



# Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών

Βέλτιστος σχεδιασμός κατατομών μετωπικών οδοντωτών τροχών κλειστής τροχιάς επαφών για ισοκατανομή του κινδύνου εμφάνισης εκκοιλάνσεων.

Διπλωματική εργασία

Φίλιππος Φ. Κωστάκης

Επιβλέπων: Λέκτορας Β. Σπιτάς

Αθήνα 2013



# 1 Πρόλογος

Οι οδοντωτοί τροχοί κατά τη λειτουργία τους υπόκεινται σε πολλούς μηχανισμούς φθοράς, που σταδιακά οδηγούν στην καταστροφή τους. Ένας από τους πλέον σημαντικούς μηχανισμούς είναι η ανάπτυξη εκκοιλάνσεων (pitting) στην εργαζόμενη πλευρά των οδοντωτών τροχών, που οφείλεται στην πίεση επιφανείας που αναπτύσσεται μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύεται ο μηχανισμός της ανάπτυξης εκκοιλάνσεων στους οδοντωτούς τροχούς και εντοπίζονται τα αίτια εμφάνισης του φαινομένου, οι παράγοντες που καθορίζουν το ρυθμό εξέλιξης του και ως αποτέλεσμα, προσδιορίζονται τρόποι περιορισμού του.

Στην παρούσα εργασία υποδεικνύεται ότι ο πλέον αποτελεσματικός τρόπος περιορισμού της εμφάνισης εκκοιλάνσεων είναι ο κατάλληλος σχεδιασμός κατατομών οδοντωτών τροχών καθώς ο βασικότερος παράγοντας που καθορίζει την εμφάνιση και την ανάπτυξη εκκοιλάνσεων είναι η ακτίνα καμπυλότητας των συνεργαζόμενων κατατομών. Στην πορεία καθορίζονται με ακρίβεια τα γεωμετρικά κριτήρια που πρέπει να πληρούν οι κατατομές των οδοντωτών τροχών και με τη χρήση ενός υβριδικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης (συνδυασμός γενετικού και αιτιοκρατικού αλγορίθμου) σχεδιάζεται μια βέλτιστη τυπική πρώτη βαθμίδα επιβατικού αυτοκινήτου. Οι βέλτιστοι οδοντωτοί τροχοί που αναπτύχθηκαν υπερέχουν συγκρινόμενοι με τους οδοντωτούς τροχούς εξειλιγμένης, ημιτονοειδούς κανόνα και με τα S-gears ως προς την πίεση επιφανείας και την αντοχή σε κάμψη ποδός.

## **Abstract**

During their life cycle, gears are subject to various wear and fatigue mechanisms, which eventually lead to their failure. One of the most important failure modes is surface fatigue and especially pitting. In this diploma thesis, the pitting mechanism is analyzed in depth in order to determine the factors which cause this phenomenon and contribute to its development. As a result of this analysis, methods to reduce pitting are proposed including redesign of the gear pair geometry.

According to Hertz's theory of elastic contact, the most critical factor which controls the initialization and the development of pitting is the curvature of the gear tooth profiles. The geometrical criteria that the profiles must meet (law of gearing, pitch compatibility, absence of interference) are mathematically described and implemented in a hybrid optimization algorithm (combination of a genetic algorithm and a gradient-based algorithm). An optimum solution corresponding to a typical one-stage speed reducer was reached and the performance of the optimized spur gear pair was found to surpass the performance of involute, sine-rack and S-gears of similar geometry in terms of both root strength and pitting resistance.





## 2 Περιεχόμενα

1	Πρόλογος .....	ii
2	Περιεχόμενα.....	2
3	Εισαγωγή στους οδοντωτούς τροχούς .....	6
3.1	Γενικά στοιχεία για τους οδοντωτούς τροχούς .....	6
4	Βασικοί δυναμικοί μηχανισμοί αστοχίας οδοντωτών τροχών.....	7
4.1	Φθορά.....	7
4.2	Κόπωση .....	8
4.2.1	Καμπτική κόπωση.....	8
4.2.2	Επιφανειακή κόπωση.....	9
5	Θεωρία επαφής κατά Hertz.....	12
5.1	Άνοδος ρωγμών στην επιφάνεια .....	18
5.2	Τρόποι περιορισμού επιφανειακής κόπωσης .....	19
6	Θεωρία οδοντωτών τροχών .....	20
6.1	Βασικός νόμος οδοντώσεως.....	21
6.2	Συμβατότητα βήματος.....	24
6.3	Εξασφάλιση συνεχούς συνεργασίας .....	24
7	Σχεδιασμός και παραδοχές-απλοποιήσεις .....	26
7.1	Σχεδιασμός κατατομών .....	28
7.1.1	Εύρεση κατατομής οδόντος τροχού δεδομένης της γεωμετρίας του κανόνα 28	
7.1.2	Εύρεση τροχιάς επαφών και συνεργαζόμενης κατατομής δεδομένης της αρχικής κατατομής.....	29
7.1.3	Εύρεση συνεργαζόμενης κατατομής .....	32
8	S-gears.....	34
8.1	Γένεση γεωμετρίας κατατομών S-gears [7] .....	35
9	Διαδικασία βελτιστοποίησης .....	36
9.1	Περιγραφή γεωμετρίας κατατομής .....	36
9.1.1	Καμπύλες Bezier.....	37
9.2	Μαθηματική διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης και χειρισμός περιορισμών.....	38

9.3	Αλγόριθμος και κύκλος βελτιστοποίησης.....	41
9.3.1	Εκκίνηση αλγορίθμου .....	42
10	Αποτελέσματα βελτιστοποίησης και σύγκριση με εξελιγμένη και S-Gears.....	46
10.1	Σύγκριση βελτιστοποιημένων κατατομών με οδόντες εξελιγμένης , ημιτονοειδούς κανόνα και S-Gears.....	50
10.2	Σύγκριση βέλτιστων κατατομών με κατατομές εξελιγμένης ως προς την κάμψη στην ακτίνα ποδός.....	52
11	Συμπεράσματα .....	54
12	Βιβλιογραφία – αναφορές.....	56



## Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 1 - Φωτογραφία κορώνας που έχει εμφανίσει εκκοιλάνσεις στις εργαζόμενες πλευρές. Το φαινόμενο βρίσκεται σε προχωρημένο στάδιο.....	10
Εικόνα 2- Δύο σώματα σε επαφή στο επίπεδο. ....	12
Εικόνα 3 - Ζώνη παραμόρφωσης (επαφής) και κατανομή θλιπτικών τάσεων σε αυτή κατά Hertz.....	15
Εικόνα 4- Κινηματική ανάλυση δυο τυχαίων κατατομών σε συνεργασία. ....	21
Εικόνα 5- Λεπτομερής απεικόνιση των ταχυτήτων δύο συνεργαζόμενων κατατομών στο επίπεδο και ανάλυση τους επί της κοινής καθέτου και εφαπτόμενης στο σημείο συνεργασίας. ....	22
Εικόνα 6- Γεωμετρική κατασκευή της τροχιάς επαφών δεδομένης της γεωμετρίας της κατατομής του τροχού και της φοράς περιστροφής. ....	29
Εικόνα 7 – Κατατομή τυπικού κανόνα ( $t_p$ ) και τροχού ( $t_G$ ) S-gear και η τροχιά επαφών U. Ανατύπωση από [7].....	34
Εικόνα 8- Κατατομή πινιόν ημιτονοειδούς κανόνα και σημεία ελέγχου ( $Z=19$ , $m=2.5$ ).....	47
Εικόνα 9- Γεωμετρία πινιόν ημιτονοειδούς κανόνα ( $Z=19$ , $m=2.5$ ). ....	47
Εικόνα 10- Κατατομή πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού, ημιτονοειδούς κανόνα και τροχιά επαφών ( $Z=19$ , $m=2.5$ ).....	48
Εικόνα 11- Κατατομή βελτιστοποιημένου πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού και τροχιά επαφών ( $Z=19$ , $m=2.5$ ).....	48
Εικόνα 12 - Βαθμίδα βελτιστοποιημένων οδοντώσεων. ....	49
Εικόνα 13 - Βαθμίδα βελτιστοποιημένων οδοντώσεων ....	49
Εικόνα 14- Σύγκριση της ισοδύναμης καμπυλότητας σε 1000 σημεία της κάθε κατατομής ( $Z=19$ , $m=2.5$ ).....	51
Εικόνα 15 - Μέγιστη αναπτυσσόμενη εφελκυστική τάση στο πόδι (1.66 MPa) για τις βέλτιστες οδοντώσεις.....	52
Εικόνα 16 - Μέγιστη αναπτυσσόμενη εφελκυστική τάση στο πόδι (2.34 MPa) για τις οδοντώσεις εξειλιγμένης.....	53



### 3 Εισαγωγή στους οδοντωτούς τροχούς

#### 3.1 Γενικά στοιχεία για τους οδοντωτούς τροχούς

Οι οδοντωτοί τροχοί βρίσκουν πολύ συχνά εφαρμογή στη μεταφορά ισχύος. Εργάζονται σε υψηλές στροφές και μεταφέρουν μεγάλες ροπές. Κάτω από αυτές τις δυσμενείς συνθήκες, οι οδοντωτοί τροχοί καταπονούνται και πιθανόν αστοχούν, με την αστοχία τους να παρεμποδίζει τη λειτουργικότητα της μηχανολογικής κατασκευής στην οποία εντάσσονται.

Η αστοχία μπορεί να επέλθει είτε «στατικά» ,λόγω υψηλής φόρτισης, είτε λόγω δυναμικών φαινομένων, όπως η φθορά και η κόπωση. Η στατική αστοχία είναι επακόλουθο είτε κακού σχεδιασμού (υποδιαστασιολόγηση) ή κακής χρήσης (λειτουργία σε δυσμενέστερες συνθήκες από αυτές που προβλέπονται από το σχεδιαστή). Αμελώντας λοιπόν την περίπτωση της στατικής αστοχίας ,που μπορεί να αποφευχθεί με σωστό σχεδιασμό και χρήση, εξετάζουμε τη φθορά και την κόπωση των οδοντωτών τροχών. Τα δύο αυτά φαινόμενα θα εμφανιστούν σίγουρα κατά τη συνεργασία των οδοντωτών τροχών, καθώς αυτοί βρίσκονται σε επαφή και τα φορτία που τους καταπονούν είναι δυναμικά.

Αν και η εμφάνιση της φθοράς και της κόπωσης είναι δεδομένη, δεν είναι απαραίτητο ότι θα επηρεαστεί η λειτουργικότητα μιας βαθμίδας οδοντωτών τροχών. Πιθανόν οι συνέπειες των παραπάνω να είναι ασήμαντες μέσα στη διάρκεια ζωής της κατασκευής. Εξετάζοντας λοιπόν τους μηχανισμούς της φθοράς και της κόπωσης μπορούμε περιορίσουμε τις αρνητικές επιδράσεις τους και να επιτύχουμε κατασκευές πιο αξιόπιστες, πιο φθηνές, με μεγαλύτερη διάρκεια ζωής.

## 4 Βασικοί δυναμικοί μηχανισμοί αστοχίας οδοντωτών τροχών

### 4.1 Φθορά

Η φθορά (wear) μπορεί να είναι είτε «αποξεστική» (abrasive) ή «συγκολλητική» (adhesive). Στην πρώτη περίπτωση παρεμβάλλονται σκληρά σωματίδια (ακαθαρσίες) μεταξύ των εργαζόμενων κατατομών των οδοντωτών τροχών. Οι εργαζόμενες κατατομές ολισθαίνουν μεταξύ υπό την ταυτόχρονη εφαρμογή υψηλών πιέσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι διάφοροι σκληροί κόκκοι ακαθαρσιών να λειτουργούν ως λειαντικά σώματα, αφαιρώντας υλικό από τις εργαζόμενες κατατομές.

Στην περίπτωση της «συγκολλητικής» φθοράς, παρατηρείται κατά κάποιο τόπο εν ψυχρώ συγκόλληση υπό πίεση περιοχών των συνεργαζόμενων κατατομών. Καθώς οι δύο κατατομές βρίσκονται σε επαφή υπό υψηλή πίεση σχηματίζονται δεσμοί μεταξύ μορίων των δύο κατατομών. Αυτό έχει ως συνέπεια την αποκόλληση περιοχών υλικού από τις εργαζόμενες κατατομές.

Από τους δύο τύπους φθοράς κυρίαρχος είναι αυτός της «συγκολλητικής» φθοράς. Η φθορά σε αυτή την περίπτωση είναι εντονότερη και αναπτύσσεται πολύ ταχύτερα από ότι στην «αποξεστική». Οι παράγοντες που ευνοούν αυτό τον τύπο φθοράς είναι τα μεγάλα φορτία, η ανεπαρκής λίπανση και οι μεγάλη ταχύτητα ολίσθησης (επειδή προκαλεί τοπική θέρμανση). Από τους διάφορους τύπους «συγκολλητικής» φθοράς οι πιο συνήθεις είναι το scuffing και το scoring που βασίζονται στον μηχανισμό που αναπτύχθηκε παραπάνω και διαφέρουν ως προς την έκταση του πεδίου φθοράς. Το scuffing πρόκειται για τοπική φθορά σχετικά μικρής έκτασης ενώ το scoring για εκτεταμένη φθορά κατά τη διεύθυνση ολίσθησης των κατατομών.

## 4.2 Κόπωση

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το φορτία που καταπονούν τους οδοντωτούς τροχούς είναι δυναμικά με αποτέλεσμα να εμφανίζονται φαινόμενα κόπωσης του υλικού. Ως κόπωση αναφέρεται η δημιουργία και ανάπτυξη ρωγμών υπό την επιβολή κυκλικών φορτίων, τα οποία γενικά είναι πολύ μικρότερα κατά μέτρο από τη στατική αντοχή του υλικού. Η ανάπτυξη ρωγμών μεγάλης έκτασης οδηγεί τελικά σε αστοχία της κατασκευής.

Στους οδοντωτούς τροχούς η κόπωση προκαλεί αστοχία σε δύο ζώνες, στην ακτίνα ποδός των οδόντων λόγω καμπτικής κόπωσης (bending fatigue) και στην επιφάνεια των εργαζόμενων κατατομών λόγω της πίεσης επιφανείας μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών (επιφανειακή κόπωση ή pitting).

### 4.2.1 Καμπτική κόπωση

Η φόρτιση ενός δοντιού είναι δυναμική. Για σταθερή ταχύτητα περιστροφής των συνεργαζόμενων τροχών η εμπλοκή ενός δεδομένου δοντιού παρουσιάζει μια περιοδικότητα που εξαρτάται από την ταχύτητα περιστροφής, από τον αριθμό των οδόντων του τροχού και από τη γεωμετρία των εργαζόμενων κατατομών και της βαθμίδας (βαθμός επικάλυψης). Επίσης κατά τη διάρκεια της εμπλοκής ενός δεδομένου δοντιού τα φορτία αλλάζουν μέτρο, διεύθυνση και σημείο εφαρμογής. Το φορτίο κατά τη συνεργασία (για δεδομένη μεταφερόμενη ροπή) εξαρτάται από τη γεωμετρία των οδοντωτών τροχών. Το αποτέλεσμα των παραπάνω είναι μια έντονα δυναμική φόρτιση του οδόντος.

Μακροσκοπικά, (αμελώντας τα σημεία επαφής μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών) οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στην ακτίνα ποδός του οδόντα λόγω κάμψης. Η επικίνδυνη ζώνη είναι η αυτή των ορθών εφελκυστικών τάσεων (ακτίνα ποδός εργαζόμενης κατατομής). Στη ζώνη αυτή ,λοιπόν, δημιουργούνται και αναπτύσσονται ρωγμές οι οποίες πιθανόν να οδηγήσουν σε πλήρη αποκοπή του οδόντος από τον τροχό.

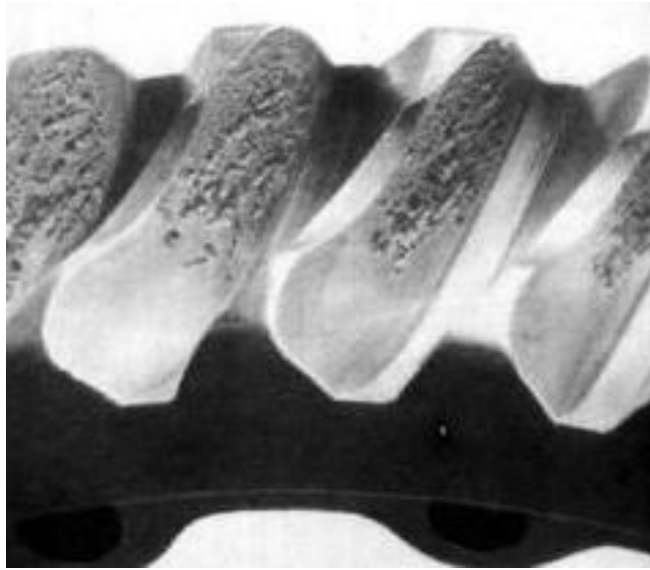
#### 4.2.2 Επιφανειακή κόπωση

Κατά τη μεταφορά φορτίων μεταξύ συνεργαζόμενων κατατομών εμφανίζεται μια μικρή ζώνη υψηλών τάσεων στο σημείο επαφής των συνεργαζόμενων οδόντων. Στην περιοχή αυτή τα φορτία είναι μεγάλα και ταυτόχρονα η επιφάνεια στην οποία ασκούνται είναι πολύ μικρή. Σε ένα ζεύγος μετωπικών τροχών η επαφή θεωρητικά λαμβάνει χώρα σε μια γενέτειρα και οι τάσεις απειρίζονται. Πρακτικά βέβαια οι οδόντες παραμορφώνονται τοπικά οπότε εμφανίζεται μια ζώνη επαφής μικρού εμβαδού.

Οι τάσεις που εμφανίζονται στη ζώνη επαφής, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, είναι πολύ μεγάλες αλλά είναι θλιπτικές, οπότε σε πρώτη φάση δε δείχνουν ιδιαίτερα επικίνδυνες. Εξ αιτίας όμως του φαινομένου Poisson, προχωρώντας από την επιφάνεια του οδόντα προς το εσωτερικό εμφανίζονται διατμητικές τάσεις. Αυτές οι διατμητικές τάσεις λαμβάνουν μεγίστη τιμή σε κάποιο συγκεκριμένο βάθος (ίδιας τάξης μεγέθους με την παραμόρφωση λόγω επαφής των οδόντων), στο κέντρο της ζώνης επαφής.

Αναφερόμενοι σε ένα συγκεκριμένο σημείο της εργαζόμενης κατατομής, οι προκύπτουσες διατμητικές τάσεις είναι περιοδικές αφού κάθε δόντι εμπλέκεται με μια δεδομένη συχνότητα και επιπλέον κάθε «σημείο» της εργαζόμενης πλευράς (γενέτειρα ή ακριβέστερα ζώνη) έρχεται σε επαφή με τον συνεργαζόμενο οδόντα μια φορά κατά τη διάρκεια της εμπλοκής. Λόγω διατμητικής κόπωσης, λοιπόν, εμφανίζονται μικρορωγμές σε μικρά βάθη κάτω από την επιφάνεια των οδόντων, οι οποίες στη συνέχεια αναπτύσσονται.

Επειδή τα φορτία στο σημείο επαφής είναι θλιπτικά και κατά τη θλίψη δεν εμφανίζεται το φαινόμενο συγκέντρωσης τάσεων οι ρωγμές δεν έχουν σημαντική επίδραση στη λειτουργικότητα των οδόντων όσο βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια. Καθώς όμως αυτές αναπτύσσονται, υπό συγκεκριμένες συνθήκες βγαίνουν στην επιφάνεια οπότε παρατηρείται το εξής φαινόμενο. Εισέρχεται λιπαντικό εντός της ρωγμής και φυλακίζεται κάτω από τη επιφάνεια του οδόντα. Καθώς η ζώνη πάνω από τη «γεμάτη» λιπαντικό ρωγμή μπαίνει σε συνεργασία, οι ισχυρές θλιπτικές τάσεις που αναπτύσσονται προκαλούν την ανάπτυξη μεγάλων πιέσεων εντός της ρωγμής λόγω της ελάχιστης συμπίεστικότητας του λιπαντικού. Οι πιέσεις αυτές επεκτείνουν τις ρωγμές προς την επιφάνεια του οδόντα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η αποκόλληση λεπτών (και μικρών) φύλλων υλικού από την εργαζόμενη κατατομή.



**Εικόνα 1 - Φωτογραφία κορώνας που έχει εμφανίσει εκκοιλάνσεις στις εργαζόμενες πλευρές. Το φαινόμενο βρίσκεται σε προχωρημένο στάδιο.**

Καθώς αυτό το φαινόμενο προχωρά η εργαζόμενη πλευρά χάνει την αρχική της γεωμετρία και ποιότητα επιφάνειας. Ταυτόχρονα η αυξημένη τραχύτητα ευνοεί τους μηχανισμούς φθοράς που αναφέρθηκαν παραπάνω οπότε οι οδοντωτοί τροχοί οδηγούνται σύντομα στην αστοχία. Αστοχία μπορεί να μη σημαίνει κατ'ανάγκη θραύση αλλά γενικά λειτουργία εκτός προδιαγραφών (αυξημένες ταλαντώσεις, ανομοιόμορφη μετάδοση ισχύος κτλ).

Για να αποφύγουμε το φαινόμενο του pitting θα θέλαμε ιδανικά να αποφύγουμε (πρακτικά να περιορίσουμε) την εμφάνιση μικρορωγμών, την ανάπτυξη τους και την «αναρρίχηση» τους στην επιφάνεια. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί με δύο τρόπους γενικά. Θα πρέπει είτε να αναπτυχθούν υλικά που θα παρουσιάζουν καλύτερη συμπεριφορά απέναντι στην εμφάνιση και διάδοση των ρωγμών ή να περιοριστούν τα αίτια που προκαλούν τα παραπάνω.

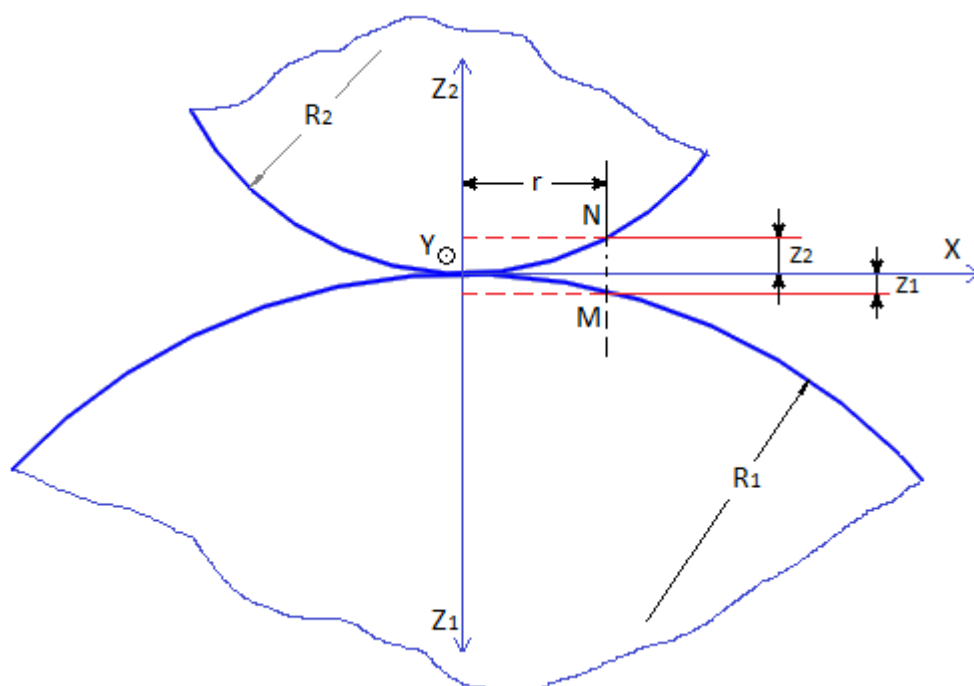
Το αίτιο της εμφάνισης των ρωγμών και της ανάπτυξης τους είναι όπως προαναφέρθηκε η διατμητική κόπωση που εμφανίζεται λίγο κάτω από την επιφάνεια λόγω της πίεσης στη ζώνη επαφής των οδοντωτών τροχών. Άρα σε πρώτη φάση πρέπει να προσδιοριστούν οι παράγοντες που καθορίζουν την πίεση στη ζώνη επαφής και κατ'επέκταση τη διάτμηση που προκαλείται (βάθος μέγιστης διάτμησης και μέτρο). Η θεωρία επαφής παραμορφώσιμων σωμάτων (για μικρές παραμορφώσεις) έχει αναπτυχθεί από τον Hertz και έχει επαληθευτεί πειραματικά. Επίσης πρέπει να προσδιοριστούν τα αίτια που οδηγούν τις ρωγμές στην επιφάνεια.





## 5 Θεωρία επαφής κατά Hertz

Έστω δύο σώματα σε επαφή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έστω ότι αυτά έχουν παραμορφωθεί υπό την υποβολή ενός φορτίου, δημιουργώντας μια ζώνη επαφής. (Χάριν ευκολίας η αναπαράσταση είναι δισδιάστατη)



Εικόνα 2- Δύο σώματα σε επαφή στο επίπεδο.

Αγνοώντας όρους μεγαλύτερης τάξης οι επιφάνειες των σωμάτων στην περιοχή του «σημείου» επαφής μπορούν να εκφραστούν ως :

$$z_1 = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 \quad (1)$$

$$z_2 = B_1 x^2 + B_2 xy + B_3 y^2 \quad (2)$$

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων M και N των δύο σωμάτων (Εικόνα 1) μπορεί να γραφτεί ως :

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2 \quad (3)$$

Επιλέγοντας κατάλληλα σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο του γινομένου  $xy$  όποτε η εξίσωση (3) μπορεί να γραφτεί ως :

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (4)$$

Το σύστημα συντεταγμένων για το οποίο ισχύει η εξίσωση (4) είναι το σύστημα των κύριων καμπυλοτήτων.

Έστω  $R_1, R_1'$  οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας του σώματος 1 και  $R_2, R_2'$  οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας του σώματος 2. Οι  $R_1, R_1'$  ανήκουν σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα καθώς και οι  $R_2, R_2'$  αντίστοιχα. Έστω  $\psi$  η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των επιπέδων που περιέχουν τη  $R_1$  και την  $R_2$ . Τότε οι σταθερές της εξίσωσης (4) προκύπτουν ως η λύση του συστήματος :

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) \quad (5)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos \psi \right]^{1/2} \quad (6)$$

Επιστρέφουμε στην Εικόνα 1. Έστω ότι το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος είναι το σύστημα συντεταγμένων των κύριων καμπυλοτήτων με τη γωνία  $\psi=0$  (γωνία μεταξύ των επιπέδων που περιέχουν τις  $R_1$ ,  $R_2$ . Αυτές οι παραδοχές γίνονται για να διευκολυνθεί η απεικόνιση και δε βλάπτουν τη γενικότητα της ανάλυσης). Καθώς τα δύο σώματα παραμορφώνονται τοπικά ,γύρω από το «σημείο» επαφής, υπό την επίδραση θλιπτικού φορτίου, τα σημεία  $M$ ,  $N$  μετατοπίζονται κατά  $w_2$  και  $w_1$  αντίστοιχα κατά τις διευθύνσεις  $Z_2$  και  $Z_1$  αντίστοιχα, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν η απόσταση μεταξύ των  $M,N$  αρχικά ήταν  $d$ , τότε ισχύει :

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = d \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4) και (7) έχουμε :

$$w_1 + w_2 = d - Ax^2 - By^2 \quad (8)$$

Με την παραδοχή ότι τα σώματα 1 και 2 είναι ημίαιρα (κάτι τέτοιο ισχύει με μεγάλη ακρίβεια για υλικά μικρής ενδοτικότητας ,όπως τα υλικά των οδοντωτών τροχών, και «αξιόλογων» διαστάσεων καθώς η ζώνη που παραμορφώνεται κατά την επαφή είναι πολύ μικρών διαστάσεων ) μπορούμε να πάρουμε την εξής έκφραση :

$$w_1 + w_2 = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} \quad (9)$$

Όπου  $q dA$  το απειροστό φορτίο που ασκείται σε μια απειροστή επιφάνεια  $dA$  σε απόστασή  $r$  από το κέντρο της ζώνης επαφής (θεωρητικό σημείο επαφής). Η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλη τη ζώνη (επιφάνεια) επαφής.  $E_1$ ,  $E_2$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του σώματος 1 και 2 αντίστοιχα και  $\nu_1, \nu_2$  οι λόγοι Poisson.

Θέτουμε ως :

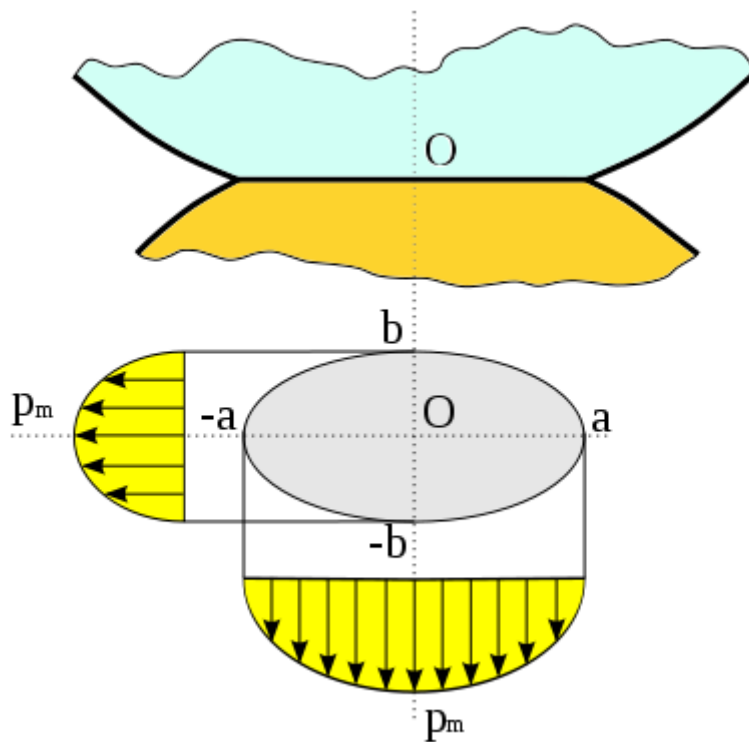
$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad (10)$$

$$k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (11)$$

Συνδυάζοντας τις (8), (9), (10) και (11) καταλήγουμε στη σχέση :

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = d - Ax^2 - By^2 \quad (12)$$

Βάσει της εξίσωσης (12) το ζητούμενο είναι να βρούμε μια κατανομή τάσεων  $q$  που να την επαληθεύει. Ο Hertz έδειξε ότι μια κατανομή τάσεων που σχηματίζει μισό ελλειψοειδές ικανοποιεί την εξίσωση (12) . Η υπόθεση του Hertz έχει αποδειχθεί και πειραματικά. Προφανώς αν οι τάσεις ακολουθούν τέτοια κατανομή, η ζώνη επαφής έχει σχήμα έλλειψης. Στην Εικόνα 3 απεικονίζεται η ζώνη επαφής καθώς και η κατανομή των τάσεων (προβολή της δισδιάστατης κατανομής)



Εικόνα 3 - Ζώνη παραμόρφωσης (επαφής) και κατανομή θλιπτικών τάσεων σε αυτή κατά Hertz

Αν το φορτίο που ασκείται μεταξύ των επιφανειών είναι P τότε η μέγιστη πίεση αναπτύσσεται στο κέντρο του έλλειψης επαφής και είναι :

$$q_0 = \frac{2}{3} \frac{P}{\pi ab} \quad (13)$$

Όπου a,b οι ημιάξονες της έλλειψης επαφής. Αυτοί υπολογίζονται από τους τύπους:

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A+B)}} \quad (14)$$

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A+B)}} \quad (15)$$

Όπου m,n συντελεστές που εξαρτώνται από το λόγο  $\frac{B-A}{A+B}$  και η τιμή τους λαμβάνεται από πίνακες που έχουν προκύψει πειραματικά . Ενδεικτικά παρατίθεται αυτός που προτάθηκε από τους H. L. Whittemore και S. N. Petrenko [6]

θ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
m	2.731	2.397	2.137	1.926	1.754	1.611	1.486	1.378	1.284	1.202	1.128	1.061	1.000
n	0.493	0.530	0.567	0.604	0.641	0.678	0.717	0.759	0.802	0.846	0.893	0.944	1.000

Όπου :

$$\theta = \cos^{-1} \frac{B-A}{A+B} \quad (16)$$

Από τις εξισώσεις (13), (14), (15) προκύπτουν οι παράγοντες που καθορίζουν το μέγεθος της αναπτυσσόμενης πίεσης επιφανείας. Αυτοί είναι :

- 1) Το επιβαλλόμενο φορτίο P. Μείωση του φορτίου οδηγεί σε μικρότερη επιφανειακή πίεση.
- 2) Το υλικό των οδοντωτών τροχών (τα  $k_{1,2}$  εξαρτώνται από τα  $E_{1,2}$  και  $\nu_{1,2}$  εξισώσεις (10) και (11) ). Όσο πιο ενδοτικό είναι το υλικό, τόσο μικρότερη η αναπτυσσόμενη πίεση (για μεγάλα μέτρα ελαστικότητας E η παραμόρφωση γύρω από το σημείο επαφής είναι περιορισμένη, άρα και οι διαστάσεις της ζώνης επαφής)
- 3) Από την καμπυλότητα των οδόντων στο σημείο επαφής .Ο όρος A+B (που αναφέρεται ως ισοδύναμη καμπυλότητα ) εξαρτάται από την καμπυλότητα των οδόντων, εξίσωση (5) . Αύξηση της ακτίνας καμπυλότητας των οδόντων (δηλαδή μείωση της καμπυλότητας  $\kappa = 1/R$ ) οδηγεί σε μείωση της πίεσης επιφανείας.

Τα προηγούμενα αναφέρονται στη γενική περίπτωση δύο σωμάτων σε επαφή. Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα σε μετωπικούς οδοντωτούς τροχούς προκύπτουν ορισμένες απλοποιήσεις :

- 1) Οι ακτίνες καμπυλότητας  $R_1$  και  $R_2$  τείνουν στο άπειρο καθώς οι μετωπικοί οδόντες δεν έχουν καμπυλότητα κατά τη διεύθυνση του πλάτους. Άρα η ισοδύναμη καμπυλότητα δίνεται από τη σχέση :

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (17)$$

- 2) Για τη γωνία  $\psi$  που σχηματίζεται μεταξύ των επιπέδων που περιέχουν τις  $R_1$ ,  $R_2$  ισχύει  $\psi=0$
- 3) Η θεωρητική επαφή γίνεται κατά γενέτειρα και όχι σημείο, οπότε η ζώνη επαφής δεν έχει πλέον ελλειπτικό σχήμα αλλά ορθογώνιο μήκους  $h$  (το πλάτος του οδοντωτού τροχού) και ύψους  $b$ , όπου :

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}} \quad (18)$$

$$P' = \frac{P}{h} \quad (19)$$

- 4) Η κατανομή των τάσεων είναι ελλειψοειδής αλλά σταθερού προφίλ κατά μήκος της θεωρητικής γενέτειρας επαφής.
- 5) Η μέγιστη αναπτυσσόμενη πίεση επιφανείας είναι :

$$q_0 = \frac{2P'}{\pi b} \quad (20)$$

## 5.1 Άνοδος ρωγμών στην επιφάνεια

Παραπάνω αναφέρθηκε ότι η πίεση επιφανείας προκαλεί δευτερογενή διάτμηση σε ένα μικρό βάθος κάτω από την ζώνη επαφής. Το βάθος αυτό  $z$ , εξαρτάται από το λόγο  $a/b$  (λόγος ημιαξόνων της έλλειψης επαφής) και είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τα  $a, b$  (για «σημειακή» επαφή. Για επαφή κατά γενέτειρα είναι της τάξης του  $b$ ).

Σε αυτό το βάθος εμφανίζονται αρχικά και στη συνέχεια αναπτύσσονται οι ρωγμές. Η άνοδος τους στην επιφάνεια μπορεί να προκληθεί από διάφορους παράγοντες όπως ατέλειες του υλικού ή παραμένουσες τάσεις στην επιφάνεια των οδόντων. Υπάρχει όμως ένας κύριος μηχανισμός που προκαλεί την άνοδό τους και αυτός βασίζεται στην μεταβολή της πίεσης επιφανείας από κατά την εμπλοκή των οδόντων.

Η κατανομή των τάσεων που προέκυψε παραπάνω αναφέρεται σε σώματα ακίνητα μεταξύ τους. Οι εργαζόμενες πλευρές των οδοντωτών τροχών όμως ολισθαίνουν μεταξύ τους. Με την υπέρθεση των τριβών η κατανομή παύει να είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της ζώνης επαφής (ελλειψοειδής ή κυλινδρική κατανομή). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπής ως προς το κέντρο της ζώνης επαφής. Η ροπή αυτή «ωθεί» τις ρωγμές προς την επιφάνεια. Κατά αντίστοιχο τρόπο οι ρωγμές οδηγούνται προς την επιφάνεια όταν οι αναπτυσσόμενες τάσεις διαφέρουν σημαντικά μεταξύ «γειτονικών» θέσεων κατά την πορεία της εμπλοκής των οδόντων.

## 5.2 Τρόποι περιορισμού επιφανειακής κόπωσης

Βάσει της ανάλυσης που προηγήθηκε καταλήγουμε ότι το φαινόμενο του pitting θα μπορούσε να περιοριστεί με τους εξής τρόπους (για συγκεκριμένο υλικό οδοντωτού τροχού) :

- 1) Μείωση του ασκούμενου φορτίου  $P$  μεταξύ των εργαζόμενων πλευρών. Για δεδομένη μεταφερόμενη ροπή το φορτίο ανά οδόντα μπορεί να μειωθεί με αύξηση του βαθμού επικάλυψης, δηλαδή του αριθμού οδόντων που βρίσκονται ανά πάσα στιγμή σε εμπλοκή.
- 2) Μείωση της ισοδύναμης καμπυλότητας  $A+B$ . Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται μεγαλύτερη επιφάνεια της ζώνης επαφής, οπότε η αναπτυσσόμενη πίεση επιφανείας είναι μικρότερη.
- 3) Διατήρηση σταθερής πίεσης επιφανείας κατά τη διάρκεια εμπλοκής των οδόντων ώστε να περιορίζεται η άνοδος των ρωγμών στην επιφάνεια. Αυτό επιτυγχάνεται όταν το γινόμενο  $P(A+B)$  διατηρείται σταθερό σε όλη την τροχιά επαφών.

Έστω ότι θέλουμε να περιορίσουμε το φαινόμενο του pitting για μια βαθμίδα που μεταφέρει μια συγκεκριμένη ροπή. Οι τρόποι περιορισμού του pitting που καταλήξαμε παραπάνω μας οδηγούν στην αναζήτηση μιας κατάλληλης γεωμετρίας των οδοντωτών τροχών. Αυτό συμβαίνει για τους εξής λόγους :

- 1) Για δεδομένη μεταφερόμενη ροπή, το αναπτυσσόμενο φορτίο  $P$  εξαρτάται από το βαθμό επικάλυψης, μέγεθος που καθορίζεται από τη γεωμετρία των συνεργαζόμενων κατατομών.
- 2) Η ισοδύναμη καμπυλότητα καθαρίζεται βάσει της εξίσωσης (17) από τις καμπυλότητες των συνεργαζόμενων κατατομών. Αυτές καθορίζονται επίσης από τη γεωμετρία των κατατομών.

Όλη η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι το κριτήριο που πρέπει να πληρείται από μια βαθμίδα οδοντωτών τροχών για την ελαχιστοποίηση του φαινομένου του pitting είναι:

**Σταθερό και ελάχιστο γινόμενο  $P(A+B)$  σε όλη την τροχιά επαφών.**



## 6 Θεωρία οδοντωτών τροχών

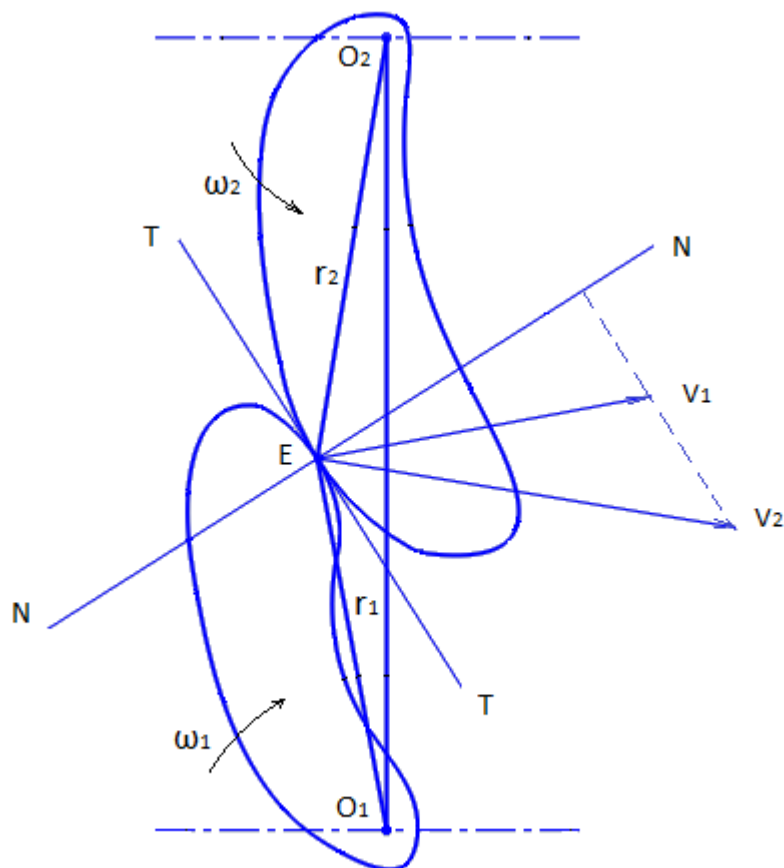
Από τις γνώστες καμπύλες που έχουν χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή οδοντωτών τροχών (εξειλιγμένη, επικυκλοειδής, ορθοκυκλοειδής, άλλες ειδικές καμπύλες που έχουν προταθεί όπως τα S-gears) καμία δεν ικανοποιεί το παραπάνω κριτήριο. Βέβαια, η καμπύλη που αναζητούμε πρέπει εκτός από το να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή οδοντωτών τροχών.

Συνοψίζοντας αναζητούμε ένα ζεύγος συνεργαζόμενων καμπυλών που :

- 1) Ικανοποιούν το βασικό νόμο οδοντώσεως
- 2) Έχουν συμβατότητα βήματος
- 3) Επιτρέπουν τη συνεχή συνεργασία (εξαρτάται από το βαθμό επικάλυψης)
- 4) Ικανοποιούν τη συνθήκη  $P(A+B) = \min, c$  όπου  $c$  σταθερά.

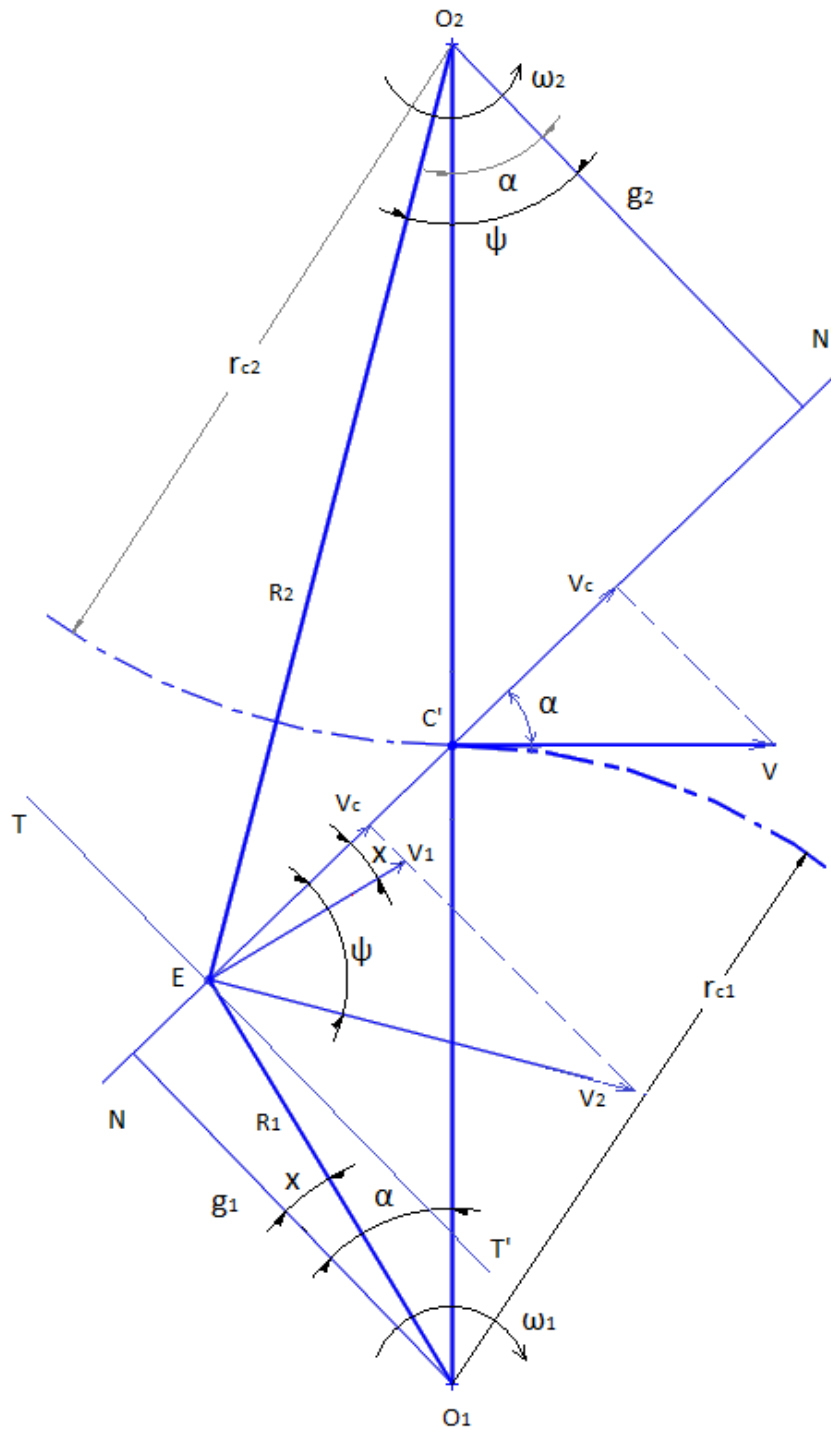
## 6.1 Βασικός νόμος οδοντώσεως

Έστω δύο συνεργαζόμενες κατατομές όπως αυτές στην Εικόνα 4. Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή εφάπτονται στο σημείο E. Οι δύο κατατομές περιστρέφονται ως προς τα σημεία  $O_1$  και  $O_2$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1$  και  $\omega_2$  αντίστοιχα. Οι γραμμικές ταχύτητες στο σημείο E λόγω της περιστροφής των κατατομών 1 και 2 απεικονίζονται ως  $v_1$  και  $v_2$  αντίστοιχα. Ως TT συμβολίζεται η κοινή εφαπτόμενη των κατατομών στο σημείο συνεργασίας E και ως NN η κοινή κάθετος επί της TT.



Εικόνα 4- Κινηματική ανάλυση δυο τυχαίων κατατομών σε συνεργασία.

Αν στη δεδομένη χρονική στιγμή η προβολές των  $v_1$  και  $v_2$  επί της NN δεν είναι ίσες τότε είτε η μια κατατομή θα έτεινε να εισχωρήσει στην άλλη ( $v_1 > v_2$ ) ή οι κατατομές θα έτειναν να απομακρυνθούν μεταξύ τους ( $v_1 < v_2$ ). Και οι δύο αυτές καταστάσεις είναι ανεπιθύμητες καθώς οδηγούν σε μη ομαλή μεταφορά ισχύος και ασυνεχή μετάδοση κίνησης. Άρα πρέπει ανά πάσα στιγμή οι προβολές των ταχυτήτων  $v_1$  και  $v_2$  επί της κοινής καθέτου NN να είναι ίσες. Αυτή η συνθήκη αποτελεί το βασικό νόμο οδοντώσεως.



Εικόνα 5- Λεπτομερής απεικόνιση των ταχυτήτων δύο συνεργαζόμενων κατατομών στο επίπεδο και ανάλυση τους επί της κοινής καθέτου και εφαπτόμενης στο σημείο συνεργασίας.

Με τη χρήση της Εικόνα 5 ο βασικός νόμος οδοντώσεως μπορεί να διατυπωθεί με μια μορφή ιδιαίτερα εύχρηστη κατά το σχεδιασμό κατατομών. Από την προηγούμενη διατύπωση του νόμου οδοντώσεως έχουμε :

$$V_1 \cos x = V_2 \cos \psi = V_c \quad (21)$$

Επιπλέον από τα τρίγωνα  $O_1EN$  και  $O_2EN'$  παίρνουμε τις σχέσεις :

$$\cos x = \frac{g_1}{R_1} \quad (22)$$

$$\cos \psi = \frac{g_2}{R_2} \quad (23)$$

Και από την κινηματική λαμβάνουμε τις εξισώσεις :

$$V_1 = \omega_1 R_1 \quad (24)$$

$$V_2 = \omega_2 R_2 \quad (25)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (21)-(25) προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{g_1}{g_2} \quad (26)$$

Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων  $O_1NC'$  και  $O_2N'C'$  (τρεις γωνίες ίσες) καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2C'}{O_1C'} \quad (27)$$

Αν  $C$  το σημείο κύλισης επί της διακέντρου  $O_1O_2$  των κατατομών του σχήματος 4, τότε λόγω του ορισμού της σχέσης μετάδοσης ισχύει :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2C}{O_1C} \quad (28)$$

Από τις σχέσεις (27) και (28) συμπεραίνουμε ότι αν τα σημεία  $C$  και  $C'$  δεν ταυτίζονται τότε η σχέση μετάδοσης  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της συνεργασίας. Άρα ο βασικός νόμος οδοντώσεως μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

Η ομαλή και συνεχής μεταφορά ισχύος και μετάδοση κίνησης μεταξύ δύο συνεργαζόμενων κατατομών εξασφαλίζεται όταν η κοινή κάθετος των κατατομών σε οποιοδήποτε σημείο επαφής τους διέρχεται δια του σημείου κύλισης. Το σημείο κύλισης ορίζεται ως το σημείο επαφής των κύκλων κύλισης των οδοντωτών τροχών.

## 6.2 Συμβατότητα βήματος

Δύο συνεργαζόμενες κατατομές που ικανοποιούν το βασικό νόμο οδοντώσεως έχουν μια δεδομένη σχέση μετάδοσης που ορίζεται ως:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (29)$$

Για είναι δυνατή η κατασκευή οδοντωτών τροχών από τις συγκεκριμένες κατατομές πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι  $Z_1$  και  $Z_2$  που αντιστοιχούν στον αριθμό των οδόντων των δύο συνεργαζόμενων τροχών τέτοιοι ώστε :

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (30)$$

## 6.3 Εξασφάλιση συνεχούς συνεργασίας

Ο βασικός νόμος οδοντώσεως και η συμβατότητα βήματος είναι αναγκαίες συνθήκες άλλα όχι ικανές για την λειτουργία μιας βαθμίδας συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών. Η τελευταία συνθήκη είναι η συνεχής και ομαλή διαδοχή των συνεργαζόμενων οδόντων. Αυτό εξασφαλίζεται όταν ανά πάσα στιγμή βρίσκεται τουλάχιστον ένα ζεύγος οδόντων σε συνεργασία. Ο μέσος αριθμός οδόντων σε συνεργασία δίνεται από το βαθμό επικάλυψης  $\varepsilon$  της βαθμίδας. Άρα η τελευταία αναγκαία συνθήκη είναι :

$$\varepsilon \geq 1$$



## 7 Σχεδιασμός και παραδοχές-απλοποιήσεις

Το πρόβλημα σχεδιασμού που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε μπορεί να αναχθεί στο εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης :

Εύρεση της γεωμετρίας κατατομής ώστε

Το γινόμενο  $P(A+B)$  να διατηρείται σταθερό και ελάχιστο

Υπό τους περιορισμούς :

- Να ικανοποιείται ο βασικός νόμος οδοντώσεως
- Να υπάρχει συμβατότητα βήματος
- $\varepsilon \geq 1$  (βαθμός επικάλυψης)

Μέχρι τώρα, όποτε γίνεται αναφορά στο βαθμό επικάλυψης  $\varepsilon$  εννοείται, χωρίς να αναφέρεται, ο μετωπικός βαθμός επικάλυψης  $\varepsilon$ . Το φυσικό του νόημα εξηγήθηκε προηγουμένως και υπενθυμίζεται ότι δείχνει το μέσο αριθμό οδόντων που βρίσκονται σε συνεργασία. Στην περίπτωση των ελικοειδών οδοντώσεων, αποδεικνύεται ότι η συνεχής συνεργασία μπορεί να επιτευχθεί και για  $\varepsilon < 1$ . Το μέγεθος που εξασφαλίζει σε αυτή την περίπτωση τη συνεχή συνεργασία είναι ο ολικός βαθμός επικάλυψης  $\varepsilon_h$  που ορίζεται ως:

$$\varepsilon_h = \varepsilon + \varepsilon_{sp} \quad (31)$$

Όπου :

$$\varepsilon_{sp} = \frac{b \sin \beta_0}{\pi m_n} \quad (32)$$

Με  $b$  : το πλάτος του οδοντωτού τροχού

$\beta_0$  : τη γωνία ελίκωσης στον αρχικό κύκλο

$m_n$  : το module της κάθετης τομής

Ο  $\varepsilon_{sp}$ , ή βαθμός επικάλυψης λόγω μετάθεσης, και κατ' επέκταση ο  $\varepsilon_h$  (ολικός βαθμός επικάλυψης) δεν έχουν το φυσικό νόημα του μετωπικού βαθμού επικάλυψης  $\varepsilon$ . Δηλαδή μπορούν να κατασκευαστούν ελικοειδείς τροχοί με  $\varepsilon < 1$  και  $\varepsilon_h < 1$ . Το αποτέλεσμα θα είναι να βρίσκεται ανά πάσα στιγμή ένας οδόντας σε συνεργασία και η συνέχεια της συνεργασίας θα εξασφαλίζεται από την ελίκωση των οδόντων.

Το βασικό σχεδιαστικό πλεονέκτημα που προκύπτει σε αυτές τις περιπτώσεις είναι ότι μπορούμε να έχουμε μια αναλυτική έκφραση για το φορτίο που καταπονεί το κάθε οδόντα κατά τη συνεργασία. Στην περίπτωση που δύο ή περισσότεροι οδόντες βρίσκονται σε συνεργασία το πρόβλημα γίνεται υπερστατικό και για να προσδιοριστεί το φορτίο που παραλαμβάνει ο κάθε οδόντας πρέπει να καταφύγουμε σε κάποια υπολογιστική μέθοδο, όπως η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων ή σε πείραμα.

Εκτός της δυσκολίας στην ανάλυση προκύπτουν και επιπλέον ζητήματα που αφορούν στο μετωπικό βαθμό επικάλυψης. Μεγάλοι μετωπικοί βαθμοί επικάλυψης  $\varepsilon$  επιτυγχάνονται σε οδόντες σημαντικού ύψους, γεγονός που τους καθιστά λιγότερο ανθεκτικούς στην κάμψη ποδός. Επίσης μη ακέραιοι βαθμοί επικάλυψης προκαλούν απότομες μεταβολές του φορτίου που δέχονται οι οδόντες κατά τη συνεργασία, γεγονός που πρέπει να αποφεύγεται λόγω της εμφάνισης ταλαντώσεων.

Από την παραπάνω ανάλυση, προκύπτει ότι για μετωπικό βαθμό επικάλυψης  $\varepsilon = 1$  επιτυγχάνεται η ομαλότητα του φορτίου συνεργασίας μεταξύ των οδόντων, υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής τροχών ιδιαίτερα ανθεκτικών στην κάμψη ποδός και ταυτόχρονα η ανάλυση απλοποιείται σημαντικά. Μια γνωστή κατηγορία κατατομών οδοντωτών τροχών με μετωπικό βαθμό επικάλυψης  $\varepsilon = 1$  είναι οι κατατομές κλειστής τροχιάς επαφών.

Στην περίπτωση σχεδιασμού κατατομής κλειστής τροχιάς επαφών το φορτίο  $P$  διατηρείται σταθερό κατά τη διάρκεια της εμπλοκής ενός ζεύγους οδοντωτών τροχών καθώς ανά πάσα στιγμή μόνο ένα ζεύγος βρίσκεται σε συνεργασία (βαθμός επικάλυψης  $\varepsilon = 1$ ). Άρα με την υπόθεση κλειστής τροχιάς επαφών το κριτήριο αναζητούμε γεωμετρία κατατομής ώστε :

Η ισοδύναμη καμπυλότητα της  $A+B$  να παραμένει σταθερή και ελάχιστη.



## 7.1 Σχεδιασμός κατατομών

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή του τρόπου επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης αναφέρουμε τον τρόπο εύρεσης της κατατομής οδόντος αν γνωρίζουμε τη γεωμετρία του αντίστοιχου κανόνα και τον τρόπο εύρεσης της τροχιάς επαφών και της συνεργαζόμενης κατατομής, δεδομένης της κατατομής του πινιόν. Στον κύκλο βελτιστοποίησης θα χρησιμοποιηθούν και οι δύο αυτές διαδικασίες.

### 7.1.1 Εύρεση κατατομής οδόντος τροχού δεδομένης της γεωμετρίας του κανόνα

Έστω  $y = F(x)$  η συνάρτηση που δίνει τη γεωμετρία του κανόνα και  $(x_1, y_1)$  τα σημεία της κατατομής του οδόντος του τροχού. Επίσης έστω  $r_0$  η ακτίνα κύλισης του τροχού.

Κατά τη συνεργασία τροχού – κανόνα, ο τροχός περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του κύκλου κύλισης ενώ ο κανόνας μεταφέρεται επί ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο κύλισης του τροχού. Αν  $\theta$  η γωνία περιστροφής του τροχού και  $K$  η αντίστοιχη μετακίνηση του κανόνα, τα δύο μεγέθη συνδέονται μέσω της κινηματικής με τη σχέση:

$$K = \theta r_0 \quad (33)$$

Από το βασικό νόμο οδοντώσεως προκύπτει ότι ένα σημείο του κανόνα  $(x, y)$  μπαίνει σε συνεργασία όταν ο κανόνας μετακινηθεί κατά :

$$K = - \left( y \frac{dy}{dx} + x \right) \quad (34)$$

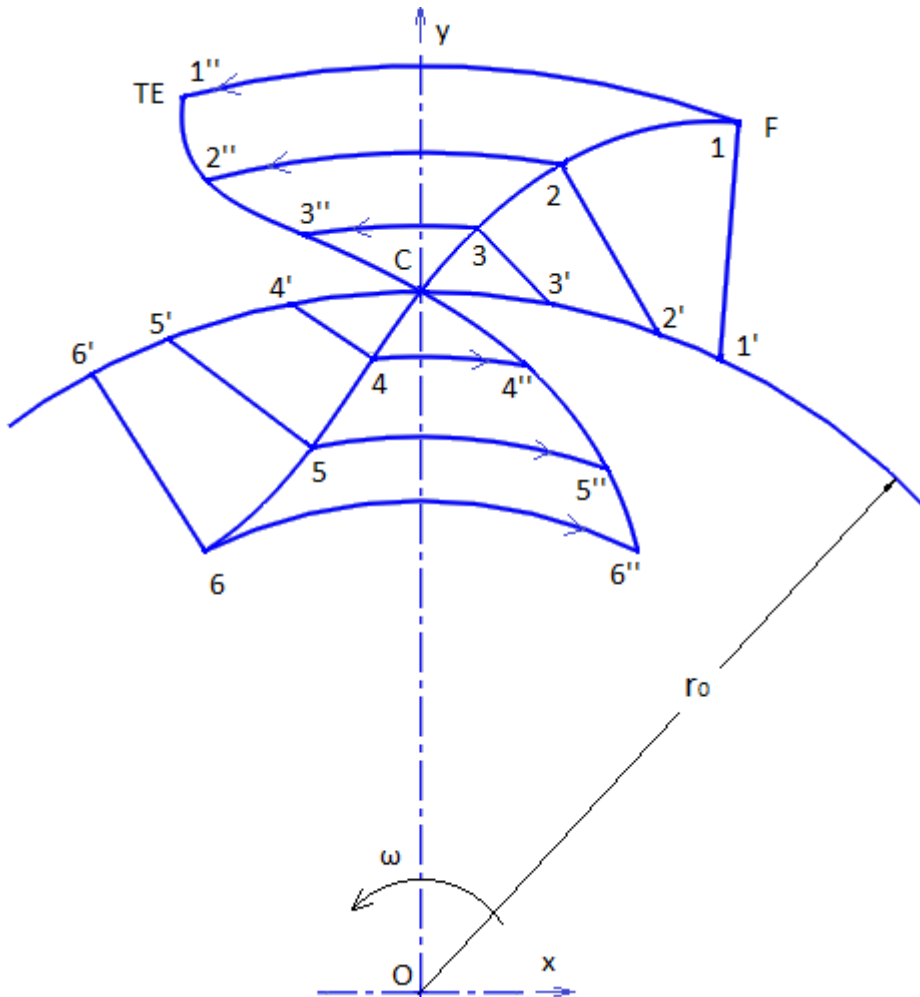
Τα σημεία  $(x_1, y_1)$  της κατατομής του τροχού δίνονται από τους τύπους :

$$x_1 = (x + K) \cos \theta - (y + r_0) \sin \theta \quad (35)$$

$$y_1 = (x + K) \sin \theta + (y + r_0) \cos \theta - r_0 \quad (36)$$

Από τις εξισώσεις (33) - (36) προκύπτει η γεωμετρία της κατατομής του οδοντωτού τροχού.

7.1.2 Εύρεση τροχιάς επαφών και συνεργαζόμενης κατατομής δεδομένης της αρχικής κατατομής



Εικόνα 6- Γεωμετρική κατασκευή της τροχιάς επαφών δεδομένης της γεωμετρίας της κατατομής του τροχού και της φοράς περιστροφής.

Έστω ότι δίνεται η κατατομή  $F(x,y)$  ενός οδοντωτού τροχού με κέντρο περιστροφής  $O$  και έστω  $r_0$  η ακτίνα του κύκλου κύλισης. Θέλουμε σε πρώτη φάση να βρούμε τα σημεία  $(x_\tau, y_\tau)$  της τροχιάς επαφών. Για να ικανοποιείται ο βασικός νόμος οδοντώσεως πρέπει η κάθετος στην κατατομή από το εκάστοτε σημείο συνεργασίας  $(x, y)$  να διέρχεται από το σημείο κύλισης  $C$ . Άρα η τροχιά επαφών μπορεί να βρεθεί ως εξής :

Για κάθε σημείο  $(x, y)$  της κατατομής  $F$  βρίσκουμε την εξίσωση της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το  $(x, y)$ . Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία τομής της συγκεκριμένης ευθείας με τον κύκλο κύλισης. Στη γενική περίπτωση αυτά τα σημεία

είναι δύο και βάσει γεωμετρικών και κινηματικών κριτηρίων το ένα από τα δύο απορρίπτεται (περισσότερα στη συνέχεια). Αν η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο τότε δεν είναι δυνατή η κατασκευή οδοντωτού τροχού που να ικανοποιεί το νόμο οδοντώσεως με τη συγκεκριμένη κατατομή.

Στην Εικόνα 6 φαίνονται βήματα της διαδικασίας εύρεσης της τροχιάς επαφών. Για τα σημεία 1-6 της κατατομής F έχουν κατασκευαστεί οι κάθετοι στην κατατομή και τα σημεία 1'-6' αντιστοιχούν στα «κατάλληλα» σημεία τομής με τον κύκλο κύλισης. Τα σημεία 1-6 θα βρεθούν σε συνεργασία όταν τα αντίστοιχα σημεία 1'-6' ταυτιστούν με το σημείο κύλισης C. Άρα υπολογίζουμε τις γωνίες στροφής  $\theta_1 - \theta_6$  που αντιστοιχούν στα τόξα C1' – C6' .

Τα σημεία 1'' - 6'' που προκύπτουν από περιστροφή των σημείων 1-6 γύρω από το O κατά γωνίες  $\theta_1 - \theta_6$  αποτελούν σημεία της τροχιάς επαφών. Αυτό εξηγείται από το ότι , όταν ο τροχός περιστραφεί ώστε το σημείο j (ένα από τα σημεία 1-6) να συμπέσει με το j'' τότε η κάθετος της κατατομής στο σημείο αυτό θα διέρχεται από το σημείο κύλισης C. Άρα το σημείο j'' αποτελεί τη μοναδική θέση στην οποία το σημείο j της κατατομής F μπορεί να βρεθεί σε συνεργασία ικανοποιώντας το βασικό νόμο οδοντώσεως.

Αν διαθέτουμε ,λοιπόν, N σημεία (x , y) της κατατομής F, ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε σε N σημεία (x<sub>τ</sub> , y<sub>τ</sub>) της τροχιάς επαφών. Η συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα σε Η/Υ. Στη συνέχεια περιγράφεται πλήρως ο αλγόριθμος για την εύρεση της τροχιάς επαφών.

Έστω (x<sub>j</sub> , y<sub>j</sub>) οι συντεταγμένες του σημείου j της κατατομής F (συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της κατατομής).

- Η εξίσωση της καθέτου στο σημείο j είναι :

$$y = a_j x + b_j \quad (37)$$

Όπου

$$a_j = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_j} \quad (38)$$

$$b_j = y_j - a_j x_j \quad (39)$$

- Τα σημεία τομής της καθέτου στο σημείο  $j$  με τον κύκλο κύλισης δίνονται από τις εξισώσεις :

$$x_{1,j} = \frac{\sqrt{(a_j^2 + 1) r_0^2 - b_j^2} - a_j b_j}{a_j^2 + 1}, \quad y_{1,j} = \frac{a_j \sqrt{(a_j^2 + 1) r_0^2 - b_j^2} + b_j}{a_j^2 + 1} \quad (40)$$

$$x_{2,j} = \frac{-\sqrt{(a_j^2 + 1) r_0^2 - b_j^2} - a_j b_j}{a_j^2 + 1}, \quad y_{2,j} = \frac{-a_j \sqrt{(a_j^2 + 1) r_0^2 - b_j^2} + b_j}{a_j^2 + 1} \quad (41)$$

- Από τα σημεία αυτά ορίζονται δύο τόξα γωνίας  $\theta_{1,j}$ ,  $\theta_{2,j}$  που αντιστοιχούν στη γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο τροχός ώστε το σημείο  $j$  να μπει σε συνεργασία. Από τις δύο γωνίες η μια είναι αποδεκτή. Οι γωνίες υπολογίζονται από τις εξισώσεις :

$$\theta_{1,j} = \tan^{-1} \left( \frac{x_{1,j}}{y_{1,j}} \right) \quad (42)$$

$$\theta_{2,j} = \tan^{-1} \left( \frac{x_{2,j}}{y_{2,j}} \right) \quad (43)$$

- Έστω  $\theta_j$  η τιμή της αποδεκτής γωνιάς εκ των  $\theta_{1,j}$ ,  $\theta_{2,j}$ . Το σημείο  $j$  ( $x_{\tau,j}$ ,  $y_{\tau,j}$ ) της τροχιάς επαφών προκύπτει από περιστροφή του αντίστοιχου σημείου  $j$  ( $x_j$ ,  $y_j$ ) της κατατομής κατά γωνία  $\theta$  γύρω από το σημείο  $O$  (0,0). Ισχύει :

$$\begin{bmatrix} x_{\tau,j} \\ y_{\tau,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \quad (44)$$

### 7.1.3 Εύρεση συνεργαζόμενης κατατομής

Έστω  $r_{0,2}$  η ακτίνα του κύκλου κύλισης της συνεργαζόμενης κατατομής και  $r_{0,1}$  η αντίστοιχη ακτίνα της αρχικής κατατομής. Η σχέση μετάδοσης δίνεται από την εξίσωση :

$$i_{12} = \frac{r_{0,2}}{r_{0,1}} \quad (45)$$

Όταν το πινιόν (άρα και η κατατομή του εργαζόμενου οδόντα του) περιστρέφεται κατά γωνία  $\theta_1$  τότε ο συνεργαζόμενος τροχός περιστρέφεται κατά γωνία  $\theta_2$  :

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{i_{12}} \quad (46)$$

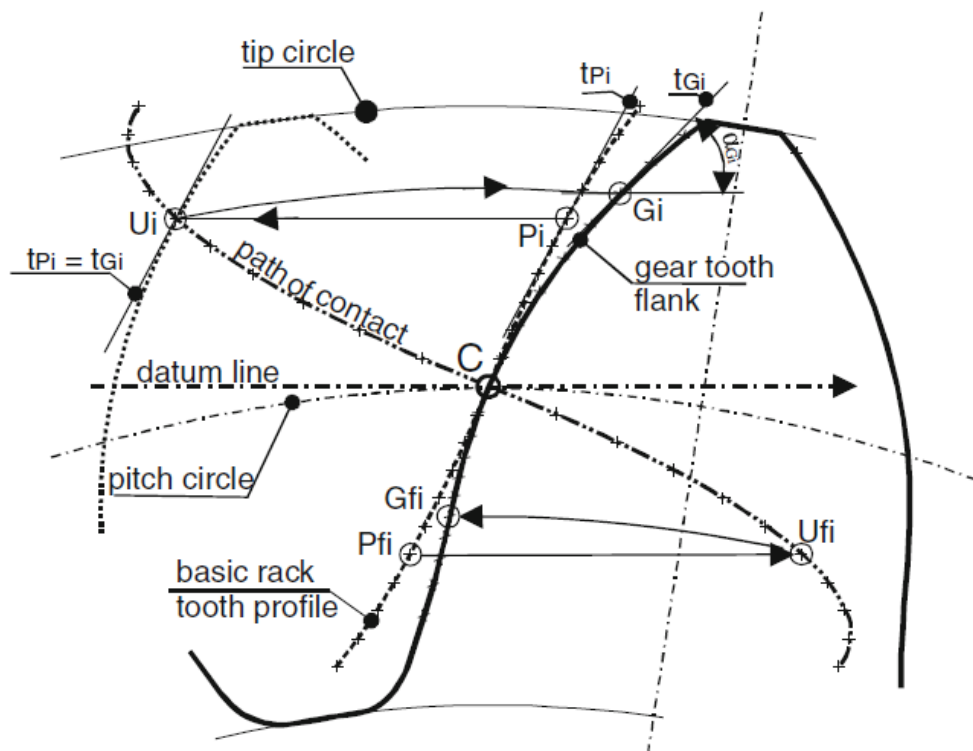
Έστω  $j (x_{\tau,j}, y_{\tau,j})$  τυχαίο σημείο της τροχιάς επαφών και  $\theta_{1,j}$  η γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το πινιόν ώστε το σημείο  $j (x_{1j}, y_{1j})$  επί της κατατομής του εργαζόμενου οδόντα του να βρεθεί σε συνεργασία. Όταν το πινιόν στρέφεται κατά γωνία  $\theta_{1,j}$ , ο συνεργαζόμενος στρέφεται κατά γωνία  $\frac{\theta_{1,j}}{i_{12}}$ . Άρα το αντίστοιχο σημείο  $j (x_{2j}, y_{2j})$  της εργαζόμενης κατατομής του συνεργαζόμενου τροχού προκύπτει από περιστροφή του σημείου  $j (x_{\tau,j}, y_{\tau,j})$  της τροχιάς επαφών κατά γωνία  $\frac{\theta_{1,j}}{i_{12}}$  γύρω από το κέντρο περιστροφής του συνεργαζόμενου τροχού.



## 8 S-gears

Τα S-gears αποτελούν ένα ειδικό τύπο οδοντώσεων που αναπτύχθηκαν από τους Gorazd Hlebanja και Joze Hlebanja. Προτάθηκαν ως μια βελτίωση των κλασικών οδοντώσεων εξειλιγμένης ώστε να αναπτύσσεται μειωμένη πίεση επιφανείας, άρα να αποφεύγεται το pitting. Ως εκ τούτου κρίθηκε αναγκαία η σύγκριση των βέλτιστων οδοντώσεων που σχεδιάστηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία με τα S-gears. Στη συνέχεια, λοιπόν, παρατίθενται εν συντομία ο τρόπος γέννησης των κατατομών των S-gears καθώς και τα βασικά πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν.

Τα S-gears έχουν μετωπική κατατομή ανοιχτής τροχιάς επαφών, η οποία δεν είναι ευθύγραμμο τμήμα όπως στην περίπτωση της εξειλιγμένης αλλά έχει το σχήμα S όπως φαίνεται στην Εικόνα 7. (έτσι προέκυψε και το όνομα των συγκεκριμένων οδοντώσεων). Βασικό πλεονέκτημα των συγκεκριμένων οδοντώσεων είναι ότι η περιοχή κεφαλής έχει κυρτή γεωμετρία ενώ η περιοχή ποδός κοίλη με αποτέλεσμα η ισοδύναμη καμπυλότητα στο εκάστοτε σημείο συνεργασίας να είναι μικρή. Όπως αναπτύχθηκε παραπάνω, μικρή ισοδύναμη καμπυλότητα των συνεργαζόμενων κατατομών οδηγεί σε μειωμένη πίεση επιφανείας.



Εικόνα 7 – Κατατομή τυπικού κανόνα ( $t_P$ ) και τροχού ( $t_G$ ) S-gear και η τροχιά επαφών U. Ανατύπωση από [7]

## 8.1 Γένεση γεωμετρίας κατατομών S-gears [7]

Η γένεση της γεωμετρίας στα S-gears γίνεται βάσει μιας αναλυτικής έκφρασης της κατατομής του κανόνα. Η εξίσωση  $y(x)$  του κανόνα στην περιοχή κεφαλής είναι:

$$y_{r,j} = a_p m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x_{r,j}}{m} \right)^n \right] \quad (47)$$

Η οποία ορίζεται στο διάστημα :

$$0 < y_{r,j} < m$$

ή αλλιώς

$$0 < x_{r,j} < m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{a_p} \right)^{1/n} \right]$$

Όπου  $(x_{r,j}, y_{r,j})$  : οι συντεταγμένες των σημείων του κανόνα

$m$  : το module της κατατομής του οδοντωτού τροχού

$a_p$  : συντελεστής βάσει του οποίου καθορίζεται η γωνία πίεσης

Τα σημεία του κανόνα στην περιοχή ποδός ή  $-m < y_{r,j} < 0$  είναι συμμετρικά των αντίστοιχων της περιοχής κεφαλής ως προς την ευθεία  $y=0$  (αναφερόμενοι πάντα στο σύστημα συντεταγμένων του ευθύγραμμου κανόνα)



## 9 Διαδικασία βελτιστοποίησης

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το πρόβλημα βελτιστοποίησης που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι το εξής :

Αναζητούμε τη γεωμετρία ζεύγους συνεργαζόμενων κατατομών ώστε η ισοδύναμη καμπυλότητα  $A+B = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  να παραμένει σταθερή και ελάχιστη.

Υπό τους περιορισμούς :

- Να ικανοποιείται ο βασικός νόμος οδοντώσεως
- Να υπάρχει συμβατότητα βήματος
- $\varepsilon = 1$  (κλειστή τροχιά επαφών)

### 9.1 Περιγραφή γεωμετρίας κατατομής

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης πρέπει να καθοριστεί ο τρόπος που θα περιγράφονται οι κατατομές. Ένας συνήθης τρόπος περιγραφής γεωμετρίας είναι οι Splines. Έχουν το πλεονέκτημα ότι λείες καμπύλες περιγράφονται ή δημιουργούνται από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ελέγχου.

Για καμπύλες που περιγράφονται με λίγα σημεία έλεγχου χρησιμοποιούνται μονοτμηματικές spline (single-segment). Για περιγραφή ιδιαίτερα σύνθετων γεωμετριών , η αύξηση των σημείων ελέγχου προκαλεί αστάθεια, οπότε σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται πολύ-τμηματικές spline.

Στην περίπτωση των οδοντωτών τροχών οι γεωμετρίες κατατομών είναι απλές (δε γίνεται να αλλάζουν μονοτονία ) οπότε χρησιμοποιούνται μονοτμηματικές spline. Με χρήση συναρτήσεων βάσης Bernstein προκύπτει μια ειδική κατηγορία μονοτμηματικών spline, οι καμπύλες Bezier. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε καμπύλες Bezier λόγω της απλότητας του αλγορίθμου που τις δημιουργεί και της ευκολίας υλοποίησης του προγραμματιστικά.

### 9.1.1 Καμπύλες Bezier

Έστω  $N+1$  σημεία ελέγχου και έστω  $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$  τυχαίο σημείο ελέγχου (πρόβλημα δύο διαστάσεων). Η καμπύλη Bezier δημιουργείται από τα σημεία ελέγχου βάσει των εξισώσεων :

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \quad (48)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \quad (49)$$

Όπου :

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,N} \\ 0 & m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i} \quad (51)$$

$t$  : παράμετρος που λαμβάνει τιμές από το διάστημα  $[0,1]$ . Για  $t=0$  η καμπύλη Bezier ξεκινά από το πρώτο σημείο ελέγχου  $(x_0, y_0)$  και για  $t=1$  καταλήγει στο τελευταίο σημείο ελέγχου  $(x_N, y_N)$ .

Μια σημαντική ιδιότητα των καμπυλών Bezier είναι ότι τα δύο πρώτα και τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου καθορίζουν την κλίση (άρα και την παράγωγο) της καμπύλης στην αρχή ( $t=0$ ) και στο τέλος της ( $t=1$ ) αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου εφάπτεται στην καμπύλη Bezier στην αρχή της ( $t=0$ ) και η ευθεία διέρχεται από τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου εφάπτεται στην καμπύλη Bezier στο πέρας της ( $t=1$ ). Άρα ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\left( \frac{dy(t)}{dx(t)} \right)_{t=0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (52)$$

$$\left( \frac{dy(t)}{dx(t)} \right)_{t=1} = \frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} \quad (53)$$

## 9.2 Μαθηματική διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης και χειρισμός περιορισμών

Έστω  $F$  (γεωμετρία κατατομής πινιόν, γεωμετρία κατατομής συνεργαζόμενου) μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα ως προς την ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  και τη διακύμανση της (όσο μεγαλύτερη είναι η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας και όσο μεγαλύτερη η διακύμανσή της τόσο μεγαλύτερες τιμές λαμβάνει η  $F$ ). Η γεωμετρία των κατατομών καθορίζεται από τα σημεία ελέγχου των καμπύλων Bezier.

Αν  $j$  ( $x_{1j}$ ,  $y_{1j}$ ) σημείο της κατά τομή του πινιόν, η καμπυλότητα  $1/R_{1,j}$  στο σημείο αυτό υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\frac{1}{R_{1,j}} = \frac{\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_j}{\left(1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_j^2\right)^{3/2}} \quad (54)$$

Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα  $1/R_{2,j}$  στο αντίστοιχο σημείο  $j$  ( $x_{2j}$ ,  $y_{2j}$ ) της συνεργαζόμενης κατατομής.

Η ισοδύναμη καμπυλότητα  $\frac{1}{R_{1,j}} + \frac{1}{R_{2,j}}$  του ζεύγους συνεργαζόμενων κατατομών γενικά μεταβάλλεται από θέση σε θέση. Άρα μια κατάλληλη έκφραση για τη συνάρτηση  $F$  που αναζητούμε είναι η :

$$F = W_1 \text{mean}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + W_2 \text{std}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (55)$$

Όπου  $W_1$  και  $W_2$  κατάλληλοι συντελεστές βαρύτητας και  $\text{mean}()$ ,  $\text{std}()$  οι συναρτήσεις μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης για τα  $N$  σημεία συνεργασίας των κατατομών ( $N$  σημεία λόγω διακριτοποίησης). Η βέλτιστη γεωμετρία αντιστοιχεί προφανώς στο  $\min(F)$ .

Αφού ο στόχος έχει διατυπωθεί πλέον διατυπωθεί μαθηματικά το επόμενο ζήτημα είναι το πώς θα χειριστούμε τους περιορισμούς. Συνήθως οι περιορισμοί εντάσσονται στην αντικειμενική συνάρτηση ως συναρτήσεις ποινής (penalty functions). Στη συγκεκριμένη περίπτωση για παράδειγμα θα σχηματίζαμε μια αντικειμενική συνάρτηση O.F. (objective function) ως εξής :

$$O.F. = F + PF_{L.o.G.} + PF_{P.C.} + PF_{O.R.} \quad (56)$$

Όπου :

- $PF_{L.o.G.}$  : όρος ποινής που λαμβάνει μεγάλες τιμές όταν δεν ικανοποιείται ο βασικός νόμος οδοντώσεως
- $PF_{P.C.}$  : όρος ποινής που λαμβάνει μεγάλες τιμές όταν δεν υπάρχει συμβατότητα βήματος
- $PF_{O.R.}$  : όρος ποινής που αυξάνει όσο ο βαθμός επικάλυψης διαφέρει από τη μονάδα.

Αν και αυτή είναι η συνήθης διαδικασία, στη συγκεκριμένη περίπτωση παρουσιάζονται προβλήματα επειδή οι περιορισμοί είναι πολύ ισχυροί. Ιδιαίτερα ο βασικός νόμος οδοντώσεως και η συμβατότητα βήματος πρέπει να ικανοποιούνται οπωσδήποτε.

Αντί να δημιουργούμε πρώτα τη γεωμετρία μέσω των μεταβλητών σχεδιασμού και στη συνέχεια να ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι περιορισμοί επιδιώκουμε να δημιουργούμε εξ αρχής γεωμετρίες που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Αυτό μπορεί να γίνει εκφράσουμε τους περιορισμούς στο χώρο των μεταβλητών κατάστασης. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας υπόχωρος μεταβλητών κατάστασης που δημιουργούν καμπύλες που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Οι κατατομές κλειστής τροχιάς επαφών εφάπτονται στα δύο άκρα τους στους κύκλους κεφαλής (ακτίνα  $r_k$ ) και ποδός (ακτίνα  $r_f$ ) (αφού δεν έχουν ακτινική χάρη). Ορίζουμε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων με αρχή το κέντρο περιστροφής του τροχού. Οι συντεταγμένες του ανώτερου σημείου της εργαζόμενης κατατομής είναι  $(r_k, \theta_0)$  και του κατώτερου σημείου  $(r_f, \theta_0 + \delta\theta)$  όπου  $\delta\theta$  γωνία που κυμαίνεται μεταξύ :

$$0 \leq \delta\theta \leq \frac{2\pi}{Z} \quad (57)$$

Όπου  $Z$  ο αριθμός οδόντων του τροχού.

Για συμμετρικούς οδόντες ισχύει:

$$\delta\theta = \frac{\pi}{Z} \quad (58)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για συμμετρικούς οδόντες κλειστής τροχιάς επαφών, για δεδομένους κύκλους κεφαλής και ποδός, το ανώτερο και το κατώτερο σημείο της κατατομής είναι καθορισμένα, όπως η και η κλίση των οδόντων σε αυτά τα σημεία, αφού εφάπτονται στους κύκλους κεφαλής και ποδός. Για την κλίση ισχύει :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{r=r_k} = 0 \quad (59)$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{r=r_f} = 0 \quad (60)$$

Άρα για δεδομένη ακτίνα κεφαλής και ύψος οδόντος το πρώτο και το τελευταίο σημείο έλεγχου της καμπύλης Bezier οποιασδήποτε κατατομής κλειστής τροχιάς επαφών είναι δεδομένα. Επιπλέον, το δεύτερο και το προτελευταίο σημείο ελέγχου βρίσκονται πάνω σε ευθείες που εφάπτονται στους κύκλους κεφαλής και ποδός. Με κατάλληλη λοιπόν τοποθέτηση των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων σημείων έλεγχου μπορούμε να εξασφαλίσουμε τη συμβατότητα βήματος και ότι ο βαθμός επικάλυψης ισούται με τη μονάδα (κλειστή τροχιά επαφών,  $\varepsilon=1$ ).

Ο τελευταίος περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται είναι ο βασικός νόμος οδοντώσεως. Δεδομένης μιας αρχικής κατατομής, όπως δείχθηκε παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνεργαζόμενη κατατομή ώστε να ικανοποιείται ο νόμος οδοντώσεως. Βέβαια μπορεί η αρχική κατατομή να είναι αδύνατο να ικανοποιήσει το νόμο οδοντώσεως και αυτό συμβαίνει όταν η κάθετος σε οποιοδήποτε σημείο της κατατομής δεν τέμνει τον κύκλο κύλισης. Αν και δεν υπάρχει κάποιος προφανής γεωμετρικός τύπος για τα ενδιάμεσα σημεία ελέγχου (εκτός των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων) ώστε να ικανοποιείται ο νόμος οδοντώσεως (πιθανόν να μην υπάρχει καν), με έναν απλό έλεγχο κατά τη γένεση της γεωμετρίας του πινιόν (έλεγχος αν η κάθετος τέμνει τον κύκλο κύλισης σε όλα τα σημεία) μπορούμε να διαπιστώσουμε αν η γεωμετρία είναι αποδεκτή.

Άρα ,γενικά , υπάρχει η δυνατότητα να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί ήδη από την κατασκευή των συνεργαζόμενων κατατομών και απλώς να αναζητείται η βέλτιστη γεωμετρία βάσει της ποσότητας  $F$ , της εξίσωσης (55) και μόνο.

### 9.3 Αλγόριθμος και κύκλος βελτιστοποίησης

Το πρώτο βήμα σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η επιλογή του κατάλληλου αλγορίθμου. Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης διακρίνονται σε αιτιοκρατικούς (deterministic) και στοχαστικούς (stochastic). Οι αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι βασίζονται στη βελτίωση της αρχικής λύσης μέσω διαδοχικών διορθώσεων. Συγκλίνουν γρήγορα αλλά πιθανόν να μη συγκλίνουν στη βέλτιστη λύση, καθώς μπορεί να παγιδευτούν σε τοπικά ακρότατα (local optimum). ΟΙ στοχαστικοί αλγόριθμοι αναζητούν τη βέλτιστη λύση με οργανωμένα τυχαίο τρόπο και σε θεωρητικά άπειρο χρόνο θα συγκλίνουν σε αυτή (global optimum). Το μειονέκτημα των στοχαστικών αλγορίθμων είναι η αργή σύγκλιση.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η δημιουργία της γεωμετρίας ενός ζεύγους κατατομών και η αξιολόγησή του βάσει της εξίσωσης (55) απαιτεί πολύ λίγους υπολογιστικούς πόρους ακόμα και για πολύ λεπτή διακριτοποίηση των κατατομών (10000 σημεία σε μια κατατομή των λίγων χιλιοστών). Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να επιλέξουμε αλγόριθμο βελτιστοποίησης χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ταχύτητα σύγκλισης.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε τελικά είναι ένας υβριδικός genetic algorithm – fmincon από το optimization toolbox της matlab. Ο γενετικός αλγόριθμος (genetic algorithm) είναι στοχαστικός ενώ ο fmincon αιτιοκρατικός. Ο γενετικός αλγόριθμος «εξερευνεί» (exploration) το χώρο των αποδεκτών λύσεων, ενώ ο αιτιοκρατικός fmincon εντοπίζει γρήγορα τα τοπικά βέλτιστα των περιοχών που βάσει του γενετικού αλγορίθμου ενδέχεται να περιέχουν το ολικό βέλτιστο (exploitation). Με αυτό τον τρόπο ο αλγόριθμος δε φυλακίζεται σε τοπικά ακρότατα (λόγω του γενετικού αλγορίθμου) και η σύγκλιση επιταχύνεται (λόγω του fmincon).

### 9.3.1 Εκκίνηση αλγορίθμου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η αρχική γεωμετρία από την οποία θα προκύψει ο συνεργαζόμενος τροχός πιθανόν εξ αρχής να μη μπορεί να ικανοποιήσει το νόμο οδοντώσεως, οπότε ελέγχουμε την αρχική και αν είναι ακατάλληλη της απορρίπτουμε. Αν η αρχική γεωμετρία είναι παντελώς τυχαία, δηλαδή αν επιλεγούν εντελώς τυχαία όλα τα ενδιάμεσα σημεία ελέγχου της (εκτός των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων) το αποτέλεσμα κατά πάσα πιθανότητα δεν θα είναι αποδεκτό. Όχι μόνο δε θα ικανοποιείται ο νόμος οδοντώσεως αλλά μπορεί να προκύψουν καμπύλες που θα αλλάζουν μονοτονία, μη κυρτές, αυτοτεμνόμενες.

Το συμπέρασμα, λοιπόν, είναι ότι αν οριστούν ως μεταβλητές σχεδιασμού οι συντεταγμένες των ενδιάμεσων σημείων ελέγχου της κατατομής του πινιόν και αυτές επιλέγονται παντελώς τυχαία, οι περισσότερες γεωμετρίες που θα δημιουργούνται θα απορρίπτονται κατά τον έλεγχο. Το χειρότερο ενδεχόμενο όμως είναι να περνούν από τον έλεγχο και οι προκύπτουσες γεωμετρίες να μη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή οδοντωτών τροχών (επιπλέον κατασκευαστικοί περιορισμοί).

Όλα αυτά αποφεύγονται με κατάλληλη επιλογή των ορίων μέσα από τα οποία επιλέγονται οι μεταβλητές σχεδιασμού. Όπως αναφέρθηκε όμως και προηγουμένως δεν υπάρχει προφανής γεωμετρικός τόπος για τα ενδιάμεσα σημεία ελέγχου. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να εξετάσουμε μια υπάρχουσα γεωμετρία που ικανοποιεί τους περιορισμούς, να προσδιορίσουμε τα σημεία ελέγχου που τη δημιουργούν και να αναζητήσουμε τη βέλτιστη λύση στην περιοχή που ορίζεται από αυτά.

Οδοντώσεις με κατατομές κλειστής τροχιάς επαφών μπορούν να κατασκευαστούν με τη χρήση ημιτονοειδούς κανόνα. Η εξίσωση του κανόνα είναι :

$$y_r = \frac{h}{2} \cos\left(\frac{Z}{r_c} x_r\right) \quad (61)$$

Όπου :

$(y_r, x_r)$  : σημεία του κανόνα

$h$  : το ύψος οδόντος

$Z$  : το πλήθος οδόντων του τροχού που θα προκύψει

$r_c$  : η ακτίνα κύλισης του τροχού που θα προκύψει

Για δεδομένο λοιπόν αριθμό οδόντων πινιόν και ύψος οδόντων κατασκευάζουμε την κατατομή ημιτονοειδούς κανόνα και βρίσκουμε τα σημεία ελέγχου που τη δημιουργούν. Αυτό γίνεται και με ένα αλγόριθμο βελτιστοποίησης ως εξής :

Αναζητούμε τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου ώστε να ελαχιστοποιηθεί το εμβαδό μεταξύ της προκύπτουσας καμπύλης από τα σημεία ελέγχου και της κατατομής που προέκυψε από τον ημιτονοειδή κανόνα. Το πλήθος των απαιτούμενων σημείων ελέγχου δεν είναι γνωστό οπότε το αυξάνουμε μέχρι να είμαστε ικανοποιημένοι από την ποιότητα της προσαρμογής. Καθώς το εμβαδό μεταξύ των καμπυλών τείνει να μηδενιστεί οι δύο καμπύλες τείνουν να ταυτιστούν οπότε προσδιορίζουμε τα ζητούμενα σημεία ελέγχου (εμβαδό της τάξης  $10^{-6} \text{ mm}^2$ ).

Το πρώτο  $(x_0, y_0)$  και το τελευταίο  $(x_N, y_N)$  σημείο ελέγχου είναι σταθερά στο χώρο και ορίζουν το πρώτο και το τελευταίο σημείο της κατατομής, εξασφαλίζοντας τη συμβατότητα βήματος. Το δεύτερο και το προτελευταίο σημείο ελέγχου επιτρέπεται να κινηθούν πάνω στην ευθεία που ορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις αντίστοιχα :

$$y = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad (62)$$

$$y = y_N - \frac{x_N}{y_N}(x - x_N) \quad (63)$$

Έστω  $(x_i, y_i)$  τυχαίο σημείο ελέγχου (εκτός από τα δύο πρώτα και τα δύο τελευταία) της κατατομής που προέκυψε από τον ημιτονοειδή κανόνα. Υποθέτουμε ότι το αντίστοιχο σημείο ελέγχου της βέλτιστης γεωμετρίας  $(x_{\text{opt},i}, y_{\text{opt},i})$  βρίσκεται εντός κύκλου ακτίνας  $r_{b,i}$  με κέντρο το  $(x_i, y_i)$ . Αυτό είναι προφανώς αληθές όταν η ακτίνα  $r_i$  τείνει στο άπειρο. Στην πράξη επιτρέπουμε στο σημείο ελέγχου να κινείται εντός κύκλου πεπερασμένης ακτίνας την οποία αυξάνουμε διαδοχικά, ανάλογα με το σημείο ελέγχου τείνει να κινηθεί προς το όριο που ορίζει η παρούσα ακτίνα. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι ο αλγόριθμος θα κινηθεί σε περιοχές που υπάρχουν αποδεκτές λύσεις.



Συνοψίζοντας, ο κύκλος βελτιστοποίησης έχει ως εξής :

1. Επιλογή του αριθμού οδόντων του πινιόν και του συνεργαζόμενου τροχού καθώς και το ύψος οδόντων. Επιλογή ακτίνας κύλισης του πινιόν.
2. Κατασκευή της αντίστοιχης κατατομής με χρήση ημιτονοειδούς κανόνα.
3. Εύρεση των σημείων ελέγχου της κατατομής που προκύπτει από ημιτονοειδή κανόνα.
4. Εκτέλεση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης με μεταβλητές σχεδιασμού τις τετμημένες  $x_1, x_{N-1}$  του δεύτερου και του προτελευταίου σημείο ελέγχου και τις  $N-4$  (έστω  $N$  το πλήθος των σημείων ελέγχου) συντεταγμένες  $(r_i, \theta_i)$  που ορίζονται σε τοπικά συστήματα πολικών συντεταγμένων με αρχή τα σημεία ελέγχου της κατατομής που δημιουργήθηκε από τον ημιτονοειδή κανόνα.



## 10 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης και σύγκριση με εξειλιγμένη και S-Gears

Ο κώδικας βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε εκτελέστηκε για την γένεση της γεωμετρίας κατατομών με τα χαρακτηριστικά μιας τυπικής πρώτης σχέσης επιβατικού αυτοκινήτου. Μια βαθμίδα πρώτης έχει :

- σχέση μετάδοσης  $i_{12} = 2.6-2.9$
- module  $m = 2.25-3$
- αριθμό οδόντων πινιόν  $Z_1 = 18-21$  .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε :

- $m = 2.5$
- $Z_1 = 19$
- $i_{12} = \frac{55}{19} \cong 2.8947$  .

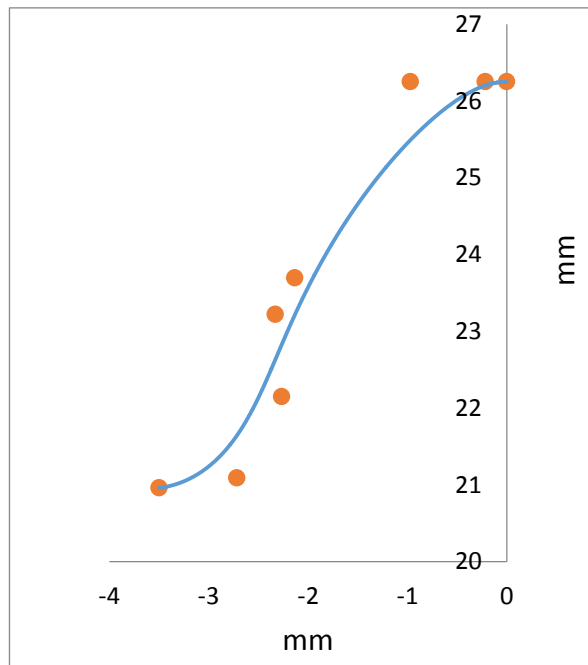
Οι βέλτιστες οδοντώσεις που αναπτύχθηκαν δεν είναι προφανώς τυποποιημένες οπότε δεν υπάρχουν τυποποιημένα module, άρα και ύψη οδόντων. Επιπλέον το ύψος των οδόντων δε συνδέεται με τη διάμετρο του κύκλου κύλισης και κεφαλής παρά μόνο μέσω γεωμετρικών και κατασκευαστικών περιορισμών. Για να είναι όμως δυνατή η σύγκριση μεταξύ των οδόντων που αναπτύχθηκαν και των οδόντων εξειλιγμένης υιοθετήθηκαν όλες οι τυποποιήσεις που ισχύουν στους οδοντωτούς τροχούς εξειλιγμένης και αφορούν κατασκευαστικά μεγέθη.

Για την γένεση λοιπόν της αρχικής κατατομής χρησιμοποιήθηκε ημιτονοειδής κανόνας ύψους οδόντων  $h = 5$  mm (2 module και όχι 2.25 καθώς δεν έχουμε ακτινική χάρη). Η ακτίνα κεφαλής του τροχού πρέπει να είναι  $r_k = 26.25$  mm βάσει της εξίσωσης :

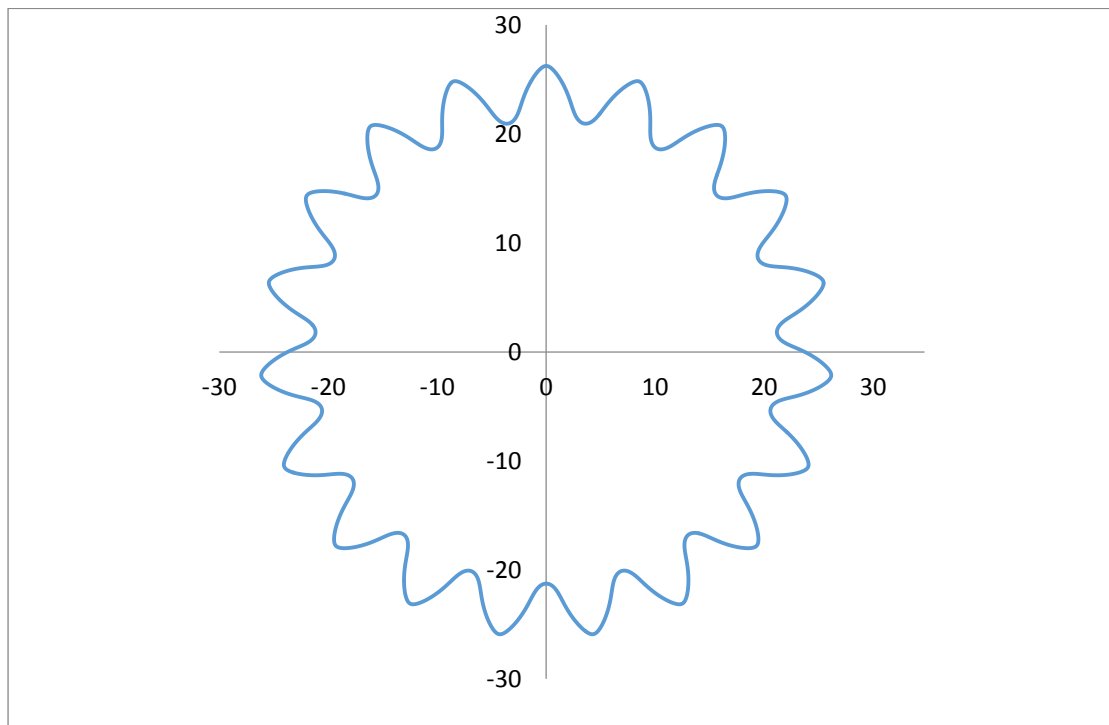
$$r_k = \frac{(Z + 2)m}{2} \quad (64)$$

Η κατατομή που δημιουργήθηκε από τον ημιτονοειδή κανόνα μπορεί να περιγραφεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια από έξι σημεία ελέγχου. Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθούν οκτώ για να υπάρχει μεγαλύτερο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού οπότε και μεγαλύτερη δυνατότητα ελέγχου της γεωμετρίας.

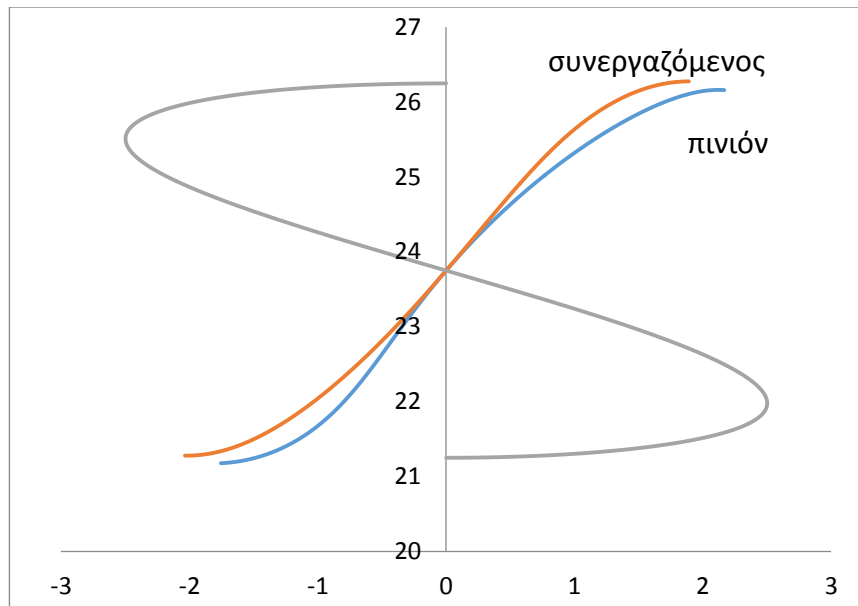
Η κατατομή του πινιόν ημιτονοειδούς κανόνα απεικονίζεται στην Εικόνα 8 μαζί με τα σημεία ελέγχου που την περιγράφουν. Το πινιόν που δημιουργείται από αυτή την κατατομή απεικονίζεται στην Εικόνα 9 και στην Εικόνα 10 η κατατομή του πινιόν και του συνεργαζόμενου καθώς και η τροχιά επαφών τους.



Εικόνα 8- Κατατομή πινιόν ημιτονοειδούς κανόνα και σημεία ελέγχου ( $Z=19$ ,  $m=2.5$ ).

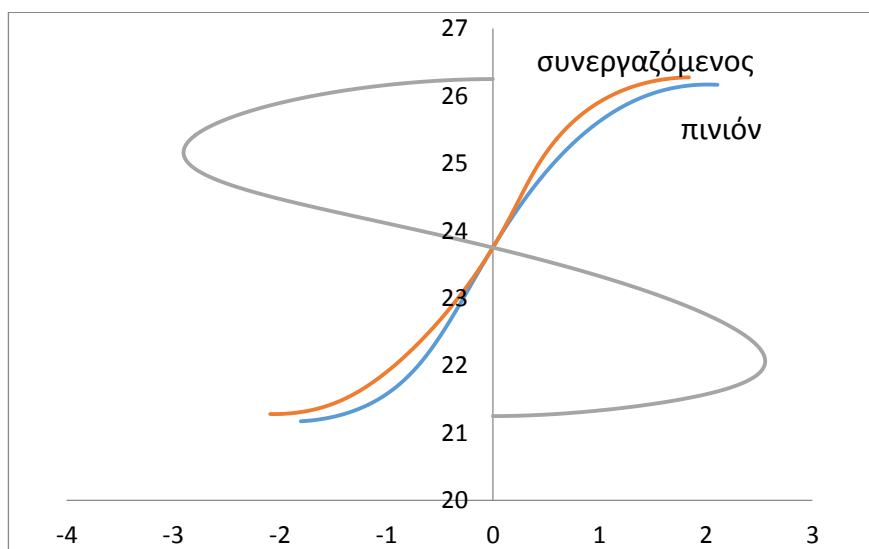


Εικόνα 9- Γεωμετρία πινιόν ημιτονοειδούς κανόνα ( $Z=19$ ,  $m=2.5$ ).

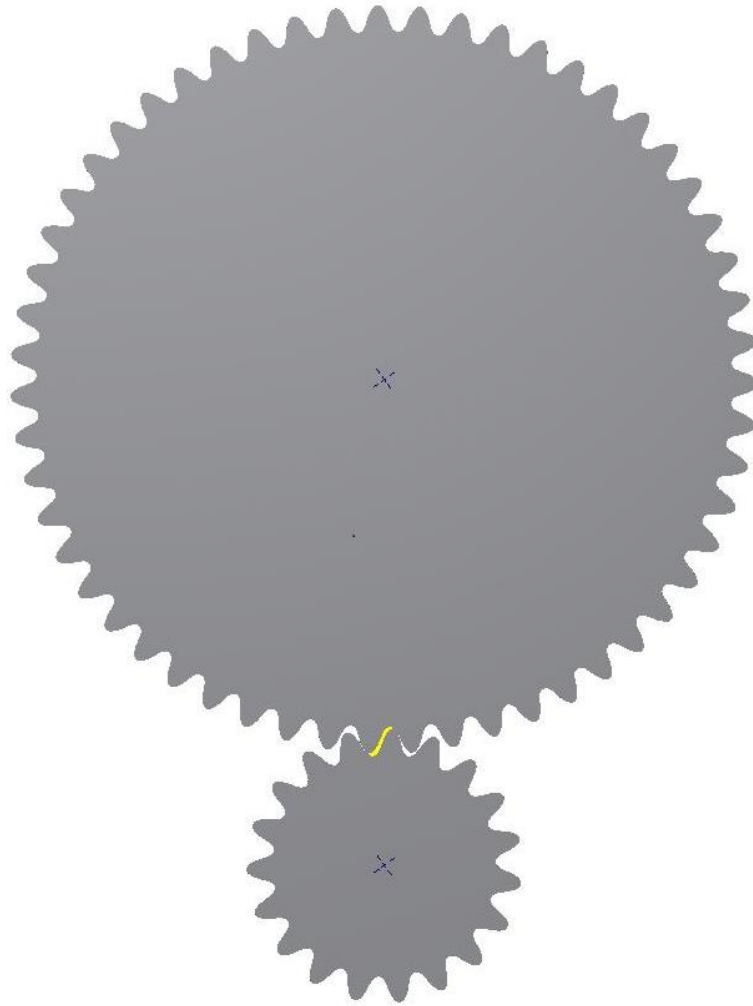


**Εικόνα 10- Κατατομή πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού, ημιτονοειδούς κανόνα και τροχιά επαφών ( $Z=19$ ,  $m=2.5$ ).**

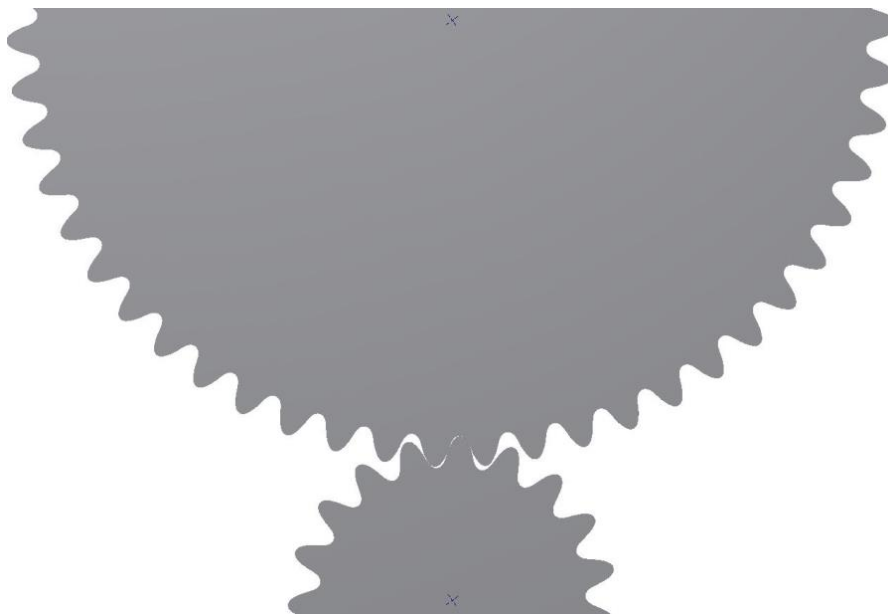
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης. Στην Εικόνα 11 απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία κατατομής πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού, καθώς και η τροχιά επαφών τους. Στις Εικόνα 12 και Εικόνα 13 απεικονίζεται η βαθμίδα των τροχών βέλτιστων οδοντώσεων που σχεδιάστηκαν.



**Εικόνα 11- Κατατομή βελτιστοποιημένου πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού και τροχιά επαφών ( $Z=19$ ,  $m=2.5$ ).**



**Εικόνα 12 - Βαθμίδα βελτιστοποιημένων οδοντώσεων.**



**Εικόνα 13 - Βαθμίδα βελτιστοποιημένων οδοντώσεων**

## 10.1 Σύγκριση βελτιστοποιημένων κατατομών με οδόντες εξειλιγμένης , ημιτονοειδούς κανόνα και S-Gears

Προηγουμένως παρουσιάστηκε η γεωμετρία «εκκίνησης» (ημιτονοειδής κανόνας) και η βέλτιστη γεωμετρία που προέκυψε. Υπενθυμίζεται ότι κριτήριο της βελτιστοποίησης επιλέχθηκε η ελαχιστοποίηση της έκφρασης :

$$F = W_1 \text{mean} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + W_2 \text{std} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (55)$$

Που κατά τη βελτιστοποίηση προέκυψε ισοδύναμη με την έκφραση :

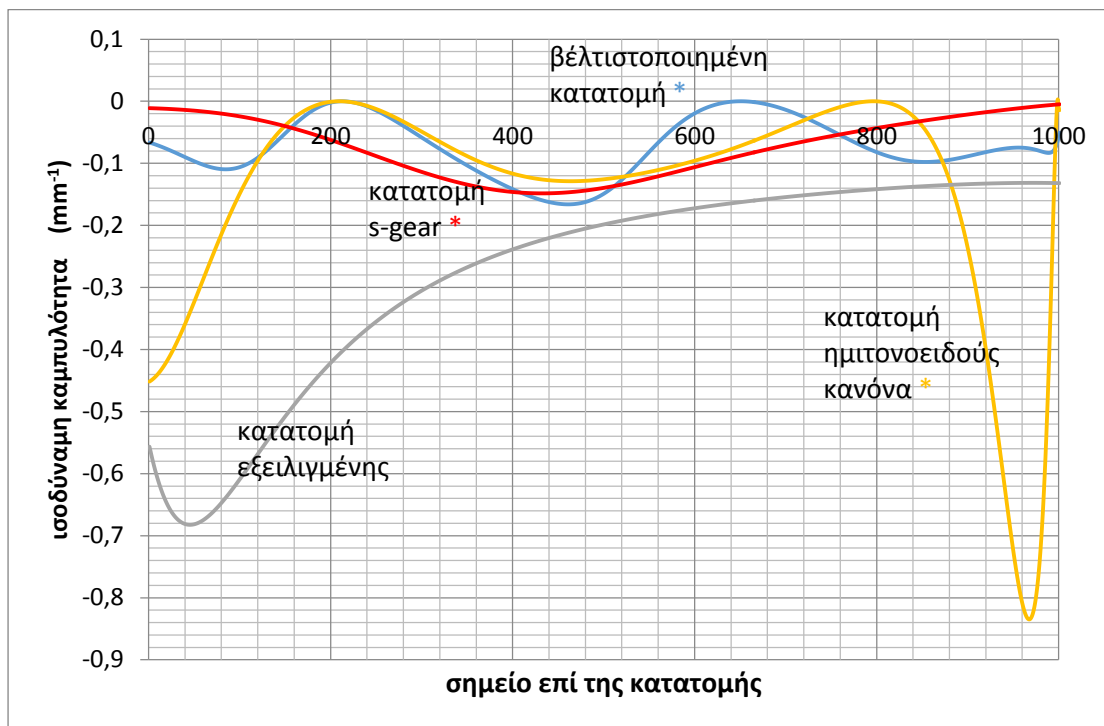
$$F = \text{std} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (65)$$

Καθώς ο αλγόριθμος συνέκλινε στην ίδια γεωμετρία ανεξάρτητα της επιλογής συντελεστών βαρύτητας  $W_1$  και  $W_2$  .

Στην Εικόνα 14 απεικονίζεται η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας για 1000 σημεία σε κάθε κατατομή για αριθμό οδόντων πινίων και συνεργαζόμενου τροχού  $Z_1=19$  και  $Z_2=55$  αντίστοιχα και module  $m=2.5\text{mm}$  (η αρίθμηση των σημείων αντιστοιχεί στη διαδοχή των σημείων που προέκυψαν κατά τη διακριτοποίηση των καμπυλών).

Η υπεροχή της γεωμετρίας κατατομής που σχεδιάστηκε έναντι της κατατομής εξειλιγμένης και της κατατομής που προκύπτει από ημιτονοειδή κανόνα είναι εμφανής τόσο ως προς τη μέση τιμή της ισοδύναμης καμπυλότητας όσο και ως προς τη διακύμανσή της γύρω από τη μέση τιμή. Συγκρίνοντας τη βελτιστοποιημένη κατατομή με την κατατομή των S-gears ( $\alpha_p=1.30267$  ,  $n=1.9$ ) ως προς την ισοδύναμη καμπυλότητα προκύπτει ότι τα S-gears παρουσιάζουν ελαφρώς μεγαλύτερη μέση ισοδύναμη καμπυλότητα και ελαφρώς μεγαλύτερη διακύμανση στην ισοδύναμη καμπυλότητα. Υπενθυμίζεται ότι όσο μικρότερη είναι η ισοδύναμη καμπυλότητα, τόσο μικρότερη είναι η αναπτυσσόμενη πίεση επιφανείας βάσει των εξισώσεων (17) και (18).

Είναι σημαντικό βέβαια να αναφερθεί ότι τα S-gears έχουν ανοιχτή τροχιά επαφών με βαθμό επικάλυψης  $\epsilon > 1$  και μάλιστα μη ακέραιο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ακόμα μεγαλύτερη διακύμανση της πίεσης επιφανείας αφού το φορτίο P που αναπτύσσεται στους οδόντες παρουσιάζει απότομες μεταβολές στα σημεία που εναλλάσσεται ο αριθμός των ζευγών οδόντων σε συνεργασία από ένα σε δύο και αντίστροφα. Επίσης η αναζήτηση κατατομών κλειστής τροχιάς επαφών περιορίζει πολύ το πεδίο αποδεκτών λύσεων της βελτιστοποίησης.



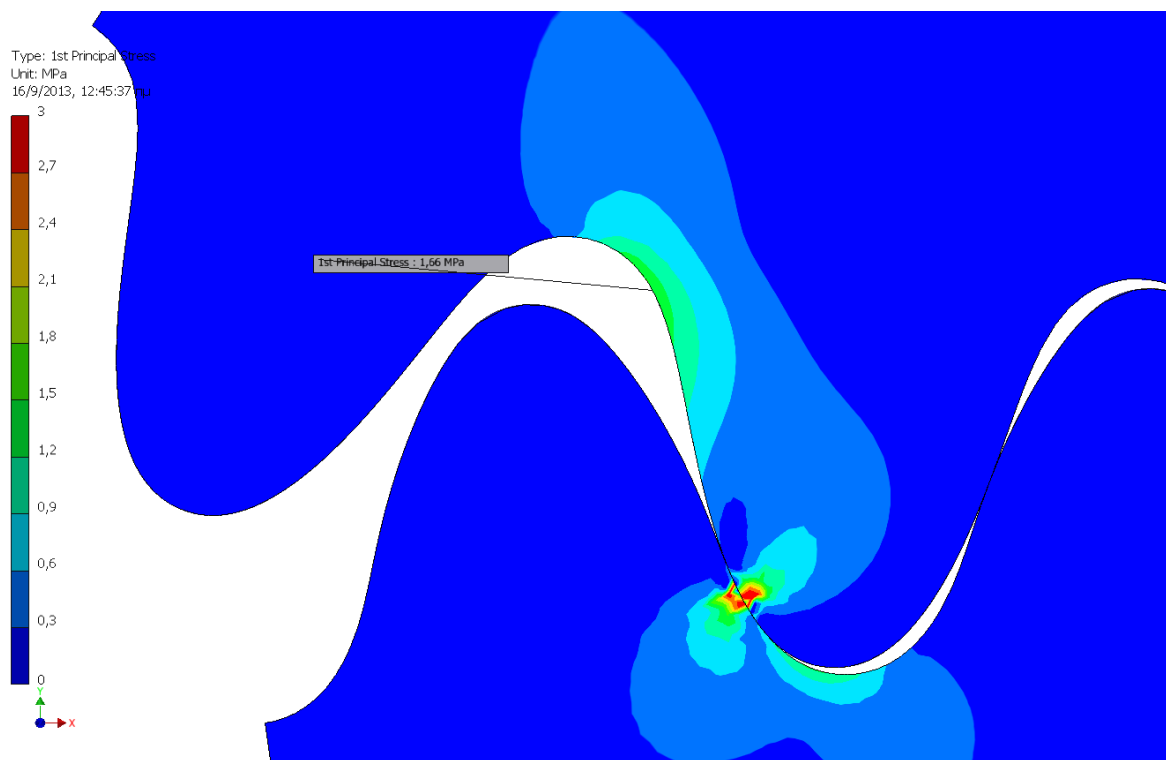
Εικόνα 14- Σύγκριση της ισοδύναμης καμπυλότητας σε 1000 σημεία της κάθε κατατομής ( $Z=19$ ,  $m=2.5$ ).



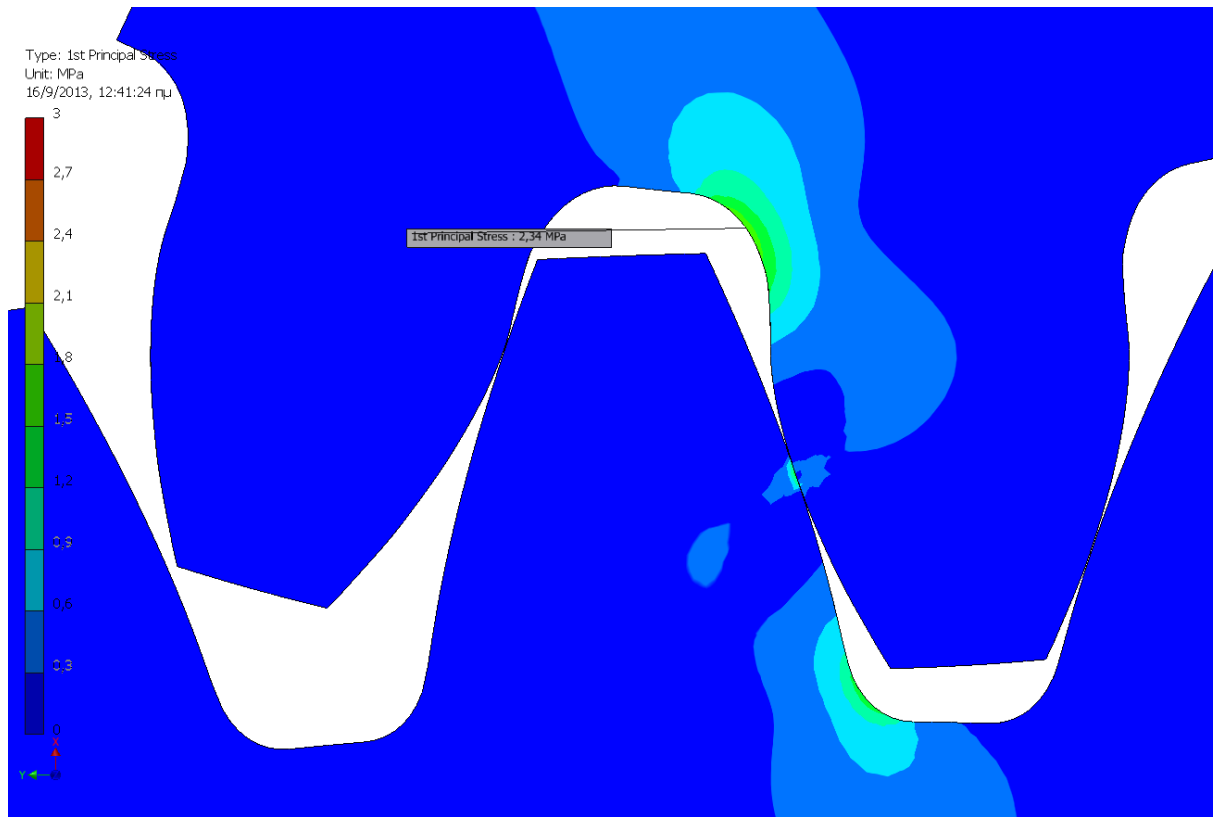
## 10.2 Σύγκριση βέλτιστων κατατομών με κατατομές εξελιγμένης ως προς την κάμψη στην ακτίνα ποδός.

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή οι οδοντωτοί τροχοί δεν αστοχούν μόνο λόγω του pitting που προκαλείται από την υψηλή πίεση επιφανείας στη ζώνη επαφής. Άλλοι βασικοί μηχανισμοί αστοχίας, όπως αναφέρθηκε, είναι η καμπτική κόπωση και η φθορά. Όλοι οι μηχανισμοί συνυπάρχουν κατά τη συνεργασία των οδοντωτών τροχών, οπότε παρά την πολύ καλή συμπεριφορά των τροχών που σχεδιάστηκαν ως προς την πίεση επιφανείας, δεν θα είχαν καμία τεχνολογική αξία αν ήταν «δυσανάλογα» ευάλωτοι στους υπόλοιπους μηχανισμούς αστοχίας.

Για το λόγο αυτό έγινε σύγκριση των μέγιστων εφελκυστικών τάσεων που αναπτύσσονται στη ακτίνα ποδός κατά τη συνεργασία της βαθμίδας βέλτιστων τροχών που σχεδιάστηκαν και της αντίστοιχης βαθμίδας οδόντων εξελιγμένης. Η εύρεση των μέγιστων τάσεων έγινε με ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (Inventor Stress Analysis). Τα αποτελέσματα δίνονται στις Εικόνα 15 και Εικόνα 16, όπου διαπιστώνουμε ότι οι οδοντωτοί τροχοί που σχεδιάστηκαν τυχαίνει να υπερτερούν κατά πολύ των αντίστοιχων της εξελιγμένης και ως προς την κάμψη.



Εικόνα 15 - Μέγιστη αναπτυσσόμενη εφελκυστική τάση στο πόδι (1.66 MPa) για τις βέλτιστες οδοντώσεις



**Εικόνα 16 - Μέγιστη αναπτυσσόμενη εφελκυστική τάση στο πόδι (2.34 MPa) για τις οδοντώσεις εξελιγμένης**

## 11 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, οι βελτιστοποιημένες κατατομές μετωπικών ευθύγραμμων οδοντώσεων εμφανίζουν αυξημένη αντοχή σε πίεση επιφανείας αντοχή σε κάμψη ποδός σε σχέση με τις κατατομές εξειλιγμένης και ημιτονοειδούς κανόνα. Σε σύγκριση με τα S-gears η αντοχή των βελτιστοποιημένων οδόντων σε πίεση επιφανείας είναι ελαφρώς καλύτερη. Η σύγκριση πραγματοποιήθηκε για μία βαθμίδα μειωτήρα με  $Z_1=19$ ,  $Z_2=55$ ,  $m=2.5$ .

Στους επόμενους πίνακες παρατίθενται τα συγκριτικά αποτελέσματα για τις παραπάνω γεωμετρικές κατατομών. Στον πρώτο πίνακα παρατίθενται απόλυτα μεγέθη και στο δεύτερο ποσοστιαίες μεταβολές των κατατομών εξειλιγμένης, ημιτονοειδούς κανόνα και S-gear ως προς το αντίστοιχο μέγεθος της βελτιστοποιημένης κατατομής.

	Βελτιστοποιημένη κατατομή	Κατατομή S-gear	Κατατομή εξειλιγμένης	Κατατομή ημιτονοειδούς κανόνα
Μέση απόλυτη ισοδύναμη καμπυλότητα [ $\text{mm}^{-1}$ ]	0.0734	0.0736	0.2765	0.1401
Τυπική απόκλιση ισοδύναμης καμπυλότητας [ $\text{mm}^{-1}$ ]	0.0469	0.0476	0.1700	0.1770
Μέγιστη εμφανιζόμενη πίεση επιφανείας για φορτίο 1KN ( $h=10\text{mm}$ , χαλύβδινοι τροχοί) [MPa]	55.213	52.133	95.823	123.459
Μέγιστη εμφανιζόμενη εφελκυστική τάση ποδός για $T=10\text{Nm}$ ( $h=10$ , χαλύβδινοι τροχοί) [MPa]	1.66	*1	2.34	2*

Παρατήρηση \*1 : Για την αντοχή ποδός οι δύο βασικότερες παράμετροι είναι το ύψος οδόντος και η γεωμετρία του τροχοειδούς. Το τροχοειδές των S-gears δε μελετήθηκε οπότε δεν ήταν δυνατή κάποια σύγκριση. Ούτως ή άλλως, η υπεροχή της βελτιστοποιημένης κατατομής έναντι της κατατομής εξειλιγμένης που αποτελεί την κλασικότερη επιλογή σε βιομηχανικές εφαρμογές δείχνει ότι οι κατατομές που σχεδιάστηκαν με κριτήρια πίεσης επιφανείας έχουν αποδεκτή συμπεριφορά ως προς

την κάμψη ποδός και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε βιομηχανικές εφαρμογές. Αυτό ήταν και το ζητούμενο, όσον αφορά στην αντοχή σε κάμψη ποδός.

Παρατήρηση \*2 : Οι οδοντωτοί τροχοί που προκύπτουν από ημιτονοειδή κανόνα επίσης δεν ελέγχθηκαν σε αντοχή σε κάμψη ποδός λόγω της περιορισμένη χρήσης τους σε βιομηχανικές εφαρμογές. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παρατήρηση, η υπεροχή των οδόντων που σχεδιάστηκαν έναντι των οδόντων εξειλιγμένης αποδεικνύει ότι γεωμετρία που προτείνεται είναι βιομηχανικών προδιαγραφών.

	Κατατομή S-gear	Κατατομή εξειλιγμένης	Κατατομή ημιτονοειδούς κανόνα
Ποσοστιαία μεταβολή μέσης απόλυτης ισοδύναμης καμπυλότητας	+0.27 %	+276.7%	+90.9%
Ποσοστιαία μεταβολή τυπικής απόκλισης ισοδύναμης καμπυλότητας	+1.49%	+262.47%	+277.40%
Ποσοστιαία μεταβολή μέγιστης εμφανιζόμενης πίεσης επιφανείας για φορτίο 1KN (h=10mm,χαλύβδινοι τροχοί)	-5.58%	+73.55%	+123.61%
Ποσοστιαία μεταβολή μέγιστης εμφανιζόμενης εφελκυστικής τάσης ποδός για T=10Nm (h=10, χαλύβδινοι τροχοί)	-	+40.96%	-

**Πίνακας ποσοστιαίων μεταβολών του αναγραφόμενων μεγεθών για τις κατατομές εξειλιγμένης S-gear και ημιτονοειδούς κανόνα σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη των βελτιστοποιημένων οδοντώσεων.**

## 12 Βιβλιογραφία – αναφορές

1. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity Third Edition, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, New York, 1970
2. Θ.Ν. Κωστόπουλος, Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2010
3. Χ. Προβατίδης, Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών ΙΙ/πρόχειρες σημειώσεις, Ε.Μ.Π. Αθήνα 2004
4. Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Ε.Μ.Π. Αθήνα 2003
5. Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Ε.Μ.Π. Αθήνα 2006
6. H.L. Whittemore and S.N. Petrenko, Natl. Bur. Std. Tech. Paper 201,1921 in : S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, (Eds.) Theory of Elasticity Third Edition, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, New York, 1970
7. Gorazd Hlebanja and Joze Hlebanja, Constructive Measures to Increase the Load-Carrying Capacity of Gears/The Characteristics of S-Gears, Machine Design, Special issue 18 May 2008, pp. 33-42