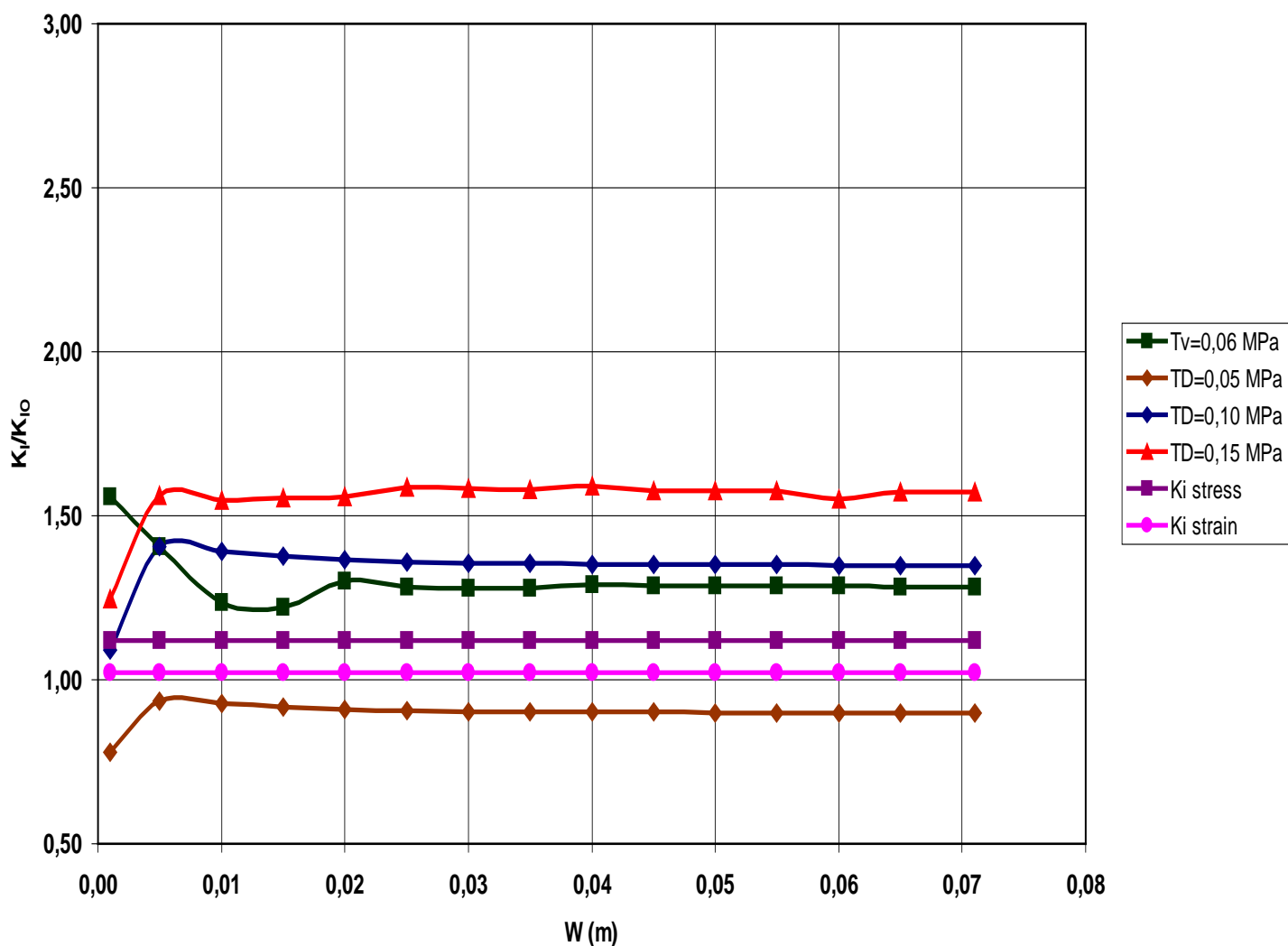
### 3.4 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στο δοκίμιο τριών διαστάσεων με γραμμική ελαστικότητα από τον πίνακα με τα αποτελέσματα για το  $K_I$  σε όλα τα πάχη και όλους τους κόμβους προέκυψαν τα ακόλουθα διαγράμματα. Απεικονίζουν την μεταβολή του  $K_I$  όσο αυξάνεται το πάχος από τον κόμβο στη μέση τομή (node 2), στην επιφανειακή τομή (node 47) καθώς και για το μέσο όρο όλων των σημείων που μεσολαβούν μεταξύ τους (average). Ο μέσος όρος των σημείων δεν συμπίπτει υποχρεωτικά με τον μέσο όρο της μέσης και επιφανειακής τομής.

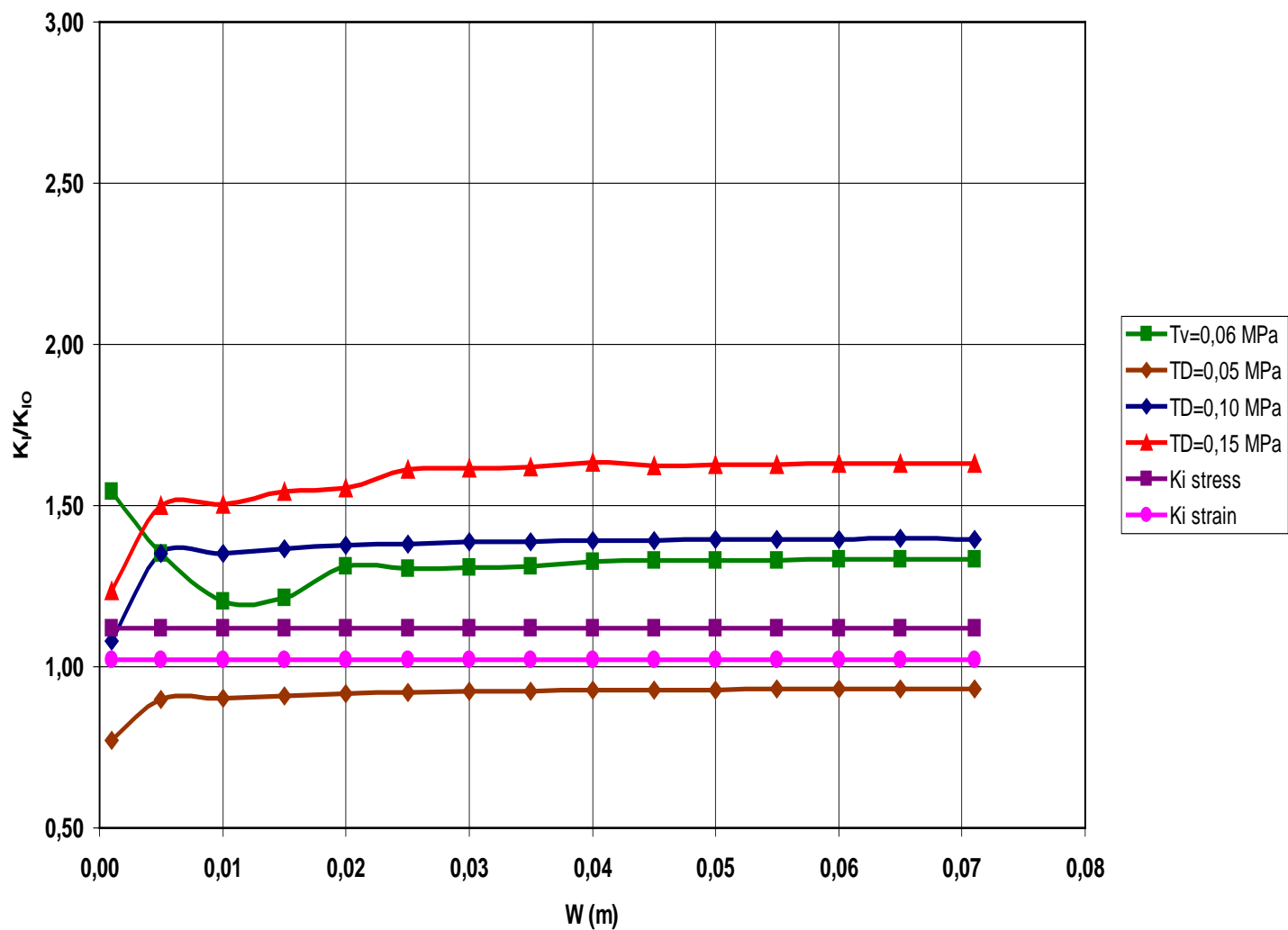


Σχήμα 3.2

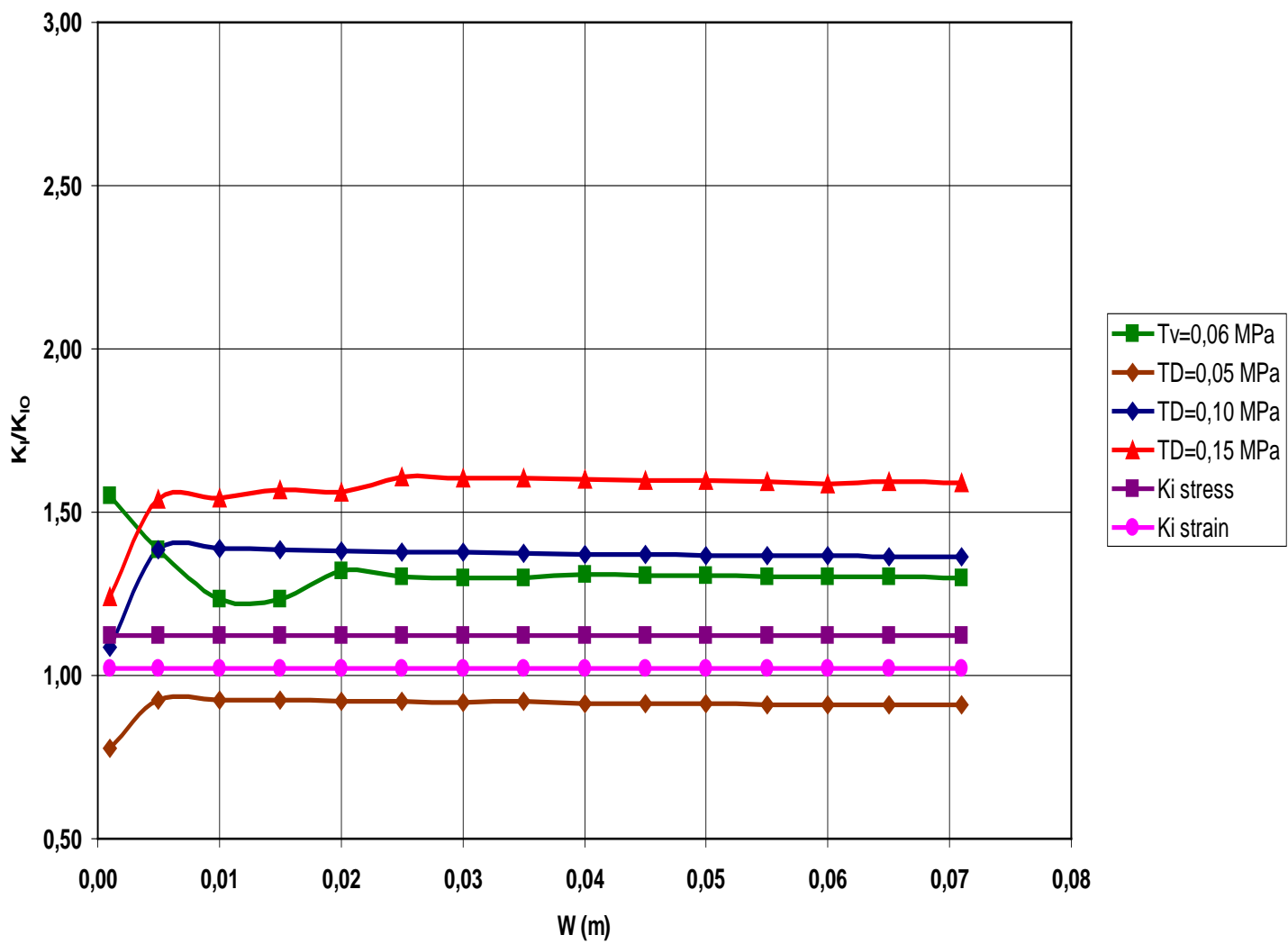
Στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου απαιτήσαμε από το Ansys να σταματάει την ανάλυση και να υπολογίζει το  $K_I$  στις περιπτώσεις όπου  $T_V=0.06$  MPa,  $T_D=0.05$  MPa,  $T_D=0.10$  MPa και  $T_D=0.15$  MPa. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις. Για λόγους σύγκρισης μαζί με τις καμπύλες για τις τέσσερις περιπτώσεις  $T_V$  και  $T_D$  σημειώνουμε τις αντίστοιχες καμπύλες του  $K_I$  για την επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση, οι οποίες είναι ανεξάρτητες του πάχους του δοκιμίου και επομένως είναι δύο ευθείες γραμμές.

Κ<sub>I</sub> - W κεντρική τομή

Σχήμα 3.3

Κ<sub>i</sub> - W επιφανειακή τομή

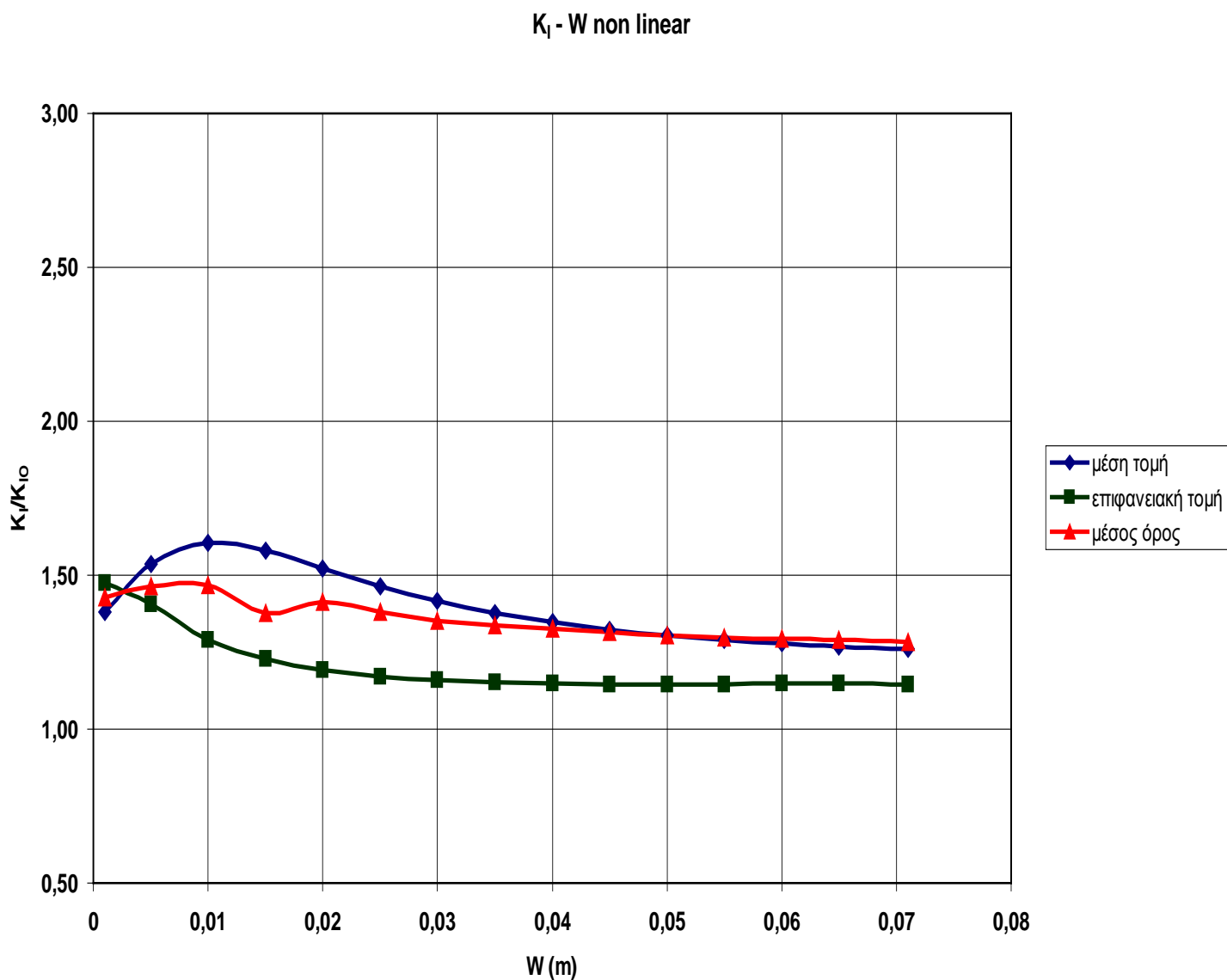
Σχήμα 3.4

Κ<sub>i</sub> - W μέσος όρος

Σχήμα 3.5

### 3.5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Όπως και στην περίπτωση του γραμμικού έτσι και για το μη γραμμικής ελαστικότητας δοκίμιο έχουμε το εξής διάγραμμα:

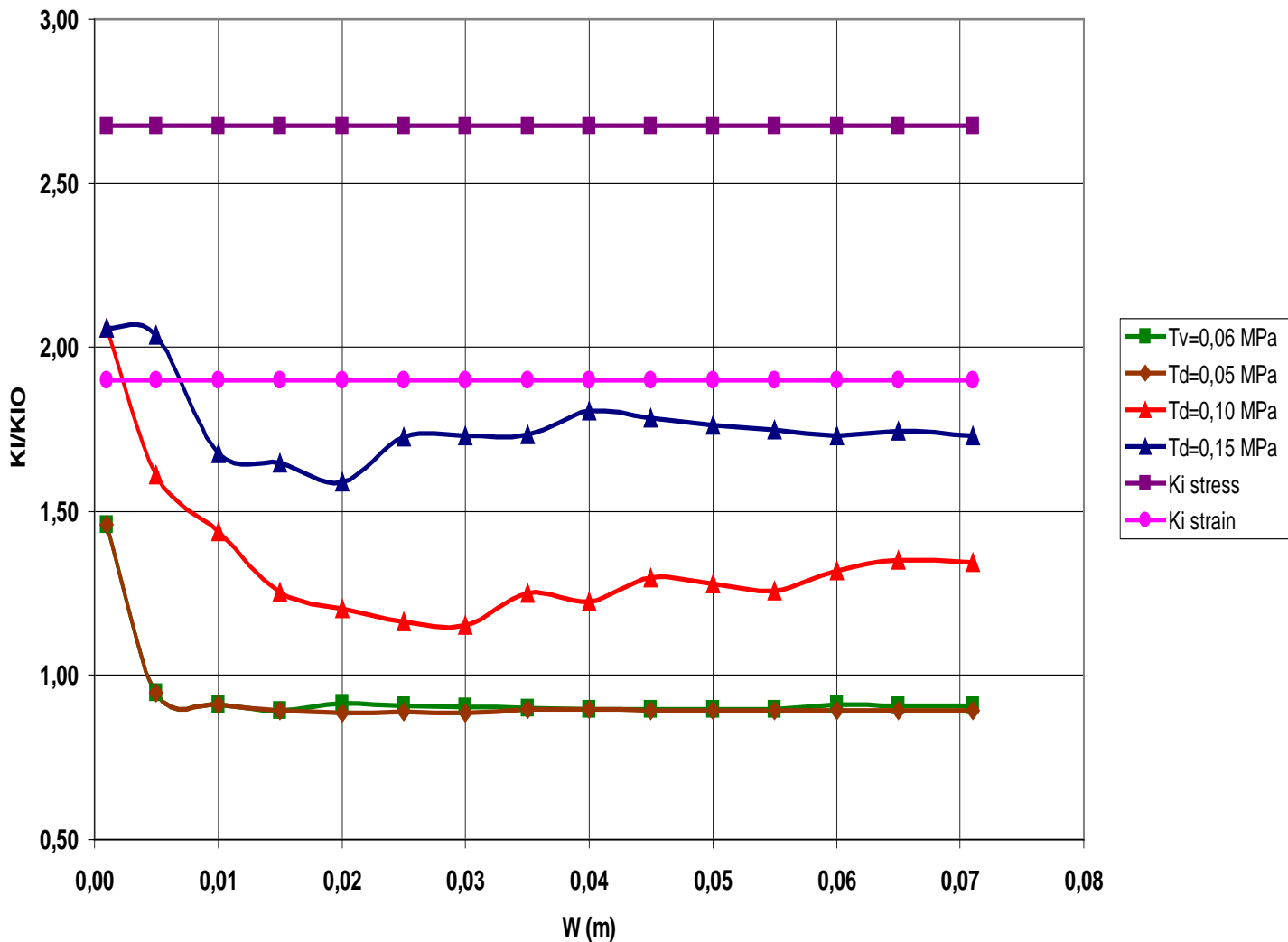


Σχήμα 3.6

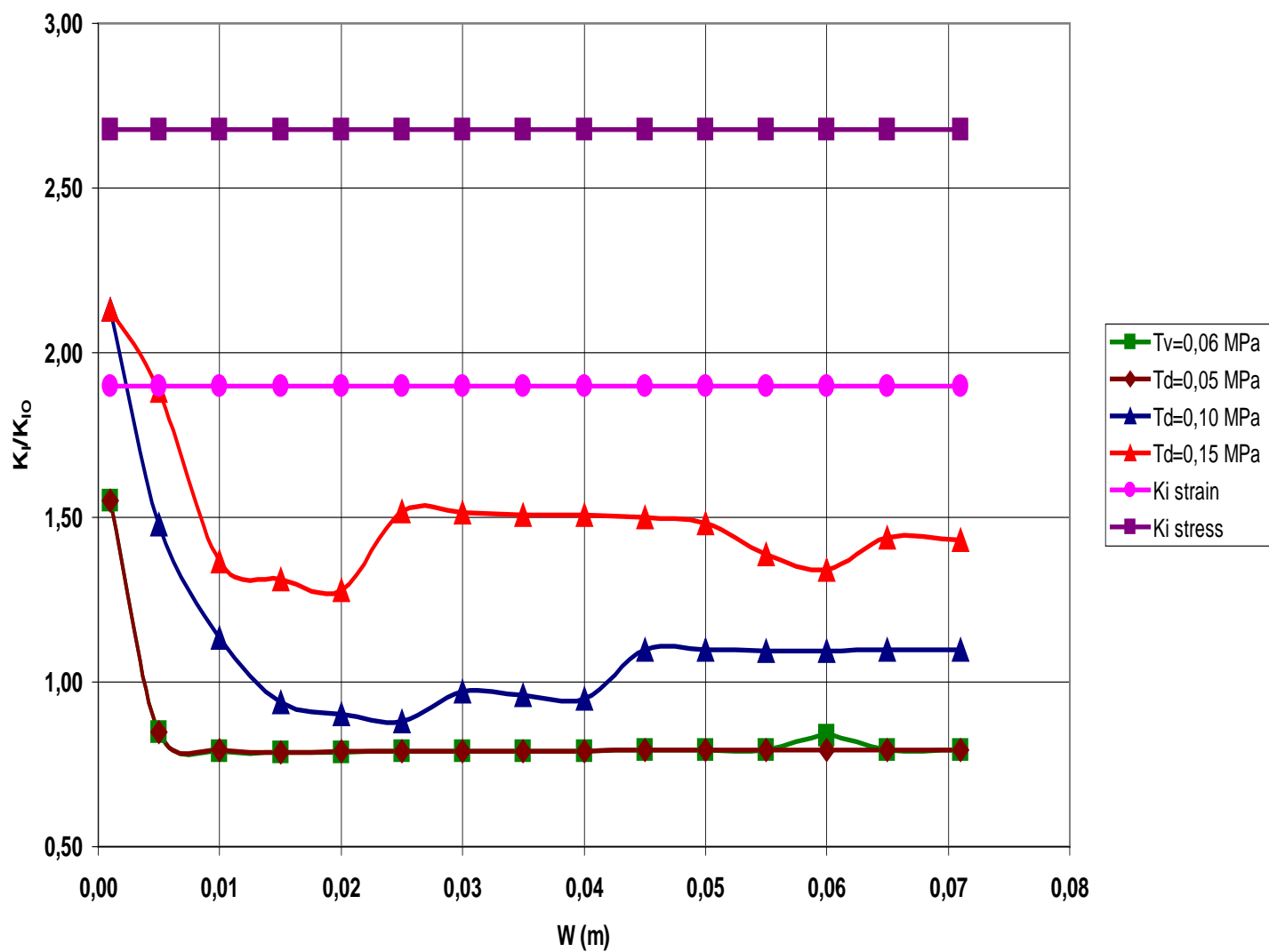


Και στην περίπτωση του μη γραμμικού μοντέλου απαιτήσαμε από το Ansys να σταματάει την ανάλυση και να υπολογίζει το  $K_I$  στις περιπτώσεις όπου  $T_V=0.06$  MPa,  $T_D=0.05$  MPa,  $T_D=0.10$  MPa και  $T_D=0.15$  MPa. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις. Για λόγους σύγκρισης μαζί με τις καμπύλες για τις τέσσερις περιπτώσεις  $T_V$  και  $T_D$  σημειώνουμε επίσης και τις αντίστοιχες καμπύλες του  $K_I$  για την επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση, οι οποίες είναι ανεξάρτητες του πάχους του δοκιμίου και επομένως είναι δύο ευθείες γραμμές.

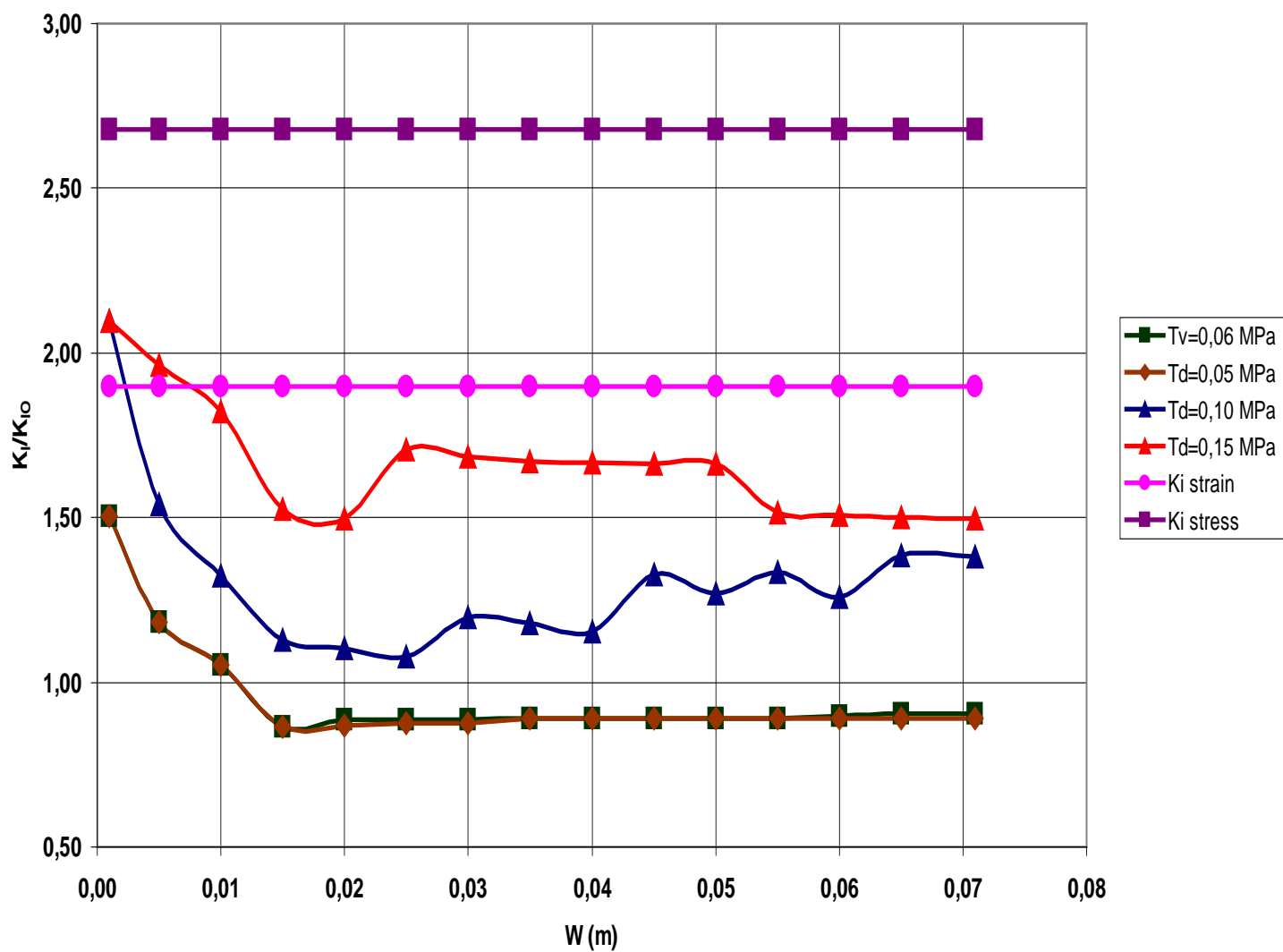
$K_I$  - W κεντρική τομή



Σχήμα 3.7

Κ<sub>i</sub> - W επιφανειακή τομή

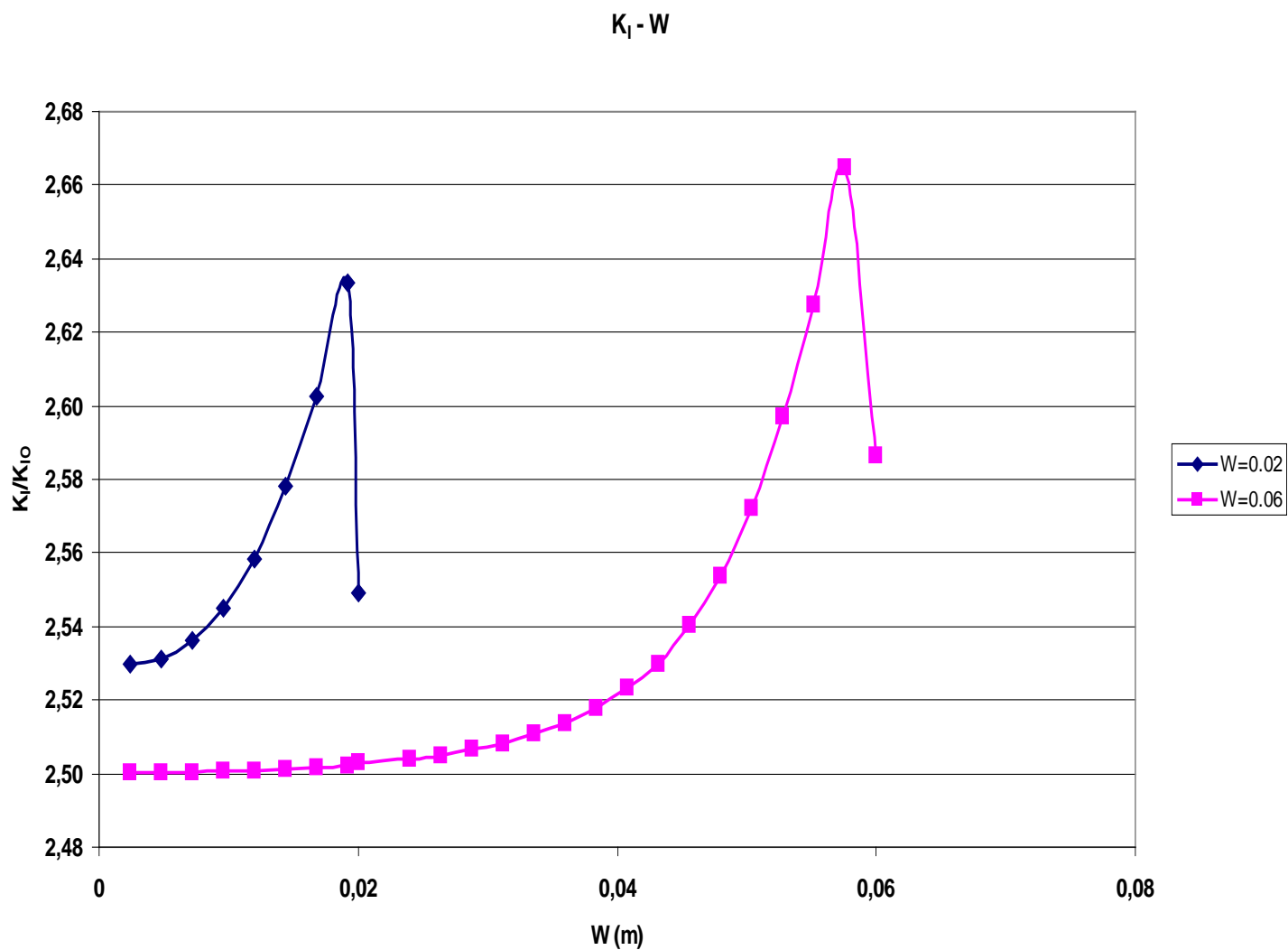
Σχήμα 3.8

Κ<sub>i</sub> - W μέσος όρος

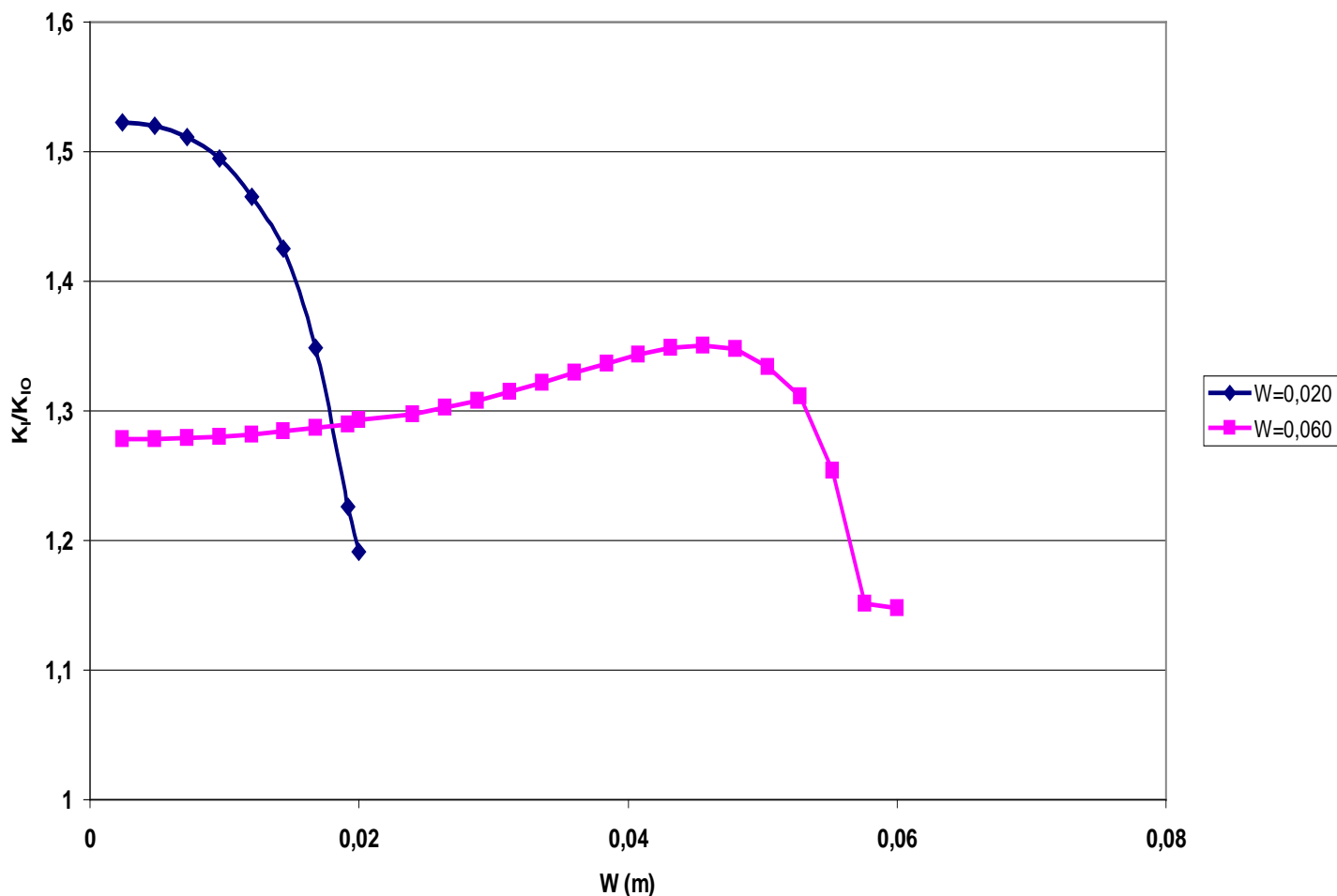
Σχήμα 3.9

### 3.6 Συμπεράσματα – Παρατηρήσεις

- 1) Στο σχήμα 3.1 οι καμπύλες αφορούν τις τιμές για το  $K_I$  σε γραμμικό και μη γραμμικό υλικό για τις περιπτώσεις της επίπεδης έντασης και της επίπεδης παραμόρφωσης. Επιπροσθέτως, για λόγους σύγκρισης έχει υπολογιστεί και σχεδιαστεί και η θεωρητική τιμή του  $K_I$  στην επίπεδη παραμόρφωση του γραμμικού μοντέλου. Η αντίστοιχη τιμή για επίπεδη ένταση δεν σχεδιάστηκε και αυτό διότι από τις σχέσεις  $K_C^2 = EG_C, K_{IC}^2 = \frac{EG_C}{1-\nu^2}$  και  $\frac{K_C}{K_{IC}} = \sqrt{1-\nu^2}$  προκύπτει ότι η τιμή αυτή είναι μικρότερη από την  $K_{IC}$  πράγμα που είναι τελείως αντίθετο από την πειραματική εμπειρία.
- 2) Στα τρισδιάστατα προβλήματα γίνεται λόγος για την τιμή του  $K_I$  χωρίς να ορίζεται αν πρόκειται για επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση και αυτό επειδή το κάθε πάχος του δοκιμίου δεν ανήκει σε καμία από τις δύο καταστάσεις.
- 3) Στο σχήμα 3.2 ο κρίσιμος συντελεστής έντασης των τάσεων δεν έχει αξιόλογη διακύμανση καθώς δεν παρατηρείται καμία σημαντική μεταβολή του  $K_I$  κατά την μεταβολή του πάχους.
- 4) Αντίθετα, στο σχήμα 3.6 (συγκρίνοντας το με το 3.2) οι τιμές είναι σημαντικά χαμηλότερες (από το 2.5 στο 1.5 δηλαδή παρατηρούμε διαφορά της τάξης 66,7% ανάμεσα στα διαγράμματα γραμμικού και μη γραμμικού μοντέλου), ενώ παράλληλα παρατηρείται και ισχυρότερη μεταβολή συναρτήσει του πάχους.
- 5) Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα 3.2 και 3.6 η καμπύλη του μέσου όρου δεν αποτελεί τον αριθμητικό μέσο όρο των τιμών για την μέση και επιφανειακή τομή και αυτό διότι η κατανομή που ακολουθείται στο προβλημά μας δεν είναι γραμμική. Για του λόγου το αληθές παραθέτουμε τις καμπύλες του  $K_I$  για δύο πάχη στις περιπτώσεις του γραμμικού και μη γραμμικού μοντέλου.



Σχήμα 3.10

Κ<sub>I</sub> - W

Σχήμα 3.11

Παρατηρούμε ότι στη γραμμική περίπτωση το  $K_I$  αυξάνεται σταδιακά και πέφτει απότομα, ενώ στη μη γραμμική περίπτωση παρουσιάζει μια πιο ομαλή συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα στο πάχος  $W=0.060$  m οι τιμές του  $K_I$  είναι σταθερές μέχρι  $W=0.030$  m και στη συνέχεια για το γραμμικό μοντέλο αυξάνονται, ενώ στο μη γραμμικό παρατηρείται πτώση.

- 6) Συγκρίνοντας τα σχήματα 3.3 και 3.7 βλέπουμε ότι στο γραμμικό μοντέλο το εύρος τιμών είναι μεγαλύτερο.
- 7) Στην καμπύλη για  $T_V$  σταθερό του γραμμικού μοντέλου, το  $K_I$  μειώνεται με την αύξηση του πάχους και σταδιακά σταθεροποιείται, ενώ οι καμπύλες του  $K_I$  για το  $T_D$  αυξάνονται και σταθεροποιούνται.

- 8) Στο μη γραμμικό μοντέλο η κατάσταση αλλάζει και η καμπύλη του  $K_I$  για το  $T_V$  συμπεριφέρεται όπως και για το  $T_D$ . Ξεκινούν, δηλαδή, από μεγάλες τιμές και μειώνονται.
- 9) Στη μη γραμμική περίπτωση οι τιμές του  $K_I$  για μεγάλα πάχη σταθεροποιούνται, ενώ για μικρά πάχη κάτω από 0.002 m παρουσιάζουν έντονη αύξηση. Σαν παράδειγμα, αναφέρουμε την περίπτωση του σχήματος 3.8 για  $T_D=0.10$  MPa όπου για  $W=0.07$ m έχουμε  $K_I=1.10$  ενώ για  $W=0.001$ m πάει στο  $K_I=2.13$ . Αυτό σημαίνει ότι η σχέση που παρατηρούμε για πολύ μικρά και πολύ μεγάλα πάχη ομοιάζει των καταστάσεων plain stress και plain strain.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α

Παράρτημα Β

Βιβλιογραφία





## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται οι κύριοι κώδικες καθώς και οι υπορουτίνες του για την επεξεργασία του γραμμικού μοντέλου.

- **Κύριος κώδικας δύο διαστάσεων**

```
! NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
! FACUALTY OF MECHANICS
! ATHENS, 3/2008
! ALL UNITS IN Newton,mm
! 2-D Fracture Analysis
!***** Deleting previous model *****
FINISH
/CLEAR,NOSTART
!***** Setting Title *****
/title, Finite plate in tension with a central crack
/FILNAME,CentralCrack,0
/UNITS,SI
!***** INPUT *****! !***| can change
these***!
! 1. Geometry !
! Specimen Height (m): !
H=0.20
! Specimen Width (m): !
W=0.071
! Specimen thickness (m): !
t=0.002
! Crack half length (m): !
a=0.005
! Crack angle (degrees) : !
th=90
!2. Material properties !
! Young's modulus (N/m^2): !
```

```

E=7.02E10
! Poison's ratio : !
n=0.3
! Yielding stress (N/m^2): !
syy=125E6
! Tangent modulus (N/m^2): !
tm=100e2
! 3. Loading !
! Applied Stress (N/m^2) : !
s00=syy                               !!!!!!!! s00=syy/4 kai allo ena gia
s00=syy/2
!L=S00*t*w
TH=90-TH
*AFUN,DEG ! Angles in degrees
/PREP7
!***** Element type definition ***** !***I can change these***!
ET,1,PLANE82,,,2 !*plane strain*!
! |-> KeyOpt(3)=0 (Plane stress)
! Does not need real constants
!***** Material Properties *****
! Steel with E=7.02E10 Pa and v=0.3
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,n
!***** Geometric Definitions
b=2*a*COS(TH)
A1=(W-B)/2
C=2*A*SIN(TH)
! define keypoints
K,1,-A1-B/2,-C/2
K,2,-B/2,-C/2
K,3,B/2,C/2
K,4,W/2,C/2
K,5,W/2,H/2
K,6,-W/2,H/2
K,7,W/2,-H/2

```

```

K,8,-W/2,-H/2
! define lines connecting keypoints
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,5
L,5,6
L,6,1
LGEN,2,1,3,,0,0,0
L,12,7
L,7,8
L,8,9
! Create the Area
AL,1,2,3,4,5,6
AL,7,8,9,10,11,12
! Descretize lines
LESIZE,ALL,A/14
LSEL,S,,,4,6
LSEL,A,,,10,12
LESIZE,ALL,A/2,,,,1
LSEL,S,,,ALL
MSHAPE,1
AMESH,ALL
NSEL,S,LOC,X,-2*W,-B/2
NUMMRG,NODE,0.A/1000
NSEL,S,LOC,X,B/2,2*W
NUMMRG,NODE,0.A/1000
NSEL,S,,,ALL
!***** Boundary Conditions *****
DL,11,,ALL,0
! Distributed loading on lines
SFL,5,PRES,-s00
FINISH
!***** SOLUTION *****
/SOLU

```

```

ANTYPE,STATIC
SOLVE
FINISH
/POST1
!PLNSOL,S,EQV
SET,LAST
! ***** TV *****
ETABLE,EX,EPEL,X
ETABLE,EY,EPEL,Y
ETABLE,EZ,EPEL,Z
SADD,EXXY,EX,EY
SADD,IE,EXXY,EZ
ETABLE,SX,S,X
ETABLE,SY,S,Y
ETABLE,SZ,S,Z
SADD,SXXYY,SX,SY
SADD,IS,SXXYY,SZ
SMULT,TV,IE,IS,1/2,1/3
! ***** TD *****
ETABLE,EXY,EPEL,XY
ETABLE,EXZ,EPEL,XZ
ETABLE,EYZ,EPEL,YZ
ETABLE,SXY,S,XY
ETABLE,SXZ,S,XZ
ETABLE,SYZ,S,YZ
SADD,EXXEM,EX,IE,,-1/3
SADD,EYYEM,EY,IE,,-1/3
SADD,EZZEM,EZ,IE,,-1/3
SMULT,SXXEXXEM,SX,EXXEM,1/2
SMULT,SYYEYYEM,SY,EYYEM,1/2
SMULT,SZZEZZEM,SZ,EZZEM,1/2
SMULT,SXYEXY,SXY,EXY
SMULT,SXZEXZ,SXZ,EXZ
SMULT,SYZEYZ,SYZ,EYZ
SADD,TD_1,SXXEXXEM,SYYEYYEM

```

SADD,TD\_2,TD\_1,SZZEZEM  
SADD,TD\_3,SXYEXY,SXZEXZ  
SADD,TD\_4,TD\_3,SYZEYZ  
SADD,TD,TD\_2,TD\_4  
SEXP,TVlogTD,TV,TD,1,-1  
! \*\*\*\*\*  $\theta$  \*\*\*\*\*  
ETABLE,E1,EPEL,1  
ETABLE,E2,EPEL,2  
ETABLE,E3,EPEL,3  
SADD,E12,E1,E2,,  
SADD,Th,E12,E3,,

- **Κύριος κώδικας τριών διαστάσεων**

```

finish
/clear,nostart
/nerr,,99999999
! Young's modulus (N/m^2): !
E=7.02E10
! Poison's ratio : !
n=0.3
/prep7          !anoikse ton preprocessor
!/TITLE,
/view,1,1,1,-1      !Orizei os pros poia optiki gonia tha blepoume to
modelo
/vup,1,z          !Orizei poios axonas einai o katakorifos.Edo katakorifos
einai o y, orizontios o x kai mesa apo tin othoni o z
ET,1,solid185,,2      !antikatastasi me plane82 (plane stress kai plane
strain)
!MAT,1          !orismos steel os uliko 1
MP,ex,1,E        !metro elastikotitas
MP,PRXY,1,n      !logos poisson
!TB,BISO,1
!TBDATA,1,120e6
!TBDATA,2,0.25e10
!Marble dimensions
L=0.071
H=0.2
W=0.001
!Crack dimensions
a=0.005
    !Construction
k,1,0,0
k,2,a,0
k,3,2*a,0

```

k,4,L/2,0  
k,5,-a,0  
k,6,-2\*a,0  
k,7,-L/2,0  
k,8,0,2\*a  
k,9,a,2\*a  
k,10,2\*a,2\*a  
k,11,L/2,2\*a  
k,12,-a,2\*a  
k,13,-2\*a,2\*a  
k,14,-L/2,2\*a  
k,15,0,H/2  
k,16,a,H/2  
k,17,2\*a,H/2  
k,18,L/2,H/2  
k,19,-a,H/2  
k,20,-2\*a,H/2  
k,21,-L/2,H/2  
k,22,0,0  
k,23,0,-2\*a  
k,24,a,-2\*a  
k,25,2\*a,-2\*a  
k,26,L/2,-2\*a  
k,27,-a,-2\*a  
k,28,-2\*a,-2\*a  
k,29,-L/2,-2\*a  
k,30,0,-H/2  
k,31,a,-H/2  
k,32,2\*a,-H/2  
k,33,L/2,-H/2  
k,34,-a,-H/2  
k,35,-2\*a,-H/2  
k,36,-L/2,-H/2  
a,1,2,9,8  
a,2,3,10,9



```
a,3,4,11,10
a,1,5,12,8
a,5,6,13,12
a,6,7,14,13
a,8,9,16,15
a,9,10,17,16
a,10,11,18,17
a,8,12,19,15
a,12,13,20,19
a,13,14,21,20
a,22,2,24,23
a,2,3,25,24
a,3,4,26,25
a,22,5,27,23
a,5,6,28,27
a,6,7,29,28
a,23,24,31,30
a,24,25,32,31
a,25,26,33,32
a,23,27,34,30
a,27,28,35,34
a,28,29,36,35
vext,all,,,,,W/2
allsel
asel,s,loc,z,0
vext,all,,,,,-W/2
allsel
vatt,1,,1
      !Mesh
e1=0.00125
e2=0.02
allsel
vsel,s,loc,x,-2*a,2*a
vsel,r,loc,y,-2*a,2*a
cm,crack,volu
```

```

allsel
vsel,s,,,crack
esize,e1
mshape,0,3D
mshkey,1
vmesh,all
allsel
vsel,u,,,crack
esize,e2
mshape,0,3D
mshkey,1
vmesh,all
        !Boundary conditions
allsel
asel,s,loc,y,-H/2
da,all,ux,0        !paktosi epifaneias
da,all,uy,0
da,all,uz,0
da,all,rotx,0
da,all,roty,0
da,all,rotz,0
/SOLU
Autots,OFF        ! Specifies whether to use automatic time stepping or load
stepping.
NSUBST,20        ! Specifies the number of substeps to be taken this load
step.
KBC,0            ! Specifies stepped or ramped loading within a load step
ANTYPE,0
NLGEOM,ON
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,-20
TIME,1
force=-10650        !*****!!!!!!! 125 MPa
allsel
asel,s,loc,y,H/2

```

```
sfa,all,1,pres,force/(L*W)
```

```
eplot
```

```
acel,,9.81
```

```
allsel
```

```
solve
```

```
save
```

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται οι κύριοι κώδικες καθώς και οι υπορουτίνες του για την επεξεργασία των του μη γραμμικού μοντέλου.

- **Κύριος κώδικας δύο διαστάσεων**

```
! NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
! FACULTY OF MECHANICS
! ATHENS, 3/2008
! ALL UNITS IN Newton,mm
! 2-D Fracture Analysis
!***** Deleting previous model *****
FINISH
/CLEAR,NOSTART
!***** Setting Title *****
/title, Finite plate in tension with a central crack
/FILNAME,CentralCrack,0
/UNITS,SI
!***** INPUT *****!      !***!
can change these***!
! 1. Geometry !
! Specimen Height (m): !
H=0.20
! Specimen Width (m): !
W=0.071
! Specimen thickness (m): !
t=0.002
! Crack half length (m): !
a=0.005
! Crack angle (degrees) : !
th=90
!2. Material properties !
! Young's modulus (N/m^2): !
```

```

E=7.02E10
! Poison's ratio : !
n=0.3
! Yielding stress (N/m^2): !
syy=125E6
! Tangent modulus (N/m^2): !
tm=100e2
! 3. Loading !
! Applied Stress (N/m^2) : !
s00=syy                               !!!!!!!!!! s00=syy/4 kai allo
ena gia s00=syy/2
!L=S00*t*w
TH=90-TH
*AFUN,DEG ! Angles in degrees
/PREP7
!***** Element type definition ***** !***| can change
these***!
ET,1,PLANE82,,,2 !*plane strain*!
! |-> KeyOpt(3)=0 (Plane stress)
! Does not need real constants
!***** Material Properties *****
! Steel with E=7.02E10 Pa and v=0.3
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,n
TB,BISO,1
TBDATA,1,120e6
TBDATA,2,0.25e10
!***** Geometric Definitions
b=2*a*COS(TH)
A1=(W-B)/2
C=2*A*SIN(TH)
! define keypoints
K,1,-A1-B/2,-C/2
K,2,-B/2,-C/2
K,3,B/2,C/2

```

```

K,4,W/2,C/2
K,5,W/2,H/2
K,6,-W/2,H/2
K,7,W/2,-H/2
K,8,-W/2,-H/2
! define lines connecting keypoints
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,5
L,5,6
L,6,1
LGEN,2,1,3,,0,0,0
L,12,7
L,7,8
L,8,9
! Create the Area
AL,1,2,3,4,5,6
AL,7,8,9,10,11,12
! Descretize lines
LESIZE,ALL,A/14
LSEL,S,,,4,6
LSEL,A,,,10,12
LESIZE,ALL,A/2,,,,1
LSEL,S,,,ALL
MSHAPE,1
AMESH,ALL
NSEL,S,LOC,X,-2*W,-B/2
NUMMRG,NODE,0.A/1000
NSEL,S,LOC,X,B/2,2*W
NUMMRG,NODE,0.A/1000
NSEL,S,,,ALL
!***** Boundary Conditions *****
DL,11,,ALL,0
! Distributed loading on lines

```

```

SFL,5,PRES,-s00
FINISH
!***** SOLUTION *****
/SOLU
ANTYPE,STATIC
SOLVE
FINISH
/POST1
!PLNSOL,S,EQV
SET,LAST
! ***** TV *****
ETABLE,EX,EPEL,X
ETABLE,EY,EPEL,Y
ETABLE,EZ,EPEL,Z
SADD,EXXY,EX,EY
SADD,IE,EXXY,EZ
ETABLE,SX,S,X
ETABLE,SY,S,Y
ETABLE,SZ,S,Z
SADD,SXXY,SX,SY
SADD,IS,SXXY,SZ
SMULT,TV,IE,IS,1/2,1/3
! ***** TD *****
ETABLE,EXY,EPEL,XY
ETABLE,EXZ,EPEL,XZ
ETABLE,EYZ,EPEL,YZ
ETABLE,SXY,S,XY
ETABLE,SXZ,S,XZ
ETABLE,SYZ,S,YZ
SADD,EXXEM,EX,IE,, -1/3
SADD,EYYEM,EY,IE,, -1/3
SADD,EZZEM,EZ,IE,, -1/3
SMULT,SXXEM,SX,EXXEM,1/2
SMULT,SYYEM,SY,EYYEM,1/2
SMULT,SZZEM,SZ,EZZEM,1/2

```

SMULT,SXYEXY,SXY,EXY  
SMULT,SXZEXZ,SXZ,EXZ  
SMULT,SYZEYZ,SYZ,EYZ  
SADD,TD\_1,SXXEXXEM,SYEYYEM  
SADD,TD\_2,TD\_1,SZZEZZEM  
SADD,TD\_3,SXYEXY,SXZEXZ  
SADD,TD\_4,TD\_3,SYZEYZ  
SADD,TD,TD\_2,TD\_4  
SEXP,TVlogTD,TV,TD,1,-1  
! \*\*\*\*\* 0 \*\*\*\*\*  
ETABLE,E1,EPEL,1  
ETABLE,E2,EPEL,2  
ETABLE,E3,EPEL,3  
SADD,E12,E1,E2,,  
SADD,Th,E12,E3,,



- **Κύριος κώδικας τριών διαστάσεων**

```

finish
/clear,nostart
/nerr,,99999999
/prep7          !anoikse ton preprocessor
!/TITLE,
/view,1,1,1,-1      !Orizei os pros poia optiki gonia tha
blepoume to modelo
/vup,1,z           !Orizei poios axonas einai o
katakorifos.Edo katakorifos einai o y, orizontios o x kai mesa
apo tin othoni o z
ET,1,solid185,,2    !antikatastasi me plane82 (plane
stress kai plane strain)
!MAT,1            !orismos steel os uliko 1
MP,ex,1,7.02e10    !metro elastikotitas
MP,PRXY,1,0.3      !logos poisson
TB,BISO,1
TBDATA,1,120e6
TBDATA,2,0.25e10
!Marble dimensions
L=0.071
H=0.2
W=0.001
!Crack dimensions
a=0.005
          !Construction
k,1,0,0
k,2,a,0
k,3,2*a,0
k,4,L/2,0
k,5,-a,0
k,6,-2*a,0
k,7,-L/2,0
k,8,0,2*a

```

k,9,a,2\*a  
k,10,2\*a,2\*a  
k,11,L/2,2\*a  
k,12,-a,2\*a  
k,13,-2\*a,2\*a  
k,14,-L/2,2\*a  
k,15,0,H/2  
k,16,a,H/2  
k,17,2\*a,H/2  
k,18,L/2,H/2  
k,19,-a,H/2  
k,20,-2\*a,H/2  
k,21,-L/2,H/2  
k,22,0,0  
k,23,0,-2\*a  
k,24,a,-2\*a  
k,25,2\*a,-2\*a  
k,26,L/2,-2\*a  
k,27,-a,-2\*a  
k,28,-2\*a,-2\*a  
k,29,-L/2,-2\*a  
k,30,0,-H/2  
k,31,a,-H/2  
k,32,2\*a,-H/2  
k,33,L/2,-H/2  
k,34,-a,-H/2  
k,35,-2\*a,-H/2  
k,36,-L/2,-H/2  
a,1,2,9,8  
a,2,3,10,9  
a,3,4,11,10  
a,1,5,12,8  
a,5,6,13,12  
a,6,7,14,13  
a,8,9,16,15

```

a,9,10,17,16
a,10,11,18,17
a,8,12,19,15
a,12,13,20,19
a,13,14,21,20
a,22,2,24,23
a,2,3,25,24
a,3,4,26,25
a,22,5,27,23
a,5,6,28,27
a,6,7,29,28
a,23,24,31,30
a,24,25,32,31
a,25,26,33,32
a,23,27,34,30
a,27,28,35,34
a,28,29,36,35
vext,all,,,,,W/2
allsel
asel,s,loc,z,0
vext,all,,,,,-W/2
allsel
vatt,1,,1
                                !Mesh
e1=0.00125
e2=0.02
allsel
vsel,s,loc,x,-2*a,2*a
vsel,r,loc,y,-2*a,2*a
cm,crack,volu
allsel
vsel,s,,,crack
esize,e1
mshape,0,3D
mshkey,1

```

```
vmesh,all
allsel
vsel,u,,,crack
esize,e2
mshape,0,3D
mshkey,1
vmesh,all
```

!Boundary conditions

```
allsel
asel,s,loc,y,-H/2
da,all,ux,0 !paktosi epifaneias
da,all,uy,0
da,all,uz,0
da,all,rotx,0
da,all,roty,0
da,all,rotz,0
/SOLU
Autots,OFF ! Specifies whether to use automatic time
stepping or load stepping.
NSUBST,20 ! Specifies the number of substeps to be
taken this load step.
KBC,0 ! Specifies stepped or ramped loading within a
load step
ANTYPE,0
NLGEOM,ON
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,-20
TIME,1
force=-10650 !*****!!!!!!
125 MPa
allsel
asel,s,loc,y,H/2
sfa,all,1,pres,force/(L*W)
eplot
```

```
acel,,9.81
allsel
solve
save
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! tension
!gia to noumero tou node sto kentro
allsel
vsel,s,loc,x,0,a
vsel,r,loc,y,0,a
eslv
nsle
nsel,r,loc,x,a
nsel,r,loc,y,0
nsel,r,loc,z,0
```

!gia to noumero tou node mprosta

```
allsel
vsel,s,loc,x,0,a
vsel,r,loc,y,0,a
eslv
nsle
nsel,r,loc,x,a
nsel,r,loc,y,0
nsel,r,loc,z,W/2
```

!afou vreis ta duo noumera, vriskeis apo to list tis times ton taseon kai paramorfoseon

!gia noumero elements

```
allsel
vsel,s,loc,x,0,a
vsel,r,loc,y,-2*a,2*a
eslv
```

```
!Tv
allsel
```

etable,ex,epel,x  
etable,ey,epel,y  
etable,ez,epel,z  
sadd,exxy,ex,ey  
sadd,ie,exxy,ez  
etable,sx,s,x  
etable,sy,s,y  
etable,sz,s,z  
sadd,sxxy,sx,sy  
sadd,is,sxxy,sz  
smult,tv,ie,is,1/2,1/3

!Td  
allsel  
etable,exy,epel,xy  
etable,exz,epel,xz  
etable,eyz,epel,yz  
etable,sxy,s,xy  
etable,sxz,s,xz  
etable,syz,s,yz  
sadd,exxem,ex,ie,, -1/3  
sadd,eyyem,ey,ie,, -1/3  
sadd,ezzem,ez,ie,, -1/3  
smult,sxxexxem,sx,exxem,1/2  
smult,syyeyyem,sy,eyyem,1/2  
smult,szzezem,sz,ezzem,1/2  
smult,sxyexy,sxy,exy  
smult,sxzexz,sxz,exz  
smult,syzeyz,syz,eyz  
sadd,td\_1,sxxexxem,syyeyyem  
sadd,td\_2,td\_1,szzezem  
sadd,td\_3,sxyexy,sxzexz  
sadd,td\_4,td\_3,syzeyz  
sadd,td,td\_2,td\_4  
sexp,tvlogtd,tv,td,1,-1

!gia tous arithmous ton nodes sto epano kommati

local,11,0

wpcsys,1,11

allsel

vsel,s,loc,y,0,100

vsel,r,loc,x,0,a

eslv

!gia tous arithmous ton nodes sto kato kommati

local,11,0

wpcsys,1,11

allsel

vsel,s,loc,y,0,-100

vsel,r,loc,x,0,a

eslv

!!!!!!!! PROSDIORISMOS KI STIN KENTRIKI DIATOMI TOU  
DOKIMIOU !!!!!!!!!

!prosdiorismos K stin kentriki diatomi (gia plane strain)

allsel

local,11,0,a

wpcsys,1,11

PATH,KI,5,,50

PPATH,1,2

PPATH,2,4

PPATH,3,1

PPATH,4,768

PPATH,5,766

kcalc,0,1,3,0 !plane strain

!prosdiorismos K stin kentriki diatomi (gia plane stress)

allsel

local,11,0,a

wpcsys,1,11

PATH,KI,5,,50

PPATH,1,2

PPATH,2,4

PPATH,3,1

```

PPATH,4,768
PPATH,5,766
kcalc,1,1,3,0      !plane stress
!!!!!!!!!! PROSDIORISMOS KI STIN MPROSTA DIATOMI TOU
DOKIMIOU !!!!!!!!!!!
!prosdiorismos K stin mprosta diatomi (gia plane strain)
allsel
local,11,0
wpcsys,1,11
local,11,0,a,0,W/2
wpcsys,1,11
PATH,KI,5,,50
PPATH,1,47
PPATH,2,49
PPATH,3,46
PPATH,4,812
PPATH,5,810
kcalc,0,1,3,0      !plane strain
!prosdiorismos K stin mprosta diatomi (gia plane stress)
allsel
local,11,0
wpcsys,1,11
local,11,0,a,0,W/2
wpcsys,1,11
PATH,KI,5,,50
PPATH,1,47
PPATH,2,49
PPATH,3,46
PPATH,4,812
PPATH,5,810
kcalc,1,1,3,0      !plane stress

```



Σημείωση: Και στους δύο κώδικες τριών διαστάσεων κάναμε αλλαγές στις παραμέτρους του πάχους και της δύναμης σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

<b>W (m)</b>	<b>f (N*m)</b>
0.001	10.650
0.005	53.250
0.010	106.500
0.015	159.750
0.020	213.000
0.025	266.250
0.030	319.500
0.035	372.750
0.040	426.000
0.045	479.250
0.050	532.500
0.055	585.750
0.060	639.000
0.065	692.250
0.071	756.150

# Βιβλιογραφία

## *Βιβλία*

- [1] Μηχανική των θραύσεων, Ν.Ανδριανόπουλος, Εκδόσεις Συμεών 2006
- [2] Πειραματική αντοχή των υλικών, Ν.Ανδριανόπουλος, Ε.Κυριαζή, Κ.Λιακόπουλος, Εκδόσεις Συμεών 1991
- [3] Σημειώσεις του μαθήματος μηχανική των θραύσεων, Ν.Ανδριανόπουλος, Δ.Πάζης, Αθήνα 1998
- [4] Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, Γ.Τσαμασφύρος, Ε.Θεοτόκογλου, Εκδόσεις Συμμετρία 2005
- [5] Ansys Tutorial, Dr A.-V. Phan, University of South Alabama
- [6] Συμβολή στη Μελέτη Κριτηρίων Αστοχίας μη Γραμμικών Ελαστικών Υλικών, Β.Μανωλόπουλος

## *Άρθρα*

- [1] Failure by fracture or yielding in Strain Hardening materials according to the T-Criterion, N.Andrianopoulos, V.Boulougouris, Engineering Fracture Mechanics Vol.47, No.5, pp.639-651, 1994
- [2] On an intrinsic relationship between plane stress and plane strain critical stress intensity factors, N.Andrianopoulos, V.Boulougouris, International Journal of Fracture 67: R9-R12, 1994