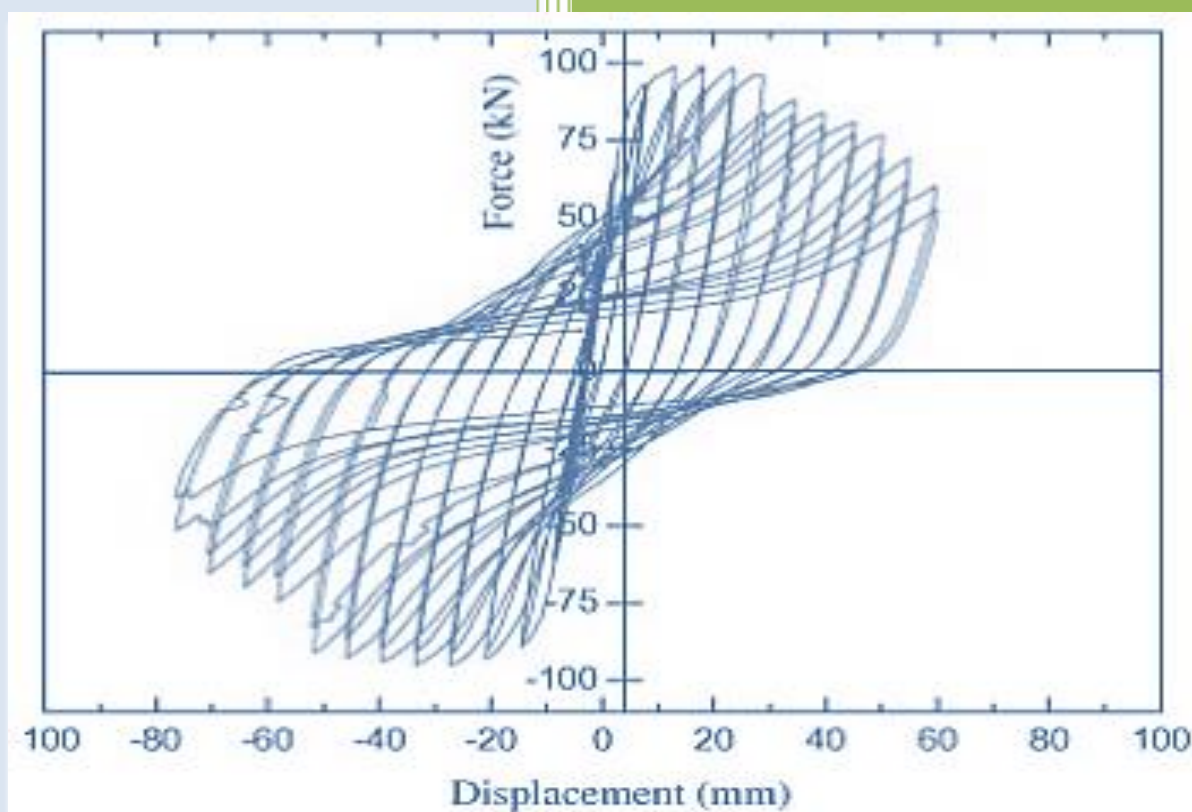


Διπλωματική Εργασία

Ανδριώτης
Χαράλαμπος

Μη Γραμμική Ανάλυση Πλαισίων ΟΣ, με Υστερητικά Προσομοιώματα



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Στατικής &
Αντισεισμικών Ερευνών

Επιβλέπων Καθηγητής:
Κουμούσης Βλάσης

Συνεπιβλέπων:
Γκιμούσης Ηλίας

Αθήνα, 2013

Στους γονείς μου
Χρυσούλα και Παναγιώτη

“The fairest thing we can experience is the mysterious. It is the fundamental emotion which stands at the cradle of true art and true science.”

Albert Einstein

Ευχαριστίες

Τελειώνοντας τη διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου και τα θερμά μου ευχαριστώ σε όλους όσους με βοήθησαν στην πορεία ολοκλήρωσής της.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Βλάση Κουμούση, για το ενδιαφέρον του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, την πάντοτε ευγενική και ουσιαστική του συνδρομή σε στιγμές προβληματισμού και δυσκολιών και την διαρκή διδακτική του παρουσία όποτε τη χρειάστηκα. Οι συναντήσεις μας ήταν πάντοτε εποικοδομητικές και μου έδιναν ώθηση να συνεχίσω. Με τη βοήθειά του γνώρισα ένα καινούργιο κομμάτι της επιστήμης του μηχανικού, που ξεφεύγει κατά πολύ από την προπτυχιακή γνώση και τον ευχαριστώ θερμά.

Ευχαριστώ επίσης το συνεπιβλέποντα Υποψήφιο Διδάκτορα Ε.Μ.Π. Ηλία Γκιμούση για τη συνεχή παρακολούθηση της εξέλιξης της εργασίας. Η προσφορά χρήσιμου και κρίσιμου βιβλιογραφικού υλικού, οι υποδείξεις του, οι προγραμματιστικές του συμβουλές και οι γνώσεις του πάνω στο αντικείμενο της εργασίας, υπήρξαν για μένα καθοριστικής σημασίας στο νέο πεδίο που κλήθηκα να κατανοήσω. Ο κώδικας που ανέπτυξε στη μεταπτυχιακή του εργασία και μετά χαράς και υπομονής μου επεξήγησε, αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο για τη δική μου μετέπειτα προγραμματιστική δουλειά.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον καθηγητή Χρήστο Ζέρη για την προσφορά πολύτιμης βιβλιογραφίας πάνω σε θέματα της εργασίας για τα οποία ζήτησα τη συνδρομή του.

Περίληψη

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΟΣ ΜΕ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ

Ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα – κλειδιά στην ανάλυση των κατασκευών είναι η πλαστικότητα. Η πλαστικότητα μπορεί να εκφραστεί ικανοποιητικά μέσα από μια πληθώρα υστερητικών προσομοιωμάτων που έχουν αναπτυχθεί. Το προσομοίωμα Bouc – Wen (1979) με τις προσθήκες και τροποποιήσεις που υπέστη μεταγενέστερα είναι ένα από αυτά. Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ενσωμάτωση αυτού του τύπου υστέρησης στα στοιχεία ιών ΟΣ. Τα στοιχεία ιών μπορούν να αποτυπώσουν την πλαστικότητα ως κατανεμημένη εντός του στοιχείου αντί της απλής πλην μη ρεαλιστικής θεώρησης της συγκεντρωμένης πλαστικότητας. Κάθε ίνα έχει το δικό της μονοαξονικό νόμο τάσεων παραμορφώσεων, ο οποίος υπακούει παραμορφωσιακά στην επιπεδότητα των διατομών. Ο χάλυβας προσομοιώνεται μέσω του κλασικού προσομοιώματος Bouc – Wen ενώ το σκυρόδεμα μέσω ειδικής τροποποίησης και επέκτασής του. Οι τάσεις ολοκληρώνονται σε επίπεδο διατομής παράγοντας τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη της και στη συνέχεια η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος του στοιχείου για την εξαγωγή των τελικών σχέσεων ισορροπίας του στοιχείου. Οι συναρτήσεις σχήματος που επιλέγονται αφορούν στο πεδίο των μετακινήσεων και ως εκ τούτου τα στοιχεία είναι με βάση τις μετακινήσεις. Η τελική εξίσωση ισορροπίας ολοκληρωμένης της κατασκευής εμφανίζει ένα ελαστικό και ένα υστερητικό μέρος. Το πρώτο αποτελείται από ένα απομειωμένο μητρώο δυσκαμψίας και το διάνυσμα των μετακινήσεων, ενώ το δεύτερο από ένα υστερητικό μητρώο και το διάνυσμα των παραμορφώσεων όλων των ιών. Η μεθοδολογία αυτή εισάγεται στην αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης Newton

– Raphson για το στατικό πρόβλημα και στην και στη μέθοδο Newmark για το δυναμικό. Ακολουθούν μερικές συγκριτικές αριθμητικές εφαρμογές του προτεινόμενου στοιχείου με τα στοιχεία του Opensees, ώστε να διακριβωθεί η αποδοτικότητα και η αξιοπιστία του.

Abstract

NON – LINEAR ANALYSIS OF RC FRAMES WITH HYSTERETIC

MODELS

One of the most important key – concepts of structural analysis is plasticity. Plasticity can be expressed efficiently via a plethora of hysteretic models that have been developed. The Bouc – Wen model (1979), with the improvements and expansions added subsequently, is one of them. The purpose of this thesis is to enter this type of hysteresis in RC fiber elements. Fiber elements can capture distributed plasticity along the element, instead of what simple but unrealistic concentrated plasticity does. Each fiber exhibits its own uniaxial stress-strain law, which obeys the condition of plane cross sections. Steel is simulated via the classical Bouc – Wen model, while concrete via a specific modification and extension. Stress is integrated at the level of cross sections calculating the internal forces and, then, along the element length integration leads to the derivation of the final equilibrium equation of the element. The shape functions have been selected on the displacement field and therefore the elements are displacement based. The final entire structure equilibrium equation includes an elastic part and an hysteretic one. The first consists of a degraded stiffness matrix and a displacement vector, while the second one, of an hysteretic matrix and a deformation vector of all fibers. This method is introduced in the numerical integration methods Newton - Raphson and Newmark for the solution of the static and dynamic problem respectively. Finally, some comparative numerical applications of the proposed and the Opensees elements are presented, in order to determine their efficiency and reliability.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1^ο Εισαγωγή	12
1. Εισαγωγή.....	133
1.1. Γενικά στοιχεία.....	133
1.2. Αντικείμενο εργασίας.....	177
1.3. Διάρθρωση εργασίας.....	188
Κεφάλαιο 2^ο Υστέρηση Bouc – Wen & κλασική πλαστικότητα	21
2. Υστέρηση Bouc-Wen & κλασική πλαστικότητα.....	22
2.1. Η έννοια της υστέρησης.....	22
2.2. Το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen.....	25
2.2.1. Η μαθηματική διατύπωση.....	25
2.2.2. Το μηχανικό ανάλογο.....	27
2.2.3. Διερεύνηση του προσομοιώματος.....	28
2.2.4. Διευρύνσεις του προσομοιώματος.....	32
2.3. Κλασική θεωρία πλαστικότητας.....	37
2.3.1. Βασικές έννοιες.....	37
2.3.2. Το κριτήριο διαρροής.....	39
2.3.3. Ο νόμος της κράτυνσης.....	43
2.3.4. Ο νόμος της πλαστικής ροής.....	45
2.4. Από την κλασική πλαστικότητα στην υστέρηση Bouc-Wen.....	47
2.4.1. Το πολυβάθμιο σύστημα.....	47

2.4.2.	Το μονοβάθμιο σύστημα.....	49
2.4.3.	Αξιώματα πλαστικότητας και Bouc – Wen υστέρηση	52
Κεφάλαιο 3^ο Προσομοίωση χάλυβα		56
3.	Προσομοίωση χάλυβα οπλισμών	57
3.1.	Εισαγωγικά στοιχεία	57
3.2.	Αλγεβρικά προσομοιώματα	59
3.2.1.	Το μοντέλο του EC2	60
3.2.2.	Το μοντέλο Menegotto – Pinto	60
3.3.	Προσομοίωση χάλυβα βάσει της Bouc-Wen υστέρησης.....	61
3.4.	Μακροσκοπική προσέγγιση της απώλειας συνάφειας.....	63
Κεφάλαιο 4^ο Προσομοίωση σκυροδέματος		68
4.	Προσομοίωση σκυροδέματος.....	69
4.1.	Εισαγωγικά στοιχεία	69
4.2.	Αλγεβρικά προσομοιώματα	71
4.2.1.	Το μοντέλο Kent – Scott – Park.....	71
4.2.2.	Το μοντέλο του EC2	74
4.3.	Προσομοίωση βάσει της Bouc – Wen υστέρησης No.1	76
4.3.1.	Η μαθηματική διατύπωση.....	76
4.3.2.	Το μηχανικό ανάλογο	81
4.3.3.	Διερεύνηση προσομοιώματος.....	82
4.4.	Softening & απομείωση δυσκαμψίας.....	84

4.4.1.	Προσέγγιση μέσω τροποποιήσεων κλασικής πλαστικότητας	84
4.4.2.	Προσέγγιση μέσω μηχανικής βλαβών	87
4.4.3.	Προσέγγιση μέσω σύζευξης πλαστικότητας – μηχανικής βλαβών	89
4.4.4.	Λεία συνάρτηση βλάβης & εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας.....	92
4.5.	Προσομοίωση μέσω της Bouc – Wen υστέρησης No.2.....	94
4.5.1.	Η μαθηματική διατύπωση.....	94
4.5.2.	Το μηχανικό ανάλογο	99
4.5.3.	Διερεύνηση του προσομοιώματος	99
Κεφάλαιο 5^ο Στοιχείο δοκού με θεώρηση ινών		102
5.	Στοιχεία δοκού με θεώρηση ινών	103
5.1.	Βασικές έννοιες.....	103
5.2.	Καταστατικές εξισώσεις διατομής	104
5.3.	Καταστατικές εξισώσεις μέλους	107
5.3.1.	Στοιχείο δοκού βάσει των μετακινήσεων	107
5.3.2.	Στοιχείο δοκού βάσει των δυνάμεων	110
5.3.3.	Σύγκριση – Παρατηρήσεις.....	113
5.4.	Υστέρηση Bouc-Wen στο στοιχείο των μετακινήσεων	114
5.4.1.	Καταστατικές εξισώσεις διατομής.....	114
5.4.2.	Καταστατικές εξισώσεις μέλους.....	116
5.4.3.	Καταστατικές εξισώσεις κατασκευής.....	118
5.5.	Επίλυση στατικού προβλήματος	121

5.6.	Επίλυση δυναμικού προβλήματος.....	124
5.6.1.	Μέθοδος Newmark	125
5.6.2.	Μέθοδος Wilson	127
5.6.3.	Μέθοδος Runge – Kutta (state space).....	129
5.6.4.	Ευστάθεια και Ακρίβεια	132
Κεφάλαιο 6^ο Αριθμητικές εφαρμογές		134
6.	Αριθμητικές Εφαρμογές	135
6.1.	Στατική προσαυξητική ανάλυση προβόλου	136
6.2.	Ψευδοδυναμική ανάλυση μονώροφου πλαισίου	144
6.2.1.	Ερμηνεία του φαινομένου της στένωσης.....	151
6.3.	Δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας μονόροφου πλαισίου	156
6.4.	Δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας πολυόροφου πλαισίου	158
Κεφάλαιο 7^ο Συμπεράσματα – Προτάσεις.....		163
7.	Συμπεράσματα – Προτάσεις.....	164
7.1.	Συμπεράσματα	164
7.2.	Προτάσεις για μελλοντικές προσθήκες – έρευνα.....	166
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....		168

Λίστα περιεχομένων σχημάτων

Σχήμα 2.1: Βρόχος υστέρησης.....	22
Σχήμα 2.2: Υστερητικό σύστημα μονοβάθμιου ταλαντωτή.....	23
Σχήμα 2.3: a) Συνάρτηση εισόδου b) Συνάρτηση εξόδου.....	24
Σχήμα 2.4: Ισορροπία μονοβάθμιου ταλαντωτή.....	25
Σχήμα 2.5: a) Μηχανικό ανάλογο προσομοιώματος BW b) Διάγραμμα F-u συστήματος.....	27
Σχήμα 2.6: Επιρροή παραμέτρου n.....	29
Σχήμα 2.7: Οι τέσσερις περιοχές του βρόχου υστέρησης.....	31
Σχήμα 2.8: a) Επιρροή παραμέτρου n b) Επιρροή παραμέτρων β, γ	31
Σχήμα 2.9 : Βρόχος με ασύμμετρη διαρροή.....	34
Σχήμα 2.10: Βρόχος με απομείωση δυσκαμψίας (pivot rule).....	35
Σχήμα 2.11: Βρόχος με απομείωση αντοχής.....	37
Σχήμα 2.12: Ελαστοπλαστικό διάγραμμα $\sigma - \epsilon$ μονοαξονικού εφελκυσμού.....	39
Σχήμα 2.13: Οι επιφάνειες διαρροής Tresca και von Mises.....	40
Σχήμα 2.14: Ο τανυστής των τάσεων στο χώρο.....	41
Σχήμα 2.15: Επιφάνεια διαρροής Bresler – Pister.....	43
Σχήμα 2.16: a) Ισοτροπική κράτυνση b) Κινηματική κράτυνση.....	44
Σχήμα 2.17: Συνθήκες φόρτισης – αποφόρτισης.....	48
Σχήμα 2.18: Μετρα ελαστικότητας σε μονοβάθμιο σύστημα με κράτυνση.....	50
Σχήμα 2.19: Το εν σειρά προσομοίωμα κινηματικής κράτυνσης.....	51
Σχήμα 2.20: Επέκταση του εν σειρά προσομοιώματος / Παράλληλο προσομοίωμα.....	51
Σχήμα 2.21 : a) Κανόνας καθετότητας b) Κυρτότητα c) Διαφορισιμότητα επιφάνειας διαρροής.....	53
Σχήμα 2.22 : a) Παραβίαση αξιώματος Drucker b) Παραβίαση αξιώματος Piushin.....	54

Σχήμα 4.1 : Μονοαξονική θλίψη σκυροδέματος	69
Σχήμα 4.2 : Μονοαξονικός εφελκυσμός σκυροδέματος.....	70
Σχήμα 4.3 : Διάγραμμα ‘σ – ε’ σκυροδέματος Kent – Scott – Park.....	73
Σχήμα 4.4 : Διάγραμμα ‘σ – ε’ σκυροδέματος EC2	74
Σχήμα 4.5 : a) Ορθογωνικό – παραβολικό σκυρόδεμα EC2 b) Διγραμμικό σκυρόδεμα EC2	75
Σχήμα 4.6 : Επιρροή της περισφιγξης στη μηχανική συμπεριφορά του σκυροδέματος	76
Σχήμα 4.7 : Μονοαξονική συμπεριφορά προσομοιώματος No.1	77
Σχήμα 4.8 : Μετακίνηση αξόνων ‘σ – ε’ σύμφωνα με την πλαστική παραμόρφωση	78
Σχήμα 4.9 : Χρονοϊστορία συνολικής, πλαστικής και ελαστικής παραμόρφωσης	80
Σχήμα 4.10 : Υστερητικός βρόχος προσομοιώματος σκυροδέματος No.1	80
Σχήμα 4.11 : Μηχανικό ανάλογο προσομοιώματος σκυροδέματος No.1	81
Σχήμα 4.12 : Διάγραμμα ‘σ – ε’ σκυροδέματος, μέσω θεωρίας πλαστικότητας, Chen 1982.....	84
Σχήμα 4.13 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος No.1, με απομειώσεις	86
Σχήμα 4.14 : Συνολική και ενεργή διατομή.....	87
Σχήμα 4.15 : Μηχανική βλαβών & ελαστικότητα.....	89
Σχήμα 4.16 : Συνδυασμός θεωρίας πλαστικότητας και μηχανικής βλαβών.....	89
Σχήμα 4.17 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος No.1 & μηχανική βλαβών	91
Σχήμα 4.18 : Βρόχοι υστέρησης ενεργής τάσης σκυροδέματος No.2	95
Σχήμα 4.19 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος No.2 & μηχανική βλαβών, με μη γραμμική αποφόρτιση.....	97
Σχήμα 4.20 : Σύγκριση μοντέλου Bouc – Wen & Damage με Kent – Scott – Park...	98
Σχήμα 4.21 : Μηχανικό ανάλογο ενεργού σκελετού σκυροδέματος No.2.....	99

Σχήμα 5.1 : Στοιχείο δοκού ινών ΟΣ	103
Σχήμα 5.2 : Στοιχείο δοκού ινών , με βάση τις μετακινήσεις.....	107
Σχήμα 5.3 : Στοιχείο δοκού ινών , με βάση τις δυνάμεις	110
Σχήμα 5.4 : Διαγράμματα καμπυλότητας, ανάλογα με τη διακριτοποίηση.....	113
Σχήμα 5.5 : Στροφή αξόνων από καθολικό σε τοπικό σύστημα.....	118
Σχήμα 5.6 : Επαναλήψεις εντός του βήματος i , της μεθόδου Newton – Raphson	124
Σχήμα 5.7 : Αριθμητική μέθοδος Wilson	128
Σχήμα 6.1 : Χωρισμός διατομής σε υποδιατομές	135
Σχήμα 6.2 : Πρόβολος σε στατική προσαυξητική ανάλυση.....	136
Σχήμα 6.3 : Διαγράμματα ‘σ – ε’ ινών σκυροδέματος και χάλυβα (1)	138
Σχήμα 6.4 : Σύγκριση προτεινόμενου στοιχείου με Opensees (1).....	138
Σχήμα 6.5 : Τρεις διαφορετικές επιλογές διακριτοποίησης.....	139
Σχήμα 6.6 : Καμπύλες ικανότητας προβόλου για διάφορες διακριτοποιήσεις.....	140
Σχήμα 6.7 : Διάγραμμα καμπυλότητων καθ’ ύψος του προβόλου	141
Σχήμα 6.8 : Διαγράμματα αξονικών παραμορφώσεων καθ’ ύψος του προβόλου ...	141
Σχήμα 6.9 : Χρονοϊστορία αξονικής δύναμης σε κάθε διατομή ελέγχου	143
Σχήμα 6.10 : Ακραία θλιβόμενη ίνα σκυροδέματος	143
Σχήμα 6.11 : Μονώροφο πλαίσιο σε ψευδοδυναμική φόρτιση	144
Σχήμα 6.12 : Ανακυκλιζόμενη φόρτιση πλαισίου	144
Σχήμα 6.13 : Σύγκριση προτεινόμενου στοιχείου με Opensees (2).....	145
Σχήμα 6.14 : Καμπύλες ικανότητας πλαισίου για διάφορες διακριτοποιήσεις	146
Σχήμα 6.15 : Διαγράμματα ‘σ – ε’ ινών σκυροδέματος χάλυβα (2).....	147
Σχήμα 6.16 : Υστερητικοί βρόχοι για σκυρόδεμα με γραμμικό και μη κλάδο αποφόρτισης.....	148
Σχήμα 6.17 : Συμπεριφορά ακραίων ινών σκυροδέματος	148

Σχήμα 6.18 : Συμπεριφορά χάλυβα	149
Σχήμα 6.19 : Πλαίσιο με διακριτοποίηση 3 στοιχείων / μέλος	149
Σχήμα 6.20 : Υστερητικός βρόχος ροπών – καμπυλοτήτων για διατομή βάσης.....	150
Σχήμα 6.21 : Οκτώ ειδικά σημεία του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων	152
Σχήμα 6.22 : Διαγράμματα ‘σ – ε’ ακραίων ινών για τα σημεία 1, 2, 3, 4.....	154
Σχήμα 6.23 : Διαγράμματα ‘σ – ε’ ακραίων ινών για τα σημεία 5, 6, 7, 8.....	155
Σχήμα 6.24 : Μονώροφο πλαίσιο σε σεισμική διέγερση.....	156
Σχήμα 6.25 : Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης (1).....	157
Σχήμα 6.26 : Χρονοϊστορίες απόκρισης μονώροφου πλαισίου για διάφορες διακριτοποιήσεις	157
Σχήμα 6.28 : Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης (2).....	158
Σχήμα 6.27 : Τριώροφο πλαίσιο σε σεισμική διέγερση.....	159
Σχήμα 6.29 : Σύγκριση χρονοϊστορίας μετακίνησης κορυφής προτεινόμενου μοντέλου & Opensees	160
Σχήμα 6.30 : Χρονοϊστορίες μετακινήσεων κορυφής όλων των ορόφων	160
Σχήμα 6.31 : Υστερητικοί βρόχοι τέμνουσας βάσης – μετακίνησης κορυφής.....	161
Σχήμα 6.32 : Υστερητικοί βρόχοι ροπών – καμπυλοτήτων 5 ^{ης} διατομής 1 ^{ου} μέλους	161

Λίστα περιεχομένων πινάκων

Πίνακας 5.1 : Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss – Lobatto.....	109
Πίνακας 6.1 : Παράμετροι και μηχανικά χαρακτηριστικά υλικών.....	137



Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

1. Εισαγωγή

1.1. Γενικά στοιχεία

Η μη – γραμμικότητα αποτελεί κανόνα στη εξέλιξη των φυσικών δομών και φαινομένων. Ακόμη και ο χρόνος, για τη σύγχρονη φυσική δεν έχει μια σταθερή γραμμική ροή όπως μας υπαγορεύει η κοινή εμπειρία, αλλά μπορεί να διαστέλλεται και να συστέλλεται ανάλογα με την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. Από την κίνηση των ρευστών μέχρι τη βιολογία, από τον ηλεκτρομαγνητισμό μέχρι τη θερμοδυναμική, από την απόκριση των υλικών μέχρι την εξέλιξη των ανθρώπινων κοινωνιών, τα πάντα μαρτυρούν ότι *η φύση είναι μη – γραμμική*. Η γραμμικότητα αποτελεί μόνο μια απλουστευτική ανάγνωση του κανόνα και, μάλλον πάντα, επιτυγχάνεται κατά προσέγγιση.

Παρόλα αυτά, μέχρι πριν μερικά χρόνια, οι Μηχανικοί για να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά των υλικών χρησιμοποιούσαν τη γραμμική ελαστική ανάλυση, λόγω της ευκολίας και του μικρού υπολογιστικού της φόρτου. Όπως είναι προφανές όμως, αποτύγχαναν να προβλέψουν την πραγματική συμπεριφορά των κατασκευών και γιαυτό επέβαλλαν πολύ συντηρητικούς περιορισμούς στις τάσεις σχεδιασμού. Οι επιπτώσεις τόσο σε οικονομικό επίπεδο, λόγω υπερδιαστασιολόγησης, όσο και σε επίπεδο ασφάλειας, λόγω άγνοιας των μετελαστικών συμπεριφορών, ήταν άμεση απόρροια αυτής της πρακτικής.

Στο πεδίο ενδιαφέροντος της επιστήμης του Μηχανικού διακρίνονται δύο είδη μη γραμμικότητας,

- 1) η μη – γραμμικότητα υλικού και
- 2) η μη – γραμμικότητα γεωμετρίας.

Και οι δύο αποτελούν πολύ σημαντικές παραμέτρους στην ανάλυση και το σχεδιασμό, καθώς αλλάζουν ριζικά την απόκριση των κατασκευών σε σχέση με τη γραμμική ελαστική θεώρηση. Μάλιστα, ενώ αν ληφθούν ως διακριτά, ξένα μεταξύ τους, ενδεχόμενα μπορεί να εμφανίζουν αποδεκτές συμπεριφορές, αν συνδυαστούν ίσως οδηγούν στην αστοχία, καθώς η μία μη – γραμμικότητα λειτουργεί πολλαπλασιαστικά για την άλλη.

Τα τελευταία χρόνια, η μη – γραμμική ανάλυση, ωθούμενη από τη ραγδαία και συνεχή ανάπτυξη των υπολογιστικών δυνατοτήτων, έχει αρχίσει να εδραιώνεται και να εντάσσεται σε σύγχρονους κανονισμούς, όπως είναι ο Ελληνικός Κανονισμός Ενισχύσεων και Επεμβάσεων (ΚΑΝΕΠΕ), ο Ευροκώδικας 8 (EC8) και τα πρότυπα της ASCE. Παράλληλα νέες φιλοσοφίες σχεδιασμού κάνουν την εμφάνισή τους, όπως ο σχεδιασμός με βάση τις στάθμες επιτελεστικότητας και ο αντισεισμικός σχεδιασμός με βάση τις μετακινήσεις και όχι τις σεισμικές δυνάμεις.

Οι επικρατέστερες αναλύσεις για την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των κατασκευών είναι

- 1) η Στατική Προσαυξητική Ανάλυση (*Static Pushover analysis*) και
- 2) η Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας (*Dynamic time – history analysis*).

Η Στατική Προσαυξητική Ανάλυση είναι η πιο συνηθισμένη λόγω της απλότητάς της, αφού ο Μηχανικός υποβάλλει την κατασκευή σε μονοτονική και μόνο φόρτιση, εξάγοντας μια καμπύλη ικανότητας. Στη συνέχεια για συγκεκριμένο φάσμα σεισμού υπολογίζει αν η κατασκευή βρίσκεται εντός των αποδεκτών ορίων επιτελεστικότητας.

Αντίθετα, η Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας είναι πιο πολύπλοκη, αφού ενεργοποιεί και την υστερητική διάσταση της συμπεριφοράς των υλικών, για μια συγκεκριμένη χρονοϊστορία φόρτισης. Είναι εύλογο, λοιπόν, με τη Δυναμική Ανάλυση να μπορούν να ανακλύψουν σημαντικές πτυχές της απόκρισης, που η *Pushover* να είχε αποκρύψει. Η χρήση της Δυναμικής Ανάλυσης, όμως, έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα: απαιτούνται αναλύσεις με αρκετά διαφορετικά δυναμικά φορτία ώστε να εξαχθεί μιά μέση σταθερή συμπεριφορά, όπως αναφέρει, μάλιστα, και ο Κανονισμός. Παρόλα αυτά τα υπολογιστικά μέσα που διατίθενται συνήθως, έχουν τη δυνατότητα να υπερσκελίσουν σχετικά εύκολα, ιδίως σε συμβατικές κατασκευές, αυτό το μειονέκτημα.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό στην ανάλυση των κατασκευών, είναι η επικράτηση των ραβδωτών στοιχείων ή στοιχείων δοκού. Στοιχείων δηλαδή που χαρακτηρίζονται μόνο από το μήκος τους και έτσι οι επιρροές στη συμπεριφορά τους λόγω των υπόλοιπων διαστάσεων, αγνοούνται. Στη γλώσσα της επιστήμης του Μηχανικού αυτό πρακτικά σημαίνει μείωση των βαθμών ελευθερίας του συστήματος και άρα ευκολότερη εποπτεία στο χειρισμό των προβλημάτων. Πέρα από αυτό, η χρήση των ραβδόμαρφων στοιχείων παρέχει τις πληροφορίες των εσωτερικών εντατικών μεγεθών σε όρους ροπών, τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων (M, Q, N), που αποτελούν τα άμεσα δεδομένα του δομοστατικού σχεδιασμού. Τα ραβδωτά στοιχεία δοκού διακρίνονται σε

- 1) στοιχεία δοκού *Euler - Bernoulli* και
- 2) στοιχεία δοκού *Timoshenko*.

Η διαφορά τους είναι ότι στα πρώτα, εν αντιθέσει με τα δεύτερα, αγνοείται η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης, ή με άλλα λόγια θεωρείται καθετότητα της διατομής στον παραμορφωμένο άξονα του στοιχείου.

Όσον αφορά στη μεθοδολογία της ελαστο – πλαστικής ανάλυσης των ραβδωτών στοιχείων διακρίνουμε τα

- 1) *στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας*
- 2) *στοιχεία κατανεμημένης πλαστικότητας*

Στα στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας θεωρούμε ότι δημιουργούνται πλαστικές αρθρώσεις μόνο στα άκρα του στοιχείου, με βάση μια επιφάνεια διαρροής. Στα στοιχεία κατανεμημένης πλαστικότητας θεωρούμε μια κατανομή αυτής της πλαστικότητας και σε ενδιάμεσες, πέραν των δύο ακραίων, διατομές. Στην περίπτωση αυτή η κάθε διατομή μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια ολότητα, λειτουργώντας υπό τον περιορισμό μιας επιφάνειας διαρροής ροπών – δυνάμεων, ή ως μια δέσμη ινών, κάθε μία από τις οποίες λειτουργεί με ένα κριτήριο διαρροής στο χώρο των τάσεων. Η δεύτερη θεώρηση καθορίζει το πλαίσιο των στοιχείων – ινών (*fiber beam elements*). Η κατανομή της πλαστικότητας εντός του στοιχείου μπορεί να γίνει με εισαγωγή συναρτήσεων σχήματος είτε για το πεδίο των μετακινήσεων, είτε για το πεδίο των εντατικών μεγεθών, επιλογή που χωρίζει τα στοιχεία δοκού, αντίστοιχα, σε

- 1) *στοιχεία με βάση τις μετακινήσεις (displacement based) και*
- 2) *στοιχεία με βάση τις δυνάμεις (force based).*

Τα πρώτα κινούνται στο πνεύμα των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων δοκού και λειτουργούν με ακρίβεια σε μία ελαστική ανάλυση. Τα δεύτερα ανταποκρίνονται περισσότερο στην ελαστο – πλαστική πραγματικότητα, καθώς ορίζοντας σχέσεις

μεταξύ των εντατικών μεγεθών, αποκαθιστούν τις συνθήκες ισορροπίας σε κάθε διατομή.

Όπως βλέπουμε, λοιπόν, ο χώρος της μη – γραμμικής ανάλυσης, έχει πολυσχιδείς προσεγγίσεις και μονοπάτια προς την επίτευξη μιας ικανοποιητικής προσομοίωσης. Μιας προσομοίωσης όμως, που είναι αναγκαία για την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων, ικανών να ανταποκρίνονται στην πραγματική συμπεριφορά των κατασκευών, ώστε αυτή να προβλέπεται και να σχεδιάζεται. Η παρούσα εργασία θα προσπαθήσει να ακολουθήσει ένα από αυτά τα μονοπάτια.

1.2. Αντικείμενο εργασίας

Η εργασία πραγματεύεται την ελαστοπλαστική ανάλυση κατασκευών ΟΣ. Στο πλαίσιο της, αναπτύσσονται και χρησιμοποιούνται στοιχεία δοκού κατανεμημένης πλαστικότητας, μέσω της προσομοίωσης ινών, με βάση τις μετακινήσεις. Τα στοιχεία δοκού – ινών αυτά, υπόκεινται, επίσης, στις παραδοχές Bernoulli για επιπεδότητα των διατομών και μη συμπίληψη των διατμητικών παραμορφώσεων. Ταυτόχρονα, διαμορφώνονται κατάλληλα οι υστερητικές εξισώσεις τύπου Bouc – Wen, ώστε να αντιπροσωπεύουν τους νόμους τάσεων – παραμορφώσεων για τις ίνες σκυροδέματος και χάλυβα. Μέσω αυτών των προσεγγίσεων μορφώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας του τυχαίου φορέα, τόσο για το δυναμικό όσο και για το στατικό πρόβλημα, οι οποίες στη συνέχεια επιλύονται με κάποια αριθμητική μέθοδο. Τέλος, πραγματοποιείται ο απαραίτητος έλεγχος των αποτελεσμάτων του κώδικα μέσω άλλων καθιερωμένων και αξιόπιστων προγραμμάτων στην ανάλυση κατασκευών .

1.3. Διάρθρωση εργασίας

Το κύριο σώμα της εργασίας αποτελείται από τα κάτωθι, επιπλέον 6 πέραν του παρόντος, κεφάλαια:

Κεφάλαιο 2^ο

Στο κεφάλαιο αυτό μετά από μία σύντομη θεωρητική γνωριμία με το φαινόμενο της υστέρησης, παρουσιάζονται το υστερητικό προσομοίωμα των Bouc – Wen και οι επεκτάσεις του από τους Sivaselvan – Reinhorn. Διατυπώνονται οι μαθηματικές σχέσεις και το μηχανικό ανάλογο, για πληρέστερη κατανόηση των μοντέλων και εξετάζεται διεξοδικά η επιρροή των παραμέτρων. Παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας πλαστικότητας, με τα διάφορα κριτήρια διαρροής και τους νόμους πλαστικής ροής και κράτυνσης. Τέλος, συνδέεται και συγκρίνεται το προσομοίωμα Bouc – Wen, με τις αντίστοιχες σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων που προκύπτουν από την κλασική θεωρία πλαστικότητας.

Κεφάλαιο 3^ο

Προσομοιώνεται η συμπεριφορά του χάλυβα, για την εξαγωγή του διαγράμματος τάσεων παραμορφώσεων. Εντοπίζονται τα κύρια χαρακτηριστικά της πειραματικής μηχανικής συμπεριφοράς του, τα οποία θα πρέπει να αποδοθούν από την προσομοίωση. Γίνεται αναφορά στο χάλυβα του EC2 και παρουσιάζεται το αλγεβρικό μοντέλο των Menegotto – Pinto. Προσομοιώνεται ο χάλυβας μέσω της υστέρησης Bouc – Wen για κινηματική και ιστροπική κράτυνση. Στο τέλος γίνεται μία σύντομη παρουσίαση διάφορων προσεγγίσεων πάνω στο θέμα της προσομοίωσης

της απώλειας συνάφειας χάλυβα – σκυροδέματος, μέσω της απομείωσης των ιδιοτήτων του χάλυβα.

Κεφάλαιο 4^ο

Όπως προηγουμένως με το χάλυβα, προσομοιώνεται η μονοαξονική συμπεριφορά του σκυροδέματος. Αρχικά, μελετάται η μηχανική συμπεριφορά του, όπως έχει εξαχθεί από την πειραματική διαδικασία και εν συνεχεία παρουσιάζονται τα αλγεβρικά μοντέλα των Kent – Scott – Park και του Κανονισμού. Έπεται η μοντελοποίηση του σκυροδέματος μέσα από την ιδέα της υστέρησης Bouc – Wen. Η τελική προσομοίωση που εμπεριέχει όλα τα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του υλικού (softening, απομείωση δυσκαμψίας) γίνεται τόσο μέσα από τη λογική τροποποιήσεων τύπου Sivaselvan – Reinhorn του 2^{ου} κεφαλαίου, όσο και μέσα από τη λογική της μηχανικής των βλαβών. Γίνεται τέλος μία σύνδεση της πλαστικότητας και της μηχανικής βλαβών, ως η προσφορότερη οδός για τη ρεαλιστική προσομοίωση.

Κεφάλαιο 5^ο

Γίνεται η ενοποίηση των παραπάνω μονοαξονικών συμπεριφορών, με την παραγωγή του ραβδωτού μέλους ως μίας δέσμης ινών, ως μίας δέσμης μονοαξονικών συμπεριφορών. Διατυπώνονται οι βασικές καταστατικές σχέσεις για τα στοιχεία ινών με βάση τις μετακινήσεις και τις δυνάμεις. Εισάγεται η υστέρηση Bouc – Wen στις ίνες του στοιχείου δυσκαμψίας, όπως αυτή ενσωματώθηκε στο χάλυβα και στο σκυρόδεμα στα προηγούμενα κεφάλαια. Τέλος, περιγράφονται, παρουσιάζονται και συγκρίνονται μερικές από τις διαθέσιμες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης τόσο του στατικού όσο και του δυναμικού προβλήματος.

Κεφάλαιο 6^ο

Πραγματοποιείται το κομμάτι της επαλήθευσης και υλοποίησης των θεωρητικών αναπτυγμάτων των προηγούμενων κεφαλαίων, μέσω εφαρμογών. Πραγματοποιούνται για διάφορες απλές και πιο σύνθετες κατασκευές στατικές προσαυξητικές και δυναμικές αναλύσεις, ενώ τα αποτελέσματα σχολιάζονται και συγκρίνονται με αποτελέσματα που δίνει το εγνωσμένης αξιοπιστίας λογισμικό ανάλυσης κατασκευών OpenSees.

Κεφάλαιο 7^ο

Η εργασία κλείνει με το κεφάλαιο της σύνοψης και του σχολιασμού. Πέρα από την σταχυολόγηση των βασικών συμπερασμάτων που προέκυψαν από την πορεία της εργασίας, με βάση αυτά προτείνονται και χώροι μελλοντικής περαιτέρω έρευνας και προβληματισμού.



Κεφάλαιο 2^ο

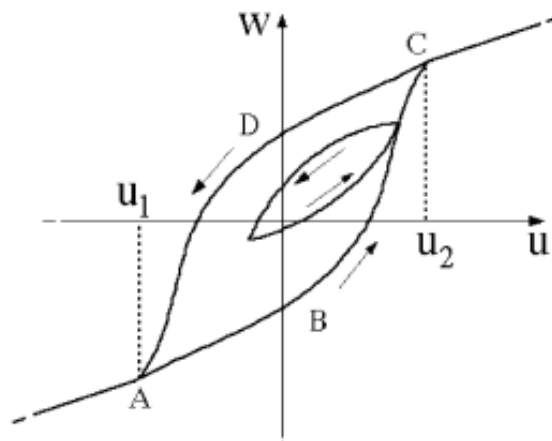
Υστέρηση Bouc – Wen & κλασική

πλαστικότητα

2. Υστέρηση Bouc-Wen & κλασική πλαστικότητα

2.1. Η έννοια της υστέρησης

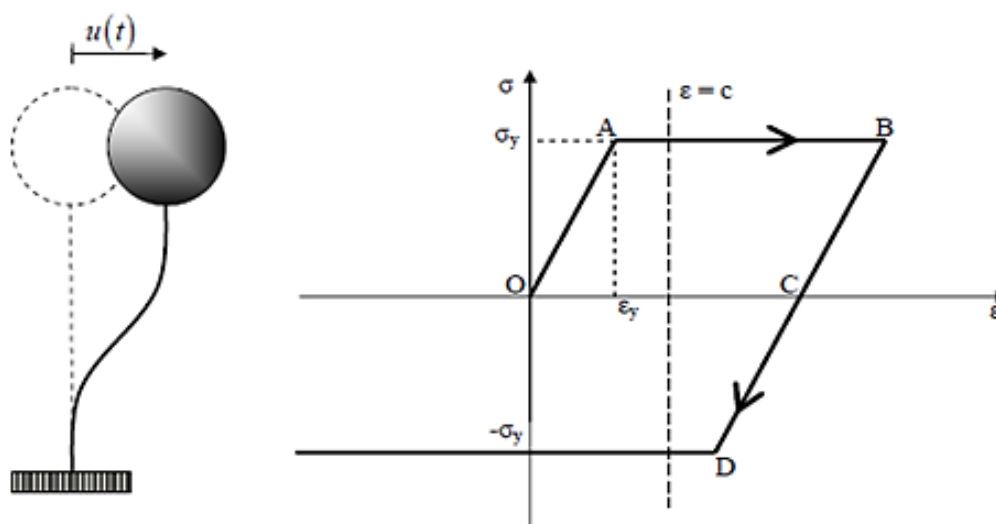
Η υστέρηση (*hysteresis*) είναι μία μη – γραμμική συμπεριφορά, η οποία συναντάται εν γένει στα φυσικά φαινόμενα και μπορεί να περιγραφεί μακροσκοπικά ως μια εκδήλωση μνήμης (*memory*), τέτοιας ώστε η αυξομείωση ενός φυσικού μεγέθους (u), να δημιουργεί μεταβολή τύπου βρόχου σε ένα άλλο (w). Η μνήμη αυτή δε, θεωρείται κατά κύριο λόγο ανεξάρτητη του ρυθμού μεταβολής (*rate – independence*) των μεγεθών αυτών, με την έννοια ότι, για μια μονότονη εξέλιξη του ενός μεγέθους, το άλλο θα έχει την ίδια συμπεριφορά ανεξάρτητα από το ρυθμό αυτής της εξέλιξης. Η ιδέα της υστέρησης, λοιπόν, είναι εύλογο να μπορεί να συμπυκνωθεί στις δύο παραπάνω έννοιες – κλειδιά, ως μια ανεξάρτητη του ρυθμού μεταβολής, μνήμη.



Σχήμα 2.1: Βρόχος υστέρησης

Στην επιστήμη του μηχανικού η υστέρηση εισάγεται στο πεδίο των τάσεων, ερχόμενη να υλοποιήσει τη φαινομενολογική μη – γραμμικότητα και μη – ένα προς ένα αντιστοιχία των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων, που μας παρέχει η πειραματική

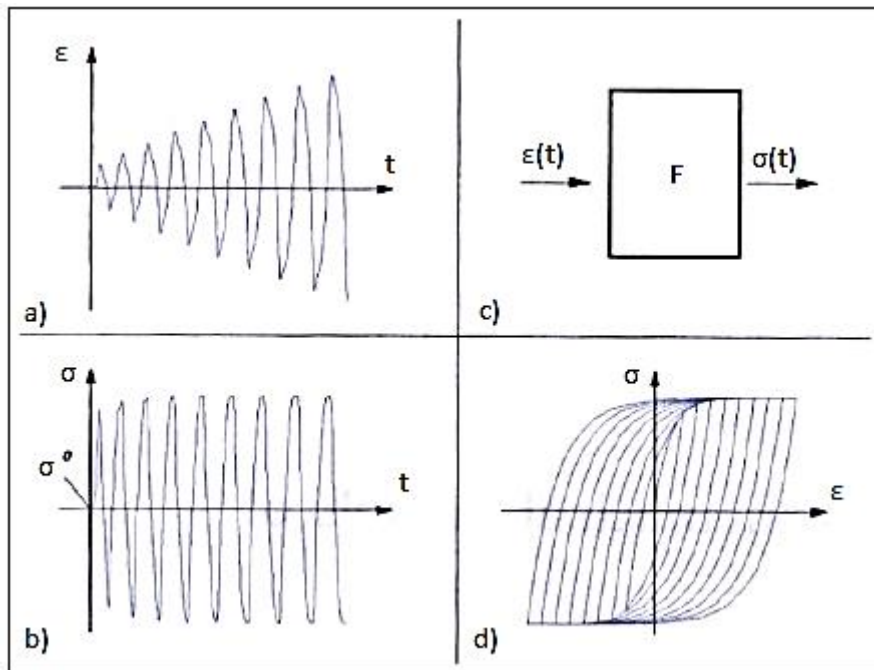
παρατήρηση (μη γραμμικότητα υλικού, υστερητικοί βρόχοι). Οδηγεί με τον τρόπο αυτό στη θεμελίωση της *θεωρίας πλαστικότητας (plasticity theory)*, η οποία, σε επίπεδο εκκίνησης, δεν αποτελεί τίποτα περισσότερο από την περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών, μέσα από την ιδέα της υστέρησης.



Σχήμα 2.2: Υστερητικό σύστημα μονοβάθμιου ταλαντωτή

Για να αποδοθεί, όμως, πιο ορθά στη μαθηματική της διάσταση η προηγούμενη θεωρητική αφήγηση, ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα, το μονοβάθμιο ταλαντωτή του σχήματος (2.2). Το σύστημα διεγείρεται σεισμικά στη βάση του, με αποτέλεσμα να φορτίζεται από τις αδρανειακές του δυνάμεις. Όπως είναι άμεσα εμφανές από το διάγραμμα, για κάθε τυχαία παραμόρφωση $\varepsilon(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $T \geq 0$, δεν αντιστοιχεί μια και μόνον τιμή της τάσης $\sigma(t) \in [-\sigma_y, \sigma_y]$, όπου σ_y το μέτρο της τάσης διαρροής, αλλά υπάρχουν δύο πιθανές καταστάσεις. Η συμπεριφορά αυτή δεν μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση. Η μαθηματική αναζήτηση, πλέον, στρέφεται στην εύρεση ενός *υστερητικού τελεστή \mathcal{F}* , ο οποίος να παράγει τα ζεύγη $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ για κάθε αυθαίρετη χρονική στιγμή, έχοντας ως συνάρτηση εισόδου την $\varepsilon(t)$ και ως συνάρτηση εξόδου την $\sigma(t)$.

Ο τελεστής αυτός πρέπει να εξασφαλίζει την ανεξαρτησία του δρόμου ισορροπίας από το ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης. Στο διάγραμμα του σχήματος (2.2) που εξετάζουμε, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όποια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\varepsilon(t):[0,\varepsilon_B]\rightarrow\mathbb{R}$ και αν επιλέξουμε, ο δρόμος ισορροπίας θα είναι ο OAB, αντίστοιχα για κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $\varepsilon(t):[\varepsilon_B,\varepsilon_c]\rightarrow\mathbb{R}$, ο δρόμος ισορροπίας θα είναι ο BC, κ.ο.κ.



Σχήμα 2.3: α) Συνάρτηση εισόδου β) Συνάρτηση εξόδου

γ) Υστερητικός τελεστής δ) Υστερητικός Βρόχος

Η μνήμη μπορεί εύκολα να διασφαλιστεί εάν η σχέση $\sigma - \varepsilon$, διατυπωθεί σε μορφή ρυθμού ως προς το χρόνο. Κάνοντας χρήση, δηλαδή, μιας σχέσης της γενικής μορφής

$$\frac{d\sigma}{dt} = F\left(\varepsilon, \sigma, \text{sign}\left[\frac{d\varepsilon}{dt}\right]\right) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.1)$$

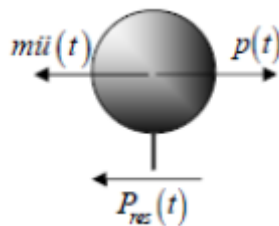
μπορούμε να περιγράψουμε το φαινόμενο της υστέρησης με τα χαρακτηριστικά που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Όπως παρατηρούμε, η σχέση (2.1), η μορφή της οποίας

οφείλεται στον Bouc, είναι μια μη – γραμμική διαφορική εξίσωση, άρα για την επίλυσή της απαιτούνται αρχικές συνθήκες (ϵ_0, σ_0). Επίσης, τα ορίσματα του υστερητικού τελεστή εμπεριέχουν πληροφορίες για το σημείο ($\epsilon(t), \sigma(t)$) του δρόμου ισορροπίας, στο οποίο βρίσκεται το σύστημα, κάθε αυθαίρετη χρονική στιγμή $t \in [0, T]$.

2.2. Το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen

2.2.1. Η μαθηματική διατύπωση

Ο Bouc (1967) μελέτησε την απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή μάζας m , όπως αυτός που περιγράφηκε στο σχήμα (2.2), ο οποίος αναπτύσσει αδρανειακές δυνάμεις, που μαζί με τις δυνάμεις αντίστασης και απόσβεσης (αμελητέες εδώ), ισορροπούν την εξωτερική φόρτιση κατά τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα (2.4).



Σχήμα 2.4: Ισορροπία μονοβάθμιου ταλαντωτή

Κατέληξε στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων, σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν και στην προηγούμενη παράγραφο στη σχέση (2.1),

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + P_{res} = p(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{dP_{res}}{dt} = \frac{dz}{dt} = [A - \beta z \text{sign}(du)] \frac{du}{dt}$$

Ο Wen (1976) εισήγαγε κάποιες τροποποιήσεις στις σχέσεις του Bouc, και το μοντέλο πήρε την επόμενη επεξεργασμένη μορφή (προσομοίωμα Bouc – Wen)

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + P_{res} = p(t) \quad (2.3)$$

$$P_{res} = aKu + z$$

$$\dot{z} = (1 - a)K [A - |z|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z \dot{u}))] \dot{u}$$

όπου α είναι ο λόγος μετελαστικής προς ελαστική δυσκαμψίας,

$$\alpha = \frac{K_{pl}}{K_{el}} \quad (2.4)$$

zy η μετακίνηση διαρροής, ενώ οι A, β, γ, n είναι εσωτερικές παράμετροι του προσομοιώματος, που καθορίζουν τη μορφή των βρόχων του εκάστοτε συστήματος. Η παράμετρος A θα θεωρηθεί μοναδιαία καθότι έχει αποδειχθεί περιττή (Ma et al, 2004). Είναι, ακόμη, εμφανές από τις εξισώσεις (2.3) ότι οι δυνάμεις επαναφοράς συντίθενται από δύο διακριτά μέρη: ένα απολύτως ελαστικό (aKu) και ένα υστερητικό (z). Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί μια παραλλαγή της διατύπωσης αυτής, στην οποία το z θα είναι η υστερητική μετακίνηση (ή παραμόρφωση) του συστήματος. Έτσι έχουμε

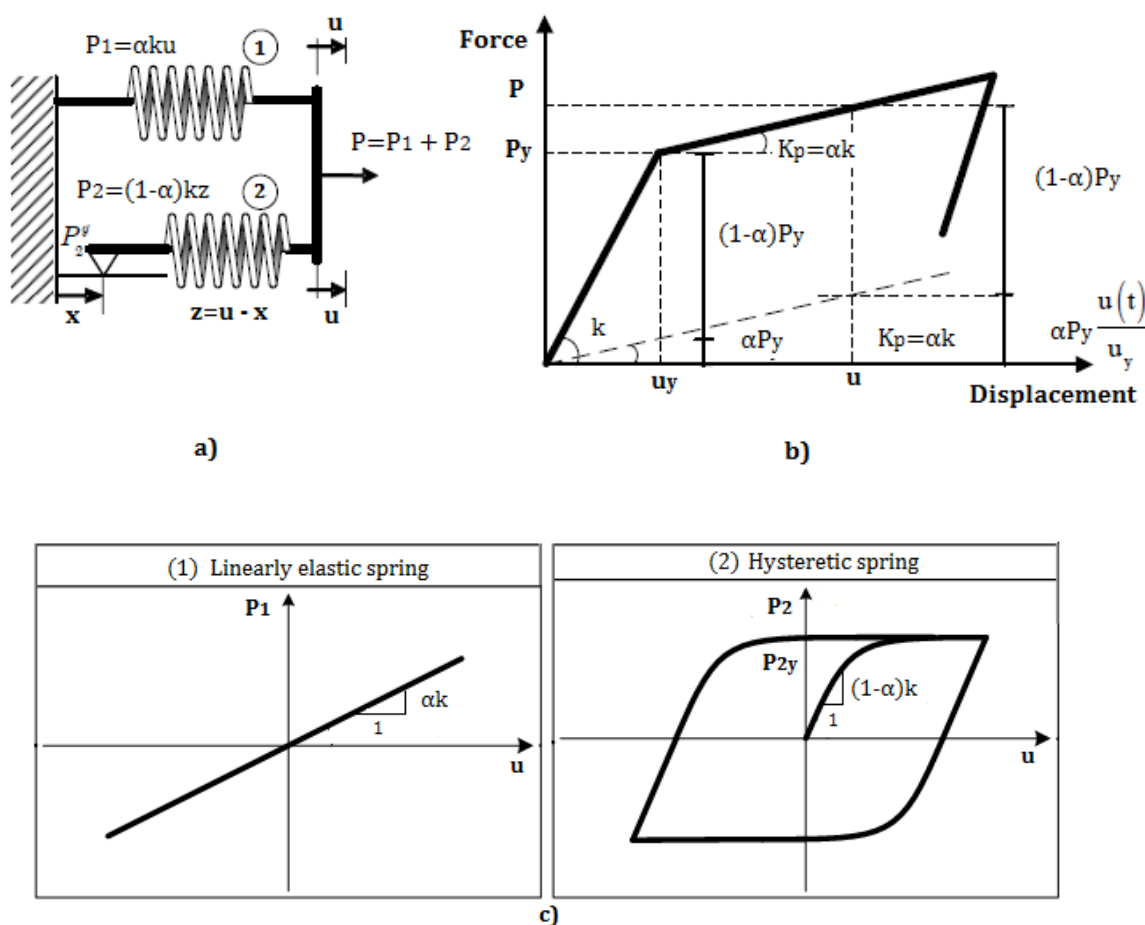
$$m \frac{d^2u}{dt^2} + P_{res} = p(t) \quad (2.5)$$

$$P_{res} = aKu + (1 - \alpha)Kz$$

$$\dot{z} = \left[1 - \left| \frac{z}{zy} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z \dot{u})) \right] \dot{u}$$

2.2.2. Το μηχανικό ανάλογο

Ας προσπαθήσουμε, τώρα, να αποδώσουμε τη φυσική ουσία των σχέσεων (2.5). Θεωρούμε το μηχανικό ανάλογο του σχήματος (2.5.a), ένα σύστημα δύο παράλληλων ελατηρίων με μία μάζα και έναν ολισθητήρα. Το ελατήριο #1 είναι ελαστικό, ενώ το ελατήριο #2 υστερητικό.



Σχήμα 2.5: α) Μηχανικό ανάλογο προσομοιώματος BW β) Διάγραμμα F-u συστήματος

γ) Διαγράμματα F-u ελατηρίων

όπως απεικονίζεται και στο σχήμα (2.5.c). Η επαλληλία των διαγραμμάτων αυτών των δύο ελατηρίων παράγει το συνολικό διάγραμμα του σχήματος (2.5.b). Πιο αναλυτικά το σύστημα λειτουργεί ως εξής: Για $u \leq z_y \equiv u_y$ και τα δύο ελατήρια

λειτουργούν ελαστικά, το μεν πρώτο σε κάθε περίπτωση, το δε δεύτερο λόγω, ακριβώς, της συνθήκης $u \leq zy \equiv uy$. Η εικόνα της επαλληλίας, επομένως είναι επίσης ελαστική, το σύστημα δηλαδή βρίσκεται στον ελαστικό του κλάδο. Όταν η μετατόπιση ξεπεράσει τη μετατόπιση διαρροής, δηλαδή $u \geq uy \equiv zy$, τότε ο ολισθητήρας αρχίζει να ολισθαίνει, έτσι ώστε το ελατήριο #2 να διατηρεί την παραμόρφωση (και άρα τη δύναμη) που είχε ακριβώς πριν την ολίσθηση. Ταυτόχρονα, το ελατήριο #1 εξακολουθεί να λειτουργεί στον απολύτως ελαστικό του δρόμο, με αποτέλεσμα στο συνολικό διάγραμμα να δημιουργείται η περιοχή της κράτυνσης. Το σύστημα αυτό συνοψίζεται στις παρακάτω σχέσεις

$$P_{res} = aKu + (1 - a)Kz \quad (2.6)$$

όπου η υστερητική μετατόπιση z είναι

$$z = \begin{cases} u, & u \leq uy \\ uy, & u > uy \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2.3. Διερεύνηση του προσομοιώματος

Προηγούμενα, παρουσιάστηκαν διαδοχικά οι εξισώσεις και το προσομοίωμα των παράλληλων ελατηρίων. Πώς όμως η διατύπωση (2.7), υλοποιείται από τη σχέση από την τρίτη εκ των σχέσεων (2.5);

Φάση φόρτισης

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $sign(zi) = 1$, συνθήκη που αντιστοιχεί σε κατάσταση φόρτισης. Τότε η σχέση του συστήματος (2.5) παίρνει την κάτωθι απλούστερη μορφή

$$\dot{z} = \left[1 - \left| \frac{z}{zy} \right|^n (\beta + \gamma) \right] \dot{u} \quad (2.8)$$

Στην περιοχή πριν το σύστημα φτάσει στη μετατόπιση διαρροής, σύμφωνα με τη σχέση (2.7) θα πρέπει να ισχύει

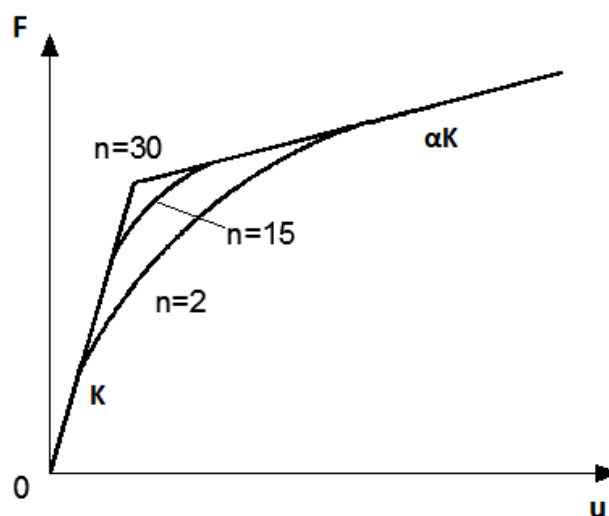
$$z = u \Rightarrow \dot{z} = \dot{u} \Leftrightarrow \left[\left| \frac{z}{zy} \right|^n (\beta + \gamma) \right] \dot{u} = 0 \xRightarrow{\dot{u} \neq 0}$$

$$\left| \frac{z}{zy} \right|^n = 0 \quad (2.9)$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει αυστηρά παρά μόνον για $z=0$. Εδώ κάνει την εμφάνισή της, η αναγκαιότητα χρησιμοποίησης της παραμέτρου n . Όσο πιο μεγάλη τιμή παίρνει τόσο η έκφραση (2.9) τείνει στην επαλήθευσή της, δηλαδή

$$\left| \frac{z}{zy} \right|^n \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

Αν για παράδειγμα $n=25$, τότε για μια ένα $z=0.8z_y$ θα έχουμε $\left| \frac{z}{zy} \right|^n = 0.004$, άρα κατά προσέγγιση θα ισχύει η (2.9). Η έκφραση, λοιπόν, αυτή μας επιτρέπει να έχουμε μια ομαλή (*smooth*) μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο.



Σχήμα 2.6: Επιρροή παραμέτρου n

Όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.6), όσο πιο μικρές τιμές του n επιλεγούν, τόσο ομαλότερη γίνεται η μετάβαση.

Φάση αποφόρτισης

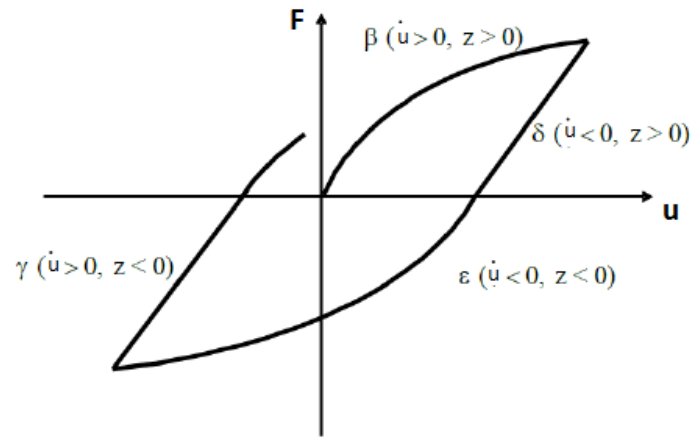
Ας θεωρήσουμε, τώρα, ότι το σύστημα βρίσκεται σε φάση αποφόρτισης πράγμα που σημαίνει ότι $sign(z\dot{u}) = -1$. Από την αντίστοιχη σχέση του συστήματος (2.5) θα έχουμε

$$\dot{z} = \left[1 - \left| \frac{z}{zy} \right|^n (\beta - \gamma) \right] \dot{u} \quad (2.11)$$

Στην απλή, αλλά και συνηθέστερη, περίπτωση, στην οποία $\beta = \gamma = 0.5$, γίνεται αντιληπτός ο ρόλος του όρου $(\beta + \gamma sign(z\dot{u}))$ ως «διακόπτη» ο οποίος κλείνει απότομα, με αποτέλεσμα η μετάβαση στον κλάδο αποφόρτισης να γίνεται ακαριαία και όχι ομαλά, όπως στη φάση της φόρτισης, όπου ο διακόπτης $\left| \frac{z}{zy} \right|^n$ καθιστά τη μετάβαση ομαλή. Αμεσα παρατηρούμε ότι προκύπτει από τη (2.11)

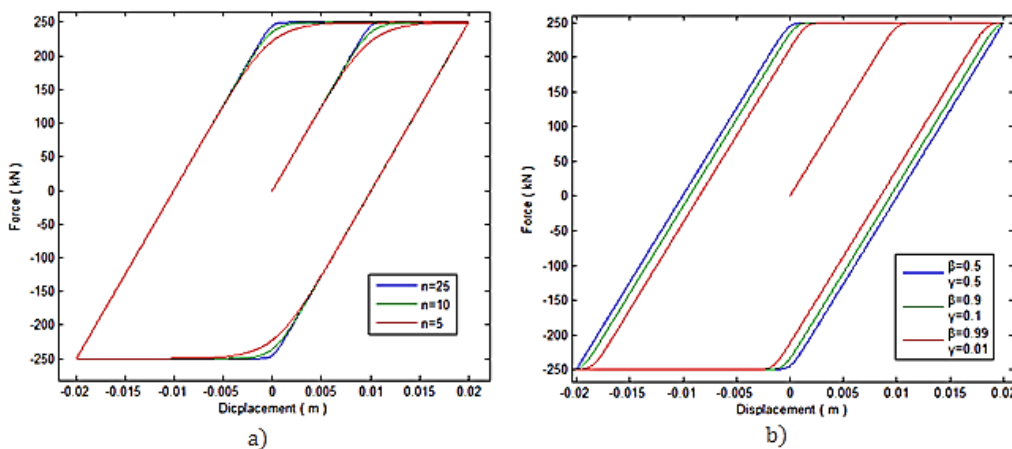
$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{u} \Leftrightarrow \\ z &= u - c \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου $c \geq 0$ μια σταθερά, που ισούται με την τιμή της μετακίνησης του ολισθητήρα του υστερητικού ελατηρίου #2, τη στιγμή που άρχισε η αποφόρτιση (αρχική συνθήκη). Εδώ, μάλιστα, φαίνεται πιο ξεκάθαρα πώς η *rate*-μορφή της εξίσωσης Bouc-Wen διασφαλίζει τη *μνήμη*, η οποία περιγράφηκε ως βασικό στοιχείο της υστέρησης στην παράγραφο §2.1. Με όλη αυτή τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, για συνεχείς αυξομειώσεις της μετακίνησης, προκύπτουν οι *υστερητικοί βρόχοι* των διαγραμμάτων F-u του συστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.7), που ακολουθεί



Σχήμα 2.7: Οι τέσσερις περιοχές του βρόχου υστέρησης

Υπενθυμίζουμε πως κατά την παρακολούθηση της φάσης αποφόρτισης, θεωρήσαμε ότι $\beta = \gamma = 0.5$. Έχει αποδειχθεί από τους Erlicher και Point (2004) ότι για συμπεριφορά με μείωση της δυσκαμψίας, που είναι σύνηθες φαινόμενο στην πρακτική του μηχανικού πρέπει να ισχύει: $\beta + \gamma = 1$. Επίσης οι Erlicher και Burshi (2004) απέδειξαν ότι για τις ίδιες παραμέτρους θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός $-\beta \leq \gamma \leq \beta$, έτσι ώστε να ισχύει ένα θερμοδυναμικώς αποδεκτό προσομοίωμα. Οι παρούσα επιλογή, λοιπόν, ικανοποιεί αυτές τις απαιτήσεις. Και ενώ η παράμετρος n επηρεάζει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην μετελαστική περιοχή κατά τη φόρτιση, οι παράμετροι β, γ επηρεάζουν το σχήμα των βρόχων.

Σχήμα 2.8: α) Επιρροή παραμέτρου n β) Επιρροή παραμέτρων β, γ .

Όπως βλέπουμε στο σχήμα (2.8.b) οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθύγραμμοι μόνο όταν θέσουμε $\beta = \gamma = 0.5$, ενώ όσο μεγαλώνει η διαφορά του β από το γ αυτό παύει να ισχύει.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το προσομοίωμα Bouc-Wen, παρότι παρουσιάστηκε σε επίπεδο δυνάμεων – μετατοπίσεων, μπορεί να εκφράσει οποιαδήποτε μη γραμμικότητα του είδους, όπως σχέσεις ροπών – καμπυλοτήτων ή τάσεων – παραμορφώσεων,

$$\begin{aligned}\sigma &= aE\varepsilon + (1 - \alpha)Ez \\ \dot{z} &= \left[1 - \left| \frac{z}{zy} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z \dot{\varepsilon})) \right] \dot{\varepsilon}\end{aligned}\quad (2.13)$$

2.2.4. Διευρύνσεις του προσομοιώματος

Στην παράγραφο αυτή, θα παρουσιάσουμε τρεις τροποποιήσεις – διευρύνσεις, των εξισώσεων (2.5). Αυτές αφορούν σε υστέρηση με ασύμμετρη διαρροή, απομείωση δυσκαμψίας και απομείωση αντοχής. Οι αρχικές διατυπώσεις των σχέσεων, που διέπουν τα παραπάνω, είναι σε όρους ροπής – καμπυλότητας ($M - \varphi$), κατά το πρότυπο του προσομοιώματος των Sivaselvan – Reinhorn που υπηρετεί τις ανάγκες των φαινομενολογικών μακρο – στοιχείων δοκού, που ανέπτυξαν. Έχουμε δηλαδή,

$$\begin{aligned}M &= (K_{el} + K_{hys})\varphi \\ K_{el} &= \alpha K_0 \\ K_{hys} &= (1 - \alpha) \left[1 - \left| \frac{M_h}{M_{h,y}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(M_h \dot{\varphi})) \right] K_0\end{aligned}\quad (2.14)$$

με K_0 την ελαστική δυσκαμψία του συτήματος, α το λόγο μεταλαστικής προς ελαστική δυσκαμψίας και $M_h, M_{h,y}$ τη ροπή και ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου αντίστοιχα.

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, τα προσομοιώματα Sivaselvan – Reinhorn και Bouc – Wen, είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, εκφράζοντας την ίδια ιδέα με διαφορετικές διατυπώσεις.

Υστέρηση με ασύμμετρη διαρροή

Οι Reinhorn – Sivaselvan μελετώντας την υστέρηση τύπου Bouc – Wen, προτείνουν για την ασύμμετρη διαρροή την εξής διατύπωση ,

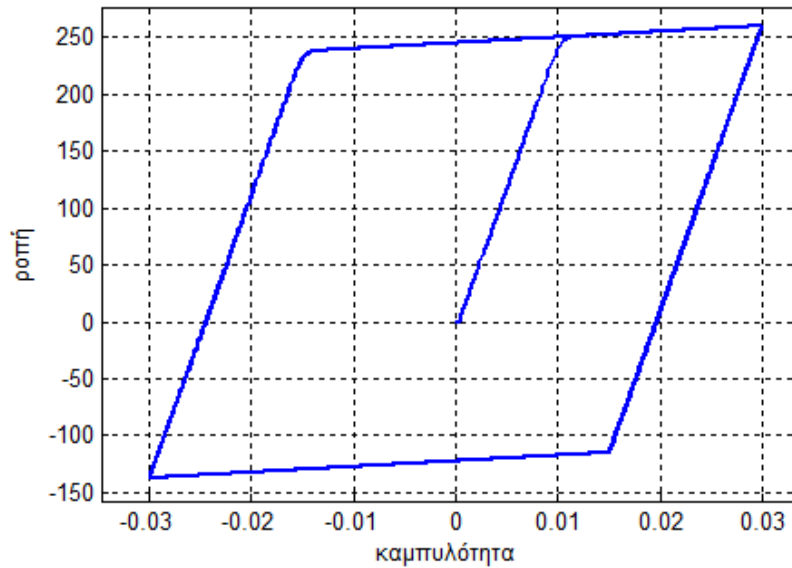
$$M_{h,y} = \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{\varphi})}{2} \right) M_{h,y}^+ + \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{\varphi})}{2} \right) M_{h,y}^- \quad (2.15)$$

όπου $M_{h,y}^+, M_{h,y}^-$ η θετική και αρνητική ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου αντίστοιχα.

Όπως παρατήρησαν οι Wang και Foliente, όμως, όταν η εξίσωση (2.15) αντικατασταθεί στην (2.5), μπορεί υπο συγκεκριμένες προϋποθέσεις, όταν έχουμε $\beta \neq \gamma$, να παράγει λάθος αποτελέσματα. Πρότειναν, έτσι, την παρακάτω παραλλαγή που αίρει αυτό το ενδεχόμενο,

$$M_{h,y} = \left(\frac{1 + \text{sign}(M_h)}{2} \right) M_{h,y}^+ + \left(\frac{1 - \text{sign}(M_h)}{2} \right) M_{h,y}^- \quad (2.16)$$

Η εισαγωγή της εξίσωσης (2.16) στο σύστημα (2.5) παράγει τον ασύμμετρο βρόχο του σχήματος που ακολουθεί,



Σχήμα 2.9 : Βρόχος με ασύμμετρη διαρροή

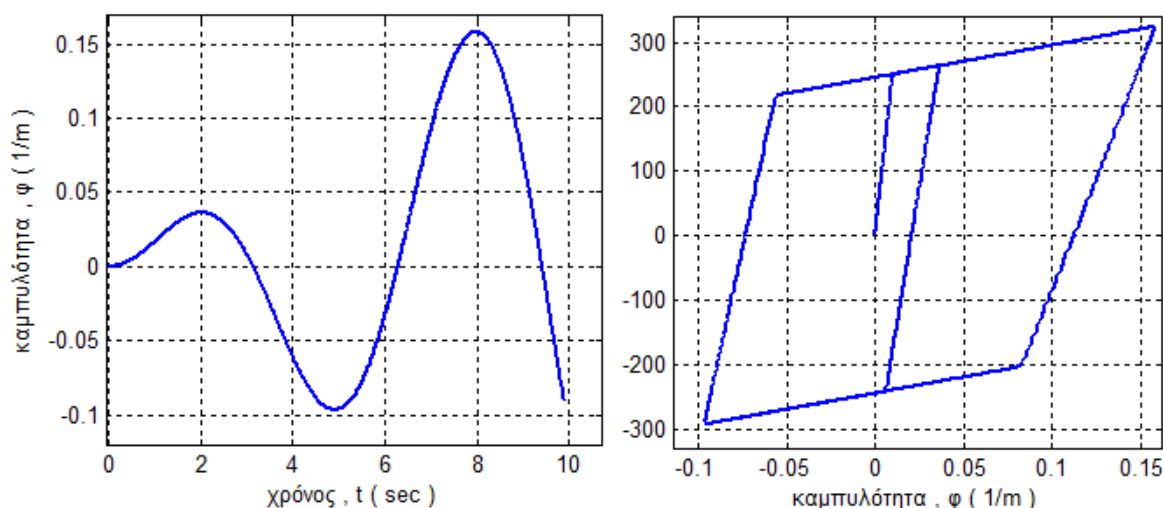
Υστέρηση με απομείωση δυσκαμψίας

Η απομείωση της δυσκαμψίας ενός υλικού ή μιας ολόκληρης κατασκευής, που υποβάλλεται σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση είναι σύνηθες φαινόμενο. Ως απομείωση της δυσκαμψίας νοείται η απομείωση της αρχικής ελαστικής δυσκαμψίας με το πέρασμα των ανακυκλίσεων. Έχει βρεθεί εμπειρικά (Park et al. , 1987) ότι μπορεί να περιγραφεί από τον κανόνα του πόλου περιστροφής (*pivot rule*). Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, όλοι οι κλάδοι αποφόρτισης διέρχονται από ένα σημείο, με τεταγμένη $a_p M_y$, συνευθειακό του αρχικού ελαστικού κλάδου. Η τρέχουσα δυσκαμψία του υστερητικού ελατηρίου δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$R_k = \frac{M(t) + a_p M_y}{K_0 \varphi(t) + a_p M_y} \quad (2.17)$$

$$K_{hys} = (R_k - a) \left[1 - \left| \frac{M_h}{M_{h,y}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(M_h \dot{\varphi})) \right] K_0$$

όπου K_0 η αρχική δυσκαμψία, K_{hys} η υστερητική και M_y η ροπή διαρροής του συστήματος.



Σχήμα 2.10: Βρόχος με απομείωση δυσκαμψίας (pivot rule)

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (2.17), αν το σύστημα δεν υποβληθεί σε αυξανόμενου εύρους φόρτιση, παρουσιάζει αποκατάσταση δυσκαμψίας, φαινόμενο που παρατηρείται για παράδειγμα, στους μεταλλικούς αποσβεστήρες, αλλά όχι σε μία συμβατική κατασκευή, πόσω μάλλον ΟΣ. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, ο Χαραλαμπίδης (2009), πρότεινε να χρησιμοποιείται η μικρότερη τιμή της χρονοϊστορίας της παραμέτρου R_k , αντί της τρέχουσας τιμής.

Υστέρηση με απομείωση αντοχής

Η απομείωση αντοχής προκύπτει, αν δώσουμε μια φθίνουσα συνάρτηση στη ροπή διαρροής. Ο τύπος που πρότειναν οι Sivaselavan – Reinhorn (2000), περιέχει μια συνάρτηση, η οποία λαμβάνει νέα τιμή όταν η νέα καμπυλότητα ξεπερνά τη μέγιστη της χρονοϊστορίας και μία συνεχή συνάρτηση βασισμένη στην αναλίσκόμενη ενέργεια,

$$M_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} \left[1 - \left(\frac{\varphi_{max}^{+/-}}{\varphi_u^{+/-}} \right)^{1/\beta_1} \right] \left[1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H_{dis}}{H_{dis,u}} \right] \quad (2.18)$$

όπου $M_y^{+/-}, M_{y0}^{+/-}$, η θετική/αρνητική ροπή διαρροής και η αρχική της τιμή αντίστοιχα, $\varphi_{max}^{+/-}, \varphi_u^{+/-}$, η μέγιστη θετική/αρνητική καμπυλότητα και μια οριακή της τιμή αντίστοιχα, $H_{dis}, H_{dis,u}$, η αναλίσκόμενη (υστερητική) ενέργεια και η ενέργεια για μονοτονική φόρτιση μέχρι την οριακή καμπυλότητα χωρίς απομειώσεις, αντίστοιχα και β_1, β_2 παράμετροι πλαστιμότητας και ενέργειας, αντίστοιχα. Παρατηρούμε, όμως, ότι η σχέση (2.18) δεν ορίζεται για $\beta_1 = 0$. Επίσης, δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές της καμπυλότητας, αφού ο εκθέτης $\frac{1}{\beta_1} \notin \mathbb{Z}$. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα εργασία προτιμάται ο νόμος απομείωσης αντοχής, που πρότεινε ο Mostaghel,

$$M_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} \left(\frac{1}{1 + \beta_{M1} H} \right) \quad (2.19)$$

Η ποσότητα της υστερητικής ενέργειας σε επαυξητική μορφή δίνεται από τον τύπο

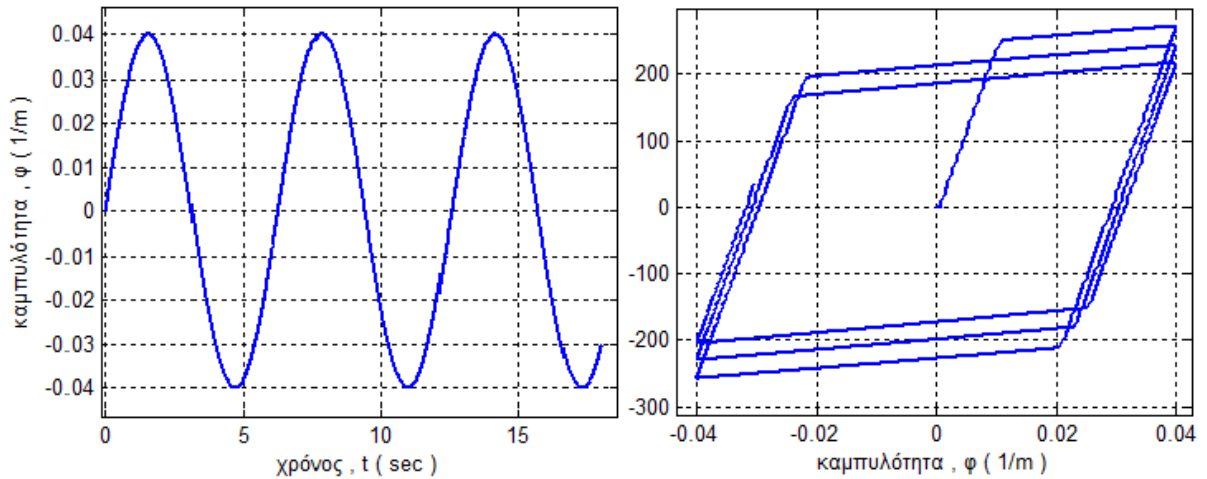
$$\Delta H_{dis} = \left(\frac{2M + \Delta M}{2} \right) \left(\Delta \varphi - \frac{\Delta M}{R_k K_0} \right) \quad (2.20)$$

Αν θέλουμε να φέρουμε το τελικό σύστημα εξισώσεων σε μια μορφή χώρου κατάστασης (*state – space formulation*), εκτενής αναφορά στην οποία θα γίνει στην παράγραφο §5.6.3., θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της παραγώγου της $M_y^{+/-}$, ως προς το χρόνο, η οποία είναι

$$\dot{M}_y^{+/-} = M_{y0}^{+/-} \left(\frac{1}{(1 + \beta_{M1} H)^2} \right) \dot{H} \quad (2.21)$$

Χρειάζεται, επίσης, όπως φαίνεται στην παραπάνω εξίσωση (2.21), ο υπολογισμός της έκφρασης,

$$\dot{H}_{dis} = M \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{M}}{R_k K_0} \right) \quad (2.22)$$



Σχήμα 2.11: Βρόχος με απομείωση αντοχής

Στο σχήμα (2.11) απεικονίζεται ένα παράδειγμα του μοντέλου της απομείωσης αντοχής, βάσει της σχέσης του Mostaghel.

2.3. Κλασική θεωρία πλαστικότητας

2.3.1. Βασικές έννοιες

Η κλασική θεωρία πλαστικότητας, επιχειρεί να προσομοιώσει τη συμπεριφορά των ισότροπων υλικών βασισμένη σε τέσσερις βασικούς άξονες:

- Την επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου διαρροής (*yield criterion*)
- Τη σύνθεση των συνολικών παραμορφώσεων από το άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους.
- Τον προσδιορισμό των πλαστικών παραμορφώσεων, μέσα από ένα νόμο πλαστικής ροής (*flow rule*)

- Την προσομοίωση της *κράτνσης (hardening)*, σε συνάρτηση με τις πλαστικές παραμορφώσεις.

Διατυπώνουμε, έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σημείο την πρώτη βασική σχέση της πλαστικότητας, που αφορά στον τανυστή των παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.23)$$

όπου ε_{ij} οι συνολικές, ε_{ij}^e οι ελαστικές αναστρέψιμες και ε_{ij}^p οι πλαστικές μη – αναστρέψιμες παραμορφώσεις. Πιο πρακτική και εύχρηστη θα αποδειχθεί η εξής διαφορική, άμεσα προκύπτουσα από την (2.23), διατύπωση

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.24)$$

Οι ελαστικές παραμορφώσεις δίνονται από το νόμο του Hook κατά τα γνωστά

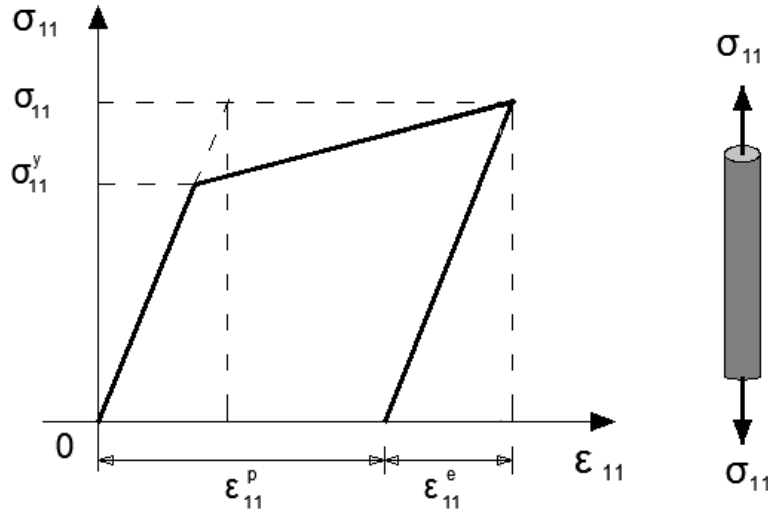
$$d\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e \quad (2.25)$$

με \mathbb{C} τον τανυστή 4^{ης} τάξεως των μέτρων ελαστικότητας.

Το φυσικό νόημα των παραπάνω σχέσεων γίνεται εύκολα αντιληπτό με τη βοήθεια του σχήματος (2.12), που αναπαριστά το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων, μιας μονοαξονικά καταπονούμενης δοκού, με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή, οι τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων εκφυλίζονται σε απλά διανυσματικά μεγέθη

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{C}_{ijkl} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \quad (2.26)$$

Σχήμα 2.12: Ελαστοπλαστικό διάγραμμα $\sigma - \varepsilon$ μονοαξονικού εφελκυσμού

Η εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων θεωρείται ανάλογη με το κάθετο διάνυσμα ενός νόμου πλαστικής ροής f , ώστε

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.27)$$

όπου λ ο συντελεστής αναλογίας της πλαστικής ροής.

Ο νόμος της κράτυνσης είναι γενικά μία συνάρτηση των πλαστικών παραμορφώσεων

$$h = G(\bar{\varepsilon}^P, d\bar{\varepsilon}^P) \quad (2.28)$$

με h μια ποσότητα σε όρους ισοδύναμων τάσεων ή τανυστή τάσεων και $\bar{\varepsilon}^P$ μια ποσότητα σε όρους ισοδύναμων πλαστικών παραμορφώσεων ή τανυστη παραμορφώσεων. Εκτενέστερη διερεύνηση των μεγεθών αυτών γίνεται στην παράγραφο §2.3.3.

2.3.2. Το κριτήριο διαρροής

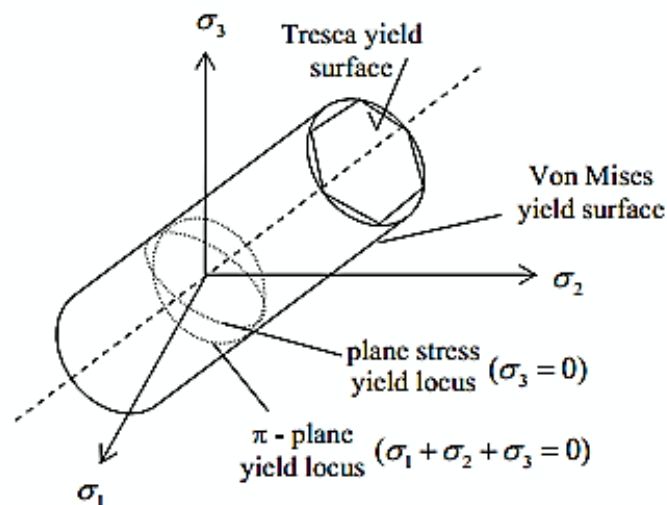
Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς διάφορες επιφάνειες (ή κριτήρια) διαρροής, όπως αυτές των Tresca, von Mises, Mohr – Coulomb, Drucker – Prager, Bresler- Pister, Tsai - Hill κ.λ.π, κάθε μία από τις οποίες «εξειδικεύεται» στην περιγραφή της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς συγκεκριμένης ομάδας υλικών. Οι επιφάνειες διαρροής των Tresca και von Mises, για παράδειγμα, προσεγγίζουν καλύτερα τη συμπεριφορά των όλκιμων υλικών (χάλυβας), ενώ αυτές των Drucker – Prager και Bresler – Pister τη συμπεριφορά των ψαθυρών υλικών (βράχοι, γαίες, σκυρόδεμα).

Το κριτήριο Tresca

Η βασική υπόθεση του κριτηρίου του Tresca (κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης) είναι ότι θεωρεί ως έναρξη της διαρροής, τη στιγμή κατά την οποία η μέγιστη διατμητική τάση, φτάνει την οριακή τιμή, της μέγιστης διατμητικής τάσης σε απλό εφελκυσμό. Προκύπτει έτσι μια πρισματική επιφάνεια διαρροής, που διέπεται από την εξίσωση (σε όρους κυρίων τάσεων)

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1| = 2\sigma_y \quad (2.29)$$

όπου σ_y το όριο τάση διαρροής σε καθαρό εφελκυσμό.



Σχήμα 2.13: Οι επιφάνειες διαρροής Tresca και von Mises

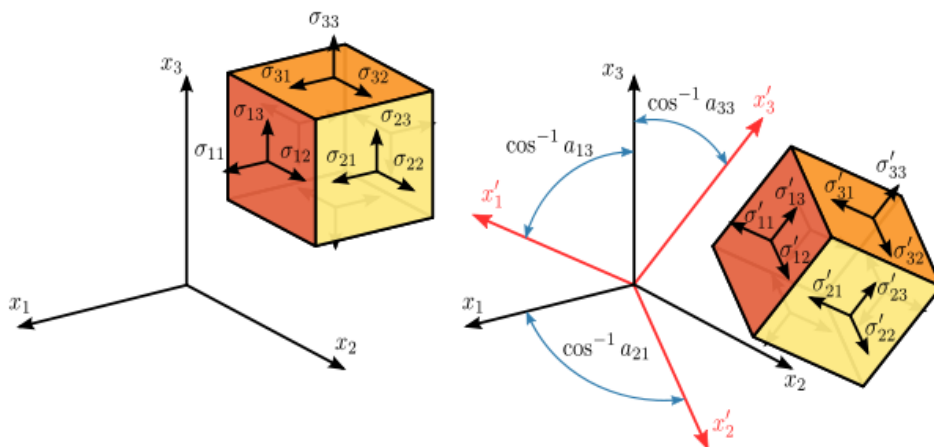
Το κριτήριο von Mises

Η βασική υπόθεση του κριτηρίου του von Mises (κριτήριο μέγιστης στρωφικής ενέργειας) είναι ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις αρχίζουν να συμβαίνουν, όταν η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης φτάσει μια κρίσιμη τιμή. Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου είναι η εξής

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (2.30)$$

Πιο εύχρηστη πολλές φορές είναι η έκφραση, που δεν απαιτεί την εύρεση των κυρίων τάσεων

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6[\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2] = 2\sigma_y^2 \quad (2.31)$$



Σχήμα 2.14: Ο τανυστής των τάσεων στο χώρο

Όπως παρατηρούμε και στο σχήμα (2.10), το κριτήριο von Mises υπερτερεί του κριτηρίου Tresca, καθώς το δεύτερο περιβάλλεται από το πρώτο και άρα είναι πιο συντηρητικό. Η λεία, όχι τεθλασμένη όπως πριν, επιφάνεια του κριτηρίου μέγιστης στρωφικής ενέργειας είναι ένας κύλινδρος ακτίνας $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$, του οποίου ο άξονας συμμετρίας ταυτίζεται με τον άξονα των υδροστατικών τάσεων $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (hydrostatic-cylinder).

Πέραν των διατυπώσεων (2.30) και (2.31) του κριτηρίου, πολύ διαδεδομένη είναι, επίσης, η διατύπωση που εμπεριέχει τη 2^η αναλοιώτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων (2nd stress deviatoric invariant)

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (2.32)$$

Η εξίσωση (2.31) παίρνει, έτσι, την ευσύνοπτη μορφή

$$3\mathfrak{I}_2 = \sigma_y^2 \quad (2.33)$$

Το κριτήριο Bresler – Pister

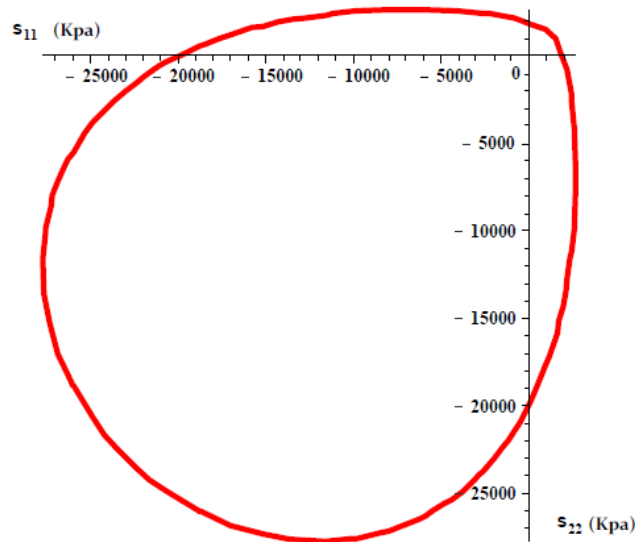
Το κριτήριο των Bresler – Pister , προσανατολίζεται στο να εκφράσει την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του σκυροδέματος. Είναι ένα τρι – παραμετρικό κριτήριο, και αποτελεί επέκταση του κριτηρίου των Drucker – Prager. Η εξίσωση του κριτηρίου είναι η κάτωθι,

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{I}_2}{6} - c_2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - c_1(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})} = c_0 \quad (2.34)$$

όπου c_0, c_1, c_2 οι σταθερές του υλικού και \mathfrak{I}_2 η δεύτερη αναλοιώτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων όπως παρουσιάστηκε στην εξίσωση (2.32). Οι σταθερές του υλικού προσδιορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{\sigma_t - \sigma_0}{\sqrt{3}(\sigma_t + \sigma_0)} \right) \left(\frac{4\sigma_b^2 - \sigma_b(\sigma_t + \sigma_0) + \sigma_0\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b(\sigma_t - \sigma_0) - \sigma_0\sigma_t} \right) \\ c_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}(\sigma_t + \sigma_0)} \right) \left(\frac{\sigma_b(3\sigma_t - \sigma_0) - 2\sigma_0\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b(\sigma_t - \sigma_0) - \sigma_0\sigma_t} \right) \\ c_0 &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + c_1\sigma_0 - c_2\sigma_0^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

με σ_0 , σ_t , την τάση διαρροής σε μονοαξονική θλίψη και εφελκυσμό αντίστοιχα και σ_b την τάση διαρροής σε διαξονική θλίψη. Για $\sigma_0=20\text{MPa}$, $\sigma_b=23\text{MPa}$, $\sigma_t=2\text{MPa}$, φερ' ειπείν, έχουμε στο χώρο της επίπεδης έντασης την επιφάνεια του σχήματος (2.15),



Σχήμα 2.15: Επιφάνεια διαρροής Bresler – Pister

2.3.3. Ο νόμος της κράτυνσης

Ήδη αναφέραμε στην παράγραφο §2.3.1, ότι η κράτυνση εκφράζεται εν γένει ως μια συνάρτηση των πλαστικών παραμορφώσεων, καθώς εκδηλώνεται τη στιγμή που το υλικό μπαίνει στην πλαστική περιοχή. Διακρίνουμε δύο είδη κράτυνσης

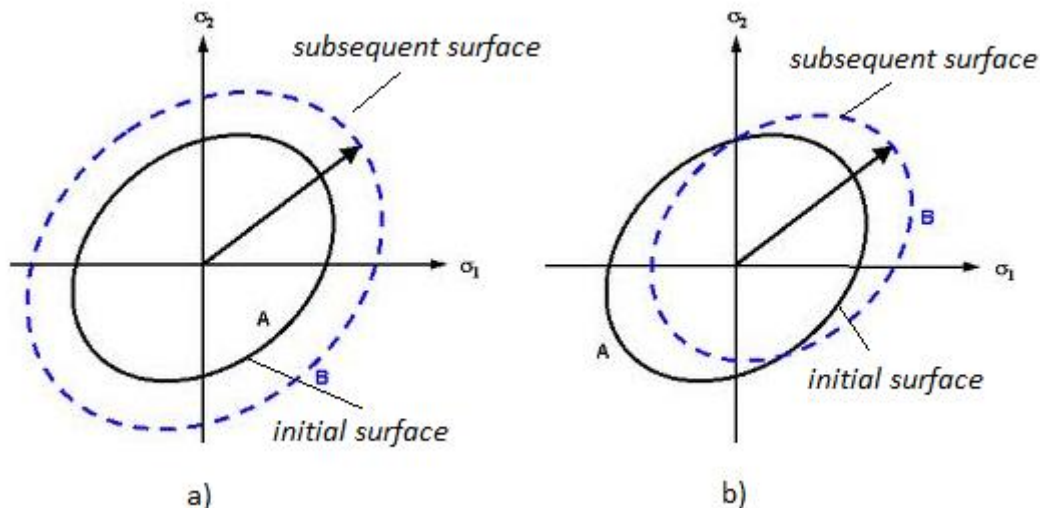
- *Ισοτροπική κράτυνση (isotropic hardening)*
- *Κινηματική κράτυνση (kinematic hardening)*

ανάλογα με τον ρόλο που διαδραματίζει η συνάρτηση h της σχέσης (2.28). Στην μεν ισοτροπική κράτυνση μεγεθύνει ισότροπα («φουσκώνει») στην επιφάνεια διαρροής, μετά τη διαρροή, χωρίς όμως να μετακινεί το κέντρο της, στη δε κινηματική

κράτνση μετακινεί ολόκληρη την επιφάνεια σαν στερεό σώμα στο χώρο των τάσεων, χωρίς να τη μεγεθύνει. Θα μπορούσαμε, με βάση τα παραπάνω, να ορίσουμε και μία *μικτή κράτνση* η οποία να αποτελεί συνισταμένη, με συντελεστές συμμετοχής, μίας ισοτροπικής και μίας κινηματικής συνιστώσας.

Ισοτροπική κράτνση

Ας πάρουμε ως επιφάνεια διαρροής την επιφάνεια του κριτηρίου von Mises. Στην περίπτωση της ισοτροπικής κράτνσης, η σχέση της κράτνσης (2.28) μεταφράζεται σε όρους ισοδύναμης τάσης.



Σχήμα 2.16: a) Ισοτροπική κράτνση b) Κινηματική κράτνση

Ας ονοματίσουμε αυτήν την ισοδύναμη τάση κ , με

$$\kappa = \kappa(\varepsilon_{eq}^p, \dot{\varepsilon}_{eq}^p) \quad (2.36)$$

όπου ε_{eq}^p μια ισοδύναμη τιμή των πλαστικών παραμορφώσεων, $\varepsilon_{eq}^p = \mathcal{F}(\varepsilon_{ij}^p)$.

Το κριτήριο διαρροής γίνεται

$$\Phi = \sqrt{3\mathfrak{J}_2} - \kappa = 0 \quad (2.37)$$

Κινηματική κράτυνση

Στην περίπτωση της κινηματικής κράτυνσης, κρατώντας την ίδια επιφάνεια διαρροής με προηγουμένως, η συνάρτηση κράτυνσης, έστω h_{ij} , εκφράζει έναν τανυστή τάσεων (*back-stress tensor*), με

$$h_{ij} = h_{ij}(\varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (2.38)$$

Ο *back – stress tensor* δηλώνει την μετακίνηση του κέντρου της επιφάνειας διαρροής.

Η σχέση του κριτηρίου von Mises, πλέον, παίρνει τη μορφή

$$\Phi(\xi_{ij}) = \sqrt{3\mathfrak{J}_2(\xi_{ij})} - \sigma_y = 0 \quad (2.39)$$

$$\xi_{ij} = \sigma_{ij} - h_{ij} \quad (2.40)$$

ποσότητα που θέτουμε στις σχέσεις (2.30) – (2.32), στη θέση των σ_{ij} .

2.3.4. Ο νόμος της πλαστικής ροής

Στη σχέση (2.27) διατυπώσαμε τη γενική σχέση που συνδέει τις πλαστικές παραμορφώσεις με το νόμο της πλαστικής ροής. Με βάση τη φύση αυτού του νόμου διακρίνουμε την πλαστικότητα των υλικών, σε συσχετισμένη (*associated plasticity*) και μη – συσχετισμένη (*non – associated plasticity*). Η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι στη συσχετισμένη πλαστικότητα, που προσιδιάζει περισσότερο στα όλκιμα υλικά, ο νόμος της πλαστικής ροής ταυτίζεται με την εξίσωση της επιφάνειας διαρροής, πράγμα που δεν ισχύει στην περίπτωση της μη – συσχετισμένης. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της συσχετισμένης πλαστικότητας, με κριτήριο διαρροής Φ . Στη φάση αυτή θα προτιμηθεί μια διανυσματική, όχι τανυστική όπως πριν,

διατύπωση ώστε να φέρουμε τις εξισώσεις σε μία πιο εύχρηστη μορφή για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

$$\{\dot{\varepsilon}^P\} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \quad (2.41)$$

Όπως υποδηλώνει η σχέση (2.41), το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Ο συντελεστής αναλογίας λ θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn – Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0, \Phi \leq 0, \dot{\lambda} \Phi = 0 \quad (2.42)$$

οι οποίες εκφράζουν ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι μη αναστρέψιμες, η επιφάνεια διαρροής είναι το άνω φράγμα της ισοδύναμης τάσης και οι πλαστικές παραμορφώσεις εμφανίζονται όταν το υλικό φτάσει στη διαρροή. Από τη σχέση (2.42) άμεσα προκύπτει ότι

$$\dot{\lambda} \dot{\Phi} = 0 \quad (2.43)$$

Ας πάρουμε, τώρα, μια γενική μορφή της κινηματικής κράτυνσης, ευθέως ανάλογη των πλαστικών παραμορφώσεων (γραμμική κράτυνση)

$$\{\dot{\kappa}\} = \dot{\lambda} [E_H] \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \quad (2.44)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (2.23) στη (2.25) λαμβάνουμε,

$$\{\dot{\sigma}\} = [E](\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^P\}) \quad (2.45)$$

Η σχέση (2.43) μας δίνει, μέσω των (2.41), (2.42), (2.44)

$$\dot{\lambda} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\kappa\}} \right)^T \dot{\kappa} \right] = 0 \xrightarrow{\lambda > 0 \text{ στη διαρροή}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [E] \left(\{\varepsilon\} - \lambda \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\mathcal{h}\}}\right)^T \lambda [E_H] \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}$$

έτσι καταλήγουμε στη σχέση που μας δίνει το λ ,

$$\lambda = \left[-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\mathcal{h}\}}\right)^T [E_H] \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [E] \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [E] \{\varepsilon\} \quad (2.46)$$

Η καταστατική σχέση τάσεων παραμορφώσεων στην πλαστική περιοχή, με αντικατάσταση της σχέσης (2.46) στη (2.45), είναι,

$$\{\sigma\} = [E] ([I] - [\mathcal{R}]) \{\varepsilon\} \quad (2.47)$$

με $[\mathcal{R}]$ το μητρώο με βάση το οποίο διορθώνεται η ελαστική πρόλεξη,

$$[\mathcal{R}] = \left[-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\mathcal{h}\}}\right)^T [E_H] \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [E] \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}} \right]^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [E] \quad (2.48)$$

2.4. Από την κλασική πλαστικότητα στην υστέρηση Bouc-Wen

2.4.1. Το πολυβάθμιο σύστημα

Στο σημείο αυτό, θα επιχειρήσουμε τη μετάβαση, από την κλασική θεωρία πλαστικότητας, στο προσομοίωμα Bouc – Wen, που παρουσιάστηκε την παράγραφο §2.2. Αρχικά, θα εκφράσουμε τις συνθήκες Kuhn – Tucker, μέσω συναρτήσεων Heaviside, σε ρόλο «διακοπών». Η σχέση της εξέλιξης των πλαστικών παραμορφώσεων τροποποιείται ως εξής,

$$\{\dot{\varepsilon}^P\} = H_1 H_2 [\mathcal{R}] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (2.49)$$

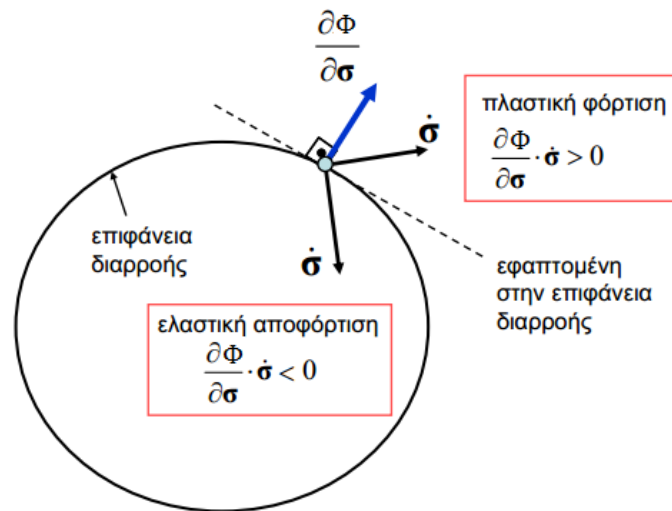
όπου ,

$$H_1 = \begin{cases} 1, & \Phi < 0 \\ 0, & \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

που ελέγχει εάν το υλικό βρίσκεται πριν ή στη διαρροή αντίστοιχα και

$$H_2 = \begin{cases} 1, & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \dot{\sigma} > 0 \\ 0, & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \dot{\sigma} < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Ο «διακόπτης» H_2 , όπως περιγράφει η σχέση (2.51) και το σχήμα (2.17), «ανοίγει» όταν βρισκόμαστε σε φάση φόρτισης, ενώ «κλείνει» όταν βρισκόμαστε σε φάση αποφόρτισης.



Σχήμα 2.17: Συνθήκες φόρτισης – αποφόρτισης

Μπορούμε να εκφράσουμε, τώρα, τη συνάρτηση H_1 σε μία λεία μορφή. Παίρνουμε ως επιφάνεια διαρροής και νόμο πλαστικής ροής το κριτήριο von Mises. Θέτουμε (βλ. εξισώσεις (2.39) και (2.40)).

$$\sigma_{eq}(\{\xi\}) = \sqrt{3\mathfrak{J}_2(\{\xi\})} \quad (2.52)$$

Άρα η H_1 γράφεται, τελικά,

$$H_1 = \left| \frac{\sigma_{eq}(\{\xi\})}{\sigma_y} \right|^n \quad (2.53)$$

Ενώ ο «διακόπτης» H_2 αυτοματοποιείται ως παρακάτω,

$$H_2 = \frac{1 + \text{sign} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \dot{\sigma} \right]}{2} \approx \beta + \gamma \text{sign} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \dot{\sigma} \right] \quad (2.54)$$

Κατόπιν, με βάση τις δύο τελευταίες σχέσεις και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.47) και (2.48), λαμβάνουμε

$$\{\dot{\sigma}\} = [E] \left[[I] - \left| \frac{\sigma_{eq}(\{\xi\})}{\sigma_y} \right|^n \left(\beta + \gamma \text{sign} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \dot{\sigma} \right] \right) [\mathcal{R}] \right] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (2.55)$$

Είναι εμφανές ότι η ανωτέρω σχέση, μοιάζει εξαιρετικά, ως προς τη μορφή της, με τη σχέση του προσομοιώματος Bouc – Wen.

2.4.2. Το μονοβάθμιο σύστημα

Για να τη διερευνήσουμε περετέρω τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, θα απλοποιήσουμε τη σχέση (2.54), θεωρώντας ένα πρόβλημα, μονοαξονικής φόρτισης, με κριτήριο διαρροής

$$\Phi_{1D} = |\sigma_1 - h_1| - \sigma_y = |\xi_1| - \sigma_y \quad (2.56)$$

που μας δίνει,

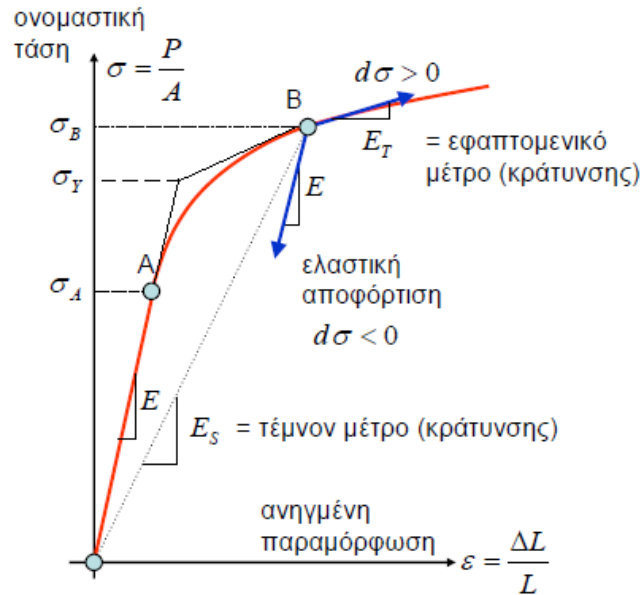
$$\frac{\partial \Phi_{1D}}{\partial \sigma_1} = \text{sign}(\xi_1) \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \Phi_{1D}}{\partial h_1} = -\text{sign}(\xi_1)$$

και γραμμική κινηματική κράτνση με νόμο

$$\dot{\kappa}_1 = H\dot{\varepsilon}_1^P \quad (2.58)$$

όπου H , το μέτρο ελαστικότητας της κράτυνσης, στο χώρο των πλαστικών παραμορφώσεων.



Σχήμα 2.18: Μετρα ελαστικότητας σε μονοβάθμιο σύστημα με κράτυνση

Η σχέση (2.48), με αντικατάσταση των (2.57), γίνεται

$$\mathcal{R} = [H \text{sign}^2(\xi_1) + E \text{sign}^2(\xi_1)]^{-1} \text{sign}^2(\xi_1) E \Rightarrow$$

$$\mathcal{R} = \frac{E}{H + E} \quad (2.59)$$

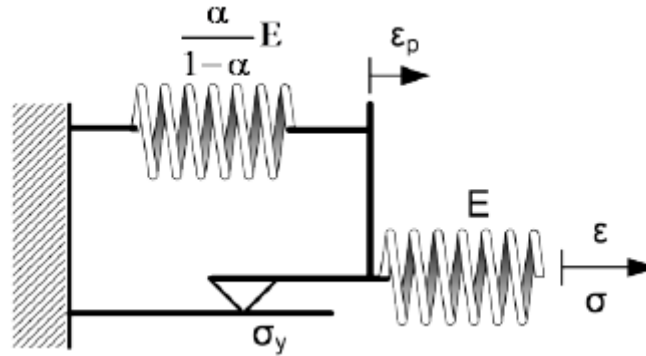
και κατόπιν η (2.55) γράφεται, με τη βοήθεια της (2.59),

$$\dot{\sigma}_1 = E \left[1 - \frac{E}{H + E} \left| \frac{\xi_1}{\sigma_y} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(\xi_1 \dot{\sigma}_1)) \right] \dot{\varepsilon}_1 \quad (2.60)$$

Η σχέση (2.60) προσεγγίζει τη σχέση των Bouc – Wen, με μια διαφορά: αφορά σε ένα σύστημα όχι παράλληλων, αλλά εν σειρά ελατηρίων, το δεύτερο εκ των οποίων ενεργοποιείται μέσω ενός ολισθητήρα όταν ξεπεράσει το σύστημα τη διαρροή. Η μετελαστική δυσκαμψία του συστήματος, όπως φαίνεται, με στοιχειώδεις πράξεις, από την εξίσωση (2.60) είναι

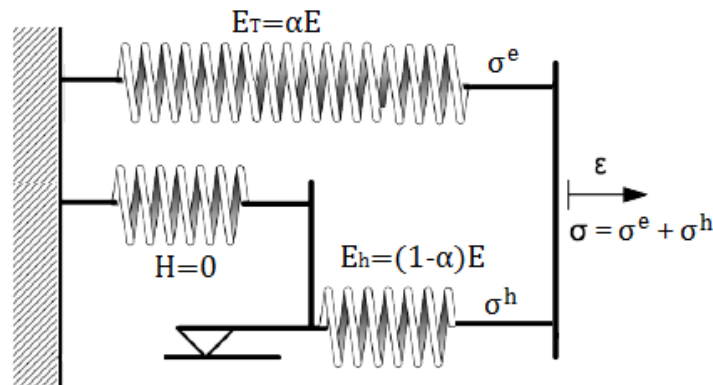
$$E_T = \frac{EH}{E + H} \quad (2.61)$$

ενώ η παράμετρος α , σε όρους λόγου μέτρων ελαστικότητας, θα είναι $\alpha = E_T/E$.



Σχήμα 2.19: Το εν σειρά προσομοίωμα κινηματικής κράτνσης

Η μετάβαση από το εν σειρά ανάλογο κινηματικής κράτνσης, στο εν παράλληλο, επιτυγχάνεται με μία, τρόπον τινά, επέκταση και τροποποίηση του παραπάνω μοντέλου.



Σχήμα 2.20: Επέκταση του εν σειρά προσομοιώματος / Παράλληλο προσομοίωμα

Κρατάμε το υστερητικό σύστημα του σχήματος (2.19), με μηδενική, όμως, κράτνση και προσθέτουμε και ένα παράλληλο ελατήριο που θα αναλάβει την καταργηθείσα κράτνση. Όλη αυτή η συλλογιστική συνοψίζεται στο σχήμα (2.20), το οποίο δεν είναι τίποτα διαφορετικό από το μηχανικό ανάλογο του σχήματος (2.5.a), που απεικονίζει το προσομοίωμα Bouc – Wen. Η σχέση (2.60) για $H=0$ δίνει,

$$\dot{\sigma}_1^h = (1 - \alpha)E \left[1 - \left| \frac{\dot{\sigma}_1^h}{\sigma_y} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(\sigma_1^h \dot{\sigma}_1^h)) \right] \dot{\varepsilon}_1 \quad (2.62)$$

ενώ το ελαστικό ελατήριο είναι,

$$\dot{\sigma}_1^e = \alpha E \dot{\varepsilon}_1 \quad (2.63)$$

Η συνθήκη φόρτισης – αποφόρτισης μπορεί να γραφτεί για το υστερητικό ελατήριο

$$\beta + \gamma \text{sign}(\sigma_1^h \dot{\sigma}_1^h) = \beta + \gamma \text{sign}(\sigma_1^h \dot{\varepsilon}_1^h) \quad (2.64)$$

Καταλήγουμε, έτσι, αντικαθιστώντας την (2.64) στη (2.62), στις ακόλουθες εκφράσεις,

$$\sigma = \sigma_1^e + \sigma_1^h$$

$$\dot{\sigma}_1^h = (1 - \alpha)E \left[1 - \left| \frac{\dot{\sigma}_1^h}{\sigma_y} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(\sigma_1^h \dot{\varepsilon}_1^h)) \right] \dot{\varepsilon}_1 \quad (2.65)$$

Παρατηρούμε ότι, αν στις εξισώσεις (2.65) τη θέση της υστερητικής τάσης πάρει η υστερητική παραμόρφωση z , αναγόμαστε, ακριβώς, στις σχέσεις (2.13).

2.4.3. Αξιώματα πλαστικότητας και Bouc – Wen υστέρηση

Μία από τις πιο σημαντικές ανισώσεις στην κλασική θεωρία πλαστικότητας, γνωστή ως αξίωμα ευστάθειας του Drucker (*Drucker's stability postulate*) είναι η παρακάτω

$$\dot{\sigma}_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.66)$$

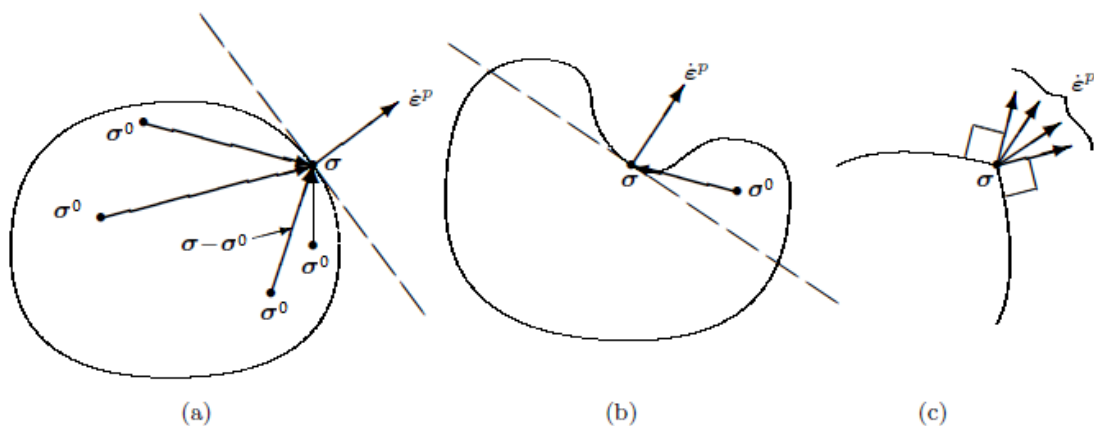
Η (2.66) υποδηλώνει ότι για να είναι ευσταθές ένα υλικό θα πρέπει το γινόμενο μιας απειροστής αύξησης των τάσεων, με τη συνακόλουθη απειροστή αύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων που προκαλεί, να είναι μη αρνητικό. Με άλλα λόγια η

εκφράζει την υπόθεση ότι ο ρυθμός μεταβολής της τάσης δεν μπορεί να αντιτίθεται στο ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης.

Μία αναγκαία συνθήκη για την ικανοποίηση του αξιώματος του Drucker είναι η αρχή της μέγιστης πλαστικής αντίστασης (*principle of maximum plastic resistance*), σύμφωνα με την οποία για ένα αρχικό σημείο σ_{ij}^0 στο χώρο των τάσεων εντός της επιφάνειας διαρροής ή πάνω σε αυτήν και ένα τελικό σημείο σ_{ij} , θα πρέπει να ισχύει

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.67)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο νόμος πλαστικής ροής ταυτίζεται με την επιφάνεια διαρροής, η οποία είναι λεία ώστε σε κάθε σημείο της να ορίζεται εφαπτομένη και κάθετο διάνυσμα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.21) που απεικονίζει χάριν απλότητας χώρο τάσεων δύο διαστάσεων, για να ισχύει η σχέση (2.67) θα πρέπει το διάνυσμα της επαύξησης της πλαστικής παραμόρφωσης να είναι *κάθετο στην επιφάνεια διαρροής (normality rule)*. Αλλά επίσης, θα πρέπει η εφαπτόμενη στην επιφάνεια διαρροής στο τυχόν σημείο να μην την τέμνει και σε άλλα σημεία. Θα πρέπει δηλαδή να έχουμε *κυρτή επιφάνεια διαρροής (convexity)*.



Σχήμα 2.21 : α) Κανόνας καθετότητας β) Κυρτότητα γ) Διαφορισμότητα επιφάνειας διαρροής

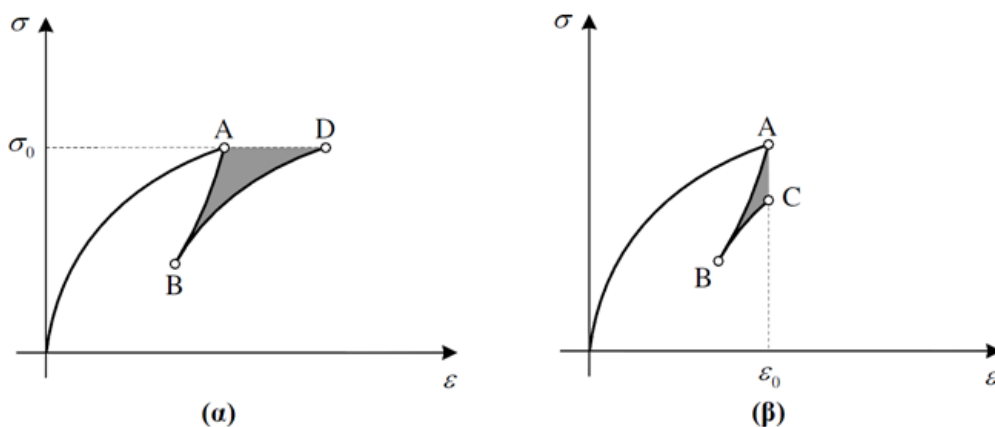
Αν ισχύει η σχέση (2.67) τότε προφανώς θα πρέπει να ισχύει η ανίσωση που ακολουθεί,

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \cdot d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (2.68)$$

Επίσης, στην πλαστικότητα που διατυπώνεται στο χώρο των παραμορφώσεων και όχι των τάσεων όπως πριν (*strain – space plasticity*), ο Il'iushin διατύπωσε ένα ακόμα αξίωμα (γνωστό στη βιβλιογραφία ως *Il'iushin's postulate*). Σύμφωνα με αυτό, θα πρέπει για ένα κλειστό κύκλο παραμόρφωσης το έργο να είναι μη αρνητικό,

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (2.69)$$

Τα διαγράμματα τάσεων παραμορφώσεων όμως που παράγονται από την Bouc – Wen υστέρηση, καταστρατηγούν τις σχέσεις (2.68) και (2.69) και άρα τα δύο ανεφερθέντα αξιώματα της πλαστικότητας. Η παραβίαση των αξιωμάτων παρουσιάζεται στο σχήμα (2.22) , όπου όπως φαίνεται, για σύντομους κύκλους τάσης ή παραμόρφωσης το διάγραμμα Bouc – Wen παρουσιάζει συνεχή αύξηση των παραμορφώσεων (*deformation drift*) και χαλάρωση στη δύναμη (*force relaxation*), αντίστοιχα.



Σχήμα 2.22 : a) Παραβίαση αξιώματος Drucker b) Παραβίαση αξιώματος Il'iushin

Η παραβίαση των αξιωμάτων της πλαστικότητας αποτελεί ένα μειονέκτημα του προσομοιώματος και παρόλο που δε φαίνεται σοβαρό, μπορεί υπό ειδικές συνθήκες φορτίου να δώσει σημαντικά σφάλματα στα αποτελέσματα. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά από τους A.Charalampakis – V. Koumoussis, με την προσθήκη ενός όρου στο προσομοίωμα των Sivaselvan – Reinhorn, ο οποίος «αναπληρώνει» το απολεσθέν έργο και εναρμονίζει το κλασικό μοντέλο με τα αξιώματα των Drucker και Piushin.

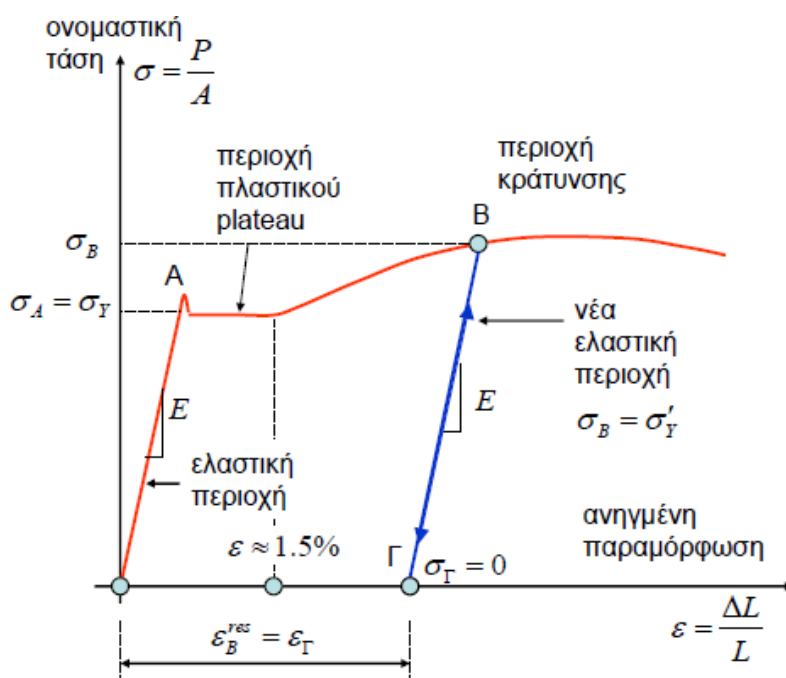
Κεφάλαιο 3^ο

Προσομοίωση χάλυβα

3. Προσομοίωση χάλυβα οπλισμών

3.1. Εισαγωγικά στοιχεία

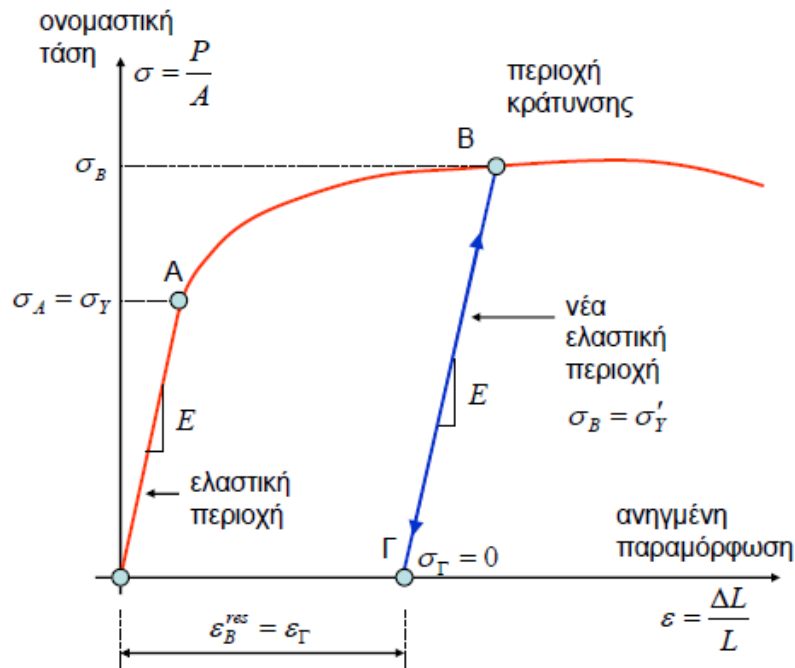
Ο χάλυβας είναι όλκιμο υλικό με μεγάλη πλαστιμότητα και για το λόγο αυτό η συμπεριφορά του είναι αυτή που καθορίζει καταλυτικά την πλαστιμότητα ολόκληρης της κατασκευής ΟΣ. Είναι συνεπώς σημαντικό στις αναλύσεις να χρησιμοποιούνται καμπύλες τάσεων – παραμορφώσεων χάλυβα, που να προσεγγίζουν με επάρκεια την πραγματικότητα.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα 'σ – ε' πειραματικής συμπεριφοράς απλού δομικού χάλυβα

Στην πειραματική συμπεριφορά των απλών δομικών χαλύβων, διακρίνονται τέσσερις βασικές περιοχές: η ελαστική – γραμμική περιοχή, μία περιοχή πλαστικού πλατώ, μία περιοχή κράτυνσης, και μία περιοχή softening, λίγο πριν την πλήρη αστοχία του υλικού. Επίσης, η απόκριση του χάλυβα είναι ίδια τόσο σε εφελκυσμό όσο και σε

θλίψη και έτσι το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.2.: Διάγραμμα 'σ – ε' χάλυβα υψηλής αντοχής

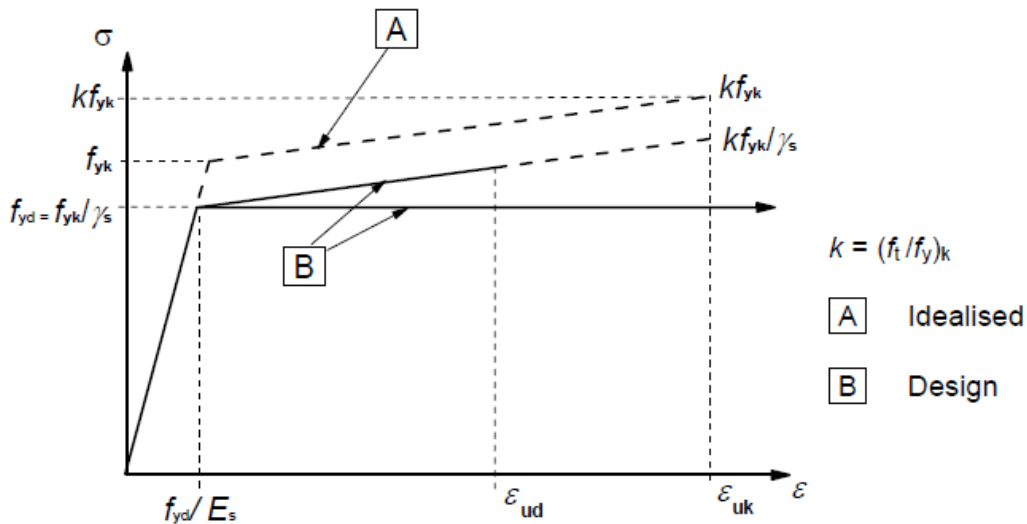
Η μονοαξονική εφελκυστική και θλιπτική συμπεριφορά των χαλύβων υψηλής αντοχής παρουσιάζει τρεις βασικές περιοχές: μια ελαστική – γραμμική περιοχή, μία περιοχή κράτυνσης, και μία περιοχή softening, λίγο πριν την πλήρη αστοχία του υλικού. Απουσιάζει δηλαδή η περιοχή του πλαστικού πλατώ, σε σχέση με προηγουμένως.

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα, όπως αυτά των Ramberg – Osgood (1943), Giuffrè and Pinto (1970), Menegotto – Pinto (1973), Stanton and McNiven (1979), Fillipou *et al.* (1983), Chang – Mander (1994), Dodd – Restrepo (1995), ενώ παράμετροι που προβλέπουν ζητήματα κόπωσης και λυγισμού έχουν ενσωματωθεί, όπως αυτές που προτάθηκαν από τους Brown – Kunnath (2000), Dhakal – Maekawa (2002).

3.2. Αλγεβρικά προσομοιώματα

3.2.1. Το μοντέλο του EC2

Ο EC2 προτείνει ένα απλό διγραμμικό μοντέλο ανάλυσης, με γραμμική κράτυνση για την ανάλυση και δύο διγραμμικά, ένα ελαστικό – απολύτως πλαστικό και ένα ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο, για το σχεδιασμό. Ο συντελεστής ασφαλείας του χάλυβα είναι, για σχεδιασμό, $\gamma_s = 1.15$,



Σχήμα 3.2: Διαγράμματα χάλυβα EC2

Για το διγραμμικό μοντέλο χωρίς κράτυνση, δεν απαιτείται έλεγχος της μέγιστης παραμόρφωσης, άρα $\epsilon_{uk} = \infty$, ενώ για το γραμμικά κρατυνόμενο πρέπει να ισχύει η σχέση, $\epsilon_{uk} \leq 0.075$. Ο συντελεστής k , σύμφωνα με τον Κανονισμό πρέπει να πληροί τον περιορισμό, $1.15 \leq k < 1.35$.

3.2.2. Το μοντέλο Menegotto – Pinto

Αξίζει, στο σημείο αυτό, μια ιδιαίτερη αναφορά στο μοντέλο των Menegotto – Pinto, καθώς πολλά από τα προσομοιώματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο §3.1., αναπτύχθηκαν ως επέκτασή του. Η μαθηματική διατύπωσή του έχει ως ακολούθως,

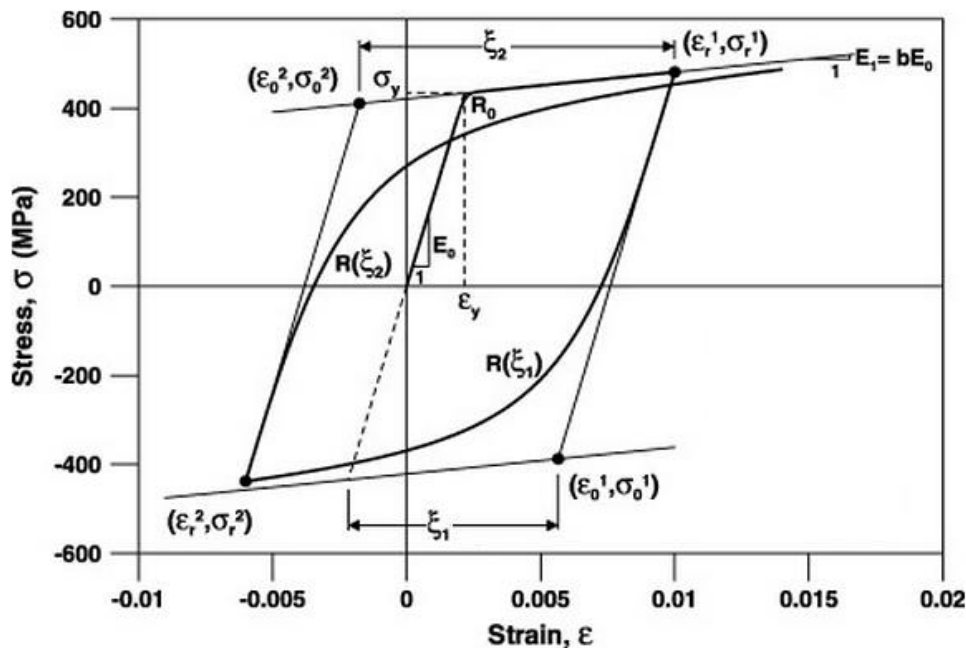
$$\bar{\sigma} = b\bar{\varepsilon} + \frac{(1-b)\bar{\varepsilon}}{(1+\bar{\varepsilon}^{R^n})^{1/R^n}} \quad (3.1)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^n}{\varepsilon_0^{n+1} - \varepsilon_r^n} \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma - \sigma_r^n}{\sigma_0^{n+1} - \sigma_r^n} \quad (3.3)$$

$$R^n = R^0 - \frac{A_1 \xi_P^n}{A_2 + \xi_P^n} \quad (3.4)$$

$$\xi_P^n = \left| \varepsilon_r^n - \varepsilon_r^{n-1} + \frac{\sigma_r^n - \sigma_r^{n-1}}{E_0} \right| \quad (3.5)$$



Σχήμα 3.4 : Διάγραμμα χάλυβα Menegotto – Pinto

όπου b η μετελαστική προς την ελαστική δυσκαμψία, R^n μια παράμετρος που επηρεάζει το σχήμα της καμπύλης, $(\varepsilon_r^n, \sigma_r^n)$ το σημείο εναλλαγής από φόρτιση σε αποφόρτιση, $(\varepsilon_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1})$ το νέο σημείο διαρροής, E_0 η ελαστική δυσκαμψία και ξ_p^n η πλαστική παραμόρφωση του ημι – κύκλου n .

3.3. Προσομοίωση χάλυβα βάσει της Bouc-Wen υστέρησης

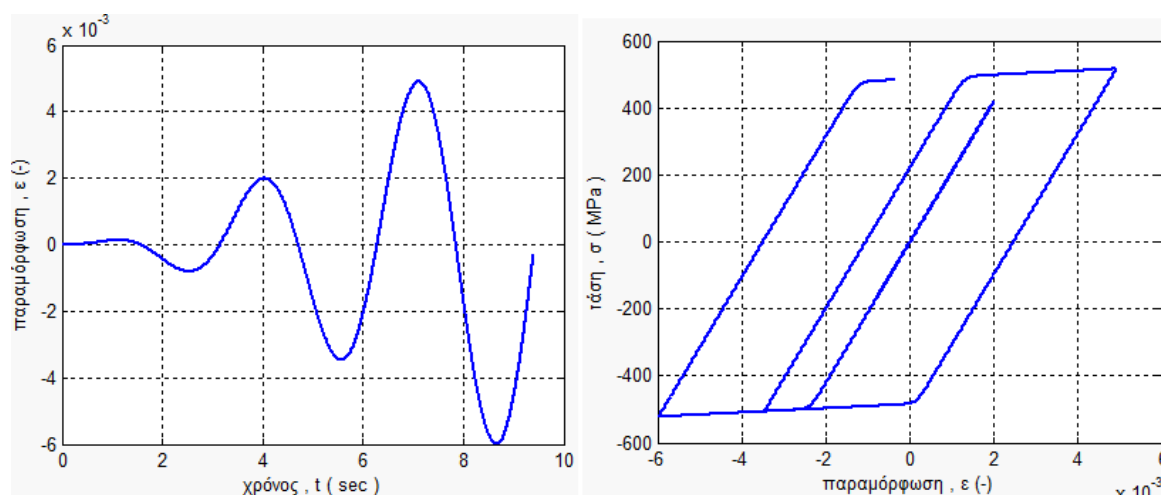
Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί ένα λείο – διγραμμικό διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων, με κινηματική γραμμική κράτυνση, βασισμένο στην θεωρία πλαστικότητας και το υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen, όπως αυτό του κανονισμού. Το μοντέλο αυτό, αν και δεν προσαρμόζεται με απόλυτη ακρίβεια πάνω στα πειραματικά διαγράμματα (βλ. σχήματα (3.1) και (3.2)), εντούτοις δεν υστερεί σε ακρίβεια, καθότι ο γραμμικός κλάδος της κράτυνσης λαμβάνεται ενεργειακά ισοδύναμος με τον πραγματικό μη – γραμμικό. Έχει δε, χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στην ανάλυση κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος από πλήθος ερευνητών (Ngo and Scordelis, 1967; Feenstra, 1993; Kwak and Fillippou, 1997; Lowes, 1999; Tikhomirov and Stein, 2001; Rabczuk et al., 2005; Phuvoravan and Sotelino, 2005; He et al., 2006; Junior and Venturini, 2007 και άλλους).

Οι παράμετροι Bouc – Wen, οι οποίες επιλέγονται, είναι $\alpha=0.02$, $\beta=\gamma=0.5$, ενώ για να καταστήσουμε το διάγραμμα πιο κοντά, κατα το δυνατόν, στο διγραμμικό μοντέλο θέτουμε $n=25$. Έτσι, η εξίσωση (2.13), γίνονται για το χάλυβα

$$\sigma_s = 0.02E\varepsilon_s + 0.98Ez_s$$

$$\dot{z}_s = \left[1 - \left| \frac{z_s}{z_{sy}} \right|^n (0.5 + 0.5 \text{sign}(z_s \dot{\varepsilon}_s)) \right] \dot{\varepsilon}_s \quad (3.6)$$

Στο σχήμα (3.4) απεικονίζονται γραφικά οι εξισώσεις (3.6) για μια χρονοϊστορία ελεγχόμενης παραμόρφωσης. Επιλέχθηκαν οι μηχανικές ιδιότητες $E=210000 \text{ MPa}$, $f_c=500 \text{ MPa}$, άρα $\varepsilon_y=0.00238$.



Σχήμα 3.5: Απόκριση χάλυβα, με κινηματική γραμμική κράτυνση, σε μονοαξονική ανακύκλιση

Για να πάρουμε, τώρα, ένα ιστροπικό μοντέλο κράτυνσης χάλυβα, τροποποιούμε τις εξισώσεις (3.6) ως εξής

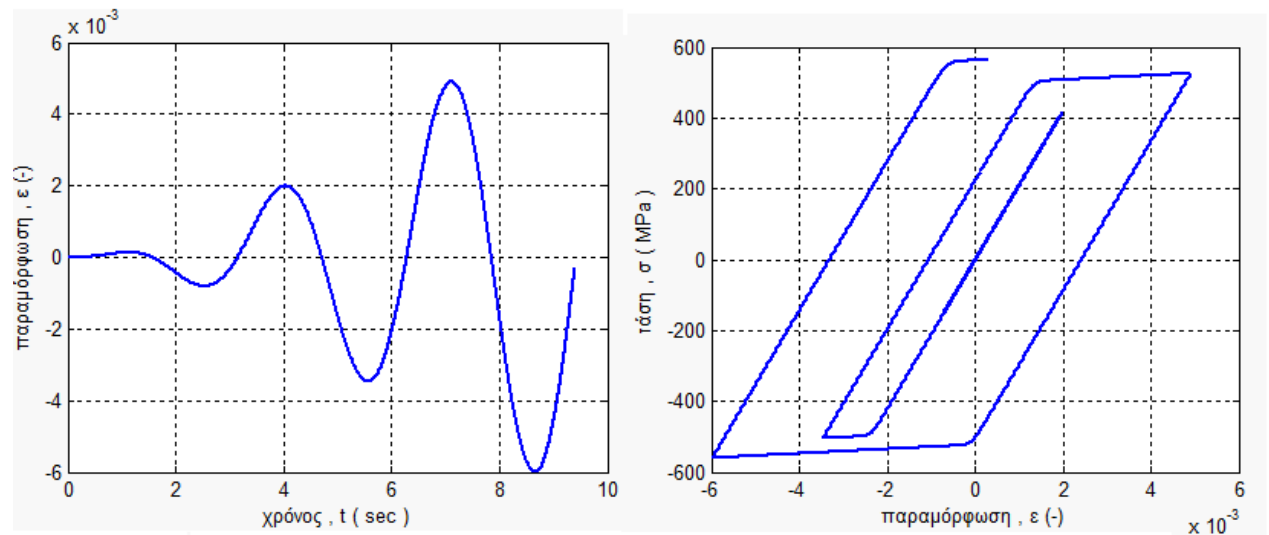
$$\sigma_s = E z_s$$

$$\dot{z}_s = \left[1 - (1 - \alpha) \left| \frac{z_s}{\kappa_s} \right|^n (0.5 + 0.5 \text{sign}(z_s \dot{\varepsilon}_s)) \right] \dot{\varepsilon}_s \quad (3.7)$$

$$\kappa_s = \max_{0 \leq \tau \leq t} (|z_s(\tau)|, z_{sy})$$

Καταργούμε αφ' ενός, δηλαδή, το ελαστικό ελατήριο στο οποίο οφείλεται ο κινηματικός χαρακτήρας της κράτυνσης και θέτουμε, αφ' ετέρου, ως παραμόρφωση διαρροής τη μέγιστη υστερητική παραμόρφωση, που έχει εμφανιστεί στη χρονοϊστορία της φόρτισης. Κατώτατο όριο αυτής της παραμόρφωσης κ_s , είναι η

αρχική παραμόρφωση διαρροής z_{sy} , η οποία στην περίπτωση μας είναι η παραμόρφωση διαρροής του πειράματος μονοαξονικού εφελκυσμού, με άλλα λόγια $z_{sy} = \varepsilon_{sy} = \sigma_{sy}/E$.



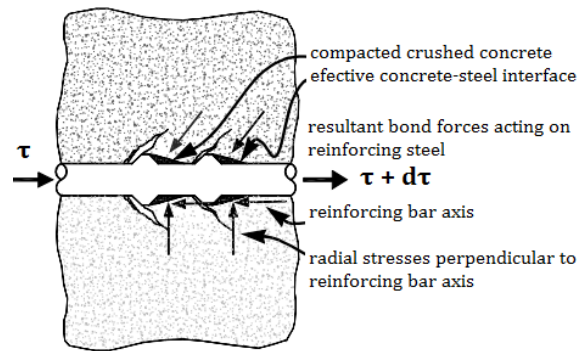
Σχήμα 3.6: Απόκριση χάλυβα, με ιστροπική γραμμική κράτνυση, σε μονοαξονική ανακύκλιση

Προφανώς, όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο §2.3.3., μπορούμε να συνδυάσουμε τις σχέσεις (3.6) και (3.7), παράγοντας ένα μοντέλο *μικτής κράτνυσης*, με ένα ιστροπικό και ένα κινηματικό κομμάτι. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να ορίσουμε δύο συντελεστές α , έναν ιστροπικό (α_{iso}) και έναν κινηματικό (α_{kin}).

3.4. Μακροσκοπική προσέγγιση της απώλειας συνάφειας

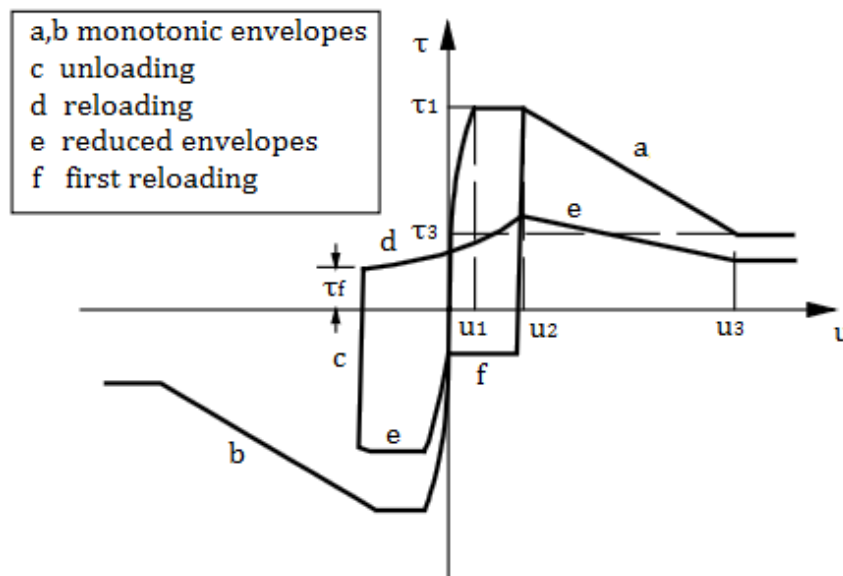
Συνήθίζεται, οι αναλύσεις των κατασκευών ΟΣ, να γίνονται αγνοία της ολίσθησης του χάλυβδινου οπλισμού μέσα στο σκυρόδεμα. Υποθέτουμε, δηλαδή, τις περισσότερες φορές *πλήρη συνάφεια* μεταξύ χάλυβα και σκυροδέματος. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει, καθώς οι διεπιφάνειες των δύο υλικών, ιδιαίτερα

όσο αυξάνεται ο αριθμός των ανακυκλίσεων στον οποίο υποβάλλεται η κατασκευή, φθείρονται, παθαίνοντας μη αναστρέψιμες βλάβες. Το γεγονός αυτό έχει ως άμεση συνέπεια την ευκολότερη ολίσθηση του χάλυβα, η οποία πλέον δεν είναι ασφαλές να αμελείται.



Σχήμα 3.7: Βλάβες διεπιφάνειας χάλυβα – σκυροδέματος

Έχουν προταθεί διάφορες καμπύλες τάσης – σχετικής παραμόρφωσης χάλυβα σκυροδέματος, για τη διεπιφάνειά των δύο υλικών. Οι Viwathanatapa (1979), Tassios et al. (1979, 1981), Eligehausen et al. (1983), Fillippou et al. (1983), έχουν προτείνει αναλυτικές σχέσεις μετά από πειραματική δουλειά.



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα τάσης – σχετικής ολίσθησης Fillippou *et al.*

Η προσέγγιση του φαινομένου σε επίπεδο διεπιφάνειας, όμως, αποτελεί μια διαδικασία που επιβαρύνει με αρκετά μεγάλο υπολογιστικό κόστος το μοντέλο μιας δοκού ΟΣ, αφού προσθέτει σε αυτό, περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας, αυτούς των μετακινήσεων ευθύγραμμων οπλισμών. Για το λόγο αυτό, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας μια τέτοια μοντελοποίηση. Εδώ προσεγγίζουμε την απώλεια συνάφειας σε επίπεδο φαινομενολογίας του συνολικού αποτελέσματος, δηλαδή, ως μια πιο «αδύναμη» συμπεριφορά του χάλυβα.

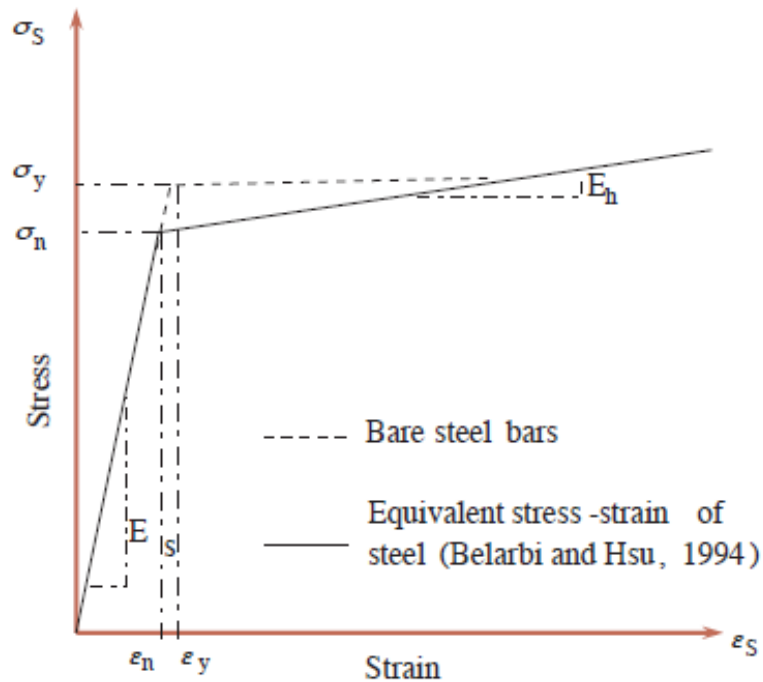
Στο πλαίσιο αυτής της λογικής, οι Belarbi & Hsu (1994), πρότειναν ένα μοντέλο, που μειώνει την τάση και την παραμόρφωση διαρροής του χάλυβα, κρατώντας σταθερό το μέτρο ελαστικότητάς του ως εξής,

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \varepsilon_s E_s, \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \\ \sigma_s &= \sigma_n + (0.02 + 0.25 B_B) E_s (\varepsilon_s - \varepsilon_n), \varepsilon_s > \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου έχουμε,

$$\begin{aligned} B_B &= \left(\frac{f_{ct}}{\sigma_y} \right)^{1.5} / \rho \\ \varepsilon_n &= (0.93 - 2 B_B) \varepsilon_y \end{aligned} \quad (3.9)$$

με $(\varepsilon_n, \sigma_n)$ το τροποποιημένο σημείο διαρροής, f_{ct} τη εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος και ρ το ποσοστό οπλισμού, που πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 0.005. Η μείωση αυτή της τάσης διαρροής οφείλεται στο γεγονός ότι οι ρωγμές δημιουργούν συγκεντρώσεις τάσεων, έτσι ώστε, όταν το γυμνό μέρος του οπλισμού ανάμεσα σε μια ρωγμή φτάσει την τάση διαρροής, το αγκυρωμένο μέρος να έχει ελαστική τάση. Οι σχέσεις (3.8) και (3.9), λοιπόν, προσπαθούν να επιτύχουν μια συνολική εξομάλυνση όλου αυτού του φαινομένου και σίγουρα αποτελεί τέτοια, η μείωση της τάσης διαρροής.



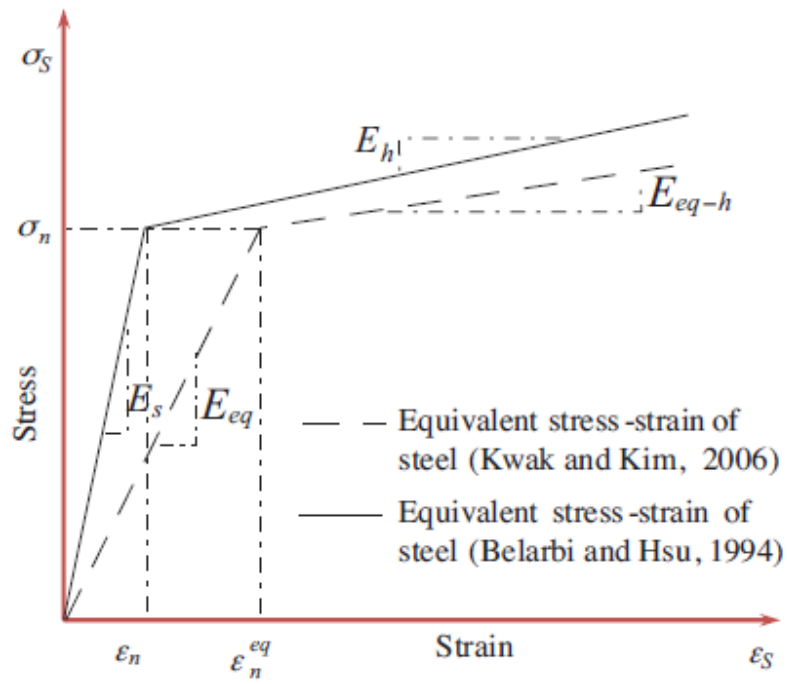
Σχήμα 3.9: Ισοδύναμη τάση χάλυβα κατά Belarbi – Hsu

Βασισμένοι στην παραπάνω δουλειά οι Kwak και Kim (2006), απομόνωσαν τη συμπεριφορά μιας ράβδου οπλισμού, που βρίσκεται εντός σκυροδέματος, μεταξύ δύο ρωγμών. Εξήγαγαν, έτσι, μέσω της ισορροπίας, χρησιμοποιώντας μια γραμμική σχέση τάσης – παραμόρφωσης ολίσθησης, το διάγραμμα του χάλυβα. Σύμφωνα με αυτό, προέκυψαν οι σχέσεις

$$E_{eq} = E_s \varepsilon_{s1} / \varepsilon_{eq}^s$$

$$E_{eq-h} = E_h \varepsilon_{s1} / \varepsilon_{eq}^s \quad (3.10)$$

όπου ε_{s1} η παραμόρφωση του χάλυβα για πλήρη συνάφεια και $\varepsilon_{eq}^s = \int_0^{l_b} \varepsilon^s(x) dx / l_b$. Το μέγεθος l_b είναι το μήκος αγκύρωσης, που προκύπτει από τις δοκιμές εξόλκευσης, ενώ $\varepsilon_n^{ep} = \sigma_n / E_{eq}$. Το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων του χάλυβα τροποποιείται έτσι ως παρακάτω,



Σχήμα 3.10: Σύγκριση μοντέλων Kwak – Kim , Belarbi – Hsu



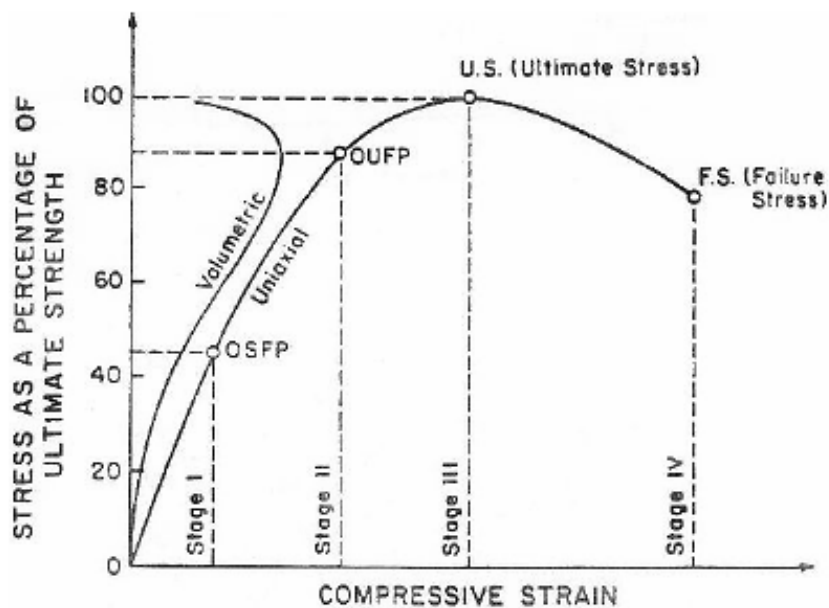
Κεφάλαιο 4^ο

Προσομοίωση σκυροδέματος

4. Προσομοίωση σκυροδέματος

4.1. Εισαγωγικά στοιχεία

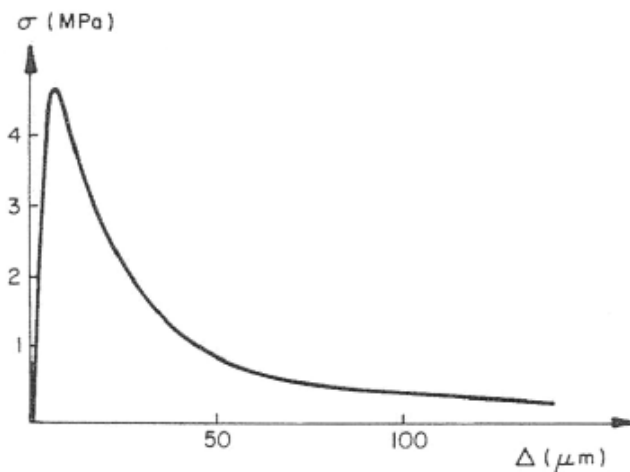
Το σκυρόδεμα αποτελεί ένα εξαιρετικά δύσκολο στην προσομοίωσή του υλικό, σε αντίθεση με το χάλυβα που μπορεί να προσεγγισθεί, απλά και αποτελεσματικά, από τη σκοπιά της θεωρίας πλαστικότητας. Λόγω της ετερόκλητης σύνθεσης (τσιμέντο και αδρανή διαφόρων διαβαθμίσεων), της ψαθυρότητας και της ελάχιστης εφελκυστικής του αντοχής, σε σχέση με τη θλιπτική, κάθε προσομοίωση καλείται να συγκαιράσει μεγάλο αριθμό αβεβαιοτήτων και ασυμμετριών.



Σχήμα 4.1 : Μονοαξονική θλίψη σκυροδέματος

Η θλιπτική πειραματική συμπεριφορά του σκυροδέματος χονδρικά παρουσιάζει τέσσερα στάδια. Το πρώτο στάδιο αφορά σε ένα επίπεδο φόρτισης μέχρι 30 – 60 % της θλιπτικής αντοχής, όπου μπορούμε να πούμε ότι το υλικό λειτουργεί απολύτως ελαστικά. Στο στάδιο αυτό οι ρωγμές που δημιουργούνται στον όγκο του

σκυροδέματος δεν εξελίσσονται, παραμένουν δηλαδή στάσιμες (*stationary cracks*). Το δεύτερο στάδιο μπορεί να εντοπισθεί μέχρι μία στάθμη του 70 – 90 % της αντοχής. Πλέον οι ρωγμές αρχίζουν να διευρύνονται και να πληθύνονται δημιουργώντας συνεχείς απομειώσεις στο αρχικό μέτρο ελαστικότητας, αλλά και μη αναστρέψιμες (πλαστικές) παραμορφώσεις κατά την αποφόρτιση. Από το τέλος του σταδίου αυτού μέχρι την μέγιστη θλιπτική τάση, μπορεί να διακριθεί ένα τρίτο στάδιο, όπου πλέον το πλήθος των διαφόρων ρωγμών ενώνεται σε ευρύτερες ρωγμές. Το τέταρτο στάδιο είναι ένα στάδιο *softening*. Το χαρακτηριστικό αυτού του σταδίου είναι ότι πλέον οι ρωγμές έχουν γίνει ασταθείς, με άλλα λόγια παράγονται και διευρύνονται πλέον ανεξέλεγκτα χωρίς επιπλέον προσφορά ενέργειας, μέχρι την πλήρη σύνθλιψη – αστοχία.



Σχήμα 4.2 : Μονοαξονικός εφελκυσμός σκυροδέματος

Στον εφελκυσμό η συμπεριφορά του σκυροδέματος παρουσιάζει εξαιρετικά πιο μεγαλύτερη, από ότι στη θλίψη, ψαθυρότητα. Για το λόγο αυτό μπορούμε να διακρίνουμε χονδρικά δύο περιοχές : μια αρχική ελαστική περιοχή μέχρι τη μέγιστη εφελκυστική τάση και μία απότομη περιοχή *softening* μέχρι την πλήρη διάρρηξη.

Η ανάπτυξη των ρωγμών ξεκινά κατά κύριο λόγο από τις διαπιφάνειες των πιο αιχμηρών αδρανών και της πάστας του τσιμέντου. Η επιπτώση του φαινομένου αυτού

στη μηχανική συμπεριφορά του υλικού όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, είναι οι συνεχείς απομειώσεις δυσκαμψίας και το *softening*, φαινόμενα που η κλασική πλαστικότητα αδυνατεί να ερμηνεύσει. Γεννάται η ανάγκη προσέγγισης των φαινομένων αυτών, λοιπόν, μέσω της μηχανικής βλαβών, η οποία μπορεί να τα αποδώσει καλύτερα και πιο ολοκληρωμένα, αντιμετωπίζοντας τα ως αποτέλεσμα του ίδιου μηχανισμού βλάβης (*damage*). Αποτυγχάνει, ωστόσο, να εξηγήσει τις παραμένουσες παραμορφώσεις που εμφανίζονται και για το λόγο αυτό πολλοί ερευνητές, όπως οι Simo - Ju (1987), Ju (1989), Mazars – Pijaudier – Cabot (1989), Yazdani – Schreyer (1990), Hansen – Schreyer (1992), Lee – Fenves (1998), Faria et al. (1998), Fichant et al. (1999), Voyiadjis – Kattan (1999, 2006), Jefferson (2003), Salari et al. (2004), Shen et.al. (2004), Jason et Al. (2006), Voyiadjis et Al. (2008), στράφηκαν στη σύζευξη πλαστικότητας – μηχανικής βλαβών, προτείνοντας και τα ανάλογα προσομοιώματα.

4.2. Αλγεβρικά προσομοιώματα

4.2.1. Το μοντέλο Kent – Scott – Park

Οι Kent – Park (1973), πρότειναν ένα απλό αναλυτικό μοντέλο προσομοίωσης, για μονοαξονική μονοτονική καταπόνηση του σκυροδέματος, δίνοντας αναλυτικές σχέσεις για τις καμπύλες $\sigma - \epsilon$. Το μοντέλο επέκτειναν περαιτέρω οι Scott et al. (1982). Το ίδιο μοντέλο χρησιμοποιείται και από το λογισμικό OpenSees για συνθήκες ανακυκλιζόμενης φόρτισης, στις οποίες ενεργοποιείται και υστερητική συμπεριφορά. Το τροποποιημένο μοντέλο παρουσιάζεται παρακάτω,

$$\sigma_c = K f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = K f'_c [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)] \geq 0.2 K f'_c, \quad \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u$$

με παραμέτρους που δίνονται από τις σχέσεις που ακολουθούν παρακάτω

$$\varepsilon_0 = 0.002K \quad (4.2)$$

$$K = 1 + \rho_s \frac{f_{yh}}{f'_c} \quad (4.3)$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29f'_c}{145f'_c - 1000} + 0.75\rho_s \sqrt{\frac{h'}{S_h}} - 0.002K} \quad (4.4)$$

όπου ε_0 η παραμόρφωση διαρροής, K μια παράμετρος που ελέγχει την αύξηση της αντοχής ανάλογα με την περίσφιγξη, f'_c η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος σε MPa, f_{yh} η αντοχή των συνδετήρων σε MPa, ρ_s το μηχανικό ογκομετρικό ποσοστό οπλισμού των συνδετήρων, h' το πλάτος του περισφιγμένου πυρήνα από την εξωτερική πλευρά των συνδετήρων, S_h η απόσταση κατα μήκος, από κέντρο σε κέντρο, δυο διαδοχικών συνδετήρων και Z η φθίνουσα κλίση που υλοποιεί το *softening*.

Όπως πρότειναν οι Scott et al, η οριακή παραμόρφωση αστοχίας του σκυροδέματος μπορεί να υπολογιστεί συντηρητικά από την παρακάτω σχέση,

$$\varepsilon_u = 0.004 + 0.9\rho_s (f_{yh} / 300) \quad (4.5)$$

Η υστερητική συμπεριφορά του μοντέλου, διέπεται από τους εξής κανόνες:

Αποφόρτιση A→B

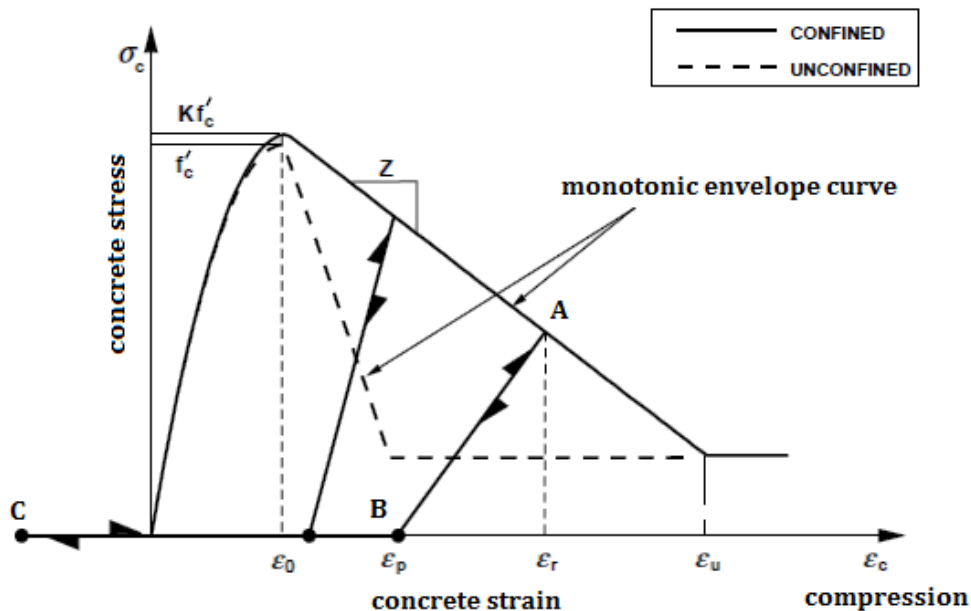
Ο κλάδος αποφόρτισης είναι γραμμικά ελαστικός και ενώνει τα σημεία A(ε_r, σ_r) και B($\varepsilon_p, 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα (4.3), όπου,

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.145 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0.13 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right), \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) < 2$$

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.707 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} - 2 \right) + 0.834, \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) \geq 2$$
(4.6)

Άνοιγμα ρωγμής B→C

Θεωρώντας, απλουστευτικά, μηδενική την εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος, αν συνεχίσουν να μικραίνουν οι θλιπτικές παραμορφώσεις, το σημείο ισορροπίας κινείται πάνω στον άξονα των ε_c . Το σημείο B ($\varepsilon_p, 0$) είναι το σημείο ανοίγματος ρωγμής.



Σχήμα 4.3 : Διάγραμμα 'σ - ε' σκυροδέματος Kent - Scott - Park

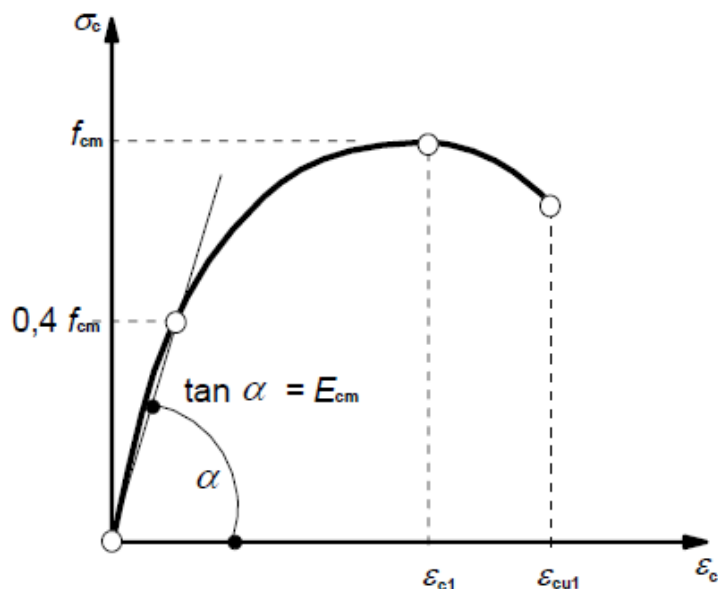
Κλείσιμο ρωγμής - Επαναφόρτιση C→B→A

Αν οι θλιπτικές παραμορφώσεις αρχίσουν να αυξάνονται, το σημείο ισορροπίας κινείται πάλι πάνω στον άξονα των ε_c , μέχρι να φτάσει το σημείο B (κλείσιμο ρωγμής). Από εκείνο το σημείο και μετά αρχίζει η γραμμική ελαστική επαναφόρτιση, ο κλάδος της οποίας ταυτίζεται με τον τελευταίο κλάδο αποφόρτισης.

Το παραπάνω μοντέλο, είναι αρκετά διαδεδομένο στις αναλύσεις κατασκευών ΟΣ, λόγω της καλής σχέσης απλότητας και ακρίβειας που παρέχει.

4.2.2. Το μοντέλο του EC2

Ο EC2 προτείνει ένα διαγράμμα τάσεων – παραμορφώσεων για ανάλυση και δύο προσεγγίσεις του, μία παραβολική – ορθογωνική (με μια ορθογωνική απλοποίησή της) και μία διγραμμική, για σχεδιασμό.



Σχήμα 4.4 : Διάγραμμα ‘σ – ε’ σκυροδέματος EC2

Οι αναλυτικές σχέσεις για το διάγραμμα της ανάλυσης, που φαίνεται στο σχήμα (4.4), είναι,

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (4.7)$$

όπου,

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \quad (4.8)$$

$$k = 1.05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}} \quad (4.9)$$

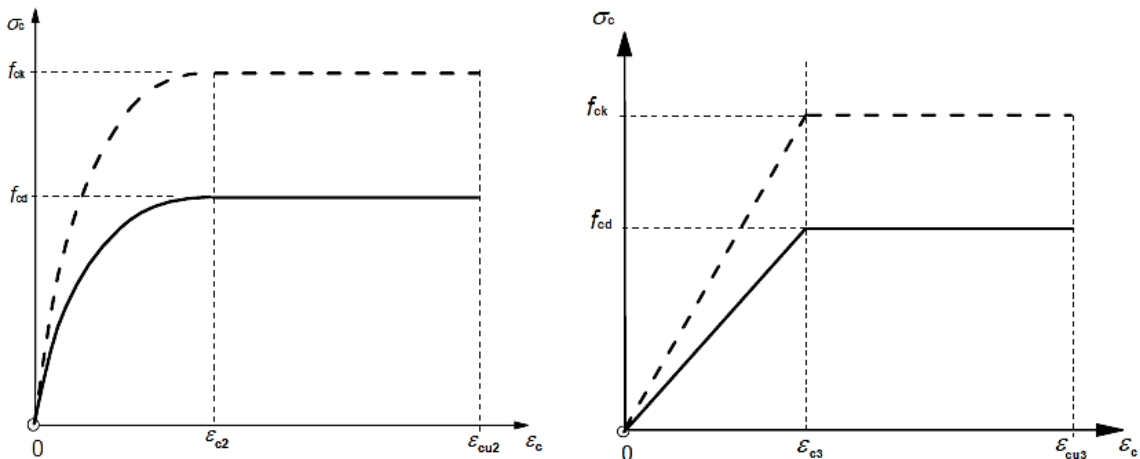
$$\varepsilon_{c1} = 0.0007 f_{cm}^{0.31} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{cu1} = 0.0028 + 0.027 \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4, \quad f_{cm} \geq 50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{cu1} = 0.0035, \quad f_{cm} \leq 50 \text{ MPa} \quad (4.11)$$

με f_{cm} τη μέση θλιπτική αντοχή (κυλίνδρου) του σκυροδέματος και E_{cm} το μέσο μέτρο ελαστικότητας, κατά τους πίνακες του κανονισμού, ε_{c1} την παραμόρφωση μέγιστης τάσης, ε_{cu1} την οριακή παραμόρφωση αστοχίας.

Τα μοντέλα του σχεδιασμού παρουσιάζονται συνοπτικά, στο σχήμα (4.5), με ε_{cu1} , ε_{ci} , f_{ck} μεγέθη που δίνονται από τον κανονισμό. Ο συντελεστής ασφαλείας για το σκυρόδεμα είναι $\gamma_c = 1.5$ και άρα $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$.



Σχήμα 4.5 : α) Ορθογωνικό – παραβολικό σκυρόδεμα EC2 β) Διγραμμικό σκυρόδεμα EC2

Για το περισφιγμένο σκυρόδεμα ο κανονισμός δίνει επίσης αναλυτικούς τύπους, τόσο για την μέγιστη θλιπτική τάση, όσο και για τα παραμορφωσιακά μεγέθη, τα οποία αυξάνονται σε σχέση με τα αντίστοιχα του απερίσφιγκτου ως παρακάτω,

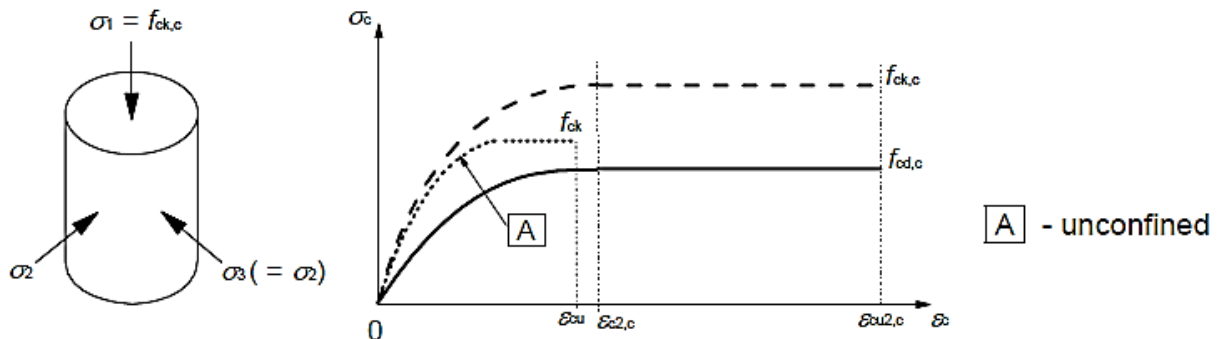
$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1.000 + 5.0 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) , \sigma_2 \leq 0.05 f_{ck} \quad (4.12)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1.125 + 2.5 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) , \sigma_2 > 0.05 f_{ck}$$

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} \left(f_{ck,c} / f_{ck} \right)^2 \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0.2 \sigma_2 / f_{ck} \quad (4.14)$$

όπου σ_2 η ενεργή πλευρική τάση περίσφιγξης που παρέχεται από τους συνδετήρες στον περισφιγμένο πυρήνα, όπως περιγράφεται από το σχήμα (4.6),



Σχήμα 4.6 : Επιρροή της περίσφιγξης στη μηχανική συμπεριφορά του σκυροδέματος

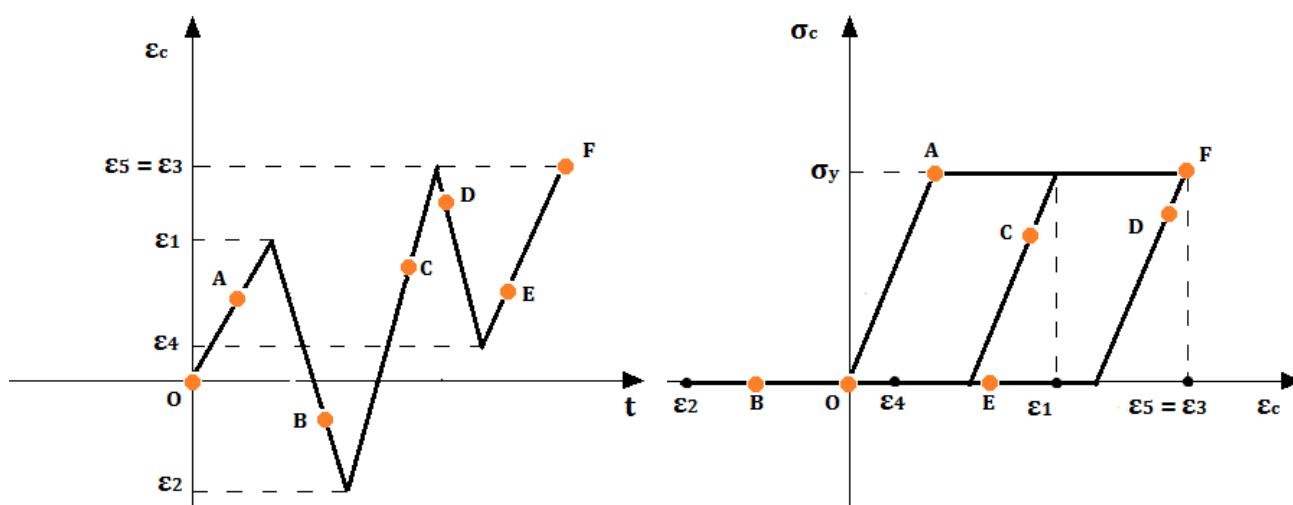
4.3. Προσομοίωση βάσει της Bouc – Wen υστέρησης No.1

4.3.1. Η μαθηματική διατύπωση

Στην παράγραφο αυτή, θα επιχειρηθεί μια τροποποίηση των σχέσεων του προσομοιώματος Bouc – Wen, έτσι ώστε να περιγράφουν τη μονοαξονική υστερητική συμπεριφορά του σκυροδέματος. Σε πρώτη φάση θα διατυπωθεί ένα ελαστικό – απολύτως πλαστικό μοντέλο, χωρίς εφελκυστική αντοχή, το οποίο θα λειτουργήσει ως βάση, για την περαιτέρω επεξεργασία που θα ακολουθήσει στις επόμενες παραγράφους..

Αρχικά, ας κάνουμε μία κομβική παρατήρηση, σχετικά με τη συμπεριφορά που θέλουμε να παραγάγουμε: Το σημείο που αντιστοιχεί στην πλήρη αποφόρτιση με τη μεγαλύτερη θλιπτική παραμόρφωση της χρονοϊστορίας, είναι το σημείο από το οποίο θα ξεκινήσει η επόμενη επαναφόρτιση.

Η θλιπτική αυτή παραμόρφωση δεν είναι άλλη από τη μέγιστη πλαστική θλιπτική παραμόρφωση της ιστορίας της φόρτισης. Αυτό το «σχήμα» παρουσιάστηκε και στην περιγραφή της υστερητικής συμπεριφοράς του μοντέλου Kent – Scott – Park και σχετίζεται με τη μηδενική εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος και το συνακόλουθο άνοιγμα ρωγμής. Στο σχήμα (4.7) όλη η προηγούμενη περιγραφή επεξηγείται σαφέστερα, αν παρακολουθηθεί ο δρόμος ισορροπίας $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$.



Σχήμα 4.7 : Μονοαξονική συμπεριφορά προσομοιώματος Νο.1

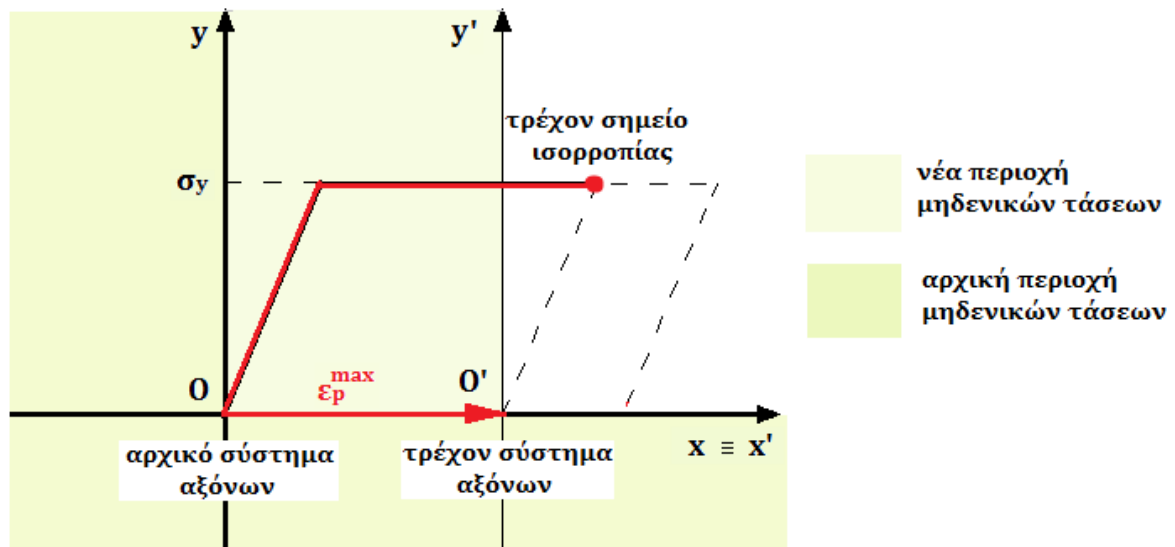
Η μέγιστη θλιπτική πλαστική παραμόρφωση ταυτίζεται με την ελάχιστη αλγεβρική τιμή της πλαστικής παραμόρφωσης. Αρα πρέπει να συγκρατούμε, καθ' όλη τη διάρκεια της φόρτισης την τιμή ,

$$\varepsilon_{cp}^{min} = \min_{\tau \leq t} (\varepsilon_{cp}(\tau)) \quad (4.15)$$

όπου ε_{cp} η πλαστική παραμόρφωση του συστήματος, για την οποία ισχύει η σχέση

$$\dot{\varepsilon}_{cp} = \dot{\varepsilon}_c - \frac{\dot{\sigma}_c}{E} = \dot{\varepsilon}_c - \dot{z}_c \quad (4.16)$$

Η εικόνα που δίνει η ιδέα αυτή, είναι ότι η μέγιστη θλιπτική παραμόρφωση, καθώς αυξάνει, μετατοπίζει και το σύστημα αξόνων του διαγράμματος κατά μήκος του άξονα των τάσεων, μη αντιστρεπτά. Καθώς πραγματοποιείται αυτή η μετατόπιση, ο τόπος των σημείων που «σαρώνουν» οι άξονες, ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο θα εμφανίζονται πλέον μόνο μηδενικές τάσεις, επιτρέποντας μη μηδενικές τάσεις μόνο στο ένα τεταρτημόριο του νέου συστήματος, όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.8)



Σχήμα 4.8 : Μετακίνηση αξόνων 'σ - ε' σύμφωνα με την πλαστική παραμόρφωση

Οι παραμορφώσεις στο εκάστοτε νέο σύστημα είναι

$$\dot{\varepsilon}'_c = \dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_{cp}^{min} \quad (4.17)$$

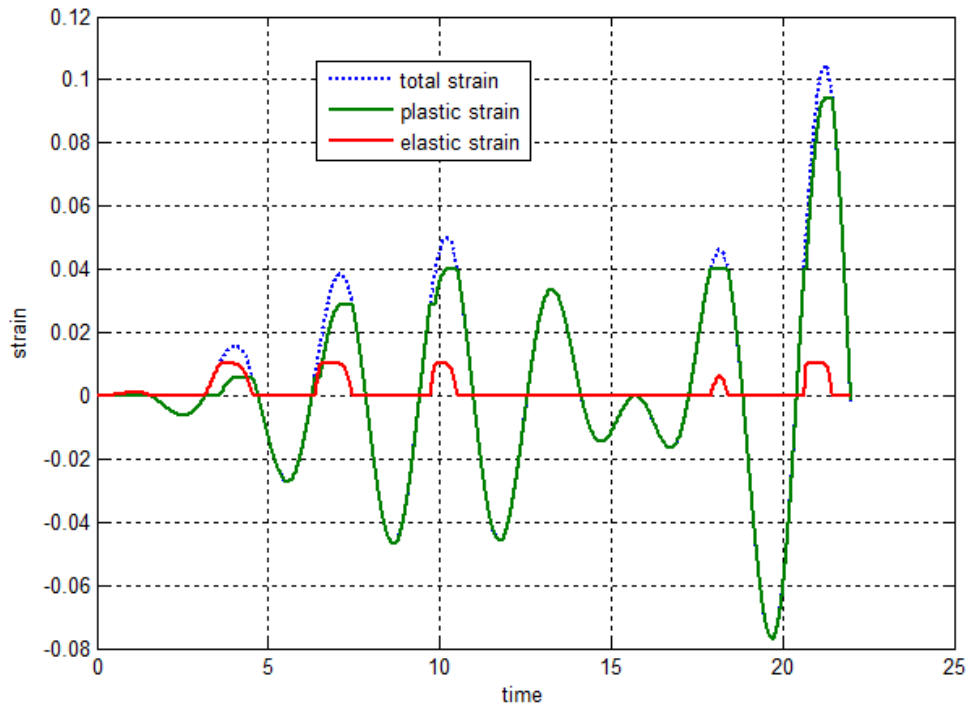
Πρέπει να ορίσουμε, τώρα, ένα «διακόπτη», που να ενεργοποιεί την ελαστο – πλαστική συμπεριφορά μόνο στο θλιπτικό τεταρτημόριο, του νέου συστήματος ,

$$S_1 = He(-z_c)He(-\varepsilon'_c) \quad (4.18)$$

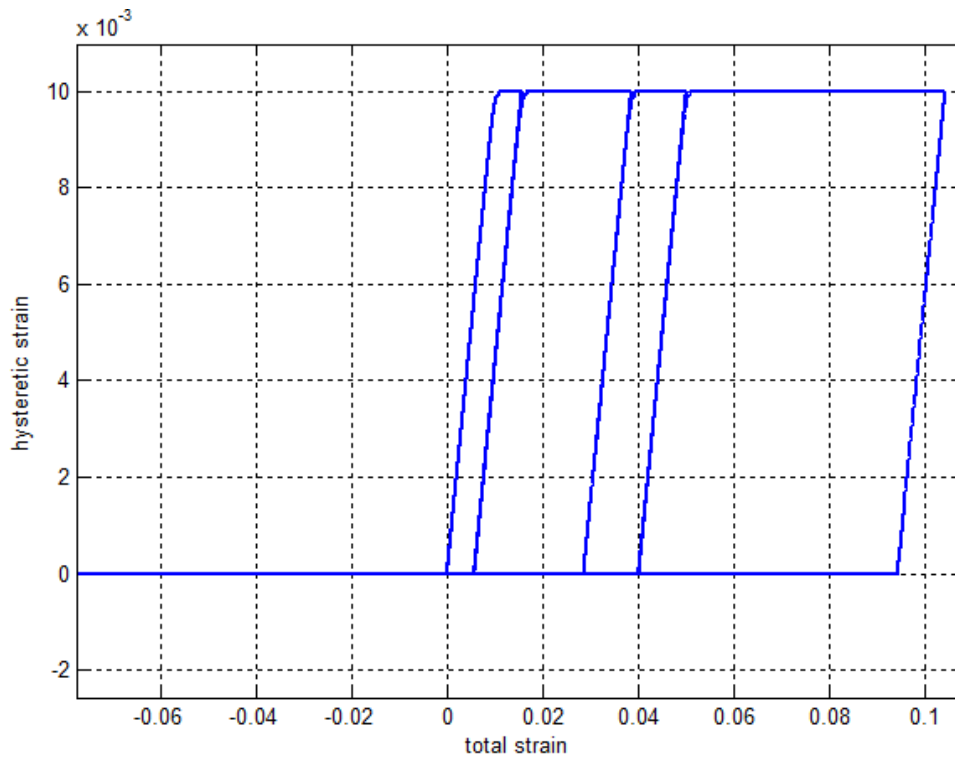
όπου z_c η υστερητική παραμόρφωση του σκυροδέματος κατά Bouc – Wen και He η βηματική συνάρτηση Heaviside. Με βάση, όλες τις παραπάνω σχέσεις, οι εξισώσεις (2.13), δίνουν,

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c z_c \\ \dot{z}_c &= \left[1 - \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^{s_1 \cdot n} (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\varepsilon}_c)) \right] \dot{\varepsilon}_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

Παρακάτω, βλέπουμε ένα αναλυτικό παράδειγμα (θλιπτικές παραμορφώσεις με +): Υποβάλουμε μία ίνα σκυροδέματος στην παραμόρφωση που φαίνεται στο σχήμα (4.9) με μπλε διακεκομμένη γραμμή και εξάγουμε από τις σχέσεις (4.19) τους υστερητικούς βρόχους του σχήματος (4.10). Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε σε κάθε χρονική στιγμή η συνολική παραμόρφωση του συστήματος συνίσταται σε ένα πλαστικό και ένα ελαστικό κομμάτι.



Σχήμα 4.9 : Χρονοϊστορία συνολικής, πλαστικής και ελαστικής παραμόρφωσης

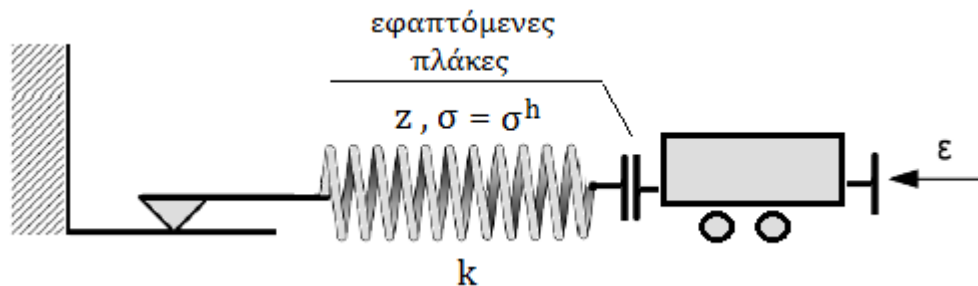


Σχήμα 4.10 : Υστερητικός βρόχος προσομοιώματος σκυροδέματος Νο.1

Να σημειωθεί ότι, επειδή δεν υπάρχει ελαστικό ελατήριο στο μοντέλο, δηλαδή $\alpha = 0$, οι υστερητικές παραμορφώσεις z ταυτίζονται με τις ελαστικές παραμορφώσεις ε_e της θεωρίας πλαστικότητας.

4.3.2. Το μηχανικό ανάλογο

Στο στάδιο αυτό, είναι χρήσιμη η παρουσίαση του μηχανικού αναλόγου αυτού του τροποποιημένου μοντέλου.



Σχήμα 4.11 : Μηχανικό ανάλογο προσομοιώματος σκυροδέματος Νο.1

Όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.11) έχουμε πλέον μόνο το υστερητικό ελατήριο με τον ολισθητήρα, το οποίο, όμως, στην περίπτωσή αυτή αποτελείται από δύο κομμάτια (ελατήριο + στερεό σώμα). Τα κομμάτια αυτά εφάπτονται, έτσι ώστε να λειτουργούν μόνο υπό θλίψη. Ο ολισθητήρας, σε αντίθεση με το κλασικό υστερητικό προσομοίωμα, στο οποίο κινείται δεξιά – αριστερά σε συνθήκες ανακύκλισης, εδώ κινείται μονίμως προς τη μία κατεύθυνση, αυτή των θλιπτικών παραμορφώσεων, αφού δεν υπάρχει δυνατότητα να παρασυρθεί στην αντίθετη λόγω της απλής επαφής των πλακών, όπως μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό από το προκείμενο προσομοίωμα.

4.3.3. Διερεύνηση προσομοιώματος

Ας διερευνήσουμε λίγο περισσότερο, τώρα, το σύστημα των εξισώσεων (4.19), από πιο μαθηματική σκοπιά, εντοπίζοντας πιο προσεκτικά το ρόλο των νέων εξισώσεων στα παρακάτω διαδοχικά στάδια:

Φάση επιβολής θλιπτικής παραμόρφωσης

Στη φάση της επιβολής θλιπτικής παραμόρφωσης $sign(z_c \dot{\varepsilon}_c) = 1$ και $S_1 = 0$ αφού ο δρόμος ισορροπίας κινείται στο θλιπτικό τεταρτημόριο, άρα η δεύτερη των εξισώσεων (4.19) δίνει ,

$$\dot{z}_c = \left[1 - \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n \right] \dot{\varepsilon}_c \quad (4.20)$$

Για $|\varepsilon_c| \leq z_{yc}$, αρχικά, θα έχουμε $\left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n \rightarrow 0$ και άρα,

$$\dot{z}_c = \dot{\varepsilon}_c \quad (4.21)$$

Και για μηδενικές αρχικές συνθήκες από τη σχέση (4.21) λαμβάνουμε,

$$z_c = \varepsilon_c \quad (4.22)$$

Εδώ το προσομοίωμα λειτουργεί, όπως θα λειτουργούσε, ακριβώς, το προσομοίωμα Bouc – Wen. Όταν φτάσουμε την παραμόρφωση διαρροής, $|\varepsilon_c| = z_{yc}$, θα έχουμε από τη διαφορική εξίσωση (4.20).

$$\dot{z}_c = 0 \quad (4.23)$$

άρα για $|\varepsilon_c| \geq z_{yc}$,

$$z_c = z_{cy} \quad (4.24)$$

Στο τέλος της φάσης αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε και τη συνολική μετακίνηση των αξόνων που ισούται με ε_{cp}^{min} .

Φάση αναίρεσης θλιπτικής παραμόρφωσης

Αρχικά, έχουμε τη φάση αποφόρτισης ή αναίρεσης των ελαστικών παραμορφώσεων, όπου $sign(z_c \dot{\varepsilon}_c) = -1$, άρα η εξίσωση (4.19) εκφυλίζεται στην (4.21), υλοποιώντας την ελαστική αποφόρτιση, με αρχικές συνθήκες το τελευταίο ζεύγος (z_c, ε_c) της φάσης φόρτισης. Το μέτρο του z_c μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί οπότε θα γίνει $S_1 = 0$.

Κατόπιν ακολουθεί η αναίρεση των πλαστικών παραμορφώσεων, κατά την οποία ο «διακόπτης» S_1 έχει την τιμή $S_1 = 0$, ενώ $sign(z_c \dot{\varepsilon}_c) = 1$, (θεωρώντας $sign(0) = 1$), και η εξίσωση (4.19) γίνεται,

$$z_c = 0 \quad (4.25)$$

Άρα το σημείο ισοροπίας κινείται πάνω στον άξονα των παραμορφώσεων.

Φάση επιβολής εφελκυστικής παραμόρφωσης

Στη φάση αυτή δεν αλλάζει τίποτα σε σχέση με το δεύτερο στάδιο της προηγούμενης φάσης, δηλαδή συνεχίζει να ισχύει η (4.25) για τους ίδιους λόγους.

Φάση αναίρεσης εφελκυστικής παραμόρφωσης

Παραμένουν $sign(z_c \dot{\varepsilon}_c) = 1$, $S_1 = 0$ άρα ισχύει και πάλι η (4.25).

Φάση επανεπιβολής θλιπτικών παραμορφώσεων

Σε όλη τη διάρκεια της φάσης αυτής $sign(z_c \dot{\varepsilon}_c) = 1$. Αυτό που αλλάζει είναι το S_1 .

Αρχικά, για $\varepsilon'_c > 0 \Rightarrow \varepsilon_c > \varepsilon_{cp}^{min}$, έχουμε $S_1 = 0$, άρα συνεχίζει η ισχύς της σχέσης

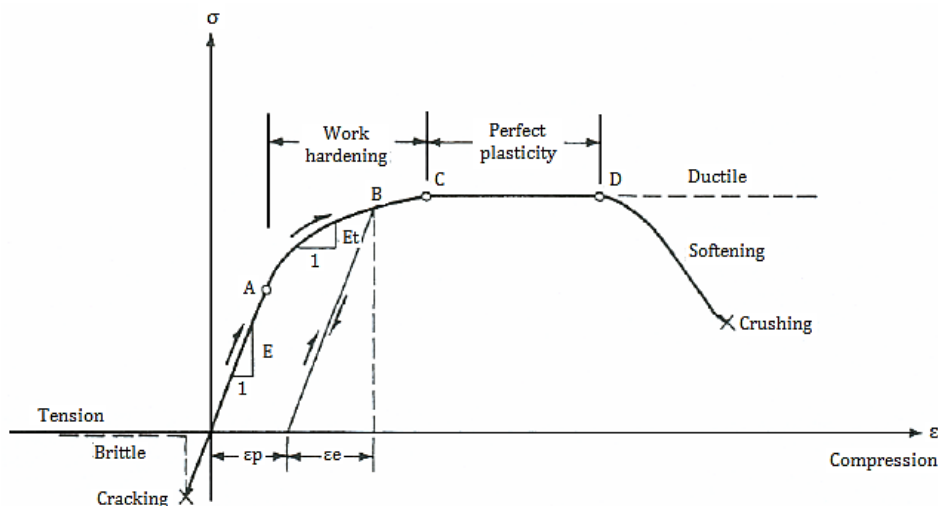
(4.25). Εν συνεχεία, όταν $\varepsilon'_c = 0 \Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_{cp}^{min}$, το S_1 λαμβάνει την τιμή $S_1 = 1$ και επανενεργοποιείται η εξίσωση φόρτισης (4.20).

Αυτός ο κύκλος συνεχίζεται, με το ε_{cp}^{min} να αποτελεί μια φθίνουσα συνάρτηση, που μετατοπίζει συνεχώς την αρχή του υστερητικού βρόχου.

4.4. Softening & απομείωση δυσκαμψίας

4.4.1. Προσέγγιση μέσω τροποποιήσεων κλασικής πλαστικότητας

Η προσομοίωση του σκυροδέματος μέσω της κλασικής θεωρίας πλαστικότητας, μπορεί να επιτευχθεί ικανοποιητικά μέχρι το σημείο της μέγιστης τάσης. Καθ' όλο το εύρος της περιοχής αυτής, το υλικό είναι ελαστικό – κρατυνόμενο, με εμφάνιση μη αναστρέψιμων πλαστικών παραμορφώσεων.



Σχήμα 4.12 : Διάγραμμα 'σ - ε' σκυροδέματος, μέσω θεωρίας πλαστικότητας, Chen 1982

Το πρόβλημα αρχίζει να δημιουργείται όταν πρέπει να αποδοθεί ο φθίνων κλάδος (*softening*) και οι κλάδοι αποφόρτισης επαναφόρτισης, οι οποίοι παρουσιάζουν απομειώσεις ως προς την αρχική δυσκαμψία, αλλά, επίσης, παραβιάζουν το αξίωμα του Drucker, της κλασικής πλαστικότητας (βλ. σχήμα (2.22)).

Όσον αφορά στο *softening*, η λύση από τη σκοπιά της πλαστικότητας, μπορεί να δοθεί με τη θεώρηση αρνητικής κράτυνσης, η οποία, όμως, από μόνη της αδυνατεί να προσομοιώσει τις απομειώσεις δυσκαμψίας. Πολλοί ερευνητές πρότειναν μοντέλα σκυροδέματος στηριγμένα στη θεωρία πλαστικότητας, όπως οι Chen – Schnobrich (1981), Han – Chen (1985), Ortiz (1985), Lubliner *et al.* (1989), Voyiadjis - Abu-Lebdeh, (1994), Lee – Fenves (1998, 2001), Grassl – Jirásek (2006).

Στο εδάφιο αυτό, κινούμενοι στο πνεύμα της πλαστικότητας, θα προσαρμόσουμε αναλόγως το τροποποιημένο προσομοίωμα για σκυρόδεμα, που αναπτύχθηκε στην παράγραφο §4.3., στα πρότυπα της παραγράφου §2.2.4. Με αυτόν τον τρόπο, θα εισαγάγουμε τόσο το *softening*, όσο και τις απομειώσεις δυσκαμψίας (*stiffness degradation*).

Οι σχέσεις (4.18) και (4.19), συμπληρώνονται από τις σχέσεις απομείωσης αντοχής (Mostaghel) και δυσκαμψίας (Park *et al.*), ώστε ,

$$z_{cy} = z_{cy0} \left(\frac{1}{1 + \beta_{M1} H} \right) \quad (4.26)$$

$$R_{ck}(t) = \min_{\tau \leq t} \left(\frac{\sigma_c(\tau) + a_p \sigma_{cy}}{E_0 \varepsilon_c(\tau) + a_p \sigma_{cy}} \right) \quad (4.27)$$

$$\dot{z}_c = R_{ck}(t) \left[1 - \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^{s_1 \cdot n} (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\varepsilon}_c)) \right] \dot{\varepsilon}_c \quad (4.28)$$

όπου z_{cy0} η αρχική παραμόρφωση διαρροής.

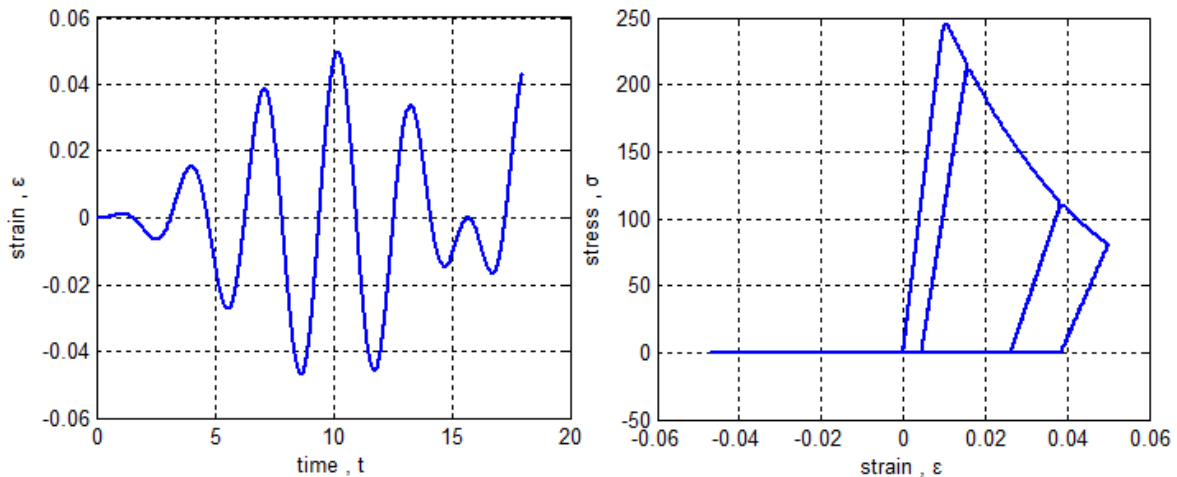
Πρέπει να παρατηρήσουμε επίσης, ότι οι σχέσεις (4.15) - (4.17), στην παρούσα περίπτωση, τροποποιούνται ως εξής,

$$\dot{\varepsilon}_{cp}^R = \dot{\varepsilon}_c - \frac{\dot{z}_c}{R_{ck}} \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{cp}^{R,min} = \min_{\tau \leq t} \left(\varepsilon_{cp}^R(\tau) \right) \quad (4.30)$$

$$\dot{\varepsilon}'_c = \dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_{cp}^{R,min} \quad (4.31)$$

Στο σχήμα (4.13), παρουσιάζεται ένα παράδειγμα, του μοντέλου αυτού με τις δύο απομειώσεις



Σχήμα 4.13 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος No.1, με απομειώσεις

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί, ότι η λογική «επέμβασης» στην παραμόρφωση διαρροής, άρα στην τάση διαρροής, είναι μια λογική θεώρησης *ισοτροπικής κράτνωσης*, όπως αυτή παρουσιάστηκε θεωρητικά στην παράγραφο §2.3.3., και πρακτικά, με εφαρμογή στο νόμο του χάλυβα, στην §3.3. Αυτό σημαίνει ότι, αντί της συνάρτησης του Mostaghel που χρησιμοποιήθηκε, θα μπορούσαμε εμείς να επιλέξουμε, φαινομενολογικά, μια συνάρτηση για την παραμόρφωση διαρροής, που να δίνει άλλη μορφή softening, για παράδειγμα γραμμική. Μια τέτοια, δίνεται από τις εξισώσεις (3.7) για $\alpha < 0$, σε συνδυασμό με την κατάλληλη τροποποίηση για

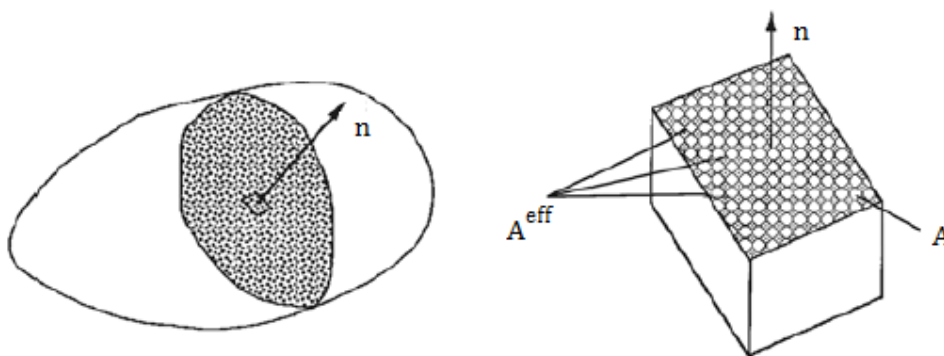
σκυροδέμα, που έχει παρουσιαστεί (στην περίπτωση αυτή πρέπει και ο όρος (1-α) να υψωθεί στον εκθέτη S_1).

Πρέπει, τέλος, να προσεχθεί στην ανάλυση, ο φθίνων κλάδος να μην περνάει στο εφελκυστικό ημιπίεδο. Αυτό διασφαλίζεται, είτε με επιλογή συνεχούς συνάρτησης παραμόρφωσης διαρροής, που να τείνει ασυμπτωτικά σε μία επιθυμητή θλιπτική τιμή, είτε, σε περίπτωση μη επιλογής τέτοιας συνάρτησης, με έναν απλό έλεγχο, που θα τη διακόπτει στην τιμή αυτή.

4.4.2. Προσέγγιση μέσω μηχανικής βλαβών

Η μηχανική των βλαβών (*damage mechanics*), θεμελιώθηκε από τον Kachanov (1959). Η βασική ιδέα της είναι, ότι καθώς αυξάνεται η φόρτιση σε ένα υλικό, δημιουργούνται και αναπτύσσονται ρωγμές, με αποτέλεσμα η ασκούμενη δύναμη, να αναλαμβάνεται από έναν, ολοένα και μειούμενο, άθικτο ενεργό σκελετό, ο οποίος λειτουργεί ελαστικά. Όπως βλέπουμε στο σχήμα (4.14), για την ίδια επιβαλόμενη δύναμη F , η τάση που μετράται στην πράξη είναι η

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.32)$$



Σχήμα 4.14 : Συνολική και ενεργή διατομή

ενώ αυτή του ενεργού εμβαδού (*undamaged*),

$$\sigma^{eff} = \frac{F}{A^{eff}} \quad (4.33)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε, τώρα, ότι η ενεργή διατομή είναι ένα ποσοστό της αρχικής διατομής, μέσω μιας μεταβλητής $0 \leq D \leq 1$, που εκφράζει το μέγεθος της βλάβης,

$$A^{eff} = (1 - D)A \quad (4.34)$$

Άρα από τις σχέσεις (4.33) και (4.34), έχουμε

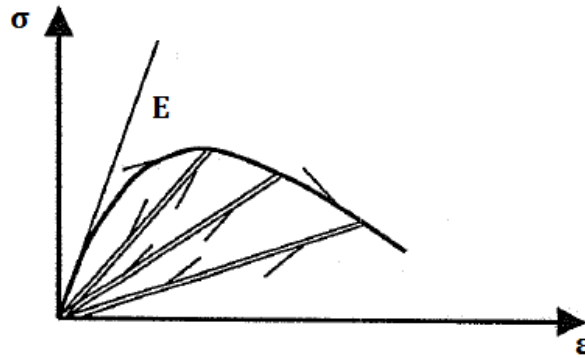
$$\sigma = (1 - D)\sigma^{eff} \quad (4.35)$$

Η σχέση (4.35) εκφράζει την κλασική ιδέα της μηχανικής των βλαβών, που ενώνει τις ενεργές και τις πραγματικές τάσεις με τον όρο '1 - D'. Υποθέτοντας, ακόμη, ότι οι πραγματικές παραμορφώσεις ισούνται με τις ενεργές, δηλαδή $\varepsilon = \varepsilon^{eff}$, η εξίσωση (4.35) γίνεται

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (4.36)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το φαινόμενο της βλάβης, τελικώς, εκφράζεται ως μείωση του μέτρου ελαστικότητας.

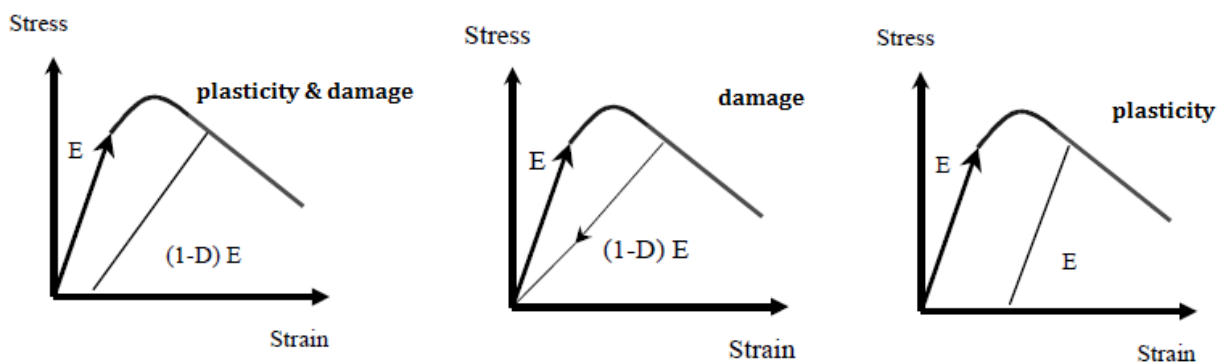
Το σκυρόδεμα θα μπορούσε να προσομοιωθεί βάσει των παραπάνω, ως ένα ελαστικό υλικό, με επιπλέον μια συνάρτηση βλάβης D. Αυτό θα μπορούσε να είναι χρήσιμο και εύκολο, σε περίπτωση μονοτονικών φορτίσεων. Σε περίπτωση ανακυκλιζόμενων φορτίων, η παραπάνω θεώρηση δεν δίνει παραμένουσες παραμορφώσεις, αποτέλεσμα που αντίκειται στην πραγματική συμπεριφορά. Αυτό το μειονέκτημα αποτυπώνεται με ευκρίνεια στο σχήμα (4.15),



Σχήμα 4.15 : Μηχανική βλαβών & ελαστικότητα

4.4.3. Προσέγγιση μέσω σύζευξης πλαστικότητας – μηχανικής βλαβών

Ο συνδυασμός πλαστικότητας και μηχανικής βλαβών μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους. Έχει γίνει αντικείμενο μελέτης πολλων ερευνητών, λόγω της ολοκληρωμένης προσέγγισης, που επιτυγχάνει στην αποτύπωση της συμπεριφοράς των υλικών. Όπως είδαμε, στις παραγράφους §4.4.1. και §4.4.2. , η μεν πλαστικότητα μπορεί να αποδώσει τις παραμένουσες παραμορφώσεις, η δε μηχανική των βλαβών τις απομειώσεις δυσκαμψίας άρα και το *softening*.



Σχήμα 4.16 : Συνδυασμός θεωρίας πλαστικότητας και μηχανικής βλαβών

Ξαναγράφουμε τη σχέση (4.35) για το σκυρόδεμα, ακολουθώντας τη λογική των ενεργών τάσεων,

$$\sigma_c = (1 - D)\sigma_c^{eff} \quad (4.37)$$

άρα με υπόθεση ισότητας ενεργών – πραγματικών παραμορφώσεων έχουμε

$$\sigma_c = (1 - D)E\varepsilon_c^e \quad (4.38)$$

Όπως έχει ήδη σημειωθεί στην παράγραφο §4.3.1. , για την ελαστική παραμόρφωση ισχύει (λόγω $\alpha=0$),

$$\varepsilon_c^e = z_c \quad (4.39)$$

Η σχέση (4.38) μέσω της (4.39) γίνεται,

$$\sigma_c = (1 - D)Ez_c \quad (4.40)$$

Το μόνο που απομένει είναι να δοθεί η κατάλληλη συνάρτηση βλάβης. Αυτή μπορεί να είναι, στη γενική περίπτωση, μια συνάρτηση της μέγιστης ισοδύναμης παραμορφώσης. Ειδικά για τη μονοδιάστατη σχέση $\sigma - \varepsilon$, λαμβάνεται εδώ μια συνάρτηση της μέγιστης συνολικής θλιπτικής παραμόρφωσης

$$D = D(\kappa) , 0 \leq D \leq 1 \quad (4.41)$$

$$\kappa(\varepsilon_c) = \max_{\tau \leq t} (|\varepsilon_c(\tau)|, \kappa_0) \quad (4.42)$$

με κ_0 την τιμή που ορίζει την αρχή της βλάβης στο υλικό.

Ορίζουμε, έτσι, την παρακάτω επιφάνεια βλάβης στο χώρο των παραμορφώσεων,

$$f_d = \kappa(\varepsilon_c) - \varepsilon_c \quad (4.43)$$

Ισχύουν οι συνθήκες Kuhn – Tucker , οι οποίες καθορίζουν πότε έχουμε και πότε όχι εξέλιξη της βλάβης,

$$f_d \leq 0 , \quad \dot{\kappa} \geq 0 , \quad \dot{\kappa} f_d = 0 \quad (4.44)$$

δηλαδή,

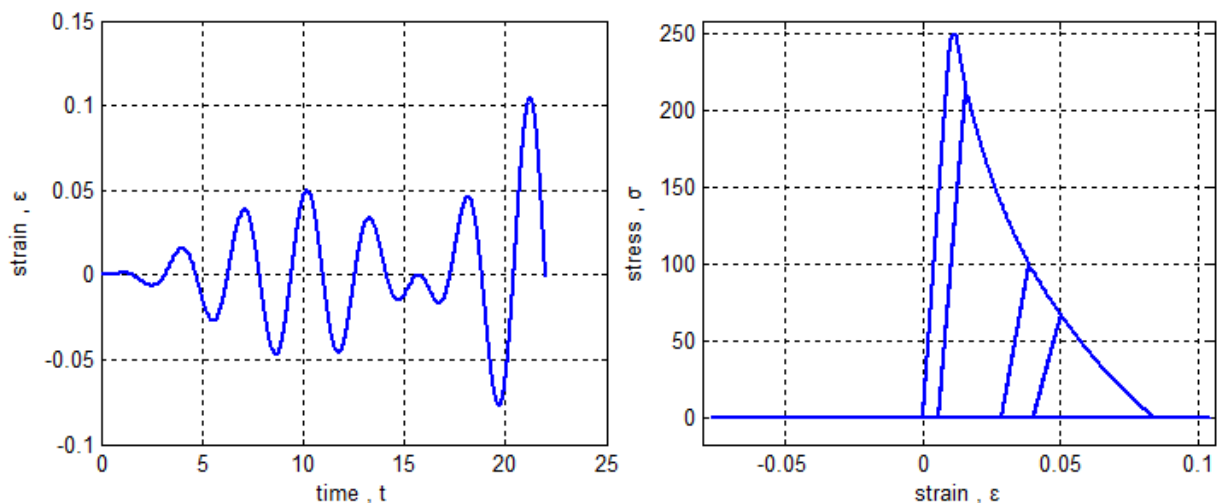
- Για $f_d = 0 \Rightarrow \dot{\kappa} > 0 \rightarrow$ εξέλιξη βλάβης
- Για $f_d < 0 \Rightarrow \dot{\kappa} = 0 \rightarrow$ μη εξέλιξη βλάβης

Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς πλήθος πιθανών συναρτήσεων D , πολλές από τις οποίες μάλιστα, είναι αρκετά πολύπλοκες, καθώς διαμορφώθηκαν στην προσπάθεια πλήρους θερμοδυναμικής συμβιβαστότητας.

Μια απλή συνάρτηση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, είναι παραδείγματος χάριν η παρακάτω,

$$D = 1 - \frac{\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)}{\ln(\mu_d)}, 0 \leq D \leq 1 \quad (4.45)$$

όπου $\mu_d = \kappa_{ult}/\kappa_0$, ο λόγος της παραμόρφωσης πλήρους βλάβης ($D=1$) προς την παραμόρφωση αρχής της βλάβης. Στο σχήμα (4.17) βλέπουμε τη μορφή που παίρνει το τελικό υστερητικό διάγραμμα με βάση τη σχέση (4.42)



Σχήμα 4.17 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος No.1 & μηχανική βλαβών

Από ό,τι παρατηρούμε η συμπεριφορά του υλικού παίρνει μια ολοκληρωμένη μορφή, εμφανίζοντας πλαστικές παραμορφώσεις, *softening* και απομειώσεις δυσκαμψίας στην αποφόρτιση.

Άλλη συνάρτηση που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, είναι η εκθετική (Mazars και Pijaudier-Cabot (1989), Peerlings et al.(1998)),

$$D = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} (1 - A + \alpha e^{-B(\kappa - \kappa_0)}) \quad (4.46)$$

όπου A και B σταθερές, εκ των οποίων, η μεν πρώτη ορίζει την ασύμπτωτη του διαγραμματος 'σ - ε', που είναι η ευθεία $\sigma_\infty = E(1 - A)$, η δε δεύτερη την ταχύτητα εξέλιξης της βλάβης.

4.4.4. Λεία συνάρτηση βλάβης & επαπλομενικό μέτρο ελαστικότητας

Όταν έχουμε εξέλιξη της βλάβης ισχύει η παρακάτω σχέση με βάση τον κανόνα της αλυσίδας

$$\dot{D} = \frac{dD}{d\kappa} \dot{\kappa} \quad (4.47)$$

Τώρα από τις σχέσει (4.44) μπορούμε να εξάγουμε ότι

$$\dot{\kappa} \dot{f}_d = 0 \stackrel{\dot{\kappa} > 0}{\implies} \dot{f}_d = 0 \implies \quad (4.48)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\epsilon}_c \quad (4.49)$$

Όπως έγινε στην παράγραφο §2.4.1. με τη εξέλιξη των πλαστικων παραμορφώσεων, μπορούμε ομοίως να διατυπώσουμε για την εξέλιξη της παραμόρφωσης βλάβης κ βάσει της προηγούμενης σχέσης (4.49),

$$\dot{\kappa} = H_3 H_4 \dot{\epsilon}_c \quad (4.50)$$

όπου H_3 μία βηματική συναρτήση Heaviside που υλοποιεί τις συνθήκες Kuhn – Tucker και H_4 μία επίσης βηματική συνάρτηση Heaviside που περιορίζει την εξέλιξη της βλάβης μόνο για θλιπτικές παραμορφώσεις, κατά το αναπτυχθέν μοντέλο,

$$H_3 = \begin{cases} 0, & \text{για } f_d < 0 \\ 1, & \text{για } f_d = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

$$H_4 = \begin{cases} 0, & \text{για } \varepsilon_c \geq 0 \\ 1, & \text{για } \varepsilon_c < 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

Η σχέση (4.51) μπορεί να γραφεί σε μία λεία μορφή όπως παρακάτω

$$H_3 = \left| \frac{\varepsilon_c}{\kappa} \right|^{n_d} \quad (4.53)$$

όπου n_d ένας αριθμός στα πρώτυπα του n του προσομοιώματος Bouc – Wen. Ο διακόπτης H_4 μπορεί να γραφεί εύλογα,

$$H_4 = \frac{1 - \text{sign}(\varepsilon_c)}{2} \quad (4.54)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.53), (4.54) στην (4.47) έχουμε τη λεία εξίσωση της εξέλιξης της βλάβης,

$$\dot{D} = \left| \frac{\varepsilon_c}{\kappa} \right|^{n_d} (0.5 - 0.5 \text{sign}(\varepsilon_c)) \frac{dD}{d\kappa} \dot{\varepsilon}_c \quad (4.55)$$

Θα διατυπώσουμε τώρα το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας σε κάθε χρονική στιγμή. Από τη θεμελιακή σχέση (4.40) διαφορίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε

$$\dot{\sigma}_c = (1 - D)E\dot{\varepsilon}_c - \dot{D}E\varepsilon_c \quad (4.56)$$

Αντικαθιστούμε, τώρα, τις σχέσεις (4.19) , (4.55) στην (4.56) και παίρνουμε την σχέση τάσεων παραμορφώσεων σε μορφή ρυθμού,

$$\dot{\sigma}_c = \left\{ (1 - D) \left[1 - \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^{s_1 n} (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\varepsilon}_c)) \right] - \left| \frac{\varepsilon_c}{\kappa} \right|^{n_d} (0.5 - 0.5 \text{sign}(\varepsilon_c)) \frac{dD}{d\kappa} z_c \right\} E \dot{\varepsilon}_c \quad (4.57)$$

Άρα το βλαφθέν ελαστοπλαστικό εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας δίνεται από την κάτωθι έκφραση,

$$E_{tan} = \left\{ (1 - D) \left[1 - \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^{s_1 n} (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\varepsilon}_c)) \right] - \left| \frac{\varepsilon_c}{\kappa} \right|^{n_d} (0.5 - 0.5 \text{sign}(\varepsilon_c)) \frac{dD}{d\kappa} z_c \right\} E \quad (4.58)$$

4.5. Προσομοίωση μέσω της Bouc – Wen υστέρησης No.2

4.5.1. Η μαθηματική διατύπωση

Όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η λογική της μηχανικής βλαβών μας επιτρέπει να επεμβαίνουμε «εξωτερικά» στην καταστατική σχέση του υλικού. Ορίζουμε δηλαδή μια ελαστοπλαστική συμπεριφορά στην οποία υπακούει ο μη έχων υποστεί βλάβη «σκελετός» και ένα συντελεστή βλάβης D , ο οποίος καθορίζει τη μείωση του «σκελετού» αυτού. Κατα αυτήν την έννοια θα δώθει στην παράγραφο αυτή ένας εναλλακτικός τρόπος προσομοίωσης της μονοαξονικής συμπεριφοράς του σκυροδέματος, με το κομμάτι της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς να αναλαμβάνεται και πάλι μέσα από μία τροποποίηση της κλασικής υστέρησης Bouc – Wen. Η τροποποίηση αυτή δίνεται από τις σχέσεις που ακολουθούν

$$\dot{z}_c = \left[1 - S_2 \cdot \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{z}_c)) \right] \dot{\varepsilon}_c \quad (4.59)$$

με S_2 έναν «διακόπτη» ο οποίος παίρνει τιμή 0 για $z_c \geq 0$ και τιμή 1 για $z_c < 0$

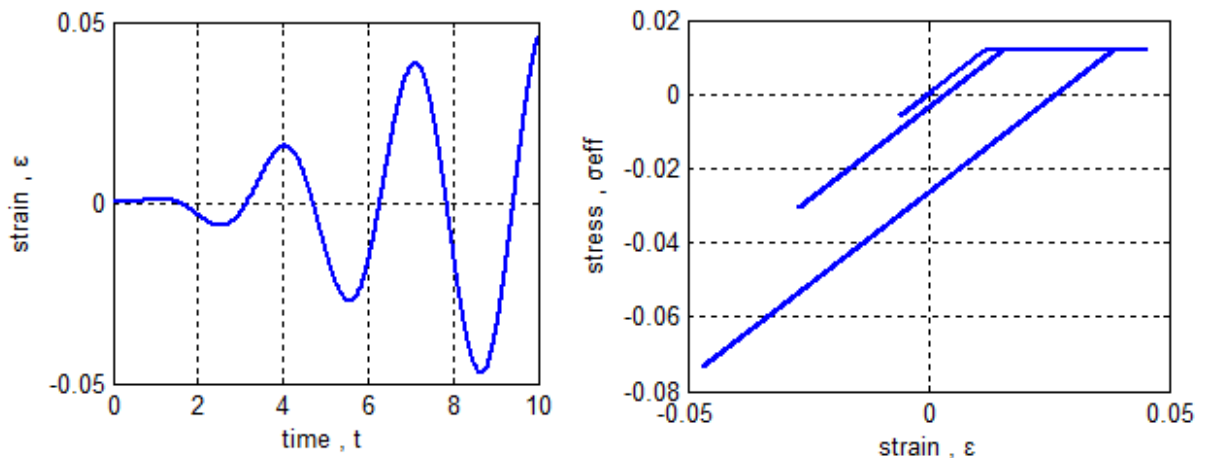
$$S_2 = \left(\frac{1 - \text{sign}(z_c)}{2} \right) \quad (4.60)$$

Οι ενεργές τάσεις πάλι για $\alpha=0$ έχουν την τιμή

$$\sigma_c^{eff} = E \cdot z_c \quad (4.61)$$

Το διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων αυτής της τροποποίησης φαίνεται στο σχήμα

(4.18),



Σχήμα 4.18 : Βρόχοι υστέρησης ενεργής τάσης σκυροδέματος Νο.2

Τώρα, έχοντας ήδη από τη σχέση (4.59) τη συμπεριφορά του μη έχοντος υποστεί

βλάβη υλικού, θα ορίσουμε τη βλάβη ως εξής,

$$(1 - D) = \left[1 - \left(\frac{1 - \text{sign}(z_c)}{2} \right) D^- \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{1 + \text{sign}(z_c)}{2} \right) D^+ \right] \quad (4.62)$$

όπου D^- η βλάβη που αφορά στη θλίψη και μπορεί να δοθεί από τις σχέσεις (4.45),

(4.46) και είναι D^+ η βλάβη που αφορά στον εφελκυσμό. Γενικότερα οι δύο δείκτες

βλάβης μπορούν να αλληλεπιδρούν με κάποιους συντελεστές βάρους (Lubliner et al.

& Lee - Fenves) και να μην είναι εντελώς ανεξάρτητοι όπως στη σχέση (4.62). Για

την παραγωγή ενός σκυροδέματος με μηδενική αντοχή δε μένει παρά να τοποθετήσουμε $D^+ = 1$, το οποίο σημαίνει ότι για εφελκυστική παραμόρφωση επέρχεται ακαριαία ρήξη, που σημαίνει ότι ακαριαία η βλάβη φτάνει το εκατό τοις εκατό. Με βάση τα παραπάνω η σχέση (4.40) μας δίνει τα αποτελέσματα του σχήματος (4.17) και πάλι, απλώς μέσα από μία διαφορετική ιδέα.

Παρά το γεγονός ότι έχει επιτευχθεί, μέχρι στιγμής, μία καλή προσομοίωση του σκυροδέματος όσον αφορά στο softening και την απομείωση δυσκαμψιάς, υπάρχει μία πτυχή της μηχανικής συμπεριφοράς του, που δεν έχει αποδοθεί από όλα τα παραπάνω. Αυτή είναι η μη – γραμμική αποφόρτιση που παρουσιάζει και η παραβίαση των αξιωμάτων της πλαστικότητας.

Χάριν αυτής της συμπεριφοράς θα προσθέσουμε έναν ακόμη όρο στην εξίσωση (4.59), που θα ενεργοποιείται μόνο σε περίπτωση αποφόρτισης. Ο όρος αυτός είναι μία συνάρτηση που εκφράζει την κλίση κατά την αποφόρτιση

$$r = r(z_c, z_c^r) \quad (4.63)$$

όπου z_c^r το σημείο της τελευταίας αντιστροφής της φόρτισης. Με την παραπάνω προσθήκη η σχέση (4.59) λαμβάνει τη μορφή,

$$\dot{z}_c = \left[r^{S_3} - S_2 \cdot \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{z}_c)) \right] \dot{z}_c \quad (4.64)$$

$$S_3 = \frac{1 - \text{sign}(z_c \dot{z}_c)}{2} \cdot S_2 \quad (4.65)$$

Το S_3 αποτελεί τον έλεγχο της αποφόρτισης και έχει τιμές 0,1. Με άλλα λόγια όταν δεν έχουμε αποφόρτιση $S_3 = 0$ και η σχέση (4.64) ταυτίζεται με την (4.59).

Ας θεωρήσουμε όμως, για παράδειγμα, μια γραμμική μεταβολή της κλίσης του κλάδου αποφόρτισης με μία συνάρτηση της μορφής

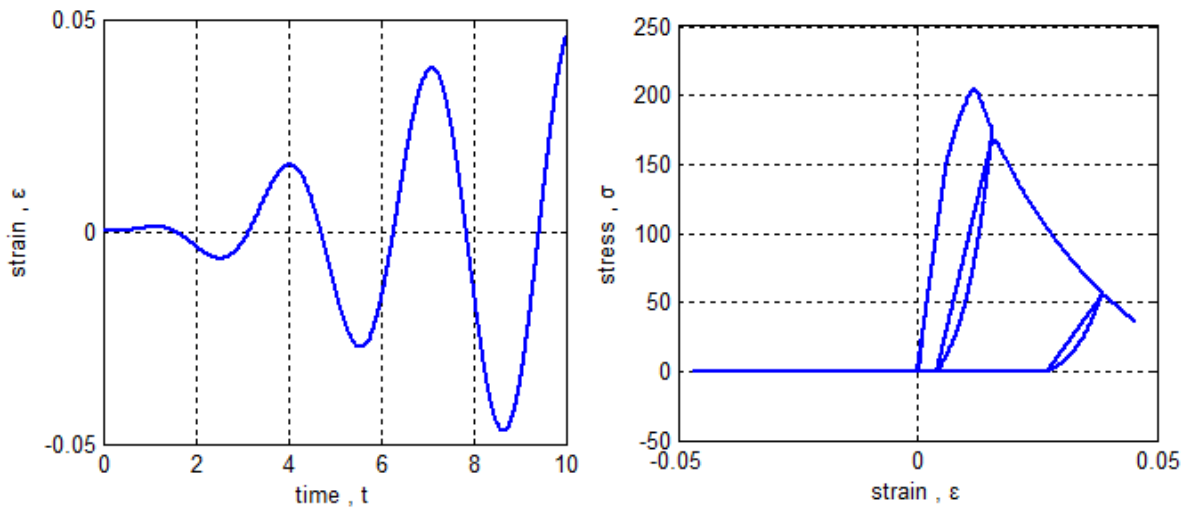
$$r = c_1 \left| \frac{z_c}{z_c^r} \right| + c_2 \quad (4.66)$$

με c_1 , c_2 συντελεστές που καθορίζουν τη μορφή της μεταβολής της κλίσης. Ο συντελεστής c_2 είναι η κλίση στην πλήρη αποφόρτιση δηλαδή για $z_c = 0$, ενώ $(c_1 + c_2)$ η κλίση στην αρχή της αποφόρτισης για $z_c = z_c^r$.

Από τις σχέσεις (4.59), (4.64), (4.66) μπορούμε να παραγάγουμε τις τελικές εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά του σκυροδέματος,

$$\sigma_c = (1 - D)E z_c \quad (4.67)$$

$$\dot{z}_c = \left[r^{S_3} - S_2 \cdot \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\epsilon}_c)) \right] \dot{\epsilon}_c \quad (4.68)$$



Σχήμα 4.19 : Βρόχοι υστέρησης σκυροδέματος Νο.2 & μηχανική βλαβών, με μη γραμμική αποφόρτιση

Στο σχήμα (4.19) μπορούμε να παρατηρήσουμε πλέον μια πληρέστερη μορφή του διαγράμματος του σκυροδέματος, για συνάρτηση αποφόρτισης της μορφής (4.66) με $c_1 = 2$, $c_2 = 0.35$.

Αν, τώρα, παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο τη σχέση (4.62) έχουμε,

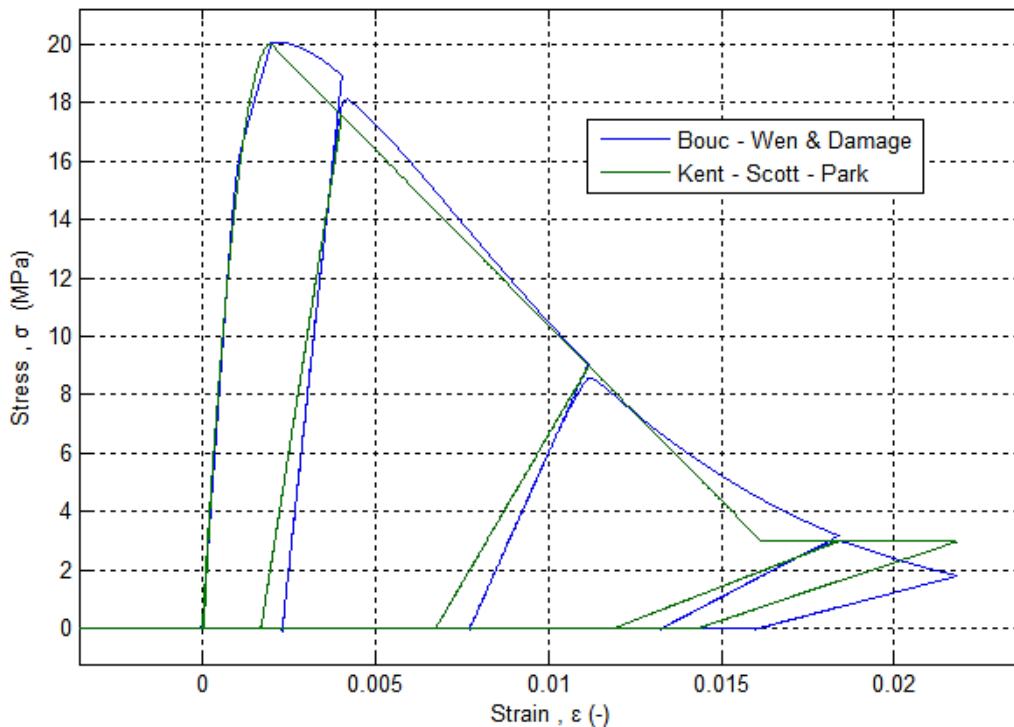
$$\begin{aligned} \dot{D} = & \left(\frac{1 - \text{sign}(z_c)}{2} \right) \dot{D}^- \left[1 - \left(\frac{1 + \text{sign}(z_c)}{2} \right) D^+ \right] \\ & + \left(\frac{1 + \text{sign}(z_c)}{2} \right) \dot{D}^+ \left[1 - \left(\frac{1 - \text{sign}(z_c)}{2} \right) D^- \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Με αντικατάσταση των (4.68), (4.69) στην (4.67) , και για $D^+ = 1$,έχουμε το τελικό βλαφθέν ελαστοπλαστικό μητρώο

$$E_{tan} = \left\{ (1 - D) \left[r^{S_3} - S_2 \cdot \left| \frac{z_c}{z_{cy}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}(z_c \dot{\epsilon}_c)) \right] - \left| \frac{\epsilon_c}{\kappa^-} \right|^{n_d} (0.5 - 0.5 \text{sign}(z_c)) \frac{dD^-}{d\kappa^-} z_c \right\} E \quad (4.70)$$

Είναι χρήσιμο να ανεφερθεί ότι, παρόλο που γενικά για το σκυρόδεμα στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται μία ελαστική – απολύτως πλαστική «βάση», μπορεί να δοθεί ανάλογα με την επιδιωκόμενη ακρίβεια στην προσομοίωση και κάποια ιστοτροπική κράτυνση σύμφωνα με τη σχέση (3.7).

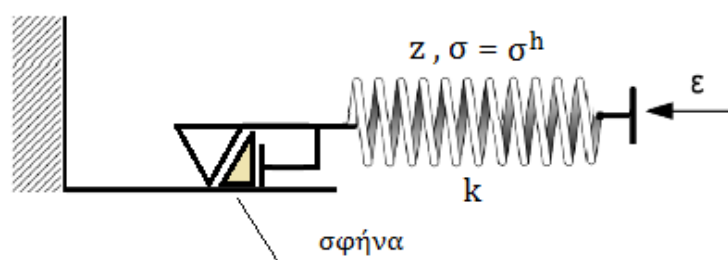
Μπορούμε πλέον να παρουσιάσουμε συγκριτικά το εν λόγω μοντέλο με το μοντέλο των Kent – Scott – Park. Έστω $f'_c = 20 \text{ MPa}$, $\epsilon_o = 0.002$, $Z = 60 \text{ MPa}$, $f'_{cult} = 3 \text{ MPa}$ οι παράμετροι του προσομοιώματος Kent – Scott – Park, ενώ οι παράμετροι του προσομοιώματος No.2 αυτές που φαίνονται στον πίνακα (6.1). Οι δύο καμπύλες απεικονίζονται παρακάτω,



Σχήμα 4.20 : Σύγκριση μοντέλου Bouc – Wen & Damage με Kent – Scott – Park

4.5.2. Το μηχανικό ανάλογο

Στην περίπτωση της μηδενικής εφελκυστικής αντοχής δηλαδή εδώ για $D^+ = 1$, το μηχανικό ανάλογο για τη συνολική συμπεριφορά μπορεί να δοθεί όπως και στην παράγραφο §4.3.2. με δύο επαπτόμενες πλάκες σε συνδυασμό με το συνελεστή βλάβης (1-D). Αν θέλουμε όμως να απομονώσουμε το μηχανικό ανάλογο του μη έχοντος υποστεί βλάβη σκελετού θα έχουμε την παρακάτω εικόνα,



Σχήμα 4.21 : Μηχανικό ανάλογο ενεργού σκελετού σκυροδέματος No.2

Όπως φαίνεται στο μηχανικό ανάλογο, τοποθετείται επιπλέον μία σφήνα στο υστερητικό ελατήριο, η οποία επιτρέπει ολίσθηση μόνο προς την αριστερή πλευρά, την πλευρά της θλιπτικής παραμόρφωσης. Ως εκ τούτου όταν αρχίζει εφελκυστική παραμόρφωση το σύστημα λειτουργεί πλήρως ελαστικά, παράγοντας το διάγραμμα του σχήματος (4.18).

4.5.3. Διερεύνηση του προσομοιώματος

Για την πληρέστερη παρουσίαση των σχέσεων του παρόντος υποκεφαλαίου, ας παρακολουθήσουμε πώς λειτουργούν σε μία πορεία επιβολής – άρσης – επανεπιβολής παραμορφώσεων η σχέση (4.68), που αφορούν στις ενεργές τάσεις.

Φάση επιβολής θλιπτικών παραμορφώσεων

Στην φάση αυτή $sign(z_c \dot{\epsilon}_c) = 1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, άρα η σχέση (4.68) ανάγεται στην σχέση (4.20) και η όλη συμπεριφορά του υλικού διέπεται από τις σχέσεις (4.21) – (4.24).

Φάση αναίρεσης θλιπτικών παραμορφώσεων

Εδώ αρχικά έχουμε τη φάση της αποφόρτισης, όπου έχουμε $sign(z_c \dot{\epsilon}_c) = -1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 1$. Ενεργοποιείται λοιπόν η συνάρτηση r που προσδίδει τη μη γραμμικότητα στον κλάδο της αποφόρτισης ο οποίος έχει την εξίσωση

$$\dot{z}_c = r \cdot \dot{\epsilon}_c \quad (4.71)$$

Μετά την πλήρη αποφόρτιση, αρχίζει η επαναφόρτιση με αντίθετο πρόσημο άρα $sign(z_c \dot{\epsilon}_c) = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$,

$$\dot{z}_c = \dot{\epsilon}_c \quad (4.72)$$

Από την επίλυση της διαφορικής σχέσης (4.72) εξάγουμε τη γραμμική σχέση της επαναφόρτισης

$$z_c = \epsilon_c + \epsilon_c^{res} \quad (4.73)$$

όπου ϵ_c^{res} η παραμένουσα παραμόρφωση στην πλήρη αποφόρτιση.

Φάση επιβολής εφελκυστικών παραμορφώσεων

Στη φάση αυτή ο δρόμος ισορροπίας εξακολουθεί να υπόκειται στη σχέση (4.72).

Φάση αναίρεσης εφελκυστικών παραμορφώσεων

Συνεχίζει να ισχύει η διαφορική εξίσωση (4.72) και ο δρόμος ισορροπίας παραμένει ο περιγραφόμενος από τη σχέση (4.73).

Φάση επανεπιβολής θλιπτικών παραμορφώσεων

Στη φάση αυτή ισχύει καθόλη τη διάρκεια $sign(z_c \dot{\epsilon}_c) = 1$ και διακρίνουμε δύο φάσεις. Αρχικά για $|\epsilon_c| \leq \epsilon_c^{res}$, έχουμε $S_2 = 0, S_3 = 0$ άρα ισχύει η σχέση (4.72).

Στη συνέχεια για $|\epsilon_c| > \epsilon_c^{res}$, ισχύουν $S_2 = 1, S_3 = 0$ άρα συνεχίζει το σημείο ισορροπίας στον ίδιο γραμμικό δρόμο. Όταν φτάσει το σύστημα εκ νέου στο σημείο διαρροής, όταν δηλαδή $z_c = z_{cy}$, τότε ισχύουν και πάλι οι σχέσεις (4.23), (4.24) και οι βρόχοι συνεχίζονται κατά τον ίδιο τρόπο.

Καθόλη τη διάρκεια αυτού του κύκλου λαμβάνει διαρκώς τιμές και η συνάρτηση της βλάβης, η οποία επεμβαίνει εξωτερικά σύμφωνα με τη σχέση (4.67) διαμορφώνοντας τις τελικές τάσεις.

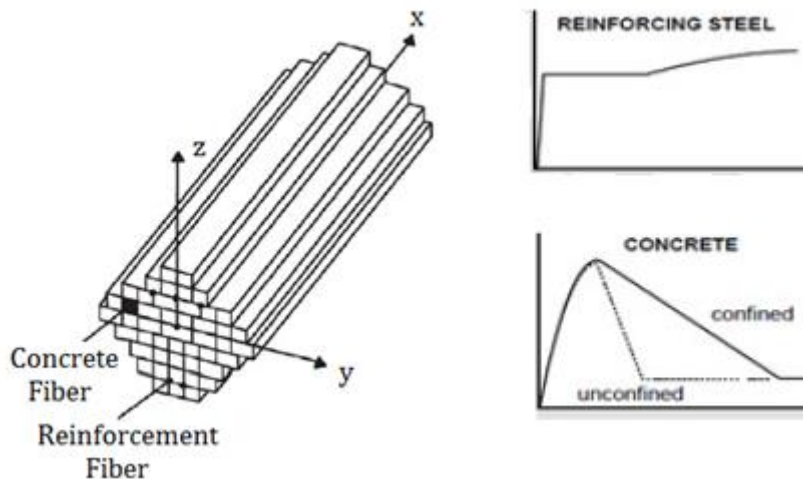
Κεφάλαιο 5^ο

Στοιχείο δοκού με θεώρηση ινών

5. Στοιχεία δοκού με θεώρηση ινών

5.1. Βασικές έννοιες

Η βασική ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων δοκού αποτελούμενων από ίνες, είναι η θεώρηση του μέλους, ως μιας δέσμης ινών, κάθε μια από τις οποίες έχει το δικό της νόμο τάσεων παραμορφώσεων. Στην ουσία η θεώρηση αυτή, δεν αποτελεί τίποτα περισσότερο από μια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης των τάσεων σε επίπεδο διατομής. Και αν στη θεωρία ελαστικότητας, αυτό ίσως είναι περιττό λόγω της γραμμικότητας των τάσεων καθ ύψος των διατομών, στην ελαστοπλαστική ανάλυση αποτελεί μονόδρομο.



Σχήμα 5.1 : Στοιχείο δοκού ινών ΟΣ

Τα στοιχεία ινών που θα αναπτύξουμε στο παρόν κεφάλαιο, βασίζονται στις παραδοχές των στοιχείων Bernoulli, άρα θεωρούμε επιπεδότητα των διατομών και καθετότητά τους πάνω στον παραμορφωμένο άξονα. Το πρώτο σημαίνει ότι, παρόλο που κάθε ίνα ακολουθεί το δικό της δρόμο ισορροπίας ' $\sigma - \epsilon$ ', ταυτόχρονα έχει τέτοια

παραμόρφωση ώστε να υλοποιείται η απαίτηση της επιπεδότητας της διατομής. Το δεύτερο, ότι η κλίση της ελαστικής γραμμής (παραμορφωμένος άξονας) ταυτίζεται με τη στροφή της διατομής σε κάθε σημείο.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στο σχήμα (5.1) τα στοιχεία ινών, αποδεικνύονται πολύ χρήσιμα στην ανάλυση μελών ΟΣ. Από τη στιγμή που κάθε ίνα έχει τη δική της συμπεριφορά (πάντα δεσμευμένη από την επιπεδότητα των διατομών), μπορούμε εύκολα να ορίσουμε διαφορετικές ομάδες ινών: μία ομάδα για το απερίσφιγκτο σκυρόδεμα της επικάλυψης, μία για το περισφυγμένο του πυρήνα και μία για το χάλυβα των οπλισμών. Η μονοαξονική λειτουργία των ινών της κάθε ομάδας, δίνεται από τα προσομοιώματα των Κεφαλαίων 3 και 4, για χάλυβα και σκυρόδεμα, αντίστοιχα.

5.2. Καταστατικές εξισώσεις διατομής

Η επιπεδότητα εκφράζεται μαθηματικά από την παρακάτω σχέση που μας δίνει την αξονική παραμόρφωση κάθε σημείου της διατομής,

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 - \varphi_y z + \varphi_z y \quad (5.1)$$

όπου ε_0 η κεντροβαρική παραμόρφωση και φ_y, φ_z οι καμπυλότητες κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα. Η σχέση (5.1) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια ενός γεωμετρικού μητρώου $\{J(y, z)\} = \{1 \quad -z \quad y\}$, υπό τη μητρική μορφή,

$$\varepsilon(y, z) = \{J(y, z)\} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varepsilon(y, z) = \{J(y, z)\} \cdot \{d(x)\} \quad (5.2)$$

Για τα στοιχεία δοκού στις δύο διαστάσεις, τα οποία απασχολούν την παρούσα εργασία, η $\varphi_z = 0$, άρα η το μητρώο $\{d\}$ γίνεται $\{2 \times 1\}$ και η (5.2), παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon(z) = \{J(z)\} \cdot \{d(x)\} \quad (5.3)$$

Οι τάσεις καθ' ύψος της διατομής από τη σχέση του Hook, για εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας $E_T(z)$ είναι,

$$\sigma(z) = E_T(z) \cdot \varepsilon(z) \quad (5.4)$$

Από την αρχή των δυνατών έργων σε επίπεδο διατομής, με αντικατάσταση των (5.3) και (5.4), έχουμε,

$$\int_A \delta \varepsilon \cdot \sigma dA = \{\delta d\}^T \{D\} \Rightarrow$$

$$\{D\} = \int_A \{J(z)\}^T E_T(z) \{J(z)\} dA \cdot \{d\} \quad (5.5)$$

όπου $\{D\} = [N, M]^T$, τα εντατικά μεγέθη της διατομής, τα οποία δίνονται από τη σχέση

$$\{D(x)\} = \int_A \{J(z)\}^T \sigma(z) dA \quad (5.6)$$

ενώ η δυσκαμψία της διατομής όπως φαίνεται από τη σχέση (5.5) είναι

$$[k(x)] = \int_A \{J(z)\}^T E_T(z) \{J(z)\} dA \quad (5.7)$$

Στο σημείο αυτό φτάνουμε στην ανάγκη υπολογισμού των παραπάνω ολοκληρωμάτων. Χωρίζουμε, για το λόγο αυτό, τη διατομή σε ένα πλήθος ινών n_f και πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση αριθμητικά.

Το ολοκλήρωμα έτσι μεταπίπτει σε ένα άθροισμα πεπεραμένων προσθετέων. Οι σχέσεις (5.6) και (5.7) μετατρέπονται στις παρακάτω εκφράσεις,

$$\{D(x)\} = \sum_{i=1}^{n_f} \{J(z_i)\}^T \sigma(z_i) A_i \quad (5.8)$$

$$[k(x)] = \sum_{i=1}^{n_f} \{J(z_i)\}^T (E_T(z_i) A_i) \{J(z_i)\} \quad (5.9)$$

Η έκφραση (5.9) μετά την πραγματοποίηση των μητρικών πράξεων μπορεί να λάβει την παρακάτω μητρική μορφή,

$$[k(x)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_f} E_T(z_i) A_i & - \sum_{i=1}^{n_f} E_T(z_i) A_i z_i \\ - \sum_{i=1}^{n_f} E_T(z_i) A_i z_i & \sum_{i=1}^{n_f} E_T(z_i) A_i z_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Για να γίνει πιο αντιληπτό το φυσικό νόημα του μητρώου $[k(x)]$, ας δούμε πώς αυτό εκφυλίζεται για μια ειδική περίπτωση συμμετρικής διατομής, με σταθερό καθ' ύψος εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας E_T ,

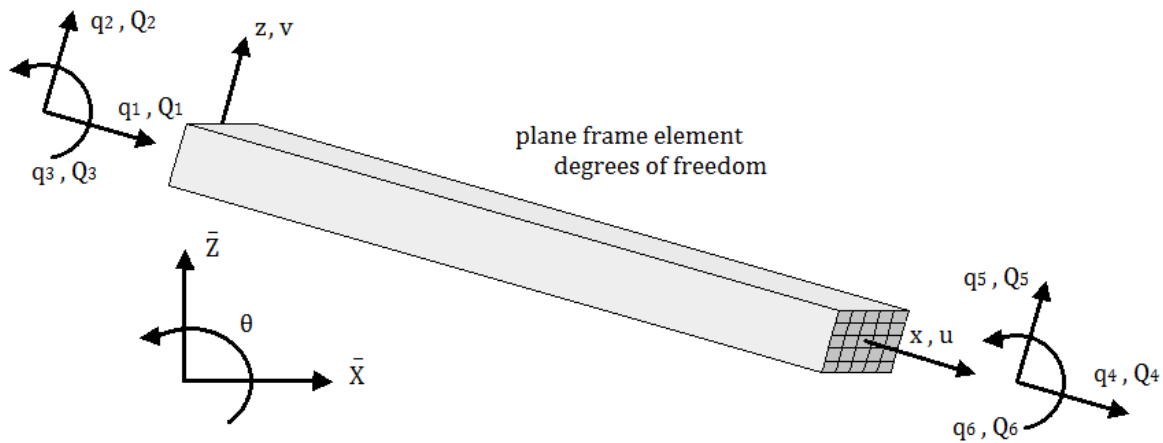
$$[k_{sym}(x)] \approx \begin{bmatrix} E_T A & 0 \\ 0 & E_T I \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

με I τη ροπή αδράνειας ως προς το κεντρο βάρους της διατομής (άξονας y). Η αξονική δύναμη και η ροπή στην περίπτωση αυτή δεν αλληλεπιδρούν καθόλου μεταξύ τους (ασύζευκτες). Αυτό συνεπάγεται την εξάρτηση της ροπής μόνο από την καμπυλότητα και αντίστοιχα την εξάρτηση της αξονικής δύναμης μόνο από την ανηγμένη αξονική παραμόρφωση. Να σημειωθεί ότι η σχέση (5.11) δεν προσιδιάζει σε μητρώα δυσκαμψίας διατομών ΟΣ, οι οποίες είναι ασύμμετρες (κατά κανόνα).

5.3. Καταστατικές εξισώσεις μέλους

5.3.1. Στοιχείο δοκού βάσει των μετακινήσεων

Στα στοιχεία δοκού με βάση τις μετακινήσεις, θεωρούμε γνωστές τις σχέσεις που ορίζουν το πεδίο των μετακινήσεων και στη συνέχεια, από τις καταστατικές εξισώσεις του υλικού, υπολογίζουμε το πεδίο των δυνάμεων.



Σχήμα 5.2 : Στοιχείο δοκού ινών , με βάση τις μετακινήσεις

Εργαζόμενοι πάντα στο επίπεδο έχουμε τις 6 επικόμβιες μετακινήσεις και τις 6 επικόμβιες δράσεις που φαίνονται στο σχήμα (5.2) και οι οποίες γράφονται, αντίστοιχα,

$$\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T \quad (5.12)$$

$$\{Q\} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6]^T$$

Το πεδίο των μετακινήσεων (u,v) καθορίζεται από τις κλασικές συναρτήσεις σχήματος των πεπερασμένων στοιχείων δοκού που είναι ,

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \{q\} \quad (5.13)$$

όπου N_i οι συναρτήσεις σχήματος που έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις, με $r = x/L$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - r \\ N_2 &= r \\ N_3 &= 2r^3 - 3r^2 + 1 \\ N_4 &= Lr^3 - 2Lr^2 + L \\ N_5 &= -2r^3 + 3r^2 \\ N_6 &= Lr^3 - Lr^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Από την εξίσωση (5.13) του πεδίου των μετακινήσεων, αναγόμεστε στο πεδίο των παραμορφώσεων ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} \{d\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{3,xx} & N_{4,xx} & 0 & N_{5,xx} & N_{6,xx} \end{bmatrix} \{q\} \Rightarrow \\ \{d\} &= [B]\{q\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

όπου $[B]$ το παραμορφωσιακό μητρώο που μας επιτρέπει τη μετάβαση από τις επικόμβιες μετατοπίσεις στις παραμορφώσεις κάθε διατομής του στοιχείου,

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^2} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^2} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την αρχή των δυνατών έργων καθ' όλο το μήκος του στοιχείου και με αντικατάσταση της σχέσης (5.10), έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_0^L \{\delta d\}^T \{D\} dx &= \{\delta q\}^T \{Q\} \Rightarrow \\ \{Q\} &= \int_0^L [B(x)]^T [k(x)] [B(x)] dx \cdot \{q\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Επομένως οι επικόμβιες δράσεις και το μητρώο δυσκμψίας του στοιχείου μετακινήσεων είναι, αντίστοιχα,

$$\{Q\} = \int_0^L [B(x)]^T \{D(x)\} dx \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

$$[K_{DB}(x)] = \int_0^L [B(x)]^T [k(x)] [B(x)] dx$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται με μία αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss – Lobatto, η οποία γίνεται σύμφωνα με την ακόλουθη θεώρηση,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n_{gl}} w_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) \quad (5.20)$$

όπου n_{gl} το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης και w_i συντελεστές βάρους.

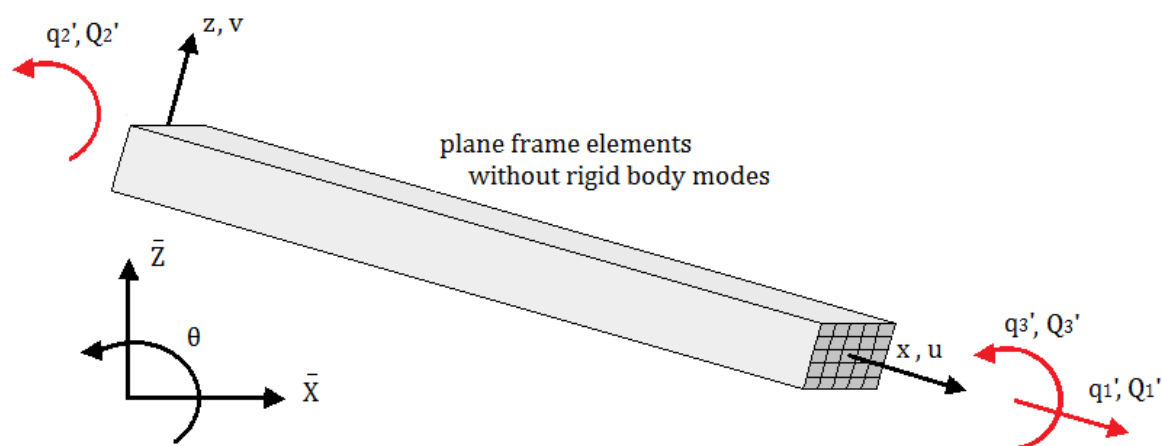
Αριθμός σημείων ολοκλήρωσης n	Θέση σημείων ολοκλήρωσης ξ_i	Συντελεστές βάρους w_i	Αριθμός σημείων ολοκλήρωσης n	Θέση σημείων ολοκλήρωσης ξ_i	Συντελεστές βάρους w_i
1	-	-	6	± 1.0	0.066667
				± 0.765055	0.378475
2	± 1.0	1.0	7	± 0.285232	0.554858
				± 1.0	0.047619
				± 0.830224	0.276826
3	± 1.0 0.0	0.333333 1.333333	8	± 0.468849	0.431745
				0.0	0.487619
				± 1.0	0.035714
				± 0.87174	0.210704
4	± 1.0 ± 0.447214	0.166667 0.833333	9	± 0.5917	0.341123
				± 0.209299	0.412459
				± 1.0	0.027778
				± 0.899758	0.165495
				± 0.677186	0.274539
5	± 1.0 ± 0.654654 0.0	0.1 0.544444 0.711111	10	± 0.363117	0.346429
				0.0	0.371519
				± 1.0	0.022222
				± 0.919534	0.133306
				± 0.738774	0.224889
				± 0.477925	0.292043
				± 0.165279	0.327540

Πίνακας 5.1 : Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss – Lobatto

Αξίζει να σημειωθεί ότι από την όλη διαδικασία, παραγωγής των καταστατικών εξισώσεων του στοιχείου δοκού – ινών με βάση τις μετακινήσεις, που περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω, πουθενά δεν ελήφθη υπόψιν η ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων σε επίπεδο διατομής. Αυτή τη δυσαρμονία έρχονται να επιλύσουν τα στοιχεία δοκού με βάση τις δυνάμεις.

5.3.2. Στοιχείο δοκού βάσει των δυνάμεων

Στα στοιχεία δοκού με βάση τις δυνάμεις, εισάγουμε τις συναρτήσεις σχήματος στο πεδίο των δυνάμεων, ώστε να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες ισορροπίας σε κάθε θέση του μέλους και στη συνέχεια βρίσκουμε τις μετακινήσεις. Είναι η ακριβώς αντίστροφη λογική της προηγούμενης θεώρησης, των στοιχείων με βάση τις μετακινήσεις. Για τις ανάγκες ανάπτυξης του στοιχείου ευκαμψίας, στο οποίο άγνωστες είναι οι δυνάμεις, έχουμε για το αμφίπακτο στοιχείο τρία άγνωστα μεγέθη. Επιλέγουμε αυτά να είναι η αξονική δύναμη και οι επικόμβιες ροπές.



Σχήμα 5.3 : Στοιχείο δοκού ινών , με βάση τις δυνάμεις

Οι υπόλοιπες δυνάμεις είναι εξαρτημένες από αυτήν την τριάδα που επιλέξαμε, μέσω των τριών εξισώσεων ισορροπίας. Το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων είναι,

$$\{Q'\} = [Q'_1 \ Q'_2 \ Q'_3]^T \quad (5.21)$$

Τα αντίστοιχα μετακινησιακά μεγέθη είναι αυτά που δεν αφορούν στις μετακινήσεις στερεού σώματος, οι οποίες περιέχονται στη θεώρηση του σχήματος (5.3),

$$\{q'\} = [q'_1 \ q'_2 \ q'_3]^T \quad (5.22)$$

Η αφαίρεση των κινήσεων στερεού σώματος γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω μητρώου τροποποίησης

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Άρα οι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας του σχήματος (5.2) συνδέονται με τους συνολικούς του σχήματος (5.3), ως παρακάτω,

$$\{q'\} = [T] \cdot \{q\} \quad (5.24)$$

$$\{Q\} = [T]^T \cdot \{Q'\} \quad (5.25)$$

Έχουμε λοιπόν για το πεδίο των δυνάμεων,

$$\{D(x)\} = [b(x)]\{Q'\} \quad (5.26)$$

όπου $[b(x)]$ το μητρώο που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος των δυνάμεων

$$[b(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-1 & r \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Όπως μπορούμε να αντιληφθούμε το μητρώο της σχέσης (5.27), επιβάλλει την ισορροπία, εφόσον δρουν μόνο επικόμβια φορτία, σε κάθε θέση του στοιχείου. Από την αρχή των δυνατών έργων λαμβάνουμε,

$$\int_0^L \{\delta d\}^T \{D\} dx = \{\delta q'\}^T \{Q'\} \Rightarrow$$

$$\{q'\} = \int_0^L [b(x)]^T [f(x)] [b(x)] dx \cdot \{Q'\} \quad (5.28)$$

Το μητρώο $[f(x)]$ αποτελεί το μητρώο ευκαμψίας της διατομής και ορίζεται ως το αντίστροφο του αντίστοιχου μητρώου δυσκαμψίας, δηλαδή,

$$[f(x)] = [k(x)]^{-1} \quad (5.29)$$

με το $[k(x)]$ να έχει ήδη υπολογιστεί, από τη σχέση (5.9). Υπολογίζεται, έτσι, το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου δυνάμεων και οι επικόμβιες παραμορφώσεις, αντίστοιχα, από τις παρακάτω εκφράσεις,

$$[F(x)] = \int_0^L [b(x)]^T [f(x)] [b(x)] dx \quad (5.30)$$

$$\{q'\} = \int_0^L [b(x)]^T \{d(x)\} dx \quad (5.31)$$

Μπορούμε από την (5.30) να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους το οποίο για τους τρεις ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας είναι,

$$[K] = [F]^{-1} \quad (5.32)$$

ενώ για τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας, που περιέχουν τις κινήσεις στερεού σώματος, όπως εξάγεται εύκολα από τις σχέσεις (5.30) και (5.31), είναι

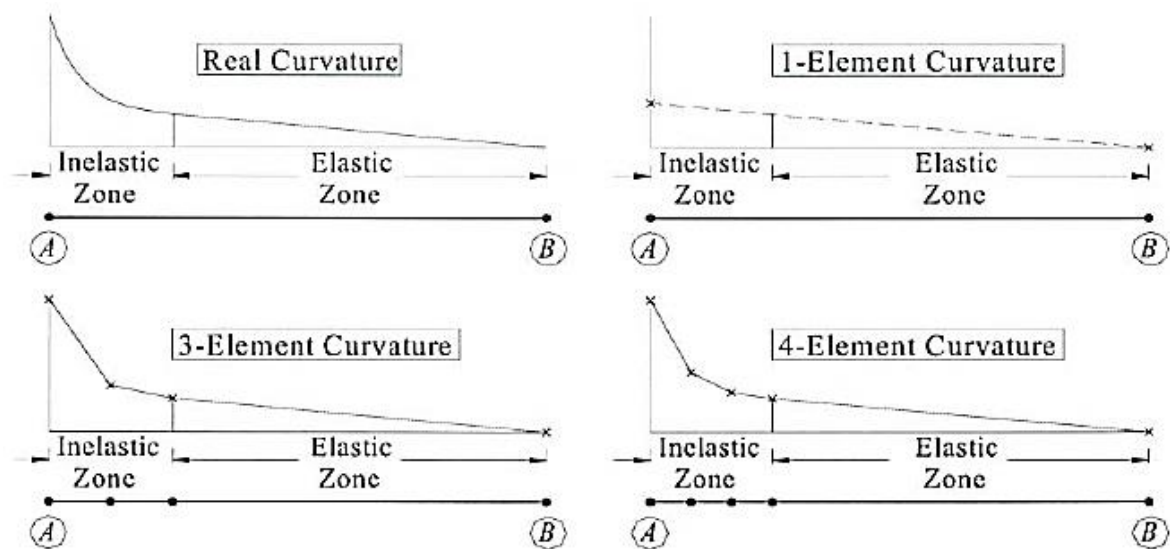
$$[K_{FB}] = [T]^T [K] [T] \quad (5.33)$$

Να σημειωθεί ότι, πλην της περίπτωσης ελαστικής ανάλυσης, ισχύει η ακόλουθη σχέση,

$$[K_{FB}] \neq [K_{DB}] \quad (5.34)$$

5.3.3. Σύγκριση – Παρατηρήσεις

Η χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού, μετακινήσεων και δυνάμεων, δίνει ίδια αποτελέσματα στην ελαστική ανάλυση, αλλά όχι στην πλαστική. Αυτό συμβαίνει γιατί η θεώρηση γραμμικής καμπυλότητας, για παράδειγμα, όπως έγινε στα στοιχεία μετακινήσεων, παράγει γραμμικό διάγραμμα ροπών μόνο στην ελαστικότητα και το αντίστροφο.



Σχήμα 5.4 : Διαγράμματα καμπυλότητας, ανάλογα με τη διακριτοποίηση

Στην ελαστοπλαστική ανάλυση, όπως βλέπουμε στο σχήμα (5.4), για έναν πρόβολο με πάκτωση στο σημείο A, που φορτίζεται με αυξανόμενο κατακόρυφο φορτίο στο σημείο B, η πραγματική καμπυλότητα είναι γραμμική στην ελαστική ζώνη και μη γραμμική στην πλαστική. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο με βάση τις μετακινήσεις την υποεκτιμά και άρα υπερεκτιμά τις δυνατότητες του μέλους. Για να λυθεί αυτό, πρέπει να διακριτοποιήσουμε το μέλος, σε μικρότερα στοιχεία, ιδιαίτερα στις κρίσιμες περιοχές, ώστε να προσεγγίσουμε πολυγραμμικά τη μη – γραμμικότητα της

καμπυλότητας. Όσο πιο πολλά στοιχεία χρησιμοποιήσουμε σε αυτή τη διακρίτοποίηση, τόσο πιο ρεαλιστικό είναι το αποτέλεσμα.

Το στοιχείο με βάση τις δυνάμεις, επειδή έχει ως αφετηριακή ιδέα την ικανοποίηση της ισορροπίας μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων σε κάθε διατομή, δεν αντιμετωπίζει τα παραπάνω προβλήματα.

Πρέπει να σημειωθεί, όμως, ότι παρά το γεγονός αυτό, η αριθμητική στατική επίλυση μιας κατασκευής που αποτελείται από στοιχεία ευκαμψίας ξεφεύγει από τις κλασικές μεθόδους. Χρειάζεται μία επιπλέον επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση των παραμορφώσεων σε επίπεδο διατομής, κατά την οποία όμως πρέπει να επιβάλλεται η συνθήκη του συμβιβαστού των επικόμβιων μετακινήσεων, διαφορετικά τα μέλη που συντρέχουν σε ένα κόμβο δίνουν διαφορετικές μετακινήσεις και οι κόμβοι «ανοίγουν». Το στοιχείο μετακινήσεων, αντιθέτως, τηρεί εγγενώς το συμβιβαστό των παραμορφώσεων και αντιμετωπίζεται αριθμητικά με τη συνήθη λογική της μεθόδου Newton – Raphson, η οποία παρουσιάζεται εκτενέστερα στην παράγραφο §5.6.1.

5.4. Υστέρηση Bouc-Wen στο στοιχείο των μετακινήσεων

5.4.1. Καταστατικές εξισώσεις διατομής

Όπως ήδη αναφέρθηκε προηγούμενα, στο προσωμοίωμα ινών, κάθε ίνα έχει το δικό της νόμο τάσεων – παραμορφώσεων. Στην παρούσα παράγραφο, θα εντάξουμε τις υστερητικές εξισώσεις Bouc – Wen, στις ίνες του στοιχείου μετακινήσεων.

Ξεκινώντας από το επίπεδο της διατομής, η εξίσωση (5.4) αντικαθίσταται από τις (2.13) και η αρχή των δυνατών έργων δίνει,

$$\begin{aligned} \int_A \delta \varepsilon \cdot \sigma dA &= \{\delta d\}^T \{D\} \Rightarrow \int_A \delta \varepsilon \cdot E(\alpha \varepsilon + (1 - \alpha)z) dA = \{\delta d\}^T \{D\} \Rightarrow \\ &\{\delta d\}^T \int_A \{J\}^T \cdot E(\alpha + (1 - \alpha)z) dA = \{\delta d\}^T \{D\} \Rightarrow \\ \{D\} &= \int_A \{J\}^T \cdot (\alpha E) \varepsilon dA + \int_A \{J\}^T \cdot (1 - \alpha) E z dA \Rightarrow \\ \{D\} &= \int_A \{J\}^T \cdot (\alpha E) \{J\} dA \cdot \{d\} + \int_A \{J\}^T \cdot (1 - \alpha) E z dA \end{aligned} \quad (5.35)$$

με μέτρο ελαστικότητας $E = \text{σταθερό}$ και όχι εφαιπτομενικό. Λόγω της θεώρησης n_f ινών, το ολοκλήρωμα στο χωρίο της επιφάνειας εκφυλίζεται σε ένα άθροισμα n_f προσθετέων και η σχέση (5.35) γίνεται,

$$\{D\} = \left(\sum_{i=1}^{n_f} \{J_i\}^T (\alpha E_i A_i) \{J_i\} \right) \cdot \{d\} + \sum_{i=1}^{n_f} \{J_i\}^T (1 - \alpha) E_i A_i z_i \quad (5.36)$$

Να προσεχθεί ότι το z_i είναι η υστερητική παραμόρφωση κάθε ίνας και όχι η συντεταγμένη κατά τον άξονα z όπως στην παράγραφο §5.2.

Με τη βοήθεια ενός γενικευμένου μητρώου $\{\bar{J}\}$ και δύο διαγώνιων μητρώων $[\alpha]$ και $[EA]$,

$$\{\bar{J}\} = \left[\{J_1\} \{J_2\} \cdots \{J_{n_f}\} \right]^T \quad (5.37)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{n_f} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$[EA] = \begin{bmatrix} E_1 A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E_{n_f} A_{n_f} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

η εξίσωση (5.36) μπορεί να εκφρασθεί καθαρά μητρικά, στην κάτωθι μορφή,

$$\{D\} = [k_{el}]\{d\} + \{D_{hys}\} \quad (5.40)$$

όπου,

$$[k_{el}] = \{\bar{J}\}^T [\alpha][EA]\{\bar{J}\} \quad (5.41)$$

$$\{D_{hys}\} = \{\bar{J}\}^T ([I] - [\alpha])[EA]\{z_{cs}\} \quad (5.42)$$

με $\{z_{cs}\}$ ένα μητρώο στήλη που περιέχει τις υστερητικές παραμορφώσεις κάθε ίνας της διατομής.

5.4.2. Καταστατικές εξισώσεις μέλους

Αφού έχουμε μορφώσει τις μητρικές σχέσεις ισορροπίας της διατομής, εφαρμόζουμε την αρχή δυνατών έργων σε επίπεδο μέλους και λαμβάνουμε,

$$\int_0^L \{\delta d\}^T \{D\} dx = \{\delta q\}^T \{Q\} \stackrel{(5.16)}{\implies} \{\delta q\}^T \int_0^L [B]^T ([k_{el}]\{d\} + \{D_{hys}\}) dx = \{\delta q\}^T \{Q\}$$

$$\{Q\} = \int_0^L [B]^T [k_{el}][B] dx \cdot \{q\} + \int_0^L [B]^T \{\bar{J}\}^T ([I] - [\alpha])[EA]\{z_{cs}\} dx \quad (5.43)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με τη μέθοδο Gauss – Lobatto που έχει παρουσιαστεί αναλυτικά στην παράγραφο §5.3.1. , άρα για τα n_{gl} σημεία ολοκλήρωσης η (5.43) γίνεται,

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \left(\frac{L}{2} \sum_{i=1}^{n_{gl}} w_i [B(x_i)]^T [k_{el}] [B(x_i)] \right) \cdot \{q\} \\ &\quad + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{n_{gl}} w_i [B(x_i)]^T \{\bar{J}\}^T ([I] - [\alpha]) [EA] \{z_{cs,i}\} \\ \{Q\} &= [K_{el}] \{q\} + \sum_{i=1}^{n_{gl}} [h_i] \{z_{cs,i}\} \Rightarrow \\ \{Q\} &= [K_{el}] \{q\} + \{Q_{hys}\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

όπου ,

$$\{Q_{hys}\} = [H_m] \{z_m\} \quad (5.45)$$

$$[H_m] = \left[[h_1] [h_2] \cdots [h_{n_{gl}}] \right]^T \quad (5.46)$$

και

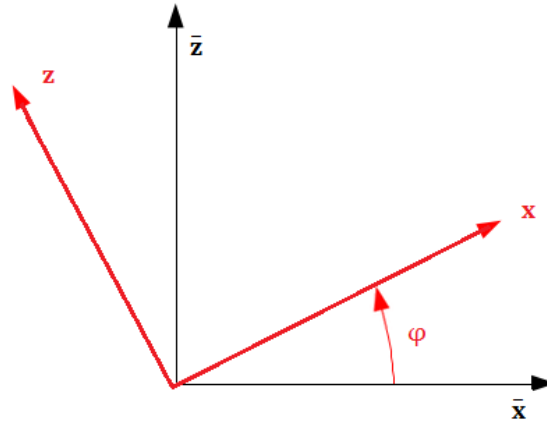
$$\{z_m\} = \left[\{z_{cs,1}\} \{z_{cs,2}\} \cdots \{z_{cs,n_{gl}}\} \right]^T \quad (5.47)$$

Για τη στροφή των διανυσμάτων από το τοπικό (X, Z) στο καθολικό σύστημα αξόνων

(\bar{X}, \bar{Z}) ορίζουμε το ορθοκανονικό μητρώο μετασχηματισμού

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & & & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & & [\mathbf{0}] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & \\ & [\mathbf{0}] & & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ & & & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

όπου η γωνία φ ορίζεται θετική σύμφωνα με το σχήμα, ως αντιωρολογική .



Σχήμα 5.5 : Στροφή αξόνων από καθολικό σε τοπικό σύστημα

Επομένως στο καθολικό σύστημα η εξίσωση ισορροπίας του μέλους γράφεται,

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{K}_{el}]\{\bar{q}\} + \{\bar{Q}_{hys}\} \quad (5.49)$$

όπου $\{\bar{Q}\}, \{\bar{q}\}$ οι καθολικές επικόμβιες δράσεις και μετακινήσεις του μέλους, αντίστοιχα, και

$$\{\bar{Q}_{hys}\} = [\bar{H}_m]\{z_m\} \quad (5.50)$$

$$[\bar{K}_{el}] = [L]^T [K_{el}] [L] \quad (5.51)$$

$$[\bar{H}_m] = [L]^T [H_m] \quad (5.52)$$

5.4.3. Καταστατικές εξισώσεις κατασκευής

Στο σημείο αυτό, πρέπει να δομηθεί η κατασκευή από τα επιμέρους μέλη, πράγμα που πολύ απλά σημαίνει ότι πρέπει οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε μέλους να ενταχθούν σε μία ενιαία εξίσωση, την εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής. Έστω ότι η κατασκευή αποτελείται από n_m αριθμό μελών. Τότε τα αναδιατεταγμένα μητρώα

επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων κάθε μέλους i με βάση τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής θα είναι, αντίστοιχα,

$$\{P_i^{int}\} = [t_i]^T \{\bar{Q}_i\} \quad (5.53)$$

$$\{\bar{q}_i\} = [t_i]\{U\} \quad (5.54)$$

με $i=1,2,\dots, n_m$. Το μητρώο $[t_i]^T$ είναι το μητρώο *Boolean* του μέλους i , που τοποθετεί τους βαθμούς ελευθερίας του μέλους, στους συνολικούς της κατασκευής, αποτελούμενο από 0 και 1. Οι συνολικές εσωτερικές δυνάμεις του φορέα είναι,

$$\begin{aligned} \{P^{int}\} &= \sum_{i=1}^{n_m} \{P_i^{int}\} \xrightarrow{\text{εξ. (5.53)}} \\ \{P^{int}\} &= \left(\sum_{i=1}^{n_m} [t_i]^T [\bar{K}_{el,i}] [t_i] \right) \cdot \{U\} + \sum_{i=1}^{n_m} [t_i]^T [\bar{H}_{m,i}] \{z_{m,i}\} \Rightarrow \\ \{P^{int}\} &= [\bar{K}_s] \cdot \{U\} + \sum_{i=1}^{n_m} [h_{s,i}] \{z_{m,i}\} \Rightarrow \\ \{P^{int}\} &= [K_s] \cdot \{U\} + \{P_{hys}\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

όπου,

$$\{P_{hys}\} = [H_s]\{Z\} \quad (5.56)$$

με,

$$[H_s] = \left[[h_{s,1}] [h_{s,2}] \dots [h_{s,n_m}] \right]^T \quad (5.57)$$

$$\{Z\} = \left[\{z_{m,1}\} \{z_{m,2}\} \dots \{z_{m,n_m}\} \right]^T \quad (5.58)$$

Όπως διακρίνουμε η εξίσωση ισορροπίας (5.55) έχει ένα ελαστικό και ένα υστερητικό μέρος, διατηρώντας έτσι τη λογική του παράλληλου ελατηρίου, που συναντάμε και στις μονοβάθμιες εξισώσεις Bouc – Wen. Πιο αναλυτικά, για n_{dof}

βαθμούς ελευθερίας κατασκευής, τα μητρώα $\{P^{int}\}, \{U\}$ είναι $[n_{dof} \times 1]$, το μητρώο $\{Z\}$ είναι $[f \times 1]$ και το μητρώο $[H_s]$ είναι $[n_{dof} \times f]$, όπου f συνολικός αριθμός υστερητικών παραμορφώσεων των ινών,

$$f = \sum_{i=1}^{n_m} (n_{f,i} \cdot n_{gl,i}) \quad (5.59)$$

Από τις εξισώσεις (5.2), (5.16) και (5.54) εύκολα προκύπτει η αξονική παραμόρφωση κάθε ίνας, σε κάθε διατομή ελέγχου, ως παρακάτω,

$$\varepsilon_j = \{ \bar{J}_k^i \} [B^i(x_p)] [L^i] [t^i] \cdot \{U\} \quad (5.60)$$

με $i=1,2,\dots, n_m$, $p=1,2,\dots, n_{gl,i}$, $k=1,2,\dots, n_{f,i}$ και

$$j = (i-1) \sum_{\ell=1}^{i-1} (n_{f,\ell} \cdot n_{gl,\ell}) + (1-p)n_{gl,i} + k \quad (5.61)$$

Προκύπτει έτσι από την εξίσωση (5.60) το μητρώο συμβιβαστότητας κάθε ίνας, σε κάθε διατομή ελέγχου, κάθε μέλους, που είναι

$$[c_j] = \{ \bar{J}_i \} [B_i(x_p)] [L_i] [t_i] \quad (5.62)$$

Από τις εξισώσεις (5.60) και (5.62) έχουμε, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο,

$$\dot{\varepsilon}_j = [c_j] \cdot \{\dot{U}\} \quad (5.63)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.13), (5.49), (5.53) και (5.63) καταλήγουμε στις τελικές καταστατικές εξισώσεις της κατασκευής, που είναι,

$$\{P^{int}\} = [K_s] \cdot \{U\} + [H_s] \{Z\} \quad (5.64)$$

$$\dot{Z}_j = \left[1 - \left| \frac{Z_j}{Z_{y,j}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}[Z_j [c_j] \{\dot{U}\}]) \right] \cdot [c_j] \{\dot{U}\} \quad (5.65)$$

Στη γενική περίπτωση του δυναμικού προβλήματος, η διαφορική εξίσωση που διέπει την ισορροπία για εξωτερική φόρτιση $\{P^{ext}\}$ είναι,

$$[M_s] \cdot \{\ddot{U}\} + [C_s] \cdot \{\dot{U}\} + \{P^{int}\} = \{P^{ext}\} \quad (5.66)$$

- Στην ειδική περίπτωση της στατικής προσαυξητικής ανάλυσης (*Pushover*), θέτουμε στην (5.66), $[M_s] = [C_s] = [0]$ ή βάζουμε φορτίο το οποίο αυξομειώνεται πολύ αργά με μεγάλη περίοδο.
- Στην ειδική, επίσης, περίπτωση της σεισμικής διέγερσης (για σύγχρονη κίνηση στηρίξεων) έχουμε $\{P^{ext}\} = -[M_s]\{R\}\ddot{u}_g$, με $\{R\}$ χωρικό μητρώο – στήλη στοιχείων $0 \leq R_i \leq 1$, που ορίζει ποιοι βαθμοί ελευθερίας διεγείρονται και \ddot{u}_g την εδαφική σεισμική επιτάχυνση.

5.5. Επίλυση στατικού προβλήματος

Η επίλυση του στατικού προβλήματος, είναι μία ειδική περίπτωση του δυναμικού προβλήματος όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα στην παράγραφο §5.4.3. Αποτελεί κατ' ουσίαν ένα ψευδο – δυναμικό πρόβλημα αφού οι αδρανειακές και αποσβεστικές δυνάμεις θεωρούνται να έχουν αμελητέα συμμετοχή. Η μαθηματική διατύπωση της ισορροπίας έχει ως εξής,

$$[K_s] \cdot \{U\} + [H_s]\{Z\} = \{P^{ext}\} \quad (5.67)$$

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας από τις διάφορες δυνατές αριθμητικές μεθόδους επίλυσης της εξίσωσης (5.67), επελέγη η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson.

Η τροποποίηση έγκειται στη μη ανανέωση του μητρώου δυσκαμψίας σε κάθε

επανάληψη, αλλά μόνο σε κάθε βήμα, πράγμα που επιταχύνει την αλγοριθμική επίλυση. Τα βήματα της μεθόδου παρουσιάζονται πιο αναλυτικά παρακάτω:

Newton – Raphson

***i* – οστό βήμα**

- 1) Αρχικοποίηση με βάση τις τελικές τιμές του προηγούμενου βήματος

$$\{U_{i+1}^{(0)}\} = \{U_i\}, \{P_{i+1}^{int(0)}\} = \{P_i^{int}\}, \{\Delta R^{(1)}\} = \{\Delta P_i^{ext}\}, \{Z_{i+1}^{(0)}\} =$$

$$\{Z_i\}, [K_T] = [K_i]$$

***j* – οστή επανάληψη**

- 2) Επίλυση της επαυξητικής μορφής της εξίσωσης ισορροπίας, για το τρέχον εφαπτομενικό μητρώο και τις μη ισορροπούμενες δυνάμεις,

$$\{\Delta U^{(j)}\} = [K^T]^{-1} \{\Delta R^{(j)}\} \text{ και προσδιορισμός των συνολικών επαυξητικών}$$

$$\text{μετακινήσεων της τρέχουσας επανάληψης, } \{\Delta U\} = \sum_{k=1}^j \{\Delta U^{(k)}\}.$$

- 3) Υπολογισμός της επαυξητικής υστερητικής παραμόρφωσης κάθε ίνας απο

$$\text{την (5.65), } \{\Delta Z^{(j)}\} = \left[1 - \left| \frac{Z_{i+1}^{(j-1)}}{Z_y} \right|^n \left(\beta + \gamma \text{sign} \left[Z_{i+1}^{(j-1)} [\mathbf{e}] \cdot \{\Delta U^{(j)}\} \right] \right) \right] [\mathbf{e}] \cdot$$

$$\{\Delta U^{(j)}\} \text{ και προσδιορισμός των συνολικών επαυξητικών υστερητικών}$$

$$\text{μετακινήσεων της τρέχουσας επανάληψης } \{\Delta Z\} = \sum_{k=1}^j \{\Delta Z^{(k)}\}.$$

4) Προσδιορισμός των επαυξητικών εσωτερικών δυνάμεων της κατασκευής με τη βοήθεια της σχέσης (5.67), $\{\Delta P^{int(j)}\} = [K_s] \cdot \{\Delta U^{(j)}\} + [H_s]\{\Delta Z^{(j)}\}$ και προσδιορισμός των συνολικών επαυξητικών εσωτερικών δυνάμεων της τρέχουσας επανάληψης $\{\Delta P^{int}\} = \sum_{k=1}^j \{\Delta P^{int(k)}\}$.

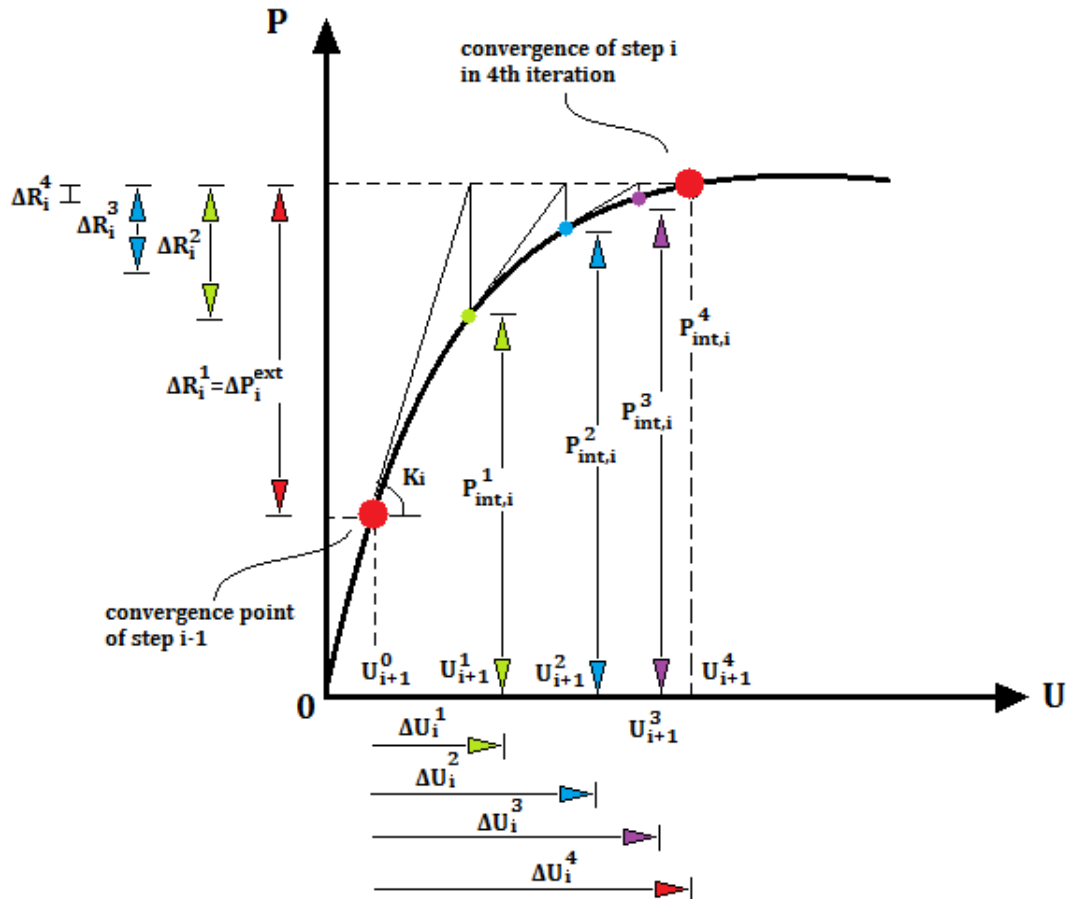
5) Υπολογισμός μη ισορροπούμενων δυνάμεων, $\{\Delta R^{(j+1)}\} = \{\Delta R^{(j)}\} - \{\Delta P^{int(j)}\}$.

6) Έλεγχος ικανοποίησης του επιλεγμένου ενεργειακού κριτηρίου σύγκλισης

$$\frac{\{\Delta R^{(j)}\}^T \{\Delta U^{(j)}\}}{\{\Delta P_i^{ext}\}^T \{\Delta U\}} < \epsilon$$

7) Ανανέωση διανυσμάτων με βάση τις τελικές τιμές της επαναληπτικής μεθόδου $\{U_{i+1}\} = \{U_{i+1}^{(0)}\} + \{\Delta U\}$, $\{Z_{i+1}\} = \{Z_{i+1}^{(0)}\} + \{\Delta Z\}$, $\{P_{i+1}^{int}\} = \{P_{i+1}^{int(0)}\} + \{\Delta P^{int}\}$

8) Υπολογισμός εφαπτομενικού μητρώου με βάση την τελευταία επανάληψη, $[K_{i+1}] = \sum [t]^T [L]^T \left(\int_0^L [B]^T [k_T] [B] dx \right) [L][t]$, όπου $[k_T]$ η εφαπτομενική δυσκαμψία της διατομής που δίνεται από τη σχέση (5.41), για τα εφαπτομενικά μέτρα ελαστικότητας των ινών και $[\alpha] = [I]$.



Σχήμα 5.6 : Επαναλήψεις εντός του βήματος i, της μεθόδου Newton – Raphson

5.6. Επίλυση δυναμικού προβλήματος

Το δυναμικό πρόβλημα περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης (5.66). Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (5.64) στην (5.66) έχουμε,

$$[M_s] \cdot \{\ddot{U}\} + [C_s] \cdot \{\dot{U}\} + [K_s] \cdot \{U\} + [H_s]\{Z\} = \{P^{ext}\} \quad (5.68)$$

Η παραπάνω εξίσωση, για μια χρονική μεταβολή $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ λαμβάνει την επαυξητική μορφή που θα χρειαστούμε στην ανάπτυξη των βημάτων των αριθμητικών επιλύσεων,

$$[M_s] \cdot \{\Delta \ddot{U}_i\} + [C_s] \cdot \{\Delta \dot{U}_i\} + [K_i] \cdot \{\Delta U_i\} = \{\Delta P_i^{ext}\} \quad (5.69)$$

όπου για κάθε μέγεθος M της εξίσωσης (5.69), $\Delta M_i = M_{i+1} - M_i$.

5.6.1. Μέθοδος Newmark

Το 1959, ο Newmark ανέπτυξε μία μέθοδο αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων κίνησης που διέπεται από τις παρακάτω εκφράσεις,

$$\{\dot{U}_{i+1}\} = \{\dot{U}_i\} + [(1 - \gamma)\Delta t]\{\ddot{U}_i\} + (\gamma\Delta t)\{\ddot{U}_{i+1}\} \quad (5.70)$$

$$\{U_{i+1}\} = \{U_i\} + (\Delta t)\{\dot{U}_i\} + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2]\{\ddot{U}_i\} + [\beta(\Delta t)^2]\{\ddot{U}_{i+1}\} \quad (5.71)$$

όπου β, γ παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή της μεταβολής της επιτάχυνσης εντός κάθε βήματος. Συνηθίζεται να τίθενται $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$, επιλογές που ανταποκρίνονται γενικώς στις απαιτήσεις ακρίβειας. Πιο συγκεκριμένα αν θέσουμε $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$ βρισκόμαστε σε θεώρηση σταθερής επιτάχυνσης εντός του βήματος, ενώ για $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$ σε θεώρηση γραμμικής μεταβολής της επιτάχυνσης. Οι σχέσεις (5.70) και (5.71) γράφονται στην πιο εύχρηστη επαυξητική μορφή

$$\{\Delta\dot{U}_i\} = (\Delta t)\{\ddot{U}_i\} + (\gamma\Delta t)\{\Delta\ddot{U}_i\} \quad (5.72)$$

$$\{\Delta U_i\} = (\Delta t)\{\dot{U}_i\} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{U}_i\} + \beta(\Delta t)^2\{\Delta\ddot{U}_i\} \quad (5.73)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.72) στην (5.73) το σύστημα ξαναγράφεται ως ακολούθως,

$$\{\Delta\ddot{U}_i\} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\{\Delta U_i\} - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{U}_i\} - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{U}_i\} \quad (5.74)$$

$$\{\Delta\dot{U}_i\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta U_i\} - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{U}_i\} - \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{U}_i\} \quad (5.75)$$

Εισάγωντας, τέλος, το παραπάνω σύστημα στην επαυξητική εξίσωση κίνησης (5.69) έχουμε,

$$[\widehat{K}_i]\{\Delta U_i\} = \{\Delta \widehat{P}_i^{ext}\} \quad (5.76)$$

όπου

$$[\widehat{K}_i] = [K_i] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} [M] \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \widehat{P}_i^{ext}\} &= \{\Delta P_i^{ext}\} + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} [M] + \frac{\gamma}{\beta} [C] \right) \{\dot{U}_i\} \\ &+ \left(\frac{1}{2\beta} [M] + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [C] \right) \{\ddot{U}_i\} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Όπως μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε η σχέση (5.76) μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με τη σχέση των βημάτων της Newton – Raphson για το στατικό πρόβλημα, με τη διαφορά ότι εδώ έχουμε ένα γενικευμένο μητρώο δυσκαμψίας $[\widehat{K}_i]$ και ένα γενικευμένο εξωτερικό φορτίο $\{\Delta \widehat{P}_i^{ext}\}$ που λαμβάνει υπόψιν του και τη συμμετοχή των αδρανειακών και αποσβεστικών δυνάμεων. Με βάση τα παραπάνω, τα βήματα της μεθόδου Newmark μπορούν να συνοψισθούν ως εξής,

Newmark method

- 1) Αρχικοποίηση των μεγεθών με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και για την επιτάχυνση $\{\ddot{U}_0\} = [M_s]^{-1}(\{P_0^{ext}\} - [C_s]\{\dot{U}_0\} - [K_s] \cdot \{U_0\} + [H_s]\{Z_0\})$
- 2) Επιλογή βήματος Δt_i

i – οστό βήμα

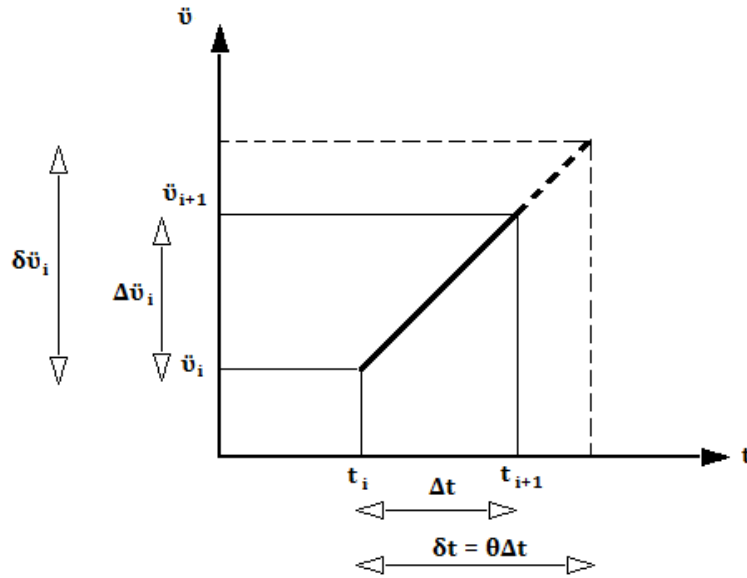
- 3) Υπολογισμός του επαυξητικού γενικευμένου εξωτερικού φορτίου $\{\Delta \hat{P}_i^{ext}\}$ μέσω της σχέσης (5.76)
- 4) Προσδιορισμός του επαυξητικού γενικευμένου μητρώου δυσκαμψίας $[\hat{K}_i]$ από τη σχέση (5.77).

5) Βήματα (1) – (8) μεθόδου Newton – Raphson , υποκεφαλαίου §5.5.

- 6) Υπολογισμός των επαυξητικών ταχυτήτων και επιταχύνσεων από τις σχέσεις (5.74) και (5.75) και συνακόλουθη ανανέωση των αντίστοιχων μεγεθών $\{\dot{U}_{i+1}\} = \{\dot{U}_i\} + \{\Delta \dot{U}_i\}$ και $\{\ddot{U}_{i+1}\} = \{\ddot{U}_i\} + \{\Delta \ddot{U}_i\}$

5.6.2. Μέθοδος Wilson

Η μέθοδος Wilson αποτελεί στην ουσία της μία τροποποίηση της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης, η οποία λαμβάνεται από την οικογένεια της μεθόδου Newmark για $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$. Η τροποποίηση αυτή βασίζεται στη θεώρηση ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά σε ένα διευρυμένο χρονικό διάστημα $\delta t = \theta \Delta t$. Από τις σχέσεις (5.72) και (5.73) με τη αναφερθείσα τροποποίηση έχουμε



Σχήμα 5.7 : Αριθμητική μέθοδος Wilson

$$\{\delta\dot{U}_i\} = (\delta t)\{\ddot{U}_i\} + \frac{\delta t}{2}\{\delta\ddot{U}_i\} \quad (5.79)$$

$$\{\delta U_i\} = (\delta t)\{\dot{U}_i\} + \frac{(\delta t)^2}{2}\{\ddot{U}_i\} + \frac{(\delta t)^2}{6}\{\delta\ddot{U}_i\} \quad (5.80)$$

Επιλύοντας το σύστημα (5.79), (5.80) για τις επαυξητικές ταχύτητες και επιταχύνσεις θα λάβουμε,

$$\{\delta\ddot{U}_i\} = \frac{6}{(\delta t)^2}\{\delta U_i\} - \frac{6}{\Delta t}\{\dot{U}_i\} - 3\{\ddot{U}_i\} \quad (5.81)$$

$$\{\delta\dot{U}_i\} = \frac{3}{\delta t}\{\delta U_i\} - 3\{\dot{U}_i\} - \frac{\delta t}{2}\{\ddot{U}_i\} \quad (5.82)$$

Με την παραδοχή ότι εντός του επεκτεταμένου χρονικού βήματος το εξωτερικό φορτίο μεταβάλλεται γραμμικά, όπως και η επιτάχυνση, άρα

$$\{\delta P_i^{ext}\} = \theta\{\Delta P_i^{ext}\} \quad (5.83)$$

$$\{\delta\ddot{U}_i\} = \theta\{\Delta\ddot{U}_i\} \quad (5.84)$$

Η επαυξητική μορφή της εξίσωσης κίνησης για το αντίστοιχο βήμα i γίνεται,

$$[M_s] \cdot \{\delta\ddot{U}_i\} + [C_s] \cdot \{\delta\dot{U}_i\} + [K_i] \cdot \{\delta U_i\} = \{\delta P_i^{ext}\} \quad (5.85)$$

Οδηγούμαστε έτσι στην επαυξητική εξίσωση ισορροπίας με τα γενικευμένα μητρώα δυσκαμψίας και εξωτερικών φορτίων,

$$[\hat{K}_i]\{\delta U_i\} = \{\delta \hat{P}_i^{ext}\} \quad (5.86)$$

όπου

$$[\hat{K}_i] = [K_i] + \frac{3}{\theta \Delta t} [C] + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} [M] \quad (5.87)$$

$$\{\Delta \hat{P}_i^{ext}\} = \theta \{\Delta P_i^{ext}\} + \left(\frac{6}{\theta \Delta t} [M] + 3[C] \right) \{\dot{U}_i\} + \left(3[M] + \frac{\theta \Delta t}{2} [C] \right) \{\ddot{U}_i\} \quad (5.88)$$

Με βάση τις εξισώσεις που διατυπώθηκαν παραπάνω, μπορούμε να συνοψίσουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου Wilson με βάση τα βήματα (1) – (6) της μεθόδου Newmark της προηγούμενης παραγράφου. Η διαφορά έγκειται μόνο στη χρήση των σχέσεων (5.81) , (5.82) αντί των (5.74), (5.75).

5.6.3. Μέθοδος Runge – Kutta (state space)

Μια άλλη οικογένεια αριθμητικών μεθόδων επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης, είναι αυτή των Runge – Kutta. Η χρήση της προϋποθέτει την έκφραση της διαφορικής εξίσωσης σε μορφή χώρου κατάστασης (*state space formulation*). Η μορφή αυτή μαθηματικά έχει ως εξής για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5.89)$$

με αρχικές συνθήκες

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0) \quad (5.90)$$

Η εξίσωση (5.89) που διέπουν την κίνηση της κατασκευής, κατά την παραπάνω λογική γράφονται σε μορφή χώρου κατάστασης ως παρακάτω

$$\{\dot{X}\} = \mathcal{G}(\{X\}, t) \cdot \{X\} + \{P(t)\} \quad (5.91)$$

με $\{\dot{X}\}, \{X\}, \{P\}$ μητρώα – στήλες και $\mathcal{G}(\{X\}, t)$ τετραγωνικό μητρώο

$$\{\dot{X}\} = \begin{bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{\ddot{U}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{bmatrix}, \{X\} = \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{\dot{U}\} \\ \{Z\} \end{bmatrix}, \{P\} = \begin{bmatrix} [O] \\ [M_s]^{-1}\{P^{ext}\} \\ [O] \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

$$\mathcal{G}(\{X\}, t) = \begin{bmatrix} [O] & [I] & [O] \\ -[M_s]^{-1}[K_s] & -[M_s]^{-1}[C_s] & -[M_s]^{-1}[H_s] \\ [O] & [Y] & [O] \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

Το μητρώο $[Y]$ είναι ένα ορθογωνικό μητρώο $[f \times n_{dof}]$ (βλέπε παράγραφο §5.4.3.),

$$Y_j = \left[1 - \left| \frac{Z_j}{Z_{y,j}} \right|^n (\beta + \gamma \text{sign}[Z_j [c_j]\{\dot{U}\}]) \right] \cdot [c_j] \quad (5.94)$$

όπου $j = 1, 2, \dots, f$ που δίνεται από τον τύπο (5.60).

Υπάρχουν πολλές μορφές της μεθόδου Runge – Kutta που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει, ανάλογα με την επιδιωκόμενη ακρίβεια και ευστάθεια και το υπολογιστικό κόστος. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε μερικές παραλλαγές στην παρούσα παράγραφο: τη μέθοδο Euler, τη βελτιωμένη μέθοδο Euler, τη Runge – Kutta 2^{ης} τάξης ή Euler – Cauchy και την κλασική μέθοδο Runge – Kutta 4^{ης} τάξης. Για τον υπολογισμό του διανύσματος $\{X\}$ τη χρονική στιγμή t_i έχουμε για κάθε παραλλαγή τους επαγωγικούς τύπους που παρουσιάζονται παρακάτω,

Μέθοδος Euler

$$\{X_{i+1}\} = \{X_i\} + \Delta t \cdot (\mathcal{g}(\{X_i\}, t_i) \cdot \{X_i\} + \{P(t_i)\}) \quad (5.95)$$

Βελτιωμένη μέθοδος Euler

$$\{w\} = \frac{\Delta t}{2} \cdot (\mathcal{g}(\{X_i\}, t_i) \cdot \{X_i\} + \{P(t_i)\}) \quad (5.96)$$

$$\{X_{i+1}\} = \{X_i\} + \Delta t \cdot \left(\mathcal{g} \left(\{X_i\} + \{w\}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot (\{X_i\} + \{w\}) + \left\{ P \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \right) \quad (5.97)$$

Μέθοδος Runge – Kutta 2^{ης} τάξης

$$\{w_1\} = \Delta t \cdot (\mathcal{g}(\{X_i\}, t_i) \cdot \{X_i\} + \{P(t_i)\}) \quad (5.98)$$

$$\{w_2\} = \Delta t \cdot (\mathcal{g}(\{X_i\} + \{w_1\}, t_i + \Delta t) \cdot (\{X_i\} + \{w_1\}) + \{P(t_i + \Delta t)\}) \quad (5.99)$$

$$\{X_{i+1}\} = \{X_i\} + \frac{1}{2} (\{w_1\} + \{w_2\}) \quad (5.100)$$

Κλασική μέθοδος Runge – Kutta 4^{ης} τάξης

$$\{w_1\} = \Delta t \cdot (\mathcal{g}(\{X_i\}, t_i) \cdot \{X_i\} + \{P_i\}) \quad (5.101)$$

$$\{w_2\} = \Delta t \cdot \left(\mathcal{g} \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_1\}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_1\} \right) + \left\{ P \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \right) \quad (5.102)$$

$$\{w_3\} = \Delta t \cdot \left(\mathcal{g} \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_2\}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_2\} \right) + \left\{ P \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \right) \quad (5.103)$$

$$\{w_4\} = \Delta t \cdot \left(\mathcal{g} \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_3\}, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \left(\{X_i\} + \frac{1}{2} \{w_3\} \right) + \left\{ P \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \right) \quad (5.104)$$

$$\{X_{i+1}\} = \{X_i\} + \frac{1}{6} (\{w_1\} + 2\{w_2\} + 2\{w_3\} + \{w_4\}) \quad (5.105)$$

5.6.4. Ευστάθεια και Ακρίβεια

Η μέθοδος της μέσης επιτάχυνσης (μέθοδος Newmark για $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$) είναι άνευ συνθηκών ευσταθής. Αντίθετα, η μέθοδος της γραμμικής επιτάχυνσης (μέθοδος Newmark για $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$) δεν είναι ευσταθής σε κάθε περίπτωση. Για μία γραμμική ελαστική ανάλυση για παράδειγμα πρέπει το βήμα να ικανοποιεί τη σχέση $\Delta t < 0.551T_N$, με T_N τη μικρότερη ιδιοπερίοδο. Για το λόγο αυτόν ακριβώς δεν προτιμάται, στα πολυβάθμια ειδικά συστήματα, αφού προκειμένου να εξασφαλισθεί η ευστάθεια μπορεί να απαιτείται εξαιρετικά μικρό βήμα. Το γεγονός αυτό όπως είναι αυτονόητο καθιστά τεράστιο το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος Wilson για $\theta=1$ ταυτίζεται με τη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης και ως εκ τούτου υπάγεται στους όρους ευστάθειάς της. Για $\theta > 1.37$, όμως, γίνεται άνευ συνθηκών ευσταθής, γεγονός που την καθιστά κατάλληλη για την επίλυση της εξίσωσης κίνησης.

Όσον αφορά στην ακρίβεια, η μέθοδος Wilson έχει τη βέλτιστη ακρίβειά της για $\theta = 1.42$. Επίσης, έχει το πλεονέκτημα ότι, εν αντιθέσει με τη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης, παρέχει αριθμητική απόσβεση σε περίπτωση που θέλουμε να τοποθετήσουμε μηδενικό μητρώο απόσβεσης. Με την αριθμητική αυτή απόσβεση αποκλείεται η συνεισφορά των ανώτερων ιδιομορφών στην απόκριση, πράγμα επιθυμητό, ως ρεαλιστικότερο. Αν δεν επιλεγεί όμως η μέθοδος Wilson ίσως χρειαστεί η απόσβεση των ανώτερων ιδιομορφών να επιτευχθεί «εξωτερικά», με μόρφωση ενός κατάλληλου μητρώου απόσβεσης.

Τέλος, όσον αφορά στις κλασικές μονοβηματικές ρητές μεθόδους Runge – Kutta που παρουσιάστηκαν, το μεγάλο πλήθος των υστερητικών αγνώστων z σε μια κατασκευή, τις καθιστά απρόσιτες, καθότι απαιτούν πολύ μικρό βήμα για να συγκλίνουν.

Προσφέρονται, βέβαια, σε περίπτωση που κανείς θέλει να επιλύσει προβλήματα με λίγους αγνώστους z , για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα μονοαξονικού εφελκυσμού όπου έχουμε μία και μόνον ίνα. Η επίλυση πολυβάθμιων συστημάτων απαιτεί πολυπλοκότερους επιλυτήρες που επιταχύνουν τη διαδικασία σύγκλισης, επιλύοντας τα ODE συστήματα, με πολυβηματικές και μη ρητές μεθόδους.

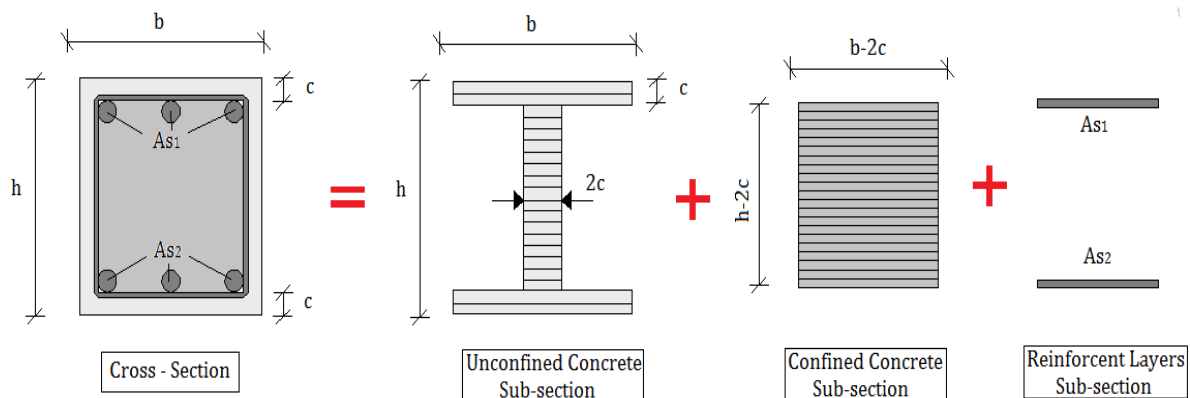
Κεφάλαιο 6^ο

Αριθμητικές εφαρμογές

6. Αριθμητικές Εφαρμογές

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποιες αναλύσεις σε στοιχειώδεις και πιο πολύπλοκες κατασκευές, με βάση τον κώδικα που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας. Ο κώδικας αποτελεί κατ' ουσίαν τη συμπύκνωση όλης της προηγούμενης παρουσίασης των κεφαλαίων 2 – 5. Το στοιχείο που προγραμματίστηκε είναι με βάση τις μετακινήσεις, το αριθμητικό σχήμα επίλυσης που επιλέχθηκε είναι αυτό των Newton – Raphson και Newmark, ενώ η μονοαξονική συμπεριφορά των ινών υπόκειται στις σχέσεις των Κεφαλαίων 3 και 4. Η διακριτοποίηση της διατομής γίνεται ως ακολούθως:

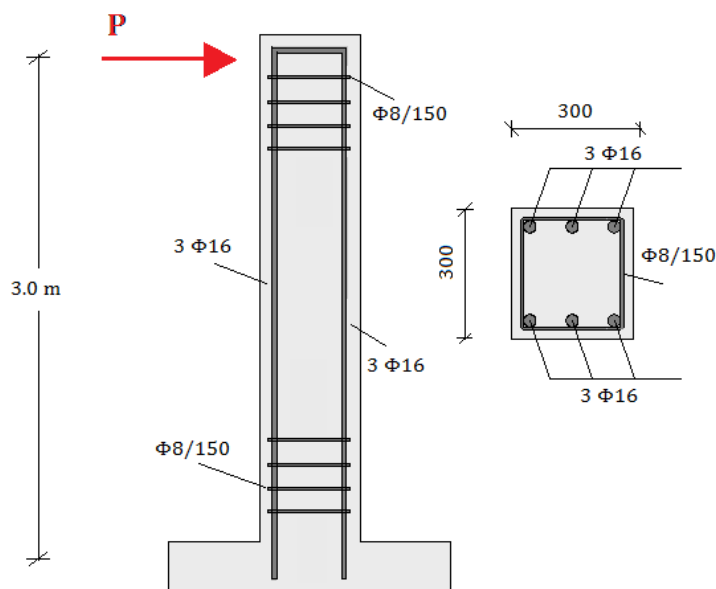
- Η διατομή αντιμετωπίζεται ως συνισταμένη τριών, εν γένει, υποδιατομών, μίας μη – περισφιγμένου σκυροδέματος, μίας περισφιγμένου και μίας χάλυβα οπλισμού.
- Κάθε υποδιατομή διακριτοποιείται ξεχωριστά, ώστε στις ίνες της κάθε μίας να αντιστοιχεί συγκεκριμένη μονοαξονική καμπύλη. Η διατομή του χάλυβα έχει τόσες ίνες, όσες οι στρώσεις του οπλισμού.
- Όλες οι ίνες, όλων των υποδιατομών συλλειτουργούν μέσω της απαίτησης επιπεδότητας της συνισταμένης (ολικής) διατομής.



Σχήμα 6.1 : Χωρισμός διατομής σε υποδιατομές

6.1. Στατική προσαυξητική ανάλυση προβόλου

Το πρώτο παράδειγμα αφορά σε μία ανάλυση του απλούστερου στατικού συστήματος, ενός προβόλου. Το φορτίο αυξάνεται σταδιακά ενώ αγνοούμε μάζες και αποσβεση, καθιστώντας το πρόβλημα στατικό – ψευδοδυναμικό. Η διατομή ΟΣ είναι συμμετρική 300/300 με πάνω και κάτω 3Φ16, συνδετήρες Φ8/150 και επικάλυψη 4.0 cm, ενώ ο πρόβολος έχει ύψος 3.0 m.



Σχήμα 6.2 : Πρόβολος σε στατική προσαυξητική ανάλυση

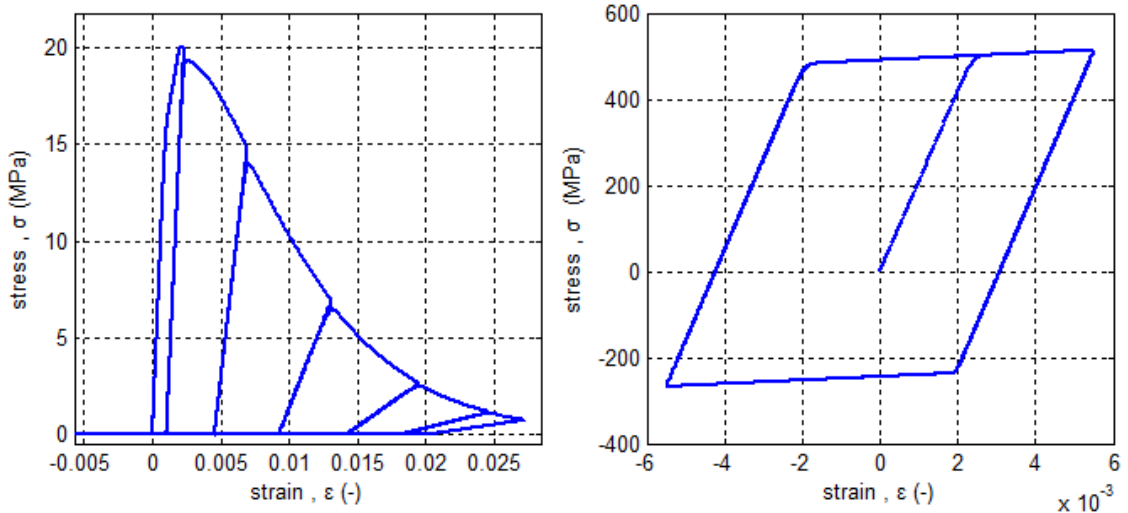
Για τη διατομή του παραδείγματος ελήφθησαν 12 ίνες για τη μη – περισφιγμένη υποδιατομή, 30 ίνες για την περισφιγμένη και 2 ίνες για τη χαλύβδινη (όσες και οι στρώσεις οπλισμού). Για την αριθμητική ολοκλήρωση Gauss - Lobatto στο μήκος του στοιχείου ελήφθησαν 5 διατομές ελέγχου. Τα μηχανικά χαρακτηριστικά των υλικών και οι διάφορες παράμετροι των προσομοιωμάτων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Η προσομοίωση του σκυροδέματος γίνεται βάσει του μοντέλου No2.

Υλικό ίνας	Χάλυβας	Απερίσφιγτο
------------	---------	-------------

Χαρακτηριστικά		Σκυρόδεμα
Μέτρο Ελαστικότητας (E)	200 GPa	16.5 GPa
Θλιπτική Αντοχή	500 MPa	20 MPa
Εφελκυστική Αντοχή	500 MPa	0
Παραμόρφ. Διαρροής (ϵ_y)	0.0025	0.001
Παραμορφ. Αντοχής (ϵ_o)	0.0025	0.002
Συνάρτηση Βλάβης (D^-)	-	$1 - e^{\left(\frac{\kappa_o - \kappa}{2.5\kappa_o}\right)}$
Συνάρτηση Βλάβης (D^+)	-	1
Έναρξη Βλάβης (κ_o^-)	-	0.002
n_d	-	30
γ	0.5	0.5
β	0.5	0.5
$\alpha_{kin} = \frac{E_{pl}}{E}$	0.02	0
$\alpha_{iso} = \frac{E_{pl}}{E}$	0	0.25
n	25	9
Μη γραμμική αποφόρτιση (r)	-	-

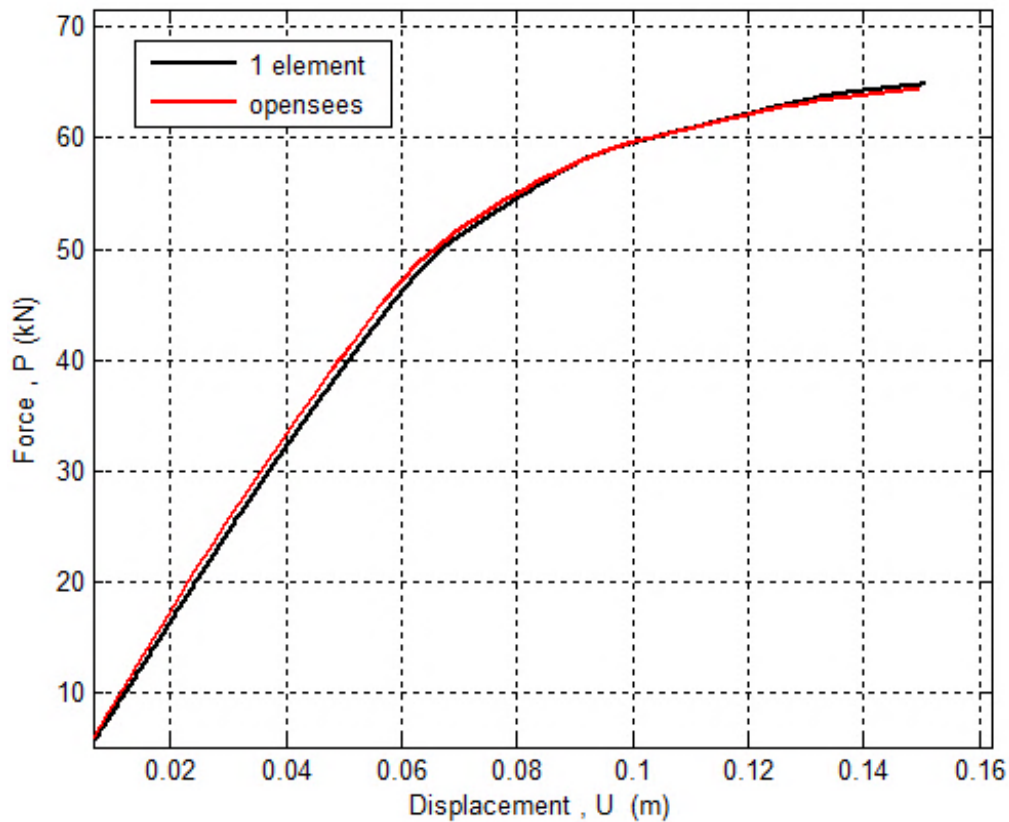
Πίνακας 6.1 : Παράμετροι και μηχανικά χαρακτηριστικά υλικών

Τα στοιχεία του πίνακα (6.1) παράγουν τα παρακάτω διαγράμματα τάσεων παραμορφώσεων για σκυρόδεμα και χάλυβα αντίστοιχα. Για λόγους απλότητας της ανάλυσης, δεν λάβαμε διαφορετικό διάγραμμα για τον περισφιγμένο πυρήνα και διαφορετικό για την απαρίσφιγτη περίμετρο, αλλά μία μέση λύση.



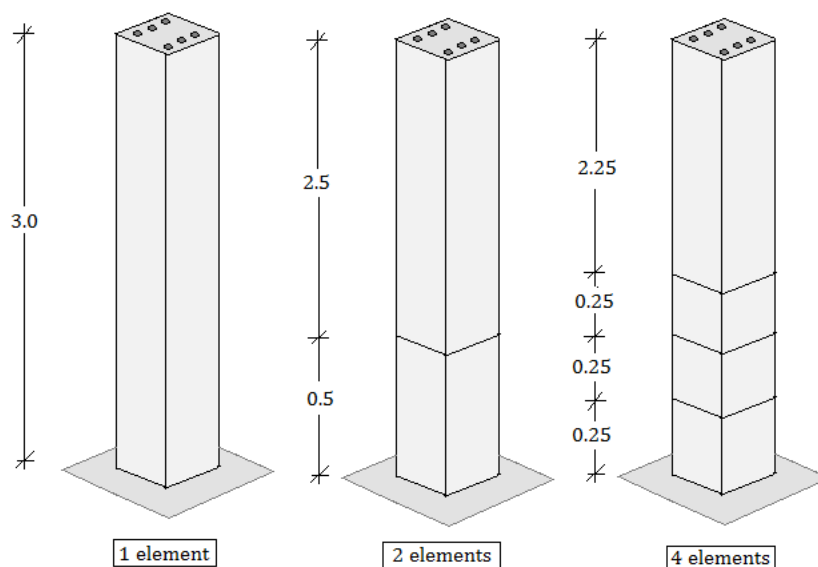
Σχήμα 6.3 : Διαγράμματα 'σ - ε' ιών σκυροδέματος και χάλυβα (1)

Αρχικά, ας δούμε μια σύντομη σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάμεσα στο αναπτυχθέν στοιχείο και στο στοιχείο μετακινήσεων του Opensees, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα (6.4),



Σχήμα 6.4 : Σύγκριση προτεινόμενου στοιχείου με Opensees (1)

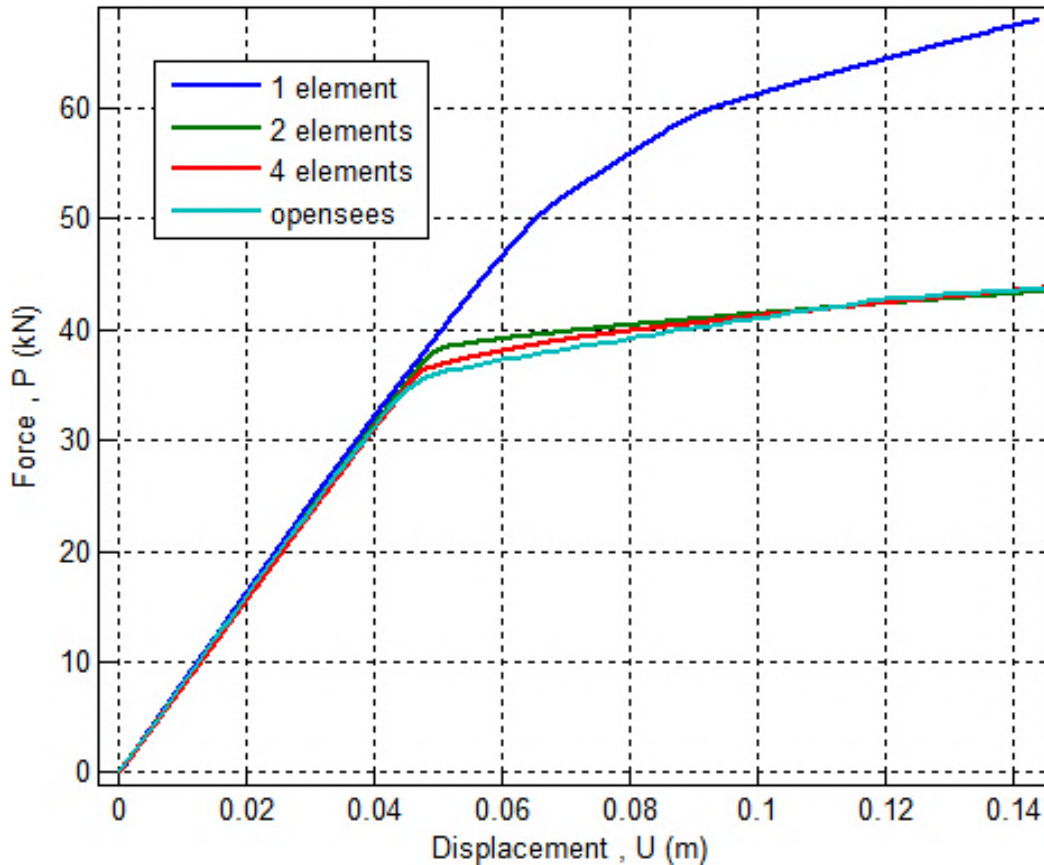
Υπολογίζουμε τώρα τις καμπύλες ικανότητας του προβόλου για τρεις περιπτώσεις διακριτοποίησής του: 1 στοιχείο μετακινήσεων, 2 στοιχεία μετακινήσεων και 4 στοιχεία μετακινήσεων σύμφωνα με το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε. Αυτές συγκρίνονται με 1 στοιχείο δυνάμεων του Opensees.



Σχήμα 6.5 : Τρεις διαφορετικές επιλογές διακριτοποίησης

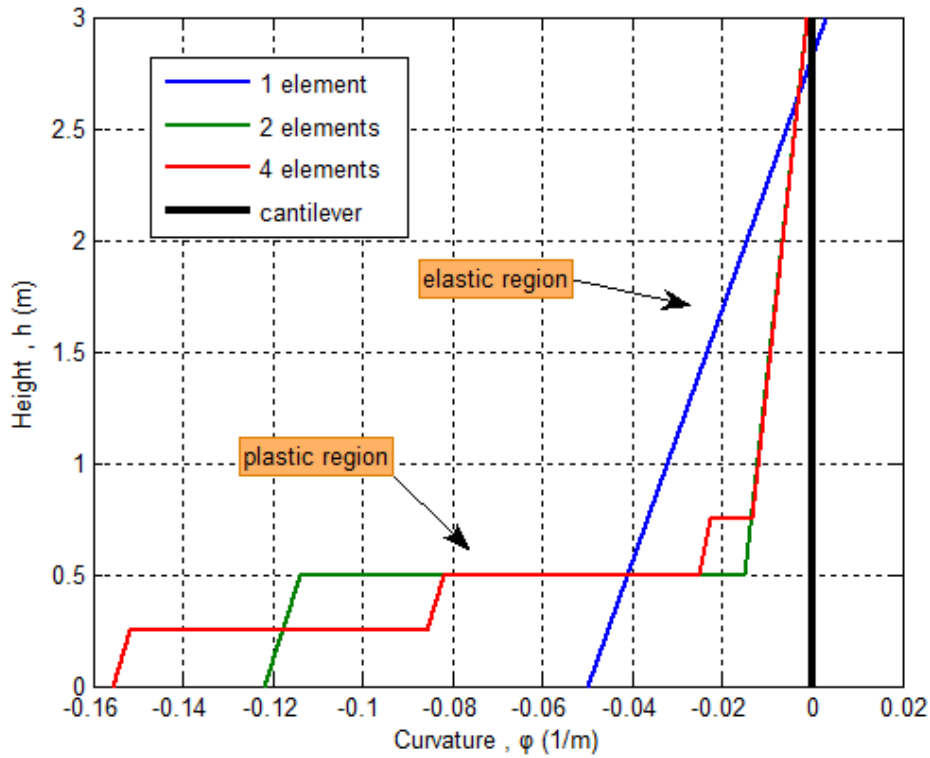
Τα αποτελέσματα των αναλύσεων παρουσιάζονται στο σχήμα (6.6). Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί, η χρήση του στοιχείου μετακινήσεων απαιτεί στην ανελαστική ανάλυση διακριτοποίηση του προβόλου σε περισσότερα από 1 στοιχεία, όπως σχολιάζεται και στην παράγραφο §5.3.3., ώστε να δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα. Αντιθέτως, το στοιχείο με βάση τις δυνάμεις, τηρώντας αυστηρά την ισορροπία σε όλο το μήκος του μέλους, δεν απαιτεί ανάλογο χειρισμό, μειώνοντας έτσι σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης.

Είναι σαφές, ότι αν δεν γίνει η εν λόγω διακριτοποίηση στην περίπτωση χρήσης στοιχείων μετακινήσεων, το μοντέλο δίνει εξαιρετικά λάθος συμπεριφορά, πράγμα που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής.

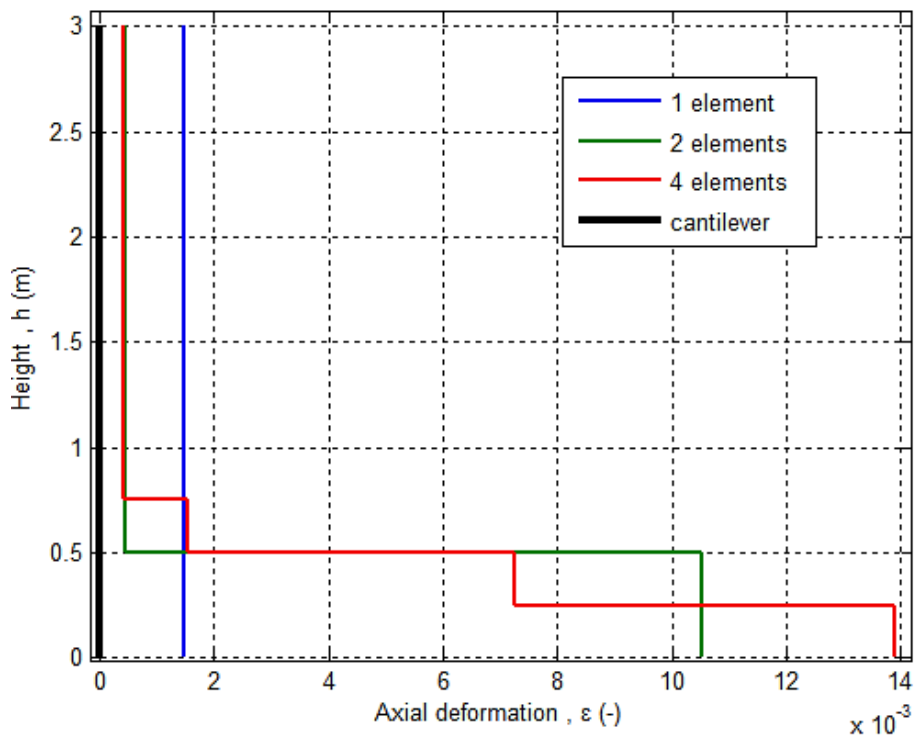


Σχήμα 6.6 : Καμπύλες ικανότητας προβόλου για διάφορες διακριτοποιήσεις

Γενικά όσο πυκνότερη είναι η διακριτοποίηση τόσο ρεαλιστικότερο είναι το αποτέλεσμα της ανάλυσης. Παρόλα αυτά μια στοχευμένη διακριτοποίηση στις περιοχές που αναμένεται εντονότερη μη γραμμικότητα, μπορεί να μας απαλλάξει από το άωφελο υπολογιστικό κόστος ενός πυκνού κάναβου. Τέτοιες περιοχές είναι τα άκρα των δομικών μελών και οι περιοχές συγκεντρωμένων φορτίων. Στην περίπτωση του προβόλου κρίσιμη είναι η περιοχή της βάσης του. Όπως φαίνεται στο σχήμα (6.5) με την προσθήκη ενός και μόνον δεύτερου κόμβου στη βάση, επιτυγχάνουμε εντυπωσιακή μείωση της απόκλισης από την πραγματική συμπεριφορά. Η καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής κατανομής της καμπυλότητας και της αξονικής παραμόρφωσης εντός του προβόλου, φαίνονται στα επόμενα σχήματα (6.7) και (6.8)



Σχήμα 6.7 : Διάγραμμα καμπυλότητας καθ' ύψος του προβόλου

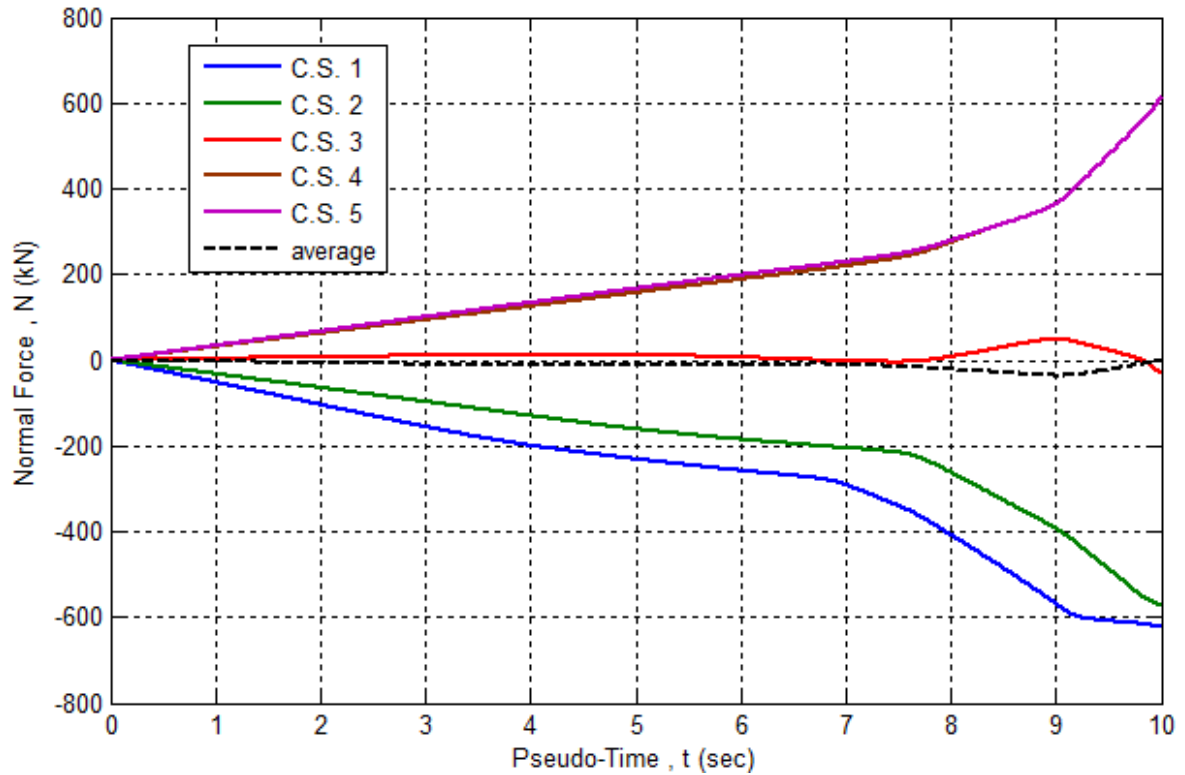


Σχήμα 6.8 : Διαγράμματα αξονικών παραμορφώσεων καθ' ύψος του προβόλου

Όπως υποτέθηκε από τις συναρτήσεις σχήματος που επιλέχθηκαν και όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα, πράγματι στο εσωτερικό του κάθε μέλους η καμπυλότητα

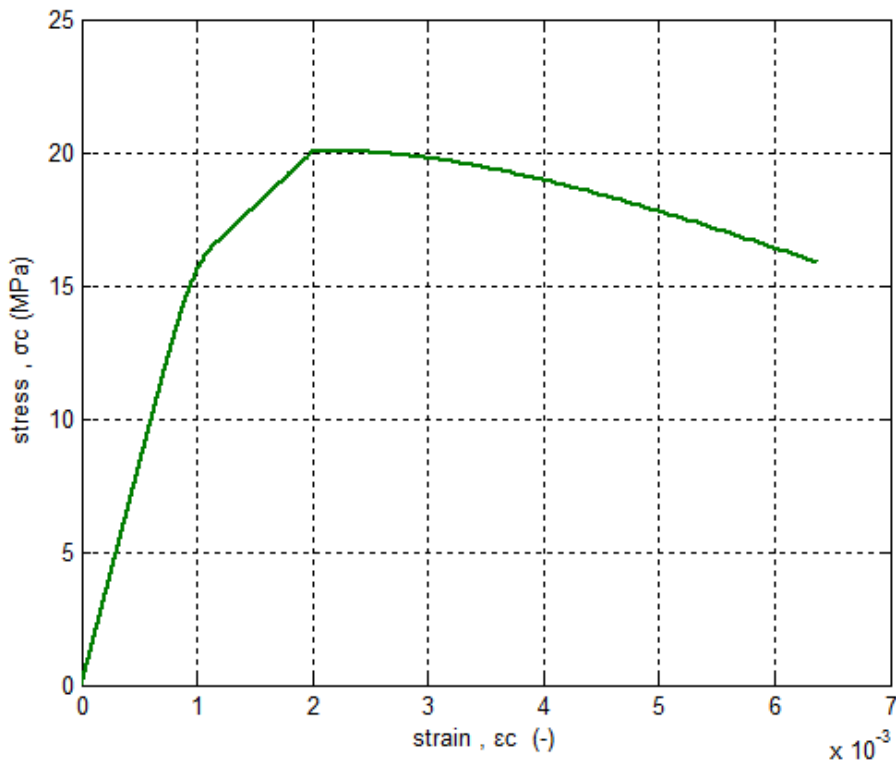
κατανέμεται γραμμικά και η αξονική παραμόρφωση παραμένει σταθερή. Για μία μη συμμετρική διατομή, όπως είναι μια διατομή ΟΣ, τόσο η αξονική όσο και η ροπή σε κάθε διατομή προκύπτει από τη συνεργασία καμπυλότητας και αξονικής δύναμης (βλ. εξίσωση (5.10)). Αυτό σημαίνει ότι τόσο η αξονική δύναμη όσο και η ροπή θα προκύψουν γραμμικές εντός των στοιχείων. Για τη μεν ροπή αυτό αποδίδει την πραγματικότητα της κατανομής, για τη δε αξονική δύναμη όμως η γραμμική κατανομή είναι εσφαλμένη. Στο σχήμα (6.9) μπορούμε να παρακολουθήσουμε την αξονική δύναμη σε κάθε διατομή Gauss – Lobatto , καθώς αυξάνεται το εξωτερικό φορτίο.

Παρατηρούμε ότι, εν προκειμένω για ένα στοιχείο μετακινήσεων, για μηδενική εξωτερική αξονική δύναμη, οι ακραίες διατομές του προβόλου εμφανίζουν αξονικές δυνάμεις της τάξεως των 600kN. Αυτό προφανώς δίνει εξαιρετικά αποκλίνοντα από την πραγματικότητα αποτελέσματα. Μια μέση τιμή των αξονικών όλων των διατομών μπορεί να μας δώσει την ορθή κατά την ικανοποίηση της ισορροπίας αξονική. Αυτή είναι μια παρατήρηση η οποία πρέπει να λαμβάνεται πάντοτε υπόψιν όταν επιλέγεται η χρήση στοιχείων με βάση τις μετακινήσεις, αφού η ισορροπία επιβάλλεται σε ασθενή μορφή (*weak form*) μέσω της εξίσωσης (5.17), ως μια ισότητα ενεργειών και όχι ως μια αυστηρή συνθήκη ισότητας εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων. Όσο πυκνώνει όμως η διακριτοποίηση, η κατάσταση με την εντυπωσιακή ασυμφωνία των των αξονικών δυνάμεων με την πραγματικότητα, βελτιώνεται. Παραμένει, μεν, γραμμική η κατανομή εντός των στοιχείων, όμως πλέον στα άκρα των στοιχείων εμφανίζονται μικρότερες των 600kN δυνάμεις. Δημιουργείται έτσι ένα «πριονωτό» διάγραμμα αξονικών καθ' ύψος του προβόλου , οι αιχμές του οποίου μειώνονται όσο πυκνώνει ο κάναβος, τείνοντας στο μηδενισμό.



Σχήμα 6.9 : Χρονοϊστορία αξονικής δύναμης σε κάθε διατομή ελέγχου

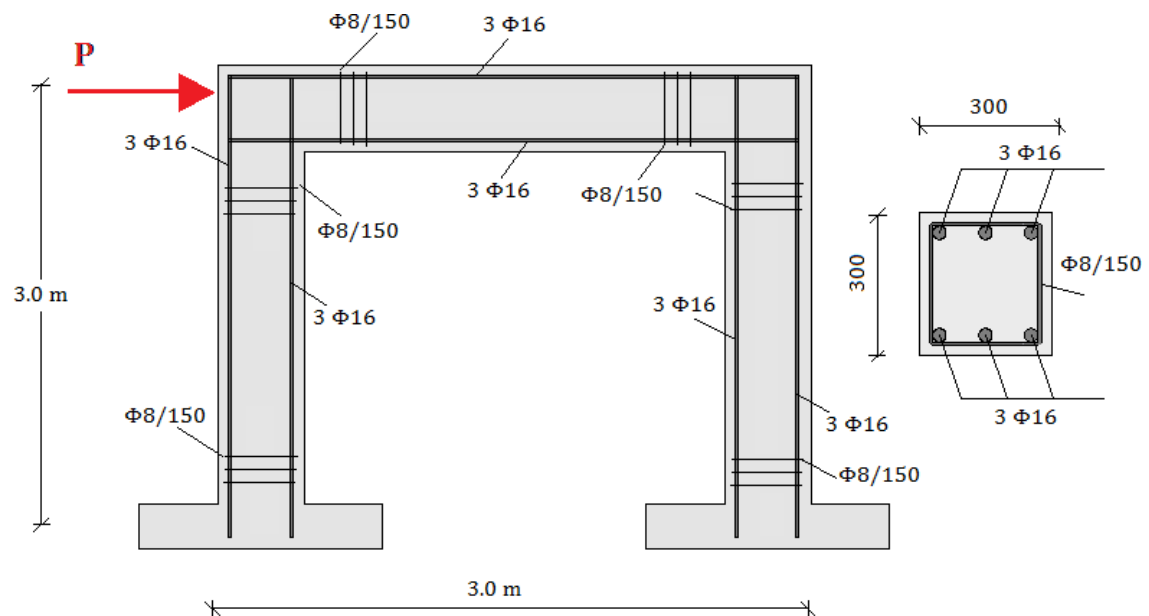
Η ακραία θλιβόμενη ίνα στη διατομή της βάσης του προβόλου για τη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία, δίνει το παρακάτω διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων,



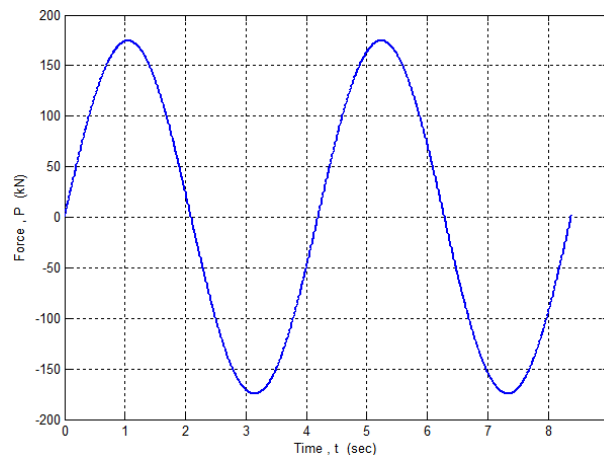
Σχήμα 6.10 : Ακραία θλιβόμενη ίνα σκυροδέματος

6.2. Ψευδοδυναμική ανάλυση μονώροφου πλαισίου

Εδώ, πραγματοποιούμε όπως και προηγουμένως μία ψευδοδυναμική ανάλυση, αυτή τη φορά για μονώροφο πλαίσιο, με τη φόρτιση του σχήματος (6.12). Χάρην απλότητας, υποστυλώματα και ζύγωμα τίθενται με την ίδια διατομή ΟΣ, συμμετρική 300/300 με πάνω και κάτω 3Φ16, συνδετήρες Φ8/150 παντού και επικάλυψη 4.0 cm. Τα υποστυλώματα και το ζύγωμα έχουν μήκος 3.0 m. Διατομή και υλικά είναι ίδια με το παράδειγμα του προβόλου (βλ. πίνακα (6.1) και σχήμα (6.3)).

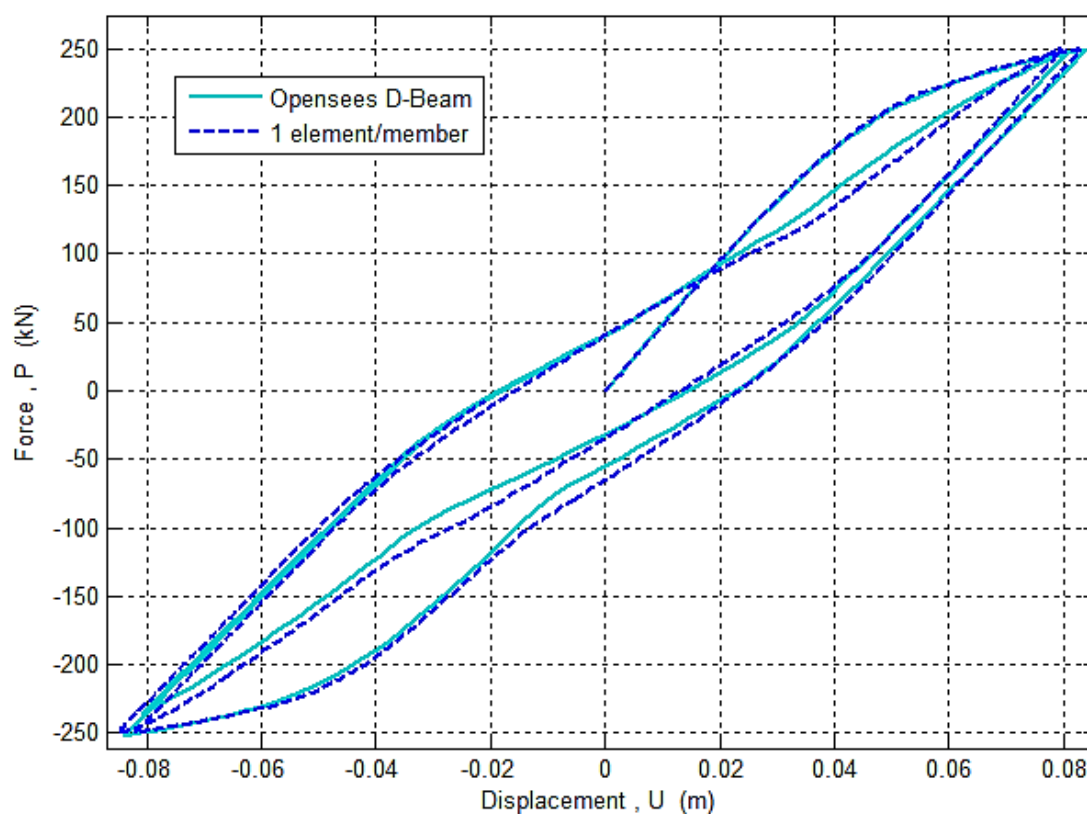


Σχήμα 6.11 : Μονώροφο πλαίσιο σε ψευδοδυναμική φόρτιση



Σχήμα 6.12 : Ανακυκλιζόμενη φόρτιση πλαισίου

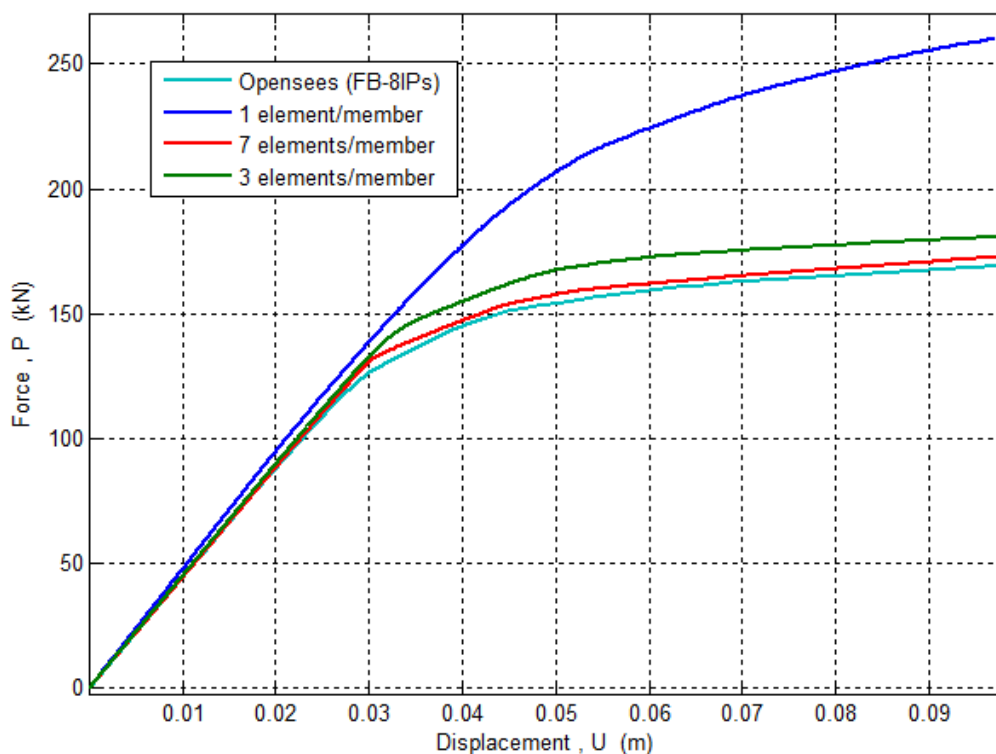
Αρχικά ας συγκρίνουμε το στοιχείο της εργασίας με το στοιχείο μετακινήσεων του Opensees. Παρατηρούμε στο σχήμα (6.13) ότι υπάρχει πολύ καλή ταύτιση. Η μικρή απόκλιση μετά και την πρώτη επαναφόρτιση οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι στο μοντέλο χάλυβα της επίλυσης του πλαισίου με το Opensees χρησιμοποιήθηκε αυτό των Menegotto – Pinto (βλ. παράγραφο §3.2.2.). Κατά συνέπεια το σχήμα (6.13) αποτελεί και μια πρώτης τάξεως σύγκριση ανάμεσα σε ένα στοιχείο ΟΣ που χρησιμοποιεί χάλυβα Menegotto – Pinto και ενός που χρησιμοποιεί τον ελαστικό – απολύτως πλαστικό χάλυβα.



Σχήμα 6.13 : Σύγκριση προτεινόμενου στοιχείου με Opensees (2)

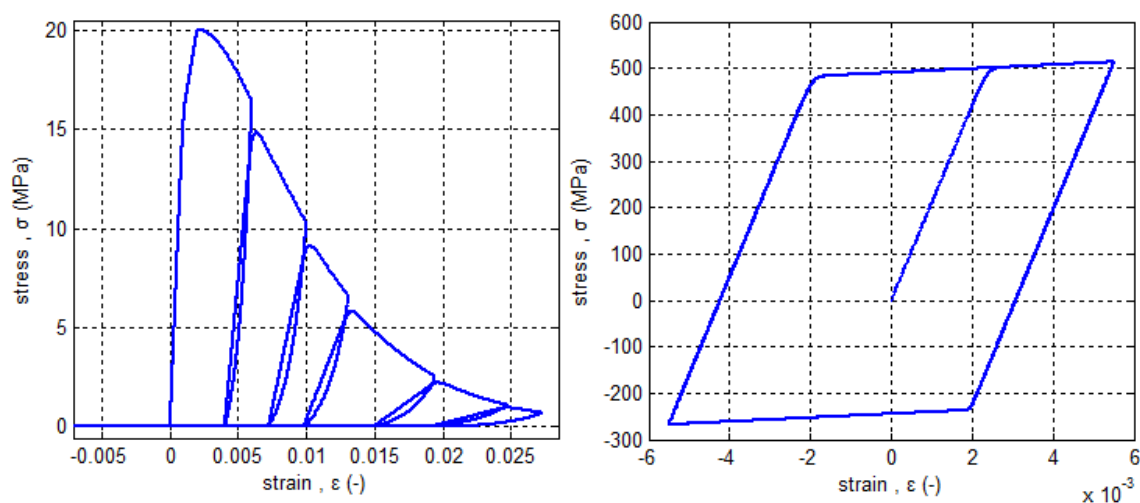
Όπως έχει όμως πολλάκις σημειωθεί, η χρήση στοιχείου μετακινήσεων δεν αποτυπώνει την πραγματικότητα της συμπεριφοράς, αφού καταστρατηγεί, ή καλύτερα αγνοεί αφηρητικά, την ισορροπία σε κάθε διατομή. Συγκρίνουμε, λοιπόν, το πλαίσιο του παρόντος παραδείγματος σε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις διακριτοποίησης: 1) ένα στοιχείο μετακινήσεων/μέλος, 2) τρία στοιχεία

μετακινήσεων/μέλος, 3) επτά στοιχεία μετακινήσεων/μέλος, 4) ένα στοιχείο δυνάμεων του Opensees/μέλος. Παρατηρούμε από το σχήμα (6.14) πόσο μεγάλη απόκλιση υπάρχει ανάμεσα στις διακριτοποιήσεις 1 και 4 και πώς, όσο πυκνώνει η διακριτοποίηση με τα στοιχεία δυσκαμψίας, η καμπύλη ικανότητας τείνει στην αντίστοιχη καμπύλη των στοιχείων ευκαμψίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα στοιχεία μετακινήσεων, αυτό που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων είναι η πυκνότητα του κανάβου και όχι τόσο ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης ανά στοιχείο. Αντιθέτως στα στοιχεία δυνάμεων που είναι κατά κανόνα και μεγαλύτερα, το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης έχει εξέχουσα σημασία στο αποτέλεσμα. Πάντως γενικά, εάν το επιτρέπουν η πολυπλοκότητα και το μέγεθος του προβλήματος, ένας καλός έλεγχος των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, είναι αυτά να συγκρίνονται, τόσο για μια προσομοίωση με στοιχεία μετακινήσεων, όσο και για μία προσομοίωση με στοιχεία δυνάμεων. Η ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο αναλύσεων παρέχει τη σιγουριά της ορθότητάς τους.



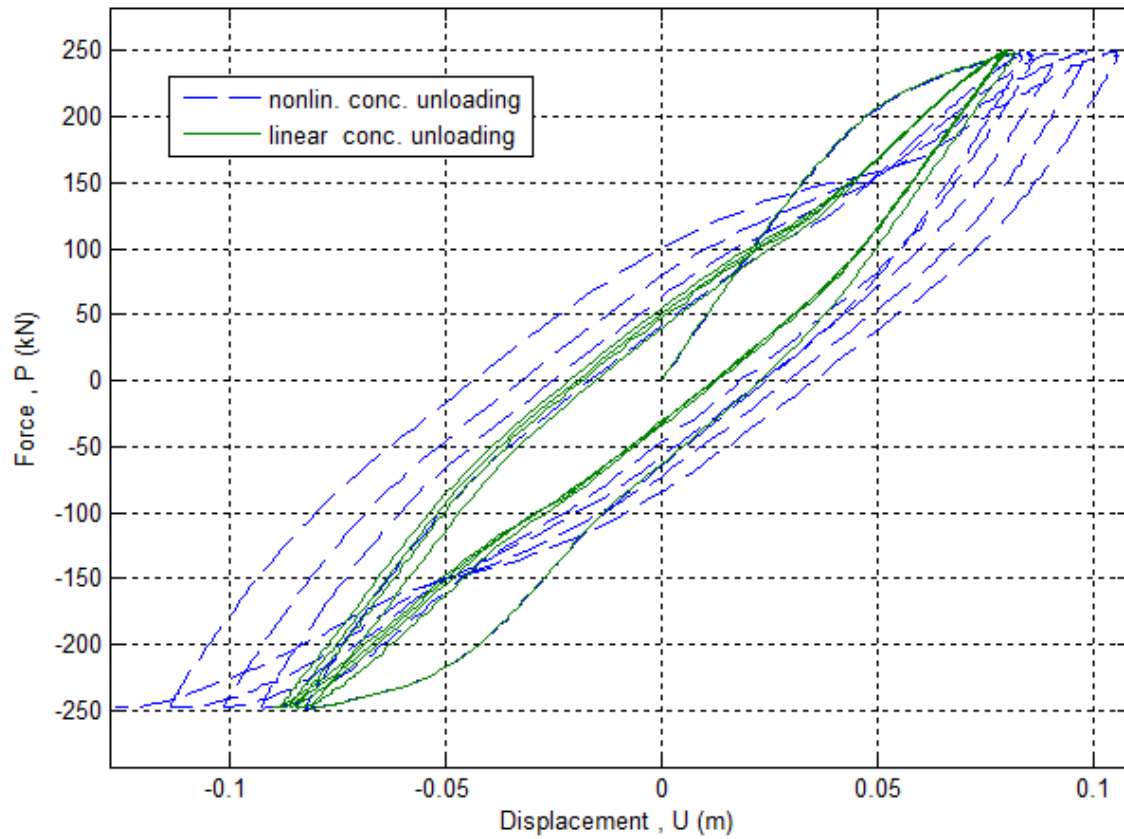
Σχήμα 6.14 : Καμπύλες ικανότητας πλαισίου για διάφορες διακριτοποιήσεις

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η διαφοροποίηση της ανακυκλιζόμενης απόκρισης ανάλογα με την επιλογή ή μη ενός γραμμικού κλάδου αποφόρτισης του σκυροδέματος (σκυρόδεμα No.1 και σκυρόδεμα No.2 αντίστοιχα). Ας πάρουμε για παράδειγμα μια συνάρτηση μη – γραμμικού κλάδου αποφόρτισης και γραμμικού επαναφόρτισης που να καταστρατηγεί τα αξιώματα της πλαστικότητας (βλ. παράγραφο §2.4.3.), σύμφωνα με τη σχέση (4.63) για $c_1 = 2.2$ και $c_2 = 0.35$. Τα υλικά που αποτελούν τη διατομή φαίνονται πλέον στο σχήμα (6.15).



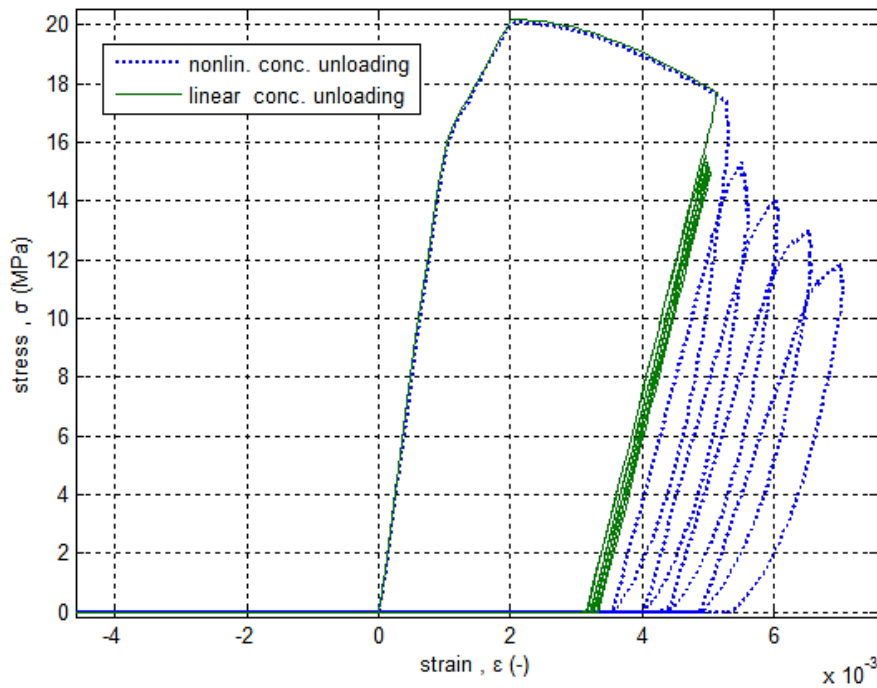
Σχήμα 6.15 : Διαγράμματα 'σ – ε' ινών σκυροδέματος χάλυβα (2)

Για ημιτονική φόρτιση της μορφής του σχήματος (6.12) αλλά για περισσότερους κύκλους, ώστε να γίνουν εμφανείς οι διαφορές στην απόκριση, βλέπουμε στο σχήμα (6.16) ότι η επιλογή ενός σκυροδέματος με μη – γραμμικό κλάδο αποφόρτισης και το οποίο να μην ικανοποιεί τα αξιώματα της πλαστικότητας (όπως και ισχύει στην πειραματική συμπεριφορά) με το πέρασμα των κύκλων φόρτισης καθιστά την κατασκευή πιο πλάστιμη. Για το λόγο αυτό καλό είναι όταν μια κατασκευή υποβάλλεται σε κυκλική φόρτιση αρκετών κύκλων, να μην χρησιμοποιούνται σκυροδέματα τύπου Kent – Scott – Park αλλά τέτοια που να λαμβάνουν υπόψιν τους αυτή την ιδιομορφία της αποφόρτισης – επαναφόρτισης του σκυροδέματος.



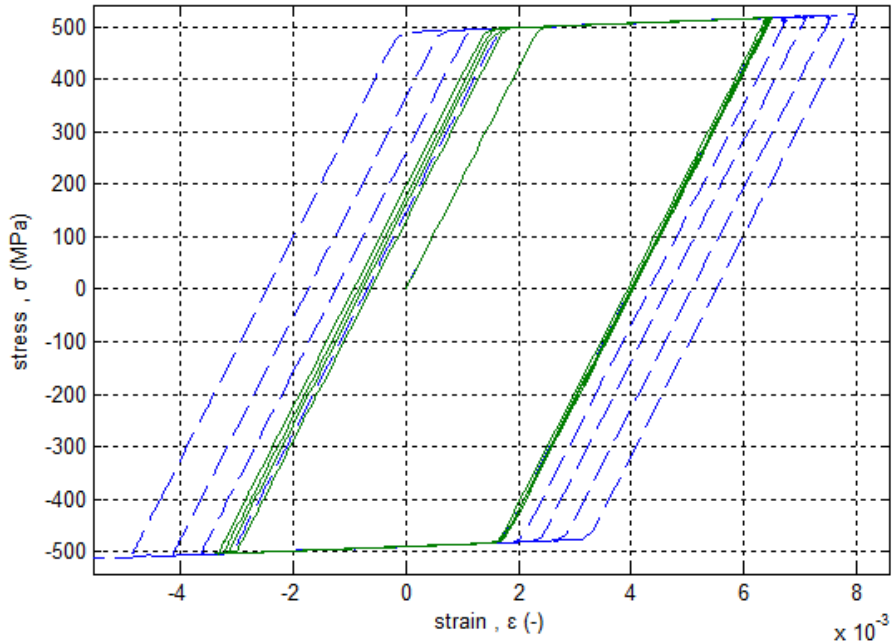
Σχήμα 6.16 : Υστερητικοί βρόχοι για σκυροδέμα με γραμμικό και μη κλάδο αποφόρτισης

Η ακραία θλιβόμενη ίνα του σκυροδέματος σε μια διατομή βάσης του πλαισίου έχει την κάτωθι συμπεριφορά για κάθε μία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις



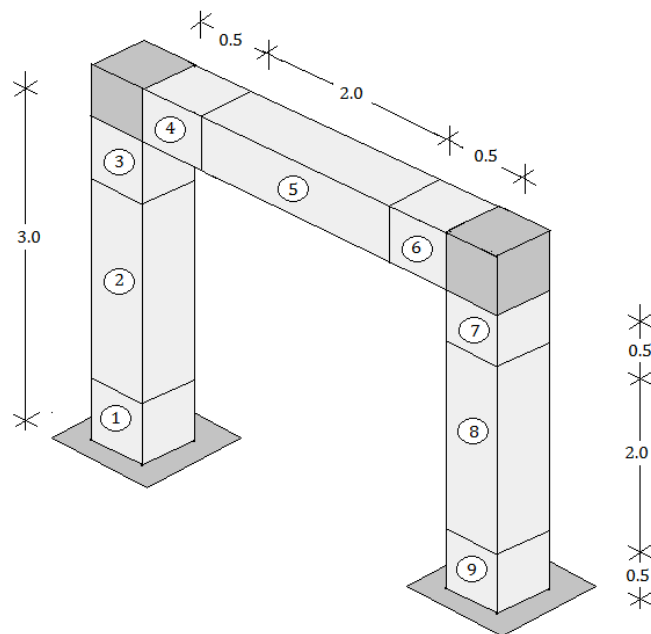
Σχήμα 6.17 : Συμπεριφορά ακραίων ινών σκυροδέματος

Αντίστοιχα, η συμπεριφορά του πρωτο-εφελκόμενου χάλυβα στην ίδια διατομή βάσης του πλαισίου είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα (6.18),



Σχήμα 6.18 : Συμπεριφορά χάλυβα

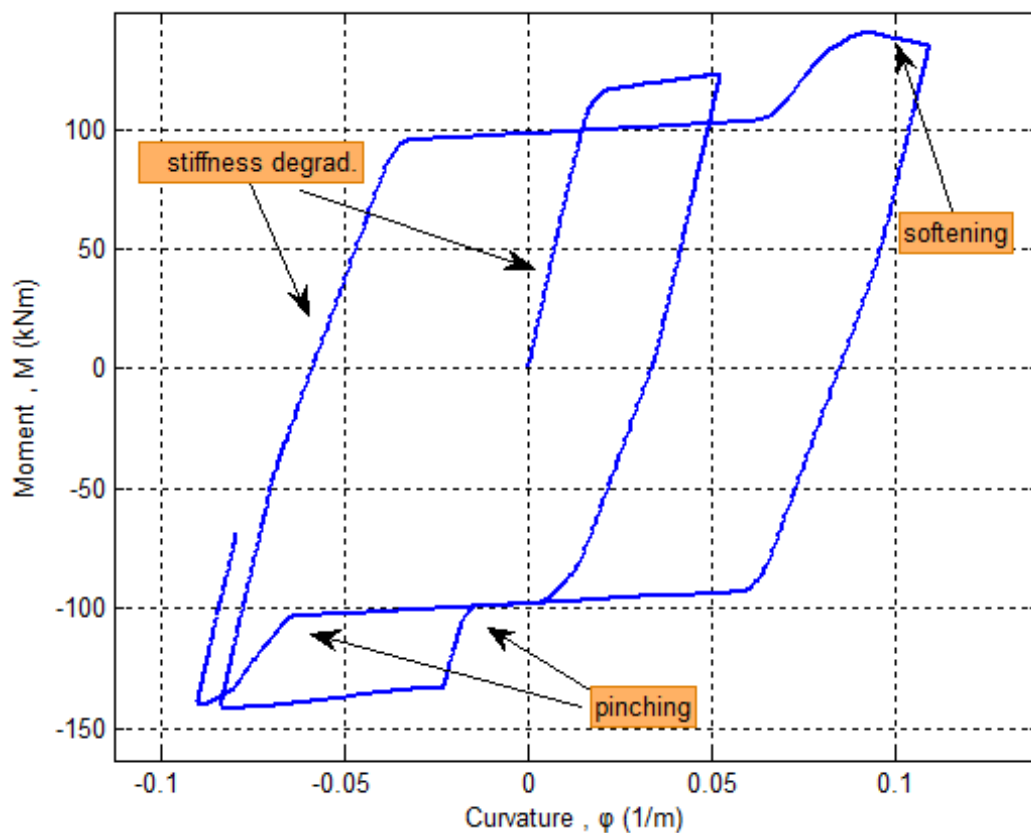
Θα απομονώσουμε, τώρα, την περίπτωση της διακριτοποίησης 2 (τρία στοιχεία/μέλος), για να εντοπίσουμε μερικά φαινόμενα της απόκρισης του πλαισίου, αλλά και γενικότερα των κατασκευών ΟΣ, σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση.



Σχήμα 6.19 : Πλαίσιο με διακριτοποίηση 3 στοιχείων / μέλος

Στο διάγραμμα του σχήματος (6.20) που ακολουθεί, παρακολουθούμε τη διατομή βάσης του εφελκόμενου υποστρώματος. Όπως είναι εμφανές μπορούμε να διακρίνουμε τρία φαινόμενα:

α) *Απομείωση δυσκαμψίας*, που οφείλεται στη βλάβη που υφίσταται το σκυρόδεμα η οποία όπως έχει εξηγηθεί εκτενώς στο Κεφάλαιο 4, ανάγεται σε απομείωση του μέτρου ελαστικότητας του σκυροδέματος.



Σχήμα 6.20 : Υστερητικός βρόχος ροπών – καμπυλοτήτων για διατομή βάσης

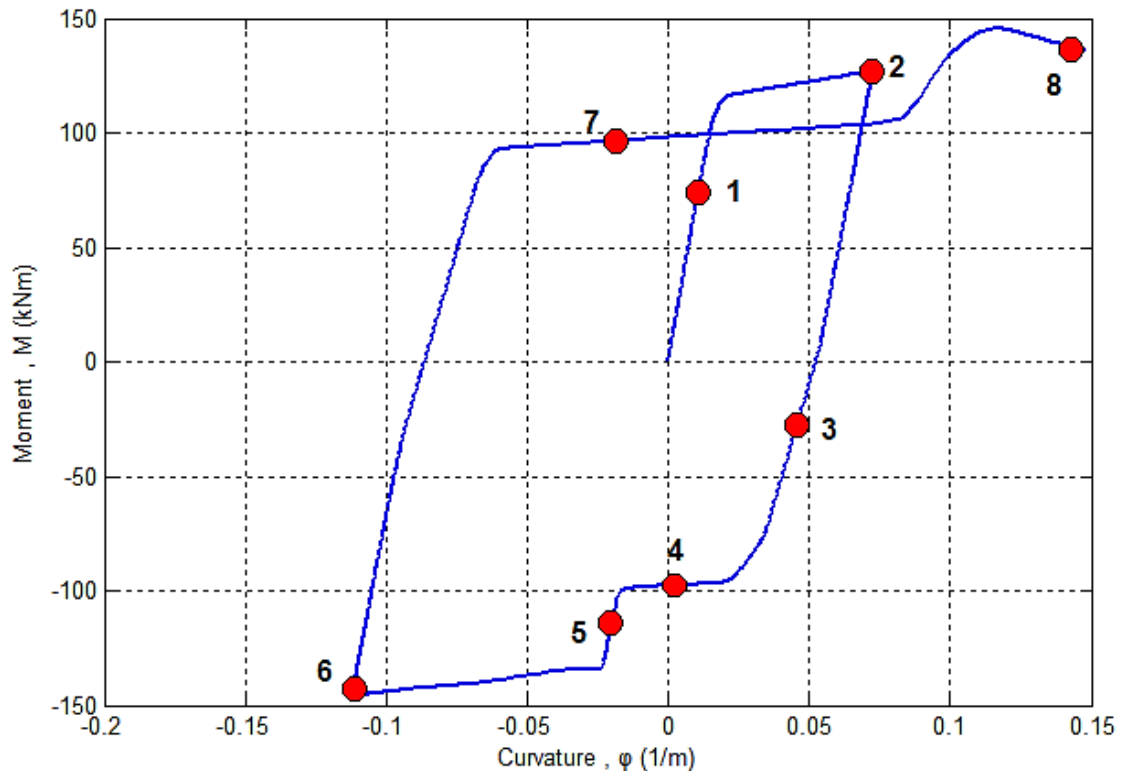
β) *Softening*, που οφείλεται στο φθίνοντα κλάδο του σκυροδέματος μετά τη μέγιστη τάση. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρατηρούμε softening σε επίπεδο διατομής παρά το γεγονός ότι η ανάλυση γίνεται με επιβαλλόμενο φορτίο (*force control*). Αυτό το φαινομενικά παράδοξο αποτέλεσμα εξηγείται και πάλι αν ανατρέξουμε στην αφετηριακή σύλληψη της ιδέας του στοιχείου ματακινήσεων: η ισορροπία του

στοιχείου ικανοποιείται ως ενεργειακή ισότητα, που σημαίνει ότι μπορεί μία διατομή να περνά σε περιοχή *softening*, αλλά λόγω του ότι μια άλλη δεν έχει περάσει, το σταθμισμένο ενεργειακό άθροισμα να δίνει κράτυνση και όχι *softening* για το σύνολο του στοιχείου και έτσι η *force control* ανάλυση να συγκλίνει.

γ) *Στένωση (pinching)* του διαγράμματος στις περιοχές φόρτισης πλην της αρχικής. Το φαινόμενο αυτό εν γένει οφείλεται στο κλείσιμο των ρωγμών που ανοίγουν λόγω της υποθεθείσας μηδενικής εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος και στη σχετική ολίσθηση του χάλυβα των οπλισμών εντός του σκυροδέματος. Στο παρόν παράδειγμα έχει ληφθεί πλήρης συνάφεια χάλυβα – σκυροδέματος και ως εκ τούτου η στένωση προκαλείται αποκλειστικά από το κλείσιμο των ρωγμών. Φυσικά εάν δεν είχε ληφθεί τέλεια πλήρης συνάφεια, η συνέργεια των δύο μηχανισμών, θα επιδείνωνε το τελικό αποτέλεσμα, με την έννοια ότι ο κλάδος μηδενικής σχεδόν δυσκαμψίας που συνοδεύει το φαινόμενο θα επιμηκυνόταν.

6.2.1. Ερμηνεία του φαινομένου της στένωσης

Αξίζει στο σημείο αυτό, να διερευνήσουμε λίγο διεξοδικότερα το μηχανισμό που παράγει τη στένωση (*pinching*) των υστερητικών βρόχων. Θεωρούμε και πάλι το φορέα του παρόντος παραδείγματος με τα 3 στοιχεία μετακινήσεων / μέλος. Το διάγραμμα ροπών – καμπυλοτήτων του πρωτοεφελκυόμενου υποστυλώματος στη διατομή βάσης έχει τη μορφή του σχήματος (6.21). Για της ανάγκες της διερεύνησης εντοπίζεται η προσοχή σε 8 σημεία του εν λόγω διαγράμματος.



Σχήμα 6.21 : Οκτώ ειδικά σημεία του διαγράμματος ροπών – καμπυλοτήτων

Σημείο 1: Η διατομή βρίσκεται στην ελαστική περιοχή του διαγράμματος ροπών καμπυλοτήτων, ενώ όπως φαίνεται και στο σχήμα (6.22) οι δύο ακραίες ίνες ακολουθούν η μία τον πράσινο και η άλλη τον μπλε δρόμο ισορροπίας, σε όρους τάσεων – παραμορφώσεων. Η ακραία θλιβόμενη ίνα λειτουργεί ελαστικά, ενώ η ακραία εφελκυστική ορίζει το άνοιγμα της ρωγμής χωρίς να αναλαμβάνει τάση (παραδοχή μηδενικής εφελκυστικής αντοχής). Άρα το σύνολο της ρηγματωμένης διατομής λειτουργεί ελαστικά, εξ' ου και γραμμικός ο κλάδος του βρόχου υστέρησης των ροπών.

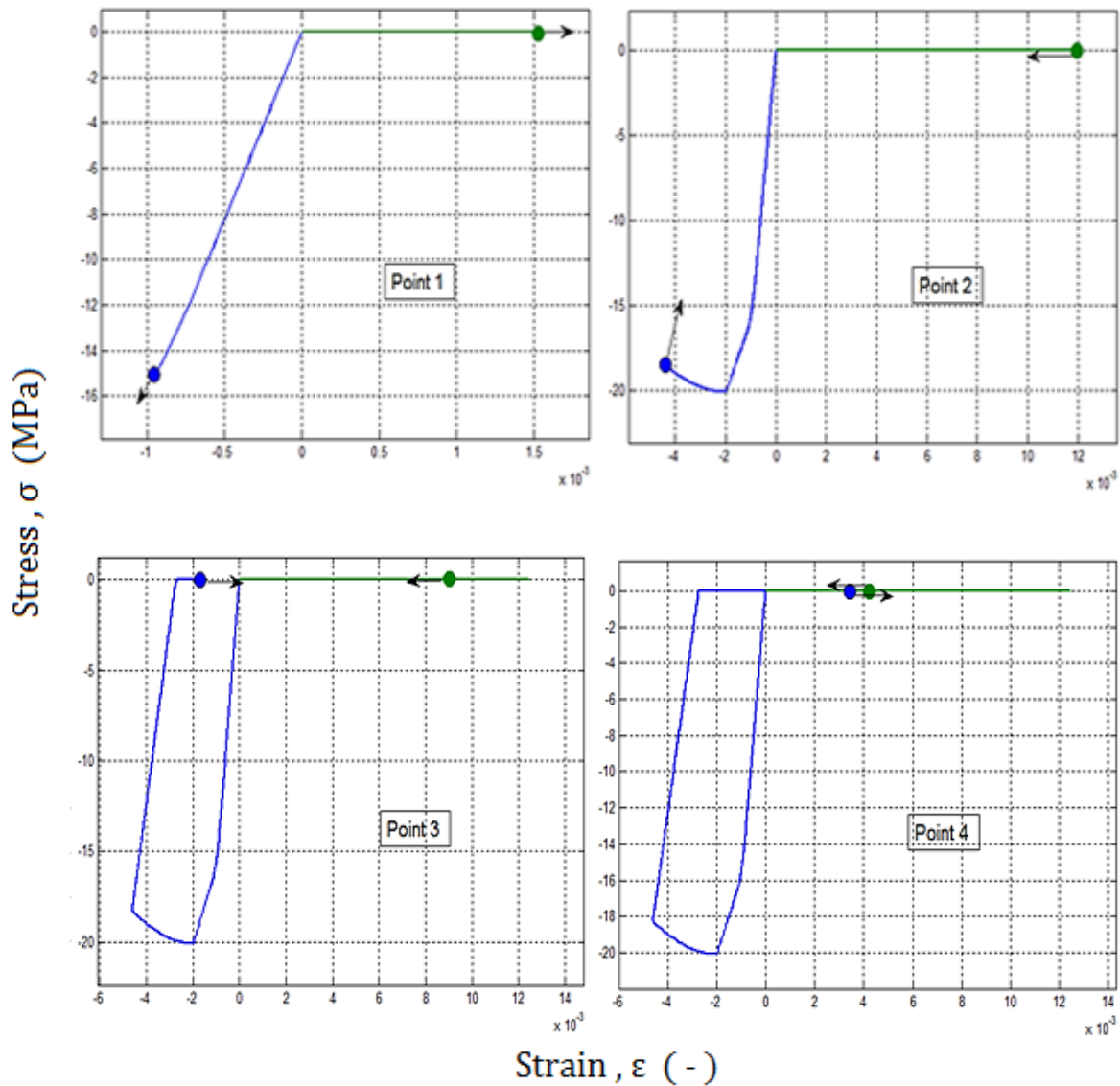
Σημείο 2: Το σημείο αυτό βρίσκεται στην περιοχή της κράτυνσης, έχοντας περάσει το σημείο διαρροής. Όπως φαίνεται στα διαγράμματα τάσεων - παραμορφώσεων του σχήματος (6.22), η ακραία θλιβόμενη ίνα έχει περάσει την τιμή της μέγιστης θλίψης και έχει μπει ήδη στον φθίνοντα κλάδο, ενώ στην περιοχή της εφελκυστικής ίνας η

ρωγή έχει διευρυνθεί αισθητά. Ο λόγος που δεν παρουσιάζει ολόκληρη η διατομή *softening*, παρά το γεγονός ότι η ακραία θλιβόμενη ίνα παρουσιάζει, είναι διότι ο χάλυβας βρίσκεται σε κράτυνση και άρα η διατομή συνολικά κρατύνεται.

Σημείο 3: Εδώ παρατηρείται μια απομείωση της δυσκαμψίας. Αυτό συμβαίνει διότι η τέως θλιβόμενη ακραία ίνα έχει αποφορτιστεί πλήρως και κινείται πλέον στο άξονα των παραμορφώσεων αδυνατώντας να πάρει εφελκυσμό. Την ίδια στιγμή στην πράσινη ίνα η ρωγή κλείνει κινούμενη όμως, επίσης, πάνω στον άξονα των παραμορφώσεων. Καθώς και οι υπόλοιπες θλιβόμενες ίνες θα περνούν σε μηδενική τάση, η απομείωση της δυσκαμψίας στο διάγραμμα ροπών – καμπυλοτήτων θα αυξάνεται, όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο σχήμα (6.21).

Σημείο 4: Το σημείο αυτό αποτελεί το όριο της διαδικασίας που περιγράφηκε προηγούμενα για το σημείο 3. Με άλλα λόγια όλες ή σχεδόν όλες οι ίνες σκυροδέματος βρίσκονται με μηδενική τάση και μηδενική δυσκαμψία. Συνεπώς, ο μόνος μηχανισμός που προσφέρει δυσκαμψία στη διατομή είναι το ζεύγος δυνάμεων του χάλυβα. Προκύπτει έτσι η περιοχή της στένωσης στο συνολικό διάγραμμα της διατομής, του σχήματος (6.21).

Σημείο 5: Οι ρόλοι σε αυτό το σημείο αντιστρέφονται λόγω της ανακύκλισης: η πράσινη ίνα και όλες οι αρχικά εφελκυόμενες, έχοντας κλείσει εντελώς τις ρωγμές τους, αρχίζουν να θλίβονται. Έτσι επανέρχεται η αρχική ρηγματωμένη δυσκαμψία της διατομής, όπως είναι εμφανές και στο διάγραμμα ροπών – καμπυλοτήτων. Για την ακρίβεια δεν επανέρχεται ακριβώς καθότι κάποιες ίνες είχαν περάσει στο *softening*, άρα το αρχικό τέμνον μέτρο ελαστικότητάς τους έχει ήδη μειωθεί λόγω της βλάβης που έχουν υποστεί.



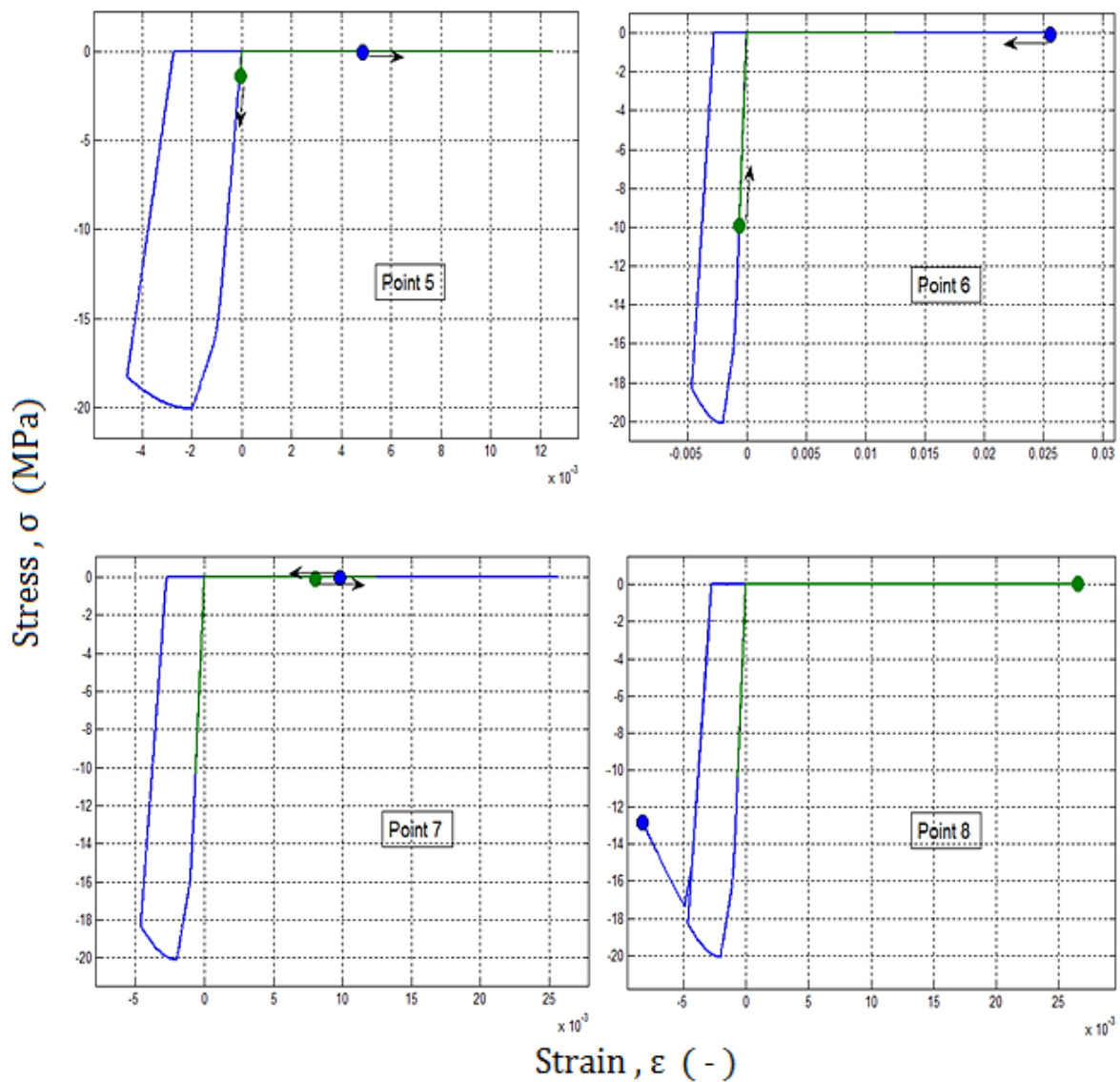
Σχήμα 6.22 : Διαγράμματα 'σ - ε' ακραίων ινών για τα σημεία 1, 2, 3, 4

Σημείο 6: Η διατομή βρίσκεται στο οριακό σημείο της κράτυνσής της, πριν την αποφόρτιση. Για να μπει η διατομή από την ελαστική στην κρατυνόμενη περιοχή μεσολαβεί η διαρροή του αρχικώς εφελκόμενου χάλυβα, που βρίσκεται πλέον σε θλίψη. Οι ίνες σκυτοδέματος ακολουθούν τον προηγούμενο δρόμο ισορροπίας τους.

Σημείο 7: Όπως και με το σημείο 4, το διάγραμμα ροπών - καμπυλοτήτων βαίνει σε περιοχή στένωσης, λόγω του ίδιου μηχανισμού. Αυτό μπορεί να γίνει εμφανές και από τα αντίστοιχα διαγράμματα τάσεων - παραμορφώσεων του σχήματος (6.23), όπου

και οι δύο ακραίες ίνες δε φέρουν καμία αντίσταση στην αύξηση του φορτίου κινούμενες αντίρροπα στον άξονα των παραμορφώσεων.

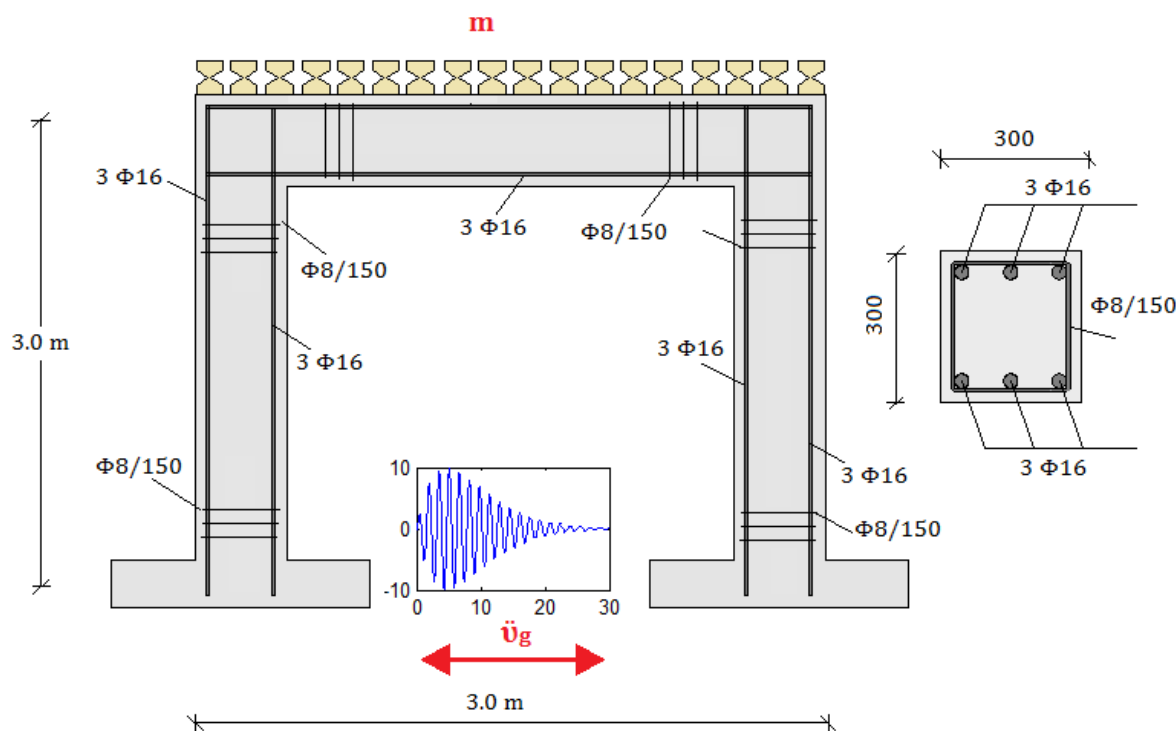
Σημείο 8: Παρατηρείται softening για τους λόγους που περιγράφηκε στο σχολιασμό του σχήματος (6.20). Η μπλε ίνα διανύει φθίνοντα δρόμο ισορροπίας, ενώ η ροπή που προσφέρει ο χάλυβας δεν είναι πλέον ικανή για να ισορροπήσει αυτή την απώλεια αντοχής του σκυροδέματος. Έτσι εμφανίζεται η μείωση της ροπής για αύξηση της καμπυλότητας.



Σχήμα 6.23 : Διαγράμματα 'σ - ε' ακραίων ινών για τα σημεία 5, 6, 7, 8

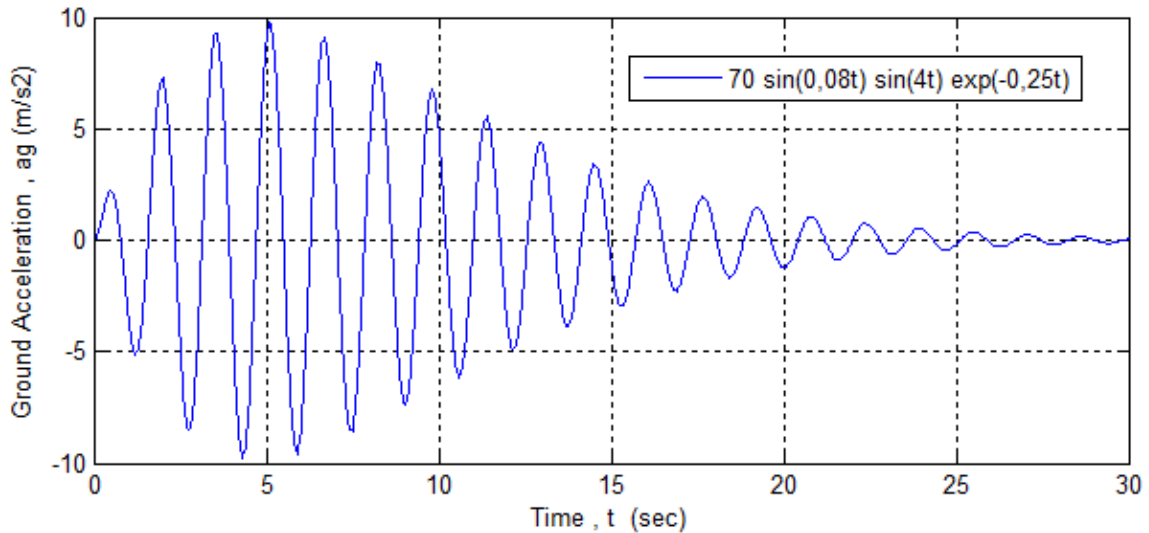
6.3. Δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας μονόροφου πλαισίου

Στο παράδειγμα 6.3. θα μελετήσουμε το ίδιο μονόροφο πλαίσιο του παραδείγματος 6.2. , όμως αυτή τη φορά δυναμικά. Τοποθετούμε για το λόγο αυτό καταναμημένη μάζα $m = 5 \text{ kNs}^2/\text{m}^2$ στο ζύγωμα η οποία κατανέμεται εν τέλει διακριτά στους ακραίους κόμβους ως δύο συγκεντρωμένες επικόμβιες μάζες. Τα χαρακτηριστικά των υλικών αναγράφονται στον πίνακα (6.1), και οι νόμοι των υλικών στο σχήμα (6.3).



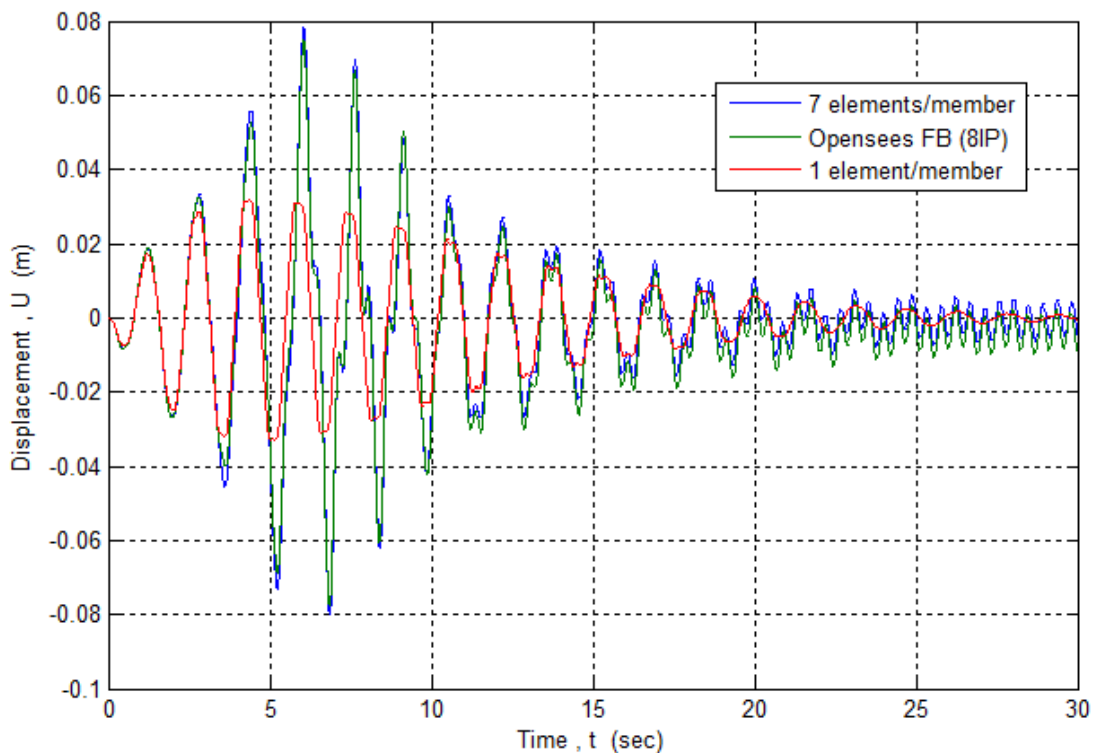
Σχήμα 6.24 : Μονώροφο πλαίσιο σε σεισμική διέγερση

Εισάγουμε για τους σκοπούς της δυναμικής ανάλυσης ένα επιταχυνσιογράφημα που να προσιδιάζει σε μια σεισμική διέγερση, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.25). Η διέγερση των στηρίξεων λαμβάνεται σύγχρονη. Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η διακριτοποίηση με 7 στοιχεία μετακινήσεων/μέλος προσεγγίζει με ικανοποιητικότερη επάρκεια την πραγματικότητα, ενώ αυτή με 1 στοιχείο μετακινήσεων / μέλος αποκλίνει δραματικά.



Σχήμα 6.25 : Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης (1)

Αυτό μπορεί εύκολα να διακριβωθεί και από το σχήμα (6.26), όπου παρουσιάζονται οι αποκρίσεις του πλαισίου για τις εν λόγω διακριτοποιήσεις, όταν αυτό υποβάλλεται στη σεισμική διέγερση του σχήματος (6.25).



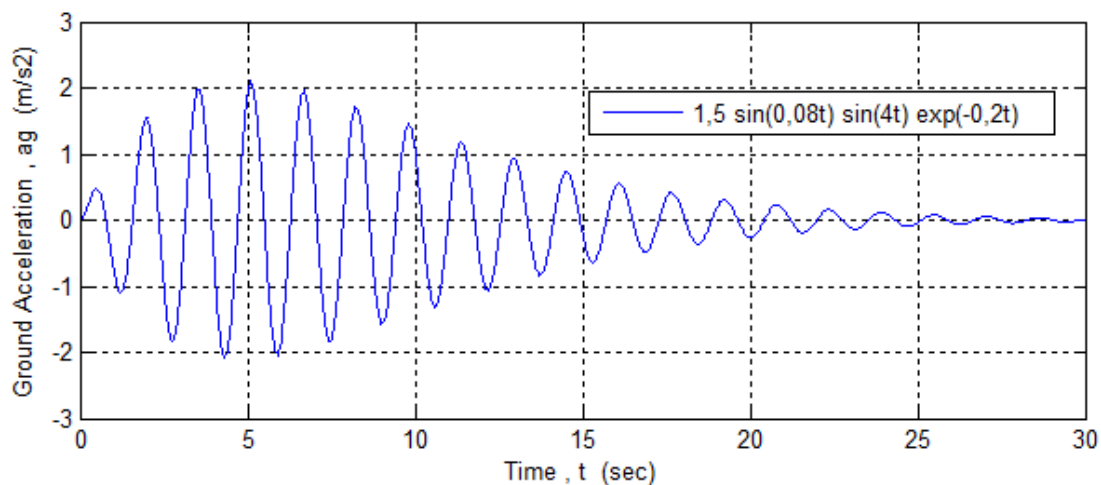
Σχήμα 6.26 : Χρονοϊστορίες απόκρισης μονώροφου πλαισίου για διάφορες διακριτοποιήσεις

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, αρχικά όταν βρισκόμαστε ακόμα στην ελαστική απόκριση της κατασκευής, τα τρία διαγράμματα ταυτίζονται απολύτως. Αυτό είναι

αποτέλεσμα της ταύτισης του στοιχείου μετακινήσεων και του στοιχείου δυνάμεων στην ελαστική και μόνο ανάλυση. Όσο όμως η εδαφική επιτάχυνση αυξάνεται, η κατασκευή περνά στη μη γραμμική περιοχή και αυτή η ταύτιση αίρεται εμφανώς.

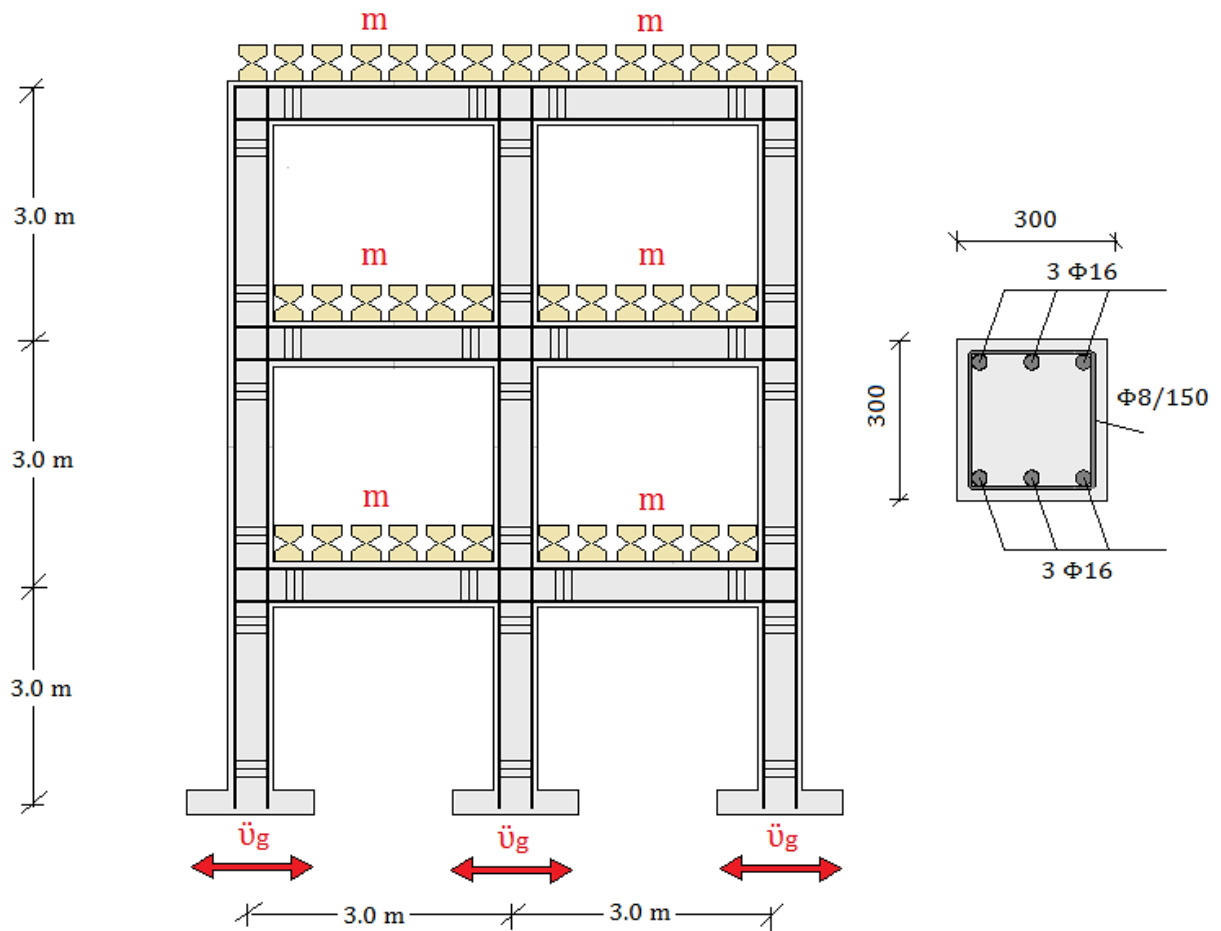
6.4. Δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας πολυόροφου πλαισίου

Σε αυτό το παράδειγμα μελετάμε σε δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας ένα πολυόροφο πλαίσιο, πιο συγκεκριμένα τριών ορόφων. Όλα τα ανοίγματα και υποστυλώματα έχουν μήκη και ύψη αντίστοιχα 3.0 m, ενώ τίθενται με την ίδια διατομή ΟΣ, συμμετρική 300/300 με πάνω και κάτω 3Φ16, συνδετήρες Φ8/150 παντού και επικάλυψη 4.0 cm, όπως ακριβώς στα προηγούμενα παραδείγματα για λόγους απλοποίησης των δεδομένων. Κάθε μέλος τίθεται με μάζα $m = 13.5 \text{ kNs}^2/\text{m}^2$ (συμπεριλαμβανομένων και των υποστυλωμάτων) η οποία διανέμεται, με τη λογική των συγκεντρωμένων μαζών, στους κόμβους. Η κατασκευή υποβάλλεται σε σεισμική διέγερση, κατά την οποία κάθε στήριξη διεγείρεται κατά την εδαφική κίνηση του σχήματος (6.28), σύγχρονα.



Σχήμα 6.27 : Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης (2)

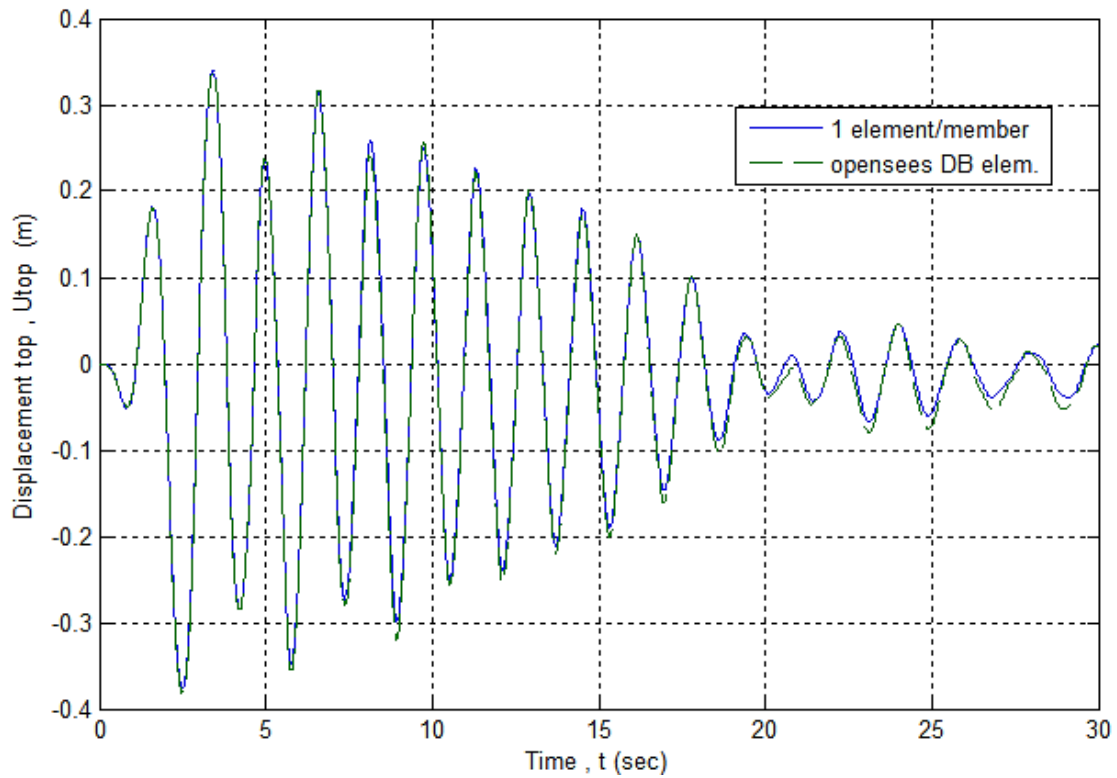
Στο σχήμα (6.23) φαίνεται και η γεωμετρία της κατασκευής που περιγράφηκε προηγουμένως, καθώς επίσης η διατομή υποστυλωμάτων και δοκών.



Σχήμα 6.28 : Τριώροφο πλαίσιο σε σεισμική διέγερση

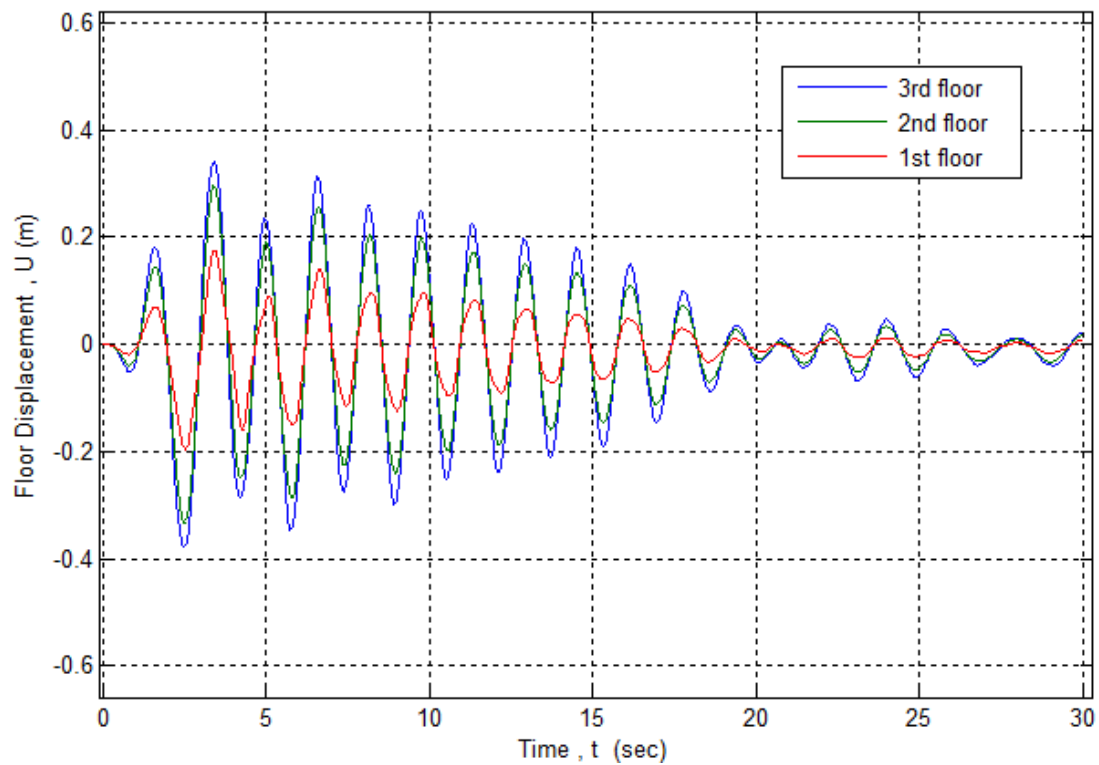
Σκοπός του παραδείγματος είναι να γίνει μια σύγκριση των αποτελεσμάτων του στοιχείου μετακινήσεων της εργασίας και του στοιχείου μετακινήσεων του Opensees, σε μια πολυπλοκότερη κατασκευή.

Μολονότι, δηλαδή, τα αποτελέσματα που δίνει το στοιχείο μετακινήσεων με τόσο χαμηλή διακριτοποίηση είναι μη ρεαλιστικά όπως έχει δειχθεί και εξηγηθεί αναλυτικά, εντούτοις πραγματοποιείται η παρούσα ανάλυση χάριν της σύγκρισης. Στο σχήμα (6.29), φαίνεται η χρονοϊστορία της απόκρισης της κορυφής της κατασκευής.



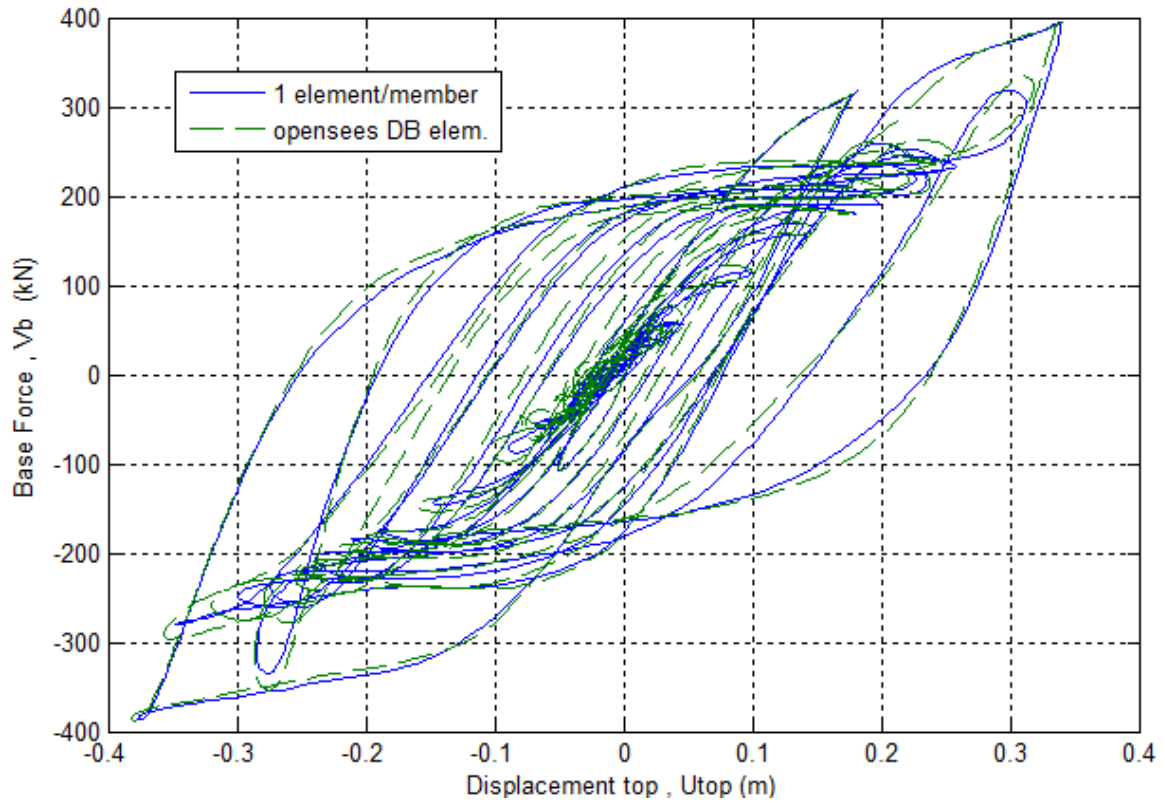
Σχήμα 6.29 : Σύγκριση χρονοϊστορίας μετακίνησης κορυφής προτεινόμενου μοντέλου & Opensees

Στο σχήμα (6.30) φαίνονται οι χρονοϊστορίες μετακινήσεων των τριών ορόφων



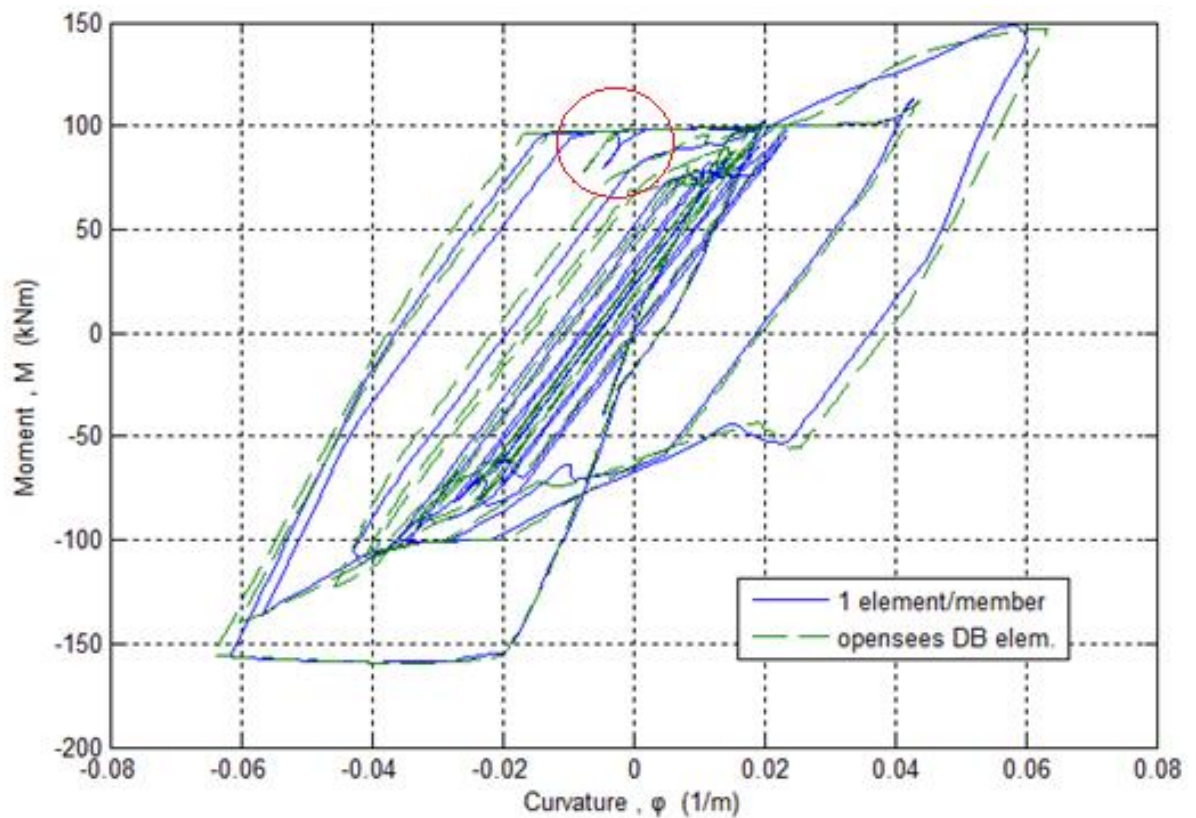
Σχήμα 6.30 : Χρονοϊστορίες μετακινήσεων κορυφής όλων των ορόφων

Στο σχήμα (6.31) αποτυπώνονται οι υστερητικοί βρόχοι της τέμνουσας βάσης ,



Σχήμα 6.31 : Υστερητικοί βρόχοι τέμνουσας βάσης – μετακίνησης κορυφής

Το διάγραμμα ροπής, της κορυφής του αριστερού υποστυλώματος του ισογείου είναι



Σχήμα 6.32 : Υστερητικοί βρόχοι ροπών – καμπυλοτήτων 5^{ης} διατομής 1^{ου} μέλους

Αξίζει να γίνει στο σημείο αυτό μια παρατήρηση που αφορά στο κυκλωμένο σημείο του σχήματος (6.32). Όπως μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα σύμφωνα με το Opensees δε δημιουργεί αυτό το *drift* στο διάγραμμα, που δημιουργείται κατά τον αναπτυχθέν στοιχείο. Αυτό συμβαίνει για τον απλούστατο λόγο ότι στο Opensees χρησιμοποιήθηκε το σκυρόδεμα Kent – Scott – Park στο οποίο η μετάβαση από τον κλάδο επαναφόρτισης στον κλάδο του softening διγραμμικά . Αντιθέτως στο προτεινόμενο στοιχείο, λόγω Bouc – Wen υστέρησης με $n=9$ που ελήφθη, η μετάβαση από τον κλάδο επαναφόρτισης στον κλάδο του softening γίνεται με λείο τρόπο. Ιδιαίτερη μνεία επί του θέματος, έχει γίνει στην παράγραφο §2.4.3.



Κεφάλαιο 7^ο

Συμπεράσματα – Προτάσεις

7. Συμπεράσματα – Προτάσεις

7.1. Συμπεράσματα

Στο πλαίσιο της εργασίας επιχειρήθηκε η εισαγωγή του προσομοιώματος Bouc – Wen στα στοιχεία ινών. Η κύρια στόχευσή της εντοπίζεται στα στοιχεία ινών ΟΣ, με βάση της μετακινήσεις, για τα οποία αναπτύχθηκε και σχετικό πρόγραμμα σε Matlab. Για το σκοπό αυτό, έπρεπε πρώτα να προσομοιωθεί η μονοαξονική συμπεριφορά των υλικών. Για τον μεν χάλυβα αυτό ήταν εύκολο αφού δεν έμενε παρά να χρησιμοποιηθεί το κλασικό υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen. Για το δε σκυρόδεμα λόγω της μη ύπαρξης «πεπατημένης» στα πλαίσια των σχέσεων Bouc – Wen, επιχειρήθηκε η κατάλληλη τροποποίηση ώστε αυτές να αποτυπώνουν τη μονοαξονική συμπεριφορά του υλικού. Μέσα από την πορεία της εργασίας μέχρι το πέρας της, μπορούν να σταχυολογηθούν τα εξής κεντρικά συμπεράσματα:

- Η προσομοίωση κάθε ίνας της διατομής μπορεί να δοθεί από μία μη – γραμμική διαφορική εξίσωση για το χάλυβα, ενώ για το σκυρόδεμα με μία επιπλέον εξίσωση βλάβης. Αυτό αποτελεί συγκριτικό πλεονέκτημα σε σχέση με τα πολυγραμμικά μοντέλα τάσεων παραμορφώσεων, που απαιτούν έναν συνεχή έλεγχο για την κατάσταση της ίνας (ελαστική - πλαστική περιοχή). Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η λογική της συνεχούς ελαστικής πρόλεξης, που προσθέτει υπολογιστικό κόστος.
- Ο χάλυβας πέρα από την κινηματική κράτυνση, μπορεί με κατάλληλη τροποποίηση των σχέσεων Bouc – Wen προσομοιωθεί και για ιστροπική κράτυνση, ή ακόμα και για μικτή (ιστροπικό και κινηματικό μέρος).

- Το σκυρόδεμα προσομοιώνεται μέσα από το συνδυασμό της υστέρησης Bouc – Wen (που αποτελεί κατά κάποιο τρόπο μια άλλη έκφραση της θεωρίας πλαστικότητας) και της θεωρίας βλαβών. Μέσω της θεώρησης των ενεργών τάσεων και της ισότητας των παραμορφώσεων βλαφθέντος και μη υλικού, παράγεται η τελική καταστατική εξίσωση. Υπάρχει δηλαδή ένας μη βλαφθείς σκελετός ο οποίος ακολουθεί μια κλασική ελαστοπλαστική συμπεριφορά, που όμως βαίνει συνεχώς μειούμενος σύμφωνα με τη συνάρτηση βλάβης.
- Τα στοιχεία ινών με βάση τις μετακινήσεις μπορούν να δίνουν ρεαλιστικές αποκρίσεις με προσεκτική διακριτοποίηση, πλην της περίπτωσης ελαστικής ανάλυσης, κατά την οποία λειτουργούν με ακρίβεια. Τηρούν το συμβιβαστό των παραμορφώσεων αλλά παραβιάζουν την ισορροπία σε κάθε διατομή. Δεν είναι απαραίτητος, εφόσον είναι καλή η διακριτοποίηση, ο μεγάλος αριθμός σημείων ολοκλήρωσης κατά μήκος του στοιχείου. Αντίθετα τα στοιχεία δυνάμεων δεν απαιτούν ιδιαίτερη διακριτοποίηση, αφού τηρούν την ισορροπία εσωτερικών – εξωτερικών δυνάμεων σε κάθε διατομή, απαιτώντας όμως, λόγω της αραιής διακριτοποίησης, περισσότερα σημεία ολοκλήρωσης.
- Στη συνολική συμπεριφορά των στοιχείων ΟΣ, όπως άλλωστε προκύπτει και από τις πειραματικές καταγραφές, παρατηρούνται τρία βασικά φαινόμενα: κράτυνση, απομείωση δυσκαμψίας, *softening* και στένωση (*pinching*) στους υστερητικούς βρόχους. Τα τρία τελευταία οφείλονται στην ιδιάζουσα και ασύμμετρη συμπεριφορά του σκυροδέματος, ενώ το πρώτο κυρίως στο χάλυβα.

7.2. Προτάσεις για μελλοντικές προσθήκες – έρευνα

Η προσομοίωση μελών ΟΣ μέσω της προσομοίωσης ινών έχει πολλά ακόμα περιθώρια ανάπτυξης και μελλοντικής επέκτασης πέραν των πτυχών που φωτίστηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, καθότι ορισμένα συνοδά φαινόμενα αμελήθηκαν για τους σκοπούς της. Η θεωρία και πρακτική λοιπόν μπορεί να συμπληρωθεί από τα παρακάτω στοιχεία:

- Εισαγωγή του φαινομένου απώλειας συνάφειας (*bond slip*). Η απώλεια της συνάφειας στη διεπιφάνεια χάλυβα και σκυροδέματος αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο στην ανάλυση, ιδιαίτερα στη σεισμική ανάλυση, στην οποία η φόρτιση των κατασκευών είναι ανακυκλιζόμενη. Αυτή η ανακύκλιση δημιουργεί μη αναστρέψιμες βλάβες στη συνάφεια, οι οποίες επιδεινώνουν στο φαινόμενο της στένωσης.
- Επέκταση των δυνατοτήτων της ανάλυσης στο χώρο των τριών διαστάσεων. Η παρούσα εργασία ανέπτυξε στοιχεία δύο διαστάσεων (*plane frame elements*). Η επέκταση από το επίπεδο στο χώρο δίνει μεγαλύτερες δυνατότητες για ασφαλή και πιο αξιόπιστα αποτελέσματα στις αναλύσεις.
- Συμπερίληψη φαινομένων δευτέρας τάξης. Πέρα από τη μη γραμμική ανάλυση σε επίπεδο υλικού, πολύ σημαντική είναι και η μη γραμμική ανάλυση σε επίπεδο γεωμετρίας. Τα δύο αυτά φαινόμενα όταν συμπίπτουν μπορούν να μεταβάλουν σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Κατα αυτή την έννοια για λόγους πληρότητας είναι χρήσιμη μια επέκταση ώστε να λαμβάνεται υπόψιν και η μη γραμμικότητα γεωμετρίας.

- Ανάπτυξη μοντέλων για τη συμπεριφορά και τους καταστατικούς νόμους των τοιχοπληρώσεων, με βάση τη λογική της υστέρησης Bouc – Wen. Έχει φανεί από τα αποτελέσματα των σεισμικών αποκρίσεων των κατασκευών, ότι οι τοιχοπληρώσεις έχουν πολύ σημαντική συνεισφορά στη δυσκαμψία και τη γενικότερη συμπεριφορά.
- Ανάπτυξη και εφαρμογή μεθόδων για την επίδραση της τέμνουσας, οι βλαπτικές συνέπειες της οποίας στην παρούσα εργασία θεωρήθηκαν πλήρως «απενεργοποιημένες» λόγω επάρκειας των συνδετήρων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Sivaselvan M.V., Reinhorn A. M (2000) “Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures”, J. Engrg. Mech. ,ASCE,126(6):633-640
2. Wang C., Foliente G. C (2001) “Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures”, J. Engrg. Mech., ASCE,127(11):1200-1202
3. Ma F. , Zhang H. , Bockstedte A. Foliente G. C, paevere, P. “Parameter analysis of the differential model of hysteresis”, Journal of Applied Mechanics 71:342-349
4. Wen Y. -K (1980) “Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation”, Journal of Applied Mechanics 47:150-154
5. Baber T.T, Wen Y. -K (1981) “Random vibration of hysteretic degrading systems”, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, 107(6):1069-1087
6. Triantafyllou S. , Koumousis V “Small and large displacement analysis of frame structures based on hysteretic beam elements”, Journal of Engineering Mechanics 138:36-49
7. Baber T. T., Noori M. -N (1985) “Random vibration of degrading pinching systems “,Journal of the Engineering Mechanics Division,Proc. ASCE, 11(8):1010-1026
8. Baber T. T. ,Noori M. N (1986) “Modelling general hysteresis behavior and random vibration application”,Journal of Vibration , Acoustic, Stress and Reliabilityin Design, 108:411-420
9. A.E. Charalampakis, C.K. Dimou, “Identification of Bouc–Wen hysteretic systems using particle swarm optimization”, Computers & Structures, Volume 88, Issues 21–22, November 2010, Pages 1197-1205

10. Bathe K.J., 2007, “Finite Element Procedures”, Prentice Hall Engineering, Science Mathematics, New York.
11. Chopra A., “Dynamics of Structures”, 2006, Prentice Hall, New York.
12. Α Χαραλαμπίδης, Α. Ε (2009) “Ανελαστική Δυναμική Ανάλυση Φορέων Με Προσομοίωση Κατά Bouc-Wen”, Διδακτορική Διατριβή, Ε. Μ. Π
13. Pyushin A. A(1961) “On the postulates of plasticity”, Prinkl. Math. Mekh. , 25:503-507
14. Drucker D. C(1950) “Some implications of work hardening and ideal plasticity”, Quart. j. Appl. Math, 7:411-418
15. Triantafyllou S. (2011) “Hysteretic Finite Elements and Macro-Elements for Nonlinear Dynamic Analysis of Structures”, Dissertation, N.T.U.A.
16. Γκιμούσης Η., (2012), “Πεπερασμένα Στοιχεία Δοκού για την Ανελαστική Ανάλυση Κατασκευών”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Μ.Π
17. SP Triantafyllou, VK Koumouisis, “Hysteretic Finite Elements for the Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Structures - Journal of Engineering Mechanics, 2013 (in press).
18. Sivaselvan M. V., Reinhorn A.M., (2003), “Nonlinear structural analysis towards collapse simulation – a dynamical systems approach”, Buffalo, New York.
19. Σοφιανός Χ. (2012), “ Υστερητικό Στοιχείο Δοκού με Απομειούμενα Προσομοιώματα Τύπου Bouc-Wen”, Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π.
20. Gkimousis I., Koumouisis V., “A Hysteretic Displacement Based Fibre Beam Element.” The Eleventh International Conference on Computational Structures Technology (CST2012), Dubrovnik, Croatia, September 2012.

21. Bouc R., (1967). “Forced vibration of mechanical systems with hysteresis”, Proceedings of the Fourth Conference on Non-linear oscillation, Prague Czechoslovakia.
22. Taqieddin Z.N (2008), “Elasto – plastic and damage modeling of reinforced concrete”, Dissertation , Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.
23. Madhu Karthik Murugesan Reddiar (2009), “Stress – strain model of unconfined and confined concrete and stress – block parameters”, Thesis, Texas A&M University.
24. Hashemi S.S., Vaghefi M. (2012), “Cyclic analysis of RC frames with respect to employing different methods in the fiber model for consideration of bond-slip effect” , Turkish J. Eng. Env. Sci.
25. Grassl P., Jirasek M. (2005), “Plastic model with non-local damage applied to concrete”, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
26. A.E. Charalampakis,V.K.Koumoussis (2009), “A Bouc – Wen model compatible with plasticity postulates”, Journal of Sound and Vibration 322.
27. Erlicher S. (2003), “Hysteretic degrading models for the low – cycle fatigue behavior of structural elements: theory, numerical aspects and applications”, Dissertation, Universita degli studi di Trento.
28. Καραμάνος Σ., “Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων – Σημειώσεις”, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
29. Brum J.F.S., “A model for the non linear dynamic analysis of reinforced concrete and masonry framed structures”, Thesis, Univeritat Politecnica de Catalunya.

30. De Borst R., Pamin J., Marc G.D. Geers (1999), “On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis”, *Eur. J. Mech. A/Solids* 18.
31. Marzec I., Tejchman J., (2012) “Enhanced coupled elasto-plastic-damage models to describe concrete behaviour in cyclic laboratory tests: comparison and improvement”, *Arch. Mech.*, 64, 3, pp. 227–259, Warszawa.
32. Akhtar S.K., Sujian H. (1995) “Continuum theory of plasticity”, A Wiley Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc. USA.
33. Ludovic J. , G. Pijaudier-Cabot, A. Huerta, Shahrokh Ghavamiano, (2004), “Damage and plasticity for concrete behavior”, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
34. Jankowiak T., Lodygowski T., (2005) “Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model”, *Foundations of Civil and Environmental Engineering* No.6.
35. Kachanov L.M. (1986) “Introduction to continuum mechanics”, Kluwer Academic Publishers, USA.
36. Spacone E., Filippou F. C. and Taucer, F.F (1996) “Fibre beam column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation.” *Earthquake Engrg. and Struct. Dyn.*, 25(7), 711–725.
37. Spacone E., Ciampi V. and Filippou F. C. (1996) “Mixed formulation of nonlinear beam finite element.” *Comput. Struct.*, 58, 71–83.
38. Neuenhofer A. and Filippou F. C. (1997) “Evaluation of nonlinear frame finite-element models.” *J. Struct. Eng.*, 123_7_, 958–966.

39. Calabrese A., Joa o Pachero Almeida, Rui Pinho (2010), “Numerical Issues in Distributed Inelasticity Modeling of RC Frame Elements for Seismic Analysis”, *Journal of Earthquake Engineering*, 14(S1):38–68.
40. Valipour H.R., Foster S.J., (2007), “A novel flexibility based beam – column elementfor nonlinear analysis of reinforced concrete frames”, Uniciv Report No. R – 447, University of New South Wales, Australia.
41. Παπαδρακάκης Μ. (2001), “Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα
42. Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., (2009), “Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
43. Clough W., Penzien J., “Δυναμική των Κατασκευών”, Εκδόσεις Φούντας



**Αντικείμενο
Διπλωματικής
Εργασίας**



Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ελαστοπλαστική ανάλυση κατασκευών ΟΣ. Στο πλαίσιο της, αναπτύσσονται και χρησιμοποιούνται στοιχεία δοκού κατανεμημένης πλαστικότητας, μέσω της προσομοίωσης ινών, με βάση τις μετακινήσεις. Τα στοιχεία δοκού – ινών αυτά, υπόκεινται στις παραδοχές Bernoulli για επιπεδότητα των διατομών και μη συμπερίληψη των διατμητικών παραμορφώσεων που οφείλονται στη δράση των τεμνουσών δυνάμεων. Ταυτόχρονα, διαμορφώνονται κατάλληλα οι υστερητικές εξισώσεις τύπου Bouc – Wen, ώστε να προσομοιώνουν τους νόμους τάσεων – παραμορφώσεων για τις ίνες σκυροδέματος και χάλυβα. Μέσω αυτών των προσεγγίσεων μορφώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας του τυχαίου επίπεδου φορέα, τόσο για το δυναμικό όσο και για το στατικό πρόβλημα, οι οποίες στη συνέχεια επιλύονται με κάποια αριθμητική μέθοδο. Τέλος, πραγματοποιείται έλεγχος των αποτελεσμάτων του κώδικα που αναπτύσσεται, μέσω άλλων καθιερωμένων και αξιόπιστων προγραμμάτων στην ανάλυση κατασκευών.