Νίκος Σταμάτης

Εργοδικότητα και Γεωμετρία Χώρων Banach

Διπλωματική Εργασία
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Πολυράκης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα 31 Ιανουαρίου 2014

Εισηγητής: Ιωάννης Πολυράκης

Επιτροπή

Σωτήρης Καρανάσιος

Ιωάννης Πολυράκης

Ιωάννης Σαραντόπουλος

Στη μητέρα μου Αμαλία
και τον πατέρα μου Κώστα.

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας συγχρηματοδοτήθηκε μέσω του Έργου «Υποτροφίες ΙΚΥ» από πόρους του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) του ΕΣΠΑ, 2007-2013.

Ευχαριστίες

> You can't take a picture of this,
> it's already gone.
>
> Nate Fisher

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Πολυράκη. Τους καθηγητές της ΣΕΜΦΕ κ. Σωτήρη Καρανάσιο και κ. Ιωάννη Σαραντόπουλο για τη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών καθώς και για την προθυμία τους να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή. Την καθηγήτρια του Μαθηματικού Αθηνών κ. Βασιλική Φαρμάκη διότι στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος της "Εργοδικής Θεωρίας" το οποίο και εδίδαξε, ήρθα για πρώτη φορά σε επαφή με αυτόν τον κλάδο των μαθηματικών και επιπλέον ο τρόπος που διδάχθηκε το μάθημα έδωσε κίνητρο σε εμένα και τους συμφοιτητές μου για βαθύτερη ενασχόληση με το αντικείμενο.

Ευχαριστώ όλους όσους συνέβαλαν στο να γίνει η μακρόσυρτη διαδικασία της συγγραφής λιγότερο μοναχική υπόθεση από ότι ήδη ήταν: Τους φίλους μου Οδυσσέα, Δήμο, Στρατούλα και Άλκη. Τον Γιώργο, τον Αντώνη, την Νέσλι, τον Μίλτο, τον Γιάννη και τον Ανδρέα Μπούκα για την υποστήριξή τους. Τον αδερφό μου Δημήτρη και την Μίλα. Τον μικρούλη Κωνσταντή· η εργασία αυτή γράφτηκε στο πλευρό του και διαμορφώθηκε κυνηγώντας τον από δωμάτιο σε δωμάτιο. Τέλος, και πάνω από όλα, οφείλω ευγνωμοσύνη στους ανθρώπους που σε ολόκληρη τη ζωή μου με στήριξαν και συνεχίζουν να το κάνουν με την ίδια υπομονή, τη μητέρα μου Αμαλία και τον πατέρα μου Κώστα.

Νίκος Σταμάτης
nstam84@gmail.com

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι η μελέτη της σύνδεσης της εργοδικότητας με την αυτοπάθεια ενός χώρου Banach. Αν X χώρος Banach, ένας τελεστής $T : X \to X$ ονομάζεται τελεστής εργοδικού μέσου αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία των Cesàro αθροισμάτων $M_n x = \frac{1}{n}(x + Tx + T^2 x + \ldots + T^{n-1}x)$ συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει στενή σύνδεση ανάμεσα στους τελεστές εργοδικού μέσου ενός χώρου και στο αν αυτός ο χώρος είναι αυτοπαθής ή όχι.
Στο Κεφάλαιο 1 αναφέρουμε επιγραμματικά τα μαθηματικά εργαλεία που χρειαζόμαστε.
Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφουμε τα αρχικά ερωτήματα που ο κλάδος που σήμερα ονομάζουμε εργοδική θεωρία προσπάθησε να απαντήσει, με σκοπό να δούμε πώς σταδιακά αναδιατυπώθηκαν με όρους θεωρίας τελεστών και πήραν μια πιο αφηρημένη μορφή. Τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι το Θεώρημα του Liouville σύμφωνα με το οποίο για κάθε φυσικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή, η οικογένεια των λύσεών του διατηρεί το μέτρο και το Εργοδικό Θεώρημα του von Neumann το οποίο αποδεικνύεται με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους.
Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε την κλάση των τελεστών εργοδικού μέσου σε έναν χώρο Banach και περιγράφουμε τη σύνδεση μεταξύ εργοδικότητας και αυτοπάθειας. Το Θεώρημα του Lorch διαβεβαιώνει ότι αν ένας χώρος είναι αυτοπαθής, τότε κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Το αντίστροφο ερώτημα παραμένει ανοικτό. Παρουσιάζουμε την πρόοδο που έχει επιτευχθεί μέχρι σήμερα προς αυτή την κατεύθυνση και η οποία προέκυψε μέσα από τη δουλειά των Zaharopol-Emel'yanov σε Banach lattices και των Fonf-Lin-Wojtaszczyk σε χώρους με βάση Schauder.

Abstract

The subject of this thesis is the study of the connection between the mean ergodicity and reflexivity of a Banach space. Let X be a Banach space and $T : X \to X$ a mean ergodic operator, that is a bounded linear operator such that the Cesàro sequence $M_n x = \frac{1}{n}(x + Tx + T^2 x + \ldots + T^{n-1}x)$ converges for all $x \in X$. There is a strong connection between the convergence of this sequence and the reflexivity of X, which is presented in Chapter 3.
In Chapter 1 we briefly mention the preliminaries that we need.
In Chapter 2 we describe the questions that ergodic theory initially tried to answer, so as to find out how they were reformulated into a more abstract operator-theoretic framework. The most important results of this chapter include a theorem by Liouville which asserts that the family of solutions of a Hamiltonian system is measure preserving and von Neumann's Ergodic Theorem, for which we present four different proofs.
In Chapter 3 we study the class of mean ergodic operators of a Banach space and describe the connection between mean ergodicity and reflexivity. A theorem by Lorch asserts that if a Banach space is reflexive, then every power bounded operator is mean ergodic. The converse problem is still open. We present the main results concerning the converse direction, namely the work of Zaharopol and Emel'yanov on Banach lattices and that of Fonf, Lin and Wojtaszczyk on spaces with a Schauder basis.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ένα από τα πρώτα αποτελέσματα που μαθαίνει κανείς στον Απειροστικό Λογισμό είναι ότι αν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, τότε και η ακολουθία των Cesàro αθροισμάτων αυτής, $(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο. Η απαίτηση η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει είναι ικανή ώστε να έχουμε σύγκλιση των μέσων όρων, δεν είναι όμως αναγκαία. Για παράδειγμα, για την μη συγκλίνουσα ακολουθία $x_n = (-1)^n$ οι μέσοι όροι αυτής συγκλίνουν στο μηδέν. Η εύρεση ικανών συνθηκών ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση των μέσων όρων μιας ακολουθίας αποτέλεσε αντικείμενο πολλών κλάδων των μαθηματικών αλλά και της φυσικής.

Το **Κεφάλαιο 3** αποτελεί το κυρίως κομμάτι αυτής της εργασίας και πραγματεύεται το πρόβλημα αυτό, τοποθετημένο σε αρκετά πιο γενικό πλαίσιο. Ο χώρος μας είναι ένας τυχαίος χώρος Banach X και η υπό μελέτη ακολουθία x_n είναι της μορφής $x_n = T^n x$, όπου $T : X \to X$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής του X και $x \in X$. Θεωρούμε δηλαδή την "τροχιά" ενός σημείου x μέσω του τελεστή T, $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ και μελετάμε τη σύγκλιση της ακολουθίας των μέσων όρων αυτής, $M_n(T)x = \frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n}$. Αν ένας τελεστής $T \in B(X)$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $M_n(T)x$ συγκλίνει, τότε ονομάζεται τελεστής *εργοδικού μέσου*.

Αποδεικνύεται ότι αν ο χώρος X είναι *αυτοπαθής*, τότε η κλάση των τελεστών εργοδικού μέσου είναι αρκετά πλούσια. Συγκεκριμένα, κάθε τελεστής $T \in B(X)$ με φραγμένες δυνάμεις, δηλαδή για τον οποίον $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$, είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε το 1939 από τον Edgar Raymond Lorch. Παραμένει ανοικτό το ερώτημα του κατά πόσον αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο σε *αυτοπαθείς* χώρους Banach, αν δηλαδή μπορούμε να βρούμε έναν χαρακτηρισμό της μορφής: *"Ένας χώρος Banach είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου"*. Υπάρχουν δύο σημαντικά βήματα προς αυτή την κατεύθυνση, τα Θεωρήματα των Zaharopol-Emel'yanov και των Fonf-Lin-Wojtaszczyk.

Με εξαίρεση το Θεώρημα του Zaharopol, τα υπόλοιπα θεωρήματα αποδεικνύονται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3. Οι αποδείξεις αυτές είναι αρκετά απαιτητικές και είναι πιθανό να κουράσουν τον αναγνώστη. Γενικότερα το Κεφάλαιο 3 δεν αποτελεί εύκολο ανάγνωσμα, παρ' όλα αυτά οι βασικές ιδιότητες τον τελεστών εργοδικού μέσου, το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου του Eberlein και το κριτήριο του Sine μπορούν εύκολα να γίνουν κατανοητά και δεν κρύβουν ιδιαίτερες δυσκολίες για κάποιον που είναι εξοικειωμένος με τη συναρτησιακή ανάλυση.

Η ανάγκη για σύνδεση της εργοδικότητας με την αυτοπάθεια δεν γεννήθηκε ξαφνικά, αλλά ανέκυψε από τη μελέτη άλλων προβλημάτων. **Το Κεφάλαιο 2** έχει περισσότερο παιδαγωγικό χαρακτήρα καθώς ο κύριος σκοπός του είναι να περιγράψει την εξέλιξη του αρχικού προβλήματος και τον τρόπο με τον οποίο αναδιατυπώθηκε σε γλώσσα θεωρίας τελεστών. Ορίζονται οι βασικές έννοιες της εργοδικότητας και των μετασχηματισμών που διατηρούν το μέτρο και αποδεικνύεται το Θεώρημα του Liouville σύμφωνα με το οποίο τα συστήματα που διατηρούν το μέτρο εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο σε φυσικά προβλήματα που περιγράφονται από Χαμιλτονιανή.

Το πρώτο αποτέλεσμα στο οποίο φάνηκε η σύνδεση της αυτοπάθειας με την εργοδικότητα είναι το Εργοδικό Θεώρημα του von Neumann. Λόγω της σπουδαιότητάς του δίνουμε τέσσερις διαφορετικές αποδείξεις του θεωρήματος αυτού, με την κάθε απόδειξη να χρησιμοποιεί διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία.

Υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις που ακολουθήσαμε σε αυτή τη διπλωματική. Η πρώτη προσέγγιση είναι αυτή του Κεφαλαίου 2, όπου επιλέξαμε ένα γενικό πρόβλημα και προσπαθήσαμε, χωρίς να υπεισέλθουμε σε μεγάλο βάθος, να δούμε εποπτικά τη σημασία του και τους τρόπους με τους οποίους δύναται να περιγραφεί μαθηματικά. Στο Κεφάλαιο 3 ακολουθήσαμε την αντίθετη προσέγγιση, δηλαδή επιλέξαμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και περιγράψαμε τον τρόπο επίλυσής του σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βάθος. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το κεφάλαιο αυτό να είναι τόσο εξειδικευμένο που καταλήγει δυσανάγνωστο και κουραστικό, ενώ αντίθετα το Κεφάλαιο 2 να είναι από τη φύση του πιο εύληπτο και προσιτό.

Καταβλήθηκε προσπάθεια η εργασία αυτή να είναι αυτοδύναμη και ίσως αυτό να επιτεύχθηκε σε ένα βαθμό, καθώς όλες οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν ορίστηκαν με αυστηρότητα, ενώ οι αποδείξεις δεν περιέχουν κενά. Αυτό απλώς σημαίνει ότι κάποιος μπορεί να κάνει μια γρήγορη ανάγνωση της εργασίας και να καταλάβει χοντρικά τι περίπου πραγματεύεται. Στην πραγματικότητα όμως, για κάποιον που ενδιαφέρεται για σχολαστική μελέτη, η εργασία αυτή απέχει πολύ από το να χαρακτηριστεί αυτοδύναμη. Για την πλήρη κατανόησή της ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει ήδη διδαχθεί σε βάθος μαθήματα συναρτησιακής ανάλυσης, θεωρίας μέτρου και τοπολογίας, ενώ επιθυμητή θα ήταν μια εξοικείωση με την άλγεβρα. Άλλοι μαθηματικοί κλάδοι (διατεταγμένοι χώροι, αρμονική ανάλυση, θεωρία αναπαραστάσεων) κάνουν επίσης μια μικρή αλλά σημαντική εμφάνιση. Επειδή είναι πρακτικά αδύνατο να υπενθυμίσουμε όλες τις έννοιες που χρειαζόμαστε χωρίς να μετατραπεί αυτή η εργασία σε βιβλίο, περιοριστήκαμε μόνο σε αυτές που δε συνηθίζεται να διδάσκονται σε ένα τυπικό εξαμηνιαίο μάθημα και τις παρουσιάσαμε πολύ συνοπτικά στο **Κεφάλαιο 1.**

Τέλος, να τονίσω ότι τα λάθη που αναπόφευκτα βρίσκονται διασκορπισμένα σε αυτή την εργασία οφείλονται αποκλειστικά σε εμένα.

Κεφάλαιο 1

Άλγεβρα, Τοπολογία, Θεωρία Μέτρου και Συναρτησιακή Ανάλυση

All this has happened before,
and all this will happen again.

Number Six

Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει διδαχθεί την ύλη που αντιστοιχεί σε ένα προπτυχιακό εξαμηνιαίο μάθημα Άλγεβρας, Τοπολογίας, Θεωρίας Μέτρου, Συναρτησιακής Ανάλυσης και Θεωρίας Τελεστών. Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε επιγραμματικά κάποια εργαλεία που θα χρειαστούμε, τα περισσότερα εκ των οποίων δε συνηθίζεται να διδάσκονται στα πλαίσια ενός μαθήματος. Η παρουσίαση είναι εντελώς συνοπτική και έχει περισσότερο ενημερωτικό παρά διδακτικό χαρακτήρα. Ως εκ τούτου, οι αναφορές αυτού του κεφαλαίου είναι ενδεικτικές: Οποιοδήποτε βιβλίο της αρεσκείας σας είναι υπεραρκετό για να καλύψει τις περισσότερες έννοιες που περιγράφουμε.

1.1 Αλγεβρικές Δομές

Ορισμός 1.1.1. *Έστω S σύνολο. Μια απεικόνιση $\cdot$ από το $S \times S$ στο S ονομάζεται* ***πράξη*** *στο S. Αν $x, y \in S$, συμβολίζουμε το στοιχείο $\cdot(x, y)$ με $x \cdot y$ ή με xy αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης για το τι εννοούμε. Αν $x, y, z \in S$, το γινόμενο xyz μπορεί να σχηματιστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους: Ως $(xy)z$ ή ως $x(yz)$. Αν $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in S$, τότε η πράξη ονομάζεται* ***προσεταιριστική*** *(associative) και στην περίπτωση αυτή το ζεύγος $(S, \cdot)$ καλείται* ***ημιομάδα*** *(semigroup). Αν επιπλέον $xy = yx$ για κάθε $x, y \in S$, τότε η S ονομάζεται* ***αβελιανή*** *(abelian).*

Παράδειγμα 1.1.2. *Τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ εφοδιασμένα με τη συνήθη πρόσθεση ή τον συνήθη πολλαπλασιασμό αποτελούν ημιομάδες.*

Παράδειγμα 1.1.3. *Αν X χώρος με νόρμα και $T \in B(X)$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής από τον X στον X, τότε το σύνολο $\mathcal{P} = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, αποτελεί αβελιανή ημιομάδα τελεστών.*

Ορισμός 1.1.4. *Έστω $(S, \cdot)$ ημιομάδα. Ένα στοιχείο $e \in S$ ονομάζεται **μονάδα** (unit) εαν $ex = xe = x$ για κάθε $x \in S$. Αν η S έχει μονάδα e, ένα στοιχείο $x \in S$ ονομάζεται **αντιστρέψιμο** (invertible) εαν υπάρχει $y \in S$ τέτοιο ώστε $xy = yx = e$. Αν κάθε στοιχείο μιας ημιομάδας $(S, \cdot)$ με μονάδα αντιστρέφεται, τότε η $(S, \cdot)$ ονομάζεται **ομάδα** (group).*

Ορισμός 1.1.5. ***Δακτύλιος** (ring) ονομάζεται ένα σύνολο R εφοδιασμένο με δύο πράξεις που συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και για τις οποίες ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

(i) *Το $(R, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα.*

(ii) *Το $(R, \cdot)$ αποτελεί ημιομάδα.*

(iii) *Για κάθε $x, y, z \in R$ ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή*

$$\begin{aligned} (x+y)z &= xz + yz \quad \text{και} \\ z(x+y) &= zx + zy. \end{aligned}$$

*Αν η ημιομάδα $(R, \cdot)$ έχει μονάδα $1 \in R$, τότε ο δακτύλιος R ονομάζεται **δακτύλιος με μονάδα**. Αν η ημιομάδα $(R, \cdot)$ είναι αβελιανή, τότε ο δακτύλιος R ονομάζεται **μεταθετικός** (commutative). Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $1 \neq 0$ όπου κάθε μη μηδενικό στοιχείο της $(R, \cdot)$ αντιστρέφεται, ονομάζεται **σώμα** (field).*

Ορισμός 1.1.6. *Έστω R δακτύλιος και X σύνολο. **Πρότυπο (module) πάνω από τον δακτύλιο R** ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$ όπου*

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X, \\ \cdot &: R \times X \to X, \end{aligned}$$

απεικονίσεις τέτοιες ώστε το ζεύγος $(X, +)$ να αποτελεί αβελιανή ομάδα και για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $\lambda, \mu \in R$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

(ii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(iv) $1 \cdot x = x$.

*Ένα πρότυπο πάνω από κάποιο σώμα $\mathbb{F}$ ονομάζεται **διανυσματικός χώρος** (vector space).*

1.2 Συναρτησιακή Ανάλυση

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε την κατασκευή του χώρου πηλίκο. Η κατασκευή δεν κρύβει ιδιαίτερες δυσκολίες και συμπεριλήφθηκε επειδή συνήθως δεν αποτελεί κομμάτι της διδακτέας ύλης στα μαθήματα συναρτησιακής ανάλυσης. Ο αναγνώστης που θυμάται την ομάδα πηλίκο από την άλγεβρα θα διαπιστώσει την ομοιότητα της κατασκευής καθώς και των αποδείξεων.

1.2α΄ Ο Χώρος Πηλίκο

Ορισμός 1.2.1. *Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω από κάποιο σώμα $\mathbb{F}$ και M διανυσματικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε ως **χώρο πηλίκο** (quotient space) να είναι το σύνολο $X/M = \{x + M : x \in X\}$. Εφοδιάζουμε το X/M με μια πράξη πρόσθεσης και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού οι οποίες ορίζονται ως εξής:*

$$
\begin{aligned}
(x+M)+(y+M) &= (x+y)+M, \quad \forall x,y \in X, && (1.1)\\
\lambda(x+M) &= \lambda x + M, \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{F}. && (1.2)
\end{aligned}
$$

Τα στοιχεία $x + M$ του χώρου πηλίκο συνηθίζεται να ονομάζονται σύμπλοκα, ενώ το στοιχείο $x \in X$ που εμφανίζεται στο σύμπλοκο $x + M$ ονομάζεται αντιπρόσωπος του συμπλόκου. Ένα σύμπλοκο $x + M$ μπορεί να έχει περισσότερους του ενός αντιπροσώπους και καθώς οι πράξεις στο χώρο πηλίκο ορίστηκαν με τη βοήθεια αντιπροσώπων, είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως του αντιπροσώπου που επιλέχθηκε:

Πρόταση 1.2.2. *Οι παραπάνω πράξεις είναι καλά ορισμένες και η τριάδα $(X/M, +, \cdot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, x' \in X$ ισχύει η ισοδυναμία $x + M = x' + M \iff x - x' \in M$. Αν $x - x' \in M$, τότε υπάρχει $m_0 \in M$ τέτοιο ώστε $x - x' = m_0 \Rightarrow x = m_0 + x'$. Αν $m \in M$, $x + m = x' + m + m_0 \in x' + M \Rightarrow x + M \subseteq x' + M$. Ομοίως προκύπτει και ο αντίστροφος εγκλεισμός. Αν $x + M = x' + M$, τότε $0 \in M$ και επομένως υπάρχει $m_0 \in M$ τέτοιο ώστε $x + 0 = x' + m_0 \Rightarrow x - x' = m_0 \in M$.

Η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου του κάθε συμπλόκου. Πράγματι, αν $x + M = x' + M$ και $y + M = y' + M$, τότε $x - x', y - y' \in M \Rightarrow (x + y) - (x' + y') \in M$. Άρα

$$
\begin{aligned}
(x+M)+(y+M) &= (x+y)+M\\
&= (x'+y')+M\\
&= x'+M+y'+M.
\end{aligned}
$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική αφού $(x + M) + (y + M) = (x + y) + M = (y + x) + M = (y + M) + (x + M)$ και το $0 + M$ αποτελεί ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης αφού $(x + M) + (0 + M) = (x + 0) + M = x + M$ για κάθε $x + M \in X/M$. Επιπλέον κάθε στοιχείο $x + M \in X/M$ έχει ως προσθετικό αντίστροφο το $-x + M$, δηλαδή το $(X/M, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Τα υπόλοιπα αξιώματα του διανυσματικού χώρου δείχνονται με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $x + M, y + M \in X/M$ τότε

$$\begin{aligned}
\lambda[(x+M)+(y+M)] &= \lambda[(x+y)+M] \\
&= \lambda(x+y)+M \\
&= \lambda x+\lambda y+M \\
&= \lambda x+M+\lambda y+M \\
&= \lambda(x+M)+\lambda(y+M).
\end{aligned}$$

□

Στην περίπτωση που ο X υποτεθεί χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ και ο M κλειστός[1] υπόχωρος του X, μπορούμε να ορίσουμε νόρμα στον χώρο πηλίκο ως εξής:

Πρόταση 1.2.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $M \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος του X. Η απεικόνιση $\|\cdot\| : X/M \to \mathbb{R}$ για την οποία*

$$\|x+M\| = \mathrm{d}(x,M) = \inf\{\|x-m\| : m \in M\},\ \forall x+M \in X/M, \tag{1.3}$$

αποτελεί νόρμα στον X/M. Συμβολίσαμε τη νόρμα του X/M επίσης με $\|\cdot\|$ για να μη βαρύνουμε το συμβολισμό. Άλλωστε είναι πάντοτε ξεκάθαρο σε ποια από τις δύο νόρμες αναφερόμαστε: Η νόρμα του X δρα σε στοιχεία $x \in X$, ενώ η νόρμα του X/M σε στοιχεία της μορφής $x + M \in X/M$.

Απόδειξη. Θα ελέγξουμε τα αξιώματα της νόρμας:

- Αν $x + M \in X/M$, $\|x+M\| = 0 \iff \mathrm{d}(x,M) = 0 \iff x \in \overline{M} \iff x \in M \iff x + M = 0 + M$.

- Έστω $x + M \in X/M$ και $\lambda \in \mathbb{F}$.

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x+M)\| &= \|\lambda x+M\| \\
&= \mathrm{d}(\lambda x, M) \\
&= \inf\{\|\lambda x-m\| : m \in M\} \\
&= \inf\{\|\lambda x-\lambda m\| : m \in M\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x-m\| : m \in M\} \\
&= |\lambda|\|x+M\|.
\end{aligned}$$

[1] Ο υπόχωρος M απαιτείται κλειστός διότι σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $x_0 \in \overline{M}\backslash M$ για το οποίο $\|x_0+M\| = \mathrm{d}(x_0,M) = 0$, όμως $x_0+M \neq 0+M$, δηλαδή δεν θα ικανοποιείτο η πρώτη ιδιότητα της νόρμας.

- Έστω $x + M, y + M \in X/M$.

$$\begin{aligned}
\|(x+M)+(y+M)\| &= \|(x+y)+M\| \\
&= \mathrm{d}(x+y, M) \\
&= \inf\{\|x+y-m\| : m \in M\} \\
&= \inf\{\|x-m_1+y-m_2\| : m_1, m_2 \in M\} \\
&\geqslant \inf\{\|x-m_1\| : m_1 \in M\} + \inf\{\|y-m_2\| : m_2 \in M\} \\
&= \|x+M\| + \|y+M\|.
\end{aligned}$$

□

Αποδεικνύεται εύκολα (βλ. [Meg], Propositions 1.7.6, 1.7.7, p. 53) ότι αν ο X είναι χώρος Banach και $M \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος του X, τότε και ο χώρος πηλίκο X/M είναι και αυτός χώρος Banach.

1.3 Θεωρία Μέτρου

1.3α′ Διανυσματικά Μέτρα

Χρησιμοποιούμε ως αναφορά το [DU].

Ορισμός 1.3.1. *Έστω Ω σύνολο, Σ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Μια απεικόνιση $\mu : \Sigma \to X$ ονομάζεται διανυσματικό μέτρο αν για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων, ισχύει ότι $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας μετρήσιμης συνάρτησης από έναν χώρο μέτρου στο $\mathbb{R}$, οριζόταν αρχικά για τις απλές συναρτήσεις και ύστερα επεκτεινόταν στην κλάση των μετρήσιμων συναρτήσεων παίρνοντας κατάλληλα supremum ολοκληρωμάτων απλών συναρτήσεων. Η ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων, δηλαδή συναρτήσεων που λαμβάνουν τιμές σε έναν χώρο Banach, επιτυγχάνεται με παρόμοιο τρόπο. Καθώς όμως σε έναν τυχαίο χώρο Banach δεν υπάρχει η έννοια της διάταξης, πόσο μάλλον αυτής του supremum, χρειαζόμαστε μια διαφορετική περιγραφή της κλάσης των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου, $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $f : \Omega \to X$.*

- *Η f ονομάζεται **απλή**, εαν υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ και $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε*

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

  όπου I_{A_i} η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A_i.

- *Η f ονομάζεται **μ-μετρήσιμη**, εαν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων s_n τέτοια ώστε $\|s_n(\omega) - f(\omega)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, μ-σχεδόν παντού.*

Ορισμός 1.3.3. *Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου, $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $f : \Omega \to X$.*

- *Αν η f είναι απλή, δηλαδή η f είναι της μορφής $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f να είναι:*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i).$$

- *Αν $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$ απλή συνάρτηση και $A \in \Sigma$, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f στο A ως:*

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f I_A d\mu.$$

- *Αν η f είναι μ-μετρήσιμη και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega \|s_n - f\| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

*τότε η f καλείται **Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση** και για κάθε $A \in \Sigma$, το στοιχείο*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu,$$

*ονομάζεται **ολοκλήρωμα Bochner** της f στο A.*

Θεώρημα 1.3.4. ***(Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue για διανυσματικά μέτρα).*** *Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου, X χώρος Banach και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, $f_n : \Omega \to X$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο,[2] και υπάρχει $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\|f_n\| \leqslant g$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη και $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$, για κάθε $E \in \Sigma$. Επιπλέον, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για βαθμωτές συναρτήσεις. □

1.4 Το Θεώρημα του Fejér

Στην Παράγραφο 3.5α′ αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Fejér με τη χρήση του Εργοδικού Θεωρήματος του Eberlein. Εδώ θυμίζουμε τι λέει το εν λόγω θεώρημα αφού πρώτα εισάγουμε την ορολογία που χρειαζόμαστε.

Έστω $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο. Αν $F : S^1 \to \mathbb{C}$, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για την οποία $f(t) = F(e^{it})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι 2π-περιοδική. Αντιστρόφως, αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε υπάρχει

[2] Λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f κατά μέτρο αν για κάθε $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu([\|f_n - f\| \geqslant \epsilon]) = 0$.

$F : S^1 \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F(e^{it}) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις του $\mathbb{R}$ με τις συναρτήσεις του S^1.

Για κάθε $p \in [1, \infty)$, συμβολίζουμε με $L_p(S^1)$ τον χώρο των Lebesgue ολοκληρώσιμων 2π-περιοδικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}$ με νόρμα την $\| \cdot \|_p$ για την οποία $\|f\|_p = (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p}$ για κάθε $f \in L_p$. Στην περίπτωση όπου $p = 2$, ο $L_2(S^1)$ αποτελεί μιγαδικό χώρο Hilbert.

Ορισμός 1.4.1. ***Τριγωνομετρικό Πολυώνυμο*** *ονομάζεται κάθε πεπερασμένο άθροισμα της μορφής*

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Πρόταση 1.4.2. *Το τριγωνομετρικό σύστημα $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L_2(S^1)$.*

Απόδειξη. [Σαρ], Πρόταση 3.3, σελ. 71. □

Ορισμός 1.4.3. *Αν $f \in L_1(S^1)$ ορίζουμε τον n-οστό **συντελεστή Fourier** της f να είναι το*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Σειρά Fourier *της f ονομάζεται η σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}.$$

*Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{S_n(f)}$ τα **μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της** $\boldsymbol{f}$:*

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \tag{1.4}$$

*και με $\boldsymbol{\sigma(f)}$ τον **αριθμητικό μέσο της σειράς Fourier της** $\boldsymbol{f}$*

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{S_0(f)(t) + \ldots + S_n(f)(t)}{n+1}. \tag{1.5}$$

Ορισμός 1.4.4. ***Αθροιστικός Πυρήνας*** *(summability kernel) ονομάζεται μια ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων που ικανοποιούν τα εξής:*

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$, *για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt \leqslant M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(iii) για κάθε $\delta \in (0, \pi)$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} |K_n(t)|dt = 0$.

*Αν επιπλέον $K_n(t) \geqslant 0$ για κάθε $t \in S^1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο πυρήνας ονομάζεται **θετικός**.*

Ορισμός 1.4.5. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $D_n, K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ως εξής:*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, \tag{1.6}$$

$$K_n(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} D_k(t)}{n+1}. \tag{1.7}$$

*Οι ακολουθίες $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζονται **πυρήνες Dirichlet και Fejér** αντίστοιχα. Ο πυρήνας του Fejér αποτελεί θετικό αθροιστικό πυρήνα, ενώ ο πυρήνας του Dirichlet δεν είναι ούτε αθροιστικός, ούτε θετικός.*

Πρόταση 1.4.6. *Έστω $f \in L_1(S^1)$. Τότε*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt \tag{1.8}$$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt. \tag{1.9}$$

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη μορφή του Θεωρήματος του Fejér:

Θεώρημα 1.4.7. *(Fejér).* *Έστω f συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε ο αριθμητικός μέσος της σειράς Fourier της f συγκλίνει στην f ομοιόμορφα, δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0. \tag{1.10}$$

Αναβάλλουμε την απόδειξη για την Παράγραφο 3.5α΄.

1.5 Αφινικές Δράσεις

Η παράγραφος αυτή είναι απαραίτητη για την κατανόηση της απόδειξης του Θεωρήματος του von Neumann με τη χρήση αφινικών αναπαραστάσεων. Καθώς το εν λόγω θεώρημα θα αποδειχθεί με τρεις ακόμη τρόπους, όποιος δεν ενδιαφέρεται για τη συγκεκριμένη απόδειξη μπορεί να αποφύγει την ανάγνωση αυτής της παραγράφου, αφού δεν αξιοποιείται πουθενά αλλού σε αυτή την εργασία. Οι έννοιες που ακολουθούν μπορούν να βρεθούν στο εξαιρετικό [Bek] καθώς και στο [Val].

Ορισμός 1.5.1. *Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $T : X \to X$ ονομάζεται **αφινική** (affine) αν $T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)Ty$ για κάθε $\lambda \in [0,1]$ και κάθε $x, y \in X$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση να υπάρχουν γραμμικός τελεστής $S : X \to X$ και $x_0 \in X$ τέτοια ώστε $T(x) = S(x) - x_0$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε την ομάδα των **αμφιμονοσήμαντων αφινικών απεικονίσεων** από το X στο X ως*

$$\mathrm{aff}(X) = \{T : X \to X,\ \ T \text{ αφινική, 1-1, επί}\}.$$

Ορισμός 1.5.2. *Έστω G ομάδα και X διανυσματικός χώρος πάνω από κάποιο σώμα $\mathbb{F}$. Ονομάζουμε* ***αφινική δράση*** *(affine action) της G στον X κάθε ομομορφισμό $a : G \to \text{aff}(X)$.*

Αν $a : G \to \text{aff}(X)$ αφινική δράση, τότε για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση $\pi(g) : X \to X$ με $\pi(g)x = a(g)x - a(g)0$, είναι γραμμική. Αν ορίσουμε $\phi : G \to \text{GL}(X)$ με $\phi(g) = \pi(g)$ για κάθε $g \in G$, τότε η ϕ αποτελεί αναπαράσταση της G στον X και ονομάζεται **γραμμικό μέρος** (linear part) της a.

Αντίστροφα, αν $\pi : G \to \text{GL}(X)$ αναπαράσταση, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε μια αφινική δράση $a : G \to \text{aff}(X)$ το γραμμικό μέρος της οποίας να ισούται με π. Το επόμενο λήμμα δείχνει τη μορφή που θα πρέπει να έχει η ζητούμενη αφινική δράση a.

Λήμμα 1.5.3. *Έστω $\pi : G \to \text{GL}(X)$ αναπαράσταση της G και $a : G \to \text{aff}(X)$ αφινική δράση με γραμμικός μέρος ίσο με π. Τότε η a έχει τη μορφή*

$$a(g)x = \pi(g)x + b(g), \quad \forall x \in X, \tag{1.11}$$

όπου $b : G \to X$ απεικόνιση που ικανοποιεί την ***1-ομόκυκλη σχέση*** *(1-cocycle relation):*

$$b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g), \quad \forall g, h \in G. \tag{1.12}$$

Απόδειξη. Για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση $a(g)(\cdot) : X \to X$ είναι αφινική με γραμμικό μέρος $\pi(g)(\cdot)$, επομένως υπάρχει $b(g) \in X$ τέτοιο ώστε $a(g)(\cdot) = \pi(g)(\cdot) + b(g)$, δηλαδή $a(g)(x) = \pi(g)x + b(g)$ για κάθε $x \in X$.

Απομένει να δείξουμε ότι η b ικανοποιεί την 1-ομόκυκλη σχέση. Έστω $g, h \in G$. Δεδομένου ότι η a είναι ομομορφισμός θα έχουμε ότι $a(gh) = a(g)a(h)$. Όμως για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned}
a(g)x &= \pi(g)x + b(g)\\
a(h)x &= \pi(h)x + b(h)\\
a(gh)x &= \pi(gh)x + b(gh)\\
&= \pi(g)\pi(h)x + b(gh) \qquad (1.13)\\
a(g)(a(h)x) &= a(g)(\pi(h)x + b(h))\\
&= \pi(g)(\pi(h)x + b(h)) + b(g)\\
&= \pi(g)\pi(h)x + \pi(g)b(h) + b(g). \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (1.13) και (1.14) προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.5.4. *Αν $\pi : G \to X$ αναπαράσταση, οι συναρτήσεις $b : G \to X$ που ικανοποιούν την (1.12) ονομάζονται* ***1-ομόκυκλοι****, ή για λόγους συντομίας* ***ομόκυκλοι****. Θα συμβολίζουμε με $Z^1(G, \pi)$ το σύνολο των συναρτήσεων αυτών. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το $Z^1(G, \pi)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο.*

Πρόταση 1.5.5. *Έστω $\pi : G \to X$ αναπαράσταση της G στον διανυσματικό χώρο X και $Z^1(G, \pi) = \{b : G \to X : b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g), \ \forall g, h \in G\}$. Ορίζουμε την πράξη* *της πρόσθεσης* $+ : Z^1(G,\pi) \times Z^1(G,\pi) \to Z^1(G,\pi)$ *και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\cdot : \mathbb{F} \times Z^1(G,\pi) \to Z^1(G,\pi)$ *ως εξής:*

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2)(g) &= b_1(g) + b_2(g),\\ (\lambda b_1)(g) &= \lambda b_1(g),\end{aligned}$$

για κάθε $b_1, b_2 \in Z^1(G,\pi)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ *και κάθε* $g \in G$. *Η τριάδα* $(Z^1(G,\pi), +, \cdot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο.*

Απόδειξη. Οι πράξεις είναι καλά ορισμένες: Αν $b_1, b_2 \in Z^1(G,\pi)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2)(gh) &= b_1(gh) + b_2(gh) = \pi(g)b_1(h) + b_1(g) + \pi(g)b_2(h) + b_2(g)\\ &= \pi(g)(b_1 + b_2)(h) + (b_1 + b_2)(g),\\ (\lambda b_1)(gh) &= \lambda b_1(gh) = \lambda\pi(g)b_1(h) + \lambda b_1(g)\\ &= \pi(g)\lambda b_1(h) + \lambda b_1(g)\\ &= \pi(g)(\lambda b_1)(h) + (\lambda b_1)(g).\end{aligned}$$

Άρα $b_1 + b_2$, $\lambda b_1 \in Z^1(G,\pi)$.

Θα δείξουμε ότι η $(Z^1(G,\pi), +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα. Η απεικόνιση $e : G \to X$ για την οποία $e(g) = 0$ για κάθε $g \in G$ είναι 1-ομόκυκλος και προφανώς δρα ως ταυτοτικό στοιχείο στην $(Z^1(G,\pi), +)$ αφού $e + b = b$, για κάθε $b \in Z^1(G,\pi)$. Αν $b \in Z^1(G,\pi)$, τότε το $-b$, το οποίο ανήκει στο $Z^1(G,\pi)$ αφού είναι της μορφής λb, αποτελεί τον αντίστροφο του b. Η αντιμεταθετικότητα προκύπτει άμεσα από την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης στον X.

Τα υπόλοιπα αξιώματα του ορισμού του διανυσματικού χώρου (βλ. Ορισμό 1.1.6) αποδεικνύονται εντελώς όμοια και αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

Παρατήρηση 1.5.6. *Αν* $b \in Z^1(G,\pi)$, *τότε* $b(e) = 0$ *και* $b(g^{-1}) = -\pi(g^{-1})b(g)$, *για κάθε* $g \in G$.

Απόδειξη. Προκύπτει με απλή εφαρμογή της σχέσης του ομοκύκλου.

- $b(e) = \pi(e)b(e) + b(e) = b(e) + b(e) \Rightarrow b(e) = 0$,
- $b(e) = 0 = b(gg^{-1}) = \pi(g^{-1})b(g) + b(g^{-1}) \Rightarrow b(g^{-1}) = -\pi(g^{-1})b(g)$.

□

Παράδειγμα 1.5.7. *Έστω* G *ομάδα,* X *διανυσματικός χώρος και* $x_0 \in X$. *Για κάθε* $g \in G$ *ορίζουμε*

$$b(g) = \pi(g)x_0 - x_0. \tag{1.15}$$

Τότε $b \in Z^1(G,\pi)$ *αφού*

$$\begin{aligned}b(gh) &= \pi(gh)x_0 - x_0 = \pi(g)\pi(h)x_0 - x_0 = \pi(g)\pi(h)x_0 - \pi(g)x_0 + \pi(g)x_0 - x_0\\ &= \pi(g)(\pi(h)x_0 - x_0) + \pi(g)x_0 - x_0 = \pi(g)b(h) + b(g).\end{aligned}$$

Τα στοιχεία της $Z^1(G,\pi)$ *για τα οποία υπάρχει* $x_0 \in X$ *τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η (1.15) ονομάζονται* 1-***ομοσυνοριακά*** *και συμβολίζονται με* $B^1(G,\pi)$. *Στην πρόταση που ακολουθεί βλέπουμε ότι το σύνολο* $B^1(G,\pi)$ *αποτελεί επιπλέον διανυσματικό υπόχωρο του* $Z^1(G,\pi)$.

Πρόταση 1.5.8. *Ο $B^1(G,\pi)$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $Z^1(G,\pi)$ και ονομάζεται χώρος των 1-ομοσυνόρων.*

Απόδειξη. Αν $b_1, b_2 \in B^1(G,\pi)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} b_1(g) &= \pi(g)x_1 - x_1 \quad \text{και} \\ b_2(g) &= \pi(g)x_2 - x_2. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $g \in G$,

$$\begin{aligned} (\lambda b_1 + b_2)(g) &= \lambda b_1(g) + b_2(g) \\ &= \lambda\pi(g)x_1 - \lambda x_1 + \pi(g)x_2 - x_2 \\ &= \pi(g)(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda x_1 + x_2) \\ &= \pi(g)x_0 - x_0, \quad \text{για } x_0 = \lambda x_1 + x_2, \end{aligned}$$

δηλαδή το $\lambda b_1 + b_2$ ανήκει στο $B^1(G,\pi)$. □

Αν H χώρος Hilbert συμβολίζουμε με $U(H)$ το σύνολο των ορθομοναδιαίων τελεστών του H (βλ. Ορισμό 2.4.1).

Ορισμός 1.5.9. *Έστω $(G,\cdot,\tau)$ τοπολογική ομάδα και H χώρος Hilbert. Μια απεικόνιση $\pi : G \to U(H)$ η οποία είναι*

(i) ομομορφισμός ομάδων και

(ii) ισχυρά συνεχής,

*ονομάζεται **ορθομοναδιαία αναπαράσταση** (unitary representation) της G στον H.*

Η συνθήκη (ii) σημαίνει απλά ότι η π είναι συνεχής συνάρτηση από την G (εφοδιασμένη με την τοπολογία τ που έχει ήδη) στον $U(H)$ (εφοδιασμένο με την strong operator topology). Εύκολα επαληθεύεται ότι η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο: Η απεικόνιση $T : G \to H$ για την οποία

$$T(g)x = \pi(g)x, \quad g \in G,$$

είναι συνεχής για κάθε $x \in X$.

Εφοδιάζουμε τον $Z^1(G,\pi)$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή και ορίζουμε τον $\overline{B(Z^1,\pi)}$ να είναι το κλείσιμο του $B(Z^1,\pi)$ ως προς αυτή την τοπολογία.

Ορισμός 1.5.10. *Έστω π ορθομοναδιαία αναπαράσταση της G στον H και $K \subseteq H$ υπόχωρος. Ο K ονομάζεται **G-αναλλοίωτος** (G-invariant) αν για κάθε $g \in G$, $\pi(g)(K) \subseteq K$.*

Πρόταση 1.5.11. *Αν $K \subseteq H$ G-αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε ο περιορισμός της π στο K (συμβ. $\pi^K : G \to U(K)$) αποτελεί ορθομοναδιαία αναπαράσταση της G στον K και ονομάζεται **υποαναπαράσταση** (subrepresentation) της π.*

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ και θα δείξουμε ότι $\pi^K(g) \in U(K)$. Πράγματι, $\pi^K(g)(K) = \pi(g)(K) \subseteq K$, άρα $\pi^K(g) : K \to K$. Επιπλέον $\langle \pi^K(g)(x), \pi^K(g)(y)\rangle = \langle \pi(g)(x), \pi(g)(y)\rangle = \langle x, y, \rangle$ για κάθε $x, y \in K$, δηλαδή $\pi^K : G \to U(K)$.

Αν $g, h \in G$, τότε

$$\begin{aligned}\pi^K(gh)(x) &= \pi(gh)(x) = (\pi(g) \circ \pi(h))(x) = \pi(g)(\pi(h)(x)) \\ &= \pi(g)(\pi^K(h)(x)) = \pi^K(g)(\pi^K(h)(x)) \\ &= (\pi^K(g) \circ \pi^K(h))(x)\end{aligned}$$

και αφού η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $x \in K$ συμπεραίνουμε ότι η π^K αποτελεί ομομορφισμό ομάδων από την G στην $U(K)$. Για τη συνέχεια, έστω $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο της G με $g_\lambda \to g_0$. Για κάθε $x \in K$, $\pi^K(g_\lambda)(x) = \pi(g_\lambda)(x) \to \pi(g_0)(x) = \pi^K(g_0)(x)$, επομένως $\pi^K(g_\lambda) \to \pi^K(g_0)$. □

1.5α΄ Αύξηση Ομοκύκλων

Ορισμός 1.5.12. *Έστω G ομάδα. Ένα σύνολο $S \subseteq G$ ονομάζεται*

(i) ***συμμετρικό**, εαν $S = S^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{s^{-1} : s \in S\}$*

(ii) ***παράγον**, εαν $\langle S\rangle \overset{\text{def}}{=} \{s_1 \cdots s_n : n \in \mathbb{N}, s_i \in S\} = G$.*

*Μια τοπολογική ομάδα G ονομάζεται **συμπαγώς** (αντ. **πεπερασμένα**) **παραγόμενη**, εαν υπάρχει παράγον υποσύνολο S το οποίο είναι συμπαγές (αντ. πεπερασμένο). Αν G συμπαγώς παραγόμενη τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα και $S \subseteq G$ συμπαγές και συμμετρικό παράγον υποσύνολο της G, τότε ορίζουμε τη **συνάρτηση μήκους λέξης** στο G (συμβ. $|\cdot|_S$) ως εξής:*

$$|g|_S = \min\{n \in \mathbb{N} : g = s_1 \cdots s_n, \ \text{με } s_i \in S, \ \text{για κάθε } i\}. \tag{1.16}$$

Λήμμα 1.5.13. *Έστω π ορθομοναδιαία αναπαράσταση της G στην H και $b \in Z^1(G, \pi)$. Τότε $\|b(g)\| = O(|g|_s)$* [3] *και συγκεκριμένα*

$$\|b(g)\| \leqslant \max\{\|b(s)\| : s \in S\}|g|_S. \tag{1.17}$$

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ με $g = s_1 \cdots s_n$ για $s_1, \ldots s_n \in S$. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο μήκος n. Για $n = 1$, $g = s_1 \in S$, $\|b(g)\| = \|b(s_1)\| \leqslant \max\{\|b(s)\| : s \in S\} \cdot 1$.

[3] Θυμίζουμε τη σημασία των συμβολισμών του **κεφαλαίου** και του **πεζού όμικρον**. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Θα λέμε ότι

- $\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$, εαν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί M και n_0 τέτοιοι ώστε $f(n) \leqslant Mg(n)$ για καθε $n \geqslant n_0$,
- $\boldsymbol{f(n) = o(g(n))}$, εαν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f(n) \leqslant Mg(n)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = k$ και θεωρούμε $g = s_1 \cdots s_k s_{k+1}$. Τότε

$$\begin{aligned}
b(g) &= b(s_1 \cdots s_k s_{k+1}) = \pi(s_1 \cdots s_k) b(s_{k+1}) + b(s_1 \cdots s_k) \quad \Rightarrow \\
\|b(g)\| &\leqslant \|b(s_{k+1})\| + \|b(s_1 \cdots s_k)\| \\
&\leqslant \max\{\|b(s)\| : s \in S\} + \max\{\|b(s)\| : s \in S\} \cdot k \\
&= (k+1) \max\{\|b(s)\| : s \in S\} \\
&= |g|_S \max\{\|b(s)\| : s \in S\}.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 1.5.14. *Αν $b \in \overline{B^1(G,\pi)}$, τότε $\|b(g)\| = o(|g|_S)$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και S συμπαγές και παράγον υποσύνολο της G. Αφού $b \in \overline{B^1(G,\pi)}$, υπάρχει $b' \in B^1(G,\pi)$ τέτοιο ώστε $\max_{s \in S} \|b(s) - b'(s)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\|b(g)\|}{|g|_S} &\leqslant \frac{\|b(g) - b'(g)\|}{|g|_S} + \frac{\|b'(g)\|}{|g|_S} \\
&\leqslant \frac{\max\{\|b(s) - b'(s)\| : s \in S\} \cancel{|g|_S}}{\cancel{|g|_S}} + \frac{\|b'(g)\|}{|g|_S} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|b'(g)\|}{|g|_S}.
\end{aligned}$$

Όμως το b' είναι φραγμένο καθώς ανήκει στο $B^1(G,\pi)$, επομένως για αρκετά μεγάλο $|g|_S$ θα έχουμε ότι $\frac{\|b'(g)\|}{|g|_S} < \frac{\epsilon}{2}$, το οποίο δείχνει το ζητούμενο. □

1.6 Άλγεβρες Banach

Άλγεβρα (algebra) ονομάζεται ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος $(A, +, \cdot)$ εφοδιασμένος με μία προσεταιριστική πράξη $\bullet : A \times A \to A$ τέτοια ώστε για κάθε $a, b, c \in A$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$,

(ii) $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$,

(iii) $(\lambda a) \bullet b = \lambda(a \bullet b) = a \bullet (\lambda b)$.

Αν $a, b \in A$, συμβολίζουμε το $\bullet(a, b)$ με $a \bullet b$ ή ab αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Ένα στοιχείο $e \in A$ ονομάζεται **μονάδα** (unit) αν $ea = ae = a$ για κάθε $a \in A$. Αν (A, e) άλγεβρα με μονάδα και $a \in A$, το a ονομάζεται **αντιστρέψιμο** (invertible) αν υπάρχει στοιχείο $a' \in A$ τέτοιο ώστε $aa' = a'a = e$. Το στοιχείο a' με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αντίστροφος** (inverse) του a και συμβολίζεται με a^{-1}. Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων μιας άλγεβρας με μονάδα (A, e) συμβολίζεται με $\mathrm{inv}(A)$ και αποτελεί ομάδα όταν εφοδιαστεί με την επαγόμενη πράξη $\bullet : \mathrm{inv}(A) \times \mathrm{inv}(A) \to \mathrm{inv}(A)$.

Αν ο A είναι εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$ ως προς την οποία είναι χώρος Banach και επιπλέον

(i) $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ για κάθε $a, b \in A$,

(ii) $\|e\| = 1$, αν ο A έχει μονάδα e,

τότε ο A ονομάζεται **άλγεβρα Banach.**

Πρόταση 1.6.1. *Έστω A άλγεβρα Banach με μονάδα e. Αν $x \in A$ με $\|x\| < 1$ τότε το x αντιστρέφεται με $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Απόδειξη. [Καρ], Πρόταση 1.2.3, σελ. 10. □

Ορισμός 1.6.2. *Έστω (A, e) άλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in A$. Το σύνολο*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin \mathrm{inv}(A)\} \tag{1.18}$$

*ονομάζεται **φάσμα** (spectrum), ενώ ο αριθμός $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) του στοιχείου a. Ο τύπος της φασματικής απεικόνισης (βλ. [Καρ], Θεώρημα 1.2.8, σελ. 15) μας λέει ότι*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}. \tag{1.19}$$

Θεώρημα 1.6.3. ***(Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης).*** *Έστω (A, e) άλγεβρα Banach με μονάδα, $a \in A$ και $p \in \mathbb{C}[z]$ μιγαδικό πολυώνυμο μιας μεταβλητής. Τότε*

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}. \tag{1.20}$$

Απόδειξη. [Καρ], Θεώρημα 1.2.2 i), σελ. 9. □

Θεώρημα 1.6.4. *Έστω (A, e) άλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in A$. Το $\sigma(a)$ αποτελεί μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Βλ. [Καρ], Θεώρημα 1.2.5, σελ. 11. □

Ένας τελεστής $T \in B(H)$ ενός χώρου Hilbert ονομάζεται **φυσιολογικός** αν $T^*T = TT^*$ και **ορθομοναδιαίος** αν αν $T^*T = TT^* = I$. Είναι γνωστό ότι αν ο H είναι χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και $T \in B(H)$ φυσιολογικός τελεστής με $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ διαφορετικές ιδιοτιμές και $P_1, \ldots, P_n$ τις αντίστοιχες προβολές επί των ιδιοχώρων που παράγονται από τις $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, τότε ο T γράφεται ως $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται και στην περίπτωση όπου ο H είναι απειροδιάστατος. Η αναλυτική περιγραφή του τρόπου με τον οποίον επιτυγχάνεται αυτή η γενίκευση μπορεί να βρεθεί στο [Καρ], Παράγραφος 3.2. Εδώ αναφέρουμε απλά το αποτέλεσμα, καθώς θα το αξιοποιήσουμε σε μία από τις αποδείξεις του Εργοδικού Θεωρήματος του von Neumann.

Ορισμός 1.6.5. *Έστω Ω συμπαγής χώρος Hausdorff και H χώρος Hilbert. Συμβολίζουμε με $B(\Omega)$ τη σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του Ω και με $B_P(H)$ το σύνολο των προβολών $P : H \to H$. Μια απεικόνιση $\mu : B(\Omega) \to B_P(H)$ για την οποία* *(i)* $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(\Omega) = 1$,

(iii) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$, *για κάθε ακολουθία ξένων ανα δύο συνόλων* $S_n \in B(\Omega)$,

ονομάζεται ***φασματικό μέτρο ως προς το ζεύγος*** $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{H})$.

Θεώρημα 1.6.6. ***(Φασματικό Θεώρημα για Φυσιολογικούς Τελεστές).*** *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $T \in B(H)$ *φυσιολογικός τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο* μ *ως προς το ζεύγος* $(\sigma(T), H)$ *τέτοιο ώστε*

$$T = \int_{\sigma(T)} t d\mu(t). \tag{1.21}$$

Απόδειξη. [Καρ], Θεώρημα 3.2.3, σελ. 51. □

1.7 Banach Lattices

Έστω X διανυσματικός χώρος και P κυρτό υποσύνολο του X για το οποίο $\lambda P \subseteq P$ για κάθε $\lambda \geqslant 0$. Τότε το P ονομάζεται **κώνος** (cone). Αν επιπλέον $P \cap (-P) = \{0\}$, τότε ο κώνος P ονομάζεται **οξύς** (pointed cone). Κάθε οξύς κώνος ορίζει μια αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική σχέση διάταξης $\leqslant$ ως εξής: $x \leqslant y \iff y - x \in P$. Αντιστρόφως, αν η $\leqslant$ αποτελεί αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική σχέση διάταξης, τότε το σύνολο των θετικών στοιχείων αυτής της διάταξης, $P = \{x \in X : x \geqslant 0\}$ ορίζει οξύ κώνο. Το ζεύγος (X, P) ή $(X, \leqslant)$ ονομάζεται **διατεταγμένος χώρος** (ordered space).

Ένας διατεταγμένος χώρος ονομάζεται **χώρος Riesz** (Riesz space), αν κάθε δύο στοιχεία του x, y έχουν supremum (συμβ. $x \vee y$) και infimum (συμβ. $x \wedge y$). Για κάθε στοιχείο x ενός χώρου Riesz ορίζουμε το **θετικό μέρος** του x να είναι το στοιχείο $x^+ = x \vee 0$, το **αρνητικό μέρος** του x να είναι το $x^- = x \wedge 0$ και η **απόλυτη τιμή** του x ως το στοιχείο $|x| = x^+ + x^- = x \vee (-x)$. Ένας χώρος Riesz ονομάζεται **(σ-) διατακτικά πλήρης** ((σ-)order complete) αν κάθε (αριθμήσιμο) άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει supremum.

Παράδειγμα 1.7.1. *Ο* $\mathbb{R}^n$ *με την κατά σημείο διάταξη είναι διατακτικά πλήρης χώρος Riesz. Το ίδιο ισχύει και για τους χώρους* L_p *για* $1 \leqslant p < \infty$ *με τη σχεδόν παντού διάταξη:* $f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x)$ *σχεδόν παντού.*

Αν $(X, \|\cdot\|, P)$ διατεταγμένος χώρος με νόρμα, η νόρμα $\|\cdot\|$ ονομάζεται **μονότονη** (monotone) αν για κάθε $x, y \in X$, $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$. Ένας διατεταγμένος χώρος με μονότονη νόρμα ονομάζεται **χώρος με Riesz νόρμα** (normed Riesz space). Αν ένας χώρος με Riesz νόρμα είναι επιπλέον χώρος Banach τότε ονομάζεται **Banach lattice**. Ο $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια νόρμα καθώς και οι χώροι L_p για $1 \leqslant p < \infty$ εφοδιασμένοι με την $\|\cdot\|_p$ νόρμα, αποτελούν Banach lattices.

Ορισμός 1.7.2. *Έστω X, Y χώροι Riesz και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T ονομάζεται **διατακτικός ομομορφισμός** (lattice homomorphism) αν κάποια από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες ικανοποιείται:*

(i) $T(x \vee y) = Tx \vee Ty, \ \ \forall x, y \in X.$

(ii) $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty, \ \ \forall x, y \in X.$

(iii) $T(x^+) = (Tx)^+, \ \ \forall x \in X.$

(iv) $T(x^-) = (Tx)^-, \ \ \forall x \in X.$

(v) $T(|x|) = |Tx|, \ \ \forall x \in X.$

*Ένας διατακτικός ομομορφισμός που επιπλέον είναι ένα προς ένα ονομάζεται **διατακτικός ισομορφισμός** (lattice isomorphism).*

Αν X χώρος Riesz και $Y \subseteq X$ υπόχωρος, ο Y ονομάζεται **υπόχωρος Riesz** (Riesz subspace) αν για κάθε $x, y \in Y$, τα $x \wedge y, x \vee y$ ανήκουν στον Y. Ο Y ονομάζεται **διατακτικό ιδεώδες** (lattice ideal) αν $|x| \leqslant |y|$ και $y \in X$ συνεπάγεται ότι $x \in Y$.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη έναν χαρακτηρισμό της αυτοπάθειας για Banach lattices που θα χρειαστούμε στο Κεφάλαιο 3:

Θεώρημα 1.7.3. *Έστω X Banach lattice. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι αυτοπαθής.

(ii) Ο X δεν περιέχει sublattice διατακτικά ισομορφικό ούτε με τον c_0, ούτε με τον ℓ_1.

Απόδειξη. [Scha], Theorem 5.16, p. 95. □

Κεφάλαιο 2

Εργοδικότητα και Επανεμφάνιση

> I wanna tell you something Mark, something you do not yet know, that we K-PAXians have been around long enough to have discovered. The universe will expand, then it will collapse back on itself, then will expand again. It will repeat this process forever. What you don't you know is that when the universe expands again, everything will be as it is now.
>
> Prot

Η σύνδεση της εργοδικότητας με την αυτοπάθεια προέκυψε από τη σταδιακή εξέλιξη ενός προβλήματος το οποίο, όπως ήταν διατυπωμένο αρχικά, δεν είχε καμία σχέση ούτε με αυτοπάθεια, αλλά ούτε και με χώρους Banach. Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρούμε να δούμε ποιο ήταν το αρχικό πρόβλημα και πώς τελικά πήρε τη μορφή που θα μας απασχολήσει στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας. Πρόκειται για μια διαδρομή τουλάχιστον 30 ετών που ξεκίνησε τα τέλη του 1800 με τη διατύπωση της εργοδικής υπόθεσης και κατέληξε στη δεκαετία του '30 με την απάντηση που έδωσε ο John von Neumann. Να επισημάνω ότι χωρίς τις συζητήσεις μου με τον Δρ. Ανδρέα Μπούκα, τα ιστορικά σχόλια αυτού του κεφαλαίου θα ήταν αρκετά φτωχότερα.

2.1 Εισαγωγή

Η Εργοδική Θεωρία μπορεί να θεμελιώθηκε τη δεκαετία του '30, όμως η διαμόρφωσή της είχε ξεκινήσει πολύ νωρίτερα. Μπορούμε να πούμε ότι γεννήθηκε μέσα από τη μελέτη δύο φυσικών προβλήματων. Το πρώτο αφορούσε σε Ουράνια Μηχανική και προέκυψε μέσα από τη δουλειά του George William Hill (1838-1914), ο οποίος το 1878 προσπάθησε να μελετήσει ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης, συνάγοντάς τα μόνο από τη μορφή αυτής, χωρίς να γνωρίζει την αναλυτική λύση της.

Το άλλο πρόβλημα προέκυψε μέσα από τη δουλειά των James Clerk Maxwell (1831-1879) και Ludwig Boltzmann (1844-1906) επάνω στην κινητική θεωρία των αερίων. Αν θεωρήσουμε ένα κουτί που περιέχει d-σωματίδια ενός ιδανικού αερίου, τότε κάθε σωματίδιο περιγράφεται από έξι συντεταγμένες: Τρεις για τη θέση και τρεις για την ορμή. Επομένως η κατάσταση του συστήματος αντιπροσωπεύεται από κάποιο σημείο $\omega \in \mathbb{R}^{6d}$. Το ω δεν "τρέχει" κατ'ανάγκην σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^{6d}$, αλλά σε κάποιο υποσύνολό του $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{6d}$ το οποίο ονομάζεται χώρος κατάστασης του συστήματος (state space).

Έστω τώρα συνάρτηση $T : \Omega \to \Omega$ η οποία περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος υπό την ακόλουθη έννοια: Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα ξεκινάει από την κατάσταση $\omega_0 \in \Omega$. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ το σύστημα μεταπηδά στην κατάσταση $\omega_1 = T(\omega_0)$, την $t = 2$ στην κατάσταση $\omega_2 = T(\omega_1) = T^2(\omega_0)$ κ.ο.κ. Έτσι η εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος περιγράφεται από την **τροχιά** του σημείου ω_0 μέσω της T, την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(\omega_0, T) = \{T^n(\omega_0) : n \in \mathbb{N}\}$. Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ η οποία περιγράφει ένα μέγεθος που μπορεί να παρατηρηθεί και να μετρηθεί (πχ. θερμοκρασία του αερίου), τότε η τροχιά $\{(f \circ T^n)(\omega_0) : n \in \mathbb{N}\}$ περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους αυτού. Ο Boltzmann αναζητούσε κάποιο αποτέλεσμα που θα του επέτρεπε να συμπεράνει ότι η ακολουθία των (χρονικών) μέσων όρων των "μετρήσεων",

$$M_n(f) = \frac{f(\omega_0) + f(T(\omega_0)) + \ldots + f(T^{n-1}(\omega_0))}{n} \tag{2.1}$$

συγκλίνει στη μέση τιμή της f σε ολόκληρο τον χώρο. Στην προσπάθειά του διατύπωσε την λεγόμενη "Εργοδική Υπόθεση", δηλαδή την υπόθεση ότι η τροχιά κάθε σημείου του Ω περνούσε από όλα τα σημεία του συστήματος.

Σύντομα διαπιστώθηκε ότι η Εργοδική Υπόθεση ήταν αδύνατο να ικανοποιηθεί. Οι πρώτες διαφωνίες ήταν φυσικού περιεχομένου καθώς κανένα ενδιαφέρον φυσικό σύστημα δεν επιδείκνυε τέτοια συμπεριφορά, αλλά σύντομα ήρθε μια διαισθητικά προφανής μαθηματική αιτιολόγηση: Η τροχιά ενός σημείου έχει μέτρο μηδέν, ο χώρος των καταστάσεων έχει θετικό μέτρο, επομένως είναι αδύνατο ένα σημείο να διέρχεται από όλα τα σημεία του χώρου. Αυτό φυσικά δεν αποκλείει το ενδεχόμενο να υπάρχουν κάποιες άλλες ασθενέστερες συνθήκες οι οποίες να παραμένουν ικανές ώστε να εξασφαλίσουν τη σύγκλιση των μέσων όρων.

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε, είναι προφανές ότι το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο για τη μελέτη του ζητήματος είναι ένας χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) εφοδιασμένος με μια μετρήσιμη συνάρτηση $T : \Omega \to \Omega$. Θα προσθέσουμε επιπλέον μία ακόμη απαίτηση στο σύστημά μας. Πρόκειται για μια συνθήκη η οποία διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην εργοδική θεωρία και έχει να κάνει με το ότι η T **διατηρεί το μέτρο,** δηλαδή ότι $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Με μια πρώτη ματιά, αυτή η υπόθεση φαίνεται υπερβολικά ισχυρή. Σε τελική ανάλυση απεικονίσεις που διατηρούν το μέτρο δεν μπορούν να αποτελούν τον κανόνα, αλλά μάλλον την εξαίρεση, επομένως σε ποια φυσικά προβλήματα θα μπορούσε να βρει εφαρμογή μια θεωρία που ξεκινά από μια τόσο ισχυρή υπόθεση; Σκοπός της παραγράφου που ακολουθεί είναι να διαπιστώσουμε ότι συστήματα που διατηρούν το μέτρο προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο στη Φυσική και επομένως αποτελούν το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο πρέπει να δουλέψουμε. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Liouville το οποίο εξασφαλίζει ότι η οικογένεια των λύσεων οποιουδήποτε συστήματος περιγράφεται από κάποια Χαμιλτονιανή, διατηρεί τον όγκο.

2.2 Το Θεώρημα του Liouville

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται στον $\mathbb{R}^n$ υπό την επίδραση κάποιου δυναμικού και συμβολίζουμε με $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ τα διανύσματα θέσης και ορμής του. Η Χαμιλτονιανή ισούται με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου, δηλαδή $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(\boldsymbol{x})$ και οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Η ακριβής επίλυση του συστήματος (2.2) είναι εν γένει δύσκολη υπόθεση, γι' αυτό πολλές φορές αρκούμαστε σε συμπεράσματα που αφορούν σε ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων. Μια σημαντική ιδιότητα των λύσεων του (2.2) είναι ότι διατηρούν το μέτρο· πρόκειται για το Θεώρημα του Liouville το οποίο θα αποδείξουμε σε αυτή την παράγραφο.

Θεώρημα 2.2.1. ***(Αλλαγής Μεταβλητής).*** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $\boldsymbol{g} : U \to \mathbb{R}^n$ αμφιδιαφόριση. Αν $f : g(U) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int_{\boldsymbol{g}(U)} f\,d\lambda = \int_U (f \circ \boldsymbol{g})|\det \boldsymbol{g}'|\,d\lambda, \tag{2.3}$$

όπου

$$\boldsymbol{g}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{ο Ιακωβιανός πίνακας της } \boldsymbol{g} = (g_1, \ldots g_n).$$

Απόδειξη. [Spi], Θεώρημα 3-12, σελ. 66-70. □

Ορισμός 2.2.2. *Θεωρούμε τις εξισώσεις Hamilton στον $\mathbb{R}^{2n}$:*

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \end{cases} \tag{2.4}$$

*όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ τα διανύσματα θέσης και ορμής αντίστοιχα. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\phi_t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ να είναι η λύση του συστήματος (2.4) τη χρονική στιγμή t, με αρχική συνθήκη το σημείο $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $\phi_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ είναι αμφιδιαφόριση. Η οικογένεια $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ονομάζεται **ροή** (flow).*

Πρόταση 2.2.3. *Η ροή $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ που σχετίζεται με ένα Χαμιλτονιανό σύστημα αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Έστω $s, t \in \mathbb{R}$. Εξ' ορισμού,

$$\begin{aligned} \phi_{t+s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) &= \text{η λύση της (2.4) τη χρονική στιγμή } t+s \text{ για αρχική συνθήκη } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \\ &= \text{η λύση της (2.4) τη χρονική στιγμή } t \text{ για αρχική συνθήκη } \phi_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \\ &= \phi_t(\phi_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})) \\ &= (\phi_t \circ \phi_s)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^{2n}, \end{aligned}$$

άρα $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \in (\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, δηλαδή το σύνολο $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη της σύνθεσης. Επιπλέον, από τη σχέση $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ είναι άμεσο ότι το ϕ_0 δρα ως ταυτοτικό στοιχείο στην $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ και ότι κάθε στοιχείο ϕ_t έχει ως αντίστροφο το ϕ_{-t}. □

Παράδειγμα 2.2.4. *Θεωρούμε σωματίδιο το οποίο κινείται σε ευθεία γραμμή με εξίσωση κίνησης $\ddot{x} = -x$. Θα δούμε ότι η ροή που σχετίζεται με την κίνηση του σωματιδίου αποτελεί ομάδα και ότι διατηρεί τον όγκο. Έχουμε ότι*

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -x, \end{cases}$$

και λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x(t) = A\cos t + B\sin t$, $p(t) = -A\sin t + B\cos t$. Για αρχική συνθήκη (x_0, p_0) έχουμε $x(0) = x_0 = A$ και $p(0) = p_0 = B$, επομένως

$$\phi_t(x_0, p_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή κάθε ϕ_t ανήκει στην $\mathrm{SO}(2)$ και μάλιστα αν δουλέψουμε modulo 2π, τότε η $(\phi_t)_{t\in[0,2\pi)}$ είναι ακριβώς η $\mathrm{SO}(2)$. Τα στοιχεία της $\mathrm{SO}(2)$ γεωμετρικά παριστάνουν στροφές γύρω από την αρχή των αξόνων και προφανώς διατηρούν τον όγκο (όπως επίσης και το μήκος).

Η διατήρηση του όγκου είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των ροών που σχετίζονται με Χαμιλτονιανά συστήματα (Θεώρημα Liouville) και όχι μόνο της ροής του προηγούμενου παραδείγματος. Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε δύο σύντομα λήμματα. Το πρώτο αποτελεί μια απλή άσκηση γραμμικής άλγεβρας, ενώ το δεύτερο ένα συνηθισμένο επιχείρημα στη θεωρία μέτρου.

Λήμμα 2.2.5. *Έστω A $n \times n$ πίνακας. Τότε*

$$\det(I + At) = 1 + \operatorname{tr}(A) \cdot t + O\left(t^2\right), \text{ για } t \to 0.^4 \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ δίνεται από τον τύπο

$$\det(B) = \sum_{J\in S_n} (-1)^k b_{J(1)1} b_{J(2)2} \cdots b_{J(n)n}, \tag{2.6}$$

όπου το άθροισμα το παίρνουμε πάνω από όλες τις δυνατές μεταθέσεις $J \in S_n$ και k ο

[4] Η έκφραση $f(t) = O(t^2)$, για $t \to 0$ σημαίνει ότι υπάρχουν $M > 0$ και $t_0 > 0$ τέτοια ώστε $|f(t)| \leqslant M|t|$ για κάθε $|t| \leqslant t_0$.

αριθμός παραβάσεων της μετάθεσης J. [5] Στην περίπτωσή μας,

$$B = I + At = \begin{pmatrix} a_{11}t+1 & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22}t+1 & \cdots & a_{2n}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn}t+1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Αν θεωρήσουμε τον τύπο της ορίζουσας, στην ταυτοτική μετάθεση $J = i$ αντιστοιχεί ο όρος

$$(1 + a_{11}t)(1 + a_{22}t)\cdots(1 + a_{nn}t) = 1 + \operatorname{tr}(A)\cdot t + O(t^2), \quad t \to 0. \tag{2.9}$$

Έστω $J \in S_n$ μετάθεση διάφορη της ταυτοτικής. Τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο δείκτες $k \neq l \in \{1,\ldots,n\}$ τέτοιοι ώστε $J(k) \neq k$ και $J(l) \neq l$, επομένως $b_{J(k)k} = a_{J(k)k}t, b_{J(l)l} = a_{J(l)l}t$ και ο όρος $(-1)^k b_{J(1)1}b_{J(2)2}\cdots b_{J(n)n}$ γράφεται ως

$$(-1)^k a_{J(k)k}a_{J(l)l}\cdot t^2 \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{n} b_{J(i)i} = O\left(t^2\right), \quad t \to 0. \tag{2.10}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.9), (2.10) στην (2.6) προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.2.6. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση για την οποία $\int_E f dx = 0$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο. Τότε $f = 0$.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, τότε λόγω συνέχειας θα υπήρχε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \frac{f(x_0)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3f(x_0)}{2}$ για κάθε $x \in B(x_0,\delta)$. Όμως $\int_{B(x_0,\delta)} f dx \geqslant \int_{B(x_0,\delta)} \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{f(x_0)}{2}\cdot\lambda(B(x_0,\delta)) > 0$, άτοπο. Ανάλογα εργαζόμαστε και για την περίπτωση όπου $f(x_0) < 0$. □

Θεώρημα 2.2.7. *Θεωρούμε το σύστημα $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ και $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ομάδα μετασχηματισμών $g_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ με $g_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})t + O(t^2)$, για $t \to 0$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$,

(ii) για κάθε t η g_t διατηρεί το μέτρο, δηλαδή για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ μετρήσιμο, $\lambda(g_t(E)) = \lambda(E)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^{2n}$.

---

[5]**Μετάθεση** του συνόλου $\{1,\ldots,n\}$ ονομάζεται μια απεικόνιση $J : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Συμβολίζουμε το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου $\{1,\ldots,n\}$ με S_n. Μια μετάθεση $J \in S_n$ μπορεί να παρασταθεί με διάφορους τρόπους, με τους πιο συνηθισμένους να είναι οι εξής:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ J(1) & J(2) & J(3) & \cdots & J(n) \end{pmatrix} = (J(1), J(2), J(3), \ldots, J(n)). \tag{2.7}$$

Αν στην έκφραση (2.7) ένας μεγαλύτερος αριθμός προηγείται από έναν μικρότερό του, τότε λέμε ότι έχουμε **παράβαση** και συμβολίζουμε με k το πλήθος των παραβάσεων που εμφανίζονται στη μετάθεση J.

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}$ και $E \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ μετρήσιμο. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lambda(g_t(E)) &= \int_{g_t(E)} \mathbf{1} d\boldsymbol{x} \\
&= \int_E \det \frac{\partial g_t(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}, && \text{(από το Θεώρημα 2.2.1)} \\
&= \int_E \left(1 + t\left(\nabla \cdot \boldsymbol{f}\right) + O\left(t^2\right)\right) d\boldsymbol{x}, && \text{(από το Λήμμα 2.2.5)} \\
&= \lambda(E) + \int_E t\left(\nabla \cdot \boldsymbol{f}\right) d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

επομένως η g_t διατηρεί το μέτρο αν και μόνο αν $\int_E t(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) d\boldsymbol{x} = 0$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Αν $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$ τότε προφανώς η g_t διατηρεί το μέτρο. Το αντίστροφο προκύπτει από το Λήμμα 2.2.6. ☐

Θεώρημα 2.2.8. ***(Liouville).*** *Η ροή $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ που σχετίζεται με μια Χαμιλτονιανή διατηρεί το μέτρο, δηλαδή $\lambda(\phi_t(E)) = \lambda(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ μετρήσιμο και κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{f} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{p} \partial \boldsymbol{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται από την κατεύθυνση (i) ⇒ (ii) του Θεωρήματος 2.2.7. ☐

Παρατήρηση 2.2.9. *Το Θεώρημα του Liouville γενικεύεται και για την περίπτωση όπου αντί για τον $\mathbb{R}^n$ έχουμε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα (βλ. [Hall], Paragraph 21.2, Theorem 21.17).*

2.3 Το Θεώρημα Επανεμφάνισης του Poincaré

Το πρώτο αποτέλεσμα στο οποίο διαπιστώθηκε ότι τα συστήματα που διατηρούν το μέτρο επιδεικνύουν ιδιότητες επανεμφάνισης είναι το Θεώρημα Επανεμφάνισης του Poincaré[6] (1890). Η απόδειξή του είναι ιδιαίτερα σύντομη και κομψή και την παρουσιάζουμε σε αυτή την παράγραφο.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω (X, Σ, μ) χώρος μέτρου και $T : X \to X$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Η τετράδα (X, Σ, μ, T) ονομάζεται* ***σύστημα που διατηρεί το μέτρο*** *(measure preserving system) και η συνάρτηση T* ***μετασχηματισμός που***

[6] Henri Poincaré, 1854-1912.

διατηρεί το μέτρο *(measure preserving transformation). Λέμε επίσης ότι το μέτρο μ είναι* ***T-αναλλοίωτο*** *(T-invariant). Αν επιπλέον η T^{-1} υπάρχει σχεδόν παντού και είναι μετρήσιμη, τότε το σύστημα ονομάζεται* ***αντιστρέψιμο*** *(invertible).*

Παράδειγμα 2.3.2. *Αν $a \in \mathbb{R}^n$, λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ και $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $T_a(x) = a + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τότε το $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \lambda, T_a)$ αποτελεί σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Αυτό είναι άμεσο από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μετατοπίσεις.*

Ακολουθεί μια γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος για την οποία θα χρειαστεί να θυμηθούμε το μέτρο Haar: Αν G συμπαγής, T_2 τοπολογική ομάδα, τότε υπάρχει μοναδικό Borel μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε

(i) $\mu(K) < \infty$, για κάθε $K \subseteq G$ συμπαγές,

(ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\}$, για κάθε $A \in B(G)$,

(iii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ ανοικτό}\}$, για κάθε $A \in B(G)$,

(iv) $\mu(aA) = \mu(Aa) = \mu(A)$, για κάθε $A \in B(G)$ και κάθε $a \in G$.

Το μέτρο αυτό ονομάζεται **μέτρο Haar.**

Παράδειγμα 2.3.3. *Έστω G συμπαγής, αβελιανή και T_2 τοπολογική ομάδα, μ το μέτρο Haar της G, $g \in G$ και $T_g : G \to G$ με $T_g(x) = gx$ για κάθε $x \in G$. Τότε το $(G, B(G), \mu, T_g)$ αποτελεί σύστημα που διατηρεί το μέτρο: Αν $A \in B(K)$, τότε $T_g^{-1}(A) = \{x \in G : T_g(x) \in A\} = \{x \in G : gx \in A\} = \{x \in G : x \in g^{-1}A\} = g^{-1}A$ και $\mu(T_g^{-1}(A)) = \mu(g^{-1}A) = \mu(A)$ λόγω της ιδιότητας iv) του μέτρου Haar.*

Θεώρημα 2.3.4. ***(Επανεμφάνισης του Poincaré, 1890).*** *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $E \in \Sigma$ με $\mu(E) > 0$. Τότε σχεδόν κάθε σημείο του E επιστρέφει στο E άπειρες φορές μέσω του T, δηλαδή υπάρχει $F \subseteq E$ με $\mu(F) = \mu(E)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in F$ να υπάρχει ακολουθία φυσικών $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ με $T^{n_k}x \in E$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{x \in E : T^n x \notin E \text{ για κανένα } n \in \mathbb{N}\}$. Το B ανήκει στην Σ αφού $B = E \cap \cap_{m=1}^{\infty} T^{-m}(E^c)$. Επιπλέον $T^{-n}(B) = T^{-n}(E) \cap \cap_{m=n+1}^{\infty} T^{-m}(E^c)$ με τα σύνολα $B, T^{-1}(B), \ldots$ να είναι ξένα ανά δύο και με $\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \ldots = \mu(T^{-n}(B))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καθώς ο χώρος μας είναι χώρος πιθανότητας, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(B)) \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B) = 0$. Επομένως υπάρχει $F_1 \subseteq E$ τέτοιο ώστε κάθε σημείο του F_1 να επιστρέφει στο E τουλάχιστον μία φορά μέσω της T.

Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο συλλογισμό για τις απεικονίσεις $T^2, T^3, \ldots$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $F_k \subseteq E$ με $\mu(F_k) = \mu(E)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in F_k$ να υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k^x)_{k \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T^{n_k^x} x \in E$ για κάθε k. Θέτουμε $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq E$. Τότε $\mu(F) = \lim_k \mu(F_k) = \mu(E)$, ενώ κάθε στοιχείο του F επιστρέφει στο E άπειρες το πλήθος φορές μέσω της T. $\square$

Παράδειγμα 2.3.5. *Το Θεώρημα του Poincaré αποτυγχάνει εαν ο χώρος είναι άπειρου μέτρου: Θεωρούμε τον $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue και $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η T διατηρεί το μέτρο, αφού ως γνωστόν το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, όμως αν θέσουμε $E = [0, 1]$,[7] τότε για κάθε $x \in [0, 1]$, το $T^n x$* ***δεν*** *ανήκει στο $[0, 1]$ για κανένα $n \geqslant 2$, δηλαδή το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in E\}$ είναι πεπερασμένο.*

Τα Θεωρήματα των Liouville και Poincaré έχουν αρκετές ενδιαφέρουσες και όχι διαισθητικά προφανείς συνέπειες:

Παράδειγμα 2.3.6. *Θεωρούμε ένα μπωλ ακαθόριστου σχήματος και αφήνουμε μια μπίλια από κάποιο σημείο του. Είναι πρακτικά αδύνατο να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησεις και να προβλέψουμε με ακρίβεια την τροχιά που θα ακολουθήσει η μπίλια, όμως (σχεδόν) από όποιο αρχικό σημείο και αν αφήσουμε την μπίλια, αυτή θα επανέλθει όσο κοντά στο αρχικό μας σημείο θέλουμε, άπειρες το πλήθος φορές.*

Παράδειγμα 2.3.7. *Θεωρούμε ένα κουτί το οποίο χωρίζεται στη μέση με ένα τοίχωμα και περιέχει N άτομα ενός αερίου, αρχικά εγκλωβισμένα στο πρώτο μισό του κουτιού. Αφαιρούμε το τοίχωμα και το αέριο διαχέεται σε ολόκληρο το κουτί. Τα Θεωρήματα των Poincaré και Liouville μας λένε ότι το αέριο, κατά τη διάρκεια της κίνησής του, θα επιστρέψει στο πρώτο μισό άπειρες το πλήθος φορές.*

Αυτό εκ πρώτης όψεως ίσως να ακούγεται παράδοξο. Στην πραγματικότητα το Θεώρημα του Poincaré εξασφαλίζει μεν επανεμφάνιση, όμως δεν κάνει κάποια νύξη για το πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι την πρώτη επανεμφάνιση. Έτσι, το αέριο μπορεί να επανέρχεται άπειρες φορές στο πρώτο μισό, αλλά για αρκετά μεγάλο N θα χρειαστεί πολύς χρόνος για να παρατηρηθεί έστω και η πρώτη από τις επανεμφανίσεις.

Παράδειγμα 2.3.8. *Αν βάλουμε φωτιά σε ένα κομμάτι χαρτί σε ένα κλειστό σύστημα, τότε το χαρτί θα παίρνει μορφές οσοδήποτε κοντά στην αρχική του, άπειρες το πλήθος φορές.*

Το Θεώρημα Επανεμφάνισης του Poincaré μπορεί να μη σχετίζεται άμεσα με τη σύγκλιση των μέσων τιμών, αλλά αποτελεί την πρώτη ένδειξη ότι τα συστήματα που διατηρούν το μέτρο είναι πιθανό να επιδεικνύουν τέτοια συμπεριφορά. Χρειάστηκε όμως να περάσουν σχεδόν 40 χρόνια για να αποδειχθεί και μαθηματικά, πράγμα το οποίο συνέβη το 1931 μέσα από τη διαδοχική δουλεία τριών μαθηματικών, των Koopman, von Neumann και Birkhoff. Μάλιστα, όπως θα αναφέρουμε και στη συνέχεια, το αποτέλεσμα του Birkhoff ισχυροποιεί το Θεώρημα Θεώρημα Επανεμφάνισης του Poincaré για την περίπτωση που ο T υποτεθεί επιπλέον εργοδικός, καθώς όχι μόνο εγγυάται επανεμφάνιση, αλλά διαβεβαιώνει η σχετική συχνότητα του πλήθους των επανεμφανίσεων του σημείου x στο E μέσω της T, τείνει ασυμπτωτικά στο $\mu(E)$.

[7] Το ίδιο θα ίσχυε και αν αντί του $[0, 1]$ είχαμε θεωρήσει οποιοδήποτε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

2.4 Ο Τελεστής Koopman

Τον Μάρτιο του 1931, ο Bernard Osgood Koopman (1900-1981), πρώην διδακτορικός φοιτητής του Birkhoff, δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο, μεταξύ άλλων, παρατήρησε ότι αν το (X, Σ, μ, T) αποτελεί σύστημα που διατηρεί το μέτρο, τότε ο τελεστής $U_T : L_2(X, \Sigma, \mu) \to L_2(X, \Sigma, \mu)$ για τον οποίον

$$U_T(f) = f \circ T, \ \ \forall f \in L_2, \tag{2.11}$$

είναι ορθομοναδιαίος. Η παρατήρηση αυτή, αν και φαινομενικά απλή, στην ουσία αποτελούσε το κομμάτι που έλειπε για την επίλυση του προβλήματος. Η σύνδεση ενός συστήματος που διατηρεί το μέτρο με τους ορθομοναδιαίους τελεστές ενός χώρου Hilbert επέτρεψε την αναδιατύπωση του προβλήματος σε γλώσσα Θεωρίας Τελεστών και τη χρησιμοποίηση εργαλείων αυτής για την επίλυσή του.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Ο T ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** (unitary) αν $T^*T = TT^* = I$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ο T να είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον να ισχύει ότι $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, για κάθε $x, y \in H$.*

Λήμμα 2.4.2. *Έστω (X, Σ, μ) χώρος πιθανότητας και $T : X \to X$ μετρήσιμη. Το (X, Σ, μ, T) διατηρεί το μέτρο αν και μόνο αν $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ για κάθε $f \in L_\infty$.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο είναι άμεσο: Αν $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ για κάθε $f \in L_\infty$, τότε και για $f = I_B$ με $B \in \Sigma$ θα πρέπει $\mu(B) = \int I_B d\mu = \int I_B \circ T d\mu = \int I_{T^{-1}(B)} d\mu = \mu(T^{-1}(B))$. Για το ευθύ, έστω ότι $\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \Sigma$. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο, δηλαδή ότι $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ για κάθε $f \in L_1$.

- Αν $f = I_B$ χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ για τον ίδιο λόγο όπως και προηγουμένως.
- Αν $f = \sum_{i=1}^n b_i I_{B_i}$ απλή συνάρτηση, τότε $\int f d\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(B_i)$ το οποίο είναι ίσο με $\int f \circ T d\mu = \int \sum_{i=1}^n b_i I_{T^{-1}(B_i)} d\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(T^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^n b_i \mu(B_i)$.
- Αν $f \in L_1$ και $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων με $s_n \uparrow f$, τότε η ακολουθία $(s_n \circ T)_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελείται από απλές συναρτήσεις για τις οποίες $s_n \circ T \uparrow f$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int f \circ T d\mu = \lim_n \int s_n \circ T d\mu = \lim_n \int s_n d\mu = \int f d\mu.$$

□

Θεώρημα 2.4.3. *(Koopman, 1931).* *Έστω (X, Σ, μ, T) αντιστρέψιμο σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Τότε ο **τελεστής Koopman** $U_T : L_2(X, \Sigma, \mu) \to L_2(X, \Sigma, \mu)$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:*

$$U_T(f) = f \circ T, \ \ \forall f \in L_2, \tag{2.12}$$

είναι ορθομοναδιαίος.

Απόδειξη. Ο U_T αντιστρέφεται και μάλιστα $U_T^{-1} = U_{T^{-1}}$, όπου T^{-1} ο αντίστροφος του T. Πράγματι, για κάθε $f \in L_2$,

$$\begin{aligned} (U_T \circ U_{T^{-1}})(f) &= U_T \quad (f \circ T^{-1}) = f, \\ (U_{T^{-1}} \circ U_T)(f) &= U_{T^{-1}}(f \circ T) \quad = f, \end{aligned}$$

άρα $U_T \circ U_{T^{-1}} = U_{T^{-1}} \circ U_T = I \Rightarrow U_{T^{-1}} = U_T^{-1}$. Επιπλέον $\langle U_T f, U_T g\rangle = \int f \circ T \cdot \overline{g \circ T} d\mu = \int f \bar{g} d\mu = \langle f, g\rangle$, λόγω του Λήμματος 2.4.2. Από την ισοδύναμη διατύπωση του Ορισμού 2.4.1, ο U_T είναι ορθομοναδιαίος.

□

Ορισμός 2.4.4. *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Ο T ονομάζεται* ***εργοδικός*** *(ergodic), αν για κάθε $A \in \Sigma$ με $T^{-1}(A) = A$, έπεται ότι $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.*

Υπάρχουν αρκετοί χρήσιμοι χαρακτηρισμοί της εργοδικότητας και επόμενη πρόταση αναφέρει κάποιους από αυτούς.

Πρόταση 2.4.5. *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T είναι εργοδικός.

(ii) Για κάθε $A \in \Sigma$, αν $\mu(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$, τότε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.

(iii) Για κάθε $A \in \Sigma$, αν $\mu(A) > 0$, τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$.

(iv) Για κάθε $A, B \in \Sigma$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

(v) Αν $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη με $f \circ T = f$ σχεδόν παντού, τότε η f ισούται με μία σταθερά σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Η απόδειξη των ισοδυναμιών δεν κρύβει δυσκολίες και μπορεί να βρεθεί στο [Ein], Proposition 2.14, pp. 23-25. □

Λήμμα 2.4.6. *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T είναι εργοδικός,

(ii) η $\lambda = 1$ αποτελεί απλή ιδιοτιμή του τελεστή Koopman U_T.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.4.5 ο T είναι εργοδικός αν και μόνο αν για κάθε f μετρήσιμη με $f \circ T = f$ σχεδόν παντού, έπεται ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού. Δηλαδή

Ο T είναι εργοδικός $\iff$ $U_T(f) = f \Rightarrow f = c$ σχεδόν παντού
$\iff$ οι μόνες ιδιοσυναρτήσεις του U_T που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, είναι οι σταθερές
$\iff$ η $\lambda = 1$ αποτελεί απλή ιδιοτιμή του U_T.

□

Αυτά ήταν και τα μόνα αποτελέσματα που χρειαζόμασταν για τη συνέχεια και ο αναγνώστης μπορεί να περάσει χωρίς χρονοτριβή στην Παράγραφο 2.5. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα μελετήσουμε μερικές ακόμη ενδιαφέρουσες ιδιότητες του τελεστή Koopman. Συγκεκριμένα, θα δούμε ακόμη έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό της εργοδικότητας μέσω των *ανάγωγων θετικών τελεστών*. Ακολουθούν οι απαραίτητοι ορισμοί.

Θυμίζουμε ότι αν ο X είναι διατεταγμένος χώρος και $A \subseteq X$ διανυσματικός υπόχωρος του X, τότε ο A ονομάζεται **διατακτικό ιδεώδες** (lattice ideal) εαν για κάθε $a, x \in X$ με $|x| \leqslant |a|$ και $a \in A$, έπεται ότι $x \in A$.

Αν (X, Σ, μ) χώρος πεπερασμένου μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$, τότε το σύνολο

$$\begin{aligned} J_A &= \{f \in L_p(\mu) : |f| \wedge I_A = 0\} \\ &= \{f \in L_p(\mu) : |f| \wedge \mathbf{1} \leqslant I_{A^c}\} \\ &= \{f \in L_p(\mu) : f(A) = \{0\}\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

αποτελεί διατακτικό ιδεώδες του $L_p(\mu)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι τα μόνα κλειστά διατακτικά ιδεώδη του L_p είναι της μορφής (2.13).

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω (X, Σ, μ) χώρος πεπερασμένου μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Κάθε κλειστό διατακτικό ιδεώδες $J \subseteq L_p(\mu)$ είναι της μορφής J_A για κάποιο $A \in \Sigma$.*

Απόδειξη. Έστω $J \subseteq L_p(\mu)$ κλειστό διατακτικό ιδεώδες και θέτουμε $K = \{f \in J : 0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}\}$. Το K είναι μη κενό, κλειστό και άνω φραγμένο από την $f = \mathbf{1} \in L_p(\mu)$. Αφού ο $L_p(\mu)$ είναι διατακτικά πλήρης, υπάρχει το $g = \sup K$ και μάλιστα $0 \leqslant g \leqslant \mathbf{1}$. Θέτουμε $h = g \wedge (\mathbf{1} - g)$. Αφού το J είναι διατακτικό ιδεώδες και $0 \leqslant h \leqslant g \in J$, θα έχουμε ότι $h \in J$. Το J είναι επιπλέον υπόχωρος με $g, h \in J$, άρα $g + h \in J, h \leqslant \mathbf{1} - g \Rightarrow g + h \leqslant \mathbf{1} \Rightarrow g + h \in K$. Αφού $g = \sup K$, $g + h \leqslant g \Rightarrow h = 0 \Rightarrow g \wedge (\mathbf{1} - g) = 0 \Rightarrow g = I_{A^c}$ για κάποιο $A \in \Sigma$.

Θα δείξουμε ότι $J = J_A$. Αν $f \in J, |f| \wedge \mathbf{1} \leqslant g = I_{A^c}$, άρα $f \in J_A$. Αν $f \in J_A$, τότε $|f| \in J_A$. Θέτουμε $f_n = |f| \wedge (n\mathbf{1}) = n(\frac{1}{n}f \wedge \mathbf{1}) \leqslant nI_{A^c} = ng \in J$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f_n \uparrow |f| \Rightarrow f_n \longrightarrow |f|$. Όμως το J αποτελεί κλειστό υπόχωρο, επομένως $|f| \in J$. Επιπλέον αποτελεί διατακτικό ιδεώδες, άρα $f \in J$. □

Ορισμός 2.4.8. *Έστω (X, Σ, μ) χώρος πεπερασμένου μέτρου, $1 \leqslant p < \infty$ και $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ θετικός τελεστής. Ο T ονομάζεται* ***ανάγωγος*** *(irreducible) στον $L_p(\mu)$ εαν ο $L_p(\mu)$ δεν έχει γνήσια μη τετριμμένα T-αναλλοίωτα διατακτικά ιδεώδη.*

Πρόταση 2.4.9. *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $1 \leqslant p < \infty$ και $U_T : L_p \to L_p$ ο τελεστής Koopman. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) ο T είναι εργοδικός,

(ii) ο U_T είναι ανάγωγος στον L_p.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό: Για κάθε $A \in \Sigma$,

$$\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0 \iff U_T(J_A) \subseteq J_A. \tag{2.14}$$

Έστω $A \in \Sigma$ και έστω πως $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$. Τότε $I_A = I_{T^{-1}(A)}$ σχεδόν παντού και για κάθε $f \in J_A$, $T(|f| \wedge I_A) = T|f| \wedge T(I_A)$ και $|Tf| = T|f|$, επομένως

$$|Tf| \wedge I_A = T|f| \wedge I_A = T|f| \wedge I_{T^{-1}(A)} = T|f| \wedge T(I_A) = T(|f| \wedge I_A) = T(0) = 0,$$

δηλαδή $Tf \in J_A$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $T(J_A) \subseteq J_A$. Τότε $I_{A^c} \in J_A \Rightarrow T(I_{A^c}) \in J_A \Rightarrow I_{A^c} \circ T = I_{T^{-1}(A^c)} \in J_A \Rightarrow A \subseteq (T^{-1}(A^c))^c \Rightarrow A \subseteq T^{-1}(A)$. Όμως $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ αφού ο T διατηρεί το μέτρο και επειδή ο χώρος μας έχει πεπερασμένο μέτρο συμπεραίνουμε ότι $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$.

Προχωρούμε στην απόδειξη της πρότασης. Έστω ότι ο T είναι εργοδικός και έστω $J \subseteq L_p$ κλειστό U_T-αναλλοίωτο διατακτικό ιδεώδες. Από το Θεώρημα 2.4.7 το J θα έχει τη μορφή $J = J_A$ για κάποιο $A \in \Sigma$. Από την ισοδυναμία που μόλις αποδείξαμε, $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$ και επειδή ο T είναι εργοδικός θα πρέπει $A = \varnothing$ ή $A = X$. Αν $A = \varnothing$, τότε $J_A = L_p$, ενώ αν $A = X$, $J_A = \{0\}$, δηλαδή ο U_T ανάγωγος.

Αντιστρόφως, αν ο U_T ανάγωγος και $A \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$, τότε και πάλι από την προηγούμενη ισοδυναμία, $U_T(J_A) \subseteq J_A$, δηλαδή το J_A αποτελεί κλειστό, U_T-αναλλοίωτο διατακτικό ιδεώδες του L_p. Αφού ο U_T είναι ανάγωγος, θα έχουμε ότι $J_A = \{0\}$ ή $J_A = L_p$. Αν $J_A = \{0\}$, τότε $I_{A^c} \in J_A \Rightarrow I_{A^c} = \{0\} \Rightarrow A^c = \varnothing \Rightarrow A = X$. Αν $J_A = L_p$, τότε $I_A \in J_A \Rightarrow I_A(A) = \{0\} \Rightarrow A = \varnothing$. Άρα ο T εργοδικός. □

2.5 Το Εργοδικό Θεώρημα του von Neumann

Τον Ιούνιο του 1931, ο 27χρονος τότε John von Neumann, διάβασε το άρθρο του Koopman. Ο von Neumann μέχρι τότε δεν είχε επιδείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς την Εργοδική Υπόθεση· τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα επικεντρώνονταν στην Κβαντομηχανική και τη Θεωρία Τελεστών, είχε όμως κάποια εξοικείωση με το πρόβλημα, κυρίως λόγω των σπουδών του ως χημικός μηχανικός. Όντας ήδη ένας από τους μεγαλύτερους γνώστες στη Θεωρία Τελεστών, διέκρινε αμέσως τη σημασία της παρατήρησης του Koopman και μέσα σε τρεις μήνες είχε αποδείξει το πρώτο εργοδικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1. ***(von Neumann).*** *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε για κάθε $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n} = Px$, όπου P ο τελεστής προβολής στον κλειστό υπόχωρο $F(T) = \{x \in H : Tx = x\}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $N = \{x - Tx : x \in H\}$ και $M = F(T)$. Ισχύει ότι $N^\perp = M$: Αν $y \in N^\perp$, τότε $\langle x - Tx, y\rangle = 0$ για κάθε $x \in H$, δηλαδή $\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \Rightarrow \langle x, y - T^*y\rangle = 0$

για κάθε $x \in H \Rightarrow T^*y = y$. Όμως

$$\begin{aligned} 0 = \|y - Ty\|^2 &= \|y\|^2 + \|Ty\|^2 - \langle y, Ty\rangle - \langle Ty, y\rangle \\ &= \|y\|^2 + \|Ty\|^2 - \langle T^*y, y\rangle - \langle y, T^*y\rangle \\ &= \|y\|^2 + \|Ty\|^2 - \langle y, y\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= \|Ty\|^2 - \|y\|^2 \leqslant 0, \quad \text{αφού } \|T\| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $y \in M$, $Ty = y$, $\langle y, x - Tx\rangle = \langle y, x\rangle - \langle y, Tx\rangle = \langle Ty, Tx\rangle - \langle y, Tx\rangle = \langle Ty - y, Tx\rangle = 0$, άρα $y \in N^\perp$. Τελικά $H = F(T) \oplus N^\perp$ και κάθε $x \in H$ διασπάται ως $x = P(x) + x_0$ με $P(x) \in F(T)$ και $x_0 \in F(T)^\perp = \overline{N}$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n} - P(x) \right\| &= \left\| \frac{x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{n-1}x_0}{n} + \frac{nP(x)}{n} - P(x) \right\| \\ &= \left\| \frac{x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{n-1}x_0}{n} \right\|, \end{aligned}$$

βάση του οποίου αρκεί να δείξουμε ότι $\left\| \frac{x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{n-1}x_0}{n} \right\| \to 0$ για κάθε $x_0 \in \overline{N}$.

- Αν $x_0 = x - Tx \in N$, τότε

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{n-1}x_0}{n} \right\| &= \left\| \frac{x - Tx + Tx - T^2x + \ldots + T^{n-1}x - T^nx}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{x - T^nx}{n} \right\| \\ &\leqslant \frac{2\|x\|}{n} \to 0. \end{aligned}$$

- Αν $x_0 \in \overline{N}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n - Tx_n \to x_0$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|y - (x_{n_0} - Tx_{n_0})\| < \frac{\epsilon}{2}$. Από τριγωνική ανισότητα

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{n-1}x_0}{n} \right\| &\leqslant \left\| \frac{x_{n_0} + Tx_{n_0} + \ldots + T^{n-1}x_{n_0}}{n} \right\| + \\ &\quad + \left\| \frac{x_0 - Tx_{n_0} + T(x_0 - Tx_{n_0}) + \ldots + T^{n-1}(x_0 - Tx_{n_0})}{n} \right\| \\ &\leqslant \left\| \frac{x_{n_0} + Tx_{n_0} + \ldots + T^{n-1}x_{n_0}}{n} \right\| + \frac{\epsilon}{2} \to 0. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.5.2. *Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και για την περίπτωση όπου ο T δεν υποτεθεί ορθομοναδιαίος, αλλά απλώς συστολή. Η απόδειξη τροποποιείται ελαφρώς στο σημείο όπου δείχνουμε ότι $M \subseteq N^\perp$.*

Πόρισμα 2.5.3. *Έστω (X,Σ,μ,T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $f\in L_2$ και U_T ο τελεστής Koopman. Αν $M=\{f\in L_2 : U_T(f)=f\}$ και $P: L_2\to M$ ο τελεστής προβολής στον υπόχωρο M, τότε*

$$\left\|\frac{f+f\circ T+\ldots+f\circ T^{n-1}}{n}-Pf\right\|_2\to 0. \tag{2.15}$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα Θεωρήματα των Koopman και von Neumann. □

Πόρισμα 2.5.4. *Έστω (X,Σ,μ,T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f\in L_1$. Τότε υπάρχει $\overline{f}\in L_1$ τέτοια ώστε*

$$\left\|\frac{f+f\circ T+\ldots+f\circ T^{n-1}}{n}-\overline{f}\right\|_1\to 0 \ \text{ και } \overline{f}\circ T=\overline{f}. \tag{2.16}$$

Απόδειξη. Έστω $g\in L_\infty\subseteq L_2$. Από το Θεώρημα του von Neumann γνωρίζουμε ότι υπάρχει $g'\in L_2$ τέτοια ώστε $M_n g\to g'$ στον L_2. Θα δείξουμε ότι $g'\in L_\infty$. Ισχύει ότι $\|M_n g\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty$, επομένως $|\langle M_n g, I_B\rangle|\leqslant\|g\|_\infty\mu(B)$ για κάθε $B\in\Sigma$. Όμως $M_n g\xrightarrow{L_2} g'\Rightarrow|\langle M_n g, I_B\rangle|\to|\langle g', I_B\rangle|\leqslant\|g\|_\infty\mu(B)\leqslant\|g\|_\infty$.

Θα δείξουμε ότι $g'\in L_\infty$ με $\|g'\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty$. Έστω $\epsilon>0$ και θέτουμε $B_1=\{x\in X : g'(x)\geqslant\|g\|_\infty+\epsilon\}$, $B_2=\{x\in X : g'(x)\leqslant-(\|g\|_\infty+\epsilon)\}$. Έχουμε ότι $\mu(B_1)(\|g\|_\infty+\epsilon)\leqslant\int_{B_1}g'(x)d\mu\leqslant\|g\|_\infty\mu(B_1)\Rightarrow\epsilon\mu(B_1)=0\Rightarrow\mu(B_1)=0$. Αντίστοιχα για το B_2, $\int_{B_2}g'(x)d\mu\leqslant-(\|g\|_\infty+\epsilon)\mu(B_2)\Rightarrow(\|g\|_\infty+\epsilon)\mu(B_2)\leqslant|\int_{B_2}g'(x)d\mu|\leqslant\mu(B_2)\|g\|_\infty\Rightarrow\mu(B_2)=0$.

Αφού $\|\cdot\|_1\leqslant\|\cdot\|_2$ (βλ. [Κου], Πρόταση 11.8, σελ. 181), θα έχουμε επιπλέον ότι $M_n g\xrightarrow{L_1} g'$, επομένως το πόρισμα που προσπαθούμε να αποδείξουμε ισχύει για $f\in L_\infty$. Θα εκμεταλλευτούμε την πυκνότητα του L_∞ στον L_1 (βλ. [Κου], Πρόταση 11.23, σελ. 188) για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

Έστω $f\in L_1,\epsilon>0$ και $g\in L_\infty$ τέτοια ώστε $\|f-g\|_1<\frac{\epsilon}{4}$. Τότε

$$\left\|\frac{f+f\circ T+\ldots+f\circ T^{n-1}}{n}-\frac{g+g\circ T+\ldots+g\circ T^{n-1}}{n}\right\|_1<\frac{\epsilon}{4}.$$

Από το προηγούμενο βήμα, υπάρχουν $g'\in L_\infty$ και $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\left\|\frac{g+g\circ T+\ldots+g\circ T^{n-1}}{n}-g'\right\|_1<\frac{\epsilon}{4},\quad\forall n\geqslant n_0.$$

Η ακολουθία $(M_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί ακολουθία Cauchy:

$$\begin{aligned}\|M_n f-M_k f\|_1 &\leqslant \|M_n f-M_n g\|_1+\|M_n g-g'\|_1+\|g'-M_k g\|_1+\|M_k g-M_k f\|_1\\ &\leqslant \epsilon,\quad\forall n,k\geqslant n_0.\end{aligned}$$

Από την πληρότητα του L_1 υπάρχει $f'\in L_1$ τέτοια ώστε $M_n f\to f'$. Η f' είναι T-αναλλοίωτη αφού

$$\|M_n f\circ T-M_n f\|_1=\left\|\frac{f\circ T^n}{n}-\frac{f}{n}\right\|_1\leqslant\frac{2\|f\|_1}{n}\to 0.$$

Αφού $M_n f\to f'$, $M_n f\circ T\to f'\circ T$, $M_n f-M_n f\circ T\to 0$ θα πρέπει $f'=f'\circ T$. □

Τον Οκτώβριο του 1931 ο von Neumann ενημέρωσε τον Koopman για το αποτέλεσμά του και αφού επιβεβαίωσε ότι δεν είχε αποδείξει κάτι αντίστοιχο, προχώρησε στη δημοσίευσή του. Το άρθρο του von Neumann ήταν αρχικά γραμμένο στα γερμανικά, οπότε η διαδικασία της μετάφρασής του στα αγγλικά σε συνδυασμό με κάποιες διορθώσεις που έπρεπε να γίνουν, καθυστέρησαν τη δημοσίευσή του μέχρι τον Ιανουάριο του 1932. Το αποτέλεσμα του von Neumann εξασφαλίζει σύγκλιση στον L_2 ενώ από το Πόρισμα 2.5.4 μπορούμε να περάσουμε σε σύγκλιση στον L_1. Δεν ασχολείται όμως καθόλου με την κατά σημείο σύγκλιση, ένα ερώτημα που ο von Neumann θεώρησε ιδιαίτερα ενδιαφέρον και γνωστοποίησε στους Koopman και Birkhoff τον Οκτώβριο του 1931.

Ο 47χρονος τότε George David Birkhoff (1884-1944) θεωρείτο ένας από τους κορυφαίους γνώστες της Ουράνιας Μηχανικής και συνεχιστής του έργου του Poincaré, ενώ ασχολείτο με το πρόβλημα της Εργοδικής Υπόθεσης για σχεδόν 15 χρόνια. Η προσέγγιση του von Neumann έδωσε στον Birkhoff έναν καινούργιο τρόπο να ολοκληρώσει τον μεγάλο του στόχο. Πράγματι, μέσα σε ενάμιση μήνα ο Birkhoff βρήκε μια ανεξάρτητη απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann και προχώρησε ακόμη παραπέρα, συμπεραίνοντας σύγκλιση σχεδόν παντού. [8] Μάλιστα έσπευσε να δημοσιεύσει το αποτέλεσμά του, κάτι το οποίο συνέβη τον Δεκέμβριο του 1931, δημιουργώντας έτσι το εξής παράδοξο: Το Θεώρημα του von Neumann εμφανίζεται στη βιβλιογραφία ως μεταγενέστερο του Birkhoff, παρά το γεγονός ότι χρονικά, καθώς και νοηματικά, προηγείται αυτού. Περισσότερα για το συγκεκριμένο ζήτημα μπορούν να βρεθούν στο [Zun].

Θεώρημα 2.5.5. ***(Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff).*** *Έστω (X, Σ, μ, T) σύστημα που διατηρεί το μέτρο πιθανότητας μ. Για κάθε $f \in L_1(\mu)$, το όριο $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$ υπάρχει σχεδόν παντού και αν $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = f^*(x)$, τότε η f^* είναι T-αναλλοίωτη με $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. Αν επιπλέον ο T είναι εργοδικός, τότε $f^*(x) = \int f d\mu$ σχεδόν παντού.*

Συγκρίνοντάς το με το πρόβλημα που περιγράψαμε στην αρχή του Κεφαλαίου και το οποίο εκφράστηκε μαθηματικά μέσω της απαίτησης (2.1), διαπιστώνουμε ότι το Θεώρημα του Birkhoff διατυπώνει μια ικανή συνθήκη ώστε να επιτυγχάνεται η σύγκλιση των μέσων όρων ως προς μια κατάλληλη έννοια σύγκλισης: Αν ο T είναι *εργοδικός*, τότε οι μέσοι όροι των μετρήσεων συγκλίνουν στη χωρική μέση τιμή, *σχεδόν για κάθε αρχικό σημείο.*

Παρατηρήστε, επίσης, ότι στην περίπτωση που επιλέξουμε ως f την χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιου συνόλου $E \in \Sigma$ με $\mu(E) > 0$, η τιμή της $f = I_E$ στο σημείο $T^j x$ είναι

[8] Δύο διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος του Birkhoff μπορούν να βρεθούν στο [Ein], pp. 45-47. Αμφότερες χρησιμοποιούν την Μεγιστική Ανισότητα, η οποία επίσης αποδεικνύεται με δύο διαφορετικούς τρόπους: Με τη χρήση θετικών τελεστών (σελ. 39-40) και τη χρήση του Θεωρήματος Κάλυψης του Vitali (σελ. 40-44).

Οι αποδείξεις έχουν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον και αξίζει να μελετηθούν από τον αναγνώστη, δεν θα τις παρουσιάσουμε όμως σε αυτή την εργασία καθώς δεν μπορούμε να τους αφιερώσουμε το χρόνο που τους αξίζει· άλλωστε από εδώ και στο εξής θα προσπαθήσουμε να επικεντρωθούμε στο Θεώρημα του von Neumann το οποίο αποτέλεσε και την κύρια πηγή έμπνευσης για την σύνδεση της εργοδικότητας με την αυτοπάθεια σε χώρους Banach.

Εκτός από τις αποδείξεις, τεράστιο ενδιαφέρον έχουν και οι εφαρμογές του Θεωρήματος του Birkhoff, με πιο εντυπωσιακή την απόδειξη του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών του Kolmogorov με επιχειρήματα εργοδικής. Αυτή, καθώς και άλλες εφαρμογές, μπορούν να βρεθούν στο [Far], Paragraph 10.3, pp. 103-109.

απλά:

$$I_E(T^j(x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T^j(x) \in E \\ 0, & \text{αν } T^j(x) \notin E. \end{cases}$$

Επομένως η έκφραση $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} I_E(T^j x)$ εκφράζει το ποσοστό των στοιχείων του συνόλου $\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^{n-1}x\}$ τα οποία ανήκουν στο E. Σε αυτή την ειδική περίπτωση λοιπόν, και για T εργοδικό, το ποσοστό των στοιχείων που "πέφτουν" μέσα στο E, τείνει ασυμπτωτικά στο μέτρο του συνόλου E:

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} I_E(T^j x) = \int I_E d\mu = \mu(E).$$

2.6 Άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος του von Neumann

Σε αυτή την παράγραφο επιχειρούμε να παρουσιάσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος του von Neumann. Η απόδειξη ενός αποτελέσματος με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους είναι σίγουρα εντυπωσιακή, αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό· υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο καλοί λόγοι που επιδιώκουμε κάτι τέτοιο.

Ο πρώτος είναι ότι οι αποδείξεις χρησιμοποιούν εργαλεία από κλάδους των μαθηματικών που, εκ πρώτης όψεως, έχουν μικρή σχέση μεταξύ τους. Έτσι, ένα αποτέλεσμα που αφορά σε χώρους Hilbert μπορεί να αποδειχθεί με, κατά βάση, αλγεβρικές μεθόδους (Υποπαράγραφος 2.6α΄) ή με Θεωρία Αλγεβρών Banach (Υποπαράγραφος 2.6β΄).

Ο δεύτερος λόγος είναι ότι μια καινούργια αποδεικτική μέθοδος μπορεί να γεννήσει δυνατότερα εργαλεία και να έχει ως αποτέλεσμα εξαγωγή ισχυρότερων συμπερασμάτων, τα οποία δεν θα μπορούσαν να συναχθούν από τις υπάρχουσες αποδείξεις. Κάτι τέτοιο συμβαίνει με τη μέθοδο που αναπτύσσεται στην Υποπαράγραφο 2.6γ΄.

Αν ο αναγνώστης αρκείται στην απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann που ήδη δώσαμε, μπορεί να προχωρήσει απ'ευθείας στο επόμενο κεφάλαιο καθώς η παράγραφος αυτή είναι είναι αυτοτελής και ό,τι αναφερθεί στη διάρκειά της δε χρησιμοποιείται ξανά στο υπόλοιπο της εργασίας.

2.6α΄ Με χρήση αφινικών αναπαραστάσεων

Για τις έννοιες που χρειαζόμαστε παραπέμπουμε στην Παράγραφο 1.5.

Θεώρημα 2.6.1. ***(von Neumann).*** *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε για κάθε $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n} = Px$, όπου P ο τελεστής προβολής στον $F(T)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε ορθομοναδιαία αναπαράσταση π του $\mathbb{Z}$ στον H ως εξής: $\pi(n) = T^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και θεωρούμε τον μοναδικό ομόκυκλο $b \in Z^1(G, \pi)$ για τον οποίο $b(1) = x$. Επαγωγικά, και με εφαρμογή της σχέση το ομοκύκλου, βρίσκουμε ότι

$$b(n) = (I + T + \ldots + T^{n-1})x, \quad \forall n \in \mathbb{N}:$$

Για $n = 1$ παίρνουμε $b(1) = x$ το οποίο ισχύει. Έστω ότι $b(k) = x + Tx + \ldots + T^{k-1}x$. Από τη σχέση του ομοκύκλου έχουμε ότι

$$\begin{aligned} b(k+1) &= \pi(k)b(1) + b(k) \\ &= T^k x + (x + \ldots + T^{k-1}x) \\ &= x + Tx + \ldots + T^k x. \end{aligned}$$

Θέτουμε $H_1 = P(H)$ και $H_0 = H_1^{\perp}$. Οι H_0 και H_1 είναι T-αναλλοίωτοι: Για τον H_1 αυτό είναι άμεσο αφού $TPz = Pz$ για κάθε $z \in H$. Για τον H_0, εαν $z \in H_1^{\perp}$ τότε $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$ με $y = Ty$. Επομένως $\langle z, y\rangle = \langle Tz, Ty\rangle = \langle Tz, y\rangle = 0 \Rightarrow Tz \in H_1^{\perp}$. Άρα $T(H_0) \subseteq H_0$.

Συμπεραίνουμε ότι οι H_0 και H_1 είναι $\mathbb{Z}$-αναλλοίωτοι. Έστω π_0, π_1 οι αντίστοιχες υποαναπαραστάσεις της π (βλ. Πρόταση 1.5.11) και για κάθε n θέτουμε $b_1(n) = Pb(n)$, $b_0(n) = (I - P)b(n)$. Το b_1 ανήκει στο $Z^1(\mathbb{Z}, \pi_1)$ και το b_0 στο $Z^1(\mathbb{Z}, \pi_0)$. Ο τελεστής T περιορισμένος στο H_1 δρα ως ταυτοτικός, επομένως $b_1(n) = nPx$, δηλαδή $Px = \frac{1}{n}b_1(n)$. Επιπλέον $H_0 = \ker(T - I)^{\perp} = \ker(T^* - I)^{\perp} = \overline{(T - I)(H)}$, δηλαδή υπάρχει ακολουθία στοιχείων του H, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $(T - I)(\xi_n) \to b_0(1) = (I - P)x$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\partial : H \to Z^1(G, \pi)$ που ορίζεται ως εξής: $\partial\xi(g) = \pi(g)\xi - \xi$, για κάθε $\xi \in H$.[9] Θα δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το $b_0(k)$ αποτελεί όριο της ακολουθίας $(\partial\xi_n)(k)$:

$$\begin{aligned} \partial\xi_n(k) &= \pi(k)\xi_n - \xi_n = T^k\xi_n - \xi_n \\ &= (T^k\xi_n - T^{k-1}\xi_n) + \ldots + (T\xi_n - \xi_n) \\ &= T^{k-1}(T\xi_n - \xi_n) + \ldots + (T\xi_n - \xi_n) \to \\ &\to T^{k-1}(b_0(1)) + \ldots + b_0(1), \qquad (2.17) \\ b_0(k) &= (I - P)b(k) = (I - P)(x + Tx + \ldots T^{k-1}x) \\ &= (I - P)x + T(I - P)x + \ldots + T^{k-1}(I - P)x \\ &= b_0(1) + T(b_0(1)) + \ldots + T^{k-1}(b_0(1)). \qquad (2.18) \end{aligned}$$

Από τις (2.17) και (2.18) προκύπτει το ζητούμενο.

Από τα παραπάνω, $b_0 \in \overline{B^1(\mathbb{Z}, \pi)}$. Η $\mathbb{Z}$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα, παραγόμενη από το συμπαγές και συμμετρικό σύνολο $S = \{-1, 1\}$. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $|n|_S = n$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.5.14 παίρνουμε ότι $\frac{\|b_0(n)\|}{|n|_S} = \frac{\|b_0(n)\|}{n} \to 0$. Όμως $\frac{b_0(n)}{n} = \frac{b(n)}{n} - \frac{Pb(n)}{n}$ με $\frac{b(n)}{n} = M_n(T)x$ και $\frac{Pb(n)}{n} = \frac{b_1(n)}{n} = Px$ για κάθε n. Άρα $M_n(T)x \to Px$. □

2.6β΄ Με χρήση του φασματικού θεωρήματος

Ο αναγνώστης χρειάζεται να έχει μια εξοικείωση με τις έννοιες των Αλγεβρών Banach (βλ. Παράγραφο 1.6).

Θεώρημα 2.6.2. ***(von Neumann).*** *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε για κάθε $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n} = Px$, όπου P ο τελεστής προβολής στον $F(T)$.*

[9] Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **απεικόνιση ομοσυνόρου** (coboundary map) και είναι προφανώς επί.

Απόδειξη. Έστω $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος. Όλες οι ιδιοτιμές του T ανήκουν στο σύνολο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ αφού αν $Tx = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\|x\| = \|Tx\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Εφαρμόζοντας το Φασματικό Θεώρημα στον ορθομοναδιαίο (άρα και φυσιολογικό) τελεστή T θα έχουμε ότι

$$T = \int_{S^1} \lambda d\mu(\lambda). \tag{2.19}$$

Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης, $\sigma(T^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(T)\}$ με τον T^n να είναι κι αυτός ορθομοναδιαίος, επομένως θα ισχύει ότι $T^n = \int_{S^1} \lambda^n d\mu(\lambda)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $x \in H$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n} &= \int_{S^1} \frac{1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}}{n} d\mu(\lambda)x \\
&= \frac{1 + 1 + \ldots + 1}{n}\mu(\{1\})x + \int_{S^1\setminus\{1\}} \frac{1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}}{n} d\mu(\lambda)x \\
&= \mu(\{1\})x + \int_{S^1\setminus\{1\}} \frac{1}{n}\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} d\mu(\lambda)x. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για διανυσματικά μέτρα για να συμπεράνουμε ότι το δεύτερο μέλος της (2.20) συγκλίνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο. Είναι προφανές ότι η ακολουθία $(\frac{1}{n}\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή από τον αριθμό 1, ενώ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1} = 0$. Θέτουμε $f_n : S^1 \to H$ με $f_n(\lambda) = \frac{1}{n}\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}x$ για κάθε $\lambda \in S^1$ και $f : S^1 \to H$ τη μηδενική συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, δηλαδή ότι $\lim_{n\to\infty} \mu([\|f_n\| \geqslant \epsilon]) = 0$ και ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη $g : S^1 \to \mathbb{R}$ με $\|f_n\| \leqslant g$ για κάθε n.

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\frac{1}{n}|\|x\| \leqslant \epsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε $\mu(\{\lambda \in S^1 : \|f_n\| \geqslant \epsilon\}) = 0$, για κάθε $n \geqslant n_0$, οπότε $\lim_{n\to\infty} \mu([\|f_n\| \geqslant \epsilon]) = 0$. Τέλος, ορίζουμε $g : S^1 \to \mathbb{R}$ με $g(\lambda) = \|x\|$, για κάθε $\lambda \in S^1$. Η g είναι ολοκληρώσιμη με $\|f_n\| \leqslant \left|\frac{\lambda^n-1}{n(\lambda-1)}\right| \|x\| \leqslant \|x\| = g(\lambda)$, για κάθε $\lambda \in S^1$.

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $\lim_{n\to\infty} \int_{S^1} f_n d\mu = 0$ επομένως η (2.20) δίνει:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n} &= \mu(\{1\})x + \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \int_{S^1\setminus\{1\}} \frac{1}{n}\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} d\mu(\lambda)x} \\
&= \mu(\{1\})x. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Όμως η $\mu(\{1\})$ είναι η ορθογώνια προβολή στον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ του T, δηλαδή στον $F(T)$. Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

2.6γ′ Με χρήση της μεθόδου ενεργειακής μείωσης

Δίνουμε ακόμη μία απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann η οποία βασίζεται στη Μέθοδο Ενεργειακής Μείωσης (Λήμμα 2.6.3) και την έννοια της διάσπασης ενός στοιχείου σε άθροισμα ενός “δομημένου” (structured) και ενός “τυχαίου” (random) μέρους (Πρόταση 2.6.4).

Λήμμα 2.6.3. *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής. Αν $\|M_n(x)\| \geqslant \epsilon$ για κάποιο $x \in H$ και κάποιο $\epsilon > 0$, τότε*

$$\|x - M_n^* M_n x\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \epsilon^2. \tag{2.22}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x - M_n^* M_n x\|^2 &= \|x\|^2 + \|M_n^* M_n x\|^2 - \langle x, M_n^* M_n x\rangle - \langle M_n^* M_n x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|M_n^* M_n x\|^2 - \langle M_n x, M_n x\rangle - \langle M_n x, M_n x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|M_n^* M_n x\|^2 - 2\|M_n x\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 - \|M_n x\|^2, && (\text{αφού } \|M_n^*\| \leqslant 1) \\
&\leqslant \|x\|^2 - \epsilon^2, && (\text{αφού } \|M_n x\| \geqslant \epsilon).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.6.4. *Έστω H χώρος Hilbert, $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής, $x \in H$ με $\|x\| = 1$, $\epsilon > 0$ και $1 < N_1 < \ldots < N_J$ φυσικοί αριθμοί με $J > \frac{1}{\epsilon^2} + 2$. Τότε υπάρχουν $j \in \{1, 2, \ldots, J-1\}$ και διάσπαση $x = s + r$ με $\|Tx - x\| = O(J\frac{1}{N_{j+1}})$ και $\|M_n r\| \leqslant \epsilon$ για κάθε $n \geqslant N_j$.*

Απόδειξη. Εκτελούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

(i) Θέτουμε $j = J - 1$, $s = 0, r = x$.

(ii) Αν $\|M_n r\| \leqslant \epsilon$ για κάθε $n \geqslant N_j$ τότε σταματάμε. Αν υπάρχει $n \geqslant N_j$ τέτοιο ώστε $\|M_n r\| \geqslant \epsilon$, τότε από το προηγούμενο λήμμα θα ισχύει ότι $\|r - M_n^* M_n r\|^2 \leqslant \|r\|^2 - \epsilon^2$.

(iii) Θέτουμε $r := r - M_n^* M_n r, s := s + M_n^* M_n r$, $j := j - 1$ και επαναλαμβάνουμε το Βήμα (ii).

Ο παραπάνω αλγόριθμος τερματίζει σε τουλάχιστον $\frac{1}{\epsilon^2}$ βήματα καθώς η "ενέργεια" $\|r^2\|$, η οποία προφανώς δεν γίνεται να λάβει αρνητική τιμή, ξεκινά λαμβάνοντας την τιμή 1 και εν συνεχεία σε κάθε βήμα μειώνεται τουλάχιστον κατά $\frac{1}{\epsilon^2}$. Θα δείξουμε ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, $\|(T-I)M_n^*M_n r\| = O(\frac{1}{n})$:

$$\begin{aligned} M_n^*M_n &= \frac{I+T^*+\ldots+(T^*)^{n-1}}{n}\cdot\frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(T^*)^kT^l \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k<l}(T^*)^kT^l+\sum_{l<k}(T^*)^kT^l+\sum_{k=0}^{n-1}(T^*)^kT^k\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k<l}(T^*)^kT^l+\sum_{l<k}(T^*)^kT^l+nI\right], \qquad\qquad (\text{αφού } TT^*=T^*T=I) \\ &= \frac{1}{n}I+\frac{1}{n^2}\sum_{l<k}(T^*)^{k-l}+\frac{1}{n^2}\sum_{k<l}T^{l-k}, \quad \text{επομένως} \\ (T-I)M_n^*M_n &= \frac{1}{n}T+\frac{1}{n^2}\sum_{l<k}(T^*)^{k-l-1}+\frac{1}{n^2}\sum_{k<l}T^{l-k+1} \\ &\quad -\frac{1}{n}I-\frac{1}{n^2}\sum_{l<k}(T^*)^{k-l}-\frac{1}{n^2}\sum_{k<l}T^{l-k}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Με ένα απλό συνδυαστικό επιχείρημα μπορούμε να βρούμε ποιοι όροι της σχέσης (2.23) απλοποιούνται: Στο άθροισμα $\sum_{k<l}T^{l-k}$ ο εκθέτης $l-k$ λαμβάνει την τιμή $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ συνολικά $n-i$-το πλήθος φορές. Στο άθροισμα $\sum_{k<l}T^{l-k+1}$ ο εκθέτης $l-k+1$ λαμβάνει την τιμή $i\in\{2,\ldots,n\}$ συνολικά $n-i+1$-το πλήθος φορές. Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k<l}T^{l-k+1}-\sum_{k<l}T^{l-k} &= T^n+2T^{n-1}+\ldots+(n-1)T^2 \\ &\quad -T^{n-1}-2T^{n-2}-\ldots-(n-2)T^2-(n-1)T \\ &= T^n+\ldots+T. \ \text{Ομοίως} \\ \sum_{l<k}(T^*)^{k-l-1}-\sum_{l<k}(T^*)^{k-l} &= (T^*)^n+\ldots+T^*. \end{aligned}$$

Τελικά η (2.23) δίνει

$$\begin{aligned} (T-I)M_n^*M_n &= \frac{1}{n}T-\frac{1}{n}I+\frac{T+\ldots+T^n}{n^2}+\frac{T^*+\ldots+(T^*)^n}{n^2}, \quad \text{άρα} \\ \|(T-I)M_n^*M_n\| &\leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{4}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{από τριγωνική ανισότητα.} \end{aligned}$$

Έστω τα j_k, s_k, r_k για τα οποία ο αλγόριθμος τερματίζει και r_{k-1}, s_{k-1} η διάσπαση του προηγούμενου βήματος. Τότε $r_k+s_k = r_{k-1}-M_n^*M_nr_{k-1}+s_{k-1}+M_n^*M_nr_{k-1} = r_{k-1}+s_{k-1}=x$. Επιπλέον $\|M_nr_k\|\leqslant\epsilon$ για κάθε $n\geqslant N_{j_k}$, αφού σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε N τέτοιο ώστε η νόρμα του στοιχείου $\|r_k-M_N^*M_Nr\|$ να είναι βγαίνει αρνητική.

Τέλος,

$$\begin{aligned}\|Ts_k - s_k\| &= \|Ts_{k-1} - s_{k-1} + TM_n^* M_n r_{k-1} - M_n^* M_n r_{k-1}\| \\ &\leqslant \|Ts_{k-1} - s_{k-1}\| + \|(U-I)M_n^* M_n r_{k-1}\| = O\left(\frac{1}{N_{j_k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.6.5. ***(von Neumann).*** *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε για κάθε $x \in H$, το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{x+Tx+\ldots+T^{n-1}x}{n}$ υπάρχει στον H.*

Αποδεικτική Ιδέα. Σε πολλά προβλήματα στα οποία το υπό μελέτη στοιχείο έχει πολύπλοκη μορφή, έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε μια έννοια "δομής", μια έννοια "τυχαιότητας" και να διασπάσουμε το στοιχείο μας σε άθροισμα ενός "δομημένου" και ενός "τυχαίου" μέρους. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε ξεχωριστά την κάθε μία συνιστώσα και να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά εργαλεία προσαρμοσμένα σε αυτήν, εργαλεία τα οποία ίσως να μην εφαρμόζονταν στο αρχικό μας στοιχείο.

Κλασσικό παράδειγμα μιας τέτοιας διάσπασης είναι η περίπτωση όπου ο $M \subseteq H$ αποτελεί υπόχωρο ενός χώρου Hilbert: Κάθε στοιχείο $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in M$ και $z \in M^\perp$. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου μια τέτοια διάσπαση αποδίδει, π.χ. στο Λήμμα Κανονικότητας του Szemerédi ή σε μία από τις εργοδικές αποδείξεις του Θεωρήματος του Szemerédi. Περισσότερα παραδείγματα τέτοιων διασπάσεων καθώς και μια γενική εισαγωγή στη φιλοσοφία της μεθόδου μπορούν να βρεθούν στο εισαγωγικό άρθρο [Tao2] καθώς και σε αρκετές αναφορές αυτού.

Στα της απόδειξής μας, η διάσπαση γίνεται σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.4. Αξιοποιώντας τα φράγματα που έχουμε βρει για το δομημένο μέρος s και το τυχαίο μέρος r μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ακολουθία $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι $\|x\| = 1$ και θα δείξουμε ότι η $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω πως όχι. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0$ και ακολουθίες $1 < n_1 < m_1 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$ τέτοια ώστε $\|M_{n_i}x - M_{m_i}x\| \geqslant \epsilon$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει $j = O_\epsilon(1)$ [10] και διάσπαση $x = s + r$ με $\|Ts - s\| = O_\epsilon(\frac{1}{N_{j+1}})$ και $\|M_{n_j}x\|, \|M_{m_j}x\| \leqslant \epsilon$. Αραιώνοντας, εαν αυτό είναι απαραίτητο, τους όρους των ακολουθιών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι $n_{j+1} \gg n_j, m_j, \epsilon$. Άρα

$$\begin{aligned}\|M_{n_j}x - M_{m_j}x\| &= \|M_{n_j}(s+r) - M_{m_j}(s+r)\| \\ &\leqslant \|M_{n_j}s - M_{m_j}s\| + \|M_{n_j}r - M_{m_j}r\| \\ &\leqslant \|M_{n_j}s - s\| + \|M_{m_j}s - s\| + \|M_{n_j}r\| + \|M_{m_j}r\| \leqslant 4\epsilon, \quad \text{άτοπο.}\end{aligned}$$

Άρα η $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. □

[10] Ο δείκτης ϵ στο σύμβολο O_ϵ υποδηλώνει ότι η σταθερά εξαρτάται από το ϵ.

Παρατηρήστε ότι η μορφή του Θεωρήματος του von Neumann που αποδείξαμε είναι ασθενέστερη από τη μορφή που συναντήσαμε εως τώρα. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in H$ η ακολουθία $M_n(x)$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο, χωρίς όμως να δείξουμε ότι το στοιχείο αυτό είναι επιπλέον η ορθή προβολή επί του $F(T)$. Το σημαντικό στην ανωτέρω απόδειξη δεν είναι τόσο το αποδεικτέο, όσο το επιχείρημα πίσω από την απόδειξη, το οποίο τροποποιημένο κατάλληλα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή ισχυρότερων συμπερασμάτων. Το 2008 ο Terence Tao βασίστηκε σε αυτή την ιδέα για να συμπεράνει τη σύγκλιση στον L_p αθροισμάτων της μορφής $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_1^n f_1 T_2^n f_2 T_3^n f_3$, όπου T_1, T_2, T_3 τελεστές μετατόπισης που αντιμετατίθενται.

2.7 Αναφορές

Τα ιστορικά σχόλια που βρίσκονται διασκορπισμένα σε ολόκληρο το κεφάλαιο και που αποτελούν την Παράγραφο 2.1, βασίζονται στα [Berg], [Mac] και [Zun].

2.2 Το Θεώρημα του Liouville αποδεικνύεται στο [Arn], pp. 69-70, ενώ στις σελίδες που ακολουθούν παρουσιάζεται συνοπτικά η σύνδεσή του με το Θεώρημα του Poincaré. Παρόμοια συζήτηση, αν και χωρίς έμφαση στο εργοδικό κομμάτι, υπάρχει στο [Hall], Paragraph 2.5, p. 33.

2.3 Η απόδειξη του Θεωρήματος του Poincaré βρέθηκε στο [Ein], Paragraph 2.2, pp. 21-22.

2.4 Η απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων του τελεστή Koopman υπάρχει στο [Ein], Paragraph 2.4, pp. 28-32. Η επιπλέον σύνδεση της εργοδικότητας ενός τελεστή με τα ιδεώδη του L_p βρέθηκε στο [Far], Paragraph 7.2, pp. 65-67.

2.5 Η πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann καθώς και τα πορίσματα που ακολούθησαν, υπάρχουν στο [Ein], Paragraph 2.5, pp. 32-37. Η απόδειξη με τη χρήση αφινικών αναπαραστάσεων βρέθηκε στο [Val]. Οι αποδείξεις με τη χρήση του φασματικού θεωρήματος και της μεθόδου ενεργειακής μείωσης υπάρχουν στο [Tao], pp. 246-249.

Κεφάλαιο 3

Εργοδικότητα και Γεωμετρία Χώρων Banach

> Technically, chemistry is the study of matter, but I prefer to see it as the study of change: Electrons change their energy levels. Molecules change their bonds. Elements combine and change into compounds. But that's all of life, right? It's the constant, it's the cycle, it's solution, dissolution. Just over and over and over. It is growth, then decay, then transformation.
>
> Walter White

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι το 1931 ο John von Neumann απέδειξε ότι σε **χώρους Hilbert** η ακολουθία των μέσων όρων της τροχιάς ενός σημείου x μέσω ενός **ορθομοναδιαίου** τελεστή T, είναι συγκλίνουσα. Αυτό αποτέλεσε και την αφετηρία για μια σειρά από αποτελέσματα τα οποία ισχυροποίησαν σταδιακά το Θεώρημα του von Neumann. Η απαίτηση ο χώρος να είναι Hilbert και οι τελεστές ορθομοναδιαίοι ήταν αχρείαστα ισχυρή, καθώς, όπως διαπιστώθηκε, μπορούμε να συμπεράνουμε τη σύγκλιση των μέσων όρων και με πιο ασθενείς υποθέσεις.

Το 1937 ο Frigyes Riesz [11] απλοποίησε την απόδειξη του von-Neumann, ενώ ένα χρόνο αργότερα επέκτεινε το αποτέλεσμα αυτό δείχνοντας ότι στους χώρους L_p για $p \in (1, +\infty)$, για κάθε τελεστή με φραγμένες δυνάμεις (βλ. Ορισμό 3.1.1) και κάθε $f \in L_p$, η ακολουθία των μέσων όρων συγκλίνει. Το 1939 ο Edgar Raymond Lorch [12] και ανεξάρτητα οι Shizuo Kakutani [13] και Kōsaku Yosida, [14] γενίκευσαν το αποτέλεσμα του Riesz για τυχαίο αυτοπαθή χώρο. Με την ορολογία που θα εισάγουμε στην παράγραφο που ακολουθεί, το Θεώρημα του Lorch διατυπώνεται ως εξής: *Κάθε αυτοπαθής χώρος είναι χώρος εργοδικού*

[11] Frigyes Riesz, 1880-1956.
[12] Edgar Raymond Lorch, 1907-1990.
[13] Shizuo Kakutani, 1911-2004
[14] Kōsaku Yosida, 1909-1990.

μέσου.

Το 1976 ο Louis Sucheston διερωτήθηκε αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Lorch, ένα ενδιαφέρον ερώτημα που παραμένει αναπάντητο μέχρι σήμερα. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Lorch και θα περιγράψουμε την πρόοδο που έχει επιτευχθεί ως προς το ερώτημα που έθεσε ο Sucheston. Πρώτα όμως θα εισάγουμε την κλάση των τελεστών που θα μελετήσουμε, δηλαδή τους τελεστές εργοδικού μέσου και θα διαπιστώσουμε τις καλές ιδιότητες που τους χαρακτηρίζουν.

3.1 Ορισμοί. Βασικές Ιδιότητες.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής. Ο T ονομάζεται*

(i) ***τελεστής με φραγμένες δυνάμεις*** *(power bounded), αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T^n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) ***τελεστής εργοδικού μέσου*** *(mean ergodic operator), αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία των αθροισμάτων κατά Cesàro $M_n x = \frac{1}{n}(x + Tx + T^2 x + \ldots + T^{n-1}x)$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο του X,*

(iii) ***τελεστής φραγμένος κατά Cesàro*** *(Cesàro bounded operator), αν η ακολουθία των αθροισμάτων κατά Cesàro $M_n = \frac{1}{n}(I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1})$ είναι νορμ φραγμένη.*

Ο χώρος X ονομάζεται ***χώρος εργοδικού μέσου*** *(mean ergodic space), αν κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις του X είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Παρατηρήστε ότι κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι και φραγμένος κατά Cesàro. Το παράδειγμα του I. Assani [Emi] δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει:

Παράδειγμα 3.1.2. *Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και τελεστής $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον πίνακα $T = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ο T είναι φραγμένος κατά Cesàro, αλλά δεν έχει φραγμένες δυνάμεις. Πράγματι, επαγωγικά επαληθεύουμε ότι*

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{bmatrix} (-1)^n & 2n(-1)^{n+1} \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{ενώ} \\ M_n(T) = \frac{I + T + \ldots + T^{n-1}}{n} &= \begin{bmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & (-1)^n + \frac{1-(-1)^n}{2n} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Όμως $\|T^n\| \geqslant 2n \to \infty$, ενώ $\|M_n\| \leqslant 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Είναι γνωστό ότι αν η ακολουθία $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, τότε και η ακολουθία των αθροισμάτων κατά Cesàro $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 3.1.3. *Θεωρούμε τον $\ell_2(\mathbb{N})$ και ορίζουμε τελεστή $T : \ell_2 \to \ell_2$ ως εξής: $Te_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} e_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $Te_1 = \sqrt{2} e_2$, $T^2 e_1 = \sqrt{3} e_3$ και επαγωγικά αποδεικνύεται* *ότι* $T^n e_1 = \sqrt{n+1} e_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Θέτουμε* $z_0 = e_1 - Te_1$ *και υπολογίζουμε το* $T^n z_0 = T^n e_1 - T^{n+1} e_1 = \sqrt{n+1} e_{n+1} - \sqrt{n+2} e_{n+2}$. *Η ακολουθία* $(T^n z_0)_{n\in\mathbb{N}}$ *δε συγκλίνει αφού προφανώς δεν είναι Cauchy, όμως η ακολουθία των Cesàro αθροισμάτων συγκλίνει στο μηδέν:*

$$\begin{aligned} M_n(z_0) &= \frac{z_0 + Tz_0 + \ldots + T^{n-1}z_0}{n} = \frac{e_1 - Te_1 + Te_1 - T^2 e_1 + \ldots + T^{n-1}e_1 - T^n e_1}{n} \\ &= \frac{e_1 - T^n e_1}{n} \quad \text{και} \\ \|M_n(z_0)\| &= \left\| \frac{e_1 - T^n e_1}{n} \right\| \leqslant \frac{\|e_1\|}{n} + \frac{\|\sqrt{n+1} e_1\|}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Το παρακάτω θεώρημα ανήκει στον William Frederick Eberlein [15] και διαβεβαιώνει ότι όσον αφορά στην κλάση των τελεστών με φραγμένες δυνάμεις, αρκεί να μελετήσουμε πιθανά ασθενή όρια της ακολουθίας $M_n x$ για να αποφανθούμε για την εργοδικότητα του τελεστή:

Θεώρημα 3.1.4. ***(Εργοδικού Μέσου του Eberlein, 1949).*** *Έστω* $(X, \|\cdot\|)$ *χώρος Banach και* $T : X \to X$ *γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Τότε για κάθε* $x, y \in X$ *τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Ty = y$ *και* $y \in \overline{\text{co}}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$,

(ii) $M_n x \longrightarrow y$,

(iii) $M_n x \xrightarrow{w} y$,

(iv) το y *αποτελεί ασθενές οριακό σημείο της ακολουθίας* $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**

Θέτουμε $M = \sup\{\|T^n\| : n\in\mathbb{N}\} < \infty$ και έστω $\epsilon > 0$. Αφού $y \in \overline{\text{co}}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ υπάρχει $S \in \text{co}\{I, T, T^2, \ldots\}$ τέτοιο ώστε $\|y - Sx\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|M_n T^k x - M_n x\| &= \left\| \frac{T^k x + \ldots + T^{k+n-1}x}{n} - \frac{x + \ldots + T^{n-1}x}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{T^{k+n-1}x + \ldots + T^n x}{n} - \frac{x + \ldots + T^{k-1}x}{n} \right\| \\ &\leqslant \frac{k\|x\|}{n} + \frac{k\|x\|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|M_n T^k x - M_n x\| < \tfrac{\epsilon}{2}, \quad \text{για κάθε } n \geqslant n_0 \text{ και κάθε } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

[15] William Frederick Eberlein, 1917-1986.

Επιπλέον $S \in \mathrm{co}\{I, T, T^2, \ldots\}$ επομένως το S μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός $S = \lambda_1 T^{n_1} + \ldots + \lambda_k T^{n_k}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|M_n Sx - M_n x\| &= \|M_n(\lambda_1 T^{n_1}x + \ldots + \lambda_k T^{n_k}x - \lambda_1 M_n x - \ldots - \lambda_k M_n x)\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (M_n T^{n_i} x - M_n x) \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\| (M_n T^{n_i} x - M_n x) \right\| . \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Από την (3.1) υπάρχουν $m_1, \ldots m_k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|M_n T^{n_i} - M_n\| < \frac{\epsilon}{2}$, για κάθε $n \geqslant m_i$, επομένως για $m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$ η σχέση (3.2) δίνει ότι $\|M_n Sx - M_n x\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$, για κάθε $n \geqslant m_0$. Επιπλέον $Ty = y$, άρα $M_n y = y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τελικά, για κάθε $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|y - M_n x\| &= \|M_n y - M_n x\| \\
&\leqslant \|M_n y - M_n Sx\| + \|M_n Sx - x\| \\
&\leqslant M\|y - Sx\| + \|M_n Sx - x\| \\
&\leqslant M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει το ζητούμενο.

(ii) ⇒ (iii)
Προφανές.

(iii) ⇒ (iv)
Προφανές.

(iv) ⇒ (i)
Έστω $y \in \overline{\mathrm{co}}^w\{x, Tx, T^2x, \ldots\} = \overline{\mathrm{co}}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$, από το Θεώρημα του Mazur. Αφού ο T είναι συνεχής θα έχουμε ότι αν $M_n x \xrightarrow{w} y$, τότε $T(M_n x) \xrightarrow{w} Ty$. Όμως $\|TM_n x - M_n x\| \longrightarrow 0$ σύμφωνα με όσα αποδείξαμε στο βήμα (i) ⇒ (ii), επομένως $T(M_n x) \xrightarrow{w} Ty, y$ και επειδή η ασθενής τοπολογία είναι Hausdorff, έπεται ότι $Ty = y$.

□

Ορισμός 3.1.5. *Έστω X χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός και φραγμένες τελεστής. Συμβολίζουμε τα σταθερά σημεία του T με $F(T) = \{x \in X : T(x) = x\}$ και αντίστοιχα τα σταθερά σημεία του συζυγή τελεστή $T^* : X^* \to X^*$ με $F(T^*) = \{x^* \in X^* : T^*(x^*) = x^*\}$.*

Το Θεώρημα του Yosida περιγράφει πλήρως τα σημεία του X για τα οποία τα μερικά αθροίσματα $\frac{1}{n}(x + Tx + T^2x + \ldots + T^{n-1}x)$ συγκλίνουν, είναι ακριβώς εκείνα που περιέχονται στο ευθύ άθροισμα των $F(T)$ και $\overline{(I - T)(X)}$.

Θεώρημα 3.1.6. ***(Yosida)*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Τότε τα σύνολα $F(T)$, $\overline{(I-T)(X)}$ αποτελούν κλειστούς υπόχωρους με τομή το $\{0\}$. Αν $X_{me} = \{x \in X : \text{ το όριο } \lim_{n\to\infty} M_n x \text{ υπάρχει}\}$, τότε $X_{me} = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Ο τελεστής $P : X_{me} \to X$ για τον οποίο $P(x) = \lim_{n\to\infty} M_n x$ αποτελεί προβολή του X_{me} στον $F(T)$ για την οποία $P = P^2 = PT = TP$. Επιπλέον για κάθε $z \in X$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $M_n z \to 0$,

(ii) $x^*(z) = 0$, *για κάθε* $x^* \in F(T^*)$,

(iii) $z \in \overline{(I-T)(X)}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $F(T) \cap \overline{(I-T)(X)} = \{0\}$. Αν $z \in F(T) \cap \overline{(I-T)(X)}$, τότε $Tz = z$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $\|z-(u+Tu)\| < \epsilon$. Επιπλέον $\|M_n(z-(u+Tu))\| = \|z-M_n(u+Tu)\|$ και $M_n(u+Tu) = \frac{u+\ldots+T^{n-1}u}{n} - \frac{Tu+\ldots+T^n u}{n} = \frac{u}{n} - \frac{T^n u}{n} \to 0$. Επομένως $\|M_n(z-(u+Tu))\| \leqslant M\epsilon$ και $\|z\| \leqslant \|z - M_n(u+Tu)\| + \|M_n(u+Tu)\| \leqslant M\epsilon + \epsilon \to 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\|z\| = 0$, δηλαδή $z = 0$. Οι $F(T), \overline{(I-T)(X)}$ είναι προφανώς κλειστοί υπόχωροι, οπότε απομένει να δείξουμε ότι το ευθύ τους άθροισμα ισούται με X_{me}. Για να μη διακόψουμε τη ροή της απόδειξης θα θεωρήσουμε γνωστές τις τρεις ισοδυναμίες που διατυπώνονται στην εκφώνηση και με τη βοήθειά τους θα δείξουμε ότι $X_{me} = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$.

Αν επιλέξουμε $x \in X_{me}$, τότε μπορούμε να το διασπάσουμε σε $x = Px + (x - Px)$ με το Px να ανήκει στο $F(T)$ από το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου, ενώ το $x - Px$ ανήκει στο $\overline{(I-T)(X)}$ λόγω του ότι $M_n(x-Px) \to 0$ και της ισοδυναμίας (iii).

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν $x = y + z \in F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$, τότε $M_n(y) = y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $M_n z \to 0$, λόγω του (i). Άρα $M_n(x) \to y$ και επομένως $x \in X_{me}$. Άρα $X_{me} = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$.

Απομένει να δείξουμε τις τρεις ισοδυναμίες:

(i) ⇒ (ii)

Έστω $x^* \in F(T^*)$ και $M_n z \to 0$. Αφού $T^* x^* = x^*$ θα έχουμε ότι $x^*(Tx) = x^*(x)$, για κάθε $x \in X$ και επαγωγικά προκύπτει ότι $x^*(T^n x) = x^*(x)$ και επομένως $x^*(M_n x) = x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Όμως $x^*(M_n z) \to 0$, επομένως $x^*(z) = 0$.

(ii) ⇒ (iii)

Έστω πως $z \notin \overline{(I-T)(X)}$. Από εφαρμογή Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει μη μηδενικό $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x - Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$ και $x^*(z) > 0$. Η ισότητα $x^*(x-Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$ δείχνει ότι $x^* \in F(T^*)$, επομένως από την υπόθεσή μας θα έπρεπε $x^*(z) = 0$, άτοπο.

(iii) ⇒ (i)

Παρατηρούμε ότι αν $z \in (I-T)(X)$, τότε $z = x - Tx$ για κάποιο $x \in X$ και επομένως $M_n z = M_n(x - Tx) = \frac{x - T^n x}{n} \to 0$. Αν $z \in \overline{(I-T)(X)}$, τότε υπάρχει $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (I-T)(X)$ τέτοια ώστε $z_k \to z$. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\|M_n z\| \leqslant \|M_n z - M_n z_k\| + \|M_n z_k\| \leqslant \|M_n\|\|z - z_k\| + \|M_n z_k\| \leqslant M\|z - z_k\| + \|M_n z_k\|$. Παίρνοντας όρια για $n, k \to \infty$ προκύπτει ότι $M_n z \to 0$.

□

Από τον ορισμό του X_{me} παρατηρούμε ότι ένας γραμμικός τελεστής είναι τελεστής εργοδικού μέσου αν και μόνο αν $X = X_{me}$. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα έχει ως συνέπεια το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 3.1.7. *Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις, τότε ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου αν και μόνο αν $X = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$.*

Μια συνέπεια του Θεωρήματος του Yosida είναι ότι για τελεστές με φραγμένες δυνάμεις τα σημεία του συνόλου $F(T^*)$ **πάντα** διαχωρίζουν τα σημεία του $F(T)$. Αντίθετα το $F(T)$ δεν διαχωρίζει απαραίτητα το $F(T^*)$. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, χαρακτηρίζει τους τελεστές εργοδικού μέσου και ονομάζεται Κριτήριο του Sine.

Πόρισμα 3.1.8. *Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X)$ τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Τότε το $F(T^*)$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T)$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in F(T)$, $z \neq 0$. Αφού $X_{me} = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$ έχουμε ότι $z \notin \overline{(I-T)(X)}$. Από το Θεώρημα του Yosida, υπάρχει $x^* \in F(T^*)$ τέτοιο ώστε $x^*(z) \neq 0$. □

Θεώρημα 3.1.9. ***(Κριτήριο του Sine, 1970)*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου αν και μόνο αν το $F(T)$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T^*)$, δηλαδή για κάθε $x^*, y^* \in F(T^*)$ με $x^* \neq y^*$ υπάρχει $x_0 \in F(T)$ τέτοιο ώστε $x^*(x_0) \neq y^*(x_0)$.*

Απόδειξη. **Ευθύ:**

Έστω πως ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου, δηλαδή $X_{me} = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$ και επιλέγουμε $x^*, y^* \in F(T^*)$ με $x^* \neq y^*$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \neq y^*(x)$. Γνωρίζουμε ότι $P(x) \in F(T)$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι το $P(x)$ διαχωρίζει τα x^* και y^*. Πράγματι, $T^*x^*(Px) = (x^* \circ T)(Px) = x^*(T(Px)) = x^*(Px)$. Όμως $T^*x^* = x^*$, επομένως $x^*(x) = T^*x^*(Px)$, ενώ ομοίως προκύπτει ότι $y^*(x) = T^*y^*(Px)$ και αφού $x^*(x) \neq y^*(x)$, έχουμε ότι το Px διαχωρίζει τα x^*, y^*.

Αντίστροφο:

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι ο T δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου, δηλαδή $F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)} \subsetneq X$ και επιλέγουμε $x_0 \in X \backslash F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Από εφαρμογή Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει μη μηδενικό $x^* \in X^*$, τέτοιο ώστε $x^*(x) = 0$, για κάθε $x \in F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$ και $x^*(x_0) > 0$. Ειδικότερα

$x^*(\overline{(I-T)(X)}) = 0$ και $x^*(F(T)) = 0$. Η πρώτη σχέση δίνει $x^*(x) = x^*(Tx)$, για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T^*x^* = x^*$ και $x^* \in F(T^*)$. Από υπόθεση το $F(T)$ διαχωρίζει τα στοιχεία του $F(T^*)$, όμως $0, x^* \in F(T^*)$ άρα θα έπρεπε να υπάρχει $x \in F(T)$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \neq 0$. Αυτό είναι άτοπο λόγω του ότι $x^*(F(T)) = 0$.

□

Το Κριτήριο του Robert Sine αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για να αποφανθούμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι τελεστής εργοδικού μέσου ή όχι και θα το συναντήσουμε αρκετές φορές στο υπόλοιπο της εργασίας. Είναι άγνωστο το κατά πόσον το εν λόγω κριτήριο παραμένει αληθές αν ο χώρος X είναι Banach lattice και περιοριστούμε στην κλάση των **θετικών** τελεστών του X (βλ. [Eme4], Open question 2, p. 18):

Ανοιχτό Πρόβλημα 3.1.10. *Έστω X Banach lattice και T* ***θετικός*** *τελεστής με φραγμένες δυνάμεις τέτοιος ώστε τα θετικά σταθερά σημεία του T να διαχωρίζουν τα σταθερά σημεία του T^*. Είναι ο T τελεστής εργοδικού μέσου;*

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώσαμε την παρουσίαση όλων των εργαλείων που χρειαζόμαστε για να συνδέσουμε τους τελεστές εργοδικού μέσου με την αυτοπάθεια και ο αναγνώστης, αν το επιθυμεί, μπορεί να περάσει απ'ευθείας στην Παράγραφο 3.2 όπου περιγράφουμε αυτή τη σύνδεση. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου μελετάμε μερικές ακόμη ιδιότητες των τελεστών εργοδικού μέσου, οι οποίες όμως δε θα μας απασχολήσουν ξανά στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1.11. ***(Sine, 1976)*** *Έστω T τελεστής με φραγμένες δυνάμεις και $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ο T^k να είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Τότε ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Από το Κριτήριο του Sine αρκεί να δείξουμε ότι το $F(T)$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T^*)$. Έστω $x^* \in F(T^*)$ με $x^* \neq 0$ και αναζητούμε $z_0 \in F(T)$ τέτοιο ώστε $x^*(z_0) \neq 0$. Αφού $T^*x^* = x^*$ επαγωγικά προκύπτει ότι $(T^*)^m x^* = x^*$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και ειδικότερα ότι $(T^*)^k x^* = x^*$, δηλαδή το x^* αποτελεί μη μηδενικό σταθερό σημείο του τελεστή $(T^*)^k$. Από την υπόθεσή μας ο $(T^*)^k$ είναι τελεστής εργοδικού μέσου, επομένως εφαρμόζοντας ξανά το Κριτήριο του Sine μπορούμε να βρούμε $x_0 \in F(T^k)$ τέτοιο ώστε $x^*(x_0) \neq 0$. Το στοιχείο $z_0 = x_0 + Tx_0 + \ldots + T^{k-1}x_0$ αποτελεί προφανώς σταθερό σημείο του τελεστή T ενώ επιπλέον

$$\begin{aligned} x^*(z_0) &= x^*(x_0) + x^*(Tx_0) + \ldots + x^*(T^{k-1}x_0) \\ &= x^*(x_0) + T^*x^*(x_0) + \ldots + (T^{k-1})^*x^*(x_0) \\ &= x^*(x_0) + x^*(x_0) + \ldots + x^*(x_0) = kx^*(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

επομένως $z_0 \in F(T)$ και $x^*(z_0) \neq 0$, □

Η παραπάνω απόδειξη υπάρχει στο [Sin]. Αξίζει να σημειωθεί ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος του Sine δεν ισχύει εν γένει. Το παράδειγμα που ακολουθεί [Berm, Example 2] δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε τελεστή εργοδικού μέσου T τέτοιον ώστε ο T^2 να μην είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

Παράδειγμα 3.1.12. *Θεωρούμε τον $C[0,1]$ και ορίζουμε $T : C[0,1] \to C[0,1]$ ως εξής: $Tf(t) = -tf(t)$, για κάθε $f \in C[0,1]$ και $t \in [0,1]$. Ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου, αλλά ο T^2 όχι.*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Θα δείξουμε ότι το μόνο σταθερό σημείο του T^* είναι το μηδενικό. Έστω $\mu \in C[0,1]^*$ κανονικό μέτρο Borel τέτοιο ώστε $T^*\mu = \mu$. Τότε

$$T^*\mu(f) = \mu(Tf) = \int_{[0,1]} Tf d\mu = \int_{[0,1]} -tf(t)d\mu(t) = \int_{[0,1]} f(t)d\mu(t), \quad \forall\ f \in C[0,1],$$

επομένως $\int_0^1 (1+t)f(t)d\mu(t) = 0$ για κάθε $f \in C[0,1]$. Έστω $g \in C[0,1]$. Η συνάρτηση h για την οποία $h(t) = \frac{g(t)}{1+t}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα θα πρέπει $\int_0^1 (1+t)h(t)d\mu(t) = 0 = \int_0^1 (1+t)\frac{g(t)}{1+t}d\mu(t) = \int_0^1 g(t)d\mu(t)$. Αφού $\mu(g) = 0, \quad \forall g \in C[0,1]$ έπεται ότι $\mu = 0$, δηλαδή $F(T^*) = \{0\}$. Από το Κριτήριο του Sine, συμπεραίνουμε ότι ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

Θα δείξουμε ότι ο T^2 δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Πρώτα από όλα ισχύει ότι $T^2 f(t) = t^2 f(t)$ για κάθε $f \in C[0,1]$ και $t \in [0,1]$. Αν $f \in F(T^2)$ τότε $T^2 f(t) = t^2 f(t) = f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $(1-t^2)f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η f είναι μηδέν παντού εκτός ίσως από το $t = 1$, αλλά λόγω συνέχειας θα έχουμε ότι $f \equiv 0$, άρα $F(T^2) = \{0\}$. Όμως $F((T^2)^*) \neq \{0\}$ αφού το μέτρο Dirac στο σημείο 1 αποτελεί σταθερό σημείο του $(T^2)^*$:

$$\left(T^2\right)^* \epsilon_1(f) = \epsilon_1(T^2 f) = \epsilon_1(t^2 f(t)) = f(1) = \epsilon_1(f), \quad \forall f \in C[0,1].$$

Το $F(T^2)$ δε διαχωρίζει τα σημεία του $F((T^2)^*)$, άρα από το κριτήριο του Sine ο T^2 δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου. □

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής που ορίστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα δεν είναι θετικός. Για την εύρεση αντιπαραδείγματος θετικού τελεστή χρειάζεται περισσότερη δουλειά: Ο Sine στο [Sin] κατασκεύασε μια θετική ισομετρία T σε κατάλληλα επιλεγμένο χώρο $C(K)$ τέτοια ώστε ο T να είναι τελεστής εργοδικού μέσου, αλλά ο T^2 όχι. Οι Emelyanov και Erkursun στο [Eme2] επέκτειναν το αποτέλεσμα του Sine δείχνοντας ότι για τυχαίο $1 \neq q \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετική ισομετρία $T : C(K) \to C(K)$ τέτοια ώστε ο T να είναι τελεστής εργοδικού μέσου αλλά ο T^q όχι.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα ακόμη αποτέλεσμα του Sine σύμφωνα με το οποίο αν $\{T_1, \ldots, T_n\}$ τελεστές εργοδικού μέσου με φραγμένες δυνάμεις, τότε κάθε κυρτός συνδυασμός τους $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i$ είναι και αυτός τελεστής εργοδικού μέσου. Η απόδειξη βασίζεται σε δύο λήμματα τα οποία με τη σειρά τους χρησιμοποιούν το Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Markov-Kakutani:

Θεώρημα 3.1.13. ***(Markov-Kakutani).*** *Έστω (X, τ) τοπολογικός γραμμικός χώρος, $K \subseteq X$ κυρτό και ασθενώς συμπαγές σύνολο και $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}^C(X)$ οικογένεια αφινικών και συνεχών τελεστών του X που αντιμετατίθενται, με $T(K) \subseteq K$ για κάθε $T \in \mathcal{P}$. Τότε υπάρχει $x \in K$ με $Tx = x$ για κάθε $T \in \mathcal{P}$.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ αφινική και συνεχής και $M_n(T) = \frac{I+\ldots+T^{n-1}}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(M_n(K))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, αποτελείται από ασθενώς συμπαγή σύνολα και έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, επομένως υπάρχει $x \in \cap_{n=1}^{\infty} M_n(T)(K)$. Το x αποτελεί σταθερό σημείο του T: $TM_n - M_n = \frac{T^n - I}{n}$, $x \in M_n(K)$, $Tx \in TM_n(K)$ άρα $Tx - x \in \frac{T^n-I}{n}(K)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ τέτοια ώστε $Tx - x = \frac{T^n-I}{n} q_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την ασθενή συμπάγεια του K μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη ότι υπάρχει $q_0 \in K$ τέτοιο ώστε $q_n \to q_0$ ασθενώς. Τότε $x^*(\frac{T^n q_n - q_n}{n}) \to 0$, για κάθε $x^* \in X^*$, άρα $x^*(x) = x^*(Tx)$ για κάθε $x^* \in X^*$, από το οποίο έπεται ότι $x = Tx$.

Έστω $(T_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}$ οικογένεια αφινικών και συνεχών τελεστών που αντιμετατίθενται και $F(T_i) = \{x \in X : T_i x = x\}$ τα οποία, σύμφωνα με τα όσα γράψαμε προηγουμένως, είναι μη κενά και επιπλέον κυρτά και συμπαγή σύνολα. Η οικογένεια $(F(T_i))_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής: Αν $i, j \in I$ και $T_i x = x$, τότε $T_j T_i x = T_i T_j x = T_j x$ και $T_j x \in F(T_i)$, δηλαδή $T_j(F(T_i)) \subseteq F(T_i)$. Άρα η $T_{j|F(T_i)}$ έχει σταθερό σημείο το οποίο αναγκαστικά θα ανήκει στο $F(T_i) \cap F(T_j)$. Επαγωγικά προκύπτει ότι η $(F(T_i))_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και από την ασθενή συμπάγεια του K συμπεραίνουμε ότι $\cap_{i\in I} F(T_i) \neq \varnothing$. □

Παρατήρηση 3.1.14. *Στην περίπτωση που ο (X, τ) υποτεθεί επιπλέον τοπικά κυρτός, το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει και από εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach ([Wer]): Αν T συνεχής και αφινική θέτουμε $\Delta = \{(x, x) : x \in K\}$ και $\mathrm{Gr}(T) = \{(x, Tx) : x \in K\}$ τα οποία είναι συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $K \times K$. Αν η T δεν είχε σταθερό σημείο, τότε $\Delta \cap \mathrm{Gr}(T) = \varnothing$. Από το Τρίτο Διαχωριστικό Θεώρημα υπάρχει $F \in (X \times X)^*$ τέτοιο ώστε*

$$F(x, x) \leqslant a < b < F(y, Ty), \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in K. \tag{3.3}$$

Ορίζουμε $x_1^*(x) = F(x, 0)$ και $x_2^*(y) = F(0, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Τότε $x_1^*, x_2^* \in X^*$ και επιλέγοντας $x = y$, η (3.3) δίνει $x_2^*(Tx) - x_2^*(x) > b - a > 0$. Επαγωγικά έχουμε ότι $x_2^*(T^n x) - x_2^*(x) > n(b - a) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $x_2^*(T^n x) - x_2^*(x) \to \infty$ το οποίο είναι άτοπο αφού $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ και το K ασθενώς συμπαγές.

Λήμμα 3.1.15. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\Sigma \subseteq B(X)$ το σύνολο των συστολών του X. Τότε ταυτοτικός τελεστής $I \in B(X)$ είναι ακραίο σημείο του Σ.*

Απόδειξη. Έστω πως όχι. Τότε υπάρχουν συστολές $T_1, T_2 : X \to X$ τέτοιες ώστε $I = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$. Θέτουμε $T = T_1 - I$, οπότε $T_1 = I + T$, $T_2 = I - T$, $T \neq 0$ και για $x^* \in X^*$ θέτουμε $x_1^* = T_1^* x^*$, $x_2^* = T_2^* x^*$. Παρατηρούμε ότι $\|x_i^*\| = \|T_i^* x^*\| \leqslant \|T_i^*\|\|x^*\| = \|T_i\|\|x^*\| \leqslant \|x^*\|$, άρα $\|x_1^*\|, \|x_2^*\| \leqslant \|x^*\|$ και αν $x^* \in B_{X^*}$ τότε $x_1^*, x_2^* \in B_{X^*}$. Επιπλέον $x^* = \frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^*$, αφού $I = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 \Rightarrow I^* = \frac{1}{2}T_1^* + \frac{1}{2}T_2^* \Rightarrow x^* = \frac{1}{2}T_1^* x^* + \frac{1}{2}T_2^* x^* = \frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^*$. Αν $x^* \in \operatorname{ext} B_{X^*}$ τότε $x_1^* = x_2^* = x^*$, δηλαδή $T^* x^* = T_1^* x^* - I x^* = 0$, άρα $T^*(\operatorname{ext} B_{X^*}) = \{0\}$. Από το Θεώρημα Krein-Milman, $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}} \operatorname{ext} B_{X^*} \Rightarrow T^*(B_{X^*}) = \{0\} \Rightarrow T^* = 0 \Rightarrow T = 0$, άτοπο. □

Λήμμα 3.1.16. ***(Brunel-Falkowitz).*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αυστηρά θετικών αριθμών με άθροισμα ίσο με ένα και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συστολών του X που αντιμετατίθενται. Αν $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n$, τότε $F(T) = \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.*

Απόδειξη. Αν $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ τότε $T_n x = x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x = x$, δηλαδή $x \in F(T)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι $F(T) \subseteq F(T_n)$. Θέτουμε $S = \frac{\sum_{k\neq n} a_k T_k}{1-a_n}$ και για $x \in F(T)$ έχουμε ότι $T_n x = T_n T x = T T_n x$, δηλαδή $T_n x \in F(T)$. Άρα $S(F(T)) \subseteq F(T)$. Επιπλέον $T = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k = \sum_{k\neq n} a_k T_k + a_n T_n = (1-a_n)S + a_n T_n$. Όμως $T_{|F(T)} = I$, άρα από το προηγούμενο λήμμα, $T_{n|F(T)} = I$, δηλαδή αν $x \in F(T) \Rightarrow x \in F(T_n)$. Αφού ο εγκλεισμός αυτός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $F(T) \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. □

Θεώρημα 3.1.17. ***(Sine, 1975).*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $T_1, \ldots, T_n$ τελεστές εργοδικού μέσου με φραγμένες δυνάμεις. Αν $T \in \mathrm{co}\{T_1, \ldots T_n\}$, τότε και ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Θα δουλέψουμε για την περίπτωση όπου $n = 2$. Περνώντας, αν είναι απαραίτητο, σε ισοδύναμη νόρμα μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι οι T_1, T_2 είναι συστολές. Πράγματι, αν ορίσουμε $\|x\|_1 = \sup\{\|T_1^{k_1} T_2^{k_2} x\| : k_1, k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι η $\|\cdot\|_1$ αποτελεί νόρμα και μάλιστα ισοδύναμη με την αρχική. Για τον τελευταίο ισχυρισμό επιλέγουμε $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T_1^m\|, \|T_2^m\| < M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οπότε $\|x\|_1 = \sup\{\|T_1^{k_1} T_2^{k_2} x\| : k_1, k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \leqslant M^2 \|x\|$, για κάθε $x \in X$, ενώ $\|x\|_1 \geqslant \|T_1^0 T_2^0 x\| = \|x\|$. Άρα $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M^2 \|x\|$, για κάθε $x \in X$.

Έστω $\lambda \in [0,1]$ και $T = \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2$. Θα δείξουμε ότι ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Sine, δηλαδή δείχνοντας ότι το $F(T)$ διαχωρίζει το $F(T^*)$. Από το Λήμμα των Brunel-Falkowitz, $F(T) = F(T_1) \cap F(T_2)$ και $F(T^*) = F(T_1^*) \cap F(T_2^*)$. Έστω $x^* \in F(T_1^*) \cap F(T_2^*)$. Αφού ο T_1 είναι τελεστής εργοδικού μέσου υπάρχει $x \in F(T_1)$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \neq 0$. Θέτουμε $y = \lim M_n(T_2)x$. Η σχέση $T_2 x = T_2 T_1 x = T_1 T_2 x$ δίνει ότι $T_2(F(T_1)) \subseteq F(T_2)$, επομένως $y \in F(T_1) \cap F(T_2)$. Επιπλέον $x^*(y) = \lim x^*(M_n(T_2)x) = \lim M_n(T_2^*) x^*(x) = x^*(x) \neq 0$. □

Παρατήρηση 3.1.18. *Γενικότερα, αν $\mathcal{P} \subseteq B(X)$ ομοιόμορφα φραγμένη ημιομάδα τελεστών, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ισοδύναμη νόρμα $\|\cdot\|_1$ για την οποία $\|x\|_1 = \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{P}\}$ για κάθε $x \in X$. Τα στοιχεία της $\mathcal{P}$ είναι συστολές ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_1$.*

3.2 Σύνδεση της Εργοδικότητας με την Αυτοπάθεια

Όπως γράψαμε και στην εισαγωγή το 1939 ο Lorch απέδειξε ότι κάθε αυτοπαθής χώρος Banach είναι χώρος εργοδικού μέσου. Πρόκειται για το Θεώρημα 3.2.2, το οποίο είναι και το πρώτο αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε στην παράγραφο αυτή. Το 1976 ο Louis Sucheston διερωτήθηκε αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Lorch. Συγκεκριμένα η αρχική διατύπωση του ερωτήματος που έθεσε ήταν η εξής: Αν σε έναν χώρο Banach κάθε γραμμική *συστολή* είναι τελεστής εργοδικού μέσου, τότε έπεται ότι ο χώρος είναι αυτοπαθής;

Γρήγορα διαπιστώθηκε ότι το ερώτημα του Sucheston δύσκολα θα μπορούσε να απαντηθεί καταφατικά καθώς προσπαθούσε να συνδέσει μια ισομετρική ιδιότητα ενός χώρου με μια ισομορφική και επομένως αναδιατυπώθηκε σε μια μορφή που θα ήταν πιο εύκολο να απαντηθεί.[16] Η μορφή αυτή είναι ακριβώς το αντίστροφο του θεωρήματος του Lorch:

Ανοιχτό Πρόβλημα 3.2.1. *Αν ένας χώρος Banach έχει την ιδιότητα ότι κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου, τότε έπεται ότι είναι αυτοπαθής;*

Το πρώτο αποτέλεσμα προς την κατεύθυνση αυτή δόθηκε το 1986 από τον Zaharopol [Zah] ο οποίος απέδειξε ότι σε σ-διατακτικά πλήρεις Banach lattices το Ερώτημα 3.2.1 έχει καταφατική απάντηση. Το 1997 ο Emel'yanov [Eme] έδειξε ότι σε Banach lattices που δεν είναι σ-διατακτικά πλήρεις υπάρχουν πάντα τελεστές με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστές εργοδικού μέσου. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Zaharopol και Emel'yanov προκύπτει ότι ένας Banach lattice είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν είναι χώρος εργοδικού μέσου (βλ. Παράγραφο 3.2δ').

Το 2001 οι Fonf, Lin και Wojtaszczyk [FLW], χρησιμοποιώντας έναν χαρακτηρισμό του Zippin για αυτοπαθείς χώρους με βάση Schauder, απέδειξαν ότι ένας χώρος με βάση είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν είναι χώρος εργοδικού μέσου (βλ. Παράγραφο 3.2γ').

3.2α′ Το Ευθύ Πρόβλημα

Υπάρχει κίνδυνος η απόδειξη του Θεωρήματος του Lorch που θα δώσουμε (α' τρόπος) να σας φανεί τετριμμένη. Εαν όντως σας δημιουργηθεί αυτή η εντύπωση, σκεφτείτε ποια από τα θεωρήματα που χρησιμοποιήσαμε είναι μεταγενέστερα του Θεωρήματος του Lorch. Φυσικά ο α' τρόπος δεν είναι η απόδειξη που έδωσε ο ίδιος ο Lorch, αλλά η απόδειξη που θα δίναμε με τις σημερινές μας γνώσεις. Το επιχείρημα του Lorch ήταν σαφώς πιο περίπλοκο και για λόγους πληρότητας το συμπεριλάβαμε ως β′ τρόπο.

Θεώρημα 3.2.2. ***(Lorch, 1939)*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Τότε η ακολουθία $M_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και επιπλέον $T(\lim M_n x) = \lim M_n x$.*

Απόδειξη. **α′ τρόπος:**

Θέτουμε $A = \{M_n x : n \in \mathbb{N}\}$. Αφού ο T έχει φραγμένες δυνάμεις το A είναι φραγμένο υποσύνολο του X, δηλαδή υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $A \subseteq KB_X$. Δεδομένου ότι ο χώρος μας είναι αυτοπαθής, η μοναδιαία μπάλα B_X θα είναι ασθενώς συμπαγής. Επιπλέον $\overline{A}^w \subseteq KB_X$ ασθενώς κλειστό, άρα και ασθενώς συμπαγές. Από το Θεώρημα Eberlein-Šmulian η $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ θα έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, ενώ απο το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου του Eberlein το ασθενές οριακό σημείο της $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί και το ζητούμενο (ισχυρό) όριό της.

[16]Τελικά το αρχικό ερώτημα του Sucheston απαντήθηκε αρνητικά. Το 2009 οι Fonf, Lin και Wojtaszczyk [FLW2] κατασκεύασαν έναν μη αυτοπαθή χώρο Banach στον οποίο κάθε συστολή είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Θα μελετήσουμε την απόδειξή τους στην Παράγραφο 3.4.

β΄ τρόπος:

Από το Πόρισμα 3.1.7 αρκεί να δείξουμε ότι $X = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Θυμίζουμε ότι αν $A \subseteq X$, ορίζουμε ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του A να είναι το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων συναρτησιακών του X που μηδενίζονται στο A, δηλαδή

$$A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in A\}.$$

Δείχνουμε πρώτα ότι $A^{\perp\perp} = \overline{A}$:

$$\begin{aligned} A^{\perp\perp} &= \{x^{**} \in X^{**} : x^{**}(x^*) = 0, \text{ για κάθε } x^* \in A^{\perp}\} \\ &= \{Q(x) \in X^{**} : Q(x)(x^*) = 0, \text{ για κάθε } x^* \in A^{\perp}\} \\ &= \{x \in X : x^*(x) = 0, \text{ για κάθε } x^* \in A^{\perp}\}, \end{aligned}$$

με τις δύο τελευταίες ισότητες να ισχύουν επειδή ο χώρος μας είναι αυτοπαθής και $Q : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση. Προφανώς $A \subseteq A^{\perp\perp}$ και επειδή το $A^{\perp\perp}$ είναι κλειστό έπεται ότι $\overline{A} \subseteq A^{\perp\perp}$. Αν υποθέταμε ότι $A \subsetneq A^{\perp\perp}$, τότε από Θεώρημα Hahn-Banach, θα υπήρχαν $x_0 \in A^{\perp\perp} \setminus \overline{A}$ και $x^* \in X^*$ τέτοια ώστε $x^*(a) = 0$ για κάθε $a \in A$ και $x^*(x_0) > 0$. Όμως τότε $x^* \in A^{\perp}$ και αφού $x_0 \in A^{\perp\perp}$ θα έπρεπε $x^*(x_0) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $A = A^{\perp\perp}$.

Παρατηρούμε ότι $(I-T)(X)^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = x^*(Tx), \forall x \in X\} = \{x^* \in X^* : T^*x^* = x^*\} = F(T^*)$. Άρα $F(T^*)^{\perp} = (I-T)(X)^{\perp\perp} = \overline{(I-T)(X)}$ και με εντελώς όμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι $\overline{(I-T^*)(X^*)} = F(T)^{\perp}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $X = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $x_0 \in X \setminus F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$ και από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*(F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}) = 0$ και $x^*(x_0) > 0$. Ειδικότερα $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in F(T)$, δηλαδή $x^* \in F(T)^{\perp} = \overline{(I-T^*)(X^*)}$ και $x^*(\overline{(I-T)(X)}) = 0$, δηλαδή $x^* \in (I-T)(X)^{\perp} = F(T^*)$. Άρα $x^* \in F(T^*) \cap \overline{(I-T^*)(X^*)} = \{0\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού το x^* είναι μη μηδενικό.

□

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του von Neumann προκύπτει άμεσα ως πόρισμα από το Θεώρημα του Lorch, δίνοντας έτσι έναν προφανή πέμπτο τρόπο απόδειξής του. Δε θα αναφέρουμε άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος του von Neumann σε αυτή τη διπλωματική.

3.2β΄ Το Αντίστροφο Πρόβλημα

Το Θεώρημα του Lorch διαβεβαιώνει ότι σε αυτοπαθείς χώρους κάθε γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου, τι συμβαίνει όμως αν ο χώρος δεν υποτεθεί αυτοπαθής; Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι στους μη αυτοπαθείς χώρους c_0, ℓ_1, ℓ_∞ και $C[0,1]$ υπάρχουν τελεστές με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστές εργοδικού μέσου.

Παράδειγμα 3.2.3. *Θεωρούμε τους χώρους c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $C[0,1]$ και ορίζουμε τους τελεστές:*

(i) $L : c_0 \to c_0$ *με* $L((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_1, x_1, x_2, x_3, \dots)$, *για κάθε* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$,

(ii) $S : \ell_1 \to \ell_1$ *με* $S((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, *για κάθε* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$,

(iii) $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ *με* $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, *για κάθε* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$,

(iv) $R : C[0,1] \to C[0,1]$ *με* $(Rf)(x) = xf(x)$, *για κάθε* $f \in C[0,1]$,

(v) $U : C[0,1] \to C[0,1]$ *με* $(Uf)(x) = f(x^2)$, *για κάθε* $f \in C[0,1]$.

Οι τελεστές L, S, T, R, U *είναι τελεστές με φραγμένες δυνάμεις, αλλά όχι τελεστές εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι και οι πέντε τελεστές που ορίσαμε έχουν νόρμα ίση με ένα και επομένως είναι τελεστές με φραγμένες δυνάμεις. Θα δείξουμε ότι δεν είναι τελεστές εργοδικού μέσου.

(i) Θεωρούμε την ακολουθία $e = (1, 0, 0, \dots) \in c_0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $L^n(e) = (\underbrace{1, \dots, 1,}_{n+1-\text{το πλήθος}} 0, \dots)$. Επομένως

$$M_n(e) = \frac{(n, n-1, \dots, 2, 1, 0, \dots)}{n} = \left(1, 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0 \dots\right).$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(M_n e)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι Cauchy. Έστω πως είναι. Τότε για $\epsilon = \frac{1}{8}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ να ισχύει ότι $\|M_n e - M_m e\| < \frac{1}{8}$. Διαλέγουμε $n = 2n_0$, $m = 4n_0$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$\begin{aligned} M_n e &= (1, 1 - \tfrac{1}{2n_0}, 1 - \tfrac{2}{n_0}, \dots, 1 - \tfrac{1}{2}, \dots) \\ M_n e &= (1, 1 - \tfrac{1}{4n_0}, 1 - \tfrac{2}{4n_0}, \dots, 1 - \tfrac{1}{4}, \dots) \end{aligned}$$

και επομένως $\|M_n e - M_m e\|_\infty \geqslant |\frac{1}{2} - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο L δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

Θα απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό και με έναν δεύτερο τρόπο ούτως ώστε να δούμε το κριτήριο του Sine σε δράση: Αρκεί να δείξουμε ότι το $F(L)$ δε διαχωρίζει το $F(L^*)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(L) = \{0\}$ αφού αν $x = (x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_1, x_2, \dots)$ τότε $x_1 = x_1 = x_2 = \dots$, δηλαδή η x είναι σταθερή ακολουθία και, καθώς βρισκόμαστε στον c_0, η μόνη σταθερή ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν είναι η μηδενική. Υπολογίζουμε τον $L^* : c_0^* = \ell_1 \to c_0^* = \ell_1$. Αν $b \in \ell_1$ και $a \in c_0$, τότε $L^*(b)(a) = b(L(a)) = b(a_1, a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots)(a_1, a_1, a_2 \dots) = b_1 a_1 + b_2 a_1 + b_3 a_2 + \dots$. Η τελευταία ισότητα δείχνει ότι $L^* b = (b_1 + b_2, b_3, b_4, \dots)$. Αν $b \in F(L^*)$, τότε $b_1 = b_1 + b_2, b_2 = b_3, b_3 = b_4, \dots$, άρα $b_2 = b_3 = \dots = 0$ και επομένως $F(L^*) = \{(a, 0, 0, \dots) : a \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς το $F(L) = \{0\}$ δε διαχωρίζει τα σημεία του $F(L^*)$, άρα από το κριτήριο του Sine ο L δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

(ii) Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά το κριτήριο του Sine. Αν $x \in F(S)$, τότε $x = (x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, άρα $x = 0$ και $F(S) = \{0\}$. Θεωρούμε τον συζυγή τελεστή $S^* : \ell_1^* = \ell_\infty \to \ell_1^* = \ell_\infty$. Αν $b \in \ell_\infty$ και $a \in \ell_1$ έχουμε ότι $S^*(b)(a) = b(S(a)) = (b_1, b_2, \ldots)(0, a_1, a_2, \ldots) = b_2 a_1 + b_3 a_2 + \ldots$, επομένως $S^* b = (0, b_2, b_3, \ldots)$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι $F(S^*) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : x_1 = 0\}$. Το $F(S) = \{0\}$ δε διαχωρίζει το $F(S^*)$, άρα από το κριτήριο του Sine ο S δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

(iii) Επιλέγουμε $x = (1, 1, 1, \ldots)$ και παρατηρούμε ότι

$$T^n(x) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\text{το πλήθος}}, 1, 1, \ldots), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η ακολουθία $(M_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Cauchy, αφού

$$M_n x = (\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}, 1, 1, \ldots)$$

και $\|M_n x - M_{n+k} x\|_\infty \geqslant \frac{k}{n+k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.

(iv) Έστω $f = \mathbf{1}$ η σταθερή συνάρτηση που είναι ίση με ένα. Τότε $(R^n f)(x) = x^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $(M_n f)(x) = \frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{n} = \frac{x^{n-2}-1}{n(x-1)}$, με το όριο της ακολουθίας αυτής να ισούται με μηδέν εαν $x < 1$ και ένα εαν $x = 1$. Δηλαδή $M_n f \to g$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{αν } x = 1. \end{cases}$$

Αφού η g είναι ασυνεχής, έπεται ότι το όριο της $M_n f$ δεν υπάρχει στο $C[0, 1]$, άρα ο R δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

(v) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Sine. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} F(U) &= \left\{f \in C[0, 1] : f(x) = f(x^2),\ \forall x \in [0, 1]\right\} \\ &= \{f \in C[0, 1] : f = \text{σταθερή}\}. \end{aligned}$$

Πράγματι, αν $f(x) = f(x^2)$ για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε επαγωγικά προκύπτει ότι $f(x) = f(x^{2n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [0, 1]$. Αν επιλέξουμε $x < 1$, τότε $x^{2n} \to 0$ και λόγω της συνέχειας της f έχουμε ότι $f(0) = f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1)$. Πάλι λόγω συνέχειας $f(1) = f(0)$ και επομένως η f είναι σταθερή.

Θα δείξουμε τώρα ότι το $F(U)$ δε διαχωρίζει τα σημεία του $F(U^*)$. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τα μέτρα Dirac $\epsilon_0, \epsilon_1 : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ για τα οποία $\epsilon_0(f) = f(0)$ και $\epsilon_1(f) = f(1)$ για κάθε $f \in C[0, 1]$. Τα ϵ_0, ϵ_1 αποτελούν σταθερά σημεία του U^*:

$$\begin{aligned} U^*\epsilon_0(f) &= \epsilon_0(Uf) = \epsilon_0(f(x^2)) = f(0) = \epsilon_0(f), \\ U^*\epsilon_1(f) &= \epsilon_1(Uf) = \epsilon_1(f(x^2)) = f(1) = \epsilon_1(f). \end{aligned}$$

Τα μέτρα ϵ_0 και ϵ_1 είναι προφανώς διάφορα μεταξύ τους, όμως δε διαχωρίζονται από τις σταθερές συναρτήσεις αφού $\epsilon_0(\lambda\mathbf{1}) = \lambda = \epsilon_1(\lambda\mathbf{1})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα του κατά πόσον μπορούμε, ξεκινώντας από οποιονδήποτε μη αυτοπαθή χώρο, να επαναλάβουμε κάποια παρόμοια κατασκευή βρίσκοντας έτσι τελεστή ο οποίος να έχει φραγμένες δυνάμεις, αλλά να μην είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Αν μια τέτοια κατασκευή ήταν πάντοτε εφικτή, τότε θα είχαμε στα χέρια μας έναν πλήρη χαρακτηρισμό των αυτοπαθών χώρων: Αυτοπαθείς χώροι είναι ακριβώς οι χώροι εργοδικού μέσου.

3.2γ΄ Η Απόδειξη για Χώρους με Βάση

Το 2001 οι Fonf, Lin και Wojtaszczyk, έδειξαν ότι μια τέτοια κατασκευή είναι εφικτή αν ο χώρος υποτεθεί χώρος με βάση Schauder. Προτού καταπιαστούμε με την εργασία τους θυμίζουμε κάποιες έννοιες για χώρους με βάση.

Χώροι με Βάση

Ορισμός 3.2.4. *Έστω X χώρος Banach και $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Τότε η $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **βάση Schauder** του X, ή εν συντομία **βάση**.*

Ορισμός 3.2.5. *Έστω X χώρος Banach και $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών, μη τετριμμένων υπόχωρων του X. Αν κάθε $x \in X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ με $x_k \in E_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **διάσπαση Schauder** του X και συμβολίζεται ως $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$.*

Ορισμός 3.2.6. *Έστω X χώρος Banach και $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ μια διάσπαση Schauder του X. Ορίζουμε τους τελεστές $Q_k : X \to X_k$ και $P_k : X \to X_k$ ως εξής: $Q_k(x) = Q_k(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = x_k$ και $P_k(x) = P_k(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = x_1 + \ldots + x_k$.*

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι τελεστές Q_k, P_k είναι συνεχείς τροποποιώντας κατάλληλα την απόδειξη για την περίπτωση που ο χώρος μας έχει βάση Schauder (βλ. [Cos], σελίδα 40, Άσκηση 17).

Πρόταση 3.2.7. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ διάσπαση Schauder. Οι τελεστές Q_k, P_k που ορίστηκαν παραπάνω είναι συνεχείς και ομοιόμορφα φραγμένοι.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\|x\|_1 = \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\|, \|x_N\| : N \in \mathbb{N}\right\}, \quad \forall x \in X. \tag{3.4}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα:

- Αν $\|x\|_1 = 0$, τότε $\|x_k\| = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $x = 0$.

- Αν $x = 0$, τότε $x_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ λόγω της μοναδικότητας της διάσπασης του x σαν άθροισμα στοιχείων των E_k. Άρα $\|x_N\| = \|x_1+\ldots+x_N\|=0$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και επομένως $\|x\|_1 = 0$.

- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x, y \in X$ τότε

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_1 &= \sup\{\|\lambda x_1 + \ldots + \lambda x_N\|, \|\lambda x_N\| : N \in \mathbb{N}\} \\
&= \lambda \sup\{\|x_1 + \ldots + x_N\|, \|x_N\| : N \in \mathbb{N}\} \\
&= \lambda \|x\|_1, \quad \text{ενώ} \\
\|x+y\|_1 &= \sup\{\|x_1 + y_1 + \ldots + x_N + y_N\|, \|x_N + y_N\| : N \in \mathbb{N}\} \\
&\leqslant \sup\{\|x_1 + \ldots + x_N\|, \|x_N\| : N \in \mathbb{N}\} + \\
&\quad + \sup\{\|y_1 + \ldots + y_N\|, \|y_N\| : N \in \mathbb{N}\} \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_i$ τότε

$$\|x_k\| \leqslant 2\|x\|_1, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Πράγματι, $\|x_k\| = \|\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\| \leqslant \|\sum_{i=1}^{k} x_i\| + \|\sum_{i=1}^{k-1} x_i\| \leqslant 2\|x\|_1$.

Θα δείξουμε ότι ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης. Έστω Cauchy ακολουθία $(\tilde{y}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με κάθε στοιχείο $\tilde{y}^n$ να διασπάται ως $\tilde{y}^n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^n$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{y}^n - \tilde{y}^l\|_1 < \epsilon$, για κάθε $n, l \geqslant n_0$, δηλαδή $\sup\{\|y_1^n - y_1^l + \ldots + y_N^n - y_N^l\|, \|y_N^n - y_N^l\| : N \in \mathbb{N}\} < \epsilon$ για κάθε $n, l \geqslant n_0$. Από την (3.5) έχουμε ότι $\|y_k^n - y_k^l\| \leqslant 2\|\tilde{y}^n - \tilde{y}^l\|_1 \leqslant 2\epsilon$, για κάθε $k, l \geqslant n_0$. Δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(y_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy που περιέχεται στον κλειστό υπόχωρο E_k, επομένως θα συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $y_k \in E_k$. Θέτουμε $\tilde{y} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ και από τη σχέση $\sup\{\|y_1^n - y_1^l + \ldots + y_N^n - y_N^l\|, \|y_N^n - y_N^l\|\} \leqslant \epsilon, \forall k, l \geqslant n_0$, αφήνωντας το l να τείνει στο άπειρο συμπεραίνουμε ότι $\|\tilde{y}^n - \tilde{y}\| < \epsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$, δηλαδή $\tilde{y}^n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \tilde{y}$ και ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης.

Εν συνεχεία θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_1)$. Ο I^{-1} είναι φραγμένος αφού

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{\left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\| : N \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \|x\|_1. \tag{3.6}$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε ότι και ο T είναι συνεχής, επομένως υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$K\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1, \quad \forall x \in X. \tag{3.7}$$

Είναι άμεσο ότι οι τελεστές P_k και Q_k είναι συνεχείς και ομοιόμορφα φραγμένοι ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα, άρα θα είναι και ως προς την ισοδύναμη με αυτήν $\|\cdot\|$ νόρμα. $\square$

Παρατήρηση 3.2.8. *Είναι προφανές ότι αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και T τελεστής με φραγμένες δυνάμεις, τότε ο T παραμένει τελεστής με φραγμένες δυνάμεις και ως προς οποιαδήποτε άλλη νόρμα ισοδύναμη με την αρχική. Επομένως, δοθέντος ενός χώρου Banach X και μιας διάσπασης Schauder $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, μπορούμε να περνάμε σε ισοδύναμη νορμα για την οποία να ισχύει ότι $\|P_k\| = \|Q_k\| = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Ορισμός 3.2.9. *Έστω X χώρος Banach και $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ μια διάσπαση Schauder του X. Η διάσπαση ονομάζεται **συρρικνούσα** (shrinking) αν για κάθε $f \in X^*$ ισχύει ότι $\|f_{|\sum_{i=k}^{\infty} X_i}\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Κλείνουμε την παράγραφο αναφέροντας χωρίς απόδειξη δύο χαρακτηρισμούς για αυτοπαθείς χώρους με βάση Schauder που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2.10. ***(Zippin, 1968)*** *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder. Αν όλες οι βάσεις του X είναι συρρικνούσες, τότε ο X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Zip], Theorem 1, p. 77. □

Θεώρημα 3.2.11. ***(Pelczynski)*** *Ένας χώρος Banach είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε υπόχωρός του με βάση Schauder είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη σκιαγραφείται στο [Die], Exercise 10, p. 54. □

Το Θεώρημα των Fonf, Lin και Wojtaszczyk

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε πλήρως την απόδειξη των Fonf, Lin και Wojtaszczyk ότι ένας χώρος με βάση είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν είναι χώρος εργοδικού μέσου. Για να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα θα χρειαστούμε πρώτα το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 3.2.12. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ μια μη-συρρικνούσα διάσπασή του. Τότε υπάρχει διάσπαση $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ η οποία ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: Υπάρχουν $h \in X^*$ και $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ τέτοια ώστε*

$$x_k \in E_k, \quad \|e_k\| \leqslant 1 \ \text{ και } \ h(e_k) = 1, \ \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Απόδειξη. Αφού η διάσπαση $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ είναι μη-συρρικνούσα θα υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f_{|\sum_{i=n}^{\infty} X_i}\| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, δηλαδή $\limsup_{n\to\infty} \|f_{|\sum_{i=n}^{\infty} X_i}\| \geqslant a > 0$. Επιλέγουμε δείκτη $n_1 \in \mathbb{N}$ και διάνυσμα y_1 ως εξής:

$$y_1 = \sum_{k=n_1+1}^{\infty} x_k^1, \quad x_k^1 \in X_k \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|y_1\| = 1, \quad |f(y_1)| \geqslant \frac{a}{2}. \tag{3.9}$$

Μια τέτοια επιλογή είναι εφικτή καθώς $\limsup \|f_{|\sum_{i=n}^{\infty} X_i}\| \geqslant a$. Αφού $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} x_k^1 < \infty$ θα υπάρχει $n_2' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\sum_{k=n_2'+1}^{\infty} x_k^1\| < \frac{a}{4}$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $n_2 \geqslant n_2'$ τέτοιο ώστε $\|f_{|\sum_{i=n_2+1}^{\infty} X_i}\| \geqslant a$ και όπως και πριν υπάρχει διάνυσμα y_2 τέτοιο ώστε

$$y_2 = \sum_{k=n_2+1}^{\infty} x_k^2, \quad x_k^2 \in X_k \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|y_2\| = 1, \quad |f(y_2)| \geqslant \frac{a}{2}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία διανυσμάτων $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$y_j = \sum_{k=n_j+1}^{\infty} x_k^j, \quad x_k^j \in X_k \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|y_j\| = 1, \quad |f(y_j)| \geqslant \frac{a}{2} \quad \text{και} \quad \left\| \sum_{k=n_j+1}^{\infty} x_k^{j-1} \right\| < \frac{a}{4}, \tag{3.10}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $E_1 = \sum_{i=1}^{n_2} X_i$ και $E_j = \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} X_i$, για κάθε $j \geqslant 2$. Η ακολουθία $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ αποτελεί διάσπαση Schauder αφού $X = \sum_{j=1}^{\infty} X_j = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$ και οι E_j είναι κλειστοί υπόχωροι. Θέτουμε $z_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} x_k^j$. Προφανώς $z_j \in E_j$ για κάθε j και επιπλέον θα δείξουμε ότι

$$1 - \frac{a}{4} \leqslant \quad \|z_j\| \quad \leqslant 1 + \frac{a}{4} \quad \text{και} \tag{3.11}$$

$$\frac{a}{4} \leqslant \quad |f(z_j)| \quad \leqslant 1 + \frac{a}{4}. \tag{3.12}$$

Αν $v_j = \sum_{k=n_{j+1}+1}^{\infty} x_k^j$, τότε $v_j + z_j = y_j$, επομένως $\|z_j\| \leqslant \|y_j\| + \|v_j\| \leqslant 1 + \frac{a}{4}$, ενώ $1 = \|y_j\| = \|z_j + v_j\| \leqslant \|z_j\| + \|v_j\| \leqslant \|z_j\| + \frac{a}{4} \Rightarrow \|z_j\| > 1 - \frac{a}{4}$, άρα ισχύει η (3.11). Για την (3.12), $|f(y_j)| \leqslant |f(z_j)| + |f(v_j)| \Rightarrow |f(z_j)| \geqslant |f(y_j)| - |f(v_j)| \geqslant \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$. Η ανισότητα $|f(z_j)| \leqslant 1 + \frac{a}{4}$ προκύπτει άμεσα από την (3.11).

Ορίζουμε $h = \frac{a+4}{a} f$ και $e_j = \frac{a}{(4+a)f(z_j)} z_j$. Τότε $\|e_j\| = \frac{a}{(4+a)|f(z_j)|}\|z_j\| \leqslant \frac{4+a}{4+a} = 1$ και $h(e_j) = \frac{4+a}{a} f(e_j) = \frac{4+a}{a} \frac{a}{4+a} \frac{f(z_j)}{f(z_j)} = 1$. Η διάσπαση $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, το συναρτησιακό h και η ακολουθία $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιούν τις ιδιότητες που απαιτήσαμε στην εκφώνηση. □

Θεώρημα 3.2.13. ***(Fonf, Lin, Wojtaszczyk, 2001)*** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach ο οποίος επιδέχεται μη-συρρικνούσα διάσπαση Schauder. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις $T : X \to X$ ο οποίος δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ διάσπαση Schauder, $h \in X^*$ και $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με

$$e_k \in E_k, \quad \|e_k\| \leqslant 1 \quad \text{και} \quad h(e_k) = 1, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Περνώντας σε ισοδύναμη νόρμα (βλ. Παρατήρηση 3.2.8) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|Q_k\|_1 = \|P_k\|_1 = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως η $\|\cdot\|_1$ νόρμα των e_k δεν είναι πια φραγμένη απο το 1, αλλά από κάποια σταθερά $M > 0$. Θέτοντας $e_k' = \frac{e_k}{M}$ και $h' = Mh$, εξασφαλίζουμε ότι τα e'_k και h' ικανοποιούν την (3.13) ως προς την ισοδύναμη νόρμα. Χωρίς βλάβη λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε εξ'αρχής ότι η νόρμα του χώρου μας $\|\cdot\|$ ικανοποιεί την $\|P_k\| = \|Q_k\| = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ταυτόχρονα ότι υπάρχουν $e_k \in E_k$, $h \in X^*$ με την ιδιότητα (3.13).

Επιλέγουμε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$, συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα των n-πρώτων όρων της, $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ και για κάθε $x \in X$ θέτουμε $b_m(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k Q_k(x)$.

Η $(b_m(x))_{m=1}^{\infty}$ αποτελεί ακολουθία Cauchy:

$$\begin{aligned} b_m(x) &= \sum_{k=1}^{m} A_k Q_k(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k x_k = a_1 x_1 + (a_1 + a_2) x_2 + \ldots + (a_1 + \ldots + a_m) x_m \\ &= a_1(x_1 + \ldots + x_m) + a_2(x_2 + \ldots + x_m) + \ldots + a_m x_m \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\sum_{l=j}^{m} x_l \right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

ενώ

$$\begin{aligned} b_m(x) - b_{n-1}(x) &= \sum_{k=n}^{m} A_k Q_k(x) = (a_1 + \ldots + a_n) x_n + \ldots + (a_1 + \ldots + a_m) x_m \\ &= a_1(x_n + \ldots + x_m) + \ldots + a_n(x_n + \ldots + x_m) + \\ &\quad + a_{n+1}(x_{n+1} + \ldots + x_m) + \ldots + a_m x_m \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \left(\sum_{j=n}^{m} x_j \right) + \sum_{j=n+1}^{m} a_j \sum_{l=j}^{m} x_l. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Καθώς τόσο η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, όσο και η $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ συγκλίνουν, προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.15) ότι η $b_m(x)$ είναι ακολουθία Cauchy.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\|b_m(x)\| \leqslant 2\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

αφού $\|b_m(x)\| = \| \sum_{j=1}^{m} a_j (P_m - P_{j-1}) x \leqslant \| \sum_{j=1}^{m} a_j P_m(x) \| + \| \sum_{j=1}^{m} a_j P_{j-1}(x) \| \leqslant 2\|x\|$.

Ορίζουμε τελεστή $T_a : X \to X$ ως εξής:

$$T_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Q_k(x) + \sum_{j=2}^{\infty} h(P_{j-1} x) a_j e_j. \tag{3.17}$$

Ο τελεστής αυτός είναι καλά ορισμένος αφού όπως δείξαμε η ακολουθία $(\sum_{k=1}^{m} A_k Q_k x)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει, ενώ η σειρά $\sum_{j=2}^{\infty} h(P_{j-1} x) a_j e_j$ συγκλίνει ως απολύτως συγκλίνουσα σειρά σε χώρο Banach: $\sum_{j=2}^{\infty} \|h(P_{j-1} x) a_j e_j\| \leqslant \|x\| \|h\| \sum_{j=2}^{\infty} a_j \leqslant \|x\| \|h\|$. Συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με την (3.16) παίρνουμε ότι

$$\|T_a\| \leqslant 2 + \|h\|. \tag{3.18}$$

Ο T_a έχει φραγμένες δυνάμεις: Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες θετικών με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$, τότε υπάρχει ακολουθία θετικών $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$ και $T_a \circ T_b = T_c$. Αν αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, τότε $\|T_a \circ T_b\| = \|T_c\| \leqslant 2 + \|h\|$ με το φράγμα αυτό να είναι ανεξάρτητο από τις ακολουθίες που επιλέξαμε. Επομένως $\|T_a^2\| = \|T_a \circ T_a\| \leqslant 2 + \|h\|$ και επαγωγικά προκύπτει ότι οι ο T_a έχει φραγμένες δυνάμεις με ένα άνω φράγμα να είναι το $2 + \|h\|$.

Έστω λοιπόν ακολουθίες a, b όπως παραπάνω και θα δείξουμε ότι $T_a \circ T_b = T_c$, όπου η $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ορίζεται ως εξής:

$$c_j = A_j b_j + B_{j-1} a_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Προφανώς $c_j \geqslant 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $C_n = \sum_{j=1}^{n} c_j = A_n B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$, $C_1 = c_1 = A_1 B_1$, ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάθε $n = 1, \ldots, k$ και θα δείξουμε ότι $C_{k+1} = A_{k+1} B_{k+1}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} A_{k+1}B_{k+1} &= (a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1})(b_1 + \ldots + b_n + b_{n+1}) \\ &= (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) + (a_1 + \ldots + a_n)b_{n+1} + \\ &\quad + (b_1 + \ldots + b_n)a_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1} \\ &= A_n B_n + A_{n+1} b_{n+1} + B_n a_{n+1} \\ &= C_n + c_{n+1} = C_{n+1}. \end{aligned}$$

Επομένως $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \lim_{i\to\infty} C_i = \lim_{i\to\infty} A_i B_i = 1$, δηλαδή η ακολουθία $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών με το άπειρο άθροισμά τους να ισούται με 1. Απομένει να δείξουμε ότι $T_a \circ T_b = T_c$. Καθώς $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, αρκεί να δείξουμε ότι $T_a(T_b(e)) = T_c(e)$, για κάθε $e \in E_k$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω $x_k \in E_k$. Από τον ορισμό των T_a και T_b θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
T_b(x_k) &= B_k x_k + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j e_j, \\
T_a(T_b(x_k)) &= T_a\left(B_k x_k + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j e_j\right) \\
&= B_k T_a(x_k) + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j T_a(e_j) \\
&= B_k \left[A_k x_k + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j e_j\right] + \\
&\quad + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \left[A_j e_j + h(e_j) \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i e_i\right] \\
&= A_k B_k x + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} \left[B_k a_j + b_j A_j + a_j(b_{k+1} + \ldots + b_{j-1})\right] \\
&= A_k B_k x + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} \left[B_k a_j + b_j A_j + a_j(B_{j-1} - B_k)\right] e_j \\
&= A_k B_k x + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} \left[b_j A_j + a_j B_{j-1}\right] e_j. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
T_c(x_k) &= c_k x_k + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j e_j \\
&= A_k B_k x_k + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} (A_j b_j + B_{j-1} a_j) e_j \\
&= T_a(T_b(x_k)),
\end{aligned}$$

άρα $T_a \circ T_b = T_c$ και λόγω των όσων αναφέραμε νωρίτερα συμπεραίνουμε ότι ο T_a έχει φραγμένες δυνάμεις.

Ο T_a δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Sine σύμφωνα με το οποίο ένας τελεστής T είναι τελεστής εργοδικού μέσου αν και μόνο αν το $F(T)$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T^*)$. Πρώτα δείχνουμε ότι $F(T) = \{0\}$: Αν $x \in X$ τέτοιο ώστε $T_a(x) = x$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k x = x = T_a x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Q_k x + \sum_{k=2}^{\infty} h(P_{k-1}x) a_k e_k. \qquad (3.21)$$

Με επαγωγή στο k και αξιοποιώντας το γεγονός ότι η διάσπαση του x ως άθροισμα στοιχείων των E_k είναι μοναδική, θα δείξουμε ότι $x_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$ η (3.21) δίνει ότι $Q_1 x = A_1 Q_1 x \Rightarrow (1 - a_1) Q_1 x = 0 \Rightarrow Q_1 x = 0$, αφού $a_1 \in (0, 1)$. Έστω ότι $x_1 = \ldots = x_n$ και θα δείξουμε ότι $x_{n+1} = 0$: $(1 - A_{n+1}) Q_{n+1} x = h(P_n x) a_{n+1} e_{n+1} = h(x_1 + \ldots x_n) a_{n+1} e_{n+1} = 0$, άρα $x_{n+1} = 0$, αφού $A_{n+1} \in (0, 1)$. Τελικά $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$.

Επιπλέον το h αποτελεί σταθερό σημείο του T_a^*:

$$
\begin{aligned}
T_a^*(h)(x_k) &= h(T_a x_k) = A_k h(x_k) + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j h(e_j) \\
&= A_k h(x_k) + h(x_k) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \\
&= A_k h(x_k) + h(x_k)(1 - A_k) \\
&= h(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x_k \in E_k,
\end{aligned}
$$

επομένως $T_a^*(h) = h$. Όμως τα στοιχεία h και 0 ανήκουν στο $F(T_a^*)$, $h \neq 0$ και προφανώς δεν διαχωρίζονται από το $F(T_a) = \{0\}$. Από το κριτήριο του Sine συμπεραίνουμε ότι ο T_a δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

□

Το προηγούμενο θεώρημα σε συνδυασμό με τον χαρακτηρισμό του Zippin για μη αυτοπαθείς χώρους με βάση δίνουν το αποτέλεσμα που αναζητούσαμε:

Θεώρημα 3.2.14. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με βάση Schauder. Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. **Ευθύ:**

Πρόκειται για το Θεώρημα του Lorch.

Αντίστροφο:

Έστω πως όχι. Αφού ο X δεν είναι αυτοπαθής και περιέχει βάση Schauder, από το Θεώρημα του Zippin θα περιέχει και μη-συρρικνούσα βάση. Από το Θεώρημα 3.2.13 θα έπρεπε να υπάρχει τελεστής $T : X \to X$ με φραγμένες δυνάμεις που να μην είναι τελεστής εργοδικού μέσου, κάτι το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας.

□

Κλείνουμε την παράγραφο με έναν ακόμη χαρακτηρισμό που προκύπτει ως πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.13:

Πόρισμα 3.2.15. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι αυτοπαθής.

(ii) Κάθε κλειστός υπόχωρος $Y \subseteq X$ είναι χώρος εργοδικού μέσου, δηλαδή κάθε γραμμικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις $T : Y \to Y$ είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Αν ο X είναι αυτοπαθής και $Y \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος του X, τότε ο Y θα είναι και αυτός αυτοπαθής. Από το Θεώρημα 3.2.14 έπεται ότι ο Y είναι χώρος εργοδικού μέσου.

(ii) ⇒ (i)

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι ο X δεν είναι αυτοπαθής. Από το Θεώρημα του Pelczynski ο X περιέχει μη αυτοπαθή υπόχωρο Y με βάση Schauder. Από την υπόθεσή μας ο Y είναι χώρος εργοδικού μέσου, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα 3.2.14.

□

3.2δ′ Η Απόδειξη για Banach Lattices

Το 1986 ο Radu Zaharopol απάντησε στο ερώτημα του Sucheston για σ-διατακτικά πλήρεις Banach lattices. Δε θα ασχοληθούμε σχολαστικά με την απόδειξή του σε αυτή την εργασία, απλά αναφέρουμε το αποτέλεσμά του και τις κύριες ιδέες στις οποίες στηρίχθηκε:

Θεώρημα 3.2.16. ***(Zaharopol, 1986).*** *Έστω X σ-διατακτικά πλήρης Banach lattice. Αν κάθε θετικός τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου, τότε ο X είναι αυτοπαθής.*

Αποδεικτική Ιδέα. Η βασική ιδέα είναι ότι οι υπό μελέτη χώροι περιέχουν κάποιον κλασσικό μη αυτοπαθή χώρο από αυτούς που εμφανίζονται στο Παράδειγμα 3.2.3 και στους οποίους έχουμε ήδη βρει τελεστές με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστές εργοδικού μέσου. Χρησιμοποιώντας τους τελεστές αυτούς ως "πρότυπα" μπορούμε να βρούμε τελεστές στον X, οι οποίοι θα έχουν τις ίδιες ιδιότητες.

Ο Zaharopol υπέθεσε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο X δεν είναι αυτοπαθής και αξιοποίησε τον χαρακτηρισμό της αυτοπάθειας για Banach lattices που αναφέραμε ως Θεώρημα 1.7.3 για να συμπεράνει ότι ο X περιέχει κάποιον εκ των c_0 ή ℓ_1. Εν συνεχεία έδειξε ότι σε σ-διατακτικά πλήρεις χώρους που περιέχουν τον c_0 ή τον ℓ_1, μπορεί να κατασκευαστεί τελεστής με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου, καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση όπου ο X περιέχει τον c_0, ορίστηκε κατάλληλος τελεστής ο οποίος ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη του τελεστή $L : c_0 \to c_0$ για τον οποίο $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, x_1, x_2, \ldots)$ για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Όμως, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.3, i), ο τελεστής αυτός δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Αντίστοιχα, για την περίπτωση όπου ο X περιέχει τον ℓ_1, ο τελεστής που ορίστηκε ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη του $S : \ell_1 \to \ell_1$, με $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, για τον οποίον επίσης δείξαμε ότι δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου στο ζήτημα (ii) του ίδιου παραδείγματος.

Αναλυτικά η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Zah]. Μια τροποποιημένη απόδειξη υπάρχει στο [Eme3], στις Παραγράφους 2.3.1-2.3.3.

Το Θεώρημα του Emelyanov

Το 1997 ο Eduard Emel'yanov απέδειξε ότι σε Banach lattices που δεν είναι σ-διατακτικά πλήρεις, αν κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου, τότε ο χώρος είναι αυτοπαθής. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να παρουσιάσουμε την απόδειξη του Emel'yanov, αλλά πριν ξεκινήσουμε θα χρειαστούμε τρία λήμματα. Αναφέρουμε το πρώτο εξ' αυτών χωρίς απόδειξη:

Λήμμα 3.2.17. ***(Κριτήριο Veksler-Geiler).*** *Έστω E γραμμικός σύνδεσμος με lattice νόρμα, τέτοιος ώστε κάθε διατακτικό διάστημα $[x, y]$ να είναι πλήρες ως προς τη νόρμα. Τότε ο E είναι διατακτικά πλήρης (αντ. σ-διατακτικά πλήρης) αν και μόνο αν για κάθε (αντ. αριθμήσιμο) διατακτικά φραγμένο $X \subseteq E^+$ με $x \wedge y = 0$, για κάθε $x \neq y \in X$, έπεται ότι υπάρχει το supremum του X.*

Απόδειξη. [Vek], Theorem 5, page 31. □

Λήμμα 3.2.18. *Έστω E Banach lattice που δεν είναι σ-διατακτικά πλήρης. Τότε υπάρχει διατακτικά φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_+$ που αποτελείται από κάθετα ανά δύο στοιχεία με νόρμα μεγαλύτερη ή ίση του ένα και η οποία δεν εχει supremum.*

Απόδειξη. Από το Κριτήριο των Veksler-Geiler υπάρχουν $v \in E_+$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, v]$ με $x_n \wedge x_m = 0$ για κάθε $n \neq m$, τέτοια ώστε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να μην έχει supremum. Θεωρούμε την ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την οποία $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$, καθώς αν υπήρχε $s \in E$ τέτοιο ώστε $s_n \to s$, τότε θα έπρεπε το s να είναι το supremum της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Πράγματι, $s_n = x_1 + \ldots + x_n \geqslant x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s_n \uparrow s$, επομένως $s \geqslant s_n \geqslant x_n$ για κάθε n, δηλαδή το s αποτελεί άνω φράγμα της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν w τυχόν άνω φράγμα της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε $w \geqslant s_n$ για κάθε n: $w \geqslant \{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow w \geqslant \sup\{x_1, \ldots, x_n\} = x_1 + \ldots + x_n = s_n$, αφού τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι κάθετα ανά δύο. Άρα $w - s_n \in E_+$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $w - s_n \to w - s$. Από την κλειστότητα του κώνου E_+ συμπεραίνουμε ότι $w \geqslant s$. Άρα $s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, το οποίο είναι άτοπο.

Η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να είναι ακολουθία Cauchy, δηλαδή υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ ακολουθία φυσικών τέτοια ώστε $\|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| \geqslant \epsilon$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $e_k = \frac{s_{n_{k+1}} - s_{n_k}}{\epsilon}$. Η ακολουθία $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από κάθετα ανά δύο στοιχεία, νόρμας μεγαλύτερης ή ίσης του ένα, ενώ είναι άνω φραγμένη από το $\frac{v}{\epsilon}$ αφού $e_k = \frac{x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_{k+1}}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\sup\{x_{n_k+1}, \ldots, x_{n_{k+1}}\} \leqslant \frac{1}{\epsilon}v$. Τέλος, η $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν έχει supremum στο E: Αν $y = \sup\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, τότε

$$\begin{aligned} y &= \sup\left\{\frac{1}{\epsilon}(x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_{k+1}}) : k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \sup\left\{\sup\left\{\frac{1}{\epsilon}x_n : n = n_k + 1, \ldots, n_{k+1}\right\} k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon}\sup\{x_n : n \geqslant n_1 + 1\}. \end{aligned}$$

Όμως $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_1, \ldots x_{n_1}\} \vee \sup\{x_n : n \geqslant n_1 + 1\} = \sup\{x_1, \ldots x_{n_1}\} \vee y$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη ακολουθία. □

Λήμμα 3.2.19. *Έστω E Banach lattice και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_+$ διατακτικά φραγμένη ακολουθία κάθετων ανά δύο θετικών στοιχείων. Τότε για κάθε $\tilde{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ του E είναι $\|\cdot\|-$ συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Έστω $u \in E_+$ τέτοιο ώστε $0 \leqslant e_n \leqslant u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επιλέγουμε $\epsilon > 0$. Από την ανισότητα $|a_n|e_n \leqslant |a_n|u$ και τη μονοτονία της νόρμας θα έχουμε ότι $|a_n|\|e_n\| \leqslant |a_n|\|u\|$ για κάθε n και αφού $|a_n| \to 0$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n|\|u\| < \epsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+m} a_n e_n\right\| &= \|\sup\{|a_n|e_n : n = n_0 + 1, \ldots, n_0 + m\}\| \\ &\leqslant \|u\| \max\{|a_n| : n = n_0 + 1, \ldots, n_0 + m\} \leqslant \epsilon, \end{aligned}$$

επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 3.2.20. *(Emel'yanov, 1997).* *Έστω E Banach lattice που δεν είναι σ-διατακτικά πλήρης. Τότε υπάρχει $A \in B(E)$ θετικός και συμπαγής τελεστής τέτοιος ώστε ο $T = I - A$ να είναι τελεστής με φραγμένες δυνάμεις, αλλά όχι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Κάθε Banach lattice έχει μονότονη νόρμα και τα διατακτικά του διαστήματα είναι πλήρη ως κλειστά υποσύνολα χώρου Banach. Επομένως από το Λήμμα 3.2.18 υπάρχει διατακτικά φραγμένη ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_+$ που αποτελείται από κάθετα ανά δύο στοιχεία με $\|e_n\| \geqslant 1$, η οποία δεν έχει supremum. Έστω $u \in E_+$ τέτοιο ώστε $0 \leqslant e_n \leqslant u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $f_n : \mathrm{span}\{e_n\} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f_n(\lambda e_n) = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Τα f_n έχουν νόρμα ίση με $\frac{1}{\|e_n\|}$ αφού

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \sup\{|f_n(\lambda e_n)| : \|\lambda e_n\| = 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| : |\lambda|\|e_n\| = 1\} \\ &= \sup\left\{|\lambda| : |\lambda| = \frac{1}{\|e_n\|}\right\} \\ &= \frac{1}{\|e_n\|}. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει επέκταση $\tilde{f}_n : E \to \mathbb{R}$ με $\|\tilde{f}_n\| = \|f_n\|$. Για να μη βαρύνουμε το συμβολισμό, θα συμβολίζουμε την επέκταση αυτή και πάλι με f_n. Ορίζουμε $\xi_n : E_+ \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\xi_n(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_n^+(x \wedge ke_n), \quad \forall x \in E_+. \tag{3.23}$$

Τα ξ_n είναι καλά ορισμένα αφού $0 \leqslant x \wedge ke_n \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant f_n^+(x \wedge ke_n) \leqslant f_n^+(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{f_n^+(x \wedge ke_n) : k \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και επομένως έχει supremum. Για τυχόν $x \in E$ ορίζουμε

$$\xi_n(x) = \xi_n(x^+) - \xi_n(x^-) \tag{3.24}$$

και θέτουμε

$$\phi_n(x) = \xi_n(x) + \frac{\|u\| - \xi_n(u)}{\xi_0(u)}\xi_0(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.25}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $m \neq n$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\phi_n \geqslant 0, \quad \phi_n(u) = \|u\|, \quad \phi_n(e_n) = 1, \quad \|\phi_n\| \leqslant 1 + \|u\|, \quad \phi_n(e_m) = 0. \tag{3.26}$$

$\phi_n \geqslant 0$: Έστω $x \in E_+$. Τότε $0 \leqslant x \wedge ke_n$, οπότε $\xi_n(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_n^+(x \wedge ke_n) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον $\xi_n(u) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_n^+(u \wedge ke_n)$ με $0 \leqslant ke_n \leqslant ku$, επομένως $f_n^+(u \wedge ke_n) \leqslant \|f_n\|\|u \wedge ke_n\| \leqslant \|u\|$, δηλαδή $\|u\| - \xi_n(u) \geqslant 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι $\xi_0(u) \geqslant 0$, έχουμε ότι

$$\phi_n(x) = \underbrace{\xi_n(x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{\|u\| - \xi_n(u)}{\xi_0(u)}\xi_0(x)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

$\phi_n(u) = \|u\|$: $\phi_n(u) = \xi_n(u) + \frac{\|u\|-\xi_n(u)}{\xi_0(u)}\xi_0(u) = \xi_n(u) + \|u\| - \xi_n(u) = \|u\|$.

$\phi_n(e_n) = 1$: $\phi_n(e_n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_n(e_n \wedge ke_n) + \frac{\|u\|-\xi_n(u)}{\xi_0(u)}\cancelto{0}{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_0(e_n \wedge ke_n)} = 1$.

$\|\phi_n\| \leqslant 1 + \|u\|$: Αν $x \in E_+$, τότε $0 \leqslant x \wedge ke_n \leqslant x$, $f_n^+(x \wedge ke_n) \leqslant f_n^+(x)$ για κάθε k, άρα $|\xi_n(x)| = |\sup_{k\in\mathbb{N}} f_n^+(x \wedge ke_n)| \leqslant |f_n^+(x)| \leqslant \|f_n^+\|\|x\|$. Για το τυχαίο $x \in E$,$|\xi_n(x)| = \xi_n(|x|) \leqslant \|f_n^+\|\||x|\| = \|f_n^+\|\|x\|$. Άρα $\|\xi_n\| \leqslant \|f_n^+\|$. Όμως $\|\xi_n\| \leqslant \|f_n^+\| \leqslant \||f_n|\| = \|f_n\| = \frac{1}{\|e_n\|} \leqslant 1$.

Επιπλέον, $1 \leqslant \xi_n(u)$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, αφού $0 \leqslant e_n \leqslant u \wedge ke_n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $0 \leqslant f_n(e_n) = 1 \leqslant f_n(u \wedge ke_n)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant \xi_n(u)$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Επομένως $1 = \xi_n(e_n) \leqslant \xi_n(u) \leqslant \|\xi_n\|\|u\| \leqslant \|u\|$.

Τελικά,

$$\begin{aligned}
\|\phi_n\| &\leqslant \|\xi_n\| + \frac{\|u\| - \xi_n(u)}{\xi_0(u)}\|\xi_0\| \\
&\leqslant \|\xi_n\| + \frac{\|u\|}{\xi_0(u)}\|\xi_0\| \\
&\leqslant \|\xi_n\| + \|u\|\|\xi_0\|, && \text{αφού } \frac{1}{\xi_0(u)} \leqslant 1 \\
&\leqslant 1 + \|u\|, && \text{αφού } \|\xi_n\| \leqslant 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1]$ με $a_n \to 0$ και ορίζουμε τελεστή $A : E \to E$ ως εξής:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) e_n, \quad \forall x \in E. \tag{3.27}$$

Παρατηρούμε ότι $|a_n\phi_n(x)| = a_n|\phi_n(x)| \leqslant a_n\|\phi_n\|\|x\| \leqslant a_n(1+\|u\|)\|x\| \to 0$, δηλαδή $a_n\phi_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in E$ και επομένως, από το Λήμμα 3.2.19, ο τελεστής A είναι καλά ορισμένος. Ο A είναι επιπλέον θετικός (προκύπτει από τη θετικότητα των ϕ_n) και συμπαγής. Θεωρούμε τον τελεστή $T = I - A$ και επαγωγικά δείχνουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$T^k y = y - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (1-a_n)^k]\phi_n(y) e_n, \ \ \forall y \in E. \tag{3.28}$$

Για $k = 1$ η (3.28) είναι άμεση από τον ορισμό του T. Έστω ότι η (3.28) ισχύει για $k = m$. Τότε

$$\begin{aligned}
T^{m+1}y &= T(T^m y) \\
&= T\left(y - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^m]\phi_n(y)e_n\right) \\
&= y - Ay - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^m]\phi_n(y)(e_n - Ae_n) \\
&= y - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(y)e_n - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^m]\phi_n(y)(e_n - a_n e_n) \\
&= y - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(y)e_n - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^m]\phi_n(y)(1-a_n)e_n \\
&= y - \sum_{n=1}^{\infty}[a_n - (1-a_n) - (1-a_n)^{m+1}]\phi_n(y)e_n \\
&= y - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^{m+1}]\phi_n(y)e_n.
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
|T^k y| &\leqslant |y| + \|y\| \sup\{\|\phi_n\| : n \in \mathbb{N}\} \sum_{n=1}^{\infty} [1-(1-a_n)^k] e_n \\
&\leqslant |y| + \|y\|(1+\|u\|) \sup\{1-(1-a_n)^k e_n : n \in \mathbb{N}\} \\
&\leqslant |y| + \|y\||(1+\|u\|)u, \quad \forall y \in E, \ \ \forall k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

επομένως $\|T^k\| \leqslant 1 + \|u\| + \|u\|^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο T έχει φραγμένες δυνάμεις.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι ο T δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Έστω πως είναι. Τότε για κάθε $x \in E$ υπάρχει $y_x \in E$ τέτοιο ώστε $M_n x \to y_x$. Ειδικότερα υπάρχει $v \in E$ τέτοιο ώστε $M_n(u) \to v$.

Η ακολουθία $(T^k u)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα: Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $T^k(u) \geqslant T^{k+1}(u)$.

$$\begin{aligned}
(1-a_n)^k &\geqslant (1-a_n)^{k+1} & \Rightarrow \\
[1-(1-a_n)^k]\|u\|e_n &\leqslant [1-(1-a_n)^{k+1}]\|u\|e_n & \Rightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^k]\|u\|e_n &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^{k+1}]\|u\|e_n & \Rightarrow \\
u - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^k]\|u\|e_n &\geqslant u - \sum_{n=1}^{\infty}[1-(1-a_n)^{k+1}]\|u\|e_n & \Rightarrow \\
T^k(u) &\geqslant T^{k+1}(u).
\end{aligned}$$

Η ακολουθία $(M_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι $M_{n+1}(u) - M_n(u) \leqslant 0$.

$$\begin{aligned}
M_{n+1}(u) - M_n(u) &= \frac{u + Tu + \ldots + T^n u}{n+1} - \frac{u + Tu + \ldots + T^{n-1}u}{n} \\
&= \frac{T^n u - M_n u}{n+1}.
\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $T^n u \leqslant M_n u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $(T^n u)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, $u \geqslant Tu \geqslant \ldots \geqslant T^n u$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
T^n u &\leqslant u \\
T^n u &\leqslant Tu \\
&\vdots \\
T^n u &\leqslant T^{n-1}u.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε ότι $T^n u \leqslant M_n u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχύει ότι $v = \inf\{T^n u : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{M_n u : n \in \mathbb{N}\}$: Η $(M_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία με $M_n u \to v$, επομένως $v = \inf\{M_n u : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $w \leqslant T^n u$ για κάθε n, τότε $w \leqslant T^n u \leqslant M_n u$ για κάθε n, επομένως $w \leqslant v$. Απομένει να δειχθεί ότι $v \leqslant T^n u$ για κάθε n. Γνωρίζουμε ότι $v \leqslant M_m u$ για κάθε m, οπότε

$$\begin{aligned} v &\leqslant \frac{u + Tu + \ldots + T^{n-1}u + T^n u + \ldots + T^{n+m-1}u}{n+m} \\ &\leqslant \frac{u + Tu + \ldots + T^{n-1}u + \overbrace{T^n u + \ldots + T^n u}^{m-\text{φορες}}}{n+m} \\ &= \frac{u + Tu + \ldots + T^{n-1}u}{n+m} + \frac{mT^n u}{n+m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια για $m \to \infty$ και αξιοποιώντας το ότι ο κώνος είναι κλειστός, προκύπτει ότι $v \leqslant T^n u$ για κάθε n. Επομένως $v = \inf\{T^n u : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{M_n u : n \in \mathbb{N}\}$.

Από την ανισότητα $v \leqslant T^k u \leqslant u - [1 - (1 - a_n)^k]\|u\|e_n$ η οποία ισχύει για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ και παίρνοντας όρια για $k \to \infty$, έχουμε ότι $v \leqslant u - \|u\|e_n$ για κάθε n. Θα δείξουμε ότι $v = \inf\{u - \|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $x \in E$ τέτοιο ώστε $x \leqslant u - \|u\|e_n$ για κάθε n. Τότε

$$\begin{aligned} x &\leqslant \inf\{u - [1 - (1 - a_n)^k]\|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= u - \sup\{u - [1 - (1 - a_n)^k]\|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= u - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (1 - a_n)^k]\|u\|e_n \\ &= T^k u, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Άρα $x \leqslant \inf\{T^n u : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{M_n u : n \in \mathbb{N}\} = v$. Τελικά $v = \inf\{u - \|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Όμως

$$\begin{aligned} \sup\{e_n : n \in \mathbb{N}\} &= \frac{1}{\|u\|} \sup\{\|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \frac{u}{\|u\|} - \frac{1}{\|u\|} \inf\{u - \|u\|e_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \frac{u - v}{\|u\|}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει supremum. □

Θεώρημα 3.2.21. ***(Zaharopol-Emel'yanov).*** *Έστω E Banach lattice. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Κάθε τελεστής $T \in B(E)$ με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

(ii) Ο E είναι αυτοπαθής.

Απόδειξη. Μόνο το ευθύ χρειάζεται απόδειξη. Αν ο E είναι σ-διατακτικά πλήρης, τότε το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα του Zaharopol. Αν όχι, τότε προκύπτει από το Θεώρημα του Emel'yanov. □

Παρατηρήστε ότι ενώ το Θεώρημα του Zaharopol αφορά σε θετικούς τελεστές, στο Θεώρημα του Emel'yanov ο τελεστής που κατασκευάζεται δεν είναι θετικός. Επομένως το παρακάτω ερώτημα παραμένει ανοικτό (βλ. [Eme4], Open question 5, p. 18):

Ανοιχτό Πρόβλημα 3.2.22. *Έστω X Banach lattice τέτοιος ώστε κάθε **θετικός** τελεστής με φραγμένες δυνάμεις να είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Είναι ο X αυτοπαθής;*

3.3 Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Ορισμός 3.3.1. *Έστω X χώρος Banach και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T$ φραγμένοι τελεστές του X. Η T_n συγκλίνει ομοιόμορφα στον T αν $\|T_n - T\| \to 0$. Ο T λέγεται **τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου** (uniformly ergodic) αν η ακολουθία $M_n(T)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο στοιχείο του $B(X)$.*

Από τη σχέση $\frac{T^{n-1}}{n} = M_n - \frac{n-1}{n}M_{n-1}$ βλέπουμε ότι αν ο T είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου, τότε $\|\frac{T^n}{n}\| \to 0$. Κάθε τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου T είναι προφανώς τελεστής εργοδικού μέσου, επομένως από το Θεώρημα του Yosida γνωρίζουμε ότι $X = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Το Θεώρημα του Lin δείχνει ότι για την περίπτωση της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να αφαιρέσουμε την κλειστότητα από την προηγούμενη ισότητα. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση που μοιάζει περισσότερο με απλή άσκηση πάνω στο Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in B(X,Y)$ με $T(X) \subseteq Y$ κλειστό. Τότε υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in T(X)$ να υπάρχει $x \in X$ με $Tx = y$ και $\|x\| \leqslant K\|y\|$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με U_X, U_Y τις ανοικτές μοναδιαίες μπάλες των X και Y αντίστοιχα. Από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta U_Y \subseteq T(U_X)$. Έστω $y \in T(X)$. Τότε το στοιχείο $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in \delta U_Y$, άρα υπάρχει $x_0 \in U_X$ τέτοιο ώστε $Tx_0 = \frac{\delta y}{2\|y\|}$. Θέτουμε $z_0 = \frac{2\|y\|}{\delta}x_0$ και παρατηρούμε ότι $Tz_0 = y$, ενώ $\|z_0\| = \frac{2\|y\|}{\delta}x_0 \leqslant \frac{2}{\delta}\|y\|$. Για $K = \frac{2}{\delta}$ ισχύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.3.3. ***(Lin, 1974).*** *Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X)$ με $\|\frac{T^n}{n}\| \to 0$. Ο T είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου αν και μόνο αν το σύνολο $(I-T)(X)$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω πως ο T είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου. Το σύνολο $(I-T)(X)$ είναι T-αναλλοίωτο αφού αν $x - Tx \in (I-T)(X)$, τότε $T(x-Tx) = Tx - T^2x = y - Ty$ με $y = Tx \in X$. Άρα $T((I-T)(X)) \subseteq (I-T)(X)$. Από τη συνέχεια του T έχουμε ότι $T(\overline{(I-T)(X)}) \subseteq \overline{(I-T)(X)}$, δηλαδή το σύνολο $\overline{(I-T)(X)}$ είναι T-αναλλοίωτο.

Θέτουμε $S : \overline{(I-T)(X)} \to \overline{(I-T)(X)}$ να είναι ο περιορισμός του T στον $\overline{(I-T)(X)}$, $S = T_{|\overline{(I-T)(X)}}$. Αφού $\|M_n(S)\| \to 0$, για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε ότι $\|M_n(S)\| < 1$ και επομένως, από την Πρόταση 1.6.1, ο τελεστής $I - M_n(S)$ θα είναι αντιστρέψιμος. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}(I-S)\left(\frac{n-1}{n}I + \frac{n-2}{n}S + \ldots + \frac{1}{n}S^{n-2}\right) &= \frac{n-1}{n}I + \frac{n-2}{n}S + \ldots + \frac{1}{n}S^{n-2} - \\ &\quad - \frac{n-1}{n}S - \ldots - \frac{1}{n}S^{n-1} \\ &= I - \frac{I + \ldots + S^{n-1}}{n} = I - M_n(S),\end{aligned}$$

δηλαδή ο $I - S$ αντιστρέφεται. Τότε

$$\overline{(I-T)(X)} = (I-S)(\overline{(I-T)(X)}) = (I-T)(\overline{(I-T)(X)}) \subseteq (I-T)(X).$$

Για το αντίστροφο, από την Πρόταση 3.3.2 υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in (I-T)(X)$ να υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $(I-T)x = y$ και $\|x\| \leqslant K\|y\|$. Αν $y \in (I-T)(X)$ τότε

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y + Ty + \ldots + T^{N-1}y}{N}\right\| &= \left\|\frac{x - Tx + Tx - T^2x + \ldots + T^{N-1}x - T^Nx}{N}\right\| \\ &= \left\|\frac{x - T^Nx}{N}\right\| \leqslant \left\|\frac{I - T^N}{N}\right\| \|x\| \\ &\leqslant \left\|\frac{I - T^N}{N}\right\| K\|y\|.\end{aligned}$$

Θέτουμε $S = T_{|Y}$ και παρατηρούμε ότι ο S είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου. Όπως και πριν συμπεραίνουμε ότι ο $I - S$ είναι αντιστρέψιμος στον $Y = (I-T)(X)$ και $(I-T)(X) = (I-S)((I-T)(X)) = (I-T)((I-T)(X))$. Άρα για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(I-T)(x) = (I-T)(y)$. Από την αντιστρεψιμότητα του $I - S$ έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $y = (I-S)^{-1}(I-T)(x)$, άρα

$$\|y\| \leqslant \left\|(I-S)^{-1}\right\| \|I-T\|\|x\|. \tag{3.29}$$

Έστω $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (3.29). Διασπάμε το x ως εξής: $x = (x-y)+y$ με $x - y \in F(T)$, αφού $x - Tx = y - Ty \Rightarrow x - y = T(x-y)$. Τότε

$$\begin{aligned}\|M_n(x) - (x-y)\| &= \|M_n(x) - M_n(x-y)\| = \|M_n y\| \\ &\leqslant \left\|\frac{I - T^n}{n}\right\| K\|y\| \\ &\leqslant \left\|\frac{I - T^N}{N}\right\| K \left\|(I-S)^{-1}\right\| \|I-T\|\|x\|,\end{aligned}$$

δηλαδή η $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον τελεστή προβολής $P : X \to X$ για τον οποίον $Px = x - y$ για κάθε $x \in X$. □

3.3α′ Το αντίστροφο πρόβλημα για την ομοιόμορφη σύγκλιση

Επανερχόμαστε στο αντίστροφο πρόβλημα, αυτή τη φορά για τελεστές ομοιόμορφα εργοδικού μέσου. Οι Fonf, Lin και Wojtaszczyk στο ίδιο άρθρο τους ([FLW]) απέδειξαν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach που επιδέχεται διάσπαση Schauder $X = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$. Τότε υπάρχει $T \in B(X)$ τελεστής εργοδικού μέσου με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.13, αλλά αυτή τη φορά ορίζουμε τελεστή T_a ως εξής:

$$T_a x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Q_k x. \tag{3.30}$$

Ο T_a έχει φραγμένες δυνάμεις και $F(T_a) = \{0\}$. Αν $x^* \in F(T_a^*)$, τότε $x^*(T_a(x)) = x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα $x^*(T_a(z_k)) = x^*(A_k z_k) = A_k x^*(z_k) = x^*(z_k)$ για κάθε $z_k \in E_k$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού $A_k \neq 1$ συμπεραίνουμε ότι $x^*(z_k) = 0$ για κάθε $z_k \in E_k$, άρα $F(T_a^*) = \{0\}$ και ο T_a είναι τελεστής εργοδικού μέσου από το Κριτήριο του Sine. Από την απόδειξη του Θεωρήματος του Lin (Θεώρημα 3.3.3), ο T_a είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου αν και μόνο αν ο $I - T_a$ αντιστρέφεται. Θεωρούμε την ακολουθία $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ για την οποία $a_k = \frac{1}{2^k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $T = T_a$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $e_k \in E_k$ με $\|e_k\| = 1$ και θεωρούμε το στοιχείο $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e_k$. Ο τελεστής $I - T$ δεν ανστιστρέφεται αφού η εξίσωση $(I - T)x = y$ δεν έχει λύσεις. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in X$ τέτοιο ώστε $(I - T)x = y$, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e_k &= x - \sum_{k=1}^{\infty} A_k Q_k x = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - A_k) Q_k x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \right) Q_k x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Q_k x, \end{aligned}$$

δηλαδή $Q_k x = \frac{2^k}{k^2} e_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο αφού σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε $\|Q_k x\| = \frac{2^k}{k^2} \to \infty$. Άρα ο $I - T$ δεν αντιστρέφεται και επομένως ο T δεν είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου. □

Πόρισμα 3.3.5. *Έστω X χώρος Banach με βάση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X έχει πεπερασμένη διάσταση,

(ii) κάθε τελεστής με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου,

(iii) κάθε τελεστής εργοδικού μέσου με φραγμένες δυνάμεις είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω $T \in B(X)$ τελεστής με φραγμένες δυνάμεις. Ο X είναι αυτοπαθής, επομένως από το Θεώρημα του Lorch, ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Άρα $X = F(T) \oplus \overline{(I-T)(X)}$. Όμως $\overline{(I-T)(X)} = (I-T)(X)$ αφού ο X είναι πεπερασμένης διάστασης. Από το Θεώρημα του Lin ο T είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου.

(ii) ⇒ (iii)

Προφανές.

(iii) ⇒ (i)

Πρόκειται για το Θεώρημα 3.3.4.

□

3.3δ΄ Τελεστές ομοιόμορφα εργοδικού μέσου και φάσμα

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο αναφέροντας μια ενδιαφέρουσα φασματική ιδιότητα των τελεστών ομοιόμορφα εργοδικού μέσου. Θυμίζουμε ότι με $r(T)$ συμβολίζουμε την φασματική ακτίνα του τελεστή T.

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $T \in B(X)$.*

(i) Αν $r(T) < 1$, τότε ο T είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου.

*(ii) Αν $r(T) > 1$, τότε ο T **δεν** είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. (i) Αν $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} < 1$, τότε υπάρχουν $a < 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|T^n\|^{1/n} \leqslant a < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$, δηλαδή $\|T^n\| \leqslant a^n < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| &= \sum_{n=1}^{n_0} \|T^n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|T^n\| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \|T^n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^n \\ &= s < \infty.\end{aligned}$$

Άρα $\|M_n\| = \|\frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \|T^i\| \leqslant \frac{s}{n} \longrightarrow 0$.

(ii) Αν $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} > 1$, τότε υπάρχουν $a > 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|T^n\| \geqslant a^n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αν ο T ήταν τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου, τότε από την προφανή ισότητα $\frac{T^n}{n} = \frac{n+1}{n}M_{n+1} - M_n$ θα είχαμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T^n}{n}\right\| &= \left\|\frac{n+1}{n}M_{n+1} - M_n\right\| \\ &= \left\|\frac{n(M_{n+1}-M_n) + M_{n+1}}{n}\right\| \\ &\leqslant \|M_{n+1} - M_n\| + \left\|\frac{M_{n+1}}{n}\right\| \to 0,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $\|\frac{T^n}{n}\| \geqslant \frac{a^n}{n} \to \infty$.

□

Στην περίπτωση όπου $r(T) = 1$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για την ομοιόμορφη εργοδικότητα του T:

Παραδείγματα 3.3.7. (i) *Ο ταυτοτικός τελεστής είναι τελεστής ομοιόμορφα εργοδικού μέσου και έχει φασματική ακτίνα ίση με ένα.*

(ii) *Ο τελεστής $T : C[0,1] \to C[0,1]$ για τον οποίον $(Tf)(t) = tf(t)$, για κάθε $f \in C[0,1]$ και κάθε $t \in [0,1]$ έχει φασματική ακτίνα ίση με ένα: $(T^n f)(t) = t^n f(t)$, για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $\|T^n f\| = \sup\{|t^n f(t)| : t \in [0,1]\} \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} = \|f\|$, δηλαδή $\|T^n\| \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $f_0(t) \equiv 1$ παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα. Από τον τύπο της φασματικής απεικόνισης (σχέση (1.19)) ισχύει ότι $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1$. Όμως, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.3, ο T δεν είναι καν τελεστής εργοδικού μέσου.*

3.4 Το Αρχικό Ερώτημα του Sucheston

Αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι το αρχικό ερώτημα του Sucheston δεν είχε διατυπωθεί για τελεστές με φραγμένες δυνάμεις, αλλά για συστολές. Θυμίζουμε την ακριβή διατύπωση του ερωτήματος αυτού:

Ερώτημα 3.4.1. *Έστω X χώρος Banach με την ιδιότητα ότι κάθε συστολή του X είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Είναι ο X αυτοπαθής;*

Το ερώτημα απαντήθηκε αρνητικά πολύ πρόσφατα και σκοπός της παραγράφου είναι να παρουσιάσουμε την κατασκευή του αντιπαραδείγματος αυτού όπως περιγράφεται στο [FLW2]. Στην πραγματικότητα οι Fonf, Lin και Wojtaszczyk βασίστηκαν σε κάποιες ιδέες του πρώτου άρθρου τους [FLW] και απέδειξαν κάτι αρκετά γενικότερο: Έδειξαν ότι σε οποιονδήποτε **σχεδόν** αυτοπαθή χώρο Banach τάξης ένα, μπορεί να βρεθεί ισοδύναμη νόρμα ως προς την οποία όλες οι συστολές θα είναι τελεστές εργοδικού μέσου.

Ξεκινούμε ορίζοντας τους χώρους στους οποίους θα δουλέψουμε και αποδεικνύοντας μια σειρά από προτάσεις οι οποίες μαρτυρούν τη μορφή και περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες των τελεστών στους χώρους αυτούς και στις οποίες βασίζεται η απόδειξη των Fonf, Lin και Wojtaszczyk.

Ορισμός 3.4.2. *Έστω X χώρος Banach, $\tau : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση και $k \in \mathbb{N}$. Ο X ονομάζεται **σχεδόν αυτοπαθής τάξης k** (quasi-reflexive of order k) αν $\dim(X^{**}/\tau(X)) = k$.* [17]

Παρατηρήστε ότι κάθε σχεδόν αυτοπαθής χώρος είναι προφανώς μη αυτοπαθής αφού η κανονική εμφύτευση δεν είναι επί.

Για να κατανοήσουμε την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρειαστεί να θυμηθούμε ένα αποτέλεσμα από τη Συναρτησιακή Ανάλυση.

[17] Με $X^{**}/\tau(X)$ συμβολίσαμε τον χώρο πηλίκο. Έχουμε ορίσει το χώρο πηλίκο στην Παράγραφο 1.2α'.

Θεώρημα 3.4.3. ***(Gantmacher-Nakamura).*** *Έστω X, Y χώροι Banach, $T \in B(X,Y)$ και τ_Y η κανονική εμφύτευση του Y στον Y^{**}. Ο T είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν $T^{**}(X^{**}) \subseteq \tau_Y(Y)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Meg], Theorem 3.5.8. □

Πρόταση 3.4.4. *Έστω X σχεδόν αυτοπαθής χώρος τάξης 1. Τότε υπάρχει $q : B(X) \to \mathbb{R}$ γραμμικό και πολλαπλασιαστικό συναρτησιακό με νόρμα ίση με ένα, τέτοιο ώστε $\ker q = \mathcal{K}^w(X)$, δηλαδή ο πυρήνας του q περιλαμβάνει ακριβώς τους ασθενώς συμπαγείς τελεστές του X.*

Απόδειξη. Έστω $T \in B(X)$ και $T^{**} : X^{**} \to X^{**}$ ο δεύτερος συζυγής του T. Θα δείξουμε ότι $T^{**}(\tau(X)) \subseteq \tau(X)$: Αν $\tau(x_0) \in \tau(X)$, τότε $T^{**}\tau(x_0)(x^*) = (\tau(x_0) \circ T^*)(x^*) = \tau(x_0)(x^* \circ T) = x^*(Tx_0) = \tau(Tx_0)(x^*)$, για κάθε $x^* \in X^*$. Άρα $T^{**}\tau(x_0) = \tau(Tx_0) \in \tau(X)$.

Ορίζουμε τελεστή $\widetilde{T^{**}} : X^{**}/\tau(X) \to X^{**}/\tau(X)$ ως εξής:

$$\widetilde{T^{**}}(x^{**} + \tau(X)) = T^{**}x^{**} + \tau(X), \quad \forall x^{**} + \tau(X) \in X^{**}/\tau(X). \tag{3.31}$$

Ο $\widetilde{T^{**}}$ είναι καλά ορισμένος, δηλαδή το σύμπλοκο $\widetilde{T^{**}}(x^{**} + \tau(X))$ είναι ανεξάρτητο του αντιπροσώπου x^{**}: Έστω x^{**}, y^{**} στοιχεία που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας ως προς $\tau(X)$, δηλαδή $x^{**} - y^{**} \in \tau(X)$. Τότε $\widetilde{T^{**}}(x^{**} - y^{**} + \tau(X)) = T^{**}(x^{**} - y^{**}) + \tau(X) \in \tau(X) + \tau(X) \subseteq \tau(X)$, αφού $T^{**}(\tau(X)) \subseteq \tau(X)$. Άρα $\widetilde{T^{**}}(x^{**} + \tau(X)) = \widetilde{T^{**}}(y^{**} + \tau(X))$. Η γραμμικότητα και η συνέχεια του $\widetilde{T^{**}}$ προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες του T. Μάλιστα $\|\widetilde{T^{**}}\| \leqslant \|T\|$, αφού για κάθε $x^{**} + \tau(X)$,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T^{**}}(x^{**} + \tau(X))\| &= \|T^{**}x^{**} + \tau(X)\| = \inf\{\|T^{**}x^{**} - \tau(x)\| : x \in X\} \\ &\leqslant \|T^{**}x^{**}\| \leqslant \|T^{**}\|\|x^{**}\| = \|T\|\|x^{**}\|. \end{aligned}$$

Από υπόθεση, $\dim(X^{**}/\tau(X)) = 1$, άρα υπάρχει $q(T) \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\widetilde{T^{**}}(x^{**} + \tau(X)) = q(T)(x^{**} + \tau(X)), \tag{3.32}$$

για κάθε $x^{**} \in X^{**}$. Η απεικόνιση $q : B(X) \to \mathbb{R}$ είναι:

Γραμμική: Αν $T, S \in B(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $(\lambda T + S)^{**} = \lambda T^{**} + S^{**}$ και

$$\begin{aligned} q(\lambda T + S)(x^{**} + \tau(X)) &= \widetilde{(\lambda T + S)^{**}}(x^{**} + \tau(X)) \\ &= (\lambda T + S)^{**}(x^{**}) + \tau(X) \\ &= \lambda T^{**}x^{**} + S^{**}x^{**} + \tau(X) \\ &= \lambda T^{**}x^{**} + \tau(X) + S^{**}x^{**} + \tau(X) \\ &= \lambda q(T)(x^{**} + \tau(X)) + q(S)(x^{**} + \tau(X)) \\ &= (\lambda q(T) + q(S))(x^{**} + \tau(X)), \quad \forall x^{**} + \tau(X). \end{aligned}$$

Άρα $q(\lambda T + S) = \lambda q(T) + q(S)$.

Πολλαπλασιαστική: Αν $T, S \in B(X)$ τότε $(TS)^{**} = T^{**}S^{**}$. Εργαζόμενοι όπως και πριν βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} q(TS)(x^{**}+\tau(X)) &= \widetilde{(TS)^{**}}(x^{**}+\tau(X)) \\ &= (TS)^{**}(x^{**})+\tau(X) \\ &= T^{**}(S^{**}x^{**})+\tau(X) \\ &= q(T)(S^{**}x^{**}+\tau(X)) \\ &= q(T)(q(S)(x^{**}+\tau(X))) \\ &= q(T)q(S)(x^{**}+\tau(X)), \quad \forall x^{**}+\tau(X) \in X^{**}/\tau(X), \end{aligned}$$

άρα $q(TS) = q(T)q(S)$ για κάθε $T, S \in B(X)$.

Νόρμας ένα: Εξ' ορισμού $\widetilde{T^{**}}(x^{**}+\tau(X)) = q(T)(x^{**}+\tau(X))$ για κάθε $x^{**}+\tau(X) \in X^{**}/\tau(X)$, επομένως

$$|q(T)|\|x^{**}+\tau(X)\| \leqslant \|\widetilde{T^{**}}\|\|x^{**}+\tau(X)\| \leqslant \|T\|\|x^{**}+\tau(X)\|, \tag{3.33}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $|q(T)| \leqslant \|T\|$ για κάθε $T \in B(X)$, δηλαδή $\|q\| \leqslant 1$. Για $T = I$ παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Το συναρτησιακό q έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Παρατηρούμε επίσης ότι $\ker q = \{T \in B(X) : T^{**}(X^{**}) \subseteq \tau(X)\} = \mathcal{K}^w(X)$ από το Θεώρημα Gantmacher-Nakamura.

□

Πόρισμα 3.4.5. *Αν X σχεδόν αυτοπαθής χώρος Banach τάξης 1, τότε κάθε τελεστής $T \in B(X)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $T = \lambda I + W$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και W ασθενώς συμπαγής τελεστής. Αν επιπλέον ο T έχει φραγμένες δυνάμεις, τότε $|\lambda| \leqslant 1$.*

Απόδειξη. Γράφουμε τον T ως $T = q(T)I + T - q(T)I$. Ο τελεστής $W = T - q(T)I$ είναι ασθενώς συμπαγής αφού $q(T - q(T)I) = 0$. Αν επιπλέον ο T έχει φραγμένες δυνάμεις τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$M \geqslant \|T^n\| \geqslant |q(T^n)| = |q(T)|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ βλέπουμε ότι $|q(T)| \leqslant 1$. □

Πρόταση 3.4.6. *Αν X σχεδόν αυτοπαθής χώρος Banach τάξης 1 και $T = \lambda I + W \in B(X), \lambda \neq 1$ τελεστής με φραγμένες δυνάμεις, τότε τόσο ο T όσο και ο T^* είναι τελεστές εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Για τα σταθερά σημεία των T και T^* ισχύουν αντίστοιχα τα εξής:

$$\begin{aligned} F(T) &= \{x \in X : Wx = (1-\lambda)x\} \quad \text{και} \\ F(T^*) &= \{x^{**} \in X^{**} : W^{**}x^{**} = (1-\lambda)x^{**}\}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $F(T^{**}) = \tau(F(T))$. Ο εγκλεισμός $\tau(F(T)) \subseteq F(T^{**})$ ισχύει πάντα αφού αν $x_0 \in X$ με $Tx_0 = x_0$, τότε

$$\begin{aligned} T^{**}\tau(x_0)(x^*) &= \tau(x_0)T^*(x^*) = \tau(x_0)(x^* \circ T) = x^*(Tx_0) \\ &= \tau(x_0)(x^*), \quad \forall x^* \in X^*, \end{aligned}$$

επομένως $\tau(x_0) \in F(T^{**})$. Για τον εγκλεισμό $F(T^{**}) \subseteq \tau(F(T))$ επιλέγουμε $x^{**} \in X^{**}$ με $W^{**}(x^{**}) = (1-\lambda)x^{**}$. Το x^{**} ανήκει στον $\tau(X)$ αφού $W^{**}(X^{**}) \subseteq \tau(X)$ και επομένως $W^{**}(x^{**}) = (1-\lambda)x^{**} \in \tau(X) \Rightarrow x^{**} \in \tau(X)$. Άρα υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $\tau(x_0) = x^{**}$. Θα δείξουμε ότι $x_0 \in F(T)$:

$$\begin{aligned} x^*(W(x_0)) &= \tau(x_0)(x^* \circ W) = \tau(x_0)(W^* x^*) = W^{**}\tau(x_0)(x^*) = (1-\lambda)\tau(x_0)(x^*) \\ &= (1-\lambda)x^*(x_0), \quad \forall x^* \in X^*. \end{aligned}$$

Άρα $W(x_0) = (1-\lambda)x_0$ και $Tx_0 = x_0$. Από το Πόρισμα 3.1.8 το $F(T^*)$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T)$, επομένως, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, το $F(T^*)$ διαχωρίζει τα σημεία του $\tau(F(T)) = F(T^{**})$. Από το Κριτήριο του Sine ο T^* είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Όμως το $F(T^{**})$ διαχωρίζει (πάντα) τα σημεία του $F(T^*)$, άρα και το $F(T)$ διαχωρίζει το $F(T^*)$. Πάλι από το Κριτήριο του Sine ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου. □

Πρόταση 3.4.7. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ μη αυτοπαθής χώρος Banach με τον X^{**} διαχωρίσιμο. Υπάρχουν ισοδύναμη νόρμα, που θα συμβολίζουμε και πάλι με $\|\cdot\|$, $f_0 \in S_{X^{**}} \backslash \tau(X)$ και $F_0 \in S_{X^{***}} \cap \tau(X)^{\perp}$ τέτοια ώστε:*

(i) $F_0(f_0) = 1$ και $F_0(g) < 1$ για κάθε $g \in B_{X^{**}}$ με $g \neq f_0$.

(ii) Αν $H \in S_{X^{***}}$ και $H(f_0) = 1$, τότε $H \in X^{\perp}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει αρκετή δουλειά και μπορεί να βρεθεί στο [FLW2], Proposition 3, pages 3-5. □

Πόρισμα 3.4.8. *Έστω X διαχωρίσιμος σχεδόν αυτοπαθής τάξης 1 χώρος Banach. Τότε υπάρχουν ισοδύναμη νόρμα, που θα συμβολίζουμε και πάλι με $\|\cdot\|$, $f_0 \in S_{X^{**}} \backslash \tau(X)$ και $F_0 \in S_{X^{***}} \cap \tau(X)^{\perp}$ τέτοια ώστε:*

(i) $F_0(f_0) = 1$ και $F_0(g) < 1$ για κάθε $g \in B_{X^{**}}$ με $g \neq f_0$.

(ii) Το F_0 είναι το μοναδικό στοιχείο του συνόλου $S_{X^{***}}$ για το οποίο $F_0(f_0) = 1$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση βρίσκουμε $\|\cdot\|$, F_0, f_0 ώστε να ικανοποιείται η (i). Για την ιδιότητα (ii), ο X^{**} μπορεί να γραφεί ως $X^{**} = \tau(X) \bigoplus [f_0]$ και αφού $F_0(\tau(X)) = \{0\}$, θα ισχύει ότι $F_0(\tau(x) + \lambda f_0) = \lambda F_0(f_0) = \lambda$, για κάθε $\tau(x) + \lambda f_0 \in X^{**}$. Αν $G_0 \in S_{X^{***}}$ με $G_0(f_0) = 1$, από την προηγούμενη πρόταση, $G_0 \in \tau(X)^{\perp}$, δηλαδή $G_0(\tau(x) + \lambda f_0) = \lambda G_0(f_0) = \lambda = F_0$, για κάθε $\tau(x) + \lambda f_0 \in X^{**}$, επομένως $G_0 = F_0$. □

Προτού αποδείξουμε το αποτέλεσμα των Fonf, Lin και Wojtaszczyk, θα χρειαστούμε τέσσερα Λήμματα πάνω σε τελεστές εργοδικού μέσου. Το πρώτο εξ' αυτών αφορά γενικά σε χώρους Banach, ενώ τα τρία τελευταία σε σχεδόν αυτοπαθείς χώρους Banach τάξης ένα.

Λήμμα 3.4.9. *Έστω X χώρος Banach, $T \in B(X)$ τελεστής εργοδικού μέσου με φραγμένες δυνάμεις και $Px = \lim_n M_n x$. Τότε $P^*(X^*) = F(T^*)$.*

Απόδειξη. Οι ισότητες $TP = PT = P = P^2$ συνεπάγονται ότι $T^*P^* = P^*T^* = P^*$, άρα $T^*P^*x^* = P^*x^*$ για κάθε $x^* \in X^*$ που σημαίνει ότι $P(X^*) \subseteq F(T^*)$. Αν $x^* \in F(T^*)$, τότε $x^*(M_n x) = x^*(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, επομένως

$$P^*x^*(x) = x^*(Px) = x^*(\lim_n M_n x) = \lim_n x^*(M_n x) = x^*(x), \quad \forall x \in X,$$

δηλαδή $P^*x^* = x^*$, πράγμα που αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό. □

Λήμμα 3.4.10. *Έστω X σχεδόν αυτοπαθής χώρος Banach τάξης 1. Αν $T \in B(X)$ τελεστής με φραγμένες δυνάμεις, τότε τουλάχιστον ένας εκ των T, T^* είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Έστω T τελεστής με φραγμένες δυνάμεις που δεν είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Θα δείξουμε ότι ο T^* είναι. Από το κριτήριο του Sine το $F(T)$ δε διαχωρίζει το $F(T^*)$, επομένως υπάρχει $x_0^* \in F(T^*)$ τέτοιο ώστε $x_0^*(F(T)) = \{0\}$. Από το Πόρισμα 3.1.8 το $F(T^{**})$ διαχωρίζει τα σημεία του $F(T^*)$, άρα υπάρχει $x_0^{**} \in F(T^{**})$ τέτοιο ώστε $x_0^{**}(x_0^*) \neq 0$. Το x_0^{**} δεν ανήκει στο $\tau(F(T))$ αφού αν υπήρχε $x_0 \in F(T)$ με $x_0^{**} = \tau(x_0)$, τότε $0 \neq x_0^{**}(x_0^*) = \tau(x_0)(x_0^{**}) = 0$, άτοπο. Θα δείξουμε ότι

$$F(T^{**}) \cap \tau(X) \subseteq \tau(F(T)), \tag{3.34}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $x_0^{**} \notin \tau(X)$:

Έστω ψ_0 τέτοιο ώστε $T^{**}\psi_0 = \psi_0$ και $\psi_0 = \tau(x_0)$ με $x_0 \in X$. Τότε για κάθε $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} T^{**}\psi_0(x^*) &= \psi_0(x^*) && \Rightarrow \\ \tau(x_0)T^*x^* &= \tau(x_0)x^* && \Rightarrow \\ x^*(Tx_0) &= x^*(x_0), \end{aligned}$$

επομένως $Tx_0 = x_0$ και $\psi_0 \in \tau(F(T))$.

Δεδομένου ότι $\dim(X^{**}/\tau(X)) = 1$ και $x_0^{**} \notin \tau(X)$, ο X^{**} μπορεί να γραφεί ως

$$X^{**} = \tau(X) \oplus [x_0^{**}]. \tag{3.35}$$

Αν $x^{**} \in F(T^{**})$, τότε υπάρχουν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^{**} = \tau(x) + \lambda x_0^{**}$. Εφαρμόζοντας τον τελεστή T στην ισότητα αυτή, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $T^{**}x^{**} = x^{**}$ βρίσκουμε ότι $T^{**}\tau(x) = \tau(x)$. Αξιοποιώντας ξανά τον εγκλεισμό (3.34) έχουμε ότι $x \in F(T)$. Οπότε για κάθε $x^{**} \in F(T^{**})$ υπάρχουν $x \in \tau(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^{**} = \tau(x) + \lambda x_0^{**}$.

Για να δείξουμε ότι ο T^* είναι τελεστής εργοδικού μέσου, από το κριτήριο του Sine, αρκεί να δείξουμε ότι το $F(T^*)$ διαχωρίζει το $F(T^{**})$. Αν $x^{**} \in F(T^{**})$, σύμφωνα με όσα γράψαμε προηγουμένως, υπάρχουν $x \in F(T)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^{**} = \tau(x) + \lambda x_0^{**}$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} x^{**}(x_0^*) &= \tau(x)(x_0^*) + \lambda x_0^{**}(x_0^*) \\ &= x_0^*(x) + \lambda x_0^{**}(x_0^*) \\ &= \lambda x_0^{**}(x_0^*) \neq 0 \quad \text{και } x_0^* \in F(T^*). \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $x^{**} = \tau(x)$ με $x \in F(T)$. Το $F(T^*)$ διαχωρίζει το $F(T)$ άρα υπάρχει $x^* \in F(T^*)$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \neq 0$. Τότε $x^{**}(x^*) = \tau(x)(x^*) = x^*(x) \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση το $F(T^*)$ διαχωρίζει το $F(T^{**})$. □

Λήμμα 3.4.11. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$, f_0, F_0 όπως στο Πόρισμα 3.4.8 και $Q : X^{**} \to X^{**}$ προβολή στον $[f_0]$ με νόρμα ίση με ένα. Τότε $Qx^{**} = F_0(x^{**})f_0$, για κάθε $x^{**} \in X^{**}$.*

Απόδειξη. Η Q απεικονίζει τον X^{**} στον $[f_0]$, άρα θα γράφεται στη μορφή $Q(x^{**}) = a(x^{**})f_0$, για κάθε $x^{**} \in X^{**}$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το a είναι γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό με $\|a\| = 1$:

$$\begin{aligned} Q(\lambda x^{**} + y^{**}) &= a(\lambda x^{**} + y^{**})f_0 = \lambda Q x^{**} + Q y^{**} \\ &= \lambda a(x^{**})f_0 + a(y^{**})f_0 = [\lambda a(x^{**}) + a(y^{**})]f_0. \end{aligned}$$

Επιπλέον $\|Qx^{**}\| = |a(x^{**})| \cdot \|f_0\| = |a(x^{**})|$, για κάθε $x^{**} \in X^{**}$, άρα $\|a\| \leqslant 1$. Για την αντίστροφη ανισότητα, $Q\left(\frac{f_0}{\|f_0\|}\right) = \frac{f_0}{\|f_0\|} \Rightarrow a\left(\frac{f_0}{\|f_0\|}\right) = 1 \Rightarrow \|a\| \geqslant 1$.

Αφού ο Q είναι προβολή, θα έχουμε ότι

$$Q(f_0) = a(f_0)f_0 = Q^2 f_0 = a(f_0)^2 f_0,$$

άρα $a(f_0) = 0$ ή $a(f_0) = 1$. Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται, επομένως $a = F_0$ λόγω του Πορίσματος 3.4.8.

□

Λήμμα 3.4.12. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$, f_0, F_0 όπως στο Πόρισμα 3.4.8, W ασθενώς συμπαγής τελεστής και $T = I + W$ συστολή. Τότε $f_0 \in F(T^{**})$.*

Απόδειξη. Αφού ο W είναι ασθενώς συμπαγής, το στοιχείο $W^{**}f_0$ ανήκει στο $\tau(X)$, οπότε $F_0(W^{**}f_0) = 0$. Επιπλέον

$$1 = F_0(f_0 + W^{**}f_0) \leqslant \|f_0 + W^{**}f_0\| = \|T^{**}f_0\| \leqslant 1,$$

άρα $\|f_0 + W^{**}f_0\| = 1$. Από το Πόρισμα 3.4.8 θα πρέπει $f_0 + W^{**}f_0 = f_0 \Rightarrow W^{**}f_0 = 0 \Rightarrow T^{**}f_0 = f_0 + W^{**}f_0 = f_0$, άρα $f_0 \in F(T^{**})$. □

Πλέον είμαστε σε θέση να δώσουμε (αρνητική) απάντηση στο ερώτημα του Sucheston.

Θεώρημα 3.4.13. ***(Fonf, Lin, Wojtaszczyk, 2010).*** *Κάθε διαχωρίσιμος σχεδόν αυτοπαθής χώρος Banach τάξης ένα, επιδέχεται ισοδύναμη νόρμα ως προς την οποία κάθε συστολή είναι τελεστής εργοδικού μέσου.*

Απόδειξη. Εφοδιάζουμε τον X με τη νόρμα του Πορίσματος 3.4.8. Έστω T συστολή. Από το Πόρισμα 3.4.5 ο T θα έχει τη μορφή $T = \lambda I + W$ με τον W ασθενώς συμπαγή. Αν $\lambda \neq 1$, από την Πρόταση 3.4.6 έχουμε ότι ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου, άρα απομένει να δείξουμε ότι, για $\lambda = 1$, ο $T = I + W$ είναι τελεστής εργοδικού μέσου.

Από το Λήμμα 3.4.10 γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον ένας εκ των T, T^* είναι τελεστής εργοδικού μέσου, οπότε αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο T^* είναι τελεστής εργοδικού μέσου. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $F(T^*) \neq \{0\}$ αφού σε αντίθετη περίπτωση προκύπτει άμεσα ότι ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου από το κριτήριο του Sine. Ορίζουμε $P : X^* \to X^*$ ως εξής:

$$Px^* = \lim_n \frac{T^* x^* + \ldots + T^{*n} x^*}{n}.$$

Ο P αποτελεί προβολή επί του $F(T^*)$ με $\|P\| = 1$ και

$$X^* = F(T^*) \oplus \overline{(I - T^*)(X^*)} = P(X^*) \oplus \overline{W^*(X^*)}. \tag{3.36}$$

Από το Λήμμα 3.4.12, $f_0 \in F(T^{**})$. Έχουμε δει σε προηγούμενη απόδειξη ότι $F(T^{**}) \cap \tau(X) \subseteq F(T)$. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς, απλά αντιστρέφοντας τα βήματα της εν λόγω απόδειξης, ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός, δηλαδή $x \in F(T) \iff \tau(x) \in F(T^{**})$. Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι $F(T^{**}) = \tau(F(T)) \oplus [f_0]$. Ορίζουμε $Q : X^{**} \to X^{**}$ με $Qx^{**} = F_0(P^* x^{**}) f_0$. Το f_0 αποτελεί σταθερό σημείο του τελεστή Q: Από το Λήμμα 3.4.9 γνωρίζουμε πως $P^*(X^{**}) = F(T^{**})$, ενώ $f_0 \in F(T^{**})$, άρα υπάρχει $x_0^{**} \in X^{**}$ τέτοιο ώστε $P^*(x_0^{**}) = f_0$. Από τη σχέση $PT^* = T^*P = P = P^2$ συνεπάγεται ότι $T^{**}P^* = P^*T^{**} = P^* = P^{*2}$, οπότε

$$P^* f_0 = P^*(P^*(x_0^{**})) = P^* x_0^{**} = f_0.$$

Όμως $P^* f_0 = f_0 \Rightarrow F_0(P^* f_0) = F_0(f_0) = 1 \Rightarrow Qf_0 = F_0(f_0) f_0 = f_0$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι $\|Q\| = 1$ και $Q^2 = Q$. Η Q ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 3.4.11, άρα για κάθε x^{**}, $Qx^{**} = F_0(x^{**}) f_0$ και $\ker Q = \ker F_0 = \tau(X)$, αφού ο X είναι σχεδόν αυτοπαθής τάξης ένα. Αφού $\ker P^* \subseteq \ker F_0$ συμπεραίνουμε ότι $\ker P^* \subseteq \tau(X)$. Από το Λήμμα 3.4.9, $F(T^{**}) = P^*(X^{**})$ και

$$X^{**} = P^*(X^{**}) \oplus \ker P^* = F(T^{**}) \oplus \ker P^* = [f_0] \oplus F(T) \oplus \ker P^*,$$

με την πρώτη ισότητα να ισχύει επειδή η $P^* : X^{**} \to X^{**}$ είναι προβολή. Από τη σχέση $X^{**} = \tau(X) \oplus [f_0] = F(T) \oplus \ker P^* \oplus [f_0]$ έχουμε ότι

$$\tau(X) = \tau(F(T)) \oplus \ker P^*. \tag{3.37}$$

Θα βρούμε το ασθενές $*$-όριο της ακολουθίας $\left(\frac{T^{**}x^{**}+\ldots+T^{**n}x^{**}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν $x^*\in X^*$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{T^{**}x^{**}+\ldots+T^{**n}x^{**}}{n}\right)(x^*) &= \left(\frac{T^{**}x^{**}(x^*)+\ldots+T^{**n}x^{**}(x^*)}{n}\right)\\ &= \frac{x^{**}\circ T^*(x^*)+\ldots+x^{**}\circ T^{*n}(x^*)}{n}\\ &= x^{**}\left(\frac{T^*x^*+\ldots+T^{*n}x^*}{n}\right).\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια βρίσκουμε ότι $\lim_n \frac{T^{**}x^{**}+\ldots+T^{**n}x^{**}}{n} = x^{**}(Px^*) = (x^{**}\circ P)(x^*) = P^*(x^{**})(x^*)$, επομένως $\frac{T^{**}x^{**}+\ldots+T^{**n}x^{**}}{n} \xrightarrow{*} P^*x^{**}$. Αφού $\ker P^*\subseteq \tau(X)$, αν $P^*x^{**}=0$, τότε υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε $x^{**}=\tau(x)$. Επιπλέον η ακολουθία $\left(\frac{Tx+\ldots+T^nx}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν: Αν $x^*\in X^*$, τότε

$$\begin{aligned}x^*\left(\frac{Tx+\ldots+T^nx}{n}\right) &= \frac{(x^*\circ T)x+\ldots+(x^*\circ T^n)x}{n}\\ &= \frac{T^*x^*(x)+\ldots+T^{*n}x^*(x)}{n}\\ &= \frac{\tau(x)T^*x^*+\ldots+\tau(x)T^{*n}x^*}{n}\\ &= \frac{T^{**}\tau(x)x^*+\ldots+T^{**n}\tau(x)x^*}{n}\\ &= \left(\frac{T^{**}\tau(x)+\ldots+T^{**n}\tau(x)}{n}\right)x^*\end{aligned}$$

και παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο.

Από το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου η $\left(\frac{Tx+\ldots T^nx}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ισχυρά στο μηδέν, άρα $\ker P^*\subseteq \tau(\overline{(I-T)(X)})$. Τελικά έχουμε ότι $\tau(X)=\tau(F(T))\oplus\tau(\overline{(I-T})X)$ και $X=F(T)\oplus\overline{(I-T)(X)}$ από το οποίο έπεται ότι ο T είναι τελεστής εργοδικού μέσου. □

3.5 Εργοδικά Δίκτυα σε Τοπολογικούς Γραμμικούς Χώρους

Μέχρι τώρα σε αυτό το κεφάλαιο δουλέψαμε με τελεστές T που ορίζονται σε χώρους Banach και μελετήσαμε κάποιες ιδιότητες της ημιομάδας $\{T^n : n\in\mathbb{N}\}$. Στη συνέχεια γενικεύουμε αυτές τις ιδιότητες για την περίπτωση όπου ο χώρος μας είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και $\mathcal{P}$ τυχούσα ημιομάδα συνεχών και γραμμικών τελεστών. Απώτερος σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα του Fejér με επιχειρήματα εργοδικής θεωρίας (Παράγραφος 3.5α').

Ορισμός 3.5.1. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $\mathcal{P}$ ημιομάδα συνεχών τελεστών από τον X στον X. Λέμε ότι η $\mathcal{P}$ επιδέχεται* ***δεξιό $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο*** $\{\boldsymbol{A_\lambda} : \boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}\}$ *αν*

(i) το $\{A_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ αποτελεί δίκτυο γραμμικών τελεστών του X,

(ii) *για κάθε $x \in X$ και κάθε $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda x \in \overline{\mathrm{co}}\mathcal{P}x$,*

(iii) *η οικογένεια $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ είναι ισοσυνεχής,*

(iv) *για κάθε $x \in X$ και κάθε $T \in \mathcal{P}$, $\lim_\lambda(A_\lambda Tx - A_\lambda x) = 0$.*

Αν η τελευταία συνθήκη αντικατασταθεί από την απαίτηση για κάθε $x \in X$ και κάθε $T \in \mathcal{P}$, $\lim_\lambda(TA_\lambda x - A_\lambda x) = 0$, τότε το δίκτυο ονομάζεται ***αριστερό $\mathcal{P}$-εργοδικό*** *ενώ αν είναι ταυτόχρονα αριστερό και δεξιό θα ονομάζεται* ***$\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο.***

Παρατήρηση 3.5.2. *Στην περίπτωση όπου ο X υποτεθεί χώρος Banach η υπόθεση περί ισοσυνέχειας ισοδυναμεί με την απαίτηση η $\mathcal{P}$ να είναι $\|\cdot\|$-φραγμένη.*

Το πρώτο παράδειγμα δείχνει ότι τα $\mathcal{P}$-εργοδικά δίκτυα γενικεύουν την έννοια των Cesàro αθροισμάτων για τελεστές με φραγμένες δυνάμεις:

Παράδειγμα 3.5.3. *Έστω $T \in B(X)$ τελεστής με φραγμένες δυνάμεις και $\mathcal{P}$ η ημιομάδα που παράγεται από τον T, $\mathcal{P} = \{I, T, T^2, \ldots\}$. Η ακολουθία $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $M_n = \frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}$, αποτελεί $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο.*

Απόδειξη. Οι πρώτες δύο συνθήκες είναι άμεσες. Η ισοσυνέχεια προκύπτει από την ισοσυνέχεια της $\mathcal{P}$, δηλαδή από το γεγονός ότι ο T έχει φραγμένες δυνάμεις. Αν $M = 1 \vee \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|$, τότε $\|M_n\| \leqslant \frac{1+\|T\|+\ldots+\|T\|^{n-1}}{n} \leqslant \frac{nM}{n} = M$, άρα η $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοσυνεχής. Για την τελευταία συνθήκη έχουμε ότι $M_nT - M_n = \frac{T^n - I}{n}$, άρα $\|M_nTx - M_nx\| \leqslant \frac{\|T^nx\|}{n} + \frac{\|x\|}{n} \leqslant \frac{(M+1)\|x\|}{n} \longrightarrow 0$. Άρα η $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί αριστερό $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο ενώ από την μεταθετικότητα της $\mathcal{P}$ προκύπτει ότι είναι και δεξιό. □

Παράδειγμα 3.5.4. *Έστω $T_1, \ldots T_d \in B(X)$ τελεστές με φραγμένες δυνάμεις που αντιμετατίθενται και $\mathcal{P} = \{T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} : n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ η ημιομάδα που παράγουν. Θέτουμε $\Lambda = \mathbb{N}^d = \{(n_1, \ldots, n_d) : n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}\}$, εφοδιάζουμε το Λ με τη συνήθη διάταξη η οποία το καθιστά κατευθυνόμενο προδιατεταγμένο σύνολο και για κάθε $\lambda = (n_1, \ldots, n_d) \in \Lambda$ ορίζουμε*

$$A_\lambda = \frac{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1} \cdots T_d^{i_d}}{n_1 \cdots n_d}. \tag{3.38}$$

Το $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο.

Απόδειξη. Οι πρώτες δύο συνθήκες είναι προφανείς. Για την ισοσυνέχεια θέτουμε $M = 1 \vee \sup_n \|T_1^n\| \vee \ldots \vee \sup_n \|T_d^n\|$, το οποίο είναι πεπερασμένο από υπόθεση. Τότε

$$\|A_\lambda\| \leqslant \frac{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} \|T_1^{i_1}\| \cdots \|T_d^{i_d}\|}{n_1 \cdots n_d} \leqslant \frac{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} M^d}{n_1 \cdots n_d} = \frac{n_1 \cdots n_d M^d}{n_1 \cdots n_d} = M^d.$$

Άρα $\|A_\lambda\| \leqslant M^d$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και η $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ισοσυνεχής.

Για την τέταρτη συνθήκη, έστω $x \in X$ και θα δείξουμε ότι $T_1 A_\lambda x - A_\lambda x \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
T_1 A_\lambda x - A_\lambda x &= \frac{\sum_{i_1=1}^{n_1-1}\sum_{i_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1}\cdots T_d^{i_d}x - \sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_1^{i_1}\cdots T_d^{i_d}x}{n_1\cdots n_d} \\
&= \frac{T_1^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_2^{i_2}\cdots T_d^{i_d}x - T_1\sum_{i_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} T_2^{i_2}\cdots T_d^{i_d}x}{n_1\cdots n_d}, \\
\|T_1 A_\lambda x - A_\lambda x\| &\leqslant \frac{2\|x\|M^{d-1}}{n_1} \underset{\lambda\in\Lambda}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει ότι $T_1^2 A_\lambda x - A_\lambda x \to 0$ και επαγωγικά έχουμε ότι $T_i^n A_\lambda x - A_\lambda x \underset{\lambda\in\Lambda}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i = 1, \ldots, d$. Αν S, L τελεστές που αντιμετατίθενται με τα A_λ και για τους οποίους $SA_\lambda x - A_\lambda x, LA_\lambda x - A_\lambda x \to 0$, για κάθε $x \in X$, τότε πάλι από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $LSA_\lambda x - A_\lambda x \to 0$ για κάθε $x \in X$. Επομένως τελικά δείξαμε ότι $TA_\lambda x - A_\lambda x \to 0$ για κάθε $T \in \mathcal{P}$ και κάθε $x \in X$. □

Είδαμε δύο παραδείγματα ημιομάδων που επιδέχονται εργοδικά δίκτυα, όμως εν γένει, για μια τυχαία ημιομάδα, δεν είναι πάντα εφικτό να βρίσκουμε εργοδικά δίκτυα. Η επόμενη πρόταση δίνει ικανές συνθήκες ώστε να συμβαίνει αυτό.

Πρόταση 3.5.5. *Κάθε αβελιανή και ισοσυνεχής ημιομάδα $\mathcal{P} \subseteq B(X)$ επιδέχεται $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\Lambda = \operatorname{co}\mathcal{P} \cup \{I\}$ και εφοδιάζουμε το Λ με την εξής διάταξη: Αν $T, S \in \Lambda$, τότε $T \geqslant S$ αν υπάρχει $R \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $T = RS$. Το $(\Lambda, \leqslant)$ είναι κατευθυνόμενο προδιατεταγμένο σύνολο:

Αυτοπάθής:

Αν $T \in \Lambda$, τότε $T = IT$, άρα $T \geqslant T$.

Μεταβατική:

Αν $T \geqslant S$ και $S \geqslant L$, τότε υπάρχουν $R, R' \in \Lambda$ τέτοια ώστε $T = SR = RS$ και $S = LR' = R'L$, οπότε $T = SR = LR'R = RS = RR'L$. Αν θέσουμε $R'' = R'R$, τότε έχουμε ότι $T = R''L$, δηλαδή $T \geqslant L$. Σε αυτό το σημείο πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $R'R \in \Lambda$. Έστω $R' = aP_1 + (1-a)P_2$ και $R = bP_3 + (1-b)P_4$ για $a, b \in [0,1]$ και $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$. Τότε

$$\begin{aligned}
R'R &= (aP_1 + (1-a)P_2)(bP_3 + (1-b)P_4) \\
&= abP_1P_2 + a(1-b)P_1P_4 + (1-a)bP_2P_3 + (1-a)(1-b)P_2P_4 \\
&\in \operatorname{co}\{P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4\} \subseteq \Lambda,
\end{aligned}$$

αφού $ab + a(1-b) + (1-a)b + (1-a)(1-b) = 1$ και καθένας από τους αριθμούς αυτούς είναι μη αρνητικός.

Κατευθυνόμενη:
Αν $T, S \in \Lambda$, τότε $TS \in \Lambda$ και $TS \geqslant T, S$.

Ορίζουμε δίκτυο $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ως εξής: $A_\lambda = \lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Το δίκτυο αυτό είναι $\mathcal{P}$-εργοδικό. Οι συνθήκες (i), (ii) είναι και πάλι άμεσες. Για την ισοσυνέχεια επιλέγουμε $V \in \mathcal{U}(0), U \in \mathcal{U}(0)$ τέτοιο ώστε $U + U \subseteq V$ και θα βρούμε $W'' \in \mathcal{U}(0)$ τέτοιο ώστε $A_\lambda(W') \subseteq V$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Αν $T \in \operatorname{co}\mathcal{P}$ τότε $T = aP_1 + (1-a)P_2$ για κάποια $a \in [0, 1]$ και $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Από την ισοσυνέχεια των στοιχείων της $\mathcal{P}$ έχουμε ότι υπάρχει $W \in \mathcal{U}(0)$ τέτοια ώστε $T(W) \subseteq U$, για κάθε $T \in \mathcal{P}$. Έστω $W' \subseteq W$ αστρόμορφο και συμμετρικό. Έχουμε ότι $T(W') = aP_1(W') + (1-a)P_2(W') \subseteq P_1(aW') + P_2((1-a)W') \subseteq P_1(W') + P_2(W') \subseteq U + U \subseteq V$. Αν $T = I$, τότε $T(W) = W$. Επιλέγουμε $W'' = U \cap W'$.

Για την συνθήκη (iv), έστω $T \in \mathcal{P}$. Τότε $A_n(T) = \frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}$. Αφού το Λ είναι κατευθυνόμενο σύνολο υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$ να ισχύει ότι $A_\lambda \geqslant A_n(T)$, δηλαδή για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$ υπάρχει $R_\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $A_\lambda = R_\lambda A_n(T)$. Επομένως $A_\lambda - A_\lambda T = R_\lambda A_n(T) - R_\lambda T A_n(T) = R_\lambda(\frac{I-T^n}{n})$. Το οποίο δείχνει ότι $\lim_\lambda A_\lambda x - A_\lambda T x = 0$ για κάθε $x \in X$. Από τη μεταθετικότητα της $\mathcal{P}$ προκύπτει επιπλέον ότι $\lim_\lambda A_\lambda x - T A_\lambda x = 0$. □

Με τη χρήση εργοδικών δικτύων το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου (Θεώρημα 3.1.4) επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.5.6. ***(Eberlein, 1949).*** *Έστω (X, τ) τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και $\mathcal{P}$ ημιομάδα συνεχών τελεστών. Αν $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο τότε για κάθε $x, y \in X$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Ty = y$ *για κάθε* $T \in \mathcal{P}$ *και* $y \in \overline{\operatorname{co}}\mathcal{P}x$,

(ii) $A_\lambda x \longrightarrow y$,

(iii) $A_\lambda x \xrightarrow{w} y$,

(iv) *το* y *αποτελεί ασθενές σημείο συσσώρευσης του συνόλου* $\{A_\lambda x : \lambda \in \Lambda\}$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**
Έστω $U \in \mathcal{U}(0)$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $A_\lambda x \in y + U$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$. Επιλέγουμε $V \in \mathcal{U}(0)$ κυρτή, αστρόμορφη και συμμετρική τέτοια ώστε $V + V \subseteq U$. Αφού $y \in \overline{\operatorname{co}}\mathcal{P}x$, θα έχουμε ότι $y + V \cap \overline{\operatorname{co}}\mathcal{P} \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $S \in \operatorname{co}\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $y - Sx \in V$. Έστω $S = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$ η γραφή του S ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{P}$. Τότε

$$\begin{aligned} A_\lambda Sx - A_\lambda x &= \lambda_1 A_\lambda P_1 x + \ldots + \lambda_n A_\lambda P_n x - A_\lambda x \\ &= \lambda_1(A_\lambda P_1 x - A_\lambda x) + \ldots + \lambda_n(A_\lambda P_n x - A_\lambda x). \end{aligned}$$

Αφού το $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ αποτελεί δεξιό $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο, θα έχουμε ότι $\lim_\lambda A_\lambda P_i x - A_\lambda x = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και καθώς το Λ είναι άνω κατευθυνόμενο, μπορούμε να βρούμε $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $A_\lambda P_i x - A_\lambda x \in V$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και κάθε $i =$

$1, \ldots, n$. Επιπλέον $A_\lambda Sx - A_\lambda x \in \lambda_1 V + \ldots + \lambda_k V \subseteq V$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$, αφού το V είναι κυρτό.

Από την ισοσυνέχεια της (A_λ), υπάρχει $W \in \mathcal{U}(0)$ τέτοιο ώστε $A_\lambda(W) \subseteq V$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Όμως $A_\lambda Sx - A_\lambda y = A_\lambda(Sx - y)$ και δεδομένου ότι $y - Sx \in V$ θα έχουμε ότι $y - Sx \in V \cap W \subseteq W \Rightarrow A_\lambda(Sx - y) \in V$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Θα δείξουμε ότι το y αποτελεί σταθερό σημείο της οικογένειας (A_λ). Από την ιδιότητα **(ii)** των εργοδικών δικτύων, $A_\lambda y \in \overline{\text{co}}\mathcal{P}y$, άρα υπάρχει δίκτυο $(z_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}y$ τέτοιο ώστε $\lim_k z_k - A_\lambda y = 0$. Όμως κάθε z_k γράφεται ως κυρτός συνδασμός $z_k = \lambda_{1k}P_{1k}y + \ldots + \lambda_{nk}P_{nk}y$ το οποίο ισούται με y για κάθε $k \in K$. Τελικά

$$\begin{aligned} y - A_\lambda x &= A_\lambda y - A_\lambda x \\ &= (A_\lambda y - A_\lambda Sx) + (A_\lambda Sx - A_\lambda x) \in V + V \subseteq U, \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0. \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii)
Προφανής.

(iii) ⇒ (iv)
Προφανής.

(iv) ⇒ (i)
Έστω $y \in \overline{\{A_\lambda x : \lambda \in \Lambda\}}^w \subseteq \overline{\text{co}}\mathcal{P}x$ και $x^* \in X^*$. Θα δείξουμε ότι $x^*(y) = x^*(Ty)$:

$$\begin{aligned} |x^*(y) - x^*(Ty)| = |x^*(y) - x^*(A_\lambda x)| + |x^*(A_\lambda x) - x^*(TA_\lambda x)| + \\ + |x^*(TA_\lambda x) - x^*(Ty)|. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Γνωρίζουμε ότι η x^* είναι συνεχής, επομένως υπάρχει $U \in \mathcal{U}(0)$ τέτοιο ώστε $x^*(U) \subseteq (-\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{3})$. Για τον πρώτο όρο της 3.39, το y αποτελεί ασθενές οριακό σημείο της $(A_\lambda x)$, οπότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $y - A_{\lambda_0}x \in U \Rightarrow |x^*(y) - x^*(A_{\lambda_0}x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Για τον δεύτερο όρο, το (A_λ) αποτελεί αριστερό $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο, επομένως $\lim_\lambda TA_\lambda x - A_\lambda x = 0$, δηλαδή υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $A_\lambda x - TA_\lambda x \in U$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_1$. Για τον τρίτο όρο, υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $A_{\lambda_2}x - y \in W$ με $T(W) \subseteq U$. Επιλέγουμε $\lambda_3 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda_3 \geqslant \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Επειδή η $(A_\lambda x)$ συσσωρεύει στο y θα υπάρχει $\lambda_0' \geqslant \lambda_3$ τέτοιο ώστε και οι τρεις όροι της 3.39 να είναι μικρότεροι ή ίσοι από $\frac{\epsilon}{3}$ ταυτόχρονα. Δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, $|x^*(y) - x^*(Ty)| \leqslant \epsilon$, άρα $x^*(y) = x^*(Ty)$.

□

3.5α΄ Εφαρμογές

Ύπαρξη μέσου για συνεχείς σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.5.7. *Έστω $C_b(\mathbb{R})$ ο χώρος των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και $\mathcal{P} = \{T_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ημιομάδα τελεστών όπου $T_\lambda : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ ο τελεστής μετατόπισης κατά λ:*

$$T_\lambda f(t) = f(t + \lambda), \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

Μια συνάρτηση $f \in C_b(\mathbb{R})$ καλείται ***σχεδόν περιοδική*** *(almost periodic) αν το σύνολο $\overline{\mathcal{P}f} = \overline{\{T_\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\}}$ είναι συμπαγές.*

Θεώρημα 3.5.8. *Αν $f \in C_b(\mathbb{R})$ σχεδόν περιοδική, τότε υπάρχει το όριο*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+s)ds$$

και μάλιστα είναι ίδιο για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για κάθε πραγματικό αριθμό λ ορίζουμε τους τελεστές A_λ ως εξής:

$$A_\lambda f(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda T_s f ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+s)ds. \tag{3.41}$$

Η $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ αποτελεί εργοδικό δίκτυο: Είναι άμεσο ότι $A_\lambda \in B(C_b(\mathbb{R}))$ και ότι $\|A_\lambda\| \leqslant 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_b(\mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda T_a f - A_\lambda f\| &= \|A_\lambda f(t+a) - A_\lambda f\| \\
&= \left\| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+s+a)ds - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+s)ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\lambda} \int_a^{\lambda+a} f(t+s)ds - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+s)ds \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_\infty \mu\left([a, a+\lambda] \triangle [0, \lambda]\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \|f\|_\infty \mu\left([0, a] \cup [\lambda, \lambda+a]\right) \leqslant \frac{2a\|f\|_\infty}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0,
\end{aligned}$$

όπου με $[a, a+\lambda] \triangle [0, \lambda]$ συμβολίσαμε τη συμμετρική διαφορά των διαστημάτων $[a, a+\lambda]$, $[0, \lambda]$ και με μ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

Αν η f είναι σχεδόν περιοδική, τότε εξ' ορισμού το $\mathcal{P}f$ είναι σχετικά συμπαγές. Όμως για κάθε λ, $A_\lambda \in \overline{\text{co}}\mathcal{P}f$, επομένως από το Θεώρημα του Eberlein υπάρχει το όριο $g = \lim_\lambda A_\lambda f$ για το οποίο θα πρέπει $T_\lambda g = g$, για κάθε λ, δηλαδή η g σταθερή. Η g είναι η μέση τιμή της f. □

Το Θεώρημα του Fejér.

Οι έννοιες που θα χρειαστούμε έχουν περιγραφεί στην Παράγραφο 1.4, προχωρούμε λοιπόν απ'ευθείας στην απόδειξη του Θεωρήματος του Fejér με χρήση του Θεωρήματος Εργοδικού Μέσου του Eberlein.

Θεώρημα 3.5.9. ***(Fejér).*** *Έστω f συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε ο αριθμητικός μέσος της σειράς Fourier της f συγκλίνει στην f ομοιόμορφα, δηλαδή*

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0. \tag{3.42}$$

Απόδειξη. Έστω X ο χώρος των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}$ εφοδιασμένος με την supremum νόρμα, $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(t)e^{ikt}$ για κάθε $f \in X, t \in \mathbb{R}$ και $U_n = I - S_n$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P} = \{I\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το $\mathcal{P}$ αποτελείται από φραγμένους γραμμικούς τελεστές και, όπως θα δείξουμε, αποτελεί ημιομάδα. Πράγματι, αν $n, m \in \mathbb{N}$, είναι άμεσο από τον ορισμό των S_n ότι για κάθε $f \in X$, $(S_n \circ S_m)(f) = S_n(S_m(f)) = S_{n\wedge m}(f)$, δηλαδή $S_nS_m = S_{n\wedge m}$, όπου με $n \wedge m$ συμβολίζουμε το $\min\{n, m\}$. Επομένως, αν $n \vee m$ είναι το $\max\{n, m\}$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U_nU_m &= (I - S_n)(I - S_m) = I - S_n - S_m + S_nS_m = I - S_n - S_m + S_{n\wedge m} \\ &= I - S_{n\vee m} = U_{n\vee m}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

με το $U_{n\vee m}$ να αποτελεί στοιχείο του $\mathcal{P}$. Αφού $U_nU_m \in \mathcal{P}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και προφανώς $IU_n = U_n \in \mathcal{P}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{P}$ αποτελεί ημιομάδα τελεστών.

Ισχύει ότι $\|S_n\| = L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$, όπου $L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u)|du$ οι σταθερές Lebesgue, πράγμα που φανερώνει ότι η $\mathcal{P}$ δεν είναι ισοσυνεχής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_n = \frac{U_0 + U_1 + \ldots + U_n}{n+1} \tag{3.44}$$

και θα δείξουμε ότι το $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί $\mathcal{P}$-εργοδικό δίκτυο. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.5.1, πρέπει να δείξουμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(i) **Κάθε A_n είναι γραμμικός τελεστής:** Αυτό είναι άμεσο αφού $A_n = \frac{U_0+U_1+\ldots+U_n}{n+1}$ και καθένας εκ των U_i είναι γραμμικός τελεστής.

(ii) **Για κάθε $f \in X$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n(f) \in \overline{\text{co}}\mathcal{P}(f)$:** Και αυτό είναι άμεσο αφού $A_n(f) = \frac{U_0(f)+U_1(f)+\ldots+U_n(f)}{n+1} \in \text{co}\{U_0(f), \ldots U_n(f)\} \subseteq \text{co}\,\mathcal{P}(f) \subseteq \overline{\text{co}}\mathcal{P}(f)$.

(iii) **Η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής:** Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.5.2 αρκεί να δείξουμε ότι η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Αν $K_n(t) = \frac{D_0(t)+\ldots+D_n(t)}{n+1}$ ο πυρήνας του Fejér, τότε

$$\begin{aligned} A_n(f)(z) &= \frac{f - S_0(f) + \ldots + f - S_n(f)}{n+1}(z) \\ &= f(z) - \frac{S_0(f) + \ldots + S_n(f)}{n+1}(z) \\ &= f(z) - \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z-t)D_0(t)dt + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z-t)D_n(t)dt}{n+1} \\ &= f(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z-t)K_n(t)dt. \end{aligned}$$

Όμως ο πυρήνας του Fejér είναι θετικός (βλ. σχόλια στον Ορισμό 1.4.5) και επιπλέον $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$, επομένως

$$\begin{aligned} \|A_n(f)\| &\leqslant \|f\| + \frac{1}{2\pi}\|f\|\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt \\ &= \|f\| + \frac{1}{2\pi}\|f\|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt \\ &= \|f\| + \|f\| = 2\|f\|, \quad \text{για κάθε } f \in X. \end{aligned}$$

Άρα $\|A_n\| \leqslant 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) **Για κάθε $\boldsymbol{T \in \mathcal{P}}$ και κάθε $\boldsymbol{f \in X}$, $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} A_nTf - A_nf = \lim_{n\to\infty} TA_nf - A_nf = 0}$:** Αν $T = I$ το ζητούμενο είναι προφανές. Αν $T = U_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε για $m > n$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} TA_m - A_m &= A_mT - A_m \\ &= \frac{U_0 + \ldots U_m}{m+1}U_n - \frac{U_0 + \ldots + U_m}{m+1} \\ &= \frac{U_{0\vee n} + \ldots + U_{m\vee n}}{m+1} - \frac{U_0 + \ldots + U_m}{m+1} \\ &= \frac{U_n + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots + U_m}{m+1} - \frac{U_0 + \ldots + U_m}{m+1} \\ &= \frac{(n+1)U_n + U_{n+1} + \ldots + U_m}{m+1} - \frac{U_0 + \ldots + U_m}{m+1} \\ &= \frac{nU_n - U_0 - U_1 - \ldots - U_{n-1}}{m+1}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Αν $M = \max\{\|U_0\|, \ldots, \|U_n\|\}$, τότε η 3.45 δίνει

$$\|TA_m - A_m\| = \|A_mT - A_M\| \leqslant \frac{2nM}{m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.46}$$

το οποίο δείχνει το ζητούμενο.

Έστω $f \in X$. Η οικογένεια $(A_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής, επομένως από το Θεώρημα Arzelà-Ascoli, το σύνολο $\{A_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικά συμπαγές. Από το Θεώρημα Εργοδικού Μέσου του Eberlein, υπάρχει $g \in X$ με $A_n(f) \to g$ και $U_n(g) = g$ για κάθε n, δηλαδή $S_n(g) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 1.4.2 έπεται ότι $g = 0$, δηλαδή $\|A_n(f)\| \to 0$ για κάθε $f \in X$, ή ισοδύναμα ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i(f) - f \right\|_\infty = 0.$$

□

3.6 Αναφορές

3.1 Οι έννοιες που μελετήσαμε σε αυτή την Παράγραφο, όπως επίσης και στην Παράγραφο 3.2α′, περιγράφονται αναλυτικά στο [Kre], Paragraph 2.1. Το βιβλίο αυτό αποτελεί κλασσικό εγχειρίδιο που πραγματεύεται τέτοια ζητήματα και χρησιμοποιήθηκε σε πολλά ακόμη σημεία αυτής της εργασίας.

3.2β′ Το παράδειγμα 3.2.3 υπάρχει στο [Far].

3.2γ΄ Ακολουθήσαμε πιστά το άρθρο που παρουσιάσαμε ([FLW]).

3.3 Οι έννοιες της ομοιόμορφης σύγκλισης μέχρι και το Θεώρημα του Lin μπορούν να βρεθούν στο [Kre], Paragraph 2.2. Η λύση του αντίστροφου προβλήματος είναι μεταγενέστερη και αναπτύσσεται στο [FLW]. Οι φασματικές ιδιότητες των τελεστών εργοδικού μέσου βρέθηκαν στο [Ali], Paragraph 20.3.

3.4 Σκοπός της παραγράφου ήταν η παρουσίαση του σημαντικότερου αποτελέσματος του [FLW2], οπότε βασιστήκαμε σχεδόν αποκλειστικά στο συγκεκριμένο άρθρο. Μόνη εξαίρεση αποτελεί το Λήμμα 3.4.10 το οποίο διατυπώνεται σε ισχυρότερη μορφή ως θεώρημα για χώρους με βάση στο [FLW], Theorem 5, p. 159, με την παρατήρηση ότι η απόδειξη της κατεύθυνσης που μας ενδιαφέρει δε χρησιμοποιεί πουθενά την απαίτηση για βάση.

3.5 Οι αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων υπάρχουν αναλυτικά γραμμένες στο [Ebe] όπου και δημοσιεύτηκαν για πρώτη φορά. Μπορούν επίσης να βρεθούν στο [Kre], pp. 75-77.

Πίνακας Συμβόλων

$\mathrm{aff}(X)$	η ομάδα των αμφιμονοσήμαντων αφινικών απεικονίσεων από τον X στον X
$B(X)$	το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών από τον X στον X
$B^1(G,\pi)$	ο διανυσματικός χώρος των 1-ομοσυνόρων
$M_n(T)$	η ακολουθία των Cesàro αθροισμάτων του τελεστή T: $M_n(T) = \frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}$
ϵ_x	το μέτρο Dirac στο σημείο x
$extX$	τα ακραία σημεία του συνόλου X
$\mathrm{GL}(X)$	η γενική γραμμική ομάδα του διανυσματικού χώρου X
I_A	η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A
$K(X)$	το σύνολο των συμπαγών τελεστών από τον X στον X
$K^w(X)$	το σύνολο των ασθενώς συμπαγών τελεστών από τον X στον X
$\mathrm{inv}(A)$	η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων μιας άλγεβρας με μονάδα (A,e)
$\sigma(a)$	το φάσμα του στοιχείου a μιας άλγεβρας με μονάδα
$\mathrm{SO}(2)$	η ειδική ορθογώνια ομάδα
$U(H)$	το σύνολο των ορθομοναδιαίων τελεστών του χώρου Hilbert H
$Z^1(G,\pi)$	ο διανυσματικός χώρος των 1-ομοκύκλων

Βιβλιογραφία

Ελληνική

[Καρ] Καρανάσιος, Σ. *C^* Άλγεβρες, Σημειώσεις Παραδόσεων Μεταπτυχιακού Μαθήματος*, 2013. (Cited on pages 14 and 15.)

[Κου] Κουμουλλής, Γ., Νεγρεπόντης, Σ. *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005. (Cited on page 30.)

[Μπου] Μπούκας, Α., Φελλούρης, Α. *Εισαγωγή στις Ομάδες και Άλγεβρες Lie*, Ε.Μ.Π., 2013.

[Σαρ] Σαραντόπουλος, Ι. *Μια Εισαγωγή στην Αρμονική Ανάλυση*, Ε.Μ.Π., 2012. (Cited on page 7.)

[Φαρ] Φαρμάκη, Β. *Εργοδική Θεωρία*, (Προσωπικές) Σημειώσεις Παραδόσεων Μεταπτυχιακού Μαθήματος, Ακαδημαϊκό Έτος 2012-2013.

Ξενόγλωσση

[Ali] Aliprantis, C, D., Border, K. C. *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3rd edition, 2006. (Cited on page 87.)

[Arn] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1997. (Cited on page 38.)

[Bek] Bekka, B., de la Harpe, P., Valette, A. *Kazhdan's property (T)*, Cambridge University Press, 2008. (Cited on page 8.)

[Berg] Bergelson, V. *Some historical remarks and modern questions around the ergodic theorem*, Dynamics of Complex Systems (2004), 1-11. (Cited on page 38.)

[Berm] Bermúdes, T., González, M., Mbehkta, M. *Operators with an ergodic power*, Studia Mathematica **141** (2000), 201-208. (Cited on page 45.)

[Cos] Costara, C., Popa, D. *Exercises in Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2010. (Cited on page 53.)

[Die] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984. (Cited on page 55.)

[DU] Diestel, J., Uhl, J. *Vector Measures*, American Mathematical Society, 1977. (Cited on page 5.)

[Ebe] Eberlein, W. F. *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Transactions of the American Mathematical Society **67** (1949), 217-240. (Cited on page 87.)

[Ein] Einsiedler, M., Ward T. *Ergodic Theory, with a view towards Number Theory*, Springer, 2011. (Cited on pages 26, 31, and 38.)

[Eme] Emel'yanov, E. *Banach Lattices on Which Every Power-Bounded Operator is Mean Ergodic*, Positivity **1** (1997), 291-296. (Cited on page 49.)

[Eme2] Emel'yanov, E., Erkursun, N. *An extension of Sine's counterexample*, Positivity **13** (2009), 125-127. (Cited on page 46.)

[Eme3] Emel'yanov, E. *Non-spectral Asymptotic Analysis of One-Parameter Operator Semigroups*, Birkhäuser Verlag, 2007. (Cited on page 62.)

[Eme4] Emel'yanov, E. *Some open questions on positive operators in Banach lattices,* Vladikavkazskiĭ Matematicheskiĭ Zhurnal **7** (2005), 17-21. (Cited on pages 45 and 68.)

[Emi] Emilion, R. *Mean-Bounded Operators and Mean Ergodic Theorems*, Journal of Functional Analysis **61** (1985), 1-14. (Cited on page 40.)

[Far] Farkas, B., Eisner, T., Haase, M., Nagel, R. *Ergodic Theory - An Operator-theoretic Approach*, 12th International Internet Seminar, 2009. (Cited on pages 31, 38, and 86.)

[FLW] Fonf, V. P., Lin, M., Wojtaszczyk, P. *Ergodic Characterizations of Reflexivity of Banach Spaces*, Journal of Functional Analysis **187** (2001), 146-162. (Cited on pages 49, 70, 72, and 87.)

[FLW2] Fonf, V. P., Lin, M., Wojtaszczyk, P. *A non-reflexive Banach space with all contractions mean ergodic*, Israel Journal of Mathematics **180** (2010), 479-491. (Cited on pages 49, 72, 75, and 87.)

[Hall] Hall, B. *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer, 2013. (Cited on pages 22 and 38.)

[Kre] Krengel, U. *Ergodic Theorems*, de Gruyter, Berlin, 1985. (Cited on pages 86 and 87.)

[Lang] Lang, S. *Algebra*, Springer-Verlag, 2002. [Ελληνική έκδοση: *Άλγεβρα*, Ευρύαλος Απόλλων, 2010.]

[Mac] Mackey, G. *von Neumann and the early days of ergodic theory*, στο Glimm, J., Impagliazzo, J., Singer, I. (eds) *The Legacy of John von Neumann*, American Mathematical Society, 2006, pp. 25-38. (Cited on page 38.)

[Meg] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998. (Cited on pages 5 and 73.)

[Scha] Schaefer, H. *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974. (Cited on page 16.)

[Schr] Schreiber, M. *Uniform families of ergodic operator nets*, Semigroup Forum **86** (2013), 321-336.

[Sin] Sine, R. *A note on the ergodic properties of homeomorphisms*, Proceedings of the American Mathematical Society **57** (1976), 169-172. (Cited on pages 45 and 46.)

[Spi] Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1965. [Ελληνική έκδοση: *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.] (Cited on page 19.)

[Tao] Tao, T. *Poincare's Legacies: Pages from Year Two of a Mathematical Blog Pt. 1*, American Mathematical Society, Providence, 2009. (Cited on page 38.)

[Tao2] Tao, T. *Structure and Randomness in Combinatorics*, Foundations of the Computer Science (tutorial notes), 2007. (Cited on page 37.)

[Val] Valette, A. *Affine isometric actions on Hilbert spaces and amenability*, Lecture notes, 2009. (Cited on pages 8 and 38.)

[Vek] Veksler, A., Geiler, V. *Order and disjoint completeness of linear partially ordered spaces*, Siberian Mathematical Journal **13** 1 (1972), 30-35. (Cited on page 62.)

[Wer] Werner, D. *A Proof of the Markov-Kakutani Fixed Point Theorem via the Hahn-Banach Theorem*, Extracta Mathematicae **8** (1993), 37-38. (Cited on page 47.)

[Zah] Zaharopol, R. *Mean Ergodicity of Power-Bounded Oprators in Countably Order Complete Banach Lattices*, Mathematische Zeitschrift **192** (1986), 81-88. (Cited on pages 49 and 62.)

[Zip] Zippin, M. *A Remark on Bases and Reflexivity in Banach Spaces*, Israel Journal of Mathematics **6** (1968), 74-79. (Cited on page 55.)

[Zun] Zund, J. *George David Birkhoff and Jon von Neumann: A question of priority and the ergodic theorems, 1931-1932*, Historia Mathematica **29** (2002), 138-156. (Cited on pages 31 and 38.)

Ευρετήριο