



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Ηλεκτρομαγνητική Ανάλυση του Φαινομένου Σύζευξης
Διηλεκτρικής Πλάκας και Σφαιρικού Διηλεκτρικού
Συντονιστή**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σπυρίδων Κ. Γιαρδιακός

Επιβλέπων: Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Ηλεκτρομαγνητική Ανάλυση του Φαινομένου Σύζευξης
Διηλεκτρικής Πλάκας και Σφαιρικού Διηλεκτρικού
Συντονιστή**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σπυρίδων Κ. Γιαρδιακός

Επιβλέπων: Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....
Ν. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Δ. Κακλαμάνη
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

.....
Ι. Βενιέρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2013

.....
Σπυρίδων Γιαρδιακός
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Σπυρίδων Κ. Γιαρδιακός, 2013
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής σύζευξης που αναπτύσσεται μεταξύ ενός επίπεδου διηλεκτρικού κυματοδηγού και μίας διηλεκτρικής σφαίρας η οποία βρίσκεται στο εξωτερικό του περιβάλλον. Η συγκεκριμένη διάταξη παρουσιάζει τόσο θεωρητικό όσο και πρακτικό ενδιαφέρον καθώς, λόγω του έντονου ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού που αναπτύσσεται σε αυτή, μπορεί να προσαρμοστεί σε μία πληθώρα τεχνολογικών εφαρμογών και κυρίως τα οπτικά ολοκληρωμένα κυκλώματα. Η επίλυση του προβλήματος στηρίζεται στην εφαρμογή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, των ολοκληρωτικών εξισώσεων και των συναρτήσεων Green. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε πλήρως αναλυτικά αποτελέσματα για τη μορφή των ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών του προβλήματος, γεγονός που εξ αρχής αποτελεί ένα σημαντικό στόχο της εργασίας. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο τέλος της εργασίας, όπου καταδεικνύεται ποιοτικά η συμπεριφορά της διάταξης και σχολιάζονται οι δυνατές προεκτάσεις της εργασίας.

Λέξεις-κλειδιά:

διηλεκτρικός κυματοδηγός, διηλεκτρική σφαίρα, οπτικός συντονιστής, ηλεκτρομαγνητική σύζευξη, ρυθμοί whispering gallery, οπτικά φίλτρα, συνάρτηση Green, θεώρημα Green, ολοκληρωτική εξίσωση, κυματική εξίσωση, μετασχηματισμός Fourier, σφαιρικά κύματα

Abstract

The present diploma thesis examines the electromagnetic coupling effect developed between a planar dielectric waveguide and a dielectric sphere which is located in its external environment. This specific structure is of both theoretical and practical interest since, due to the intense electromagnetic resonance which is developed in it, it can be adapted to numerous technological applications and mostly to optical integrated circuits. The solution of the problem is based on the electromagnetic theory, the theory of integral equations and the Green's functions. This method leads to fully analytical results describing the electromagnetic quantities of the problem, something which has been an important aim of the thesis, in the first place. The results of analysis are presented altogether at the end of the project, where the system's qualitative functional behaviour and the possible extents of this project are outlined.

Keywords:

dielectric waveguide, dielectric sphere, optical resonator, electromagnetic coupling, whispering gallery modes, optical filters, Green's function, Green's theorem, integral equation, wave equation, Fourier transform, spherical waves

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε υπό την καθοδήγηση του καθηγητή μου, κ. Νικολάου Ουζούνoglou, ο οποίος με τίμησε με την εμπιστοσύνη του αναθέτοντάς μου το απαιτητικό αυτό θέμα. Θα ήθελα ,λοιπόν, να του εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες για τη συνεχή και πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, καθώς και για τα κατάλληλα κίνητρα που μου έδωσε στο να διευρύνω τις γνώσεις μου πάνω στο αντικείμενο του ηλεκτρομαγνητισμού και των τηλεπικοινωνιών.

Θα ήθελα εν συνεχεία να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία με στήριξε με κάθε τρόπο καθ' όλη διάρκεια των σπουδών μου και με βοήθησε να κατανοήσω από νωρίς την αξία της γνώσης και της μόρφωσης γενικότερα. Επιπλέον, ευχαριστώ τη Νεφέλη που με βοήθησε ουσιαστικά όλο αυτό το διάστημα και που μου έμαθε να μην απογοητεύομαι ποτέ. Τέλος, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους μου, Στέλιο και Βασίλη, με τους οποίους αντιμετωπίσαμε τις δυσκολίες των προπτυχιακών σπουδών και που, χάρη στον κοινό μας ζήλο για το αντικείμενο του μηχανικού, μοιραστήκαμε τα οφέλη και τις προκλήσεις της επιστήμης.

Αθήνα 2013

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Λέξεις Κλειδιά.....	5
Abstract.....	6
Keywords.....	6
Ευχαριστίες.....	7
Περιεχόμενα.....	9
1. Εισαγωγή	11
1.1. Διηλεκτρικοί κυματοδηγοί και οι εφαρμογές τους.....	12
1.2. Φυσικοί μηχανισμοί διατάξεων κυματοδότησης και συντονισμού....	15
1.3. Οπτικοί συντονιστές.....	16
1.4. Στόχος της εργασίας.....	18
2. Διατύπωση του προβλήματος.	21
2.1. Περιγραφή της διάταξης.....	21
2.2. Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης.....	23
3. Σχηματισμός εξισώσεων	25
3.1. Σχηματισμός της διαφορικής εξίσωσης.....	25
3.2. Σχηματισμός της ολοκληρωτικής εξίσωσης.....	30
Παράρτημα.....	37
4. Υπολογισμός της συνάρτησης Green	41
4.1. Γενικές ιδιότητες της συνάρτησης Green.....	41
4.2. Η συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου.....	43
4.3. Έκφραση της συνάρτησης Green ως ολοκλήρωμα Fourier.....	45
4.4. Προσδιορισμός των δευτερογενών συναρτήσεων Green ως λύση προβλήματος οριακών συνθηκών.....	51
Παράρτημα.....	54
5. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης	65
5.1. Έκφραση των πεδίων ως αναπτύγματα σφαιρικών κυμάτων.....	66
5.2. Εύρεση του πεδίου στην περιοχή του σφαιρικού σκεδαστή.....	73
5.3. Εύρεση του πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού.....	84
Παράρτημα.....	94
6. Συμπεράσματα	103
Βιβλιογραφία	109

1. Εισαγωγή

Η μετάδοση πληροφορίας υπό τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους: είτε με ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον κενό χώρο, είτε με καθοδήγηση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες διατάξεις μετάδοσης πληροφορίας, τις γραμμές μεταφοράς και τους κυματοδηγούς [15]. Με κριτήριο τις δύο αυτές επιλογές, οι τηλεπικοινωνιακές ζεύξεις κατηγοριοποιούνται σε ασύρματες και ενσύρματες.

Όταν σε μία τηλεπικοινωνιακή ζεύξη δεν εμπλέκονται κινητοί πομποί ή δέκτες, και εφόσον οι αποστάσεις που παρεμβάλλονται δεν παρεμποδίζουν την ανάπτυξη σταθερού διαύλου ή δικτύου, τότε η ζεύξη επιτυγχάνεται κατά κανόνα με χρήση διατάξεων κυματοδήγησης (ενσύρματα) [15]. Ένα κοινό πλεονέκτημα των διατάξεων κυματοδήγησης είναι ότι δεν επιτρέπουν απώλειες της μεταδιδόμενης ισχύος λόγω ακτινοβολίας, αφού αυτή βρίσκεται συγκεντρωμένη εντός των ορίων του υλικού μέσου διάδοσης [2]. Υπάρχει όμως και μία μεγάλη ποικιλία τεχνικών χαρακτηριστικών που ξεχωρίζει κάθε διάταξη κυματοδήγησης και διαφοροποιεί τη χρησιμότητά της ανάμεσα στις υπόλοιπες. Η απλούστερη δομή κατευθυνόμενης διάδοσης είναι η γραμμή μεταφοράς (ζεύγος απομονωμένων αγωγών) η οποία υποστηρίζει σήματα ραδιοκυμάτων και μικροκυμάτων έως $\sim 1\text{GHz}$. Σε υψηλότερες συχνότητες (1-30 GHz), καταλληλότερες δομές κυματοδήγησης αποτελούν οι μεταλλικοί κυματοδηγοί τύπου κοίλου σωλήνα [2][14]. Οι κυματοδηγοί αυτοί ποικίλουν ως προς τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, καθώς αυτά καθορίζουν την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά κάθε κυματοδηγού [4]. Τόσο οι γραμμές μεταφοράς όσο και οι μεταλλικοί κυματοδηγοί χρησιμοποιούνται ευρέως στις μικροκυματικές εφαρμογές και γι' αυτό εξακολουθούν να μελετώνται και να βελτιώνονται μέχρι σήμερα.

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια ένα μεγάλο τμήμα των τηλεπικοινωνιακών εφαρμογών έπαψε να περιορίζεται στο χώρο των μικροκυμάτων και των χιλιοστομετρικών κυμάτων και πλέον στηρίζεται στις οπτικές συχνότητες [6]. Σε αυτό το γεγονός συνετέλεσαν οι απαιτήσεις των σύγχρονων τηλεπικοινωνιών για υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης μεγάλου όγκου δεδομένων. Πράγματι, οι σημερινές ανάγκες για ποιότητα, ταχύτητα και χωρητικότητα πληροφορίας είναι μεγαλύτερες από ποτέ. Γι' αυτό η τεχνολογική έρευνα ανταποκρίνεται συνεχώς αναπτύσσοντας νέες διατάξεις μετάδοσης πληροφορίας, ικανές να ανταπεξέρχονται στις σύγχρονες απαιτήσεις. Η κυριότερη οικογένεια τέτοιων διατάξεων είναι οι διηλεκτρικοί

κυματοδηγοί, οι ιδιότητές των οποίων θα παρουσιαστούν λεπτομερώς σε επόμενη παράγραφο. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί προς το παρόν είναι ότι οι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί έχουν έφεραν μία τεχνολογική επανάσταση καθώς, χάρις στα ασύγκριτα πλεονεκτήματά τους σε σχέση με τις κλασικές διατάξεις κυματοδότησης, έδωσαν λύση σε πολλά τεχνικά προβλήματα και παράλληλα άνοιξε νέες προοπτικές εξέλιξης στο χώρο των τηλεπικοινωνιών [6].

Οι παραπάνω πληροφορίες είναι αρκετές ώστε να μας εισάγουν το πλαίσιο στο οποίο θα κινηθεί η παρούσα εργασία. Όπως θα γίνει σαφές στη συνέχεια, η εργασία αυτή πραγματεύεται την ηλεκτρομαγνητική λειτουργία μίας διάταξης κυματοδότησης και συντονισμού και σκοπός της είναι να παράγει, με πλήρως αναλυτικό τρόπο, αποτελέσματα που θα είναι χρήσιμα για περαιτέρω μελέτη ή/και για μελλοντικές εφαρμογές. Πριν όμως διατυπωθεί με ακρίβεια το θέμα της εργασίας, πρέπει, στα πλαίσια αυτού του εισαγωγικού κεφαλαίου, να αναπτύξουμε τα χαρακτηριστικά των βασικών εννοιών της υπό εξέταση διάταξης. Αυτά είναι: οι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί, οι οπτικές διατάξεις συντονισμού και οι φυσικοί μηχανισμοί τους.

1.1. Διηλεκτρικοί κυματοδηγοί και οι εφαρμογές τους

Οι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί, όπως και κάθε είδος κυματοδηγού, είναι υλικές δομές που κατευθύνουν τη διάδοση ενέργειας, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, μέσα από ένα προκαθορισμένο δρόμο [4]. Σε αντίθεση με τους μεταλλικούς κυματοδηγούς, κατασκευάζονται αποκλειστικά από διηλεκτρικό (συνήθως πυρίτιο) σταθερού ή μεταβλητού δείκτη διάθλασης. Οι εξωτερικές επιφάνειες τους είναι εκτεθειμένες στο περιβάλλον (κατά κανόνα ηλεκτρικά αραιότερο μέσο), υπό την έννοια ότι δεν παρεμβάλλεται κάποιο μεταλλικό στρώμα, παρά μόνο διηλεκτρικό. Οι δύο συνηθέστερες μορφές διηλεκτρικού κυματοδηγού είναι η *οπτική ίνα* (optical fiber) και ο *επίπεδος διηλεκτρικός κυματοδηγός* (planar dielectric waveguide) ή *διηλεκτρική πλάκα* (dielectric slab) [9],[6] (βλ. Σχήματα: 1.1, 1.2).

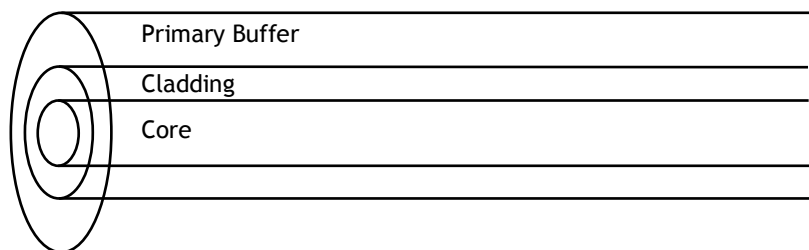
Οι διηλεκτρικές διατάξεις κυματοδότησης επιτρέπουν τη διάδοση σημάτων μικροκυματικών, χιλιοστομετρικών και οπτικών συχνοτήτων, ικανών να φέρουν τεράστιο όγκο πληροφορίας. Καθώς όμως η συντριπτική πλειονότητα των εφαρμογών τους αφορά

οπτικές συχνότητες, εφεξής θα αναφερόμαστε κυρίως στη λειτουργία τους στα πλαίσια των οπτικών επικοινωνιών.

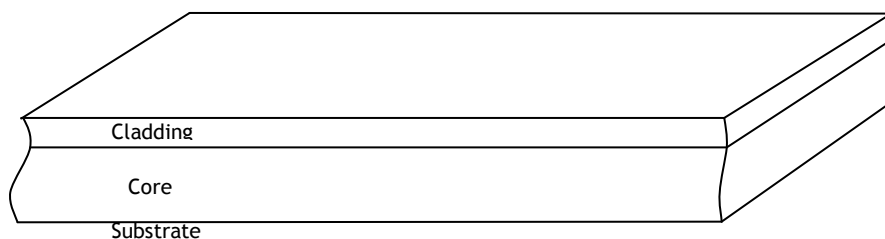
Τα φυσικά χαρακτηριστικά των διηλεκτρικών διατάξεων κυματοδηγησης συντελούν στην ύπαρξη ορισμένων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων, οι οποίες διαφοροποιούν ριζικά τους διηλεκτρικούς κυματοδηγούς από τους μικροκυματικούς κυματοδηγούς μεταλλικών τοιχωμάτων [10],[3],[14]:

- Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο συγκρατείται εντός των ορίων του κυματοδηγού με το μηχανισμό της ολικής ανάκλασης στις οριακές επιφάνειες.
- Λόγω των μη ομογενών οριακών συνθηκών που ικανοποιούνται στις επιφάνειες, υπάρχει ένα κλάσμα ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που διεισδύει με έντονη απόσβεση στο διηλεκτρικό μέσο που περιβάλλει τον κυματοδηγό.
- Μη ύπαρξη κατώτατου ορίου συχνότητας ρυθμού διάδοσης.
- Όπως προκύπτει από την ηλεκτρομαγνητική ανάλυση, το πεδίο στον κυματοδηγό αναπτύσσεται μαθηματικά σε όρους διακριτού και συνεχούς φάσματος ρυθμών.

Οι παραπάνω ιδιότητες ευθύνονται για τα περισσότερα πλεονεκτήματα των διηλεκτρικών κυματοδηγών που τους καθιστούν κατάλληλους για ένα ανεξάντλητο πλήθος εφαρμογών.



Σχήμα 1.1 Οπτική Ίνα



Σχήμα 1.2 Διηλεκτρική Πλάκα

Προφανώς, κάθε είδος διηλεκτρικού μέσου κυματοδότησης είναι σχεδιασμένο ώστε να ικανοποιεί συγκεκριμένες απαιτήσεις που διαφέρουν από εφαρμογή σε εφαρμογή [4]. Για παράδειγμα, οι δύο συνηθέστερες κατηγορίες διηλεκτρικών κυματοδηγών, οι οπτικές ίνες και οι επίπεδοι κυματοδηγοί, διαφέρουν ριζικά ως προς τις ανάγκες τις οποίες εξυπηρετούν, εξαιτίας των διαφορετικών γεωμετρικών και τεχνικών τους χαρακτηριστικών. Οι οπτικές ίνες χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα ως ενσύρματο μέσο στις οπτικές τηλεπικοινωνιακές ζεύξεις μεγάλων αποστάσεων, επιτυγχάνοντας εξαιρετικά χαμηλές απώλειες (<0.2 dB/km) και υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης (\sim Tbps σε αποστάσεις δεκάδων km). Αντίθετα, οι επίπεδοι κυματοδηγοί χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σε οπτικά ολοκληρωμένα κυκλώματα [6] εντός των οποίων το μήκος διάδοσης δεν ξεπερνά τα μερικά χιλιοστά. Συμπερασματικά, οι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί, ανεξαρτήτως κατηγορίας, παρουσιάζουν εξαιρετικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα κλασσικά μέσα κυματοδότησης.

Μερικά από αυτά είναι:

- Η δυνατότητα λειτουργίας σε πολύ υψηλές συχνότητες που εκτείνονται μέχρι και το οπτικό φάσμα.
- Η δυνατότητα μετάδοσης σημάτων εξαιρετικά μεγάλου εύρους ζώνης (\sim THz).
- Οι εξαιρετικά χαμηλές απώλειες ανά μονάδα μήκους.
- Η ευκολία σχεδίασης και κατασκευής τους σε οπτικά ολοκληρωμένα κυκλώματα πολύ μεγάλης κλίμακας ολοκλήρωσης (VLSI)
- Η δυνατότητα προσαρμογής και αλληλεπίδρασης με σύγχρονες οπτικές διατάξεις συντονισμού και επεξεργασίας σήματος.

Στα πλαίσια του τελευταίου γνωρίσματος, δηλαδή τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης με οπτικές (διηλεκτρικές) διατάξεις συντονισμού, βρίσκεται και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, θα εξεταστεί η αλληλεπίδραση (σύζευξη) ενός επίπεδου διηλεκτρικού κυματοδηγού με μία διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού σφαιρικού σχήματος η οποία, όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη σχεδίαση οπτικών φίλτρων και άλλων συστημάτων. Επιπλέον, η συγκεκριμένη διάταξη, όπως άλλωστε και οι περισσότερες οπτικές διατάξεις, βασίζουν τη λειτουργία τους στα θεμελιώδη ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα της σκέδασης και του συντονισμού. Επομένως, κρίνεται απαραίτητο να αναπτύξουμε εν συντομία τα φαινόμενα αυτά, προκειμένου να γίνει κατανοητός ο ρόλος που διαδραματίζουν σε όλη την έκταση της μελέτης.

1.2. Φυσικοί μηχανισμοί διατάξεων κυματοδηγησης και συντονισμού

Σε κάθε σύστημα οπτικής τηλεπικοινωνίας είναι απαραίτητη η μετάδοση και ανταλλαγή οπτικών σημάτων μεταξύ διαφορετικών διηλεκτρικών μέσων και κυματοδηγών. Για να πραγματοποιηθεί αυτό όμως, είναι απαραίτητη η εκμετάλλευση ορισμένων φυσικών μηχανισμών που θα επιτρέψουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των οπτικών διατάξεων. Τους κυριότερους από αυτούς τους μηχανισμούς (σύζευξη, σκέδαση, συντονισμός) θα τους αναπτύξουμε σε αυτή την παράγραφο, καθώς αυτοί θα διαδραματίσουν κυρίαρχο ρόλο στη λειτουργία της υπό εξέταση διάταξης και θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση της εργασίας.

Σύζευξη ονομάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων ή συστημάτων όταν σε αυτά δρα αμοιβαία το ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [7]. Στην περίπτωσή μας, ο όρος περιγράφει την αμφίδρομη ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας μεταξύ οπτικών κυματοδηγών και διηλεκτρικών σωμάτων, των οποίων η σχετική θέση στο χώρο τους επιτρέπει να αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά. Ο μηχανισμός της σύζευξης συχνά συνδυάζεται με την ηλεκτρομαγνητική σκέδαση.

Σκέδαση ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένα κλάσμα ενέργειας αφαιρείται από μία δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και επανειπέμπεται στο χώρο χωρίς αξιοσημείωτες μεταβολές ως προς το μήκος κύματος [7]. Συνήθως, τη σκέδαση προκαλεί η παρουσία ενός σώματος το οποίο διεγείρεται από μία προσπίπτουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και επανειπέμπει ένα μέρος της στο χώρο. Η μορφή του σκεδαζόμενου κύματος εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά του προσπίπτοντος κύματος όσο και από τη γεωμετρία του σκεδαστή. Η κατανόηση των φαινομένων σκέδασης είναι το υπόβαθρο για τη μελέτη της απόκρισης οπτικών κυκλωμάτων, που εκτελούν λειτουργίες εξασθένησης, αλλαγής φάσης και πόλωσης ή συντονισμού των εισερχόμενων σημάτων.

Μία μεγάλη κατηγορία οπτικών διατάξεων στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. **Συντονισμός** σε μία διηλεκτρική κοιλότητα παρατηρείται όταν (στο εσωτερικό της) υπάρχουν συντηρούμενες ταλαντώσεις ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων [7]. Για την ακρίβεια,

κατά το συντονισμό υπάρχει ένα πλήθος στάσιμων ΗΜ ρυθμών, η συχνότητα και η κατανομή των οποίων καθορίζονται από τη γεωμετρία της κοιλότητας.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η σύνδεση των παραπάνω εννοιών με το αντικείμενο της εργασίας, θα αναφερθούμε ακροθιγώς στα βασικά σημεία της. Αυτό που ουσιαστικά θα εξετάσουμε σε αυτή την εργασία είναι ο τρόπος με τον οποίο ένας επίπεδος διηλεκτρικός κυματοδηγός συζευγνύεται μέσω του πεδίου του με μία σφαιρική διηλεκτρική κοιλότητα συντονισμού (σφαιρικός συντονιστής). Το αποσβεννύον πεδίο του κυματοδηγού επιτυγχάνει τη σύζευξη, καθώς διεγείρει και συντονίζει το σφαιρικό σώμα, που αποτελεί διαταραχή της γεωμετρίας κυματοδήγησης. Το πεδίο που προκύπτει ως αποτέλεσμα σκέδασης και συντονισμού επαδραμεύεται από τον κυματοδηγό, μεταβάλλοντας τα χαρακτηριστικά διάδοσης σε αυτόν.

Γενικά, η επίδραση διατάξεων συντονισμού σε κυματοδηγούς είναι εξαιρετικά σημαντική για τα σύγχρονα οπτικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα και δίκτυα. Ως πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα εφαρμογής, που εκμεταλλεύεται τις διατάξεις και τα φαινόμενα συντονισμού, αναφέρουμε τη τεχνική πολυπλεξίας διαίρεσης μήκους κύματος, WDM (Wavelength Division Multiplexing). Η τεχνική αυτή επιτρέπει την αύξηση της μεταφερόμενης πληροφορίας μέσω της ταυτόχρονης μετάδοσης στο ίδιο οπτικό μέσο σημάτων με διαφορετικές φέρουσες συχνότητες¹ [32]. Η διάκριση και επιλογή αυτών των συχνοτήτων επιτυγχάνεται με κατάλληλες οπτικές διατάξεις συντονισμού. Δεδομένου ότι η τεχνική WDM αποτελεί τη βάση των σημερινών οπτικών δικτύων, είναι προφανές ότι καθοριστικό ρόλο έχει διαδραματίσει η ανάλυση και η υλοποίηση συντονιζόμενων οπτικών κυκλωμάτων επιλογής συχνότητας και διατάξεων οπτικών συντονιστών (optical resonators).

1.3. Οπτικοί συντονιστές

Οι οπτικοί συντονιστές είναι διατάξεις βασισμένες ιδιότητες των διηλεκτρικών κοιλότητων και του συντονισμού και χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών των οπτικών τηλεπικοινωνιών. Η αρχή λειτουργίας τους είναι κοινή για περισσότερα είδη: Το

¹ Η πρώτη πειραματική επίδειξη της WDM έγινε το 1977 [32]. Η WDM αποτελεί σήμερα τη βάση όλων των σύγχρονων οπτικών δικτύων, επιτυγχάνοντας την αξιοποίηση ενός μεγάλου τμήματος του εύρους ζώνης των 25 THz που προσφέρουν οι οπτικές ίνες στην περιοχή των 1.5 μm .

ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιορίζεται στο εσωτερικό του οπτικού συντονιστή και εκτελεί ταλαντώσεις συντηρώντας το φαινόμενο της ενισχυτικής αυτοσυμβολής του². Επομένως, σε κάθε οπτικό συντονιστή διατυπώνεται μία συνθήκη συντονισμού³ που καθορίζει την επιλεκτική του φασματική απόκριση.

Η απλούστερη μορφή οπτικής κοιλότητας/συντονιστή είναι η κλασική συμβολομετρική διάταξη Fabry-Perot, στη φυσική της οποίας βασίζεται και η λειτουργία όλων των οπτικών συντονιστών. Στις κοιλότητες τύπου Fabry-Perot, το πεδίο ταλαντώνεται υφιστάμενο συνεχείς ανακλάσεις μεταξύ δύο ισχυρά ανακλαστικών κατόπτρων, η απόσταση των οποίων καθορίζει με σχέση αντίστροφης αναλογίας την ελεύθερη φασματική περιοχή (free spectral range) μεταξύ των συντονισμών.

Μία ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία οπτικών συντονιστών είναι εκείνη των διηλεκτρικών κυλινδρικών και σφαιρικών κοιλοτήτων. Η λειτουργία τους στηρίζεται σε ένα παρόμοιο φυσικό μηχανισμό συμβολής με αυτό των Fabry-Perot, ο οποίος έχει το χαρακτηριστικό ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαδίδεται περιστρεφόμενο στο συντονιστή μέσω συνεχών ολικών εσωτερικών ανακλάσεων (total internal reflection) στην επιφάνειά τους, πλησίον και εσωτερικά της οποίας συγκεντρώνεται το μεγαλύτερο μέρος της οπτικής ισχύος. Οι αντίστοιχοι ρυθμοί ονομάζονται ρυθμοί Whispering Gallery (WG).

Οι ρυθμοί WG διεγείρονται μέσω σύζευξης από το αποσβεγμένο πεδίο των διηλεκτρικών κυματοδηγών [17],[21],[25] και, ικανοποιώντας την παραπάνω συνθήκη συντονισμού, αυτοενισχύονται μέσω συμβολής [34],[18]. Η επιλεκτική επανασύζευξη του πεδίου των συντονιστών στους κυματοδηγούς, (που καθορίζει η συνθήκη συντονισμού) επιδρά στους συντελεστές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών προκαλώντας επιλεκτική φασματική απόκριση των διατάξεων κυματοδηγησης. Αυτό αποτελεί βάση για την υλοποίηση οπτικών φίλτρων (συνηθέστερα ζωνοφρακτικών) [22],[26],[27].

Η πρώτη σύγχρονη εφαρμοσμένη μελέτη των συντονισμών σε διηλεκτρικούς κυλίνδρους και σε συχνότητες μερικών GHz έγινε στις αρχές της δεκαετίας του '80 από τους Vedrenne και Arnaud [34], ενώ λίγο αργότερα το ενδιαφέρον στράφηκε και στις διηλεκτρικές σφαίρες σε

² Ενισχυτική αυτοσυμβολή ενός κύματος είναι η εν φάσει συμβολή με τον εαυτό του, μετά από κάθε πλήρη ταλάντωση.

³ Η συνθήκη συντονισμού ικανοποιείται όταν η φάση που αντιστοιχεί σε μία πλήρη περιστροφή (σταθερά διάδοσης ρυθμού \times μήκος ισοδύναμης περιφέρειας ρυθμού) είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .

οπτικές συχνότητες [18]. Ανάλογα φαινόμενα συντονισμού μελετήθηκαν και σε διηλεκτρικούς δακτυλίους (ring resonators). Η συστηματική έρευνα που ακολούθησε στα επόμενα χρόνια απέδειξε ότι, εκτός από τη μηχανική απλότητα και την ευκολία ολοκλήρωσης σε κυκλωματικές διατάξεις [23], οι διηλεκτρικές κοιλότητες αξονικής συμμετρίας (κύλινδροι, δακτύλιοι και σφαίρες) παρουσιάζουν μεγάλες επιδόσεις [20],[16] όπως οι υψηλοί συντελεστές ποιότητας, που πλεονεκτούν σε σύγκριση με τα φίλτρα Fabry-Perot ή τους συντονιστές φραγμάτων Bragg και τους καθιστούν κατάλληλους για ένα ευρύτατο σύνολο εφαρμογών οπτικών φίλτρων, WDM και laser.

Μία αντιπροσωπευτική οπτική διάταξη συντονισμού περιλαμβάνει τη σύζευξη ενός συντονιστή με ένα κυματοδηγό ο οποίος φέρει το εισερχόμενο οπτικό σήμα και διεγείρει το συντονιστή μέσω του αποσβενύμενου πεδίου του. Το πεδίο που δεσμεύεται από το συντονιστή υφίσταται πολλαπλές περιστροφές και αυτοενίσχυση, λόγω της συνθήκης συντονισμού, καθώς και απώλεια ισχύος λόγω ακτινοβολίας. Η συμβολή που προκαλείται κατά την επανασύζευξη μέρους του πεδίου αυτού στον κυματοδηγό δημιουργεί την επιλεκτική φασματική απόκριση στην έξοδο της διάταξης. Στην περίπτωση συντονιστών με μικρή απώλεια ακτινοβολίας (ισχυρά περιορισμένοι ρυθμοί WG), ο μηχανισμός αυτός είναι η βάση για την υλοποίηση οπτικών φίλτρων αλλαγής φάσης [28].

1.4. Στόχος της εργασίας

Αν ανατρέξει κανείς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία θα παρατηρήσει ότι η αυστηρά αναλυτική μελέτη της σύζευξης οπτικού συντονιστή με διηλεκτρικό κυματοδηγό αφορά κυρίως τις περιπτώσεις κυλίνδρου ή δακτυλίου με διηλεκτρική πλάκα [17],[19] και διηλεκτρική σφαίρα με οπτική ίνα. Παρόλα αυτά, δεν έχει εξεταστεί μέχρι τώρα εκτενώς και με πλήρως αναλυτικές μεθόδους η διάταξη σύζευξης διηλεκτρικής σφαίρας και πλάκας. Πράγματι, οι υπάρχουσες εργασίες που πραγματεύονται το συγκεκριμένο ζήτημα βασίζονται είτε σε απλουστευμένες θεωρητικές μεθόδους και υπολογιστικές τεχνικές, είτε σε αποτελέσματα προσομοιώσεων και πειραματικών μετρήσεων [21],[30],[35]. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται εν μέρει, καθώς η έντονη «ασυμφωνία» που υπάρχει μεταξύ των δύο γεωμετριών (σφαιρική και καρτεσιανή γεωμετρία) καθιστά την αναλυτική επίλυση του προβλήματος σχετικά πολύπλοκη. Η πολυπλοκότητα έγκειται κυρίως στη διατύπωση των οριακών συνθηκών του προβλήματος, δεδομένου ότι απαιτείται χρήση δύο συστημάτων

συντεταγμένων συνοδευόμενα από τις αντίστοιχες ορθογώνιες συναρτήσεις περιγραφής. Ωστόσο υπάρχουν λόγοι που καθιστούν το συγκεκριμένο θέμα άξιο διερεύνησης και εισάγουν προκλήσεις τόσο για την παρούσα εργασία, όσο και για μελλοντική έρευνα.

Πρώτον, οπτικές διατάξεις σαν κι αυτή κατασκευάζονται σε ιδιαίτερα μικρή κλίμακα, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται μονορυθμική λειτουργία, με μεγάλο εύρος ζώνης και δυνατότητα ένταξης σε ολοκληρωμένα κυκλώματα. Στις εφαρμογές αυτές προσφέρονται οι επίπεδοι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί οι οποίοι, αλληλεπιδρώντας με κοιλότητες συντονισμού, εκδηλώνουν έντονα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα χρήσιμα για την επεξεργασία οπτικού σήματος.

Δεύτερον, δεδομένης της περιορισμένης βιβλιογραφίας σχετικά με το συγκεκριμένο πρόβλημα σύζευξης, κρίνεται απαραίτητη μία αμιγώς αναλυτική μελέτη που θα καλύπτει το πλήρες κυματικό πρόβλημα σκέδασης από σφαιρικά σώματα, παρουσία επίπεδων κυματοδηγών. Γι' αυτό μία σημαντική πρόκληση που καλείται να αντιμετωπίσει αυτή η εργασία είναι η αυστηρή εξέταση του προβλήματος σκέδασης, σύζευξης και συντονισμού για τη συγκεκριμένη διάταξη, με χρήση των πλέον κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων και φυσικά της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

Τέλος, η μελέτη αυτής της σχετικά απλής διάταξης συντονισμού μπορεί να προσφέρει αποτελέσματα και ισχυρές βάσεις για μελέτη και ανάπτυξη πιο σύνθετων διατάξεων που θα περιλαμβάνουν περιοδικές ή άλλες πολύπλοκες δομές διηλεκτρικών σφαιρών συζευγμένες με επίπεδους διηλεκτρικούς κυματοδηγούς.

2. Διατύπωση του προβλήματος

2.1. Περιγραφή της διάταξης

Η διάταξη που θα μελετηθεί αποτελείται από ένα άπειρο διηλεκτρικό κυματοδηγό σχήματος πλάκας (dielectric slab) με πραγματικό δείκτη διάθλασης n_2 και ένα σφαιρικό διηλεκτρικό συντονιστή (spherical dielectric resonator) με πραγματικό δείκτη διάθλασης n_4 .

Ο κυματοδηγός εκτείνεται σε όλο το οριζόντιο επίπεδο x, y , ενώ έχει πάχος d ως προς τη διάσταση z . Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, η διηλεκτρική πλάκα θεωρείται ότι είναι τοποθετημένη συμμετρικά ως προς το επίπεδο $z = 0$, έτσι ώστε η άνω επιφάνειά της να ταυτίζεται με το επίπεδο $z = \frac{d}{2}$ και η κάτω επιφάνεια να ταυτίζεται με το επίπεδο $z = -\frac{d}{2}$.

Η διηλεκτρική σφαίρα (σφαιρικός συντονιστής) έχει ακτίνα a και κέντρο το σημείο K που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης \underline{r}_c . Επιπλέον, θεωρείται ότι η σφαίρα βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από τον κυματοδηγό, έτσι ώστε να μην έχει κοινά σημεία με αυτόν⁴. Δηλαδή: $\hat{z} \cdot \underline{r}_c > a + \frac{d}{2}$.

Όπως είναι φανερό από στο Σχήμα 1.1, ο χώρος διαιρείται σε τέσσερις περιοχές κάθε μία από τις οποίες διακρίνεται από συγκεκριμένες ηλεκτρικές ιδιότητες (ϵ, μ).

$$\text{Περιοχή I: } V_1 = \left\{ \underline{r} : x, y \in \mathbb{R}, z > \frac{d}{2} \right\} \setminus V_4, \quad n_1 = n_0 = 1$$

$$\text{Περιοχή II: } V_2 = \left\{ \underline{r} : x, y \in \mathbb{R}, -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \right\}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_{2r}\mu_{2r}} = \sqrt{\epsilon_{2r}}$$

$$\text{Περιοχή III: } V_3 = \left\{ \underline{r} : x, y \in \mathbb{R}, z < -\frac{d}{2} \right\}, \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_{3r}\mu_{3r}} = \sqrt{\epsilon_{3r}}$$

$$\text{Περιοχή IV: } V_4 = \left\{ \underline{r} : |\underline{r} - \underline{r}_c| \leq a \right\}, \text{ εννοείται ότι } V_4 \cap V_2 = \emptyset, \quad n_4 = \sqrt{\epsilon_{4r}\mu_{4r}} = \sqrt{\epsilon_{4r}}$$

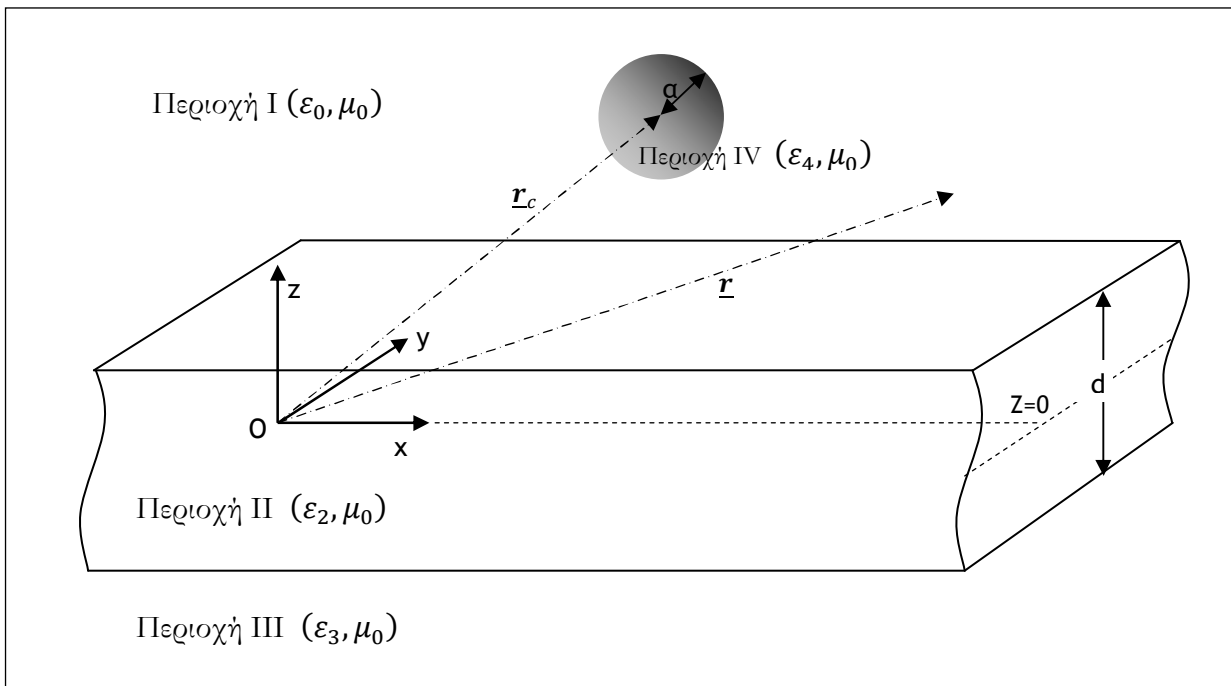
Όπου:

$$\underline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} : \text{ Το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου } (x, y, z) \text{ στο χώρο.}$$

⁴ Η σφαίρα επιλέγεται αυθαίρετα να βρίσκεται «πάνω» (Περιοχή I) και όχι «κάτω» (Περιοχή III) από τη διηλεκτρική πλάκα, χωρίς αυτό να είναι εις βάρος της γενικότητας της ανάλυσης. Αναγκαία προϋπόθεση αποτελεί το να μην υπάρχει σημείο επαφής συντονιστή και κυματοδηγού.

Σε όλες τις περιοχές του χώρου τα μέσα διάδοσης θεωρούνται ισότροπα, ενώ δεχόμαστε ότι έχουν ίδια τιμή μαγνητικής διαπερατότητας ίση με $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$. Στη συνέχεια, προκειμένου να απλοποιήσουμε την ανάλυση, θα θεωρήσουμε ότι οι δείκτες διάθλασης έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- $n_1 = n_3 = n_0 = 1$ (κενός χώρος)
- $n_2 > n_0$
- $n_4 > n_0$



Σχήμα 2.1

Αφού περιγράψαμε λεπτομερώς τη γεωμετρική δομή της διάταξης, είναι απαραίτητο να εξηγήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά της χαρακτηριστικά και να διατυπώσουμε τα ζητούμενα της ανάλυσης που θα ακολουθήσει.

Το βασικό στοιχείο της διάταξης είναι ο κυματοδηγός. Μέσα από αυτόν, και κατά τη διεύθυνση x , διαδίδεται ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το οποίο στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι περιγράφεται από τον κύριο ρυθμό διάδοσης εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου, TE_1 . Το πεδίο αυτό εντοπίζεται κυρίως στο εσωτερικό του κυματοδηγού και έχει τη μορφή διαδιδόμενου κύματος. Ωστόσο, ένα μέρος της ισχύος του διαφεύγει πέρα από τα όρια του κυματοδηγού (διεύθυνση z) με ισχυρή απόσβεση, λόγω των μη ομογενών οριακών συνθηκών που ικανοποιούν τα πεδία στις οριακές επιφάνειες (βλ. Παρ. 1.1).

Παρόλη την απόσβεση που υφίσταται, το διαφεύγον πεδίο μπορεί να εντοπιστεί στην περιοχή του σφαιρικού συντονιστή, εφόσον αυτός βρίσκεται αρκετά κοντά στον κυματοδηγό. Στην περίπτωση αυτή, μέρος του πεδίου εισχωρεί στο σφαιρικό σώμα, με αποτέλεσμα να διεγείρει σε αυτό επιφανειακούς ρυθμούς συντονισμού, μέσω του μηχανισμού που περιγράφηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο (βλ. Παρ. 1.3). Οι ρυθμοί αυτοί είναι αρκετά έντονοι ώστε να επανεικπέμπονται προς τον κυματοδηγό και, υπερτιθέμενοι στο κυματοδηγούμενο πεδίο, να επιδρούν στους συντελεστές διάδοσης του κυματοδηγού. Το αποτέλεσμα είναι μία ιδιόμορφη απόκριση συχνότητας για τη διάταξη, η οποία δίνει τη δυνατότητα να γίνει εκμεταλλεύσιμη στα πλαίσια διαφόρων τηλεπικοινωνιακών εφαρμογών.

Μέσω της ανάλυσης που θα ακολουθήσει, καλούμαστε να υπολογίσουμε αναλυτικά τη μορφή του σκεδαζόμενου πεδίου μέσω του οποίου μπορούν να εξαχθούν ποιοτικά και ποσοτικά συμπεράσματα για τους ρυθμούς συντονισμού και τους συντελεστές διάδοσης, οι οποίοι αποκαλύπτουν την αρμονική απόκριση της διάταξης.

2.2. Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης

Όπως αναφέρθηκε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο, ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας είναι η εξέταση του παραπάνω προβλήματος σκέδασης μέσω της πλέον αναλυτικής μεθόδου. Αυτός ο στόχος κρίνεται σημαντικός, διότι οι αναλυτικές μέθοδοι προσφέρουν ακριβή αποτελέσματα, ευελιξία στη ρύθμιση των παραμέτρων και πληρότητα ως προς την επίλυση, χωρίς παράτολμες προσεγγίσεις ή παραδοχές. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας πλήρως αναλυτικές μεθόδους εξασφαλίζουμε ασφαλή συμπεράσματα, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους πειραματικού ή υπολογιστικού χαρακτήρα, οι οποίες βασίζονται σε σημαντικές απλουστεύσεις και συνήθως οδηγούν σε διαισθητικά ή υπό προϋποθέσεις ακριβή αποτελέσματα. Για τους παραπάνω λόγους, η διαδικασία επίλυσης που ακολουθείται στην παρούσα εργασία βασίζεται στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων και των συναρτήσεων Green, η οποία, εφαρμοζόμενη στον άξονα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, προσφέρει την πληρέστερη και μαθηματικά αυστηρότερη αντιμετώπιση προβλημάτων σκέδασης.

Η διαδικασία επικεντρώνεται στην επίλυση μίας θεμελιώδους ολοκληρωτικής εξίσωσης για το ηλεκτρικό πεδίο που πηγάζει από το πλήρως διανυσματικό «Δεύτερο Θεώρημα του Green». Η ολοκληρωτική εξίσωση αποδεικνύεται καταλληλότερη των αντίστοιχων σημειακών κυματικών εξισώσεων του προβλήματος, καθώς η απευθείας επίλυση των τελευταίων είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Αυτό οφείλεται στην πολυπλοκότητα που εισάγει η γεωμετρία στην έκφραση των οριακών συνθηκών.

Η ολοκληρωτική εξίσωση που πρόκειται να λυθεί, έχει ως πυρήνα τη Δυαδική Συνάρτηση Green (Dyadic Green's Function), η οποία αποτελεί ένα από τα ισχυρότερα μαθηματικά εργαλεία που διαθέτει η θεωρία ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Επομένως, θεμελιώδες βήμα της διαδικασίας θα αποτελέσει ο υπολογισμός της δυαδικής συνάρτησης Green για κάθε περιοχή του χώρου. Στη συνέχεια, μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης και με κατάλληλη έκφραση των όρων που την αποτελούν, θα προσδιοριστεί το πεδίο μέσα στον όγκο του σφαιρικού σκεδαστή. Το πεδίο αυτό σε συνδυασμό με την κατάλληλη συνάρτηση Green θα οδηγήσει τελικά μέσω της ίδιας ολοκληρωτικής εξίσωσης στην εύρεση του συνολικού πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού, το οποίο είναι και το βασικό ζητούμενο της ανάλυσης. Γνωρίζοντας το συνιστάμενο πεδίο στο εσωτερικό του κυματοδηγού θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε κάποια σημαντικά μεγέθη της διάταξης, όπως τους συντελεστές μετάδοσης/ ανάκλασης, που καταδεικνύουν με σαφήνεια τη συμπεριφορά και το ρόλο του συντονιστή και της διάταξης κυματοδότησης.

3. Σχηματισμός Εξισώσεων

3.1 Σχηματισμός της Διαφορικής Εξίσωσης

Σε κάθε περιοχή του χώρου τα πεδία οφείλουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell. Οι παρακάτω εξισώσεις γράφονται στο πεδίο της συχνότητας για αρμονικά χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ($e^{j\omega t}$). Επιπλέον θα έχουν γενική μορφή, δηλαδή θα εμπλέκουν όρους πηγών, ώστε να έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόζονται κατά περίπτωση:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu_0\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\varepsilon(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \rho(\underline{\mathbf{r}}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mu\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.4)$$

Όπου:

$$\varepsilon(\underline{\mathbf{r}}) = \begin{cases} \varepsilon_0 n_0^2 & , \underline{\mathbf{r}} \in V_1 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} = \varepsilon_0 n_2^2 & , \underline{\mathbf{r}} \in V_2 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{r3} = \varepsilon_0 n_0^2 & , \underline{\mathbf{r}} \in V_3 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{r4} = \varepsilon_0 n_4^2 & , \underline{\mathbf{r}} \in V_4 \end{cases} \quad (3.5)$$

Η ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\varepsilon(\underline{\mathbf{r}})$ είναι κλιμακωτής μορφής, δηλαδή έχει σταθερή τιμή σε κάθε μια περιοχή του χώρου (I, II, III και IV), ενώ η μαγνητική διαπερατότητα μ είναι σταθερή σε όλο το χώρο και είναι ίση με $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$. Υπενθυμίζεται ότι $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$.

Αρχικά θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν ανεξάρτητες πηγές (ρεύματα και φορτία).

Δηλαδή:

$$\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{και} \quad \rho(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad , \quad \text{σε κάθε περιοχή.}$$

Τότε οι εξισώσεις (3.1) ως (3.4) , για κάθε περιοχή ξεχωριστά, γράφονται:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = -j\omega\mu_0\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = j\omega\varepsilon(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.9)$$

Συνδυάζοντας τις (3.6) και (3.7) προκύπτει μία διαφορική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε περιοχή του χώρου:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - k^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.10)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ταυτότητα: $\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$ και λαμβάνουμε υπόψη ότι: $\nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})) = 0$, λόγω της (3.8).

Επομένως η (3.10) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) &= k^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \rightarrow \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) + k^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{όπου: } k(\underline{\mathbf{r}}) = \omega\sqrt{\varepsilon(\underline{\mathbf{r}})\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r(\underline{\mathbf{r}})} = k_0n(\underline{\mathbf{r}})$$

Η εξίσωση (3.11) είναι γνωστή ως ομογενής εξίσωση Helmholtz.

Τα πεδία οφείλουν να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες είναι:

$$\hat{\mathbf{n}}_s \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})|_{\underline{\mathbf{r}} \in S_+} = \hat{\mathbf{n}}_s \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})|_{\underline{\mathbf{r}} \in S_-} \quad (3.12)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})|_{\underline{\mathbf{r}} \in S_+} = \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})|_{\underline{\mathbf{r}} \in S_-} \quad (3.13)$$

όπου με το συμβολισμό: $\underline{\mathbf{r}} \in S_-$ και $\underline{\mathbf{r}} \in S_+$ υποδηλώνονται κατ' αντιστοιχία τα σημεία του χώρου που βρίσκονται «ακριβώς πριν» και «ακριβώς μετά» από μία διαχωριστική επιφάνεια S . Το σύμβολο $\hat{\mathbf{n}}_s$ αντιπροσωπεύει το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα με φορά από το S_- στο S_+ .

Επιπλέον το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και απορρόφησης του Sommerfeld στο άπειρο. Η συνθήκη για το ηλεκτρικό πεδίο διατυπώνεται ως εξής⁵:

$$|\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - jk(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| = o(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

$$|\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| = O(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η ανάλυση από δω και πέρα θα επικεντρωθεί κυρίως στο ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό δεν περιορίζει την πληρότητα του προβλήματος, καθώς για οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο μπορεί άμεσα να προκύψει το αντίστοιχο μαγνητικό, μέσω της εξίσωσης (3.1).

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι σε κάποια περιοχή του χώρου υπάρχει μία ρευματική κατανομή $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ η οποία προκαλεί ένα ηλεκτρικό πεδίο $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$ στο χώρο.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) προκύπτει μία μη ομογενής κυματική εξίσωση για το πεδίο $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - k^2(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

όπου: $k(\mathbf{r}) = \omega\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r(\mathbf{r})} = k_0n(\mathbf{r})$

Εφαρμόζοντας και πάλι τη διανυσματική ταυτότητα: $\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$

προκύπτει:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= k^2(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - j\omega\mu_0\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \\ \rightarrow \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})) + j\omega\mu_0\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση την (3.3), θεωρώντας $\varepsilon = \sigma\alpha\theta$ για κάθε περιοχή ξεχωριστά, τότε έχουμε:

⁵ Οι συμβολισμοί: $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ και $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ έχουν την ακόλουθη σημασία:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{και} \quad \frac{f(x)}{g(x)} < \sigma\alpha\theta, \quad x \rightarrow x_0$$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) + j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.18)$$

Επιπλέον έχουμε τη δυνατότητα να εκφράσουμε το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης συναρτήσει μόνο του ρεύματος $\underline{\mathbf{J}}$, αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση συνέχειας, η οποία συνδέει τη ρευματική διέγερση $\underline{\mathbf{J}}$ με την αντίστοιχη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ ως εξής:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} + j\omega\rho = 0 \quad (3.19)$$

Στη συνέχεια, εκφράζουμε τον όρο $\nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)$ μέσω της (3.19), οπότε έχουμε:

$$\nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \left(\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \right) \quad (3.20)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την (3.20) στην (3.18) προκύπτει η μη ομογενής εξίσωση Helmholtz για το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία για μία τυχαία περιοχή (με σταθερό k) γράφεται [3]:

$$(\nabla^2 + k^2)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \left(1 + \frac{\nabla \nabla \cdot}{k^2} \right) \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.21)$$

Η παραπάνω διανυσματική κυματική εξίσωση ισοδυναμεί με τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις, κάθε μία από τις οποίες συσχετίζει τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου με τη ρευματική διέγερση. Ποιο συγκεκριμένα, κάθε συνιστώσα του ρεύματος $\underline{\mathbf{J}} = J_x \hat{\mathbf{x}} + J_y \hat{\mathbf{y}} + J_z \hat{\mathbf{z}}$ εμφανίζεται και στις τρεις συνιστώσες του πεδίου $\underline{\mathbf{E}} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$, με αποτέλεσμα να προκύπτει ένα έχουμε ένα πεδίο της μορφής:

$$\underline{\mathbf{E}} = E_x(J_x, J_y, J_z) \hat{\mathbf{x}} + E_y(J_x, J_y, J_z) \hat{\mathbf{y}} + E_z(J_x, J_y, J_z) \hat{\mathbf{z}}$$

Διατυπώνοντας εναλλακτικά τον παραπάνω ισχυρισμό, μπορούμε να πούμε ότι κάθε μία ρευματική συνιστώσα, έστω η J_x , δημιουργεί ένα τρισδιάστατο ηλεκτρικό πεδίο, της μορφής:

$$\underline{\mathbf{E}}^{(x)} = (E_{xx}, E_{xy}, E_{xz})$$

όπου ο εκθέτης (x) συμβολίζει την αντιστοιχία στη ρευματική συνιστώσα J_x .

Παρόμοια, η J_y και η J_z θα έδιναν: $\underline{\mathbf{E}}^{(y)} = (E_{yx}, E_{yy}, E_{yz})$ και $\underline{\mathbf{E}}^{(z)} = (E_{zx}, E_{zy}, E_{zz})$

Προκειμένου να αποφύγουμε την πλοκή των συνιστωσών, συμφέρει να υιοθετήσουμε ένα εναλλακτικό συμβολισμό. Ο συμβολισμός που εξυπηρετεί αυτή την ανάγκη είναι αυτός των ταυιστών 2^{ns} τάξης, ή δυάδων. Οι ιδιότητες των δυάδων παρουσιάζονται με λεπτομέρεια στην παραπομπή [8]. Ακολουθώντας το νέο συμβολισμό, η ρευματική διέγερση και το ηλεκτρικό πεδίο θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\bar{\mathbf{J}} = J_x \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + J_y \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + J_z \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$$

και

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{matrix} E_{xx} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} & + E_{xy} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} & + E_{xz} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}} \\ + E_{yx} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} & + E_{yy} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} & + E_{yz} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}} \\ + E_{zx} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} & + E_{zy} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} & + E_{zz} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \end{matrix}$$

Η κυματική εξίσωση τώρα θα είναι:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - k^2(\mathbf{r})\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.21)$$

ενώ η εξίσωση Helmholtz που προκύπτει από αυτή θα είναι:

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Όπου:

$$\bar{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{μοναδιαία δυάδα}).$$

και

$$\nabla\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}} \\ + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} & + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}} \\ + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} & + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} & + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και συνθηκών θα ήταν ικανό να οδηγήσει στη (μοναδική) λύση, εφόσον μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών στην κυματική εξίσωση που προκύπτει και να εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες. Παρόλαυτά, η πολυπλοκότητα των οριακών συνθηκών δεν επιτρέπει την απευθείας επίλυση. Για το λόγο αυτό, θα καταφύγουμε σε ένα εναλλακτικό

τρόπο επίλυσης, σύμφωνα με τον οποίο θα σχηματίσουμε και θα επιλύσουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο.

3.2 Σχηματισμός της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Η ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος θα προκύψει από την εφαρμογή του 2^{ου} θεωρήματος Green για το ζεύγος συναρτήσεων: $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ σε όλο το χώρο $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ που περιβάλλεται από κλειστή επιφάνεια S . Συμβολίζουμε ως:

$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$: τη δυαδική συνάρτηση Green.

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$: μία φραγμένη και συνεχή διανυσματική συνάρτηση με φραγμένες και συνεχείς παραγώγους.

Επίσης ορίζουμε το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S διάνυσμα, $\hat{\mathbf{n}}_s$, με φορά από το εσωτερικό προς το εξωτερικό του όγκου V .

Δεύτερο Θεώρημα Green [1]:

$$\begin{aligned} & \iiint_V [(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))] d\mathbf{r} \\ &= \oiint_S [(\hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_s \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))] ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα το θεώρημα και να οδηγηθούμε σε χρήσιμα αποτελέσματα, πρέπει να ορίσουμε κατάλληλα τα μεγέθη $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, καθορίζοντας με ακρίβεια τα χαρακτηριστικά του χώρου V στον οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα.

Η $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι η δυαδική συνάρτηση Green η οποία αποτελεί λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης [3], [11]:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_i^2(\mathbf{r})\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\mathbf{1}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.24)$$

Όπου:

$$k_i = \begin{cases} k_1 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_1 \cup V_4 \\ k_2 & , \quad \mathbf{r} \in V_2 \\ k_3 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή επιπλέον ικανοποιεί την εξίσωση του Gauss:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad , \quad \underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}' \quad (3.25)$$

καθώς και τις συνθήκες οριακών επιφανειών (βλ. Σχήμα 3.1) και ακτινοβολίας:

$$\hat{\mathbf{n}}_s \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (3.27)$$

$$|\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + jk_i(\underline{\mathbf{r}})\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')| = o(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

$$|\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}})| = O(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

Η συνάρτηση Green αποτελεί ένα εξαιρετικά σημαντικό εργαλείο της ανάλυσής μας, και γι' αυτό θα χρειαστεί να δικαιολογήσουμε τον ορισμό της και τις εξισώσεις που ικανοποιεί. Αυτό όμως θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο, που αφιερώνεται εξ ολοκλήρου στον προσδιορισμό της συνάρτησης Green και τις ιδιότητές της. Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου μας αρκεί να λάβουμε τα παραπάνω στοιχεία ως δεδομένα και να συνεχίσουμε με τη διαδικασία σχηματισμού της ολοκληρωτικής εξίσωσης που επιλύει το πρόβλημα.

Η διανυσματική συνάρτηση $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}})$ θα οριστεί ως η διαφορά:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})$$

Όπου

$\underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})$: Η λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης, που ορίζεται σε όλο το χώρο, με την παραδοχή ότι ο όγκος V_4 αποτελείται από υλικό με δείκτη διάθλασης $n_4 = n_0$ (ίδιο με της Περιοχής I). Επομένως το πεδίο αυτό ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) - k_i^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.30)$$

Όπου:

$$k_i = \begin{cases} k_1 = k_0 & , \quad \underline{\mathbf{r}} \in V_1 \cup V_4 \\ k_2 & , \quad \underline{\mathbf{r}} \in V_2 \\ k_3 = k_0 & , \quad \underline{\mathbf{r}} \in V_3 \end{cases}$$

Και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\hat{\mathbf{n}}_s \times \underline{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \text{ συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \text{ συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (3.32)$$

$$|\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) + jk_i(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})| = o(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

$$|\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| = O(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.34)$$

$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$: Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο που ορίζεται σε όλο το χώρο (με τα χαρακτηριστικά που καθορίσαμε στην παράγραφο 3.1) και ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση (3.10):

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - k^2(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$$

$$k = \begin{cases} k_1 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_1 \\ k_2 & , \quad \mathbf{r} \in V_2 \\ k_3 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_3 \\ k_4 & , \quad \mathbf{r} \in V_4 \end{cases}$$

καθώς και τις συνθήκες (3.12), (3.13), (3.14) και (3.15) τις οποίες ξαναγράφουμε:

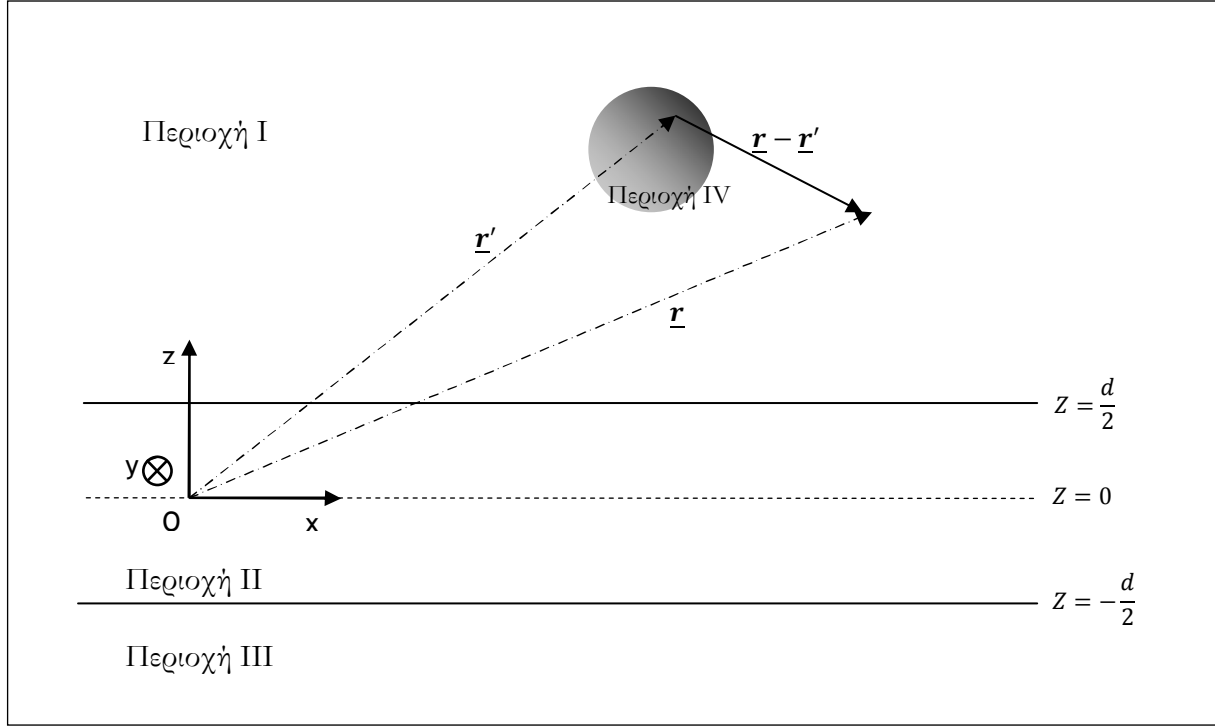
$$\hat{\mathbf{n}}_s \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \text{ και για } \mathbf{r} \in \partial V_4$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \text{ και για } \mathbf{r} \in \partial V_4$$

$$|\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + jk(\mathbf{r})\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| = o(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty$$

$$|\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| = O(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty$$

Υπενθυμίζεται εδώ ότι η εξίσωση που ικανοποιεί το συνιστάμενο πεδίο είναι ομογενής, επειδή δεν υπάρχει ανεξάρτητη ρευματική διέγερση που να το δημιουργεί, δηλαδή: $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = 0$.



Σχήμα 3.1

Παρατηρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})$ αντιπροσωπεύει ουσιαστικά το πεδίο που προκαλείται αποκλειστικά από την παρουσία της ανομοιογένειας στον όγκο V_4 . Πράγματι, αν ο όγκος V_4 δεν αποτελούσε χωριστή διαταραχή του ημιάπειρου χώρου $V_1 \cup V_4$ τότε το μόνο πεδίο που θα υπήρχε είναι το $\underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})$, δηλαδή θα ισχυρε ότι: $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \equiv \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})$.

Το δεύτερο θεώρημα Green μπορεί τώρα να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\nabla \times \nabla \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \right) \cdot \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \cdot (\nabla \times \nabla \times \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \right] d\underline{\mathbf{r}} = \\ & = \oint_S \left[(\hat{\mathbf{n}}_s \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}))) \cdot (\nabla \times \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) - (\nabla \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}))) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_s \times \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \right] ds \quad (3.35) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας με τις κυματικές εξισώσεις (3.10), (3.24) και (3.29) που ικανοποιούν τα πεδία, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[(k^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - k_i^2(\underline{\mathbf{r}})\underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \cdot \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \cdot (k_i^2(\underline{\mathbf{r}})\overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \mathbf{1}\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')) \right] d\underline{\mathbf{r}} \\ & = \oint_S \left[(\hat{\mathbf{n}}_s \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}))) \cdot (\nabla \times \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) - (\nabla \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}))) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_s \times \overline{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \right] ds \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') + \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}') + \iiint_V (k^2(\underline{\mathbf{r}}) - k_i^2(\underline{\mathbf{r}})) \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}} = I_{S\infty} \quad (3.36)$$

Όπου θέσαμε:

$$I_{S\infty} = \iint_{S_\infty} \left[\left(\hat{\mathbf{n}}_s \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \right) \cdot (\nabla \times \bar{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) - \left(\nabla \times (\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) - \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}})) \right) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_s \times \bar{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \right] ds$$

Το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα ($I_{S\infty}$) μπορεί να χωριστεί στα επιμέρους ολοκληρώματα:

I_{S1a} , I_{S1b} , I_{S2a} , I_{S2b} , I_{S3a} , I_{S3b} , I_{S4a} , I_{S4b} , $I_{S-\infty}$, $I_{S+\infty}$ και $I_{S_{1,2a+\infty}}$, $I_{S_{1,2a-\infty}}$ που αντιστοιχούν στις επιφάνειες: S_{1a} , S_{1b} , S_{2a} , S_{2b} , S_{3a} , S_{3b} , S_{4a} , S_{4b} , $S_{-\infty}$, $S_{+\infty}$ και $S_{1,2a+\infty}$, $S_{1,2a-\infty}$ όπως αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα 3.2.

Ωστόσο, μέσω κατάλληλων συλλογισμών και εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες που ικανοποιούν τα διανυσματικά μεγέθη, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $I_{S\infty}$ μηδενίζεται, με αποτέλεσμα να μη συμμετέχει στην ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος. Η συλλογιστική πορεία είναι η ακόλουθη:

Πρώτον, λόγω των οριακών συνθηκών στις επιφάνειες, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα ζεύγη ολοκληρωμάτων: (I_{S1a}, I_{S1b}) , (I_{S2a}, I_{S2b}) , (I_{S3a}, I_{S3b}) , (I_{S4a}, I_{S4b}) αλληλοαναιρούνται. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι σε κάθε επιφάνεια υπάρχει συνέχεια των ολοκληρωτέων ποσοτήτων και, επιπλέον, τα δύο ολοκληρώματα που εφαρμόζονται έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

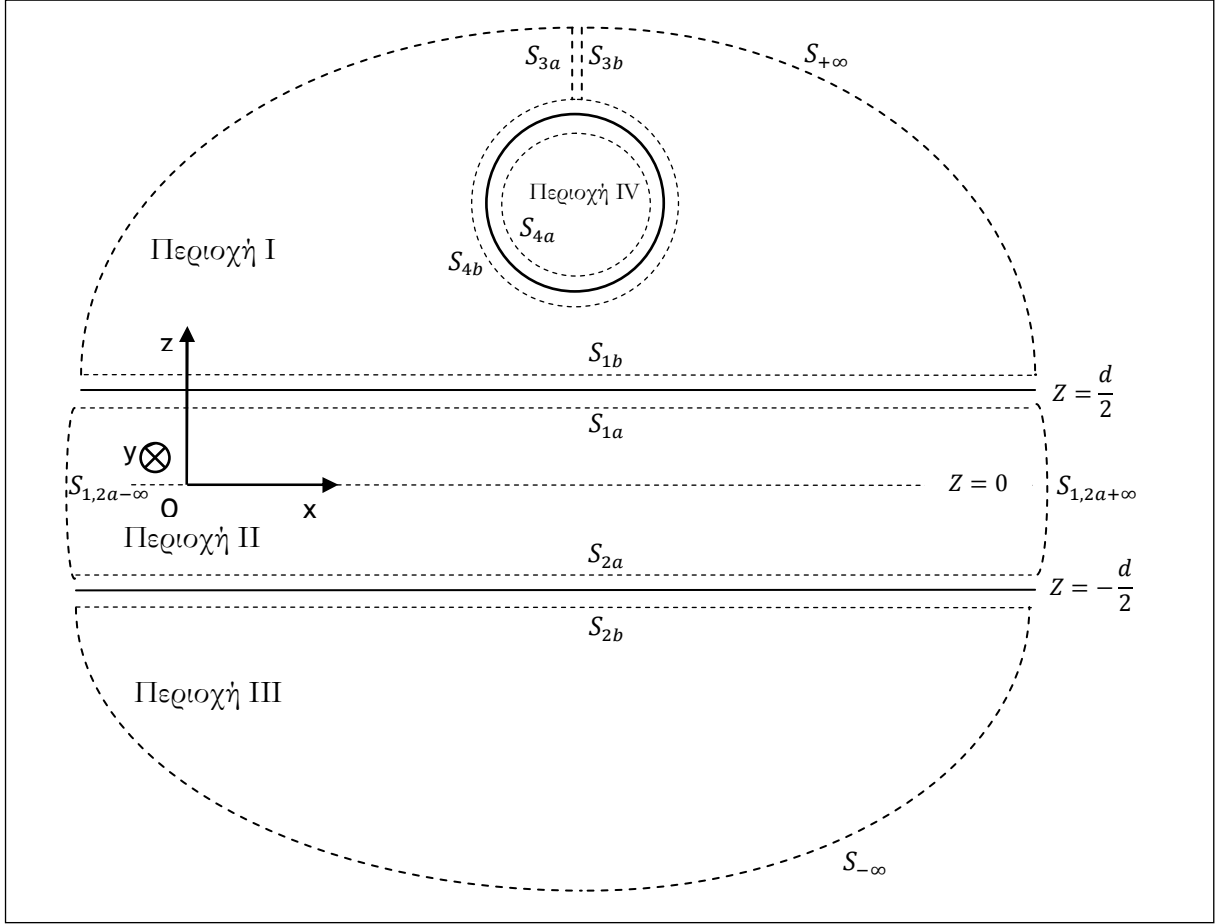
Δεύτερον, τα ολοκληρώματα $I_{S_{1,2a+\infty}}$, $I_{S_{1,2a-\infty}}$ μηδενίζονται για $\underline{\mathbf{r}} \rightarrow \infty$ για λόγους ορθογωνιότητας μεταξύ πεδιακών συνιστωσών και διαχωριστικής επιφάνειας.

Τέλος, λόγω των συνθηκών ακτινοβολίας στο άπειρο, ισχύει:

$$\lim_{\underline{\mathbf{r}} \rightarrow \infty} [\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}), \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}), \bar{\underline{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')] = 0$$

Συνεπώς, όταν η επιφάνεια S εκτείνεται ως το άπειρο, τα επιφανειακά ολοκληρώματα $I_{S+\infty}$ και $I_{S-\infty}$ εφαρμόζονται σε συναρτήσεις που οριακά μηδενίζονται. Οπότε, συνεπάγεται ότι: $I_{S-\infty}, I_{S+\infty} \rightarrow 0$.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $I_{S\infty} \rightarrow 0$.



Σχήμα 3.2

Επομένως:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') = \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}') + \iiint_V (k^2(\underline{\mathbf{r}}) - k_i^2(\underline{\mathbf{r}})) \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}} \quad (3.37)$$

Εναλλάσσοντας τα σύμβολα $\underline{\mathbf{r}}$ και $\underline{\mathbf{r}}'$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα συμμετρίας⁶ για τη συνάρτηση Green προκύπτει:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) + \iiint_V (k^2(\underline{\mathbf{r}}') - k_i^2(\underline{\mathbf{r}}')) \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}}' \quad (3.38)$$

Ωστόσο παρατηρούμε ότι για κάθε περιοχή του χώρου ισχύει η παρακάτω κατανομή:

$$k^2(\underline{\mathbf{r}}) - k_i^2(\underline{\mathbf{r}}) = \begin{cases} 0 & , \quad \underline{\mathbf{r}} \in V_1 \cup V_2 \cup V_3 \\ k_4^2 - k_0^2 & , \quad \underline{\mathbf{r}} \in V_4 \end{cases} \quad (3.39)$$

⁶ Για τη δυαδική συνάρτηση Green ισχύει η ιδιότητα: $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}', \underline{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}')$.

Συνεπώς, τα χωρικά ολοκληρώματα στους χώρους V_1, V_2, V_3 μηδενίζονται και η ολοκληρωτική εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) + (k_4^2 - k_0^2) \iiint_{V_4} \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}}' \quad (3.40)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη θεμελιώδη ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματός μας, καθώς πάνω σε αυτή θα βασιστεί όλη η περαιτέρω ανάλυση για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο. Από μαθηματικής πλευράς η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζεται ως Ολοκληρωτική Εξίσωση Fredholm Δευτέρου Τύπου με πυρήνα τη συνάρτηση $\overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ και παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά τα οποία αξίζει να σημειωθούν:

- Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται τόσο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης όσο και εντός του ολοκληρώματος του δεξιού μέλους. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα περιορίζεται στον σφαιρικό όγκο της περιοχής IV, επομένως είναι φανερό ότι η λύση της εξίσωσης για κάθε σημείο του χώρου εξαρτάται πλήρως από τη γνώση του ηλεκτρικού πεδίου στο σφαιρικό όγκο. Έτσι η λύση πρέπει να ξεκινήσει από την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον όγκο ολοκλήρωσης και στη συνέχεια, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο.
- Η εύρεση του συνολικού πεδίου, τόσο στο χώρο ολοκλήρωσης όσο και στον υπόλοιπο χώρο, προϋποθέτει τη γνώση της συνάρτησης Green σε κάθε περιοχή του χώρου. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί μία πρωτογενή σχέση διέγερσης και πεδίου η οποία είναι προσαρμοσμένη στην εκάστοτε διάταξη. Όταν αυτή εφαρμόζεται στο πεδίο διέγερσης μέσω συνέλιξης τότε παράγεται το σκεδαζόμενο πεδίο από τον όγκο ανομοιογένειας. Η συνάρτηση Green προσδιορίζεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.
- Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου αποτελεί υπέρθεση δύο συνιστωσών: του ηλεκτρικού πεδίου $\underline{\mathbf{E}}_0$ που κυματοδηγείται από τη διάταξη (απουσία του σφαιρικού σκεδαστή) και του πεδίου σκέδασης $k_0^2(n_4^2 - n_0^2) \iiint_{V_4} \overline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}}'$ που οφείλεται αποκλειστικά στην παρουσία του σκεδαστή. Από τη μορφή της δεύτερης συνιστώσας είναι φανερό ότι το σκεδαζόμενο πεδίο παράγεται ουσιαστικά από τα ρεύματα πόλωσης που εμφανίζονται στον όγκο V_4 , η ύπαρξη των οποίων οφείλεται στη μεταβολή του δείκτη διάθλασης $n_4^2 - n_0^2$ στις περιοχές I και IV.

Παράρτημα

Π.3.1. Προσδιορισμός του κυματοδηγούμενου ηλεκτρικού πεδίου

Το ανεξάρτητο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διέγερσης ($\underline{\mathbf{E}}_0, \underline{\mathbf{H}}_0$) της διάταξης είναι αυτό που διαδίδεται μέσα στο διηλεκτρικό κυματοδηγό. Θεωρούμε ότι το πεδίο έχει αρμονική εξάρτηση ως προς το χρόνο και κυματοδηγείται κατά την κατεύθυνση x . Επιπλέον, λόγω της γεωμετρίας της διάταξης, το κύμα θα έχει ανεξαρτησία ως προς τη διεύθυνση y (δηλαδή $\frac{\partial}{\partial y} = 0$). Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν τη μορφή:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = [E_x(z)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z)\hat{\mathbf{y}} + E_z(z)\hat{\mathbf{z}}]e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = [H_x(z)\hat{\mathbf{x}} + H_y(z)\hat{\mathbf{y}} + H_z(z)\hat{\mathbf{z}}]e^{j(\omega t - \beta x)}$$

Όπου: ω η κυκλική συχνότητα του πεδίου, β η σταθερά διάδοσης στη διεύθυνση διάδοσης ($\hat{\mathbf{x}}$) και t ο χρόνος. Τα πεδία αυτά ικανοποιούν την εξίσωση Faraday-Maxwell (3.6):

$$\frac{\partial E_y(z)}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_x(z)$$

$$j\beta E_z(z) + \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_y(z)$$

$$j\beta E_y(z) = j\omega\mu_0 H_z(z)$$

και την εξίσωση Ampere-Maxwell (3.7):

$$-\frac{\partial H_y(z)}{\partial z} = j\omega\varepsilon(z)E_x(z)$$

$$j\beta H_z(z) + \frac{\partial H_x(z)}{\partial z} = j\omega\varepsilon(z)E_y(z)$$

$$-j\beta H_y(z) = j\omega\varepsilon(z)E_z(z)$$

$$\text{Όπου } \varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_0 & , |z| > \frac{d}{2} \\ \varepsilon_0\varepsilon_{r2} & , |z| < \frac{d}{2} \end{cases}$$

Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τους TE ρυθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα παρακάτω:

- **TE Ρυθμοί**

Οι TE ρυθμοί ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y(z)}{\partial z^2} + (\omega^2 \varepsilon(z) \mu_0 - \beta^2) E_y(z) &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial^2 E_y(z)}{\partial z^2} + (k_0^2 n^2(z) - \beta^2) E_y(z) &= 0 \end{aligned}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης για όλο το χώρο έχουν την παρακάτω μορφή:

$$E_y(z) = \begin{cases} C e^{-\gamma z} & z > \frac{d}{2} \\ A \cos(az) + B \sin(az) & |z| < \frac{d}{2} \\ D e^{\gamma z} & z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

Όπου:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{k_0^2 n^2 - \beta^2} \\ \gamma &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2} \end{aligned}$$

Και A, B, C και D: άγνωστες σταθερές.

Εφαρμόζοντας τις Οριακές Συνθήκες χρησιμοποιώντας τις λύσεις του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$A \cos\left(\frac{ad}{2}\right) + B \sin\left(\frac{ad}{2}\right) = C e^{-\gamma \frac{d}{2}}$$

$$-Aa \cdot \sin\left(\frac{ad}{2}\right) + Ba \cdot \cos\left(\frac{ad}{2}\right) = -\gamma C e^{-\gamma \frac{d}{2}}$$

$$A \cos\left(-\frac{ad}{2}\right) + B \sin\left(-\frac{ad}{2}\right) = D e^{-\gamma \frac{d}{2}} \rightarrow A \cos\left(\frac{ad}{2}\right) - B \sin\left(\frac{ad}{2}\right) = D e^{-\gamma \frac{d}{2}}$$

$$-Aa \cdot \sin\left(-\frac{ad}{2}\right) + Ba \cdot \cos\left(-\frac{ad}{2}\right) = \gamma D e^{-\gamma \frac{d}{2}} \rightarrow Aa \cdot \sin\left(\frac{ad}{2}\right) + Ba \cdot \cos\left(\frac{ad}{2}\right) = \gamma D e^{-\gamma \frac{d}{2}}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$\begin{cases} 2A\cos\left(\frac{ad}{2}\right) = (C + D)e^{-\gamma\frac{d}{2}} \\ 2aA\sin\left(\frac{ad}{2}\right) = \gamma(C + D)e^{-\gamma\frac{d}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B\sin\left(\frac{ad}{2}\right) = (C - D)e^{-\gamma\frac{d}{2}} \\ 2aB\cos\left(\frac{ad}{2}\right) = -\gamma(C - D)e^{-\gamma\frac{d}{2}} \end{cases}$$

Έτσι προκύπτουν δύο Συνθήκες Κυματοδηγησης:

$$a \cdot \tan\left(\frac{ad}{2}\right) = \gamma$$

$$a \cdot \cot\left(\frac{ad}{2}\right) = -\gamma$$

$$\rightarrow \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \cdot \tan\left(\frac{d}{2}\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\right) = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2} \quad , \quad k_0^2 n_2^2 > \beta^2 > k_0^2 n_0^2$$

$$\rightarrow \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \cdot \cot\left(\frac{d}{2}\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\right) = -\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2} \quad , \quad k_0^2 n_2^2 > \beta^2 > k_0^2 n_0^2$$

Επίσης από τα παραπάνω είναι δυνατό να προσδιορίσουμε και τις άγνωστες σταθερές B, C και D συναρτήσει της A.

Επομένως, το εγνάρσιο ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε περιοχή θα είναι:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{y}} A e^{-j\beta x} \begin{cases} e^{-\gamma(z-\frac{d}{2})} \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} & , \quad z > \frac{d}{2} \\ \begin{cases} \cos(az) \\ \sin(az) \end{cases} & , \quad |z| < \frac{d}{2} \\ e^{\gamma(z+\frac{d}{2})} \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} & , \quad z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

Το πλάτος A εξαρτάται από την ισχύ P ανά μονάδα μήκους του προσπίπτοντος ρυθμού. Για να προκύψει η εν λόγω σχέση, πρέπει να βρεθεί η χρονική μέση τιμή της πυκνότητας ισχύος που εκφράζεται από το διάνυσμα Poynting.

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{E_y \hat{\mathbf{y}} \times (H_x^* \hat{\mathbf{x}} + H_z^* \hat{\mathbf{z}})\}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις:

$$E_y = Ae^{-j\beta x} \Phi(z)$$

$$H_x(z) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y(z)}{\partial z}$$

$$H_z(z) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y(z)$$

Όπου:

$$\Phi(z) = \begin{cases} e^{-\gamma(z-\frac{d}{2})} \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} & , \quad z > \frac{d}{2} \\ \begin{cases} \cos(az) \\ \sin(az) \end{cases} & , \quad |z| < \frac{d}{2} \\ e^{\gamma(z+\frac{d}{2})} \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} & , \quad z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

προκύπτει ότι η διανυσματική πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ισχύος είναι:

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ Ae^{-j\beta x} \Phi(z) \hat{\mathbf{y}} \times \left(\frac{e^{j\beta x}}{j\omega\mu_0} \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\beta e^{j\beta x}}{\omega\mu_0} \Phi(z) \hat{\mathbf{z}} \right) \right\} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\beta A^2}{2\omega\mu_0} \Phi^2(z)$$

Ενώ η ηλεκτρομαγνητική ισχύς ισούται με:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{x}} dz = \frac{\beta A^2}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(z) dz = \frac{A^2 \beta \left(1 + \gamma \frac{d}{2}\right)}{2\omega\mu_0 \gamma}$$

Δηλαδή η σταθερά A εκφράζεται συναρτήσει της ισχύος P :

$$A = \sqrt{\frac{2\omega\mu_0 \gamma P}{\beta \left(1 + \gamma \frac{d}{2}\right)}}$$

4. Υπολογισμός της συνάρτησης Green

4.1. Γενικές ιδιότητες της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green αντιστοιχεί στην απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε μία σημειακή, μοναδιαία διέγερση [3],[8],[11]. Η συνάρτηση αυτή περιγράφει μοναδικά το ελάχιστο σύστημα και συμβάλει στον υπολογισμό της απόκρισής του σε οποιαδήποτε διέγερση, μέσω ενός ολοκληρώματος συνελίξης⁷ [11], [12]. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, η συνάρτηση Green αντιστοιχεί στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στο χώρο μία σημειακή πηγή. Εφόσον η ανάλυσή μας εστιάζει στα ηλεκτρικά πεδία, στο εξής θα μας απασχολήσει η συνάρτηση Green που σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο.

Αρχικά θεωρούμε ότι ο χώρος V_4 έχει χαρακτηριστικά (ϵ_0, μ_0) και ότι σε αυτόν υπάρχει μία ρευματική διέγερση $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$, η οποία δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο $\bar{\mathbf{E}}_J(\mathbf{r})$ σε όλο το χώρο. Το πεδίο αυτό πρέπει, σύμφωνα με την παράγραφο 3.1, να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}}_J(\mathbf{r}) - k_i^2(\mathbf{r})\bar{\mathbf{E}}_J(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

Όπου:

$$k_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_1 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_1 \cup V_4 \\ k_2 & , \quad \mathbf{r} \in V_2 \\ k_3 = k_0 & , \quad \mathbf{r} \in V_3 \end{cases}$$

Έστω ότι η πηγή $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ είναι σημειακή και η θέση της ορίζεται από το διάνυσμα θέσης \mathbf{r}' . Τότε αυτή περιγράφεται μέσω της γενικευμένης συνάρτησης:

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.2)$$

Όπου:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

⁷ Σύμφωνα με την παραπομπή [11], η λύση για το ηλεκτρικό πεδίο ως απόκριση μίας τυχαίας ρευματικής διέγερσης προκύπτει από τον υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος:

$$\bar{\mathbf{E}}_J(\mathbf{r}) = i\omega\mu \int d\mathbf{r}' \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')$$

Σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ονομάζεται «Δυναδική Συνάρτηση Green», συμβολίζεται με $\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ και αποτελεί λύση της εξίσωσης (3.24) [3],[11] και την οποία ξαναγράφουμε εδώ για λόγους αυτονομίας του κεφαλαίου:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_i^2(\underline{\mathbf{r}})\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\mathbf{I}}\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \quad (4.3)$$

Επιπλέον, σε κάθε σημείο εκτός του σημείου διέγερσης, ικανοποιεί την εξίσωση του Gauss:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad , \quad \underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}' \quad (4.4)$$

καθώς και τις συνθήκες οριακών επιφανειών και ακτινοβολίας που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\hat{\mathbf{n}}_s \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') : \text{συνεχής για } z = \frac{d}{2} \text{ και } z = -\frac{d}{2} \quad (4.6)$$

$$|\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + jk_i(\underline{\mathbf{r}})\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')| = o(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

$$|\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}})| = O(r^{-1}) \quad r \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

Η συνάρτηση Green ορίζεται για κάθε σημείο του χώρου $\underline{\mathbf{r}}$ και αποτελεί συνδυασμό ενός πρωτογενούς πεδίου $\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ και ενός αριθμού δευτερογενών πεδίων. Ως πρωτογενές ορίζεται το πεδίο που θα δημιουργούσε η σημειακή πηγή στο χώρο, αν αυτός ήταν ελεύθερος, ισοτροπικός και άπειρος. Ως δευτερογενή πεδία ορίζονται εκείνα τα οποία οφείλονται στην παρουσία των διαχωριστικών επιφανειών της διάταξης, δηλαδή έχουν τη φύση ανακλώμενων και διαδιδόμενων κυμάτων και δεν αποτελούν άμεση απόκριση της εξωτερικής σημειακής διέγερσης.

Η συνάρτηση Green για κάθε περιοχή του χώρου είναι η εξής:

$$\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \begin{cases} \bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') & , \quad z \geq \frac{d}{2} \\ \bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') & , \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \bar{\mathbf{G}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') & , \quad z \leq -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Κάθε ένα από τα δευτερογενή πεδία ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση, αφού δεν προκύπτουν άμεσα από τη σημειακή ρευματική διέγερση, αλλά από την παρουσία των διαχωριστικών επιφανειών. Αντίθετα, το πρωτογενές πεδίο ικανοποιεί τη μη ομογενή κυματική εξίσωση. Επομένως οι κυματικές εξισώσεις που ικανοποιούνται σε κάθε περιοχή είναι:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_0^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \quad , \quad -\infty < z < +\infty \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_0^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad , \quad z \geq \frac{d}{2} \quad (4.11)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad , \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_3^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad , \quad z \leq -\frac{d}{2} \quad (4.13)$$

Όπου, για συντομία ορίσαμε: $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$. Προφανώς, λόγω γραμμικότητας των διαφορικών τελεστών, η εξίσωση (4.12) ισχύει ξεχωριστά για τα $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ και $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$.

4.2. Η συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου

Η δυαδική συνάρτηση $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ περιγράφει το πρωτογενές πεδίο απόκρισης του ελευθέρου χώρου με τα χαρακτηριστικά της Περιοχής I (ϵ_0, μ_0). Όπως θα γίνει αντιληπτό στις επόμενες παραγράφους, η συνάρτηση Green του ελευθέρου χώρου θα διαδραματίσει σημαντικό ρόλο, τόσο στον προσδιορισμό της πλήρους συνάρτησης Green (για όλο το χώρο) όσο και για την και ικανοποιεί τη μη ομογενή κυματική εξίσωση (4.10):

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - k_0^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')$$

Η εξίσωση Helmholtz που προκύπτει, σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε και το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.21), είναι:

$$(\nabla^2 + k_0^2)\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -\left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \quad (4.14)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε ένα συλλογισμό με βάση την αντίστοιχη βαθμωτή συνάρτηση Green. Η βαθμωτή συνάρτηση Green, $G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$, ικανοποιεί τη βαθμωτή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k_0^2)G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \quad (4.15)$$

Η αναλυτική της έκφραση είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία [5] και είναι η ακόλουθη:

$$G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{e^{jk_0|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|}}{4\pi|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|} \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.15) στην (4.14) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2)\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') &= \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)(\nabla^2 + k_0^2)G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \\ \rightarrow (\nabla^2 + k_0^2)\left[\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') - \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')\right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Από την οποία προκύπτει ότι:

$$\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \quad (4.18)$$

4.3. Έκφραση της συνάρτησης Green ως ολοκλήρωμα Fourier

Η σχέση (4.18) αποτελεί μία κομψή αναλυτική έκφραση της δυαδική συνάρτηση Green που προκύπτει άμεσα από την αντίστοιχη βαθμωτή συνάρτηση με την εφαρμογή του τελεστή $(\bar{\mathbf{1}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2})$. Ωστόσο, στην περίπτωση του προβλήματός μας η έκφραση της $\bar{\mathbf{G}}_0$ δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη υπό αυτή τη μορφή, καθώς η άμεση εφαρμογή του τελεστή απαιτεί εξαιρετικά πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις. Γι' αυτό είναι προτιμότερο να εργαστούμε με τη βαθμωτή συνάρτηση Green ειπεφρασμένη ως ολοκλήρωμα Fourier στον τρισδιάστατο χώρο του διανύσματος διάδοσης $\underline{\mathbf{k}}$:

$$G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{\mathbf{k}}) e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \quad (4.19)$$

Το διάνυσμα $\underline{\mathbf{k}}$ δηλώνει τον κυματικό αριθμό ανά κατεύθυνση διάδοσης και ισχύει:

$$\underline{\mathbf{k}} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} \quad (4.20)$$

$$d\underline{\mathbf{k}} = dk_x dk_y dk_z \quad (4.21)$$

Επιπλέον είναι σκόπιμο να εκφράσουμε τη συνάρτηση Dirac ως ολοκλήρωμα Fourier:

$$\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \quad (4.22)$$

Εισάγοντας τα ολοκληρώματα Fourier (4.19) και (4.22) στη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz (4.15) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2) \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{\mathbf{k}}) e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \\ \rightarrow (\nabla^2 + k_0^2) \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{\mathbf{k}}) e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\nabla^2 + k_0^2) g(\underline{\mathbf{k}}) e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k_0^2) g(\underline{\mathbf{k}}) e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Από τις τελευταία ισότητα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$g(\underline{\mathbf{k}}) = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2} \quad (4.24)$$

Πλέον διαθέτουμε μία νέα αναλυτική έκφραση για τη βαθμωτή συνάρτηση Green:

$$\begin{aligned} G_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - (k_0^2 + j\varepsilon)} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^2 + k_{\perp}^2 - (k_0^2 + j\varepsilon)} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^2 - (k_0^2 + j\varepsilon - k_{\perp}^2)} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^2 - k_{0z}^2} e^{j\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')} d\underline{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Όπου:

$$k_{0z}^2 = k_0^2 - k_{\perp}^2 + j\varepsilon \quad (4.26)$$

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.27)$$

Ο μιγαδικός όρος « $j\varepsilon$ » ($\varepsilon > 0$) αντιπροσωπεύει μέσο διάδοσης με απώλειες και υπάρχει προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο ικανοποιείται. Πράγματι, για $k^2 = k_0^2 + j\varepsilon$ η εξίσωση Helmholtz:

$$(\nabla^2 + (k_0^2 + j\varepsilon))s(\underline{\mathbf{r}}) = -f(\underline{\mathbf{r}})$$

έχει λύση

$$s(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{e^{j|\underline{\mathbf{r}}|\sqrt{k_0^2 + j\varepsilon}}}{4\pi|\underline{\mathbf{r}}|} * f(\underline{\mathbf{r}})$$

Όταν $\varepsilon \rightarrow 0^+$ τότε:

$$\sqrt{k_0^2 + j\varepsilon} = k_0 \left(1 + \frac{j\varepsilon}{k_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx k_0 + \frac{j\varepsilon}{2k_0} \approx k_0 + j\varepsilon$$

Οπότε:

$$\lim_{|\underline{r}| \rightarrow \infty} [s(\underline{r})] = \lim_{|\underline{r}| \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\varepsilon|\underline{r}|} \cdot e^{jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} * f(\underline{r}) \right] = 0$$

Δηλαδή στο άπειρο το πεδίο μηδενίζεται, γεγονός που μας ικανοποιεί.

Αφού βρέθηκε μία χρηστική έκφραση για τη βαθμωτή συνάρτηση Green του ελεύθερου χώρου, μπορούμε πλέον να τη χρησιμοποιήσουμε για τον αρχικό μας στόχο, ο οποίος είναι ο προσδιορισμός της αντίστοιχης δυαδικής συνάρτησης. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (4.25) στη σχέση (4.18) θα οδηγηθούμε σε μια έκφραση της δυαδικής συνάρτησης Green για τον ελεύθερο χώρο σε μορφή ολοκληρώματος Fourier:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_0(\underline{r}, \underline{r}') &= (\bar{\mathbf{I}} + k_0^{-2} \nabla \nabla) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_z^2 - (k_0^2 + j\varepsilon - k_{\perp}^2)} e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} d\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\mathbf{I}} - k_0^{-2} \mathbf{k} \mathbf{k}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Όπου: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

Η ολοκλήρωση θα ξεκινήσει από τη μεταβλητή k_z :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_0(\underline{r}, \underline{r}') &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\mathbf{I}} - k_0^{-2} \mathbf{k} \mathbf{k}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \\ &= k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\mathbf{I}} k_0^2 - \mathbf{k} \mathbf{k} + k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \\ &= k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} (k_0^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \\ &\quad + k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} ((\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) k_0^2 - \mathbf{k} \mathbf{k} + k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \\ &= -k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} d\mathbf{k} \\ &\quad + k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} ((\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) k_0^2 - \mathbf{k} \mathbf{k} + k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} d\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$= -k_0^{-2} \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + k_0^{-2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{\mathbf{I}}}_z \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp)} d\mathbf{k}_\perp \quad (4.29)$$

Όπου θέσαμε :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{I}}}_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{f}}(k_z) e^{jk_z(z-z')} dk_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) k_0^2 - \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{k}} + k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \right) \frac{e^{jk_z(z-z')}}{k^2 - k_0^2 - j\varepsilon} dk_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) k_0^2 - \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{k}} + k^2 \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} - j\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \right) \frac{e^{jk_z(z-z')}}{k_z^2 - (k_0^2 - k_\perp^2 + j\varepsilon)} dk_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{f}}(k_z) \frac{e^{jk_z(z-z')}}{k_z^2 - k_{0z}^2} dk_z \\ &= \begin{cases} 2j\pi \operatorname{Res}_{\substack{k_z=k_{0z} \\ \operatorname{Im}\{k_{0z}\}>0}} \left[\bar{\bar{f}}(k_z) e^{jk_z(z-z')} \right] & , z > z' \\ -2j\pi \operatorname{Res}_{\substack{k_z=k_{0z} \\ \operatorname{Im}\{k_{0z}\}<0}} \left[\bar{\bar{f}}(k_z) e^{jk_z(z-z')} \right] & , z < z' \end{cases} \quad (4.30) \end{aligned}$$

Ως k_{0z} ορίσαμε τον πόλο της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης. Για το τετράγωνο του k_{0z} έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$k_{0z}^2 = k_0^2 - k_\perp^2 + j\varepsilon = (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) + j\varepsilon = Ae^{j\varphi} \quad (4.31)$$

$$A = \sqrt{(k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)^2 + j\varepsilon^2} \quad (4.32)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ \pi - \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (4.33)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού k_{0z}^2 :

$$k_{0z} = \pm \sqrt{|A|} e^{j\frac{\varphi}{2}} = \pm \sqrt{|A|} \begin{cases} 1 + j\varepsilon & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ \varepsilon + j & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases}$$

Ονομάζουμε k_{0z1} και k_{0z2} τις δύο ξεχωριστές λύσεις:

$$k_{0z1} = \sqrt{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} \begin{cases} 1 + j\varepsilon & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ \varepsilon + j & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \text{Re}(k_{0z1}) > 0, \quad \text{Im}(k_{0z1}) > 0 \quad (4.34)$$

$$k_{0z2} = -\sqrt{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} \begin{cases} 1 + j\varepsilon & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ \varepsilon + j & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \text{Re}(k_{0z2}) < 0, \quad \text{Im}(k_{0z2}) < 0 \quad (4.35)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \bar{I}_z &= \begin{cases} 2\pi j \text{Res}_{k_z=k_{0z1}} [\bar{f}(k_z) e^{jk_z(z-z')}] & , z > z' \\ -2\pi j \text{Res}_{k_z=k_{0z2}} [\bar{f}(k_z) e^{jk_z(z-z')}] & , z < z' \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi j \lim_{k_z \rightarrow k_{0z1}} \left[\left((\bar{I} - \hat{z}\hat{z})k_0^2 - \underline{\mathbf{k}}\underline{\mathbf{k}} + k^2\hat{z}\hat{z} - j\varepsilon\hat{z}\hat{z} \right) \frac{(k_z - k_{0z1})}{(k_z - k_{0z1}) \cdot (k_z + k_{0z1})} e^{jk_z(z-z')} \right] & , z > z' \\ -2\pi j \lim_{k_z \rightarrow k_{0z2}} \left[\left((\bar{I} - \hat{z}\hat{z})k_0^2 - \underline{\mathbf{k}}\underline{\mathbf{k}} + k^2\hat{z}\hat{z} - j\varepsilon\hat{z}\hat{z} \right) \frac{(k_z - k_{0z2})}{(k_z - k_{0z2}) \cdot (k_z + k_{0z2})} e^{jk_z(z-z')} \right] & , z < z' \end{cases} \\ &= \pi (\bar{I}k_0^2 - \underline{\mathbf{k}}'\underline{\mathbf{k}}') \frac{e^{-\mu_0|z-z'|}}{\mu_0} \quad , z \neq z' \end{aligned} \quad (4.36)$$

Όπου:

$$\mu_0 = -jk_{0z1} = \sqrt{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} \begin{cases} \varepsilon - j & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ 1 - j\varepsilon & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \text{Re}(\mu_0) > 0, \text{Im}(\mu_0) < 0 \quad (4.37)$$

$$\underline{\mathbf{k}}' = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + \text{sgn}(z - z')j\mu_0\hat{\mathbf{z}} \quad (4.38)$$

Τώρα η συνάρτηση Green του ελευθέρου χώρου γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -k_0^{-2} \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \hat{z}\hat{z} + \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{I} - \frac{\underline{\mathbf{k}}'\underline{\mathbf{k}}'}{k_0^2} \right) \frac{e^{-\mu_0|z-z'|}}{\mu_0} \cdot e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp})} d\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (4.39)$$

Η με πιο συνοπτική μορφή, καταλληλότερη για τη συνέχεια της ανάλυσης:

$$\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -k_0^{-2} \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') \hat{z}\hat{z} + \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y, (z - z')) \cdot e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp}) - \mu_0|z-z'|} d\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (4.40)$$

Όπου:

$$\bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y, (z - z')) = \frac{1}{\mu_0} (\bar{\mathbf{I}}k_0^2 - \underline{\mathbf{k}'\mathbf{k}'}) \quad (4.41)$$

Δηλαδή η δυάδα $\bar{\mathbf{e}}_0$ μπορεί να γραφτεί υπό μορφή πίνακα 3x3 ως εξής⁸:

$$\bar{\mathbf{e}}_0 = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} k_0^2 - k_x^2 & -k_x k_y & -js(z, z')k_x \mu_0 \\ -k_x k_y & k_0^2 - k_y^2 & -js(z, z')\mu_0 k_y \\ -js(z, z')k_x \mu_0 & -js(z, z')k_y \mu_0 & k_0^2 + \mu_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Αφού καταλήξαμε στην επιθυμητή έκφραση της συνάρτησης Green ελευθέρου χώρου πρέπει να βρούμε τις ακριβείς εκφράσεις των δευτερογενών πεδίων σε όλες τις περιοχές του χώρου. Αρχικά υποθέτουμε ότι τα δευτερογενή πεδία έχουν παρόμοια μορφή με το πρωτογενές - με τη διαφορά ότι δε διαθέτουν τον όρο $-\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} k_0^{-2} \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}'})$ αφού αυτός οφείλεται στο μη ομογενή όρο της κυματικής εξίσωσης. Επομένως κάθε δευτερογενές πεδίο (που ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση) έχει τη μορφή ολοκληρώματος Fourier το οποίο περιλαμβάνει ένα εκθετικό κυματικό όρο συνοδευόμενο από ένα δυαδικό συντελεστή (κατ' αναλογία με τη $\bar{\mathbf{G}}_0$). Οι δυαδικοί συντελεστές θεωρούνται προς το παρόν άγνωστοι και θα προσδιοριστούν στη συνέχεια μέσω των οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Τα ζητούμενα πεδία είναι:

$$\bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'}) = \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y, z') e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}'})_{\perp} - \mu_1(z - \frac{d}{2})} d\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (4.43)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'}) = \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} [\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y, z') e^{-\mu_2 z} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y, z') e^{+\mu_2 z}] e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}'})_{\perp}} d\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (4.44)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'}) = \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y, z') e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}'})_{\perp} + \mu_3(z + \frac{d}{2})} d\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (4.45)$$

⁸ Για λόγους συντομίας έχουμε αντικαταστήσει το συμβολισμό: $\text{sgn}(z - z')$ με το $s(z, z')$

Όπου:

$$\mu_{1,2,3} = -jk_{0z1,2,3} = \sqrt{|k_{0,2,0}^2 - k_x^2 - k_y^2|} \begin{cases} \varepsilon - j, & k_{0,2,0}^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ 1 - j\varepsilon, & k_{0,2,0}^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_{1,2,3}) &> 0 \\ \operatorname{Im}(\mu_{1,2,3}) &< 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\underline{\mathbf{k}}'_{1,2,3} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sgn}(z)j\mu_{1,2,3} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.47)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} e_{ixx} & e_{ixy} & e_{ixz} \\ e_{iyx} & e_{iyy} & e_{iyz} \\ e_{izx} & e_{izy} & e_{izz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2a, 2b, 3$$

Τα δευτερογενή πεδία, περιγράφουν ανακλώμενα και διαδιδόμενα κύματα που οφείλονται στην παρουσία των διαχωριστικών επιφανειών. Εφόσον κάθε ένα από αυτά διαδίδεται στο χώρο ξεκινώντας από μία διαχωριστική επιφάνεια, οφείλει να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας προς την κατεύθυνση διάδοσής του. Γι' αυτό το λόγο έχει δοθεί ιδιαίτερη σημασία στη μορφή των κυματικών όρων προς την κατεύθυνση z : $e^{\pm\mu_i z}$, $i = 1, 2, 3$ έτσι ώστε, σε συνδυασμό με το πρόσημο των $\operatorname{Re}\{\mu_i\}$ και $\operatorname{Im}\{\mu_i\}$, να περιγράφουν κύματα που διαδίδονται προς τις κατευθύνσεις που δικαιολογούνται απ τη φυσική του προβλήματος.

4.4. Προσδιορισμός δευτερογενών συναρτήσεων Green ως λύση προβλήματος οριακών συνθηκών

Εφόσον η μορφή των πεδίων είναι γνωστή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες (4.4) (4.5) και (4.6)⁹ ώστε να προσδιορίσουμε τους δυαδικούς συντελεστές $\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y, z')$, $i = 1, 2a, 2b, 3$.

Οι τιμές των συνιστωσών των $\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y, z')$ θα προκύψουν ως λύση του συστήματος εξισώσεων που σχηματίζουν οι οριακές συνθήκες. Επισημαίνεται εδώ ότι κάθε δυάδα $\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y, z')$ έχει απορροφήσει τον όρο $e^{-\mu_0(\frac{d}{z} - z')}$ και έτσι μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή:

⁹ Στην εξίσωση (4.6) εφαρμόζουμε από αριστερά το εξωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{z}} \times$ ώστε να εργαστούμε μόνο με τις εφαπτομενικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Αυτό είναι επιτρεπτό, διότι εκατέρωθεν της επιφάνειας έχουμε πλήρη διανυσματική ισότητα του μαγνητικού πεδίου, γεγονός που συνεπάγεται ότι ισχύει και η ισότητα στις εφαπτομενικές συνιστώσες. Επομένως, η ισότητα στις κάθετες συνιστώσες εννοείται και μπορεί να παραληφθεί από τους υπολογισμούς, μειώνοντας έτσι σημαντικά την πολυπλοκότητα των εξισώσεων.

$$\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y, z') = \bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y)e^{-\mu_0(\frac{d}{2}-z')}$$

Συνοπτικά, το σύστημα εξισώσεων θα είναι το ακόλουθο:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad (4.48.1)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad (4.48.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad (4.48.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \quad (4.48.4)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = \hat{\mathbf{z}} \times (\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=\frac{d}{2}} \quad (4.49.1)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = \hat{\mathbf{z}} \times (\bar{\mathbf{G}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \quad (4.49.2)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \times (\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \times (\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=\frac{d}{2}} \quad (4.50.1)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \times (\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \times (\bar{\mathbf{G}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \quad (4.50.2)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχει πολύ πυκνή μορφή, καθώς περιλαμβάνει διανυσματικό συμβολισμό. Στο Παράρτημα αυτού του κεφαλαίου κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις αναλύεται λεπτομερώς σε ένα πλήθος βαθμωτών εξισώσεων με αγνώστους τις επιμέρους συνιστώσες των ταυσιών $\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y)$. Παρακάτω παρουσιάζουμε εν συντομία την εξέλιξη του παραπάνω συστήματος παραλείποντας τις ενδιάμεσες πράξεις.

$$\underline{\mathbf{k}}'_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) = 0 \quad (4.51.1)$$

$$(\underline{\mathbf{k}}'_1 + j\mu_2\hat{\mathbf{z}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) = 0 \quad (4.51.2)$$

$$(\underline{\mathbf{k}}'_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) = 0 \quad (4.51.3)$$

$$\underline{\mathbf{k}}'_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) = 0 \quad (4.51.4)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) = \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right] \quad (4.52.1)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \right] = \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \quad (4.52.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\mathbf{k}}' \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) & \quad (4.53.1) \\ & = \hat{\mathbf{z}} \\ & \times \left[(\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \right. \\ & \left. \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - \underline{\mathbf{k}}'_1 \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + \hat{\mathbf{z}} \times (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} & \quad (4.53.2) \\ = \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\mathbf{k}}'_3 \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \end{aligned}$$

Τελικά το παραπάνω σύστημα ανάγεται σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων 36x36. Ευτυχώς, αυτό διαχωρίζεται σε 3 αποζευγμένα συστήματα 12x12 τα οποία εμπλέκουν τα παρακάτω σύνολα μεταβλητών:

$$\underline{\text{Σύστημα I}}: \{e_{1xx}, e_{1yx}, e_{1zx}, e_{2axx}, e_{2ayx}, e_{2azx}, e_{2bxx}, e_{2byx}, e_{2bzx}, e_{3xx}, e_{3yx}, e_{3zx}\}$$

$$\underline{\text{Σύστημα II}}: \{e_{1xy}, e_{1yy}, e_{1zy}, e_{2axy}, e_{2ayy}, e_{2azy}, e_{2bxy}, e_{2byy}, e_{2bzy}, e_{3xy}, e_{3yy}, e_{3zy}\}$$

$$\underline{\text{Σύστημα III}}: \{e_{1xz}, e_{1yz}, e_{1zz}, e_{2axz}, e_{2ayz}, e_{2azz}, e_{2bxz}, e_{2byz}, e_{2bzz}, e_{3xz}, e_{3yz}, e_{3zz}\}$$

Τα τρία παραπάνω αλγεβρικά συστήματα εξισώσεων σχηματίζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Π.4.1, ενώ η λύση τους δίνεται στο Παράρτημα Π.4.2. Οι λύσεις των συστημάτων είναι αριετά πολύπλοκες και μακροσκελείς και γι' αυτό δε μπορούν να παρατεθούν στο κυρίως κείμενο αυτού του κεφαλαίου. Ωστόσο, αυτό που μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε για τις λύσεις των δυαδικών πεδίων είναι ότι κάθε δυάδα $\bar{\mathbf{e}}_i(k_x, k_y)$ είναι συνάρτηση των χωρικών φασματικών συνιστωσών k_x, k_y , του πάχους d και των κυματαριθμών k_0, k_2 . Όταν εφαρμοστεί το ολοκλήρωμα ως προς k_x, k_y , τότε τα δευτερογενή πεδία θα διαμορφωθούν ως προς κάθε διανυσματική συνιστώσα και θα αποτελούν πλέον

συνάρτηση του πάχους d του κυματοδηγού, της συχνότητας, του σημείου παρατήρησης $\underline{\mathbf{r}}$, του σημείου διέγερσης $\underline{\mathbf{r}}'$ και των δεικτών διάθλασης του κυματοδηγού n_2 και του περιβάλλοντος χώρου n_0 .

Παράρτημα

Π.4.1. Σχηματισμός του συστήματος οριακών συνθηκών

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία με την οποία οι εξισώσεις (4.48.1) - (4.50.2) οδηγούνε στις (4.51.1) - (4.53.2).

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left(e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_1(z - \frac{d}{2})} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_1(z - \frac{d}{2})} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) + e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_1(z - \frac{d}{2})} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) = 0$$

$$\rightarrow \underline{\mathbf{k}}'_\perp \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2a}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left(e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_2 z} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2a}(k_x, k_y) \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_2 z} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2a}(k_x, k_y) + e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_2 z} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2a}(k_x, k_y) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_2 z} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2a}(k_x, k_y) = 0 \rightarrow (\underline{\mathbf{k}}'_\perp + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2a}(k_x, k_y) = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{2b}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left(e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_2 z} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2b}(k_x, k_y) \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_2 z} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2b}(k_x, k_y) + e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_2 z} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2b}(k_x, k_y) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_2 z} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2b}(k_x, k_y) = 0 \rightarrow (\underline{\mathbf{k}}'_\perp - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_{2b}(k_x, k_y) = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_3(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left(e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_3(k_x, k_y) \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_3(k_x, k_y) + e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_3(k_x, k_y) = 0$$

$$\rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_3(k_x, k_y) = 0 \rightarrow \underline{\mathbf{k}}'_3 \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}}_3(k_x, k_y) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{z}} \times \left(\bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} &= \hat{\mathbf{z}} \times \left(\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} \\
 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} + \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \\
 &= \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} \right] e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \\
 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) &= \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right] \\
 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) &= \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{z}} \times \left(\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} &= \hat{\mathbf{z}} \times \left(\bar{\mathbf{G}}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\
 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \right] e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} &= \hat{\mathbf{z}} \times \left(\bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \right) \\
 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \left[\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \right] &= \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left(\bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} &= \nabla \times \left(\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} \\
 \rightarrow \nabla \times \left(\bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_0(z-z')} + \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_1(z-\frac{d}{2})} \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} &= \\
 \nabla \times \left([\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} & \\
 \rightarrow \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_0(z-z')} \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) \Big|_{z=\frac{d}{2}} + \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_1(z-\frac{d}{2})} \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \Big|_{z=\frac{d}{2}} &= \\
 \nabla \times \left([\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} & \\
 \rightarrow e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_0(z-z')} (j\mathbf{k}'_\perp) \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) \Big|_{z=\frac{d}{2}} + e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - \mu_1(z-\frac{d}{2})} (j\mathbf{k}'_\perp) \times & \\
 \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = \left([(j\mathbf{k}'_\perp - \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + (j\mathbf{k}'_\perp + \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] \right) & \\
 e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} \Big|_{z=\frac{d}{2}} & \\
 \rightarrow \mathbf{k}'_\perp \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) e^{-\mu_0(\frac{d}{2}-z')} + \mathbf{k}'_\perp \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) & \\
 = (\mathbf{k}'_\perp + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (\mathbf{k}'_\perp - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} & \\
 \rightarrow \mathbf{k}'_\perp \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) & \\
 = \left[(\mathbf{k}'_\perp + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (\mathbf{k}'_\perp - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - \mathbf{k}'_\perp \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right] &
 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας μόνο τις εφαπτομενικές συνιστώσες:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\mathbf{k}}' \times \bar{\mathbf{e}}_0(k_x, k_y) \\ &= \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad \times \left[(\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z} \right. \\ &\quad \left. - \underline{\mathbf{k}}'_1 \times \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla \times \left(\bar{\mathbf{G}}_{2a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathbf{G}}_{2b}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = \nabla \times \left(\bar{\mathbf{G}}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &\rightarrow \nabla \times \left([\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp})} \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &= \nabla \times \left(\bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \cdot e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp}) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &\rightarrow \nabla \times \left([\bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp})} \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &= \nabla e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp}) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &\rightarrow \left([(j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 z} + (j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{+\mu_2 z}] e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp})} \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = (j\underline{\mathbf{k}}'_3) e^{j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{\perp}) + \mu_3(z + \frac{d}{2})} \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} \\ &\rightarrow (j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + (j\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + \mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \\ &= (j\underline{\mathbf{k}}'_3) \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \\ &\rightarrow (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \\ &= \underline{\mathbf{k}}'_3 \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας μόνο τις εφαπτομενικές συνιστώσες:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} + j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + \hat{\mathbf{z}} \times (\underline{\mathbf{k}}_{\perp} - j\mu_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} \\ &= \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\mathbf{k}}'_3 \times \bar{\mathbf{e}}_3(k_x, k_y) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις προκύπτει ένα σύστημα 36 γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό αποξευγνύεται σε τρία ανεξάρτητα συστήματα των 12 εξισώσεων τα οποία είναι τα εξής:

$$\underline{\text{Σύστημα I}}: \{e_{1xx}, e_{1yx}, e_{1zx}, e_{2axx}, e_{2ayx}, e_{2azx}, e_{2bxx}, e_{2byx}, e_{2bzx}, e_{3xx}, e_{3yx}, e_{3zx}\}$$

$$\underline{\text{Σύστημα II}}: \{e_{1xy}, e_{1yy}, e_{1zy}, e_{2axy}, e_{2ayy}, e_{2azy}, e_{2bxy}, e_{2byy}, e_{2bzy}, e_{3xy}, e_{3yy}, e_{3zy}\}$$

$$\underline{\text{Σύστημα III}}: \{e_{1xz}, e_{1yz}, e_{1zz}, e_{2axz}, e_{2ayz}, e_{2azz}, e_{2bxz}, e_{2byz}, e_{2bzz}, e_{3xz}, e_{3yz}, e_{3zz}\}$$

Αναλυτικά είναι:

Σύστημα I

$$k_x e_{1xx} + k_y e_{1yx} + k_{z1} e_{1zx} = 0$$

$$k_x e_{2axx} + k_y e_{2ayx} + k_{z2a} e_{2azx} = 0$$

$$k_x e_{2bxx} + k_y e_{2byx} + k_{z2b} e_{2bzx} = 0$$

$$k_x e_{3xx} + k_y e_{3yx} + k_{z3} e_{3zx} = 0$$

$$e_{0xx} = e_{2axx} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxx} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1xx}$$

$$e_{0yx} = e_{2ayx} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byx} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1yx}$$

$$e_{2axx} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxx} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3xx}$$

$$e_{2ayx} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byx} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3yx}$$

$$k_y e_{0zx} - k_{z0} e_{0yx}$$

$$= (k_y e_{2azx} - k_{z2a} e_{2ayx}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzx} - k_{z2b} e_{2byx}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_y e_{1zx} - k_{z1} e_{1yx})$$

$$k_{z0} e_{0xx} - k_x e_{0zx}$$

$$= (k_{z2a} e_{2axx} - k_x e_{2azx}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b} e_{2bxx} - k_x e_{2bzx}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_{z1} e_{1xx} - k_x e_{1zx})$$

$$(k_y e_{2azx} - k_{z2a} e_{2ayx}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzx} - k_{z2b} e_{2byx}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_y e_{3zx} - k_{z3} e_{3yx})$$

$$(k_{z2a} e_{2axx} - k_x e_{2azx}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b} e_{2bxx} - k_x e_{2bzx}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_{z3} e_{3xx} - k_x e_{3zx})$$

Σύστημα II

$$k_x e_{1xy} + k_y e_{1yy} + k_{z1} e_{1zy} = 0$$

$$k_x e_{2axy} + k_y e_{2ayy} + k_{z2a} e_{2azy} = 0$$

$$k_x e_{2bxy} + k_y e_{2byy} + k_{z2b} e_{2bzy} = 0$$

$$k_x e_{3xy} + k_y e_{3yy} + k_{z3} e_{3zy} = 0$$

$$e_{0xy} = e_{2axy} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxy} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1xy}$$

$$e_{0yy} = e_{2ayy} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byy} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1yy}$$

$$e_{2axy} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxy} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3xy}$$

$$e_{2ayy} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byy} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3yy}$$

$$k_y e_{0zy} - k_{z0} e_{0yy}$$

$$= (k_y e_{2azy} - k_{z2a} e_{2ayy}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzy} - k_{z2b} e_{2byy}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_y e_{1zy} - k_{z1} e_{1yy})$$

$$k_{z0} e_{0xy} - k_x e_{0zy}$$

$$= (k_{z2a} e_{2axy} - k_x e_{2azy}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b} e_{2bxy} - k_x e_{2bzy}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_{z1} e_{1xy} - k_x e_{1zy})$$

$$(k_y e_{2azy} - k_{z2a} e_{2ayy}) e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzy} - k_{z2b} e_{2byy}) e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_y e_{3zy} - k_{z3} e_{3yy})$$

$$(k_{z2a}e_{2axy} - k_x e_{2azy})e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b}e_{2bxy} - k_x e_{2bzy})e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_{z3}e_{3xy} - k_x e_{3zy})$$

Σύστημα III

$$k_x e_{1xz} + k_y e_{1yz} + k_{z1} e_{1zz} = 0$$

$$k_x e_{2axz} + k_y e_{2ayz} + k_{z2a} e_{2azz} = 0$$

$$k_x e_{2bxz} + k_y e_{2byz} + k_{z2b} e_{2bzz} = 0$$

$$k_x e_{3xz} + k_y e_{3yz} + k_{z3} e_{3zz} = 0$$

$$e_{0xz} = e_{2axz} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxz} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1xz}$$

$$e_{0yz} = e_{2ayz} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byz} \cdot e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - e_{1yz}$$

$$e_{2axz} \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2bxz} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3xz}$$

$$e_{2ayz} \cdot e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + e_{2byz} \cdot e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = e_{3yz}$$

$$k_y e_{0zz} - k_{z0} e_{0yz}$$

$$= (k_y e_{2azz} - k_{z2a} e_{2ayz})e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzz} - k_{z2b} e_{2byz})e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_y e_{1zz} - k_{z1} e_{1yz})$$

$$k_{z0} e_{0xz} - k_x e_{0zz}$$

$$= (k_{z2a} e_{2axz} - k_x e_{2azz})e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b} e_{2bxz} - k_x e_{2bzz})e^{+\mu_2 \frac{d}{2}} - (k_{z1} e_{1xz} - k_x e_{1zz})$$

$$(k_y e_{2azz} - k_{z2a} e_{2ayz})e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_y e_{2bzz} - k_{z2b} e_{2byz})e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_y e_{3zz} - k_{z3} e_{3yz})$$

$$(k_{z2a} e_{2axz} - k_x e_{2azz})e^{\mu_2 \frac{d}{2}} + (k_{z2b} e_{2bxz} - k_x e_{2bzz})e^{-\mu_2 \frac{d}{2}} = (k_{z3} e_{3xz} - k_x e_{3zz})$$

Θέτοντας στη συνέχεια:

$$\delta = e^{+\mu_2 \frac{d}{2}}$$

και ονομάζοντας κάθε μεταβλητή του εκάστοτε συστήματος με το σύμβολο $x_i : i = 1, 2, \dots, 12$ μετατρέπουμε τα παραπάνω συστήματα εξισώσεων σε κατάλληλη μορφή για επίλυση. Έτσι έχουμε:

Σύστημα I

$$k_x x_1 + k_y x_2 - k_{z0} x_3 = 0$$

$$k_x x_4 + k_y x_5 + k_{z2a} x_6 = 0$$

$$k_x x_7 + k_y x_8 - k_{z2a} x_9 = 0$$

$$k_x x_{10} + k_y x_{11} + k_{z3} x_{12} = 0$$

$$\delta^{-1} x_4 + \delta x_7 - x_1 = e_{0xx}$$

$$\delta^{-1} x_5 + \delta x_8 - x_2 = e_{0yx}$$

$$\delta x_4 + \delta^{-1} x_7 - x_{10} = 0$$

$$\delta x_5 + \delta^{-1} x_8 - x_{11} = 0$$

$$\delta^{-1} k_y x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_5 + \delta k_y x_9 + \delta k_{z2a} x_8 - k_y x_3 - k_{z0} x_2 = k_y e_{0zx} - k_{z0} e_{0yx} = 0$$

$$\delta^{-1} k_{z2a} x_4 - \delta^{-1} k_x x_6 - \delta k_{z2a} x_7 - \delta k_x x_9 + k_{z0} x_1 + k_x x_3 = k_{z0} e_{0xx} - k_x e_{0zx} = c$$

$$\delta k_y x_6 - \delta k_{z2a} x_5 + \delta^{-1} k_y x_9 + \delta^{-1} k_{z2a} x_8 - k_y x_{12} + k_{z3} x_{11} = 0$$

$$\delta k_{z2a} x_4 - \delta k_x x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_7 - \delta^{-1} k_x x_9 - k_{z3} x_{10} + k_x x_{12} = 0$$

Σύστημα II

$$\begin{aligned}
 k_x x_1 + k_y x_2 - k_{z0} x_3 &= 0 \\
 k_x x_4 + k_y x_5 + k_{z2a} x_6 &= 0 \\
 k_x x_7 + k_y x_8 - k_{z2a} x_9 &= 0 \\
 k_x x_{10} + k_y x_{11} + k_{z3} x_{12} &= 0 \\
 \delta^{-1} x_4 + \delta x_7 - \gamma x_1 &= e_{0xy} \\
 \delta^{-1} x_5 + \delta x_8 - \gamma x_2 &= e_{0yy} \\
 \delta x_4 + \delta^{-1} x_7 - x_{10} &= 0 \\
 \delta x_5 + \delta^{-1} x_8 - x_{11} &= 0 \\
 \delta^{-1} k_y x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_5 + \delta k_y x_9 + \delta k_{z2a} x_8 - k_y x_3 - k_{z0} x_2 &= k_y e_{0zy} - k_{z0} e_{0yy} = r \\
 \delta^{-1} k_{z2a} x_4 - \delta^{-1} k_x x_6 - \delta k_{z2a} x_7 - \delta k_x x_9 + k_{z0} x_1 + k_x x_3 &= k_{z0} e_{0xy} - k_x e_{0zy} = 0 \\
 \delta k_y x_6 - \delta k_{z2a} x_5 + \delta^{-1} k_y x_9 + \delta^{-1} k_{z2a} x_8 - k_y x_{12} + k_{z3} x_{11} &= 0 \\
 \delta k_{z2a} x_4 - \delta k_x x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_7 - \delta^{-1} k_x x_9 - k_{z3} x_{10} + k_x x_{12} &= 0
 \end{aligned}$$

Σύστημα III

$$\begin{aligned}
 k_x x_1 + k_y x_2 - k_{z0} x_3 &= 0 \\
 k_x x_4 + k_y x_5 + k_{z2a} x_6 &= 0 \\
 k_x x_7 + k_y x_8 - k_{z2a} x_9 &= 0 \\
 k_x x_{10} + k_y x_{11} + k_{z3} x_{12} &= 0 \\
 \delta^{-1} x_4 + \delta x_7 - \gamma x_1 &= e_{0xz} \\
 \delta^{-1} x_5 + \delta x_8 - \gamma x_2 &= e_{0yz} \\
 \delta x_4 + \delta^{-1} x_7 - x_{10} &= 0 \\
 \delta x_5 + \delta^{-1} x_8 - x_{11} &= 0 \\
 \delta^{-1} k_y x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_5 + \delta k_y x_9 + \delta k_{z2a} x_8 - k_y x_3 - k_{z0} x_2 &= k_y e_{0zz} - k_{z0} e_{0yz} = \mu \\
 \delta^{-1} k_{z2a} x_4 - \delta^{-1} k_x x_6 - \delta k_{z2a} x_7 - \delta k_x x_9 + k_{z0} x_1 + k_x x_3 &= k_{z0} e_{0xz} - k_x e_{0zz} = n \\
 \delta k_y x_6 - \delta k_{z2a} x_5 + \delta^{-1} k_y x_9 + \delta^{-1} k_{z2a} x_8 - k_y x_{12} + k_{z3} x_{11} &= 0 \\
 \delta k_{z2a} x_4 - \delta k_x x_6 - \delta^{-1} k_{z2a} x_7 - \delta^{-1} k_x x_9 - k_{z3} x_{10} + k_x x_{12} &= 0
 \end{aligned}$$

Τα παραπάνω λύνονται μέσω του εργαλείου συμβολικής επίλυσης συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που περιλαμβάνει το λογισμικό «Mathematica». Τα αποτελέσματα της επίλυσης βρίσκονται στο Παράρτημα Π.4.2.

Π.4.2. Επίλυση των συστημάτων I, II και III

Λύση Συστήματος Ι

$$\begin{aligned}
 x1 &\rightarrow \frac{1}{kz0 - kz2a} \left(\frac{-e0xx kx^2 kz0 - e0yx kx ky (kz0 + kz2a) + d (ky^2 - kz0 kz2a) + e0xx kz2a (ky^2 - kz0 kz2a)}{kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a} - \frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2)} - \right. \\
 &\frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kz0 + kz2a - kz0 \delta^2 + kz2a \delta^2)} - \frac{k2^2 kx kz0 (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) (- (kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2)} + \\
 &\left. \frac{k2^2 kx kz0 (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2)} \right), \\
 x2 &\rightarrow \frac{1}{kz0 - kz2a} \left(- \frac{d kx ky + e0xx kx ky (kz0 + kz2a) + e0yx (-kx^2 kz2a + kz0 (ky^2 + kz2a^2))}{kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a} + \frac{kx (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2)} - \right. \\
 &\frac{k2^2 ky kz0 (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) (- (kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2)} + \\
 &\left. \frac{k2^2 ky kz0 (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2)} + \frac{kx (e0yx kx kz0 - ky (d + e0xx kz0)) kz2a}{(kx^2 + ky^2) (kz0 (-1 + \delta^2) - kz2a (1 + \delta^2))} \right), \\
 x3 &\rightarrow ((kz0 + kz2a) (e0yx k2^2 ky - d kx kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (-kz0 + kz2a) (e0yx k2^2 ky + d kx kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^4 + \\
 &e0xx k2^2 kx ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^4)) / (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4), \\
 x4 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2} + \frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a - kz0 \delta^2 + kz2a \delta^2} - \frac{kx (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{-(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} + \frac{kx (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x5 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{kx (e0yx kx kz0 - ky (d + e0xx kz0))}{kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2} - \frac{kx (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a - kz0 \delta^2 + kz2a \delta^2} - \frac{ky (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{-(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} + \frac{ky (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x6 &\rightarrow \frac{(k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) (kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) \delta}{-(kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4}, \\
 x7 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2} - \frac{ky (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a - kz0 \delta^2 + kz2a \delta^2} - \frac{kx (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{-(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} - \frac{kx (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x8 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{kx (e0yx kx kz0 - ky (d + e0xx kz0))}{kz0 + kz2a + (kz0 - kz2a) \delta^2} + \frac{kx (d ky - e0yx kx kz0 + e0xx ky kz0)}{kz0 + kz2a - kz0 \delta^2 + kz2a \delta^2} - \frac{ky (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{-(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} - \frac{ky (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a}{(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x9 &\rightarrow - \frac{(k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^3}{-(kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4}, \\
 x10 &\rightarrow (-2 kz2a \delta^2 (-d (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 (ky^2 + kz0^2) + (ky^2 + kz0 kz2a)^2) + d (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 (ky^2 + kz0^2) + (ky^2 - kz0 kz2a)^2) \delta^4 + \\
 &kz0 (e0yx kx ky (kz0^2 - kz2a^2)^2 (-1 + \delta^4) + e0xx (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^4 + (ky^2 + kz0 kz2a)^2 + kx^2 (2 ky^2 + kz0^2 + kz2a^2)) + (kz0 - kz2a)^2 (kx^4 + (ky^2 - kz0 kz2a)^2 + kx^2 (2 ky^2 + kz0^2 + kz2a^2)) \delta^4)) / \\
 &((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x11 &\rightarrow (2 kz2a \delta^2 (d kx ky (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0^2 + 2 kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 (kz0 + 2 kz2a)) \delta^4) + kz0 (-e0xx kx ky (kz0^2 - kz2a^2)^2 (-1 + \delta^4) + \\
 &e0yx ((kz0 + kz2a)^2 (kx^4 + 2 kx^2 (ky^2 + kz0 kz2a) + (ky^2 + kz0^2) (ky^2 + kz2a^2)) - (kz0 - kz2a)^2 (kx^4 + 2 kx^2 (ky^2 - kz0 kz2a) + (ky^2 + kz0^2) (ky^2 + kz2a^2)) \delta^4)) / \\
 &((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x12 &\rightarrow \frac{2 k2^2 (k0^2 (e0xx kx + e0yx ky) + d kx kz0) kz2a \delta^2}{-(kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4}
 \end{aligned}$$

Λύση Συστήματος II

$$\begin{aligned}
 x_1 &\rightarrow \frac{1}{kz_0 - kz_2a} \left(\frac{-e_0xy (-ky^2 kz_2a + kz_0 (kx^2 + kz_2a^2)) + kx ky (-e_0yy (kz_0 + kz_2a) + r)}{kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a} - \frac{ky kz_2a (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{(kx^2 + ky^2) (kz_0 + kz_2a + (kz_0 - kz_2a) \delta^2)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{ky kz_2a (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{(kx^2 + ky^2) (kz_0 + kz_2a - kz_0 \delta^2 + kz_2a \delta^2)} - \frac{k^2 kx kz_0 kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r)}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) (- (kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{k^2 kx kz_0 kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r)}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) ((kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2)} \right), \\
 x_2 &\rightarrow \frac{1}{kz_0 - kz_2a} \left(-\frac{e_0xy kx ky (kz_0 + kz_2a) + e_0yy (-kx^2 kz_2a + kz_0 (ky^2 + kz_2a^2)) + (kx^2 - kz_0 kz_2a) r}{kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a} + \frac{kx kz_2a (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{(kx^2 + ky^2) (kz_0 + kz_2a + (kz_0 - kz_2a) \delta^2)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{kx kz_2a (e_0yy kx kz_0 - e_0xy ky kz_0 - kx r)}{(kx^2 + ky^2) (kz_0 + kz_2a - kz_0 \delta^2 + kz_2a \delta^2)} + \frac{k^2 ky kz_0 kz_2a (-k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) + ky kz_0 r)}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) (- (kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{k^2 ky kz_0 kz_2a (-k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) + ky kz_0 r)}{(kx^2 + ky^2) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) ((kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2)} \right), \\
 x_3 &\rightarrow (ky (kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) (e_0yy k^2 + kz_2a r) + ky (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) (-e_0yy k^2 + kz_2a r) \delta^4 + \\
 &\quad e_0xy k^2 kx ((kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) - (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^4)) / (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4), \\
 x_4 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{ky (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{kz_0 + kz_2a + (kz_0 - kz_2a) \delta^2} + \frac{ky (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{kz_0 + kz_2a - kz_0 \delta^2 + kz_2a \delta^2} + \frac{kx kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) - (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} - \frac{kx kz_2a (-k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) + ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x_5 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{kx (e_0yy kx kz_0 - e_0xy ky kz_0 - kx r)}{kz_0 + kz_2a + (kz_0 - kz_2a) \delta^2} - \frac{kx (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{kz_0 + kz_2a - kz_0 \delta^2 + kz_2a \delta^2} + \frac{ky kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) - (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} - \frac{ky kz_2a (-k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) + ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x_6 &\rightarrow \frac{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r) \delta}{- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4}, \\
 x_7 &\rightarrow ((kz_0 - kz_2a) \delta^3 (e_0yy kx ky (kz_0 + kz_2a) ((kz_0 + kz_2a) (kz_0 (3kz_0 - kz_2a) kz_2a + kx^2 (kz_0 + kz_2a) + ky^2 (kz_0 + kz_2a)) - (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^4) + \\
 &\quad kx ky r (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + 3kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^4) + e_0xy (-kz_0 (kz_0 + kz_2a)^2 (ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + kz_0 (kz_0 - kz_2a)^2 (ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4 + \\
 &\quad kx^4 kz_2a ((kz_0 + kz_2a)^2 - (kz_0 - kz_2a)^2 \delta^4) + kx^2 (kz_0 - kz_2a) ((kz_0 + kz_2a)^2 (-ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a)^2 (ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^4))) / \\
 &\quad ((- (kz_0 + kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 \delta^4) (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4)), \\
 x_8 &\rightarrow \frac{\delta \left(\frac{kx (e_0yy kx kz_0 - e_0xy ky kz_0 - kx r)}{kz_0 + kz_2a + (kz_0 - kz_2a) \delta^2} - \frac{kx (-e_0yy kx kz_0 + e_0xy ky kz_0 + kx r)}{kz_0 + kz_2a - kz_0 \delta^2 + kz_2a \delta^2} + \frac{ky kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) - (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} - \frac{ky kz_2a (-k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) + ky kz_0 r)}{(kz_0 + kz_2a) (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a) + (kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) \delta^2} \right)}{2 (kx^2 + ky^2)}, \\
 x_9 &\rightarrow -\frac{(kz_0 - kz_2a) (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a) (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r) \delta^3}{- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4}, \\
 x_{10} &\rightarrow - (2kz_2a \delta^2 (e_0xy kz_0 (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^4 + (ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + kx^2 (2ky^2 + kz_0^2 + kz_2a^2))) + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^4 + (ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 + kx^2 (2ky^2 + kz_0^2 + kz_2a^2)) \delta^4) + \\
 &\quad kx ky (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0^2 + 2kz_0 kz_2a) r + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 (kz_0 + 2kz_2a)) r \delta^4 + e_0yy kz_0 (kz_0^2 - kz_2a^2)^2 (-1 + \delta^4))) / \\
 &\quad ((- (kz_0 + kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 \delta^4) (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4)), \\
 x_{11} &\rightarrow - (2kz_2a \delta^2 ((kz_0 + kz_2a)^2 (kx^4 + kx^2 (ky^2 + 2kz_0 kz_2a) + kz_0^2 (ky^2 + kz_2a^2)) r - (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^4 + kx^2 (ky^2 - 2kz_0 kz_2a) + kz_0^2 (ky^2 + kz_2a^2)) r \delta^4 + e_0xy kx ky kz_0 (kz_0^2 - kz_2a^2)^2 (-1 + \delta^4) + \\
 &\quad e_0yy kz_0 (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^4 + 2kx^2 (ky^2 + kz_0 kz_2a) + (ky^2 + kz_0^2) (ky^2 + kz_2a^2)) + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^4 + 2kx^2 (ky^2 - kz_0 kz_2a) + (ky^2 + kz_0^2) (ky^2 + kz_2a^2)) \delta^4))) / \\
 &\quad ((- (kz_0 + kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 \delta^4) (- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4)), \\
 x_{12} &\rightarrow -\frac{2k^2 kz_2a (k^2 (e_0xy kx + e_0yy ky) - ky kz_0 r) \delta^2}{- (kz_0 + kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz_0 kz_2a)^2 + (kz_0 - kz_2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz_0 kz_2a)^2 \delta^4}
 \end{aligned}$$

Λύση Συστήματος III

$$\begin{aligned}
 x1 \rightarrow & (kx^2 ky^2 kz0^3 n + ky^4 kz0^3 n + 3kx^2 ky^2 kz0^2 kz2a n + 3ky^4 kz0^2 kz2a n + kx^2 kz0^4 kz2a n + 2ky^2 kz0^4 kz2a n + 3kx^2 ky^2 kz0 kz2a^2 n + 3ky^4 kz0 kz2a^2 n + 3kx^2 kz0^3 kz2a^2 n + 6ky^2 kz0^3 kz2a^2 n + kz0^5 kz2a^2 n + \\
 & kx^2 ky^2 kz2a^3 n + ky^4 kz2a^3 n + 3kx^2 kz0^2 kz2a^3 n + 6ky^2 kz0^2 kz2a^3 n + 3kz0^4 kz2a^3 n + kx^2 kz0 kz2a^4 n + 2ky^2 kz0 kz2a^4 n + 3kz0^3 kz2a^4 n + kz0^2 kz2a^5 n - 2kx^2 ky^2 kz0^3 n \delta^4 - 2ky^4 kz0^3 n \delta^4 + \\
 & 2kx^2 ky^2 kz0 kz2a^2 n \delta^4 + 2ky^4 kz0 kz2a^2 n \delta^4 + 2kx^2 kz0^3 kz2a^2 n \delta^4 - 4ky^2 kz0^3 kz2a^2 n \delta^4 - 2kz0^5 kz2a^2 n \delta^4 - 2kx^2 kz0 kz2a^4 n \delta^4 + 4ky^2 kz0 kz2a^4 n \delta^4 + 2kz0^3 kz2a^4 n \delta^4 + kx^2 ky^2 kz0^3 n \delta^8 + \\
 & ky^4 kz0^3 n \delta^8 - 3kx^2 ky^2 kz0^2 kz2a n \delta^8 - 3ky^4 kz0^2 kz2a n \delta^8 - kx^2 kz0^4 kz2a n \delta^8 - 2ky^2 kz0^4 kz2a n \delta^8 + 3kx^2 ky^2 kz0 kz2a^2 n \delta^8 + 3ky^4 kz0 kz2a^2 n \delta^8 + 3kx^2 kz0^3 kz2a^2 n \delta^8 + 6ky^2 kz0^3 kz2a^2 n \delta^8 + \\
 & kz0^5 kz2a^2 n \delta^8 - kx^2 ky^2 kz2a^3 n \delta^8 - ky^4 kz2a^3 n \delta^8 - 3kx^2 kz0^2 kz2a^3 n \delta^8 - 6ky^2 kz0^2 kz2a^3 n \delta^8 - 3kz0^4 kz2a^3 n \delta^8 + kx^2 kz0 kz2a^4 n \delta^8 + 2ky^2 kz0 kz2a^4 n \delta^8 + 3kz0^3 kz2a^4 n \delta^8 - \\
 & kz0^2 kz2a^5 n \delta^8 + e0yz kx ky (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + 2 ((kx^2 + ky^2) kz0^2 + (kx^2 + ky^2 + 2kz0^2) kz2a^2) \delta^4 - (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^8) + \\
 & e0xz (kx^4 kz0 (- (kz0 + kz2a)^3 + 2kz0 (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) \delta^4 - (kz0 - kz2a)^3 \delta^8) + kz2a (- (kz0 + kz2a)^3 (ky^2 + kz0 kz2a)^2 + 2kz2a (-kz0^2 + kz2a^2) (ky^4 + 2ky^2 kz0^2 + kz0^2 kz2a^2) \delta^4 + \\
 & (kz0 - kz2a)^3 (ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^8) + kx^2 (-ky^2 ((kz0 + kz2a)^2 - (kz0 - kz2a)^2 \delta^4)^2 + kz0 kz2a (- (kz0 + kz2a)^4 + (kz0 - kz2a)^4 \delta^8))) + \\
 & kx ky ((kz0 + kz2a)^3 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + 2kz0 (-kz0^2 + kz2a^2) (kx^2 + ky^2 + 3kz2a^2) \delta^4 + (kz0 - kz2a)^3 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^8) \mu) / \\
 & ((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x2 \rightarrow & - (kx^3 ky kz0^3 n + kx ky^3 kz0^3 n + 3kx^3 ky kz0^2 kz2a n + 3kx ky^3 kz0^2 kz2a n + kx ky kz0^4 kz2a n + 3kx^3 ky kz0 kz2a^2 n + 3kx ky^3 kz0 kz2a^2 n + 3kx ky kz0^3 kz2a^2 n + \\
 & kx^3 ky kz2a^3 n + kx ky^3 kz2a^3 n + 3kx ky kz0^2 kz2a^3 n + kx ky kz0 kz2a^4 n - 2kx^3 ky kz0^3 n \delta^4 - 2kx ky^3 kz0^3 n \delta^4 + 2kx^3 ky kz0 kz2a^2 n \delta^4 + 2kx ky^3 kz0 kz2a^2 n \delta^4 - \\
 & 6kx ky kz0^3 kz2a^2 n \delta^4 + 6kx ky kz0 kz2a^4 n \delta^4 + kx^3 ky kz0^3 n \delta^8 + kx ky^3 kz0^3 n \delta^8 - 3kx^3 ky kz0^2 kz2a n \delta^8 - 3kx ky^3 kz0^2 kz2a n \delta^8 - kx ky kz0^4 kz2a n \delta^8 + \\
 & 3kx^3 ky kz0 kz2a^2 n \delta^8 + 3kx ky^3 kz0 kz2a^2 n \delta^8 + 3kx ky kz0^3 kz2a^2 n \delta^8 - kx^3 ky kz2a^3 n \delta^8 - kx ky^3 kz2a^3 n \delta^8 - 3kx ky kz0^2 kz2a^3 n \delta^8 + kx ky kz0 kz2a^4 n \delta^8 + \\
 & e0xz kx ky (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) ((kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - 2 ((kx^2 + ky^2) kz0^2 + (kx^2 + ky^2 + 2kz0^2) kz2a^2) \delta^4 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^8) + \\
 & e0yz (kx^4 kz2a ((kz0 + kz2a)^3 + 2(kz0 - kz2a) kz2a (kz0 + kz2a) \delta^4 + (-kz0 + kz2a)^3 \delta^8) + kz0 ((kz0 + kz2a)^3 (ky^2 + kz0 kz2a) (ky^2 + kz2a^2) + 2kz0 (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) (-ky^4 + kz2a^4) \delta^4 + \\
 & (kz0 - kz2a)^3 (ky^2 - kz0 kz2a) (ky^2 + kz2a^2) \delta^8) + kx^2 (ky^2 ((kz0 + kz2a)^2 - (kz0 - kz2a)^2 \delta^4)^2 + 2kz0 kz2a^2 ((kz0 + kz2a)^3 + 2kz0 (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) \delta^4 + (kz0 - kz2a)^3 \delta^8))) + \\
 & ((kz0 + kz2a)^3 (kx^2 + kz0 kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - 2kz0 (kz0 - kz2a) (kz0 + kz2a) (kx^4 + (-ky^2 + kz0^2) kz2a^2 + kx^2 (ky^2 + 2kz2a^2)) \delta^4 + (kz0 - kz2a)^3 (kx^2 - kz0 kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^8) \\
 & \mu) / ((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x3 \rightarrow & (e0xz k2^2 kx ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^4) + e0yz k2^2 ky ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^4) - \\
 & kz2a ((kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a) \delta^4) (kx n - ky \mu)) / \\
 & (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4), \\
 x4 \rightarrow & ((kz0 + kz2a) \delta (kx^2 ky^2 kz0^2 n + ky^4 kz0^2 n + 2kx^2 ky^2 kz0 kz2a n + 2ky^4 kz0 kz2a n + kx^2 kz0^3 kz2a n + 2ky^2 kz0^3 kz2a n + kx^2 ky^2 kz2a^2 n + ky^4 kz2a^2 n + 2kx^2 kz0^2 kz2a^2 n + 4ky^2 kz0^2 kz2a^2 n + \\
 & kz0^4 kz2a^2 n + kx^2 kz0 kz2a^3 n + 2ky^2 kz0 kz2a^3 n + 2kz0^3 kz2a^3 n + kz0^2 kz2a^4 n - kx^2 ky^2 kz0^2 n \delta^4 - ky^4 kz0^2 n \delta^4 + 2kx^2 ky^2 kz0 kz2a n \delta^4 + 2ky^4 kz0 kz2a n \delta^4 - kx^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 + \\
 & 2ky^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 - kx^2 ky^2 kz2a^2 n \delta^4 - ky^4 kz2a^2 n \delta^4 + 2kx^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - 4ky^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - kz0^4 kz2a^2 n \delta^4 - kx^2 kz0 kz2a^3 n \delta^4 + 2ky^2 kz0 kz2a^3 n \delta^4 + 2kz0^3 kz2a^3 n \delta^4 - \\
 & kz0^2 kz2a^4 n \delta^4 + e0yz kx ky (kz0 - kz2a) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a) (kx^2 (-kz0 + kz2a) + ky^2 (-kz0 + kz2a) + kz0 kz2a (3kz0 + kz2a)) \delta^4) + \\
 & e0xz ((kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) (ky^2 kz0 + (kx^2 + kz0^2) kz2a) - (kz0 - kz2a)^2 (kx^4 kz2a + kz0 (ky^2 - kz0 kz2a)^2 + kx^2 (kz0 + kz2a) (ky^2 + kz0 kz2a)) \delta^4) + \\
 & kx ky ((kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - 3kz0 kz2a) \delta^4) \mu) / \\
 & ((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x5 \rightarrow & - ((kz0 + kz2a) \delta (kx^3 ky kz0^2 n + kx ky^3 kz0^2 n + 2kx^3 ky kz0 kz2a n + 2kx ky^3 kz0 kz2a n + kx ky kz0^3 kz2a n + kx^3 ky kz2a^2 n + kx ky^3 kz2a^2 n + 2kx ky kz0^2 kz2a^2 n + kx ky kz0 kz2a^3 n - kx^3 ky kz0^2 n \delta^4 - \\
 & kx ky^3 kz0^2 n \delta^4 + 2kx^3 ky kz0 kz2a n \delta^4 + 2kx ky^3 kz0 kz2a n \delta^4 + 3kx ky kz0^3 kz2a n \delta^4 - kx^3 ky kz2a^2 n \delta^4 - kx ky^3 kz2a^2 n \delta^4 - 6kx ky kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 + 3kx ky kz0 kz2a^3 n \delta^4 + e0xz kx ky \\
 & (kz0 - kz2a) ((kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) + (kz0 - kz2a) (kx^2 (-kz0 + kz2a) + ky^2 (-kz0 + kz2a) + kz0 kz2a (3kz0 + kz2a)) \delta^4) + e0yz (kx^4 kz0 (- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) + \\
 & (ky^2 + kz0^2) kz2a (ky^2 + kz0 kz2a) (- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) + kx^2 (- (kz0 + kz2a)^2 (2kz0^2 kz2a + ky^2 (kz0 + kz2a)) + (kz0 - kz2a)^2 (-2kz0^2 kz2a + ky^2 (kz0 + kz2a)) \delta^4)) + \\
 & ((kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + kz0 kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) - (kz0 - kz2a)^2 (kx^4 + kx^2 (ky^2 - 2kz0 kz2a) + kz0 kz2a (ky^2 + kz0 kz2a)) \delta^4) \mu)) / \\
 & ((- (kz0 + kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 \delta^4) (- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4)), \\
 x6 \rightarrow & \frac{(kz0 + kz2a) (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a) \delta (e0xz k0^2 kx + e0yz k0^2 ky + kx kz0 n - ky kz0 \mu)}{- (kz0 + kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a)^2 + (kz0 - kz2a)^2 (kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a)^2 \delta^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times 7 \rightarrow \\
& - \left((kz0 - kz2a) \delta^3 \left(kx^2 ky^2 kz0^2 n + ky^4 kz0^2 n + 2 kx^2 ky^2 kz0 kz2a n + 2 ky^4 kz0 kz2a n - kx^2 kz0^3 kz2a n + 2 ky^2 kz0^3 kz2a n + kx^2 ky^2 kz2a^2 n + ky^4 kz2a^2 n - 2 kx^2 kz0^2 kz2a^2 n + 4 ky^2 kz0^2 kz2a^2 n + kz0^4 kz2a^2 n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - kx^2 kz0 kz2a^3 n + 2 ky^2 kz0 kz2a^3 n + 2 kz0^3 kz2a^3 n + kz0^2 kz2a^4 n - kx^2 ky^2 kz0^2 n \delta^4 - ky^4 kz0^2 n \delta^4 + 2 kx^2 ky^2 kz0 kz2a n \delta^4 + 2 ky^4 kz0 kz2a n \delta^4 + kx^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 ky^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 - kx^2 ky^2 kz2a^2 n \delta^4 - ky^4 kz2a^2 n \delta^4 - 2 kx^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - 4 ky^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - kz0^4 kz2a^2 n \delta^4 + kx^2 kz0 kz2a^3 n \delta^4 + 2 ky^2 kz0 kz2a^3 n \delta^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. e0xz \left(kz0 \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 - kz0 \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 + kx^4 kz2a \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. kx^2 \left(kz0 - kz2a \right) \left(-ky^2 + kz0 kz2a \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \right) \right) + kx ky \left(\left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + 3 kz0 kz2a \right) - \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right) \delta^4 \right) \mu \Big) / \\
& \left(\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \right), \\
& \times 8 \rightarrow \left(\left(kz0 - kz2a \right) \delta^3 \left(kx^3 ky kz0^2 n + kx ky^3 kz0^2 n + 2 kx^3 ky kz0 kz2a n + 2 kx ky^3 kz0 kz2a n + 3 kx ky kz0^3 kz2a n + kx^3 ky kz2a^2 n + kx ky^3 kz2a^2 n + 6 kx ky kz0^2 kz2a^2 n + 3 kx ky kz0 kz2a^3 n - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. kx^3 ky kz0^2 n \delta^4 - kx ky^3 kz0^2 n \delta^4 + 2 kx^3 ky kz0 kz2a n \delta^4 + 2 kx ky^3 kz0 kz2a n \delta^4 + kx ky kz0^3 kz2a n \delta^4 - kx^3 ky kz2a^2 n \delta^4 - kx ky^3 kz2a^2 n \delta^4 - 2 kx ky kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 + kx ky kz0 kz2a^3 n \delta^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. e0xz kx ky \left(kz0 + kz2a \right) \left(\left(kz0 + kz2a \right) \left(kz0 \left(3 kz0 - kz2a \right) kz2a + kx^2 \left(kz0 + kz2a \right) + ky^2 \left(kz0 + kz2a \right) \right) - \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right) \delta^4 \right) + e0yz \left(kx^4 kz0 \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(ky^2 + kz0^2 \right) kz2a \left(-ky^2 + kz0 kz2a \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) + kx^2 \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(ky^2 \left(kz0 - kz2a \right) + 2 kz0^2 kz2a \right) + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(ky^2 \left(kz0 - kz2a \right) - 2 kz0^2 kz2a \right) \delta^4 \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \left(\left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^4 + kz0 kz2a \left(-ky^2 + kz0 kz2a \right) + kx^2 \left(ky^2 + 2 kz0 kz2a \right) \right) - \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 - kz0 kz2a \right) \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right) \delta^4 \right) \mu \right) / \\
& \left(\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \right), \\
& \times 9 \rightarrow - \frac{\left(kz0 - kz2a \right) \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right) \delta^3 \left(e0xz k0^2 kx + e0yz k0^2 ky + kx kz0 n - ky kz0 \mu \right)}{\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right)}, \\
& \times 10 \rightarrow \\
& \left(2 kz2a \delta^2 \left(kx^2 ky^2 kz0^2 n + ky^4 kz0^2 n + kx^2 kz0^4 n + 2 kx^2 ky^2 kz0 kz2a n + 2 ky^4 kz0 kz2a n + 2 kx^2 kz0^3 kz2a n + 2 ky^2 kz0^3 kz2a n + kx^2 ky^2 kz2a^2 n + ky^4 kz2a^2 n + kx^2 kz0^2 kz2a^2 n + 4 ky^2 kz0^2 kz2a^2 n + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. kz0^4 kz2a^2 n + 2 ky^2 kz0 kz2a^3 n + 2 kz0^3 kz2a^3 n + kz0^2 kz2a^4 n - kx^2 ky^2 kz0^2 n \delta^4 - ky^4 kz0^2 n \delta^4 - kx^2 kz0^4 n \delta^4 + 2 kx^2 ky^2 kz0 kz2a n \delta^4 + 2 ky^4 kz0 kz2a n \delta^4 + 2 kx^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 ky^2 kz0^3 kz2a n \delta^4 - kx^2 ky^2 kz2a^2 n \delta^4 - ky^4 kz2a^2 n \delta^4 - kx^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - 4 ky^2 kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 - kz0^4 kz2a^2 n \delta^4 + 2 ky^2 kz0 kz2a^3 n \delta^4 + 2 kz0^3 kz2a^3 n \delta^4 - kz0^2 kz2a^4 n \delta^4 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. e0yz kx ky kz0 \left(kz0^2 - kz2a^2 \right)^2 \left(-1 + \delta^4 \right) + e0xz kz0 \left(\left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^4 + \left(ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + kx^2 \left(2 ky^2 + kz0^2 + kz2a^2 \right) \right) - \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^4 + \left(ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 + kx^2 \left(2 ky^2 + kz0^2 + kz2a^2 \right) \right) \delta^4 \right) + \right. \\
& \quad \left. kx ky \left(\left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0^2 + 2 kz0 kz2a \right) + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(-kx^2 - ky^2 + kz0^2 + 2 kz0 kz2a \right) \delta^4 \right) \mu \right) / \\
& \left(\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \right), \\
& \times 11 \rightarrow - \left(2 kz2a \delta^2 \left(kx^3 ky kz0^2 n + kx ky^3 kz0^2 n - kx ky kz0^4 n + 2 kx^3 ky kz0 kz2a n + 2 kx ky^3 kz0 kz2a n + kx^3 ky kz2a^2 n + kx ky^3 kz2a^2 n + 3 kx ky kz0^2 kz2a^2 n + 2 kx ky kz0 kz2a^3 n - kx^3 ky kz0^2 n \delta^4 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. kx ky^3 kz0^2 n \delta^4 + kx ky kz0^4 n \delta^4 + 2 kx^3 ky kz0 kz2a n \delta^4 + 2 kx ky^3 kz0 kz2a n \delta^4 - kx^3 ky kz2a^2 n \delta^4 - kx ky^3 kz2a^2 n \delta^4 - 3 kx ky kz0^2 kz2a^2 n \delta^4 + 2 kx ky kz0 kz2a^3 n \delta^4 + e0xz kx ky kz0 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(kz0^2 - kz2a^2 \right)^2 \left(-1 + \delta^4 \right) + e0yz kz0 \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^4 + 2 kx^2 \left(ky^2 + kz0 kz2a \right) + \left(ky^2 + kz0^2 \right) \left(ky^2 + kz2a^2 \right) \right) + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^4 + 2 kx^2 \left(ky^2 - kz0 kz2a \right) + \left(ky^2 + kz0^2 \right) \left(ky^2 + kz2a^2 \right) \right) \delta^4 \right) + \right. \\
& \quad \left. \left(\left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^4 + kx^2 \left(ky^2 + 2 kz0 kz2a \right) + kz0^2 \left(ky^2 + kz2a^2 \right) \right) - \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^4 + kx^2 \left(ky^2 - 2 kz0 kz2a \right) + kz0^2 \left(ky^2 + kz2a^2 \right) \right) \delta^4 \right) \mu \right) / \\
& \left(\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right) \right), \\
& \times 12 \rightarrow \frac{2 k2^2 kz2a \delta^2 \left(e0xz k0^2 kx + e0yz k0^2 ky + kx kz0 n - ky kz0 \mu \right)}{\left(- \left(kz0 + kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 + kz0 kz2a \right)^2 + \left(kz0 - kz2a \right)^2 \left(kx^2 + ky^2 - kz0 kz2a \right)^2 \delta^4 \right)},
\end{aligned}$$

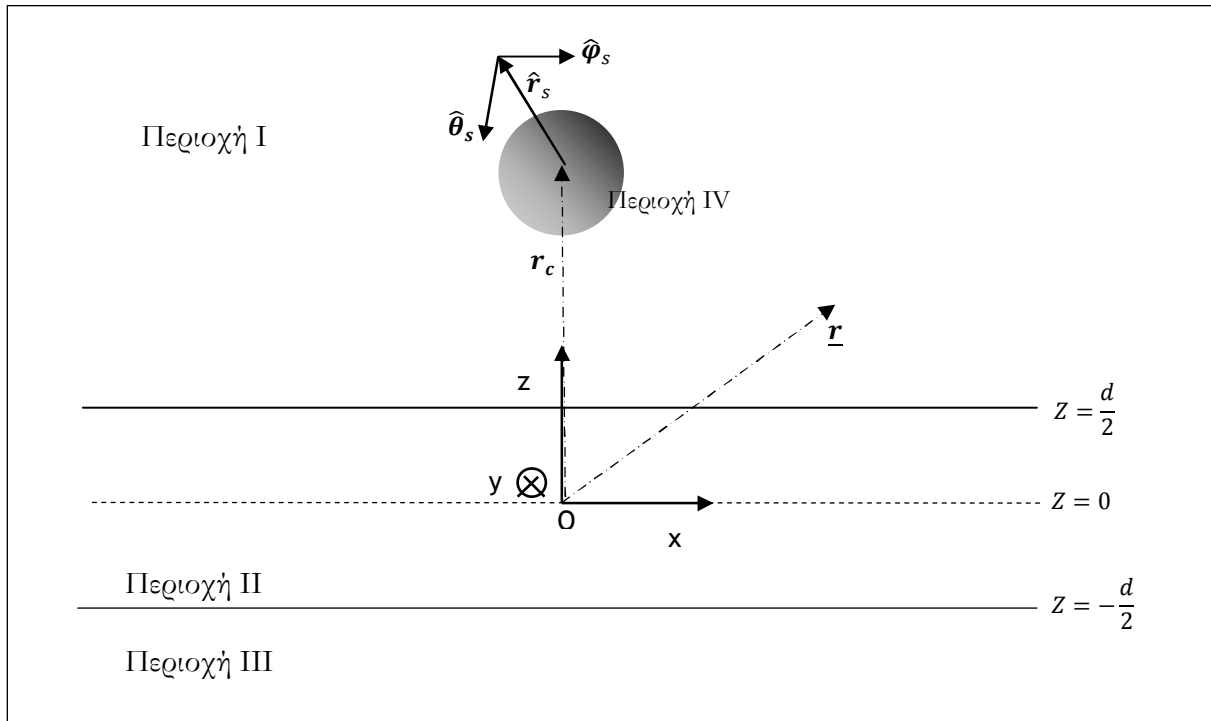
5. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.40) για κάθε σημείο του χώρου προϋποθέτει την εύρεση του πεδίου στο χώρο της ανομοιογένειας. Πράγματι, αν καταφέρουμε να βρούμε μία έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου για τα σημεία της περιοχής ολοκλήρωσης τότε, χρησιμοποιώντας την εκάστοτε κατάλληλη συνάρτηση Green, μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε άλλη περιοχή του χώρου. Επισημαίνεται εδώ ότι, σύμφωνα με τη σχέση (4.9), η κατάλληλη έκφραση της συνάρτησης Green για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης στο χώρο της ανομοιογένειας είναι η:

$$\bar{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}').$$

Για λόγους μείωσης της πολυπλοκότητας θα θεωρηθεί ότι το κέντρο του σφαιρικού σκεδαστή βρίσκεται στο σημείο $(0, 0, z_c)$, δηλαδή το διάνυσμα θέσεως του κέντρου είναι το: $\underline{\mathbf{r}}_c = z_c \hat{\mathbf{z}}$.

Το νέο σχήμα που περιγράφει τη διάταξη είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 5.1

5.1. Έκφραση των πεδίων ως αναπτύγματα σφαιρικών κυμάτων

Η ολοκλήρωση στην Περιοχή 4 απαιτεί την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων καθώς και την έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου και της συνάρτησης Green σε κατάλληλο ανάπτυγμα διανυσματικών ιδιοσυναρτήσεων. Στην περίπτωση μας ο όγκος ολοκλήρωσης έχει σφαιρικό σχήμα, γι' αυτό η καταλληλότερη αντιμετώπιση επιτυγχάνεται αν εργασθούμε σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, με αρχή το κέντρο της σφαίρας.

Αρχικά πρέπει να γραφούν οι σχέσεις μετασχηματισμού από καρτεσιανό (x, y, z) σε σφαιρικό σύστημα (r, θ, φ) με αρχή το σημείο $(x,y,z)=(0,0,0)$:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad z = r \cos\theta \quad (5.1)$$

Στη συνέχεια πρέπει γίνει μετατόπιση της αρχής των αξόνων του νέου συστήματος στο σημείο $(x,y,z)=(0,0,z_c)$ και να διατυπωθούν οι σχέσεις που συνδέουν το αρχικό $\underline{\mathbf{r}} : (x, y, z)$ με το μετατοπισμένο σύστημα $\underline{\mathbf{r}}_s : (x_s, y_s, z_s)$. Αυτές είναι οι εξής:

$$\underline{\mathbf{r}}_s = \underline{\mathbf{r}} - z_c \hat{\mathbf{z}} \quad (5.2)$$

$$x_s = r \sin\theta \cos\varphi \quad y_s = r \sin\theta \sin\varphi \quad z_s = -z_c + r \cos\theta \quad (5.3)$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να εκφράσουμε όλα τα μεγέθη της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε αναπτύγματα σφαιρικών κυμάτων.

Το ζητούμενο ανάπτυγμα για το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}_s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left(a_{mn} \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) + \beta_{mn} \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) \right) \quad (5.4)$$

Ως a_{mn} , β_{mn} συμβολίζονται οι άγνωστοι βαθμωτοί συντελεστές του αναπτύγματος, ενώ τα $\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}, k_4)$ και $\underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}, k_4)$ είναι τα σφαιρικά κυματικά ιδιοδιανύσματα. Τα τελευταία βασίζονται στα βαθμωτά δυναμικά Debye που ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz ως λύση χωριζόμενων μεταβλητών. Στη βιβλιογραφία [8] τα σφαιρικά κυματοδιανύσματα ορίζονται ως εξής:

$$\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(l)}(\underline{\mathbf{r}}, k) = z_n^{(l)}(kr) \sqrt{n(n+1)} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) \quad (5.5)$$

$$\underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(l)}(\underline{\mathbf{r}}, k) = n(n+1) \frac{z_n^{(l)}(kr)}{kr} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} + \frac{z_n^{(l)'}(kr)}{kr} \sqrt{n(n+1)} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi) \quad (5.6)$$

Και

$$\underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(\frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) e^{im\varphi} \quad (5.7)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(\frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) e^{im\varphi} \quad (5.8)$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός:

$$z_n^{(l)}(kr) = \begin{cases} j_n(kr) & , l = 1 : \text{Σφαιρική Συνάρτηση Bessel 1ου είδους} \\ y_n(kr) & , l = 2 : \text{Σφαιρική Συνάρτηση Bessel 2ου είδους} \\ h_n^{(1)}(kr) & , l = 3 : \text{Σφαιρική Συνάρτηση Hankel 1ου είδους} \\ h_n^{(2)}(kr) & , l = 4 : \text{Σφαιρική Συνάρτηση Hankel 2ου είδους} \end{cases} \quad (5.9)$$

Που αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + (x^2 - n(n+1)) \right] z_n^{(l)}(x) = 0$$

Επίσης:

$$z_n^{(l)'}(kr) = \frac{d}{dr} \left((kr) z_n^{(l)}(kr) \right) \quad (5.10)$$

$P_n^m(x)$: Οι Προσαρτημένες Συναρτήσεις Legendre, όπου με “n” συμβολίζεται ο βαθμός και με “m” η τάξη τους. Οι συναρτήσεις αυτές λύνουν τη διαφορική εξίσωση:

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] P_n^m(x) = 0$$

Οι ιδιότητες των παραπάνω ειδικών συναρτήσεων υπάρχουν συγκεντρωμένες στην παραπομπή [1].

Προς το παρόν έχουμε εκφράσει σε μορφή αναπτύγματος σφαιρικών κυμάτων τη λύση για το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{\mathbf{E}}$. Αντίστοιχα πρέπει να αναπτυχθεί σε σφαιρικά κύματα και η συνάρτηση Green που αφορά το χώρο ολοκλήρωσης. Πρόκειται για τη $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')$ η οποία σύμφωνα με τις σχέσεις (4.40) και (4.43) αναλύεται σε:

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = -\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} k_0^{-2} \delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}') + \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_0(k_x, k_y, (z - z')) \cdot e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_0 |z - z'|} d\mathbf{k}_\perp$$

Και

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) \cdot e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_\perp - \underline{\mathbf{r}}'_\perp) - \mu_1 (z - \frac{d}{2}) - \mu_0 (\frac{d}{2} - z')} d\mathbf{k}_\perp$$

Το ανάπτυγμα της συνάρτησης Green του ελεύθερου χώρου $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_0$ υπάρχει στη βιβλιογραφία [8], [11] και είναι:

$$\begin{aligned} & \bar{\bar{\mathbf{G}}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \\ &= -\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} \frac{\delta(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}')}{k_0^2} \\ &+ \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \begin{cases} \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}', k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}', k_0) & , r > r' \\ \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}', k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}', k_0) & , r < r' \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω ανάπτυγμα παραμένει αναλλοίωτο για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει από γραμμικό ή περιστροφικό μετασχηματισμό. Γι' αυτό, κατά τη χρήση του στο μετατοπισμένο σύστημα συντεταγμένων, θα γίνει η απλή αντικατάσταση: $\underline{\mathbf{r}}^{(l)} \leftarrow \underline{\mathbf{r}}_s^{(l)}$.

Το ανάπτυγμα της $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_1$ απαιτεί ιδιαίτερο χειρισμό ως προς κυματικό μέρος. Στις παρακάτω πράξεις λαμβάνεται υπόψη και η μετατόπιση των αξόνων και το ότι $\mu_0 = \mu_1$.

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}_s, \underline{\mathbf{r}}'_s) = \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) \cdot e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\underline{\mathbf{r}}_{s\perp} - \underline{\mathbf{r}}'_{s\perp}) - \mu_1 (z_s - \frac{d}{2} + z_c) - \mu_1 (\frac{d}{2} - z'_s - z_c)} dk_x dk_y$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s)} dk_x dk_y \\
 &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_s} \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} dk_x dk_y
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Όπου, ομοίως με το κεφάλαιο 4, είναι:

$$\underline{\mathbf{k}}_1 = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + i\mu_1 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mu\varepsilon \quad |\underline{\mathbf{k}}_1| \triangleq k_1 = k_0 \tag{5.13}$$

$$\mu_1 = -ik_{0z1} = \sqrt{|k_0^2 - k_x^2 - k_y^2|} \begin{cases} \varepsilon - i & , k_0^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ 1 - i\varepsilon & , k_0^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \tag{5.14}$$

Επίσης το ολοκλήρωμα ως προς τις μεταβλητές k_x, k_y μπορεί να μετατραπεί σε ολοκλήρωμα ως προς τις γωνίες θ_k, φ_k ως εξής:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y = \iint_{0}^{2\pi+i\infty} k_0^2 \cos \theta_k \sin \theta_k d\theta_k d\varphi_k \tag{5.15}$$

Οι γωνίες θ_k, φ_k προσδιορίζουν την κατεύθυνση του διανύσματος $\underline{\mathbf{k}}_1$ σύμφωνα με τις σχέσεις των σφαιρικών συντεταγμένων:

$$k_x = k_0 \sin \theta_k \cos \varphi_k \quad k_y = k_0 \sin \theta_k \sin \varphi_k \tag{5.16}$$

Τέλος, θεωρήσαμε τη γωνία θ_k ως μιγαδική και θέσαμε κατάλληλα τα αντίστοιχα όρια ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να διατηρείται η ικανότητα των k_x, k_y να βγαίνουν εκτός των ορίων του κύκλου:

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{5.17}$$

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να αναπτύξουμε τη $\bar{\mathbf{G}}_1$ ως ανάπτυγμα σφαιρικών κυμάτων, εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα της μοναδιαίας διάδας ($\bar{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$):

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \tag{5.18}$$

όπου $\underline{\mathbf{v}}$: τυχαίο διάνυσμα ή διάδα. Συγκεκριμένα, μας δίνεται η δυνατότητα να εκφράσουμε τους

κυματικούς όρους $\bar{\mathbf{I}}e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_s}$ ως ανάπτυγμα σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων, το οποίο είναι ήδη γνωστό από τη βιβλιογραφία¹⁰ [8]:

$$\bar{\mathbf{I}}e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (\pm i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) \mp i \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) \right] \quad (5.19)$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα θα προσαρμοστεί στην περίπτωση μας και θα εφαρμοστεί στη συνέχεια, όταν θα εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες των σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων για να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση.

Απομένει η ανάπτυξη του προσπίπτοντος πεδίου $\underline{\mathbf{E}}_0$ σε σφαιρικά κύματα. Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή του σκεδαστή (και γενικότερα, υπεράνω του κυματοδηγού) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{y}} A \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} e^{-i\beta x} e^{-\gamma\left(z-\frac{d}{2}\right)} = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}_s - z_c \hat{\mathbf{z}})} = E_0 e^{-\gamma z_c} \hat{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{I}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_s} \quad (5.20)$$

$$\text{Όπου:} \quad E_0 = A e^{\gamma \frac{d}{2}} \begin{cases} \cos\left(\frac{ad}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{ad}{2}\right) \end{cases} \quad (5.21)$$

Το διάνυσμα $\underline{\mathbf{p}}$ είναι μιγαδικό καθώς περιέχει τόσο τον όρο διάδοσης κατά τη κατεύθυνση \mathbf{x} όσο και τον όρο απόσβεσης κατά τη διεύθυνση \mathbf{z} . Αυτό εκφράζεται σε όρους γωνιακών μεγεθών ως εξής:

$$\underline{\mathbf{p}} = -\beta \hat{\mathbf{x}} + i\gamma \hat{\mathbf{z}} = \left| p \right| \sin\theta_p \cos\varphi_p \hat{\mathbf{x}} + \left| p \right| \cos\theta_p \hat{\mathbf{z}} \quad (5.22)$$

¹⁰ Το ανάπτυγμα (5.19) στη γενικότερη μορφή του περιλαμβάνει και διαμήκεις όρους και γράφεται ως εξής:

$$\bar{\mathbf{I}}e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (\pm i)^n \varepsilon_m \left\{ 2n + 1 \right\} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \mp i \underline{\mathbf{P}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{L}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) \mp i \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) \right] \right\}$$

Όπου:

$$\underline{\mathbf{P}}_{mn}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\underline{\mathbf{L}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}, k) = \underline{\mathbf{P}}_{mn}(\theta, \varphi) \frac{1}{k} \frac{d}{dr} (j_n(kr)) + \sqrt{n(n+1)} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi) \frac{j_n(kr)}{kr}$$

Παρόλα αυτά, οι διαμήκεις συνιστώσα παραλείπεται, καθώς για την ανάπτυξη του ηλεκτρικού πεδίου αρχούν οι εγκάρσιες συνιστώσες $\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}$. Ο διαμήκεις όρος θα παραλειφθεί και στη συνέχεια, όπου το μακρινό πεδίο θα θεωρηθεί προσεγγιστικά ως επίπεδο κύμα.

$$|\underline{p}| = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} = k_0 \quad (5.23)$$

Αφού, όπως ορίζουμε στο Παράρτημα Π.3.1:

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2} \quad (5.24)$$

Το διάνυσμα \underline{p} ορίστηκε έτσι ώστε να έχει φορά αντίθετη με αυτή του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου. Οι γωνίες θ_p και φ_p προσδιορίζουν την κατεύθυνση του διανύσματος \underline{p} και οι τιμές τους υπολογίζονται αναλυτικά στο παράρτημα του κεφαλαίου. Εδώ παραθέτουμε κατευθείαν τις τελικές τους τιμές:

$$\theta_p = -i \ln \left(\frac{\beta + \gamma}{k_0 n_0} \right) + \frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi_p = \pi \quad (5.25)$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα του $\bar{\mathbf{I}} e^{i\underline{p} \cdot \underline{r}_s}$ στην έκφραση του πεδίου $\underline{\mathbf{E}}_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_0 &= E_0 e^{-\gamma z_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\left(\hat{\mathbf{y}} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_p, \varphi_p) \right) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \right. \\ &\quad \left. - i \left(\hat{\mathbf{y}} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_p, \varphi_p) \right) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \right] \\ &= E_0 e^{-\gamma z_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\left(\hat{\mathbf{y}} \right. \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) e^{im\varphi_p} \left. \right) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \\ &\quad \left. - i \left(\hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) e^{im\varphi_p} \right) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \right] \quad (5.26) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις προβολές των γωνιακών διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ στους άξονες x, y και z:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta_p \cos \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta_p \sin \varphi_p - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_p \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi_p \end{aligned} \quad (5.27)$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην (5.26) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}_0 &= E_0 e^{-\gamma z_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\left(\hat{\mathbf{y}} \right. \right. \\
 &\quad \cdot \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_p \cos \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta_p \sin \varphi_p - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_p) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} (-\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi_p) \right) e^{im\varphi_p} \right] \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \\
 &\quad - i \left(\hat{\mathbf{y}} \right. \\
 &\quad \cdot \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) (-\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi_p) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_p \cos \varphi_p + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta_p \sin \varphi_p \right. \\
 &\quad \left. \left. - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_p) \right) e^{im\varphi_p} \right] \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \Bigg] \\
 &= E_0 e^{-\gamma z_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\left[\left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \cos \theta_p \sin \varphi_p \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \cos \varphi_p \right) e^{im\varphi_p} \right] \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \\
 &\quad - i \left[\left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \cos \varphi_p \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \cos \theta_p \sin \varphi_p \right) e^{im\varphi_p} \right] \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \Bigg] \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Επομένως, το κυματοδηγούμενο πεδίο μπορεί να γραφτεί πιο κομψά ως εξής:

$$\underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}_s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left(\kappa_{mn} \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) + \lambda_{mn} \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \right) \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{mn} &= E_0 e^{-\gamma z_c} i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \cos \theta_p \sin \varphi_p \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \cos \varphi_p \right) e^{im\varphi_p} \\
 &= E_0 e^{-\gamma z_c} i^n \varepsilon_m (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\partial P_n^m\left(\frac{i\gamma}{k_0}\right)}{\partial \theta} \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{mn} &= -E_0 e^{-\gamma z_c} i^{n+1} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{im}{\sin \theta_p} P_n^m(\cos \theta_p) \cos \varphi_p \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial P_n^m(\cos \theta_p)}{\partial \theta} \cos \theta_p \sin \varphi_p \right) e^{im\varphi_p} \\
 &= E_0 e^{-\gamma z_c} i^{n+2} \varepsilon_m (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{m}{\beta} P_n^m \left(\frac{i\gamma}{k_0} \right)
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

5.2. Εύρεση του πεδίου στην περιοχή του σφαιρικού σκεδαστή

Έχοντας εκφράσει όλους τους όρους της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε αναπτύγματα σφαιρικών κυμάτων, μπορούμε να χειριστούμε κατάλληλα την εξίσωση ώστε να προσδιορίσουμε όλους τους άγνωστους συντελεστές. Στα πλαίσια των χειρισμών αυτών θα εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των σφαιρικών κυματοδιανυσμάτων ώστε να προκύψει ένα σύστημα άπειρων εξισώσεων για τους συντελεστές α_{mn} και β_{mn} . Στη συνέχεια θα γίνει επίλυση αυτού του συστήματος για πεπερασμένο πλήθος εξισώσεων. Έτσι θα έχουμε μια επαρκή συλλογή βαθμωτών συντελεστών (α_{mn} β_{mn}) οι οποίοι περιγράφουν ικανοποιητικά το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο του σφαιρικού συντονιστή.

Η ανάλυση ξεκινά με τη θεμελιώδη ολοκληρωτική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) + k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \iiint_{V_4} \left(\bar{\mathbf{G}}_0(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') + \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \right) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}}' \tag{5.32}$$

Η οποία αναπτύσσεται πιο αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left(\alpha_{mn} \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) + \beta_{mn} \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left(\kappa_{mn} \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) + \lambda_{mn} \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \right) + k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{V_4} \left[\frac{ik_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) \right), r_s > r'_s \right. \\
 & \left. + \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}_s} \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}'_s} dk_x dk_y \right] \\
 & \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \left(a_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) + \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \right) d\underline{\mathbf{r}}'_s
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά αν εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας που ικανοποιούν τα γωνιακά κυματοδιανύσματα. Αυτές οι ιδιότητες είναι οι εξής¹¹:

$$\int \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{-m'n'}(\theta, \varphi) d\Omega = (-1)^m \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \tag{5.34}$$

$$\int \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{-m'n'}(\theta, \varphi) d\Omega = (-1)^m \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \tag{5.35}$$

$$\int \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{-m'n'}(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \tag{5.36}$$

$$\int \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{-m'n'}(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \tag{5.37}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αντίστοιχες σχέσεις ικανοποιούν και τα σφαιρικά διανύσματα $\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(l)}$ και $\underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(l)}$. Οι αποδείξεις όλων των παραπάνω ιδιοτήτων υπάρχουν σε αρκετά βιβλία (βλ. αναφορές [5], [8], [10], [12], [13]) και γι αυτό εδώ παραλείπονται.

Για την απλοποίηση της παραπάνω εξίσωσης υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα με τα γωνιακά κυματοδιανύσματα $\underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi)$ και $\underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi)$. Αυτό πραγματοποιείται σε δύο ανεξάρτητα βήματα:

- Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με $\underline{\mathbf{C}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s)$ και ολοκληρώνουμε στα διαστήματα $0 \leq \theta_s \leq \pi$ και $0 \leq \varphi_s \leq 2\pi$ και, αφού εκτελεστούν οι απαραίτητες πράξεις προκύπτει η απλοποιημένη αλγεβρική εξίσωση:

¹¹ Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ και καλύπτει όλο το γωνιακό εύρος στο χώρο. Επομένως η ολοκλήρωση αυτή γράφεται αναλυτικότερα:

$$\int d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 j_n(k_4 r_s) \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m a_{mn} &= j_n(k_0 r_s) \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \kappa_{mn} + \frac{ik_0}{4\pi} k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) \begin{vmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{vmatrix} \\
 &+ k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) \begin{vmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Όπου πρέπει να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} L_{11} \\ L_{12} \end{matrix} &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin\theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin\theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4)
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} H_{11} \\ H_{12} \end{matrix} &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin\theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin\theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4) \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_4)
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Η εξίσωση (5.38) γράφεται σε πιο ανεπτυγμένη μορφή :

$$\begin{aligned}
 j_n(k_4 r_s) \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m a_{mn} &= j_n(k_0 r_s) \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \kappa_{mn} \\
 &+ \frac{ik_0}{4\pi} k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \alpha_{mn} \left[\frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} j_n(k_0 r) G_n + i \frac{j_n(k_4 r)}{k_0(k_0^2 - k_4^2)} \right] \\
 &+ k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) 2i^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m j_n(k_0 r_s) \\
 &\sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \sqrt{n'(n'+1)} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} E_{n'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 &\quad \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \\
 &+ k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) 2i^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m j_n(k_0 r_s) \\
 &\sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} (-i)^{n'+1} \sqrt{n'(n'+1)} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} F_{n'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 &\quad \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Όπου:

$$G_n(x_1, x_4) = x_1 h_{n+1}(x_1)j_n(x_4) - x_4 h_n(x_1)j_{n+1}(x_4) \quad (5.42)$$

$$E_{n'}(x_1, x_4) = x_1 j_{n'+1}(x_1)j_{n'}(x_4) - x_4 j_{n'}(x_1)j_{n'+1}(x_4) \quad (5.43)$$

$$F_{n'}(x_1, x_4) = \frac{k_0}{k_4} j_{n'}(x_1)j'_{n'}(x_4) - \frac{k_4}{k_0} j_{n'}(x_4)j'_{n'}(x_1) \quad (5.44)$$

$$x_1 = k_0 \alpha \quad (5.45)$$

$$x_4 = k_4 \alpha \quad (5.46)$$

Αν απλοποιήσουμε τον κοινό όρο: $j_n(k_4 r_s) \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m a_{mn}$ από κάθε μέλος της εξίσωσης και αν απαλείψουμε τον κοινό παράγοντα $j_n(k_0 r_s)$, τότε προκύπτει μια πιο συνοπτικά γραμμένη εξίσωση:

$$M_{mn} G_n \alpha_{mn} + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[E_{n'} K_{11mn,m'n'} \alpha_{m'n'} + F_{n'} K_{12mn,m'n'} \beta_{m'n'} \right] = R_{1mn} \quad (5.47)$$

$$M_{mn} = i k_0 \alpha \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \quad (5.48)$$

$$P_{mn,m'n'} = 2a i^{n-n'-1} k_0^{-2} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{n'(n'+1)} \quad (5.49)$$

$$R_{1mn} = \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \kappa_{mn} \quad (5.50)$$

$$K_{11mn,m'n'} = i \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (5.51)$$

$$K_{12mn,m'n'} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (5.52)$$

Όπου:

$$\theta_k = \cos^{-1} \frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}{k_0} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x}$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta_k \cos \varphi_k + \hat{y} \cos \theta_k \sin \varphi_k - \hat{z} \cos \theta_k$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi_k + \hat{y} \cos \varphi_k$$

- Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s)$ και ολοκληρώνοντας στα διαστήματα $0 \leq \theta_s \leq \pi$ και $0 \leq \varphi_s \leq 2\pi$ προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{j'_n(k_4 r_s)}{k_4 r_s} \frac{4\pi \sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \beta_{mn} \\ = \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} \frac{4\pi \sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \lambda_{mn} + \frac{ik_0}{4\pi} k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \Big|_{L_{21}}^{L_{22}} \\ + k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \Big|_{H_{21}}^{H_{22}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Όπου πρέπει να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} L_{21} \\ L_{22} = \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \bar{\mathbf{G}}_0 \\ \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} H_{21} \\ H_{22} = \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \\ \cdot \bar{\mathbf{G}}_1(\underline{\mathbf{r}}_s, \underline{\mathbf{r}}'_s) \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Η εξίσωση γράφεται αναλυτικότερα:

$$\begin{aligned}
 & \frac{j'_n(k_4 r_s)}{k_4 r_s} \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \beta_{mn} = \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m \lambda_{mn} \\
 & + \frac{ik_0}{4\pi} k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \beta_{mn} \left[\frac{j'_n(k_0 r)}{k_0 r} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} D_n + \frac{i}{k_0} \frac{1}{k_0^2 - k_4^2} \frac{j'_n(k_4 r)}{k_4 r} \right] \\
 & - k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) 2i^{n-1} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} a \\
 & \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \sqrt{n'(n'+1)} \frac{a}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} E_{n'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 & \quad \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \\
 & - k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) 2i^{n-1} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} a \\
 & \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} (-i)^{n'+1} \sqrt{n'(n'+1)} \frac{a}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} F_{n'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 & \quad \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Ή πιο συνοπτικά, αν απλοποιήσουμε τον κοινό όρο $\frac{j'_n(k_4 r_s)}{k_4 r_s} \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} (-1)^m a_{mn}$ από κάθε μέλος της εξίσωσης και απαλείψουμε τον κοινό παράγοντα $\frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s}$:

$$M_{mn} D_n \beta_{mn} + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn, m'n'} \left[E_{n'} K_{21, mn, m'n'} \alpha_{m'n'} + F_{n'} K_{22, mn, m'n'} \beta_{m'n'} \right] = R_{2, mn} \tag{5.57}$$

Όπου:

$$\begin{aligned}
 M_{mn} &= ik_0 \alpha \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \\
 P_{mn, m'n'} &= 2ai^{n-n'-1} k_0^{-2} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{n'(n'+1)} \\
 D_n(x_1, x_4) &= \frac{k_0}{k_4} h_n(x_1) j'_n(x_4) - \frac{k_4}{k_0} j_n(x_4) h'_{n+1}(x_1)
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$E_{n'}(x_1, x_4) = x_1 j_{n'+1}(x_1) j_{n'}(x_4) - x_4 j_{n'}(x_1) j_{n'+1}(x_4)$$

$$F_{n'}(x_1, x_4) = \frac{k_0}{k_4} j_{n'}(x_1) j_{n'}(x_4) - \frac{k_4}{k_0} j_{n'}(x_4) j_{n'}(x_1)$$

$$R_{2mn} = \frac{4\pi\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \lambda_{mn} \quad (5.59)$$

$$K_{21mn,m'n'} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (5.60)$$

$$K_{22mn,m'n'} = -i \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (5.61)$$

Τα ολοκληρώματα $K_{ij,mn,m'n'}$ ($i, j = 1, 2$) ονομάζονται συντελεστές σύζευξης και συγκεντρωτικά γράφονται:

$$K_{11mn,m'n'} = i \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

$$K_{12mn,m'n'} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

$$K_{21mn,m'n'} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

$$K_{22mn,m'n'} = -i \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

Όπου:

$$\theta_k = \cos^{-1} \frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}{k_0} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta_k \cos \varphi_k + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta_k \sin \varphi_k - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_k$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi_k + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi_k$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να λυθούν με αριθμητικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα με τις μεθόδους Simpson και Gaussian Quadrature (για διπλή ολοκλήρωση). Επιπλέον η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει και στο πεδίο των γωνιών θ_k και φ_k , με κατάλληλο μετασχηματισμό των μεταβλητών.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα της εύρεσης των συντελεστών α_{mn} και β_{mn} , συμπεραίνουμε ότι αυτοί προκύπτουν από τη λύση του συστήματος άπειρων εξισώσεων (5.47) (5.57) οι οποίες γράφονται μαζί παρακάτω:

$$\begin{aligned} M_{mn}G_n\alpha_{mn} + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[E_{n'}K_{11mn,m'n'}\alpha_{m'n'} + F_{n'}K_{12mn,m'n'}\beta_{m'n'} \right] &= R_{1mn} \\ M_{mn}D_n\beta_{mn} + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[E_{n'}K_{21mn,m'n'}\alpha_{m'n'} + F_{n'}K_{22mn,m'n'}\beta_{m'n'} \right] &= R_{2mn} \end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων, το ίδιο σύστημα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$M_{mn} \begin{bmatrix} \vdots \\ G_n\alpha_{mn} \\ \vdots \\ D_n\beta_{mn} \\ \vdots \end{bmatrix} + P_{mn,m'n'} \begin{bmatrix} [E_{n'}K_{11mn,m'n'}] & [F_{n'}K_{12mn,m'n'}] \\ [E_{n'}K_{21mn,m'n'}] & [F_{n'}K_{22mn,m'n'}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{mn} \\ \vdots \\ \beta_{mn} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ R_{1mn} \\ \vdots \\ R_{2mn} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Η πιο προφανής επιλογή για την επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι να περιορίσουμε το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άγνωστο διάνυσμα συντελεστών μέσω αντιστροφής των μητρών. Η αντιστροφή των μητρών θα μετέτρεπε το σύστημα σε κατάλληλη μορφή για απευθείας επίλυση, όπως αυτή που ακολουθεί:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{mn} \\ \vdots \\ \beta_{mn} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \frac{P_{mn,m'n'}}{M_{mn}} \left[\frac{E_{n'}}{G_n} K_{11mn,m'n'} \right] & \frac{P_{mn,m'n'}}{M_{mn}} \left[\frac{F_{n'}}{G_n} K_{12mn,m'n'} \right] \\ \frac{P_{mn,m'n'}}{M_{mn}} \left[\frac{E_{n'}}{D_n} K_{21mn,m'n'} \right] & \mathbf{1} + \frac{P_{mn,m'n'}}{M_{mn}} \left[\frac{F_{n'}}{D_n} K_{22mn,m'n'} \right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{R_{1mn}}{M_{mn}G_n} \\ \vdots \\ \frac{R_{2mn}}{M_{mn}D_n} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Το πρόβλημα με την παραπάνω τακτική είναι ότι δύσκολα εφαρμόζεται σε συστήματα με τόσο σύνθετους συντελεστές σύζευξης. Γι αυτό θα εφαρμόσουμε μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης η οποία περιορίζει μεν το πεδίο εφαρμογής, αλλά οδηγεί σε αναλυτικές εκφράσεις των λύσεων.

Η προσεγγιστική μέθοδος που θα εφαρμόσουμε αφορά την περίπτωση που ο σφαιρικός σκεδαστής έχει δείκτη διάθλασης κοντά σε αυτόν του περιβάλλοντος χώρου. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το κύμα που εισέρχεται στη σφαίρα υφίσταται μικρή στροφή φάσης. Από μαθηματικής πλευράς, η προσέγγιση στοχεύει στην ανάπτυξη των μεγεθών E_n, F_n, G_n, D_n και α_{mn}, β_{mn} σε συγκλίνουσα δυναμοσειρά της διαφοράς $(x_4 - x_1)$ για $x_1 \approx x_4$. Για να είμαστε επομένως πιο ακριβείς, η συνθήκη στην οποία βασίζεται η προσέγγισή μας είναι: $|x_4 - x_1| < 1$.

Όταν $x_1 \approx x_4$ τότε μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor τις ποσότητες:

$$\begin{aligned}
 E_n(x_1, x_4) &= (x_4 - x_1)E_n(1) + (x_4 - x_1)^2E_n(2) + (x_4 - x_1)^3E_n(3) + \dots \\
 F_n(x_1, x_4) &= (x_4 - x_1)F_n(1) + (x_4 - x_1)^2F_n(2) + (x_4 - x_1)^3F_n(3) + \dots \\
 G_n(x_1, x_4) &= G_n(1) + (x_4 - x_1)G_n(2) + (x_4 - x_1)^2G_n(3) + (x_4 - x_1)^3G_n(4) + \dots \\
 D_n(x_1, x_4) &= D_n(1) + (x_4 - x_1)D_n(2) + (x_4 - x_1)^2D_n(3) + (x_4 - x_1)^3D_n(4) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.64}$$

Ή με κομψότερο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 E_n(x_1, x_4) &= \sum_{j=1}^{+\infty} E_n(j)(x_4 - x_1)^j \\
 F_n(x_1, x_4) &= \sum_{j=1}^{+\infty} E_n(j)(x_4 - x_1)^j \\
 G_n(x_1, x_4) &= \sum_{j=1}^{+\infty} G_n(j)(x_4 - x_1)^{j-1} \\
 D_n(x_1, x_4) &= \sum_{j=1}^{+\infty} G_n(j)(x_4 - x_1)^{j-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

Όπου ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
 E_n(j) &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_4^j} E_n(x_1, x_4) \Big|_{x_1=x_4} \\
 F_n(j) &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_4^j} E_n(x_1, x_4) \Big|_{x_1=x_4} \\
 G_n(j) &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_4^j} E_n(x_1, x_4) \Big|_{x_1=x_4} \\
 D_n(j) &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_4^j} E_n(x_1, x_4) \Big|_{x_1=x_4}
 \end{aligned}
 \tag{5.66}$$

Η χρήση του δείκτη j είναι τέτοια που εξυπηρετεί την περαιτέρω διαδικασία, καθώς για τα E και F ισχύει:

$$E_n(0) = E_n(x_1 = x_4) = 0$$

$$F_n(0) = F_n(x_1 = x_4) = 0$$

ενώ για τα G και D :

$$G_n(1) = G_n(x_1 = x_4) = -\frac{i}{x_1}$$

$$D_n(1) = D_n(x_1 = x_4) = -\frac{i}{x_1}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι και οι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης μπορούν να πάρουν τη μορφή αναπτύγματος της μορφής:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_{mn}(j)(x_4 - x_1)^{j-1} \\ \beta_{mn} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_{mn}(j)(x_4 - x_1)^{j-1} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα (5.65) και (5.67) στις εξισώσεις (5.47) (5.57), μπορούμε να εφαρμόσουμε την ακόλουθη ιδιότητα του γινομένου δυναμοσειρών:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m x^m \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p+1} \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \beta_{p+1-k} \right) \quad (5.68)$$

Μετά από τις απαραίτητες πράξεις, οι εξισώσεις (5.47) (5.57) γράφονται:

$$\begin{aligned} M_{mn} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p G_n(s) \alpha_{mn}(p+1-s) (x_4 - x_1)^{p-1} \\ + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[K_{11mn,m'n'} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p E_{n'}(s) \alpha_{m'n'}(p+1-s) (x_4 \right. \\ \left. - x_1)^p + K_{12mn,m'n'} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p F_{n'}(s) \beta_{m'n'}(p+1-s) (x_4 - x_1)^p \right] = R_{1mn} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Και αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
 M_{mn} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p D_n(s) \beta_{mn}(p+1-s) (x_4 - x_1)^{p-1} \\
 + \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[K_{21mn,m'n'} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p E_{n'}(s) \alpha_{m'n'}(p+1-s) (x_4 \right. \\
 \left. - x_1)^p + K_{22mn,m'n'} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^p F_{n'}(s) \beta_{m'n'}(p+1-s) (x_4 - x_1)^p \right] = R_{2mn} \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους όμοιους όρους, προκύπτουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{mn}(1) &= \frac{R_{1mn}}{G_n(1)M_{mn}} \\
 \beta_{mn}(1) &= \frac{R_{2mn}}{D_n(1)M_{mn}}
 \end{aligned} \quad (5.71)$$

Και

$$\begin{aligned}
 \alpha_{mn}(q+1) &= -\frac{1}{G_n(1)} \sum_{s=2}^{q+1} G_n(s) \alpha_{mn}(q+2-s) - \frac{1}{G_n(1)M_{mn}} \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[K_{11mn,m'n'} \sum_{s=1}^q E_{n'}(s) \alpha_{m'n'}(p+1-s) \right. \\
 &\left. + K_{12mn,m'n'} \sum_{s=1}^q F_{n'}(s) \beta_{m'n'}(p+1-s) \right] \quad (5.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{mn}(q+1) &= -\frac{1}{D_n(1)} \sum_{s=2}^{q+1} D_n(s) \beta_{mn}(q+2-s) - \frac{1}{D_n(1)M_{mn}} \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} P_{mn,m'n'} \left[K_{21mn,m'n'} \sum_{s=1}^q E_{n'}(s) \alpha_{m'n'}(p+1-s) \right. \\
 &\left. + K_{22mn,m'n'} \sum_{s=1}^q F_{n'}(s) \beta_{m'n'}(p+1-s) \right] \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

$q = 1,2,3,4 \dots$

Επομένως, η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε προσφέρει το πλεονέκτημα ότι οι συντελεστές ανάπτυξης του ηλεκτρικού πεδίου είναι δυνατόν να υπολογιστούν αναλυτικά ξεκινώντας από τις τιμές $\alpha_{mn}(1)$, $\beta_{mn}(1)$ και υπολογίζοντας αναδρομικά τα $\alpha_{mn}(q+1)$ και $\beta_{mn}(q+1)$ ($q = 1,2,3,4 \dots$) από τις σχέσεις (5.72) και (5.73) με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Φυσικά ο υπολογισμός των άγνωστων

συντελεστών μπορεί να πραγματοποιηθεί εφόσον υπολογιστούν και οι συντελεστές σύζευξης $K_{ij_{mn,m'n'}}$ ($i, j = 1, 2$) για το απαιτούμενο σύνολο τιμών m και n ($n \geq 1, |m| \leq n$).

Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές ακόμη προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης οι οποίες αφορούν άλλα πεδία εφαρμογής και στις οποίες δε θα αναφερθούμε εδώ, παρά μόνο αεροθιγώς. Μία από αυτές αφορά την περίπτωση όπου $x_1 \ll 1$ και x_4 ανεξάρτητο. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ακόμη μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν επιπλέον ισχύει: $x_4 \gg x_1$. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι εντός της σφαιρας παρουσιάζονται έντονοι συντονισμοί οι οποίοι, μέσω του σκεδαζόμενου κύματος, επιδρούν στο κυματοδηγούμενο πεδίο με το οποίο συζευγνύεται. Οι συχνότητες συντονισμού προκύπτουν από τις εξισώσεις (5.47) (5.57) μετά από κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις, ενώ είναι δυνατόν να προσδιοριστούν και οι αντίστοιχοι συντελεστές ποιότητας του συντονιστή. Η προσεγγιστική τεχνική στην οποία αναφερθήκαμε υπάρχει στη βιβλιογραφική παραπομπή [13] και με παρόμοιο τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί και στο παρόν πρόβλημα.

5.3. Εύρεση του πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές a_{mn} και β_{mn} ουσιαστικά έχουμε προσδιορίσει πλήρως το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο του σφαιρικού σκεδαστή. Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το πεδίο σε κάθε άλλη περιοχή του χώρου, χρησιμοποιώντας και πάλι τη θεμελιώδη εξίσωση (3.40) για σημεία \mathbf{r} έξω και μακριά από τη διηλεκτρική σφαίρα. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου εντός του διηλεκτρικού κυματοδηγού. Το πεδίο αυτό αποτελεί υπέρθεση του κυματοδηγούμενου και του σκεδαζόμενου πεδίου. Η λύση θα προκύψει από την εξίσωση (3.40), χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green της Περιοχής 2, δηλαδή τη:

$$\bar{\bar{G}}_2 = \bar{\bar{G}}_{2a} + \bar{\bar{G}}_{2b}$$

για \mathbf{r} εντός του κυματοδηγού και σε σημεία μακριά από το σκεδαστή ($r \rightarrow \infty$). Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\bar{\bar{G}}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ αποτελεί την παρατηρούμενη πεδιακή απόκριση στη θέση \mathbf{r} όταν η ρευματική διέγερση εντοπίζεται στη θέση \mathbf{r}' . Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η απόκριση παρατηρείται στην Περιοχή 2, ενώ η αντίστοιχη διέγερση βρίσκεται στην Περιοχή 4.

Επομένως, με σημείο αναφοράς το $O(0,0,0)$ στο κέντρο του κυματοδηγού (βλ. Σχήμα 5.1), η λύση για το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση $\underline{\mathbf{r}}$ εντός του κυματοδηγού είναι:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) &= \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) + k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \iiint_{V_4} \bar{\mathbf{G}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}') d\underline{\mathbf{r}}' & (5.74) \\
 &= \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) + k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \iiint_{V_4} \bar{\mathbf{G}}_2(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}'_s + z_c \hat{\mathbf{z}}) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}'_s) d\underline{\mathbf{r}}'_s \\
 &= \underline{\mathbf{E}}_0(\underline{\mathbf{r}}) \\
 &+ k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iiint_{V_4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) e^{-\mu_2 z - \mu_0 (\frac{d}{2} - z'_s - z_c)} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'_s)} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}'_s) d\underline{\mathbf{r}}'_s \\
 &+ k_0^2 (\varepsilon_{r4} - 1) \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iiint_{V_4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) e^{+\mu_2 z - \mu_0 (\frac{d}{2} - z'_s - z_c)} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'_s)} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}'_s) d\underline{\mathbf{r}}'_s & (5.75)
 \end{aligned}$$

Το κυματοδηγούμενο πεδίο της Περιοχής 2 έχει βρεθεί αναλυτικά στο Παράρτημα του Κεφαλαίου 3 και είναι το εξής:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{y}} A \begin{cases} \cos(az) \\ \sin(az) \end{cases} e^{-i\beta x}, \quad |z| < \frac{d}{2} \quad (5.76)$$

Όπου:

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \\
 \gamma &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2}
 \end{aligned}$$

Και για το β ισχύουν οι συνθήκες κυματοδότησης:

$$a \cdot \tan\left(\frac{ad}{2}\right) = \gamma \quad (5.77)$$

$$a \cdot \cot\left(\frac{ad}{2}\right) = -\gamma \quad (5.78)$$

$$k_0^2 n_2^2 > \beta^2 > k_0^2 n_0^2 \quad (5.79)$$

Για τον προσδιορισμό του σκεδαζόμενου πεδίου πρέπει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα:

$$W_1 = \iiint_{V_4} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) e^{-\mu_2 z - \mu_0 \left(\frac{d}{2} - z'_s - z_c\right)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s)} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_s) d\mathbf{r}'_s \quad (5.80)$$

$$W_2 = \iiint_{V_4} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \bar{\mathbf{e}}_{2b}(k_x, k_y) e^{+\mu_2 z - \mu_0 \left(\frac{d}{2} - z'_s - z_c\right)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s)} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_s) d\mathbf{r}'_s \quad (5.81)$$

Η διαδικασία επίλυσης των δύο ολοκληρωμάτων είναι κοινή για τα W_1, W_2 , γι' αυτό και θα περιγράψουμε με λεπτομέρεια μόνο την επίλυση του W_1 . Το ολοκλήρωμα αυτό περιέχει δύο επιμέρους ολοκληρώσεις: μία χωρική που αντιστοιχεί στο σφαιρικό όγκο του σκεδαστή και μία που αφορά το μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτρικού πεδίου (ως προς τις μεταβλητές k_x, k_y). Για τη χωρική ολοκλήρωση στον όγκο της σφαίρας, θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του εκθετικού όρου $e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s}$ σε σφαιρικά κύματα, όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι, χάρις στις σχέσεις ορθογωνιότητας των σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων, θα καταλήξουμε σε κατά το δυνατόν απλούστερες εκφράσεις. Όσον αφορά τη χωρική φασματική ολοκλήρωση ως προς k_x, k_y , θα χρησιμοποιήσουμε μία ασυμπτωτική μέθοδο ολοκλήρωσης η οποία εφαρμόζεται συχνά στον υπολογισμό των πεδίων στη μακρινή τους περιοχή. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «Μέθοδος της Στάσιμης Φάσης» και, όπως θα εξηγηθεί και παρακάτω, βασίζεται στο γεγονός ότι το σημείο παρατήρησης βρίσκεται πολύ μακριά από την αρχή και όπου πρακτικά ισχύει $k_2 r \rightarrow \infty$.

Στο σημείο αυτό, επομένως, μπορούμε να εξετάσουμε τον πρώτο όρο του σκεδαζόμενου πεδίου που επανεισχωρεί στον κυματοδηγό:

$$\begin{aligned} \underline{W}_1 &= \iiint_{V_4} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) e^{-\mu_2 z - \mu_0 \left(\frac{d}{2} - z'_s - z_c\right)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s)} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_s) d\mathbf{r}'_s \\ &= \iiint_{V_4} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}_{2a} \cdot \mathbf{r}} e^{-\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \bar{\mathbf{I}} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_s) dk_x dk_y d\mathbf{r}'_s \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}_{2a} \cdot \mathbf{r}} e^{-\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \cdot \underline{\mathbf{T}}(\theta_k, \varphi_k) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (5.82)$$

Ως $\underline{\mathbf{T}}(\theta_k, \varphi_k)$ θέσαμε το παρακάτω χωρικό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{T}}(\theta_k, \varphi_k) &= \iiint_{V_4} \bar{\mathbf{I}} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'_s) d\mathbf{r}'_s \\
 &= \iiint_{V_4} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right. \\
 &\quad \left. + i \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right] \\
 &\quad \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \left(a_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) + \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) \right) d\mathbf{r}'_s \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} (-i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\iiint_{V_4} a_{m'n'} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right. \\
 &\quad \cdot \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \\
 &\quad + \iiint_{V_4} i a_{m'n'} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \cdot \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \\
 &\quad + \iiint_{V_4} \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \\
 &\quad \left. + \iiint_{V_4} i \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} (-i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\iiint_{V_4} a_{m'n'} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right. \\
 &\quad \cdot \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \\
 &\quad \left. + \iiint_{V_4} i \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) d\mathbf{r}'_s \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[a_{mn} n(n \right. \\
 &\quad \left. + 1) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \int_{r'_s=0}^{\alpha} r'_s{}^2 j_n(k_0 r'_s) j_n(k_4 r'_s) dr'_s \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \right. \\
 &\quad \left. + i \beta_{mn} n(n \right. \\
 &\quad \left. + 1) \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \int_{r'_s=0}^{\alpha} r'_s{}^2 \left(n(n+1) \frac{j_n(k_0 r'_s)}{k_0 r'_s} \frac{j_n(k_4 r'_s)}{k_4 r'_s} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{j'_n(k_0 r'_s) j'_n(k_4 r'_s)}{k_0 r'_s k_4 r'_s} \right) dr'_s \frac{4\pi}{\varepsilon_m (2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^n 4\pi \sqrt{n(n+1)} \left[a_{mn} \mathbf{I}_1 \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) + i \beta_{mn} \mathbf{I}_2 \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \right] \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

Όπου:

$$I_1 = \int_{r'_s=0}^{\alpha} r'_s{}^2 j_n(k_0 r'_s) j_n(k_4 r'_s) dr'_s = \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} (k_0 a j_{n+1}(k_0 a) j_n(k_4 a) - k_4 a j_n(k_0 a) j_{n+1}(k_4 a))$$

$$= \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} E_n(x_1, x_4) \quad (5.84)$$

$$I_2 = \int_{r'_s=0}^{\alpha} r'_s{}^2 \left(n(n+1) \frac{j_n(k_0 r'_s) j_n(k_4 r'_s)}{k_0 r'_s k_4 r'_s} + \frac{j'_n(k_0 r'_s) j'_n(k_4 r'_s)}{k_0 r'_s k_4 r'_s} \right) dr'_s$$

$$= \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} \left(\frac{k_0}{k_4} j_n(k_0 a) j'_n(k_4 a) - \frac{k_4}{k_0} j_n(k_0 a) j'_n(k_0 a) \right) = \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} F_n(x_1, x_4) \quad (5.85)$$

και

$$k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_{z1}^2} \quad \theta_k = \cos^{-1} \frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}{k_0} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x} \quad (5.86)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos \theta_k \cos \varphi_k + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \theta_k \sin \varphi_k - \hat{\boldsymbol{z}} \cos \theta_k$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin \varphi_k + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \varphi_k$$

Δηλαδή:

$$\underline{\mathbf{T}}(k_x, k_y) = \frac{4\pi\alpha}{k_0^2 - k_4^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^n \sqrt{n(n+1)} [a_{mn} E_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y)$$

$$+ i\beta_{mn} F_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y)] \quad (5.87)$$

Τελικά το $\underline{\mathbf{W}}_1$ παίρνει διαδοχικά τη μορφή:

$$\underline{\mathbf{W}}_1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{T}}(k_x, k_y) e^{-\mu_0(\frac{d}{2} - z_c)} e^{i\mathbf{k}_{2a} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{F}}(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}_{2a} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{F}}(k_x, k_y) e^{ik_2 r (k_x \sin \theta \cos \varphi + k_y \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{k_2^2 - k_x^2 - k_y^2} \cos \theta)} dk_x dk_y \quad (5.88)$$

Όπου έγιναν οι αντικαταστάσεις:

$$\underline{\mathbf{F}}(k_x, k_y) = \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{T}}(k_x, k_y) e^{-\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \quad (5.89)$$

$$\underline{\mathbf{k}}_{2a} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_{z2} \hat{\mathbf{z}} \quad (5.90)$$

$$\underline{\mathbf{r}} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.91)$$

Ολοκληρώματα της μορφής του $\underline{\mathbf{W}}_1$ έχουν την εξής ιδιομορφία:

Όταν το όρισμα της φάσης είναι μεγάλο, όταν δηλαδή $k_2 r \rightarrow \infty$, τότε ο αρμονικός εκθετικός όρος αποτελεί μία ταχέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση των k_x, k_y που ταλαντεύεται μεταξύ των τιμών -1 και 1. Αντίθετα η συνάρτηση $\underline{\mathbf{F}}(k_x, k_y)$ μεταβάλλεται πολύ «αργά» (ως προς k_x, k_y) σε σχέση με τον ταλαντευόμενο αρμονικό όρο. Βασιζόμενοι σε αυτές τις παρατηρήσεις, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας τη (προσεγγιστική) Μέθοδο της Στάσιμης Φάσης, την οποία αναφέραμε και προηγουμένως. Η μέθοδος αυτή εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση συμβάλλει στο ολοκλήρωμα μόνο για εκείνες τις τιμές των k_x, k_y όπου η φάση της αρμονικής συνάρτησης παρουσιάζει στάσιμα σημεία. Επομένως, μπορούμε να αγνοήσουμε την ολοκλήρωση εκεί όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση μεταβάλλεται γρήγορα (δίνοντας μηδαμινή συνεισφορά) και έτσι αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μόνο γύρω από τα σημεία όπου η φάση γίνεται στάσιμη (δηλαδή όπου ο αρμονικός όρος παρουσιάζει σχετικά αργή μεταβολή).

Τα στάσιμα σημεία της φάσης υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial(\underline{\mathbf{k}}_{2a} \cdot \underline{\mathbf{r}})}{\partial k_x} = 0 \rightarrow r \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{k_x}{k_{z2}} \cos \theta \right) = 0 \rightarrow k_x = k_{z2} \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta} \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial(\underline{\mathbf{k}}_{2a} \cdot \underline{\mathbf{r}})}{\partial k_y} = 0 \rightarrow r \left(\sin \theta \sin \varphi - \frac{k_y}{k_{z2}} \cos \theta \right) = 0 \rightarrow k_y = k_{z2} \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} \quad (5.93)$$

Άρα, για το k_{z2} θα ισχύει ότι:

$$k_2^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_{z2}^2 = k_{z2}^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \rightarrow k_{z2} = \pm k_2 \cos \theta \quad (5.94)$$

Τελικά, τα στάσιμα σημεία είναι τα:

$$\begin{aligned} k_x &= \pm k_2 \sin \theta \cos \varphi \\ k_y &= \pm k_2 \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.95)$$

Αυτά τα σημεία δηλώνουν ότι το ολοκλήρωμα έχει αξία μόνο για κατευθύνσεις διάδοσης παράλληλες με τη διεύθυνση παρατήρησης. Στην περίπτωση μας, εξετάζουμε κύμα της μορφής $\frac{e^{-ik_2 r}}{r}$ επομένως επιλέγουμε τη λύση με το αρνητικό πρόσημο:

$$\begin{aligned} k_x &= -k_2 \sin \theta \cos \varphi = k_a \\ k_y &= -k_2 \sin \theta \sin \varphi = k_b \end{aligned} \quad (5.96)$$

Η εξέταση του ολοκληρώματος γύρω από το στάσιμο σημείο μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη φάση ως ανάπτυγμα Taylor γύρω από το (k_a, k_b) :

$$\begin{aligned} \underline{k}_{2a} \cdot \underline{r}_s &\simeq \underline{k}_{2a} \cdot \underline{r}_s \Big|_{k_a, k_b} + \frac{\partial(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x} \Big|_{k_a, k_b} (k_x - k_a) + \frac{\partial(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_y} \Big|_{k_a, k_b} (k_y - k_b) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x^2} \Big|_{k_a, k_b} (k_x - k_a)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_y^2} \Big|_{k_a, k_b} (k_y - k_b)^2 \\ &+ \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x \partial k_y} \Big|_{k_a, k_b} (k_x - k_a)(k_y - k_b) \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ή πιο συνοπτικά:

$$\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r}_s = -k_2 r + A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta \quad (5.98)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x^2} \Big|_{k_a, k_b} = -\frac{r}{2k_2} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_y^2} \Big|_{k_a, k_b} = -\frac{r}{2k_2} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta} \right) \\ C &= \frac{\partial^2(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x \partial k_y} \Big|_{k_a, k_b} = -\frac{r \sin^2 \theta}{k_2 \cos^2 \theta} \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\xi = k_x - k_a$$

$$\eta = k_y - k_b$$

$$\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r}_s \Big|_{k_a, k_b} = -k_2 r$$

Γύρω από τα στάσιμα σημεία k_a, k_b το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \underline{W}_1 &\simeq \iint_{S_{a,b}} \underline{F}(k_x = k_a, k_y = k_b) e^{i(-k_2 r + A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta \\ &= \underline{F}(k_a, k_b) e^{-ik_2 r} \iint_{S_{a,b}} e^{i(A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.99)$$

Το ολοκλήρωμα που έμεινε είναι γνωστής μορφής και λύνεται ως εξής:

$$\iint_{S_{a,b}} e^{i(A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta = i \frac{2\pi\delta}{\sqrt{|4AB - C^2|}} \quad (5.100)$$

Όπου :

$$\delta = \begin{cases} +1, & 4AB > C^2 \text{ και } A > 0 \\ -1, & 4AB > C^2 \text{ και } A < 0 \\ -i, & 4AB < C^2 \end{cases}$$

Εδώ ισχύει ότι:

$$4AB - C^2 = \left(\frac{r}{k_2 \cos \theta} \right)^2 > 0$$

Και επειδή: $A < 0$ έχουμε:

$$\iint_{S_{a,b}} e^{i(A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi\eta)} d\xi d\eta = -i \frac{2\pi}{r} k_2 \cos \theta$$

Επομένως για $r \rightarrow \infty$

$$\underline{W}_1(r, \theta, \varphi) \rightarrow -2\pi i k_2 \cos \theta \underline{F}(k_x = -k_2 \sin \theta \cos \varphi, k_y = -k_2 \sin \theta \sin \varphi) \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \quad (5.101)$$

Όπου, βάσει της (5.89) είναι:

$$\underline{F}(k_x, k_y) = \bar{\mathbf{e}}_{2a}(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{T}}(k_x, k_y) e^{-\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c \right)}$$

Ομοίως για το \underline{W}_2 θα ισχύει:

$$\frac{\partial(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_x} = 0 \rightarrow r \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{k_x}{k_{z2}} \cos \theta \right) = 0 \rightarrow k_x = -k_{z2} \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta} \quad (5.102)$$

$$\frac{\partial(\underline{k}_{2a} \cdot \underline{r})}{\partial k_y} = 0 \rightarrow r \left(\sin \theta \sin \varphi + \frac{k_y}{k_{z2}} \cos \theta \right) = 0 \rightarrow k_y = -k_{z2} \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} \quad (5.103)$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta \quad (5.104)$$

Οπότε τα στάσιμα σημεία θα είναι:

$$\begin{aligned} k_x &= -k_2 \sin \theta \cos \varphi = k_a \\ k_y &= -k_2 \sin \theta \sin \varphi = k_b \end{aligned} \quad (5.105)$$

Και τελικά για $r \rightarrow \infty$:

$$\underline{W}_2(r, \theta, \varphi) \rightarrow 2\pi i k_2 \cos \theta \underline{V}(k_x = k_2 \sin \theta \cos \varphi, k_y = k_2 \sin \theta \sin \varphi) \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \quad (5.106)$$

Όπου:

$$\underline{V}(\theta, \varphi) = \bar{\mathbf{e}}_{2b}(\theta, \varphi) \cdot \underline{\mathbf{T}}(\theta, \varphi) e^{+\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \quad (5.107)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις σχέσεις των ολοκληρωμάτων (5.101), (5.106) στην εξίσωση (5.75), προκύπτει μία αναλυτική έκφραση για το (μακρινό) ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κυματοδηγού:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{y}} A \begin{Bmatrix} \cos(az) \\ \sin(az) \end{Bmatrix} e^{-i\beta x} + k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} 2\pi i k_2 \cos \theta \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \left(-\underline{\mathbf{F}}(\theta, \varphi) + \underline{\mathbf{V}}(\theta, \varphi) \right) \\ &= \hat{\mathbf{y}} A \begin{Bmatrix} \cos(az) \\ \sin(az) \end{Bmatrix} e^{-i\beta x} \\ &\quad + k_0^2 (\epsilon_{r4} - 1) \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} 2\pi i k_2 \cos \theta \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \left(-\bar{\mathbf{e}}_{2a}(\theta, \varphi) e^{-\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(\theta, \varphi) e^{+\mu_0 \left(\frac{d}{2} - z_c\right)} \right) \cdot \underline{\mathbf{T}}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{\mathbf{y}} A \begin{cases} \cos(az) \\ \sin(az) \end{cases} e^{-i\beta x} \\
 &\quad + \frac{k_2}{k_0^2} \alpha \cos \theta \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \left(-\bar{\mathbf{e}}_{2a}(\theta, \varphi) e^{-\mu_0(\frac{d}{2}-z_c)} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(\theta, \varphi) e^{+\mu_0(\frac{d}{2}-z_c)} \right) \\
 &\quad \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^{n+1} \sqrt{n(n+1)} [a_{mn} E_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) \\
 &\quad + i\beta_{mn} F_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi)]
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{y}} A \begin{cases} \cos(az) \\ \sin(az) \end{cases} e^{-i\beta x} + \frac{e^{-ik_2 r}}{r} \bar{\mathbf{e}}_2(\theta, \varphi) \\
 &\quad \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-i)^{n+1} \sqrt{n(n+1)} [a_{mn} E_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta, \varphi) \\
 &\quad + i\beta_{mn} F_n(x_1, x_4) \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta, \varphi)]
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

Όπου θέσαμε:

$$\bar{\mathbf{e}}_2(\theta, \varphi) = \frac{k_2}{k_0^2} \alpha \cos \theta \left(-\bar{\mathbf{e}}_{2a}(\theta, \varphi) e^{-\mu_0(\frac{d}{2}-z_c)} + \bar{\mathbf{e}}_{2b}(\theta, \varphi) e^{+\mu_0(\frac{d}{2}-z_c)} \right)$$

Η έκφραση (5.109) αποτελεί την αναλυτική έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου εντός του κυματοδηγού για σημεία παρατήρησης στη μακρινή περιοχή. Η σχέση αυτή περιλαμβάνει τις διανυσματικές συνιστώσες $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ μπορεί να γραφεί σε καρτεσιανές ή σφαιρικές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων μετασχηματισμού (5.87) για τα σύνολα μεταβλητών: (x,y,z) και (r,θ,φ) . Επιπλέον, λαμβάνοντας το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου και κανονικοποιώντας το ως προς το μέγιστο πλάτος «A» του προσπίπτοντος πεδίου $\underline{\mathbf{E}}_0$, μπορούν να προκύψουν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης για τους κυματοδηγούμενους ρυθμούς του συστήματος κυματοδότησης. Οι συντελεστές αυτοί αποτελούν συναρτήσεις όλων των παραμέτρων του προβλήματος και μπορούν να δώσουν πληροφορίες για την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά και απόκριση της διάταξης.

Παράρτημα

Π.5.1. Υπολογισμός των γωνιών θ_p , φ_p του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου

Για τον υπολογισμό των γωνιών θ_p και φ_p απαιτείται η χρήση αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μιγαδικού ορίσματος. Αυτές είναι:

$$\begin{aligned}\tan^{-1}(x) &= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) \\ \cos^{-1}(x) &= -i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\end{aligned}$$

Όπου για το φυσικό λογάριθμο ισχύει:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2\kappa\pi)$$

Υπολογισμός της γωνίας θ_p .

$$\begin{aligned}\theta_p &= \cos^{-1}\left(\frac{Z}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0}\right) = -i \ln\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0} + \sqrt{\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0}\right)^2 - 1}\right) \\ &= -i \ln\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0} + \sqrt{-\frac{\gamma^2}{(k_0 n_0)^2} - 1}\right) = -i \ln\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0} + \sqrt{\frac{-\gamma^2 - k_0^2 n_0^2}{(k_0 n_0)^2}}\right) \\ &= -i \ln\left(\frac{i\gamma}{k_0 n_0} \pm \frac{i\beta}{k_0 n_0}\right) = -i \ln\left(i \frac{\gamma \pm \beta}{k_0 n_0}\right) = -i \left(\ln\left(\frac{\beta + \gamma}{k_0 n_0}\right) + i \left(\arg\left(i \frac{\beta + \gamma}{k_0 n_0}\right) + 2\kappa\pi\right)\right) \\ &= -i \ln\left(\frac{\beta + \gamma}{k_0 n_0}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right) = -i \ln\left(\frac{\beta + \gamma}{k_0 n_0}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$(Εφόσον: \sin \theta_p > 0 \rightarrow \text{Επιλέγουμε } \kappa = 0)$$

Υπολογισμός της γωνίας φ_p .

$$\varphi_p = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-\beta}\right) = \frac{1}{2i} \ln(1) = \frac{1}{2i} (\ln(1) + i(\arg(1) + 2\kappa\pi)) = \kappa\pi = \pi$$

$$(Εφόσον: \cos \varphi_p < 0 \rightarrow \kappa: \text{περιττός και επιλέγουμε } \kappa = 1)$$

Π.5.2. Υπολογισμός ολοκληρωμάτων $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$.

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) \right\}, r_s > r'_s \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) \right\}, r_s < r'_s \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\
 &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) \right\}, r_s > r'_s \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) \right\}, r_s < r'_s \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\
 &= \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \\
 &\quad \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \begin{cases} h_n(k_0 r_s) j_n(k_0 r'_s) j_{n'}(k_4 r'_s) n(n+1) \sqrt{n'(n'+1)}, & r_s > r'_s \\ h_n(k_0 r'_s) j_n(k_0 r_s) j_{n'}(k_4 r_s) n(n+1) \sqrt{n'(n'+1)}, & r_s < r'_s \end{cases} \\
 &\quad \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_s, \varphi_s) \underline{\mathbf{C}}_{-mn}(\theta'_s, \varphi'_s) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s) \\
 &= \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} n(n+1) \sqrt{n'(n'+1)} \\
 &\quad \int_{r'_s=0}^{\alpha} r_s'^2 dr'_s j_{n'}(k_4 r'_s) \begin{cases} h_n(k_0 r_s) j_n(k_0 r'_s), & r_s > r'_s \\ h_n(k_0 r'_s) j_n(k_0 r_s), & r_s < r'_s \end{cases} \\
 &\quad \int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_s, \varphi_s) \underline{\mathbf{C}}_{-mn}(\theta'_s, \varphi'_s) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s) \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} \alpha_{mn} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{16\pi^2 (n(n+1))^{\frac{3}{2}}}{(2n+1)^2} \int_{r'_s=0}^{\alpha} dr'_s r_s'^2 j_n(k_4 r'_s) \begin{cases} h_n(k_0 r_s) j_n(k_0 r'_s), & r_s > r'_s \\ h_n(k_0 r'_s) j_n(k_0 r_s), & r_s < r'_s \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \alpha_{mn} \left[\int_{r'_s=0}^{r_s} dr'_s r_s'^2 j_n(k_4 r'_s) h_n(k_0 r_s) j_n(k_0 r'_s) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{r'_s=r_s}^{\alpha} dr'_s r_s'^2 j_n(k_4 r'_s) h_n(k_0 r'_s) j_n(k_0 r_s) \right] \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \alpha_{mn} \left[h_n(k_0 r_s) \int_{r'_s=0}^{r_s} dr'_s r_s'^2 j_n(k_4 r'_s) j_n(k_0 r'_s) \right. \\
 &\quad \left. + j_n(k_0 r_s) \int_{r'_s=r_s}^{\alpha} dr'_s r_s'^2 j_n(k_4 r'_s) h_n(k_0 r'_s) \right] \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \alpha_{mn} \left[\frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} j_n(k_0 r_s) G_n(x_1, x_2) \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{j_n(k_4 r_s)}{k_0(k_0^2 - k_4^2)} \right]
 \end{aligned}$$

Όπου ορίσαμε:

$$\begin{aligned}
 G_n(x_1, x_2) &= x_1 h_{n+1}(x_1) j_n(x_2) - x_2 h_n(x_1) j_{n+1}(x_2) \\
 x_1 &= k_0 \alpha \\
 x_2 &= k_4 \alpha
 \end{aligned}$$

Επίσης, στον υπολογισμό του L_{11} λάβαμε υπόψη ότι:

$$\int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \frac{\mathbf{n}_{-mn}^{(3)}(\mathbf{r}_s, k_0) \mathbf{n}_{-mn}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0)}{\mathbf{n}_{-mn}^{(1)}(\mathbf{r}_s, k_0) \mathbf{n}_{-mn}^{(3)}(\mathbf{r}'_s, k_0)} \mathbf{m}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_4) = 0$$

Τα ολοκληρώματα L_{12} και L_{21} αποδεικνύεται ότι είναι μηδενικά, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= 0 \\
 L_{21} &= 0
 \end{aligned}$$

γιατί περιέχουν ολοκληρώματα:

$$\int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \mathbf{B}_{-mn}(\theta'_s, \varphi'_s) \cdot \mathbf{C}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s) = 0$$

Τέλος είναι:

$$\begin{aligned}
 L_{22} &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \begin{cases} \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) & , r_s > r'_s \\ \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) + \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) & , r_s < r'_s \end{cases} \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\
 &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \\
 &\cdot \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} \begin{cases} \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) & , r_s > r'_s \\ \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{n}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0) & , r_s < r'_s \end{cases} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} \underline{\mathbf{n}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\
 &= \sum_n^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} (-1)^m \frac{2n+1}{n(n+1)} n(n+1) \sqrt{n'(n'+1)} \\
 &\quad \frac{1}{k_0 r_s} \int_{r'_s=0}^{\alpha} r_s'^2 dr' \frac{1}{k_0 r'_s} \frac{1}{k_4 r'_s} j_{n'}'(k_4 r'_s) \begin{cases} h'_n(k_0 r_s) j'_n(k_0 r'_s) & , r_s > r'_s \\ h'_n(k_0 r'_s) j'_n(k_0 r_s) & , r_s < r'_s \end{cases} \\
 &\quad \int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \sin \theta_s d\theta_s \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} d\varphi_s \underline{\mathbf{B}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_s, \varphi_s) \underline{\mathbf{B}}_{-mn}(\theta'_s, \varphi'_s) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s) \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \beta_{mn} \frac{1}{k_0^2 k_4 r_s} \int_{r'_s=0}^{\alpha} dr' j'_n(k_4 r'_s) \begin{cases} h'_n(k_0 r_s) j'_n(k_0 r'_s) & , r_s > r'_s \\ h'_n(k_0 r'_s) j'_n(k_0 r_s) & , r_s < r'_s \end{cases} \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \beta_{mn} \frac{1}{k_0^2 k_4 r_s} \left[h'_n(k_0 r_s) \int_{r'_s=0}^{r_s} dr'_s j'_n(k_4 r'_s) j'_n(k_0 r'_s) \right. \\
 &\quad \left. + j'_n(k_0 r_s) \int_{r'_s=r_s}^{\alpha} dr'_s j'_n(k_4 r'_s) h'_n(k_0 r'_s) \right] \\
 &= \delta_{mm''} \delta_{mm'} \delta_{nn''} \delta_{nn'} (-1)^m 16\pi^2 \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \beta_{mn} \left[\frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} D_n + \frac{i}{k_0} \frac{1}{k_0^2 - k_4^2} \frac{j'_n(k_4 r_s)}{k_4 r_s} \right]
 \end{aligned}$$

Όπου ορίζουμε:

$$D_n = \frac{k_0}{k_4} h_n(x_1) j'_n(x_4) - \frac{k_4}{k_0} j_n(x_4) h'_n(x_1)$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= k_0 \alpha \\
 x_4 &= k_4 \alpha
 \end{aligned}$$

Κατ' αναλογία με το ολοκλήρωμα L_{11} , για το L_{22} λήφθηκε υπόψη ότι:

$$\int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \frac{\underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0)}{\underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{m}}_{-mn}^{(3)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_0)} \underline{\mathbf{n}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) = 0$$

Π.5.3. Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$

$$\begin{aligned} H_{11} &= \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \bar{\underline{\mathbf{G}}}_1(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') \\ &\quad \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \bar{\underline{\mathbf{I}}} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}_s} \\ &\quad \cdot \bar{\underline{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \\ &\quad \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} [\underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) - i \underline{\mathbf{n}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{B}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k)] \right] \\ &\quad \cdot \bar{\underline{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \\ &\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m''n''}(\theta_s, \varphi_s) \cdot \underline{\mathbf{m}}_{mn}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}_s, k_0) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \right] \\ &\quad \cdot \bar{\underline{\mathbf{e}}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \underline{\mathbf{r}}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{-m'n'}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}'_s, k_4) \\ &= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iiint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} j_n(k_0 r_s) \sqrt{n(n+1)} \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \underline{\mathbf{C}}_{-m'n''}(\theta_s, \varphi_s) \right. \\
& \quad \left. \cdot \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_s, \varphi_s) \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \right] \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}', k_4) \\
&= \frac{k_0^{-2}}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) \\
& j_n(k_0 r_s) (-1)^m \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{m''m} \delta_{n''n} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}', k_4) \\
&= i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(-1)^m}{2\pi} j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \\
& \quad \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{I}} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_s} \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}', k_4) \\
&= i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(-1)^m}{2\pi} j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \iint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \\
& \quad \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
& \quad \cdot \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{+n_1} \left[(-i)^{n_1} \varepsilon_{m_1} \frac{(n_1-m_1)!}{(n_1+m_1)!} \frac{2n_1+1}{\sqrt{n_1(n_1+1)}} [\underline{\mathbf{C}}_{m_1 n_1}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{m}}_{m_1 n_1}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right. \\
& \quad \left. + i \underline{\mathbf{B}}_{m_1 n_1}(\theta_k, \varphi_k) \underline{\mathbf{n}}_{m_1 n_1}^{(1)}(\mathbf{r}'_s, k_0) \right] \cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} \underline{\mathbf{m}}_{m'n'}^{(1)}(\mathbf{r}', k_4) \\
&= i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(-1)^m}{2\pi} j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
& \quad \cdot \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{+n_1} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n_1} \varepsilon_{m_1} \frac{(n_1-m_1)!}{(n_1+m_1)!} \frac{2n_1+1}{\sqrt{n_1(n_1+1)}} \\
& \quad \iint_{r'_s, \theta'_s, \varphi'_s=0}^{\alpha, \pi, 2\pi} r_s'^2 \sin \theta'_s d\theta'_s dr'_s d\varphi'_s \underline{\mathbf{C}}_{m_1 n_1}(\theta_k, \varphi_k) j_{n_1}(k_0 r'_s) \sqrt{n_1(n_1+1)} \underline{\mathbf{C}}_{m_1 n_1}(\theta'_s, \varphi'_s) \\
& \quad \cdot j_{n'}(k_4 r'_s) \sqrt{n'(n'+1)} \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s) \\
&= i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(-1)^m}{2\pi} j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
& \quad \cdot \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{+n_1} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n_1} \varepsilon_{m_1} \frac{(n_1-m_1)!}{(n_1+m_1)!} (2n_1+1) \sqrt{n'(n'+1)} \\
& \quad \int_{r'_s=0}^{\alpha} r_s'^2 j_{n'}(k_4 r'_s) j_{n_1}(k_0 r'_s) dr'_s \underline{\mathbf{C}}_{m_1 n_1}(\theta_k, \varphi_k) \int_{\theta'_s=0}^{\pi} \sin \theta'_s d\theta'_s \int_{\varphi'_s=0}^{2\pi} d\varphi'_s \underline{\mathbf{C}}_{m_1 n_1}(\theta'_s, \varphi'_s) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta'_s, \varphi'_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(-1)^m}{2\pi} j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \varepsilon_{m'} \frac{(n'-m')!}{(n'+m')!} (2n' \\
 &+ 1) \sqrt{n'(n'+1)} \int_{r'_s=0}^{\alpha} r_s'^2 j_{n'}(k_4 r_s') j_{n'}(k_0 r_s') dr_s' \frac{4\pi}{\varepsilon_{m'} (2n'+1)} \frac{(n'+m')!}{(n'-m')!} \delta_{m'm_1} \delta_{n'n_1} \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta_k, \varphi_k) \\
 &= 2i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m j_n(k_0 r_s) \delta_{m''m} \delta_{n''n} k_0^{-2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \underline{\mathbf{C}}_{mn}(\theta_k, \varphi_k) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \\
 &\cdot \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \sqrt{n'(n'+1)} \left[\frac{r_s'^2}{k_4^2 - k_0^2} (k_4 j_{n'+1}(k_4 r_s') j_{n'}(k_0 r_s') \right. \\
 &\left. - k_0 j_{n'}(k_4 r_s') j_{n'+1}(k_0 r_s') \right] \Big|_0^a \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(\theta_k, \varphi_k) \\
 &= 2i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m j_n(k_0 r_s) \frac{a}{k_4^2 - k_0^2} k_0^{-2} \delta_{m''m} \delta_{n''n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \sqrt{n'(n'+1)} E_{n'}(x_1, x_4) \\
 &\iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y
 \end{aligned}$$

Στα προηγούμενα έγινε χρήση του ολοκληρώματος:

$$\int f_n(\alpha r) g_n(\beta r) dr = \frac{r^2}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha f_{n+1}(\alpha r) g_n(\beta r) - \beta f_n(\alpha r) g_{n+1}(\beta r))$$

Όπου f_n , g_n οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ή Hankel.

H_{12}

$$\begin{aligned}
 &= 2i^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m j_n(k_0 r_s) \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} \delta_{m''m} \delta_{n''n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} (-i)^{n'+1} \sqrt{n'(n'+1)} F_{n'}(x_1, x_4) \\
 &\iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{C}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y
 \end{aligned}$$

Όπου έγινε χρήση του ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned}
 &\int_{r'_s=0}^{\alpha} r_s'^2 \left(n'(n'+1) \frac{j_{n'}(k_0 r_s') j_{n'}(k_4 r_s')}{k_0 r_s' k_4 r_s'} + \frac{j_{n'}'(k_0 r_s') j_{n'}'(k_4 r_s')}{k_0 r_s' k_4 r_s'} \right) dr_s' \\
 &= \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} \left(\frac{k_0}{k_4} j_{n'}(k_0 a) j_{n'}'(k_4 a) - \frac{k_4}{k_0} j_{n'}'(k_0 a) j_{n'}(k_4 a) \right)
 \end{aligned}$$

H_{21}

$$= 2i^{n-1}\varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} \delta_{m''m} \delta_{n''n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \alpha_{m'n'} (-i)^{n'} \sqrt{n'(n'+1)} E_{n'}(x_1, x_4) \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

H_{22}

$$= 2i^{n-1}\varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^m \frac{j'_n(k_0 r_s)}{k_0 r_s} \frac{\alpha}{k_0^2 - k_4^2} k_0^{-2} \delta_{m''m} \delta_{n''n} \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \beta_{m'n'} (-i)^{n'+1} \sqrt{n'(n'+1)} F_{n'}(x_1, x_4) \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{B}}_{mn}(k_x, k_y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1(k_x, k_y) \cdot \underline{\mathbf{B}}_{m'n'}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

6. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή εξετάστηκε το πρόβλημα σύζευξης διηλεκτρικής σφαίρας με επίπεδο διηλεκτρικό κυματοδηγό. Η διάταξη αυτή αποτελεί ήδη αντικείμενο μελέτης των οπτικών τηλεπικοινωνιών, καθώς παρουσιάζει ιδιότητες που μπορούν να αποδειχθούν ωφέλιμες στην ανάπτυξη οπτικών ολοκληρωμένων συστημάτων. Ωστόσο μέσα από την εργασία αυτή, οι προαναφερθείσες ιδιότητες μπορούν να αναδειχθούν πλέον και μαθηματικά, αφού οι αναλυτικές σχέσεις που εξήχθησαν σε όλη την έκταση της εργασίας δίνουν τη δυνατότητα διερεύνησης των ιδιοτήτων ως προς κάθε παράμετρο του προβλήματος.

Από φυσικής αλλά και μαθηματικής πλευράς, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε ως παράλληλος συνδυασμός τριών υποπροβλημάτων: Διέγερσης, Σκέδασης και «Επαναδέσμευσης». Με τον όρο «πρόβλημα διέγερσης» εννοούμε τη διαδικασία προσδιορισμού του πεδίου που διεγείρει το σφαιρικό σώμα. Στην περίπτωση μας, το πεδίο διέγερσης αποτελεί διαφεύγον επιφανειακό κύμα που κυματοδηγού και το οποίο, στην πραγματικότητα, είναι προϊόν κυματοδότησης και σκέδασης που προηγήθηκε (λόγω της παρουσίας της σφαίρας). Το «πρόβλημα σκέδασης» αφορά το φαινόμενο επανεκπομπής από τη σφαιρική κοιλότητα, μετά τη διέγερσή της. Μέρος του σκεδαζόμενου πεδίου είτε θα επανεισχωρήσει στον κυματοδηγό είτε θα λάβει μέρος στην περαιτέρω διέγερση της κοιλότητας. Τέλος, με τον όρο «πρόβλημα επαναδέσμευσης» αναφερόμαστε στο φαινόμενο κατά το οποίο μέρος του σκεδαζόμενου πεδίου επαναπροσλαμβάνεται από τον κυματοδηγό.

Τα παραπάνω υποπροβλήματα δεν μπορούν να εξεταστούν ανεξάρτητα, καθώς τα αντίστοιχα φαινόμενα εκτυλίσσονται ταυτόχρονα, μέσα σε πλαίσια αλληλεπίδρασης. Πράγματι, η διαδικασία της σύζευξης είναι κατά κάποιον τρόπο κυκλική. Το ίδιο πεδίο που διεγείρει τα διηλεκτρικά σώματα έχει ήδη διαμορφωθεί από το σκεδαζόμενο και άρα από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης. Αντίστοιχα, το πεδίο που κυματοδηγείται τελικά ως την έξοδο της διάταξης, φέρει χαρακτηριστικά του σκεδαζόμενου που επαναδεσμεύτηκε από τον κυματοδηγό.

Τα αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από αυτή τη μελέτη είναι πολλά και ως επί το πλείστον σημαντικά. Βασικότερη πηγή αποτελεσμάτων αποτελεί η έκφραση του συνιστάμενου ηλεκτρικού πεδίου εντός του κυματοδηγού. Μέσω αυτής μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές μετάδοσης (T) και ανάκλασης (R), οι οποίοι αποδίδουν το ποσοστό της έντασης του μεταδιδόμενου/ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει των γεωμετρικών παραμέτρων του

προβλήματος, της συχνότητας και των δεικτών διάθλασης των διηλεκτρικών σωμάτων. Επομένως, είναι εφικτό να διερευνηθούν ορισμένοι αξιόλογοι συσχετισμοί:

Για δεδομένη συχνότητα και μονορυθμική λειτουργία:

- Μεταβολή του Συντελεστή Μετάδοσης/Ανάκλασης ως προς την ακτίνα του σφαιρικού σκεδαστή.
- Μεταβολή του Συντελεστή Μετάδοσης/Ανάκλασης ως προς το δείκτη διάθλασης του σφαιρικού σκεδαστή.
- Μεταβολή του Συντελεστή Μετάδοσης/Ανάκλασης ως προς την απόσταση σφαίρας-κυματοδηγού.

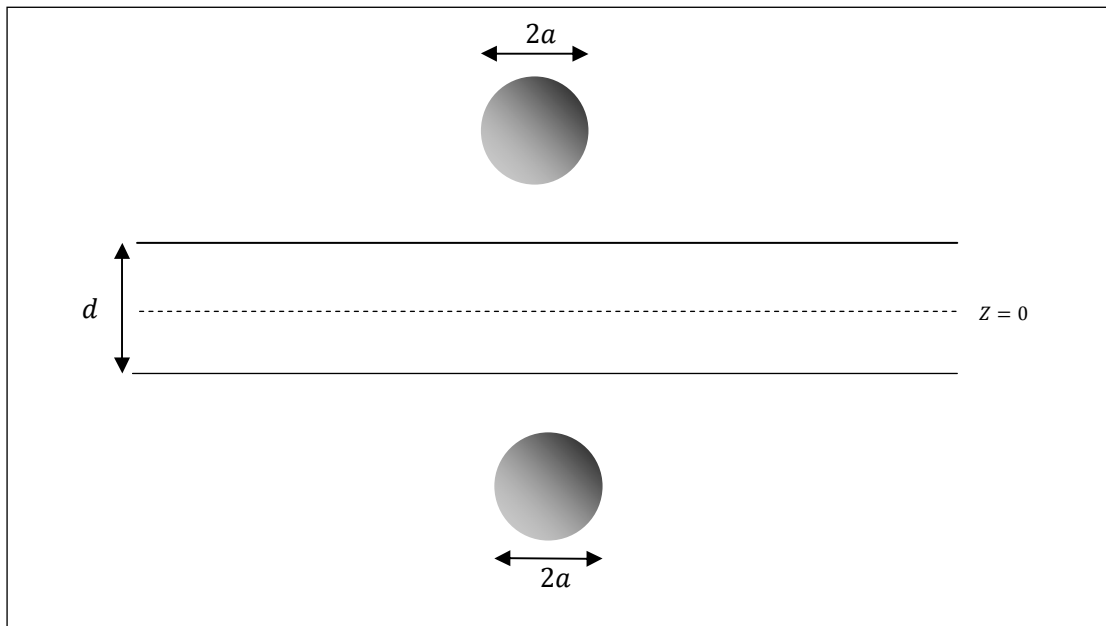
Εναλλακτικά, για δεδομένες όλες τις γεωμετρικές παραμέτρους, μπορεί να εξεταστεί η μεταβολή των παραπάνω συντελεστών και ως προς τη συχνότητα (υπό συνθήκες μονορυθμικής λειτουργίας).

Εξίσου σημαντικά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και από την αναλυτική έκφραση του πεδίου εντός του σφαιρικού συντονιστή. Πράγματι, οι αναλυτικές λύσεις των συντελεστών ανάπτυξης (α_{mn}, β_{mn}) του ηλεκτρικού πεδίου εντός της σφαίρας μπορούν να αναδείξουν την επίδραση της σφαιρικής κοιλότητας στο εσωκλειόμενο πεδίο. Μερικές από τις ιδιότητες που προκύπτουν από τις σχέσεις των συντελεστών του αναπτύγματος είναι:

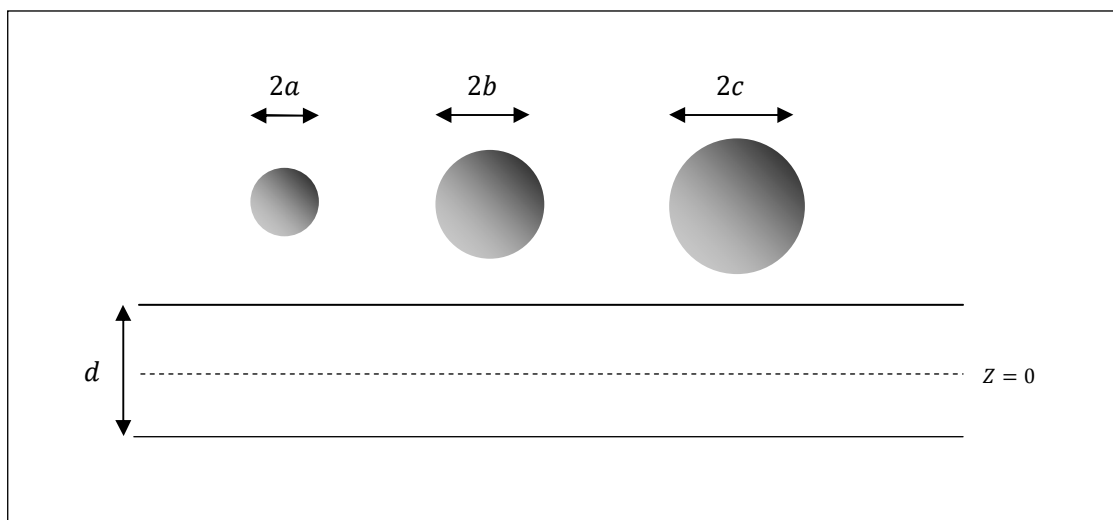
- Οι συχνότητες συντονισμού
- Οι συντελεστές ποιότητας

Το πρόβλημα που επιλύθηκε είναι μόνο μία περίπτωση ενός ευρύτερου συνόλου συγγενών προβλημάτων. Ωστόσο έχει αρκετά πρωτογενή μορφή ώστε να μπορούν να αναχθούν σε αυτό ένα πλήθος πιο σύνθετων προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά επιλύονται, είτε ακολουθώντας παρόμοια μέθοδο με αυτή που εφαρμόσαμε, είτε με άμεση χρήση σχέσεων και αποτελεσμάτων που παρήχθησαν από την παρούσα εργασία. Ορισμένα αντιπροσωπευτικά προβλήματα είναι τα εξής:

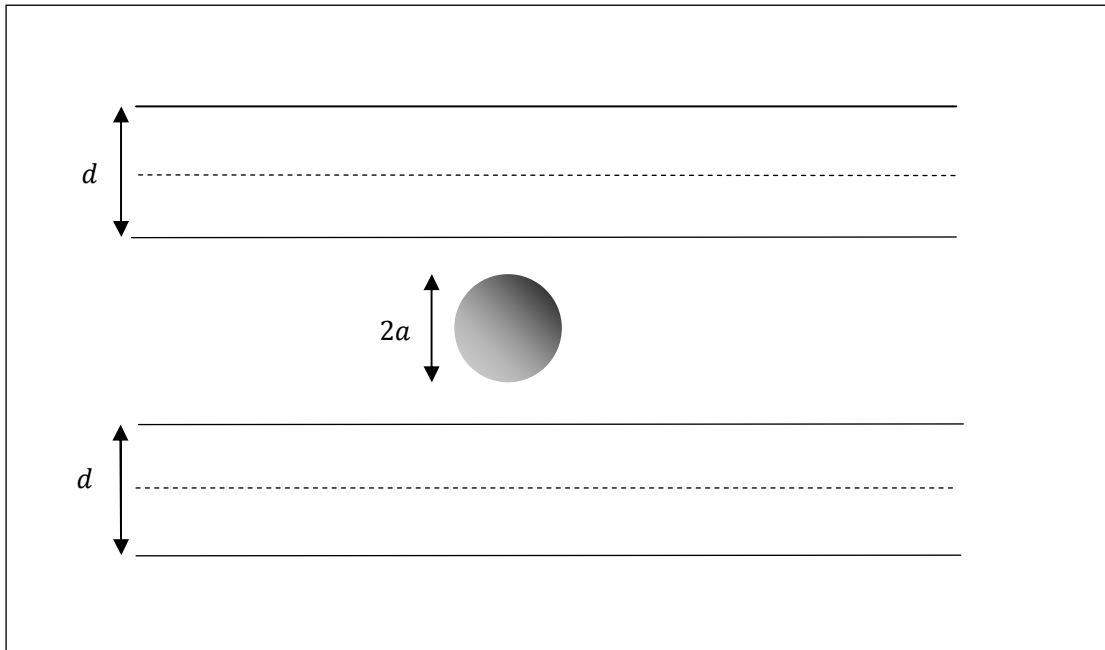
- Σύζευξη επίπεδου διηλεκτρικού κυματοδηγού με δύο διηλεκτρικές σφαίρες τοποθετημένες εκατέρωθεν του. Η διάταξη αυτή αποτελεί μία συμμετρική εκδοχή αυτής που εξετάστηκε και η οποία πιθανόν να παρουσιάζει ακόμα πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά ως σύστημα. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με την μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων που εφαρμόστηκε, με κυριότερη διαφορά ότι η χωρική ολοκλήρωση πραγματοποιείται σε δύο σφαιρικούς όγκους.



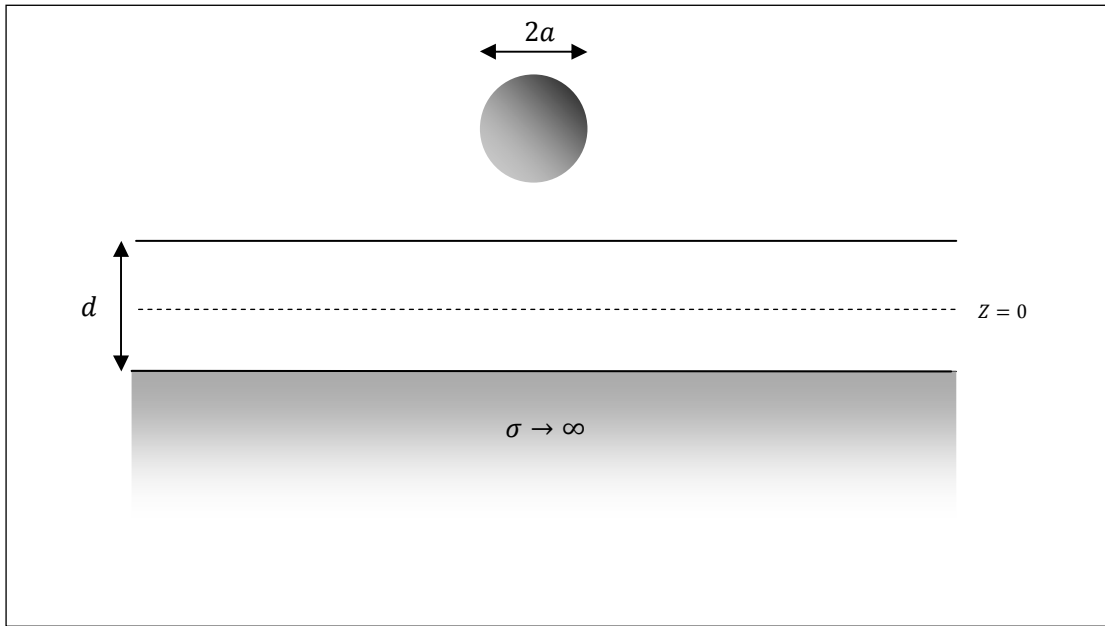
- Σύζευξη επίπεδου διηλεκτρικού κυματοδηγού με διηλεκτρικές σφαίρες διαφορετικής ακτίνας. Η διαφοροποίηση στις διαστάσεις σφαιρών έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ποικίλων συντονισμών σε συχνότητες που εξαρτώνται (εκτός των άλλων) και από την ελάχιστη ακτίνα. Εφόσον αυτό επιδρά με επιθυμητό τρόπο στο κυματοδηγούμενο σήμα εξόδου, τότε η διάταξη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη οπτικών φίλτρων με την επιθυμητή συμπεριφορά γύρω από τις επιλεγμένες συχνότητες. Στην περίπτωση όπου το σύστημα είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να αποτελείται από ένα πλήθος εν σειρά συνδεδεμένων συστημάτων κυματοδηγού-σφαίρας, τότε μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας τα αναλυτικά αποτελέσματα της παρούσας εργασίας για κάθε σύστημα, θεωρώντας ότι η έξοδος του $i-1$ συστήματος αποτελεί είσοδο του i -στού συστήματος.



- Σύζευξη δύο παράλληλων διηλεκτρικών πλακών με διηλεκτρική σφαίρα που παρεμβάλλεται μεταξύ τους. Η επίλυση αυτού του προβλήματος επίσης πραγματοποιείται με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων και των συναρτήσεων Green. Βασική διαφοροποίηση στη μέθοδο αποτελεί η μορφή της συνάρτησης Green στην περιοχή του χώρου μεταξύ των κυματοδηγών. Ωστόσο, μία τέτοια διάταξη μπορεί να είναι χρήσιμη μόνο στην περίπτωση όπου η σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών είναι επιθυμητή.



- Σύζευξη διηλεκτρικής σφαίρας με επίπεδο διηλεκτρικό κυματοδηγό αγωγίμου (γειωμένου) υποστρώματος. Το σύστημα με γειωμένο αγωγίμο υπόστρωμα είναι σύνηθες στις οπτικές εφαρμογές και η αναλυτική λύση του αντίστοιχου προβλήματος μπορεί να προκύψει από την τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας με κατάλληλη τροποποίηση της συνάρτησης Green. Η τροποποίηση αυτή οφείλεται στις ομογενείς οριακές συνθήκες που ικανοποιούν τα πεδία στην αγωγίμη επιφάνεια.



Βιβλιογραφία

Βιβλία:

- [1] **M. Abramowitz and I. A. Stegun**, *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover Pub. Inc., 1972.
- [2] **R. Collin**, *Foundation for Microwave Engineering*, McGraw-Hill. Inc. International Editions. 1992.
- [3] **R. Collin**, *Field Theory of Guided Waves*, New York: IEEE Press, 1991.
- [4] **N. J. Cronin**, *Microwave and Optical Waveguides*, Taylor & Francis, 1995.
- [5] **J. D. Jackson**, *Classical Electrodynamics*, New York: Wiley, 1999.
- [6] **D. Marcuse**, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press New York, 1974.
- [7] **McGraw-Hill**, *Dictionary of Scientific & Technical Terms*, 6th Ed, McGraw-Hill Inc. 2003.
- [8] **P. Morse and H. Feshbach**, *Methods of Theoretical Physics*, New York: McGraw-Hill, 1953.
- [9] **S. Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer**, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd Edition, Canada: Wiley 1993.
- [10] **J. A. Stratton**, *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw-Hill, 1941.
- [11] **C. T. Tai**, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, IEEE Press, 1994.
- [12] **L. Tsang, J. Au Kong, K. Ding**, *Scattering of Electromagnetic Waves, Theory and Applications*, New York: Wiley 2000.
- [13] **N.K. Ουζούνογλου**, *Ηλεκτρομαγνητική Σκέδαση από Ανομοιογένειες σε Διηλεκτρικούς Κυματοδηγούς*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Διατριβή Υψηλότητας, 1981.
- [14] **N. K. Ουζούνογλου**, *Τηλεπικοινωνίες Οπτικών Ινών*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμεών, 1985.
- [15] **N. K. Ουζούνογλου**, *Εισαγωγή στα Μικροκύματα*, Αθήνα: Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1994.

Εργασίες και άρθρα:

- [16] **G. Annino, M. Cassetari, I. Longo, and M. Martinelli**, *Whispering gallery modes in dielectric resonators: Characterization at the millimeter wavelengths*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 45, no. 11, pp. 2025-2034, November 1997.
- [17] **S. V. Boriskina and A. I. Nosich**, *Radiation and absorption losses of the WGM dielectric resonators excited by a dielectric waveguide*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, no.2, pp. 224-231, February 1999.
- [18] **V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko**, *Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes*, Phys. Lett. A, vol. 137, no. 7-8, pp. 393-397, May 1989.
- [19] **I.D. Chremmos, N.K. Uzunoglu**, *Integral equation analysis of propagation in a dielectric waveguide coupled to an infinite periodic sequence of ring resonators*, IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., Vol. 151, No. 6, November 2004
- [20] **D. Cros and P. Guillon**, *Whispering gallery dielectric resonator modes for W-band devices*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, no. 11, pp. 1667-1673, November 1990.
- [21] **M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko**, *Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 16, no.1, pp. 147-154, January 1999.
- [22] **X. H. Jiao, P. Guillon, L. A. Bermudez, and P. Auxemery**, *Whispering gallery modes of dielectric structures: Applications to millimeter-wave bandstop filters*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 35, no. 12, pp. 1169-1175, December 1987.
- [23] **X. H. Jiao, P. Guillon, P. Auxemery, and D. Cros**, *Dielectric resonators for use in planar integrated circuits at short millimeter wavelengths*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 37, no. 2, pp. 432-437, February 1989.

- [24] **G. C. Kokkorakis and J. G. Fikioris**, *EM Field Induced in Inhomogeneous Dielectric Spheres by External Sources*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 55, no. 11, November 2007.
- [25] **B. E. Little, J. P. Laine, and H. A. Haus**, *Analytic theory of coupling from tapered fibers and half-blocks into microsphere resonators*, IEEE J. Lightwave Technol., vol. 17, no. 4, pp. 704-715, April 1999.
- [26] **B. E. Little, S. T. Chu, H. A. Haus, J. Foresi, and J.-P. Laine**, *Microring resonator channel dropping filters*, IEEE J. Lightwave Technol., vol. 15, no. 6, pp. 998-1005, June 1997. September 1969.
- [27] **B. E. Little, J. S. Foresi, G. Steinmeyer, E. R. Thoen, S. T. Chu, H. A. Haus, E. P. Ippen, L.C. Kimerling, and W. Greene**, *Ultra-compact Si-SiO microring resonator optical channel dropping filters*, IEEE Photon. Technol. Lett., vol. 10, no. 4, pp. 549-551, April 1998.
- [28] **C. K. Madsen and G. Lenz**, *Optical all-pass filters for phase response design with applications for dispersion compensation*, IEEE Photon. Technol. Lett., vol.10, no.7, pp. 994-996, July 1998.
- [29] **W. L. Moreira, A. R. Neves, M. K. Garbos, T. G. Euser, P. St. J. Russell, C. L. Cesar**, *Expansion of Arbitrary Electromagnetic Fields in Terms of Vector Spherical Wave Functions*, May 2010.
- [30] **G.S.Murugan, Y.Panitchob, E.J. Tull, P.N. Bartlett, D.W. Hewak, M.N. Zervas, J.S. Wilkinson**, *Position-dependent coupling between a channel waveguide and a distorted microsphere resonator*, Journal of App. Physics 107, March 2010.
- [31] **Lord Rayleigh**, *The problem of whispering gallery*, Philos. Mag., vol. 20, pp. 1001-1004, December 1910.
- [32] **W. J. Tomlinson**, *Wavelength multiplexing in multimode optical fibers*, Appl. Opt., vol. 16, no.8, pp. 2180-2194, August 1977.
- [33] **N. K. Uzunoglu and J. G. Fikioris**, *Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric slab waveguide*, J. Opt. Soc. Am. A, vol. 72, pp. 628-637, 1982.
- [34] **C. Vedrenne and J. Arnaud**, *Whispering-gallery modes of dielectric resonators*, IEE Proceed. H: Microwaves, Optics & Antennas, vol. 129, no. 4, pp. 183-187, August 1982.
- [35] **Y. Panitchob**, *Integration of glass microspheres and planar Waveguides for microsphere Lasers*, Doctoral Thesis, University of Southampton, November 2008.