



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

**ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΡ
ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Αλέξανδρος Θ. Αρταβάνης - Τσαπατσάρης

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

**ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΡ
ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Αλέξανδρος Θ. Αρταβάνης - Τσαπατσάρης

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 27^η Δεκεμβρίου 2013.

.....

Ν. Μαράτος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Κ. Βούρνας

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Π. Γεωργιλάκης

Λέκτορας Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2013

.....
Αλεξάνδρος Αρταβάνης – Τσαπατσάρης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright© Αλέξανδρος Θ. Αρταβάνης – Τσαπατσάρης, 2013.

Με επιφύλαξη κάθε δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία διερευνούνται οι προϋποθέσεις για την χρήση της προσέγγισης ροής φορτίου συνεχούς ρεύματος (ΣΡ) για την εκτίμηση των αντιδράσεων των γραμμών μεταφοράς ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας. Στόχος είναι να εξαχθεί ένα προσεγγιστικό κύκλωμα, το οποίο θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μελέτες σχεδιασμού συστήματος μεταφοράς. Για την εκτίμηση των αντιδράσεων αναπτύσσεται μια μέθοδος βασισμένη στα ελάχιστα τετράγωνα και για δεδομένα χρησιμοποιούνται μετρήσεις των ροών ενεργού ισχύος στις γραμμές μεταφοράς. Επιπρόσθετα, η μέθοδος προσαρμόζεται ώστε να μπορούν να συμπεριληφθούν και μετρήσεις των φασικών γωνιών τάσης των ζυγών.

Στα πλαίσια της εργασίας, αναλύονται οι παραδοχές και τα σφάλματα της ροής φορτίου ΣΡ, αναπτύσσεται η μέθοδος εκτίμησης και γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε ένα μικρό δοκιμαστικό δίκτυο. Από το δοκιμαστικό δίκτυο, με διαδοχικές επιλύσεις της ροής φορτίου εναλλασσομένου ρεύματος (ΕΡ) αναπαράγονται τα στιγμιότυπα λειτουργίας. Δημιουργούνται τρία διαφορετικά σύνολα μετρήσεων και εξετάζεται η ποιότητα των μετρήσεων, η οποία είναι καθοριστική για την επιλυσιμότητα του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων και την ακρίβεια της εκτίμησης. Η μέθοδος εκτίμησης τροποποιείται, ώστε να προκύπτει μια αποδεκτή λύση και στην περίπτωση μετρήσεων χαμηλής ποιότητας. Για τα τρία σύνολα μετρήσεων, γίνονται διαφορές δοκιμές εκτίμησης, ώστε να διαπιστωθεί πως διαφορετικές παράμετροι του συνόλου μετρήσεων, όπως η χρήση μετρήσεων γωνιών φάσης, η ποιότητα των μετρήσεων και ο αριθμός των στιγμιότυπων λειτουργίας, επηρεάζουν την ακρίβεια της εκτίμησης.

Λέξεις Κλειδιά

Ροή Φορτίου ΣΡ, Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων, Αναγνώριση Δικτύου, Εκτίμηση Παραμέτρων, Σχεδιασμός Συστήματος Μεταφοράς.

Abstract

In this thesis, the conditions for the use of DC power flow approximation in order to estimate the transmission line reactances of an electric power network are investigated. The target of this thesis is the derivation of an approximate circuit, which can be used in transmission planning studies. An estimation method based on least squares is developed and measurements of active power flows in transmission lines are used as input data. Additionally, the method is adapted in order to include measurements of the bus voltage phase angles.

In the framework of this thesis, the assumptions and the errors of the DC power flow approximation are analyzed; the estimation method is developed and applied in a small test network. Several operation snapshots for the test network are produced by consecutive solutions of the AC power flow problem. Three different sets of measurements are created and for each one of them measurement quality is investigated. Measurement quality is crucial for the solvability of the least squares problem and the accuracy of the estimation. The estimation method is modified in order to provide an acceptable solution in case of low quality measurements. Several estimation trials are performed in order to examine how different parameters of the set of measurements, such as phase angle measurement usage, measurement quality and number of operation snapshots, affect the accuracy of the estimation.

Key Words

DC Power Flow, Least Squares Estimation, Network Identification, Parameter Estimation, Transmission System Planning.

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο διάστημα Ιουλίου – Δεκεμβρίου 2013 υπό την επίβλεψη του καθηγητή Νικόλαου Μαράτου. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τις συμβουλές του και τις υποδείξεις του, οι οποίες βοήθησαν ιδιαίτερα στην εκπόνηση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Κωνσταντίνο Βουρνά. Με την καθοδήγηση και τις συμβουλές του προσέφερε σημαντική βοήθεια στην εκπόνηση της εργασίας.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	1
Abstract	2
Πρόλογος.....	3
Πίνακας Περιεχομένων	5
Κατάλογος Σχημάτων	9
Κατάλογος Πινάκων	10
Κεφάλαιο 1	
Εισαγωγή.....	15
1.1. Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας	15
1.2. Σχεδιασμός του Συστήματος Μεταφοράς.....	15
1.3. Μελέτη Ροής Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος.....	18
1.4. Μαθηματικό Υπόβαθρο	19
1.4.1. Κλίση Πραγματικής Συνάρτησης	19
1.4.2. Εσιανή Μήτρα Πραγματικής Συνάρτησης.....	20
1.4.3. Τετραγωνική Μορφή	20
1.4.4. Ακρότατα Βαθμωτών Συναρτήσεων.....	22
1.4.5. Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων.....	23
1.4.6. Ανάλυση Πίνακα σε Ιδιάζουσες Τιμές.....	25
1.5. Αντικείμενο και Δομή της Εργασίας	27
1.5.1. Αντικείμενο της Εργασίας.....	27
1.5.2. Δομή της Εργασίας	28
Κεφάλαιο 2	
Το Πρόβλημα Ροής Φορτίου	31
2.1. Μοντέλο Στοιχείων Δικτύου Ηλεκτρικής Ενέργειας.....	31
2.1.1. Παράσταση Γραμμής Μεταφοράς	31
2.1.2. Παράσταση Εγκάρσιας Χωρητικότητας ή Αυτεπαγωγής	32
2.1.3. Παράσταση Μετασχηματιστή.....	32

2.1.4. Παράσταση Γεννήτριας	32
2.1.5. Παράσταση Φορτίου	33
2.2. Μελέτη Ροών Φορτίου Εναλλασσομένου Ρεύματος	34
2.3. Προσεγγιστική Ροή Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος.....	38
2.3.1. Γενικά	38
2.3.2. Εγκάρσιες Αγωγιμότητες.....	39
2.3.3. Αντίδραση X_{ij} πολύ μεγαλύτερη της αντίστασης R_{ij}	39
2.3.4. Γραμμικοποίηση ως προς τη Γωνία	41
2.3.5. Επίπεδο Προφίλ Τάσης.....	42
2.3.6. Εξισώσεις και Επίλυση Ροής Φορτίου ΣΡ.....	43
Κεφάλαιο 3	
Μεθοδολογία Προσέγγισης Παραμέτρων Δικτύου για Ροή Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος	45
3.1. Αρχική Διατύπωση του Προβλήματος.....	45
3.2. Κατάστρωση Προβλήματος Ελαχίστων Τετραγώνων.....	45
3.2.1. Επίδραση Ωμικών Απωλειών	46
3.2.2. Συνθήκες Επιλυσιμότητας	47
3.2.3. Συστηματική Κατάστρωση Εξισώσεων	48
3.2.4. Παράδειγμα Κατασκευής Πινάκων.....	51
3.3. Εκτίμηση με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων με Περιορισμούς	52
3.4. Μοντέλο Εκτίμησης Παραμέτρων Δικτύου με Αντιστάσεις	53
3.4.1. Εξισώσεις Ροής Φορτίου με Αντιστάσεις.....	53
3.4.2. Συστηματική Κατάστρωση Εξισώσεων	55
3.5. Τροποποιημένη Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	57
3.6. Εκτίμηση με Χρήση Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος και Γωνιών.....	61
Κεφάλαιο 4	
Στιγμιότυπα Λειτουργίας για Δοκιμαστικό Δίκτυο	65
4.1. Δομή Δικτύου	65
4.2. Δημιουργία Στιγμιότυπων Λειτουργίας	66
4.2.1. Γενικά	66

4.2.2. Σύνολο Μετρήσεων A.....	67
4.2.3. Σύνολο Μετρήσεων A_1	72
4.2.4. Σύνολο Μετρήσεων A_2	74
4.2.5. Σύνολο Μετρήσεων A_3	76
4.2.6. Σύνολο Μετρήσεων B.....	79
4.2.7. Σύνολο Μετρήσεων Γ.....	90
4.3. Σφάλματα Ροής Φορτίου ΣΡ.....	97
4.3.1. Σύνολο A.....	98
4.3.2. Σύνολο B.....	101
4.3.3. Σύνολο Γ.....	108
4.4. Διερεύνηση Γραμμικής Ανεξαρτησίας Μετρήσεων.....	113

Κεφάλαιο 5

Εκτίμηση Παραμέτρων.....	115
5.1. Εκτίμηση Παραμέτρων με Χρήση Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος.....	115
5.1.1. Εκτίμηση για Σύνολο A_1	116
5.1.2. Εκτίμηση για Σύνολο A_2	118
5.1.3. Εκτίμηση για Σύνολο A_3	120
5.1.4. Εκτίμηση για Σύνολο A.....	122
5.1.5. Εκτίμηση για Σύνολο B.....	124
5.1.6. Εκτίμηση για Σύνολο Γ.....	128
5.2. Εκτίμηση με Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα.....	129
5.2.1. Εκτίμηση για το Σύνολο A.....	130
5.2.2. Εκτίμηση για το Σύνολο B.....	132
5.2.3. Εκτίμηση για το Σύνολο Γ.....	134
5.3. Εκτίμηση μέσω Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος και Γωνιών Φάσης.....	135
5.3.1. Εκτίμηση για ένα Στιγμιότυπο με Πλήρη Πληροφορία.....	136
5.3.2. Εκτίμηση για το Σύνολο A.....	138
5.3.3. Εκτίμηση για το Σύνολο B.....	141
5.3.4. Εκτίμηση για το Σύνολο Γ.....	142
5.4. Σύγκριση Ακρίβειας Μεθόδων Εκτίμησης Παραμέτρων.....	145

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Προοπτικές 149

Βιβλιογραφία 153

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Ισοδύναμο κύκλωμα π γραμμής μεταφοράς.....	31
Σχήμα 2.2: Παράσταση Εγκάρσιας Χωρητικότητας ή Αυτεπαγωγής.....	32
Σχήμα 2.3: Παράσταση Μετασχηματιστή σε ονομαστική σχέση μετασχηματισμού.....	32
Σχήμα 2.5: Παράσταση φορτίου σταθερής ενεργού και αέργου ισχύος.....	33
Σχήμα 2.6: Παράσταση φορτίου σταθερής αγωγιμότητας.....	34
Σχήμα 2.7: Γενικευμένος ζυγός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας.....	35
Σχήμα 2.8: Συναρτήσεις $\Delta\delta$ (rad) (1) και $\sin\Delta\delta$ (2).....	41
Σχήμα 3.1: Δίκτυο 4 κόμβων – 5 κλάδων.....	51
Σχήμα 4.1: Δίκτυο 8 ζυγών – 10 διασυνδέσεων.....	65

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1: Λόγος X/R - Τυπικές τιμές για γραμμές μεταφοράς [PRV05].	39
Πίνακας 2.2: Παραδείγματα X, R για γραμμές μεταφοράς υψηλής τάσης στα 50 και στα 60 Hz [MBB08].	40
Πίνακας 4.1: Παράμετροι Γραμμών Μεταφοράς Δοκιμαστικού Δικτύου.	66
Πίνακας 4.2: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο A).	67
Πίνακας 4.3: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A).	70
Πίνακας 4.4: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο A).	70
Πίνακας 4.5: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A.	71
Πίνακας 4.6: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A ₁).	72
Πίνακας 4.7: Γωνίες Ζυγών δ_i (°) (Σύνολο A ₁).	73
Πίνακας 4.8: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A ₁ .	73
Πίνακας 4.9: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A ₂).	74
Πίνακας 4.10: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο A ₂).	75
Πίνακας 4.11: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A ₂ .	76
Πίνακας 4.12: Άεργος Ισχύς Συστοιχίας Πυκνωτών Q_{C5} (MVar) – Σύνολο Μετρήσεων A ₃ .	77
Πίνακας 4.13: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A ₃).	77
Πίνακας 4.14: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο A ₃).	78
Πίνακας 4.15: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A ₃ .	79
Πίνακας 4.16: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο B).	81
Πίνακας 4.17: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο B).	87
Πίνακας 4.18: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ).	88
Πίνακας 4.19: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων B.	89
Πίνακας 4.20: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο Γ).	91
Πίνακας 4.21: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο Γ).	95

Πίνακας 4.22: Γωνίες δ_i ($^\circ$) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο Γ).	96
Πίνακας 4.23: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων Γ	97
Πίνακας 4.24: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο A	98
Πίνακας 4.25: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο B	101
Πίνακας 4.26: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο Γ	108
Πίνακας 4.27: Ιδιάζουσες Τιμές για τους Πίνακες Μετρήσεων (αμ).	114
Πίνακας 5.1: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_1	116
Πίνακας 5.2: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_1	116
Πίνακας 5.3: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_1	117
Πίνακας 5.4: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_2	118
Πίνακας 5.5: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_2	118
Πίνακας 5.6: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_2	119
Πίνακας 5.7: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_3	120
Πίνακας 5.8: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_3	120
Πίνακας 5.9: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_3	121
Πίνακας 5.10: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A	122
Πίνακας 5.11: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A	122
Πίνακας 5.12: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A	123
Πίνακας 5.13: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B	124
Πίνακας 5.14: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B	124
Πίνακας 5.15: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B (Επίλυση με Περιορισμούς).....	125
Πίνακας 5.16: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B (Επίλυση με Περιορισμούς)	126
Πίνακας 5.17: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B (Επίλυση μέσω Μοντέλου με Αντιστάσεις)	126
Πίνακας 5.18: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B (Επίλυση μέσω Μοντέλου με Αντιστάσεις)	127
Πίνακας 5.19: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ	128
Πίνακας 5.20: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ	128
Πίνακας 5.21: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ	129
Πίνακας 5.22: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	130

Πίνακας 5.23: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	131
Πίνακας 5.24: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	131
Πίνακας 5.25: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	132
Πίνακας 5.26: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο B (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	133
Πίνακας 5.27: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	133
Πίνακας 5.28: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	134
Πίνακας 5.29: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα Γ)	134
Πίνακας 5.30: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα M_i για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα).....	135
Πίνακας 5.31: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για Πλήρες στιγμιότυπο (Μετρήσεις P και δ)	136
Πίνακας 5.32: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Πλήρες Στιγμιότυπο (Μετρήσεις P και δ)	137
Πίνακας 5.33: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P και δ_8).....	138
Πίνακας 5.34: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P και δ_8).....	138
Πίνακας 5.35: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A (Μετρήσεις P και δ_8).....	139
Πίνακας 5.36: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).....	139
Πίνακας 5.37: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).....	140
Πίνακας 5.38: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A (Μετρήσεις P και δ_8).....	140
Πίνακας 5.39: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για πλήρες στιγμιότυπο (Άγνωστη δ_7).....	141
Πίνακας 5.40: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8)	142
Πίνακας 5.41: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8).....	142

Πίνακας 5.42: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8).....	143
Πίνακας 5.43: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).....	144
Πίνακας 5.44: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).....	144
Πίνακας 5.45: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).....	145
Πίνακας 5.46: Εκτιμήσεις με τις Μεθόδους των Ελαχίστων Τετραγώνων και των Τροποποιημένων Ελαχίστων Τετραγώνων (Συγκεντρωτικά)	146
Πίνακας 5.47: Εκτιμήσεις για Σύνολα A και Γ (Μετρήσεις P και δ_8).....	147

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1. Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας (ΣΗΕ) ονομάζεται το σύνολο των εγκαταστάσεων που καθιστούν δυνατή την παροχή ηλεκτρικής ενέργειας προς τα κέντρα κατανάλωσης. Οι τρεις βασικές λειτουργίες ενός ΣΗΕ είναι:

- Η *παραγωγή*, δηλαδή η μετατροπή μιας άλλης μορφής ενέργειας σε ηλεκτρική. Η παραγωγή γίνεται στους σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Αναφέρονται οι θερμοηλεκτρικοί σταθμοί, οι υδροηλεκτρικοί και οι εναλλακτικοί σταθμοί ενέργειας, όπως είναι τα αιολικά πάρκα και οι φωτοβολταϊκοί σταθμοί.
- Η *μεταφορά* της ηλεκτρικής ενέργειας από τους σταθμούς παραγωγής προς τους κεντρικούς υποσταθμούς μέσω του δικτύου μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο λειτουργεί στην υψηλή και την υπερύψηλη τάση (150 kV και 400 kV για το Ελληνικό Δίκτυο).
- Η *διανομή* της ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία αναφέρεται στη μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας από τους κεντρικούς υποσταθμούς και μέσω των δικτύων διανομής (μέσης και χαμηλής τάσης) προς τους τελικούς καταναλωτές.

Η αποδοτική λειτουργία του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από αξιοπιστία, ασφάλεια και οικονομία. Η ηλεκτρική ενέργεια θα πρέπει να παράγεται και να μεταφέρεται σε οποιοδήποτε σημείο του συστήματος υπάρχει ζήτηση με το ελάχιστο κόστος, ενώ παράλληλα το σύστημα πρέπει να χαρακτηρίζεται από ασφάλεια, δηλαδή σε περίπτωση σφάλματος σε κάποιο στοιχείο του συστήματος πρέπει να εξασφαλίζεται η αδιάκοπη και ασφαλής λειτουργία του. Σε εγκαταστάσεις χαμηλής τάσης η προστασία των ανθρώπων είναι ζήτημα μέγιστης σημασίας, ενώ σε εγκαταστάσεις υψηλότερου επιπέδου τάσης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η προστασία του εξοπλισμού. Για την ασφάλεια και την αξιοπιστία του συστήματος ο σχεδιασμός ενός ΣΗΕ πρέπει να είναι σύμφωνος με εγχώριους και διεθνείς κανονισμούς [SR08, VC01].

1.2. Σχεδιασμός του Συστήματος Μεταφοράς

Στα πλαίσια της εργασίας, το τμήμα των ΣΗΕ που μας αφορά είναι το Σύστημα Μεταφοράς Ηλεκτρικής Ενέργειας. Ένα σύστημα μεταφοράς είναι ένα περίπλοκο σύστημα και αποτελείται από μεγάλο αριθμό γραμμών. Είναι ευκόλως κατανοητό ότι για να παρουσιάζει ένα σύστημα μεταφοράς τα τρία χαρακτηριστικά καλής λειτουργίας, δηλαδή αξιοπιστία, ασφάλεια και οικονομία, απαιτείται σωστός σχεδιασμός του συστήματος.

Τα βασικά κίνητρα για την ανάπτυξη του συστήματος μεταφοράς είναι κυρίως:

- Αύξηση Φορτίου
- Νέες Μονάδες Παραγωγής
- Γήρανση Εξοπλισμού
- Ευκαιρίες Εμπορικών Επενδύσεων
- Μεταβολές στις Ανταλλαγές Ισχύος με Γειτονικά Διασυνδεδεμένα Συστήματα
- Αλλαγή Απαιτήσεων Αξιοπιστίας Τροφοδότησης Καταναλωτών
- Είσοδος Νέων Ανεξάρτητων Παραγωγών στο Δίκτυο

Μέχρι τη δεκαετία του 1990, οπότε και απελευθερώθηκε η αγορά της ηλεκτρικής ενέργειας, στις περισσότερες χώρες η παραγωγή και η μεταφορά ήταν υπό τη μέριμνα ενός ενιαίου φορέα. Στην απελευθερωμένη αγορά, η διαχείριση των θεμάτων παραγωγής και μεταφοράς γίνεται από ξεχωριστές εταιρίες. Μετά την κατάργηση των κάθετα ολοκληρωμένων μονοπωλιακών επιχειρήσεων ηλεκτρικής ενέργειας και το άνοιγμα της αγοράς ηλεκτρισμού, για την επίβλεψη της λειτουργίας, τη συντήρηση και την ανάπτυξη του εθνικού δικτύου κάθε χώρας έχουν συσταθεί ειδικές εταιρίες, οι Διαχειριστές Συστήματος Μεταφοράς (Transmission System Operators –TSOs).

Η διασύνδεση δικτύων για την ανταλλαγή ηλεκτρικής ενέργειας ανάμεσα σε διαφορετικές χώρες, είχε ξεκινήσει ήδη από τη δεκαετία του 1920, καθώς υπήρχαν υποδομές για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας από το Νανσύ της Γαλλίας μέχρι το Μιλάνο της Ιταλίας, διαμέσου της Ελβετίας, σε μια απόσταση περίπου 700 χιλιόμετρα. Με το πέρασμα των χρόνων και την αύξηση του αριθμού των διασυνδέσεων ανάμεσα στις χώρες, προέκυψε η ανάγκη για τη δημιουργία φορέων που θα διαχειρίζονται τη λειτουργία του διασυνδεδεμένου δικτύου μέσω της συνεργασίας των εθνικών διαχειριστών. Στην Ευρώπη, το Ευρωπαϊκό Δίκτυο Διαχειριστών Συστήματος Μεταφοράς Ηλεκτρικής Ενέργειας (European Network Of Transmission System Operators For Electricity – ENTSOE) είναι η ένωση των διαχειριστών, στην οποία συμμετέχουν 41 διαχειριστές από 34 χώρες που ανήκουν στο διασυνδεδεμένο ευρωπαϊκό ηπειρωτικό δίκτυο.

Την παρούσα χρονική περίοδο, η Ευρωπαϊκή Ένωση μέσω της οδηγίας 2009/28/ΕΕ έχει θέσει ως στόχο την αύξηση του ποσοστού της διείσδυσης των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας (ΑΠΕ) στο ενεργειακό ισοζύγιο των κρατών μελών. Μέχρι το 2020 οι χώρες έχουν δεσμευτεί για 20 % διείσδυση των ΑΠΕ στην ακαθάριστη τελική κατανάλωση ενέργειας. Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, η είσοδος νέων μονάδων παραγωγής στο δίκτυο δημιουργεί την ανάγκη εξέτασης των δυνατοτήτων και των εναλλακτικών σχεδίων για την ανάπτυξη του συστήματος μεταφοράς.

Βασική επίδραση στη δομή του συστήματος έχει η χρονική μεταβολή της ζήτησης κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς και η χωρική κατανομή της στο χάρτη. Σε γενικές γραμμές, με χρήση μαθηματικών μοντέλων που λαμβάνουν υπόψη παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν μελλοντικά τη ζήτηση, μπορεί να γίνει μια πρόβλεψη για τυπικές μελλοντικές καμπύλες φορτίου

του συστήματος. Οι καμπύλες φορτίου, αποτελούν τη βάση για τη συνέχεια του σχεδιασμού του συστήματος μεταφοράς.

Ακολουθώς, ένας βασικός παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την ανάπτυξη του συστήματος μεταφοράς είναι η τήρηση των ορίων λειτουργίας του συστήματος. Τα όρια λειτουργίας του συστήματος αφορούν την τάση, τη συχνότητα, το θερμικό όριο μεταφοράς των γραμμών και την ευστάθεια του συστήματος. Η παραβίαση ενός λειτουργικού ορίου μπορεί να οδηγήσει σε οριακές καταστάσεις, όπως αστάθεια, διακοπή της συνέχειας του συστήματος ή/και διαδοχική αναγκαστική διακοπή λειτουργίας μονάδων παραγωγής.

Ένα σημαντικό μέγεθος για τη σχεδίαση του συστήματος μεταφοράς είναι η ικανότητα μεταφοράς ισχύος. Η ικανότητα μεταφοράς ισχύος είναι το ποσό της ηλεκτρικής ισχύος που μπορεί να μεταφερθεί διαμέσου ενός συνόλου γραμμών μεταφοράς ανάμεσα σε δύο περιοχές του δικτύου κάτω από μια ορισμένη λειτουργική κατάσταση. Ο προσδιορισμός της ικανότητας μεταφοράς ισχύος γίνεται για γειτονικές περιοχές που η μεταξύ τους διασύνδεση θεωρείται κρίσιμη για το σύστημα και μπορεί να σχετίζεται όχι μόνο με τα θερμικά όρια των γραμμών μεταφοράς, αλλά και με ορισμένα κριτήρια ευστάθειας.

Μια μελέτη σχεδίασης συστήματος μεταφοράς μπορεί να χρειαστεί να αξιολογήσει τεχνικούς, οικονομικούς, περιβαλλοντικούς, κοινωνικούς και πολιτικούς παράγοντες. Χρειάζεται να πραγματοποιηθεί ένας σημαντικός αριθμός διαφορετικών μελετών, ώστε να ληφθούν υπόψη όλοι οι παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν τις ανάγκες για τη μελλοντική ανάπτυξη του δικτύου. Τα υπολογιστικά εργαλεία που μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά τη σχεδίαση του συστήματος μεταφοράς είναι πολυάριθμα και ποικίλα. Μια μελέτη σχεδίασης του δικτύου μπορεί να περιλαμβάνει ορισμένες ή και όλες από τις ακόλουθες εργασίες:

- Μελέτη Πρόβλεψης Φορτίων
- Μελέτη Ροών Φορτίου
- Ανάλυση Στατικής Ασφάλειας
- Βέλτιστη Ροή Φορτίου
- Ανάλυση Μεταβατικής Ευστάθειας
- Ανάλυση Ευστάθειας Τάσης
- Υπολογισμό Ρευμάτων Βραχυκύκλωσης
- Μελέτη Αξιοπιστίας

Ο στόχος των παραπάνω εργασιών είναι να εξετασθούν εναλλακτικές λύσεις για το σχεδιασμό δικτύου [CVK12, L11, SR08].

1.3. Μελέτη Ροής Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος

Απαραίτητη προϋπόθεση για την πραγματοποίηση μιας μελέτης ανάπτυξης του δικτύου μεταφοράς είναι η ύπαρξη επαρκών και ακριβών δεδομένων και μοντέλων για τις συνιστώσες του συστήματος, που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για μελέτες και προσομοιώσεις που αφορούν τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας, τη μεταβατική κατάσταση, την ευστάθεια και την αξιοπιστία του συστήματος μεταφοράς. Η διαχείριση των δεδομένων, δηλαδή η επαλήθευση, η διατήρηση μιας βάσης δεδομένων και η ιστορική ανάλυση των δεδομένων είναι απαραίτητα για τον σχεδιασμό του συστήματος μεταφοράς.

Λόγω του γεγονότος ότι απαιτείται μεγάλος αριθμός μελετών, και συνεπώς και μεγάλος αριθμός δεδομένων για τη μελέτη σχεδιασμού του συστήματος μεταφοράς, οποιαδήποτε απλούστευση των μοντέλων που χρησιμοποιούνται είναι ευπρόσδεκτη, αρκεί να δίνει μια ρεαλιστική εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης λειτουργίας του συστήματος. Ένα παράδειγμα τέτοιας απλούστευσης είναι η μελέτη ροής φορτίου συνεχούς ρεύματος (ΣΡ), η οποία μπορεί να δώσει προσεγγιστικά τις ροές ενεργού ισχύος σε ένα δίκτυο μεταφοράς, χρησιμοποιώντας δεδομένα για τα φορτία και τις πηγές του συστήματος. Περισσότερες πληροφορίες και αναλυτική απόδειξη των εξισώσεων της ροής φορτίου ΣΡ δίνονται στην ενότητα 2.3.

Οι Ευρωπαϊκές δεσμεύσεις για αύξηση της διείσδυσης των ΑΠΕ στην ηλεκτροπαραγωγή, καθώς και οι στόχοι που έχουν τεθεί, έχει οδηγήσει στην αύξηση της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από ΑΠΕ. Τα επόμενα χρόνια αναμένεται η είσοδος νέων ανεξάρτητων παραγωγών ΑΠΕ στην αγορά. Ο τρόπος που θα επηρεάσουν την ικανότητα μεταφοράς σε ορισμένες διασυνδέσεις του Ευρωπαϊκού δικτύου αναλύεται στο 10ετές Πλάνο Ανάπτυξης του Δικτύου του ENTSOE [E12].

Μια μεθοδολογία για το σχεδιασμό του δικτύου, με εφαρμογή στο ηπειρωτικό Νοτιοανατολικό τμήμα της Ευρώπης, παρουσιάζεται στην εργασία [CVK12]. Στη συγκεκριμένη εργασία, αρχικά επιλέγεται ο πιο οικονομικός συνδυασμός των διαθέσιμων μονάδων παραγωγής του δικτύου με βάση ένα συνδυασμό πολλαπλών κριτηρίων και δημιουργούνται στιγμιότυπα για την αναμενόμενη παραγωγή για κάθε ώρα στη διάρκεια ενός έτους. Ακολούθως, επιλέγονται ορισμένοι κλάδοι του δικτύου λόγω της πιθανής υπερφόρτισής τους ή της αυξημένης εμπορικής τους σημασίας, οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως κρίσιμοι. Στο σημείο αυτό οι προτεινόμενες εργασίες ενίσχυσης του δικτύου ομαδοποιούνται και αντιστοιχίζονται με ένα από τους κρίσιμους κλάδους. Θεωρώντας ως είσοδο τα ωριαία στιγμιότυπα, χρησιμοποιείται η ροή φορτίου ΣΡ για τον υπολογισμό των ροών ενεργού ισχύος σε κάθε κλάδο του δικτύου. Για τους κρίσιμους κλάδους του δικτύου υπολογίζεται η αύξηση της μεταφορικής ικανότητας λόγω της υλοποίησης των προτεινόμενων εργασιών ενίσχυσης του δικτύου και αξιολογείται η επίδραση των προτεινόμενων εργασιών σε συγκεκριμένους στόχους, όπως είναι η ασφάλεια της εξυπηρέτησης, η διείσδυση ΑΠΕ, οι απώλειες δικτύου και οι εκπομπές CO₂.

Η χρήση της μεθοδολογίας της εργασίας [CVK12] απαιτεί γνώση των παραμέτρων του δικτύου, και πιο συγκεκριμένα των αντιδράσεων των κλάδων του δικτύου, ώστε να είναι δυνατή η

επίλυση της ροής φορτίου ΣΡ. Γενικά, η συλλογή, η επεξεργασία και η επαλήθευση των δεδομένων για την εφαρμογή για τη διεξαγωγή μιας μελέτης ανάπτυξης ενός δικτύου που περιλαμβάνει διασυνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα μεταφοράς, είναι χρονοβόρα και απαιτεί τη συνεργασία των διαχειριστών του συστήματος μεταφοράς.

1.4. Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται βασικές μαθηματικές έννοιες, απαραίτητες για τη διατύπωση του προβλήματος που διαπραγματεύεται η εργασία.

Κάθε βαθμωτή πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f που είναι συνεχής θα συμβολίζεται ως εξής:

$$f \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

Κάθε βαθμωτή πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f , για την οποία ορίζονται οι μερικές παράγωγοι k τάξης και είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα συμβολίζεται ως εξής:

$$f \in \mathbb{C}^k \quad (1.2)$$

1.4.1. Κλίση Πραγματικής Συνάρτησης

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $f \in \mathbb{C}^1$. Η κλίση της συνάρτησης f είναι ένα διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}^n με πεδίο ορισμού το U , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\text{grad}f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \quad (1.3)$$

Όπου ∇ ο τελεστής ανάδελα, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \quad (1.4)$$

Ο τελεστής ανάδελα δρα σε πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, για τις οποίες ορίζονται οι μερικές τους παράγωγοι.

Ακολουθως, παρουσιάζεται μια χρήσιμη ιδιότητα της κλίσης.

Έστω \mathbf{x} διάνυσμα στήλης διαστάσεων n και \mathbf{a} ένα διάνυσμα στήλης διαστάσεων n .

Ισχύει:

$$\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = \nabla(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \mathbf{a} \quad (1.5)$$

Απόδειξη:

Ισχύει:
$$\mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Άμεσα προκύπτει:
$$\nabla \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \mathbf{a}$$

[KKF03].

1.4.2. Εισιανή Μήτρα Πραγματικής Συνάρτησης

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $f \in \mathcal{C}^2$. Η Εισιανή μήτρα ή μήτρα δευτέρων παραγώγων της f ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Η Εισιανή μήτρα είναι διαστάσεων $n \times n$ και συμμετρική, καθώς $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\forall i \neq j$

[KKF03].

1.4.3. Τετραγωνική Μορφή

Τετραγωνική μορφή ονομάζεται μια πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών της μορφής: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}^T \quad (1.7)$$

Ο πίνακας \mathbf{A} είναι συμμετρικός και ονομάζεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής.

Μια τετραγωνική μορφή $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται ως:

1. Θετικά ορισμένη: $\text{Av } T(\mathbf{x}) > 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ εκτός του $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Αρνητικά ορισμένη: $\text{Av } T(\mathbf{x}) < 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ εκτός του $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Μη ορισμένη: $\text{Av } T(\mathbf{x})$ δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη.

Αντίστοιχα, ο πίνακας \mathbf{A} είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένος, αν η τετραγωνική μορφή που ορίζει, είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένη.

Η κλίση της τετραγωνικής μορφής $T(\mathbf{x})$ ισούται με:

$$\nabla(\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T) = \nabla(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.8)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= [x_1 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{1n} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= \left[\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \right) x_j \end{aligned} \quad (1.9)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.9) ως προς x_k προκύπτει:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j + \sum_{i=1, i \neq k}^n a_{ik}x_i + 2a_{kk}x_k$$

Λόγω συμμετρίας του πίνακα \mathbf{A} , ισχύει $a_{ki} = a_{ik}$, επομένως:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = 2A_k x_k \quad (1.10)$$

Όπου με A_k συμβολίζεται η k γραμμή του πίνακα \mathbf{A} .

Από τη σχέση (1.10), προκύπτει ότι η κλίση της $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ θα είναι:

$$\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} x$$

$$\Rightarrow \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}$$

[KKF03].

1.4.4. Ακρότατα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $f \in \mathcal{C}^2$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο \mathbf{x}_0 , αν υπάρχει σφαίρα $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$, δηλαδή με κέντρο το \mathbf{x}_0 και ακτίνα ε , όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in B \cap U$ να ισχύει:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad (1.11)$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο \mathbf{x}_0 , αν υπάρχει σφαίρα $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in B \cap U$ να ισχύει:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (1.12)$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο \mathbf{x}_0 , αν για κάθε $\mathbf{x} \in U$ να ισχύει:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad (1.13)$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο \mathbf{x}_0 , αν για κάθε $\mathbf{x} \in U$ να ισχύει:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (1.14)$$

Ως στάσιμο σημείο της f ορίζεται κάθε σημείο \mathbf{x}_0 για το οποίο ισχύει:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (1.15)$$

Για το στάσιμο σημείο \mathbf{x}_0 ισχύουν τα εξής:

- Αν ο πίνακας Hessian $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ είναι θετικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο \mathbf{x}_0 .
- Αν ο πίνακας Hessian $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο σημείο \mathbf{x}_0 [KKF03].

1.4.5. Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Στόχος της ενότητας είναι η παρουσίαση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι μια μέθοδος εκτίμησης άγνωστων παραμέτρων μέσω της χρήσης μετρήσεων/παρατηρήσεων και εξισώσεων. Η εκτίμηση προκύπτει μέσω της ελαχιστοποίησης συγκεκριμένου τετραγωνικού κριτηρίου σφάλματος.

Θεωρούμε την εξαρτημένη μεταβλητή b , η οποία συνδέεται με K ανεξάρτητες μεταβλητές a_1, \dots, a_K μέσω μιας συνάρτησης f . Η σχέση που συνδέει τη μεταβλητή b με τις a_1, \dots, a_K , στην περίπτωση που δεν είναι ακριβής, δίνεται από τη σχέση:

$$b = f(a_1, \dots, a_K) + e \quad (1.16)$$

Το e είναι το σφάλμα μοντελοποίησης, που δείχνει για κάθε μέτρηση τη διαφορά ανάμεσα στην τιμή της μεταβλητής b και στην τιμή της συνάρτησης $f(a_1, \dots, a_K)$, που είναι το μοντέλο περιγραφής του συστήματος.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι γραμμική συνάρτηση με K άγνωστες παραμέτρους y , η σχέση (1.16) γράφεται στη μορφή:

$$b = y_1 a_1 + \dots + y_K a_K + e \quad (1.17)$$

Εάν έχουμε T μετρήσεις των a και b , τότε για κάθε $t = 1, \dots, T$ ισχύει:

$$b_t = \sum_{i=1}^K y_{it} a_{it} + e_t \quad (1.18)$$

Το σύστημα εξισώσεων που συγκροτούν οι (1.18), μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{e} \quad (1.19)$$

Όπου:

- $\mathbf{b}^T = [b_1 \ \dots \ b_T]$
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1T} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{K1} & \dots & \alpha_{KT} \end{bmatrix}$
- $\mathbf{y}^T = [y_1 \ \dots \ y_K]$
- $\mathbf{e}^T = [e_1 \ \dots \ e_K]$

Η στήλη t του πίνακα \mathbf{A} αποτελεί το διάνυσμα παρατηρήσεων \mathbf{a}_t της μεταβλητής a για μέτρηση t :

$$\mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ \vdots \\ a_{Kt} \end{bmatrix}$$

Το γενικό κριτήριο για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων y_1, \dots, y_K είναι η ελαχιστοποίηση της έκφρασης (1.20):

$$\sum_{t=1}^T J(e_t) = \sum_{t=1}^T J(b_t - \mathbf{a}_t^T \mathbf{y}) \quad (1.20)$$

Όπου J κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση. Μερικά παραδείγματα για τη συνάρτηση μπορεί να είναι $J(x) = x^2$ ή $J(x) = |x|$. Στην περίπτωση που επιλέγεται η $J(x) = x^2$, τότε η μέθοδος εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων ονομάζεται μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Ας θεωρηθεί Y το σύνολο όλων των πιθανών διανυσμάτων \mathbf{y} . Αν δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος περιορισμός, τότε $Y = \mathbb{R}^K$. Στόχος είναι η εύρεση ενός διανύσματος από το σύνολο Y που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$S(\mathbf{y}) = \sum_{t=1}^T e_t^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}) \quad (1.21)$$

Επειδή η $S(\mathbf{y})$ είναι μια συνάρτηση διαφορίσιμη, κυρτή και με πεδίο τιμών που είναι υποσύνολο του \mathbb{R} , θα έχει ένα μοναδικό ελάχιστο. Αναλύοντας τη σχέση (1.22) προκύπτει:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= (\mathbf{b}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T)(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{b} - \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Επειδή οι πίνακες $\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ και $\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ είναι βαθμωτά μεγέθη και ο ένας είναι ανάστροφος του άλλου, προκύπτει άμεσα ότι είναι ίσοι. Επομένως, από τη σχέση (1.22) προκύπτει:

$$S(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (1.23)$$

Η κλίση της συνάρτησης $S(\mathbf{y})$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \nabla S(\mathbf{y}) &= \nabla(\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) - \nabla(2\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b}) \\ &= 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Παραγωγίζοντας ξανά τη σχέση (1.24) προκύπτει:

$$\nabla^2 S(\mathbf{y}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (1.25)$$

Από τη σχέση (1.25) η μήτρα δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης $S(\mathbf{y})$ είναι ένας πίνακας μη αρνητικά ορισμένος, επομένως τα σημεία για τα οποία μηδενίζεται η κλίση της $S(\mathbf{y})$ είναι ελάχιστα της συνάρτησης (1.21). Από τη σχέση (1.24) εξισώνοντας με το μηδέν, προκύπτει:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (1.26)$$

Στην περίπτωση που ο \mathbf{A} είναι πλήρους τάξης, τότε η ορίζουσα του $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ είναι μη μηδενική και η μοναδική λύση της εξίσωσης (1.26):

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (1.27)$$

Η εξίσωση (1.27) δίνει το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $S(\mathbf{y})$ [RT99].

1.4.6. Ανάλυση Πίνακα σε Ιδιάζουσες Τιμές

Η ανάλυση πίνακα σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition – SVD) είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται συχνά στους υπολογισμούς και στις αναλύσεις πινάκων. Η χρήση της συγκεκριμένης τεχνικής σε υπολογισμούς πινάκων, έχει το πλεονέκτημα ότι προσφέρει ευρωστία ως προς τα αριθμητικά σφάλματα. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της ανάλυσης σε ιδιάζουσες τιμές είναι η συσχέτιση της με την τάξη του πίνακα και δυνατότητα να παραχθούν προσεγγίσεις του αρχικού πίνακα με συγκεκριμένη τάξη. Επειδή, πολλά βασικά θέματα στην γραμμική άλγεβρα βασίζονται στον προσδιορισμό της τάξης ενός πίνακα, η συγκεκριμένη τεχνική έχει πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Στη συγκεκριμένη παράγραφο, θα δοθεί ο ορισμός της τεχνικής ανάλυσης πίνακα σε ιδιάζουσες τιμές και ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες της τεχνικής. Αρχικά, θα γίνει αναφορά σε ορισμένες βασικές έννοιες, που θα χρειαστούν στη συνέχεια της παραγράφου.

Έστω δύο διανύσματα στήλης \mathbf{a} και \mathbf{b} ίδιων διαστάσεων. Τα δύο διανύσματα θα είναι ορθογώνια, όταν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0 \quad (1.28)$$

Στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις, η σχέση (1.28) δείχνει ότι τα διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι κάθετα.

Έστω ένα τετραγωνικός πίνακας \mathbf{A} , διαστάσεων $n \times n$, και \mathbf{a}_i για $i = 1, \dots, n$ οι στήλες του. Ο πίνακας είναι ορθογώνιος, όταν τα διανύσματα που ορίζονται από τις στήλες του είναι αμοιβαία ορθογώνια και έχουν μήκος ίσο με 1, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad \forall i \neq j \quad (1.29\alpha)$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.29\beta)$$

Έστω ένας πίνακας \mathbf{B} , διαστάσεων $m \times n$ και $m > n$. Ως τάξη του πίνακα \mathbf{B} ορίζεται ο αριθμός r των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του πίνακα. Ο αριθμός r είναι μικρότερος ή ίσος του n . Συμβολικά:

$$\text{Rank}(\mathbf{B}) = r \quad (1.30)$$

Έστω ένας πίνακας \mathbf{A} με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, διαστάσεων $m \times n$ και $m > n$. Η ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές του πίνακα \mathbf{A} είναι μια παραγοντοποίηση με την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (1.31)$$

Όπου:

- $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$: ορθογώνιος πίνακας. Οι στήλες του πίνακα \mathbf{U} ονομάζονται αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του \mathbf{A} .
- $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$: ορθογώνιος πίνακας. Οι στήλες του πίνακα \mathbf{V} ονομάζονται δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του \mathbf{A} .
- $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\mathbf{\Sigma}$ ονομάζονται ιδιάζουσες τιμές του \mathbf{A} και ισχύει $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Κάθε πίνακας μπορεί να αναλυθεί σε ιδιάζουσες τιμές. Οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα υπολογίζονται με μοναδικό τρόπο. Μέσω της σχέσης (1.31) και επειδή ο βαθμός ενός πίνακα δεν αλλάζει αν πολλαπλασιαστεί με ένα ορθογώνιο πίνακα (είτε από δεξιά είτε από αριστερά), είναι εμφανές ότι ο βαθμός του πίνακα \mathbf{A} είναι ίδιος με το βαθμό του πίνακα $\mathbf{\Sigma}$. Ως άμεσο αποτέλεσμα, το πλήθος των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών είναι ίσο με το βαθμό του πίνακα \mathbf{A} . Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του \mathbf{A} είναι ίσες με τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών

του πίνακα $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ή $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$. Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού πίνακα $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$, ενώ τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$.

Η σύνδεση του αριθμού των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών με τον βαθμό του πίνακα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα. Αν ο πίνακας \mathbf{A} είναι ελλειπούς βαθμού και πραγματοποιηθούν πολύ μικρές μεταβολές σε κάποια στοιχεία του, τότε ο πίνακας \mathbf{A} γίνεται πλήρους βαθμού. Αντίστοιχο φαινόμενο μπορεί να εμφανιστεί αν για παράδειγμα οι στήλες ενός πίνακα είναι ορισμένες σειρές από μετρήσεις με θόρυβο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο πίνακας \mathbf{A} μπορεί να χαρακτηριστεί ως σχεδόν ιδιάζων και έχει ορισμένες ιδιάζουσες τιμές που είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Ακόμη, μπορεί να ελεγχθεί ο αριθμός των ιδιάζουσων τιμών που είναι μεγαλύτερες από μια πολύ μικρή σταθερά ε που σχετίζεται με την ακρίβεια των δεδομένων (για παράδειγμα η σταθερά ε θα μπορούσε να είναι ίση με το συστηματικό σφάλμα των οργάνων με τα οποία πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις), για να προσδιοριστεί ο πραγματικός βαθμός του πίνακα \mathbf{A} .

1.5. Αντικείμενο και Δομή της Εργασίας

1.5.1. Αντικείμενο της Εργασίας

Αφορμή για τη συγκεκριμένη εργασία ήταν η αναφορά [E]. Το ENTSOE δημοσιεύει τις ανταλλαγές ισχύος ανάμεσα στις χώρες του διασυνδεδεμένου Ευρωπαϊκού δικτύου, για μια συγκεκριμένη μέρα κάθε μήνα για τις ώρες 3 μμ και 3 πμ. Η αρχική ιδέα ήταν να κατασκευαστεί ένα προσεγγιστικό δίκτυο με χρήση της προσέγγισης της ροής φορτίου ΣΡ, στο οποίο καθεμία από τις χώρες του Ευρωπαϊκού δικτύου θα αντιστοιχεί σε ένα κόμβο/ζυγό. Το συγκεκριμένο δίκτυο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μια απλουστευμένη προσέγγιση του πραγματικού δικτύου σε μελέτες σχεδίασης για τη διερεύνηση της τήρησης των ορίων ανταλλαγής ισχύος ανάμεσα σε γειτονικά συστήματα μεταφοράς.

Επειδή η συγκεκριμένη προσέγγιση του δικτύου είναι υπεραπλουστευτική, πρέπει να μελετηθούν πολλά ζητήματα, ώστε να είναι δυνατή η χρήση του σε μελέτες σχεδίασης δικτύου μεταφοράς. Το πρώτο ζήτημα που τίθεται είναι η δημιουργία μιας μεθοδολογίας εκτίμησης των αντιδράσεων ενός δικτύου γνωστής δομής με χρήση της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ και με δεδομένα μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος στους κλάδους του δικτύου. Η προτεινόμενη μεθοδολογία εκτίμησης παραμέτρων θα πρέπει να δίνει ένα υλοποιήσιμο δίκτυο, στο οποίο οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων να αποτελούν ικανοποιητική προσέγγιση των πραγματικών τιμών. Ως δεύτερο ζήτημα, τίθεται το θέμα της απλούστευσης ενός δικτύου, για το οποίο υπάρχουν μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος ορισμένων κλάδων. Τμήματα του δικτύου, για τα οποία δεν υπάρχουν μετρήσεις ονομάζονται περιοχές και αντιστοιχούν σε ένα κόμβο στο προσεγγιστικό δίκτυο. Η μεθοδολογία για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου μπορεί να είναι ίδια μ' αυτή για το δίκτυο γνωστής δομής, αρκεί να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά που πρέπει να πληρούν η μεθοδολογία εκτίμησης και οι μετρήσεις ροών ενεργού ισχύος που

χρησιμοποιούνται. Ως τρίτο ζήτημα τίθεται το κατά πόσο το προσεγγιστικό δίκτυο που προκύπτει από τη μεθοδολογία εκτίμηση των αντιδράσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να δώσει ρεαλιστικά αποτελέσματα, που θα δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση της λειτουργίας του πραγματικού δικτύου. Κάθε κόμβος του δικτύου αντιπροσωπεύει ουσιαστικά ένα πολύ μεγάλο και πολύπλοκο δίκτυο, συνεπώς πρέπει να μελετηθούν οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το προσεγγιστικό δίκτυο θα μπορεί να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση των ροών ενεργού ισχύος σε μια επίλυση της ροής φορτίου ΣΡ.

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η δυνατότητα προσέγγισης ενός πραγματικού δικτύου γνωστής δομής μέσω της χρήσης της ροής φορτίου ΣΡ. Ουσιαστικά, μελετάται το πρώτο από τα ζητήματα που τέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Ως δεδομένα για την προσέγγιση του δικτύου λαμβάνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς κόμβους του δικτύου. Επειδή σε πολλά δίκτυα υπάρχει η δυνατότητα μέτρησης των γωνιών φάσης της τάσης των ζυγών του δικτύου, η μεθοδολογία προσέγγισης του δικτύου που αναπτύσσεται ενσωματώνει και την εναλλακτική χρήση ως δεδομένων μετρήσεων για τις ροές ενεργού ισχύος στους κλάδους του δικτύου σε συνδυασμό με μετρήσεις για τις φασικές γωνίες τάσης ορισμένων ζυγών του δικτύου. Στο προσεγγιστικό μοντέλο του δικτύου, κάθε γραμμή μεταφοράς αναπαριστάται από μια αντίδραση. Για να μπορούν να εξετασθούν οι δυνατότητες της μεθοδολογίας εκτίμησης των παραμέτρων του προσεγγιστικού δικτύου, χρησιμοποιείται ένα απλό δοκιμαστικό δίκτυο. Στο δοκιμαστικό δίκτυο, κάθε ζυγός αποτελεί και ένα κόμβο. Στόχος της εργασίας είναι με χρήση των εξισώσεων της ροής φορτίου ΣΡ, να προκύψει ένα προσεγγιστικό δίκτυο, για το οποίο οι τιμές των αντιδράσεων των γραμμών να είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές.

1.5.2. Δομή της Εργασίας

Στο Κεφάλαιο 1 της εργασίας παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που αφορούν τα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας. Γίνεται αναφορά στα τμήματα που απαρτίζουν ένα ΣΗΕ, καθώς και τα χαρακτηριστικά αποδοτικής λειτουργίας του. Ακολούθως, ο αναγνώστης εισάγεται στο θέμα της σχεδίασης του συστήματος μεταφοράς. Γίνεται μια μικρή ιστορική ανασκόπηση με θέμα τη διασύνδεση δικτύων μεταφοράς διαφορετικών χωρών μέσα στην Ευρώπη και σημειώνεται ο ρόλος του ENTSO, ενώ παράλληλα παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμένα από τα τρέχοντα ζητήματα που αφορούν το Ευρωπαϊκό δίκτυο μεταφοράς. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι παράγοντες που πρέπει να αξιολογηθούν πριν ξεκινήσει μια μελέτη σχεδίασης συστήματος μεταφοράς και οι επιμέρους εργασίες που μπορεί να αποτελούν μέρος της. Γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια της ροής φορτίου ΣΡ και στο πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εργασίες σχεδίασης συστήματος μεταφοράς. Ακολούθως, παρουσιάζεται το αντικείμενο και η δομή της εργασίας. Στην τελευταία ενότητα, παρουσιάζονται οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες που συναντώνται στην παρούσα εργασία.

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας γίνεται παρουσίαση των βασικών στοιχείων του προβλήματος ροής φορτίου. Δίνονται τα μοντέλα των διαφόρων στοιχείων του ΣΗΕ, διαχωρίζονται οι τύποι ζυγών και εξηγείται η διαδικασία με την οποία εξάγονται οι εξισώσεις ροής φορτίου

Εναλλασσομένου Ρεύματος (EP). Ακολούθως, εξηγούνται αναλυτικά οι παραδοχές για να ισχύει η προσέγγιση της ροής φορτίου ΣΡ και μέσω λεπτομερούς ανάλυσης εξάγονται οι εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ. Τέλος, παρατίθεται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος ροής φορτίου ΣΡ.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μεθοδολογία εκτίμησης των αντιδράσεων, καθώς και ορισμένες παραλλαγές της. Αρχικά, διατυπώνεται το πρόβλημα εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου στη γενική του μορφή. Αναφέρονται οι απαραίτητες παραδοχές και καταστρώνονται οι εξισώσεις επίλυσης του προβλήματος εκτίμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ακόμη, διατυπώνονται οι εναλλακτικές μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων, οι οποίες βασίζονται στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, με τη διαφορά ότι οι παράμετροι προς εκτίμηση υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς κατά την επίλυση. Σε μια εκ των δύο μεθόδους το μοντέλο εκτίμησης διαφοροποιείται με κατάλληλο τρόπο ώστε να λαμβάνει υπόψη την επίδραση των ωμικών αντιστάσεων του δικτύου. Η επίλυση των προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς γίνεται με τεχνικές τετραγωνικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια, γίνεται μια τροποποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, ώστε το πρόβλημα εκτίμησης να έχει λύση και για δεδομένα τα οποία χαρακτηρίζονται από κακή ποιότητα. Το κριτήριο ελαχιστοποίησης διαφοροποιείται και επαναδιατυπώνονται οι εξισώσεις του προβλήματος αναλυτικά. Η τελευταία παραλλαγή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων αφορά την προσαρμογή της ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που υπάρχουν δεδομένα για τις φασικές γωνίες τάσης ορισμένων ζυγών του δικτύου.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η διαδικασία παραγωγής δεδομένων για τις δοκιμές που θα πραγματοποιηθούν με τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Παρουσιάζεται το δοκιμαστικό δίκτυο που θα χρησιμοποιηθεί και ορίζεται ως στιγμιότυπο το σύνολο των μετρήσεων για τα μεγέθη που μας απασχολούν (ροές ενεργού ισχύος και γωνίες φάσης) για μια δεδομένη κατάσταση λειτουργίας του δικτύου. Ακολούθως, αναλύεται η διαδικασία παραγωγής των στιγμιότυπων λειτουργίας του δικτύου, μέσω επίλυσης του προβλήματος ροής φορτίου EP για το δοκιμαστικό δίκτυο. Δημιουργούνται 6 διαφορετικά σύνολα μετρήσεων (στιγμιότυπων), τα A, A₁, A₂, A₃, B και Γ. Σε κάθε περίπτωση παρατίθενται οι παραδοχές κατά την επίλυση της ροής φορτίου EP. Τα σύνολα A₁, A₂, A₃ αποτελούν παραλλαγές του συνόλου A, με σκοπό την ανάδειξη της επίδρασης που έχει κάθε παραδοχή της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ στην εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου. Στη συνέχεια, μέσω διαδοχικών επιλύσεων της ροής φορτίου ΣΡ, εξάγονται τα σφάλματα της ροής φορτίου ΣΡ για κάθε στιγμιότυπο, δηλαδή η διαφορά που προκύπτει στις ροές ενεργού ισχύος από την επίλυση με τη ροή φορτίου ΣΡ σε σχέση με την επίλυση με τη ροή φορτίου EP. Τέλος, μελετάται για κάθε σύνολο μετρήσεων η γραμμική ανεξαρτησία των στιγμιότυπων, καθώς είναι ένα χαρακτηριστικό που επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα της λύσης που θα προκύψει από την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δοκιμών εκτίμησης που πραγματοποιήθηκαν για το δοκιμαστικό δίκτυο. Αρχικά, πραγματοποιούνται εκτιμήσεις για όλα τα σύνολα μετρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Μέσω των εκτιμήσεων για τα

σύνολα A , A_1 , A_2 , A_3 διαπιστώνεται το κατά πόσο κάθε παραδοχή της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ συμβάλλει στα σφάλματα εκτίμησης. Σε περιπτώσεις που από την εκτίμηση προκύπτει μη υλοποιήσιμο δίκτυο, το πρόβλημα της εκτίμησης λύνεται ξανά με τις δύο μεθόδους με γραμμικούς περιορισμούς. Ακολούθως, για τα σύνολα μετρήσεων A , B και Γ γίνεται εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου με τη μέθοδο των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων. Για να καλυφθεί το ενδεχόμενο ύπαρξης μετρήσεων για τις γωνίες του δικτύου, γίνονται και ορισμένες εκτιμήσεις με χρήση δεδομένων για τις ροές ενεργού ισχύος και γωνίες φάσης τάσης ορισμένων ζυγών. Τέλος, γίνεται μια σύγκριση της ακρίβειας των εκτιμήσεων με τις διαφορετικές μεθόδους εκτίμησης.

Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται μια ανακεφαλαίωση του πρακτικού μέρους της εργασίας, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα, υποδεικνύονται ορισμένα θέματα που χρήζουν διερεύνησης, καθώς και προτείνονται ορισμένες κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

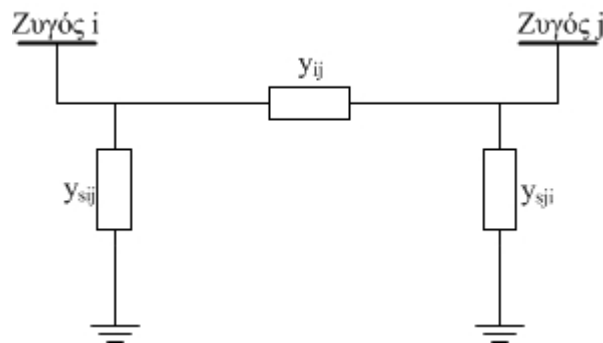
Το Πρόβλημα Ροής Φορτίου

2.1. Μοντέλο Στοιχείων Δικτύου Ηλεκτρικής Ενέργειας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα μοντέλα των στοιχείων ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας για μελέτες ροής φορτίου. Θεωρείται ότι το σύστημα λειτουργεί σε μόνιμη και συμμετρική τριφασική κατάσταση. Η ανάλυση λειτουργίας βασίζεται σε ισοδύναμα μονοφασικά κυκλώματα. Όλες οι παράμετροι των κυκλωμάτων είναι σε κοινό ανά μονάδα σύστημα.

2.1.1. Παράσταση Γραμμής Μεταφοράς

Οι γραμμές μεταφοράς αναπαριστώνται με το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα π , τα στοιχεία του οποίου αναπαριστώνται μέσω σύνθετων αγωγιμοτήτων. Το κύκλωμα π μιας γραμμής μεταφοράς δίνεται στο Σχήμα 2.1:



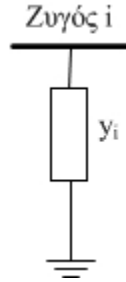
Σχήμα 2.1: Ισοδύναμο κύκλωμα π γραμμής μεταφοράς.

Η αγωγιμότητα σειράς συμβολίζεται με y_{ij} και οι εγκάρσιες αγωγιμότητες με y_{sij} και y_{sji} . Αν χωριστούν σε πραγματικά και φανταστικά μέρη, οι συγκεκριμένες αγωγιμότητες μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\begin{aligned}y_{ij} &= g_{ij} + jb_{ij} \\y_{sij} &= g_{sij} + jb_{sij} \\y_{sji} &= g_{sji} + jb_{sji}\end{aligned}\tag{2.1}$$

2.1.2. Παράσταση Εγκάρσιας Χωρητικότητας ή Αυτεπαγωγής

Η εγκάρσια χωρητικότητα ή αυτεπαγωγή αναπαρίσταται μέσω μιας αγωγιμότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2:



Σχήμα 2.2: Παράσταση Εγκάρσιας Χωρητικότητας ή Αυτεπαγωγής.

Η αγωγιμότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$y_i = jb_i \quad (2.2)$$

Στην περίπτωση εγκάρσιου πυκνωτή η παράμετρος b_i είναι θετική, ενώ στην περίπτωση εγκάρσιας αυτεπαγωγής η παράμετρος b_i είναι αρνητική.

2.1.3. Παράσταση Μετασχηματιστή

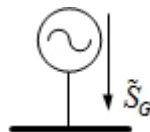
Στις μελέτες ροής φορτίου, είναι συνήθης η χρήση του απλοποιημένου ισοδύναμου κυκλώματος ενός μετασχηματιστή, στο οποίο αμελείται η σύνθετη αντίσταση του κλάδου μαγνήτισης. Συνεπώς, ο μετασχηματιστής αναπαριστάται από μια σύνθετη αγωγιμότητα, η τιμή της οποίας αντιστοιχεί στην ονομαστική σχέση μετασχηματισμού, δηλαδή στο λόγο βασικών τάσεων πρωτεύοντος και δευτερεύοντος του μετασχηματιστή. Η παράσταση μετασχηματιστή δίνεται στο Σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3: Παράσταση Μετασχηματιστή σε ονομαστική σχέση μετασχηματισμού.

2.1.4. Παράσταση Γεννήτριας

Ο συμβολισμός της γεννήτριας δίνεται στο Σχήμα 2.4:



Σχήμα 2.4: Παράσταση Γεννήτριας.

Με \tilde{S}_G συμβολίζεται η ολική μιγαδική ισχύς που παράγεται από τη γεννήτρια. Η \tilde{S}_G μπορεί να αναλυθεί στις συνιστώσες της παραγόμενης ενεργού και αέργου ισχύος:

$$\tilde{S}_G = P_G + jQ_G \quad (2.3)$$

Όπου:

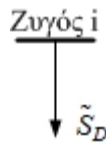
- P_G η ολική παραγόμενη ενεργός ισχύς.
- Q_G η ολική παραγόμενη άεργος ισχύς.

Στις μελέτες ροής φορτίου, θεωρείται ότι η ολική παραγόμενη ενεργός ισχύς P_G είναι σταθερή, όπως και το μέτρο της τερματικής τάσης της γεννήτριας.

2.1.5. Παράσταση Φορτίου

Τα φορτία ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

- Φορτία σταθερής ενεργού και αέργου ισχύος (Σχήμα 2.5):



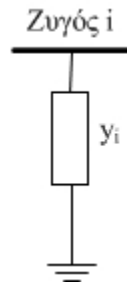
Σχήμα 2.5: Παράσταση φορτίου σταθερής ενεργού και αέργου ισχύος.

Η μιγαδική ισχύς \tilde{S}_D του φορτίου αναλύεται:

$$\tilde{S}_D = P_D + jQ_D \quad (2.4)$$

Όπου P_D η ενεργός ισχύς και Q_D η άεργος ισχύς του φορτίου.

- Φορτία σταθερής αγωγιμότητας (Σχήμα 2.6):



Σχήμα 2.6: Παράσταση φορτίου σταθερής αγωγιμότητας.

Η αγωγιμότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$y_i = g_i + jb_i \quad (2.5)$$

2.2. Μελέτη Ροών Φορτίου Εναλλασσομένου Ρεύματος

Η μελέτη ροών φορτίου για ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας αποτελεί μια μελέτη ανάλυσης της λειτουργίας του δικτύου στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Ως δεδομένα θεωρούνται:

- Οι παραγωγές ενεργού ισχύος των γεννητριών του συστήματος, καθώς και τα μέτρα των τερματικών τάσεων των γεννητριών.
- Οι καταναλώσεις ενεργού και αέργου ισχύος των φορτίων σταθερής ενεργού και αέργου ισχύος του συστήματος.
- Όλα τα στοιχεία αγωγιμοτήτων του συστήματος (γραμμές μεταφοράς, εγκάρσιες αγωγιμότητες, φορτία σταθερής σύνθετης αντίστασης και μετασχηματιστές).

Τα ζητούμενα της επίλυσης μιας ροής φορτίου είναι:

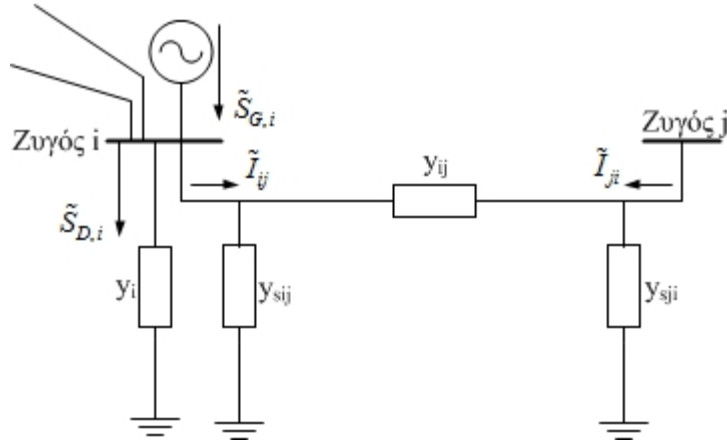
- Τα μέτρα και οι φασικές γωνίες των τάσεων σε όλους τους ζυγούς του συστήματος.
- Οι ροές ενεργού και αέργου ισχύος σε όλες τις γραμμές του συστήματος.

Για την επίλυση ενός προβλήματος ροής φορτίου, οι ζυγοί του συστήματος διαχωρίζονται ως ακολούθως:

- Ζυγός Ταλάντωσης: Θεωρείται ο ζυγός, για τον οποίο η φασική γωνία και το μέτρο της τάσης θεωρούνται γνωστά. Συνήθως, η φασική γωνία του ζυγού ταλάντωσης θεωρείται μηδενική $\delta = 0$.
- Ζυγός Παραγωγής (PV): Θεωρείται οποιοσδήποτε ζυγός, για τον οποίο η έγχυση ενεργού ισχύος και το μέτρο της τάσης θεωρούνται γνωστά.

- Ζυγός Φορτίου (PQ): Θεωρείται οποιοσδήποτε ζυγός, για τον οποίο η έγχυση ενεργού και αέργου ισχύος θεωρούνται γνωστές.

Θεωρούμε ένα δίκτυο n ζυγών. Στο Σχήμα 2.7 δίνεται ένας γενικευμένος ζυγός του δικτύου.



Σχήμα 2.7: Γενικευμένος ζυγός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας.

Με χρήση του νόμου ρευμάτων του Kirchhoff σε κάθε ζυγό του συστήματος, είναι δυνατό να εξαχθούν οι εξισώσεις ρεύματος για όλο το δίκτυο. Για το ζυγό i του Σχήματος 2.7, η έγχυση ρεύματος θα ισούται:

$$\tilde{I}_i = \tilde{I}_{G,i} - \tilde{I}_{D,i} = y_i \tilde{V}_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n \tilde{I}_{ik} \quad (2.6)$$

Επισημαίνεται ότι στη σχέση 2.6 ο όρος \tilde{I}_{ik} είναι μηδενικός στην περίπτωση που ο ζυγός i δεν συνδέεται με το ζυγό k , συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ανοικτοκύκλωμα ανάμεσά τους.

Το ρεύμα \tilde{I}_{ik} που ρέει από το ζυγό i προς το ζυγό j είναι ίσο με:

$$\tilde{I}_{ik} = (y_{sik} + y_{ik}) \tilde{V}_i - y_{ik} \tilde{V}_k \quad (2.7)$$

Όπως αναφέρθηκε, στην περίπτωση που ο ζυγός i δεν συνδέεται με ένα ζυγό j , τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι οι δύο ζυγοί συνδέονται μέσω μιας άπειρης αντίστασης και συνεπώς η αγωγιμότητα y_{ij} θα είναι μηδενική. Αντίστοιχα, και η εγκάρσια αγωγιμότητα y_{sij} θα είναι μηδενική. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.6) και (2.7) προκύπτει:

$$\tilde{I}_i = (y_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n (y_{sik} + y_{ik})) \tilde{V}_i - \sum_{k=1, k \neq i}^n y_{ik} \tilde{V}_k \quad (2.8)$$

Θέτοντας:

$$Y_{ii} = y_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n (y_{sik} + y_{ik}) \quad (2.9)$$

$$Y_{ik} = -y_{ik} \quad (2.10)$$

Η σχέση (2.8) ξαναγράφεται:

$$\tilde{I}_i = \sum_{k=1}^n Y_{ik} \tilde{V}_k \quad (2.11)$$

Οι εξισώσεις (2.11) δίνονται σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \vdots \\ \tilde{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \vdots \\ \tilde{V}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (2.12)$$

Όπου:

- **I:** Διάνυσμα στήλης διαστάσεων n , με στοιχεία τους φασιθέτες εγχύσεων ρεύματος στους ζυγούς του συστήματος.
- **V:** Διάνυσμα στήλης διαστάσεων n , με στοιχεία τους φασιθέτες τάσης των ζυγών του συστήματος.
- **Y:** Η μήτρα αγωγιμοτήτων του συστήματος, διαστάσεων $n \times n$, με μιγαδικά στοιχεία.

Κάθε στοιχείο της μήτρας αγωγιμοτήτων Y_{ij} μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik} \quad (2.13)$$

Η μήτρα αγωγιμοτήτων \mathbf{Y} είναι συμμετρική, δηλαδή ισχύει $Y_{ik} = Y_{ki}$.

Για κάθε ζυγό i , η έγχυση μιγαδικής ισχύος \tilde{S}_i ισούται με:

$$\tilde{S}_i = \tilde{S}_{Gi} - \tilde{S}_{Di} = \tilde{V}_i \tilde{I}_i^* \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.11) στη σχέση (2.14):

$$\tilde{S}_i = \tilde{V}_i \sum_{k=1}^n Y_{ki}^* \tilde{V}_k^* \quad (2.15)$$

Οι φασιθέτες τάσης \tilde{V}_i μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\tilde{V}_i = V_i e^{j\delta_i} \quad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.13) και (2.16) στη σχέση (2.15) και χωρίζοντας πραγματικά από φανταστικά μέρη, για κάθε ζυγό i προκύπτουν δύο εξισώσεις ροής φορτίου, μια για την έγχυση ενεργού ισχύος P_i και μια για την έγχυση αέργου ισχύος Q_i :

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)) \quad (2.17)$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)) \quad (2.18)$$

Όπου δ_i, δ_j οι φασικές γωνίες τάσεων των ζυγών i και j αντίστοιχα.

Για κάθε γραμμή μεταφοράς ij , η ροή ενεργού και αέργου ισχύος δίνεται από τις εξισώσεις:

$$P_{ij} = V_i^2 (g_{ij} + g_{sij}) + V_i V_j (G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)) \quad (2.19)$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + b_{sij}) + V_i V_j (G_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)) \quad (2.20)$$

Στις σχέσεις (2.19) και (2.20), οι παράμετροι $g_{ij}, g_{sij}, b_{ij}, b_{sij}$ είναι οι παράμετροι του μοντέλου π της γραμμής μεταφοράς ij , όπως ορίστηκαν στη σχέση (2.1).

Για το δίκτυο n ζυγών, το πλήθος των εξισώσεων ροών φορτίου (2.17) και (2.18) είναι $2n$. Οι εξισώσεις ροών φορτίων εμπλέκουν χαρακτηριστικές μεταβλητές του προβλήματος, δηλαδή μέτρα και γωνίες τάσεων και ισχείς. Η αναλυτική επίλυση των συγκεκριμένων εξισώσεων είναι δύσκολη λόγω της μη γραμμικότητας που τις χαρακτηρίζει. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση τους με ηλεκτρονικό υπολογιστή, με πιο σημαντικές την Gauss – Seidel και την Newton – Raphson [VC01].

2.3. Προσεγγιστική Ροή Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος

2.3.1. Γενικά

Η επίλυση του προβλήματος ροής φορτίων μέσω μιας επαναληπτικής υπολογιστικής διαδικασίας, όπως είναι η Gauss – Seidel και η Newton – Raphson, παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες σε αρκετές περιπτώσεις, κυρίως λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων:

1. Υπάρχει η πιθανότητα αδυναμίας επίλυσης.
2. Στην περίπτωση μη σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου, δεν είναι δυνατό να αποφανθούμε για την ύπαρξη λύσης ή για τη μη δυνατότητα προσέγγισης της από τη μέθοδο.
3. Περιπτώσεις ύπαρξης πολλαπλών λύσεων [M10].

Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιείται μια προσεγγιστική ροή φορτίου που ονομάζεται ροή φορτίου συνεχούς ρεύματος (ΣΡ). Η προσεγγιστική ροή φορτίου ΣΡ, προκύπτει κάνοντας ορισμένες υποθέσεις / προσεγγίσεις για τη λειτουργία του συστήματος, οι οποίες ισχύουν σε ικανοποιητικό βαθμό για την περίπτωση λειτουργίας του συστήματος υπό κανονικές συνθήκες. Οι υποθέσεις / προσεγγίσεις αυτές είναι:

- Αμελούνται οι εγκάρσιες αγωγιμότητες των γραμμών.
- Η αντίδραση X μιας γραμμής είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίσταση R της γραμμής.
- Γραμμικοποίηση ως προς τη γωνία.
- Επίπεδο προφίλ τάσης: $V_i = V_j = 1$ αμ.

Οι εξισώσεις της ροής φορτίου ΣΡ είναι γραμμικές, και αυτό δίνει ορισμένα πλεονεκτήματα στη συγκεκριμένη μέθοδο:

1. Η λύση της είναι μοναδική, ενώ προκύπτει χωρίς τη χρήση επαναληπτικής μεθόδου.
2. Η μέθοδος επίλυσης είναι απλή.
3. Η γραμμικότητα της μεθόδου την κάνει ιδανική για την χρήση της σε συνδυασμό με μεθόδους οικονομικής ανάλυσης, οι οποίες αποτελούν τη βάση για το μελλοντικό σχεδιασμό των δικτύων μεταφοράς.
4. Οι ροές ενεργού ισχύος που προκύπτουν ως λύση της μεθόδου είναι αρκετά ακριβείς [SJA09].

Οι εξισώσεις της ροής φορτίου ΣΡ για την έγχυση ενεργού ισχύος (2.17) προκύπτουν ξεκινώντας από τις εξισώσεις ροής φορτίου ΕΡ και λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις/προσεγγίσεις για κανονική λειτουργία του δικτύου. Ακολουθώντας, μελετούνται διαδοχικά και ξεχωριστά η καθεμία εκ των υποθέσεων.

2.3.2. Εγκάρσιες Αγωγιμότητες

Σε αναλυτικά μοντέλα γραμμών μεταφοράς, η εγκάρσια αγωγιμότητα y_{sij} του μοντέλου π (Σχήμα 2.1) αποτελείται από μια χωρητική αγωγιμότητα b_{sij} παράλληλα με μια ωμική αγωγιμότητα g_{sij} . Η τιμή της g_{sij} είναι μικρή και συνήθως αμελείται [MBB08].

Μια άλλη περίπτωση που μπορεί να συναντήσει κανείς εγκάρσια αγωγιμότητα σε κάποιο πρόβλημα ροής φορτίου, είναι όταν υπάρχει λεπτομερής αναπαράσταση του πυρήνα ενός μετασχηματιστή. Ο κλάδος μαγνήτισης του μετασχηματιστή αναπαριστάται από μια εγκάρσια αγωγιμότητα, που αναλύεται σε μια επαγωγική αγωγιμότητα b_m , την αγωγιμότητα μαγνήτισης, σε παράλληλη σύνδεση με μια ωμική αγωγιμότητα g_c , την αγωγιμότητα απωλειών πυρήνα. Το ρεύμα που ρέει στον κλάδο μαγνήτισης είναι πολύ μικρό σε σχέση με το ονομαστικό και συνήθως αμελείται.

Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι μια γραμμή μεταφοράς ή ένας μετασχηματιστής παρίσταται από μια σύνθετη αντίσταση σειράς $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$.

2.3.3. Αντίδραση X_{ij} πολύ μεγαλύτερη της αντίστασης R_{ij}

Έστω μια γραμμή μεταφοράς που παρίσταται από μια σύνθετη αντίσταση $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$. Στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, ο λόγος X/R μιας γραμμής μεταφοράς αυξάνει όταν ανεβαίνει το επίπεδο της τάσης. Στο [PRV05] δίνονται τυπικές τιμές του λόγου X/R για το δίκτυο του Βελγίου, σε επίπεδα τάσης 70, 150, 220 και 380 kV. Στο [MBB08] δίνονται ορισμένα παραδείγματα τιμών για τα X και R για διάφορα επίπεδα υψηλών τάσεων για λειτουργία του δικτύου σε μόνιμη κατάσταση στα 50 Hz και στα 60 Hz. Τα στοιχεία παρατίθενται στους Πίνακες 2.1 και 2.2:

Πίνακας 2.1: Λόγος X/R - Τυπικές τιμές για γραμμές μεταφοράς [PRV05].

Επίπεδο Τάσης (kV)	Ελάχιστη Τιμή X/R	Μέγιστη Τιμή X/R	Μέση Τιμή X/R
380	8.4	12.5	10.5
220	3.5	8	5.5
150	1	12	4.2
70	0.8	9	2.1

Πίνακας 2.2: Παραδείγματα X, R για γραμμές μεταφοράς υψηλής τάσης στα 50 και στα 60 Hz [MBB08].

Συχνότητα Λειτουργίας (Hz)	Επίπεδο Τάσης (kV)	X (Ω/km)	R (Ω/km)	X/R
50	230	0.488	0.05	9.76
50	275	0.304	0.067	4.54
50	400	0.265	0.018	14.72
60	345	0.367	0.037	9.92
60	500	0.325	0.028	11.61
60	765	0.329	0.012	27.42
60	1100	0.292	0.005	58.4

Από τους Πίνακες 2.1 και 2.2 είναι εμφανές ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων η υπόθεση ότι η αντίδραση X_{ij} είναι πολύ μεγαλύτερη της αντίστασης R_{ij} ισχύει. Η αντίστοιχη σύνθετη αγωγιμότητα μιας γραμμής μεταφοράς με σύνθετη αντίσταση $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$ είναι:

$$y_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} - \frac{jX_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} = g_{ij} + jb_{ij} \quad (2.21)$$

Από τη σχέση (2.21) προκύπτει άμεσα:

$$g_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \quad (2.22)$$

$$b_{ij} = -\frac{X_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \quad (2.23)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $X_{ij} \gg R_{ij}$, συνεπώς θα ισχύει:

$$X_{ij}^2 + R_{ij}^2 \approx X_{ij}^2 \quad (2.24)$$

Μέσω της προσέγγισης (2.24), οι σχέσεις (2.22) και (2.23) γίνονται:

$$g_{ij} = 0 \quad (2.25)$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{X_{ij}} \quad (2.26)$$

Ως επακόλουθο της σχέσης (2.25) θα ισχύει:

$$G_{ij} = 0 \quad (2.27)$$

Από τη σχέση (2.27), με αντικατάσταση στη σχέση (2.17):

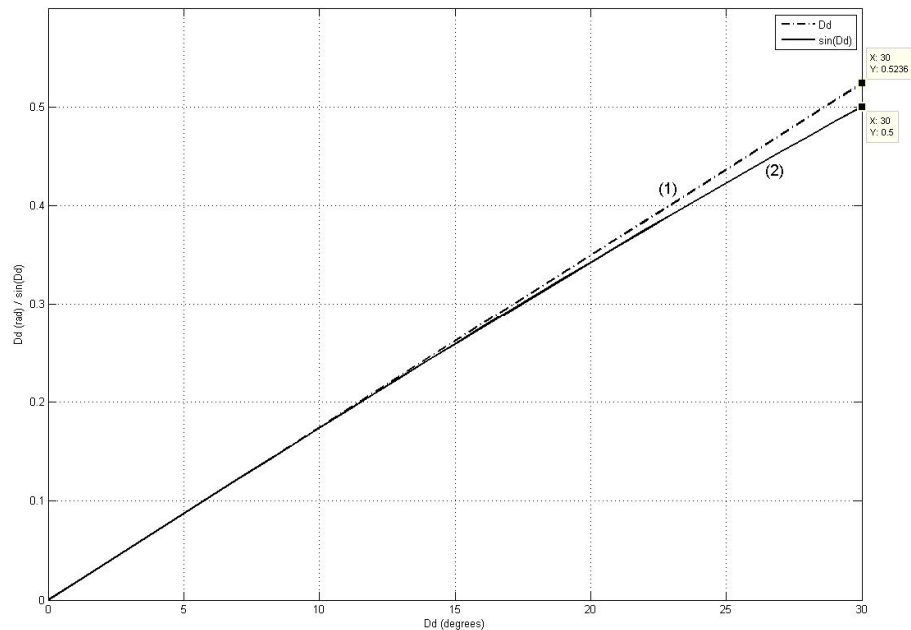
$$P_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad (2.28)$$

Όπου σύμφωνα με τις σχέσεις (2.10), (2.13) και (2.26):

$$B_{ij} = -b_{ij} = \frac{1}{X_{ij}} \quad (2.29)$$

2.3.4. Γραμμικοποίηση ως προς τη Γωνία

Για τυπικές λειτουργικές συνθήκες, σε ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας η διαφορά γωνίας $\Delta\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$, ανάμεσα στους φασιθέτες της τάσης για δύο γειτονικούς ζυγούς i και j κυμαίνεται σε τιμές μικρότερες των 10° με 15° . Σε σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να παρατηρηθούν γωνίες περίπου 30° . Για διαφορές γωνίες που κυμαίνονται στην περιοχή γύρω από το μηδέν, δηλαδή στο διάστημα $[-15^\circ, 15^\circ]$ το ημίτονο $\sin(\Delta\delta_{ij})$ είναι ουσιαστικά ίσο με το όρισμά του $\Delta\delta_{ij}$ (rad). Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό και από το Σχήμα 2.8, που παρουσιάζει τις συναρτήσεις $f(\Delta\delta) = \sin(\Delta\delta)$ και $f(\Delta\delta) = \Delta\delta$ (rad).



Σχήμα 2.8: Συναρτήσεις $\Delta\delta$ (rad) (1) και $\sin\Delta\delta$ (2).

Από το Σχήμα 2.8 φαίνεται ότι η διαφορά των δύο συναρτήσεων είναι 0.024 για την ακραία περίπτωση των 30° , ενώ μέχρι τις 15° οι δύο συναρτήσεις ουσιαστικά ταυτίζονται. Επομένως, είναι κατανοητό ότι η γραμμικοποίηση της σχέσης (2.28) γύρω από το μηδέν είναι μια προσέγγιση δεν προσθέτει σημαντικό σφάλμα στον υπολογισμό της έγχυσης ενεργού ισχύος P_i . Η γραμμικοποιημένη μορφή της σχέσης (2.28) είναι:

$$P_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j B_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (2.30)$$

2.3.5. Επίπεδο Προφίλ Τάσης

Σε συνήθειες συνθήκες λειτουργίας στη μόνιμη κατάσταση, η τάση ενός ζυγού κυμαίνεται εντός των ορίων $\pm 5\%$, δηλαδή από 0.95 αμ έως 1.05 αμ. Επομένως, οι τάσεις V_i και V_j της σχέσης (2.30) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\begin{aligned} V_i &= 1 + \Delta V_i \\ V_j &= 1 + \Delta V_j \end{aligned} \quad (2.31)$$

Όπου $-0.05 \leq \Delta V_i \leq 0.05$ και $-0.05 \leq \Delta V_j \leq 0.05$.

Εξετάζουμε τη μέγιστη απόκλιση που εμφανίζει το γινόμενο των μέτρων των δύο τάσεων $V_i V_j$ από τη μονάδα. Εξετάζοντας το ζήτημα από μια καθαρά αριθμητική πλευρά, το γινόμενο $V_i V_j$ θα λαμβάνει τιμές στο διάστημα:

$$0.9025 \leq V_i V_j \leq 1.1025 \quad (2.32)$$

Παρατηρούμε, ότι η μέγιστη απόκλιση που προκύπτει κυμαίνεται γύρω στο 10%. Στην πραγματικότητα, λόγω πτώσης τάσης πάνω στη σύνθετη αντίσταση $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$ της γραμμής μεταφοράς, τα μέτρα τάσεων V_i και V_j δεν θα είναι ίσα στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Μέσω αυτών των παρατηρήσεων, γίνεται η προσέγγιση:

$$V_i V_j \approx 1 \quad (2.33)$$

Η προσέγγιση εισάγει σφάλματα της τάξεως του 10 % κατά μέγιστο.

Μέσω της προσέγγισης (2.33), από τη σχέση (2.30) προκύπτει:

$$P_i \approx \sum_{j=1}^n B_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (2.34)$$

2.3.6. Εξισώσεις και Επίλυση Ροής Φορτίου ΣΡ

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η τελική μορφή των εξισώσεων της ροής φορτίου ΣΡ και δίνεται συνοπτικά η μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της ροής φορτίου ΣΡ.

Η σχέση (2.34) δίνει τη προσεγγιστική έγχυση ενεργού ισχύος στο ζυγό i . Επειδή ο όρος του αθροίσματος της (2.34) για $i = j$ είναι μηδενικός, η σχέση (2.34) γράφεται:

$$P_i \approx \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (2.35)$$

Η προσεγγιστική εξίσωση ροής ενεργού ισχύος σε μια διασύνδεση ij προκύπτει σύμφωνα με τα παραπάνω ως εξής:

$$P_{ij} \approx B_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (2.36)$$

Οι εξισώσεις (2.35) μπορούν γραφτούν σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} \quad (2.37)$$

Όπου:

- $\mathbf{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{n-1} \quad P_n]^T$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{12} + \dots + B_{1n} & -B_{12} & \dots & -B_{1(n-1)} & -B_{1n} \\ -B_{21} & B_{21} + \dots + B_{2n} & \dots & -B_{2(n-1)} & -B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -B_{(n-1)1} & -B_{(n-1)2} & \dots & B_{(n-1)1} + \dots + B_{(n-1)n} & -B_{(n-1)n} \\ -B_{n1} & -B_{n2} & \dots & -B_{n(n-1)} & B_{n1} + \dots + B_{n(n-1)} \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{n-1} \quad \delta_n]^T$

Η ονομασία Ροή Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος αναφέρεται στο ότι η σχέση (2.37) αντιστοιχεί σε ένα δίκτυο ΣΡ όπου οι γωνίες δ αντιστοιχούν σε τάσεις V_{DC} , οι αντιδράσεις X αντιστοιχούν σε αντιστάσεις R_{DC} και οι εγχύσεις ενεργού ισχύος P αντιστοιχούν σε ρεύματα I_{DC} .

Από τις σχέσεις (2.29) και (2.37) προκύπτει άμεσα:

$$B_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{X_{ik}} \quad (2.38)$$

$$B_{ik} = \frac{1}{X_{ik}} \quad (2.39)$$

Η επίλυση του προβλήματος της ροής φορτίου ΣΡ συνίσταται στην εύρεση όλων των ροών ενεργού ισχύος στις γραμμές μεταφοράς του δικτύου. Δεδομένες θεωρούνται οι εγχύσεις ενεργού ισχύος σε κάθε ζυγό. Επομένως, ο πίνακας \mathbf{P} είναι γνωστός. Ο πίνακας \mathbf{B} έχει μηδενικό άθροισμα σειράς και συνεπώς δεν αντιστρέφεται. Αυτό επιτρέπει να οριστεί αυθαίρετα μια γωνία $\delta_1=0$ και συνεπώς μειώνονται οι άγνωστοι από n σε $n-1$. Αφαιρώντας από τον πίνακα \mathbf{B} την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη προκύπτει ο ελαττωμένος πίνακας \mathbf{B}' . Αφαιρώντας το πρώτο στοιχείο από τον πίνακα στήλη \mathbf{P} προκύπτει ο πίνακας \mathbf{P}' . Αφαιρώντας το πρώτο στοιχείο από τον πίνακα στήλη δ προκύπτει ο πίνακας δ' . Η σχέση (2.37) γίνεται:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{B}'\delta' \quad (2.39)$$

Με αντιστροφή του πίνακα \mathbf{B}' προκύπτει ο πίνακας των γωνιών δ' :

$$\delta' = (\mathbf{B}')^{-1} \mathbf{P}' \quad (2.40)$$

Έχοντας γνώση των γωνιών δ από τη σχέση (2.40), με χρήση της σχέσης (2.36) μπορούν να βρεθούν οι ροές ενεργού ισχύος P_{ij} στις γραμμές μεταφοράς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της γραμμικότητας των σχέσεων (2.35) και (2.37), η ροή φορτίου ΣΡ δεν μεταβάλλεται αν όλα τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{B} πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό a . Προφανώς, στην περίπτωση αυτή οι γωνίες θα διαιρεθούν με τον πολλαπλασιαστή a , αλλά οι ροές P_{ij} θα είναι ίδιες:

$$P_{ij} = aB_{ij} \frac{\delta_i - \delta_j}{a} = B_{ij}(\delta_i - \delta_j)$$

Κεφάλαιο 3

Μεθοδολογία Προσέγγισης Παραμέτρων Δικτύου

για Ροή Φορτίου Συνεχούς Ρεύματος

3.1. Αρχική Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρείται ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας n ζυγών (κόμβων) και m διασυνδέσεων (κλάδων). Για το συγκεκριμένο δίκτυο οι σύνθετες αντιστάσεις των κλάδων είναι άγνωστες. Δίνονται k στιγμιότυπα του δικτύου για λειτουργία του δικτύου στη μόνιμη κατάσταση. Ως στιγμιότυπο του δικτύου ονομάζουμε το σύνολο των μετρήσεων για την ροή ενεργού ισχύος από κάθε ζυγό i του δικτύου προς κάθε γειτονικό του ζυγό j . Επομένως, κάθε στιγμιότυπο αποτελείται από $2m$ μετρήσεις, που αφορούν τη ροή ενεργού ισχύος για τους m κλάδους του δικτύου. Στόχος είναι να βρεθεί ένα προσεγγιστικό ισοδύναμο κύκλωμα για το ηλεκτρικό δίκτυο. Κάθε γραμμική μεταφοράς στο ισοδύναμο κύκλωμα αναπαριστάται από μια αντίδραση \hat{X}_{ij} . Συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος έγκειται στην εύρεση των τιμών των αντιδράσεων \hat{X}_{ij} . Η διατύπωση του προβλήματος δίνεται σε μορφή δεδομένων και ζητούμενων ως εξής:

Δεδομένα:

- Δίκτυο n ζυγών και m διασυνδέσεων.
- $m \cdot k$ μετρήσεις για τις εγχύσεις ενεργού ισχύος από ένα ζυγό προς κάθε γειτονικό.

Ζητούμενα:

- m εκτιμήσεις για τις αντιδράσεις \hat{X}_{ij} των διασυνδέσεων.

3.2. Κατάσρωση Προβλήματος Ελαχίστων Τετραγώνων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η μεθοδολογία για την εκτίμηση του προσεγγιστικού κυκλώματος ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας. Για την εκτίμηση θα χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις (2.36) της ροής φορτίου ΣΡ για κάθε διασύνδεση του δικτύου:

$$P_{ij} = B_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (3.1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.1) τη παράμετρο B_{ij} με $1/X_{ij}$ από τη σχέση (2.39), προκύπτει:

$$X_{ij} P_{ij} = (\delta_i - \delta_j) \quad (3.2)$$

Οι εξισώσεις (3.2) είναι γραμμικές ως προς τους αγνώστους X_{ij} , δ_i και δ_j . Για την εκτίμηση των αγνώστων μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, οπότε όπως προαναφέρθηκε λόγω γραμμικότητας θα έχει μοναδική λύση.

3.2.1. Επίδραση Ωμικών Απωλειών

Ένα αρχικό ζήτημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί είναι η ασυμβατότητα ανάμεσα στις εξισώσεις του μοντέλου εκτίμησης και στα δεδομένα του προβλήματος. Ως ασυμβατότητα εννοείται το γεγονός ότι η πραγματική ροή ισχύος δεν ακολουθεί τις εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ παρά μόνο μπορεί να προσεγγιστεί από τις εξισώσεις (3.2). Έστω ότι σε κάθε στιγμιότυπο λειτουργίας του δικτύου $t = 1, \dots, k$ για κάθε διασύνδεση υπάρχουν δύο μετρήσεις για την έγχυση ενεργού ισχύος $P_{ij,m}^{(t)}$ και $P_{ji,m}^{(t)}$. Μέσω των μετρήσεων αυτών θα προκύψει η μέτρηση για τη ροή ενεργού ισχύος για τη ροή φορτίο ΣΡ $P_{ij}^{(t)}$.

Στην περίπτωση που η σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$ έχει μηδενικό πραγματικό μέρος, δηλαδή έχει αμελητέα ωμική αντίσταση, θα ισχύει για το στιγμιότυπο t :

$$P_{ij,m}^{(t)} = -P_{ji,m}^{(t)} \quad (3.3)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η ροή ενεργού ισχύος $P_{ij}^{(t)}$ είναι ίση με την έγχυση ενεργού ισχύος $P_{ij,m}^{(t)}$:

$$P_{ij}^{(t)} = P_{ij,m}^{(t)} \quad (3.4)$$

Στην περίπτωση που η γραμμή μεταφοράς έχει και ωμική αντίσταση, τότε θα ισχύει για το στιγμιότυπο t :

$$P_{ij,inj}^{(t)} = -P_{ji,inj}^{(t)} + P_{ij,Cu}^{(t)} \quad (3.5)$$

Όπου $P_{ij,Cu}^{(t)}$ οι ωμικές απώλειες στη διασύνδεση ij για τη μέτρηση (t).

Επειδή στη μελέτη ροής φορτίου ΣΡ δεν μοντελοποιούνται οι ωμικές απώλειες, η τιμή για τη ροή ενεργού ισχύος $P_{ij}^{(t)}$ διορθώνεται αφαιρώντας το μισό των ωμικών απωλειών $P_{ij,Cu}^{(t)}$:

$$P_{ij}^{(t)} = P_{ij,m}^{(t)} - \frac{P_{ij,m}^{(t)} + P_{ji,m}^{(t)}}{2} \quad (3.6)$$

3.2.2. Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Με χρήση των σχέσεων (3.6) προκύπτουν σε κάθε στιγμιότυπο m μετρήσεις για τη ροή ενεργού ισχύος σε κάθε κλάδο του δικτύου. Συνεπώς, για τα k στιγμιότυπα λειτουργίας του δικτύου, προκύπτουν $k \cdot m$ μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος. Για καθεμία εξ αυτών των μετρήσεων μπορεί να γραφτεί μια εξίσωση, δηλαδή για το t στιγμιότυπο μέσω της σχέσης (3.2) προκύπτει:

$$\hat{X}_{ij} P_{ij}^{(t)} = \hat{\delta}_i^{(t)} - \hat{\delta}_j^{(t)} \quad (3.8)$$

Οι εξισώσεις (3.8) σχηματίζουν ένα σύστημα $k \cdot m$ γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους:

- m αγνώστους \hat{X}_{ij} , ένα για κάθε διασύνδεση.
- $n \cdot k$ αγνώστους $\hat{\delta}_i^{(t)}$, ένα για κάθε μέτρηση $t = 1, \dots, k$ και κάθε ζυγό $i = 1, \dots, n$.

Αν γραφτεί ξανά η μητρική μορφή των εξισώσεων του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων (Παράγραφος 1.4.5 – Σχέση 1.19):

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{e} \quad (3.9)$$

Επειδή όπως εξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 2 από τις γωνίες δ μια μπορεί να θεωρηθεί μηδενική, θεωρείται ο ζυγός 1 ως ζυγός αναφοράς και συνεπώς θα ισχύει για το στιγμιότυπο (t) ότι $\delta_1^{(t)} = 0$.

Επίσης λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων μπορούμε να θεωρήσουμε μια αντίδραση γνωστή. Θεωρείται γνωστή η αντίδραση X_{1q} μιας διασύνδεσης του ζυγού 1 ως ένα από τους γειτονικούς του ζυγούς q .

Έπειτα απ' αυτές τις παραδοχές, μέσω των εξισώσεων (3.9) σχηματίζεται ένα σύστημα $k \times m$ γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους:

- $(m-1)$ αγνώστους \hat{X}_{ij} , ένα για κάθε διασύνδεση.
- $(n-1) \cdot k$ αγνώστους $\hat{\delta}_i^{(t)}$, ένα για κάθε μέτρηση $t = 1, \dots, k$ και κάθε ζυγό $i = 2, \dots, n$.

Για να υπάρχει λύση για το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$k \cdot m \geq (m-1) + (n-1) \cdot k \quad (3.10)$$

Προφανώς, θα υπάρχει επάρκεια μετρήσεων όταν ο αριθμός μετρήσεων είναι:

$$k \geq \frac{m-1}{m+n-1} \quad (3.11)$$

3.2.3. Συστηματική Κατάστρωση Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή δίνεται με συστηματικό τρόπο η προσαρμογή των δεδομένων του προβλήματος στην εξίσωση (3.9), ώστε να είναι δυνατή η επίλυση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Επειδή η κατάστρωση θα γίνει κατά κλάδους, εισάγεται ένας νέος συμβολισμός για τις αντιδράσεις του κυκλώματος. Οι αντιδράσεις θα χαρακτηρίζονται από ένα δείκτη d , οποίος θα λαμβάνει τιμές από το 1 έως το m . Οι ζυγοί, τους οποίους συνδέει η διασύνδεση, θα δίνονται μέσω 2 πινάκων \mathbf{s} και \mathbf{r} . Οι δύο πίνακες ορίζουν από ποιο ζυγό s_d και προς ποιο ζυγό r_d μεταφέρεται η ενεργός ισχύς στη διασύνδεση. Ο συμβολισμός δίνεται ακολούθως:

$$\hat{X}_{ij} \equiv X_d, \quad \text{και} \quad s_d = i, \quad r_d = j \quad (3.12\alpha)$$

$$P_{ij}^{(t)} \equiv P_d^{(t)} \quad \text{και} \quad s_d = i, \quad r_d = j \quad (3.12\beta)$$

Σημειώνεται ότι ως $d = 1$ ορίζεται η διασύνδεση από το ζυγό 1 προς το ζυγό q , για την οποία θεωρείται γνωστή η σύγχρονη αντίδραση $X_1 \equiv X_{1q}$, σύμφωνα με τις παραδοχές που πραγματοποιήθηκαν. Σύμφωνα με το νέο συμβολισμό, οι εξισώσεις (3.8) ξαναγράφονται:

$$-X_d P_d^{(t)} + \delta_{sd}^{(t)} - \delta_{rd}^{(t)} = 0 \quad (3.13)$$

Σύμφωνα με το νέο συμβολισμό, ο πίνακας \mathbf{y} ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{y} = \left[X_2 \quad \dots \quad X_m \mid \delta_2^{(1)} \quad \dots \quad \delta_n^{(1)} \mid \dots \mid \delta_2^{(k)} \quad \dots \quad \delta_n^{(k)} \right]^T \quad (3.14)$$

Ο πίνακας \mathbf{y} έχει διαστάσεις $(m-1) + (n-1)k$.

Ο πίνακας \mathbf{b} διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{b} = \left[\underbrace{P_1^{(1)} X_1 \quad \dots \quad P_1^{(k)} X_1}_{k \text{ στοιχεία}} \mid \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{k \times (m-1) \text{ στοιχεία}} \right]^T \quad (3.15)$$

Ο πίνακας \mathbf{b} έχει διαστάσεις $k \cdot m$.

Για την κατασκευή του πίνακα \mathbf{A} , επιλέγονται οι εξισώσεις (3.13) με συγκεκριμένη σειρά. Κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε μια γραμμή του πίνακα \mathbf{A} . Στην γραμμή 1 μέχρι και τη γραμμή k αντιστοιχούν οι εξισώσεις για τον πρώτο κλάδο του κυκλώματος για αύξουσα σειρά των στιγμιότυπων $t = 1, \dots, k$. Στην γραμμή $k+1$ έως και τη γραμμή $2k$ αντιστοιχούν οι εξισώσεις για τον δεύτερο κλάδο του κυκλώματος για αύξουσα σειρά των στιγμιότυπων $t = 1, \dots, k$. Ανάλογα ισχύουν και για τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα \mathbf{A} .

Ο πίνακας \mathbf{A} , διαστάσεων $(k \cdot m) \times [(m - 1) + k \cdot (n - 1)]$, διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 0 & \dots & 0 & | & 0 \dots 0 & \overset{\theta_1}{-1} & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & & | & 0 & \dots & 0 \\
 0 & & \dots & | & 0 & \dots & & & 0 & | & 0 \dots 0 & \overset{\theta_2}{-1} & 0 & \dots & 0 & | & & | & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & | & & | & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 -P_2^{(1)} & \dots & 0 & | & 0 \dots \overset{\theta_4}{1} & \dots & \overset{\theta_5}{-1} & \dots & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & & | & 0 & \dots & & & 0 \\
 -P_2^{(2)} & \dots & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & 0 \dots \overset{\theta_6}{1} & \dots & \overset{\theta_7}{-1} & \dots & 0 & | & & | & 0 & \dots & & & 0 \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 -P_2^{(k)} & \dots & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & & | & 0 \dots \overset{1}{\theta_8} & \dots & \overset{-1}{\theta_9} & \dots & 0 \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 0 & \dots & -P_m^{(1)} & | & 0 \dots \overset{\theta_{10}}{-1} & \dots & \overset{\theta_{11}}{1} & \dots & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & & | & 0 & \dots & & & 0 \\
 0 & \dots & -P_m^{(2)} & | & 0 & \dots & & & 0 & | & 0 \dots \overset{\theta_{12}}{-1} & \dots & \overset{\theta_{13}}{1} & \dots & 0 & | & & | & 0 & \dots & & & 0 \\
 \vdots & & & | & & & & & & | & & & & & & | & & & & & & & \vdots \\
 0 & \dots & -P_m^{(k)} & | & 0 & \dots & & & 0 & | & 0 & \dots & & & 0 & | & & | & 0 \dots \overset{1}{\theta_{14}} & \dots & \overset{1}{\theta_{15}} & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

(3.16)

Όπου Θ_1 έως Θ_{15} οι θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων για ορισμένα blocks $k \times (n-1)$ διαστάσεων. Οι θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων προσδιορίζονται από τα στοιχεία των πινάκων \mathbf{s} και \mathbf{r} , αναλόγως με τη διασύνδεση και το στιγμιότυπο που χαρακτηρίζει τη γραμμή του πίνακα \mathbf{A} . Αναλυτικά:

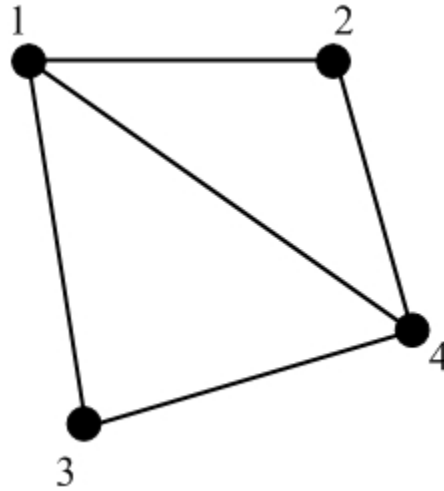
- Θ_1 : Γραμμή: 1 Στήλη: $(m-1) + to(1)-1$
- Θ_2 : Γραμμή: 2 Στήλη: $(m-1) + (n-1) + to(1)-1$
- Θ_3 : Γραμμή: k Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + to(1)-1$
- Θ_4 : Γραμμή: $k + 1$ Στήλη: $(m-1) + from(2)-1$
- Θ_5 : Γραμμή: $k + 1$ Στήλη: $(m-1) + to(2)-1$
- Θ_6 : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + (n-1) + from(2)-1$
- Θ_7 : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + (n-1) + to(2)-1$
- Θ_8 : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + from(2)-1$
- Θ_9 : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + to(2)-1$
- Θ_{10} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + to(k)-1$
- Θ_{11} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + from(k)-1$
- Θ_{12} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + (n-1) + to(k)-1$
- Θ_{13} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + from(k)-1$
- Θ_{14} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + to(k)-1$
- Θ_{15} : Γραμμή: Στήλη: $(m-1) + k(n-1) + from(k)-1$

Παρατηρήσεις:

- Κάθε γραμμή του πίνακα \mathbf{A} αντιστοιχεί σε μια εξίσωση από τις (3.13).
- Οι πρώτες k γραμμές του πίνακα \mathbf{A} είναι οι εξισώσεις που εμπλέκουν τη γνωστή αντίδραση X_1 .
- Ο πίνακας \mathbf{A} χωρίζεται σε υποπίνακες (blocks). Αν θεωρηθούν οι υποπίνακες ως στοιχεία του \mathbf{A} , τότε ο \mathbf{A} έχει διαστάσεις $m \times (k+1)$. Τα blocks αυτά θα συμβολίζονται με $\overline{\mathbf{A}}_{gs}$, όπου g δείχνει τη γραμμή και s δείχνει τη στήλη, σε επίπεδο υποπινάκων.
- Καθένα από τα blocks $\overline{\mathbf{A}}_{g1}$ για $g = 2, \dots, m$ έχει στην g στήλη του ως στοιχεία τις μετρήσεις ροής ενεργού ισχύος για την g διασύνδεση.
- Κάθε block $\overline{\mathbf{A}}_{gl}$ με $l \neq 1$, έχει ένα ή δύο μη μηδενικά στοιχεία στη $(s-1)$ γραμμή του. Αν ένα εκ των s_g, r_g είναι ίσο με 0, τότε έχει ένα μη μηδενικό στοιχείο. Αν κανένα εκ των δύο δεν είναι 0 τότε η $(s-1)$ γραμμή του έχει ένα -1 στη θέση s_g και ένα 1 στη θέση r_g .

3.2.4. Παράδειγμα Κατασκευής Πινάκων

Δίνεται το δίκτυο του Σχήματος 3.1:



Σχήμα 3.1: Δίκτυο 4 κόμβων – 5 κλάδων.

Έχουμε ακριβώς μετρήσεις για $k = 2$, δηλαδή έχουμε μετρήσεις για $P_{12}^{(t)}$, $P_{13}^{(t)}$, $P_{24}^{(t)}$, $P_{41}^{(t)}$ και $P_{43}^{(t)}$ για $t = 1, 2$. Ο κόμβος (ζυγός) 1 είναι ζυγός αναφοράς, άρα ισχύει ότι $\delta_1^{(t)} = 0$ για $t = 1, 2$. Είναι γνωστή η αντίδραση της διασύνδεσης $X_{12} = X_1$.

Γίνονται οι αντιστοιχίσεις:

$$P_{12}^{(t)} \equiv P_1^{(t)}, \quad X_{12} \equiv X_1$$

$$P_{13}^{(t)} \equiv P_2^{(t)}, \quad X_{13} \equiv X_2$$

$$P_{24}^{(t)} \equiv P_3^{(t)}, \quad X_{24} \equiv X_3$$

$$P_{41}^{(t)} \equiv P_4^{(t)}, \quad X_{41} \equiv X_4$$

$$P_{43}^{(t)} \equiv P_5^{(t)}, \quad X_{43} \equiv X_5$$

Άμεσα από τις αντιστοιχίσεις προκύπτουν οι πίνακες \mathbf{s} και \mathbf{r} :

$$\mathbf{s} = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4]^T$$

$$\mathbf{r} = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3]^T$$

Ο πίνακας \mathbf{y} θα είναι:

$$\mathbf{y} = [X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_m \mid \delta_2^{(1)} \quad \delta_3^{(1)} \quad \delta_4^{(1)} \quad \mid \delta_2^{(2)} \quad \delta_3^{(2)} \quad \delta_4^{(2)}]^T$$

Ο πίνακας \mathbf{b} θα είναι:

$$\mathbf{b} = [P_1^{(1)}X_1 \quad P_1^{(2)}X_1 \mid 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Ο πίνακας \mathbf{A} θα είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -P_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -P_3^{(1)} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -P_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -P_5^{(1)} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_5^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. Εκτίμηση με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων με Περιορισμούς

Σε ορισμένες περιπτώσεις η εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικές ή γενικά μη αποδεκτές τιμές για τις αντιδράσεις X_{ij} των διασυνδέσεων του δικτύου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι σίγουρο ότι η εκτίμηση των αντιδράσεων X_{ij} είναι λανθασμένη.

Μια προσέγγιση για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η εφαρμογή της μεθόδου εκτίμησης των ελαχίστων τετραγώνων, όπως αυτή παρουσιάστηκε στις παραγράφους 1.4.5 και 3.2, εφαρμόζοντας όμως περιορισμούς στις τιμές που μπορούν να λάβουν κατά την εκτίμηση οι αντιδράσεις X_{ij} .

Ο πίνακας \mathbf{y} και οι πίνακες \mathbf{s} και \mathbf{r} ορίζονται από τις σχέσεις (3.14) και (3.12) αντίστοιχα. Οι πίνακες \mathbf{b} και \mathbf{A} διαμορφώνονται από τις σχέσεις (3.15) και (3.16) αντίστοιχα. Οι περιορισμοί για τις μεταβλητές y δίνονται ως εξής:

$$y_i \geq 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, (m-1) \quad (3.17\alpha)$$

Ή γενικότερα:

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y} \quad (3.17\beta)$$

Η επίλυση των ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς ανάγεται σε ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού. Ένας αλγόριθμος που επιτρέπει την εύρεση ακριβής λύσης με μικρό αριθμό επαναλήψεων και είναι κατάλληλη για προβλήματα μεγάλης κλίμακας παρουσιάζεται στην εργασία [CL96].

3.4. Μοντέλο Εκτίμησης Παραμέτρων Δικτύου με Αντιστάσεις

Στην παράγραφο αυτή εξάγεται μια άλλη προσεγγιστική μέθοδος για την εκτίμηση των αντιδράσεων X_{ij} του δικτύου, όπου λαμβάνονται υπόψη και οι ωμικές αντιστάσεις των γραμμών. Η τροποποίηση του αρχικού μοντέλου γίνεται με σκοπό να ληφθεί υπόψη η επίδραση που έχει η διαφορά στα μέτρα των τάσεων V_i και V_j δύο γειτονικών ζυγών στη ροή ενεργού ισχύος P_{ij} . Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό κατά την εξαγωγή των εξισώσεων για το τροποποιημένο μοντέλο εκτίμησης.

3.4.1. Εξισώσεις Ροής Φορτίου με Αντιστάσεις

Αρχικά, αν ληφθεί υπόψη η πρώτη από τις προσεγγίσεις της παραγράφου 2.3, δηλαδή αν αγνοηθούν όλα τα εγκάρσια στοιχεία του δικτύου, κάθε διασύνδεση ij θα μοντελοποιείται μέσω μιας σύνθετης αντίστασης $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$. Η εξίσωση που δίνει τη ροή μιγαδικής ισχύος από τον ζυγό i προς το ζυγό j είναι:

$$S_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij} = \tilde{V}_i \tilde{I}_{ij}^* \quad (3.18)$$

Το ρεύμα που ρέει ανάμεσα στους ζυγούς i και j , έπειτα από εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff, είναι ίσο με:

$$\tilde{I}_{ij} = \frac{\tilde{V}_i - \tilde{V}_j}{R_{ij} + jX_{ij}} \quad (3.19)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.19) στη σχέση (3.18), προκύπτει:

$$S_{ij} = \frac{(V_i^2 - \tilde{V}_i \tilde{V}_j^*)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} (R_{ij} + jX_{ij}) \quad (3.20)$$

Μια τάση \tilde{V} σε μορφή φασιθέτη μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\tilde{V} = V e^{j\delta} = V (\cos \delta + j \sin \delta) \quad (3.21)$$

Όπου:

- V : το μέτρο της τάσης.
- δ : η γωνία φάσης.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.21) στη σχέση (3.20) και κάνοντας πράξεις, προκύπτει:

$$S_{ij} = \frac{V_i^2(R_{ij} + jX_{ij}) - V_i V_j [R_{ij} \cos \delta_{ij} - X_{ij} \sin \delta_{ij} + j(X_{ij} \cos \delta_{ij} + R_{ij} \sin \delta_{ij})]}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \quad (3.22)$$

Όπου $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$.

Το πραγματικό μέρος της σχέσης (3.22) θα ισούται με τη ροή ενεργού ισχύος P_{ij} :

$$P_{ij} = \frac{V_i^2 R_{ij} - V_i V_j (R_{ij} \cos \delta_{ij} - X_{ij} \sin \delta_{ij})}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \quad (3.23)$$

Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.3, η διαφορά των γωνιών σε μια γραμμή μεταφοράς κυμαίνεται συνήθως σε τιμές μικρότερες των 15° . Συνεπώς είναι δυνατό να γίνει η εξής προσέγγιση:

- $\sin \delta_{ij} \approx \delta_{ij}$
- $\cos \delta_{ij} \approx 1$

Μέσω των προσεγγίσεων αυτό η σχέση (3.23) γίνεται:

$$P_{ij} = \frac{V_i V_j X_{ij} \delta_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} + \frac{R_{ij} V_i (V_i - V_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \quad (3.24)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ωμική αντίσταση είναι ίση με ένα μικρό ποσοστό της αντίδρασης, δηλαδή:

$$R_{ij} = a X_{ij}, \quad a \ll 1 \quad (3.25)$$

Μπορούν να γίνουν οι εξής προσεγγίσεις:

$$\frac{R_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} = \frac{a}{a^2 + 1} \frac{1}{X_{ij}} \approx \frac{a}{X_{ij}} \quad (3.26\alpha)$$

$$\frac{X_{ij}}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} = \frac{1}{a^2 + 1} \frac{1}{X_{ij}} \approx \frac{1}{X_{ij}} \quad (3.26\beta)$$

Μέσω των σχέσεων (3.26), από τη σχέση (3.24) προκύπτει:

$$P_{ij} = \frac{V_i V_j \delta_{ij}}{X_{ij}} + \frac{a V_i (V_i - V_j)}{X_{ij}} \quad (3.27)$$

Στη σχέση (3.27) είναι εμφανές ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη προσέγγιση της ροής φορτίου ΣΡ, ενώ ο δεύτερος όρος οφείλεται στη διαφορά των μέτρων των τάσεων V_i και V_j και στην αντίσταση της γραμμής. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.3, τα μέτρα των τάσεων των ζυγών για κανονικές συνθήκες λειτουργίας κυμαίνονται ανάμεσα σε 0.95 και 1.05. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αν θεωρηθεί για παράδειγμα ότι ο ζυγός i είναι ζυγός παραγωγής και ο ζυγός j είναι ζυγός φορτίου τότε η τάση V_i θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την τάση V_j . Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, ο δεύτερος όρος για διαφορετικά στιγμιότυπα θα είναι πάντα θετικός και προσθέτει σφάλμα στην εκτίμηση μέσω του αρχικού μοντέλου εκτίμησης (εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ).

Σύμφωνα με τη σχέση (2.32), για το γινόμενο $V_i V_j$ μπορεί να γίνει η εξής προσέγγιση:

$$V_i V_j \approx 1 \quad (3.28)$$

Θέτοντας στη σχέση (3.27) $\beta_{ij} = aV_i(V_i - V_j)$ και μέσω της σχέσης (3.28) προκύπτει:

$$-X_{ij}P_{ij} + \delta_i - \delta_j + \beta_{ij} = 0 \quad (3.29)$$

Η σχέση (3.29) δίνει το τροποποιημένο μοντέλο εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου, όπου γίνεται η παραδοχή ότι το β_{ij} δεν μεταβάλλεται μεταξύ στιγμιότυπων.

3.4.2. Συστηματική Κατάστροση Εξισώσεων

Έστω ένα δίκτυο n ζυγών και m διασυνδέσεων, για το οποίο υπάρχουν $k \cdot m$ μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος P_{ij} , με k τον αριθμό των στιγμιότυπων (σημείων λειτουργίας). Παράλληλα, όπως και στην παράγραφο 2.3, γίνονται οι εξής παραδοχές:

- Θεωρείται ο ζυγός 1 ως ζυγός αναφοράς και συνεπώς θα ισχύει για όλα τα στιγμιότυπα t ότι $\delta_1^{(t)} = 0$.
- Θεωρείται γνωστή η αντίδραση X_{1q} μια διασύνδεση του ζυγού 1 ως ένα από τους γειτονικούς του ζυγούς q .

Η σχέση (3.29) μπορεί να γραφτεί για κάθε σύνδεση και για κάθε στιγμιότυπο t :

$$-\hat{X}_{ij}P_{ij}^{(t)} + \hat{\delta}_i^{(t)} - \hat{\delta}_j^{(t)} + \hat{\beta}_{ij} = 0 \quad (3.30)$$

Όπου $\hat{}$ δείχνει τις προς εκτίμηση παραμέτρους. Σε σχέση με τη διατύπωση του προβλήματος στην παράγραφο 3.2, όπως φαίνεται από τη σχέση (3.30) εισάγονται m νέοι άγνωστοι, ένας για κάθε διασύνδεση.

Μέσω των εξισώσεων (3.30) ένα σύστημα $k \times m$ γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους:

- $(m-1)$ αγνώστους \hat{X}_{ij} , ένα για κάθε διασύνδεση.
- $(n-1) \cdot k$ αγνώστους $\delta_i^{(t)}$, ένα για κάθε μέτρηση $t = 1, \dots, k$ και κάθε ζυγό $i = 1, \dots, n$.
- m αγνώστους $\hat{\beta}_{ij}$, ένα για κάθε διασύνδεση.

Για να υπάρχει λύση για το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$k \cdot m \geq (2m-1) + (n-1) \cdot k \quad (3.31)$$

Σύμφωνα με το συμβολισμό (3.12), οι εξισώσεις (3.30) ξαναγράφονται:

$$-X_d P_d^{(t)} + \delta_{sd}^{(t)} - \delta_{rd}^{(t)} + \beta_d = 0 \quad (3.32)$$

Για τη λύση του προβλήματος εφαρμόζεται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς. Οι αντιδράσεις \hat{X}_d περιορίζονται ώστε να είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν.

Οι παράγοντες $\hat{\beta}_d$ περιορίζονται μέσα σε ένα διάστημα. Οι ανισωτικοί περιορισμοί που εφαρμόζονται στις μεταβλητές y δίνονται ως εξής:

$$y_d \geq 0, \quad \text{για } d = 1 \dots (m-1) \quad (3.33)$$

$$-0.1 \leq \beta_d \leq 0.1 \quad (3.34)$$

Η μητρική μορφή των εξισώσεων του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{y}_m + \mathbf{e}_m \quad (3.35)$$

Όπου ο δείκτης m έχει προστεθεί για να υπάρχει διαχωρισμός από τις εξισώσεις της παραγράφου 3.2.3.

Ο πίνακας \mathbf{y}_m ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{y}_m = \left[X_2 \quad \dots \quad X_m \mid \delta_2^{(1)} \quad \dots \quad \delta_n^{(1)} \mid \dots \mid \delta_2^{(k)} \quad \dots \quad \delta_n^{(k)} \mid \beta_1 \quad \dots \quad \beta_m \right]^T \quad (3.33)$$

Ο πίνακας \mathbf{y}_m έχει διαστάσεις $(2m-1) + (n-1) \cdot k$.

Ο πίνακας \mathbf{b}_m διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{b}_m = \left[\underbrace{P_1^{(1)} X_1 \quad \dots \quad P_1^{(k)} X_1}_{k \text{ στοιχεία}} \mid \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{k \times (m-1) \text{ στοιχεία}} \right]^T \quad (3.34)$$

Ο πίνακας \mathbf{b}_m έχει διαστάσεις $k \cdot m$.

Αν ο πίνακας \mathbf{A} είναι ο πίνακας της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, όπως διαμορφώθηκε από τη σχέση (3.16), τότε με προσθήκη k στηλών δεξιά του πίνακα \mathbf{A} μπορεί να προκύψει ο πίνακας \mathbf{A}_m :

$$\mathbf{A}_m = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & 1 & 0 & \ddots & \text{μπλοκ} & & 0 \\ & \vdots & \vdots & & k \times k & \ddots & \vdots \\ & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & - & - & - & - & - & - \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \text{μπλοκ} & & 0 \\ & \vdots & \vdots & & k \times k & \ddots & \vdots \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & - & - & - & - & - & - \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & \dots & & & 0 & 1 \\ & 0 & \ddots & \text{μπλοκ} & & & 0 & 1 \\ & \vdots & & k \times k & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & \dots & & & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.35)$$

Από τη σχέση (3.35) φαίνεται ότι οι τελευταίες k στήλες του πίνακα \mathbf{A}_m σχηματίζουν m υποπίνακες μεγέθους $k \times k$. Ο i υποπίνακας έχει όλα τα στοιχεία της στήλης i ίσα με 1 και τα υπόλοιπα του στοιχεία ίσα με 0.

3.5. Τροποποιημένη Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η επιλυσιμότητα της μεθόδου εκτίμησης των αντιδράσεων της παραγράφου 3.2, επηρεάζεται σημαντικά από την ποιότητα των μετρήσεων ενεργού ισχύος. Η ποιότητα των μετρήσεων θα εξεταστεί πιο λεπτομερώς στο 4^ο Κεφάλαιο (Παράγραφος 4.4). Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η περίπτωση που οι μετρήσεις είναι σε σημαντικό βαθμό γραμμικά εξαρτημένες, οπότε ο πίνακας $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (Σχέση 3.16) είναι κοντά στο να γίνει ιδιάζων και το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων παρουσιάζει απειρία λύσεων. Επιπλέον η λύση που προκύπτει για ένα τέτοιο σύνολο μετρήσεων (όπου ο πίνακας που αντιστρέφεται είναι σχεδόν ιδιάζων) δεν αντιστοιχεί κατ' ανάγκην στο πραγματικό δίκτυο.

Αν δεν θεωρηθεί γνωστή μια αντίδραση του δικτύου, όπως στην παράγραφο 3.2, ο πίνακας \mathbf{b} είναι μηδενικός και ο πίνακας $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ έχει τουλάχιστον μια μηδενική ιδιοτιμή λόγω του ομογενούς

προβλήματος (αν υπάρχει λύση X υπάρχει και για όλα τα πολλαπλάσια αX). Για γραμμικά ανεξάρτητες μετρήσεις, οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων μπορούν να προκύψουν από το ιδιοδιάνυσμα της μηδενικής ιδιοτιμής (ως συνάρτηση μιας πραγματικής παραμέτρου). Για γραμμικά εξαρτημένες μετρήσεις, ο $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ έχει περισσότερες μηδενικές ιδιοτιμές και δεν υπάρχει επαρκής πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια προσέγγιση για να ξεπεραστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα και να γίνει η κατάστρωση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων με τρόπο που να εξασφαλίζεται η εύρεση μιας μη μηδενικής λύσης, ακόμη και όταν ο πίνακας $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ έχει περισσότερες μηδενικές ιδιοτιμές. Ακόμη, η προσέγγιση της παρούσας ενότητας μπορεί να εξασφαλίσει ότι οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων θα είναι θετικές.

Θεωρούνται k στιγμιότυπα λειτουργίας και δίκτυο n κόμβων και m κλάδων. Θεωρούνται άγνωστες όλες τις αντιδράσεις των m κλάδων του δικτύου. Όπως και στην παράγραφο 3.2.2. η γωνία του ζυγού 1 θεωρείται γνωστή και ίση με το μηδέν. Με χρήση των εξισώσεων (3.8) για κάθε στιγμιότυπο και κάθε κλάδο, προκύπτει ένα σύστημα $k \cdot m$ γραμμικών εξισώσεων με :

- m αγνώστους \hat{X}_{ij} , ένα για κάθε διασύνδεση.
- $(n-1) \cdot k$ αγνώστους $\hat{\delta}_i^{(t)}$, ένα για κάθε μέτρηση $t = 1, \dots, k$ και κάθε ζυγό $i = 2, \dots, n$.

Για να υπάρχει λύση για το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$k \cdot m \geq m + (n-1) \cdot k \quad (3.36)$$

Από τη σχέση (3.36), για να είναι εφικτή η επίλυση, ο αριθμός των μετρήσεων θα πρέπει να είναι:

$$k \geq \frac{m}{m-n+1} \quad (3.37)$$

Σύμφωνα με το συμβολισμό (3.12), γράφονται εξισώσεις της ροής φορτίου ΣΡ για κάθε στιγμιότυπο και κάθε διασύνδεση:

$$-X_d P_d^{(t)} + \delta_{sd}^{(t)} - \delta_{rd}^{(t)} = 0 \quad (3.38)$$

Η μητρική μορφή των εξισώσεων του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{y}_n + \mathbf{e}_n \quad (3.39)$$

Όπου ο δείκτης n έχει προστεθεί για να υπάρχει διαχωρισμός από τις εξισώσεις των ενοτήτων 3.2. και 3.4.

Ο πίνακας \mathbf{y}_n των αγνώστων παραμέτρων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{y}_n = [X_1 \quad \cdots \quad X_m \mid \delta_2^{(1)} \quad \cdots \quad \delta_n^{(1)} \mid \cdots \mid \delta_2^{(k)} \quad \cdots \quad \delta_n^{(k)}]^T \quad (3.40)$$

Ο πίνακας \mathbf{y}_n έχει διαστάσεις $m + (n-1) \cdot k$.

Ο πίνακας \mathbf{b}_n έχει μηδενικά στοιχεία και διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{b}_n = [0 \quad \cdots \quad 0]^T \quad (3.41)$$

Ο πίνακας \mathbf{b}_n έχει διαστάσεις $k \cdot m$.

Αν ο πίνακας \mathbf{A} είναι ο πίνακας της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, όπως διαμορφώθηκε από τη σχέση (3.16), τότε με προσθήκη 1 στήλης, της οποίας τα πρώτα k στοιχεία είναι $-P_1^{(1)}, \dots, -P_1^{(k)}$ και τα υπόλοιπα μηδενικά, αριστερά του πίνακα \mathbf{A} μπορεί να προκύψει ο πίνακας \mathbf{A}_n :

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} -P_1^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ -P_1^{(k)} & \vdots \\ \hline 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{array} \right] \mathbf{A} \quad (3.42)$$

Ο πίνακας \mathbf{A}_n έχει διαστάσεις $km \times [m + k(n-1)]$.

Το κριτήριο που ελαχιστοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{km} e_i^2 + c \sum_{i=1}^m (y_i - 1)^2 = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{e} + c(\mathbf{y} - [\mathbf{1}])^T \mathbf{I}_{m,km} (\mathbf{y} - [\mathbf{1}]) = \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}) + c(\mathbf{y} - [\mathbf{1}])^T \mathbf{I}_{m,km} (\mathbf{y} - [\mathbf{1}]) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Όπου:

- $[1]$: Διάνυσμα στήλης διάστασης km με όλα τα στοιχεία ίσα με το 1.
- $\mathbf{I}_{m,km}$: Πίνακας διαστάσεων $km \times km$, με τα πρώτα m στοιχεία της διαγωνίου ίσα με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία μηδενικά.
- c : Θετική πραγματική σταθερά.

Έπειτα από πράξεις, η έκφραση (3.43) γίνεται:

$$S(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + c\mathbf{y}^T \mathbf{I}_{m,km} \mathbf{y} - 2c[1]^T \mathbf{I}_{m,km} \mathbf{y} + \mathbf{I}_{m,km} \quad (3.44)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.44) λαμβάνουμε:

$$\nabla S(\mathbf{y}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + 2c\mathbf{I}_{m,km} \mathbf{y} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} + 2c\mathbf{I}_{m,km} [1] \quad (3.45)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.45), ο πίνακας δευτέρων παραγώγων της $S(\mathbf{y})$ προκύπτει:

$$\nabla^2 S(\mathbf{y}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} + 2c\mathbf{I}_{m,km} \quad (3.46)$$

Από τη σχέση (3.46) η μήτρα δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης $S(\mathbf{y})$ είναι ένας πίνακας μη αρνητικά ορισμένος, επομένως τα σημεία για τα οποία μηδενίζεται η κλίση της $S(\mathbf{y})$ είναι ελάχιστα της συνάρτησης (3.43). Από τη σχέση (3.45) εξισώνοντας με το μηδέν και θεωρώντας $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + c\mathbf{I}_{m,km}$ έχει μη μηδενική ορίζουσα, προκύπτει:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + c\mathbf{I}_{m,km})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b} + c\mathbf{I}_{m,km} [1]) \quad (3.47)$$

Η σχέση (3.47) δίνει το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $S(\mathbf{y})$. Σημειώνεται ότι ο πίνακας $\mathbf{I}_{m,km} [1]$ είναι διάνυσμα στήλης διάστασης km με τα πρώτα m στοιχεία ίσα με 1 και τα υπόλοιπα μηδενικά.

Η εξίσωση (3.43) είναι το άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος είναι το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων και η ελαχιστοποίηση του οδηγεί στην εύρεση ενός συνόλου εκτιμήσεων για τις άγνωστες παραμέτρους (X_{ij} , $\delta_{ij}^{(t)}$), με τις τιμές των εκτιμήσεων να ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.38) στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Ο δεύτερος όρος προσδιορίζει την περιοχή στην οποία θα αναζητηθεί η λύση για τις άγνωστες παραμέτρους X_{ij} , και μ' αυτό τον τρόπο λύνεται το πρόβλημα της απροσδιοριστίας λόγω απειρίας των λύσεων. Όπως ορίζεται από τη σχέση (3.43), η ελαχιστοποίηση του συγκεκριμένου όρου ουσιαστικά οδηγεί τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων X_{ij} σε τιμές στην περιοχή του 1.

Η σταθερά c δίνει το βάρος της δεύτερης συνθήκης, δηλαδή το πόσο ισχυρή είναι η «έλξη» των εκτιμήσεων προς τη μονάδα. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, επιλέγεται αρχικά μια μικρή τιμή για τη σταθερά c . Αν για τη δοσμένη τιμή του c , οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων X_{ij} έχουν μη υλοποιήσιμες τιμές (αρνητικές ή μηδενικές), τότε το πρόβλημα ξαναλύνεται για μεγαλύτερη τιμή του c , ώστε να βρεθεί ένα σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις X_{ij} που να αντιστοιχεί σε υλοποιήσιμο κύκλωμα. Σε μια τέτοια περίπτωση, η τελική εκτίμηση εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς c .

Η τροποποιημένη μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι σχεδιασμένη με τρόπο ώστε οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου να οδηγούνται σε τιμές κοντά στη μονάδα. Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.3.6, ο πολλαπλασιασμός των εξισώσεων ΣΡ με μια σταθερά a δεν αλλάζει τον υπολογισμό της ροής ενεργού ισχύος P , απλά η αντίδραση X και οι γωνίες δ πολλαπλασιάζονται επί τη σταθερά a . Συνεπώς, στην εκτίμηση των αντιδράσεων X με γνωστές τις ροές ενεργού ισχύος P δεν είναι αναγκαίο να βρεθούν επακριβώς οι πραγματικές τιμές των αντιδράσεων του δικτύου, αρκεί να υπάρχει η σωστή αναλογία ανάμεσα στις εκτιμήσεις των αντιδράσεων. Σε περίπτωση που υπάρχει γνώση των πραγματικών τιμών των αντιδράσεων του δικτύου και είναι επιθυμητή η σύγκριση των εκτιμήσεων με τις πραγματικές τιμές, αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω κατάλληλης κανονικοποίησης των εκτιμήσεων.

3.6. Εκτίμηση με Χρήση Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος και Γωνιών

Σε περίπτωση που υπάρχει γνώση των γωνιών ορισμένων ζυγών, είτε μέσω της επίλυσης της ροής φορτίου εναλλασσομένου ρεύματος είτε μέσω μετρήσεων από PMU (Phasor Measurement Units – Μονάδες Μέτρησης Φασιθετών), είναι δυνατή η εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων ροής ενεργού ισχύος και των μετρήσεων των γωνιών.

Θεωρείται ένα δίκτυο n ζυγών και m κλάδων και k στιγμιότυπα λειτουργίας. Θεωρούνται γνωστές οι γωνίες τάσης n_d ζυγών και οι ροές ενεργού ισχύος σε όλους τους κλάδους, για τα k στιγμιότυπα λειτουργίας. Όπως και στην παράγραφο 3.2.2, η γωνία τάσης του ζυγού 1 θεωρείται γνωστή και ίση με το μηδέν. Με χρήση των εξισώσεων (3.8) για κάθε στιγμιότυπο και κάθε κλάδο, προκύπτει ένα σύστημα $k \cdot m$ γραμμικών εξισώσεων με :

- m αγνώστους \hat{X}_{ij} , ένα για κάθε διασύνδεση.
- $(n - n_\delta) \cdot k$ αγνώστους $\hat{\delta}_i^{(t)}$, ένα για κάθε μέτρηση $t = 1, \dots, k$ και κάθε ζυγό $i \notin O_\delta$ (O_δ : Σύνολο ζυγών, για τους οποίους υπάρχει γνώση της γωνίας)

Για να υπάρχει λύση για το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$k \cdot m \geq m + (n - n_\delta) \cdot k \quad (3.48)$$

Από τη σχέση (3.48), για να είναι εφικτή η επίλυση, ο αριθμός των μετρήσεων θα πρέπει να είναι:

$$k \geq \frac{m}{m-n+n_\delta} \quad (3.49)$$

Με χρήση του συμβολισμού (3.12), γράφονται εξισώσεις της ροής φορτίου ΣΡ για κάθε στιγμιότυπο και κάθε διασύνδεση:

$$-X_d P_d^{(t)} + \delta_{sd}^{(t)} - \delta_{rd}^{(t)} = 0 \quad (3.50)$$

Σε περίπτωση που υπάρχει γνώση των γωνιών όλων των ζυγών, τότε προφανώς θα ισχύει $n = n_\delta$ και από τη σχέση (3.49) θα χρειάζεται ένα μόνο στιγμιότυπο για την εκτίμηση των παραμέτρων. Από τη σχέση (3.50), προκύπτει άμεσα η αντίδραση X_d κάθε κλάδου του δικτύου:

$$X_d = \frac{\delta_{sd} - \delta_{rd}}{P_d} \quad (3.51)$$

Ο δείκτης του εκθέτη (t) προφανώς παραλείπεται, καθώς αναφερόμαστε στις μετρήσεις ενός στιγμιότυπου.

Στη γενική περίπτωση, είναι γνωστές γωνίες n_δ ζυγών. Η μητρική μορφή των εξισώσεων του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$\mathbf{b}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{y}_l + \mathbf{e}_l \quad (3.52)$$

Όπου ο δείκτης l έχει προστεθεί για να υπάρχει διαχωρισμός από τις εξισώσεις των ενοτήτων 3.2, 3.4 και 3.5.

Για να εξηγηθεί η διαμόρφωση των πινάκων της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, θεωρούμε ότι $n_\delta = 2$, δηλαδή εκτός της γωνίας αναφοράς $\delta_l^{(t)} = 0$ είναι γνωστή και η γωνία του ζυγού g $\delta_g^{(t)}$.

Ο πίνακας \mathbf{y}_l των αγνώστων παραμέτρων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{y}_l = \left[X_1 \quad \cdots \quad X_m \mid \delta_2^{(1)} \quad \delta_{g-1}^{(1)} \quad \delta_{g+1}^{(1)} \quad \cdots \quad \delta_n^{(1)} \mid \cdots \mid \delta_2^{(k)} \quad \delta_{g-1}^{(k)} \quad \delta_{g+1}^{(k)} \quad \cdots \quad \delta_n^{(k)} \right]^T \quad (3.53)$$

Ο πίνακας \mathbf{y}_l έχει διαστάσεις $m + (n-2) \cdot k$. Γενικότερα, για n_δ γνωστές γωνίες, ο \mathbf{y}_l έχει διαστάσεις $m + (n - n_\delta) \cdot k$.

Ο πίνακας \mathbf{b}_1 μπορεί να χωριστεί σε m υποπίνακες μήκους k ο καθένας. Ο υποπίνακας d αποτελείται από τα γνωστά μέρη των εξισώσεων (3.50) για τον κλάδο d του δικτύου. Στην περίπτωση που για ένα υποπίνακα ισχύει $s_d = g$ (Σχέση 3.12), τότε τα στοιχεία του d υποπίνακα θα είναι διαδοχικά $-\delta_g^{(1)}, \dots, -\delta_g^{(m)}$. Στην περίπτωση που για ένα υποπίνακα ισχύει $r_d = g$ (Σχέση 3.12), τότε τα στοιχεία του d υποπίνακα θα είναι διαδοχικά $\delta_g^{(1)}, \dots, \delta_g^{(m)}$. Τα στοιχεία των υποπινάκων, για τους οποίους δεν ισχύει κάποια από τις παραπάνω συνθήκες θα είναι μηδενικά. Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να γίνει η συμπλήρωση του πίνακα για τη γενική περίπτωση που ισχύει $n_\delta > 2$. Ο πίνακας \mathbf{b}_1 έχει διαστάσεις $k \cdot m$.

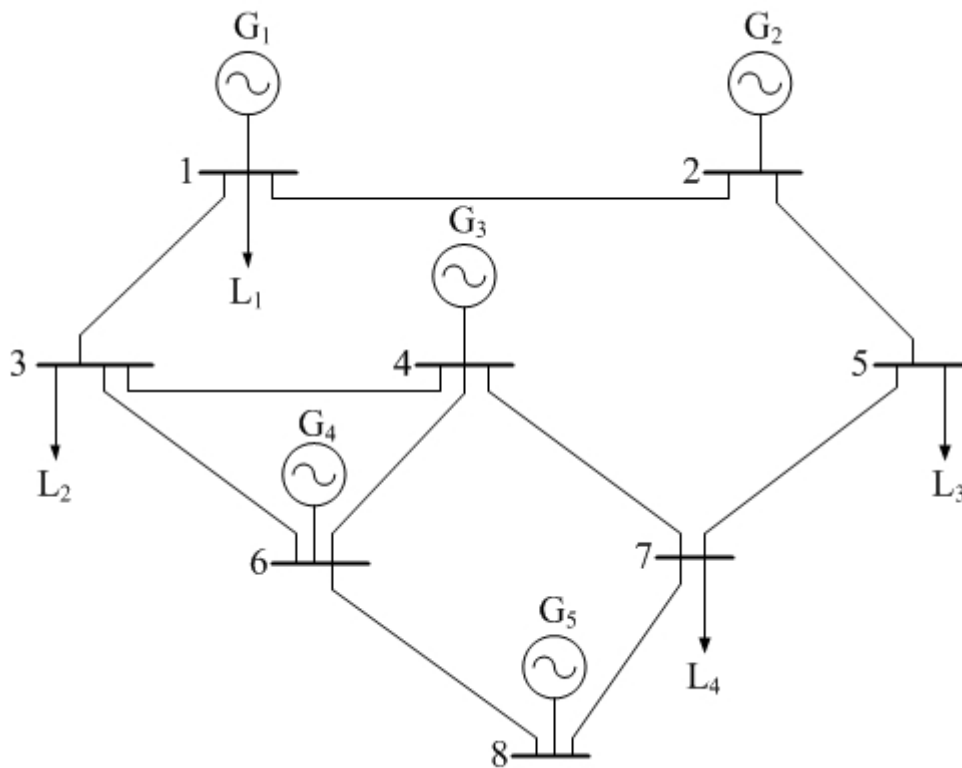
Ο πίνακας \mathbf{A}_1 μπορεί να προκύψει μέσω του πίνακα \mathbf{A}_n (Σχέσεις 3.42 και 3.16), αν από τον \mathbf{A}_n αφαιρεθούν οι στήλες με αύξοντα αριθμό $m + (t-1)(n-1) + g - 1$ για $t = 1, \dots, k$. Ο πίνακας \mathbf{A}_1 έχει διαστάσεις $k m \times [m + k(n-1)]$. Αντίστοιχα, μπορεί να κατασκευαστεί ο πίνακας \mathbf{A}_1 για $n_\delta > 2$. Στη γενική περίπτωση, για n_δ γνωστές γωνίες, ο πίνακας \mathbf{A}_1 έχει διαστάσεις $k m \times [m + k(n-1)]$.

Κεφάλαιο 4

Στιγμιότυπα Λειτουργίας για Δοκιμαστικό Δίκτυο

4.1. Δομή Δικτύου

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η διαδικασία παραγωγής στιγμιότυπων λειτουργίας σε ένα δοκιμαστικό δίκτυο 8 ζυγών και 10 διασυνδέσεων. Το δοκιμαστικό δίκτυο επιλέχθηκε για να γίνει εφαρμογή των μεθόδων εκτίμησης που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5. Το δίκτυο φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Δίκτυο 8 ζυγών – 10 διασυνδέσεων.

Από το Σχήμα 4.1. παρατηρούμε ότι το σύστημα:

- Έχει 5 γεννήτριες, μια σε καθένα από τους ζυγούς 1, 2, 4, 6 και 8.
- Έχει 4 φορτία σταθερής ισχύος, ένα σε καθένα από τους ζυγούς 1, 3, 5 και 7.

Η βάση ισχύος του συστήματος είναι $S_B = 100$ MVA. Για όλους τους ζυγούς η βάση τάσης είναι $V_B = 150$ kV. Στον Πίνακα 4.1 δίνονται οι αντιστάσεις R_{ij} και οι αντιδράσεις X_{ij} των γραμμών μεταφοράς στο ανά μονάδα σύστημα.

Πίνακας 4.1: Παράμετροι Γραμμών Μεταφοράς Δοκιμαστικού Δικτύου

Γραμμή	X (αμ)	R (αμ)
1-2	0.2	0.02
2-5	0.34	0.034
3-4	0.25	0.025
3-1	0.235	0.0235
4-6	0.36	0.036
4-7	0.26	0.026
5-7	0.175	0.0175
6-3	0.18	0.018
6-8	0.215	0.0215
7-8	0.135	0.0135

Από τον Πίνακα 4.1 είναι εμφανές ότι σε όλες τις γραμμές η αντίσταση R_{ij} είναι ίση με το 1/10 της αντίδρασης X_{ij} .

4.2. Δημιουργία Στιγμιότυπων Λειτουργίας

4.2.1. Γενικά

Για το δίκτυο 8 ζυγών του Σχήματος 4.1. πραγματοποιήθηκαν διαδοχικές επιλύσεις του προβλήματος ροής φορτίου για διαφορετικά δεδομένα, δηλαδή παραγωγές ενεργού ισχύος P_G των γεννητριών του συστήματος και φορτία σταθερής ισχύος S_L . Για κάθε σύνολο δεδομένων, η επίλυση της ροής φορτίου γίνεται στο πρόγραμμα Power World Simulator και οδηγεί στην πλήρη γνώση του σημείου (ή στιγμιότυπου) λειτουργίας του συστήματος για τα συγκεκριμένα δεδομένα. Από το στιγμιότυπο λειτουργίας λαμβάνονται οι μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς, που αποτελούν τα δεδομένα για την εφαρμογή της μεθόδου εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου.

Ο ζυγός 1 του δικτύου (Σχήμα 4.1) θεωρείται ως ζυγός αναφοράς ($\delta = 0$). Η τάση του καθορίζεται ίση με 1 αμ. Συνεπώς, η παραγωγή ενεργού ισχύος της γεννήτριας G_1 προκύπτει από τη λύση της ροής φορτίου και δεν είναι δεδομένο όπως οι παραγωγές για τις υπόλοιπες γεννήτριες του συστήματος λόγω των απωλειών. Μ' αυτή τη θεώρηση, η γεννήτρια G_1 ουσιαστικά θα μπορούσε να αναπαριστά ένα μεγαλύτερο δίκτυο με το οποίο είναι συνδεδεμένο το δίκτυο του Σχήματος 4.1. Θετική τιμή της παραγωγής ενεργού ισχύος P_{G1} (ή αέργου ισχύος Q_{G1}) σημαίνει ότι το μεγαλύτερο δίκτυο δίνει ενεργό ισχύ (ή άεργο ισχύ) στο δίκτυο του Σχήματος 4.1, ενώ αρνητική τιμή της παραγωγής ενεργού ισχύος P_{G1} (ή αέργου ισχύος Q_{G1}) σημαίνει ότι το μεγαλύτερο δίκτυο λαμβάνει ενεργό ισχύ (ή άεργο ισχύ) από το δίκτυο του Σχήματος 4.1.

Για τη δοκιμή της μεθόδου εκτίμησης παραμέτρων δημιουργήθηκαν με την παραπάνω μεθοδολογία τρία σύνολα «μετρήσεων», τα οποία στο εξής θα αναφέρονται ως σύνολο μετρήσεων Α, Β και Γ αντίστοιχα.

4.2.2. Σύνολο Μετρήσεων Α

Για την εξαγωγή των διαφορετικών στιγμιότυπων στο Σύνολο Μετρήσεων Α έγιναν σχετικά μικρές μεταβολές στα δεδομένα εισόδου, δηλαδή στις παραγωγές ενεργού ισχύος P_G των γεννητριών του συστήματος και στα φορτία S_L ως προς ένα αρχικό στιγμιότυπο. Αναφέρονται οι απαραίτητες θεωρήσεις που έγιναν κατά την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο:

- Οι ζυγοί 2, 4, 6, 8 θεωρούνται ζυγοί παραγωγής.
- Οι ζυγοί 3,5,7 θεωρούνται ζυγοί φορτίου.
- Η τιμή της τάσης όλων των ζυγών παραγωγής καθορίζεται ίση με 1.05 αμ.
- Σε περίπτωση που στη λύση της ροής φορτίου, η τιμή της τάσης ενός ή περισσότερων ζυγών φορτίου είναι χαμηλότερη του 0.95 αμ, τότε η λύση δεν είναι αποδεκτή, καθώς το στιγμιότυπο που προέκυψε δεν ανταποκρίνεται στις τυπικές συνθήκες λειτουργίας των συστημάτων μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Για τη λήψη ενός αποδεκτού στιγμιότυπου, στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται προσθήκη συστοιχίας εγκάρσιων πυκνωτών σε κάθε προβληματικό ζυγό και επιλύεται ξανά το πρόβλημα ροής φορτίου. Μέσω δοκιμών, βρίσκεται κατάλληλο μέγεθος πυκνωτών (συνολική παραγόμενη άεργος ισχύς σε MVar), ώστε η τάση όλων των ζυγών να είναι μεγαλύτερη του κατώτατου ορίου των 0.95 αμ.

Στον Πίνακα 4.2. δίνονται τα δεδομένα για την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο του Συνόλου Μετρήσεων Α.

Πίνακας 4.2: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο Α).

Στιγμιότυπο 1					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	75	1.05			-
3			50	35	-
4	80	1.05			-
5			80	60	40,6
6	55	1.05			-
7			100	55	9.1
8	110	1.05			-

Στιγμιότυπο 2					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	80	1.05			-
3			48	25	-
4	72	1.05			-
5			75	35	4.53
6	58	1.05			-
7			92	53	-
8	100	1.05			-

Στιγμιότυπο 3					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	85	1.05			-
3			60	25	-
4	75	1.05			-
5			90	50	21.74
6	60	1.05			-
7			90	45	-
8	95	1.05			-

Στιγμιότυπο 4					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	82	1.05			-
3			55	25	-
4	66	1.05			-
5			86	53	21.74
6	65	1.05			-
7			92	39	-
8	90	1.05			-

Στιγμιότυπο 5					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	79	1.05			-
3			45	28	-
4	76	1.05			-
5			81	36	10.86
6	70	1.05			-
7			100	57	-
8	103	1.05			-

Στιγμιότυπο 6					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	72	1.05			-
3			41	22	-
4	70	1.05			-
5			72	30	-
6	50	1.05			-
7			87	35	-
8	87	1.05			-

Στιγμιότυπο 7					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	87	1.05			-
3			62	35	-
4	82	1.05			-
5			95	51	29.84
6	73	1.05			-
7			110	58	-
8	112	1.05			-

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στην παραγόμενη άεργο ισχύ δεν προσμετράται η συμβολή των συστοιχιών πυκνωτών. Στον Πίνακα 4.3 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος.

Πίνακας 4.3: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο Α).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7
$P_{Goλ}$ (MW)	435.37	419.94	444.86	437.51	436.65	403.87	473.27
$Q_{Goλ}$ (MVar)	199.19	186.03	176.97	170.71	196.61	155.96	206.87
$P_{Loλ}$ (MW)	430	415	440	433	431	400	467
$Q_{Loλ}$ (MVar)	180	143	150	147	151	117	174

Η διαφορά $P_{Goλ} - P_{Loλ}$ δίνει τις συνολικές ωμικές απώλειες στις γραμμές μεταφοράς του δικτύου. Από τον Πίνακα 4.3 φαίνεται ότι τα στιγμιότυπα 1 έως 8 δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς τη συνολική παραγωγή και κατανάλωση ενεργού και αέργου ισχύος στο δίκτυο. Η μέγιστη τιμή παραγόμενης ενεργού ισχύος (473.27 MW), συμπίπτει με τη μέγιστη τιμή παραγόμενης αέργου ισχύος (206.87 MVar) στο στιγμιότυπο 7, όπως και οι αντίστοιχες ελάχιστες τιμές εμφανίζονται στο στιγμιότυπο 6.

Στον Πίνακα 4.4 φαίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες και οι τάσεις των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα. Μέσω των τιμών των τάσεων και των γωνιών των ζυγών μπορούμε να διαπιστώσουμε αν τα στιγμιότυπα πληρούν τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν για τη ροή φορτίου ΣΡ.

Πίνακας 4.4: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο Α).

Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	1		2		3		4	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	4.5	1.05	5.1	1.05	4.4	1.05	4.1	1.05
3	5.72	1.001	5.6	1.009	3.7	1.009	3.5	1.009
4	10.5	1.05	10.1	1.05	8.1	1.05	7.1	1.05
5	-1.2	0.953	-0.4	0.952	-3.3	0.952	-3.5	0.952
6	11.1	1.05	10.9	1.05	8.9	1.05	8.4	1.05
7	4.1	0.971	4.3	0.973	1.9	0.978	1.1	0.982
8	11.6	10.5	11.3	1.05	8.8	1.05	7.9	1.05
Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	5		6		7			
	δ	V	δ	V	δ	V		
1	0	1	0	1	0	1		
2	4.7	1.05	4.2	1.05	4.6	1.05		
3	6.3	1.006	4.7	1.013	5.1	1		
4	10.6	1.05	8.5	1.05	9.8	1.05		
5	-1.4	0.951	-1.4	0.962	-3.2	0.951		
6	11.9	1.05	9	1.05	11.1	1.05		
7	3.8	0.969	2.8	0.99	2.6	0.966		
8	11.5	1.05	9	1.05	10.8	1.05		

Από τον Πίνακα 4.4. παρατηρούμε ότι οι γωνίες των ζυγών είναι μεταξύ -4° και 12° και τα μέτρα των τάσεων είναι μεταξύ 0.95 και 1.05 αμ και συνεπώς αναμένεται η προσέγγιση ροής φορτίου ΣΡ να δίνει μικρά σφάλματα σε σχέση με τη ροή φορτίου ΕΡ.

Στον Πίνακα 4.5, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου ΕΡ. Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων Α για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου. Σημειώνεται ότι λόγω των απωλειών οι μετρήσεις ροών είναι οι μέσοι όροι των ροών ενεργού ισχύος στα δύο άκρα της γραμμής (Παράγραφος 3.2.1 – Σχέση 3.6).

Πίνακας 4.5: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων Α.

i	j	Στιγμιότυπα						
		1	2	3	4	5	6	7
1	2	-42.48	-48.135	-40.235	-39.305	-44.565	-38.01	-41.525
2	5	31.52	30.825	38.18	41.7	33.495	29.065	38.675
3	4	-35.91	-33.94	-31.945	-28.38	-33.045	-28.665	-34.29
3	1	42.09	41.895	26.995	26.02	46.845	33.955	35.66
4	6	-3.2	-4.495	-4.07	-6.89	-6.79	-2.59	-6.725
4	7	46.24	41.795	41.945	43.795	48.9	39.695	47.895
5	7	-48.93	-44.305	-46.26	-44.495	-47.58	-39.23	-50.28
6	3	56.485	56.305	52.085	52.935	59.27	44.82	60.02
6	8	-5	-3.1	0.9	4.9	3.6	0.5	2.295
7	8	-102.42	-94.64	-87.235	-92.805	-103.79	-80.59	-101.89

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρία Σύνολα Μετρήσεων, τα οποία βασίζονται στο Σύνολο Μετρήσεων Α. Στόχος της εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου μέσω των τριών αυτών συνόλων μετρήσεων είναι να αναδειχθεί η επίδραση που έχουν διαφορετικοί παράγοντες όπως η ύπαρξη ωμικών αντιστάσεων ή το γεγονός ότι το δίκτυο δεν έχει επίπεδο προφίλ τάσης ($V_i = 1$ αμ), στην ακρίβεια της εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων. Συγκεκριμένα, στο Σύνολο Μετρήσεων Α₁ ικανοποιούνται στο μέγιστο βαθμό οι υποθέσεις της ροής φορτίου ΣΡ. Το Σύνολο Α₂ έχει δημιουργηθεί με τρόπο που να αναδεικνύεται η επίδραση που έχουν μικρές αποκλίσεις των τάσεων από την ονομαστική στην ακρίβεια της εκτίμησης. Το Σύνολο Α₃ έχει δημιουργηθεί με στόχο να αναδεικνύεται η επίδραση των αέργων φορτίων στην εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου.

4.2.3. Σύνολο Μετρήσεων A_1

Όπως προαναφέρθηκε, το συγκεκριμένο σύνολο μετρήσεων έχει εξαχθεί με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται σε μέγιστο βαθμό οι υποθέσεις της ροής φορτίου ΣΡ. Το πρόβλημα της ροής φορτίου ΕΡ διαμορφώνεται με τρόπο ώστε η μοναδική διαφορά ανάμεσα στη ροή φορτίου ΕΡ και στη ροή φορτίου ΣΡ να έγκειται στη μη γραμμικότητα των εξισώσεων της ροής φορτίου ΕΡ (2.17), λόγω της ύπαρξης του ημιτόνου. Οι απαραίτητες θεωρήσεις που έγιναν κατά την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο, είναι οι εξής:

- Όλες οι γραμμές μεταφοράς δεν έχουν ωμική αντίσταση και η αντίδρασή τους είναι ίση με την τιμή του Πίνακα 4.1.
- Όλοι οι ζυγοί, εκτός του ζυγού 1 (ζυγός ταλάντωσης), είναι ζυγοί παραγωγής (PV).
- Η τάση σε όλους τους ζυγούς καθορίζεται ίση με 1.
- Η παραγόμενη ενεργός ισχύς των γεννητριών για τους ζυγούς 2, 4, 6, 8 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η ενεργός ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η άεργος ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση με 0.

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύς για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στον Πίνακα 4.6 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος.

Πίνακας 4.6: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A_1).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7
P_{Go} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Go} (MVar)	46.06	42.5	42.16	39.17	49.06	34.18	54.16
P_{Lo} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Lo} (MVar)	0	0	0	0	0	0	0

Εφόσον δεν υπάρχουν ωμικές απώλειες στο δίκτυο, η ολική παραγόμενη ισχύς ισούται με την ολική καταναλισκόμενη ισχύ του δικτύου, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.6.

Στον Πίνακα 4.7 φαίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα.

Πίνακας 4.7: Γωνίες Ζυγών δ_i (°) (Σύνολο A_1).

Ζυγός	Στιγμιότυπα						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	5.21	5.85	5.15	4.79	5.46	4.81	5.39
3	6.01	5.95	4.04	3.8	6.67	5	5.4
4	11.34	10.96	8.98	8	11.56	9.39	10.74
5	-0.56	0.17	-2.68	-3.07	-0.67	-1.07	-2.44
6	11.95	11.85	9.79	9.38	12.91	9.9	12.1
7	4.5	4.78	2.33	1.52	4.31	3.14	3.08
8	12.62	12.27	9.74	8.84	12.54	9.89	11.9

Από τον Πίνακα 4.7. παρατηρούμε ότι οι γωνίες λαμβάνουν χαμηλές τιμές, μικρότερες των 15° , σε όλους τους ζυγούς και για όλα τα στιγμιότυπα.

Στον Πίνακα 4.8, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου EP. Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων A_1 για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Πίνακας 4.8: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A_1 .

i	j	Στιγμιότυπα						
		1	2	3	4	5	6	7
1	2	-45.4	-50.9	-44.9	-41.8	-47.6	-41.9	-46.9
2	5	29.6	29.1	40.1	40.2	31.4	30.1	40.1
3	4	-37.1	-34.9	-34.4	-29.3	-34.1	-30.6	-37.3
3	1	44.6	44.1	30	28.2	49.5	37.1	40.1
4	6	-3	-4.3	-3.9	-6.7	-6.6	-2.5	-6.6
4	7	45.8	41.4	44.5	43.4	48.5	41.9	51.3
5	7	-50.4	-45.9	-50	-45.8	-49.6	-41.9	-54.9
6	3	57.5	57.1	55.6	54	60.4	47.5	64.8
6	8	-5.4	-3.4	0.4	4.4	3	0.1	1.6
7	8	-104.6	-96.6	-95.4	-94.4	-106.1	-87	-113.6

4.2.4. Σύνολο Μετρήσεων A₂

Το συγκεκριμένο σύνολο μετρήσεων προκύπτει διατηρώντας τις υποθέσεις που έγιναν κατά την επίλυση της ροής φορτίου για την εξαγωγή του συνόλου A₁, εκτός της υπόθεσης ότι όλοι οι ζυγοί θεωρούνται ως ζυγοί PV. Ως αποτέλεσμα αναμένεται οι ζυγοί φορτίου να παρουσιάζουν τάσεις μικρότερες του 1 αμ. Ξαναγράφονται συνολικά οι θεωρήσεις για την επίλυση της ροής φορτίου:

- Όλες οι γραμμές μεταφοράς δεν έχουν ωμική αντίσταση και η αντίδρασή τους είναι ίση με την τιμή του Πίνακα 4.1.
- Ο ζυγός 1 θεωρείται ως ζυγός ταλάντωσης και η τάση του ορίζεται ίση με 1 αμ.
- Οι ζυγοί 2, 4, 6, 8 θεωρούνται ζυγοί παραγωγής και η τάση τους ορίζεται ίση με 1 αμ.
- Οι ζυγοί 3,5,7 θεωρούνται ζυγοί φορτίου.
- Η παραγόμενη ενεργός ισχύς των γεννητριών για τους ζυγούς 2, 4, 6, 8 είναι ίση μ' αυτή του πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η ενεργός ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η άεργος ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση με 0.

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύς για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στον Πίνακα 4.9 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος.

Πίνακας 4.9: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A₂).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7
P_{Go} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Go} (MVar)	47.76	43.01	42.79	39.7	49.79	34.57	55.65
P_{Lo} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Lo} (MVar)	0	0	0	0	0	0	0

Εφόσον δεν υπάρχουν ωμικές απώλειες στο δίκτυο, η ολική παραγόμενη ισχύς ισούται με την ολική καταναλισκόμενη ισχύ του δικτύου, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.9.

Στον Πίνακα 4.10 φαίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες και οι τάσεις των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα.

Πίνακας 4.10: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο A_2).

Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	1		2		3		4	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	5.2	1	5.84	1	5.15	1	4.78	1
3	6.06	0.995	5.98	0.995	4.08	0.996	3.82	0.997
4	11.42	1	11.02	1	9.04	1	8.04	1
5	-0.67	0.988	0.09	0.990	-2.81	0.987	-3.2	0.988
6	12.03	1	11.92	1	9.85	1	9.42	1
7	4.5	0.988	4.79	0.990	2.32	0.989	1.49	0.990
8	12.71	1	12.35	1	9.81	1	8.88	1
Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	5		6		7			
	δ	V	δ	V	δ	V		
1	0	1	0	1	0	1		
2	5.45	1	4.8	1	5.37	1		
3	6.72	0.994	5.03	0.996	5.45	0.995		
4	11.64	1	9.44	1	10.83	1		
5	-0.78	0.988	-1.14	0.991	-2.61	0.984		
6	13	1	9.95	1	12.19	1		
7	4.31	0.988	3.14	0.992	3.06	0.986		
8	12.63	1	9.94	1	12.01	1		

Από τον Πίνακα 4.10 παρατηρούμε ότι η πτώση τάσης στις γραμμές μεταφοράς ανάμεσα σ' ένα ζυγό παραγωγής και ένα ζυγό φορτίου είναι πολύ μικρή και παράλληλα οι γωνίες των ζυγών παρουσιάζουν τιμές μικρότερες των 15° .

Στον Πίνακα 4.11, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου EP. Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων A_2 για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Πίνακας 4.11: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A_2 .

i	j	Στιγμιότυπα						
		1	2	3	4	5	6	7
1	2	-45.3	-50.9	-44.9	-41.7	-47.5	-41.9	-46.8
2	5	29.7	29.1	40.2	40.3	31.5	30.1	40.2
3	4	-37.2	-35	-34.5	-29.3	-34.1	-30.7	-37.3
3	1	44.7	44.1	30.1	28.3	49.5	37.1	40.2
4	6	-3	-4.3	-3.9	-6.7	-6.6	-2.5	-6.6
4	7	45.8	41.4	44.5	43.4	48.5	41.8	51.3
5	7	-50.3	-45.9	-49.9	-45.7	-49.5	-41.9	-54.8
6	3	57.5	57.2	55.7	54	60.4	47.5	64.9
6	8	-5.5	-3.5	0.4	4.3	3	0	1.5
7	8	-104.5	-96.5	-95.4	-94.3	-106	-87	-113.5

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 4.11 και 4.8 παρατηρούμε ότι οι μετρήσεις παρουσιάζουν πολύ μικρές διαφορές, οι οποίες οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι οι τάσεις των ζυγών φορτίων διαφέρουν στις δύο περιπτώσεις.

4.2.5. Σύνολο Μετρήσεων A_3

Το σύνολο μετρήσεων A_3 δημιουργήθηκε με σκοπό να μελετηθεί η επίδραση που έχουν τα άεργα φορτία στην ακρίβεια της εκτίμησης των αντιδράσεων του δικτύου. Για την επίλυση της ροής φορτίου σε κάθε στιγμιότυπο, γίνονται ο εξής θεωρήσεις:

- Όλες οι γραμμές μεταφοράς δεν έχουν ωμική αντίσταση και η αντίδρασή τους είναι ίση με την τιμή του Πίνακα 4.1.
- Ο ζυγός 1 θεωρείται ως ζυγός ταλάντωσης και η τάση του ορίζεται ίση με 1 αμ.
- Οι ζυγοί 2, 4, 6, 8 θεωρούνται ζυγοί παραγωγής και η τάση τους ορίζεται ίση με 1.05 αμ.
- Οι ζυγοί 3,5,7 θεωρούνται ζυγοί φορτίου.
- Η παραγόμενη ενεργός ισχύς των γεννητριών για τους ζυγούς 2, 4, 6, 8 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η ενεργός ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η παραγόμενη άεργος ισχύς των γεννητριών για τους ζυγούς 2, 4, 6, 8 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.
- Η άεργος ισχύς των φορτίων για τους ζυγούς 1, 3, 5, 7 είναι ίση μ' αυτή του Πίνακα 4.2 για όλα τα στιγμιότυπα.

Σε ορισμένα στιγμιότυπα έχει συνδεθεί συστοιχία πυκνωτών στο ζυγό 5, ώστε να διατηρηθεί η τάση στα επιθυμητά όρια, δηλαδή να είναι μεγαλύτερη των 0.95 αμ. Η άεργος ισχύς της συστοιχίας για κάθε στιγμιότυπο δίνεται στον Πίνακα 4.12.

Πίνακας 4.12: Άεργος Ισχύς Συστοιχίας Πυκνωτών Q_{C5} (MVar) – Σύνολο Μετρήσεων A_3 .

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7
Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{C5} (MVar)	22.61	0	13.76	13.74	0	0	18.15

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύς για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στον Πίνακα 4.13 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος. Στην παραγόμενη άεργο ισχύ δεν προσμετράται η συμβολή των συστοιχιών πυκνωτών.

Πίνακας 4.13: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο A_3).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7
P_{Go} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Go} (MVar)	215.22	195.01	187.54	181.2	211.5	156.94	222.46
P_{Lo} (MW)	430	415	440	433	431	400	467
Q_{Lo} (MVar)	180	143	150	147	151	117	174

Από τον Πίνακα 4.13 είναι εμφανές ότι δεν υπάρχουν ωμικές απώλειες στις γραμμές μεταφοράς του δικτύου, καθώς η συνολική παραγόμενη ενεργός ισχύς είναι ίση με τη συνολική καταναλισκόμενη ενεργό ισχύ.

Στον Πίνακα 4.14 δίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες και οι τάσεις των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα.

Πίνακας 4.14: Γωνίες δ_i ($^\circ$) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο A_3).

Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	1		2		3		4	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	4.46	1.050	5.09	1.050	4.42	1.050	4.1	1.050
3	5.72	1.001	5.6	1.009	3.7	1.009	3.46	1.010
4	10.45	1.050	10.06	1.050	8.08	1.050	7.14	1.050
5	-1.2	0.953	-0.42	0.952	-3.27	0.952	-3.57	0.952
6	11.05	1.050	10.92	1.050	8.86	1.050	8.44	1.050
7	4.06	0.971	4.33	0.974	1.9	0.978	1.11	0.982
8	11.61	1.050	11.26	1.050	8.75	1.050	7.88	1.050
Ζυγός	Στιγμιότυπα							
	5		6		7			
	δ	V	δ	V	δ	V		
1	0	1	0	1	0	1		
2	4.69	1.050	4.16	1.050	4.57	1.050		
3	6.31	1.006	4.66	1.013	5.05	1.000		
4	10.63	1.050	8.54	1.050	9.79	1.050		
5	-1.35	0.951	-1.45	0.962	-3.23	0.951		
6	11.91	1.050	9.03	1.050	11.09	1.050		
7	3.84	0.969	2.77	0.990	2.56	0.966		
8	11.51	1.050	8.97	1.050	10.83	1.050		

Από τον Πίνακα 4.14. παρατηρούμε ότι οι γωνίες των ζυγών είναι μεταξύ -4° και 12° και τα μέτρα των τάσεων είναι μεταξύ 0.95 και 1.05 αμ και συνεπώς αναμένεται η προσέγγιση ροής φορτίου ΣΡ να δίνει μικρά σφάλματα σε σχέση με τη ροή φορτίου ΕΡ. Στον Πίνακα 4.15, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου ΕΡ. Σημειώνεται ότι λόγω των απωλειών οι μετρήσεις ροών είναι οι μέσοι όροι των ροών ενεργού ισχύος στα δύο άκρα της γραμμής (Παράγραφος 3.2.1 – Σχέση 3.6). Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων A_3 για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Πίνακας 4.15: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων A_3 .

i	j	Στιγμιότυπα						
		1	2	3	4	5	6	7
1	2	-42.48	-48.135	-40.235	-39.305	-44.565	-38.01	-41.525
2	5	31.52	30.825	38.18	41.7	33.495	29.065	38.675
3	4	-35.91	-33.94	-31.945	-28.38	-33.045	-28.665	-34.29
3	1	42.09	41.895	26.995	26.02	46.845	33.955	35.66
4	6	-3.2	-4.495	-4.07	-6.89	-6.79	-2.59	-6.725
4	7	46.24	41.795	41.945	43.795	48.9	39.695	47.895
5	7	-48.93	-44.305	-46.26	-44.495	-47.58	-39.23	-50.28
6	3	56.485	56.305	52.085	52.935	59.27	44.82	60.02
6	8	-5	-3.1	0.9	4.9	3.6	0.5	2.295
7	8	-102.42	-94.64	-87.235	-92.805	-103.79	-80.59	-101.89

4.2.6. Σύνολο Μετρήσεων B

Το Σύνολο Μετρήσεων B δημιουργήθηκε με στόχο οι μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος να παρουσιάζουν μια στατιστική διασπορά. Ο τρόπος δημιουργίας των διαφορετικών δεδομένων εισόδου για το πρόβλημα της ροής φορτίου EP αναλύεται ακολούθως. Επιλέγεται ένα αρχικό στιγμιότυπο, συγκεκριμένα το στιγμιότυπο 1 από το σύνολο μετρήσεων A, το οποίο χαρακτηρίζουν τα ακόλουθα μεγέθη:

- $P_{Go}^{(1)} = \sum_{i \in G} P_{Gi}^{(1)}$: Σύνολο Παραγωγής Ενεργού Ισχύος (4.1)

- $P_{Lo}^{(1)} = \sum_{i \in L} P_{Li}^{(1)}$: Σύνολο Ενεργού Ισχύος Φορτίου (4.2)

- $Q_{Lo}^{(1)} = \sum_{i \in L} Q_{Li}^{(1)}$: Σύνολο Αέργου Ισχύος Φορτίου (4.3)

Όπου G το σύνολο των ζυγών που έχουν γεννήτρια, δηλαδή $G = \{1,2,4,6,8\}$ και $P_{Gi}^{(j)}$ η παραγόμενη ενεργός ισχύς του ζυγού i στο στιγμιότυπο j . Ακόμη, L το σύνολο των ζυγών που έχουν φορτίο σταθερής ισχύος, δηλαδή $L = \{1, 3, 5, 7\}$ $P_{Li}^{(j)}$ (ή $Q_{L,j,i}$) η ενεργός (ή άεργος) ισχύς φορτίου του ζυγού i στο στιγμιότυπο j .

Οι τιμές για τα σύνολα παραγωγής και φορτίων μπορούν να αναζητηθούν στην πρώτη στήλη του Πίνακα 4.3. Ακόμη, για το πρώτο στιγμιότυπο ισχύει:

$$P_{Go}^{(1)} = P_{Lo}^{(1)} + P_{Cu}^{(1)} = 1.0125P_{Lo}^{(1)} \quad (4.4)$$

Τα υπόλοιπα στιγμιότυπα παράγονται με τους εξής περιορισμούς/υποθέσεις:

- $0.5P_{Go}^{(1)} \leq P_{Go}^{(i)} \leq 1.2P_{Go}^{(1)}$ (4.5)

- Σταθερό ποσοστό εκτιμώμενων ωμικών απωλειών του δικτύου: $P_{Go}^{(i)} \approx 1.0125P_{Lo}^{(i)}$ (4.6)

Η πραγματική τιμή του $P_{Go}^{(i)}$ προκύπτει μετά τη λύση του προβλήματος ροής φορτίου για το στιγμιότυπο i . Η Σχέση (4.6) αποτελεί μια υπόθεση/εκτίμηση της τιμής, καθώς δεν υπάρχει γνώση της παραγόμενης ενεργού ισχύος $P_{Go}^{(i)}$, αφού ο ζυγός 1 είναι ζυγός ταλάντωσης.

- Σταθερός συντελεστής C_{Gj} συμμετοχής γεννήτριας j στο ολικό φορτίο:

$$C_{Gj} = \frac{P_{Gj}^{(i)}}{P_{Go}^{(i)}} = \frac{P_{Gj}^{(1)}}{1.0125P_{Lo}^{(1)}} \quad (4.7)$$

Η Σχέση (4.7) ισχύει για κάθε γεννήτρια ανεξάρτητα από το στιγμιότυπο.

- Σταθερός συντελεστής C_{Lj} συμμετοχής φορτίου j στο ολικό φορτίο:

$$C_{Lj} = \frac{P_{Lj}^{(i)}}{P_{Lo}^{(i)}} = \frac{P_{Lj}^{(1)}}{P_{Lo}^{(1)}} \quad (4.8)$$

Η Σχέση (4.8) ισχύει για κάθε φορτίο ανεξάρτητα από το στιγμιότυπο.

- Σταθερός συντελεστής ισχύος $\cos(\varphi_j)$:

$$\cos(\varphi_j) = \frac{P_j^{(1)}}{S_j^{(1)}} \quad (4.9)$$

Η σχέση (4.8) ισχύει για κάθε φορτίο ανεξάρτητα από το στιγμιότυπο.

Τα στιγμιότυπα που παράγονται έχουν τελικά συνολική παραγόμενη ισχύ που αντιστοιχεί:

- α) Σε ώρα μεγίστου:

$$P_{Goλ,i} = (1.2 + a)P_{Goλ,1} \quad (4.10α)$$

- β) Σε ώρα ενδιάμεσου φορτίου:

$$P_{Goλ,i} = (1 + a)P_{Goλ,1} \quad (4.10β)$$

γ) Σε ώρα ελαχίστου:

$$P_{Gol,i} = (0.5 + a)P_{Gol,1} \quad (4.10\gamma)$$

Όπου a ένας τυχαίος αριθμός που ανήκει στο διάστημα $[-0.2, 0.2]$, ώστε να έχουμε περισσότερα στιγμιότυπα για την ίδια ώρα.

Μέσω των σχέσεων (4.6) έως (4.9) παράγονται τα δεδομένα για τη ροή φορτίου EP για κάθε στιγμιότυπο. Οι απαραίτητες θεωρήσεις που έγιναν κατά την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο είναι ίδιες μ' αυτές της παραγράφου 4.2.1.

Στον Πίνακα 4.16. δίνονται τα δεδομένα για την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο.

Πίνακας 4.16: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο B).

Στιγμιότυπο 1					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	75	1.05			-
3			50	35	-
4	80	1.05			-
5			80	60	40,6
6	55	1.05			-
7			100	55	9.1
8	110	1.05			-

Στιγμιότυπο 2					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Άεργος Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Άεργος Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	239.94	35.99	-
2	89.26	1.05			-
3			59.86	41.9	-
4	96.13	1.05			-
5			95.98	71.98	55.13
6	65.83	1.05			-
7			120.23	66.13	-
8	132.18	1.05			-

Στιγμιότυπο 3					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	99.98	15	-
2	37.44	1.05			-
3			24.94	17.46	-
4	40.05	1.05			-
5			33.99	29.99	-
6	27.43	1.05			-
7			50.1	27.55	-
8	55.07	1.05			-

Στιγμιότυπο 4					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	207.55	31.13	-
2	77.73	1.05			-
3			51.78	36.24	-
4	83.15	1.05			-
5			83.02	62.26	37.01
6	56.94	1.05			-
7			104	57.2	-
8	114.34	1.05			-

Στιγμιότυπο 5					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	230.76	34.61	-
2	86.42	1.05			-
3			57.57	40.3	-
4	92.45	1.05			-
5			92.3	69.23	49.64
6	63.31	1.05			-
7			115.63	63.6	-
8	127.12	1.05			-

Στιγμιότυπο 6					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	83.48	12.52	-
2	31.26	1.05			-
3			20.82	14.58	-
4	33.45	1.05			-
5			33.39	25.04	-
6	22.9	1.05			-
7			41.83	23.01	-
8	45.99	1.05			-

Στιγμιότυπο 7					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	232.21	34.83	-
2	86.97	1.05			-
3			57.93	40.55	-
4	93.04	1.05			-
5			92.89	69.66	50.56
6	63.71	1.05			-
7			116.36	64	-
8	127.92	1.05			-

Στιγμιότυπο 8					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	57.93	8.69	-
2	21.69	1.05			-
3			14.45	10.12	-
4	23.21	1.05			-
5			23.17	17.38	-
6	15.89	1.05			-
7			29.03	15.96	-
8	31.91	1.05			-

Στιγμιότυπο 9					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	257.7	38.65	-
2	96.51	1.05			-
3			64.29	45	-
4	103.24	1.05			-
5			103.08	77.31	63.69
6	70.7	1.05			-
7			129.12	71.02	9.21
8	141.96	1.05			-

Στιγμιότυπο 10					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	123.13	18.47	-
2	46.11	1.05			-
3			30.72	21.5	-
4	49.33	1.05			-
5			49.25	36.94	-
6	33.78	1.05			-
7			61.7	33.93	-
8	67.83	1.05			-

Στιγμιότυπο 11					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	197.83	29.67	-
2	74.09	1.05			-
3			49.35	34.55	-
4	79.26	1.05			-
5			79.13	59.35	32.59
6	54.28	1.05			-
7			99.13	54.52	-
8	108.98	1.05			-

Στιγμιότυπο 12					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	162.26	24.34	-
2	60.77	1.05			-
3			40.48	28.33	-
4	65.01	1.05			-
5			64.9	48.68	13.56
6	44.52	1.05			-
7			81.3	44.72	-
8	89.39	1.05			-

Στιγμιότυπο 13					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	218.81	32.82	-
2	81.95	1.05			-
3			54.58	38.21	-
4	87.66	1.05			-
5			87.52	65.64	43.37
6	60.03	1.05			-
7			109.64	60.3	-
8	120.54	1.05			-

Στιγμιότυπο 14					
<i>i</i>	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	101.39	15.21	-
2	37.97	1.05			-
3			25.29	17.71	-
4	40.62	1.05			-
5			40.56	30.42	-
6	27.82	1.05			-
7			50.81	27.94	-
8	55.86	1.05			-

Στιγμιότυπο 15					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	38.98	151.65	-
2	97.32	1.05		97.32	-
3			45.38		-
4	104.11	1.05		104.11	-
5			77.96		-
6	71.29	1.05		71.29	-
7			71.61		-
8	143.15	1.05		143.15	-

Στιγμιότυπο 16					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	279.93	41.99	-
2	104.84	1.05			-
3			69.83	48.88	-
4	112.15	1.05			-
5			111.97	83.98	63.33
6	76.8	1.05			-
7			140.27	77.15	9.18
8	154.21	1.05			-

Στιγμιότυπο 17					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	159.96	23.99	-
2	59.91	1.05			-
3			39.9	27.93	-
4	64.09	1.05			-
5			63.98	47.99	75.15
6	43.89	1.05			-
7			80.15	44.08	9.06
8	88.12	1.05			-

Στιγμιότυπο 18					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	145.28	21.79	-
2	54.41	1.05			-
3			36.24	25.37	-
4	58.21	1.05			-
5			58.11	43.59	13.62
6	39.86	1.05			-
7			72.8	40.04	-
8	80.03	1.05			-

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύς για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στην παραγόμενη αεργό ισχύ δεν προσμετράται η συμβολή των συστοιχιών πυκνωτών. Στον Πίνακα 4.17 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος.

Πίνακας 4.17: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο Β).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_{Go} (MW)	435.37	523.57	216.58	452.03	503.29	180.66	506.51	125.41	562.70
Q_{Go} (MVar)	199.19	236.46	105.72	187.78	228.04	86.51	229.67	58.47	244.18
P_{Lo} (MW)	430	516	215.01	446.35	496.26	179.52	499.39	124.58	554.19
Q_{Lo} (MVar)	180	216	90	168.05	207.29	75.15	209.04	52.15	231.98
Στιγμιότυπο	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P_{Go} (MW)	267.14	430.73	352.70	476.91	219.75	567.52	612.05	347.62	315.54
Q_{Go} (MVar)	134.26	198.38	170.15	217.28	107.38	248.28	268.31	166.87	157.91
P_{Lo} (MW)	264.80	425.44	348.94	470.55	218.05	558.83	602.00	343.99	312.43
Q_{Lo} (MVar)	110.84	178.09	146.07	196.97	91.28	233.93	252.00	143.99	130.79

Από τον Πίνακα 4.17, μπορεί να υπολογιστούν για κάθε στιγμιότυπο οι συνολικές ωμικές απώλειες του δικτύου ως η διαφορά $P_{Go} - P_{Lo}$. Παρατηρούμε ότι ως προς την ενεργό ισχύ φορτίου, τα στιγμιότυπα παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Τα στιγμιότυπα 2 και 5 αντιστοιχούν σε συνθήκες αιχμής φορτίου και τα στιγμιότυπα 6 και 8 σε συνθήκες ελάχιστου φορτίου.

Στον Πίνακα 4.18 δίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες και οι τάσεις των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα.

Πίνακας 4.18: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ).

Ζυγός	Στιγμιότυπα											
	1		2		3		4		5		6	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	4.46	1.05	5.28	1.05	2.14	1.05	4.59	1.05	5.14	1.05	1.76	1.05
3	5.72	1.00	6.90	0.99	2.77	1.02	5.83	1.01	6.64	1.00	2.28	1.02
4	10.45	1.05	12.61	1.05	5.08	1.05	10.77	1.05	12.13	1.05	4.19	1.05
5	-1.20	0.95	-1.70	0.95	-0.38	0.98	-1.36	0.95	-1.55	0.95	-0.31	0.99
6	11.05	1.05	13.33	1.05	5.36	1.05	11.38	1.05	12.82	1.05	4.43	1.05
7	4.06	0.97	4.77	0.96	2.03	1.01	4.11	0.97	4.63	0.96	1.67	1.01
8	11.61	1.05	13.99	1.05	5.65	1.05	11.98	1.05	13.46	1.05	4.68	1.05
Ζυγός	Στιγμιότυπα											
	7		8		9		10		11		12	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	5.17	1.05	1.14	1.05	5.75	1.05	2.68	1.05	4.4	1.05	3.58	1.05
3	6.68	0.99	1.52	1.03	7.42	0.99	3.45	1.02	5.66	1.00	4.61	1.01
4	12.21	1.05	2.82	1.05	13.58	1.05	6.32	1.05	10.34	1.05	8.42	1.05
5	-1.57	0.95	-0.25	1.01	-1.8	0.95	-0.52	0.96	-1.19	0.95	-0.85	0.95
6	12.9	1.05	2.99	1.05	14.35	1.05	6.67	1.05	10.93	1.05	8.9	1.05
7	4.65	0.96	1.09	1.03	5.12	0.96	2.52	0.99	4.01	0.97	3.32	0.98
8	13.55	1.05	3.16	1.05	15.06	1.05	7.03	1.05	11.49	1.05	9.36	1.05
Ζυγός	Στιγμιότυπα											
	13		14		15		16		17		18	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
2	4.87	1.05	2.17	1.05	5.8	1.05	1.05	6.23	3.53	1.05	3.19	1.05
3	6.29	1.00	2.81	1.02	7.49	0.99	0.98	8.08	4.55	1.01	4.11	1.01
4	11.48	1.05	5.14	1.05	13.7	1.05	1.05	14.79	8.3	1.05	7.51	1.05
5	-1.41	0.95	-0.39	0.98	-1.84	0.95	0.95	-2.1	-0.82	0.95	-0.7	0.95
6	12.13	1.05	5.43	1.05	14.48	1.05	1.05	15.64	8.77	1.05	7.93	1.05
7	4.41	0.96	2.05	1.01	5.15	0.96	0.95	5.5	3.28	0.98	2.98	0.98
8	12.75	1.05	5.73	1.05	15.19	1.05	1.05	16.4	9.23	1.05	8.35	1.05

Από τον πίνακα 4.18. παρατηρούμε ότι οι γωνίες των ζυγών είναι μεταξύ -2.1° και 16.4° και τα μέτρα των τάσεων είναι μεταξύ 0.95 και 1.05 αμ και συνεπώς αναμένεται η προσέγγιση ροής φορτίου ΣΡ να δίνει μικρά σφάλματα σε σχέση με τη ροή φορτίου ΕΡ. Στον Πίνακα 4.19, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου ΕΡ. Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων Β για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Πίνακας 4.19: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων Β.

<i>i</i>	<i>j</i>	Στιγμιότυπα									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	-42.48	-49.815	-21.8	-43.67	-48.53	-18.315	-48.825	-12.73	-53.975	
2	5	31.52	38.24	15.3	33	36.755	12.63	36.955	8.73	41.11	
3	4	-35.91	-42.83	-18.245	-37.415	-41.35	-15.26	-41.55	-10.58	-45.89	
3	1	42.09	49.995	21.54	43.975	48.22	18.055	48.515	12.63	53.45	
4	6	-3.2	-3.8	-1.5	-3.2	-3.6	-1.3	-3.7	-0.9	-4.095	
4	7	46.24	55.78	23.105	48.01	53.52	19.235	53.915	13.43	59.93	
5	7	-48.47	-57.77	-24.73	-50.055	-55.595	-20.755	-55.895	-14.48	-61.92	
6	3	56.485	67.45	28.415	58.69	64.985	23.735	65.38	16.535	72.38	
6	8	-5	-5.895	-2.6	-5.295	-5.695	-2.2	-5.695	-1.5	-6.295	
7	8	-102.42	-122.54	-51.875	-106.15	-117.93	-43.345	-118.62	-30.225	-131.49	
<i>i</i>	<i>j</i>	Στιγμιότυπα									
		10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	2	-26.58	-41.985	-34.735	-46.15	-22	-54.37	-58.33	-34.24	-31.16	
2	5	19.04	31.22	25.37	34.68	15.495	41.5	45.05	24.98	22.59	
3	4	-22.325	-35.615	-29.375	-39.275	-18.445	-46.285	-49.735	-28.875	-26.295	
3	1	26.415	41.695	34.56	45.945	21.84	53.84	57.68	34.065	31.09	
4	6	-1.9	-3.1	-2.5	-3.4	-1.5	-4.095	-4.495	-2.5	-2.2	
4	7	28.455	45.845	37.55	50.77	23.405	60.415	65.12	37.06	33.595	
5	7	-30.295	-47.975	-39.635	-52.825	-25.13	-62.415	-66.95	-39.04	-35.555	
6	3	34.875	55.79	45.89	61.625	28.71	72.975	78.49	45.295	41.13	
6	8	-3.1	-5	-4.1	-5.395	-2.6	-6.295	-6.795	-4.1	-3.7	
7	8	-63.65	-101.435	-83.505	-111.95	-52.465	-132.46	-142.425	-82.32	-74.91	

4.2.7. Σύνολο Μετρήσεων Γ

Το Σύνολο Μετρήσεων δημιουργήθηκε ως μια παραλλαγή του Συνόλου Β. Τα τρία πρώτα στιγμιότυπα είναι ίδια με τα τρία πρώτα στιγμιότυπα του Συνόλου Μετρήσεων Β. Η διαδικασία παραγωγής των στιγμιότυπων του συνόλου Γ, είναι όμοια μ' αυτή για το σύνολο Β. Λαμβάνεται ως βάση το στιγμιότυπο 1 και μέσω των χαρακτηριστικών του μεγεθών (ολικό ενεργό και άεργο φορτίο και ολική παραγωγή) και διατηρώντας τις παραδοχές που περιγράφουν οι σχέσεις (4.5), (4.6), (4.9) και (4.10) παράγονται τα υπόλοιπα στιγμιότυπα. Το μόνο σημείο που διαφοροποιείται η διαδικασία παραγωγής στιγμιότυπων σε σύγκριση μ' αυτή για το σύνολο Β, είναι ότι οι συντελεστές συμμετοχής των γεννητριών και των φορτίων στο ολικό φορτίο δεν διατηρούνται σταθεροί για διαφορετικά στιγμιότυπα. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής συμμετοχής για τη γεννήτρια j δίνεται από τη σχέση:

$$C_{Gj} = \frac{P_{Gj}^{(i)}}{P_{Go}^{(i)}} = (1+a) \frac{P_{Gj}^{(1)}}{1.0125 P_{Lo}^{(1)}} \quad (4.11)$$

Η σχέση (4.11) ισχύει για κάθε γεννήτρια ανεξάρτητα από το στιγμιότυπο. Ως a επιλέγεται ένας τυχαίος αριθμός στο διάστημα $[-0.2, 0.2]$. Μ' αυτό τον τρόπο δημιουργείται σε κάθε στιγμιότυπο μια παραλλαγή στον τρόπο που το ολικό φορτίο εξυπηρετείται από τις γεννήτριες.

Ο συντελεστής C_{Lj} συμμετοχής φορτίου j στο ολικό φορτίο δίνεται από

$$C_{Lj} = \frac{P_{Lj}^{(i)}}{P_{Lo}^{(i)}} = (1+a) \frac{P_{Lj}^{(1)}}{P_{Lo}^{(1)}} \quad (4.12)$$

Η σχέση (4.12) ισχύει για κάθε φορτίο ανεξάρτητα από το στιγμιότυπο. Ως a επιλέγεται ένας τυχαίος αριθμός στο διάστημα $[-0.2, 0.2]$. Μ' αυτό τον τρόπο δημιουργείται σε κάθε στιγμιότυπο μια παραλλαγή στον τρόπο που το ολικό φορτίο διαμοιράζεται στα επιμέρους φορτία.

Οι απαραίτητες θεωρήσεις που έγιναν κατά την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο είναι ίδιες μ' αυτές της παραγράφου 4.2.1. Στον Πίνακα 4.20. δίνονται τα δεδομένα για την επίλυση της ροής φορτίου για κάθε στιγμιότυπο.

Πίνακας 4.20: Δεδομένα Εισόδου για Επίλυση Ροής Φορτίου (Σύνολο Γ).

Στιγμιότυπο 1					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	200	30	-
2	75	1.05			-
3			50	35	-
4	80	1.05			-
5			80	60	40,6
6	55	1.05			-
7			100	55	9.1
8	110	1.05			-

Στιγμιότυπο 2					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	239.94	35.99	-
2	89.26	1.05			-
3			59.86	41.9	-
4	96.13	1.05			-
5			95.98	71.98	55.13
6	65.83	1.05			-
7			120.23	66.13	-
8	132.18	1.05			-

Στιγμιότυπο 3					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	99.98	15	-
2	37.44	1.05			-
3			24.94	17.46	-
4	40.05	1.05			-
5			33.99	29.99	-
6	27.43	1.05			-
7			50.1	27.55	-
8	55.07	1.05			-

Στιγμιότυπο 4					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	170.12	24.13	-
2	69.94	1.05			-
3			50.78	37.55	-
4	68.27	1.05			-
5			57.04	43.8	6.33
6	52.16	1.05			-
7			70.83	42.61	-
8	95.57	1.05			-

Στιγμιότυπο 5					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	232.15	27.88	-
2	110.01	1.05			-
3			62.7	35.14	-
4	89.97	1.05			-
5			101.12	84.61	66.12
6	63.87	1.05			-
7			132.36	63.75	9.34
8	121.35	1.05			-

Στιγμιότυπο 6					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	55.04	8.03	-
2	20.17	1.05			-
3			18.58	12.56	-
4	27.46	1.05			-
5			24.11	19.14	-
6	19.27	1.05			-
7			35.98	19.95	-
8	40.66	1.05			-

Στιγμιότυπο 7					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	176.27	27.39	-
2	81.13	1.05			-
3			56.21	39.47	-
4	99.02	1.05			-
5			83.09	73.64	48.83
6	65.12	1.05			-
7			101.68	53.02	-
8	134.8	1.05			-

Στιγμιότυπο 8					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	230.13	33.78	-
2	93.47	1.05			-
3			47.27	36.36	-
4	91.11	1.05			-
5			79.81	50.13	20.77
6	53.04	1.05			-
7			88.45	50.26	-
8	106.24	1.05			-

Στιγμιότυπο 9					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	122.78	15.99	-
2	48.2	1.05			-
3			27.31	18.89	-
4	58	1.05			-
5			54.33	36.46	-
6	30.36	1.05			-
7			54.21	25.86	-
8	71.44	1.05			-

Στιγμιότυπο 10					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	234.3	37.3	-
2	99.01	1.05			-
3			52.93	34.43	-
4	93.44	1.05			-
5			83.03	55.74	34.43
6	50.45	1.05			-
7			121.11	62.34	-
8	120.58	1.05			-

Στιγμιότυπο 11					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	197.38	31.47	-
2	86.42	1.05			-
3			57.34	36.05	-
4	74.07	1.05			-
5			72.95	45.19	12.65
6	45.54	1.05			-
7			95.2	44.93	-
8		1.05			-

Στιγμιότυπο 12					
i	Παραγόμενη Ισχύς P_{Gi} (MW)	Τάση V_i (αμ)	Ενεργός Ισχύς Φορτίου P_{Li} (MW)	Αεργός Ισχύς Φορτίου Q_{Li} (MVar)	Αεργός Ισχύς Πυκνωτών Q_{Ci} (MVar)
1		1	105.19	17.35	-
2	42.36	1.05			-
3			25.01	20.85	-
4	48.56	1.05			-
5			42.57	36.27	-
6	36.07	1.05			-
7			56.62	28.23	-
8	57.95	1.05			-

Από τη λύση της ροής φορτίου μπορούν να προκύψουν τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύς για όλες τις γεννήτριες και τα φορτία του δικτύου. Στην παραγόμενη άεργο ισχύ δεν προσμετράται η συμβολή των συστοιχιών πυκνωτών. Στον Πίνακα 4.21 δίνονται τα σύνολα παραγόμενης και καταναλισκόμενης ενεργού και αέργου ισχύος.

Πίνακας 4.21: Σύνολα Παραγόμενης και Καταναλισκόμενης Ενεργού και Αέργου Ισχύος (Σύνολο Γ).

Στιγμιότυπο	1	2	3	4	5	6
P_{Go} (MW)	435.37	523.57	216.58	353.41	535.21	134.6
Q_{Go} (MVar)	199.19	236.46	105.72	188.21	204.77	67.77
P_{Lo} (MW)	430	516	215.01	348.77	528.33	133.71
Q_{Lo} (MVar)	180	216	90	148.09	211.38	59.68
Στιγμιότυπο	7	8	9	10	11	12
P_{Go} (MW)	425.34	451.9	261.28	497.74	427.63	231.51
Q_{Go} (MVar)	225.6	212.23	123.7	219.05	192.59	123.9
P_{Lo} (MW)	417.25	445.66	258.63	491.37	422.87	229.39
Q_{Lo} (MVar)	193.52	170.53	97.2	189.81	157.64	102.7

Από τον Πίνακα 4.21, μπορούν να υπολογιστούν για κάθε στιγμιότυπο οι συνολικές ωμικές απώλειες του δικτύου ως η διαφορά $P_{Go} - P_{Lo}$. Παρατηρούμε ότι ως προς την ενεργό ισχύ φορτίου, τα στιγμιότυπα παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Τα στιγμιότυπα 2 και 5 αντιστοιχούν σε συνθήκες αιχμής φορτίου και το στιγμιότυπο 6 σε συνθήκες ελάχιστου φορτίου.

Στον Πίνακα 4.22 δίνονται για κάθε στιγμιότυπο οι γωνίες και οι τάσεις των ζυγών για τα διαφορετικά στιγμιότυπα.

Πίνακας 4.22: Γωνίες δ_i (°) και Τάσεις Ζυγών V_i (αμ) (Σύνολο Γ).

Ζυγός	Στιγμιότυπα											
	1		2		3		4		5		6	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	4.46	1.05	5.28	1.05	2.14	1.05	5.74	1.05	5.63	1.05	1.11	1.05
3	5.72	1.00	6.9	0.99	2.77	1.02	6.67	1.00	3.94	1.00	1.92	1.02
4	10.45	1.05	12.61	1.05	5.08	1.05	11.88	1.05	8.49	1.05	3.56	1.05
5	-1.2	0.95	-1.7	0.95	-0.38	0.98	3.36	0.95	-4.8	0.95	-0.02	1.01
6	11.05	1.05	13.33	1.05	5.36	1.05	12.41	1.05	9.35	1.05	3.8	1.05
7	4.06	0.97	4.77	0.96	2.03	1.01	7.77	0.98	0.22	0.97	1.56	1.02
8	11.61	1.05	13.99	1.05	5.65	1.05	13.72	1.05	9.17	1.05	4.14	1.05
Ζυγός	Στιγμιότυπα											
	7		8		9		10		11		12	
	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V	δ	V
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
2	6.45	1.05	6.91	1.05	3.28	1.05	6.15	1.05	5.46	1.05	1.05	2.77
3	9.85	0.99	7.92	1.00	4.93	1.02	5.77	1.00	4.27	1.00	1.02	4.09
4	16.79	1.05	13.84	1.05	8.52	1.05	10.99	1.05	8.93	1.05	1.05	6.92
5	3.15	0.95	2.01	0.95	0.72	0.97	-1.2	0.95	-0.64	0.95	0.97	0.44
6	17.21	1.05	13.74	1.05	8.4	1.05	11.07	1.05	9.3	1.05	1.05	7.24
7	10.1	0.97	7.63	0.97	4.61	1.00	3.54	0.96	3.52	0.98	1.00	3.22
8	18.83	1.05	14.65	1.05	9.14	1.05	11.8	1.05	10.45	1.05	1.05	7.24

Από τον πίνακα 4.22. παρατηρούμε ότι οι γωνίες των ζυγών είναι μεταξύ -4.8° και 18.83° και τα μέτρα των τάσεων είναι μεταξύ 0.95 και 1.05 αμ και συνεπώς αναμένεται η προσέγγιση ροής φορτίου ΣΡ να δίνει μικρά σφάλματα σε σχέση με τη ροή φορτίου ΕΡ. Στον Πίνακα 4.23, δίνονται οι ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα σε γειτονικούς ζυγούς του δικτύου, όπως προκύπτουν από τη λύση της ροής φορτίου ΕΡ. Οι ροές αποτελούν το σύνολο μετρήσεων Γ για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Πίνακας 4.23: Ροές Ενεργού Ισχύος P_{ij} (MW) – Σύνολο Μετρήσεων Γ.

i	j	Στιγμιότυπα					
		1	2	3	4	5	6
1	2	-42.48	-49.815	-21.8	-53.88	-52.89	-12.53
2	5	31.52	38.24	15.3	14.93	55.58	7.365
3	4	-35.91	-42.83	-18.245	-39.375	-34.62	-13.17
3	1	42.09	49.995	21.54	48.715	29	15.465
4	6	-3.2	-3.8	-1.5	-2.8	-4.595	-1.3
4	7	46.24	55.78	23.105	30.815	58.765	15.46
5	7	-48.47	-57.77	-24.73	-42.015	-45.995	-16.77
6	3	56.485	67.45	28.415	60.535	57.275	20.85
6	8	-5	-5.895	-2.6	-11.585	1.7	-3
7	8	-102.42	-122.54	-51.875	-82.225	-119.54	-37.39
i	j	Στιγμιότυπα					
		7	8	9	10	11	12
1	2	-60.11	-64.16	-31.955	-57.44	-51.4	-27.375
2	5	19.61	27.75	15.665	40.12	33.79	14.475
3	4	-51.43	-44.325	-27.595	-39.48	-35.515	-22.125
3	1	71.085	57.9	37.535	42.385	31.385	31.185
4	6	-2.2	0.5	0.7	-0.4	-1.9	-1.7
4	7	48.31	45.06	29.26	53.23	39.73	27.77
5	7	-63.21	-52.03	-38.64	-43.12	-39.34	-28.205
6	3	76.635	61.33	37.36	56.185	53.51	34.18
6	8	-14.28	-8.105	-6.495	-6.495	-10.19	0
7	8	-117.095	-95.825	-63.87	-110.955	-94.86	-57.12

4.3. Σφάλματα Ροής Φορτίου ΣΡ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα σφάλματα της ροής φορτίου ΣΡ για τα σύνολα μετρήσεων Α, Β και Γ. Από τα σφάλματα για τις ροές ενεργού ισχύος είναι δυνατό να εξεταστεί πόσο απέχουν οι μετρήσεις των συνόλων Α, Β και Γ από τις ροές ενεργού ισχύος που προκύπτουν από τη ροή φορτίου ΣΡ. Το σφάλμα οφείλεται στις προσεγγίσεις και υποθέσεις που γίνονται για την εξαγωγή των εξισώσεων της ροής φορτίου ΣΡ και επηρεάζει την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

Για τον υπολογισμό των ροών ενεργού ισχύος μέσω της ροής φορτίου ΣΡ ακολουθείται η διαδικασία που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.3.6. Λαμβάνοντας ως δεδομένα τις εγχύσεις ενεργού ισχύος σε κάθε ζυγό διαμορφώνεται ο πίνακας P . Υπολογίζεται ο πίνακας B από τις τιμές των αντιδράσεων των γραμμών μεταφοράς σύμφωνα με τις σχέσεις (2.41) και (2.42).

Ακολούθως, υπολογίζονται οι γωνίες των ζυγών από τη σχέση (2.45) και οι ροές ενεργού ισχύος ΣΡ από τη σχέση (2.35), οι οποίες και συγκρίνονται με τις ροές ενεργού ισχύος ΕΡ.

4.3.1. Σύνολο Α

Στον πίνακα 4.24 παρουσιάζονται για τα διαφορετικά στιγμιότυπα του Συνόλου Α οι ροές ενεργού ισχύος, όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΕΡ και όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΣΡ, καθώς και το σφάλμα της ροής ενεργού ισχύος σε κάθε περίπτωση, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\Delta P_{ij} = P_{ij}^{(EP)} - P_{ij}^{(\Sigma P)} \quad (4.10)$$

Όπου:

- $P_{ij}^{(EP)}$: η ροή ενεργού ισχύος από τον i προς τον j ζυγό, υπολογισμένη από τη ροή φορτίου ΕΡ.
- $P_{ij}^{(\Sigma P)}$: η ροή ενεργού ισχύος από τον i προς τον j ζυγό, υπολογισμένη από τη ροή φορτίου ΣΡ.

Ακόμη, ορίζεται το σχετικό σφάλμα επί τις εκατό E_{Pij} :

$$E_{Pij} = \frac{\Delta P_{ij}}{|P_{ij}^{(EP)}|} \quad (4.11)$$

Πίνακας 4.24: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο Α

Στιγμιότυπο 1				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(\Sigma P)}$	ΔP_{ij}	E_{Pij} (%)
1-2	-0.4248	-0.4542	0.0294	6.92
2-5	0.3152	0.295796	0.0194	6.16
3-4	-0.3591	-0.37133	0.0122	3.41
3-1	0.4209	0.445796	-0.0248	-5.91
4-6	-0.032	-0.02936	-0.0026	-8.24
4-7	0.4624	0.458033	0.0043	0.94
5-7	-0.4893	-0.5042	0.0149	3.05
6-3	0.56485	0.574465	-0.0096	-1.70
6-8	-0.05	-0.05383	0.0038	7.66
7-8	-1.0242	-1.04617	0.0219	2.15

Στοιχείο 2				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4814	-0.5093	0.0279	5.81
2-5	0.3083	0.2907	0.0175	5.69
3-4	-0.3394	-0.3494	0.0100	2.95
3-1	0.4190	0.4407	-0.0218	-5.19
4-6	-0.0450	-0.0430	-0.0020	-4.36
4-7	0.4180	0.4136	0.0044	1.05
5-7	-0.4431	-0.4593	0.0162	3.67
6-3	0.5631	0.5713	-0.0082	-1.46
6-8	-0.0310	-0.0343	0.0033	10.57
7-8	-0.9464	-0.9657	0.0193	2.04

Στοιχείο 3				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4024	-0.4493	0.0470	11.68
2-5	0.3818	0.4007	-0.0189	-4.94
3-4	-0.3195	-0.3442	0.0248	7.76
3-1	0.2700	0.3007	-0.0307	-11.38
4-6	-0.0407	-0.0392	-0.0015	-3.76
4-7	0.4195	0.4449	-0.0255	-6.08
5-7	-0.4626	-0.4993	0.0367	7.94
6-3	0.5209	0.5564	-0.0356	-6.83
6-8	0.0090	0.0044	0.0046	51.19
7-8	-0.8724	-0.9544	0.0820	9.40

Στοιχείο 4				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.3931	-0.4175	0.0245	6.23
2-5	0.4170	0.4025	0.0145	3.49
3-4	-0.2838	-0.2927	0.0089	3.14
3-1	0.2602	0.2825	-0.0223	-8.55
4-6	-0.0689	-0.0666	-0.0023	-3.35
4-7	0.4380	0.4339	0.0041	0.93
5-7	-0.4450	-0.4575	0.0126	2.83
6-3	0.5294	0.5397	-0.0104	-1.96
6-8	0.0490	0.0437	0.0053	10.88
7-8	-0.9281	-0.9437	0.0156	1.68

Στοιχείο 5				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4457	-0.4758	0.0301	6.76
2-5	0.3350	0.3142	0.0207	6.19
3-4	-0.3305	-0.3404	0.0099	3.00
3-1	0.4685	0.4942	-0.0258	-5.50
4-6	-0.0679	-0.0656	-0.0023	-3.44
4-7	0.4890	0.4852	0.0038	0.78
5-7	-0.4758	-0.4958	0.0200	4.20
6-3	0.5927	0.6039	-0.0112	-1.88
6-8	0.0360	0.0306	0.0054	15.05
7-8	-1.0379	-1.0606	0.0227	2.19

Στοιχείο 6				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.3801	-0.4192	0.0391	10.27
2-5	0.2907	0.3008	-0.0102	-3.51
3-4	-0.2867	-0.3062	0.0196	6.82
3-1	0.3396	0.3708	-0.0313	-9.22
4-6	-0.0259	-0.0247	-0.0012	-4.71
4-7	0.3970	0.4185	-0.0215	-5.42
5-7	-0.3923	-0.4192	0.0269	6.85
6-3	0.4482	0.4746	-0.0264	-5.90
6-8	0.0050	0.0007	0.0043	86.40
7-8	-0.8059	-0.8707	0.0648	8.04

Στοιχείο 7				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4153	-0.4694	0.0542	13.05
2-5	0.3868	0.4006	-0.0138	-3.57
3-4	-0.3429	-0.3724	0.0295	8.61
3-1	0.3566	0.4006	-0.0440	-12.33
4-6	-0.0673	-0.0654	-0.0018	-2.69
4-7	0.4790	0.5130	-0.0341	-7.11
5-7	-0.5028	-0.5494	0.0466	9.28
6-3	0.6002	0.6481	-0.0479	-7.99
6-8	0.0230	0.0164	0.0065	28.47
7-8	-1.0189	-1.1364	0.1175	11.53

Η ροή φορτίου ΣΡ δίνει μια καλή προσέγγιση των ροών ενεργού ισχύος, ειδικότερα στις γραμμές με μεγάλες φορτίσεις. Το μεγαλύτερο ποσοστιαίο σφάλμα $E_{P_{ij}}$ εμφανίζεται στη γραμμή 1-2 για το στιγμιότυπο 7 και είναι ίσο με 13,05%. Το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα ΔP_{ij} είναι ίσο με 0.1175 (ή 11.75 MW) και εμφανίζεται στη γραμμή 7-8 στο στιγμιότυπο 7. Γενικά, στις γραμμές που παρουσιάζουν τη μικρότερη φόρτιση η έννοια του σχετικού σφάλματος δεν έχει ουσιαστική σημασία, καθώς η πραγματική ροή ενεργού ισχύος στη γραμμή, που είναι ο παρονομαστής στο λόγο κατά τον ορισμό του σφάλματος, λαμβάνει τιμές πολύ κοντά στο μηδέν με αποτέλεσμα οι αντίστοιχες τιμές του σχετικού σφάλματος να είναι πολύ μεγάλες (πχ. $E_{P_{68}} = 86.4\%$), γραμμή 6-8, στιγμιότυπο 6. Σε τέτοιες περιπτώσεις μας απασχολεί το απόλυτο σφάλμα που λαμβάνει πολύ μικρές τιμές. Συγκεκριμένα, στη γραμμή 6-8 το απόλυτο σφάλμα δεν ξεπερνάει σε κανένα στιγμιότυπο τα 0.0075αμ ή 75 kW, τιμή πολύ μικρή για τα μεγέθη του συστήματος που μελετάμε.

4.3.2. Σύνολο Β

Στον πίνακα 4.25 παρουσιάζονται για τα διαφορετικά στιγμιότυπα του Συνόλου Β οι ροές ενεργού ισχύος, όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΕΡ και όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΣΡ, καθώς και το σφάλμα της ροής ενεργού ισχύος σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.25: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο Β

Στιγμιότυπο 1				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(SP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4248	-0.4542	0.0294	6.9
2-5	0.3152	0.2958	0.0194	6.2
3-4	-0.3591	-0.3713	0.0122	3.4
3-1	0.4209	0.4458	-0.0249	-5.9
4-6	-0.0320	-0.0294	-0.0026	-8.2
4-7	0.4624	0.4580	0.0044	0.9
5-7	-0.4847	-0.5042	0.0195	4.0
6-3	0.5649	0.5745	-0.0096	-1.7
6-8	-0.0500	-0.0538	0.0038	7.7
7-8	-1.0242	-1.0462	0.0220	2.1

Στιγμιότυπο 2				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.4982	-0.5389	0.0407	8.2
2-5	0.3824	0.3537	0.0287	7.5
3-4	-0.4283	-0.4451	0.0168	3.9
3-1	0.5000	0.5344	-0.0345	-6.9
4-6	-0.0380	-0.0349	-0.0031	-8.2
4-7	0.5578	0.5511	0.0067	1.2
5-7	-0.5777	-0.6061	0.0284	4.9
6-3	0.6745	0.6880	-0.0135	-2.0
6-8	-0.0590	-0.0645	0.0056	9.5
7-8	-1.2254	-1.2573	0.0319	2.6

Στιγμιότυπο 3				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.2180	-0.2269	0.0089	4.1
2-5	0.1530	0.1475	0.0055	3.6
3-4	-0.1825	-0.1859	0.0034	1.9
3-1	0.2154	0.2236	-0.0082	-3.8
4-6	-0.0150	-0.0145	-0.0005	-3.4
4-7	0.2311	0.2291	0.0019	0.8
5-7	-0.2473	-0.2524	0.0051	2.1
6-3	0.2842	0.2871	-0.0030	-1.0
6-8	-0.0260	-0.0273	0.0013	5.0
7-8	-0.5188	-0.5234	0.0047	0.9

Στιγμιότυπο 4				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.4367	-0.4705	0.0338	7.7
2-5	0.3300	0.3068	0.0232	7.0
3-4	-0.3742	-0.3854	0.0112	3.0
3-1	0.4398	0.4631	-0.0234	-5.3
4-6	-0.0320	-0.0301	-0.0019	-5.8
4-7	0.4801	0.4762	0.0039	0.8
5-7	-0.5006	-0.5234	0.0228	4.6
6-3	0.5869	0.5955	-0.0086	-1.5
6-8	-0.0530	-0.0563	0.0033	6.3
7-8	-1.0615	-1.0871	0.0256	2.4

Στοιχείο 5				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4853	-0.5231	0.0378	7.8
2-5	0.3676	0.3411	0.0264	7.2
3-4	-0.4135	-0.4285	0.0150	3.6
3-1	0.4822	0.5149	-0.0327	-6.8
4-6	-0.0360	-0.0335	-0.0025	-7.0
4-7	0.5352	0.5295	0.0057	1.1
5-7	-0.5560	-0.5819	0.0259	4.7
6-3	0.6499	0.6621	-0.0123	-1.9
6-8	-0.0570	-0.0625	0.0056	9.8
7-8	-1.1793	-1.2087	0.0294	2.5

Στοιχείο 6				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.18315	-0.18924	0.00609	3.3
2-5	0.12630	0.12336	0.00294	2.3
3-4	-0.15260	-0.15503	0.00243	1.6
3-1	0.18055	0.18636	-0.00581	-3.2
4-6	-0.01300	-0.01210	-0.00090	-6.9
4-7	0.19235	0.19157	0.00078	0.4
5-7	-0.20755	-0.21054	0.00299	1.4
6-3	0.23735	0.23953	-0.00218	-0.9
6-8	-0.02200	-0.02263	0.00063	2.9
7-8	-0.43345	-0.43727	0.00382	0.9

Στοιχείο 7				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4883	-0.5264	0.0381	7.8
2-5	0.3696	0.3433	0.0262	7.1
3-4	-0.4155	-0.4312	0.0157	3.8
3-1	0.4852	0.5182	-0.0331	-6.8
4-6	-0.0370	-0.0337	-0.0033	-8.9
4-7	0.5392	0.5329	0.0063	1.2
5-7	-0.5590	-0.5856	0.0266	4.8
6-3	0.6538	0.6663	-0.0125	-1.9
6-8	-0.0570	-0.0629	0.0059	10.4
7-8	-1.1862	-1.2163	0.0302	2.5

Στοιχείο 8				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(SP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.1273	-0.1313	0.0040	3.1
2-5	0.0867	0.0856	0.0011	1.2
3-4	-0.1058	-0.1076	0.0018	1.7
3-1	0.1257	0.1292	-0.0035	-2.8
4-6	-0.0090	-0.0084	-0.0006	-6.7
4-7	0.1337	0.1329	0.0008	0.6
5-7	-0.1448	-0.1461	0.0013	0.9
6-3	0.1647	0.1662	-0.0015	-0.9
6-8	-0.0150	-0.0157	0.0007	4.6
7-8	-0.3023	-0.3034	0.0012	0.4

Στοιχείο 9				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(SP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5398	-0.5842	0.0444	8.2
2-5	0.4111	0.3809	0.0302	7.3
3-4	-0.4589	-0.4785	0.0196	4.3
3-1	0.5345	0.5750	-0.0405	-7.6
4-6	-0.0410	-0.0374	-0.0035	-8.6
4-7	0.5993	0.5913	0.0080	1.3
5-7	-0.6192	-0.6499	0.0307	5.0
6-3	0.7238	0.7394	-0.0156	-2.2
6-8	-0.0630	-0.0698	0.0069	10.9
7-8	-1.3149	-1.3498	0.0349	2.7

Στοιχείο 10				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(SP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.2658	-0.2791	0.0133	5.0
2-5	0.1904	0.1820	0.0084	4.4
3-4	-0.2232	-0.2286	0.0054	2.4
3-1	0.2641	0.2747	-0.0106	-4.0
4-6	-0.019	-0.0179	-0.0011	-5.9
4-7	0.2845	0.2825	0.0020	0.7
5-7	-0.3029	-0.3105	0.0075	2.5
6-3	0.3487	0.3533	-0.0045	-1.3
6-8	-0.031	-0.0334	0.0024	7.6
7-8	-0.6365	-0.6449	0.0084	1.3

Στιγμιότυπο 11				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.4198	-0.4485	0.0286	6.8
2-5	0.3122	0.2924	0.0198	6.3
3-4	-0.3561	-0.3674	0.0112	3.1
3-1	0.41695	0.4415	-0.0246	-5.9
4-6	-0.031	-0.0287	-0.0023	-7.4
4-7	0.45845	0.4540	0.0045	1.0
5-7	-0.4797	-0.4989	0.0191	4.0
6-3	0.5579	0.5677	-0.0098	-1.8
6-8	-0.05	-0.0536	0.0036	7.2
7-8	-0.0143	-1.0362	0.0219	2.2

Στιγμιότυπο 12				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.3474	-0.3679	0.0205	5.9
2-5	0.2537	0.2398	0.0139	5.5
3-4	-0.2938	-0.3014	0.0076	2.6
3-1	0.3456	0.3622	-0.0166	-4.8
4-6	-0.0250	-0.0236	-0.0014	-5.8
4-7	0.3755	0.3723	0.0032	0.9
5-7	-0.3964	-0.4092	0.0128	3.2
6-3	0.4589	0.4656	-0.0067	-1.5
6-8	-0.0410	-0.0440	0.0030	7.3
7-8	-0.8351	-0.8499	0.0148	1.8

Στιγμιότυπο 13				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.4615	-0.4961	0.0346	7.5
2-5	0.3468	0.3234	0.0234	6.7
3-4	-0.3927	-0.4063	0.0136	3.5
3-1	0.4594	0.4883	-0.0289	-6.3
4-6	-0.034	-0.0318	-0.0022	-6.6
4-7	0.5077	0.5021	0.0056	1.1
5-7	-.05282	-0.5518	0.0235	4.5
6-3	0.61625	0.6278	-0.0116	-1.9
6-8	-0.0539	-0.0593	0.0054	9.9
7-8	-1.1195	-1.1461	0.0266	2.4

Στιγμιότυπο 14				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.22	-0.2298	0.0098	4.5
2-5	0.15495	0.1499	0.0051	3.3
3-4	-0.1845	-0.1883	0.0038	2.1
3-1	0.2184	0.2263	-0.0079	-3.6
4-6	-0.015	-0.0147	-0.0003	-1.8
4-7	0.23405	0.2327	0.0014	0.6
5-7	-0.2513	-0.2557	0.0044	1.8
6-3	0.2871	0.2909	-0.0038	-1.3
6-8	-0.026	-0.0275	0.0015	5.6
7-8	-0.5247	-0.5311	0.0065	1.2

Στιγμιότυπο 15				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5437	-0.5891	0.0454	8.3
2-5	0.415	0.3841	0.0309	7.4
3-4	-0.4629	-0.4825	0.0197	4.3
3-1	0.5384	0.5799	-0.0415	-7.7
4-6	-0.0409	-0.0377	-0.0032	-7.9
4-7	0.6041	0.5963	0.0079	1.3
5-7	-0.6242	-0.6553	0.0311	5.0
6-3	0.72975	0.7456	-0.0159	-2.2
6-8	-0.0629	-0.0704	0.0075	11.9
7-8	-1.3246	-1.3611	0.0365	2.8

Στιγμιότυπο 16				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5833	-0.6346	0.0513	8.8
2-5	0.4505	0.4138	0.0367	8.1
3-4	-0.4974	-0.5198	0.0224	4.5
3-1	0.5768	0.6247	-0.0479	-8.3
4-6	-0.04495	-0.0406	-0.0043	-9.6
4-7	0.6512	0.6423	0.0089	1.4
5-7	-0.6695	-0.7059	0.0364	5.4
6-3	0.7849	0.8032	-0.0183	-2.3
6-8	-0.06795	-0.0758	0.0079	11.6
7-8	-1.42425	-1.4663	0.0420	2.9

Στιγμιότυπο 17				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.3424	-0.3627	0.0203	5.9
2-5	0.2498	0.2364	0.0134	5.4
3-4	-0.28875	-0.2971	0.0083	2.9
3-1	0.34065	0.3571	-0.0165	-4.8
4-6	-0.025	-0.0232	-0.0018	-7.1
4-7	0.3706	0.3670	0.0036	1.0
5-7	-0.3904	-0.4034	0.0130	3.3
6-3	0.45295	0.4590	-0.0061	-1.3
6-8	-0.041	-0.0433	0.0023	5.7
7-8	-0.8232	-0.8379	0.0147	1.8

Στιγμιότυπο 18				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.3116	-0.3293	0.0177	5.7
2-5	0.2259	0.2148	0.0111	4.9
3-4	-0.26295	-0.2698	0.0068	2.6
3-1	0.3109	0.3243	-0.0134	-4.3
4-6	-0.022	-0.0211	-0.0009	-4.2
4-7	0.33595	0.3334	0.0026	0.8
5-7	-0.35555	-0.3663	0.0108	3.0
6-3	0.4113	0.4169	-0.0056	-1.4
6-8	-0.037	-0.0393	0.0023	6.3
7-8	-0.7491	-0.7610	0.0119	1.6

Στα 18 στιγμιότυπα του Συνόλου Μετρήσεων Β, ο τρόπος δημιουργίας των στιγμιότυπων φαίνεται να επηρεάζει και τον τρόπο που μεταβάλλονται τα σφάλματα της ροής φορτίου συνεχούς ρεύματος. Συγκεκριμένα, οι κανόνες που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των στιγμιότυπων (σταθεροί συντελεστές συμμετοχής γεννητριών και φορτίων στο ολικό φορτίο και σταθερός συντελεστής ισχύος σε κάθε φορτίο) οδήγησαν σε ένα σύνολο μετρήσεων που χαρακτηρίζεται από σημαντική γραμμική εξάρτηση των ροών ενεργού ισχύος για διαφορετικά στιγμιότυπα. Περισσότερη ανάλυση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού των μετρήσεων, μπορεί να αναζητήσει ο αναγνώστης στην Ενότητα 4.4. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό των στιγμιότυπων, φαίνεται να έχει ως επίπτωση στα σφάλματα της ροής ενεργού ισχύος, τα οποία μεταβάλλονται με τρόπο περίπου ανάλογο με την μεταβολή του απόλυτου μεγέθους των ροών ενεργού ισχύος.

Το μέγιστο ποσοστιαίο σφάλμα εμφανίζεται για τη γραμμή 6-8 στο στιγμιότυπο 17 και είναι ίσο με 11.9%. Στην πραγματικότητα, επειδή η γραμμή 6-8 είναι από τις λιγότερο φορτισμένες του συστήματος μαζί με την 4-6, το μέγεθος του συγκεκριμένου σφάλματος δεν είναι τόσο σημαντικό. Το απόλυτο σφάλμα στην συγκεκριμένη γραμμή για το στιγμιότυπο 17 είναι -0.0061 αμ (ή 610 kW) που είναι μικρό για τα μεγέθη του συστήματος που μελετάται. Για τις υπόλοιπες γραμμές, που έχουν μεγάλη ή μέτρια φόρτιση, το μέγιστο ποσοστιαίο σφάλμα παρουσιάζεται στη γραμμή 1-2 για το στιγμιότυπο 16 και είναι ίσο με 8.8%.

Συγκρίνοντας το Σύνολο Μετρήσεων Α με το Σύνολο Μετρήσεων Β, όσο αφορά τα σφάλματα της ροής φορτίου ΣΡ, το σύνολο Β παρουσιάζει σχετικά μικρότερα ποσοστιαία σφάλματα, καθώς το στιγμιότυπο 1 που χρησιμοποιήθηκε ως βάση για την παραγωγή των υπολοίπων παρουσιάζει μικρά ποσοστιαία σφάλματα.

4.3.3. Σύνολο Γ

Στον Πίνακα 4.26 παρουσιάζονται για τα διαφορετικά στιγμιότυπα του Συνόλου Γ οι ροές ενεργού ισχύος, όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΕΡ και όπως προέκυψαν από τη ροή φορτίου ΣΡ, καθώς και το σφάλμα της ροής ενεργού ισχύος σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.26: Σφάλματα Ροής Φορτίου για το Σύνολο Γ

Στιγμιότυπο 1				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(SP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4248	-0.4542	0.0294	6.9
2-5	0.3152	0.2958	0.0194	6.2
3-4	-0.3591	-0.3713	0.0122	3.4
3-1	0.4209	0.4458	-0.0249	-5.9
4-6	-0.0320	-0.0294	-0.0026	-8.2
4-7	0.4624	0.4580	0.0044	0.9
5-7	-0.4847	-0.5042	0.0195	4.0
6-3	0.5649	0.5745	-0.0096	-1.7
6-8	-0.0500	-0.0538	0.0038	7.7
7-8	-1.0242	-1.0462	0.0220	2.1

Στοιχείο 2				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.4982	-0.5389	0.0407	8.2
2-5	0.3824	0.3537	0.0287	7.5
3-4	-0.4283	-0.4451	0.0168	3.9
3-1	0.5000	0.5344	-0.0345	-6.9
4-6	-0.0380	-0.0349	-0.0031	-8.2
4-7	0.5578	0.5511	0.0067	1.2
5-7	-0.5777	-0.6061	0.0284	4.9
6-3	0.6745	0.6880	-0.0135	-2.0
6-8	-0.0590	-0.0645	0.0056	9.5
7-8	-1.2254	-1.2573	0.0319	2.6

Στοιχείο 3				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.2180	-0.2269	0.0089	4.1
2-5	0.1530	0.1475	0.0055	3.6
3-4	-0.1825	-0.1859	0.0034	1.9
3-1	0.2154	0.2236	-0.0082	-3.8
4-6	-0.0150	-0.0145	-0.0005	-3.4
4-7	0.2311	0.2291	0.0019	0.8
5-7	-0.2473	-0.2524	0.0051	2.1
6-3	0.2842	0.2871	-0.0030	-1.0
6-8	-0.0260	-0.0273	0.0013	5.0
7-8	-0.5188	-0.5234	0.0047	0.9

Στοιχείο 4				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5388	-0.5629	0.0241	4.5
2-5	0.1493	0.1365	0.0128	8.6
3-4	-0.39375	-0.4047	0.0110	2.8
3-1	0.48715	0.5100	-0.0228	-4.7
4-6	-0.028	-0.0255	-0.0025	-9.0
4-7	0.30815	0.3035	0.0047	1.5
5-7	-0.42015	-0.4339	0.0138	3.3
6-3	0.60535	0.6131	-0.0077	-1.3
6-8	-0.11585	-0.1170	0.0011	1.0
7-8	-0.82225	-0.8387	0.0165	2.0

Στοιχείο 5				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5289	-0.5667	0.0378	7.1
2-5	0.5558	0.5334	0.0224	4.0
3-4	-0.3462	-0.3620	0.0158	4.6
3-1	0.29	0.3235	-0.0335	-11.6
4-6	-0.0459	-0.0429	-0.0031	-6.7
4-7	0.58765	0.5806	0.0071	1.2
5-7	-0.4599	-0.4778	0.0178	3.9
6-3	0.57275	0.5885	-0.0158	-2.8
6-8	0.017	0.0073	0.0097	57.0
7-8	-1.1954	-1.2208	0.0254	2.1

Στοιχείο 6				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.1253	-0.12981	0.00451	3.6
2-5	0.07365	0.07189	0.00176	2.4
3-4	-0.1317	-0.13403	0.00233	1.8
3-1	0.15465	0.15909	-0.00444	-2.9
4-6	-0.013	-0.01236	-0.00064	-5.0
4-7	0.1546	0.15293	0.00167	1.1
5-7	-0.1677	-0.16921	0.00151	0.9
6-3	0.2085	0.21086	-0.00236	-1.1
6-8	-0.03	-0.03052	0.00052	1.7
7-8	-0.3739	-0.37608	0.00218	0.6

Στοιχείο 7				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.6011	-0.6409	0.0398	6.6
2-5	0.1961	0.1704	0.0257	13.1
3-4	-0.5143	-0.5333	0.0190	3.7
3-1	0.71085	0.7500	-0.0392	-5.5
4-6	-0.022	-0.0191	-0.0029	-13.3
4-7	0.4831	0.4760	0.0071	1.5
5-7	-0.6321	-0.6605	0.0284	4.5
6-3	0.76635	0.7788	-0.0125	-1.6
6-8	-0.1428	-0.1467	0.0039	2.7
7-8	-0.1709	-1.2013	0.0303	2.6

Στοιχείο 8				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.6416	-0.6755	0.0339	5.3
2-5	0.2775	0.2592	0.0183	6.6
3-4	-0.44325	-0.4580	0.0147	3.3
3-1	0.579	0.6078	-0.0288	-5.0
4-6	0.005	0.0068	-0.0018	-36.3
4-7	0.4506	0.4463	0.0043	1.0
5-7	-0.5203	-0.5389	0.0186	3.6
6-3	0.6133	0.6225	-0.0092	-1.5
6-8	-0.08105	-0.0853	0.0042	5.2
7-8	-0.95825	-0.9771	0.0189	2.0

Στοιχείο 9				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.3196	-0.3345	0.0149	4.7
2-5	0.1567	0.1475	0.0091	5.8
3-4	-0.2760	-0.2823	0.0064	2.3
3-1	0.3754	0.3870	-0.0117	-3.1
4-6	0.0070	0.0071	-0.0001	-2.1
4-7	0.2926	0.2905	0.0021	0.7
5-7	-0.3864	-0.3958	0.0094	2.4
6-3	0.3736	0.3778	-0.0042	-1.1
6-8	-0.0650	-0.0671	0.0021	3.3
7-8	-0.6387	-0.6473	0.0086	1.4

Στοιχείο 10				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}(\%)$
1-2	-0.5744	-0.6105	0.0361	6.3
2-5	0.4012	0.3796	0.0216	5.4
3-4	-0.3948	-0.4095	0.0147	3.7
3-1	0.4238	0.4536	-0.0297	-7.0
4-6	-0.004	-0.0023	-0.0017	-42.9
4-7	0.5323	0.5272	0.0051	1.0
5-7	-0.4312	-0.4507	0.0195	4.5
6-3	0.5618	0.5734	-0.0115	-2.0
6-8	-0.0649	-0.0711	0.0062	9.5
7-8	-0.1096	-1.1347	0.0251	2.3

Στιγμιότυπο 11				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.5140	-0.5408	0.0268	5.2
2-5	0.3379	0.3234	0.0145	4.3
3-4	-0.3552	-0.3668	0.0116	3.3
3-1	0.3139	0.3371	-0.0233	-7.4
4-6	-0.0190	-0.0172	-0.0018	-9.7
4-7	0.3973	0.3911	0.0062	1.6
5-7	-0.3934	-0.4061	0.0127	3.2
6-3	0.5351	0.5438	-0.0087	-1.6
6-8	-0.1019	-0.1055	0.0036	3.5
7-8	-0.9486	-0.9670	0.0184	1.9

Στιγμιότυπο 12				
Γραμμή	$P_{ij}^{(EP)}$	$P_{ij}^{(ΣP)}$	ΔP_{ij}	$E_{P_{ij}}$ (%)
1-2	-0.274	-0.285	0.012	4.2
2-5	0.145	0.138	0.007	4.5
3-4	-0.221	-0.226	0.005	2.1
3-1	0.312	0.322	-0.010	-3.3
4-6	-0.017	-0.016	-0.001	-4.4
4-7	0.278	0.276	0.002	0.6
5-7	-0.282	-0.287	0.005	1.9
6-3	0.342	0.346	-0.004	-1.3
6-8	0	-0.002	0.002	-
7-8	-0.571	-0.578	0.007	1.1

Γενικά, παρατηρούμε ότι τα ποσοστιαία σφάλματα κυμαίνονται στις περισσότερες περιπτώσεις σε τιμές μικρότερες του 10% στις γραμμές που έχουν μεγάλη ή μέτρια φόρτιση. Το μέγιστο σφάλμα είναι ίσο με 13.3 % και εμφανίζεται στο 7^ο στιγμιότυπο στη γραμμή 2-5. Σε γραμμές με μικρή φόρτιση, όπως αναφέρθηκε και στις παραγράφους 4.3.1 και 4.3.2, το ποσοστιαίο σφάλμα δεν έχει σημαντικό ρόλο και το μέγιστο ποσοστιαίο σφάλμα είναι 42.9% στη γραμμή 4-6 στο στιγμιότυπο 10, αλλά αντιστοιχεί σε πολλή μικρή τιμή απόλυτου σφάλματος (0.0017 αμ ή 170 kW) για το μέγεθος του συστήματος που μελετάται. Γενικά, οι τιμές των ποσοστιαίων σφαλμάτων κυμαίνονται σε αντίστοιχα επίπεδα με το Σύνολο Μετρήσεων Β.

4.4. Διερεύνηση Γραμμικής Ανεξαρτησίας Μετρήσεων

Στα πλαίσια της εργασίας χρησιμοποιείται το γραμμικό μοντέλο της ροής φορτίου ΣΡ για την εκτίμηση των αντιδράσεων ενός δικτύου. Η εύρεση μιας αποδέκτης λύσης, δηλαδή ενός συνόλου θετικών τιμών για τις αντιδράσεις, του οποίου οι τιμές θα παρουσιάζουν μικρή απόκλιση από τις πραγματικές, επηρεάζεται από τη δομή του πίνακα \mathbf{A} της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (Σχέση 3.16 – Παράγραφος 3.2.3).

Η δομή του πίνακα \mathbf{A} καθορίζεται από δύο παράγοντες:

- Από τη δομή του δικτύου.
- Από το σύνολο μετρήσεων.

Λόγω της γραμμικότητας του μοντέλου, και όπως θα φανεί και στο Κεφάλαιο 5, σε περίπτωση που οι μετρήσεις των ροών ενεργού ισχύος για διαφορετικά στιγμιότυπα παρουσιάζουν σημαντική γραμμική εξάρτηση, τότε ο πίνακας $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ είναι πολύ κοντά στο να είναι ιδιάζων, ακόμη και μετά την παραδοχή ότι μια αντίδραση είναι γνωστή (Ενότητα 3.2), και η εκτίμηση δεν αντιστοιχεί στο πραγματικό σύνολο τιμών των αντιδράσεων του δικτύου.

Αν θεωρηθεί ότι οι μετρήσεις των ροών ενεργού ισχύος παρήχθησαν από ένα δίκτυο ΣΡ n κόμβων και m κλάδων, για το οποίο ισχύουν οι εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ (2.36) και θεωρώντας μηδενική τη γωνία δ_1 του ζυγού αναφοράς, τότε μπορεί να δημιουργηθεί ένα διάνυσμα δ , μήκους $n - 1$, που έχει ως στοιχεία τις γωνίες δ_2 έως δ_n . Για διαφορετικές τιμές των γωνιών δ , ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που μπορούν να δημιουργηθούν είναι $n - 1$. Σύμφωνα, με τις παραπάνω θεωρήσεις, οι μετρήσεις των ροών ενεργού ισχύος προκύπτουν ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του διανύσματος δ . Συνεπώς, ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στιγμιότυπων λειτουργίας που μπορεί να παραχθεί είναι $n - 1$. Επομένως, για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου, εφόσον υπάρχουν $n - 1$ γραμμικά ανεξάρτητα στιγμιότυπα μετρήσεων, η προσθήκη περισσότερων στιγμιότυπων λειτουργίας για την εκτίμηση των παραμέτρων δεν προσφέρει πρόσθετη πληροφορία. Για το συγκεκριμένο λόγο, η διερεύνηση της γραμμικής ανεξαρτησίας των στιγμιότυπων λειτουργίας είναι ιδιαίτερος σημαντική, καθώς μέσω αυτής μπορεί να διαπιστωθεί η ποιότητα των μετρήσεων που χρησιμοποιούνται.

Για να μελετηθεί η γραμμική ανεξαρτησία των Συνόλων Μετρήσεων \mathbf{A} , \mathbf{B} και $\mathbf{\Gamma}$, αρχικά σχηματίζεται για καθένα από τα 3 σύνολα μετρήσεων ο πίνακας των μετρήσεων \mathbf{P} . Αν αριθμηθούν οι γραμμές του δικτύου με αύξουσα σειρά από $i = 1, \dots, m$, το στοιχείο (i, j) του πίνακα \mathbf{P} αντιστοιχεί στη μέτρηση της ροής ενεργού ισχύος σε αμ για τη γραμμή μεταφοράς i και το στιγμιότυπο j , δηλαδή:

$$\mathbf{P} = [P_i^{(j)}] \quad (4.12)$$

Όπου:

- $i = 1, \dots, m.$
- $j = 1, \dots, k.$

Τα στοιχεία του πίνακα **P** για το σύνολο A μπορούν να προκύψουν αν τα στοιχεία του Πίνακα 4.5 διαιρεθούν με τη βάση ισχύος $S_B = 100$ MVA. Αντίστοιχα, τα στοιχεία του πίνακα **P** για τα σύνολα B και Γ μπορούν να προκύψουν από τους Πίνακες 4.19 και 4.23 αντίστοιχα.

Για κάθε σύνολο μετρήσεων, ο πίνακας **P** αναλύεται σε ιδιάζουσες τιμές. Οι ιδιάζουσες τιμές για τους πίνακες **P** των συνόλων μετρήσεων A, B και Γ δίνονται στο Πίνακα 4.27.

Πίνακας 4.27: Ιδιάζουσες Τιμές για τους Πίνακες Μετρήσεων (αμ).

A/A	Σύνολο A	Σύνολο B	Σύνολο Γ
1	3.8800	6.3258	5.0007
2	0.2133	0.4700	0.5611
3	0.0959	0.0326	0.2314
4	0.0740	0.0081	0.1393
5	0.0451	0.0048	0.0750
6	0.0335	0.0042	0.0710
7	0.0049	0.0021	0.0121
8	-	0.0011	0.0082
9	-	0.0009	0.0019
10	-	0.0006	0.0003

Λαμβάνοντας υπόψη ότι σε απόλυτες τιμές τα στοιχεία των πινάκων μετρήσεων λαμβάνουν τιμές από 0 έως 1.4, με τα περισσότερα στοιχεία μικρότερα του 1, και πως τα μέγιστα σφάλματα της ροής φορτίου ΣΡ είναι τάξης μεγέθους του 0.01 αμ, οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα **P** που είναι μικρότερες του 0.01 θα θεωρούνται ως πολύ μικρές και πως ουσιαστικά η εμφάνιση μιας τέτοιας ιδιάζουσας τιμής σημαίνει ότι ο πίνακας **P** βρίσκεται πολύ κοντά στο να γίνει ιδιάζων. Από τον Πίνακα 4.27, για το σύνολο A υπάρχουν 6 ιδιάζουσες τιμές μεγαλύτερες του 0.01 και συνεπώς 6 γραμμικά ανεξάρτητα στιγμιότυπα. Για το σύνολο B υπάρχουν 3 ιδιάζουσες τιμές μεγαλύτερες του 0.01 και συνεπώς 3 γραμμικά ανεξάρτητα στιγμιότυπα. Για το σύνολο Γ υπάρχουν 7 ιδιάζουσες τιμές μεγαλύτερες του 0.01 και συνεπώς 7 γραμμικά ανεξάρτητα στιγμιότυπα, που είναι και ο μέγιστος βαθμός γραμμικά ανεξάρτητων στιγμιότυπων που μπορούν να παραχθούν από ένα δίκτυο ΣΡ με αριθμό κόμβων $n = 8$. Συμπερασματικά, το σύνολο A παρουσιάζει περίπου την ίδια ποιότητα μετρήσεων με το σύνολο Γ, ενώ το σύνολο B δεν προσφέρεται για ικανοποιητική εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου.

Κεφάλαιο 5

Εκτίμηση Παραμέτρων

5.1. Εκτίμηση Παραμέτρων με Χρήση Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εκτίμησης των αντιδράσεων του δικτύου του Σχήματος 4.1. Η εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιείται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Ενότητα 3.2) για τα σύνολα μετρήσεων A_1, A_2, A_3, A, B και Γ . Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με τη συγκεκριμένη σειρά για να αναδειχθούν οι διαφορές που προκύπτουν στο σφάλμα εκτίμησης, λόγω των διαφορετικών υποθέσεων κατά την επίλυση του προβλήματος ροής φορτίου EP. Σε περιπτώσεις που απαιτείται χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.11), και εφόσον για το δίκτυο που μελετάμε ισχύει $n = 8$ και $m = 10$, για να υπάρξει λύση στο πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων θα πρέπει να ισχύει:

$$k \geq 3 \quad (5.1)$$

Δηλαδή για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου απαιτούνται μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος από 3 ή περισσότερα στιγμιότυπα.

Αν η εκτίμηση της παραμέτρου X είναι η \hat{X} , τότε το εκατοστιαίο σχετικό σφάλμα εκτίμησης ορίζεται ως εξής:

$$\Delta = \frac{X - \hat{X}}{X} 100 \quad (\%) \quad (5.2)$$

Έστω e_i για $i = 1, \dots, k$ τα σφάλματα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (Σχέση 1.18) και $S(y)$ το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων (Σχέση 1.21) Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M ορίζεται ως εξής:

$$M = \frac{S(y)}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k e_i^2}{k} \quad (5.3)$$

5.1.1. Εκτίμηση για Σύνολο A_1

Στον Πίνακα 5.1 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου A_1 (Πίνακας 4.8). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.1 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου A_1 , τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.1: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_1

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.3994	0.3428	0.3427	0.3422	0.348
3-4	0.25	-0.00000014	0.2506	0.2543	0.2551	0.258
3-1	0.235	0.3029	0.2347	0.2332	0.2328	0.237
4-6	0.36	-0.00000021	0.3566	0.3464	0.3610	0.365
4-7	0.26	-0.00000014	0.2535	0.2560	0.2559	0.261
5-7	0.175	0.3225	0.1829	0.1821	0.1822	0.187
6-3	0.18	-0.00000001	0.1801	0.1818	0.1833	0.186
6-8	0.215	-0.00000011	0.2104	0.2127	0.2133	0.217
7-8	0.135	-0.000000077	0.1320	0.1328	0.1333	0.136

Στον Πίνακα 5.2 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων A_1 .

Πίνακας 5.2: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_1

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
2-5	-17.47	-0.81	-0.8	-0.64	-2.39
3-4	100	-0.23	-1.7	-2.05	-3.3
3-1	-28.9	0.13	0.76	0.94	-0.75
4-6	-100	-0.93	-3.79	0.29	1.28
4-7	100	2.5	1.54	1.59	-0.41
5-7	-84.27	-4.5	-4.07	-4.09	-6.92
6-3	100	-0.07	-0.98	-1.84	-3.07
6-8	100	2.15	1.07	0.8	-0.8
7-8	100	2.22	1.64	1.25	-0.66
Μέγιστο Σφάλμα	100	4.5	4.07	4.09	6.92

Από τους Πίνακες 5.1 και 5.2 παρατηρούμε ότι με χρήση μετρήσεων από ακριβώς 3 στιγμιότυπα η εκτίμηση δεν οδηγεί στο πραγματικό σύνολο τιμών για της παραμέτρους του δικτύου. Συνεπώς, τα τρία στιγμιότυπα δεν προσφέρουν επαρκή πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε αυτή την περίπτωση οδηγεί σε μια λύση όπου οι ζυγοί 3, 4, 6, 7 και 8 αποτελούν ένα κόμβο και οι μεταξύ τους συνδέσεις είναι βραχυκυκλωμένες. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις παρατηρούμε ότι τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης κυμαίνονται σε χαμηλές τιμές (μέχρι 7%), ενώ η προσθήκη περισσότερων μετρήσεων προκαλεί μικρή βελτίωση των εκτιμήσεων για κάποιες παραμέτρους, ενώ για τις υπόλοιπες μικρή χειροτέρευση. Η εκτίμηση των παραμέτρων για $k \geq 4$ είναι πολύ καλή.

Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.3: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_1

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	3.81E-05	4-6	1	7.88E-09
$k = 5$	1.23E-04	4-6	4	9.86E-08
$k = 6$	4.31E-05	4-6	2	2.16E-08
$k = 7$	8.63E-05	3-4	7	1.24E-09

Παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, που αποτελεί ένα δείκτη για τη διασπορά των σφαλμάτων των εκτιμήσεων, μετά την προσθήκη του 6^{ου} στιγμιότυπου στις μετρήσεις μειώνεται σταθερά για αύξηση του αριθμού των μετρήσεων.

5.1.2. Εκτίμηση για Σύνολο A_2

Στον Πίνακα 5.4 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου A_2 (Πίνακας 4.11). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.4 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου A_2 , τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.4: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_2

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.200
2-5	0.34	0.42	0.3592	0.3582	0.3586	0.363
3-4	0.25	0.000000009	0.2546	0.2553	0.2593	0.260
3-1	0.235	0.32	0.2466	0.2460	0.2453	0.248
4-6	0.36	0.00000001	0.3677	0.3666	0.3738	0.376
4-7	0.26	0.00000001	0.2758	0.2743	0.2684	0.272
5-7	0.175	0.3563	0.1882	0.1890	0.1969	0.199
6-3	0.18	0.000000007	0.1836	0.1840	0.1870	0.188
6-8	0.215	0.000000008	0.2209	0.2190	0.2200	0.222
7-8	0.135	0.000000005	0.1429	0.1421	0.1398	0.142

Στον Πίνακα 5.5 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων A_2 .

Πίνακας 5.5: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_2

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
2-5	-25.08	-5.64	-5.35	-5.48	-6.62
3-4	100	-1.84	-2.13	-3.72	-4.18
3-1	-36.63	-4.95	-4.7	-4.37	-5.52
4-6	-100	2.14	1.82	3.83	4.4
4-7	100	-6.09	-5.5	-3.22	-4.6
5-7	-103.61	-7.57	-8.02	-12.52	-13.94
6-3	100	-2.02	-2.24	-3.92	-4.4
6-8	100	-2.73	-1.88	-2.3	-3.37
7-8	100	-5.85	-5.26	-3.57	-4.89
Μέγιστο Σφάλμα	103.61	7.57	8.02	12.52	13.94

Από τους Πίνακες 5.4 και 5.5 παρατηρούμε ότι με χρήση μετρήσεων από 3 στιγμιότυπα η εκτίμηση και πάλι δεν οδηγεί στο πραγματικό σύνολο τιμών για τις παραμέτρους του δικτύου. Συνεπώς, τα τρία στιγμιότυπα δεν προσφέρουν επαρκή πληροφορία για την εκτίμηση των

παραμέτρων. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε αυτή την περίπτωση οδηγεί σε μια λύση όπου οι ζυγοί 3, 4, 6, 7 και 8 αποτελούν ένα κόμβο και οι μεταξύ τους συνδέσεις είναι βραχυκυκλωμένες, όπως και πριν. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις παρατηρούμε ότι τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης κυμαίνονται σε χαμηλές τιμές (μέχρι 6%), ενώ μεγαλύτερες τιμές σφάλματος εμφανίζονται μόνο για τη γραμμή μεταφοράς 5-7 (μέχρι 14 %). Η καλύτερη εκτίμηση, λαμβάνοντας ως κριτήριο τα σχετικά σφάλματα εκτιμήσεων, είναι η εκτίμηση με χρήση μετρήσεων για $k = 5$, καθώς παρατηρούμε ότι η προσθήκη περισσότερων μετρήσεων οδηγεί σε αύξηση των σχετικών σφαλμάτων για όλες τις γραμμές μεταφοράς. Σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις για το σύνολο A_1 , παρατηρούμε ότι τα σχετικά σφάλματα των εκτιμήσεων είναι μεγαλύτερα (σε αρκετές περιπτώσεις έως και διπλάσια), γεγονός που οφείλεται στις αποκλίσεις των τάσεων των ζυγών φορτίου από το ονομαστικό στην περίπτωση του συνόλου A_2 .

Στον Πίνακα 5.6 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.6: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_2

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	7.40E-05	4-7	2	7.53E-10
$k = 5$	7.39E-05	4-6	1	9.31E-10
$k = 6$	8.97E-05	4-7	3	1.29E-09
$k = 7$	9.12E-05	4-6	3	1.46E-09

Παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αυξάνεται με την προσθήκη περισσότερων των 4 στιγμιότυπων στις μετρήσεις. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζεται και για το μέγιστο σφάλμα e_i .

Γενικά, συγκρίνοντας τις εκτιμήσεις για τα σύνολα A_1 και A_2 παρατηρούμε ότι αν λάβουμε ως κριτήριο τα σχετικά σφάλματα των εκτιμήσεων παρατηρείται μια αξιοσημείωτη αύξηση των σφαλμάτων, αλλά τα σφάλματα για το σύνολο μετρήσεων A_2 παραμένουν σε επίπεδα τέτοια, ώστε να μπορεί να χαρακτηριστεί ως καλή η ακρίβεια της εκτίμησης. Το γεγονός ότι η τάση ορισμένων ζυγών διαφέρει από το 1 αμ για το σύνολο μετρήσεων A_2 , φαίνεται ότι έχει αρνητική επίδραση στην ακρίβεια των εκτιμήσεων, όπως ήταν αναμενόμενο.

5.1.3. Εκτίμηση για Σύνολο A_3

Στον Πίνακα 5.7 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου A_3 (Πίνακας 4.15). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.7 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου A_3 , τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.7: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A_3

Γραμμή	$X(\alpha\mu)$	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.200
2-5	0.34	0.41	0.3472	0.3497	0.3580	0.370
3-4	0.25	0.00000000009	0.2188	0.2466	0.2379	0.244
3-1	0.235	0.3	0.2404	0.2317	0.2391	0.247
4-6	0.36	0.00000000001	0.3027	0.3431	0.3300	0.340
4-7	0.26	0.00000000001	0.2377	0.2601	0.2583	0.268
5-7	0.175	0.33	0.1903	0.1849	0.1918	0.202
6-3	0.18	0.00000000007	0.1576	0.1777	0.1713	0.176
6-8	0.215	0.00000000008	0.1788	0.2008	0.1966	0.203
7-8	0.135	0.00000000005	0.1233	0.1356	0.1340	0.139

Στον Πίνακα 5.8 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων A_3 .

Πίνακας 5.8: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A_3

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
2-5	-19.54	-2.12	-2.87	-5.3	-8.89
3-4	100	12.47	1.37	4.85	2.47
3-1	-29.47	-2.31	1.4	-1.75	-5.12
4-6	100	15.91	4.7	8.35	5.6
4-7	100	8.58	-0.03	0.65	-3.19
5-7	-92.96	-8.72	-5.67	-9.59	-15.63
6-3	100	12.42	1.26	4.81	2.36
6-8	100	16.83	6.62	8.55	5.52
7-8	100	8.65	-0.42	0.73	-3
Μέγιστο Σφάλμα	1000	16.83	6.62	9.59	15.64

Από τους Πίνακες 5.7 και 5.10 παρατηρούμε και πάλι ότι με χρήση μετρήσεων από 3 στιγμιότυπα η εκτίμηση δεν οδηγεί στο πραγματικό σύνολο τιμών για τις παραμέτρους του δικτύου, καθώς τα τρία στιγμιότυπο δεν περιέχουν επαρκή πληροφορία για την ορθή εκτίμηση

των παραμέτρων. Παρατηρούμε ότι για την εκτίμηση μέσω μετρήσεων των στιγμιότυπων 1 έως 4 τα σχετικά σφάλματα για τις περισσότερες γραμμές κυμαίνονται στην περιοχή του 10 %. Η προσθήκη περισσότερων στιγμιότυπων στις μετρήσεις, φαίνεται γενικά να μειώνει τα σχετικά σφάλματα των εκτιμήσεων για τις περισσότερες γραμμές. Η καλύτερη εκτίμηση, με κριτήριο τα σχετικά σφάλματα, επιτυγχάνεται για τις μετρήσεις για $k=5$, που όλα τα σφάλματα είναι μικρότερα του 7 %. Σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις για το σύνολο A_2 παρατηρούμε ότι τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης είναι αισθητά μεγαλύτερα στις περισσότερες περιπτώσεις και συνεπώς φαίνεται η επίδραση που έχουν τα άεργα φορτία στην εκτίμηση των παραμέτρων.

Στον Πίνακα 5.9 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.9: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A_3

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	6.23E-05	4-6	3	4.48E-10
$k = 5$	1.38E-04	4-7	3	4.97E-09
$k = 6$	3.34E-04	3-1	4	1.77E-08
$k = 7$	3.53E-04	2-5	6	1.79E-08

Παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αυξάνεται με την προσθήκη περισσότερων των 4 στιγμιότυπων στις μετρήσεις. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζεται και για το μέγιστο σφάλμα e_i .

Αν συγκρίνουμε τις εκτιμήσεις των αντιδράσεων για τα σύνολα μετρήσεων A_2 και A_3 , παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι μεγαλύτερο για τις εκτιμήσεις που προέκυψαν από το σύνολο A_3 . Στις περισσότερες περιπτώσεις παρατηρείται ότι το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα της εκτίμησης έχει αυξηθεί (Πίνακες 5.5 και 5.8), συνεπώς οι σημαντικότερες αποκλίσεις της τάσης από τη μονάδα για το σύνολο μετρήσεων A_3 οδηγούν σε μια σχετική μείωση της ακρίβειας της εκτίμησης.

5.1.4. Εκτίμηση για Σύνολο A

Στον Πίνακα 5.10 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου A (Πίνακας 4.5). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.10 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου A, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.10: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο A

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.200
2-5	0.34	0.3991	0.3178	0.3198	0.3240	0.333
3-4	0.25	0.0250	0.2575	0.2632	0.2456	0.240
3-1	0.235	0.2614	0.2024	0.2019	0.2099	0.218
4-6	0.36	0.0410	0.3533	0.3609	0.3427	0.323
4-7	0.26	0.0399	0.2447	0.2477	0.2534	0.258
5-7	0.175	0.2890	0.1625	0.1649	0.1558	0.160
6-3	0.18	0.0184	0.1842	0.1881	0.1762	0.171
6-8	0.215	0.0303	0.1985	0.2028	0.1974	0.199
7-8	0.135	0.0207	0.1314	0.1332	0.1349	0.136

Στον Πίνακα 5.11 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων A.

Πίνακας 5.11: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
2-5	-17.4	6.54	5.93	4.69	2.18
3-4	89.97	-3.02	-5.26	1.76	4.15
3-1	-11.22	13.88	14.08	10.69	7.33
4-6	88.6	1.87	-0.26	4.8	10.14
4-7	84.65	5.88	4.74	2.55	0.78
5-7	-65.17	7.17	5.79	10.98	8.31
6-3	89.78	-2.31	-4.52	2.11	4.81
6-8	85.9	7.67	5.67	8.17	7.55
7-8	84.65	2.63	1.31	0.09	-1.01
Μέγιστο Σφάλμα	89.97	13.88	14.08	10.98	10.14

Όπως και πριν, από τους Πίνακες 5.10 και 5.11 φαίνεται ότι η εκτίμηση που χρησιμοποιεί μετρήσεις για τα στιγμιότυπα 1 έως 3 δεν οδηγεί στο σωστό σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις του δικτύου, καθώς δεν υπάρχει επαρκής πληροφορία για να γίνει η εκτίμηση. Για τις εκτιμήσεις

που γίνεται χρήση 4 ή περισσότερων στιγμιότυπων, τα σχετικά σφάλματα κυμαίνονται σε τιμές μικρότερες του 11 % για την πλειονότητα των αντιδράσεων. Εξαίρεση αποτελούν οι εκτιμήσεις για την αντίδραση της γραμμής 3-1, που λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές σε δύο περιπτώσεις. Γενικά, τα σχετικά σφάλματα κυμαίνονται σε ικανοποιητικά επίπεδα και η ακρίβεια της εκτίμησης των παραμέτρων μπορεί να χαρακτηριστεί καλή.

Στον Πίνακα 5.12 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.12: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	3.08E-04	4-6	3	8.17E-09
$k = 5$	3.06E-04	4-6	3	6.43E-09
$k = 6$	4.38E-04	5-7	6	2.73E-08
$k = 7$	5.97E-04	4-6	7	4.89E-08

Όπως και στις περιπτώσεις των παραγράφων 5.1.1, 5.1.2 και 5.1.3, η αύξηση του αριθμού των στιγμιότυπων για την εκτίμηση των παραμέτρων οδηγεί σε αύξηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Συγκρίνοντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του δικτύου μέσω των συνόλων μετρήσεων A_3 και A παρατηρούμε ότι σε γενικές γραμμές τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης των παραμέτρων τετραγωνικών σφαλμάτων για τις δύο περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα αυξάνονται στην περίπτωση του συνόλου A, που σημαίνει ότι η ύπαρξη ωμικών αντιστάσεων στις γραμμές μεταφοράς οδηγεί σε εκτίμηση σχετικά μικρότερης ακρίβειας, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Σημειώνεται ότι η σχέση R/X που έχει θεωρηθεί είναι μικρή (0.1), που είναι χαρακτηριστική για γραμμές υπερυψηλής τάσης (YYT) (πχ. 400 kV), οπότε για περισσότερο ωμικά δίκτυα τα σφάλματα μπορεί να μεγαλώνουν και άλλο.

5.1.5. Εκτίμηση για Σύνολο B

Στον Πίνακα 5.13 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου B (Πίνακας 4.19). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.13 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου B, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.13: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 3$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$	$k = 18$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	-0.0820	-0.0690	-0.0716	-0.0685	-0.0629	-0.0567
3-4	0.25	1.24E-09	0.0495	0.0827	0.0646	0.0613	0.0614
3-1	0.235	0.0535	0.0750	0.0251	0.0394	0.0330	0.0215
4-6	0.36	2.95E-10	0.0584	0.1254	0.1181	0.1151	0.1086
4-7	0.26	7.32E-10	-0.0048	-0.0280	-0.0263	-0.0255	-0.0246
5-7	0.175	-0.1804	-0.1126	-0.1111	-0.1119	-0.1171	-0.1238
6-3	0.18	1.32E-09	0.0348	0.0596	0.0477	0.0454	0.0452
6-8	0.215	9.60E-09	-0.0002	0.0004	0.0007	0.0002	0.0001
7-8	0.135	1.24E-09	-0.0004	-0.0088	-0.0082	-0.0080	-0.0078

Από τον Πίνακα 5.13 είναι εμφανές ότι η εκτίμηση για οποιοδήποτε σύνολο μετρήσεων καταλήγει σε ένα σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις των γραμμών μεταφοράς διαφορετικό από το πραγματικό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μετρήσεις για διαφορετικά στιγμιότυπα του συνόλου B έχουν μεταξύ τους σημαντική γραμμική εξάρτηση και συνεπώς δεν περιέχουν επαρκή πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.4. Στον Πίνακα 5.14 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.14: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 3$	6.92E-10	6-8	3	6.79E-20
$k = 6$	1.10E-04	1-2	5	1.85E-09
$k = 9$	0.00016	3-4	3	2.35E-09
$k = 12$	0.00016	2-5	2	1.88E-09
$k = 15$	0.00018	5-7	2	1.64E-09
$k = 18$	0.00019	5-7	2	1.56E-09

Από τον Πίνακα 5.14 επιβεβαιώνουμε ότι τα σφάλματα e_i είναι μικρά και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα παρουσιάζει μικρότερες τιμές από τις υπόλοιπες περιπτώσεις της ενότητας 4.4. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα της επίλυσης του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων, αλλά η λύση που προκύπτει είναι εσφαλμένη λόγω της γραμμικής εξάρτησης των μετρήσεων.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων είναι ότι ορισμένες εκτιμώμενες τιμές των αντιδράσεων είναι αρνητικές, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τη φυσική έννοια της αντίδρασης, καθώς έχουμε μεταφοράς ενεργού ισχύος προς την αντίθετη κατεύθυνση από την κανονική. Στην προσπάθεια εύρεσης μιας λύσης που θα είναι κοντά στο πραγματικό σύνολο τιμών των αντιδράσεων του δικτύου, λύνεται το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς (Ενότητα 3.3) για να εξασφαλιστεί ότι οι εκτιμώμενες τιμές των αντιδράσεων θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 0.1.

Στον Πίνακα 5.15 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου B (Πίνακας 4.19) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς. Σε κάθε στήλη του πίνακα 5.15 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου B, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.15: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο B (Επίλυση με Περιορισμούς)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 3$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$	$k = 18$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.5780	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1002
3-4	0.25	0.417	0.1483	0.1482	0.1483	0.1845	0.2935
3-1	0.235	0.8925	0.3467	0.4395	0.3432	0.2026	0.1537
4-6	0.36	0.167	0.1006	0.1023	0.1007	1.4320	1.0990
4-7	0.26	1.22	0.2041	0.2896	0.2036	0.1049	0.1456
5-7	0.175	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
6-3	0.18	0.275	0.1000	0.1000	0.1000	0.1972	0.2480
6-8	0.215	5.83	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
7-8	0.135	0.843	0.1000	0.1391	0.1000	0.1000	0.1076

Από τον Πίνακα 5.15 είναι εμφανές ότι η εκτίμηση για οποιοδήποτε σύνολο μετρήσεων καταλήγει σε ένα σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις των γραμμών μεταφοράς διαφορετικό από το πραγματικό. Χαρακτηριστικό είναι ότι οι περισσότερες από τις εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων είναι ίσες με τον περιορισμό, δηλαδή με 0.1. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το σύνολο τιμών B έχει ισχυρά γραμμικώς εξαρτημένες μετρήσεις και μη επαρκή πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων. Επομένως, ούτε μέσω της επίλυσης του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς είναι δυνατή η εξασφάλιση εύρεσης μιας

λύσης που θα είναι σύμφωνη με τους φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος, δηλαδή οι τιμές των αντιδράσεων να είναι θετικές.

Στον Πίνακα 5.16 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.16: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Β (Επίλυση με Περιορισμούς)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 3$	0.01504	1-2	1	8.38E-06
$k = 6$	0.01504	1-2	1	4.73E-06
$k = 9$	0.01504	1-2	1	3.19E-06
$k = 12$	0.01504	1-2	1	2.41E-06
$k = 15$	0.01504	1-2	1	6.30E-06
$k = 18$	0.01504	1-2	1	5.31E-06

Από τον πίνακα 5.16 φαίνεται ότι η λύση που προκύπτει για το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα e_i .

Ακολουθως, γίνεται προσπάθεια μέσω της χρήσης του μοντέλου εκτίμησης του δικτύου με αντιστάσεις (Ενότητα 3.4), να βρεθεί ένα αποδεκτό σύνολο εκτιμώμενων τιμών για τις αντιδράσεις του δικτύου, με δεδομένα τα στιγμιότυπα του συνόλου Β. Στον Πίνακα 5.17 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου Β (Πίνακας 4.19) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με γραμμικούς περιορισμούς. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.17 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Β, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.17: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Β (Επίλυση μέσω Μοντέλου με Αντιστάσεις)

Γραμμή	Χ(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 3$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$	$k = 18$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.5780	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.100
3-4	0.25	0.417	0.1483	0.1482	0.1483	0.1845	0.293
3-1	0.235	0.8925	0.3467	0.4395	0.3432	0.2026	0.153
4-6	0.36	0.167	0.1006	0.1023	0.1007	1.4320	1.099
4-7	0.26	1.22	0.2041	0.2896	0.2036	0.1049	0.145
5-7	0.175	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.100
6-3	0.18	0.275	0.1000	0.1000	0.1000	0.1972	0.248
6-8	0.215	5.83	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.100
7-8	0.135	0.843	0.1000	0.1391	0.1000	0.1000	0.107

Παρατηρούμε στον Πίνακα 5.17, ότι σε όλες τις περιπτώσεις η εκτίμηση των παραμέτρων καταλήγει σε διαφορετικό σύνολο τιμών από το πραγματικό. Είναι χαρακτηριστικό ότι αρκετές εκτιμώμενες τιμές των αντιδράσεων είναι ίσες με τον περιορισμό, δηλαδή με 0.1. Είναι εμφανές ότι η μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου με αντιστάσεις δεν μπορεί να δώσει ικανοποιητική λύση για τα δεδομένα του συνόλου B.

Στον Πίνακα 5.18 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.18: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο B (Επίλυση μέσω Μοντέλου με Αντιστάσεις)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 7$	0.000573	7-8	3	4.11E-08
$k = 9$	0.000922	6-8	6	5.82E-08
$k = 12$	0.000939	7-8	6	4.46E-08
$k = 15$	0.012748	6-8	13	4.16E-06
$k = 18$	0.012993	6-8	13	3.53E-06

Από τον Πίνακα 5.18, φαίνεται ότι τα σφάλματα που προκύπτουν μέσω επίλυσης με το μοντέλο με αντιστάσεις είναι μεγαλύτερα, σε σχέση με τα σφάλματα με την επίλυση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Πίνακας 5.14).

5.1.6. Εκτίμηση για Σύνολο Γ

Στον Πίνακα 5.19 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων του δικτύου με χρήση των μετρήσεων του συνόλου Γ (Πίνακας 4.19). Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.19 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Γ, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.19: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις						
		k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 8	k = 10	k = 12
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	-0.0820	-0.0155	0.3207	0.2739	0.3408	0.3491	0.3427
3-4	0.25	1.24E-09	-0.0912	0.2939	0.3362	0.2732	0.2737	0.2646
3-1	0.235	0.0535	0.2918	0.2465	0.2008	0.2439	0.2235	0.2307
4-6	0.36	2.95E-10	-0.1351	0.3848	0.4283	0.3544	0.3661	0.3513
4-7	0.26	7.32E-10	0.0470	0.2126	0.1699	0.2539	0.2891	0.2745
5-7	0.175	-0.1804	-0.0436	0.2631	0.2648	0.2183	0.1716	0.1806
6-3	0.18	1.32E-09	-0.0656	0.2086	0.2379	0.1938	0.1947	0.1881
6-8	0.215	9.60E-09	0.0444	0.1723	0.1433	0.2019	0.2259	0.2134
7-8	0.135	1.24E-09	0.0193	0.1167	0.0975	0.1356	0.1531	0.1453

Στον Πίνακα 5.20 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Γ.

Πίνακας 5.20: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)						
	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 8	k = 10	k = 12
2-5	124.1	104.55	5.68	19.43	-0.24	-2.68	-0.79
3-4	100	136.5	-17.55	-34.47	-9.28	-9.48	-5.83
3-1	77.22	-24.18	-4.91	14.56	-3.77	4.9	1.82
4-6	100	137.54	-6.88	-18.98	1.56	-1.68	2.43
4-7	100	81.91	18.21	34.67	2.33	-11.18	-5.57
5-7	203.1	124.94	-50.33	-51.33	-24.72	1.97	-3.2
6-3	100	136.45	-15.88	-32.19	-7.68	-8.16	-4.53
6-8	100	79.33	19.87	33.36	6.08	-5.07	0.75
7-8	100	85.71	13.54	27.77	-0.44	-13.38	-7.6
Μέγιστο Σφάλμα	203.1	137.54	50.33	51.33	24.72	13.38	7.6

Από τους Πίνακες 5.19 και 5.20, είναι εμφανές ότι η εκτίμηση για $k = 3$ ή 4 δεν καταλήγει σε αποδεκτό σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις των γραμμών. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς τα 3 τρία πρώτα στιγμιότυπα του συνόλου Γ είναι ίδια με τα αντίστοιχα του συνόλου B , τα οποία χαρακτηρίζονται από σημαντική γραμμική εξάρτηση. Συνεπώς, για $k = 3$ και 4 , δεν υπάρχει επαρκής πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων. Παρατηρούμε ότι το σφάλμα της εκτίμησης μειώνεται, καθώς προστίθενται νέες μετρήσεις, οι οποίες δεν έχουν γραμμική εξάρτηση με τις προηγούμενες.

Στον Πίνακα 5.21 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.21: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 5$	0.000503	6-8	3	4.76E-08
$k = 6$	0.000502	6-8	3	4.40E-08
$k = 8$	0.00048	2-5	6	5.75E-08
$k = 10$	0.000556	1-2	2	5.96E-08
$k = 12$	0.000606	5-7	2	6.28E-08

Από τον Πίνακα 5.21, τα σφάλματα που προκύπτουν από την επίλυση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι συγκρίσιμα με τα αντίστοιχα για το σύνολο μετρήσεων A . Συνεπώς, επιβεβαιώνεται η ορθότητα της λύσης του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων. Συγκρίνοντας τους Πίνακες 5.12 και 5.21 παρατηρούμε ότι η εκτίμηση για το σύνολο Γ με χρήση 12 στιγμιότυπων είναι αισθητά καλύτερη από την αντίστοιχη για το σύνολο A , καθώς το αντίστοιχο μέγιστο σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο στην περίπτωση του συνόλου Γ .

5.2. Εκτίμηση με Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εκτίμησης των αντιδράσεων του δικτύου του Σχήματος 4.1 με τη μέθοδο των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων (Ενότητα 3.5) και λαμβάνοντας ως δεδομένα τα σύνολα μετρήσεων A , B και Γ . Μέσω της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της συγκεκριμένης ενότητας γίνεται σαφές ότι για οποιοδήποτε σύνολο μετρήσεων, ακόμη και για το σύνολο B , είναι δυνατό να βρεθεί ένα αποδεκτό προσεγγιστικό δίκτυο το οποίο θα ελαχιστοποιεί το σφάλμα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων e (Σχέση 1.19).

Για το δίκτυο που μελετάμε ισχύει $m = 10$ και $n = 8$, επομένως για να είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος εκτίμησης με την προτεινόμενη μέθοδο, προκύπτει από τη σχέση (3.37):

$$k > 3 \tag{5.4}$$

Επειδή στην εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου, λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων της ροής φορτίου ΣΡ, δεν μας ενδιαφέρει η απόλυτη τιμή των εκτιμήσεων για τις αντιδράσεις, αλλά η μεταξύ τους αναλογία (Σχέση 2.40 – Παράγραφος 2.3.6), όλες οι εκτιμήσεις κανονικοποιούνται ώστε η εκτίμηση της γραμμής 1-2 να είναι ίση με την πραγματική τιμή, δηλαδή με 0.2 αμ. Μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η σύγκριση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων της παρούσας ενότητας με τα αποτελέσματα της ενότητας 5.1.

5.2.1. Εκτίμηση για το Σύνολο Α

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του συνόλου, χρησιμοποιήθηκε η τιμή $c = 0.0001$ με τις ροές ισχύος σε αμ στην εξίσωση (3.47) (Ενότητα 3.5). Στον Πίνακα 5.22 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Α (Πίνακας 4.5), με χρήση της μεθόδου των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.22 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Α, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.22: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Α (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις			
		$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.3246	0.3281	0.3393	0.3529
3-4	0.25	0.2539	0.2616	0.2594	0.2641
3-1	0.235	0.2106	0.2093	0.2183	0.227
4-6	0.36	0.3281	0.3425	0.3479	0.3447
4-7	0.26	0.2466	0.2547	0.2625	0.2725
5-7	0.175	0.1695	0.1691	0.1751	0.1863
6-3	0.18	0.1799	0.1855	0.1849	0.1877
6-8	0.215	0.1952	0.2027	0.2062	0.2142
7-8	0.135	0.1311	0.1355	0.1394	0.1442

Στον Πίνακα 5.23 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Α.

Πίνακας 5.23: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Α
(Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)			
	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
2-5	4.54	3.51	0.19	-3.8
3-4	-1.56	-4.62	-3.77	-5.64
3-1	10.4	10.95	7.11	3.37
4-6	8.85	4.87	3.36	4.23
4-7	5.16	2.03	-0.97	-4.82
5-7	3.14	3.38	-0.04	-6.47
6-3	0.08	-3.07	-2.73	-4.32
6-8	9.2	5.72	4.1	0.33
7-8	2.92	-0.38	-3.25	-6.84
Μέγιστο Σφάλμα	10.4	10.95	7.11	6.84

Από τους Πίνακες 5.22 και 5.23, παρατηρούμε ότι γενικά όσο αυξάνεται ο αριθμός των στιγμιότυπων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση υπάρχει μια σχετική βελτίωση στην ακρίβεια. Για $k = 7$ όλα τα σφάλματα είναι μικρότερα του 7 % και η εκτίμηση χαρακτηρίζεται ως πολύ καλή, καθώς το σφάλμα είναι στα επίπεδα που αναμένεται λόγω της προσέγγισης της ροής φορτίου ΣΡ.

Στον Πίνακα 5.24 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.24: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Α
(Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	0.00144	4-6	3	2.19E-07
$k = 5$	0.001508	4-6	3	1.62E-07
$k = 6$	0.001677	1-2	10	4.51E-07
$k = 7$	0.002214	4-7	10	7.13E-07

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα σφάλματα που προέκυψαν κατά την επίλυση με την απλή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Πίνακας 5.13). Αυτό είναι λογικό, καθώς στην τροποποιημένη μέθοδο στον κριτήριο ελαχιστοποίησης υπάρχει ένας επιπλέον όρος, ο οποίος δεν προσμετράται στον

υπολογισμό των σφαλμάτων e_i . Τα σφάλματα που προκύπτουν από την επίλυση είναι μικρά και επιβεβαιώνουν την ορθότητα της επίλυσης.

5.2.2. Εκτίμηση για το Σύνολο Β

Έπειτα από δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν με σκοπό την εύρεση ενός αποδεκτού συνόλου τιμών για τις αντιδράσεις, η τιμή της σταθεράς c στη Σχέση (3.47) επιλέχθηκε ίση με 0.1. Το γεγονός ότι η τιμή τα σταθεράς c είναι πολύ μεγαλύτερη απ' αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση μέσω του συνόλου Α, δείχνει ότι στο κριτήριο ελαχιστοποίησης της μεθόδου (Σχέση (3.43) – Ενότητα 3.5) ο δεύτερος όρος λαμβάνει μεγαλύτερη βαρύτητα κατά την επίλυση του προβλήματος. Η λύση που προκύπτει επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την σύγκλιση του δεύτερου όρου, μειώνοντας μ' αυτό τον τρόπο τη βαρύτητα των μετρήσεων που χρησιμοποιούνται.

Στον Πίνακα 5.25 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Β (Πίνακας 4.19), με χρήση της μεθόδου των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.25 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Β, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.25: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Β (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Γραμμή	X(σμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 4$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$	$k = 18$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.2447	0.2486	0.2507	0.2514	0.2519	0.2525
3-4	0.25	0.2639	0.2714	0.2751	0.2765	0.2776	0.2786
3-1	0.235	0.2510	0.2556	0.2579	0.2589	0.2594	0.2601
4-6	0.36	0.2297	0.2325	0.2339	0.2345	0.2348	0.2353
4-7	0.26	0.2372	0.2402	0.2412	0.2417	0.2415	0.2422
5-7	0.175	0.1961	0.1959	0.1957	0.1957	0.1956	0.1956
6-3	0.18	0.1995	0.1966	0.1953	0.1950	0.1944	0.1942
6-8	0.215	0.2298	0.2307	0.2321	0.2327	0.1442	0.1432
7-8	0.135	0.1376	0.1330	0.1317	0.1311	0.1317	0.1305

Στον Πίνακα 5.26 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Β.

Πίνακας 5.26: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Β
(Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)					
	$k = 4$	$k = 6$	$k = 9$	$k = 12$	$k = 15$	$k = 18$
2-5	28.02	26.88	26.27	26.05	25.91	25.72
3-4	-5.55	-8.55	-10.02	-10.58	-11.03	-11.43
3-1	-6.82	-8.75	-9.72	-10.15	-10.36	-10.66
4-6	36.18	35.42	35.02	34.87	34.76	34.64
4-7	8.75	7.62	7.23	7.04	7.12	6.85
5-7	-12.04	-11.92	-11.85	-11.83	-11.78	-11.77
6-3	-10.84	-9.21	-8.49	-8.35	-8.01	-7.89
6-8	-6.9	-7.31	-7.94	-8.23	32.93	33.39
7-8	-1.96	1.49	2.46	2.89	2.45	3.32
Μέγιστο Σφάλμα	36.18	35.42	35.02	34.87	34.76	34.64

Από τους Πίνακες 5.25 και 5.26 παρατηρούμε ότι οι διαφορές που παρουσιάζονται στις εκτιμήσεις των αντιδράσεων για διαφορετικά σύνολα στιγμιότυπων είναι πολύ μικρές. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει ότι με την επιλεγμένη τιμή της σταθεράς c το δεύτερο σκέλος του κριτηρίου ελαχιστοποίησης είναι που επηρεάζει στο μεγαλύτερο βαθμό τη σύγκλιση της μεθόδου.

Στον Πίνακα 5.27 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.27: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Β
(Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	0.00144	4-6	3	2.19E-07
$k = 5$	0.001508	4-6	3	1.62E-07
$k = 6$	0.001677	1-2	10	4.51E-07
$k = 7$	0.002214	4-7	10	7.13E-07

Από τον Πίνακα 5.27, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι μικρά και επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επίλυσης του προβλήματος των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων.

5.2.3. Εκτίμηση για το Σύνολο Γ

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του συνόλου, χρησιμοποιήθηκε η τιμή $c = 0.0001$ στην εξίσωση (3.47) (Ενότητα 3.5). Στον Πίνακα 5.29 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Γ (Πίνακας 4.23), με χρήση της μεθόδου των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.28 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Γ, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.28: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
1-2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2-5	0.34	0.2465	0.2506	0.3286	0.3460	0.3519	0.3472
3-4	0.25	0.3068	0.2329	0.2949	0.2774	0.2745	0.2679
3-1	0.235	0.2980	0.2222	0.2351	0.2451	0.2287	0.2347
4-6	0.36	0.2613	0.2221	0.3250	0.3518	0.3608	0.3509
4-7	0.26	0.2697	0.2117	0.2387	0.2608	0.2894	0.2784
5-7	0.175	0.2145	0.1525	0.2337	0.2197	0.1787	0.1863
6-3	0.18	0.2098	0.1609	0.2058	0.1964	0.1950	0.1903
6-8	0.215	0.2671	0.1771	0.1954	0.2077	0.2267	0.2169
7-8	0.135	0.1432	0.1115	0.1275	0.1390	0.1531	0.1472

Στον Πίνακα 5.29 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Γ.

Πίνακας 5.29: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα Γ)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)					
	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
2-5	27.5	26.29	3.34	-1.77	-3.5	-2.11
3-4	-22.71	6.84	-17.95	-10.94	-9.79	-7.15
3-1	-26.82	5.45	-0.04	-4.31	2.67	0.13
4-6	27.42	38.29	9.72	2.29	-0.21	2.53
4-7	-3.735	18.57	8.19	-0.29	-11.3	-7.06
5-7	-22.54	12.88	-33.55	-25.51	-2.11	-6.43
6-3	-16.54	10.59	-14.3	-9.13	-8.35	-5.74
6-8	-24.23	17.62	9.12	3.41	-5.45	-0.86
7-8	-6.07	17.43	5.55	-2.92	-13.44	-9.06
Μέγιστο Σφάλμα	27.5	38.29	33.55	25.51	13.44	9.06

Από τους Πίνακες 5.28 και 5.29 είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των στιγμιότυπων που χρησιμοποιούνται ως δεδομένα για την εκτίμηση, τόσο μειώνονται τα σχετικά σφάλματα των εκτιμήσεων. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των μετρήσεων του συνόλου Γ. Για $k = 12$, τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης είναι μικρότερα του 10 %, μέγεθος που δικαιολογείται λόγω των προσεγγίσεων της ροής φορτίου ΣΡ, και η εκτίμηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύ καλή.

Στον Πίνακα 5.30 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.30: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα M_i για το Σύνολο Γ (Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	0.00144	4-6	3	2.19E-07
$k = 5$	0.001508	4-6	3	1.62E-07
$k = 6$	0.001677	1-2	10	4.51E-07
$k = 7$	0.002214	4-7	10	7.13E-07

Από τον Πίνακα 5.30, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα σφάλματα που προέκυψαν κατά την επίλυση με την απλή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Πίνακας 5.21). Αυτό είναι λογικό, καθώς στην τροποποιημένη μέθοδο στον κριτήριο ελαχιστοποίησης υπάρχει ένας επιπλέον όρος, ο οποίος δεν προσμετράται στον υπολογισμό των σφαλμάτων e_i . Τα σφάλματα που προκύπτουν από την επίλυση είναι μικρά και επιβεβαιώνουν την ορθότητα της επίλυσης.

5.3. Εκτίμηση μέσω Μετρήσεων Ροών Ενεργού Ισχύος και Γωνιών Φάσης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου του Σχήματος 4.1, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και δεδομένα μετρήσεις των ροών ενεργού ισχύος και των γωνιών φάσης τάσης κάποιων ζυγών. Σε όλες τις περιπτώσεις, η γωνία του ζυγού 1 θεωρείται ως γωνία αναφοράς, δηλαδή είναι ίση με το μηδέν.

Αρχικά, παρουσιάζεται η εκτίμηση των αντιδράσεων με χρήση ενός στιγμιότυπου λειτουργίας, για το οποίο έχουμε μετρήσεις για όλες τις ροές ενεργού ισχύος και όλες τις γωνίες φάσης. Η συγκεκριμένη εκτίμηση θα χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης για την ακρίβεια των εκτιμήσεων με διαφορετικές μεθόδους, στην παράγραφο 5.4.

Για τα σύνολα μετρήσεων Α και Γ παρουσιάζεται η εκτίμηση των παραμέτρων μέσω μετρήσεων για τις ροές ενεργού ισχύος όλων των κλάδων του δικτύου και α) για τη γωνία φάσης τάσης του ζυγού 8, β) για τις γωνίες φάσης τάσης των ζυγών 4 και 8. Για το σύνολο Β, παρουσιάζονται τα

αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων για μετρήσεις όλων των ροών ενεργού ισχύος και των γωνιών φάσης όλων των ζυγών, εκτός του ζυγού 7. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάζεται για ναδειχθεί ότι μπορεί να μην είναι δυνατή η εκτίμηση όλων των αντιδράσεων με μετρήσεις όλων των ροών P και ορισμένων γωνιών φάσης δ , αν το σύνολο μετρήσεων για τις ροές ενεργού ισχύος παρουσιάζει μειωμένη γραμμική ανεξαρτησία, όπως το σύνολο B.

Για επίλυση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων με γνώση της γωνίας δ_8 , από τη Σχέση (3.49) για $n_\delta = 2$, απαιτούνται k στιγμιότυπα, με:

$$k \geq 3 \quad (5.5)$$

Για επίλυση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων με γνώση των γωνιών δ_4 και δ_8 , από τη Σχέση (3.49) για $n_\delta = 2$, απαιτούνται k στιγμιότυπα, με:

$$k \geq 2 \quad (5.6)$$

5.3.1. Εκτίμηση για ένα Στιγμιότυπο με Πλήρη Πληροφορία

Για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου χρησιμοποιείται το στιγμιότυπο 1 του συνόλου μετρήσεων A, θεωρώντας γνωστές όλες τις ροές ενεργού ισχύος και όλες τις φασικές γωνίες τάσης των ζυγών (μετρήσεις P και δ). Στον Πίνακα 5.31 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.32 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου A, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.31: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για Πλήρες Στιγμιότυπο (Μετρήσεις P και δ)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις
1-2	0.2	0.1832
2-5	0.34	0.3134
3-4	0.25	0.2299
3-1	0.235	0.2372
4-6	0.36	0.3272
4-7	0.26	0.2412
5-7	0.175	0.1876
6-3	0.18	0.1647
6-8	0.215	0.1955
7-8	0.135	0.1287

Στον Πίνακα 5.32 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για την εκτίμηση των αντιδράσεων με ένα πλήρες στιγμιότυπο.

Πίνακας 5.32: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Πλήρες Στιγμιότυπο (Μετρήσεις P και δ)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)
1-2	8.37
2-5	7.82
3-4	8.04
3-1	-0.93
4-6	9.09
4-7	7.23
5-7	-7.21
6-3	8.5
6-8	9.08
7-8	4.69
Μέγιστο Σφάλμα	9.09

Από τους Πίνακες 5.31 και 5.32 φαίνεται ότι τα σχετικά σφάλματα που προκύπτουν κατά την εκτίμηση είναι κοντά στο αναμενόμενο και το μέγεθος του μπορεί να δικαιολογηθεί μέσω των προσεγγίσεων της ροής φορτίου ΣΡ. Σημειώνεται ότι η βελτίωση στην ακρίβεια είναι ασήμαντη σε σχέση με την εκτίμηση με χρήση μετρήσεων μόνο των ροών ενεργού ισχύος για τα σύνολα Α και Γ. Η διαφορά βέβαια είναι ότι όταν όλες οι γωνίες είναι μετρήσιμες αρκεί ένα και μόνο στιγμιότυπο για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου.

5.3.2. Εκτίμηση για το Σύνολο Α

Στον Πίνακα 5.33 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Α (Πίνακας 4.5) και μετρήσεις για τη γωνία δ_8 (Πίνακας 4.4), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.33 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Α, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.33: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Α (Μετρήσεις P και δ_8)

Γραμμή	Χ(αμ)	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.1732	0.1938	0.1903	0.1943	0.1540
2-5	0.34	0.2829	0.3533	0.3587	0.3608	0.3676
3-4	0.25	0.2905	0.2486	0.2466	0.2435	0.2587
3-1	0.235	0.1734	0.2180	0.2206	0.2260	0.2142
4-6	0.36	0.3897	0.3358	0.3350	0.3242	0.3339
4-7	0.26	0.2953	0.2050	0.2272	0.2176	0.2076
5-7	0.175	0.1162	0.2384	0.2261	0.2349	0.2882
6-3	0.18	0.2071	0.1772	0.1759	0.1733	0.1836
6-8	0.215	0.2488	0.2090	0.2029	0.1961	0.1912
7-8	0.135	0.1574	0.1123	0.1223	0.1172	0.1134

Στον Πίνακα 5.34 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Α (Μετρήσεις P και δ_8).

Πίνακας 5.34: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Α (Μετρήσεις P και δ_8)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	13.4	3.07	4.83	2.82	23
2-5	16.79	-3.92	-5.49	-6.13	-8.11
3-4	-16.18	0.54	1.36	2.6	-3.49
3-1	26.2	7.22	6.1	3.83	8.84
4-6	-8.25	6.71	6.94	9.94	7.25
4-7	-13.57	21.14	12.6	16.31	20.14
5-7	33.62	-36.2	-29.21	-34.25	-64.67
6-3	-15.05	1.53	2.26	3.74	-1.97
6-8	-15.74	2.77	5.61	8.8	11.06
7-8	-16.62	16.8	9.38	13.17	15.96
Μέγιστο Σφάλμα	33.62	36.2	29.21	34.25	64.67

Από τους Πίνακες 5.33 και 5.34, παρατηρούμε ότι γενικά όσο αυξάνεται ο αριθμός των στιγμιότυπων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση, η ακρίβεια των εκτιμήσεων χειροτερεύει. Σε όλες τις περιπτώσεις η εκτίμηση καταλήγει στο σωστό σύνολο τιμών, όμως στις εκτιμήσεις μερικών αντιδράσεων (5-7 και 1-2) παρουσιάζεται αρκετά σημαντικό σφάλμα. Ο λόγος για τον οποίο χειροτερεύει η εκτίμηση με την αύξηση των στιγμιότυπων και οι συγκεκριμένες εκτιμήσεις δεν χαρακτηρίζονται από μεγάλη ακρίβεια δεν είναι απόλυτα σαφής.

Στον Πίνακα 5.35 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.35: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Α (Μετρήσεις P και δ_8)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	0.00144	4-6	3	2.19E-07
$k = 5$	0.001508	4-6	3	1.62E-07
$k = 6$	0.001677	1-2	10	4.51E-07
$k = 7$	0.002214	4-7	10	7.13E-07

Τα σφάλματα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι μικρά, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.35, και επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επίλυσης.

Στον Πίνακα 5.36 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Α (Πίνακας 4.5) και μετρήσεις για τις γωνίες δ_4 και δ_8 (Πίνακας 4.4), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.36 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Α, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.36: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Α (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις				
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	0.2	0.1882	0.1900	0.1864	0.1463	0.14581
2-5	0.34	0.3290	0.3566	0.3613	0.3532	0.368348
3-4	0.25	0.2769	0.2500	0.2469	0.2460	0.259186
3-1	0.235	0.1957	0.2179	0.2211	0.2248	0.214303
4-6	0.36	0.3331	0.3315	0.3314	0.3328	0.331985
4-7	0.26	0.2212	0.2057	0.2314	0.2562	0.232313
5-7	0.175	0.2121	0.2445	0.2283	0.2381	0.272804
6-3	0.18	0.1947	0.1775	0.1757	0.1758	0.183603
6-8	0.215	0.1913	0.2024	0.2003	0.2006	0.19716
7-8	0.135	0.1197	0.1123	0.1240	0.1359	0.124787

Στον Πίνακα 5.37 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων A (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).

Πίνακας 5.37: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο A (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)				
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
1-2	5.9	4.98	6.81	26.84	27.09
2-5	3.24	-4.87	-6.27	-3.88	-8.33
3-4	-10.74	0.013	1.24	1.61	-3.67
3-1	16.72	7.28	5.92	4.31	8.8
4-6	7.48	7.9	7.93	7.56	7.781
4-7	14.91	20.87	10.99	1.45	10.64
5-7	-21.21	-39.73	-30.45	-36.08	-55.88
6-3	-8.14	1.36	2.38	2.35	-2
6-8	11.02	5.87	6.85	6.67	8.29
7-8	11.3	16.84	8.13	-0.67	7.56
Μέγιστο Σφάλμα	21.21	39.73	30.45	36.08	55.88

Από τους Πίνακες 5.36 και 5.37, παρατηρούμε ότι γενικά όσο αυξάνεται ο αριθμός των στιγμιότυπων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση, η ακρίβεια των εκτιμήσεων χειροτερεύει. Σε σύγκριση με την περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν μετρήσεις μόνο για τη δ_8 , η ακρίβεια των εκτιμήσεων είναι λίγο καλύτερη, όμως ακόμη τα σφάλματα σε ορισμένες γραμμές είναι αρκετά σημαντικά.

Στον Πίνακα 5.38 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.38: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο A (Μετρήσεις P και δ_8)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 4$	0.00144	4-6	3	2.19E-07
$k = 5$	0.001508	4-6	3	1.62E-07
$k = 6$	0.001677	1-2	10	4.51E-07
$k = 7$	0.002214	4-7	10	7.13E-07

Τα σφάλματα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι μικρά, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.38, και επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επίλυσης.

5.3.3. Εκτίμηση για το Σύνολο Β

Για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου χρησιμοποιούνται όλα τα στιγμιότυπα του συνόλου Β (Πίνακες 4.17 και 4.18). Ως μόνη μη μετρήσιμη γωνία θεωρείται η δ_7 . Στον Πίνακα 5.39 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.39 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Β, τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.39: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για πλήρες στιγμιότυπο (Άγνωστη δ_7)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις
1-2	0.2	0.1833
2-5	0.34	0.3148
3-4	0.25	0.2310
3-1	0.235	0.2382
4-6	0.36	0.3305
4-7	0.26	1.1541
5-7	0.175	-0.6834
6-3	0.18	0.1654
6-8	0.215	0.0399
7-8	0.135	0.5430

Από τον Πίνακα 5.39, παρατηρούμε ότι οι αντιδράσεις που το ένα άκρο τους είναι ο ζυγός 7, καθώς και η αντίδραση X_{68} δεν εκτιμούνται σωστά. Σημαντικό να σημειωθεί ότι η εκτίμηση της X_{57} λαμβάνει αρνητική τιμή. Συνεπώς γίνεται σαφές ότι σε περίπτωση που τα στιγμιότυπα για τις ροές ενεργού ισχύος παρουσιάζουν σημαντική γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, η ύπαρξη μετρήσεων για ορισμένες γωνίες φάσης τάσης των ζυγών του δικτύου δεν διασφαλίζει ότι η εκτίμηση των αντιδράσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα δώσει ένα αποδεκτό σύνολο τιμών.

5.3.4. Εκτίμηση για το Σύνολο Γ

Στον Πίνακα 5.40 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Γ (Πίνακας 4.23) και μετρήσεις για τη γωνία δ_8 (Πίνακας 4.22), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.40 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Γ , τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.40: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
1-2	0.2	-0.1451	0.8873	0.1896	0.1834	0.1959	0.1926
2-5	0.34	-1.1879	-0.5425	0.2802	0.3194	0.3414	0.3431
3-4	0.25	0.1901	0.7399	0.1982	0.2083	0.2271	0.2284
3-1	0.235	1.4020	-0.2826	0.2885	0.2656	0.2413	0.2383
4-6	0.36	0.1970	0.9698	0.1803	0.2752	0.3162	0.3170
4-7	0.26	-1.9078	0.6300	0.1344	0.2087	0.2676	0.2712
5-7	0.175	2.5346	-1.4266	0.2834	0.2333	0.1709	0.1697
6-3	0.18	0.1320	0.5253	0.1360	0.1480	0.1620	0.1629
6-8	0.215	-9.2524	0.5069	0.1168	0.1674	0.2051	0.2124
7-8	0.135	-1.3072	0.3400	0.0719	0.1110	0.1409	0.1429

Στον Πίνακα 5.41 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Γ (Μετρήσεις P και δ_8).

Πίνακας 5.41: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)					
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
1-2	172.57	-343.64	5.2	8.31	2.05	3.68
2-5	449.38	259.57	17.57	6.05	-0.4	-0.92
3-4	23.94	-195.95	20.7	16.68	9.17	8.62
3-1	-496.6	220.25	-22.74	-13.01	-2.67	-1.39
4-6	45.28	-169.38	49.92	23.56	12.15	11.93
4-7	833.76	-142.3	48.29	19.73	-2.91	-4.29
5-7	-1348.34	915.2	-61.93	-33.28	2.35	3.03
6-3	26.68	-191.82	24.45	17.79	10.02	9.5
6-8	4403.44	-135.78	45.67	22.14	4.6	1.21
7-8	1068.32	-151.86	46.74	17.74	-4.36	-5.86
Μέγιστο Σφάλμα	4403.4468	915.2061	61.93	33.28	12.15	11.93

Από τους Πίνακες 5.40 και 5.41, παρατηρούμε ότι για 3 ή 4 στιγμιότυπα, η εκτίμηση οδηγεί σε μη αποδεκτό σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις, καθώς εμφανίζονται ορισμένες αρνητικές τιμές. Αυτό είναι λογικό, καθώς τα 3 πρώτα στιγμιότυπα του συνόλου Γ είναι ίδια με τα 3 πρώτα του συνόλου B , και δεν παρουσιάζουν σημαντική γραμμική ανεξαρτησία. Η προσθήκη στιγμιότυπων που παρουσιάζουν γραμμική ανεξαρτησία, οδηγεί την εκτίμηση σε αποδεκτό σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις, ενώ μειώνονται και τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης. Για $k = 12$, τα σχετικά σφάλματα κυμαίνονται σε τιμές που αιτιολογούνται λόγω της προσέγγισης της ροής φορτίου ΣP , καθώς είναι μικρότερα του 12 %. Η εκτίμηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύ καλή.

Στον Πίνακα 5.42 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.42: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P και δ_8)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k = 3$	3.30E-04	3-1	1	1.69E-08
$k = 4$	0.001937616	3-1	3	3.91E-07
$k = 6$	0.002234489	3-1	3	8.63E-07
$k = 8$	0.002355812	7-8	3	8.39E-07
$k = 10$	0.002541639	7-8	6	9.44E-07
$k = 12$	0.002528126	7-8	6	9.54E-07

Τα σφάλματα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι μικρά, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.42, και επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επίλυσης.

Στον Πίνακα 5.43 δίνονται οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων για το σύνολο μετρήσεων Γ (Πίνακας 4.23) και μετρήσεις για τις γωνίες δ_4 και δ_8 (Πίνακας 4.22), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε στήλη του Πίνακα 5.44 χρησιμοποιείται μια σειρά μετρήσεων από στιγμιότυπα του συνόλου Γ , τα οποία λαμβάνονται κατά αύξουσα σειρά.

Πίνακας 5.43: Εκτιμήσεις Αντιδράσεων για το Σύνολο Α (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8)

Γραμμή	X(αμ)	Εκτιμήσεις					
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
1-2	0.2	0.1730	0.9969	0.1861	0.1873	0.1985	0.1959
2-5	0.34	-0.6227	-0.8049	0.3199	0.3344	0.3384	0.3371
3-4	0.25	1.6913	0.2335	0.2272	0.2132	0.2211	0.2251
3-1	0.235	-1.0102	0.2358	0.2400	0.2543	0.2468	0.2428
4-6	0.36	0.4447	0.3186	0.3302	0.3253	0.3204	0.3219
4-7	0.26	-0.0316	0.2466	0.2344	0.2434	0.2582	0.2553
5-7	0.175	-0.1500	-1.2519	0.1971	0.1994	0.1755	0.1789
6-3	0.18	1.1005	0.1665	0.1632	0.1534	0.1583	0.1609
6-8	0.215	0.1219	0.2012	0.1958	0.1970	0.1986	0.1995
7-8	0.135	0.0053	0.1314	0.1257	0.1299	0.1365	0.1351

Στον Πίνακα 5.44 δίνονται τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης για το σύνολο μετρήσεων Γ (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8).

Πίνακας 5.44: Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης Αντιδράσεων για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8)

Γραμμή	Σχετικά Σφάλματα Εκτίμησης (%)					
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$	$k = 12$
1-2	13.49	-398.44	6.96	6.36	0.75	2.04
2-5	283.15	336.72	5.91	1.63	0.47	0.86
3-4	-576.51	6.58	9.11	14.72	11.54	9.96
3-1	529.88	-0.35	-2.12	-8.21	-5	-3.3
4-6	-23.51	11.51	8.28	9.63	10.99	10.56
4-7	112.14	5.13	9.82	6.39	0.67	1.82
5-7	185.71	815.36	-12.63	-13.92	-0.29	-2.24
6-3	-511.39	7.52	9.31	14.8	12.07	10.61
6-8	43.3	6.42	8.9	8.37	7.65	7.19
7-8	96.04	2.68	6.87	3.78	-1.11	-0.06
Μέγιστο Σφάλμα	576.51	815.36	12.63	14.8	12.07	10.61

Από τους Πίνακες 5.43 και 5.44, παρατηρούμε ότι για $k = 3$ και $k = 4$, οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων δεν είναι ένα αποδεκτό σύνολο τιμών, καθώς υπάρχουν αρνητικές τιμές. Αυτό είναι λογικό, καθώς τα 3 πρώτα στιγμιότυπα του συνόλου Γ είναι ίδια με τα 3 πρώτα του συνόλου B , και δεν παρουσιάζουν σημαντική γραμμική ανεξαρτησία. Καθώς ο αριθμός των στιγμιότυπων αυξάνεται, το σύνολο των εκτιμήσεων για τις αντιδράσεις λαμβάνει αποδεκτές τιμές. Ακόμη, οι εκτιμήσεις για οποιαδήποτε περίπτωση με $k > 5$, μπορούν να χαρακτηριστούν

ως πολύ καλές ως προς την ακρίβεια τους, καθώς τα σφάλματα είναι μέσα στα όρια που δικαιολογούνται λόγω της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ. Η προσθήκη της γωνίας δ_4 φαίνεται ότι βελτιώνει την ακρίβεια των εκτιμήσεων, συγκρίνοντας με τον Πίνακα 5.41.

Στον Πίνακα 5.45 παρουσιάζονται για καθεμία περίπτωση συνόλου μετρήσεων τα μέγιστα σφάλματα e_i , καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα M_i .

Πίνακας 5.45: Σφάλματα e_i και Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για το Σύνολο Γ (Μετρήσεις P , δ_4 και δ_8)

Μετρήσεις από Στιγμιότυπα	Μέγιστο Σφάλμα e_i	Γραμμή	Στιγμιότυπο	M_i
$k=6$	0.003026	4_6	10	1.17E-06
$k=8$	0.003214	3_1	6	1.07E-06
$k=10$	0.003154	3_1	9	1.17E-06
$k=12$	0.003094	3_1	6	1.20E-06

Τα σφάλματα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι μικρά, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.45, και επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επίλυσης.

5.4. Σύγκριση Ακρίβειας Μεθόδων Εκτίμησης Παραμέτρων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται δύο συγκρίσεις για να διαπιστωθεί η ακρίβεια της εκτίμησης με χρήση διαφορετικών μεθόδων (Ελάχιστα Τετράγωνα ή Τροποποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα) ή διαφορετικών δεδομένων (εκτίμηση με ή χωρίς χρήση μετρήσεων γωνιών φάσης). Σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιείται ο μέγιστος διαθέσιμος αριθμός στιγμιότυπων. Η πρώτη σύγκριση αφορά τις περιπτώσεις της εκτίμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για τα σύνολα Α και Γ και τις περιπτώσεις της εκτίμησης με τη μέθοδο των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων για τα σύνολα Α, Β και Γ. Ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιείται η εκτίμηση που πραγματοποιήθηκε στην παράγραφο 5.3.1, στην οποία λήφθηκε ως δεδομένο ένα πλήρες στιγμιότυπο. Οι τιμές των εκτιμήσεων της παραγράφου 5.3.1. κανονικοποιούνται, ώστε η αντίδραση X_{12} να είναι ίση με 0.2 αμ, για λόγους σύγκρισης. Η δεύτερη σύγκριση αφορά τις περιπτώσεις της ενότητας 5.3, όπου χρησιμοποιήθηκαν μετρήσεις για τις ροές ενεργού ισχύος P_{ij} και για τις γωνίες φάσης δ_{ij} . Και σ' αυτή τη σύγκριση, ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιείται η εκτίμηση που πραγματοποιήθηκε στην παράγραφο 5.3.1, στην οποία λήφθηκε ως δεδομένο ένα στιγμιότυπο με πλήρη πληροφορία.

Στον Πίνακα 5.46 παρουσιάζεται η σύγκριση για την ακρίβεια των εκτιμήσεων, με τις μεθόδους των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Τ.) και των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων (Τ.Ε.Τ.). Το στιγμιότυπο με πλήρη πληροφορία συμβολίζεται με Π.Σ.

Πίνακας 5.46: Εκτιμήσεις με τις Μεθόδους των Ελαχίστων Τετραγώνων και των Τροποποιημένων Ελαχίστων Τετραγώνων (Συγκεντρωτικά)

Τιμές Αντιδράσεων		X_{12}	X_{25}	X_{34}	X_{31}	X_{46}	X_{47}	X_{57}	X_{63}	X_{68}	X_{78}
		0.2	0.32	0.25	0.235	0.36	0.26	0.175	0.18	0.215	0.135
Μέθοδος Εκτίμησης	Σύνολο	\hat{X}_{12} Δ_{12}	\hat{X}_{25} Δ_{25}	\hat{X}_{34} Δ_{34}	\hat{X}_{31} Δ_{31}	\hat{X}_{46} Δ_{46}	\hat{X}_{47} Δ_{47}	\hat{X}_{57} Δ_{57}	\hat{X}_{63} Δ_{63}	\hat{X}_{68} Δ_{68}	\hat{X}_{78} Δ_{78}
E.T.	A	0.2 -	0.333 2%	0.24 4%	0.218 7%	0.323 10%	0.258 1%	0.16 8%	0.171 5%	0.199 8%	0.136 -1%
E.T.	Γ	0.2 -	0.343 -1%	0.265 -6%	0.231 2%	0.351 2%	0.275 -6%	0.181 -3%	0.188 -5%	0.213 1%	0.145 -8%
T.E.T.	A	0.2 -	0.353 -4%	0.264 -5%	0.227 3%	0.345 4%	0.273 -4%	0.186 -6%	0.188 -4%	0.214 0.3%	0.144 -7%
T.E.T.	B	0.2 -	0.253 26%	0.279 11%	0.26 -11%	0.235 35%	0.242 7%	0.196 -11%	0.194 -8%	0.143 33%	0.131 3%
T.E.T.	Γ	0.2 -	0.347 -2%	0.268 -7%	0.235 0.1%	0.351 3%	0.278 -7%	0.186 -6%	0.19 -6%	0.217 -1%	0.147 -9%
E.T.	Π.Σ.	0.2 -	0.342 -0.6%	0.251 -0.3%	0.259 10%	0.357 0.7%	0.263 -1.2%	0.205 17%	0.18 0.1%	0.213 0.8%	0.14 -4%

Από τον Πίνακα 5.46, παρατηρούμε ότι για τα σύνολα μετρήσεων Α και Γ, οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων είναι εξίσου καλές, οποιαδήποτε από τις δύο μεθόδους εκτίμησης και να χρησιμοποιηθεί. Για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις, τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης που προκύπτουν είναι μικρότερα του 10% και είναι μέσα στις αναμενόμενες τιμές λόγω της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί συγκρίνοντας με τα σχετικά σφάλματα που προκύπτουν από την εκτίμηση με δεδομένο ένα πλήρες στιγμιότυπο (μετρήσεις P και δ), στην οποία η ακρίβεια των εκτιμήσεων επηρεάζεται μόνο από τις παραδοχές της ροής φορτίου ΣΡ. Συμπερασματικά, οι δύο μέθοδοι εκτίμησης είναι ισοδύναμες στην περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν επαρκή πληροφορία για την εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου, δηλαδή οι μετρήσεις της ροής ενεργού ισχύος χαρακτηρίζονται από γραμμική ανεξαρτησία. Η μέθοδος των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων υπερτερεί, καθώς προσφέρει τη δυνατότητα εύρεσης ενός προσεγγιστικού δικτύου και στην περίπτωση που η ποιότητα των μετρήσεων δεν είναι καλή. Το συγκεκριμένο δίκτυο δεν είναι πολύ κοντά στο πραγματικό, αλλά τα σφάλματα στην εκτίμηση των αντιδράσεων κυμαίνονται σε σχετικά ικανοποιητικά επίπεδα (μέχρι 35%).

Στον Πίνακα 5.47 δίνονται συγκεντρωτικά οι εκτιμήσεις με χρήση μετρήσεων για όλες τις ροές ενεργού ισχύος και για τη γωνία δ_8 .

Πίνακας 5.47: Εκτιμήσεις για Σύνολα Α και Γ (Μετρήσεις P και δ_8)

Τιμές Αντιδράσεων		X_{12}	X_{25}	X_{34}	X_{31}	X_{46}	X_{47}	X_{57}	X_{63}	X_{68}	X_{78}
		0.2	0.32	0.25	0.235	0.36	0.26	0.175	0.18	0.215	0.135
Μέθοδος Εκτίμησης	Σύνολο	\hat{X}_{12}	\hat{X}_{25}	\hat{X}_{34}	\hat{X}_{31}	\hat{X}_{46}	\hat{X}_{47}	\hat{X}_{57}	\hat{X}_{63}	\hat{X}_{68}	\hat{X}_{78}
		Δ_{12}	Δ_{25}	Δ_{34}	Δ_{31}	Δ_{46}	Δ_{47}	Δ_{57}	Δ_{63}	Δ_{68}	Δ_{78}
E.T.	A	0.154 23%	0.368 -8%	0.259 -3%	0.214 9%	0.334 7%	0.208 20%	0.288 -65%	0.184 -2%	0.191 11%	0.113 16%
E.T.	Γ	0.192 4%	0.343 -1%	0.228 9%	0.238 -1%	0.317 12%	0.271 -4%	0.169 3%	0.162 10%	0.212 1%	0.142 -6%
E.T.	Π.Σ.	0.183 8%	0.313 8%	0.23 8%	0.237 -1%	0.327 9%	0.241 7%	0.188 -7%	0.165 9%	0.196 9%	0.129 5%

Από τον Πίνακα 5.47, παρατηρούμε ότι για το σύνολο Α, οι εκτιμήσεις για τις περισσότερες αντιδράσεις του δικτύου είναι καλές σε ακρίβεια, καθώς τα σφάλματα του είναι μικρότερα του 16%, μέγεθος που δικαιολογείται λόγω της προσέγγισης της ροής φορτίου ΣΡ. Σε τρεις γραμμές όμως το σχετικό σφάλμα εκτίμησης είναι μεγαλύτερο του 20% και χαρακτηριστικά για την αντίδραση X_{57} είναι ίσο με -65%. Για το σύνολο Γ, οι εκτιμήσεις παρουσιάζουν καλή ακρίβεια και τα σχετικά σφάλματα εκτίμησης κυμαίνονται μέχρι 12%, συγκρίνοντας με την εκτίμηση για ένα πλήρες στιγμιότυπο κυμαίνονται ουσιαστικά στο ίδιο διάστημα τιμών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 5.3.3, δεν ήταν δυνατή η εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου ακόμη και με μετρήσεις για όλες πλην μιας γωνίες φάσης και όλες τις ροές ενεργού ισχύος. Συμπερασματικά, είναι εμφανές ότι η εκτίμηση με χρήση μετρήσεων P και δ δεν είναι πάντα δυνατή και η ακρίβεια της σε ορισμένες περιπτώσεις είναι χειρότερη σε σχέση με τις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται μόνο μετρήσεις της ενεργού ισχύος για την εκτίμηση των παραμέτρων.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Προοπτικές

Στόχος της εργασίας αυτής ήταν η θεμελίωση μιας μεθόδου για την εκτίμηση των αντιδράσεων ενός δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας γνωστής δομής μέσω της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ. Ως δεδομένα θεωρήθηκαν πρωταρχικά οι ροές ενεργού ισχύος στις γραμμές μεταφοράς του δικτύου. Επιπρόσθετα, για να καλυφθεί και η περίπτωση ύπαρξης μετρήσεων για τις γωνίες φάσης των τάσεων ζυγών του δικτύου, η προτεινόμενη μέθοδος προσαρμόστηκε ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και δεδομένα για τις γωνίες φάσης. Το πρόβλημα λύνεται με τη γραμμική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, καθώς οι εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ είναι γραμμικές. Ως τελικό επιθυμητό αποτέλεσμα θεωρείται ένα προσεγγιστικό δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο με χρήση της ροής φορτίου ΣΡ, μπορεί να δώσει προσεγγίσεις σχετικά καλής ακρίβειας για τις ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα στους ζυγούς του δικτύου. Ένα τέτοιο προσεγγιστικό δίκτυο θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μελέτες σχεδίασης του δικτύου μεταφοράς, για τη διερεύνηση του ενδεχομένου ενίσχυσης ορισμένων γραμμών ενός δικτύου σε συνάρτηση με το κόστος και την πιθανότητα υπερφόρτισης.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου, καθώς και ορισμένες παραλλαγές της. Θεωρήθηκε ένα δίκτυο n ζυγών και m κόμβων για την εξαγωγή των εξισώσεων της μεθόδου. Λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων ροής φορτίου ΣΡ, στην εκτίμηση μας ενδιαφέρει ουσιαστικά ο σχετικός λόγος των διαφόρων αντιδράσεων του δικτύου και όχι η απόλυτη τιμή τους. Συνεπώς, μια αντίδραση επιλέχθηκε αυθαίρετα πριν την εκτίμηση. Ακόμη, επειδή οι εξισώσεις ροής φορτίου ΣΡ εμπλέκουν διαφορές γωνιών φάσης, μπορεί να θεωρηθεί γνωστή και ίση με το μηδέν η γωνία της τάσης του ζυγού αναφοράς. Θεωρώντας k στιγμιότυπα λειτουργίας ως δεδομένα, προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει $k \geq (m-1)/(m-n+1)$ για να λύνεται το πρόβλημα της εκτίμησης. Η συγκεκριμένη μέθοδος προσαρμόζεται εύκολα στην περίπτωση που υπάρχουν και δεδομένα για τις γωνίες φάσης των τάσεων ζυγών. Τότε δεν χρειάζεται να θεωρηθεί γνωστή μια τουλάχιστον αντίδραση, καθώς θεωρείται γνωστή μια γωνία φάσης εκτός της γωνίας αναφοράς.

Για να πραγματοποιηθούν δοκιμές εκτίμησης θεωρήθηκε ένα δοκιμαστικό δίκτυο 8 ζυγών και 10 γραμμών μεταφοράς. Για το δίκτυο αυτό πραγματοποιήθηκαν διαδοχικές επιλύσεις του προβλήματος ροής φορτίου ΕΡ για να προκύψουν τρία βασικά σύνολα μετρήσεων Α, Β και Γ. Το σύνολο Α προέκυψε με αυθαίρετες διαισθητικές αλλαγές των παραγωγών και των φορτίων. Το σύνολο Β δημιουργήθηκαν με βάση 3 σημεία λειτουργίας (μέγιστο, ελάχιστο και μεσαίο φορτίο) πραγματοποιώντας μικρές τυχαίες αλλαγές για το ολικό φορτίο με γεννήτρια τυχαίων αριθμών, αλλά διατηρώντας σταθερούς συντελεστές συμμετοχής σε όλα τα φορτία και τις γεννήτριες, καθώς και σταθερούς συντελεστές ισχύος στα φορτία. Το σύνολο Γ δημιουργήθηκε

με τη διαδικασία για το B, όμως πραγματοποιώντας μικρές τυχαίες αλλαγές με γεννήτρια τυχαίων αριθμών για τους συντελεστές συμμετοχής.

Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από τη θεωρητική ανάλυση και τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας είναι ότι η επιλυσιμότητα του προβλήματος εκτίμησης επηρεάζεται άμεσα από τα χαρακτηριστικά του συνόλου μετρήσεων που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που τα διαφορετικά στιγμιότυπα για τις ροές ενεργού ισχύος παρουσιάζουν σημαντική γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, ο πίνακας $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι κοντά στο να γίνει ιδιάζων και η λύση του προβλήματος εκτίμησης είναι εσφαλμένη. Αν θεωρηθεί ότι τα στιγμιότυπα προκύπτουν από το προσεγγιστικό δίκτυο ΣΡ, τότε ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στιγμιότυπων που μπορούν να δημιουργηθούν είναι $n - 1$ (ο αριθμός των κόμβων μείον ένα). Συνεπώς, ένα αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στιγμιότυπων κοντά στο $n - 1$ είναι επαρκής για την εκτίμηση των παραμέτρων του δικτύου, όταν ισχύει $m \geq n$. Στα σύνολα A, B και Γ, για να ελεγχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των στιγμιότυπων, πραγματοποιήθηκε ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές για τον πίνακα μετρήσεων. Τα σύνολα A και Γ έχουν επαρκή αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων στιγμιότυπων, ενώ τα στιγμιότυπα του συνόλου B είναι σε σημαντικό βαθμό γραμμικώς εξαρτημένα.

Στην προσπάθεια να δημιουργηθεί μια μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων που θα δίνει μια αποδεκτή λύση και για σύνολα με τα χαρακτηριστικά του συνόλου B, δημιουργήθηκαν τρεις παραλλαγές της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Ως πρώτη εναλλακτική μέθοδος, προτάθηκε η επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων με εφαρμογή γραμμικών περιορισμών για τις εκτιμώμενες αντιδράσεις. Ως δεύτερη εναλλακτική μέθοδος, οι εξισώσεις της ροής φορτίου ΣΡ διαφοροποιήθηκαν ώστε να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των ωμικών αντιστάσεων στους κλάδους του δικτύου. Στη συγκεκριμένη μέθοδο, θεωρήθηκαν γραμμικοί περιορισμοί για τις εκτιμώμενες αντιδράσεις. Η επίλυση των δύο μεθόδων ανάγεται σε πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού. Και οι δύο μέθοδοι δεν μπόρεσαν να δώσουν μια ικανοποιητική λύση με χρήση του συνόλου B ως δεδομένων. Η τρίτη εναλλακτική, αναφέρθηκε ως τροποποιημένη μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Στη μέθοδο αυτή, τροποποιήθηκε το κριτήριο ελαχιστοποίησης της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, με την προσθήκη ενός όρου που επιβάλλει τη σύγκλιση της λύσης για όλες τις αντιδράσεις κοντά στη μονάδα. Η βαρύτητα του συγκεκριμένου όρου στο κριτήριο ελαχιστοποίησης, καθορίζεται από μια θετική σταθερά c . Μετά την επίλυση, οι εκτιμήσεις μπορούν να κανονικοποιηθούν πολλαπλασιαζόμενες με τη θεωρούμενη ως μέση τιμή των πραγματικών αντιδράσεων. Από τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν φάνηκε ότι η μέθοδος των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων έδωσε για το σύνολο B ένα αποδεκτό σύνολο τιμών για τις εκτιμήσεις των αντιδράσεων, έπειτα από κατάλληλη επιλογή της σταθεράς c . Η σύγκλιση της μεθόδου σ' αυτή την περίπτωση οφείλεται στην επιλογή της σταθεράς c και η εκτίμηση δεν αντιστοιχεί στο πραγματικό σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις, άλλα με χρήση του συνόλου B είναι η καλύτερη λύση που μπορεί να ληφθεί καθώς ελαχιστοποιεί το συνδυασμένο κριτήριο που εξασφαλίζει

θετικές τιμές των εκτιμήσεων και ικανοποιητικής ακρίβειας εκτιμήσεις (σχετικά σφάλματα μέχρι 35 %).

Από τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων που πραγματοποιήθηκαν προκύπτει ότι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και η μέθοδος των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων για μικρό c είναι ισοδύναμες για τα σύνολα μετρήσεων Α και Γ που έχουν ικανοποιητική πληροφορία. Για τα σύνολα μετρήσεων Α και Γ, οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στο σωστό σύνολο εκτιμήσεων για τις αντιδράσεις και τα σχετικά σφάλματα είναι και στις δύο περιπτώσεις μικρότερα του 10 %, μέγεθος που αιτιολογείται λόγω της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ. Η επίλυση του προβλήματος εκτίμησης με πλήρη δεδομένα (γνώση όλων των γωνιών φάσης και των ροών ενεργού ισχύος) έδωσε σφάλματα αντίστοιχου μεγέθους. Το πλεονέκτημα της μεθόδου των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων είναι ότι με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς c μπορεί να δώσει αποδεκτή λύση, ακόμη και για σύνολα μετρήσεων που χαρακτηρίζονται από αυξημένη γραμμική εξάρτηση. Βεβαίως, είναι σαφές ότι για την ορθή επίλυση του προβλήματος εκτίμησης των παραμέτρων του δικτύου, θα πρέπει πρώτα να γίνεται ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές του πίνακα μετρήσεων για τις ροές ενεργού ισχύος, ώστε να διαπιστωθεί η ποιότητα των μετρήσεων.

Επιπροσθέτως, πραγματοποιήθηκαν και ορισμένες δοκιμές εκτίμησης των αντιδράσεων με χρήση μετρήσεων ροών ενεργού ισχύος και γωνιών φάσης. Πραγματοποιήθηκαν εκτιμήσεις για τα σύνολα Α και Γ, θεωρώντας γνωστή αρχικά τη γωνία δ_8 και έπειτα τις γωνίες δ_4 και δ_8 . Στην εκτίμηση με γνωστή τη γωνία δ_8 , για το σύνολο Γ το μέγιστο σχετικό σφάλμα εκτίμησης ήταν 12 %, το οποίο είναι λογικό λόγω της προσέγγισης ροής φορτίου ΣΡ, ενώ για το σύνολο Α οι εκτιμήσεις των αντιδράσεων συνέκλιναν προς το σωστό σύνολο τιμών, άλλα για ορισμένες γραμμές παρουσίασαν σημαντικά σχετικά σφάλματα (το μέγιστο ίσο με 65 %). Το γεγονός αυτό οφείλεται στη ποιότητα των συνόλου μετρήσεων, αφού σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας το σύνολο μετρήσεων Γ έχει 7 γραμμικώς ανεξάρτητα στιγμιότυπα, σε αντίθεση με το σύνολο Α που έχει 6 γραμμικώς ανεξάρτητα στιγμιότυπα για τις ροές ενεργού ισχύος. Η προσθήκη και της γωνίας δ_4 στις μετρήσεις που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση, οδήγησε σε μια μείωση των σχετικών σφαλμάτων εκτίμησης, με το μέγιστο για το σύνολο Α να είναι 55% και για το σύνολο Γ 10%. Για το σύνολο Β, φάνηκε ότι δεν είναι δυνατή η εύρεση μιας αποδεκτής λύσης, αφού με τη χρήση μετρήσεων ροών ενεργού ισχύος και όλων των γωνιών φάσης εκτός της δ_7 , η εκτίμηση δεν συνέκλινε στο σωστό σύνολο τιμών, ενώ εμφανίστηκαν και ορισμένες αρνητικές τιμές στις εκτιμήσεις.

Συμπερασματικά, η εκτίμηση με χρήση μετρήσεων ροών ενεργού ισχύος και γωνιών φάσης υπερτερεί των άλλων μεθόδων στο γεγονός ότι δίνει απευθείας ένα σύνολο τιμών για τις αντιδράσεις, για το οποίο δεν χρειάζεται να γίνει οποιαδήποτε κανονικοποίηση. Πληρέστερη όλων των μεθόδων είναι η μέθοδος των τροποποιημένων ελαχίστων τετραγώνων, καθώς μπορεί να δώσει ένα προσεγγιστικό δίκτυο ΣΡ, ακόμη και για την περίπτωση γραμμικώς εξαρτημένων μετρήσεων. Υπενθυμίζεται ότι για την ορθή εκτίμηση των αντιδράσεων του δικτύου, προαπαιτείται η ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές του πίνακα μετρήσεων των ροών ενεργού ισχύος, ώστε να ελεγχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των στιγμιότυπων λειτουργίας.

Από τις δοκιμές και τη θεωρητική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, διαπιστώθηκε ότι η γραμμική ανεξαρτησία των μετρήσεων διασφαλίζει την ύπαρξη μιας αποδεκτής λύσης. Ως επέκταση της έρευνας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετρήσεις που προέρχονται από ένα σύνθετο δίκτυο, του οποίου μετρούνται μόνο ορισμένες διασυνδετικές ροές ενεργού ισχύος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ένα αποδεκτό σύνολο εκτιμήσεων για τις αντιδράσεις θα αναπαριστά ένα απλοποιημένο κύκλωμα για το δίκτυο με μόνο τους κλάδους για τους οποίους γίνονται μετρήσεις. Ορισμένα τμήματα του πραγματικού δικτύου, τα οποία αποτελούνται από ένα σύνολο γειτονικών κόμβων και τις μεταξύ τους διασυνδέσεις, στις οποίες δε μετράται η ροή ενεργού ισχύος, θα αναπαριστούνται από ένα κόμβο στο απλοποιημένο δίκτυο. Τα συγκεκριμένα τμήματα ονομάζονται περιοχές. Αντίστοιχα, ορισμένοι κλάδοι του απλοποιημένου δικτύου μπορεί να αντιστοιχούν σε περισσότερους κλάδους του πραγματικού δικτύου.

Εφόσον το απλοποιημένο δίκτυο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε μελέτες ροής φορτίου ΣΡ, ως τμήμα μελέτης σχεδίασης δικτύου, είναι αναγκαίο να διερευνηθούν οι απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται για να αποτελεί το απλοποιημένο κύκλωμα μια ικανοποιητική προσέγγιση του πραγματικού κυκλώματος για μελέτες ροής φορτίου ΣΡ. Ένας τρόπος για διεξαχθεί η συγκεκριμένη έρευνα προτείνεται ακολούθως. Για ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας γνωστής δομής n κόμβων και m κλάδων, με τις διαδικασίες και τις μεθόδους που προτείνονται στην παρούσα εργασία, αφού πρώτα παραχθεί ένα σύνολο μετρήσεων ενεργού ισχύος με $n - 1$ γραμμικώς ανεξάρτητων στιγμιότυπων, μπορεί να εξαχθεί ένα προσεγγιστικό κύκλωμα ΣΡ n κόμβων και m κλάδων, ως ονομαστεί Κύκλωμα Α. Ακολούθως, μπορούν να θεωρηθούν στο αρχικό δίκτυο περιοχές, έστω ο αριθμός τους να είναι n_i . Με χρήση κατάλληλου συνόλου μετρήσεων για τις ροές ενεργού ισχύος ανάμεσα στις περιοχές, μπορεί να εξαχθεί ένα προσεγγιστικό κύκλωμα n_i κόμβων, ως ονομαστεί Κύκλωμα Β. Τα κυκλώματα Α και Β θα χρησιμοποιηθούν σε μελέτες ροής φορτίου ΣΡ. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις ροές ενεργού ισχύος που προκύπτουν σε αντίστοιχα τμήματα των κυκλωμάτων Α και Β από τις μελέτες ροής φορτίου ΣΡ, μπορεί να δώσει μια αρχική εικόνα για το κατά πόσο το κύκλωμα Β αποτελεί μια αποδεκτή προσέγγιση του κυκλώματος Α. Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας είναι να διερευνηθούν οι παράγοντες που καθορίζουν το βαθμό στον οποίο το κύκλωμα Β είναι μια αποδεκτή προσέγγιση του κυκλώματος Α, δηλαδή πόσο κοντά είναι οι ροές ενεργού ισχύος υπολογιζόμενες από το κύκλωμα Α σε σχέση με τις ροές ενεργού ισχύος υπολογιζόμενες από το κύκλωμα Β.

Βιβλιογραφία

- [CL96] T. F. Coleman, Y. Li, «A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on Some Variables», Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal Optimization, Vol. 6, No. 4, pp. 1040 -1058, November 1996.
- [CVK12] E. Contaxi, C. D. Vournas, J.Kabouris, «A Probablistic Methodology for Transmission Planning under Severe Uncertainties»,12th PMAPS Conference, Istanbul, June 2012.
- [E] ENTSO-E, Exchange Electricity Data, <https://www.entsoe.eu/data/data-portal/exchange/>
- [E12] «10-Year Network Development Plan 2012», European Network of Transmission System Operators for Electricity, 5 July 2012, <https://www.entsoe.eu/major-projects/ten-year-network-development-plan/tyndp-2012/>.
- [KKF03] Ν. Καδιανάκης, Σ. Καρανάσιος, Α. Φελλούρης, «Ανάλυση ΙΙ: Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών», Έκτη Έκδοση, Αθήνα 2003.
- [L11] W. Li, «Probabilistic Transmission System Planning», John Wiley & Sons, IEEE Press, 2011.
- [M10] F. Milano, «Power System Modelling and Scripting», Springer, 2010.
- [MBB08] J. Machowski, J. W. Bialek, J. R. Bumby, «Power System Dynamics: Stability and Control», Second Edition, John Wiley & Sons, 2008.
- [P85] Β. Κ. Παπαδιά, «Ανάλυση Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας, Τόμος Ι: Μόνιμη Κατάσταση Λειτουργίας», Έκδοση ΕΜΠ, Αθήνα, 1985.
- [PRV05] K. Purchala, L. Meeus, D. Van Dommelen, R. Belmans, «Usefulness of DC Power Flow for Active Power Flow Analysis», IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2005.
- [RT99] C. R. Rao, H. Toutenburg, «Linear Models: Least Squares and Alternatives», Second Edition, Springer,1999.
- [SJA09] B. Stott, J. Jardim, On. Alsaç, «DC Power Flow Revisited», IEEE Transactions On Power Systems, VOL. 24, NO. 3, August 2009.
- [SR08] J. Schlabbach, K. H. Rofalski, «Power System Engineering: Planning, Design, and Operation of Power Systems and Equipment», WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2008.

[VC01] Κ. Βουρνάς, Γ. Κονταξής, «Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας», Αθήνα, 2001.