



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΒΙΟΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

**Παραμετρική μελέτη του φαινομένου της
άντλησης χωρίς βαλβίδες για ασυμπίεστο ρευστό και
επέκταση στο συμπιεστό**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανάσιος Βίτσας

Επιβλέπων : Σωκράτης Τσαγγάρης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2011

Στον αδερφό μου, Θοδωρή

Ποταμοῖς τοῖς αὐτοῖς ἐμβαίνομέν τε καὶ οὐκ
ἐμβαίνομεν, εἶμέν τε καὶ οὐκ εἶμεν.

Στα ἴδια ποτάμια και μπαίνουμε και δεν μπαίνουμε, και
εἶμαστε και δεν εἶμαστε.

Ἡράκλειτος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος «Βιορευστομηχανική και Βιοϊατρική Τεχνολογία» της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Η εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας σηματοδοτεί την ολοκλήρωση ενός κύκλου σπουδών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, και θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνετέλεσαν σε αυτό.

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Σωκράτη Τσαγγάρη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όσον αφορά στην ανάθεση του θέματος, για την καθοδήγησή, τη συνεργασία, και τις εποικοδομητικές του παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον Διδάκτορα κ. Χρήστο Μανόπουλο για την υποστήριξή του σε οποιαδήποτε δυσκολία αντιμετώπισα, την ουσιαστική συμβολή του και τις χρήσιμες υποδείξεις του στην εργασία.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα φιλικά και αγαπημένα μου πρόσωπα για το ενδιαφέρον, την υπομονή και την υποστήριξή τους.

Τέλος και σημαντικότερο, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράστασή της όλα αυτά τα χρόνια.

Βίτσας Αθανάσιος

Αθήνα, Μάρτιος 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παραμετρική μελέτη του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες για ασυμπίεστο ρευστό και επέκταση στο συμπιεστό

Το αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας ανήκει στο επιστημονικό πεδίο των μη μόνιμων, παλλόμενων ροών, μέσα από αγωγούς με εύκαμπτα τοιχώματα. Πρόκειται για πεδίο με το οποίο ασχολείται η επιστήμη της Βιορευστομηχανικής.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η παραμετρική ανάλυση των αντλητικών φαινομένων που παρουσιάζονται όταν πάλλεται το τοίχωμα αγωγών με εύκαμπτα τοιχώματα για ασυμπίεστο ρευστό και η επέκταση της ανάλυσης αυτής στο συμπιεστό ρευστό. Η μελέτη αυτή γίνεται με απλή διέγερση σε ένα μόνο τμήμα ενός εύκαμπτου αγωγού, ο οποίος είναι μέρος ενός κλειστού κυκλώματος. Η άντληση που προκαλείται με αυτόν τον τρόπο δεν επιτυγχάνεται με κάποιο χρονισμό βαλβίδων που φράσσουν και αποφράσσουν κατάλληλα τον εύκαμπτο αγωγό στην είσοδο και την έξοδο του διεγερόμενου του τμήματος. Συνεπώς, πρόκειται για άντληση χωρίς βαλβίδες.

Αρχικά, το φαινόμενο της άντλησης χωρίς βαλβίδες μελετάται παραμετρικά για το ασυμπίεστο ρευστό μέσω της ανάπτυξης ενός κατάλληλου ψευδο-μονοδιάστατου μοντέλου που επιλύεται αριθμητικά, θεωρώντας κλειστό βρόχο ενός εύκαμπτου και ενός άκαμπτου αγωγού. Οι εξισώσεις του μοντέλου διαμορφώνονται με την ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής (συνέχειας και ορμής) επί της εγκάρσιας διατομής του κλειστού βρόχου, θεωρώντας αξονοσυμμετρική ροή ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες. Χρησιμοποιείται επίσης μία καταστατική εξίσωση που συσχετίζει την αναπτυσσόμενη πίεση με την μεταβαλλόμενη εγκάρσια διατομή του βρόχου, έχοντας υποθέσει λεπτά ελαστικά τοιχώματα αγωγών με γραμμικές παραμορφώσεις. Επιλύεται αριθμητικά μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, μέσω του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος Dispersion Relation Preserving (DRP), το οποίο είναι 4^{ης} τάξης ακρίβειας στο χώρο και στο χρόνο.

Οι παράμετροι που μελετώνται για το φαινόμενο άντλησης ασυμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες είναι το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού, το μήκος του άκαμπτου αγωγού, οι φυσικές ιδιότητες του ασυμπίεστου ρευστού, η διάμετρος του συστήματος του κλειστού βρόχου αγωγών και η συμμεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών του συστήματος διατηρώντας σταθερές αναλογίες.

Τα αποτελέσματα φανερώουν την ανάπτυξη ροής προς μία κατεύθυνση με την αύξηση της συχνότητας διέγερσης. Η ροή αυτή γενικά μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης είναι πλησίον της ιδιοσυχνότητας του υδραυλικού κυκλώματος, η οποία έχει υπολογιστεί για κάθε σύστημα που μελετάται.

Γενικά, με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και μετατοπίζεται σε μεγαλύτερους αριθμούς συχνοτήτων. Με την αύξηση του μήκους του άκαμπτου αγωγού, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και το μέγιστό της εμφανίζεται σε μικρότερους αριθμούς συχνοτήτων, μόνο για χαμηλά πλάτη διέγερσης. Χρησιμοποιώντας πιο παχύρευστο και πυκνό υγρό μειώνεται αισθητά το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής. Με την αύξηση της διατομής του συστήματος, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και μειώνεται η συχνότητα όπου εμφανίζεται. Για την περίπτωση των

συστημάτων με σταθερές αναλογίες μηκών παρατηρείται ότι τα μέγιστα της μέσης χρονικά παροχής, για όλα τα πλάτη διέγερσης εκτός από τα υψηλά, είναι περίπου ίσα και εμφανίζονται στην ιδιοσυχνότητα του κάθε συστήματος.

Στη συνέχεια η μελέτη επεκτείνεται στην περίπτωση της άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες. Το μοντέλο που προσομοιάζει το φαινόμενο αποτελείται επίσης από έναν κλειστό βρόχο ενός εύκαμπτου και ενός άκαμπτου αγωγού. Αναπτύσσονται οι εξισώσεις ροής (συνέχειας και ορμής) για συμπιεστό ρευστό. Χρησιμοποιείται επίσης μία εξίσωση από την ισεντροπική ροή που σχετίζει την πίεση με την πυκνότητα και μία καταστατική εξίσωση που συσχετίζει την αναπτυσσόμενη πίεση με την μεταβαλλόμενη εγκάρσια διατομή του βρόχου.

Οι τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις που υπολογίζονται στο χώρο και το χρόνο είναι η εγκάρσια διατομή του κλειστού κυκλώματος, η αναπτυσσόμενη εσωτερική πίεση του ρευστού, η αξονική ταχύτητά του και η πυκνότητά του.

Προτού επιλυθεί το σύστημα για την άντληση συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες, πραγματοποιείται μία αριθμητική δοκιμή του υπολογιστικού κώδικα και της μεθοδολογίας σε ένα κλειστό κύκλωμα με αρχική συνθήκη διατομής, χωρίς την επιβολή εξωτερικής διέγερσης και με μηδενική συνεκτικότητα. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη δοκιμή αυτή επιβεβαιώνουν την αξιοπιστία της αριθμητικής μεθοδολογίας.

Τέλος, πέραν των χωρικών και χρονικών μεταβολών των υπολογισθέντων μεγεθών του συστήματος άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες, παρουσιάζεται η συμπεριφορά της μέσης χρονικά παροχής μάζας σε συνάρτηση με τη συχνότητα διέγερσης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 1^η: ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΒΑΛΒΙΔΕΣ

1^ο Κεφάλαιο: Φαινόμενο άντλησης χωρίς βαλβίδες	
1.1 Εισαγωγή	3
1.2 Αντλητικά φαινόμενα στη φυσιολογία	3
1.3 Κυκλοφορικό σύστημα εμβρύου σε αρχικό στάδιο κύησης	4
1.4 Αντλητικά φαινόμενα στη βιοϊατρική τεχνολογία	6
1.5 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	7
2^ο Κεφάλαιο: Ρευστομηχανικό μοντέλο, εξισώσεις και αριθμητική μεθοδολογία	
2.1 Εισαγωγή	9
2.2 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες	9
2.3 Ολοκλήρωση εξισώσεων συνέχειας και ορμής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες	11
2.4 Κινηματική οριακή συνθήκη στο τοίχωμα	15
2.4.1 Μορφές των εξισώσεων συνέχειας και ορμής με βάση την οριακή συνθήκη	16
2.5 Διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα	17
2.5.1 Παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό	17
2.5.2 Παλλόμενη ροή σε συρρικνούμενο ευθύγραμμο αγωγό	20
2.6 Διαμόρφωση πίεσης με βάση την εγκάρσια διατομή εύκαμπτου αγωγού	27
2.7 Θεωρητικό-μαθηματικό μοντέλο	29
2.8 Αρχικές και Οριακές Συνθήκες	31
2.9 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων	32
2.10 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων – Μέθοδος DRP	34
2.11 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	37
3^ο Κεφάλαιο: Παραμετρική μελέτη - Αποτελέσματα	
3.1 Εισαγωγή	39
3.2 Ιδιοσυχνότητα μοντέλου κλειστού βρόχου αγωγών	41
3.3 Επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού	43
3.4 Επίδραση του μήκους του άκαμπτου αγωγού	48
3.5 Επίδραση των φυσικών ιδιοτήτων των ρευστών	52
3.6 Επίδραση της διατομής του συστήματος του κλειστού βρόχου	57
3.7 Επίδραση της μεταβολής των χαρακτηριστικών μηκών του κλειστού βρόχου αγωγών με σταθερές αναλογίες	61
3.8 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	66

Ενότητα 2^η: ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΒΑΛΒΙΔΕΣ ΣΤΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

4^ο Κεφάλαιο: Ρευστομηχανικό μοντέλο, εξισώσεις και αριθμητική μεθοδολογία	
4.1 Εισαγωγή	69
4.2 Εξισώσεις μονοδιάστατης ανάλυσης συμπιεστού ρευστού σε αγωγό με μεταβλητή διατομή	69
4.3 Ισεντροπική μεταβολή	71
4.4 Διαμόρφωση πίεσης με βάση την εγκάρσια διατομή εύκαμπτου αγωγού	72
4.5 Θεωρητικό-μαθηματικό μοντέλο	74
4.6 Αρχικές και Οριακές Συνθήκες	76
4.7 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων	77
4.8 Μέση χρονικά αδιάστατη παροχή μάζας	78
4.9 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων – Μέθοδος DRP	79
4.10 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	81

5^ο Κεφάλαιο: Αριθμητική επίλυση εξισώσεων συμπιεστού ρευστού σε δοκιμή αρχικών τιμών	
5.1 Εισαγωγή	83
5.2 Μαθηματικό μοντέλο και αριθμητικά δεδομένα	83
5.3 Χρονικά και χωρικά αποτελέσματα των υπολογισθέντων μεγεθών	86
5.4 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	97

6^ο Κεφάλαιο: Αποτελέσματα άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες	
6.1 Εισαγωγή	99
6.2 Αριθμητικά δεδομένα και χαρακτηριστικές παράμετροι	99
6.3 Ιδιοσυχνότητα μοντέλου κλειστού βρόχου αγωγών	100
6.4 Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής μάζας συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης	102
6.5 Χωρικά και χρονικά αποτελέσματα των υπολογισθέντων μεγεθών	105
6.6 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια	115

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-Α

A.1 Επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών	117
A.2 Επίδραση του μήκους του άκαμπτου αγωγού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών	120
A.3 Επίδραση των φυσικών ιδιοτήτων του ρευστού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών	123

A.4 Επίδραση της διατομής του κλειστού βρόχου αγωγών στην ιδιοσυχνότητά του	126
A.5 Επίδραση των χαρακτηριστικών μηκών του κλειστού βρόχου αγωγών στην ιδιοσυχνότητά του	129
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-B	
B.1 Πολυωνυμικές προσεγγίσεις συναρτήσεων Kelvin	133
B.2 Ασυμπτωτικές εκφράσεις αλγεβρικών αθροισμάτων των γινομένων των συναρτήσεων Kelvin	134
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-Γ	
Δ.1 Διακριτοποίηση αριθμητικού σχήματος DRP για το ασυμπίεστο ρευστό	135
Δ.2 Διακριτοποίηση αριθμητικού σχήματος DRP για το συμπιεστό ρευστό	140
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	145

ΕΝΟΤΗΤΑ 1^η

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΝΤΛΗΣΗΣ
ΧΩΡΙΣ ΒΑΛΒΙΔΕΣ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΒΑΛΒΙΔΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Το φαινόμενο άντλησης ρευστού χωρίς τη χρήση βαλβίδων μελετάται μέσω ενός κατάλληλου ψευδο-μονοδιάστατου μοντέλου που αποτελείται από δύο αγωγούς, έναν εύκαμπτο κι έναν άκαμπτο, που συνδέονται μεταξύ τους, σχηματίζοντας έτσι έναν κλειστό βρόχο. Ένα τμήμα του εύκαμπτου αγωγού δέχεται διέγερση από μια περιοδική εξωτερική δύναμη, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ροής προς μία κατεύθυνση.

Η άντληση, επομένως, που προκαλείται με αυτόν τον τρόπο δεν επιτυγχάνεται με κάποιο χρονισμό βαλβίδων που φράσσουν κι αποφράσσουν την είσοδο κι έξοδο του διεγερόμενου τμήματος του εύκαμπτου αγωγού. Άρα, πρόκειται για άντληση χωρίς βαλβίδες.

Το φαινόμενο αυτό εμπίπτει στο πεδίο των μη μόνιμων, παλλόμενων ροών, μέσα από αγωγούς με εύκαμπτα τοιχώματα. Καθώς το συναντάμε στη φυσιολογία πολλών ζωικών οργανισμών, ο κλάδος της Βιορευστομηχανικής ασχολείται τόσο πειραματικά, όσο και υπολογιστικά με την ανάπτυξη μοντέλων. Η πρωταρχική ιδέα κατασκευής μιας πειραματικής διάταξης που να προσομοιάζει το φαινόμενο αυτό ανήκει στον ιατρό Liebau [Liebau, (ZfK), 1956].

Το φαινόμενο άντλησης χωρίς βαλβίδες έχει πολυσύνθετο χαρακτήρα, διότι υπάρχει η αλληλεπίδραση του ρευστού με το στερεό σώμα. Το συζευγμένο αυτό σύστημα, όταν επιλύεται αριθμητικά, ενδεχομένως να παρουσιάσει αποκλίσεις από την πραγματικότητα, γι' αυτό απαιτείται συνήθως μία σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

1.2 Αντλητικά φαινόμενα στη φυσιολογία

Για την επιβίωση των βιολογικών οργανισμών είναι αναγκαία η μετακίνηση των βιολογικών τους ρευστών. Έτσι, για παράδειγμα η μετακίνηση των προϊόντων μεταβολισμού των κυττάρων, η μεταφορά συστατικών και ουσιών μεταξύ των οργάνων, ή η ρύθμιση της θερμοκρασίας των ιστών, γίνονται μέσω της ροής των διαφόρων βιολογικών ρευστών όπως του αίματος, των ούρων, της λέμφου, του αέρα κλπ. Για την επίτευξη της ροής αυτών των βιολογικών ρευστών οι οργανισμοί έχουν αναπτύξει διάφορους βιολογικούς μηχανισμούς άντλησης.

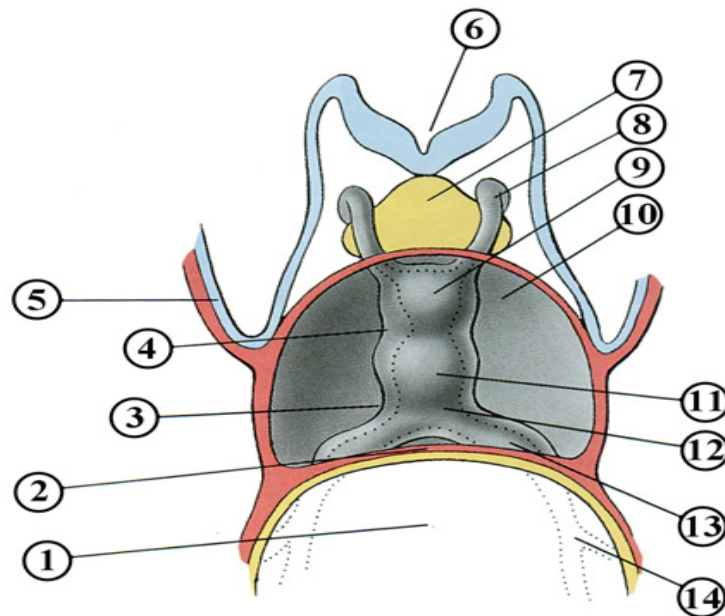
Μία κατηγορία από αυτούς τους μηχανισμούς άντλησης είναι και η άντληση χωρίς βαλβίδες, όπου απουσιάζουν τα αποφρακτικά στοιχεία της ροής όπως οι βαλβίδες. Υπάρχει περίπτωση να παρουσιαστεί και σε συστήματα με βαλβίδες, όμως πρέπει αυτές να μην είναι κατάλληλα χρονισμένες, ώστε να διακόπτουν τη ροή τη κατάλληλη χρονική στιγμή και συνεπώς να παρουσιάζεται ροή ρευστού και προς τις δύο κατευθύνσεις κατά τη διάρκεια του χρόνου άντλησης.

Υπάρχει πληθώρα παραδειγμάτων στη φύση από άντληση βιολογικών ρευστών χωρίς βαλβίδες. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα από το κυκλοφορικό σύστημα του εμβρύου σε αρχικό στάδιο κύησης, το οποίο επελέγη από τη βιβλιογραφία [Μανόπουλος, 2009] ανάμεσα σε πολλά άλλα ενδιαφέροντα παραδείγματα από τη συνομοταξία των χορδωτών και των αρθροπόδων.

1.3 Κυκλοφορικό σύστημα εμβρύου σε αρχικό στάδιο κύησης

Στα κυκλοφορικά συστήματα των ουροχορδωτών, κεφαλοχορδωτών και ημιχορδωτών λαμβάνει χώρα αποκλειστικά η άντληση χωρίς βαλβίδες (valveless pumping). Αντιθέτως, στα σπονδυλωτά, η άντληση που πραγματοποιείται οφείλεται σε βιολογικές αντλίες (καρδιές) και το αίμα ρέει συνεχώς προς μία μόνο κατεύθυνση. Όμως, σε εμβρυϊκή μορφή, όταν βρίσκονται σε αρχικό στάδιο κύησης όπου δεν έχουν αναπτυχθεί ακόμη οι βαλβίδες, κυριαρχεί η άντληση χωρίς βαλβίδες (valveless pumping), [Forouhar et al, 2006].

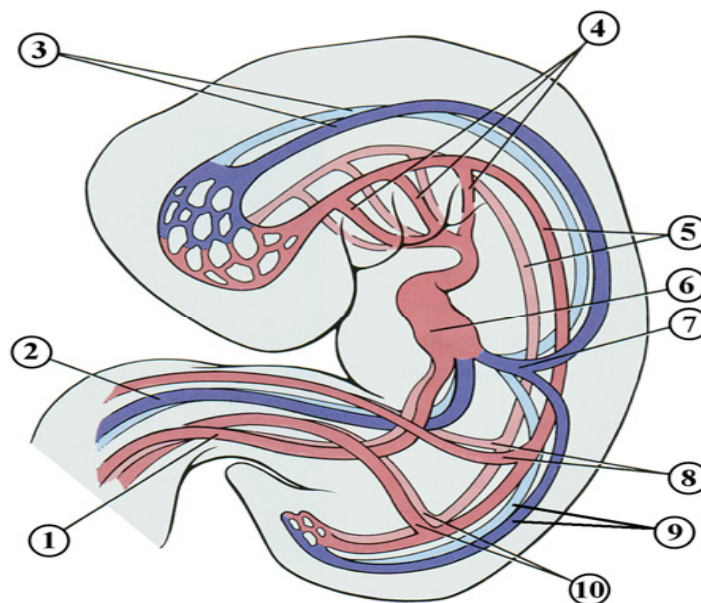
Στο τέλος της 3ης εβδομάδας της κύησης το έμβρυο έχει κατά μέσο όρο μέγιστο μήκος περί τα 2.75mm και τότε σχηματίζεται ο αρχέγονος καρδιακός σωλήνας (σχήμα 1-1), ενώ από τη 18η ημέρα έχει ξεκινήσει η ανάπτυξη των αγγείων. Ο αρχέγονος καρδιακός σωλήνας μόλις σχηματιστεί αρχίζει να πάλλεται και να προωθεί το αίμα στο έμβρυο και τον πλακούντα μεταξύ της 21ης και 22ης ημέρας της κύησης. Συνεπώς, το καρδιαγγειακό σύστημα είναι το πρώτο σύστημα που λειτουργεί στο έμβρυο και μάλιστα από την πρώτη στιγμή του σχηματισμού του, [Moore & Persaud, 1998] και [Larsen, 1997].



Σχήμα 1-1. Σχηματική αναπαράσταση του αρχέγονου καρδιακού σωλήνα την 21^η ημέρα της κύησης. Διαιρείται από σειρά ορατών περισφίξεων και διευρύνσεων σε αρχέγονα τμήματα, που θα παραγάγουν τις κοιλότητες της οριστικής καρδιάς. Διακρίνονται: (1) λεκιθικός ασκός, (2) εγκάρσιο διάφραγμα, (3) κολποκοιλιακή αύλακα, (4) βολβοκοιλιακή αύλακα, (5) αμνίο, (6) νευρική αύλακα, (7) πρόσθιο έντερο, (8) πρώτο αορτικό τόξο, (9) καρδιακός βολβός, (10) περικαρδιακή κοιλότητα, (11) κοιλία (αρχικός βηματοδότης), (12) αρχέγονος κόλπος, (13) αριστερό κέρασ του φλεβώδους κόλπου, (14) λεκιθική φλέβα, [Larsen, 1997].

Η εμβρυϊκή καρδιά αρχίζει να χτυπά τόσο νωρίς με ανάπτυξη χαμηλών πιέσεων, όχι κυρίως για την κυκλοφορία του αίματος και τη μεταφορά των συστατικών του, αλλά κυρίως για την υποβοήθηση της αγγειογέννησης. Δηλαδή, η πάλμωση της ροής του αίματος, που παράγει η συστολοδιαστολή του αρχέγονου καρδιακού σωλήνα, επιφέρει απότομες παραμορφωτικές δυνάμεις στα ενδοθηλιακά κύτταρα κατά μήκος των ιχνών των πρόδρομων εμβρυονικών αγγείων. Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν έκκριση κατάλληλων πεπτιδίων από τα ενδοθηλιακά κύτταρα στο καρδιαγγειακό σύστημα. Τα πεπτίδια αυτά επιδρούν με παρακρινικό τρόπο στον πολλαπλασιασμό, την ανάπτυξη και την εξάπλωση των ενδοθηλιακών κυττάρων [Burggren & Crossley II, 2002]. Επιπλέον, το έμβρυο απαιτείται να έχει αυτοτελή αιματική κυκλοφορία, η οποία ενδεχομένως να αποτελεί πηγή πληροφορίας, μέσω της οποίας να εκτιμηθεί η βέλτιστη θέση σχηματισμού των βαλβίδων σε μεταγενέστερο στάδιο [Mosser et al, 1998]. Με παρόμοιο σκεπτικό εξάλλου αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αιμοδυναμική ροή συνεισφέρει στη διαμόρφωση του σχήματος του μυοκαρδίου [Icardo, 1989].

Η αντλητική ικανότητα της καρδιάς φθάνει σε μέγιστη απόδοση όταν ολοκληρωθεί ο σχηματισμός των βαλβίδων της. Για παράδειγμα, οι κολποκοιλιακές βαλβίδες (τριγλώχιν και μιτροειδής) σχηματίζονται από το κοιλιακό μυοκάρδιο μεταξύ της 5ης και της 8ης εβδομάδας και αποτρέπουν την οπισθορροή του αίματος κατά τη διάρκεια της συστολής. Επίσης, η ανάπτυξη των μηνοειδών βαλβίδων (αορτική και πνευμονική) ολοκληρώνεται την 9η εβδομάδα. Επομένως, είναι προφανές ότι υπάρχει περίοδος από την αρχή της 4ης εβδομάδας μέχρι το τέλος της 8ης στην οποία οι βαλβίδες δεν έχουν σχηματιστεί πλήρως. Παρόλα αυτά όμως, διαμορφώνεται ροή του αίματος, με μη μηδενική μέση χρονικά παροχή, απαραίτητη για τη περαιτέρω ανάπτυξη του εμβρύου όπως αναφέρθηκε.



Σχήμα 1-2. Σχηματική απεικόνιση του αρχέγονου αγγειακού συστήματος στο μέσον της 4ης εβδομάδας κύησης του εμβρύου του ανθρώπου (*homo sapiens*), της οικογένειας των ανθρωποειδών (*hominids*), της τάξης των πρωτεύοντων (*primates*), της κλάσης των θηλαστικών (*mammalians*), της ομοταξίας των σπονδυλωτών (*vertebrates*). Διακρίνονται: (1) ομφαλική φλέβα, (2) λεκιθική φλέβα, (3) δεξιά και αριστερή πρόσθια κύρια φλέβα, (4) αριστερά αορτικά τόξα, (5) δεξιά και αριστερή ραχιαία αορτή, (6) αρχέγονος καρδιακός σωλήνας, (7) αριστερή κοινή κύρια φλέβα, (8) αντιπροσωπευτικές δεξιά και αριστερή λεκιθική αρτηρία, (9) δεξιά και αριστερή οπίσθια κύρια φλέβα, (10) δεξιά και αριστερή ομφαλική αρτηρία, [Larsen, 1997].

Η εισροή αίματος στον αρχέγονο καρδιακό σωλήνα εξασφαλίζεται αρχικά από έξι αγγεία, τρία σε κάθε πλευρά (σχήμα 1-2). Το φλεβικό αίμα, το προερχόμενο από το σώμα του εμβρύου, εισέρχεται στην καρδιά διαμέσου ενός ζεύγους βραχειών φλεβών, των κοινών κυρίων φλεβών, οι οποίες σχηματίζονται από τη συνένωση του ζεύγους των οπισθίων κυρίων φλεβών, που αποχετεύουν το κορμό, και του ζεύγους των προσθίων κυρίως φλεβών που αποχετεύουν την περιοχή της κεφαλής (σχήμα 1-2). Ο λεκιθικός ασκός αποχετεύεται από ένα ζεύγος λεκιθικών φλεβών, ενώ το οξυγονωμένο αίμα από τον πλακούντα φθάνει στην καρδιά μέσω ενός ζεύγους ομφαλικών φλεβών [Larsen, 1997].

Ο καρδιακός σωλήνας και το αγγειακό σύστημα αρχικά είναι κατακόρυφο συμμετρικό σύστημα ελαστικών και συσταλτών σωλήνων και παραμένει έτσι μέχρι την 35η ημέρα της εμβρυακής ζωής. Για το λόγο αυτό οι συσπάσεις των θαλάμων του αρχέγονου καρδιακού σωλήνα, ο οποίος την περίοδο αυτή βρίσκεται ανάμεσα στις φλέβες και τις αρτηρίες, πρέπει να συμβαίνουν κυρίως κατά την περιφερική κατεύθυνση. Η ασυμμετρία υφίσταται με την έννοια της κατεύθυνσης του αίματος από τις πιο διασταλτές φλέβες στις λιγότερο διασταλτές αρτηρίες. Αυτό είναι τόσο συνθήκη όσο και αποτέλεσμα της μονοκατευθυνόμενης άντλησης, που σε αυτό το πρώιμο στάδιο ανάπτυξης δημιουργείται χωρίς βαλβίδες [Liebau, 1957 και 1968]. Στη συνέχεια της ανάπτυξης ο καρδιακός σωλήνας, διπλώνει και στρίβει με αρκετά πολύπλοκο τρόπο (πτύχωση). Το αορτικό-αρτηριακό σύστημα εκροής διαιρείται, παρέχοντας τη ροή τόσο από την αορτή όσο και από την πνευμονική αρτηρία. Πρόσθετα, η αορτή γίνεται ασύμμετρη επειδή από το προηγούμενο συμμετρικό διπλό τόξο μόνο το αριστερό διατηρείται εντελώς. Τελικά, ο αριστερός και ο δεξιός θάλαμος τοποθετούνται πλάι-πλάι. Οι αναπτυξιακές αυτές διαδικασίες ολοκληρώνονται πριν την 49η μέρα της εμβρυϊκής ζωής και οι δύο θάλαμοι της καρδιάς είναι τότε ικανοί να συστέλλονται τόσο περιφερειακά όσο και κατά μήκος [Liebau, 1957].

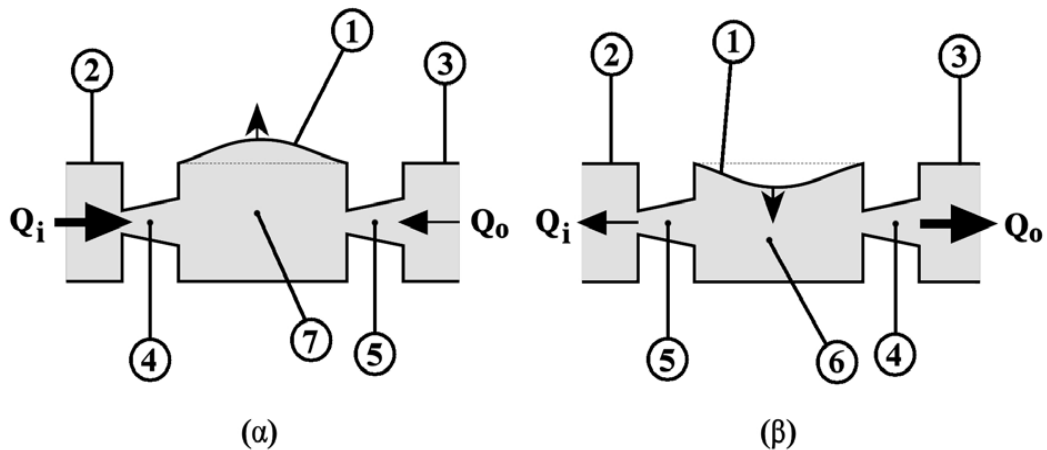
1.4 Αντλητικά φαινόμενα στη βιοϊατρική τεχνολογία

Πέραν της άντλησης των βιολογικών ρευστών από τα ζωτικά όργανα των οργανισμών με μηχανισμούς που διέπονται από τη φυσιολογία, αρκετές φορές απαιτείται η τεχνητή άντληση των βιολογικών ρευστών ιδιαίτερα σε παθολογικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές άντλησης των βιορευστών που χρησιμοποιούν είτε τις αρχές της κλασικής άντλησης με βαλβίδες είτε της άντλησης χωρίς βαλβίδες.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τεχνολογικής εφαρμογής που εφαρμόζει την άντληση χωρίς βαλβίδες στον τομέα της βιολογίας, της ιατρικής, στην ψύξη μικροηλεκτρονικών συστημάτων, καθώς και στην τεχνολογία του διαστήματος, είναι οι μικροαντλίες χωρίς βαλβίδες (valveless micropumps).

Οι πρώτες μικροαντλίες που αναπτύχθηκαν προοριζόταν για χρήση ελέγχου της διανομής ινσουλίνης σε διαβητικούς, διατηρώντας το επιθυμητό επίπεδο σακχάρου στο αίμα χωρίς τη συχνή χρήση ενέσεων, [Smits,1990]. Από τις εμφυτεύσιμες μικροαντλίες δεν απαιτείται τόσο η απόδοση υψηλών παροχών, όσο απαιτείται ακρίβεια στην εγχυόμενη ποσότητα. Για παράδειγμα η ποσότητα ινσουλίνης που χρειάζεται ένας διαβητικός είναι λιγότερο από 1ml ανά ημέρα, όμως αυτή η ελάχιστη ποσότητα πρέπει να κατανεμηθεί κατάλληλα μέσα στο χρόνο μίας ημέρας.

Τυπική μορφή μικροαντλίας χωρίς βαλβίδες απεικονίζεται στο σχήμα 1-3.



Σχήμα 1-3. Αρχή λειτουργίας (συγκλίνοντος-αποκλίνοντος ακροφυσίου) μικροαντλίας ενός θαλάμου μεμβράνης. **(α)** Κατάσταση τροφοδοσίας θαλάμου με αύξηση του εσωτερικού όγκου ($|Q_i| > |Q_o|$). **(β)** Κατάσταση άντλησης με μείωση του εσωτερικού όγκου ($|Q_i| < |Q_o|$). Διακρίνονται: (1) εύκαμπτη μεμβράνη, (2) είσοδος ρευστού, (3) έξοδος ρευστού, (4) δράση ακροφυσίου ως αποκλίνον, (5) δράση ακροφυσίου ως συγκλίνον, (6) μείωση όγκου θαλάμου, (7) αύξηση όγκου θαλάμου, [Olsson et al, 1999].

Πρόκειται ουσιαστικά για πολύ μικρής κλίμακας διάταξη, η οποία απαρτίζεται από δύο ακροφύσια (διαχύτες), ενώ ανάμεσά τους παρεμβάλλεται αντλητικός θάλαμος με εύκαμπτη παλλόμενη μεμβράνη (πιεζοηλεκτρικό διάφραγμα). Η αντλητική ικανότητα της μικροαντλίας οφείλεται στη διαφορετική αντίσταση που παρουσιάζεται στην είσοδο και την έξοδο της, λόγω των διαφορετικών ροϊκών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα εκατέρωθεν του αντλητικού θαλάμου. Δηλαδή, κατά την πάλμωση της μεμβράνης σε μία ημιπερίοδο το ένα ακροφύσιο λειτουργεί ως αποκλίνον, ενώ για το ίδιο χρονικό διάστημα το άλλο λειτουργεί ως συγκλίνον. Αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη διαφορετικών υδραυλικών αντιστάσεων που διαμορφώνουν διαφορά πίεσης στα άκρα της μικροαντλίας, η οποία κατευθύνει το ρευστό από τη μία πλευρά στην άλλη.

1.5 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό ορίστηκε το φαινόμενο της άντλησης χωρίς αντλίες. Το αντλητικό αυτό φαινόμενο έχει εφαρμογή τόσο σε φυσιολογικό επίπεδο, όσο και σε τεχνολογικό στον τομέα της Βιορευστομηχανικής, και γι' αυτό περιγράφηκε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από κάθε κατηγορία.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη της άντλησης είναι η ρυθμική συστολή και χαλάρωση των τοιχωμάτων των διαφόρων κοίλων δομών (φυσιολογικών και τεχνητών) που αλληλεπιδρούν με το περιεχόμενο ρευστό με σκοπό τη μετακίνηση-προώθησή του. Σε τεχνολογικό επίπεδο αυτή η διέγερση των κοίλων δομών μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν το τοίχωμά τους είναι κατασκευασμένο από ελαστικό υλικό.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ, ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ [Μανόπουλος, 2009]

2.1 Εισαγωγή

Για τη μελέτη των αντλητικών φαινομένων μέσω αλληλεπίδρασης μεταξύ ροής ρευστού και του κινούμενου τοιχώματος του αγωγού αναπτύσσεται ρευστομηχανικό μοντέλο, το οποίο μπορεί να διαμορφώνεται ως προς τις οριακές συνθήκες και ως προς τη γεωμετρία ανάλογα με το φαινόμενο που χρειάζεται να περιγραφεί. Οι εξισώσεις του αναπτυσσόμενου μοντέλου περιγράφουν τη συμπεριφορά της ροής ρευστού, αλλά και τη συμπεριφορά του κινούμενου τοιχώματος. Συνεπώς, εκτός από τις ρευστομηχανικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται και εξισώσεις μηχανικής στερεού παραμορφώσιμου σώματος.

Οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής βασίζονται σε δύο αξιωματικούς νόμους διατήρησης (για το ασυμπίεστο ρευστό). Το νόμο διατήρησης της μάζας και το νόμο διατήρησης της ορμής. Από την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Ο νόμος διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Τα κύρια στοιχεία που απαρτίζουν το φυσικό μοντέλο είναι δομές κοίλου κυλινδρικού σχήματος, δηλαδή σωλήνες εύκαμπτοι ή άκαμπτοι. Συνεπώς, όλες οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι χρήσιμο να είναι μετασχηματισμένες σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εξισώσεις αυτές και διαμορφώνονται κατάλληλα μέσα από παραδοχές, θεωρήσεις και μετασχηματισμούς, ώστε να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή του αναπτυσσόμενου μοντέλου.

2.2 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες

Το ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται και επιλύεται, βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής με σταθερές την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και το ιξώδες του ρευστού. Επίσης, θεωρείται ότι όλα τα σημεία της διάταξης του μοντέλου βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο με αποτέλεσμα οι βαρυτικές δυνάμεις να εξαλείφονται, ενώ υποτίθεται αξονοσυμμετρική ροή. Μέσω ενός συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, x) η εξίσωση Navier Stokes κατά την φ κατεύθυνση απλοποιείται όταν η ροή του ρευστού είναι αξονικά συμμετρική χωρίς περιδίνηση (swirl), οπότε για την ταχύτητα κατά την περιφερειακή κατεύθυνση ισχύει $w=0$. Δηλαδή, κανένα μέγεθος δεν εξαρτάται από τη φ και όλες οι μεταβολές των μεγεθών ως προς φ είναι μηδενικές. Κατά τις δύο άλλες κατευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παραδοχές, οι εξισώσεις Navier Stokes έχουν τη μορφή, [Τσαγγάρης, 2005]:

Ακτινική κατεύθυνση r:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2-1)$$

Αξονική κατεύθυνση x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2-2)$$

όπου: v , u είναι οι ταχύτητες του ρευστού αντίστοιχα κατά την ακτινική r και αξονική x κατεύθυνση με $v=v(r, x, t)$ και $u=u(r, x, t)$.

p είναι η πίεση του ρευστού με $p=p(r, x, t)$.

ρ και ν είναι η πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Για λεπτά σώματα με σχέση πάχους προς μήκος μικρή ή αντίστοιχα για στενόμακρους κυλινδρικούς αγωγούς με σχέση ακτίνας προς μήκος μικρή, αν αδιαστατοποιηθούν οι εξισώσεις Navier-Stokes παραπάνω, τότε αναδεικνύεται ότι οι όροι ιξώδους δευτέρας τάξης κατά x είναι αμελητέοι σε σχέση με τους υπολοίπους όρους ιξώδους της εξίσωσης, οπότε οι εξισώσεις Navier-Stokes λαμβάνουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2-3)$$

Αξονική κατεύθυνση x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2-4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Navier-Stokes κατά τη x κατεύθυνση με την πυκνότητα ρ , οπότε η (2-4) παίρνει τη μορφή:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \nu \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφα τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο τελευταίο άθροισμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2-5)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, θεωρώντας ασυμπίεστο ρευστό και αξονική συμμετρία, παίρνει τη μορφή, [Τσαγγάρης, 2005]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-6)$$

2.3 Ολοκλήρωση εξισώσεων συνέχειας και ορμής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες

Παρατηρείται από τις εξισώσεις (2-5) και (2-6) ότι υπάρχει εξάρτηση των μεγεθών από τη συντεταγμένη r . Αυτή η εξάρτηση μπορεί να εξαλειφθεί με ολοκλήρωση των ανωτέρω εξισώσεων επί της διατομής, μετατρέποντας τις εξισώσεις σε απλούστερες μορφές, ώστε να είναι πιο εύκολη η αριθμητική τους επίλυση. Για δοχείο, αγωγό ή σωλήνα κυλινδρικού σχήματος μεταβλητής ακτίνας $R=R(x, t)$, ολοκληρώνεται η εξίσωση (2-5) αφού πρώτα πολλαπλασιαστεί με το γινόμενο $2\pi r dr$.

Η μορφή που παίρνει έχει ως εξής:

$$\rho \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t} 2\pi r dr + \rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi r dr = - \int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr + 2\pi \mu \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_0^R$$

Έχει αποδειχθεί ότι σε στενόμακρες κυλινδρικές δομές μικρής καμπυλότητας με αξονική συμμετρία η εφαπτομενική διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα δίνεται από τη σχέση, [Uchida, 1956] και [Forrester & Young, 1970]:

$$\tau_R = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_R,$$

η οποία αν χρησιμοποιηθεί στην πιο πάνω σχέση προκύπτει:

$$\rho \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t} 2\pi r dr + \rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi r dr = - \int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr + 2\pi R \tau_R \quad (2-7)$$

Τα ολοκληρώματα της σχέσης (2-7) αναλύονται και μετασχηματίζονται όπως παρουσιάζεται παρακάτω. Για το πρώτο εφαρμόζεται ο κανόνας του Leibniz για παραγωγήιση ολοκληρωμάτων, οπότε παίρνει τη μορφή:

$$\rho \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t} 2\pi r dr = 2\pi \rho \int_0^R \frac{\partial(ru)}{\partial t} dr = 2\pi \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R r u dr - u(R, x, t) \frac{1}{2} \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)$$

Λαμβάνοντας υπόψη σε αυτή τη σχέση, τόσο τον ορισμό της διατομής $A=\pi R^2$, όσο και τον ορισμό της μέσης ταχύτητας του ρευστού στη διατομή:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_0^R u 2\pi r dr = \frac{Q}{A} \quad (2-8)$$

το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2-7) παίρνει τελικά την απλοποιημένη μορφή:

$$\rho \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t} 2\pi r dr = \rho \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial t} - \rho u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2-9)$$

όπου το γινόμενο $A\bar{u}$ εκφράζει την ογκομετρική παροχή του ρευστού Q , δηλαδή τον όγκο ρευστού που διέρχεται κάθετα διαμέσου της επιφάνειας A στη μονάδα του χρόνου.

Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το άθροισμα των δύο άλλων όρων του πρώτου μέλους της σχέσης (2-7) έχει ως εξής:

$$\rho \int_0^R rv \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi dr = 2\pi\rho (rvu)_0^R - 2\pi\rho \int_0^R \frac{\partial(rv)}{\partial r} u dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi dr$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση διατήρησης της μάζας (2-6), το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης μπορεί να μετασχηματιστεί και η σχέση να πάρει τη μορφή:

$$\rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi dr = 2\pi\rho (rvu)_0^R + 2\pi\rho \left(\int_0^R ru \frac{\partial u}{\partial x} dr + \int_0^R ru \frac{\partial u}{\partial x} dr \right),$$

η οποία, κάνοντας τις αναγωγές μεταξύ των δύο ολοκληρωμάτων του τελευταίου μέλους, καταλήγει στην εξίσωση:

$$\rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi dr = 2\pi\rho (rvu)_0^R + 2\pi\rho \int_0^R \frac{\partial(ru^2)}{\partial x} dr$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μέσω του κανόνα του Leibniz για παραγωγή ολοκληρωμάτων, γράφεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\int_0^R \frac{\partial(ru^2)}{\partial x} dr = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R ru^2 dr - \frac{1}{2} u^2(R, x, t) \frac{\partial R^2}{\partial x},$$

η οποία αν αντικατασταθεί στην αμέσως προηγούμενη, αφού πρώτα γίνει χρήση και του ορισμού της διατομής $A = \pi R^2$, προκύπτει:

$$\rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi dr = 2\pi\rho R v(R, x, t) u(R, x, t) + 2\pi\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R ru^2 dr - \rho u^2(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-10)$$

Για δοχείο, αγωγό ή σωλήνα κυλινδρικού σχήματος μεταβλητής ακτίνας $R=R(x, t)$, ολοκληρώνεται τώρα η εξίσωση (2-6) αφού πρώτα πολλαπλασιαστεί με το γινόμενο $2\pi r dr$. Η μορφή που παίρνει έχει ως εξής:

$$2\pi R v(R, x, t) + \int_0^R \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi r dr = 0 \quad (2-11)$$

Για το ολοκλήρωμα της σχέσης (2-11) εφαρμόζεται ο κανόνας του Leibniz για παραγωγήιση ολοκληρωμάτων, οπότε παίρνει τη μορφή:

$$\int_0^R \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R \frac{\partial(ru)}{\partial x} dr = 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R r u dr - \pi u(R, x, t) \frac{\partial R^2}{\partial x}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το ολοκλήρωμα στη (2-11) μέσω της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$2\pi R v(R, x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u 2\pi r dr - u(R, x, t) \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial x} = 0,$$

η οποία αν ληφθεί υπόψη, τόσο ο ορισμός της διατομής $A=\pi R^2$, όσο και ο ορισμός της μέσης ταχύτητας στη διατομή, [σχέση (2-8)], παίρνει τη μορφή:

$$2\pi R v(R, x, t) = -\frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} + u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-12)$$

Αν αντικατασταθεί ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της σχέσης (2-10) μέσω της εξίσωσης συνέχειας (2-12), τότε προκύπτει η σχέση:

$$\rho \int_0^R v \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r dr + \rho \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial x} 2\pi r dr = -\rho u(R, x, t) \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u^2 2\pi r dr \quad (2-13)$$

Όσον αφορά τον όρο της πίεσης στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2-7) εφαρμόζεται πάλι ο κανόνας του Leibniz για παραγωγήιση ολοκληρωμάτων, οπότε παίρνει τη μορφή:

$$\int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R \frac{\partial(rp)}{\partial x} dr = 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R r p dr - \pi p(R, x, t) \frac{\partial R^2}{\partial x}$$

Λαμβάνοντας υπόψη σε αυτή τη σχέση, τόσο τον ορισμό της διατομής $A=\pi R^2$, όσο και τον ορισμό της μέσης πίεσης στη διατομή:

$$\bar{p} = \frac{1}{A} \int_0^R p 2\pi r dr = \frac{F}{A} \quad (2-14)$$

Το ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (2-7) παίρνει τελικά την απλοποιημένη μορφή:

$$\int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr = \frac{\partial(A\bar{p})}{\partial x} - p(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x},$$

όπου $F = A\bar{p}$ είναι η δύναμη που ασκεί το ρευστό στην κάθετη επιφάνεια της διατομής A .

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr = A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{p} \frac{\partial A}{\partial x} - p(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Αν θεωρηθεί ότι τα υδραυλικά στοιχεία του μοντέλου είναι κυλινδρικού σχήματος με αμελητέα όμως καμπύλωση, τότε οι μεταβολές της πίεσης κατά την r διεύθυνση είναι αμελητέες, οπότε μπορεί να προσεγγισθεί η πίεση με ομοιόμορφη κατανομή επί της διατομής με μέση τιμή \bar{p} . Σε αυτή τη περίπτωση η πίεση του ρευστού στο τοίχωμα είναι ίση με τη μέση τιμή της κατανομής. Δηλαδή, $\bar{p} = p(R, x, t)$. Συνεπώς, οι δύο τελευταίοι όροι της παραπάνω εξίσωσης απαλείφονται και το ολοκλήρωμα του όρου της πίεσης στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2-7) παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$\int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr = A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (2-15)$$

Αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα της εξίσωσης (2-7) μέσω των σχέσεων (2-9), (2-13) και (2-15), η εξίσωση ορμής κατά τη x κατεύθυνση λαμβάνει τη μορφή:

$$\rho \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial t} - \rho u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial t} - \rho u(R, x, t) \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u^2 2\pi r dr = -A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\pi R \tau_R \quad (2-16)$$

Με την επενέργεια του ιξώδους τα στοιχεία του ρευστού, που έρχονται σε επαφή με τα στοιχεία του κυλινδρικού δοχείου, αποκτούν την ταχύτητα του εύκαμπτου τοιχώματος. Εξαιτίας αυτού, αλλά και λόγω της συνεκτικότητας μεταξύ των μορίων του ρευστού, σχηματίζεται ανομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας του ρευστού στη διατομή. Αυτή η ανομοιομορφία καθιστά δύσκολη την απλοποίηση του ολοκληρώματος της σχέσης (2-16), εκτός αν αντικατασταθεί η ταχύτητα u με τη μέση στη διατομή ταχύτητα \bar{u} , η οποία δεν εξαρτάται από την συντεταγμένη r . Σε αυτή τη περίπτωση όμως πρέπει να εισαχθεί ο διορθωτικός συντελεστής της ορμής, ο οποίος λαμβάνει υπόψη του το σφάλμα όταν γίνεται χρήση της μέσης ταχύτητας στη διατομή αντί της πραγματικής κατανομής της ταχύτητας. Δηλαδή, ο διορθωτικός συντελεστής ορμής β , που ορίζεται από την παρακάτω σχέση, [Τσαγγάρης, 2005], εκτιμά τη διαφορά μεταξύ του τετραγώνου της ταχύτητας με το τετράγωνο της μέσης τιμής της ως εξής:

$$\beta \triangleq \frac{1}{\bar{u}^2 A} \int_0^R u^2 2\pi r dr \Rightarrow \int_0^R u^2 2\pi r dr = \beta \bar{u}^2 A$$

Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα στη σχέση (2-16) από τον παραπάνω ορισμό του διορθωτικού συντελεστή ορμής η εξίσωση κατά τη x κατεύθυνση γίνεται:

$$\rho \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial t} - \rho u(R, x, t) \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} \right] + \rho \frac{\partial(\beta \bar{u}^2 A)}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} A + 2\pi R \tau_R \quad (2-17)$$

Οι τιμές που μπορεί να πάρει ο διορθωτικός συντελεστής ορμής β κυμαίνονται από 1 όταν η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη, όπως συμβαίνει στη τυρβώδη ροή, μέχρι 4/3 όταν η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική, όπως συμβαίνει στη στρωτή ροή μέσα σε κυλινδρικούς αγωγούς. Είναι προφανές ότι η διακύμανση του συντελεστή β είναι πολύ μικρή και επιπλέον αποτελεί παράγοντα στον όρο της μεταθετικής επιτάχυνσης, ο οποίος δεν είναι τόσο σημαντικός στις ροές κυλινδρικών αγωγών σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης ορμής, [Schaaf & Abberecht, 1972]. Για αυτούς τους λόγους και από αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου, [Manopoulos et al, 2000], φαίνεται ότι δεν υπάρχει επιρροή από την ακριβή επιλογή του συντελεστή β . Συνεπώς, για λόγους μαθηματικής ευκολίας το β επιλέγεται ίσο με τη μονάδα. Η επιλογή αυτή είναι πολύ καλή προσέγγιση, όπως αναφέρθηκε, για ομοιόμορφες κατανομές ταχύτητας που συνήθως απαντώνται σε παλλόμενες ροές υψηλού αριθμού Womersley, [Uchida, 1956].

2.4 Κινηματική οριακή συνθήκη στο τοίχωμα

Υποτίθεται ότι στο όριο ρευστού και σώματος, τα στοιχεία του ρευστού είναι σε συνεχή επαφή με τα στοιχεία του κυλινδρικού δοχείου. Δηλαδή, το τοίχωμα αποτελεί υλική επιφάνεια του ρευστού με κάθε στοιχείο ρευστού πάνω στο τοίχωμα να έχει ακτινική απόσταση όση και η ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου. Συνεπώς, το σχήμα αυτής της υλικής επιφάνειας προσδιορίζεται από την εξίσωση $r=R(x, t) \Rightarrow h \equiv r-R(x, t)=0$. Με βάση το πεδίο ταχυτήτων v, u κατά την r, x κατεύθυνση αντίστοιχα η χρονική μεταβολή της παραπάνω διαφοράς h είναι επίσης μηδενική εφόσον έχει υποθεθεί ότι τα τοιχώματα είναι αδιαπέραστα. Συνεπώς, $Dh/Dt = 0$. Αναλύοντας την υλική παράγωγο προκύπτει:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(R, x, t) \frac{\partial h}{\partial r} + u(R, x, t) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή r εκφράζει το σημείο του χώρου και όχι τη θέση του σωματιδίου του ρευστού, δηλαδή είναι $\partial r/\partial t = 0$ και επομένως η παραπάνω σχέση με αντικατάσταση του h παίρνει τη μορφή:

$$-\frac{\partial R}{\partial t} + v(R, x, t) - u(R, x, t) \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

η οποία αν επιλυθεί ως προς την ακτινική ταχύτητα v και πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη της με $2\pi R$ προκύπτει:

$$2\pi Rv(R, x, t) = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + 2\pi Ru(R, x, t) \frac{\partial R}{\partial x}$$

Λαμβάνοντας υπόψη σε αυτή τη σχέση τον ορισμό της διατομής $A = \pi R^2$, η κινηματική οριακή συνθήκη εκφράζεται από την εξίσωση:

$$2\pi Rv(R, x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-18)$$

2.4.1 Μορφές των εξισώσεων συνέχειας και ορμής με βάση την οριακή συνθήκη

Κατά την ολοκλήρωση, η εξίσωση συνέχειας πήρε τη μορφή της (2-12). Τα πρώτα μέλη των εξισώσεων (2-12) και (2-18) είναι ίσα άρα και τα δεύτερα:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} + u(R, x, t) \frac{\partial A}{\partial x},$$

οπότε η μορφή της εξίσωσης συνέχειας καταλήγει στην τελική μορφή, [Skalak, 1972]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (2-19)$$

Χρησιμοποιώντας την τελική μορφή της εξίσωσης συνέχειας (2-19), η εξίσωση ορμής (2-17) κατά τη x κατεύθυνση για $\beta=1$ και αναπτύσσοντας τις παραγώγους του πρώτου μέλους γίνεται:

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} A + \frac{2\pi R}{\rho} \tau_R$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2-19) με την ταχύτητα η εξίσωση συνέχειας γράφεται:

$$\bar{u} \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial A}{\partial x} = -\bar{u} A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

η οποία αν χρησιμοποιηθεί στην προηγούμενη, η εξίσωση ορμής κατά τη x κατεύθυνση παίρνει τη μορφή:

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{u} A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2A\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} A + \frac{2\pi R}{\rho} \tau_R,$$

η οποία αν διαιρεθεί με τη διατομή $A=\pi R^2$ και γίνουν οι αναγωγές προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης ορμής κατά τη x κατεύθυνση, [Skalak, 1972]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{\rho R} \tau_R = 0 \quad (2-20)$$

2.5 Διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα

Στην εξίσωση ορμής (2-17), η διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα τ_R είναι άγνωστο μέγεθος, όπως η διατομή του κυλινδρικού αγωγού και η πίεση και η ταχύτητα του ρευστού. Όμως, μέσω κατάλληλων θεωριών η διατμητική αυτή τάση σε κυλινδρικούς αγωγούς μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής του αγωγού.

2.5.1 Παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό

Αν θεωρηθεί μη μόνιμη αξονικά συμμετρική ροή σε κυλινδρικό αγωγό, τότε η ροή αυτή είναι διαμορφωμένη με την ακτινική ταχύτητα του ρευστού v να μηδενίζεται, οπότε η εξίσωση διατήρησης της μάζας (2-6) γίνεται $\partial u / \partial x = 0$. Δηλαδή, η μοναδική συνιστώσα ταχύτητας του ρευστού που υφίσταται είναι η u , η οποία παραμένει σταθερή κατά x και εξαρτάται μόνο από το χρόνο t . Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω για παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό με σχεδόν άκαμπτα τοιχώματα, ($A = \pi R^2 \cong \text{const}$), η σχέση (2-20) γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{\rho R} \tau_R = 0,$$

η οποία αν επιλυθεί ως προς τη διατμητική τάση προκύπτει:

$$\tau_R = \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \quad (2-21)$$

Για την ομοιόμορφη παλλόμενη ροή, τόσο η κλίση πίεσης, όσο και η μέση ταχύτητα στη διατομή, εξαρτώνται μόνο από το χρόνο, [Uchida, 1956] και μπορούν να εκφραστούν μέσω αναπτυσμάτων σειρών Fourier. Επιπλέον, η κλίση πίεσης μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός της μέσης ταχύτητας στη διατομή και της χρονικής παραγώγου αυτής, αρκεί να πολλαπλασιαστεί με τους κατάλληλους συντελεστές, οι οποίοι προσδιορίζονται ώστε να είναι ανεξάρτητοι του χρόνου μέσω της ακριβούς λύσης μίας απλής περιοδικής πάλμωσης. Σύμφωνα με τη θεωρία Young και Tsai, [Young & Tsai, 1973], που βασίζεται στη θεωρία Womersley, [Womersley, 1955 & 1957], η κλίση πίεσης είναι:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (2-22)$$

$$\text{όπου: } C_v = \frac{\cos \delta_u}{\sigma_u} \text{ και } C_u = \frac{8}{W^2} \frac{\sin \delta_u}{\sigma_u}$$

$$\sigma_u = \frac{8}{W^2} \sqrt{\left(1 - \frac{2C}{W}\right)^2 + \left(\frac{2D}{W}\right)^2}$$

$$\delta_u = \tan^{-1}\left(\frac{1 - 2C/W}{2D/W}\right)$$

$$W = R_0 \sqrt{\frac{\omega}{v}}$$

οι αδιάστατοι συντελεστές που προσδιορίζονται μέσω της ακριβούς λύσης της απλής περιοδικής πάλμωσης και

ο συντελεστής πλάτους πάλμωσης της ταχύτητας για μηδενική μέση τιμή,

η διαφορά φάσης μεταξύ του κύματος της κλίσης πίεσης με το κύμα της μέσης ταχύτητας, ενώ

ο αδιάστατος αριθμός Womersley με ω την κυκλική συχνότητα της πάλμωσης και R_0 την ακτίνα του αγωγού

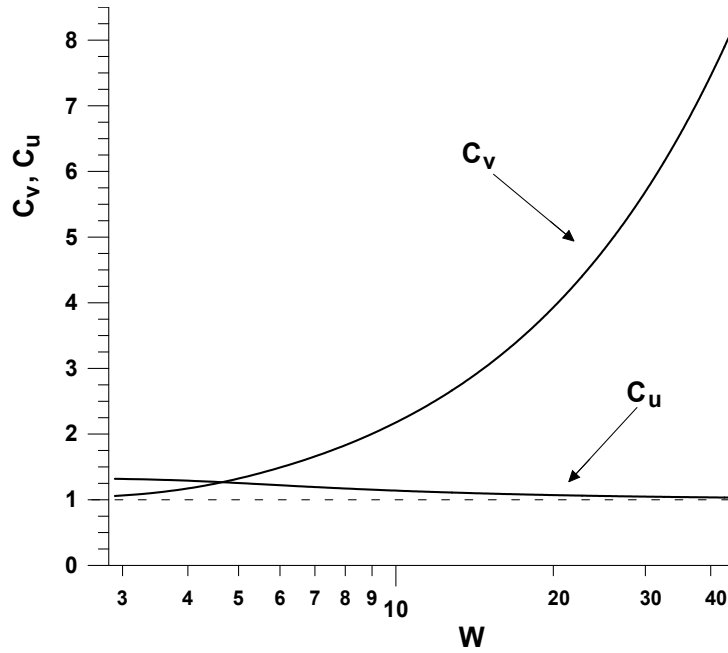
Οι παράμετροι στο συντελεστή πλάτους σ_u και στη διαφορά φάσης δ_u καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$C = \frac{\text{ber}(W)\text{bei}'(W) - \text{bei}(W)\text{ber}'(W)}{\text{ber}^2(W) + \text{bei}^2(W)} \text{ και}$$

$$D = \frac{\text{ber}(W)\text{ber}'(W) - \text{bei}(W)\text{bei}'(W)}{\text{ber}^2(W) + \text{bei}^2(W)},$$

όπου: $\text{ber}(W)$ και $\text{bei}(W)$ είναι οι συναρτήσεις Kelvin και αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης Bessel $J_0(W e^{3\pi i/4})$ πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, ενώ $\text{ber}'(W)$ και $\text{bei}'(W)$ είναι οι αντίστοιχες παράγωγοί τους. Για το μοντέλο που αναπτύσσεται εδώ οι υπολογισμοί αυτών των συναρτήσεων γίνεται, για μικρούς αριθμούς Womersley ($0 \leq W \leq 8$) με πολυωνυμικές προσεγγίσεις, ενώ για μεγαλύτερες τιμές ($W > 8$) μέσω ασυμπτωτικών εκφράσεων [Olver, 1964]. Οι σχέσεις, τόσο των πολυωνυμικών προσεγγίσεων, όσο και των ασυμπτωτικών εκφράσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα Β.

Ο αδιάστατος συντελεστής C_v επειδή συμμετέχει στον όρο του ιξώδους στην εξίσωση (2-20) ονομάζεται συντελεστής ιξώδους και περιγράφει το βαθμό της πτώσης πίεσης που προκαλείται στη ροή λόγω της επίδρασης του ιξώδους του ρευστού. Ο αδιάστατος συντελεστής C_u επειδή συμμετέχει στον όρο της επιτάχυνσης ονομάζεται συντελεστής αδράνειας και καθορίζει σε πιο βαθμό τα αδρανειακά φαινόμενα λόγω της πάλμωσης του ρευστού επηρεάζουν την πτώση πίεσης στη ροή. Παρατηρώντας τις παραπάνω σχέσεις για τους συντελεστές C_v , C_u , είναι προφανές ότι εξαρτώνται μόνο από τον αδιάστατο αριθμό Womersley. Η εξάρτηση αυτή απεικονίζεται στο γράφημα του σχήματος 2-1. Σημειώνεται ότι ο αδιάστατος αριθμός Womersley εκφράζει το λόγο των αδρανειακών προς τις ιξώδεις δυνάμεις πίεσης που αναπτύσσονται κατά την ταλάντωση ενός ρευστού εντός ευθυγράμμου αγωγού.



Σχήμα 2-1. Συντελεστής ιξώδους C_v και αδράνειας C_u συναρτήσει του αδιάστατου αριθμού Womersley W , [Manopoulos et al, 2006].

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2-22) στη (2-21) προκύπτει:

$$\tau_R = -\frac{\rho R}{2} \left(\frac{8\pi\nu}{A} C_v \bar{u} + (C_u - 1) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \quad (2-23)$$

Θεωρώντας σχετικά μικρές παραμορφώσεις του εύκαμπτου τοιχώματος των αγωγών του μοντέλου μπορεί η διατμητική τάση στην εξίσωση ορμής (2-20) να αντικατασταθεί από την (2-23) και να προκύψει:

$$C_u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} = 0 \quad (2-24)$$

όπου για λόγους απλούστερης απεικόνισης $u = \bar{u}$ και $p = \bar{p}$ εννοούνται τα μέσα μεγέθη της ταχύτητας και της πίεσης του ρευστού επί της διατομής.

Από συγκρίσεις της εξίσωσης (2-22) με την ακριβή λύση που προκύπτει για παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό, [Womersley, 1955], προκύπτει ότι για μικρούς αριθμούς Womersley ($W < 3$) η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αν γίνει με τις τιμές $C_v \cong 1$ και $C_u \cong 4/3$. Για $C_v = 1$ ο όρος ιξώδους στην εξίσωση (2-24) είναι ο ίδιος με αυτόν που προκύπτει από τη μόνιμη στρωτή ροή Poiseuille. Συνεπώς, η προσέγγιση του ιξώδους όρου για χαμηλούς αριθμούς Womersley είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που γίνεται και στη μόνιμη ροή. Καθώς όμως ο αριθμός Womersley αυξάνει ($W > 3$) ο συντελεστής ιξώδους C_v αυξάνει σχετικά απότομα με αποτέλεσμα να συμβάλλει στην όλο και μεγαλύτερη επίδραση των δυνάμεων πίεσης λόγω ιξώδους. Παρόλη τη συνεχή αύξηση του συντελεστή C_v με τον αριθμό Womersley ο όρος ιξώδους σταματά να έχει κυρίαρχο ρόλο στη μεταβολή της κλίσης της πίεσης στη σχέση (2-22) για μεγάλους αριθμούς Womersley ($W > 10$). Αυτό συμβαίνει λόγω

των πολύ έντονων αδρανειακών φαινομένων που κυριαρχούν στους υψηλούς αριθμούς Womersley με αποτέλεσμα την ισχυρότερη επίδραση του αδρανειακού όρου στη (2-22). Αντίστοιχα, για μικρούς αριθμούς Womersley, παρόλο που ο συντελεστής C_v λαμβάνει τις πιο μικρές τιμές του, η κλίση πίεσης εξαρτάται κύρια από τον ιξώδη όρο αφού τα αδρανειακά φαινόμενα δεν είναι σημαντικά, [Young & Tsai, 1973].

Συμπερασματικά, μπορεί να αναφερθεί ότι η προσέγγιση της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα μέσω της θεώρησης παλλόμενης ροής σε ευθύγραμμο αγωγό απλά βελτιώνει σε ικανοποιητικό βαθμό την πρόλεξη της ροής σε σχέση με τον αν αυτή γινόταν μέσω της θεώρησης μόνιμης στρωτής ροής Poiseuille. Μαθηματικώς καταλήγει αυτό να επιτυγχάνεται απλά με την εισαγωγή των δύο συντελεστών, ιξώδους C_v και αδράνειας C_u σε ήδη γνωστούς όρους που υπάρχουν στην εξίσωση ορμής για μόνιμη στρωτή ροή Poiseuille. Η θεώρηση αυτή της διατμητικής τάσης για εύκαμπτο αγωγό είναι κοντά στην πραγματικότητα μόνο όταν οι εγκάρσιες παραμορφώσεις του αγωγού είναι σχετικά μικρές, δηλαδή μέχρι 10%. Όταν όμως οι παραμορφώσεις γίνουν έντονες, είτε λόγω εξωτερικής διέγερσης του εύκαμπτου αγωγού, είτε λόγω συρρίκνωσης εξαιτίας κάποιας διαμορφούμενης υποπίεσης, κάποιος επιπλέον όρος πρέπει να εισαχθεί που να ερμηνεύει τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής γύρω από τα έντονα συρρικνούμενα τμήματα του αγωγού. Ιδιαίτερα κατά τη μελέτη αντλητικών φαινομένων, μέσω αλληλεπίδρασης ροής ρευστού και κίνησης σώματος, η αντλητική ικανότητα εξαρτάται πολύ από το βαθμό παραμόρφωσης που υφίσταται ο εύκαμπτος αγωγός επηρεάζοντας τη ροή εντός του, [Bredow, 1968] και [Manopoulos et al, 2001]. Συνεπώς, αναγκαία καθίσταται η μελέτη μίας χρονικά μεταβαλλόμενης στένωσης ενός εύκαμπτου αγωγού που παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο.

2.5.2 Παλλόμενη ροή σε συρρικνούμενο ευθύγραμμο αγωγό

Στην περίπτωση έντονα συρρικνούμενων τμημάτων εύκαμπτου αγωγού, παράγοντες που επιδρούν στην ανάπτυξη της διατμητικής τάσης του ρευστού στο τοίχωμα είναι, εκτός από την τριβή και την αδράνεια, η τύρβη και η αποκόλληση της ροής. Δηλαδή, στη σχέση (2-22) που υπολογίζει την κλίση πίεσης για παλλόμενη ροή σε ευθύγραμμο αγωγό πρέπει να προστεθεί ένας ακόμη όρος, ο οποίος λαμβάνει υπόψη την πτώση πίεσης που προκαλείται στη ροή λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης στένωσης σε τμήμα ενός ευθύγραμμου εύκαμπτου αγωγού συνολικού μήκους L . Για αυτή τη περίπτωση η κλίση πίεσης έχει τη μορφή:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho C_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \quad (2-25)$$

όπου η κλίση πίεσης $\partial p_s / \partial x$ ορίζεται ως η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους, λόγω της συμπίεσης τμήματος dx του εύκαμπτου αγωγού.

Για τον προσδιορισμό αυτού του επιπλέον όρου θεωρείται μη μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού σε συρρικνούμενο τμήμα ενός εύκαμπτου αγωγού που εκτός της περιοχής συμπίεσης τα τοιχώματά του θεωρούνται σχεδόν άκαμπτα, (σχήμα 2-2). Υποθέτοντας ότι η κατεύθυνση της ροής είναι προς τα δεξιά για μία δοσμένη χρονική στιγμή, οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας εφαρμόζονται για τον όγκο ελέγχου του σχήματος 2-2 (διακεκομμένη γραμμή).

Δηλαδή:

Διατήρηση μάζας:

$$\bar{u}_1 A_1 = \bar{u}_2 A_2 = \bar{u}(x)A(x) = Q \Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2 A_2 / A_1 \quad (2-26)$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αντιστοιχούν στην είσοδο και την έξοδο του όγκου ελέγχου αντίστοιχα, ενώ ο δείκτης x σε τυχαία διατομή μεταξύ των x_1, x_2 .

Διατήρηση ορμής, [Τσαγγάρης, 2005]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^R u(x) 2\pi r dr dx + \rho(\beta_2 \bar{u}_2^2 A_2 - \beta_1 \bar{u}_1^2 A_1) = \bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 + K \quad (2-27)$$

όπου K αντιπροσωπεύει τη δύναμη που το τοίχωμα ασκεί στο ρευστό του όγκου ελέγχου και β_1, β_2 είναι οι διορθωτικοί συντελεστές ορμής.

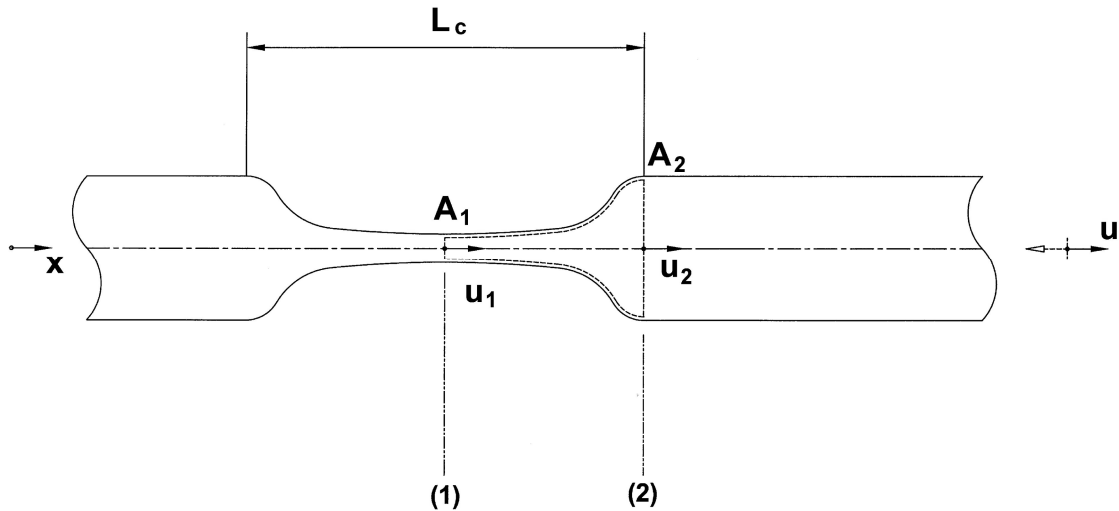
Διατήρηση μηχανικής ενέργειας, [Rath, 1976] και [Rath & Teipel, 1978]:

$$\delta p_s = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{\rho}{2} (\alpha_1 \bar{u}_1^2 - \alpha_2 \bar{u}_2^2) - \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x)}{\partial t} dx \quad (2-28)$$

όπου δp_s είναι η πτώση πίεσης στο αποκλίνον τμήμα της συρρίκνωσης (περιοχή θεώρησης όγκου ελέγχου) και α_1, α_2 είναι οι διορθωτικοί συντελεστές της κινητικής ενέργειας λόγω ανομοιομορφίας της κατανομής της ταχύτητας στη διατομή. Εισάγονται παρόμοια με τους β_1, β_2 , αλλά στην ενεργειακή εξίσωση, για να λαμβάνεται υπόψη το σφάλμα που γίνεται λόγω χρήσης της μέσης ταχύτητας στη διατομή αντί της πραγματικής κατανομής της ταχύτητας. Δηλαδή, ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας α που ορίζεται από την παρακάτω σχέση, [Τσαγγάρης, 2005], εκτιμά τη διαφορά μεταξύ του κύβου της ταχύτητας με τον κύβο της μέσης τιμής της ως εξής:

$$\alpha \triangleq \frac{1}{\bar{u}^3 A} \int_0^R u^3 2\pi r dr \Rightarrow \int_0^R u^3 2\pi r dr = \alpha \bar{u}^3 A \quad (2-29)$$

Οι τιμές που μπορεί να πάρει ο διορθωτικός συντελεστής κινητικής ενέργειας α είναι 2 για στρωτή διαμορφωμένη ροή, ενώ όταν η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη, όπως συμβαίνει στη τυρβώδη ροή, έχει τιμή $\alpha=1$.



Σχήμα 2-2. Όγκος ελέγχου (διακεκομμένη γραμμή) σε παλλόμενη ροή συρρικνούμενου ευθύγραμμου αγωγού, [Manopoulos et al, 2006].

Η δύναμη K αποτελείται από δύο τμήματα. Τη δύναμη λόγω συνεκτικών διατμητικών τάσεων και τη δύναμη λόγω πιέσεων, με την οποία ενεργεί το στερεό τοίχωμα στην επιφάνεια A_2-A_1 . Με δεδομένο το γεγονός ότι η ροή αποκολλάται στο αποκλίνον τμήμα συρρίκνωσης οι δυνάμεις λόγω διατμητικών τάσεων ελαχιστοποιούνται. Επομένως, από κάποια τιμή του λόγου $A_2/A_1 > 1$ και πάνω μπορεί να αμεληθεί η δύναμη λόγω διατμητικών τάσεων, οπότε η μόνη απομένουσα δύναμη είναι η δύναμη λόγω πίεσης στην επιφάνεια A_2-A_1 . Δηλαδή:

$$K \cong \bar{p}_1 (A_2 - A_1) \quad (2-30)$$

η οποία ισχύει για απότομες διευρύνσεις αγωγών.

Επειδή η συνάρτηση της επιτάχυνσης του ρευστού στο χώρο από τη θέση (1) έως τη θέση (2) δεν είναι γνωστή, προσεγγίζεται από τη μέση τιμή των επιταχύνσεων του ρευστού στα άκρα του όγκου ελέγχου x_1 και x_2 . Δηλαδή, η επιτάχυνση στο ολοκλήρωμα της σχέσης (2-28) μπορεί να προσεγγισθεί από τη σχέση, [Rath, 1976]:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} \right) \quad (2-31)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-30) στην εξίσωση διατήρησης της ορμής (2-27) και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της μέσης ταχύτητας στη διατομή προκύπτει:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A(x) \bar{u}(x) dx + \rho (\beta_2 \bar{u}_2^2 A_2 - \beta_1 \bar{u}_1^2 A_1) = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) A_2 \quad (2-32)$$

ενώ η εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, χρησιμοποιώντας την (2-31) γίνεται:

$$\delta p_s = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{\rho}{2}(\alpha_1 \bar{u}_1^2 - \alpha_2 \bar{u}_2^2) - \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} \right) dx \quad (2-33)$$

Στην εξίσωση (2-32) το γινόμενο $A(x)\bar{u}(x)$ εκφράζει την παροχή του ρευστού που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο του αποκλίνοντος τμήματος της συρρίκνωσης και η μέση χρονικά τιμή της είναι ανεξάρτητη του x . Αν ληφθεί υπόψη και η εξίσωση διατήρησης της μάζας (2-26), τότε η εξίσωση διατήρησης ορμής (2-32) παίρνει τη μορφή:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} (x_2 - x_1) + \rho(\beta_2 - \beta_1 \frac{A_2}{A_1}) \bar{u}_2^2 = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \quad (2-34)$$

Αντίστοιχα η εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας με χρήση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας (2-26) λαμβάνει τη μορφή:

$$\delta p_s = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{\rho}{2}(\alpha_1 \frac{A_2^2}{A_1^2} - \alpha_2) \bar{u}_2^2 - \rho \frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} + 1 \right) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} (x_2 - x_1) \quad (2-35)$$

Αν αντικατασταθεί η διαφορά πίεσης εκατέρωθεν του αποκλίνοντος τμήματος της συρρίκνωσης από την εξίσωση διατήρησης ορμής (2-34) στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (2-35) προκύπτει:

$$\delta p_s = \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \frac{L_c}{2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left(2\beta_2 - 2\beta_1 \frac{A_2}{A_1} + \alpha_1 \frac{A_2^2}{A_1^2} - \alpha_2 \right) \bar{u}_2^2 \quad (2-36)$$

όπου L_c είναι το μήκος του συρρικνούμενου τμήματος του εύκαμπτου αγωγού.

Σύμφωνα με πειράματα, [Bredow, 1968] και [Manopoulos, 2001], αλλά και από αριθμητικές μελέτες, [Rath, 1976], [Rath & Teipel, 1978] και [Jung & Peskin, 2001], προκύπτει ότι η αντλητική ικανότητα μέσα από διεγερόμενους εύκαμπτους αγωγούς είναι πολύ μικρή για μικρούς αριθμούς Womersley (χαμηλές συχνότητες). Δηλαδή, σημαντική άντληση παρατηρείται σε σχετικά μεγάλους αριθμούς Womersley (υψηλές συχνότητες) όπου οι κατανομές των ταχυτήτων είναι συνήθως ομοιόμορφες, [Uchida, 1956]. Επειδή με την ανάπτυξη του συγκεκριμένου μοντέλου μελετούνται αντλητικά φαινόμενα, τα οποία όπως αναφέρθηκε απαντώνται κυρίως σε υψηλές σχετικά συχνότητες με ομοιόμορφες κατανομές, όλοι οι διορθωτικοί συντελεστές ορμής και κινητικής ενέργειας μπορούν να ληφθούν ίσοι με τη μονάδα. Λόγω αυτής της προσέγγισης στο μη γραμμικό όρο της εξίσωσης (2-36), εισάγεται ο διορθωτικός συντελεστής K_t , ο οποίος προσδιορίζεται μέσω πειραματικής τεκμηρίωσης, που έχει γίνει με μελέτη της πτώσης πίεσης εκατέρωθεν τεχνητής εμφυτεύσιμης στένωσης σε μηριαίες αρτηρίες σκύλων, [Young et al, 1975].

Ο συρρικνούμενος ευθύγραμμος αγωγός (σχήμα 2-2) που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της εξίσωσης (2-36) θεωρείται ότι έχει σχεδόν άκαμπτα τοιχώματα εκτός της περιοχής συμπίεσης. Με βάση αυτή τη θεώρηση η διατομή στην έξοδο της συρρίκνωσης A_2 είναι σχεδόν ίση με την A που έχει ο αγωγός εκτός της συρρίκνωσης, ενώ η διατομή στο μέσον της συρρίκνωσης A_1 είναι η ελάχιστη που απαντάται καθ' όλο το μήκος του συρρικνούμενου αγωγού. Επιπλέον, λόγω της

κοινής διατομής στην έξοδο της συρρίκνωσης με τον υπόλοιπο αγωγό, μέσω της εξίσωσης συνέχειας προκύπτει ότι:

$$\bar{u}_2 A_2 = \bar{u} A \stackrel{(A_2 \cong A)}{\Rightarrow} \bar{u}_2 = \bar{u},$$

όπου A είναι η διατομή του αγωγού σε τυχαία θέση εκτός της συρρίκνωσης και \bar{u} είναι η μέση ταχύτητα σε αυτή τη διατομή.

Στον συρρικνούμενο αγωγό του σχήματος 2-2 έχει υποθεθεί ότι η ροή του ρευστού είναι προς τα δεξιά για κάποια δοσμένη χρονική στιγμή. Λόγω της πάλμωσης ενδέχεται η ροή να αναστρέφει τη φορά της και να κατευθύνεται προς τα αριστερά κάποια άλλη χρονική στιγμή. Όταν εφαρμόζεται η εξίσωση της μηχανικής ενέργειας το πρόσημο του όρου που περιέχει το τετράγωνο της ταχύτητας πρέπει να αλλάζει όταν αντιστρέφεται η ροή, ώστε να εμφανίζεται πάντα πτώση πίεσης κατά την κατεύθυνση της ροής, [Rath & Teipel, 1978], [Young & Tsai, 1973] και [Stergiopoulos et al, 1992]. Κατά συνέπεια το τετράγωνο της μέσης ταχύτητας \bar{u}^2 πρέπει να αντικατασταθεί με το γινόμενο $\bar{u}|\bar{u}|$.

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, η μορφή που μπορεί να πάρει η εξίσωση (2-36) έχει ως εξής:

$$\delta p_s = \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right) \frac{L_c}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} K_t \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right)^2 \bar{u}|\bar{u}| \quad (2-37)$$

όπου $A_{\min}=A_1$, είναι η ελάχιστη διατομή στο μέσον της συρρίκνωσης.

Ο συντελεστής K_t εξαρτάται από το πλάτος συμπίεσης του εύκαμπτου αγωγού, το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$A_b \triangleq \frac{A_0 - A_{\min}}{A_0} \quad (2-38)$$

και κυμαίνεται στο διάστημα $0 \leq A_b \leq 1$, ενώ A_0 είναι η απαραμόρφωτη διατομή του εύκαμπτου αγωγού.

Χρησιμοποιώντας τις πειραματικές τιμές του διορθωτικού συντελεστή K_t από τη βιβλιογραφία, [Young et al, 1975], για τρεις τιμές του πλάτους συμπίεσης A_b (0.6, 0.75, και 0.9), προκύπτει η εξάρτηση $K_t=K_t(A_b)$ μέσω πολυωνυμικής προσαρμογής της μορφής:

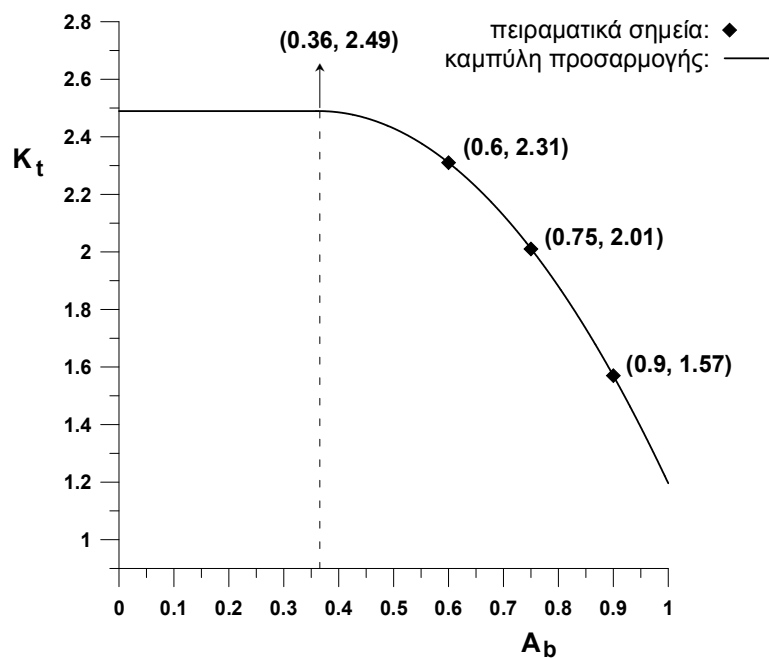
$$K_t = \kappa A_b^2 + \lambda A_b + \eta \quad (2-39)$$

όπου $\kappa=-3.182$, $\lambda=+2.306$ και $\eta=+2.072$. Επειδή τα πειραματικά σημεία είναι μόνο τρία και αναφέρονται σε πλάτος συμπίεσης πάνω από 0.5 περίπου, η παραπάνω πολυωνυμική προσαρμογή δε μπορεί να αποδώσει τη συνάρτηση $K_t=K_t(A_b)$ για χαμηλά πλάτη συμπίεσης. Έτσι, η προσαρμογή γίνεται αποδεκτή μέχρι του σημείου που το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού παρουσιάζει μέγιστο, ώστε να μην αλλάζει η μονοτονία της συναρτήσεως $K_t=K_t(A_b)$. Συνεπώς, η σχέση προσαρμογής (2-39) ισχύει για πλάτος συμπίεσης $A_b = -\lambda/2\kappa \cong 0.36$ και πάνω. Για το διάστημα $0 \leq A_b \leq 0.36$, όπου το πλάτος συμπίεσης είναι μικρό, ο λόγος $A/A_{\min} \cong 1$ και επομένως η εκλογή του συντελεστή K_t δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα στον σχεδόν μηδενικό μη

γραμμικό όρο της εξίσωσης (2-37). Έτσι, για το διάστημα $0 \leq A_b \leq 0.36$ η συνάρτηση $K_t = K_t(A_b)$ θεωρείται σταθερή και εκλέγεται να έχει τιμή ίση με τη μέγιστη της συνάρτησης προσαρμογής, ($K_{t \max} = -\lambda^2/4\kappa + \eta = 2.49$), ώστε να εξασφαλίζεται και η μαθηματική της συνέχεια, (σχήμα 2-3).

Για ολόκληρο το διάστημα μεταβολής του πλάτους συμπίεσης A_b ο διορθωτικός συντελεστής λόγω τύρβης και αποκόλλησης παίρνει τιμές σύμφωνα με τη σχέση:

$$K_t = \begin{cases} -\frac{\lambda^2}{4\kappa} + \eta & \left(0 \leq A_b \leq -\frac{\lambda}{2\kappa} \right) \\ \kappa A_b^2 + \lambda A_b + \eta & \left(-\frac{\lambda}{2\kappa} \leq A_b \leq 1 \right) \end{cases} \quad (2-40)$$



Σχήμα 2-3. Καμπύλη προσαρμογής στα πειραματικά δεδομένα K_t - A_b για την εξαγωγή της συνάρτησης $K_t = K_t(A_b)$, [Manopoulos et al, 2006].

Σύμφωνα με την εξίσωση (2-40) και το αντίστοιχο διάγραμμα του σχήματος 2-3 παρατηρείται ότι ο συντελεστής K_t λαμβάνει μη μηδενικές τιμές για ολόκληρο το διάστημα μεταβολής του A_b από 0 έως 1, ακόμη και στην περίπτωση της σχεδόν πλήρους έμφραξης του αγωγού όπου η A_{\min} τείνει στο μηδέν. Κατά αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται πάντα η επιρροή των υδραυλικών απωλειών λόγω αποκόλλησης της ροής στη συρρίκνωση, οι οποίες είναι κυρίαρχες σε σχέση με τις απώλειες λόγω ιξώδους και αδράνειας στην πτώση πίεση αγωγών με μεγάλο πλάτος συμπίεσης, [Young, 1979].

Η συρρίκνωση επηρεάζει το ροϊκό πεδίο καθ' όλο το μήκος L του αγωγού, προκαλώντας μία πτώση πίεσης της οποίας η μέση τιμή κατά μήκος είναι $\Delta p_s/L$. Θεωρείται ότι για το στοιχειώδες τμήμα ενός εύκαμπτου αγωγού dx η κλίση πίεσης λόγω της συμπίεσης $\partial p_s/\partial x$ είναι περίπου ίση με τη μέση τιμή της πτώσης πίεσης λόγω συρρίκνωσης όπως αναπτύχθηκε παραπάνω. Έτσι, χρησιμοποιώντας αυτή τη

θεώρηση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2-37) η κλίση πίεσης λόγω συμπίεσης του εύκαμπτου αγωγού δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial p_s}{\partial x} \cong \frac{\delta p_s}{L} = \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right) \frac{L_c}{2L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2L} K_t \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right)^2 \bar{u} |\bar{u}| \quad (2-41)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-41) στην εξίσωση (2-25) η κλίση πίεσης για παλλόμενη ροή σε συρρικνούμενο ευθύγραμμο αγωγό έχει τη μορφή:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{8\pi\mu}{A} C_v \bar{u} + \rho \left[C_u + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2L} K_t \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right)^2 \bar{u} |\bar{u}| \quad (2-42)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2-42) στη (2-21) προκύπτει η διατμητική τάση του τοιχώματος:

$$\tau_R = -\frac{\rho R}{2} \left\{ \frac{8\pi\nu}{A} C_v \bar{u} + \left[C_u - 1 + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2L} K_t \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right)^2 \bar{u} |\bar{u}| \right\} \quad (2-43)$$

Θεωρώντας εκτός της περιοχής συμπίεσης σχετικά μικρές τις παραμορφώσεις του εύκαμπτου τοιχώματος των αγωγών του μοντέλου μπορεί η διατμητική τάση στην εξίσωση ορμής (2-20) να αντικατασταθεί από την (2-43) και να προκύψει:

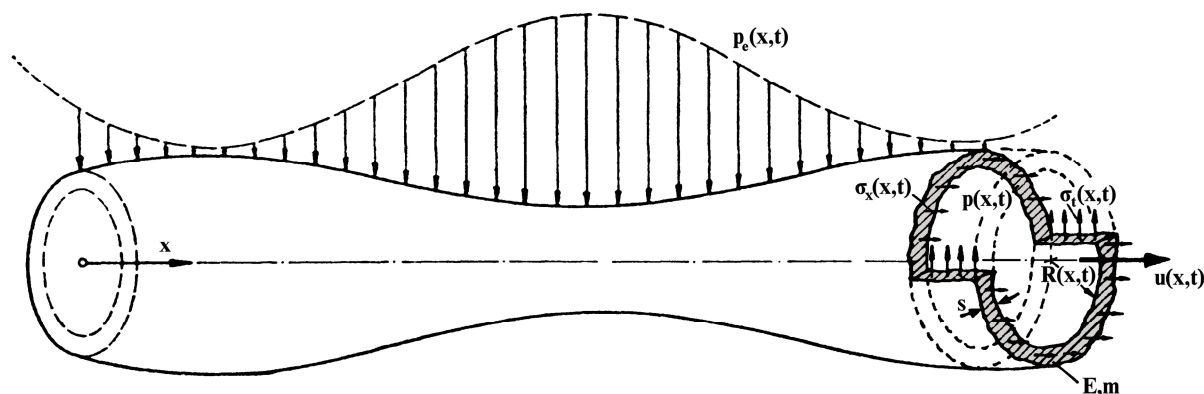
$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} + \frac{K_t}{2L} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}}\right)^2 u |u| = 0 \quad (2-44)$$

όπου για λόγους απλούστερης απεικόνισης $u = \bar{u}$ και $p = \bar{p}$ εννοούνται τα μέσα μεγέθη της ταχύτητας και της πίεσης του ρευστού επί της διατομής και A_{\min} είναι η ελάχιστη τιμή της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε μία δοσμένη χρονική στιγμή. Όταν $A_{\min} = A$ τότε δεν υφίσταται καμία συρρίκνωση στον εύκαμπτο αγωγό και η εξίσωση (2-44) παίρνει ακριβώς τη μορφή της (2-24) που ισχύει για παλλόμενη ροή ευθύγραμμου αγωγού με σχεδόν άκαμπτα τοιχώματα. Είναι προφανές ότι το πλάτος συμπίεσης A_b καθορίζει, μέσω της εξίσωσης ορισμού του, ποια είναι η τιμή της ελάχιστης διατομής A_{\min} στον εύκαμπτο αγωγό, η οποία είναι υπεύθυνη για το βαθμό συμμετοχής των όρων τύρβης και αποκόλλησης στην εξίσωση ορμής (2-44). Όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος συμπίεσης A_b , τόσο μικρότερη είναι η ελάχιστη διατομή A_{\min} του συρρικνούμενου αγωγού με αποτέλεσμα την αυξημένη επιρροή των όρων τύρβης και αποκόλλησης στην εξίσωση (2-44). Συγκεκριμένα ο μη γραμμικός όρος του συντελεστή K_t κατέχει το πιο σημαντικό ρόλο, καθότι πολλαπλασιάζεται και με το τετράγωνο της ταχύτητας.

2.6 Διαμόρφωση πίεσης με βάση την εγκάρσια διατομή εύκαμπτου αγωγού

Παρατηρώντας τις εξισώσεις ορμής (2-24) ή (2-44) και συνέχειας (2-19) διαπιστώνεται ότι έχει επιτευχθεί περιορισμός των αγνώστων μεγεθών σε τρία και ανεξαρτησία αυτών από τη συντεταγμένη r . Δηλαδή, τα μεγέθη που είναι άγνωστα προς προσδιορισμό είναι η μέση στη διατομή ταχύτητα του ρευστού $u(x, t)$, η μέση στη διατομή πίεση του ρευστού $p(x, t)$ και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού $A(x, t)$. Για τους τρεις αυτούς αγνώστους αναζητείται μία επιπλέον εξίσωση πέραν αυτών της συνέχειας και της ορμής, ώστε όλες μαζί να αποτελούν σύστημα εξισώσεων (3x3), το οποίο αν επιλυθεί να προκύπτουν οι τρεις ανωτέρω άγνωστες συναρτήσεις για διάφορες περιπτώσεις αρχικών και οριακών συνθηκών.

Η επιπλέον σχέση μπορεί να είναι μία καταστατική εξίσωση μεταξύ της μεταβλητής διατομής του εύκαμπτου αγωγού και της εσωτερικής διαμορφούμενης πίεσης του ρευστού. Για την κατάσταση αυτής της καταστατικής εξίσωσης θεωρείται ο λεπτότοιχος αγωγός με αξονική συμμετρία του σχήματος 2-4. Λεπτότοιχος θεωρείται ένας αγωγός όταν το πάχος του s είναι το 10% της ακτίνας του R_0 , [Κερμανίδης, 1988]. Σ' αυτήν την περίπτωση το τοίχωμα του αγωγού θεωρείται ως μεμβράνη, η οποία αν στο εσωτερικό του αγωγού επικρατεί πίεση $p(x, t)$ και στο εξωτερικό του η πίεση περιβάλλοντος $p_e(x, t)$, τότε καταπονείται μόνο με εφελκυστικές ή θλιπτικές ορθές τάσεις εφαπτομενικές στο επίπεδό της, οι οποίες θεωρούνται σταθερές κατά το πάχος επειδή αυτό είναι σχετικά μικρό.



Σχήμα 2-4. Εντατική κατάσταση στο τοίχωμα λεπτού ελαστικού σωλήνα κατόπιν επιβολής διατοχωματικής πίεσης, [Rath, 1978].

Σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία ελαστικότητας που ισχύει για λεπτά ελαστικά τοιχώματα κυλινδρικών αγωγών, όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 2-4, οι περιφερειακές και διαμήκειες τάσεις, σ_t και σ_x αντίστοιχα, σχετίζονται με τις εγκάρσιες και αξονικές παραμορφώσεις, ε_t και ε_x αντίστοιχα, μέσω των ακόλουθων εξισώσεων του νόμου του Hooke, [Timoshenko & Goodier, 1970]:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \frac{m\sigma_x}{E} \quad (2-45)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{m\sigma_t}{E} \quad (2-46)$$

όπου m είναι ο λόγος Poisson και E το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) για το υλικό του τοιχώματος του ελαστικού αγωγού.

Αν υποθεθεί ότι ο αγωγός δεν επιμηκύνεται η αξονική παραμόρφωση είναι μηδέν και συνεπώς η εξίσωση (2-46) δίνει τη διαμήκη τάση $\sigma_x = m\sigma_t$, η οποία αν αντικατασταθεί στη (2-45) η εγκάρσια παραμόρφωση γίνεται:

$$\varepsilon_t = \frac{(1 - m^2)\sigma_t}{E} \quad (2-47)$$

Αν αφαιρεθεί ένα ημικυλινδρικό τμήμα του ελαστικού αγωγού του σχήματος 2-4 και θεωρηθεί η κατακόρυφη ισορροπία του, προκύπτει η περιφερειακή τάση σ_t συναρτήσει της διατοχωματικής πίεσης $p - p_e$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_t = \frac{R}{s}(p - p_e) \quad (2-48)$$

όπου $R=R(x, t)$ είναι η ακτίνα του εύκαμπτου αγωγού.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2-47) την περιφερειακή τάση από την εξίσωση (2-48) και την εγκάρσια παραμόρφωση από τον ορισμό της προκύπτει:

$$\varepsilon_t \hat{=} \frac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{(1 - m^2)R}{Es}(p - p_e),$$

η οποία αν επιλυθεί ως προς την πίεση του ρευστού, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της διατομής $A=\pi R^2$, προκύπτει η ζητούμενη καταστατική εξίσωση μεταξύ της εσωτερικής διαμορφούμενης πίεσης του ρευστού και της μεταβλητής διατομής του εύκαμπτου αγωγού:

$$p = p_e + \frac{Es}{R_0(1 - m^2)} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (2-49)$$

Πιο απλοποιημένη μορφή της παραπάνω εξίσωσης επιτυγχάνεται με χρήση της παλμικής ταχύτητας κύματος c_0 (pulse wave velocity), η οποία εκφράζει την ταχύτητα διάδοσης του κύματος πίεσης σε εύκαμπτο αγωγό συναρτήσει των χαρακτηριστικών των υλικών του ρευστού και του τοιχώματος του αγωγού, καθώς και της γεωμετρίας του εύκαμπτου αγωγού. Η ταχύτητα αυτή εξάγεται μέσω της εξίσωσης Moens-Korteweg, [Moens, 1878] και [Korteweg, 1878] και περιγράφεται από τη σχέση:

$$c_0 = \sqrt{\frac{Es}{2\rho R_0(1 - m^2)}} \quad (2-50)$$

Όταν λαμβάνεται υπόψη και ο λόγος Poisson m , [Bergel, 1961] και [Rath, 1978].

Συνδυάζοντας κατάλληλα την εξίσωση (2-49) και (2-50) προκύπτει:

$$p = p_e + 2\rho c_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (2-51)$$

Σημειώνεται ότι η παλμική ταχύτητα του κύματος c_0 συνδέεται άμεσα με την ειδική ενδοτικότητα του εύκαμπτου αγωγού, [Bramwell & Hill, 1922] και [Horeman & Noordergraaf, 1958], η οποία προσδιορίζεται από τη μεταβολή του όγκου dV του εύκαμπτου αγωγού που συμβαίνει με αύξηση dp της επιβληθείσας πίεσης σύμφωνα με τη σχέση:

$$k_c \triangleq \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

όπου V ο όγκος ενός τμήματος του εύκαμπτου αγωγού. Έχει υποτεθεί ανωτέρω ότι η μεταβολή του όγκου του εύκαμπτου αγωγού προκαλείται μόνο από τη διόγκωση ή συρρίκνωσή του χωρίς να υφίσταται επιμήκυνση. Σ' αυτήν την περίπτωση η μεταβολή του όγκου εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή της διατομής dA του εύκαμπτου αγωγού, οπότε μπορεί να οριστεί η ειδική ενδοτικότητα της εγκάρσιας διατομής ενός εύκαμπτου αγωγού ως εξής, [Noordergraaf & Horeman, 1958]:

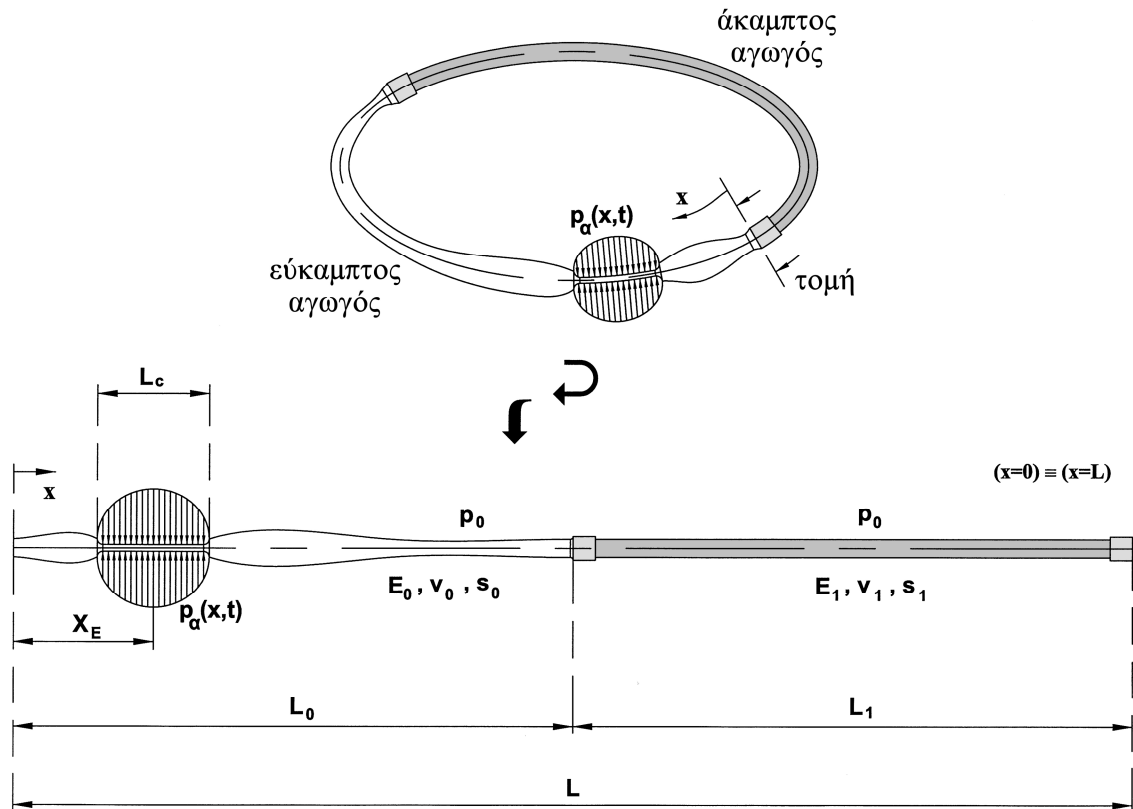
$$k_c \triangleq \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{\rho c_0^2} \quad (2-52)$$

Η καταστατική εξίσωση (2-51) μαζί με τις εξισώσεις ορμής (2-24) ή (2-44) και συνέχειας (2-19) αποτελούν υπερβολικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, την ταχύτητα του ρευστού $u=u(x, t)$, την πίεση του ρευστού $p=p(x, t)$ και την εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού $A=A(x, t)$.

2.7 Θεωρητικό-μαθηματικό μοντέλο

Το θεωρητικό υδραυλικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες απαρτίζεται από δύο ελαστικούς αγωγούς διαφορετικών μέτρων ελαστικότητας, έναν εύκαμπτο και έναν άκαμπτο, οι οποίοι σχηματίζουν κλειστό κύκλωμα (σχήμα 2-5). Οι αγωγοί είναι πληρωμένοι με ασυμπίεστο ρευστό και περιοδική δύναμη δρα στον εύκαμπτο αγωγό προκαλώντας την συμπίεση και αποσυμπίεσή του.

Η μαθηματική μοντελοποίηση βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής, όπως περιγράφηκαν προηγουμένως, υποθέτοντας αξονοσυμμετρική ροή ρευστού σταθερής πυκνότητας, θερμοκρασίας και ιξώδους. Ειδικότερα οι δυνάμεις λόγω καμπύλωσης του κυκλώματος έχουν αμεληθεί, οπότε τα δύο τμήματα του κυκλώματος (εύκαμπτο και άκαμπτο) περιγράφονται ως ευθύγραμμοι αγωγοί κυκλικής εγκάρσιας διατομής. Το ένα τμήμα του κυκλώματος είναι σχεδόν άκαμπτο και το άλλο εύκαμπτο. Οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν αμεληθεί, αφού κάθε σημείο του κυκλώματος υποτίθεται ότι βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τόσο ο εύκαμπτος, όσο και ο άκαμπτος αγωγός δεν υφίστανται αξονική παραμόρφωση κατά τον διαμήκη άξονά τους.



Σχήμα 2-5. Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου υδραυλικού κυκλώματος με την περιοχή διέγερσης για την περιγραφή του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες, [Manopoulos et al, 2006].

Η μονοδιάστατη προσέγγιση που γίνεται για το συγκεκριμένο μοντέλο βασίζεται, τόσο στην ολοκλήρωση των εξισώσεων συνέχειας και ορμής επί της εγκάρσιας διατομής των αγωγών του κυκλώματος, όσο και στη θεώρηση επίπεδης εντατικής κατάστασης λεπτότοιχου κυλινδρικού αγωγού. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0 \quad (2-19)$$

$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} + \frac{K_t}{2L} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right)^2 u|u| = 0 \quad (2-44)$$

$$p = p_e + \frac{Es}{R_0(1-m^2)} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (2-49)$$

Έτσι διαμορφώνεται ένα υπερβολικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, δηλαδή της μέσης στη διατομή ταχύτητας του ρευστού $u=u(x,t)$, της μέσης στη διατομή πίεσης του ρευστού $p=p(x,t)$ και της εγκάρσια διατομής του εύκαμπτου αγωγού $A=A(x,t)$. Επιλύοντας το σύστημα αυτό προκύπτουν οι τρεις ανωτέρω αγνώστες συναρτήσεις για διάφορες περιπτώσεις αρχικών και οριακών συνθηκών.

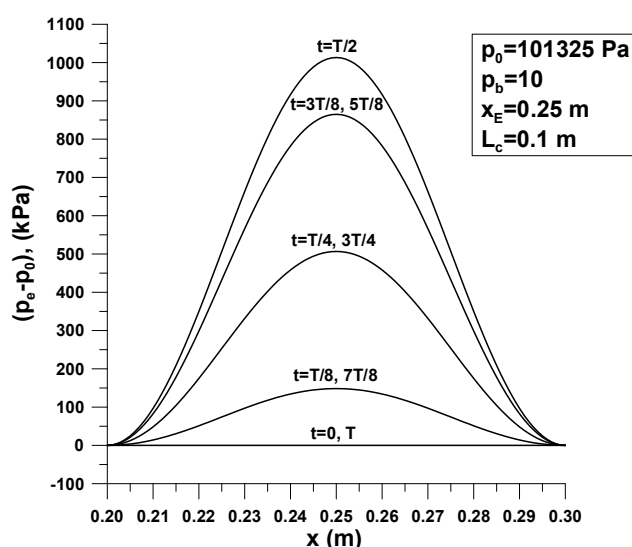
2.8 Αρχικές και Οριακές Συνθήκες

Επιλέγεται αρχικά, η εσωτερική και εξωτερική πίεση στο κλειστό κύκλωμα να είναι όση του περιβάλλοντος p_0 . Δηλαδή, $p(x,0) = p_e(x,0) = p_0 = \text{σταθ}$. Επίσης, για $t=0$ δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση σε οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος και η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική. Δηλαδή, $A(x,0)=A_0=A_1=\text{const}$ και $u(x,0) = 0$. Όταν η διέγερση λαμβάνει χώρα η εξωτερική πίεση είναι $p_e=p_0$ εκτός της περιοχής διέγερσης, στην οποία δίνεται από τη σχέση:

$$p_e = p_\alpha(x, t) = p_0 + p_b p_0 \sin^2 \left(\pi \frac{2x - 2x_E + L_c}{2L_c} \right) \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} t \right) \quad (2-53)$$

όπου το x_E ορίζει το κέντρο της περιοχής διέγερσης (θέση διέγερσης), το L_c καθορίζει το μήκος της διέγερσης και ω είναι η κυκλική συχνότητα διέγερσης ($\omega=2\pi f$).

Είναι σημαντικό να τονισθεί σε αυτό το σημείο ότι συγκεκριμένη τιμή του παράγοντα p_b του πλάτους της εξωτερικής πίεσης διέγερσης, δεν προκαλεί μία μόνο σταθερή τιμή του πλάτους διέγερσης A_b όταν η συχνότητα διέγερσης f μεταβάλλεται. Υπάρχει διακύμανση του πλάτους διέγερσης A_b , καθώς η συχνότητα αυξάνει λόγω της μεταβολής της εσωτερικής πίεσης του ρευστού και συνεπώς της διατοιχωματικής πίεσης. Ενδιαφέρει όμως η διατήρηση του πλάτους διέγερσης A_b σε σταθερό επίπεδο καθώς η συχνότητα f αυξάνει, ώστε τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα και να μπορούν οι καμπύλες μεταβολής των μεγεθών με τη συχνότητα να αναφέρονται στο ίδιο πλάτος διέγερσης A_b . Για αυτό το λόγο ο παράγοντας p_b καθορίζεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας για δεδομένη συχνότητα διέγερσης f και δεδομένο πλάτος διέγερσης A_b . Η επαναληπτική διαδικασία σταματά όταν το πλάτος διέγερσης A_b λαμβάνει την προεπιλεγμένη τιμή με σφάλμα $\pm 5 \times 10^{-4}$. Η τυπική μεταβολή της εφαρμοζόμενης εξωτερικής πίεσης p_e στην περιοχή της διέγερσης απεικονίζεται στο σχήμα 2-6 για 9 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο με βάση την εξίσωση (2-53). Αυτή η εξίσωση έχει επιλεγεί με τρόπο ώστε η εφαρμοζόμενη εξωτερική πίεση στη διέγερση να είναι περιοδική και πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την πίεση περιβάλλοντος ($p_e \geq p_0$). Η μεταβολή στο χώρο είναι κατά τέτοιο τρόπο ώστε στα άκρα της διέγερσης να ισχύει η συνέχεια για τη συνάρτηση $p_e=p_\alpha(x,t)$. Δηλαδή: $p_\alpha(x_E-L_c/2,t)=p_\alpha(x_E+L_c/2,t)=p_0$.



Σχήμα 2-6. Χωρικές μεταβολές για 9 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μία περίοδο της διατοιχωματικής πίεσης στην περιοχή της διέγερσης όταν η εσωτερική πίεση διατηρείται σταθερή ίση με p_0 , [Manopoulos et al, 2006].

Η χρήση μεταβαλλόμενης εξωτερικής πίεσης $p_a(x,t)$ στη θέση της διέγερσης είναι ένας έμμεσος τρόπος επιβολής της οριακής συνθήκης της διέγερσης του εύκαμπτου αγωγού χωρίς να γίνεται παρεμβολή στην προς επίλυση συνάρτηση $A(x,t)$. Η συνάρτηση της εγκάρσιας διατομής σε αυτό το σημείο διαμορφώνεται μέσω του υπολογιστικού πλέγματος όπως οι ρευστομηχανικές εξισώσεις καθορίζουν. Συνεπώς, τυχούσες έντονες μεταβολές της εσωτερικής πίεσης του ρευστού $p(x,t)$ επιτρέπονται να ρυθμίζουν μαζί με την επιβολή της εξωτερικής πίεσης $p_a(x,t)$, τη γεωμετρία του εύκαμπτου αγωγού $A(x,t)$ στο σημείο της διέγερσης, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην πραγματικότητα.

Τέλος, επειδή η αρχή ($x=0$) και το τέλος ($x=L$) του κυκλώματος ταυτίζονται εφαρμόζονται περιοδικές οριακές συνθήκες για τα υπολογιζόμενα μεγέθη. Δηλαδή: $A(0,t) = A(L,t)$, $p(0,t) = p(L,t)$ και $u(0,t) = u(L,t)$.

2.9 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Για την απλοποίηση του παραπάνω συστήματος ως προς τις παραμέτρους γίνεται αδιαστατοποίηση των εξισώσεών του, ορίζοντας τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη και αριθμούς:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{tc_0}{L}, & Re &= \frac{c_0 R_0}{\nu}, & p^* &= \frac{p}{\rho c_0^2}, \\ x^* &= \frac{x}{L}, & \delta &= \frac{R_0}{L}, & u^* &= \frac{u}{c_0}, \\ A^* &= \frac{A}{A_0}, & Str &= \frac{\omega L}{c_0}, & M &= \frac{c_0}{c_1}. \end{aligned}$$

όπου ο δείκτης (0) αντιστοιχεί στα μεγέθη που αναφέρονται στον εύκαμπτο αγωγό και ο δείκτης (1) αντιστοιχεί σε αυτά που αναφέρονται στον άκαμπτο. Επίσης, c_0 ή c_1 είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στα τοιχώματα του εκάστοτε αγωγού αντίστοιχα, L είναι το συνολικό μήκος του κλειστού κυκλώματος, $A_0 = \pi R_0^2$ είναι η αρχική διατομή του εύκαμπτου αγωγού πριν υποστεί οποιαδήποτε συμπίεση και ρ , ν η πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Οι αδιάστατοι αριθμοί Re , Str και M ονομάζονται Reynolds, Strouhal και Mach αντίστοιχα. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η εισαγωγή της χαρακτηριστικής ταχύτητας του κύματος c_0 , αντί κάποιας χαρακτηριστικής ταχύτητας του ρευστού.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αδιάστατες παράμετρους οι παραπάνω εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(A^* u^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (2-54)$$

$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A^*}{A_{\min}^*}\right) \frac{L_c^*}{4} \right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{(u^*)^2}{2} + p^* \right) + \frac{8C_v u^*}{Re \delta A^*} + \frac{K_t}{2} \left(1 - \frac{A^*}{A_{\min}^*}\right)^2 u^* |u^*| = 0 \quad (2-55)$$

$$p^* = \begin{cases} p_e^* + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^*}} \right), & (0 \leq x^* \leq L_0^*) \\ p_e^* + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{A^*}} \right), & (L_0^* \leq x^* \leq 1) \end{cases} \quad (2-56)$$

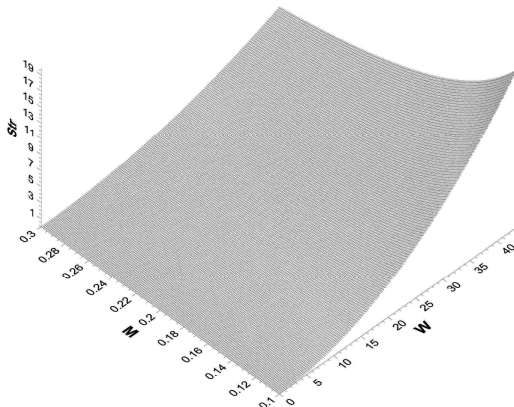
$$p_e^* = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} t^* \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ ή } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x^* \leq 1) \end{cases} \quad (2-57)$$

Χρησιμοποιώντας ως είσοδο (διέγερση) στο σύστημα την εξωτερική πίεση p_e^* , η οποία δίνεται μέσω της εξίσωσης (2-57), το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων (2-54) και (2-55) επιλύεται αριθμητικά ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις u^* και A^* , αντικαθιστώντας την εσωτερική πίεση p^* από τη σχέση της με την εγκάρσια διατομή του αγωγού A^* [σχέση (2-56)].

Παρατηρώντας τις αδιάστατες εξισώσεις (2-54) έως (2-57) γίνεται αντιληπτό ότι πρόκειται για μοντέλο πολλών παραμέτρων επιρροής. Ωστόσο, μπορεί να ενδιαφέρει η παρατήρηση της συμπεριφοράς του μοντέλου επιδρώντας μόνο σε συγκεκριμένες παραμέτρους. Δηλαδή, αν για παράδειγμα διατηρηθεί το ίδιο ρευστό, η ίδια γεωμετρία του κυκλώματος και τα ίδια χαρακτηριστικά του τοιχώματος του άκαμπτου αγωγού, επικεντρώνοντας τη μελέτη μόνο στη μεταβολή των μεγεθών της συχνότητας, του πλάτους, θέσης και μήκους διέγερσης, καθώς και στα χαρακτηριστικά του υλικού του εύκαμπτου αγωγού, τότε πρέπει οι αδιάστατοι αριθμοί Strouhal, Womersley και Mach να συµμεταβάλλονται ως εξής:

$$\text{Str} = \frac{Lv}{c_0 R_0^2} \frac{W^2}{M} \quad (2-58)$$

Αυτή η συµμεταβολή μεταξύ των τριών αδιάστατων αριθμών καθορίζει την χωρική επιφάνεια του σχήματος 2-7, η οποία είναι ο γεωμετρικός τόπος των τιμών των τριών αυτών αδιάστατων αριθμών. Αν πρέπει να μελετηθεί η μεταβολή των παραμέτρων για παράδειγμα στο μοτίβο που αναφέρθηκε προηγουµένως, τότε συµβαλλοντας τον ένα αδιάστατο αριθµό πρέπει να μεταβληθούν αντίστοιχα και οι άλλοι, ώστε να ικανοποιείται η σχέση 2-58 και οι τιμές να μην ξεφεύγουν του γεωμετρικού τόπου που έχει καθορισθεί, όπως αυτός του σχήματος 2-7.



Σχήμα 2-7. Παράδειγμα συµμεταβολής μεταξύ των αδιάστατων αριθµών Strouhal και Womersley για σταθερή γεωμετρία $L=2\text{m}$, $R_0=R_1=0.004\text{m}$, $s_1=0.001\text{m}$, ίδιο ρευστό (νερό) με σταθερή την πυκνότητα $\rho=998.2 \text{ Kg/m}^3$ και το κινηματικό ιξώδες $\nu=1.0038 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ και ίδιο υλικό (hard rubber) άκαμπτου αγωγού με λόγο Poisson $\nu_1=0.39$ και μέτρο ελαστικότητας $E_1=10^8 \text{ Pa}$.

2.10 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων – Μέθοδος DRP

Συνεπώς, για το συγκεκριμένο κυματικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται εδώ επιλέγεται κατάλληλο αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών ανώτερης τάξης δανεισμένο από την εφαρμοσμένη αεροακουστική. Τέτοια σχήματα είναι περισσότερο ισοτροπικά και παρουσιάζουν μικρότερα σφάλματα διάχυσης και διασποράς, συγκρινόμενα με άλλα μικρότερης τάξης. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται το αριθμητικό σχήμα Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion Relation Preserving-DRP), σύμφωνα με το οποίο τα χαρακτηριστικά διάδοσης του κύματος καθορίζονται πλήρως από τις σχέσεις διασποράς του, [Tam & Webb, 1993]. Το σχήμα αυτό εγγυάται για μεγάλα μήκη κύματος ($\lambda > 6\Delta x$) ότι τα προκύπτοντα κύματα της αριθμητικής λύσης έχουν σχεδόν ταυτόσημες ιδιότητες διάδοσης με τα αντίστοιχα κύματα της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Αυτό συμβαίνει καθότι ο αλγόριθμος του αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών έχει τυπικά όμοιες σχέσεις διασποράς με αυτές της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης, [Tam, 1996].

Παρόλο που στη βιβλιογραφία η μέθοδος DRP έχει αναπτυχθεί για ακουστικούς παλμούς, στην ουσία έχει πιο γενικό χαρακτήρα εφαρμογής. Πράγματι, το βέλτιστο σχήμα της χωρικής διακριτοποίησης για την DRP μέθοδο αναπτύσσεται με κατάλληλο τρόπο, ώστε ο μετασχηματισμός Fourier του σχήματος πεπερασμένων διαφορών να αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση της ίδιας της μερικής παραγώγου στο χώρο για καθορισμένο εύρος κυματαριθμών ενδιαφέροντος. Αυτή η χωρική προσέγγιση του κυματαριθμού επιτελείται μέσω ελαχιστοποίησης του σφάλματος ολοκλήρωσης, ενώ η όλη διαδικασία συνδυάζεται με την κλασική προσέγγιση της πεπερασμένης διαφοράς μέσω αποκοπτόμενης σειράς Taylor, ώστε να επιτυγχάνεται η προκαθορισμένη τάξη ακρίβειας, [Tam, 1996]. Η ανάπτυξη αυτού του είδους των σχημάτων έχει γενικό μαθηματικό χαρακτήρα και είναι κατάλληλο για χωρικές αριθμητικές προσεγγίσεις κυματικού χαρακτήρα, χωρίς να περιορίζεται σε ειδικού τύπου εφαρμογές όπως ακουστικής, αιμοδυναμικής, ηλεκτρομαγνητισμού κλπ.

Επειδή η απόδοση του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες απαιτεί υψηλές συχνότητες και υψηλά πλάτη, ενώ υφίστανται και οι έντονες ασυνέχειες στα σημεία ένωσης του εύκαμπτου με τον άκαμπτο αγωγό, αλλοιώνονται οι λύσεις με την εισαγωγή παρασιτικών κυμάτων και διασποράς (parasite and dispersive waves), [Tam, 1996]. Πρόκειται για ψευδείς ταλαντώσεις (spurious oscillations), με αριθμητική αιτιολογία που γεννώνται γύρω από σημεία ασυνέχειας, όπως για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι τα μεγάλα πλάτη διέγερσης και η αλλαγή της ενδοτικότητας μεταξύ εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού. Οι ταλαντώσεις αυτές διαδίδονται σε όλο το πεδίο των λύσεων, έχοντας μορφή θορύβου με πολύ μικρότερη περίοδο από την περιοδική λύση του ίδιου του προβλήματος, ιδιαίτερα στις υψίσυχνες διεγέρσεις, [Tam et al, 1993].

Είναι απαραίτητο σε αυτές τις περιπτώσεις να εξαλείφονται με κάποιο τρόπο τα μικρού μήκους ανεπιθύμητα κύματα τη στιγμή που μόλις γεννώνται, πριν προλάβουν να αλλοιώσουν τη λύση. Ο τρόπος αντιμετώπισης αυτής της διαστρέβλωσης της λύσης από την αριθμητική μεθοδολογία γίνεται με την προσθήκη, στους ιξώδεις όρους της εξίσωσης ορμής πεπερασμένων διαφορών, ενός ακόμη όρου με τεχνητή συνεκτικότητα. Το βάρος αυτού του όρου σε καθένα από τα σημεία του stencil (προτύπου διαμέρισης) των αριθμητικών κόμβων του πλέγματος είναι τέτοιο, ώστε να αποσβήνονται επιλεκτικά τα μικρού μήκους ανεπιθύμητα κύματα κατά το μέγιστο και η επίδραση αυτής της απόσβεσης στα υπόλοιπα κύματα μεγάλου μήκους που απαρτίζουν τη λύση να είναι η ελάχιστη. Η μέθοδος αυτή απόσβεσης εφαρμόζεται σε αριθμητικά προβλήματα αεροακουστικής, στα οποία εμφανίζονται συχνά αριθμητικές

λύσεις με αυτής της μορφής την αλλοίωση και ονομάζεται μέθοδος τεχνητής επιλεκτικής απόσβεσης (Artificial Selective Damping), [Tam, 1995]. Ειδικότερα στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος μεταβλητής τεχνητής απόσβεσης (Variable Artificial Damping), η οποία έχει την ίδια φιλοσοφία με την προηγούμενη μόνο που η ταχύτητα που χρησιμοποιείται στον όρο τεχνητής απόσβεσης πρέπει να είναι η διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης που απαντώνται μεταξύ του χρησιμοποιούμενου stencil. Κατά αυτόν τον τρόπο δε χρησιμοποιείται η ίδια απόσβεση για όλο το πλέγμα, αλλά αυξάνεται στα σημεία όπου αυξάνεται η ταχύτητα, σημεία τα οποία έχουν έντονα ανεπιθύμητα κύματα μικρού μήκους που απαιτείται μεγαλύτερη απόσβεση, [Tam, 1996].

Είναι προφανές ότι η απόσβεση απαλλάσσει σε μεγάλο βαθμό τις λύσεις από τις ανεπιθύμητες ψευδείς ταλαντώσεις (spurious oscillations) αριθμητικής αιτίας σε συνδυασμό με την ύπαρξη ασυνεχειών, ωστόσο η παρεμβολή που γίνεται απευθείας στις εξισώσεις επίλυσης παράγει μία λύση που είναι πολλές φορές αμφίβολο αν είναι η ορθή που εξάγεται από τις αρχικές εξισώσεις χωρίς τους όρους απόσβεσης (damping). Για αυτό το λόγο είναι προτιμότερο να αποφεύγεται η χρήση του damping.

Η καλύτερη προσέγγιση της διατμητικής τάσης εκτός του ότι βελτιώνει τη φυσική του προβλήματος, ώστε το μοντέλο να γίνεται πιο ρεαλιστικό, βελτιώνει ταυτόχρονα και την αριθμητική επίλυση και δεν εισάγονται οι προαναφερθείσες ψευδείς ταλαντώσεις θορύβου. Γίνεται ουσιαστικά μία μορφή απόσβεσης, η οποία όμως δεν είναι τεχνητή, αλλά προκύπτει από τη καλύτερη προσομοίωση της φυσικής του προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο δε χρειάζεται σε καμία περίπτωση η εφαρμογή της μεθόδου μεταβλητής τεχνητής απόσβεσης (Variable Artificial Damping) που όπως αναφέρθηκε κατά μία έννοια αλλοιώνει τη λύση.

Σύμφωνα με τη μέθοδο DRP η χωρική μερική παράγωγος γύρω από ένα σημείο x_0 μπορεί να προσεγγιστεί από ένα πρότυπο $2N+1$ σημείων διαμέρισης σχήματος πεπερασμένης διαφοράς ως εξής:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x^*}(x_0^*) = \frac{1}{\Delta x^*} \cdot \sum_{i=-N}^N e_i \cdot F^*(x_0^* + i\Delta x^*) \quad (2-59)$$

όπου $N=3$, Δx^* το χωρικό βήμα ενός ομοιόμορφου πλέγματος και οι συντελεστές e_i είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει $e_i = -e_{-i}$, διαμορφώνοντας ένα σχήμα χωρίς διάχυση.

Για τη μείωση των σφαλμάτων διασποράς και για την επίτευξη γενικά βέλτιστων χαρακτηριστικών των κυμάτων διάδοσης στον κλειστό βρόχο αγωγών οι συντελεστές e_i πρέπει να επιλεγούν ώστε να ελαχιστοποιούν το σφάλμα ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier του σχήματος πεπερασμένων διαφορών, το οποίο προσεγγίζει τη μερική παράγωγο στο χώρο. Κατά αυτόν τον τρόπο οι συντελεστές του προτύπου των 7 σημείων διαμέρισης έχουν ως εξής, [Tam & Shen, 1993] και [Tam, 1996]:

$$\begin{aligned} e_0 &= 0.0 & e_1 &= -e_{-1} = 0.77088238051822552 \\ e_2 &= -e_{-2} = -0.166705904414580469 & e_3 &= -e_{-3} = 0.02084314277031176. \end{aligned}$$

Σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι η μέθοδος DRP, τετάρτης τάξης ακρίβειας στο χώρο και στο χρόνο, εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας στους κώδικες επίλυσης των αλγορίθμων ψηφία διπλής ακρίβειας για όλες τις παραμέτρους και μεταβλητές. Η αιτία γι' αυτό προκύπτει από την ανάγκη εξάλειψης των σφαλμάτων

στρογγυλοποίησης, ώστε να ανιχνεύονται οι πολύ μικρές ασυμμετρίες ροής, που παρατηρούνται σε χαμηλές συχνότητες και πλάτη διέγερσης, αποδίδοντας μικρές αλλά μη μηδενικές τιμές της μέσης χρονικά παροχής.

Για τη χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων του συστήματος εφαρμόζεται η κλασική μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο, όπως περιγράφεται παρακάτω. Έστω ότι η εξίσωση χρονικής εξέλιξης του φαινομένου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} = G(U^*) \quad (2-60)$$

όπου U^* αντιπροσωπεύει το προς επίλυση μέγεθος κάθε εξίσωσης ($U^* \equiv A^*$ ή $U^* \equiv u^*$), ορισμένο ήδη στο πεδίο του χώρου και G είναι ο τελεστής διακριτοποίησης των χωρικών παραγώγων, ο οποίος δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t .

Η διακριτοποιημένη χρονική προέλαση (time marching) της εξίσωσης (2-60) μπορεί να γίνει ρητά σε ένα βήμα από το χρονικό επίπεδο n στο $n+1$ με το εξής γενικό σχήμα m -σταδίων:

$$(U^*)^{n+1} = (U^*)^n + \sum_{j=1}^m w_j k_j^* \quad (2-61)$$

όπου: $k_j^* = \Delta t^* \cdot G \left[(U^*)^n + \sum_{\ell=1}^{j-1} b_{j\ell} \cdot k_\ell^* \right]$ με $j=1,2,\dots,m$ και $w_j, b_{j\ell}$ είναι σταθεροί συντελεστές ανάλογα με το τυποποιημένο σχήμα Runge-Kutta που επιλέγεται. Για την κλασική μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξης ($m=4$) αυτοί οι συντελεστές λαμβάνουν τις τιμές:

$$\begin{aligned} w_1=w_4=1/6 & & w_2=w_3=1/3 \\ b_{21}=b_{32}=1/2 & & b_{31}=b_{41}=b_{42}=0 & & b_{43}=1 \end{aligned}$$

Ουσιαστικά οι συντελεστές k_j εκφράζουν την προσέγγιση της χρονικής μεταβολής του μεγέθους U^* στο εκάστοτε στάδιο j με βάση την εξίσωση (2-60). Κατά αυτό το σχήμα η διακριτοποίηση των εξισώσεων του συστήματος αναπτύσσεται στο παράρτημα Γ.

Η αξιοπιστία της αριθμητικής μεθοδολογίας μελετάται κατά την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων. Εφαρμόζοντας την περιοδική διέγερση της εξίσωσης (2-57), όσο αφορά την εξωτερική πίεση p_e , αναμένεται περιοδική λύση για τις άγνωστες συναρτήσεις $A^*(x^*, t^*)$ και $u^*(x^*, t^*)$ της εγκάρσιας διατομής του κλειστού κυκλώματος και της αξονικής ταχύτητας του ρευστού αντίστοιχα. Η αριθμητική σύγκλιση πιστοποιείται καταγράφοντας το υπόλοιπο της διαφοράς μεταξύ δύο τιμών της εκάστοτε άγνωστης συνάρτησης, οι οποίες ανήκουν σε δύο διαδοχικές περιόδους αντίστοιχα και απέχουν χρονικά όσο μία περίοδος. Κατά αυτόν τον τρόπο η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η τιμή αυτή του υπολοίπου της διαφοράς γίνει μικρότερη από μία προκαθορισμένη μέγιστη επιθυμητή τιμή. Αυτή η καταγραφή γίνεται και για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις αλλά και για κάθε σημείο του χώρου, ώστε να εξασφαλίζεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων για όλα τα μεγέθη και σε ολόκληρο το χωρικό πεδίο.

Θεωρώντας ως μέγιστο υπόλοιπο της διαφοράς την τιμή 10^{-7} λαμβάνεται το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης:

$$\max \{U^*(x_i^*, t_n^*) - U(x_i^*, t_n^* + T^*)\}_{i,n} < 10^{-7}, \quad (i=1,2,\dots,\kappa \ \& \ n=1,2,\dots,n_t) \quad (2-62)$$

όπου κ ο συνολικός αριθμός των σημείων του πλέγματος στο χώρο για όλο το μήκος L του κλειστού κυκλώματος και n_t ο συνολικός αριθμός των σημείων στο πλέγμα του χρόνου για μία περίοδο T^* .

2.11 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα μονοδιάστατο μοντέλο ροής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες και θερμοκρασία σε κυλινδρικό αγωγό με εύκαμπτα τοιχώματα. Βασίζεται στην εξίσωση Navier-Stokes κατά την αξονική κατεύθυνση του αγωγού και στην εξίσωση διατήρησης της μάζας. Για την απλοποίηση των εξισώσεων του μοντέλου η ροή του ρευστού θεωρείται αξονοσυμμετρική χωρίς περιδίνηση (swirl) και λαμβάνει χώρα εντός στενόμακρων κυλινδρικών αγωγών μικρής καμπυλότητας με σχέση ακτίνας προς μήκος επίσης μικρή. Οι δύο εξισώσεις ολοκληρώνονται επί της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού, θεωρώντας ότι τα στοιχεία του ρευστού είναι σε συνεχή επαφή με τα στοιχεία του κυλινδρικού εύκαμπτου αγωγού (κινηματική οριακή συνθήκη στο τοίχωμα). Επιπλέον, η επαπτομενική διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα μοντελοποιείται με βάση τη θεωρία Womersley, λαμβάνοντας υπόψη τόσο την αδράνεια όσο και τη συνεκτικότητα ρευστού παλλόμενης ροής σε ευθύγραμμο αγωγό.

Για την περίπτωση έντονων συρρικνούμενων τμημάτων εύκαμπτων αγωγών το μοντέλο έχει βελτιωθεί, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής του ρευστού που συμβαίνουν γύρω από χρονικά μεταβαλλόμενες στενώσεις και απαντώνται κατά τη μελέτη των αντλητικών φαινομένων σε εύκαμπτους αγωγούς. Δηλαδή, θεωρώντας παλλόμενη ροή σε συρρικνούμενο ευθύγραμμο αγωγό η επαπτομενική διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα μοντελοποιείται με δύο επιπλέον όρους, πέραν αυτών που ισχύουν μέχρι τώρα από τη θεωρία Womersley. Ο ένας όρος που προκύπτει είναι γραμμικός και εκφράζει την επίδραση των αδρανειακών φαινομένων λόγω της συρρίκνωσης, ενώ ο άλλος είναι μη γραμμικός, έχοντας έντονη επίδραση και εκφράζει την πτώση πίεσης που προκαλείται στη ροή λόγω τύρβης και αποκόλλησης γύρω από τη συρρίκνωση.

Οι προκύπτουσες άγνωστες συναρτήσεις από την κατάστροψη του μοντέλου είναι η ταχύτητα του ρευστού, η πίεση του ρευστού και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού. Για την εύρεση των τριών αυτών αγνώστων συναρτήσεων χρησιμοποιείται μία επιπλέον αλγεβρική καταστατική εξίσωση, πέραν αυτών της συνέχειας και της ορμής, η οποία συνδέει τη μεταβλητή διατομή του εύκαμπτου αγωγού με την εσωτερική διαμορφούμενη πίεση του ρευστού. Αυτή η καταστατική εξίσωση προκύπτει από τη γραμμική θεωρία ελαστικότητας, η οποία ισχύει για λεπτά ελαστικά τοιχώματα κυλινδρικών αγωγών με αξονική συμμετρία, των οποίων το πάχος δεν ξεπερνά το 10% της ακτίνας.

Και οι τρεις παραπάνω εξισώσεις του μοντέλου αποτελούν υπερβολικό σύστημα (3x3), του οποίου η επίλυση καθορίζει τα ρευστομηχανικά μεγέθη μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής ρευστού εντός εύκαμπτου κυλινδρικού αγωγού, με τις

προαναφερθείσες παραδοχές. Συνήθως η ροή που προκύπτει από τέτοιου είδους μοντέλα δεν καλείται μονοδιάστατη αλλά ψευδο-μονοδιάστατη εξαιτίας της επιπλέον μεταβολής της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε κάθετη διεύθυνση από αυτή της ταχύτητας του ρευστού. Με βάση τις παραδοχές το συγκεκριμένο μοντέλο δε μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει ασφαλή αποτελέσματα σε καμπύλους αγωγούς μικρής ακτίνας καμπυλότητας, σε περιπτώσεις κατάρρευσης (collapsing) των τοιχωμάτων των εύκαμπτων αγωγών, σε εύκαμπτους αγωγούς που δεν είναι λεπτότοιχοι και έχουν σημαντικό πάχος σε σχέση με την ακτίνα τους, σε μη κυκλικές διαμορφώσεις εγκάρσιων διατομών των εύκαμπτων αγωγών, όπου χρειάζονται και πάνω από μία συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού για την περιγραφή του πεδίου ροής.

Επίσης, γίνεται η προσομοίωση με το μαθηματικό μοντέλο, βάσει του οποίου θα μελετηθεί το φαινόμενο άντλησης χωρίς βαλβίδες. Η γεωμετρία του μοντέλου που χρησιμοποιείται συνίσταται από δύο ελαστικούς αγωγούς διαφορετικών μέτρων ελαστικότητας, έναν εύκαμπτο και έναν άκαμπτο, οι οποίοι σχηματίζουν κλειστό βρόχο. Οι αγωγοί είναι πληρωμένοι με ασυμπίεστο ρευστό και μία περιοδική δύναμη δρα εξωτερικά σε τμήμα του εύκαμπτου αγωγού, προκαλώντας τη συμπίεση και αποσυμπίεσή του, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μη μόνιμης ροής εντός του βρόχου.

Οι εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται και για την επίλυση τους εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία DRP (Dispersion Relation Preserving), η οποία είναι τέταρτης τάξης ακρίβειας στο χώρο και το χρόνο.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Εισαγωγή

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει τα αποτελέσματα μιας παραμετρικής μελέτης του βελτιωμένου μονοδιάστατου μοντέλου που αναπτύχθηκε στο 2^ο κεφάλαιο. Το μοντέλο αυτό θεωρείται βελτιωμένο καθώς η εισαγωγή του όρου μοντελοποίησης των φαινομένων τύρβης και αποκόλλησης της ροής που λαμβάνουν χώρα στη θέση διέγερσης, όπου συρρικνώνεται έντονα ο εύκαμπτος αγωγός, οδηγεί σε μία πιο ρεαλιστική περιγραφή του φαινομένου.

Λόγω της συγκεκριμένης προσομοίωσης το προτεινόμενο μοντέλο είναι ικανό να αντιμετωπίζει υψηλά πλάτη διέγερσης, η εφαρμογή των οποίων είναι απαραίτητη, διότι σε αυτά τα πλάτη το φαινόμενο της άντλησης χωρίς βαλβίδες είναι έντονο.

Η πρώτη φορά που περιγράφηκε το βελτιωμένο αυτό μοντέλο και παρουσιάστηκαν αποτελέσματα με διεγέρσεις τόσο μεγάλου πλάτους για ευρύ φάσμα συχνοτήτων έγινε στη διδακτορική διατριβή [Μανόπουλος, 2009]. Στη συγκεκριμένη βιβλιογραφία παρουσιάστηκαν, πειραματικά και υπολογιστικά, αποτελέσματα για πολλές παραμέτρους που επηρεάζουν τη μέση χρονικά παροχή, όπως η συχνότητα, το πλάτος, το μήκος και η θέση διέγερσης του εύκαμπτου αγωγού. Όσον αφορά τα υπολογιστικά αποτελέσματα, για πλάτη συμπίεσης μικρότερα του 90% φαίνεται ότι η μέση χρονικά παροχή μεγιστοποιείται στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου, λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή της για πλάτος διέγερσης 75%. Για συχνότητες μικρότερες της ιδιοσυχνότητας παρουσιάζονται διάφορα άλλα τοπικά ακρότατα με μικρότερες όμως τιμές, που οφείλονται σε φαινόμενα υποαρμονικού συντονισμού. Με την αύξηση του μήκους διέγερσης η μέση χρονικά παροχή αυξάνει. Όσο η θέση διέγερσης πλησιάζει προς το κέντρο του εύκαμπτου αγωγού, τόσο μειώνεται η μέση χρονικά παροχή και το μέγιστό της μετατοπίζεται σε όλο και μικρότερη συχνότητα. Σε συμμετρικές θέσεις διέγερσης ως προς το κέντρο του εύκαμπτου αγωγού η ροή του ρευστού απλά αντιστρέφεται με συνέπεια η μέση χρονικά παροχή να αλλάζει πρόσημο διατηρώντας το ίδιο μέτρο. Με την αύξηση του μήκους του εύκαμπτου αγωγού, διατηρώντας σταθερό το μήκος του άκαμπτου, αλλά και της διέγερσης, η μέση χρονικά παροχή μειώνεται και το μέγιστό της μετατοπίζεται σε όλο και μικρότερη συχνότητα.

Οι παράμετροι που θα εξεταστούν στο κεφάλαιο αυτό είναι το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού, το μήκος του άκαμπτου αγωγού, οι φυσικές ιδιότητες του ασυμπίεστου ρευστού (πυκνότητα, ιξώδες), η διάμετρος του συστήματος του κλειστού βρόχου και τα αδιάστατα μήκη.

Για κάθε παράμετρο που εξετάζεται παρακάτω, θα παρουσιαστεί η επιρροή της μέσης χρονικά παροχής σε συνάρτηση με τη συχνότητα διέγερσης. Παρουσιάζονται αποτελέσματα για πολύ μεγάλο φάσμα συχνοτήτων (μέχρι 20 Hz). Επίσης, εξετάζεται η επιρροή της κάθε παραμέτρου για τρία πλάτη συμπίεσης ($A_b=50\%$, $A_b=80\%$, $A_b=95\%$).

Λαμβάνονται αρχικά ως αποτελέσματα αναφοράς για την περίπτωση που το υλικό του εύκαμπτου αγωγού θεωρείται ότι έχει όμοιες ιδιότητες με ελαστικό σιλικόνης (silicone rubber), το οποίο έχει λόγο Poisson $\nu_0=0.49$, [O' Hara, 1983] και μέτρο ελαστικότητας (Young) $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa, λαμβάνοντας υπόψη την καταπόνηση της σιλικόνης σε δυναμικά φορτία λόγω διέγερσης, [Flaud et al, 1975]. Το υλικό του άκαμπτου αγωγού θεωρείται σκληρό ελαστικό (hard rubber) με μέτρο ελαστικότητας μεγαλύτερο κατά δύο τάξεις μεγέθους σε σχέση με αυτό του εύκαμπτου ($E_1=10^8$ Pa) και λόγο Poisson μικρότερο ($\nu_1=0.39$), ενώ το ρευστό υποτίθεται ότι είναι νερό 20 °C.

Τα αριθμητικά δεδομένα δίνονται στον πίνακα 3-1.

Φυσικές σταθερές και γεωμετρικές παράμετροι	Σύμβολο	Τιμή-Μονάδες
Κινηματικό ιξώδες νερού	ν	$1.0038 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$
Πυκνότητα νερού	ρ	998.2 Kg/m^3
Μήκος εύκαμπτου αγωγού	L_0	1 m
Μήκος άκαμπτου αγωγού	L_1	1 m
Συνολικό μήκος κλειστού κυκλώματος	L	2 m
Απόσταση κέντρου εφαρμογής της διέγερσης (θέση διέγερσης)	x_E	0.25 m
Μήκος διέγερσης	L_c	0.1 m
Απαραμόρφωτη εσωτερική διάμετρος εύκαμπτου αγωγού	D_0	0.008 m
Απαραμόρφωτη εσωτερική διάμετρος άκαμπτου αγωγού	D_1	0.008 m
Πάχος τοιχώματος εύκαμπτου αγωγού	s_0	0.001 m
Πάχος τοιχώματος άκαμπτου αγωγού	s_1	0.001 m
Μέτρο ελαστικότητας εύκαμπτου αγωγού	E_0	$3.5 \times 10^6 \text{ Pa}$
Μέτρο ελαστικότητας άκαμπτου αγωγού	E_1	10^8 Pa
Λόγος Poisson εύκαμπτου αγωγού	ν_0	0.49
Λόγος Poisson άκαμπτου αγωγού	ν_1	0.39
Εξωτερική πίεση αναφοράς (ατμοσφαιρική περιβάλλοντος)	p_0	101325 Pa
Σχετικό πλάτος συμπίεσης	A_b	0.5, 0.8, 0.95
Κυκλική συχνότητα διέγερσης	ω	έως 120 rad/sec

Πίνακας 3-1. Αριθμητικά δεδομένα εισόδου θεωρητικού-μαθηματικού μοντέλου.

Σημειώνεται ότι ανάλογα με την παράμετρο που εξετάζεται, η απεικόνιση των καμπυλών μπορεί να γίνεται σε διαστατά μεγέθη ή αδιάστατα. Αυτό εξαρτάται από το αν η παράμετρος έχει χρησιμοποιηθεί για την αδιαστατοποίηση της παροχής:

$$Q^*(x_0^*, t^*) = \frac{Q(x_0, t)}{A_0 c_0} \quad (3-1)$$

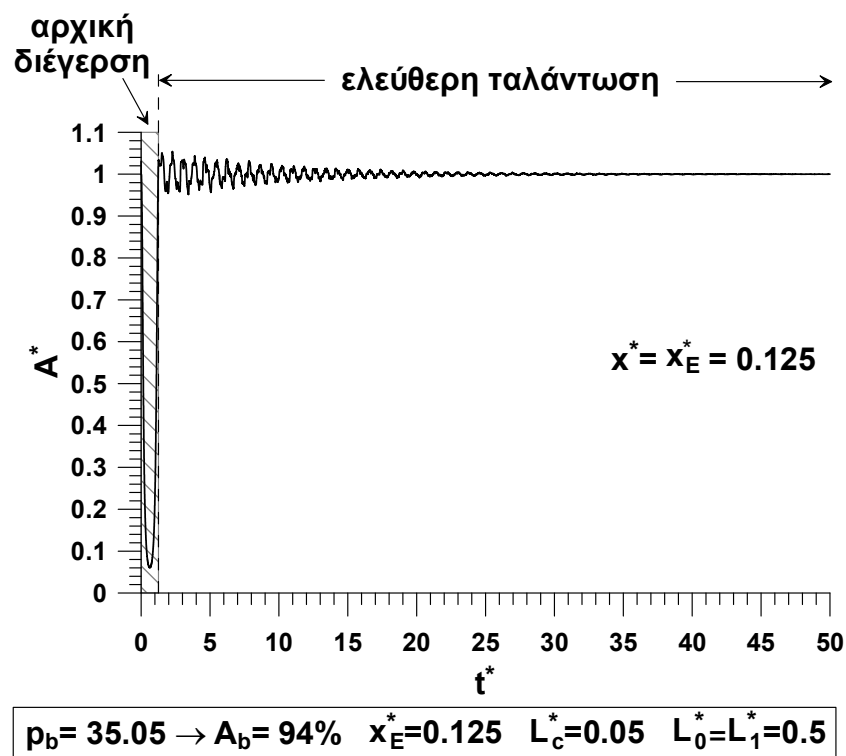
Από τον ορισμό της παλμικής ταχύτητας κύματος (εξίσωση 2-50) είναι προφανές ότι η c_0 εξαρτάται από αρκετές παραμέτρους. Συνεπώς, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αδιάστατη παροχή ως κάθετος άξονας, όταν μεταβάλλουμε μία παράμετρο από αυτές, γιατί το πλάτος της κάθε καμπύλης θα έχει προκύψει από διαφορετικού μεγέθους αδιαστατοποίηση. Το ίδιο συμβαίνει και μάλιστα πιο έντονα για τον οριζόντιο άξονα της συχνότητας ή των αδιάστατων αριθμών Strouhal και Womersley που υποδηλώνουν συχνότητα.

3.2 Ιδιοσυχνότητα μοντέλου κλειστού βρόχου αγωγών

Για την καλύτερη ερμηνεία των αποτελεσμάτων της παραμετρικής μελέτης που ακολουθεί είναι χρήσιμο να είναι γνωστή η ιδιοσυχνότητα του εκάστοτε συστήματος που μελετάται.

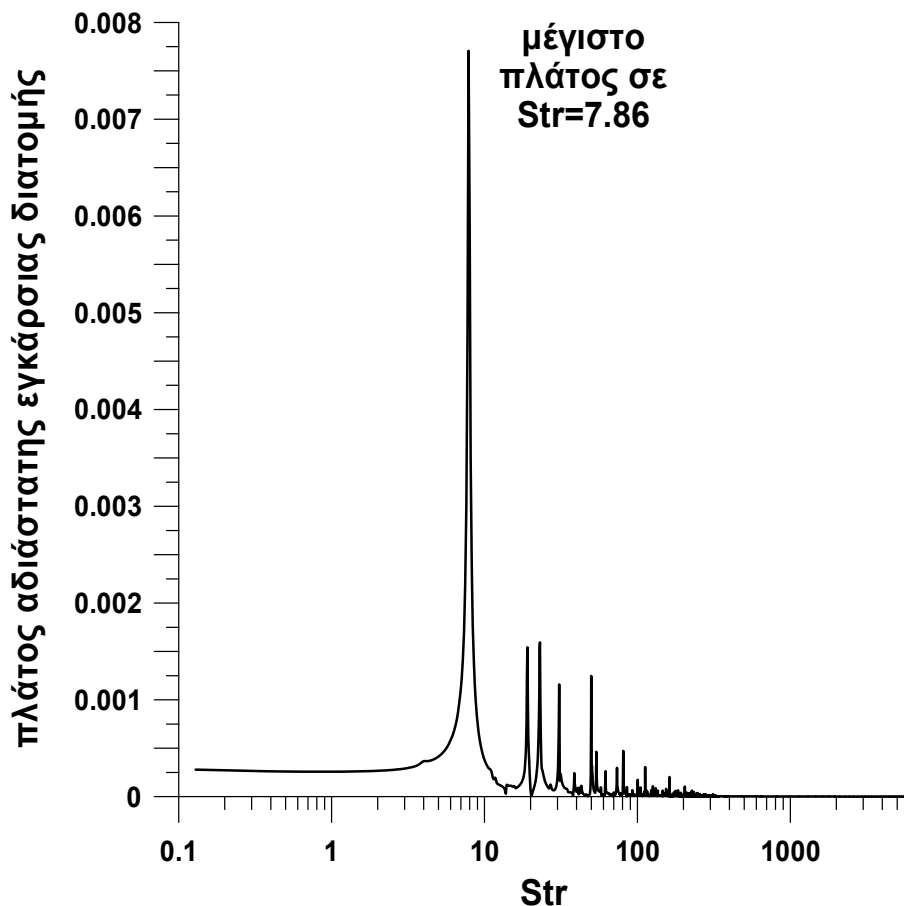
Αναφέρεται αρχικά ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών για τις τιμές αναφοράς του πίνακα 3-1, και ακολουθούν τα αποτελέσματα με παρόμοιο τρόπο για όλες τις άλλες περιπτώσεις. Όλες οι ιδιοσυχνότητες θα βρεθούν όταν το σύστημα διεγείρεται αρχικώς για κάποιο χρονικό διάστημα και για πλάτος συμπίεσης $A_b=94\%$.

Επομένως, για τον κλειστό βρόχο που έχει προκύψει από τις τιμές του πίνακα 3-1, διεγείρεται για $t^*=1.25$ ο εύκαμπτος αγωγός στη θέση $x_E^* = 0.125$ με αδιάστατο μήκος διέγερσης $L_c^* = 0.05$ και πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b=35.05$, το οποίο προκαλεί αρχική διέγερση στην αδιάστατη εγκάρσια διατομή πλάτους $A_b=94\%$. Μετά την πάροδο αδιάστατου χρόνου $t^*=1.2575$ ο κλειστός βρόχος ταλαντώνεται ελεύθερα μέχρι την ηρεμία του χωρίς κάποια εξωτερική παρέμβαση. Το αποτέλεσμα της διέγερσης και της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος που προκύπτει μέσω της επίλυσης των εξισώσεων, απεικονίζεται στο σχήμα 3-1, όπου αναπαρίσταται γραφικά με τον αδιάστατο χρόνο t^* η αδιάστατη συνάρτηση της εγκάρσιας διατομής A^* στο μέσο ακριβώς της διέγερσης ($x^* = x_E^* = 0.125$).



Σχήμα 3-1. Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^*=1.2575$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b=35.05$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b=94\%$.

Στο σχήμα 3-2 απεικονίζεται ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT) αυτού του αποσβυνόμενου σήματος, για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας του μοντέλου του κλειστού βρόχου. Το μέγιστο πλάτος της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής προκύπτει από τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier για αδιάστατο αριθμό $Str=7.86$, που αντιστοιχεί λόγω συμμεταβολής στον αδιάστατο αριθμό $W=38.79$ και με βάση τα δεδομένα του πίνακα 3-1 η ιδιοσυχνότητα του υδραυλικού μοντέλου κλειστού συστήματος αγωγών προκύπτει να είναι $f_0=15.02$ Hz.



Σχήμα 3-2. Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος 3-1, (ιδιοσυχνότητα για $Str=7.86$ & $W=38.79$).

Στο παράρτημα Α παρουσιάζονται, για τα υπόλοιπα συστήματα που θα μελετηθούν, τα διαγράμματα της αρχικής διέγερσης και ελεύθερης ταλάντωσης του σημείου διέγερσης συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου t^* , καθώς και του φάσματός τους που προκύπτει από τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier του αποσβυνόμενου σήματος της ελεύθερης ταλάντωσης.

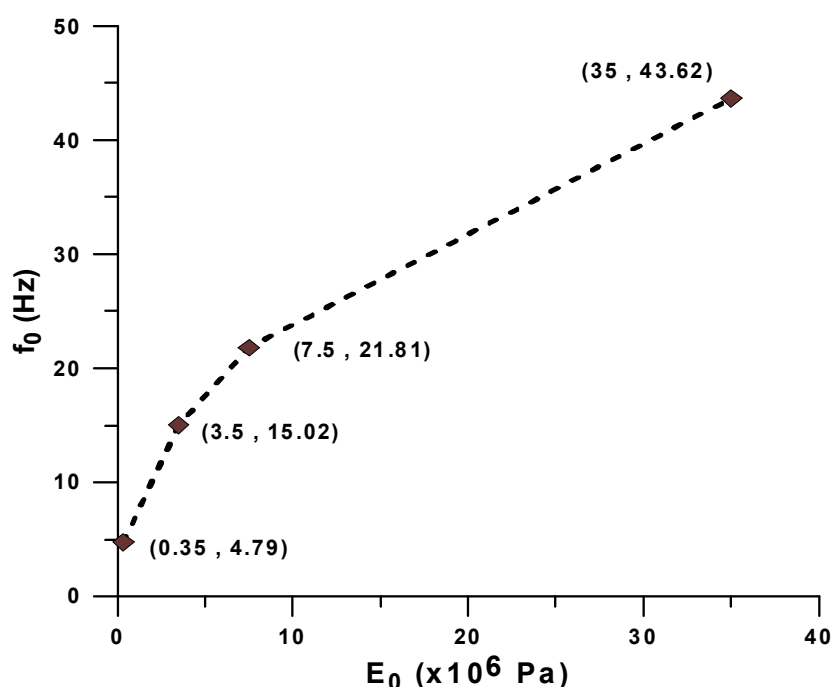
3.3 Επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού

Μεταβάλλοντας μόνο το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού, και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τις τιμές $E_0=3.5 \times 10^5$ Pa, $E_0=7.5 \times 10^6$ Pa, $E_0=3.5 \times 10^7$ Pa και διατηρώντας σταθερές όλες τις υπόλοιπες τιμές εισόδου (πίνακας 3-1) της καμπύλης αναφοράς, που έχει μέτρο ελαστικότητας $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa, θα μελετηθεί η επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού.

Στον πίνακα 3-2 παρουσιάζεται συνοπτικά η ιδιοσυχνότητα του κάθε συστήματος που θα μελετηθεί έτσι όπως έχει προκύψει από τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (παράρτημα Α) και στο σχήμα 3-3 απεικονίζεται η καμπύλη της ιδιοσυχνότητας του συστήματος συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού.

Παράμετρος	Ιδιοσυχνότητα		
	Str	W^2	f_0
Μέτρο ελαστικότητας εύκαμπτου αγωγού			
$E_0=3.5 \times 10^5$ Pa	7.93	480.0	4.79
$E_0=3.5 \times 10^6$ Pa	7.86	1504.7	15.02
$E_0=7.5 \times 10^6$ Pa	7.80	2184.6	21.81
$E_0=3.5 \times 10^7$ Pa	7.22	4369.2	43.62

Πίνακας 3-2. Ιδιοσυχνότητα των διαφορετικών συστημάτων κλειστού βρόχου αγωγών που προκύπτουν με μεταβολή της παραμέτρου του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού.



Σχήμα 3-3. Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας E_0 του εύκαμπτου αγωγού.

Η απεικόνιση των καμπυλών γίνεται σε διαστατά μεγέθη σε αυτή την περίπτωση καθώς η παλμική ταχύτητα κύματος c_0 (εξίσωση 2-50), η οποία αδιαστατοποιεί την μέση χρονικά παροχή και περιέχεται στη σχέση ορισμού του αδιάστατου αριθμού Strouhal, εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας.

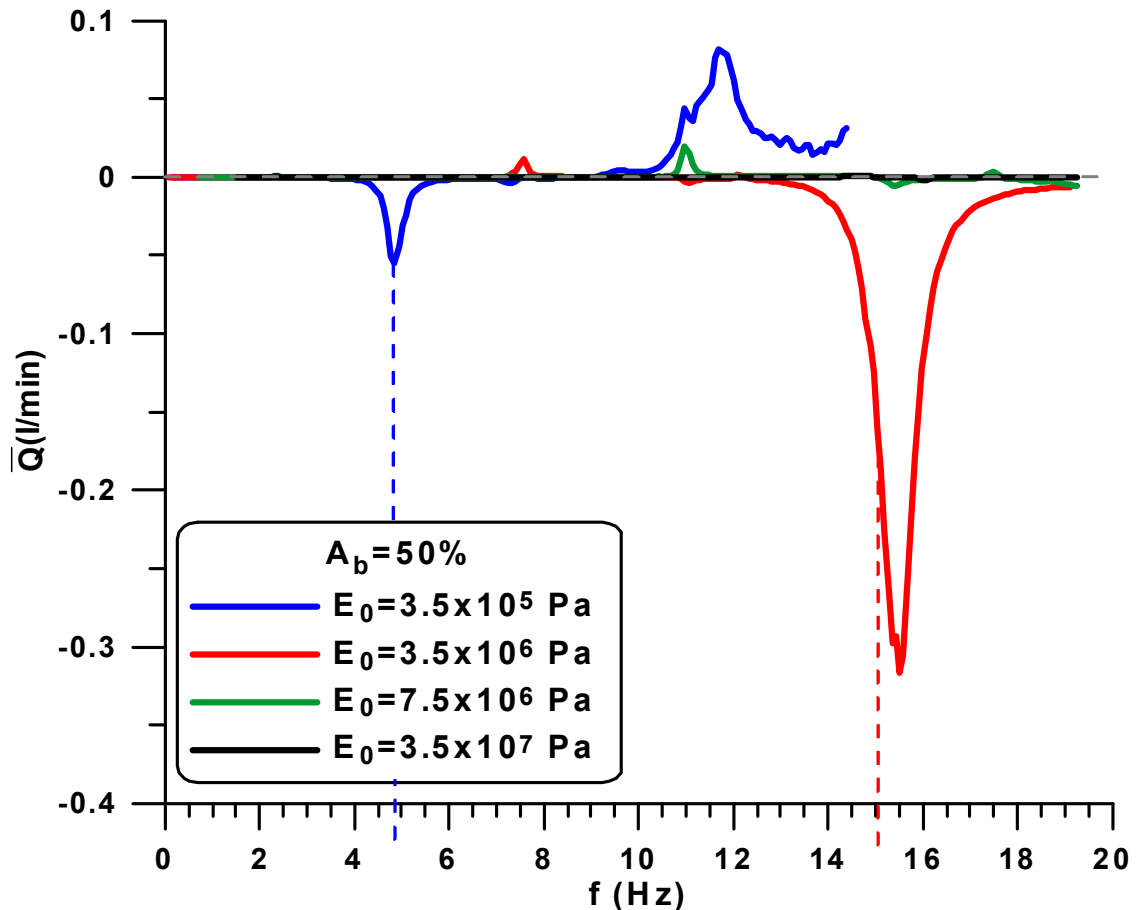
Στο διάγραμμα του σχήματος 3-4 για πλάτος συμπίεσης $A_b=50\%$ παρατηρούμε καταρχάς ότι υπάρχουν υπολογιστικοί περιορισμοί σχετικά με τη χρησιμοποίηση πολύ μαλακού υλικού στο τμήμα του εύκαμπτου αγωγού. Συγκεκριμένα, για μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού $E_0=3.5 \times 10^5$ Pa έχουμε αποτελέσματα μέχρι τη συχνότητα των 14.4 Hz, μετά τη συχνότητα αυτή ήταν αδύνατο να συγκλίνει η αριθμητική μέθοδος. Αυτό είναι λογικό καθώς ένα πολύ μαλακό υλικό όταν διεγείρεται σε τόσο υψηλή συχνότητα παρουσιάζει πολύ έντονες παραμορφώσεις, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη έντονων φαινομένων ταλαντώσεων στα μεγέθη της ροής και τη δυσκολία σύγκλισης της αριθμητικής μεθοδολογίας.

Επίσης, παρατηρούμε ότι οι δύο αγωγοί με μέτρα ελαστικότητας ($E_0=7.5 \times 10^6$ Pa, $E_0=3.5 \times 10^7$ Pa) που τείνουν σε αυτό του άκαμπτου αγωγού ($E_1=10^8$ Pa) παρουσιάζουν σχετικά μηδενική μέση χρονικά παροχή. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην μείωση της ενδοτικότητας του εύκαμπτου αγωγού.

Ακόμα, για το εύρος των συχνοτήτων έως 19 Hz που έχουν ληφθεί αποτελέσματα φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 3-4 για πλάτος συμπίεσης $A_b=50\%$, ότι οι δύο περιπτώσεις με τους πιο εύκαμπτους αγωγούς ($E_0=3.5 \times 10^5$ Pa, $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa) αναπτύσσουν ένα τοπικό ακρότατο κοντά στην τιμή της ιδιοσυχνότητας τους (πίνακας 3-2). Για το εύρος των συχνοτήτων που παρουσιάζονται αποτελέσματα, το τοπικό αυτό ακρότατο είναι το μέγιστο για τον αγωγό με μέτρο ελαστικότητας $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa, ενώ ο αγωγός με $E_0=3.5 \times 10^5$ Pa παρουσιάζει μέγιστο για συχνότητα 11.8 Hz περίπου.

Είναι φανερό από το ίδιο διάγραμμα για τους δύο πιο εύκαμπτους αγωγούς ότι με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας αυξάνονται τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max} και παρουσιάζονται σε μεγαλύτερους αριθμούς συχνοτήτων. Αυτό είναι αναμενόμενο επειδή αυξάνει η ιδιοσυχνότητα του κλειστού κυκλώματος, καθώς αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας.

Ακόμα παρατηρούμε ότι οι τιμές των τοπικών ακρότατων της μέσης χρονικά παροχής κοντά στο σημείο της ιδιοσυχνότητας για τις δύο καμπύλες με τον πιο εύκαμπτο αγωγό είναι αρνητικές, χαρακτηρίζονται δε ως μέγιστες διότι εξετάζονται κατά απόλυτη τιμή με το πρόσημο απλά να δηλώνει την κατεύθυνση της ροής σε σχέση με τη θετική φορά που έχει οριστεί κατά την κατάστρωση των εξισώσεων του μοντέλου. Σημειώνεται ότι θετική παροχή θεωρείται όταν η ροή του ρευστού έχει τη φορά της θετικής μετατόπισης x όπως ορίζεται στο σχήμα 2-5. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα μακροσκοπικά για τα χαμηλά πλάτη διέγερσης ($A_b=50\%$, $A_b=80\%$) διαπιστώνεται ότι γενικά η φορά της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής είναι κυρίως αντίθετη από αυτή του ορισμού της μετατόπισης x για τη συγκεκριμένη θέση διέγερσης x_E^* , το μήκος διέγερσης L_c^* και την όλη επιλεγείσα γεωμετρία του μοντέλου. Μάλιστα αυτή η φορά ισχύει και γύρω από την περιοχή του συντονισμού, η οποία χαρακτηρίζει κυρίως αυτού του είδους αντλητικά συστήματα. Στην περίπτωση του πολύ εύκαμπτου αγωγού, για συχνότητα μεγαλύτερη των 9.6 Hz, η φορά της μέσης χρονικά παροχής γίνεται θετική (αλλάζει κατεύθυνση η ροή).



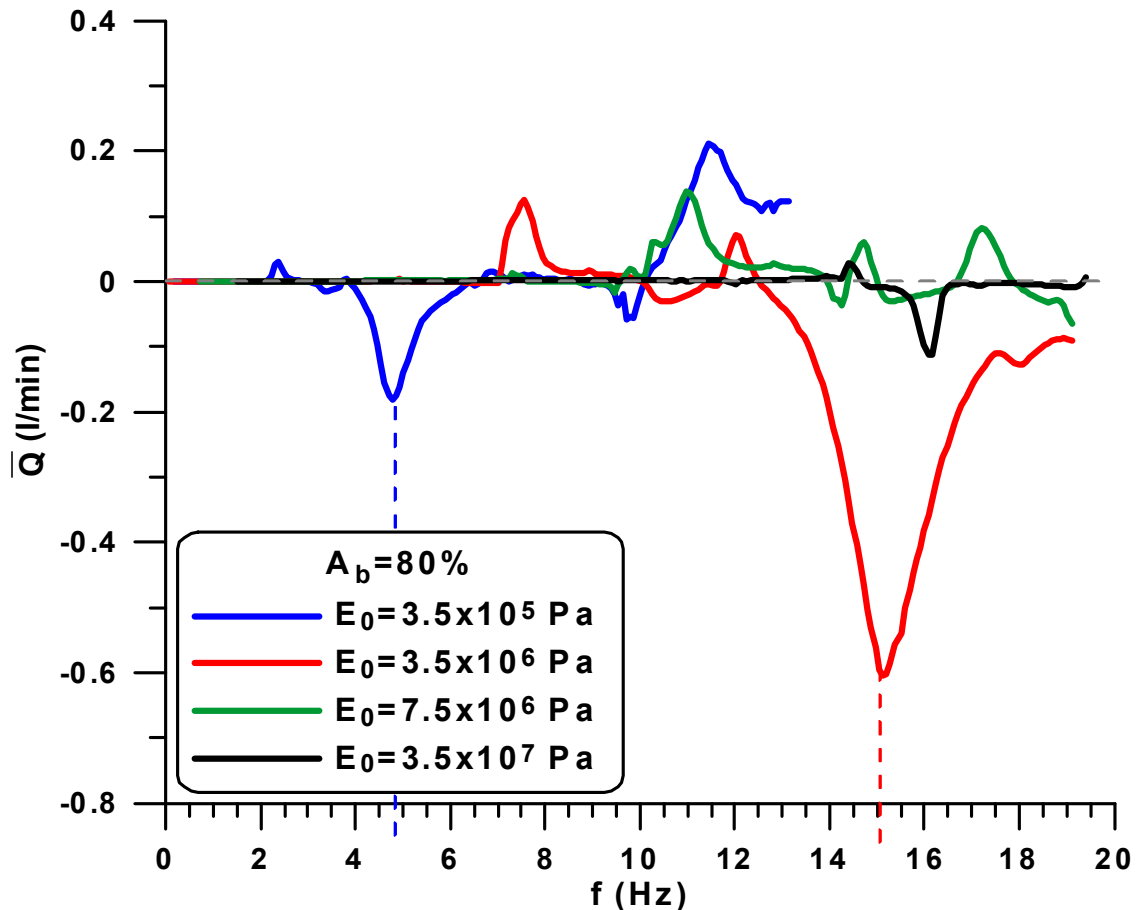
Σχήμα 3-4. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$ και τέσσερα μέτρα ελαστικότητας. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Το διάγραμμα του σχήματος 3-5, αναπαριστά για τα ίδια μέτρα ελαστικότητας με προηγούμενως την παροχή συναρτήσει της συχνότητας, αλλά για πλάτος συμπίεσης $A_b=80\%$.

Με την επιβολή μεγαλύτερου πλάτους συμπίεσης, ο αγωγός με μέτρο ελαστικότητας $E_0=7.5 \times 10^6$ Pa που για πλάτος συμπίεσης $A_b=50\%$ φαινόταν διαμέσου του οποίου να μην αναπτύσσεται έντονα μη μηδενική μέση χρονικά παροχή, τώρα για $A_b=80\%$ έχει κάποια τμήματα συχνότητων με ανάπτυξη ροής προς τη θετική πλευρά.

Οι καμπύλες είναι παρόμοιας μορφής, αλλά λόγω διαφορετικού μέτρου ελαστικότητας, τα τοπικά ακρότατα εμφανίζονται σε άλλες συχνότητες και με διαφορετικό μέγεθος. Για παράδειγμα, το τμήμα των συχνότητων 9.5-13.9 Hz του αγωγού με μέτρο ελαστικότητας $E_0=7.5 \times 10^6$ Pa με μέγιστη παροχή για 11 Hz περίπου είναι παρόμοιο για τον αγωγό με $E_0=3.5 \times 10^5$ Pa που παρουσιάζει το ίδιο τμήμα με θετική παροχή για το διάστημα 1.9-2.8 Hz και για τον αγωγό με $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa για το εύρος συχνότητων 7.1-10 Hz.

Ισχύει όπως και στην περίπτωση με πλάτος ταλάντωσης $A_b=50\%$, τουλάχιστον για τους δύο πιο εύκαμπτους αγωγούς, ότι με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού, τα μέγιστα των καμπυλών της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q}_{\max} αυξάνονται και μετατοπίζονται σε μεγαλύτερους αριθμούς συχνότητων.



Σχήμα 3-5. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και τέσσερα μέτρα ελαστικότητας. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

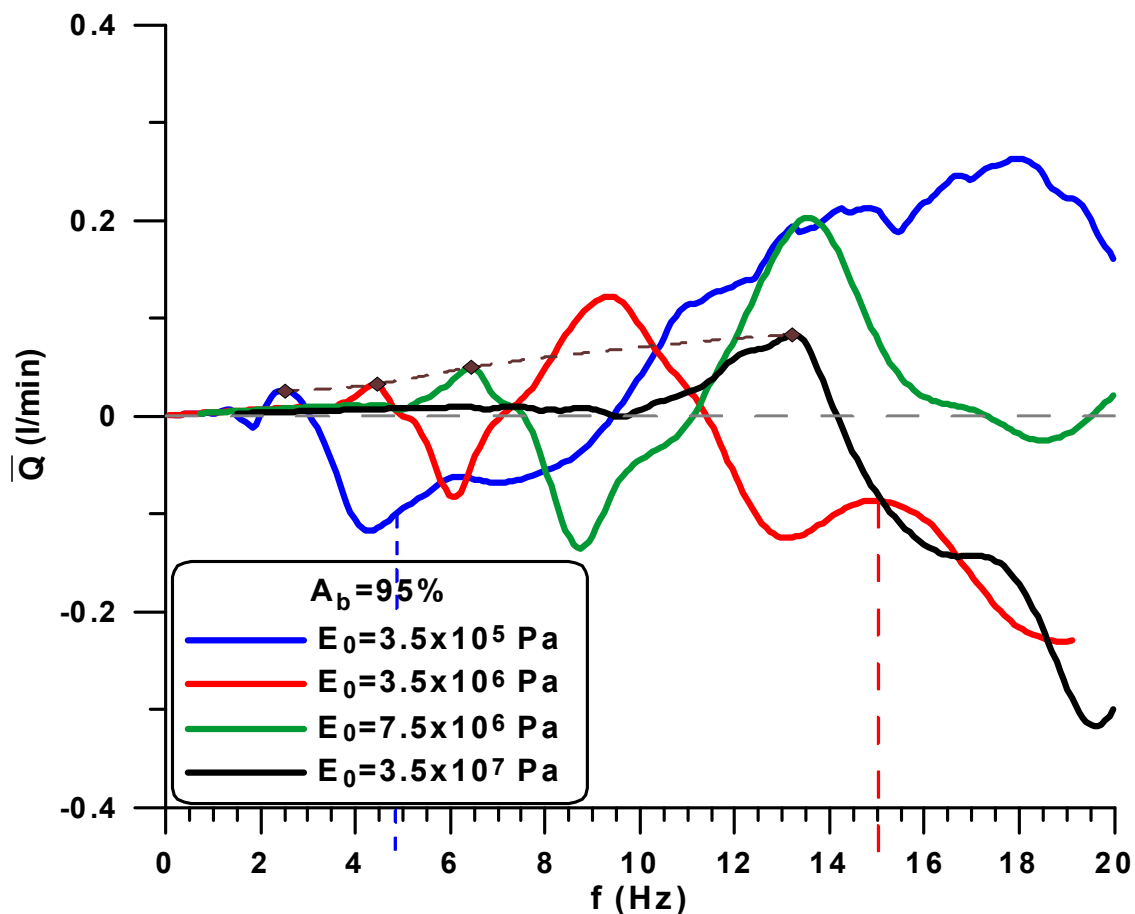
Για την περίπτωση με πλάτος ταλάντωσης $A_b=95\%$ (σχήμα 3-6), τα διαγράμματα είναι πλέον πιο σαφή, καθώς έχει αναπτυχθεί έντονα μη μηδενική μέση χρονικά παροχή για όλες τις περιπτώσεις των μέτρων ελαστικότητας.

Για το συγκεκριμένο πλάτος συμπίεσης, η περίπτωση του πολύ εύκαμπτου αγωγού $E_0=3.5 \times 10^5$ Pa έδωσε αποτελέσματα μέχρι και τη συχνότητα των 19 Hz σε αντίθεση με τα άλλα δύο πλάτη ($A_b=50\%$, $A_b=80\%$) που δεν μπορούσε να συγκλίνει η αριθμητική μέθοδος για πολύ υψηλή συχνότητα. Γενικά για πολύ υψηλό πλάτος συμπίεσης, η αριθμητική μεθοδολογία συγκλίνει αρκετά γρήγορα. Η καμπύλη του πολύ εύκαμπτου αγωγού, αφού πλησιάσει τη μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, μέση παροχή για συχνότητα 4.3 Hz κοντά στην περιοχή της ιδιοσυχνότητας, μετά συνεχίζεται έως ότου να αλλάξει φορά η ροή και να συνεχίσει να αυξάνει η τιμή της παροχής. Επίσης, το μέγιστο του αγωγού αυτού στη συχνότητα των 4.3 Hz είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο που αναπτύσσει ο αγωγός με μέτρο ελαστικότητας $E_0=3.5 \times 10^6$ Pa στα 6 Hz.

Αυτό που επιπλέον αξίζει να σημειωθεί είναι ότι δεν υπάρχει κάποια σταθερή αναλογία με την οποία μετατοπίζεται η συχνότητα στην οποία αναπτύσσεται ένα μέγιστο. Συγκεκριμένα, και στους τέσσερις αγωγούς εμφανίζεται στην αρχή ένα τοπικό ακρότατο κατά τη θετική φορά της κατεύθυνσης της ροής (διακεκομμένη γραμμή συνένωσης των τοπικών αυτών ακρότατων στο διάγραμμα του σχήματος 3-6)

σε συχνότητα υποπολλαπλάσια του συντονισμού και με μικρότερο μέγεθος μέσης χρονικά παροχής.

Έτσι, οι δύο πιο εύκαμπτοι αγωγοί έχουν διαφορά μέτρου ελαστικότητας μίας τάξης μεγέθους και το τοπικό ακρότατο που σχηματίζουν στην αρχή έχει διαφορά συχνότητας το ένα από το άλλο 1.9 Hz. Ενώ οι δύο αγωγοί με το υψηλότερο μέτρο ελαστικότητας έχουν διαφορά μέτρου ελαστικότητας μισή τάξη μεγέθους από προηγούμενως και διαφορά των μεγίστων κατά 7.7 Hz περίπου. Συνεπώς, υπάρχει έντονη μη γραμμικότητα.



Σχήμα 3-6. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ και τέσσερα μέτρα ελαστικότητας. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Στο διάγραμμα του σχήματος 3-6, με διακεκομμένη γραμμή ενώνονται τα τοπικά ακρότατα των καμπυλών που αντιστοιχούν σε συχνότητες μικρότερες των ιδιοσυχνοτήτων. Αυτά τα τοπικά ακρότατα σε συχνότητες υποπολλαπλάσιες της συχνότητας συντονισμού, οι οποίες είναι χαρακτηριστικές για υδραυλικά συστήματα και δομές που εκθέτονται σε χρονικά μεταβαλλόμενες ροές, μπορεί να ερμηνευτούν όπως και στην περίπτωση συντονισμού στερεού κυλίνδρου κυκλικής διατομής υποστηριζόμενου από σύστημα ελατηρίου αποσβεστήρα, στον οποίο επιβάλλεται παλλόμενη ροή με μηδενική μέση τιμή, [Blevins, 1990]. Η προκαλούμενη ταλάντωση της μετατόπισης του κυλίνδρου παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε υποπολλαπλάσιες

περιττές συχνότητες της συχνότητας συντονισμού του συστήματος. Οι περιττοί αριθμοί με τους οποίους διαιρείται η ιδιοσυχνότητα του συστήματος οφείλονται στο μη γραμμικό όρο (u^2) της εξίσωσης ορμής (εξαιτίας της αντίστασης του κυλίνδρου στη ροή) και αναπαρίστανται μέσω των περιττών αρμονικών κατόπιν ανάλυσης του σήματος της ταλάντωσης μετατόπισης σε σειρά Fourier.

Το κύμα πίεσης που δημιουργείται στην περιοχή διέγερσης κινείται και προς τις δύο κατευθύνσεις του κλειστού κυκλώματος αγωγών και προφανώς ανακλάται στο τμήμα του κυκλώματος άκαμπτου αγωγού. Επομένως, υπάρχει μία συμβολή της αρχικής κύμανσης με τις ανακλώμενες συνιστώσες στα άκρα της ταλαντούμενης διάταξης. Έτσι, παράγονται αθροιστικά κύματα πίεσης τα οποία δημιουργούν τα τοπικά ακρότατα και μετά το σημείο του συντονισμού.

3.4 Επίδραση του μήκους του άκαμπτου αγωγού

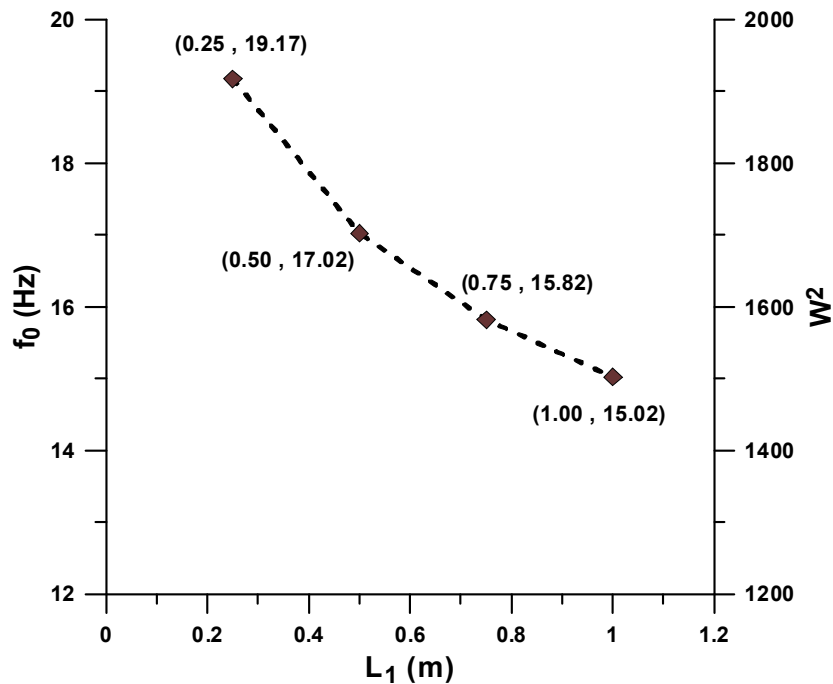
Για το φαινόμενο της άντλησης χωρίς βαλβίδες έχει μελετηθεί η επιρροή της παραμέτρου του μήκους του εύκαμπτου αγωγού [Μανόπουλος, 2009]. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max}^* μειώνονται και παρουσιάζονται σε μικρότερους αριθμούς Strouhal, καθώς αυξάνεται το αδιάστατο μήκος του εύκαμπτου αγωγού L_0^* , όπως ακριβώς συμβαίνει στην πειραματική ανοιχτή διάταξη ενός διεγερόμενου εύκαμπτου αγωγού [Bredow, 1968].

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η επίδραση του μήκους του άκαμπτου αγωγού στο φαινόμενο άντλησης χωρίς βαλβίδες με τον ακόλουθο τρόπο. Διατηρώντας, δηλαδή, σταθερά όλα τα υπόλοιπα μήκη και μεγέθη όπως έχουν επισημανθεί στον πίνακα 3-1 και μεταβάλλοντας μόνο το μήκος του άκαμπτου αγωγού L_1 , και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας για μήκος του άκαμπτου αγωγού τις τιμές $L_1=0.25$ m, $L_1=0.50$ m και $L_1=0.75$ m.

Με την μεταβολή του μήκους του άκαμπτου αγωγού αλλάζει η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, γι' αυτό παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα 3-3 για κάθε σύστημα η ιδιοσυχνότητά του, έτσι όπως έχει βρεθεί (πάρτημα Α). Στο διάγραμμα του σχήματος 3-7 απεικονίζεται η ιδιοσυχνότητα του συστήματος σε συνάρτηση με το μήκος του άκαμπτου αγωγού.

Παράμετρος	Ιδιοσυχνότητα		
	Str	W^2	f_0
Μήκος άκαμπτου αγωγού			
$L_1=0.25$ m	6.27	1920.2	19.17
$L_1=0.50$ m	6.68	1704.0	17.02
$L_1=0.75$ m	7.24	1584.0	15.82
$L_1=1.00$ m	7.86	1504.7	15.02

Πίνακας 3-3. Ιδιοσυχνότητα των διαφορετικών συστημάτων κλειστού βρόχου αγωγών που προκύπτουν με μεταβολή της παραμέτρου του μήκους του άκαμπτου αγωγού.

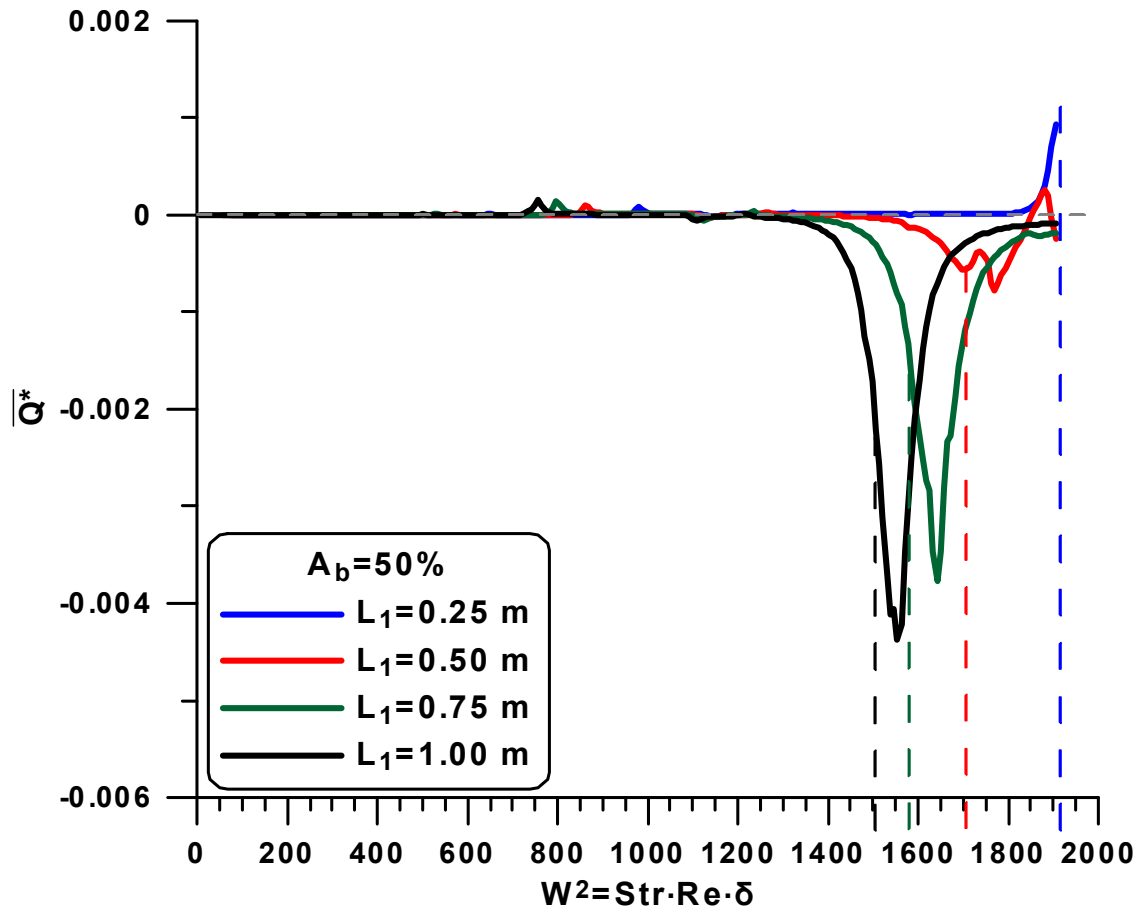


Σχήμα 3-7. Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος και του αδιάστατου αριθμού W^2 συναρτήσει του μήκους L_0 του άκαμπτου αγωγού.

Για σταθερό πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$, παρατηρείται μεταβολή στις καμπύλες της χρονικά αδιάστατης παροχής με το τετράγωνο του αδιάστατου αριθμού Womersley, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 3-8.

Είναι φανερό από το διάγραμμα ότι καθώς αυξάνεται το αδιάστατο μήκος L_1^* , τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max}^* αυξάνονται και παρουσιάζονται σε μικρότερους αριθμούς Womersley. Το γεγονός ότι αυξάνονται τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max}^* με την αύξηση του αδιάστατου μήκους του άκαμπτου αγωγού L_1^* έρχεται σε συμφωνία με την αντίστοιχη παραμετρική μελέτη για το μήκος του εύκαμπτου αγωγού όπου εκεί με την αύξηση του αδιάστατου μήκους του εύκαμπτου αγωγού, άρα μείωση του αδιάστατου μήκους του άκαμπτου αγωγού, μειώνονταν τα μέγιστα \bar{Q}_{max}^* . Επίσης, τα αποτελέσματα και από τις δύο παραμετρικές μελέτες δείχνουν ότι η αύξηση είτε του εύκαμπτου αγωγού είτε του άκαμπτου αγωγού μετατοπίζουν τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max}^* σε μικρότερους αριθμούς συχνότητας. Αυτό οφείλεται στην αλλαγή της ιδιοσυχνότητας, αφού το μήκος του αγωγού και συνεπώς του συνολικού κυκλώματος αυξάνεται.

Επίσης, για το συγκεκριμένο πλάτος συμπίεσης, παρατηρούμε ότι η περίπτωση χρησιμοποίησης πολύ μικρού μήκους άκαμπτου αγωγού ($L_1=0.25$ m) δίνει σχεδόν μηδενική μέση χρονικά παροχή μέχρι $W^2 \cong 1900$ που αντιστοιχεί σε συχνότητα 19 Hz περίπου και μετά το σημείο αυτό έχουμε ανάπτυξη ροής προς τη θετική κατεύθυνση, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα μήκη όπου η ροή κοντά στο συντονισμό γίνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση, με θετική φορά αυτή της θετικής μετατόπισης x όπως ορίζεται στο σχήμα 2-5. Επομένως, για την εμφάνιση του φαινομένου άντλησης ρευστού χωρίς βαλβίδες σε χαμηλή τιμή συχνότητας και για μικρό πλάτος συμπίεσης είναι αναγκαία η ύπαρξη μήκους άκαμπτου αγωγού τουλάχιστον το μισό του εύκαμπτου αγωγού.



Σχήμα 3-8. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει του χαρακτηριστικού αδιάστατου αριθμού W^2 για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$ και τέσσερα μήκη άκαμπτου αγωγού L_1^* . Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

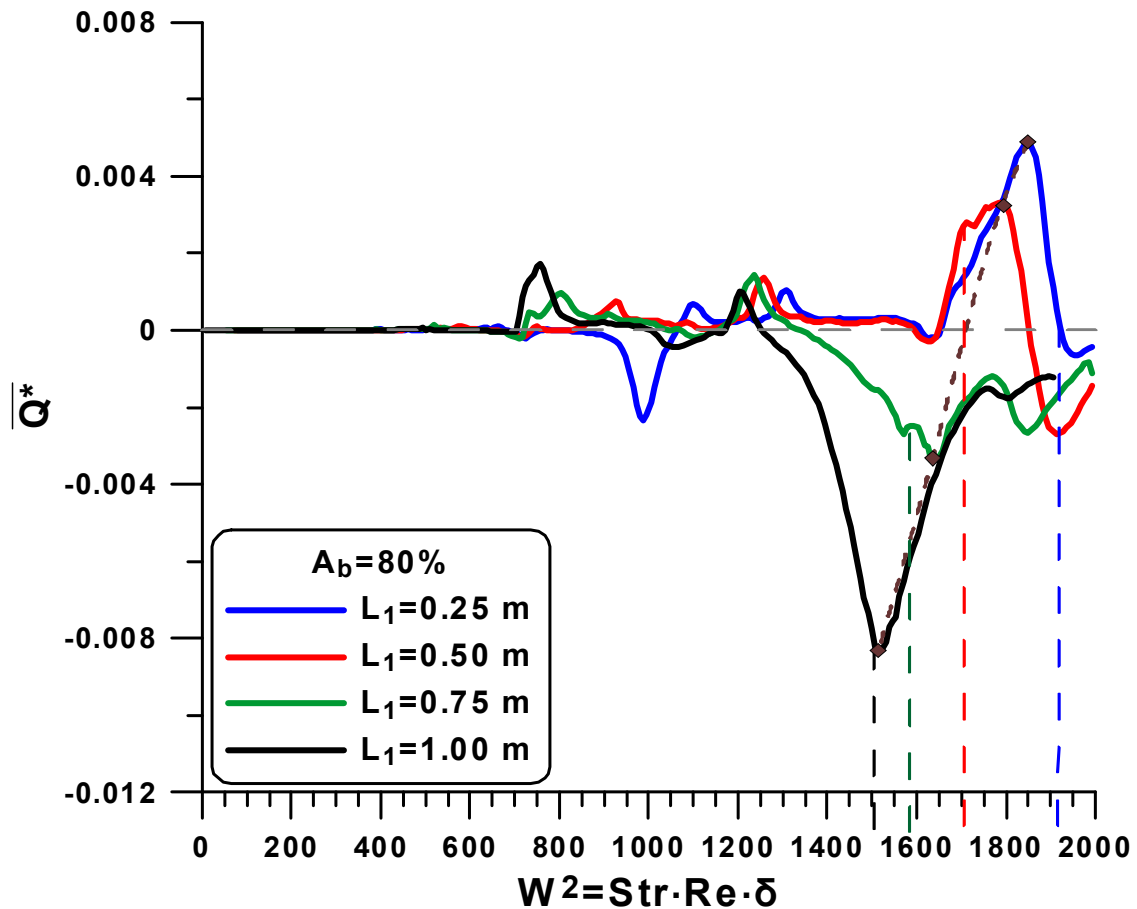
Για την περίπτωση με πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ (σχήμα 3-9) παρατηρείται ότι όντως τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{\max}^* εμφανίζονται σε μικρότερες συχνότητες καθώς αυξάνεται το αδιάστατο μήκος L_1^* .

Επίσης, τα μέγιστα \bar{Q}_{\max}^* των καμπυλών δεν είναι ανάλογα της αύξησης του αδιάστατου μήκους L_1^* (Πίνακας 3-4). Πιο συγκεκριμένα, ο αγωγός με το μεγαλύτερο μήκος L_1^* έχει πράγματι το μεγαλύτερο μέγιστο αδιάστατης παροχής, αλλά οι δύο ενδιάμεσες περιπτώσεις ($L_1=0.50$ m, $L_1=0.75$ m) έχουν περίπου την ίδια τιμή μέγιστης παροχής (αν και έχουν αντίθετη φορά) και σε διαφορετικές συχνότητες (ο αγωγός με $L_1=0.50$ εμφανίζει το μέγιστο \bar{Q}_{\max}^* για συχνότητα 17.8 Hz και ο αγωγός με $L_1=0.75$ m για συχνότητα 16.3 Hz). Ενώ, ο αγωγός με το μικρότερο μήκος έχει μεγαλύτερη τιμή μέγιστης αδιάστατης παροχής από την ίδια περίπου τιμή των αγωγών $L_1=0.50$ m και $L_1=0.75$ m. Τα μέγιστα \bar{Q}_{\max}^* των καμπυλών ενώνονται με διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα του σχήματος 3-9.

L_1 (m)	L_1^*	L_0^*	L_c^*	δ	$W^2 \rightarrow f$ (Hz)	$\bar{Q}_{max}^* (x10^{-3})$
0.25	1/5=0.20	4/5=0.80	2/25=0.080	0.0032	1848→18.5	4.88
0.50	1/3≅0.33	2/3≅0.67	1/15≅0.067	≅0.0027	1786→17.8	3.32
0.75	3/7≅0.43	4/7≅0.57	2/35≅0.057	≅0.0023	1633→16.3	-3.38
1.00	1/2=0.50	1/2=0.50	1/20=0.050	0.0020	1517→15.1	-8.32

Διατηρούνται σταθερά: $L_0=1$ m και $L_c=0.1$ m

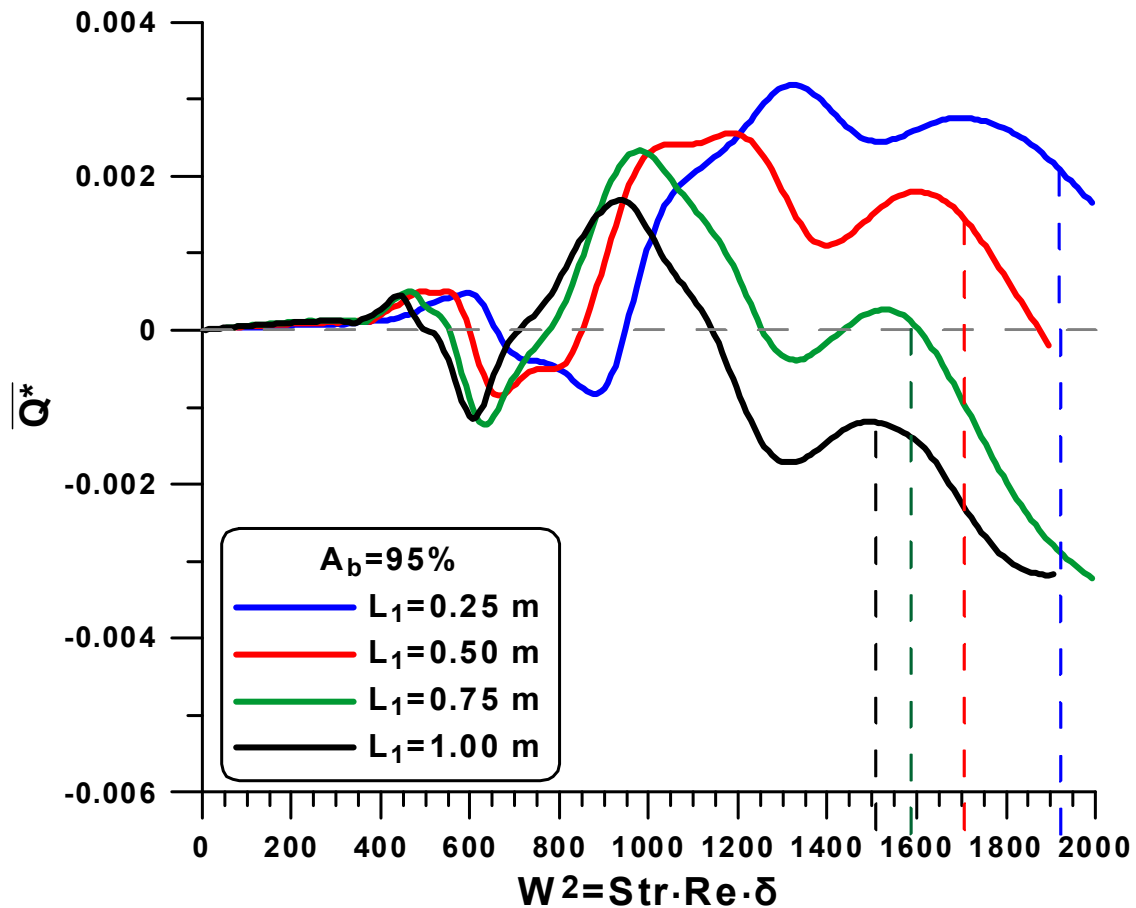
Πίνακας 3-4. Αριθμητικά γεωμετρικά δεδομένα κλειστού κυκλώματος και αντίστοιχα αποτελέσματα της μέγιστης μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής.



Σχήμα 3-9. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει του χαρακτηριστικού αδιάστατου αριθμού W^2 για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και τέσσερα μήκη άκαμπτου αγωγού L_1^* . Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Η καφέ διακεκομμένη γραμμή ενώνει τα μέγιστα \bar{Q}_{max}^* των καμπυλών.

Τέλος, στο διάγραμμα του σχήματος 3-10 φαίνεται για πλάτος συμπίεσης $A_b=95\%$ η μεταβολή της αδιάστατης παροχής με τον αριθμό Womersley στο τετράγωνο που υποδηλώνει τη συχνότητα. Είναι προφανές ότι υπάρχει μία ομοιομορφία στις καμπύλες για όλα τα μήκη. Οι συχνότητες εμφάνισης ακροτάτων είναι μετατοπισμένες σε μικρότερες τιμές καθώς αυξάνεται το μήκος του άκαμπτου αγωγού, λόγω αλλαγής της ιδιοσυχνότητας, όπως και στα προηγούμενα πλάτη

διέγερσης. Σχετικά με τις μέγιστες τιμές \bar{Q}_{\max}^* των καμπυλών για $Wom > 800$ όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του άκαμπτου αγωγού, τόσο μικρότερη είναι και η μέγιστη παροχή.



Σχήμα 3-10. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει του χαρακτηριστικού αδιάστατου αριθμού W^2 για πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ και τέσσερα μήκη άκαμπτου αγωγού L_1^* . Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

3.5 Επίδραση των φυσικών ιδιοτήτων των ρευστών

Το φαινόμενο άντλησης ρευστού χωρίς βαλβίδες έχει μελετηθεί αναπτύσσοντας τις εξισώσεις της ορμής και συνέχειας για το ασυμπίεστο ρευστό. Θα μελετήσουμε την επίδραση που έχουν οι φυσικές ιδιότητες ενός ασυμπιέστου ρευστού και συγκεκριμένα την επίδραση από το κινηματικό ιξώδες και την πυκνότητά του. Τα ρευστά που θα μελετηθούν είναι όλα ασυμπιέστα. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε την περίπτωση του νερού, δύο διαλυμάτων γλυκερόλης-νερού με συγκέντρωση γλυκερόλης 60% και 96% και ένα διάλυμα σουκρόζης-νερού με συγκέντρωση σουκρόζης 65.87%. Ακολουθεί ο πίνακας 3-5, όπου παρουσιάζονται οι ρευστομηχανικές ιδιότητες των παραπάνω ρευστών στους 20°C [J.B.Segur-H.E.Oberstar,1951].

Ρευστό	Πυκνότητα ρ (kg/m ³)	Κινηματικό Ιξώδες ν (x10 ⁻⁶ m ² /s)	Δυναμικό ιξώδες $\mu=\nu\rho$ (cP)
Νερό	998.2	1.0038	1.0020
Γλυκερίνη 60%	1154.06	9.3539	10.795
Γλυκερίνη 96%	1251.09	498.37	623.51
Σουκρόζη 65.87%	1321.74	135.12	178.59

Πίνακας 3-5. Αριθμητικά δεδομένα για την πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες διάφορων ρευστών.

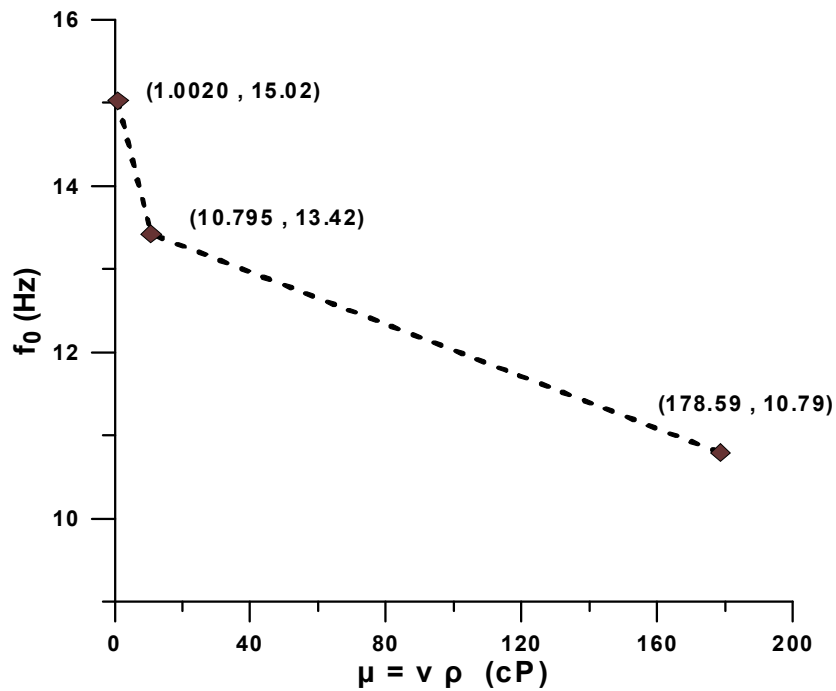
Τα διαγράμματα θα γίνουν σε διαστατούς άξονες γιατί με την μεταβολή της πυκνότητας και του ιξώδους επηρεάζονται τα μεγέθη που έχουν αδιαστατοποιηθεί τα μεγέθη των αξόνων, αφού η πυκνότητα περιέχεται στον υπολογισμό της παλμικής ταχύτητας κύματος c_0 και το ιξώδες περιέχεται στον υπολογισμό του αριθμού Womersley. Μάλιστα, φαίνεται χαρακτηριστικά στον πίνακα 3-6 πόσο πολύ μεταβάλλεται ο αριθμός W^2 από το ιξώδες.

Το ρευστό είναι μέρος του συστήματος του κλειστού βρόχου και οποιαδήποτε μεταβολή στις ιδιότητές του, όπως στην πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες, προκαλεί αλλαγή της ιδιοσυχνότητας του συστήματος. Η ιδιοσυχνότητα αυτή έχει υπολογιστεί για κάθε σύστημα (παράρτημα Α) και παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3-6. Για το σύστημα κλειστού βρόχου αγωγών όπου στο εσωτερικό τους ρέει γλυκερίνη 96% δεν υπάρχουν στοιχεία για την ιδιοσυχνότητά του καθώς δεν υφίσταται ελεύθερη ταλάντωση ύστερα από μία περίοδο αρχικής διέγερσης.

Στο διάγραμμα του σχήματος 3-11 αναπαριστάται γραφικά η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας του συστήματος σε συνάρτηση με το δυναμικό ιξώδες μ του κάθε ρευστού.

Παράμετρος	Ιδιοσυχνότητα		
	Str	W^2	f_0
Φυσικές ιδιότητες ρευστού			
Νερό	7.86	1504.7	15.02
Γλυκερίνη 60%	7.55	144.2	13.42
Γλυκερίνη 96%	-	-	-
Σουκρόζη 65.87%	6.49	8.0	10.79

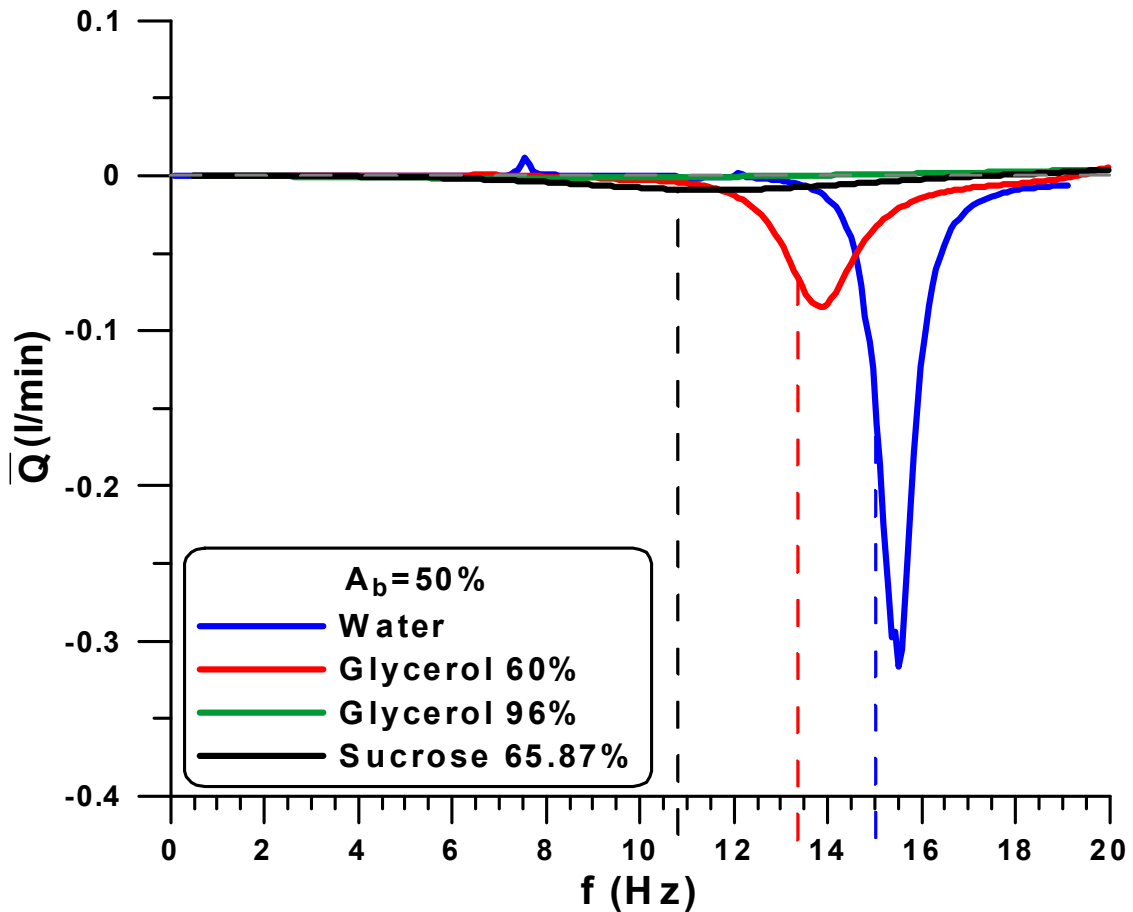
Πίνακας 3-6. Ιδιοσυχνότητα των διαφορετικών συστημάτων κλειστού βρόχου αγωγών που προκύπτουν με μεταβολή της παραμέτρου των φυσικών ιδιοτήτων (πυκνότητα, κινηματικό ιξώδες) του ρευστού.



Σχήμα 3-11. Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος συναρτήσει του δυναμικού ιξώδους.

Στο σχήμα 3-12 παρουσιάζεται το διάγραμμα με τις καμπύλες για τα διάφορα ρευστά του πίνακα 3-5, διατηρώντας σταθερά όλα τα υπόλοιπα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 3-1, για πλάτος συμπίεσης $A_b=50\%$.

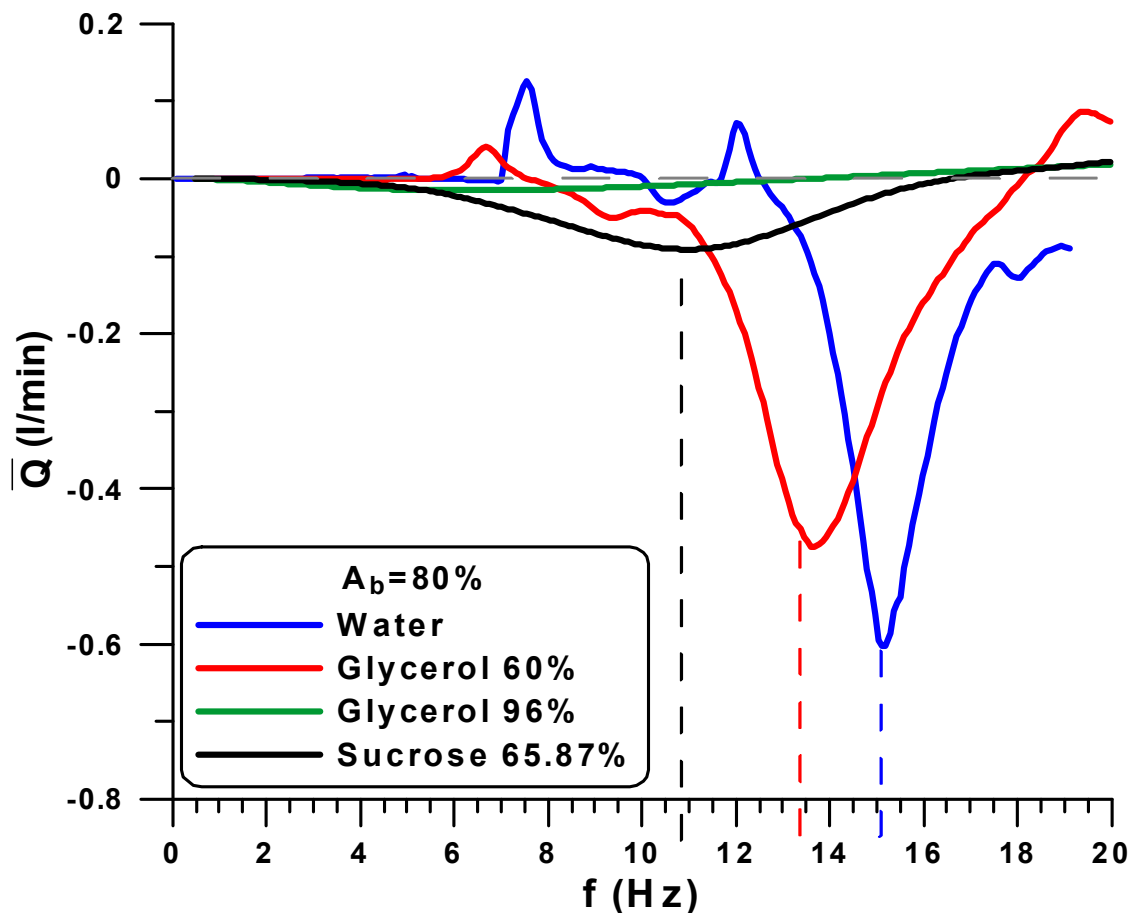
Από το ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πόσο σημαντικές παράμετροι είναι οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι τα μέγιστα των καμπυλών της μέσης χρονικά παροχής μειώνονται έντονα και εμφανίζονται σε μικρότερους αριθμούς συχνοτήτων, καθώς αυξάνουμε την πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες. Η εμφάνιση των μεγίστων σε μικρότερες συχνότητες οφείλεται στην αλλαγή της ιδιοσυχνότητας του υδραυλικού συστήματος (πίνακας 3-6). Τα μέγιστα είναι λογικό να μειώνονται τόσο πολύ, αφού το κινηματικό ιξώδες που χαρακτηρίζει τη ρευστότητα ενός υγρού αυξάνει πάρα πολύ με αποτέλεσμα να έχουμε ένα παχύρευστο υγρό το οποίο να αντλείται όλο και πιο δύσκολα. Παρατηρείται από το σχήμα 3-12, ότι η σουκρόζη 65.87% παρόλο που έχει μεγαλύτερη πυκνότητα απ' τη γλυκερίνη 96%, ωστόσο, καταφέρνει να διαμορφώσει ένα μέγιστο κοντά στα 10.8 Hz, όπου είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, λόγω του ότι έχει χαμηλότερο κινηματικό ιξώδες. Η γλυκερίνη 96% θεωρείται περίπτωση πολύ παχύρευστου υγρού και πυκνού υγρού, με αποτέλεσμα να μην αναπτύσσεται έντονα μη μηδενική μέση χρονικά παροχή.



Σχήμα 3-12. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$ και τέσσερα διαφορετικά ρευστά. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Για την περίπτωση με πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$, από το διάγραμμα (σχήμα 3-13), φαίνεται να επαληθεύονται τα παραπάνω συμπεράσματα, καθώς τα μέγιστα \bar{Q}_{max} μειώνονται με την αύξηση του κινηματικού ιξώδους. Η περίπτωση της παχύρρευστης γλυκερίνης 96% πάλι δεν αναπτύσσει σημαντικά μη μηδενική μέση χρονικά παροχή. Σε αυτό το πλάτος συμπίεσης, τα μέγιστα της καμπύλης του νερού και της γλυκερίνης 60% δεν έχουν τόσο μεγάλη διαφορά, όσο είχαν στην προηγούμενη περίπτωση.

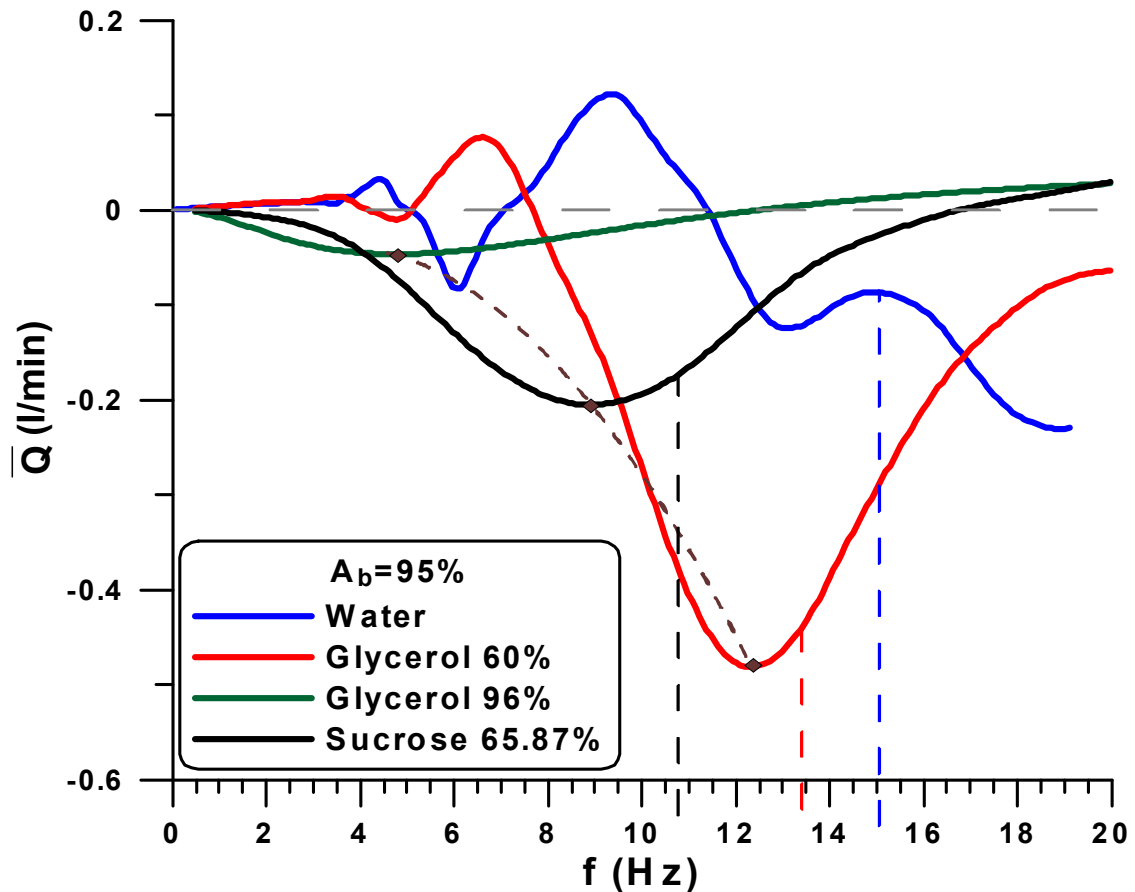
Ακόμα, για την περίπτωση του συστήματος με σουκρόζη φαίνεται η καμπύλη να κινείται μόνο προς την αρνητική φορά, σε αντίθεση με τις άλλες δύο περιπτώσεις (νερό, γλυκερίνη 60%) που αλλάζουν φορά για ένα μικρό εύρος συχνοτήτων. Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις πάντως το μέγιστο της αδιάστατης μέσης χρονικά παροχής εμφανίζεται περίπου κοντά στο σημείο συντονισμού (κάθετες διακεκομμένες γραμμές στο διάγραμμα του σχήματος 3-13).



Σχήμα 3-13. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και τέσσερα διαφορετικά ρευστά. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Για πλάτος συμπίεσης $A_b=95\%$, φαίνεται πλέον από το σχήμα 3-14 ότι ακόμα και το παχύρρεστο υγρό του διαλύματος της γλυκερόλης-νερού 96% αναπτύσσει μη μηδενική μέση χρονικά παροχή, με μέγιστο βέβαια σε πολύ μικρή συχνότητα.

Επίσης, από το ίδιο διάγραμμα του σχήματος 3-14 παρατηρούμε ότι η γλυκερόλη 60% με ελαφρώς μεγαλύτερη πυκνότητα και με δέκα περίπου φορές μεγαλύτερο κινηματικό ιξώδες από του νερού, παρουσιάζει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή μέγιστης παροχής από το νερό, γεγονός που δε συνέβη στα δύο προηγούμενα πλάτη συμπίεσης. Βέβαια, συγκρίνοντας τα τοπικά ακρότατα για τα δύο αυτά ρευστά σε χαμηλές συχνότητες κάτω του συντονισμού, παρατηρούμε ότι το νερό έχει μεγαλύτερη τιμή μέγιστης παροχής, όμως σε μεγαλύτερες συχνότητες το μέγιστο της καμπύλης του νερού υστερεί σημαντικά σε σχέση με το αντίστοιχο της γλυκερίνης 60%. Όμως, η καμπύλη του νερού δεν έχει αποκαλυφθεί για συχνότητα μετά τα 20 Hz, που είναι το όριο της συχνότητας όπου μελετάται το φαινόμενο.



Σχήμα 3-14. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ και τέσσερα διαφορετικά ρευστά. Με διακεκομμένη γραμμή ενώνονται τα μέγιστα της μέσης χρονικά παροχής των καμπυλών. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

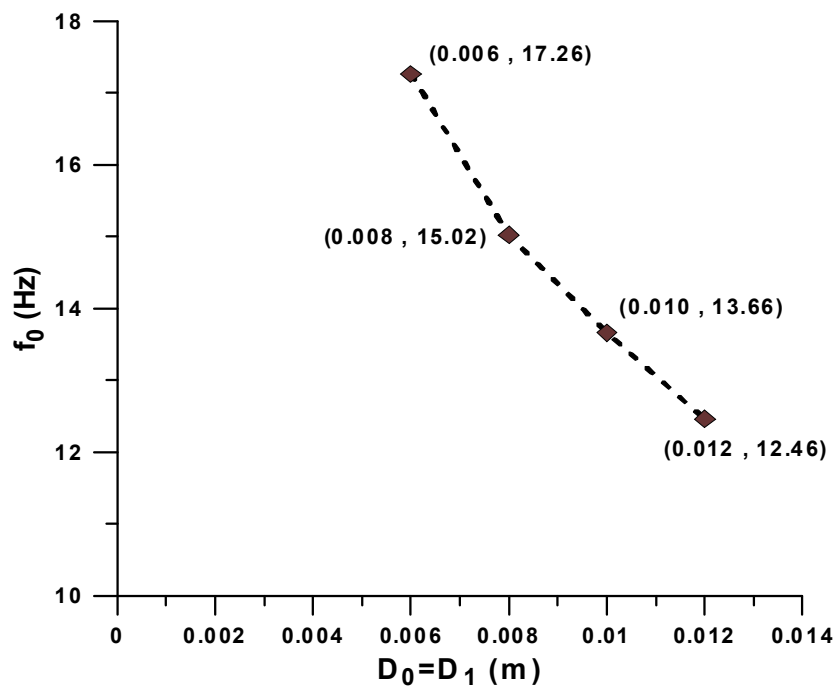
3.6 Επίδραση της διατομής του συστήματος του κλειστού βρόχου

Για την επίδραση της παραμέτρου της διατομής του κλειστού κυκλώματος χρησιμοποιούμε, πέραν της καμπύλης αναφοράς (πίνακας 3-1) όπου το σύστημα του εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού έχουν διάμετρο $D_0=D_1=0.008$ m, άλλα τρία συστήματα με αντίστοιχες διαμέτρους του κλειστού βρόχου τους: 0.006 m, 0.010 m και 0.012 m.

Στον πίνακα 3-7 παρατίθενται τα δεδομένα από την ιδιοσυχνότητα των συστημάτων που μελετώνται (παράρτημα Α). Στο διάγραμμα του σχήματος 3-15 αναπαριστάται γραφικά η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας του συστήματος σε συνάρτηση με τη διάμετρο του κλειστού βρόχου αγωγών.

Παράμετρος	Ιδιοσυχνότητα		
	Str	W^2	f_0
Διάμετρος κλειστού βρόχου αγωγών			
$D_0=D_1=0.006$ m	7.82	972.2	17.26
$D_0=D_1=0.008$ m	7.86	1504.7	15.02
$D_0=D_1=0.010$ m	7.99	2138.1	13.66
$D_0=D_1=0.012$ m	7.99	2809	12.46

Πίνακας 3-7. Ιδιοσυχνότητα των διαφορετικών συστημάτων κλειστού βρόχου αγωγών που προκύπτουν με μεταβολή της παραμέτρου των φυσικών ιδιοτήτων (πυκνότητα, κινηματικό ιξώδες) του ρευστού.

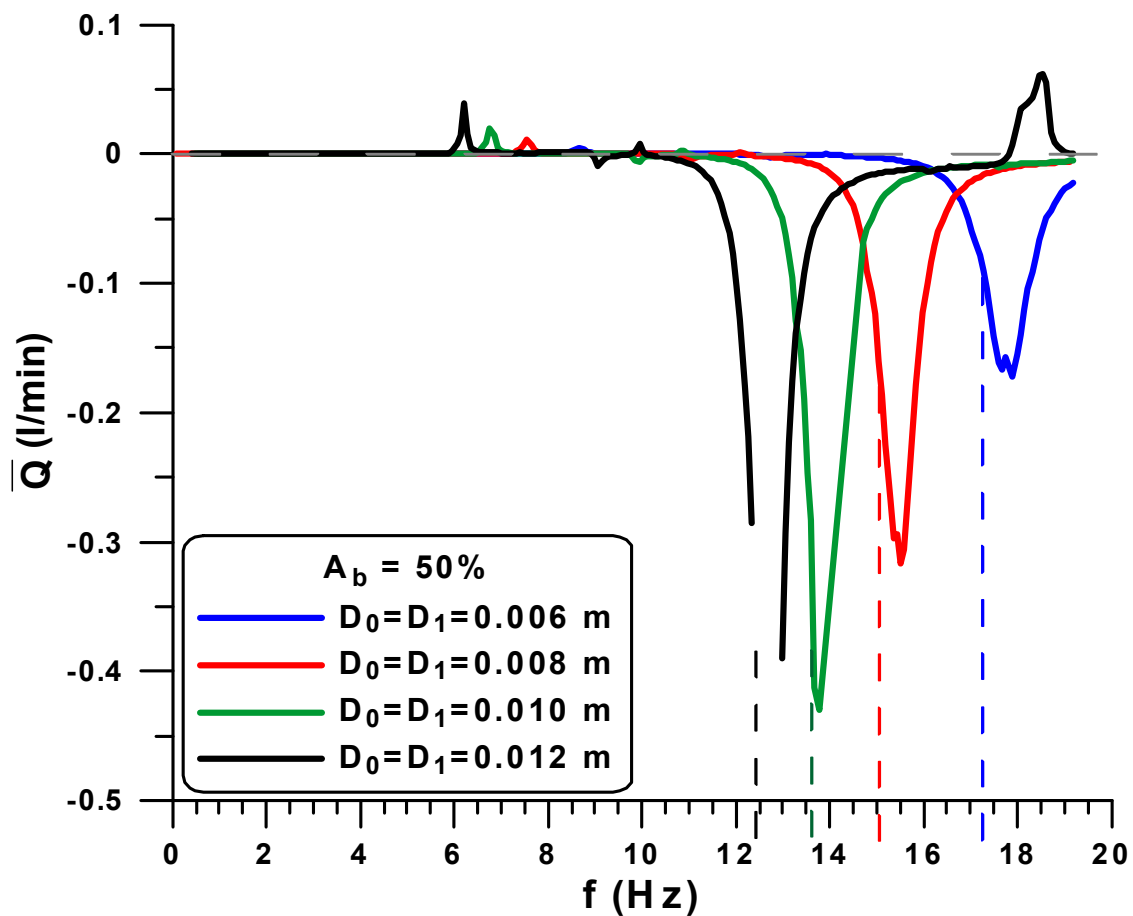


Σχήμα 3-15. Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος συναρτήσει της διαμέτρου του κλειστού βρόχου αγωγών.

Στο διάγραμμα του σχήματος 3-16 μελετάται η παράμετρος της διατομής του συστήματος για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$. Παρατηρείται ότι με την αύξηση της διαμέτρου του συστήματος του κλειστού βρόχου που αποτελείται από τον εύκαμπτο και τον άκαμπτο αγωγό, αυξάνονται τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{max} και μειώνεται η συχνότητα που εμφανίζονται. Η αύξηση των μεγίστων \bar{Q}_{max} πιθανώς να οφείλεται στην αντίστοιχη αύξηση του όγκου εμβολισμού, καθώς μεγαλώνει η διατομή, άρα και ο όγκος που εκτοπίζεται. Μάλιστα, επειδή μεγαλώνει η διατομή, συνεπώς και η ποσότητα του υλικού που είναι κατασκευασμένος ο αγωγός αλλά και ο όγκος του ρευστού που ρέει μέσα στο σύστημα, η ιδιοσυχνότητα του υδραυλικού συστήματος μεταβάλλεται, μετατοπίζοντας τα μέγιστα των καμπυλών σε χαμηλότερες συχνότητες.

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τόσο για τη συχνότητα κοντά στο σημείο συντονισμού όπου έχουμε τα μέγιστα \bar{Q}_{\max} όσο και για τις υποπολλαπλάσιες συχνότητες, όπου υπάρχει επίσης μία ανάπτυξη ροής προς την θετική φορά.

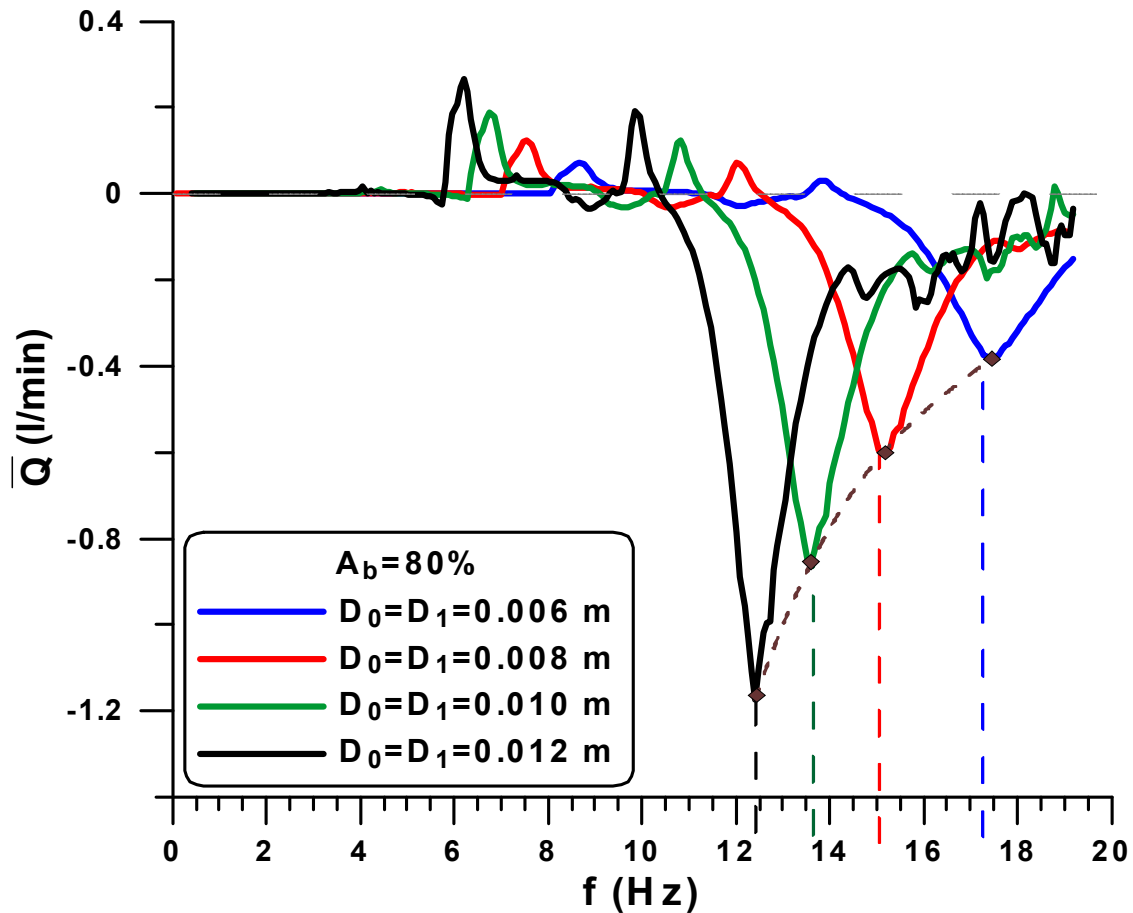
Για την περίπτωση του αγωγού με την μεγαλύτερη διάμετρο, παρατηρούμε στο διάγραμμα του σχήματος 3-16 ότι για το εύρος συχνοτήτων 12.3-12.9 Hz όπου σχηματίζει η καμπύλη το μέγιστο (συντονισμός), δεν υπάρχουν αποτελέσματα καθώς αδυνατεί να συγκλίνει η αριθμητική μέθοδος. Από την μορφή όμως που έχει προλάβει να σχηματιστεί είναι προφανές ότι πρόκειται για μία καμπύλη με μεγαλύτερο μέγιστο από τις υπόλοιπες.



Σχήμα 3-16. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$ και τέσσερις διαφορετικές διαμέτρους του κλειστού βρόγχου. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Εξετάζοντας τις τέσσερις αυτές περιπτώσεις με τις διαφορετικές διαστάσεις διαμέτρων, σε πλάτος συμπίεσης $A_b=80\%$ παρατηρούμε (σχήμα 3-17) να επαληθεύονται τα παραπάνω συμπεράσματα, με το φαινόμενο να είναι εντονότερο λόγω του γεγονότος ότι συμπιέζεται σε μεγαλύτερο βαθμό ο αγωγός.

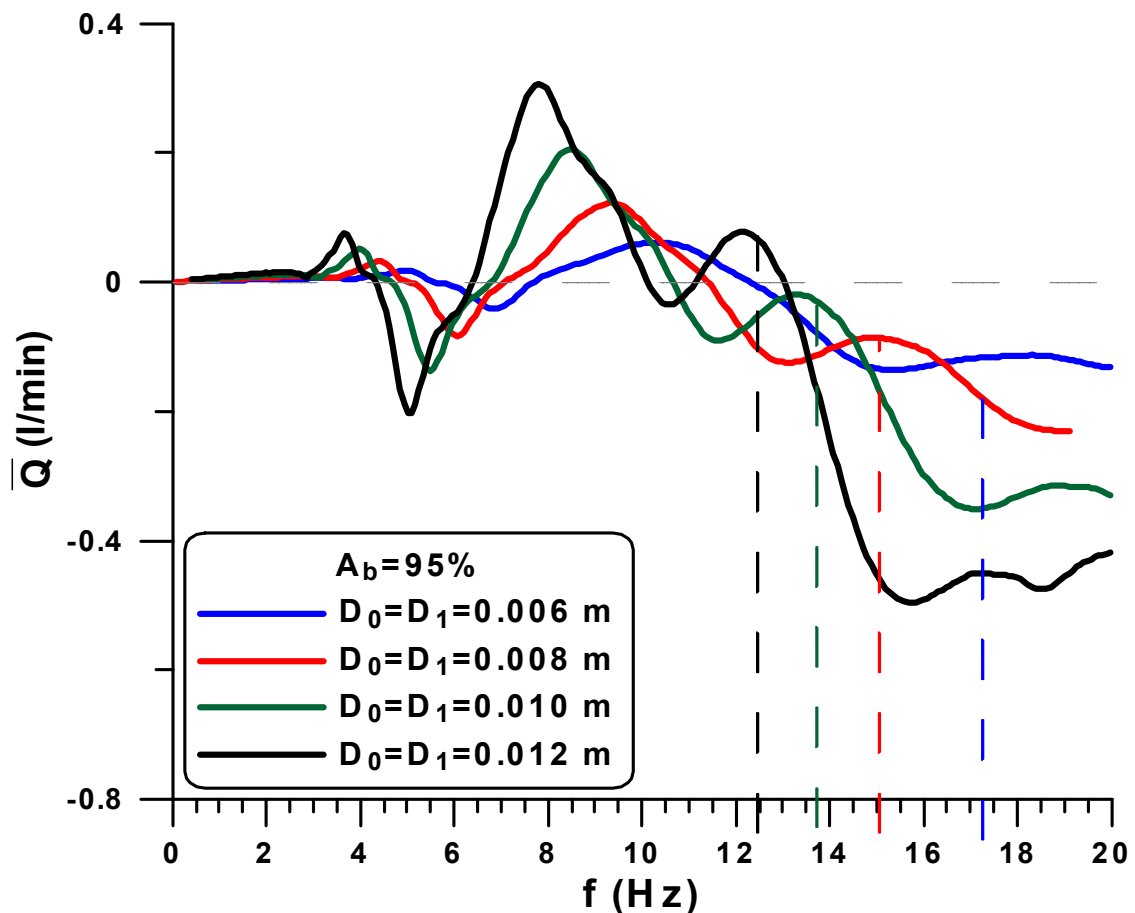
Φαίνεται μάλιστα να υπάρχει μία αναλογία στην μεταβολή της διαμέτρου, τόσο με την αντίστοιχη αύξηση στα μέγιστα όσο και με την μετατόπιση τους σε χαμηλότερες συχνότητες. Με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 3-17 ενώνονται τα μέγιστα της μέσης χρονικά παροχής των καμπυλών.



Σχήμα 3-17. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και τέσσερις διαφορετικές διαμέτρους του κλειστού βρόγχου. Η διακεκομμένη γραμμή ενώνει τα μέγιστα της μέσης χρονικά παροχής των καμπυλών και οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Σε πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ (σχήμα 3-18) η ροή αν και αλλάζει κατεύθυνση σε αρκετά διαστήματα, φαίνεται ότι ο κανόνας της μεγαλύτερης διατομής να παρουσιάζει μεγαλύτερα μέγιστα σε μικρότερες συχνότητες ισχύει σε όλο το πεδίο των συχνοτήτων που μελετήθηκε.

Συγκρίνοντας τις καμπύλες που σχηματίζονται για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και $A_b=95\%$, παρατηρούμε ότι τα μέγιστα \bar{Q}_{max} των καμπυλών είναι αρκετά μεγαλύτερα στην περίπτωση που το πλάτος συμπίεσης είναι 80% , και εμφανίζονται σε μεγαλύτερες συχνότητες. Αυτό βέβαια συμφωνεί με τη βιβλιογραφία [Μανόπουλος, 2009] όπου έχει μελετηθεί η παράμετρος του πλάτους συμπίεσης και φαίνεται ότι για πλάτος κοντά στο 75% έχουμε τα μέγιστα \bar{Q}_{max} .



Σχήμα 3-18. Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής \bar{Q} συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ και τέσσερις διαφορετικές διαμέτρους του κλειστού βρόγχου. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

3.7 Επίδραση της μεταβολής των χαρακτηριστικών μηκών του κλειστού βρόγχου αγωγών με σταθερές αναλογίες

Διατηρώντας σταθερή την αναλογία του σημείου και μήκους διέγερσης προς το συνολικό μήκος του αγωγού, και ίσα τα μήκη του εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού, δημιουργούμε τέσσερις περιπτώσεις οι οποίες έχουν ίσα αδιάστατα μήκη, αλλά διαφορετικά διαστατά μήκη. Η διατομή, καθώς και τα υπόλοιπα δεδομένα παραμένουν σταθερά, όπως περιγράφονται στον πίνακα 3-1.

Ουσιαστικά, πρόκειται για μία πολυπαραμετρική μελέτη, καθώς για κάθε περίπτωση αλλάζει η θέση και το μήκος διέγερσης, και τα μήκη του εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού, παράμετροι που έχουν μελετηθεί η καθεμία ξεχωριστά.

Από τον πίνακα 3-1 όπου έχουμε τα δεδομένα της καμπύλης αναφοράς, βάσει της οποίας θα προκύψουν οι αναλογίες που θα παραμείνουν σταθερές υπενθυμίζουμε ότι έχουμε:

Μήκος εύκαμπτου αγωγού	L_0	1 m
Μήκος άκαμπτου αγωγού	L_1	1 m
Συνολικό μήκος κλειστού κυκλώματος	L	2 m
Απόσταση κέντρου εφαρμογής της διέγερσης (θέση διέγερσης)	x_E	0.25 m
Μήκος διέγερσης	L_c	0.1 m

Επομένως, τα παραδείγματα που θα μελετηθούν θα έχουν:

$$L_c^* = \frac{L_c}{L_0 + L_1} = 0.1 \quad , \quad x_E^* = \frac{x_E}{L_0 + L_1} = 0.125 \quad \text{και} \quad L_0 = L_1.$$

Μεταβάλλοντας το διαστατό μήκος διέγερσης, υπολογίζεται αρχικά το μήκος του εύκαμπτου, άρα και του άκαμπτου αγωγού, και έπειτα το σημείο διέγερσης, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο τέσσερις περιπτώσεις, μαζί με την καμπύλη αναφοράς, με ίσα αδιάστατα μήκη τα οποία περιέχονται στις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις (2-54) έως και (2-57) που επιλύονται. Ακολουθεί ο πίνακας 3-8 με περιγραφή των χαρακτηριστικών μηκών των παραδειγμάτων που θα μελετηθούν.

Μήκος διέγερσης L_c	0.05	0.10	0.15	0.20
Μήκος εύκαμπτου αγωγού L_0	0.5	1.0	1.5	2.0
Μήκος άκαμπτου αγωγού L_1	0.5	1.0	1.5	2.0
Συνολικό μήκος κλειστού κυκλώματος L	1.0	2.0	3.0	4.0
Θέση διέγερσης x_E	0.125	0.250	0.375	0.500

Πίνακας 3-8. Αριθμητικά δεδομένα για τις τέσσερις περιπτώσεις με μεταβολή των χαρακτηριστικών τους μηκών με σταθερές αναλογίες.

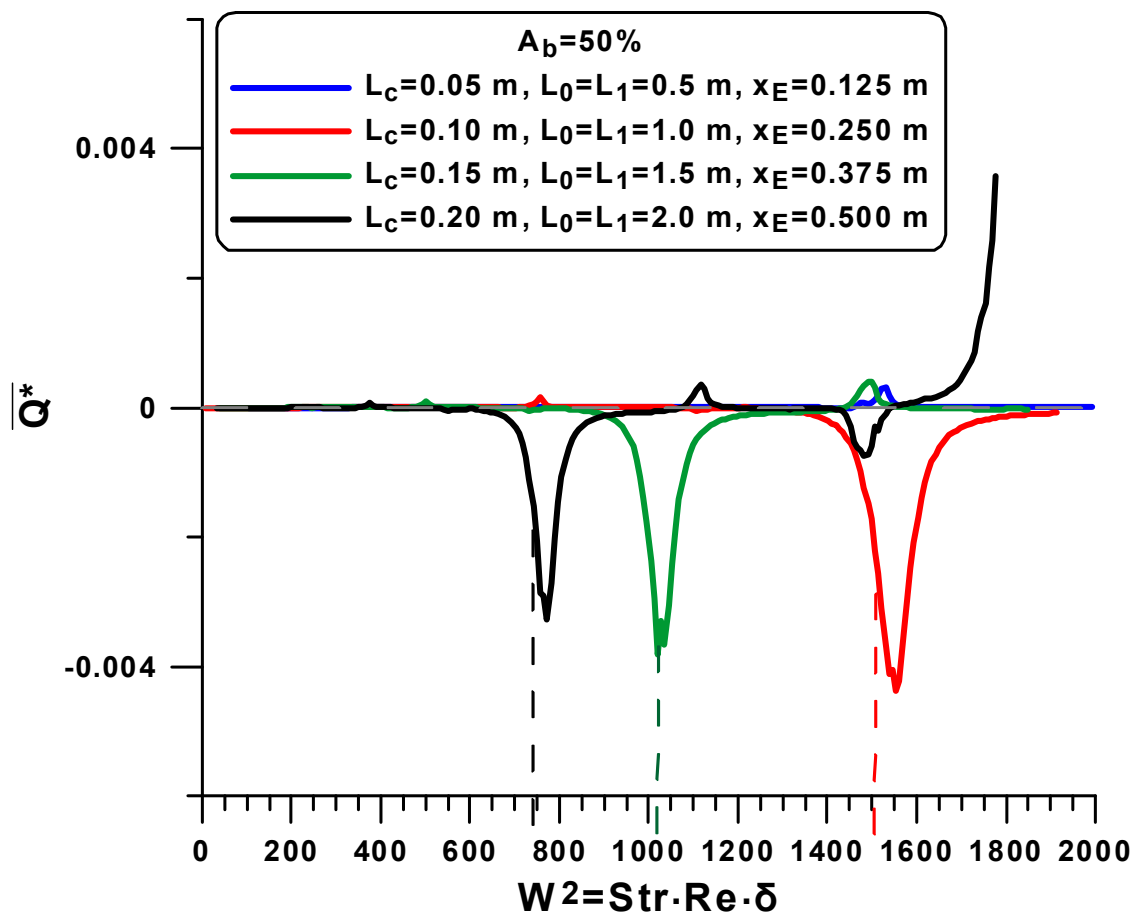
Ακολουθεί ο πίνακας 3-9 όπου παρουσιάζεται η ιδιοσυχνότητα (παράρτημα-A) των συστημάτων που θα μελετηθούν.

Παράμετρος	Ιδιοσυχνότητα		
	Str	W^2	f_0
<i>Συμμεταβολή χαρακτηριστικών μηκών του βρόχου</i>			
$L_c=0.05$ m, $L_0=L_1=0.5$ m, $x_E=0.125$ m	7.90	3025	30.20
$L_c=0.10$ m, $L_0=L_1=1.0$ m, $x_E=0.250$ m	7.86	1504.7	15.02
$L_c=0.15$ m, $L_0=L_1=1.5$ m, $x_E=0.375$ m	7.90	1008.1	10.07
$L_c=0.20$ m, $L_0=L_1=2.0$ m, $x_E=0.500$ m	7.78	744.2	7.43

Πίνακας 3-9. Ιδιοσυχνότητα των διαφορετικών συστημάτων κλειστού βρόχου αγωγών που προκύπτουν με μεταβολή της παραμέτρου των φυσικών ιδιοτήτων (πυκνότητα, κινηματικό ιξώδες) του ρευστού.

Από το σχήμα 3-19 όπου μελετάται η παράμετρος των όμοιων μηκών, για πλάτος συμπίεσης $A_b=50\%$, παρατηρούμε ότι στο εύρος του αριθμού W^2 που εξετάζουμε (αντιστοιχεί σε 20 Hz περίπου) δεν έχει προλάβει να αναπτυχθεί σημαντική μη μηδενική μέση χρονικά παροχή στον αγωγό με το μικρότερο μήκος διέγερσης και μικρότερο συνολικό μήκος κλειστού βρόγχου. Όπως, φαίνεται και στον πίνακα 3-9 η ιδιοσυχνότητα του συγκεκριμένου συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών είναι σε πολύ υψηλή συχνότητα 30.2 Hz ($W^2=3025$), ενώ παρουσιάζονται αποτελέσματα μέχρι $W^2=2000$ περίπου, τιμή μέχρι την οποία μελετάται το φαινόμενο.

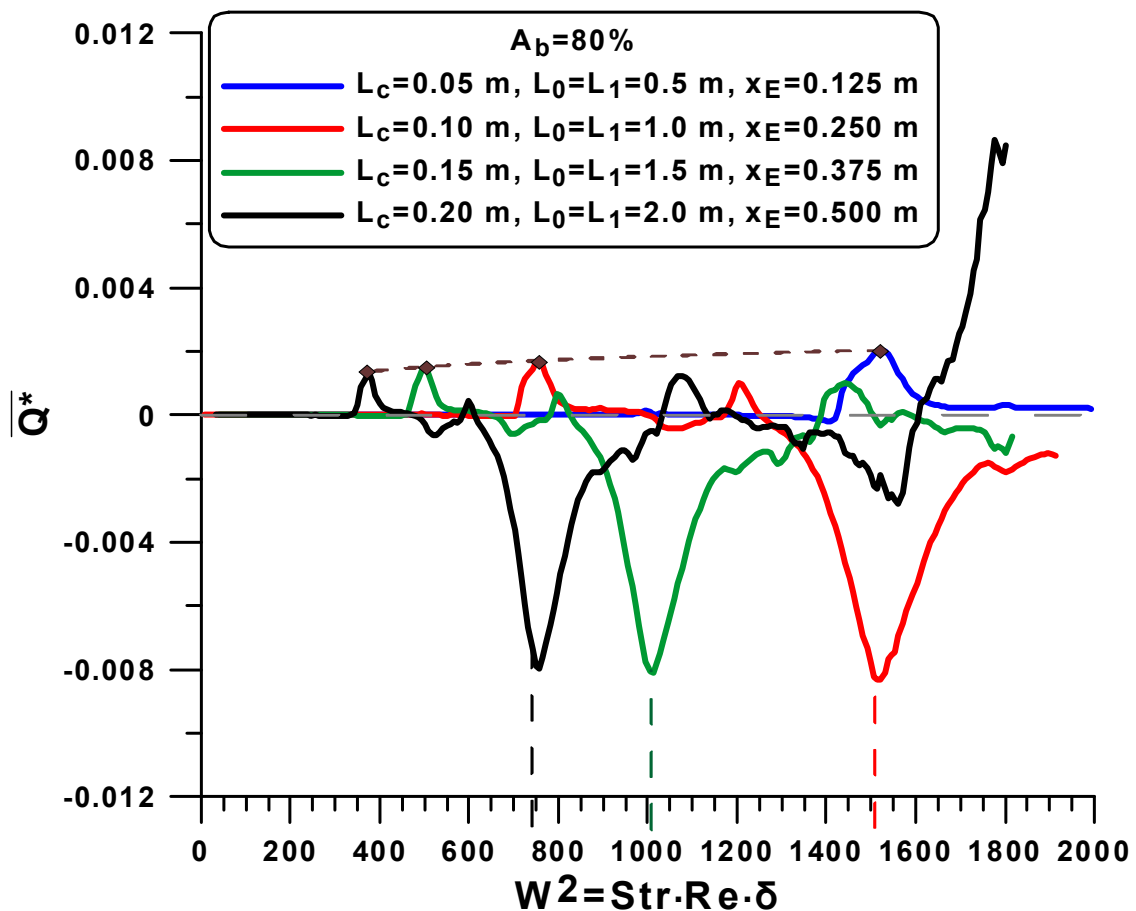
Οι υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις παρουσιάζουν περίπου ίσα αδιάστατα μέγιστα παροχής \bar{Q}_{max}^* , με μία ελαφριά υπεροχή της περίπτωσης με το μικρότερο μήκος διέγερσης. Διαφέρουν δε ως προς τη συχνότητα εμφάνισης των μεγίστων, το οποίο είναι απολύτως λογικό καθώς σε διαστατά μεγέθη έχουν σημαντική απόκλιση στο συνολικό μήκος του αγωγού, άρα και στην ιδιοσυχνότητα.



Σχήμα 3-19. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=50\%$ και τέσσερα διαφορετικά συστήματα με σταθερές αναλογίες χαρακτηριστικών μηκών. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Στην περίπτωση του πλάτους διέγερσης $A_b=80\%$, φαίνεται (σχήμα 3-20) από τα πρώτα τοπικά ακρότατα που σχηματίζουν οι καμπύλες προς τη θετική κατεύθυνση (ενώνονται με διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα του σχήματος 3-20), ότι υπάρχει σημαντική μετατόπιση των μεγίστων \bar{Q}_{\max}^* σε μικρότερες συχνότητες καθώς αυξάνεται το μήκος διέγερσης και άρα το μήκος του συνολικού συστήματος. Έτσι, η περίπτωση με το μικρότερο μήκος προλαβαίνει να αναπτύξει στις συχνότητες μελέτης μόνο ένα τοπικό ακρότατο, ενώ ο αγωγός με το μεγαλύτερο συνολικό μήκος, εμφανίζει και ένα επιπλέον τοπικό ακρότατο στα θετικά σε συχνότητα μεγαλύτερη από αυτή του συντονισμού.

Όσον αφορά τα μέγιστα \bar{Q}_{\max}^* των καμπυλών κοντά στη τιμή της ιδιοσυχνότητάς τους φαίνεται να είναι ίσα μεταξύ τους.

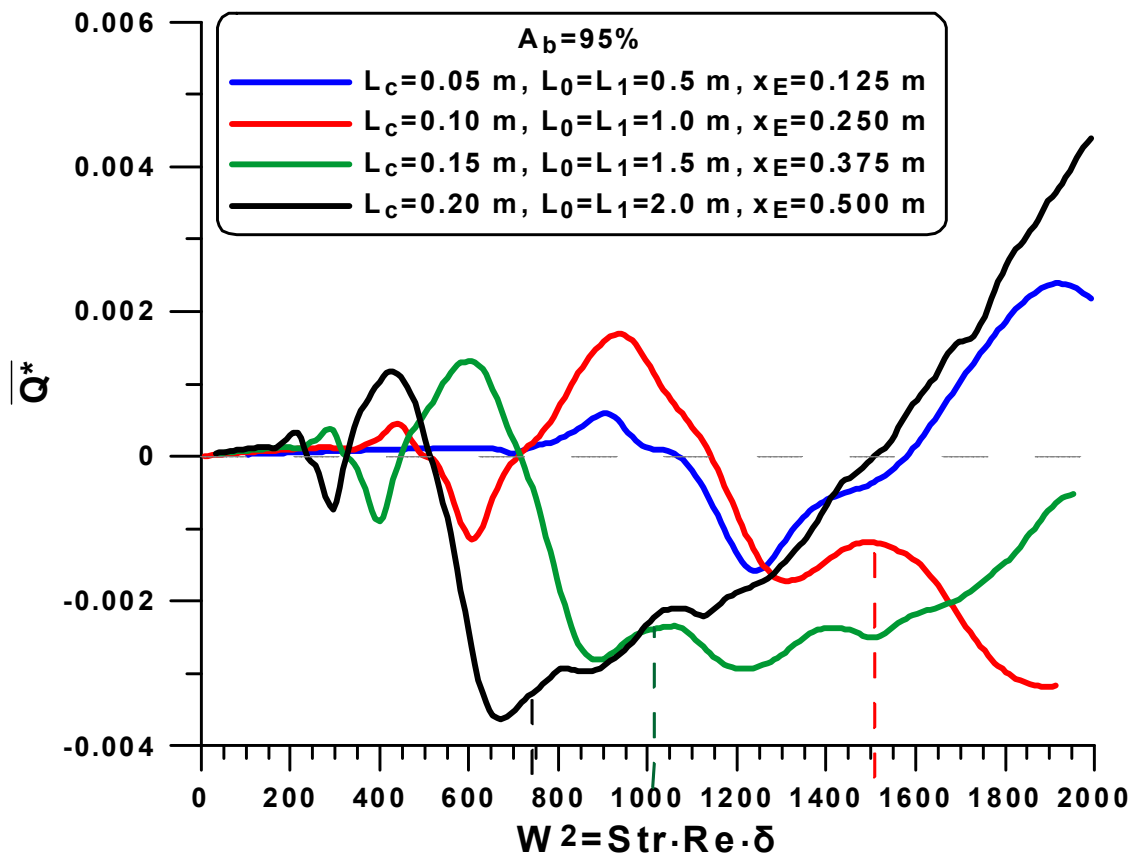


Σχήμα 3-20. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ και τέσσερα διαφορετικά συστήματα με σταθερές αναλογίες χαρακτηριστικών μηκών. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Όπως αναφέρθηκε πρόκειται για μία πολυπαραμετρική μελέτη, καθώς μεταβάλλεται τόσο το μήκος και η θέση διέγερσης όσο και τα μήκη των εύκαμπτων και άκαμπτων αγωγών. Έτσι, μπορούμε να δούμε εδώ με τη συμμεταβολή των παραπάνω παραμέτρων αν επιβεβαιώνονται συνολικά τα αποτελέσματα που είχαν προκύψει από την εξέταση της κάθε παραμέτρου ξεχωριστά. Σχετικά με το μήκος και

τη θέση διέγερσης βέβαια, επειδή η παραμετρική μελέτη που έχει γίνει [Μανόπουλος, 2009] αφορά τα αδιάστατα μεγέθη τους, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίσα, δεν μπορεί να βγει κάποιο συμπέρασμα. Όμως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα συμπεράσματα από τη μεταβολή του μήκους του εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού. Υπενθυμίζεται ότι τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{\max}^* μειώνονται και παρουσιάζονται σε μικρότερους αριθμούς συχνότητων, καθώς αυξάνεται το μήκος του εύκαμπτου αγωγού L_0 [Μανόπουλος, 2009]. Επίσης, τα μέγιστα των καμπυλών \bar{Q}_{\max}^* αυξάνονται και παρουσιάζονται σε μικρότερους αριθμούς συχνότητων, καθώς αυξάνεται το μήκος του άκαμπτου αγωγού L_1 [παράγραφος 3.4]. Άρα, συνολικά παρατηρώντας τα αποτελέσματα από την εξέταση των προηγούμενων παραμέτρων είναι αναμενόμενη μία σχετική σταθερότητα στις τιμές των μεγίστων των καμπυλών \bar{Q}_{\max}^* , και μία έντονη μετατόπιση προς μικρότερες συχνότητες καθώς αυξάνονται και τα δύο τμήματα του αγωγού (εύκαμπτο και άκαμπτο).

Για την περίπτωση με πλάτος συμπίεσης $A_b=95\%$ φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 3-21 ότι η καμπύλη με το μικρότερο μήκος διέγερσης αναπτύσσει παρόμοια μέση χρονικά παροχή με τις άλλες περιπτώσεις, σε συχνότητες όμως πολύ μεγαλύτερες. Γενικά όμως επαληθεύεται το γεγονός ότι χρησιμοποιώντας ίσα αδιάστατα μήκη για διαφορετικές περιπτώσεις μηκών διέγερσης, η μέγιστη παροχή είναι περίπου ίδια και μετατοπισμένη στις συχνότητες που ορίζει η ιδιοσυχνότητα των νέων διαστατών μηκών.



Σχήμα 3-21. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής \bar{Q}^* συναρτήσει της συχνότητας f για πλάτος διέγερσης $A_b=95\%$ και τέσσερα διαφορετικά συστήματα με σταθερές αναλογίες χαρακτηριστικών μηκών. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

3.8 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης του βελτιωμένου μονοδιάστατου μοντέλου που αναπτύχθηκε στο 2^ο κεφάλαιο, καθώς εφαρμόζεται για να προσομοιάσει το φαινόμενο της άντλησης χωρίς βαλβίδες σε κλειστό κύκλωμα. Υπενθυμίζεται ότι η γεωμετρία του μοντέλου που χρησιμοποιείται συνίσταται από δύο ελαστικούς αγωγούς διαφορετικών μέτρων ελαστικότητας, έναν εύκαμπτο και έναν άκαμπτο, οι οποίοι σχηματίζουν κλειστό βρόχο. Οι αγωγοί είναι πληρωμένοι με ασυμπιεστο ρευστό και μία περιοδική δύναμη δρα εξωτερικά σε τμήμα του εύκαμπτου αγωγού, προκαλώντας τη συμπίεση και αποσυμπίεσή του, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μη μόνιμης ροής εντός του βρόχου.

Παρουσιάζονται αποτελέσματα για πολλές παραμέτρους που επηρεάζουν τη μέση χρονικά παροχή, όπως το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού, το μήκος του άκαμπτου αγωγού, οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού, η διάμετρος του συστήματος, η συμμεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών του βρόχου σε σταθερές αναλογίες. Για τα μικρότερα πλάτη συμπίεσης φαίνεται ότι η μέση χρονικά παροχή μεγιστοποιείται κοντά στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου. Μία εξήγηση της μετατόπισης του μέγιστου σε διαφορετικές συχνότητες από αυτές που είναι πλησίον της ιδιοσυχνότητας για τα υψηλά πλάτη διέγερσης, μπορεί να βασιστεί στην ίδια έννοια του συντονισμού. Δηλαδή, για αυτό το διάστημα πλάτους διέγερσης ($90\% \leq A_b \leq 97\%$), λόγω της έντονης συμπίεσης ενός τμήματος του εύκαμπτου αγωγού ίσο με L_c με πολύ υψηλή συχνότητα, το αποκρινόμενο τμήμα του εύκαμπτου αγωγού ουσιαστικά μειώνεται από L_0 σε $(L_0 - L_c)$ με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ιδιοσυχνότητα του υδραυλικού συστήματος και συνεπώς τα μέγιστα της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής να μετατοπίζονται σε μεγαλύτερες συχνότητες.

Σε κάποιες περιπτώσεις για συχνότητες μικρότερες της ιδιοσυχνότητας παρουσιάζονται διάφορα άλλα τοπικά ακρότατα με μικρότερες όμως τιμές, που οφείλονται σε φαινόμενα υποαρμονικού συντονισμού.

Γενικά, με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και μετατοπίζεται σε μεγαλύτερους αριθμούς συχνοτήτων. Με την αύξηση του μήκους του άκαμπτου αγωγού, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και το μέγιστό της εμφανίζεται σε μικρότερους αριθμούς συχνοτήτων, μόνο για χαμηλά πλάτη διέγερσης. Χρησιμοποιώντας πιο παχύρευστο και πυκνό υγρό μειώνεται αισθητά το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής. Με την αύξηση της διατομής του συστήματος, αυξάνεται το μέγιστο της μέσης χρονικά παροχής και μειώνεται η συχνότητα όπου εμφανίζεται. Για την περίπτωση των συστημάτων με σταθερές αναλογίες μηκών παρατηρείται ότι τα μέγιστα της μέσης χρονικά παροχής, για όλα τα πλάτη διέγερσης εκτός από τα υψηλά, είναι περίπου ίσα και εμφανίζονται στην ιδιοσυχνότητα του κάθε συστήματος.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2^η

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΧΩΡΙΣ
ΒΑΛΒΙΔΕΣ ΣΤΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ, ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύχθηκε το φαινόμενο άντλησης ασυμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες και η επίδρασή του από κάποιες παραμέτρους. Στη 2^η ενότητα θα γίνει η επέκταση του φαινομένου άντλησης χωρίς βαλβίδες στο συμπιεστό ρευστό αφού πρώτα παρουσιαστεί μία αριθμητική δοκιμή του κώδικα επίλυσης των εξισώσεων του συμπιεστού ρευστού.

Για τη μελέτη άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες μέσω αλληλεπίδρασης μεταξύ ροής ρευστού και του κινούμενου τοιχώματος του αγωγού στο σημείο διέγερσης αναπτύσσεται ρευστομηχανικό μοντέλο, το οποίο διαμορφώνεται ως προς τις οριακές συνθήκες και ως προς τη γεωμετρία ανάλογα με το φαινόμενο που χρειάζεται να περιγραφεί. Οι εξισώσεις του αναπτυσσόμενου μοντέλου περιγράφουν τη συμπεριφορά της ροής συμπιεστού ρευστού, αλλά και τη συμπεριφορά του κινούμενου τοιχώματος. Συνεπώς, εκτός από τις ρευστομηχανικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται και εξισώσεις μηχανικής στερεού παραμορφώσιμου σώματος.

Οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής βασίζονται σε δύο αξιωματικούς νόμους διατήρησης (για το συμπιεστό ρευστό). Το νόμο διατήρησης της μάζας και το νόμο διατήρησης της ορμής. Από την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Ο νόμος διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εξισώσεις αυτές και διαμορφώνονται κατάλληλα μέσα από παραδοχές, θεωρήσεις και μετασχηματισμούς, ώστε να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή του αναπτυσσόμενου μοντέλου.

4.2 Εξισώσεις μονοδιάστατης ανάλυσης συμπιεστού ρευστού σε αγωγό με μεταβλητή διατομή

Το σχεδόν μονοδιάστατο ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται και επιλύεται, βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής με σταθερή τη θερμοκρασία του ρευστού. Το ρευστό είναι συμπιεστό (αέρας) επομένως η πυκνότητά του μεταβάλλεται κατά μήκος αγωγού. Επίσης, θεωρείται ότι ο αγωγός είναι μεταβλητής διατομής.

Η εξίσωση της συνέχειας για συμπιεστό ρευστό εντός αγωγού με μεταβλητή διατομή σε περιγραφή κατά Euler και για μονοδιάστατη ανάλυση της ροής έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot A \cdot u) = 0 \quad (4-1)$$

Η εξίσωση της ορμής για συμπιεστό ρευστό σε αγωγό με μεταβλητή διατομή, με μηδενικούς ιξώδεις όρους και για μονοδιάστατη ανάλυση της ροής, για περιγραφή κατά Euler έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot A \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot A \cdot u^2) + A \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4-2)$$

όπου: u είναι η ταχύτητα του ρευστού κατά την αξονική x κατεύθυνση με $u=u(x, t)$.

p είναι η πίεση του ρευστού με $p=p(x, t)$.

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού με $\rho=\rho(x, t)$.

A είναι η διατομή του αγωγού με $A=A(x, t)$.

Αναλύοντας τη μερική χρονική και χωρική παράγωγο της εξίσωσης της συνέχειας (4-1) έχουμε:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + (u \cdot A) \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\rho \cdot u) \frac{\partial A}{\partial x} + (\rho \cdot A) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-3)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, η εξίσωση (4-3) γίνεται:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + (A \cdot u) \frac{\partial \rho}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + (\rho \cdot u) \frac{\partial A}{\partial x} + (\rho \cdot A) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-4)$$

Θέτοντας κοινό παράγοντα τη χρονική και τις χωρικές παραγώγους της διατομής και ταχύτητας, η εξίσωση (4-4) γίνεται:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial A} A + \rho \right) \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial A} A + \rho \right) u \frac{\partial A}{\partial x} + (\rho \cdot A) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-5)$$

Τελικά, η εξίσωση της συνέχειας για συμπιεστό ρευστό σε μεταβλητή διατομή έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\rho \cdot A}{\frac{\partial \rho}{\partial A} A + \rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-6)$$

Ομοίως, αναλύοντας τη μερική χρονική και χωρική παράγωγο της εξίσωσης της ορμής (4-2) έχουμε:

$$u \frac{\partial (\rho \cdot A)}{\partial t} + (\rho \cdot A) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial (\rho \cdot A \cdot u)}{\partial x} + (\rho \cdot A \cdot u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4-7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση της συνέχειας (4-1) στη σχέση (4-7) προκύπτει:

$$(\rho \cdot A) \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho \cdot A \cdot u) \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4-8)$$

Επειδή η διατομή του συστήματος θεωρείται ότι δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο, έχουμε την εξής μορφή για την εξίσωση της ορμής για συμπιεστό ρευστό σε αγωγό με μεταβλητή διατομή και με μηδενικούς ιξώδεις όρους:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4-9)$$

Κατά τη μελέτη της ροής μέσα από τμήματα αγωγών που συρρικνώνονται έντονα, έχουμε ανάπτυξη διαφορών φαινομένων της ροής πέρα από την τριβή, όπως είναι η τύρβη και η αποκόλληση της ροής. Στην 1^η Ενότητα όπου μελετήθηκε το φαινόμενο άντλησης ασυμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες, οι όροι που συμμετείχαν στην ανάπτυξη τέτοιων φαινομένων είχαν μοντελοποιηθεί σύμφωνα με τη θεωρία Womersley. Χρησιμοποιώντας την παραδοχή ότι οι επιπλέον όροι που είχαν προκύψει από τη θεωρία Womersley για ασυμπίεστο ρευστό μπορούν να μοντελοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο και για το συμπιεστό ρευστό, η εξίσωση της ορμής (4-9) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} + \frac{K_t}{2L} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right)^2 u |u| = 0 \quad (4-10)$$

όπου: ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

L είναι το μήκος του φωνητικού σωλήνα.

L_c είναι το μήκος διέγερσης του αγωγού στην περιοχή της γλωττίδας.

A_{\min} είναι η ελάχιστη διατομή στο μέσον της συρρίκνωσης.

C_u , C_v και K_t είναι αδιάστατοι συντελεστές (§2.5, 1^η Ενότητα).

4.3 Ισεντροπική μεταβολή

Από τις εξισώσεις της συνέχειας (4-6) και της ορμής (4-10) τα άγνωστα μεγέθη που πρέπει να υπολογιστούν είναι η μέση στη διατομή ταχύτητα του ρευστού $u(x, t)$, η μέση στη διατομή πίεση του ρευστού $p(x, t)$, η μέση στη διατομή πυκνότητα του ρευστού $\rho(x, t)$ και η εγκάρσια διατομή του αγωγού $A(x, t)$. Επομένως, χρειάζονται τουλάχιστον δύο επιπλέον εξισώσεις για τον υπολογισμό αυτών των αγνώστων μεγεθών.

Μία εξίσωση που μειώνει τα άγνωστα μεγέθη κατά ένα καθώς συνδέει την πίεση με την πυκνότητα βρίσκεται από τον νόμο της ισεντροπικής μεταβολής. Μία μεταβολή είναι ισεντροπική αν είναι αδιαβατική, δηλαδή δε συναλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον, και αντιστρεπτή, δηλαδή μπορεί να επανέλθει απ' την τελική κατάσταση στις ίδιες αρχικές συνθήκες. Στην πραγματικότητα καμία μεταβολή στη φύση δεν είναι αντιστρεπτή.

Θεωρούμε ότι το φαινόμενο της άντλησης χωρίς βαλβίδες πραγματοποιείται ισεντροπικά. Επίσης, θεωρώντας ότι το συμπιεστό ρευστό είναι ιδανικό αέριο και διατηρεί σταθερή τη θερμοκρασία του, ο λόγος θερμοχωρητικότητας γ παραμένει σταθερός και ο νόμος της ισεντροπικής μεταβολής έχει τη μορφή:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = k = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \quad (4-11)$$

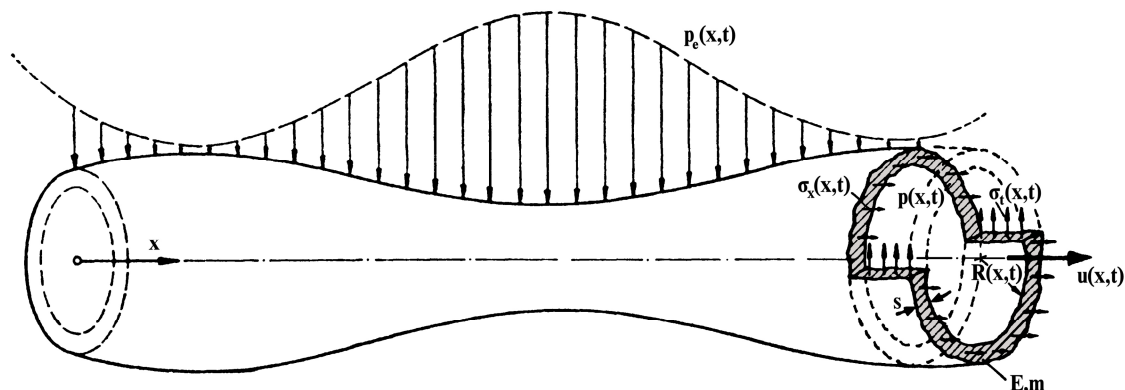
όπου: p_0 είναι η πίεση του ρευστού στην ατμόσφαιρα.

ρ_0 είναι η πυκνότητα του ρευστού στην ατμόσφαιρα.

Επειδή το ρευστό που μελετάται είναι ο αέρας και η θερμοκρασία περιβάλλοντος θεωρείται σταθερή και ίση με 20°C , ο λόγος θερμοχωρητικότητας είναι $\gamma=1.4$, η πυκνότητα του αέρα στο περιβάλλον είναι $\rho_0=1.2041 \text{ kg/m}^3$ και η πίεση του αέρα στο περιβάλλον είναι $p_0=101325 \text{ Pa}$.

4.4 Διαμόρφωση πίεσης με βάση την εγκάρσια διατομή εύκαμπτου αγωγού

Μία επιπλέον σχέση του συστήματος που πρόκειται να επιλυθεί προέρχεται από μία καταστατική εξίσωση μεταξύ της μεταβλητής διατομής του αγωγού και της εσωτερικής διαμορφούμενης πίεσης του ρευστού. Για την κατάστρωση αυτής της καταστατικής εξίσωσης θεωρείται ο λεπτότοιχος αγωγός με αξονική συμμετρία του σχήματος 4-1. Λεπτότοιχος θεωρείται ένας αγωγός όταν το πάχος του s είναι το 10% της ακτίνας του R_0 , [Κερμανίδης, 1988]. Σε αυτήν την περίπτωση το τοίχωμα του αγωγού θεωρείται ως μεμβράνη, η οποία αν στο εσωτερικό του αγωγού επικρατεί πίεση $p(x, t)$ και στο εξωτερικό του η πίεση περιβάλλοντος $p_e(x, t)$, τότε καταπονείται μόνο με εφελκυστικές ή θλιπτικές ορθές τάσεις εφαπτομενικές στο επίπεδό της, οι οποίες θεωρούνται σταθερές κατά το πάχος επειδή αυτό είναι σχετικά μικρό.



Σχήμα 4-1. Εντατική κατάσταση στο τοίχωμα λεπτού ελαστικού σωλήνα κατόπιν επιβολής διατοχωματικής πίεσης, [Rath, 1978].

Η ζητούμενη καταστατική εξίσωση μεταξύ της εσωτερικής διαμορφούμενης πίεσης του ρευστού και της μεταβλητής διατομής του εύκαμπτου αγωγού είναι η ακόλουθη, όπως έχει προκύψει στην 1^η Ενότητα (2^ο κεφάλαιο) για το φαινόμενο άντλησης ασυμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες:

$$p = p_e + \frac{Es}{R_0(1-m^2)} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (4-12)$$

Πιο απλοποιημένη μορφή της παραπάνω εξίσωσης επιτυγχάνεται με χρήση της παλμικής ταχύτητας κύματος c_0 (pulse wave velocity), η οποία εκφράζει την ταχύτητα διάδοσης του κύματος πίεσης σε εύκαμπτο αγωγό συναρτήσει των χαρακτηριστικών των υλικών του ρευστού και του τοιχώματος του αγωγού, καθώς και της γεωμετρίας του εύκαμπτου αγωγού. Η ταχύτητα αυτή εξάγεται μέσω της εξίσωσης Moens-Korteweg, [Moens, 1878] και [Korteweg, 1878] και περιγράφεται από τη σχέση:

$$c_0 = \sqrt{\frac{Es}{2\rho_0 R_0(1-m^2)}} \quad (4-13)$$

Όταν λαμβάνεται υπόψη και ο λόγος Poisson m , [Bergel, 1961] και [Rath, 1978].

Συνδυάζοντας κατάλληλα την εξίσωση (4-12) και (4-13) προκύπτει:

$$p = p_e + 2\rho_0 c_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (4-14)$$

Αντικαθιστώντας την πίεση της σχέσης (4-14) από την πίεση που δίνεται από τη σχέση της ισεντροπικής μεταβολής (4-11) και επιλύοντας ως προς την πυκνότητα προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_e + \beta \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \\ \frac{p}{\rho^\gamma} &= k \end{aligned} \right\} \Rightarrow k\rho^\gamma = p_e + \beta \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \Rightarrow \rho = \left[\frac{p_e}{k} + \frac{\beta}{k} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \right]^{1/\gamma} \quad (4-15)$$

όπου: $\beta = 2\rho_0 c_0^2$.

Παραγωγίζοντας την πυκνότητα ρ της σχέσης (4-15) ως προς την διατομή A έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial A} = \frac{\beta}{2\gamma k} \left[\frac{p_e}{k} + \frac{\beta}{k} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \right]^{1-\gamma} \frac{\sqrt{A_0}}{\sqrt{A^3}} \quad (4-16)$$

Και αντικαθιστώντας στη σχέση (4-16) τις (4-11) και (4-14) προκύπτει τελικά:

$$\frac{\partial \rho}{\partial A} = \frac{\beta}{2\gamma} \frac{\rho}{p} \sqrt{\frac{A_0}{A^3}} \quad (4-17)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4-17) στην εξίσωση (4-6) προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης της συνέχειας:

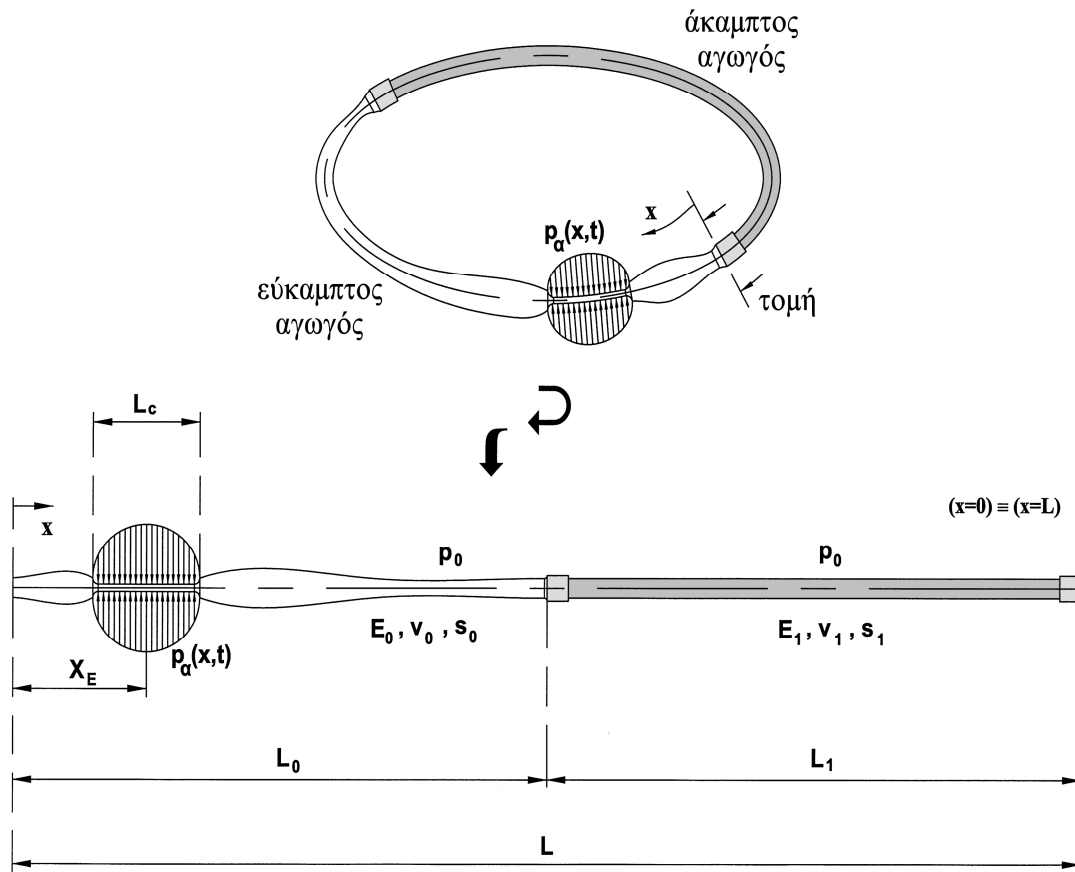
$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{A}{\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \frac{1}{p} \sqrt{\frac{A_0}{A}} + 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-18)$$

Η καταστατική εξίσωση (4-14) μαζί με τις εξισώσεις ορμής (4-10), συνέχειας (4-18) και ισεντροπικής μεταβολής (4-11) αποτελούν σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, την ταχύτητα του ρευστού $u=u(x, t)$, την πίεση του ρευστού $p=p(x, t)$, την πυκνότητα του ρευστού $\rho(x, t)$ και την εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού $A=A(x, t)$.

4.5 Θεωρητικό-μαθηματικό μοντέλο

Το θεωρητικό υδραυλικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες απαρτίζεται από δύο ελαστικούς αγωγούς διαφορετικών μέτρων ελαστικότητας, έναν εύκαμπτο και έναν άκαμπτο, οι οποίοι σχηματίζουν κλειστό κύκλωμα (σχήμα 4-2). Οι αγωγοί είναι πληρωμένοι με συμπιεστό ρευστό και περιοδική δύναμη δρα στον εύκαμπτο αγωγό προκαλώντας τη συμπίεση και αποσυμπίεσή του.

Η μαθηματική μοντελοποίηση βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής, όπως περιγράφηκαν στο κεφάλαιο αυτό. Ειδικότερα οι δυνάμεις λόγω καμπύλωσης του κυκλώματος έχουν αμεληθεί, οπότε τα δύο τμήματα του κυκλώματος (εύκαμπτο και άκαμπτο) περιγράφονται ως ευθύγραμμοι αγωγοί κυκλικής εγκάρσιας διατομής. Το ένα τμήμα του κυκλώματος είναι σχεδόν άκαμπτο και το άλλο εύκαμπτο. Οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν αμεληθεί, αφού κάθε σημείο του κυκλώματος υποτίθεται ότι βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τόσο ο εύκαμπτος, όσο και ο άκαμπτος αγωγός δεν υφίστανται αξονική παραμόρφωση κατά τον διαμήκη άξονά τους.



Σχήμα 4-2. Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου υδραυλικού κυκλώματος με την περιοχή διέγερσης για την περιγραφή του φαινομένου της άντλησης χωρίς βαλβίδες, [Manopoulos et al, 2006].

Η μονοδιάστατη προσέγγιση που γίνεται για το συγκεκριμένο μοντέλο βασίζεται, τόσο στις εξισώσεις συνέχειας και ορμής επί της εγκάρσιας διατομής των αγωγών του κυκλώματος, όσο και στη θεώρηση ισεντροπικής ροής και επίπεδης εντατικής κατάστασης λεπτότοιχου κυλινδρικού αγωγού. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{A}{\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \frac{1}{p} \sqrt{\frac{A_0}{A}} + 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-18)$$

$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right) \frac{L_c}{4L} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 8\pi\nu C_v \frac{u}{A} + \frac{K_t}{2L} \left(1 - \frac{A}{A_{\min}} \right)^2 u |u| = 0 \quad (4-10)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = k = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (4-11)$$

$$p = p_e + 2\rho_0 c_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (4-14)$$

Έτσι διαμορφώνεται ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, δηλαδή της μέσης στη διατομή ταχύτητας του ρευστού $u=u(x,t)$, της μέσης στη διατομή πίεσης του ρευστού $p=p(x,t)$, της μέσης στη διατομή πυκνότητας του ρευστού $\rho=\rho(x,t)$ και της εγκάρσια διατομής του εύκαμπτου αγωγού $A=A(x,t)$.

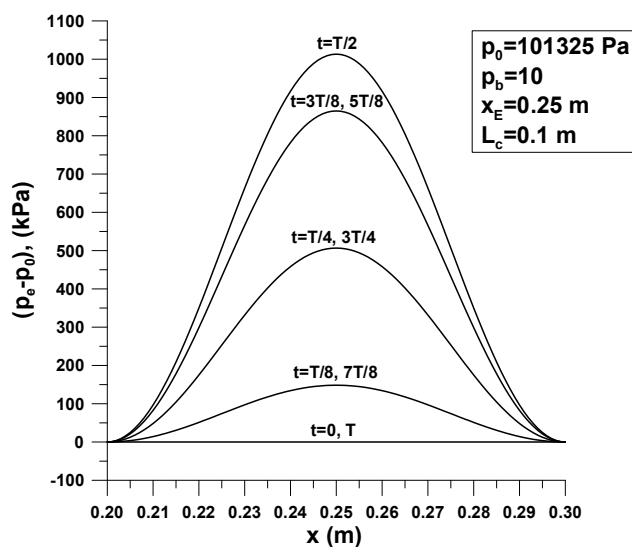
4.6 Αρχικές και Οριακές Συνθήκες

Επιλέγεται αρχικά, η εσωτερική και εξωτερική πίεση στο κλειστό κύκλωμα να είναι όση του περιβάλλοντος p_0 . Δηλαδή, $p(x,0) = p_e(x,0) = p_0 = \text{σταθ}$. Ακόμα, η πυκνότητα του αέρα αρχικά επιλέγεται να είναι όση του περιβάλλοντος ρ_0 . Δηλαδή, $\rho(x,0) = \rho_0 = \text{σταθ}$. Επίσης, για $t=0$ δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση σε οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος και η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική. Δηλαδή, $A(x,0)=A_0=A_1=\text{const}$ και $u(x,0) = 0$. Όταν η διέγερση λαμβάνει χώρα η εξωτερική πίεση είναι $p_e=p_0$ εκτός της περιοχής διέγερσης, στην οποία δίνεται από τη σχέση:

$$p_e = p_\alpha(x,t) = p_0 + p_b p_0 \sin^2\left(\pi \frac{2x - 2x_E + L_c}{2L_c}\right) \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \quad (4-19)$$

όπου το x_E ορίζει το κέντρο της περιοχής διέγερσης (θέση διέγερσης), το L_c καθορίζει το μήκος της διέγερσης και ω είναι η κυκλική συχνότητα διέγερσης ($\omega=2\pi f$).

Η τυπική μεταβολή της εφαρμοζόμενης εξωτερικής πίεσης p_e στην περιοχή της διέγερσης απεικονίζεται στο σχήμα 4-3 για 9 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο με βάση την εξίσωση (4-19). Αυτή η εξίσωση έχει επιλεγεί με τρόπο ώστε η εφαρμοζόμενη εξωτερική πίεση στη διέγερση να είναι περιοδική και πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την πίεση περιβάλλοντος ($p_\alpha \geq p_0$). Η μεταβολή στο χώρο είναι κατά τέτοιον τρόπο ώστε στα άκρα της διέγερσης να ισχύει η συνέχεια για τη συνάρτηση $p_e=p_\alpha(x,t)$. Δηλαδή: $p_\alpha(x_E-L_c/2,t) = p_\alpha(x_E+L_c/2,t) = p_0$.



Σχήμα 4-3. Χωρικές μεταβολές για 9 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μία περίοδο της διατομοματικής πίεσης στην περιοχή της διέγερσης όταν η εσωτερική πίεση διατηρείται σταθερή ίση με p_0 , [Manopoulos et al, 2006].

Η χρήση μεταβαλλόμενης εξωτερικής πίεσης $p_a(x,t)$ στη θέση της διέγερσης είναι ένας έμμεσος τρόπος επιβολής της οριακής συνθήκης της διέγερσης του εύκαμπτου αγωγού χωρίς να γίνεται παρεμβολή στην προς επίλυση συνάρτηση $A(x,t)$. Η συνάρτηση της εγκάρσιας διατομής σε αυτό το σημείο διαμορφώνεται μέσω του υπολογιστικού πλέγματος όπως οι ρευστομηχανικές εξισώσεις καθορίζουν. Συνεπώς, τυχούσες έντονες μεταβολές της εσωτερικής πίεσης του ρευστού $p(x,t)$ επιτρέπονται να ρυθμίζουν μαζί με την επιβολή της εξωτερικής πίεσης $p_a(x,t)$, τη γεωμετρία του εύκαμπτου αγωγού $A(x,t)$ στο σημείο της διέγερσης, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην πραγματικότητα.

Τέλος, επειδή η αρχή ($x=0$) και το τέλος ($x=L$) του κυκλώματος ταυτίζονται εφαρμόζονται περιοδικές οριακές συνθήκες για τα υπολογιζόμενα μεγέθη. Δηλαδή: $A(0,t) = A(L,t)$, $p(0,t) = p(L,t)$, $\rho(0,t) = \rho(L,t)$ και $u(0,t) = u(L,t)$.

4.7 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Για την απλοποίηση του παραπάνω συστήματος ως προς τις παραμέτρους γίνεται αδιαστατοποίηση των εξισώσεών του, ορίζοντας τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη και αριθμούς:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{tc_0}{L}, & Re &= \frac{c_0 R_0}{\nu}, & p^* &= \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \\ x^* &= \frac{x}{L}, & \delta &= \frac{R_0}{L}, & u^* &= \frac{u}{c_0}, \\ A^* &= \frac{A}{A_0}, & Str &= \frac{\omega L}{c_0}, & M &= \frac{c_0}{c_1}. \end{aligned}$$

όπου ο δείκτης (0) αντιστοιχεί στα μεγέθη που αναφέρονται στον εύκαμπτο αγωγό και ο δείκτης (1) αντιστοιχεί σε αυτά που αναφέρονται στον άκαμπτο. Επίσης, c_0 ή c_1 είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στα τοιχώματα του εκάστοτε αγωγού αντίστοιχα, L είναι το συνολικό μήκος του κλειστού κυκλώματος, $A_0 = \pi R_0^2$ είναι η αρχική διατομή του εύκαμπτου αγωγού πριν υποστεί οποιαδήποτε συμπίεση και ρ_0 , ν είναι η αρχική πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Οι αδιάστατοι αριθμοί Re , Str και M ονομάζονται Reynolds, Strouhal και Mach αντίστοιχα. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η εισαγωγή της χαρακτηριστικής ταχύτητας του κύματος c_0 , αντί κάποιας χαρακτηριστικής ταχύτητας του ρευστού.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αδιάστατες παράμετρους οι παραπάνω εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial A^*}{\partial x^*} + \frac{A^*}{\frac{1}{\gamma \cdot p^*} \sqrt{\frac{1}{A^*} + 1}} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0 \quad (4-20)$$

$$\left[C_u + \left(1 - \frac{A^*}{A_{\min}^*} \right) \frac{L_c^*}{4} \right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^*)^2}{\partial x^*} + \left(\frac{p_0^*}{p^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{8C_v}{\text{Re} \delta} \frac{u^*}{A^*} + \frac{K_t}{2} \left(1 - \frac{A^*}{A_{\min}^*} \right)^2 u^* |u^*| = 0 \quad (4-21)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4-22)$$

$$p^* = \begin{cases} p_e^* + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^*}} \right) & , (0 \leq x^* \leq L_0^*) \\ p_e^* + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{A^*}} \right) & , (L_0^* \leq x^* \leq L_1^*) \end{cases} \quad (4-23)$$

$$p_e^* = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} t^* \right) & , (x_E^* - L_c^*/2 \leq x^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^* & , (0 \leq x^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ ή } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x^* \leq 1) \end{cases} \quad (4-24)$$

Χρησιμοποιώντας ως είσοδο (διέγερση) στο σύστημα την εξωτερική πίεση p_e^* , η οποία δίνεται μέσω της εξίσωσης (4-24), το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων (4-20) και (4-21) επιλύεται αριθμητικά ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις u^* και A^* , αντικαθιστώντας την εσωτερική πίεση p^* από τη σχέση της με την εγκάρσια διατομή του αγωγού A^* [σχέση (4-23)]. Η αδιάστατη πυκνότητα ρ^* βρίσκεται έπειτα από την ισοεντροπική σχέση (4-22).

4.8 Μέση χρονικά αδιάστατη παροχή μάζας

Η αρχή διατήρησης της μάζας πρέπει να ισχύει εντός του κλειστού κυκλώματος, αφού δεν υπάρχει κάποια συσσώρευση ή εκκένωση του περιεχόμενου ρευστού.

Η παροχή μάζας μέσω μιας επιφάνειας (κλειστή ή μη κλειστή) ονομάζεται η ποσότητα [Τσαγγάρης, 2005]:

$$\dot{m} = \left| \int_E \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dE \right| \quad (4-25)$$

Η σχέση (4-25) ορίζει το μέγεθος της χρονικής συνάρτησης της παροχής μάζας του ρευστού $\dot{m}(x_0, t)$ που διέρχεται μέσα από την εγκάρσια διατομή του αγωγού $A(x_0, t)$ με ακτίνα $R(x_0, t)$ στη θέση x_0 του κλειστού κυκλώματος αγωγών ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{m}(x_0, t) &= \int_0^{R(x_0, t)} \rho(x_0, r, t) \cdot u(x_0, r, t) \cdot 2\pi r dr \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{m}(x_0, t) &= \rho(x_0, t) \bar{u}(x_0, t) A(x_0, t) \end{aligned} \quad (4-26)$$

Η μέση χρονικά παροχή μάζας εξ ορισμού είναι:

$$\bar{\dot{m}}(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{m}(x_0, t) dt \quad (4-27)$$

στην οποία αν γίνει χρήση της (4-26) προκύπτει τελικά:

$$\bar{\dot{m}}(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(x_0, t) u(x_0, t) A(x_0, t) dt \quad (4-28)$$

όπου για λόγους απλούστερης απεικόνισης $u(x_0, t) = \bar{u}(x_0, t)$ νοείται το μέσο μέγεθος της αξονικής ταχύτητας του ρευστού επί της διατομής και T είναι η περίοδος διέγερσης.

Το μέγεθος της παροχής μάζας και συνεπώς και της μέσης χρονικά τιμή της αδιαστατοποιείται με βάση τη σχέση:

$$\dot{m}^*(x_0^*, t^*) = \frac{\dot{m}(x_0, t)}{\rho_0 A_0 c_0} \quad (4-29)$$

4.9 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων – Μέθοδος DRP

Επιλέγεται κατάλληλο αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών ανώτερης τάξης δανεισμένο από την εφαρμοσμένη αεροακουστική. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται το αριθμητικό σχήμα Διατήρησης της Σχέσης Διασποράς (Dispersion Relation Preserving-DRP), σύμφωνα με το οποίο τα χαρακτηριστικά διάδοσης του κύματος καθορίζονται πλήρως από τις σχέσεις διασποράς του, [Tam & Webb, 1993]. Το αριθμητικό αυτό σχήμα χρησιμοποιήθηκε και στη 1^η Ενότητα για τη μελέτη του φαινομένου άντλησης χωρίς βαλβίδες.

Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με τη μέθοδο DRP η χωρική μερική παράγωγος γύρω από ένα σημείο x_0 μπορεί να προσεγγιστεί από ένα πρότυπο $2N+1$ σημείων διαμέρισης σχήματος πεπερασμένης διαφοράς ως εξής:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x^*}(x_0^*) = \frac{1}{\Delta x^*} \cdot \sum_{i=-N}^N e_i \cdot F^*(x_0^* + i\Delta x^*) \quad (4-30)$$

όπου $N=3$, Δx^* το χωρικό βήμα ενός ομοιόμορφου πλέγματος και οι συντελεστές e_i είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει $e_i = -e_{-i}$, διαμορφώνοντας ένα σχήμα χωρίς διάχυση.

Για τη μείωση των σφαλμάτων διασποράς και για την επίτευξη γενικά βέλτιστων χαρακτηριστικών των κυμάτων διάδοσης στον κλειστό βρόχο αγωγών οι συντελεστές e_i πρέπει να επιλεγούν ώστε να ελαχιστοποιούν το σφάλμα ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier του σχήματος πεπερασμένων διαφορών, το οποίο προσεγγίζει τη μερική παράγωγο στο χώρο. Κατά αυτόν τον τρόπο οι συντελεστές του προτύπου των 7 σημείων διαμέρισης έχουν ως εξής, [Tam & Shen, 1993] και [Tam, 1996]:

$$\begin{aligned} e_0 &= 0.0 & e_1 &= -e_{-1} = 0.77088238051822552 \\ e_2 &= -e_{-2} = -0.166705904414580469 & e_3 &= -e_{-3} = 0.02084314277031176. \end{aligned}$$

Σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι η μέθοδος DRP, τετάρτης τάξης ακρίβειας στο χώρο και στο χρόνο, εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας στους κώδικες επίλυσης των αλγορίθμων ψηφία διπλής ακρίβειας για όλες τις παραμέτρους και μεταβλητές. Η αιτία γι' αυτό προκύπτει από την ανάγκη εξάλειψης των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, ώστε να ανιχνεύονται οι πολύ μικρές ασυμμετρίες ροής, που παρατηρούνται σε χαμηλές συχνότητες και πλάτη διέγερσης, αποδίδοντας μικρές αλλά μη μηδενικές τιμές της μέσης χρονικά παροχής.

Για τη χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων του συστήματος εφαρμόζεται η κλασική μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο, όπως περιγράφεται παρακάτω. Έστω ότι η εξίσωση χρονικής εξέλιξης του φαινομένου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} = G(U^*) \quad (4-31)$$

όπου U^* αντιπροσωπεύει το προς επίλυση μέγεθος κάθε εξίσωσης ($U^* \equiv A^*$ ή $U^* \equiv u^*$), ορισμένο ήδη στο πεδίο του χώρου και G είναι ο τελεστής διακριτοποίησης των χωρικών παραγώγων, ο οποίος δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t .

Η διακριτοποιημένη χρονική προέλαση (time marching) της εξίσωσης (4-31) μπορεί να γίνει ρητά σε ένα βήμα από το χρονικό επίπεδο n στο $n+1$ με το εξής γενικό σχήμα m -σταδίων:

$$(U^*)^{n+1} = (U^*)^n + \sum_{j=1}^m w_j k_j^* \quad (4-32)$$

όπου: $k_j^* = \Delta t^* \cdot G \left[(U^*)^n + \sum_{\ell=1}^{j-1} b_{j\ell} \cdot k_\ell^* \right]$ με $j=1,2,\dots,m$ και $w_j, b_{j\ell}$ είναι σταθεροί

συντελεστές ανάλογα με το τυποποιημένο σχήμα Runge-Kutta που επιλέγεται. Για την κλασική μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξης ($m=4$) αυτοί οι συντελεστές λαμβάνουν τις τιμές:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_4 = 1/6 & w_2 &= w_3 = 1/3 \\ b_{21} &= b_{32} = 1/2 & b_{31} &= b_{41} = b_{42} = 0 & b_{43} &= 1 \end{aligned}$$

Ουσιαστικά οι συντελεστές k_j εκφράζουν την προσέγγιση της χρονικής μεταβολής του μεγέθους U^* στο εκάστοτε στάδιο j με βάση την εξίσωση (4-31). Κατά αυτό το σχήμα η διακριτοποίηση των εξισώσεων του συστήματος αναπτύσσεται στο παράρτημα Γ.

Η αξιοπιστία της αριθμητικής μεθοδολογίας μελετάται κατά την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων. Εφαρμόζοντας την περιοδική διέγερση της εξίσωσης (4-24), όσο αφορά την εξωτερική πίεση p_e , αναμένεται περιοδική λύση για τις άγνωστες συναρτήσεις $A^*(x^*, t^*)$ και $u^*(x^*, t^*)$ της εγκάρσιας διατομής του συστήματος και της αξονικής ταχύτητας του ρευστού αντίστοιχα. Η αριθμητική σύγκλιση πιστοποιείται καταγράφοντας το υπόλοιπο της διαφοράς μεταξύ δύο τιμών της εκάστοτε άγνωστης συνάρτησης, οι οποίες ανήκουν σε δύο διαδοχικές περιόδους αντίστοιχα και απέχουν χρονικά όσο μία περίοδος. Κατά αυτόν τον τρόπο η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η τιμή αυτή του υπολοίπου της διαφοράς γίνει μικρότερη από μία προκαθορισμένη μέγιστη επιθυμητή τιμή. Αυτή η καταγραφή γίνεται και για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις αλλά και για κάθε σημείο του χώρου, ώστε να εξασφαλίζεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων για όλα τα μεγέθη και σε ολόκληρο το χωρικό πεδίο.

Θεωρώντας ως μέγιστο υπόλοιπο της διαφοράς την τιμή 10^{-7} λαμβάνεται το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης:

$$\max\{U^*(x_i^*, t_n^*) - U(x_i^*, t_n^* + T^*)\}_{i,n} < 10^{-7}, \quad (i=1,2,\dots,\kappa \ \& \ n=1,2,\dots,n_t) \quad (4-33)$$

όπου κ ο συνολικός αριθμός των σημείων του πλέγματος στο χώρο για όλο το μήκος L του κλειστού κυκλώματος και n_t ο συνολικός αριθμός των σημείων στο πλέγμα του χρόνου για μία περίοδο T^* .

4.10 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα μονοδιάστατο μοντέλο ροής άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες με σταθερή θερμοκρασία σε κυλινδρικό αγωγό μεταβλητής διατομής με εύκαμπτα και άκαμπτα τοιχώματα. Βασίζεται στην εξίσωση της ορμής συμπιεστού ρευστού μεταβλητής διατομής κατά την αξονική κατεύθυνση του αγωγού και στην εξίσωση διατήρησης της μάζας. Επιπλέον στην εξίσωση της ορμής προστίθενται οι ιξώδεις όροι και οι όροι που λαμβάνουν υπόψη τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής του ρευστού που συμβαίνουν γύρω από χρονικά μεταβαλλόμενες στενώσεις της θεωρίας Womersley που αναπτύχθηκε στη 1^η Ενότητα, βελτιώνοντας έτσι την ανάλυση του μοντέλου.

Οι προκύπτουσες άγνωστες συναρτήσεις από την κατάστρωση του μοντέλου είναι η ταχύτητα του ρευστού, η πίεση του ρευστού, η πυκνότητα του ρευστού και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού.

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η αλγεβρική εξίσωση της ισεντροπικής μεταβολής που συνδέει την πυκνότητα με την πίεση. Επιπλέον, χρησιμοποιείται μία αλγεβρική καταστατική εξίσωση, η οποία συνδέει τη μεταβλητή διατομή του εύκαμπτου αγωγού με την εσωτερική διαμορφούμενη πίεση του ρευστού. Αυτή η καταστατική εξίσωση προκύπτει από τη γραμμική θεωρία ελαστικότητας, η οποία ισχύει για λεπτά ελαστικά τοιχώματα κυλινδρικών αγωγών με αξονική συμμετρία, των οποίων το πάχος δεν ξεπερνά το 10% της ακτίνας.

Οι τέσσερις αυτές εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα, του οποίου η επίλυση καθορίζει τα ρευστομηχανικά μεγέθη μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής συμπιεστού ρευστού σε κλειστό βρόχο αγωγών, με τις προαναφερθείσες παραδοχές. Συνήθως η ροή που προκύπτει από τέτοιου είδους μοντέλα δεν καλείται μονοδιάστατη αλλά ψευδο-μονοδιάστατη εξαιτίας της επιπλέον μεταβολής της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε κάθετη διεύθυνση από αυτή της ταχύτητας του ρευστού. Με βάση τις παραδοχές το συγκεκριμένο μοντέλο δε μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει ασφαλή αποτελέσματα σε καμπύλους αγωγούς μικρής ακτίνας καμπυλότητας, σε περιπτώσεις κατάρρευσης (collapsing) των τοιχωμάτων των εύκαμπτων αγωγών, σε εύκαμπτους αγωγούς που δεν είναι λεπτότοιχοι και έχουν σημαντικό πάχος σε σχέση με την ακτίνα τους, σε μη κυκλικές διαμορφώσεις εγκαρσίων διατομών των εύκαμπτων αγωγών, όπου χρειάζονται και πάνω από μία συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού για την περιγραφή του πεδίου ροής.

Επίσης, γίνεται η προσομοίωση με το μαθηματικό μοντέλο, βάσει του οποίου θα μελετηθεί το φαινόμενο άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες. Η γεωμετρία του μοντέλου που χρησιμοποιείται συνίσταται από έναν εύκαμπτο και έναν άκαμπτο αγωγό που σχηματίζουν ένα βρόχο. Οι αγωγοί είναι πληρωμένοι με συμπιεστό ρευστό και μία περιοδική δύναμη δρα εξωτερικά στη αρχή του τμήματος του εύκαμπτου αγωγού, προκαλώντας τη συμπίεση και αποσυμπίεσή του.

Οι εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται και για την επίλυση τους εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία DRP (Dispersion Relation Preserving), η οποία είναι τέταρτης τάξης ακρίβειας στο χώρο και το χρόνο.

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΣΕ ΔΟΚΙΜΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματοποιηθεί μία δοκιμή του υπολογιστικού κώδικα επίλυσης των εξισώσεων του συμπίεστου ρευστού. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι για να φανερώσει τυχόν σφάλματα στην ανάπτυξη των εξισώσεων ή στην αριθμητική επίλυσή τους. Δηλαδή, προσαρμόζεται ο κώδικας που έχει αναπτυχθεί για την άντληση συμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με γνωστή συμπεριφορά έτσι ώστε να μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για την αξιοπιστία του υπολογιστικού κώδικα.

Συγκεκριμένα, το σύστημα της δοκιμής αυτής αποτελείται από έναν ομοιόμορφο αγωγό, με ίδιο μέτρο ελαστικότητας, λόγο Poisson και πάχος σε όλο το μήκος του, που σχηματίζει κλειστό βρόχο. Δίνεται μέσα από μία κατάλληλη σχέση μία αρχική συνθήκη παραμόρφωσης της διατομής του, ούτως ώστε να δημιουργείται μία συμμετρία ως προς το κέντρο του αγωγού. Έπειτα το σύστημα αυτό με τη δοσμένη αρχική συνθήκη αφήνεται ελεύθερο και καταγράφονται τα χωρικά και χρονικά μεγέθη της ροής. Στο σύστημα αυτό όλοι οι συνεκτικοί όροι είναι μηδενικοί και δεν επιβάλλεται κάποια εξωτερική διέγερση σε κανένα σημείο, όπως συμβαίνει στην περίπτωση άντλησης χωρίς βαλβίδες.

5.2 Μαθηματικό μοντέλο και αριθμητικά δεδομένα

Το σύστημα, όπου θα γίνει η αριθμητική δοκιμή του υπολογιστικού κώδικα, αποτελείται από έναν ομοιόμορφο αγωγό με ενιαίο πάχος, μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson σε όλο το μήκος του που σχηματίζει ένα κλειστό κύκλωμα.

Το σύστημα αυτό είναι πληρωμένο με συμπίεστο ρευστό και δεν εφαρμόζεται εξωτερική διέγερση σε κανένα σημείο του κλειστού αυτού κυκλώματος. Επίσης, θεωρείται ότι η συνεκτικότητα του ρευστού είναι μηδενική.

Με βάση τις παραπάνω συνθήκες το ρευστό εντός του συστήματος βρίσκεται σε ηρεμία. Για να τεθεί σε κίνηση εφαρμόζουμε μία αρχική συνθήκη η οποία δίνει μία αρχική μορφή στη διατομή, συμμετρική ως προς το κέντρο της.

Η εξίσωση που δίνει την αρχική συνθήκη διατομής είναι η εξής:

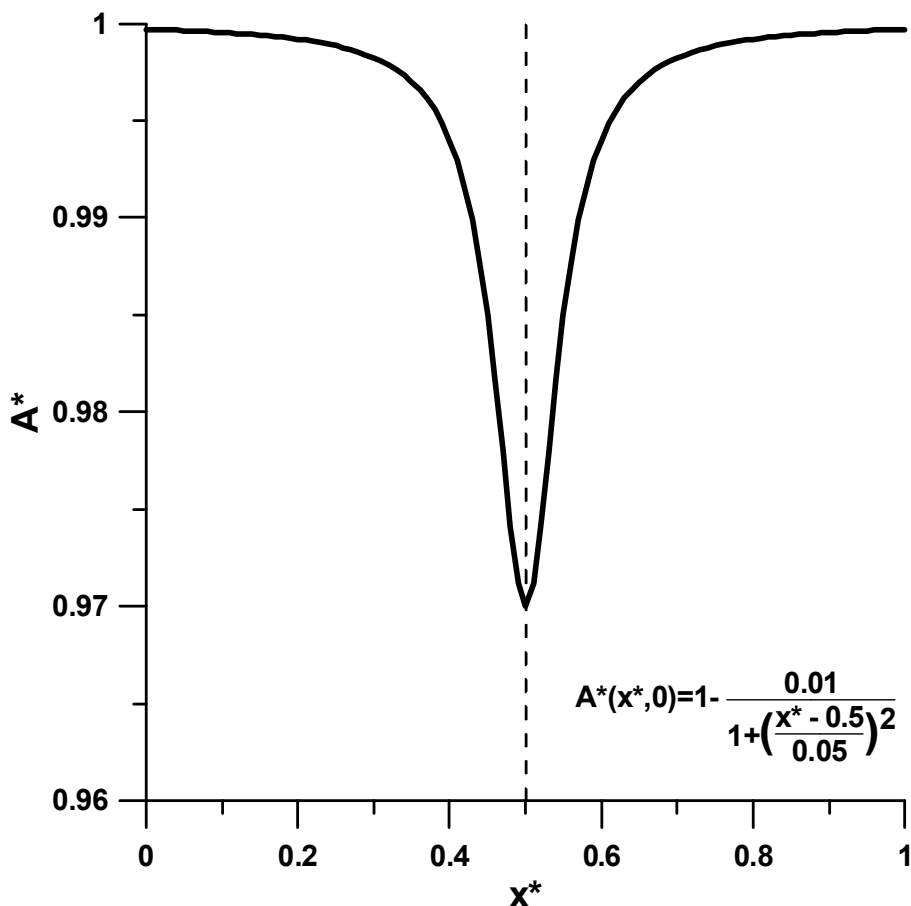
$$A(x, 0) - A_0 = A_0 \frac{h}{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2} \quad (5-1)$$

όπου: A_0 είναι η διατομή του αγωγού πριν την επιβολή της αρχικής συνθήκης.
 h είναι μία παράμετρος που καθορίζει το πλάτος συμπίεσης.
 b είναι μία παράμετρος που καθορίζει την μορφή της καμπύλης ως προς την καμπυλότητα του μέγιστου που παρουσιάζει.

Αδιαστατοποιώντας την εξίσωση 5-1 και προσαρμόζοντας την έτσι ώστε το μέγιστο της να εμφανίζεται στο κέντρο του αδιάστατου μήκους του αγωγού (δηλαδή στο $x^* = 0.5$), προκύπτει η εξής εξίσωση:

$$A^*(x^*, 0) = 1 + \frac{h}{1 + \left(\frac{x^* - 0.5}{b}\right)^2} \quad (5-2)$$

Στο παρακάτω σχήμα 5-1 φαίνεται η μορφή της αρχικής διατομής του κλειστού κυκλώματος σύμφωνα με την εξίσωση 5-2. Οι παράμετροι που καθορίζουν την μορφή της καμπύλης για το παρακάτω σχήμα, αλλά και την αρχική διατομή της δοκιμής που θα παρουσιαστεί είναι $h = -0.01$ και $b = 0.05$. Έτσι, έχουμε:



Σχήμα 5-1. Σχηματική αναπαράσταση της αρχικής συνθήκης της διατομής που θα επιβληθεί στο κλειστό κύκλωμα της αριθμητικής δοκιμής. Με κάθετη διακεκομμένη γραμμή αναπαριστάται ο άξονας συμμετρίας της καμπύλης που είναι το κέντρο του αγωγού.

Οι εξισώσεις οι οποίες θα επιλυθούν είναι οι εξής, οι οποίες αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial A^*}{\partial x^*} + \frac{A^*}{\frac{1}{\gamma \cdot p^*} \sqrt{\frac{1}{A^*}} + 1} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0 \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^*)^2}{\partial x^*} + \left(\frac{p_0^*}{p^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0 \quad (5-3)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4-22)$$

$$p^* = p_e^* + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^*}} \right) \quad (4-23)$$

Η εξίσωση 5-3 προέκυψε από την αδιαστατοποίηση της εξίσωσης της ορμής (4-9) στην οποία δεν έχουν προστεθεί οι όροι που μοντελοποιούν τη συνεκτικότητα όπως στην αδιάστατη μορφή της εξίσωσης 4-21 καθώς οι όροι αυτοί για τη δοκιμή αυτή είναι μηδενικοί.

Επιλέγεται αρχικά για $t=0$, η διατομή του κλειστού κυκλώματος να έχει τη συμμετρική παραμόρφωση που προκαλεί η εξίσωση 5-2 για $h=-0.01$ και $b=0.05$. Η εσωτερική πίεση στο κλειστό κύκλωμα την αρχική χρονική στιγμή προκύπτει από την επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης πίεσης - διατομής. Η εξωτερική πίεση του κλειστού κυκλώματος είναι συνεχώς όση του περιβάλλοντος, καθώς δεν επιβάλλεται κάποια εξωτερική διέγερση στο σύστημα. Ακόμα, η πυκνότητα του αέρα αρχικά επιλέγεται να είναι όση του περιβάλλοντος ρ_0 και η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική.

Τέλος, επειδή η αρχή ($x=0$) και το τέλος ($x=L$) του κυκλώματος ταυτίζονται εφαρμόζονται περιοδικές οριακές συνθήκες για τα υπολογιζόμενα μεγέθη. Δηλαδή: $A(0,t) = A(L,t)$, $p(0,t) = p(L,t)$, $\rho(0,t) = \rho(L,t)$ και $u(0,t) = u(L,t)$.

Στον παρακάτω πίνακα 5-1 παρουσιάζονται τα διαστατά δεδομένα εισόδου του μαθηματικού μοντέλου της αριθμητικής δοκιμής του συστήματος.

Φυσικές σταθερές και γεωμετρικές παράμετροι	Σύμβολο	Τιμή-Μονάδες
Κινηματικό ιξώδες αέρα	ν	0 m ² /sec
Πυκνότητα αέρα	ρ_0	1.2041 Kg/m ³
Συνολικό μήκος κλειστού κυκλώματος	L	2 m
Εσωτερική διάμετρος κλειστού κυκλώματος πριν την επιβολή της αρχικής συνθήκης διατομής	D	0.008 m
Πάχος τοιχώματος κλειστού κυκλώματος	s	0.001 m
Μέτρο ελαστικότητας κλειστού κυκλώματος	E	3.5 x 10 ⁴ Pa
Λόγος Poisson κλειστού κυκλώματος	ν_0	0.49
Εξωτερική πίεση αναφοράς (ατμοσφαιρική περιβάλλοντος)	p_0	101325 Pa

Πίνακας 5-1. Αριθμητικά δεδομένα εισόδου θεωρητικού-μαθηματικού μοντέλου.

5.3 Χρονικά και χωρικά αποτελέσματα των υπολογισθέντων μεγεθών

Σύμφωνα με τα αριθμητικά δεδομένα εισόδου του πίνακα 5-1 του μαθηματικού μοντέλου του συστήματος που αναλύθηκε προηγουμένως, προκύπτουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα 5-2.

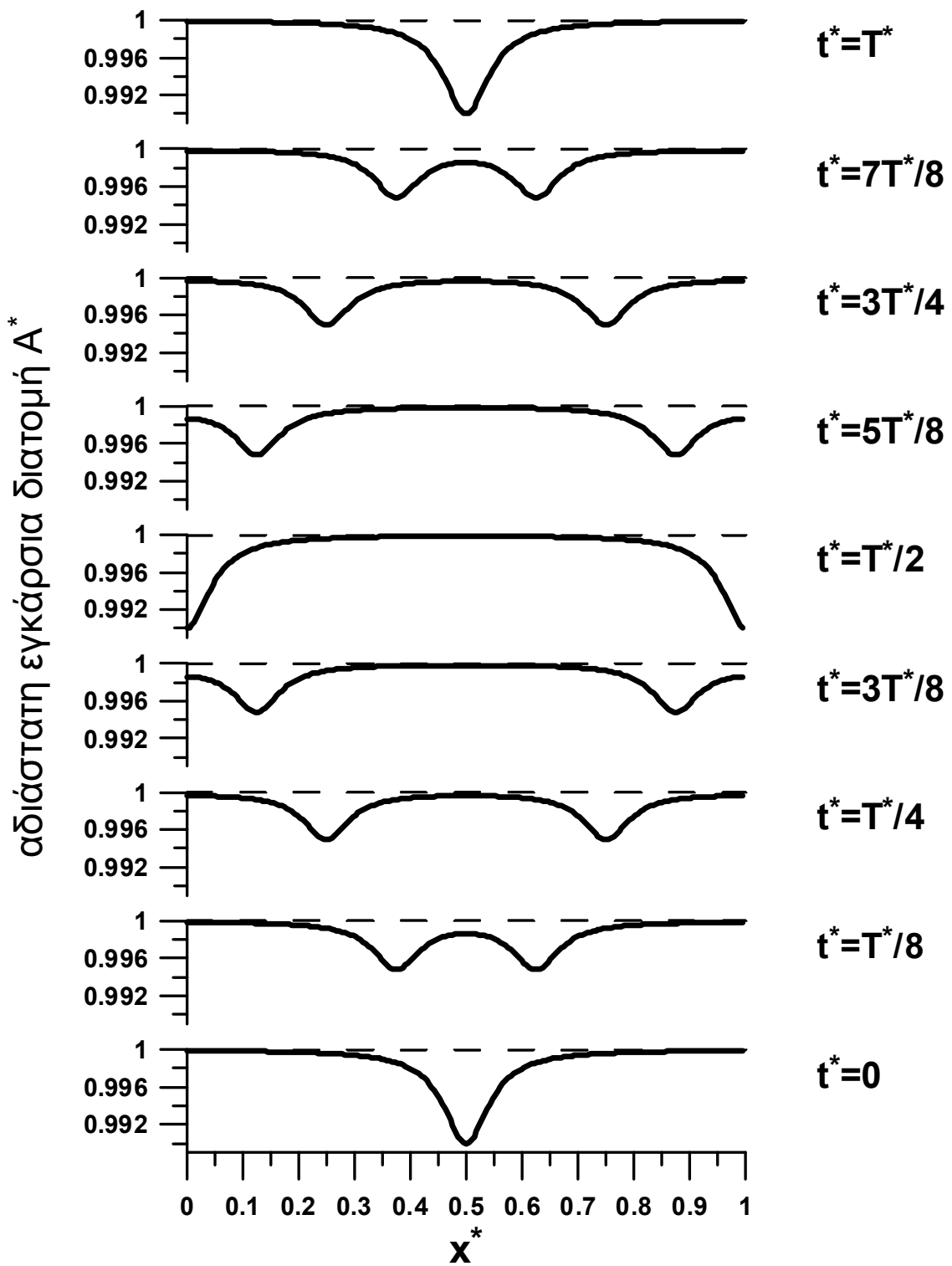
Χαρακτηριστικές παράμετροι του μοντέλου	Σύμβολο	Τιμή-Μονάδες
Εσωτερική διατομή κλειστού κυκλώματος πριν την επιβολή της αρχικής συνθήκης διατομής	A	$5.0265 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
Συνολικό αδιάστατο μήκος κλειστού κυκλώματος	L^*	1
Λόγος της εγκάρσιας διάστασης (ακτίνα) του αγωγού προς την οριζόντια (συνολικό μήκος) του κλειστού κυκλώματος	δ	0.002
Ταχύτητα διάδοσης κύματος πίεσης κλειστού κυκλώματος κατά Moens-Korteweg	c	69.148 m/sec
Αδιάστατη εξωτερική πίεση αναφοράς	p_0^*	17.599
Σχετικό πλάτος συμπίεσης	A_b	≈ 0.01

Πίνακας 5-2. Παραγόμενα χαρακτηριστικά μεγέθη του θεωρητικού-μαθηματικού μοντέλου.

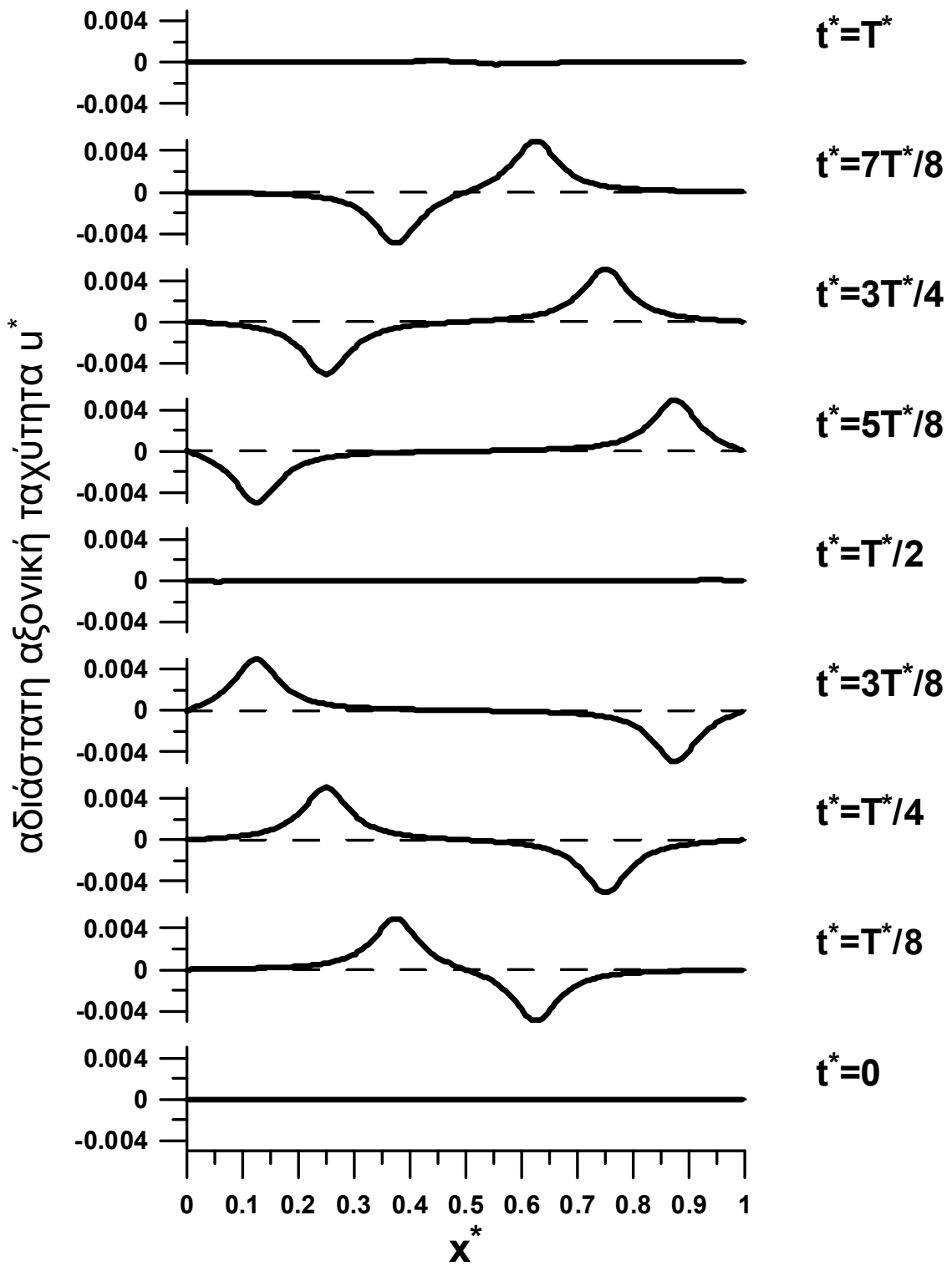
Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 5-2 το πλάτος συμπίεσης είναι πολύ μικρό (περίπου 1%). Αυτό το πλάτος συμπίεσης καθορίζεται από τον παράγοντα h της εξίσωσης 5-2. Επιλέχθηκε ο συντελεστής έτσι ώστε να δίνει πολύ μικρό πλάτος συμπίεσης διότι σε μεγαλύτερα πλάτη συμπίεσης παρατηρήθηκε η εισαγωγή αριθμητικού θορύβου στα χρονικά διαγράμματα για χρόνο μεγαλύτερο των δύο περιόδων.

Η περίοδος του συστήματος προκύπτει να αντιστοιχεί σε αδιάστατο χρόνο $t^*=1.02295 \text{ sec}$.

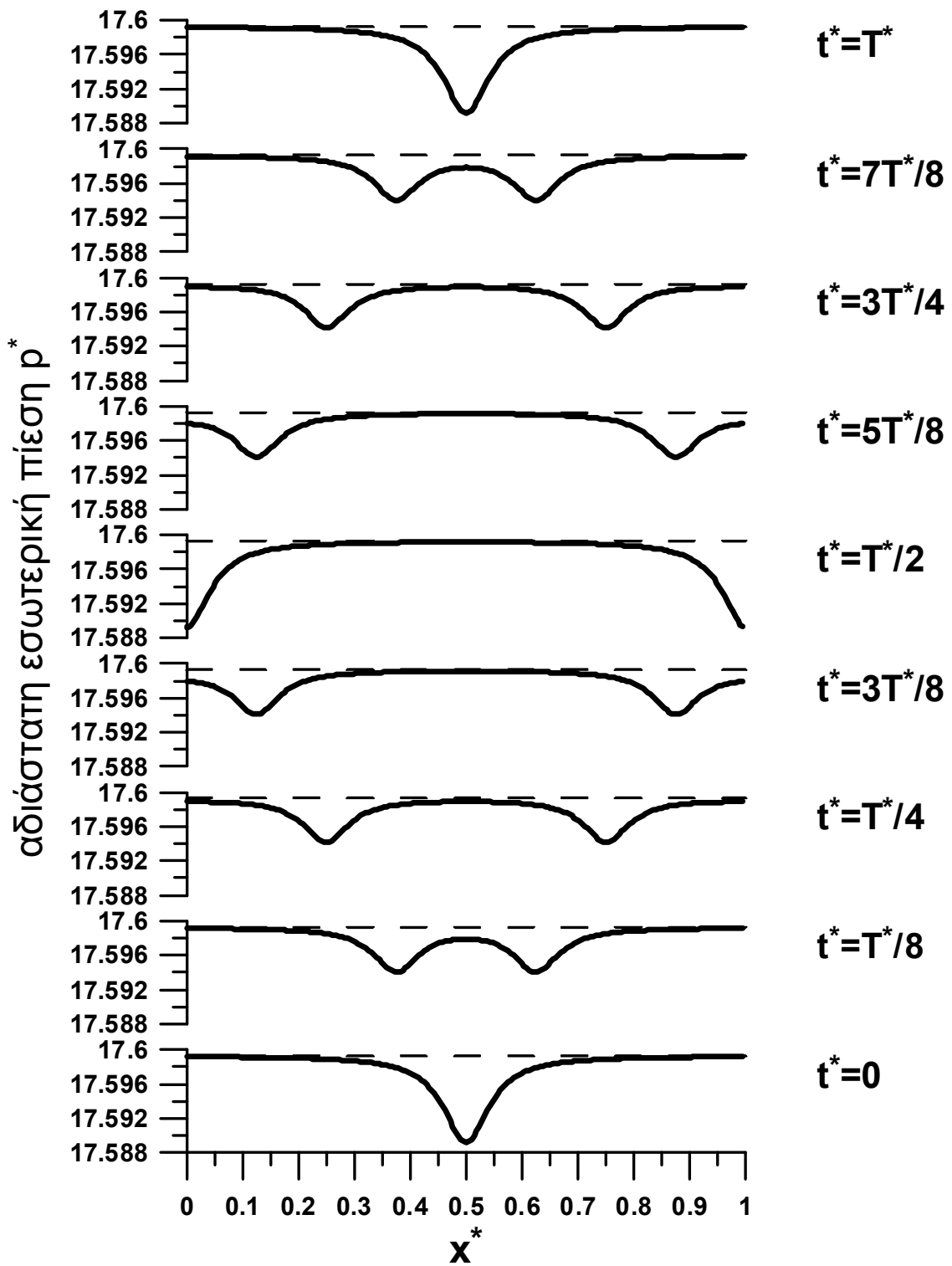
Για όλα τα παραπάνω αριθμητικά δεδομένα για το σύστημα της αριθμητικής δοκιμής που αναπτύχθηκε στο παρόν κεφάλαιο, ακολουθούν αρχικά τα χωρικά διαγράμματα των μεγεθών που επιλύονται (διατομή, ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα και παροχή μάζας) και έπειτα τα χρονικά διαγράμματα των μεγεθών αυτών για διάστημα τεσσάρων αδιάστατων περιόδων.



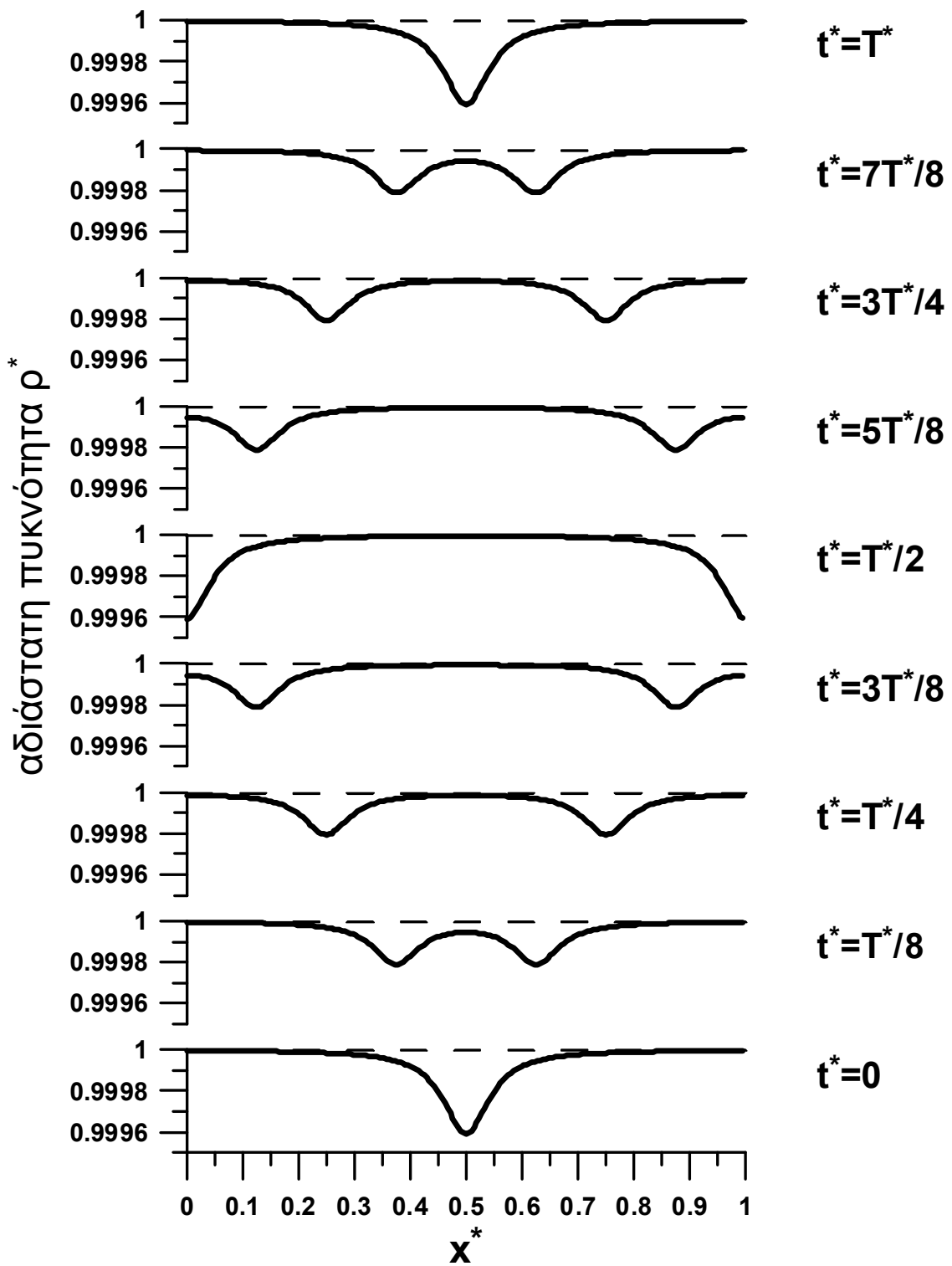
Σχήμα 5-2. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής A^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



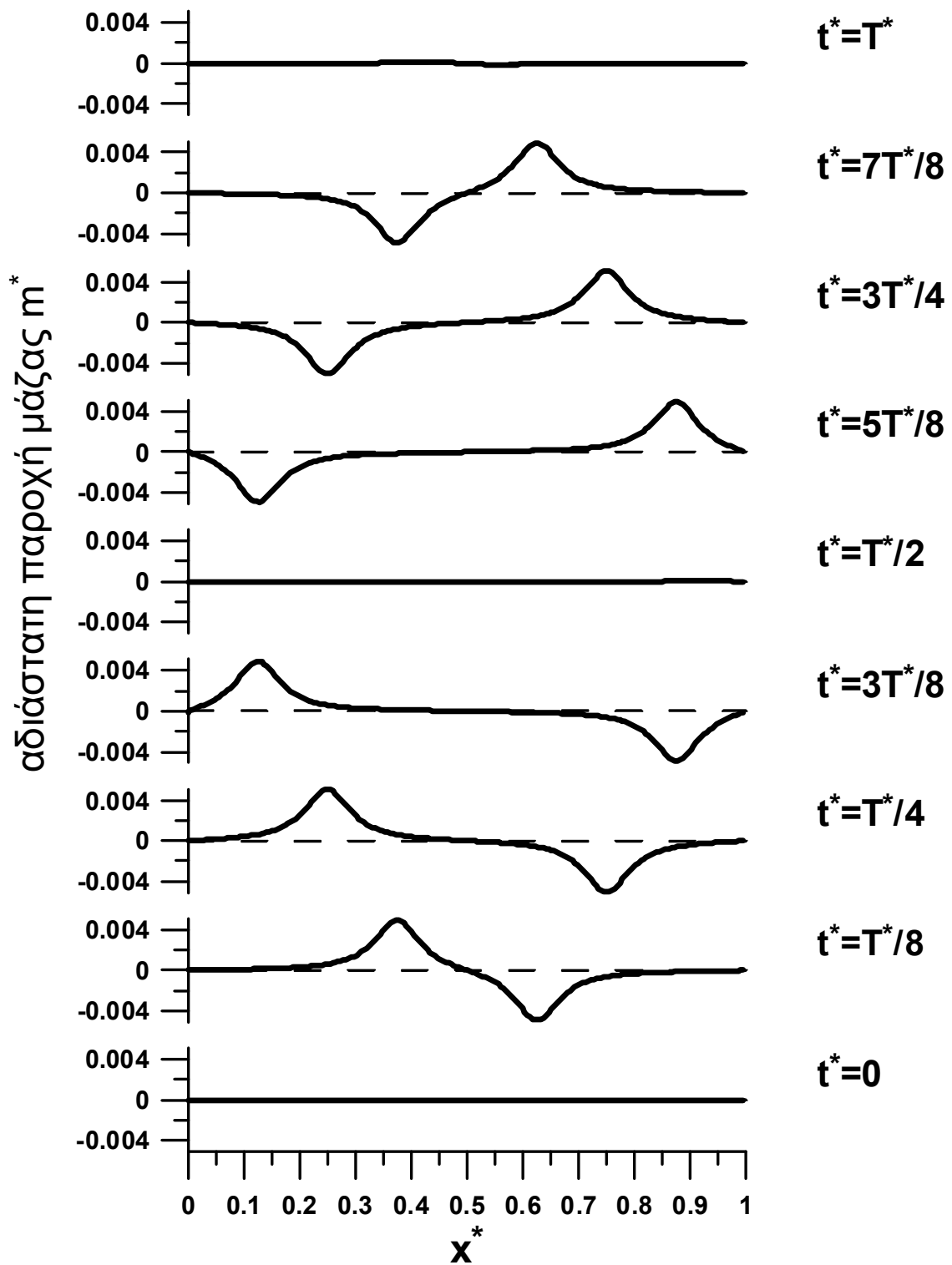
Σχήμα 5-3. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



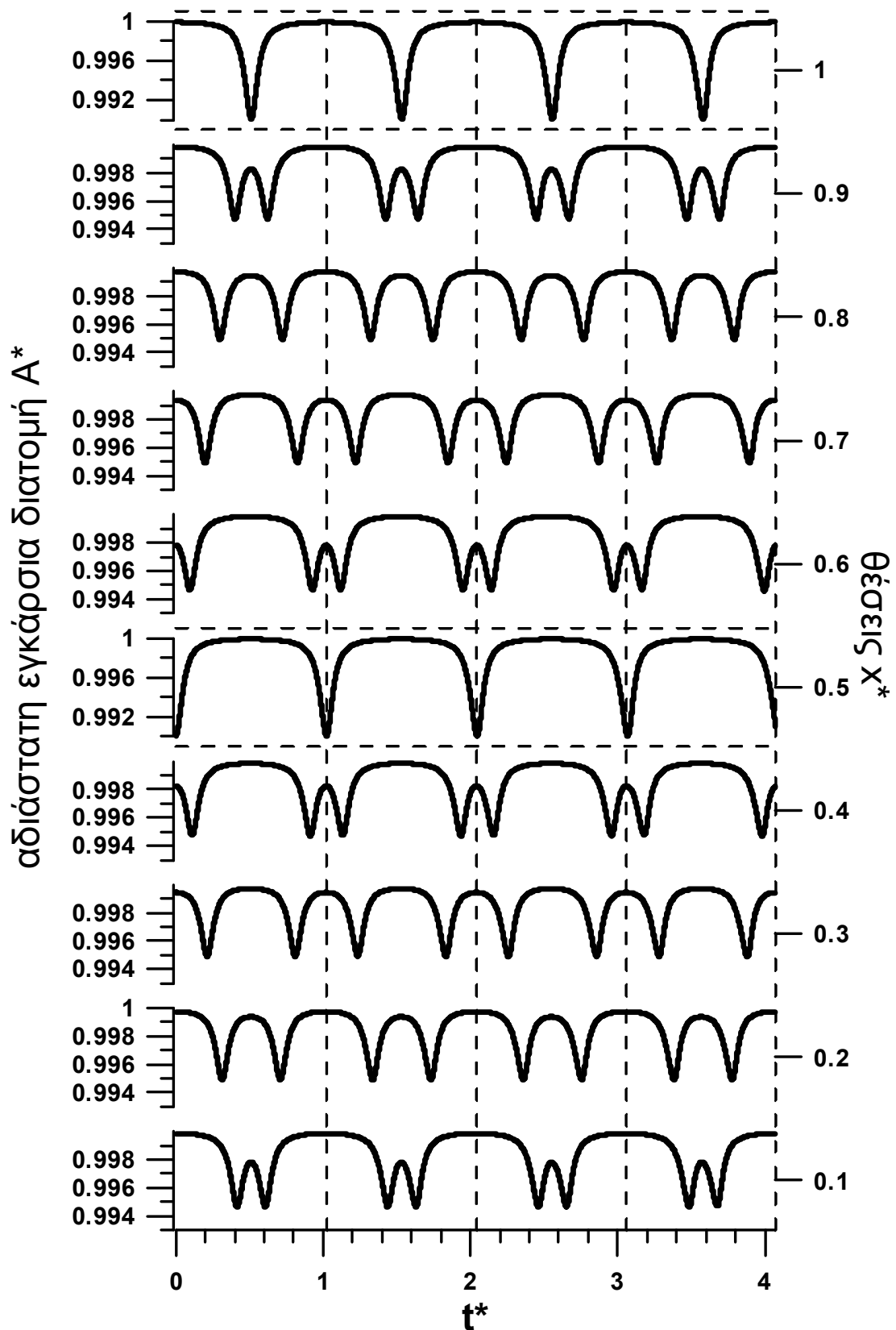
Σχήμα 5-4. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης εσωτερικής πίεσης p^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



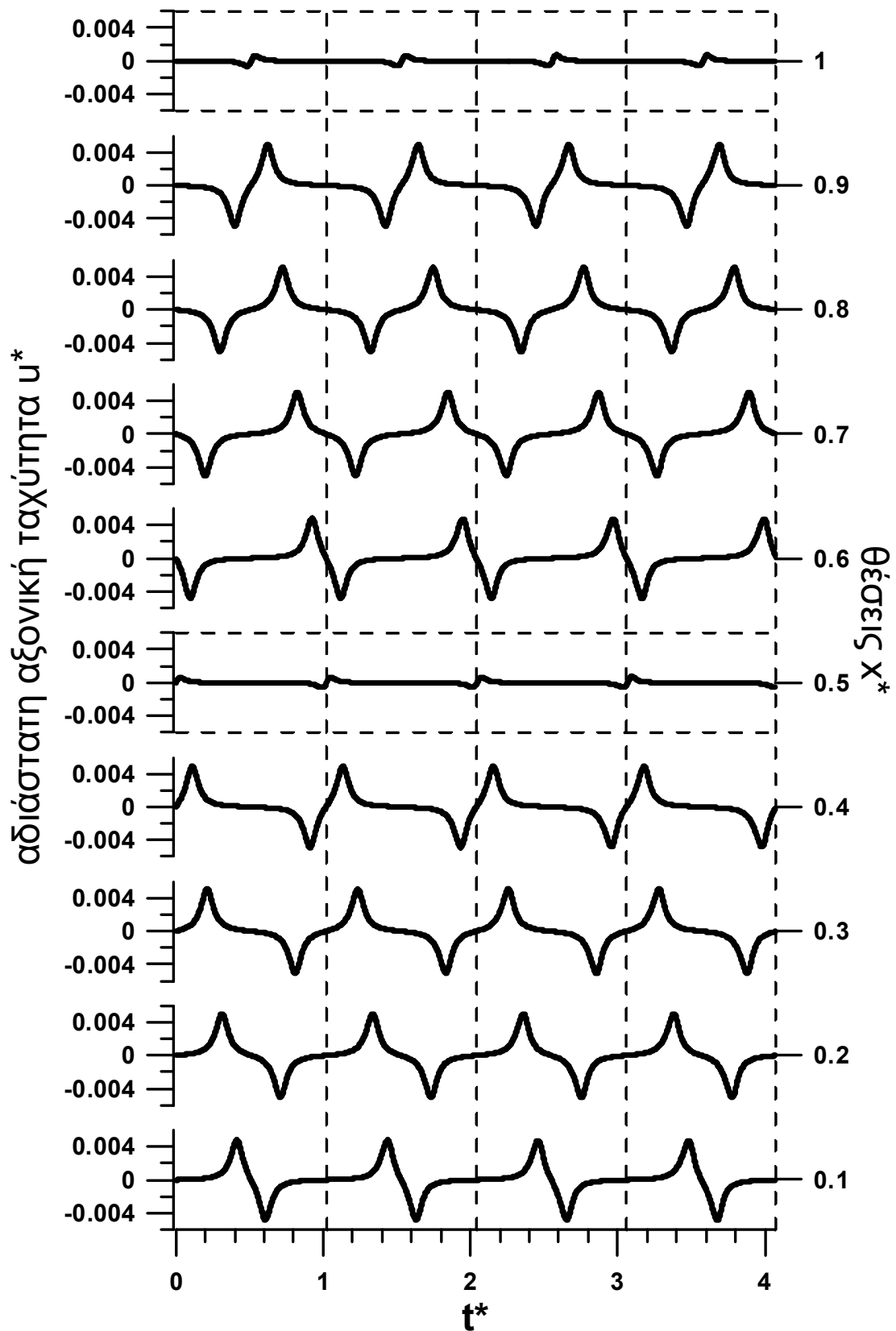
Σχήμα 5-5. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης πυκνότητας ρ^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



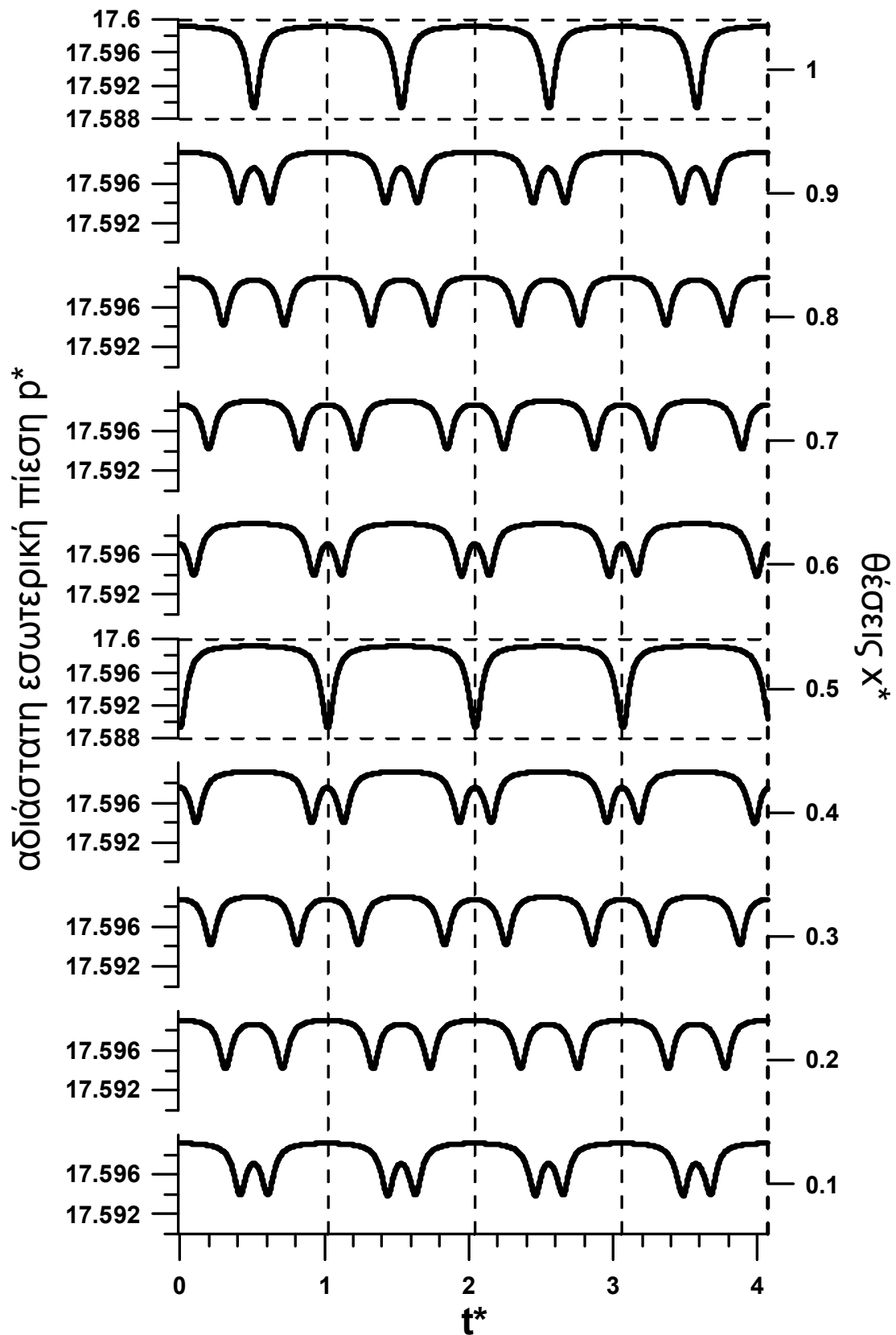
Σχήμα 5-6. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης παροχής μάζας \dot{m}^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



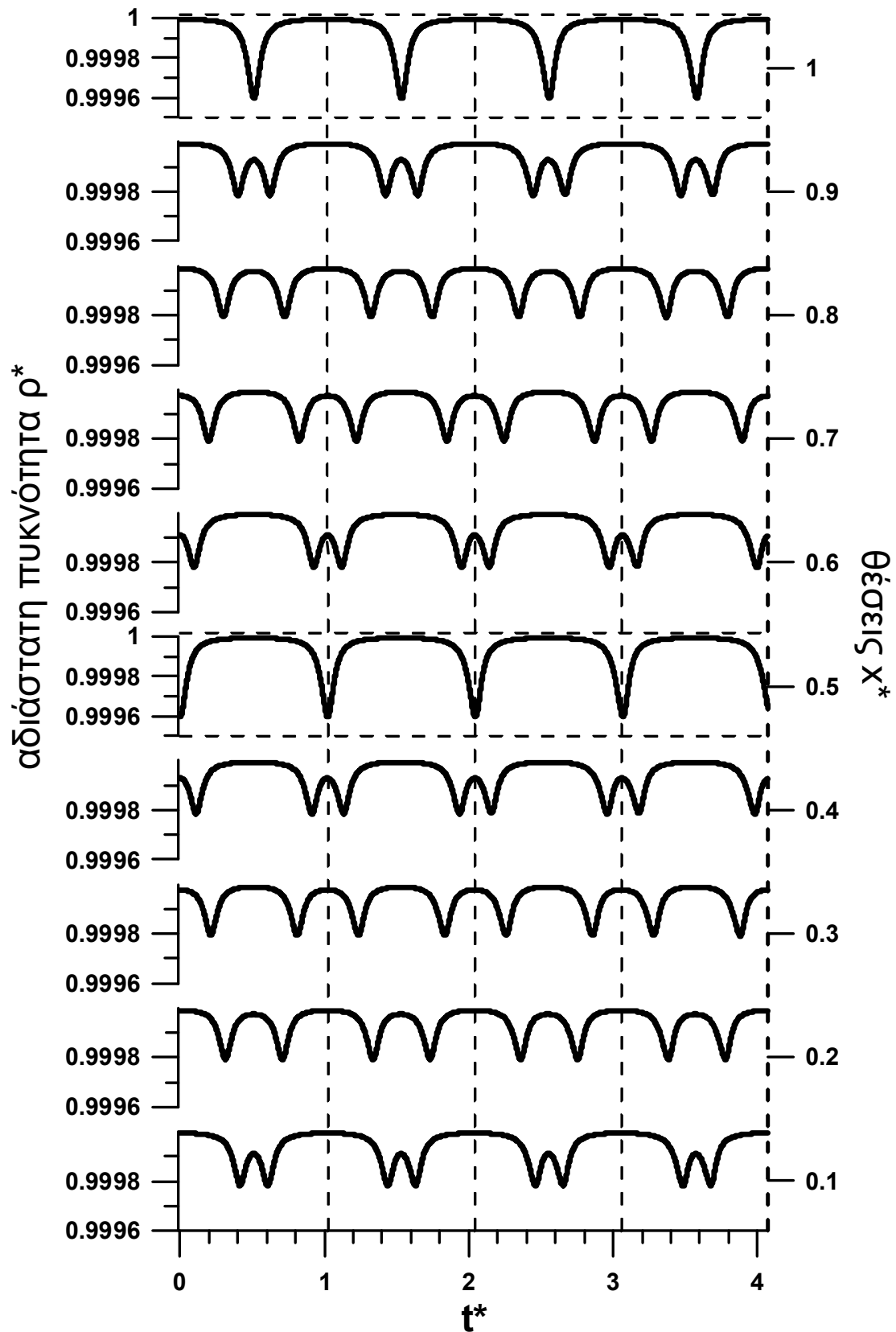
Σχήμα 5-7. Χρονική μεταβολή για τέσσερις περιόδους της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής A^* του κλειστού κυκλώματος σε κάθε αδιάστατη θέση x^* του αγωγού ανά $1/10$ αδιάστατου μήκους L^* .



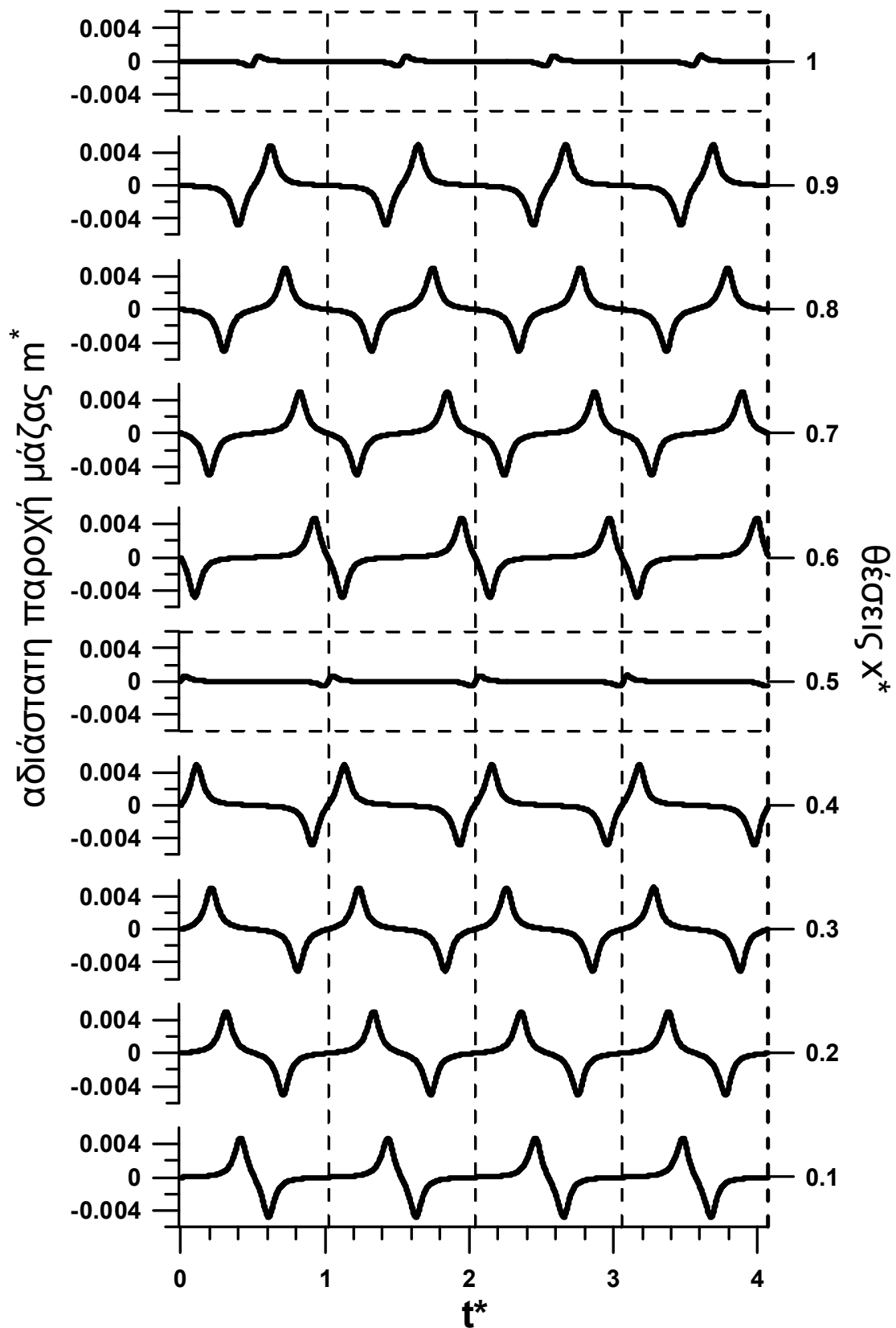
Σχήμα 5-8. Χρονική μεταβολή για τέσσερις περιόδους της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u^* του κλειστού κυκλώματος σε κάθε αδιάστατη θέση x^* του αγωγού ανά $1/10$ αδιάστατου μήκους L^* .



Σχήμα 5-9. Χρονική μεταβολή για τέσσερις περιόδους της αδιάστατης εσωτερικής πίεσης p^* του κλειστού κυκλώματος σε κάθε αδιάστατη θέση x^* του αγωγού ανά $1/10$ αδιάστατου μήκους L^* .



Σχήμα 5-10. Χρονική μεταβολή για τέσσερις περιόδους της αδιάστατης πυκνότητας ρ^* του κλειστού κυκλώματος σε κάθε αδιάστατη θέση x^* του αγωγού ανά $1/10$ αδιάστατου μήκους L^* .



Σχήμα 5-11. Χρονική μεταβολή για τέσσερις περιόδους της αδιάστατης παροχής μάζας \dot{m}^* του κλειστού κυκλώματος σε κάθε αδιάστατη θέση x^* του αγωγού ανά $1/10$ αδιάστατου μήκους L^* .

5.4 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιήθηκε μία αριθμητική δοκιμή του υπολογιστικού κώδικα που επιλύει τις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για το συμπίεστο ρευστό.

Συγκεκριμένα η αριθμητική δοκιμή περιλαμβάνει την επίλυση των μεγεθών της ροής εντός ενός κλειστού κυκλώματος που αποτελείται από έναν ομοιόμορφο αγωγό. Στο σύστημα αυτό δεν επιβάλλεται κάποιου είδους εξωτερική διέγερση και επίσης η συνεκτικότητα θεωρείται μηδενική. Για να αναπτυχθεί ροή εντός του κυκλώματος ορίζουμε μία αρχική συνθήκη διατομής, η οποία δίνει ένα σχήμα στον αγωγό συμμετρικό ως προς το κέντρο του.

Η αρχική συνθήκη διατομής ορίζεται έτσι ώστε να προκαλεί μικρό πλάτος συμπίεσης στον αγωγό, διότι σε μεγαλύτερα πλάτη συμπίεσης, εξαιτίας της απουσίας της συνεκτικότητας εισάγεται αριθμητικός θόρυβος στα χρονικά διαγράμματα των υπολογισθέντων μεγεθών.

Καθώς δεν επιβάλλεται εξωτερική διέγερση στο σύστημα και η συνεκτικότητα είναι μηδενική, αναμένουμε μία περιοδικότητα στα αποτελέσματα. Αυτό επιβεβαιώνεται όντως από όλα τα χρονικά διαγράμματα των υπολογισθέντων μεταβολών.

Επίσης, λόγω της αρχικής συνθήκης διατομής που προσδίδει στο κύκλωμα ένα συμμετρικό σχήμα ως προς το κέντρο του αγωγού, αναμένεται από τη σχέση πίεσης – διατομής, να δημιουργείται και μία αντίστοιχη αρχική συνθήκη εσωτερικής πίεσης στον αγωγό. Αναπτύσσονται έτσι στο κέντρο του αγωγού ($x^*=0.5$) δύο κύματα πίεσης τα οποία κατευθύνονται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα αυτά όταν φτάσουν την αρχή του συστήματος ($x^*=L^*$ ή $x^*=0$) ανακλώνται και επιστρέφουν πάλι προς το κέντρο του αγωγού. Αυτό το φαινόμενο επαναλαμβάνεται περιοδικά. Τα χωρικά διαγράμματα που προέκυψαν επιβεβαιώνουν το φαινόμενο.

Τελικά, στην αριθμητική αυτή δοκιμή προέκυψαν αποτελέσματα που επιβεβαιώνονται από τη θεωρία. Συνεπώς, στο επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί ο υπολογιστικός κώδικας για τη μελέτη του φαινομένου άντλησης συμπίεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες.

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΧΩΡΙΣ ΒΑΛΒΙΔΕΣ

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του φαινομένου άντλησης συμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες. Αρχικά δίνονται σε πίνακες τα αριθμητικά δεδομένα εισόδου του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφηκε στο 4^ο κεφάλαιο, καθώς και τα παραγόμενα χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου. Για αυτά τα αριθμητικά δεδομένα, βρίσκεται η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και παρουσιάζεται η μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής μάζας συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης.

Επίσης, παρουσιάζονται τα χωρικά και χρονικά διαγράμματα των άγνωστων μεγεθών που επιλύονται (ταχύτητα, διατομή, πίεση, πυκνότητα και παροχή μάζας).

6.2 Αριθμητικά δεδομένα και χαρακτηριστικές παράμετροι

Στον παρακάτω πίνακα 6-1 παρουσιάζονται τα διαστατά δεδομένα εισόδου του μαθηματικού μοντέλου της άντλησης συμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες.

<i>Φυσικές σταθερές και γεωμετρικές παράμετροι</i>	<i>Σύμβολο</i>	<i>Τιμή-Μονάδες</i>
Κινηματικό ιξώδες αέρα	ν	$15.11 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$
Πυκνότητα αέρα	ρ_0	1.2041 Kg/m^3
Μήκος εύκαμπτου αγωγού	L_0	1 m
Μήκος άκαμπτου αγωγού	L_1	1 m
Συνολικό μήκος κλειστού κυκλώματος	L	2 m
Απόσταση κέντρου εφαρμογής της διέγερσης (θέση διέγερσης)	x_E	0.25 m
Μήκος διέγερσης	L_c	0.1 m
Απαραμόρφωτη εσωτερική διάμετρος εύκαμπτου αγωγού	D_0	0.008 m
Απαραμόρφωτη εσωτερική διάμετρος άκαμπτου αγωγού	D_1	0.008 m
Πάχος τοιχώματος εύκαμπτου αγωγού	s_0	0.001 m
Πάχος τοιχώματος άκαμπτου αγωγού	s_1	0.001 m
Μέτρο ελαστικότητας εύκαμπτου αγωγού	E_0	$3.5 \times 10^4 \text{ Pa}$
Μέτρο ελαστικότητας άκαμπτου αγωγού	E_1	10^6 Pa
Λόγος Poisson εύκαμπτου αγωγού	ν_0	0.49
Λόγος Poisson άκαμπτου αγωγού	ν_1	0.39
Εξωτερική πίεση αναφοράς (ατμοσφαιρική περιβάλλοντος)	p_0	101325 Pa
Συντελεστής του πλάτους της εξωτερικής πίεσης διέγερσης	p_b	0.12
Σχετικό πλάτος συμπίεσης	A_b	0.76
Κυκλική συχνότητα διέγερσης	ω	150 rad/sec
Λόγος θερμοχωρητικότητας	γ	1.4

Πίνακας 6-1. Αριθμητικά δεδομένα εισόδου θεωρητικού-μαθηματικού μοντέλου.

Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 6-1 προκύπτουν τα παραγόμενα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα 6-2, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις προσδιορισμού του κάθε μεγέθους, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο 4.

Χαρακτηριστικές παράμετροι του μοντέλου	Σύμβολο	Τιμή-Μονάδες
Απαραμόρφωτη εσωτερική διατομή εύκαμπτου αγωγού	A_0	$5.0265 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
Απαραμόρφωτη εσωτερική διατομή άκαμπτου αγωγού	A_1	$5.0265 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
Ταχύτητα διάδοσης κύματος πίεσης εύκαμπτου αγωγού κατά Moens-Korteweg	c_0	69.148 m/sec
Ταχύτητα διάδοσης κύματος πίεσης άκαμπτου αγωγού κατά Moens-Korteweg	c_1	349.906 m/sec
Αδιάστατος αριθμός «Mach» (παράμετρος συσχετισμού των ταχυτήτων διάδοσης του κύματος πίεσης στα δύο τμήματα του κλειστού κυκλώματος αγωγών	M	0.198
Αδιάστατη εξωτερική πίεση αναφοράς	p_0^*	17.60
Αδιάστατος αριθμός «Strouhal»	Str	4.34
Αδιάστατος αριθμός Womersley	W	12.60
Αδιάστατος αριθμός «Reynolds»	Re	18305
Λόγος της εγκάρσιας διάστασης (ακτίνα) του εύκαμπτου αγωγού προς την οριζόντια (συνολικό μήκος) του κλειστού κυκλώματος	δ	0.002
Συντελεστής αδρανειακού όρου στη θεώρηση της διατμητικής τάσης του ρευστού στο τοίχωμα	C_u	1.1107
Συντελεστής ιξώδη όρου στη θεώρηση της διατμητικής τάσης του ρευστού στο τοίχωμα	C_v	2.6291
Συντελεστής όρου τύρβης και αποκόλλησης στη θεώρηση της διατμητικής τάσης του ρευστού στο τοίχωμα	K_t	$1.178 \div 2.490$
Αδιάστατο μήκος εύκαμπτου αγωγού	L_0^*	0.5
Αδιάστατο μήκος άκαμπτου αγωγού	L_1^*	0.5
Συνολικό αδιάστατο μήκος κλειστού κυκλώματος	L^*	1
Αδιάστατη απόσταση κέντρου εφαρμογής της διέγερσης (θέση διέγερσης)	x_E^*	00.125
Αδιάστατο μήκος διέγερσης	L_c^*	0.05

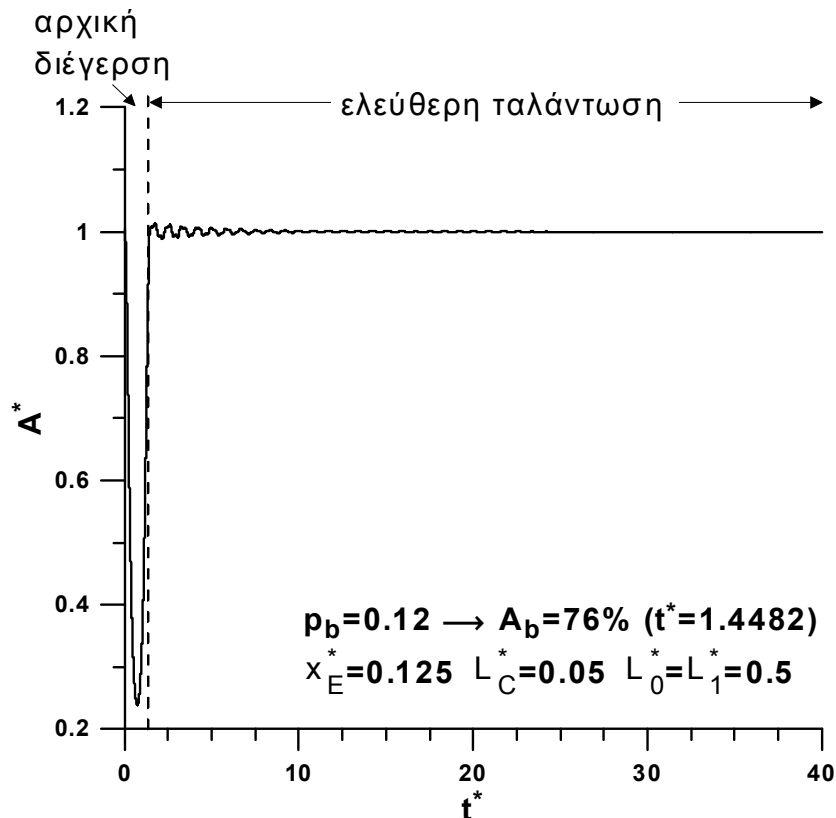
Πίνακας 6-2. Παραγόμενα χαρακτηριστικά μεγέθη του θεωρητικού-μαθηματικού μοντέλου.

6.3 Ιδιοσυχνότητα μοντέλου κλειστού βρόχου αγωγών

Θα βρεθεί η ιδιοσυχνότητα για το κλειστό κύκλωμα που ορίζεται από τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 6-1, ώστε να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη παράγραφο για την καλύτερη ερμηνεία της μεταβολής της μέσης χρονικά παροχής μάζας συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης.

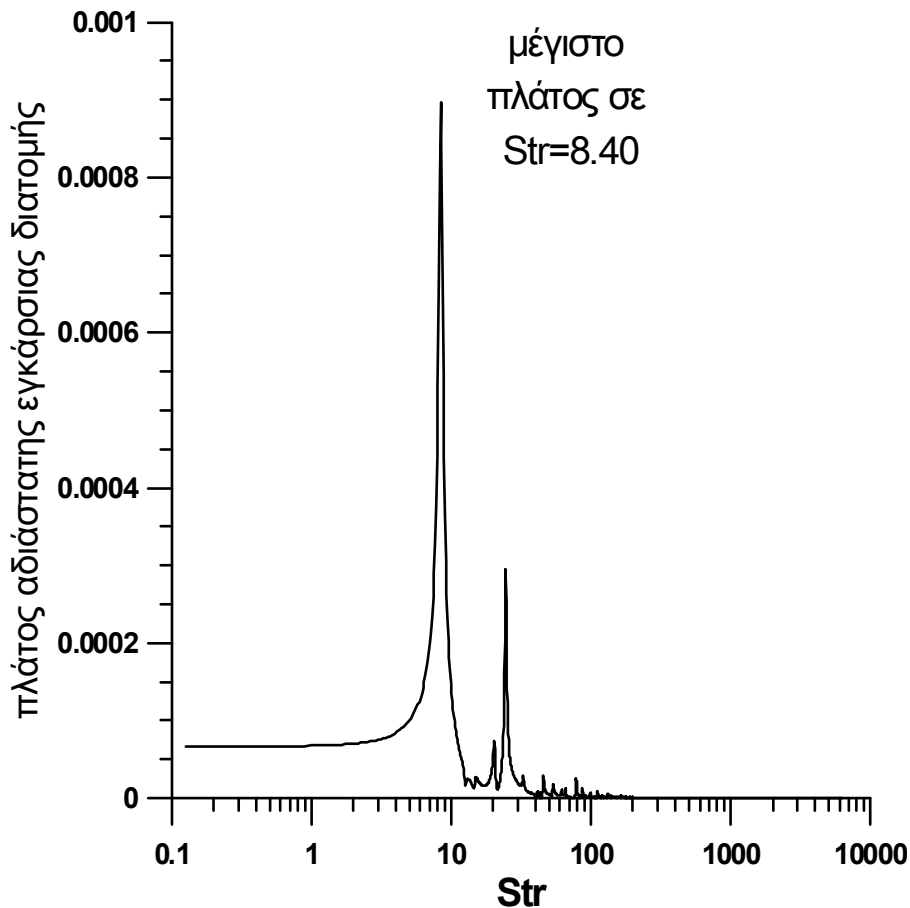
Για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας του κλειστού βρόχου αγωγών διεγείρεται για $t^*=1.44$ ο εύκαμπτος αγωγός στη θέση $x_E^*=0.125$ με αδιάστατο μήκος διέγερσης $L_c^*=0.05$ και πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b=0.12$, το οποίο προκαλεί αρχική διέγερση στην αδιάστατη εγκάρσια διατομή πλάτους $A_b=76\%$.

Μετά την πάροδο αδιάστατου χρόνου $t^*=1.4482$ ο κλειστός βρόχος ταλαντώνεται ελεύθερα μέχρι την ηρεμία του χωρίς κάποια εξωτερική παρέμβαση. Το αποτέλεσμα της διέγερσης και της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος που προκύπτει μέσω της επίλυσης των εξισώσεων, απεικονίζεται στο σχήμα 6-1, όπου αναπαρίσταται γραφικά με τον αδιάστατο χρόνο t^* η αδιάστατη συνάρτηση της εγκάρσιας διατομής A^* στο μέσο ακριβώς της διέγερσης ($x^* = x_E^* = 0.125$).



Σχήμα 6-1. Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^*=1.4482$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b=0.12$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b=76\%$.

Στο σχήμα 6-2 απεικονίζεται ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT) αυτού του αποσβυνόμενου σήματος, για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας του μοντέλου του κλειστού βρόχου. Το μέγιστο πλάτος της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής προκύπτει από τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier για αδιάστατο αριθμό $Str=8.40$, που αντιστοιχεί λόγω συμμεταβολής στον αδιάστατο αριθμό $W=17.54$ και με βάση τα δεδομένα του πίνακα 6-1 η ιδιοσυχνότητα του υδραυλικού μοντέλου κλειστού συστήματος αγωγών προκύπτει να είναι $f_0=46.24$ Hz.



Σχήμα 6-2. Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος 3-1, (ιδιοσυχνότητα για $Str=8.40$ & $W=17.54$).

6.4 Μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής μάζας συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης

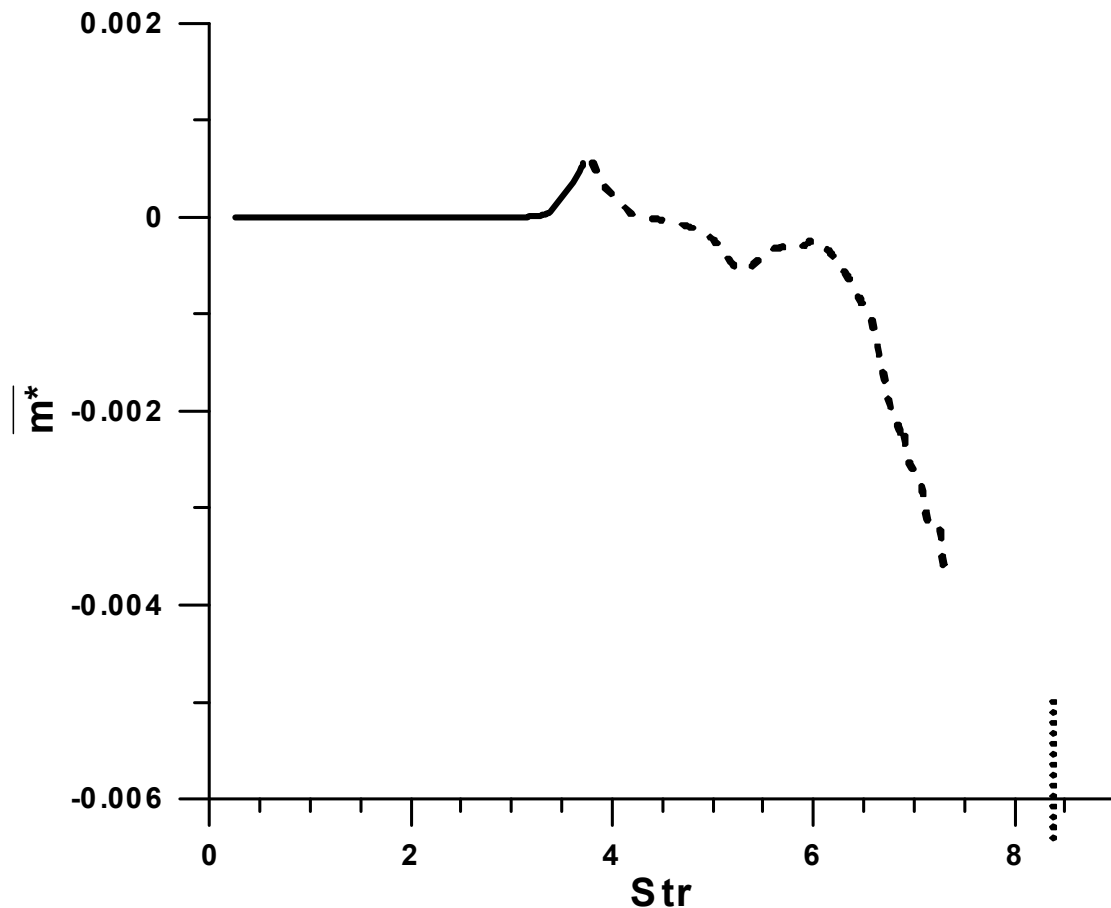
Στο σχήμα 6-3 αναπαριστάται γραφικά η μέση χρονικά αδιάστατη παροχή μάζας \overline{m}^* του συστήματος που ορίζουν τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 6-1 σε συνάρτηση με τον αδιάστατο αριθμό Strouhal που υποδηλώνει συχνότητα.

Στο σχήμα 6-3 με συνεχή γραμμή παρουσιάζονται τα δεδομένα, τα οποία έχουν επιλυθεί θέτοντας ως κριτήριο σύγκλισης η διαφορά μεταξύ δύο τιμών, των μεγεθών ταχύτητας και διατομής, που απέχουν μία χρονικά περίοδο να είναι μικρότερη της τιμής 10^{-7} (παράγραφος 4.9). Για αυτό το κριτήριο σύγκλισης προέκυψαν τιμές μέχρι αριθμό $Str=3.72$ που αντιστοιχεί σε συχνότητα 20.5 Hz. Η τιμή αυτή ήταν το όριο μελέτης των καμπυλών που παρουσιάστηκαν στη 1^η Ενότητα στην παραμετρική μελέτη άντλησης ασυμπιέστου ρευστού χωρίς βαλβίδες.

Επειδή, για τις τιμές του πίνακα 6-1 προέκυψε το σύστημα το οποίο έχει ιδιοσυχνότητα για αριθμό $Str=8.40$, μειώνουμε το κριτήριο σύγκλισης κατά δύο τάξεις μεγέθους αρχικά και σταδιακά περισσότερο, ώστε να φανερωθεί η τάση της καμπύλης για συχνότητα μεγαλύτερη των 20.5 Hz. Οι λύσεις που προέκυψαν από τον υπολογιστικό κώδικα για μικρότερο κριτήριο σύγκλισης παρουσιάζονται στο σχήμα 6-3 με διακεκομμένη γραμμή. Η κάθετη γραμμή με τις τελείες αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος ($Str=8.40$).

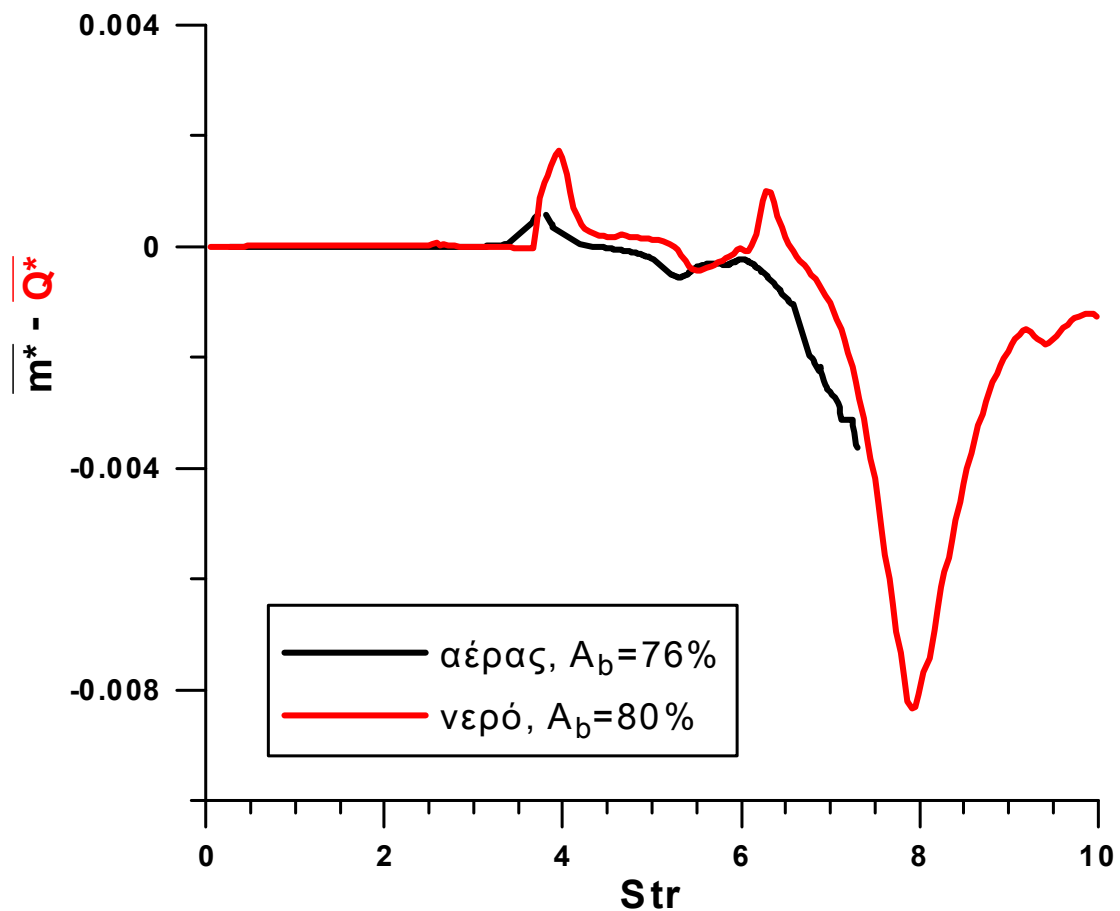
Παρατηρούμε ότι μέχρι αριθμό $Str=3.2$ περίπου, δεν έχει αναπτυχθεί έντονα μη μηδενική μέση χρονικά παροχή. Για το διάστημα τιμών Strouhal 3.2-4.3 αναπτύσσεται θετική μέση χρονικά παροχή μάζας με τοπικό ακρότατο για αριθμό $Str=3.72$.

Έπειτα από το τοπικό ακρότατο που σχηματίζεται στην αρχή, η ροή αλλάζει κατεύθυνση και έχει την τάση να σχηματίσει ένα μέγιστο \dot{m}_{max}^* προς τα αρνητικά. Ο υπολογιστικός κώδικας παρείχε αποτελέσματα μέχρι τον αριθμό $Str=7.30$ που αντιστοιχεί σε συχνότητα 40.2 Hz. Μετά το σημείο αυτό της πολύ υψηλής συχνότητας ήταν αδύνατο να συγκλίνει η αριθμητική μέθοδος.



Σχήμα 6-3. Μεταβολή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής μάζας $\overline{\dot{m}^*}$ του συστήματος σε συνάρτηση με τον αδιάστατο αριθμό Str για πλάτος διέγερσης $A_b=76\%$. Η κάθετη γραμμή με τις τελείες αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος ($Str=8.40$).

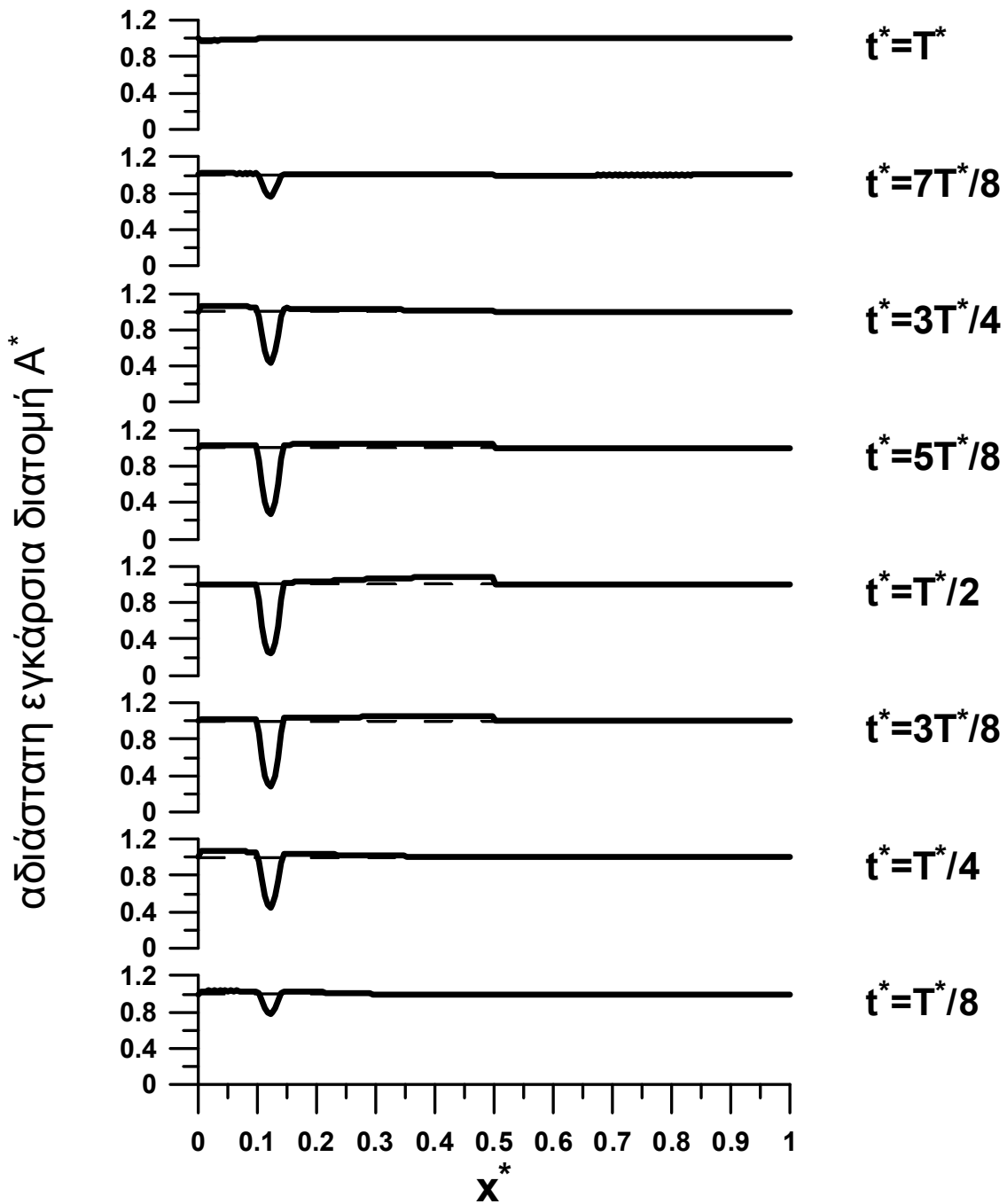
Στο σχήμα 6-4 συγκρίνεται η παραπάνω καμπύλη της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής μάζας του συμπιεστού ρευστού (αέρα) για πλάτος διέγερσης $A_b=76\%$ με αυτή της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής του ασυμπίεστου ρευστού (νερό) για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$. Φαίνεται να παρουσιάζουν σχετικά παρόμοια συμπεριφορά, βέβαια η καμπύλη του νερού έχει αποκαλυφθεί μέχρι αριθμό $Str=9.99$ που αντιστοιχεί για τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος αυτού σε συχνότητα 19.09 Hz, ενώ η καμπύλη του αέρα έχει αποκαλυφθεί μέχρι αριθμό $Str=7.30$ που αντιστοιχεί σε συχνότητα 40.2 Hz. Υπενθυμίζεται ότι $c_0=24.016$ m/sec για το σύστημα του κλειστού βρόχου με νερό και ότι $c_0=69.148$ m/sec για το κύκλωμα του αέρα ($Str = \omega \frac{L}{c_0}$).



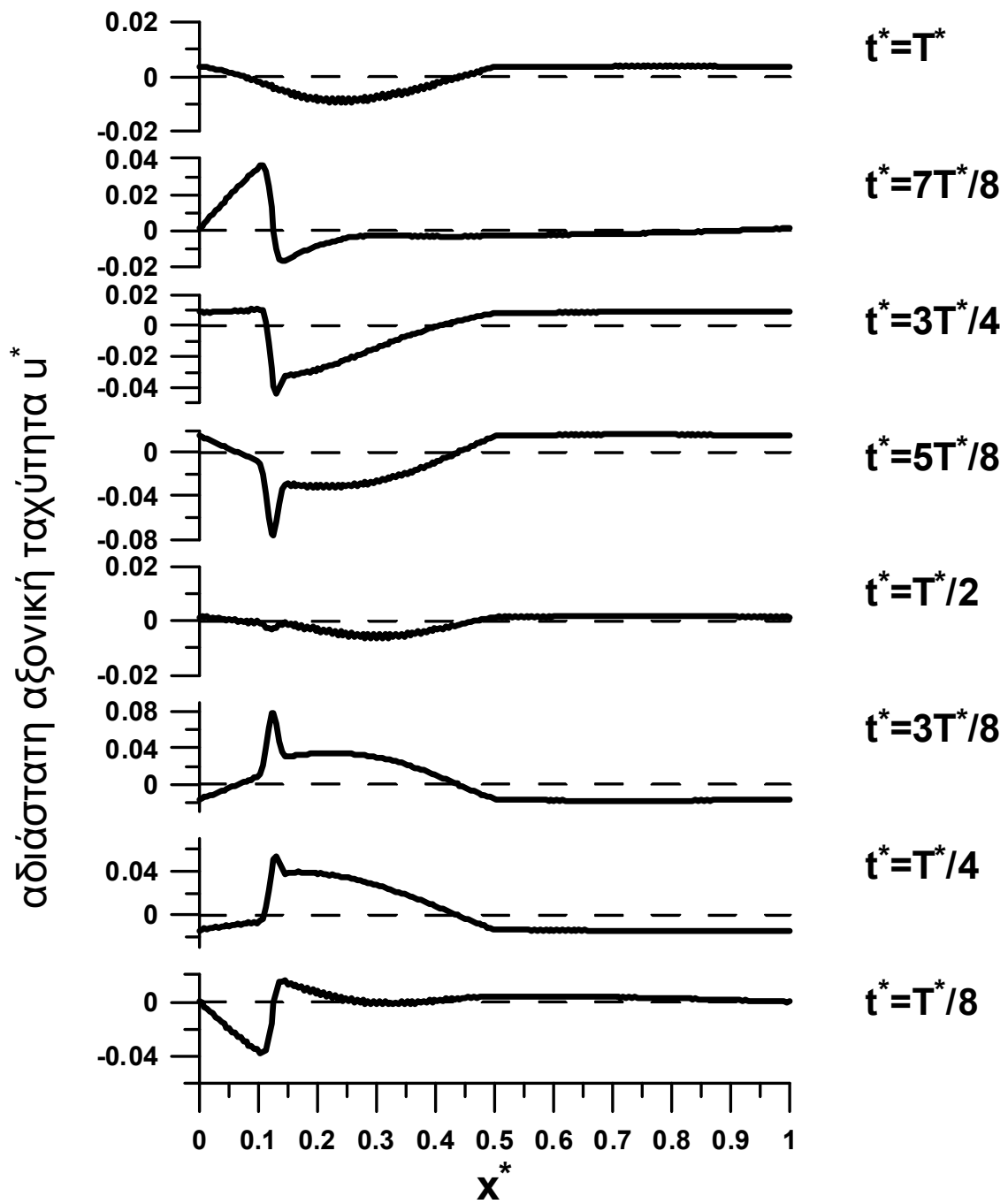
Σχήμα 6-4. Σύγκριση της μεταβολής της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής μάζας $\overline{\dot{m}^*}$ του συστήματος με αέρα για πλάτος διέγερσης $A_b=76\%$ και της μεταβολής της μέσης χρονικά αδιάστατης παροχής $\overline{\dot{Q}^*}$ του συστήματος με νερό για πλάτος διέγερσης $A_b=80\%$ σε συνάρτηση με τον αδιάστατο αριθμό Str .

6.5 Χωρικά και χρονικά αποτελέσματα των υπολογισθέντων μεγεθών

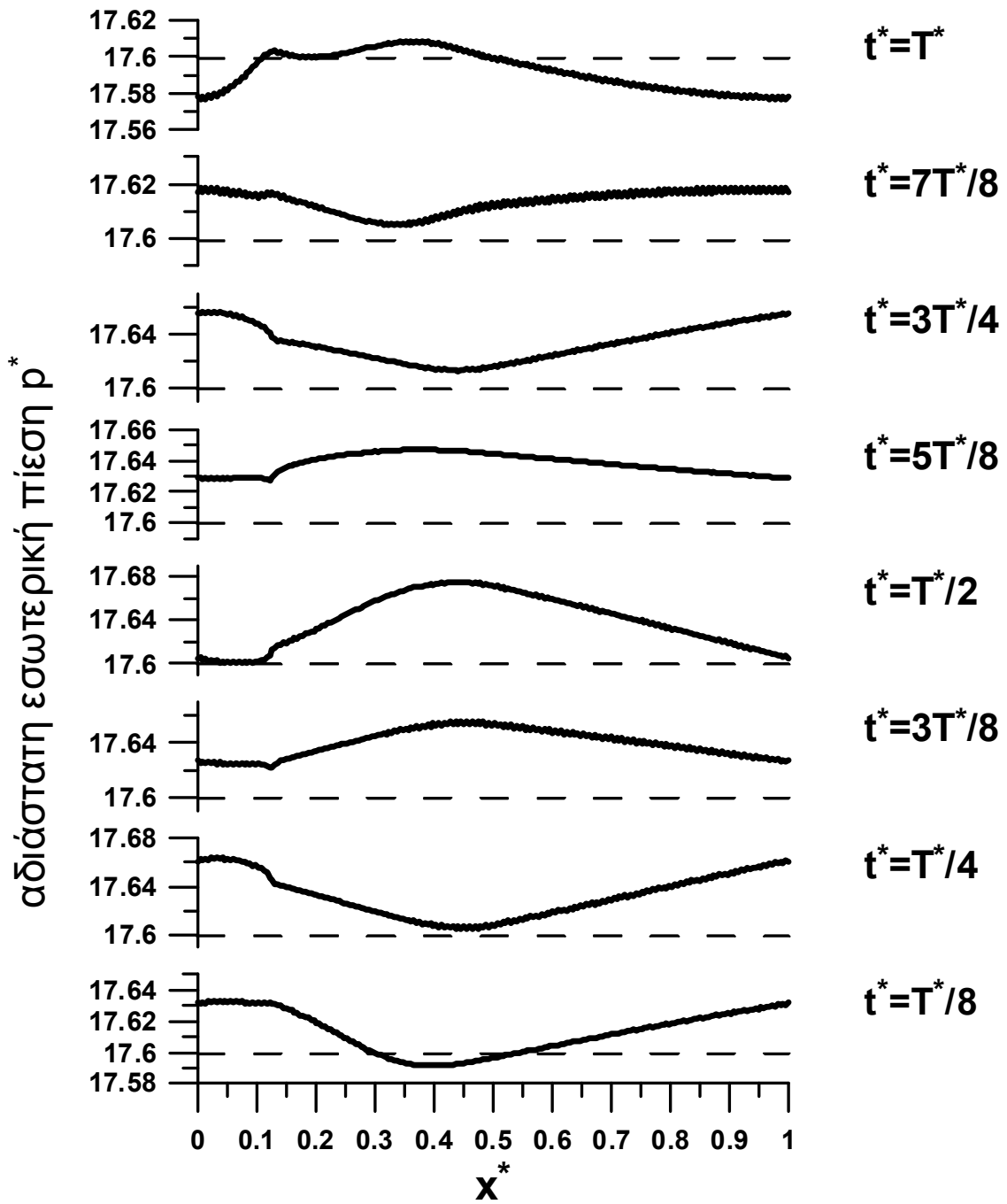
Ακολουθούν τα αποτελέσματα της άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες για τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 6-1. Αρχικά παρουσιάζονται οι χωρικές μεταβολές των υπολογισθέντων μεγεθών του μοντέλου κλειστού κυκλώματος αγωγών για πλάτος διέγερσης $A_b=76\%$ και αριθμό $Str=4.34$, και έπειτα οι χρονικές μεταβολές τους.



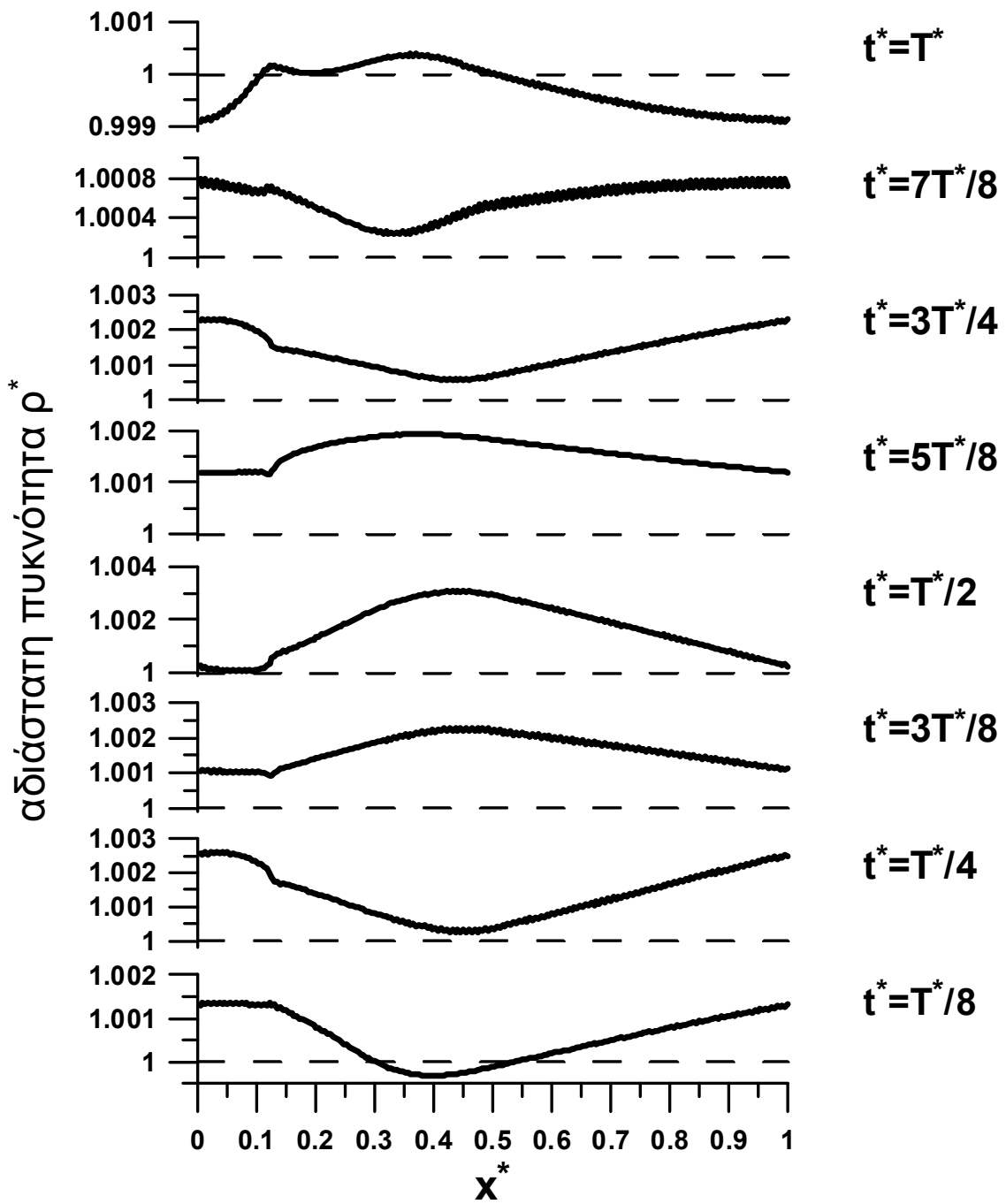
Σχήμα 6-5. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής A^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



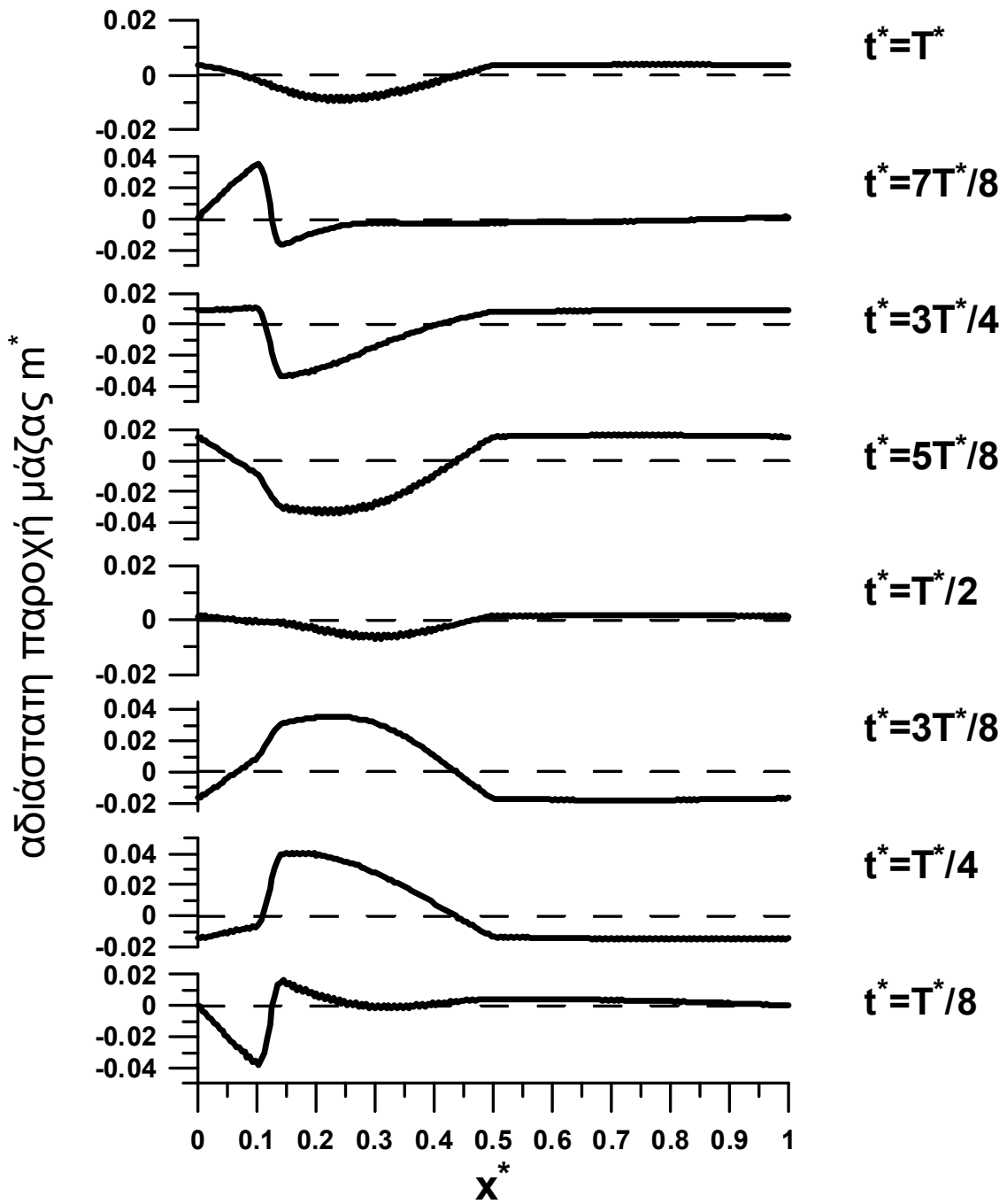
Σχήμα 6-6. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



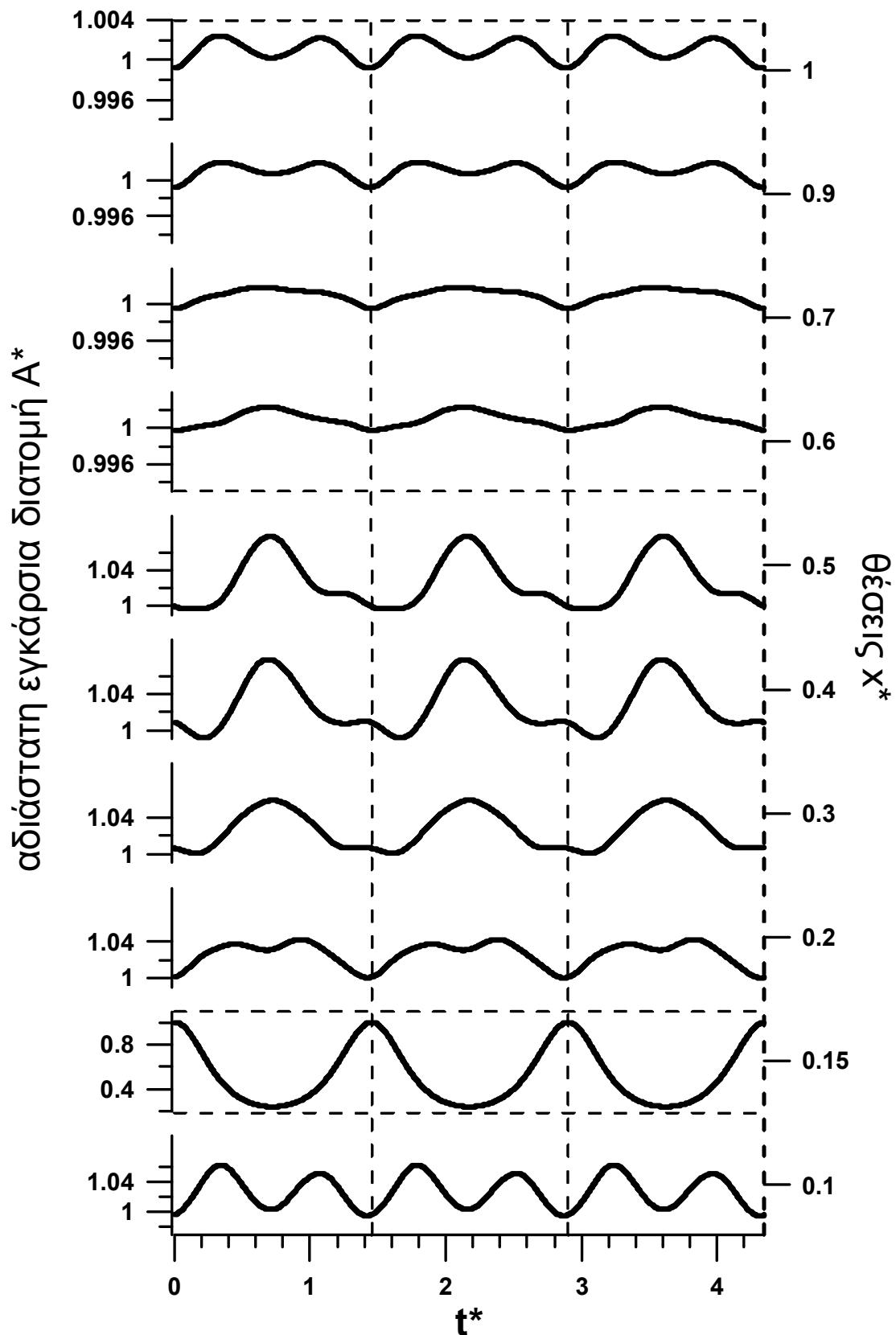
Σχήμα 6-7. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης εσωτερικής πίεσης p^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



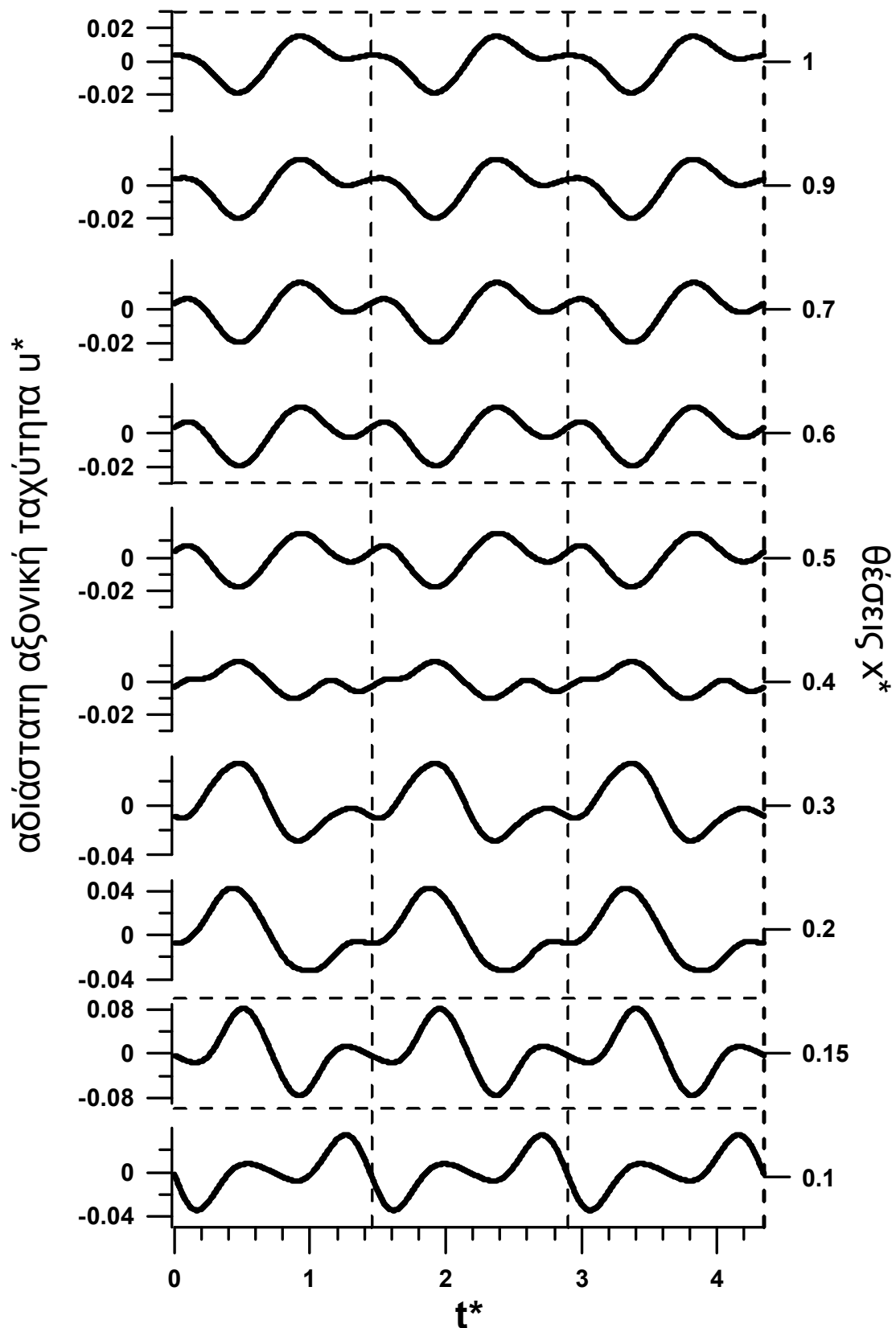
Σχήμα 6-8. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης πυκνότητας ρ^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



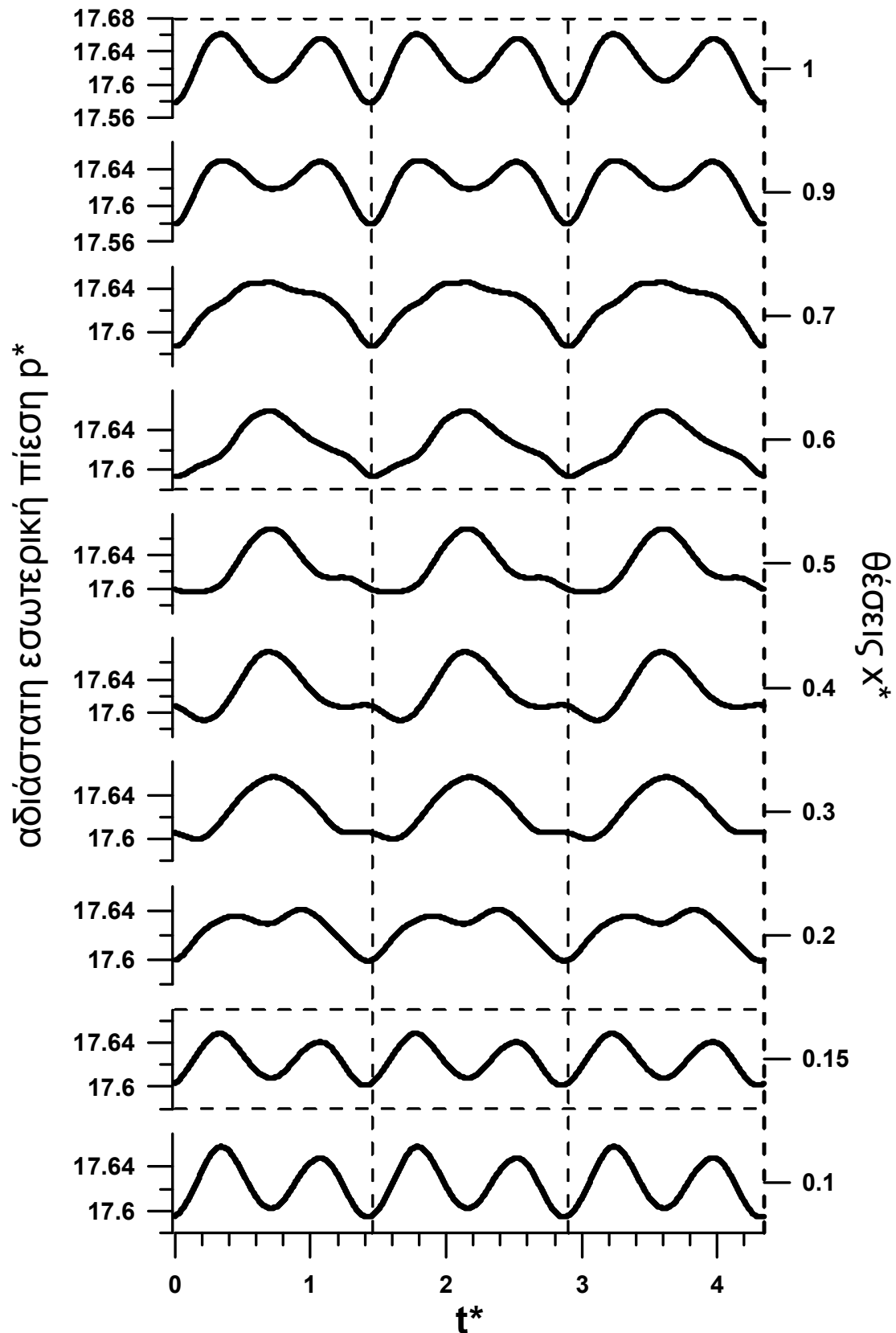
Σχήμα 6-9. Χωρική μεταβολή της αδιάστατης παροχής μάζας \dot{m}^* του κλειστού κυκλώματος ανά χρονικό διάστημα $T^*/8$ για μία αδιάστατη περίοδο.



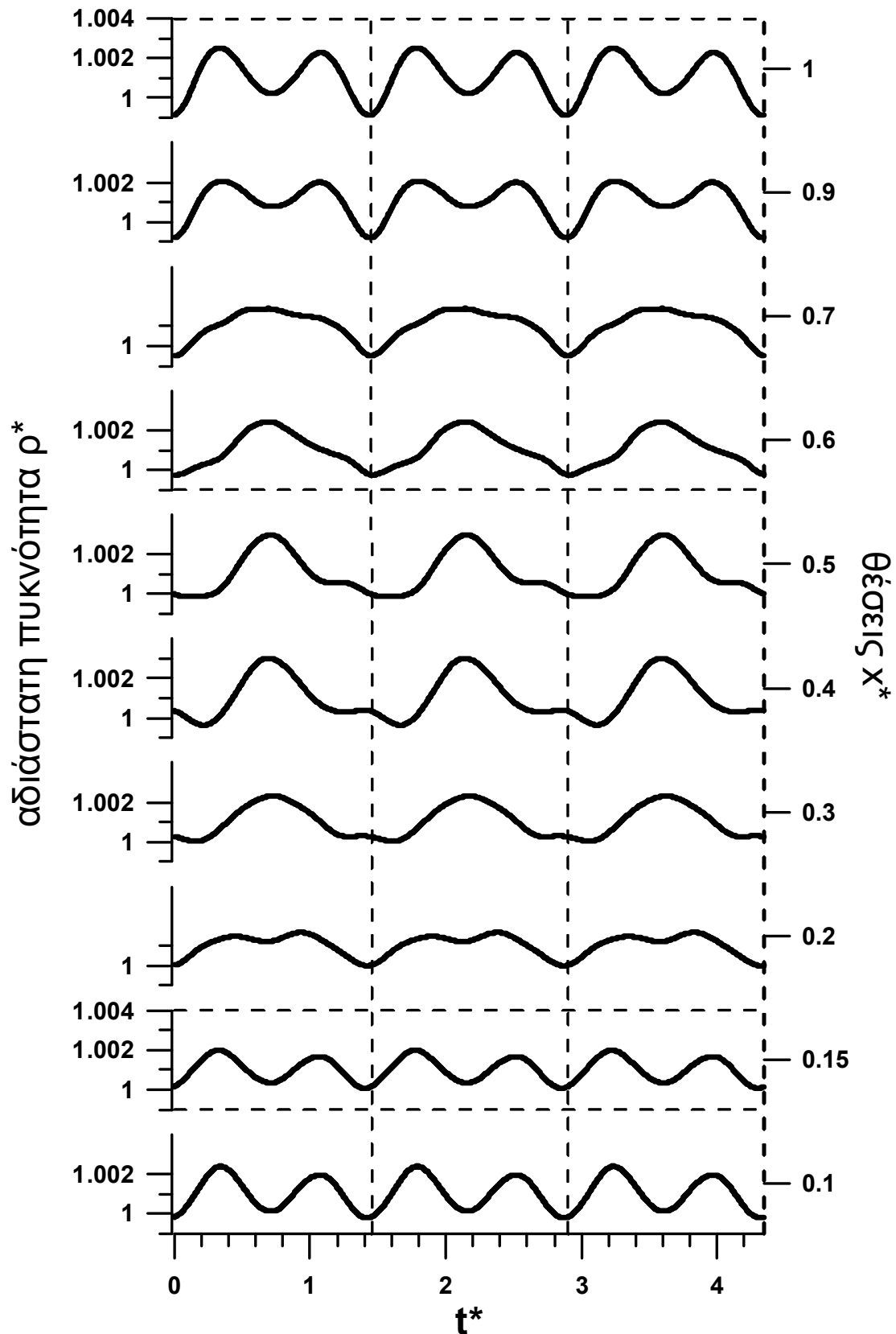
Σχήμα 6-10. Χρονική μεταβολή για τρεις περιόδους της αδιάστατης εγκάρσιας διατομής A^* του κλειστού κυκλώματος σε 10 αδιάστατες θέσεις του κλειστού κυκλώματος.



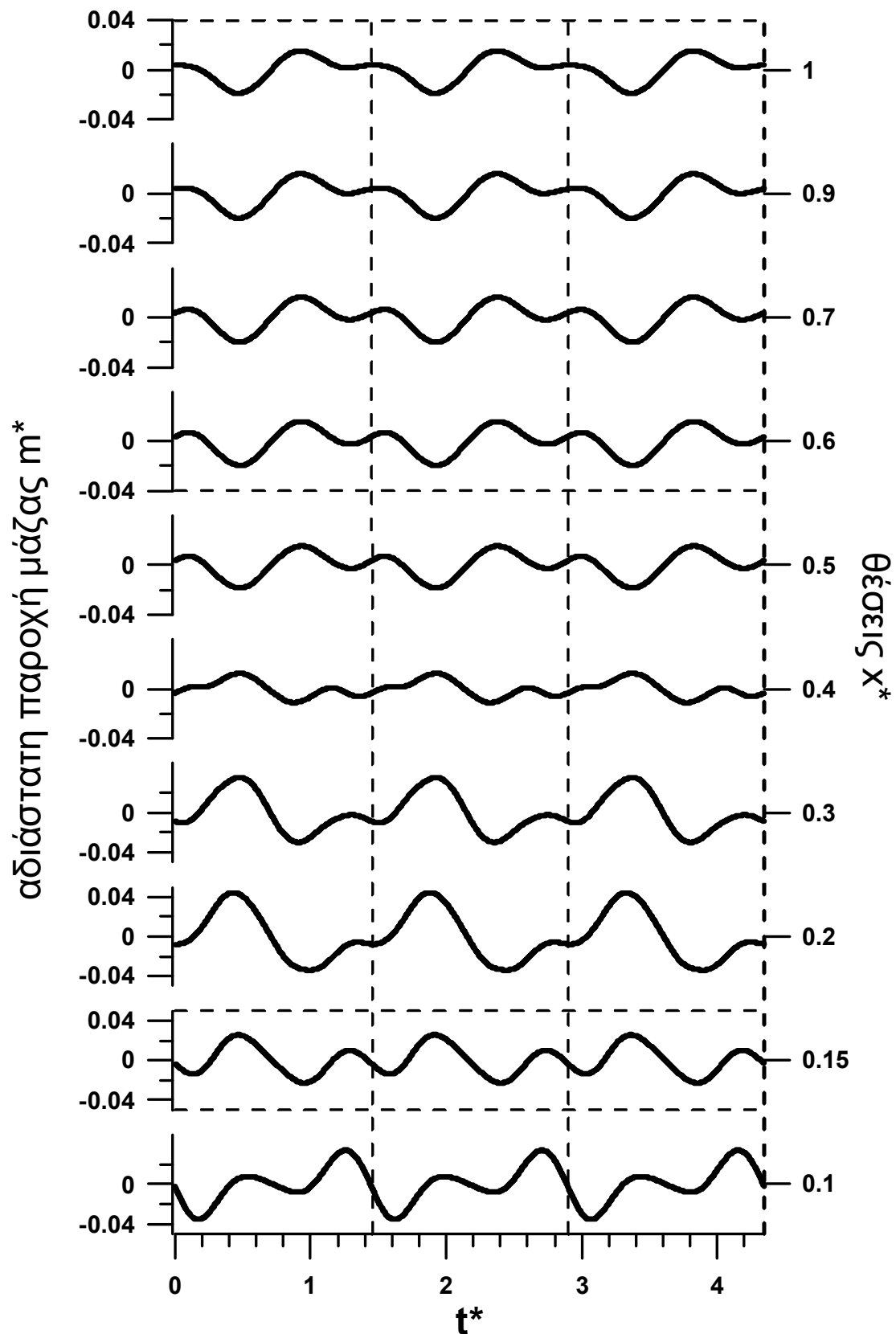
Σχήμα 6-11. Χρονική μεταβολή για τρεις περιόδους της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u^* του κλειστού κυκλώματος σε 10 αδιάστατες θέσεις του κλειστού κυκλώματος.



Σχήμα 6-12. Χρονική μεταβολή για τρεις περιόδους της αδιάστατης εσωτερικής πίεσης p^* του κλειστού κυκλώματος σε 10 αδιάστατες θέσεις του κλειστού κυκλώματος.



Σχήμα 6-13. Χρονική μεταβολή για τρεις περιόδους της αδιάστατης πυκνότητας ρ^* του κλειστού κυκλώματος σε 10 αδιάστατες θέσεις του κλειστού κυκλώματος.



Σχήμα 6-14. Χρονική μεταβολή για τρεις περιόδους της αδιάστατης παροχής μάζας \dot{m}^* του κλειστού κυκλώματος σε 10 αδιάστατες θέσεις του κλειστού κυκλώματος.

6.6 Σύνοψη κεφαλαίου – Γενικά σχόλια

Στο 4^ο κεφάλαιο αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις του μαθηματικού μοντέλου που προσομοιώνει το φαινόμενο άντλησης συμπιεστού ρευστού χωρίς βαλβίδες, και στο κεφάλαιο αυτό δίνονται τα αριθμητικά δεδομένα και επιλύεται το σύστημα.

Αρχικά βρίσκεται η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και αναπαριστάται γραφικά η μεταβολή της μέσης χρονικά παροχής μάζας σε συνάρτηση με τη συχνότητα διέγερσης.

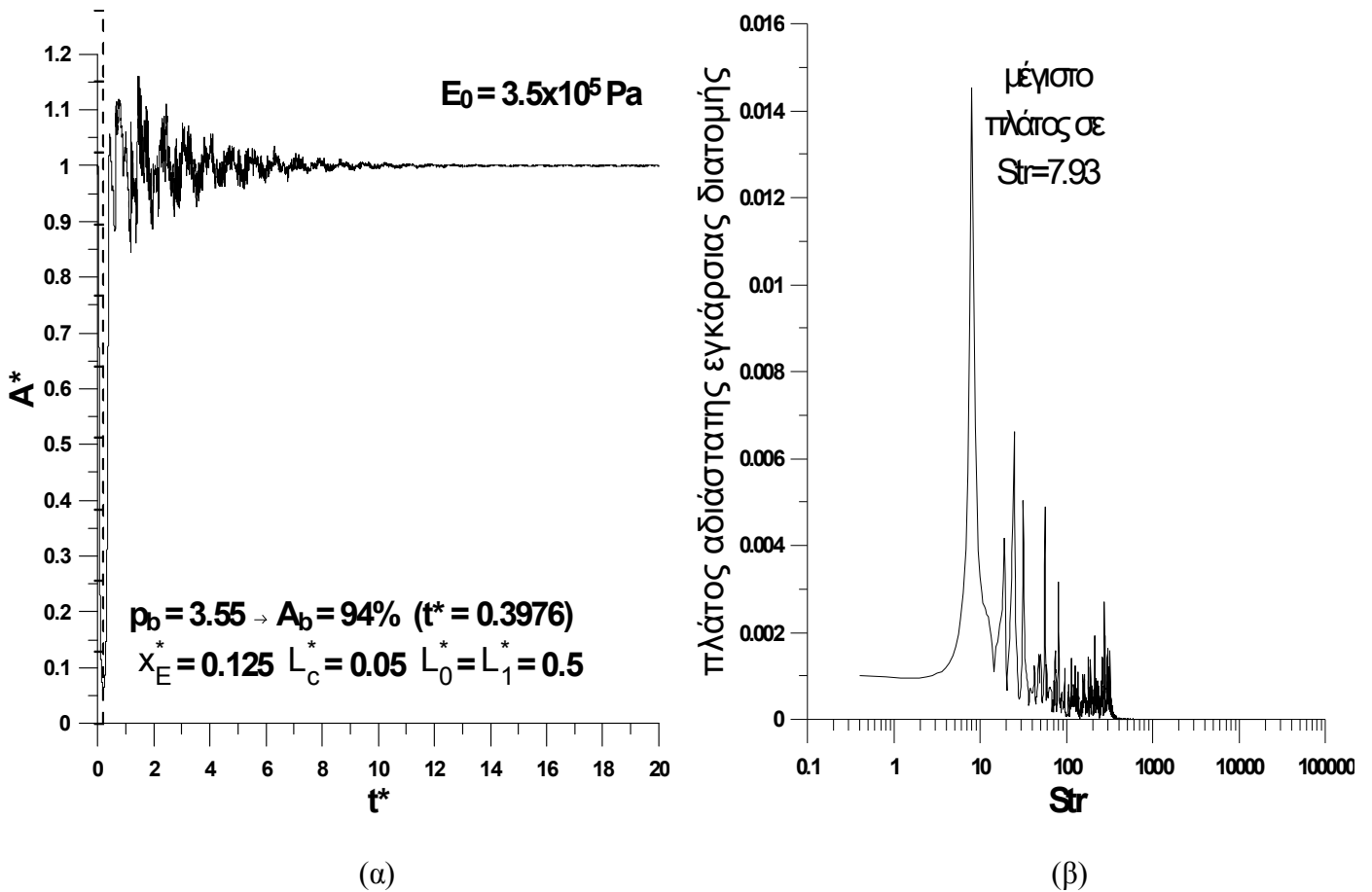
Ακόμα, παρουσιάζονται οι χωρικές και οι χρονικές μεταβολές των υπολογισθέντων μεγεθών (διατομή, ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα και παροχή μάζας) του συστήματος. Γενικά, τα διαγράμματα αυτά ποιοτικά συμπίπτουν με αντίστοιχα διαγράμματα άντλησης ασυμπίεστου ρευστού χωρίς βαλβίδες [Μανόπουλος, 2009].

Από τα διαγράμματα των χρονικών μεταβολών παρατηρούμε ότι η συνεχής επιβολή εξωτερικής πίεσης στο σημείο διέγερσης, δημιουργεί ένα επαναλαμβανόμενο φαινόμενο χωρίς να αποσβένει λόγω της δράσης της συνεκτικότητας.

Στα χωρικά διαγράμματα παρατηρείται μία αλλοίωση των αποτελεσμάτων λόγω της ύπαρξης θορύβου. Πρόκειται για ψευδείς ταλαντώσεις (spurious oscillations), με αριθμητική αιτιολογία που γεννώνται γύρω από σημεία ασυνέχειας, όπως για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι το σχετικά μεγάλο πλάτος διέγερσης (76%) και η αλλαγή της ενδοτικότητας μεταξύ εύκαμπτου και άκαμπτου αγωγού. Οι ταλαντώσεις αυτές διαδίδονται σε όλο το πεδίο των λύσεων, έχοντας μορφή θορύβου με πολύ μικρότερη περίοδο από την περιοδική λύση του ίδιου του προβλήματος, ιδιαίτερα στις υψίσυχνες διεγέρσεις, [Tam et al, 1993].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-Α

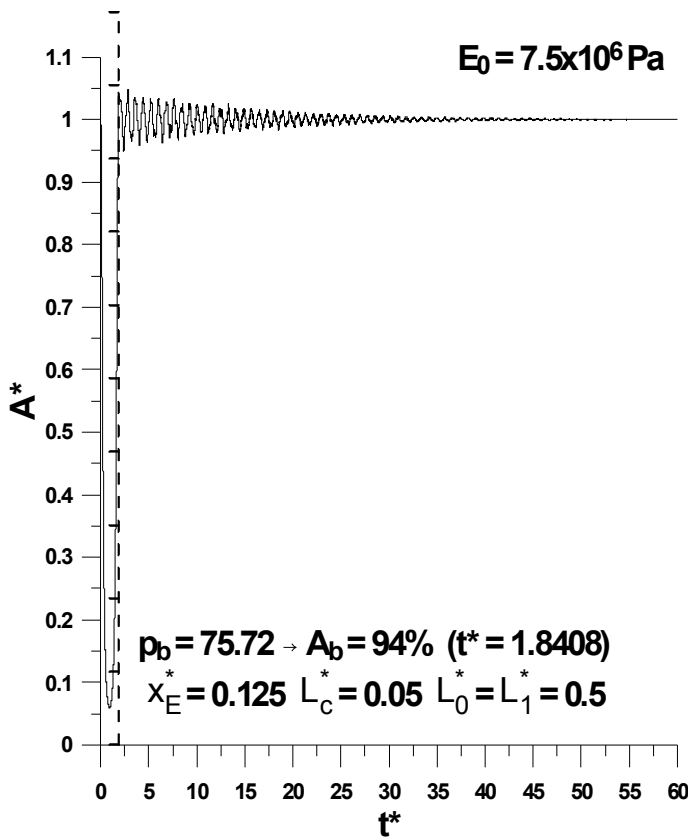
Α.1 Επίδραση του μέτρου ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών



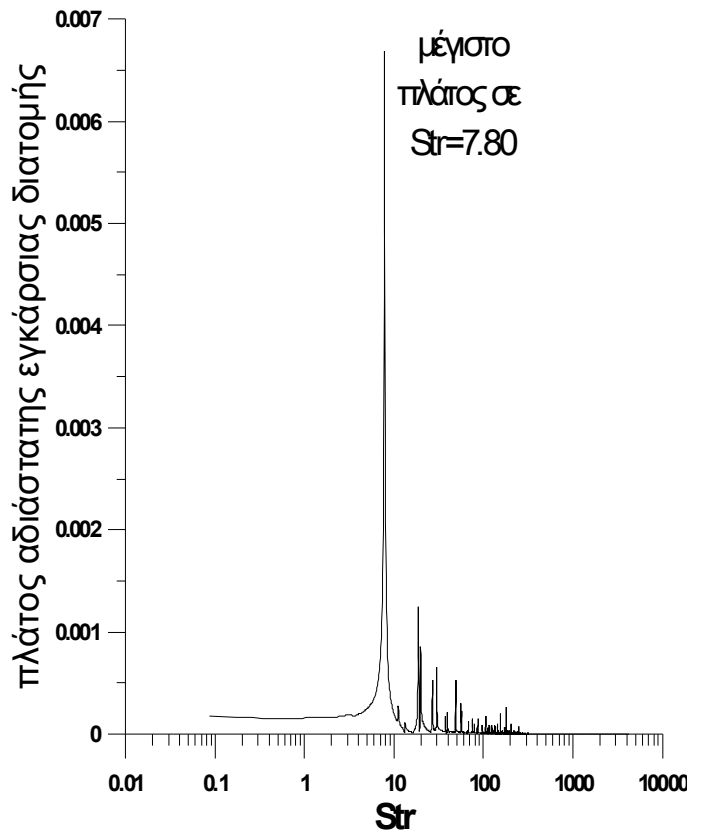
Σχήμα Α-1.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 0.3976$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 3.55$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού είναι $E_0 = 3.5 \times 10^5 \text{ Pa}$.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-1(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.93$, $W = 21.91$ & $f_0 = 4.79 \text{ Hz}$).



(α)

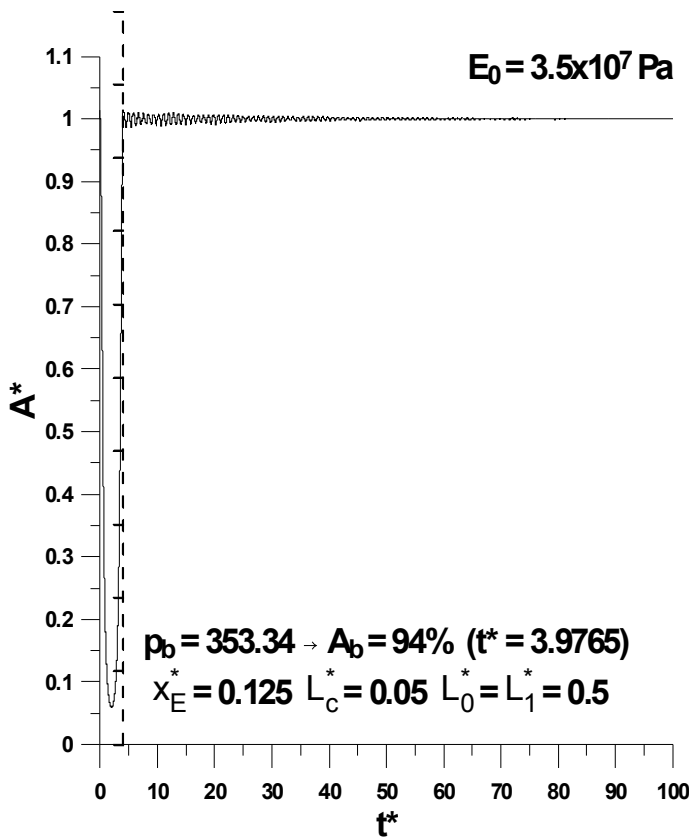


(β)

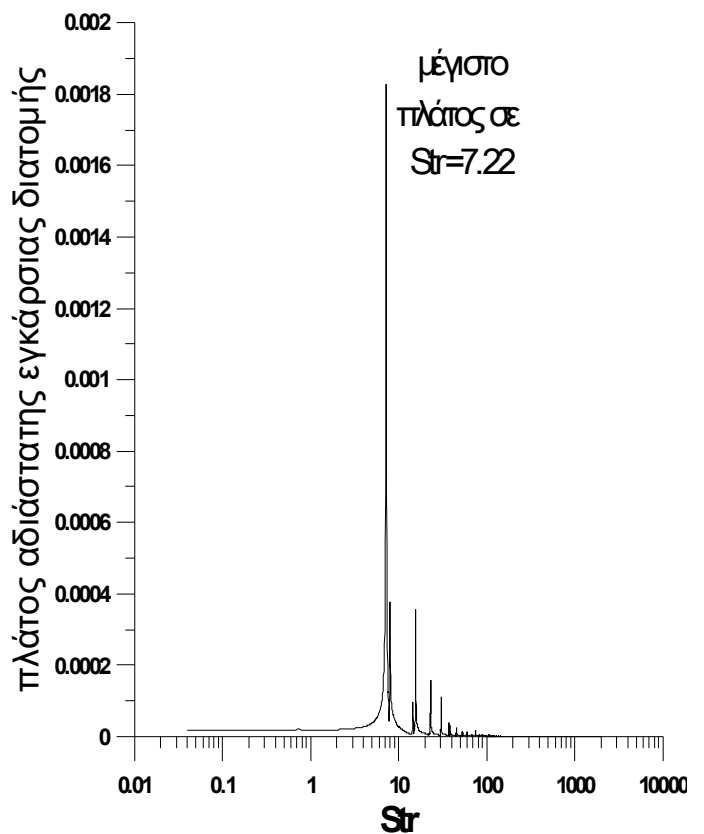
Σχήμα A-2.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.8408$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 75.72$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού είναι $E_0 = 7.5 \times 10^6$ Pa.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-2(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.80$, $W = 46.74$ & $f_0 = 21.81$ Hz).



(α)



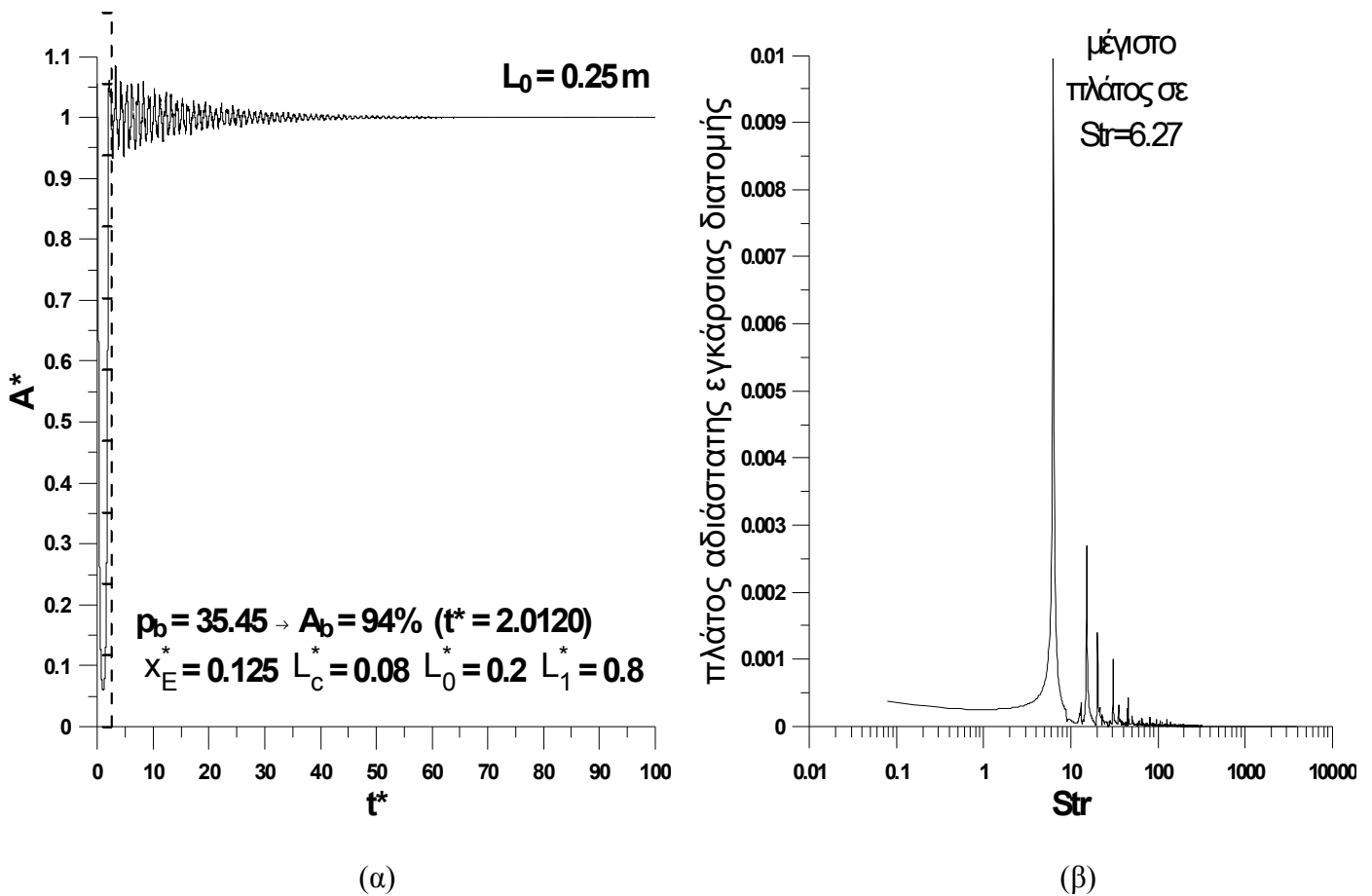
(β)

Σχήμα A-3.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 3.9765$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 353.34$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μέτρο ελαστικότητας του εύκαμπτου αγωγού είναι $E_0 = 3.5 \times 10^7$ Pa.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-3(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.22$, $W = 66.10$ & $f_0 = 43.62$ Hz).

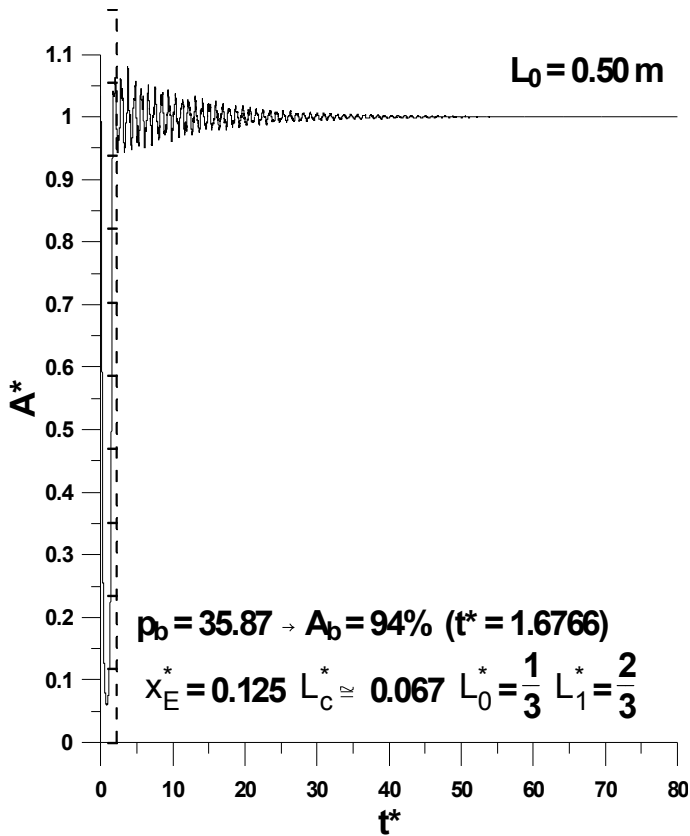
Α.2 Επίδραση του μήκους του άκαμπτου αγωγού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών



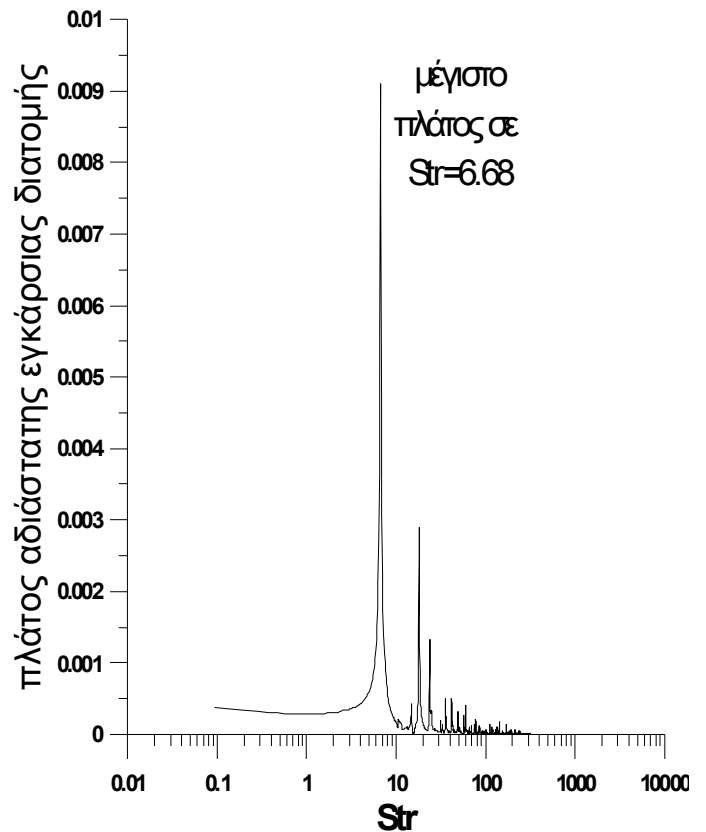
Σχήμα Α-4.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 2.0120$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.45$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μήκος του άκαμπτου αγωγού είναι $L_0 = 0.25$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-4(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 6.27$, $W = 43.82$ & $f_0 = 19.17$ Hz).



(α)

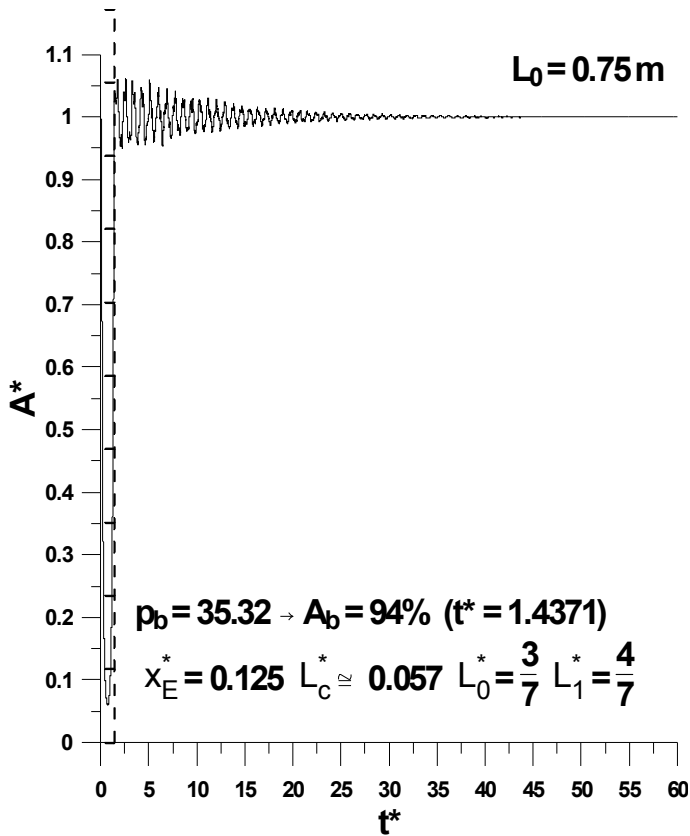


(β)

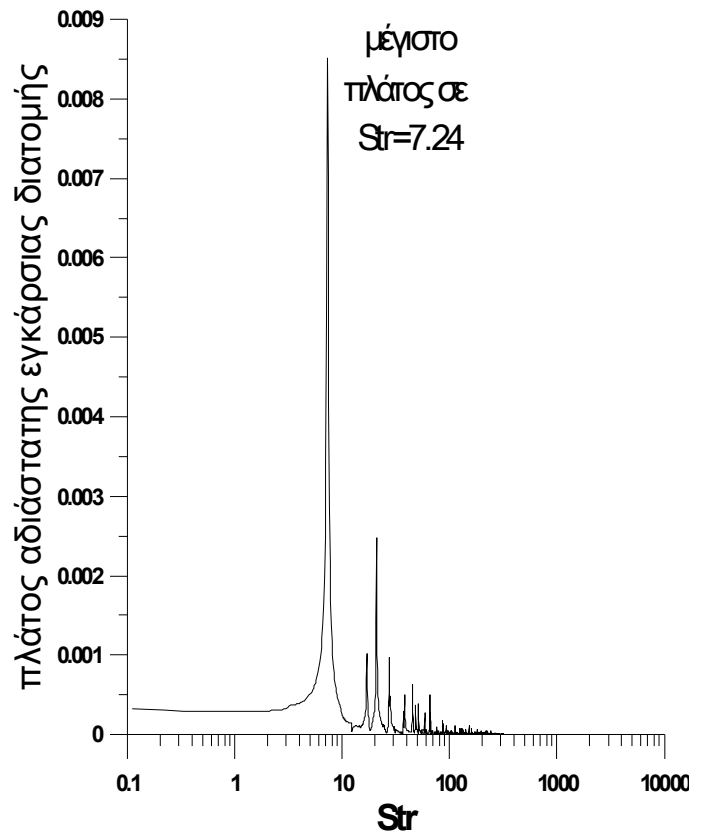
Σχήμα Α-5.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.6766$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.87$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μήκος του άκαμπτου αγωγού είναι $L_0 = 0.50$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-5(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 6.68$, $W = 41.28$ & $f_0 = 17.02$ Hz).



(α)



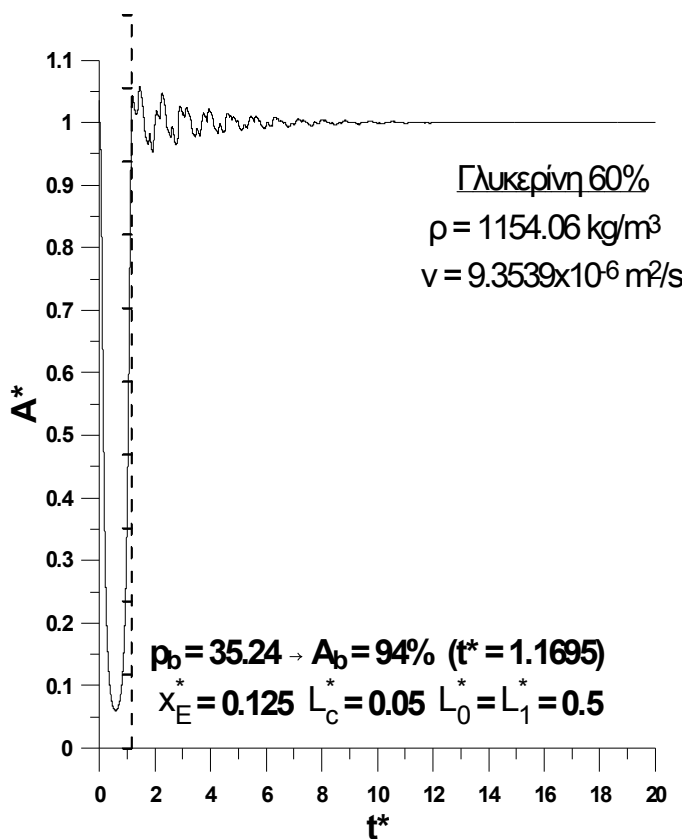
(β)

Σχήμα Α-6.

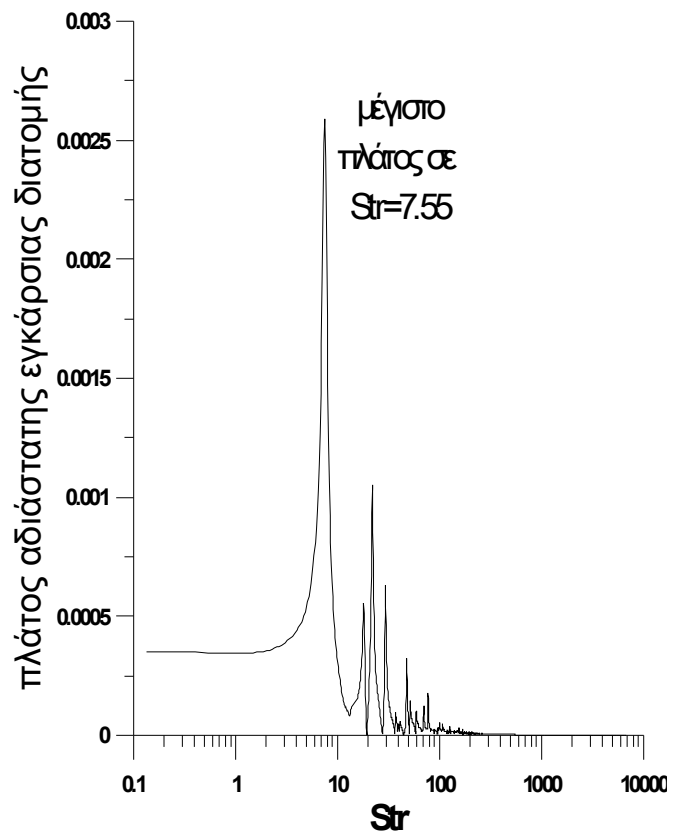
(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.4371$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.32$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Το μήκος του άκαμπτου αγωγού είναι $L_0 = 0.75$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-6(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.24$, $W = 39.80$ & $f_0 = 15.82$ Hz).

Α.3 Επίδραση των φυσικών ιδιοτήτων του ρευστού στην ιδιοσυχνότητα του κλειστού βρόχου αγωγών



(α)

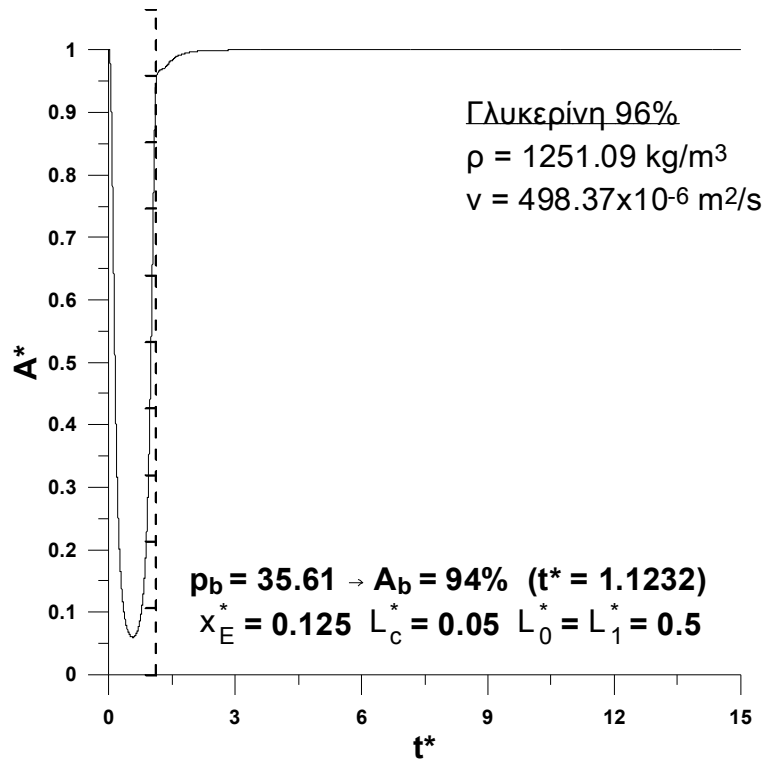


(β)

Σχήμα Α-7.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.1695$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.24$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η πυκνότητα του ρευστού (διάλυμα γλυκερίνης 60%) είναι $\rho = 1154.06 \text{ kg/m}^3$ και η κινηματική συνεκτικότητα του $\nu = 9.3539 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

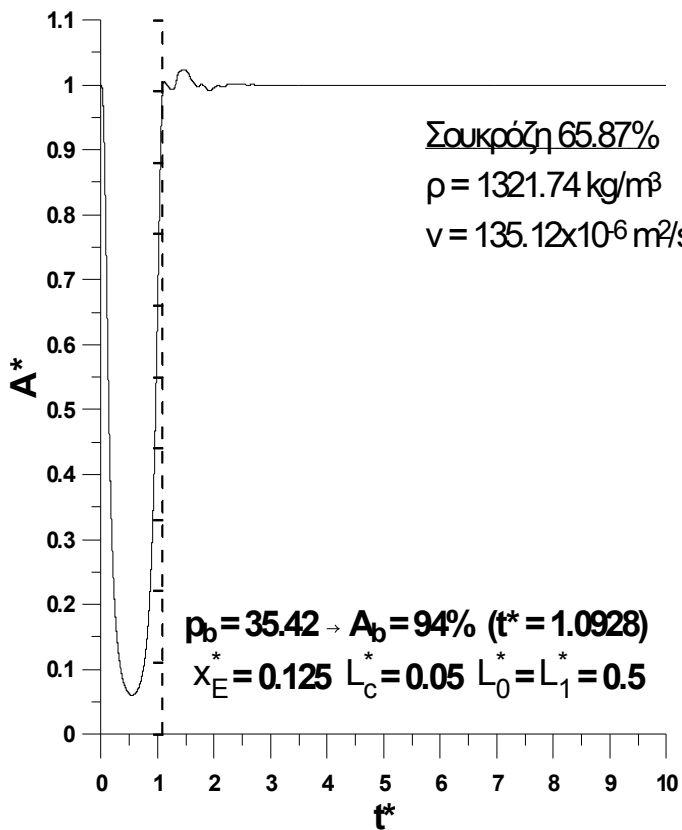
(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-7(α), (ιδιοσυχνότητα για $\text{Str} = 7.55$, $W = 12.01$ & $f_0 = 13.42 \text{ Hz}$).



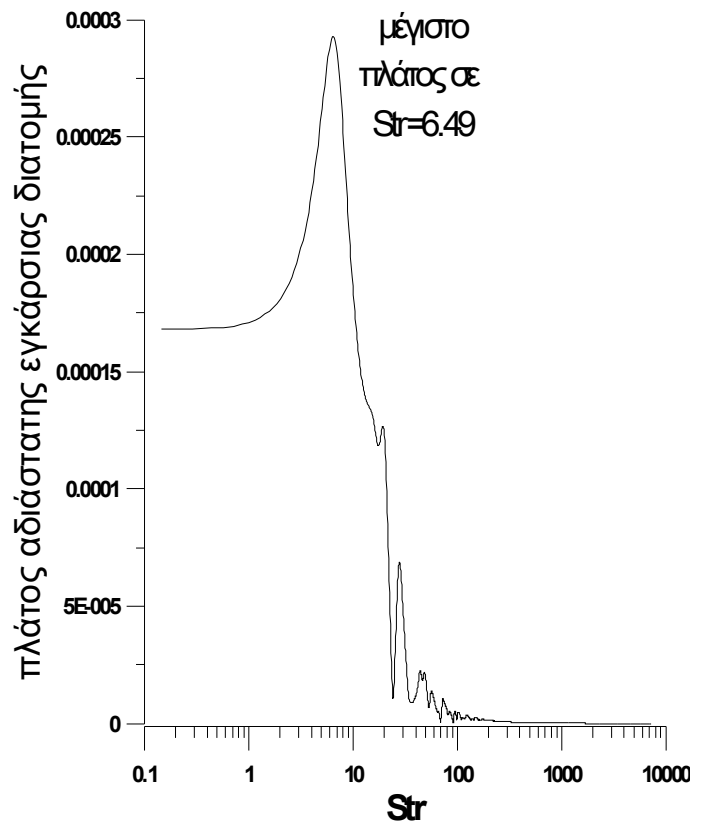
Σχήμα Α-8.

Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.1232$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.61$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η πυκνότητα του ρευστού (διάλυμα γλυκερίνης 96%) είναι $\rho = 1251.09 \text{ kg/m}^3$ και η κινηματική συνεκτικότητα του $\nu = 498.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Αυτό το σύστημα κλειστού βρόχου δεν ταλαντώνεται, επομένως δεν μπορεί να εξαχθεί η αριθμητική τιμή της ιδιοσυχνότητάς του από τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier.



(α)



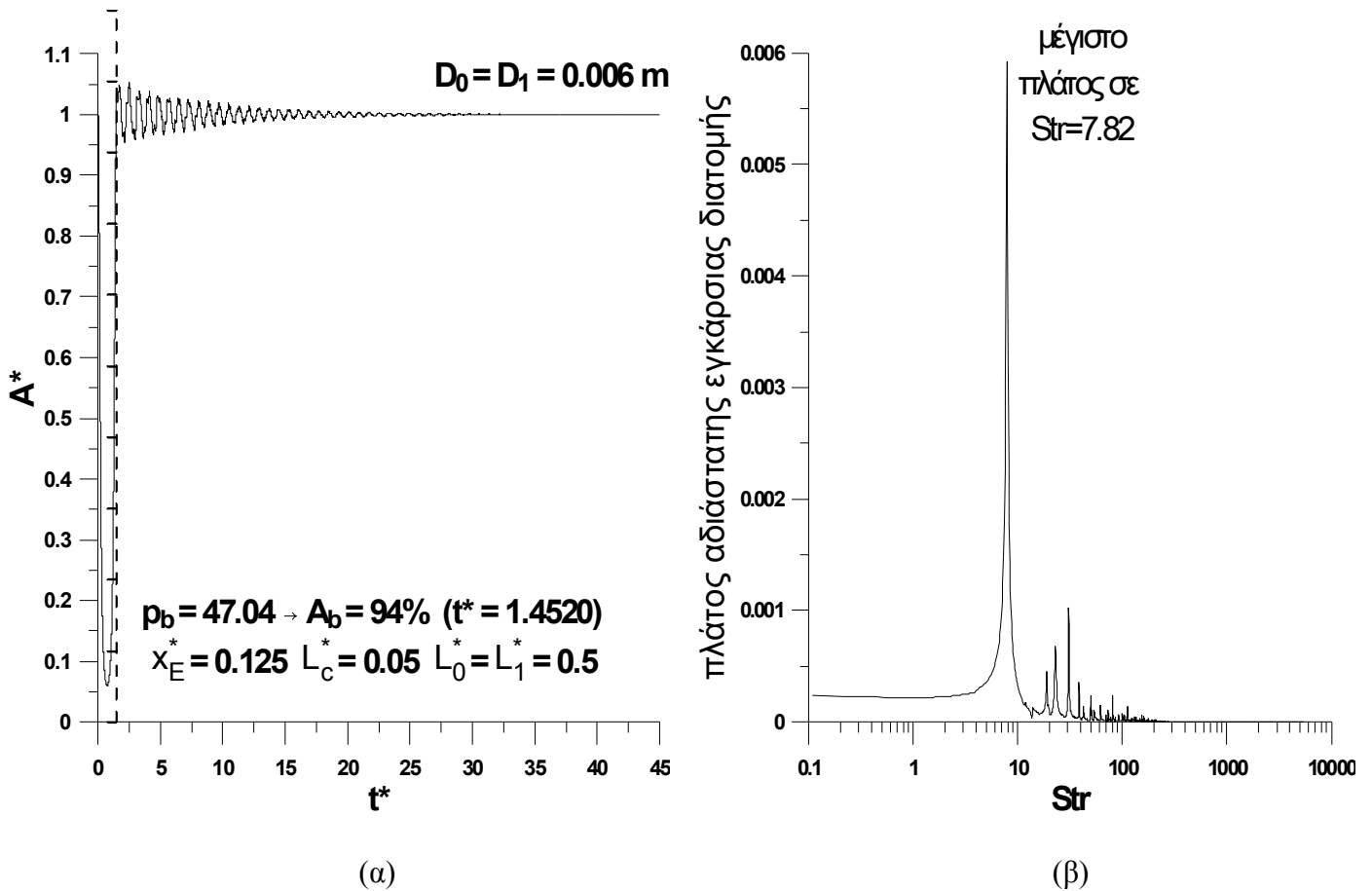
(β)

Σχήμα Α-9.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.0928$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.42$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η πυκνότητα του ρευστού (διάλυμα σουκρόζης 65.87%) είναι $\rho = 1321.74 \text{ kg/m}^3$ και η κινηματική συνεκτικότητα του $\nu = 135.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-9(α), (ιδιοσυχνότητα για $\text{Str} = 6.49$, $W = 2.83$ & $f_0 = 10.79 \text{ Hz}$).

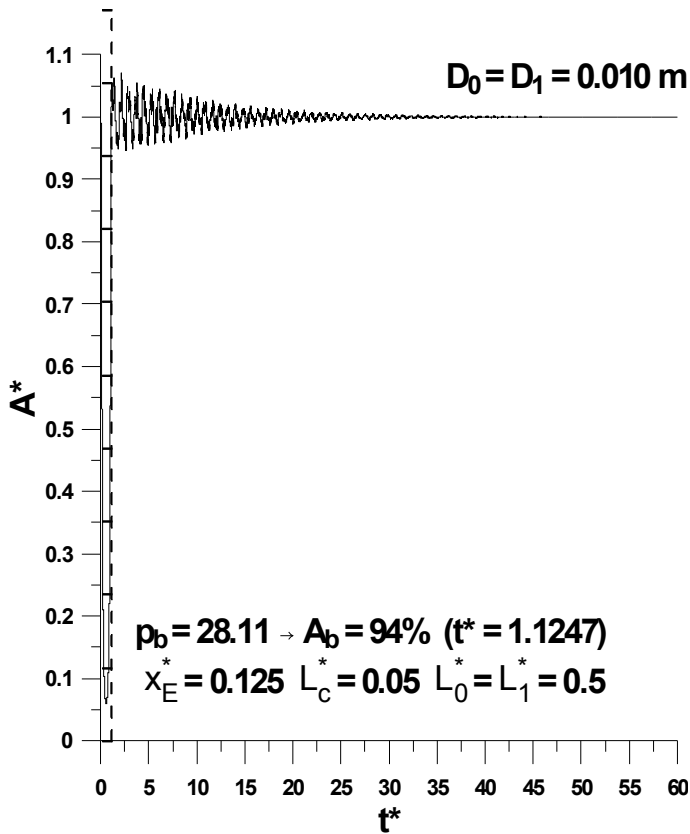
Α.4 Επίδραση της διατομής του κλειστού βρόχου αγωγών στην ιδιοσυχνότητά του



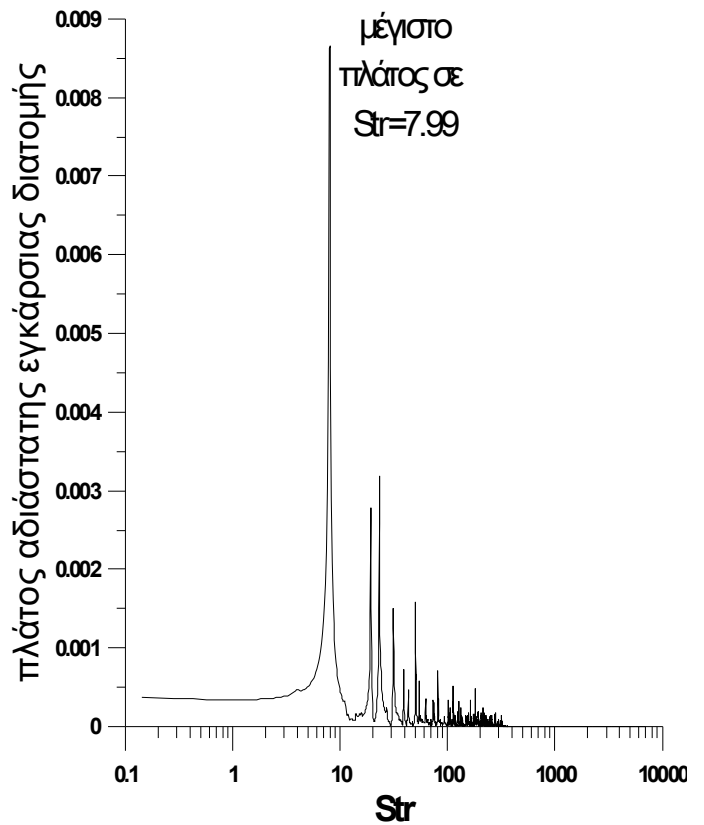
Σχήμα Α-10.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.4520$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 47.04$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η διατομή του κλειστού βρόχου αγωγών είναι $D_0 = D_1 = 0.006$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-10(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.82$, $W = 31.18$ & $f_0 = 17.26$ Hz).



(α)

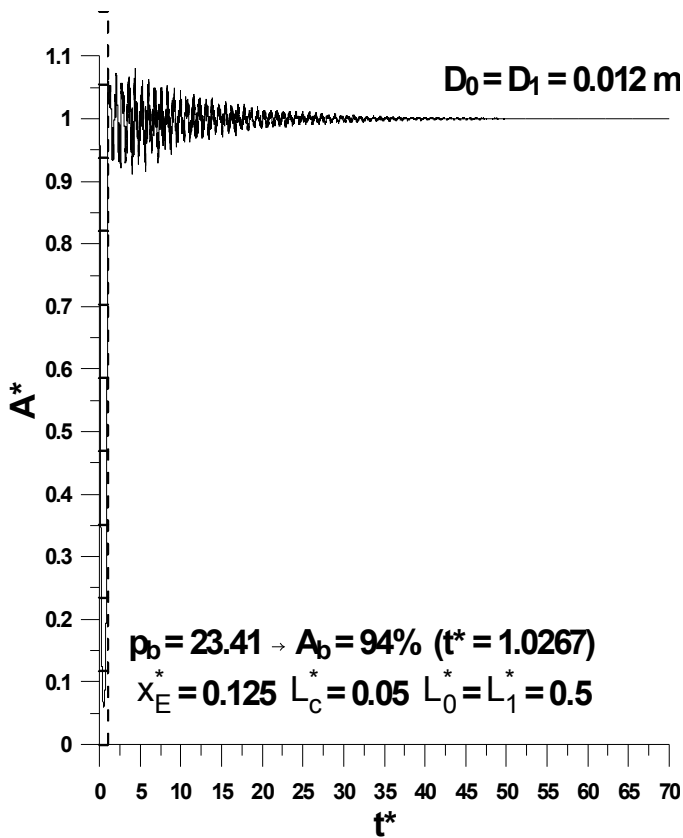


(β)

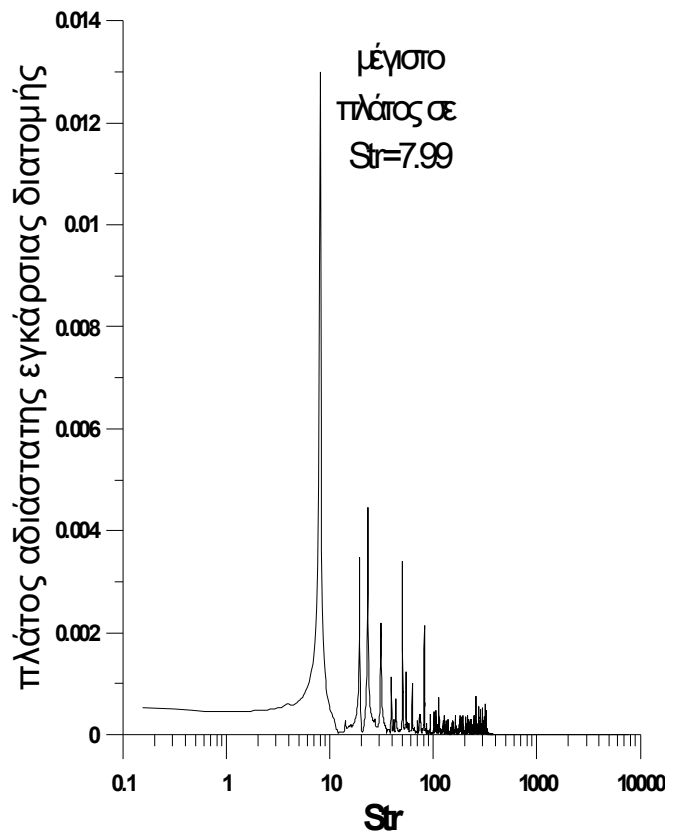
Σχήμα A-11.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.1247$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 28.11$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η διατομή του κλειστού βρόχου αγωγών είναι $D_0 = D_1 = 0.010$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-11(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.99$, $W = 46.24$ & $f_0 = 13.66$ Hz).



(α)



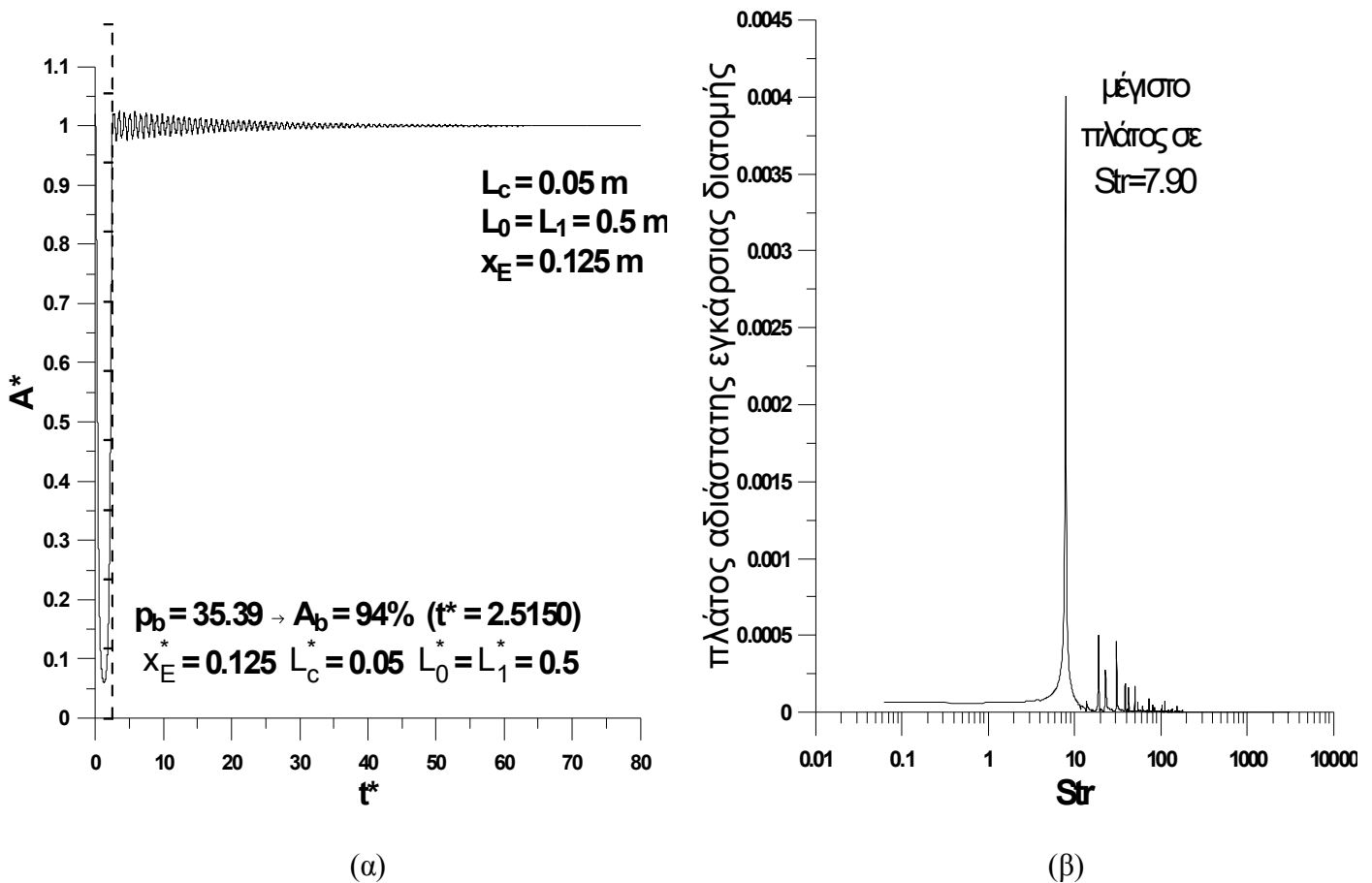
(β)

Σχήμα A-12.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 1.0267$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 23.41$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η διατομή του κλειστού βρόχου αγωγών είναι $D_0 = D_1 = 0.012$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-12(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.99$, $W = 53.00$ & $f_0 = 12.46$ Hz).

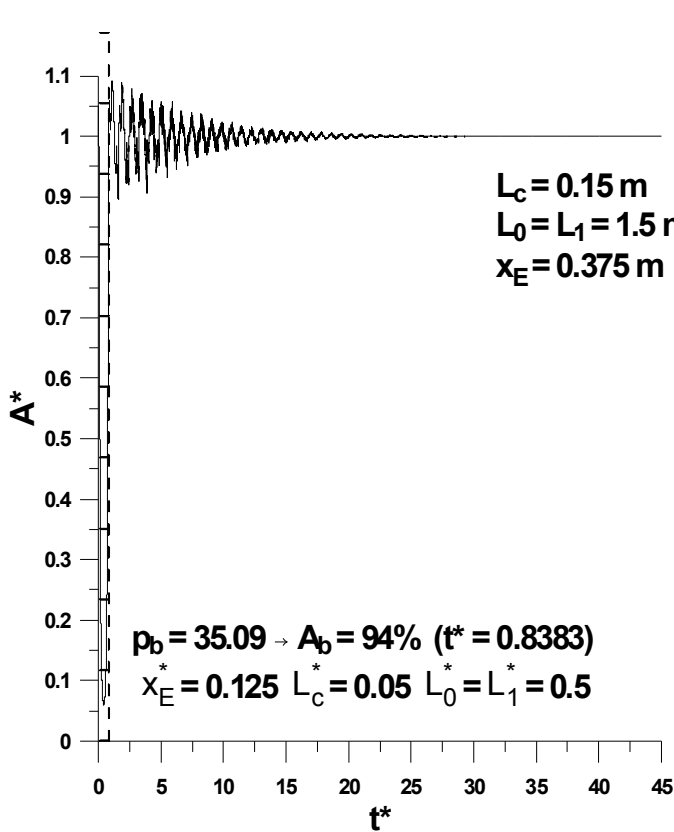
Α.5 Επίδραση των χαρακτηριστικών μηκών του κλειστού βρόχου αγωγών στην ιδιοσυχνότητά του



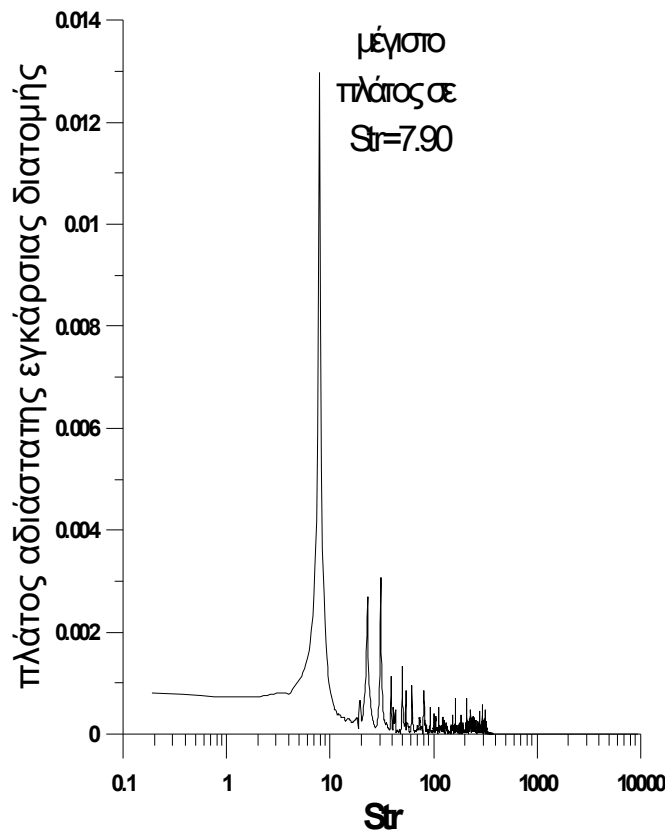
Σχήμα Α-13.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 2.5150$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.39$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η θέση διέγερσης είναι στο σημείο $x_E = 0.125$ m και έχει μήκος $L_c = 0.05$ m. Ο εύκαμπτος και άκαμπτος αγωγός έχουν ίσα μήκη $L_0 = L_1 = 0.5$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος Α-13(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.90$, $W = 55.00$ & $f_0 = 30.20$ Hz).



(α)

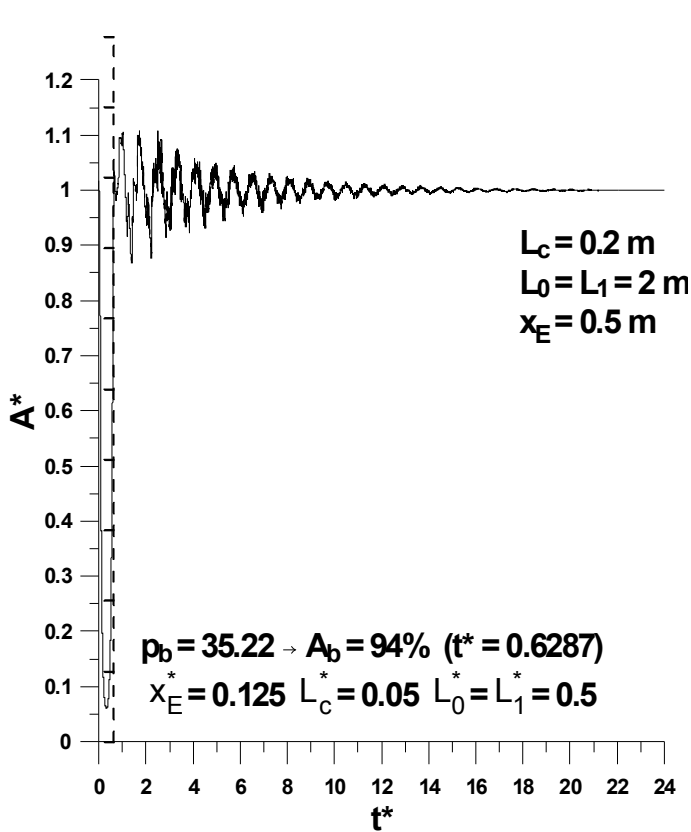


(β)

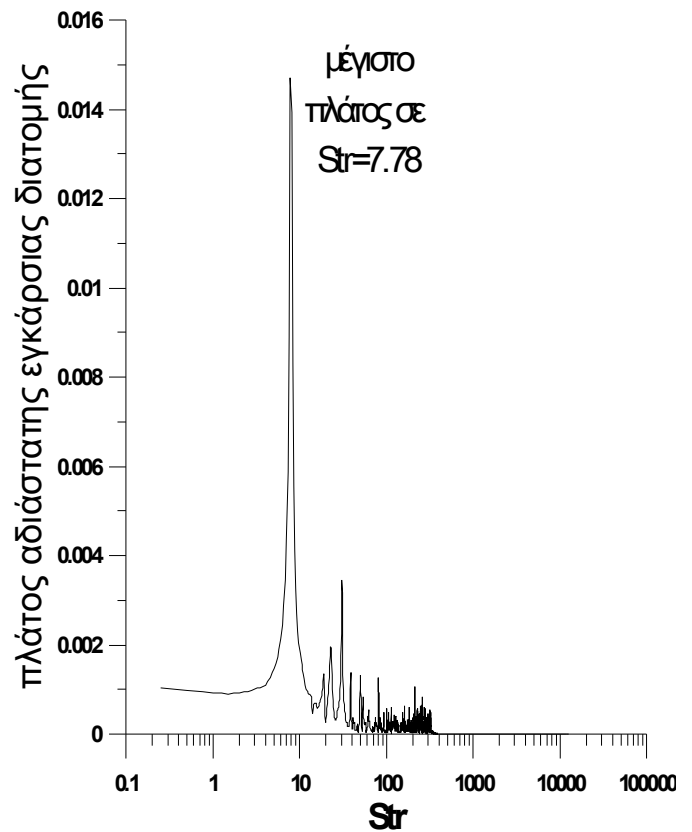
Σχήμα A-14.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 0.8383$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.09$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η θέση διέγερσης είναι στο σημείο $x_E = 0.375$ m και έχει μήκος $L_c = 0.15$ m. Ο εύκαμπτος και άκαμπτος αγωγός έχουν ίσα μήκη $L_0 = L_1 = 1.5$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-14(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.90$, $W = 31.75$ & $f_0 = 10.07$ Hz).



(α)



(β)

Σχήμα A-15.

(α) Αριθμητική δοκιμή συστήματος κλειστού βρόχου αγωγών σε ελεύθερη ταλάντωση. Χρονική μεταβολή της εγκάρσιας αδιάστατης διατομής $A^*(x^*, t^*)$ σε ελεύθερη ταλάντωση στη θέση $x^* = x_E^* = 0.125$, όταν διεγείρεται αρχικά για αδιάστατο χρόνο $t^* = 0.6287$ με πλάτος εξωτερικής πίεσης αρχικής διέγερσης $p_b = 35.22$, το οποίο προκαλεί αρχικό πλάτος διέγερσης $A_b = 94\%$. Η θέση διέγερσης είναι στο σημείο $x_E = 0.5$ m και έχει μήκος $L_C = 0.2$ m. Ο εύκαμπτος και άκαμπτος αγωγός έχουν ίσα μήκη $L_0 = L_1 = 2$ m.

(β) Φάσμα κατόπιν ανάλυσης με ταχύ μετασχηματισμό Fourier της ελεύθερης ταλάντωσης της χρονικής μεταβολής της αδιάστατης διατομής του σχήματος A-15(α), (ιδιοσυχνότητα για $Str = 7.78$, $W = 27.28$ & $f_0 = 7.43$ Hz).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-B

B.1 Πολυωνυμικές προσεγγίσεις συναρτήσεων Kelvin.

Για αδιάστατους αριθμούς Womersley που κυμαίνονται στο διάστημα $0 \leq W \leq 8$ ισχύουν οι προσεγγιστικές σχέσεις, [Olver, 1964]:

$$\text{ber}(W) = 1 - 64 (W/8)^4 + 113.77777774 (W/8)^8 - 32.36345652 (W/8)^{12} + 2.64191397 (W/8)^{16} - 0.08349609 (W/8)^{20} + 0.00122552 (W/8)^{24} - 0.00000901 (W/8)^{28} + \varepsilon$$

όπου το σφάλμα υπολογισμού είναι: $|\varepsilon| < 10^{-9}$,

$$\text{bei}(W) = 16(W/8)^2 + 113.77777774 (W/8)^6 + 72.81777742 (W/8)^{10} - 10.56765779 (W/8)^{14} + 0.52185615 (W/8)^{18} - 0.01103667 (W/8)^{22} + 0.00011346 (W/8)^{26} + \varepsilon$$

όπου το σφάλμα υπολογισμού είναι: $|\varepsilon| < 6 \times 10^{-9}$,

$$\text{ber}'(W) = W [-4 (W/8)^2 + 14.22222222 (W/8)^6 - 6.06814810 (W/8)^{10} + 0.66047849 (W/8)^{14} - 0.02609253 (W/8)^{18} + 0.00045957 (W/8)^{22} - 0.00000394 (W/8)^{26}] + \varepsilon$$

όπου το σφάλμα υπολογισμού είναι: $|\varepsilon| < 2.1 \times 10^{-8}$ και

$$\text{bei}'(W) = W [1/2 - 10.66666666 (W/8)^4 + 11.37777772 (W/8)^8 - 2.31167514 (W/8)^{12} + 0.14677204 (W/8)^{16} - 0.00379386 (W/8)^{20} + 0.00004609 (W/8)^{24}] + \varepsilon$$

όπου το σφάλμα υπολογισμού είναι: $|\varepsilon| < 7 \times 10^{-8}$.

B.2 Ασυμπτωτικές εκφράσεις αλγεβρικών αθροισμάτων των γινομένων των συναρτήσεων Kelvin.

Για αδιάστατους αριθμούς Womersley που είναι $W > 8$ ισχύουν οι προσεγγιστικές σχέσεις, [Olver, 1964]:

$$\text{ber}^2(W) + \text{bei}^2(W) \cong \frac{e^{W\sqrt{2}}}{2\pi W} \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{W} + \frac{1}{64} \frac{1}{W^2} - \frac{33}{256\sqrt{2}} \frac{1}{W^3} - \frac{1797}{8192} \frac{1}{W^4} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \text{ber}(W)\text{bei}'(W) + \text{ber}'(W)\text{bei}(W) \cong & \frac{e^{W\sqrt{2}}}{2\pi W} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \frac{1}{W} + \frac{9}{64\sqrt{2}} \frac{1}{W^2} + \frac{39}{512} \frac{1}{W^3} \right. \\ & \left. + \frac{75}{8192\sqrt{2}} \frac{1}{W^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ber}(W)\text{ber}'(W) + \text{bei}(W)\text{bei}'(W) \cong & \frac{e^{W\sqrt{2}}}{2\pi W} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8} \frac{1}{W} - \frac{15}{64\sqrt{2}} \frac{1}{W^2} - \frac{45}{512} \frac{1}{W^3} \right. \\ & \left. + \frac{315}{8192\sqrt{2}} \frac{1}{W^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-Γ

Γ.1 Διακριτοποίηση αριθμητικού σχήματος DRP για το ασυμπέριστο ρευστό

Συνάρτηση διατομής:

$$(A^*)_{i_0}^{n+1} = (A^*)_{i_0}^n + \frac{1}{6}(k_1^* + 2k_2^* + 2k_3^* + k_4^*) \quad (\Gamma-1)$$

Συνάρτηση ταχύτητας:

$$(u^*)_{i_0}^{n+1} = (u^*)_{i_0}^n + \frac{1}{6}(g_1^* + 2g_2^* + 2g_3^* + g_4^*) \quad (\Gamma-2)$$

Συνάρτηση πίεσης:

$$(p^*)_{i_0}^{n+1} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0}^{n+1} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0}^{n+1}}} \right), & (0 \leq x_{i_0}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0}^{n+1} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0}^{n+1}}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-3)$$

Διακριτοποιημένη σχέση εξωτερικής πίεσης διέγερσης:

$$(p_e^*)_{i_0}^{n+1} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{n+1} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ ή } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-4)$$

όπου i_0 είναι ο κόμβος του εκάστοτε χωρικού σημείου x_0 , ενώ οι συντελεστές k_j^* και g_j^* έχουν ως ακολούθως:

1st stage (j=1):

$$k_1^* = -\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=3}^3 \left[e_i (A^*)_{i_0+i}^n (u^*)_{i_0+i}^n \right] \quad (\Gamma-5\alpha)$$

$$g_1^* = \frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n]^2}{2} + (p^*)_{i_0+i}^n \right) \right] + \frac{8C_v}{\text{Re} \delta} \left(\frac{u^*}{A^*} \right)_{i_0}^n + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{A^*}{A_{\min}^*} \right)_{i_0}^n \right]^2 (u^*)_{i_0}^n \left| u^* \right|_{i_0}^n \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{A^*}{A_{\min}^*} \right)_{i_0}^n \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-5\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^n = \begin{cases} (p_c^*)_{i_0+i}^n + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_c^*)_{i_0+i}^n + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_i^*}{(A^*)_{i_0+i}^n}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-5\gamma)$$

$\kappa\alpha$

$$(p_c^*)_{i_0+i}^n = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^n \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ ή } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-5\delta)$$

2nd stage (j=2):

$$k_2^* = -\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2 \right) \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_1^*/2 \right) \right] \quad (\Gamma-6\alpha)$$

$$g_2^* = -\frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_1^*/2]^2}{2} + (p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} \right) \right] + \frac{8C_v}{\text{Re}\delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2}{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2 \right] \left[(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2 \right] \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-6\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-6\gamma)$$

$\kappa\alpha$

$$(p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{n+1/2} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ \& } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-6\delta)$$

3rd stage (j=3):

$$k_3^* = -\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2 \right) \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_2^*/2 \right) \right] \quad (\Gamma-7\alpha)$$

$$g_3^* = -\frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_2^*/2]^2}{2} + (p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} \right) \right] + \frac{8C_v}{\text{Re}\delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2}{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2 \right] \left[(u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2 \right] \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-7\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-7\gamma)$$

4th stage (j=4):

$$k_4^* = -\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_3^* \right) \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right) \right] \quad (\Gamma-8\alpha)$$

$$g_4^* = -\frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^*]^2}{2} + (p^*)_{i_0+i}^{n+1} \right) \right] + \frac{8C_v}{\text{Re}\delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right] \left| (u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right| \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-8\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{n+1} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-8\gamma)$$

$\kappa\alpha$

$$(p_e^*)_{i_0+i}^{n+1} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{n+1} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \dot{\eta} (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-8\delta)$$

Γ.2 Διακριτοποίηση αριθμητικού σχήματος DRP για το συμπιεστό ρευστό

Συνάρτηση διατομής:

$$(A^*)_{i_0}^{n+1} = (A^*)_{i_0}^n + \frac{1}{6}(k_1^* + 2k_2^* + 2k_3^* + k_4^*) \quad (\Gamma-9)$$

Συνάρτηση ταχύτητας:

$$(u^*)_{i_0}^{n+1} = (u^*)_{i_0}^n + \frac{1}{6}(g_1^* + 2g_2^* + 2g_3^* + g_4^*) \quad (\Gamma-10)$$

Συνάρτηση πίεσης:

$$(p^*)_{i_0}^{n+1} = \begin{cases} (p_c^*)_{i_0}^{n+1} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0}^{n+1}}} \right), & (0 \leq x_{i_0}^* \leq L_0^*) \\ (p_c^*)_{i_0}^{n+1} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0}^{n+1}}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-11)$$

Διακριτοποιημένη σχέση εξωτερικής πίεσης διέγερσης:

$$(p_c^*)_{i_0}^{n+1} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{n+1} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ ή } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-12)$$

Ισεντροπική σχέση:

$$(\rho^*)_{i_0}^{n+1} = \left(\frac{(p^*)_{i_0}^{n+1}}{p_0^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\Gamma-13)$$

όπου i_0 είναι ο κόμβος του εκάστοτε χωρικού σημείου x_0 , ενώ οι συντελεστές k_j^* και g_j^* έχουν ως ακολούθως:

1st stage (j=1):

$$k_1^* = -(\mathbf{u}^*)_{i_0}^n \frac{\Delta t^*}{\Delta X^*} \sum_{i=-3}^3 [e_i (\mathbf{A}^*)_{i_0+i}^n] - \frac{(\mathbf{A}^*)_{i_0}^n}{1} \frac{\Delta t^*}{\Delta X^*} \sum_{i=-3}^3 [e_i (\mathbf{u}^*)_{i_0+i}^n] - \frac{1}{\gamma (\mathbf{p}^*)_{i_0}^n \sqrt{(\mathbf{A}^*)_{i_0}^n}} + 1 \quad (\Gamma-14\alpha)$$

$$g_1^* = - \frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta X^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(\mathbf{u}^*)_{i_0+i}^n]^2}{2} \right) \right] + \left(\frac{\mathbf{p}_0^*}{(\mathbf{p}^*)_{i_0}^n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\Delta X^*} \sum_{i=-3}^3 [e_i (\mathbf{p}^*)_{i_0+i}^n] + \frac{8C_v}{\text{Re} \delta} \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\mathbf{A}^*} \right)_{i_0}^n + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{A}^*}{\mathbf{A}_{\min}^*} \right)_{i_0}^n \right]^2 (\mathbf{u}^*)_{i_0}^n \left| \mathbf{u}^* \right|_{i_0}^n \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{\mathbf{A}^*}{\mathbf{A}_{\min}^*} \right)_{i_0}^n \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-14\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(\mathbf{p}^*)_{i_0+i}^n = \begin{cases} (\mathbf{p}_e^*)_{i_0+i}^n + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{A}^*)_{i_0+i}^n}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (\mathbf{p}_e^*)_{i_0+i}^n + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\mathbf{A}_i^*}{(\mathbf{A}^*)_{i_0+i}^n}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-14\gamma)$$

$$(\mathbf{p}_e^*)_{i_0+i}^n = \begin{cases} \mathbf{p}_0^* + \mathbf{p}_b \mathbf{p}_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^n \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ \mathbf{p}_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \dot{\cap} (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-14\delta)$$

$$(\rho^*)_{i_0+i}^n = \left(\frac{(\mathbf{p}^*)_{i_0+i}^n}{\mathbf{p}_0^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\Gamma-14\epsilon)$$

2nd stage (j=2):

$$k_2^* = -\left((u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2\right) \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2 \right) \right] - \frac{\left((A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2 \right)}{1} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_1^*/2 \right) \right] \quad (\Gamma-15\alpha)$$

$$\frac{\gamma(p^*)_{i_0}^n \sqrt{\left((A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2 \right)}}{+1}$$

$$g_2^* = \frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_1^*/2]^2}{2} \right) \right] + \left(\frac{p_0^*}{(p^*)_{i_0}^n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i (p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} \right] + \frac{8C_v}{\text{Re}\delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2}{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2 \right] \left[(u^*)_{i_0}^n + g_1^*/2 \right] \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_1^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-15\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_1^*/2}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-15\gamma)$$

$$(p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{n+1/2} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ \& } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-15\delta)$$

$$(\rho^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \left(\frac{(p^*)_{i_0+i}^{n+1/2}}{p_0^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\Gamma-15\epsilon)$$

3rd stage (j=3):

$$k_3^* = -\left((u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2\right) \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2 \right) \right] - \frac{\left((A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2 \right)}{1} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_2^*/2 \right) \right] \quad (\Gamma-16\alpha)$$

$$\frac{\gamma (p^*)_{i_0}^n \sqrt{\left((A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2 \right)}}{+1}$$

$$g_3^* = \frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_2^*/2]^2}{2} \right) \right] + \left(\frac{p_0^*}{(p^*)_{i_0}^n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i (p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} \right] + \frac{8C_v}{\text{Re} \delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2}{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2 \right] \left| (u^*)_{i_0}^n + g_2^*/2 \right| \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_2^*/2}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-16\beta)$$

$\mu \varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{n+1/2} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{n+1/2} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_2^*/2}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-16\gamma)$$

4th stage (j=4):

$$k_4^* = -\left((u^*)_{i_0}^n + g_3^*\right) \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((A^*)_{i_0+i}^n + k_3^* \right) \right] - \frac{\left((A^*)_{i_0}^n + k_3^* \right)}{1} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left((u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right) \right] \quad (\Gamma-17\alpha)$$

$$\frac{\gamma (p^*)_{i_0}^n \sqrt{\left((A^*)_{i_0}^n + k_3^* \right)}}{+1}$$

$$g_4^* = \frac{\Delta t^* \left\{ \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i \left(\frac{[(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^*]^2}{2} \right) \right] + \left(\frac{p_0^*}{(p^*)_{i_0}^n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\Delta x^*} \sum_{i=-3}^3 \left[e_i (p^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} \right] + \frac{8C_v}{\text{Re}\delta} \left(\frac{(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^*}{(A^*)_{i_0}^n + k_3^*} \right) + \frac{K_t}{2} \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_3^*}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right]^2 \left[(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right] \left[(u^*)_{i_0+i}^n + g_3^* \right] \right\}}{\left\{ C_u + \left[1 - \left(\frac{(A^*)_{i_0}^n + k_3^*}{(A_{\min}^*)^n} \right) \right] \frac{L_c^*}{4} \right\}} \quad (\Gamma-17\beta)$$

$\mu\varepsilon$

$$(p^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} = \begin{cases} (p_e^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}} \right), & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq L_0^*) \\ (p_e^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} + \frac{2}{M^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_1^*}{(A^*)_{i_0+i}^n + k_3^*}} \right), & (L_0^* \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-17\gamma)$$

$$(p_e^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} = \begin{cases} p_0^* + p_b p_0^* \sin^2 \left(\pi \frac{2x_{i_0+i}^* - 2x_E^* + L_c^*}{2L_c^*} \right) \sin^2 \left(\frac{\text{Str}}{2} (t^*)^{\overline{n+1}} \right), & (x_E^* - L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* + L_c^*/2) \\ p_0^*, & (0 \leq x_{i_0+i}^* \leq x_E^* - L_c^*/2) \text{ \textit{and} } (x_E^* + L_c^*/2 \leq x_{i_0+i}^* \leq 1) \end{cases} \quad (\Gamma-17\delta)$$

$$(p^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}} = \left(\frac{(p^*)_{i_0+i}^{\overline{n+1}}}{p_0^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\Gamma-17\varepsilon)$$

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bergel D.H., “The dynamic elastic properties of the arterial wall”, *The Journal of Physiology*, **156**, 458-469, (1961).

Blevins R.D., “Flow-Induced Vibration”, 2nd edition, Van Nostrand Reinhold, New York, pp. 451, (1990).

Bramwell J.C., Hill A.V., “The velocity of the pulse wave in man”, *Proceedings of the Royal Society of London (Series B, Containing Papers of a Biological Character)*, **93**, 298-306, (1922).

Bredow H.-J., “Untersuchung eines ventillosen Pumpprinzips”, *Fortschritt Berichte Verein Deutscher Ingenieure (VDI) Zeitschrift*, Reihe 7, Nr. 9, pp. 89, (1968).

Bredow H.-J., “Untersuchungen über ein vom menschlichen Kreislauf abgeleitetes, ventillofes Strömungsprinzip”, *Verhandlungen der Deutschen Gesellschaft für Kreislaufforschung*, **34**, 296-300, (1968).

Burggren W., Crossley II D.A., “Comparative cardiovascular development: improving the conceptual framework”, *Comparative Biochemistry and Physiology*, A **132**, 661-674, (2002).

Flaud P., Geiger D., Odou C., Quemada D., “Experimental study of wave propagation through viscous fluid contained in viscoelastic cylindrical tube under static stresses”, *Biorheology*, **12**, 347-354, (1975).

Forouhar A.S., Liebling M., Hickerson A., Nasiraei-Moghaddam A., Tsai H.-J., Hove J.R., Fraser S.E., Dickinson M.E., Gharib M., “The embryonic vertebrate heart tube is a dynamic suction pump”, *Science*, **312**, 751-753, (2006).

Forrester J.H., Young D.F., “Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease-I, Theoretical development”, *Journal of Biomechanics*, **3**, 297-305, (1970).

Horeman H.W., Noordergraaf A., “Numerical evaluation of volume pulsations in man. I. The basic formula”, *Physics in Medicine and Biology*, **3**, 51-58, (1958).

Icardo J.M., “Endocardial cell arrangement: Role of hemodynamics”, *The Anatomical Record*, **225**, 150-155, (1989).

Jung E., Peskin C.S., “Two-dimensional simulations of valveless pumping using the immersed boundary method”, *Journal on Scientific Computing, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, **23**, 19-45, (2001).

Κερμανίδης Θ., “Αντοχή Υλικών Ι ”, εκδόσεις Αδελφών Κυριακίδη Α.Ε., Θεσσαλονίκη, pp. 318, (1988).

Korteweg D.J., “Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren”, *Annalen der Physik und Chemie*, **5**, 525-542, (1878).

Larsen W.J., “Development of the heart”, chapter 7 in *Human Embryology*, 2nd edition Churchill Livingstone, New York, 151-188, (1997).

Liebau G., “Aus welchem Grunde bleibt die Blutförderung durch das Herz bei valvulärem Versagen erhalten?”, *Zeitschrift für Kreislaufforschung*, **45**, 481-488, (1956).

Liebau G., “Die Bedeutung der Trägheitskräfte für die Dynamik des Blutkreislaufs”, *Zeitschrift für Kreislaufforschung*, **46**, 428-438, (1957).

Liebau G., “Über physiologische Grundlagen klappenloser Blutförderung“, *Verhandlungen der Deutschen Gesellschaft für Kreislaufforschung*, **34**, 293-296, (1968).

Manopoulos Ch.G., Tsangaris S., “One-dimensional Numerical Study of Pumping Phenomena through Distensible Tubes: A Non-linear Model”, in *Proceedings of the 1st Interdisciplinary Symposium on Non-linear Problems*, National Technical University of Athens, Athens, Greece, p.: 229-238, 21-22 January (2000).

Manopoulos Ch.G., Mathioulakis D., Tsangaris S., “Theoretical and experimental study of non-linear pumping effects of a Balloon Pump, based on the concept of valveless pumping”, in *Proceedings of the 2nd European Symposium and 3rd TEMPERE Workshop in Biomedical Engineering & Medical Physics*, (poster session: Biomedical Engineering-1), Patras, Greece, 6-8 October (2000).

Manopoulos Ch.G., Mathioulakis D., Tsangaris S., “Theoretical and experimental study of non-linear pumping effects in the peripheral vessels, based on the concept of valveless pumps”, in *Book of Abstracts of the 4th Euromech Fluid Mechanics Conference*, (poster session: BFM), p.: 233, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 19-23 November (2000).

Manopoulos Ch.G., Pappou Th., Mathioulakis D., Tsangaris S., “Theoretical models and an experimental study of valveless pumping in the circulatory system”, in *Book of Abstracts of the XVIIIth Congress of the International Society of Biomechanics*, Müller R., Gerber H. and Stacoff A. (eds), Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, Session P743, p. 335, 8-13 July (2001).

Manopoulos C.G., Mathioulakis D.S., Tsangaris S.G., “One-dimensional model of valveless pumping in a closed loop and a numerical solution”, *Physics of Fluids*, **18**, 017106 (pp. 16), (2006).

Manopoulos Ch.G., Tsangaris S., Sarantopoulos S., Vlachakis N., “Experimental study of a prototype two-cycle pump for medical use”, in *Proceedings of the 5th European Symposium on Biomedical Engineering*, (poster session: P.01), Patras, Greece, 7-9 July (2006).

Μανόπουλος Χ., “Μελέτη αντλητικών φαινομένων σε ιατροβιολογικές εφαρμογές, μέσω αλληλεπίδρασης ροής ρευστού και κίνησης σώματος”, Διδακτορική διατριβή, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, (2009).

Kouerinis I.A., **Manopoulos C.G.**, Zografos G.C., Apostolakis E.I., Tsilimingas N.B., Argiriou M.E., Gorgoulis V.G., Dedeilias P.G., Tsoukas A., Bolos K., Tsangaris S.G., “Retrograde cardioplegia in CABG: Is it really useful? The microcirculation and a capillary unit model”, *Medical Science Monitor*, **12**, RA 265-268, (2006).

Moens A.I., “Die Pulskurve”, Brill E.J. (ed), Leiden, Netherlands, pp.: 90, (1878).

Moore K.L., **Persaud T.V.N.**, “The third week of human development”, chapter 5 in *Before we are born. Essentials of embryology and birth defects*, 5th edition Saunders W.B. Company, Philadelphia-Pennsylvania, 61-79, (1998).

Moser M., Huang J.W., Schwarz G.S., Kenner T., Noordergraaf A., “Impedance defined flow. Generalisation of William Harvey’s concept of the circulation - 370 years later”, *International Journal of Cardiovascular Medicine and Science*, Medical and engineering publishers Inc., 1, 205-211, (1998).

O’Hara G.P., “Mechanical properties of silicone rubber in a closed volume”, *Technical Report*, **ARLCB-TR-83045**, **SBI-AD-E440224**; Order No. **AD-A138129**, Large Caliber Weapon Systems Laboratory, Army Armament Research and Development Center, Watervliet, NY, USA, pp. 21, (1983).

Olsson A., Stemme G., Stemme E., “A numerical design study of the valveless diffuser pump using a lumped-mass model”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **9**, 34-44, (1999).

Olver F.W.J., “Bessel Functions of Integer Order”, chapter 9 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Abramowitz M. and Stegun I.A.(eds), 10th printing/1972, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 355-433, (1964).

Rath H.J., “Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen”, *Acta Mechanica*, **31**, 1-12, (1978).

Rath H.J., “Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip”, *Dissertation*, Fakultät für Maschinenwesen, T.U. Hannover, pp. 138, (1976).

Rath H.J., Teipel I., “Der Fördereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **29**, 123-133, (1978).

Schaaf B.W., Abberecht P.H., “Digital computer simulation of human systemic arterial pulse wave transmission: a nonlinear model”, *Journal of Biomechanics*, **5**, 345-364, (1972).

Segur J.B., Oberstar H.E., “Viscosity of Glycerol and its Aqueous Solutions”, The Miner Laboratories, Chicago 6, Ill, (1951).

Skalak R., “Synthesis of a complete circulation”, chapter 19 in *Cardiovascular Fluid Dynamics* (vol. 2), Bergel D.H. (ed), London Academic Press, 341–376, (1972).

Smits J.G., “Piezoelectric micropump with 3 valves working peristaltically”, *Sensors Actuators A Physical*, **21**, 203–206, (1990).

Stergiopoulos N., Young D.F., Rogge T.R., “Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenosis”, *Journal of Biomechanics*, **25**, 1477-1488, (1992).

Tam C.K.W., Webb J.C., “Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics”, *Journal of Computational Physics*, **107**, 262-281, (1993).

Tam C.K.W., Shen H., “Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*, **93-4325**, 1-16, (1993).

Tam C.K.W., Webb J.C., Dong Z., “A study of the short wave components in computational acoustics”, *Journal of Computational Acoustics*, **1**, 1-30, (1993).

Tam C.K.W., “Computational Aeroacoustics: Issues and Methods”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, **33**, 1788-1796, (1995).

Tam C.K.W., “Numerical methods in computational aero-acoustics”, Lecture Series, in *Applied Aero-Acoustics: Prediction Methods*, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Sint-Genesius-Rode, Belgium, ISSN **0377-8312**, pp. 59, (1996).

Timoshenko S.P., Goodier J.N., “Two-dimensional problems in polar coordinates”, chapter 4 in *Theory of Elasticity*, 3rd edition McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 65–149, (1970).

Τσαγγάρης Σ., “Μηχανική των Ρευστών”, εκδόσεις Συμεών Ο.Ε., Αθήνα, pp. 582, (2005).

Uchida S., “The Pulsating Viscous Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **7**, 403-422, (1956).

Womersley J.R., “Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known”, *The Journal of Physiology*, **127**, 553-563, (1955).

Womersley J.R., “An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries”, Air Research and Development Command, (United States Air Force, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio), Wright Air Development Center, *Technical Report*, **56-614**, pp. 115, (1957).

Young D.F., Tsai F.Y., “Flow characteristics in models of arterial stenosis – I. Steady Flow; – II. Unsteady flow”, *Journal of Biomechanics*, **6**, 395-410; 547-559, (1973).

Young D.F., Cholvin N.R., Roth A.C., “Pressure drop across artificially induced stenoses in the femoral arteries of dogs”, *Circulation Research*, **36**, 735-743, (1975).

Young D.F., “Fluid mechanics of arterial stenoses”, *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, **101**, 157-175, (1979).

