



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

**ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**

**Ανάπτυξη μεθόδων και λογισμικού για την
πλήρως συζευγμένη αεροελαστική
βελτιστοποίηση με χρήση της συζυγούς μεθόδου**

Μεταπτυχιακή εργασία

ΤΟΥ

Νικολάου Ε. Κάρκαλου

Διπλ. Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Νοέμβριος 2013



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

JOINT POSTGRADUATE COURSE COMPUTATIONAL MECHANICS

LAB OF THERMAL TURBOMACHINES

PARALLEL CFD AND OPTIMIZATION UNIT

Development of methods and software for the
fully coupled aeroelastic optimization using the
continuous adjoint method

Master Thesis

of

Nikolaos E. Karkalos

Dipl. Mechanical Engineer

Supervisor: K.C. Giannakoglou

NTUA Professor

Athens, November 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ανάπτυξη μεθόδων και λογισμικού για την πλήρως συζευγμένη αεροελαστική βελτιστοποίηση με χρήση της συζυγούς μεθόδου

Μεταπτυχιακή εργασία

του

Νικολάου Ε. Κάρκαλου

Διπλ. Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Νοέμβριος 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτήν τη μεταπτυχιακή εργασία αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιπτώσεις πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης και υλοποιήθηκε το αντίστοιχο λογισμικό. Αρχικά, αφού παρουσιάστηκε η εξαγωγή της εξίσωσης κατάστασης για το δομικό τμήμα του προβλήματος βελτιστοποίησης, αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης και προγραμματίστηκε ο αντίστοιχος κώδικας, ο οποίος και πιστοποιήθηκε. Έπειτα, υλοποιήθηκε και πιστοποιήθηκε ένα λογισμικό στατικής αεροελαστικότητας το οποίο αποτελείται από έναν οικείο ρευστοδυναμικό επιλύτη των 3Δ εξισώσεων Euler της ΜΠΥΡ&Β και έναν επιλύτη δομικής μηχανικής που χρησιμοποιεί το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δοκού που προγραμματίστηκε για το σκοπό αυτό.

Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος πλήρους συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης, στο οποίο χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου. Στην ανάπτυξη της μεθόδου λαμβάνεται υπόψη η σύζευξη του ρευστοδυναμικού και του δομικού τμήματος τόσο στο πρωτεύον όσο και στο συζυγές πρόβλημα. Τέλος, υλοποιείται το ολοκληρωμένο λογισμικό πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης, εφαρμόζεται σε περίπτωση αεροελαστικής βελτιστοποίησης μορφής προκειμένου να πιστοποιηθεί. Από τα αποτελέσματα που προκύπτουν, εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιοπιστία και τη σύγκλιση της συζυγούς μεθόδου.

Λέξεις-κλειδιά: πλήρως συζευγμένη αεροελαστική βελτιστοποίηση, στατική αεροελαστικότητα, συνεχής συζυγής μέθοδος, μέθοδος απότομης καθόδου



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

JOINT POSTGRADUATE COURSE COMPUTATIONAL MECHANICS

LAB OF THERMAL TURBOMACHINES

PARALLEL CFD AND OPTIMIZATION UNIT

**Development of methods and software for the fully coupled
aeroelastic optimization using the continuous adjoint method**

MSc. Thesis

of

Nikolaos E. Karkalos

Dipl. Mechanical Engineer

Supervisor: K.C. Giannakoglou, NTUA Professor

November 2013

ABSTRACT

In this MSc. Thesis, the continuous adjoint method for fully coupled aeroelastic optimization cases was developed along with the relevant software. Initially, after the state equation derivation was presented for the structural part and the continuous adjoint method was developed for structural optimization cases, the relevant code was programmed and validated. Afterwards, a static aeroelastic software, which consists of a CFD 3D Euler equation solver by PCopt and a CSM solver using the beam FEM model, was implemented from scratch and validated.

Subsequently, the continuous adjoint method for the calculation of sensitivity derivatives of the fully coupled aeroelastic optimization problem, using the steepest descent method was developed. In the development of the continuous adjoint method, the coupling of the fluid and structural part, both for the primal and adjoint problems, was taken into consideration. Finally, the aeroelastic optimization software is programmed and tested in an aeroelastic shape optimization case and useful conclusions for the reliability and rapid convergence of the adjoint method were made.

Keywords: fully coupled aeroelastic optimization, static aeroelasticity, continuous adjoint method, steepest descent method

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Καθηγητή ΕΜΠ κ. Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την ουσιαστική καθοδήγησή του, τον χρόνο που αφιέρωσε και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Ευχαριστώ επίσης τον διδάκτορα ΕΜΠ κ. Ξενοφώντα Τρομπούκη για την πολύτιμη βοήθειά του σε θέματα της παρούσας εργασίας, καθώς και όλα τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Μηχανικής και Βελτιστοποίησης για τις υποδείξεις τους σε διάφορα θέματα καθώς και για την βοήθειά τους σε τεχνικά θέματα κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Σκοπός της εργασίας	1
1.2 Δομή της εργασίας	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΙΣΧΥΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΜΟΝΤΕΛΑ.....	3
2.1 Δομική επίλυση-Πεπερασμένο στοιχείο δοκού.....	3
2.1.1 Εισαγωγή	3
2.1.2 Η δοκός Euler-Bernoulli.....	5
2.1.3 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.....	7
2.1.4 Κατανομημένο φορτίο.....	12
2.2 Ανάλυση ροής - Οι Εξισώσεις Euler και η διακριτοποίησή τους	15
2.2.1 Οι Εξισώσεις Euler	15
2.2.2 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler σε 3D πλέγμα	17
2.3 Αεροελαστικότητα.....	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ	
ΜΕΘΟΔΟΥ	29
3.1 Εισαγωγή.....	29
3.1.1 Μέθοδοι βελτιστοποίησης.....	29
3.1.2 Μέθοδοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης	29
3.1.3 Η συνεχής συζυγής μέθοδος	31
3.2 Η εξίσωση κατάστασης του δομικού προβλήματος	32
3.3 Ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για το δομικό πρόβλημα.....	37
3.3.1 Ανάπτυξη των εξισώσεων της συνεχούς συζυγούς μεθόδου	37
3.4 Αποτελέσματα	40
3.4.1 Γενικά.....	40
3.4.2 Αποτελέσματα περιπτώσεων που μελετήθηκαν	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Ο αεροελαστικός επιλύτης	49
4.1 Δημιουργία του αεροελαστικού επιλύτη.....	49
4.1.1 Κατασκευή του πλέγματος της ρευστοδυναμικής ανάλυσης.....	49
4.1.2 Ο επιλύτης του ρευστοδυναμικού τμήματος	53
4.1.3 Ο επιλύτης του δομικού τμήματος	56
4.1.4 Διάγραμμα ροής του αεροελαστικού επιλύτη.....	56

4.2	Αποτελέσματα με χρήση του αεροελαστικού επιλύτη.....	58
4.2.1	Γενικά.....	58
4.2.2	Αποτελέσματα	58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Περίπτωση πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης.....		63
5.1	Γενικά.....	63
5.2	Ανάπτυξη των εξισώσεων για το πλήρως συζευγμένο πρόβλημα	63
5.2.1	Περιγραφή του προβλήματος βελτιστοποίησης	63
5.2.2	Ανάπτυξη των εξισώσεων της συζυγούς συνεχούς μεθόδου	64
5.3	Δημιουργία του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης.....	72
5.3.1	Περιγραφή του ολοκληρωμένου λογισμικού βελτιστοποίησης.....	72
5.3.2	Υλοποίηση κωδίκων υπολογιστικής μηχανικής σε κάρτες γραφικών (GPU).....	72
5.3.3	Ο GPU επιλύτης.....	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Αποτελέσματα αεροελαστικής βελτιστοποίησης		75
6.1	Γενικά.....	75
6.2	Αποτελέσματα	75
6.2.1	Βασικά στοιχεία του προβλήματος.....	75
6.2.2	Αποτελέσματα 1ης περίπτωσης.....	76
6.2.3	Αποτελέσματα σε άλλες περιπτώσεις.....	81
6.2.4	Αποτελέσματα με χρήση περισσότερων μεταβλητών σχεδιασμού	84
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Ανακεφαλαίωση- Συμπεράσματα		92
7.1	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα.....	92
7.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	93
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		94

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για την περίπτωση πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης καθώς και του αντίστοιχου λογισμικού. Αρχικά, θα αναπτυχθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για περίπτωση δομικής βελτιστοποίησης και ο αντίστοιχος κώδικας ο οποίος θα εξεταστεί όσον αφορά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων του προκειμένου να χρησιμοποιηθεί μετά στο ολοκληρωμένο λογισμικό βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια, θα υλοποιηθεί ένας αεροελαστικός επιλύτης με χρήση λογισμικού δομικής μηχανικής με μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού και λογισμικού που επιλύει τις 3D εξισώσεις Euler και θα ελεγχθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων του καθώς και η σύγκλιση του.

Έπειτα, θα αναπτυχθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για την περίπτωση πλήρους συζευγμένης βελτιστοποίησης και θα σχολιασθεί η διαδικασία υλοποίησης του κώδικα που θα εκτελεί τη βελτιστοποίηση. Τέλος, κάνοντας χρήση αυτού του κώδικα αρχικά θα μελετηθούν διάφορες περιπτώσεις αεροελαστικής βελτιστοποίησης μορφής προκειμένου να αποκτηθεί εμπειρία σε παρόμοιες περιπτώσεις και στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν αποτελέσματα για διάφορες περιπτώσεις και θα εξαχθούν συμπεράσματα τόσο όσον αφορά την μέθοδο, όσο και για διάφορες άλλες παραμέτρους της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

1.2 Δομή της εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι δομημένη ως εξής:

Στο **κεφάλαιο 2** γίνεται μια εισαγωγή με στοιχεία θεωρίας τα οποία σχετίζονται με τους επιλύτες που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτήν τη μεταπτυχιακή εργασία. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται: η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (και ειδικότερα το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού), οι εξισώσεις Euler (που διέπουν το ρευστοδυναμικό κομμάτι του αεροελαστικού επιλύτη που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία) και η διακριτοποίησή τους, καθώς και βασικά στοιχεία της θεωρίας της αεροελαστικότητας.

Στο **κεφάλαιο 3** αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στην επιστήμη της βελτιστοποίησης (με έμφαση στις αιτιοκρατικές μεθόδους), έπειτα παρουσιάζονται και αποδεικνύονται βασικές σχέσεις σχετικά με την εξίσωση κατάστασης που χρησιμοποιείται για το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δοκού και τέλος, αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για περίπτωση δομικής βελτιστοποίησης και παρατίθενται αποτελέσματα ορισμένων περιπτώσεων βελτιστοποίησης που μελετήθηκαν υπολογιστικά με κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Στο **κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται ο αεροελαστικός επιλύτης που θα χρησιμοποιηθεί, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του, και μελετώνται ορισμένες περιπτώσεις με αυτόν προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβειά του.

Στο **κεφάλαιο 5** αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για την περίπτωση πλήρους συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης. Παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία εξαγωγής των συζυγών εξισώσεων και εύρεσης των εκφράσεων των παραγώγων ευαισθησίας και σχολιάζεται ο κώδικας που θα αναπτυχθεί για την υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου.

Στο **κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται αποτελέσματα από μια περίπτωση αεροελαστικής βελτιστοποίησης, γίνονται διερευνήσεις διαφόρων παραγόντων της διαδικασίας της βελτιστοποίησης και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα.

Τέλος, στο **κεφάλαιο 7** γίνεται μια ανακεφαλαίωση, διατυπώνονται γενικά συμπεράσματα από όλη την εργασία και γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα στο αντικείμενο της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΙΣΧΥΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΜΟΝΤΕΛΑ

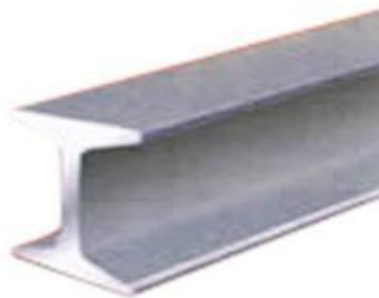
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι ισχύουσες εξισώσεις και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στο δομικό και το ρευστοδυναμικό τμήμα του αεροελαστικού επιλύτη που θα υλοποιηθεί στην παρούσα εργασία. Επίσης γίνεται μια σύντομη αναφορά στην αεροελαστικότητα και τους τρόπους σύζευξης του ρευστοδυναμικού με τον δομικό επιλύτη.

2.1 Δομική επίλυση-Πεπερασμένο στοιχείο δοκού

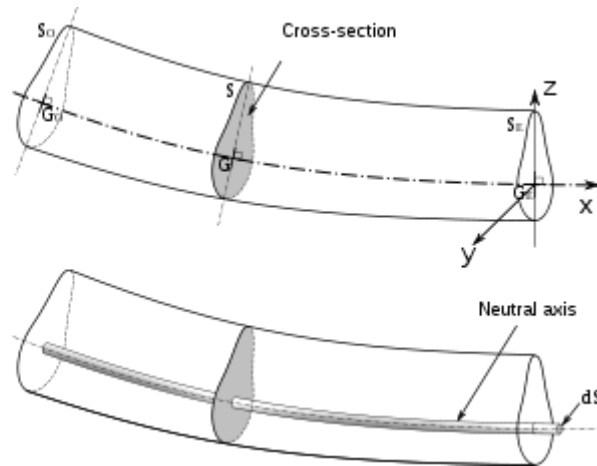
Στον δομικό επιλύτη που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιηθούν πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί συνοπτικά η θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού.

2.1.1 Εισαγωγή

Οι δοκοί είναι το πιο συνηθισμένο δομικό στοιχείο, ειδικά στα πεδία του Πολιτικού Μηχανικού και του Μηχανολόγου Μηχανικού. Παραδείγματα δοκών είναι τα επιμήκη οριζόντια μέλη που χρησιμοποιούνται σε κτίρια και γέφυρες (όπως π.χ. η δοκός I που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1) και οι άξονες που στηρίζονται σε έδρανα (ρουλεμάν) (Chandrupatla & Belegundu, 2005). Η δοκός είναι ένα δομικό στοιχείο που μοιάζει με ράβδο και του οποίου η βασική χρησιμότητα είναι να υποστηρίξει τα κατακόρυφα φορτία (όταν αναφερόμαστε σε οριζόντια δοκό) και να τα οδηγεί στις στηρίξεις. Τα φορτία που προκαλούν κάμψη έχουν τη σημαντικότερη επίδραση στη δοκό σε σχέση με την επίδραση των στρεπτικών ή αξονικών φορτίων (Felippa, 2004).

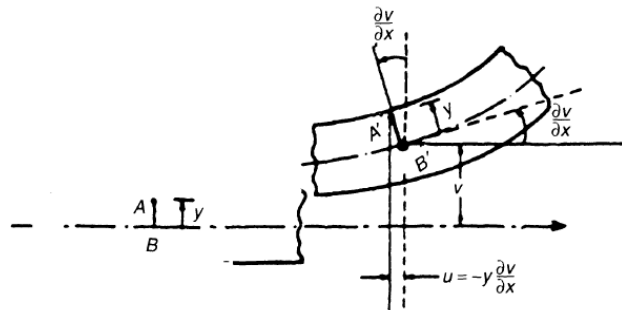


Σχήμα 2.1: 3D απεικόνιση μιας δοκού με διατομή I (ή «διπλού T»).



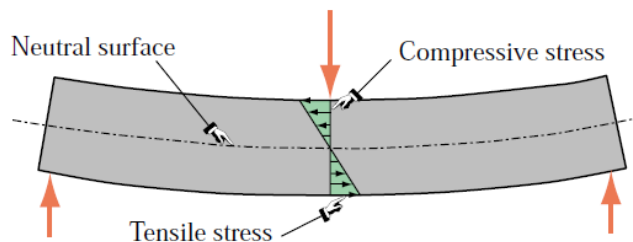
Σχήμα 2.2: Διατομή της δοκού και ουδέτερος άξονας (WIK).

Από μαθηματικής άποψης, η βασική διαφορά των πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού σε σχέση με άλλα πεπερασμένα στοιχεία, όπως τα στοιχεία ράβδου, είναι η αυξημένη τάξη συνέχειας που απαιτείται για τις συναρτήσεις παρεμβολής των κατακόρυφων μετατοπίσεων. Αυτές οι συναρτήσεις απαιτείται να είναι όχι μόνο συνεχείς, αλλά να έχουν και συνέχεια πρώτης παραγώγου. Για να ικανοποιηθεί αυτή η προϋπόθεση, τόσο οι μετατοπίσεις όσο και οι κλίσεις (slopes-βλ. Σχήμα 2.3) πρέπει να έχουν ίδιες τιμές στους κοινούς κόμβους δύο πεπερασμένων στοιχείων. Οι κλίσεις αντιμετωπίζονται ως περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας στις υποθέσεις μικρής μετατόπισης-μικρής παραμόρφωσης (small displacement-small strain) (Felippa, 2004).



Σχήμα 2.3: Δοκός σε κάμψη, απεικονίζεται και η κλίση $\frac{dw}{dx}$ (S.Rao, 2004).

Η δοκός υποστηρίζει κατακόρυφα φορτία κυρίως μέσω της κάμψης. Η κάμψη παράγει θλιπτικές τάσεις στη μία πλευρά της δοκού και εφελκυστικές στην άλλη.

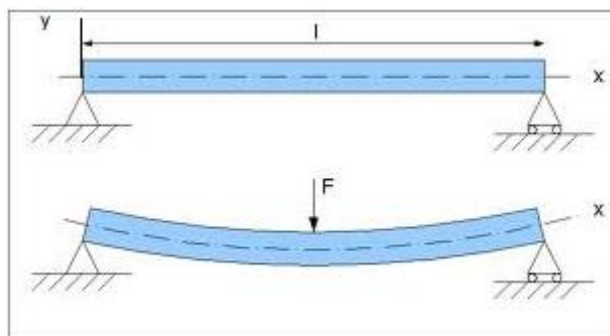


Σχήμα 2.4: Τάσεις σε δοκό (Felippa, 2004).

Οι δύο περιοχές διαχωρίζονται από μια ουδέτερη επιφάνεια μηδενικών τάσεων (normal surface, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2.4). Ο συνδυασμός εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων παράγει μια εσωτερική καμπτική ροπή. Αυτή η ροπή είναι ο κύριος μηχανισμός που μεταφέρει φορτία στις στηρίξεις.

2.1.2 Η δοκός Euler-Bernoulli

Μια δοκός είναι γενικά ένα ραβδοειδές μέλος που είναι σχεδιασμένο να αντέχει σε συνδυασμό φορτίσεων όπως διαξονική κάμψη, διαμήκη διάτμηση, αξονικό εφελκυσμό ή θλίψη και πιθανότατα στρέψη.



Σχήμα 2.5: Δοκός που υπόκειται σε συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο F (WIV).

Έχουν κατασκευαστεί μονοδιάστατα (1D) μαθηματικά μοντέλα δοκών βασισμένα στη θεωρία των δοκών. Επειδή οι δοκοί είναι στην πραγματικότητα 3D σώματα, όλα τα μοντέλα αναγκαστικά περιλαμβάνουν κάποιου είδους προσέγγιση του φυσικού προβλήματος. Τα απλούστερα και πιο γνωστά μοντέλα για ευθύγραμμες πρισματικές δοκούς βασίζονται στη θεωρία της δοκού Bernoulli-Euler (Bernoulli-Euler beam theory, επίσης καλούμενη και κλασική θεωρία δοκών ή engineering beam theory) και στη θεωρία της δοκού Timoshenko. Η θεωρία της δοκού Bernoulli-Euler, όπως αυτή αναφέρεται στην επιστήμη των Υλικών, θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Η ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων δοκού μπορεί να βασιστεί και στα δύο μοντέλα. Η χρήση της θεωρίας Bernoulli-Euler οδηγεί στα αποκαλούμενα Ερμιτιανά (Hermitian) στοιχεία δοκού, που είναι γνωστά ως στοιχεία C^1 . Αυτό το μοντέλο (Bernoulli-Euler) αγνοεί την επίδραση των διατμητικών παραμορφώσεων στην εσωτερική ενέργεια, σε αντίθεση με το μοντέλο που βασίζεται στην θεωρία Timoshenko. Τα στοιχεία που βασίζονται στη θεωρία του Timoshenko, γνωστά ως στοιχεία C^0 ενσωματώνουν μια διόρθωση πρώτης τάξης για την επίδραση της διάτμησης. Το μοντέλο αυτό δίνει επιπρόσθετη βαρύτητα στη δυναμική και τις ταλαντώσεις (Felippa, 2004), (WIK).

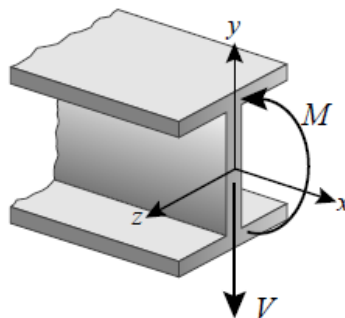
Όταν η δοκός υπόκειται σε εγκάρσια φόρτιση προς τα κάτω η άνω επιφάνεια βραχύνεται ενώ η κάτω επιμηκώνεται. Ωστόσο υπάρχει μια ουδέτερη επιφάνεια μεταξύ της πάνω και της κάτω επιφάνειας της δοκού που δεν υπόκειται σε αξονική παραμόρφωση. Η τομή αυτής της επιφάνειας με κάθε διατομή ορίζει τον ουδέτερο άξονα αυτής της διατομής.

Οι καρτεσιανοί άξονες για την ανάλυση επίπεδων δοκών επιλέγονται ως εξής: Ο άξονας x βρίσκεται κατά μήκος του διαμήκους άξονα της δοκού, στο ύψος του ουδέτερου άξονα. Ο άξονας y βρίσκεται στο επίπεδο συμμετρίας και δείχνει προς τα πάνω. Ο άξονας z δείχνει

κατά μήκος του ουδέτερου άξονα, σχηματίζοντας ένα δεξιόστροφο σύστημα με τα x και y (βλ. Σχήμα 2.6). Η αρχή των αξόνων τοποθετείται στην ακραία αριστερή διατομή. Το ολικό μήκος της δοκού συμβολίζεται L.

Η σύμβαση προσήμου για τις δοκούς είναι (Logan, 2005):

- 1.) Οι ροπές είναι θετικές στην αντι-ωρολογιακή κατεύθυνση.
- 2.) Οι περιστροφές είναι θετικές στην αντι-ωρολογιακή κατεύθυνση επίσης.
- 3.) Οι δυνάμεις είναι θετικές στην κατεύθυνση των θετικών (+y) του άξονα y.
- 4.) Οι μετατοπίσεις είναι θετικές στη θετική κατεύθυνση του άξονα y.



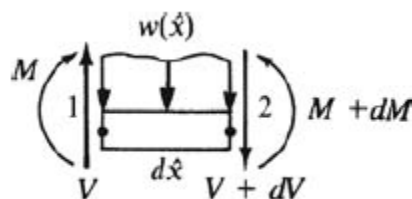
Σχήμα 2.6: Σύμβαση προσήμου δύναμης (V) και ροπής (M) στη δοκό (η φορά που έχει η δύναμη V και η ροπή M είναι η θετική φορά) (Felippa, 2004).

Η παραδοχή ότι παραμένουν επίπεδες οι διατομές μετά την άσκηση του φορτίου αληθεύει στις περιπτώσεις άσκησης καθαρά ενός ζεύγους δυνάμεων ή μιας σταθερής ροπής στη δοκό. Ωστόσο, είναι μια χρήσιμη θεώρηση που οδηγεί σε εξισώσεις που περιγράφουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά της δοκού στις περισσότερες περιπτώσεις.

Η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής προκύπτει ως εξής. Θεωρείται, για παράδειγμα, μια οριζόντια δοκός με καταναμημένο φορτίο $w(\tilde{x})$ (δύναμη/μήκος). Αν θεωρηθεί η ισορροπία δυνάμεων(V) και ροπών(M) σε ένα διαφορικό κομμάτι της δοκού (βλ. Σχήμα 2.7), λαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας (Logan, 2005):

$$\Sigma F_y = 0: V - (V + dV) - w(\tilde{x})d\tilde{x} = 0 \rightarrow -w d\tilde{x} - dV = 0 \text{ ή } w = \frac{dV}{d\tilde{x}} \quad (2.1)$$

$$\Sigma M = 0: -V dx + dM + w(\tilde{x}) d\tilde{x} \left(\frac{d\tilde{x}}{2}\right) = 0 \text{ ή } V = \frac{dM}{d\tilde{x}} \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.7: Δυνάμεις και ροπές σε διαφορικό κομμάτι της δοκού (Logan, 2005).

Η τελική μορφή της εξίσωσης που σχετίζει τη διατμητική δύναμη V με την καμπτική ροπή M προέρχεται από διαίρεση του αριστερού μέλους στη σχέση 2.2 με τον όρο $d\tilde{x}$ και μετά παίρνοντας το όριο της εξίσωσης για $d\tilde{x} \rightarrow 0$. Τότε, ο όρος $w(\tilde{x})$ εξαφανίζεται.

Η καμπυλότητα κ της δοκού σχετίζεται με τη ροπή από τη σχέση: $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ όπου ρ είναι η ακτίνα της παραμορφωμένης καμπύλης. Για μικρές κλίσεις, η καμπυλότητα $\tilde{\varphi} = \frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2}$ δίνεται από τη σχέση $\kappa = \frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2}$ όπου \tilde{v} είναι η συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης στην \tilde{y} κατεύθυνση (άλλες φορές συμβολίζεται και με w -βέλος κάμψης), E είναι το μέτρο ελαστικότητας και I είναι η ροπή αδράνειας της διατομής γύρω από τον άξονα \tilde{z} (Logan, 2005).

Από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει: $\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2} = \frac{M}{EI}$. Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς M και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της στις εξισώσεις ισορροπίας (σχέσεις 2.1 και 2.2) προκύπτει:

$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}(EI \frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2}) = -w(\tilde{x})$. Με σταθερό το EI και θεωρώντας μόνο κομβικές δυνάμεις και ροπές, η τελευταία εξίσωση γίνεται: $EI \frac{d^4\tilde{v}}{d\tilde{x}^4} = 0$.

Κατανεμημένα φορτία που ασκούνται στη δοκό κατά τη διεύθυνση $+y$ συμβολίζονται με $q(x)$. Συγκεντρωμένα φορτία και ροπές που ασκούνται σε μεμονωμένες διατομές της δοκού μπορούν να παρασταθούν με τη συνάρτηση Dirac και την παράγωγό της. Για παράδειγμα, αν ένα κατακόρυφο σημειακό φορτίο F ασκείται στο $x=a$, συνεισφέρει την ποσότητα $F\delta(a)$ στο $q(x)$. Εάν η συγκεντρωμένη ροπή C ασκείται στο $x=b$, συνεισφέρει την ποσότητα $C\delta'(b)$ στο $q(x)$, όπου δ' είναι ένα doublet (παράγωγος της συνάρτησης Dirac) που ασκείται στο σημείο $x=b$ (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Οι συνθήκες στήριξης στις δοκούς εμφανίζουν μεγαλύτερη ποικιλία απ' ό,τι σε άλλα μονοδιάστατα στοιχεία. Οι δύο πιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι η αμφιέριστη δοκός (με δύο στηρίξεις στα άκρα της) και η πακτωμένη δοκός(μονόπακτη) ή πρόβολος. Οι δοκοί συνήθως εμφανίζονται ως στοιχεία μεγαλύτερων δομών στις οποίες οι συνθήκες στήριξης (οριακές συνθήκες) είναι πιο σύνθετες (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

2.1.3 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Στη συνέχεια θα περιγραφεί η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στις δοκούς σύμφωνα με τη θεωρία Bernoulli-Euler (Felippa, 2004):

Η ολική δυναμική ενέργεια της δοκού είναι:

$$\Pi = U - W \quad (2.3)$$

όπου με Π συμβολίζεται το ολικό συναρτησιακό της δυναμικής ενέργειας και με U και W συμβολίζονται η εσωτερική και εξωτερική ενέργεια, αντίστοιχα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, στο μοντέλο Bernoulli-Euler περιλαμβάνεται μόνο η ενέργεια κάμψης στην εσωτερική ενέργεια U (με V εδώ συμβολίζεται ο όγκος και με w μικρό η κατακόρυφη μετατόπιση):

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L w'' EI w'' dx \quad (2.4)$$

Το εξωτερικό έργο W σχετίζεται με την επιβληθείσα κατακόρυφη δύναμη:

$$W = \int_0^L q w dx \quad (2.5)$$

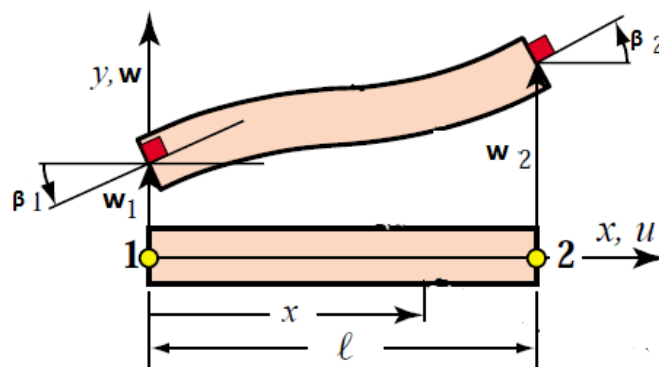
Τα τρία συναρτησιακά Π, U, W πρέπει να αντιμετωπίζονται ως εξαρτώμενα από την κατακόρυφη μετατόπιση $w(x)$. Όταν η εξάρτηση των συναρτησιακών από την κατακόρυφη μετατόπιση w πρέπει να τονίζεται, προτιμάται η γραφή $\Pi[w], U[w]$ και $W[w]$ αντί της απλοποιημένης Π, U, W .

Πρέπει να σημειωθεί ότι το συναρτησιακό $\Pi[w]$ περιέχει μέχρι και τις δεύτερες παραγώγους του w γιατί ο όρος $w'' = \kappa$ εμφανίζεται στην εσωτερική ενέργεια U . Ο αριθμός κ ονομάζεται δείκτης μεταβολής (variational index). Ο λογισμός των μεταβολών υποδεικνύει ότι όταν ο δείκτης είναι 2, οι αποδεκτές μετατοπίσεις $w(x)$ πρέπει να είναι συνεχείς, να έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους (κλίσεις ή περιστροφές) και να ικανοποιούν ακριβώς τις οριακές συνθήκες. Άρα, οι αποδεκτές μετατοπίσεις πρέπει να είναι C^1 συνεχείς. Αυτή η συνθήκη καθοδηγεί την κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων δοκού που θα περιγραφούν στη συνέχεια (Felippa, 2004).

Τα πεπερασμένα στοιχεία δοκού ορίζονται υποδιαιρώντας μια δοκό κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Το απλούστερο πεπερασμένο στοιχείο επίπεδης δοκού Bernoulli-Euler έχει δύο κόμβους (κόμβος 1 και κόμβος 2 όπως στο Σχήμα 2.8) και τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι συγκεντρώνονται στο διάνυσμα κομβικών μετατοπίσεων και κλίσεων (Felippa, 2004):

$$\mathbf{u}^e = [w_1 \ \beta_1 \ w_2 \ \beta_2]^T \quad (2.6)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας που περιγράφηκαν (απεικονίζονται στο Σχήμα 2.8) χρησιμοποιούνται για να ορίσουν μοναδικά την μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης $w^e(x)$ στο πεπερασμένο στοιχείο. Η απαίτηση της συνέχειας C^1 ορίζει ότι τόσο η $w(x)$ όσο και η κλίση $\beta = w'(x) = \frac{dw(x)}{dx}$ πρέπει να είναι συνεχείς σε όλη τη δοκό και ενδιάμεσα στα στοιχεία δοκού (Felippa, 2004).



Σχήμα 2.8: Βαθμοί ελευθερίας του πεπερασμένου στοιχείου δοκού (w,β) (Felippa, 2004).

Η συνέχεια C^1 μπορεί να επιτευχθεί για κάθε στοιχείο με την επιλογή πολυωνυμικών συναρτήσεων παρεμβολής (συναρτήσεων μορφής ή shape functions) επειδή τα πολυώνυμα είναι C^∞ συνεχή. Το ταίριασμα των κομβικών μετατοπίσεων και περιστροφών με τις αντίστοιχες των γειτονικών τους στοιχείων εξασφαλίζει την απαραίτητη συνέχεια μεταξύ των στοιχείων (Felippa, 2004).

Οι απλούστερες συναρτήσεις μορφής που εξασφαλίζουν την απαίτηση συνέχειας C^1 για τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων ονομάζονται κυβικές Ερμιτιανές συναρτήσεις μορφής (Hermitian cubic shape functions). Η σχέση παρεμβολής που βασίζεται σ' αυτές τις συναρτήσεις είναι (Felippa, 2004):

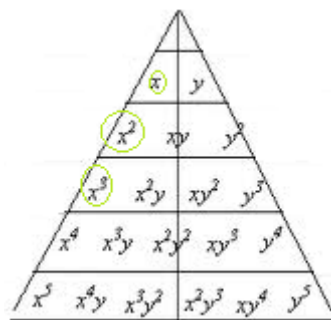
$$w^e = [N_{v1}^e \quad N_{\theta1}^e \quad N_{v2}^e \quad N_{\theta2}^e] \begin{bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = N^e u^e \quad (2.7)$$

Οι συναρτήσεις μορφής (shape functions) N εξάγονται ως εξής:

Θεωρείται ότι η διακύμανση της κατακόρυφης μετατόπισης κατά μήκος του στοιχείου είναι (Logan, 2005):

$$w(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (2.8)$$

Επειδή υπάρχουν 4 βαθμοί ελευθερίας είναι κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί το πλήρες κυβικό πολυώνυμο. Το κυβικό πολυώνυμο επίσης ικανοποιεί τη βασική διαφορική εξίσωση της ράβδου και τις προϋποθέσεις συνέχειας της μετατόπισης και της κλίσης στους κόμβους που ανήκουν σε δύο διπλανά στοιχεία (Logan, 2005). Με τη βοήθεια του τριγώνου του Πασκάλ (βλ. Σχήμα 2.9) που περιλαμβάνει τους συντελεστές πολυωνύμων δύο μεταβλητών 1ου έως 5ου βαθμού είναι δυνατόν να παρουσιαστεί καλύτερα η επιλογή των όρων που θα χρησιμοποιηθούν σε ένα πολυώνυμο παρεμβολής ειδικά σε πεπερασμένα στοιχεία όπως τα στοιχεία πλάκας που θα παρουσιαστούν σε επόμενη υποενότητα.



Σχήμα 2.9: Τρίγωνο του Πασκάλ. Οι σημειωμένοι όροι είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται για το πολυώνυμο παρεμβολής του πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού.

Στη συνέχεια γράφονται οι οριακές συνθήκες στα δύο άκρα του κάθε πεπερασμένου στοιχείου (Logan, 2005):

$$w(0) = w_{1y} = a_4 \quad (2.9)$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = \beta_1 = a_3 \quad (2.10)$$

$$w(L) = w_{2y} = a_1 L^3 + a_2 L^2 + a_3 L + a_4 \quad (2.11)$$

$$\frac{dw(L)}{dx} = \beta_2 = 3a_1 L^2 + 2a_2 L + a_3 \quad (2.12)$$

όπου η σχέση $\beta = \frac{dw}{dx}$ ισχύει για μικρές γωνίες περιστροφής β .

Λύνοντας το σύστημα των τεσσάρων προηγούμενων εξισώσεων προκύπτουν τα a_1 ως a_4 σε σχέση με τους κομβικούς βαθμούς ελευθερίας και, στη συνέχεια, αντικαθίστανται στο πολυώνυμο παρεμβολής που υποτέθηκε (Logan, 2005):

$$w = \left[\frac{2}{L^3} (w_{1y} - w_{2y}) + \frac{1}{L^2} (\beta_1 + \beta_2) \right] x^3 + \left[-\frac{3}{L^2} (w_{1y} - w_{2y}) - \frac{1}{L} (2\beta_1 + \beta_2) \right] x^2 + \beta_1 x + \beta_{1y} \quad (2.13)$$

το οποίο σε μητρική μορφή γράφεται :

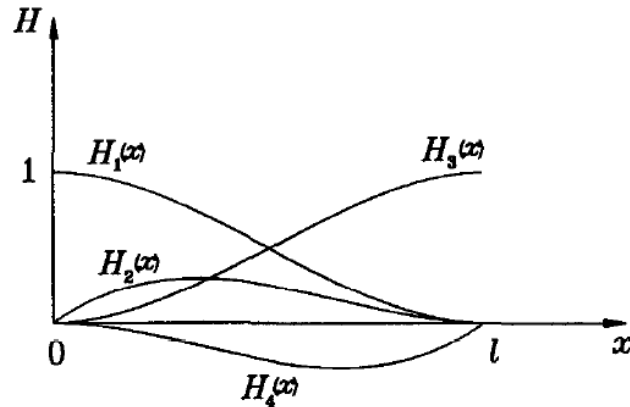
$w = [N] \{d\}$ όπου:

$$d = \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \beta_1 \\ w_{2y} \\ \beta_2 \end{Bmatrix}, \quad [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (2.14)$$

και

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2L + L^3), \quad N_2 = \frac{1}{L^3} (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3), \quad N_3 = \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2L), \quad N_4 = \frac{1}{L^3} (x^3L - x^2L^2) \quad (2.15)$$

έτσι προκύπτουν οι συναρτήσεις μορφής του στοιχείου δοκού N_1, N_2, N_3, N_4 . Αυτές οι κυβικές συναρτήσεις μορφής (ή παρεμβολής) είναι γνωστές ως κυβικές συναρτήσεις παρεμβολής Hermite (βλ. Σχήμα 2.10). Για το στοιχείο δοκού, η N_1 παίρνει την τιμή 1 όταν γράφεται στον κόμβο 1 (τοπική αρίθμηση) και την τιμή 0 όταν γράφεται στον κόμβο 2. Επειδή η N_2 σχετίζεται με τη γωνία ϕ_1 λαμβάνει την τιμή 1 στον κόμβο 1 και την τιμή 0 στον κόμβο 2. Για τις συναρτήσεις μορφής N_3 και N_4 ισχύουν τα αντίθετα (Logan, 2005).



Σχήμα 2.10: Κυβικές συναρτήσεις Hermite ($H_i = N_i$) (Kwon & Bang, 1997).

Το επόμενο βήμα για την κατάστρωση του μητρώου δυσκαμψίας είναι να ληφθεί υπόψη η σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Θεωρείται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση αξονικής παραμόρφωσης-μετατόπισης:

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{du}{dx} \quad (2.16)$$

όπου u είναι η συνάρτηση της αξονικής μετατόπισης. Από την παραμορφωμένη θέση της δοκού, συσχετίζεται η αξονική μετατόπιση με την κατακόρυφη μετατόπιση (Logan, 2005):

$$u = -y \frac{dw}{dx} \quad (2.17)$$

όπου θεωρείται όπως έχει προαναφερθεί, ότι οι διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση και, εν γένει, έχουν μικρή γωνία στροφής.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η:

$$\varepsilon_x(x,y) = -y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.18)$$

Από την κλασική θεωρία των δοκών είναι ότι η καμπτική ροπή και η διατμητική δύναμη σχετίζονται με τη συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης (Logan, 2005). Άρα μπορούν να γραφούν οι εξής σχέσεις:

$$m(x) = EI \frac{d^2w}{dx^2}, \quad V = EI \frac{d^3w}{dx^3} \quad (2.19)$$

Στη συνέχεια θα εξαχθεί το μητρώο δυσκαμψίας k χρησιμοποιώντας την άμεση προσέγγιση της ισορροπίας δυνάμεων και ροπών (direct stiffness) (Logan, 2005). Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις και τηρώντας τις συμβάσεις προσήμου για τις δυνάμεις και τις ροπές έχουμε:

$$f_{1y} = V = EI \frac{d^3w(0)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (12w_{1y} + 6L\beta_1 - 12w_{2y} + 6L\beta_2) \quad (2.20)$$

$$m_1 = -m = -EI \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = -\frac{EI}{L^3} (6Lw_{1y} + 4L^2\beta_1 - 6Lw_{2y} + 2L^2\beta_2) \quad (2.21)$$

$$f_{2y} = -V = -EI \frac{d^3 w(L)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (-12w_{1y} - 6L\beta_1 + 12w_{2y} - 6L\beta_2) \quad (2.22)$$

$$m_2 = m = EI \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3} (6Lw_{1y} + 2L^2\beta_1 - 6Lw_{2y} + 4L^2\beta_2) \quad (2.23)$$

όπου τα αρνητικά πρόσημα στην δεύτερη και την τρίτη εξίσωση προκύπτουν από τις συμβάσεις προσήμου. Σε μητρωϊκή μορφή, οι παραπάνω εξισώσεις που συσχετίζουν τις κομβικές δυνάμεις με τις κομβικές μετατοπίσεις γράφονται ως εξής (Logan, 2005):

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \beta_1 \\ w_{2y} \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

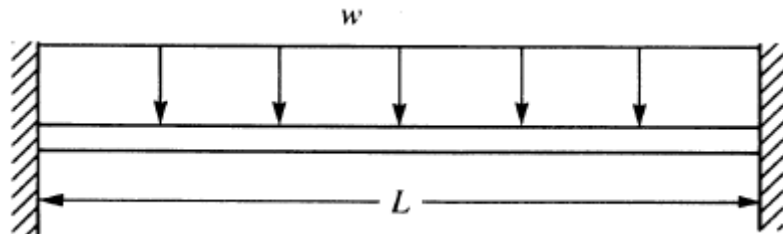
όπου το μητρώο δυσκαμψίας είναι το:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Από την εξίσωση 2.24 γίνεται προφανές ότι το μητρώο δυσκαμψίας συνδέει κατακόρυφες δυνάμεις και καμπτικές ροπές με κατακόρυφες μετατοπίσεις και περιστροφές εφόσον έχουν αγνοηθεί οι επιδράσεις των αξονικών δυνάμεων.

2.1.4 Κατανεμημένο φορτίο

Οι δοκοί μπορούν να υποστηρίξουν τόσο κατανεμημένη όσο και συγκεντρωμένη φόρτιση. Στην περίπτωση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου (βλ. Σχήμα 2.11), μπορεί να αντικατασταθεί το φορτίο με συγκεντρωμένα κομβικά φορτία και ροπές που τείνουν να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στη δοκό όπως το πραγματικό κατανεμημένο φορτίο. Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας το ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο με ένα σύστημα στατικά ισοδύναμων δυνάμεων που συνίσταται από συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις και ροπές στο κάθε άκρο του φορέα που υπόκειται στην κατανεμημένη φόρτιση. Αυτό συμβαίνει επειδή τόσο οι στατικά ισοδύναμες συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις και ροπές όσο και το αρχικό κατανεμημένο φορτίο έχουν το ίδιο αποτέλεσμα όσον αφορά τη δύναμη και τη ροπή γύρω από ένα τυχαίο σημείο (Logan, 2005).



Σχήμα 2.11: Κατανεμημένο φορτίο σε δοκό (στην περίπτωση αυτή εικονίζεται μια αμφίπακτη δοκός) (Logan, 2005).

Η μέθοδος του ισοδύναμου έργου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντικατασταθεί ένα κατανεμημένο φορτίο με ένα σύνολο διακριτών φορτίων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι το έργο που παράγει ένα κατανεμημένο φορτίο $w(x)$ σε σχέση με το πεδίο των μετατοπίσεων είναι ίσο με το έργο που παράγουν οι κομβικές φορτίσεις f_{1y} και m_1 που σχετίζονται με τις κομβικές μετατοπίσεις d_{1y} και β_1 για τυχαίες κομβικές μετατοπίσεις. Για να μην υπάρχει σύγχυση με τον συμβολισμό $w(x)$ (ο οποίος σε ολόκληρη την εργασία συμβολίζει το βέλος κάμψης) ο οποίος στην παρούσα υποενότητα υποδηλώνει το κατανεμημένο φορτίο, μόνο για αυτήν την ενότητα θα υιοθετηθεί ο συμβολισμός v για το βέλος κάμψης και d για τα βέλη στους κόμβους (Logan, 2005).

Το έργο λόγω του κατανεμημένου φορτίου δίνεται ως εξής:

$$W_{\text{distributed}} = \int_0^L w(x)v(x)dx \quad (2.26)$$

όπου η $v(x)$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση. Το έργο λόγω των διακριτών κομβικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\text{διακρ.}} = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + f_{1y}d_{1y} + f_{2y}d_{2y} \quad (2.27)$$

Μπορούν τώρα να προσδιοριστούν οι κομβικές ροπές και δυνάμεις m_1 , m_2 , f_{1y} και f_{2y} που χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν το κατανεμημένο φορτίο με βάση την έννοια του ισοδύναμου έργου. Αυτό γίνεται θέτοντας $W_{\text{κατανεμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ για τυχαίες μετατοπίσεις β_1 , β_2 , d_{1y} και d_{2y} .

Για παράδειγμα, θεωρείται μια δοκός που υπόκειται σε κατανεμημένη φόρτιση. Θέτοντας $W_{\text{κατανεμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ και θεωρώντας τυχαίες μετατοπίσεις β_1 , β_2 , d_{1y} και d_{2y} βρίσκονται οι ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις m_1 , m_2 , f_{1y} , f_{2y} .

Κάνοντας χρήση προηγούμενων σχέσεων για $W_{\text{κατανεμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ λαμβάνεται:

$$\int_0^L w(x)v(x)dx = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + f_{1y}d_{1y} + f_{2y}d_{2y} \quad (2.28)$$

όπου $m_1\beta_1$ και $m_2\beta_2$ είναι το έργο λόγω των συγκεντρωμένων κομβικών ροπών που προκαλούν τις αντίστοιχες επικόμβιες περιστροφές και $f_{1y}d_{1y}$ και $f_{2y}d_{2y}$ είναι το έργο λόγω των επικόμβιων δυνάμεων που προκαλούν επικόμβιες μετατοπίσεις. Αναλύοντας την προηγούμενη ισότητα και αντικαθιστώντας το $w(x)$ με το $-w$ και λαμβάνοντας το $v(x)$ από προηγούμενη εξίσωση προκύπτει το έργο λόγω του κατανεμημένου φορτίου (Logan, 2005):

$$\begin{aligned} \int_0^L w(x)v(x)dx &= -\frac{Lw}{2}(d_{1y} - d_{2y}) - \frac{L^2w}{4}(\beta_1 + \beta_2) - Lw(d_{2y} - d_{1y}) \\ &+ \frac{L^2w}{3}(2\beta_1 + \beta_2) - \beta_1\left(\frac{L^2w}{2}\right) - d_{1y}(wL) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις και για τυχαίες κομβικές μετατοπίσεις, έστω $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $d_{1y} = 0$, $d_{2y} = 0$ λαμβάνεται:

$$m_1(1) = -\left(\frac{L^2w}{4} - \frac{2}{3}L^2w + \frac{L^2w}{2}\right) = -\frac{wL^2}{12} \quad (2.30)$$

Παρομοίως, αν υποτεθεί $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $d_{1y} = 0$, $d_{2y} = 0$, λαμβάνεται:

$$m_2(1) = \left(\frac{L^2 w}{4} + \frac{L^2 w}{3} \right) = \frac{wL^2}{12} \quad (2.31)$$

Τελικά, θεωρώντας όλες τις μετατοπίσεις μηδενικές εκτός των d_{1y} αρχικά και του d_{2y} μετά λαμβάνεται:

$$f_{1y}(1) = \frac{Lw}{2} + Lw - Lw = -\frac{Lw}{2} \quad (2.32)$$

$$f_{2y}(1) = \frac{Lw}{2} - Lw = -\frac{Lw}{2} \quad (2.33)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι γενικά για κάθε δεδομένη συνάρτηση κατανεμημένου φορτίου μπορεί να γίνει πολλαπλασιασμός αρχικά με το $v(x)$ και μετά ολοκλήρωση σύμφωνα με την έκφραση $\int_0^L w(x)v(x)dx$ για να ληφθούν οι συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις ή ροπές που θα αντικαταστήσουν το κατανεμημένο φορτίο. Επιπλέον, μπορούν να ληφθούν οι ισοδύναμες δυνάμεις μέσω των αντιδράσεων στις στηρίξεις χρησιμοποιώντας τη θεωρία της δομικής ανάλυσης, για την οποία υπάρχουν διάφοροι συγκεντρωτικοί πίνακες (Logan, 2005), (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Αν ένα συγκεντρωμένο φορτίο ασκείται σε σημείο εκτός του φυσικού συνόρου μεταξύ δύο στοιχείων, χρησιμοποιείται πάλι η ιδέα του **ισοδύναμου έργου** (ισοδύναμων κομβικών δυνάμεων) για να αντικατασταθεί το συγκεντρωμένο φορτίο με κομβικές συγκεντρωμένες τιμές δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα ενός στοιχείου αντί να θεωρηθεί επιπλέον κόμβος στο σημείο που ασκείται το φορτίο.

Στη συνέχεια, θα γίνει αναφορά σε μια πιο γενική μεθοδολογία για τα κατανεμημένα ή συγκεντρωμένα φορτία που ασκούνται σε στοιχεία δοκού, αρχίζοντας με την ακόλουθη διατύπωση για μια γενική δομή (Logan, 2005):

$$F = Kd - F_0 \quad (2.34)$$

όπου F είναι το μητρώο των συγκεντρωμένων κομβικών δυνάμεων και F_0 οι ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις εκφρασμένες σε συνιστώσες του καθολικού συστήματος συντεταγμένων που είναι τέτοιου μεγέθους ώστε να προκαλούν τις ίδιες μετατοπίσεις στους κόμβους με αυτές που θα προκαλούσε το κατανεμημένο φορτίο.

Χρησιμοποιείται η ιδέα της κατάστρωσης των εξισώσεων των στοιχείων μέσω της αρχής ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας. Θεωρώντας ότι υπάρχει μόνο κατανεμημένο φορτίο η σχέση γίνεται: $F_0 = Kd$

Λύνοντας τη σχέση ως προς d και μετά αντικαθιστώντας τις ολικές μετατοπίσεις d και τις ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις F_0 στη **σχέση 2.34** λαμβάνονται οι πραγματικές καθολικές κομβικές δυνάμεις. Για παράδειγμα, για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο w που ασκείται σε μια δοκό με 1 πεπερασμένο στοιχείο προκύπτει:

$$F_o = \begin{Bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Αυτή η ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε τοπικό σύστημα (ενός στοιχείου) για να ληφθούν οι τοπικές επικόμβιες δυνάμεις που εμφανίζονται σε μεμονωμένα στοιχεία μιας κατασκευής, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $f = kd - f_o$.

2.2 Ανάλυση ροής - Οι Εξισώσεις Euler και η διακριτοποίησή τους

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί ρευστοδυναμικός επιλύτης της 3Δ ροής για μη-συνεκτικό συμπιεστό ρευστό. Στη συνέχεια θα αναπτυχθούν συνοπτικά οι εξισώσεις Euler που ισχύουν στην περίπτωση του μη-συνεκτικού συμπιεστού ρευστού καθώς και ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων αυτών προκειμένου να επιλυθούν αριθμητικά.

2.2.1 Οι Εξισώσεις Euler

Θεωρήθηκε σκόπιμο, για λόγους πληρότητας να γίνει μια σύντομη περιγραφή των εξισώσεων Euler στις τρεις διαστάσεις, τις οποίες επιλύει ο ρευστοδυναμικός κώδικας γύρω από την πτέρυγα.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial x_r} &= 0 \text{ (εξ. συνέχειας)} \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho u_r u_i + p \delta_{ri}) &= 0 \text{ (} i = 1,2,3 \text{) (εξ. ορμής)} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} [u_r (\rho E + p)] &= 0 \text{ (εξ. ενέργειας)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Αρχικά θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις Euler σε συντηρητική γραφή για μόνιμη ροή συμπιεστού ρευστού, σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τριδιάστατες ροές.

Εδώ με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του ρευστού, με u_r ($r=1,2,3$) η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση x_r , με E η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, με e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και με p η πίεση του ρευστού. Ο χρονικός όρος $\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}$ στις εξισώσεις 2.36 αποτελεί «ψευδο-χρονικό» όρο και έχει προστεθεί για την εκμετάλλευση των ιδιοτήτων που έχουν τα υπερβολικά συστήματα και για είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μια μέθοδος χρονοπροέλασης για την επίλυση του συστήματος (Καββαδίας, 2011).

Η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας εκφράζεται από τη **σχέση 2.37**:

$$E = e + \frac{1}{2} u_r u_r \quad (2.37)$$

Με τον ορισμό του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών στη μορφή:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

και του διανύσματος της μη-συνεκτικής ροής (flux) κατά την κατεύθυνση x_r :

$$\vec{F}_r = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_1 u_r + p \delta_{1r} \\ \rho u_2 u_r + p \delta_{2r} \\ \rho u_3 u_r + p \delta_{3r} \\ u_r (\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

οι εξισώσεις της σχέσης 2.36 μπορούν να γραφούν στην παρακάτω διανυσματική γραφή:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial t} = 0 \quad (2.40)$$

Στην επίλυση γίνεται η παραδοχή του τελείου αερίου, του οποίου η συμπεριφορά δίνεται από την ακόλουθη καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \quad (2.41)$$

όπου R_g είναι η σταθερά του τελείου αερίου και υπολογίζεται σύμφωνα με τις ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και όγκο, c_p και c_v αντίστοιχα από τη σχέση:

$$R_g = c_p - c_v \quad (2.42)$$

Οι σχέσεις ορισμού των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων είναι οι εξής:

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p, c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v \quad (2.43)$$

και κάνοντας χρήση του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος προκύπτει:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p, c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v \quad (2.44)$$

όπου με h συμβολίζεται η ενθαλπία του ρευστού ανά μονάδα μάζας. Η ενθαλπία (στατική) συνδέεται με την εσωτερική ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.45)$$

Για τον υπολογισμό των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων με την παραδοχή των τελείων αερίων απαιτείται μόνο η γνώση της θερμοκρασίας, της οποίας η μεταβολή θεωρείται μικρή και, επομένως, οι θερμοχωρητικότητες μπορούν να θεωρηθούν σταθερές. Επομένως:

$$e = c_v T, h = c_p T \quad (2.46)$$

Στη συνέχεια, μπορεί να οριστεί ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής γ ως εξής:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.47)$$

Έτσι, η εξίσωση 2.37 που δίνει την ολική ενέργεια, μπορεί να γραφεί:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_r u_r \quad (2.48)$$

Επίσης, η ολική ενθαλπία δίνεται από τη σχέση:

$$h_t = \frac{E + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u_r u_r \quad (2.49)$$

Πριν τη διακριτοποίηση, οι εξισώσεις 2.36 αδιαστατοποιούνται με χρήση κατάλληλων αδιάστατων ποσοτήτων (μεγέθη «αναφοράς» ή reference) .

Τα βασικά μεγέθη των εξισώσεων 2.36 αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \hat{u}_i = \frac{u_i}{U_{ref}}, \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (2.50)$$

όπου με L_{ref} συμβολίζεται το μήκος αδιαστατοποίησης, με U_{ref} η ταχύτητα αδιαστατοποίησης και με ρ_{ref} η πυκνότητα αδιαστατοποίησης. Με το σύμβολο «^» συμβολίζονται οι αδιάστατες ποσότητες.

Επίσης ορίζεται:

$$\widehat{R}_g = \gamma - 1 \quad (2.51)$$

οπότε

$$R_{g,ref} = c_v \quad (2.52)$$

Τα μεγέθη αναφοράς για τα υπόλοιπα μεγέθη θα υπολογιστούν αντικαθιστώντας τις αδιάστατες ποσότητες στις εξισώσεις και συγκρίνοντας τη νέα μορφή με των εξισώσεων με την προηγούμενη.

Στη συνέχεια γράφεται το σύστημα των εξισώσεων 2.36 με χρήση των διανυσμάτων \vec{U} και \vec{F}_r ώστε οι εξισώσεις να έρθουν στην μορφή της εξίσωσης 2.39 (μετά από τις κατάλληλες πράξεις και αντικαταστάσεις) .

Ολόκληρη η διαδικασία της αδιαστατοποίησης έχει βασιστεί ουσιαστικά στον ορισμό των μεγεθών αναφοράς L_{ref} , U_{ref} , και ρ_{ref} . Σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, όπως αυτό που μελετάται στο κεφάλαιο 4, συνήθως δίνεται η στατική πυκνότητα και η ταχύτητα στο επ' άπειρον όριο και τα μεγέθη αναφοράς επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε η επ' άπειρον πυκνότητα και ταχύτητα να ισούνται με 1.

Όσον αφορά τον ψευδοχρονικό όρο που προαναφέρθηκε ότι χρησιμοποιείται, έχει προστεθεί για διευκόλυνση της σύγκλισης των εξισώσεων σύμφωνα με την τεχνική της χρονοπροέλασης. Για επιτάχυνση της σύγκλισης εφαρμόζεται η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος και υπολογίζεται ψευδοχρονικό βήμα για κάθε κόμβο, το οποίο εξαρτάται και από τον αριθμό CFL (Courant-Friedrichs-Levy) (Καββαδίας, 2011).

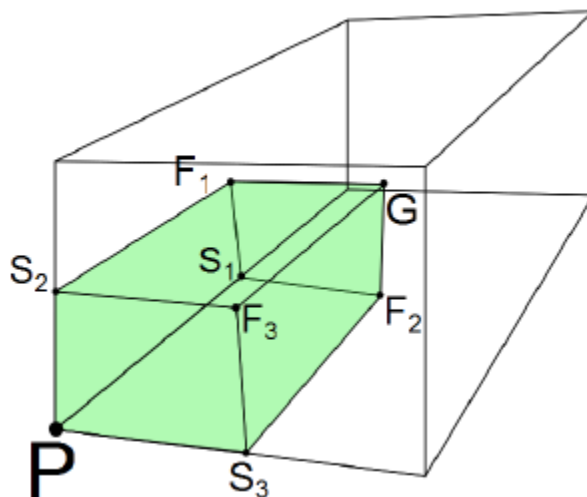
2.2.2 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler σε 3D πλέγμα

Πριν από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής απαιτείται η διακριτοποίηση του χωρίου ροής, η οποία γίνεται με κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος το οποίο

περιλαμβάνει τους κόμβους στους οποίους επιλύονται οι εξισώσεις ροής. Σε μη-δομημένα υπολογιστικά πλέγματα όπως αυτά τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι κόμβοι δεν είναι αυστηρά ταξινομημένοι όπως στα δομημένα πλέγματα και δεν είναι γνωστοί εκ των προτέρων οι «γειτονικοί» κόμβοι του εκάστοτε κόμβου με αποτέλεσμα να υπάρχουν μεγαλύτερες απαιτήσεις μνήμης και απαιτήσεις πιο προσεκτικής διαχείρισης του κώδικα ώστε ο επιλύτης να έχει την απαιτούμενη αποδοτικότητα.

Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής χρησιμοποιείται ένα σχήμα πεπερασμένων όγκων, με κεντροκομβική προσέγγιση. Για την εφαρμογή του χρειάζεται να οριστούν οι όγκοι ελέγχου γύρω από τους κόμβους του πλέγματος, στους οποίους αποθηκεύονται όλες οι μεταβλητές της ροής. Οι όγκοι ελέγχου καλύπτουν ολόκληρο το χωρίο ροής, χωρίς να αλληλοκαλύπτονται.

Η μέθοδος επίλυσης που θα περιγραφεί στη συνέχεια αναφέρεται σε 3Δ δομημένα πλέγματα και όλα τα πλεγματικά στοιχεία που περιβάλλουν έναν τυχαίο κόμβο P είναι εξαεδρικά. Κάθε γειτονικό εξάεδρο προσφέρει στον όγκο ελέγχου ενός τυχαίου κόμβου έναν όγκο (βλ. σχήμα 2.12) που ορίζεται από το σημείο P, τους μεσόκομβους κάθε ακμής που συντρέχει στον κόμβο P, που συμβολίζονται με S_1, S_2, S_3 στο σχήμα, τα κέντρα βάρους των πλευρών στις οποίες ανήκουν οι προαναφερθείσες ακμές, τα σημεία F_1, F_2, F_3 , καθώς και το κέντρο βάρους του εκάστοτε εξάεδρου, το σημείο G. Για λόγους ευκρίνειας παρουσιάζεται μόνο ένα από τα 8 γειτονικά εξάεδρα, αντί για ολόκληρο τον όγκο ελέγχου.



Σχ. 2.12 : Προσφορά κάθε γειτονικού εξάεδρου στον όγκο ελέγχου.

Η ολοκλήρωση του όγκου ελέγχου ενός τυχαίου κόμβου P δίνει:

$$\iiint_{VP} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV + \iiint_{VP} \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial x_r} dV = 0 \quad (2.53)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss και θεωρώντας ότι $\iiint_{V^P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P V^P$ ισχύει:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P V^P + \iint_{\partial V^P} \vec{F}_r \hat{n}_r d(\partial V) = 0 \quad (2.54)$$

Όπου V^P είναι ο όγκος ελέγχου, ∂V^P η οριακή επιφάνεια αυτού και $\vec{\hat{n}} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην οριακή επιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό του. Θέτοντας:

$$\vec{\hat{H}} = \vec{F}_r \hat{n}_r \quad (2.55)$$

$$\hat{H} = \vec{F}_r n_r \quad (2.56)$$

η έκφραση 2.54 γίνεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P V^P + \iint_{\partial V^P} \vec{\hat{H}} d(\partial V) = 0 \quad (2.57)$$

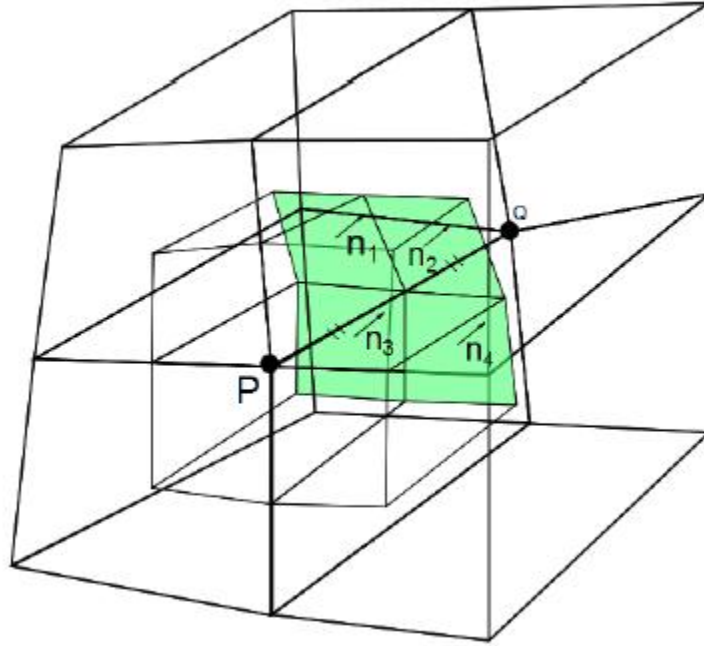
Ή

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P V^P + \sum_{Q \in K(P)} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (2.58)$$

Όπου Q οι γειτονικοί κόμβοι του P και το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$ ορίζεται:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \iint_{\partial V^P} \vec{\hat{H}} d(\partial V) \quad (2.59)$$

Η επιφάνεια ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$ αντιστοιχεί στο κοινό όριο των όγκων ελέγχου, του κόμβου P και του εκάστοτε γειτονικού κόμβου Q, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13.



Σχ. 2.13 : Κοινό όριο των όγκων ελέγχου ανάμεσα στους κόμβους P και Q.

Το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$ υπολογίζεται σε κάθε ακμή και αφαιρείται ή προστίθεται ανάλογα στον ισολογισμό της κυψέλης στην οποία αναφέρεται. Ο υπολογισμός του γίνεται σύμφωνα με τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκατέρωθεν του μέσου της ακμής PQ οι οποίες υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών στους κόμβους P και Q, με προεκβολή ακρίβειας δεύτερης τάξης. Επίσης συνηπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα \vec{n}_{PQ} που είναι το διανυσματικό άθροισμα των $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 2.13. Όμως, τα 4 σημεία που ορίζουν κάθε επιφάνεια σε κάθε στοιχειώδες εξάεδρο δεν είναι κατ' ανάγκη συνεπίπεδα. Έτσι, για τον υπολογισμό καθενός από τα διανύσματα αυτά, χρειάζεται η διαίρεση της επιφάνειας σε 2 τριγωνικές, επίσης όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, ο υπολογισμός των κάθετων προς αυτές διανυσμάτων και η άθροισή τους, ανά δύο, για να προκύψει το αποτέλεσμα του σχήματος 2.13. Έτσι προκύπτει:

$$\vec{n}_{PQ} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \quad (2.60)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{f}(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \quad (2.61)$$

Πριν τη διατύπωση της έκφρασης του διανύσματος ροής, χρειάζεται να οριστεί το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος \vec{F}_r ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές \vec{U} .

$$A_r \triangleq \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial \vec{U}} \quad (2.62)$$

Ακόμα ορίζεται:

$$\underline{A} \triangleq A_r n_r \Rightarrow \underline{A} = \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial \vec{U}} n_r = \frac{\partial (\vec{F}_r n_r)}{\partial \vec{U}} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{U}} \quad (2.63)$$

Από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ικανοποιείται η έκφραση $p = p_f(e)$. Σε συνδυασμό με τον τρόπο ορισμού του Ιακωβιανού μητρώου A_r το διάνυσμα της ροής \vec{F}_r είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού, κύρια ιδιότητα των οποίων είναι:

$$\vec{F}_r = A_r \vec{U} \quad (2.64)$$

Ακολουθώντας την πορεία της εξαγωγής της σχέσης 2.63 εύκολα προκύπτει:

$$\vec{H} = \underline{A} \vec{U} \quad (2.65)$$

Το Ιακωβιανό μητρώο A είναι το εξής:

$$\underline{A}(:,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u(u_r n_r) + \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) n_x \\ -v(u_r n_r) + \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) n_y \\ -w(u_r n_r) + \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) n_z \\ [-\gamma E + (\gamma-1)(u_r u_r)](u_r n_r) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,2) = \begin{bmatrix} n_x \\ u_r n_r + (2-\gamma) u n_x \\ v n_x + (\gamma-1) u n_y \\ w n_x - (\gamma-1) u n_z \\ \left[-\gamma E + \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) \right] n_x - (\gamma-1) u (u_r n_r) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,3) = \begin{bmatrix} n_y \\ u n_y - (\gamma-1) v n_x \\ u_r n_r + (2-\gamma) v n_y \\ w n_y - (\gamma-1) v n_z \\ \left[\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) \right] n_y - (\gamma-1) v (u_r n_r) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,4) = \begin{bmatrix} n_z \\ u n_z - (\gamma-1) w n_x \\ v n_z + (2-\gamma) w n_y \\ u_r n_r + (2-\gamma) w n_z \\ \left[\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (u_r u_r) \right] n_z - (\gamma-1) w (u_r n_r) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,5) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma - 1)n_x \\ (\gamma - 1)n_y \\ (\gamma - 1)n_z \\ \gamma(u_r n_r) \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές του μητρώου \underline{A} έχουν υπολογιστεί και είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vec{u}\vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{u}\vec{n} \\ \lambda_3 &= \vec{u}\vec{n} \\ \lambda_4 &= (\vec{u} \cdot \vec{n} + c)|\vec{n}| \\ \lambda_5 &= (\vec{u} \cdot \vec{n} - c)|\vec{n}| \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ακόμα, υπολογίζονται τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του μητρώου \underline{A} . Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν την σχέση $(\underline{A} - \lambda_k I_k)r_k = 0$ ενώ τα αριστερά ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν τη σχέση $l_k(\underline{A} - \lambda_k I) = 0$ ($k = 1,2,3,4,5$) Με I συμβολίζεται ο μοναδιαίος πίνακας. Πλέον το μητρώο \underline{A} μπορεί εύκολα να γραφεί στην μορφή:

$$\underline{A} = P\Lambda P^{-1} \quad (2.67)$$

Όπου Λ διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές \underline{A} και

$$P = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5], P^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Ακόμα ορίζονται τα μητρώα:

$$\underline{A}^+ = P\Lambda^+P^{-1}, \underline{A}^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (2.69)$$

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \quad (2.70)$$

όπου το μητρώο Λ^+ περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές, ενώ το μητρώο Λ^- τις αρνητικές ιδιοτιμές.

Έχοντας ορίσει τα ιακωβιανά μητρώα, ακολουθεί ο ορισμός του διανύσματος της ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, σύμφωνα με το σχήμα του Roe. Έτσι ισχύει:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2} [\vec{H}(\vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ})] - \frac{1}{2} |\underline{A}_{PQ}| (\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi}_{PQ} &= \frac{1}{2} [\underline{A}_R \vec{U}_{PQ}^R + \underline{A}_L \vec{U}_{PQ}^L] - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L) \Rightarrow \\
\vec{\Phi}_{PQ} &= \frac{1}{2} (\underline{A}_R - |\tilde{A}_{PQ}|) \vec{U}_{PQ}^R + \frac{1}{2} (\underline{A}_L - |\tilde{A}_{PQ}|) \vec{U}_{PQ}^L \Rightarrow \\
\vec{\Phi}_{PQ} &= \underline{A}_R \vec{U}_{PQ}^R + \underline{A}_L \vec{U}_{PQ}^L
\end{aligned} \tag{2.70}$$

όπου $|\tilde{A}_{PQ}|$ είναι το μητρώο που προκύπτει από τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του \underline{A} υπολογισμένο με βάση τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών. Αυτές δίνονται:

$$\vec{U}_{PQ} = [\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w} \quad \tilde{p}]^T \tag{2.71}$$

Για τον υπολογισμό των συνιστωσών, πέραν της πίεσης, χρησιμοποιείται η σχέση 2.72, ενώ για τον υπολογισμό της μέσης, κατά Roe πίεσης, υπολογίζεται η μέση τιμή της ολικής ενθαλπίας σύμφωνα με τη σχέση 2.73 και στη συνέχεια υπολογίζεται η πίεση.

$$\vec{U}_{PQ} = \frac{(\sqrt{\rho_L} \vec{U}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{U}_R)}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{2.72}$$

$$h_t = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} (u_r u_r) \tag{2.73}$$

Ο χρονικός όρος, που έχει προαναφερθεί ότι αποτελεί ψευδοχρονικό όρο και έχει προστεθεί για διευκόλυνση της σύγκλισης των εξισώσεων σύμφωνα με την τεχνική της χρονοπροέλασης, διακριτοποιείται μέσω πρώτης τάξεως σχήματος ανάντι διαφόρισης (Euler):

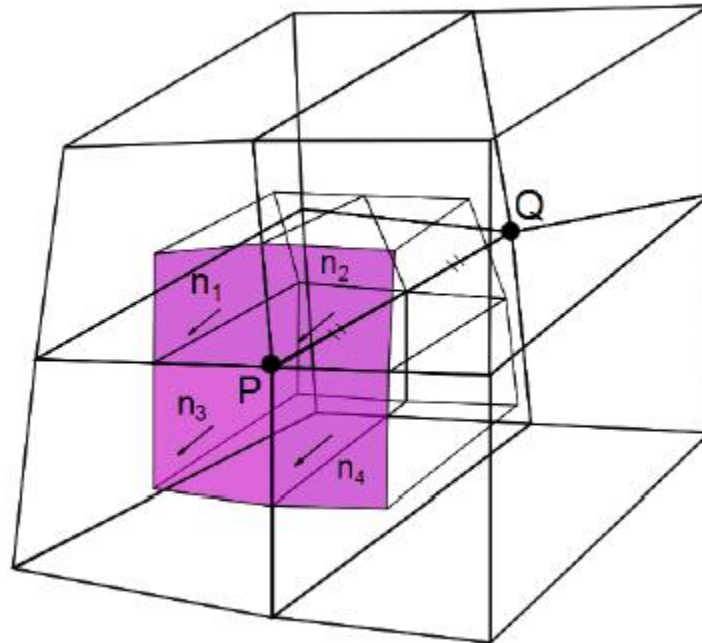
$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P V^P = \frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta \vec{U}^P \tag{2.74}$$

όπου $\Delta \vec{U}^P = (\vec{U}^P)^{n+1} - (\vec{U}^P)^n$ (ο εκθέτης n αντιστοιχεί στο τρέχον χρονικό βήμα).

Σε περίπτωση οριακού κόμβου πρέπει να συμπεριληφθεί ένας ακόμα όρος, το διάνυσμα της ροής που εξέρχεται προς το περιβάλλον από τον όγκο ελέγχου. Τότε, η ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής καταλήγει στη μορφή:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P V^P + \sum_{Q \in K(P)} \vec{\Phi}_{PQ} + \vec{\Phi}_{\text{Οριο χωρίου ροής}} = 0 \tag{2.75}$$

Το οριακό διάνυσμα ροής υπολογίζεται ανάλογα με το είδος του ορίου και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι τρόποι υπολογισμού για οριακούς κόμβους τοιχωμάτων και εισόδου-εξόδου.



Σχ. 2.14 : Όγκος ελέγχου οριακού κόμβου P.

Στα **στερεά τοιχώματα**, για ατριβείς ροές, επιβάλλεται η συνθήκη μη-εισχώρησης ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$). Η επιβολή γίνεται με ασθενή διατύπωση, δηλαδή με εισαγωγή της συνθήκης στο διάνυσμα της ροής, το οποίο κατά μήκος των στερεών τοιχωμάτων, λαμβάνει τη μορφή:

$$\vec{\Phi}_{\text{όριο}} = \vec{F}_r^P n_r^P = \begin{bmatrix} \rho(u_r n_r) \\ \rho u(u_r n_r) + p n_x \\ \rho v(u_r n_r) + p n_y \\ \rho w(u_r n_r) + p n_z \\ (\rho E + p)(u_r n_r) \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \end{bmatrix}_P \quad (2.76)$$

Με $\vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4$ όπου τα διανύσματα $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ και \vec{n}_4 αντιστοιχούν στα διανύσματα από το όριο του όγκου ελέγχου προς το τοίχωμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.14.

Έχει αποδειχθεί προηγουμένως ότι το πρόσημο των ιδιοτιμών του μητρώου \underline{A} καθορίζει την κατεύθυνση μεταφοράς της πληροφορίας μέσα στη ροή. Από τις ιδιοτιμές του μητρώου \underline{A} , όπως έχουν υπολογιστεί στην σχέση 2.66 είναι θετικές οι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και λ_4 ενώ η λ_5 εξαρτάται από το εάν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική. Για τις θετικές ιδιοτιμές, η αντίστοιχη «πληροφορία» μεταφέρεται μαζί με τη ροή, ενώ όταν η ιδιοτιμή είναι αρνητική, η «πληροφορία» ταξιδεύει αντίθετα από την τοπική ταχύτητα της ροής. Έτσι, για το κλείσιμο των εξισώσεων της ροής, απαιτούνται 4 μεγέθη στην είσοδο της ροής και 1 στην έξοδο σε

υποηχητικές ροές ενώ σε υπερηχητικές ροές απαιτούνται 5 μεγέθη στην είσοδο της ροής. Σε εφαρμογές εξωτερικής αεροδυναμικής, τα μεγέθη αυτά είναι η πυκνότητα (ρ_∞), το μέτρο ($|\vec{u}_\infty|$) και οι γωνίες θ_1 και θ_2 της επ' άπειρον ταχύτητας, αλλά και ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής.

Το διάνυσμα ροής στους οριακούς κόμβους εισόδου ή εξόδου υπολογίζεται σύμφωνα με το ανάντι σχήμα πρώτης τάξης των Steger-Warming, το οποίο για έναν οριακό κόμβο P γράφεται:

$$\vec{\Phi}_{out}^P = \underline{A}_P^+ \vec{U}_P + \underline{A}_P^- \vec{U}_{out} \quad (2.77)$$

Όπου με «out» συμβολίζεται ένας υποθετικός κόμβος, εξωτερικά του πεδίου ροής, στον οποίο και επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες.

Όπως προαναφέρθηκε, σε εφαρμογές εξωτερικής αεροδυναμικής, δηλαδή σε εφαρμογές που η ροή γύρω από ένα αεροδυναμικό σώμα επηρεάζεται μόνο από την παρουσία του ίδιου, τα μεγέθη που συνήθως δίνονται στο επ' άπειρο όριο για το κλείσιμο των εξισώσεων ροής είναι η πυκνότητα, το διάνυσμα της ταχύτητας και ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής ($\rho_\infty, |\vec{u}_\infty|, \theta_{1\infty}, \theta_{2\infty}, M_\infty$)

Επομένως:

$$\rho_{out} = \rho_\infty \quad (2.78)$$

$$(\rho u)_{out} = \rho_\infty |\vec{u}_\infty| \cos\theta_{1\infty} \cos\theta_{2\infty} \quad (2.79)$$

$$(\rho v)_{out} = \rho_\infty |\vec{u}_\infty| \sin\theta_{1\infty} \quad (2.80)$$

$$(\rho w)_{out} = \rho_\infty |\vec{u}_\infty| \cos\theta_{1\infty} \sin\theta_{2\infty} \quad (2.81)$$

$$\rho E_{out} = \frac{p_{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_{far} |\vec{u}_\infty|^2 \quad (2.82)$$

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφούν με χρήση του τελεστή υπολοίπου \vec{R} στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{V^P}{\Delta t^P} \Delta \vec{U}^P + \vec{R}^{P,n+1} = 0 \quad (2.83)$$

όπου η το παρόν ψευδοχρονικό βήμα.

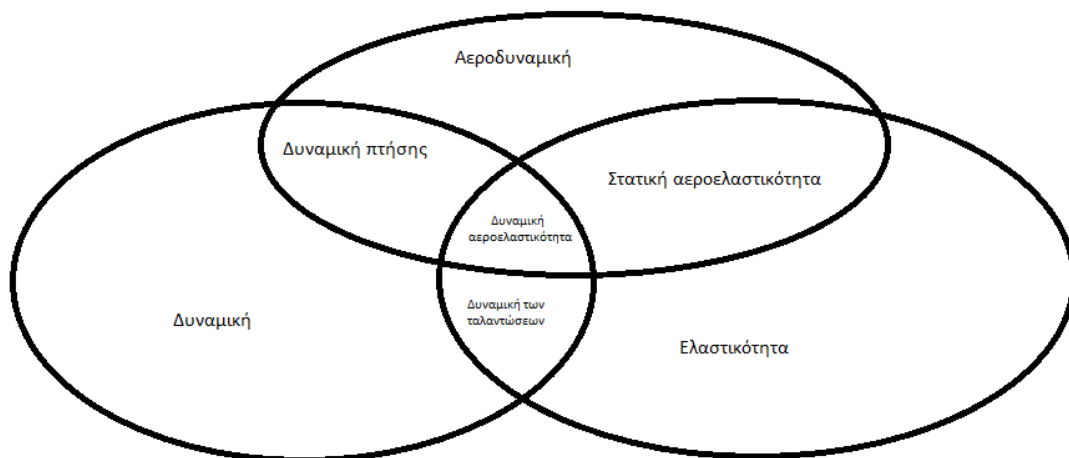
Η ανανέωση των μεταβλητών σε κάθε ψευδοχρονικό βήμα γίνεται με χρήση σημειακά πεπλεγμένου σχήματος και εσωτερικών επαναλήψεων του σημειακά πεπλεγμένου επιλύτη Jacobi. Με γραμμικοποίηση του τελεστή υπολοίπου \vec{R} προκύπτει το παρακάτω σχήμα για τη νέα επανάληψη του ψευδοχρονικού βήματος:

$$\left[\frac{V^P}{\Delta t^P} I + \frac{\partial \vec{R}^P}{\partial \vec{U}^P} \right] \Delta \vec{U}^P + \sum_{Q \in K_P} \left(\frac{\partial \vec{R}^P}{\partial \vec{U}^Q} \right) \Delta \vec{U}^Q = -\vec{R}^P \quad (2.83)$$

2.3 Αεροελαστικότητα

Η αεροελαστικότητα είναι το πεδίο εκείνο της επιστήμης που εξετάζει την αλληλεπίδραση μιας παραμορφώσιμης ελαστικής κατασκευής με ένα ρεύμα αέρα που προκαλεί σ' αυτήν αεροδυναμικές φορτίσεις. Η αεροελαστικότητα αποτελεί υποκατηγορία της λεγόμενης Αλληλεπίδρασης Ρευστών-Στερεών (Fluid-Structure Interaction, FSI).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.15, στην μελέτη του αεροελαστικού προβλήματος εμπλέκονται τρεις βασικοί τομείς, η αεροδυναμική, η ελαστικότητα και η δυναμική. Η συνεισφορά της αεροδυναμικής είναι ο υπολογισμός των φορτίσεων που δέχεται ένα αεροδυναμικό σώμα, η συνεισφορά της θεωρίας ελαστικότητας είναι ο υπολογισμός των παραμορφώσεων που δέχεται το σώμα από τις αεροδυναμικές φορτίσεις ενώ η συνεισφορά της δυναμικής είναι η μελέτη των ταλαντώσεων και συναφών φαινομένων που εμφανίζονται σε αεροπορικές κατασκευές.



Σχήμα 2.15: Διάφοροι τομείς σχετιζόμενοι με την αεροελαστικότητα.

Τα τρία είδη δυνάμεων που εμφανίζονται σε ένα αεροελαστικό πρόβλημα όπως προαναφέρθηκε, είναι οι δυνάμεις αδράνειας (σχετικές με τη δυναμική), οι δυνάμεις ελαστικότητας και οι αεροδυναμικές δυνάμεις.

Δομές όπως τα αεροσκάφη, δεν μπορούν να θεωρηθούν εντελώς απαραμόρφωτες και γι' αυτό όταν ασκούνται πάνω τους αεροδυναμικά φορτία δημιουργούνται παραμορφώσεις, κάτι που αποτελεί αεροελαστικό φαινόμενο (Wright & Cooper, 2007). Σε ένα αεροελαστικό φαινόμενο υπάρχει συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ του ρευστού που ασκεί τις αεροδυναμικές φορτίσεις και του στερεού που παραμορφώνεται δεχόμενο τις φορτίσεις,

προκαλώντας στη συνέχεια μεταβολές στη ροή. Αυτή η αλληλεπίδραση εξασθενεί εάν οι συνθήκες επιτρέψουν να επικρατήσει ισορροπία ή μπορεί να ενισχυθεί μέχρι να καταστραφεί η κατασκευή εάν προκύψει συντονισμός (AER).

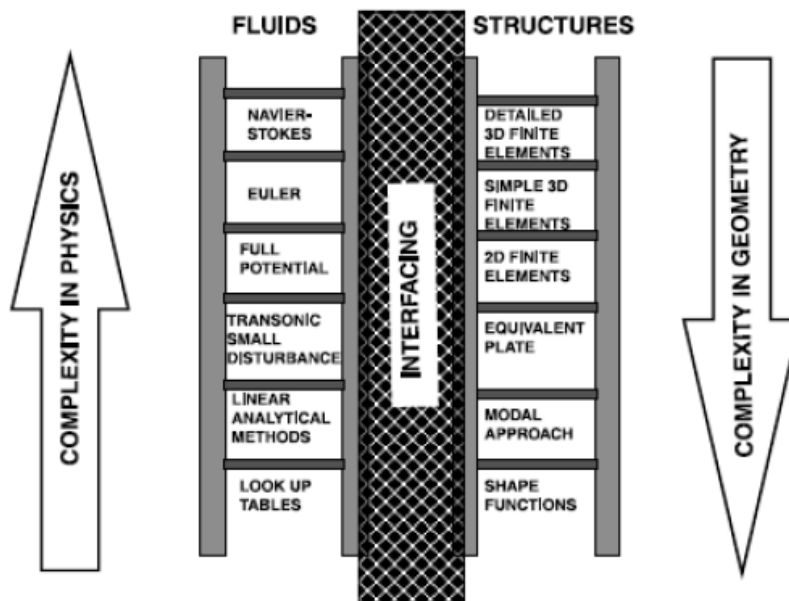
Στην παρούσα εργασία, θα μελετηθεί η απλούστερη περίπτωση, αυτή της **στατικής αεροελαστικότητας**, για την οποία κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια.

Η στατική αεροελαστικότητα έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων του αεροδυναμικού φορτίου που δημιουργείται από σταθερή ροή με την επαγόμενη ελαστική παραμόρφωση των αεροδυναμικών επιφανειών ενός σώματος. Επομένως, η στατική αεροελαστικότητα ασχολείται με φαινόμενα που δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα και την επιτάχυνση των αεροδυναμικών επιφανειών. Στην περίπτωση της στατικής αεροελαστικότητας μελετώνται οι ελαστικές και αεροδυναμικές φορτίσεις ενώ αγνοούνται οι αδρανειακές φορτίσεις (AER).

Η στατική αεροελαστικότητα ασχολείται με δύο βασικά αντικείμενα: την επίδραση της ελαστικής παραμόρφωσης στο αεροδυναμικό φορτίο και την στατική αστάθεια που μπορεί τελικά να οδηγήσει σε αστοχία. Η στατική αστάθεια ονομάζεται και απόκλιση (divergence) και είναι αυτή που καθορίζει τα όρια της πτητικής κατάστασης (WIK), (Bisplinghoff & Ashley, 1975).

Οι τρεις βασικοί τρόποι στήριξης των μοντέλων αεροτομών είναι (AER): α) στήριξη στο τοίχωμα, β) στήριξη σε πρόβολο και γ) στήριξη με υποστηρίγματα.

Πέραν των απλών μεθόδων-μοντέλων που προαναφέρθηκαν, η μελέτη αεροελαστικών προβλημάτων σήμερα που η υπολογιστική ισχύς είναι σημαντικά μεγαλύτερη σε σχέση με το παρελθόν, γίνεται με μεθόδους υπολογιστικής μηχανικής. Υπάρχουν διάφορα επίπεδα σύζευξης του ρευστοδυναμικού με το δομικό κομμάτι ενός αεροελαστικού επιλύτη (βλ. Σχήμα 2.16), που μπορεί να είναι οι πλήρεις 3D εξισώσεις και για τα δύο κομμάτια, απλοποιημένα μοντέλα για κάποιο κομμάτι ή ακόμα και αναλυτικές σχέσεις. Μεταξύ των δύο κομματιών υπάρχει μια «διεπαφή» (interface) για την ανταλλαγή των πληροφοριών μεταξύ τους.



Σχήμα 2.16: Οι διάφοροι πιθανοί συνδυασμοί δομικών και ρευστοδυναμικών επιλυτών που χρησιμοποιούνται σε αεροελαστικούς κώδικες (Guruswamy, 2001).

Όσον αφορά τον τρόπο σύζευξης του αεροδυναμικού και του δομικού τμήματος, υπάρχουν τρεις βασικές μεθοδολογίες στη βιβλιογραφία (όπως Guruswamy, 2001 κ.α.). Η μέθοδος της πλήρους σύζευξης (fully coupled approach) συνδυάζει τις εξισώσεις της ρευστομηχανικής μαζί με τις εξισώσεις της δομικής μηχανικής σε ένα ενιαίο σύνολο εξισώσεων οι οποίες επιλύονται και ολοκληρώνονται ταυτόχρονα στον χρόνο με χρήση κοινού πλέγματος. Η μέθοδος της στενής σύζευξης (closely coupled approach) επιτρέπει τη χρήση διαφορετικών επιλυτών για το ρευστοδυναμικό και το δομικό πρόβλημα αλλά παράλληλα διατηρεί τους δύο επιλύτες συζευγμένους μέσω μιας διεπιφάνειας στην οποία ανταλλάσσονται πληροφορίες μεταξύ των δύο επιλυτών. Τέλος, στην προσέγγιση της χαλαρής σύζευξης (loosely coupled approach) χρησιμοποιούνται δύο τελείως ανεξάρτητοι επιλύτες οι οποίοι έχουν μόνο εξωτερική επικοινωνία και σημαντικό ρόλο έχει η διεπιφάνεια μέσω της οποίας γίνεται η σύζευξη. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η τελευταία προσέγγιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για προβλήματα βελτιστοποίησης κατασκευών και, συγκεκριμένα, βελτιστοποίησης με χρήση του μοντέλου πεπερασμένου στοιχείου δοκού. Τα αποτελέσματα (που προέκυψαν με χρήση κώδικα που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας σε γλώσσα FORTRAN 77) θα σχολιαστούν και θα συγκριθούν με αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου και θα χρησιμοποιηθούν για να διευκολύνουν την ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για το πλήρως συζευγμένο αεροελαστικό πρόβλημα που θα μελετηθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

3.1 Εισαγωγή

3.1.1 Μέθοδοι βελτιστοποίησης

Από την πλευρά των μεθόδων (και όχι των προβλημάτων) βελτιστοποίησης, βασική είναι η διάκριση σε αιτιοκρατικές και στοχαστικές μεθόδους. Μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει. Χαρακτηριστικό των στοχαστικών μεθόδων είναι ότι χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Πολλές σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν συγχρόνως στοιχεία και από τις δύο κατηγορίες μεθόδων (Γιαννάκογλου,2006).

Γενικά, το να δημιουργηθεί μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης απαιτεί συνήθως μεγαλύτερο χρόνο επένδυσης από την πλευρά του μηχανικού-προγραμματιστή, είναι δυσκολότερα επεκτάσιμη σε άλλα παρεμφερή προβλήματα, συγκλίνει γενικά γρήγορα στη βέλτιστη λύση, με τον κίνδυνο όμως η λύση αυτή να είναι τοπικό και όχι το καθολικό βέλτιστο ανάλογα με το σημείο εκκίνησης (Γιαννάκογλου,2006). Από την άλλη πλευρά, οι στοχαστικοί αλγόριθμοι είναι περισσότερο γενικοί διότι προσαρμόζονται εύκολα για να λυθεί ένα διαφορετικό πρόβλημα και είναι, συνήθως, περισσότερο αργοί από τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, με κέρδος όμως το να μπορούν να εντοπίσουν το καθολικό ακρότατο ανεξάρτητα από τη λύση ή τις λύσεις με τις οποίες αρχικοποιούνται. Επιπλέον, βασική απαίτηση για τη δημιουργία ενός κώδικα αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης είναι η πρόσβαση στον κώδικα του λογισμικού αξιολόγησης ενώ, αντίθετα, οι στοχαστικές μέθοδοι απαιτούν απλά την επικοινωνία με το λογισμικό αξιολόγησης υπό τη μορφή “black-box” (δηλαδή απλά εισάγονται δεδομένα σε αυτό και λαμβάνονται αποτελέσματα).

3.1.2 Μέθοδοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης

Μια από τις βασικότερες μεθόδους αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης είναι η μέθοδος της απότομης καθόδου (steepest descent method). Στη μέθοδο της απότομης καθόδου, η

ανανέωση της τιμής του διανύσματος των μεταβλητών κατάστασης \vec{b} γίνεται επιλέγοντας ως κατεύθυνση ανίχνευσης \vec{p}^n το αντίθετο του τοπικού διανύσματος κλίσης της συνάρτησης $F(\vec{b}^n)$. Αφού η κλίση της $F(\vec{b})$, δηλαδή το διάνυσμα $\nabla F(\vec{b})$, δείχνει σε κάθε σημείο την κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής της τιμής της $F(\vec{b})$ (η κατεύθυνση $-\nabla F(\vec{b}^n)$ είναι ορθογώνια στις iso-F γραμμές που διέρχονται από το σημείο \vec{b}^n), η επιλογή του διανύσματος:

$$\vec{p}^n = -\nabla F(\vec{b}^n) \quad (3.1)$$

ως κατεύθυνσης ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης είναι προφανής (Γιαννάκογλου, 2006).

Χαρακτηριστικό της μεθόδου της απότομης καθόδου είναι ότι απαιτεί σε κάθε νέα θέση τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου και πλεονέκτημά της είναι ότι δεν απαιτεί πληροφορία για το εσσιανό μητρώο (μητρώο των δεύτερων παραγώγων). Η απόδοσή της εξαρτάται από την αρχική λύση, το η και προφανώς τη συνάρτηση-στόχο. Η μέθοδος της απότομης καθόδου θεωρείται καλή για απλά προβλήματα, όμως για πολύπλοκα προβλήματα (π.χ. αυτά τα οποία συναντώνται στην αεροδυναμική) απαιτούνται μέθοδοι που συγκλίνουν με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Σε μη-γραμμικά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι που υπολογίζουν ή προσεγγίζουν το εσσιανό μητρώο όπως η μέθοδος Newton ή μέθοδοι quasi-Newton κτλ.

Ο **υπολογισμός των παραγώγων** (παράγωγοι ευαισθησίας) που απαιτεί μια μέθοδος αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης όπως η μέθοδος της απότομης καθόδου μπορεί να γίνει με (Γιαννάκογλου, 2006): πεπερασμένες διαφορές (FD), ευθεία διαφόριση (DD), αλγοριθμική ή αυτόματη διαφόριση (AD με δύο υποκατηγορίες, την ευθεία και την ανάστροφη διαφόριση), θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων και συζυγείς μεθόδους (διακριτή και συνεχή συζυγής μέθοδος). Στη συνέχεια (υποενότητα 3.1.3), θα γίνει αναφορά στη συνεχή συζυγή μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Οι πεπερασμένες διαφορές έχουν κόστος $2N$ EPS (κόστος εκτέλεσης του πρωτεύοντος κώδικα) για τον υπολογισμό N παραγώγων (κόστος ανάλογο του N) και εμφανίζουν μεγάλη ευαισθησία στις τιμές της παραμέτρου ϵ που χρησιμοποιείται. Παρ' ότι το κόστος της μεθόδου αυτής είναι απαγορευτικό για πραγματικές εφαρμογές των μηχανικών, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό παραγώγων «αναφοράς» ώστε να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα θα ληφθούν από κάποια άλλη μέθοδο υπολογισμού παραγώγων. Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης έχει και αυτή κόστος ανάλογο του N και απαιτεί περισσότερες αλλαγές στον κώδικα αξιολόγησης για να γίνουν οι υπολογισμοί.

Μια περίπτωση που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών, η οποία χρησιμοποιώντας τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων αντιμετωπίζει τη συνάρτηση στόχο ως μιγαδική συνάρτηση και απαιτεί μόνο μια κλήση της συνάρτησης-στόχου ανά μερική παράγωγο. Επιπλέον, οι υπολογισμοί δεν έχουν ευαισθησία στις τιμές της παραμέτρου ϵ . Όμως, απαιτείται μεγάλη προσοχή στην υλοποίηση του κώδικα υπολογισμού των παραγώγων και το κόστος είναι και πάλι ανάλογο του N ενώ απαιτείται διπλάσια μνήμη για την αποθήκευση μεταβλητών λόγω του ότι είναι μιγαδικές.

Η μέθοδος της αυτόματης ή αλγοριθμικής διαφόρισης απαιτεί πρόσβαση στον κώδικα αξιολόγησης σε πηγαία μορφή (τα περισσότερα λογισμικά που υπάρχουν σήμερα μπορούν να χειριστούν κώδικα σε FORTRAN 77 ή 90/95, C και C++) και έχει την δυνατότητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας να υπολογίσει τις απαιτούμενες παραγώγους ευαισθησίας και να παραδώσει μάλιστα τον πηγαίο κώδικα «εμπλουτισμένο» με την έκφραση αυτών των παραγώγων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ η ευθεία αυτόματη διαφόριση είναι αντίστοιχη της μεθόδου της ευθείας διαφόρισης και έχει σημαντικό κόστος, η μέθοδος της ανάστροφης διαφόρισης θεωρείται αντίστοιχη (και ανταγωνιστική) των συζυγών μεθόδων.

3.1.3 Η συνεχής συζυγής μέθοδος

Σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιηθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μέθοδο της απότομης καθόδου ή σε κάποια άλλη μέθοδο αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης που απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου (gradient-based methods).

Σε αντίθεση με τη διακριτή συζυγή μέθοδο, στη συνεχή συζυγή μέθοδο πρώτα γίνεται η διαμόρφωση του συζυγούς προβλήματος βελτιστοποίησης και, στη συνέχεια, ακολουθεί η διακριτοποίηση και η αριθμητική επίλυση του συζυγούς προβλήματος.

Η συνεχής συζυγής μέθοδος βασίζεται (όπως και η διακριτή συζυγής μέθοδος) στην επαυξημένη συνάρτηση-στόχο F_{AUG} . Η διαφορά όμως είναι ότι η F_{AUG} συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης-στόχου (για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ολοκληρωματική ποσότητα όπως ο συντελεστής άνωσης) και από το ολοκλήρωμα σε όλο το χωρίο των εξισώσεων κατάστασης (π.χ. εξισώσεις Navier-Stokes) πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών Ψ . Με το ίδιο σκεπτικό που ακολουθήθηκε και στη διακριτή μέθοδο (δηλαδή να καταστεί η μεταβολή της συνάρτησης-στόχου ανεξάρτητη κάθε μεταβολής μεγεθών της ροής) εντοπίζονται ποσότητες που πρέπει να μηδενισθούν και αυτό παράγει τις συζυγείς εξισώσεις (adjoint ή co-state equations ή F.A.E-field adjoint equations) και τις οριακές τους συνθήκες. Αυτά είναι όμως σε αναλυτική γραφή και απαιτούν διακριτοποίηση. Άρα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η διακριτοποίηση ακολουθεί την παραγωγή της συζυγούς εξίσωσης.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα βήματα που ακολουθούνται για την ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (η οποία θα εφαρμοστεί και θα αναπτυχθεί πλήρως σε επόμενη ενότητα σε πραγματικά προβλήματα δομικής και αεροελαστικής βελτιστοποίησης):

- Ορισμός της συνάρτησης-στόχου (συνήθως ποσότητα σε ολοκλήρωμα)
- Παραγωγή της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου (F_{AUG})
- Υπολογισμός της μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου (δF_{AUG})
- Συγκέντρωση όρων και εύρεση των οριακών συνθηκών και της συζυγούς εξίσωσης
- Επίλυση της συζυγούς εξίσωσης και υπολογισμός του πεδίου των συζυγών μεταβλητών Ψ
- Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας

Αξίζει να αναφερθούν ορισμένες περισσότερες λεπτομέρειες για τους όρους που περιλαμβάνονται στην μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου :

Όροι οι οποίοι σχετίζονται με την μεταβολή των μεταβλητών του πεδίου (δU) **στο εσωτερικό του πεδίου** δίνουν τη συζυγή εξίσωση, εκείνη δηλαδή που αν διατυπωθεί και ικανοποιηθεί, απαλείφει όλους τους όρους με δU . Ικανοποιώντας τη συζυγή εξίσωση, η μεταβολή της τιμής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου γίνεται ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής δU του πεδίου ροής.

Όροι οι οποίοι σχετίζονται με τη μεταβολή των μεταβλητών του πεδίου (δU) **στα όρια** δίνουν τις οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης. Με την επιβολή τους, η μεταβολή της τιμής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου γίνεται ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής στα όρια του πεδίου.

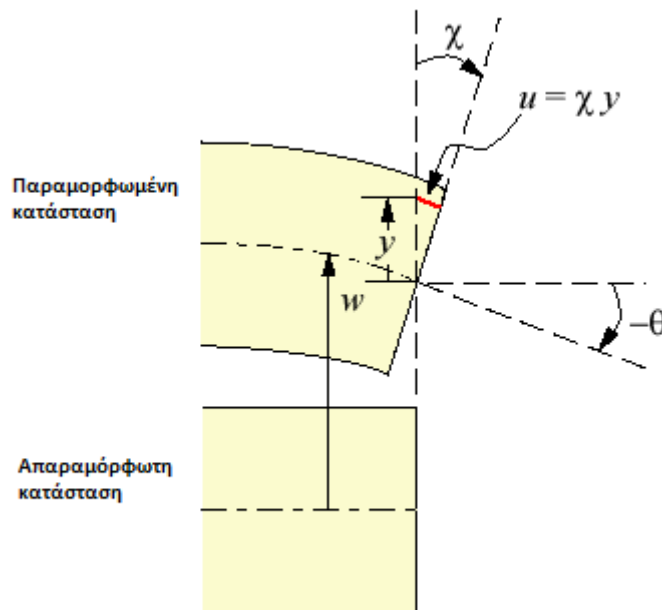
Οι όροι που απομένουν μετά την ικανοποίηση της συζυγούς εξίσωσης και των οριακών της συνθηκών είναι οι όροι των παραγώγων ευαισθησίας. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Αξίζει να επισημανθεί, ότι ανάμεσα στις πρώτες (παγκοσμίως) ερευνητικές ομάδες που ασχολήθηκαν με τη μελέτη της συζυγούς μεθόδου και την ανάπτυξη κωδίκων βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής και της συνεχούς συζυγής μεθόδου ήταν η ερευνητική ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης του Ε.Μ.Π (κυρίως σε θέματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης). Ενδεικτικές δημοσιεύσεις που καλύπτουν διάφορα θέματα σχετικά με τις συζυγή μέθοδο, είναι : (Papadimitriou and Giannakoglou, 2007), (Papadimitriou and Giannakoglou, 2007 (2)), (Zymaris, Papadimitriou and Giannakoglou, 2007), (Papadimitriou and Giannakoglou 2007 (3)), (Papadimitriou and Giannakoglou, 2008), (Papadimitriou and Giannakoglou 2008 (2)).

3.2 Η εξίσωση κατάστασης του δομικού προβλήματος

Στην υποενότητα αυτή θα γίνει η αναλυτική επίλυση της εξίσωσης κατάστασης που διέπει το πρόβλημα δομικής ανάλυσης που θα εξεταστεί προκειμένου να διευκολυνθούν οι πράξεις που θα ακολουθήσουν (στη συνεχή συζυγή μέθοδο απαιτείται η διαχείριση της αναλυτικής μορφής των εξισώσεων κατάστασης, δηλαδή, στη συγκεκριμένη περίπτωση, πριν εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση).

Για τη δοκό, θεωρείται ότι η απόσταση που μετακινείται το ουδέτερο επίπεδο είναι μικρή σε σχέση με την απαραμόρφωτη κατάσταση. Κατά την κάμψη προκαλείται επίσης μια στροφή του ουδέτερου επιπέδου κατά θ και μια στροφή της διατομής κατά χ .



Σχήμα 3.1: Βασικά μεγέθη της κινηματικής της παραμορφώσιμης δοκού.

Με u συμβολίζεται η μετατόπιση κατά x (βλ. Σχήμα 3.1) .

$$\text{Η σχέση παραμόρφωσης-μετατόπισης γράφεται } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2)$$

Με χρήση των υποθέσεων Kirchhoff (τα κάθετα διανύσματα στο ουδέτερο επίπεδο παραμένουν κάθετα και μετά την παραμόρφωση) : $u(x,y) = \chi(x) \cdot y$ (3.3)

$$\text{Άρα } \varepsilon = \frac{\partial(\chi(x)y)}{\partial x} = \frac{\partial\chi(x)}{\partial x} y \quad (3.4)$$

όπου $\chi(x)$ η περιστροφή της διατομής όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

$$\text{Ισχύει ο καταστατικός νόμος για τα ισότροπα ελαστικά υλικά: } \sigma(x,y) = E\varepsilon(x,y). \quad (3.5)$$

Επίσης η διατμητική δύναμη και η καμπτική ροπή ορίζονται ως εξής:

$$V = \iint \sigma(x,y) dydz \quad (3.6)$$

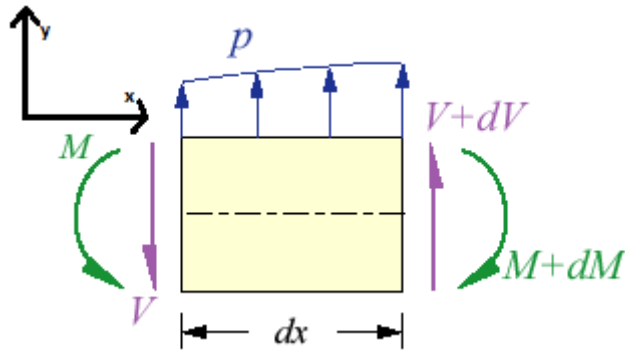
$$M = \iint y\sigma(x,y) dydz \quad (3.7)$$

Εφαρμόζοντας ισορροπία δυνάμεων & ροπών σε (στοιχειώδες) διαφορικό κομμάτι της δοκού (βλ. Σχήμα 3.2) προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -p \quad (3.8)$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V \quad (3.9)$$

όπου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2, p είναι γενικά μια κατανεμημένη φόρτιση στο στοιχειώδες κομμάτι της δοκού και V μια διατμητική δύναμη.



Σχήμα 3.2: Ισοροπία δυνάμεων και ροπών σε στοιχειώδες τμήμα της δοκού.

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\frac{d^2M}{dx^2} = -p$ και αντικαθιστώντας από τον ορισμό της ροπής έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (\iint y \sigma(x, y) dy dz) &= -p \quad (\sigma = E\varepsilon) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\iint y E \varepsilon dy dz \right) &= -p \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(E \iint y \varepsilon dy dz \right) &= -p \quad (\varepsilon = \frac{\partial \chi(x)}{\partial x} y) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(E \iint y \frac{\partial \chi(x)}{\partial x} y dy dz \right) &= -p \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(E \frac{d\chi(x)}{dx} \iint y^2 dy dz \right) &= -p \quad (\chi = \frac{dw}{dx}) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(E \frac{d^2w}{dx^2} \iint y^2 dy dz \right) &= -p \quad (I = \iint y^2 dy dz) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) &= -p \end{aligned} \quad (3.10)$$

Και έτσι προκύπτει η διαφορική εξίσωση 3.10 που πρέπει να επιλυθεί όσον αφορά το κομμάτι της δομικής ανάλυσης. Η εξίσωση αυτή στη Μηχανική επιλύεται είτε στη μορφή $EIw'' = M(x)$ (όπου $M(x)$ η συνάρτηση που δίνει την καμπτική ροπή και $w(x)$ η κατακόρυφη μετατόπιση) ή στη πιο γενική περίπτωση στη μορφή της σχέσης 3.10 η οποία μπορεί να γραφεί και στην μορφή:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = -p \quad (3.11)$$

η οποία είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση 4ης τάξης. Η σ.δ.ε αυτή θα επιλυθεί στη συνέχεια για τις περιπτώσεις της **συγκεντρωμένης φόρτισης** στο άκρο της δοκού (βλ. Σχήμα 3.3) και του **ομοιόμορφου καταναμημένου φορτίου** πάνω στη δοκό (βλ. Σχήμα 3.4).

1) Για $p=0$

Σε αυτήν την περίπτωση, δεν υπάρχει καταναμημένο φόρτιση στη δοκό αλλά υπάρχει μόνο μια σημειακή φόρτιση (σχέση 3.14γ) η οποία θεωρείται ως οριακή συνθήκη της ισχύουσας

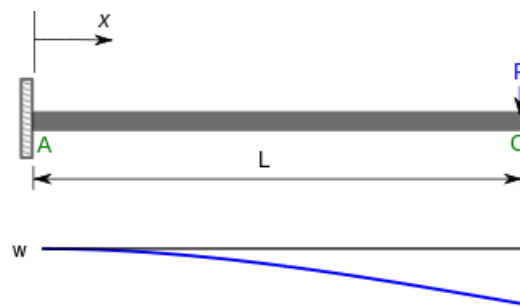
διαφορικής εξίσωσης (σχέση 3.12). Αυτή η περίπτωση προσομοιάζει τις περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης (όσον αφορά το πρωτεύον πρόβλημα) που θα μελετηθούν στο παρόν κεφάλαιο.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (3.12)$$

Οριακές συνθήκες: πάκτωση για $x=0$, συγκεντρωμένη δύναμη στο ελεύθερο άκρο (point force).

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \rightarrow EI \frac{d^3 w}{dx^3} = c_1 \rightarrow EI \frac{d^2 w}{dx^2} = c_1 x + c_2 \rightarrow EI \frac{dw}{dx} = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \rightarrow$$

$$EI w = \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \rightarrow w = \frac{1}{EI} \left(\frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right) \quad (3.13)$$



Σχήμα 3.3: Πακτωμένη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο στο ελεύθερο άκρο.

Οι οριακές συνθήκες που θα επιβληθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι συνθήκη πάκτωσης στο αριστερό άκρο και επιβολή σημειακής φόρτισης στο δεξιό άκρο. Δηλαδή, το αριστερό άκρο θα λάβει μηδενική μετατόπιση (συνθήκες 3.14α και 3.14β) και στο δεξιό άκρο η τρίτη παράγωγος της κατακόρυφης μετατόπισης (διατμητική δύναμη) θα είναι ίση με F ενώ η ροπή (δεύτερη παράγωγος) στο ίδιο σημείο θα είναι μηδενική. Σημειώνεται επίσης, ότι οι θετικές φορές στις δυνάμεις και τις μετατοπίσεις θεωρούνται αυτές που είναι στην κατεύθυνση των θετικών των αξόνων x και y .

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες λαμβάνεται:

$$w(0)=0 \rightarrow c_4 = 0 \quad (3.14\alpha)$$

$$w'(0)=0 \rightarrow c_3 = 0 \quad (3.14\beta)$$

$$w''(L)=0 \rightarrow c_1 L + c_2 = 0$$

$$w'''(L)=F \rightarrow c_1 = F \quad (3.14\gamma) \text{ Άρα } FL + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -FL \quad (3.14\delta)$$

και, τελικά, αντικαθιστώντας τα c_1 έως c_4 από τις σχέσεις 3.14α-3.14δ στη σχέση 3.13 λαμβάνεται η αναλυτική σχέση που δίνει το βέλος κάμψης σ' αυτήν την περίπτωση:

$$w = \frac{1}{EI} \left(\frac{F x^3}{6} - \frac{FL x^2}{2} \right) \quad (3.15)$$

Οπότε, το μέγιστο βέλος κάμψης εμφανίζεται στο ελεύθερο άκρο, για $x=L$ και ισούται με:

$$w_{\max} = -\frac{FL^3}{3EI} \quad (3.16)$$

2) Για $p = \text{σταθερό}$ (και διάφορο του 0)

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση στη δοκό (σχέση 3.17) και δεν υπάρχει καθόλου σημειακή φόρτιση. Αυτή η περίπτωση προσομοιάζει (όσον αφορά το δομικό μέρος) την περίπτωση που θα μελετηθεί στο κεφάλαιο 5.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p \quad (3.17)$$

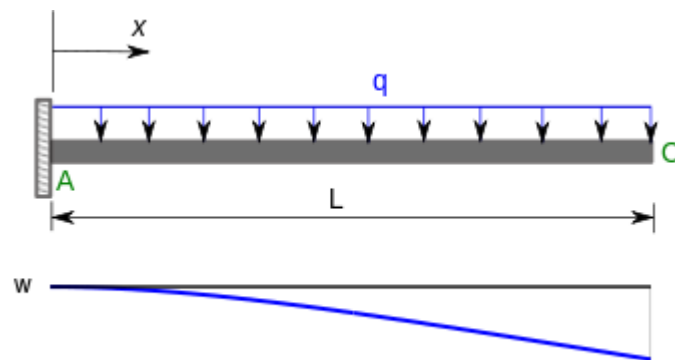
Οριακές συνθήκες: πάκτωση για $x=0$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p \rightarrow EI \frac{d^3 w}{dx^3} = px + c_1 \rightarrow EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + c_1 x + c_2 \rightarrow$$

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{px^3}{6} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \rightarrow$$

$$EI w = \frac{px^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \rightarrow$$

$$w = \frac{1}{EI} \left(\frac{px^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right) \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.4: Πακτωμένη δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος της.

Οι οριακές συνθήκες που θα επιβληθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι συνθήκη πάκτωσης στο αριστερό άκρο και μηδενική φόρτιση στο δεξιό άκρο. Δηλαδή, το αριστερό άκρο θα λάβει μηδενική μετατόπιση (συνθήκες 3.19α και 3.19β) και στο δεξιό άκρο η τρίτη παράγωγος της κατακόρυφης μετατόπισης (διατμητική δύναμη) όπως και η ροπή (δεύτερη παράγωγος) στο ίδιο σημείο θα είναι μηδενική.

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (πάκτωση στο αριστερό άκρο) λαμβάνεται:

$$w(0)=0 \rightarrow c_4 = 0 \quad (3.19\alpha)$$

$$w'(0)=0 \rightarrow c_3 = 0 \quad (3.19\beta)$$

$$w''(L)=0 \rightarrow \frac{pL^2}{2} + c_1L + c_2 = 0$$

$$w'''(L)=0 \rightarrow c_1 = -pL \text{ (3.19γ)} \text{ Άρα } \frac{pL^2}{2} + pL + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{pL^2}{2} \quad (3.19δ)$$

και, τελικά, αντικαθιστώντας τα c_1 έως c_4 από τις σχέσεις 3.20α-3.20δ στη σχέση 3.18 λαμβάνεται η αναλυτική σχέση που δίνει το βέλος κάμψης σ' αυτήν την περίπτωση:

$$w = \frac{px^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (3.21)$$

Οπότε, το μέγιστο βέλος κάμψης εμφανίζεται στο ελεύθερο άκρο, για $x=L$ και ισούται με:

$$w_{\max} = \frac{pL^4}{8EI} \quad (3.22)$$

Παρόμοια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για την εύρεση της αναλυτικής λύσης σε περιπτώσεις άλλων γνωστών κατανομών όπως η τριγωνική, η κατανομή με σχήμα τραapeζίου, παραβολική κατανομή κτλ.

3.3 Ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για το δομικό πρόβλημα

3.3.1 Ανάπτυξη των εξισώσεων της συνεχούς συζυγούς μεθόδου

Μετά την παρουσίαση και ανάλυση της εξίσωσης κατάστασης του προβλήματος δομικής βελτιστοποίησης θα αναπτυχθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος για των υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα δομικής βελτιστοποίησης στα οποία χρησιμοποιείται το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δοκού.

Στην ανάπτυξη των εξισώσεων της συνεχούς συζυγούς μεθόδου θα χρησιμοποιηθεί μια απλή συνάρτηση-στόχος που υποδηλώνει την επιθυμία επίτευξης μιας συγκεκριμένης τιμής βέλους κάμψης στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

Μεταβλητές σχεδιασμού b_i : E (μέτρο ελαστικότητας του Young), I (ροπή αδράνειας)

Εξισώσεις κατάστασης (state equations): $R=0 \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \hat{w}(x) = 0$ και αφού τα E, I είναι ανεξάρτητα του $x \rightarrow EI \frac{d^4w}{dx^4} + \hat{w}(x) = 0$ (όπου με $\hat{w}(x)$ εδώ συμβολίζεται το κατανεμημένο φορτίο).

Μεταβλητές κατάστασης (state variables): w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F = (w(L) - w_{tar})^2 \quad (3.23)$

Επαυξημένη συνάρτηση-στόχος: $F_{AUG} = F + \int_0^L \Psi R \, dx = (w(L) - w_{tar})^2 + \int_0^L \Psi \left[EI \frac{d^4w}{dx^4} + \hat{w}(x) \right] dx =$

$$= (w(L) - w_{tar})^2 + \int_0^L \Psi EI \frac{d^4w}{dx^4} \, dx + \int_0^L \Psi \hat{w}(x) \, dx$$

Μεταβολή της συνάρτησης-στόχου: $\delta F_{AUG} = 2(w(L) - w_{tar})\delta w + \int_0^l \Psi \delta(EI) \frac{d^4 w}{dx^4} dx + \int_0^l \Psi EI \delta \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) dx + \int_0^l \Psi \delta(\widehat{w}(x)) dx =$

$$= 2(w(L) - w_{tar})\delta w + \int_0^l \Psi \delta(EI) \frac{d^4 w}{dx^4} dx + \int_0^l \Psi EI \delta \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) dx \quad (3.24)$$

Ο όρος $\int_0^l \Psi EI \delta \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) dx$ ο οποίος περιλαμβάνει μεταβολή της μεταβλητής κατάστασης w πρέπει να απλοποιηθεί περαιτέρω κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα, εφόσον στο ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει όρος παραγώγου τέταρτης τάξης, πρέπει να εφαρμοστεί τέσσερις φορές η παραγοντική ολοκλήρωση σε αυτό τον όρο:

$$\begin{aligned} \int_0^l \Psi EI \delta \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) dx &= \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \right) dx - \int_0^l \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \frac{d(\Psi EI)}{dx} dx = \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \left[\frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} dx \right] \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \left[\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) dx - \int_0^l \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} dx \right] \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l - \left[\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \right) dx - \int_0^l \frac{d \delta w}{dx} \frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} dx \right] \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l + \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d \delta w}{dx} \frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} dx \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l + \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \Big|_0^l - \left[\int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} \delta w \right) dx - \int_0^l \delta w \frac{d^4(\Psi EI)}{dx^4} dx \right] \\ &= \Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l + \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \Big|_0^l - \frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} \delta w \Big|_0^l + \int_0^l \delta w \frac{d^4(\Psi EI)}{dx^4} dx \quad (3.25) \end{aligned}$$

Τελικά, από την απλοποίηση του όρου $\int_0^l \Psi EI \delta \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) dx$ προκύπτουν όροι που παράγουν τις συζυγείς οριακές συνθήκες.

Έτσι, προκύπτει η συζυγής εξίσωση κατάστασης (ή συζυγής πεδιακή εξίσωση), καθιστώντας την δF_{AUG} ανεξάρτητη από τη μεταβολή των μεταβλητών κατάστασης στο εσωτερικό του πεδίου:

$$\frac{d^4(\Psi EI)}{dx^4} = 0 \quad (3.26)$$

Έπειτα, από τους όρους που προαναφέρθηκαν στη σχέση 3.25 προκύπτουν οι οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης καθιστώντας την δF_{AUG} ανεξάρτητη της μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης και στα όρια του πεδίου:

- $\Psi EI \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0^l = \Psi EI \left(\frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_l - \frac{d^3 \delta w}{dx^3} \Big|_0 \right) \rightarrow \Psi|_0 = 0$
- $-\frac{d(\Psi EI)}{dx} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0^l = -\frac{d\Psi EI}{dx} \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_l - \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Big|_0 \right) \rightarrow \frac{d\Psi}{dx} \Big|_0 = 0$
- $\frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \frac{d\delta w}{dx} \Big|_0^l = \frac{d^2(\Psi EI)}{dx^2} \left(\frac{d\delta w}{dx} \Big|_l - \frac{d\delta w}{dx} \Big|_0 \right) \rightarrow \frac{d^2(\Psi)}{dx^2} \Big|_l = 0$
- $-\frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} \delta w \Big|_0^l + 2(w(L) - w_{tar})\delta w|_l =$
 $-\frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} (\delta w|_l - \delta w|_0) + 2(w(L) - w_{tar})\delta w|_l =$
 $-\frac{d^3(\Psi EI)}{dx^3} \delta w|_l + 2(w(L) - w_{tar})\delta w|_l$

Επομένως, για να καταστεί η δF_{AUG} ανεξάρτητη του δw στο όριο $x=l$ πρέπει να ισχύει:

$$\frac{d^3(\Psi)}{dx^3} \Big|_l = \frac{2(w(L) - w_{tar})}{EI}$$

Οι όροι που απομένουν στην μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου (η οποία τελικά ταυτίζεται με την μεταβολή της συνάρτησης-στόχου αφού το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει τις εξισώσεις κατάστασης είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν) θα παράξουν τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας:

$$\delta F_{AUG} = \delta F = \int_0^l \Psi \delta(EI) \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \int_0^l \Psi \delta E I \frac{d^4 w}{dx^4} dx + \int_0^l \Psi E \delta I \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta E} = \int_0^l \Psi I \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta I} = \int_0^l \Psi E \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

Επειδή στην περίπτωση της ορθογωνικής διατομής, η ροπή αδράνειας δίνεται από μια αναλυτική σχέση ($I = \frac{bh^3}{12}$) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μεταβλητές ως μεταβλητές σχεδιασμού όπως το πλάτος και το ύψος της δοκού. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι αντίστοιχοι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται ως εξής (θεωρώντας κάθε φορά μεταβλητές τα E, b ή E, h και τα άλλα μεγέθη σταθερά):

$$\delta F = \int_0^l \Psi \delta \left(E \frac{bh^3}{12} \right) \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \int_0^l \Psi E \delta b \frac{h^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} dx =$$

$$= \int_0^l \Psi E \delta b \frac{h^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta b} = \int_0^l \Psi E \frac{h^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

$$\delta F = \int_0^l \Psi \delta \left(E \frac{bh^3}{12} \right) \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \int_0^l \Psi E b 3h^2 \frac{\delta(h)}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} dx =$$

$$= \int_0^l \Psi E b h^2 \frac{\delta h}{4} \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta h} = \int_0^l \Psi E \frac{bh^2}{4} \frac{d^4 w}{dx^4} dx$$

3.4 Αποτελέσματα

3.4.1 Γενικά

Στη συνέχεια, θα παρατεθούν αποτελέσματα για πέντε απλές περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης που προέκυψαν από τον κώδικα που κάνει χρήση της συζυγούς συνεχούς μεθόδου για δομικά προβλήματα. Επίσης, θα γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα που λήφθηκαν με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για τις περιπτώσεις 1 έως 3 προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Επιλέχτηκε να μελετηθούν οι συγκεκριμένες περιπτώσεις προκειμένου να γίνει σύγκριση με αποτελέσματα που είχαν προκύψει στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας (Κάρκαλος, 2012) στην οποία είχαν επιλυθεί οι ίδιες περιπτώσεις με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου.

Τα χαρακτηριστικά των περιπτώσεων που θα παρουσιαστούν παρατίθενται στον Πίνακα 3.1:

A/A	Μεταβλητές σχεδιασμού	Συνάρτηση-στόχος
1	E	w_{\max}^2
2	E	$(w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$
3	b	$(w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$
4	b,h	$(w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$
5	b,h,E	$(w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικά των περιπτώσεων που μελετώνται στην υποενότητα 3.4

3.4.2 Αποτελέσματα περιπτώσεων που μελετήθηκαν

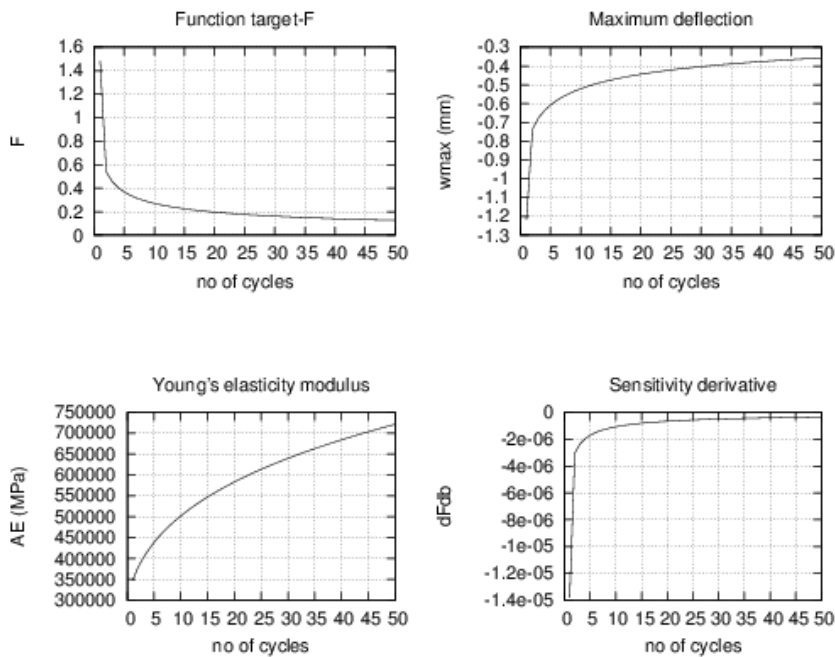
Περίπτωση 1

Η περίπτωση αυτή είναι ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) με μία μεταβλητή σχεδιασμού (το μέτρο ελαστικότητας της δοκού) και συνάρτηση-στόχο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου βέλους κάμψης μιας δοκού πακτωμένης στο ένα άκρο. Η μέθοδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται (όπως και στις άλλες 4 περιπτώσεις) είναι η μέθοδος της απότομης καθόδου. Σε όλες τις περιπτώσεις παρουσιάζονται αποτελέσματα για 50 κύκλους βελτιστοποίησης (optimization **cycles**).

Μεταβλητή κατάστασης: w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

Μεταβλητές σχεδιασμού: E (μέτρο ελαστικότητας του Young)

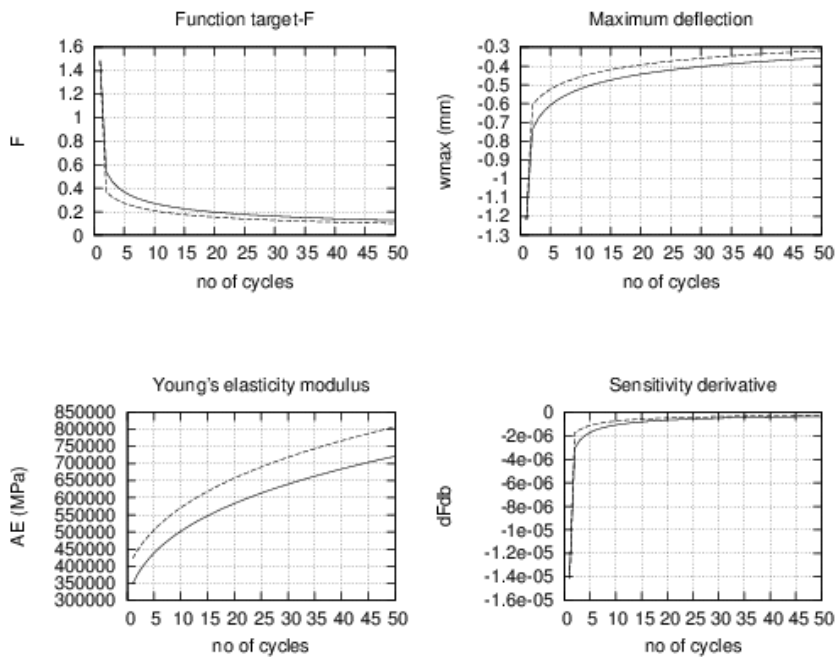
Συνάρτηση-στόχος: (min) $F = w_{\max}^2$



Σχήμα 3.5: Αποτελέσματα περίπτωσης 1-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{dB}$).

Από τα διαγράμματα του σχήματος 3.5 παρατηρείται αρχικά ότι τα αποτελέσματα είναι τα αναμενόμενα και υπάρχει σύγκλιση προς το στόχο που τέθηκε (ελαχιστοποίηση του βέλους κάμψης κατ' απόλυτη τιμή). Τόσο η παράγωγος ευαισθησίας (ως προς τη μοναδική μεταβλητή σχεδιασμού E) όσο και η μεταβλητή σχεδιασμού E λαμβάνουν αναμενόμενες τιμές: η παράγωγος ευαισθησίας έχει αρνητικό πρόσημο και τείνει στο μηδέν καθώς προσεγγίζεται ο στόχος ενώ το μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται, καθιστώντας τη δοκό πιο στιβαρή ώστε να δημιουργείται μικρότερο βέλος κάμψης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, λόγω της φυσικής σημασίας που έχει το πρόβλημα (δεν είναι δυνατή η ύπαρξη υλικού με άπειρο μέτρο ελαστικότητας ώστε το βέλος κάμψης να γίνει ακριβώς μηδέν), η συνάρτηση-στόχος δεν γίνεται μηδενική αλλά λαμβάνει πολύ μικρές τιμές.

Έπειτα, θα γίνει σύγκριση με αντίστοιχα αποτελέσματα από την ίδια περίπτωση βελτιστοποίησης με χρήση όμως της διακριτής συζυγούς μεθόδου (Σχήμα 3.6). Έχει χρησιμοποιηθεί το ίδιο η και ο ίδιος αριθμός επαναλήψεων και με τις δύο μεθόδους. Με διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου ενώ με συνεχή γραμμή τα αποτελέσματα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.



Σχήμα 3.6: Σύγκριση αποτελεσμάτων διακριτής/ συνεχούς μεθόδου-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{db}$).

Από το Σχήμα 3.6 φαίνεται ότι η συνάρτηση-στόχος λαμβάνει μικρότερες τιμές με τη χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου (διακεκομμένη γραμμή), ιδίως στους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης και ο στόχος επιτυγχάνεται σε λιγότερους κύκλους βελτιστοποίησης απ' ό,τι με την συνεχή συζυγή μέθοδο. Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται και από τα αποτελέσματα για το βέλος κάμψης και τη μεταβλητή σχεδιασμού, όπου η διαφορά των δύο μεθόδων είναι πιο εμφανής. Όσον αφορά τις παραγώγους ευαισθησίας, οι διαφορές είναι μικρότερες.

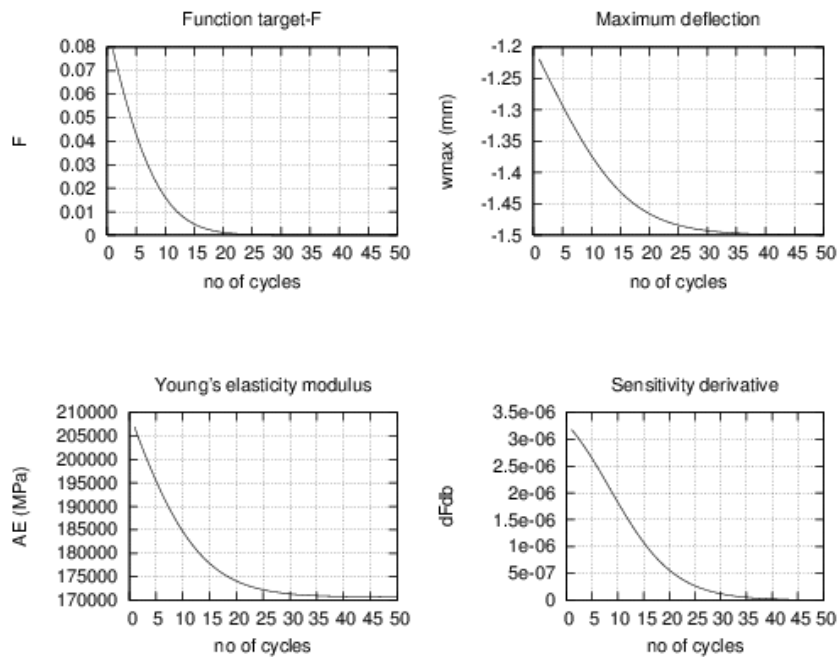
Περίπτωση 2

Στην περίπτωση 2 χρησιμοποιείται μια συνάρτηση-στόχος η οποία εκφράζει την επίτευξη μιας επιθυμητής τιμής του μέγιστου βέλους κάμψης στη δοκό.

Μεταβλητή κατάστασης: w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

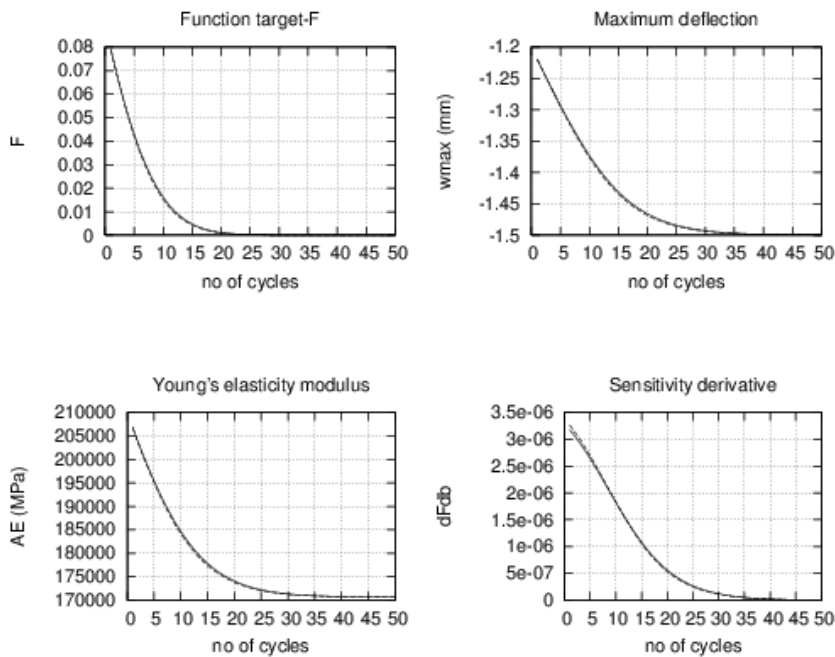
Μεταβλητή σχεδιασμού: E

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2, w_{\text{tar}} = 1.5\text{mm}$



Σχήμα 3.7: Αποτελέσματα περίπτωσης 2-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{db}$).

Από τα διαγράμματα του σχήματος 3.7 παρατηρείται γενικά ότι τα αποτελέσματα είναι τα επιθυμητά. Η συνάρτηση-στόχος συγκλίνει πρακτικά στο μηδέν σε περίπου 15 κύκλους βελτιστοποίησης και το βέλος κάμψης λαμβάνει την επιθυμητή τιμή. Η μεταβλητή σχεδιασμού μειώθηκε τόσο ώστε η δοκός να γίνει λιγότερο στιβαρή και να αποκτήσει μεγαλύτερο βέλος κάμψης και η παράγωγος ευαισθησίας έγινε πρακτικά μηδενική στους 20 κύκλους βελτιστοποίησης.



Σχήμα 3.8: Σύγκριση αποτελεσμάτων διακριτής/ συνεχούς μεθόδου-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{db}$).

Όσον αφορά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ της διακριτής (διακεκομμένη γραμμή) και της συζυγούς μεθόδου (συνεχής γραμμή) για την περίπτωση 2 φαίνεται ότι οι καμπύλες των αποτελεσμάτων με τη διακριτή συζυγή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο είναι πρακτικά ταυτόσημες (παρότι οι καμπύλες των αποτελεσμάτων με τη διακριτή συζυγή μέθοδο έχουν σε όλες τις περιπτώσεις λίγο μικρότερες τιμές).

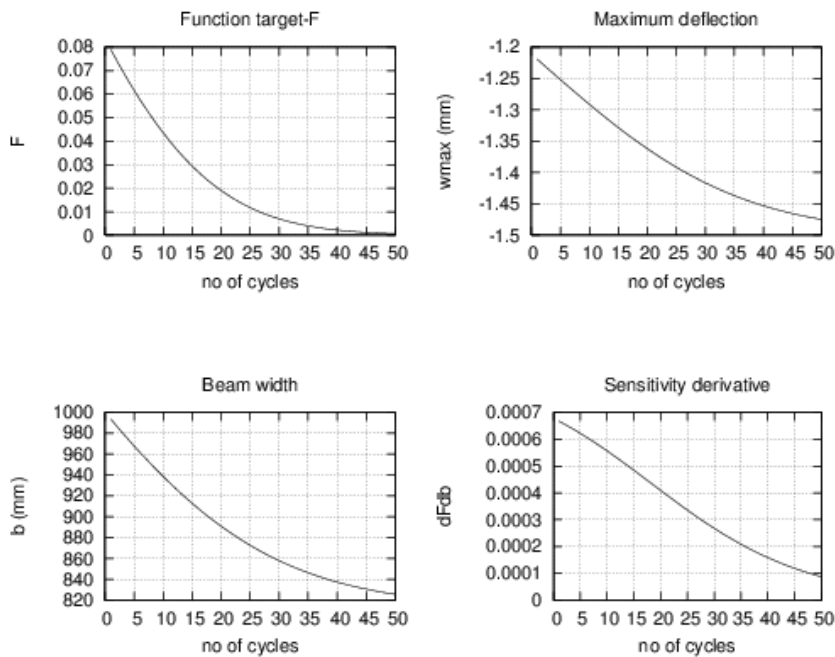
Περίπτωση 3

Στην περίπτωση 3 χρησιμοποιείται ως μεταβλητή σχεδιασμού το πλάτος της δοκού b το οποίο περιέχεται στην αναλυτική έκφραση της ροπής αδράνειας για δοκούς ορθογωνικής διατομής.

Μεταβλητή κατάστασης: w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

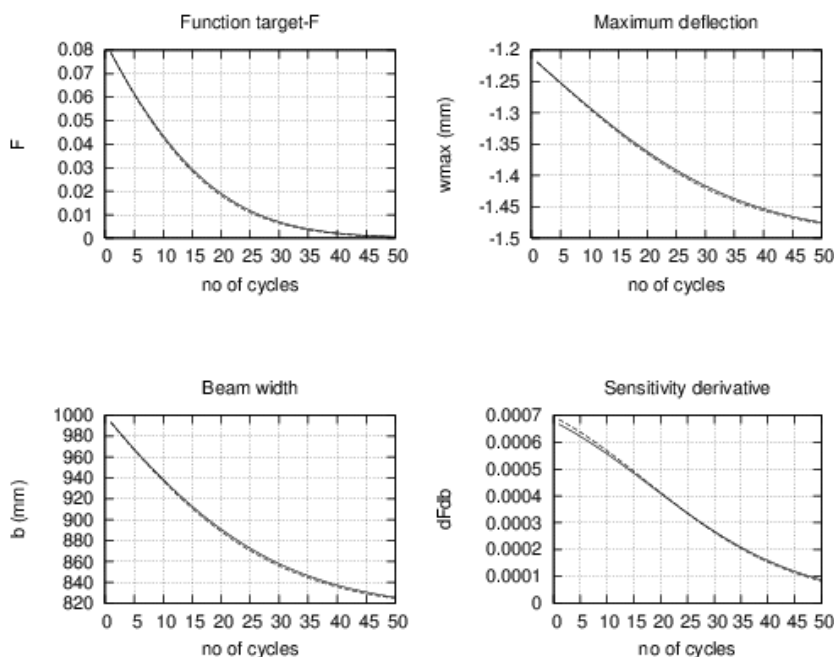
Μεταβλητές σχεδιασμού: b (πλάτος της δοκού)

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2, w_{\text{tar}} = 1.5\text{mm}$



Σχήμα 3.9: Αποτελέσματα περίπτωσης 3-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** πλάτος της δοκού, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{db}$).

Από το σχήμα 3.9 φαίνεται ότι σε περίπου 30-35 κύκλους βελτιστοποίησης έχει επιτευχθεί σύγκλιση της συνάρτησης στόχου και το βέλος κάμψης λαμβάνει την επιθυμητή τιμή. Η πορεία της μεταβλητής σχεδιασμού είναι η αναμενόμενη, γιατί καθώς μειώνεται το πλάτος της δοκού, μειώνεται η ροπή αδράνειάς της και δημιουργείται μεγαλύτερο βέλος κάμψης για την ίδια φόρτιση. Τέλος, η παράγωγος ευαισθησίας έχει το σωστό πρόσημο και συγκλίνει στο μηδέν όταν επιτυγχάνεται ο στόχος.



Σχήμα 3.10: Σύγκριση αποτελεσμάτων διακριτής/ συνεχούς μεθόδου-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** πλάτος της δοκού, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ($\frac{dF}{db}$).

Όπως και στην περίπτωση 2, τα αποτελέσματα που προέκυψαν με τη συνεχή και τη διακριτή συνεχή μέθοδο είναι παρόμοια τόσο όσον αφορά τη συνάρτηση-στόχο αλλά και όσον αφορά τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Επομένως, από τα συγκριτικά αποτελέσματα των περιπτώσεων 1 έως 3 εξάγεται το συμπέρασμα ότι ο κώδικας βελτιστοποίησης με υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με χρήση **συνεχούς συζυγούς** μεθόδου υπολογίζει σωστά τις παραγώγους ευαισθησίας (το πρόσημό τους και την τιμή τους) αλλά και ότι με τη διακριτή συζυγή μέθοδο επιτυγχάνεται η σύγκλιση λίγο ταχύτερα απ' ό τι με τη συνεχή συζυγή μέθοδο (χρειάζεται περίπου 1 έως 5 λιγότερους κύκλους βελτιστοποίησης).

Στη συνέχεια, ακολουθούν δύο επιπλέον περιπτώσεις βελτιστοποίησης στις οποίες χρησιμοποιούνται παραπάνω από μία μεταβλητές σχεδιασμού.

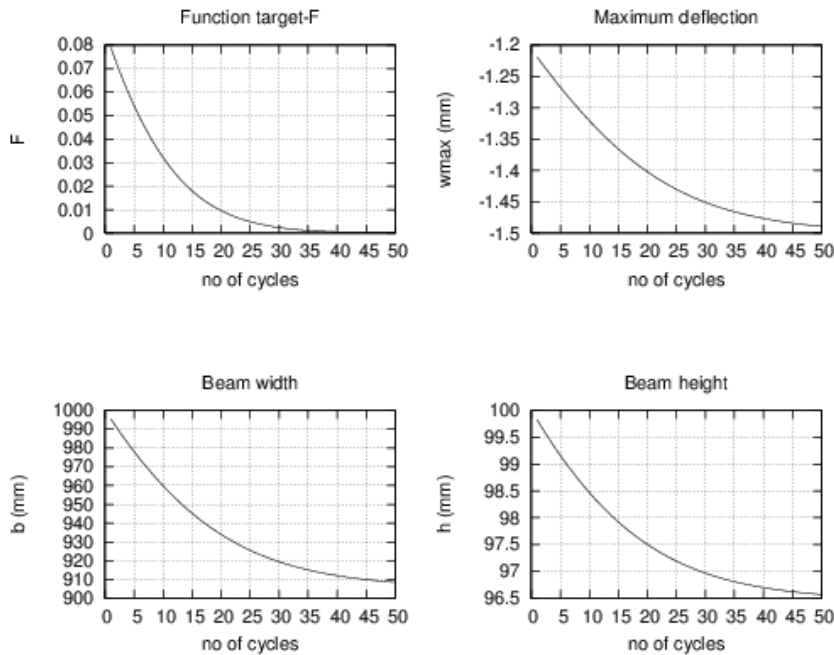
Περίπτωση 4

Στην περίπτωση 4 χρησιμοποιούνται δύο μεταβλητές σχεδιασμού: το πλάτος της δοκού b και το πάχος (ή ύψος) της δοκού (οι οποίες περιέχονται στην αναλυτική έκφραση της ροπής αδράνειας για δοκούς ορθογωνικής διατομής). Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικοί συντελεστές η (τροποποίηση της μεθόδου της απότομης καθόδου) επειδή οι παράγωγοι ευαισθησίας για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού μπορεί να διαφέρουν πάνω από μία τάξη μεγέθους και έτσι η χρήση κοινού συντελεστή η θα «ευνοεί» περισσότερο τη μία μεταβλητή από την άλλη.

Μεταβλητή κατάστασης: w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

Μεταβλητές σχεδιασμού: b (πλάτος της δοκού), h (πάχος της δοκού)

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F=(w_{\max}-w_{\text{tar}})^2, w_{\text{tar}}=1.5\text{mm}$



Σχήμα 3.11: Αποτελέσματα περίπτωσης 4-**πάνω αριστερά:** συνάρτηση-στόχος, **κάτω αριστερά:** πλάτος της δοκού, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** πάχος (ύψος) της δοκού.

Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν είναι τα επιθυμητά. Όπως αναμένεται, με μείωση του πλάτους και του πάχους της δοκού (ουσιαστικά, της διατομής της δοκού) μειώνεται η ροπή αδράνειας και έτσι αυξάνει το βέλος κάμψης της δοκού. Επειδή και οι δύο μεταβλητές σχεδιασμού παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά, δηλαδή καθώς αυξάνονται ή μειώνονται αντίστοιχα μειώνεται ή αυξάνεται το βέλος κάμψης είναι δυνατόν, με τη χρήση κατάλληλων συντελεστών η να επιτευχθεί σε λίγους μόνο κύκλους βελτιστοποίησης ο στόχος διότι η μεταβολή και των δύο μεταβλητών συμβάλλει με τον ίδιο τρόπο στην επίτευξη του στόχου. Για την επιλογή του κατάλληλου συντελεστή η για κάθε μεταβλητή πρέπει να προηγηθεί παραμετρική διερεύνηση προκειμένου να μην προκύψουν ανεπιθύμητα αποτελέσματα ή πολύ αργή σύγκλιση.

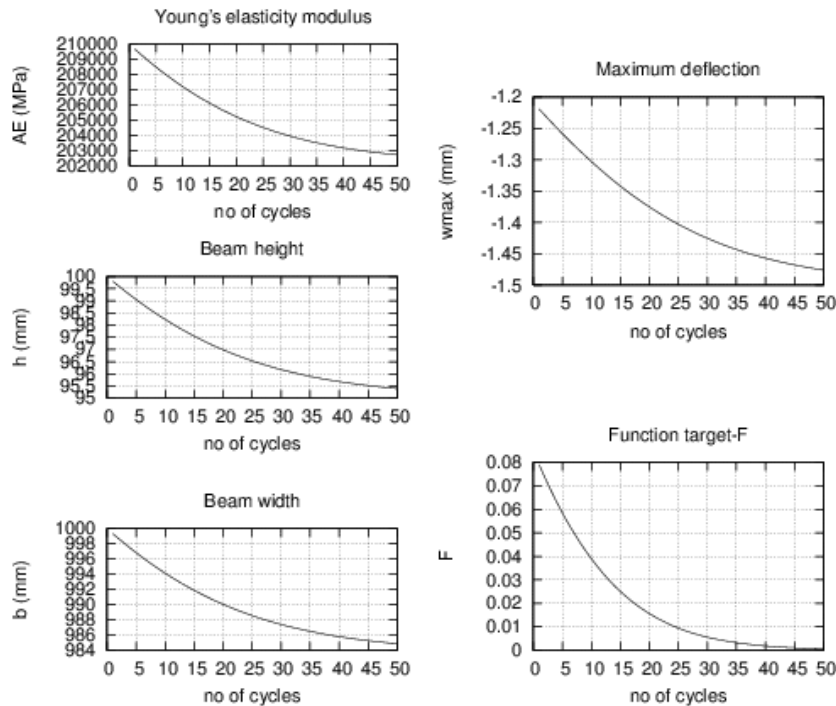
Περίπτωση 5

Στην περίπτωση 5 χρησιμοποιούνται τρεις μεταβλητές σχεδιασμού: το πλάτος της δοκού b , το πάχος της δοκού h και το μέτρο ελαστικότητας του Young E , δηλαδή ένας συνδυασμός όλων των μεταβλητών σχεδιασμού που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Μεταβλητή κατάστασης: w (βέλος κάμψης), $\beta = \frac{dw}{dx}$ (γωνία στροφής)

Μεταβλητές σχεδιασμού: b (πλάτος της δοκού), h (πάχος της δοκού), E (μέτρο ελαστικότητας του Young)

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F=(w_{\max}-w_{\text{tar}})^2, w_{\text{tar}}=1.5\text{mm}$



Σχήμα 3.12: Αποτελέσματα περίπτωσης 5-**πάνω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **αριστερά, στη μέση:** πάχος (ύψος) της δοκού, **κάτω αριστερά:** πλάτος της δοκού, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** συνάρτηση-στόχος.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, έτσι και σε αυτήν την περίπτωση, το αποτέλεσμα είναι το αναμενόμενο και οι μεταβλητές σχεδιασμού μεταβάλλονται με τον κατάλληλο τρόπο για να επιτευχθεί ο στόχος που τέθηκε. Όπως αναφέρθηκε και στην περίπτωση 4, εφόσον και οι τρεις μεταβλητές συμβάλλουν με τον ίδιο τρόπο στην επίτευξη του στόχου (δηλαδή είτε όλες αποκτούν μικρότερες τιμές για να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση-στόχος είτε όλες μεγαλύτερες τιμές), είναι δυνατόν με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών η να επιταχυνθεί αρκετά η σύγκλιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Ο αεροελαστικός επιλύτης

Η βασική περίπτωση βελτιστοποίησης η οποία θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία είναι η περίπτωση ροής γύρω από πτέρυγα η οποία παραμορφώνεται από αεροελαστικά φορτία. Για το λόγο αυτό, στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί ένας αεροελαστικός επιλύτης που δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας προκειμένου να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά του και να πιστοποιηθεί πριν χρησιμοποιηθεί ως λογισμικό αξιολόγησης κατά τη βελτιστοποίηση. Ο επιλύτης αυτός, στο ρευστοδυναμικό του τμήμα επιλύει τις **3D εξισώσεις Euler** και στο δομικό τμήμα χρησιμοποιεί το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων **δοκού**.

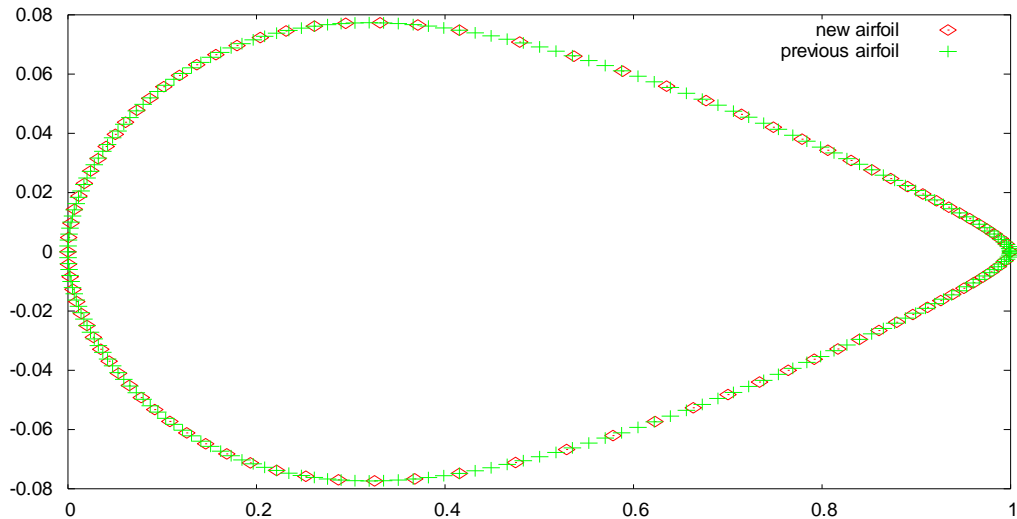
4.1 Δημιουργία του αεροελαστικού επιλύτη

4.1.1 Κατασκευή του πλέγματος της ρευστοδυναμικής ανάλυσης

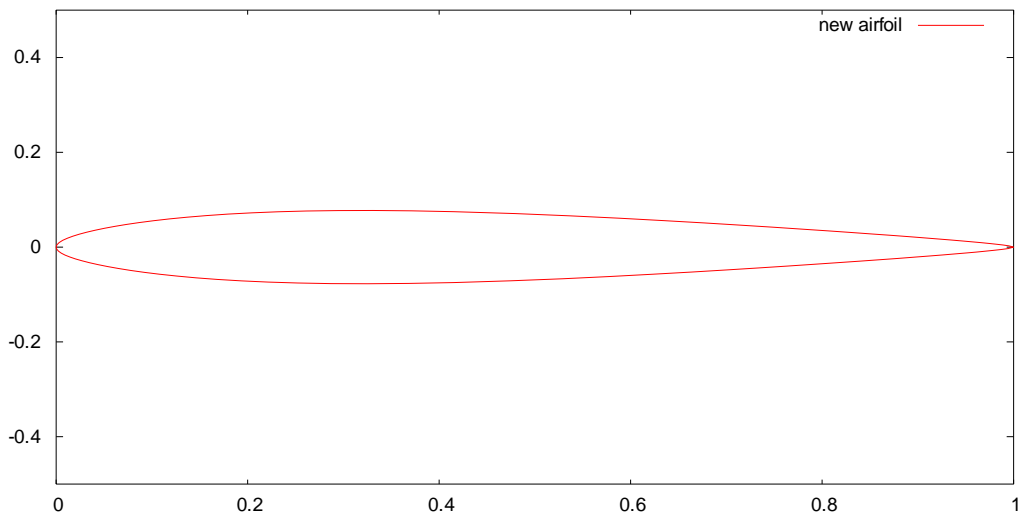
Το υπολογιστικό πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί για το ρευστοδυναμικό κομμάτι της επίλυσης θα προκύψει από την επέκταση, κατά την διάσταση του εκπετάσματος της πτέρυγας, ενός 2D μη-δομημένου πλέγματος που έχει κατασκευαστεί γύρω από την αεροτομή της πτέρυγας. Επειδή ο τελικός σκοπός είναι η χρήση αυτού του υπολογιστικού πλέγματος στο ολοκληρωμένο λογισμικό αεροελαστικής βελτιστοποίησης, θα διερευνηθούν διάφορα υπολογιστικά πλέγματα προκειμένου να χρησιμοποιηθεί τελικά ένα πλέγμα με την απαιτούμενη ποιότητα αλλά και με αριθμό κελιών κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο ώστε να μην υπάρχει ιδιαίτερα αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

Το περίγραμμα της αεροτομής της πτέρυγας είναι μια καμπύλη Bezier η οποία περιγράφεται με έναν αναγκαίο αριθμό σημείων (βλ. Σχ. 4.1, καμπύλη με ++). Με βάση αυτή την καμπύλη μπορεί να δημιουργηθεί ένα 2D μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή. Επειδή ο αριθμός των σημείων στο περίγραμμα της αεροτομής επηρεάζει τελικά και τον αριθμό των κόμβων του 2D πλέγματος που θα κατασκευαστεί γύρω από αυτή, θα γίνει μια διερεύνηση για να επιλεγεί ο κατάλληλος αριθμός σημείων για το περίγραμμα της αεροτομής.

Με χρήση οικείου λογισμικού κατασκευάστηκαν περιγράμματα της αεροτομής (βλ. Σχήμα 4.2 το τελικό περίγραμμα), που παρουσιάζουν τις απαραίτητες πυκνώσεις στην ακμή προσβολής και την ακμή εκφυγής ώστε στη συνέχεια το 2D μη-δομημένο πλέγμα να έχει αντίστοιχες πυκνώσεις σε αυτά τα σημεία (βλ. Σχήμα 4.1). Το τελικό περίγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1 με σημεία σχήματος ρόμβου σε σχέση με ένα περίγραμμα με περισσότερα σημεία το οποίο δεν θα χρησιμοποιηθεί για λόγους υπολογιστικού κόστους.

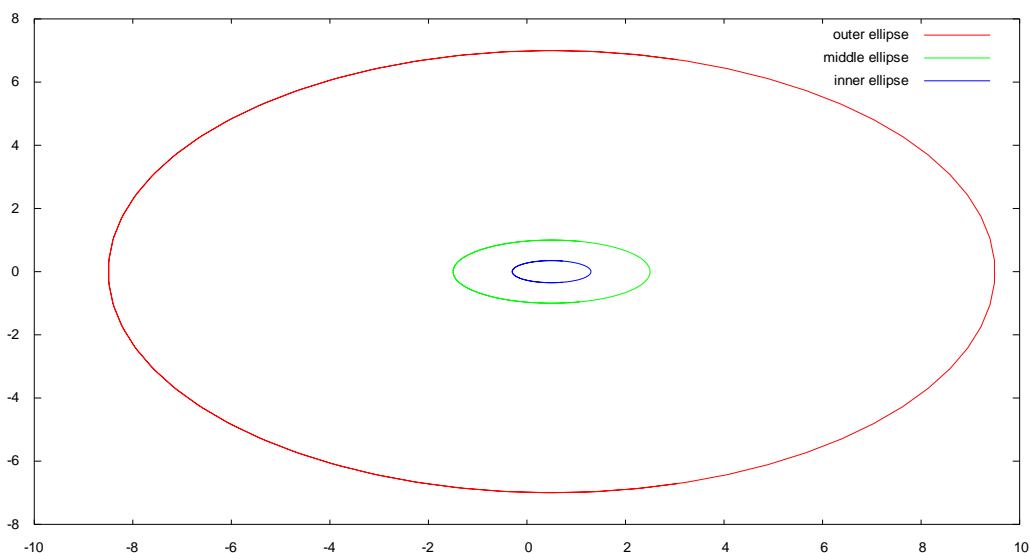


Σχήμα 4.1: Περιγράμματα της αεροτομής με διαφορετικό αριθμό σημείων(δεν χρησιμοποιείται η ίδια κλίμακα στις δύο διαστάσεις).



Σχήμα 4.2: Το τελικό περίγραμμα της αεροτομής.

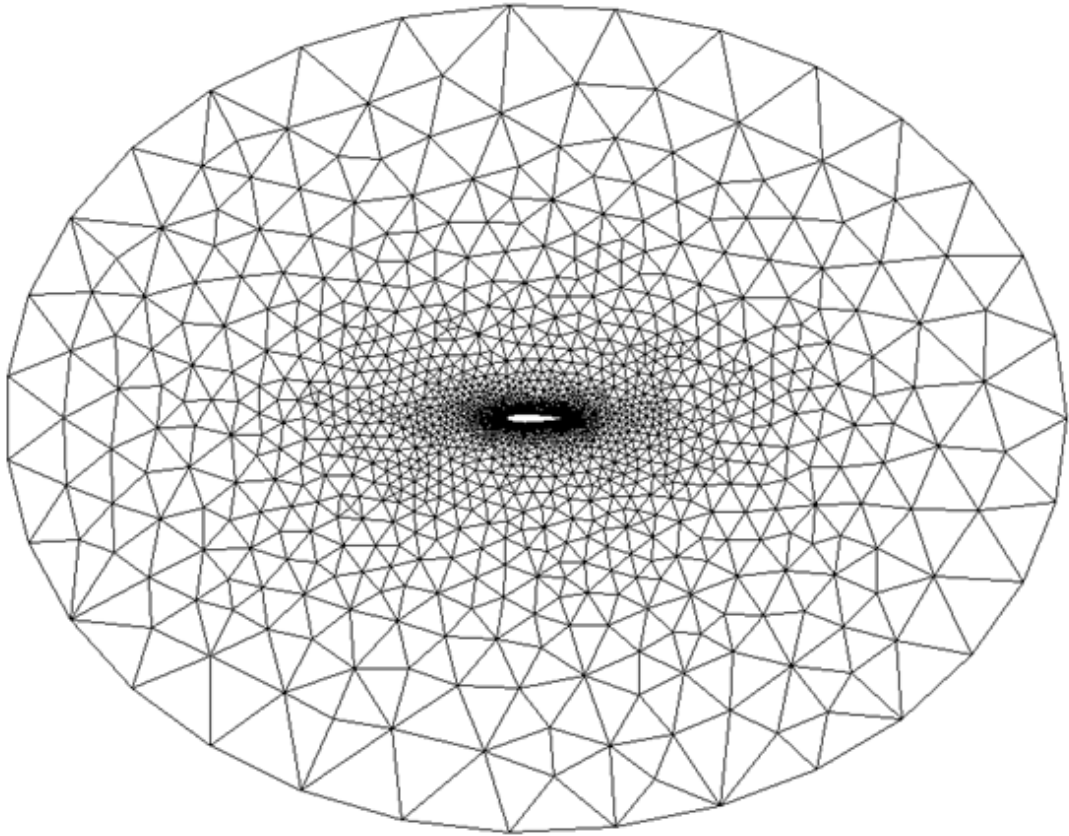
Στη συνέχεια με χρήση γενέτη 2D μη-δομημένου πλέγματος έγινε η κατασκευή του πλέγματος γύρω από την αεροτομή. Επειδή, όπως προαναφέρθηκε, επιθυμείται η κατασκευή ενός πλέγματος το οποίο θα έχει καλή ποιότητα (ώστε να παραχθούν αξιόπιστα αποτελέσματα κατά την επίλυση) αλλά θα έχει και μικρό υπολογιστικό κόστος, έγιναν διάφορες δοκιμές αλλάζοντας τις παραμέτρους του γενέτη πλέγματος προκειμένου να κατασκευαστεί ένα πλέγμα με την απαιτούμενη ποιότητα αλλά με όχι πολύ μεγάλο αριθμό κελιών (απαίτηση περίπου 3000 τριγωνικά στοιχεία).



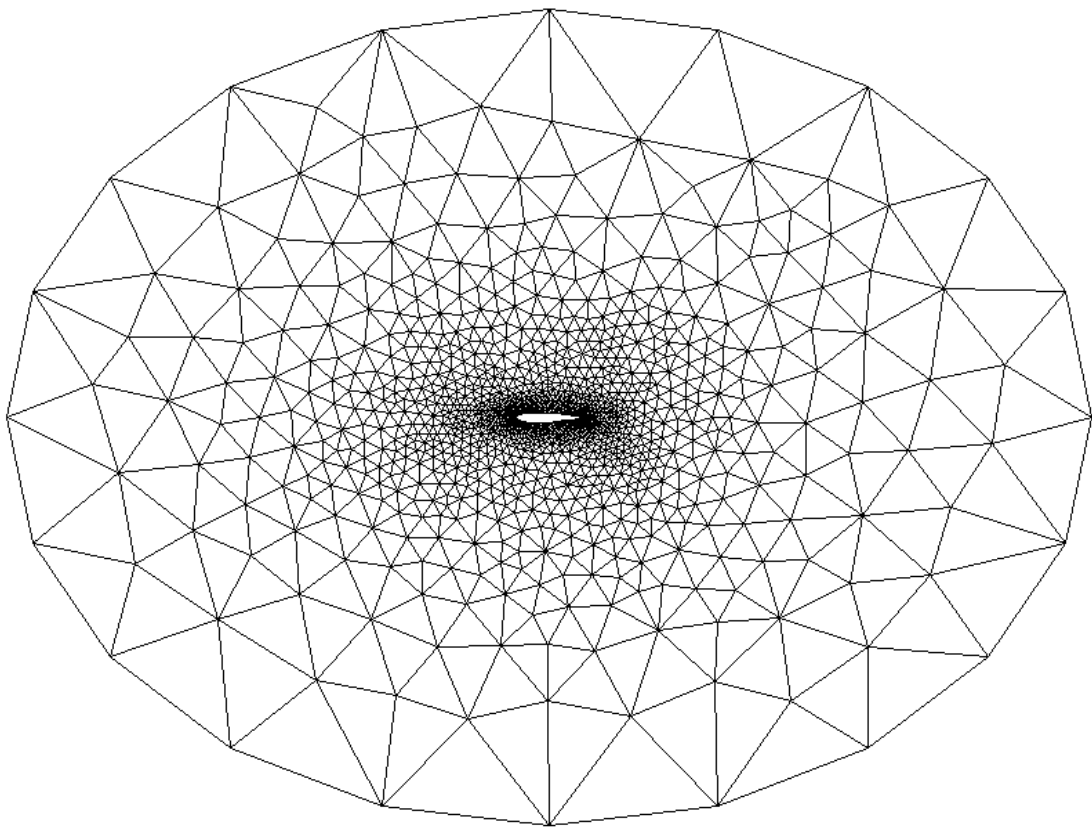
Σχήμα 4.3 : Ελλείψεις οι οποίες χρησιμοποιούνται στη γένεση μη-δομημένου πλέγματος με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου (η εξωτερική έλλειψη είναι ουσιαστικά το επ' άπειρον όριο).

Ο γενέτης πλέγματος έχει διάφορες επιλογές για τις μεθόδους γένεσης πλέγματος όπως: η μέθοδος Rizzi, η μέθοδος του προελαύνοντος μετώπου, συνδυασμός τους, κτλ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το 2D μη-δομημένο πλέγμα κατασκευάζεται με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου (Advancing Front Method, AFM) η οποία είναι μία από τις συνηθέστερες μεθόδους γένεσης μη-δομημένων πλεγμάτων. Η μέθοδος αυτή ξεκινά από το διακριτοποιημένο όριο ενός 2D ή 3D χωρίου και εφαρμόζει ευριστικές τεχνικές για να καθοριστεί το πού θα τοποθετηθούν στο επίπεδο ή στο χώρο κομβικά σημεία αλλά και για τον τρόπο που θα συνδεθούν ώστε να δώσουν ομαλά και κανονικά πλέγματα (Γιαννάκογλου, 1999). Το προελαύνον μέτωπο είναι μια αλληλουχία από πλεγματικές ακμές (γίνεται αναφορά εδώ σε 2D πλέγματα) οι οποίες δεν τέμνονται αλλά το κοινό σημείο μεταξύ δύο διαδοχικών από αυτές είναι η ενδιάμεση κορυφή τους. Οι ακμές αυτές περιβάλλουν το χωρίο (απλής ή πολλαπλής συνοχής) μέσα στο οποίο θα σχηματισθεί το μη-δομημένο πλέγμα. Έτσι κάθε φορά που ένα νέο τριγωνικό στοιχείο συμπληρώνεται στο χωρίο-πλέγμα, αυτό είναι πάντα σε επαφή με το μέτωπο και το τροποποιεί ώστε το μέτωπο να περιβάλλει το τμήμα του χωρίου όπου ακόμα δεν έχει δημιουργηθεί πλέγμα (Γιαννάκογλου, 1999).

Στο συγκεκριμένο πλέγμα που θα κατασκευαστεί, τα όρια από τα οποία ξεκινάει η γένεση του πλέγματος είναι ελλείψεις (βλ. Σχήμα 4.3). Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι το υπολογιστικό πλέγμα θα έχει την κατάλληλη μορφή και ποιότητα, τόσο μακριά όσο και κοντά στο στερεό όριο (αεροτομή). Στο σχήμα 4.4 εικονίζεται το αρχικό πλέγμα που παρήγαγε ο γενέτης πλέγματος και στο σχήμα 4.5 εικονίζεται το πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί (περιλαμβάνει περίπου το 1/3 των κόμβων του αρχικού).



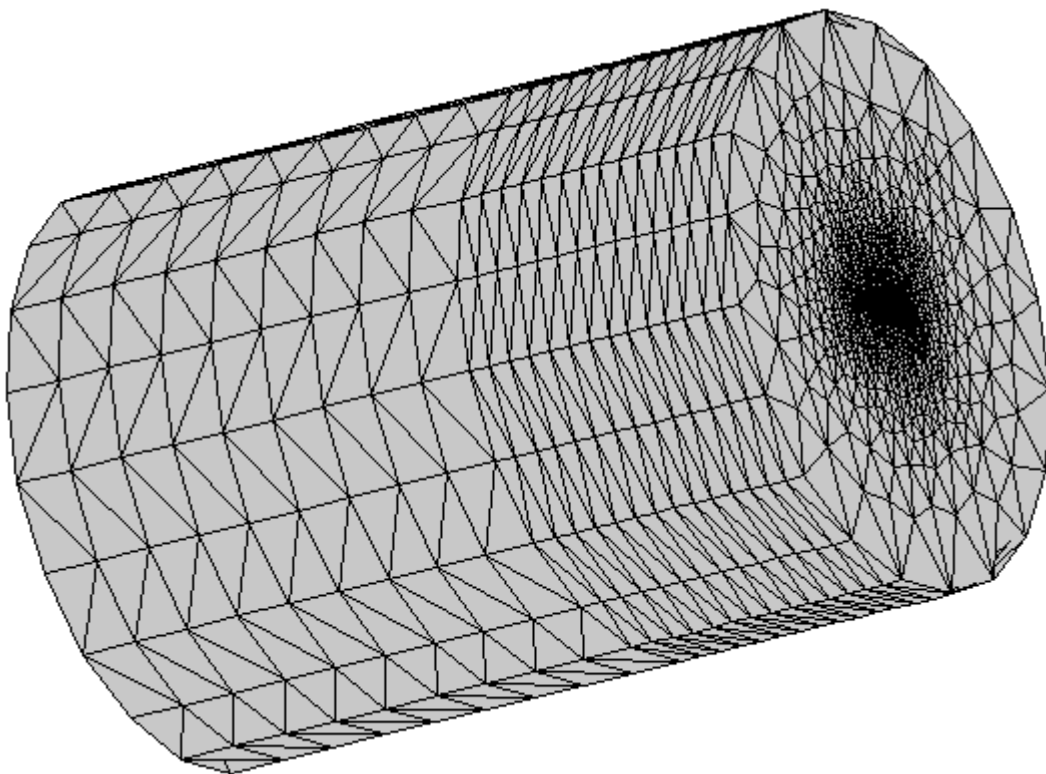
Σχήμα 4.4 : Το αρχικό 2Δ μη-δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή (4033 κόμβοι, 7835 τρίγωνα).



Σχήμα 4.5 : Το τελικό 2Δ μη-δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή(1525 κόμβοι, 2934 τρίγωνα).

Έπειτα, έγινε η κατασκευή του 3Δ πλέγματος με χρήση οικείου λογισμικού το οποίο επεκτείνει ένα 2Δ πλέγμα προς την κατεύθυνση του εκπετάσματος της πτέρυγας και δημιουργεί ένα 3Δ πλέγμα το οποίο ουσιαστικά αποτελείται από πολλές 2Δ τομές ίδιες με το αρχικό 2Δ πλέγμα. Ενώνοντας τους αντίστοιχους κόμβους μεταξύ των διαδοχικών τομών και χωρίζοντας τους όγκους που προκύπτουν σε κάποιον από τους γνωστούς τύπους κελιών προκύπτει το τελικό 3Δ πλέγμα. Στο συγκεκριμένο πλέγμα χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τετραεδρικά στοιχεία (Σχήμα 4.6). Προκειμένου να δημιουργηθεί ένα πλέγμα με όχι ιδιαίτερα μεγάλο αριθμό κελιών (ίσως κάτω από 300000 κελιά) επιλέχτηκε κατάλληλα ο αριθμός των **τομών** καθώς και η θέση τους, πυκνώνοντας κατάλληλα με γεωμετρική πρόοδο.

Μετά τη δημιουργία του πλέγματος γύρω από την πτέρυγα, το πλέγμα επεκτείνεται επιπλέον προς την κατεύθυνση του εκπετάσματος της πτέρυγας ώστε να μοντελοποιηθεί ο χώρος μέχρι εκεί που επικρατούν οι συνθήκες της επί άπειρον ροής (δεν διαταράσσεται το πεδίο ροής από το στερεό όριο).



Σχήμα 4.6 : Το 3Δ υπολογιστικό πλέγμα (38270 κόμβοι, 214002 τετράεδρα).

4.1.2 Ο επιλύτης του ρευστοδυναμικού τμήματος

Η επίλυση θα γίνει με χρήση ρευστοδυναμικού επιλύτη των 3Δ εξισώσεων Euler που δημιουργήθηκε στη ΜΠΥΡ&Β της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Ο επιλύτης είναι γενικής χρήσης αλλά στην παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιηθεί μόνο για την επίλυση της ροής γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους.

Αρχικά, σε ένα αρχείο δεδομένων ορίζονται βασικές παράμετροι της επίλυσης, όπως δεδομένα που σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες αλλά και αριθμητικές παράμετροι. Αριθμητικές παράμετροι που ορίζονται είναι για παράδειγμα, ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, ο αριθμός CFL, η επιθυμητή ακρίβεια για τη σύγκλιση. Τα δεδομένα που σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες είναι π.χ. ο αριθμός Mach της ροής, η γωνία της επ' άπειρον ροής κ.α.

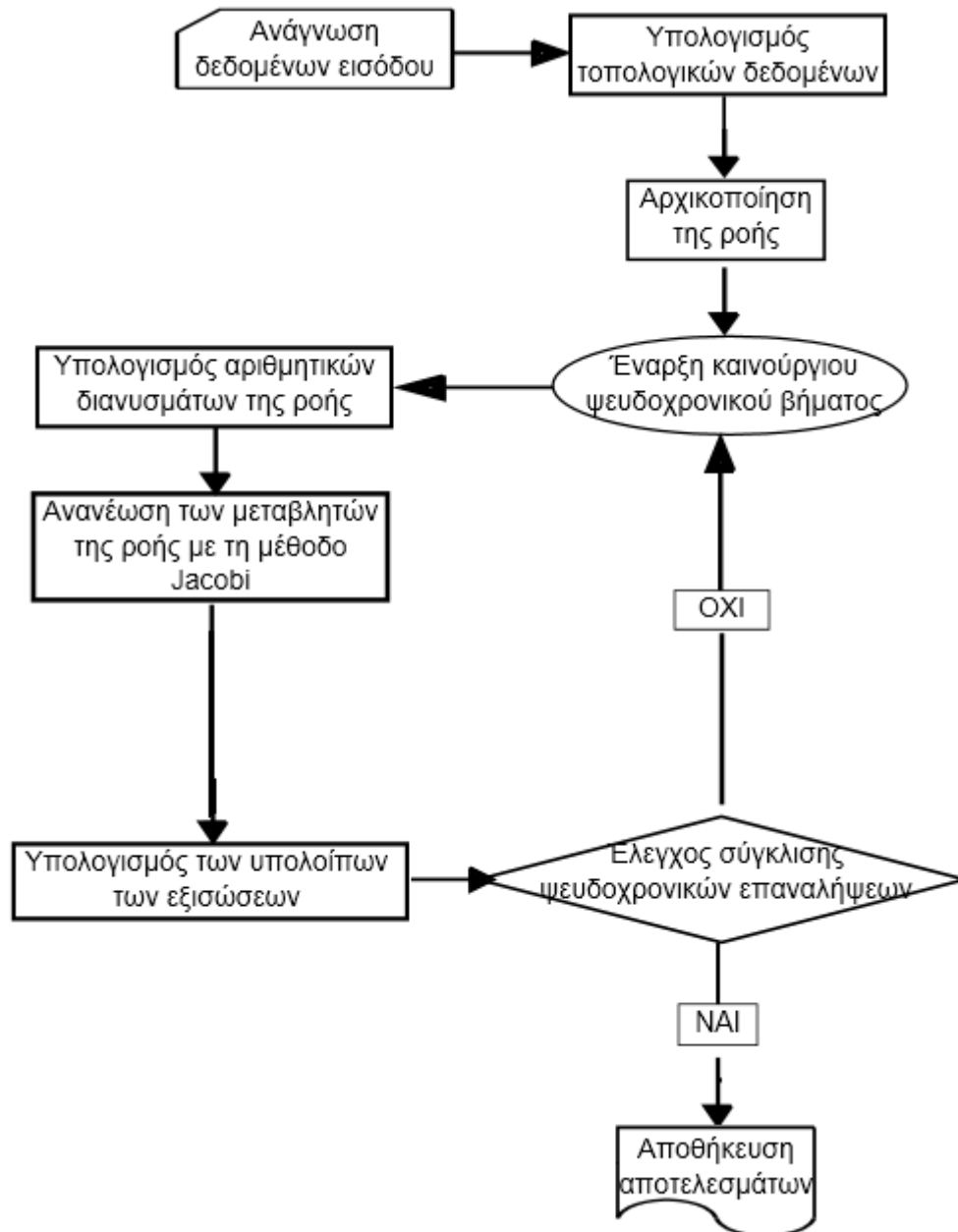
Ο ρευστοδυναμικός επιλύτης που εξετάζεται στην παρούσα υποενοότητα, επειδή θα χρησιμοποιηθεί για την αεροελαστική επίλυση, εκτός από το πλέγμα απαιτεί ως δεδομένο τη μετατόπιση των κόμβων του πλέγματος πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της πτέρυγας, η οποία προέκυψε υπό την επίδραση των αεροδυναμικών φορτίσεων. Στον πρώτο αεροελαστικό κύκλο, η μετατόπιση είναι μηδενική, αλλά στους επόμενους κύκλους όπου η πτέρυγα παραμορφώνεται πρέπει να ληφθεί κατάλληλα υπόψη αυτή η αλλαγή από τον ρευστοδυναμικό επιλύτη.

Γενικά, ένας τρόπος για να αντιμετωπιστεί κατάλληλα αυτή η ανάγκη είναι η επαναγένεση (remeshing) του υπολογιστικού πλέγματος σε κάθε αεροελαστικό κύκλο. Όμως, στην περίπτωση ενός 3D πλέγματος, που απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην ποιότητα του πλέγματος αλλά και απαιτείται αρκετός υπολογιστικός χρόνος για τη γένεση του πλέγματος, η λύση της επαναγένεσης πλέγματος είναι σε αρκετές περιπτώσεις ασύμφορη. Επομένως, προτιμώνται μέθοδοι που μετακινούν το υπάρχον υπολογιστικό πλέγμα αλλάζοντας κατάλληλα τη θέση των κόμβων του με βάση την παραμόρφωση του στερεού ορίου. Στην παρούσα εργασία, ο ρευστοδυναμικός επιλύτης χρησιμοποιεί την μέθοδο των ελατηρίων για την προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος. Συγκεκριμένα, με τη μέθοδο των ελατηρίων, σε κάθε ακμή του υπολογιστικού πλέγματος θεωρείται ότι τοποθετείται ένα ελατήριο και δημιουργείται μια «κατασκευή» από ελατήρια. Καθώς οι κόμβοι πάνω στο στερεό όριο μετακινούνται, επηρεάζεται κατάλληλα (επιμηκύνεται ή συμπιέζεται), μέσω ελαστικής παραμόρφωσης των ελατηρίων, η θέση όλων των κόμβων (κυρίως των γειτονικών) στο υπολογιστικό πλέγμα. Η μέθοδος αυτή βέβαια έχει περιορισμό ότι δεν μπορεί το πλέγμα να υποστεί μεγάλη παραμόρφωση, για τον ίδιο λόγο που δεν πρέπει να αναπτυχθούν τάσεις πέραν της ελαστικής περιοχής σε μια κατασκευή (για να μην αστοχήσει). Περισσότερες πληροφορίες για αυτές τις μεθόδους μπορούν να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία όπως: (Lynch & O'Neil, 1980), (Farhat, Degand, Koobus, & Lesoinne, 1998) κ.α.

Για την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων χρησιμοποιείται ένας επιλύτης που κάνει χρήση της επαναληπτικής **μεθόδου Jacobi** (όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2). Το σύστημα των πέντε εξισώσεων Euler της ροής (εξίσωση συνέχειας, ορμή κατά x,y,z και ενέργειας) γραμμένο σε καθένα από τους N κόμβους του πλέγματος συνιστά ένα γενικευμένο σύστημα εξισώσεων με N πεντάδες των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} δημιουργώντας ένα σύστημα της μορφής $Ax=B$. Λόγω του μεγάλου αριθμού των κόμβων, και επομένως του μεγάλου μεγέθους του μητρώου A ενδείκνυται η χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου όπως η μέθοδος Jacobi για την επίλυση κάθε ψευδοχρονικού βήματος. Συνήθως, γίνεται ένας μικρός αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου Jacobi για την ανανέωση των συντηρητικών μεταβλητών μέσα σε κάθε ψευδοχρονικό βήμα και τίθεται και

ένα κριτήριο σύγκλισης για την αποφυγή εκτέλεσης επαναλήψεων εάν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση.

Όταν ολοκληρωθεί η επίλυση και επιτευχθεί η σύγκλιση παράγονται διάφορα αρχεία αποτελεσμάτων τα οποία παρουσιάζουν τόσο τα διάφορα πεδία ρευστοδυναμικών μεταβλητών όσο και διάφορες πληροφορίες που χρησιμεύουν σε επόμενους υπολογισμούς (του γενικού αεροελαστικού επιλύτη).



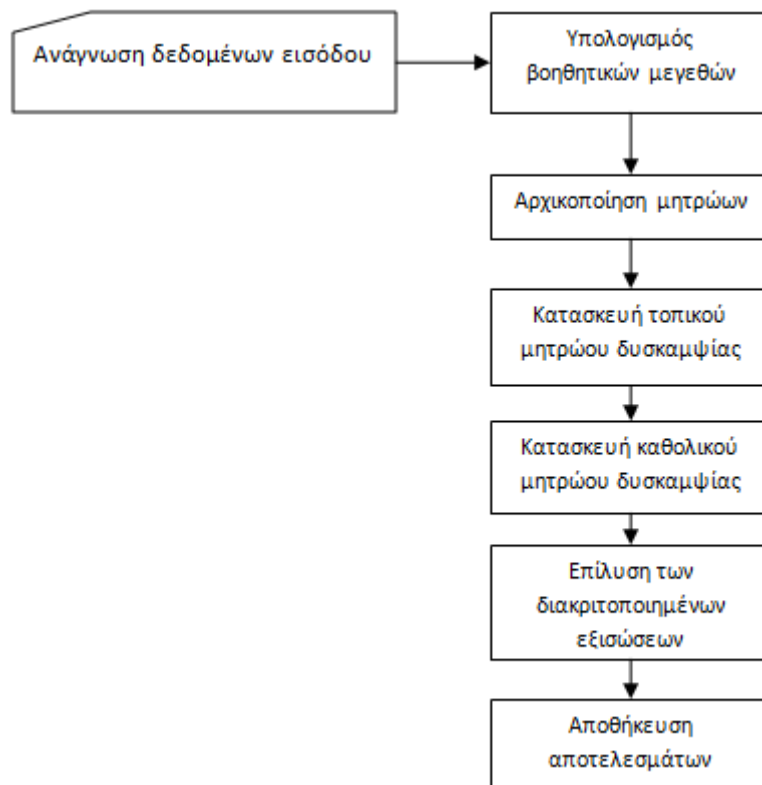
Σχήμα 4.7 : Διάγραμμα ροής του ρευστομηχανικού επιλύτη.

Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση της ροής και προκειμένου να γίνει το επόμενο βήμα της ρευστοδυναμικής ανάλυσης, πρέπει να γίνει ο υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίσεων (στο στάδιο της μετεπεξεργασίας), με κατάλληλη ολοκλήρωση των πιέσεων πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της πτέρυγας (στερεό όριο).

4.1.3 Ο επιλύτης του δομικού τμήματος

Για την αεροελαστική επίλυση θα χρησιμοποιηθεί επιλύτης δομικής μηχανικής που προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας (Κάρκαλος, 2012) και χρησιμοποιεί το πεπερασμένο στοιχείο δοκού, παρόμοιος με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 3 για τις περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης.

Στον δομικό επιλύτη αρχικά διαβάζονται από τα αρχεία εισόδου δεδομένα που αφορούν τη γεωμετρία και τα υλικά της κατασκευής, τις φορτίσεις που δέχεται καθώς και δεδομένα που αφορούν την αριθμητική επίλυση όπως ο αριθμός των κόμβων. Έπειτα, υπολογίζονται βοηθητικά μεγέθη και γίνεται η αρχικοποίηση των μητρώων. Στη συνέχεια, κατασκευάζεται το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας και συντίθεται το ολικό μητρώο δυσκαμψίας (στάδιο προεπεξεργασίας). Η επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα γίνεται με έναν block LU επιλύτη ο οποίος εκμεταλλεύεται την μορφή του ολικού μητρώου δυσκαμψίας (το οποίο δεν αποθηκεύεται ολόκληρο, αλλά σε blocks) και επιλύει με αποδοτικό τρόπο τις εξισώσεις. Στο στάδιο της μετεπεξεργασίας, αποθηκεύονται τα αποτελέσματα και στην περίπτωση του αεροελαστικού επιλύτη που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, κατασκευάζεται και το αρχείο που περιλαμβάνει τις μετατοπίσεις κάθε κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος που χρησιμοποιείται στην ρευστοδυναμική επίλυση.



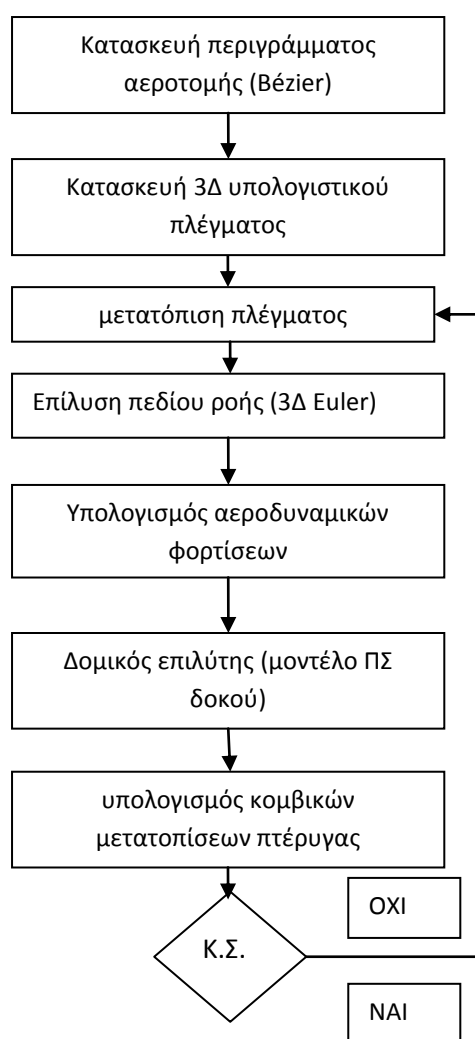
Σχήμα 4.8 : Διάγραμμα ροής του δομικού επιλύτη.

4.1.4 Διάγραμμα ροής του αεροελαστικού επιλύτη

Στην παρούσα υποενότητα, θα παρουσιαστεί συνοπτικά η δομή του αεροελαστικού επιλύτη (επιλύτη του πρωτεύοντος προβλήματος στην διαδικασία βελτιστοποίησης που θα

περιγραφεί στο κεφάλαιο 5), του οποίου οι δύο συνιστώσες περιγράφηκαν στις προηγούμενες υποενότητες.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 4.9, αρχικά κατασκευάζεται το υπολογιστικό πλέγμα του ρευστοδυναμικού επιλύτη (περιγράφηκε στην υποενότητα 4.1.1), στη συνέχεια γίνεται η επίλυση της ροής και ο υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίσεων πάνω στο στερεό όριο (πτέρυγα) και τέλος, με χρήση του επιλύτη δομικής μηχανικής, υπολογίζονται οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στερεού ορίου, παραμορφώνεται κατάλληλα το υπολογιστικό πλέγμα (με χρήση της μεθόδου των ελατηρίων, όπως περιγράφηκε στην υποενότητα 4.1.2) και συνεχίζονται οι αεροελαστικοί κύκλοι μέχρι να συγκλίνει ο κώδικας σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης που έχει οριστεί (μέγιστος αριθμός αεροελαστικών κύκλων ή τάξη μεγέθους για τη σύγκλιση).



Σχ. 4.9: Διάγραμμα ροής του αεροελαστικού επιλύτη.

4.2 Αποτελέσματα με χρήση του αεροελαστικού επιλύτη

4.2.1 Γενικά

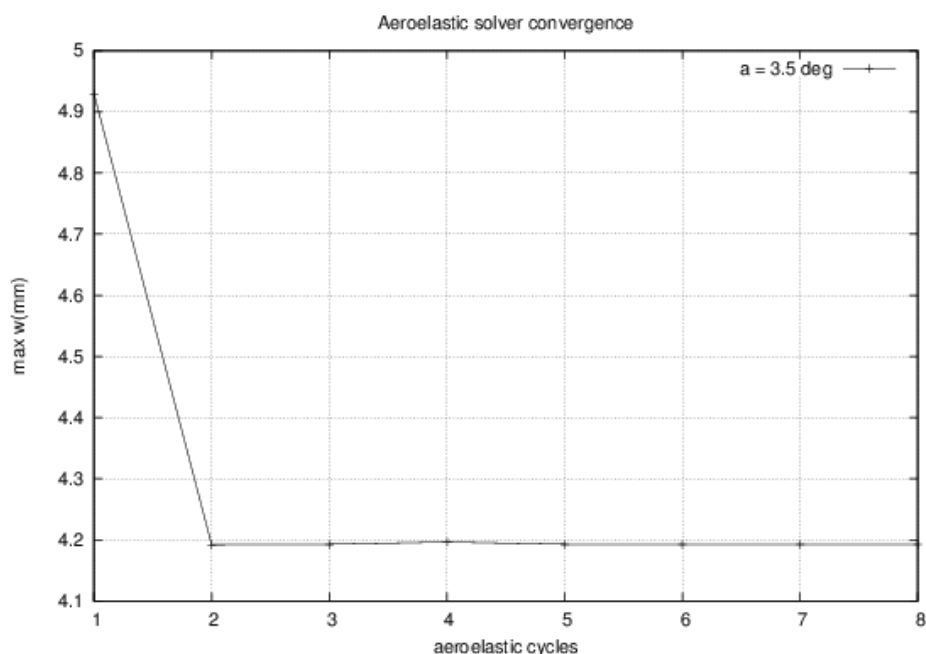
Θα εξεταστεί αρχικά ένα πρόβλημα στατικής αεροελαστικότητας για ροή γύρω από πτέρυγα (με σταθερή διατομή παντού) με γωνία εισόδου της ροής: $\alpha = 3.5^\circ$. Ο αριθμός Mach της επ' άπειρον ροής είναι 0.45, οι διαστάσεις της πτέρυγας είναι 6m (μήκος) x 1m (πλάτος). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν και δύο επιπλέον περιπτώσεις με δύο διαφορετικές γωνίες επ' άπειρον ροής. Τα χαρακτηριστικά κάθε περίπτωσης παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

A/A	U_{far}	a
1	0.45	3.5
2	0.45	1
3	0.45	5

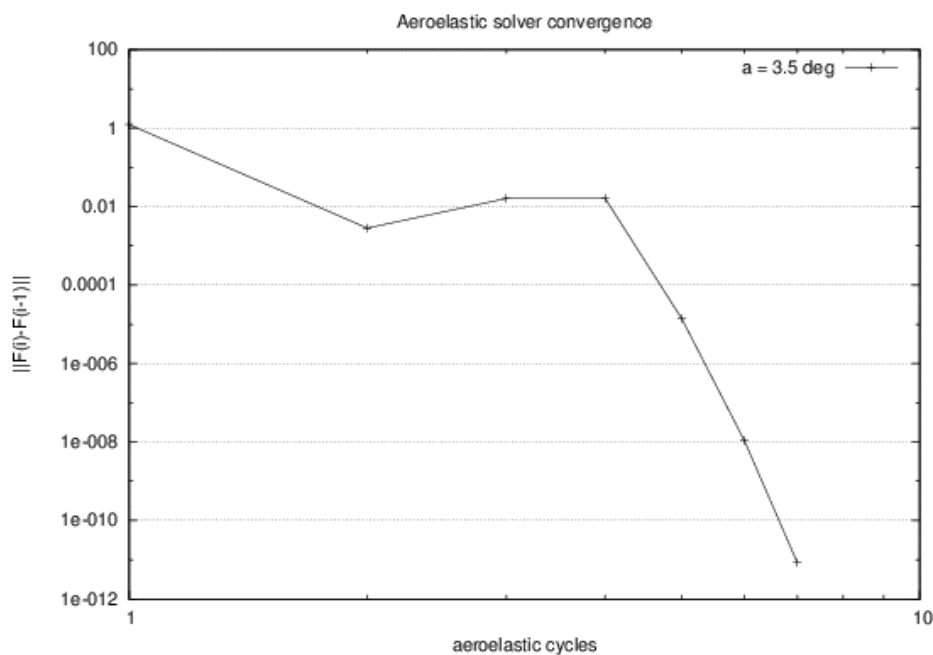
Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά περιπτώσεων που μελετώνται στην υποενότητα 4.2.

4.2.2 Αποτελέσματα

Στη συνέχεια (Σχήματα 4.9 και 4.10) παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκλισης για το μέγιστο βέλος κάμψης της πτέρυγας και την νόρμα $\|\vec{F}_i - \vec{F}_{i-1}\|$, η οποία εκφράζει τη σύγκλιση των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών φορτίων. Πρακτικά μετά από 6 αεροελαστικούς κύκλους δεν παρατηρείται σημαντική διαφορά στην τιμή του υπολογιζόμενου μέγιστου βέλους κάμψης (αλλά και γενικότερα στην κατανομή της μετατόπισης κατά μήκος της πτέρυγας) και των αεροδυναμικών φορτίων.



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης.



Σχήμα 4.10: Σύγκλιση των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών φορτίων.

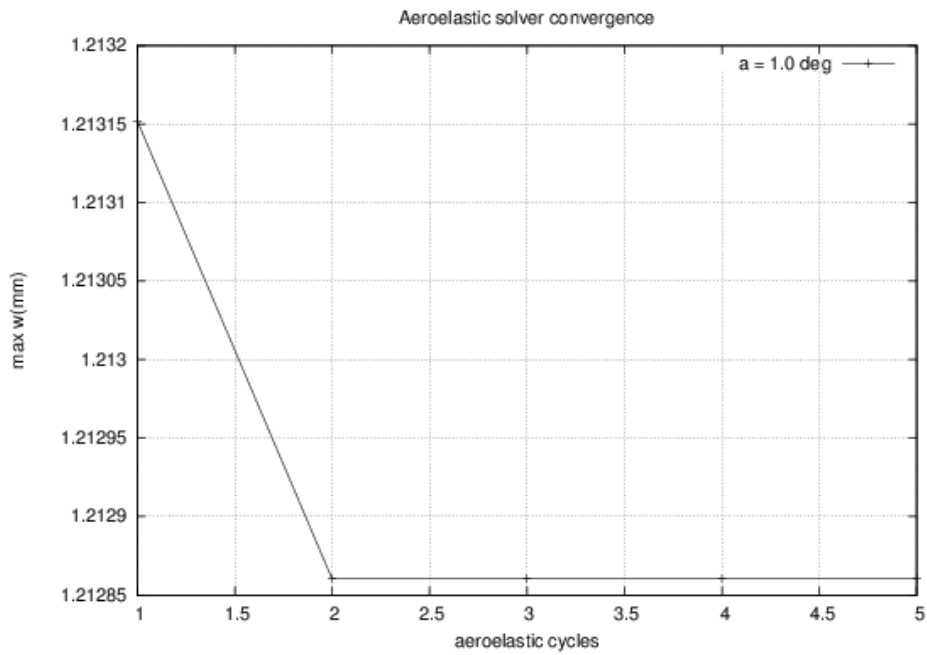
Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο συγκεκριμένο επιλύτη στον οποίο χρησιμοποιείται επιλύτης των 3D εξισώσεων Euler στο ρευστοδυναμικό μέρος και επιλύτης ΠΣ δοκού στο δομικό μέρος, το υπολογιστικό κόστος ενός αεροελαστικού κύκλου (έστω 1 EFS) είναι πρακτικά ίσο με το κόστος του ρευστοδυναμικού επιλύτη (συνολικό κόστος N EFS). Ανάλογα με το χρόνο που διατίθεται για τη μελέτη ενός προβλήματος, πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη το κριτήριο σύγκλισης του αεροελαστικού επιλύτη, ώστε να μην αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος για αμελητέο κέρδος στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων αποτελεσμάτων.

Προκειμένου να ελεγχθεί περαιτέρω η συμπεριφορά του αεροελαστικού επιλύτη, επιλύθηκαν ακόμη δύο περιπτώσεις, μία με μεγαλύτερη γωνία της επ' άπειρον ροής και μία με μικρότερη γωνία της επ' άπειρον ροής. Ας σημειωθεί, ότι επειδή ο επιλύτης επιλύει περιπτώσεις μη-συνεκτικού ρευστού, ενδείκνυται να χρησιμοποιηθεί για περιπτώσεις στις οποίες η γωνία είναι μέχρι περίπου 5° διότι για μεγαλύτερες γωνίες πρέπει να ληφθούν υπόψη τα συνεκτικά φαινόμενα, των οποίων η επίδραση γίνεται ολοένα και πιο έντονη.

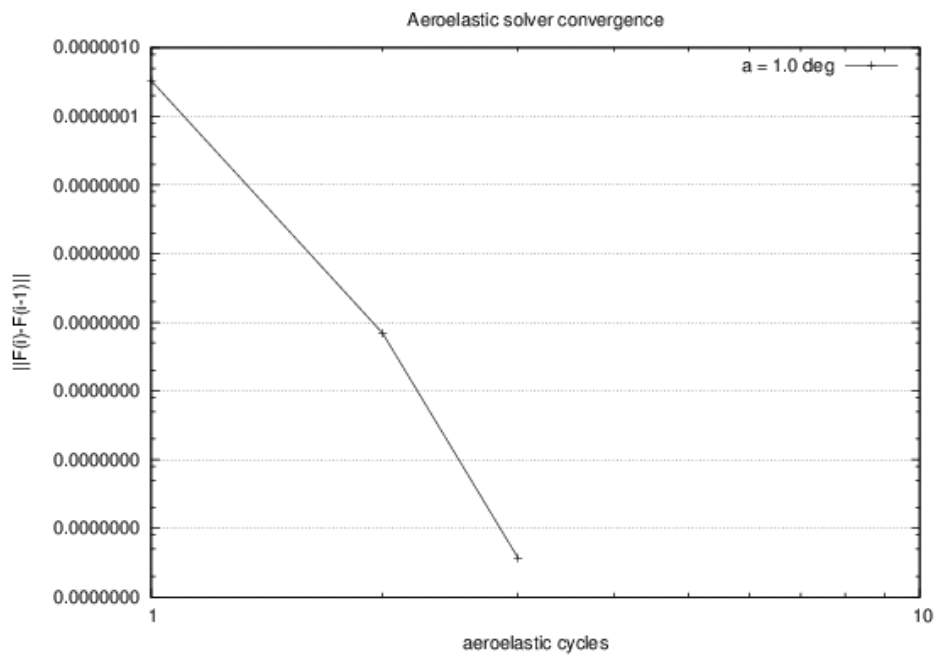
Παρακάτω, παρουσιάζονται οι περιπτώσεις με γωνία $\alpha = 1^\circ$ και $\alpha = 5^\circ$.

$\alpha = 1^\circ$

Στην περίπτωση αυτή, ο αεροελαστικός επιλύτης, όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα 4.11 και 4.12, συγκλίνει πιο γρήγορα σε σχέση με την περίπτωση $\alpha = 3.5^\circ$. Πρακτικά, μετά τους τρεις αεροελαστικούς κύκλους έχει επιτευχθεί σύγκλιση, τόσο όσον αφορά τις τιμές του βέλους κάμψης, όσο και τις τιμές των αεροδυναμικών φορτίων που αναπτύσσονται.



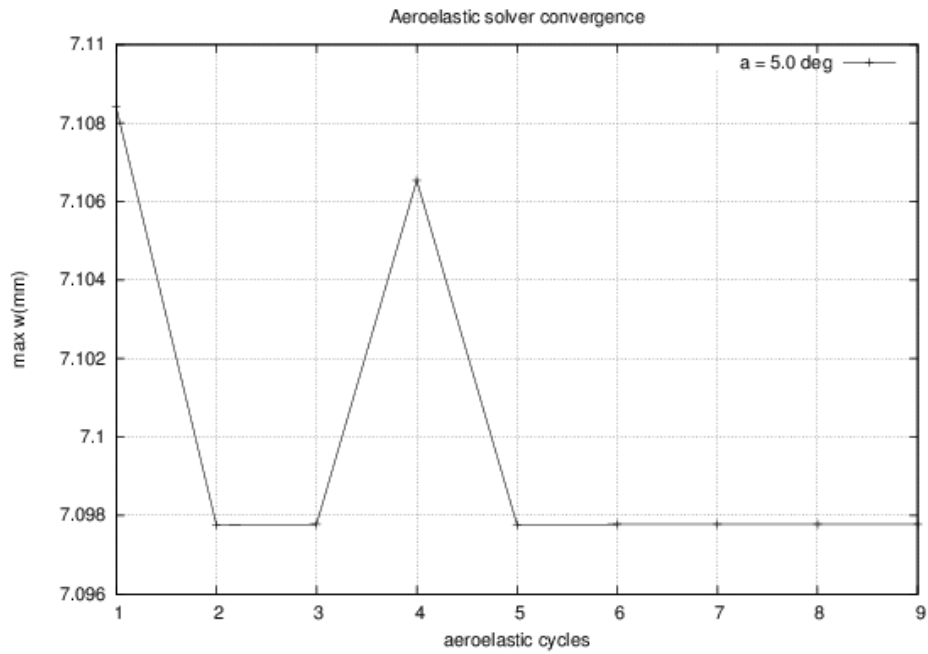
Σχήμα 4.11: Διάγραμμα σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης στην περίπτωση 2.



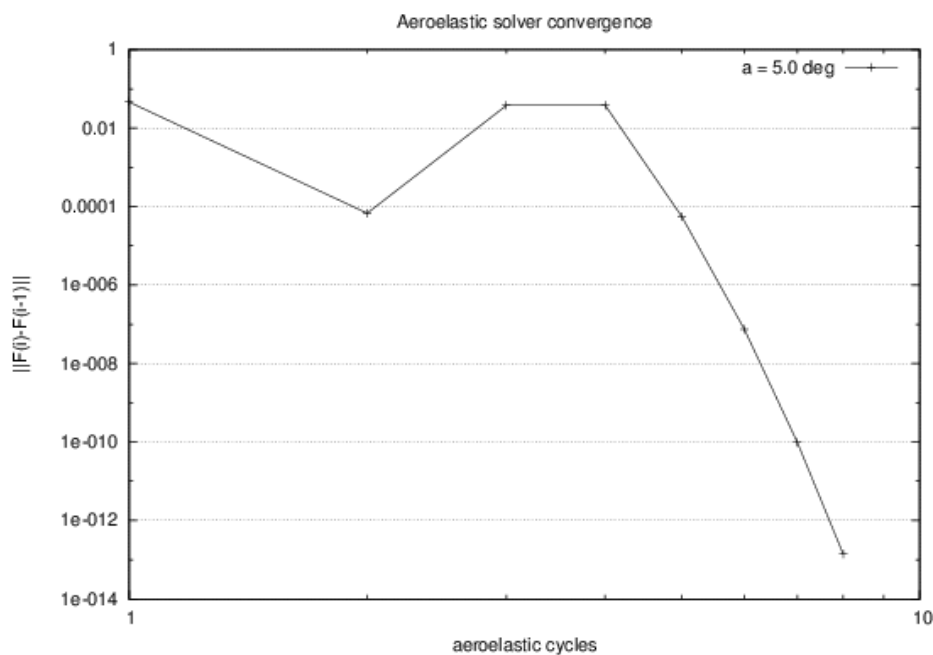
Σχήμα 4.12: Σύγκλιση των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών φορτίων στην περίπτωση 2.

$\alpha=5^\circ$

Στην περίπτωση αυτή, η σύγκλιση είναι λίγο πιο αργή από τις προηγούμενες περιπτώσεις, αλλά μετά από 8-9 αεροελαστικούς κύκλους επιτυγχάνεται τελικά σύγκλιση, τόσο όσον αφορά τις τιμές του βέλους κάμψης, όσο και τις τιμές των αεροδυναμικών φορτίων που αναπτύσσονται (σχήματα 4.13,4.14).



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης στην περίπτωση 3.



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης στην περίπτωση 3.

Κάποια γενικά συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στην παρούσα υποενότητα είναι ότι η σύγκλιση του βέλους κάμψης και της νόρμας των αεροελαστικών φορτίων είναι ταχύτερη σε περιπτώσεις με μικρότερη γωνία επ' άπειρον ροής και ότι για μεγαλύτερες γωνίες η σύγκλιση δεν είναι μονότονη και ιδίως όσον αφορά το βέλος κάμψης, ενώ στην δεύτερη επανάληψη προσεγγίζεται περίπου η λύση στη συνέχεια υπάρχει μια αυξομείωση της τιμής μέχρι τη σύγκλιση.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις περιπτώσεις αυτού του κεφαλαίου είναι χρήσιμα αφενός για να ελεγχθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του τελικού λογισμικού βελτιστοποίησης και αφετέρου για να προσδιοριστούν με τον κατάλληλο τρόπο παράμετροι (π.χ. μέγιστος αριθμός αεροελαστικών επαναλήψεων) που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Περίπτωση πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης

5.1 Γενικά

Στο πλήρως συζευγμένο πρόβλημα που θα μελετηθεί, επιθυμείται η βελτιστοποίηση της μορφής μιας πτέρυγας αεροσκάφους ώστε υπό δεδομένες συνθήκες ροής να επιτυγχάνεται μια επιθυμητή τιμή βέλους κάμψης (v_{tar}) και μια επιθυμητή κατανομή πίεσης ($p_{tar}(y,z)$). Οι μεταβολές στο σχήμα της μορφής της πτέρυγας γίνονται μέσω της μετακίνησης σημείων ελέγχου Bezier που ελέγχουν την εξωτερική επιφάνεια της πτέρυγας.

5.2 Ανάπτυξη των εξισώσεων για το πλήρως συζευγμένο πρόβλημα

5.2.1 Περιγραφή του προβλήματος βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας) που θα μελετηθεί περιγράφεται συνοπτικά στη συνέχεια:

- **Συνάρτηση-στόχος:** $(\min) F = w_1 (v(L) - v_{tar})^2 + w_2 \frac{1}{2} \int_{SW} (p - p_{tar})^2 dS$ όπου $v(L)$ το βέλος κάμψης (κατακόρυφη μετατόπιση) του ελεύθερου άκρου της πτέρυγας-δοκού μήκους L , v_{tar} μια επιθυμητή τιμή του βέλους κάμψης, p_{tar} μια επιθυμητή κατανομή πιέσεων πάνω στην πτέρυγα και w_1, w_2 κατάλληλοι συντελεστές βαρύτητας, dS το στοιχειώδες εμβαδό στην εξωτερική επιφάνεια της πτέρυγας
- **Μεταβλητές σχεδιασμού \vec{b}_i :** \hat{x}_i, \hat{y}_i (οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier, που περιγράφουν την αεροτομή η οποία διατηρείται αμετάβλητη κατά μήκος της πτέρυγας)¹
- **Επαυξημένη συνάρτηση-στόχος:** $F_{AUG} = F + \int_{\Omega} \Psi_S R_S(U_S, U_F) d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_F R_F(U_F) d\Omega$

Σε σχέση με το μη-συζευγμένο πρόβλημα που αναπτύχθηκε προηγουμένως, στο πλήρως συζευγμένο πρόβλημα η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος περιλαμβάνει και έναν τρίτο όρο ($\int_{\Omega} \Psi_F R_F d\Omega$) που αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά των ρευστοδυναμικών όρων, μέσω του υπολοίπου των εξισώσεων της μηχανικής των ρευστών $R_F=0$ που διέπει την ροή γύρω από την πτέρυγα). Οι δείκτες S και F υποδηλώνουν “structural” και “fluid” όρους αντίστοιχα. Με

¹ Ας σημειωθεί ότι για το «δομικό» μέρος του προβλήματος βελτιστοποίησης, χρησιμοποιείται ως «ενδιάμεση» μεταβλητή σχεδιασμού η ροπή αδράνειας της αεροτομής της πτέρυγας (ίδια παντού κατά το μήκος της πτέρυγας) I και στη συνέχεια υπολογίζονται οι επιθυμητές παράγωγοι ευαισθησίας με χρήση του κανόνα της αλυσίδας. Στο πρόβλημα που εξετάζεται, η ροπή αδράνειας υπολογίζεται με κατάλληλη σχέση με δεδομένες τις συντεταγμένες των σημείων του περιγράμματος της αεροτομής της πτέρυγας.

Ψ συμβολίζουμε τα πεδία των αντίστοιχων συζυγών μεταβλητών και με R τις εξισώσεις κατάστασης που διέπουν το κάθε πεδίο (ρευστών, στερεών).

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί ξεχωριστά η ανάπτυξη των όρων $\int_{\Omega} \Psi_S R_S d\Omega$ και $\int_{\Omega} \Psi_F R_F d\Omega$ κατά τη μεταβολή της συνάρτησης-στόχου δF_{AUG} και στο τέλος θα γραφούν οι σχέσεις που δίνουν τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_i}$ (συναρτήσει των συζυγών πεδίων που προκύπτουν από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων).

Η μεταβολή της συνάρτησης-στόχου γράφεται:

$$\delta F_{AUG} = \delta F = 2w_1(v(L) - v_{tar})\delta v + w_2 \frac{1}{2} \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 \delta(dS) + w_2 \int_{S_w} (p - p_{tar}) \delta p dS$$

5.2.2 Ανάπτυξη των εξισώσεων της συζυγούς συνεχούς μεθόδου

A) Δομικοί ("structural") όροι

Η εξίσωση που περιγράφει το δομικό πρόβλημα θα γραφεί παρόμοια με την προηγούμενη ανάπτυξη (κεφάλαιο 3) με τη διαφορά ότι ο όρος της φόρτισης (στο δεύτερο μέλος) θα περιλαμβάνει εξάρτηση από ρευστοδυναμική μεταβλητή- την πίεση πάνω στην πτέρυγα-δοκό. Η εξίσωση κατάστασης (state equation) του προβλήματος αυτού (όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3):

$$R_S = 0 \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = -w(x) = -M(p) = -N(\vec{U}) \quad (\text{γενικά}) \quad (5.1)$$

όπου: με w στο παρόν κεφάλαιο σημειώνεται η κατανεμημένη αεροδυναμική φόρτιση πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της πτέρυγας, M γενικά είναι ένας «τελεστής» ο οποίος μετατρέπει την πίεση πάνω στην αεροτομή σε αεροδυναμική φόρτιση (ανά μονάδα βάθους) και N ένας παρόμοιος τελεστής ο οποίος συσχετίζει, γενικά, το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής του ρευστοδυναμικού προβλήματος U_F με τις αεροδυναμικές φορτίσεις (θα παρουσιαστεί στην ενότητα Β).

Η σχέση (για συμπιεστό ρευστό) που συνδέει την πίεση με τις συντηρητικές μεταβλητές που περιλαμβάνονται στο διάνυσμα \vec{U} είναι (στο 2Δ πρόβλημα):

$$p = p(\vec{U}) = (\gamma - 1) * \left[\rho E - \frac{m^2}{2\rho} \right] = (\gamma - 1) * \left[U_4 - \frac{U_2^2 + U_3^2}{2U_1} \right] \quad (5.2)$$

Επομένως η εξίσωση κατάστασης γράφεται στη μορφή:

$$R_S = EI \frac{d^4 v}{dx^4} + M(p) = 0 \quad (5.3)$$

Οπότε, ο "δομικός" όρος προκύπτει (και θεωρώντας ότι θα γραφεί ο όρος $\int_{\Omega} \Psi_S R_S d\Omega$ σε 1D μορφή επειδή το μοντέλο δοκού είναι 1D):

$$\int_{\Omega} \Psi_S R_S d\Omega = \int_0^L \Psi_S R_S dx = \int_0^L \Psi_S \left[EI \frac{d^4 v}{dx^4} + M(p) \right] dx \quad (5.4)$$

Η μεταβολή του όρου γράφεται:

$$\delta \int_0^L \Psi_s \left[EI \frac{d^4 v}{dx^4} + M(p) \right] dx = \delta \int_0^L \Psi_s \left[EI \frac{d^4 v}{dx^4} \right] dx + \delta \int_0^L \Psi_s [M(p)] dx \quad (5.5)$$

Επειδή $L = \text{σταθ.}$ (το μήκος της πτέρυγας) η μεταβολή δ «μπαίνει» στο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^L \Psi_s \delta \left[EI \frac{d^4 v}{dx^4} \right] dx + \int_0^L \Psi_s \delta [M(p)] dx = \int_0^L \Psi_s \delta (EI) \frac{d^4 v}{dx^4} dx + \int_0^L \Psi_s EI \delta \left(\frac{d^4 v}{dx^4} \right) dx + \int_0^L \Psi_s \delta [M(p)] dx$$

Ο τελευταίος όρος της σχέσης 5.5 που περιλαμβάνει τον τελεστή M στο συγκεκριμένο πρόβλημα γράφεται απλούστερα $\int_0^L \Psi_s \delta p dx$ όπου $p = p(\vec{U})$ και συνεισφέρει μόνο στην πεδιακή συζυγή εξίσωση (Field Adjoint Equation- F.A.E) του ρευστοδυναμικού μέρους (βλ. ενότητα Β). Οι άλλοι δύο όροι αναπτύσσονται περαιτέρω στη συνέχεια.

Όρος $\int_0^L \Psi_s EI \delta \left(\frac{d^4 v}{dx^4} \right) dx$:

Εφαρμόζοντας διαδοχικά ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \right) dx - \int_0^L \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \frac{d(\Psi_s EI)}{dx} dx = \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \left[\frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} dx \right] \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \left[\int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right) dx - \int_0^L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} dx \right] \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L - \left[\int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} \frac{d \delta v}{dx} \right) dx - \int_0^L \frac{d \delta v}{dx} \frac{d^3(\Psi_s EI)}{dx^3} dx \right] \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L + \frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} \frac{d \delta v}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d \delta v}{dx} \frac{d^3(\Psi_s EI)}{dx^3} dx \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L + \frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} \frac{d \delta v}{dx} \Big|_0^L \\ & \quad - \left[\int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3(\Psi_s EI)}{dx^3} \delta v \right) dx - \int_0^L \delta v \frac{d^4(\Psi_s EI)}{dx^4} dx \right] \\ & = \Psi_s EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L - \frac{d(\Psi_s EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L + \frac{d^2(\Psi_s EI)}{dx^2} \frac{d \delta v}{dx} \Big|_0^L - \frac{d^3(\Psi_s EI)}{dx^3} \delta v \Big|_0^L + \int_0^L \delta v \frac{d^4(\Psi_s EI)}{dx^4} dx \quad (5.6) \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος της σχέσης 5.6 θα δώσει την συζυγή εξίσωση (Field Adjoint Equation ή FAE):

$$\frac{d^4(\Psi_S EI)}{dx^4} = 0 \quad (5.7)$$

η οποία είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτου βαθμού, όπως και η εξίσωση κατάστασης του πρωτογενούς προβλήματος και έχει τέσσερις οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τους τέσσερις πρώτους όρους:

- $\Psi_S EI \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0^L = \Psi_S EI \left(\frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_L - \frac{d^3 \delta v}{dx^3} \Big|_0 \right) \rightarrow \Psi_S \Big|_0 = 0$
- $-\frac{d(\Psi_S EI)}{dx} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0^L = -\frac{d\Psi_S EI}{dx} \left(\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_L - \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \Big|_0 \right) \rightarrow \frac{d\Psi_S}{dx} \Big|_0 = 0$
- $\frac{d^2(\Psi_S EI)}{dx^2} \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^L = \frac{d^2(\Psi_S EI)}{dx^2} \left(\frac{d\delta v}{dx} \Big|_L - \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0 \right) \rightarrow \frac{d^2(\Psi_S)}{dx^2} \Big|_L = 0$
- $-\frac{d^3(\Psi_S EI)}{dx^3} \delta v \Big|_0^L + 2w_1(v(L) - v_{tar})\delta v \Big|_L =$
 $-\frac{d^3(\Psi_S EI)}{dx^3} (\delta v \Big|_L - \delta v \Big|_0) + 2w_1(v(L) - v_{tar})\delta v \Big|_L =$
 $-\frac{d^3(\Psi_S EI)}{dx^3} \delta v \Big|_L + 2w_1(v(L) - v_{tar})\delta v \Big|_L$

Επομένως, για να καταστεί η δF_{AUG} ανεξάρτητη του δv στο όριο $x=L$ πρέπει εκεί να ισχύει η συνθήκη: $\frac{d^3(\Psi_S)}{dx^3} \Big|_L = \frac{2w_1(v(L)-v_{tar})}{EI}$

B) Ρευστοδυναμικοί (“fluid”) όροι

Για το ρευστοδυναμικό πρόβλημα γίνονται οι εξής παραδοχές: η ροή είναι μόνιμη, ατριβής (διέπεται από τις εξισώσεις EULER), συμπιεστού ρευστού και οι εξισώσεις θα γραφούν γενικά για 3D χωρίο το οποίο περιλαμβάνει στερεό του οποίου η γεωμετρία περιγράφεται με κάποια παραμετροποίηση.

Η εξίσωση κατάστασης (state equation) για το πρόβλημα της ροής μπορεί να γραφεί στη ακόλουθη συνεπτυγμένη μορφή με χρήση τανυστικού συμβολισμού :

$$R_n = \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.8)$$

Οι μεταβλητές της ροής σε συντηρητική μορφή (**Papadimitriou and Giannakoglou 2011**)² και οι ροές (fluxes) f_{nk} για 2D πρόβλημα είναι ως εξής:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \\ f_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + p \delta_{k1} \\ \rho u_2 u_k + p \delta_{k2} \\ u_k (E + p) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Ανάλογα με το πρόβλημα ροής επιβάλλονται κατάλληλες οριακές συνθήκες και για τα στερεά όρια S_w ισχύει η συνθήκη μη-εισχώρησης: $u_k n_k = 0$.

Το ολοκλήρωμα των ρευστοδυναμικών όρων στην επαυξημένη συνάρτηση-στόχο είναι:

² “Aerodynamic design using the truncated Newton algorithm and the continuous adjoint approach”

$$\int_{\Omega} \Psi_F R_{Fn} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_F \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} d\Omega \quad (5.10)$$

Επομένως η μεταβολή του όρου της συνεισφοράς των ρευστοδυναμικών μεγεθών γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b_i} \left[\int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} d\Omega \right] &= \int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_{Fn} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_i} d\Omega = \\ (\text{βάσει της σχέσης } \frac{\delta \Phi}{\delta b_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial b_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_i}) \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \right) d\Omega}_{F1} + \underbrace{\int_S \Psi_{Fn} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_l dS}_{F2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Για τον όρο F1:

Ισχύει η εναλλαγή των μερικών παραγώγων:

$$\int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \right) d\Omega \quad (5.12)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες αυτόν τον όρο λαμβάνονται:

$$\int_{\Omega} \Psi_{Fn} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \right) d\Omega \quad (5.13)$$

και από το θεώρημα Green-Gauss:

$$\begin{aligned} &= \int_S \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \right) d\Omega = \\ &= \int_S \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_m}{\partial b_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.14)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει από τον κανόνα αλυσίδας για την Ιακωβιανή ορίζουσα των ατριβών ροών $A_{nmk} = \frac{\partial f_{nk}}{\partial U_m}$. (5.15)

Χωρίζοντας το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης 5.14 σε δύο επιμέρους στα όρια (στερεό όριο και επ' άπειρον όριο):

$$= \left(\int_{S_W} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS + \int_{S_{I,0}} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS \right) - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_m}{\partial b_i} \right) d\Omega \quad (5.15)$$

και από την σχέση της μεταβολής $\frac{\delta \Phi}{\delta b_i}$ που προαναφέρθηκε:

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{S_W} \Psi_{Fn} \frac{\delta f_{nk}}{\delta b_i} n_k dS - \int_{S_W} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS \right) + \int_{S_{I,0}} \left(\Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k \right) dS - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega = \\ &= \int_{S_W} \Psi_{Fn} \frac{\delta(f_{nk} n_k dS)}{\delta b_i} - \int_{S_W} \Psi_{Fn} f_{nk} \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} - \int_{S_W} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS + \\ &\int_{S_{I,0}} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega \end{aligned} \quad (5.16)$$

Από τον ορισμό των ατριβών ρών στο όριο S_w και τη συνθήκη μη-εισχώρησης λαμβάνεται:

$$\frac{\delta}{\delta b_i} (f_{nk} n_k dS)|_{S_w} = \frac{\delta p}{\delta b_i} N_n + p \frac{\delta N_n}{\delta b_i} \quad (5.17)$$

όπου $(N_1, N_2, N_3, N_4) = (0, n_1, n_2, 0)$ dS στο 2Δ πρόβλημα ή $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5) = (0, n_1, n_2, n_3, 0)$ dS στο 3Δ πρόβλημα όπου n_i οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\delta x_l}{\delta b_i} = 0$ στο όριο $S_{i,0}$ έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta F_{AUG}}{\delta b_i}\right)_F &= \frac{1}{2} w_2 \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 \frac{\delta(dS)}{\delta b_i} + w_2 \int_{S_w} (p - p_{tar}) \frac{\delta p}{\delta b_i} dS - \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega \\ &+ \int_{S_{i,0}} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS + \int_{S_w} \Psi_{F,k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS + \int_{S_w} \Psi_{F,k+1} p - \Psi_{F,n} f_{nk} \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} \\ &+ \int_{S_w} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \frac{\delta x_l}{\delta b_l} n_k dS + \int_{S_w} \Psi_{Fn} \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \frac{\delta x_l}{\delta b_l} n_l dS \end{aligned} \quad (5.18)$$

Καθιστώντας τη συνάρτηση-στόχο ανεξάρτητη των μεταβολών των μεταβλητών της ροής στο εσωτερικό του πεδίου λαμβάνεται η συζυγής εξίσωση του ροϊκού προβλήματος (συγκεντρώνοντας τους όρους που περιλαμβάνουν τον παράγοντα $\frac{\partial U_m}{\partial b_i}$):

$$A_{nmk} \frac{\partial \Psi_{Fn}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.19)$$

Τα ολοκληρώματα κατά μήκος του ορίου S_w πρέπει να είναι ανεξάρτητα των μεταβολών των μεταβλητών της ροής (συγκεντρώνοντας τους όρους που περιλαμβάνουν τον παράγοντα $\frac{\delta p}{\delta b_i}$) άρα:

$$w_2 (p - p_{tar}) + \Psi_{F,k+1} n_k + \Psi_s = 0 \quad (5.20)$$

Επίσης κατά το όριο $S_{i,0}$:

$$\Psi_{F,n} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k = 0 \quad (5.21)$$

Γ) Τελικές εξισώσεις

Γ1) Για το δομικό πρόβλημα:

Μετά τον υπολογισμό του πεδίου των συζυγών μεταβλητών Ψ_s , ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας γίνεται από τους εναπομείναντες όρους της μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης στόχου (μετά την εξαγωγή της πεδιακής συζυγούς εξίσωσης και των οριακών της συνθηκών):

Για σταθερό μέτρο ελαστικότητας (δεν μεταβάλλεται η τιμή του σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης):

$$\delta F_{AUG} = \delta F = \int_0^L \Psi_s \delta(EI) \frac{d^4 v}{dx^4} dx = \int_0^L \Psi_s (\delta I) E \frac{d^4 v}{dx^4} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta I} = \int_0^L \Psi_s E \frac{d^4 v}{dx^4} dx \quad (5.22)$$

Τελικά, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας και των παραγώγων $\frac{\partial I}{\partial x_i}, \frac{\partial I}{\partial y_i}$ που υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές υπολογίζονται οι τελικές παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bezier) :

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\delta F}{\delta I} \frac{\partial I}{\partial \hat{x}_i} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}_i} = \frac{\delta F}{\delta I} \frac{\partial I}{\partial \hat{y}_i} \quad (5.24)$$

Γ2) Για το ρευστοδυναμικό πρόβλημα:

Ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας του ρευστοδυναμικού τμήματος γίνεται με βάση τους όρους που έχουν απομείνει μετά τον προσδιορισμό της συζυγούς εξίσωσης και των συζυγών οριακών συνθηκών:

$$\left(\frac{\delta F_{AUG}}{\delta b_i} \right)_F = \frac{1}{2} w_2 \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 \frac{\delta(dS)}{\delta b_i} + \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{nk}) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i}$$

$$- \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial b_i} n_k dS + \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial b_i} n_l dS \quad (5.25)$$

Στο στάδιο αυτό, απαιτείται η εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας ώστε να λαμβάνεται υπόψη η παραμετροποίηση της γεωμετρίας με καμπύλη Bézier στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας (με b_i συμβολίζονται τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bézier).

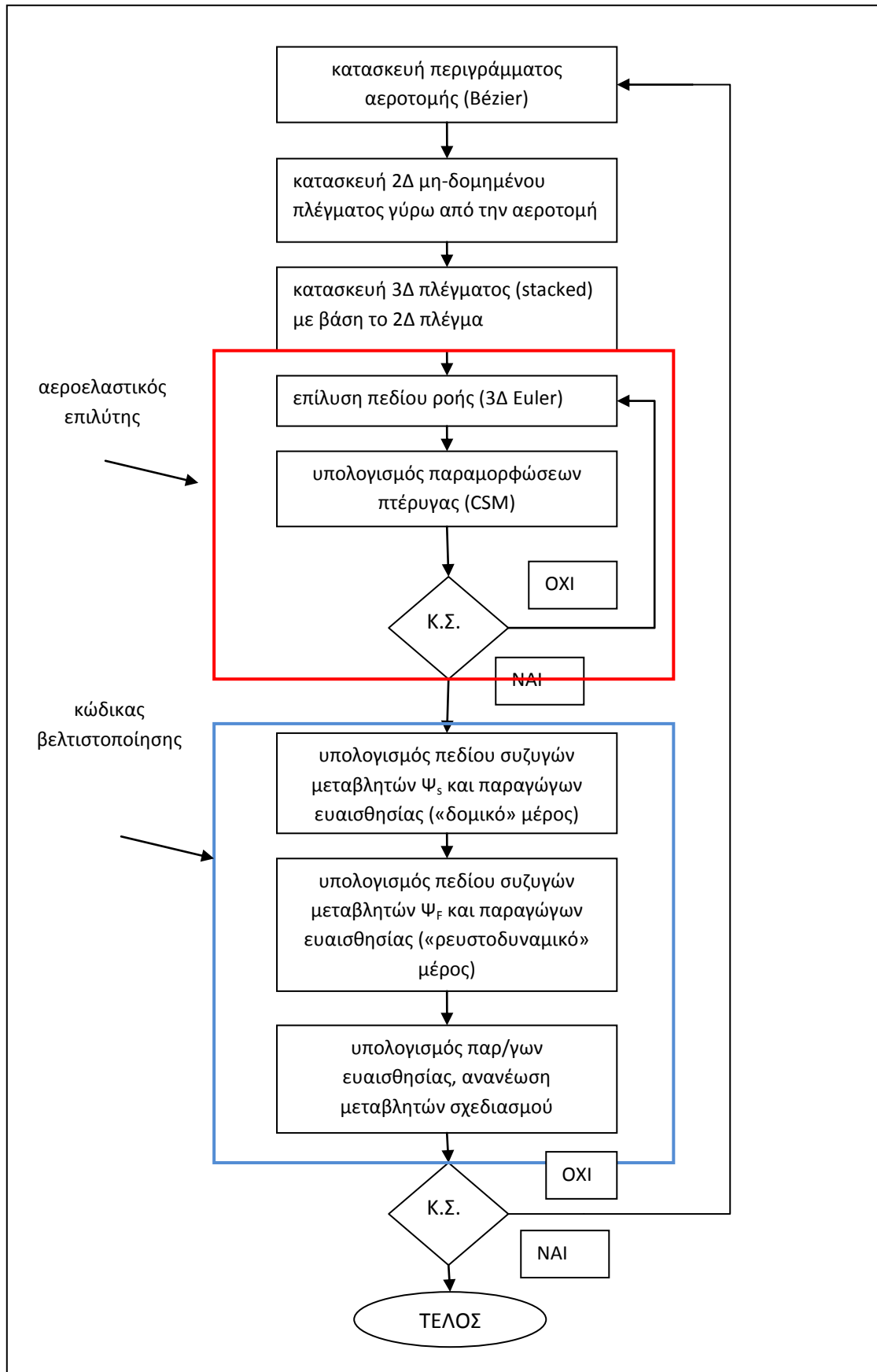
Επομένως, η **συνολική έκφραση** των παραγώγων ευαισθησίας για το πλήρως συζευγμένο πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$\left(\frac{\delta F_{AUG}}{\delta b_i} \right)_{Total} = \left(\frac{\delta F_{AUG}}{\delta b_i} \right)_S + \left(\frac{\delta F_{AUG}}{\delta b_i} \right)_F \quad (5.26)$$

Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη συζυγή μέθοδο χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου (steepest descent):

$$\vec{b}_i^{(n+1)} = \vec{b}_i^{(n)} - \eta \frac{\delta F}{\delta \vec{b}_i} \quad (5.27)$$

Τέλος, ακολουθεί ένα διάγραμμα ροής που παρουσιάζει σχηματικά τη διαδικασία που ακολουθείται (αναλυτικότερο διάγραμμα ροής για τον αεροελαστικό επιλύτη υπάρχει στην υποενότητα 4.1.4) για την επίλυση του συζευγμένου προβλήματος βελτιστοποίησης (με Κ.Σ. σημειώνεται το «κριτήριο σύγκλισης»):



Σχ.5.1 : Διάγραμμα ροής του κώδικα για την περίπτωση της πλήρως συζευγμένης βελτιστοποίησης.

5.3 Δημιουργία του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης

5.3.1 Περιγραφή του ολοκληρωμένου λογισμικού βελτιστοποίησης

Στην υποενότητα αυτή θα περιγραφεί συνοπτικά η υλοποίηση της ολοκληρωμένης διαδικασίας της βελτιστοποίησης που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1 σε λογισμικό το οποίο θα επιλύει την περίπτωση βελτιστοποίησης που περιγράφηκε στο παρόν κεφάλαιο. Τα βήματα όλης της διαδικασίας περιγράφονται από το διάγραμμα ροής του σχήματος 5.1.

Το πρώτο βήμα σε κάθε κύκλο αεροελαστικής βελτιστοποίησης είναι η ανανέωση της μορφής της πτέρυγας. Στον πρώτο κύκλο υπάρχουν δεδομένες οι αρχικές θέσεις των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier με βάση τα οποία κατασκευάζεται η καμπύλη που περιγράφει το περίγραμμα της αεροτομής. Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης υπάρχουν ορισμένα σημεία ελέγχου που δεν επιτρέπεται να αλλάξουν θέση ενώ τα υπόλοιπα αλλάζουν με βάση τις διορθώσεις που προκύπτουν από τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Στη συνέχεια, γίνεται η ανανέωση της γεωμετρίας της πτέρυγας με βάση τη νέα μορφή της αεροτομής.

Το επόμενο βήμα είναι η επίλυση του ευθέος (primal) προβλήματος με τον αεροελαστικό επιλύτη. Ο αεροελαστικός επιλύτης που χρησιμοποιείται είναι αυτός που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4.

Έπειτα, γίνεται η επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Αρχικά, με χρήση του κώδικα δομικής βελτιστοποίησης (στον οποίο έχουν γίνει οι κατάλληλες μετατροπές) υπολογίζεται το πεδίο των συζυγών μεταβλητών Ψ_s και η παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta I}$ και στη συνέχεια υπολογίζονται οι παράγωγοι $\frac{\partial I}{\partial x_i}$ και $\frac{\partial I}{\partial y_i}$ με χρήση πεπερασμένων διαφορών, οπότε μπορεί να γίνει ο υπολογισμός των παραγώγων $\left(\frac{\partial F}{\partial b_i}\right)_s$ με χρήση του κανόνα της αλυσίδας όπως έχει περιγραφεί στην υποενότητα 5.2.2. Έχοντας υπολογίσει το πεδίο των συζυγών μεταβλητών του δομικού μέρους και τις παραγώγους $\left(\frac{\partial F}{\partial b_i}\right)_s$, ακολουθούν οι αντίστοιχοι υπολογισμοί για το ρευστοδυναμικό μέρος. Ο κώδικας που χρησιμοποιείται για το ρευστοδυναμικό μέρος είναι παρόμοιος με τον κώδικα του ρευστοδυναμικού μέρους του αεροελαστικού επιλύτη, διότι όπως αναμενόταν (και τελικά προέκυψε με την ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου), το σύστημα των συζυγών εξισώσεων είναι αντίστοιχο με το σύστημα των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος. Μετά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας σύμφωνα με τις σχέσεις της υποενότητας 5.2.2.

Πριν ξεκινήσει ο επόμενος κύκλος βελτιστοποίησης, υπολογίζονται οι ολικές παράγωγοι ευαισθησίας και ανανεώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού σύμφωνα με τη σχέση για τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

5.3.2 Υλοποίηση κωδίκων υπολογιστικής μηχανικής σε κάρτες γραφικών (GPU)

Το ολοκληρωμένο λογισμικό που περιγράφηκε στην υποενότητα 5.3.1 έχει υλοποιηθεί σε κάρτες γραφικών (GPU) και είναι ενσωματωμένο σε ένα γενικό λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β. Για

αυτόν τον λόγο θεωρήθηκε σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στην χρήση των καρτών γραφικών για ανάπτυξη εφαρμογών γενικού ενδιαφέροντος, ο οποίος είναι ένας σύγχρονος και ραγδαία εξελισσόμενος τομέας.

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη λογισμικού στον τομέα της υπολογιστικής μηχανικής σε γλώσσες προγραμματισμού για GPUs (κάρτες γραφικών) έχει γνωρίσει ραγδαία ανάπτυξη. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι κάρτες γραφικών διαθέτουν πολλαπλούς επεξεργαστές, οι προγραμματιστές υλοποιούν τους κώδικές τους σε γλώσσες προγραμματισμού συμβατές με την τεχνολογία των καρτών γραφικών αντί να τους υλοποιήσουν μόνο σε CPU. Έτσι, κερδίζουν σημαντικά οφέλη σε υπολογιστικό χρόνο ιδίως αν εκμεταλλευτούν αποδοτικά την μνήμη (Ντανάκας, 2012).

Το 2001 εμφανίστηκαν οι πρώτες κάρτες γραφικών που υλοποιούσαν μια παράλληλη αρχιτεκτονική (Ντανάκας,2012), ανοίγοντας τον δρόμο για την αξιοποίηση των καρτών γραφικών σε γενικές εφαρμογές πέραν των ηλεκτρονικών παιχνιδιών και ορισμένων εξειδικευμένων προγραμμάτων (π.χ. επεξεργασίας εικόνας).

Αρχικά, η δημιουργία τέτοιων προγραμμάτων απαιτούσε πλήρη γνώση της αρχιτεκτονικής της κάρτας και μετατροπές για την προσαρμογή του φυσικού προβλήματος στα δεδομένα της κάρτας γραφικών. Η εξέλιξη στον τομέα έκανε τις κάρτες γραφικών προσβάσιμες και φιλικότερες στο μέσο χρήστη που επιθυμούσε να προγραμματίσει χρησιμοποιώντας τις. Η διαδικασία της χρήσης της κάρτας γραφικών για γενικού τύπου εφαρμογές ονομάζεται GPGPU (General Purpose computing on GPU).

Σήμερα η δυνατότητα για υπολογισμούς στην GPU είναι ενσωματωμένη και σε διάφορα εμπορικά λογισμικά όπως το MATLAB και το Mathematica.

Η **CUDA** (αρχικά των λέξεων Compute Unified Device Architecture) είναι μια πλατφόρμα παράλληλης επεξεργασίας η οποία δημιουργήθηκε από την εταιρεία NVIDIA για τις κάρτες γραφικών και αποτελεί το όνομα της αρχιτεκτονικής και της γλώσσας προγραμματισμού ταυτόχρονα. Με χρήση της CUDA είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι GPU για γενική χρήση. Σήμερα υπάρχουν βιβλιοθήκες CUDA που επεκτείνουν τις δυνατότητες υπάρχουσών γλωσσών προγραμματισμού όπως η C,C++ και η Fortran σε προγραμματισμό καρτών γραφικών. Υπάρχουν επεκτάσεις και για άλλες γλώσσες όπως Python, Perl, Java κ.α. (WIK). Άλλη πλατφόρμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προγραμματισμό σε κάρτες γραφικών είναι και η OPEN CL η οποία μπορεί να εκτελεστεί τόσο σε κάρτες NVIDIA όσο και άλλες κάρτες που υποστηρίζουν τον προγραμματισμό σε GPU(σε αντίθεση με την CUDA) και βασίζεται στην γλώσσα C. (WIK)

Η ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡ&Β είναι από τις πρώτες ερευνητικές ομάδες που ανέπτυξαν υπολογιστικούς κώδικες σε κάρτες γραφικών στο πεδίο της υπολογιστικής μηχανικής και διαθέτει σημαντική εμπειρία στον τομέα αυτό. Στο πλαίσιο διδακτορικών διατριβών (Τρομπούκης,2012) αλλά και διπλωματικών εργασιών έχουν αναπτυχθεί κώδικες για τόσο για επίλυση ροών (Βαλσαμάκης,2010-Καββαδίας,2011-Ντανάκας,2012-Ελευθερίου,2012) όσο και κώδικες βελτιστοποίησης έχοντας πετύχει σημαντική επιτάχυνση (Φουντής,2009-Ρήγας,2010). Επίσης έχει μελετηθεί και η χρήση περισσότερων της μίας καρτών γραφικών για επιπλέον παράλληλη επεξεργασία (Ελευθερίου,2012).

5.3.3 Ο GPU επιλύτης

Ο GPU - επιλύτης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής^{3 4} που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία έχει παρόμοια δομή σε γενικές γραμμές με αυτή που περιγράφηκε στο διάγραμμα ροής του σχήματος 5.1 και στη συνέχεια θα περιγραφούν συνοπτικά τα χαρακτηριστικά του.

Ο ρευστοδυναμικός επιλύτης της ΜΠΥΡ&Β είναι γενικής χρήσης και μπορεί να εφαρμοστεί για διάφορες περιπτώσεις τόσο εξωτερικής όσο και εσωτερικής αεροδυναμικής για το πρωτεύον και το συζυγές πρόβλημα. Σε όλες τις περιπτώσεις απαιτεί την εισαγωγή του κατάλληλου 2Δ ή 3Δ υπολογιστικού πλέγματος και τον ορισμό των καταλλήλων παραμέτρων σε αρχείο εισόδου. Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, σε συνεργασία με μέλη της ΜΠΥΡ&Β προστέθηκε στο λογισμικό η δυνατότητα να εκτελεί αεροελαστικές επιλύσεις τόσο ως πρωτεύον όσο και ως συζυγές πρόβλημα.

Στο λογισμικό αυτό (που προγραμματίστηκε σε περιβάλλον CUDA) περιλαμβάνεται η δυνατότητα της επαναγένεσης του υπολογιστικού πλέγματος με χρήση της μεθόδου των ελατηρίων (βλέπε υποενότητα 4.1.2) ώστε σε κάθε αεροελαστικό κύκλο να ανανεώνεται η παραμορφωμένη γεωμετρία και η δυνατότητα του ορισμού κριτηρίου τερματισμού για τις αεροελαστικές επαναλήψεις (είτε μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είτε άλλο κριτήριο σύγκλισης). Η επικοινωνία με τον κώδικα δομικής ανάλυσης γίνεται μέσω αρχείου που σχετίζεται με την παραμορφωμένη γεωμετρία. Όσον αφορά το συζυγές πρόβλημα, η επικοινωνία ρευστοδυναμικού και δομικού μέρους γίνεται τόσο μεταξύ των δύο επιλυτών όσο και σε επίπεδο παραγώγων ευαισθησίας, ώστε μέσω της σχέσης 5.26 να υπολογιστεί η ολική παράγωγος ευαισθησίας του συζευγμένου προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι με χρήση λογισμικού προγραμματισμένου για κάρτες γραφικών σε εργασίες που έχουν γίνει στην ΜΠΥΡ&Β έχει παρατηρηθεί σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους σε σχέση με την αντίστοιχη επίλυση σε CPU (περίπου 20-100 φορές). Επομένως, γίνεται δυνατή η μελέτη περισσότερων περιπτώσεων στον διαθέσιμο χρόνο έτσι ώστε να είναι δυνατή η διερεύνηση των διαφόρων παραμέτρων που επηρεάζουν το κάθε πρόβλημα.

Η κάρτα γραφικών που χρησιμοποιήθηκε για τις δοκιμές στην παρούσα εργασία είναι μια κάρτα γραφικών NVIDIA Corporation GF110 (GeForce GTX 580) που ανήκει στην συστοιχία καρτών γραφικών της ΜΠΥΡ&Β. Η κάρτα αυτή είναι κατασκευασμένη σύμφωνα με την αρχιτεκτονική Fermi και έχει μνήμη 1536 MB.

³ I.C. KAMPOLIS, X.S. TROMPOUKIS, V.G. ASOUTI, K.C. GIANNAKOGLU: CFD-based Analysis and Two-level Aerodynamic Optimization on Graphics Processing Units, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199, No. 9-12, pp. 712-722, 2010.

⁴ V.G. ASOUTI, X.S. TROMPOUKIS, I.C. KAMPOLIS, K.C. GIANNAKOGLU: Unsteady CFD Computations Using Vertex-Centered Finite Volumes for Unstructured Grids on Graphics Processing Units, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 67(2), pp. 232-246, 2011.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Αποτελέσματα αεροελαστικής βελτιστοποίησης

6.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της επίλυσης με το λογισμικό αεροελαστικής βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε. Επιπλέον, θα διερευνηθούν ορισμένοι βασικοί παράγοντες του προβλήματος το οποίο περιγράφηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 5 και για λόγους πληρότητας θα αναφερθούν στην υποενότητα 6.2.1 επιγραμματικά τα βασικά χαρακτηριστικά του.

6.2 Αποτελέσματα

6.2.1 Βασικά στοιχεία του προβλήματος

Τα βασικά στοιχεία του προβλήματος αεροελαστικής βελτιστοποίησης είναι:

Μεταβλητές σχεδιασμού: \hat{x}_i, \hat{y}_i (οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier)

Συνάρτηση-στόχος: $(\min) F = (v(L) - v_{tar})^2 + w \frac{1}{2} \int_{SW} (p - p_{tar})^2 dS$, όπου $v(L)$ το βέλος κάμψης (κατακόρυφη μετατόπιση) του ελεύθερου άκρου της πτέρυγας-δοκού, v_{tar} μια επιθυμητή τιμή του βέλους κάμψης, p_{tar} μια επιθυμητή τιμή κατανομής πίεσης πάνω στην επιφάνεια της πτέρυγας (στερεό όριο) η οποία είναι της μορφής $p_{tar}=p(x,y)$ και w συντελεστής βαρύτητας.

Η συνάρτηση-στόχος, όπως έχει αναφερθεί και στο κεφάλαιο 5, εκφράζει την επίτευξη μιας επιθυμητής κατανομής πίεσης και μια επιθυμητής τιμής βέλους κάμψης στο άκρο της πτέρυγας. Σε κάθε περίπτωση που θα παρουσιαστεί, ως επιθυμητή κατανομή πίεσης αναφοράς έχει επιλεγεί η κατανομή πίεσης στην πτέρυγα εάν η γωνία της επ' άπειρο ροής είχε μια συγκεκριμένη τιμή, μεγαλύτερη ή μικρότερη από αυτή την οποία επιβάλλεται στην κάθε περίπτωση. Έτσι, με την αλλαγή της θέσης των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier, αλλάζει η μορφή της αεροτομής και της πτέρυγας και παράγεται μικρότερη ή μεγαλύτερη άνωση ώστε να προσεγγιστεί όσο το δυνατόν η επιθυμητή κατανομή πίεσης. Το ίδιο συμβαίνει αντίστοιχα και για το βέλος κάμψης.

Στις περιπτώσεις που θα εξεταστούν σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθούν 14 σημεία ελέγχου Bézier, 6 στην πλευρά υποπίεσης (suction side), 6 στην πλευρά υπερπίεσης (pressure side) και 2 στα άκρα της αεροτομής. Επειδή όμως πρέπει να διατηρηθεί όσο το δυνατόν το σχήμα της αεροτομής, τα δύο σημεία ελέγχου στα άκρα της αεροτομής (στην ακμή προσβολής και την ακμή εκφυγής) παραμένουν ακίνητα τόσο κατά x όσο και κατά y .

Όσον αφορά τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου, στις περιπτώσεις που εξετάζονται στις υποενότητες 6.2.2-6.2.3 μπορούν να μετακινηθούν κατά την κατακόρυφη διεύθυνση μόνο ενώ στις περιπτώσεις που εξετάζονται στην υποενότητα 6.2.4 μπορούν να μετακινηθούν και

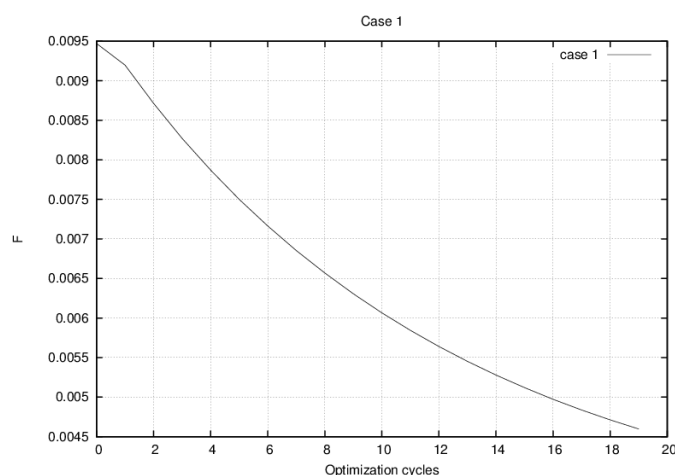
στην οριζόντια διεύθυνση. Και στις δύο περιπτώσεις πάντως, οι αρχικές θέσεις των σημείων ελέγχου (και κατ' επέκταση η αρχική μορφή της αεροτομής της πτέρυγας) είναι ίδιες.

Επίσης, θεωρείται ότι κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας, οι αεροτομές σε κάθε θέση αλλάζουν με τον ίδιο τρόπο που αλλάζει και η αεροτομή στη βάση της πτέρυγας- επομένως ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού, είναι αυτός που προαναφέρθηκε.

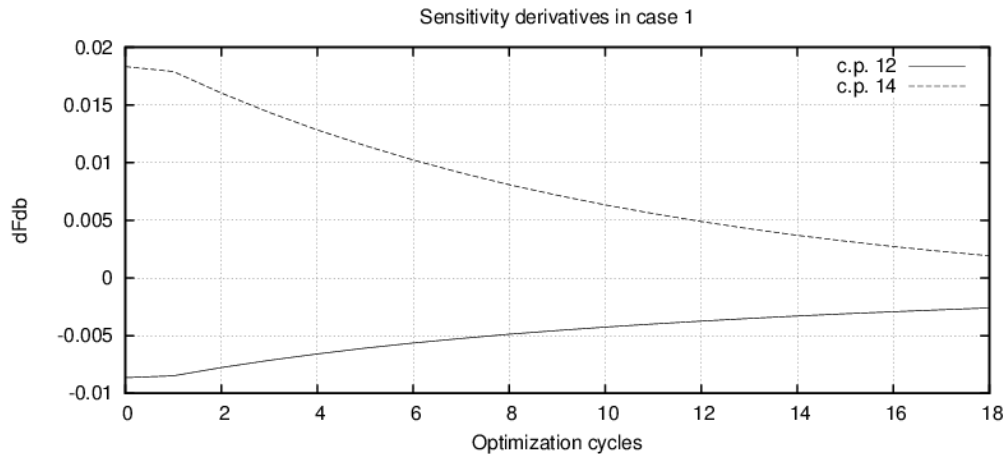
Πρέπει να **σημειωθεί** ότι στις περιπτώσεις που μελετώνται στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται αποτελέσματα μετά από 10 ή 20 κύκλους βελτιστοποίησης (ανάλογα, σε κάθε περίπτωση) ώστε να έχει νόημα η σύγκριση περιπτώσεων στις οποίες διερευνάται η τιμή μιας παραμέτρου, όπως π.χ. το βήμα της απότομης καθόδου η (να συγκρίνονται με περιπτώσεις με όλα τα στοιχεία ίδια και μόνη διαφορά την τιμή του η). Έτσι, **όταν γίνεται αναφορά σε τελικά (final) αποτελέσματα** είτε σε διαγράμματα είτε στο κείμενο, αυτό σημαίνει αποτελέσματα στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης και όχι απαραίτητα τα βέλτιστα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση.

6.2.2 Αποτελέσματα 1ης περίπτωσης

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της πρώτης περίπτωσης που μελετάται. Σε αυτήν την περίπτωση, η γωνία της επ' άπειρον ροής είναι 1° και επιθυμείται η επίτευξη της κατανομής πίεσης και του βέλους κάμψης που θα έδινε η πτέρυγα αν η ροή είχε γωνία επ' άπειρον ροής 5 μοίρες. Ο συντελεστής βαρύτητας w σε αυτήν την περίπτωση, όπως και σε όλες που θα εξεταστούν στο κεφάλαιο 6, είναι μονάδα (στο τέλος της υποενότητας 6.2.4 γίνεται σχετικό σχόλιο).



Σχ.6.1α: Εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-στόχου της περίπτωσης 1 συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.

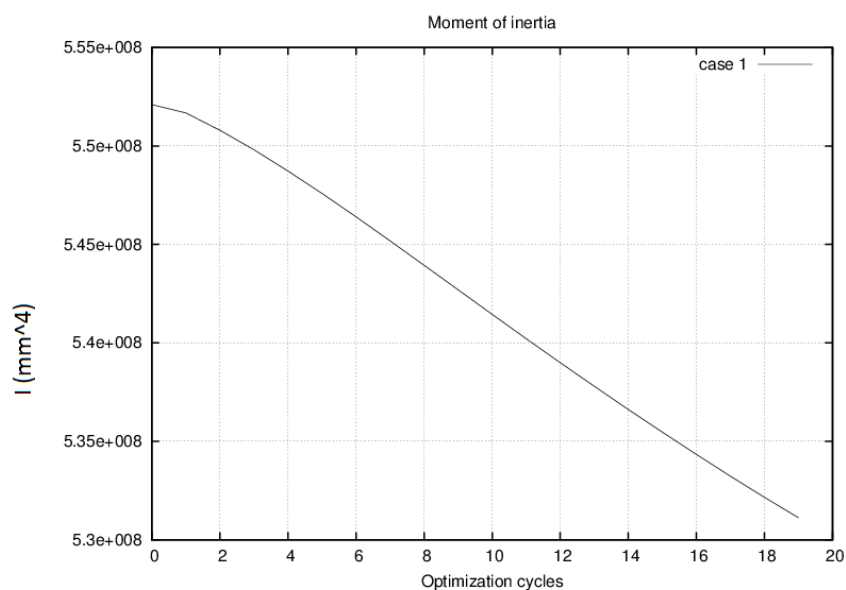


Σχ.6.1β: Μεταβολή των παραγώγων ευαισθησίας, καθώς εξελίσσεται η βελτιστοποίηση για δύο σημεία ελέγχου στην περίπτωση 1. Οι δύο καμπύλες αντιστοιχούν σε δύο σημεία ελέγχου (c.p. xx=control point με αύξοντα αριθμό xx) της πλευράς υποπίεσης της αεροτομής της πτέρυγας τα οποία μετατοπίζονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης της περίπτωσης 1 παρατηρήθηκε ότι τόσο οι επιλύτες του πρωτεύοντος, όσο και οι επιλύτες του συζυγούς προβλήματος συνέκλιναν με την επιθυμητή ακρίβεια (το σχετικό σφάλμα σε σχέση με την πρώτη επανάληψη μειώθηκε πέραν των 15 τάξεων μεγέθους). Επίσης, παρατηρήθηκε ότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, ο αεροελαστικός επιλύτης συνέκλινε επαρκώς. Γενικά, προέκυψε ότι η επιτάχυνση της επίλυσης με τον GPU-επιλύτη ήταν της τάξεως του 20-25x (20-25 φορές ταχύτερα από την επίλυση με λογισμικό μόνο για CPU), κάτι που επέτρεψε την μελέτη αρκετών περιπτώσεων σε λογικό χρονικό διάστημα (επίλυση σε διάστημα ώρας αντί για διάστημα ημερών), οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Στο σχήμα 6.1α απεικονίζεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται η μείωση της τιμής της συνάρτησης-στόχου, περίπου στο υποδιπλάσιο σε 20 κύκλους βελτιστοποίησης.

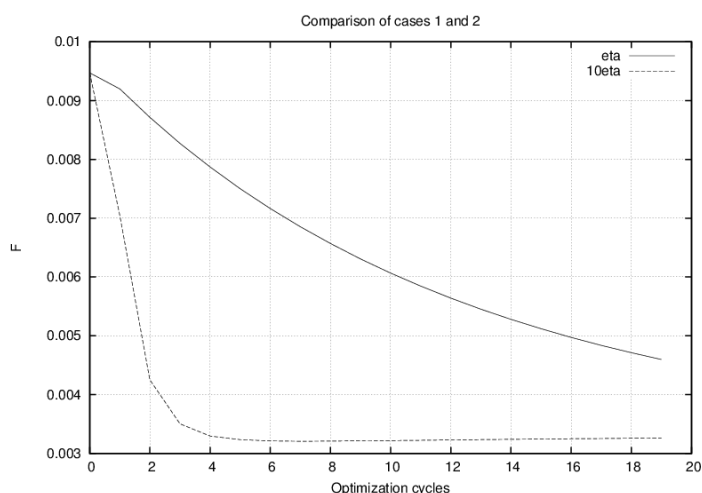
Έπειτα, στο σχήμα 6.2 παρουσιάζεται η μεταβολή της τιμής της ροπής αδράνειας, η οποία, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 5 αποτελεί ενδιάμεση μεταβλητή σχεδιασμού του δομικού τμήματος του προβλήματος βελτιστοποίησης, και συνδέεται άμεσα με την αλλαγή της μορφής της αεροτομής.



Σχ. 6.2: Μεταβολής της ροπής αδράνειας της αεροτομής, καθώς εξελίσσεται η βελτιστοποίηση στην περίπτωση 1.

Από το σχήμα 6.2 παρατηρείται ότι, στην περίπτωση 1, η τιμή της ροπής αδράνειας μειώνεται κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Αυτό σημαίνει γενικά ότι αναδιατάσσονται οι κόμβοι του περιγράμματος της αεροτομής με τέτοιο τρόπο ώστε η ροπή αδράνειας να μειώνεται (ως προς άξονα κάθετο στην διαμήκη διάσταση της πτέρυγας). Για να ερμηνευθεί ορθότερα αυτό το αποτέλεσμα, πρέπει να συνδυαστεί και με παρατήρηση της αλλαγής στη μορφή της αεροτομής, κάτι που θα γίνει παρακάτω.

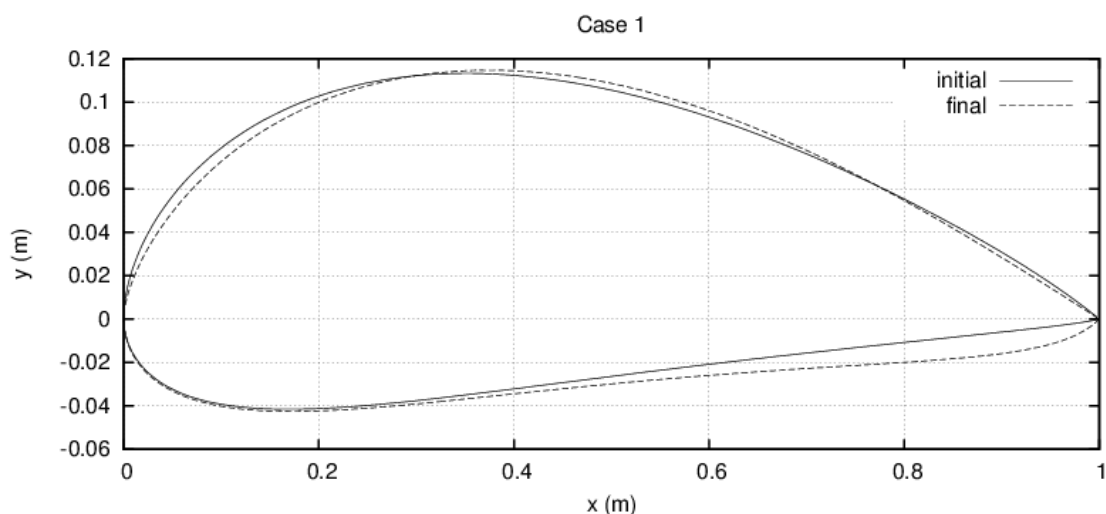
Στη συνέχεια θα γίνει μια διερεύνηση για τις τιμές του *βήματος της απότομης καθόδου η* που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη τιμή με το μικρότερο υπολογιστικό κόστος (δηλαδή με τους λιγότερους κύκλους βελτιστοποίησης). Επιλέχθηκαν διάφορες τιμές του *η* και τελικά διαπιστώθηκε ότι η καλύτερη τιμή του *η* είναι δεκαπλάσια αυτής που είχε επιλεγεί αρχικά. Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται συγκριτικά η εξέλιξη των τιμών της συνάρτησης- στόχου για την 1^η περίπτωση που μελετήθηκε, καθώς και αυτή με το δεκαπλάσιο *η*:



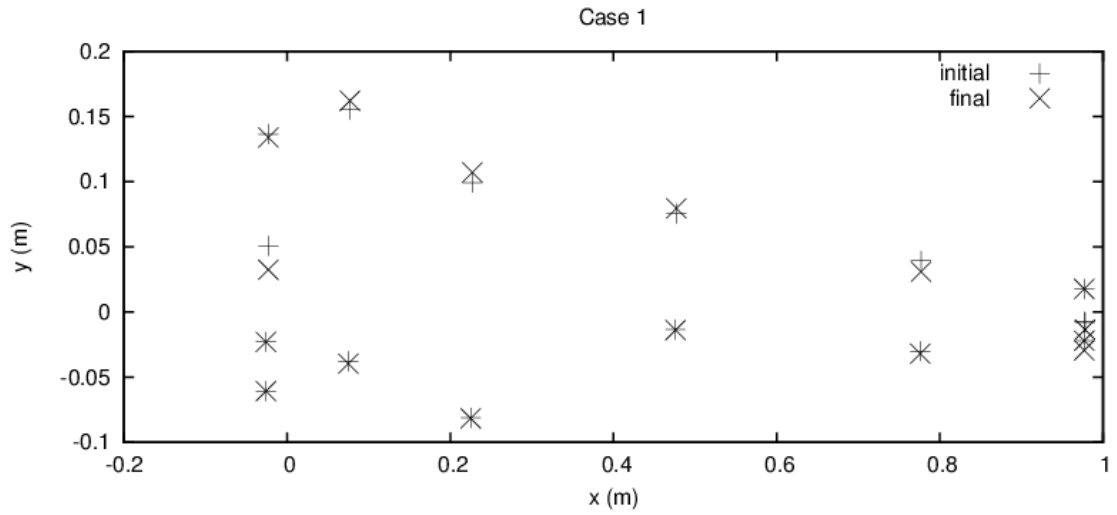
Σχ. 6.3: Σύγκριση δύο περιπτώσεων βελτιστοποίησης (εξέλιξη συνάρτησης-στόχου): συνεχής καμπύλη- η, διακεκομμένη καμπύλη 10*η.

Από αυτό το διάγραμμα φαίνεται η σημαντική διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο περιπτώσεων όσον αφορά τη μείωση των τιμών της συνάρτησης-στόχου (δηλαδή την επίτευξη του στόχου που τέθηκε). Με χρήση της καλύτερης τιμής του η προσεγγίστηκε η βέλτιστη τιμή σε 3-4 κύκλους βελτιστοποίησης (περίπου 0.003) ενώ στην άλλη περίπτωση ακόμα και μετά από 20 κύκλους η τιμή ήταν 1,5 φορά μεγαλύτερη (περίπου 0.005). Επίσης, η πορεία προς την σύγκλιση ήταν ταχύτερη και μη-γραμμική σε αντίθεση με την άλλη περίπτωση όπου η πορεία προς τη σύγκλιση ήταν σχεδόν γραμμική.

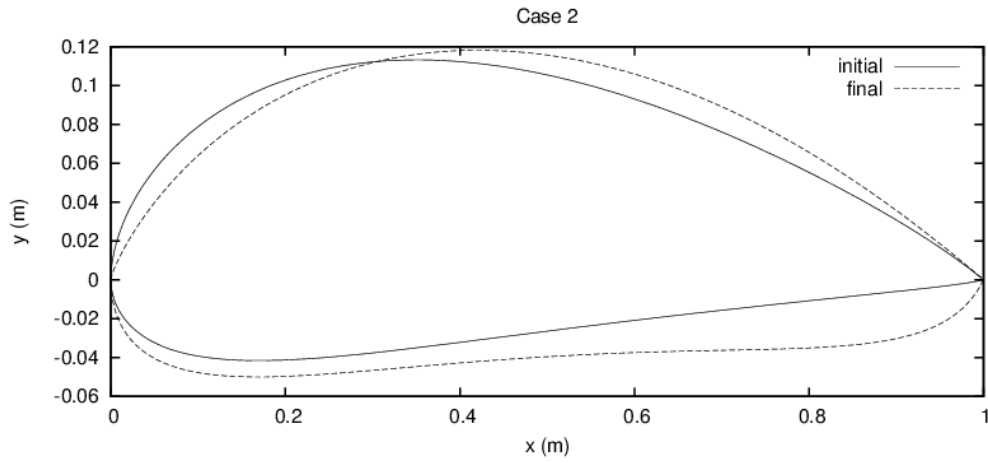
Για να γίνει εμφανής η διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων όσον αφορά το τελικό αποτέλεσμα παρατίθενται στη συνέχεια (Σχ. 6.4, 6.5 και Σχ. 6.6,6.7) σε συγκριτικά διαγράμματα η αρχική και τελική μορφή της αεροτομής της πτέρυγας που επιτυγχάνεται σε κάθε περίπτωση καθώς και οι αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier σε κάθε περίπτωση.



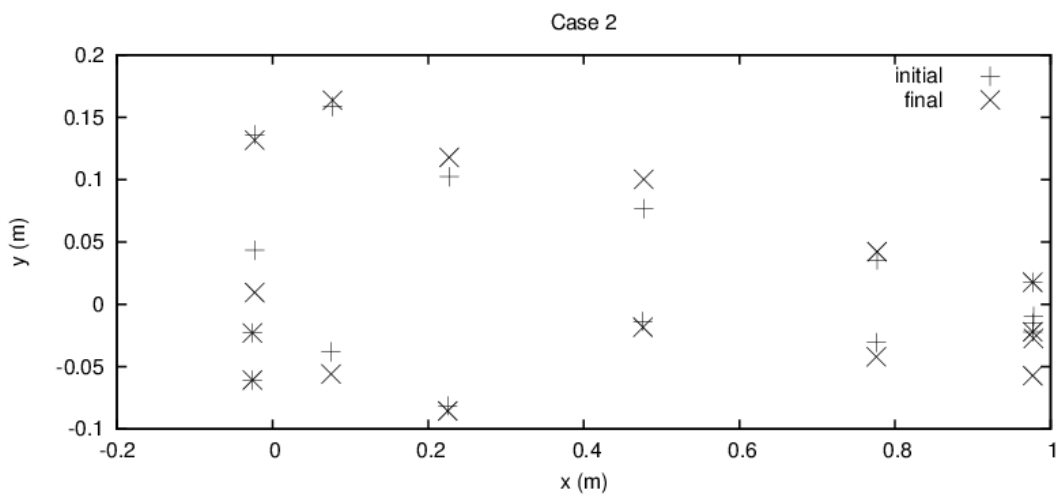
Σχ. 6.4: Σύγκριση μορφής αρχικής και τελικής αεροτομής για την περίπτωση 1.



Σχ.6.5: Αρχικές και τελικές θέσεις σημείων ελέγχου Βέζιερ για την περίπτωση 1.



Σχ.6.6: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 2.



Σχ.6.7: Αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου Βέζιερ στην περίπτωση 2.

Από αυτά τα σχήματα παρατηρείται ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκε μεγαλύτερος συντελεστής η είναι πολύ μεγαλύτερη η διαφορά στη μορφή της αεροτομής σε σχέση με την περίπτωση με το μικρότερο η . Η μορφή αλλάζει με παρόμοιο τρόπο και στις δύο περιπτώσεις αλλά στην περίπτωση με το μεγαλύτερο η η αλλαγή είναι πιο εμφανής. Το ίδιο ισχύει και για την αλλαγή των θέσεων των σημείων Βέζιερ τα οποία μετακινούνται με τον κατάλληλο τρόπο ώστε να προκύψει η προαναφερθείσα αλλαγή μορφής των αεροτομών. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας. Συγκεκριμένα, στο σχήμα 6.1β παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για την περίπτωση 1 για ένα σημείο που κινείται προς τα κάτω και για ένα σημείο που κινείται προς τα πάνω (κατακόρυφα). Το πρόσημο των παραγώγων επιβεβαιώνει απόλυτα την κίνηση αυτών των σημείων ελέγχου.

6.2.3 Αποτελέσματα σε άλλες περιπτώσεις

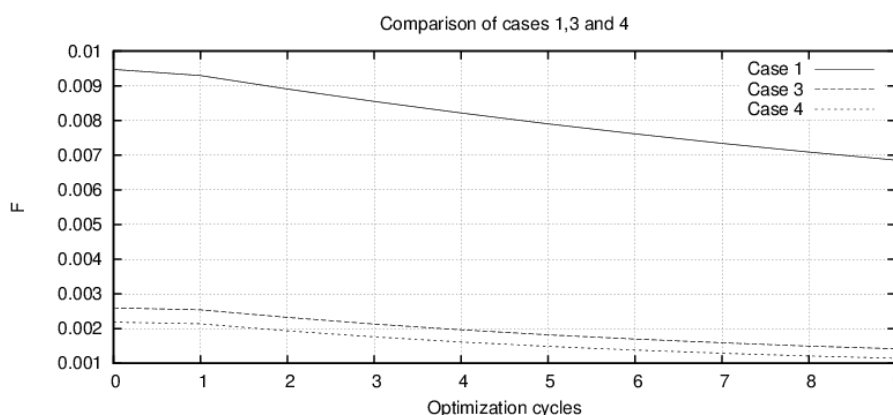
Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο επιπλέον περιπτώσεις με διαφορετική κατανομή πίεσης-στόχο (και βέλος κάμψης-στόχο την τιμή που προκύπτει στην αντίστοιχη γωνία επ' άπειρον ροής) και θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Στην μία περίπτωση η επ' άπειρον γωνία της ροής είναι 3° και επιθυμείται με αλλαγή του σχήματος της αεροτομής (και κατ' επέκταση όλης της πτέρυγας) να επιτευχθεί η κατανομή πίεσης και το μέγιστο βέλος κάμψης που θα προέκυπταν εάν η γωνία επ' άπειρον ροής ήταν 5° (δηλαδή να δημιουργεί μεγαλύτερη άνωση η πτέρυγα), ενώ στην άλλη περίπτωση επιθυμείται να προσεγγιστούν τα αντίστοιχα μεγέθη σε γωνία επ' άπειρον ροής 1° (δηλαδή να δημιουργείται μικρότερη δύναμη άνωσης).

Στον πίνακα 6.1 αναφέρονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά όλων των περιπτώσεων που παρουσιάζονται στις υποενότητες 6.2.2 και 6.2.3:

A/A	Στόχος
1	$5^\circ \rightarrow 1^\circ$
2	$5^\circ \rightarrow 1^\circ$
3	$3^\circ \rightarrow 5^\circ$
4	$3^\circ \rightarrow 1^\circ$

Πίνακας 6.1: Χαρακτηριστικά περιπτώσεων που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 6.

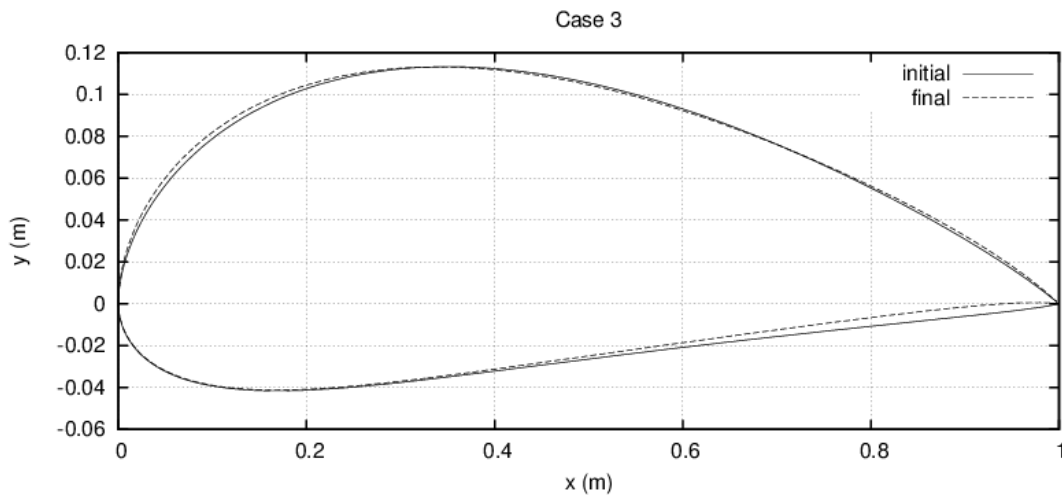
Στο διάγραμμα 6.8 παρουσιάζεται η εξέλιξη της συνάρτησης-στόχου των περιπτώσεων 1,3 και 4.



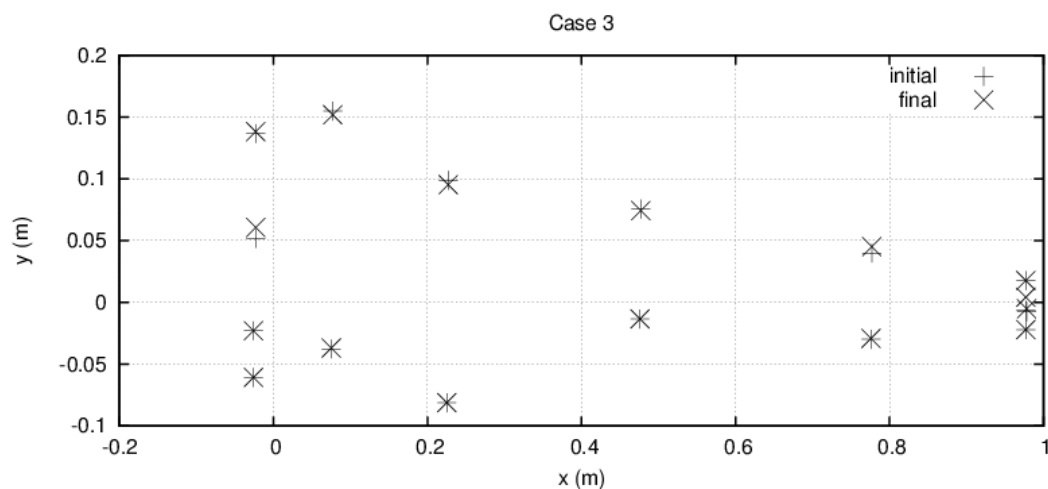
Σχ.6.8: Σύγκριση των περιπτώσεων 1,3 και 4 (εξέλιξη της συνάρτησης-στόχου συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης σε περιπτώσεις με στόχο την κατανομή πίεσης και το βέλος κάμψης σε διαφορετική γωνία επ' άπειρον ροής).

Φαίνεται ότι, όπως αναμενόταν, στην περίπτωση που η μεταβολή που απαιτείται είναι πιο μεγάλη ($5^\circ \rightarrow 1^\circ$) η τιμή της συνάρτησης-στόχου είναι μεγαλύτερη, τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος των κύκλων βελτιστοποίησης (χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις ο ίδιος αριθμός κύκλων) ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις είναι σαφώς μικρότερες οι τιμές, με μια μικρή διαφορά εάν επιθυμείται να προσεγγιστούν οι κατανομές για μικρότερη γωνία επ' άπειρον ροής. Επίσης, φαίνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις η πορεία βελτιστοποίησης ακολουθεί παρόμοια μορφή (έχει επιλεγεί το ίδιο η σε όλες τις περιπτώσεις) και επιτυγχάνεται σχεδόν η ίδια ποσοστιαία μείωση των τιμών της συνάρτησης-στόχου.

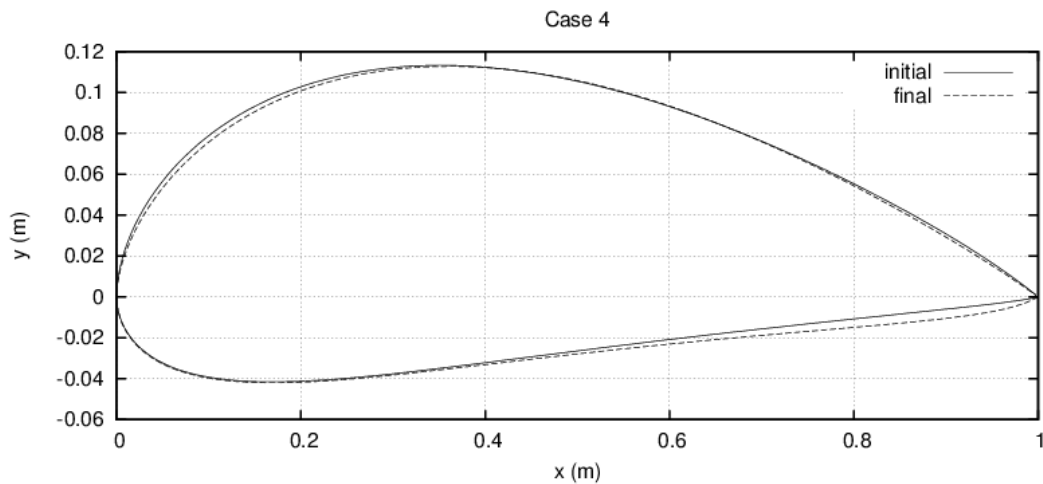
Τέλος, παρουσιάζονται παρακάτω (Σχ. 6.9, 6.11 και 6.10,6.12) οι αρχικές και τελικές μορφές της αεροτομής στις περιπτώσεις 3 και 4 καθώς και οι αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου Βέζιερ.



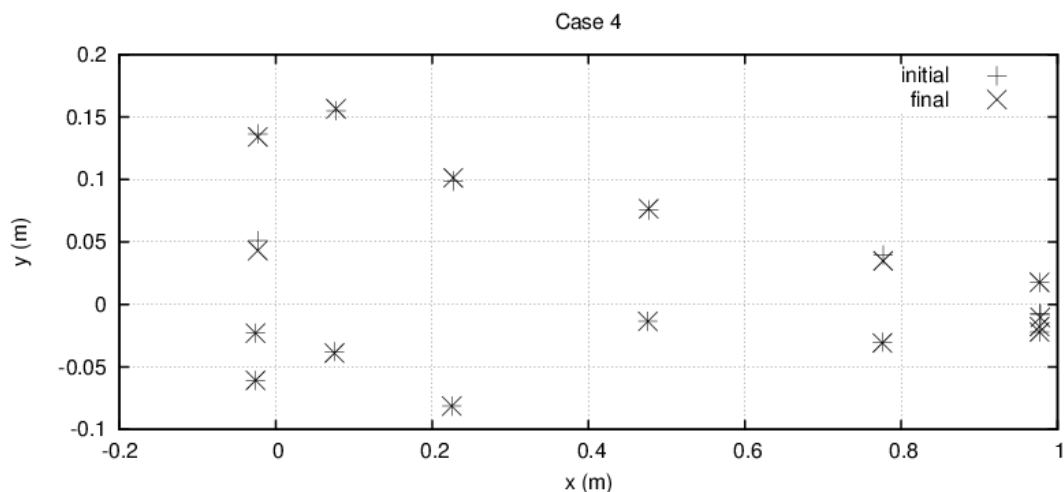
Σχ.6.9: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 3.



Σχ. 6.10: Αρχικές και τελικές θέσεις σημείων ελέγχου Βέζιερ στην περίπτωση 3.



Σχ.6.11: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 4.



Σχ. 6.12: Αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου Bézier στην περίπτωση 4.

Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρείται μια σημαντική διαφορά μεταξύ τους, η οποία σχετίζεται με τον στόχο που επιθυμείται να επιτευχθεί. Στην περίπτωση που επιθυμείται μεγαλύτερη άνωση (περίπτωση 3) η τελική μορφή της αεροτομής έχει μετακινηθεί «προς τα πάνω» σε θέσεις στην πλευρά υπερπίεσης και κοντά στην ακμή εκφυγής ενώ στην αντίστοιχη περιοχή, στην περίπτωση 4 η τελική μορφή είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω, κάτι που είναι εμφανές και στα διαγράμματα των σημείων ελέγχου Bézier.

Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι προσεγγίστηκε και στις δύο περιπτώσεις το επιθυμητό αποτέλεσμα και ότι υπολογίστηκαν σωστά, με τη χρήση της συζυγούς μεθόδου, οι επιθυμητές παράγωγοι ευαισθησίας σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Μια τελευταία παρατήρηση αφορά το γεγονός ότι σε καμία περίπτωση δεν προσεγγίζεται το απόλυτο μηδέν στις τιμές της συνάρτησης-στόχου. Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχει περιορισμός στην αλλαγή της μορφής της πτέρυγας (η οποία θα οδηγήσει τελικά στην επίτευξη των στόχων) για την οποία χρησιμοποιείται καμπύλη Bézier της οποίας τα σημεία ελέγχου κινούνται μόνο κατακόρυφα από τον τρόπο παραμετροποίησης της μορφής της. Δηλαδή, διαφορετική παραμετροποίηση μπορεί να οδηγήσει σε μικρότερες τιμές της

συνάρτησης-στόχου γιατί επιτρέπει στην πτέρυγα να λάβει τέτοια γεωμετρία ώστε να επιτυγχάνει καλύτερα το στόχο. Αυτό θα φανεί καλύτερα στην υποενότητα 6.2.4 στην οποία χρησιμοποιούνται περισσότερες μεταβλητές σχεδιασμού.

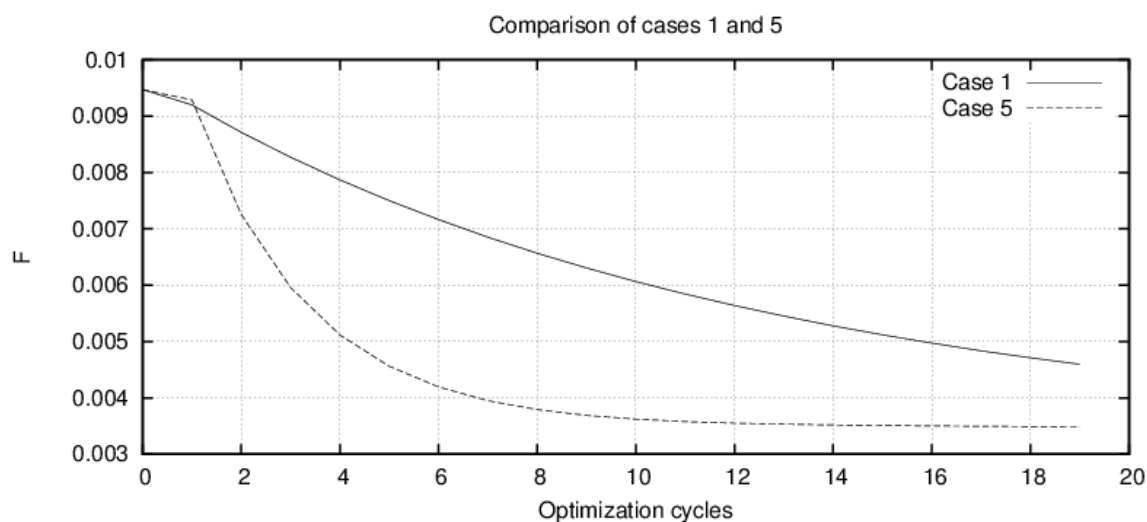
6.2.4 Αποτελέσματα με χρήση περισσότερων μεταβλητών σχεδιασμού

Στην υποενότητα 6.2.4 παρουσιάζονται αποτελέσματα με χρήση περισσότερων μεταβλητών σχεδιασμού και συγκεκριμένα στις περιπτώσεις αυτές επιτρέπεται στα σημεία ελέγχου να μετατοπιστούν και κατά την οριζόντια διεύθυνση. Έτσι, η μορφή της αεροτομής μπορεί να έχει πιο σύνθετη γεωμετρία απ' ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις. Τα χαρακτηριστικά κάθε περίπτωσης που θα μελετηθεί στην υποενότητα 6.2.4 παρατίθενται στον πίνακα 6.2.

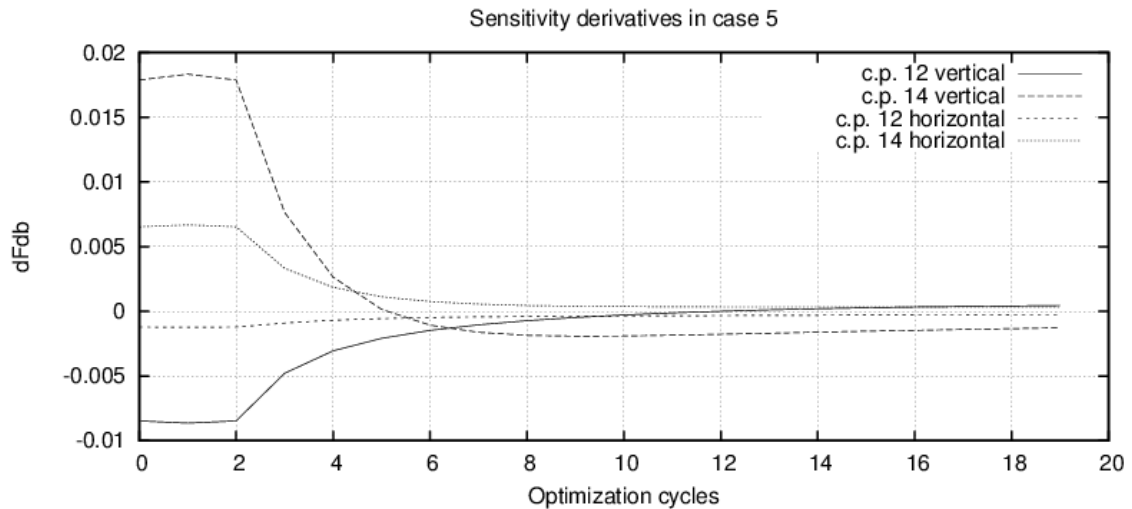
A/A	Στόχος
5	$1^\circ \rightarrow 5^\circ$
6	$1^\circ \rightarrow 5^\circ$
7	$1^\circ \rightarrow 5^\circ$
8	$3^\circ \rightarrow 5^\circ$
9	$3^\circ \rightarrow 1^\circ$
10	$5^\circ \rightarrow 1^\circ$
11	$1^\circ \rightarrow 4^\circ$

Πίνακας 6.2: Χαρακτηριστικά περιπτώσεων της υποενότητας 6.2.4.

Αρχικά, παρουσιάζεται η πρώτη περίπτωση που μελετήθηκε, η οποία έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την περίπτωση 1 (βλέπε πίνακα 6.1) αλλά διαφορετικό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού. Στο διάγραμμα 6.13α παρουσιάζονται οι καμπύλες της συνάρτησης-στόχου για τις δύο αυτές περιπτώσεις.



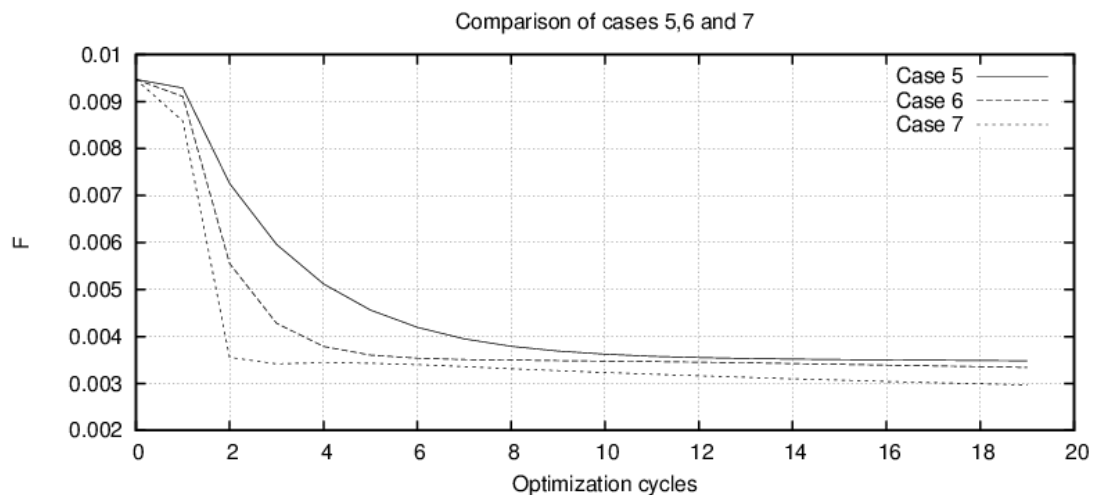
Σχ.6.13α: Σύγκριση των περιπτώσεων 1 και 5 (εξέλιξη της συνάρτησης-στόχου συναρτήσεως των κύκλων βελτιστοποίησης σε περίπτωση με σημεία ελέγχου που κινούνται μόνο κατακόρυφα και σε περίπτωση με σημεία ελέγχου που κινούνται και οριζόντια και κατακόρυφα).



Σχ.6.13β: Μεταβολή των παραγώγων ευαισθησίας καθώς εξελίσσεται η βελτιστοποίηση για την περίπτωση 5 (για 2 σημεία ελέγχου). Οι δύο καμπύλες αντιστοιχούν σε δύο σημεία ελέγχου (c.p. $x\gamma$ =control point με αύξοντα αριθμό $x\gamma$ κινούμενα στην κατεύθυνση $\gamma\gamma$) της πλευράς υποπίεσης της αεροτομής της πτέρυγας τα οποία μετατοπίζονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Από το διάγραμμα 6.13α φαίνεται ότι στην περίπτωση που επιτράπηκε η κίνηση των σημείων ελέγχου και στις δύο διευθύνσεις η συνάρτηση στόχος έλαβε αρκετά μικρότερες τιμές (για ίδιο συντελεστή η και αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης). Επομένως, επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα που είχε αναφερθεί στο τέλος της υποενότητας 6.2.3, ότι με έναν διαφορετικό τρόπο αλλαγής της γεωμετρίας της αεροτομής θα ήταν δυνατή η περαιτέρω μείωση των τιμών της συνάρτησης-στόχου, δηλαδή η κοντινότερη προσέγγιση του στόχου.

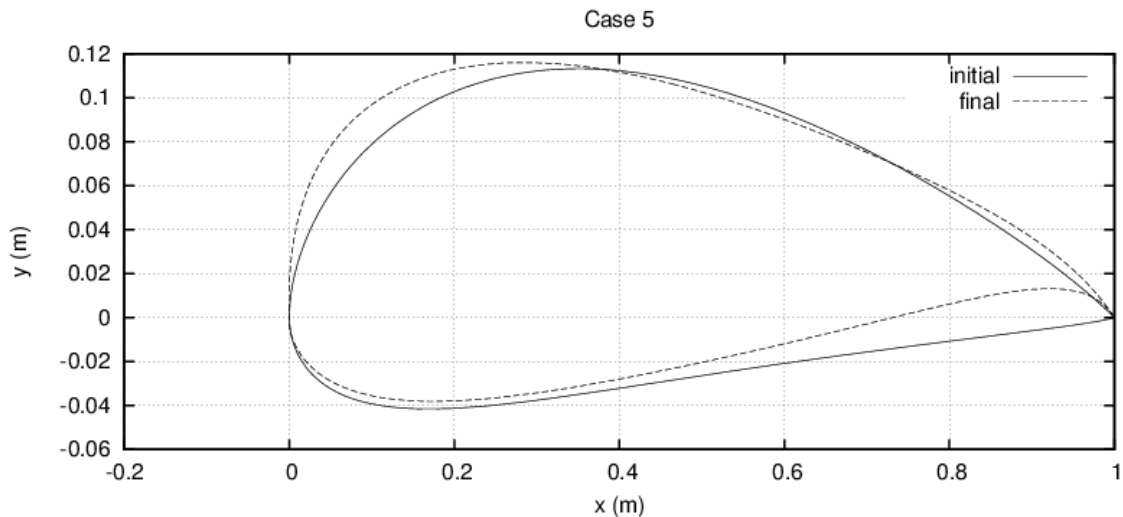
Στη συνέχεια, όπως και στην υποενότητα 6.2.2, έγινε μια διερεύνηση των τιμών του συντελεστή βήματος της απότομης καθόδου η για να προσδιοριστεί η τιμή που δίνει την βέλτιστη τιμή στον μικρότερο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα για διάφορες τιμές του η (η , $2*\eta$, $5*\eta$) παρουσιάζονται στο διάγραμμα 6.14 .



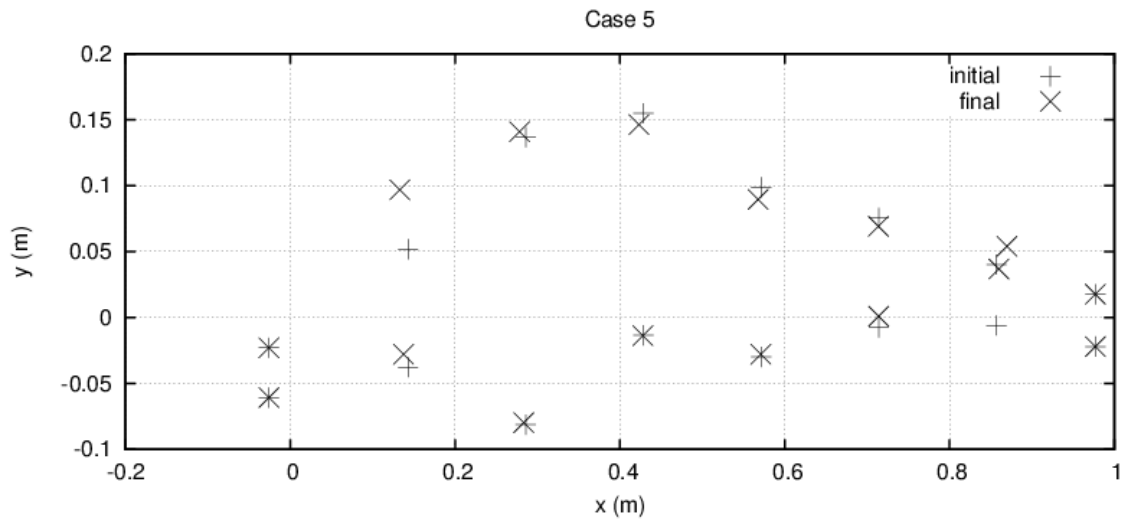
Σχ.6.14: Σύγκριση των περιπτώσεων 5,6 και 7 σε διάγραμμα εξέλιξης της συνάρτησης-στόχου συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης (η , 2η , 5η).

Όπως αναμένεται, προκύπτει ότι, με χρήση μεγαλύτερου συντελεστή η επιτυγχάνεται γρηγορότερη σύγκλιση και μικρότερη τελική τιμή (σε περιπτώσεις με τον ίδιο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης). Σε σχέση με το σχήμα 6.3 που απεικονίζονταν καμπύλες με διαφορετικό η για την περίπτωση 1 (κίνηση σημείων ελέγχου μόνο κατακόρυφα) παρατηρείται ότι η διαφορά μεταξύ των καμπυλών ήταν πιο σημαντική. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση το καλύτερο η που πρέπει να επιλεγεί είναι μικρότερο από την περίπτωση 1 και η τιμή του είναι κοντά στο 5η καθώς φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές του η δεν αναμένεται σημαντικά γρηγορότερη σύγκλιση. Επιπλέον, η μικρότερη τιμή που επιτυγχάνεται στην περίπτωση με την καλύτερη τιμή του η είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της περίπτωσης 1 όπως αναμενόταν.

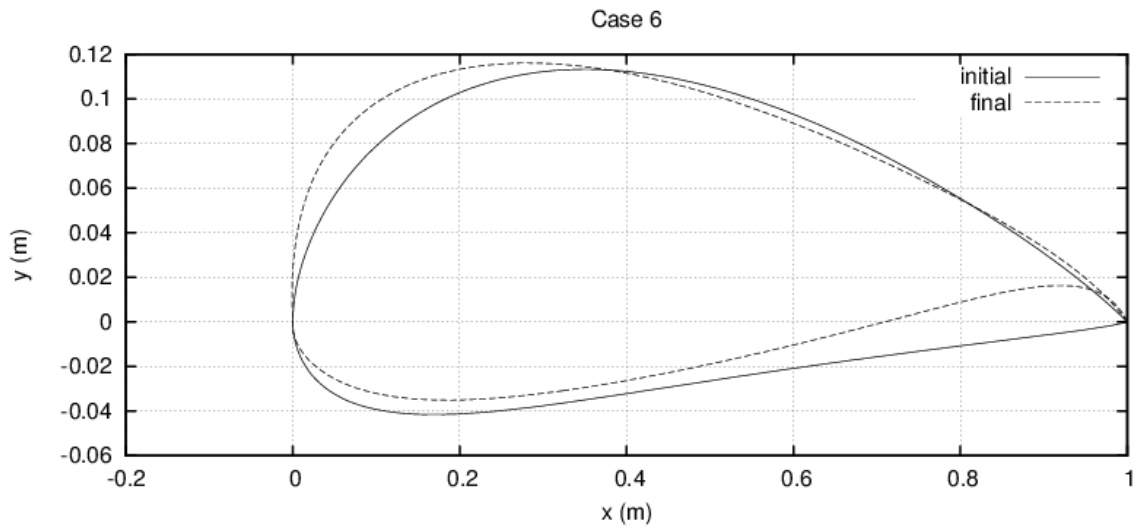
Έπειτα, παρατίθενται οι αρχικές και τελικές μορφές των αεροτομών (Σχήματα 6.15,6.17) καθώς και οι θέσεις των σημείων ελέγχου Bézier (Σχήματα 6.16,6.18) για τις περιπτώσεις 5,6 (η , 2η).



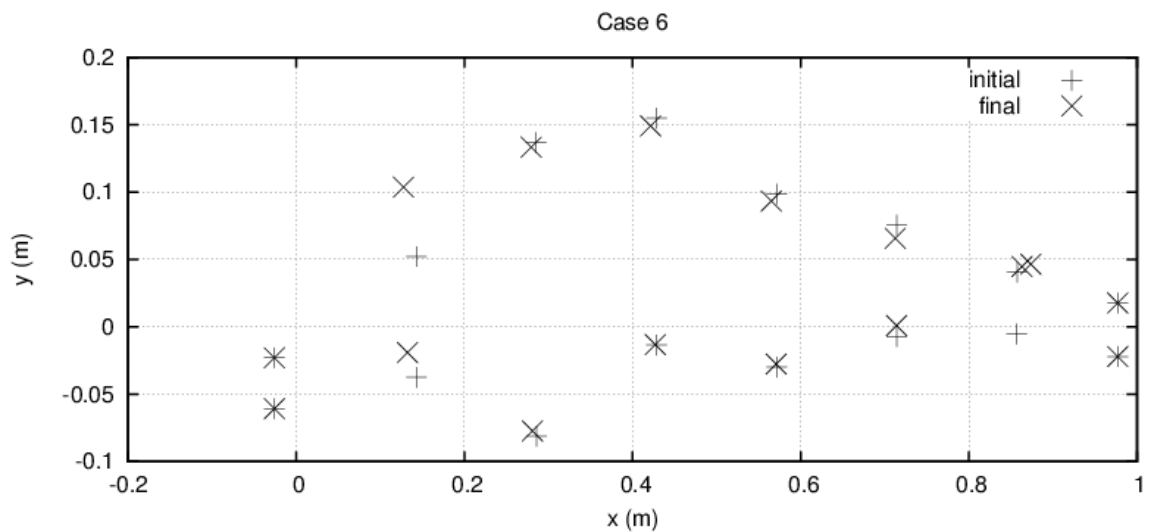
Σχ. 6.15: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 5.



Σχ.6.16: Αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου στην περίπτωση 5.



Σχ.6.17: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 6.



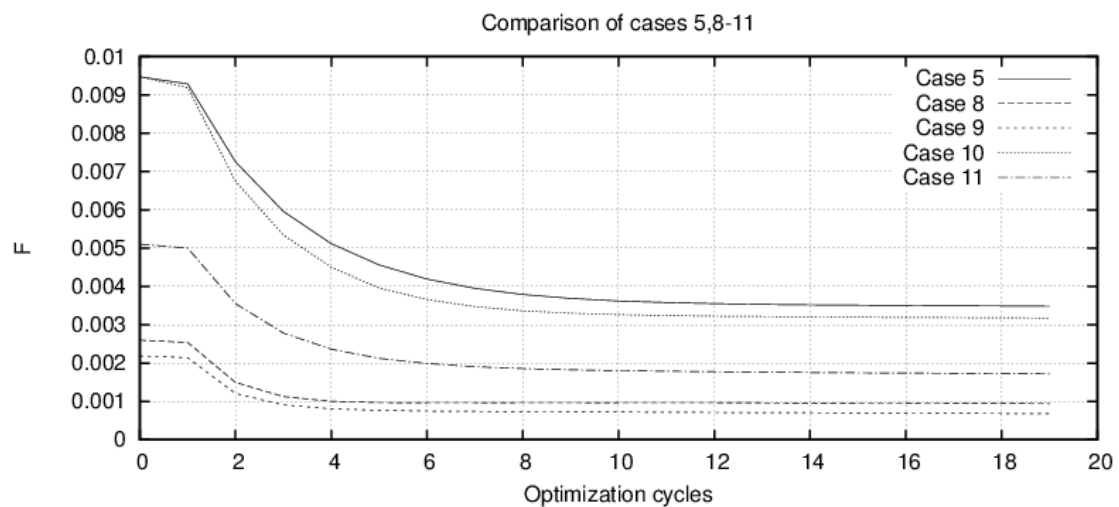
Σχ.6.18: Αρχικές και τελικές θέσεις σημείων ελέγχου Βέζιερ στην περίπτωση 6.

Όπως αναμένεται, στην περίπτωση που το η είναι μεγαλύτερο, παρατηρείται η μεγαλύτερη αλλαγή στην μορφή της αεροτομής. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση, είναι πιο εμφανής η αλλαγή στην μορφή της αεροτομής σε σχέση με τις περιπτώσεις των προηγούμενων υποενότητων. Το ίδιο παρατηρείται και στα διαγράμματα αρχικών και τελικών θέσεων των σημείων ελέγχου όπου παρατηρούνται σημαντικές αλλαγές σε ορισμένα σημεία και προς τις δύο κατευθύνσεις έτσι ώστε να προκαλείται η σημαντική μεταβολή στη μορφή της αεροτομής.

Στο σχήμα 6.13β παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που αντιστοιχούν σε δύο σημεία ελέγχου στο πάνω δεξιά κομμάτι της αεροτομής της περίπτωσης 5. Συγκρίνοντας την πορεία των σημείων ελέγχου με την πορεία των τιμών των παραγώγων παρατηρείται συμφωνία μεταξύ τους (π.χ αν το σημείο κινείται αριστερά και κάτω οι παράγωγοι έχουν θετικό πρόσημο, γιατί πρόκειται για ελαχιστοποίηση).

Τέλος, θα παρουσιαστούν ορισμένες περιπτώσεις που έγιναν με διαφορετικές κατανομές-στόχους. Τα στοιχεία αυτών των περιπτώσεων παρατίθενται στον Πίνακα 6.2.

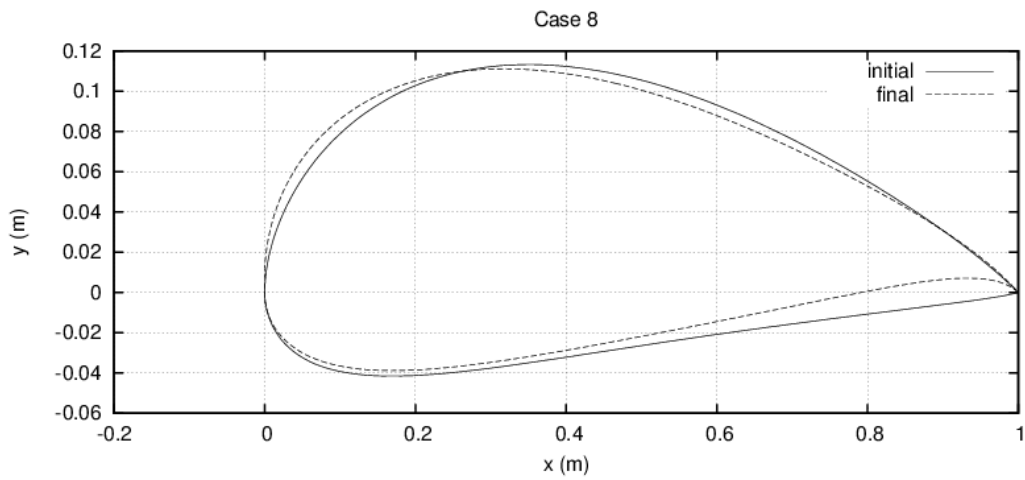
Στο διάγραμμα 6.19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όσον αφορά την συνάρτηση-στόχο στις περιπτώσεις 5 και 8-11.



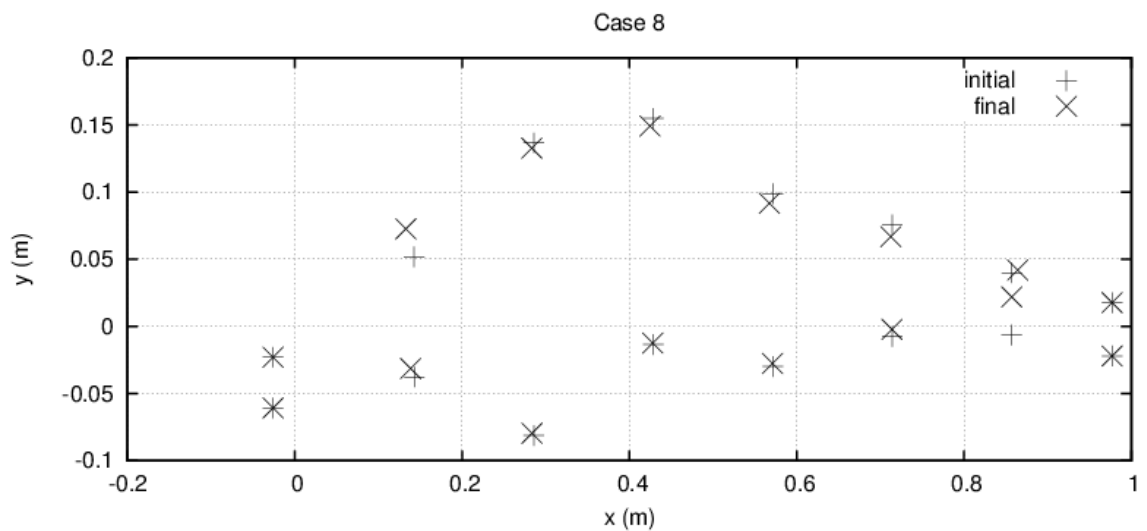
Σχ.6.19: Σύγκριση των περιπτώσεων 5,8-11 (εξέλιξη της συνάρτησης-στόχου συναρτήσεων των κύκλων βελτιστοποίησης για περιπτώσεις με στόχο τις κατανομές πίεσης και το βέλος κάμψης σε διαφορετικές γωνίες επ' άπειρον ροής).

Αρχικά παρατηρείται (όπως παρατηρήθηκε και σε προηγούμενη υποενότητα) ότι οι περιπτώσεις με πιο δύσκολο στόχο διακρίνονται από τις υπόλοιπες διότι σε αυτές λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές η συνάρτηση-στόχος. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται η ίδια πορεία σύγκλισης και περίπου η ίδια ποσοστιαία μεταβολή στους 20 κύκλους βελτιστοποίησης, η οποία είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την μεταβολή στις περιπτώσεις 1,3,4 όπως εικονίζονται στο σχήμα 6.8.

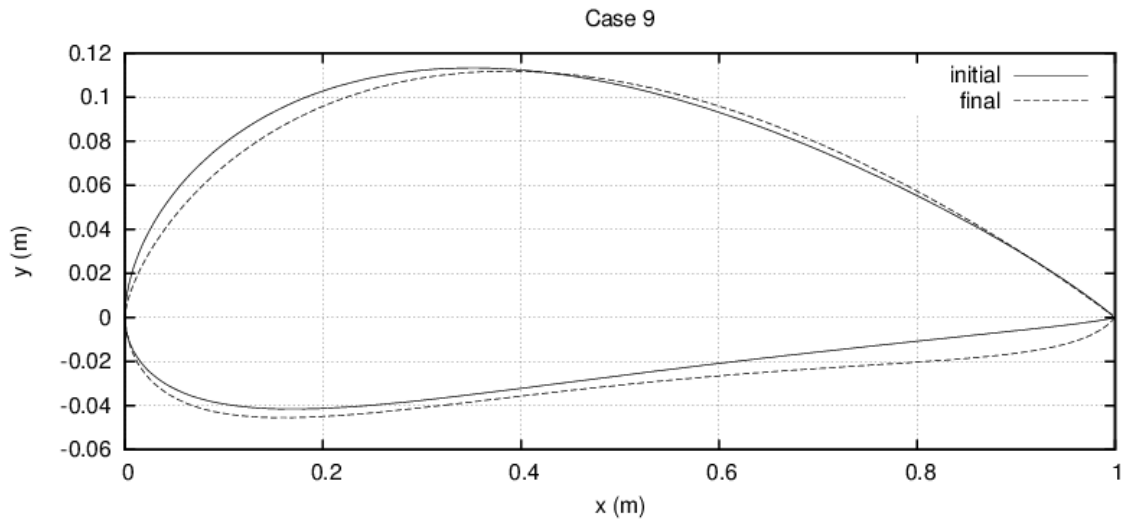
Στα διαγράμματα 6.20-6.24 παρουσιάζονται η αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στις περιπτώσεις 8 και 9 καθώς και οι αρχικές και τελικές μορφές των σημείων ελέγχου σε κάθε περίπτωση.



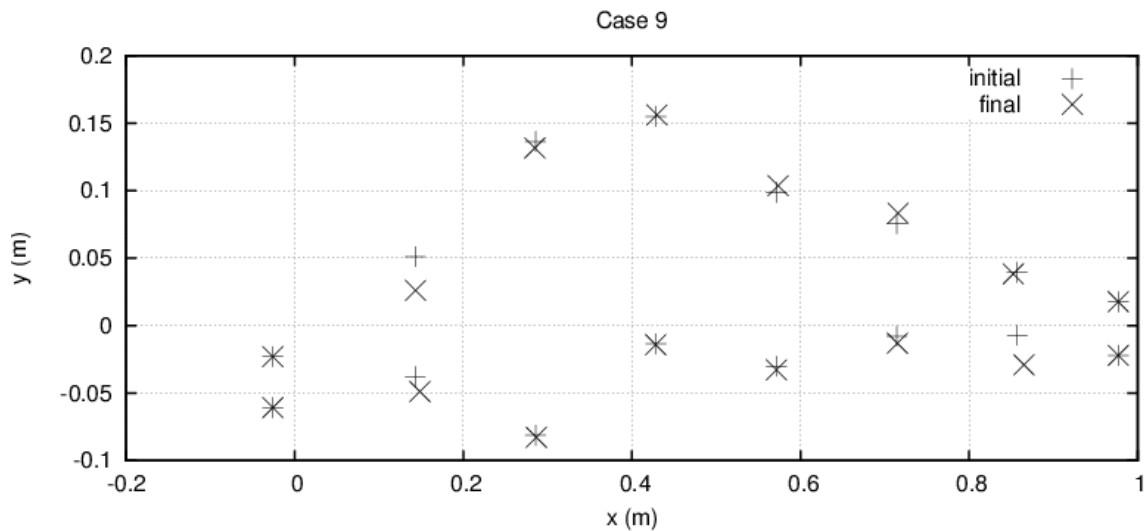
Σχ.6.20: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 8.



Σχ.6.21: Αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου Bézier στην περίπτωση 8.



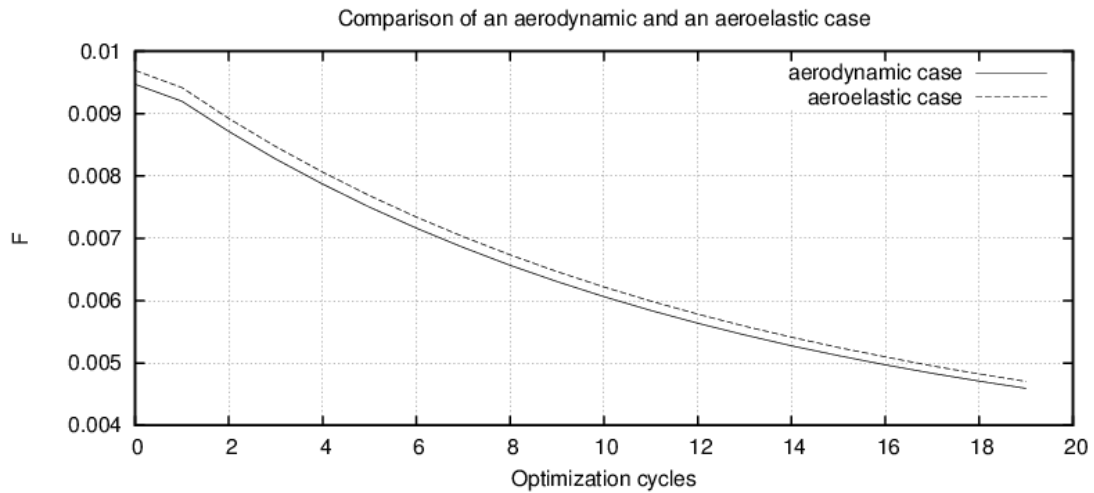
Σχ.6.22: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής στην περίπτωση 9.



Σχ.6.23: Αρχικές και τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου Bézier στην περίπτωση 9.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα της περίπτωσης 9 με τα διαγράμματα της περίπτωσης 8 προκύπτει ότι, όπως αναμένεται, η μορφή της αεροτομής αλλάζει με αντίθετο τρόπο στις δύο περιπτώσεις επειδή ο στόχος είναι αντίθετος (αύξηση και μείωση της άνωσης αντίστοιχα). Όμως, σε αυτή την περίπτωση η διαφορά είναι πιο εμφανής απ' ό,τι στις περιπτώσεις που υπήρχε η δυνατότητα μόνο κατακόρυφης μετατόπισης των σημείων ελέγχου.

Στο σχήμα 6.24 παρουσιάζονται τα διαγράμματα της συνάρτησης-στόχου για μία περίπτωση στην οποία ο στόχος είναι καθαρά αεροδυναμικός και για την ίδια περίπτωση όταν ο στόχος είναι αεροδυναμικός και δομικός (όπως σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στο κεφάλαιο 6).



Σχ.6.24: Σύγκριση περίπτωσης με αεροδυναμικό και αεροελαστικό στόχο.

Σε αυτήν την περίπτωση, με συντελεστή βαρύτητας $w=1$ (δηλαδή ισότιμη συνεισφορά στη συνάρτηση -στόχο των δυο επιμέρους τμημάτων της) υπάρχει μια μικρή αύξηση στις τιμές της συνάρτησης-στόχου που οφείλεται στην συνεισφορά του «δομικού όρου». Προκύπτει επομένως ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση συνεισφέρει περισσότερο το ρευστοδυναμικό τμήμα σε σχέση με το δομικό κάτι που είναι αναμενόμενο γιατί απαιτείται η επίτευξη μιας συγκεκριμένης τιμής και όχι μιας ολόκληρης κατανομής όπως στο ρευστοδυναμικό τμήμα. Επομένως, η εισαγωγή των συντελεστών βαρύτητας είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις που θα υπήρχε η απαίτηση να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στον δομικό στόχο γιατί με επιβολή μικρού συντελεστή βαρύτητας στο ρευστοδυναμικό τμήμα θα αναδεικνύονταν περισσότερο ο δομικός στόχος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Ανακεφαλαίωση- Συμπεράσματα

7.1 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε λογισμικό βελτιστοποίησης με χρήση της συζυγούς μεθόδου για περιπτώσεις πλήρως συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης. Εφαρμόστηκε η μέθοδος της απότομης καθόδου με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αρχικά σε προβλήματα δομικής μηχανικής και στη συνέχεια σε πρόβλημα στατικής αεροελαστικής ανάλυσης.

Αρχικά, αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος και προγραμματίστηκε κώδικας βελτιστοποίησης με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης με πρωτεύοντα κώδικα πεπερασμένων στοιχείου τύπου δοκού. Έγιναν δοκιμές για την πιστοποίηση του κώδικα και σύγκριση των αποτελεσμάτων του με κώδικα διακριτής συζυγούς μεθόδου. Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν κρίθηκαν αξιόπιστα.

Έπειτα, προγραμματίστηκε ο κώδικας στατικής αεροελαστικότητας ο οποίος χρησιμοποιείται ως πρωτεύων κώδικας στο λογισμικό πλήρους συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης. Ο κώδικας απαρτίζεται από δύο μέρη: το δομικό μέρος στο οποίο χρησιμοποιείται ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού και το ρευστοδυναμικό μέρος στο οποίο χρησιμοποιείται κώδικας που επιλύει τις 3D εξισώσεις Euler και έχει αναπτυχθεί στην ΜΠΥΡ&Β. Εξετάστηκαν ορισμένες περιπτώσεις προκειμένου να εξακριβωθεί η αξιοπιστία του επιλύτη και αξιολογήθηκαν τα αποτελέσματα όσον αφορά τη σύγκλιση του βέλους κάμψης της δοκού και των αεροελαστικών φορτίσεων προκειμένου να προσδιοριστούν οι κατάλληλες αριθμητικές παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν στο ολοκληρωμένο λογισμικό βελτιστοποίησης.

Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για την περίπτωση πλήρους συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας ενός αεροελαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης. Παρουσιάστηκε αναλυτικά η ανάπτυξη της μεθόδου και περιγράφηκε ο τρόπος υλοποίησης της σε λογισμικό.

Τέλος, με χρήση του κώδικα βελτιστοποίησης που υλοποιήθηκε έγιναν διάφορες δοκιμές και παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Το πρόβλημα που επιλύεται είναι η βελτιστοποίηση μορφής μιας πτέρυγας της οποίας η αεροτομή περιγράφεται από καμπύλη Bezier. Αρχικά, μελετήθηκαν περιπτώσεις στις οποίες τα σημεία ελέγχου της καμπύλης είχαν τη δυνατότητα κατακόρυφης κίνησης μόνο και στη συνέχεια, έγιναν δοκιμές και με περιπτώσεις στις οποίες τα σημεία ελέγχου επιτρέπεται να κινηθούν και οριζόντια και κατακόρυφα. Με την μελέτη αυτών των περιπτώσεων αποκτήθηκε εμπειρία από περιπτώσεις συζευγμένης αεροελαστικής βελτιστοποίησης, πιστοποιήθηκε ότι το λογισμικό παράγει ορθά αποτελέσματα (σύγκλιση των επιμέρους κωδίκων, σωστό πρόσημο παραγώγων ευαισθησίας σε κάθε περίπτωση) και διερευνήθηκε η συμπεριφορά της μεθόδου σε περιπτώσεις βελτιστοποίησης μορφής όπου παρατηρήθηκε η ταχεία σύγκλιση της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα πάνω στο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

- Χρήση διαφορετικών μοντέλων τόσο στο δομικό όσο και στο ρευστοδυναμικό κομμάτι (π.χ. μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων τύπου κελύφους και εξισώσεις Navier-Stokes αντί για Euler) και αντίστοιχη ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου
- Εφαρμογή μιας άλλης μεθόδου αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης π.χ. τη μέθοδο συζυγών κλίσεων (conjugate gradient)
- Επιλογή διαφορετικού τρόπου παραμετροποίησης της καμπύλης (π.χ. NURBS)
- Δημιουργία αεροελαστικού επιλύτη για προβλήματα δυναμικής αεροελαστικότητας και μελέτη προβλημάτων δυναμικής αεροελαστικότητας με αυτόν
- Ανάπτυξη λογισμικού για αεροελαστική βελτιστοποίηση σε περιπτώσεις δυναμικής αεροελαστικότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- AER. (n.d.). Ανάκτηση από <http://www.scribd.com/doc/59234770/Aeroelasticity>
- Bisplinghoff, R., & Ashley, H. (1975). *Principles of Aeroelasticity*. New York: Dover Publications, Inc.
- Chandrupatla, T. R., & Belegundu, A. D. (2005). *Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία για Μηχανικούς*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., & Lesoinne, M. (1998). Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.163* .
- Felippa, C. A. (2004). *Introduction to Finite Element Methods*. Colorado: University of Colorado (Σημειώσεις Μαθήματος).
- Guruswamy, G. (2001, Σεπτέμβριος 14). A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations. *Computers and Structures* .
- Kwon, Y. W., & Bang, H. (1997). *The Finite Element Method using MATLAB*. New York: CRC Press.
- Logan. (2005). *An Introduction to the Finite Element method*. New York: McHill.
- Lynch, D., & O'Neil, K. (1980, May). Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions. *Finite Elements in Water Resources, Vol.2* .
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). A continuous adjoint method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows. *Computers and Fluids, Vol.36* , σσ. 325-241.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2012). Aerodynamic Design using the truncated Newton algorithm and the continuous adjoint approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , σσ. 724-739.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2008). Aerodynamic Shape Optimization using Adjoint and Direct Approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering (State of the Art Reviews), Vol. 15 (4)* , σσ. 447-488.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2008). Computation of the Hessian Matrix in Aerodynamic Inverse Design using Continuous Adjoint Formulations. *Computers and Fluids, Vol.37* , σσ. 1029-1039.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 53* , σσ. 455-469.

Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). Total Pressure Losses Minimization in Turbomachinery Cascades, Using a New Continuous Adjoint Formulation. *Proc. IMechE, Part A: Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery)*, Vol.221 , σσ. 865-872.

S.Rao, S. (2004). *The Finite Element Method in Engineering, Fourth Edition*. Elsevier Science & Technology Books.

WIK. (n.d.). Ανάκτηση από en.wikipedia.com

WIV. (n.d.). Ανάκτηση από Wikiversity: en.wikiversity.org

Wright, J. R., & Cooper, J. E. (2007). *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. Wiley.

Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). Continuous Adjoint Approach to the Spalart Allmaras Turbulence Model, for Incompressible Flows. *Computers and Fluids*, Vol. 38 , σσ. 455-469.

Βαλσαμάκης, Γ. (2010). *Αριθμητική Επίλυση Μη-Μόνιμου Πεδίου Ροής σε Κάρτες Γραφικών με Απεικόνισή του σε Πραγματικό Χρόνο*. Αθήνα.

Γιαννάκογλου, Κ. Χ. (1999). *Γένεση και Προσαρμογή Αριθμητικών Πλεγμάτων*. Αθήνα: σημειώσεις ΕΜΠ.

Γιαννάκογλου, Κ. Χ. (2006). *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Αθήνα: σημειώσεις ΕΜΠ.

Ελευθερίου, Γ. (2012). *Προγραμματισμός Παράλληλου Επιλύτη Εξισώσεων Euler για 3D Ροές σε Δομημένα Πλέγματα σε Συστοιχίες καρτών γραφικών*.

Καββαδίας, Ι. (2011). *Προγραμματισμός επιλύτη 3D εξισώσεων ροής ατρίβους ρευστού σε δομημένα πλέγματα σε κάρτες γραφικών*.

Κάρκαλος, Ν. Ε. (2012). *Προγραμματισμός λογισμικού αεροελαστικών προσομοιώσεων και βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για ατρίβεις ροές. Εφαρμογές και Πιστοποίηση*.

Ντανάκας, Γ. (2012). *Επίλυση Διδιάστατης Ροής με Κεντροκυψελική Διατύπωση σε Μη-Δομημένα Πλέγματα. Προγραμματισμός σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών*.

Ρήγας, Γ. (2010). *Προσομοίωση και χαμηλού κόστους βελτιστοποίηση του ενεργητικού ελέγχου ροής ρευστού γύρω από αεροτομή, σε κάρτες γραφικών*.

Τρομπούκης, Ξ. (2012). *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, Διδακτορική διατριβή*.

Φούντης, Ε. (2009). *Προγραμματισμός σε Κάρτες Γραφικών και Εφαρμογή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση*.