

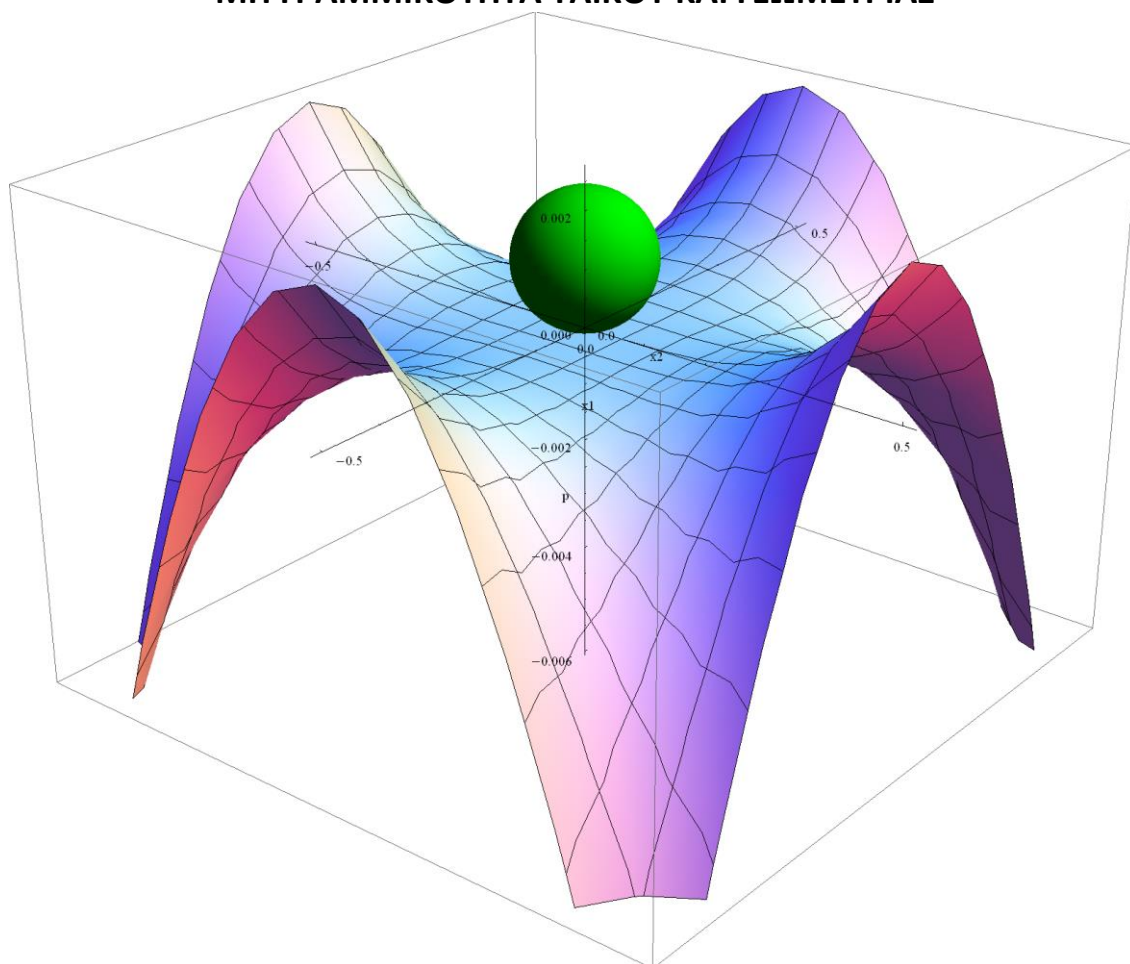


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γιώργου Ελμέζογλου

**ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**



Επιβλέπων : Ι. Ραυτογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

ΕΜΚ ΔΕ 2013 83

***Στη Μνήμη του Πατέρα μου,
Γιάννη Ελμέζογλου,
Πολιτικού Μηχανικού ΕΜΠ***

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή μου κ. Ι. Ραυτογιάννη για το ότι με εμπιστεύτηκε και ανέλαβε την επίβλεψη της Διπλωματικής Εργασίας μου. Για την άριστη συνεργασία μας. Για το ενδιαφέρον και την προσοχή σε κάθε λεπτομέρεια και για τον χρόνο του που παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης. Για την επίλυση όλων των αποριών που προέκυψαν. Για την ηθική στήριξη και το φιλικό πνεύμα που τον διακατέχει προς τους φοιτητές.

Ευχαριστώ θερμά τον Λέκτορα ΕΜΠ κ. Τ. Αβραάμ για την πολύτιμη συμβολή του σε αυτή την εργασία, με την επίλυση αποριών, καθώς και με τις εύστοχες συμβουλές. Για την αφειδώλευτη βοήθειά του στα μαθήματα της Στατικής, Δυναμικής και Ευστάθειας. Για την ηθική στήριξη.

Αθήνα, 19 Δεκεμβρίου 2013

Περίληψη

Οι σύγχρονες κατασκευές, λόγω των ακριβέστερων μεθόδων ανάλυσης, διαστασιολογούνται οριακά. Έτσι, είναι πιο ευάλωτες σε φαινόμενα αστάθειας - λυγισμού. Πλέον η παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα διαφέρει σημαντικά από την απαραμόρφωτη, επομένως η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία, όπως γίνεται στις κλασικές μεθόδους στατικής ανάλυσης, οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα και πρέπει να αποφεύγεται. Η ανάγκη διατύπωσης των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη γεωμετρία, η οποία δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης, και οδηγεί σε κατάργηση της αναλογίας μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης, που είναι γνωστή ως **γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά**.

Επίσης, η τοπική υπέρβαση του ορίου διαρροής του δομικού υλικού απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης, και επίσης οδηγεί σε κατάργηση της αναλογίας μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης, που είναι γνωστή ως **μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού**.

Στην παρούσα εργασία θα εκθέσουμε ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας (2-B.E.K.) ελαστικού προβόλου, υποκείμενου σε λυγισμό λόγω κατακόρυφου φορτίου στο ελεύθερο άκρο του. Το μηχανικό αυτό πρότυπο είναι γνωστό ως πρότυπο **Augusti**. Θα εξετάσουμε τη **γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά** διαφόρων παραλλαγών του προτύπου:

- Αρχικά την κλασική με τα στροφικά ελατήρια
- Με οριζόντια μετακινησιακά ελατήρια
- Με λοξά μετακινησιακά ελατήρια
- Με ένα στροφικό και ένα οριζόντιο ελατήριο

Για να διερευνήσουμε τη **μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού** στα παραπάνω συστήματα, θα κάνουμε χρήση μη γραμμικών ελαστικών ελατηρίων, και συγκεκριμένα σκληρών ελατηρίων, όπως θα δούμε.

Abstract

Modern structures, because of the more accurate analysis methods, are statically designed to the limit. So, they are more vulnerable to phenomena of instability - buckling. Now the deformed geometry of the structure differs significantly from the non-deformed, therefore the formulation of the equilibrium equations at the non-deformed geometry, as we do at the classic statical analysis methods, leads to significant errors and should be avoided. The necessity of formulating the equilibrium equations at the deformed geometry, that is not known a priori, demands specific methods of statical analysis, and leads to abolition of proportion between imposed loads and the developing tension and deformation, that is known as **geometrically nonlinear behavior**.

Likewise, the local excess of the yield limit of the structural material demands specific methods of statical analysis, and also leads to the abolition of proportion between imposed loads and the developing tension and deformation, that is known as **material nonlinear behavior**.

At the present project we will expose a two degrees of freedom system (2-D.O.F.) of an elastic cantilever, subject to buckling due to vertical load at the free edge. This mechanical model is known as **Augusti** model. We will examine the **geometrically nonlinear behavior** of several variations of the model:

- Initially the classic one with the rotational springs.
- With horizontal springs
- With sidelong springs
- With a rotational and a horizontal spring

To look into the **material nonlinear behavior** of the above systems, we will use nonlinear elastic springs, and especially hard springs, as we will see.

Περιεχόμενα	σελ
Κεφάλαιο 1: Βασικές έννοιες μη γραμμικής συμπεριφοράς	1
Κεφάλαιο 2: Ενεργειακή μέθοδος μελέτης ευστάθειας	3
Κεφάλαιο 3: Αλληλεπίδραση μορφών αστάθειας σε μονοβάθμια συστήματα	8
Κεφάλαιο 4: Αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού	30

Κεφάλαιο 1: Βασικές έννοιες μη γραμμικής συμπεριφοράς

Βασικό μέλημα του μηχανικού είναι ο σχεδιασμός ασφαλών κατασκευών με τη μέγιστη δυνατή εξοικονόμηση υλικού και, κατ' επέκταση, κόστους. Τα μέσα, ωστόσο, που διαθέτει ο μηχανικός για την επίτευξη αυτού του στόχου συνεχώς εξελίσσονται. Σήμερα, η ύπαρξη δομικών υλικών υψηλής αντοχής και η εξέλιξη των μεθόδων κατεργασίας, δίνουν τη δυνατότητα παραγωγής δομικών μελών με κάθε επιθυμητό σχήμα και πάχος διατομής. Παράλληλα, η ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και του σχετικού λογισμικού επιτρέπει την εφαρμογή ακριβέστερων και πιο αξιόπιστων μεθόδων ανάλυσης, και επομένως τη χρησιμοποίηση μικρότερων συντελεστών ασφαλείας. Τα παραπάνω οδηγούν σε ελαφρύτερα δομικά στοιχεία, με πιο οριακή εκμετάλλευση του υλικού.

Αποτέλεσμα αυτής της τάσης είναι οι σημερινές κατασκευές να είναι περισσότερο εύκαμπτες, τόσο συνολικά, σε επίπεδο φορέα, όσο και τοπικά, σε επίπεδο μέλους ή και διατομής, και επομένως να παραμορφώνονται εντονότερα όταν φορτίζονται. Αυτή η έντονη παραμόρφωση έχει δύο σημαντικές συνέπειες, μία πρωταρχική, στη στατική συμπεριφορά, και μία που προκύπτει από την πρώτη, στις μεθόδους στατικής ανάλυσης. Η πρώτη συνέπεια είναι ότι η κατασκευή ενδέχεται να οδηγηθεί σε μορφές αστοχίας που είναι γνωστές με το γενικό όρο «αστάθεια» ή «λυγισμός» και συνδέονται με απότομη και έντονη αύξηση της παραμόρφωσης για μικρή αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου. Η δεύτερη συνέπεια είναι ότι πλέον η παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα διαφέρει σημαντικά από την απαραμόρφωτη, επομένως η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία, όπως γίνεται στις κλασικές μεθόδους στατικής ανάλυσης, οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα και πρέπει να αποφεύγεται. Η ανάγκη διατύπωσης των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη γεωμετρία, η οποία δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης, και οδηγεί σε κατάργηση της αναλογίας μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης, που είναι γνωστή ως γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά.

Παλαιότερα, οι έλεγχοι αντοχής των κατασκευών γίνονταν με τη μέθοδο των επιτρεπόμενων τάσεων, δηλαδή οι αναπτυσσόμενες τάσεις σε οποιαδήποτε θέση δεν έπρεπε να υπερβαίνουν κάποιες μέγιστες τιμές, ίσες με το όριο διαρροής του υλικού διαιρεμένο με κάποιον κατάλληλο συντελεστή ασφαλείας. Επομένως δεν επιτρεπόταν η υπερφόρτιση των κατασκευών που θα οδηγούσε τα δομικά υλικά σε μετελαστική συμπεριφορά σε οποιαδήποτε θέση. Πλέον, οι έλεγχοι γίνονται με τη μέθοδο συνολικής αντοχής και για ακραίες περιπτώσεις φόρτισης επιτρέπεται η είσοδος των υλικών στην μετελαστική περιοχή, σε προκαθορισμένες βεβαίως θέσεις και υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Και αυτή η τοπική υπέρβαση του ορίου διαρροής του δομικού υλικού απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης, και επίσης οδηγεί σε κατάργηση της αναλογίας μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης, που είναι γνωστή ως μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού.

Συμπερασματικά, μία κατασκευή μπορεί να αστοχήσει είτε λόγω μη γραμμικότητας υλικού είτε λόγω μη γραμμικότητας γεωμετρίας. Στο σχεδιασμό πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι δύο αυτές μορφές μη γραμμικότητας των κατασκευών, ώστε να προσδιορίζεται η συνολική αντοχή τους. Η μη γραμμικότητα υλικού εμφανίζεται συνήθως σε δύσκαμπτους φορείς, π.χ. κτίρια με συνδέσμους δυσκαμψίας, που δεν είναι επιρρεπείς σε έντονες παραμορφώσεις. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα μπορεί να είναι κρίσιμη σε εύκαμπτους φορείς, π.χ. τοξωτούς φορείς στέγασης μεγάλων ανοιγμάτων. Σε φορείς ενδιάμεσης δυσκαμψίας μπορεί να εμφανιστεί συνδυασμένη μη γραμμικότητα υλικού και γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 2: Ενεργειακή μέθοδος μελέτης ευστάθειας

Η μέθοδος μπορεί να εφαρμόζεται μόνον σε συντηρητικά συστήματα, επομένως εκείνα στα οποία όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, δηλαδή απορρέουν από δυναμικό και παράγουν έργο που εξαρτάται μόνον από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής τους (στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, αντίστοιχα), και όχι από τις ενδιάμεσες θέσεις. Αυτά όμως τα συστήματα περιλαμβάνουν τη μεγάλη πλειοψηφία των κατασκευών που απαντώνται στην πράξη, και επομένως αυτός ο περιορισμός δεν θεωρείται ότι περιορίζει σημαντικά την εφαρμοσιμότητα της μεθόδου. Επιπλέον, με την ενεργειακή μέθοδο μπορεί να ανευρεθούν οι θέσεις ισορροπίας ενός φορέα, και να αξιολογηθεί η ευστάθεια ή αστάθεια αυτών των θέσεων με συστηματικό τρόπο, που προσφέρεται για προγραμματισμό. Για το λόγο αυτό η ενεργειακή μέθοδος αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο των περισσότερων σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης των κατασκευών.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφούν αρχικά οι βασικές αρχές της ενεργειακής μεθόδου για ελαστικά συστήματα, με έμφαση όχι τόσο στο μαθηματικό της υπόβαθρο, για το οποίο ο αναγνώστης παραπέμπεται σε πιο εξειδικευμένα συγγράμματα, αλλά στη χρήση της σε προβλήματα φορέων πολιτικού μηχανικού.

Βασικές αρχές της ενεργειακής μεθόδου

Η συνολική δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού συντηρητικού συστήματος που λόγω της επενέργειας εξωτερικών φορτίων βρίσκεται σε κάποια κατάσταση παραμόρφωσης ορίζεται ως το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας U των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος και της δυναμικής ενέργειας W των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή:

$$\Pi = U + W$$

όπου θεωρείται ότι τα μεγέθη U , W , Π έχουν μηδενική τιμή στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του συστήματος. Η δυναμική ενέργεια U των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ελαστική ενέργεια ή ενέργεια παραμόρφωσης που αποταμιεύεται στο φορτιζόμενο και παραμορφωνόμενο σύστημα. Η δυναμική ενέργεια W των εξωτερικών δυνάμεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W = -\sum_i \int P_i(q_i) \cdot dq_i$$

όπου q_i γενικευμένες συντεταγμένες, δηλαδή μετατοπίσεις ή στροφές που περιγράφουν την παραμορφωμένη γεωμετρία του συστήματος και P_i αντίστοιχα εξωτερικά φορτία. Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει απώλεια δυναμικής ενέργειας όταν το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετακινείται κατά τη φορά εφαρμογής της. Στην περίπτωση σταθερών φορτίων η σχέση απλοποιείται στην:

$$W = -\sum_i P_i \cdot q_i$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην περίπτωση μονοβαθμίων συστημάτων η συνολική δυναμική ενέργεια Π είναι συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων P και της μίας γενικευμένης συντεταγμένης q , μετατόπισης ή στροφής, που περιγράφει την παραμορφωμένη γεωμετρία του συστήματος:

$$\Pi = \Pi(P, q)$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση πολυβαθμίων συστημάτων η συνολική δυναμική ενέργεια Π είναι συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων P και των γενικευμένων συντεταγμένων q_1, q_2, \dots, q_n , μετατοπίσεων ή στροφών, ίσων σε πλήθος με το πλήθος n των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, που περιγράφουν την παραμορφωμένη του γεωμετρία:

$$\Pi = \Pi(P, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

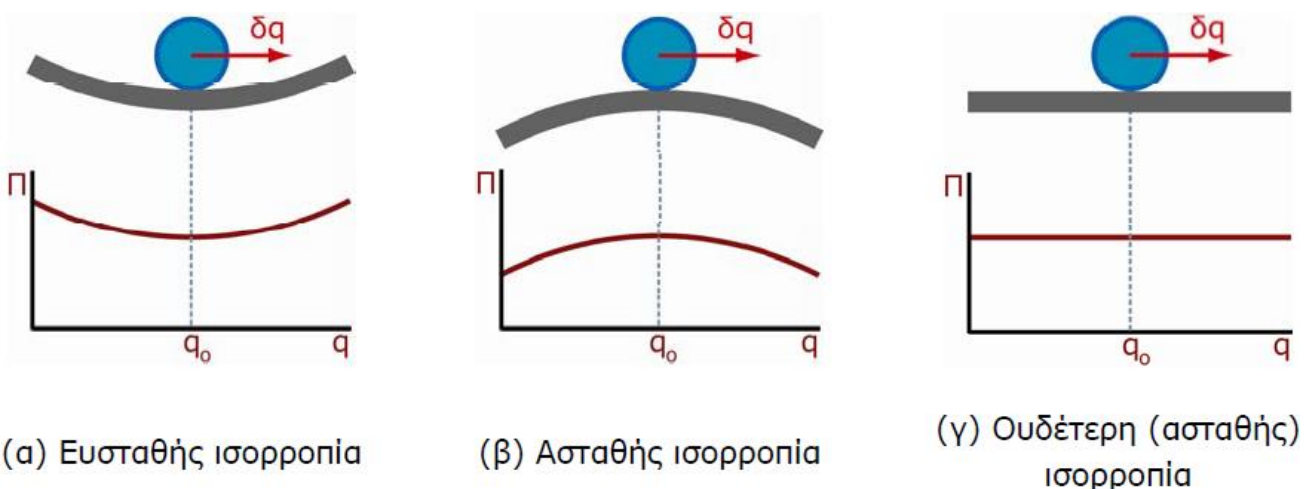
Η ενεργειακή μέθοδος βασίζεται σε δύο σημαντικά κριτήρια. Το ένα είναι το **κριτήριο ισορροπίας**, σύμφωνα με το οποίο ένα συντηρητικό σύστημα που υποβάλλεται σε μια στατική φόρτιση P ισορροπεί σε κάποια παραμορφωμένη θέση q , όταν η συνολική δυναμική ενέργεια Π έχει σε αυτή τη θέση στάσιμη τιμή, δηλαδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη γειτονική θέση παραμόρφωσης. Το άλλο είναι το **κριτήριο ευστάθειας**, σύμφωνα με το οποίο μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής για μικρού μεγέθους διαταραχή, όταν η συνολική δυναμική ενέργεια Π παρουσιάζει σε αυτή τη θέση τοπικό ελάχιστο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη γειτονική θέση παραμόρφωσης, διαφορετικά είναι ασταθής.

Τα δύο αυτά κριτήρια μπορούν να γίνουν ευκολότερα κατανοητά μέσω του εποπτικού παραδείγματος των πιθανών θέσεων πάνω σε μια επιφάνεια μιας σφαίρας που ευρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας (σχήμα 1). Ανάλογα με την κλίση που έχει η επιφάνεια, η σφαίρα μπορεί να έχει ευσταθή (α), ασταθή (β) ή ουδέτερη (γ) ισορροπία.

Εάν η επιφάνεια στρέφει, στην εξεταζόμενη θέση q_0 , τα κοίλα προς τα πάνω (σχήμα 1α), τότε η θέση ισορροπίας είναι στο χαμηλότερο σημείο, όπου η σφαίρα έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια Π . Εάν από τη θέση αυτή επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή δq , η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, εκτελεί ταλάντωση περί την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία και τελικά επιστρέφει, λόγω τριβών, και ισορροπεί και πάλι. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται ευσταθής.

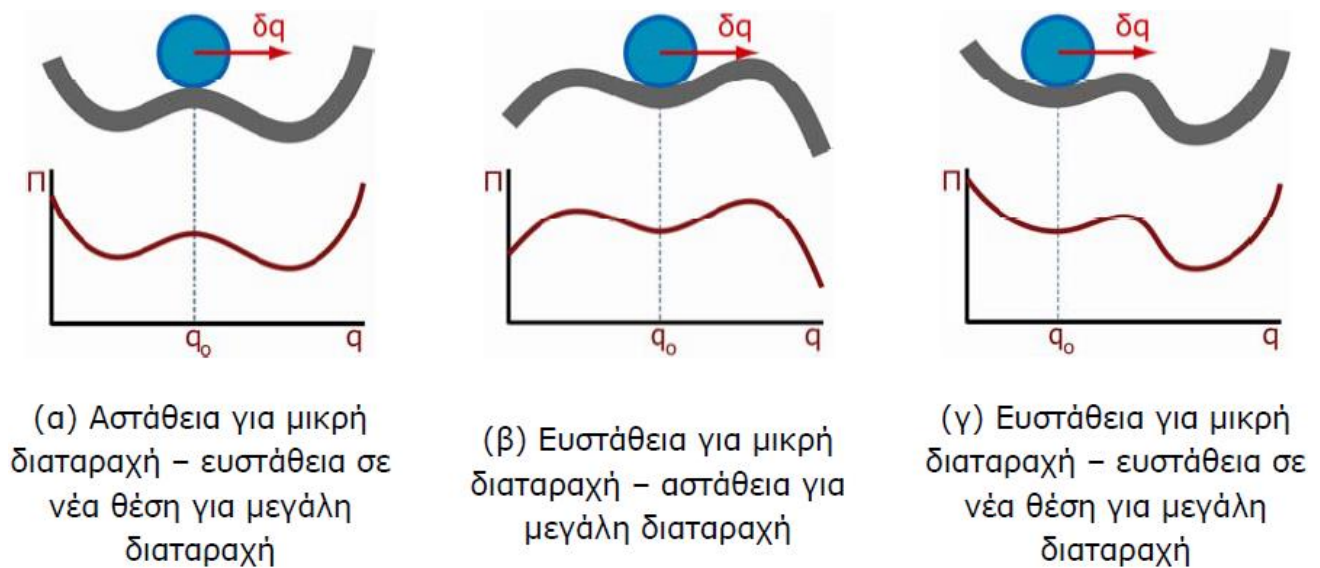
Εάν η επιφάνεια στρέφει, στην εξεταζόμενη θέση q_0 , τα κοίλα προς τα κάτω (σχήμα 1β), τότε η θέση ισορροπίας είναι στο υψηλότερο σημείο, όπου η σφαίρα έχει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια Π . Εάν από τη θέση αυτή επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή δq , η δυναμική ενέργεια μειώνεται και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, απομακρύνεται περισσότερο από την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία δεν επιστρέφει. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται ασταθής.

Εάν τέλος η επιφάνεια, περί την εξεταζόμενη θέση q_0 , είναι οριζόντια (σχήμα 1γ), τότε κάθε γειτονική θέση αποτελεί θέση ισορροπίας, και η σφαίρα έχει σε όλες αυτές τις θέσεις ίση δυναμική ενέργεια Π . Εάν από μια τέτοια θέση επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή δq , η δυναμική ενέργεια παραμένει σταθερή και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, παραμένει ακίνητη στη νέα θέση, που είναι και αυτή θέση ισορροπίας. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται ουδέτερη, μπορεί όμως να θεωρηθεί για πρακτικούς σκοπούς ως ασταθής, δεδομένου ότι η σφαίρα δεν επιστρέφει ποτέ στην αρχική θέση ισορροπίας.



Σχήμα 1: Θέσεις ισορροπίας σφαίρας πάνω σε επιφάνεια

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, και κατ' επέκταση το είδος της ισορροπίας, εξαρτώνται από το μέγεθος της επιβαλλόμενης διαταραχής. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα τρία παραδείγματα του σχήματος 2, στα οποία το είδος της ισορροπίας μεταβάλλεται με το μέγεθος της διαταραχής. Στο σχήμα 2α η ισορροπία είναι ασταθής για μικρή διαταραχή, αλλά ευσταθής, σε νέα όμως θέση, για μεγαλύτερη. Το αντίθετο συμβαίνει στο σχήμα 2β, όπου η ισορροπία είναι ευσταθής για μικρή διαταραχή, αλλά ασταθής για μεγαλύτερη. Τέλος, στο σχήμα 2γ, η ισορροπία είναι ευσταθής για μικρή διαταραχή, και παρουσιάζει προσωρινή αστάθεια και τελικά ευστάθεια σε νέα θέση για μεγαλύτερη διαταραχή. Στη διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται για τέτοιες περιπτώσεις οι όροι «stability in the small» και «stability in the large», όπου οι όροι «small» και «large» αναφέρονται στο μέγεθος της επιβαλλόμενης διαταραχής.



Σχήμα 2: Σύνθετες περιπτώσεις θέσεων ισορροπίας σφαίρας πάνω σε επιφάνεια

Η μαθηματική μελέτη της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας αποτελεί το «υπολογιστικό εργαλείο» της ενεργειακής μεθόδου για την εύρεση των θέσεων ισορροπίας ενός στατικού συστήματος, καθώς και για τον χαρακτηρισμό αυτών των θέσεων ισορροπίας ως ευσταθών ή ασταθών. Συγκεκριμένα, για σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας q που υποβάλλεται σε εξωτερικά φορτία P , για συγκεκριμένη τιμή των εξωτερικών φορτίων η δυναμική ενέργεια Π είναι, από μαθηματική άποψη, συνάρτηση μίας μεταβλητής, της q . Η θέση ισορροπίας q_0 ευρίσκεται με χρήση του κριτηρίου ισορροπίας, του οποίου η μαθηματική διατύπωση προκύπτει από τη θεωρία ακροτάτων τιμών συναρτήσεων μιας μεταβλητής και είναι:

$$\frac{\partial \Pi(P, q)}{\partial q} = 0$$

Στη συνέχεια, σύμφωνα με το κριτήριο ευστάθειας η θέση ισορροπίας q_0 είναι ευσταθής εάν η δυναμική ενέργεια Π παρουσιάζει στη θέση q_0 τοπικό ελάχιστο, δηλαδή εφόσον η τιμή της δεύτερης παραγωγού της είναι θετική:

$$\left[\frac{\partial^2 \Pi(P, q)}{\partial q^2} \right]_{q=q_0} > 0$$

Αντιθέτως, η θέση ισορροπίας q_0 είναι ασταθής εάν η δυναμική ενέργεια Π παρουσιάζει στη θέση q_0 τοπικό μέγιστο, δηλαδή εφόσον η τιμή της δεύτερης παραγωγού της είναι αρνητική:

$$\left[\frac{\partial^2 \Pi(P, q)}{\partial q^2} \right]_{q=q_0} < 0$$

Εάν η τιμή της δεύτερης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στη θέση ισορροπίας q_0 είναι μηδενική, τότε σύμφωνα με τη θεωρία ακροτάτων τιμών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, υπολογίζονται οι παράγωγοι ανώτερης τάξης και οι τιμές τους στη θέση q_0 . Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι εκείνη την τάξη παραγώγου, έστω k , που έχει μη μηδενική τιμή:

$$\left[\frac{\partial^k \Pi(P, q)}{\partial q^k} \right]_{q=q_0} \neq 0$$

- Εάν το k είναι περιττός αριθμός, τότε από μαθηματική άποψη η συνάρτηση Π έχει στη θέση q_0 σημείο καμπής, και από φυσική άποψη το σύστημα έχει ουδέτερη ισορροπία.
- Εάν το k είναι άρτιος αριθμός, τότε από μαθηματική άποψη η συνάρτηση Π έχει στη θέση q_0 τοπικό ακρότατο, και μάλιστα:
 - εάν η τιμή της παραγώγου είναι θετική:

$$\left[\frac{\partial^k \Pi(P, q)}{\partial q^k} \right]_{q=q_0} > 0$$

τότε από μαθηματική άποψη η συνάρτηση Π έχει στη θέση q_0 τοπικό ελάχιστο, και από φυσική άποψη το σύστημα έχει ευσταθή ισορροπία, ενώ

- εάν η τιμή της παραγώγου είναι αρνητική:

$$\left[\frac{\partial^k \Pi(P, q)}{\partial q^k} \right]_{q=q_0} < 0$$

τότε από μαθηματική άποψη η συνάρτηση Π έχει στη θέση q_0 τοπικό μέγιστο, και από φυσική άποψη το σύστημα έχει ασταθή ισορροπία.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι με χρήση της ενεργειακής μεθόδου είναι δυνατή η εύρεση των θέσεων ισορροπίας και ο χαρακτηρισμός τους ως ευσταθών ή ασταθών με αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Η μέθοδος εφαρμόζεται στη συνέχεια για τη μελέτη ευστάθειας τυπικών μονοβάθμιων ελαστικών συστημάτων με γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 3: Αλληλεπίδραση μορφών αστάθειας σε μονοβάθμια συστήματα

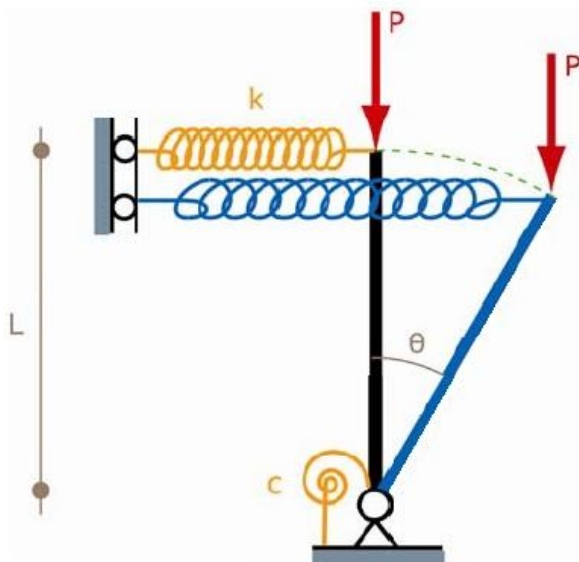
Ο σκοπός του κεφαλαίου είναι η διερεύνηση της αλληλεπίδρασης των εξής μορφών αστάθειας:

- Συμμετρικό ευσταθές - συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης
- Συμμετρικό ευσταθές - ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης
- Συμμετρικό ασταθές - ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης
- Όλα τα παραπάνω

στα αντίστοιχα μονοβάθμια συστήματα:

- Στροφικό ελατήριο - οριζόντιο ελατήριο
- Στροφικό ελατήριο - λοξό ελατήριο
- Οριζόντιο ελατήριο - λοξό ελατήριο
- Όλα τα παραπάνω

Στροφικό ελατήριο - οριζόντιο ελατήριο



Η δυναμική ενέργεια U των εσωτερικών δυνάμεων και η δυναμική ενέργεια W των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος είναι αντίστοιχα:

$$U = 0.5cx^2 + 0.5kL^2\text{Sin}[x]^2 \quad \text{και} \quad W = -LP(1 - \text{Cos}[x]), \quad \text{όπου } x = \theta$$

Θέτοντας $c = \alpha kL^2$, η συνολική δυναμική ενέργεια V του συστήματος είναι:

$$V = U + W = 0.5\alpha kL^2x^2 + 0.5kL^2\text{Sin}[x]^2 - LP(1 - \text{Cos}[x])$$

Σύμφωνα με το κριτήριο ισορροπίας, η θέση ισορροπίας του συστήματος για συγκεκριμένη τιμή του εξωτερικού φορτίου P προκύπτει από την εξίσωση μηδενισμού της **πρώτης παραγώγου** της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τη γενικευμένη συντεταγμένη θ .

$$V1[x] = \alpha kL^2x - LP\text{Sin}[x] + kL^2\text{Cos}[x]\text{Sin}[x] = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις:

- $x = 0$: κύριος δρόμος
- $P = kL(\text{Cos}[x] + ax\text{Csc}[x])$: δευτερεύων δρόμος

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι: $P_{cr} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) = (1 + a)kL$

Η **δεύτερη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς x είναι:

$$V2[x] = akL^2 - LP\text{Cos}[x] + kL^2(\text{Cos}[x]^2 - \text{Sin}[x]^2)$$

Για να μελετηθεί η ευστάθεια του κύριου δρόμου ισορροπίας απαιτείται ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της συνολικής δυναμικής ενέργειας επί του κύριου δρόμου, δηλαδή για $\theta=0$:

$$V2[0] = kL^2 + akL^2 - LP$$

Για $P < P_{cr}$, $V2[0] > 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ευσταθείς

Για $P > P_{cr}$, $V2[0] < 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ασταθείς

Για $P = P_{cr}$, $V2[0] = 0$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για το συνολικό δυναμικό V

Για το σημείο διακλάδωσης κύριου και δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας δεν προκύπτει συμπέρασμα από τη δεύτερη παράγωγο της V , οπότε απαιτείται περαιτέρω παραγωγή.

Η **τρίτη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας είναι:

$$V3[x] = LP\text{Sin}[x] - 4kL^2\text{Cos}[x]\text{Sin}[x]$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τιμή της τρίτης παραγώγου στη θέση μελέτης ευστάθειας, δηλαδή στο κρίσιμο σημείο $x = 0$, $P = P_{cr}$:

$$V3[0, P = P_{cr}] = 0$$

Εφόσον και η τρίτη παράγωγος έχει μηδενική τιμή στην εξεταζόμενη θέση, πάλι δεν προκύπτει συμπέρασμα για την ευστάθεια του φορέα και χρειάζεται υπολογισμός και της **τέταρτης παραγώγου**:

$$V4[x] = LP\text{Cos}[x] + 4kL^2(-\text{Cos}[x]^2 + \text{Sin}[x]^2)$$

$$V4[0, P = P_{cr}] = L(-4kL + P_{cr}) = kL^2(a - 3)$$

Για $a > 3$, $V4[0, P = P_{cr}] > 0$, το σημείο διακλάδωσης είναι ευσταθές

Για $a < 3$, $V4[0, P = P_{cr}] < 0$, το σημείο διακλάδωσης είναι ασταθές

Για $a = 3$, $V4[0, P = P_{cr}] = 0$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για το συνολικό δυναμικό V

Επομένως, η **παράμετρος a** που συσχετίζει τα δύο ελατήρια ($c = akL^2$) έχει **οριακή τιμή $a = 3$** .

Για $a = 3$, χρειάζεται υπολογισμός της **πέμπτης παραγώγου**:

$$V5[x] = -LP\text{Sin}[x] + 16kL^2\text{Cos}[x]\text{Sin}[x]$$

$$V5[0, P = P_{cr}, a = 3] = 0$$

Απαιτείται υπολογισμός της **έκτης παραγώγου**:

$$V6[x] = -LPCos[x] + 16kL^2(Cos[x]^2 - Sin[x]^2)$$

$V6[0, P = P_{cr}, \alpha = 3] = 12kL^2 > 0$, το σημείο διακλάδωσης είναι ευσταθές

Τέλος, μελετάται η **ευστάθεια του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας** αντικαθιστώντας την εξίσωσή του $P = kL(Cos[x] + axCsc[x])$ στη σχέση της δεύτερης παραγώγου:

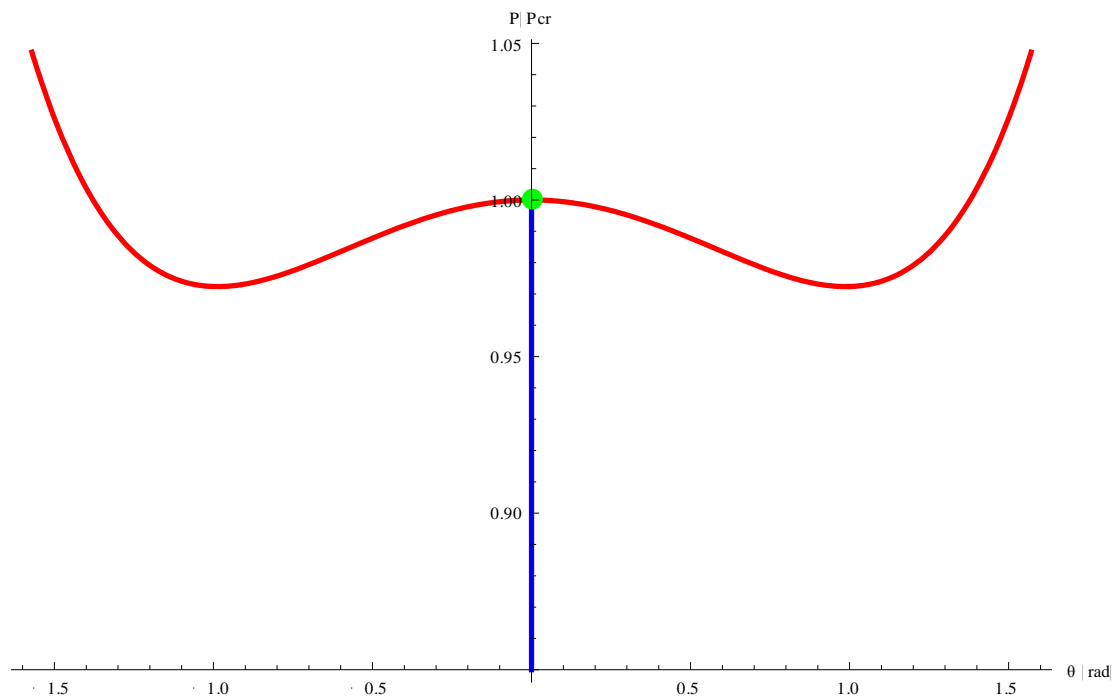
$$V2[x, \delta. \delta.] = kL^2(a - axCot[x] - Sin[x]^2)$$

Στις περιοχές όπου $V2[x, \delta. \delta.] > 0$, ο $\delta. \delta.$ είναι ευσταθής.

Στις περιοχές όπου $V2[x, \delta. \delta.] < 0$, ο $\delta. \delta.$ είναι ασταθής.

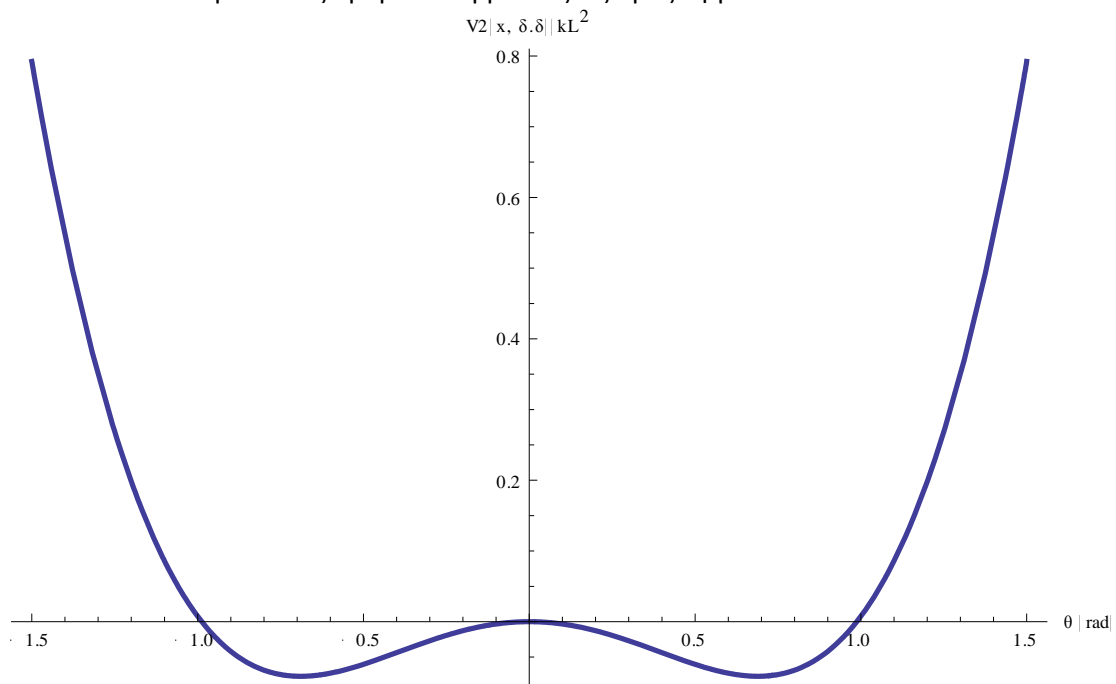
Στα σημεία όπου $V2[x, \delta. \delta.] = 0$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για το συνολικό δυναμικό V και προχωρούμε στον υπολογισμό ανώτερων παραγώγων.

Δρόμοι ισορροπίας για $\alpha < 3$ (π.χ. για $\alpha = 2$)



Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της **δεύτερης παραγώγου** δυναμικού επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας ως προς τη γωνία θ :

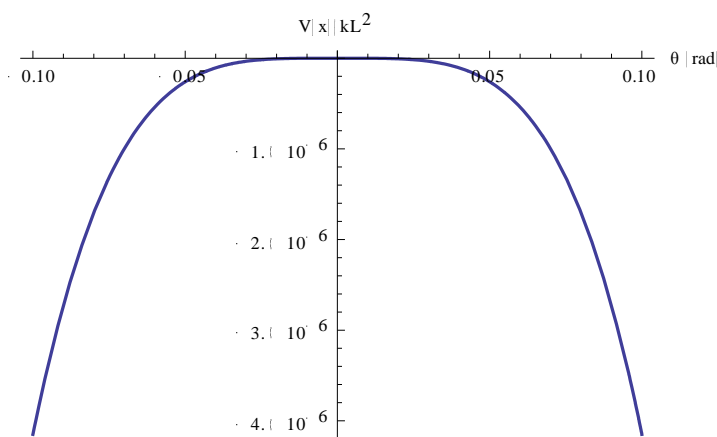
$V2[x, \delta.\delta.]$ του συνολικού



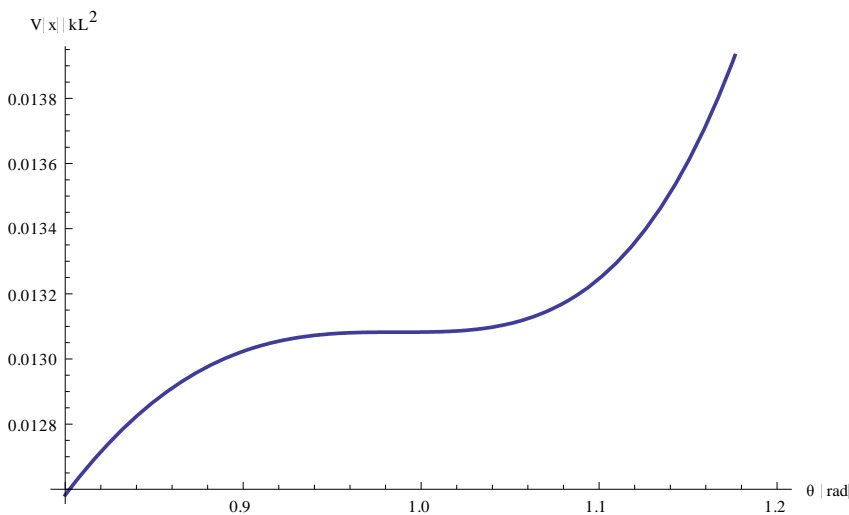
Αρχικά, ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι καμπύλος, συμμετρικός ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στρέφει τα κοίλα κάτω (αστάθεια), δηλαδή για μείωση του φορτίου αυξάνονται οι μετατοπίσεις. Η $V2[x, \delta.\delta.]$ παίρνει αρνητικές τιμές. Στη συνέχεια έχει σημείο καμπής για $\theta = 0.689$. Σε αυτή την τιμή της γωνίας, η $V2[x, \delta.\delta.]$ έχει ολικό ελάχιστο. Αμέσως μετά, ο δρόμος ισορροπίας αρχίζει να στρέφει τα κοίλα άνω (ευστάθεια) και εξακολουθεί να είναι κατιών, μέχρι να φτάσει την ελάχιστη τιμή του $P = 0.972 \cdot P_{cr}$ στη θέση

$\theta = 0.987$. Σε αυτή την τιμή της γωνίας, η $V_2[x, \delta.\delta.]$ μηδενίζεται. Κατόπιν, ο δρόμος ισορροπίας γίνεται ανιών, εξακολουθώντας να στρέφει τα κοίλα άνω. Πλέον η $V_2[x, \delta.\delta.]$ λαμβάνει θετικές τιμές.

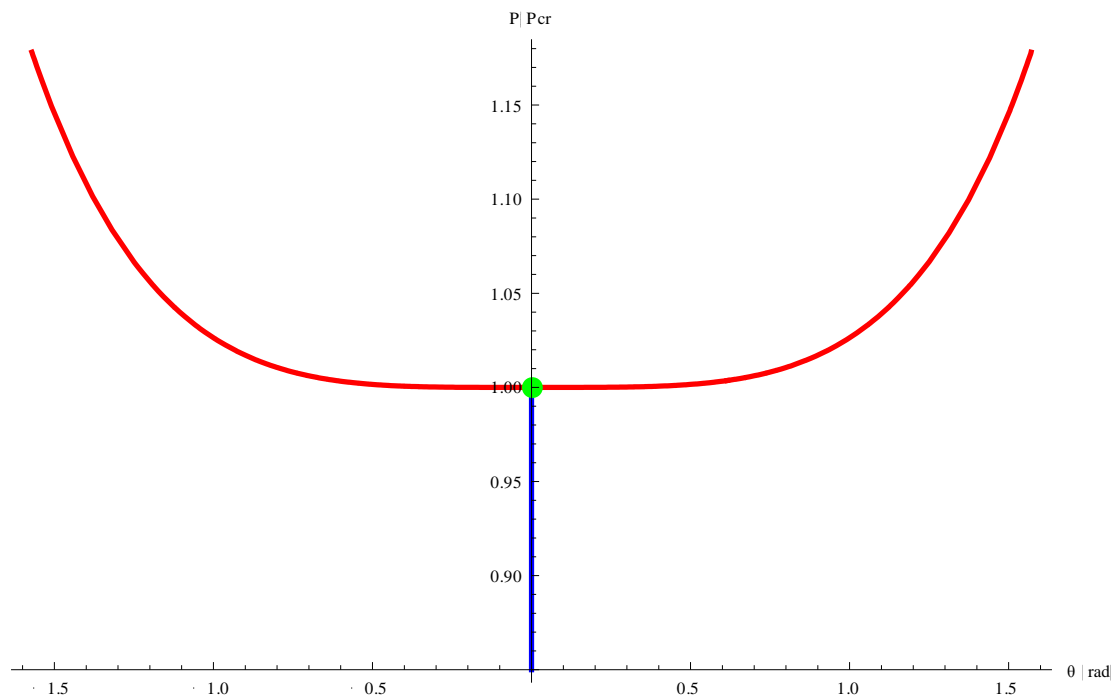
Έλεγχος ευστάθειας του σημείου διακλάδωσης: αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = P_{cr}$ να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $\theta = 0$ (αστάθεια), αφού η τιμή της τέταρτης παραγώγου (της πρώτης μη μηδενικής παραγώγου): $V_4[0, P = P_{cr}] = kL^2(a - 3) = -kL^2$, είναι αρνητική. Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας $\theta = 0$ για $P = P_{cr}$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:



Έλεγχος ευστάθειας του ολικού ελαχίστου του δρόμου ισορροπίας: αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = 0.972 \cdot P_{cr}$ να παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $\theta = 0.987$ (ευστάθεια προς τη μία κατεύθυνση, αστάθεια προς την άλλη), αφού η τιμή της τρίτης παραγώγου (της πρώτης μη μηδενικής παραγώγου): $V_3[0.987, P = 0.972 \cdot P_{cr}] = 0.595kL^2$, είναι διάφορη του μηδενός. Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας $\theta = 0.987$ για $P = 0.972 \cdot P_{cr}$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:



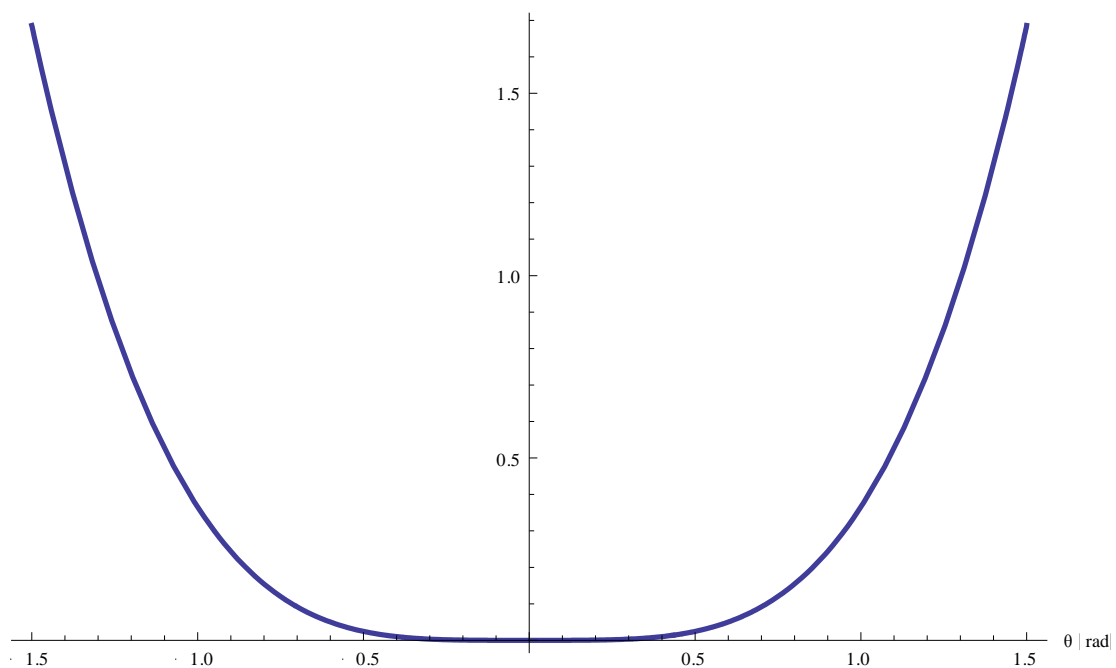
Δρόμοι ισορροπίας για $\alpha = 3$



Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της **δεύτερης παραγώγου** δυναμικού επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας ως προς τη γωνία θ :

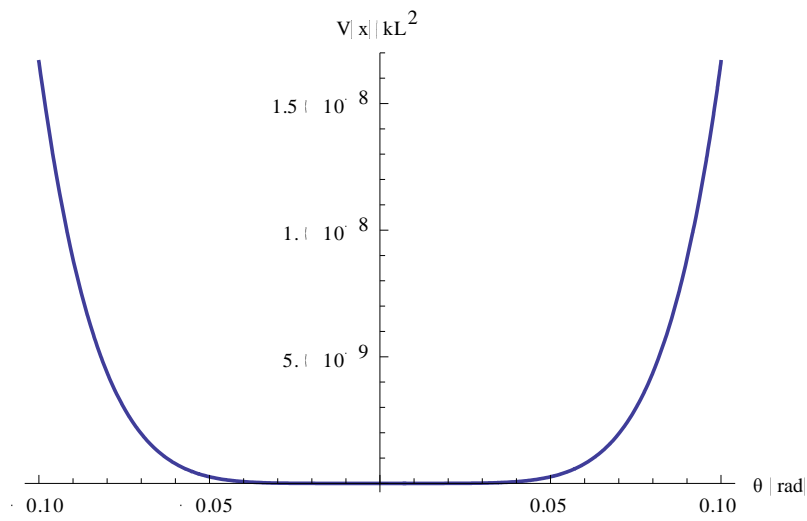
$V2[x, \delta, \delta]$ του συνολικού

$$V2[x, \delta, \delta] \text{ kL}^2$$

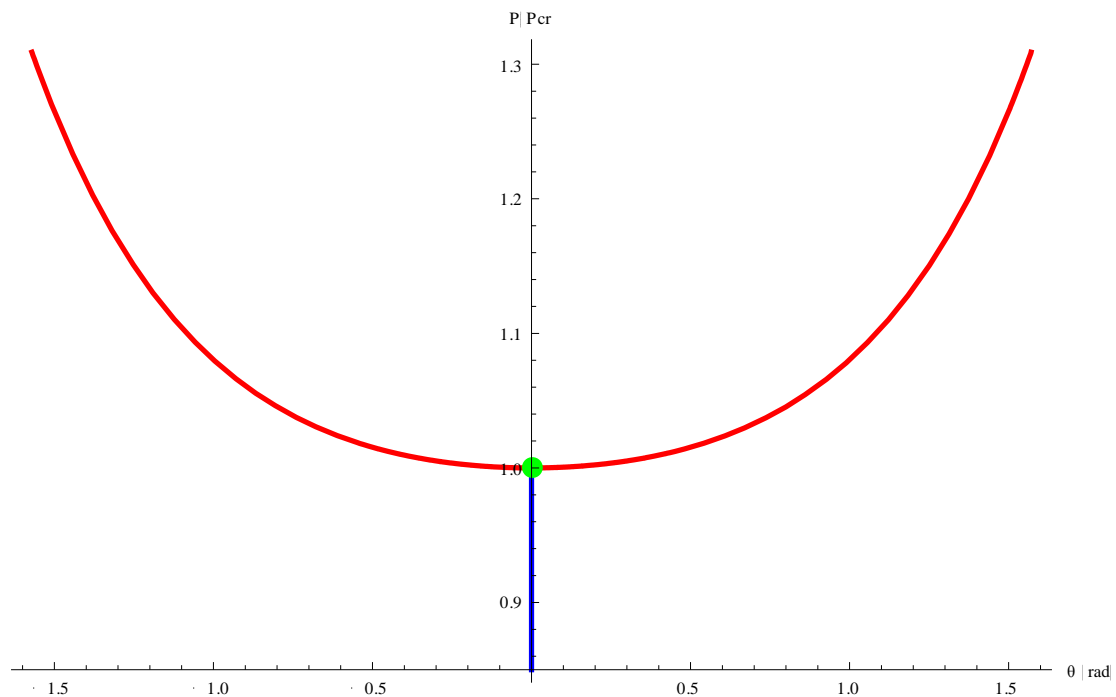


Αρχικά, ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι οριζόντιος και συμμετρικός ως προς τον κατακόρυφο άξονα, δηλαδή υπό σταθερό φορτίο αυξάνονται οι μετατοπίσεις. Ο δρόμος είναι ευσταθής, αφού για $\alpha = 3$ το σημείο διακλάδωσης είναι ευσταθές και η $V2[x, \delta, \delta]$ είναι θετική. Στη συνέχεια, ο δρόμος ισορροπίας στρέφει τα κοίλα άνω και εξακολουθεί να είναι ευσταθής, καθώς $V2[x, \delta, \delta] > 0$.

Έλεγχος ευστάθειας του σημείου διακλάδωσης: αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = P_{cr}$ να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $\theta = 0$ (ευστάθεια), αφού η τιμή της έκτης παραγώγου (της πρώτης μη μηδενικής παραγώγου): $V_6[0, P = P_{cr}] = 12kL^2$, είναι θετική. Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας $\theta = 0$ για $P = P_{cr}$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:

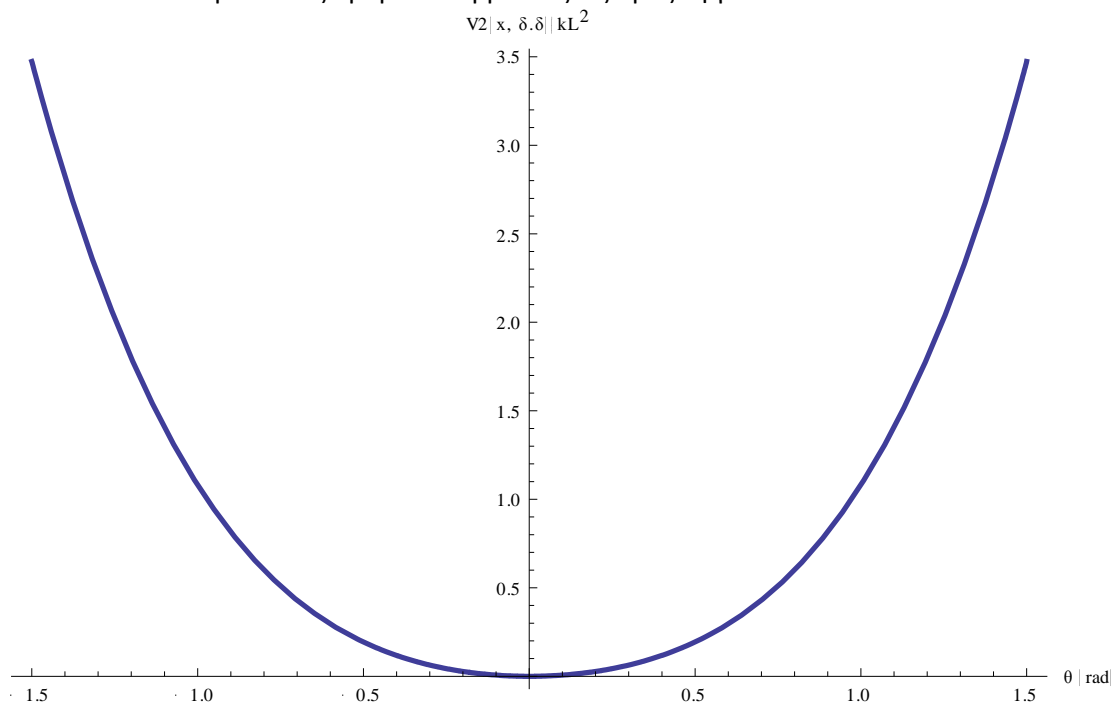


Δρόμοι ισορροπίας για $\alpha > 3$ (π.χ. για $\alpha = 5$)



Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της **δεύτερης παραγώγου** δυναμικού επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας ως προς τη γωνία θ :

$V2[x, \delta, \delta]$ του συνολικού



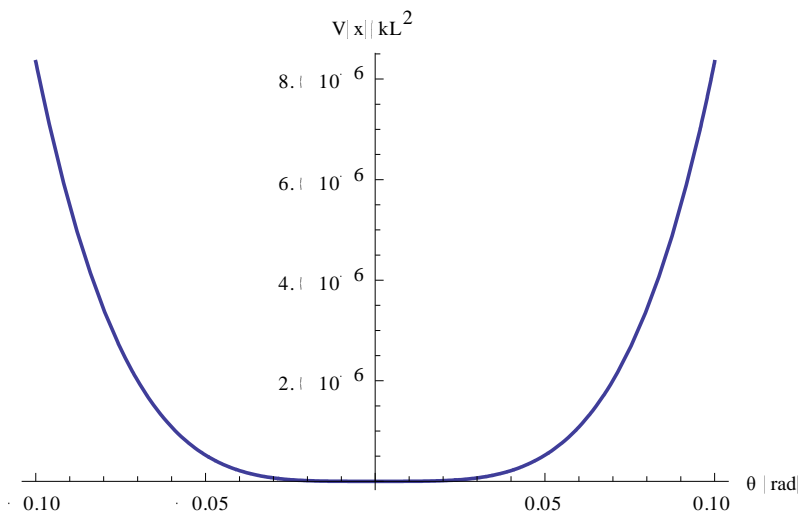
Ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι καμπύλος, συμμετρικός ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στρέφει τα κοίλα άνω (ευστάθεια), δηλαδή για αύξηση του φορτίου αυξάνονται οι μετατοπίσεις. Η $V2[x, \delta, \delta]$ παίρνει θετικές τιμές.

Έλεγχος ευστάθειας του σημείου διακλάδωσης: αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = P_{cr}$ να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $\theta = 0$ (ευστάθεια) , αφού η τιμή της τέταρτης παραγώγου (της

πρώτης μη μηδενικής παραγώγου):

$$V4[0, P = P_{cr}] = kL^2(a - 3) = 2kL^2, \text{ είναι θετική.}$$

Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας $\theta = 0$ για $P = P_{cr}$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:



Ατελείς φορείς

Στην περίπτωση ατελούς φορέα με γωνία αρχικής ατέλειας ϵ , το συνολικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V[x] = 0.5akL^2(-e + x)^2 - LP(\text{Cos}[e] - \text{Cos}[x]) + 0.5kL^2(-\text{Sin}[e] + \text{Sin}[x])^2$$

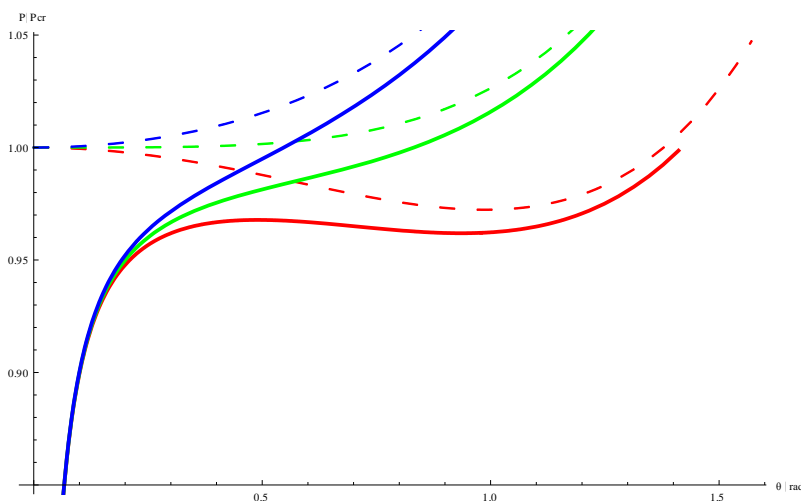
Μηδενισμός της πρώτης παραγώγου:

$$V1[x] = akL^2(-e + x) - LP\text{Sin}[x] + kL^2\text{Cos}[x](-\text{Sin}[e] + \text{Sin}[x]) = 0$$

Προκύπτει ένας ενιαίος δρόμος ισορροπίας:

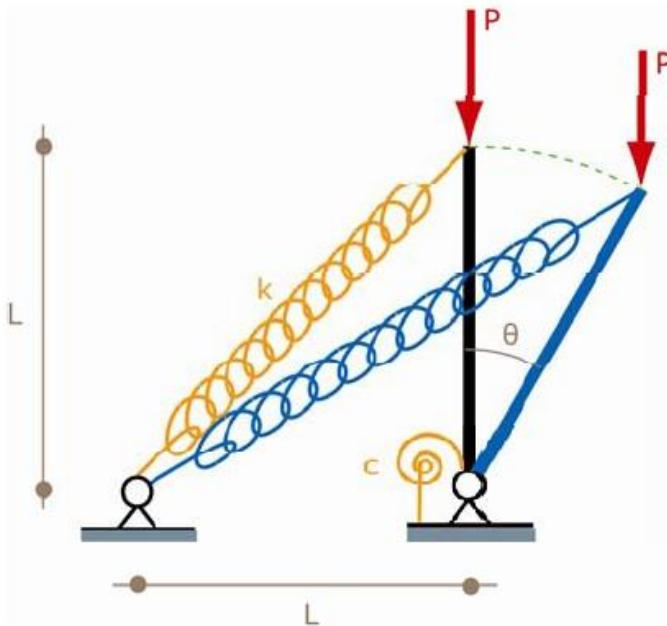
$$P = kL(\text{Cos}[x] + (-ae + ax)\text{Csc}[x] - \text{Cot}[x]\text{Sin}[e])$$

Δρόμοι ισορροπίας



$$\alpha = 5 \quad \alpha = 3 \quad \alpha = 2$$

Στροφικό ελατήριο - λοξό ελατήριο



$$U = 0.5cx^2 + kL^2(-1 + \sqrt{1 + \sin[x]})^2 \quad \text{και} \quad W = -LP(1 - \cos[x]), \quad \text{όπου } x = \theta$$

Θέτοντας $c = akL^2$, η συνολική δυναμική ενέργεια V του συστήματος είναι:

$$V = U + W = 0.5akL^2x^2 + kL^2(-1 + \sqrt{1 + \sin[x]})^2 - LP(1 - \cos[x])$$

Μηδενισμός της **πρώτης παραγώγου**:

$$V1[x] = akL^2x - LP\sin[x] + \frac{kL^2\cos[x](-1 + \sqrt{1 + \sin[x]})}{\sqrt{1 + \sin[x]}} = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις:

- $x = 0$: κύριος δρόμος
- $P = kL(ax\csc[x] + \cot[x](1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \sin[x]}}))$: δευτερεύων δρόμος

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι: $P_{cr} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) = (0.5 + a)kL$

Η **δεύτερη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς x είναι:

$$V2[x] = 0.5L(-2P\cos[x] + kL(2a - 2\sin[x] + \sqrt{1 + \sin[x]}))$$

Για να μελετηθεί η ευστάθεια του κύριου δρόμου ισορροπίας απαιτείται ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της συνολικής δυναμικής ενέργειας επί του κύριου δρόμου, δηλαδή για $\theta=0$:

$$V2[0] = 0.5kL^2 + akL^2 - LP$$

Για $P < P_{cr}$, $V2[0] > 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ευσταθείς

Για $P > P_{cr}$, $V2[0] < 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ασταθείς

Για $P = P_{cr}$, $V2[0] = 0$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για το συνολικό δυναμικό V

Για το σημείο διακλάδωσης κύριου και δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας δεν προκύπτει συμπέρασμα από τη δεύτερη παράγωγο της V , οπότε απαιτείται περαιτέρω παραγωγή.

Η **τρίτη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας είναι: $V3[x] =$

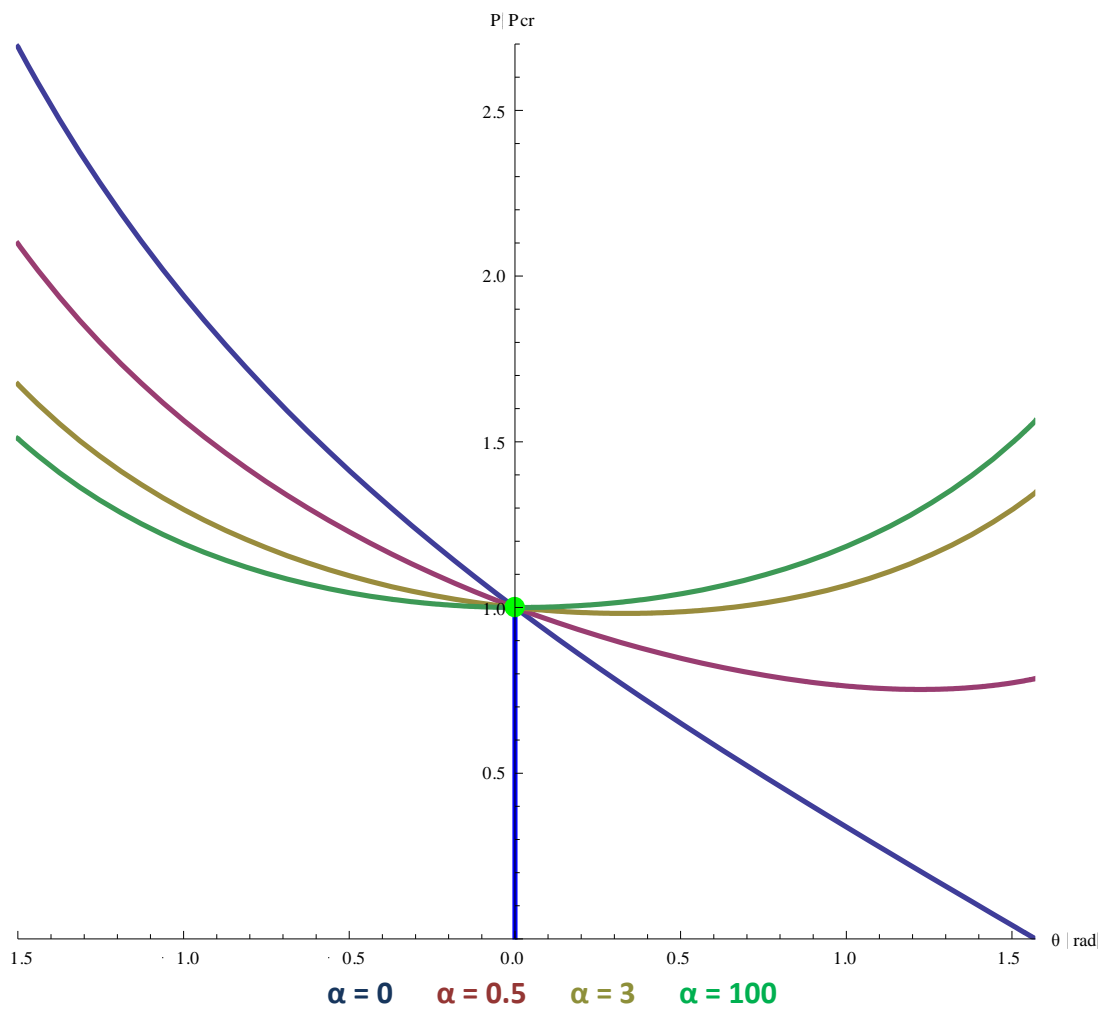
$$= \frac{L(\text{Cos}[\frac{x}{2}] + \text{Sin}[\frac{x}{2}])^4(4P\text{Sin}[x]\sqrt{1 + \text{Sin}[x]} + kL\text{Cos}[x](1 - 4\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}))}{4(1 + \text{Sin}[x])^{5/2}}$$

Για $\theta = 0$ και $P = P_{cr}$:

$$V3[0, P = P_{cr}] = -\frac{3kL^2}{4}$$

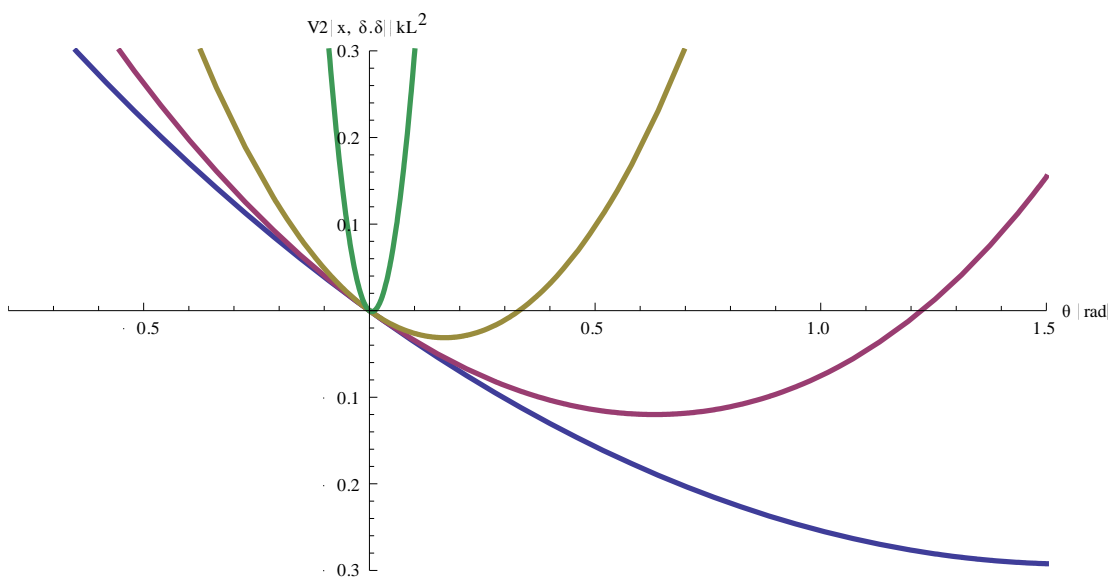
Η πρώτη μη μηδενική παράγωγος της συνολικής δυναμικής ενέργειας Π στη θέση του κρίσιμου σημείου είναι η τρίτη, δηλαδή περιττής τάξης. Επομένως η Π παρουσιάζει στη θέση αυτή σημείο καμπής, συνεπώς το εξεταζόμενο σημείο ισορροπίας, δηλαδή το σημείο διακλάδωσης, είναι ασύμμετρο, χαρακτηριζόμενο από αστάθεια προς τη μία διεύθυνση και ευστάθεια προς την άλλη. Βεβαίως από πρακτική άποψη τέτοια σημεία ισορροπίας θεωρούνται ασταθή.

Δρόμοι ισορροπίας



Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της **δεύτερης παραγώγου** δυναμικού επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας ως προς τη γωνία θ :

$V2[x, \delta, \delta]$ του συνολικού



Για $\alpha = 0$ απουσιάζει το στροφικό ελατήριο και ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι καμπύλος, ασύμμετρος ως προς τον κατακόρυφο άξονα, ασταθής για $\theta > 0$ και ευσταθής για $\theta < 0$. Η $V_2[x, \delta.δ.]$ είναι αρνητική για $\theta > 0$ και θετική για $\theta < 0$.

Όσο αυξάνεται το α , μειώνεται η κλίση του δευτερεύοντος δρόμου στην ευσταθή κατεύθυνση ($\theta < 0$). Ταυτόχρονα αυξάνεται η κλίση της $V_2[x, \delta.δ.]$ για $\theta < 0$.

Όσο αυξάνεται το α , μειώνεται και η κλίση του δευτερεύοντος δρόμου στην ασταθή κατεύθυνση ($\theta > 0$), μέχρι να φτάσει σε ένα ολικό ελάχιστο στη θέση :

- $\theta_{\min} = 1.223$ για $\alpha = 0.5$
- $\theta_{\min} = 0.332$ για $\alpha = 3$
- $\theta_{\min} = 0.011$ για $\alpha = 100$

Από $\theta = 0$ έως $\theta = \theta_{\min}$ η $V_2[x, \delta.δ.]$ είναι αρνητική.

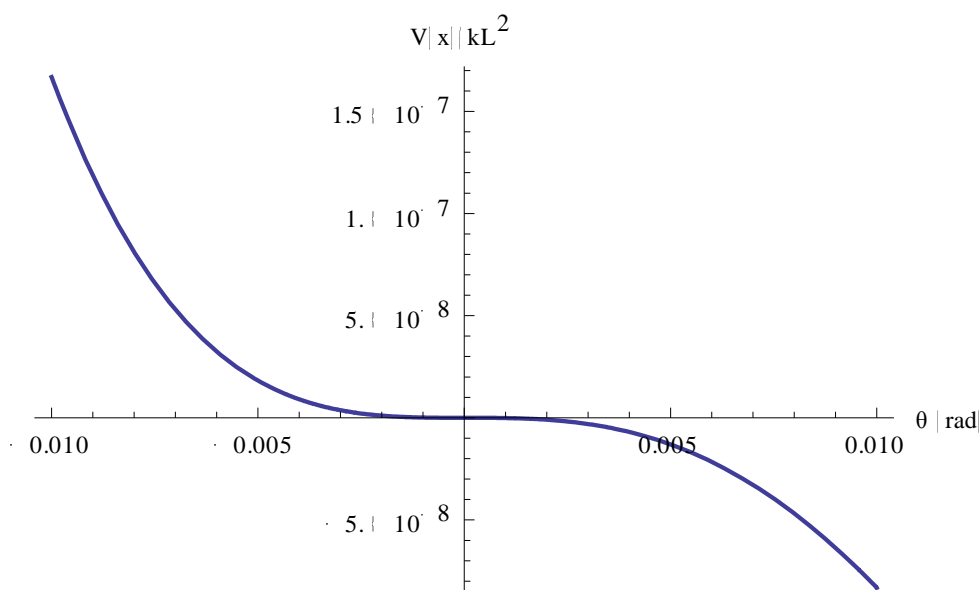
Μετά το ολικό ελάχιστο θ_{\min} , ο δρόμος ισορροπίας γίνεται ανιών και στρέφει τα κοίλα άνω. Η $V_2[x, \delta.δ.]$ λαμβάνει θετικές τιμές.

Παρατηρούμε στο διάγραμμα των δρόμων ισορροπίας ότι η επιρροή του στροφικού ελατηρίου αυξάνεται σημαντικά μέχρι την τιμή $\alpha \approx 3$, ενώ για $\alpha > 3$ η επιρροή του αυξάνεται με πολύ μειωμένο ρυθμό. Χαρακτηριστικά, ο δρόμος ισορροπίας για $\alpha = 100$ απέχει λίγο από αυτόν για $\alpha = 3$.

Επομένως, το $\alpha \approx 3$ είναι πρακτικά μία κρίσιμη τιμή της παραμέτρου:

- Για $\alpha < 3$ το λοξό ελατήριο επηρεάζει περισσότερο το δρόμο ισορροπίας
- Για $\alpha > 3$ το λοξό ελατήριο επηρεάζει ελάχιστα το δρόμο ισορροπίας

Ο χαρακτήρας του σημείου διακλάδωσης δεν επηρεάζεται από το στροφικό ελατήριο. Η ύπαρξη λοξού ελατηρίου επιβάλλει ασταθές ασύμμετρο σημείο, ανεξαρτήτως της τιμής α . Αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = P_{cr}$ να παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $\theta = 0$, αφού η τιμή της τρίτης παραγώγου (της πρώτης μη μηδενικής παραγώγου) $V_3[0, P = P_{cr}] = -0.75kL^2$, είναι διάφορη του μηδενός ανεξαρτήτως της τιμής του α . Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας ($\theta = 0, P = P_{cr}$) για $\alpha = 100$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:



Ατελείς φορείς

Στην περίπτωση ατελούς φορέα με γωνία αρχικής ατέλειας ϵ , το συνολικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V[x] = 0.5akL^2(-e + x)^2 - LP(\text{Cos}[e] - \text{Cos}[x]) + kL^2(-\sqrt{1 + \text{Sin}[e]} + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})^2$$

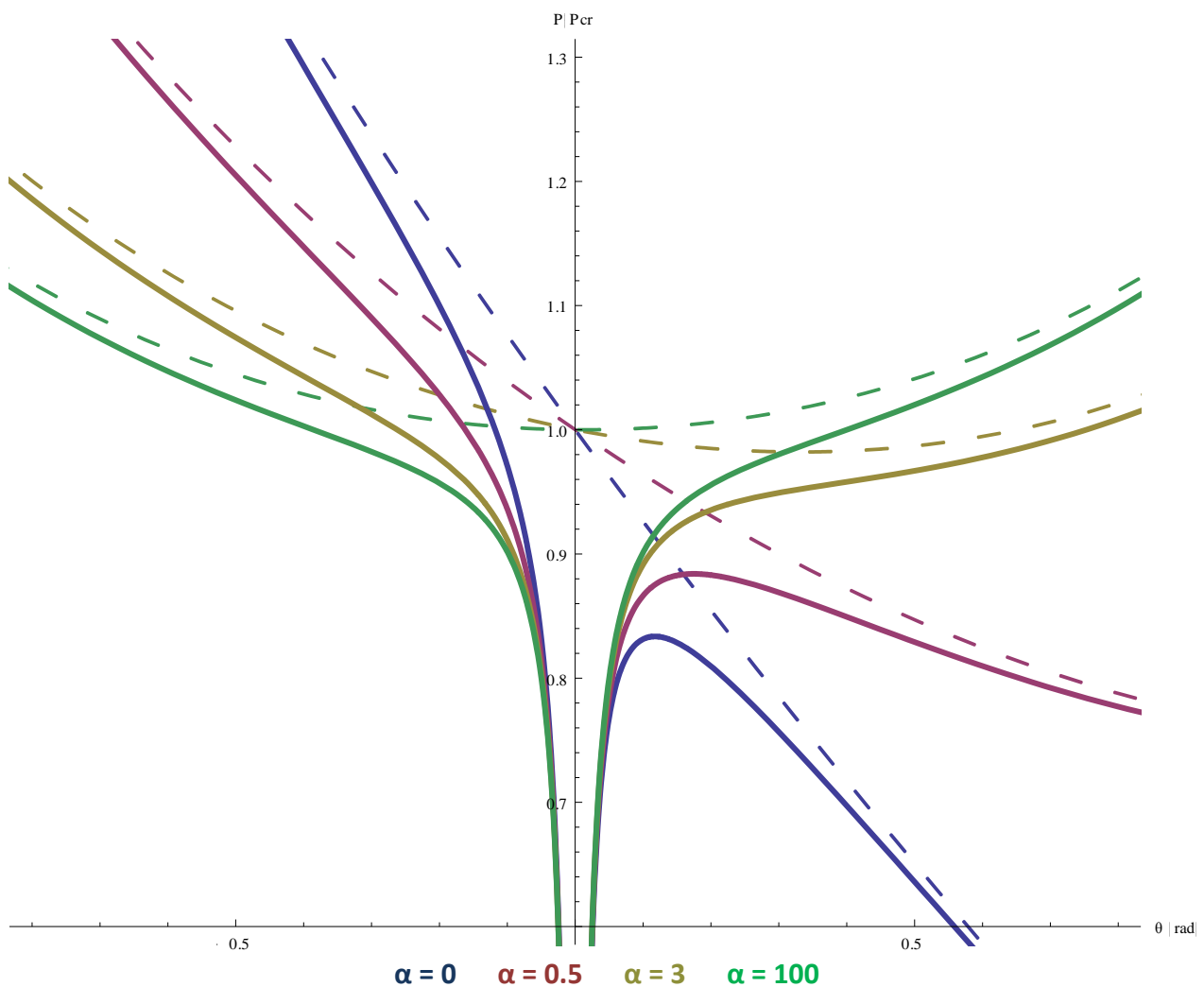
Μηδενισμός της πρώτης παραγώγου:

$$V1[x] = L(akL(-e + x) - P\text{Sin}[x] + kL\text{Cos}[x](1 - \frac{\sqrt{1 + \text{Sin}[e]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}})) = 0$$

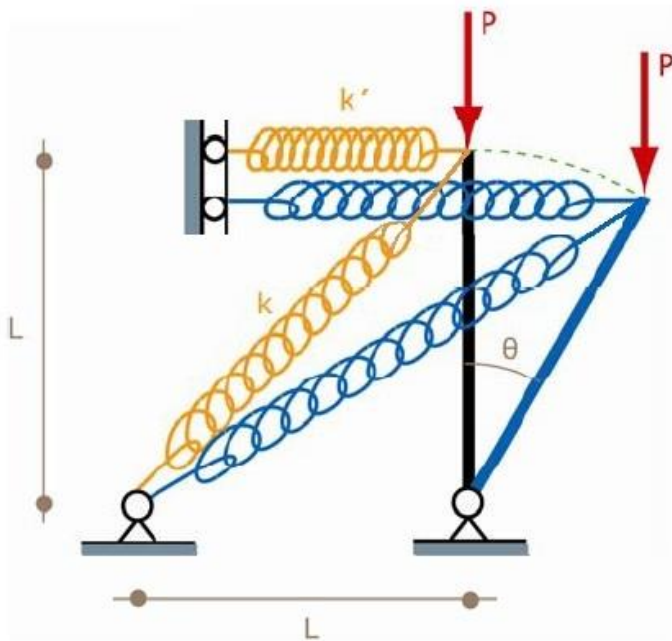
Προκύπτει ένας ενιαίος δρόμος ισορροπίας:

$$P = kL(a(-e + x)\text{Csc}[x] + \text{Cot}[x](1 - \frac{1\sqrt{1 + \text{Sin}[e]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}))$$

Δρόμοι ισορροπίας



Οριζόντιο ελατήριο - λοξό ελατήριο



$$U = 0.5k'L^2\text{Sin}[x]^2 + kL^2(-1 + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})^2 \text{ και } W = -LP(1 - \text{Cos}[x]), x = \theta$$

Θέτοντας $k' = ak$, η συνολική δυναμική ενέργεια V του συστήματος είναι:

$$V = U + W = 0.5akL^2\text{Sin}[x]^2 + kL^2(-1 + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})^2 - LP(1 - \text{Cos}[x])$$

Μηδενισμός της **πρώτης παραγώγου**:

$$V1[x] = -LP\text{Sin}[x] + akL^2\text{Cos}[x]\text{Sin}[x] + \frac{kL^2\text{Cos}[x](-1 + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις:

- $x = 0$: κύριος δρόμος
- $P = kL(a\text{Cos}[x] + \text{Cot}[x](1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}))$: δευτερεύων δρόμος

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι: $Pcr = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) = (0.5 + a)kL$

Η **δεύτερη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς x είναι:

$$V2[x] = -LP\text{Cos}[x] + 0.5akL^2(2\text{Cos}[x]^2 - 2\text{Sin}[x]^2) + kL^2\left(\frac{\text{Cos}[x]^2}{2(1 + \text{Sin}[x])} - \frac{\text{Cos}[x]^2(-1 + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})}{2(1 + \text{Sin}[x])^{3/2}} - \frac{\text{Sin}[x](-1 + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}\right)$$

Για να μελετηθεί η ευστάθεια του κύριου δρόμου ισορροπίας απαιτείται ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της συνολικής δυναμικής ενέργειας επί του κύριου δρόμου, δηλαδή για $\theta=0$:

$$V2[0] = 0.5kL^2 + akL^2 - LP$$

Για $P < P_{cr}$, $V_2[0] > 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ευσταθείς
 Για $P > P_{cr}$, $V_2[0] < 0$, οι αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας είναι ασταθείς
 Για $P = P_{cr}$, $V_2[0] = 0$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για το συνολικό δυναμικό V

Για το σημείο διακλάδωσης κύριου και δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας δεν προκύπτει συμπέρασμα από τη δεύτερη παράγωγο της V , οπότε απαιτείται περαιτέρω παραγωγή.

Η **τρίτη παράγωγος** της συνολικής δυναμικής ενέργειας είναι:

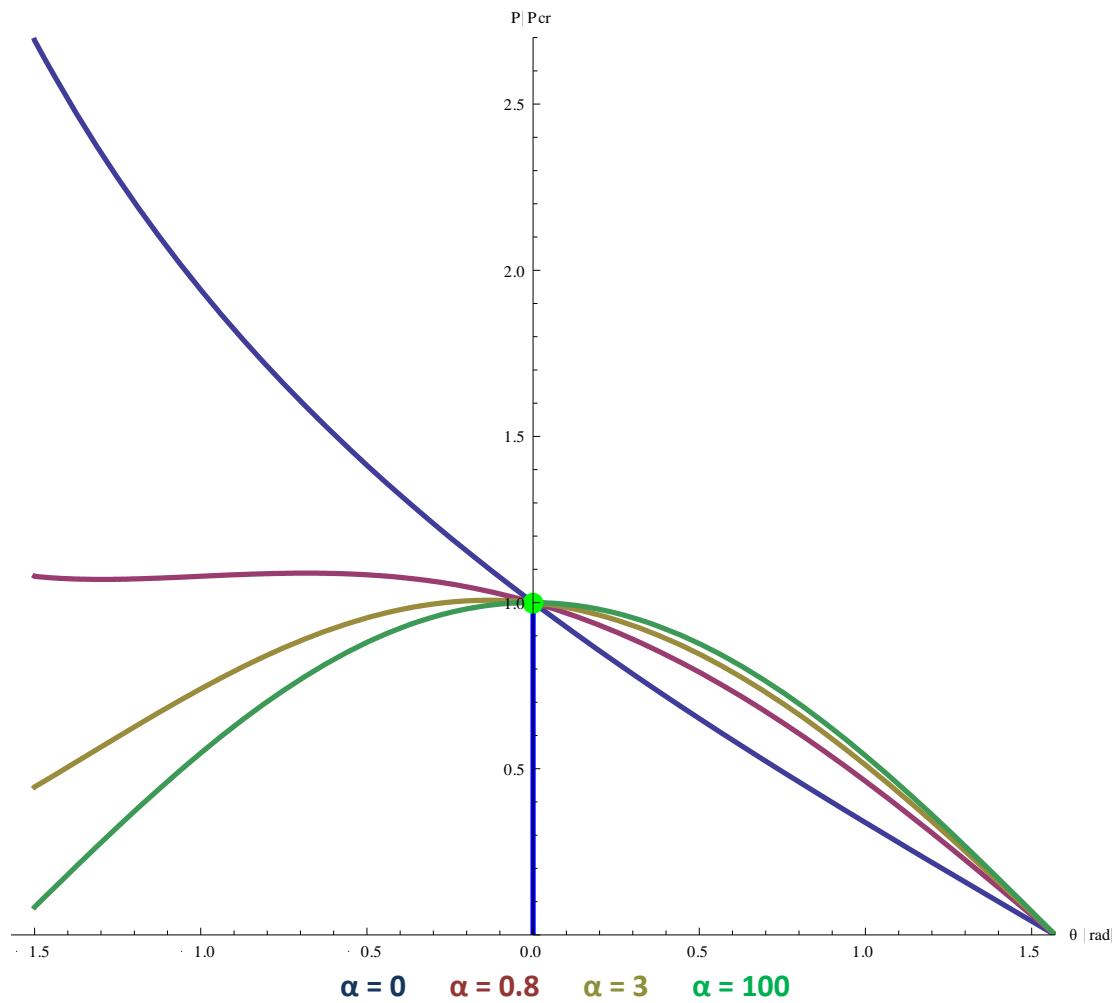
$$V_3[x] = \frac{1}{4}L(4P\text{Sin}[x] + kL\text{Cos}[x](-4 - 16a\text{Sin}[x] + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}))$$

Για $\theta = 0$ και $P = P_{cr}$:

$$V_3[0, P = P_{cr}] = -\frac{3kL^2}{4}$$

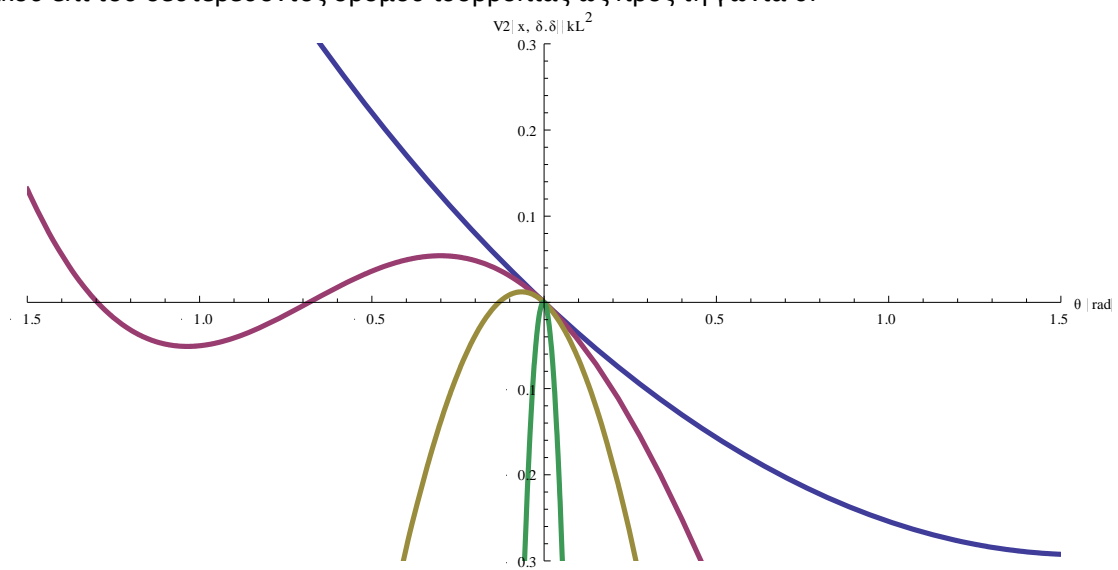
Η πρώτη μη μηδενική παράγωγος της συνολικής δυναμικής ενέργειας Π στη θέση του κρίσιμου σημείου είναι η τρίτη, δηλαδή περιττής τάξης. Επομένως η Π παρουσιάζει στη θέση αυτή σημείο καμπής, συνεπώς το εξεταζόμενο σημείο ισορροπίας, δηλαδή το σημείο διακλάδωσης, είναι ασύμμετρο, χαρακτηριζόμενο από αστάθεια προς τη μία διεύθυνση και ευστάθεια προς την άλλη.

Δρόμοι ισορροπίας



Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της **δεύτερης παραγώγου** δυναμικού επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας ως προς τη γωνία θ :

$V_2[x, \delta, \delta]$ του συνολικού



Για $\alpha = 0$ απουσιάζει το στροφικό ελατήριο και ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι καμπύλος, ασύμμετρος ως προς τον κατακόρυφο άξονα, ασταθής για $\theta > 0$ και ευσταθής για $\theta < 0$. Η $V_2[x, \delta, \delta]$ είναι αρνητική για $\theta > 0$ και θετική για $\theta < 0$.

Όσο αυξάνεται το α , μειώνεται η κλίση του δευτερεύοντος δρόμου στην ευσταθή κατεύθυνση ($\theta < 0$). Για $\alpha \approx 0.8$ ο δρόμος γίνεται σχεδόν οριζόντιος, δηλαδή υπό σχεδόν σταθερό φορτίο αυξάνονται οι μετατοπίσεις. Για $\alpha > 0.8$ ο δρόμος γίνεται ασταθής πλέον (καθοδικός) και στρέφει τα κοίλα κάτω.

Άρα, το $\alpha \approx 0.8$ είναι πρακτικά μία οριακή τιμή της παραμέτρου:

- Για $\alpha < 0.8$ ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας για $\theta < 0$ είναι ευσταθής
- Για $\alpha > 0.8$ ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας για $\theta < 0$ είναι ασταθής

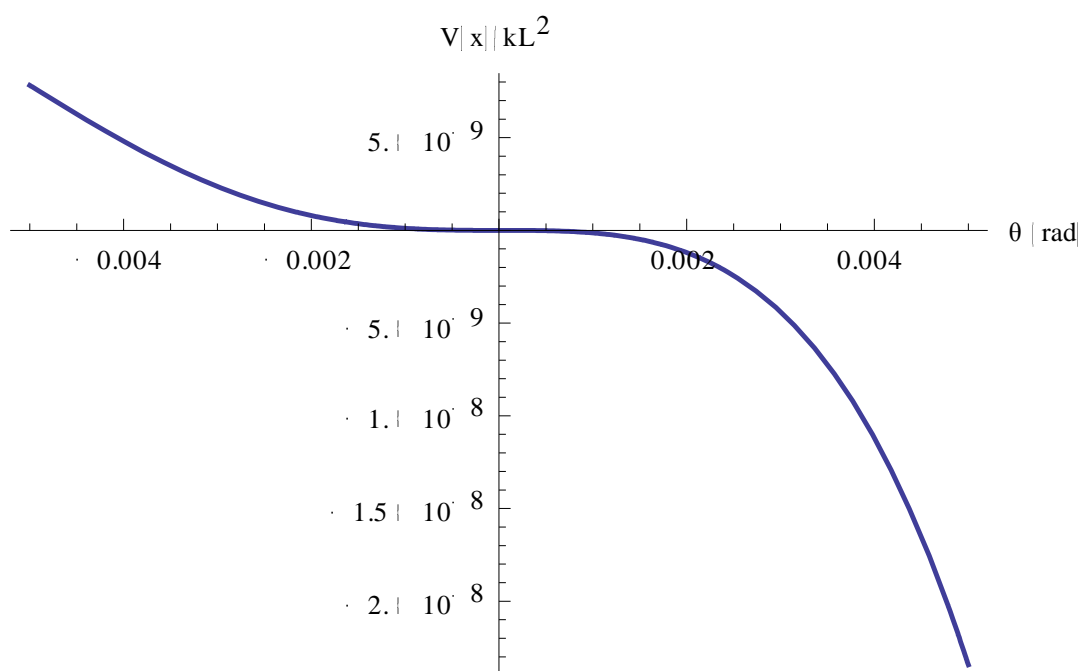
Για $\theta > 0$, ο δρόμος ισορροπίας είναι πάντα ασταθής, ανεξαρτήτως της τιμής του α . Δηλαδή δεν επηρεάζεται ποιοτικά από την ύπαρξη του οριζόντιου ελατηρίου. Αυξανόμενη της τιμής του α , ο δρόμος γίνεται απλώς πιο καμπύλος.

Παρατηρούμε στο διάγραμμα των δρόμων ισορροπίας ότι η επιρροή του οριζόντιου ελατηρίου αυξάνεται σημαντικά μέχρι την τιμή $\alpha \approx 3$, ενώ για $\alpha > 3$ η επιρροή του αυξάνεται με πολύ μειωμένο ρυθμό. Χαρακτηριστικά, ο δρόμος ισορροπίας για $\alpha = 100$ απέχει λίγο από αυτόν για $\alpha = 3$.

Επομένως, το $\alpha \approx 3$ είναι πρακτικά μία κρίσιμη τιμή της παραμέτρου:

- Για $\alpha < 3$ το λοξό ελατήριο επηρεάζει περισσότερο το δρόμο ισορροπίας
- Για $\alpha > 3$ το λοξό ελατήριο επηρεάζει ελάχιστα το δρόμο ισορροπίας

Ο χαρακτήρας του σημείου διακλάδωσης δεν επηρεάζεται από το οριζόντιο ελατήριο. Η ύπαρξη λοξού ελατηρίου επιβάλλει ασταθές ασύμμετρο σημείο, ανεξαρτήτως της τιμής α . Αναμένουμε το συνολικό δυναμικό για $P = P_{cr}$ να παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $\theta = 0$, αφού η τιμή της τρίτης παραγώγου (της πρώτης μη μηδενικής παραγώγου) $V_3[0, P = P_{cr}] = -0.75kL^2$, είναι διάφορη του μηδενός ανεξαρτήτως της τιμής του α . Πράγματι, η μεταβολή της συνολικής δυναμικής ενέργειας περί τη θέση ισορροπίας ($\theta = 0, P = P_{cr}$) για $\alpha = 100$ φαίνεται στο κάτωθι διάγραμμα:



Ατελείς φορείς

Στην περίπτωση ατελούς φορέα με γωνία αρχικής ατέλειας ϵ , το συνολικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V[x] = 0.5akL^2(-\text{Sin}[\epsilon] + \text{Sin}[x])^2 - LP(\text{Cos}[\epsilon] - \text{Cos}[x]) + kL^2(-\sqrt{1 + \text{Sin}[\epsilon]} + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})^2$$

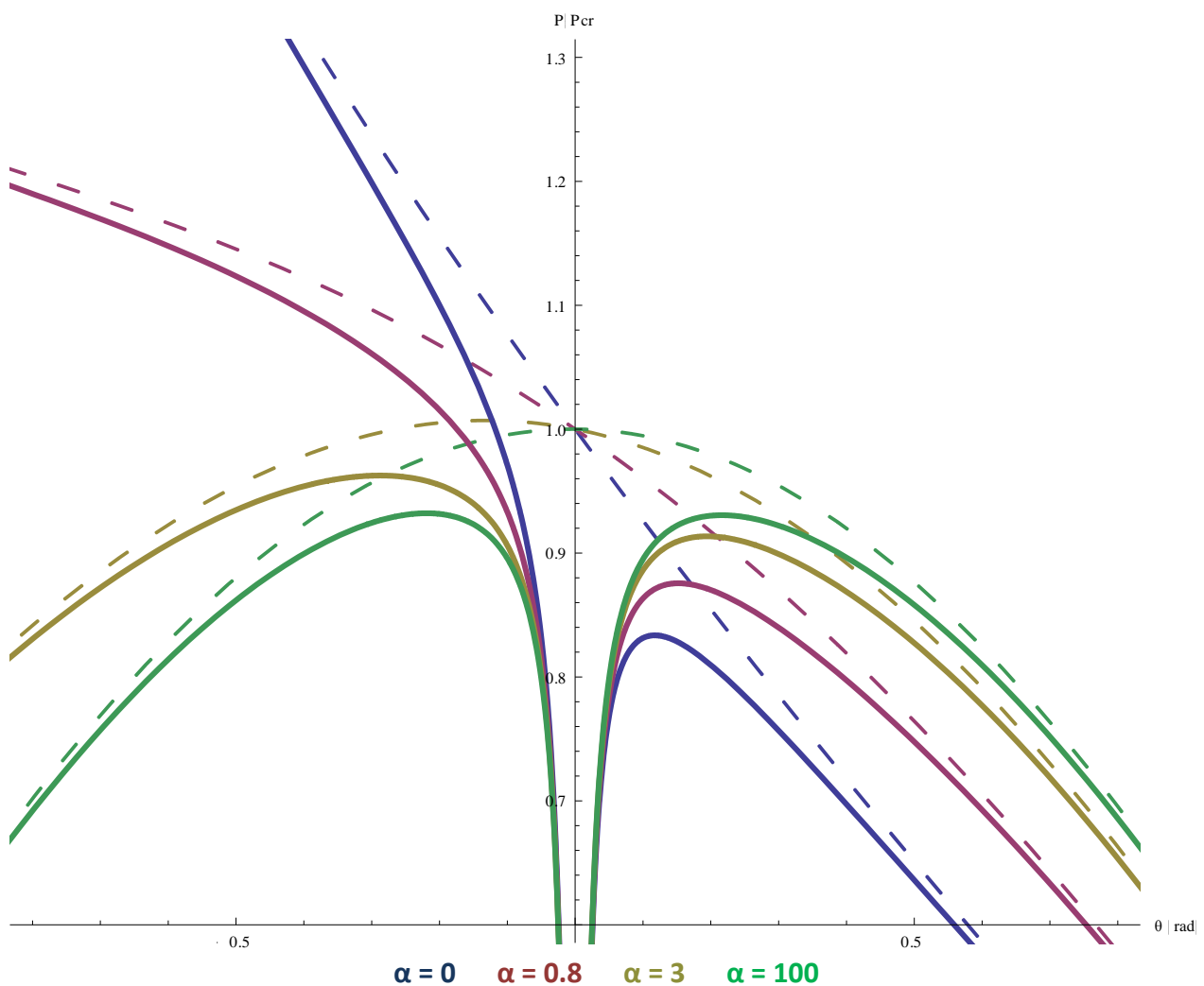
Μηδενισμός της πρώτης παραγώγου:

$$V1[x] = L(-P\text{Sin}[x] + kL\text{Cos}[x](1 - a\text{Sin}[\epsilon] + a\text{Sin}[x] - \frac{\sqrt{1 + \text{Sin}[\epsilon]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}})) = 0$$

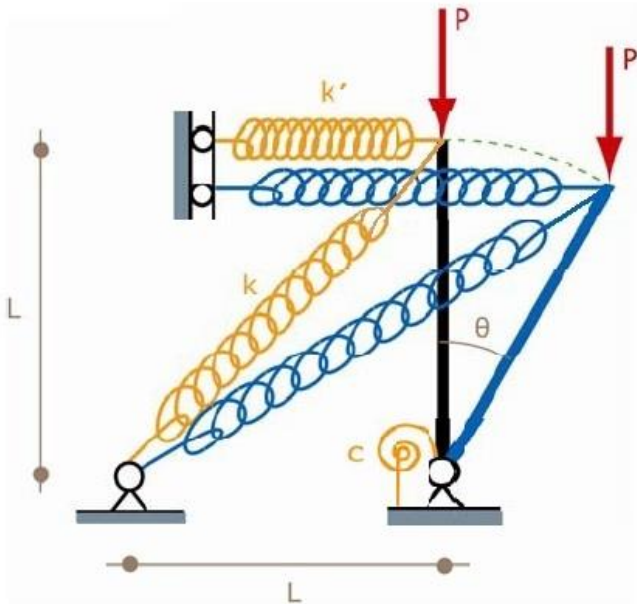
Προκύπτει ένας ενιαίος δρόμος ισορροπίας:

$$P = kL\text{Cot}[x](1 - a\text{Sin}[\epsilon] + a\text{Sin}[x] - \frac{1\sqrt{1 + \text{Sin}[\epsilon]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}})$$

Δρόμοι ισορροπίας



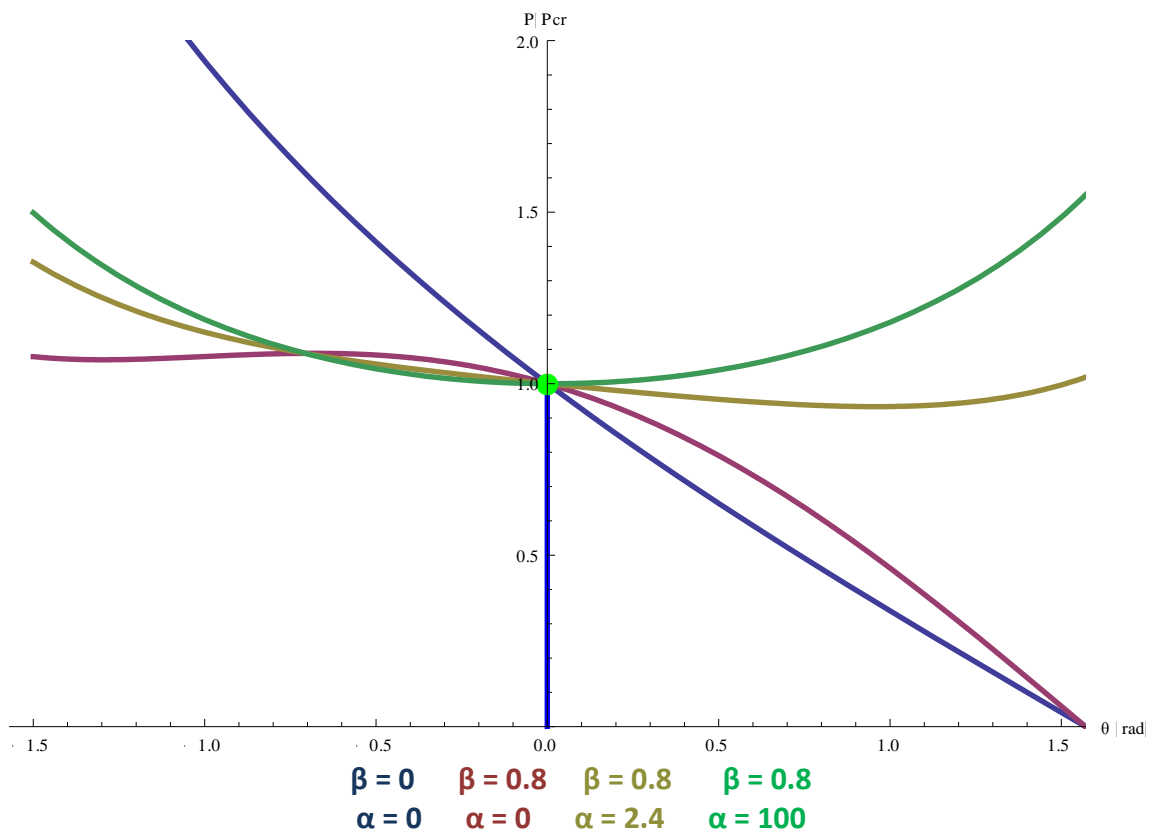
Συνδυασμός όλων των ελατηρίων



Ακολουθούμε την ίδια ενεργειακή μέθοδο με τα προηγούμενα παραδείγματα, και θέτουμε $c = \alpha kL^2$ και $k' = \beta k$.

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι: $P_{cr} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) = (0.5 + a + \beta)kL$

Εξετάζουμε την κρίσιμη περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος για $\beta = 0.8$ και ελέγχουμε την επιρροή του στροφικού ελατηρίου στον δρόμο ισορροπίας:



Για $\theta < 0$, η παρουσία του στροφικού ελατηρίου δεν επηρεάζει σημαντικά τον σχεδόν οριζόντιο δρόμο ισορροπίας (μέχρι $\theta \approx -0.75$).

Για $\theta > 0$, η παρουσία του στροφικού ελατηρίου αλλάζει καθοριστικά το δρόμο ισορροπίας:

- Για $\alpha = 2.4 = 3\beta$, ο δρόμος ισορροπίας γίνεται σχεδόν οριζόντιος
- Για $\alpha = 100 \gg 3\beta$, ο δρόμος ισορροπίας γίνεται ανοδικός (ευσταθής)

Ατελείς φορείς

Στην περίπτωση ατελούς φορέα με γωνία αρχικής ατέλειας ϵ , το συνολικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V[x] = 0.5akL^2(-e + x)^2 - LP(\text{Cos}[e] - \text{Cos}[x]) + 0.5bkL^2(-\text{Sin}[e] + \text{Sin}[x])^2 + kL^2(-\sqrt{1 + \text{Sin}[e]} + \sqrt{1 + \text{Sin}[x]})^2$$

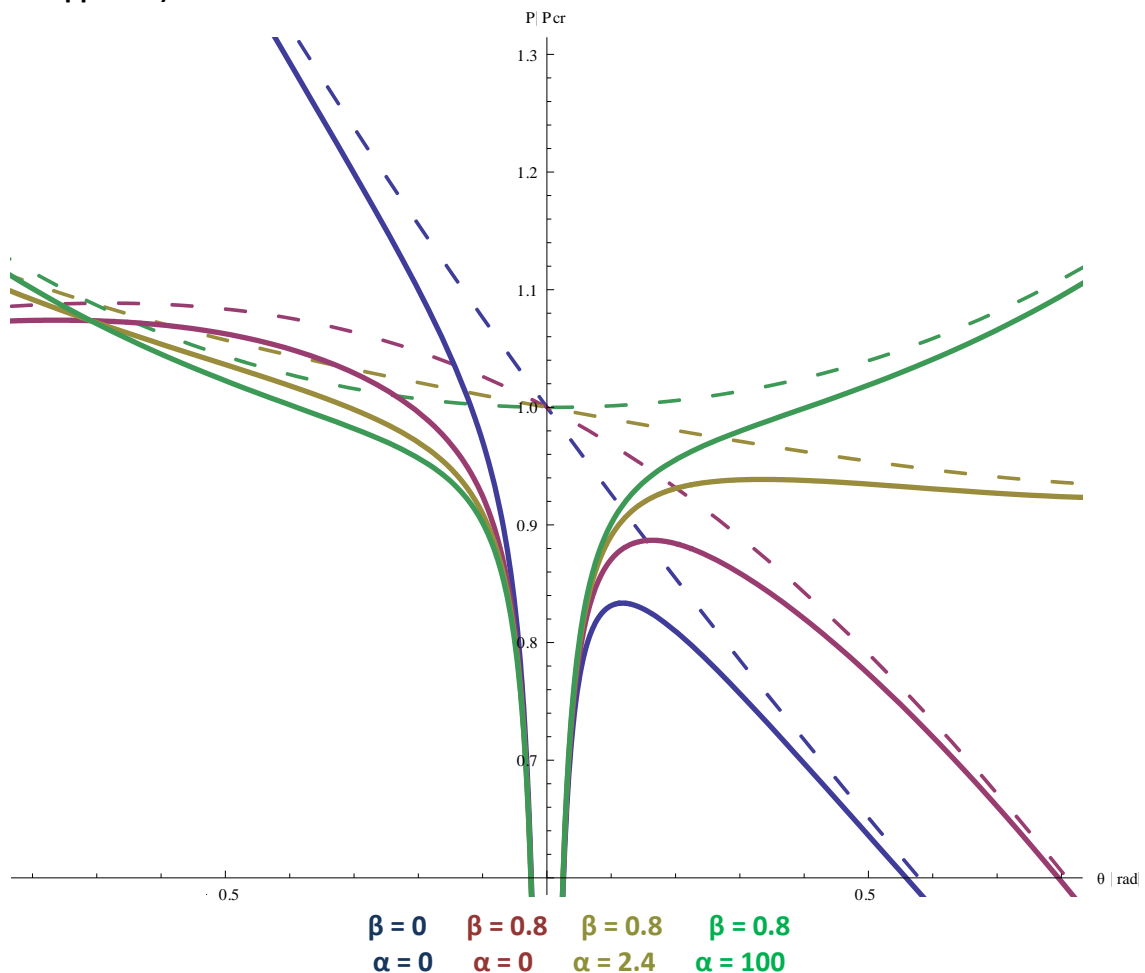
Μηδενισμός της πρώτης παραγώγου: $V1[x] =$

$$= L(akL(-e + x) - P\text{Sin}[x] + kL\text{Cos}[x](1 - b\text{Sin}[e] + b\text{Sin}[x] - \frac{\sqrt{1 + \text{Sin}[e]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}})) = 0$$

Προκύπτει ένας ενιαίος δρόμος ισορροπίας:

$$P = kL(b\text{Cos}[x] + a(-e + x)\text{Csc}[x] + \text{Cot}[x](1 - b\text{Sin}[e] - \frac{1\sqrt{1 + \text{Sin}[e]}}{\sqrt{1 + \text{Sin}[x]}}))$$

Δρόμοι ισορροπίας



Κεφάλαιο 4: Αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού

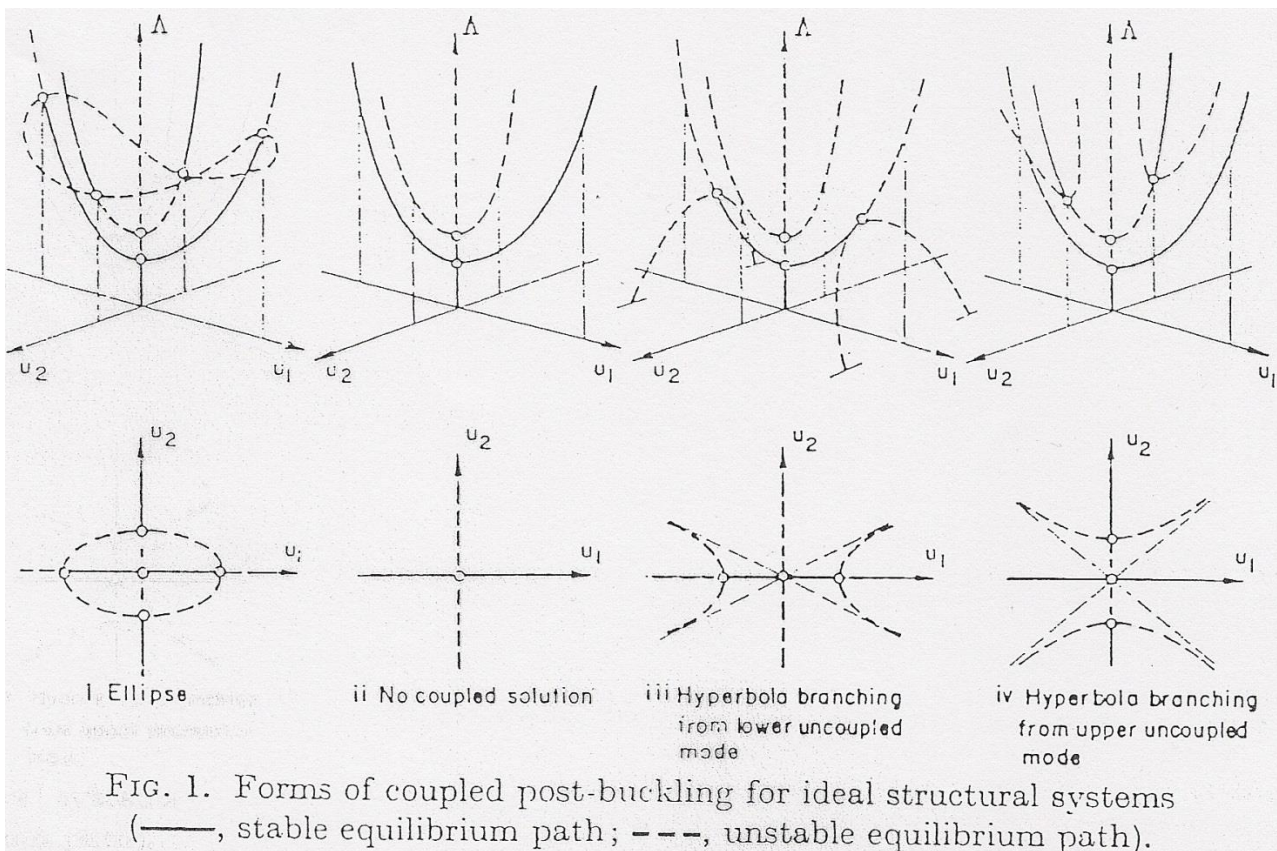
Στα παραδείγματα, που μελετήσαμε μέχρι τώρα, τα σημεία διακλάδωσης ήταν απλά, προκύπτοντα από την τομή δύο δρόμων ισορροπίας, του **θεμελιώδους** δρόμου ισορροπίας και του **μεταλυγισμικού** δρόμου ισορροπίας. Υπάρχουν, όμως, σημεία διακλάδωσης μέσω των οποίων διέρχονται περισσότεροι του ενός μεταλυγισμικοί δρόμοι. Δηλαδή, σε αυτή την τιμή του **κρίσιμου** διακλαδικού φορτίου αντιστοιχούν δύο ή περισσότερες κανονικές μορφές λυγισμού.

Κλασικό παράδειγμα είναι η περίπτωση λυγισμού αμφιερέιστων ορθογωνικών πλακών, οι οποίες υπό ορισμένες γεωμετρικές συνθήκες μπορούν σε κάποια τιμή του κρίσιμου φορτίου να λυγίσουν κατά δύο διαφορετικές κανονικές μορφές λυγισμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιες περιπτώσεις **διπλών** (two-fold) ή **πολλαπλών** (multiple) σημείων διακλαδώσεων μπορούν να προκαλέσουν απρόβλεπτα φαινόμενα, όπως έντονη ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες λόγω της μη γραμμικής αλληλεπιδράσεως δύο ή περισσότερων κανονικών μορφών λυγισμού.

Η αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού λαμβάνει χώρα σε γειτνιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Τότε παρατηρείται νέα διακλάδωση επί του δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας και προκύπτει **τριτεύων** δρόμος.

Εάν τα σημεία συμπίπτουν (coincident) έχουμε πολλαπλή διακλάδωση (compound branching) όπου και ο δευτερεύων δρόμος και ο τριτεύων δρόμος ξεκινούν ταυτόχρονα.

Ο W. J. Supple (1967) κατηγοριοποίησε τις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης ως ακολούθως:

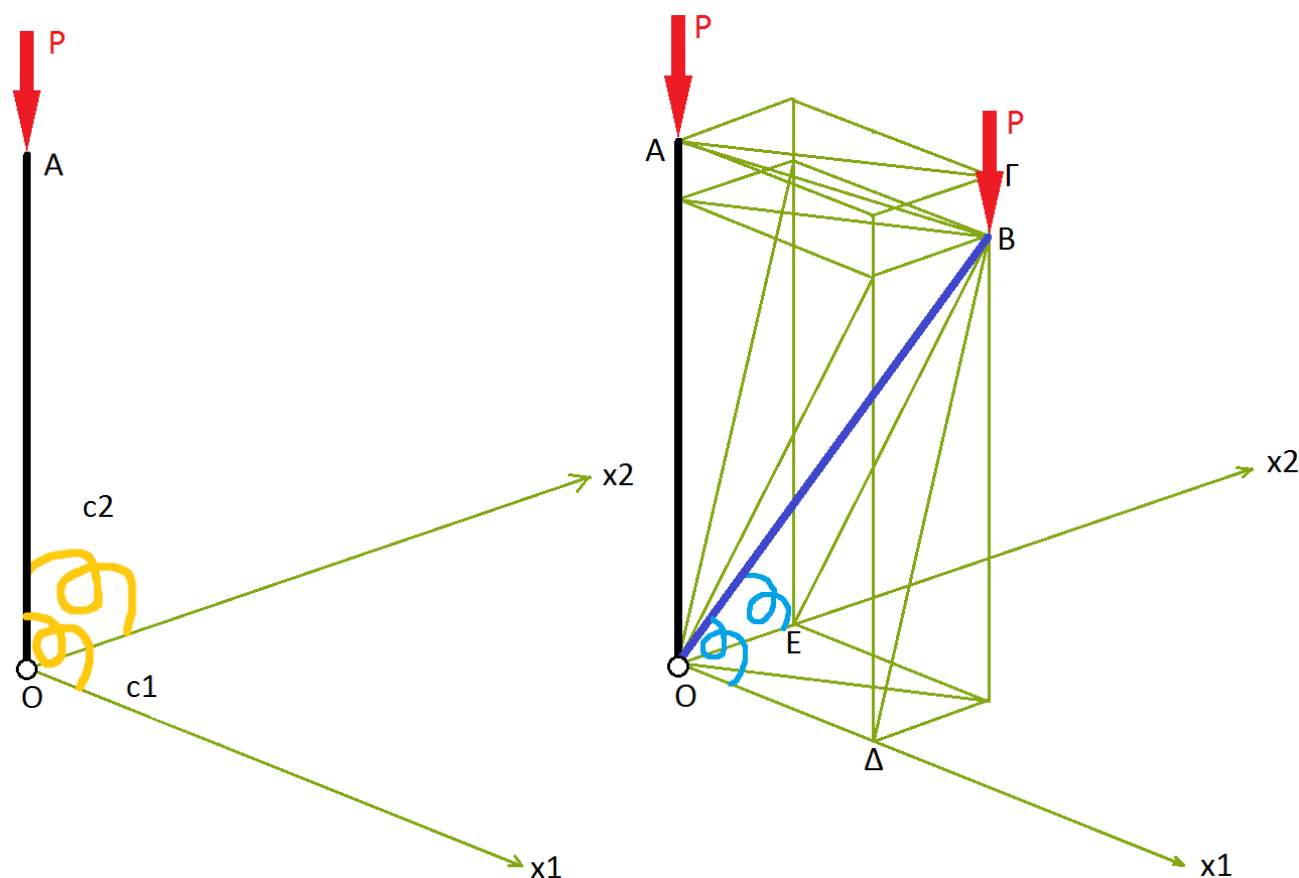


Κατωτέρω θα εκθέσουμε ένα παράδειγμα δύο βαθμών ελευθερίας (2-Β.Ε.Κ.) ελαστικού προβόλου, υποκείμενου σε λυγισμό λόγω κατακόρυφου φορτίου στο ελεύθερο άκρο του. Το μηχανικό αυτό πρότυπο, γνωστό ως πρότυπο Augusti, εμφανίζει την ακόλουθη συμπεριφορά:

Δύο τελείως ευσταθείς συμμετρικοί μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας (συνδεόμενοι με ευσταθή συμμετρικά σημεία διακλάδωσης) μπορούν να μετασχηματισθούν σε ασταθείς συμμετρικούς μεταλυγισμικούς δρόμους μετά από σύμπτωση των αντίστοιχων σημείων διακλάδωσης. Το διπλό αυτό σημείο διακλάδωσης εμφανίζει μεγάλη ευαισθησία σε ατέλεια.

Η ανωτέρω συμπεριφορά χαρακτηρίζει το κλασσικό πρότυπο Augusti, δηλαδή αυτό με τα στροφικά ελατήρια. Υπάρχουν και παραλλαγές του προτύπου, με μετακινησιακά ελατήρια, οριζόντια ή λοξά, ή συνδυασμούς ελατηρίων. Αυτές τις παραλλαγές θα τις εξετάσουμε αργότερα. Τώρα θα μελετήσουμε το κλασσικό πρότυπο Augusti :

Στροφικά ελατήρια

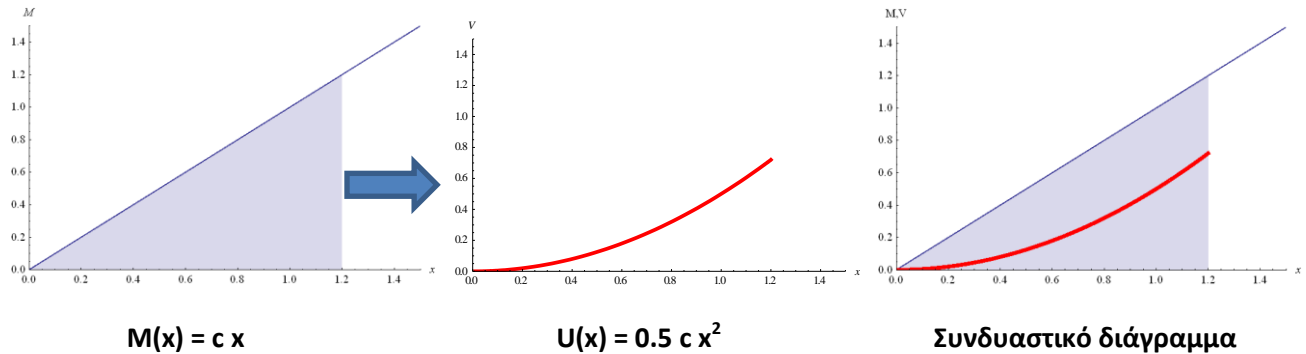


Το μηχανικό πρότυπο προβόλου του παραπάνω σχήματος, ύψους $L = (AO)$, στηρίζεται σε δύο στροφικά ελατήρια ευρισκόμενα σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα με δείκτες αντίστασης c_1 και c_2 . Έτσι, ο λυγισμός του προβόλου συνδέεται με διαξονική κάμψη. Έστωσαν $\alpha_1 = BO\Delta$ και $\alpha_2 = BOE$ οι γωνίες του προβόλου OB (στην παραμορφωμένη λόγω λυγισμού κατάσταση) με τους άξονες x_1 και x_2 , αντιστοίχως.

Τότε, η παραμορφωμένη κατάσταση μπορεί να ορισθεί μέσω των γωνιών:

$$x_1 = \pi/2 - \alpha_1 \text{ και } x_2 = \pi/2 - \alpha_2$$

Έστω x μία γωνία και c η σταθερά του ελατηρίου. Τότε η ροπή M του ελατηρίου για στροφή x θα είναι : $M(x) = c x$. Η εσωτερική δυναμική ενέργεια U του ελατηρίου είναι το ολοκλήρωμα της ροπής $M(x)$ ή αλλιώς το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $M(x)$. Δηλαδή $U(x) = 0.5 c x^2$. Τόσο η ροπή M , όσο και η δυναμική ενέργεια U φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Οι σταθερές των δύο ελατηρίων συσχετίζονται με τον συντελεστή a : $c_2 = a c_1$

Το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι κατά τα γνωστά: $P_{cr} = c_1/L$

Έστω το κατακόρυφο φορτίο στο ελεύθερο άκρο του προβόλου: P

Έστω το ανηγμένο φορτίο p ως προς το κρίσιμο φορτίο: $p = P/P_{cr} = (P L)/c_1$

Οι εσωτερικές ενέργειες των ελατηρίων 1 και 2 είναι αντίστοιχα: $U_1 = 0.5 c_1 x_1^2$ και $U_2 = 0.5 c_2 x_2^2$

Το συνολικό εσωτερικό έργο είναι: $U = U_1 + U_2$

Η κατακόρυφη βύθιση του άκρου του προβόλου: $\Delta = (B\Gamma) = L(1 - \sqrt{1 - (\text{Sin}[x_1])^2 + (\text{Sin}[x_2])^2})$

Η βύθιση Δ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή σειράς, κρατώντας όρους μέχρι 4^{ης} τάξης, ως εξής:

$$\Delta = L \left[\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right]$$

Η δυναμική ενέργεια W των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος είναι: $W = - P \Delta$

Μεθοδολογία εύρεσης δρόμων ισορροπίας

1) Διατυπώνουμε το συνολικό δυναμικό :

- $V(x_1, x_2, p)$

2) Συνθήκες ισορροπίας:

- $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$
- $\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $x_1 \neq 0, x_2 = 0$, λύνουμε την εξίσωση: $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$ ως προς p .
- δευτερεύων δρόμος 2: $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, λύνουμε την εξίσωση: $\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$ ως προς p .
- τριτεύων δρόμος: $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

Προσδιορισμός του τριτεύοντος δρόμου:

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των x_1, x_2 , κάνουμε απαλοιφή του p από τις εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι προκύπτει η προβολή του τριτεύοντος δρόμου στο επίπεδο $x_1 - x_2$. Αναλυτικά είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση ως προς x_1, x_2 : $F(x_1, x_2) = 0$

Για να βρούμε το φορτίο p , κάνουμε απαλοιφή της μίας γωνίας από τις εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι προκύπτει η προβολή του τριτεύοντος δρόμου στο επίπεδο της άλλης γωνίας και του φορτίου p . Αναλυτικά είναι δύο συναρτήσεις: $p = f_1(x_1)$ και $p = f_2(x_2)$.

Έχουμε, λοιπόν, τρεις δισδιάστατες προβολές στα τρία επίπεδα: $(x_1 - x_2)$, $(p - x_1)$, $(p - x_2)$ που προσδιορίζουν πλήρως την τρισδιάστατη παραμετρική καμπύλη του τριτεύοντος δρόμου στο χώρο.

Για να βρούμε το σημείο που τέμνει ο τριτεύων δρόμος τον δευτερεύοντα δρόμο, χρειαζόμαστε δύο συντεταγμένες: $(x_{\text{τομή}}, p_{\text{τομή}})$:

i) Αν η τομή γίνεται στον 1^ο δευτερεύοντα δρόμο:

$x_{1\text{-τομή}}$: λύνουμε την προβολή του τριτεύοντος δρόμου στο επίπεδο $x_1 - x_2$ για $x_2 = 0$ ως προς x_1 .

$p_{\text{τομή}}$: θέτουμε $x_2 = 0$ στην $p = f_2(x_2)$

ii) Αν η τομή γίνεται στον 2^ο δευτερεύοντα δρόμο:

Πράττουμε αντίστοιχα.

Εύρεση δρόμων ισορροπίας

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 , για $a = 1.1$:

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}1.1x_2^2 - p\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2)\right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 6a - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

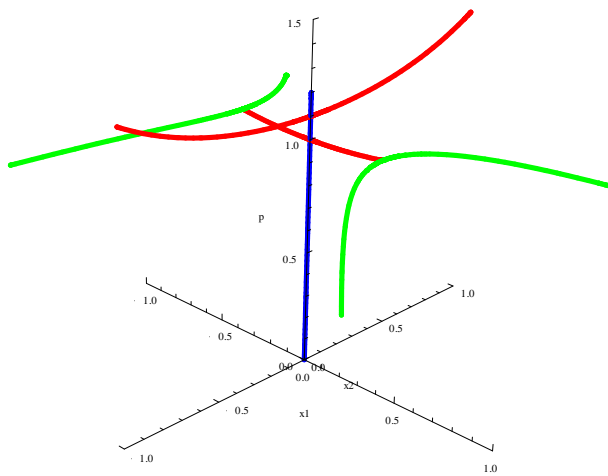
- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1.1\left(\frac{6}{6-x_2^2}\right), x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $-6 - 3x_1^2 + x_2^2 = 1.1(-6 + x_1^2 - 3x_2^2)$

Επίλυση της ανωτέρω πεπλεγμένης σχέσης ως προς x_1 : $x_1 = \pm 0.49386\sqrt{0.6 + 4.3x_2^2}$: κάτοψη του τ.δ.
 $p(x_2) = \frac{12.3}{12+4.x_2^2}$: όψη του τ.δ., $x_{1\text{-τομή}} = 0.38254$, $p_{\text{τομή}} = 1.025$

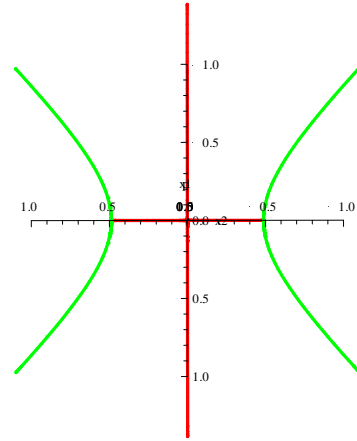
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) και ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι ανοδικοί, ευσταθείς και συμμετρικοί. Ο 1^{ος} δ.δ. βρίσκεται επί του ιδιοδιανύσματος $\{1,0\}$ και ο 2^{ος} δ.δ. επί του ιδιοδιανύσματος $\{0,1\}$. Αυτές είναι οι ιδιομορφές των δευτερευόντων δρόμων. Ο 1^{ος} δ.δ. έχει σημείο διακλάδωσης με τον κ.δ. στο $p = 1$ και ο 2^{ος} δ.δ. στο $p = 1.1$. Η **αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού** λαμβάνει χώρα σε αυτά τα δύο γεινιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Τότε παρατηρείται νέα διακλάδωση επί του 1^{ου} δευτερευόντος δρόμου ισορροπίας και προκύπτει ο **τριτεύων** δρόμος. Ο τ.δ., και στα δύο σκέλη του, εκτρέπεται κάθετα στον 1^ο δ.δ. στο $x_{1\text{-τομή}} = \pm 0.38254$ (εφαπτομενικό διάνυσμα $\{0,1\}$) Στη συνέχεια ο τ.δ. ακολουθεί μία παραβολοειδή ιδιομορφή: $x_1 = \pm 0.49386\sqrt{0.6 + 4.3x_2^2}$ και τείνει στο ιδιοδιάνυσμα των 45 μοιρών: $\{\pm 1, \pm 1\}$. Ο τ.δ. είναι καθοδικός, ασταθής και συμμετρικός. Εδώ είναι και το ενδιαφέρον του φαινομένου, καθώς ένας ελαστικός πρόβολος με ευσταθή αρχικά μεταλυγισμική συμπεριφορά, μετά από μία παραμόρφωση εμφανίζει αστάθεια.

Το συνολικό δυναμικό στο 1^ο σημείο διακλάδωσης (μεταξύ κ.δ. και 1^{ου} δ.δ.) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Το δυναμικό παρίσταται γραφικά ως μία τρισδιάστατη επιφάνεια με όρη και κοιλίες. Ας θεωρήσουμε αυτή τη γραφική παράσταση ως μία νοητή στερεή επιφάνεια σε πεδίο βαρύτητας και θέσουμε εντός αυτής μία υποθετική σφαίρα με μάζα. Η επιφάνεια στρέφει, στην εξεταζόμενη θέση, τα κοίλα προς τα πάνω. Η θέση ισορροπίας είναι στο χαμηλότερο σημείο, όπου η σφαίρα έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια V . Εάν από τη θέση αυτή επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή δx , η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, εκτελεί ταλάντωση περί την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία και τελικά επιστρέφει, λόγω τριβών, και ισορροπεί και πάλι. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται **ευσταθής**. Στο 3^ο σ.δ. (μεταξύ 1^{ου} δ.δ. και τ.δ.) η σφαίρα ευσταθεί για κάθε x_2 αρκεί $x_1 < 0.38254$. Για $x_1 > 0.38254$ και για $x_2 \neq 0$ έστω και κατά λίγο, η σφαίρα αν αφεθεί ελεύθερη, κυλάει, απομακρύνεται από την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία δεν επιστρέφει. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται **ασταθής**. (σαγμοειδές σημείο)

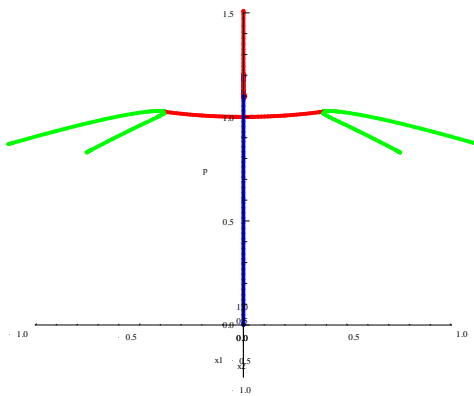
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



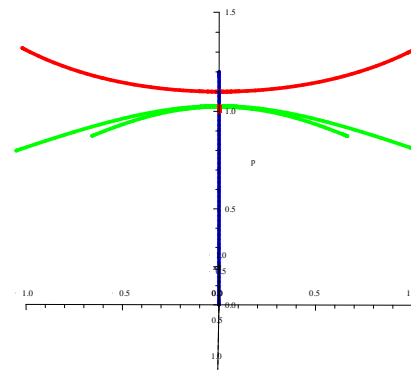
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



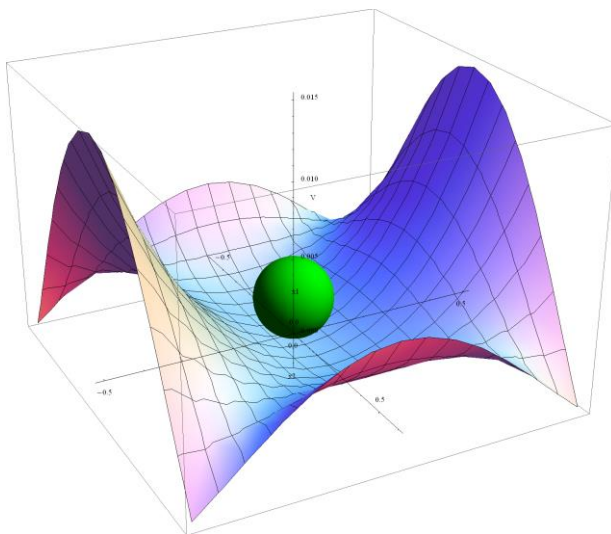
Όψη $p - x_1$:



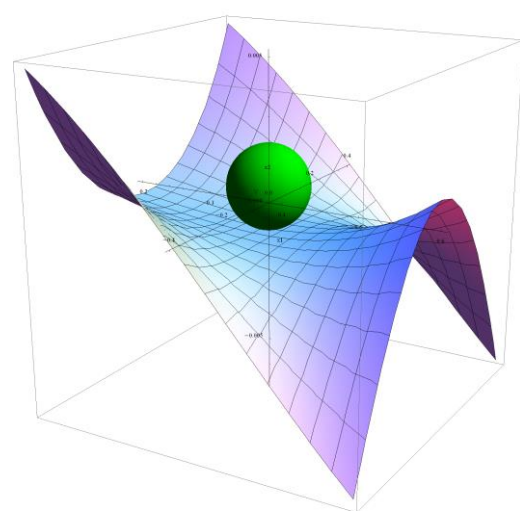
Όψη $p - x_2$:



Συνολικό δυναμικό στο 1^ο σημείο διακλάδωσης :



στο 3^ο σημείο διακλάδωσης :



Κριτήριο 2^{ης} μεταβολής

Εξετάζω την ορίζουσα ευστάθειας $|V_{ij}|$:

$$\delta^2 V = |V_{ij}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Αναζήτηση κρίσιμων θέσεων (επί του κ.δ.):

$$\delta^2 V = |V_{ij}| = \left. \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0$$

Προκύπτουν 2 κρίσιμες θέσεις (σημεία διακλάδωσης):

- 1) $P_{1,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$
- 2) $P_{2,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$

Μελέτη ευστάθειας 1^{ης} θέσης:

Εύρεση "τρόπου" λυγισμού (δηλαδή διανυσματικής κατεύθυνσης \vec{q}). Αντικαθιστώ $P = P_{1,cr}$ στην ορίζουσα ευστάθειας:

$$|V_{ij}^{cr}| \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Θέτω $q_1^{cr} = 1$ (κανονικοποίηση ιδιοδιανύσματος) \rightarrow Υπολογίζω το q_2^{cr} . Το ιδιοδιάνυσμα $\{q_1, q_2\}^{cr}$ είναι η 1^η ιδιομορφή λυγισμού του συστήματος.

Μηχανισμός σύμπτυξης (contraction mechanism)

Εξετάζω την **3^η μεταβολή** για $P = P_{1,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$:

$$\delta^3 V = |V_{ijk}| = V_{111}^{cr} q_1^3 + 3V_{112}^{cr} q_1^2 q_2 + 3V_{122}^{cr} q_1 q_2^2 + V_{222}^{cr} q_2^3 : \text{ορίζουσα τανυστή 3^{ης} τάξεως}$$

Αν $\delta^3 V \neq 0$ τότε από μαθηματική άποψη η συνάρτηση Π έχει στη θέση αυτή σημείο καμπής, και από φυσική άποψη το σύστημα έχει ουδέτερη ισορροπία. Αν $\delta^3 V = 0$, προχωρούμε στην επόμενη μεταβολή.

Εξετάζω την **4^η μεταβολή** για $P = P_{1,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$:

$$\delta^4 V = |V_{ijkl}| = V_{1111}^{cr} q_1^4 + 4V_{1112}^{cr} q_1^3 q_2 + 6V_{1122}^{cr} q_1^2 q_2^2 + 4V_{1222}^{cr} q_1 q_2^3 + V_{2222}^{cr} q_2^4 : \text{ορίζουσα τανυστή 4^{ης} τάξεως}$$

Αν $\delta^4 V > 0$, η θέση είναι ευσταθής. Αν $\delta^4 V < 0$, η θέση είναι ασταθής.

Εφαρμογή του κριτηρίου 2^{ης} μεταβολής

$$|V_{ij}| = 1.1 - 2.1p + p^2 + 0.05px_1^2 - \frac{p^2x_1^4}{4} - 0.05px_2^2 - \frac{1}{2}p^2x_1^2x_2^2 - \frac{p^2x_2^4}{4} : \text{Ορίζουσα ευστάθειας}$$

$$\text{Για } x_1 = 0, x_2 = 0 : |V_{ij}| = 1.1 - 2.1p + p^2, \text{ με ρίζες : } p_{1cr} = 1, p_{2cr} = 1.1$$

Μελέτη ευστάθειας 1^{ης} θέσης:

Για $q_1 = 1 \rightarrow q_2 = 0$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα $\{1,0\}$ είναι η 1^η ιδιομορφή, κάτι που φαινόταν και από τις γραφικές παραστάσεις: Ο 1^{ος} δ.δ. είναι στο κατακόρυφο επίπεδο $x_2 = 0$.

Εξετάζω την **3^η μεταβολή** για $P = P_{1,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$:

$$V_{111c} = V_{112c} = V_{122c} = V_{222c} = 0 \rightarrow \delta^3V = 0$$

Εξετάζω την **4^η μεταβολή** για $P = P_{1,cr}$, $x_{1,cr} = 0$, $x_{2,cr} = 0$:

$$V_{1111c} = 1, V_{1112c} = 0, V_{1122c} = -1, V_{1222c} = 0, V_{2222c} = 1 \rightarrow \delta^4V = 1 > 0 \rightarrow \text{ευστάθεια}$$

Επαληθεύεται δηλαδή η ευστάθεια από τη γραφική μέθοδο με την ισορροπία της σφαίρας στην κοιλία.

Ατελής φορέας

1) Ανηγγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 , για $a = 1.1$ και για ατέλειες $e_1 = e_2 = 0.01 \text{ rad}$:

$$V[x_1, x_2] \cong \frac{1}{2}(x_1 - 0.01)^2 + \frac{1}{2}1.1(x_2 - 0.01)^2 - p\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2)\right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6(-0.01 + x_1) - p(6x_1 - x_1^3 + 3x_1x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 6a(-0.01 + x_2) - p(6x_2 + 3x_1^2x_2 - x_2^3) = 0$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

Προκύπτει ένας ενιαίος δρόμος ισορροπίας, ο οποίος τείνει ασυμπτωτικά στον τριτεύοντα δρόμο ισορροπίας και φαίνεται στα σχήματα με **μωβ** χρώμα:

$$1.1x_1(6 - x_1^2 - 600x_2 + 100x_1^2x_2 + 3x_2^2 - 300x_2^3) = x_2(6 - 600x_1 + 3x_1^2 - 300x_1^3 - x_2^2 + 100x_1x_2^2)$$

Εδώ οι επιλύσεις έδωσαν ιδιαίτερα μακροσκελείς σχέσεις: κάτωψη ε.δ. $x_1 =$

$$-\frac{10 \cdot x_2}{11 \cdot -4100 \cdot x_2} - \left(0.419974 (-2178. + 831600 \cdot x_2 - 7.38199 \times 10^6 x_2^2 + 547800 \cdot x_2^3 - 5.289 \times 10^7 x_2^4)\right) /$$

$$\left((11 \cdot -4100 \cdot x_2) (-392040 \cdot x_2 + 2.20968 \times 10^8 x_2^2 - 2.78965 \times 10^{10} x_2^3 + 2.4948 \times 10^7 x_2^4 - 2.214 \times 10^8 x_2^5 + \sqrt{(4 \cdot (-2178. + 831600 \cdot x_2 - 7.38199 \times 10^6 x_2^2 + 547800 \cdot x_2^3 - 5.289 \times 10^7 x_2^4)^3 + (-392040 \cdot x_2 + 2.20968 \times 10^8 x_2^2 - 2.78965 \times 10^{10} x_2^3 + 2.4948 \times 10^7 x_2^4 - 2.214 \times 10^8 x_2^5)^2}) \right)^{1/3} -$$

$$\frac{1}{11 \cdot -4100 \cdot x_2} 0.264567 (-392040 \cdot x_2 + 2.20968 \times 10^8 x_2^2 - 2.78965 \times 10^{10} x_2^3 + 2.4948 \times 10^7 x_2^4 - 2.214 \times 10^8 x_2^5 + \sqrt{(4 \cdot (-2178. + 831600 \cdot x_2 - 7.38199 \times 10^6 x_2^2 + 547800 \cdot x_2^3 - 5.289 \times 10^7 x_2^4)^3 + (-392040 \cdot x_2 + 2.20968 \times 10^8 x_2^2 - 2.78965 \times 10^{10} x_2^3 + 2.4948 \times 10^7 x_2^4 - 2.214 \times 10^8 x_2^5)^2}) \right)^{1/3}$$

Όψη ε.δ. $p(x_2) =$

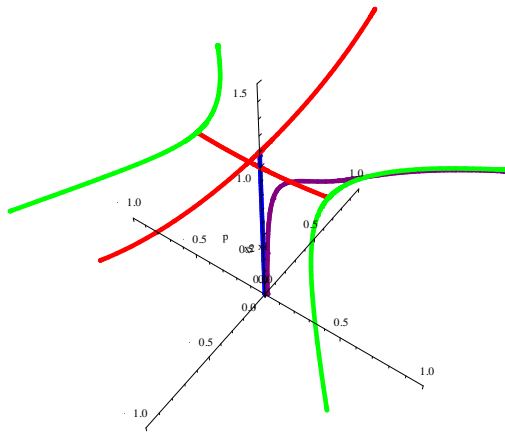
$$\frac{0.0015 (-198 \cdot x_2^2 + 37800 \cdot x_2^3 - 99 \cdot x_2^4 - 12900 \cdot x_2^5 - 11 \cdot x_2^6 + 100 \cdot x_2^7)}{-54 \cdot x_2^5 - 27 \cdot x_2^5 + x_2^9}$$

$$\left(\frac{3.96567 \times 10^{-34} (-2.2259 \times 10^{65} x_2^4 + 4.0471 \times 10^{66} x_2^5 - 1.84909 \times 10^{67} x_2^6 + 3.37258 \times 10^{67} x_2^7 - 2.76029 \times 10^{68} x_2^8 + 3.56369 \times 10^{67} x_2^9 - 1.12272 \times 10^{69} x_2^{10} + 1.31156 \times 10^{67} x_2^{11} - 6.59197 \times 10^{68} x_2^{12} - 1.61134 \times 10^{66} x_2^{13} - 1.04982 \times 10^{68} x_2^{14})}{((-54 \cdot x_2^5 - 27 \cdot x_2^5 + x_2^9) (2.10034 \times 10^{98} x_2^6 - 5.7282 \times 10^{99} x_2^7 + 5.18185 \times 10^{100} x_2^8 - 6.11876 \times 10^{100} x_2^9 - 8.24275 \times 10^{101} x_2^{10} - 3.51626 \times 10^{102} x_2^{11} + 3.83766 \times 10^{102} x_2^{12} - 2.78026 \times 10^{103} x_2^{13} + 4.6446 \times 10^{102} x_2^{14} - 8.35649 \times 10^{103} x_2^{15} + 2.38187 \times 10^{102} x_2^{16} - 6.63213 \times 10^{103} x_2^{17} + 5.58651 \times 10^{101} x_2^{18} - 2.02625 \times 10^{103} x_2^{19} - 4.95297 \times 10^{100} x_2^{20} - 2.15129 \times 10^{102} x_2^{21} + \sqrt{(4 \cdot (-2.2259 \times 10^{65} x_2^4 + 4.0471 \times 10^{66} x_2^5 - 1.84909 \times 10^{67} x_2^6 + 3.37258 \times 10^{67} x_2^7 - 2.76029 \times 10^{68} x_2^8 + 3.56369 \times 10^{67} x_2^9 - 1.12272 \times 10^{69} x_2^{10} + 1.31156 \times 10^{67} x_2^{11} - 6.59197 \times 10^{68} x_2^{12} - 1.61134 \times 10^{66} x_2^{13} - 1.04982 \times 10^{68} x_2^{14})^3 + (2.10034 \times 10^{98} x_2^6 - 5.7282 \times 10^{99} x_2^7 + 5.18185 \times 10^{100} x_2^8 - 6.11876 \times 10^{100} x_2^9 + 8.24275 \times 10^{101} x_2^{10} - 3.51626 \times 10^{102} x_2^{11} + 3.83766 \times 10^{102} x_2^{12} - 2.78026 \times 10^{103} x_2^{13} + 4.6446 \times 10^{102} x_2^{14} - 8.35649 \times 10^{103} x_2^{15} + 2.38187 \times 10^{102} x_2^{16} - 6.63213 \times 10^{103} x_2^{17} + 5.58651 \times 10^{101} x_2^{18} - 2.02625 \times 10^{103} x_2^{19} - 4.95297 \times 10^{100} x_2^{20} - 2.15129 \times 10^{102} x_2^{21})^2} \right)^{1/3} -$$

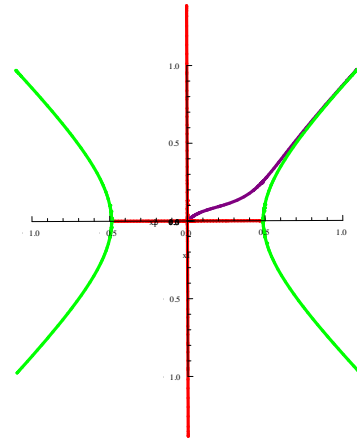
$$\frac{1}{-54 \cdot x_2^5 - 27 \cdot x_2^5 + x_2^9} 2.49822 \times 10^{-34} (2.10034 \times 10^{98} x_2^6 - 5.7282 \times 10^{99} x_2^7 + 5.18185 \times 10^{100} x_2^8 - 6.11876 \times 10^{100} x_2^9 + 8.24275 \times 10^{101} x_2^{10} - 3.51626 \times 10^{102} x_2^{11} + 3.83766 \times 10^{102} x_2^{12} - 2.78026 \times 10^{103} x_2^{13} + 4.6446 \times 10^{102} x_2^{14} - 8.35649 \times 10^{103} x_2^{15} + 2.38187 \times 10^{102} x_2^{16} - 6.63213 \times 10^{103} x_2^{17} + 5.58651 \times 10^{101} x_2^{18} - 2.02625 \times 10^{103} x_2^{19} - 4.95297 \times 10^{100} x_2^{20} - 2.15129 \times 10^{102} x_2^{21} + \sqrt{(4 \cdot (-2.2259 \times 10^{65} x_2^4 + 4.0471 \times 10^{66} x_2^5 - 1.84909 \times 10^{67} x_2^6 + 3.37258 \times 10^{67} x_2^7 - 2.76029 \times 10^{68} x_2^8 + 3.56369 \times 10^{67} x_2^9 - 1.12272 \times 10^{69} x_2^{10} + 1.31156 \times 10^{67} x_2^{11} - 6.59197 \times 10^{68} x_2^{12} + 1.61134 \times 10^{66} x_2^{13} - 1.04982 \times 10^{68} x_2^{14})^3 + (2.10034 \times 10^{98} x_2^6 - 5.7282 \times 10^{99} x_2^7 + 5.18185 \times 10^{100} x_2^8 - 6.11876 \times 10^{100} x_2^9 + 8.24275 \times 10^{101} x_2^{10} - 3.51626 \times 10^{102} x_2^{11} + 3.83766 \times 10^{102} x_2^{12} - 2.78026 \times 10^{103} x_2^{13} + 4.6446 \times 10^{102} x_2^{14} - 8.35649 \times 10^{103} x_2^{15} + 2.38187 \times 10^{102} x_2^{16} - 6.63213 \times 10^{103} x_2^{17} + 5.58651 \times 10^{101} x_2^{18} - 2.02625 \times 10^{103} x_2^{19} - 4.95297 \times 10^{100} x_2^{20} - 2.15129 \times 10^{102} x_2^{21})^2) \right)^{1/3}$$

Είναι προφανές ότι δεν έχουν καμία εποπτική αξία. Αντίθετα το φαινόμενο φαίνεται ποιοτικά στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

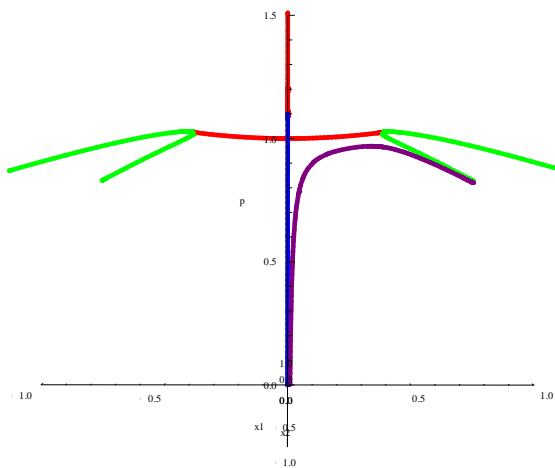
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



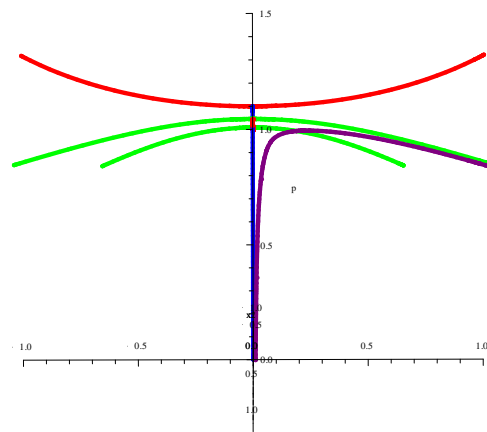
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$:



Όψη $p - x_2$:



Ο ενιαίος δρόμος ισορροπίας, ο οποίος τείνει ασυμπτωτικά στον τριτεύοντα δρόμο ισορροπίας του τέλειου φορέα, φαίνεται στα σχήματα με **μωβ** χρώμα.

Πολλαπλό σημείο διακλάδωσης

Εξετάζουμε την περίπτωση για ισοδύναμα ελατήρια: $c_1 = c_2$, $a = 1$

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 , για $a = 1$:

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - p\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 & \rightarrow 6 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 & \rightarrow 6 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

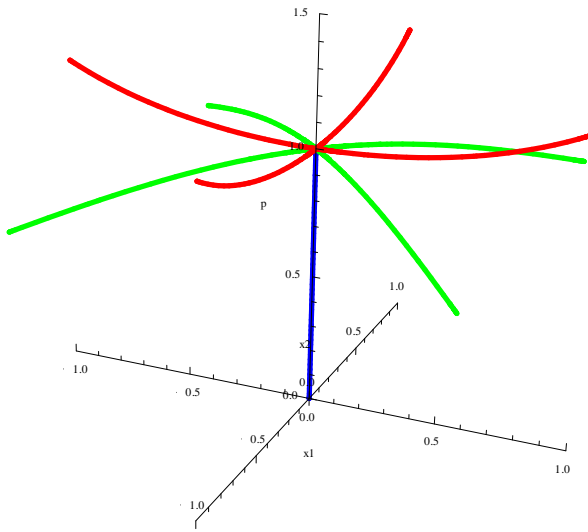
3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = \frac{6}{6-x_2^2}, x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $x_1 = \pm x_2$: κάτοψη, $p(x_2) = \frac{3}{3+x_2^2}$: όψη

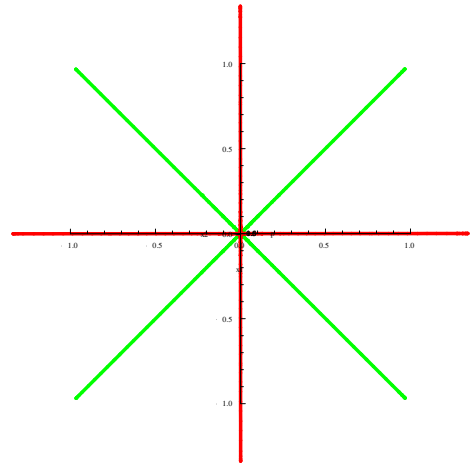
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Τώρα όμως **όλοι** οι δρόμοι ισορροπίας διέρχονται από ένα και μοναδικό σημείο διακλάδωσης: ($p = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$), το οποίο λέγεται **πολλαπλό σημείο διακλάδωσης** και εν προκειμένω **τετραπλό**, αφού εξ αυτού διέρχονται **τέσσερις** δρόμοι ισορροπίας: δύο δευτερεύοντες και δύο τριτεύοντες. Παρατηρούμε και από την αναλυτική σχέση, αλλά και από το σχήμα, ότι οι δύο δ.δ. είναι πανομοιότυποι. Ο ένας είναι αντίγραφο του άλλου στραμμένο κατά 90 μοίρες με άξονα περιστροφής τον κατακόρυφο. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τους δύο τ.δ. (για τα δύο σκέλη του τ.δ.). Λόγω αυτής της απόλυτης συμμετρίας, ο δρόμος που θα ακολουθήσει το σύστημα μεταλυγισμικά, εξαρτάται αποκλειστικά από τις (παραμικρές) ατέλειες. Οι δρόμοι ισορροπίας του τέλειου φορέα είναι θεωρητικοί και απλώς σε αυτούς θα τείνουν ασυμπτωτικά οι ενιαίοι δρόμοι των ατελών φορέων.

Το συνολικό δυναμικό στο σημείο διακλάδωσης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εκτός από δύο διευθύνσεις: τους άξονες x_1, x_2 , όπου παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Η σφαίρα αν αφεθεί ελεύθερη, κυλάει και απομακρύνεται από την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία δεν επιστρέφει. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται **ασταθής**. Οι ευσταθείς άξονες x_1, x_2 δεν είναι ικανοί να χαρακτηρίσουν τη θέση ευσταθή, αφού με την παραμικρή μετακίνηση από τους άξονες, η σφαίρα κυλάει.

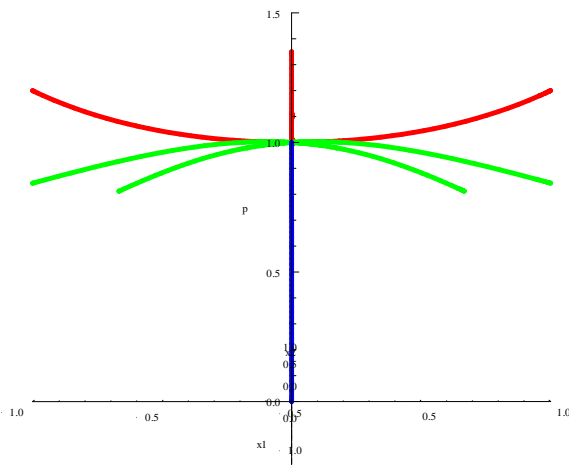
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



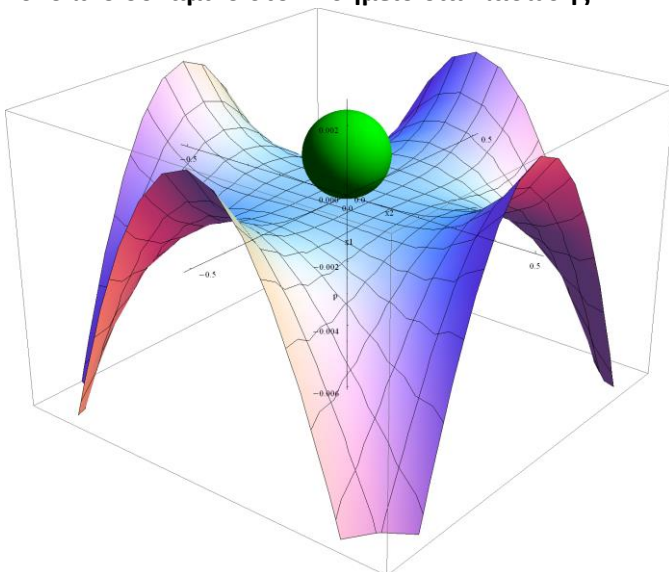
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Ώψη $p - x_1$ ή $p - x_2$:



Συνολικό δυναμικό στο 1^ο σημείο διακλάδωσης :



Μη γραμμικά ελαστικά υλικά

Σε όλα τα προηγθέντα παραδείγματα θεωρήσαμε ότι τα ελατήρια συμπεριφέρονται ως αποτελούμενα από **γραμμικά** ελαστικά υλικά. Σε αυτή την περίπτωση, η εξωτερική φόρτιση και η παραμόρφωση των ελατηρίων συνδέονται με γραμμική σχέση, η οποία καθορίζεται από τον νόμο του Hooke.

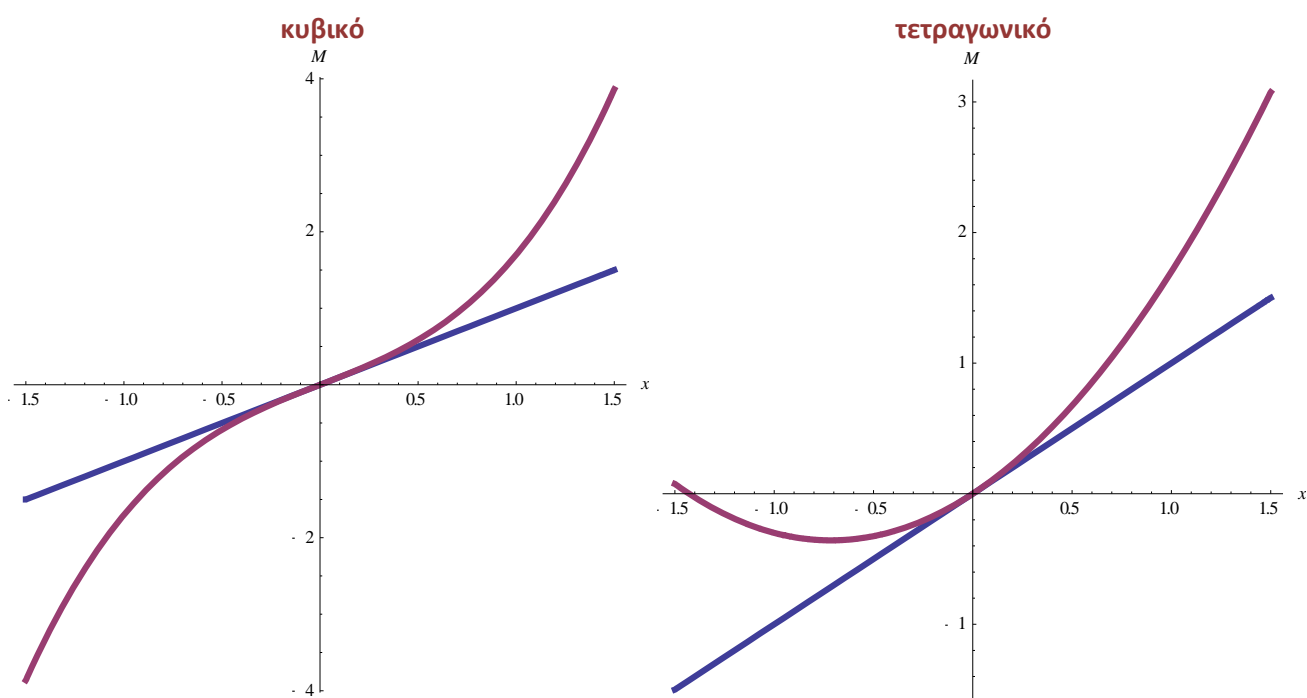
Παρά ταύτα, είναι δυνατόν ένα υλικό να εκδηλώνει ελαστική συμπεριφορά, η οποία εκφράζεται και με **μη γραμμική** σχέση φόρτισης - παραμόρφωσης. Π.χ. μπορεί η εσωτερική ροπή M και στροφή x ενός ελατηρίου να συνδέονται με τη σχέση:

$$M = c_1 x \pm c_2 x^2 \quad (\text{τετραγωνικό ελατήριο}) \quad \text{ή} \quad M = c_1 x \pm c_2 x^3 \quad (\text{κυβικό ελατήριο})$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι οι δύο σταθερές του ελατηρίου. Αν $c_2 = 0$, τότε το ελατήριο είναι γραμμικά ελαστικό με δείκτη αντίστασης c_1 . Αν και οι δύο σταθερές είναι διάφορες του μηδενός διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στο πρόσημο "+" που υποδηλοί **σκληρό ελατήριο** (hard spring) και στο πρόσημο "-" που υποδηλοί **μαλακό ελατήριο** (soft spring).

Στην παρούσα εργασία, **επιλέξαμε το κυβικό ελατήριο** (σκληρό) έναντι του τετραγωνικού για δύο λόγους:

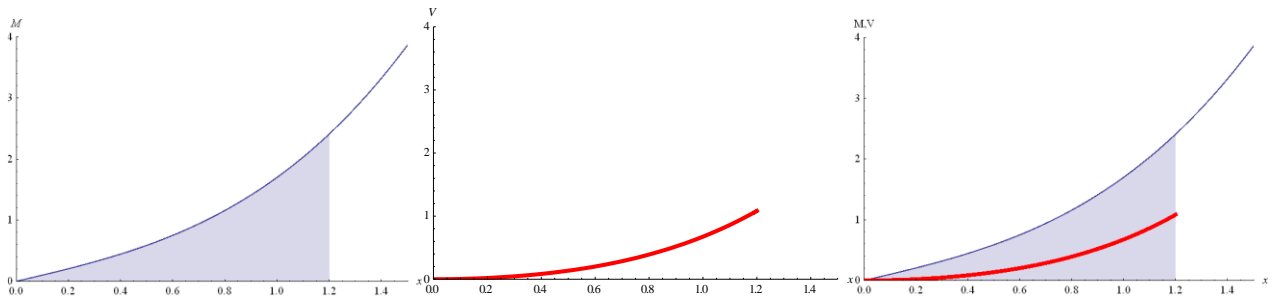
1) Το κυβικό ελατήριο έχει **συμμετρικό διάγραμμα** φόρτισης - παραμόρφωσης, ενώ το τετραγωνικό όχι:



Αυτό συμβαίνει διότι οι άρτιες δυνάμεις παίρνουν θετικές τιμές ακόμα και για αρνητικές γωνίες.

2) Το κυβικό ελατήριο παρουσιάζει κάποιες **ιδιαίτερες κρίσιμες τιμές**, ειδικά στο σύστημα με τα οριζόντια μετακινησιακά ελατήρια που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Η ροπή, λοιπόν, M του ελατηρίου για στροφή x θα είναι : $M(x) = c_1 x + c_2 x^3$. Η εσωτερική δυναμική ενέργεια U του ελατηρίου είναι το ολοκλήρωμα της ροπής $M(x)$ ή αλλιώς το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $M(x)$. Δηλαδή $U(x) = 0.5 c_1 x^2 + 0.25 c_2 x^4$. Τόσο η ροπή M , όσο και η δυναμική ενέργεια U φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



$$M(x) = c_1 x + c_2 x^3$$

$$U(x) = 0.5 c_1 x^2 + 0.25 c_2 x^4$$

Συνδυαστικό διάγραμμα

Εδώ οι δείκτες c_1 , c_2 δεν αντιπροσωπεύουν τα ελατήρια στις διευθύνσεις x_1 , x_2 αντίστοιχα. Είναι οι δύο σταθερές του ενός ελατηρίου και αναφέρεται προς αποφυγή σύγχυσης με τα γραμμικά ελατήρια.

Το ελατήριο κατά τη διεύθυνση x_1 δίνει ροπή:

$$M_1(x) = c_1 x + c_2 x^3$$

Το ελατήριο κατά τη διεύθυνση x_2 δίνει ροπή:

$$M_2(x) = a (c_1 x + c_2 x^3) : \text{το ελατήριο 2 είναι } a \text{ φορές ισχυρότερο από το ελατήριο 1.}$$

Οι δύο σταθερές του ελατηρίου συσχετίζονται με τον συντελεστή b : $c_2 = b c_1$

Το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι κατά τα γνωστά: $P_{cr} = c_1/L$

Έστω το κατακόρυφο φορτίο στο ελεύθερο άκρο του προβόλου: P

Έστω το ανηγμένο φορτίο p ως προς το κρίσιμο φορτίο: $p = P/P_{cr} = (P L)/c_1$

Οι εσωτερικές ενέργειες των ελατηρίων 1 και 2 είναι αντίστοιχα:

$$U_1(x) = 0.5 c_1 x^2 + 0.25 c_2 x^4 = 0.5 c_1 x^2 + 0.25 b c_1 x^4$$

$$U_2(x) = a (0.5 c_1 x^2 + 0.25 c_2 x^4) = a (0.5 c_1 x^2 + 0.25 b c_1 x^4)$$

Το συνολικό εσωτερικό έργο είναι: $U = U_1 + U_2$

Εύρεση δρόμων ισορροπίας

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 , για $a = 1.2$ και $b = 0.7$:

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}0.7x_1^4 + 1.2\left(\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}0.7x_2^4\right) - p\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2)\right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1} &= 0 \\ \rightarrow 6(1 + 0.7x_1^2) - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= 0 \\ \rightarrow -p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) + 7.2(1 + 0.7x_2^2) &= 0\end{aligned}$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6(1+0.7x_1^2)}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1.2\left(\frac{6(1+0.7x_2^2)}{6-x_2^2}\right), x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $105 \cdot x_1^4 + x_1^2(420 + 7 \cdot x_2^2) = 60 + 482 \cdot x_2^2 + 126 \cdot x_2^4$

Επίλυση της ανωτέρω πεπλεγμένης σχέσης ως προς x_1 : κάτοψη του τ.δ.:

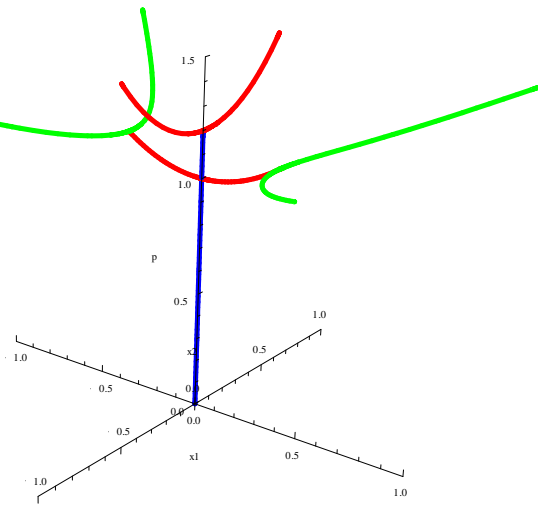
$$x_1 = 0.5 \sqrt{-2 \cdot (4 + 0.06667x_2^2) + 2 \cdot \sqrt{(4 + 0.06667x_2^2)^2 - 4 \cdot (-0.57142 - 4.59047x_2^2 - 1.2x_2^4)}}$$

$$p(x_2) = \frac{0.5(1155 \cdot x_2^2 + 3452.2492 \sqrt{1.7197 + x_2^2} \sqrt{2.213 + x_2^2})}{3000 + 1000 \cdot x_2^2}: \text{ όψη του τ.δ. , } x_{1\text{τομής}} = 0.371605, p_{\text{τομής}} = 1.1225$$

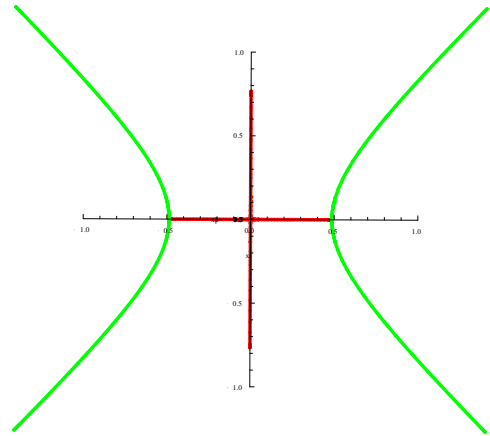
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) και ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι ανοδικοί, ευσταθείς και συμμετρικοί. Τώρα οι δ.δ. είναι πιο ανοδικοί εν συγκρίσει με το φορέα με τα γραμμικά ελατήρια, καθώς εδώ έχουμε σκληρά ελατήρια. Ο 1^{ος} δ.δ. βρίσκεται επί του ιδιοδιανύσματος $\{1,0\}$ και ο 2^{ος} δ.δ. επί του ιδιοδιανύσματος $\{0,1\}$. Αυτές είναι οι ιδιομορφές των δευτερευόντων δρόμων. Ο 1^{ος} δ.δ. έχει σημείο διακλάδωσης με τον κ.δ. στο $p = 1$ και ο 2^{ος} δ.δ. στο $p = 1.2$. Η **αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού** λαμβάνει χώρα σε αυτά τα δύο γειτνιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Τότε παρατηρείται νέα διακλάδωση επί του 1^{ου} δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας και προκύπτει ο **τριτεύων** δρόμος. Ο τ.δ., και στα δύο σκέλη του, εκτρέπεται κάθετα στον 1^ο δ.δ. στο $x_{1\text{τομής}} = \pm 0.3716$ (εφαπτομενικό διάνυσμα $\{0,1\}$) Στη συνέχεια ο τ.δ. ακολουθεί μία παραβολοειδή ιδιομορφή και τείνει στο ιδιοδιάνυσμα των 45 μοιρών: $\{\pm 1, \pm 1\}$. **Ο τ.δ. είναι πλέον και αυτός ανοδικός, ευσταθής και συμμετρικός**. Εδώ είναι και το ενδιαφέρον του φαινομένου, καθώς με τα μη γραμμικά ελατήρια, αίρεται η ασταθής αλληλεπίδραση ιδιομορφών και έχουμε **ευσταθή αλληλεπίδραση ιδιομορφών**.

Το συνολικό δυναμικό, τόσο στο 1^ο σημείο διακλάδωσης (μεταξύ κ.δ. και 1^{ου} δ.δ.), όσο και στο 3^ο σ.δ. (μεταξύ 1^{ου} δ.δ. και τ.δ.) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Και οι δύο θέσεις ισορροπίας χαρακτηρίζονται ως **ευσταθείς**.

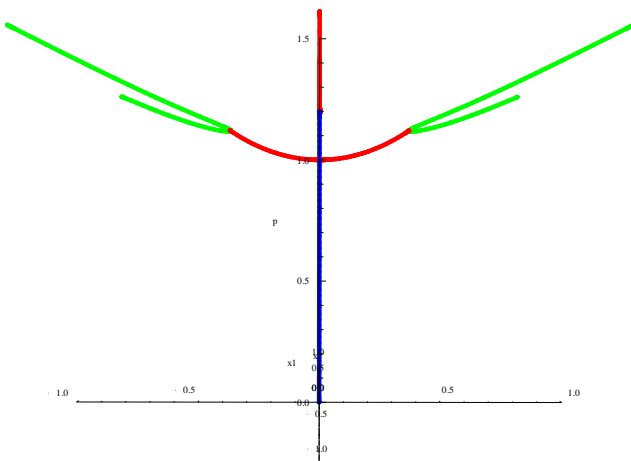
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



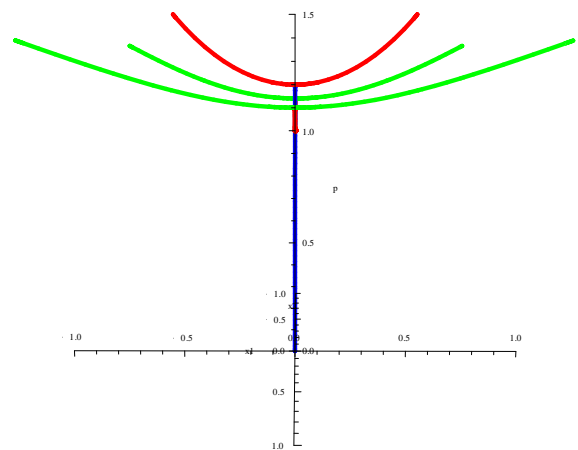
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



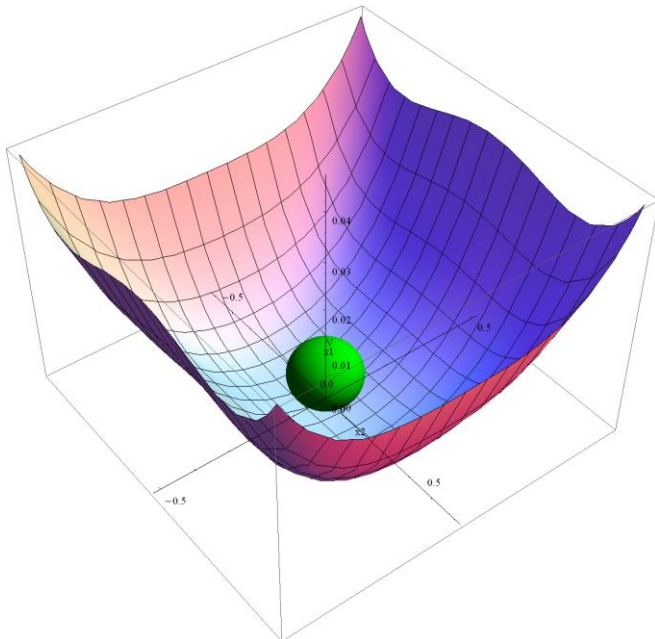
Ώψη $p - x_1$:



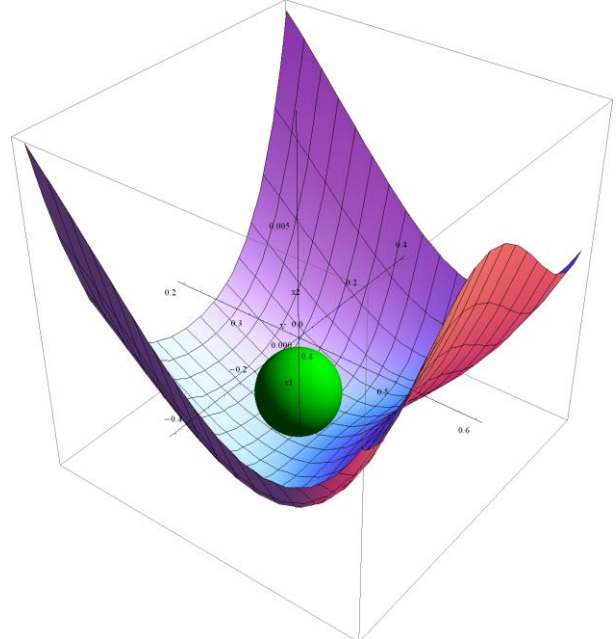
Ώψη $p - x_2$:



Συνολικό δυναμικό στο 1^ο σημείο διακλάδωσης :



στο 3^ο σημείο διακλάδωσης :



Πολλαπλό σημείο διακλάδωσης

Εξετάζουμε την περίπτωση για ισοδύναμα ελατήρια: $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0.7}$

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 :

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}0.7x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}0.7x_2^4 - p\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2)\right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

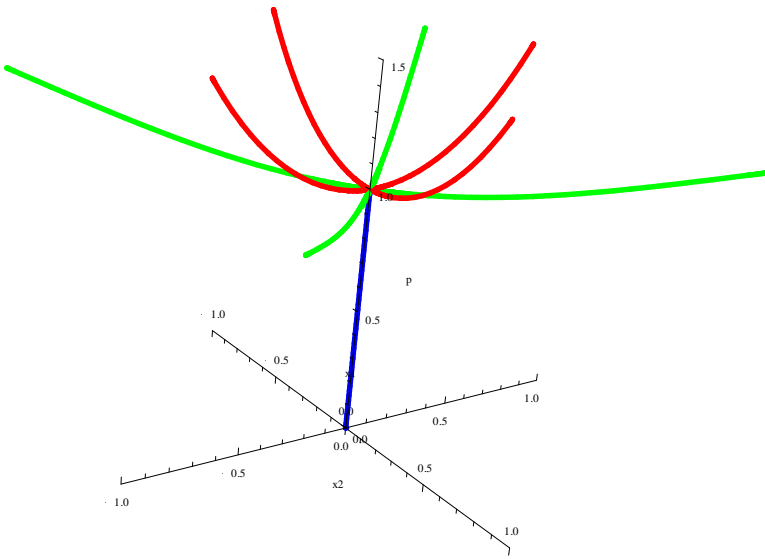
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 &\rightarrow 6(1 + 0.7x_1^2) - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 &\rightarrow -p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) + 6(1 + 0.7x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

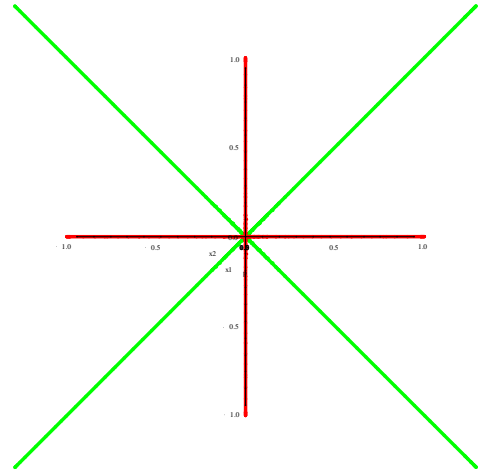
- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6(1+0.7x_1^2)}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = \frac{6(1+0.7x_2^2)}{6-x_2^2}, x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $x_1 = \pm x_2$: κάτοψη , $p(x_2) = \frac{0.5(-30.+210.x_2^2+630.\sqrt{1.95+x_2^2}\sqrt{1.95+x_2^2})}{600.+200.x_2^2}$: όψη

Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Τώρα όμως **όλοι** οι δρόμοι ισορροπίας διέρχονται από ένα και μοναδικό σημείο διακλάδωσης: ($p = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$), το οποίο λέγεται **πολλαπλό σημείο διακλάδωσης** και εν προκειμένω **τετραπλό**, αφού εξ αυτού διέρχονται **τέσσερις** δρόμοι ισορροπίας: δύο δευτερεύοντες και δύο τριτεύοντες. Παρατηρούμε και από την αναλυτική σχέση, αλλά και από το σχήμα, ότι οι δύο δ.δ. είναι πανομοιότυποι. Ο ένας είναι αντίγραφο του άλλου στραμμένο κατά 90 μοίρες με άξονα περιστροφής τον κατακόρυφο. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τους δύο τ.δ. (για τα δύο σκέλη του τ.δ.). Λόγω αυτής της απόλυτης συμμετρίας, ο δρόμος που θα ακολουθήσει το σύστημα μεταλυγισμικά, εξαρτάται αποκλειστικά από τις (παραμικρές) ατέλειες. Οι δρόμοι ισορροπίας του τέλειου φορέα είναι θεωρητικοί και απλώς σε αυτούς θα τείνουν ασυμπτωτικά οι ενιαίοι δρόμοι των ατελών φορέων. Όλοι οι δρόμοι είναι και πάλι ανοδικοί, ευσταθείς και συμμετρικοί.

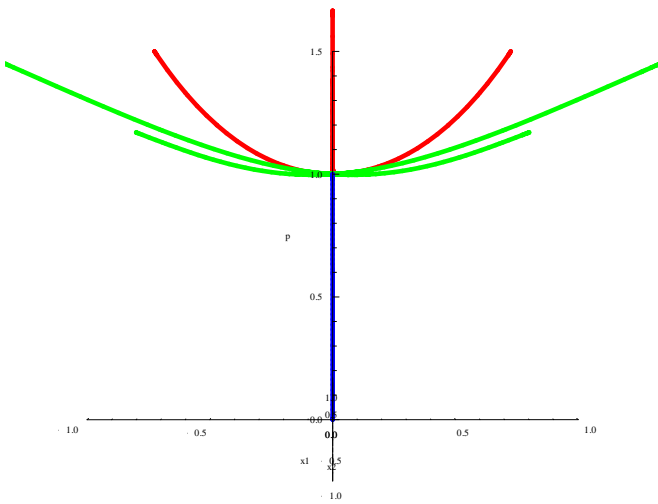
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



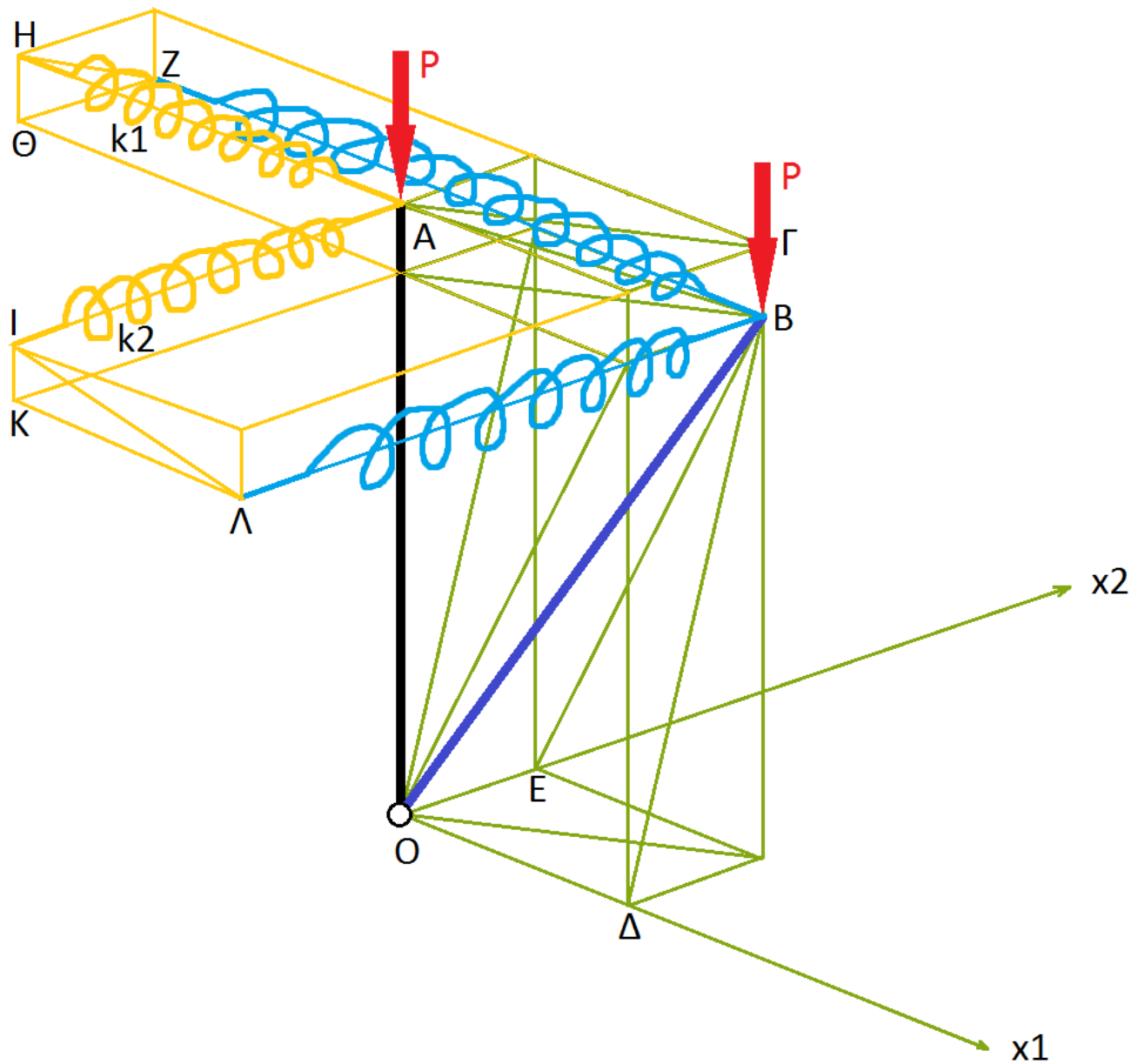
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$ ή $p - x_2$:



Οριζόντια ελατήρια



Ο πρόβολος OA στηρίζεται τώρα με δύο μετακινησιακά οριζόντια ελατήρια. Τα ελατήρια είναι στην απαραμόρφωτη κατάστασή τους ισομήκη, δηλαδή $(AH) = (AI)$. Οι σταθερές τους είναι k_1 και k_2 .

Το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στον χώρο μόνο παράλληλα στον άξονα x_1 . Επίσης το στηριγμένο άκρο του μπορεί να κινείται εντός του κατακόρυφου επιπέδου, κάθετου στον x_1 , που διέρχεται από τα σημεία : Z, H, Θ .

Το ελατήριο 2 μπορεί να κινείται στον χώρο μόνο παράλληλα στον άξονα x_2 . Επίσης το στηριγμένο άκρο του μπορεί να κινείται εντός του κατακόρυφου επιπέδου, κάθετου στον x_2 , που διέρχεται από τα σημεία : I, K, Λ .

Η επιμήκυνση του ελατηρίου 1 είναι $\Delta L = (BZ) - (AH) = L \sin(\chi_1)$. Η εσωτερική δυναμική ενέργεια U_1 του ελατηρίου 1 είναι $U_1(\chi_1) = 0.5 \Delta L^2 = 0.5 L^2 \sin^2(\chi_1)$.

Οι σταθερές των δύο ελατηρίων συσχετίζονται με τον συντελεστή a : $k_2 = a k_1$

Το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι κατά τα γνωστά: $P_{cr} = kL$

Έστω το ανηγμένο φορτίο p ως προς το κρίσιμο φορτίο: $p = P/P_{cr} = P/kL$

Εύρεση δρόμων ισορροπίας

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 , για $a = 1.1$:

Προηγήθηκε ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της εσωτερικής ενέργειας U και κρατήσαμε όρους μέχρι 4^{ης} τάξης.

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}(x_1^2 - \frac{x_1^4}{3}) + \frac{1}{2} 1.1(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3}) - p(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2))$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 & \rightarrow 6 - 4x_1^2 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 & \rightarrow 6a - 4ax_2^2 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6-4x_1^2}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1.1(\frac{6-4x_2^2}{6-x_2^2}), x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $1.1(18 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 - 6x_2^4) = 18 - 3x_1^2 - 6x_1^4 - 3x_2^2 + 2x_1^2x_2^2$

Επίλυση της ανωτέρω πεπλεγμένης σχέσης ως προς x_1 :

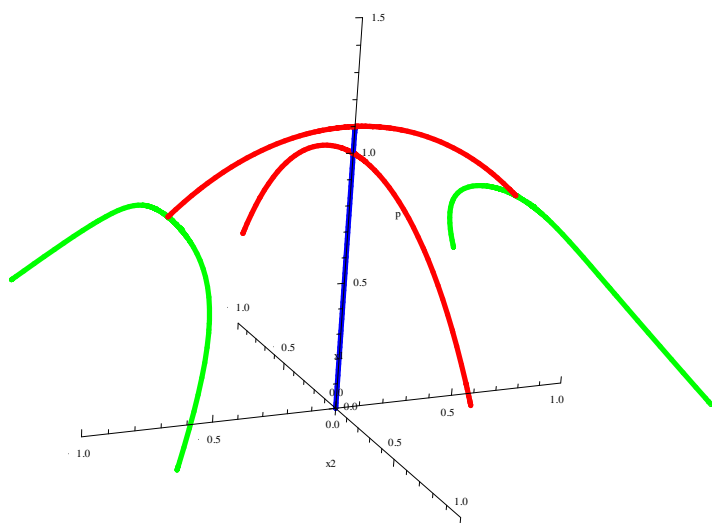
$$x_2 = 0.5\sqrt{-0.0909 + 0.0606x_1^2 + 2.\sqrt{1.0929 - 0.1845x_1^2 + 3.637x_1^4}} : \text{κάτοψη του τ.δ.}$$

$$p(x_1) = \frac{0.5(26.1-4.2x_1^2-12.587\sqrt{0.548-1.071x_1+x_1^2}\sqrt{0.548+x_1^2})}{12.+4.x_1^2} : \text{όψη του τ.δ.}, x_{2\text{τομή}} = 0.707107, p_{\text{τομή}} = 0.8$$

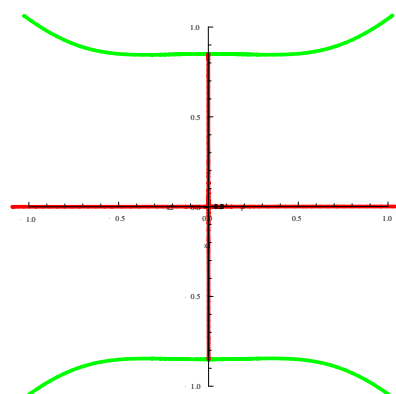
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) και ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι καθοδικοί, ασταθείς και συμμετρικοί. Ο 1^{ος} δ.δ. βρίσκεται επί του ιδιοδιανύσματος $\{1,0\}$ και ο 2^{ος} δ.δ. επί του ιδιοδιανύσματος $\{0,1\}$. Αυτές είναι οι ιδιομορφές των δευτερευόντων δρόμων. Ο 1^{ος} δ.δ. έχει σημείο διακλάδωσης με τον κ.δ. στο $p = 1$ και ο 2^{ος} δ.δ. στο $p = 1.1$. Η **αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού** λαμβάνει χώρα σε αυτά τα δύο γεινιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Τότε παρατηρείται νέα διακλάδωση επί του 2^{ου} δευτερευόντος δρόμου ισορροπίας και προκύπτει ο **τριτεύων** δρόμος. Ο τ.δ., και στα δύο σκέλη του, εκτρέπεται κάθετα στον 2^ο δ.δ. στο $x_{2\text{τομή}} = \pm 0.707107$ (εφαπτομενικό διάνυσμα $\{1,0\}$) Στη συνέχεια ο τ.δ. ακολουθεί μία παραβολοειδή ιδιομορφή και τείνει στο ιδιοδιάνυσμα των 45 μοιρών: $\{\pm 1, \pm 1\}$. Ο τ.δ. είναι καθοδικός, ασταθής και συμμετρικός.

Κατά τη μελέτη ευστάθειας του πολλαπλού σημείου διακλάδωσης, προέκυψε ότι $\delta^4 V = -3 < 0$. Δηλαδή η V έχει τοπικό μέγιστο και η θέση είναι ασταθής.

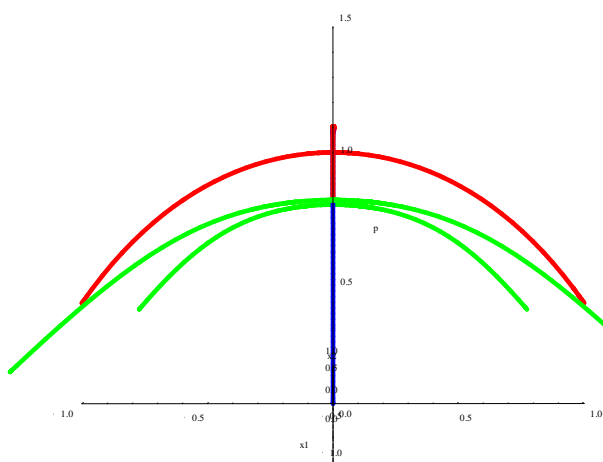
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



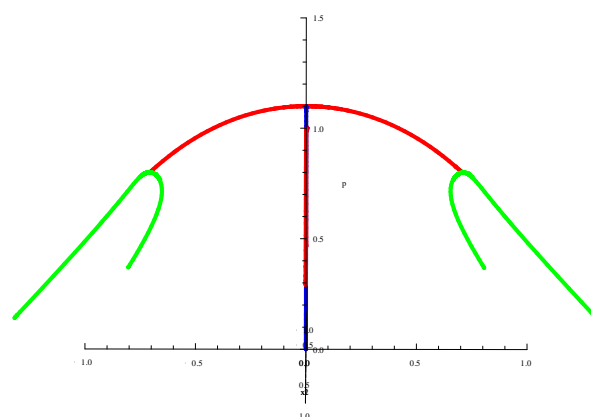
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Ύψη $p - x_1$:



Ύψη $p - x_2$:

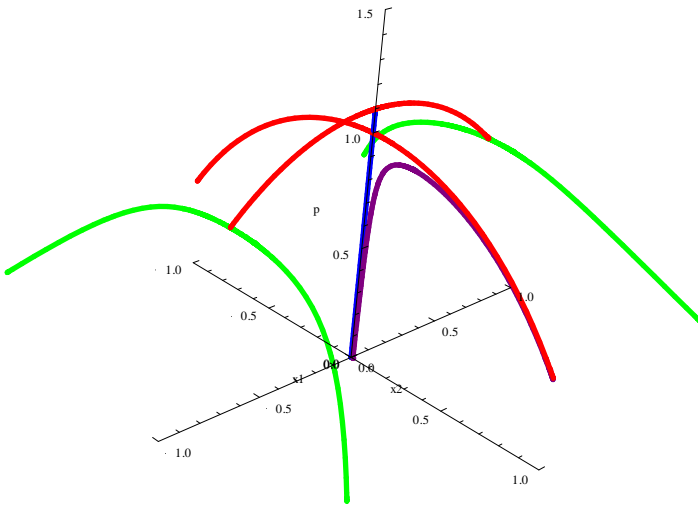


Ατελής φορέας

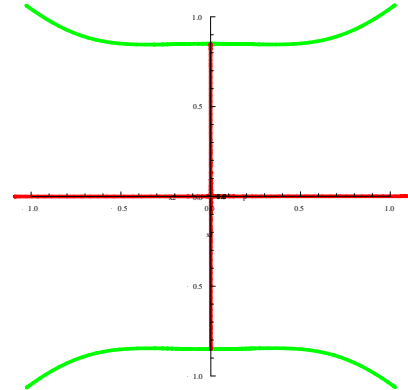
Ο τ.δ. ξεκινάει από τον πάνω δ.δ.. Επειδή όμως το σύστημα δεν πρόκειται ποτέ να ξεπεράσει το 1^ο φορτίο λυγισμού: $p = 1$, ακόμα και με ατέλειες, θα ακολουθήσει την 1^η ιδιομορφή $\{1,0\}$ (με μία αμελητέα, μη υπολογίσιμη απόκλιση) και θα τείνει ασυμπτωτικά στον 1^ο δ.δ.

Παρακάτω φαίνεται ο ενιαίος δρόμος του ατελούς φορέα με **μωβ** χρώμα στα διαγράμματα. Οι αναλυτικές σχέσεις δεν αναφέρονται, διότι είναι εξαιρετικά μακροσκελείς και καθόλου εποπτικές.

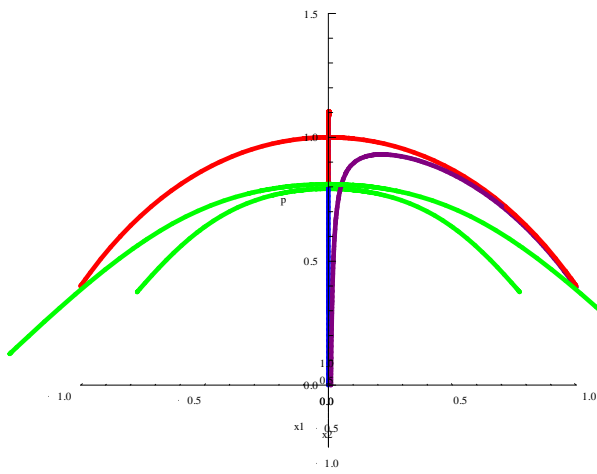
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



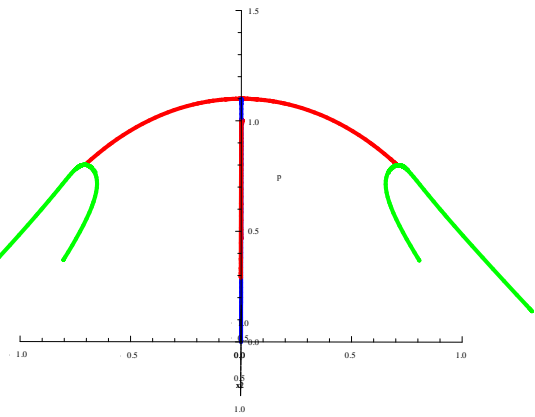
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$:



Όψη $p - x_2$:



Πολλαπλό σημείο διακλάδωσης με $b = 0.5$

Εξετάζουμε την περίπτωση για ισοδύναμα ελατήρια: $a = 1$

$F = k_1 \Delta L + k_2 \Delta L^3$: Δύναμη κυβικού ελατηρίου με $k_2 = b k_1$

$U = 0.5 k_1 L^2 \sin^2 x + 0.25 b k_1 L^4 \sin^4 x$: Εσωτερική ενέργεια U του ελατηρίου.

$U \approx 0.5 k_1 L^2 (x^2 - x^4/3) + 0.25 b k_1 L^4 x^4$: Ανάπτυγμα Taylor με όρους μέχρι 4^{ης} τάξης.

Έστω $L = 1$, για να μπορεί να κανονικοποιηθεί το συνολικό δυναμικό V ως προς k_1 .

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 :

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2} \left(x_1^2 - \frac{x_1^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_1^4 + \frac{1}{2} \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_2^4 - p \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6 - 1 \cdot x_1^2 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 6 - 1 \cdot x_2^2 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0$$

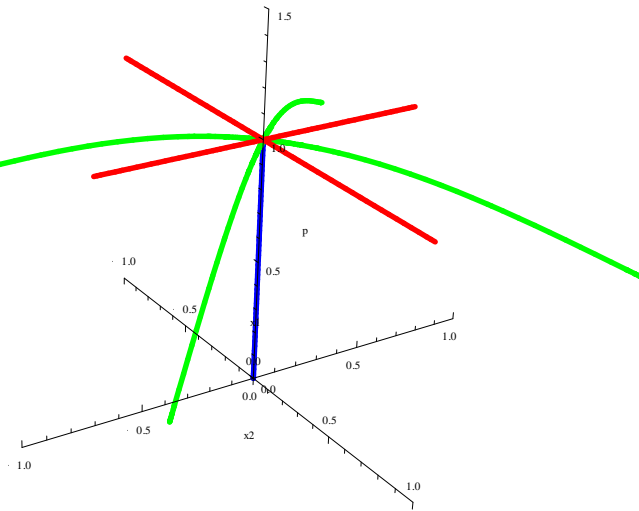
3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = 1$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1$, $x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $x_1 = \pm x_2$: κάτοψη, $p(x_1) = \frac{0.5(30 - 2x_1^2 + 6(-1.732 + x_1)(1.732 + x_1))}{24 + 8x_1^2}$: όψη

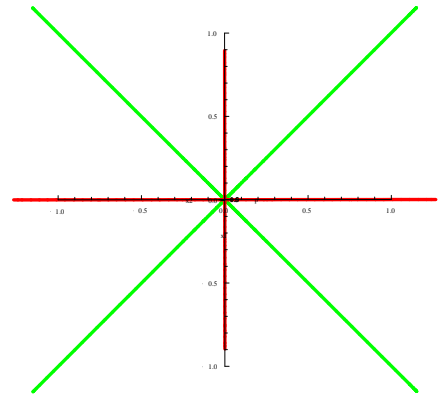
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Τώρα όμως **όλοι** οι δρόμοι ισορροπίας διέρχονται από ένα και μοναδικό σημείο διακλάδωσης: ($p = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$), το οποίο λέγεται **πολλαπλό σημείο διακλάδωσης** και εν προκειμένω **τετραπλό**, αφού εξ αυτού διέρχονται **τέσσερις** δρόμοι ισορροπίας: δύο δευτερεύοντες και δύο τριτεύοντες. Παρατηρούμε και από την αναλυτική σχέση, αλλά και από το σχήμα, ότι οι δύο δ.δ. είναι πανομοιότυποι. Ο ένας είναι αντίγραφο του άλλου στραμμένο κατά 90 μοίρες με άξονα περιστροφής τον κατακόρυφο. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τους δύο τ.δ. (για τα δύο σκέλη του τ.δ.). Οι δύο δ.δ. είναι σταθεροί ($p = 1$), δηλαδή εκφράζουν **ουδέτερη ισορροπία**. Οι δύο τ.δ. εξακολουθούν να είναι καθοδικοί, ασταθείς και συμμετρικοί.

Συμπερασματικά, το $b = 0.5$ είναι η **οριακή τιμή** της παραμέτρου για να είναι οι **δευτερεύοντες δρόμοι ευσταθείς**.

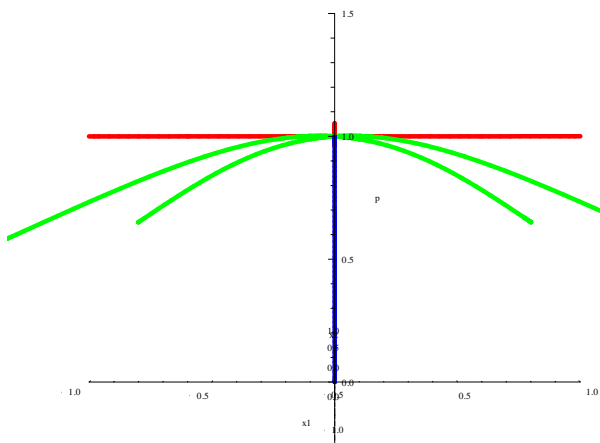
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$ ή $p - x_2$:



Πολλαπλό σημείο διακλάδωσης με $b = 1$

Εξετάζουμε την περίπτωση για ισοδύναμα ελατήρια: $a = 1$

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 :

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2} \left(x_1^2 - \frac{x_1^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_1^4 + \frac{1}{2} \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_2^4 - p \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 &\rightarrow 6 + 2x_1^2 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 &\rightarrow 6 + 2x_2^2 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

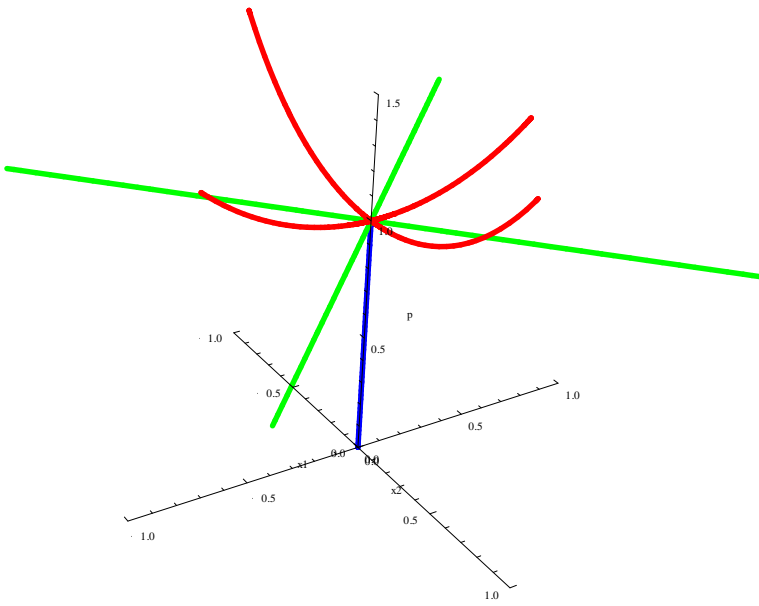
3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6+2x_1^2}{6-x_1^2}$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = \frac{6+2x_2^2}{6-x_2^2}$, $x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $x_1 = \pm x_2$: κάτοψη , $p(x_1) = p(x_2) = 1$: όψεις

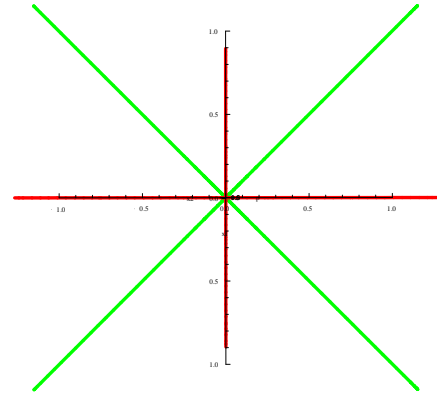
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Τώρα όμως **όλοι** οι δρόμοι ισορροπίας διέρχονται από ένα και μοναδικό σημείο διακλάδωσης: ($p = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$), το οποίο λέγεται **πολλαπλό σημείο διακλάδωσης** και εν προκειμένω **τετραπλό**, αφού εξ αυτού διέρχονται **τέσσερις** δρόμοι ισορροπίας: δύο δευτερεύοντες και δύο τριτεύοντες. Παρατηρούμε και από την αναλυτική σχέση, αλλά και από το σχήμα, ότι οι δύο δ.δ. είναι πανομοιότυποι. Ο ένας είναι αντίγραφο του άλλου στραμμένο κατά 90 μοίρες με άξονα περιστροφής τον κατακόρυφο. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τους δύο τ.δ. (για τα δύο σκέλη του τ.δ.). Οι δύο δ.δ. είναι πλέον ανοδικοί, ευσταθείς και συμμετρικοί. Τώρα όμως οι δύο τ.δ. είναι σταθεροί ($p = 1$), δηλαδή εκφράζουν **ουδέτερη ισορροπία**.

Συμπερασματικά, το $b = 1$ είναι η **οριακή τιμή** της παραμέτρου για να είναι οι **τριτεύοντες δρόμοι ευσταθείς**.

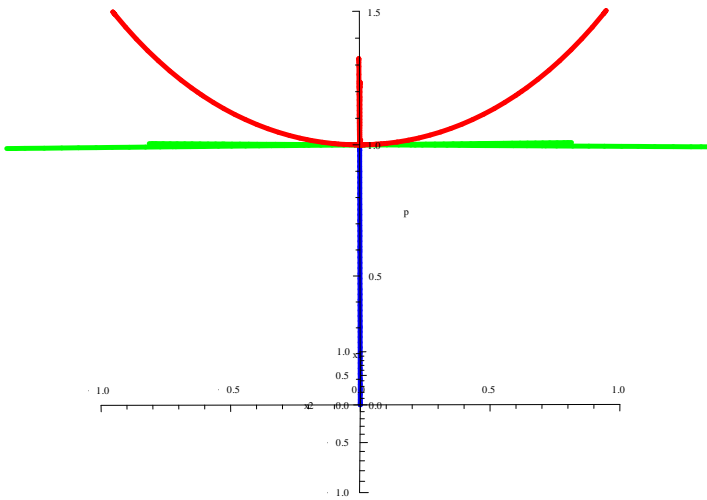
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$ ή $p - x_2$:



Πολλαπλό σημείο διακλάδωσης με $b = 1.5$

Εξετάζουμε την περίπτωση για ισοδύναμα ελατήρια: $a = 1$

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς x_1 :

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2} \left(x_1^2 - \frac{x_1^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_1^4 + \frac{1}{2} \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right) + \frac{1}{4} b x_2^4 - p \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6 + 5x_1^2 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 6 + 5x_2^2 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0$$

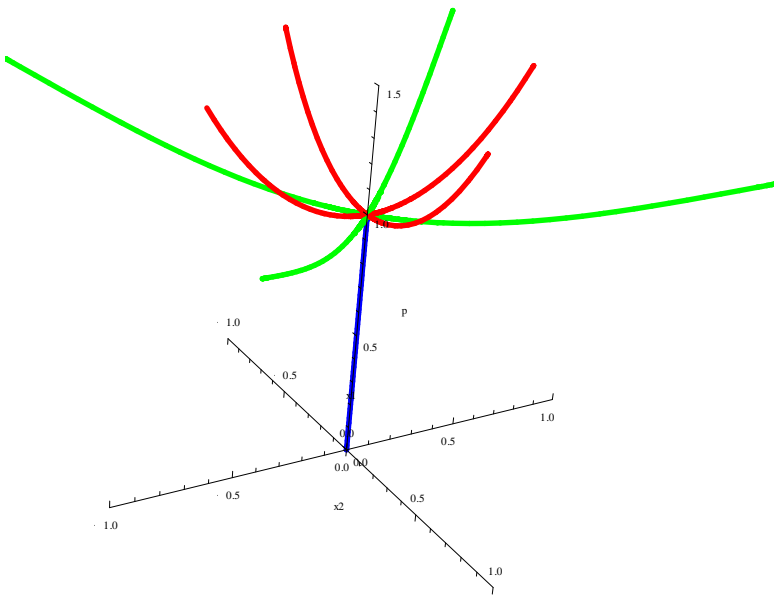
3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6+5x_1^2}{6-x_1^2}$, $x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = \frac{6+5x_2^2}{6-x_2^2}$, $x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $x_1 = \pm x_2$: κάτοψη ,

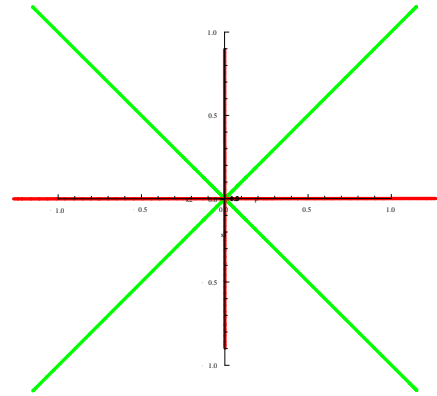
$$p(x_1) = \frac{0.5(-6.+10.x_1^2+30.\sqrt{1.8-5.446 \times 10^{-9}x_1+x_1^2}\sqrt{1.8+5.446 \times 10^{-9}x_1+x_1^2})}{24.+8.x_1^2} : \text{όψη}$$

Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Τώρα όμως **όλοι** οι δρόμοι ισορροπίας διέρχονται από ένα και μοναδικό σημείο διακλάδωσης: ($p = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$), το οποίο λέγεται **πολλαπλό σημείο διακλάδωσης** και εν προκειμένω **τετραπλό**, αφού εξ αυτού διέρχονται **τέσσερις** δρόμοι ισορροπίας: δύο δευτερεύοντες και δύο τριτεύοντες. Παρατηρούμε και από την αναλυτική σχέση, αλλά και από το σχήμα, ότι οι δύο δ.δ. είναι πανομοιότυποι. Ο ένας είναι αντίγραφο του άλλου στραμμένο κατά 90 μοίρες με άξονα περιστροφής τον κατακόρυφο. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τους δύο τ.δ. (για τα δύο σκέλη του τ.δ.). Τώρα και οι δύο δ.δ., αλλά και οι δύο τ.δ. είναι πλέον ανοδικοί, ευσταθείς και συμμετρικοί, αφού $b = 1.5 > 1$.

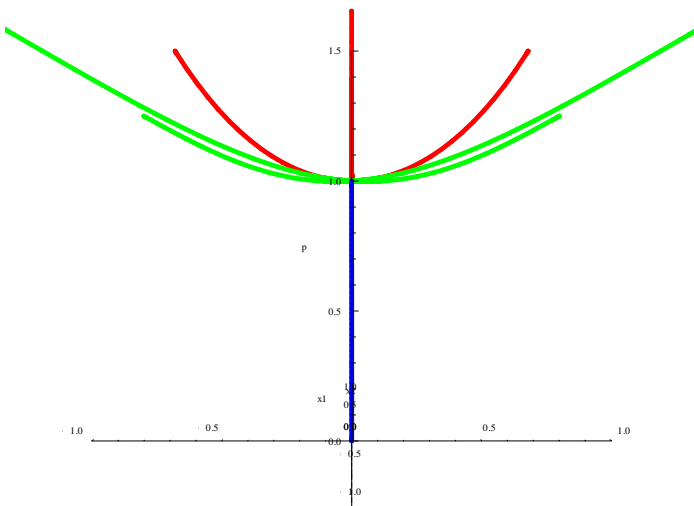
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



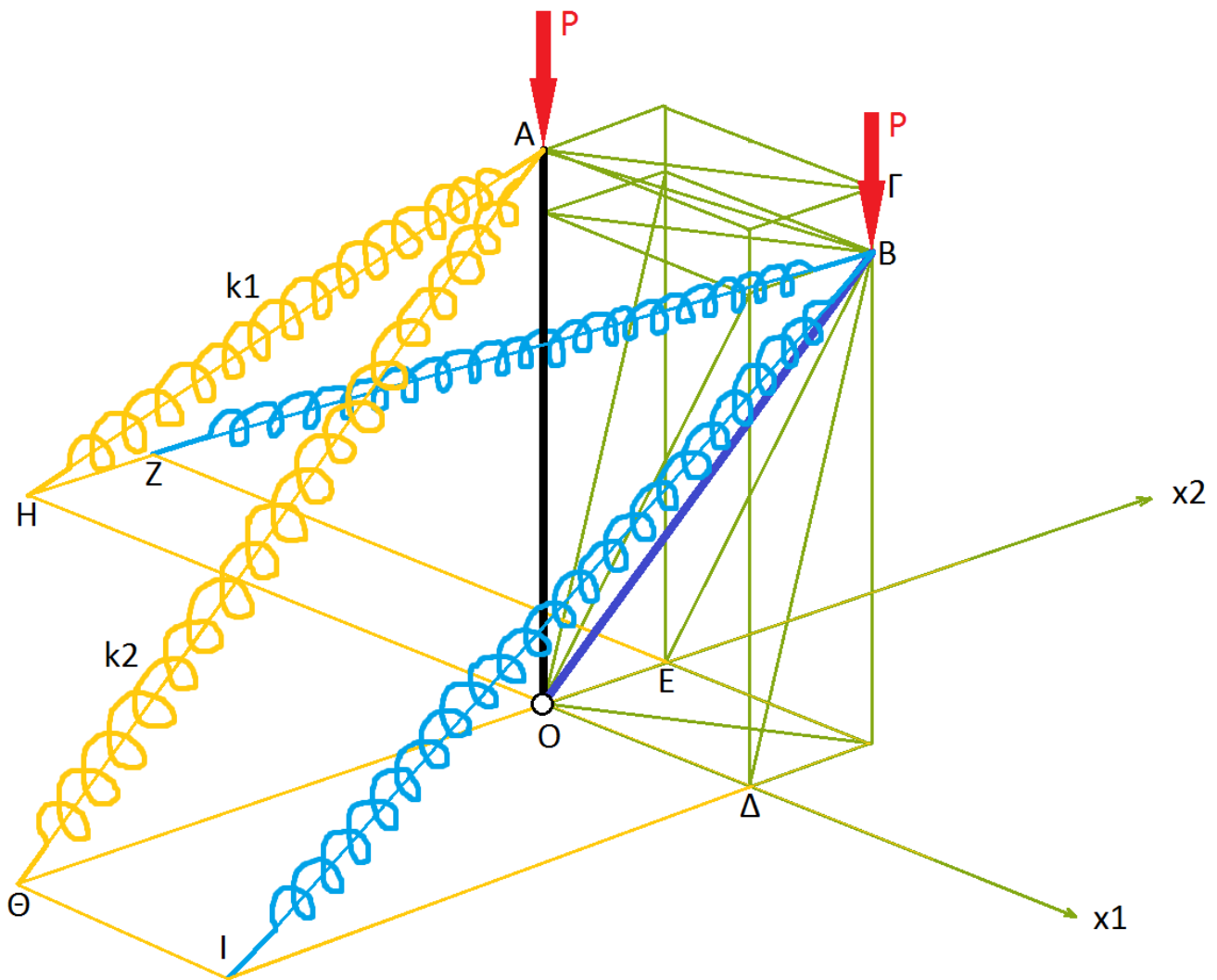
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



Όψη $p - x_1$ ή $p - x_2$:



Λοξά ελατήρια



Ο πρόβολος OA στηρίζεται τώρα με δύο μετακινησιακά οριζόντια ελατήρια. Τα ελατήρια είναι στην απαραμόρφωτη κατάστασή τους ισομήκη, δηλαδή $(\mathbf{AH}) = (\mathbf{AO})$. Τα μήκη $(\mathbf{OH}) = (\mathbf{OI}) = (\mathbf{OA})$, επομένως βρίσκονται υπό γωνία 45 μοιρών. Οι σταθερές τους είναι k_1 και k_2 .

Το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στον χώρο με μόνη δέσμευση, το στηριγμένο άκρο να κινείται εντός της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Θ , I , είναι παράλληλη στον άξονα x_1 και βρίσκεται εντός του επιπέδου x_1-x_2 .

Το ελατήριο 2 μπορεί να κινείται στον χώρο με μόνη δέσμευση, το στηριγμένο άκρο να κινείται εντός της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Z , H , είναι παράλληλη στον άξονα x_2 και βρίσκεται εντός του επιπέδου x_1-x_2 .

Η εσωτερική δυναμική ενέργεια U_1 του ελατηρίου 1 προκύπτει από τριγωνομετρία και μετά από πράξεις:

$$U(x_1) = k_1 L^2 (\sqrt{1 + \sin x_1} - 1)^2 \approx k_1 L^2 \left(\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_1^3}{8} + \frac{x_1^4}{192} \right) : \text{Σειρά Taylor}$$

Οι σταθερές των δύο ελατηρίων συσχετίζονται με τον συντελεστή a : $k_2 = a k_1$

Το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι κατά τα γνωστά: $P_{cr} = kL/2$

Έστω το ανηγμένο φορτίο p ως προς το κρίσιμο φορτίο: $p = P/P_{cr} = 2P/kL$

Εύρεση δρόμων ισορροπίας

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς k_1 , για $a = 1.2$:

$$V[x_1, x_2] = \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_1^3}{8} - \frac{x_1^4}{192} + 1.2 \left(\frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^3}{8} - \frac{x_2^4}{192} \right) - \frac{p}{2} \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 24 - 18x_1 - x_1^2 - p(24 - 4x_1^2 + 12x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow -p(24 + 12x_1^2 - 4x_2^2) + a(24 - 18x_2 - x_2^2) = 0$$

3) Δρόμοι ισορροπίας:

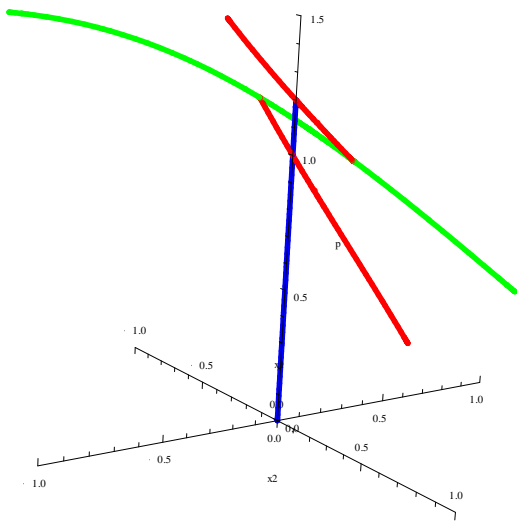
- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{24-18x_1-x_1^2}{24-4x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1.2 \left(\frac{24-18x_2-x_2^2}{24-4x_2^2} \right), x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος:

Δεν αναγράφονται οι σχέσεις του τ.δ., καθώς είναι εξαιρετικά εκτενείς (πλέον της μισής σελίδας έκαστη), και δεν έχουν καμία εποπτική αξία. Αντίθετα, τα παρακάτω διαγράμματα, είναι παραστατικά.

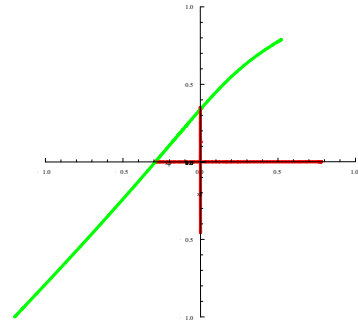
Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) και ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι ασύμμετροι, ευσταθείς για αρνητικές γωνίες, ασταθείς για θετικές γωνίες. Ο 1^{ος} δ.δ. βρίσκεται επί του ιδιοδιανύσματος $\{1,0\}$ και ο 2^{ος} δ.δ. επί του ιδιοδιανύσματος $\{0,1\}$. Αυτές είναι οι ιδιομορφές των δευτερευόντων δρόμων. Ο 1^{ος} δ.δ. έχει σημείο διακλάδωσης με τον κ.δ. στο $p = 1$ και ο 2^{ος} δ.δ. στο $p = 1.2$. Η **αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού** λαμβάνει χώρα σε αυτά τα δύο γειτνιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Τώρα ο τ.δ. τέμνει και τους δύο δ.δ. Αυτό είναι καθαρά θεωρητικό, και σε έναν πραγματικό φορέα με ατέλειες, ο ε.δ. θα ακολουθήσει μία κατεύθυνση. Τέλος, ο τ.δ. είναι και αυτός ασύμμετρος.

Κατά τη μελέτη ευστάθειας του πολλαπλού σημείο διακλάδωσης, προέκυψε ότι $\delta^3 V = -0.75 \neq 0$. Δηλαδή η V έχει **σημείο καμπής** και η θέση είναι πρακτικά **ασταθής**.

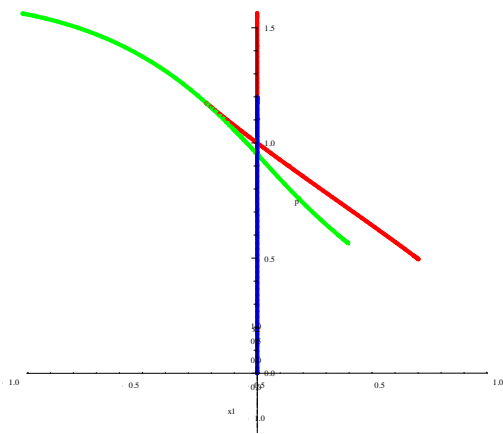
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



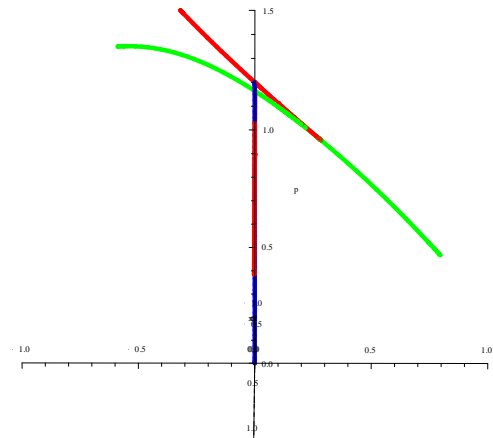
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



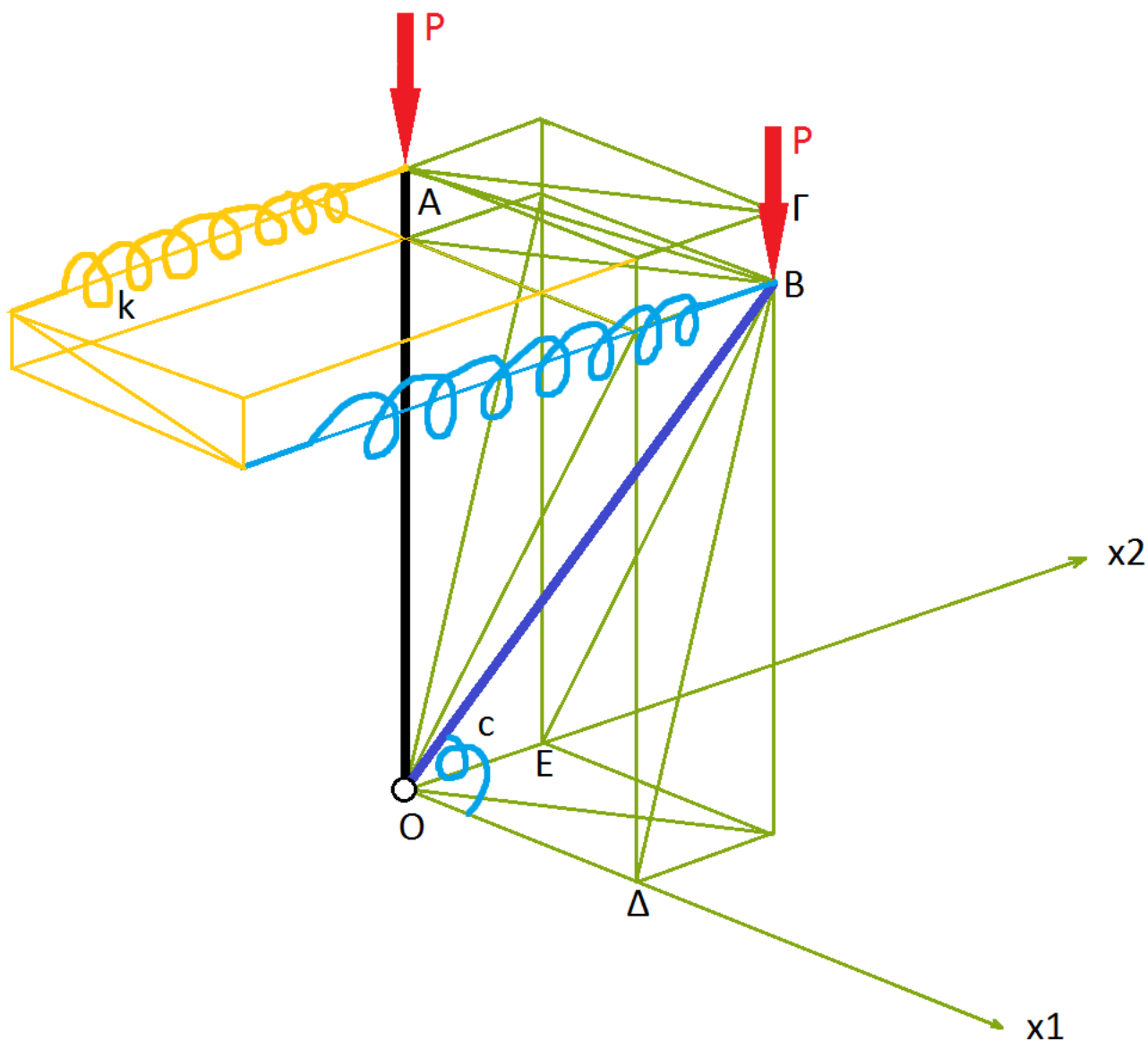
Όψη $p - x_1$:



Όψη $p - x_2$:



Στροφικό ελατήριο - Οριζόντιο ελατήριο



Τα δύο ελατήρια συσχετίζονται με την παράμετρο a : $\mathbf{c a} = kL^2$

Η εσωτερική ενέργεια U είναι:

$$U = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}kL^2 \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right) = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}ac \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right)$$

Εύρεση δρόμων ισορροπίας

1) Ανηγμένο συνολικό δυναμικό ως προς k_1 , για $a = 1.1$:

$$V[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}1.1 \left(x_2^2 - \frac{x_2^4}{3} \right) - \frac{p}{2} \left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{24}(x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 * x_2^2) \right)$$

2) Συνθήκες ισορροπίας, μετά από πράξεις:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 6 - p(6 - x_1^2 + 3x_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 6a - 4ax_2^2 - p(6 + 3x_1^2 - x_2^2) = 0$$

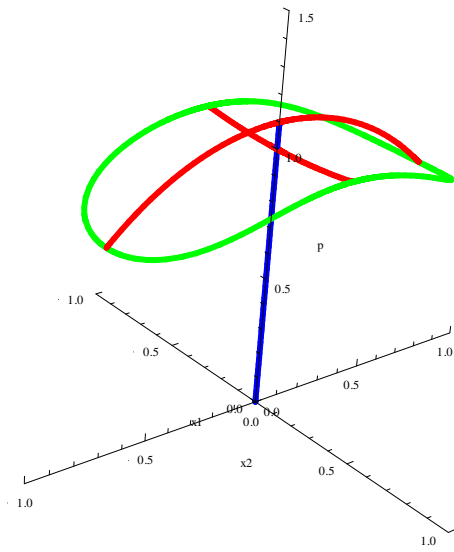
3) Δρόμοι ισορροπίας:

- κύριος δρόμος: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 1: $p(x_1) = \frac{6}{6-x_1^2}, x_2 = 0$
- δευτερεύων δρόμος 2: $p(x_2) = 1.1 \left(\frac{6-4x_2^2}{6-x_2^2} \right), x_1 = 0$
- τριτεύων δρόμος: $p(x_1) = \pm \frac{\sqrt{-1.8+0.3x_2^2+6.6x_2^4}}{\sqrt{-12.3+2.2x_2^2}}$: κάτοψη $p(x_2) = \frac{-9+1.1(-3+2.x_2^2)}{-12.-4.x_2^2}$: όψη

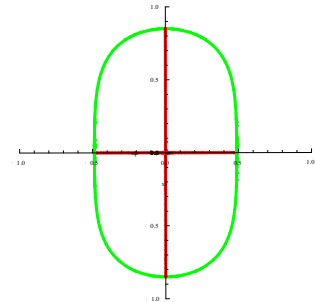
$$x_{1\text{τομή}} = \pm 0.38, x_{2\text{τομή}} = \pm 0.707$$

Ο κύριος δρόμος ισορροπίας φαίνεται με **μπλε** χρώμα, οι δευτερεύοντες με **κόκκινο** και οι τριτεύοντες με **πράσινο**. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) είναι ανοδικός, ευσταθής και συμμετρικός. Ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι καθοδικός, ασταθής και συμμετρικός. Ο 1^{ος} δ.δ. βρίσκεται επί του ιδιοδιανύσματος $\{1,0\}$ και ο 2^{ος} δ.δ. επί του ιδιοδιανύσματος $\{0,1\}$. Αυτές είναι οι ιδιομορφές των δευτερευόντων δρόμων. Ο 1^{ος} δ.δ. έχει σημείο διακλάδωσης με τον κ.δ. στο $p = 1$ και ο 2^{ος} δ.δ. στο $p = 1.1$. Η **αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού** λαμβάνει χώρα σε αυτά τα δύο γειτνιάζοντα σημεία διακλάδωσης που βρίσκονται επί του κύριου δρόμου ισορροπίας. Η κάτοψη του τ.δ. είναι μία έλλειψη. Ο τ.δ. τέμνει σε 2 σημεία τον 1^ο δ.δ. και σε 2 σημεία τον 2^ο δ.δ.

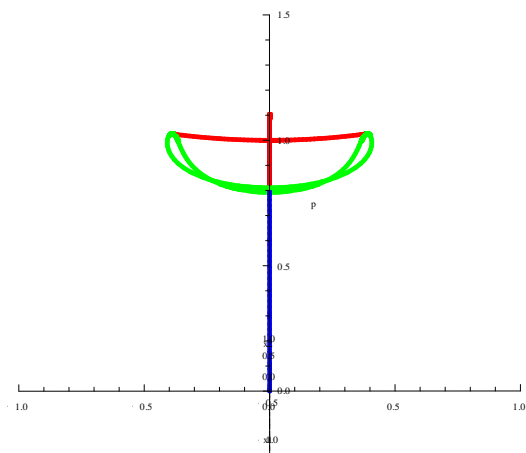
Προοπτικό $p - x_1 - x_2$:



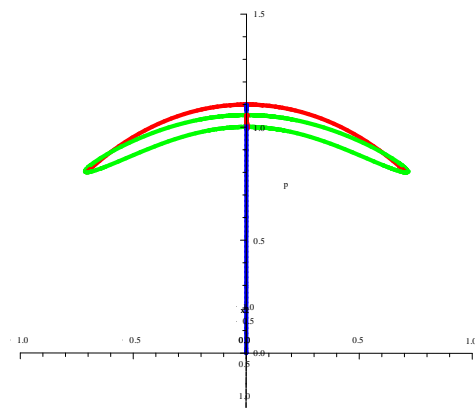
Κάτοψη $x_1 - x_2$:



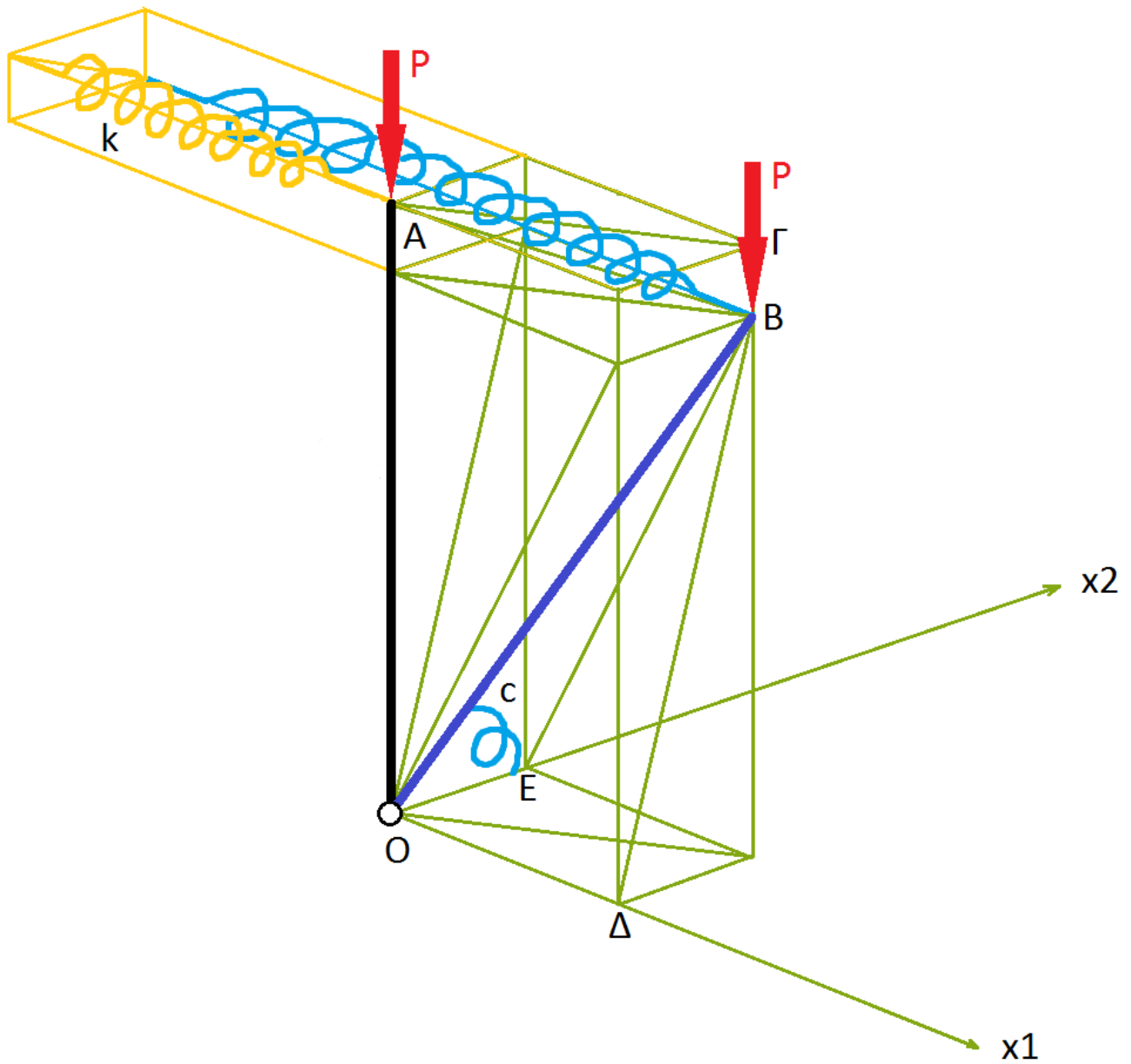
Όψη $p - x_1$:



Όψη $p - x_2$:



Οριζόντιο ελατήριο - Στροφικό ελατήριο



Όταν υπερσχύει το στροφικό ελατήριο, δηλαδή για $a < 1$, δεν υφίσταται αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού. Δεν προκύπτει τριτεύων δρόμος. Υπάρχουν μόνο ο κ.δ. και οι 2 δ.δ. Ο 1^{ος} δ.δ. (ο κάτω) είναι καθοδικός, ασταθής και συμμετρικός. Ο 2^{ος} δ.δ. (ο πάνω) είναι ανοδικός, ευσταθής και συμμετρικός.

Βιβλιογραφία

- 1) Σημειώσεις κ. Χ. Γαντέ Καθηγητή ΕΜΠ για το μάθημα "Μη Γραμμική Συμπεριφορά Μεταλλικών Κατασκευών"
- 2) Α. Ν. Κουνάδη: "Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας", Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004
- 3) Luis A. Godoy: "Theory of Elastic Stability: Analysis and Sensitivity", CRC Press, 1999
- 4) W. J. Supple: "The Elastic Stability of Symmetric Systems", 1967