

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ  
ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ  
ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΜΟΡΦΟΥΜΕΝΗ Η  
ΑΡΘΡΩΤΗ ΑΚΜΗ ΦΥΓΗΣ**

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMIC  
BEHAVIOR OF AIRFOILS WITH  
DEFORMABLE AND ARTICULATED  
TRAILING EDGE FLAP**

**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο- Ε.Μ.Π.**

**National Technical University of Athens- N.T.U.A.**



**Αθήνα, Ελλάδα - 2013**

**Θεοφιλόπουλος Αλέξιος**

# Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική αφορά την χρησιμότητα στην τοποθέτηση υπερανωστικής διάταξης στην ακμή εκφυγής (η οποία ονομάζεται και flap) καθώς και στη μελέτη που αυτή συνεπάγεται.

Στην διπλωματική αυτή θα εξεταστούν δύο διαφορετικές περιπτώσεις flap, παραμορφώσιμου και αρθρωτού.

Η παρούσα διπλωματική υποδιαιρείται σε τρεις ενότητες.

Η πρώτη είναι μία σύντομη αναφορά στην βασική θεωρία που διέπει την επιστήμη της ρευστομηχανικής και της αεροδυναμικής καθώς και την μέθοδο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Θα εξηγηθούν οι βασικές αρχές που περιγράφουν την ροή την οποία θα αναλύσουμε και τον τρόπο που μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα, μέσω της μεθόδου των υπολογιστών.

Η δεύτερη ενότητα αναλύει την περίπτωση του παραμορφώσιμου flap, και τις καμπύλες των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την τοποθέτησή του στην αεροτομή NACA64418.

Η τρίτη ενότητα αναλύει την περίπτωση του αρθρωτού flap, και τις καμπύλες των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την τοποθέτησή του στην αεροτομή NACA0012.

Πριν αρχίσω την διπλωματική, θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω θερμά τους κυρίους Βουτσινά Σπυρίδωνα, Παπαδάκη Γεώργιο, Ριζιώτη Βασίλειο, Κωνσταντίνο Διακάκη και Προσπαθόπουλο Ιωάννη για την πολυτιμότερη βοήθειά τους.

# 1 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

## 1.1 Εισαγωγή στην έννοια του CFD (Computational Fluid Dynamics)

Ως CFD (Computational Fluid Dynamics- Υπολογιστική Δυναμική Ρευστών) ορίζεται ένας κλάδος της μηχανικής ρευστών που χρησιμοποιεί αριθμητικές μεθόδους και αλγορίθμους για να λύσει και να αναλύσει προβλήματα που αφορούν τη ροή των ρευστών.

Οι επιλύσεις CFD γίνονται, ως επί το πλείστον, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Στις εξωτερικές ροές, οι προσομοιώσεις CFD χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια, και ιδιαίτερα η άνοση L (lift), και η αντίσταση D (Drag). Η γνώση των δύο αυτών δυνάμεων είναι εξαιρετικής σημασίας στον σχεδιασμό πτερυγών αεροσκαφών, και γίνονται ολόκληρες έρευνες (συμπεριλαμβανομένης και της παρούσης διπλωματικής) για τον υπολογισμό τους. Μείωση της αντίστασης ακόμα και κατά πολύ μικρές ποσότητες είναι μεγάλης εμπορικής σημασίας.

## 1.2 Βασικές Έννοιες της Κινηματικής των Ρευστών

**Κινηματική** είναι το κεφάλαιο της Μηχανικής που εξετάζει την κίνηση των σωμάτων, ή στην συγκεκριμένη περίπτωση των ρευστών, χωρίς να ενδιαφέρεται για τα αίτια που την προκαλούν.

Σημαντική για τη μηχανική του στερεού σώματος είναι η έννοια του σωματιδίου. Ως σωματίδιο θεωρείται εκείνο το τμήμα του συνεχούς μέσου που περικλείεται κάποια χρονική στιγμή σε μια απειροστή περιοχή ενός σημείου του χώρου. Το σωματίδιο χαρακτηρίζεται από τη θέση του κάποια χρονική στιγμή.

Για τον προσδιορισμό της θέσης του σωματιδίου είναι απαραίτητο να οριστεί ένα σύστημα αναφοράς. Η θέση του σωματιδίου τότε, για κάποια χρονική στιγμή  $t = t_0$  συμβολίζεται με το διάνυσμα  $\vec{R}$  ή με τις συντεταγμένες (X,Y,Z). Στο ίδιο σύστημα αναφοράς, τα διάφορα σημεία του χώρου συμβολίζονται με το διάνυσμα  $\vec{r}$  ή με τις συντεταγμένες (x,y,z).

Η κίνηση του συνεχούς μέσου καθορίζεται από τις μονοπαραμετρικές εξισώσεις της μορφής:

$$\vec{r} = \vec{f}(\vec{R}, t)$$

ή

$$x = f_x(X, Y, Z, t)$$

$$y = f_y(X, Y, Z, t)$$

$$z = f_z(X, Y, Z, t)$$

όπου  $t$  μία παράμετρος του χρόνου.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση κίνησης του συνεχούς μέσου**.

Τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  θα είναι και  $\vec{r} = \vec{R}$ . Άρα η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί και την σχέση:

$$\vec{R} = \vec{f}(\vec{R}, t_0).$$

**Τροχιά** του σωματιδίου  $\vec{R}_0$  λέγεται η εξίσωση:

$$\vec{r} = \vec{f}(\vec{R}, t)_{\vec{R}=\vec{R}_0}.$$

Η τροχιά είναι η καμπύλη που διαγράφει το συγκεκριμένο σωματίδιο συναρτήσει του χρόνου.

Το διάνυσμα  $\vec{R}$  ονομάζεται **σωματιδιακές μεταβλητές ή μεταβλητές Lagrange**.

Το δε διάνυσμα  $\vec{r}$  ονομάζεται **χωρικές μεταβλητές ή μεταβλητές Euler**.

Όταν ένα πεδίο ροής (πεδίο ροής=η περιοχή του χώρου που καταλαμβάνεται από ένα ρευστό) είναι εκφρασμένο σε μεταβλητές Lagrange τότε η περιγραφή του πεδίου λέγεται **υλική περιγραφή** ή περιγραφή κατά Lagrange, και συμβολίζεται από μία συνάρτηση  $T$  ως εξής:

$$T = T(X, Y, Z, t)$$

Η συνάρτηση  $T$  περιγράφει ένα φυσικό μέγεθος συναρτήσει του χρόνου και κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου  $(X, Y, Z)$ . Το μέγεθος  $T$  δίνεται όπως το αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που μετέχει στην κίνηση του σωματιδίου.

Αν το πεδίο ροής εκφραστεί σε μεταβλητές Euler, τότε η περιγραφή του λέγεται **χωρική περιγραφή** ή περιγραφή κατά Euler και συμβολίζεται:

$$T = T(x, y, z, t)$$

Η συνάρτηση  $T$  εδώ, περιγράφει το φυσικό μέγεθος συναρτήσει του χρόνου σε κάθε σημείο του χώρου  $(x, y, z)$ . Το μέγεθος εδώ δίνεται όπως το αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ένα σταθερό σημείο του χώρου.

Αν η περιγραφή κατά Euler του πεδίου ροής είναι ανεξάρτητη του χρόνου  $T(x, y, z)$ , τότε το πεδίο ροής λέγεται **μόνιμο**. Αλλιώς λέγεται μη μόνιμο.

Με βάση τα όλα όσα έχουμε πει, μπορούν να οριστούν δύο διαφορετικές παραγωγίσεις ως προς τον χρόνο:

### 1) Η τοπική παράγωγος

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Η τοπική παράγωγος εκφράζει τη χρονική μεταβολή του συγκεκριμένου μεγέθους για ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Ένας ακίνητος στο χώρο παρατηρητής μετράει αυτήν την παράγωγο.

### 2) Η υλική παράγωγος

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h(\vec{R}, t)}{\partial t}$$

Η υλική παράγωγος εκφράζει τη χρονική μεταβολή του συγκεκριμένου μεγέθους πάνω σε ένα σωματίδιο. Ένας κινούμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής μετράει αυτήν την παράγωγο.

Ταχύτητα ενός σωματιδίου  $\vec{u}$  ορίζεται η υλική παράγωγος του διανύσματος  $\vec{r}$ :

$$\vec{u} = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t}$$

ή

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\vec{R}}$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{\vec{R}}$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\vec{R}}$$

Η υλική παράγωγος μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h(\vec{R}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Big|_{\vec{R}} + \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla h \cdot \vec{u} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

που είναι σχέση που συνδέει την υλική με την τοπική παράγωγο.

## 1.3 Ο Στοιχειώδης Διατηρητικός Νόμος

Τα στοιχειώδη αξιώματα της ρευστοδυναμικής είναι οι νόμοι διατήρησης. Διατήρηση σημαίνει ότι η μεταβολή μίας ποσότητας ρευστού σε συγκεκριμένο όγκο εξαρτάται από διάφορες εσωτερικές πηγές καθώς και από την ποσότητα που διασχίζει την συνοριακή επιφάνεια του όγκου αυτού. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **παροχή (flux)** και η έκφρασή της εξαρτάται από τις μηχανικές και θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού.

Ο διατηρητικός νόμος μπορεί να γενικευθεί αν ορίσουμε μία ποσότητα  $U$ . Η μεταβολή της συνολικής ποσότητας  $U$  μέσα σε δοσμένη περιοχή είναι ίση με την ισορροπία ανάμεσα στην ποσότητα αυτή που εισέρχεται και εξέρχεται από την συγκεκριμένη περιοχή, συν την συνεισφορά από άλλες πηγές που αναπαράγονται στην περιοχή αυτή. Είναι λοιπόν σημαντικό να εξετάζουμε τον ρυθμό μεταβολής της ποσότητας  $U$  κατά τη διάρκεια της ροής, καθώς αυτή αποτελεί ένα κινούμενο και συνεχώς μεταβαλλόμενο σύστημα.

Παρότι όμως ο νόμος διατήρησης θα γραφεί για κάποιες συγκεκριμένες ποσότητες  $U$ , όχι όλες οι ποσότητες υπακούουν στο νόμο διατήρησης. Π.χ. για την πίεση, την θερμοκρασία και την εντροπία δεν ισχύουν κάποιοι νόμοι διατήρησης. Μπορούμε να γράψουμε εξισώσεις μεταβολής των ποσοτήτων αυτών, αλλά δεν θα είναι διατηρητικές.

Αντίθετα, οι ποσότητες που υπακούουν στο νόμο διατήρησης προκύπτουν από την μελέτη των ιδιοτήτων ενός ρευστοδυναμικού συστήματος, και περιγράφουν τη ροή των ρευστών.

Οι τρεις νόμοι διατήρησης που σχετίζονται με την ρευστομηχανική είναι η διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας.

Οι νόμοι αυτοί περιγράφονται μαθηματικά, από τις λεγόμενες εξισώσεις διατήρησης. Η διατήρηση της μάζας και της ενέργειας περιγράφονται από μία εξίσωση η καθεμιά, ενώ η ορμή, αφού είναι διανυσματικό μέγεθος, αποτελείται από τρεις συνολικά εξισώσεις, μία για την κάθε κατεύθυνση στον τρισδιάστατο χώρο. Έτσι, έχουμε ένα σύνολο πέντε εξισώσεων. Ορισμένες από τις ποσότητες που δεν υπακούουν στον διατηρητικό νόμο είναι η πίεση, η θερμοκρασία και η εντροπία. Οι εξισώσεις στις οποίες υπακούουν οι ποσότητες αυτές δεν είναι διατηρητικές.

Ας ορίσουμε λοιπόν την ποσότητα  $U$  σαν μία ποσότητα σχετική με το ρευστό, που δίνεται στην μονάδα του όγκου. Έστω επίσης ένας όγκος  $\Omega$  που περιβάλλεται από μία επιφάνεια  $S$ . Ο  $\Omega$  λέγεται όγκος ελέγχου ενώ η  $S$  επιφάνεια ελέγχου.

Η  $U$  είναι μία ποσότητα/μονάδα όγκου που βρίσκεται εντός συγκεκριμένης περιοχής-όγκου  $\Omega$ . Επειδή η  $U$  είναι ποσότητα διαιρεμένη στην μονάδα του όγκου, το σύνολο της ποσότητας αυτής θα δίνεται από τον τύπο:

$$\int_{\Omega} U d\Omega$$

ενώ η ποσότητα  $U$  στην μονάδα του χρόνου, για τον όγκο  $\Omega$ , θα είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega.$$

Επειδή η ποσότητα  $U$  βρίσκεται εντός συγκεκριμένης περιοχής-όγκου  $\Omega$ , το ολοκλήρωμα θα πρέπει να αναφέρεται στο χώρο. Για αυτό και χρησιμοποιήσαμε την τοπική παράγωγο.

Κάτι ωστόσο που θα έπρεπε να διευκρινιστεί ιδιαίτερα στο σημείο αυτό, καθώς αποτελεί θεμελιώδες σημείο για όσα θα αναφέρουμε παρακάτω, είναι ότι εδώ θεωρούμε σταθερό όγκο  $\Omega$ .

Αμα θελήσουμε να παραγωγίσουμε όλους τους όρους του παραπάνω ολοκληρώματος θα πρέπει να γράψουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} U \frac{\partial d\Omega}{\partial t}$$

Αν ο όγκος είναι σταθερός τότε η παράγωγος  $\frac{\partial d\Omega}{\partial t}$  ισούται με μηδέν, οπότε η παραπάνω ισότητα θα γίνει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega$$

Η *παροχή* είναι μία βασική ποσότητα που συνδέεται στενά με τη διατηρητική μεταβλητή  $U$  και ορίζεται ως η ποσότητα του  $U$  που διαπερνά την μονάδα της επιφανείας μιας περιοχής στην μονάδα του χρόνου. Πρόκειται για διανυσματικό μέγεθος (δηλαδή έχει κατεύθυνση και μέτρο), και αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα  $\mathbf{F}$ . Αν το διάνυσμα είναι παράλληλο στην επιφάνεια στην οποία αναφέρεται, τότε δεν καταφέρνει να την διαπεράσει.

Για τον λόγο αυτό, είναι σημαντικό να ορίζεται ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια αυτή. Το διάνυσμα αυτό λέγεται *normal*, και σχετίζεται άμεσα με την ποσότητα  $U$ , καθώς μονάχα η συνιστώσα που είναι παράλληλη στο *normal* (δηλαδή κάθετη στην επιφάνεια) εισέρχεται στην περιοχή και προκαλεί αλλαγή στο  $U$ .

Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα του  $U$  που διασχίζει την μονάδα επιφανείας  $d\vec{S}$  στην μονάδα του χρόνου προσδιορίζεται από το μονόμετρο μέγεθος της παροχής και από την τοπική μονάδα επιφανείας:

$$F_n dS = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Όπου το διάνυσμα  $d\vec{S}$  έχει κατεύθυνση εξωτερική της επιφανείας (εξωτερική νόρμα).

Η συνολική συνεισφορά από όλες τις παροχές είναι το άθροισμα όλων των επιφανειακών τμημάτων  $d\vec{S}$  της συνολικής επιφάνειας  $S$ , και δίνεται από τον τύπο:

$$- \oint_S \vec{F} d\vec{S}$$

Ο λόγος που βάλαμε αρνητικό πρόσημο, είναι επειδή θεωρήσαμε την συνεισφορά της παροχής θετική καθώς αυτή εισέρχεται στην περιοχή, ενώ θετική μονάδα επιφάνειας  $d\vec{S}$  είναι αυτή που κοιτάει προς τα έξω. Αυτό σημαίνει ότι οτιδήποτε εισέρχεται εντός της ροής (προς τα μέσα) θα είχε αρνητικό μέγεθος, αν δεν έμπαινε το αρνητικό πρόσημο μπροστά.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να προστεθούν και οι πηγές. Αυτές χωρίζονται σε πηγές όγκου και πηγές επιφανείας. Οι μεν πρώτες συμβολίζονται με  $Q_V$ , οι δε δεύτερες με  $\vec{Q}_S$ .

Η συνολική συνεισφορά τους είναι:

$$\int_{\Omega} Q_V d\omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

Συνεπώς η συνολική γενική μορφή του διατηρητικού νόμου για την ποσότητα  $U$  είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

ή όπως αλλιώς γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S} \quad (1)$$

Αυτή είναι η **ολοκληρωματική** μορφή του νόμου διατήρησης.

Αυτός μπορεί να γραφεί και σε διαφορική μορφή. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα του Green-Gauss, σύμφωνα με το οποίο το επιφανειακό ολοκλήρωμα της παροχής ισούται με το ογκικό ολοκλήρωμα της παραγώγου της παροχής αυτής:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega$$

Θυμίζουμε ότι το διάνυσμα  $d\vec{S}$  το ορίσαμε παραπάνω ότι έχει κατεύθυνση εξωτερική της επιφανείας (εξωτερικό normal). Το διάνυσμα αυτό μπορεί να αντικατασταθεί με τη σχέση:

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

Όπου  $\vec{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση εξωτερική του συνόρου.

Για αυτό η σχέση Green-Gauss συχνά συναντάται και ως:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega$$

Αντικαθιστώντας στην ολοκληρωματική εξίσωση, και θέτοντας  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega$ , που ισχύει αφού μιλάμε για σταθερό όγκο  $\Omega$ , έχουμε:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S d\Omega$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται σε κάποιο τυχαίο όγκο  $\Omega$ , θα ισχύει για κάθε περιοχή της ροής. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα μπορεί να αφαιρεθεί:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S \quad (2)$$

ή αλλιώς:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{Q}_S) = Q_V$$

Αυτή είναι η **διαφορική** μορφή του νόμου διατήρησης.

Έχοντας αναφέρει τις δύο βασικότερες εκφράσεις του νόμου διατήρησης, πρέπει στο σημείο αυτό να γίνει μία συγκεκριμένη αναφορά όσον αφορά την υλική παράγωγο. Το επόμενο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε αυτό ακριβώς.

## 1.4 Ο Στοιχειώδης Διατηρητικός Νόμος υπό Μορφή Υλικής Παραγώγου

Ως τώρα, γράψαμε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας την *τοπική* παράγωγο. Η παράγωγος αυτή εκφράζει την διατήρηση σε συγκεκριμένο χώρο και για συγκεκριμένο όγκο  $\Omega$ .

Η μεταβολή της ποσότητας  $U$  ωστόσο για συγκεκριμένο χώρο, δεν είναι αρκετή από μόνη της να αποτελέσει διατηρητικό μέγεθος, ακόμα και όταν δεν υπάρχουν πηγές. Για αυτό και αναγκαστήκαμε να προσθέσουμε την ποσότητα της ροής που εξέρχεται ή εισέρχεται από τον χώρο αυτό διαπερνώντας την επιφάνεια  $S$ . Εδώ ήταν που εισήλθε ο όρος  $\vec{F}$ .

Αν όμως τώρα θελήσουμε να γράψουμε τις εξισώσεις με βάση την *υλική* παράγωγο, τότε τα πράγματα θα αλλάξουν. Πλέον δεν αναφερόμαστε στην μεταβολή της ποσότητας  $U$  σε συγκεκριμένο χώρο, αλλά στα σωματίδια του ρευστού, δηλαδή στο ίδιο το κινούμενο ρευστό.

Εδώ πια δεν ορίζεται όρος της ροής, καθώς ο παρατηρητής κινείται μαζί με τα ίδια τα σωματίδια. Δεν έχουμε δηλαδή είσοδο ή έξοδο ρευστού.

Το μόνο πράγμα που πρέπει να ληφθεί υπόψιν είναι η περίπτωση των πηγών. Συνεπώς, η εξίσωση διατήρησης με βάση την υλική παράγωγο θα γραφτεί:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S} \quad (3)$$



Ορίζουμε ως  $x_0$  τις συντεταγμένες ενός σωματιδίου του ρευστού την χρονική στιγμή  $t = 0$  και  $x$  τις αντίστοιχες συντεταγμένες για κάποια μεταγενέστερη χρονική περίοδο  $t$ .

Η συνάρτηση που συνδέει τις συντεταγμένες την χρονική στιγμή  $t > 0$ , με αυτές για  $t = 0$ , είναι η εξής:

$$x^i = \phi^i(x_0)$$

Ορίζουμε την Ιακωβιανή  $J$  που αναπαριστάνει την διαστολή ή συστολή του όγκου κατά τη διάρκεια της κίνησης ως εξής:

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j}\right)$$

με  $0 < J < \infty$ .

Ισχύει:

$$\frac{DJ}{Dt} = J \nabla \cdot \vec{u}$$

όπου  $\vec{u}$  η ταχύτητα των σωματιδίων που προκαλέσανε αυτήν την μετατόπιση από συντεταγμένες  $x_0$  σε συντεταγμένες  $x$ .

Είναι προφανές ότι η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού  $\vec{u}$  ταυτίζεται με την ταχύτητα της ροής του ρευστού  $\vec{v}$ , για αυτό και θα πούμε:

$$\frac{DJ}{Dt} = J \nabla \cdot \vec{v}$$

Όπως ορίσαμε τις αρχικές και τελικές συντεταγμένες  $x_0$  και  $x$  αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχα και τον αρχικό όγκο  $\Omega_0$ . Ο όγκος  $\Omega$  στον οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί ουκ ολίγες φορές θα είναι ο τελικός.

Θα είναι:

$$d\Omega = J d\Omega_0$$

Αν τώρα στον όρο  $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega$  αντικαταστήσουμε τον παραπάνω τύπο, θα έχουμε:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} U(J d\Omega_0)$$

Επειδή ο όγκος  $\Omega_0$  παραμένει σταθερός ανεξαρτήτου χρονικής στιγμής  $t$ , μπορούμε να εισάγουμε την υλική παράγωγο εντός του ολοκληρώματος:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{D}{Dt} (U J) d\Omega_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega_0} \left( \frac{DU}{Dt} J + U \frac{DJ}{Dt} \right) d\Omega_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega_0} \left( \frac{DU}{Dt} J + U J \nabla \cdot \vec{v} \right) d\Omega_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega_0} \left( \frac{DU}{Dt} + U \nabla \cdot \vec{v} \right) J d\Omega_0$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε όπου  $J d\Omega_0 = d\Omega$ , προκειμένου να επιστρέψουμε σε ολοκλήρωμα  $\Omega$  αντί για  $\Omega_0$ , και για να απαλλαγούμε από την Ιακωβιανή  $J$ , θα έχουμε:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{DU}{Dt} + U \nabla \cdot \vec{v} \right) d\Omega$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα:

$$\frac{Dh}{Dt} = \nabla h \cdot \vec{u} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

στον όρο U:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla U \cdot \vec{v}$$

(θυμίζουμε ότι  $\vec{u} = \vec{v}$ )

Θα έχουμε:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla U \cdot \vec{v} + U \nabla \cdot \vec{v} \right) d\Omega$$

Η ταχύτητα  $\vec{v}$  είναι διανυσματικό μέγεθος, και στον τρισδιάστατο χώρο, μπορεί να αναλυθεί ως προς τις τρεις συντεταγμένες της, ως εξής:

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

Στο σημείο αυτό να δούμε την διαφορά μεταξύ  $\nabla U$  και  $\nabla \cdot \vec{v}$ .

Το πρώτο είναι το grad (gradient) και μετατρέπει ένα μονόμετρο μέγεθος σε διανυσματικό:

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Το δεύτερο είναι το div (divergence) και μετατρέπει ένα διανυσματικό μέγεθος σε μονόμετρο:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Συνεπώς θα είναι:

$$\nabla U \cdot \vec{v} + U \nabla \cdot \vec{v} = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) + U \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Leftrightarrow$$

$$\nabla U \cdot \vec{v} + U \nabla \cdot \vec{v} = u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial u}{\partial x} + U \frac{\partial v}{\partial y} + U \frac{\partial w}{\partial z} \Leftrightarrow$$

$$\nabla U \cdot \vec{v} + U \nabla \cdot \vec{v} = u \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial w}{\partial z} \Leftrightarrow$$

$$\nabla U \cdot \vec{v} + U \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + \frac{\partial(Uv)}{\partial y} + \frac{\partial(Uw)}{\partial z} = \nabla \cdot (U\vec{v})$$

Άρα θα έχουμε:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (U\vec{v}) \right] d\Omega$$

το οποίο γίνεται:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (U\vec{v}) d\Omega =$$

όπου αν στον δεύτερο όρο εφαρμοστεί το θεώρημα του Gauss:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (U\vec{v}) d\Omega = \oint_S (U\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint_S (U\vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

Άρα η τελική μορφή του όρου  $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega$  θα είναι:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_S (U\vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

Η σχέση αυτή λέγεται **Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds (Reynolds Transfer Theorem)** και είναι ιδιαίτερης σημασίας στην Μηχανική των Ρευστών.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S (U\vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

Όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο ο όρος  $U\vec{v}$  είναι στην ουσία το διάνυσμα  $\vec{F}$ .

Ορίζεται δηλαδή  $\vec{F} = U \cdot \vec{v}$ , ενώ θυμίζοντας ότι  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , καταλήγουμε στην μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

που είναι ίδια με την εξίσωση (1).

Άρα η ολοκληρωματική εξίσωση τόσο της τοπικής παραγωγού (1) όσο και της υλικής παραγωγού (3) είναι ουσιαστικά η ίδια εξίσωση, εκφρασμένη με άλλη μορφή.

## 1.5 Μεταφορά και Διάχυση

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να μιλήσουμε πιο συγκεκριμένα για τη ποσότητα  $\vec{F}$ .

Οι ροές παράγονται κατά γενική ομολογία, με δύο τρόπους:

Ο πρώτος τρόπος αφορά την **μεταφορά του ρευστού** αυτή καθ'εαυτή.

Ο δεύτερος τρόπος αφορά **τις μοριακές διαταραχές του ρευστού (διαταραχές που οφείλονται στην έντονη κινητικότητα των μορίων του ρευστού)**, που υπάρχουν ακόμα και όταν αυτό ηρεμεί.

Για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές θα ορίσουμε δύο ξεχωριστά διανύσματα.

**1)** Ορίζουμε αρχικά το διάνυσμα μεταφοράς  $\vec{F}_C$  που αφορά την ποσότητα  $U$  που μεταφέρεται από την ροή, η οποία και έχει ταχύτητα  $\vec{v}$ :

$$\vec{F}_C = U\vec{v}$$

Για  $U=\rho$  όπου  $\rho$  η πυκνότητα της ροής, το διάνυσμα μεταφοράς  $\vec{F}_C$  αναφέρεται στην μεταβολή της μάζας  $d\dot{m}$  ανά μονάδα επιφανείας  $d\vec{S}$ .

Πράγματι, θα είναι:

$$\vec{F}_C \cdot d\vec{S} = \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = d\dot{m}$$

Η ποσότητα αυτή αναπαριστάνει την μάζα που διαπερνά επιφάνεια  $dS$ , στην μονάδα του χρόνου. Εκφράζεται σε kg/s.

Αν εξισώσουμε  $U=\rho u$ , όπου  $u$  η ποσότητα διαιρεμένη στην μονάδα της μάζας, θα έχουμε την εξίσωση:

$$\vec{F}_C \cdot d\vec{S} = \rho u\vec{v} \cdot d\vec{S} = u d\dot{m}$$

η οποία αναφέρεται στην ροή που προσδιορίζεται από την ποσότητα  $u$ , που συμμετέχει στον ρυθμό μεταβολής της μάζας  $m$  στην μονάδα του χρόνου.

**2)** Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα της διάχυσης  $\vec{F}_D$ , που αφορά την συνεισφορά του ρευστού σε κατάσταση ηρεμίας, και οφείλεται στις θερμικές διαταραχές των μορίων του ρευστού.

Το φαινόμενο της διάχυσης παρατηρείται, όταν μία περιοχή που χαρακτηρίζεται από έντονη κινητικότητα μορίων, έρθει σε επαφή με μία άλλη, όπου τα μόρια ηρεμούν. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα, η έντονη αυτή αναταραχή να επεκταθεί σε όλα τα μόρια, με αποτέλεσμα να επικρατήσει παντού.

Η διάχυση αυτή της κινητικότητας των μορίων σταματά να υφίσταται όταν επέλθει ομοιογένεια στο σώμα, δηλαδή όταν τα μόρια συμπεριφέρονται παντού το ίδιο.

Το διάνυσμα  $\vec{F}_D$  της διάχυσης εξαρτάται από της παράγωγο της συγκέντρωσης της ποσότητας  $u$ , καθώς και από έναν συντελεστή διάχυσης  $k$ . Το διάνυσμα πρέπει να είναι αντίθετο της παραγώγου, ώστε να οδηγεί το ρευστό σε ομοιογένεια. Η εξίσωση που δίνει το διάνυσμα αυτό ονομάζεται νόμος του Fick, και είναι:

$$\vec{F}_D = -k\rho\vec{\nabla}u$$

Ο συντελεστής διάχυσης  $k$  έχει μονάδες  $m^2/s$  για μία ποσότητα  $U$ .

Για  $U=\rho u$ , η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης συντήρησης θα γίνει:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} u) = \vec{\nabla} \cdot (k\rho \vec{\nabla} u) + Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S$$

Η εξίσωση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, αφού περιλαμβάνει τόσο τον όρο της μεταφοράς όσο και αυτόν της διάχυσης.

Από την παραπάνω εξίσωση, παρατηρούμε ότι ο όρος της μεταφοράς ( $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} u)$ ) εμφανίζεται σαν μία παράγωγο πρώτης τάξης ενώ αυτός της διάχυσης ( $\vec{\nabla} \cdot (k\rho \vec{\nabla} u)$ ) σαν παράγωγο δεύτερης τάξης. Ειδικά για την διάχυση, αν το γινόμενο  $k\rho$  είναι σταθερό, τότε έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot (k\rho \vec{\nabla} u) = k\rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = k\rho \cdot \vec{\nabla}^2 u$$

όπου ως  $\vec{\nabla}^2$  ορίζεται η Λαπλασιανή (Laplace Operator ή Laplacian) ενός μεγέθους ως  $\vec{\nabla}^2 = \Delta$ .

Η Λαπλασιανή στην προκειμένη περίπτωση θα αφορά την ιστροπική διάχυση του μεγέθους  $u$ , σε όλες τις κατευθύνσεις  $x,y,z$  στον τρισδιάστατο χώρο:

$$\vec{\nabla}^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Συνοψίζοντας είναι σημαντικό να κάνουμε μια ανακεφαλαίωση των διαφορών μεταξύ μεταφοράς και διάχυσης:

Μεταφορά	Διάχυση
1) Εκφράζει την μεταφορά της συγκεκριμένης ποσότητας από το ρευστό.	1) Εκφράζει τις συνέπειες των μοριακών συγκρούσεων.
2) Δεν υφίσταται αν το ρευστό ηρεμεί.	2) Υπάρχει ακόμα και αν το ρευστό ηρεμεί.
3) Όλες οι ποσότητες μεταφέρονται από το ρευστό.	3) Δεν υφίστανται όλες οι ποσότητες διάχυση.
4) Έχει συμπεριφορά ανάλογα με την κατεύθυνση.	4) Έχει ιστροπική συμπεριφορά (όμοια προς όλες τις κατευθύνσεις).
5) Οδηγεί σε πρωτοτάξιες παραγώγους στο νόμο διατήρησης.	5) Οδηγεί σε δευτεροτάξιες παραγώγους στο νόμο διατήρησης.
6) Είναι μη γραμμική.	6) Είναι γραμμική.

## 1.6 Οι Εξισώσεις της Ρευστομηχανικής

Αναφέραμε ήδη ότι η κίνηση του ρευστού προσδιορίζεται πλήρως από τρεις εξισώσεις διατήρησης, της *μάζας*, της *ορμής* και της *ενέργειας*.

Οι τρεις αυτές ποσότητες όχι μόνο διατηρούνται καθόλη τη διάρκεια κίνησης του ρευστού, αλλά προσδιορίζουν εντελώς και τη συμπεριφορά του συστήματος.

Ένα ρευστό θεωρείται εντελώς προσδιοριστέο αν, σε κάθε χρονική στιγμή, είναι γνωστό το διάνυσμα της ταχύτητας και ένας ελάχιστος αριθμός στατικών μεγεθών θεωρείται γνωστός σε κάθε χρονική στιγμή. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από το ρευστό. Έτσι π.χ. στα ισοθερμικά ασυμπίεστα ρευστά αρκεί η γνώση μίας στατικής ποσότητας, ενώ στα τέλεια αέρια ή σε κάθε πραγματικό συμπιεστό ρευστό χρειάζονται δύο ποσότητες.

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας λέγεται και *εξίσωση της συνέχειας*, η εξίσωση διατήρησης της ορμής λέγεται και *εξίσωση της κίνησης* ενός ρευστού, ενώ η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, λέγεται και *πρώτος θερμοδυναμικός νόμος*.

Αν αυτές οι εξισώσεις αφορούν ένα τέλειο, **μη συνεκτικό (inviscid) ρευστό**, είναι γνωστές ως οι **εξισώσεις Euler**.

Αν πάλι αφορούν ένα **συνεκτικό** ρευστό, τότε ονομάζονται **εξισώσεις Navier-Stokes**.

### 1.6.1 Η εξίσωση διατήρησης της μάζας

Ο νόμος αυτός ουσιαστικά υπαγορεύει ότι σε ένα σύστημα, όπως είναι το ρευστό, μάζα δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε και να εξαφανιστεί.

Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα  $U$  αφορά την πυκνότητα  $\rho$  σε  $kg/m^3$ , ενώ το διάνυσμα μεταφοράς θα είναι  $\vec{F}_C = \rho\vec{v}$ . Διάχυση εδώ δεν υφίσταται. Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές πηγές μάζας, η ολοκληρωτική εξίσωση διατήρησης:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

θα γίνει

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4)$$

ενώ η διαφορική:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S$$

μετατρέπεται στην:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (5)$$

### 1.6.2 Η εξίσωση διατήρησης της ορμής

Η ορμή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, που ορίζεται ως το γινόμενο της μάζας με την ταχύτητα:

$$\vec{U} = \rho \vec{v}$$

Ορίσαμε ήδη το διάνυσμα μεταφοράς ως  $\vec{F}_C = U \vec{v}$ . Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα  $U$  αποτελεί ένα μονόμετρο μέγεθος, που πολλαπλασιαζόμενο με το διανυσματικό μέγεθος της ταχύτητας της ροής  $\vec{v}$ , δίνει επίσης ένα διανυσματικό μέγεθος  $\vec{F}_C$ .

Η περίπτωση που εξετάζουμε εδώ όμως, αναφέρεται σε ένα διανυσματικό  $\vec{U}$ , καθώς, όπως προκύπτει από τον τύπο της ορμής  $\vec{U} = \rho \vec{v}$ , η ποσότητα  $U$  εμπεριέχει μέσα της την διανυσματική ταχύτητα  $\vec{v}$ .

Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα  $F_C$  προκύπτει ως γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών,  $\vec{U}$  και  $\vec{v}$ , γεγονός που την καθιστά ένα μητρώο, και συμβολίζεται ως  $\overline{\overline{F}}_C$ . Το γινόμενο του τύπου της ορμής συμβολίζεται ως:

$$\overline{\overline{F}}_C = \vec{U} \otimes \vec{v} = \rho \vec{v} \otimes \vec{v}$$

ενώ η συνεισφορά της ροής διαμέσου της επιφάνειας, είναι:

$$\overline{\overline{F}}_C \cdot d\vec{S} = \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = v d m.$$

Στην εξίσωση (1) έχουμε τον όρο  $\vec{F}$  που εξαρτάται τόσο από την μεταφορά  $\vec{F}_C$  όσο και από τη διάχυση  $\vec{F}_D$ . Στην εξίσωση της μάζας θεωρήσαμε ότι διάχυση δεν υφίσταται. Το ίδιο θα θεωρήσουμε και εδώ, με αποτέλεσμα το  $\vec{F}$  να εξισώνεται με το  $\vec{F}_C$ .

Όσον αφορά τις πηγές, αυτές επιδρούν άμεσα στην μεταβολή της ορμής του ρευστού. Η ορμή μεταβάλλεται από την παρουσία δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό. Οι πηγές λοιπόν αυτές είναι οι ίδιες οι δυνάμεις, οι οποίες χωρίζονται στις εξωτερικές  $f_e$  και στις εσωτερικές  $f_i$ .

Η εσωτερική δύναμη που ασκείται σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια  $dS$  εξαρτάται από τη θέση και τον προσανατολισμό της επιφανείας. Για αυτό καθιερώνεται η έκφραση:

$$\vec{f}_i = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

όπου  $\vec{n}$  η νόρμα η κάθετη στην στοιχειώδη επιφάνεια  $dS$ ,  $\vec{f}_i$  είναι η εσωτερική δύναμη, και το μητρώο  $\overline{\overline{\sigma}}$  αποτελεί την τοπική τάση.

Αν σε αυτό το σημείο θεωρήσουμε Νευτώνιο ρευστό, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται στην ροή είναι ανάλογες της τοπικής παραμόρφωσης σε κάθε χρονική στιγμή.

Οι τάσεις αυτές δίνονται από τον εξής τύπο:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij} \right].$$

όπου  $\mu$  η δυναμική συνεκτικότητα.

Στο σημείο αυτό ορίζεται το συνολικό μητρώο τάσης ως:

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{I} + \bar{\bar{\tau}}.$$

Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις τυπικά ασκούνται σε όλα τα σημεία του όγκου του ρευστού. Ωστόσο, επειδή κάθε εσωτερικό σημείο μέσα στην περιοχή αλληλοεπιδρά με άλλα σημεία που βρίσκονται παντού γύρω του, οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις εξουδετερώνονται με αποτέλεσμα να μην υφίστανται πλέον. Εσωτερικές δυνάμεις ασκούνται μονάχα στα μη-εσωτερικά σημεία της περιοχής, δηλαδή σε αυτά που βρίσκονται στην επιφάνεια-σύνορο, καθότι εκεί δεν υπάρχουν αντίθετες δυνάμεις του ρευστού που θα εξουδετερώσουν τις υπάρχουσες.

Για αυτόν τον λόγο ακριβώς, οι εσωτερικές δυνάμεις αποτελούν τις επιφανειακές πηγές του συστήματος, καθώς εκδηλώνονται μονάχα εκεί. Έτσι:

$$\oint_S \vec{Q}_S d\vec{S} = \oint_S \bar{\bar{\sigma}} d\vec{S}$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται σε όλον τον όγκο του ρευστού, για αυτό και, αν πολλαπλασιαστούν με την πυκνότητα, αποτελούν τις πηγές όγκου:

$$\vec{Q}_V = \rho \vec{f}_e.$$

Με βάση όλα όσα είπαμε, η ολοκληρωτική εξίσωση (1), μετατρέπεται για την περίπτωση της ορμής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \oint_S \bar{\bar{\sigma}} d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_S p d\vec{S} + \oint_S \bar{\bar{\tau}} d\vec{S} \quad (6)$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_{\Omega} \nabla p d\vec{\Omega} + \oint_{\Omega} \nabla \bar{\bar{\tau}} d\vec{\Omega}$$

προκύπτει:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p\bar{I} - \bar{\bar{\tau}}) = \rho \vec{f}_e \quad (7)$$

### 1.6.3 Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

Είναι γνωστό από την θερμοδυναμική, ότι η ενέργεια ενός συστήματος υπολογίζεται από την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας  $e$ . Η εσωτερική ενέργεια είναι μία στατική μεταβλητή για αυτό και η διακύμανση της κατά τη διάρκεια μιας θερμοδυναμικής διεργασίας εξαρτάται μόνο από την τελική και την αρχική τιμή.

Σε ένα ρευστό, το διατηρητικό μέγεθος είναι η ολική ενέργεια που ορίζεται ως το άθροισμα της εσωτερικής με την κινητική ενέργεια  $\vec{v}^2/2$ . Ως  $E$  συμβολίζεται η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και ως  $\rho E$  η συνολική ενέργεια στην μονάδα του όγκου. Είναι λοιπόν:

$$E = e + \frac{\vec{v}^2}{2}$$

Η ποσότητα  $U$  στην περίπτωση αυτή πρέπει να εξισωθεί με την συνολική κατ'όγκο ενέργεια  $U = \rho E$ .

Σαν αποτέλεσμα, το διάνυσμα της μεταφοράς θα προκύψει:

$$\vec{F}_C = U\vec{v} = \rho\vec{v}E = \rho\vec{v}\left(e + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

Τώρα, σε αντίθεση με την περίπτωση της μάζας και της ορμής, θα έχουμε και διάχυση. Το διάνυσμα της δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{F}_D = -k\vec{\nabla}T$$

Όπου  $T$  η απόλυτη θερμοκρασία.

Επιπλέον θυμίζουμε ότι είναι  $\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D$ .

Σύμφωνα με τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, για την περίπτωση της ενέργειας, οι πηγές αποτελούνται από το έργο των δυνάμεων που δρουν στο σύστημα καθώς και από την θερμότητα που διαδίδεται σε αυτό.

Πιο συγκεκριμένα, οι πηγές όγκου είναι το άθροισμα του έργου των ογκικών εξωτερικών δυνάμεων  $f_e$  και των πηγών θερμότητας εκτός της συναγωγής (όπως π.χ. ακτινοβολία, θερμότητα λόγω χημικών διεργασιών κτλ.). Αυτές οι πηγές θερμότητας συμβολίζονται με  $q_H$ . Οι πηγές όγκου δίνονται από τον τύπο:

$$Q_V = \rho\vec{f}_e \cdot \vec{v} + q_H$$

Οι επιφανειακές πηγές  $\vec{Q}_S$  είναι το αποτέλεσμα του έργου των εσωτερικών τάσεων που δρουν πάνω στο ρευστό. Δίνονται από τον τύπο:

$$\vec{Q}_S = \vec{\sigma}\vec{v} = -p\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}$$

Με βάση τα όσα είπαμε, αν αντικαταστήσουμε στην ολοκληρωματική εξίσωση διατήρησης (1) θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_S \rho E \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_S k\vec{\nabla}T \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} (\rho\vec{f}_e \cdot \vec{v} + q_H) d\Omega + \oint_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (8)$$

Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα Gauss και αφαιρώντας τα ογκικά ολοκληρώματα, θα καταλήξουμε στην διαφορική εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho E \vec{v}) = \vec{\nabla}(k\vec{\nabla}T) + \rho\vec{f}_e \cdot \vec{v} + q_H + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \quad (9)$$

Όπου το γινόμενο  $\rho\vec{f}_e \cdot \vec{v}$  συνήθως συμβολίζεται και ως  $W_f$  και αφορά το έργο των εξωτερικών δυνάμεων.

Στο σημείο αυτό μπορούν να εισαχθούν δύο νέα μεγέθη, η ενθαλπία

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

και η ολική ενθαλπία

$$H = e + \frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} = h + \frac{\vec{v}^2}{2} = E + \frac{P}{\rho}$$

Αν εφαρμοστούν αυτά τα μεγέθη, τότε η εξίσωση (8) μπορεί να γίνει:

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} H - k\vec{\nabla}T - \vec{\tau} \cdot \vec{v}) = W_f + q_H$$



### 1.6.4 Εκτιμήσεις των Δυνάμεων Άνωσης και Αντίστασης

Αν στον όγκο  $\Omega$  περιλαμβάνονται στερεά σώματα, τότε στην εξίσωση (5) πρέπει να προστεθεί και ο όρος  $-\vec{R}$  που αναφέρεται στην συνολική δύναμη που ασκείται στο ρευστό από το σώμα. Θεωρώντας ως  $\vec{R}$  (θετικό πρόσημο) την δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο σώμα, λόγω του αξιώματος δράσης-αντίδρασης η δύναμη που ασκείται στο ίδιο το ρευστό θα οριστεί ως  $-\vec{R}$ .

Έτσι θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_S p d\vec{S} + \oint_S \bar{\tau} d\vec{S} + (-\vec{R})$$

Με βάση την εξίσωση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε την δύναμη άνωσης  $\vec{L}$  και την δύναμη αντίστασης  $\vec{D}$  που ασκούνται πάνω στα σώματα.

Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε επιφάνεια  $S$  στο εξωτερικό σύνορο (far field), όπου η ροή είναι μόνιμη και όπου οι συνεκτικές τάσεις μπορούν να παραλειφθούν, και θεωρώντας ότι δεν έχουμε εξωτερικές δυνάμεις, η παραπάνω εξίσωση θα μετατραπεί στην:

$$\oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + \oint_S p d\vec{S} = (-\vec{R}) = -\vec{L} - \vec{D}$$

Αν πάλι θεωρήσουμε επιφάνεια ελέγχου  $S_b$  πάνω στην επιφάνεια του στερεού σώματος, όπου η ταχύτητα είναι μηδενική, λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης μεταξύ ρευστού και στερεού σώματος, τότε η άνωση και η αντίσταση υπολογίζονται από το θεώρημα:

$$\vec{R} = \vec{L} + \vec{D} = - \oint_{S_b} p d\vec{S} + \oint_{S_b} \bar{\tau} d\vec{S}$$

Με βάση όσα αναφέραμε είναι δυνατός ο υπολογισμός των δυνάμεων άνωσης και αντίστασης είτε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα των πιέσεων και των διατμητικών τάσεων πάνω στο τοίχωμα του στερεού σώματος, είτε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της ορμής και της πίεσης στην κατάσταση στο άπειρο.

## 1.7 Ο Διατηρητικός Νόμος για την Περίπτωση Κινούμενου Όγκου Ελέγχου

Όσα είπαμε ως τώρα για τις εξισώσεις διατήρησης, αναφέρονται σε όγκο ελέγχου  $\Omega$  ο οποίος παραμένει σταθερός. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τμήμα του χώρου που εξομοιώνει την ροή δεν μεταβάλλεται ούτε κατά τη θέση του ούτε κατά τον όγκο του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η τοπική παράγωγος του ολοκληρώματος της ποσότητας  $U$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega.$$

μόρεσε να εισέλθει εντός του ολοκληρώματος  $\Omega$  από τον τύπο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} U \frac{\partial d\Omega}{\partial t}$$

όπου επειδή ο όγκος  $\Omega$  παραμένει σταθερός ισχύει:

$$\int_{\Omega} U \frac{\partial d\Omega}{\partial t} = 0$$

και άρα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega$$

Είναι ωστόσο σύνηθες φαινόμενο καταστάσεις όπου έχουμε ταυτόχρονα κινούμενα και ακίνητα μέρη στις ροές που εξετάζουμε. Σε αυτήν την περίπτωση το πλέγμα το οποίο εξομοιώνει την ροή αυτή θα είναι κινούμενο. Και άρα θα πρέπει στους όρους που σχετίζονται με την αρχή διατήρησης, να προστεθεί και η μετακίνηση του όγκου ελέγχου. Πλέον ο όγκος  $\Omega$  παύει να μένει αναλλοίωτος με τον χρόνο και σαν αποτέλεσμα η εξίσωση  $\int_{\Omega} U \frac{\partial d\Omega}{\partial t} = 0$  δεν ισχύει πλέον.

Επειδή ο όγκος ελέγχου  $\Omega$  υφίσταται μετατοπίσεις στα διάφορα του τμήματα, κάθε συνοριακή επιφάνεια  $S$  θα χαρακτηρίζεται από μία ταχύτητα  $\vec{v}_s$ . Μετά την πάροδο χρονικής περιόδου  $\Delta t$  στην επιφάνεια  $S$ , η ποσότητα  $U$  θα μεταβληθεί και από εκεί που προέκυπτε σαν αποτέλεσμα του αθροίσματος των μεγεθών της ροής και των όρων πηγών, θα εμφανιστεί και συνεισφορά λόγω της παραμόρφωσης σε όγκο που προκλήθηκε στο χρονικό αυτό διάστημα  $\Delta t$ , εξαιτίας της επιφανειακής μετατόπισης του τμήματος του  $S$ .

Η ογκική παραμόρφωση που προκαλείται από την μετατόπιση του τμήματος της επιφανείας  $d\vec{S}$  που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}_s$  για χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , ισούται προφανώς με:  $\vec{v}_s \cdot d\vec{S} \Delta t$ , και άρα η ποσότητα  $U$  θα αυξηθεί κατά μία ποσότητα :

$$\oint_S U \vec{v}_s \cdot d\vec{S} \Delta t$$

που σημαίνει ότι ο όρος της μη-μονιμότητας της ποσότητας  $U$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega$$

θα μετατραπεί σε:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} U \frac{\partial d\Omega}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_S U \vec{v}_s \cdot d\vec{S}$$

Η εξίσωση διατήρησης που θα ισχύει στην περίπτωση του κινούμενου όγκου  $\Omega$ , θα προκύψει από την εξίσωση διατήρησης υλικής μορφής (3)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

η οποία με βάση το θεώρημα μεταφοράς Reynolds, θα δώσει:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_S (U \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

και άρα:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

Ωστόσο επειδή:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \oint_S U \vec{v}_s \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega - \oint_S U \vec{v}_s \cdot d\vec{S}$$

θα είναι τελικά:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega - \oint_S U \vec{v}_s \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S d\vec{S}$$

Έτσι καταλήγουμε στην τελική ολοκληρωματική εξίσωση διατήρησης για την περίπτωση κινούμενου όγκου αναφοράς  $\Omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S (\vec{F} - U \vec{v}_s - \vec{Q}_S) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega \quad (10)$$

η οποία μπορεί να αντιπαραβληθεί με την αντίστοιχη του σταθερού όγκου  $\Omega$  (εξίσωση (1)), αν ορίσουμε μία ποσότητα  $\vec{F}^{rel}$  ως εξής:

$$\vec{F}^{rel} = \vec{F} - U \vec{v}_s$$

Την ποσότητα αυτή την ονομάζουμε **σχετική παροχή** και ουσιαστικά αποτελεί την ποσότητα της παροχής  $\vec{F}$  από την οποία έχουν αφαιρεθεί οι μεταβολές της ποσότητας  $U$  που οφείλονται στην κίνηση των επιφανειών του όγκου  $\Omega$  με ταχύτητα  $\vec{v}_s$ .

Παράλληλα, μπορούμε να ορίσουμε την σχετική ταχύτητα ρευστού ως:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_s$$

όπου θυμίζουμε ότι ως  $\vec{v}$  έχουμε ορίσει την ταχύτητα της ροής/ρευστού ενώ ως  $\vec{v}_s$  την κίνηση των εξωτερικών συνόρων του όγκου (δηλαδή την ταχύτητα μεταβολής του όγκου  $\Omega$ ).

Το σχετικό διάνυσμα μεταφοράς θα οριστεί ως:

$$\vec{F}_C^{rel} = (\vec{F}_C - U \cdot \vec{v}_s) = U \vec{w}$$

ενώ αν το διάνυσμα μεταφοράς είναι μητρώο, τότε ομοίως:

$$\vec{\vec{F}}_C^{rel} = (\vec{\vec{F}}_C - \vec{U} \otimes \vec{v}_s) = \vec{U} \otimes \vec{w}$$

που οδηγεί στην εξής διατηρητική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_S (\vec{\vec{F}} - \vec{U} \otimes \vec{v}_s - \vec{\vec{Q}}_S) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega$$

Η ποσότητα  $U$  προσδιορίζεται για το κινούμενο ρευστό, δηλαδή για όλο το αδρανιακό σύστημα. Η δε παράγωγος ωστόσο είναι η τοπική, δηλαδή ακίνητη στο χώρο.

Ο αλγόριθμος αυτός που χρησιμοποιείται για την περίπτωση των κινούμενων όγκων ελέγχου ονομάζεται **γεωμετρικός νόμος διατήρησης (GCL)** και θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στην παρούσα διπλωματική.

Οι περιπτώσεις που θα εξετάσουμε παρακάτω, θα αφορούν περιπτώσεις κινούμενων όγκων ελέγχου, για αυτό και θα γίνεται εφαρμογή του GCL.

## 1.8 Οι εξισώσεις Navier Stokes

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε την διατύπωση του νόμου διατήρησης, και καταλήξαμε σε ορισμένες μορφές του νόμου αυτού που ξέρουμε ότι ισχύουν στα ρευστά. Οι νόμοι διατήρησης αφορούσαν την μάζα, την ορμή και την ενέργεια.

Αυτές οι εξισώσεις έχουν ορισμένα χαρακτηριστικά:

- Απαρτίζουν ένα σύστημα πέντε εξισώσεων με πέντε αγνώστους στον τρισδιάστατο χώρο. Οι εξισώσεις εξαρτώνται από το χρόνο και είναι διαφορικές. Οι πέντε αγνώστοι είναι το διάνυσμα της ταχύτητας (που επειδή αναφερόμαστε σε τρεις διαστάσεις, απαρτίζεται από τρεις αγνώστους), και άλλες δύο θερμοδυναμικές ποσότητες, που μπορεί να είναι π.χ. η πίεση και η πυκνότητα, ή η πίεση και η θερμοκρασία.

- Κάθε μία από τις εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμική. Η μη γραμμικότητα εμφανίζεται κυρίως στον όρο  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ . Από αυτόν τον όρο εμφανίζεται η τύρβη, που είναι μία στιγμιαία αστάθεια του ρευστού, και που στην οποία όλες οι ποσότητες αποκτούν χαοτική συμπεριφορά.

Οι μη γραμμικότητες οδηγούν σε μη-μοναδικές λύσεις, και αποτελούν ιδιαίτερες προκλήσεις για κάθε μέθοδο CFD.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes, είναι ουσιαστικά η πιο γενική περιγραφή της ροής ενός ρευστού. Πήραν την ονομασία τους από τους Claude-Louis Navier και George Gabriel Stokes. Αναφέρονται στις τρεις βασικές ποσότητες ροής ( $\rho, \rho\vec{v}, \rho E$ ), μπορούν να γραφτούν σε μητρική μορφή, με βάση τις εξισώσεις διατήρησης σε διαφορική μορφή (4), (6) και (8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{vmatrix} = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v} \otimes \vec{v} + p\vec{I} - \vec{\tau} \\ \rho\vec{v}H - k\nabla T - \vec{\tau} \cdot \vec{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho\vec{f}_e \\ W_f + q_H \end{vmatrix} \quad (11)$$

Η παραπάνω εξίσωση ουσιαστικά είναι η εξίσωση διατήρησης διαφορική μορφής:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = Q$$

με

$$U = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{vmatrix}$$

και

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v} \otimes \vec{v} + p\vec{I} - \vec{\tau} \\ \rho\vec{v}H - k\nabla T - \vec{\tau} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}$$

Οι δε πηγές όγκου και επιφανείας ομαδοποιούνται σε ένα κοινό Q, για το οποίο είναι:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho\vec{f}_e \\ W_f + q_H \end{vmatrix}$$

Η ταχύτητα  $\vec{v}$ , η οποία όπως είπαμε βρίσκεται στο τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, αναλύεται σε τρεις συνιστώσες:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα  $U$  είναι στην πραγματικότητα διαστάσεων (5 X 1):

$$U = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{vmatrix}$$

Ομοίως και οι εξωτερικές πηγές  $Q$  είναι ένα διάνυσμα (5 X 1) όπου ο όρος  $\rho \vec{f}_e$  αναλύεται ξεχωριστά ως προς κάθε μία από τις τρεις διευθύνσεις του τρισδιάστατου χώρου.

Ο όρος  $\vec{F}$  είναι αυτός που χαρακτηρίζεται από μία ιδιομορφία. Επειδή υφίσταται  $\text{div}(\vec{\nabla} \cdot)$  παραγωγή θα πρέπει να παραγωγηθεί προς όλες τις κατευθύνσεις. Θυμίζουμε ότι για ένα τυχαίο διάνυσμα  $h = (h_x, h_y, h_z)$  είναι:

$$\text{div}(h) = \vec{\nabla} \cdot h = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το διάνυσμα  $\vec{F}$  θα είναι διαστάσεων (5 X 3) με καρτεσιανές συντεταγμένες  $f, g, h$  όπου η κάθε μία από αυτές είναι μία στήλη-διάνυσμα διαστάσεων (5 X 1).

Ουσιαστικά δηλαδή η εξίσωση διατήρησης διαφορικής μορφής θα γίνει:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q$$

Οι συντεταγμένες  $f, g$  και  $h$  είναι ίσες με:

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho uH - k \frac{\partial T}{\partial x} - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_x \end{vmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho vu - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho vH - k \frac{\partial T}{\partial y} - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_y \end{vmatrix}$$

$$h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu - \tau_{zx} \\ \rho wy - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho wH - k \frac{\partial T}{\partial z} - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_z \end{vmatrix}$$

Το σύστημα αυτό των εξισώσεων Navier-Stokes ισχύει για κάθε στρωτή ή τυρβώδη ροή για οποιοδήποτε ρευστό. Οι Navier Stokes χρησιμοποιούνται στα συνεκτικά ρευστά.

## 1.9 Οι εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις Euler είναι επίσης ένα σύνολο εξισώσεων που αναφέρονται ωστόσο σε μη-συνεκτικά ρευστά. Προέρχονται από τις εξισώσεις Navier Stokes αν θεωρηθεί μηδενική συνεκτικότητα και μεταφορά θερμότητας. Πήραν το όνομά τους από τον Leonhard Euler.

Ως **συνεκτικότητα** ορίζεται το μέγεθος της αντίστασης του ρευστού σε σταδιακή παραμόρφωση λόγω διατμητικών τάσεων. Η συνεκτικότητα αναπτύσσεται λόγω της τριβής μεταξύ κοντινών τμημάτων του ρευστού που κινούνται με διαφορετική ταχύτητα.

Η παραδοχή αυτή, ότι αμελούνται οι όροι συνεκτικότητας και μεταφοράς θερμότητας, προκαλεί μεγάλες αλλαγές στις μαθηματικές εξισώσεις του νόμου διατήρησης. Η μεγαλύτερη αλλαγή είναι ότι το σύστημα εξισώσεων ελαττώνεται και από δεύτερης τάξης υποπίπτει σε πρώτης τάξης.

Επειδή λοιπόν αμελήσαμε τους όρους συνεκτικότητας, οι διατμητικές τάσεις  $\tau$  δεν θα υφίστανται πλέον. Ακόμα, επειδή αμελήσαμε και τη μεταφορά θερμότητας, ούτε ο όρος  $T$  θα λαμβάνεται πλέον υπόψιν.

Σαν αποτέλεσμα, οι εξισώσεις των συντεταγμένων  $f, g, h$  του διανύσματος  $\vec{F}$ , που αναφέραμε στην περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes θα μετασχηματιστούν στις εξής:

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{vmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{vmatrix}$$

$$h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wy \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{vmatrix}$$

Οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q$$

παραμένουν όπως και στην περίπτωση Navier-Stokes.

## 1.10 Εισαγωγή στην Αεροδυναμική

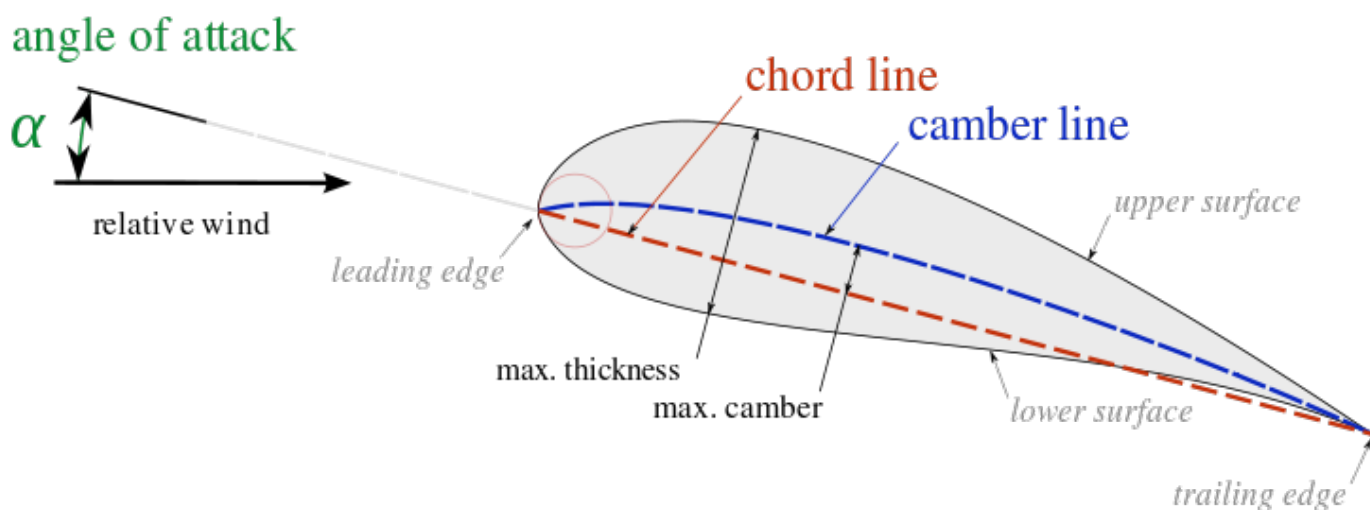
Η Αεροδυναμική είναι ένας ιδιαίτερος κλάδος της Μηχανικής των Ρευστών, και ειδικότερα της Δυναμικής.

Έχει ως αντικείμενο έρευνας και μελέτης τους νόμους που διέπουν τη ροή του αέρα ή άλλων αερίων, γύρω από διάφορα σώματα που έχουν ειδική μορφή, με περιορισμένη τη μία από τις τρεις διαστάσεις τους κατά την κατεύθυνση της κίνησης, καθώς και τη κίνηση των σωμάτων αυτών μέσα στον αέρα.

Αεροδυναμικής μορφής σώματα μπορούν να θεωρηθούν τα σώματα εκείνα στα οποία η διάσταση η κάθετη στη κατεύθυνση της ροής καλύπτει μικρό ποσοστό σε σχέση με τη διάσταση προς την κατεύθυνση της κύριας ροής. Η δε επιφάνεια τους δεν πρέπει να παρουσιάζει ασυνέχειες. Αεροδυναμικής μορφής σώμα είναι και η **αεροτομή**, της οποίας το πρόσθιο τμήμα προς τη ροή είναι στρογγυλεμένο (για υποηχητικές πτέρυγες), ενώ το πίσω μέρος της καταλήγει σε οξεία ακμή. Ως αεροτομή ορίζεται το σχήμα ενός πτερυγίου (αεροπλάνου, ανεμογεννήτριας, στροβίλου, συμπιεστή κτλ.) όταν αυτό παρατηρηθεί από μία κάθετη ως προς το μήκος τομή.

Δύο είναι τα βασικά στοιχεία μορφοποίησης της αεροτομής: η μορφή της μέσης γραμμής, και η διανομή του πάχους.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μία αεροτομή με τα τυπικά γεωμετρικά της χαρακτηριστικά:



**Εικόνα 1: Τυπική μορφή αεροτομής. Με αγγλικούς χαρακτήρες διακρίνονται τα μεγέθη που αναλύονται παρακάτω. (Εικόνα από <http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>)**

-Ακμή πρόσπτωσης (leading edge) είναι το σημείο στο μπροστινό μέρος της αεροτομής, που έχει μέγιστη καμπυλότητα.

-Ακμή εκφυγής (trailing edge) είναι το σημείο μέγιστης καμπυλότητας στο πίσω μέρος της αεροτομής.

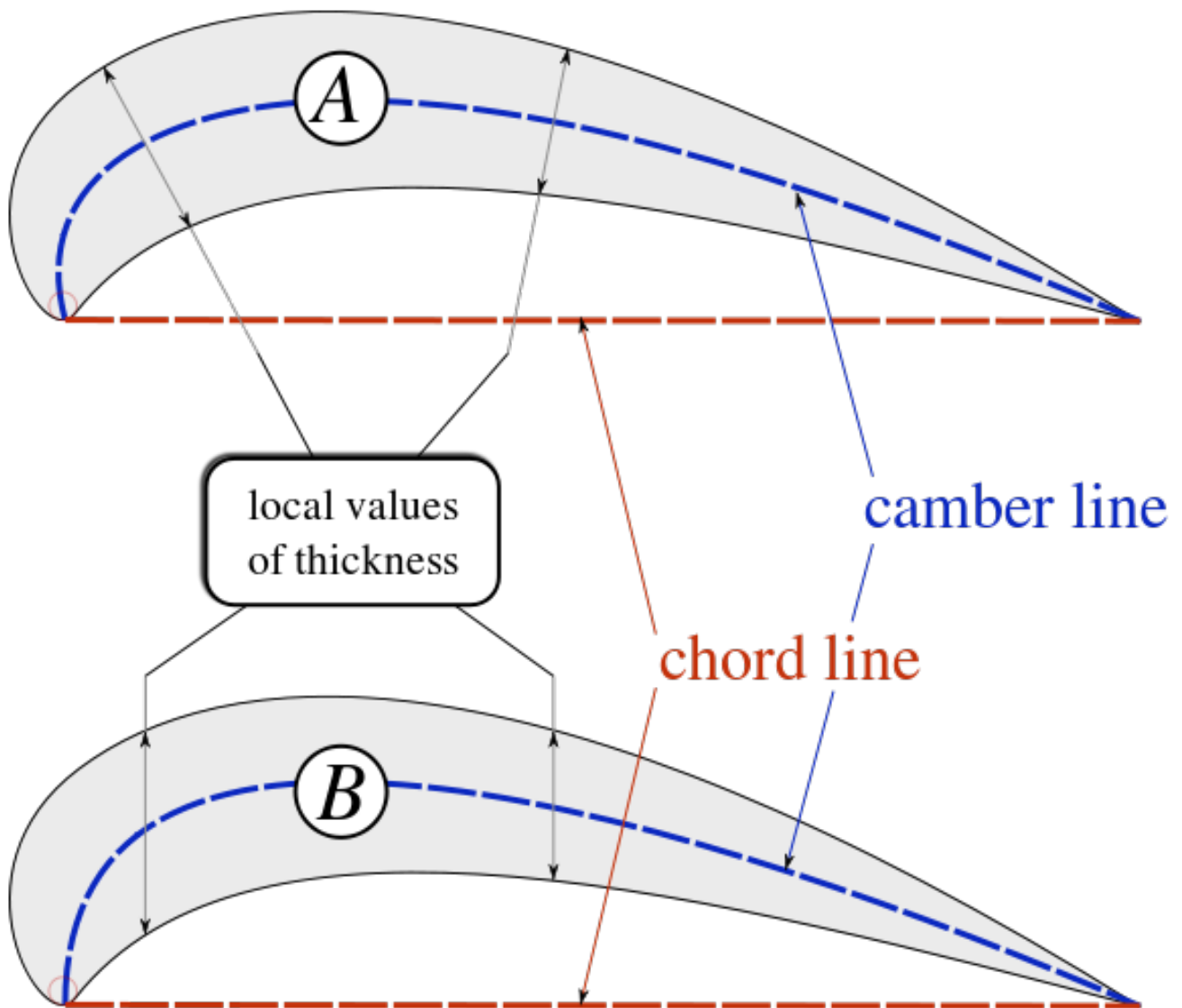
-Γραμμή χορδής (chord line) είναι μία ευθεία γραμμή που ενώνει την ακμή πρόσπτωσης με την ακμή εκφυγής.

-Μήκος χορδής (chord length) ή απλά χορδή (chord) είναι το μήκος της ευθείας γραμμής χορδής και συνήθως συμβολίζεται με  $c$ . Το μέγεθος αυτό αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα της γεωμετρίας μίας αεροτομής.

Για τον προσδιορισμό του σχήματος της αεροτομής, συνήθως χρησιμοποιούνται τα εξής:

-Η μέση γραμμή καμπυλότητας (mean camber line) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από την άνω (upper surface) και την κάτω επιφάνεια (lower surface) της αεροτομής.

-Το πάχος (thickness) υπολογίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Μπορεί είτε να είναι εγκάρσιο προς την γραμμή καμπυλότητας (camber line), ή να είναι εγκάρσιο στην χορδή (chord). Οι δύο αυτές διαφορετικές περιπτώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:





**Εικόνα 2: Δύο διαφορετικές περιπτώσεις ορισμού του πάχους, κάθετα στην γραμμή καμπυλότητας (A) και κάθετα στην χορδή (B). (Εικόνα από <http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>)**

Στην περίπτωση (A) το πάχος είναι κάθετο στη γραμμή καμπυλότητας ενώ στην περίπτωση (B) είναι κάθετο στη χορδή.

Το μέγιστο πάχος (*maximum thickness*) είναι ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας και συνήθως εκφράζεται σε ποσοστό επί της χορδής.

Σημαντικό επίσης είναι και το σημείο όπου έχουμε μέγιστο πάχος (*maximum thickness point*), που και αυτό εκφράζεται σαν ποσοστό επί της χορδής.

Συνεπώς η αεροτομή μπορεί να χαρακτηριστεί από μία διανομή πάχους και μία διανομή βέλους της μέσης γραμμής ανοιγμένα στη χορδή της αεροτομής.

Όταν η αεροτομή τοποθετηθεί μέσα σε ρευστό (όπως ο αέρας), τότε γίνεται αντικείμενο μελέτης της Μηχανικής Ρευστών.

Στην περίπτωση αυτή, επιπλέον μεγέθη που καθορίζουν την συμπεριφορά της αεροτομής μέσα στην ροή, είναι:

-Η γωνία πρόσπτωσης (*angle of attack*)  $\alpha$  δηλαδή η γωνία που σχηματίζει η χορδή της αεροτομής με την κατεύθυνση της επ'άπειρον ταχύτητας.

-Ο αριθμός Reynolds  $Re$ . Ο αριθμός αυτός είναι μία αδιάστατη ποσότητα που δίνει τον λόγο των αδρανειακών με τις συνεκτικές δυνάμεις μίας ροής. Ο αριθμός  $Re$  προσδιορίζεται σε περιπτώσεις όπου ένα ρευστό βρίσκεται σε σχετική κίνηση με μία επιφάνεια. Ορίζεται ως εξής:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

Όπου:

- $v$  είναι η μέση ταχύτητα του αντικειμένου σχετικά με το ρευστό. (μετριέται σε  $m/s$ )

- $L$  είναι η χαρακτηριστική γραμμική διάσταση. Για την περίπτωση της ροής, αποτελεί το μήκος που έχει διανύσει το ρευστό. (μετριέται σε  $m$ )

- $\mu$  είναι η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού. (μετριέται σε  $Pa \cdot s$  ή  $N \cdot s/m^2$  ή  $kg/(m \cdot s)$ )

- $\nu$  είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού και δίνεται από τον τύπο  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . (μετριέται σε  $m^2/s$ )

- $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού (μετριέται σε  $kg/m^3$ ).

-Ο αριθμός Mach  $Ma$ : Πρόκειται για μία αδιάστατη ποσότητα που προκύπτει αν διαιρέσουμε την ταχύτητα της κίνησης μίας αεροτομής μέσα από ένα ρευστό, με την τοπική ταχύτητα του ήχου, δηλαδή την ταχύτητα του ήχου μέσα από το συγκεκριμένο μέσο, που είναι το ρευστό.

$$M = \frac{v}{v_{sound}}$$

Αν ο αριθμός είναι  $Ma < 0.2-0.3$  και το ρευστό τείνει προς την μόνιμη και ισοθερμική ροή, τότε τα φαινόμενα συμπίεσής είναι μικρά, και το ρευστό μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση ασυμπίεστο.

## 1.11 Αεροδυναμικοί Συντελεστές

Όταν μία αεροτομή κινείται σε σχέση με ένα ρευστό, τότε υπάρχει μία σχετική κίνηση του τελευταίου ως προς την αεροτομή. Η αεροτομή αποτελεί εμπόδιο για αυτήν την σχετική κίνηση του ρευστού, και κατορθώνει να το εκτρέψει από την κανονική του πορεία.

Η πρόσκρουση του αέρα πάνω στην αεροτομή έχει σαν αποτέλεσμα ο πρώτος να ασκεί μία δύναμη πάνω στην δεύτερη, με κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν με την οποία εκτρέπεται.

Η δύναμη αυτή είναι γνωστή ως *αεροδυναμική δύναμη* και αναπτύσσεται με δύο τρόπους:

-Από την κάθετη στο σώμα δύναμη που οφείλεται στη πίεση που ασκείται στην επιφάνεια του σώματος.

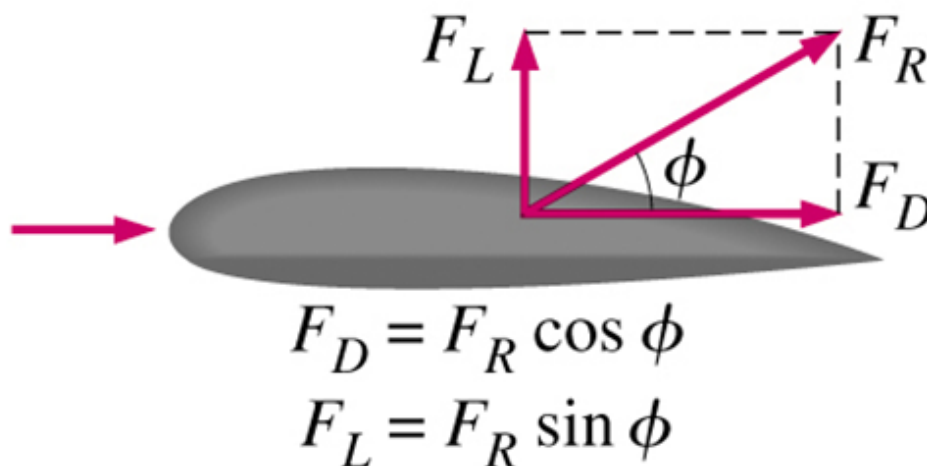
-Από την διατμητική δύναμη λόγω της συνεκτικότητας του ρευστού, που οφείλεται στις τριβές που ασκούνται πάνω στο σώμα. Οι τριβές ασκούνται παράλληλα στην επιφάνεια του σώματος.

Η **αεροδυναμική δύναμη**, που συνήθως συμβολίζεται με  $R$  (ή  $F_R$ ), μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες:

-Την **δύναμη άνωσης**  $L$  (ή  $F_L$ ), που χαρακτηρίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή άνωσης  $C_L$  (**Lift Coefficient**).

-Την **δύναμη αντίστασης**  $D$  (ή  $F_D$ ), που χαρακτηρίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή αντίστασης  $C_D$  (**Drag Coefficient**).

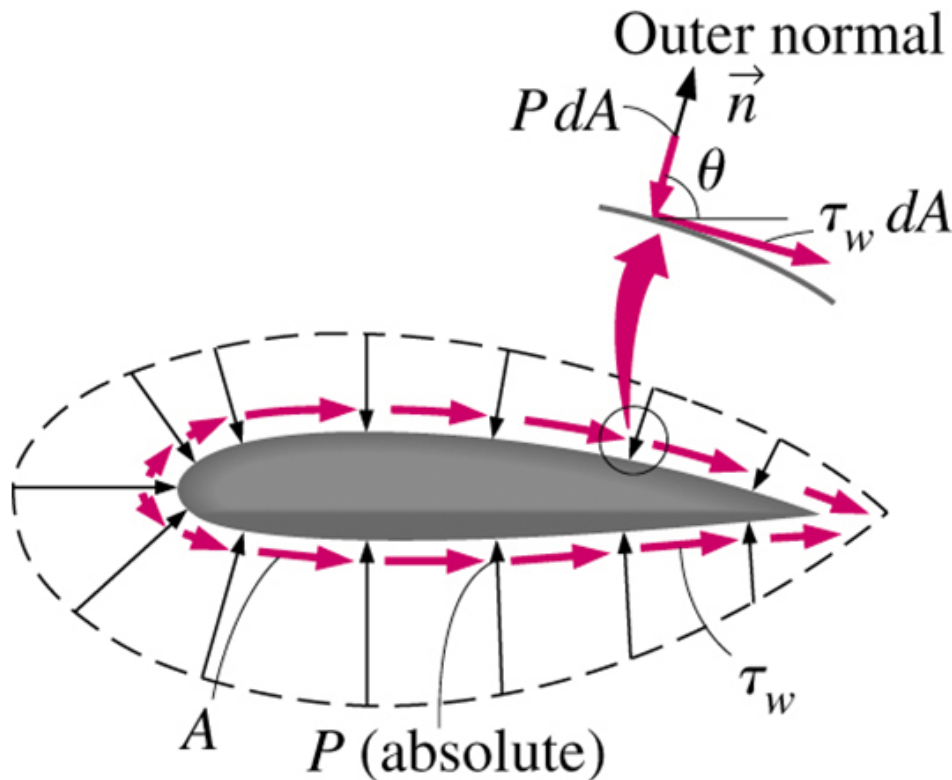
Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε τους τύπους που δίνουν τις δυνάμεις άνωσης και αντίστασης ως προς την συνολική αεροδυναμική δύναμη:



**Εικόνα 3: Ανάλυση της συνολικής δύναμης  $F_R$  στις συνιστώσες της  $F_L$  και  $F_D$ . (Εικόνα από "FLOW OVER BODIES: DRAG AND LIFT" Chapter 15) (cen54261\_ch15.qxd)**

Η γωνία  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει η συνολική δύναμη ως προς την κατεύθυνση της ροής του ρευστού. Η άνωση είναι η δύναμη η κάθετη στην ροή, ενώ η αντίσταση είναι η δύναμη η παράλληλη σε αυτήν.

Παράλληλα, στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε τους δύο παράγοντες που προκαλούν τις προαναφερθείσες δυνάμεις, δηλαδή την πίεση  $p$  και την διατμητική τάση  $\tau_w$ .



**Εικόνα 4: Διανυσματική απεικόνιση της πίεσης  $p$  και της διατμητικής τάσης  $\tau_w$  σε στοιχειώδη επιφάνεια της αεροτομής. (Εικόνα από "FLOW OVER BODIES: DRAG AND LIFT" Chapter 15) (cen54261\_ch15.qxd )**

Στο σχήμα αυτό ορίζουμε ως γωνία  $\theta$  αυτή που σχηματίζεται μεταξύ του κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος  $\vec{n}$  και της κατεύθυνσης της ροής του ρευστού.

Η άνωση  $L$  είναι το ολοκλήρωμα των πιέσεων και των διατμητικών τάσεων που είναι κάθετες στην κατεύθυνση της ροής, και με θετική φορά προς τα πάνω. Για αυτό και δίνεται από τον τύπο:

$$L = \int_A dL = - \int_A (P \sin \theta + \tau_w \cos \theta) dA$$

Ομοίως η αντίσταση  $D$  είναι το ολοκλήρωμα των πιέσεων και των διατμητικών τάσεων που είναι παράλληλες στην κατεύθυνση της ροής, και με θετική φορά σύμφωνα με την φορά της ροής (δηλαδή προς τα δεξιά). Δίνεται από τον τύπο:

$$D = \int_A dD = \int_A (-P \cos \theta + \tau_w \sin \theta) dA$$

Παρακάτω θα δούμε αναλυτικότερα τους συντελεστές άνωσης και αντίστασης.

### 1.11.1 Ο Συντελεστής Άνωσης

Η **άνωση** είναι η δύναμη η κάθετη στην διεύθυνση της ροής του αέρα. Είναι μία δύναμη αντίδρασης. Όπως είπαμε, η αεροτομή εκτρέπει τον αέρα/ρευστό από την πορεία του. Για να το κατορθώσει αυτό, ασκεί πάνω του μία δύναμη. Η δύναμη που ασκεί το σώμα/αεροτομή στο ρευστό/αέρα έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.

Σαν αντίδραση της δύναμης που του ασκείται, το ρευστό ασκεί στην αεροτομή μία δύναμη με κατεύθυνση προς τα πάνω, που είναι η δύναμη άνωσης.

Η άνωση ερμηνεύεται και ως η διαφορά πίεσης που υπάρχει πάνω στην αεροτομή. Η δύναμη η κάθετη στην επιφάνεια ανά μονάδα επιφανείας, αποτελεί την πίεση που ασκείται πάνω σε αυτήν. Αυτή ασκείται τόσο στην άνω επιφάνεια (upper) όσο και στην κάτω (lower). Η φορά της άνωσης, που είναι προς τα πάνω, υποδεικνύει ότι η πίεση στην άνω επιφάνεια είναι κατά το σύνολο μικρότερη από αυτήν της κάτω.

Η δύναμη άνωσης  $L$ , που είναι η διαφορά των πιέσεων πάνω και κάτω του πτερυγίου, εκφράζεται ως το ολοκλήρωμα των καθέτων πιέσεων στην επιφάνεια γύρω από το πτερύγιο:

$$L = \oint pn \cdot kdA$$

όπου:

$L$ : η άνωση

$A$ : η επιφάνεια του πτερυγίου

$p$ : είναι η πίεση

$n$ : είναι το κάθετο στην επιφάνεια της αεροτομής διάνυσμα

$k$ : είναι το διάνυσμα το κάθετο στην διεύθυνση της ροής

Το ρευστό λόγω της κίνησης του χαρακτηρίζεται επίσης από πίεση, που ονομάζεται δυναμική πίεση. Αυτή αποτελεί την κινητική ενέργεια διαιρεμένη στην μονάδα του όγκου. Η δυναμική πίεση δίνεται από τον τύπο:

$$q = \frac{1}{2}\rho v^2$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $v$  η ταχύτητα του ρευστού.

Ο συντελεστής που συνδέει την δύναμη άνωσης, με την δυναμική πίεση που ασκείται σε ένα σώμα από ένα ρευστό, και με την επιφάνεια αναφοράς του σώματος, είναι ο συντελεστής άνωσης  $C_L$ .

Ο συντελεστής αυτός αποτελεί τον λόγο της δύναμης άνωσης με την δυναμική πίεση (επί την επιφάνεια), και δίνεται από τον τύπο:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho v^2 S} = \frac{L}{qS}$$

όπου:

$-L$  είναι η δύναμη άνωσης.

$-\rho$  η πυκνότητα του ρευστού.

$-v$  η ταχύτητα του ρευστού.

$-q$  η δυναμική πίεση.

$-S$  η επιφάνεια του σώματος.

Ο συντελεστής άνωσης είναι αδιάστατος.

Στις διδιάστατες ροές, όπου το πλάτος της πτέρυγας θεωρείται ότι φτάνει στο άπειρο, η επιφάνεια  $S$  θα απειριζόταν, όποτε θα ήταν ανούσιος ένας υπολογισμός του  $C_L$ .

Για αυτό, σε περιπτώσεις διδιάστατης ροής ορίζεται μία παρεμφερής μεταβλητή. Πρόκειται για τον τοπικό συντελεστή άνωσης, που συμβολίζεται με  $C_l$ . Ο

συντελεστής αυτός αναφέρεται μονάχα σε μία τομή της πτέρυγας (αεροτομή) και όχι στο σύνολό της.

Η επιφάνεια  $S$  είναι το γινόμενο του πλάτους της πτέρυγας  $b$  και του μήκος της χορδής  $c$ :

$$S = c \cdot b$$

Στην περίπτωση της διδιάστατης ροής, το πλάτος  $b$  απειρίζεται.

Για άπειρο πλάτος πτέρυγας, απειρίζεται και η συνολική δύναμη άωσης  $L$ , οπότε πρέπει να οριστεί η τοπική δύναμη άωσης  $l$  που θα δίνεται από την συνολική ανά μονάδα πλάτους:

$$l = \frac{L}{b} \Leftrightarrow L = l \cdot b$$

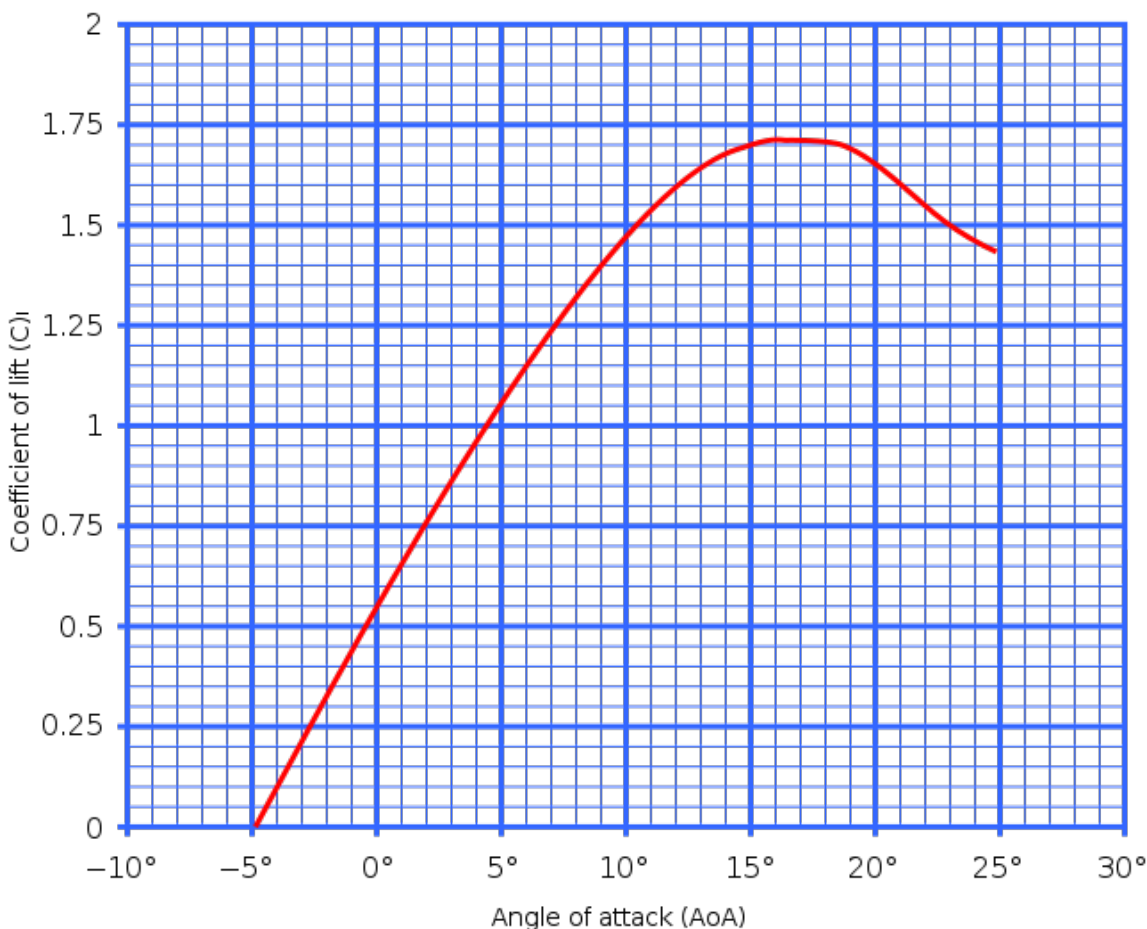
Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στον τύπο της δύναμης άωσης έχουμε:

$$C_l = \frac{l \cdot b}{\frac{1}{2}\rho v^2 c \cdot b} = \frac{l}{\frac{1}{2}\rho v^2 c}$$

Ο τοπικός συντελεστής άωσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμος και συνήθως απεικονίζεται σε διαγράμματα μαζί με την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ .

Η γωνία  $\alpha$  δεν επιδρά άμεσα στον συντελεστή  $C_l$ , επιδρά ωστόσο στην άωση  $l$ . Ωστόσο, η μαθηματική σχέση που συνδέει την  $\alpha$  με την  $l$ , διαφέρει σημαντικά από αεροτομή σε αεροτομή. Συνεπώς, η σχέση αυτή είναι εξαιρετικά απρόβλεπτη και συνήθως προσδιορίζεται με πειραματικές μετρήσεις ή σύνθετες αναλύσεις.

Αντίθετα, ο συντελεστής άωσης, που είναι η άωση διαιρεμένη με την δυναμική πίεση, σχετίζεται ομαλά και προβλέψιμα με την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ . Το τυπικό διάγραμμα  $\alpha - C_l$  είναι το ακόλουθο:



**Εικόνα 5: Τυπική περίπτωση διαγράμματος  $\alpha - C_l$ . (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Lift\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Lift_coefficient)).**

αν και οι τιμές διαφέρουν ανάλογα με την αεροτομή.

Ο συντελεστής  $C_l$  αυξάνεται με την αύξηση της γωνίας πρόσπτωσης μέχρι μίας γωνίας, όπου υπάρχει το μέγιστο  $C_l$ , και στη συνέχεια μειώνεται.

Η γωνία όπου παρατηρείται η μέγιστη τιμή  $C_l$  λέγεται *γωνία απώλειας στήριξης (stall angle)*.

Επειδή στην διπλωματική αυτή εξετάζουμε μονάχα περιπτώσεις διδιάστατης ροής, όλοι οι συντελεστές άνωσης που υπολογίζονται είναι οι  $C_l$  και όχι οι  $C_L$ . Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να αναφερθούμε σε αυτούς ως  $C_L$  και όχι  $C_l$ . Ο αναγνώστης να έχει υπόψιν του ότι αναφερόμαστε στον συντελεστή πάντοτε διαιρεμένο προς το πλάτος της χορδής ( $C_l$ ), μιας και σε διδιάστατες ροές είναι ο μόνος που έχει νόημα.

### 1.11.2 Ο Συντελεστής Αντίστασης

Η **αντίσταση** είναι η δύναμη που ασκείται στην αεροτομή και που έχει διεύθυνση παράλληλη προς τη ταχύτητα του ρευστού.

Η αντίσταση μπορεί να οφείλεται σε διαφορετικούς παράγοντες, και για αυτό ταξινομείται σε ορισμένες κατηγορίες.

-Η *παρασιτική αντίσταση (parasitic drag)* προκαλείται από την σχετική κίνηση ενός ρευστού σε ένα σώμα. Χωρίζεται σε ορισμένες υποκατηγορίες:

Η *αντίσταση μορφής (form drag)* προκαλείται λόγω της μορφής ενός σώματος. Ο πιο σημαντικός παράγοντας για την δύναμη που θα αναπτυχθεί είναι το γενικό σχήμα και μέγεθος του σώματος.

Έτσι πιο παχιές αεροτομές έχουν μεγαλύτερη αντίσταση μορφής.

Η *αντίσταση τριβής (skin friction)* οφείλεται στην τριβή που προκαλείται από την μετακίνηση του ρευστού πάνω στην επιφάνεια του σώματος. Εξαρτάται από το υλικό της επιφάνειας, καθώς και από την ίδια την έκταση στην οποία συντελείται η μετακίνηση αυτή.

Η παρασιτική αντίσταση εξαρτάται πολύ από την ταχύτητα του ρευστού. Καθώς η ταχύτητα μεγαλώνει, η αντίσταση αυτή αποκτά αυξανόμενες τιμές.

-Η δεύτερη κατηγορία είναι η *επαγωγική αντίσταση (induced drag)*. Είδαμε ήδη ότι η άνωση προκαλείται από την διαφορά πίεσης που υπάρχει στην αεροτομή, όταν στην κάτω πλευρά της πτέρυγας έχουμε μεγαλύτερη πίεση από ότι στην άνω. Σε μία πτέρυγα με συγκεκριμένο πλάτος, αυτή η διαφορά πίεσης έχει σαν συνέπεια αέρα να μετατοπίζεται από την κάτω πλευρά της αεροτομής στην άνω, μέσω της άκρης της πτέρυγας.

Η ροή αυτή του αέρα που γίνεται κατά πλάτος της αεροτομής, συνδυάζεται με την ροή κατά μήκος της χορδής, και προκαλεί αλλαγή στην ταχύτητα και στη διεύθυνση του αέρα, που στη συνέχεια προκαλεί στροβιλισμούς στην ακμή εκφυγής της αεροτομής.

Οι στροβιλισμοί αυτοί προκαλούν με τη σειρά τους άλλους στροβιλισμούς στην άκρη της πτέρυγας, δηλαδή στο σημείο της πτέρυγας το πιο απομακρυσμένο από την βάση.

Όλοι αυτοί οι στροβιλισμοί αλλάζουν την κατεύθυνση και την ταχύτητα του αέρα πίσω από την ακμή εκφυγής, και την σπρώχνουν προς τα κάτω προσδίδοντας της μία γωνία. Η γωνία αυτή ονομάζεται *επαγόμενη γωνία*.

Η απόκλιση αυτή της γωνίας προκαλεί μικρή αλλαγή στην τιμή της άνωσης. Ωστόσο επιδρά καθοριστικά στην τιμή της αντίστασης. Η αντίσταση εξαρτάται τόσο από την τιμή της άνωσης, όσο και από την γωνία την επαγόμενη. Επειδή όμως η επαγόμενη γωνία εξαρτάται από την άνωση, η αντίσταση εξαρτάται δύο φορές από την άνωση, είναι δηλαδή ανάλογη της άνωσης εις το τετράγωνο.

Η *συνολική αντίσταση (total drag)* ορίζεται από τον εξής μαθηματικό τύπο:

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_D S$$

όπου ως  $C_D$  ορίζουμε τον συντελεστή αντίστασης.

Ο συντελεστής αυτός εμπεριέχει μέσα του όλες τις μορφές αντίστασης που αναφέραμε (παρασιτική και επαγωγική), και για αυτό δίνεται από τον τύπο:

$$C_D = C_{D0} + k \cdot C_L^2$$

όπου

- $C_{D0}$  ο συντελεστής αντίστασης όταν η άνωση είναι ίση με μηδέν.

- $C_L$  ο συντελεστής άνωσης.

- $k$  μία σταθερή ποσότητα.

Συνεπώς, η συνολική αντίσταση θα είναι:

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 (C_{D0} + k \cdot C_L^2) S \Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_{D0} S + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 k \cdot C_L^2 S$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της άνωσης:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 S}$$

όπου επειδή συνήθως εξισώνουμε την άνωση  $L$  με το βάρος του αεροσκάφους  $W$  ( $L=W$ ), όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, είναι:

$$C_L = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 S}$$

τελικά θα έχουμε:

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_{D0} S + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 k \cdot \left[ \frac{W}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 S} \right]^2 S \Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_{D0} S + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 k \cdot \frac{W^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^2 \bar{v}^4 S^2} S \Leftrightarrow$$

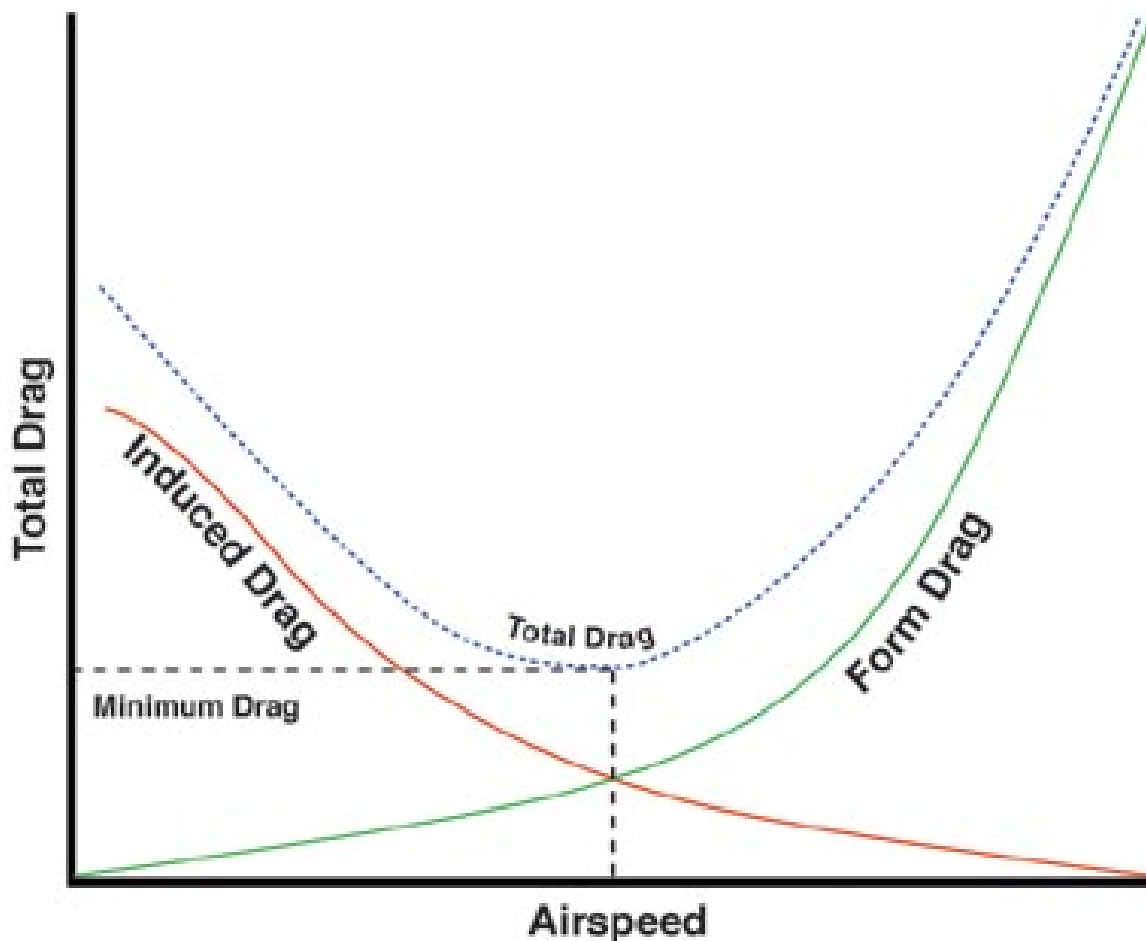
$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_{D0} S + k \frac{W^2}{\left(\frac{1}{2}\right) \rho \bar{v}^2 S} \Leftrightarrow$$

Παρατηρούμε ότι η αντίσταση  $D$  απαρτίζεται από δύο όρους.

Ο πρώτος όρος  $\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_{D0} S$  είναι ανάλογος της ταχύτητας  $\bar{v}$  εις το τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι καθώς η ταχύτητα μεγαλώνει, η αντίσταση αποκτά ολοένα και αυξανόμενες τιμές. Αυτός ο όρος αναφέρεται στην παρασιτική αντίσταση.

Ο δεύτερος όρος  $\frac{1}{2}\rho v^2 k \cdot C_L^2 S = k \frac{W^2}{(\frac{1}{2})\rho v^2 S}$  είναι ανάλογος του συντελεστή άνωσης εις το τετράγωνο, που είναι χαρακτηριστικό της επαγωγικής αντίστασης. Παρατηρούμε ότι η επαγωγική αντίσταση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ταχύτητας  $v$  εις το τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι καθώς η ταχύτητα αυξάνεται, η επαγωγική αντίσταση μειώνεται.

Έτσι με την αύξηση της ταχύτητας, η μεν παρασιτική αντίσταση αυξάνεται, η δε επαγωγική μειώνεται. Επειδή η συνολική αντίσταση αποτελεί το άθροισμα των δύο ανωτέρω, η μείωση της μίας επιδρά στην αύξηση της άλλης, με αποτέλεσμα η συνολική να ακολουθεί μία καμπύλη με την εξής γενική μορφή:

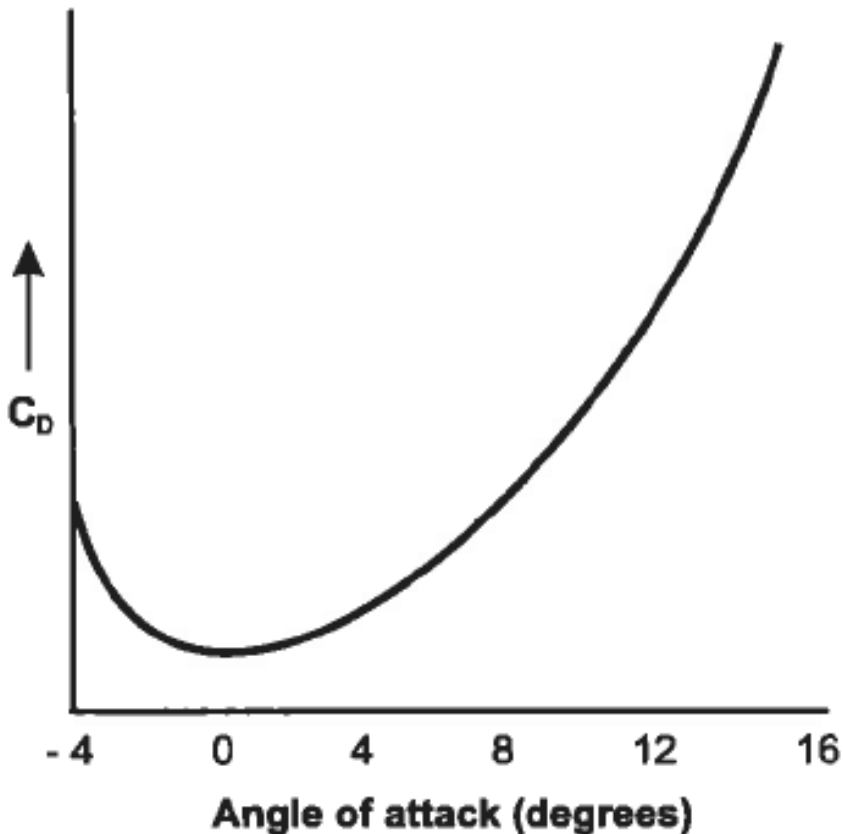


**Εικόνα 6: Το διάγραμμα απεικονίζει την μεταβολή της αντίστασης καθώς αυξάνεται η ταχύτητα του αέρα (airspeed). Η επαγωγική αντίσταση (induced drag) μειώνεται ενώ η παρασιτική (form drag) αυξάνεται. Η συνολική αντίσταση (total drag), που προκύπτει ως το άθροισμα των δύο αυτών αντιστάσεων, ακολουθεί μία καμπύλη μορφή με ένα ελάχιστο σημείο, την ελάχιστη αντίσταση (minimum drag). (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_force](http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_force))**

Παρατηρούμε ότι η μορφή της συνολικής αντίστασης αρχικά μειώνεται ως μία ελάχιστη τιμή (*minimum drag*), και στη συνέχεια αυξάνεται.

Με την λογική που ορίσαμε τον τοπικό συντελεστή άνωσης, μπορούμε να ορίσουμε και τον αντίστοιχο τοπικό συντελεστή αντίστασης. Ο συντελεστής αυτός συμβολίζεται ως  $C_d$  και αναφέρεται για αεροτομές απείρου πλάτους. Το χαρακτηριστικό διάγραμμα  $\alpha - C_d$  έχει την εξής γενική μορφή:





**Εικόνα 7: Τυπική μορφή διαγράμματος  $\alpha - C_D$ . (Εικόνα από <http://rotorhead8900.wordpress.com/>)**

όπου και πάλι οι τιμές διαφέρουν ανάλογα με την αεροτομή.

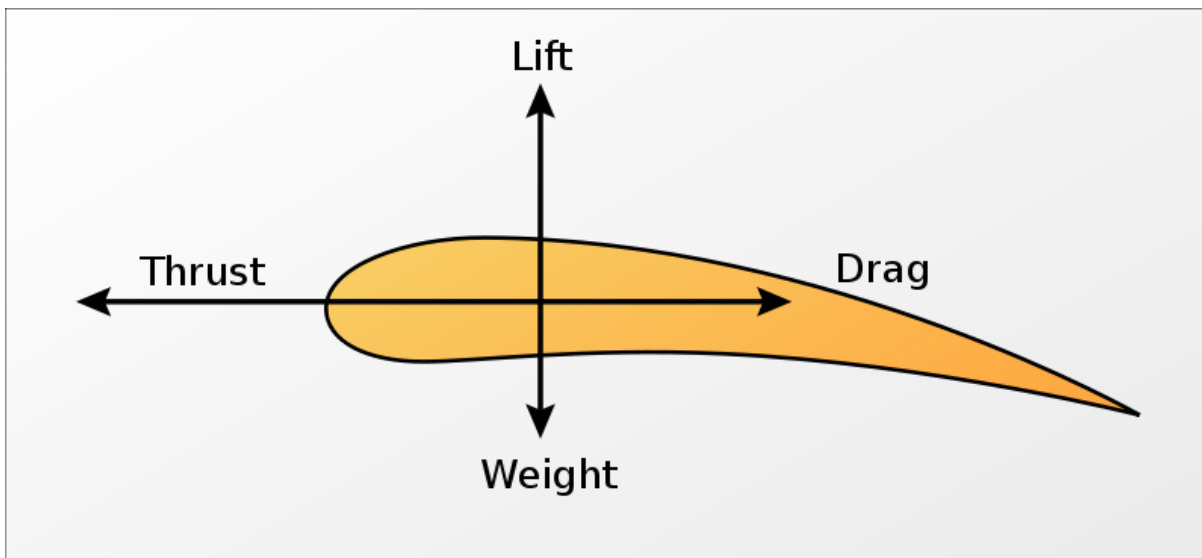
Σε διδιάστατες αεροτομές ο όρος  $C_D$  δεν έχει νόημα, για αυτό χρησιμοποιείται στη θέση του ο  $C_d$ . Στο εξής, ακόμα και αν αναφερόμαστε στην αντίσταση ως  $C_D$  αντί για  $C_d$ , θα εννοούμε την περίπτωση του συντελεστή διαιρεμένο προς το πλάτος της χορδής ( $C_d$ ).

### 1.11.3 Οι Δυνάμεις που Ασκούνται στην Αεροτομή

Ως τώρα αναφέραμε την βασική δύναμη  $R$  που ασκείται σε μία αεροτομή από τον αέρα και τον τρόπο που αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, που λέγονται άνωση και αντίσταση.

Η μεν άνωση είναι η δύναμη που είναι κάθετη στη διεύθυνση της ροής του αέρα, και η δε αντίσταση είναι παράλληλη στη ροή.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε γιατί συνήθως η ανάλυση γίνεται σε αυτές τις συγκεκριμένες δύο συνιστώσες. Αυτό καθίσταται σαφές στο παρακάτω σχήμα:



**Εικόνα 8: Οι βασικές δυνάμεις που ασκούνται σε μία αεροτομή, η άνωση (lift), η αντίσταση (drag), το βάρος (weight) και η πρόωση (thrust). (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Lift\\_\(force\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lift_(force)))**

Όπως βλέπουμε, σε μία αεροτομή, πέρα από την άνωση και την αντίσταση, ασκούνται συνολικά δύο δυνάμεις:

-Το βάρος  $W$  (*Weight*) του αεροσκάφους με κατεύθυνση πάντοτε κατακόρυφη. Το βάρος είναι η δύναμη που οφείλει να υπερνικήσει μία πτέρυγα ώστε να καταφέρει το αεροσκάφος να πετάξει.

Σε περίπτωση οριζόντιας ροής αέρα (που συμβαίνει στις περισσότερες ροές που εξετάζουμε), η άνωση  $L$  αντιτίθεται πάντοτε στο βάρος  $W$  με αποτέλεσμα η μία δύναμη να εξισορροπεί άμεσα την άλλη.

Για την απλή περίπτωση της οριζόντιας πτήσης, οι δύο αυτές δυνάμεις πρέπει προφανώς να είναι ίσες ( $W=L$ ).

Στόχος κάθε σχεδιασμού αεροπλάνου, είναι να κατασκευαστεί μία αεροτομή που να δίνει το μεγαλύτερο δυνατό  $C_L$  έτσι ώστε η πτέρυγα να δίνει την μέγιστη δυνατή άνωση  $L$ . Μέγιστη δυνατή δύναμη  $L$ , από την εξίσωση  $W = L$  θα επιτρέπει την κατασκευή αεροπλάνου με το μέγιστο δυνατό ωφέλιμο βάρος.

Αυτό πρακτικά σημαίνει αεροπλάνα με μεγαλύτερες δυνατότητες πτήσης (περισσότερος χώρος για καύσιμα), καθώς και πιο επικερδείς και οικονομικές μεταφορές επιβατών και αντικειμένων (περισσότερες θέσεις και μεγαλύτερες αποθήκες σημαίνουν μικρότερος συνολικός αριθμός πτήσεων).

-Η πρόωση  $T$  (*Thrust*) είναι η δύναμη που παράγει η μηχανή του αεροπλάνου. Αποτελεί, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, μία δύναμη αντίδρασης. Συγκεκριμένα, όταν ένα σύστημα απελευθερώνει μάζα προς μία κατεύθυνση, τότε η επιταχυνόμενη αυτή μάζα ασκεί στο σύστημα μία δύναμη ίση και αντίθετη.

Για την περίπτωση του αεροπλάνου, το σύστημα αυτό είναι η μηχανή του. Τόσο στην περίπτωση ελικοφόρου αεροσκάφους, όσο και στην περίπτωση αεροστροβίλου, ο αέρας αφού αναρροφάται, ωθείται προς τα πίσω με μεγάλη δύναμη. Η δύναμη που ασκεί η μηχανή στην μάζα αυτή του αέρα, προκαλεί την αντίδραση του τελευταίου πάνω στην ίδια την αεροτομή του αεροπλάνου, που είναι η ώθηση.

Αν ένα αεροπλάνο θέλει να διατηρήσει μία σταθερή οριζόντια μετακίνηση, οφείλει να καταπολεμήσει την δύναμη αντίστασης  $D$ . Αυτή ακριβώς είναι η χρησιμότητα

της δύναμης πρόωσης  $T$ , η οποία και έχει οριζόντια διεύθυνση. Επειδή η  $T$  εξουδετερώνει την  $D$ , ισχύει  $T=D$ .

Κατά τον σχεδιασμό της αεροτομής, είναι επιθυμητό να έχουμε το μικρότερο δυνατό  $C_D$ . Ο μικρός συντελεστής αυτός, θα δώσει και μικρή δύναμη αντίστασης  $D$ , και συνεπώς θα χρειάζεται μικρή δύναμη ώθησης  $T$  που να την καταπολεμά. Μικρές απαιτήσεις στο μέγεθος της ώθησης  $T$  συνεπάγονται οικονομία τόσο στην κατανάλωση καυσίμου της μηχανής, όσο και στην ίδια την ποιότητα της κατασκευής της μηχανής.

Επειδή λοιπόν οι δύο αυτές δυνάμεις έχουν κατεύθυνση η μία κατακόρυφη (το βάρος) και η άλλη οριζόντια (η πρόωση), συνήθως η συνολική δύναμη  $R$  που ασκείται από τον αέρα στην αεροτομή αναλύεται στην οριζόντια δύναμη αντίστασης  $D$ , και στην κατακόρυφη δύναμη άνωσης  $L$ , ώστε οι δυνάμεις αυτές να αλληλοεξουδετερώνονται ανά ζεύγη.

Συχνά ωστόσο μπορεί να γίνει και διαφορετική ανάλυση της δύναμης  $R$ , όχι ως προς το ολικό σύστημα συντεταγμένων, αλλά ως προς το τοπικό της ίδιας της αεροτομής.

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα:

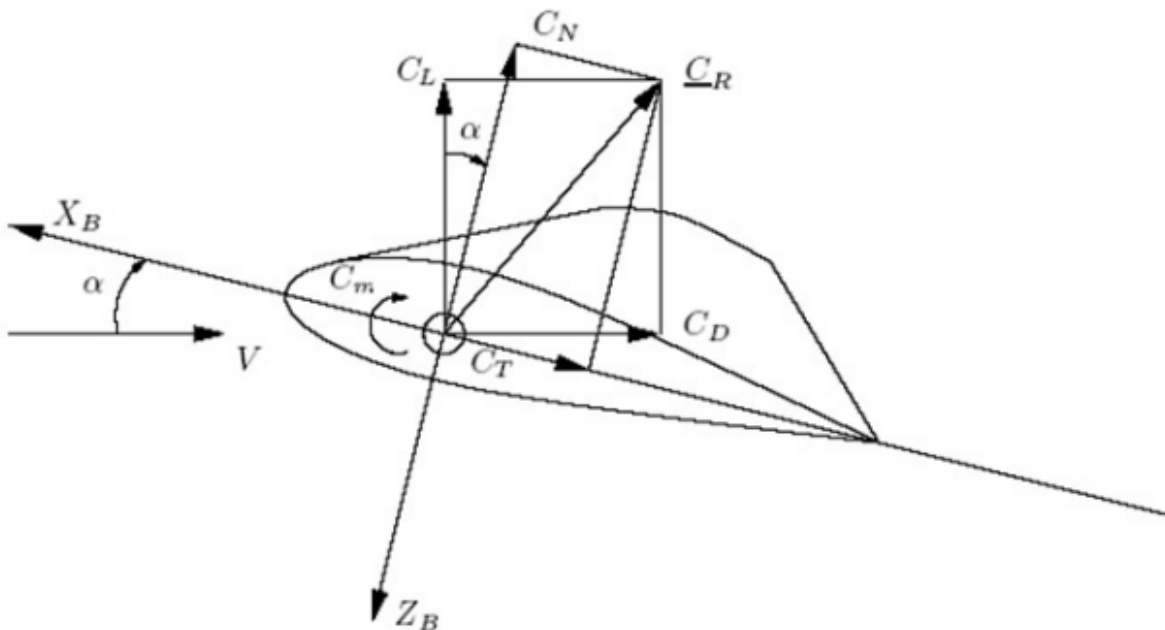


Figure 1: The forces and moments acting on a wing.

**Εικόνα 9: Ανάλυση του συντελεστή συνολικής δύναμης  $C_R$  τόσο στις συνιστώσες  $C_L$  και  $C_D$ , όσο και στις  $C_N$  και  $C_T$ . (Εικόνα από <http://www.aerostudents.com/files/flightDynamics/theAerodynamicCenter.pdf>)**

στην περίπτωση που η αεροτομή δεν σχηματίζει γωνία  $\alpha = 0$  με τον αέρα, το ολικό σύστημα συντεταγμένων δεν ταυτίζεται με το τοπικό. Σε κάθε περίπτωση πάντως, τα μεγέθη  $L$  (ή  $C_L$ ), και  $D$  (ή  $C_D$ ) αναφέρονται στις δυνάμεις με κατευθύνσεις κατακόρυφα και οριζόντια αντίστοιχα, δηλαδή κάθετα και παράλληλα προς την διεύθυνση του αέρα.

Όπως όμως βλέπουμε και στο παραπάνω σχήμα, η δύναμη  $R$  μπορεί να αναλυθεί και σε δύο δυνάμεις που είναι σχετικές με την θέση της αεροτομής, δηλαδή σε διευθύνσεις που ορίζονται από τις τοπικές συντεταγμένες της αεροτομής.

Η πρώτη από τις δυο αυτές δυνάμεις είναι η  $N$ , με αντίστοιχο συντελεστή  $C_N$ , και έχει διεύθυνση την κάθετη στην χορδή της αεροτομής. Η δύναμη αυτή λέγεται **normal force** εξού και ο συμβολισμός της.

Η δεύτερη από τις δύο δυνάμεις αυτές είναι η  $T$ , με αντίστοιχο συντελεστή  $C_T$ , και έχει διεύθυνση παράλληλη προς τη χορδή της αεροτομής. Η δύναμη αυτή λέγεται **tangential force** εξού και ο συμβολισμός της.

Η σχέση που συνδέει τους συντελεστές των δυνάμεων αυτών με τους συντελεστές άνωσης και αντίστασης είναι η εξής:

$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$$

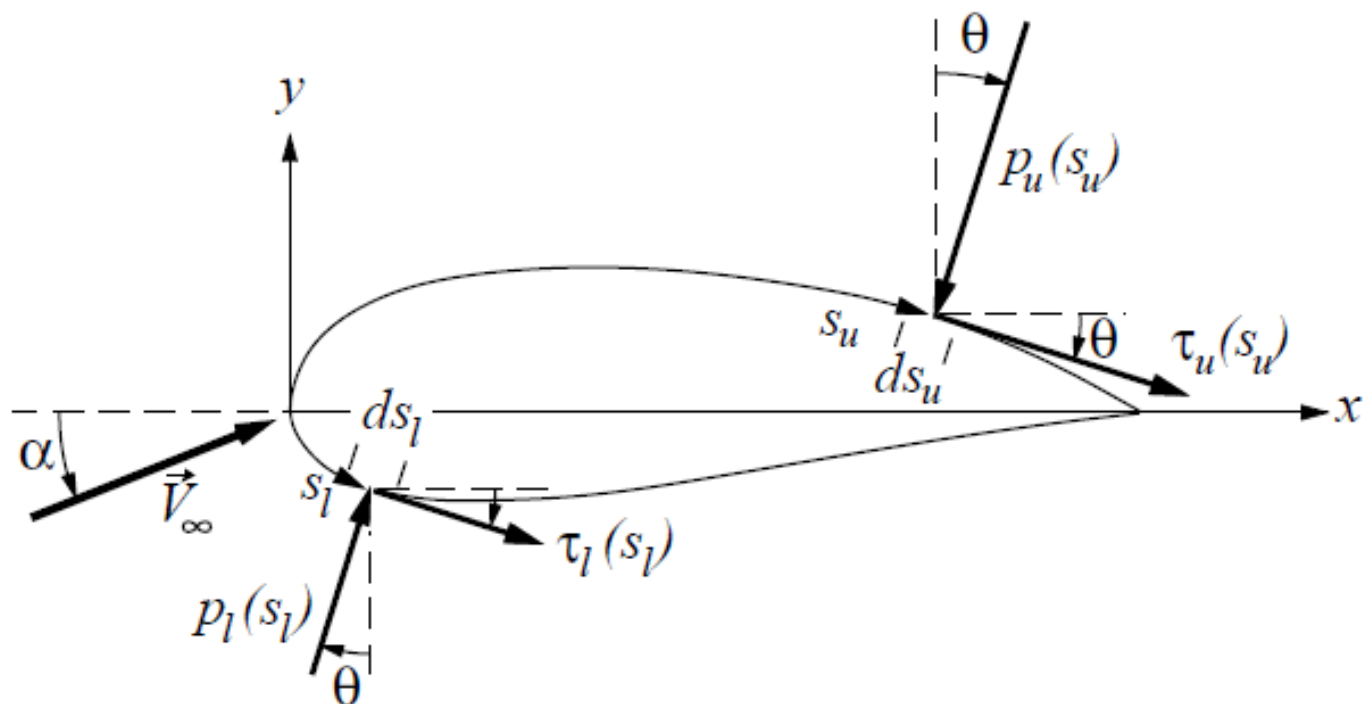
$$C_T = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha$$

όλες οι μεταβλητές  $C_L$ ,  $C_D$ ,  $C_N$  και  $C_T$  εξαρτώνται από τη γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ .

Από όλα τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι υπάρχει μία σχέση που συνδέει τις δυνάμεις  $N$  και  $T$  με τις αντίστοιχες πιέσεις και τάσεις μιας αεροτομής. Ποιες όμως είναι οι σχέσεις αυτές;

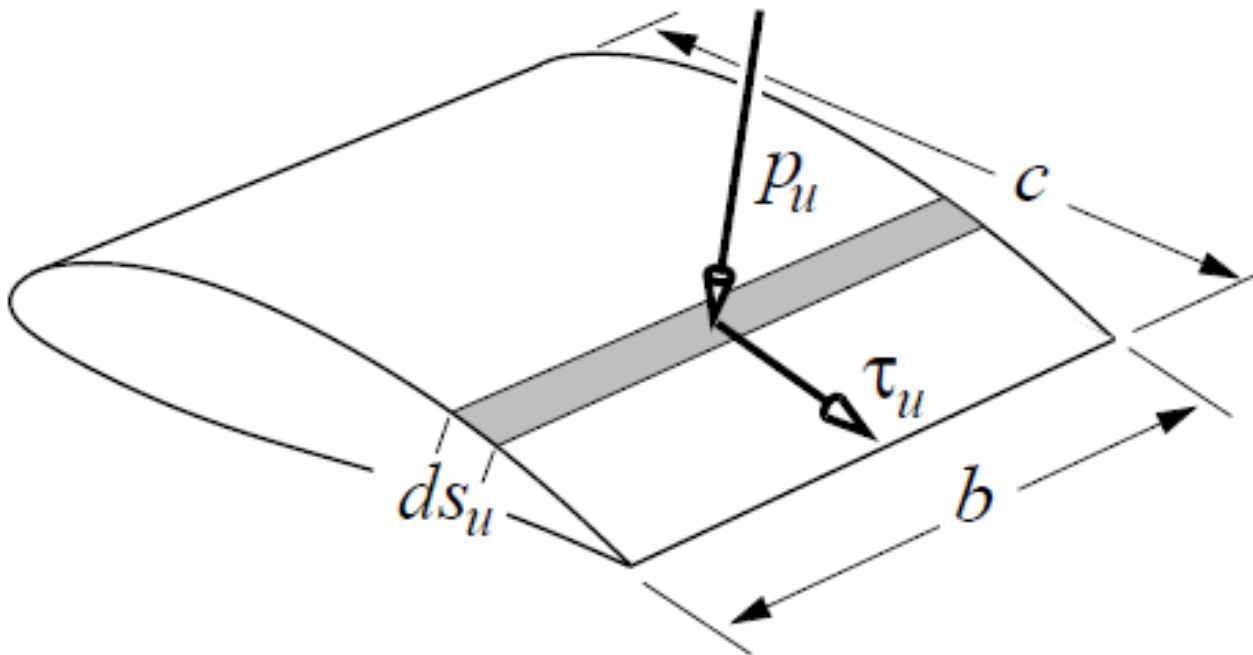
Όπως είπαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι πιέσεις  $p$  σε ένα σημείο ασκούνται κάθετα ως προς το τοίχωμα της αεροτομής, ενώ οι τριβές-διατμητικές τάσεις  $\tau_w$  ασκούνται παράλληλα.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία αεροτομή η οποία σχηματίζει γωνία  $\alpha$  με την ροή του αέρα:



**Εικόνα 10:** Διανυσματική απεικόνιση των πιέσεων  $p$  και των τάσεων  $\tau_w$  στην άνω (upper) και κάτω (lower) επιφάνεια της πτέρυγας. Η

αεροτομή σχηματίζει γωνία  $\alpha$  με την ροή του αέρα. (Εικόνα από <http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/fluids/Lectures/f03.pdf>)



**Εικόνα 11: Απεικόνιση της πίεσης και της τάσης σε μία στοιχειώδη επιφάνεια  $ds_u$ . Παρότι η εικόνα αυτή δείχνει τρισδιάστατη αεροτομή, εμείς θα δουλέψουμε μονάχα σε διδιάστατες περιπτώσεις, οπότε το πλάτος  $b$  θα θεωρείται άπειρο.** (Εικόνα από <http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/fluids/Lectures/f03.pdf>)

Όπως βλέπουμε και στην παραπάνω εικόνα, εκτός από τη γωνία  $\alpha$ , μπορούμε να ορίσουμε και μία γωνία  $\theta$ . Η  $\theta$  είναι η σχετική γωνία μεταξύ του διανύσματος της πίεσης και της κάθετης ως προς την χορδή διεύθυνσης. Είναι σαφές ότι η γωνία αυτή δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από τη σχετική θέση (το σημείο) πάνω στην αεροτομή όπου η πίεση αυτή αναφέρεται.

Επιπλέον, οι πιέσεις που ασκούνται στην ανώτερη (upper) και στην κατώτερη (lower) επιφάνεια προκαλούν αντίστοιχα διαφορετικές δυνάμεις ανώτερης και κατώτερης επιφανείας, οι οποίες και δίνονται από τους αντίστοιχους τύπους:

$$dN_u = (-p_u \cos\theta - \tau_u \sin\theta) ds_u$$

$$dT_u = (-p_u \sin\theta + \tau_u \cos\theta) ds_u$$

για την άνω (upper) επιφάνεια, και:

$$dN_l = (p_l \cos\theta - \tau_l \sin\theta) ds_l$$

$$dT_l = (p_l \sin\theta + \tau_l \cos\theta) ds_l$$

για την κάτω (lower) επιφάνεια.

Η συνολική δύναμη  $N$  και  $T$  υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα των επιμέρους αυτών στοιχειωδών δυνάμεων, για όλο το μήκος από την ακμή πρόσπτωσης (leading edge-LE) ως την ακμή εκφυγής (trailing edge-TE). Επειδή μάλιστα έχουμε άνω και

κάτω επιφάνεια χωριστά, θα πρέπει να αθροίσουμε το ολοκλήρωμα των επιμέρους αυτών στοιχειωδών δυνάμεων. Το αποτέλεσμα θα δίνεται από τους τύπους:

$$N = \int_{LE}^{TE} dN_u + \int_{LE}^{TE} dN_l$$

$$T = \int_{LE}^{TE} dT_u + \int_{LE}^{TE} dT_l$$

Στη συνέχεια η σχέση που συνδέει τα μεγέθη  $L$  και  $D$ , με τα αντίστοιχα  $N$  και  $T$  δίνεται από την γωνία  $\alpha$  μεταξύ της χορδής της αεροτομής και της ροής του αέρα. Η σχέση αυτή είναι:

$$C_L = C_N \cos \alpha - C_T \sin \alpha$$

$$C_D = C_N \sin \alpha + C_T \cos \alpha$$

Είναι φανερό ότι αν η χορδή βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο, αν δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική, τότε το κατακόρυφο διάνυσμα ταυτίζεται με το κάθετο στη χορδή, οπότε και η δύναμη  $L$  θα ταυτίζεται με την  $N$ .

Αντίστοιχα το οριζόντιο διάνυσμα θα ταυτίζεται με το διάνυσμα το παράλληλο στην χορδή, οπότε η  $D$  θα ταυτίζεται με την  $T$ .

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα από τον παραπάνω τύπο για  $\alpha = 0$ :

$$C_L = C_N \cos(0) - C_T \sin(0)$$

$$C_D = C_N \sin(0) + C_T \cos(0) \Leftrightarrow$$

$$C_L = C_N$$

$$C_D = C_T$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι, όπως βλέπουμε και στο παραπάνω σχήμα, μπορεί να οριστεί και συντελεστής για την συνολική δύναμη  $R$ . Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται  $C_R$  και ορίζεται με τρόπο παρόμοιο με τους αντίστοιχους συντελεστές άνωσης και αντίστασης.

#### 1.11.4 Η Ροπή που Ασκείται στην Αεροτομή

Εκτός όμως από τη δύναμη που ασκείται σε μία αεροτομή, ο αέρας που προσκρούει σε αυτήν προκαλεί και περιστροφή. Η περιστροφή αυτή γίνεται γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο και πηγάζει από την ανομοιόμορφη κατανομή των πιέσεων και των τριβών λόγω της σχετικής κίνησης του αέρα.

Είναι φανερό ότι ροπή μπορεί να οριστεί ως προς οποιοδήποτε σημείο. Κάθε σημείο της αεροτομής θα παρουσιάζει ανομοιόμορφη κατανομή πιέσεων και τάσεων οπότε μπορεί να εμφανιστεί περιστροφή και η αντίστοιχη ροπή που την προκαλεί.

Ας δούμε την πιο απλή περίπτωση ροπής, αυτή που ασκείται στην αρχή των αξόνων. Θυμίζουμε ότι σε ένα τυπικό σύστημα συντεταγμένων μιας αεροτομής, η αρχή των αξόνων, το σημείο δηλαδή ( $x=0, y=0$ ) τοποθετείται στην θέση της ακμής πρόσπτωσης (leading edge).

Κάθε σημείο της αεροτομής θα απέχει στις τετμημένες απόσταση  $x$  από το σημείο αυτό και στις τεταγμένες απόσταση  $y$ .

Από όλα τα παραπάνω, είναι φανερό ότι η ροπή ως προς το Leading Edge  $M_{LE}$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$M_{LE} = \int_{LE}^{TE} -x \cdot dN_u + \int_{LE}^{TE} -x \cdot dN_l + \int_{LE}^{TE} y \cdot dT_u + \int_{LE}^{TE} y \cdot dT_l$$

Η δε σχέση που συνδέει την στοιχειώδη επιφάνεια  $ds$  με τις τετμημένες και τις τεταγμένες είναι η εξής:

$$\begin{aligned} ds \cdot \cos\theta &= dx \\ ds \cdot \sin\theta &= -dy = -\frac{dy}{dx} dx \end{aligned}$$

Ωστόσο η ροπή δεν ενδιαφέρει αν υπολογιστεί στο ακμή πρόσπτωσης. Συνήθως, το σημείο υπολογισμού της ροπής είναι το καλούμενο ως αεροδυναμικό κέντρο.

Το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής βρίσκεται, σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία, κοντά στο 0.25 της χορδής προς την μεριά της ακμής πρόσπτωσης. Γύρω από το σημείο αυτό, η αεροτομή περιστρέφεται και προκαλεί ροπή μεγέθους  $M$ . Συνεπώς η τετμημένη του κέντρου περιστροφής ισούται με  $x = 0.25$ . Επειδή το αεροδυναμικό κέντρο βρίσκεται πάνω στην χορδή, αν η χορδή τοποθετηθεί πάνω στον άξονα  $x$  (όπως γίνεται συνήθως), η τεταγμένη του κέντρου θα είναι  $y = 0$ .

Ο υπολογισμός μιας ροπής  $M$  γίνεται από την ροπή  $M_{LE}$  με βάση τον τύπο:

$$M = M_{LE} + 0.25 \cdot N$$

ή μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας από τον τύπο:

$$M = \int_{LE}^{TE} -(x - 0.25) \cdot dN_u + \int_{LE}^{TE} -(x - 0.25) \cdot dN_l + \int_{LE}^{TE} y \cdot dT_u + \int_{LE}^{TE} y \cdot dT_l$$

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει την ροπή, είναι πια εύκολο να οριστεί και ο **συντελεστής ροπής (torque ή moment coefficient)  $C_M$** .

Ο τελευταίος ορίζεται ως το μέγεθος:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2Sc}$$

όπου  $c$  είναι το μήκος της χορδής, το οποίο επειδή το θεωρούμε συνήθως αδιάστατο ( $c = 1$ ), μπορεί να παραλειφθεί. Τότε, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2S}$$

## 1.12 Σχεδιασμός Πλέγματος

Οι εξισώσεις Navier-Stokes στις οποίες αναφερθήκαμε αποτελούν τη βάση για την επίλυση CFD. Για την περίπτωση των μη-συνεκτικών ροών χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler.

Για τον προσδιορισμό των μεγεθών που σχετίζονται με τη ροή, και κατ'επέκταση για την εξεύρεση των συντελεστών άνωσης και αντίστασης, ακολουθούνται τα εξής βήματα:

**1)** Ορίζεται ένας όγκος αναφοράς  $\Omega$  γύρω από την αεροτομή. Ο όγκος έχει συγκεκριμένη γεωμετρία ανάλογα με την μορφή της αεροτομής, και μέγεθος αρκετά μεγάλο ώστε στα σύνορα του όγκου (μέγιστη απόσταση από την αεροτομή), το ρευστό να θεωρείται ανεπηρέαστο από την παρουσία της αεροτομής.

**2)** Ο όγκος αυτός που καταλαμβάνεται από το ρευστό (δηλαδή που δεν περιλαμβάνει τον όγκο της αεροτομής) χωρίζεται σε πεπερασμένα κελιά (*cells*). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διακριτοποίηση. Το σύνολο αυτό των κελιών είναι αυτό που ονομάζουμε πλέγμα (*grid* ή *mesh*).

**3)** Καθορίζεται το φυσικό μοντέλο που χρησιμοποιείται, δηλαδή οι εξισώσεις διατήρησης, οι εξισώσεις κίνησης κτλ.

**4)** Καθορίζονται οι οριακές συνθήκες, δηλαδή η συμπεριφορά του ρευστού στις συνοριακές επιφάνειες  $S$  του όγκου  $\Omega$ . Δύο είναι τα δύο βασικά σύνορα κάθε όγκου.

Το ένα βρίσκεται πάνω στην αεροτομή και το άλλο αποτελεί το απομακρυσμένο όριο της αεροτομής.

Το μεν πρώτο χαρακτηρίζεται από την μη-ολίσθηση του ρευστού πάνω στο τοίχωμα της αεροτομής (*solid wall boundary*) Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η ταχύτητα εκεί πέρα είναι μηδέν  $\vec{v} = 0$ .

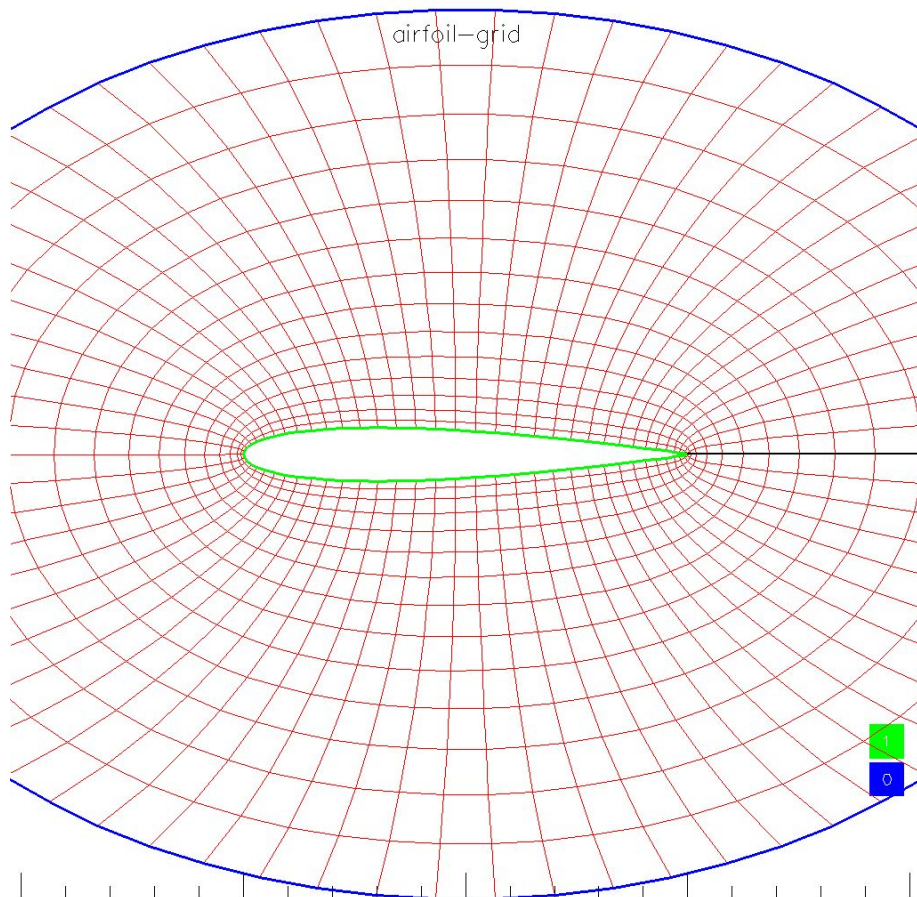
Το απομακρυσμένο σύνορο της αεροτομής  $\Omega$  ονομάζεται *farfield* και είπαμε ήδη ότι πρέπει να θεωρείται ανεπηρέαστο από την παρουσία της αεροτομής. Για αυτό εκεί πάνω θεωρούμε ότι η ταχύτητα που ισχύει είναι ίση με την ταχύτητα της ροής  $v_\infty$ . Στη θέση αυτή η αδιάστατη ταχύτητα  $\vec{v}$  που ισούται με την κανονική  $\vec{v}_{real}$  ταχύτητα διαιρεμένη με την ταχύτητα της ροής θα ισούται με  $\vec{v} = \frac{\vec{v}_{real}}{v_\infty} = 1$ .

Για την περίπτωση διδιάστατης ροής, ο "όγκος"  $\Omega$  προφανώς δεν είναι πραγματικά όγκος, αλλά διδιάστατη επιφάνεια, και οι συνοριακές "επιφάνειες"  $S$  είναι συνοριακές γραμμές.

Στο εξής ωστόσο θα αναφερόμαστε με την γενική ορολογία του όγκου  $\Omega$  και των επιφανειών  $S$  ακόμα και στην περίπτωση διδιάστατης ροής, για αποφυγή συγχύσεων.

Μία τυπική μορφή όγκου  $\Omega$  γύρω από μία αεροτομή είναι η εξής:



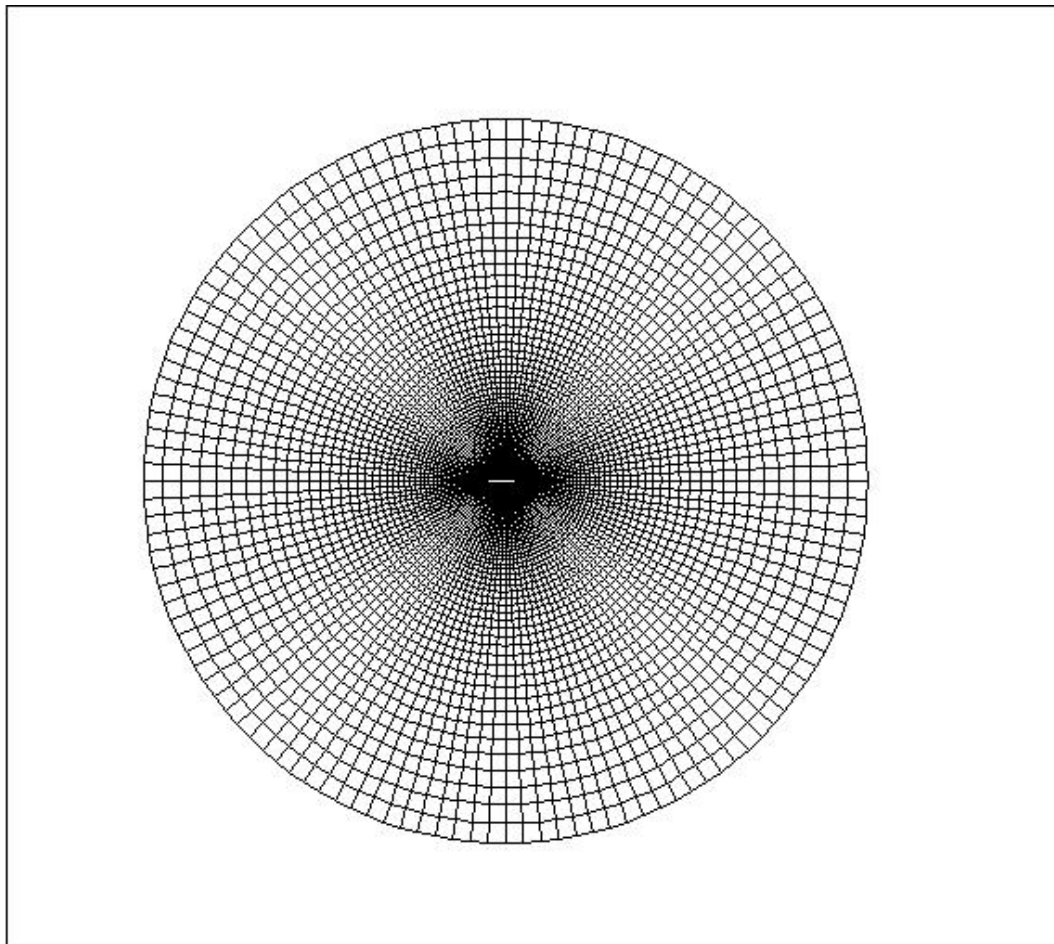


**Εικόνα 12: Τυπικό πλέγμα γύρω από αεροτομή. Με μπλε απεικονίζεται το εξωτερικό σύνορο (farfield), με πράσινο απεικονίζεται το εσωτερικό σύνορο (τοίχωμα αεροτομής) και με κόκκινο οι εσωτερικοί κόμβοι και τα κελιά του πλέγματος. (Εικόνα από <http://computation.llnl.gov/casc/Overture/henshaw/overtureFigures/node5.html>)**

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε φανερά τον διαχωρισμό του όγκου στο οποίο ρέει το ρευστό σε μικρότερα κελιά. Αυτό είναι το πλέγμα (grid).

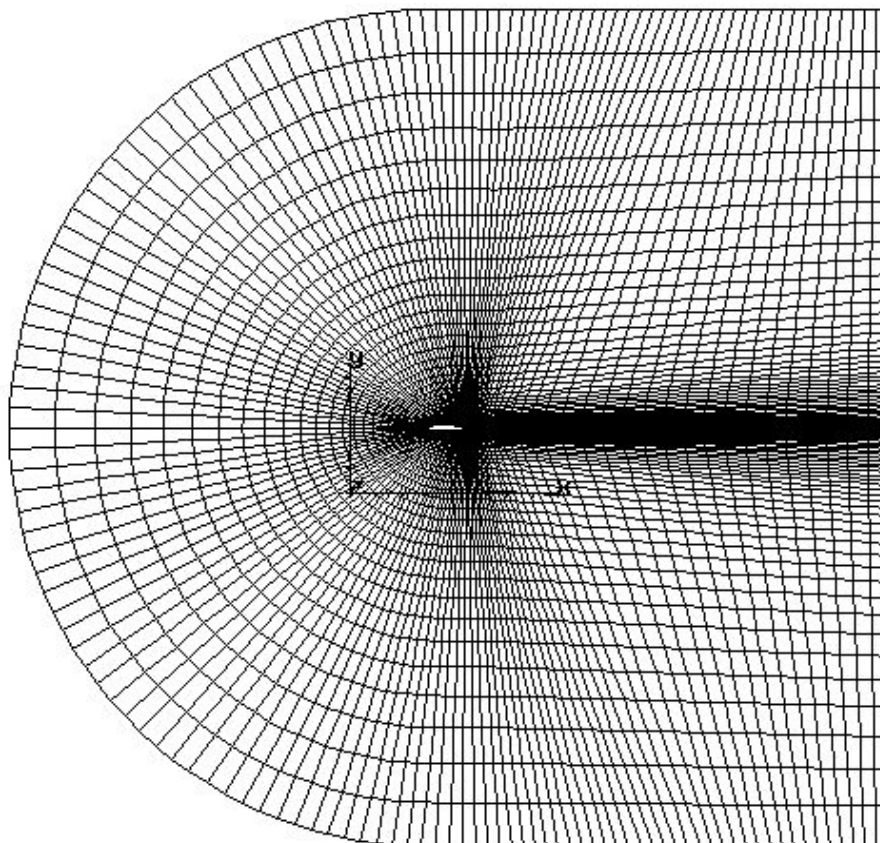
Ακόμα, η μεν πράσινη γραμμή αναπαριστά το σύνορο πάνω στο τοίχωμα της αεροτομής (solid wall), ενώ η μπλε το απομακρυσμένο σύνορο (farfield).

Τα πλέγματα ανάλογα με την μορφή τους ονομάζονται είτε πλέγματα τύπου-O (O-grid):



**Εικόνα 13: Τυπική μορφή O-type πλέγματος. (Εικόνα από <http://luke.eng.uci.edu/msadeghi/project/final/final.html>)**

ή τύπου C (C-grid):



**Εικόνα 14: Τυπική μορφή C-type πλέγματος. (Εικόνα από**

Το πιο βασικό στον σχεδιασμό πλέγματος είναι τρόπος που γίνεται ο διαχωρισμός ή η διακριτοποίηση των κελιών.

Επειδή οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα δεν είναι απλής μορφής, η επίλυση τους δεν μπορεί να γίνει μαθηματικά με απλές γραμμικές μεθόδους. Για αυτό συνήθως εκφράζουμε τις διαφορικές εξισώσεις σε διαφορετική απλουστευμένη μορφή, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε πάνω τους μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης.

Δύο είναι οι επικρατέστερες μέθοδοι διακριτοποίησης: η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, και η μέθοδος πεπερασμένων όγκων.

### 1.12.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method)

Στη μέθοδο αυτή μετατρέπουμε όλες τις εξισώσεις διαφορικής μορφής σε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών, εκφράζοντας όλες τις παραγώγους που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση ως συνδυασμό των τιμών της συνάρτησης σε διακριτές θέσεις στη γειτονιά του υπό εξέταση σημείου.

Ο χώρος δηλαδή διακριτοποιείται σε  $N$  το πλήθος αριθμητικά σημεία, το καθένα εκ των οποίων ονομάζεται αριθμητικός κόμβος. Τα σημεία αυτά ορίζονται με βάση τη συντεταγμένη τους  $x_i$  και η μεταξύ τους απόσταση είναι  $\Delta x_i$ . Ο δείκτης  $i$  ορίζει τον αριθμητικό κόμβο και παίρνει τιμές από 0 έως  $N$  ( $i=1, \dots, N$ ).

Προφανώς ισχύει:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

και:

$$\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1} \Leftrightarrow x_i = x_{i-1} + \Delta x_{i-1}$$

για του εσωτερικούς κόμβους ( $i=2, \dots, N-1$ ).

Ειδικά για  $i = 1$  είναι  $x_1 = 0$  και για  $i = N$  είναι  $x_N = L$ , όπου  $L$  το μήκος του χωρίου ολοκλήρωσης.

Έστω μία συνάρτηση  $\Phi(x)$ . Σε κάθε θέση  $x_i$  συμβολίζουμε την ποσότητα της συνάρτησης αυτής ως  $\Phi_i$ .

Εμείς ζητάμε την διακριτοποίηση της πρώτης παραγώγου  $(\frac{d\Phi}{dx})_i$  στη θέση  $x_i$ .

Η αντικατάσταση των παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη της συνάρτησης ή των παραγώγων της σε σειρά Taylor. Η συνάρτηση  $\Phi(x)$  μπορεί να αναπτυχθεί κατά Taylor γύρω από κάποιο σημείο  $x_o$  αν η συνάρτηση και όλες οι παράγωγοι της υπάρχουν και είναι ορισμένες στο σημείο αυτό.

Το ανάπτυγμα Taylor θα είναι:

$$\Phi(x) = \Phi(x_o) + (x - x_o)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x_o} + \frac{(x - x_o)^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_{x_o} + \frac{(x - x_o)^3}{3!}\left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_{x_o} + \frac{(x - x_o)^4}{4!}\left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_{x_o} + \dots$$

Οι τελείες "..." στο τέλος της παραπάνω έκφρασης σημαίνουν ότι όλοι οι όροι μεγαλύτερης τάξης (5ης τάξης και παραπάνω) παραλείπονται. Για αυτόν τον λόγο ακριβώς, η ακρίβεια με την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Taylor φτάνει μέχρι όρους 4ης τάξης, και συνεπώς έχουμε σφάλμα 5ης.

Το σφάλμα 5ης τάξης συμβολίζεται ως:

$$O(\Delta x_i^5)$$

Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε τα εξής αλλαγμένα σύμβολα:

$$x_o = x_i$$

$$x - x_o = \Delta x_i$$

$$\Phi(x_o) = \Phi_i$$

$$\Phi(x) = \Phi(x_o + \Delta x) = \Phi_{i+1}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x_o} = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i$$

τότε η προηγούμενη εξίσωση Taylor θα γραφτεί:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \Delta x_i \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{\Delta x_i^2}{2!} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \frac{\Delta x_i^3}{3!} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \frac{\Delta x_i^4}{4!} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i + O(\Delta x_i^5)$$

για σφάλμα 5ης τάξης.

Αν θελήσουμε να το γράψουμε σε σφάλμα 2ης τάξης:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \Delta x_i \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + O(\Delta x_i^2) \Leftrightarrow \Delta x_i \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \Phi_{i+1} - \Phi_i - O(\Delta x_i^2)$$

Διαιρώντας και τους δύο όρους με  $\Delta x_i$  το σφάλμα από 2ης τάξης θα διαιρεθεί με τον όρο αυτόν και θα μεγαλώσει σε 1ης τάξης:

$$\frac{O(\Delta x_i^2)}{\Delta x_i} = O(\Delta x_i)$$

Επιπλέον το πρόσημο + ή - δεν έχει έννοια όταν αναφερόμαστε σε όρους σφάλματος  $O$ . Συνήθως χρησιμοποιείται θετικό πρόσημο.

Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση θα γίνει τελικώς:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x_i} + O(\Delta x_i) \quad (12)$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι καταφέραμε να διακριτοποιήσουμε την παράγωγο στη θέση  $i$ , με μία διαφορά των τιμών στις θέσεις  $i+1$  και  $i$ , διαιρεμένη με την μεταξύ τους απόσταση.

Αυτή ονομάζεται μπροστινή διαφορά, ή *μπροστινή διακριτοποίηση*.

Επιστρέφοντας στον ορισμό της σειράς Taylor, αν αντί να ορίσουμε το επόμενο σημείο  $\Phi_{i+1}$  γύρω από το  $\Phi_i$ , ορίσουμε το προηγούμενο  $\Phi_{i-1}$ , θα γίνει:

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \Delta x_{i-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2!} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{3!} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \frac{\Delta x_{i-1}^4}{4!} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i + O(\Delta x_{i-1}^5)$$

για σφάλμα 5ης τάξης.

Αν θελήσουμε να το γράψουμε σε σφάλμα 2ης τάξης:

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \Delta x_{i-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + O(\Delta x_{i-1}^2) \Leftrightarrow \Delta x_{i-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \Phi_i - \Phi_{i-1} + O(\Delta x_{i-1}^2)$$

που διαιρώντας με  $\Delta x_{i-1}$  και αφού:

$$\frac{O(\Delta x_{i-1}^2)}{\Delta x_{i-1}} = O(\Delta x_{i-1})$$

θα γίνει:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x_{i-1}) \quad (13)$$

Αυτή είναι η έκφραση της πίσω διαφοράς ή πίσω διακριτοποίησης.

Αν στη συνέχεια προσθέσουμε κατά μέλη τις εκφράσεις μπροστινής και πίσω διακριτοποίησης, θα έχουμε:

$$2\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x_i} + \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} - (\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)\Phi_i - \Delta x_i\Phi_{i-1}}{\Delta x_i\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})$$

η οποία εν τέλει θα γίνει:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} - (\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)\Phi_i - \Delta x_i\Phi_{i-1}}{2\Delta x_i\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \quad (14)$$

Αυτή είναι η έκφραση των κεντρικών διαφορών ή της κεντρικής διακριτοποίησης.

Το επόμενο βήμα είναι να διακριτοποιήσουμε την δεύτερη παράγωγο  $\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i$  στη θέση  $x_i$ . Αυτό θα το καταφέρουμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση Taylor αλλά με σφάλμα 3ης τάξης:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \Delta x_i\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{\Delta x_i^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + O(\Delta x_i^3)$$

και

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \Delta x_{i-1}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + O(\Delta x_{i-1}^3)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με  $\Delta x_{i-1}$  και την δεύτερη με  $\Delta x_i$  και έχουμε:

$$\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} = \Delta x_{i-1}\Phi_i + \Delta x_{i-1}\Delta x_i\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \Delta x_{i-1}\frac{\Delta x_i^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \Delta x_{i-1}O(\Delta x_i^3)$$

και

$$\Delta x_i\Phi_{i-1} = \Delta x_i\Phi_i - \Delta x_i\Delta x_{i-1}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \Delta x_i\frac{\Delta x_{i-1}^2}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \Delta x_iO(\Delta x_{i-1}^3)$$

Τώρα προσθέτουμε κατά μέλη. Ο όρος της πρώτης παραγώγου  $\Delta x_i\Delta x_{i-1}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i$  διαγράφεται εντελώς. Εν τέλει μένει:

$$\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} + \Delta x_i\Phi_{i-1} = (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)\Phi_i + \frac{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) + \Delta x_{i-1}O(\Delta x_i^3) + \Delta x_iO(\Delta x_{i-1}^3)$$

από όπου προκύπτει:

$$\frac{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}{2!}\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) = \Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} + \Delta x_i\Phi_{i-1} - (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)\Phi_i - \Delta x_{i-1}O(\Delta x_i^3) - \Delta x_iO(\Delta x_{i-1}^3)$$

όπου απομονώνοντας το  $\frac{d^2\Phi}{dx^2}$ :

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i = 2!\frac{\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} - (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)\Phi_i + \Delta x_i\Phi_{i-1}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \dots$$

Ο όρος σφάλματος θα γίνει:

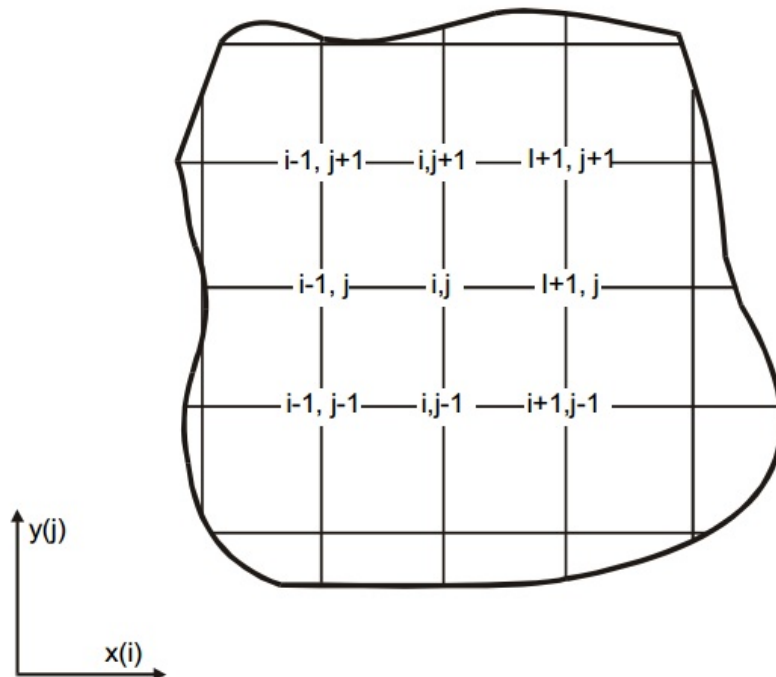
$$-2!\frac{\Delta x_{i-1}O(\Delta x_i^3)}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - 2!\frac{\Delta x_iO(\Delta x_{i-1}^3)}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}$$

που είναι όρος 4ης τάξης στον αριθμητή και 3ης τάξης στον παρανομαστή, δηλαδή είναι συνολικά όρος 1ης τάξης  $O(\Delta x_i)$ .

Άρα η δεύτερη παράγωγος διακριτοποιείται ως εξής:

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i = 2! \frac{\Delta x_{i-1}\Phi_{i+1} - (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)\Phi_i + \Delta x_i\Phi_{i-1}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + O(\Delta x_i) \quad (15)$$

Στην παρακάτω εικόνα μπορούμε να δούμε μια μορφή ενός πλέγματος το οποίο διακριτοποιείται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το συγκεκριμένο πλέγμα που βλέπουμε εδώ είναι διδιάστατο καθώς υπάρχει και ο παράγοντας  $y$  αντί για μόνο τον  $x$ .



**Εικόνα 15: Απεικόνιση κόμβων σε διδιάστατη επιφάνεια.  $i$  είναι ο δείκτης που μετρά τον κόμβο στον άξονα των  $x$  και  $j$  είναι ο αντίστοιχος δείκτης για τον άξονα των  $y$ . (Εικόνα από <http://users.ntua.gr/caridis/methodoi/keimena/chap%2011/Chapter%2011.pdf>)**

Το πλέγμα βέβαια της παραπάνω εικόνας είναι ομοιόμορφο, δηλαδή οι αποστάσεις  $\Delta x$  είναι παντού ίσες, ενώ οι τύποι που αναφέραμε εμείς παραπάνω αναφέρονται σε μη-ομοιόμορφο πλέγμα, και άρα **δεν ισχύει απαραίτητα**  $\Delta x_i = \Delta x_{i-1}$ .

Προτιμήσαμε να αναφερθούμε σε αυτήν την περίπτωση για δύο λόγους: Πρώτον γιατί είναι η γενικότερη περίπτωση. Οι εξισώσεις για την περίπτωση ομοιόμορφου πλέγματος μπορούν εξαιρετικά εύκολα να προκύψουν αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε, την ισότητα  $\Delta x_i = \Delta x_{i-1}$ .

Δεύτερον γιατί για την περίπτωση της παρούσης διπλωματικής και για τα πλέγματα γύρω από αεροτομή γενικότερα, ομοιόμορφα κατανομημένα σημεία είναι ένα αρκετά σπάνιο και δύσχηστο φαινόμενο. Συνήθως τα σημεία απέχουν μεταξύ τους με κάποια λογική (γεωμετρική, εκθετική κτλ. ανάλογα με την περίπτωση), αλλά σπάνια σε ίσες αποστάσεις.

Ένα άλλο πράγμα που παρατηρούμε για το πλέγμα της παραπάνω εικόνας είναι ότι είναι διδιάστατο, ενώ εμείς εκφράσαμε τους τύπους μονάχα στην διάσταση  $x$ .

Όλοι οι τύποι που αναφέραμε θα ισχύουν απaráλλαχτα και για τις άλλες διαστάσεις, αλλά με τα αντίστοιχα σύμβολα. Έτσι αν η διακριτοποίηση της συνάρτησης  $\Phi$  ως προς τον  $y$  γίνει με δείκτες  $j$  αντί για  $i$ , οι τρεις βασικές εξισώσεις που αναφέραμε παραπάνω ως προς την διάσταση  $x$ , θα γίνουν για την διάσταση  $y$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{i,j} &= \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y_{i,j}} + O(\Delta y_{i,j}) \\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{i,j} &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}} + O(\Delta y_{i,j-1}) \\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{i,j} &= \frac{\Delta y_{i,j-1}\Phi_{i,j+1} - (\Delta y_{i,j-1} - \Delta y_{i,j})\Phi_{i,j} - \Delta y_{i,j}\Phi_{i,j-1}}{2\Delta y_{i,j}\Delta y_{i,j-1}} + O(\Delta y_{i,j} + \Delta y_{i,j-1}) \\ \left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}\right)_{i,j} &= 2! \frac{\Delta y_{i,j-1}\Phi_{i,j+1} - (\Delta y_{i,j-1} + \Delta y_{i,j})\Phi_{i,j} + \Delta y_{i,j}\Phi_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1}\Delta y_{i,j}(\Delta y_{i,j-1} + \Delta y_{i,j})} + O(\Delta y_{i,j}) \end{aligned}$$

Ο λόγος που βάλαμε ως δείκτη  $(i,j), (i,j-1), (i,j+1)$  αντί για απλά  $(j), (j-1), (j+1)$  είναι ακριβώς επειδή έχουμε διδιάστατο πλέγμα. Ωστόσο, η ύπαρξη του δείκτη  $i$  είναι καθαρά τυπική. Η κάθε μία διεύθυνση λειτουργεί ανεξάρτητα της άλλης. Έτσι, οι παράγωγοι σε κάποια θέση  $j$  εξαρτώνται από τις γειτονικές  $j-1$  και  $j+1$ , αλλά πάντα για το ίδιο  $i$ . Το ίδιο ισχύει και για την διεύθυνση  $x$ .

### 1.12.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume Method)

Είπαμε ήδη ότι τα ρευστομηχανικά πεδία εκφράζονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes στην περίπτωση συνεκτικού ρευστού, και από τις εξισώσεις Euler, για την περίπτωση του μη-συνεκτικού. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις το πεδίο ροής εκφράζεται από σύστημα διαφορικών εξισώσεων που είναι μη-γραμμικές. Αυτή η μη-γραμμικότητα οφείλεται στη χωρική επιτάχυνση του ρευστού και αποτελεί τη βασική αιτία δυσκολίας επίλυσής τους. Έτσι οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά, και αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε σε αριθμητική επίλυση. Συγκεκριμένα, μετατρέπουμε τις εξισώσεις σε αλγεβρικές, οι οποίες όταν επιλυθούν με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή δίνουν αριθμητικά τις τιμές των ταχυτήτων ή άλλων χαρακτηριστικών μεγεθών σε διακριτές θέσεις μέσα στο πεδίο ροής. Οι αλγεβρικές αυτές εξισώσεις πρέπει να εκφράζουν ικανοποιητικά τη μερική διαφορική εξίσωση ώστε η λύση τους να αντιπροσωπεύει με προσέγγιση, όσο είναι δυνατό μεγαλύτερη, τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume Method) είναι μια ονομασία που δόθηκε σε μία τεχνική όπου η ολοκληρωτική εξίσωση του νόμου διατήρησης διακριτοποιείται απευθείας στο φυσικό χώρο.

Είναι η επικρατέστερη μέθοδος CFD σήμερα, λόγω της γενικότητάς της, της απλότητας της και της ευκολίας στην εφαρμογή της για διάφορα πλέγματα. Η Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων ή FVM βασίζεται στις μέσες τιμές κελιών (*cell-averaged values*). Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών όπου οι κύριες ποσότητες είναι οι τοπικές τιμές των συναρτήσεων πάνω στα σημεία του πλέγματος.

Μόλις ένα πλέγμα δημιουργηθεί, η FVM ταιριάζει έναν τοπικό πεπρασμένο όγκο (ή αλλιώς όγκο ελέγχου) σε κάθε σημείο του πλέγματος και εφαρμόζει τον ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης στον όγκο αυτό.

Η κύρια διαφορά της μεθόδου FVM (μέθοδος πεπερασμένων όγκου) από την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, είναι ότι στη μεν δεύτερη, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο διακριτοποιημένος χώρος αποτελείται από ένα σύνολο σημείων, στη δε πρώτη ο χώρος αποτελείται από ένα σύνολο πεπερασμένων όγκων, όπου κάθε όγκος συνδέεται με ένα σημείο του πλέγματος. Επιπλέον ενώ η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών διακριτοποιεί την διαφορική εξίσωση διατήρησης, η FVM διακριτοποιεί την ολοκληρωματική.

Επειδή η ολοκληρωματική εξίσωση διατήρησης είναι γενικότερη της διαφορικής, η FVM είναι πιο κοντά στην φυσική ενός συστήματος ροής.

Συνοψίζοντας, τα βήματα που ακολουθούνται στη μέθοδο αυτή είναι τα εξής:

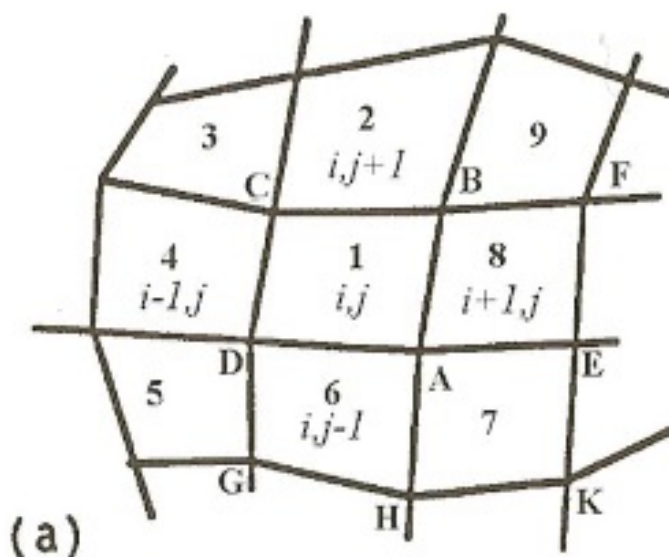
- Αρχικά χωρίζουμε το πλέγμα, το οποίο έχει προκύψει από την διακριτοποίηση του χώρου, σε μικρούς πεπερασμένους όγκους, τους όγκους ελέγχου, από τους οποίους ο καθένας συνδέεται με ένα σημείο του πλέγματος.
- Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ολοκληρωματική εξίσωση σε κάθε έναν από αυτούς τους όγκους.

Λόγω της γενικότητας της η μέθοδος αυτή ισχύει για κάθε τύπο πλέγματος, είτε είναι δομημένο είτε όχι. Επιπλέον, υπάρχουν πολλοί τρόποι να κάνουμε την αντιστοιχία μεταξύ όγκου ελέγχου και σημείου του πλέγματος. Ορισμένοι από τους πλέον συνηθισμένους τρόπους είναι οι εξής:

### 1) Κεντρο-κυψελική προσέγγιση (Cell-centered approach).

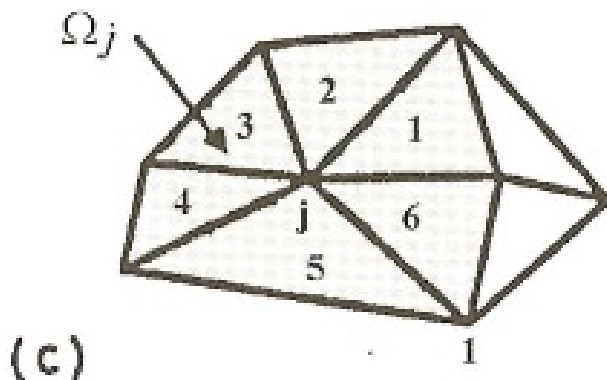
Στην αντιστοιχία αυτή, οι γραμμές του πλέγματος καθορίζουν τα σύνορα των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κελί ξεχωριστά αποτελεί έναν διαφορετικό όγκο ελέγχου, και άρα οι άγνωστες φυσικές ποσότητες (πίεση, ταχύτητα κτλ.) του κάθε πεπερασμένου όγκου, βρίσκονται στα κέντρα των κελιών (cell-centered).

Οι εικόνες (a) και (c) δείχνουν την περίπτωση cell-centered διακριτοποίησης για την περίπτωση δομημένου και μη-δομημένου πλέγματος αντίστοιχα.





**Εικόνα 16: Cell-centered διακριτοποίηση για την περίπτωση δομημένου (structured) πλέγματος. (Εικόνα από το βιβλίο "Numerical computation of internal & external flows" (βλέπε References [1]) σελ. 210)**

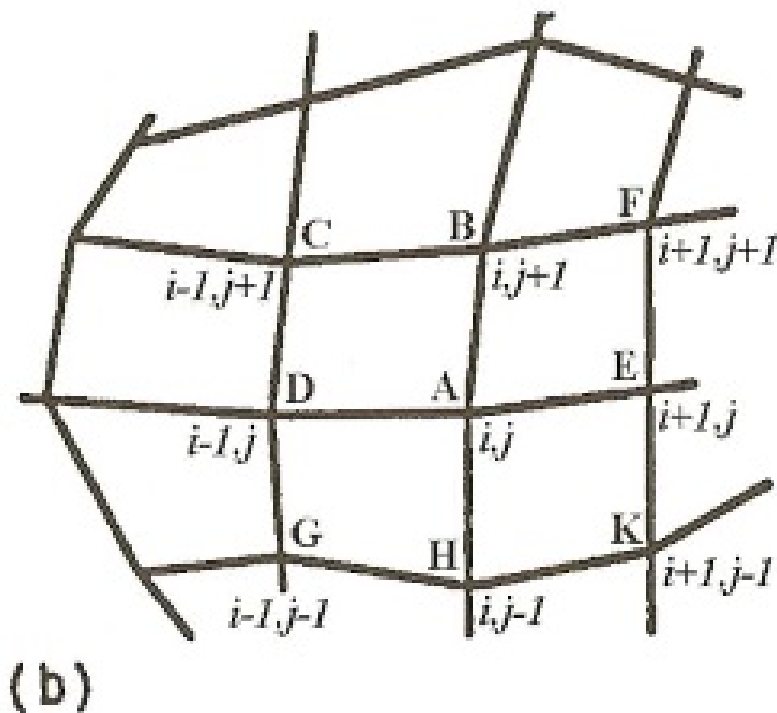


**Εικόνα 17: Cell-centered διακριτοποίηση για την περίπτωση μη-δομημένου (unstructured) πλέγματος. (Εικόνα από το βιβλίο "Numerical computation of internal & external flows" (βλέπε References [1]) σελ. 210)**

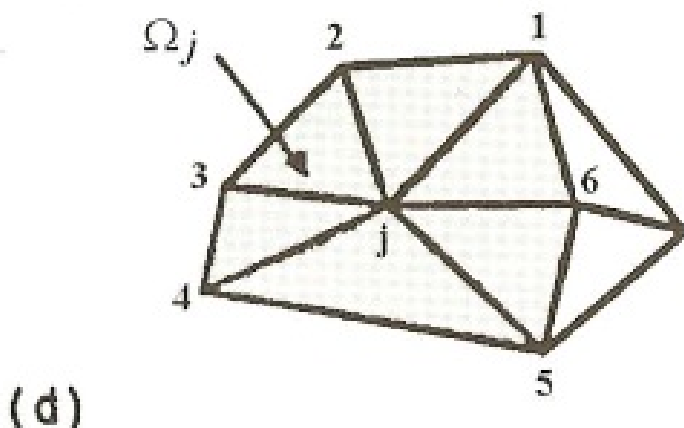
**2) Κεντρο-κομβική προσέγγιση (Cell-vertex approach).**

Στην αντιστοιχία αυτή οι άγνωστες ποσότητες/μεταβλητές βρίσκονται στις γωνίες των κελιών του πλέγματος, ή αλλιώς στα σημεία που ορίζουν το πλέγμα. Με την μέθοδο αυτή ο όγκος ελέγχου μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους.

Οι εικόνες (b) και (d) δείχνουν την περίπτωση cell-vertex διακριτοποίησης για την περίπτωση δομημένου και μη-δομημένου πλέγματος αντίστοιχα.



**Εικόνα 18: Cell-vertex διακριτοποίηση για την περίπτωση δομημένου (structured) πλέγματος. (Εικόνα από το βιβλίο "Numerical computation of internal & external flows" (βλέπε References [1]) σελ. 210)**



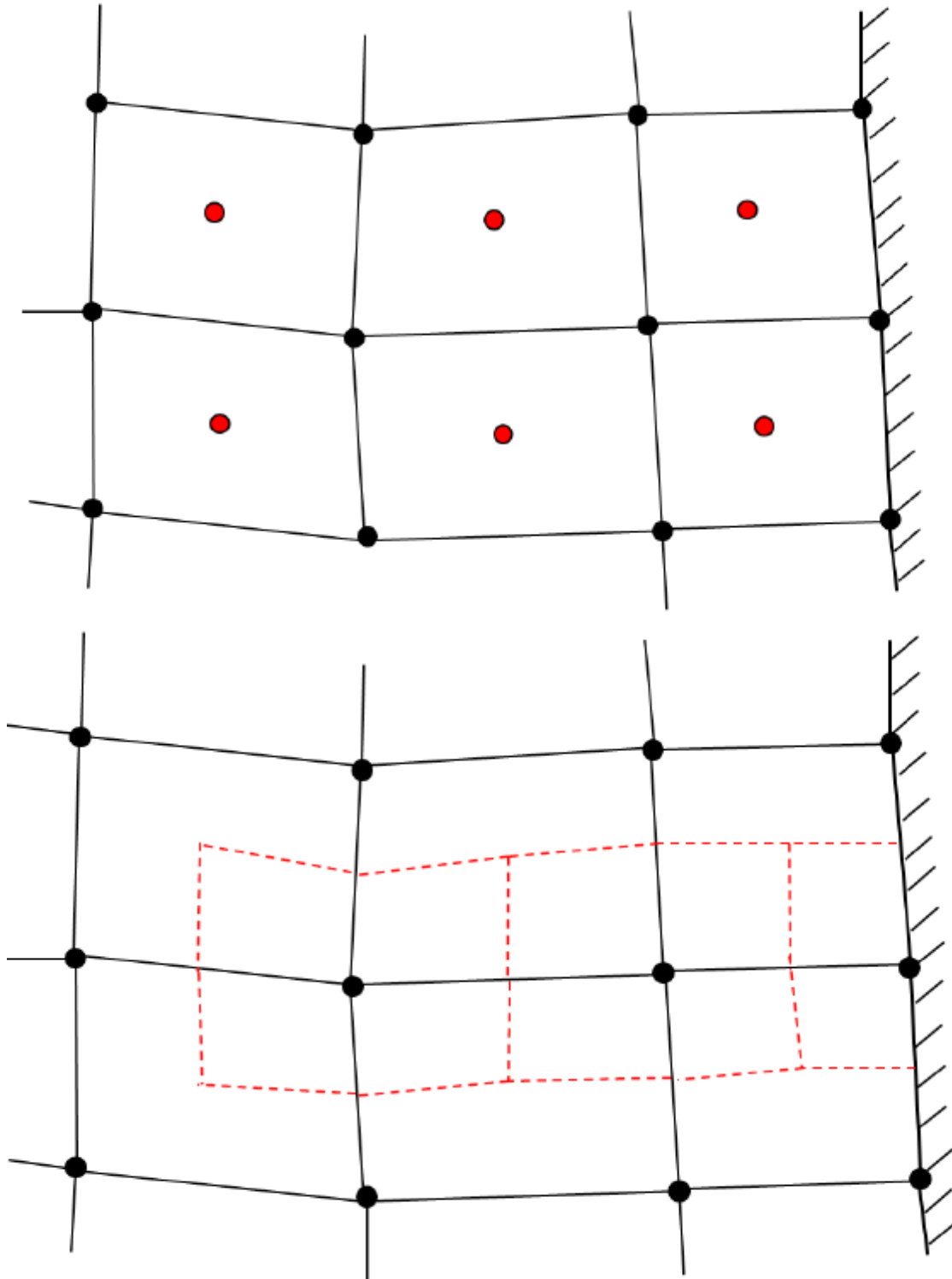
**Εικόνα 19: Cell-vertex διακριτοποίηση για την περίπτωση μη-δομημένου (unstructured) πλέγματος. (Εικόνα από το βιβλίο "Numerical computation of internal & external flows" (βλέπε References [1]) σελ. 210)**

Για τον ορισμό του όγκου ελέγχου, μία προφανής λύση θα ήταν η επιλογή των, γύρω από ένα σημείο, επιφανειών του πλέγματος.

Για παράδειγμα, για το σημείο A του σχήματος (b) που έχει συντεταγμένες (i,j) θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ως σύνορο του όγκου ελέγχου το πολύγωνο BCDGHEFB.

Υπάρχουν ωστόσο και άλλες επιλογές. Η μέθοδος McDonald π.χ. επιλεγεί ένα εξάγωνο από μόνο τα σημεία BDGHEFB.

Ένας από τους πιο συχνούς τρόπους επιλογής όγκου ελέγχου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**Εικόνα 20: Cell-vertex διακριτοποίηση για την περίπτωση δομημένου (structured) πλέγματος. Με διακεκομμένη κόκκινη βλέπουμε το σύνορο του όγκου ελέγχου για τους αντίστοιχους κόμβους. (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])**

Ο τρόπος αυτός εντοπίζει το σημείο που βρίσκεται στη μέση ακριβώς ανάμεσα σε δύο συνεχόμενα σημεία του πλέγματος κατά την  $x$  ή  $y$  κατεύθυνση. Στην εικόνα, τα σημεία του πλέγματος, δηλαδή οι κόμβοι, είναι οι **μαύρες** τελείες. Γύρω από κάθε κόμβο, υπάρχουν τέσσερα γειτονικά κελιά του πλέγματος. Στη μέση των κελιών αυτών, ορίζεται από ένα σημείο, που στην εικόνα εμφανίζεται χρώματος **κόκκινου**. Συνεπώς, γύρω από κάθε κόμβο και προς διαγώνιες διευθύνσεις, θα ορίζονται

τέσσερα σημεία, στη μέση των τεσσάρων αντίστοιχων γειτονικών κελιών. Τα σημεία αυτά που βρίσκονται στη μέση των κελιών δεν αποτελούν προφανώς σημεία του πλέγματος ωστόσο ορίζονται ακριβώς επειδή από αυτά θα προκύψει ο όγκος ελέγχου.

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα, φέρνοντας από τα τέσσερα μέσα σημεία παράλληλες ως προς τις κατευθύνσεις x και y (παράλληλες κόκκινες γραμμές), προκύπτει ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου κορυφές είναι τα σημεία αυτά. Αυτό το παραλληλόγραμμο αποτελεί τον όγκο ελέγχου του σημείου του πλέγματος για το οποίο αναφερόμαστε.

Αν κάνουμε το ίδιο για όλα τα σημεία του πλέγματος, τότε θα έχουμε χωρίσει όλο το πλέγμα σε ένα σύνολο όγκων ελέγχου που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους. Οι όγκοι ελέγχου έχουν περίπου το μέγεθος των κελιών του πλέγματος (ακριβώς ίδιο μέγεθος αν το πλέγμα είναι ομοιόμορφο), ωστόσο **δεν** ταυτίζονται με τα κελιά του πλέγματος, όπως στην περίπτωση του cell-centered approach.

Για την ακρίβεια, στην μέθοδο αυτή κάθε όγκος ελέγχου απαρτίζεται από το  $\frac{1}{4}$  του όγκου των τεσσάρων γειτονικών κελιών, για αυτό και το μέγεθος του είναι περίπου αυτό του ενός κελιού.

Ορίζοντας ως  $\Omega_j$  τον εκάστοτε όγκο ελέγχου οφείλουμε να διατυπώσουμε ορισμένους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε μέθοδο, είτε αυτή είναι cell-centered είτε cell-vertex:

**i)** Το άθροισμα των όγκων  $\Omega_j$  πρέπει να καλύπτει ολόκληρο των όγκο αναφοράς  $\Omega$  γύρω από την αεροτομή.

**ii)** Η επικάλυψη διαφορετικών όγκων ελέγχου, δηλαδή η περίπτωση δύο ή περισσότεροι όγκοι ελέγχου να καλύπτουν την ίδια περιοχή επιτρέπεται μεν, αλλά υπό την προϋπόθεση ότι η επιφάνεια  $\Gamma_j$  κάθε όγκου εμφανίζεται σαν τμήμα ζυγού αριθμού διαφορετικών περιοχών. Δηλαδή, όγκοι μπορούν να επικαλυφθούν αλλά μόνο αν κάθε επιφάνεια είναι κοινή για άρτιο αριθμό περιοχών.

**iii)** Ροές επάνω στην επιφάνεια ενός κελιού υπολογίζονται ανεξάρτητα από το ίδιο το κελί.

Η ολοκληρωματική εξίσωση διατήρησης, εφαρμόζεται σε κάθε ξεχωριστό όγκο ελέγχου  $\Omega_j$  ή όπως αλλιώς γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega + \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

Για να μετατρέψουμε την παραπάνω εξίσωση σε διακριτοποιημένη μορφή, πρέπει να ορίσουμε τις λεγόμενες **cell-averaged** μεταβλητές. Αυτές είναι:

$$\bar{U}_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j \Leftrightarrow \bar{U}_j \Omega_j = \int_{\Omega_j} U d\Omega_j$$

$$\bar{Q}_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} Q d\Omega_j \Leftrightarrow \bar{Q}_j \Omega_j = \int_{\Omega_j} Q d\Omega_j$$

Επιπλέον ο επιφανειακός όρος  $\oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S}$  μπορεί να αντικατασταθεί από το άθροισμα όλων των επιφανειών που συνδέουν δύο σημεία του πλέγματος. Οι επιφάνειες αυτές ονομάζονται faces.

Με βάση τα όσα είπαμε, η εξίσωση διατήρησης θα γίνει:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) + \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} = \bar{Q}_j \Omega_j \quad (16)$$

Με βάση την εικόνα (a) παραπάνω, ο όρος  $U_j$  αποτελεί τον όρο  $U_{i,j}$ , ο όγκος  $\Omega_j$  την περιοχή ABCDA, ενώ οι επιφανειακοί όροι της ροής  $\vec{F}$  αναφέρονται στα τμήματα AB,BC,CD,DA τα οποία είναι και τα faces.

Η παραπάνω εξίσωση έχει ορισμένα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διαχωρίζουν την μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FVM) από αυτήν των πεπερασμένων διαφορών:

1) Οι συντεταγμένες του σημείου J, δηλαδή η ακριβής θέση της μεταβλητής  $U_j$  μέσα στον όγκο ελέγχου  $\Omega_j$  δεν είναι συγκεκριμένες. Δηλαδή ο  $U_j$  δεν βρίσκεται απαραίτητα πάνω σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο μέσα στο όγκο ελέγχου αλλά αποτελεί μία μέση τιμή της μεταβλητής  $U$  πάνω σε όλο τον όγκο  $\Omega_j$ . Ο πρώτος όρος της εξίσωσης  $\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j)$  αναφέρεται στην μεταβολή της μέσης μεταβλητής στη μονάδα του χρόνου για το συγκεκριμένο πεπερασμένο όγκο.

2) Οι συντεταγμένες του πλέγματος εμφανίζονται μόνο στον προσδιορισμό του όγκου ελέγχου. Για αυτό και στην εικόνα (a) για τον προσδιορισμό του όγκου ελέγχου ABCD, χρειαστήκαμε μόνο τις μεταβλητές A,B,C,D. Φυσικά, το ότι ένας όγκος ελέγχου ορίζεται από τις μεταβλητές, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι μεταβλητές αυτές αποτελούν πάντα σημεία του συνόρου του όγκου ελέγχου. Είδαμε σε πολλές περιπτώσεις, όπως στην cell-vertex με τα μέσα σημεία, ότι τα σημεία του πλέγματος δεν αποτέλεσαν σημεία πάνω στο σύνορο του όγκου ελέγχου. Ωστόσο τα μέσα σημεία που αποτελούν μέρος της επιφάνειας, προσδιορίστηκαν από τα σημεία του πλέγματος με βάση τις μέσες αποστάσεις, οπότε και πάλι έμμεσα οι συντεταγμένες του πλέγματος ήταν αυτές που όρισαν τον όγκο ελέγχου.

3) Σε περίπτωση απουσίας όρων πηγής Q, ο νόμος διατήρησης θα μετατραπεί σε:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) + \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} = 0$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή της ποσότητας  $U$  στη μονάδα του χρόνου  $\Delta t$ , είναι ίση με το άθροισμα των ροών που μεταβαίνουν από τον ένα όγκο ελέγχου στον άλλο γειτονικό του.

Για μόνιμες ροές, όπου οι όροι του χρόνου δεν υπάρχουν, η παραπάνω εξίσωση θα γίνει:

$$\sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} = 0$$

που είναι η ισορροπία των ροών που εισέρχονται και εξέρχονται από έναν όγκο ελέγχου.

Σε γειτονικούς όγκους ελέγχου, όπως τους ABCD και AEFB της εικόνας (a), η ροή που διαπερνά την επιφάνεια AB συνεισφέρει και στους δύο όγκους ελέγχου, αλλά με αντίθετα πρόσημα, καθώς όταν εισέρχεται στον έναν όγκο θα εξέρχεται από τον γειτονικό του.

4) Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων επιτρέπει μια εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών, όπως πάνω στο τοίχωμα (solid walls) όπου ορισμένες κάθετες

συνιστώσες είναι μηδενικές. Για παράδειγμα, στην εξίσωση διατήρησης της μάζας όπου είναι:

$$\vec{F}_C = \rho \vec{v}$$

η συνοριακή συνθήκη λέει:

$$\vec{F}_C \cdot d\vec{S} = 0$$

που σημαίνει ότι η συνεισφορά του  $\vec{F}$  θα εξαφανιστεί από τις εξισώσεις αυτές.

Έστω η ολοκληρωματική εξίσωση διατήρησης:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega + \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

όπου θυμίζουμε:

$$\oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της διακριτοποίησης του χρόνου στην παράγωγο  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega$ , για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $n$ . Η διακριτοποίηση στο χρόνο γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τύπο όπως και η διακριτοποίηση σε κάποια διάσταση  $x$ , που είδαμε στην μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Το αποτέλεσμα θα είναι;

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega|^n = \frac{\int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1} - \int_{\Omega_j} U d\Omega|^n}{dt}$$

όπου  $n$  ο δείκτης του χρόνου, και

$$dt = t^{n+1} - t^n.$$

Συνεπώς η εξίσωση διατήρησης θα γίνει την χρονική στιγμή  $n$ :

$$\frac{\int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1} - \int_{\Omega_j} U d\Omega|^n}{dt} + \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

Πολλαπλασιάζουμε με  $dt$  την εξίσωση, και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε στις χρονικές στιγμές στις οποίες βρισκόμαστε, δηλαδή μεταξύ  $n$  και  $n+1$ :

$$\int_n^{n+1} dt$$

Οι όροι

$$\int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1}$$

και

$$\int_{\Omega_j} U d\Omega|^n$$

αποτελούν σταθερές ποσότητες. Είναι οι τιμές του ολοκληρώματος  $\int_{\Omega_j} U d\Omega$  στις χρονικές στιγμές  $n+1$  και  $n$  αντίστοιχα. Συνεπώς, δεν επηρεάζονται από το ολοκλήρωμα  $\int_n^{n+1} dt$ , αλλά ξαναπαίρνουν τις ίδιες τιμές.

Συνολικά ο νόμος διατήρησης θα γίνει:

$$\int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1} - \int_{\Omega_j} U d\Omega|^n + \sum_{faces} \int_n^{n+1} (\vec{F} \cdot \Delta\vec{S})_f dt = \int_n^{n+1} dt \int_{\Omega_j} Q d\Omega \Leftrightarrow$$

$$\int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1} = \int_{\Omega_j} U d\Omega|^{n+1} - \sum_{faces} \int_n^{n+1} (\vec{F} \cdot \Delta \vec{S})_f dt + \int_n^{n+1} dt \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

Αντικαθιστούμε με τις γνωστές cell-averaged μεταβλητές της στιγμής  $n\Delta t$ :

$$\bar{U}_j^n = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j|^{n+1}$$

$$\bar{Q}_j^n = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} Q d\Omega_j|^{n+1}$$

και παράλληλα ορίζουμε τις **cell-and time-averaged** πηγές  $\bar{Q}_j^*$  και την ροή σε κάθε επιφάνεια  $\vec{F}^* \cdot \Delta \vec{S}$ , ως εξής:

$$\vec{F}^* \cdot \Delta \vec{S} = \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} dt$$

$$\bar{Q}_j^* = \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} \bar{Q}_j dt$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διατήρησης που καταλήξαμε:

$$[\bar{U}_j \Omega_j]^{n+1} = [\bar{U}_j \Omega_j]^n - \Delta t \sum_{faces} \vec{F}^* \cdot \Delta \vec{S} + \Delta t \bar{Q}_j^* \Omega_j$$

Αυτή η σχέση έχει πολύ μεγάλη σημασία, καθώς αποτελεί την εξέλιξη στον χρόνο της μεταβλητής  $\bar{U}_j^n$  του κελιού  $j$ .

Προκειμένου να ικανοποιηθεί η διακριτοποιημένη εξίσωση διατήρησης, η προσέγγιση της τιμής της ροής  $\vec{F}$  σε κάποιο δεδομένο face ενός κελιού, πρέπει να γίνεται ανεξάρτητα του κελιού αυτού.

Υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος να γραφτεί η διακριτοποιημένη εξίσωση διατήρησης. Ξεκινώντας από τον γενικό τύπο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega + \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

και αντικαθιστώντας:

$$\oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S}$$

καθώς και

$$\bar{U}_j^n = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j|^{n+1}$$

καταλήγουμε στην εξής εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{U}_j^n \Omega_j] = - \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} + \int_{\Omega_j} Q d\Omega$$

Το δεξί μέλος μπορεί να συμβολιστεί ως εξής:

$$- \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} + \int_{\Omega_j} Q d\Omega = -R_j$$

όπου ο όρος  $-R_j$  ονομάζεται *υπόλοιπο (residual)* και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{U}_j^n \Omega_j] = -R_j.$$

## 1.13 Προσέγγιση των Μεταβλητών στα Σύνορα των Κελιών

Στην περίπτωση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων (FVM) είδαμε δύο περιπτώσεις διαχωρισμού των όγκων ελέγχου, την περίπτωση cell-centered και την περίπτωση cell-vertex.

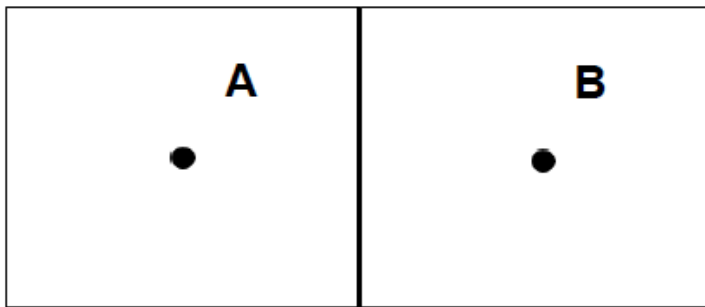
Στην περίπτωση των cell-centered, οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών είναι γνωστές στα κέντρα των κελιών. Σημαντική ωστόσο είναι η εξεύρεση και των τιμών στα σύνορα των κελιών, που για την περίπτωση cell-centered ταυτίζονται με τα σύνορα των όγκων ελέγχου.

Ας θυμηθούμε την διαφορική έκφραση του νόμου διατήρησης:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S$$

Όπου στην γενικότερη περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση των εξισώσεων Navier Stokes, τα μεγέθη  $U, \vec{F}, Q_V, \vec{Q}_S$  θα παίρνουν τις τιμές όπως τις αναφέραμε στο προηγούμενο σχετικό κεφάλαιο (Βλέπε Κεφ. "Οι εξισώσεις Navier Stokes"). Σκοπός είναι να υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών του πίνακα  $U$  στα σύνορα, και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι παροχές. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανακατασκευή των μεταβλητών (reconstruction).

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο γειτονικά κελιά και τα κέντρα τους, στα οποία και υπολογίζονται οι μεταβλητές σύμφωνα με την έκφραση cell-centered της μεθόδου πεπερασμένων όγκων. Ανάμεσα τους βρίσκεται η επιφάνεια του συνόρου που τα χωρίζει, η διεπιφάνεια, πάνω στην οποία θα εφαρμόσουμε την ανακατασκευή των μεταβλητών.



**Εικόνα 21: Δύο γειτονικά κελιά με κέντρα A και B. Τα δύο κελιά χωρίζονται από την διεπιφάνεια. (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])**

Οι νόμοι διατήρησης γράφονται και για τα δύο κελιά, και η διεπιφάνεια συμμετέχει και στα δύο.

Σε περίπτωση που η κατανομή των μεταβλητών είναι ομαλή από το κέντρο του κελιού A στο κέντρο του κελιού B, τότε είναι προφανές ότι η τιμή της συνοριακής διεπιφάνειας είναι η μέση τιμή των τιμών των δύο κέντρων. Τότε έχουμε μία λεία λύση.



Αυτό ωστόσο δεν συμβαίνει πάντοτε. Συχνά συναντάμε ασυνέχειες στη λύση, οπότε είναι λάθος να δεχτούμε την μέση τιμή.

Η μόνη διάσταση που εμπλέκεται εδώ είναι το μήκος που συνδέει τα κέντρα των κελιών A και B, δηλαδή το διάνυσμα που είναι κάθετο στην διεπιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση διατήρησης θα πρέπει να εκφραστεί ως προς μία διάσταση. Ορίζουμε την διάσταση αυτή ως  $x$ , και η εξίσωση διατήρησης θα γίνει:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(U)}{\partial x} = Q$$

Ο όρος  $\vec{F}$  γράφτηκε ως  $\vec{F}(U)$  επειδή οι μεταβλητές που εμπλέκονται στον όρο  $U$ , υπάρχουν και μέσα στην ροή  $\vec{F}$ , οπότε η ροή αποτελεί συνάρτηση των μεταβλητών. Στη συνέχεια θα γίνει:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = Q$$

Ο όρος  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial U}$  είναι μία συνάρτηση των μεταβλητών  $U$ , συνεπώς μπορεί να συμβολιστεί ως  $A(U)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = Q$$

Οι μεταβλητές  $U$  εξαρτώνται τόσο από τη θέση, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση, από την διάσταση  $x$ , όσο και από τη χρονική στιγμή  $t$ . Έτσι η  $U$  αποτελεί μία συνάρτηση και των δύο αυτών μεταβλητών  $U(x,t)$ .

Ομοίως, και η συνάρτηση  $A(U)$  θα εξαρτάται από τις δύο αυτές μεταβλητές  $A(x,t)$ .

Στη συνέχεια γράφουμε τον πίνακα  $A$  στην διαγωνοποιημένη του μορφή

$$A = R\Lambda R^{-1}$$

όπου  $R$  είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $A$  και  $\Lambda$  είναι ένας διαγώνιος με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του  $A$ .

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση διατήρησης με  $R^{-1}$ :

$$R^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + R^{-1} R \Lambda R^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = R^{-1} Q$$

Συμβολίζουμε το γινόμενο  $R^{-1}U = W$  και έχουμε:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = R^{-1} Q$$

Αυτή η τελευταία μορφή είναι ιδιαίτερης σημασίας καθώς εκφράζει τις εξισώσεις Navier-Stokes ή Euler σε μία **απεμπλεγμένη** μορφή, δηλαδή κάθε μία από τις μεταβλητές, όπως αυτές ορίστηκαν στον πίνακα  $U$ , δε θα εξαρτάται από τις υπόλοιπες.

Η απεμπλεγμένη μορφή των εξισώσεων έχει το χαρακτηριστικό ότι επιλύεται εύκολα, με απλή επίλυση διαφορικής εξίσωσης. Αυτό γιατί κάθε μεταβλητή εμφανίζεται μόνη της και δεν εξαρτάται από τις υπόλοιπες.

Δεν θα επεκταθούμε στο να γράψουμε αναλυτικά τις εξισώσεις της μορφής αυτής, καθώς αυτό θα απαιτούσε ιδιαίτερη ανάλυση, που ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής.

Είναι, ωστόσο, σημαντικό να εξηγήσουμε πως μία απλή μονοδιάστατη εξίσωση μίας μεταβλητής ορίζεται στο τμήμα της διεπιφάνειας των κελιών.

Για να το κατορθώσουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = Q$$

την οποία και θα γράψουμε σε μία μάλλον απλουστευμένη μορφή. Συγκεκριμένα από τις μεταβλητές  $U$  θα κρατήσουμε μονάχα την ταχύτητα  $u$  με κατεύθυνση ως προς το  $x$ . Επιπλέον, θα μετατρέψουμε τον πίνακα  $A(U)$  σε μία σταθερά  $\alpha$  και θα θεωρήσουμε μηδενικές πηγές  $Q$ .

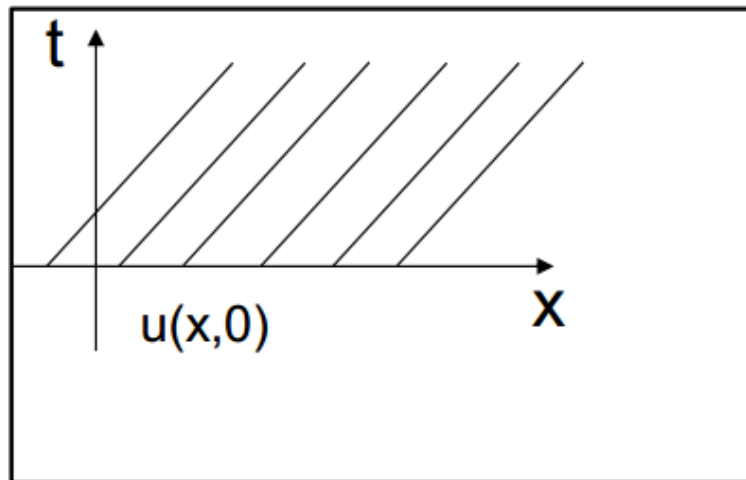
Η εξίσωση θα αποκτήσει την μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης μας οδηγεί στην συνάρτηση:

$$u(x, t) = u_0(x - \alpha t)$$

Η σχέση  $(x - \alpha t)$  μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα  $x$ - $t$ . Για κάθε σταθερή τιμή:  $(x - \alpha t) = const$ , θα έχουμε μία ευθεία, που απεικονίζεται ως εξής:

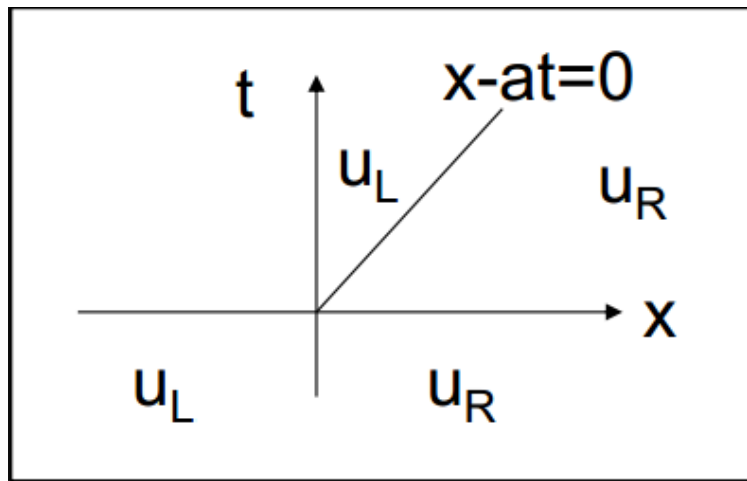


**Εικόνα 22: Καμπύλη που περιγράφει την σχέση μεταξύ  $t$  και  $x$  για κάποιο σταθερό  $u$ . Κάθε μία από τις ευθείες αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του  $u$ . (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])**

Στη συνέχεια πρέπει να ορίσουμε πού ακριβώς θα βρίσκεται η ασυνέχεια, δηλαδή ποια από όλες τις ευθείες είναι αυτή της ασυνέχειας. Συμβατικά, έχει καθιερωθεί η εξίσωση ασυνέχειας να είναι αυτή όπου η σταθερά  $const = 0$ , δηλαδή:

$$x - \alpha t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\alpha} x$$

Η χαρακτηριστική αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, και είναι η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων,  $(x=0, t=0)$  και που έχει κλίση  $1/\alpha$ .



**Εικόνα 23:** Η καμπύλη  $x - at = 0$  περιγράφει την διάδοση της ασυνέχειας ανάμεσα σε δύο γειτονικά κελιά L (Left) και R (Right). (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])

Η ασυνέχεια εκφράζει την τιμή της ποσότητας  $U$  (ή της ταχύτητας  $u$  στο παράδειγμα που εξετάζουμε) για τις διάφορες θέσεις  $x$  της απόστασης μεταξύ του αριστερά ως προς την διεπιφάνεια κελιού A και του δεξιά ως προς την διεπιφάνεια κελιού B.

Η μεταβλητή  $u$  από το κελί A στο κελί B παρουσιάζει ένα άλμα στην τιμή της, δηλαδή την ασυνέχεια, η οποία και με το πέρασμα του χρόνου διαδίδεται με συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Στο παράδειγμα μας, αν η κλίση της ευθείας είναι θετική (οπότε η χαρακτηριστική θα είναι όπως σχεδιάστηκε στο σχήμα), το κύμα της ασυνέχειας διαδίδεται από το αριστερό κελί A (το *left* ή L) στο δεξιό κελί B (το *right* ή R), καθώς αυξάνεται ο χρόνος  $t$ .

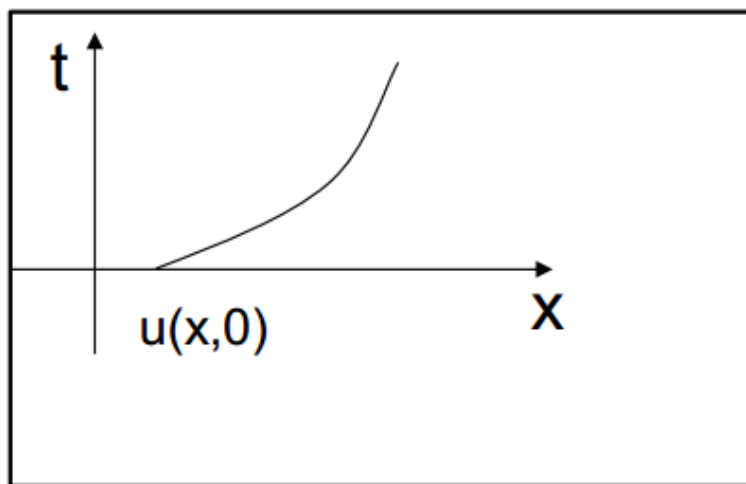
Αριστερά της χαρακτηριστικής ασυνέχειας κυριαρχεί η τιμή της ποσότητας της μεταβλητής  $u$  του αριστερού κελιού A, που συμβολίζεται με  $u_L$ , ενώ δεξιά της χαρακτηριστικής ασυνέχειας κυριαρχεί η τιμή της ποσότητας της μεταβλητής  $u$  του δεξιού κελιού B, που συμβολίζεται με  $u_R$

Συνεπώς θα ισχύει:

$$x - at < 0 \Rightarrow u = u_L$$

$$x - at > 0 \Rightarrow u = u_R$$

Η περίπτωση που εξετάσαμε θεώρησε κλίση  $\alpha$  σταθερή, για αυτό και η εξίσωση ασυνέχειας ήταν μία ευθεία. Προφανώς, θα μπορούσε να ήταν και  $\alpha(x,t)$  οπότε και μία τυπική χαρακτηριστική θα ήταν μία οποιαδήποτε καμπύλη:

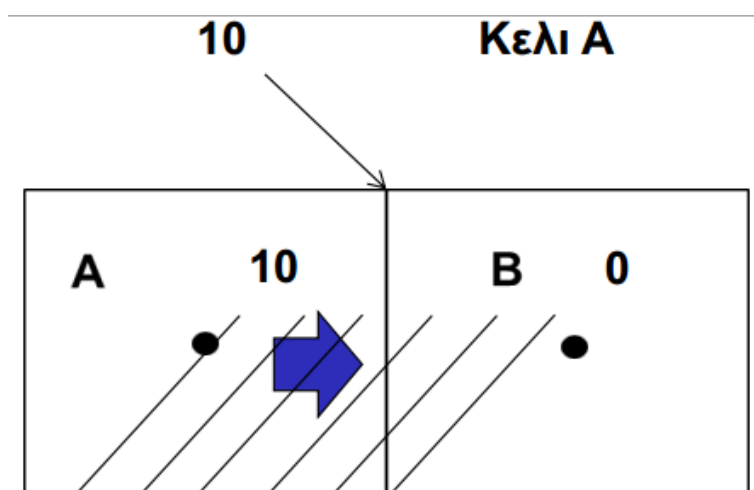


**Εικόνα 24:** Καμπύλη που περιγράφει την σχέση μεταξύ  $t$  και  $x$  για κάποιο σταθερό  $u$ . Η σχέση παραμένει η  $x - at = const$ , ωστόσο στην περίπτωση αυτή ο όρος  $a$  δεν είναι σταθερός, για αυτό και το τελικό διάγραμμα δεν προέκυψε ευθεία. (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])

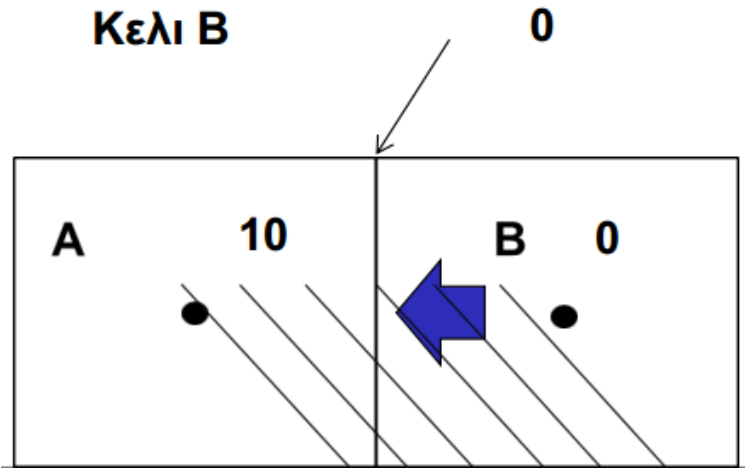
Πάντως ο λόγος που εστίασαμε σε απλοποιημένα παραδείγματα  $\alpha$  και όχι στα αντίστοιχα μητρώα  $A(U)$ , που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών  $U$ , δικαιολογείται από την χρήση της απεμπλεγμένης μορφής της εξίσωσης διατήρησης.

Στην μορφή αυτή, τη θέση του πολύπλοκου μητρώου  $A(U)$  την παίρνει ο πίνακας  $\Lambda$  των ιδιοτιμών. Ο πίνακας είναι μοναδιαίος και κάθε ιδιοτιμή αναφέρεται σε μία μεταβλητή ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Αυτό απλοποιεί το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε, το οποίο και αποτελείται από ένα σύνολο εξισώσεων σαν και αυτήν που εξετάσαμε, με μία μεταβλητή (όπως η  $u$ ) και μία συγκεκριμένη κλίση (όπως η  $\alpha$ ). Προφανώς, κάθε μία μεταβλητή θα έχει διαφορετική τιμή της  $\alpha$ , που σημαίνει ότι η ασυνέχεια δεν ισχύει για όλες τις μεταβλητές ομοίως, αλλά εκδηλώνεται διαφορετικά σε κάθε μία εξ αυτών.

Ανάλογα με το αν το κύμα κρούσης είναι με κατεύθυνση προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, θα έχουμε μεταξύ των δύο κελιών τα δύο παρακάτω σχήματα:



**Εικόνα 25:** Κύμα κρούσης με κατεύθυνση προς τα δεξιά (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10]).



**Εικόνα 26: Κύμα κρούσης με κατεύθυνση προς τα αριστερά. (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])**

Στα παραπάνω σχήματα θεωρήσαμε ότι οι μεταβλητές  $u_L$  και  $u_R$  παραμένουν αμετάβλητες αριστερά και δεξιά της ασυνέχειας αντίστοιχα. Για αυτό και στην θέση πάνω στο face που βρίσκεται αριστερά της ασυνέχειας (πρώτο από τα δύο ανωτέρω σχήματα), οι μεταβλητές έχουν την τιμή 10 όσο και στο κέντρο του αριστερού κελιού. Ομοίως στο δεύτερο σχήμα, το face βρίσκεται στα δεξιά και έχει ίδια τιμή με το δεξί κελί, δηλαδή 0.

Αυτό όμως δεν είναι ιδανικό. Αν οι τιμές είναι γνωστές στα κέντρα του κελιού, τότε προκειμένου να υπολογιστούν οι μεταβλητές στο face θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν και η απόσταση του face από το κέντρο των κελιών. Η μέθοδος της μέσης τιμής, λαμβάνει υπόψιν την απόσταση αυτή, ωστόσο όπως ήδη ειπώθηκε, μας είναι άχρηστη για την περίπτωση που έχουμε ασυνέχεια.

Το ιδανικό είναι σε κάθε πλευρά της ασυνέχειας να λαμβάνεται υπόψιν η απόσταση από το κέντρο του αντίστοιχου κελιού. Αυτό πραγματοποιείται με την μέθοδο της ανακατασκευής κελιών (reconstruction). Στην μέθοδο αυτή πρώτα υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών και στη συνέχεια οι παροχές.

Εδώ οι τιμές των πινάκων  $U_L$  και  $U_R$  πάνω στο face, αριστερά και δεξιά της ασυνέχειας αντίστοιχα, δίνονται από τους εξής τύπους:

$$U_L = U_A + \Psi_A(\vec{\nabla}U_A \cdot \vec{r}_L)$$

$$U_R = U_B - \Psi_B(\vec{\nabla}U_B \cdot \vec{r}_R)$$

όπου:

- $U_L$  και  $U_R$  οι τιμές των μεταβλητών  $U$  πάνω στο face αριστερά και δεξιά της ασυνέχειας αντίστοιχα.

- $U_A$  και  $U_B$  οι τιμές των μεταβλητών  $U$  στα κέντρα του αριστερά A και δεξιά B κελιού.

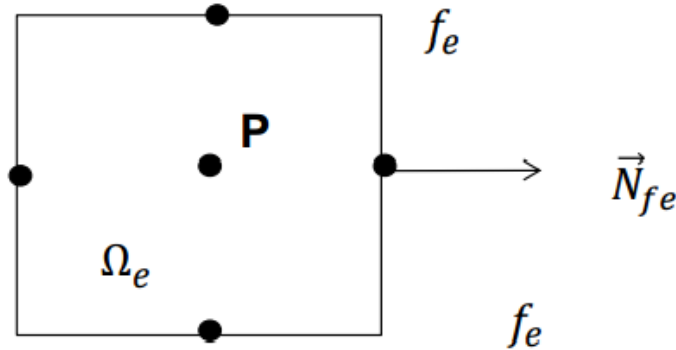
- $\vec{r}_L$  και  $\vec{r}_R$  οι αποστάσεις των κέντρων των κελιών από το κέντρο της κοινής διεπιφάνειας του face.

- $\vec{\nabla}U_A$  και  $\vec{\nabla}U_B$  είναι η μεταβολή των ποσοτήτων  $U_A$  και  $U_B$  κατά μήκος των κελιών. Ο υπολογισμός της παραγώγου αυτής γίνεται με την προσέγγιση του Green-Gauss.

Η παράγωγος δηλαδή προσεγγίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\nabla \vec{U} \approx \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \vec{U} \vec{n} dS$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω παράγωγος εξαρτάται από το ολοκλήρωμα της επιφάνειας  $\partial\Omega$ . Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό θα πρέπει να λογαριάζεται η μεταβολή της ποσότητας  $U$  κατά μήκος όλων των διαστάσεων των κελιών, και όχι μόνο της διάστασης που συνδέει το κελί A με το κελί B. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα, που απεικονίζει ένα διδιάστατο κελί:



**Εικόνα 27: Κάθε κελί (P) συνορεύει με άλλα τέσσερα, μέσω κοινών faces. Τα τέσσερα σημεία γύρω από το κεντρικό P, είναι τα μέσα του κάθε ενός από τα γειτονικά faces. (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])**

Βλέπουμε ότι σε διδιάστατα κελιά, κάθε κελί συνορεύει με άλλα τέσσερα. Η ποσότητα  $\vec{U}$  που ασκείται σε όλη την επιφάνεια  $\partial\Omega$ , θα πρέπει να υπολογιστεί και στα τέσσερα faces με τα οποία συνορεύει. Επιπλέον, η παραπάνω παράγωγος προκειμένου να υπολογιστεί, πρέπει να γραφτεί σε διακριτοποιημένη μορφή. Στα cell-centered σχήματα θα είναι:

$$\nabla \vec{U}_P \approx \frac{1}{\Omega} \sum_{J=1}^{N_f} \frac{1}{2} (\nabla \vec{U}_P + \nabla \vec{U}_J) \vec{n}_{IJ} \Delta S_{IJ}$$

όπου  $N_f$  είναι ο αριθμός των κελιών που το κελί P συνορεύει. Για τα περισσότερα κελιά (εκτός αυτών που συνορεύουν με το τοίχωμα ή το farfield), είναι  $N_f = 4$ .

Η συνάρτηση  $\Psi$  είναι μία συνάρτηση που αποτρέπει τις μεταβλητές να πάρουν ακραίες τιμές εκεί που εμφανίζονται ασυνέχειες. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται *περιοριστές (limiters)*. Ο limiter που εφαρμόσαμε εδώ είναι ο limiter του Venkatakrishnan ο οποίος γράφεται ως:

$$\Psi_i = \min_j \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[ \frac{(\Delta_{1,max}^2 + \epsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,max}}{\Delta_{1,max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,max} \Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \text{αν } \Delta_2 \geq 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[ \frac{(\Delta_{1,min}^2 + \epsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,min}}{\Delta_{1,min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,min} \Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \text{αν } \Delta_2 < 0 \\ 1 & \text{αν } \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,max} &= U_{max} - U_i \\ \Delta_{1,min} &= U_{min} - U_i \end{aligned}$$

Η παράμετρος  $\epsilon^2$  καθορίζει την αυστηρότητα του limiter. Για  $\epsilon = 0$  ο limiter γίνεται πολύ αυστηρός ενώ αν πάρει πολύ μεγάλες τιμές, τότε επιστρέφει τιμές κοντά στη μονάδα.

Το  $\epsilon^2$  είναι ανάλογο της κλίμακας μήκους του πλέγματος:

$$\epsilon^2 = (K\Delta h)^2$$

όπου  $K$  μία ελεύθερη παράμετρος.

## 1.14 Υπολογισμός της Παροχής στα Σύνορα των Κελιών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίσαμε τις μεταβλητές του πίνακα  $U$  στη θέση του face, αριστερά ( $U_L$ ) και δεξιά ( $U_R$ ) της ασυνέχειας.

Θυμίζουμε ότι οι μεταβλητές του πίνακα  $U$  είναι οι εξής:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho E \end{pmatrix}$$

ή όπως αλλιώς γράφονται:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}$$

Προφανώς η γνώση των  $U_L$  και  $U_R$  μας παρέχει και την γνώση των αντίστοιχων μεταβλητών αριστερά και δεξιά της ασυνέχειας.

Χάρη στις τιμές αυτές μπορούμε να προσδιορίσουμε την παροχή  $\vec{F}$  σύμφωνα με τον επιλύτη Riemann, και συγκεκριμένα με την Roe προσέγγιση του επιλύτη αυτού. Έτσι, ορίζουμε τις μεταβλητές κατά Roe ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\ \tilde{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{v} &= \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{w} &= \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{c} &= \sqrt{(\gamma - 1)(\tilde{H} - \tilde{q}^2/2)} \\ \tilde{q} &= \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2 \end{aligned}$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε την ροή  $\vec{F}_C$ . Η διεπιφάνεια που χωρίζει δύο γειτονικά κελιά πολλές φορές συμβολίζεται και ως  $I + \frac{1}{2}$  αφού βρίσκεται στο μισό ( $\frac{1}{2}$ ) της απόστασης μεταξύ του κελιού  $I$  και του γειτονικού του  $I + 1$ .

Η ροή στην επιφάνεια  $I + \frac{1}{2}$  ορίζεται ως:

$$(\vec{F}_c)_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\vec{F}_c(\vec{U}_R) + \vec{F}_c(\vec{U}_L) - |A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}}(\vec{U}_R - \vec{U}_L)]$$

όπου:

$$|A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}}(\vec{U}_R - \vec{U}_L) = |\Delta\vec{F}_1| + |\Delta\vec{F}_{2,3,4}| + |\Delta\vec{F}_5|$$

$$|\Delta\vec{F}_1| = |\tilde{V} - \tilde{c}| \left( \frac{\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} - \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} - \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix}$$

$$|\Delta\vec{F}_{2,3,4}| = |\tilde{V}| \left\{ \left( \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{q}^2/2 \end{pmatrix} + \tilde{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \Delta w - \Delta V n_z \\ \tilde{u}\Delta u + \tilde{v}\Delta v + \tilde{w}\Delta w - \tilde{V}\Delta V \end{pmatrix} \right\}$$

$$|\Delta\vec{F}_5| = |\tilde{V} + \tilde{c}| \left( \frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} + \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} + \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$$

Οι μεταβλητές στο left και right state  $\vec{F}_c(\vec{U}_L)$  και  $\vec{F}_c(\vec{U}_R)$  αντίστοιχα υπολογίζονται από τις γνωστές μεταβλητές  $U_L$  και  $U_R$ . Γνωρίζοντας τις τελευταίες μπορούμε με απλή αντικατάσταση να βρούμε και τις πρώτες.

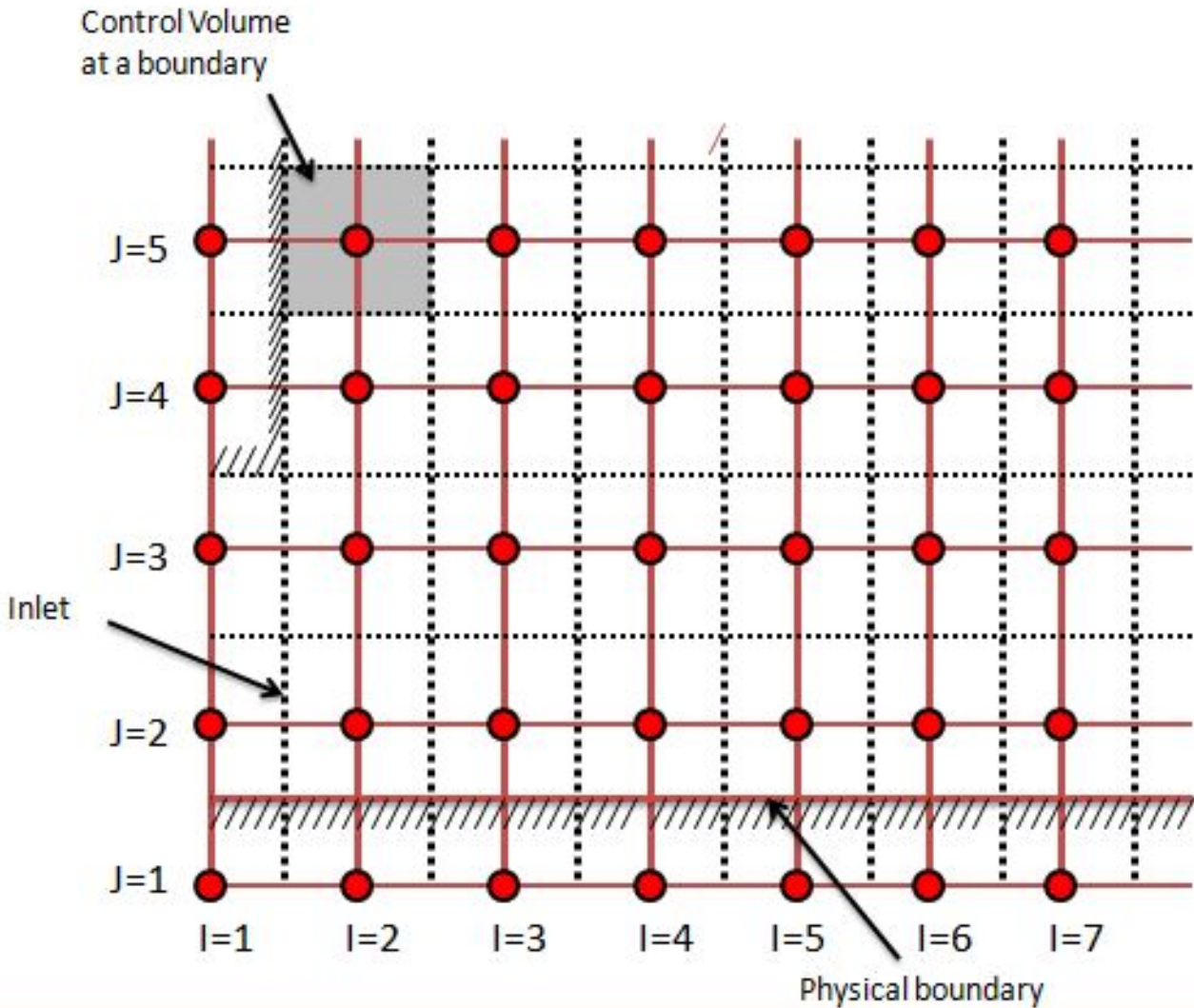
## 1.15 Συνοριακές Συνθήκες

Όλα σχεδόν τα προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CFD) ορίζονται μέσα σε κάποια όρια αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Συνήθως για τον ορισμό των οριακών συνθηκών, προσθέτουμε πάνω στο σύστημα μία επιπλέον σειρά κόμβων, η οποία βρίσκεται εκτός του αρχικού πλέγματος, τέτοια ώστε η μέση απόσταση της σειράς αυτής των κόμβων και των κόμβων του αρχικού πλέγματος να βρίσκεται ακριβώς πάνω στο φυσικό σύνορο.

Αυτό φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα:





**Εικόνα 28:** Στο σχήμα αυτό, προσθέτουμε τους κόμβους των σειρών  $I=1$  και  $J=1$  για να δημιουργήσουμε οριακές συνθήκες. (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary\\_conditions\\_in\\_CFD](http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_conditions_in_CFD))

Το παραπάνω σχήμα αφορά περίπτωση cell-vertex μεθόδου όπου ο όγκος ελέγχου (control volume) ορίζεται με την μέθοδο των "μέσων αποστάσεων" που έχουμε αναφέρει στο σχετικό κεφάλαιο.

Το αρχικό πλέγμα εδώ ήταν από  $I=2$  ως  $7$  και  $J=2$  ως  $5$ . Επειδή ωστόσο υπάρχει φυσικό σύνορο (physical boundary) τόσο οριζόντιο όσο και κατακόρυφο, προστέθηκαν και οι σειρές κόμβων  $I=1$  και  $J=1$ .

Η μέση απόσταση των κόμβων  $(I,J)=(1,4)$  και  $(2,4)$  βρίσκεται ακριβώς πάνω στο κατακόρυφο φυσικό σύνορο. Η τιμή των μεταβλητών  $U$  πάνω στο φυσικό σύνορο είναι και η συνοριακή συνθήκη, καθώς πάνω στο σημείο αυτό βρίσκεται και το σύνορο του όγκου ελέγχου που αντιστοιχεί στον κόμβο  $(2,4)$ .

Ομοίως για την δεύτερη θέση του κατακόρυφου συνόρου θα χρησιμοποιήσουμε την μέση απόσταση των κόμβων  $(1,5)$  και  $(2,5)$ .

Κατά αναλογία, και για το οριζόντιο σύνορο, θα πάρουμε τις μέσες τιμές των κόμβων  $(I,1)$  και  $(I,2)$  όπου  $I$  θα είναι  $1$  ως  $7$ .

Είναι προφανές ότι αφού προστέθηκαν οι σειρές  $I=1$  και  $J=1$ , σχηματίζονται νέα κελιά και το αρχικό πλέγμα μεγαλώνει. Τα κελιά αυτά, που προστέθηκαν για τον

εύκολο υπολογισμό των μεγεθών στα σύνορα, λέγονται φανταστικά κελιά (dummy cells).

Περίπου τα ίδια με τα παραπάνω, ισχύουν και για την περίπτωση που τα κελιά είναι cell-centered. Η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι οι συνοριακές συνθήκες (που είναι πάνω στα τοιχώματα του πλέγματος), δεν θα βρίσκονται στο σύνορο του όγκου ελέγχου που συνορεύει με το τοίχωμα, αφού στην περίπτωση cell-centered ο όγκος ελέγχου ταυτίζεται με τα κελιά του πλέγματος. Έτσι, εδώ οι συνοριακές συνθήκες θα ασκούνται στα κέντρα των λεγόμενων φανταστικών κελιών (dummy cells), ή πιο σωστά στα κέντρα των όγκων ελέγχων που ταυτίζονται με τα κελιά αυτά.

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς της διπλωματικής αυτής ήταν με cell-centered κελιά.

Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά τις συνοριακές συνθήκες. Αυτές χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

### 1) Συνοριακές συνθήκες τοίχου (Solid Wall):

Solid wall είναι το οποιοδήποτε ξένο σώμα παρεμβάλλεται στη ροή ενός ρευστού και επηρεάζει τα φυσικά χαρακτηριστικά του, όπως ταχύτητα και πίεση. Solid wall θεωρείται και το εξωτερικό σύνορο μίας αεροτομής.

Οι συνθήκες τοίχου έχουν διαφορετική έκφραση ανάλογα με το αν έχουμε συνεκτικό ή μη-συνεκτικό ρευστό.

Για την περίπτωση του μη-συνεκτικού ρευστού, οι συνθήκες τοίχου εκφράζονται από την συνθήκη μη-εισχώρησης:

$$V = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει την ανικανότητα του ρευστού να εισέλθει ή να εξέλθει από τον τοίχο, αφού στον τύπο το διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{v}$  είναι κάθετο στην επιφάνεια του τοίχου ( $\vec{n}$  είναι η νόρμα, δηλαδή το μοναδιαίο αδιάστατο διάνυσμα κάθετα στην επιφάνεια).

Για την περίπτωση του συνεκτικού ρευστού, έχουμε την ανάπτυξη τριβών μεταξύ ρευστού και τοιχώματος. Στην περίπτωση αυτή επιβάλλεται η μη-ολίσθηση του ρευστού πάνω στον τοίχο, που σημαίνει ότι η σχετική ταχύτητα του ρευστού παράλληλα προς την επιφάνεια πρέπει να είναι μηδενική. Ο περιορισμός αυτός, σε συνδυασμό με την συνθήκη μη-εισχώρησης, οδηγεί σε μηδενική ταχύτητα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση:

$$u = v = w = 0$$

### 2) Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου (Farfield Inflow/Outflow)

Farfield είναι το απομακρυσμένο όριο της αεροτομής, δηλαδή το σύνορο του συνολικού όγκου ελέγχου και υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$  μέσα στο οποίο όλες οι μεταβλητές  $U$  υπολογίζονται.

Σε αυτόν το ρευστό εισέρχεται και από αυτόν εξέρχεται, από όπου προκύπτει και η ονομασία του εισόδου/εξόδου.

Όταν το ρευστό κινείται αρκετά μακριά από το σώμα που παρεμβάλλεται (π.χ. την αεροτομή) τότε η ροή του παραμένει ανεπηρέαστη. Η "αρκετά μακρινή απόσταση" δεν ορίζεται συγκεκριμένα, ωστόσο συμβολίζεται με  $\infty$ . Ο όγκος ελέγχου  $\Omega$  που ορίζουμε γύρω από ένα σώμα, συνήθως καθορίζεται αρκετά μεγάλος ώστε να

θεωρείται ότι το σύνορό του, δηλαδή το farfield, βρίσκεται σε απόσταση  $\infty$  και άρα εκτός αυτού το ρευστό διατηρεί τις ανεπηρέαστες συνθήκες του. Τότε, η ταχύτητα του ρευστού εκτός του farfield συμβολίζεται με  $v_\infty$ . Το μέγεθος αυτό αποτελεί μονάδα αδιαστατοποίησης όλων των ταχυτήτων εντός του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ , και για αυτό η ταχύτητα  $\vec{v}$  ορίζεται από τον τύπο:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_{real}}{v_\infty}$$

όπου  $\vec{v}_{real}$  η πραγματική διαστατή ταχύτητα.

Η διαστατή ταχύτητα μόλις έξω από το σύνορο θεωρείται ανεπηρέαστη και για αυτό ισούται με  $v_\infty$ .

Συνεπώς θα είναι  $v_{real} = v_\infty$  έξω από το farfield, και άρα:

$$\vec{v} = 1$$

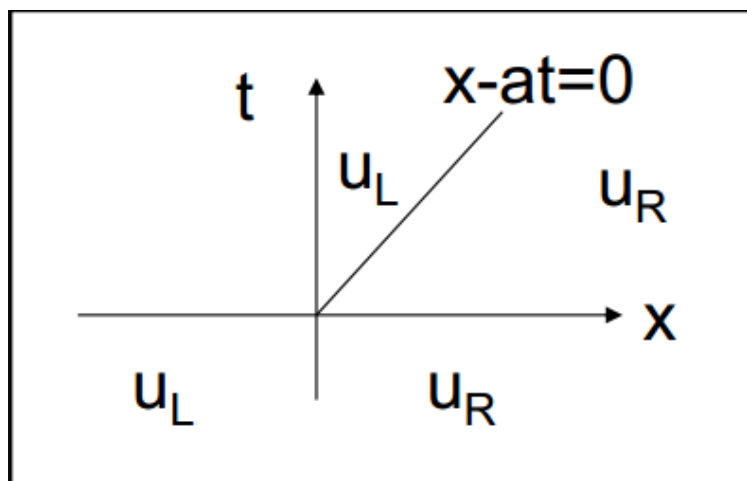
Προκειμένου να βρούμε τις συνοριακές συνθήκες πάνω στο farfield, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν ορισμένα πράγματα. Εξηγήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι οι εξισώσεις διατήρησης Navier-Stokes μπορούν να γραφτούν σε μία απεμπλεγμένη μορφή:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = R^{-1}Q$$

Οι εξισώσεις που έχουμε να επιλύσουμε είναι πέντε, διατήρηση μάζας, ενέργειας και διατήρηση ορμής ως προς τις τρεις κατευθύνσεις.

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές του μοναδιαίου πίνακα  $\Lambda$  είναι η ταχύτητα  $\vec{u}$  η οποία εμφανίζεται τρεις φορές, η ταχύτητα  $\vec{u} - c$  και η ταχύτητα  $\vec{u} + c$ , όπου  $u$  η ταχύτητα του ρευστού στην συγκεκριμένη θέση και  $c$  η ταχύτητα του ήχου. Οι ιδιοτιμές καθορίζουν την ταχύτητα με την οποία η ασυνέχεια μετατοπίζεται στην μονάδα του χρόνου. Από την εξίσωση της γραμμικής ασυνέχειας έχουμε:

$$x - at = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{a}x$$



**Εικόνα 29:** Η καμπύλη  $x - at = 0$  περιγράφει την διάδοση της ασυνέχειας ανάμεσα σε δύο γειτονικά κελιά L (Left) και R (Right). (εικόνα από το αρχείο "Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής" (βλέπε References [10])

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα είναι η μεταβολή της θέσης  $x$  στην μονάδα του χρόνου  $t$ . Δηλαδή:

$$u = \frac{x}{t}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει και από την:

$$x - ct = 0 \Leftrightarrow x = ct \Leftrightarrow \alpha = \frac{x}{t}$$

που σημαίνει ότι η ταχύτητα  $u$  ταυτίζεται με τον συντελεστή  $\alpha$ . Με τον συντελεστή αυτόν ταυτίζονται και οι ταχύτητες  $u - c$  και  $u + c$ .

Με βάση τα όσα είπαμε, είναι φανερό ότι στο διάγραμμα  $x-t$  η κλίση των ευθειών, που δίνεται από την σταθερά  $\frac{1}{\alpha}$  θα ισούται με την ποσότητα  $\frac{1}{u}$ ,  $\frac{1}{u-c}$  ή  $\frac{1}{u+c}$ .

Οι ιδιοτιμές  $u$ ,  $u - c$  και  $u + c$  είναι ιδιαίτερης σημασίας καθώς αυτές ορίζουν τις ευθείες-ασυνέχειες του διαγράμματος  $x-t$ . Κάθε μία από τις μεταβλητές του πίνακα μεταβλητών απεμπλεγμένης μορφής  $W$ , αντιστοιχίζεται σε μία ιδιοτιμή του πίνακα  $\Lambda$  και συνεπώς εξαρτάται από την αντίστοιχη ευθεία-ασυνέχεια που αυτή ορίζει.

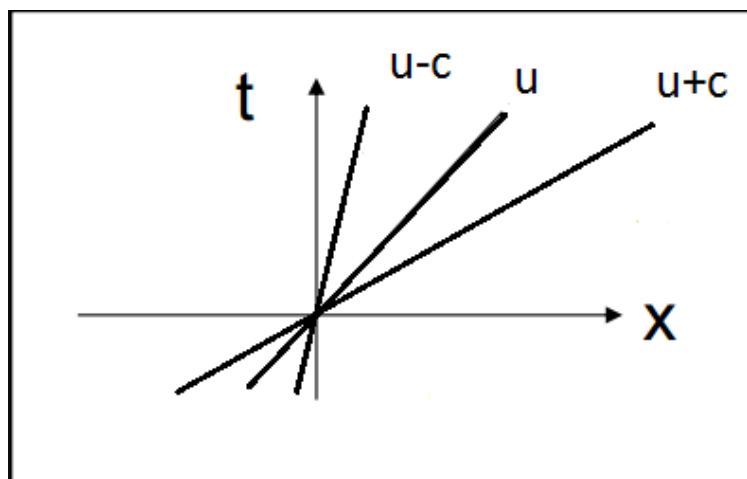
Οι οριακές συνθήκες πάνω στο σύνορο του Farfield εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το μέγεθος της ταχύτητας του ρευστού  $u$ . Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών  $u$ ,  $u + c$  και  $u - c$  η πληροφορία μεταφέρεται από ή προς τα έξω από το υπολογιστικό χωρίο πάνω στις χαρακτηριστικές. Ο αριθμός των επιβαλλόμενων συνθηκών στο σύνορο πρέπει να είναι ίδιος με τον αριθμό των χαρακτηριστικών που εισέρχονται στο υπολογιστικό χωρίο. Οι υπόλοιπες συνθήκες υπολογίζονται από την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

Η ροή μπορεί είτε να εισέρχεται είτε να εξέρχεται από το υπολογιστικό χωρίο.

Συνεπώς, ανάλογα με τον τοπικό αριθμό Mach, δηλαδή ανάλογα με την ταχύτητα του ρευστού  $u$ , προκύπτουν τέσσερις τύποι οριακών συνθηκών:

### Υπερηχητική Είσοδος:

Στην περίπτωση αυτή είναι  $u > c$  που σημαίνει ότι και οι τρεις ιδιοτιμές  $u$ ,  $u + c$  και  $u - c$  θα είναι θετικές. Η διάδοση της ασυνέχειας θα δίνεται από τις τρεις ευθείες με κλίση  $\frac{1}{u}$ ,  $\frac{1}{u-c}$  ή  $\frac{1}{u+c}$ . Και οι τρεις κλίσεις είναι θετικές, και άρα το διάγραμμα της διάδοσης των ασυνεχειών θα είναι το εξής:



**Εικόνα 30: Υπερηχητική είσοδος, άρα  $u - c$ ,  $u$  και  $u + c > 0$ .**

Η τιμή  $u + c$  που προφανώς είναι μεγαλύτερη από την  $u - c$ , αντιστοιχεί στην ευθεία με την μικρότερη κλίση αφού αυτή στο διάγραμμα  $x-t$  δίνεται από τον τύπο  $\frac{1}{u+c}$  και  $\frac{1}{u-c}$  αντίστοιχα. Πράγματι, για  $u + c > u - c$  είναι  $\frac{1}{u+c} < \frac{1}{u-c}$ .

Αφού λοιπόν όλες οι ταχύτητες έχουν θετική κλίση, διαδίδονται με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Το ρευστό θεωρούμε ότι έρχεται από τα αριστερά με κατεύθυνση

προς τα δεξιά. Η είσοδος βρίσκεται στο πιο αριστερό μέρος του όγκου ελέγχου. Αριστερά της εισόδου βρισκόμαστε εκτός farfield και δεξιά βρισκόμαστε εντός. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι μεταβλητές στην είσοδο έρχονται από τα αριστερά (δηλαδή από το ρευστό εκτός του όγκου ελέγχου), προς τα δεξιά (δηλαδή εντός του όγκου ελέγχου). Δηλαδή όλες οι μεταβλητές εισέρχονται στο χωρίο. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι όλες οι μεταβλητές στο σύνορο (οι συνοριακές συνθήκες) θα εξαρτώνται ξεκάθαρα από τις συνθήκες που επικρατούν εκτός του farfield, οι οποίες θυμίζουμε ότι είναι ανεπηρέαστες από την παρουσία της αεροτομής.

Η παραπάνω σχέση γράφεται σε συμβολική μορφή:

$$\vec{U}_{boundary} = \vec{U}_{freestream}$$

### Υπερηχητική Έξοδος

Εδώ, και πάλι οι ιδιοτιμές θα είναι θετικές, συνεπώς η ασυνέχεια θα μεταδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Σε αντίθεση όμως με την είσοδο, εδώ αριστερά της εξόδου βρισκόμαστε εντός farfield και δεξιά της εξόδου βρισκόμαστε εκτός. Συνεπώς όλες οι μεταβλητές θα εξέρχονται από το χωρίο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όλες οι μεταβλητές πάνω στο σύνορο θα έχουν τις τιμές που είχαν μόλις πριν, καθώς ήρθαν από τα αριστερά. Δηλαδή όλες οι τιμές πάνω στο σύνορο του farfield είναι ίσες με τις τιμές εντός του farfield κοντά στην έξοδο. Εντός του farfield προφανώς δεν επικρατούν οι ανεπηρέαστες συνθήκες ροής. Αντίθετα, οι συνθήκες εκεί πρέπει να υπολογιστούν με βάση την χωρική διακριτοποίηση.

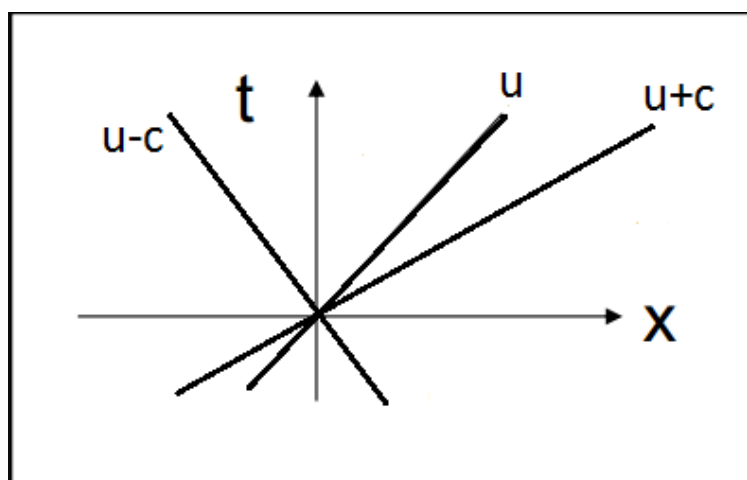
Η παραπάνω σχέση γράφεται σε συμβολική μορφή:

$$\vec{U}_{boundary} = \vec{U}_{computational}$$

### Υποχητική Είσοδος

Στην περίπτωση αυτή, από τις ιδιοτιμές  $u$ ,  $u + c$  και  $u - c$  μονάχα οι δύο πρώτες είναι θετικές. Επιπλέον επειδή η  $u$  είναι τρεις ιδιοτιμές, ουσιαστικά οι τέσσερις από τις πέντε είναι θετικές.

Εφόσον έχουμε υποχητική ροή, είναι  $u < c$  και άρα η  $u - c$  είναι αρνητική ( $u - c < 0$ ). Αυτό σημαίνει ότι ενώ οι κλίσεις των ευθειών  $\frac{1}{u}$  και  $\frac{1}{u+c}$  είναι θετικές, ή  $\frac{1}{u-c}$  θα έχει αρνητική κλίση. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



**Εικόνα 31: Υποχητική είσοδος, άρα  $u - c < 0$  ενώ  $u$  και  $u + c > 0$ .**

Αυτό σημαίνει ότι μονάχα τέσσερις από τις μεταβλητές θα διαδίδονται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Μία εξ αυτών θα διαδίδεται από τα δεξιά προς τα

αριστερά. Επειδή επιπλέον βρισκόμαστε στην είσοδο, και άρα αριστερά είμαστε εκτός χωρίου, και δεξιά εντός, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τέσσερις μεταβλητές θα εισέρχονται στον όγκο ελέγχου, και η μία θα εξέρχεται. Η μία χαρακτηριστική μεταβλητή υπολογίζεται στο σύνορο από το εσωτερικό του χωρίου:

$$p_b = \frac{1}{2} \{ p_a + p_d - \rho_0 c_0 [n_x(u_a - u_d) + n_y(v_a - v_d) + n_z(w_a - w_d)] \}$$

$$\rho_b = \rho_a + (p_b - p_a)/c_0^2$$

$$u_b = u_a - n_x(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_a - n_y(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_a - n_z(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)$$

όπου τα  $\rho_0$  και  $c_0$  αναφέρονται στο εσωτερικό του χωρίου.

### Υποηχητική Έξοδος

Και πάλι εφόσον  $u < c$  η ιδιοτιμή  $u - c$  είναι αρνητική ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις είναι θετικές. Οι ιδιοτιμές και πάλι διαδίδονται από αριστερά προς τα δεξιά. Επειδή βρισκόμαστε στην έξοδο, αριστερά είμαστε εντός του χωρίου, και δεξιά βρισκόμαστε εκτός του χωρίου. Συνεπώς τέσσερις μεταβλητές εξέρχονται από το χωρίο και μία μεταβλητή εισέρχεται. Τέσσερις υπολογίζονται από το εσωτερικό του χωρίου και μία (συνήθως η πίεση) επιβάλλεται εξωτερικά:

$$p_b = p_a$$

$$\rho_b = \rho_d + (p_b - p_d)/c_0^2$$

$$u_b = u_d + n_x(p_b - p_d)/(\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_d + n_y(p_b - p_d)/(\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_d + n_z(p_b - p_d)/(\rho_0 c_0)$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες υποθέτουν μηδενική κυκλοφορία το οποίο είναι λάθος για ένα ανωστικό σώμα. Το εξωτερικό λοιπόν όριο πρέπει να βρίσκεται μακριά από το σώμα. Η απόσταση του εξωτερικού ορίου μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν η επερχόμενη ροή περιστραφεί αναλογικά με την κυκλοφορία. Αυτή η διόρθωση ονομάζεται vortex correction.

## 1.16 Μεθοδολογία Επίλυσης-Χρονική Διακριτοποίηση

Με βάση τα όσα είπαμε ως τώρα, μπορούμε να αναλύσουμε πώς ακριβώς λειτουργεί η μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων των ρευστών, πάνω στην οποία στηρίζεται η παρούσα διπλωματική.

Το πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιείται ονομάζεται MaPflow και έχει δημιουργηθεί από τον κύριο Γεώργιο Παπαδάκη, υποψήφιο διδάκτορα. Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί την επίλυση μέσω πλεγμάτων. Οι εξισώσεις διατήρησης διακριτοποιούνται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, και με την προσέγγιση cell-centered.

Θυμίζουμε ότι για την περίπτωση των πεπερασμένων όγκων, η διακριτοποιημένη εξίσωση διατήρησης γράφεται χωριστά για κάθε όγκο ελέγχου  $\Omega_j$ , ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) + \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} = \bar{Q}_j \Omega_j$$

ή αλλιώς, αν αντικαταστήσουμε όπου:

$$- \sum_{faces} \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} + \bar{Q}_j \Omega_j = -R_j$$

θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) = -R_j$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει την χρονική παράγωγο  $\frac{\partial}{\partial t}$  που σημαίνει ότι εκφράζει την κατάσταση του ρευστού με την πάροδο του χρόνου.

Ξεκινώντας από την χρονική στιγμή μηδέν, υπολογίζουμε τον όρο του υπολοίπου (Residual)  $R_j$ . Για να υπολογιστεί αυτός απαιτούνται οι όροι  $\Omega_j$  και  $\bar{Q}_j$  που προφανώς είναι γνωστοί. Κάθε όγκος ελέγχου έχει γνωστό όγκο και γνωστή ποσότητα πηγών.

Απαιτούνται ωστόσο και οι τιμές της ροής  $\vec{F}$  στο άθροισμα όλων των faces γύρω από κάθε όγκο ελέγχου. Η ροή πάνω στο κάθε face μπορεί να βρεθεί από την μέθοδο που αναφέραμε στο κεφάλαιο "Υπολογισμός της Ροής στα Σύνορα των Κελιών". Στο κεφάλαιο αυτό αναφέραμε ότι για τον προσδιορισμό της ροής  $\vec{F}$  είναι απαραίτητη η γνώση των μεταβλητών  $U$ , όπως άλλωστε μπορούμε να δούμε και στις αντίστοιχες εξισώσεις.

Οι μεταβλητές  $U$  την χρονική στιγμή μηδέν ορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες.

Συνεπώς με αρχή τις συνοριακές συνθήκες, ορίζουμε αρχικά τις μεταβλητές  $U$ , από τις οποίες στη συνέχεια βρίσκουμε το μέγεθος της ροής  $\vec{F}$  πάνω στα faces επιφανείας  $\Delta S$  του κάθε κελιού. Σε συνδυασμό με τους γνωστούς όρους των πηγών  $\bar{Q}_j$  και των όγκων ελέγχου  $\Omega_j$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τον όρο residual  $R_j$ .

Ο όρος  $R_j$ , ωστόσο, είναι γνωστός μονάχα για την παρούσα χρονική στιγμή, δηλαδή την μηδενική. Σκοπός κάθε ρευστομηχανικού προγράμματος είναι να αναλύσει το πως αλλάζουν οι φυσικές ιδιότητες ενός ρευστού με το πέρασμα του χρόνου.

Σε αυτό θα μας χρησιμεύσει η εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) = -R_j$$

Το επόμενο στάδιο είναι να περάσουμε από την μία χρονική στιγμή στην άλλη, κάτι που καθίσταται εφικτό με την διακριτοποίηση του χρόνου.

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν πολλοί τρόποι για να διακριτοποιηθεί ο χρόνος. Το πρόγραμμα MaPflow χρησιμοποιεί την εξής διακριτοποίηση για τον κάθε όγκο ελέγχου-κελί j:

$$\frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \Delta \bar{U}_j^n = -\frac{\beta}{1+\omega} R_j^{n+1} + \frac{1-\beta}{1+\omega} R_j^n + \frac{\omega}{1+\omega} \frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \Delta \bar{U}_j^{n-1}$$

όπου:

$$\Delta \bar{U}_j^n = \bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n$$

και άρα:

$$\Delta \bar{U}_j^{n-1} = \bar{U}_j^n - \bar{U}_j^{n-1}$$

όπου  $n$  είναι η χρονική επανάληψη.

$\beta$  και  $\omega$  είναι δύο μεταβλητές οι οποίες παίρνουν τιμές ανάλογα με το σχήμα της χρονικής διακριτοποίησης που μας ενδιαφέρει.

Για  $\beta=1$  και  $\omega=1/2$ , θα έχουμε:

$$\frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \Delta \bar{U}_j^n = -\frac{2}{3} R_j^{n+1} + 0 \cdot R_j^n + \frac{1}{3} \frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \Delta \bar{U}_j^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n+1} - \frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n = -\frac{2}{3} R_j^{n+1} + \frac{1}{3} \frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n - \frac{1}{3} \frac{\Omega_j}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n-1} \Leftrightarrow$$

Από την στιγμή που χωρίζουμε τις διαφορές  $\Delta \bar{U}_j^n$  σε τιμές  $\bar{U}_j^n$ , οφείλουμε να προσδιορίζουμε και την χρονική στιγμή στην οποία αναφέρεται ο εκάστοτε όγκος κελιών  $\Omega_j$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι σε αναλύσεις όπου το συνολικό πλέγμα παραμένει αναλλοίωτο, ο όγκος του εκάστοτε κελιού σε κάθε χρονική στιγμή παραμένει σταθερός, με αποτέλεσμα ο συμβολισμός  $\Omega_j$  να είναι δεκτός.

Το πρόβλημα που εξετάζουμε εμείς, ωστόσο, έχει μεταβλητό πλέγμα, με αποτέλεσμα και τα κελιά να αλλάζουν με το πέρασμα του χρόνου και να διαμορφώνονται αναλόγως. Ο όγκος συνεπώς του κάθε κελιού δεν παραμένει σταθερός, αλλά αλλάζει ανάλογα με την χρονική στιγμή. Για αυτό καθιερώνεται ο συμβολισμός  $\Omega_j^n$  για την δεδομένη χρονική επανάληψη  $n$ .

Η εξίσωση συνεπώς θα γίνει:

$$\frac{\Omega_j^{n+1}}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n+1} - \frac{\Omega_j^n}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n = -\frac{2}{3} R_j^{n+1} + \frac{1}{3} \frac{\Omega_j^n}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n - \frac{1}{3} \frac{\Omega_j^{n-1}}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n-1} \Leftrightarrow$$

Περισσότερα για το πως ακριβώς αλλάζει η μορφή του πλέγματος, και άρα και ο όγκος των κελιών, στο πέρασμα του χρόνου, θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής.

Τώρα, αν στην παραπάνω εξίσωση πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους με  $\frac{3}{2}$ , θα έχουμε:

$$\frac{3\Omega_j^{n+1}}{2\Delta t_j} \bar{U}_j^{n+1} - \frac{3\Omega_j^n}{2\Delta t_j} \bar{U}_j^n = -R_j^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\Omega_j^n}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Omega_j^{n-1}}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\Omega_j^{n+1}}{2\Delta t_j} \bar{U}_j^{n+1} - \frac{3\Omega_j^n}{2\Delta t_j} \bar{U}_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Omega_j^n}{\Delta t_j} \bar{U}_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Omega_j^{n-1}}{\Delta t_j} \bar{U}_j^{n-1} = -R_j^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\Omega_j^{n+1} \bar{U}_j^{n+1} - 4\Omega_j^n \bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1} \bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j} = -R_j^{n+1}$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο όρος  $\Delta t_j$  αναφέρεται στο φυσικό χρονικό βήμα.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η γνώση των μεταβλητών  $U$  σε δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές  $\bar{U}_j^n$  και  $\bar{U}_j^{n-1}$ , είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της επόμενης χρονικής επανάληψης  $n+1$ .



Το πρόβλημα, ωστόσο, που παρουσιάζεται είναι η εύρεση της ποσότητας  $-R_j^{n+1}$ . Έχουμε ήδη πει ότι η γνώση της ποσότητας  $-R_j$  σε μία χρονική στιγμή  $n$ , που απαρτίζεται από τις πηγές  $\bar{Q}$  και τον όρο της ροής  $\bar{F}$ , απαιτεί την γνώση των μεταβλητών  $U$  στην ίδια αυτή χρονική στιγμή. Η γνώση του  $-R_j^{n+1}$  συνεπώς, απαιτεί την γνώση του  $\bar{U}_j^{n+1}$ . Ο όρος  $\bar{U}_j^{n+1}$  όμως είναι η ζητούμενη ποσότητα, για την εύρεση της οποίας γίνεται η χρονική διακριτοποίηση. Είναι λοιπόν αδύνατο να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του residual στην χρονική επανάληψη  $n + 1$ .

Για την λύση του προβλήματος αυτού καλούμαστε να ορίσουμε την έννοια του *ψευδοχρόνου*, που συμβολίζεται με  $t^*$ . Κατ'αυτόν τον τρόπο μετατρέπουμε ένα μη-μόνιμο πρόβλημα που εξελίσσεται μέσα στον χρόνο  $t$ , σε ένα ισοδύναμο μόνιμο πρόβλημα που εξελίσσεται μέσα στον ψευδοχρόνο  $t^*$ .

Η αντίστοιχη εξίσωση του ψευδοχρόνου θα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\bar{U}_j^* \Omega_j^{n+1}) = -(R_j^*)^{l+1}$$

όπου ως  $l + 1$  ορίζεται το νέο *ψευδοχρονικό βήμα*.

Η μεταβολή της ποσότητας  $\bar{U}_j^*$  στην μονάδα του ψευδοχρόνου, μπορεί να προσεγγιστεί με μια απλή διακριτοποίηση πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\bar{U}_j^* \Omega_j^{n+1}) = \Omega_j^{n+1} \frac{\partial}{\partial t^*} \bar{U}_j^* = \Omega_j^{n+1} \frac{\Delta \bar{U}_j^*}{\Delta t_j^*}$$

όπου:

$$\Delta \bar{U}_j^* = (\bar{U}_j^*)^{l+1} - (\bar{U}_j^*)^l$$

Ο όρος  $\bar{U}_j^*$  αφορά την τιμή που παίρνουν οι μεταβλητές  $U$  την *ψευδοχρονική επανάληψη* \*. Η δε μεταβλητή του residual  $-(R_j^*)^{l+1}$  ισούται με τα εξής:

$$(R_j^*)^{l+1} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) + (R_j)^{n+1}$$

με αποτέλεσμα η εξίσωση να μετατρέπεται στην εξής:

$$\Omega_j^{n+1} \frac{\Delta \bar{U}_j^*}{\Delta t_j^*} = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) - (R_j)^{n+1}$$

Επειδή η ψευδοχρονική εξίσωση προσομοιώνει μία μόνιμη ροή, όταν μετά από \* αριθμό επαναλήψεων, η εξίσωση συγκλίνει, ο όρος του ψευδοχρόνου θα πρέπει να εξαφανιστεί, καθώς πλέον έχει επέλθει πλήρης μονιμότητα. Είναι πια δηλαδή:

$$(\bar{U}_j^*)^{l+1} = (\bar{U}_j^*)^l \Leftrightarrow \Delta \bar{U}_j^* = 0$$

Συνεπώς όλο το αριστερό μέλος θα είναι:

$$\Omega_j^{n+1} \frac{\Delta \bar{U}_j^*}{\Delta t_j^*} = 0.$$

οπότε και θα γίνει:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) - (R_j)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = -(R_j)^{n+1}$$

που είναι η αρχική μη-μόνιμη εξίσωση του χρόνου.

Αποδείξαμε δηλαδή ότι όταν η μόνιμη εξίσωση του ψευδοχρόνου συγκλίνει, και οι μεταβλητές πάρουν μία τελική τιμή  $\bar{U}_j^*$ , τότε και η αντίστοιχη εξίσωση του χρόνου θα συγκλίνει. Έτσι η τιμή  $\bar{U}_j^*$  στην οποία θα έχουμε σύγκλιση μετά από συγκεκριμένο αριθμό ψευδοχρονικών επαναλήψεων, θα αποτελέσει την τιμή του  $\bar{U}_j$  στην επόμενη χρονική στιγμή  $n + 1$ .

Μένει μονάχα να δούμε πως ακριβώς θα γίνει η επίλυση στον ψευδοχρόνο. Ας επιστρέψουμε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\bar{U}_j^* \Omega_j^{n+1}) = -(R_j^*)^{l+1}$$

και ας αντικαταστήσουμε με την διακριτοποιημένη μορφή:

$$\Omega_j^{n+1} \frac{\Delta \bar{U}_j^*}{\Delta t_j^*} = -(R_j^*)^{l+1}$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να διακριτοποιήσουμε και τον όρο του residual στον ψευδοχρόνο με ένα απλό Taylor:

$$(R_j^*)^{l+1} \approx (R_j^*)^l + \frac{\partial R_j^*}{\partial \bar{U}_j^*} \Delta \bar{U}_j^*$$

Ο ψευδοχρόνος διαφέρει από κελί σε κελί, για αυτό και τοποθετήσαμε τον δείκτη  $j$  στην σχέση  $\Delta t_j^*$ .

Να σημειώσουμε ότι όλες οι παραπάνω παραδοχές που κάναμε, δεν εγκυμονούν κινδύνους απώλειας ακρίβειας, μιας και ο ψευδοχρόνος είναι, όπως λέει και το όνομά του, ψεύτικος, και άρα μπορεί να προσεγγιστεί με οποιονδήποτε τρόπο.

Η Ιακωβιανή  $\frac{\partial R_j^*}{\partial \bar{U}_j^*}$  θα βρεθεί από τον τύπο:

$$(R_j^*) = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j) + R_j$$

Στην παράγωγο του χρόνου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική διακριτοποιημένη εξίσωση, για  $\beta=1$  και  $\omega=1/2$ , που προαναφέραμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = -(R_j)^{n+1} = \frac{3\Omega_j^{n+1} \bar{U}_j^{n+1} - 4\Omega_j^n \bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1} \bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j}$$

που αν αντί για την χρονική επανάληψη  $n + 1$  αναφερθούμε στην ψευδοχρονική επανάληψη \*, θα γίνει:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j^* \Omega_j^n) = \frac{3\Omega_j^{n+1} \bar{U}_j^* - 4\Omega_j^n \bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1} \bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j}$$

οπότε και θα είναι:

$$(R_j^*)^l = \frac{3\Omega_j^{n+1} \bar{U}_j^* - 4\Omega_j^n \bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1} \bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j} + (R_j)^n$$

Συνεπώς η Ιακωβιανή θα γίνει:

$$\frac{\partial R_j^*}{\partial \bar{U}_j^*} = \frac{\partial}{\partial \bar{U}_j^*} \left( \frac{3\Omega_j^{n+1}\bar{U}_j^* - 4\Omega_j^n\bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1}\bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j} + (R_j)^n \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial R_j^*}{\partial \bar{U}_j^*} = \frac{\partial}{\partial \bar{U}_j^*} \left( \frac{3\Omega_j^{n+1}\bar{U}_j^*}{2\Delta t_j} - 0 + 0 + (R_j)^n \right) \Leftrightarrow$$

(οι όροι  $\frac{\partial \bar{U}_j^n}{\partial \bar{U}_j^*}$  και  $\frac{\partial \bar{U}_j^{n-1}}{\partial \bar{U}_j^*}$  προφανώς μηδενίζονται).

$$\frac{\partial R_j^*}{\partial \bar{U}_j^*} = \frac{\partial R_j}{\partial \bar{U}_j} + \frac{3}{2\Delta t} \Omega_j^{n+1}$$

Αντικαθιστώντας όσα είπαμε στην αρχική εξίσωση του ψευδοχρόνου θα έχουμε:

$$\Omega_j^{n+1} \frac{\Delta \bar{U}_j^*}{\Delta t_j^*} = -(R_j^*)^l - \left( \frac{\partial R_j}{\partial \bar{U}_j} + \frac{3}{2\Delta t} \Omega_j^{n+1} \right) \Delta \bar{U}_j^* \Leftrightarrow$$

$$\left[ \left( \frac{1}{\Delta t_j^*} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \Omega_j^{n+1} + \frac{\partial R_j}{\partial \bar{U}_j} \right] \Delta \bar{U}_j^* = -(R_j^*)^l$$

Στην παραπάνω σχέση το  $\Delta t_j^*$  αναφέρεται στον ψευδοχρόνο (που διαφέρει από κελί σε κελί) ενώ το  $\Delta t$  αναφέρεται στον χρόνο.

Έχουμε επιπλέον πει ότι:

$$(R_j^*)^l = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_j^* \Omega_j^n) + (R_j)^n = \frac{3\Omega_j^{n+1}\bar{U}_j^* - 4\Omega_j^n\bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1}\bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j} + (R_j)^n$$

Έτσι η εξίσωση που καλούμαστε να λύσουμε είναι η εξής:

$$\left[ \left( \frac{1}{\Delta t_j^*} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \Omega_j^{n+1} + \frac{\partial R_j}{\partial \bar{U}_j} \right] \Delta \bar{U}_j^* = - \left( \frac{3\Omega_j^{n+1}\bar{U}_j^* - 4\Omega_j^n\bar{U}_j^n + \Omega_j^{n-1}\bar{U}_j^{n-1}}{2\Delta t_j} + (R_j)^n \right)$$

Εμείς ουσιαστικά έχουμε γνωστές τις τιμές των μεταβλητών στις προηγούμενες χρονικές στιγμές  $\bar{U}_j^n$  και  $\bar{U}_j^{n-1}$ . Από την  $\bar{U}_j^n$  ξέρουμε και την  $(R_j)^n$ . Η Ιακωβιανή  $\frac{\partial R_j}{\partial \bar{U}_j}$  μας είναι επίσης γνωστή, αφού απαρτίζεται από ένα μητρώο γνωστών μεταβλητών.

Κατά την έναρξη των επαναλήψεων του ψευδοχρόνου, η τιμή του ψευδοχρονικού βήματος  $\bar{U}_j^*$  θα πάρει αρχικά την τιμή της προηγούμενης επανάληψης  $\bar{U}_j^n$ . Έτσι ο μόνος άγνωστος είναι ο όρος  $\Delta \bar{U}_j^*$ , τον οποίο και προσδιορίζουμε.

Βρίσκοντας το  $\Delta \bar{U}_j^*$  ξέρουμε και την διαφορά  $(\bar{U}_j^*)^{l+1} - (\bar{U}_j^*)^l$ , οπότε για γνωστό  $\bar{U}_j^* = (\bar{U}_j^*)^l$ , προσδιορίζουμε την επόμενη ψευδοχρονική επανάληψη  $(\bar{U}_j^*)^{l+1}$ .

Η διαδικασία αυτή θα ξεκινήσει για ψευδοχρονικό βήμα  $l = 1$ , οπότε όπως έχουμε πει, θα είναι  $(\bar{U}_j^*)^1 = \bar{U}_j^n$ . Τότε θα προσδιορίσουμε και την επόμενη ψευδοχρονική στιγμή  $l + 1 = 2$ . Στη συνέχεια με την νέα τιμή, θα προσδιορίσουμε την τρίτη κ.ο.κ. Κάθε φορά δηλαδή, στην παραπάνω εξίσωση, θα γνωρίζουμε την στιγμή  $(\bar{U}_j^*)^l$ , θα βρίσκουμε το  $\Delta \bar{U}_j^*$ , και μέσω αυτού θα προσδιορίσουμε το  $(\bar{U}_j^*)^{l+1}$ .

Αυτό θα γίνεται συνεχώς μέχρι η ψευδοχρονική επανάληψη να συγκλίνει, δηλαδή, μέχρι:

$$(\bar{U}_j^*)^{l+1} = (\bar{U}_j^*)^l \Leftrightarrow \Delta \bar{U}_j^* = 0$$

Τότε η ψευδοχρονική εξίσωση έχει έρθει σε συνθήκες μόνιμης ροής, και άρα, όπως έχουμε ήδη αποδείξει παραπάνω, θα είναι για το τελικό  $\bar{U}_j^*$ :

$$\bar{U}_j^* = \bar{U}_j^{n+1}$$

Βρήκαμε δηλαδή την τιμή των μεταβλητών την επόμενη χρονική στιγμή  $n + 1$ . Η διαδικασία των ψευδοχρονικών επαναλήψεων  $l$  θα πρέπει να ακολουθηθεί για όλες τις χρονικές επαναλήψεις  $n$ .

Όταν γίνει αυτό, θα έχουμε μία πλήρη ανάλυση των μεταβλητών σε όλο το πεδίο του χρόνου. Ωστόσο, σύγκλιση πρέπει να γίνεται όχι μόνο στον ψευδοχρόνο, αλλά και στον χρόνο αυτό καθ'εαυτό. Δηλαδή, αν θέλουμε να έχουμε το τελικό αποτέλεσμα, θα πρέπει να περιμένουμε ώστε ο χρόνος να συγκλίνει.

Περισσότερες επαναλήψεις στον ψευδοχρόνο βοηθούν σημαντικά τον χρόνο να συγκλίνει. Έτσι απαιτούνται λιγότερες χρονικές επαναλήψεις. Επιβαρύνουν όμως παράλληλα τον υπολογιστή με πολύ μεγαλύτερο αριθμό συνολικών επαναλήψεων. Έτσι, πολλές ψευδοχρονικές επαναλήψεις, ενώ μεν επιταχύνουν τον χρόνο σύγκλισης της ροής, αναγκάζουν δε τον υπολογιστή σε μεγάλες διαδικασίες, με αποτέλεσμα να επιβραδύνουν τον πραγματικό χρόνο εξαγωγής των αποτελεσμάτων, που ο παρατηρητής/χρήστης του προγράμματος θέλει να είναι όσο το δυνατόν συντομότερος.

Έχοντας βρει τις μεταβλητές  $\bar{U}_j^n$  για κάθε μία από τις χρονικές στιγμές  $n$ , μπορούμε πια να έχουμε μια πλήρη εικόνα των φυσικών χαρακτηριστικών του ρευστού μέσα σε όλο το πεδίο του χρόνου, δηλαδή καθ'όλη τη διάρκεια που διαρκεί το φαινόμενο που εξετάζουμε.

Έτσι γνωρίζουμε, για όλο το πεδίο του χρόνου, τις τιμές της ταχύτητας, της πυκνότητας και της ενέργειας, από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε την πίεση και τις τριβές, δηλαδή τις διατμητικές τάσεις.

Στη συνέχεια, με εφαρμογή των τύπων:

$$L = \int_A dL = - \int_A (P \sin\theta + \tau_w \cos\theta) dA$$

και

$$D = \int_A dD = \int_A (-P \cos\theta + \tau_w \sin\theta) dA$$

μπορούμε να βρούμε τις τιμές της δύναμης άνωσης και αντίστασης σε όλο το πεδίο του χρόνου.

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο γίνεται όλη η παραπάνω διαδικασία, για την εξεύρεση της άνωσης και της αντίστασης. Θυμίζουμε ότι σκοπός κάθε αεροδυναμικής σχεδίασης είναι η μεγιστοποίηση της άνωσης με την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της αντίστασης.

## 1.17 Μεθοδολογία Επίλυσης για Μόνιμες Ροές

Η περίπτωση που αναλύσαμε παραπάνω είναι η χρονική διακριτοποίηση, δηλαδή η μελέτη της ανάπτυξης του ρευστομηχανικού φαινομένου στην περίπτωση της μη-μόνιμης ροής, της ροής που επηρεάζεται από τον χρόνο.

Ο λόγος που εστιάζουμε κυρίως στην παραπάνω ροή, είναι ότι η παρούσα διπλωματική μελετά ροές που είναι αυστηρά μη-μόνιμες, καθότι η γεωμετρία της αεροτομής μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Ωστόσο επειδή θα αναφερθούμε και σε μόνιμες ροές, αξίζει να δούμε ποια είναι η διαδικασία επίλυσής τους.

Στην περίπτωση των μόνιμων ροών (ή steady), ο χρονικός παράγοντας θα πρέπει να μηδενιστεί, αφού η ροή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Ο μηδενισμός του χρονικού παράγοντα ωστόσο δεν είναι κάτι που θα πρέπει να θεωρηθεί δεδομένο εξ αρχής, αλλά είναι κάτι στο οποίο το πρόγραμμα θα πρέπει να καταλήξει μετά από επαναληπτική διαδικασία.

Η εξίσωση που έχουμε είναι η εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = -(R_j)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) + (R_j)^{n+1} = 0$$

Για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση, θα διακριτοποιήσουμε τον όρο του Residual με τον τύπο του Taylor, και θα έχουμε:

$$(R_j)^{n+1} = (R_j)^n + \frac{\partial R}{\partial U} \cdot \Delta U$$

Επιπλέον, μπορούμε να διακριτοποιήσουμε την παράγωγο του χρόνου, με μία μικρής τάξης διαφορά:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = \frac{\Delta \bar{U}_j}{\Delta t} \Omega_j^{n+1}$$

Για την περίπτωση της μόνιμης ροής, ο όρος  $n$  δεν αναφέρεται στην πάροδο του χρόνου, όπως στην περίπτωση της μη-μόνιμης που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αντίθετα ως  $n$  ορίζουμε τις επαναλήψεις του προγράμματος μέχρις ότου επέλθει η σύγκλιση.

Όταν μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων επέλθει σύγκλιση, θα ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = 0$$

και άρα:

$$\frac{\Delta \bar{U}_j}{\Delta t} \Omega_j^{n+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta \bar{U}_j = 0$$

όπου θυμίζουμε:

$$\Delta U = U^{n+1} - U^n$$

Δηλαδή, όταν επέλθει σύγκλιση, θα είναι:

$$\Delta \bar{U}_j = 0 \Leftrightarrow U_j^{n+1} = U_j^n$$

Ας δούμε τώρα, την εξίσωση που καλούμαστε να λύσουμε. Με αντικατάσταση των τύπων του Residual και της διακριτοποιημένης χρονικής παραγώγου στην αρχική εξίσωση, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta \bar{U}_j}{\Delta t} \Omega_j^{n+1} + (R_j)^n + \frac{\partial R}{\partial U} \cdot \Delta \bar{U}_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta \bar{U}_j \cdot \left[ \frac{\Omega_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial R}{\partial U} \right] = -(R_j)^n$$

Ο όρος του Residual θα είναι:

$$-(R_j)^n = - \sum_{faces} \vec{F}^n \cdot \Delta \vec{S}^n + \bar{Q}_j^n \Omega_j^n$$

Όπως έχουμε πει, οι όροι  $\bar{Q}_j^n$  και  $\Omega_j^n$  είναι γνωστοί, ενώ ο όρος  $\vec{F}^n$  θα προκύψει από την γνώση του  $U_j^n$ .

Επιπλέον ο όρος  $\frac{\partial R}{\partial U}$  μας είναι επίσης γνωστός, καθώς αποτελεί πίνακας παραγώγων γνωστών μεταβλητών.

Ο όρος  $\Omega_j^{n+1}$  μας είναι επίσης γνωστός, γιατί, παρότι δεν ξέρουμε τις μεταβλητές την στιγμή n+1 (είναι η στιγμή που ψάχνουμε), ξέρουμε ωστόσο το μέγεθος και τον όγκο των κελιών. Ο τελευταίος εξαρτάται από το πρόβλημα που εμείς ορίζουμε και δεν προκύπτει ως αποτέλεσμα της φυσικής της ροής.

Ο όρος  $\Delta t$  επειδή η ροή που εξετάζουμε είναι μόνιμη, δεν έχει μεγάλη σημασία.

Όπως η μεταβλητή  $n$  δεν αναφέρεται στον χρόνο, αλλά στις επαναλήψεις, έτσι και το μέγεθος  $\Delta t$  δεν αναφέρεται στην αλλαγή του χρόνου, αλλά αποτελεί ένα μέσο που θα επιτρέψει μία σταδιακή επεξεργασία στην ροή του προβλήματος μέχρις ότου επέλθει σύγκλιση. Για αυτόν τον λόγο, στην περίπτωση της μόνιμης ροής, δίνουμε μία αυθαίρετη τιμή στον όρο  $\Delta t$ , ανεξάρτητα της έννοιας του χρόνου στο πρόβλημα αυτό καθ'εαυτό.

Εν τέλει, στην εξίσωση:

$$\Delta \bar{U}_j \cdot \left[ \frac{\Omega_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial R}{\partial U} \right] = -(R_j)^n$$

ο μόνος άγνωστος είναι ο όρος  $\Delta \bar{U}_j$ , προσδιορίζοντας τον οποίο, και αφού ξέρουμε το  $U_j^n$ , μπορούμε να βρούμε το  $U_j^{n+1}$ .

Στην πρώτη επανάληψη, ο αρχικός όρος  $U^n$  (για καθεμιά από τις θέσεις  $j$ ) θα οριστεί από τις συνοριακές συνθήκες.

Στις μετέπειτα επαναλήψεις, ο νέος όρος  $U^n$  θα είναι ίσος με τον όρο  $U^{n+1}$  που βρέθηκε στην αμέσως προηγούμενη.

Όταν θα ισχύει  $U^{n+1} = U^n$  σημαίνει ότι το σύστημα των επαναλήψεων συνέκλινε, και καταλήξαμε στην τελική τιμή του  $U^n$ .

Εδώ πια έχει επέλθει πλήρως μόνιμη ροή, καθώς, όπως δείξαμε παραπάνω, θα είναι  $\frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_j \Omega_j^{n+1}) = 0$ .

Με γνωστές πια τις κύριες μεταβλητές, μπορούμε να προσδιορίσουμε την δύναμη άνωσης L και αντίστασης D, σύμφωνα με τους ίδιους τύπους που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

## 1.18 Το πρόγραμμα MaPflow

Το πρόγραμμα αυτό αποτελεί την βάση για όσα θα ακολουθήσουν. Πρόκειται για κώδικα γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran, που δημιουργήθηκε από το προσωπικό του ΕΜΠ, και συγκεκριμένα από τον κ. Παπαδάκη Γεώργιο. Σκοπός του προγράμματος είναι να επιλύσει τις διατηρητικές εξισώσεις ρευστομηχανικής σε ένα δοσμένο πλέγμα γύρω από μία συγκεκριμένη αεροτομή. Αυτό το επιτυγχάνει με την διακριτοποίηση πεπερασμένων, cell-centered όγκων.

Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα MaPFlow είναι το  $k - \omega$ . Είναι:

$$\nu_T = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)}$$

η κινηματική συνεκτικότητα.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

η κινητική ενέργεια τύρβης.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$

ο ρυθμός διασποράς (dissipation rate).

Όπου:

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right]$$

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right)$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_\omega k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\}$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right)$$

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}$$

$$\alpha_2 = 0.44$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}$$

$$\beta_2 = 0.0828$$

$$\beta^* = \frac{9}{100}$$

$$\sigma_{k1} = 0.85$$

$$\sigma_{k2} = 1$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5$$

$$\sigma_{\omega 2} = 0.856$$

Το πρόγραμμα δέχεται ως εισόδους δύο αρχεία: Το grid.msh και το euler.inp.

Το αρχείο grid.msh είναι το πλέγμα. Για την δημιουργία του πλέγματος χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Ansys και συγκεκριμένα το ICEM CFD. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα με το οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε πλέγμα γύρω από μία συγκεκριμένη αεροτομή. Το πλέγμα μπορεί να έχει όποια μορφή θέλουμε, και ο συνολικός αριθμός των κελιών του εξαρτάται επίσης από εμάς. Ένα πλέγμα με μεγαλύτερο αριθμό κελιών (δηλαδή ένα "πυκνότερο" πλέγμα) δίνει συνήθως καλύτερη σύγκλιση της λύσης, ωστόσο αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο για την επίλυση των εξισώσεων. Συνήθως προτιμάμε τον σχεδιασμό πλεγμάτων που είναι πυκνότερα στα πιο σημαντικά σημεία μιας αεροτομής, δηλαδή στην ακμή πρόσπτωσης και στην ακμή εκφυγής.

Από το ICEM, αφού σχεδιάσουμε το πλέγμα, εξάγουμε το αρχείο grid.msh, το οποίο είναι απλά ένα αρχείο κειμένου, που δίνει τις συντεταγμένες των κελιών που δημιουργήθηκαν κατά τον σχεδιασμό. Το αρχείο αυτό στη συνέχεια, εισάγεται στο φάκελο που πρόκειται να εκτελεστεί το πρόγραμμα.

Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει αρχείο με τις συντεταγμένες (δηλαδή την μορφή) της αεροτομής αυτή καθ'εαυτή. Αυτό γιατί το grid.msh είναι υπεραρκετό στον προσδιορισμό της τελευταίας, καθώς χαρακτηρίζεται από ένα πλέγμα που ακολουθεί την γεωμετρία της.

Το αρχείο euler.inp είναι μια σειρά από δεδομένα-εισόδους που αφορούν την λειτουργία του προγράμματος. Ας δούμε τα περιεχόμενα του γραμμή-γραμμή, καθώς είναι μάλλον σημαντικό για την πλήρη κατανόηση της όλης διαδικασίας:

*!----General Data----*

*!Number of Dimensions*

Αριθμός διαστάσεων. Στο πρόγραμμα που χρησιμοποιούμε οι αεροτομές είναι διδιάστατες, για αυτό και ο αριθμός εδώ είναι 2.

*!gambit/fluent*

Το input που δέχεται το πρόγραμμα όσον αφορά το format του αρχείου του mesh. Για την συγκεκριμένη περίπτωση το input είναι fluent, άρα θα δώσουμε την τιμή 1.

*! 0/1 starts from the begining / looks for BACKUP file*

Η τιμή 0 καθορίζει ότι το πρόγραμμα θα ακολουθήσει την διαδικασία της επίλυσης από την αρχή. Η τιμή 1 συνεχίζει ένα πρόγραμμα που έχει διακοπή στη μέση. Για να το καταφέρει αυτό, χρειάζεται τα αρχεία BACKUP. Αυτά είναι αρχεία που δημιουργεί το πρόγραμμα μετά από προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων.



Στην περίπτωση που η τιμή εδώ είναι 1, το πρόγραμμα θα ξεκινήσει από την επανάληψη που καθορίζεται από το τελευταίο BACKUP που δημιουργήθηκε.

*! Number of timesteps*

Ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων που θα κάνει το πρόγραμμα. Αναφέρεται στο άθροισμα των επαναλήψεων της μόνιμης επίλυσης (steady) και της μη-μόνιμης (unsteady). Δεν αναφέρεται στον αριθμό των ψευδοχρονικών επαναλήψεων. Αυτόν θα τον δούμε παρακάτω.

*! Number of steady timesteps*

Αναφέρεται μονάχα στον αριθμό των επαναλήψεων μόνιμης ροής (steady).

*! (0/1 non dimensional/dimensional)*

Αναφέρεται στο αν οι εξισώσεις Navier Stokes θα λυθούν με αδιάστατες ή διαστατές μεταβλητές. Εμείς θεωρούμε αδιάστατες μεταβλητές, για αυτό και θέτουμε την ταχύτητα στο άπειρον (ή σωστότερα, στο farfield)  $\nu_\infty = 1$ . Άρα εδώ δίνουμε την τιμή 0.

*! iyngeomchange*

Αφορά στο αν θα αλλάζει η γεωμετρία της αεροτομής ή όχι

*! 1:NS or 0:EULER*

Εδώ γίνεται η επιλογή για το αν οι εξισώσεις που θα λυθούν θα είναι οι Navier-Stokes (επιλογή 1) ή οι Euler (επιλογή 0).

*!----Flow Parameters----*

*!RHOINF*

Είναι η τιμή της πυκνότητας στο άπειρο, δηλαδή σε πολύ μεγάλη απόσταση από την αεροτομή, τέτοια ώστε η ροή να θεωρείται ανεπηρέαστη. Επειδή εμείς αδιαστατοποιούμε κάθε μέγεθος διαιρώντας με την πυκνότητα στο άπειρο, η τιμή του  $\rho_{inf}$  θα είναι η αδιάστατη μονάδα 1.

*!UINF(1) it will be multiplied with cos(AIN)*

Είναι η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας στο άπειρο, ως προς τον άξονα των x, δηλαδή τον άξονα της ροής.

*!UINF(2) it will be multiplied with sin(AIN)*

Ομοίως με παραπάνω, είναι η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας στο άπειρο, ως προς τον άξονα y.

*!UINF(3)*

Είναι η συνιστώσα της ταχύτητας της ροής στο άπειρο, ως προς τον άξονα z, δηλαδή τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο xy. Επειδή η αεροτομή που εξετάζουμε είναι διδιάστατη, βρίσκεται εντελώς στο επίπεδο xy, και για αυτό δεν υπάρχει ροή. Συνεπώς η τιμή που δίνουμε είναι εδώ είναι 0.

*! Angle of INFLOW*

Είναι η γωνία εισόδου της ροής, δηλαδή η γωνία που σχηματίζει η ροή με τον οριζόντιο άξονα x.

*! Mach Number*

Είναι ο αριθμός Mach του ρευστού.

*! Temperature in Kelvin*

Είναι η θερμοκρασία σε Kelvin του ρευστού.

*! GAM isentropic constant*

Είναι η ισεντροπική σταθερά  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

*!---Moving body Parameters---*

*! Mean Angle*

*! Amplitude angle of sin*

*! Amplitude angle of cos*

*! OMEGA*

*! Translation x*

*! Translation y*

Οι παραπάνω μεταβλητές αφορούν τις συνιστώσες της κίνησης της αεροτομής. Η μέση γωνία, το πλάτος του όρου του ημιτόνου και του συνημιτόνου, η συχνότητα, και η μετακίνηση ως προς τον x και y άξονα.

Ωστόσο επειδή εμείς έχουμε αεροτομή που υπακούει σε διαφορετικές κάθε φορά συνιστώσες, αγνοούμε τους όρους αυτούς εντελώς.

Η κίνηση της αεροτομής δεν έχει ως input αρχείο το euler.inp, αλλά διαφορετικά αρχεία τα οποία θα αναφέρουμε παρακάτω.

*!---Output Parameters-----*

*!After which timestep to start writing dat files*

Τα αρχεία dat περιέχουν δεδομένα για την αεροτομή και την επίλυση. Επιλέγουμε τα αρχεία να γράφονται από την πρώτη επανάληψη, άρα δίνουμε την τιμή 1.

*!Timestep to write vtk files*

Τα vtk files έχουν την κατάληξη plt και αναπαριστούν την μορφή της αεροτομής, καθώς και διάφορες συνιστώσες. Τα αρχεία μπορούν να αναγνωριστούν από προγράμματα όπως το tecplot. Εδώ επιλέγεται το βήμα όπου θα εξάγονται τα αρχεία αυτά.

*!Timesteps to write Cp(in explicit file)*

Εδώ αντίστοιχα επιλέγουμε την συχνότητα με την οποία εξάγονται τα αρχεία cp, δηλαδή τα αρχεία που περιγράφουν την κατανομή της πίεσης.

*!---Solver Parameters-----*

*!CFL START*

Ορίζει την αρχική τιμή του "χρόνου" κατά τη διάρκεια της μόνιμης επίλυσης (steady).

*!Timesteps to reach FINAL CF*

Ορίζει τον συνολικό αριθμό βημάτων στον οποίο επιθυμούμε να διακριτοποιηθεί ο steady "χρόνος".

*!CFL FINAL*

Ορίζει την τελική τιμή του steady "χρόνου".

Ο συνδυασμός των τριών παραπάνω μεταβλητών δίνει το μέγεθος του "χρονικού" βήματος κατά την steady επίλυση:

$$CFL_{step} = \frac{CFL_{Final} - CFL_{Initial}}{Timesteps}$$

Ο παραπάνω "χρόνος" μας δίνει την σύγκλιση της ροής στην μόνιμη ανάλυση.

*!Internal Iterations for solution of Jacobi*

Ορίζει τον αριθμό των επαναλήψεων για την λύση του συνολικού συστήματος.

*!Relative error for jacobi system*

Ορίζει το σχετικό σφάλμα του συνολικού συστήματος.

*!Absolute error for jacobi system*

Ορίζει το απόλυτο σφάλμα του συνολικού συστήματος.

*!Preconditioner type*

*!Limit of type ( $k * M^2$ ) for preconditioner(3 for most)*

*!Lower limit for preconditioning*

Ορίζει τον τύπο του μητρώου προσταθεροποίησης.

*! Dual Step 1/normal 0*

Καθορίζεται αν θέλουμε να γίνει ψευδοχρονική επίλυση σε κάθε χρονικό βήμα της μόνιμης ροής. Ο ψευδοχρόνος βοηθά το σύστημα να συγκλίνει γρηγορότερα.

*! Max Dual Step iterations*

Επιλέγουμε τον μέγιστο αριθμό ψευδοχρονικών βημάτων που δίνουμε την ευκαιρία στην ροή να συγκλίνει.

*!Absolute error of dual stepping*

Ορίζουμε το απόλυτο σφάλμα στην ψευδοχρονική επίλυση.

*!----Viscous Parameters-----*

*! Viscous 1 / Inviscid 0*

Καθορίζεται αν η ροή είναι συνεκτική 1, ή μη συνεκτική 0.

*! Re*

Καθορίζεται η τιμή του αριθμού Reynolds.

*! ITURB 1 / Inviscid 0*

Καθορίζεται αν η ροή είναι τυρβώδης 1, ή μη τυρβώδης.

*! 1(SA)/2(k-2)*

Επιλέγεται αν το μοντέλο τύρβης είναι το Spallart-Allmaras ή το κ-ω.

*! ITRIP*

Καθορίζουμε αν θέλουμε πλήρη τυρβώδη ροή (0) ή να έχουμε μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη (1).

*! XTRIPU*

Το σημείο πάνω στο πάνω μέρος της αεροτομής (up) όπου θα έχουμε την μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

*! XTRIPD*

Το σημείο πάνω στο κάτω μέρος της αεροτομής (down) όπου θα έχουμε την μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

*!Use wall function*

Καθορίζεται αν θα χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις τοίχου ή όχι.

*!----Misc*

*! Vortex correction 1/ No Vortex Correction 0*

Τεχνική διόρθωσης οριακών συνθηκών για μικρότερα υπολογιστικά χωρία με χρήση στροβίλου.

*! Venkatakrishnan limiter K coefficient*

Σταθερά που καθορίζει την ποσότητα του limiting.

*!--Periodicity*

*!AXIS OF PERIODICITY(1,2,3--->X,Y,Z)*

Άξονας περιοδικότητας.

*!THETA OF PERIODICITY(degrees)*

Γωνία περιοδικότητας.

*!---Vortex generator*

*! (1/0)(Y/N)*

Όρος πηγής για γεννήτριες στροβίλων.

*!---Rotating frame*

*! Rotating frame YN*

Ανάλογα με το αν έχουμε να λύσουμε περιστρεφόμενο ή απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

*!---Output*

*!Number of airfoil faces(points-1)*

Πόσα σημεία έχει κάθε τομή σε ένα τρισδιάστατο πλέγμα.

*!Chordwise direction*

Διεύθυνση ως προς τη χορδή.

*!Spanwise direction*

Διεύθυνση ως προς το εκπέτασμα.

*!Normal direction*

Διεύθυνση κάθετα στην πτέρυγα.

*!SYMMETRY n*

Συμμετρία ως προς τον άξονα n.

*!IDGRID*

Επιλέγεται 1 αν θα έχουμε πλέγμα παραμορφώσιμο.

*!IREFINE*

Επιλέγεται αν θα έχουμε πυκνωση του πλέγματος.

*!---3D rotation*

*!OMEGAVEC(1)*

*!OMEGAVEC(2)*

*!OMEGAVEC(3)*

Καθορίζει το διάνυσμα του  $\omega$ .

*!---Particles*

*!write particles(0 no /1 yes)*

Επιλέγουμε αν θέλουμε να γράφονται particles ή όχι.

Μετά την εκτέλεση του προγράμματος, προκύπτουν ορισμένα αρχεία εξόδου. Ας δούμε τα αρχεία αυτά αναλυτικά:

Τα BACKUP αρχεία. Είναι τα αρχεία που το euler.inp αναζητά, αν του δώσουμε εντολή να συνεχίσει μία εκτέλεση, αντί να την αρχίσει από την αρχή. Τα αρχεία BACKUP ανανεώνονται μετά από προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων.

Ο αριθμός των αρχείων αυτών είναι όσοι είναι οι επεξεργαστές του υπολογιστή που εκτελούν την συγκεκριμένη διαδικασία. Έτσι αν εκτελούμε το πρόγραμμα με δύο επεξεργαστές, θα έχουμε τα αρχεία BACKUP0 και BACKUP1, τα οποία ανανεώνονται με το πέρασμα των επαναλήψεων.

Το αρχείο cl-cd history.txt είναι από τα πιο σημαντικά αρχεία-εξόδου.

Περιλαμβάνει τόσες σειρές, όσες και οι επαναλήψεις και 9 στήλες.

Σε κάθε επανάληψη υπολογίζει τα αντίστοιχα 9 μεγέθη που απαρτίζουν κάθε μία από τις στήλες.

Τα μεγέθη αυτά είναι τα εξής:

### cl-cd history.txt

1η στήλη	2η στήλη	3η στήλη	4η στήλη	5η στήλη	6η στήλη	7η στήλη	8η στήλη	9η στήλη
ntime	time	angle	vita	CL	CD	CN	CT	CM

Όπου:

- ntime ο αριθμός των επαναλήψεων
- time, η χρονική στιγμή
- angle, η γωνία  $\alpha$  της αεροτομής
- vita , η γωνία  $\beta$  του flap
- CL, CD, CN, CT, CM οι αντίστοιχοι συντελεστές της αεροτομής.

Τα αρχεία cp.txt είναι πολλά, και καθένα από αυτά αφορά μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Για αυτόν τον λόγο, επιλέγουμε εμείς τον αριθμό των επαναλήψεων στον οποίο θέλουμε να εξάγεται ένα νέο αρχείο cp.txt. Ο καθορισμός αυτός γίνεται στο euler.inp. Οι σειρές κάθε αρχείου cp.txt δίνουν την κατανομή ορισμένων μεγεθών πάνω στην αεροτομή.

Τα μεγέθη αυτά είναι τα εξής:

### cp.txt

1η στήλη	2η στήλη	3η στήλη	4η στήλη	5η στήλη	6η στήλη
x	y	z	Cp	Cf	y+

Όπου:

- x, οι συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν την αεροτομή πάνω στον άξονα x
- y, οι συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν την αεροτομή πάνω στον άξονα y
- z, οι συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν την αεροτομή πάνω στον άξονα z

-  $C_p$ , ο συντελεστής πίεσης. Ο συντελεστής αυτός δίνεται εξ ορισμού, από τον τύπο:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}$$

ή αλλιώς

$$C_p = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left( \frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

όπου

- $p$  η πίεση στο σημείο όπου υπολογίζεται ο συντελεστής πίεσης.
- $p_\infty$  η πίεση στην ελεύθερη ροή, όπου είναι ανεπηρέαστη από την παρουσία της αεροτομής
- $\rho_\infty$  η πυκνότητα στην ελεύθερη ροή
- $V_\infty$  η ταχύτητα του ρευστού στην ελεύθερη ρή
- $M_\infty$  ο αριθμός Mach,  $M = \frac{V_\infty}{C}$ , όπου  $C$  η ταχύτητα του ήχου.
- $\gamma$  ο λόγος  $\frac{C_p}{C_v}$ .
- $C_f$ , ο συντελεστής διατμητικών τάσεων.

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι συντελεστές  $C_p$  και  $C_f$  έχουν ένα βασικό χαρακτηριστικό που τους διαχωρίζει από τους  $C_L$ ,  $C_D$ ,  $C_N$ ,  $C_T$ ,  $C_M$ . Δεν ασκούνται συνολικά στην αεροτομή, αλλά τοπικά.

Ο συντελεστής  $C_p$  αφορά την κατανομή της πίεσης σε όλα τα σημεία της αεροτομής, ενώ ο συντελεστής  $C_f$  την κατανομή των διατμητικών τάσεων. Οι πιέσεις και οι διατμητικές τάσεις δεν έχει νόημα να υπολογιστούν σε όλη την αεροτομή, καθώς από μόνες τους απλά συνεισφέρουν στην συνολική δύναμη.

Οι σχέσεις που συνδέουν την πίεση, και την διατμητική τάση, με την άνωση και την αντίσταση, είναι οι εξής:

$$L = \int_A dL = - \int_A (P \sin\theta + \tau_w \cos\theta) dA$$

και

$$D = \int_A dD = \int_A (-P \cos\theta + \tau_w \sin\theta) dA$$

τις οποίες και έχουμε ξανα-αναφέρει.

-  $y^+$  η συντεταγμένη τοίχου, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

όπου:

- $y$ : Η απόσταση από τον τοίχο
- $u_\tau$ : Η ταχύτητα τριβής, δηλαδή η ταχύτητα του ρευστού δίπλα στον τοίχο- σύνορο του ρευστού
- $\nu$ : Η κινηματική συνεκτικότητα

Η τιμή της  $y^+$  είναι αδιάστατη.

Το αρχείο mean-res.txt περιλαμβάνει επίσης τόσες σειρές όσες και οι επαναλήψεις. Ο αριθμός των στηλών του είναι 6, και κάθε στήλη περιλαμβάνει μία διαφορετική μεταβλητή που υπολογίζεται σε κάθε τρέχουσα επανάληψη. Ας δούμε αναλυτικά τα περιεχόμενά του:

**mean-res.txt**

1η στήλη	2η στήλη	3η στήλη	4η στήλη	5η στήλη	6η στήλη
ntime	R	U	V	W	E

Όπου:

-ntime: Ο αριθμός της τρέχουσας επανάληψης

-R, η μέση πυκνότητα του ρευστού

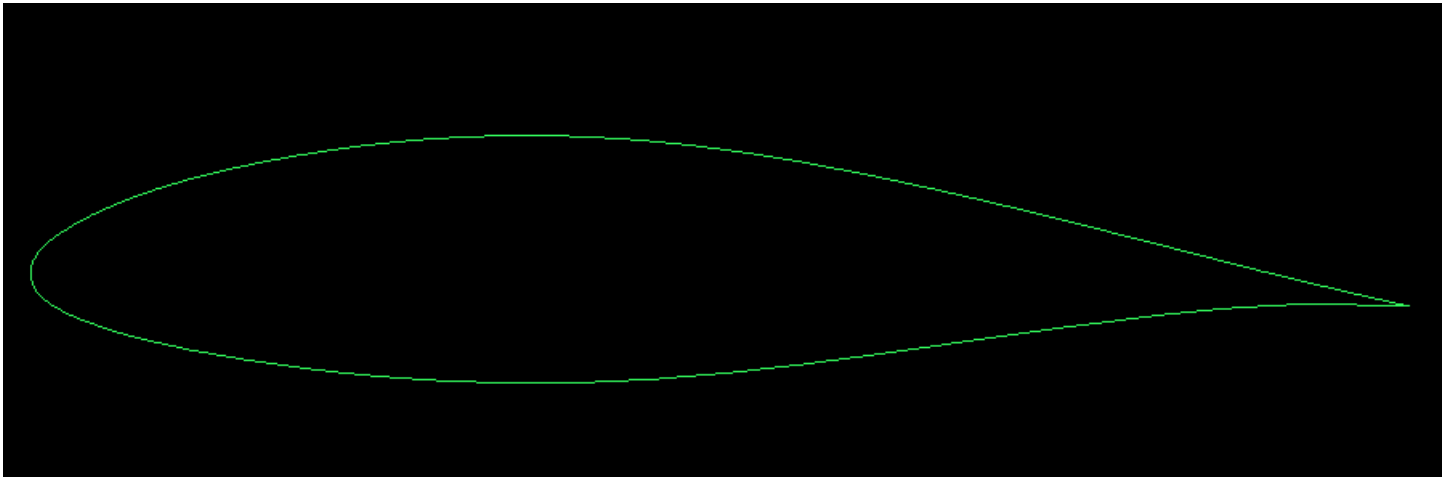
-U, V και W οι μέσες ταχύτητες του ρευστού ως προς τις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  αντίστοιχα.

-E, η μέση ενέργεια του ρευστού.

Αυτά είναι τα βασικά αρχεία εσόδου και εξόδου που σχετίζονται άμεσα με το πρόγραμμα MaPflow.

Ωστόσο, υπάρχουν και άλλα αρχεία εσόδου και εξόδου που μας ενδιαφέρουν για την παρούσα διπλωματική, αλλά θα εξετάσουμε την χρησιμότητά τους αργότερα.

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα το πρόγραμμα αυτό για να δούμε την καμπύλη Cl-α για μια δοσμένη αεροτομή. Έστω η αεροτομή NACA64418. Η πλάγια όψη της αεροτομής αυτής είναι η εξής:

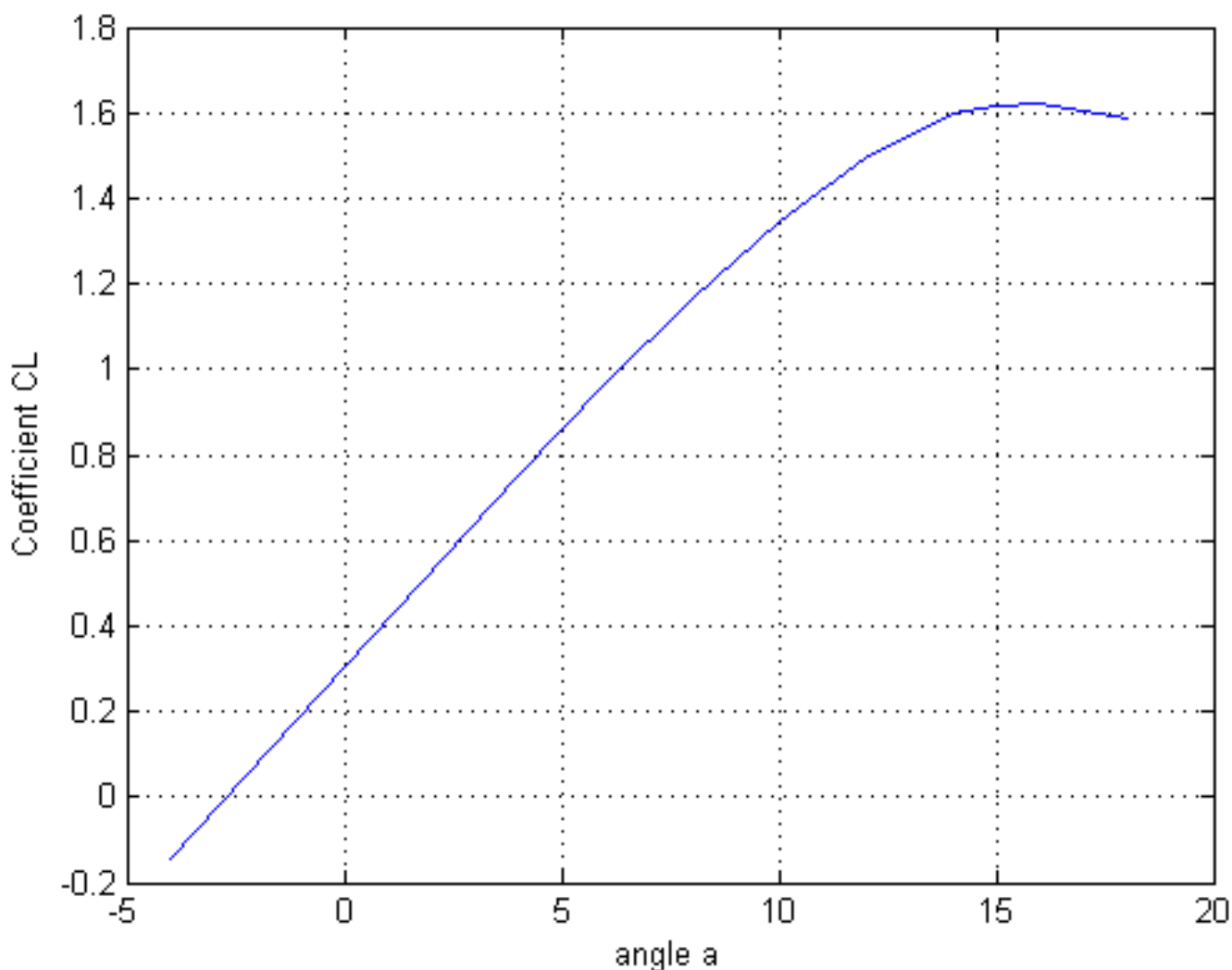


**Εικόνα 32: Βασική μορφή της γεωμετρίας της αεροτομής NACA64418.**

Για την αεροτομή αυτή, κατασκευάζουμε στο ICEM ένα αντίστοιχο πλέγμα, οπότε και εξάγουμε ένα αντίστοιχο αρχείο grid.msh.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι κάθε αεροτομή ορίζεται από ένα σύνολο σημείων. Το σύνολο των συντεταγμένων των σημείων αυτών, αν ενωθούν, θα σχηματίσουν την αεροτομή. Όσο περισσότερα σημεία έχουμε στην διάθεση μας, τόσο "καλύτερα" ορίζουμε μία αεροτομή. Τα σημεία αυτά εισάγονται στο ICEM, και γύρω από την αεροτομή που αυτά ορίζουν σχεδιάζουμε το πλέγμα.

Έχοντας λοιπόν, πια, το πλέγμα και με εφαρμογή του προγράμματος MaPflow, για αριθμό Reynolds  $6 \cdot 10^6$ , καταλήγουμε στο εξής διάγραμμα:



**Εικόνα 33: Η καμπύλη  $Cl - \alpha$  για την αεροτομή NACA64418, όπως προέκυψε από το πρόγραμμα MaPflow.**

Βέβαια δεν ξέρουμε αν το παρόν διάγραμμα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Για να το επιβεβαιώσουμε αυτό, θα πρέπει να το συγκρίνουμε με άλλα διαγράμματα που έχουμε στην κατοχή μας, και τα οποία προέκυψαν από διάφορες άλλες μεθόδους διακριτοποίησης.

Το κείμενο "UpWind: Comparison of code performance for computation of unsteady 2D aerodynamics of airfoils with deformable trailing edges", έχει σαν αντικείμενο να συγκρίνει τέσσερις διαφορετικές υπολογιστικές μεθόδους σε αεροτομές με "παραμορφώσιμες ακμές εκφυγής" (deformable trailing edge). Η αεροτομή που εξετάζεται εδώ πέρα είναι η NACA64418. Στον κείμενο αυτό συγκρίνονται τα εξής υπολογιστικά μοντέλα:

1) Μοντέλο λεπτής αεροτομής

2) Μοντέλο Dynamic Stall

3) Μοντέλα FOIL1W και FOIL2W

Τα μοντέλα αυτά δημιουργήθηκαν από το προσωπικό του ΕΜΠ, από τους κυρίους Βασίλη Ριζιώτη και Σπυρίδωνα Βουτσινά. Τόσο το FOIL1W όσο και το FOIL2W αφορούν μη-συνεκτικά μοντέλα, όπου η ροή αντιπροσωπεύεται από συγκεκριμένες διανομές πηγών και δυνών κατά μήκος της αεροτομής και των περιοχών όπου



εξέρχονται στροβιλισμοί. Στροβιλισμοί υπάρχουν στην ακμή εκφυγής της αεροτομής καθώς και σε ενδεχόμενη περιοχή αποκόλλησης. Το μη-συνεκτικό αυτό μοντέλο προσομοιώνει την συνεκτικότητα με ολοκληρωματικές επιλύσεις εξισώσεων που αφορούν το συνοριακό στρώμα κοντά στο τοίχωμα. Οι εξισώσεις αυτές διακρίτοποιούνται με πεπερασμένες διαφορές και οι τελικές μη-γραμμικές εξισώσεις επιλύονται ταυτόχρονα με εφαρμογή του αλγορίθμου Newton-Raphson. Η κύρια διαφορά μεταξύ FOIL1W και FOIL2W είναι ότι στο FOIL1W οι εξισώσεις του οριακού στρώματος ολοκληρώνονται κατά μήκος όλης της αεροτομής και στις περιοχές των στροβιλισμών, ενώ στο FOIL2W επιλύονται μονάχα ως το σημείο όπου έχουμε αποκόλληση της ροής.

#### 4) Μοντέλο *EllipSys2D*

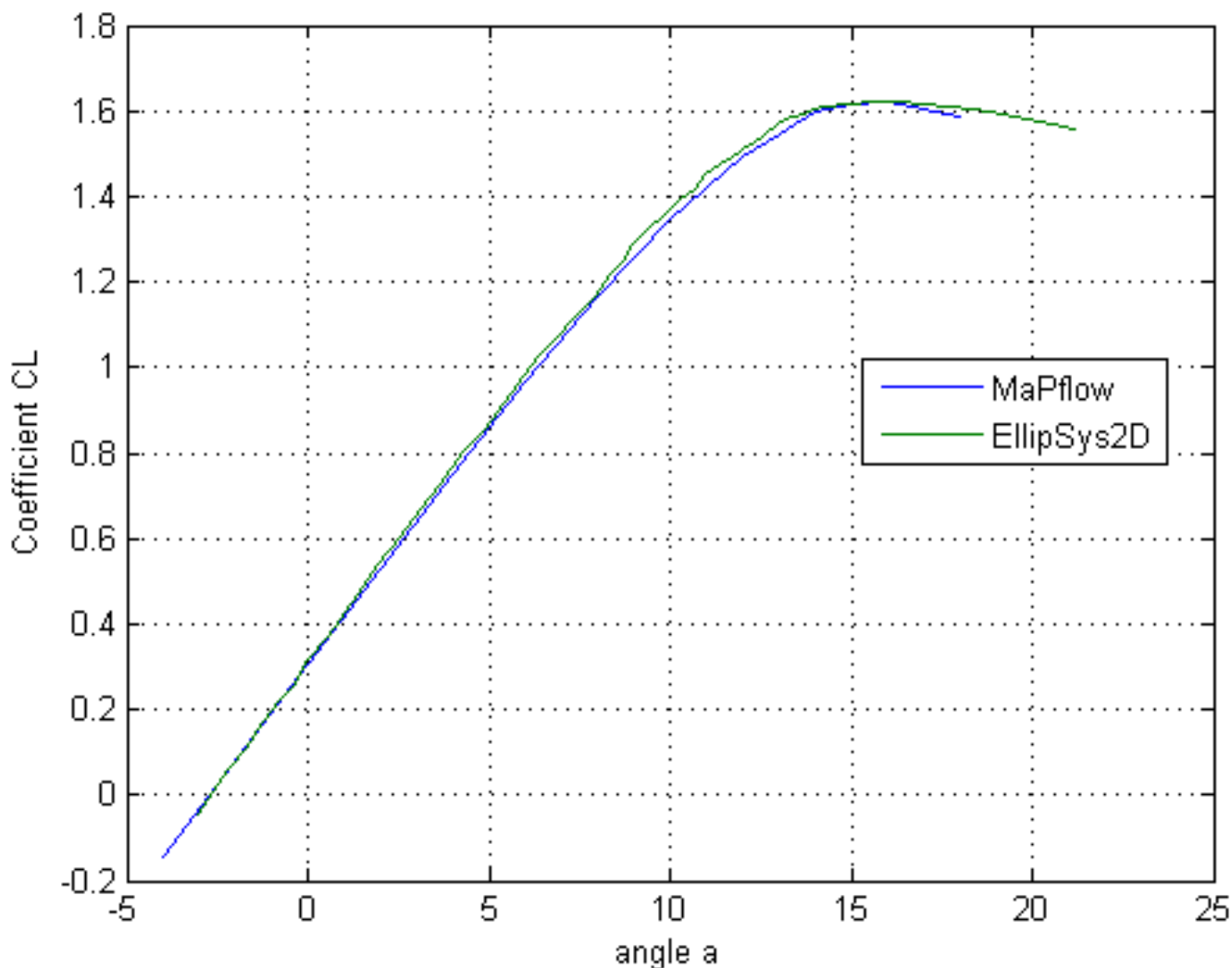
Το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται από την μέθοδο διακριτοποίησης πεπερασμένων όγκων για τις ασυμπίεστες Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) εξισώσεις. Η τύρβη στο οριακό στρώμα μοντελοποιείται από το k- $\omega$  Shear Stress Transport (SST).

Ο κώδικας του *EllipSys2D* δημιουργήθηκε από τη συνεργασία μεταξύ του Τμήματος της Μηχανολογίας από το Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Δανίας και του Τμήματος της Αιολικής Ενέργειας του Εθνικού Εργαστηρίου του Risø.

Εμάς, για τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής, θα μας απασχολήσει μονάχα η σύγκριση με τα μοντέλα FOIL1W, FOIL2W και *EllipSys2D*, και όχι με τα πρώτα δύο μοντέλα.

Το κείμενο UpWind δίνει την καμπύλη Cl-a της αεροτομής NACA64418 όπως αυτή προέκυψε από την μέθοδο *EllipSys2D*.

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο καμπύλες, του *EllipSys2D* και του MaPflow:



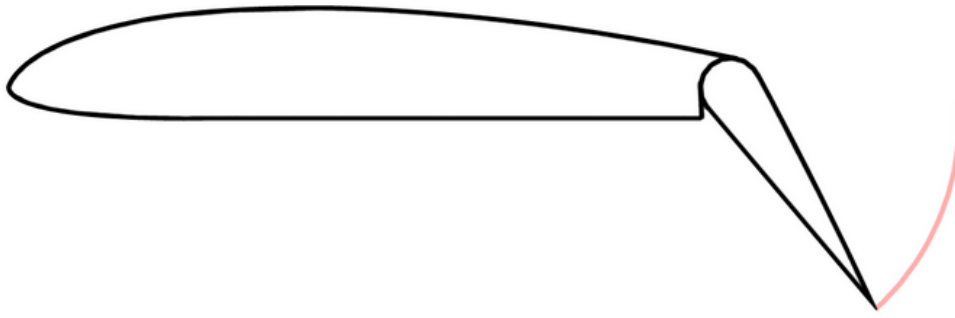
**Εικόνα 34: Σύγκριση των καμπυλών  $Cl - \alpha$  για την αεροτομή NACA64418, όπως προέκυψαν από τα προγράμματα MaPflow και EllipSys2D.**

Είναι φανερό ότι υπάρχει αρκετά καλή προσέγγιση μεταξύ των τιμών των δύο διαφορετικών μεθόδων. Η αποκόλληση προβλέπεται στις ίδιες περίπου γωνίες και οι τιμές του  $C_l$  παραμένουν παραπλήσιες.

Οι μικρές διαφορές θα οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι το EllipSys2D επιλύει τις εξισώσεις RANS σε ασυμπίεστη μορφή ενώ το MaPflow υπολογίζει συμπιεστά ρευστά. Ακόμα, το κάθε πρόγραμμα χρησιμοποιεί διαφορετικά πλέγματα grid, οπότε σίγουρα αναμένουμε διαφορές και στα τελικά διαγράμματα.

## 1.19 Εισαγωγή στα Flap

Τα Flap είναι επιφάνειες που βρίσκονται στις ακμές εκφυγής (trailing edge) των πτερυγίων των αεροπλάνων ή των ανεμογεννητριών. Χαρακτηριστικό των flap είναι ότι μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα από την υπόλοιπη αεροτομή. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα flap που βρίσκεται στην κατώτερη θέση έκτασης.



**Εικόνα 35: Τα flap είναι επιφάνειες που προστίθενται κοντά στην ακμή εκφυγής της αεροτομής, και αλλάζουν την μορφή της στην περιοχή αυτή. (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Flap\\_\(aircraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Flap_(aircraft)))**

Στα αεροπλάνα τα flap χρησιμοποιούνται για να αυξήσουν τα ανωστικά τους χαρακτηριστικά.

Ας θυμηθούμε τον τύπο που δίνει την δύναμη της άνωσης:

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho \vec{v}^2 S$$

όπου:

- $L$ : είναι η παραγόμενη από το ρευστό άνωση. Είναι η κατακόρυφη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί ο αέρας στην αεροτομή καθώς αυτή κινείται μέσα του. Η άνωση είναι ο λόγος που πετάει το αεροσκάφος, και κάθε μας προσπάθεια περιστρέφεται στο να αυξήσει την ποσότητα αυτή.

- $\rho$ : είναι η πυκνότητα του αέρα.

- $\vec{v}$ : είναι η σχετική ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τον αέρα.

- $S$ : είναι η επιφάνεια επαφής της αεροτομής με τον αέρα-ρευστό.

Είναι φανερό ότι ο παραπάνω όρος εξαρτάται κυρίως από την αεροδυναμική μορφή της αεροτομής. Τα flap, επειδή αποτελούν "προσθετικές" και "μεταβλητές" επιφάνειες της αεροτομής, μπορούν να τοποθετηθούν στην κατάλληλη κάθε φορά θέση, ώστε να προκαλούν την μέγιστη δυνατή επιφάνεια επαφής  $S$ . Μεγάλη ποσότητα  $S$ , προκαλεί μεγάλη επιθυμητή άνωση  $L$ .

- $C_L$ : ο συντελεστής αυτός είναι ο σημαντικότερος όρος που επηρεάζεται από την κατανομή των flap. Εξαρτάται από την καμπυλότητα της αεροτομής, την χορδή της καθώς και την γωνία που το πτερύγιο συναντά τον αέρα (η γωνία πρόσπτωσης).

Ως καμπυλότητα της αεροτομής ορίζεται η ασυμμετρία ανάμεσα στην ανώτερη και στην κατώτερη επιφάνεια μιας αεροτομής. Αν τα flap τοποθετηθούν σε θέση επέκτασης, όπως π.χ. στην κατώτερη δυνατή θέση που φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα, τότε η ασυμμετρία είναι ιδιαίτερα έντονη, και άρα αυξάνεται και ο συντελεστής άνωσης  $C_L$ .

Η μεταβολή του συντελεστή  $C_L$  από την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  είναι πολύ σημαντική, και απεικονίζεται στα διαγράμματα  $C_L - \alpha$  που είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην μελέτη των αεροτομών.

Ο συντελεστής  $\alpha$  έχει να κάνει με την περιστροφή ολόκληρης της αεροτομής. Ο συνδυασμός της περιστροφής αυτής με την σχετική κίνηση του flap προκαλεί διαφοροποιήσεις στον συντελεστή  $C_L$  τους οποίους και θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Όπως βλέπουμε από τον τύπο της άνωσης, αύξηση του συντελεστή  $C_L$  μπορεί να προκαλέσει και αύξηση στην συνολική δύναμη άνωσης  $L$ .

Υπάρχει όμως και μία άλλη χρησιμότητα από την ενδεχόμενη αύξηση του συντελεστή, λιγότερο προφανής.

Όπως βλέπουμε από τον τύπο:  $L = \frac{1}{2} C_L \rho \vec{v}^2 S \Leftrightarrow C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 S}$ , αν θεωρήσουμε ότι διατηρούμε την συνολική άνοση  $L$  σε μία μέγιστη επιθυμητή τιμή, περεταίρω αύξηση του συντελεστή  $C_L$  θα επιτρέψει να αποκτηθεί η μέγιστη αυτή δύναμη άνωσης σε χαμηλότερες ταχύτητες  $\vec{v}$ .

Δηλαδή θα έχουμε και ελάττωση της ταχύτητα απώλειας στήριξης. Χαμηλή απώλεια στήριξης είναι χρήσιμη κατά την προσγείωση του αεροσκάφους, καθώς επιτρέπει σε αυτό να πετάει με χαμηλότερη ταχύτητα και μάλιστα να διανύει μικρότερη απόσταση κατά την προσγείωσή του.

Ένα άλλο ωστόσο φαινόμενο που προκύπτει από την παρουσία των flap, είναι ότι μαζί με τον συντελεστή άνωσης, παρατηρείται και αύξηση στην αντίσταση (drag) της αεροτομής.

Όπως είναι αναμενόμενο, η αύξηση της επιφάνειας πρόσπτωσης και της καμπυλότητας της αεροτομής που προκαλούνται από την χρήση των flap, επιδρούν ταυτόχρονα και στην οριζόντια συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στην αεροτομή. Η συνισταμένη αυτή δεν είναι άλλη από την αντίσταση  $D$ .

Οι επιπτώσεις της αύξησης της αντίστασης είναι κυρίως αρνητικές, ωστόσο σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί και να ωφελήσουν κατά τη διάρκεια μιας πτήσης. Ενώ η αύξηση της αντίστασης είναι ανεπιθύμητη κατά την ομαλή πτήση του αεροσκάφους, καθώς ο κινητήρας αναγκάζεται να παράγει μεγαλύτερη πρόωση, αυξημένο drag μπορεί φανεί χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου απότομη επιβράδυνση της ταχύτητας είναι επιθυμητή όπως κατά τη διάρκεια μιας προσγείωσης ή στην περίπτωση που το αεροπλάνο θα πρέπει να επιτελέσει μία "απότομη" αλλαγή πορείας. Στην περίπτωση αυτή ο πιλότος μπορεί να κατεβάσει τα flap, να αυξήσει δηλαδή την αντίσταση, ώστε να επιβραδύνει απότομα το σκάφος.

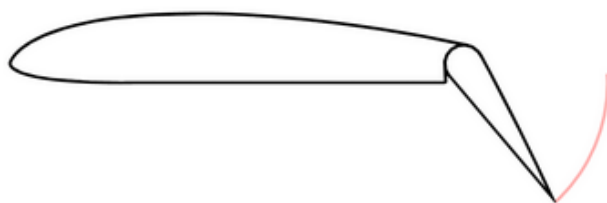
Τα flap μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν και σε αεροπλάνα που συμμετέχουν σε θεάματα ή ακόμα και σε στρατιωτικά αεροσκάφη. Σε τέτοιες περιπτώσεις η ταχύτητα του σκάφους δεν είναι τόσο σημαντική όσο η δυνατότητα του να έχει ευκολία κατά τη διάρκεια των ελιγμών. Τα flap, αυξάνοντας απότομα την άνοση για χαμηλή ταχύτητα και αυξάνοντας την αντίσταση με γοργούς ρυθμούς, δίνουν μεγαλύτερη ευκινησία και ευλυγισία στο σκάφος.

Τα flap μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε ανεμογεννήτριες. Στις τελευταίες, η αύξηση του συντελεστή άνωσης, προκαλεί και αύξηση της συνισταμένης δύναμης που τις περιστρεφεί. Έτσι, όσο περισσότερη δύναμη ασκείται στα πτερύγια τις ανεμογεννήτριας, τόσο πιο γρήγορα αυτή περιστρέφεται και τόσο περισσότερη ενέργεια παράγεται.

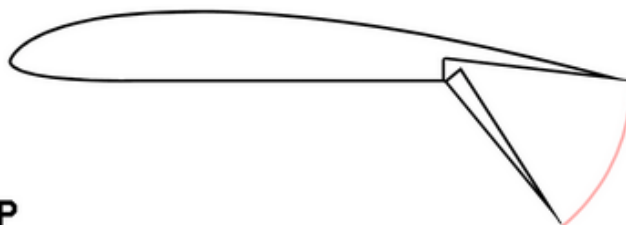
Σε κάθε περίπτωση, είτε το flap τοποθετείται σε αεροτομή αεροσκάφους είτε σε ανεμογεννήτριας, όσα θα αναφέρουμε στην παρακάτω διδιάστατη ανάλυση της παρούσας διπλωματικής, παραμένουν τα ίδια.

Γενικά υπάρχουν πολλών ειδών flap, όπως τα plain, split, slotted, Fowler κτλ.

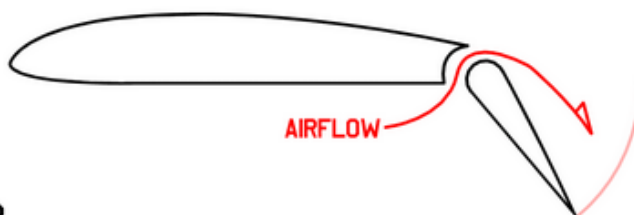
## PLAIN FLAP



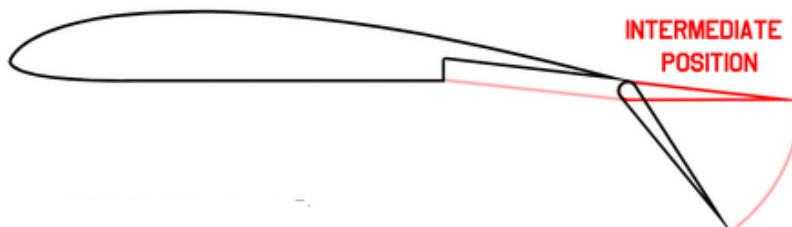
## SPLIT FLAP



## SLOTTED FLAP



## FOWLER FLAP



**Εικόνα 36: Υπάρχουν πολλές κατηγορίες flap ανάλογα με το σύστημα που τοποθετούνται στην αεροτομή. Εμείς θα ασχοληθούμε μονάχα με τα Plain Flaps. (Εικόνα από [http://en.wikipedia.org/wiki/Flap\\_\(aircraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Flap_(aircraft)))**

Στα Plain Flaps, το πίσω μέρος της αεροτομής στρέφεται με κατεύθυνση προς τα κάτω. Το flap είναι προσδεμένο με την αεροτομή με έναν απλό "μεντεσέ" που βρίσκεται στο μπροστινό τμήμα του flap. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται από το 1917 και είναι η πιο απλή περίπτωση.

Στα Split Flap μονάχα η κάτω πλευρά της επιφάνειας του flap στρέφεται προς τα κάτω. Η πάνω παραμένει ακίνητη.

Το Slotted Flap έχει ένα κενό μεταξύ του flap και της αεροτομής, που αναγκάζει αέρα υψηλής πίεσης να διέλθει από το κάτω μέρος της αεροτομής προς το άνω. Αυτό βοηθά την ροή να μένει προσκολλημένη και αποφεύγεται έτσι η αποκόλληση. Σαν αποτέλεσμα επιτυγχάνονται μεγαλύτερες τιμές άνωσης σε σχέση με τα άλλα μοντέλα flap.

Το Fowler Flap είναι ένα είδος flap που έχει και την δυνατότητα να μετακινηθεί προς τα πίσω, εκτός από την περιστροφή προς τα κάτω. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να αυξήσει το μήκος της χορδής και να αυξήσει και την καμπυλότητα. Το flap αυτό μπορεί να αποτελεί μέρος της κάτω και της άνω επιφάνειας, όπως ένα plain flap, αλλά μπορεί και να απαρτίζεται μονάχα από την κάτω επιφάνεια, όπως είναι τα split flap (η τελευταία περίπτωση φαίνεται στο παραπάνω σχήμα).

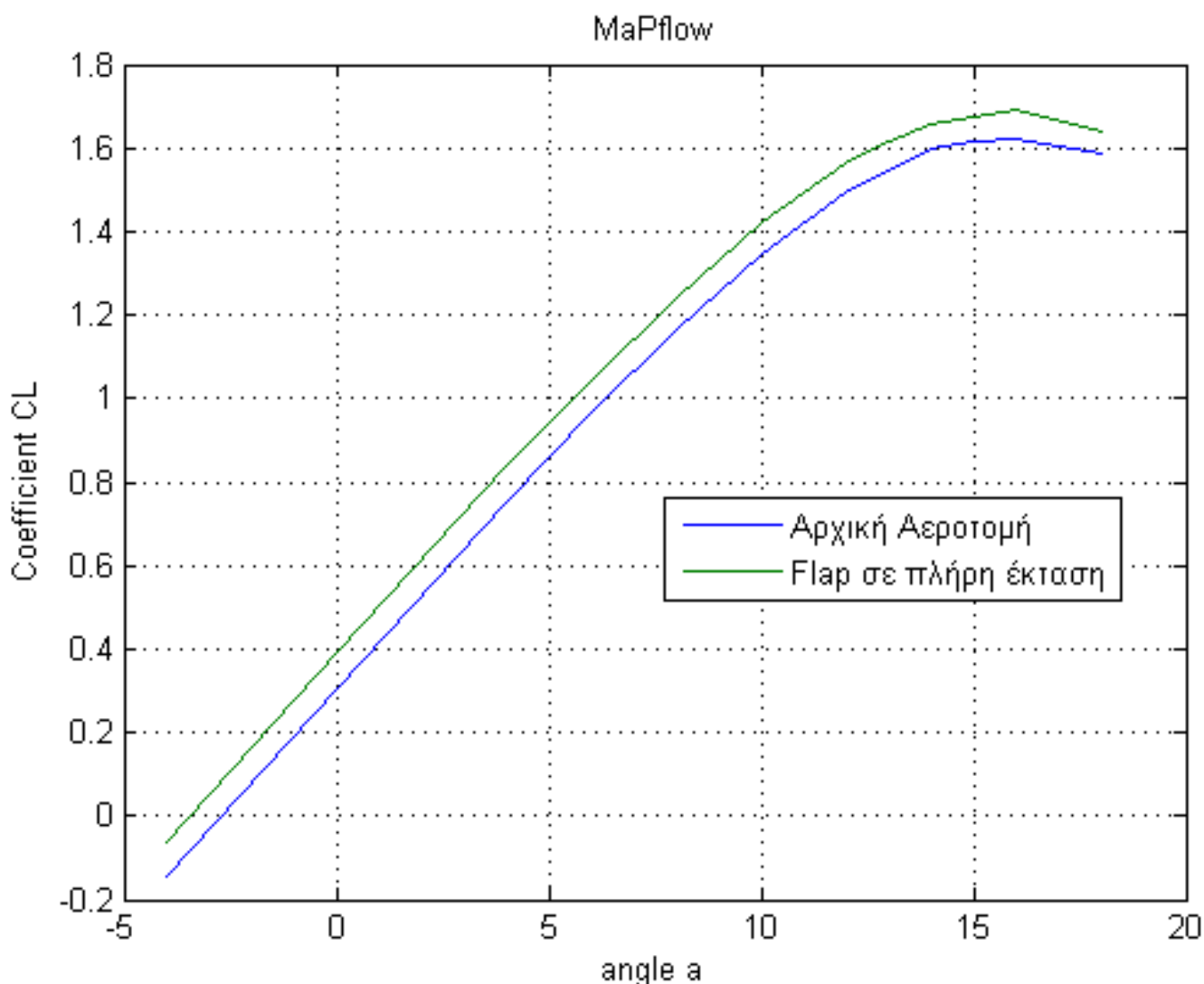
Υπάρχουν και άλλα είδη flap, που συνδυάζουν πολλαπλά τμήματα, όπως τα double-slotted Fowler flap κ.ά.

Ωστόσο, εμείς, στην διπλωματική αυτή θα ασχοληθούμε μονάχα με τα Plain Flap, δηλαδή την πιο απλή περίπτωση, για αυτό και δεν αξίζει να εστιάσουμε άλλο στα διαφορετικά μοντέλα.

Ας δούμε τώρα ξανά την αεροτομή NACA64418, αυτήν την φορά με flap στο trailing edge της.

Διαλέγουμε να τοποθετήσουμε το flap στην κατώτερη θέση του, δηλαδή σε πλήρως εκτεταμένη θέση. Θα δούμε την καμπύλη  $C_l - \alpha$  που θα προκύψει ώστε να την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη που είχαμε για την αρχική αεροτομή NACA64418. Αν όσα αναφέραμε παραπάνω, στην παράγραφο αυτή, ισχύουν, θα περιμένουμε μία αύξηση του συντελεστή  $C_l$ .

Ας δούμε λοιπόν την καμπύλη που προέκυψε με τα flap στην κατώτερη δυνατή εκτεταμένη θέση:

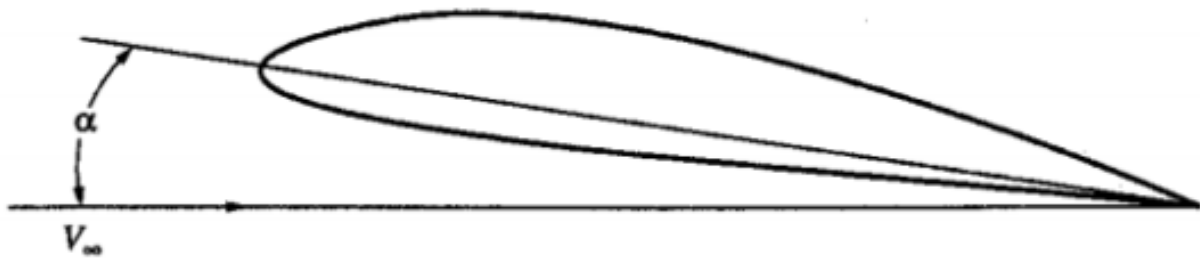


**Εικόνα 37: Η καμπύλη  $C_l - \alpha$ , όπως προέκυψε από το πρόγραμμα MaPflow, στην αρχική μορφή της αεροτομής NACA64418, και στην περίπτωση που η αεροτομή έχει το flap σε πλήρη έκταση.**

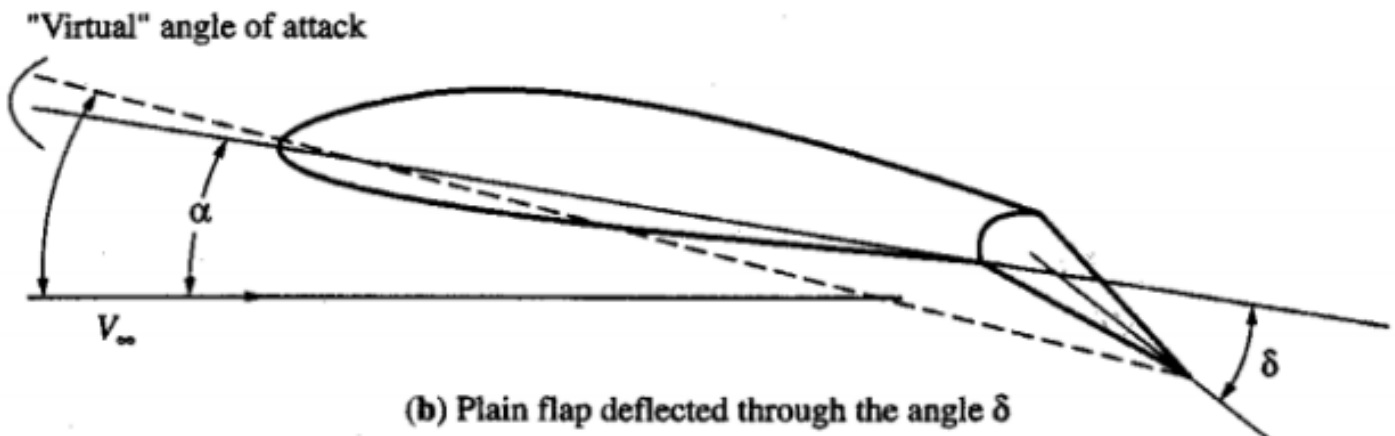
Βλέπουμε ότι η καμπύλη των flap βρίσκεται μετατοπισμένη σε ψηλότερο σημείο από την αντίστοιχη χωρίς τα flap. Είναι φανερό ότι όλα όσα αναφέρθηκαν περί αύξησης του  $C_l$  ισχύουν.

Το παραπάνω διάγραμμα εξηγεί την χρησιμότητα της ύπαρξης των flap σε σύγκριση με την απουσία τους.

Μία άλλη ερμηνεία για την αύξηση του συντελεστή  $C_l$ , καθώς το flap κατεβαίνει, μπορεί να γίνει και αν δούμε την έννοια της φαινόμενης γωνία πρόσπτωσης.



(a) Basic airfoil



**Εικόνα 38: α) Η αεροτομή στην αρχική της θέση. Η γωνία που αναπτύσσεται εδώ είναι η γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ . β) Όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση, τότε αυτό μπορεί να ερμηνευτεί σαν αλλαγή μιας ισοδύναμης γωνίας, που ονομάζεται φαινόμενη γωνία πρόσπτωσης. Εικόνα από <http://www.anla.gr/greek/books/GenikesTechnikesGnoseis.pdf>.**

Θυμίζουμε ότι ως γωνία πρόσπτωσης ορίζεται η γωνία που σχηματίζει η χορδή της αεροτομής με την κατεύθυνση της επ'άπειρον ταχύτητας. Στο σχήμα (a) βλέπουμε την γωνία αυτή.

Στο σχήμα (b) το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση. Σαν αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής θέσης, αλλάζει και η καμπυλότητα της αεροτομής. Αν ενώσουμε την ακμή πρόσπτωσης με την νέα θέση της ακμής εκφυγής, σχηματίζεται μία νέα χορδή, διαφορετική στο μέτρο και στην κλίση από την πραγματική χορδή της αεροτομής. Σαν αποτέλεσμα, σχηματίζεται και μια νέα γωνία με την κατεύθυνση της ταχύτητας του αέρα, που ονομάζεται **φαινόμενη γωνία πρόσπτωσης ('virtual' angle of attack)**. Όπως βλέπουμε και στο παραπάνω σχήμα, όταν το flap κατεβαίνει, η γωνία αυτή φαίνεται να αυξάνεται. Όταν όμως αυξάνεται μία γωνία πρόσπτωσης, σύμφωνα με την καμπύλη  $\alpha - C_l$ , έχουμε και αύξηση στον συντελεστή  $C_l$ . Έτσι, η φαινόμενη αυτή γωνία, αποτελεί έναν επιπλέον τρόπο ερμηνείας της επίδρασης του flap σε μία αεροτομή.

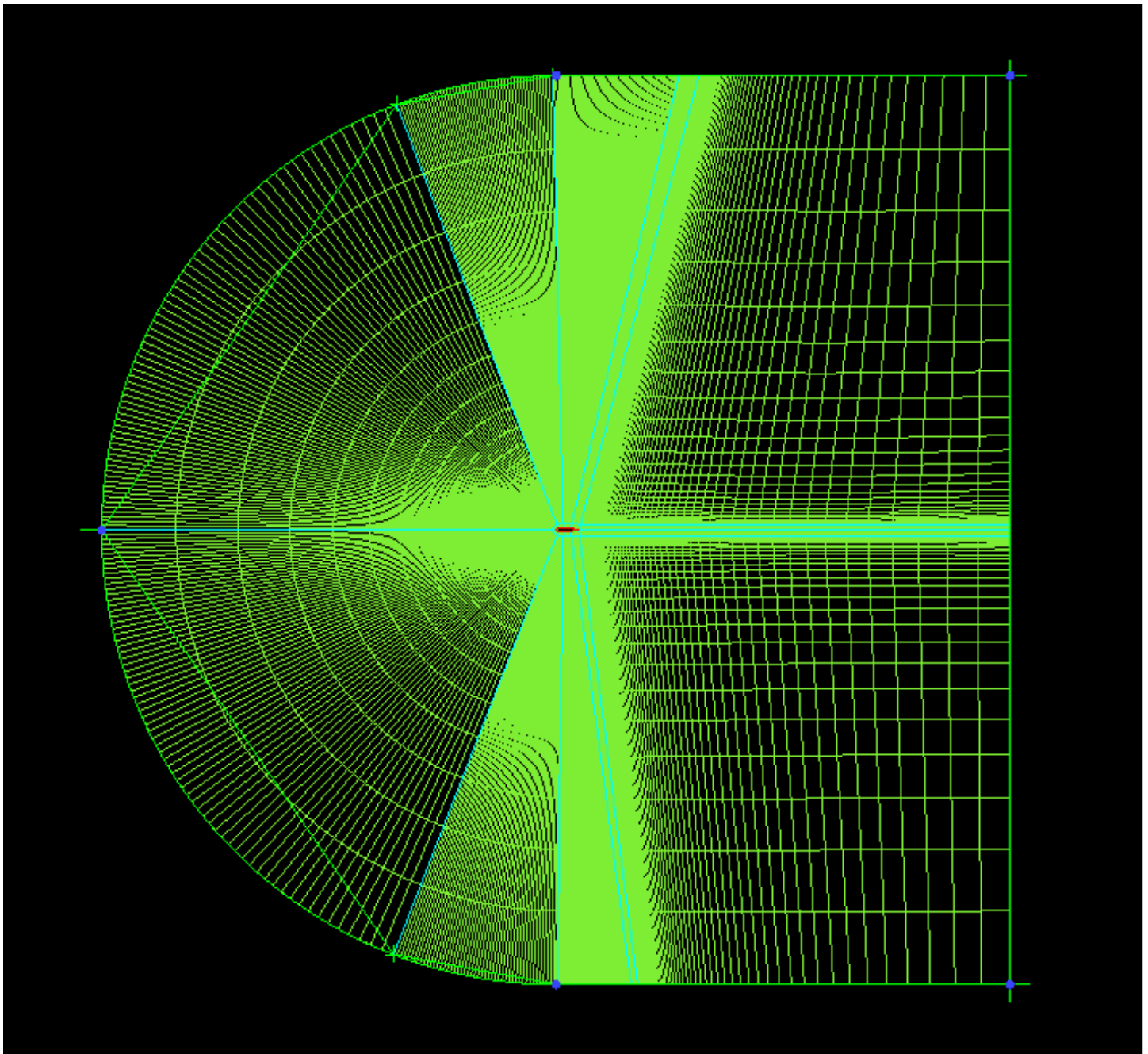
Στα παρακάτω κεφάλαια θα δούμε τον τρόπο που επενεργούν τα flap σε μία διδιάστατη αεροτομή, τις παραμέτρους από τις οποίες ορίζονται, και πώς διαφοροποιείται η φυσική του ρευστού ανάλογα με την τιμή των παραμέτρων αυτών.

## 1.20 Παραμόρφωση Πλέγματος

Είπαμε ήδη ότι η ανάλυση της ροής γύρω από μία αεροτομή με την μέθοδο του CFD, απαιτεί την σχεδίαση ενός πλέγματος. Το πλέγμα αυτό περικλείει την αεροτομή, και διακριτοποιείται σε έναν συγκεκριμένο αριθμό κελιών. Τις παραμέτρους των κελιών αυτών (αριθμός, κατανομή, αποστάσεις κτλ.) καθώς και την γενική μορφή του πλέγματος τις ορίζουμε με το πρόγραμμα σχεδιασμού ICEM CFD.

Στις παρακάτω εικόνες μπορούμε να δούμε το πλέγμα που σχεδιάσαμε για την περίπτωση της αεροτομής NACA64418.

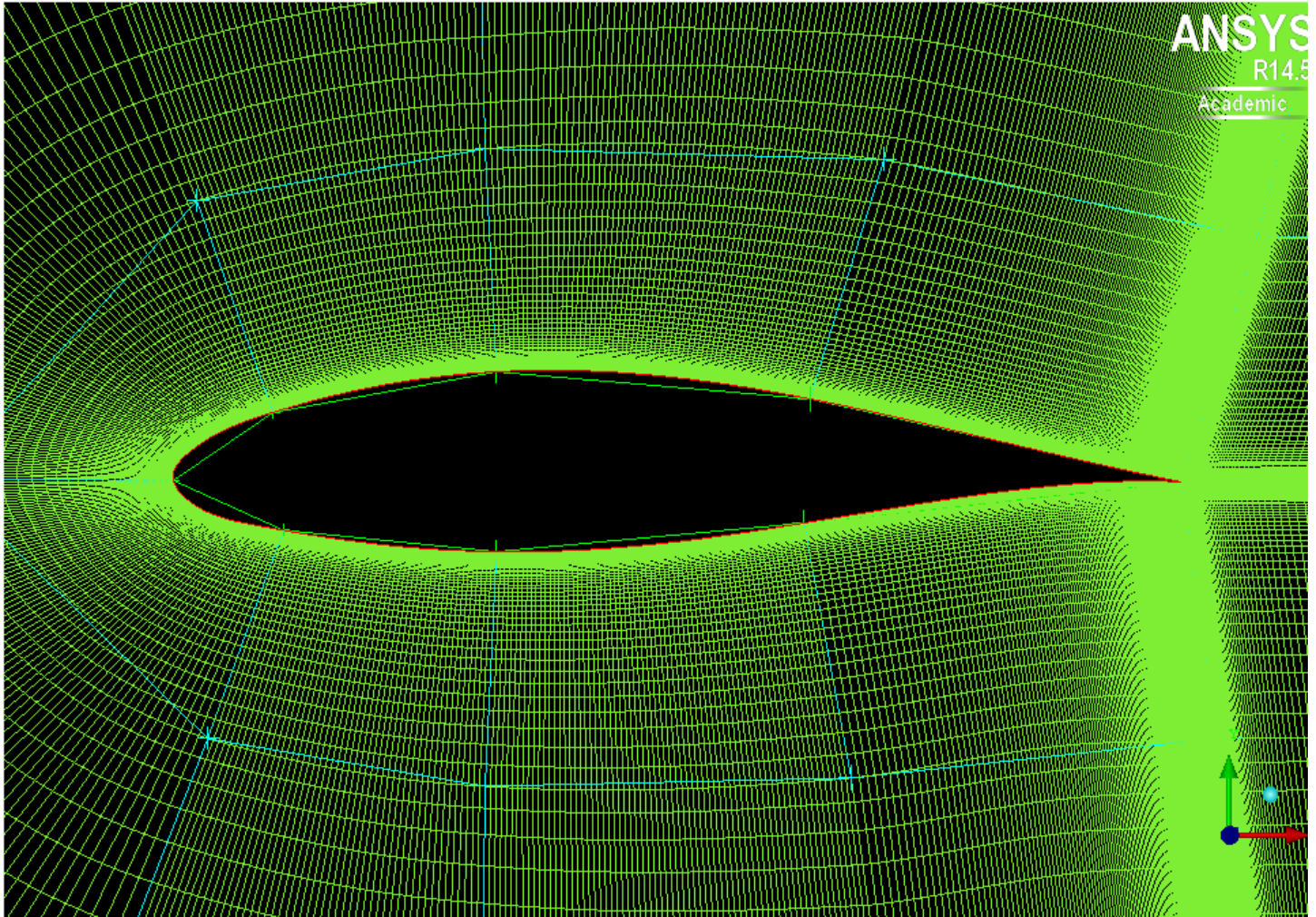
Η πρώτη εικόμα δείχνει το πλέγμα σε όλην του τη μορφή. Το πλέγμα είναι C-type, με structured κελιά. Η πρώτη εικόνα του πλέγματος εστιάζει στο εξωτερικό σύνορο, δηλαδή στο farfield:



**Εικόνα 39: Το πλέγμα (grid) που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα MaPflow, για την αεροτομή NACA64418.**



Η δεύτερη εικόνα δείχνει το πλέγμα στο κομμάτι της αεροτομής. Εδώ βλέπουμε το εσωτερικό σύνορο, το τοίχωμα, δηλαδή, της αεροτομής.



**Εικόνα 40: Το ίδιο πλέγμα, με έμφαση στη θέση της αεροτομής.**

Το παραπάνω πλέγμα είναι αυτό που χρησιμοποιήσαμε σε όλους τους υπολογισμούς για την NACA64418. **Αποτελείται από 138389 κόμβους και 137160 κελιά.**

Το flap αποτελεί μία επιφάνεια η οποία προστίθεται στην περιοχή κοντά στην ακμή εκφυγής της αεροτομής. Στην περίπτωση της διδιάστατης ανάλυσης δεν θα λάβουμε υπόψιν τις ενδεχόμενες "αρθρώσεις" που μπορεί να έχει το flap με την αεροτομή.

Για τον σκοπό αυτό, το flap δεν θα θεωρείται απλά σαν ένα "ανεξάρτητο" μεν σώμα που λειτουργεί όμως σε αρμονία με την αεροτομή. Αντίθετα θα θεωρήσουμε ότι το flap, μαζί με την αεροτομή, αποτελούν ένα ενιαίο και αδιάσπαστο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του flap θα λαμβάνεται υπόψιν καθαρά ως αλλαγή της γεωμετρίας της αεροτομής και τίποτα παραπάνω. **Και επειδή η αεροτομή ορίζεται ως ένα σύνολο συντεταγμένων πεπερασμένου αριθμού σημείων, η αλλαγή της γεωμετρίας λόγω του flap ταυτίζεται με την μετατόπιση ορισμένων από αυτά τα σημεία προς διαφορετικές συντεταγμένες.**

Ο τύπος που σχετίζει τις παλιές συντεταγμένες με τις καινούριες, είναι ο τύπος κίνησης του flap. Ο τύπος αυτός δεν είναι συγκεκριμένος, ούτε και οι παράμετροί του σταθεροί.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι το flap μπορεί να αλλάζει είτε με τρόπο "παραμορφώσιμο" ή με τρόπο "αρθρωτό".

Σε κάθε περίπτωση πάντως, η κίνηση του flap προκαλεί αλλαγή στην γεωμετρία της αεροτομής, στα σημεία κοντά στο trailing edge.

Το πλέγμα όμως που εμείς σχεδιάσαμε στο ICEM χρησιμοποιούσε ως βάση τις αρχικές συντεταγμένες της αεροτομής. Όταν η γεωμετρία αλλάξει, λόγω μετατόπισης των σημείων του flap, θα πρέπει να αλλάξει και η σχετική θέση των κελιών του πλέγματος, ώστε να συμβαδίσει με την νέα μορφή της γεωμετρίας της αεροτομής.

Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, όπως θα δούμε και παρακάτω, η μεταβολή του flap είναι περιοδική, δηλαδή η συνάρτηση που περιγράφει την κίνησή της εξαρτάται από την χρονική στιγμή, ενώ μετά από μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, η κίνηση επαναλαμβάνεται.

Ο δε χρόνος, όπως έχουμε αναφέρει ήδη πολλές φορές, διακριτοποιείται σε έναν συγκεκριμένο αριθμό βημάτων.

Αν το flap βρίσκεται σε διαφορετική θέση ανάλογα με το χρονικό βήμα, τότε και η γεωμετρία της αεροτομής διαφέρει από στιγμή σε στιγμή.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε χρονικό βήμα, πρέπει να επαναυπολογίζεται το πλέγμα έτσι ώστε αυτό να ταιριάζει με τις διαφορετικές συντεταγμένες που ορίζουν την αεροτομή, την κάθε χρονική στιγμή.

Η παραπάνω διαδικασία, η προσαρμογή του πλέγματος στην παραμόρφωση της γεωμετρίας της αεροτομής, λόγω της ύπαρξης του flap, ονομάζεται **παραμόρφωση του πλέγματος**, και θα πρέπει να γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα της ανάλυσης της ροής.

Η παραμόρφωση του πλέγματος γίνεται για όλα τα κελιά του πλέγματος, και είναι μία χρονοβόρα διαδικασία, που επιβαρύνει υπολογιστικά το πρόγραμμα MaPflow.

Επειδή η κίνηση του flap είναι περιορισμένη, η αλλαγή που θα προκληθεί στο πλέγμα θα είναι μικρής σχετικά έκτασης. Για ήπιες κινήσεις, μπορούμε να ορίσουμε έναν αλγόριθμο παραμόρφωσης του πλέγματος που στηρίζεται στην κίνηση του συνόρου, και κρατά την υπάρχουσα συνδεσμολογία (connectivity) των κελιών. Έτσι δεν χρειάζεται να αναδημιουργούμε το πλέγμα εκ νέου. Δηλαδή, ο αλγόριθμος, έτσι όπως ορίζεται, χρησιμοποιεί για κάθε εσωτερικό (μη-συνοριακό) κόμβο, τη μετατόπιση του πλησιέστερου κινούμενου συνοριακού κόμβου για να παράγει γραμμικά τις νέες θέσεις.

Για κάθε κόμβο  $i$ , υπολογίζεται η ελάχιστη απόσταση  $d_i$  από το σύνορο και ο συνοριακός κόμβος που αντιστοιχεί σε αυτήν την απόσταση συμβολίζεται ως  $i_{wall}$ . Με βάση τα όσα είπαμε η κίνηση του κόμβου  $i_{wall}$ , του πλησιέστερου συνοριακού κόμβου σε έναν εσωτερικό κόμβο  $i$ , παράγει γραμμικά την νέα θέση του  $i$ . Η επίδραση αυτή του  $i_{wall}$  στον  $i$  εξομαλύνεται από την συνάρτηση απόστασης (distance function):

$$f(i) = \frac{i_y^2(i)}{i_x^2(i) + i_y^2(i)}$$

όπου:

$$i_x(i) = \frac{1 - e^{-(d_i/d_{max})}}{(e - 1)/e}$$

$$i_y(i) = \frac{1 - e^{1-(d_i/d_{max})}}{1 - e}$$

με

$$d_{max} = \max_i \{d_i\}$$

δηλαδή ο όρος  $d_{max}$  αναφέρεται στην μέγιστη από τις ελάχιστες αποστάσεις που ο κάθε κόμβος  $i$  απέχει από το σύνορο της αεροτομής.

Η μετατόπιση τελικά του κάθε κόμβου υπολογίζεται από το γινόμενο της συνάρτησης απόστασης επί τη μετατόπιση του αντίστοιχου πλησιέστερου συνοριακού κόμβου:

$$\vec{dr}(i) = f(i) \cdot \vec{dr}(i_{wall})$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο όγκος ελέγχου  $\Omega$  που έχουμε για την περίπτωση του flap **δεν είναι σταθερός**.

Για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να θυμηθούμε τα όσα αναφέραμε στο κεφάλαιο: **Ο Διατηρητικός Νόμος για την Περίπτωση Κινούμενου Όγκου Ελέγχου**. Δηλαδή, στους όρους που σχετίζονται με την αρχή διατήρησης θα πρέπει να προστεθεί και ο όρος της μετακίνησης του όγκου ελέγχου.

Επειδή ο όγκος ελέγχου  $\Omega$  υφίσταται μετακινήσεις, κάθε συνοριακή του επιφάνεια  $S$  θα χαρακτηρίζεται από μία ταχύτητα  $\vec{v}_s$ . Δηλαδή στις εξισώσεις διατήρησης, ο όγκος ελέγχου  $\Omega$  θα επηρεάζεται και από την μετατόπιση των επιφανειακών faces. Επειδή τα faces κινούνται με ταχύτητα  $\vec{v}_s$  και επειδή ο χρόνος ανάμεσα σε δύο χρονικά βήματα είναι  $\Delta t$ , η ογκική παραμόρφωση που προκαλείται λόγω μετακίνησης μιας στοιχειώδους επιφανείας  $d\vec{S}$  θα είναι  $\vec{v}_s \cdot d\vec{S}\Delta t$ .

Στη συνέχεια οι εξισώσεις διατήρησης θα διαμορφωθούν κατάλληλα όπως αναφέραμε στην προαναφερόμενη ενότητα.

Καθίσταται λοιπόν σαφές, ότι πρέπει να υπολογίζουμε την ταχύτητα  $\vec{v}_s$  από κάθε face του κινούμενου πλέγματος. Ο αλγόριθμος που δίνει την ταχύτητα αυτή αποτελεί μέρος του αλγορίθμου της παραμόρφωσης του πλέγματος.

Ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με βάση την χρονική διακριτοποίηση ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές  $t^n$  και  $t^{n+1}$ . Από τον ορισμό της ταχύτητας, ισχύει:

$$u = \frac{dx}{dt}$$

Στη συνέχεια, με εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών 1ης τάξης, μπορούμε να καταλήξουμε στις εξής δύο εξισώσεις για την ταχύτητα ως προς τον οριζόντιο άξονα (x) και τον κατακόρυφο (y):

$$u_x = \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t}$$

$$u_y = \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t}$$

Θα μπορούσαμε και να εφαρμόσουμε πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης, αλλά η διαφορά στα αποτελέσματα θα είναι μικρή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε πρώτη τάξης, που είναι πιο γρήγορες υπολογιστικά.

Οι παραπάνω ταχύτητες  $u_x$  και  $u_y$  αναφέρονται στους κόμβους του πλέγματος, αφού και οι αντίστοιχες μετατοπίσεις  $x$  και  $y$  μας είναι γνωστές για αυτούς. Κάθε ζευγάρι γειτονικών κόμβων στο διδιάστατο πλέγμα ενώνεται από μία επιφάνεια, που είναι το face. Προκειμένου να υπολογίσουμε την ταχύτητα του face, θα την ταυτίσουμε με την ταχύτητα στο μέσον του ευθύγραμμου τμήματος

που ενώνει τους δύο κόμβους. Στη συνέχεια, με γραμμική παρεμβολή, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα ταχύτητας του face  $\begin{pmatrix} u_{x,mid} \\ u_{y,mid} \end{pmatrix}$  από τους εξής τύπους:

$$u_{x,mid} = \frac{(x_{mid} - x_{left})(u_{x,right} - u_{x,left})}{x_{right} - x_{left}} + u_{x,left}$$

$$u_{y,mid} = \frac{(y_{mid} - y_{left})(u_{y,right} - u_{y,left})}{y_{right} - y_{left}} + u_{y,left}$$

Όπου ως left και right ορίζουμε αυθαίρετα τους δύο γειτονικούς κόμβους που ορίζουν το διδιάστατο face.

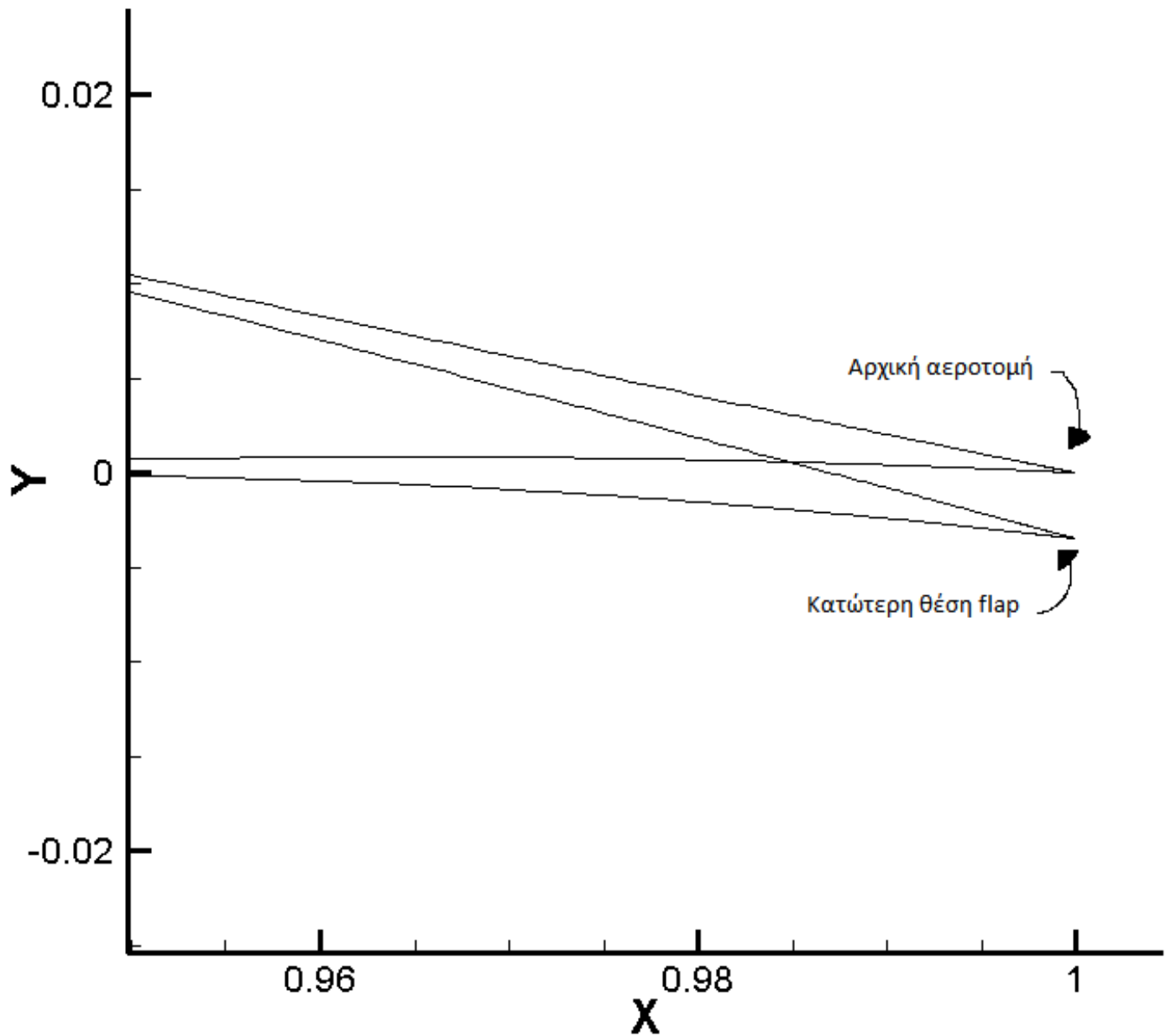
Επιπλέον, επειδή, όπως είπαμε, το mid βρίσκεται ακριβώς στη μέση των left και right, θα είναι και:

$$u_{x,mid} = \frac{u_{x,left} + u_{x,right}}{2}$$

$$u_{y,mid} = \frac{u_{y,left} + u_{y,right}}{2}$$

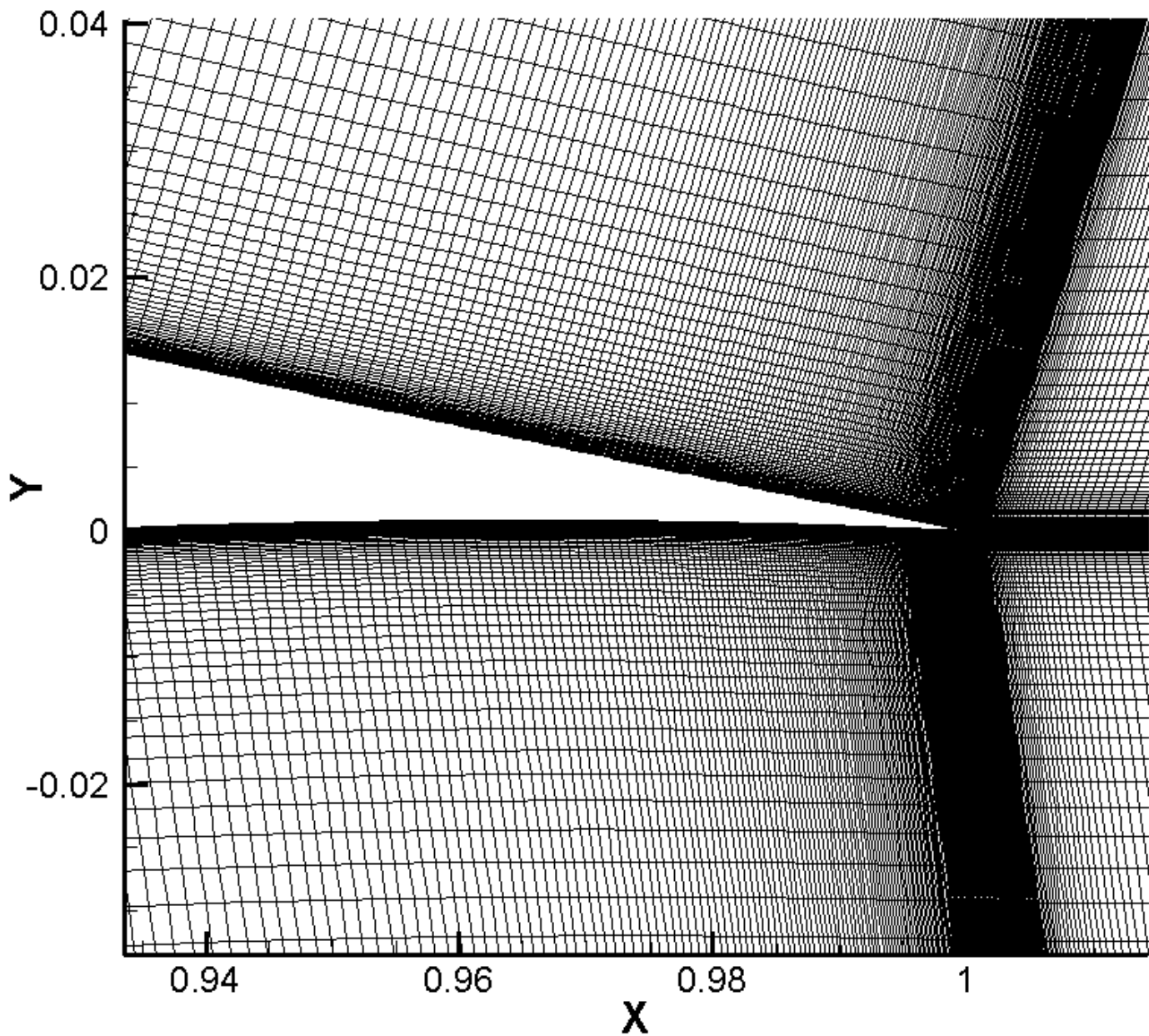
Έχοντας ορίσει τον αλγόριθμο που παραμορφώνει το πλέγμα, μπορούμε να δείξουμε ένα παράδειγμα στο συγκεκριμένο πλέγμα της αεροτομής NACA64418 που είχαμε στην προηγούμενη εικόνα.

Αρχικά ας εστιάσουμε στο trailing edge, για να δούμε την διαφορά ανάμεσα στην αρχική μορφή της αεροτομής, και στην τελική μορφή, όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση:



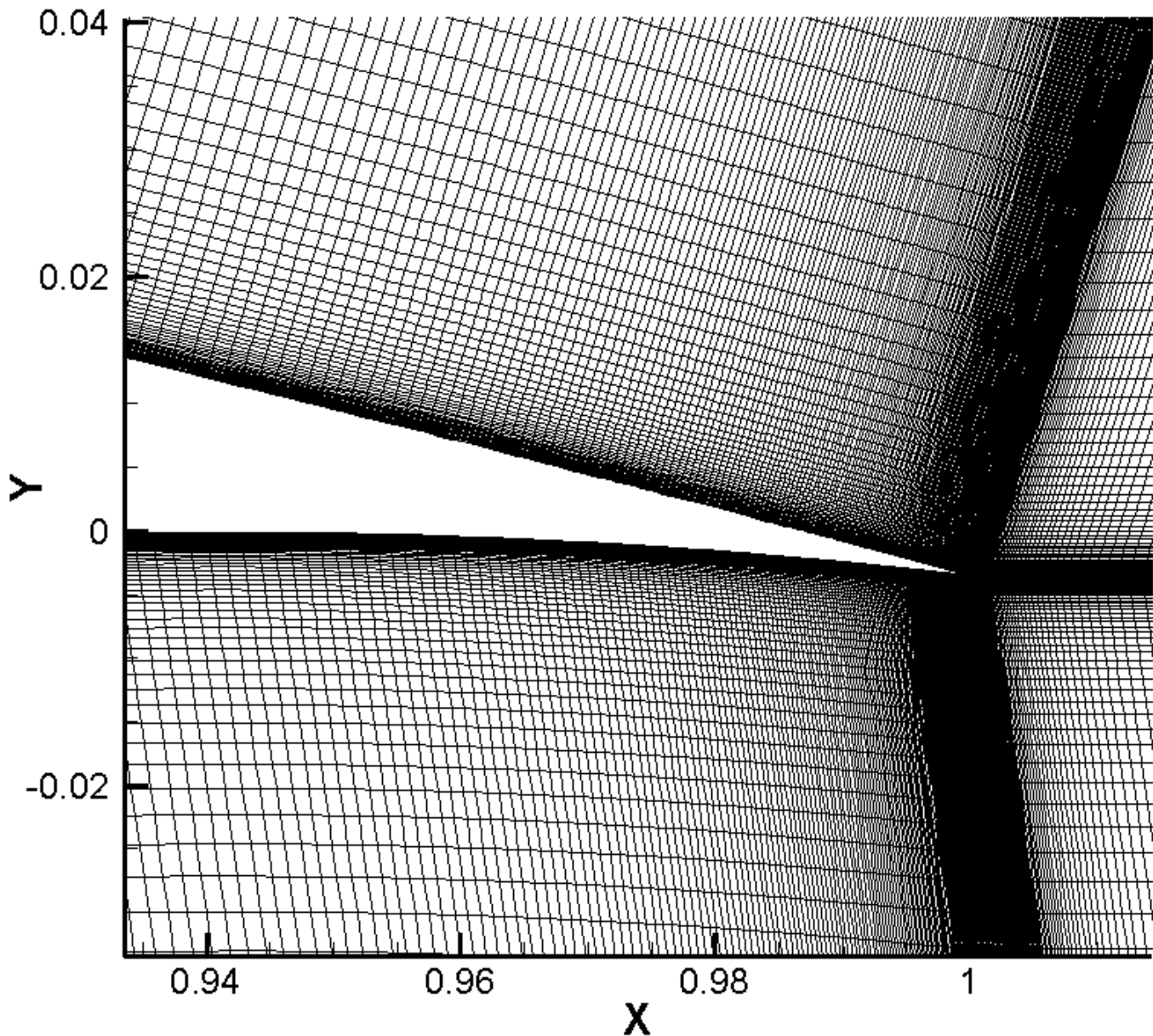
**Εικόνα 41: Η παρουσία του flap αλλάζει την μορφή της αεροτομής, κοντά στο trailing edge. Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην αεροτομή NACA64418.**

Στην αρχική αεροτομή, το πλέγμα θα είναι όπως το σχηματίσαμε εμείς στο Ansys. Αν εστιάσουμε ξανά στην ακμή εκφυγής, μπορούμε να δούμε ποια είναι η αρχική μορφή του πλέγματος:



**Εικόνα 42: Η μορφή του πλέγματος κοντά στο trailing edge, στην αρχική μορφή της NACA64418.**

Στη συνέχεια ας δούμε πως θα γίνει το πλέγμα, όταν το flap αλλάξει θέση. Στην κατώτερη δυνατή θέση του flap, αυτό θα είναι:



**Εικόνα 43: Η μορφή του πλέγματος κοντά στο trailing edge, στην παραμορφωμένη από το flap, μορφή της NACA64418.**

Το πλέγμα της τελευταίας εικόνας δεν έχει σχεδιαστεί από εμάς μέσω του Ansys, όπως στην περίπτωση της εικόνας του αρχικού πλέγματος.

Αντίθετα, το πλέγμα στην κατώτερη θέση του flap προέκυψε υπολογιστικά, μέσω του αλγορίθμου παραμόρφωσης του πλέγματος που αναφέραμε. Είναι φανερό η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου αυτού. Όπως βλέπουμε και στην εικόνα, το πλέγμα κουνήθηκε στις κατάλληλες κάθε φορά θέσεις ώστε να εφαρμόσει στην νέα θέση της αεροτομής.

Αυτή η μετακίνηση κάθε φορά του πλέγματος σύμφωνα με την νέα θέση της αεροτομής, θα πρέπει να γίνεται για κάθε φορά που η αεροτομή αλλάζει θέση. Στην περίπτωση που έχουμε αεροτομή με ταλαντωτική κίνηση (όπως άλλωστε και έχουμε στην παρούσα διπλωματική), τότε κάθε χρονική στιγμή (κάθε χρονικό βήμα), η αεροτομή θα έχει διαφορετική γεωμετρία, οπότε θα πρέπει να γίνεται επαναυπολογισμός του πλέγματος για κάθε χρονικό βήμα.

## 2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ FLAP

### 2.1 Συνάρτηση Κίνησης Παραμορφώσιμου Flap

Ποιες είναι όμως οι συναρτήσεις που περιγράφουν την κίνηση του flap;

Αναφερθήκαμε ήδη επιγραμματικά σε δύο μορφές flap.

Η πρώτη περίπτωση αναφέρεται σε **παραμορφώσιμα flap**. Χαρακτηριστικό αυτών είναι ότι δεν διατηρούν σταθερό το μήκος τους, αλλά επιμηκύνονται ανάλογα με την σχετική θέση που έχουν ως προς την αεροτομή.

Αρχικά θεωρούμε ότι τοποθετούνται στο 0.1 της χορδής (θεωρούμε χορδή ίση ένα μοναδιαίο και αδιάστατο μέγεθος 1) από την μεριά της ακμής εκφυγής, δηλαδή στο  $1-0.1=0.9$ , ως προς την ακμή πρόσπτωσης.

Όλα τα σημεία της αεροτομής που βρίσκονται αριστερά του 0.9, θα έχουν δηλαδή τετμημένη  $x < 0.9$ , βρίσκονται εκτός του flap, και άρα η θέση τους δεν εξαρτάται από την κίνησή του. Αντίστοιχα, όσα σημεία βρίσκονται δεξιά του 0.9, έχουν δηλαδή  $x > 0.9$ , αποτελούν μέρη του flap, και άρα οι συντεταγμένες τους αλλάζουν ανάλογα με την κίνηση του flap.

Στο σημείο αυτό ίσως να γεννηθεί μία απορία από τον αναγνώστη. Έχουμε αναφέρει ότι κάθε αεροτομή ορίζεται από ένα σύνολο σημείων. Το σύνολο των συντεταγμένων των σημείων αυτών, όταν ενώνονται, σχηματίζουν την αεροτομή. Έχουμε όμως πει επίσης ότι δεν υπάρχει αρχείο με τις συντεταγμένες (δηλαδή την μορφή) της αεροτομής αυτή καθ'εαυτή που να χρησιμοποιείται από το πρόγραμμα MaPflow. Τα αρχικά σημεία που ορίζουν την αεροτομή εισάγονται στο Ansys, και γύρω από αυτά ο χρήστης σχεδιάζει το πλέγμα, που αποτελεί το αρχείο grid.msh. Όπως είναι φανερό, το αρχείο grid.msh είναι υπεραρκετό στον προσδιορισμό της γεωμετρίας της αεροτομής από το πρόγραμμα, καθώς χαρακτηρίζεται από ένα πλέγμα που ακολουθεί την καμπύλη του τοιχώματος της. Έτσι, άμα σχεδιαστεί το πλέγμα, το αρχείο με τις συντεταγμένες της αεροτομής καθίσταται πλέον άχρηστο και δεν ξαναχρησιμοποιείται.

Οπότε, όταν λέμε ότι αλλάζουμε τις συντεταγμένες της αεροτομής λόγω της κίνησης του flap, δεν αλλάζουμε το αρχείο με τα σημεία της αεροτομής, αλλά τα σημεία-κόμβους του πλέγματος που βρίσκονται πάνω στο εσωτερικό σύνορο, τα οποία και ταυτίζονται με τις αντίστοιχες θέσεις της αεροτομής.

Τα σημεία της αεροτομής (ή σωστότερα, τα εσωτερικά σημεία του πλέγματος), συνδέονται με την κίνηση του παραμορφώσιμου flap. Οι τεταγμένες  $y$  των σημείων αυτών, θα ακολουθούν την εξής αλλαγή στη γεωμετρία:

$$y_{flap}(x) = y_{init}(x) + by_b(x)$$

όπου:

$y_{init}(x)$  οι αρχικές τεταγμένες της αεροτομής στην αρχική τους (initial) θέση

$$y_b(x) = \begin{cases} \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} - RCC & \text{αν } x \geq 0.9 \\ 0 & \text{αν } x < 0.9 \end{cases}$$



Από τον παραπάνω τύπο, γίνονται φανερά τα όσα είπαμε για τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του  $x=0.9$  και για αυτά που βρίσκονται δεξιά.

Δηλαδή, αν είναι  $x < 0.9$ , τότε θα ισχύει  $y_{flap}(x) = y_{init}(x) + b \cdot 0 \Leftrightarrow y_{flap}(x) = y_{init}(x)$ . Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία για τα οποία ισχύει  $x < 0.9$ , θα έχουν πάντοτε τις ίδιες τεταγμένες με την αεροτομή στην αρχική της θέση. Δηλαδή, όσα σημεία βρίσκονται αριστερά του flap, δεν αποτελούν μέρος του και άρα δεν επηρεάζονται από την κίνησή του.

Αν πάλι είναι  $x \geq 0.9$ , τότε  $y_b \neq 0$  και άρα  $y_{flap} \neq y_{init}$ . Δηλαδή όλα τα σημεία της αεροτομής που βρίσκονται δεξιότερα από το σημείο του  $0.9$  της χορδής, αποτελούν σημεία του flap και άρα αλλάζουν την τεταγμένη τους ανάλογα με την κίνησή του.

Ο όρος  $RCC$  δίνεται από τον εξής τύπο:

$$RCC = \frac{(0.1 \cdot \sin \frac{\pi}{180})^2 + 0.1^2}{0.2 \cdot \sin \frac{\pi}{180}}$$

Ενώ ο συντελεστής  $b$  από τον εξής:

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t)$$

όπου:

$b_{amp}$  είναι το πλάτος της γωνίας παραμόρφωσης, και:

$f_k$  είναι η συχνότητα της κίνησης.

Από όλους τους παραπάνω τύπους, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1) Δεν υπάρχει μεταβολή στις τετμημένες  $x$ . Το flap αλλάζει την γεωμετρία της αεροτομής μόνο κατά τον  $y$  άξονα, και όχι και κατά των  $x$ . Αυτό σημαίνει, ότι, αν έχουμε ένα σύνολο συντεταγμένων σημείων, η μεταβολή στις νέες συντεταγμένες θα γίνει μονάχα στις τεταγμένες, και όχι και στις τετμημένες.

2) Όσο πιο κοντά βρίσκεται ένα σημείο στην ακμή εκφυγής (trailing edge), τόσο μεγαλύτερη είναι η αλλαγή στην τεταγμένη του, δηλαδή τόσο περισσότερο απομακρύνεται από την αρχική του θέση. Αυτό αποδεικνύεται γρήγορα από τον τύπο  $y_b(x) = \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} - RCC$ , όπου για  $x$  που τείνει στο 1 (οπότε και πλησιάζει στην άκρη της χορδής, στο trailing edge δηλαδή), θα έχουμε μεγαλύτερο  $x - 0.9$ , άρα μικρότερο  $-(x - 0.9)$ , και άρα και μικρότερο  $y_b(x) = \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} - RCC$ . Ωστόσο επειδή:

$$RCC = \sqrt{RCC^2} > \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2}$$

μιας και  $(x - 0.9) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.9$ , θα είναι:

$$RCC > \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} \Leftrightarrow \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} - RCC < 0 \Leftrightarrow$$

$$y_b(x) < 0$$

Άρα όταν λέμε μικρότερο  $y_b(x)$ , αφού το  $y_b$  είναι αρνητικό, θα είναι μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή.

Έτσι, όσο μεγαλύτερη είναι η τετμημένη του συγκεκριμένου σημείου του flap, δηλαδή όσο πιο κοντά βρίσκεται στην ακμή εκφυγής, τόσο μικρότερο είναι το  $y_b(x) < 0$ , και άρα τόσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος  $|y_b(x)|$ , που είναι και αυτό που προσδιορίζει την απομάκρυνση του σημείου του flap από την αρχική θέση της αεροτομής.

Παρακάτω θα εξηγήσουμε ποια είναι η φυσική σημασία της αρνητικής τιμής του  $y_b(x)$ .

3) Ο όρος  $b$  είναι ένας συντελεστής που πολλαπλασιάζεται στον όρο  $y_b$ . Η μέγιστη τιμή του συντελεστή  $b$ , είναι αυτό που ορίσαμε ως πλάτος της γωνίας παραμόρφωσης  $b_{amp}$ . Ο συντελεστής  $b$  είναι αδιάστατος.

4) Το flap αλλάζει θέση σαν συνάρτηση της χρονικής στιγμής. Δηλαδή η κίνηση που επιτελεί είναι ταλαντωτική. Αυτό φαίνεται στον όρο  $b$ , στον οποίο υπεισέρχεται και η συχνότητα κίνησής του  $f_k$ .

Όταν το flap αρχίσει να κινείται, δηλαδή μετά την πάροδο ενός μικρού χρονικού βήματος  $\Delta t$  (για μικρές δηλαδή χρονικές στιγμές  $t$ ), η τιμή της γωνίας  $b$  θα είναι θετική. Άρα η τιμή του γινομένου  $by_b(x)$  προκύπτει αρνητική, αφού  $y_b(x) < 0$ .

Συνεπώς ο όρος  $y_{flap}(x) = y_{init}(x) + by_b(x) < y_{init}(x) \Leftrightarrow y_{flap}(x) < y_{init}(x)$ , που σημαίνει ότι η νέα θέση του flap θα βρίσκεται σε χαμηλότερες συντεταγμένες από τις αρχικές, δηλαδή θα έχει μετατοπιστεί προς τα κάτω.

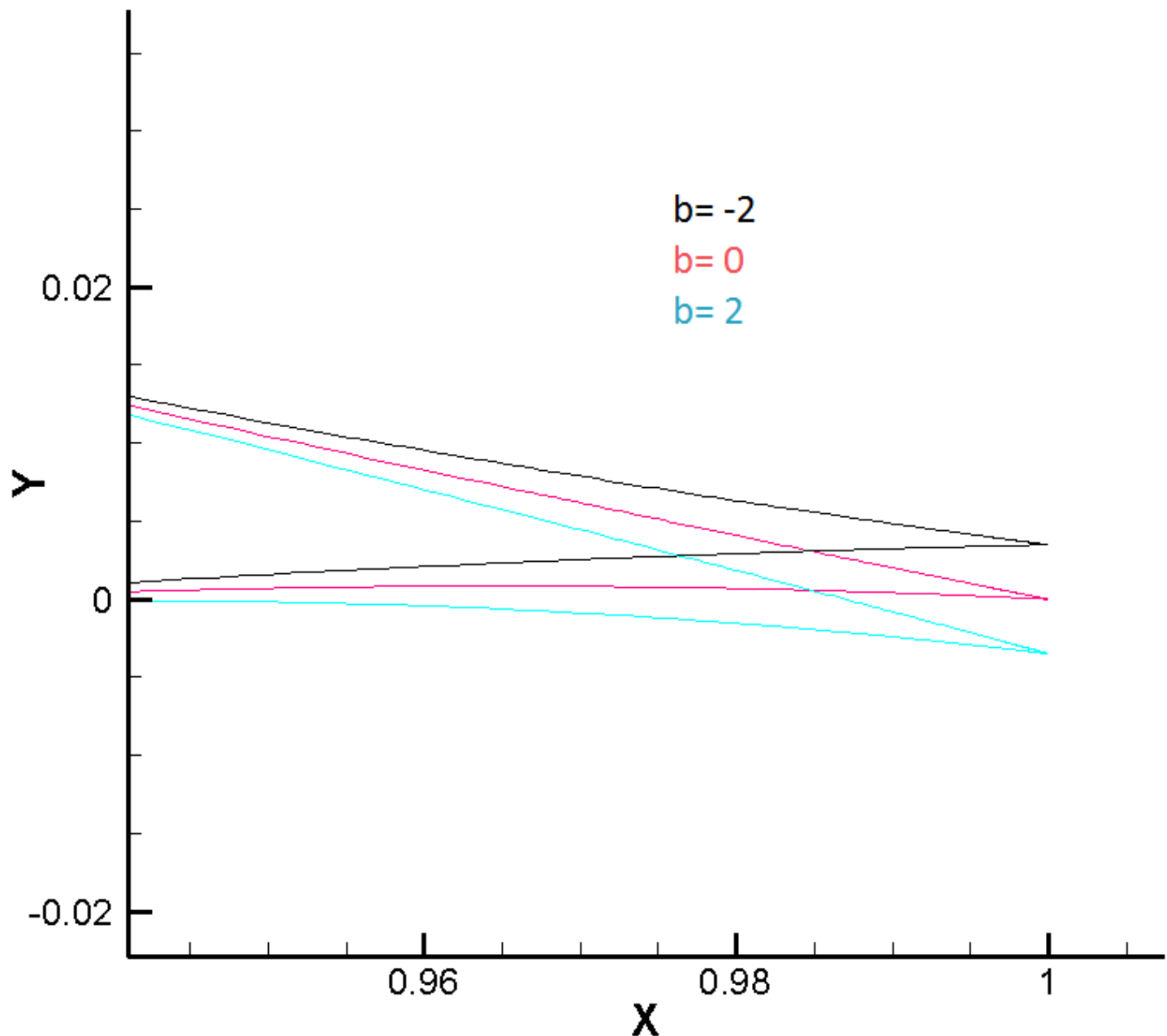
Έτσι με το που εκκινά η κίνηση του flap, δηλαδή για μικρό χρονικό βήμα  $\Delta t$  και άρα, θετικό  $b$ , το flap κινείται προς τα κάτω.

Όταν, μετά από ένα χρονικό διάστημα  $t$ , το  $b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t)$  πάρει αρνητικές τιμές, τότε το γινόμενο  $by_b(x)$  θα γίνει θετικό, οπότε ο όρος

$y_{flap}(x) = y_{init}(x) + by_b(x) > y_{init}(x) \Leftrightarrow y_{flap}(x) > y_{init}(x)$ , που σημαίνει ότι η νέα θέση του flap θα βρίσκεται σε υψηλότερες συντεταγμένες από τις αρχικές, δηλαδή θα έχει μετατοπιστεί προς τα πάνω.

Το φαινόμενο αυτό θα συνεχίζεται. Όταν ο όρος  $b$  είναι θετικός, το flap μετατοπίζεται προς τα κάτω, και όταν ο όρος αυτός γίνεται αρνητικός, θα πηγαίνει προς τα πάνω.

Αν θέσουμε  $b_{amp} = 2$  μπορούμε να δούμε πώς θα είναι η καμπύλη του flap στις ακραίες θέσεις, από την παρακάτω εικόνα:



**Εικόνα 44: Η αεροτομή NACA64418 στην αρχική της μορφή (δηλαδή  $b=0$ ) καθώς και στην άνω ακραία θέση του flap ( $b=-2$ ) και στην κάτω ακραία ( $b=2$ ).**

Τέλος, πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή, να αναφέρουμε ότι, όπως βλέπουμε και στην παραπάνω εικόνα, και με βάση τα όσα αναφέραμε ήδη, καθίσταται σαφές γιατί το συγκεκριμένο flap, ονομάζεται παραμορφώσιμο. Το γεγονός ότι έχουμε μεταβολή μονάχα στις κατά  $y$  συντεταγμένες και όχι και στις κατά  $x$ , σημαίνει ότι θα ήταν αδύνατο να διατηρεί σταθερό και το μήκος του.

Όσο περισσότερο πλησιάζει τις ακραίες θέσεις του (2 μοίρες, -2 μοίρες) τόσο περισσότερο έχει επιμηκυνθεί.

## 2.2 Προσαρμογή Παραμορφώσιμου Flap στο Πρόγραμμα MaPflow

Το πρόγραμμα MaPflow, όπως είπαμε στο σχετικό κεφάλαιο, χρησιμεύει για να επιλύσει της διατηρητικές εξισώσεις ρευστομηχανικής σε ένα δοσμένο πλέγμα, δηλαδή να επιλύσει την ροή γύρω από μία αεροτομή.

Στην παρούσα διπλωματική, προσπαθήσαμε να εντάξουμε και ένα flap στην αεροτομή αυτή. Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση του παραμορφώσιμου flap ήταν, όπως άλλωστε έχουμε αναφέρει πολλές φορές, η NACA64418.

Το πρόγραμμα MaPflow, κλήθηκε, προτού επιλύσει τις εξισώσεις ρευστομηχανικής, να ακολουθήσει τον αλγόριθμο της παραμόρφωσης του πλέγματος, ώστε να εντάξει την κίνηση του flap στους ρευστομηχανικούς υπολογισμούς του.

Στην προκειμένη περίπτωση, λοιπόν, πέρα από το αρχείο `euler.inp`, το πρόγραμμα θα δέχεται και άλλα αρχεία εισόδου, που περιγράφουν την συνάρτηση κίνησης του παραμορφώσιμου flap.

Ένα είναι το αρχείο `flap_par.inp`. Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε τι ακριβώς ορίζουμε στην κάθε σειρά του αρχείου αυτού:

### flap\_par.inp

Αριθμός σειράς	Μεταβλητή
1η	ch
2η	fk
3η	bamp
4η	ph_deg
5η	steps

Όπου:

-Στην πρώτη σειρά ορίζουμε το σημείο πάνω στην αεροτομή, πάνω στην οποία το flap τοποθετείται. Επειδή θεωρούμε τη χορδή της αεροτομής μοναδιαία, θα είναι  $ch < 1$ . Συγκεκριμένα, για την περίπτωση των υπολογισμών που κάναμε, για το παραμορφώσιμο flap, δεχτήκαμε  $ch = 0.9$ .

-Στην δεύτερη σειρά ορίζουμε την τιμή που θα πάρει η συχνότητα  $f_k$ . Η επίλυση έγινε για πολλές διαφορετικές συχνότητες, για κάθε μία από τις οποίες εξάγαμε αντίστοιχα διαγράμματα. Συγκεκριμένα, οι συχνότητες που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $f_k = 0.02, 0.1, 0.5$

-Στην τρίτη σειρά ορίζουμε την τιμή του  $b_{amp}$  δηλαδή το πλάτος του συντελεστή  $b$ . Θυμίζουμε ότι πρόκειται για ένα μέγεθος αδιάστατο. Για όλες τις μετρήσεις που κάναμε, θεωρήσαμε  $b_{amp} = 2$ .

-Στην τέταρτη σειρά ορίζουμε την αρχική φάση  $ph_{deg}$  του συντελεστή  $b$ . Για λόγους καθαρά πρακτικούς, που αφορούν το πρόγραμμα, αποφασίσαμε στην συνάρτηση:

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t)$$

να προσθέσουμε και τον όρο της αρχικής φάσης, ως εξής:

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t + ph_{deg})$$

Η αρχική φάση ορίζεται εδώ σε μοίρες, για λόγους ευκολίας, και μετατρέπεται σε rad στο πρόγραμμα.

Η αρχική φάση δεν έχει συγκεκριμένη τιμή, αλλά ορίζεται ανάλογα με την περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε. Αν θέλουμε το flap απλά να κινείται ταλαντωτικά, και δεν μας ενδιαφέρει να έχει αρχική φάση, τότε θέτουμε  $ph_{deg} = 0$ .

Η αρχική φάση παίζει πολύ μεγάλη σημασία, και ουσιαστικά αποτελεί και τον λόγο που προστέθηκε ο όρος αυτός στην συνάρτηση κίνησης, στην περίπτωση που επιθυμούμε το flap να σταθεί σε ένα συγκεκριμένο σημείο, και να μη ταλαντώνεται.

Ας δούμε το παράδειγμα της περίπτωσης που το flap βρίσκεται ακίνητο στην κατώτερη δυνατή εκτεταμένη θέση. Τότε θα πρέπει να είναι:

$$b = b_{amp}$$

(θυμίζουμε, ότι θετικό  $b$  σημαίνει μετατόπιση του flap προς τα κάτω)

Αν όμως ήταν απλά ορισμένη η κίνηση ως εξής:

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση δεν θα έδινε ποτέ την τιμή  $b = b_{amp}$ , γιατί για καμία τιμή του  $f_k$  και αν ορίσουμε δεν θα είχαμε ποτέ  $\sin(2f_k \cdot t) = 1$ .

Συνεπώς, αν το πρόγραμμα διάβαζε την εξίσωση  $b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t)$ , δεν θα μπορούσαμε να επιτελέσουμε υπολογισμούς για κάποια σταθερή θέση του flap.

Αν όμως αντί για την παραπάνω ορίσουμε την:

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t + ph_{deg})$$

τότε μπορούμε πολύ εύκολα να έχουμε  $b = b_{amp} \Leftrightarrow \sin(2f_k \cdot t + ph_{deg}) = 1$ , αν θέσουμε  $f_k = 0$  και  $ph_{deg} = 90^\circ$ , αφού τότε θα είναι:

$$\sin(2 \cdot 0 \cdot t + 90^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$$

Ομοίως, αν θέλουμε το flap να βρίσκεται ακίνητο στην μέγιστη δυνατή θέση, δηλαδή  $b = -b_{amp}$ , θα πρέπει να θέσουμε  $f_k = 0$  και  $ph_{deg} = -90^\circ$ , αφού  $\sin(-90^\circ) = -1$ .

-Στην πέμπτη σειρά ορίζουμε τα *steps*, δηλαδή τον αριθμό των χρονικών βημάτων ανά περίοδο της κίνησης του flap.

Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσαμε να ορίσουμε είτε τον αριθμό των χρονικών βημάτων, είτε το μέγεθος του χρονικού βήματος. Για λόγους πρακτικούς, αποφασίσαμε να ορίσουμε το πρώτο.

Έτσι, το μέγεθος του χρονικού βήματος θα είναι συγκεκριμένο:

$$DT = \frac{T}{steps}$$

Αλλά επειδή:

$$\omega_k = 2 \cdot f_k = 2 \cdot \frac{\pi}{T} \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{\pi}{f_k}$$

καταλήγουμε:

$$DT = \frac{\pi}{steps \cdot f_k}$$

Ο αριθμός των *steps* δεν είναι συγκεκριμένος, αλλά εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Το καλύτερο είναι να έχουμε πολλά *steps*, καθώς ο χρόνος στο φυσικό φαινόμενο είναι συνεχής, οπότε όσο μικρότερο είναι το χρονικό βήμα, τόσο καλύτερη διακριτοποίηση του χρόνου έχουμε, και άρα τόσο καλύτερα προσεγγίζουμε το φυσικό πρόβλημα. Μεγάλος αριθμός *steps* όμως επιβαρύνει την επίλυση, καθώς αυξάνει υπερβολικά τους υπολογιστικούς χρόνους. Έτσι, αναγκάζομαστε σε κάθε υπολογιστική διαδικασία, να βρίσκουμε τον ιδανικό αριθμό χρονικών επαναλήψεων.

Πάντως, κρίνουμε πάντα με βάση το χρονικό βήμα *DT* και όχι με βάση τον αριθμό των βημάτων *steps*.

Επιθυμητό είναι να έχουμε πάντα μικρό χρονικό βήμα. Όπως βλέπουμε από τον τύπο  $DT = \frac{\pi}{steps \cdot f_k}$ , αν η συχνότητα κίνησης του *flap* είναι μεγάλη, τότε το χρονικό βήμα μικραίνει ούτως ή άλλως, οπότε μπορούμε να επιτρέψουμε στο πρόγραμμα λίγα βήματα, κερδίζοντας έτσι υπολογιστικό χρόνο.

Όταν όμως η συχνότητα είναι μικρή, τότε το βήμα θα μεγαλώνει σε διάρκεια, οπότε αναγκαστικά, πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό *steps* ώστε να επαναφέρουμε το *DT* σε κάποια μικρότερη τιμή.

Συνεπώς, αν οι συχνότητες με τις οποίες θα δουλέψουμε είναι οι  $f_k = 0.02, 0.1, 0.5$ , τότε, με βάση τα όσα είπαμε, για την περίπτωση που  $f_k = 0.5$  μπορούμε να έχουμε λιγότερο αριθμό βημάτων *steps* από ότι για την περίπτωση που  $f_k = 0.02$ .

Αυτό το φαινόμενο ερμηνεύεται εύκολα και φυσικά. Όταν το *flap* έχει μεγαλύτερη συχνότητα, τότε η περίοδος ταλάντωσης του είναι μικρότερη, δηλαδή το *flap* "γυρίζει γρήγορα". Άρα κάθε ταλάντωση του διαρκεί λίγο χρονικό διάστημα, και συνεπώς μπορεί να διακριτοποιηθεί λίγες φορές (λίγα *steps*), ώστε να καλύψει ένα συγκεκριμένο αντικειμενικά μικρό χρονικό βήμα.

Αντίθετα, όταν το *flap* έχει μικρή συχνότητα, τότε κάθε του περίοδος διαρκεί μεγάλη χρονική διάρκεια, και άρα, για να ξαναδιακριτοποιηθεί ο χρόνος στο ίδιο μικρό χρονικό βήμα, θα πρέπει να γίνουν περισσότερες διακριτοποιήσεις (περισσότερα *steps*) ανά περίοδο.

Ο αριθμός των *steps* δεν είναι σταθερός, αλλά σε κάθε εκτέλεση υπολογισμών που είχαμε κρίναμε ανάλογα. Τοποθετήσαμε λιγότερα *steps* σε υψηλές συχνότητες από ότι σε χαμηλές.

Το άλλο αρχείο εισόδου είναι το `rotate_par.inp`. Το αρχείο αυτό αναφέρεται στην περίπτωση που έχουμε περιστροφή της αεροτομής. Η περιστροφή αυτή ονομάζεται **pitching** και αφορά στην μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha$ .

Κατά αντιστοιχία με την εξίσωση κίνησης του *flap*, ορίζουμε και αυτήν την μεταβολή ως ταλαντωτική, αν και στην εκτέλεση των υπολογισμών, δεν είναι απαραίτητο ότι θα έχουμε πράγματι ταλάντωση.

Η εξίσωση που περιγράφει το *pitching* της αεροτομής είναι η εξής:

$$a = -\frac{\pi}{180} a_{amp} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

Στον παρακάτω πίνακα, μπορούμε να δούμε τί ακριβώς ορίζεται σε κάθε σειρά του αρχείου `rotate_par.inp`.

### rotate\_par.inp

Αριθμός σειράς	Μεταβλητή
1η	rot
2η	omeg
3η	aamp
4η	pha_deg

Όπου:

- Στην πρώτη σειρά ορίζουμε το *rot*, δηλαδή την θέση που αποτελεί το σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφεται η αεροτομή, το κέντρο δηλαδή περιστροφής της. Το σημείο αυτό ορίζεται στο 1/4 της χορδής, για αυτό και θέτουμε  $rot = 0.25$ .

- Στην δεύτερη σειρά ορίζουμε το *omeg*, δηλαδή την συχνότητα περιστροφής της αεροτομής. Για την περίπτωση που η αεροτομή δεν κάνει pitching ταλαντωτικά, η συχνότητα αυτή θα μηδενιστεί.

Όπως θα δούμε παρακάτω, στο κεφάλαιο των υπολογισμών, για την συγκεκριμένη αεροτομή, θα κληθούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή του  $C_l$  συναρτήσει της γωνίας του flap, για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης  $a$ . Σε κάθε περίπτωση όμως, η αεροτομή θα βρίσκεται ακίνητη στην γωνία αυτή, και δεν θα μεταβάλλεται ταλαντωτικά.

Οπότε για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής, θέσαμε παντού  $omeg = 0$ .

- Στην τρίτη σειρά ορίζουμε το πλάτος  $a_{amp}$  της γωνίας πρόσπτωσης. Παρότι εμείς, στην συγκεκριμένη αεροτομή, δεν έχουμε ταλάντωση ως προς την γωνία αυτή, θα δούμε αμέσως μετά πόσο θέτουμε την τιμή αυτή.

- Στην τέταρτη θέση, θέτουμε την αρχική φάση  $pha_{deg}$  της γωνίας πρόσπτωσης, σε μοίρες. Όπως και στην περίπτωση του flap, η αρχική φάση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όταν πρέπει να έχουμε σταθερή γωνία, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ.

Οι υπολογισμοί που έγιναν για τον υπολογισμό της ροής της NACA64418 με παραμορφώσιμο flap πραγματοποιήθηκαν σε σταθερές γωνίες  $a = 0^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, 18^\circ$ .

Για τον λόγο αυτό, για να επιτύχουμε τις παραπάνω σταθερές γωνίες, θα θέσουμε  $omeg = 0$  ώστε να μην έχουμε ταλάντωση,  $a_{amp} = 0^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, 18^\circ$ , ανάλογα με την γωνία που θέλουμε να επιτύχουμε και  $pha_{deg} = 90^\circ$ . Αν θέσουμε τις τιμές αυτές τότε θα είναι:

$$a = -\frac{\pi}{180} a_{amp} \cdot \sin(0 \cdot t + 90^\circ) \Leftrightarrow$$

$$a = -\frac{\pi}{180} a_{amp} \cdot \sin(90^\circ) \Leftrightarrow$$

όπου επειδή  $\sin(90^\circ) = 1$ , θα είναι:

$$a = -\frac{\pi}{180} a_{amp}$$

Δηλαδή ανάλογα με την τιμή  $a_{amp}$  που εμείς θα ορίσουμε (σε μοίρες) θα πάρουμε την αντίστοιχη αντίθετη γωνία (με αρνητικό πρόσημο) σε rad.

Ο λόγος που θέτουμε το αρνητικό πρόσημο στην συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης έχει να κάνει με το πως ορίζεται ως θετική η περιστροφή-pitching μιας αεροτομής.

Σε γενικές γραμμές, ορίζουμε ως θετική γωνία πρόσπτωσης αυτή στην οποία έχουμε αύξηση του συντελεστή άνωσης  $C_l$ . Αύξηση του  $C_l$  έχουμε όταν η μύτη της πτέρυγας σηκώνεται προς τα πάνω, καθώς τότε αυξάνεται η δύναμη που ασκεί ο αέρας στην κάτω επιφάνεια του πτερυγίου. Οπότε, η δύναμη αυτή τείνει να ωθήσει το σκάφος προς τα πάνω, δηλαδή να του αυξήσει την άνωση.

Θετική λοιπόν γωνία θέλουμε να οριστεί αυτή όπου το μπροστινό μέρος της αεροτομής ανεβαίνει. Όταν όμως το αεροσκάφος κινείται προς τα αριστερά, όπως είναι ο συμβατικός τρόπος κίνησης του σκάφους, άνοδος του μπροστινού μέρους προϋποθέτει δεξιόστροφη περιστροφή ως προς το κάθετο προς το επίπεδο διάνυσμα.

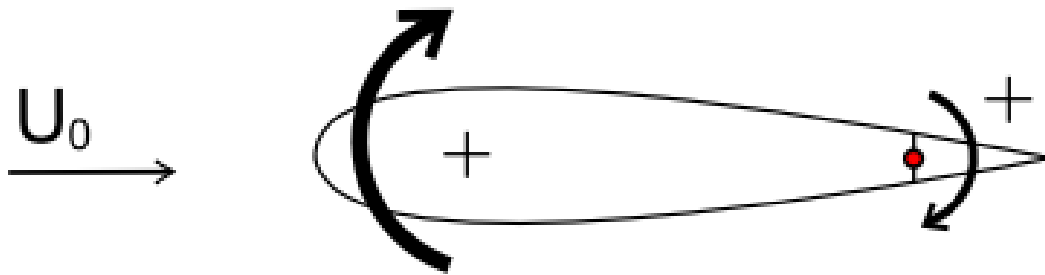
Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον μαθηματικό ορισμό της γωνίας, όπου ορίζεται ως θετική αυτή που διαγράφει το επίπεδο αριστερόστροφα (κανόνας του δεξιού χεριού). Έτσι, αναγκαζόμαστε, αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μαθηματική συνάρτηση ημιτόνου για το  $a$ , να ορίζουμε την αντίστοιχη αρνητική γωνία.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να αναφέρουμε συνοπτικά, ότι θετική περιστροφή της αεροτομής (pitching) (θετικό δηλαδή  $a$ ) έχουμε όταν αυτό "ανεβάζει" την ακμή πρόσπτωσης του (το μπροστινό μέρος), ενώ θετική κίνηση του flap (θετικός, δηλαδή, συντελεστής  $b$ ) έχουμε όταν αυτό "κατεβάζει" το flap του.

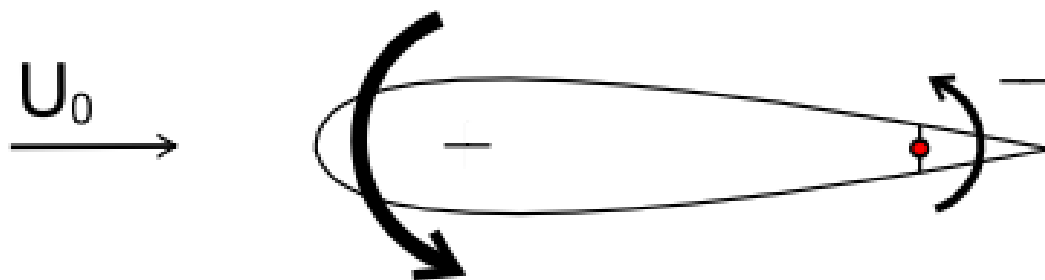
Αυτό μπορούμε να το δούμε και σχηματικά παρακάτω:



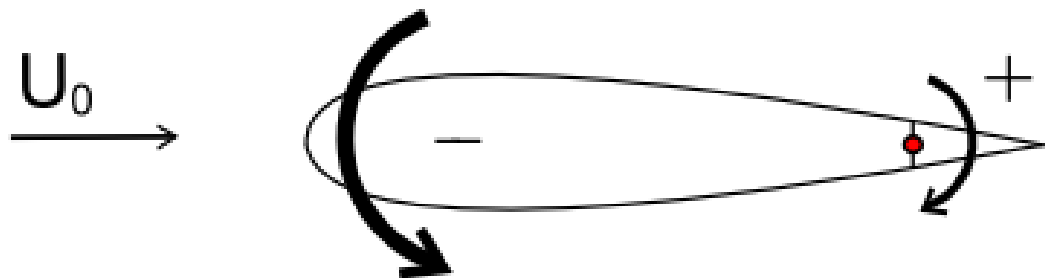
UPSTROKE AIRFOIL // DOWNSTROKE FLAP



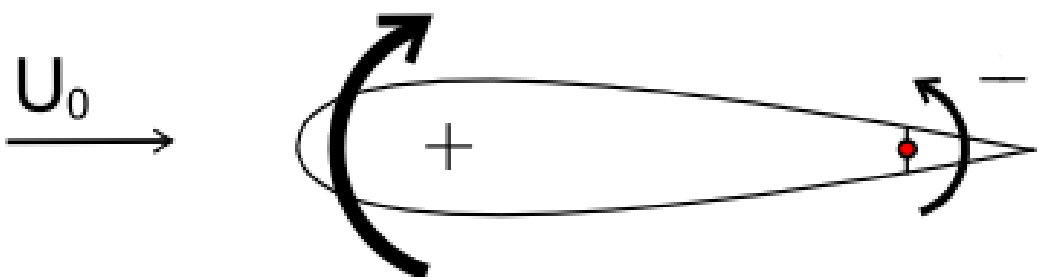
DOWNSTROKE AIRFOIL // UPSTROKE FLAP



DOWNSTROKE AIRFOIL // DOWNSTROKE FLAP



UPSTROKE AIRFOIL // UPSTROKE FLAP



Εικόνα 45: Θετικό πρόσημο της περιστροφής έχουμε όταν το μπροστινό μέρος της αεροτομής ανεβαίνει, και θετικό πρόσημο της κίνησης του flap, όταν αυτό κατεβαίνει. (Εικόνα από Unsteady Viscous-Inviscid Interaction Technique for Wind Turbine Airfoils του Nestor Ramos Garcia (βλέπε References [8]))

## 2.3 Αποτελέσματα Ροής Παραμορφώσιμου Flap

Έχοντας πια ορίσει πλήρως την κίνηση του παραμορφώσιμου flap, θα πρέπει να δείξουμε τα αποτελέσματα που εξάγονται από αυτό, μέσα από το πρόγραμμα MaPflow.

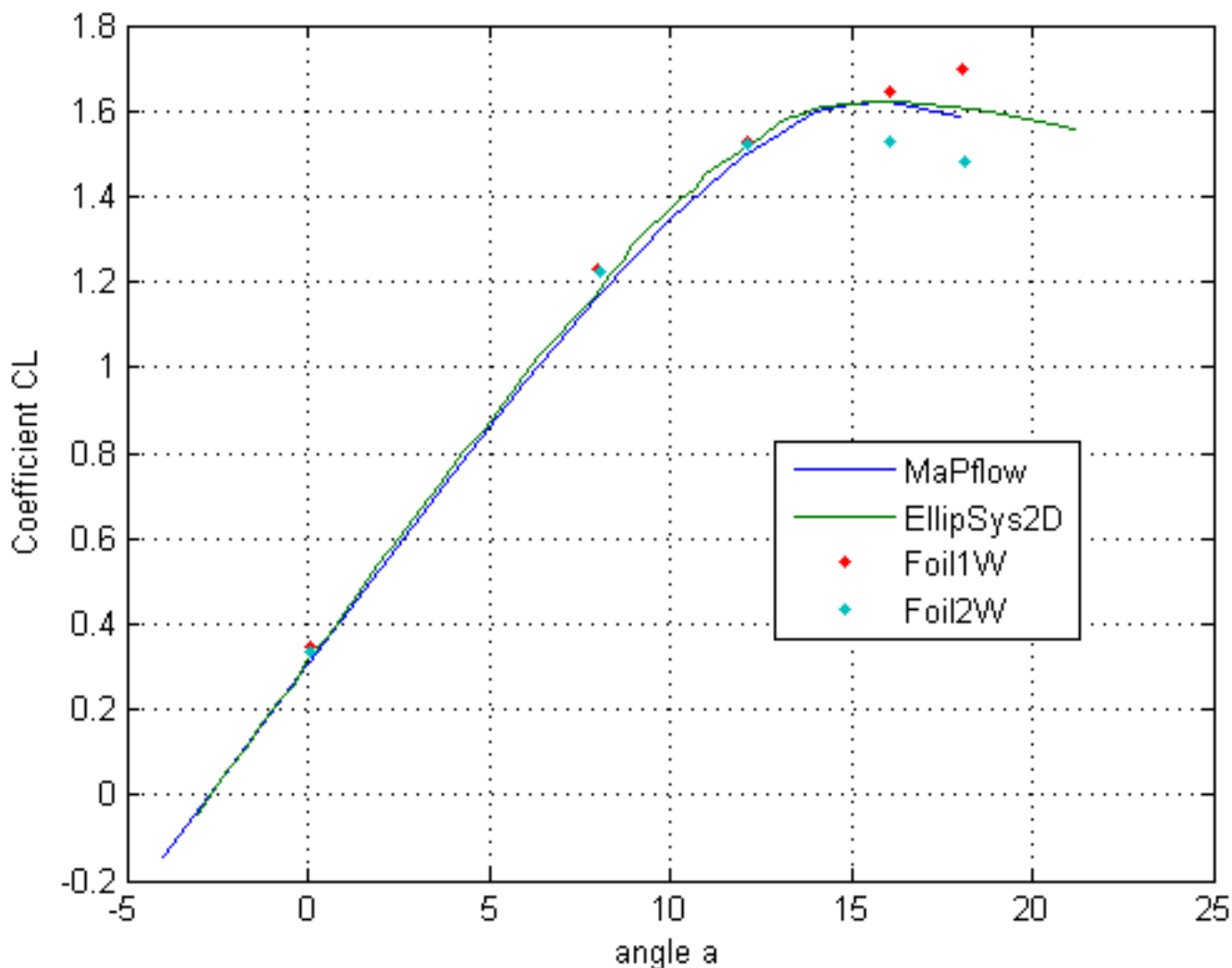
Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει σύγκριση των υπολογισμών του MaPflow με αντίστοιχα διαγράμματα, όπως αυτά προέκυψαν από διαφορετικές υπολογιστικές μεθόδους.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θα πραγματοποιηθεί σύγκριση με μερικές από τις υπολογιστικές μεθόδους που υπάρχουν στο αρχείο "UpWind: Comparison of code performance for computation of unsteady 2D aerodynamics of airfoils with deformable trailing edges".

Οι μέθοδοι των οποίων τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιήσουμε είναι τα μοντέλα FOIL1W και FOIL2W, καθώς και το μοντέλο EllipSys2D. Σε προηγούμενο κεφάλαιο ("Το πρόγραμμα MaPflow") έχουμε εξηγήσει περιληπτικά τις μεθόδους αυτές, οπότε και παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο κεφάλαιο αυτό, για την πλήρη κατανόηση της συγκριτικής διαδικασίας.

Σε όλες τις μετρήσεις του παραμορφώσιμου flap που κάναμε, ο αριθμός Reynolds ήταν ίσος με  $Re = 6 \cdot 10^6$  και η ταχύτητα της ροής σε αριθμό Mach  $Ma = 0.1$ .

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε πως συγκρίνεται η καμπύλη του συντελεστή άνωσης  $C_l - \alpha$  του προγράμματος MaPflow, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει flap, με τις αντίστοιχες καμπύλες ή τα αντίστοιχα σημεία της μεθόδου EllipSys 2D και FOIL1W, FOIL2W αντίστοιχα:



**Εικόνα 46: Η καμπύλη  $C_l - \alpha$  όπως προκύπτει από τις μεθόδους MaPflow, EllipSys2D, Foil1W και Foil2W.**

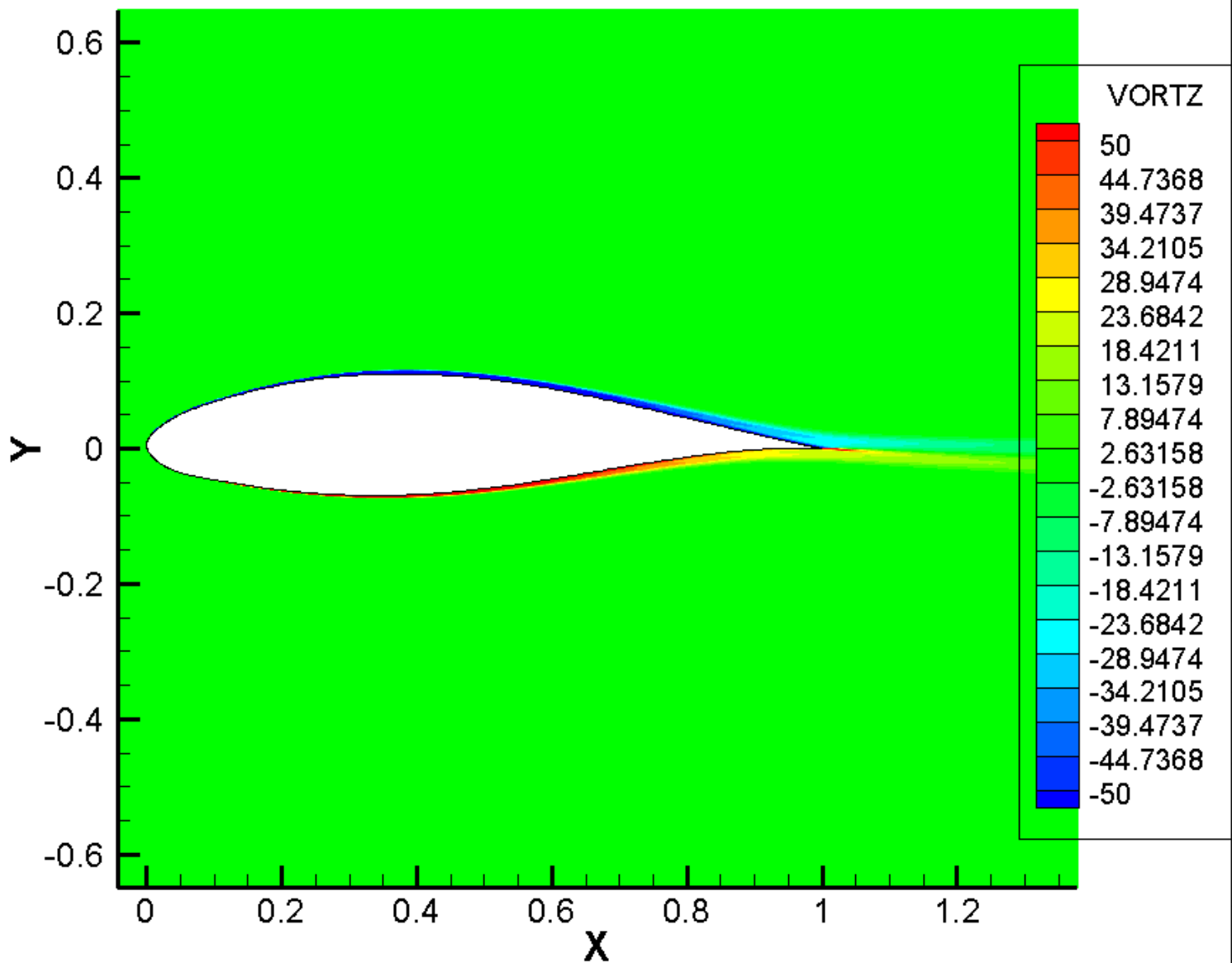
Όπως παρατηρούμε, υπάρχει αρκετά καλή προσέγγιση των τιμών μεταξύ MaPflow και EllipSys 2D, μέθοδοι που αμφότεροι χρησιμοποιούν διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων.

Οι μικρές διαφορές, όπως είπαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, θα οφείλονται τόσο στο γεγονός ότι το MaPFlow επιλύει συμπιεστές ροές σε αντίθεση με το EllipSys2D που επιλύει ασυμπιεστές, όσο και στις ενδεχόμενες διαφορές λόγω της διαφοροποίησης του πλέγματος.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα των FOIL, βλέπουμε ότι με την μέθοδο FOIL1W συνεχίζει να ανεβαίνει ο συντελεστής  $C_l$  ενώ με την μέθοδο FOIL2W κατεβαίνει. Αυτό οφείλεται, κατά πάσα πιθανότητα, στο ότι το FOIL1W δεν δημιουργεί φύλλο στροβιλότητας στο σημείο της αποκόλλησης, σε αντίθεση με το FOIL2W που δημιουργεί.

Αφού λοιπόν το FOIL1W δεν ανιχνεύει την αποκόλληση με την ίδια μέθοδο που την ανιχνεύει το FOIL2W, είναι λογικό να υπάρχει διαφοροποίηση των τιμών ειδικά στα σημεία της αποκολλημένης ροής.

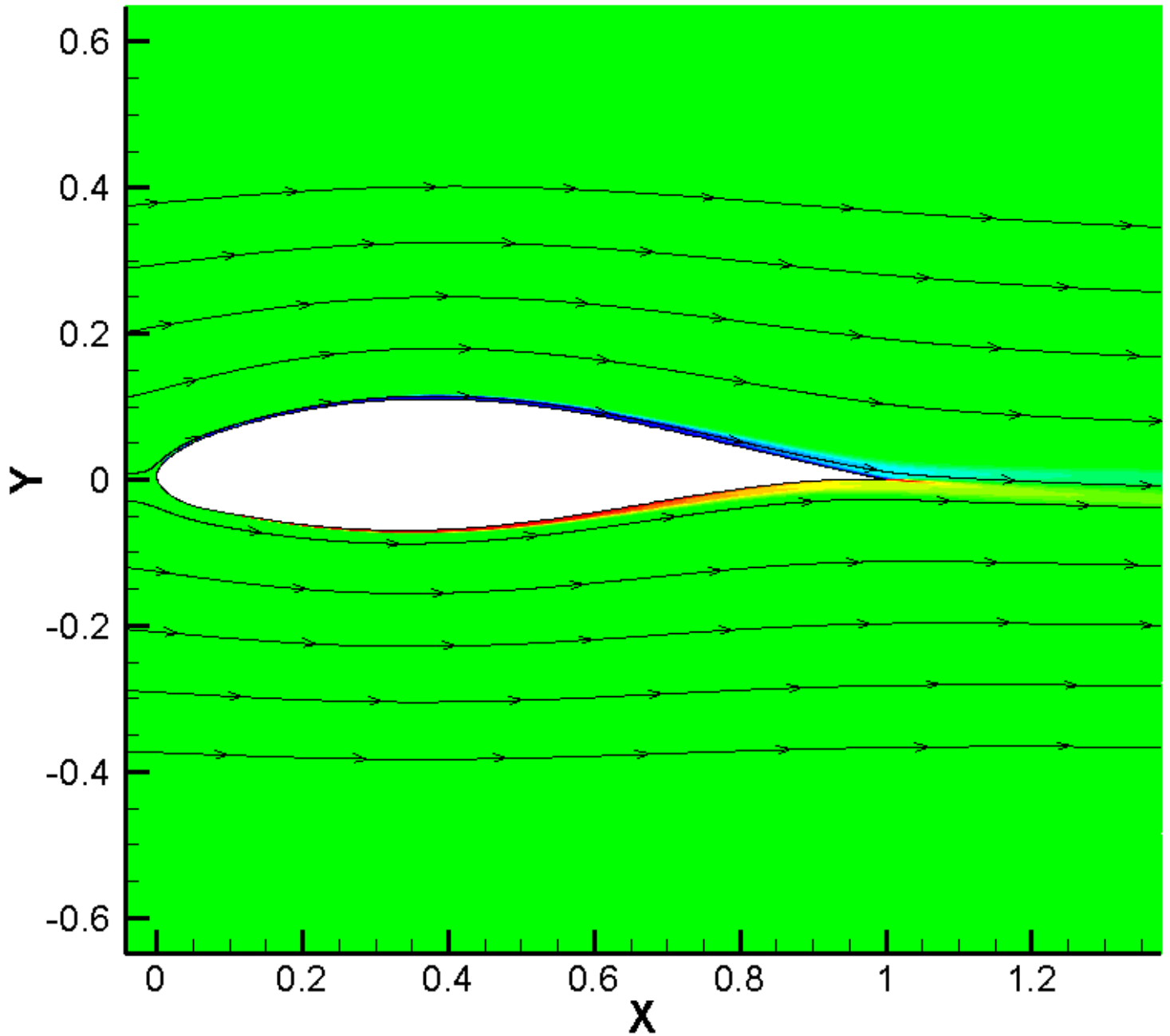
Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να δούμε πως αναπτύσσεται η ροή γύρω από την αεροτομή. Ας εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση που η αεροτομή βρίσκεται σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης:



**Εικόνα 47: Η στροβιλότητα (vorticity) γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$ .**

Το χρώμα του παραπάνω διαγράμματος εξαρτάται από την τιμή της στροβιλότητας. Στροβιλότητα κοντά στο 0 έχει χρώμα **πράσινο**. **Μπλε** στροβιλότητα είναι αρνητική, δηλαδή ο άξονας z βρίσκεται από έξω προς τα μέσα, οπότε σύμφωνα με τον κανόνα το δεξιού χεριού, έχουμε δεξιόστροφη περιστροφή. Αντίστοιχα, **κόκκινη** στροβιλότητα είναι θετική, δηλαδή ο άξονας z βρίσκεται από μέσα προς τα έξω, οπότε σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, έχουμε αριστερόστροφη περιστροφή.

Αξίζει να δούμε τις γραμμές ροής για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$  στο παρακάτω σχήμα:

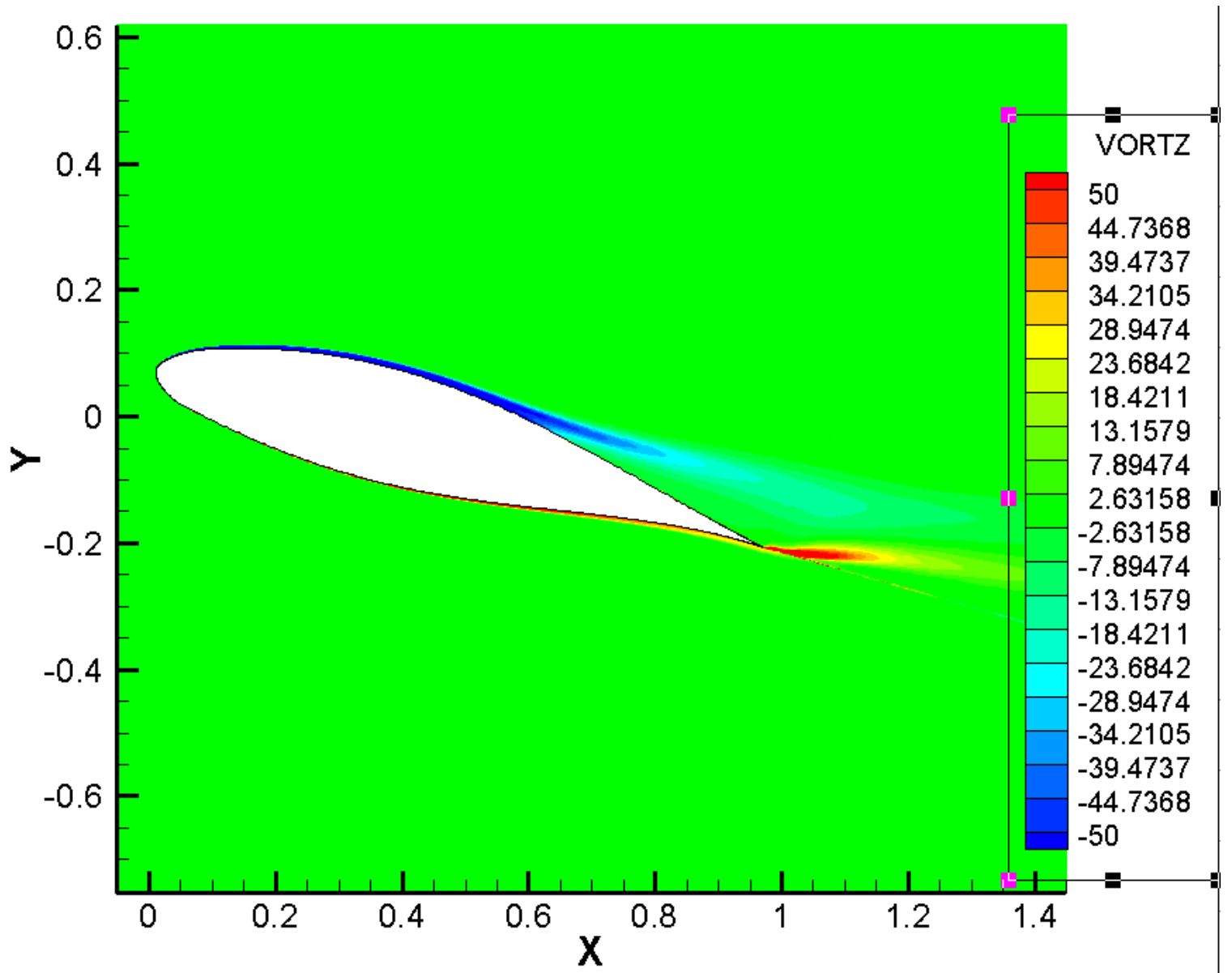


**Εικόνα 48:** Οι γραμμές ροής γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$ .

Οι στροβιλότητες πάνω και κάτω από την αεροτομή περιστρέφονται με αντίθετες κατευθύνσεις, για αυτό και οι μεν εμφανίζονται ως αρνητικές ενώ οι δε ως θετικές. Πάντως, για την περίπτωση των  $\alpha = 0^\circ$  έχουμε μικρές ταχύτητες περιστροφής, για αυτό και τα μεγέθη των στροβιλοτήτων εμφανίζονται μικρά κατά το μέτρο.

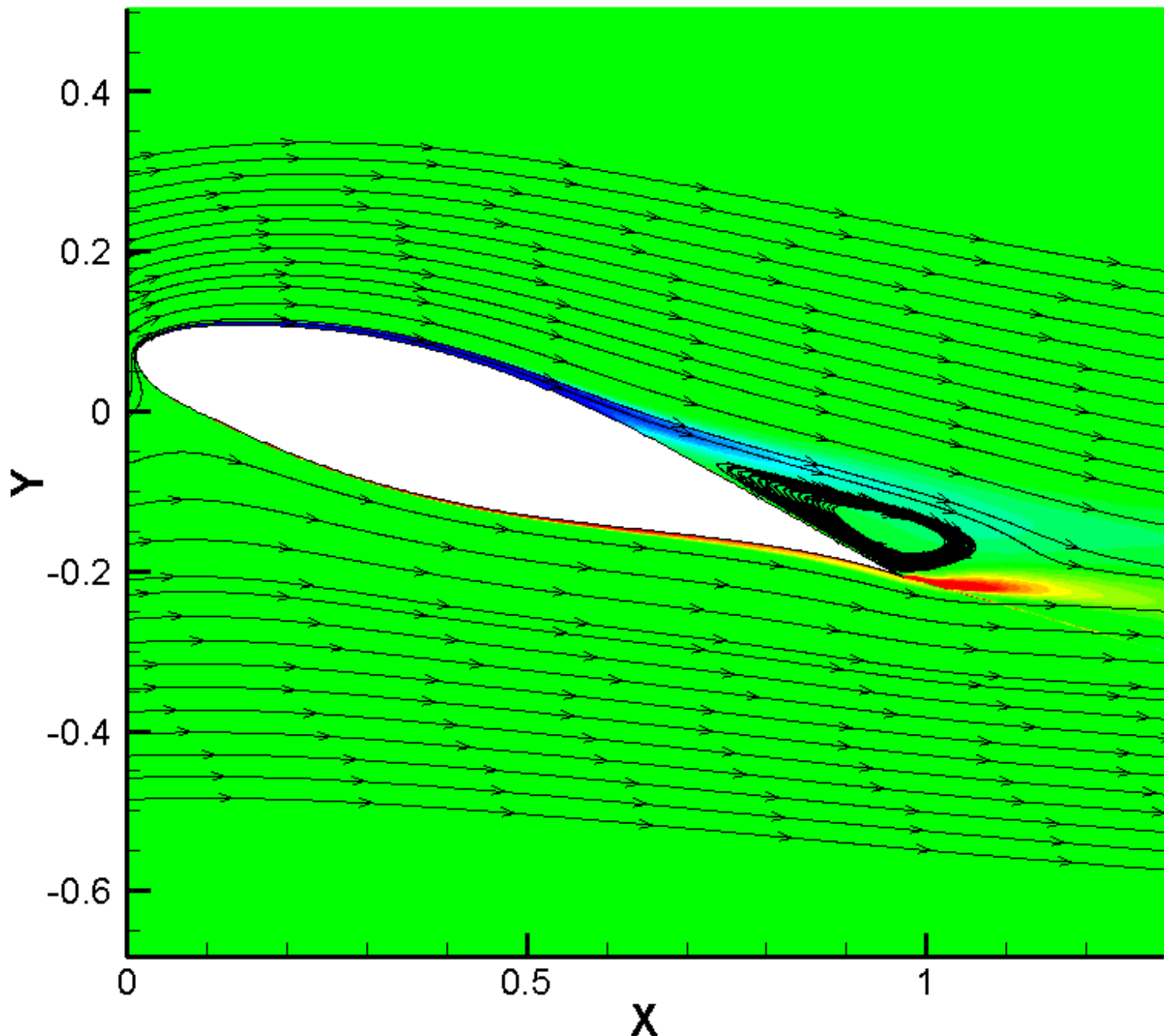
Να πούμε ότι επειδή η αεροτομή **δεν** είναι συμμετρική, οι στροβιλότητες στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια αυτής δεν είναι ίσες και αντίθετες.

Ας δούμε τώρα την ροή για την περίπτωση που η αεροτομή βρίσκεται στην γωνία των  $\alpha = 16^\circ$ :



**Εικόνα 49: Η στροβιλότητα (vorticity) γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 16^\circ$ .**

ενώ οι αντίστοιχες γραμμές ροής θα είναι:



**Εικόνα 50: Οι γραμμές ροής γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 16^\circ$ .**

Όπως θα περιμέναμε, βλέποντας και την καμπύλη  $C_l - \alpha$ , έχουμε αποκόλληση. Η αποκόλληση αυτή δημιουργεί δύο φύλλα στροβιλότητας. Ένα στο σημείο εκφυγής, και ένα άλλο στο σημείο αποκόλλησης. Οι δύο αυτές στροβιλότητες είναι αντίθετης κατεύθυνσης. Στο σημείο αποκόλλησης προκαλείται αναστροφή της ροής, για αυτό και η ταχύτητα αποκτά αρνητικές τιμές, γυρνάει δηλαδή προς τα πίσω.

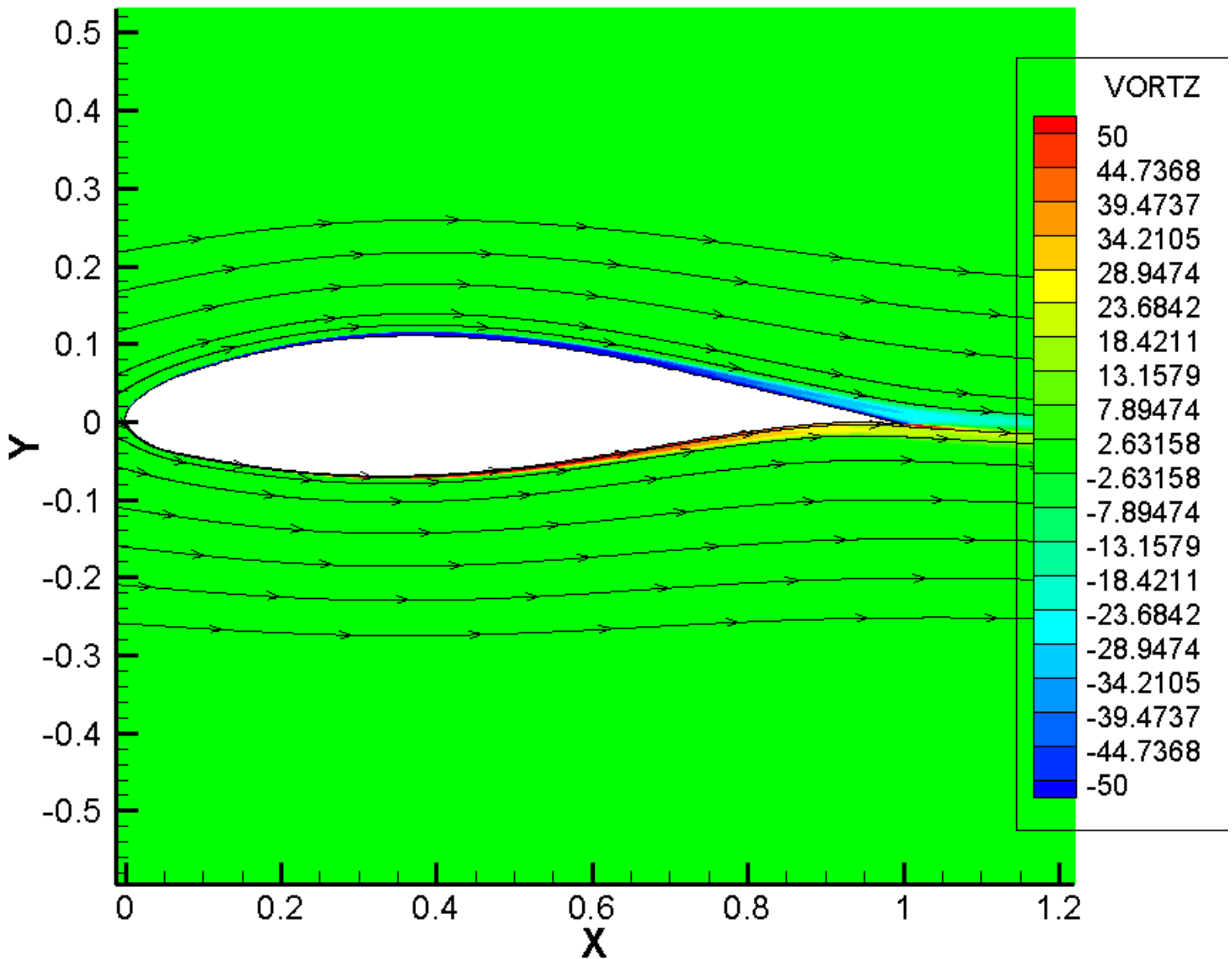
Ως τώρα είδαμε την ροή σε διάφορες θέσεις της αεροτομής. Η ροή εδώ ήταν μόνιμη.

Σημαντικό, στο σημείο αυτό, είναι να εξετάσουμε πως επιδρά η παρουσία του flap στις γραμμές ροής.

Το flap στα παρακάτω παραδείγματα άλλαζε συναρτήσει του χρόνου, είχαμε δηλαδή την περίπτωση της μη μόνιμης ροής.

Ας δούμε για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$ . Στην περίπτωση αυτή το flap βρίσκεται στη θέση  $b = 1.96961550602$ , δηλαδή  $b \neq 2$ , οπότε το flap βρίσκεται πολύ κοντά στην

κατώτερη δυνατή θέση:

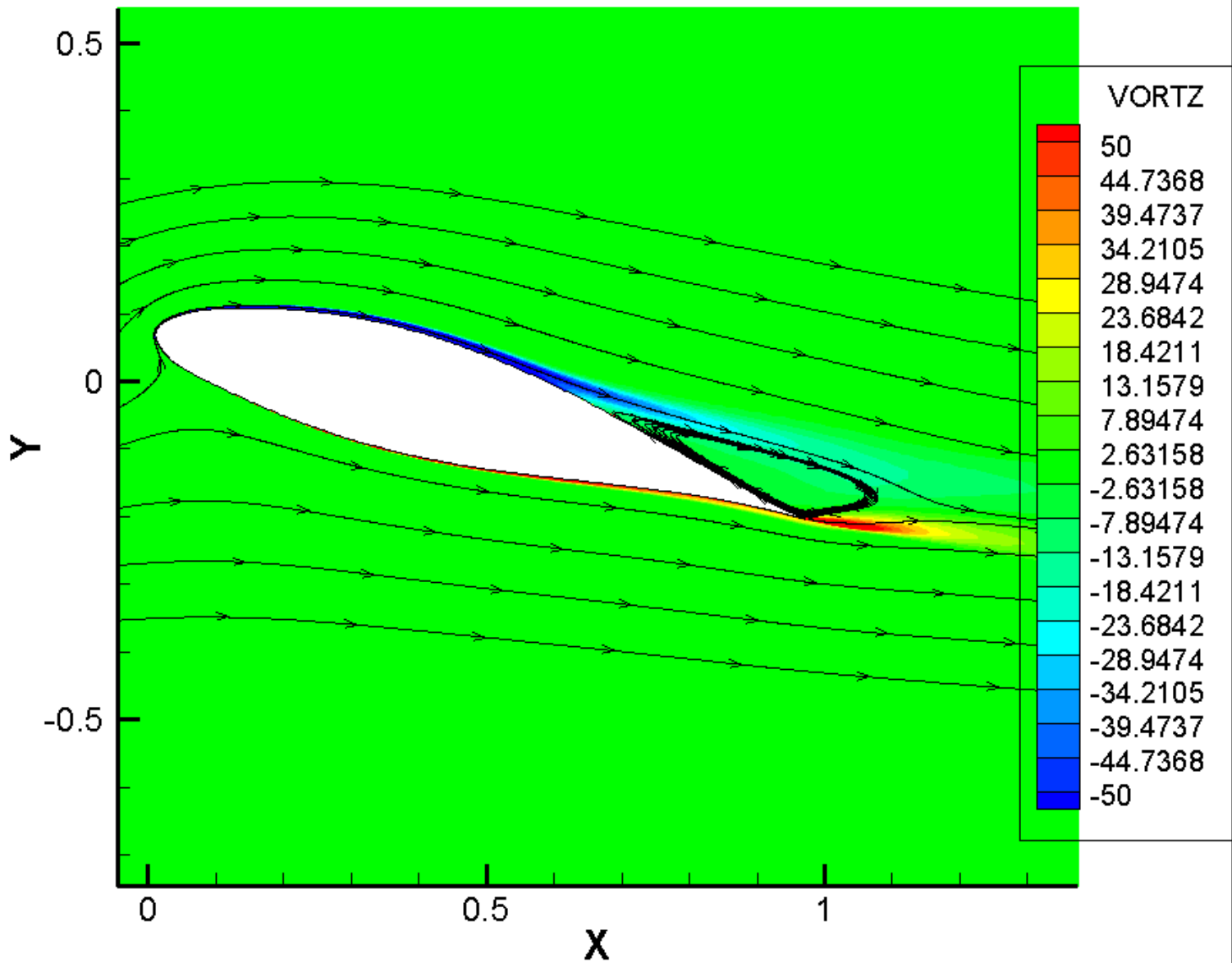


**Εικόνα 51: Οι γραμμές ροής γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$  και  $b = 1.96961550602$ .**

Παρατηρούμε ότι, επειδή η σχετική κίνηση του flap είναι μικρή σε σχέση με το μήκος της αεροτομής, δεν έχουμε αισθητές διαφοροποιήσεις σε σχέση με την περίπτωση  $b = 0$ . Πάντως, στην ακμή εκφυγής έχουμε ελαφρά αλλαγή στην κατεύθυνση των γραμμών ροής, τέτοια ώστε να ακολουθούν την θέση του flap.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση  $\alpha = 16^\circ$ . Στη θέση αυτή έχουμε μέτρηση της ροής για θέση του flap  $b = -1.73205080755$ . Επειδή  $b \neq -2$ , το flap βρίσκεται κοντά στην ανώτερη δυνατή θέση. Το διάγραμμα θα είναι:

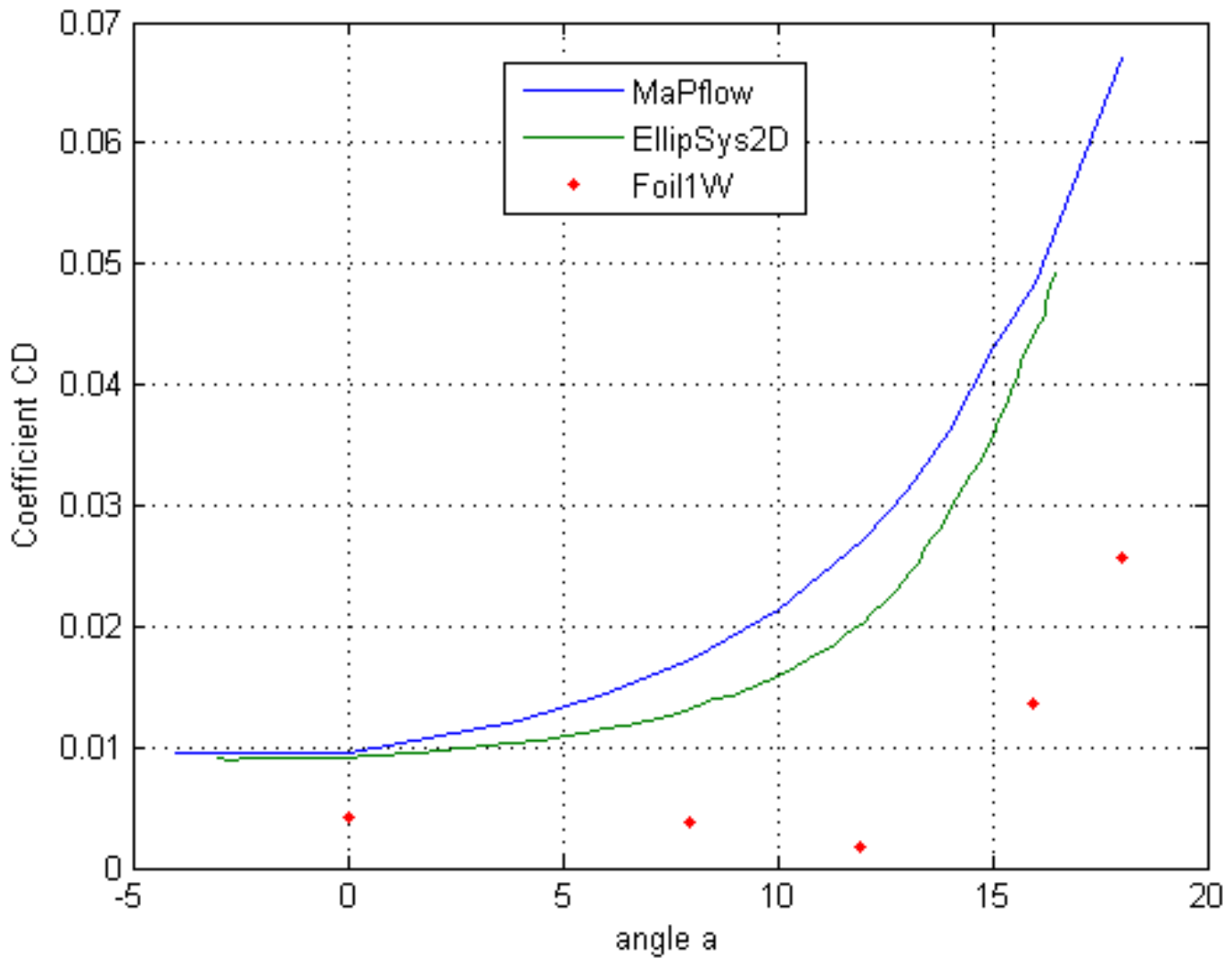




**Εικόνα 52: Οι γραμμές ροής γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 16^\circ$  και  $b = -1.73205080755$ .**

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία απότομη αλλαγή στις γραμμές ροής στη θέση του trailing edge, σε σχέση με την περίπτωση των  $\alpha = 0^\circ$ . Η απότομη αυτή αλλαγή οφείλεται προφανώς στο ότι το flap βρίσκεται κοντά στην ανώτερη δυνατή θέση.

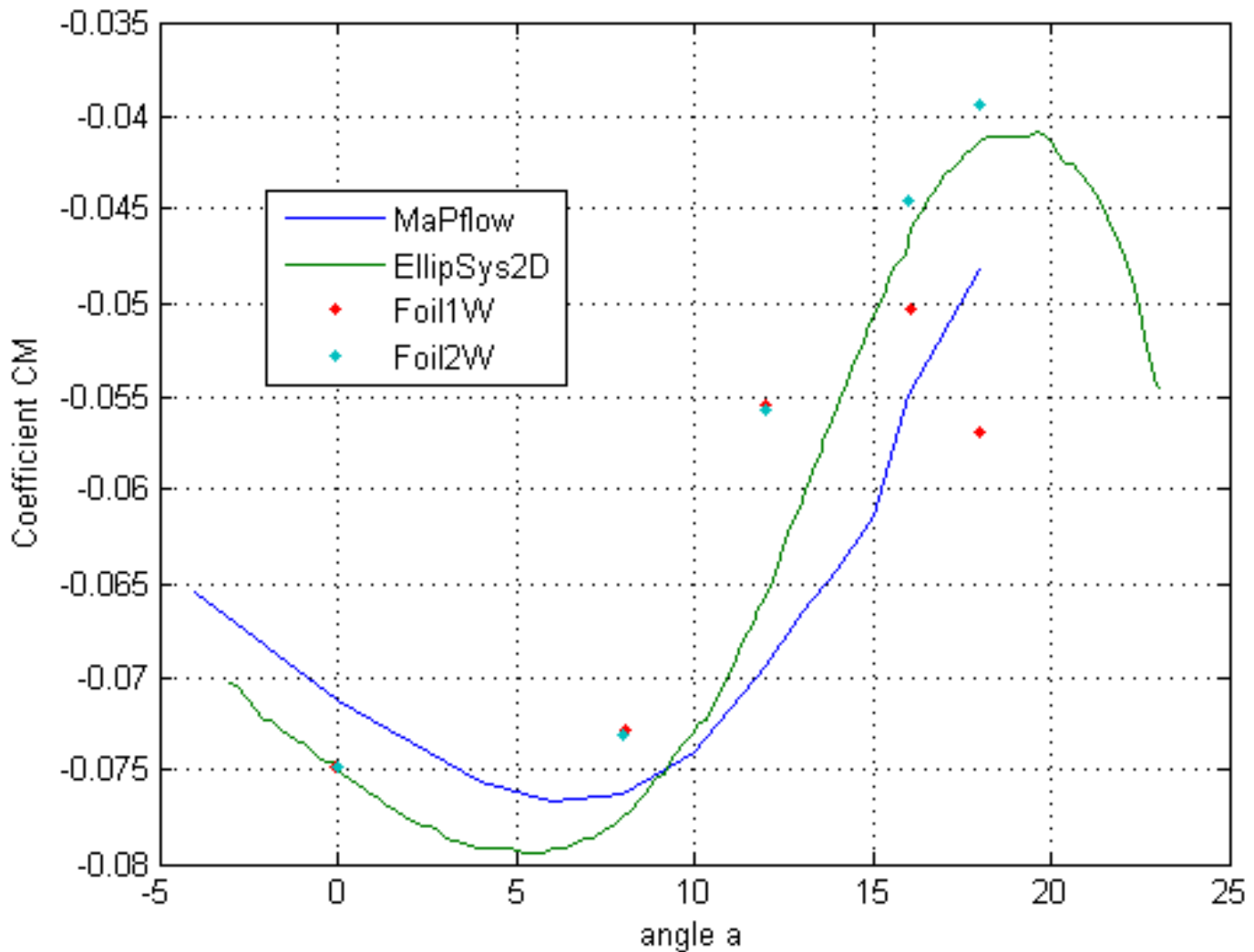
Ας εξετάσουμε τώρα τις υπόλοιπες καμπύλες που προκύπτουν. Ας δούμε την καμπύλη του συντελεστή αντίστασης  $C_d - a$ , θεωρώντας ξανά πως δεν υπάρχει flap:



**Εικόνα 53: Η καμπύλη  $C_d - \alpha$  όπως προκύπτει από τις μεθόδους MaPflow, EllipSys2D και Foil1W.**

Παρότι εκ πρώτης όψεως φαίνεται να έχουμε μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ των MaPflow και EllipSys2D στο  $C_d - \alpha$  από ότι είχαμε στο  $C_l - \alpha$ , αυτό δεν ισχύει. Το μέγεθος του  $C_d$  είναι της τάξης του  $10^{-2} = 0.01$ , σε αντίθεση με το μέγεθος του  $C_l$ , που είναι της τάξης του  $10^{-1} = 0.1$ . Συνεπώς είναι λογικό να είναι πιο εμφανής η διαφορά στο  $C_d$  αφού κοιτάμε τις μετρήσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Τέλος, η καμπύλη του συντελεστή ροπής  $C_m - \alpha$ , πάντοτε θεωρώντας πως δεν υπάρχει flap, θα είναι:



**Εικόνα 54: Η καμπύλη  $C_m - \alpha$  όπως προκύπτει από τις μεθόδους MaPflow, EllipSys2D, Foil1W και Foil2W.**

Η ροπή, συμβατικά, έχει αρνητικό πρόσημο όταν η ακμή πρόσπτωσης κατεβαίνει, και θετικό όταν αυτή ανεβαίνει.

Στο παραπάνω σχήμα, βλέπουμε ότι το  $C_m$  βρίσκεται διαρκώς σε αρνητικές τιμές, που σημαίνει ότι τείνει να περιστρέψει την ακμή πρόσπτωσης (leading edge) προς τα κάτω, και την ακμή εκφυγής (trailing edge) προς τα πάνω.

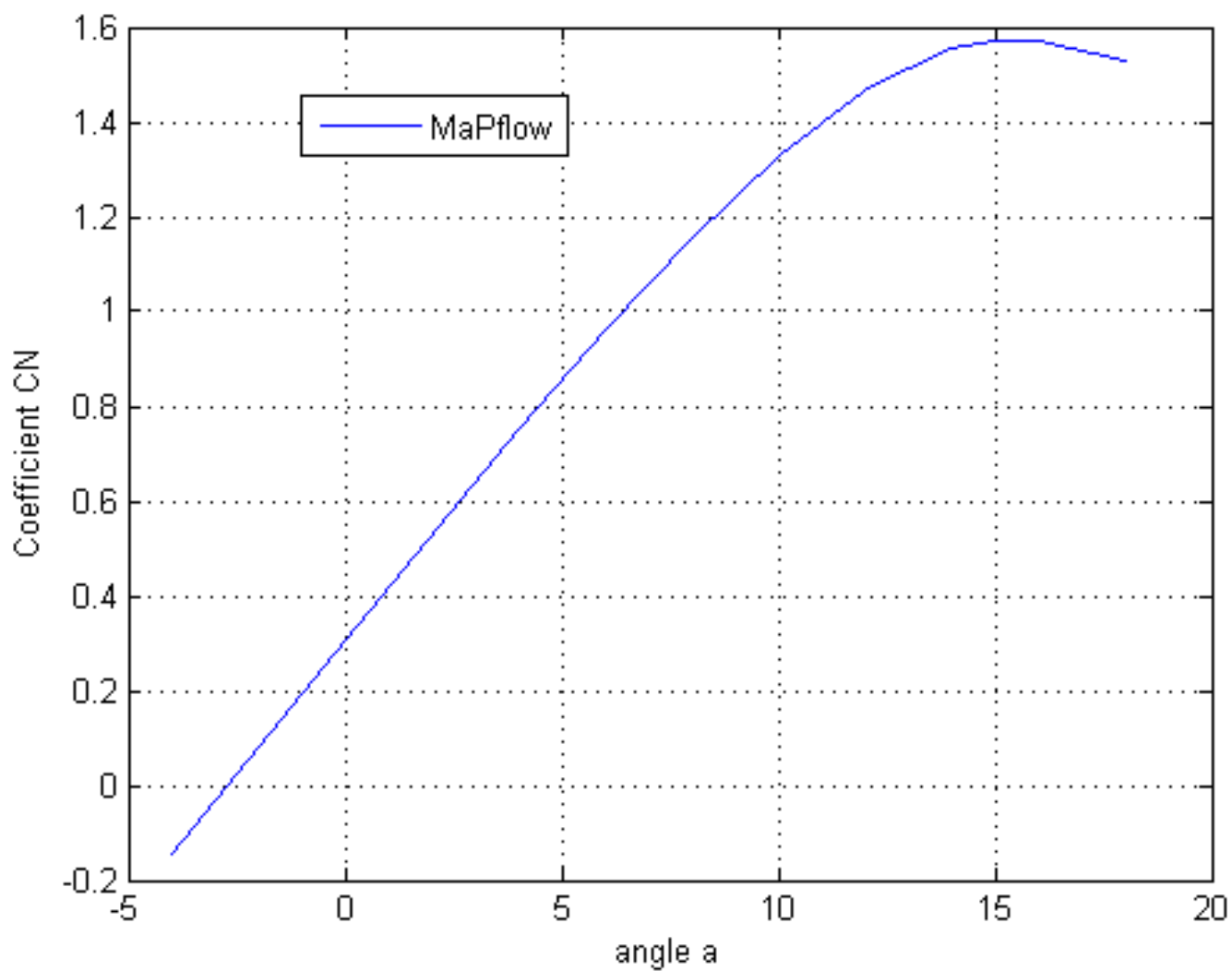
Η ροπή είναι ανεξάρτητη από την μεταβολή του συντελεστή άνωσης  $C_l$ . Ακόμα και στην περίπτωση που είναι  $C_l < 0$ , που στο πρόβλημα εδώ συμβαίνει για  $\alpha < -2.5^\circ$ , ο  $C_m$  παραμένει πάντα αρνητικός.

Από τη σχέση:

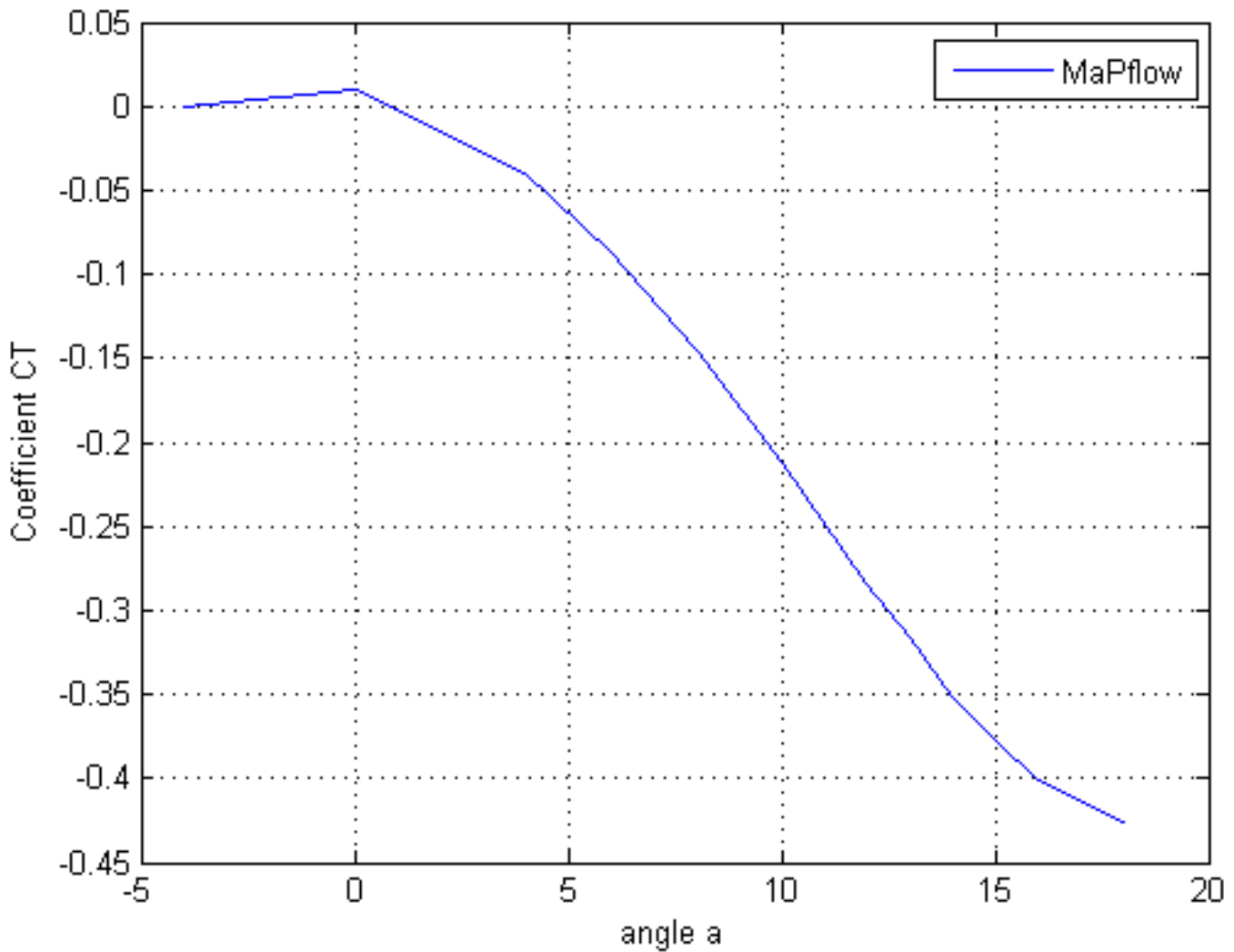
$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$$

$$C_T = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha$$

μπορούμε να βρούμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα  $C_n$  και  $C_t$ :

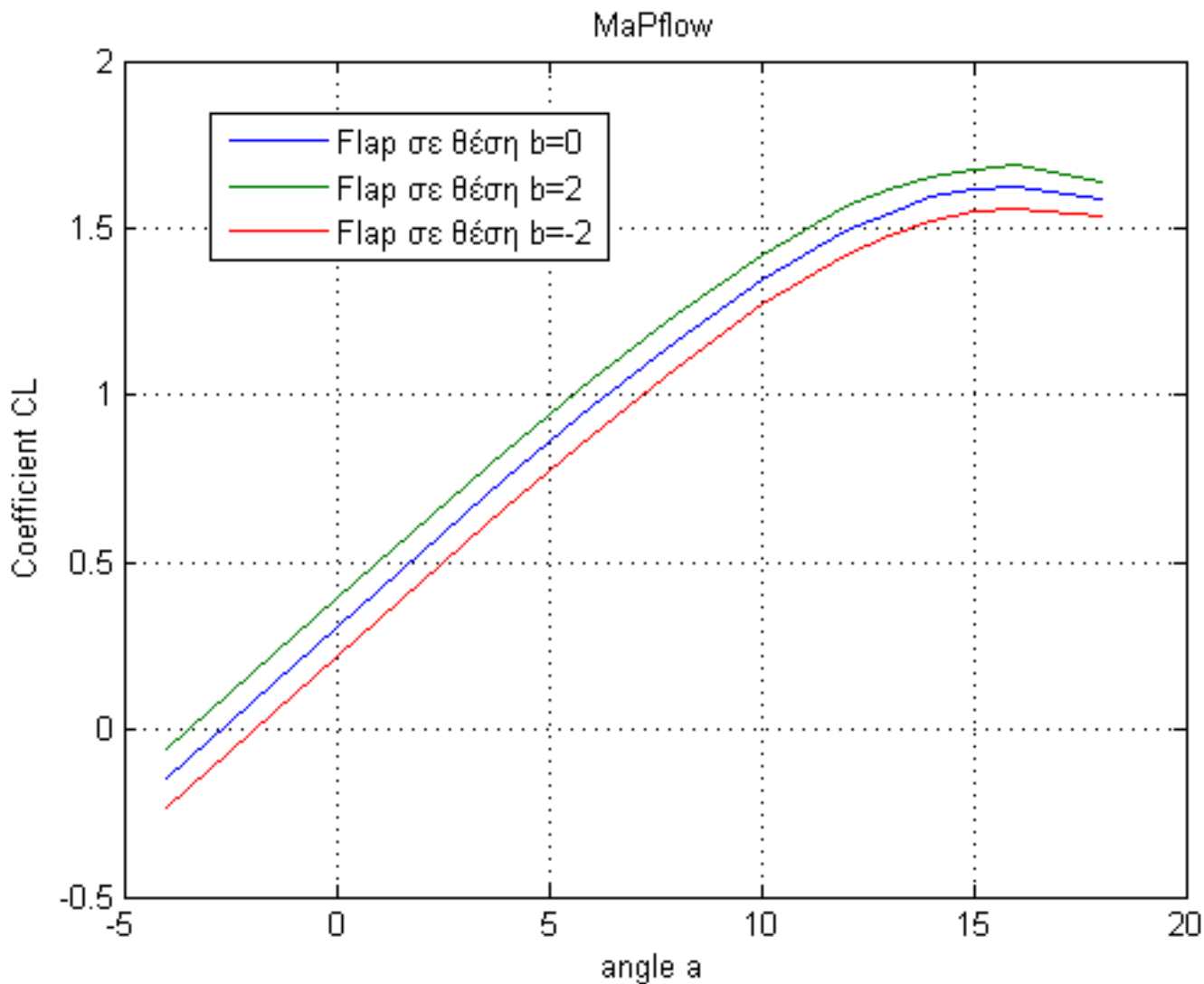


**Εικόνα 55: Η καμπύλη  $C_n - \alpha$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow.**



**Εικόνα 56: Η καμπύλη  $C_t - \alpha$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow.**

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως μεταβάλλεται η καμπύλη του  $C_l$  σε σταθερή γωνία του flap. Ας ξαναδούμε τις καμπύλες αυτές για τις περιπτώσεις που το flap βρίσκεται στις χαρακτηριστικές ακραίες του θέσεις, δηλαδή  $b = 2, 0$  και  $-2$ , όπως υπολογίζονται από το πρόγραμμα MaPflow:



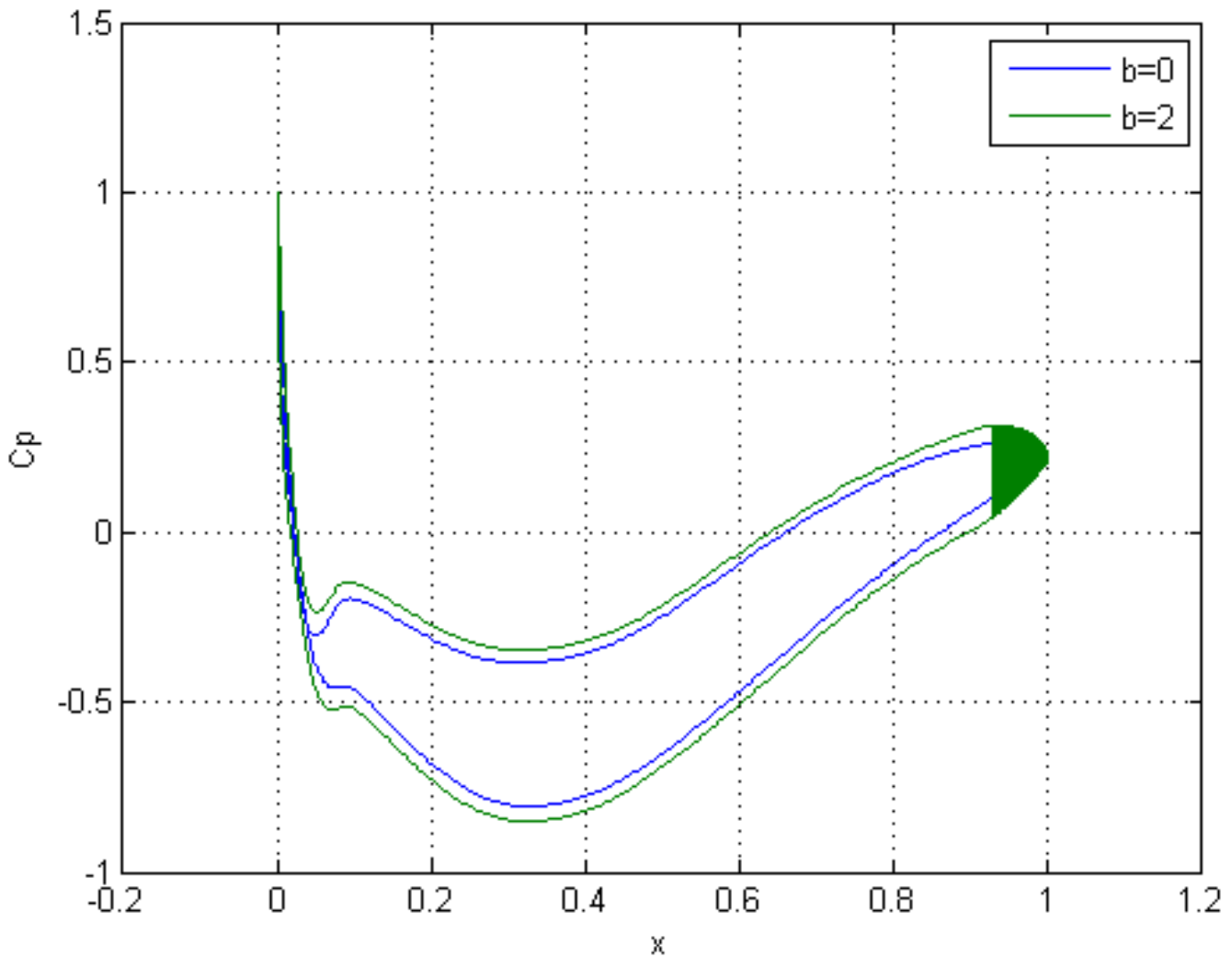
**Εικόνα 57: Η καμπύλη  $C_l - \alpha$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow σε  $b = 2, 0$  και  $-2$ .**

Όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή του θέση (δηλαδή όταν  $b=2$ ), τότε ο συντελεστής άνωσης  $C_l$  αυξάνεται. Όταν πάλι βρίσκεται στην ανώτερη δυνατή θέση (οπότε  $b=-2$ ), τότε μειώνεται.

Αυτό σημαίνει ότι, όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση, ασκείται μεγαλύτερη διαφορά πίεσης στην κάτω από ότι στην άνω επιφάνεια, σε σχέση με την περίπτωση όπου το flap δεν υπάρχει (ή βρίσκεται στη θέση  $b=0$ ).

Αντίστοιχα όταν το flap βρίσκεται στην ψηλότερη δυνατή θέση, η διαφορά πίεσης αυξάνεται.

Για να το επαληθεύσουμε αυτό, ας εξετάσουμε τις κατανομές πίεσης σε δύο από τις τρεις αυτές θέσεις του flap:



**Εικόνα 58: Η κατανομή της πίεσης  $C_p$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow σε  $b = 2$  και  $0$ .**

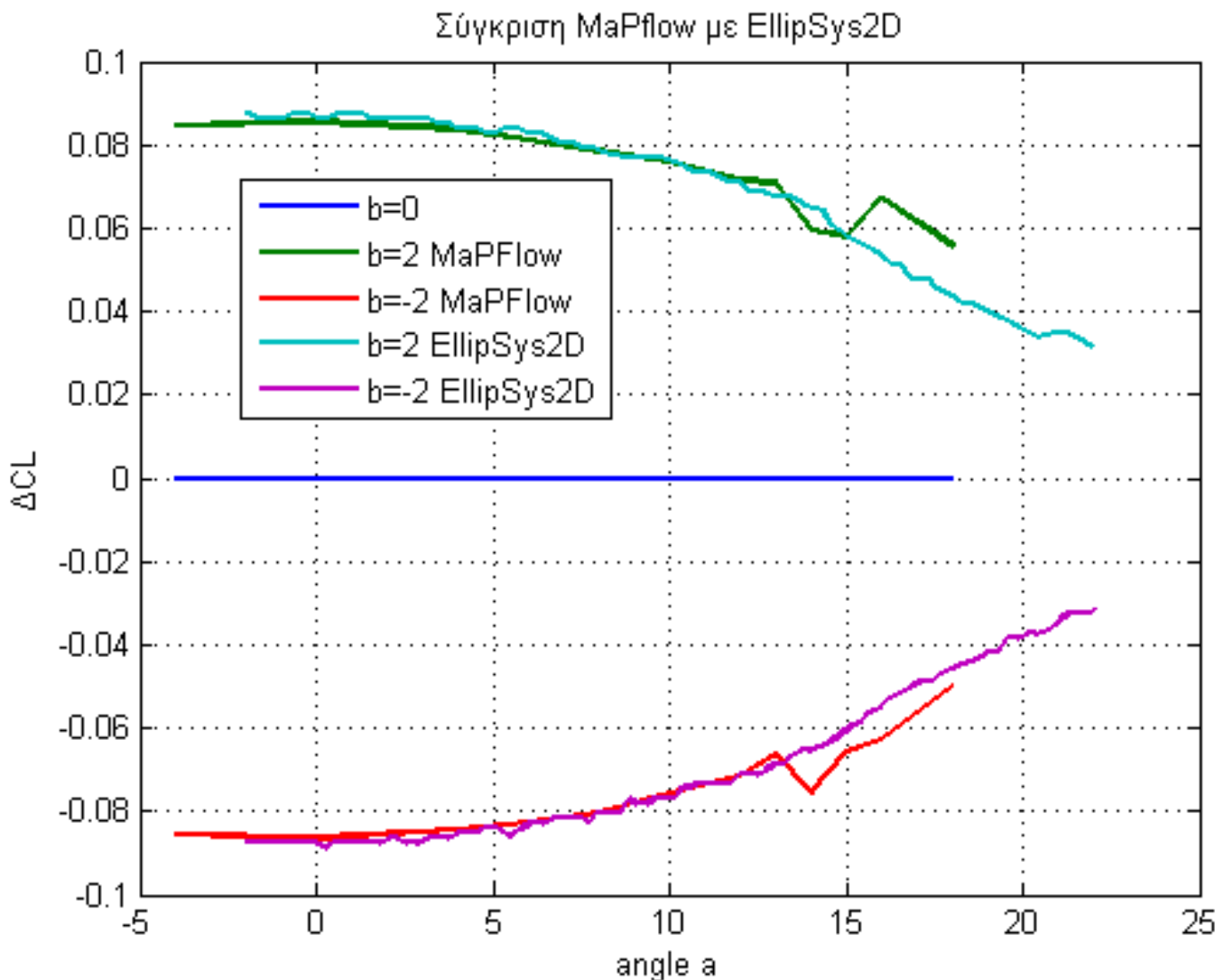
Όπως βλέπουμε κάθε περίπτωση αποτελείται από μία διπλή καμπύλη. Κάθε μία από τις καμπύλες αυτές ξεκινά στο 0 και τελειώνει στο 1, στο σημείο, δηλαδή, της ακμής εκφυγής. Ο λόγος που κάθε περίπτωση έχει μία διπλή καμπύλη είναι επειδή το ένα τμήμα της αφορά την κάτω επιφάνεια της αεροτομής, ενώ το άλλο την άνω. Προκειμένου σε μία αεροτομή να αναπτυχθεί άνωση, πρέπει η πίεση στην κάτω επιφάνεια να είναι υψηλότερη από την πίεση στην άνω. Για αυτόν τον λόγο, στα διαγράμματα  $C_p - x$  υπό φυσιολογικές συνθήκες, η κάτω επιφάνεια αναπαρίσταται από την άνω καμπύλη και αντίστοιχα η άνω από την κάτω.

Συγκρίνοντας τις καμπύλες των δύο διαφορετικών περιπτώσεων μεταξύ τους, βλέπουμε ότι όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση ( $b=2$ ), η διαφορά πίεσης είναι μεγαλύτερη από ότι όταν βρίσκεται στη θέση  $b=0$ . Άρα η άνωση είναι μεγαλύτερη για  $b=2$ , όπως προέκυψε και από την καμπύλη  $C_l - \alpha$ .

Μια άλλη διαφοροποίηση που παρατηρείται στην καμπύλη  $C_l - \alpha$  είναι μία ελαφριά οριζόντια μετατόπιση καθώς το  $b$  αλλάζει. Η καμπύλη μετατοπίζεται σε θέσεις χαμηλότερου  $\alpha$  καθώς το  $b$  αυξάνεται. Η αλλαγή αυτή διαφοροποιεί την θέση του μέγιστου  $C_l$ . Οφείλεται κυρίως στο ότι η παρουσία του flap αλλάζει, ανάλογα με την σχετική κάθε φορά θέση του, την φαινόμενη καμπυλότητα της αεροτομής, και άρα και τις βασικές ιδιότητες, όπως η θέση της αποκόλλησης.

Να θυμίσουμε ότι ένας άλλος τρόπος κατανόησης του παραπάνω φαινομένου, είναι με την λεγόμενη φαινόμενη γωνία πρόσπτωσης, που εξηγήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση, η φαινόμενη γωνία αυξάνεται, και άρα αυξάνεται και ο συντελεστής  $C_l$ . Αντίθετα, όταν το flap βρίσκεται στην ανώτερη δυνατή θέση, η φαινόμενη γωνία μειώνεται, και άρα μειώνεται και ο  $C_l$ .

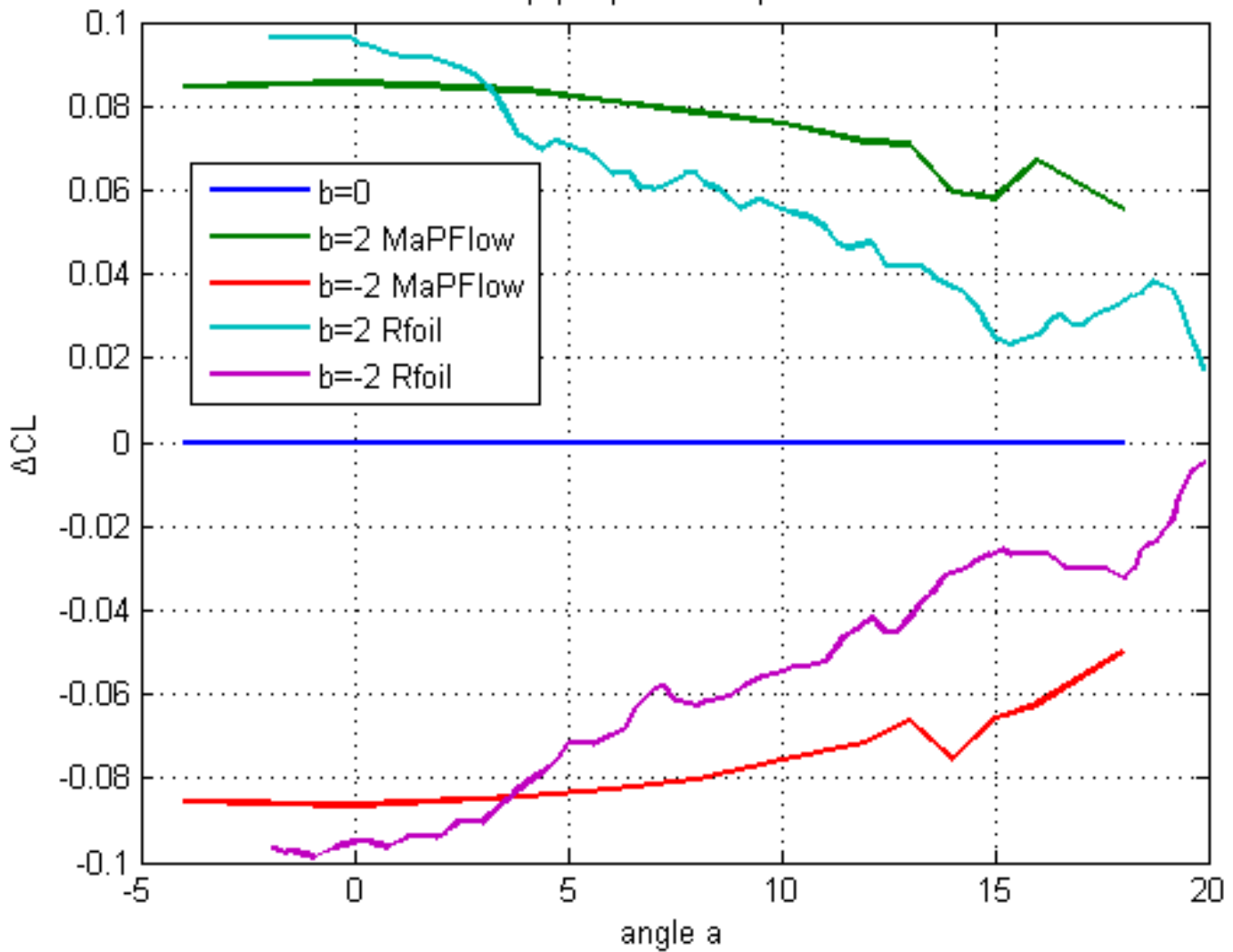
Ας δούμε τώρα τις αποκλίσεις του συντελεστή  $C_l$  υπό την παρουσία flap στις δύο ακραίες θέσεις, σε σχέση με την αρχική καμπύλη  $C_l$ . Συγκρίνουμε το MaPFlow με τις αντίστοιχες αποκλίσεις του EllipSys 2D, και του RFOIL (το RFOIL είναι βασισμένο στο XFOIL, πάνω στο οποίο βασίζεται και το FOILW):



**Εικόνα 59:** Η απόκλιση  $\Delta C_l$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPFlow και EllipSys2D.



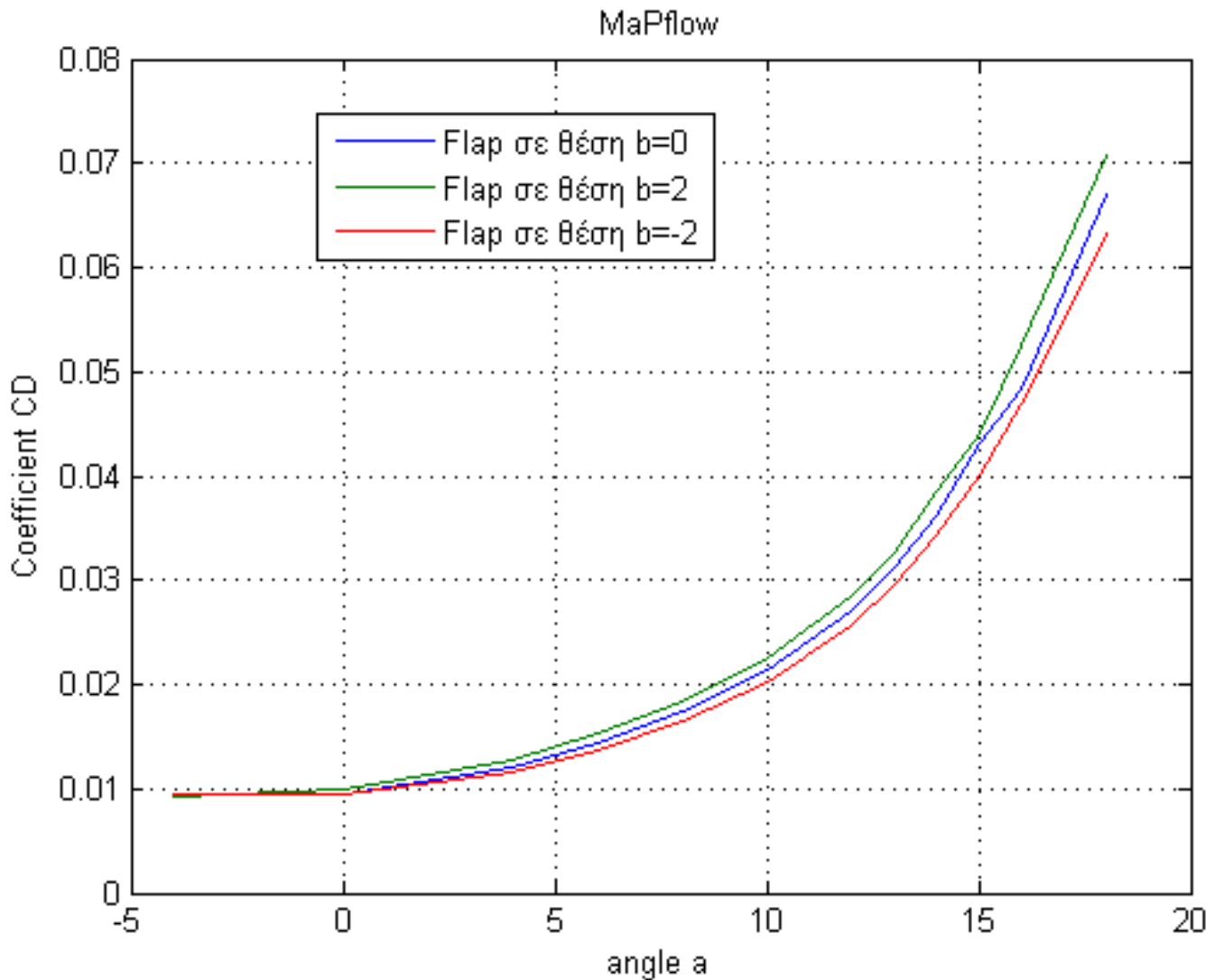
Σύγκριση MaPflow με Rfoil



**Εικόνα 60:** Η απόκλιση  $\Delta C_l$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPFlow και Rfoil.

Βλέπουμε ότι το MaPFlow προσεγγίζει πολύ καλύτερα το EllipSys2D σε σχέση με το Rfoil. Το MaPFlow και το EllipSys2D είναι περιπτώσεις προγραμμάτων CFD, σε αντίθεση με το Rfoil που ακολουθεί εντελώς διαφορετική μέθοδο. Συνεπώς, τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα.

Ας δούμε τώρα τις αντίστοιχες καμπύλες  $C_d$ :

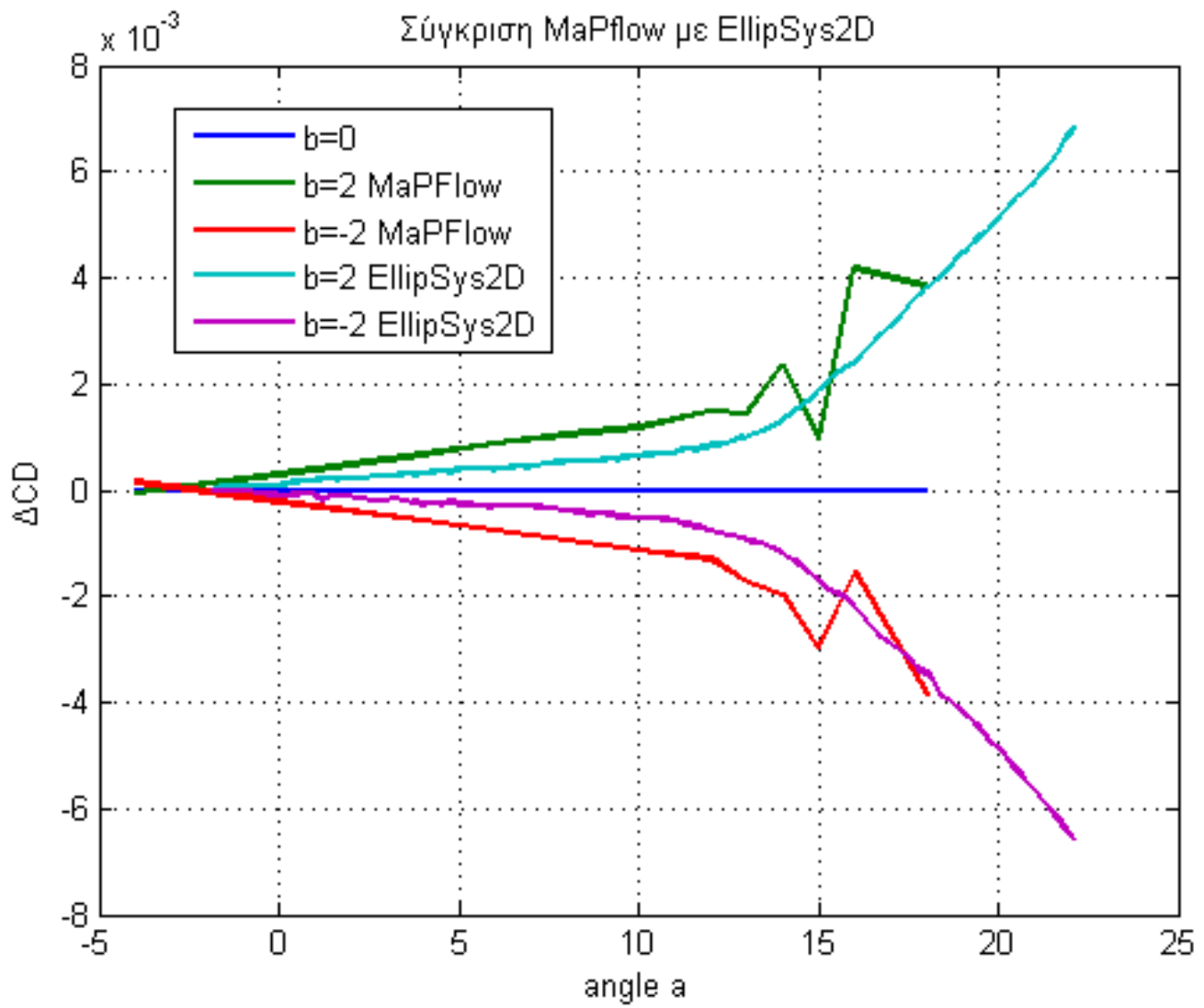


**Εικόνα 61:** Η καμπύλη  $C_d - \alpha$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow σε  $b = 2, 0$  και  $-2$ .

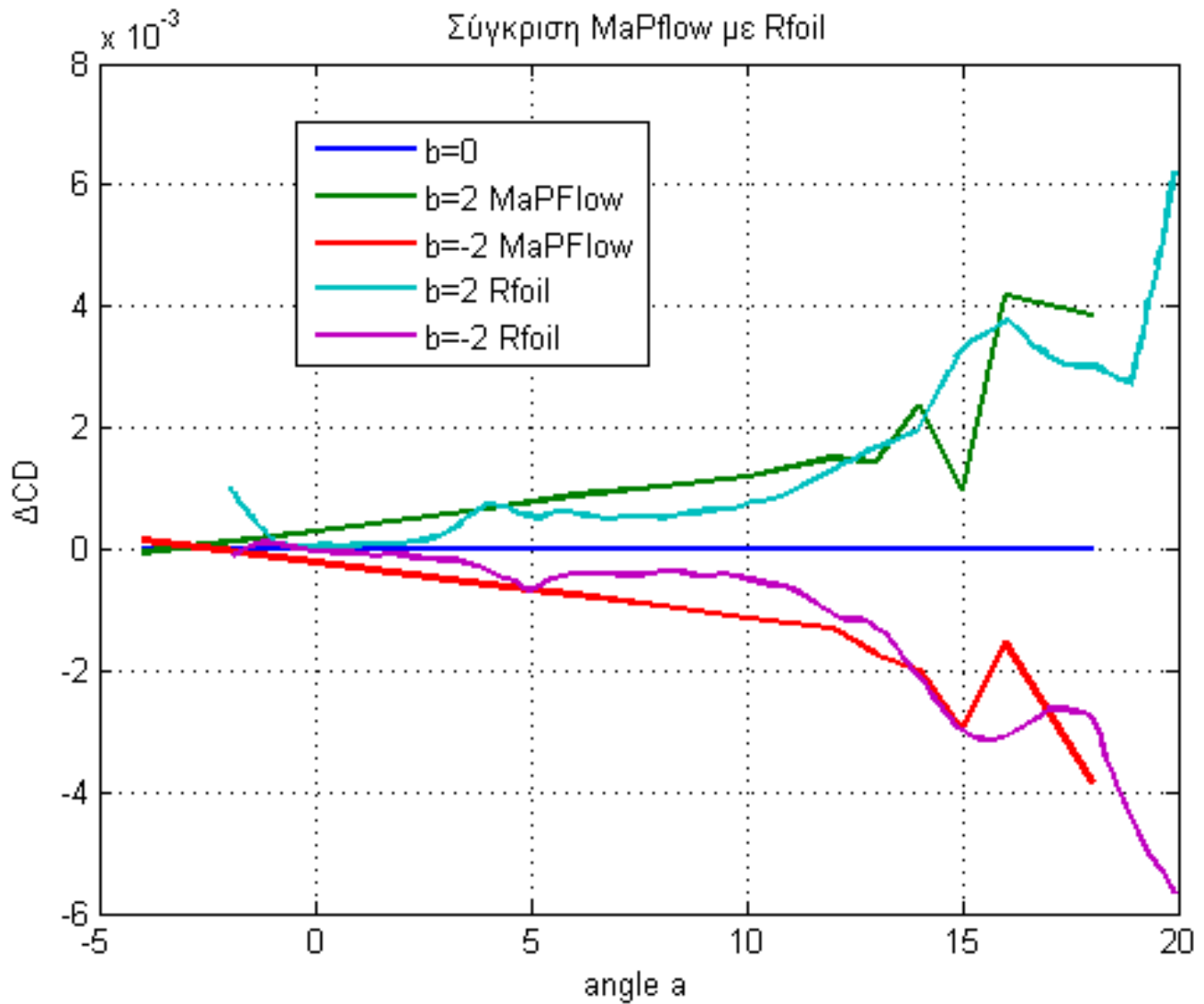
Παρατηρούμε ότι όταν το flap βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση ( $b=2$ ), τότε ο συντελεστής αντίστασης αυξάνεται, ενώ όταν βρίσκεται στην ψηλότερη δυνατή ( $b=-2$ ) μειώνεται.

Δηλαδή όταν το flap βρίσκεται εκτεταμένο προς τα κάτω, τότε αυξάνεται μεν ο συντελεστής άνωσης  $C_l$  της αεροτομής, που είναι επιθυμητό, αλλά αυξάνεται και ο συντελεστής αντίστασης  $C_d$ , που είναι ανεπιθύμητο. Συγκρίνοντας όμως τα διαγράμματα μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι η αύξηση του  $C_l$  είναι πιο μεγάλη από την μείωση του  $C_d$ . Αυτό σημαίνει ότι το flap επιδρά πολύ πιο αποτελεσματικά στην μεταβολή του συντελεστή άνωσης παρά στην μεταβολή της αντίστασης.

Ας δούμε τώρα τις αποκλίσεις του συντελεστή  $C_d$  από την αρχική θέση της αεροτομής, στην μέθοδο του MaPFlow σε σχέση με τις EllipSys2D και RFOIL:

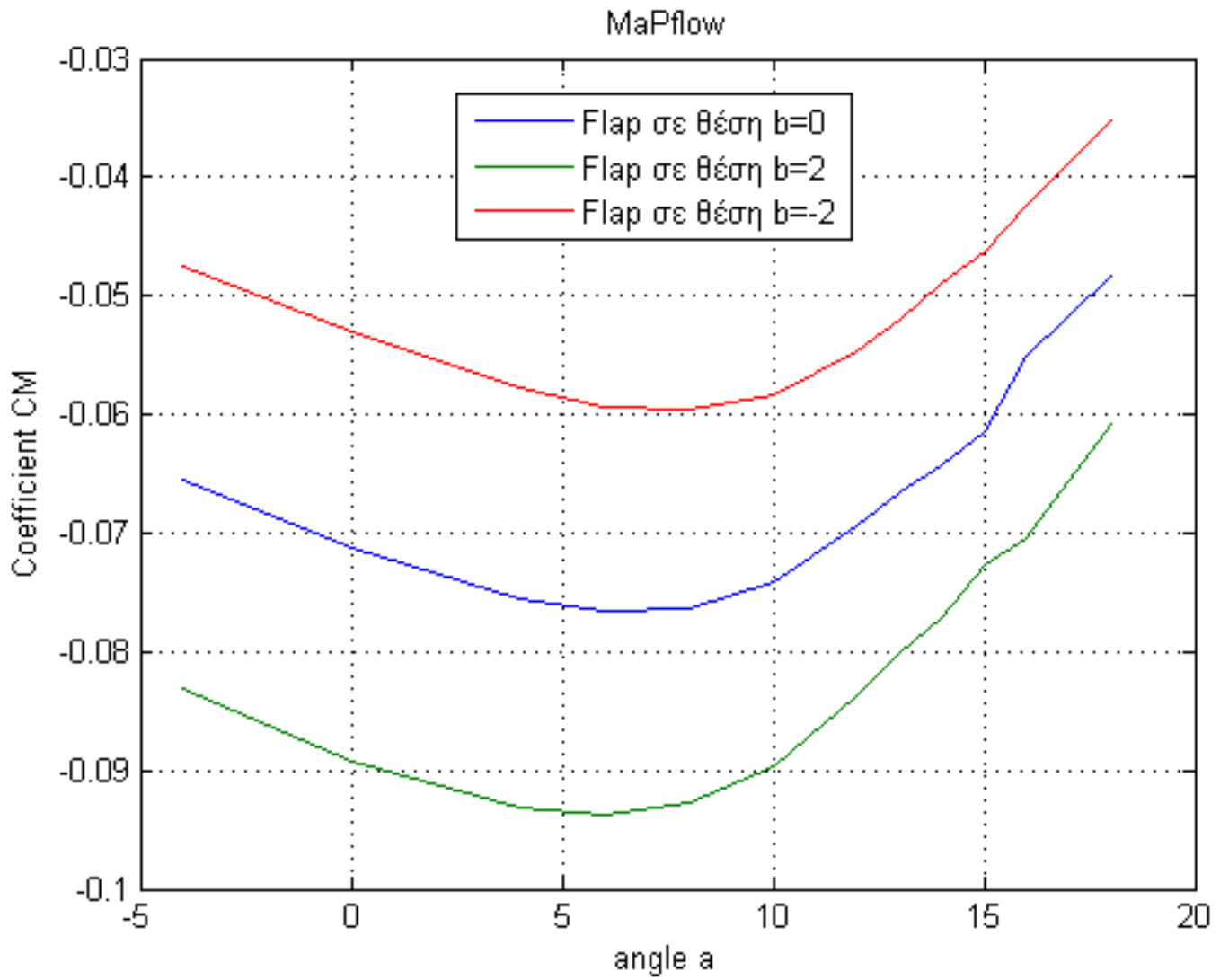


**Εικόνα 62:** Η απόκλιση  $\Delta C_d$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPflow και EllipSys2D.

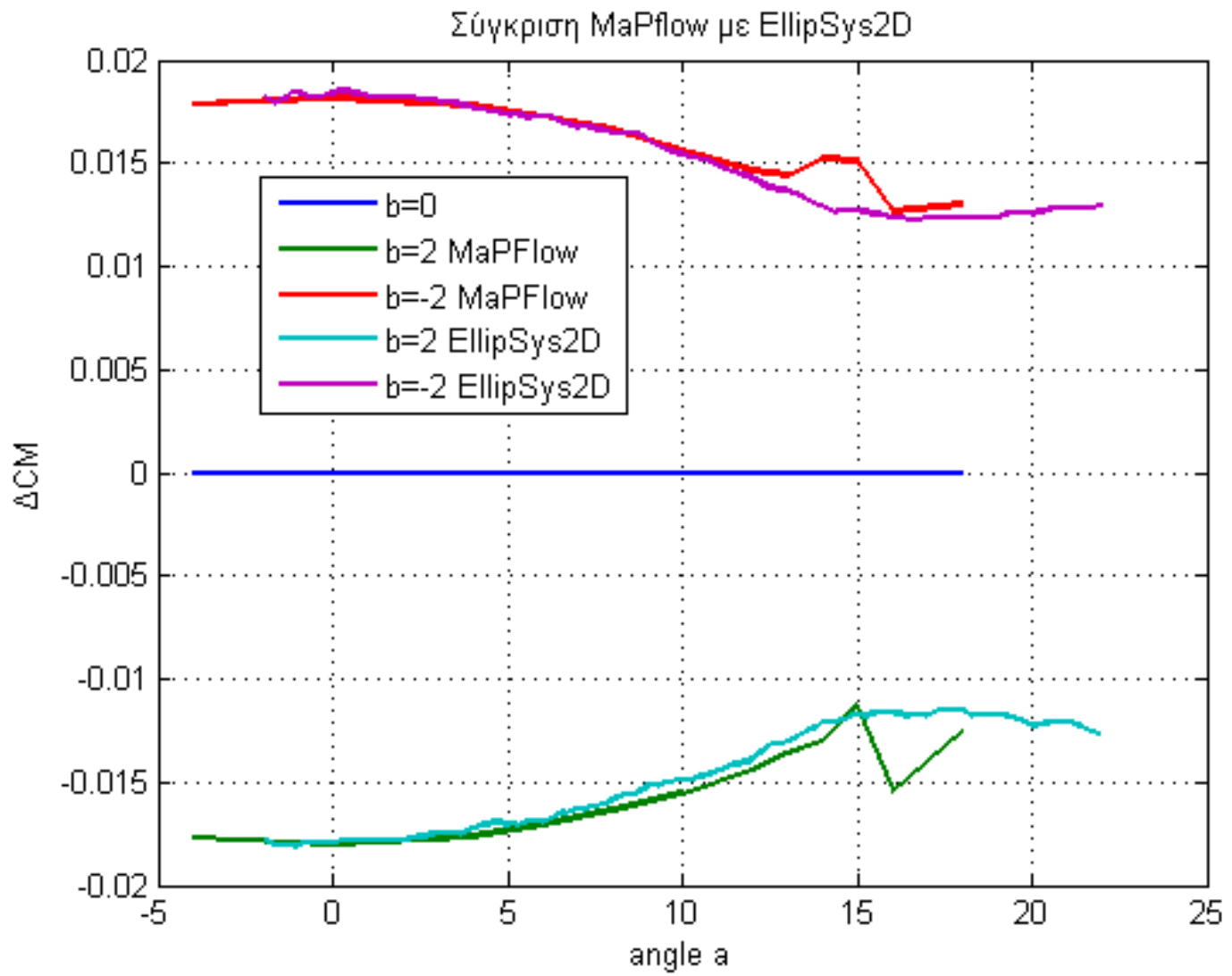


**Εικόνα 63: Η απόκλιση  $\Delta C_d$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPflow και Rfoil.**

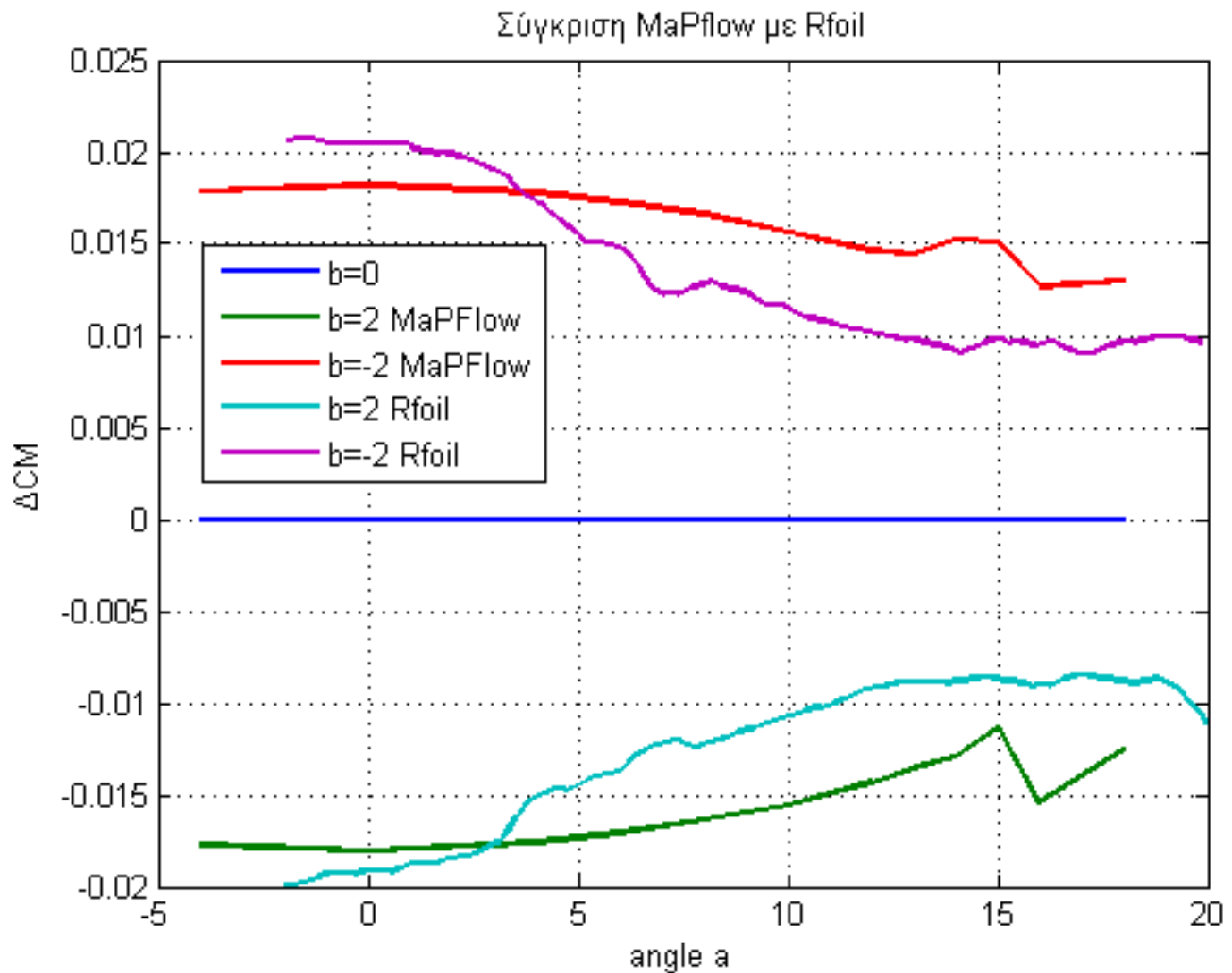
Τέλος, ας δούμε τις αντίστοιχες καμπύλες  $C_m$  καθώς και τις αντίστοιχες αποκλίσεις:



**Εικόνα 64:** Η καμπύλη  $C_m - \alpha$  όπως προκύπτει από την μέθοδο MaPflow σε  $b = 2, 0$  και  $-2$ .



**Εικόνα 65:** Η απόκλιση  $\Delta C_m$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPFlow και EllipSys2D.



**Εικόνα 66: Η απόκλιση  $\Delta C_m$  συναρτήσει της γωνίας  $\alpha$ , για  $b = 2$  και  $b = -2$ , με τις μεθόδους MaPFlow και Rfoil.**

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις που εξετάσαμε αφορούν μόνιμη (steady) ροή. Για την περίπτωση των διαγραμμάτων  $C_l$ ,  $C_d$  και  $C_m$  συναρτήσει του  $a$  που δείξαμε, για την αρχική αεροτομή, και για τις διάφορες γωνίες του flap, δεν θεωρήσαμε ότι το  $a$  μεταβάλλεται ταλαντωτικά. Τα παραπάνω διαγράμματα προέκυψαν από σύγκριση μόνιμης ροής για συγκεκριμένο αριθμό γωνιών. Συγκεκριμένα, οι υπολογισμοί έγιναν για γωνίες  $a = -4^\circ, 0^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 14^\circ, 15^\circ, 16^\circ$  και  $18^\circ$ .

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές, δεχθήκαμε την αεροτομή να σχηματίζει την εκάστοτε γωνία  $a$  με τον αέρα, παραμένοντας ακίνητη. Στη συνέχεια, ενώνοντας τις τιμές των συντελεστών που προέκυψαν για τις συγκεκριμένες γωνίες, προέκυψαν όλες οι παραπάνω καμπύλες.

Επειδή λοιπόν, για την περίπτωση αυτή, πουθενά στην ροή δεν υπεισέρχεται ο παράγοντας του χρόνου, το πρόβλημα MaPflow έλυσε το παραπάνω πρόβλημα θεωρώντας μόνιμη ροή.

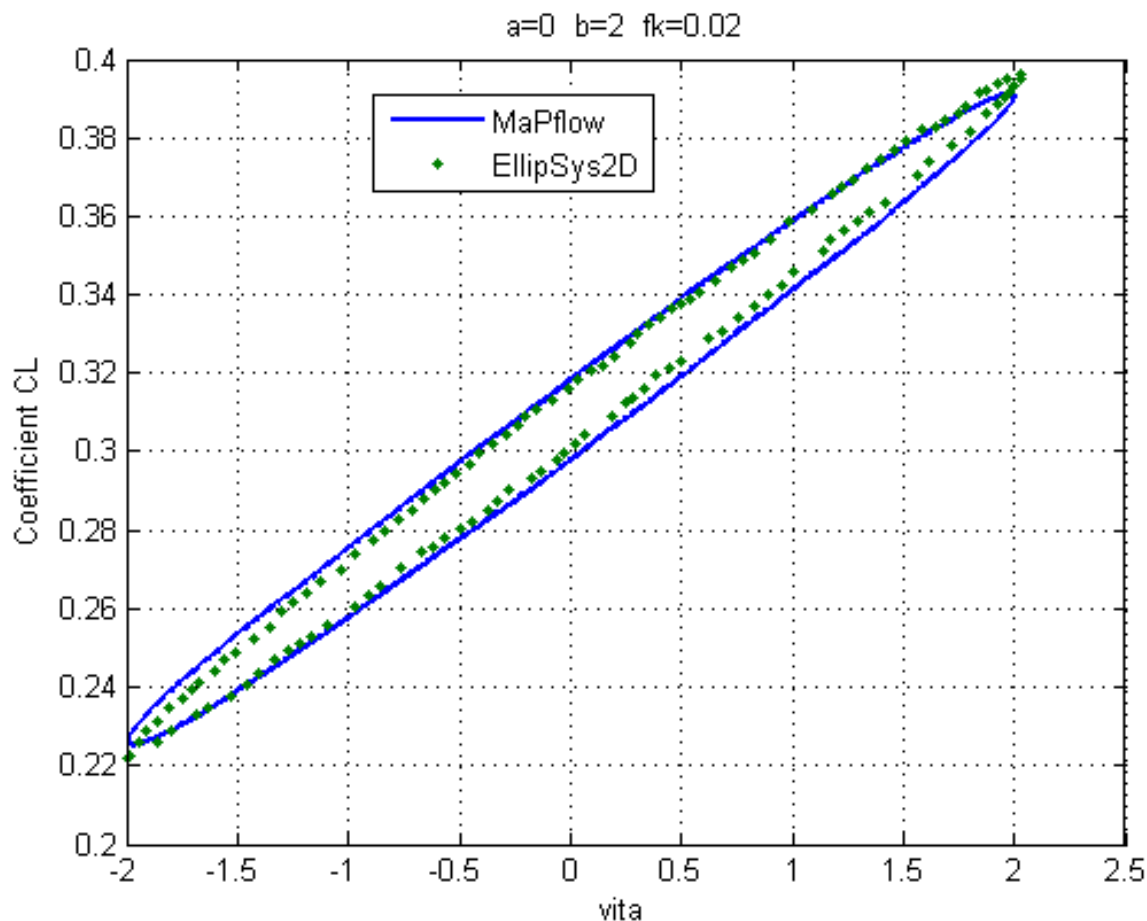
Όμως και οι δύο εξισώσεις κίνησης που ορίσαμε ως τώρα, δηλαδή της περιστροφής της αεροτομής (pitching)  $a$  και της κίνησης του παραμορφώσιμου flap  $b$ , δίνονται από έναν όρο  $\sin(\omega \cdot t)$  και  $\sin(2fk \cdot t)$  αντίστοιχα.

Επειδή ο όρος αυτός είναι συναρτήσει του χρόνου, για την επίλυση του θα πρέπει να έχουμε μη-μόνιμη ροή.

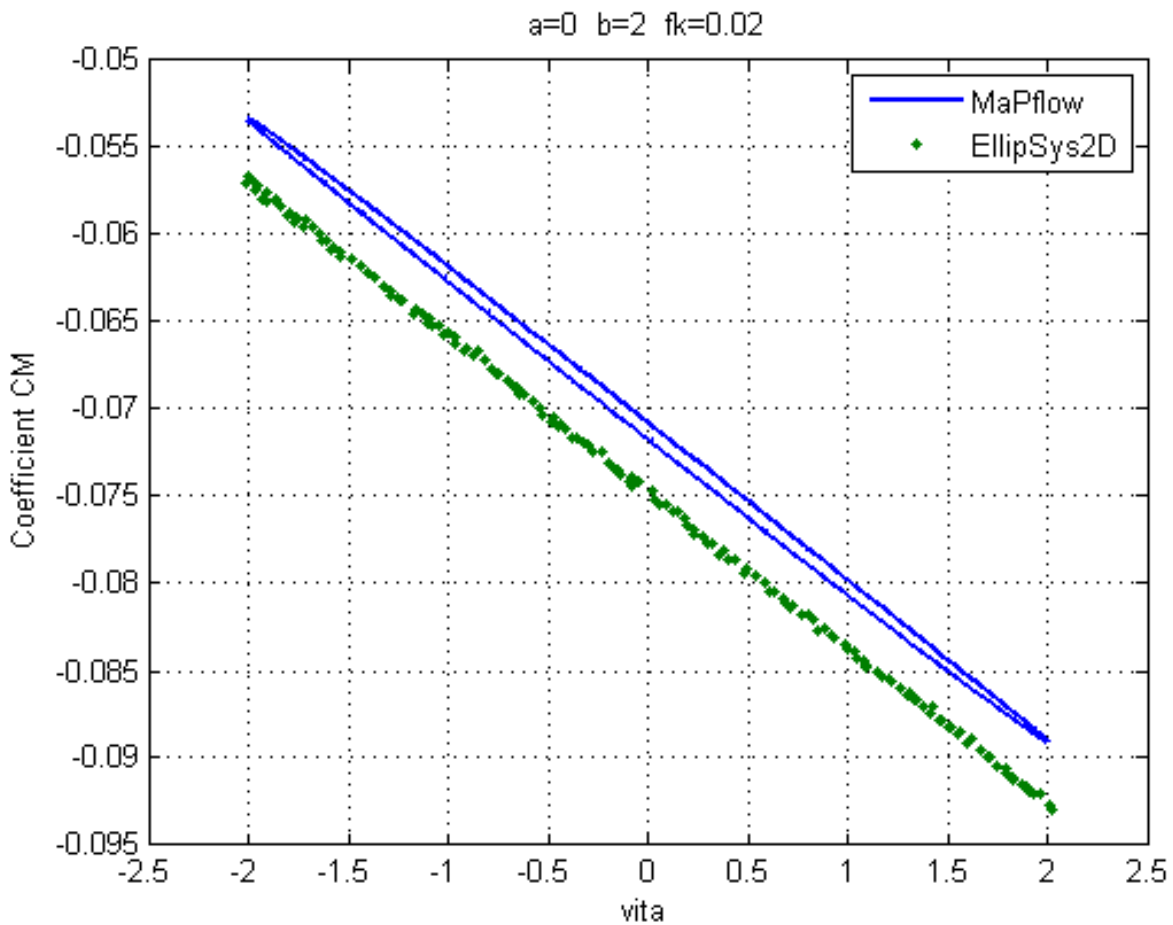
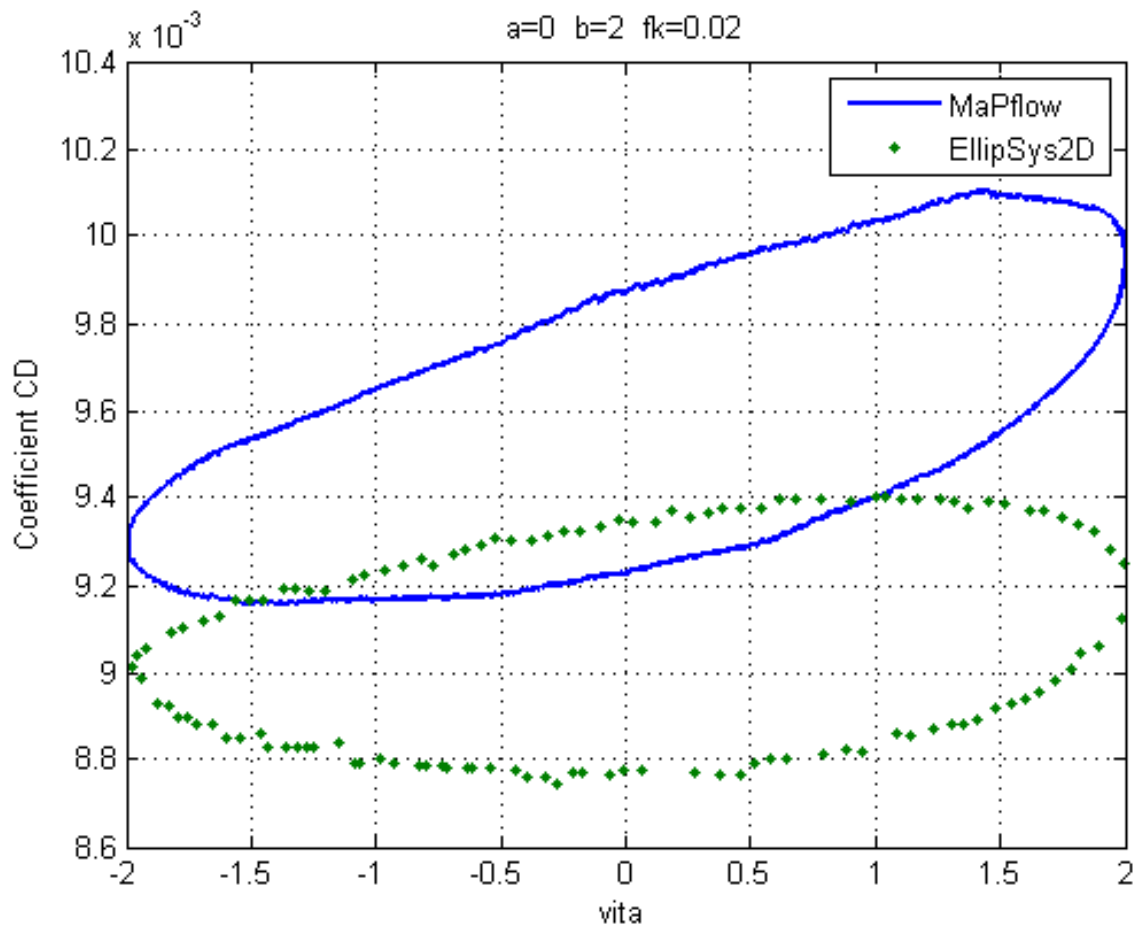
Ωστόσο, για την συγκεκριμένη διπλωματική, στην περίπτωση του παραμορφώσιμου flap, δεν θα θεωρήσουμε μη μόνιμη μεταβολή της περιστροφής (pitching). Αυτό σημαίνει, ότι παρόλο που ορίσαμε την εξίσωση του  $a$  συναρτήσει του χρόνου, θα θεωρούμε πάντα σταθερή γωνία, μηδενίζοντας την συχνότητα  $omeg$ .

Εκεί που θα έχουμε κίνηση συναρτήσει του χρόνου, είναι όσον αφορά το flap. Στα επόμενα αυτό δεν θα θεωρείται σταθερό, αλλά θα μεταβάλλεται με βάση την εξίσωση κίνησής του, για διαφορετικές τιμές συχνότητες  $f_k$  (που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, και που θα δούμε αναλυτικότερα παρακάτω). Επειδή η κίνησή του flap είναι ημιτονοειδής, θα έχουμε ταλαντωτική μη μόνιμη (unsteady) ανάλυση ροής. Σε όλες τις περιπτώσεις θα θεωρήσουμε πλάτος του συντελεστή  $b$ ,  $b_{amp} = 2$ .

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 0^\circ$  και  $f_k = 0.02$ . Τα αντίστοιχα διαγράμματα  $C_l$ ,  $C_d$  και  $C_m$  που προκύπτουν, για τις διάφορες μεθόδους υπολογισμού, είναι τα εξής:







Εικόνες 67, 68 και 69: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 0^\circ$ ,

$$b_{amp} = 2 \text{ και } f_k = 0.02.$$

Παρατηρώντας την καμπύλη  $C_l - \alpha$  βλέπουμε ότι το διάγραμμα δεν είναι μία γραμμή, αλλά ένας κλειστός βρόχος. Δηλαδή, για μία συγκεκριμένη τιμή του όρου  $b$ , ο συντελεστής άνωσης  $C_l$  αποκτά δύο τιμές.

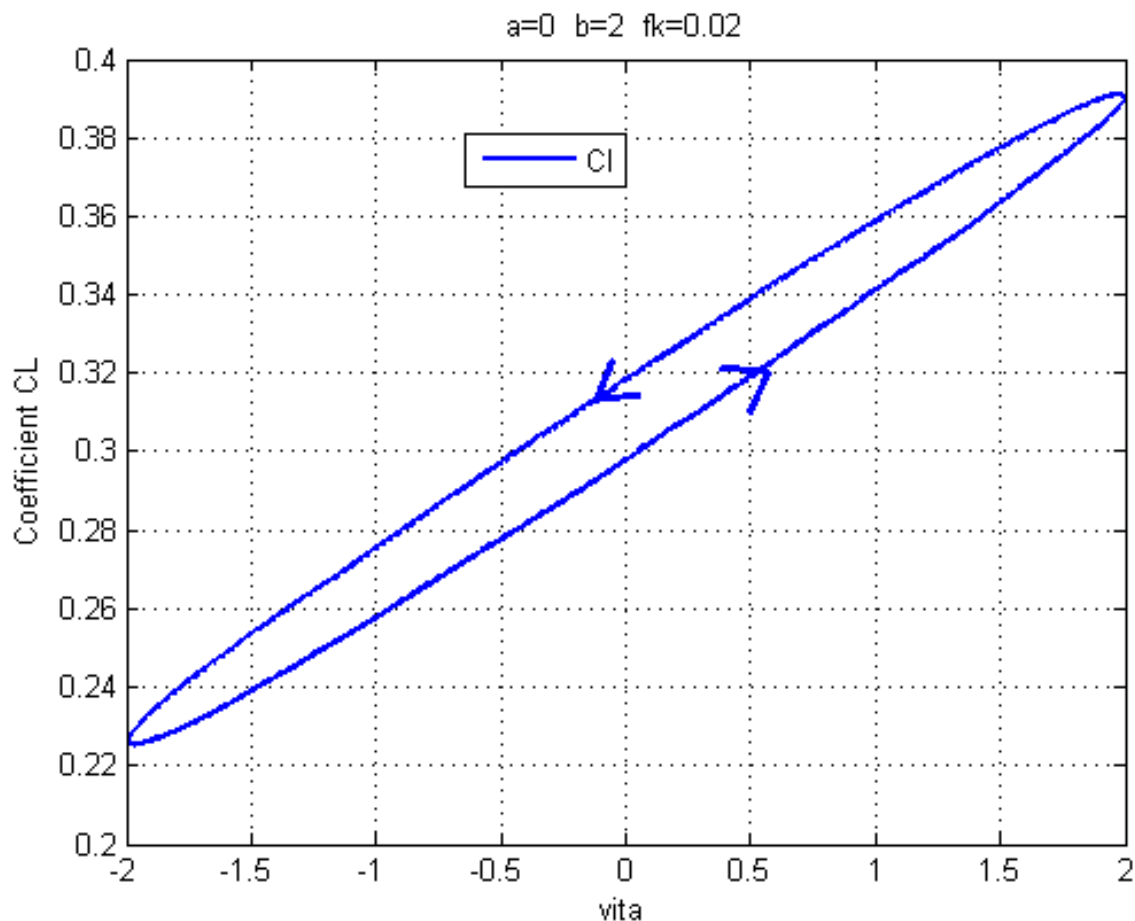
Η διαφοροποίηση έγκειται στο αν το flap, τη στιγμή που βρίσκεται στην συγκεκριμένη θέση  $b$ , βρίσκεται στην φάση της ανάβασης ή στην φάση της κατάβασης.

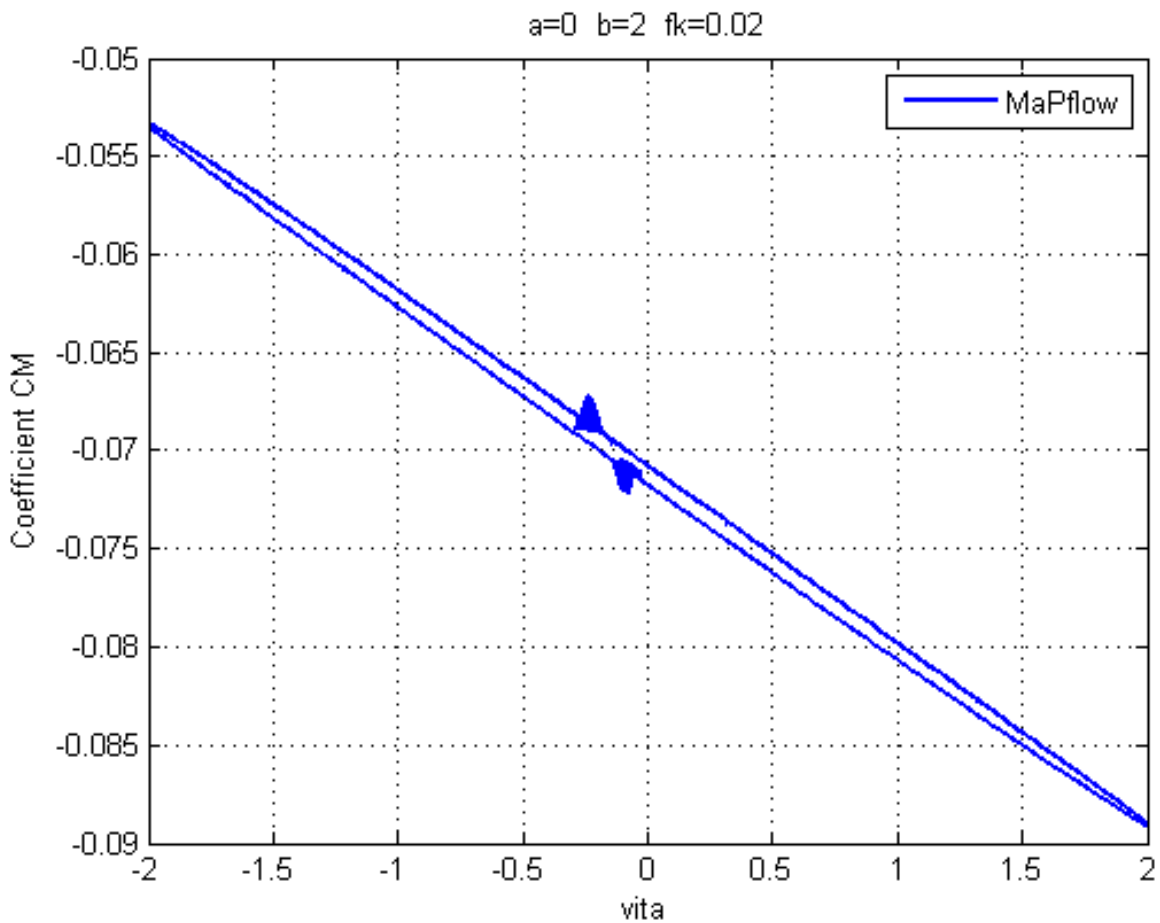
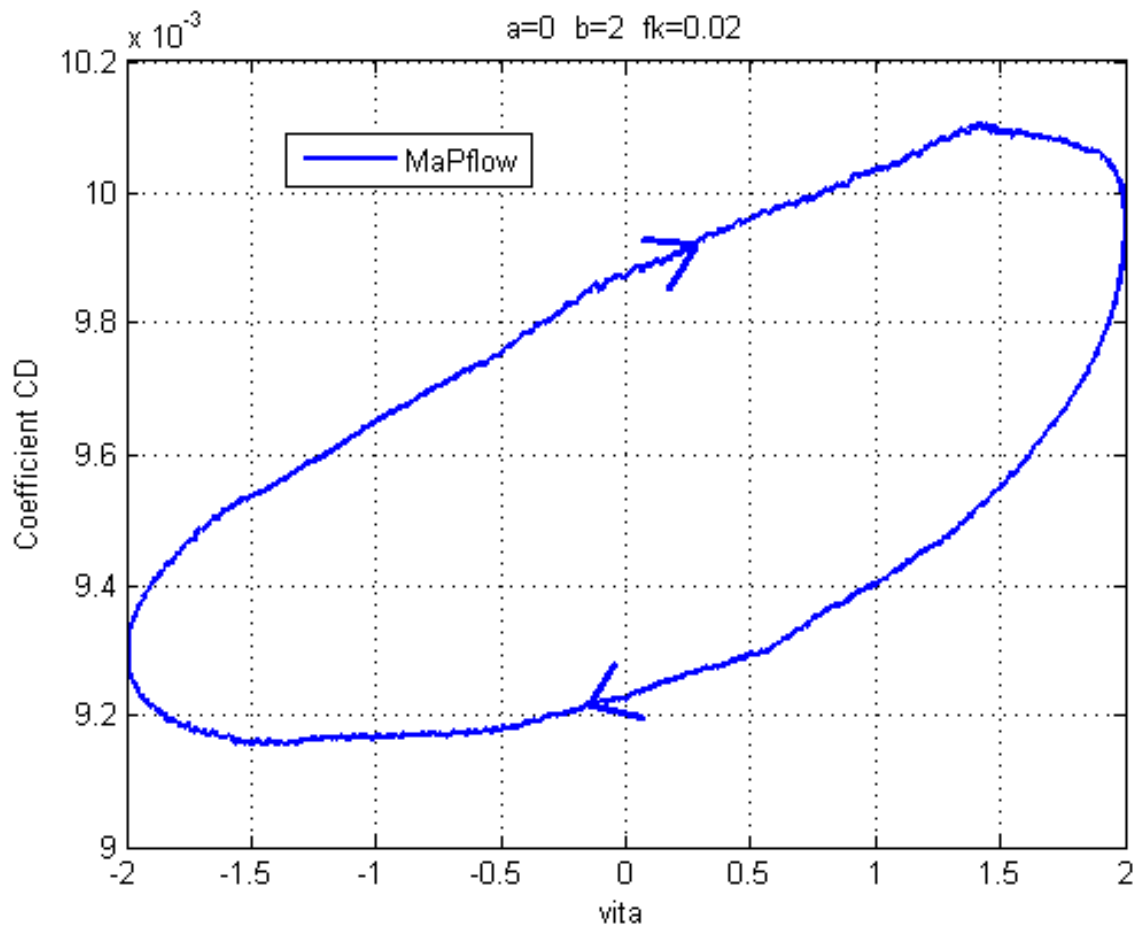
Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στο μη-μόνιμο χαρακτήρα της ροής. Όταν το flap βρίσκεται σε κίνηση σε σχέση με το ρευστό, τότε παρατηρούνται αλλαγές στις ιδιότητες του αέρα που έρχονται σε επαφή με την αεροτομή. Η σχετική κίνηση του flap ως προς τον αέρα διαφοροποιεί τις πιέσεις και τις τριβές που αναπτύσσονται σε σχέση με την περίπτωση που το flap παρέμενε ακίνητο, με αποτέλεσμα να αλλάζουν αντίστοιχα και οι τιμές των  $C_l$  και  $C_d$ .

Έτσι ανάλογα με το αν το flap βρίσκεται κατά την φάση της ανόδου ή της καθόδου σε μία συγκεκριμένη θέση  $b$ , θα έχουμε μεταβολές στην τιμή του  $C_l$  και αποκλίσεις από την περίπτωση που το flap παρέμενε ακίνητο στην συγκεκριμένη θέση  $b$ .

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **υστέρηση**, και, όπως μπορούμε να δούμε στα αντίστοιχα σχήματα, παρουσιάζεται και για την περίπτωση των συντελεστών  $C_d$  και  $C_m$ .

Είναι λοιπόν σωστό να δείχνουμε και την κατεύθυνση των παραπάνω βρόχων:





**Εικόνες 70, 71 και 72: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 0^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.02$ , με έμφαση στην κατεύθυνση της ροής.

Όσον αφορά τον συντελεστή άνωσης, παρατηρούμε ότι καθώς ο όρος  $b$  αυξάνεται (το flap κατεβαίνει), τόσο αυξάνεται και ο  $C_l$ . Όταν ο  $b$  μειώνεται (το flap ανεβαίνει), αρχίζει και μειώνεται και το  $C_l$ , αλλά αυτήν την φορά από τιμές που βρίσκονται ψηλότερα σε σχέση με την κατάβαση του flap.

Αυτό είπαμε ότι οφείλεται στην μη μόνιμη ροή και ονομάζεται υστέρηση. Αν μετατρέπαμε την ροή σε μόνιμη θα έπρεπε να υπολογίσουμε το  $C_l$  για διάφορες τιμές του  $b$  (επειδή η ροή είναι μόνιμη, ο όρος  $b$  δεν μπορεί να αλλάζει ταλαντωτικά. Για αυτό η αντίστοιχη καμπύλη σε μόνιμη ροή μπορεί μονάχα να βρεθεί αν πάρουμε ξεχωριστές σταθερές τιμές  $b$  και ενώσουμε τα σημεία).

Το αποτέλεσμα που θα προέκυπτε σε μόνιμη ροή θα ήταν μία ευθεία  $C_l - b$ , όπου οι τιμές του  $C_l$  θα βρίσκονταν κάπου ενδιάμεσα στον βρόχο υστέρησης που βλέπουμε εδώ.

Άρα κατά την φάση της κατάβασης (αύξηση  $b$ ) έχουμε μικρότερη τιμή  $C_l$  από αυτήν που θα είχαμε σε μόνιμη ροή, και κατά την φάση της ανάβασης (μείωση  $b$ ) έχουμε μεγαλύτερη τιμή. Που όμως οφείλετε αυτό;

Όταν το flap κατεβαίνει (δηλαδή όταν ο  $b$  αυξάνεται), προκαλείται μεγαλύτερη ταχύτητα αέρα γύρω από την κάτω επιφάνεια της πτέρυγας σε σχέση με την πάνω. Αφού η ταχύτητα κάτω από την πτέρυγα αυξάνεται σε σχέση με την πάνω, έχουμε και αύξηση της κυκλοφορίας  $\Gamma$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο:

$$\Gamma = \oint_c V \cdot dl$$

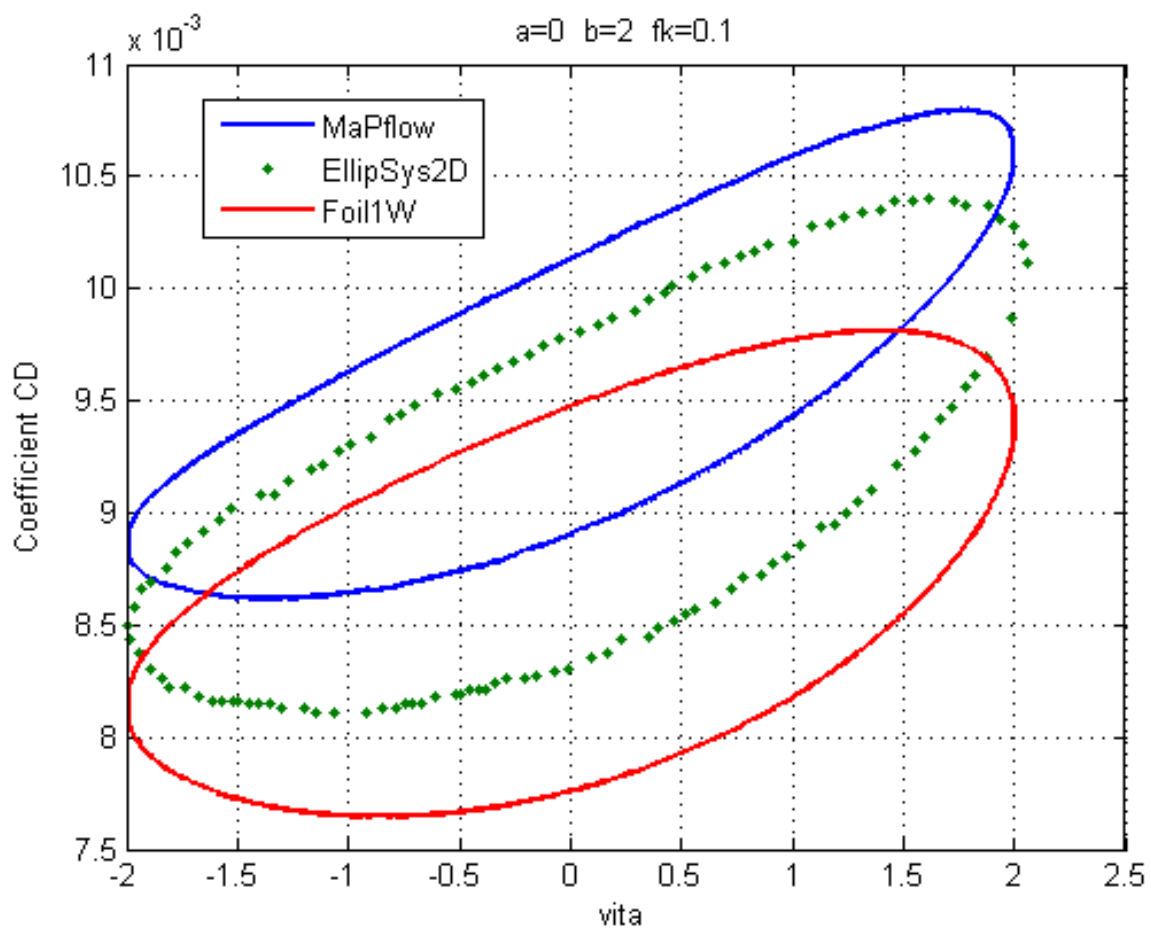
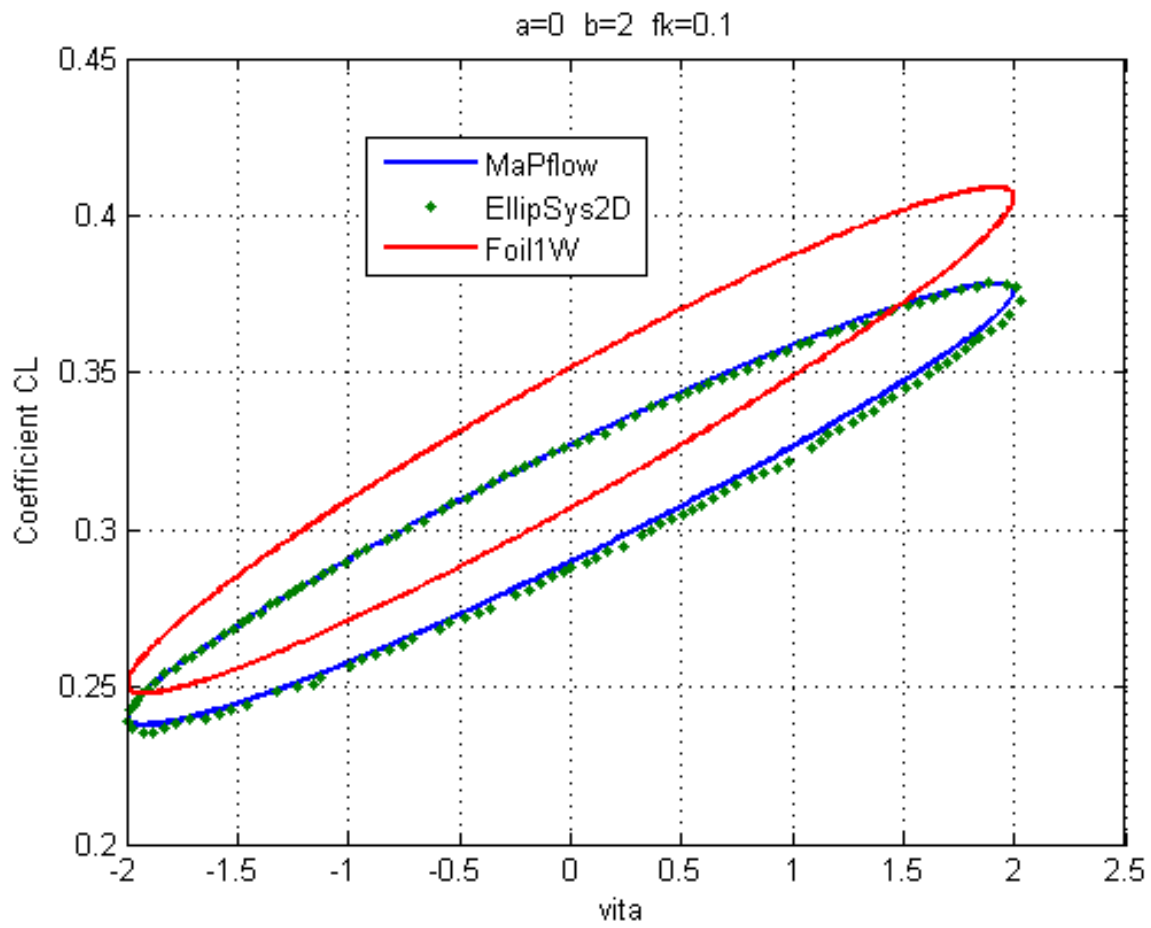
Αύξηση της κυκλοφορίας προκαλεί και αύξηση στην στροβιλότητα. Έτσι, πίσω από την ακμή εκφυγής της αεροτομής σχηματίζονται στροβιλισμοί. Οι στροβιλισμοί αυτοί προκαλούν κίνηση της ροής από το πίσω μέρος της αεροτομής προς τα εμπρός. Αφού φτάσουν εμπρός, τείνουν να κατεβάσουν την ελεύθερη ροή προς τα κάτω, μειώνοντας έτσι την φαινόμενη γωνία πρόσπτωσης.

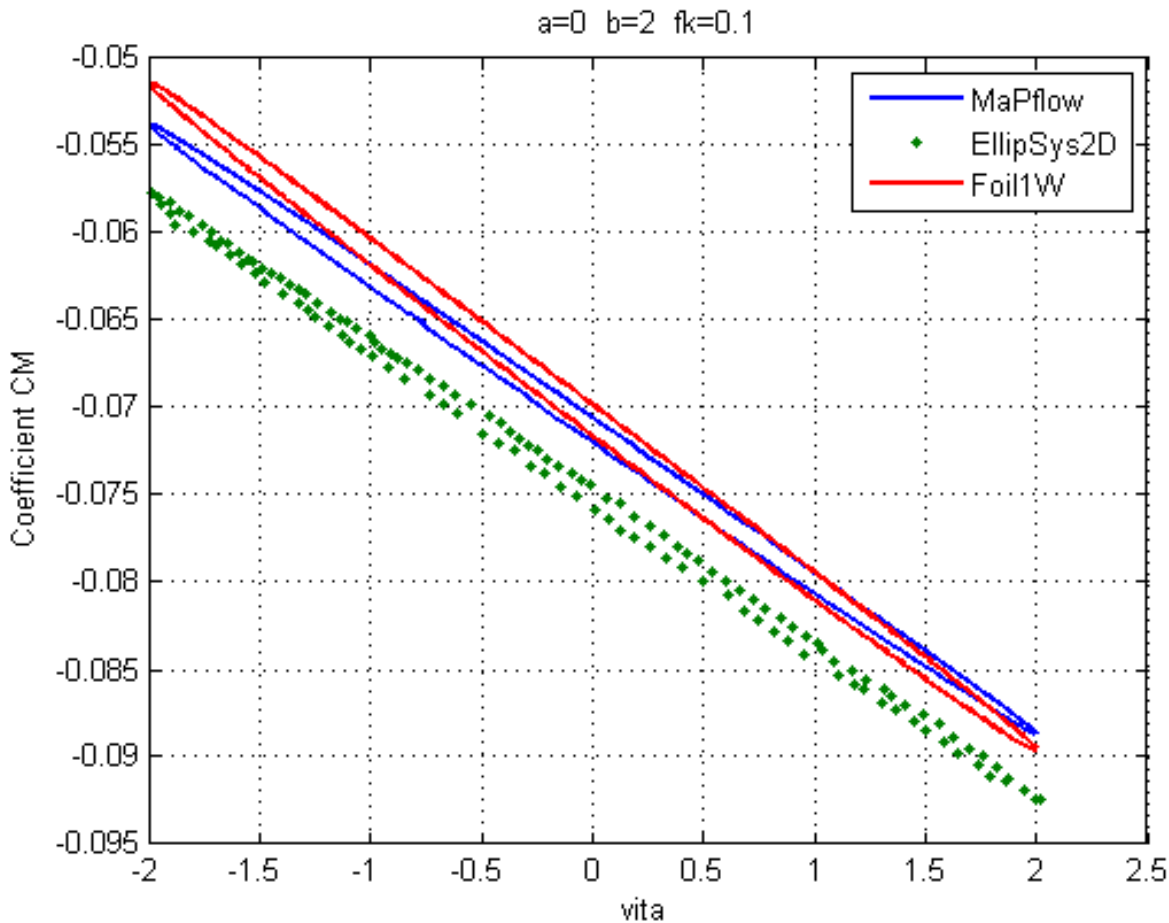
Έτσι, η τελική τιμή του  $C_l$  εμφανίζεται μικρότερη από ότι στη μόνιμη ροή, όπου η κυκλοφορία και η στροβιλότητα είναι μικρότερη.

Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει όταν το flap ανεβαίνει ( $b$  μειώνεται). Τότε, η κυκλοφορία και η στροβιλότητα τείνουν να μειωθούν, επειδή έχουμε αύξηση της ταχύτητας στην πάνω επιφάνεια σε σχέση με την κάτω (βέβαια, πάντα, η ταχύτητα κάτω είναι υψηλότερη από την πάνω, οπότε το πρόσημο της κυκλοφορίας και της στροβιλότητας δεν αλλάζει σε σχέση με την μόνιμη ροή, απλά μειώνεται κατά την απόλυτη τιμή τους). Αφού μειώνεται η στροβιλότητα, έχουμε και μικρότερη μείωση της γωνίας πρόσπτωσης σε σχέση με την μόνιμη ροή, οπότε συνολικά μεγαλύτερη φαινόμενη γωνία πρόσπτωσης. Έτσι το  $C_l$  εμφανίζεται να αυξάνεται.

Συγκρίνοντας τις δύο διαφορετικές μεθόδους μεταξύ τους, την μέθοδο MaPFlow με την μέθοδο EllipSys2D βλέπουμε ότι, στην καμπύλη  $C_l - \alpha$  υπάρχει μία μικρή διαφορά στο εύρος και στην κλίση. Το EllipSys εντοπίζει ως μικρότερη την υστέρηση, για αυτό και το εύρος του βρόχου είναι μικρότερο (επηρεάζεται λιγότερο από την μη-μόνιμη ροή). Ομοίως η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του του  $C_l$  παίρνουν πιο ακραίες τιμές, φαινόμενο που επίσης οφείλεται στην μικρότερη επίδραση της μη-μονιμότητας.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 0^\circ$  και  $f_k = 0.1$ .





**Εικόνες 73, 74 και 75: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 0^\circ$ ,  $b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.1$ .**

Εδώ αποφασίσαμε να αλλάξουμε την συχνότητα κίνησης του flap από 0.02 σε 0.1. Συγκρίνοντας την καμπύλη  $C_l - \alpha$  του προγράμματος MaPFlow με τα αντίστοιχα του EllipSys2D, βλέπουμε καλή προσέγγιση όχι μόνο στις τιμές που παίρνει ο όρος  $C_l$  για τις διάφορες τιμές του  $b$ , αλλά και καλή ταύτιση στον ίδιο το βρόχο υστέρησης.

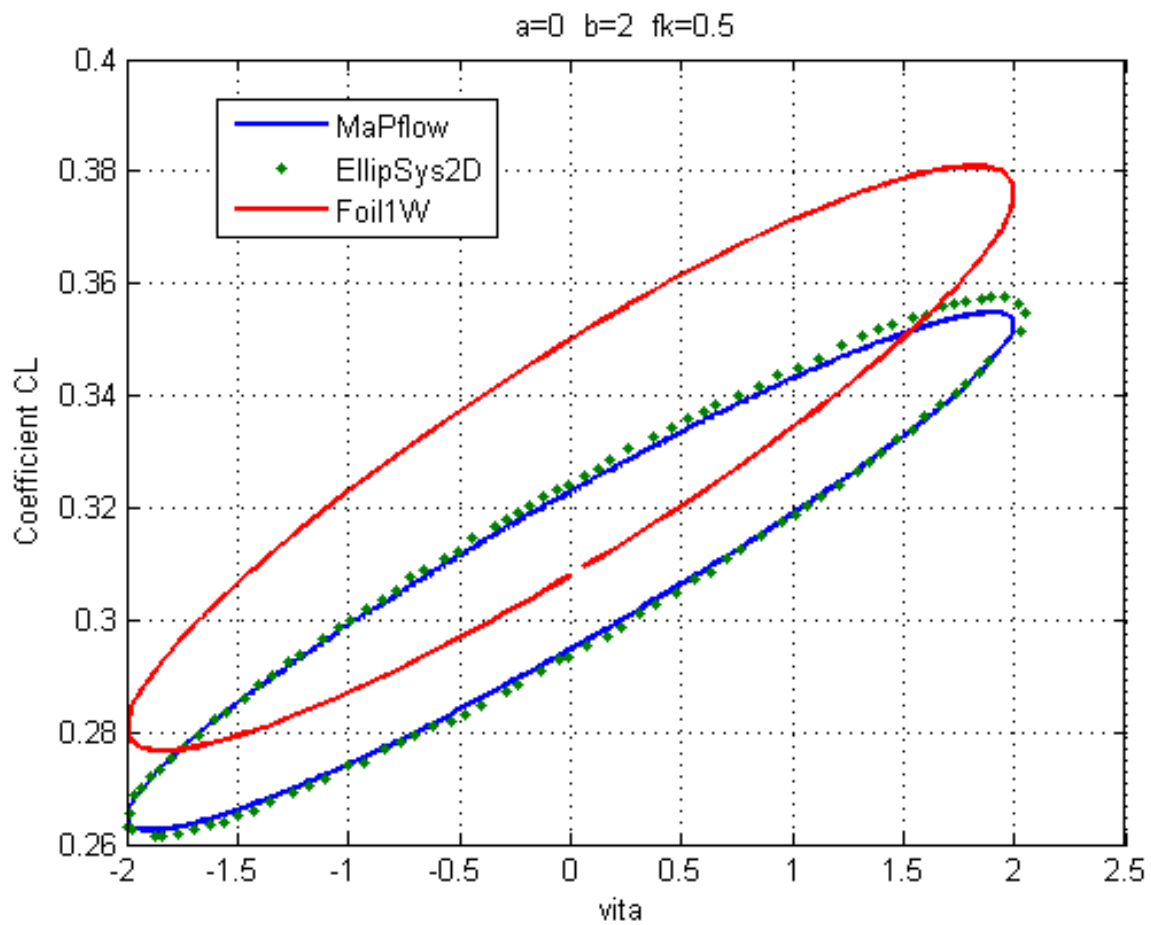
Είπαμε ήδη ότι η καλή ταύτιση ανάμεσα στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι ότι τα δύο αυτά προγράμματα χρησιμοποιούν κοινές μεθόδους υπολογισμού, δηλαδή μέθοδο CFD, με διακριτοποίηση όγκου και cell-centered κελιά. Οι διαφορές ανάμεσά τους οφείλονται στις μικρές διαφορές των δύο προγραμμάτων μεταξύ τους, δηλαδή στο γεγονός ότι το MaPFlow επιλύει συμπιεστά ρευστά, ενώ το EllipSys2D επιλύει ασυμπίεστα. Ακόμα, σημαντικός παράγοντας είναι ότι κάθε μία από τις δύο μεθόδους χρησιμοποίησε διαφορετικό πλέγμα, με το οποίο διακριτοποίησε τη ροή. Εξάλλου, κάθε μία από τις δύο μεθόδους χρησιμοποιεί διαφορετικό μοντέλο τύρβης και διαφορετικό τρόπο υπολογιστικής εφαρμογής του.

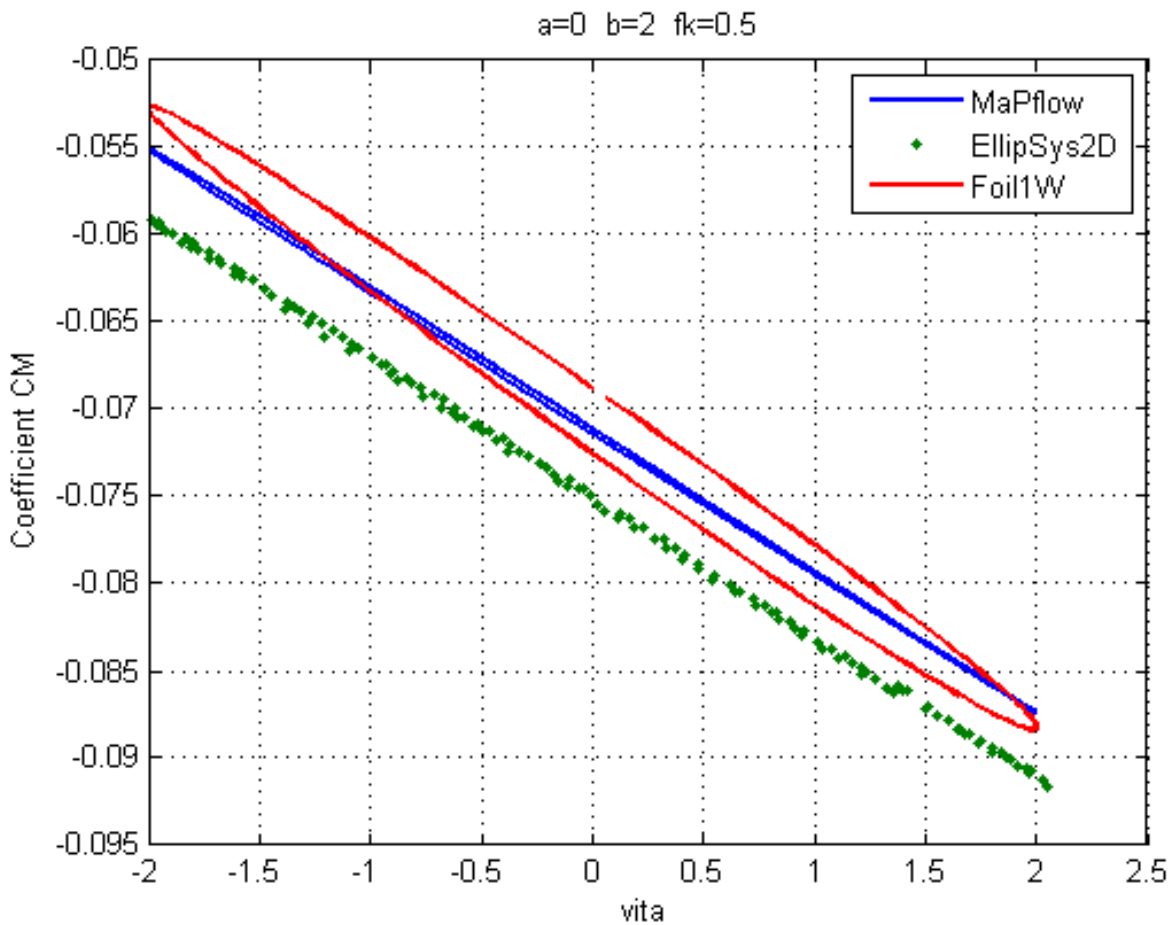
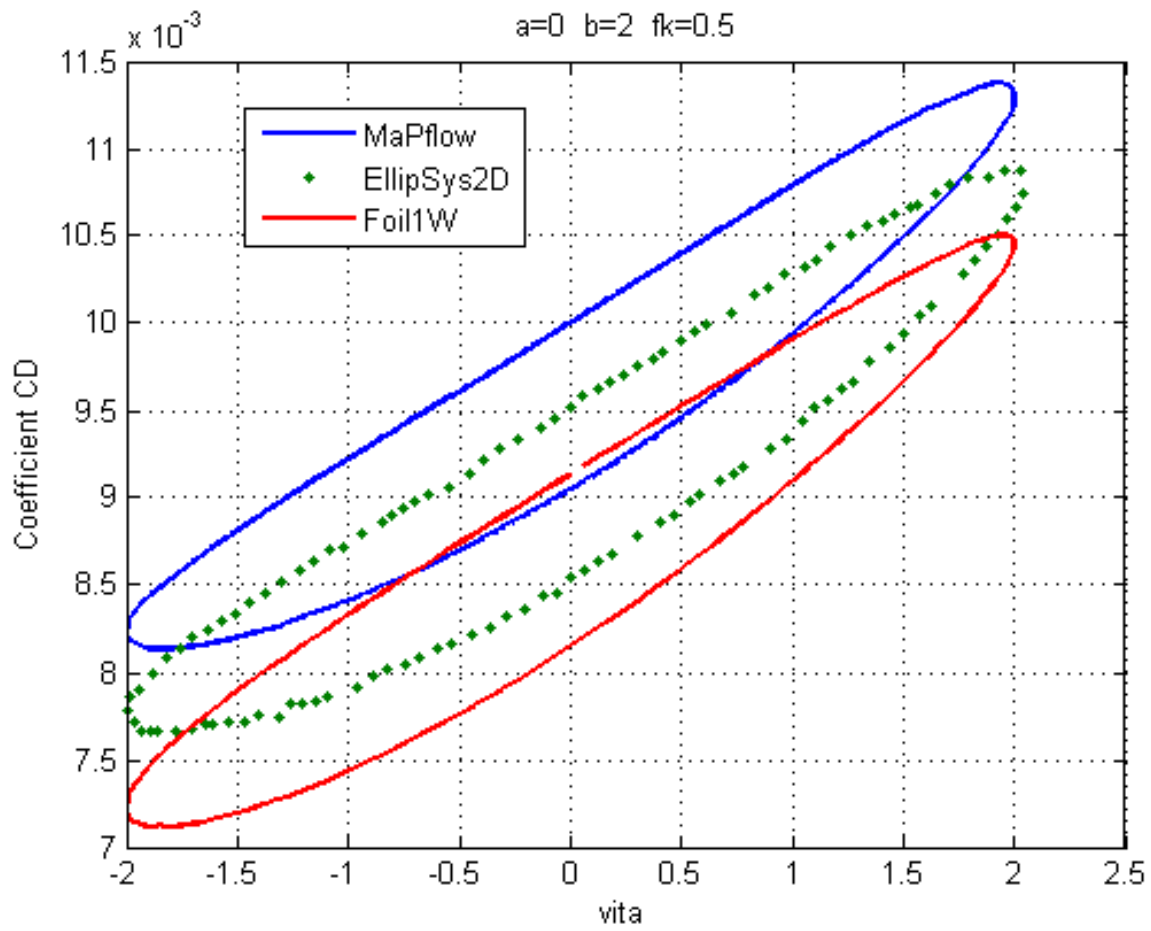
Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του MaPFlow με τα αντίστοιχα του Foil1W, βλέπουμε πιο αισθητές διαφορές. Ο  $C_l$  είναι διαφορετικός τόσο όσον αφορά την μέση τιμή του, όσο και τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές του (για  $b=2$  και  $b=-2$  αντίστοιχα). Σαν αποτέλεσμα των ανωτέρω, παρατηρείται διαφοροποίηση και στην κλίση του  $C_l$ .

Η αισθητή διαφορά ανάμεσα στις μεθόδους MaPFlow και Foil1W οφείλεται στο ότι χρησιμοποιούν τελείως διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού και κώδικες. Η Foil1W δεν χρησιμοποιεί CFD αλλά ένα μοντέλο που κάνει χρήση πηγών και δυνών.

Διαφοροποίηση υπάρχει και στις άλλες δύο καμπύλες. Έτσι π.χ. στην καμπύλη  $C_d - \alpha$  ο βρόχος της υστέρησης του Foil1W είναι αρκετά διαφορετικός στο σχήμα του από τον αντίστοιχο των MaPflow και EllipSys2D. Αντίστοιχα στο  $C_m - \alpha$  ο βρόχος είναι διαφορετικός στην κλίση.

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 0^\circ$  και  $f_k = 0.5$ .





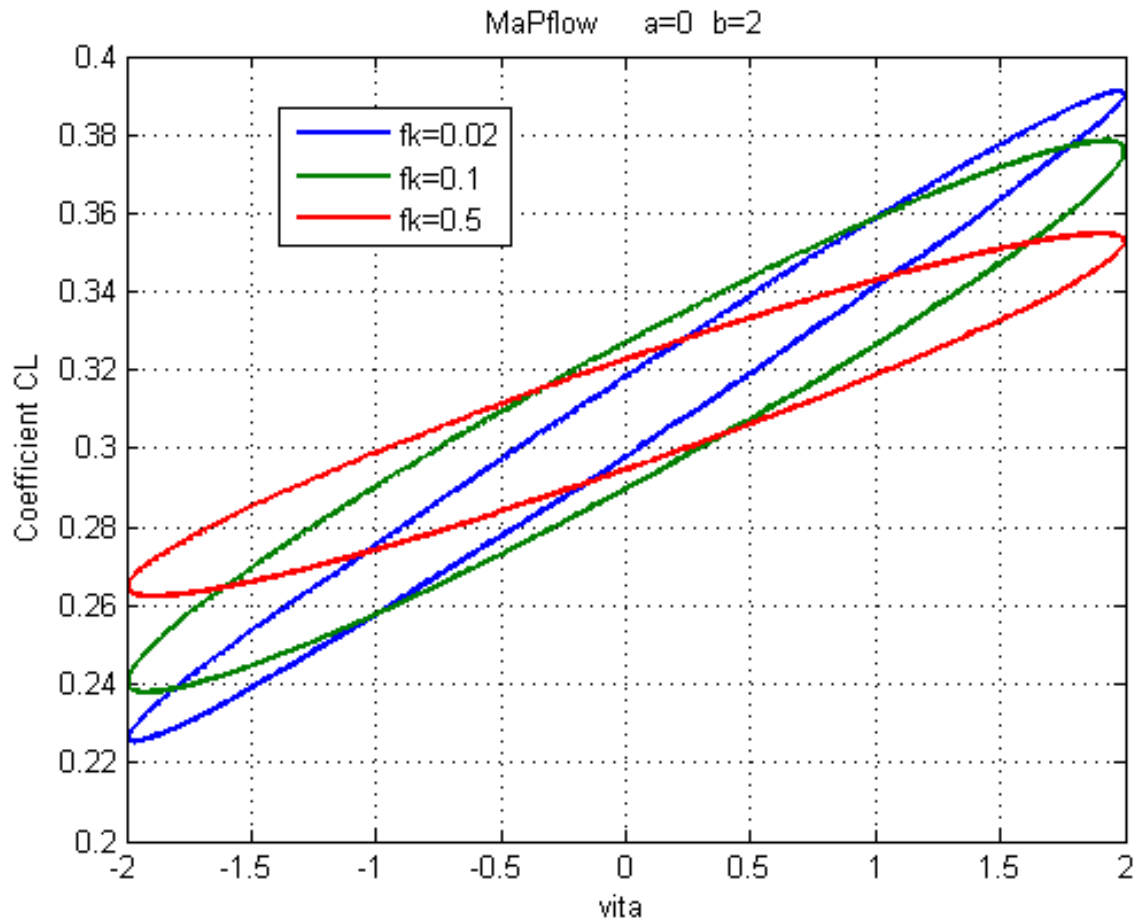
**Εικόνες 76, 77 και 78: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 0^\circ$ ,**

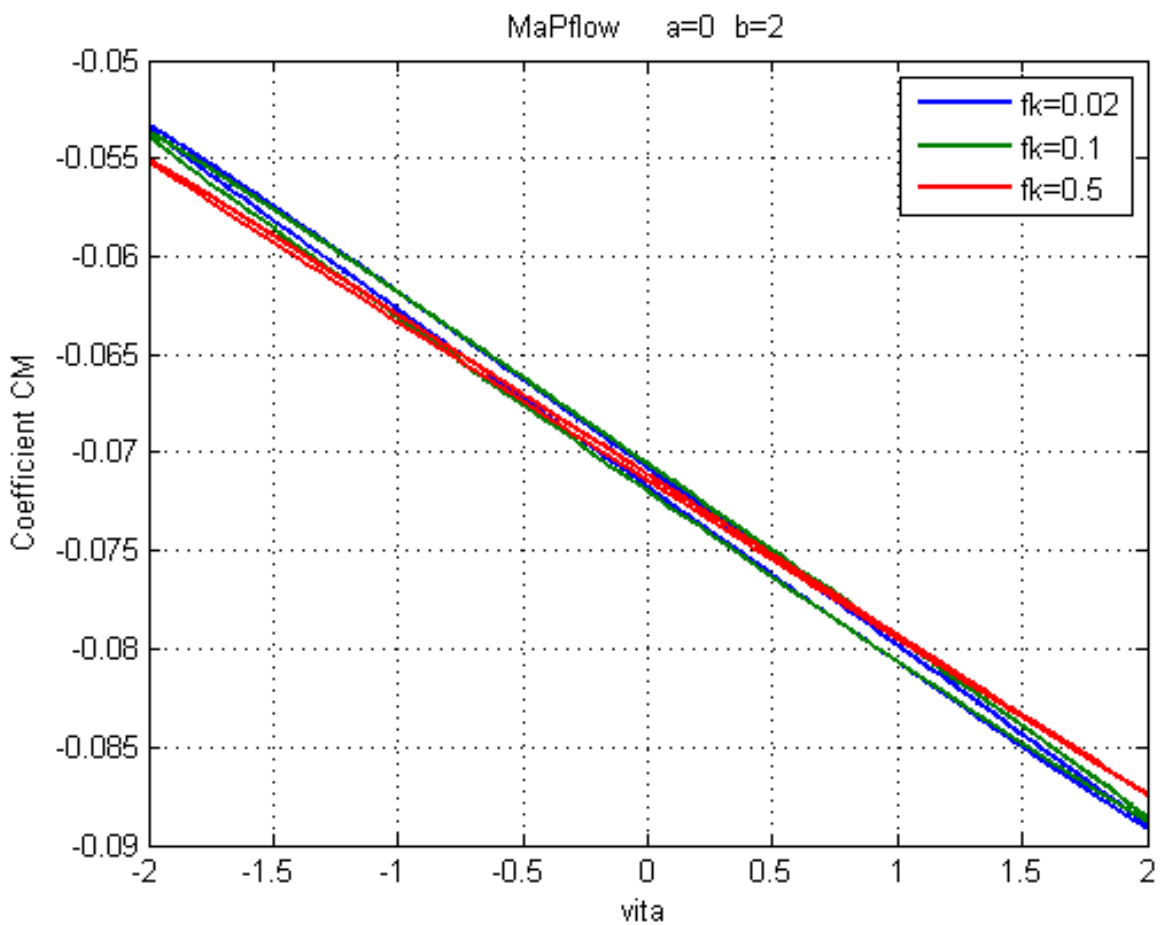
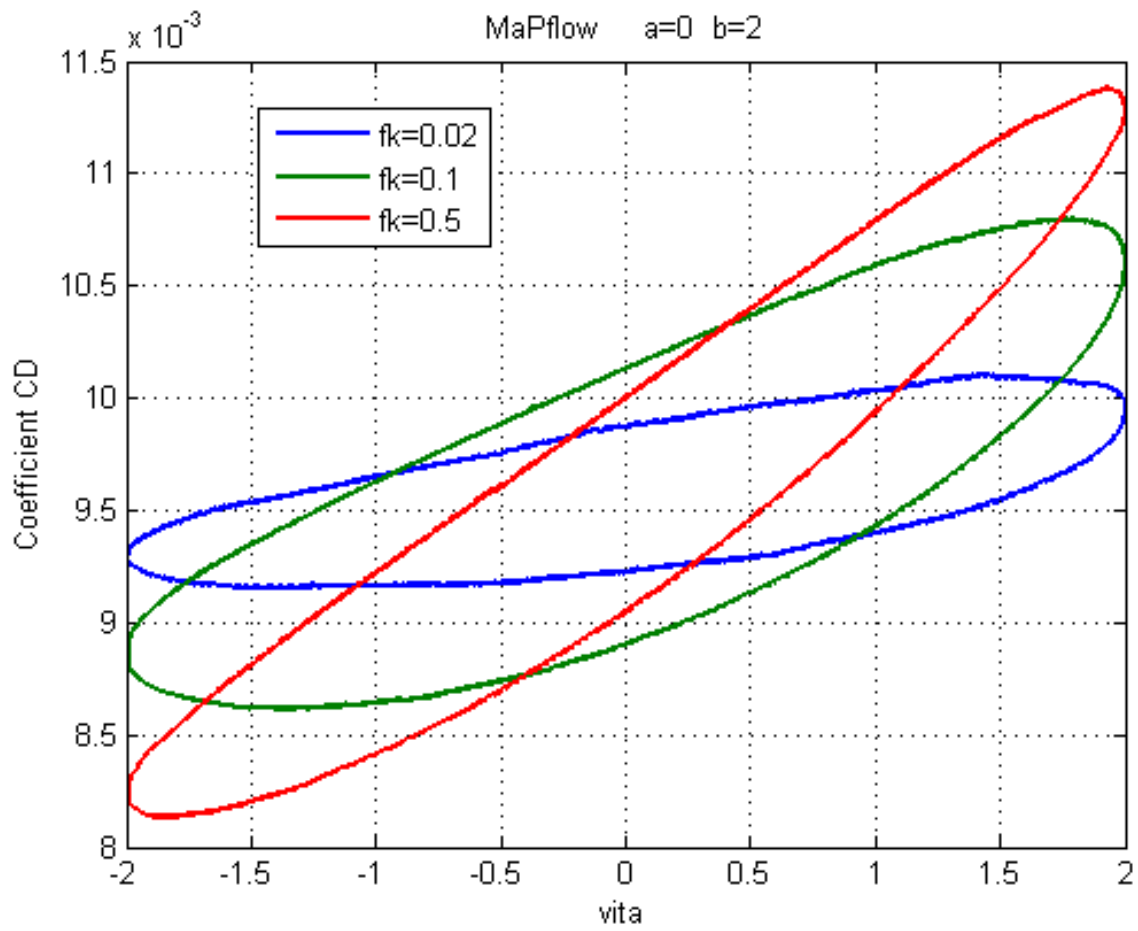


$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.5$ .

Και στην συχνότητα αυτή παρατηρούμε τις ίδιες διαφοροποιήσεις στις καμπύλες με αυτές που παρατηρήσαμε προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό όμως θα είναι χρήσιμο να δούμε πως επηρεάζονται οι καμπύλες του MaPflow ανάλογα με την αλλαγή της συχνότητας κίνησης του flap. Θα συγκρίνουμε τις τρεις συχνότητες που αναφέραμε προηγουμένως, αλλά για λόγους ευκολίας στη σύγκριση, θα προβάλλουμε τα προηγούμενα διαγράμματα του MaPflow σε κοινούς άξονες:





**Εικόνες 79, 80 και 81: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 0^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα MaPflow, για τις διάφορες συχνότητες που εξετάζουμε.

Συγκρίνοντας την καμπύλη  $C_l - \alpha$  για τις διάφορες συχνότητες, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα, τόσο μεγαλώνει ο βρόχος υστέρησης και τόσο μειώνεται το εύρος των τιμών  $C_l$ , δηλαδή αυξάνεται η κλίση του.

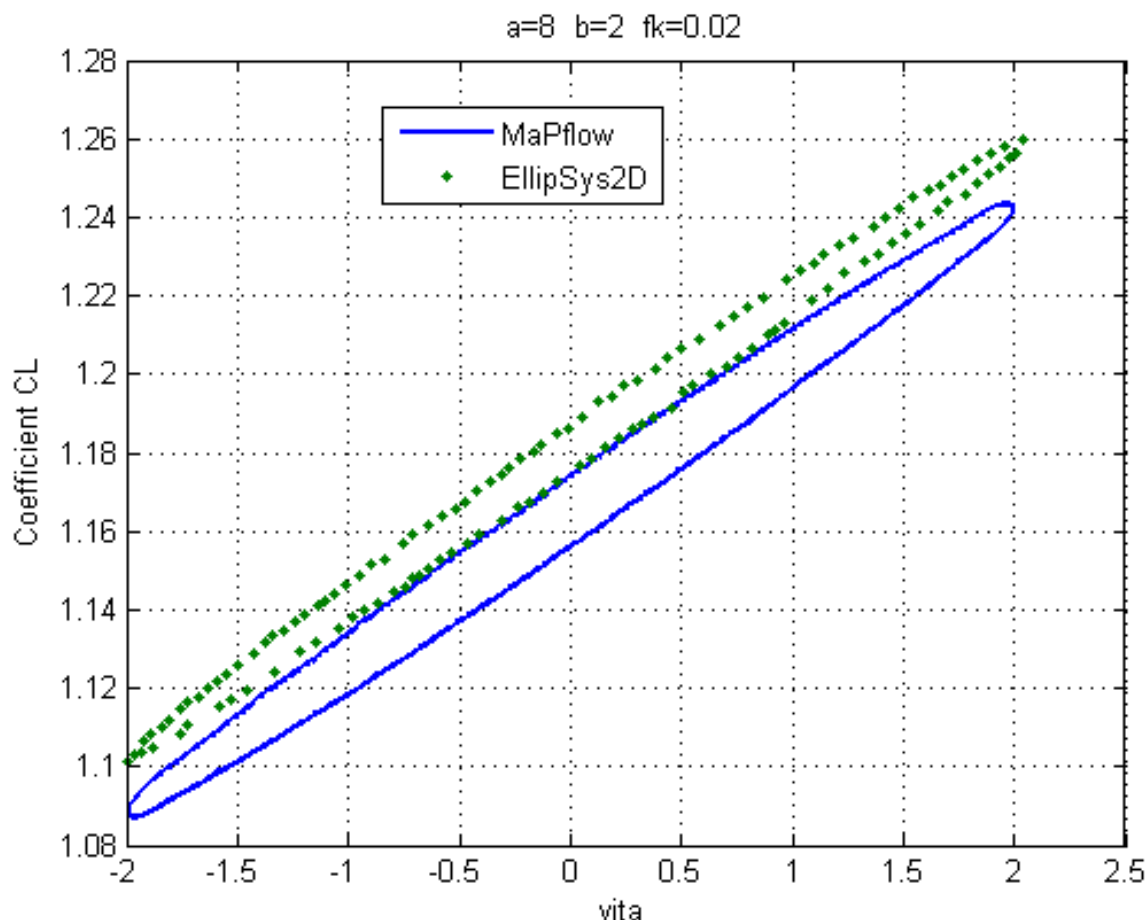
Όταν αυξάνεται η συχνότητα, τόσο γρηγορότερα κινείται η αεροτομή, οπότε τόσο περισσότερο γίνονται αντιληπτές από την ροή οι μη-μόνιμες συνθήκες. Δηλαδή, μία αεροτομή που κινείται γρήγορα, δεν αφήνει αρκετό χρόνο στην ροή να αναπτυχθεί ώστε να δώσει τα αντίστοιχα αποτελέσματα της μόνιμης ροής.

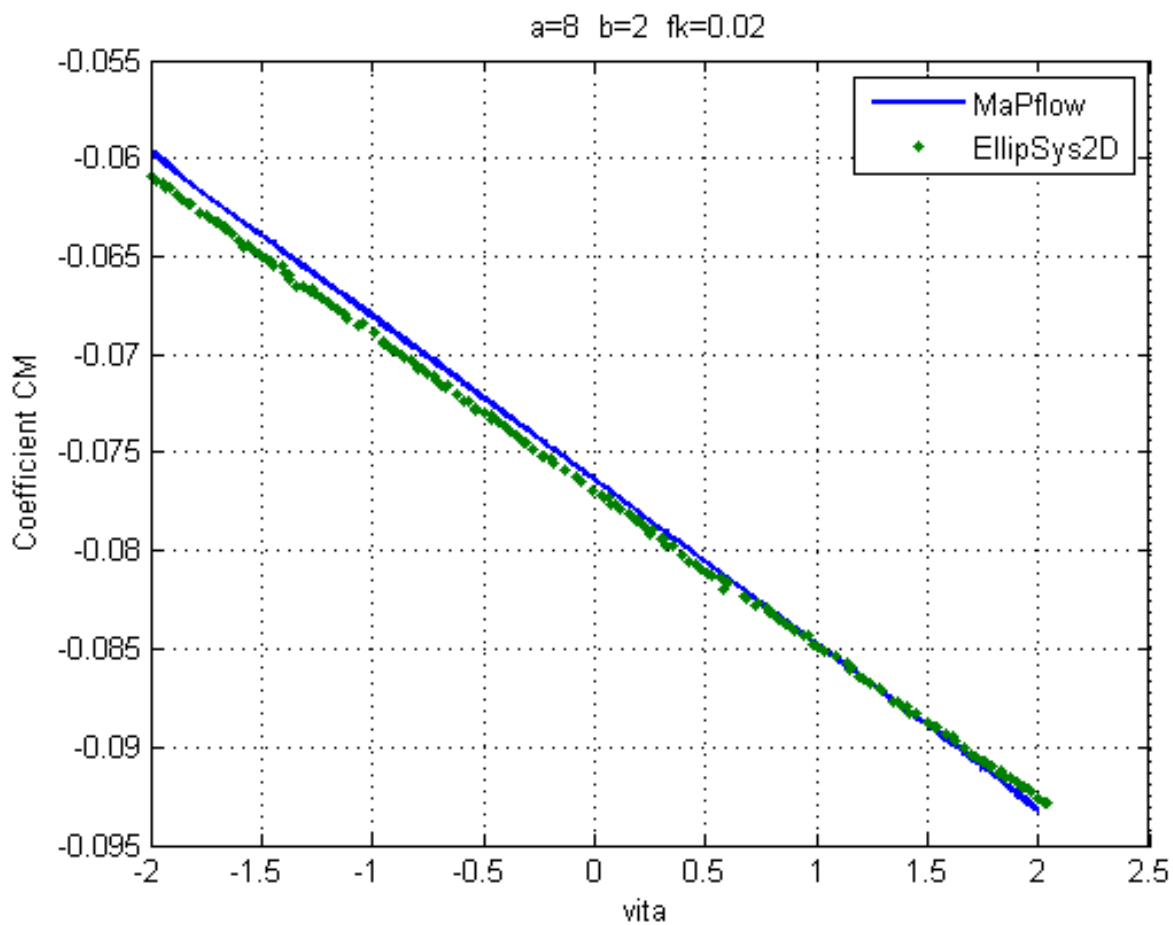
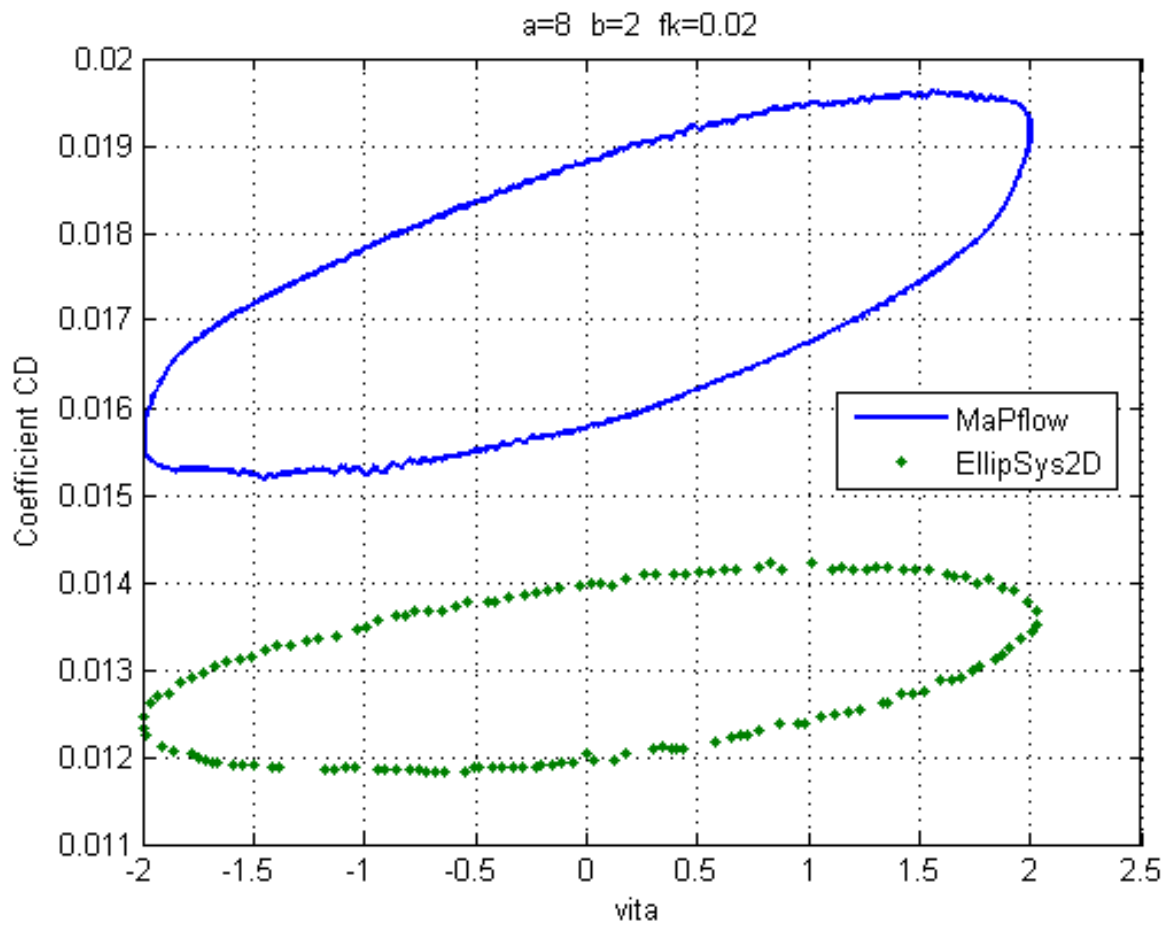
Όσο πιο μικρή είναι η συχνότητα, τόσο πιο πολύ προσεγγίζεται η μόνιμη ροή (αφού και η μόνιμη ροή είναι ουσιαστικά απειροστά μικρή, δηλαδή μηδενική, συχνότητα).

Έτσι, η αντίστοιχη καμπύλη για την περίπτωση της μόνιμης ροής θα είναι μία ευθεία  $C_l$  με κλίση μεγαλύτερη και από αυτήν της μικρότερης συχνότητας ( $f_k = 0.02$ ).

Όσο αυξάνεται η συχνότητα, τόσο μεγαλώνει ο βρόχος υστέρησης, αφού αυξάνεται και η ταχύτητα κίνησης του flap, και παράλληλα τόσο ελαττώνεται η κλίση της καμπύλης (δηλαδή το εύρος των τιμών), αφού η ροή δεν έχει αρκετό καιρό να αναπτυχθεί στις ακραίες θέσεις του flap.

Στην τέταρτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 8^\circ$  και  $f_k = 0.02$ .





**Εικόνες 82, 83 και 84: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 8^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.02$ .

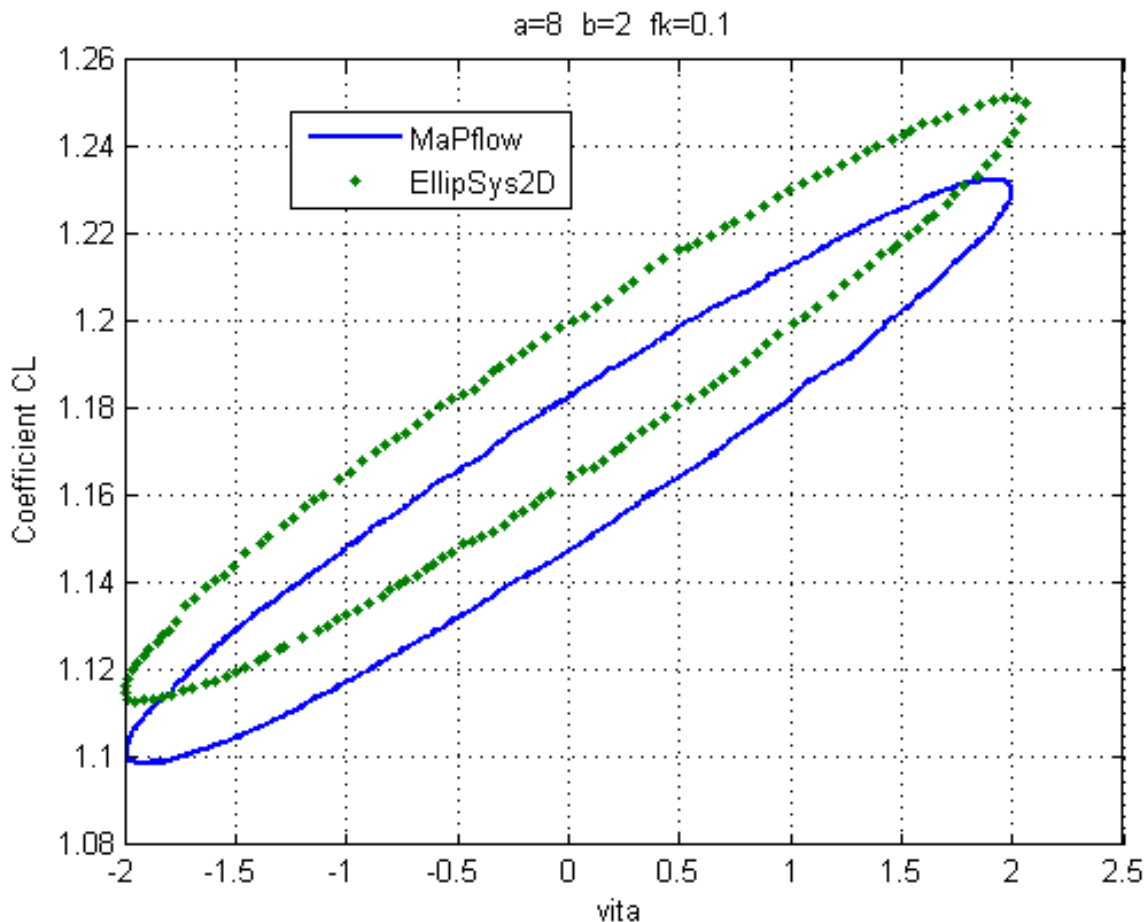
Εδώ παρατηρούμε ότι η απόκλιση μεταξύ των MaPflow και EllipSys2D αυξάνεται κατά περίπου 2% σε σχέση με την αντίστοιχη στην περίπτωση των  $0^\circ$ . Για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης, η ροή γίνεται πιο δύσκολη υπολογιστικά, για αυτό και οι διάφορες μέθοδοι έχουν αισθητή απόκλιση μεταξύ τους. Πάντως, ακόμα και τώρα, η απόκλιση δεν είναι σημαντική.

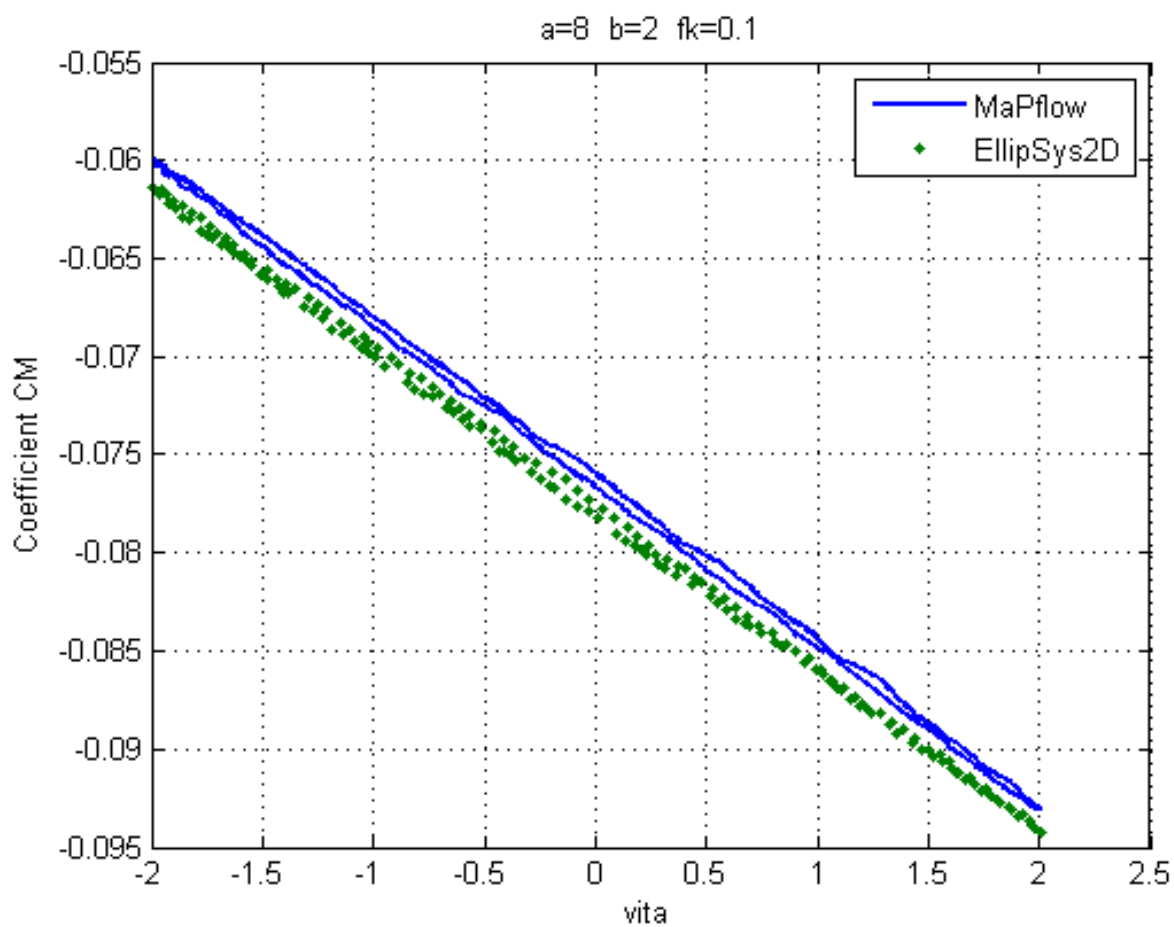
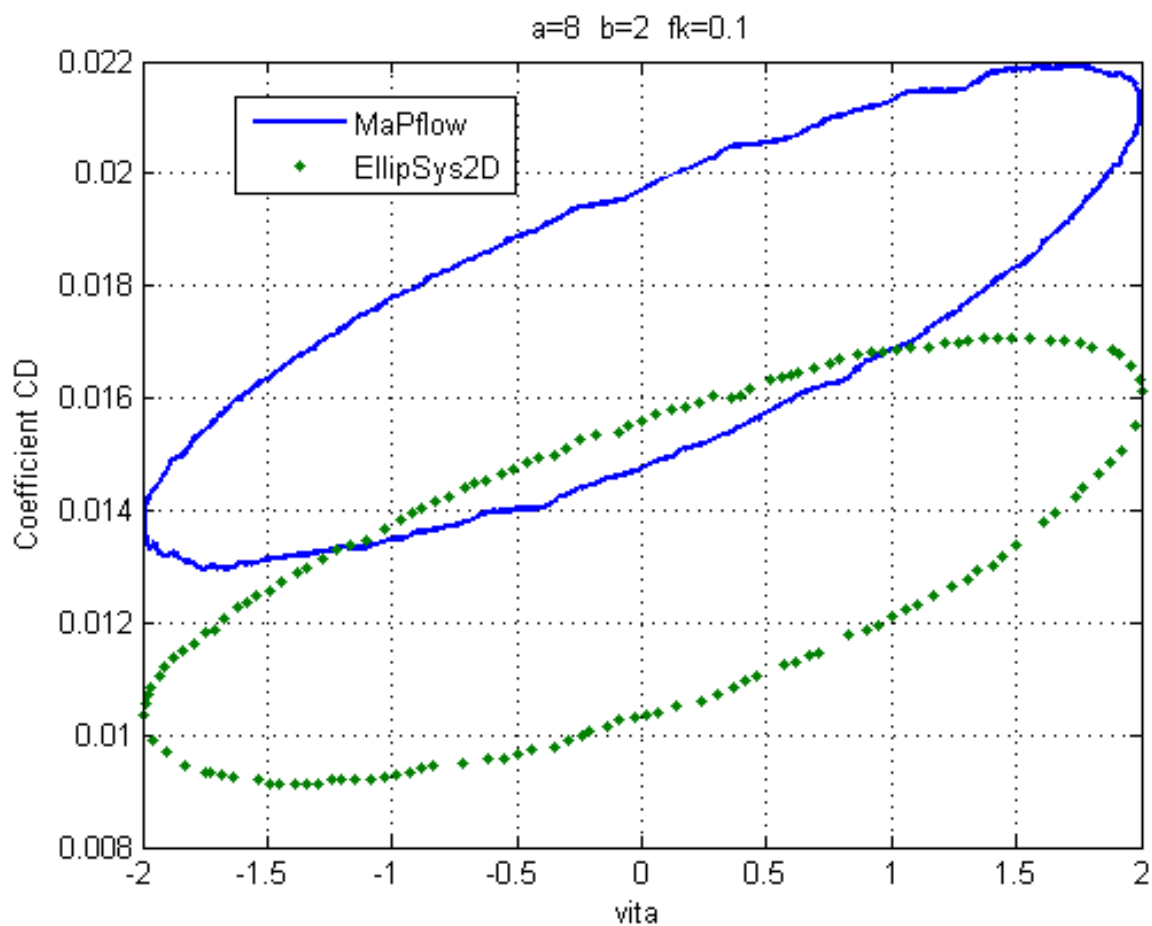
Η μορφή και η κλίση των βρόχων παραμένουν σχεδόν ίδιες. Η μεγαλύτερη διαφορά βρίσκεται στην μέση τιμή του  $C_l$  όπως αυτή υπολογίζεται από τις δύο μεθόδους. Η διαφορά αυτή, όπως έχουμε αναφέρει, οφείλετε μάλλον στο γεγονός ότι κάθε μέθοδος χρησιμοποίησε διαφορετικό πλέγμα.

Την απόκλιση αυτή μπορούμε να την δούμε και στην καμπύλη  $C_l - \alpha$ , όπου συγκρίναμε τις δύο μεθόδους μεταξύ τους. Θυμόμαστε ότι για μικρές γωνίες  $\alpha$ , όταν δηλαδή βρισκόμαστε στην γραμμική περιοχή του  $C_l$ , οι μέθοδοι MaPflow και EllipSys2D ταυτίζονται σχεδόν πλήρως. Όσο όμως το  $\alpha$  αυξάνεται και ο  $C_l$  εισέρχεται στην μη-γραμμική περιοχή του, οι δύο μέθοδοι αρχίζουν και αποκτούν αισθητή απόκλιση.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, οι διάφορες καμπύλες παραμένουν αρκετά κοντά μεταξύ τους, ώστε να θεωρούμε το αποτέλεσμα ικανοποιητικό.

Στην πέμπτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 8^\circ$  και  $f_k = 0.1$ .

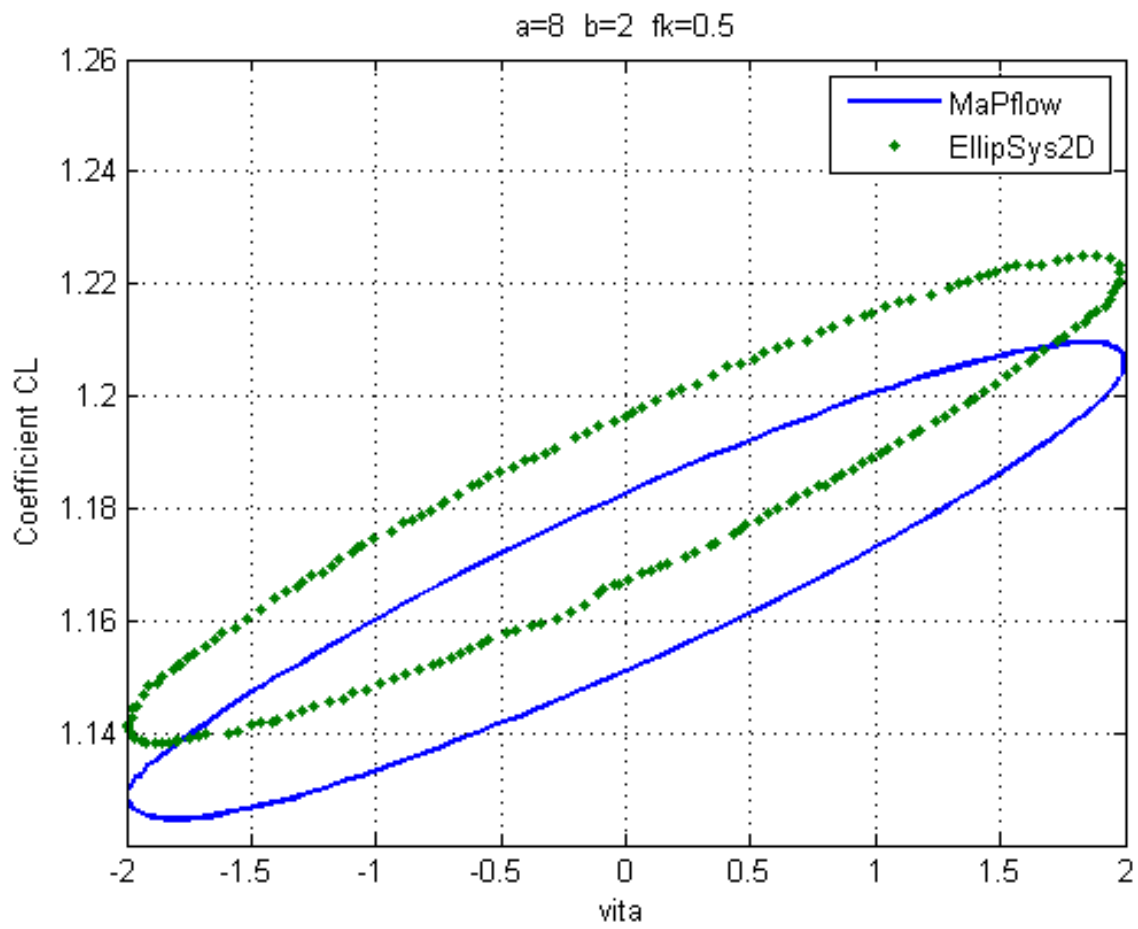


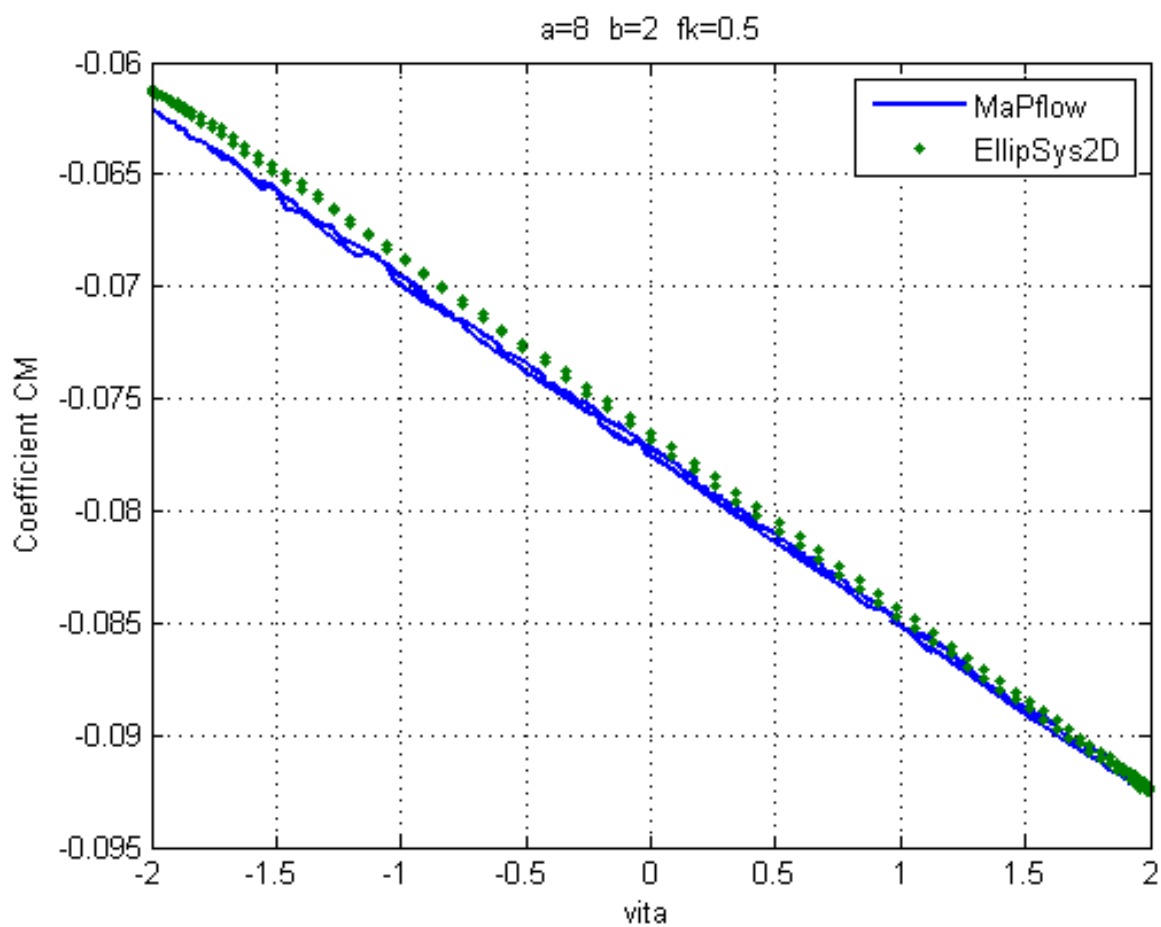
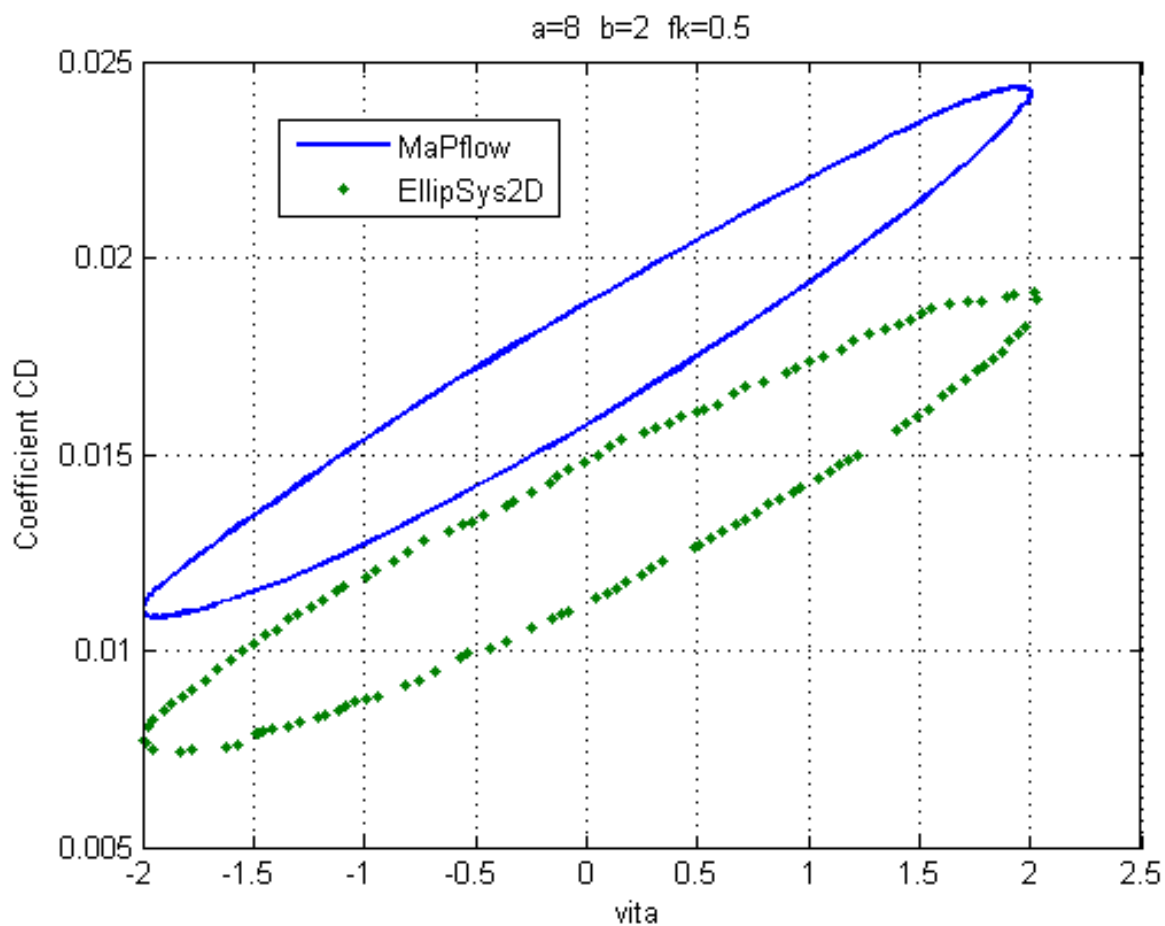


**Εικόνες 85, 86 και 87: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 8^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.1$ .

Στην έκτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 8^\circ$  και  $f_k = 0.5$ .



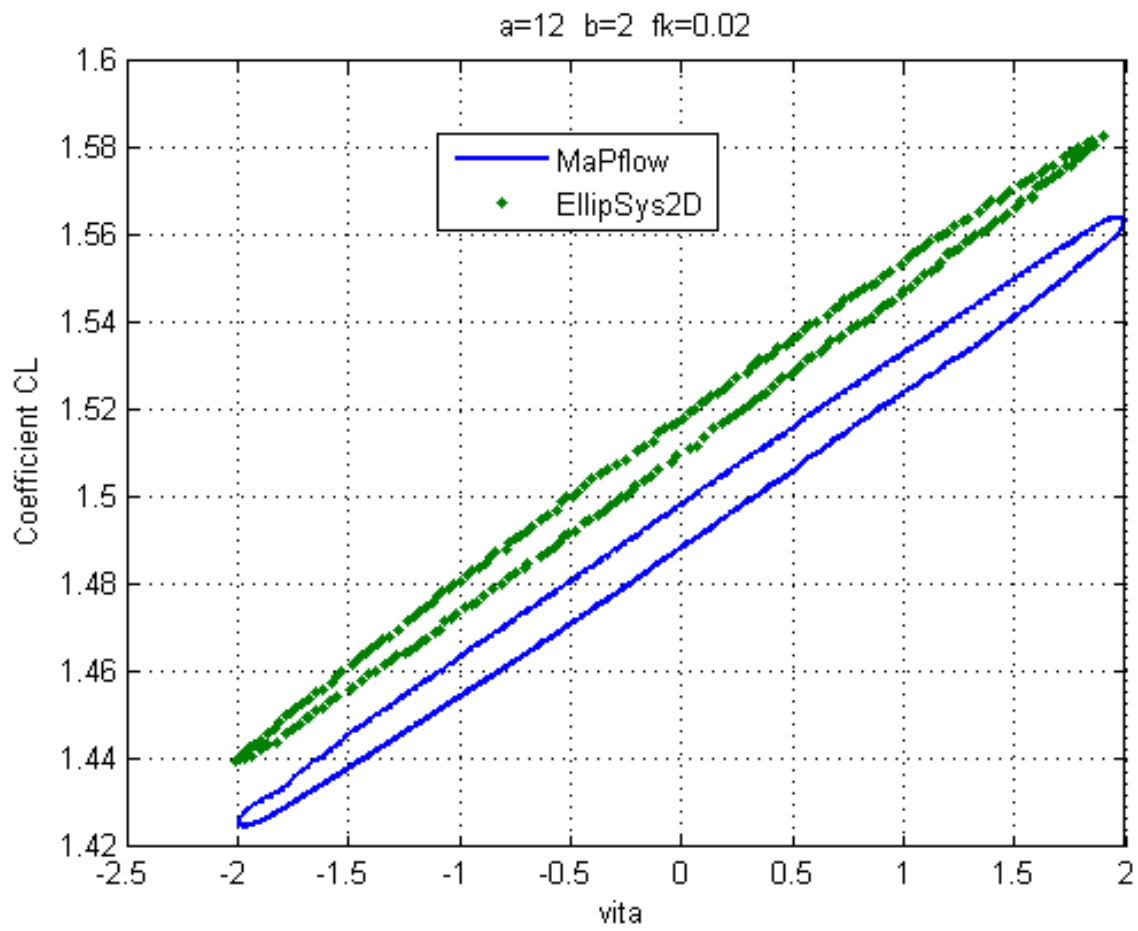


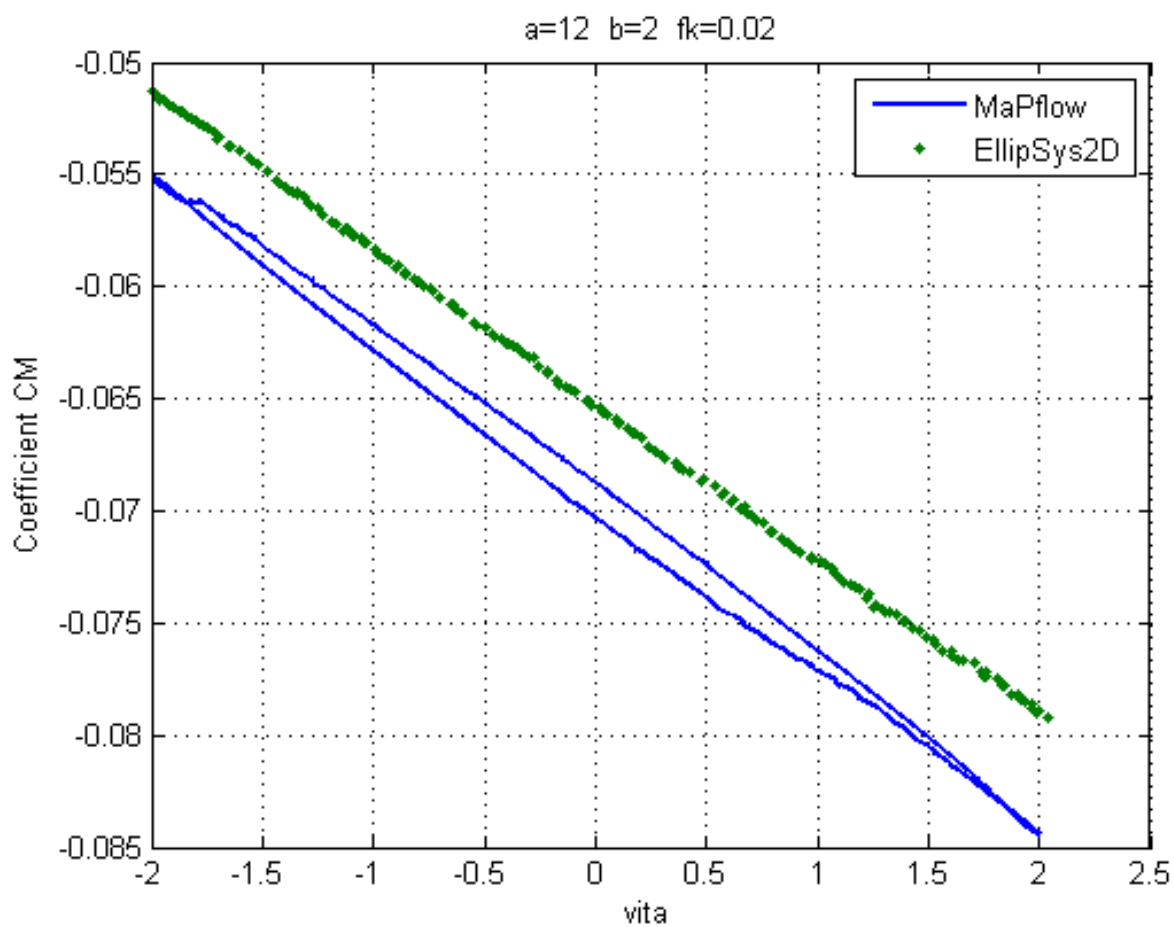
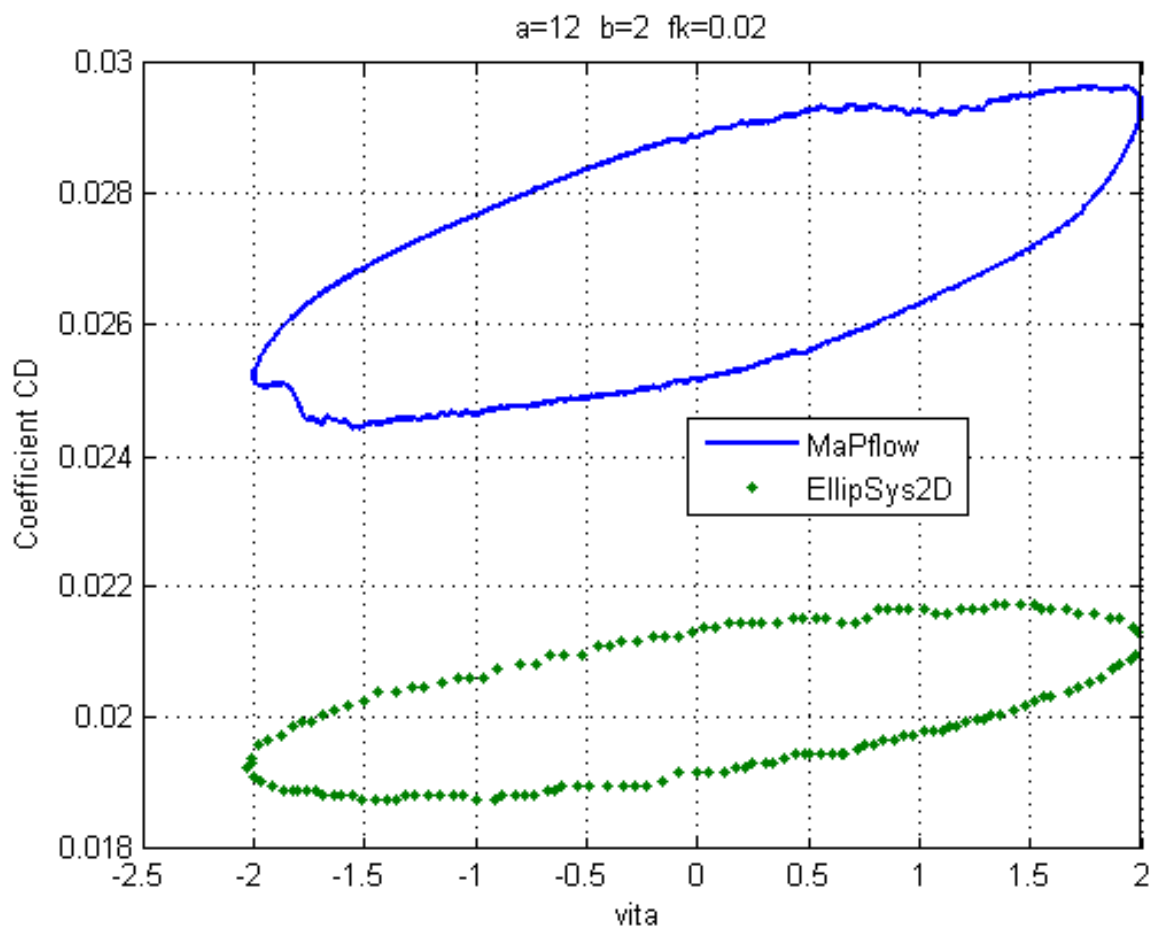
**Εικόνες 88, 89 και 90: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 8^\circ$ ,**



$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.5$ .

Στην έβδομη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 12^\circ$  και  $f_k = 0.02$ .

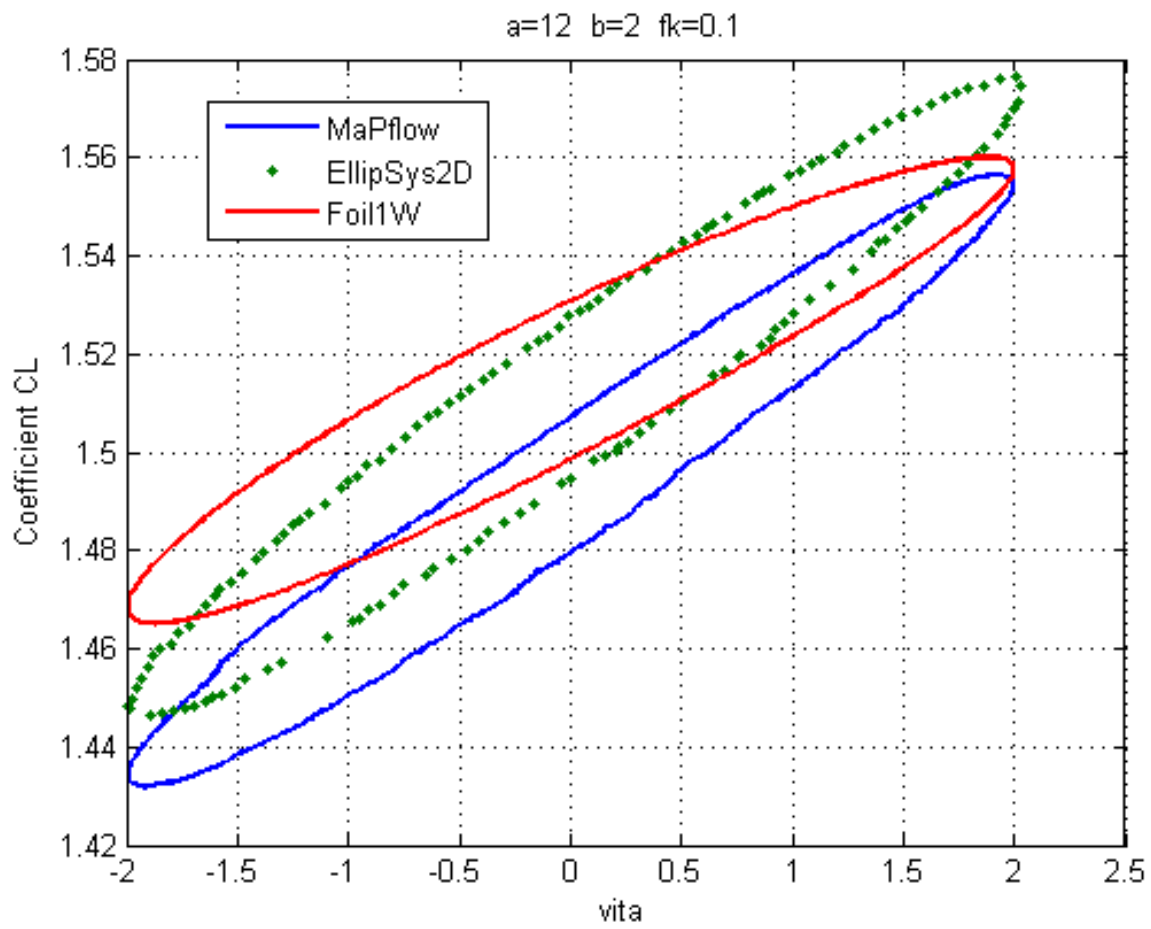


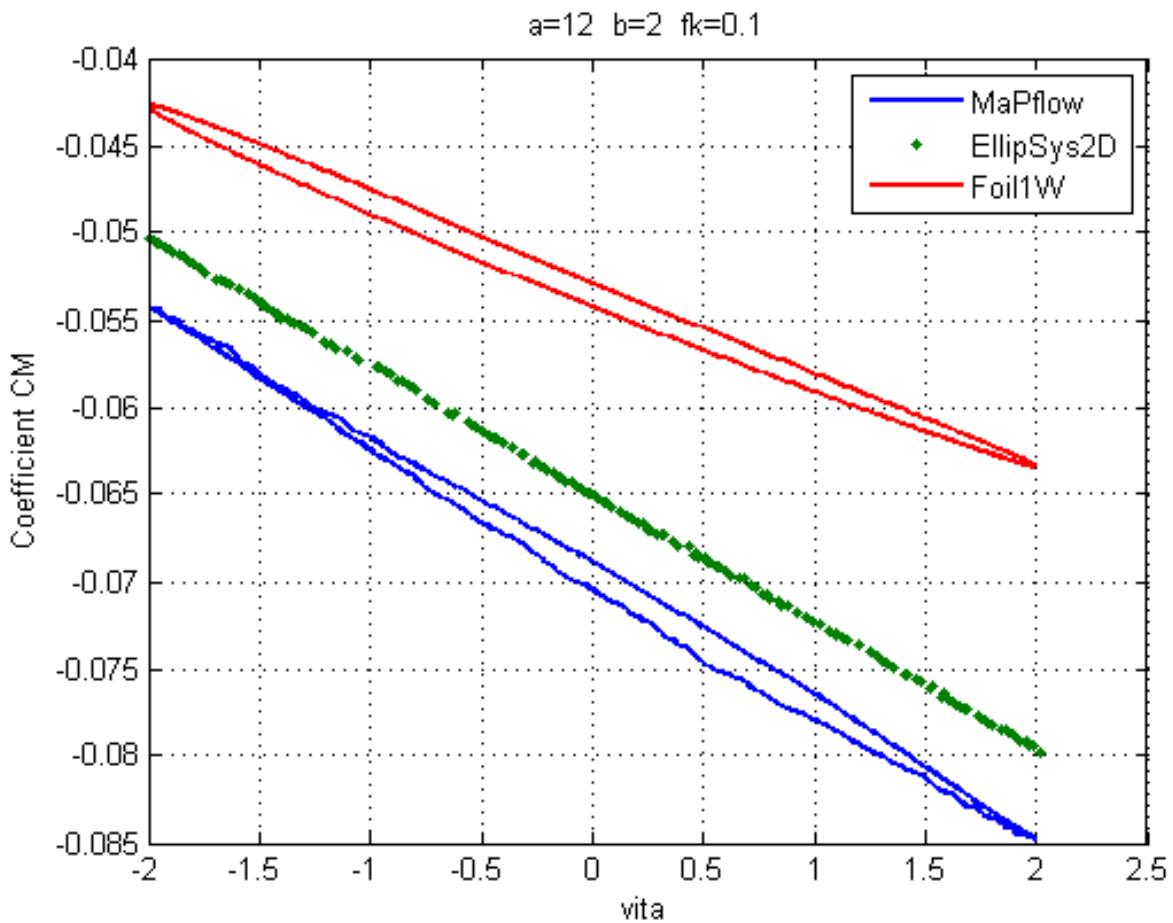
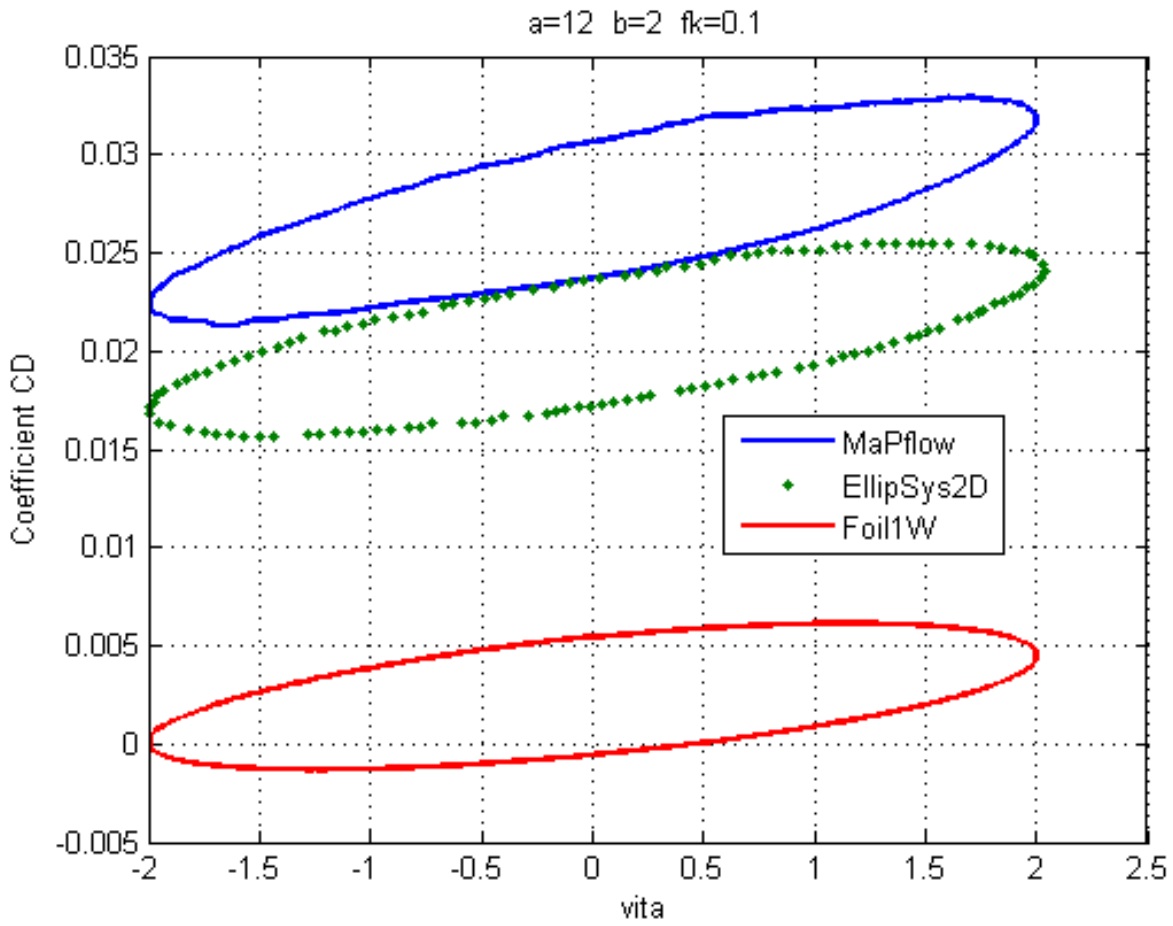


**Εικόνες 91, 92 και 93: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 12^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.02$ .

Στην όγδοη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 12^\circ$  και  $f_k = 0.1$ .



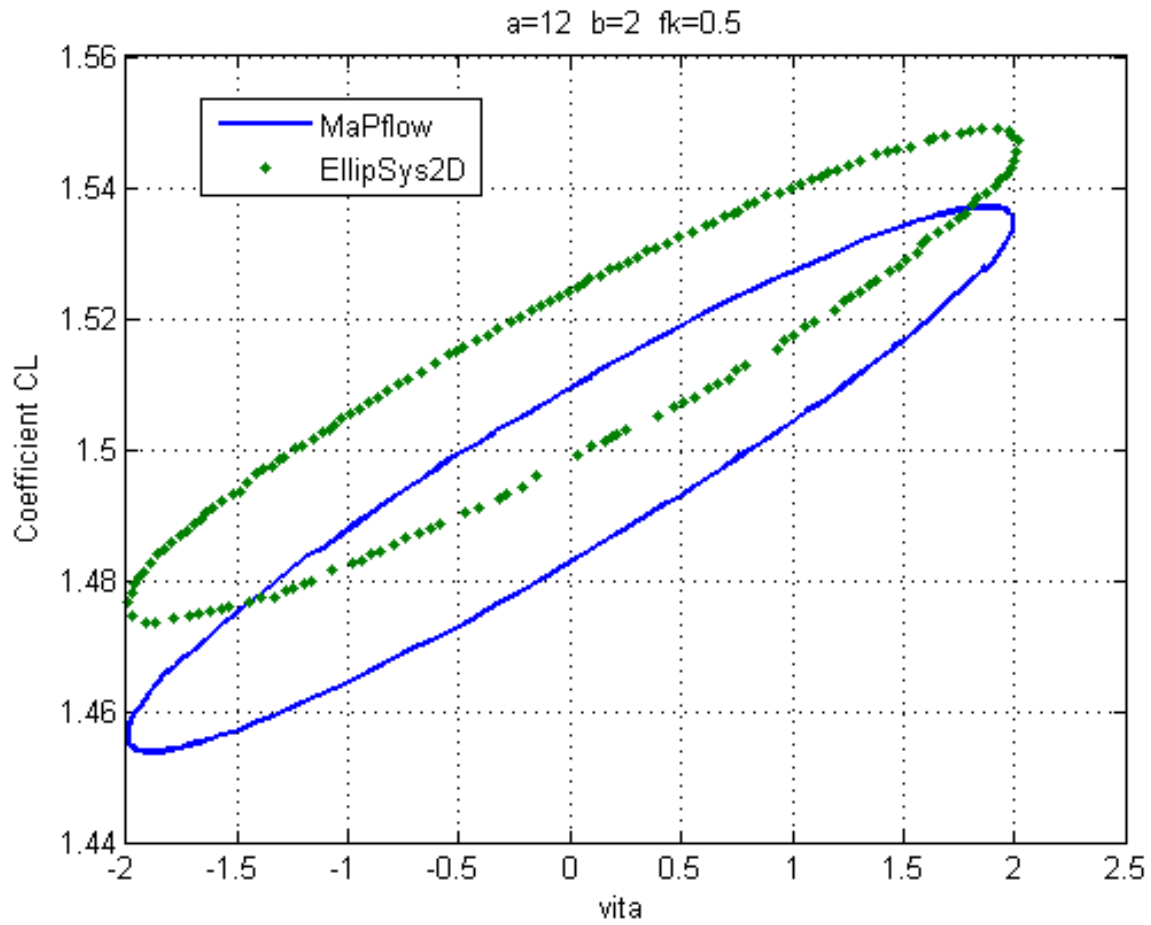


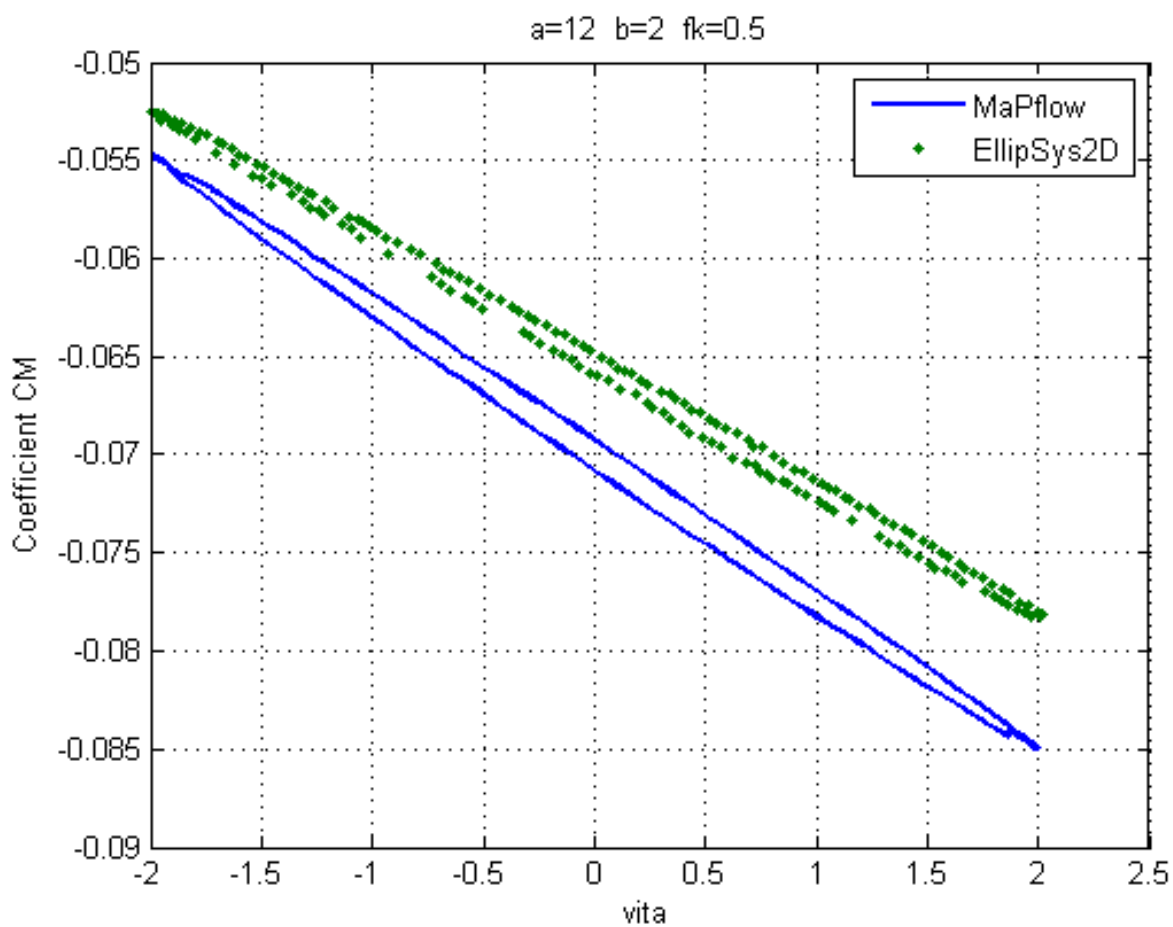
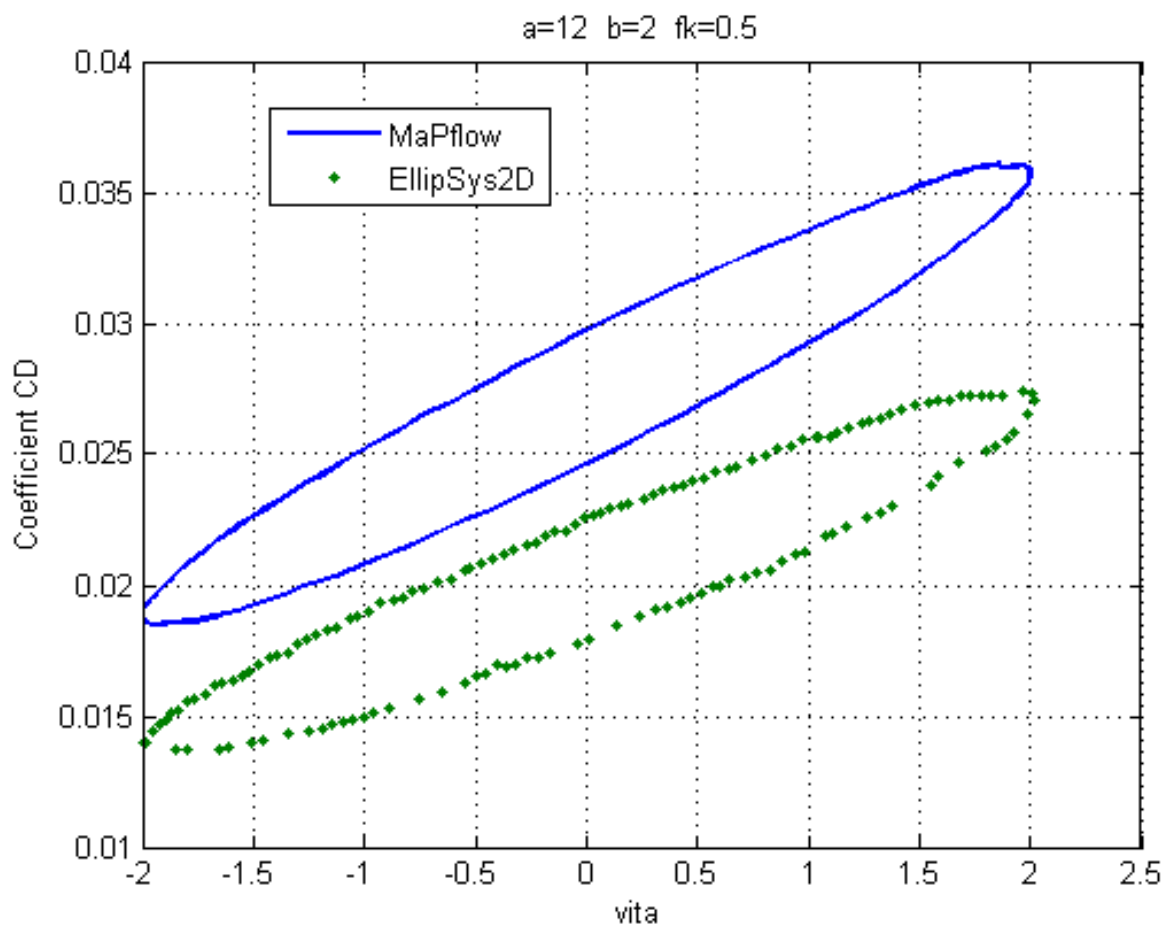
**Εικόνες 94, 95 και 96: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 12^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.1$ .

Βλέπουμε ότι η μέθοδος Foil1W έχει μεγάλη διαφορά στην κλίση του  $C_l$  σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους.

Στην ένατη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 12^\circ$  και  $f_k = 0.5$ .



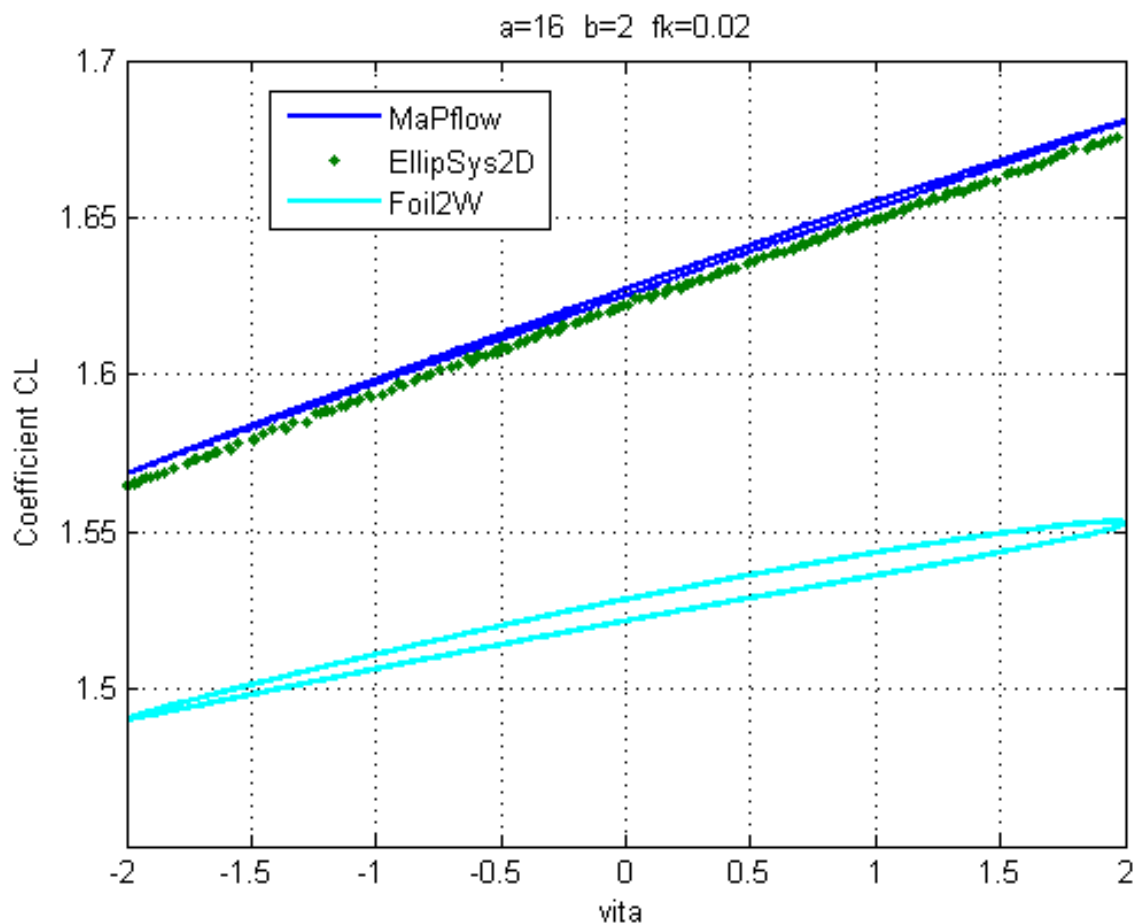


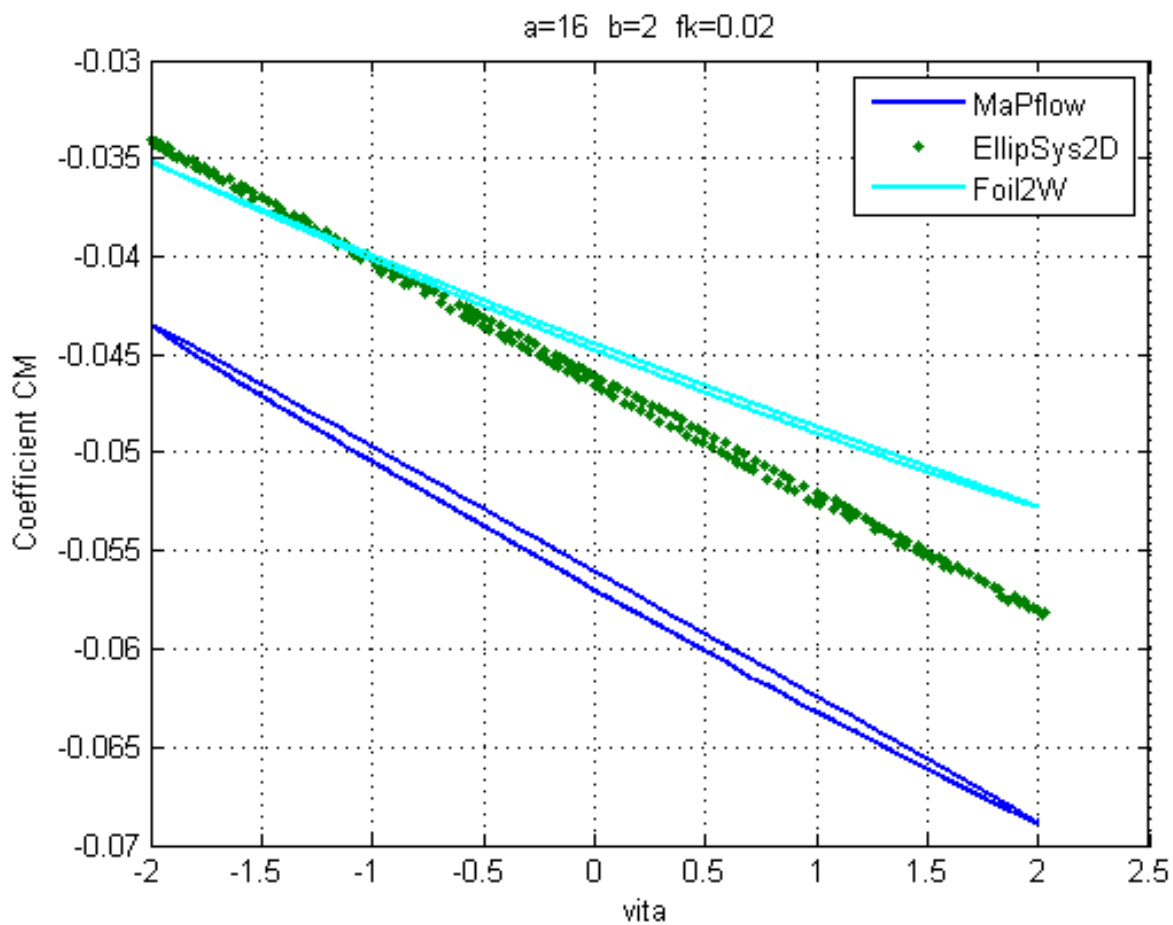
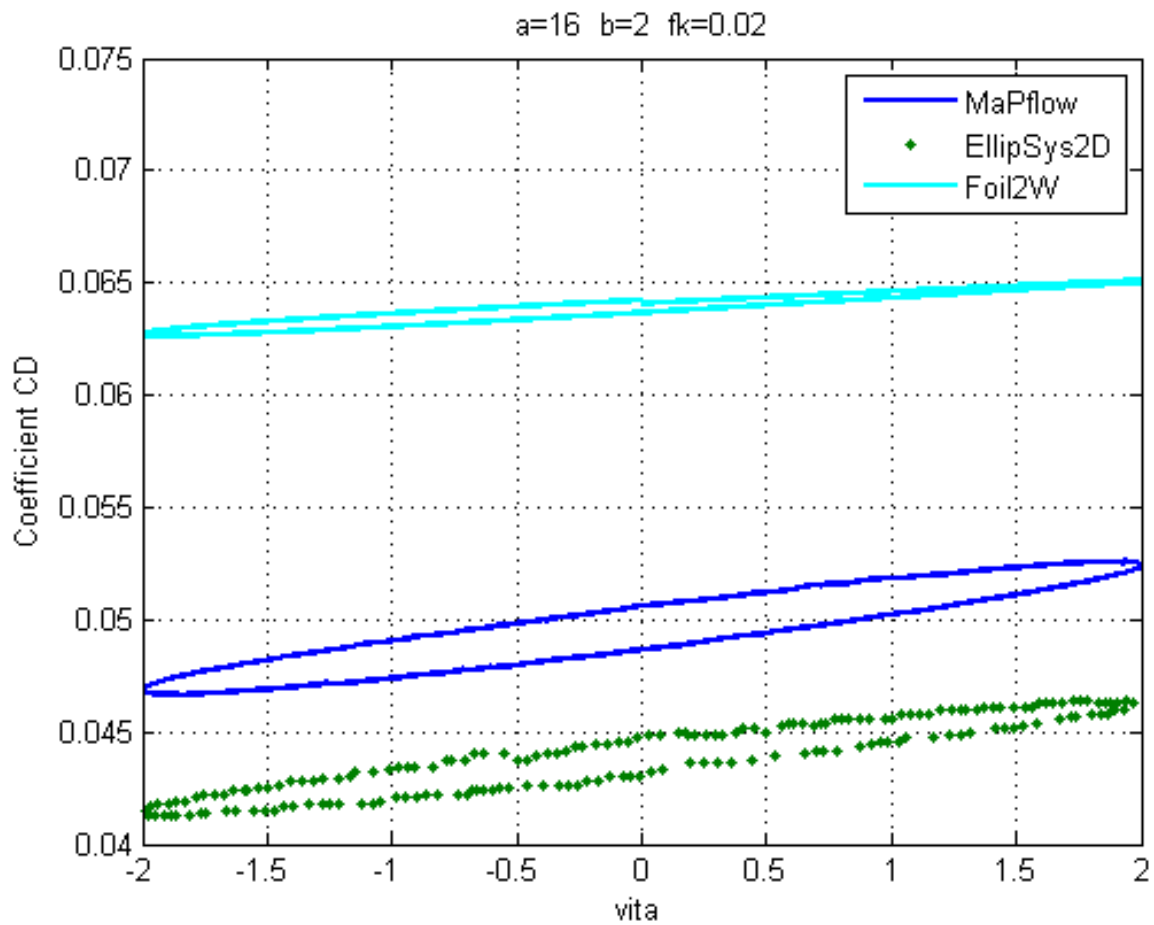
**Εικόνες 97, 98 και 99: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 12^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.5$ .

Στις  $12^\circ$  έχουμε πια εισέλθει στην μη-γραμμική περιοχή της καμπύλης  $C_l - \alpha$ . Εδώ οι διαφοροποιήσεις στη μέση τιμή γίνονται ακόμα πιο αισθητές ανάμεσα στα δύο προγράμματα, αν και, όπως βλέπουμε, η μορφή και η κλίση των βρόχων παραμένουν μάλλον αναλλοίωτες.

Στην δέκατη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 16^\circ$  και  $f_k = 0.02$ .





**Εικόνες 100, 101 και 102: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 16^\circ$ ,**



$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.02$ .

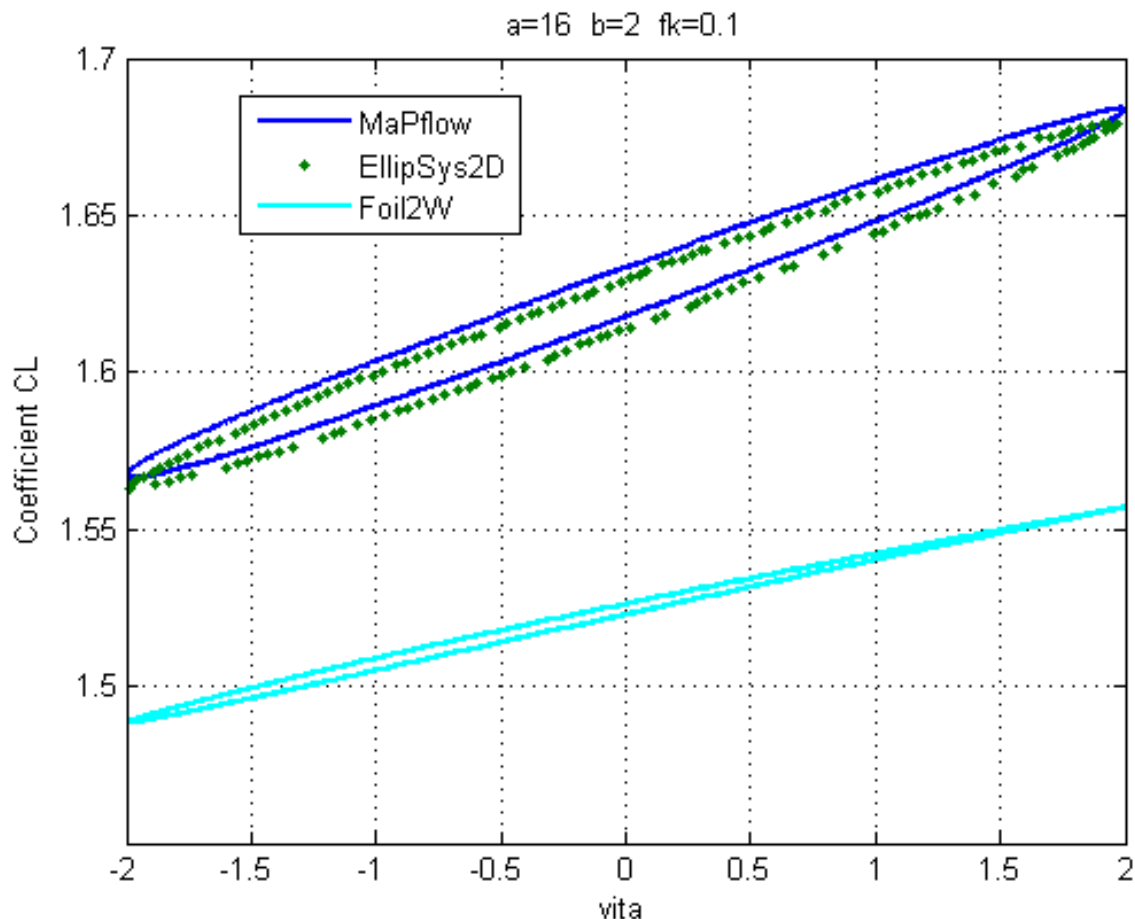
Στην καμπύλη  $C_l - b$  η μεγάλη διαφορά στην μέση τιμή μεταξύ Foil2W και στις άλλες δύο μεθόδους είναι ένδειξη ότι στη γωνία των  $\alpha = 16$  η Foil2W έχει ήδη προβλέψει αποκόλληση και για αυτό η τιμή του  $C_l$  έχει ήδη ελαττωθεί. Αντίθετα, οι δύο μέθοδοι CFD συνεχίζουν να αυξάνουν το  $C_l$  σε σχέση με τις  $\alpha = 12$ , που σημαίνει ότι ακόμα δεν έχει αποκολληθεί η ροή, ή αν έχει αποκολληθεί, είναι σε πολύ μικρό στάδιο.

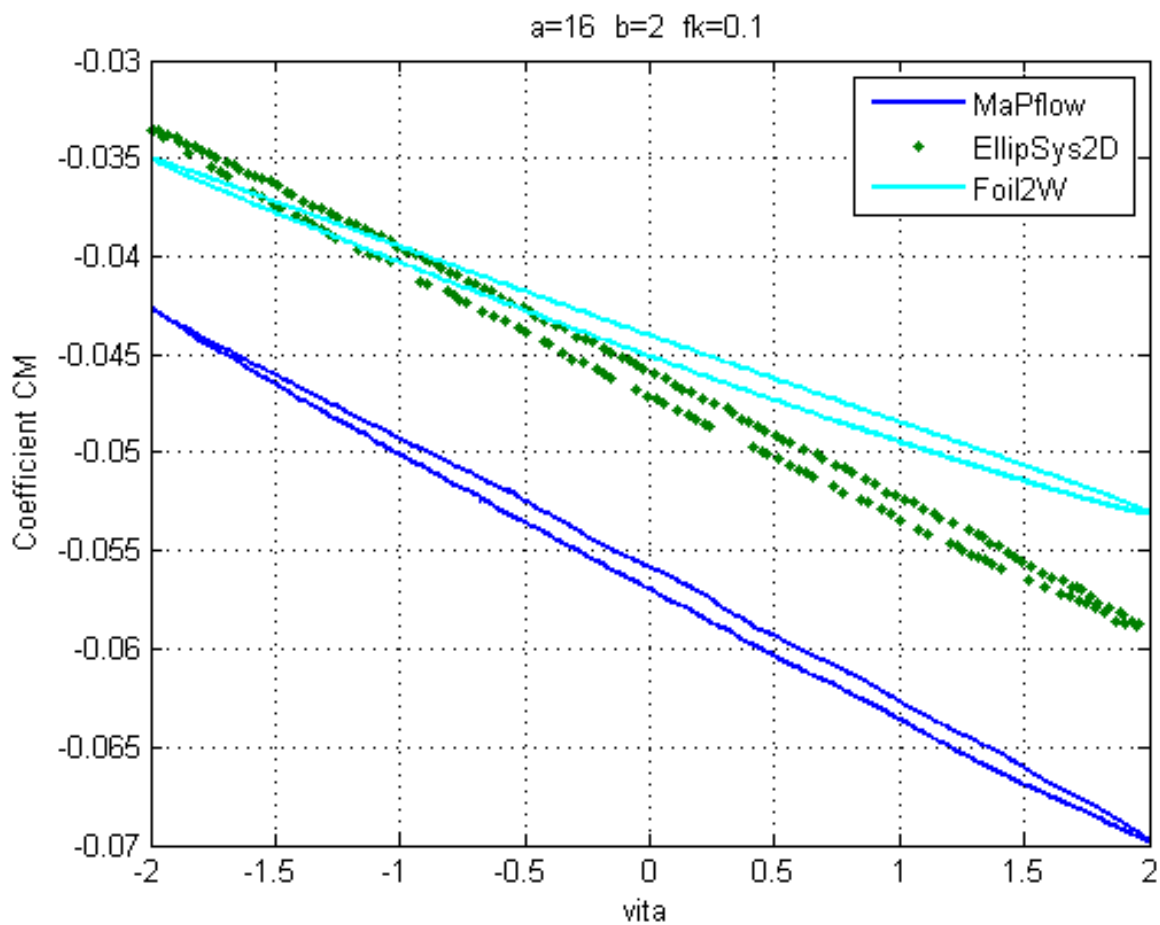
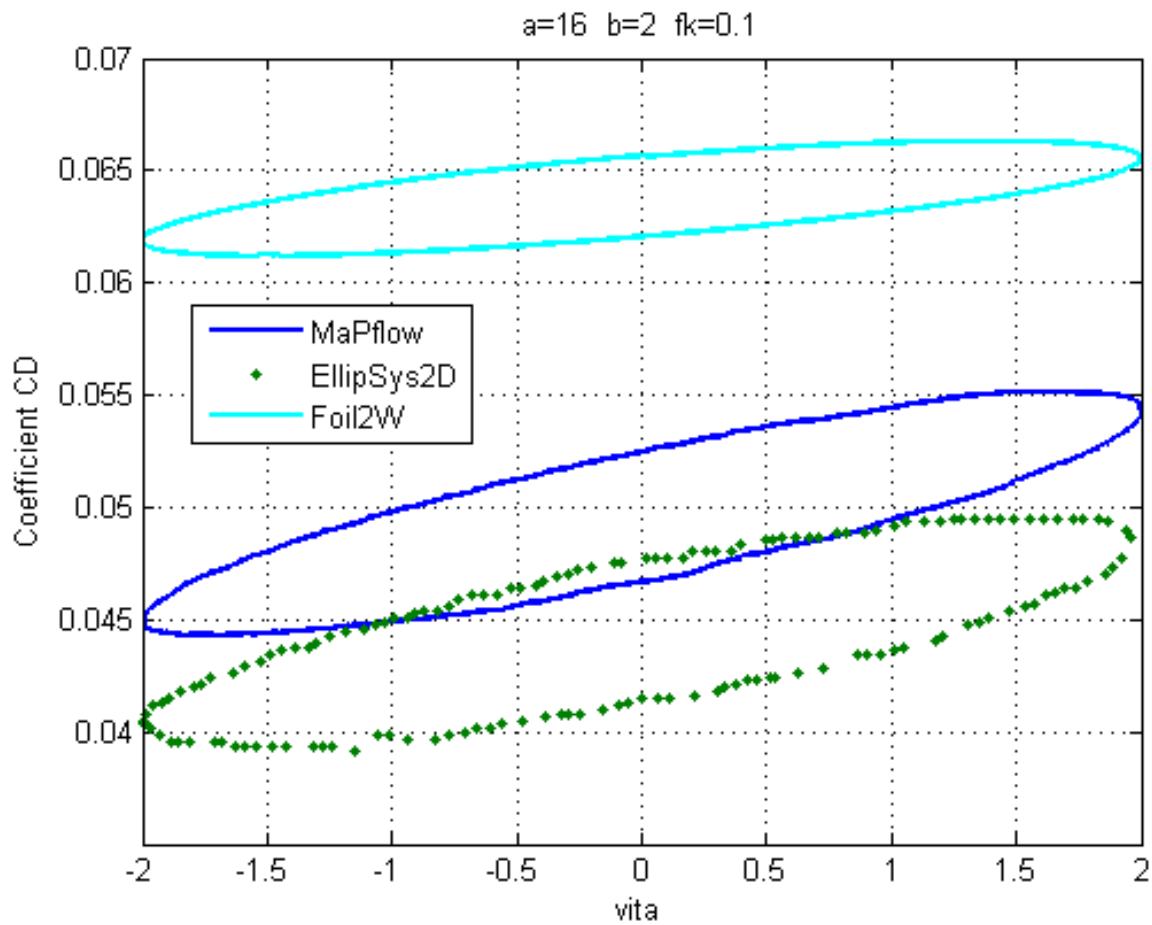
Παράλληλα, στο ίδιο διάγραμμα, η διαφορά στην κλίση μπορεί να οφείλεται και στην διαφορετική συνεκτικότητα. Η τελευταία υπολογίζεται με βάση τα εκάστοτε μοντέλα τύρβης. Επειδή όμως κάθε μέθοδος υπολογισμού χρησιμοποιεί διαφορετικά μοντέλα, είναι αναμενόμενο να έχουμε και διαφορετική ερμηνεία της συνεκτικότητας.

Όσο μεγαλύτερη συνεκτικότητα έχει ένα ρευστό, τόσο δυσκολότερα μπορεί να προσαρμοστεί στις αλλαγές που οφείλονται στην κίνηση του flap. Σαν αποτέλεσμα, στην μεγάλη συνεκτικότητα η ροή δεν μπορεί να αναπτυχθεί τόσο καλά, και άρα τείνει να αποκτήσει μία σταθερή τιμή. Συνεπώς το εύρος του συντελεστή  $C_l$  μειώνεται και πλησιάζει μία μέση τιμή, οπότε και η κλίση της καμπύλης  $C_l - b$  μικραίνει.

Αυτό σημαίνει ότι, κατά πάσα πιθανότητα, το Foil2W χρησιμοποιεί κάποιο μοντέλο τύρβης που προβλέπει μεγαλύτερη συνεκτικότητα από τα αντίστοιχα των MaPFlow και EllipSys.

Στην ενδέκατη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 16^\circ$  και  $f_k = 0.1$ .

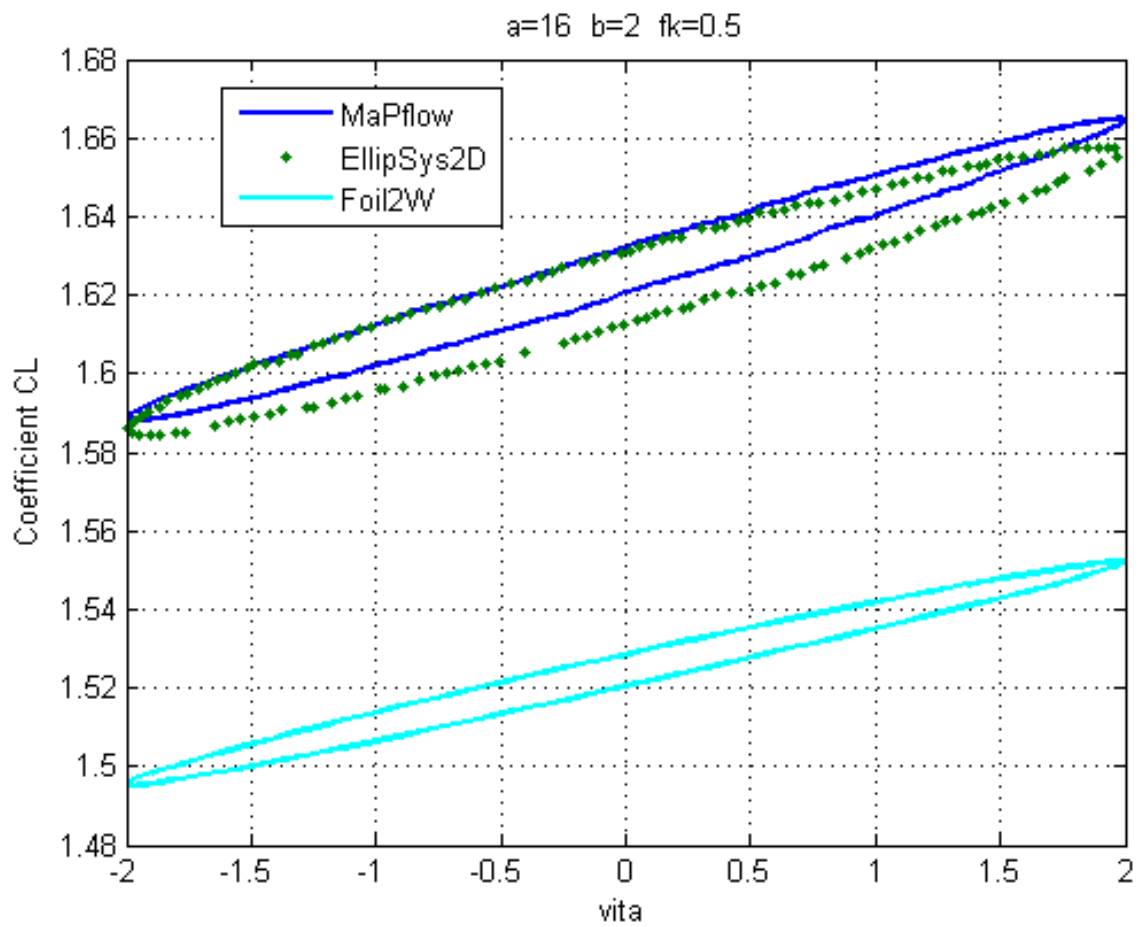


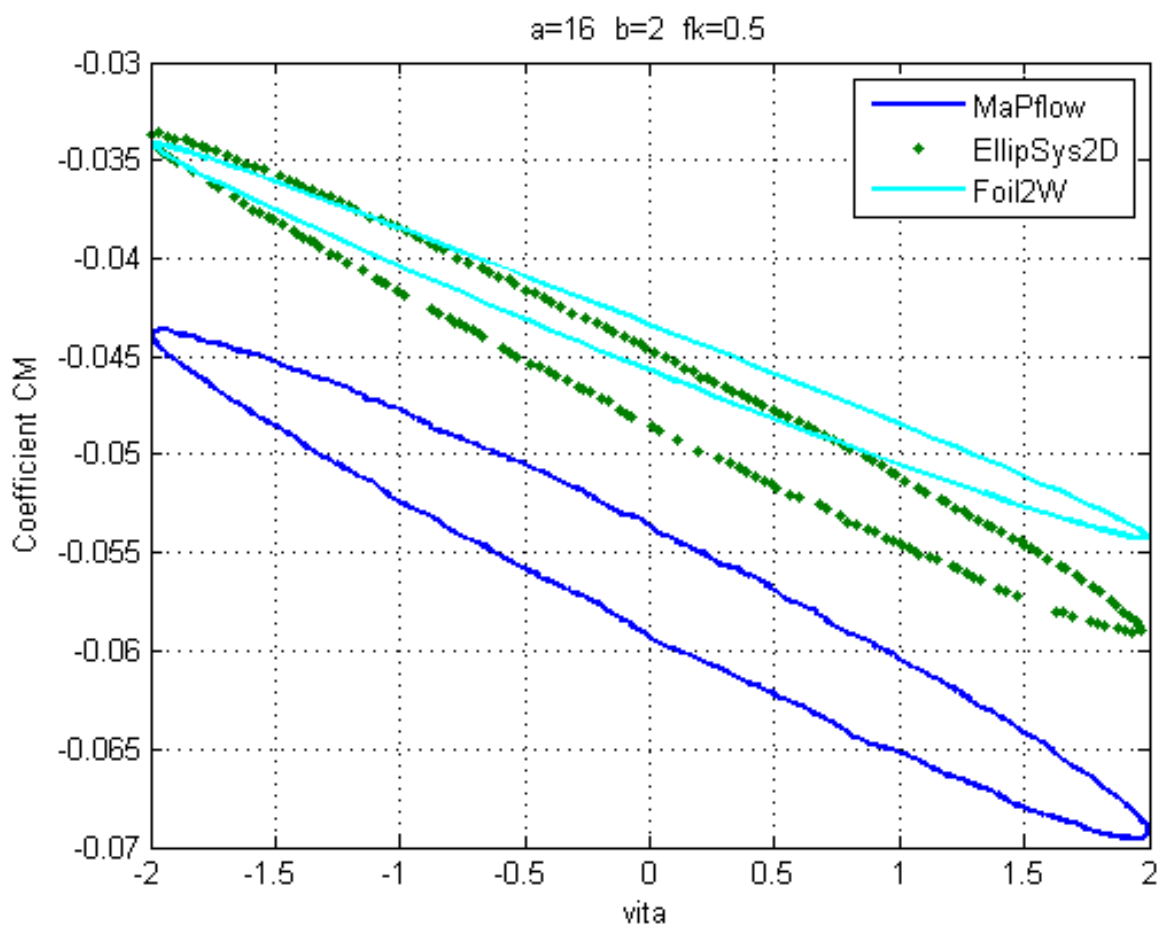
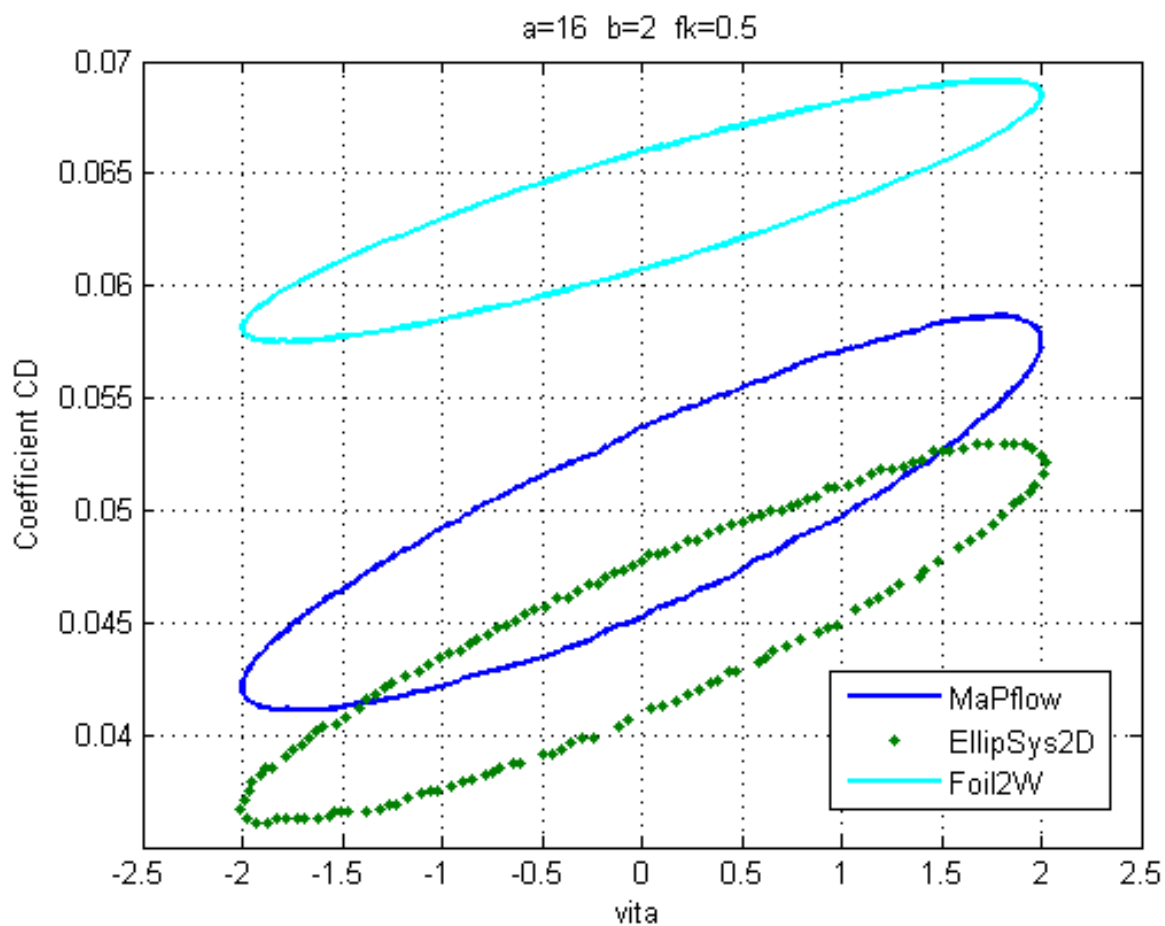


**Εικόνες 103, 104 και 105: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 16^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.1$ .

Στην δωδέκατη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 16^\circ$  και  $f_k = 0.5$ .





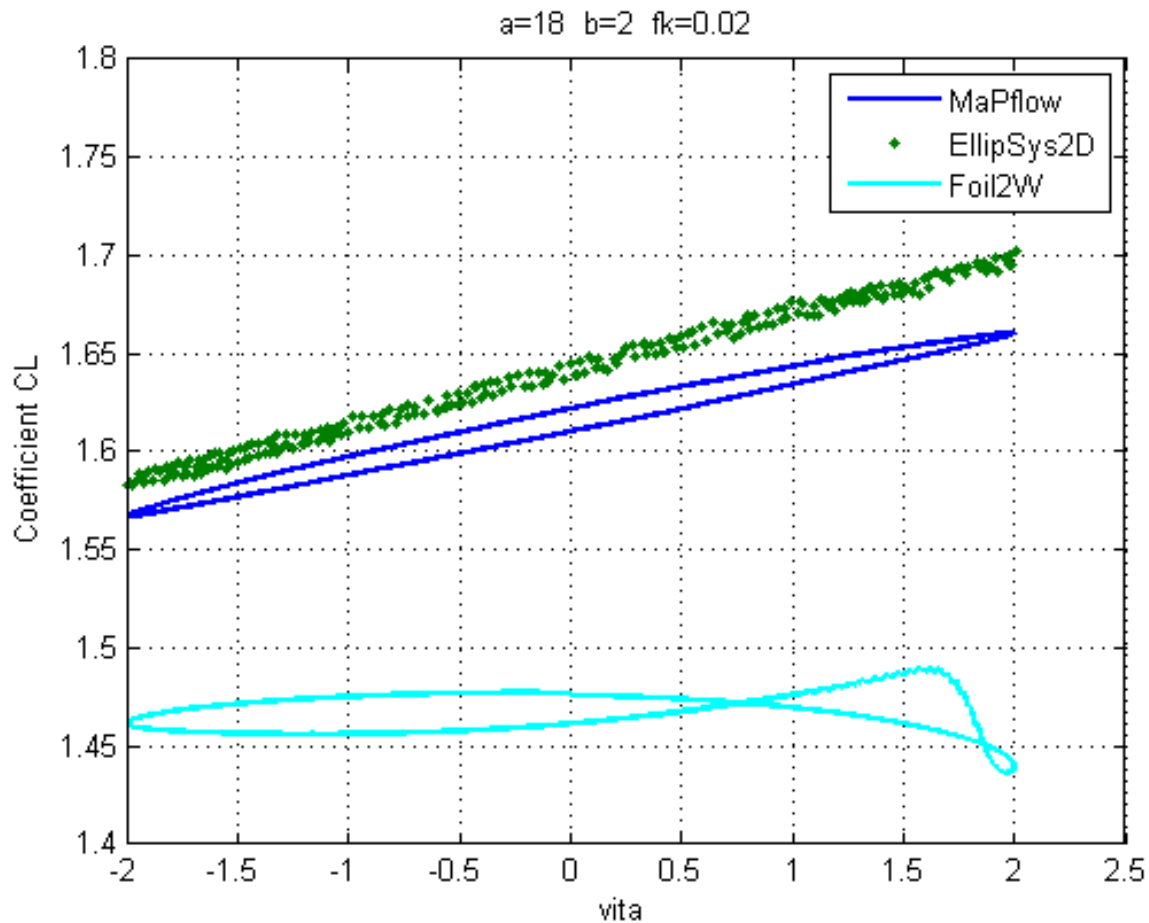
**Εικόνες 106, 107 και 108: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 16^\circ$ ,**

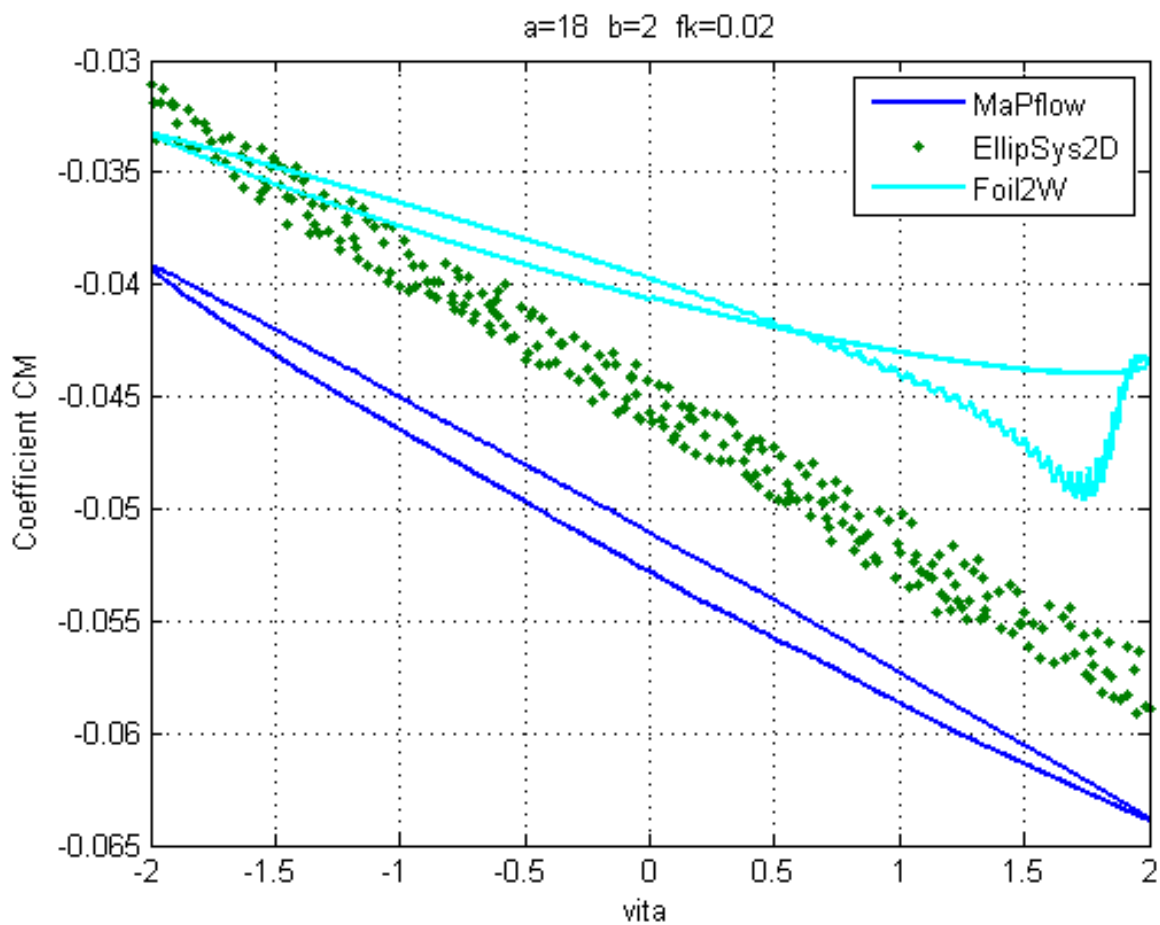
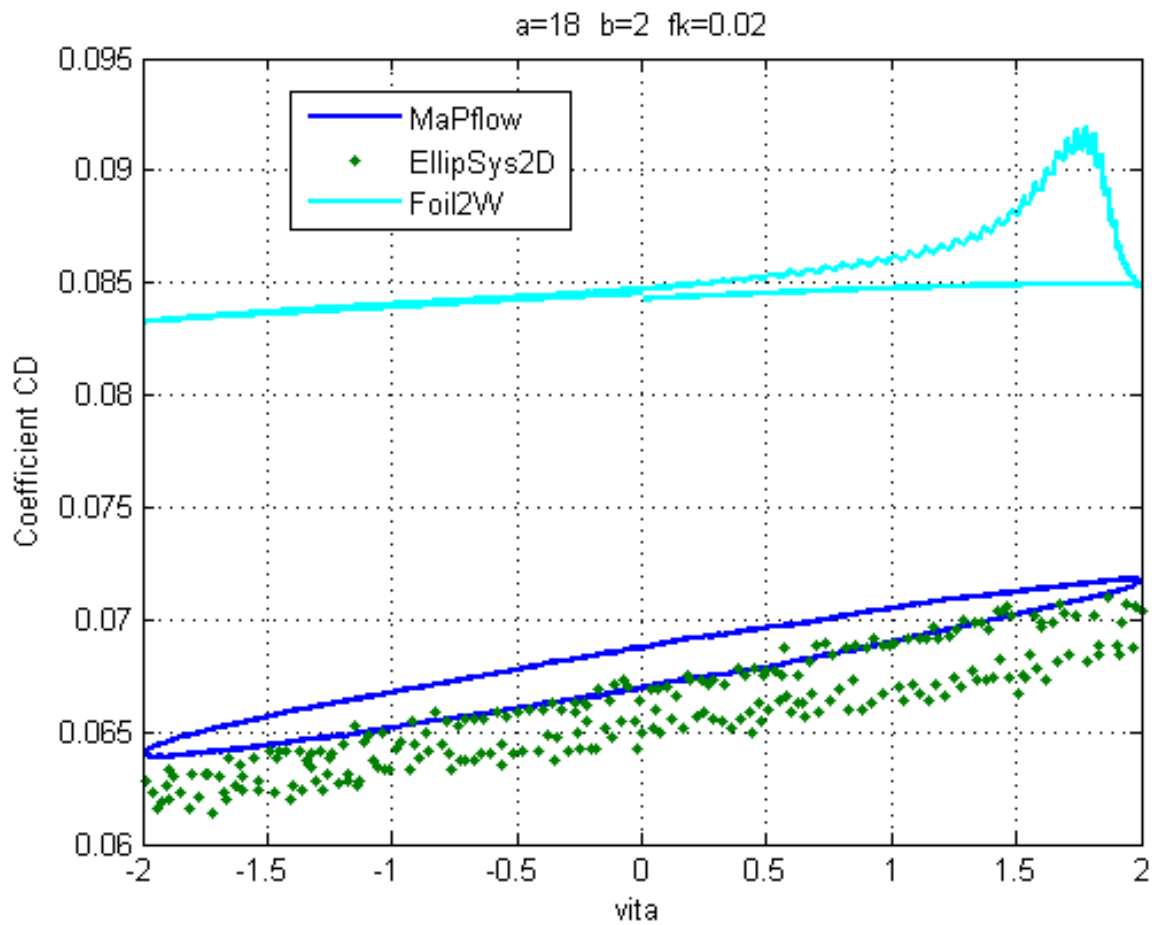
$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.5$ .

Εδώ, επειδή αυξάνεται πια η γωνία πρόσπτωσης, και άρα πλησιάζουμε στην περιοχή αποκόλλησης, χρησιμοποιείται η μέθοδος Foil2W αντί της FOIL1W. Παρατηρούμε ότι οι διαφορές ανάμεσα στην μέθοδο αυτή και στις δύο μεθόδους CFD (MaPFlow και EllipSys2D) είναι υψηλότερες εδώ από ότι ήταν στις προηγούμενες γωνίες.

Αυτό μάλλον οφείλεται στο ότι η γωνία  $\alpha$  έχει ανέβει σε πολύ ψηλές τιμές, οπότε πια δεν ερμηνεύεται με τον ίδιο τρόπο από τόσο διαφορετικά στη λογική τους προγράμματα (CFD και Foil2W).

Στην δέκατη τρίτη περίπτωση έχουμε γωνία  $\alpha = 18^\circ$  και  $f_k = 0.02$ .

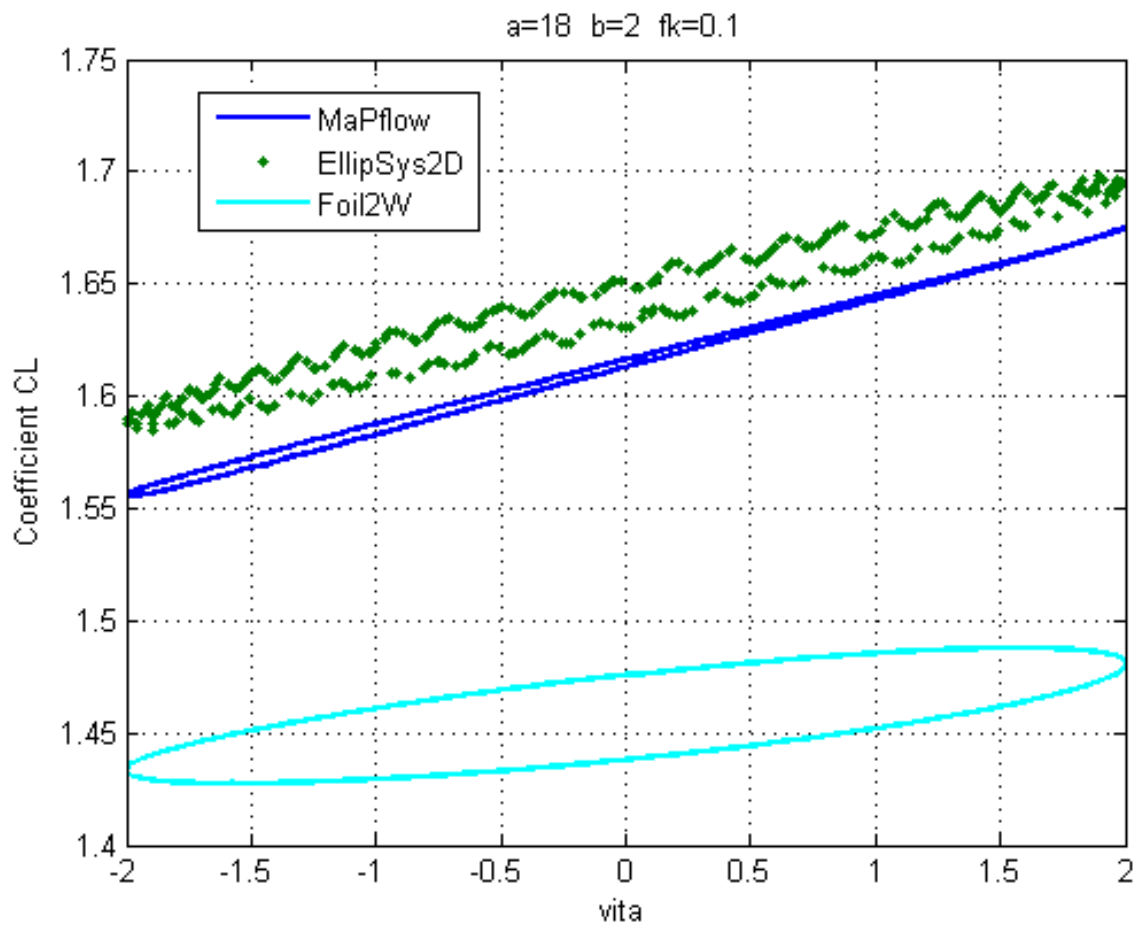


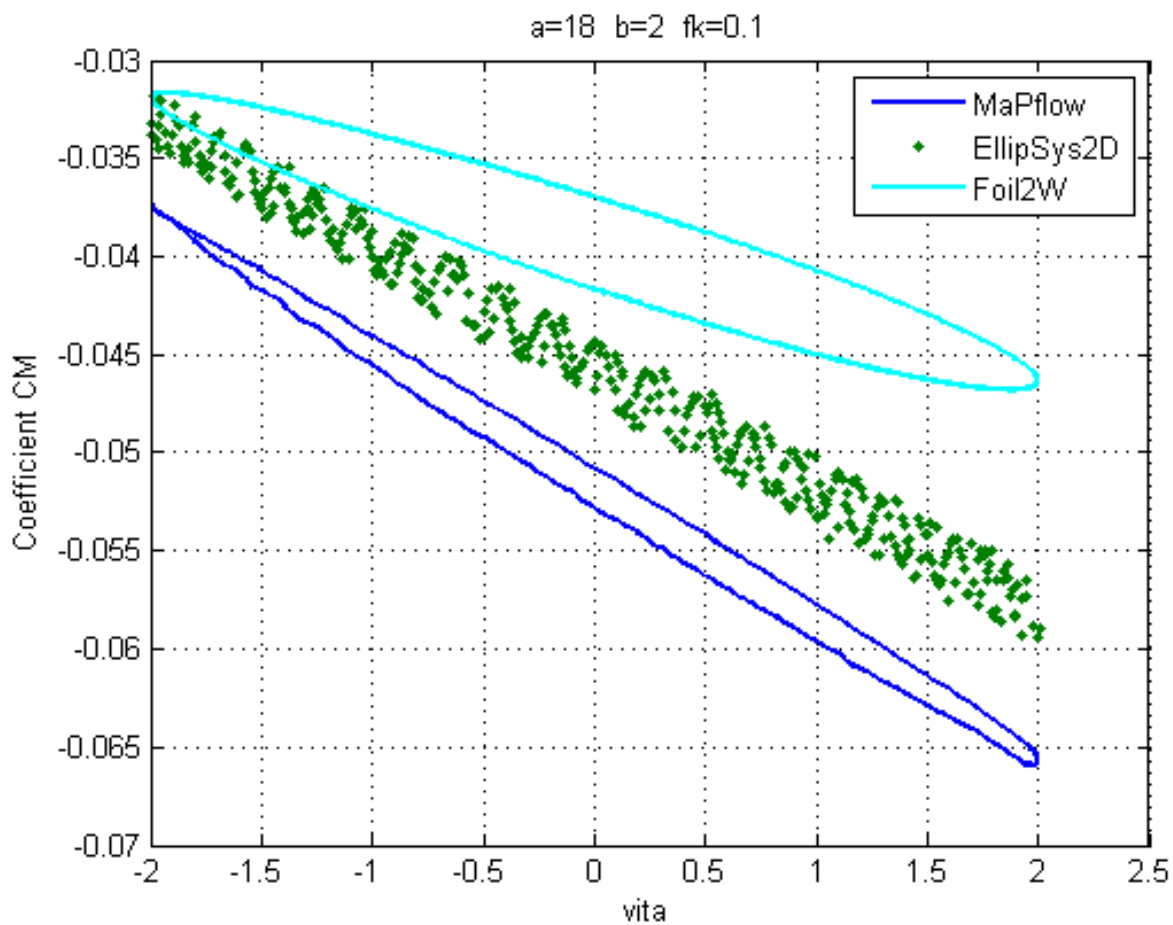
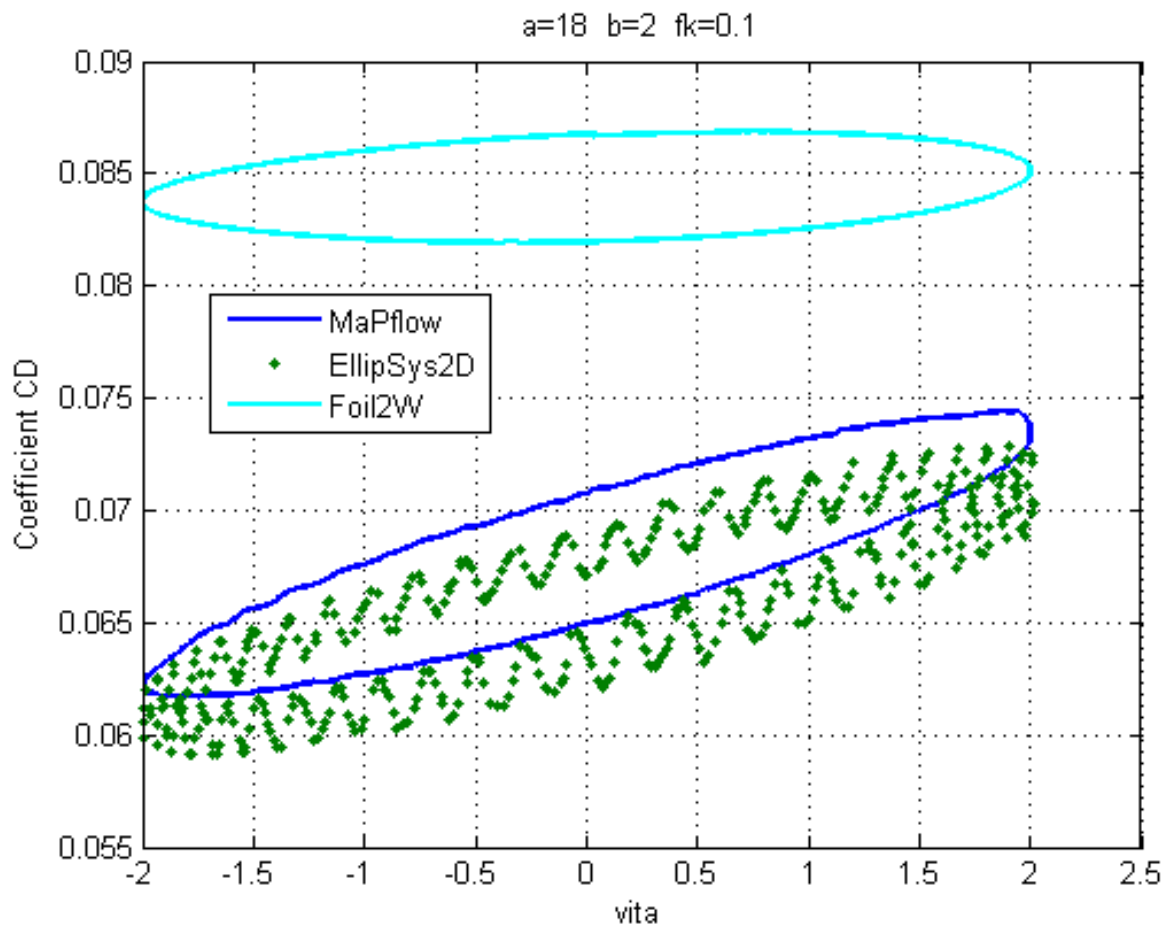


**Εικόνες 109, 110 και 111: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 18^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.02$ .

Στην δέκατη τέταρτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 18^\circ$  και  $f_k = 0.1$ .



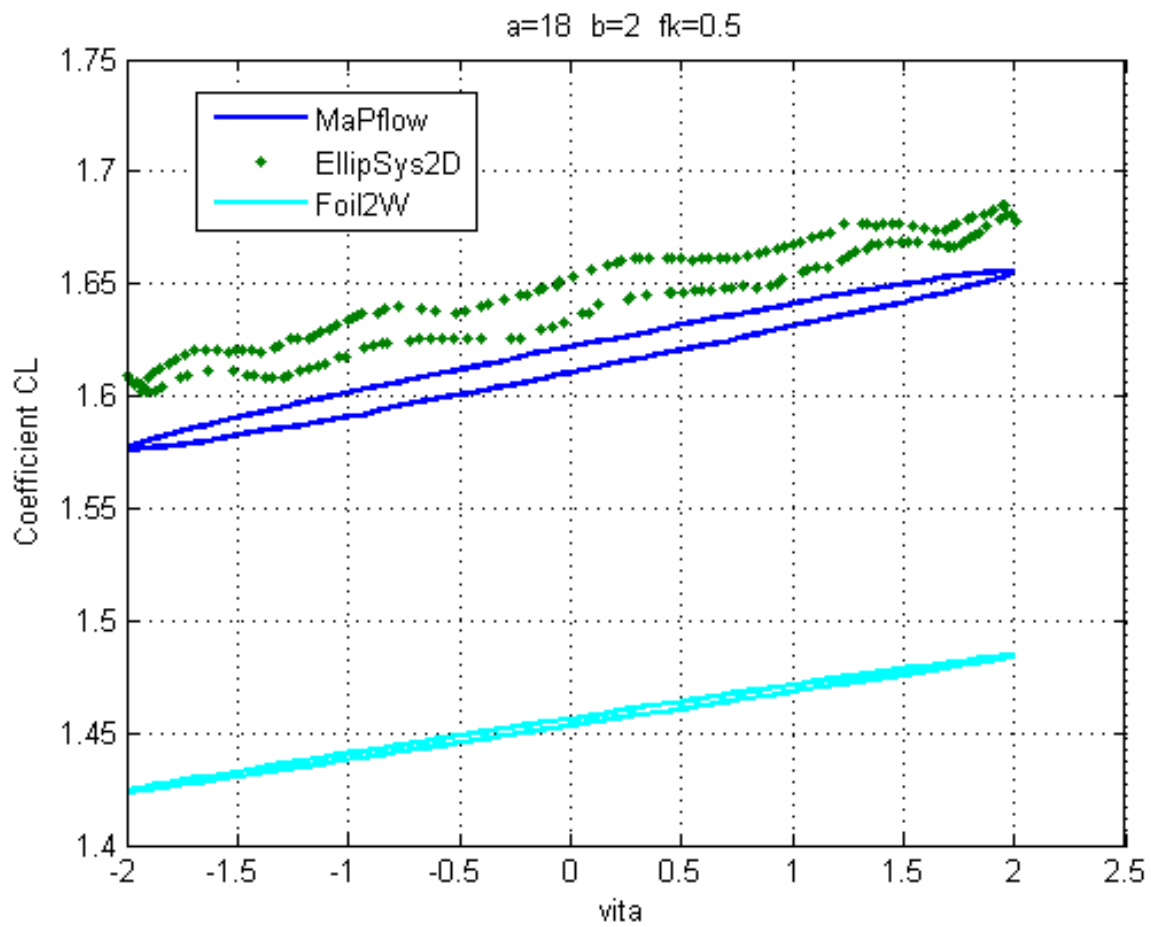


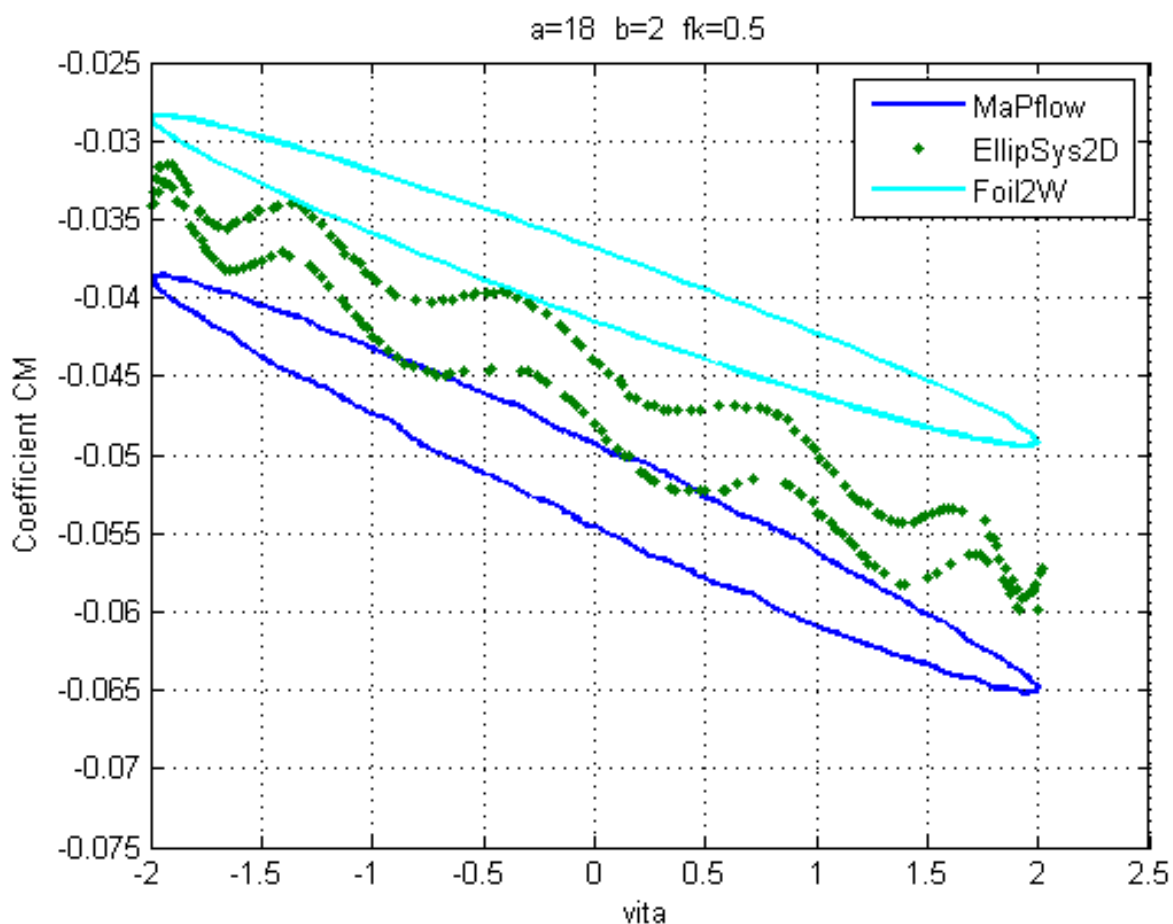
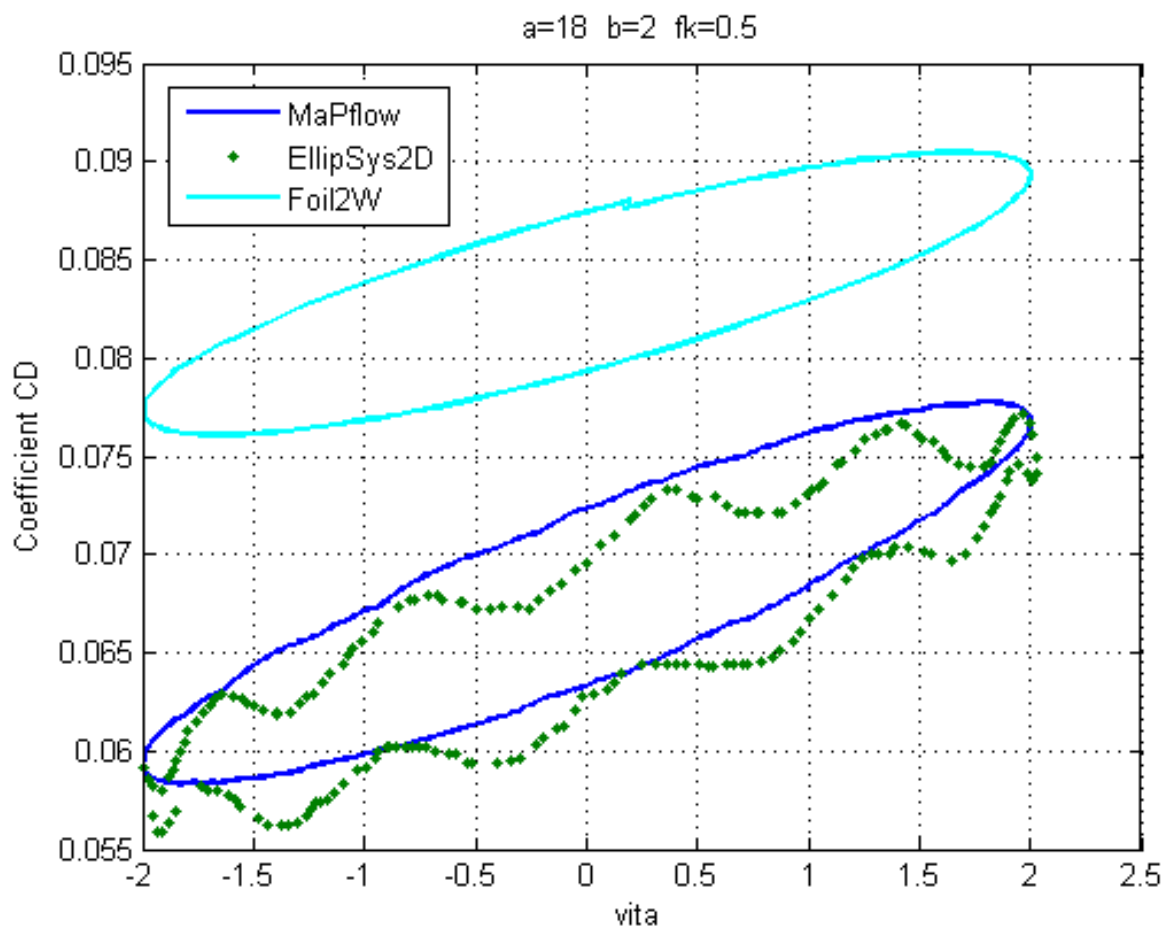
**Εικόνες 112, 113 και 114: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 18^\circ$ ,**



$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.1$ .

Στην δέκατη πέμπτη περίπτωση έχουμε γωνία  $a = 18^\circ$  και  $f_k = 0.5$ .





**Εικόνες 115, 116 και 117: Οι καμπύλες  $C_l - b$ ,  $C_d - b$  και  $C_m - b$ , για  $\alpha = 18^\circ$ ,**

$b_{amp} = 2$  και  $f_k = 0.5$ .

Στις  $18^\circ$  έχουμε πια εισχωρήσει στην αποκολλημένη ροή, οπότε όσα αναφέραμε και για την περίπτωση των  $16^\circ$  θα ισχύουν και εδώ. Πάντως, όσον αφορά την σύγκριση μεταξύ MaPFlow και EllipSys2D, βλέπουμε ότι, με εξαίρεση μία μικρή απόκλιση στη μέση τιμή, οι βρόχοι υστέρησης είναι αρκετά όμοιοι.

Το EllipSys2D για την περίπτωση των  $18^\circ$  παρουσιάζει κάποιες ασυνήθιστες κυματώσεις οι οποίες δεν ξέρουμε που οφείλονται. Οι δικές μας μετρήσεις (MaPFlow) δεν παρουσίασαν τις κυματώσεις αυτές, τουλάχιστον σε τόσο αισθητή κλίμακα.

## 3 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΡΘΡΩΤΟΥ FLAP

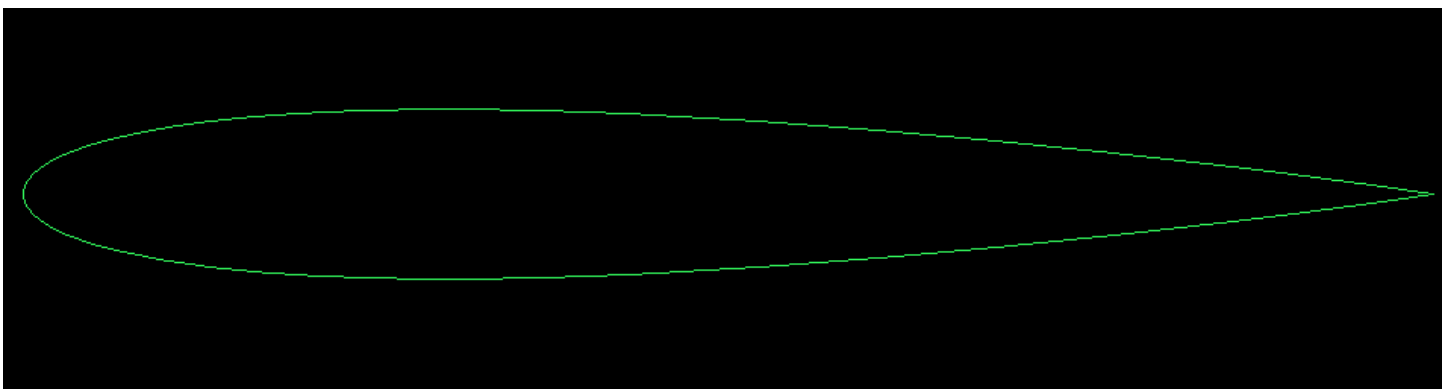
### 3.1 Συνάρτηση Κίνησης Αρθρωτού Flap

Η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται σε **αρθρωτά flap**. Τα flap αυτά αποτελούνται από στέρες, απαραμόρφωτες επιφάνειες που τοποθετούνται στο flap και περιστρέφονται γύρω από ένα σημείο άρθρωσης. Για τον λόγο αυτό και ονομάζονται "αρθρωτά" (articulated).

Η κίνησή τους είναι καθαρά περιστροφική, για αυτό και τα flap αυτά δεν αλλάζουν το μήκος τους.

Για την περίπτωση των αρθρωτών flap προτιμήθηκε η χρήση τους στην αεροτομή NACA0012. Η αεροτομή αυτή διαφέρει έναντι της NACA64418 στο ότι είναι συμμετρική, δηλαδή η κατανομή της άνω και της κάτω επιφανείας είναι ίδια ως προς την χορδή.

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε την πλάγια όψη της NACA0012.



**Εικόνα 118: Βασική μορφή της γεωμετρίας της αεροτομής NACA0012.**

Για την περίπτωση του αρθρωτού flap, τα σημεία που το ορίζουν θα επιτελούν μία περιστροφή γύρω από το σημείο άρθρωσης. Για αυτόν τον λόγο, οι νέες συντεταγμένες θα προκύψουν απλά με βάση ένα μητρώο περιστροφής γύρω από μία συγκεκριμένη γωνία. Η γωνία αυτή είναι η γωνία του flap, και συμβολίζεται με  $\beta$ . Ο όρος  $\beta$  δεν είναι ένας αδιάστατος συντελεστής, όπως ο αντίστοιχος  $b$ ,

στην περίπτωση του παραμορφώσιμου flap, αλλά μία συγκεκριμένη γωνία με μονάδα μέτρησης τις μοίρες (ή τα rad).

Η εξίσωση που δίνει την γωνία του flap είναι η εξής:

$$\beta = \beta_m \sin(2k_f t + \phi_\beta)$$

Όπου:

-  $\beta$ : Η γωνία του flap. Η γωνία αυτή ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την ακμή εκφυγής (trailing edge) με το σημείο της άρθρωσης, γύρω από το οποίο το flap περιστρέφεται. Η μία πλευρά της γωνίας αυτής είναι με το trailing edge να βρίσκεται στην αρχική θέση ( $\beta = 0^\circ$ ) και η άλλη πλευρά ορίζεται ως η τρέχουσα θέση στην οποία βρίσκεται το trailing edge.

Στο τύπο του ημιτόνου, θετικές γωνίες έχουμε στην αριστερόστροφη περιστροφή (κανόνας του δεξιού χεριού). Εμείς, ωστόσο θέλουμε θετική περιστροφή του flap όταν αυτό κατεβαίνει, δηλαδή όταν η γωνία μειώνεται (κινείται δεξιόστροφα). Στην συνάρτηση που δίνει το  $\beta$  συναρτήσει του χρόνου  $t$ , για θετικές τιμές του ημιτόνου έχουμε και θετικές γωνίες  $\beta$ .

Ένα υπολογιστικό πρόγραμμα εξάγει τα πρόσημα καθαρά με τον μαθηματικό τους ορισμό. Δηλαδή θετικό πρόσημο για τον υπολογιστή, με βάση τον παραπάνω τύπο, θα είναι αυτό όπου η γωνία του flap αυξάνεται, δηλαδή το flap ανεβαίνει.

Προκειμένου να αποφευχθεί η σύγχυση αυτή, και ο υπολογιστής να λάβει υπόψη του ως θετική φορά κίνησης την συμβατική (flap κατεβαίνει-δεξιόστροφη) και όχι την μαθηματική (αριστερόστροφη-flap ανεβαίνει), καλούμαστε να αλλάξουμε λίγο την παραπάνω συνάρτηση μέσα στο πρόγραμμα *MaPFlow*.

Έτσι μέσα στον κώδικα, η συνάρτηση θα είναι

$$\beta = -\beta_m \sin(2k_f t + \phi_\beta)$$

θα έχει δηλαδή το αρνητικό πρόσημο μπροστά.

Έτσι, όταν εμείς ορίζουμε τα  $k_f$  και  $\phi_\beta$  κατάλληλα ώστε να έχουμε θετικές τιμές του ημιτόνου  $\sin(2k_f t + \phi_\beta)$ , το πρόγραμμα αναγνωρίζει αρνητικές τιμές του  $\beta$ , που με βάση την αεροδυναμική σύμβαση που εμείς κάναμε, αναγνωρίζονται ως θετικές τιμές του flap (δηλαδή κίνηση προς τα κάτω).

-  $\beta_m$ : Αφού στην εξίσωση κίνησης υπεισέρχεται ο όρος του ημιτόνου, είναι φανερό ότι έχουμε κίνηση ταλαντωτική. Ως  $\beta_m$  ορίζουμε το εύρος της ταλάντωσης αυτής, δηλαδή την μέγιστη απόκλιση που μπορεί να έχει γύρω από την αρχική τιμή των μηδέν μοιρών.

-  $k_f$ : Είναι η συχνότητα κίνησης του flap. Δίνεται από τον τύπο:

$$k_f = \frac{\omega_f c}{2U_\infty}$$

-  $\phi_\beta$ : Είναι η αρχική φάση στην κίνηση του flap.

Ας δούμε τώρα πώς η γωνία επιδρά στην κίνηση του flap. Όπως και στην περίπτωση του παραμορφώσιμου, έτσι και εδώ, θεωρούμε ότι το flap αποτελεί τμήμα της αεροτομής. Αυτό σημαίνει ότι η κίνησή του ταυτίζεται με την αλλαγή των σημείων των συντεταγμένων που ορίζουν την αεροτομή κοντά στην ακμή εκφυγής.

Το σημείο από το οποίο και μετά οι συντεταγμένες αυτές αλλάζουν ταυτίζεται με το σημείο της άρθρωσης γύρω από το οποίο περιστρέφεται το αρθρωτό flap. Η θέση του σημείου αυτού, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, τοποθετείται στο 0.8 της χορδής, δηλαδή σε απόσταση 0.2 από την ακμή εκφυγής.

Ο τύπος που δίνει την αλλαγή των συντεταγμένων των σημείων, για γωνία  $\beta$  και με κέντρο περιστροφής το 0.8 της χορδής προκύπτει από την βασική μορφή ενός μητρώου περιστροφής. Ως γνωστόν, το μητρώο περιστροφής ανάμεσα σε αρχικές συντεταγμένες  $(x,y)$  και τελικές  $(x',y')$  είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση του flap, ο αντίστοιχος παραπάνω τύπος θα ισχύει μονάχα για τα σημεία που αποτελούν μέρος του, δηλαδή αυτά που έχουν  $x \geq 0.8$ . Οι τύποι των τετμημένων και των τεταγμένων θα είναι οι εξής:

$$x_{flap} = (x_{air} - 0.8) \cdot \cos(\beta) - y_{air} \cdot \sin(\beta) + 0.8$$

$$y_{flap} = (x_{air} - 0.8) \cdot \sin(\beta) + y_{air} \cdot \cos(\beta)$$

όπου:

- $x_{air}, y_{air}$ : Οι αρχικές συντεταγμένες της αεροτομής,

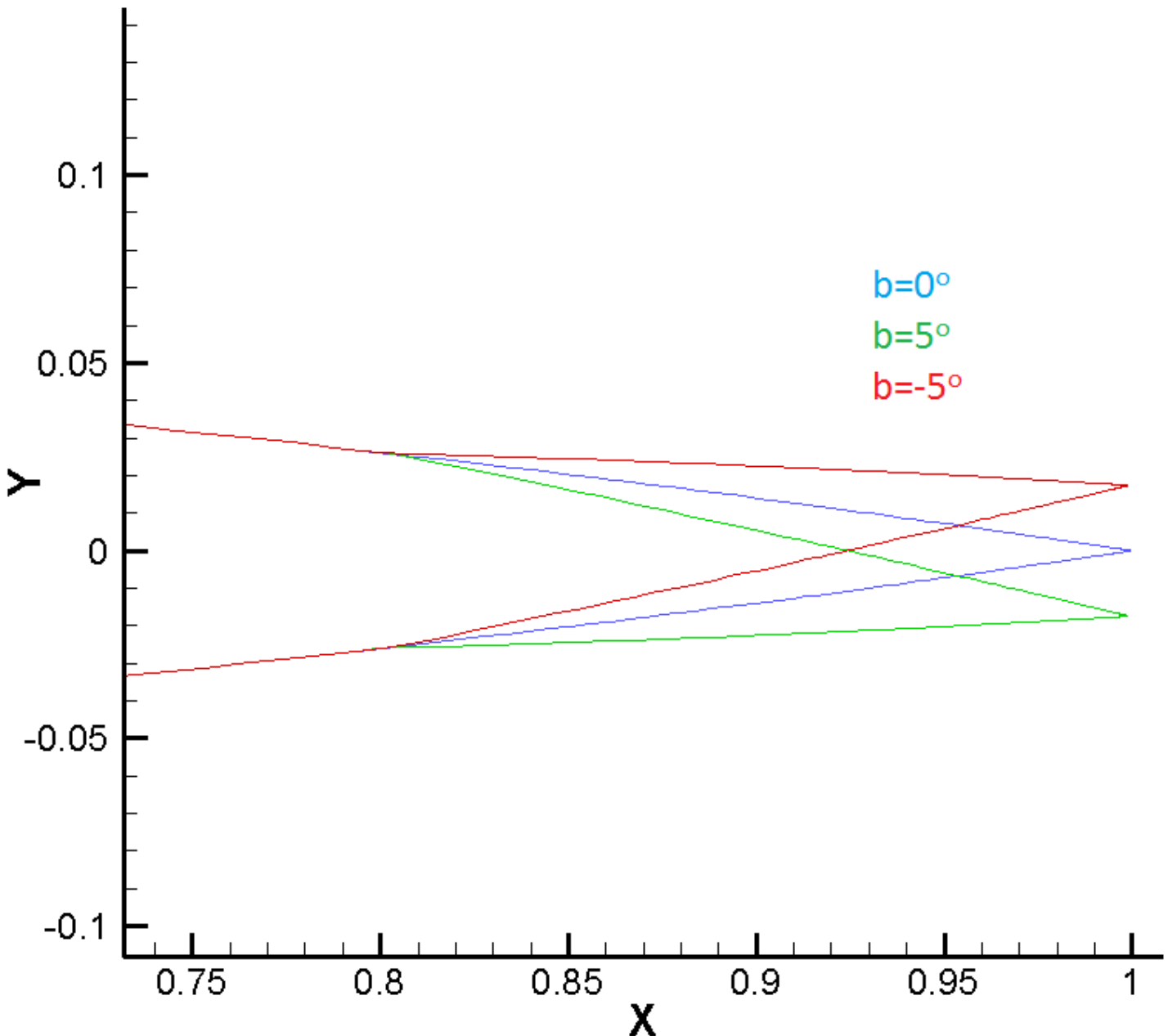
- $x_{flap}, y_{flap}$ : Οι καινούριες συντεταγμένες της αεροτομής, λόγω της κίνησης του flap,

Τα σημεία για τα οποία ισχύει  $x < 0.8$  θα παραμένουν αναλλοίωτα, αφού δεν αποτελούν σημεία του flap. Οπότε, θα είναι:

$$x_{flap} = x_{air}$$

$$y_{flap} = y_{air}$$

Ας δούμε στην παρακάτω εικόνα, πως θα αλλάξει η γεωμετρία του flap για την περίπτωση που το τελευταίο βρίσκεται στις θέσεις  $\beta = 0^\circ, 5^\circ$  και  $-5^\circ$ :



**Εικόνα 119:** Η αεροτομή NACA0012 στην αρχική της μορφή (δηλαδή  $\beta=0$ ) καθώς και στην άνω ακραία θέση του flap ( $\beta=-5$ ) και στην κάτω ακραία ( $\beta=5$ ).

Αυτό που παρατηρούμε από την εικόνα αυτή είναι ότι ορίζουμε ως θετική γωνία  $\beta$  την περίπτωση όπου το flap κατεβαίνει προς τα κάτω, το ίδιο δηλαδή με αυτό που ορίσαμε και για την περίπτωση του παραμορφώσιμου flap.

Εκτός όμως από την κίνηση του flap, η NACA0012 θα υφίσταται και περιστροφή (pitching). Η περιστροφή αυτή γίνεται ως προς την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  και επαναλαμβάνεται ανά τακτές χρονικές περιόδους, είναι δηλαδή, ταλαντωτική. Η εξίσωση περιστροφής της αεροτομής αυτής, είναι η εξής:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m \sin(2k_\alpha t + \phi_\alpha)$$

Όπου:

-  $\alpha$ : Είναι η τρέχουσα γωνία πρόσπτωσης της αεροτομής, δηλαδή αυτή που έχει την στιγμή  $t$ .

Και εδώ, ο τύπος του ημιτόνου, με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού, ορίζει ως θετική γωνία περιστροφής την αριστερόστροφη. Εμείς όμως, θέλουμε θετική περιστροφή του flap όταν η μύτη του (ακμή πρόσπτωσης) ανεβαίνει, δηλαδή όταν έχουμε δεξιόστροφη περιστροφή.

Προκειμένου να ικανοποιείται η συνθήκη αυτή, τοποθετούμε τα αρνητικά πρόσημα μέσα στον κώδικα, τόσο στην μέση γωνία προσβολής  $\alpha_0$  όσο και στο πλάτος της  $\alpha_m$ .

Έτσι όταν εμείς περιμένουμε θετική γωνία πρόσπτωσης, το πρόγραμμα MaPFlow θα επιλύει στην πραγματικότητα την συνάρτηση:

$$\alpha = -\alpha_0 - \alpha_m \sin(2k_\alpha t + \phi_\alpha)$$

Με τον τρόπο αυτό ικανοποιείται και η δεύτερη αεροδυναμική σύμβαση, που θέλει θετική φορά περιστροφής (pitching) αυτή στην οποία το μπροστινό μέρος της αεροτομής, ανεβαίνει.

-  $\alpha_0$ : Είναι η μέση τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία πρόσπτωσης της αεροτομής. Η κίνηση της αεροτομής είναι μία απόκλιση γύρω από την τιμή αυτή.

-  $\alpha_m$ : Αφού στην εξίσωση κίνησης υπεισέρχεται ο όρος του ημιτόνου, είναι φανερό ότι έχουμε κίνηση ταλαντωτική. Ως  $\alpha_m$  ορίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης αυτής, δηλαδή την μέγιστη απόκλιση που μπορεί να έχει γύρω από την μέση τιμή.

-  $k_\alpha$ : Είναι η συχνότητα περιστροφής της αεροτομής. Δίνεται από τον τύπο:

$$k_\alpha = \frac{\omega_\alpha c}{2U_\infty}$$

-  $\phi_\alpha$ : Είναι η αρχική φάση στην περιστροφή της αεροτομής.

Η περιστροφή αυτή όλης της αεροτομής θα πρέπει να γίνεται γύρω από κάποιο συγκεκριμένο σημείο, κάτι ανάλογο με την περιστροφή του flap γύρω από το σημείο στο 0.8 της χορδής.

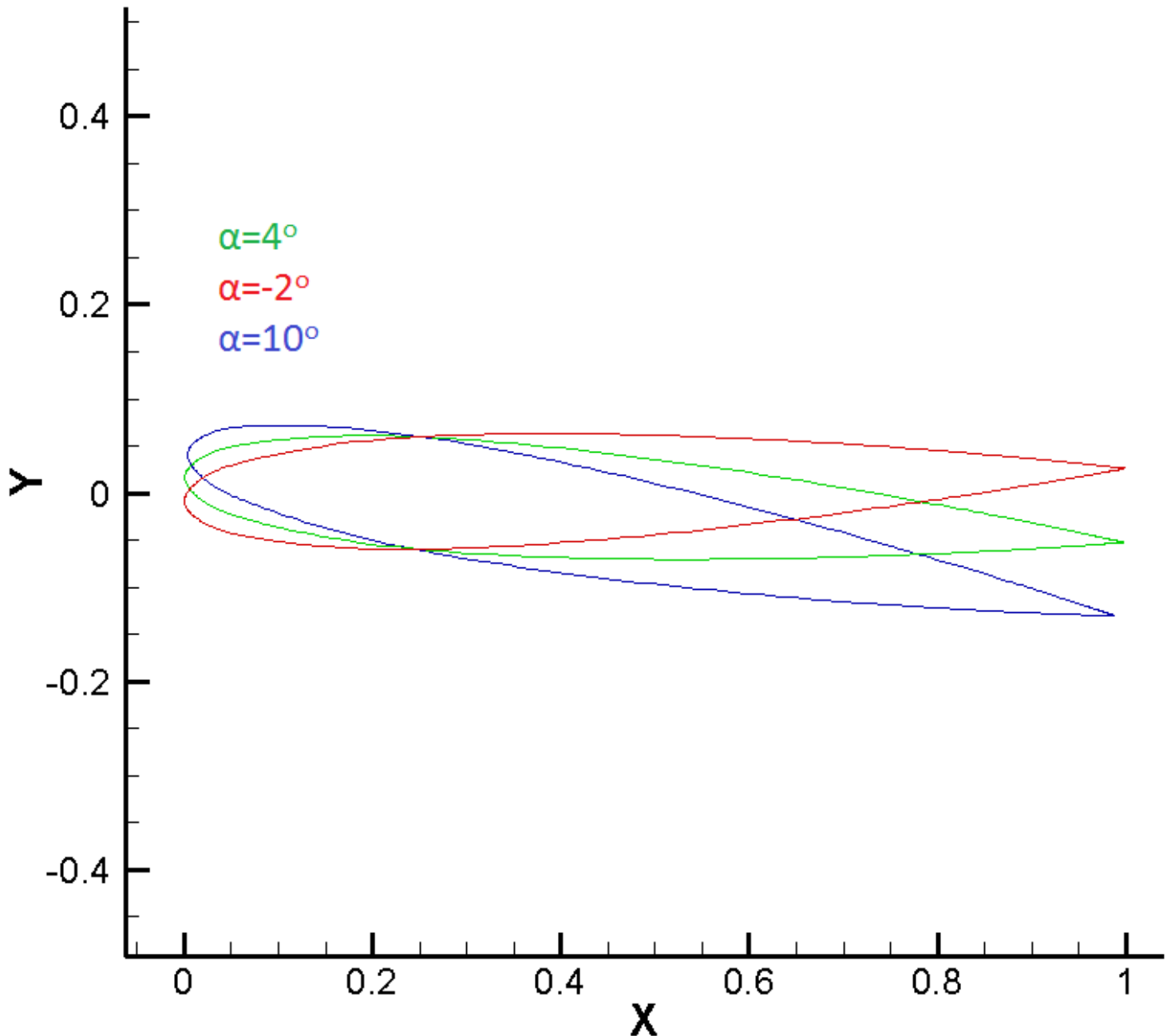
Αντίστοιχα, το σημείο γύρω από το οποίο ολόκληρη η αεροτομή περιστρέφεται τοποθετείται στο 0.25 της χορδής. Η περιστροφή της αεροτομής προκαλεί και αυτή με την σειρά της αλλαγή στις συντεταγμένες. Οι νέες συντεταγμένες θα δίνονται και πάλι από ένα αντίστοιχο μητρώο περιστροφής, και θα είναι:

$$x_{rot} = (x_{air} - 0.25) \cdot \cos(\alpha) - y_{air} \cdot \sin(\alpha) + 0.25$$

$$y_{rot} = (x_{air} - 0.25) \cdot \sin(\alpha) + y_{air} \cdot \cos(\alpha)$$

όπου  $x_{rot}, y_{rot}$  είναι οι καινούριες συντεταγμένες της αεροτομής λόγω περιστροφής. Προφανώς, για την περίπτωση της περιστροφής, δεν υπάρχουν περιορισμοί, και έτσι όλα τα σημεία που ορίζουν την αεροτομή αλλάζουν τις συντεταγμένες τους.

Ας δούμε την γωνία που θα έχει η αεροτομή, για τις περιπτώσεις όπου η μέση γωνία  $a_o = 4^\circ$  και  $a_m = 6^\circ$ . Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε την μέση και τις ακραίες γωνίες, δηλαδή  $a = 4^\circ$ ,  $a = -2^\circ$  και  $a = 10^\circ$ :



**Εικόνα 120:** Η αεροτομή NACA0012 στην μέση τιμή  $\alpha = 4^\circ$ , καθώς και στις ακραίες τιμές  $\alpha = -2^\circ$  και  $\alpha = 10^\circ$ .

Και στο παραπάνω σχήμα, ως θετική γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  έχουμε ορίσει αυτήν στην οποία η αεροτομή σηκώνεται προς τα πάνω, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, όταν εξετάζαμε το παραμορφώσιμο flap.

Οι τελικές συντεταγμένες που ορίζουν την αεροτομή θα προκύπτουν ως ένα άθροισμα τόσο της κίνησης του flap όσο και της περιστροφής της αεροτομής. Δηλαδή, θα είναι:

$$x_{final} = x_{flap} + x_{rot}$$

$$y_{final} = y_{flap} + y_{rot}$$

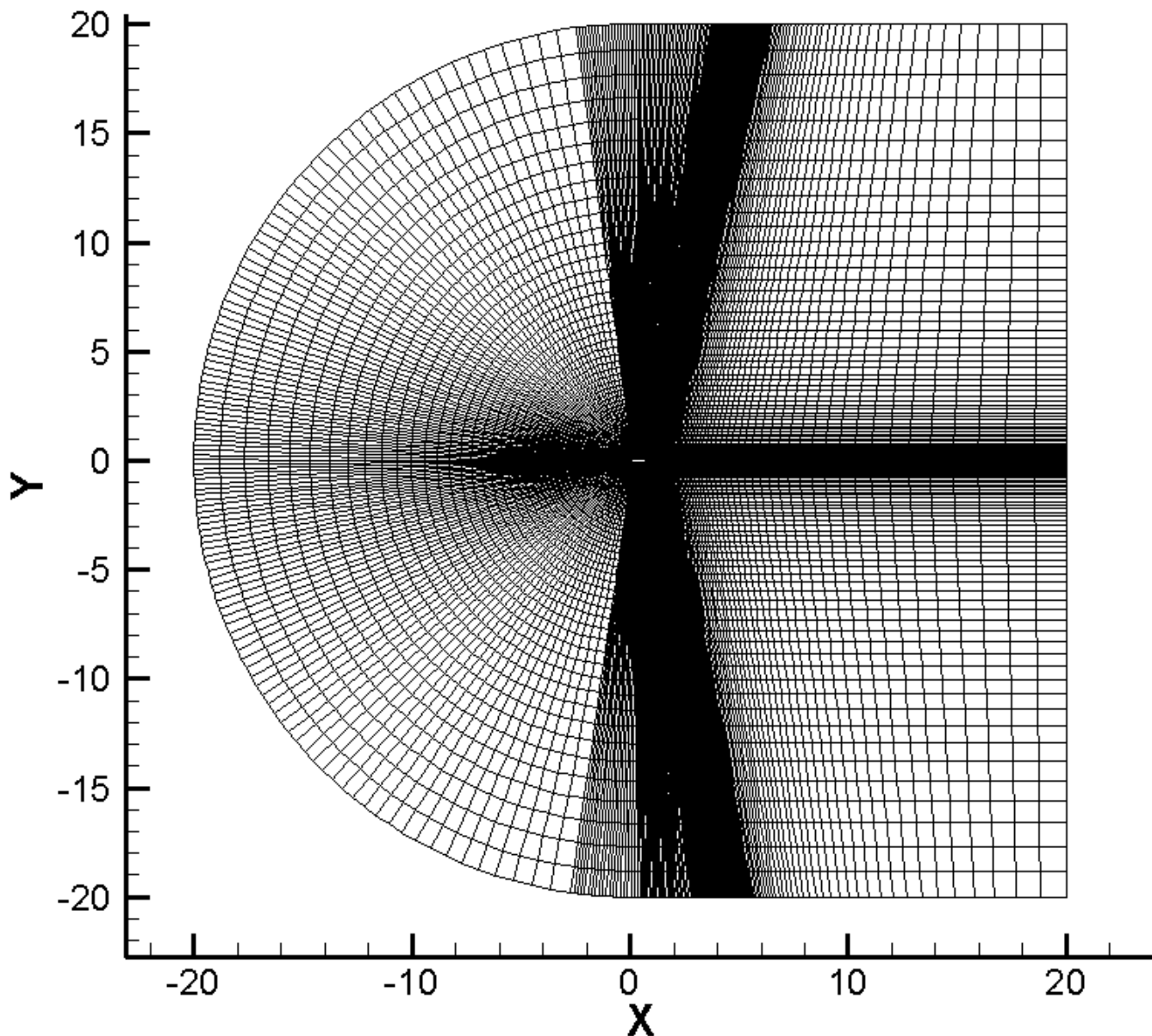


## 3.2 Προσαρμογή Αρθρωτού Flap στο Πρόγραμμα MaPflow

Έχοντας πλέον διατυπώσει και περιγράψει τις εξισώσεις κίνησης του flap και της αεροτομής NACA0012, το πρόγραμμα MaPflow καλείται να επιλύσει την συγκεκριμένη ροή γύρω από την αεροτομή αυτή.

Σε πρώτη φάση λοιπόν, ως γνωστόν, οφείλουμε να κατασκευάσουμε το πλέγμα.

Με εφαρμογή του προγράμματος Ansys, προέκυψε το παρακάτω:

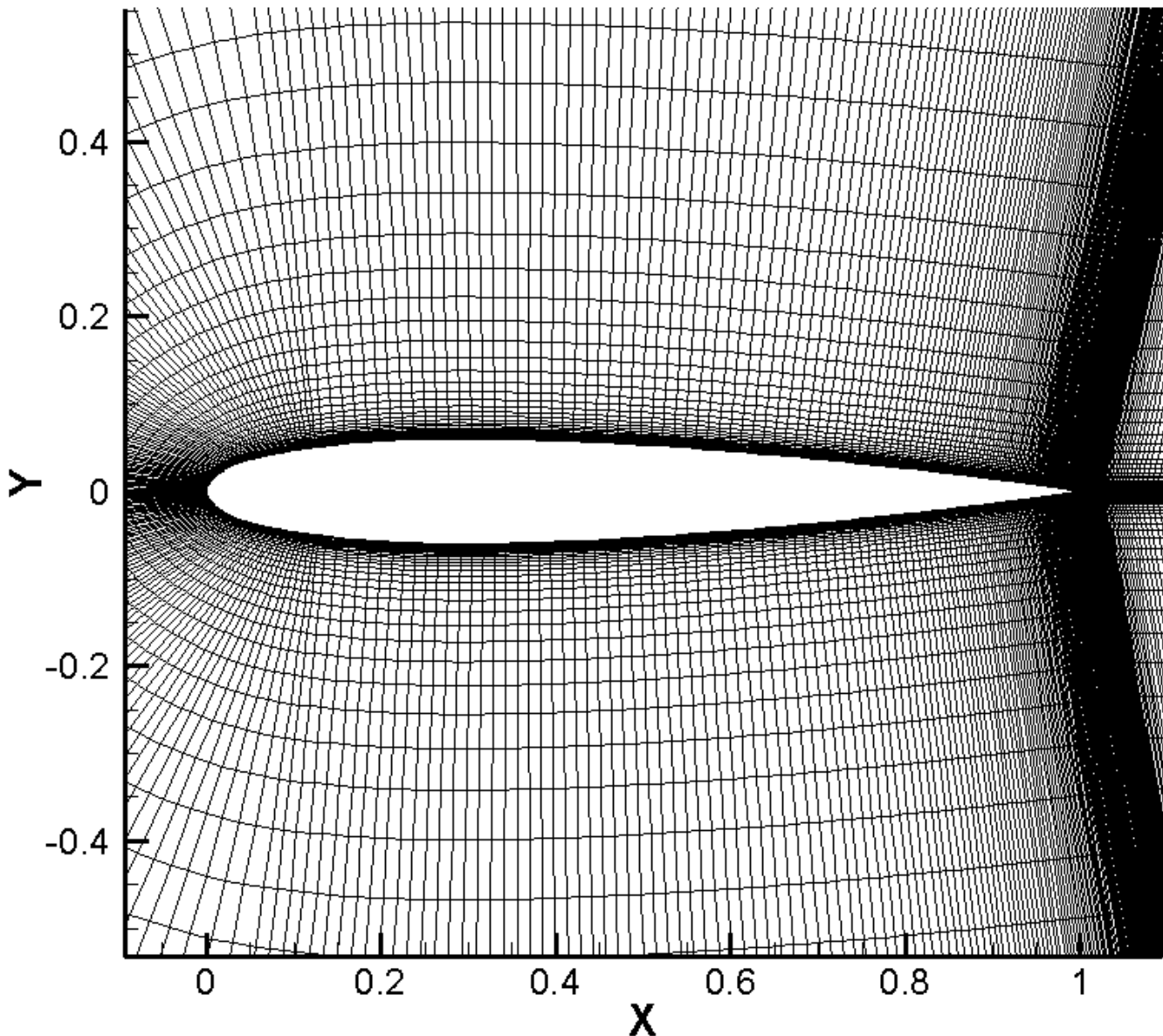


**Εικόνα 121: Το πλέγμα (grid) που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα MaPflow, για την αεροτομή NACA0012.**

Η παραπάνω εικόνα δείχνει ένα C-type πλέγμα, structured. **Ο αριθμός των κόμβων για το πλέγμα αυτό είναι 89554 και των κελιών 88200.**

Η εικόνα αυτή εστιάζει στο εξωτερικό σύνορο, δηλαδή το farfield.

Το πλέγμα στο εσωτερικό σύνορο, δηλαδή στο τοίχωμα της αεροτομής, θα έχει ως εξής:



**Εικόνα 122: Το ίδιο πλέγμα, με έμφαση στη θέση της αεροτομής.**

Από το πλέγμα αυτό λοιπόν, που σχεδιάζουμε στο Ansys, προκύπτει το αρχείο `grid.msh`, που διαβάζει το πρόγραμμα MaPflow.

Για τις παραμέτρους εισόδου της ροής όπως τις διαβάζει το MaPflow χρησιμοποιείται, όπως και πριν, το αρχείο `euler.inp`.

Όπως όμως και στην περίπτωση του παραμορφώσιμου flap, έτσι και εδώ θα πρέπει να οριστούν επιπλέον αρχεία εισόδου, που περιγράφουν τόσο την κίνηση του αρθρωτού flap, όσο και την περιστροφή της αεροτομής.

Το πρώτο από αυτά τα αρχεία είναι το `articulated_flap_par.inp`. Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε τί ακριβώς ορίζουμε στην κάθε σειρά του αρχείου αυτού:

**articulated\_flap\_par.inp**

Αριθμός σειράς	Μεταβλητή
1η	ch
2η	wb
3η	vitam_deg
4η	phb_deg
5η	steps

Όπου:

- *ch*: Είναι το ποσοστό επί της χορδής πάνω στο οποίο θεωρούμε ότι τοποθετείται το αρθρωτό flap. Είναι δηλαδή το σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφεται η αεροτομή. Η τιμή του *ch* ισοδυναμεί με την τετμημένη της θέσης αυτής. Η τεταγμένη βρίσκεται στο 0.

Εμείς θεωρούμε ότι το flap βρίσκεται στο 0.8 της χορδής για αυτό και  $ch = 0.8$ .

- *wb*: Το μέγεθος αυτό ταυτίζεται με την ποσότητα  $2k_f$ . Για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν, ορίσαμε  $k_f = 0.042$ , άρα θα είναι  $wb = 0.084$ .

- *vitam\_deg*: Η ποσότητα αυτή αφορά την μέση γωνία  $\beta_m$ , δηλαδή το πλάτος του flap. Δίνεται σε μοίρες. Για την διπλωματική αυτή, δεχθήκαμε  $vitam\_deg = 5$ .

- *phb\_deg*: Πρόκειται για τη αρχική φάση  $\phi_\beta$ . Ορίζεται σε μοίρες. Την τιμή αυτής της μεταβλητής θα την δούμε παρακάτω σε συνδυασμό με την  $\phi_\alpha$ , καθώς οφείλουμε να αναφερθούμε ιδιαίτερα σε αυτήν.

- *steps*: Είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων ανά περίοδο κίνησης του flap. Από το μέγεθος αυτό ορίζεται το χρονικό βήμα στο διακριτοποιείται ο χρόνος του προγράμματος.

Είναι:

$$DT = \frac{T}{steps}$$

Αλλά επειδή:

$$wb = 2 \cdot \frac{\pi}{T} \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{wb}$$

καταλήγουμε:

$$DT = \frac{2 \cdot \pi}{steps \cdot wb}$$

Το δεύτερο αρχείο από αυτά είναι το articulated\_rotate\_par.inp:

### articulated\_rotate\_par.inp

Αριθμός σειράς	Μεταβλητή
1η	rot
2η	wa
3η	a0_deg
4η	ames_deg
5η	pha_deg

Όπου:

- *rot*: Είναι το σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφεται η αεροτομή. Το σημείο αυτό τοποθετείται στο  $rot = 0.25$ .

- *wa*: Το μέγεθος αυτό ταυτίζεται με την ποσότητα  $2k_a$ . Για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν, ορίσαμε  $k_a = 0.021$ , άρα θα είναι  $wa = 0.042$ .

- *a0\_deg*: Ταυτίζεται με την μέση τιμή της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha_0$ . Ορίζεται σε μοίρες. Για τους υπολογισμούς που κάναμε δεχτήκαμε κυρίως  $a0 = 4$ , εκτός από μία συγκεκριμένη περίπτωση όπου πήραμε  $a0 = 11$ .

- *ames\_deg*: Ταυτίζεται με την μέση τιμή της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha_{mes}$ . Ορίζεται σε μοίρες. Για όλες τις περιπτώσεις υπολογισμών που κάναμε δεχτήκαμε  $ames = 6$ .

- *pha\_deg*: Πρόκειται για τη αρχική φάση  $\phi_\alpha$ . Ορίζεται σε μοίρες.

Σε αντίθεση με την περίπτωση παραμορφώσιμου flap, όπου απλά υπολογίζαμε την κίνηση του flap συναρτήσει του χρόνου σε συγκεκριμένες γωνίες  $\alpha$ , εδώ έχουμε ταυτόχρονη κίνηση τόσο του flap όσο και περιστροφή της αεροτομής. Αυτό σημαίνει ότι ταυτόχρονα οι όροι  $\alpha$  και  $\beta$  θα μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου.

Οι συχνότητες τους παραμένουν σταθερές σε όλους του υπολογισμούς που κάναμε. Το μεν flap κινείται με συχνότητα  $wb = 0.084rad/sec$ , η δε αεροτομή περιστρέφεται με  $wa = 0.042rad/sec$ . Αυτό στο οποίο πειραματιστήκαμε στους παρόντες υπολογισμούς, αφορά στην διαφορά φάσης των δύο κινήσεων αυτών.

Η διαφορά φάσης αφορά το μέγεθος  $\phi_\alpha - \phi_\beta$ . Ανάλογα με την διαφορά αυτή ανάμεσα στην περιστροφή και στην κίνηση του flap, προέκυψαν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα τα οποία εξάγαμε θα πρέπει να συγκριθούν με μετρήσεις πειραματικές που προέκυψαν από τους κυρίους Krzysiak και Narkiewicz σε αεροσήραγγα N-3 του Ινστιτούτου της Αεροπορίας στη Βαρσοβία της Πολωνίας, καθώς και με υπολογιστικά αποτελέσματα όπως αυτά προέκυψαν από το πρόγραμμα Foil1W-Foil2W υπό την επίβλεψη του κυρίου Βασίλη Ριζιώτη.

### 3.3 Αποτελέσματα Ροής Αρθρωτού Flap

Για την περίπτωση του αρθρωτού flap διαθέτουμε δύο ειδών καμπύλες. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως συγκρίνονται οι καμπύλες αυτές με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα MaPflow.

Οι μετρήσεις με τις οποίες θα γίνει η σύγκριση έχουν προκύψει είτε από την γνωστή πια μέθοδο Foil1W, ή από πειράματα που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο της Πολωνίας.

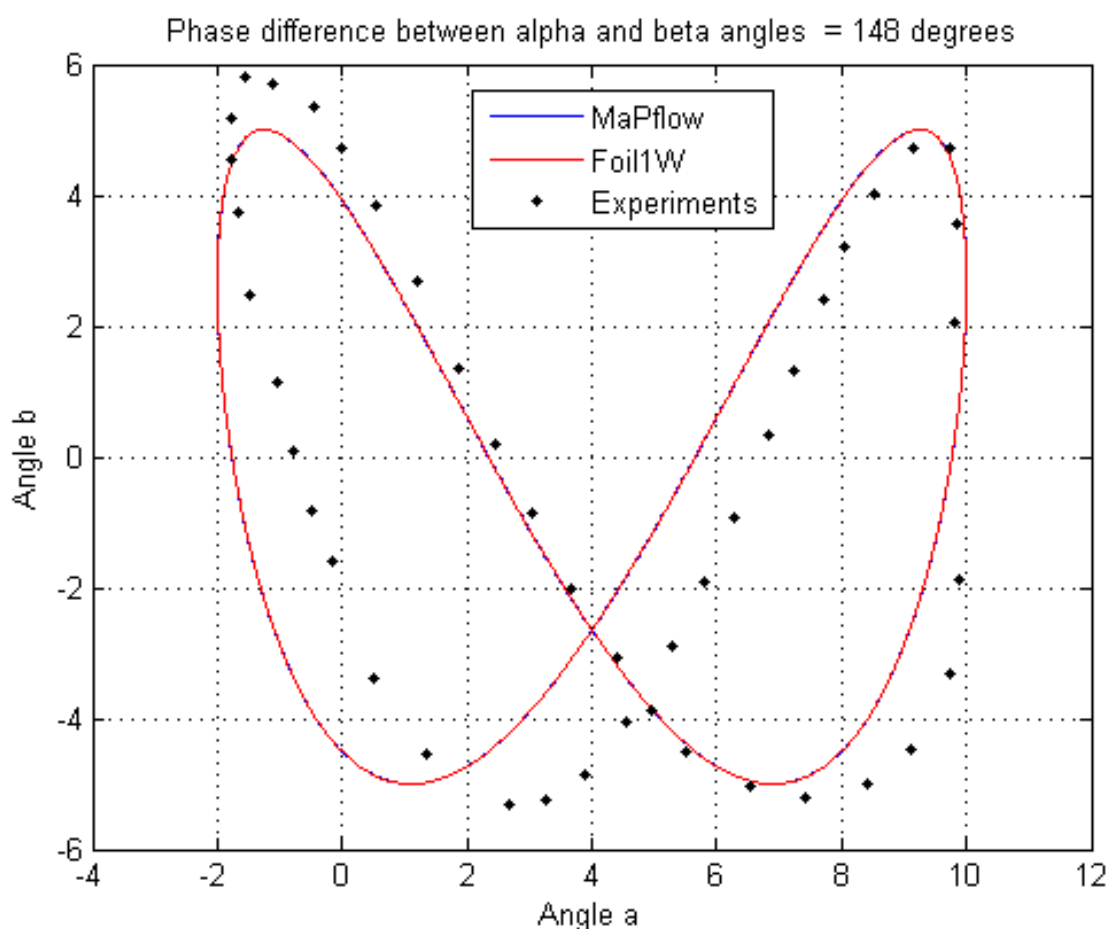
Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για αριθμό Reynolds  $Re = 1.63 \cdot 10^6$ . Όπως είπαμε ήδη, σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε περιστροφή τόσο του flap όσο και της αεροτομής, με συχνότητες και πλάτη που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και που παραμένουν σταθερές.

Η διαφοροποίηση στους διάφορους υπολογισμούς έγινε σε ότι αφορά την διαφορά φάσης  $\phi_\alpha - \phi_\beta$  ανάμεσα στην περιστροφική κίνηση και στην κίνηση του flap.

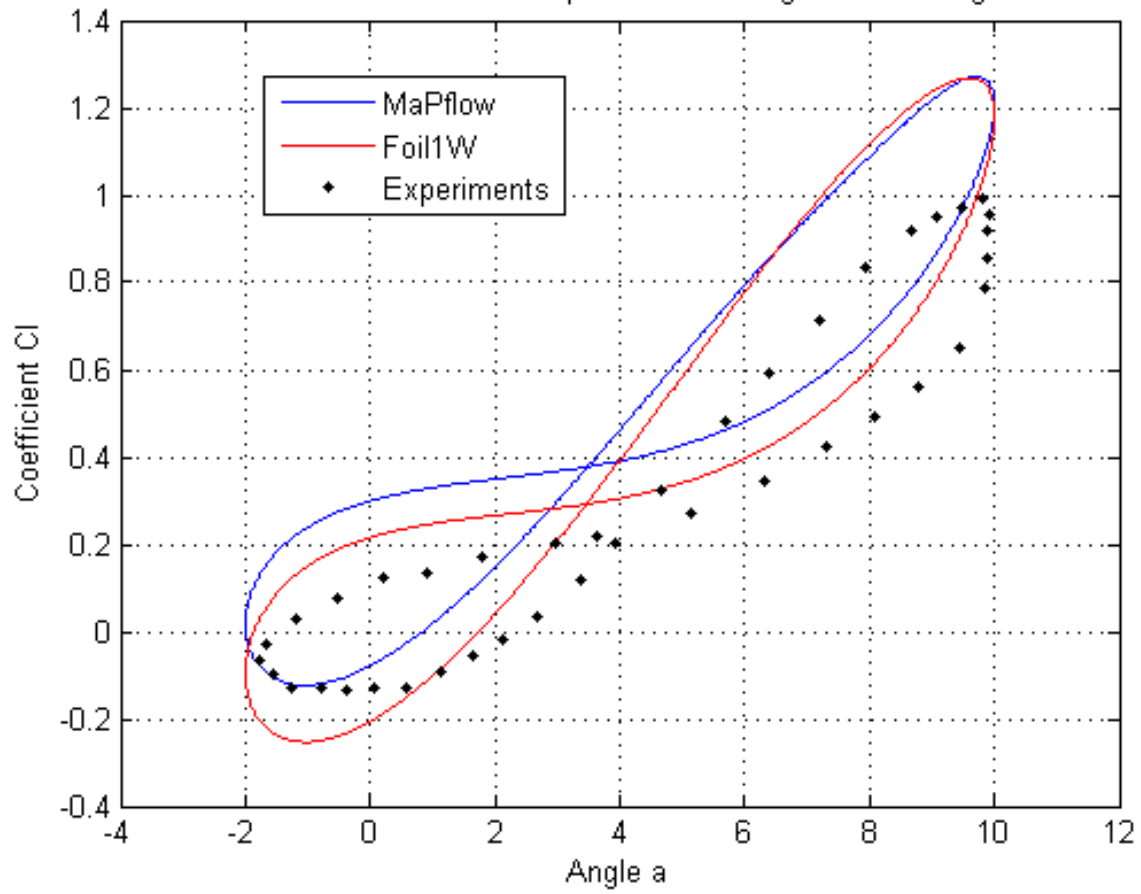
Οι καμπύλες Foil1w που είχαμε στην διάθεσή μας ήταν μετρημένες σε διαφορές φάσης που συνέπιπταν με τις αντίστοιχες ονομαστικές πειραματικές. Επειδή όμως παρατηρήθηκε απόκλιση από τις ονομαστικές πειραματικές τιμές, έγινε και ένα σύνολο νέων υπολογισμών Foil1w με διορθωμένες διαφορές φάσης. Οι διορθωμένες αυτές φάσεις βρίσκονται αρκετά κοντά στις αντίστοιχες πειραματικές, αλλά υπάρχουν αισθητές αποκλίσεις.

Ακριβώς για αυτόν τον λόγο, θεωρήσαμε σκόπιμο και το πρόγραμμα MaPflow να υπολογίσει τις αντίστοιχες καμπύλες τόσο για τις αρχικές γωνίες διαφοράς φάσης όσο και για τις αντίστοιχες διορθωμένες.

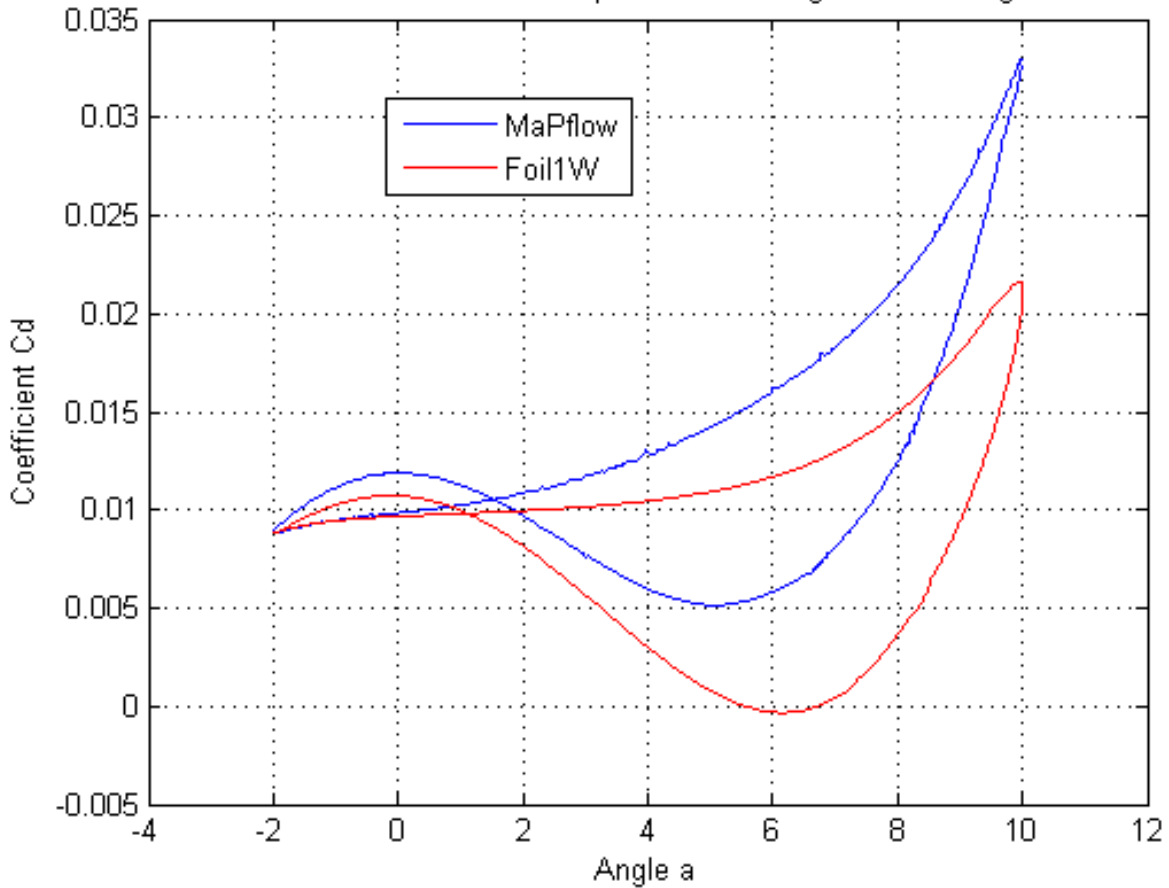
Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα  $\beta - \alpha$ ,  $C_L - \alpha$ ,  $C_D - \alpha$  και  $C_M - \alpha$  για την περίπτωση που η διαφορά φάσης είναι  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 148^\circ$ :

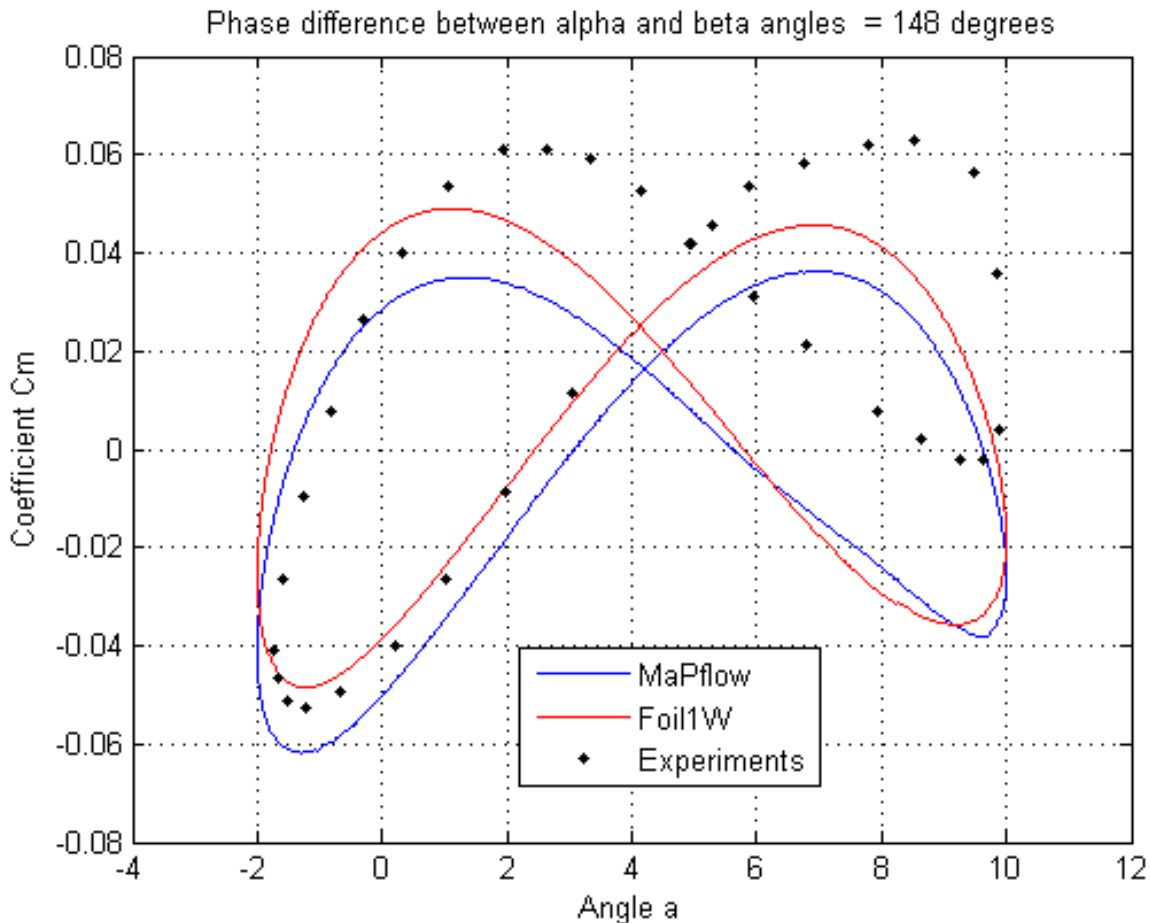


Phase difference between alpha and beta angles = 148 degrees



Phase difference between alpha and beta angles = 148 degrees





**Εικόνες 123, 124, 125 και 126: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 148^\circ$ .**

Το πρώτο διάγραμμα που πρέπει να δούμε εδώ είναι η καμπύλη  $\beta - \alpha$ , δηλαδή η καμπύλη που ορίζει την σχετική θέση της αεροτομής ως προς το flap. Η καμπύλη αυτή προκύπτει καθαρά από τις συναρτήσεις που ορίζουν τις δύο κινήσεις αυτές, και η επίλυση της ροής δεν έχει καμία σχέση.

Βλέπουμε ότι οι καμπύλες MaPflow και Foil1W ταυτίζονται πλήρως, που είναι λογικό, μιας και οι δύο δίνουν τιμές στις συναρτήσεις αυτές με την ακρίβεια Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Οι τιμές όμως της γωνίας της αεροτομής και του flap στα πειράματα, φαίνονται να είναι αρκετά διαφορετικές από τις υπολογιστικές. Αυτό σημαίνει, ότι με διαφορετικές γωνίες υπολογίζουν τα προγράμματα και με διαφορετικές το πείραμα. Είναι λοιπόν αναμενόμενο, ότι σίγουρα θα έχουμε αποκλίσεις ανάμεσα στις δύο αυτές τιμές.

Αυτή η απόκλιση είναι και ο λόγος που ορίστηκαν οι γωνίες διόρθωσης, όπως θα δούμε παρακάτω.

Όσον αφορά την καμπύλη  $C_l - \alpha$  βλέπουμε ότι υπάρχει αρκετά καλή προσέγγιση μεταξύ των δύο υπολογιστικών μεθόδων (MaPflow και Foil1W) παρόλο που χρησιμοποιούν τελείως διαφορετικούς αλγορίθμους επίλυσης (βλέπε προηγούμενα κεφάλαια). Οι τιμές του πειράματος εμφανίζονται χαμηλότερα σε ότι αφορά την μέση τιμή του  $C_l$ .

Και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μη-μόνιμη ροή, που οφείλεται τόσο στην κίνηση του flap όσο και στην περιστροφή της αεροτομής, μιας και οι δύο αυτές κινήσεις γίνονται συναρτήσεις του χρόνου.

Είναι λοιπόν φανερό, ότι και εδώ θα έχουμε φαινόμενα της υστέρησης για τις αντίστοιχες συχνότητες  $\omega_b$  και  $\omega_a$ . Πάντως ο λόγος που η καμπύλη εδώ

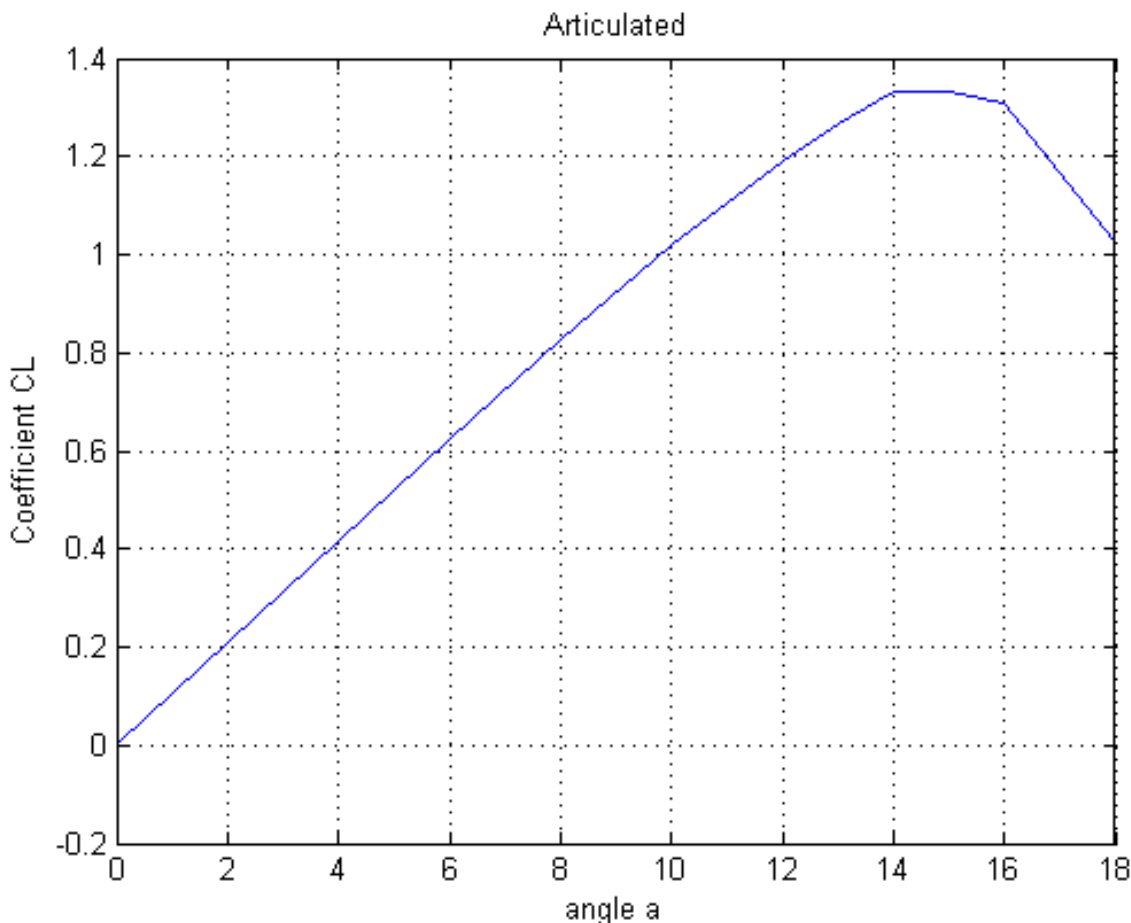
εμφανίζεται ως ένας διπλός βρόχος αντί για μια ευθεία, δεν οφείλεται στην υστέρηση αλλά στην ίδια την κίνηση της αεροτομής.

Θυμίζουμε ότι, όπως βλέπουμε από το  $\beta - \alpha$ , για όλες της τιμές της γωνίας  $\alpha$  (πλην της μέσης τιμής), έχουμε δύο διαφορετικές τιμές της γωνίας  $\beta$ , οπότε και περιμένουμε δύο διαφορετικές τιμές των συντελεστών  $C_l$ ,  $C_d$  και  $C_m$ .

Συγκρίνοντας τις τρεις μεθόδους μεταξύ τους, βλέπουμε ότι τα διαγράμματα έχουν αρκετά καλή προσέγγιση. Επειδή αυτές οι μέθοδοι είναι τελείως διαφορετικές (διαφορετικοί υπολογιστικοί αλγόριθμοι και πειράματα), μπορούμε να πούμε (με κάποια επιφύλαξη πάντα) ότι βρισκόμαστε αρκετά κοντά στην πραγματικότητα.

Κάτι άλλο που θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν είναι το εύρος των τιμών γύρω από το οποίο η γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  κυμαίνεται. Και αυτό γιατί πρέπει να είμαστε υποψιασμένοι για το πότε θα προκύψει αποκόλληση.

Το εύρος για την μέτρηση αυτή (και για τις περισσότερες, όπως θα δούμε) είναι από  $-2^\circ$  σε  $10^\circ$ . Για να δούμε πότε ακριβώς θα έχουμε αποκόλληση, θα πρέπει να υπολογίσουμε το διάγραμμα  $C_l - \alpha$  σε συνθήκες μόνιμης ροής, και χωρίς την παρουσία flap. Το διάγραμμα αυτό προέκυψε :

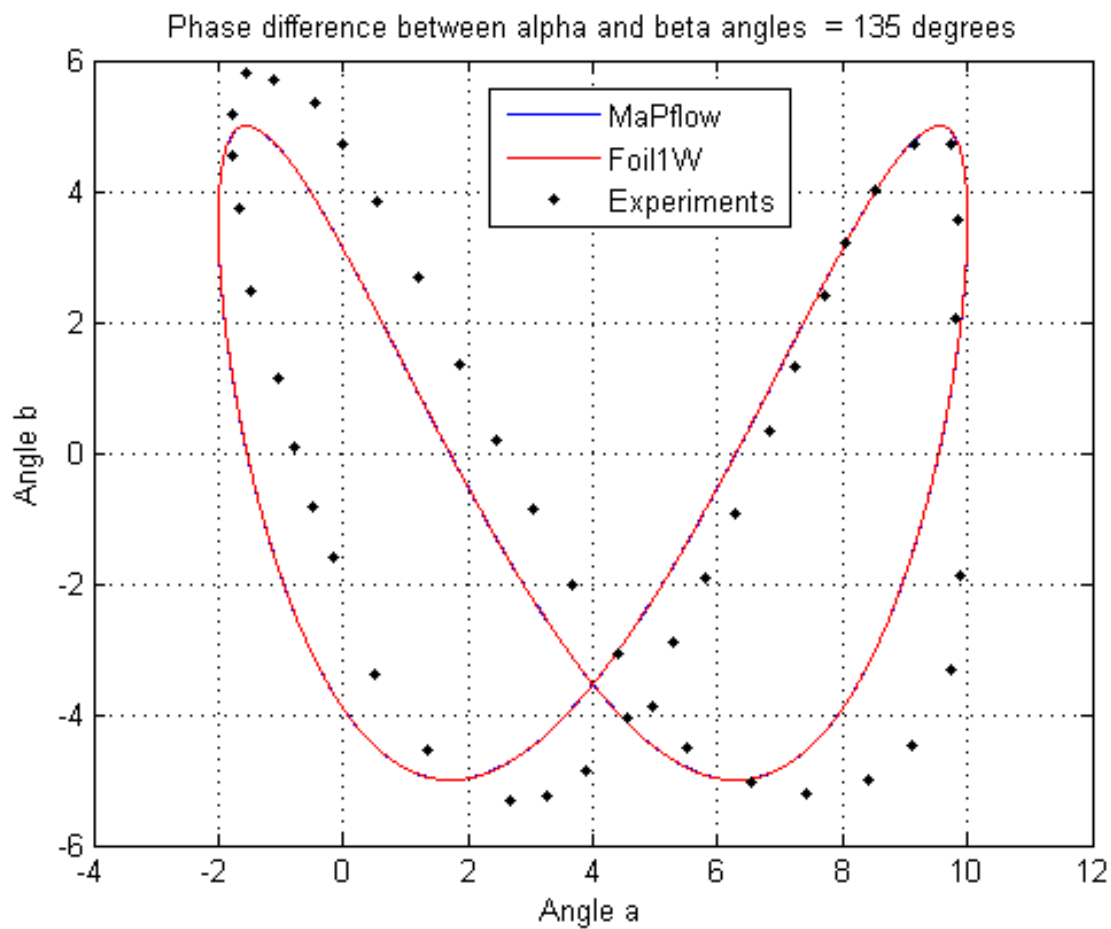


**Εικόνα 127: Το διάγραμμα  $C_l - \alpha$  σε συνθήκες μόνιμης ροής, και χωρίς την παρουσία flap, για την αεροτομή NACA0012.**

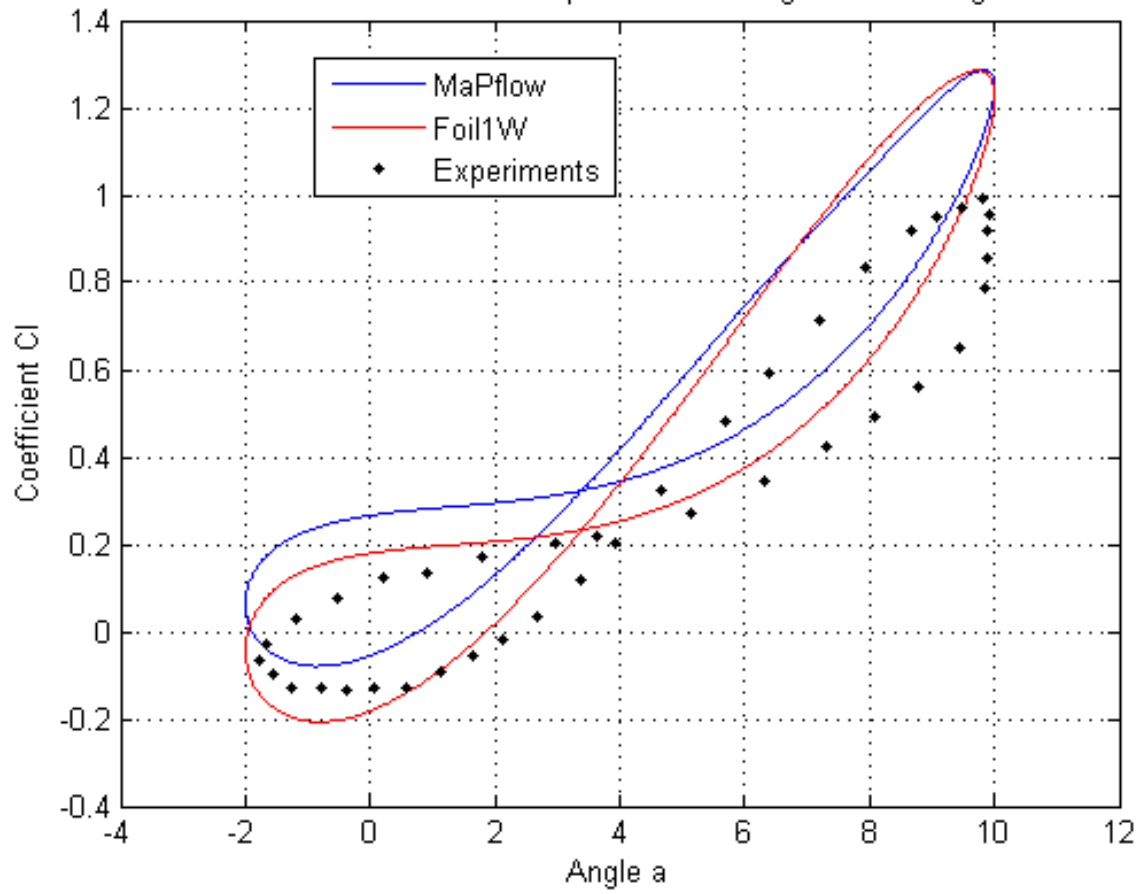
Δηλαδή αποκόλληση έχουμε σε γωνίες περίπου  $14^\circ$ . Οπότε για τα εύρη των συγκεκριμένων υπολογισμών, δεν έχουμε τέτοιο πρόβλημα, και συγκεκριμένα, όπως βλέπουμε στην  $C_l - \alpha$ , για  $\alpha \leq 10^\circ$  βρισκόμαστε στην γραμμική περιοχή.



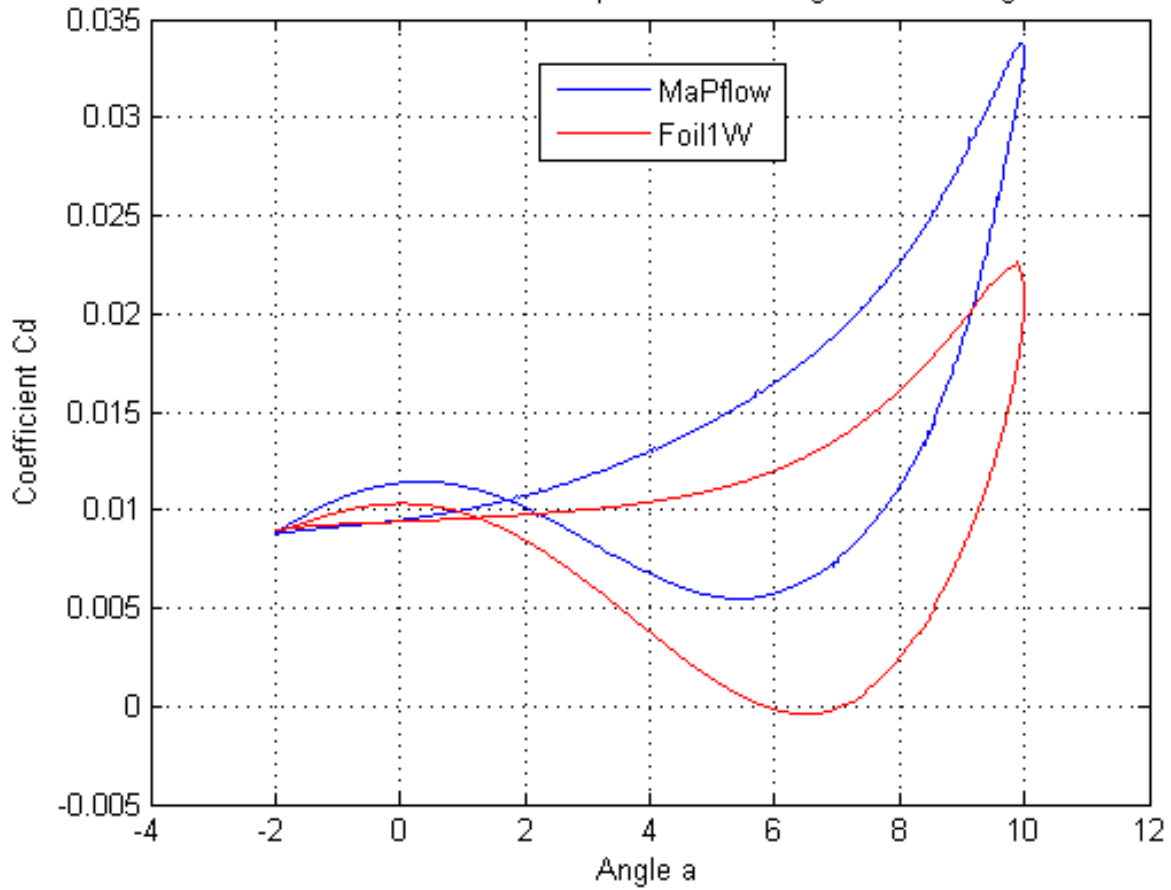
Στη συνέχεια ας εξετάσουμε την διόρθωση που πάρθηκε για τις 148°. Η διόρθωση έγινε σε  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 135^\circ$ :

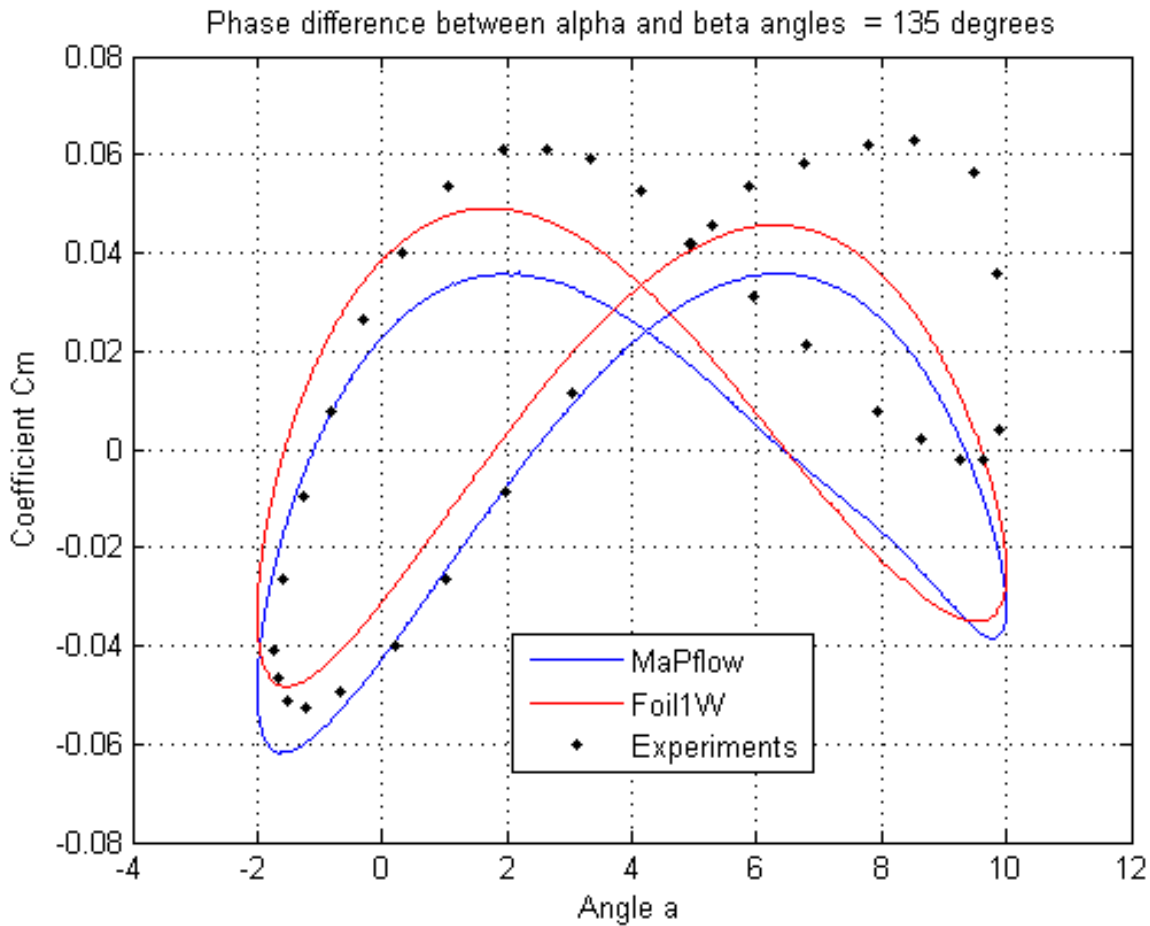


Phase difference between alpha and beta angles = 135 degrees



Phase difference between alpha and beta angles = 135 degrees





**Εικόνες 128, 129, 130 και 131: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 135^\circ$ .**

Συγκρίνοντας τις δύο καμπύλες  $\beta - \alpha$  για τις περιπτώσεις των  $148^\circ$  και των  $135^\circ$  μοιρών, βλέπουμε ότι υπάρχει μία σχετικά καλύτερη προσέγγιση των πειραμάτων από τις υπολογιστικές καμπύλες. Οι τελευταίες είναι μετατοπισμένες λίγο προς τα κάτω στις  $135^\circ$  σε σχέση με τις  $148^\circ$ , ώστε να προσεγγίσουν το πείραμα λίγο παραπάνω.

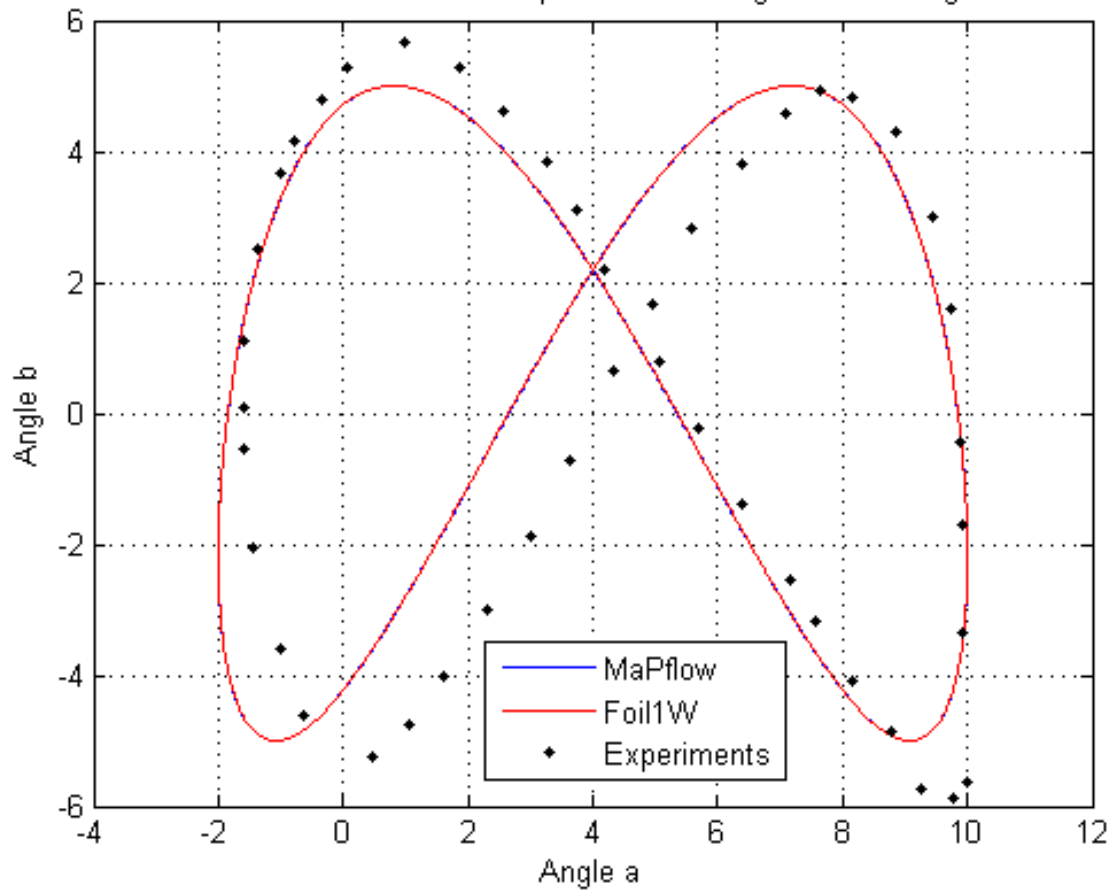
Αυτό σημαίνει ότι η διόρθωση είναι καλή, οπότε ίσως περιμένουμε κάποια βελτίωση στις καμπύλες των αποτελεσμάτων.

Η καμπύλη  $C_l$  πράγματι φαίνεται να πηγαίνει πιο παράλληλα στο MaPflow στις  $135^\circ$  αντί να διασταυρώνεται με αυτό, όπως βλέπουμε στις  $148^\circ$  κοντά στις -2 μοίρες.

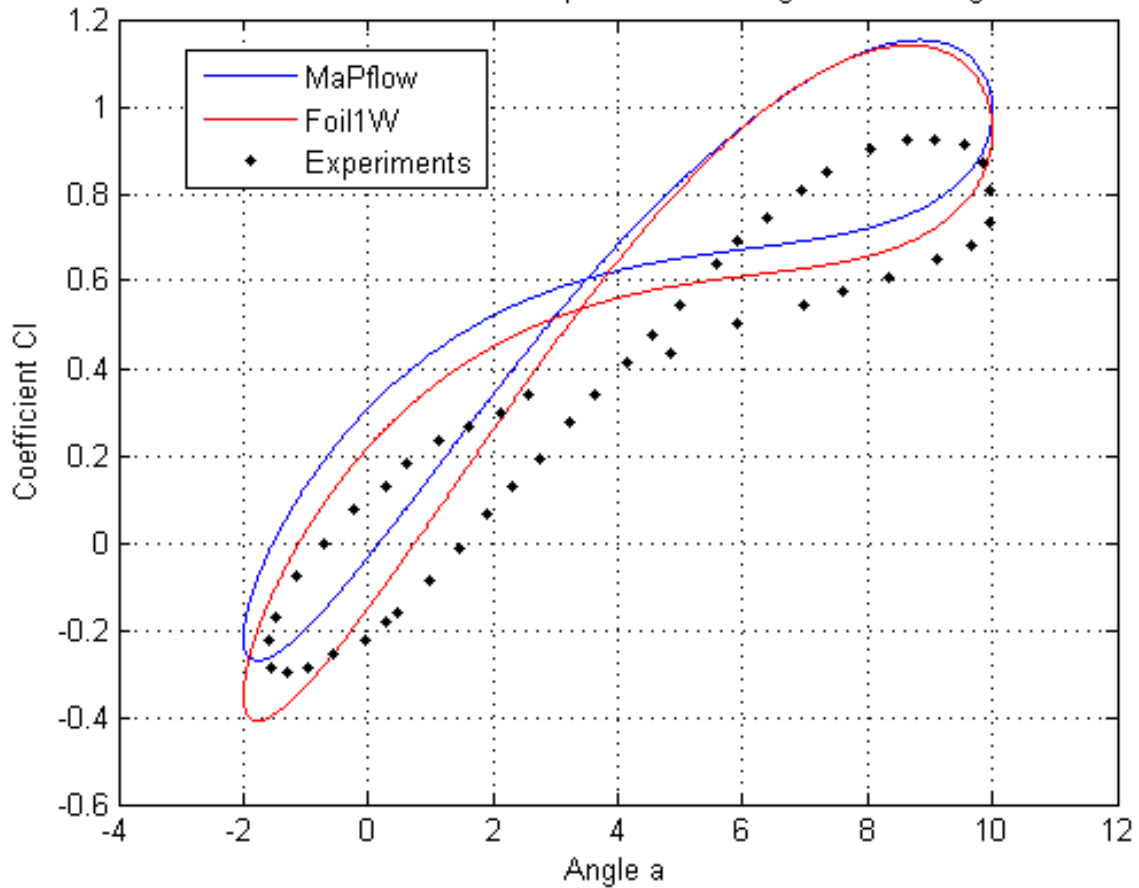
Πάντως σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα είναι πάντα ικανοποιητικά, ανεξάρτητα του αν έχουμε γωνία βελτίωσης ή όχι.

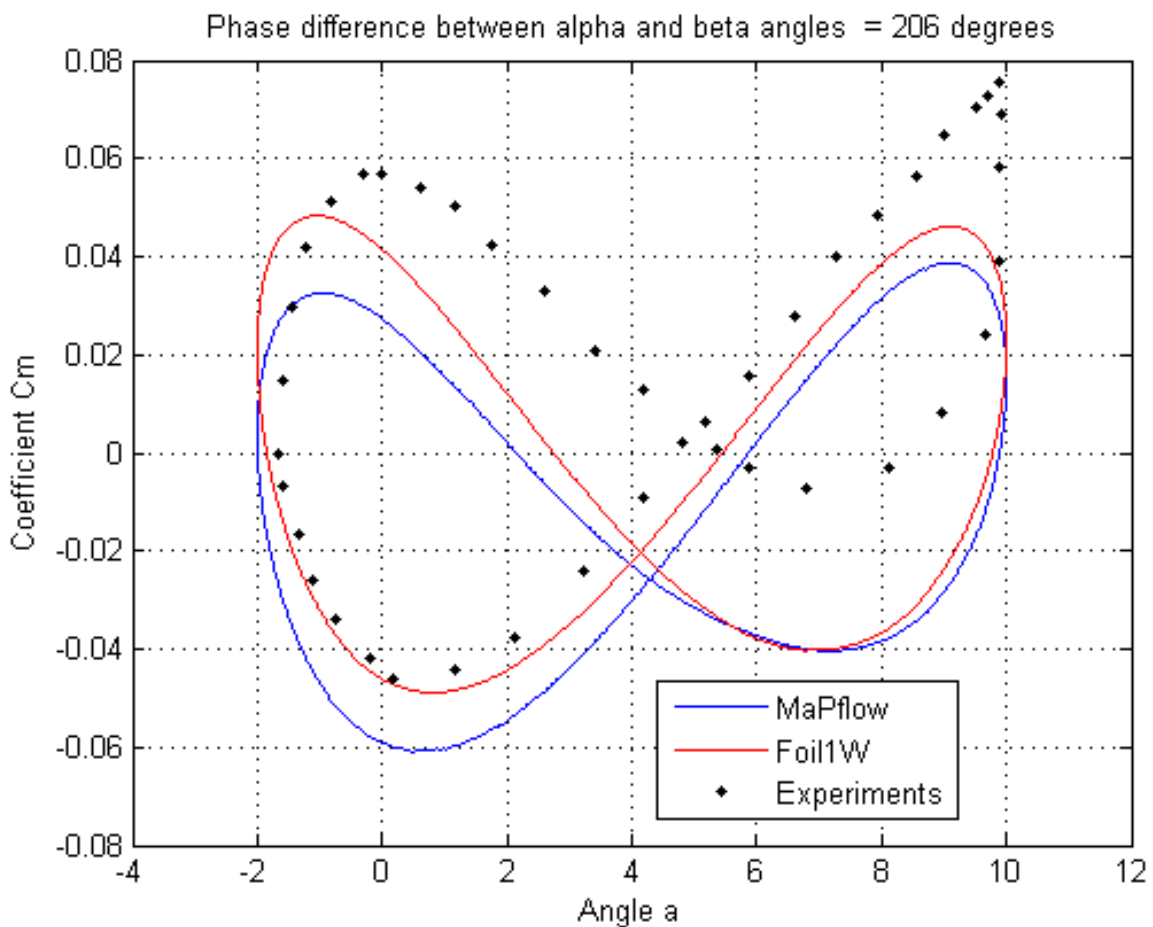
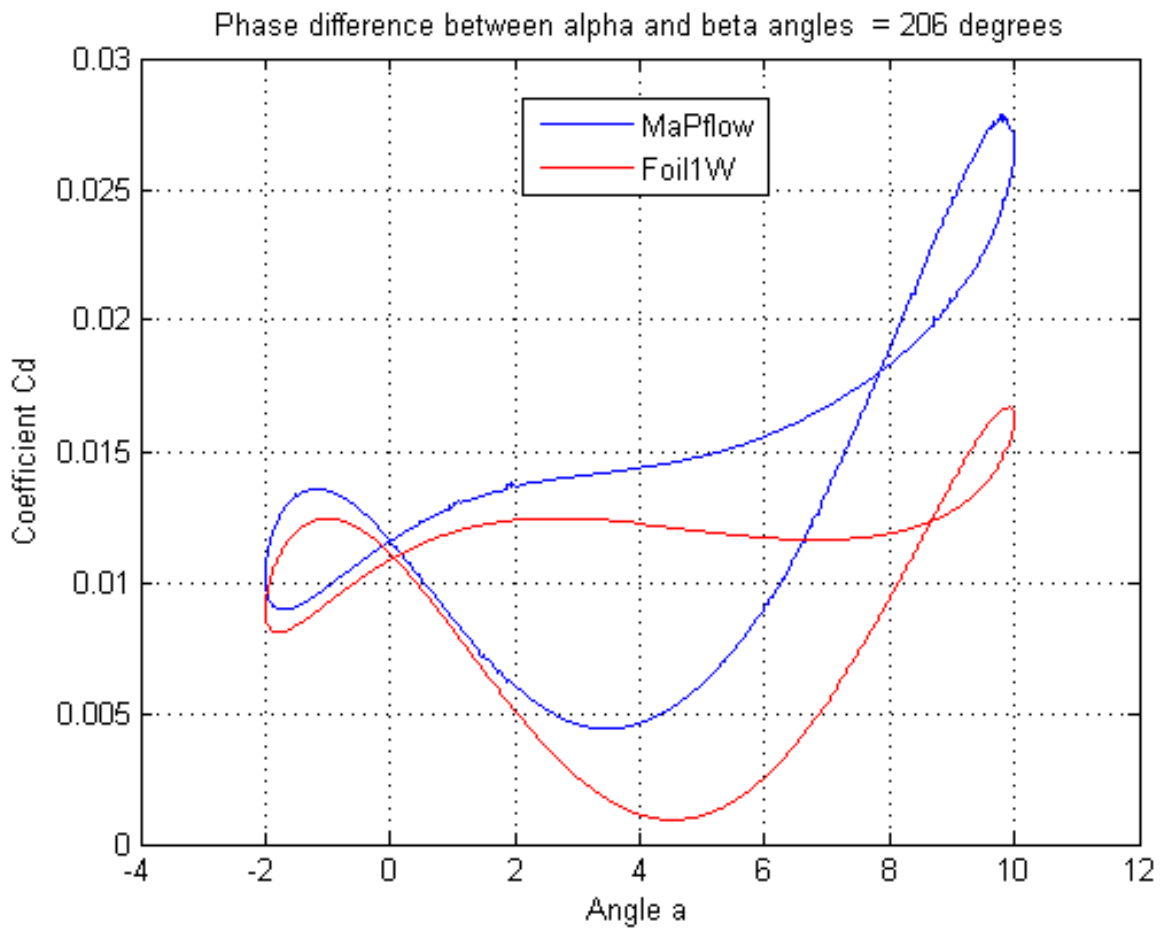
Υπολογισμοί έγιναν και για τις  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 206^\circ$ :

Phase difference between alpha and beta angles = 206 degrees



Phase difference between alpha and beta angles = 206 degrees





**Εικόνες 132, 133, 134 και 135: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ ,**

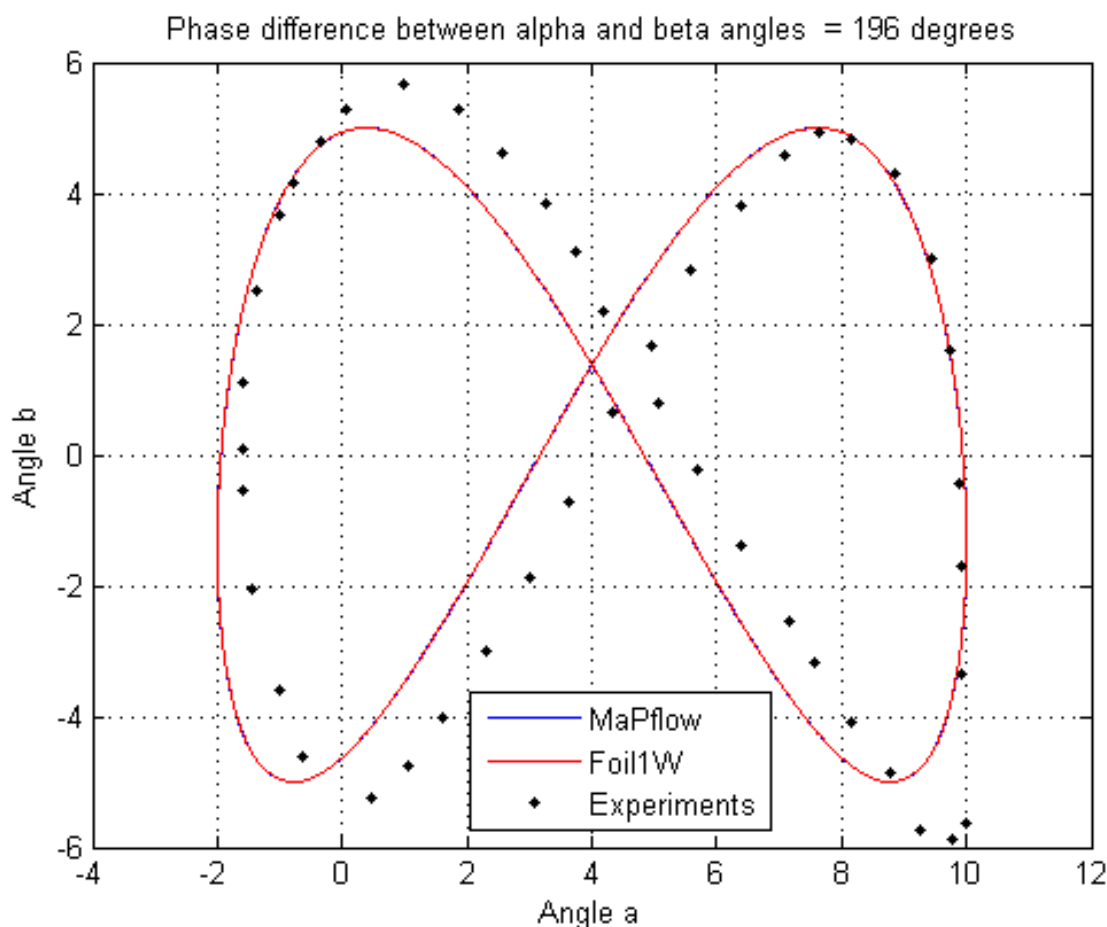
για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 206^\circ$ .

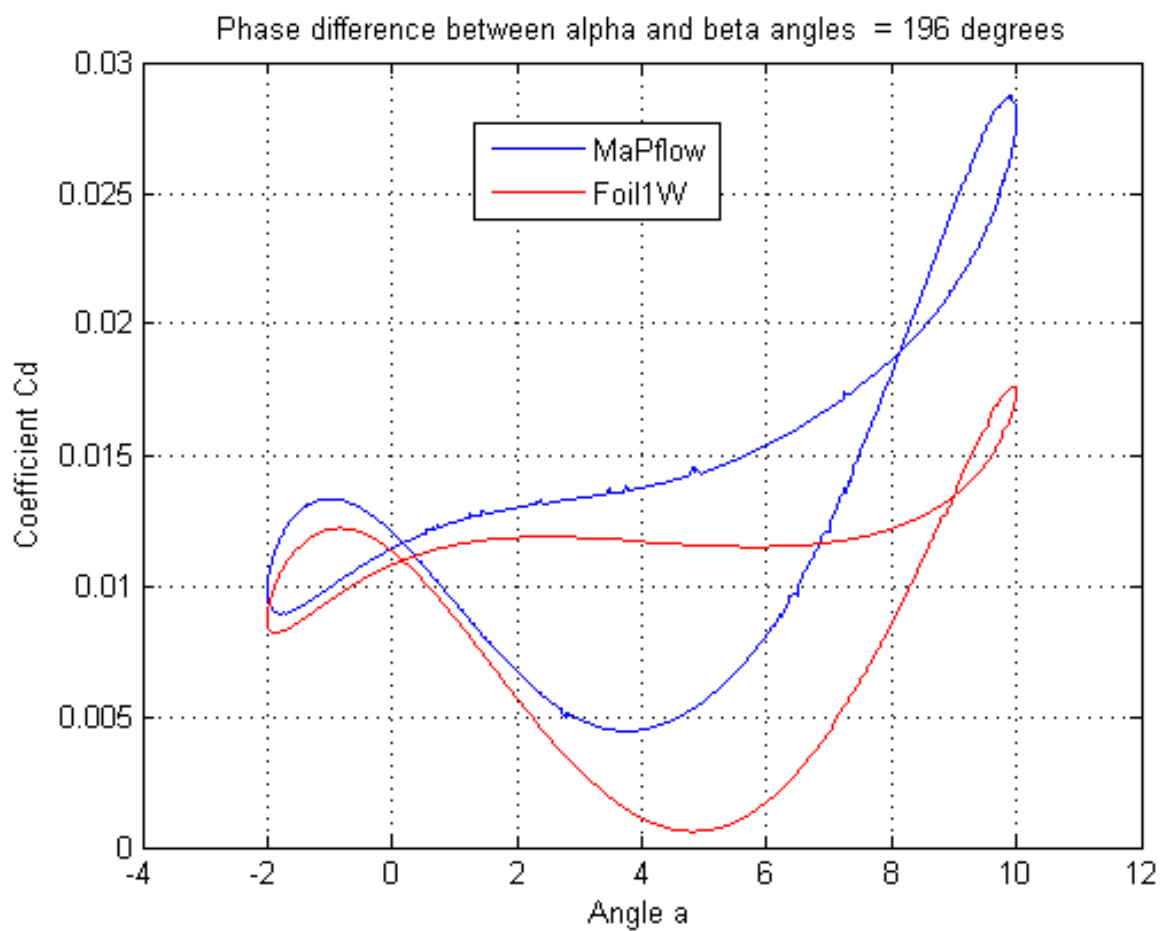
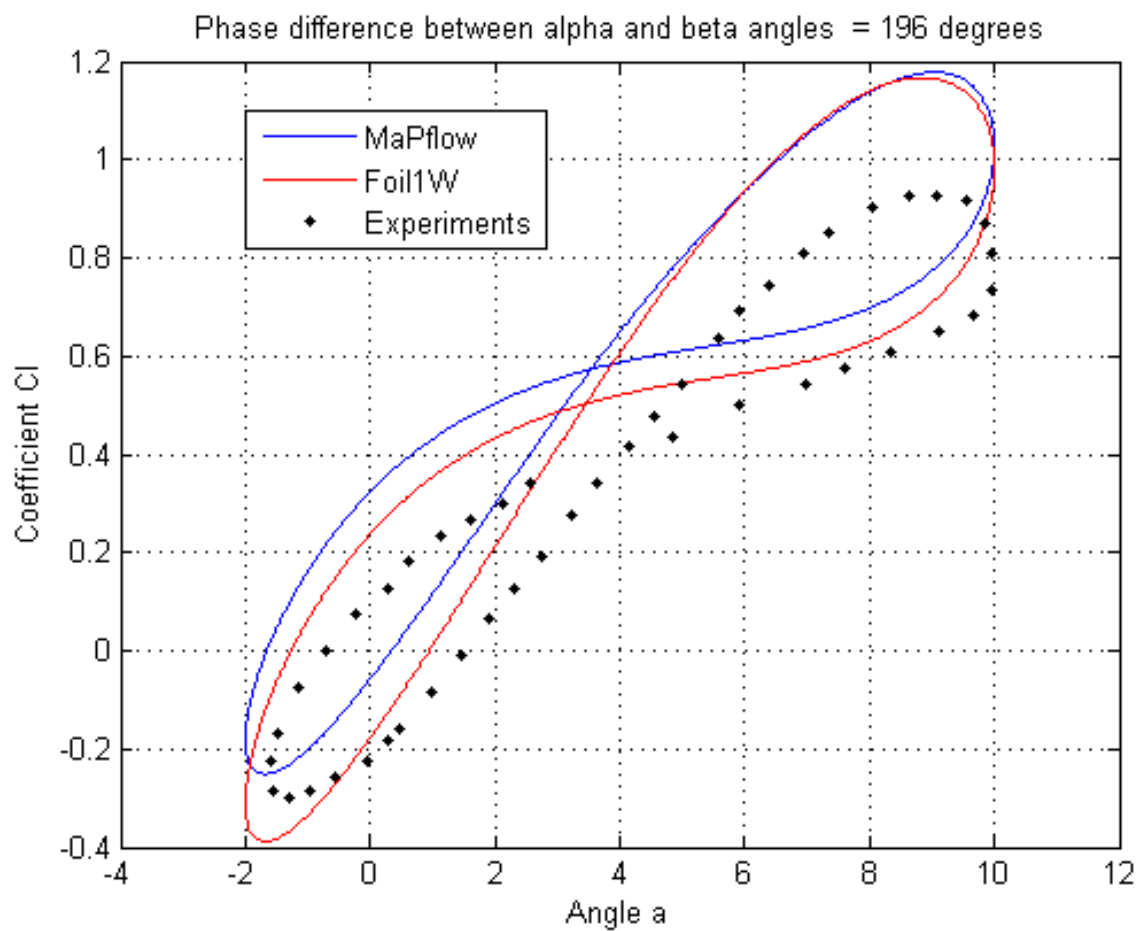
Στο σημείο αυτό αυξάνουμε την διαφορά στη φάση ανάμεσα στις δύο κινήσεις. Βλέποντας το  $C_l - \alpha$ , παρατηρούμε ότι υπάρχει αισθητά μεγαλύτερη διαφοροποίηση ανάμεσα στις υπολογιστικές μεθόδους με την πειραματική σε σχέση με την αντίστοιχη που ίσχυε πρωτότερα.

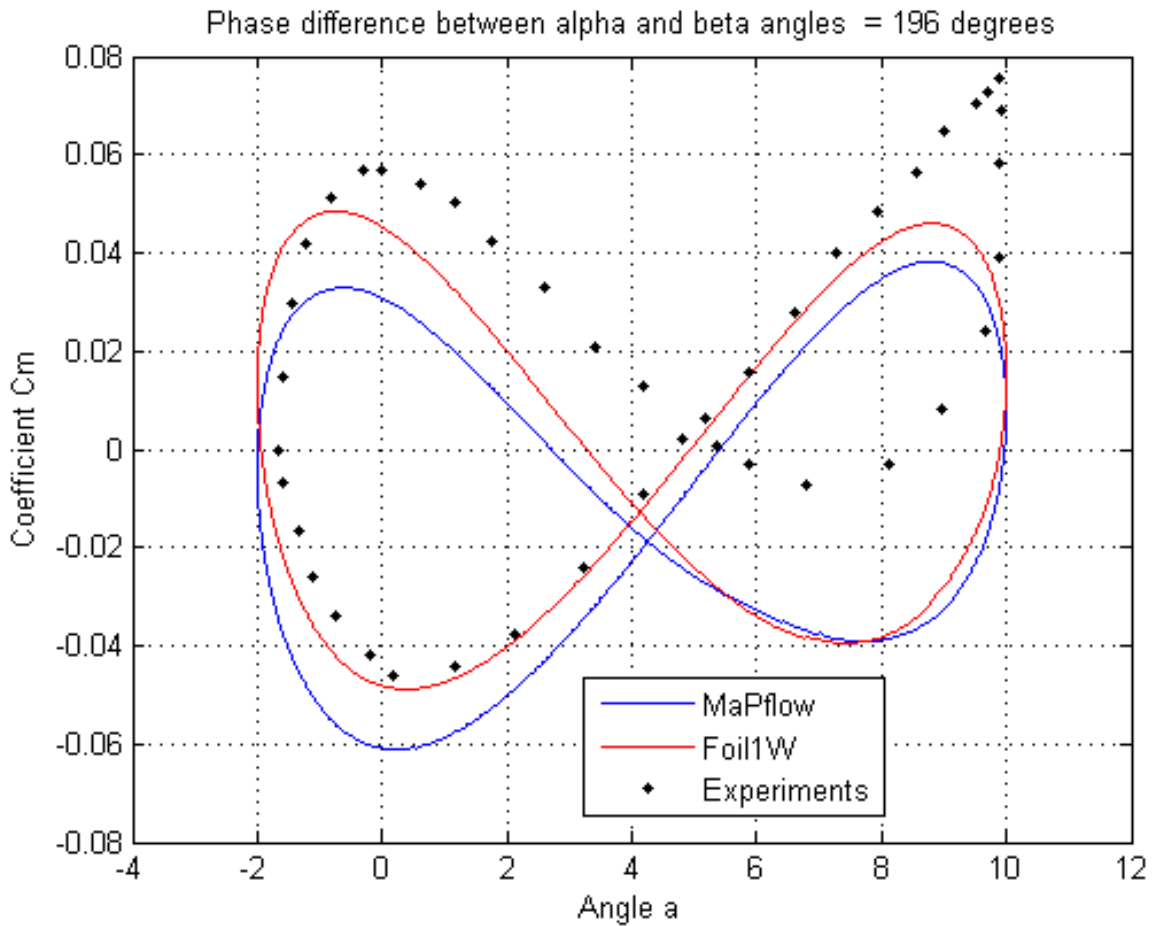
Πάντως ακόμα και τώρα, η προσέγγιση βρίσκεται σε αρκετά καλό σημείο. Συγκρίνοντας τις δύο υπολογιστικές μεθόδους μεταξύ τους, βλέπουμε αρκετά καλή ταύτιση μεταξύ των MaPFlow και EllipSys2D.

Η πιο μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ των διαγραμμάτων βρίσκεται στην καμπύλη  $C_m - \alpha$ , όπου οι πειραματικές μετρήσεις παρουσιάζουν απότομη αύξηση σε μεγάλες γωνίες. Οι τιμές της ροπής εκεί φαίνεται να υπερβαίνουν αρκετά την μέση τιμή, φαινόμενο το οποίο δεν παρατηρείται στις υπολογιστικές μεθόδους.

Η αντίστοιχη διόρθωση έγινε σε  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 196^\circ$ :







**Εικόνες 136, 137, 138 και 139: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 196^\circ$ .**

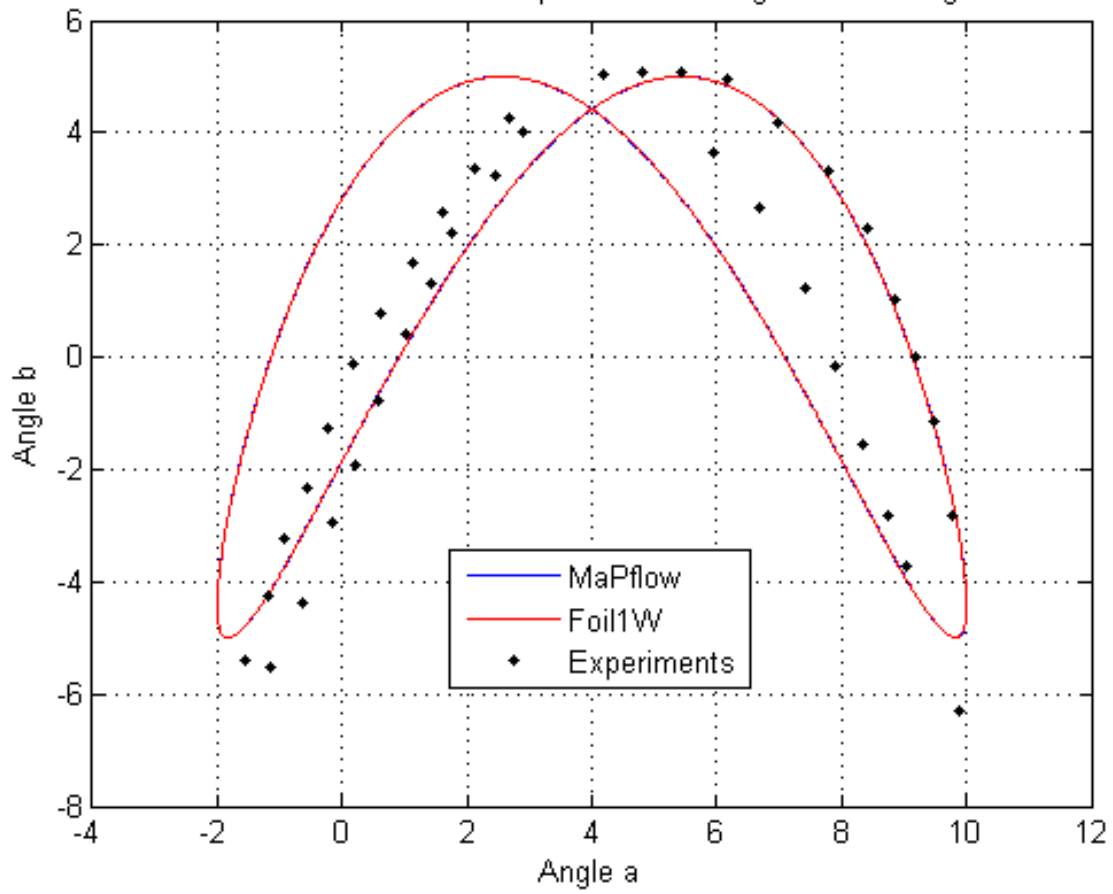
Η διαφορά φάσης αυτή διορθώνει την υποεκτίμηση της γωνίας  $\beta$  των πειραμάτων, κατεβάζοντας την καμπύλη των υπολογιστικών μεθόδων, ώστε να έρθει στο ίδιο ύψος με την αντίστοιχη πειραματική.

Πάντως, και πάλι στα αποτελέσματα καταλήγουμε στα ίδια λίγο πολύ συμπεράσματα, που καταλήξαμε και στην μη-διορθωμένη γωνία.

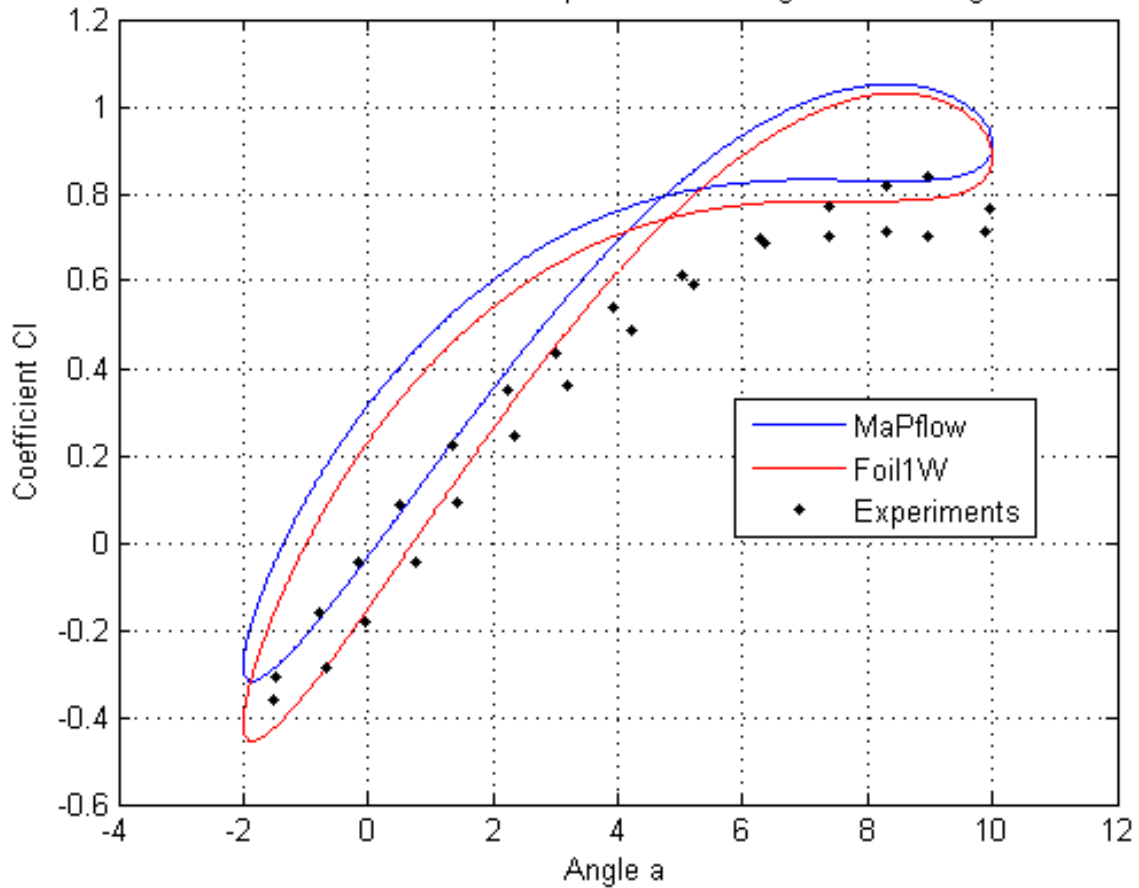
Για την περίπτωση  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 298^\circ$ :

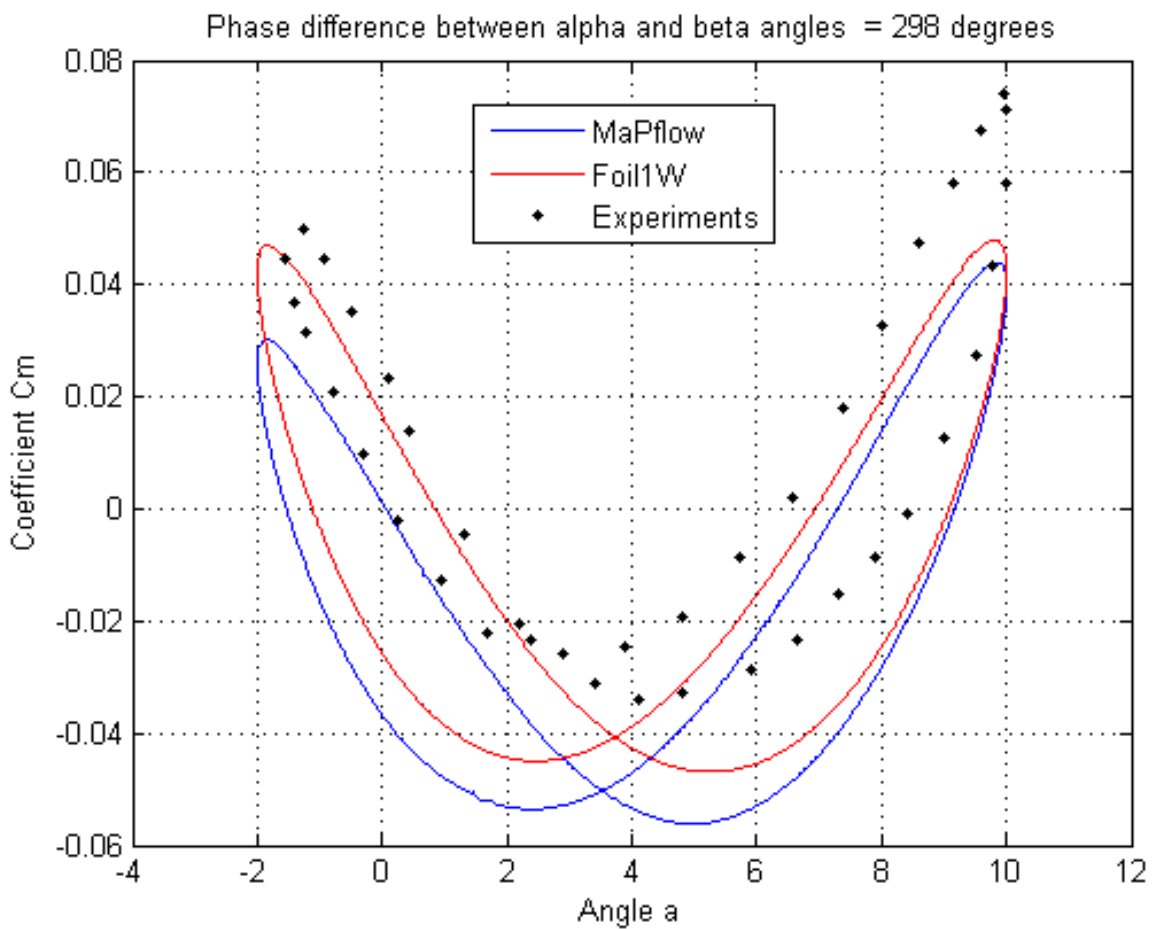
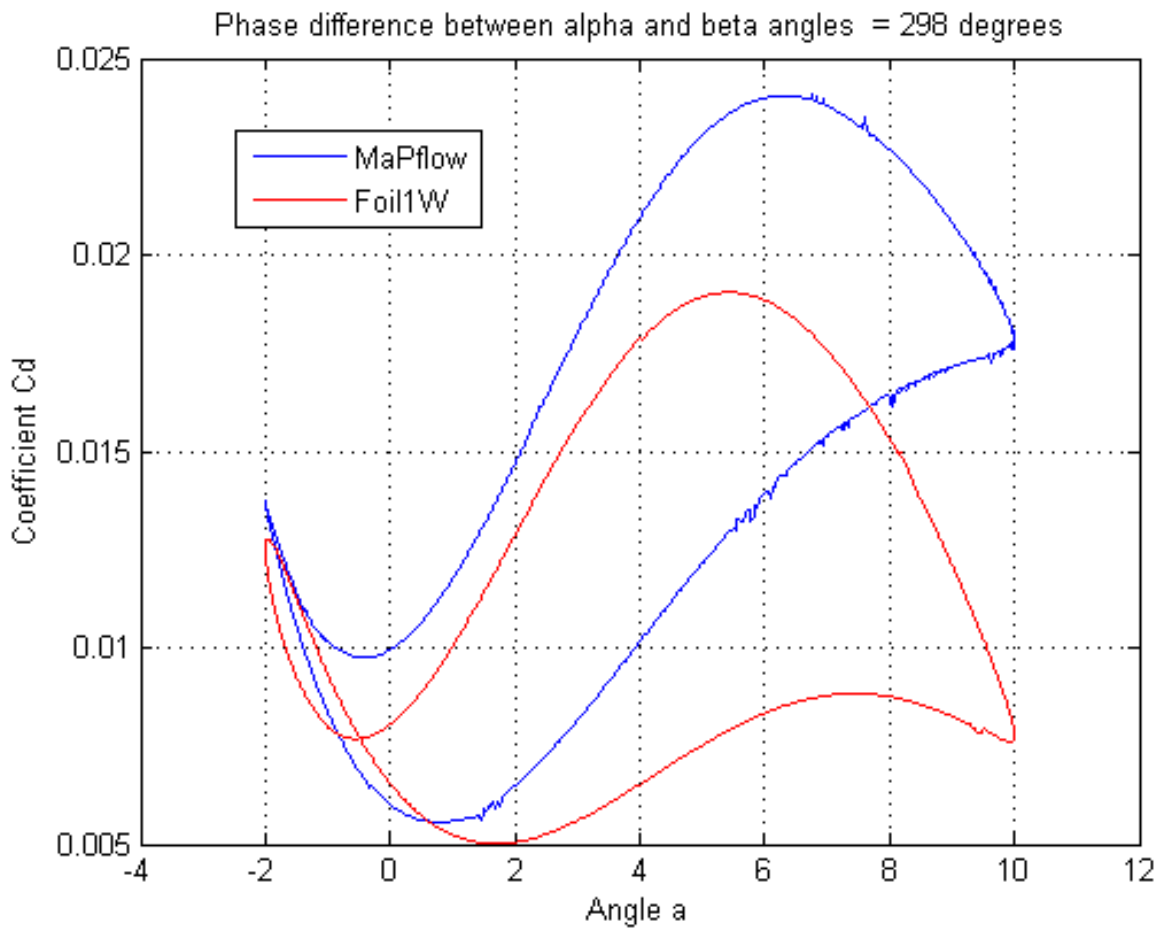


Phase difference between alpha and beta angles = 298 degrees



Phase difference between alpha and beta angles = 298 degrees





**Εικόνες 140, 141, 142 και 143: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ ,**

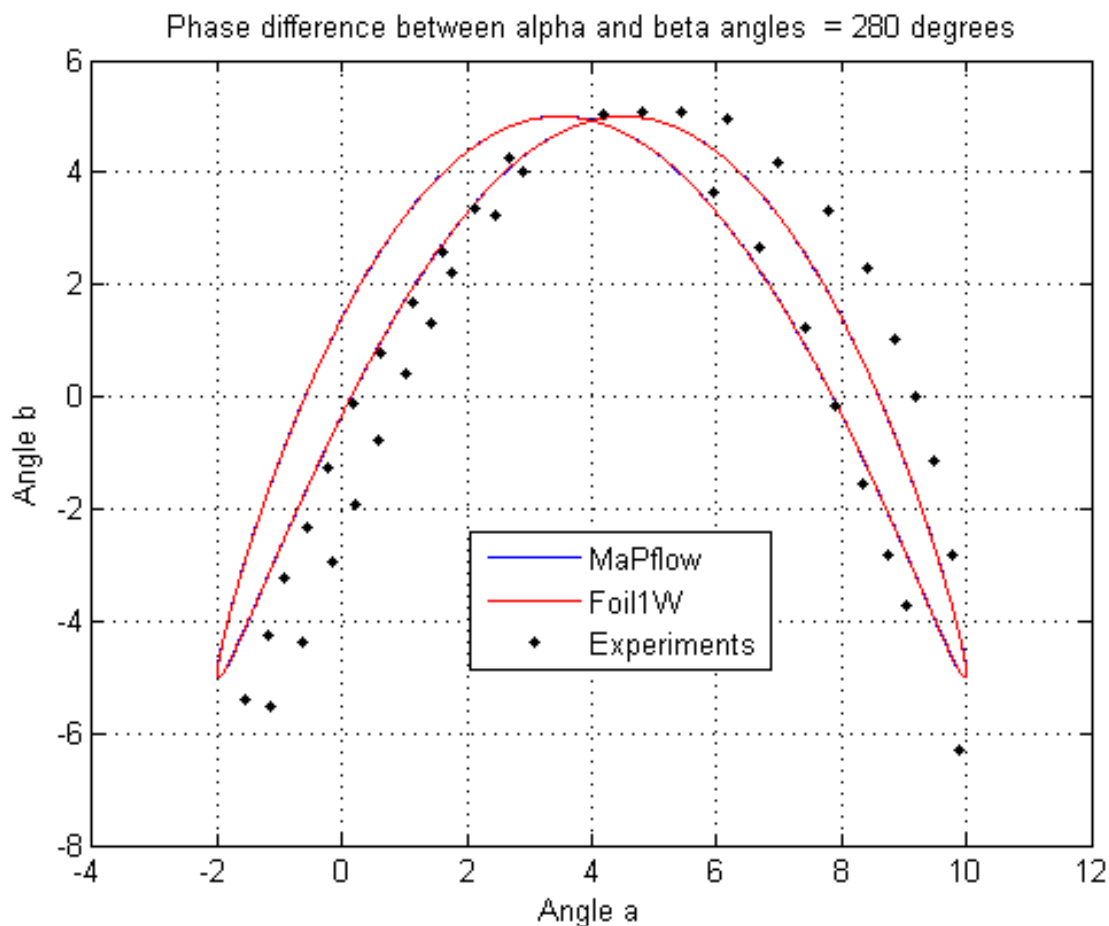
για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 298^\circ$ .

Εδώ έχουμε αρκετά καλή προσέγγιση και στις αρχικά ορισθείσες τιμές και στις καμπύλες των αποτελεσμάτων.

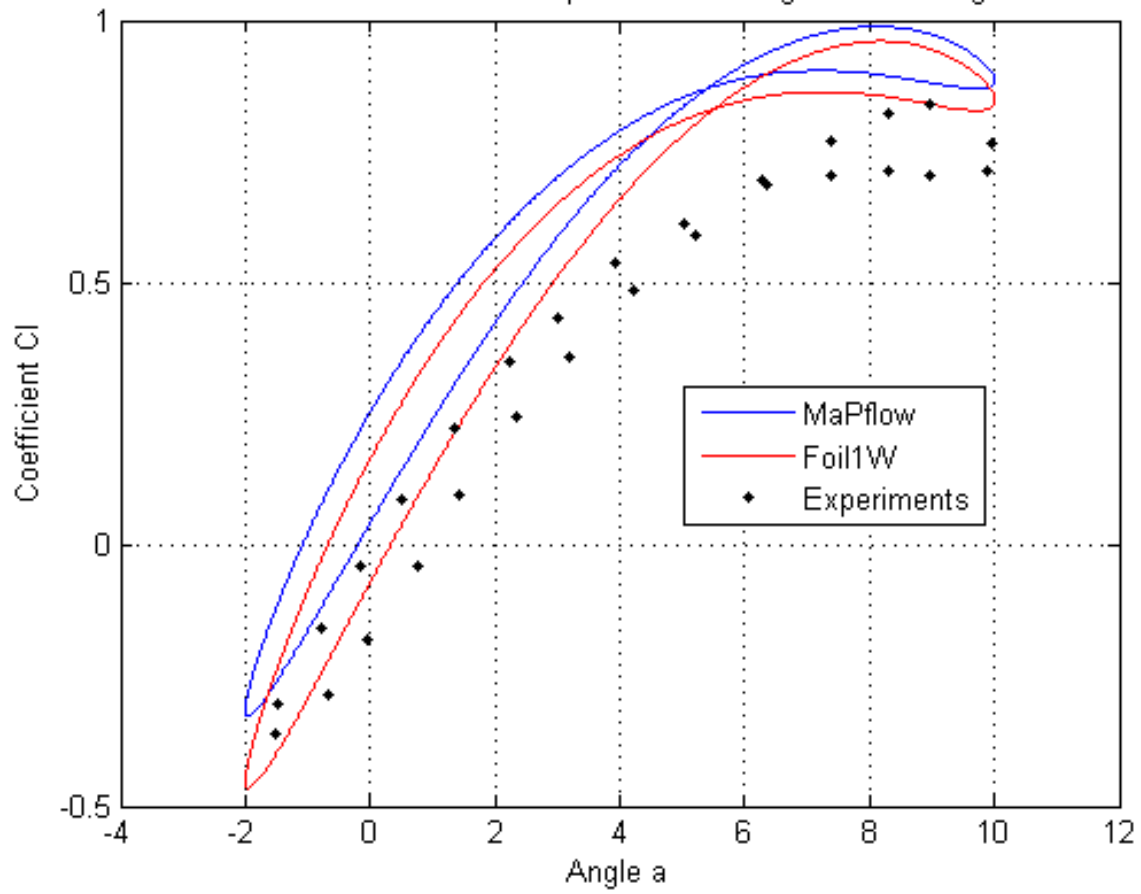
Και πάλι βέβαια, τα πειράματα δίνουν χαμηλότερη τιμή του  $C_l$  σε σχέση με τις υπολογιστικές μεθόδους, και υψηλότερη τιμή του  $C_m$ .

Να αναφέρουμε ότι διαφορετικές εμφανίζονται και οι καμπύλες του  $C_d$ , με το EllipSys2D να δίνει χαμηλότερες τιμές από το αντίστοιχο του  $C_l$ , κάτι που ίσχυε και στα προηγούμενα διαγράμματα.

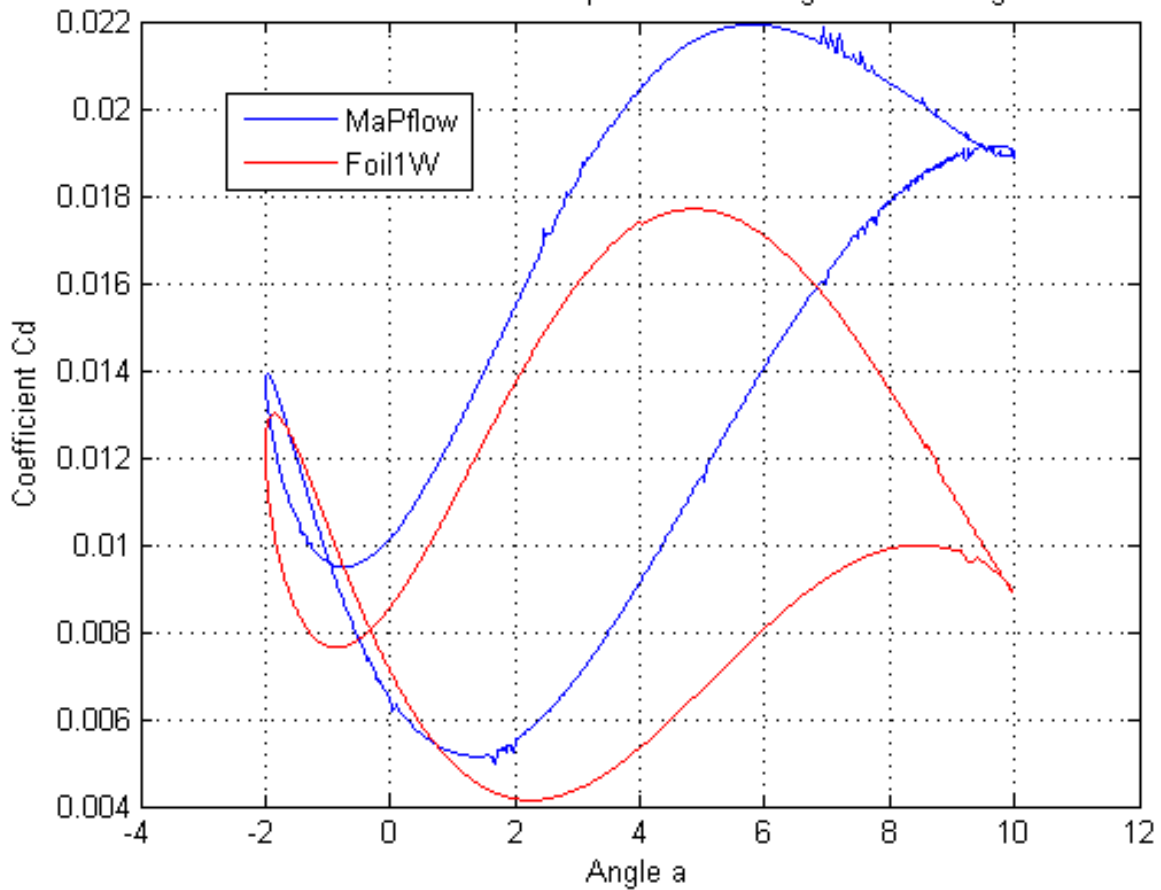
Η αντίστοιχη διόρθωση είναι σε  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 280^\circ$ :

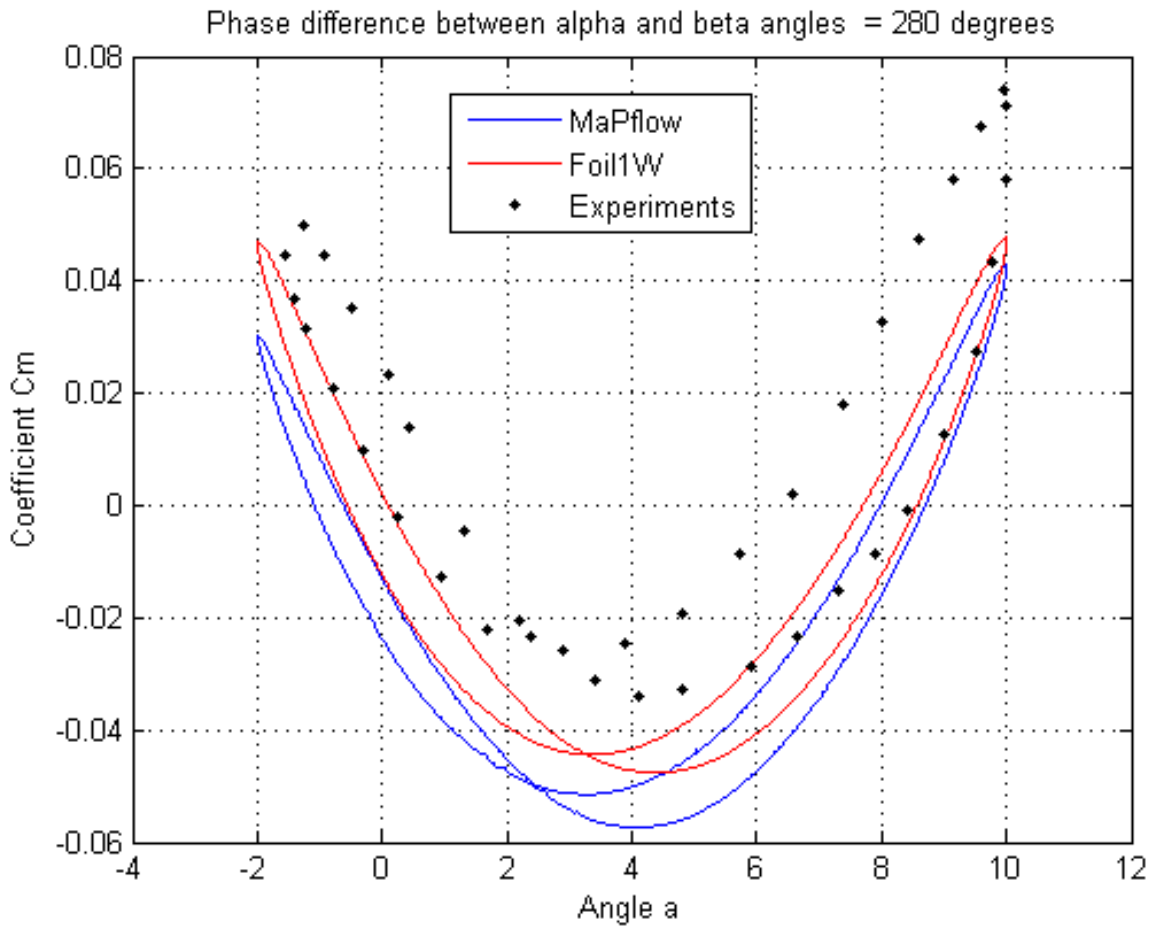


Phase difference between alpha and beta angles = 280 degrees



Phase difference between alpha and beta angles = 280 degrees

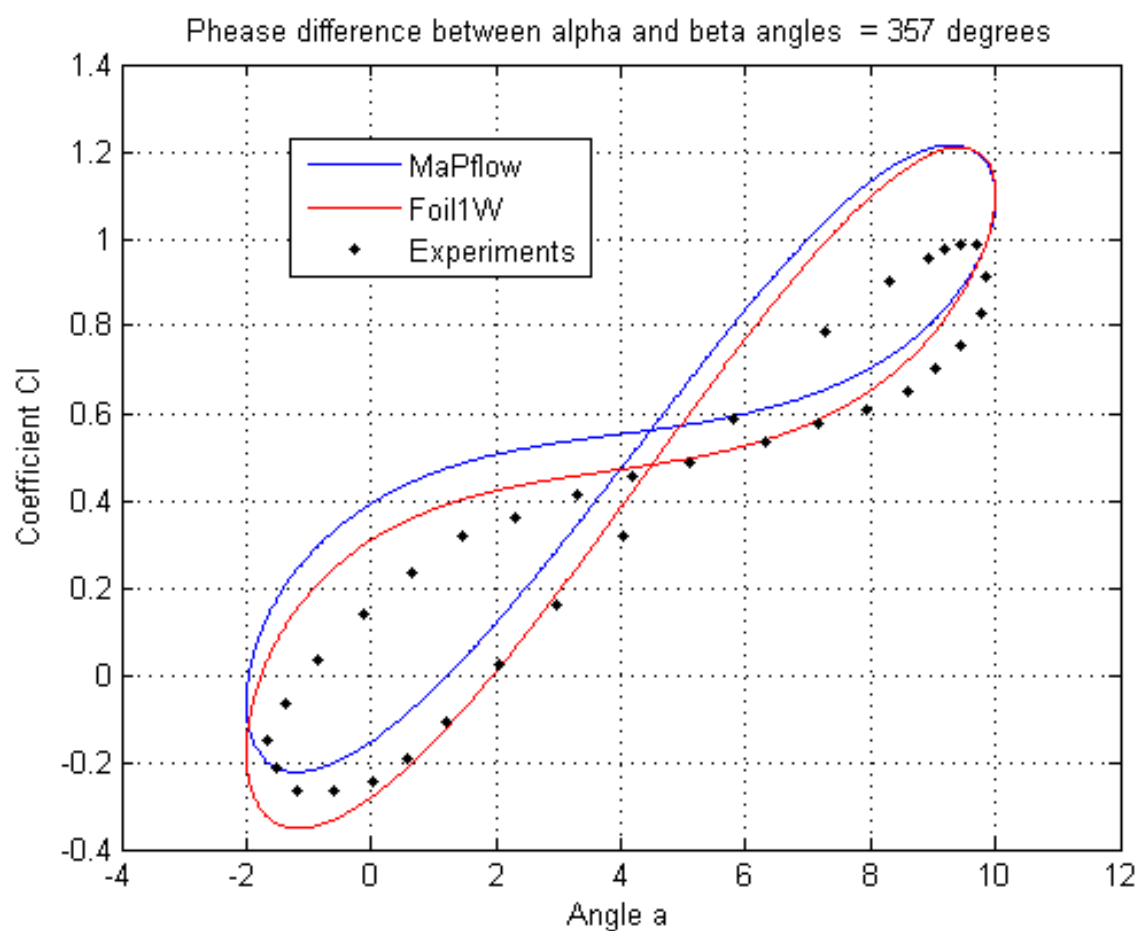
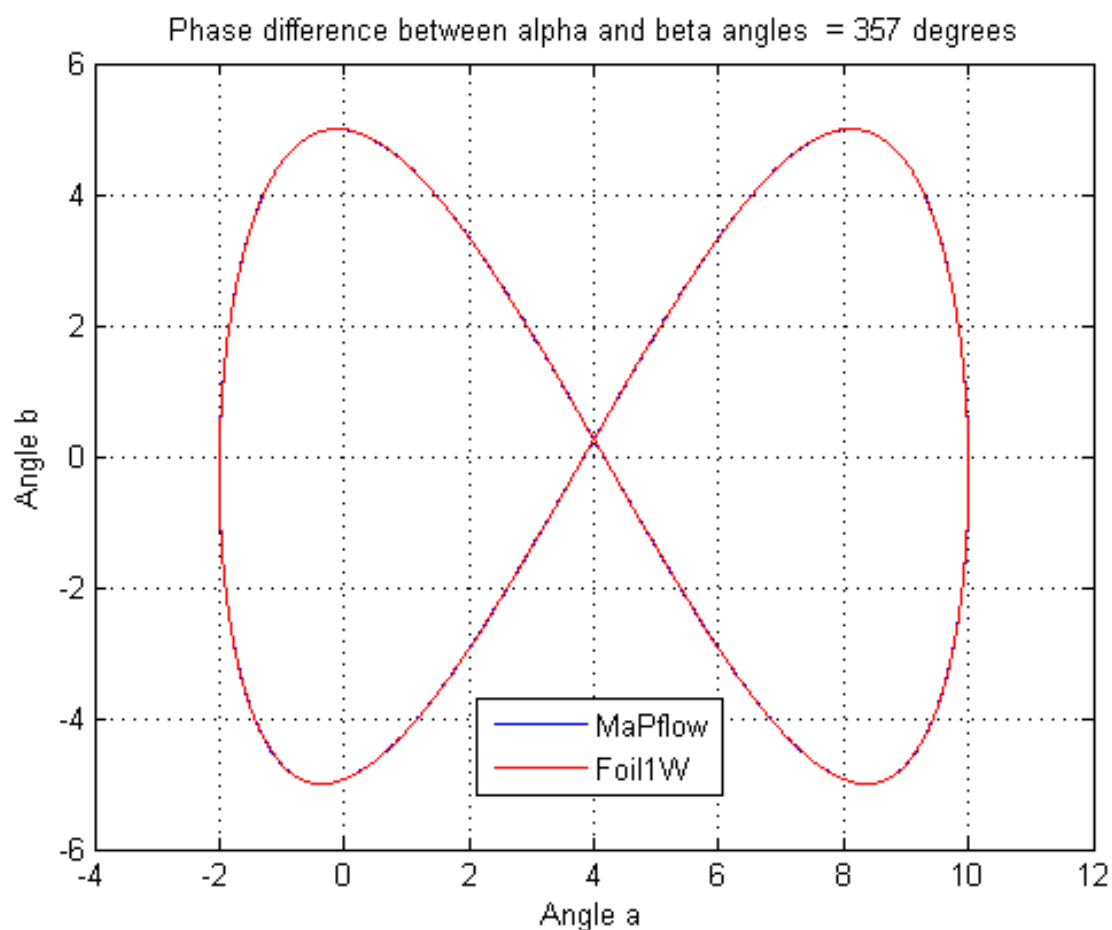


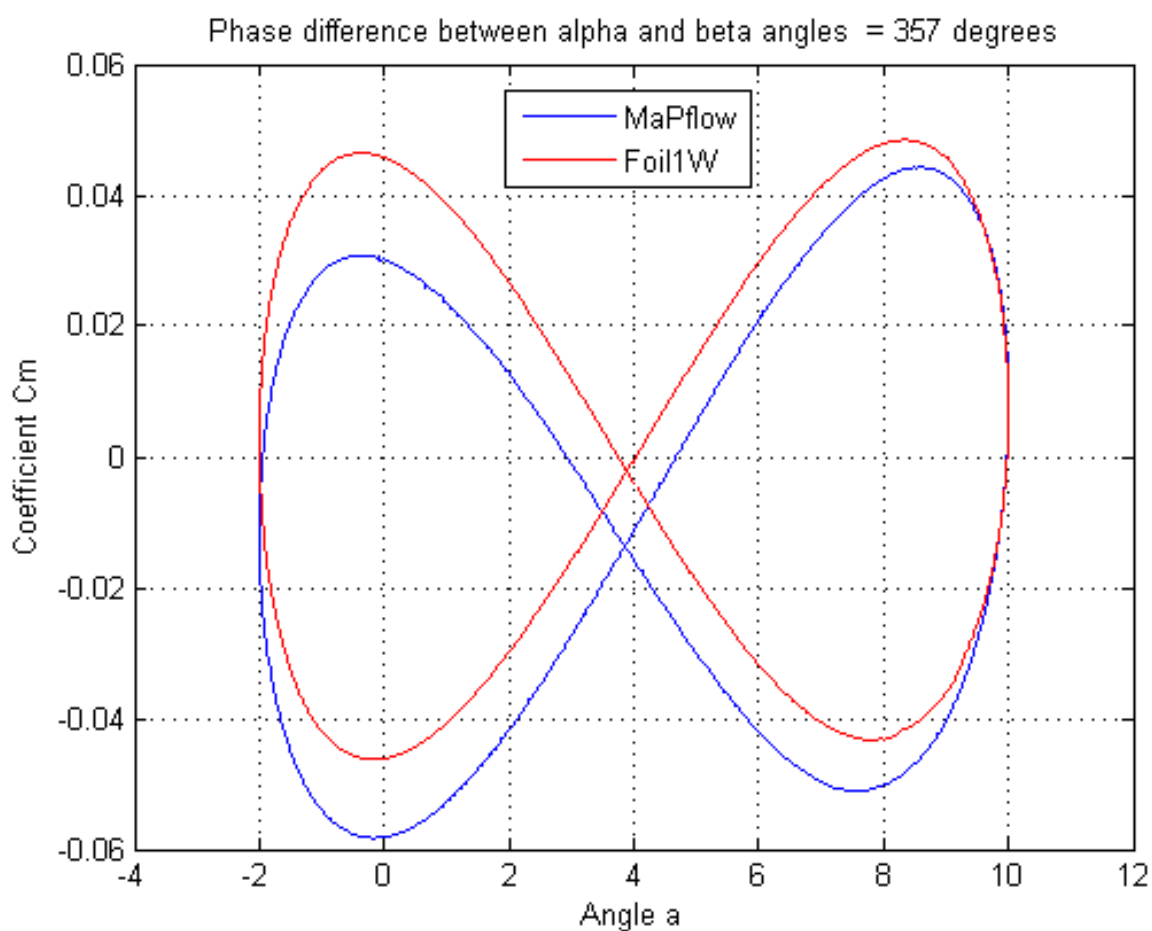
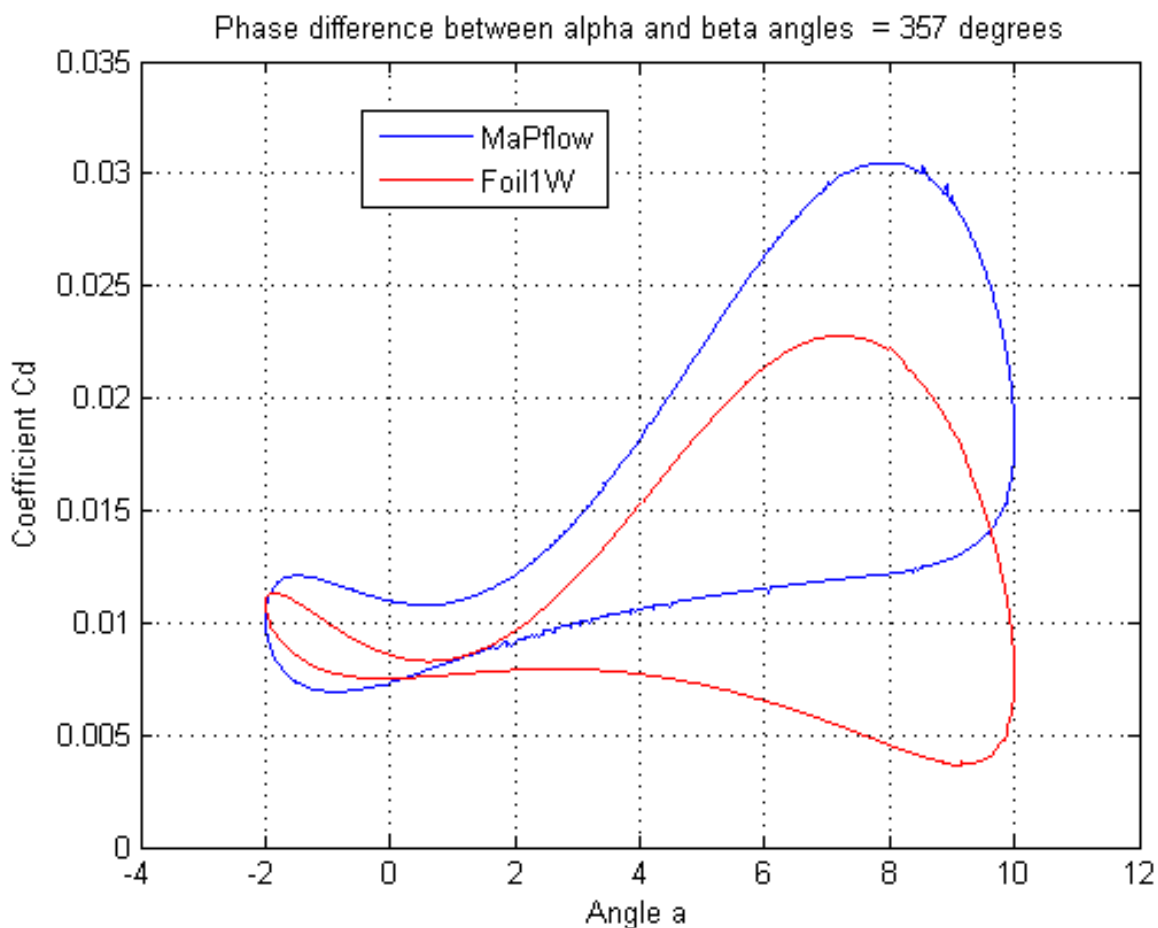


**Εικόνες 144, 145, 146 και 147: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 280^\circ$ .**

Εδώ όπως βλέπουμε η διόρθωση έχει μάλλον απογοητευτικά αποτελέσματα. Παρατηρώντας το  $C_l - \alpha$ , οι καμπύλες των υπολογιστικών μεθόδων φαίνονται να έχουν μάλλον μεγαλύτερη απόκλιση από τις πειραματικές τιμές, σε σχέση με τις αντίστοιχες στη γωνία  $298^\circ$ . Το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για την καμπύλη  $C_m - \alpha$ .

Για την περίπτωση  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 357^\circ$  έχουμε:





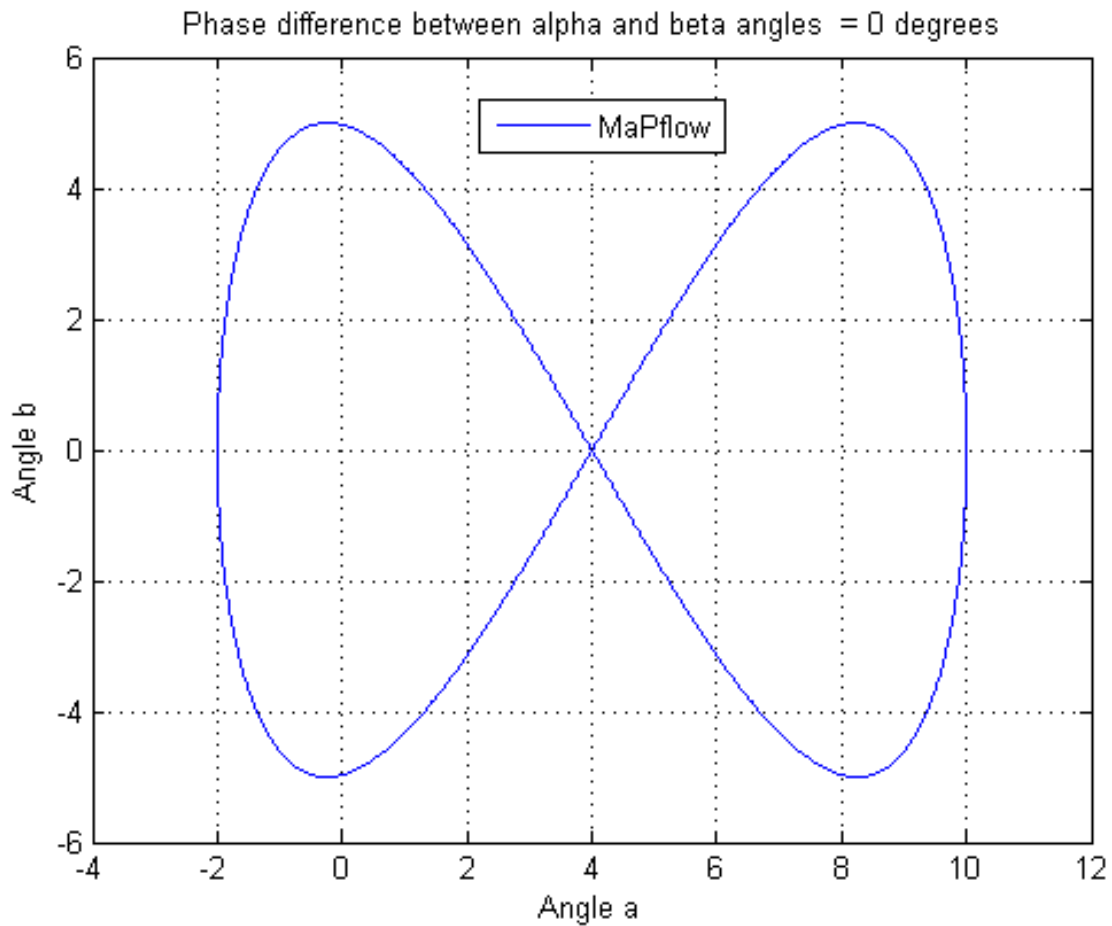
**Εικόνες 148, 149, 150 και 151: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ ,**

για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 357^\circ$ .

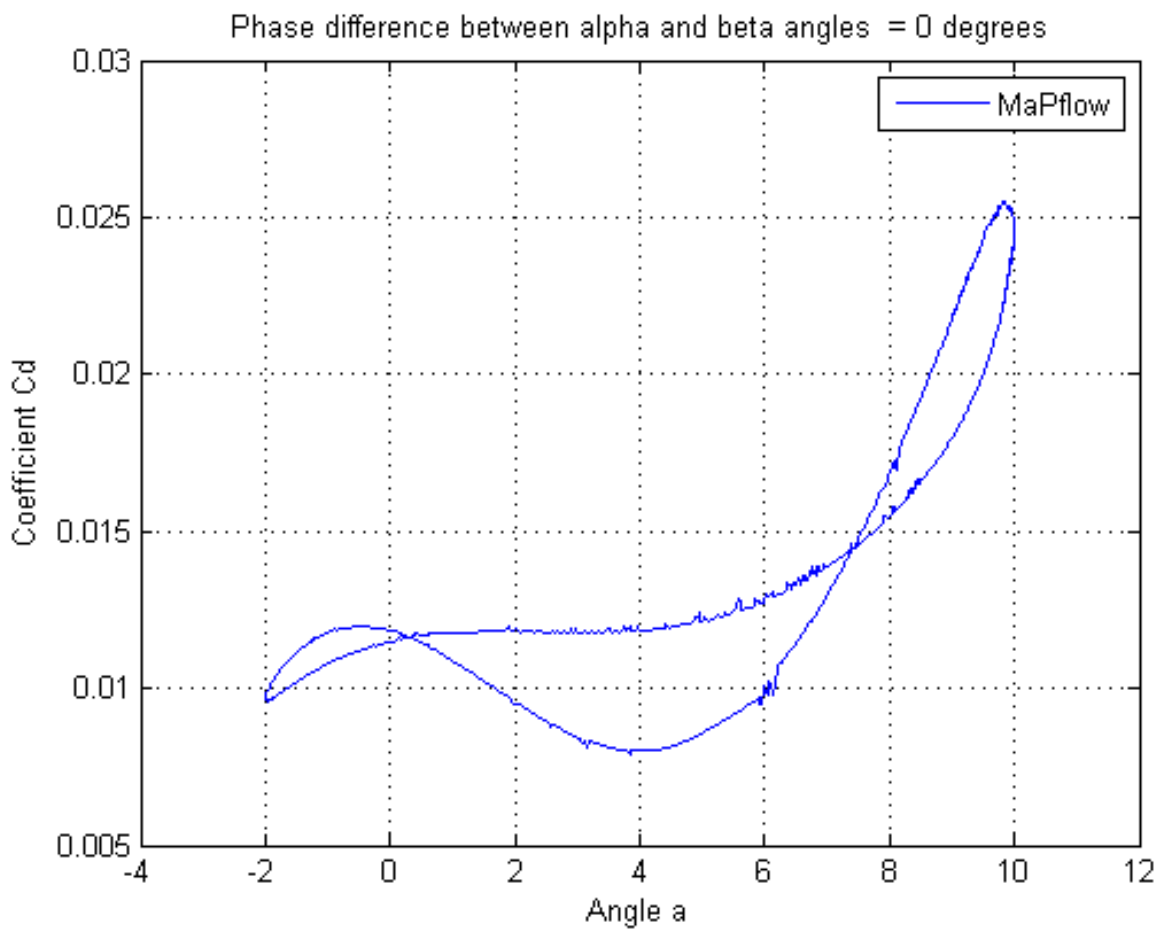
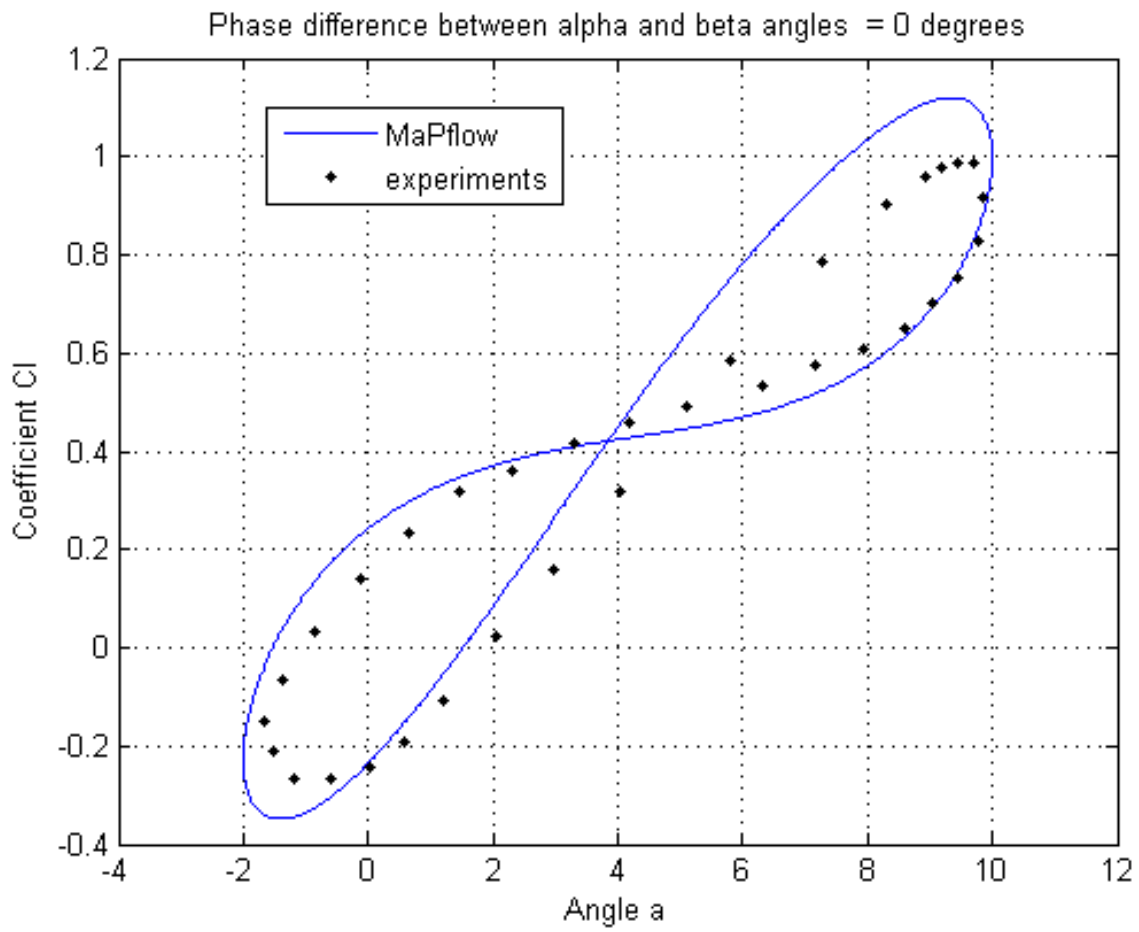
Γωνία  $357^\circ$  είναι σχεδόν ίδια με γωνία των  $0^\circ$ , για αυτό και παρακάτω χρησιμοποιούμε αυτήν την διόρθωση.

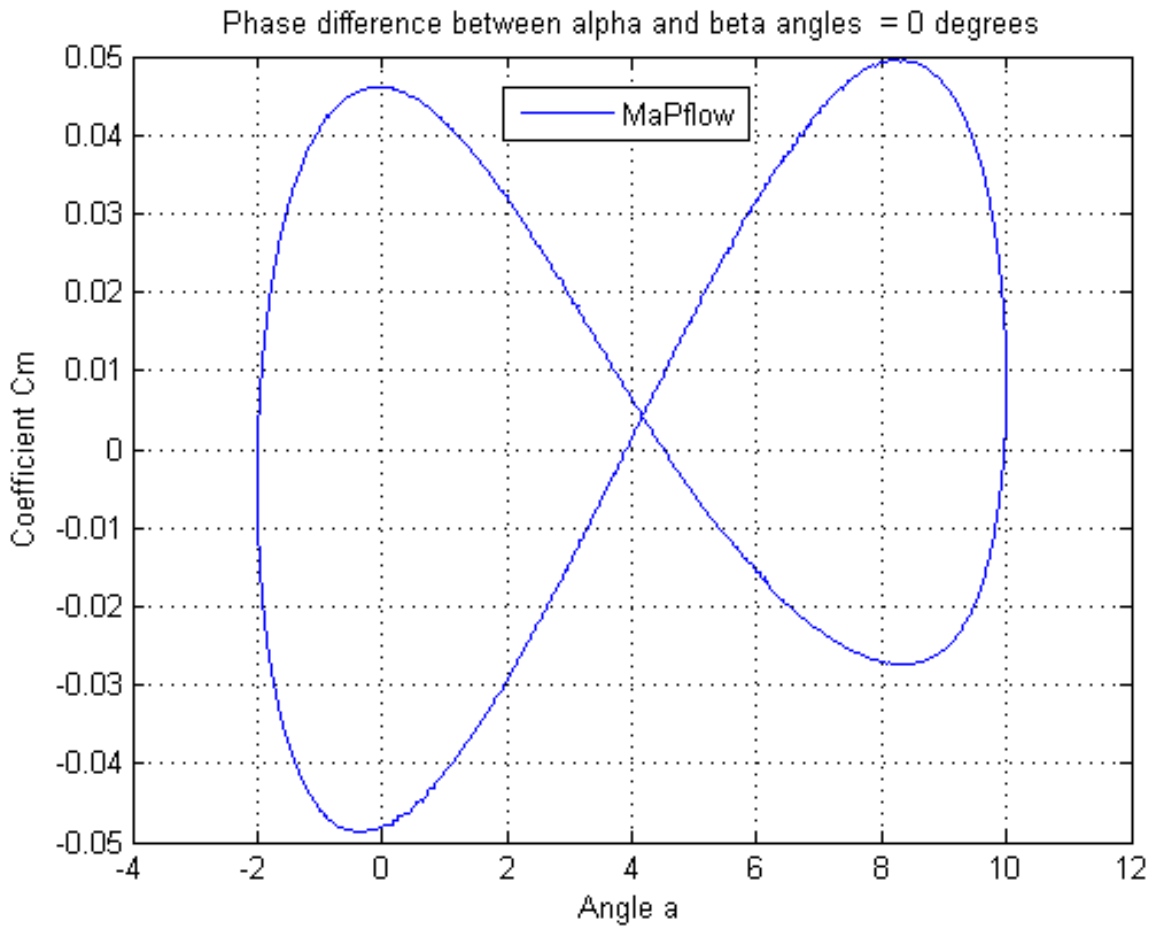
Για ακόμα μία φορά, οι τιμές των πειραμάτων δίνουν χαμηλότερη τιμή του  $C_l$  σε σχέση με τις υπολογιστικές μεθόδους. Το σχήμα της καμπύλης όμως παραμένει αρκετά καλό.

Και η αντίστοιχη διόρθωση των  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 0^\circ$ :









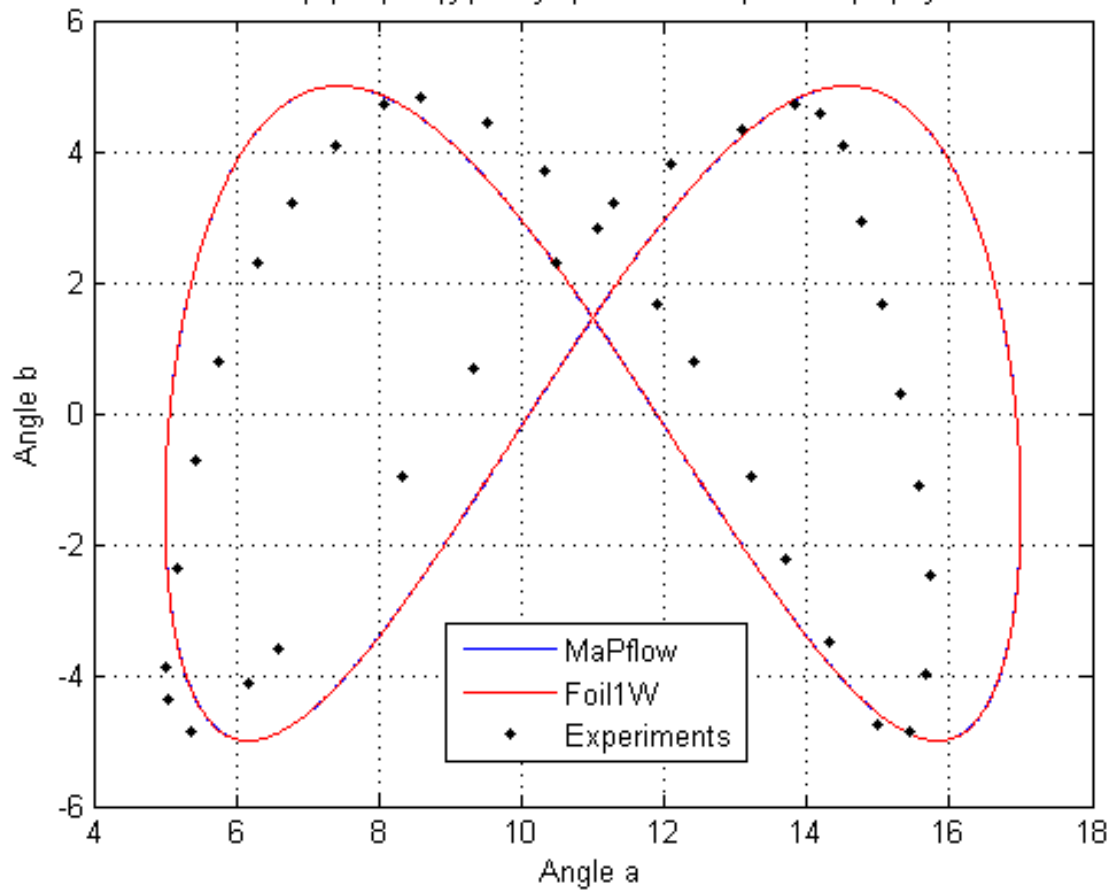
**Εικόνες 152, 153, 154 και 155: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 4^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  και  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 0^\circ$ .**

Για την τιμή αυτήν της διαφοράς φάσης δεν έχουμε τους αντίστοιχους υπολογισμούς του Foil1W, ενώ έχουμε και τις πειραματικές μετρήσεις μόνο στην καμπύλη του  $C_l$ .

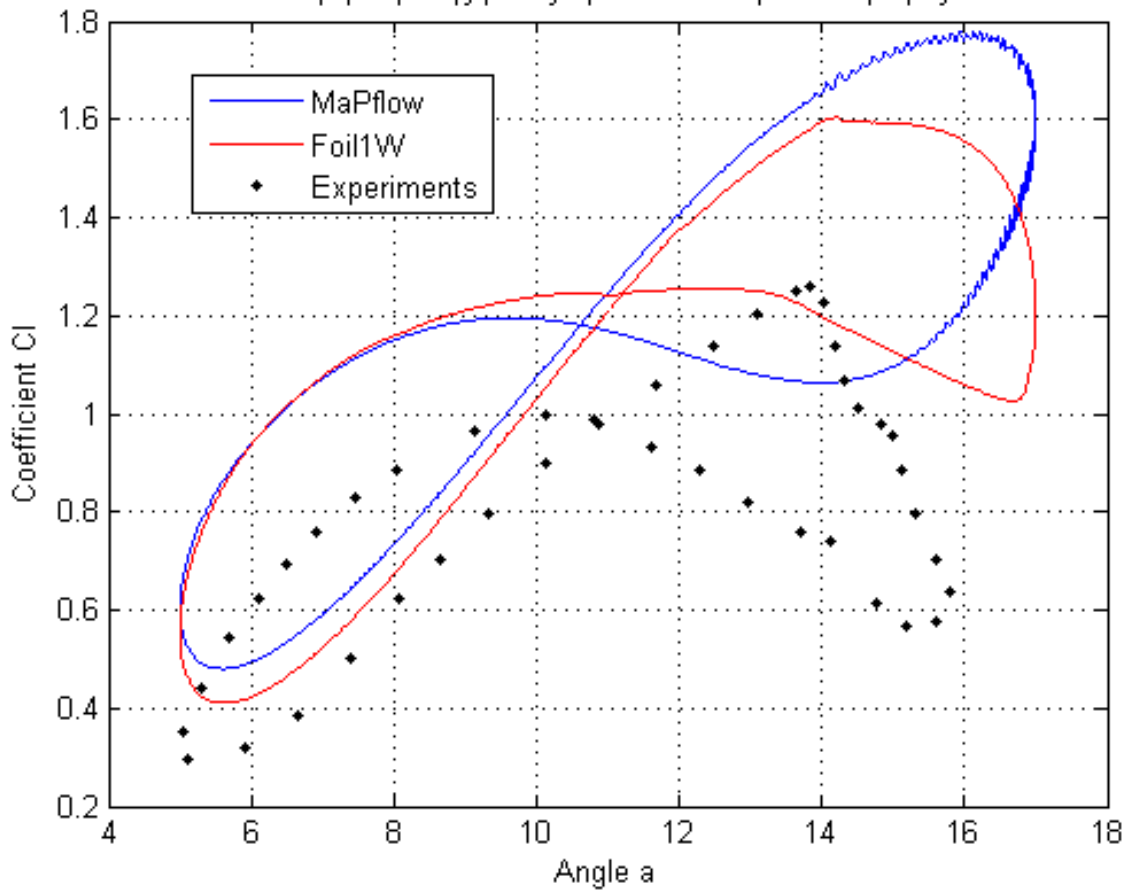
Πάντως, αν τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες της καμπύλης των 357°, βλέπουμε ότι το MaPFlow, πλησιάζει περισσότερο το πείραμα στις 0°.

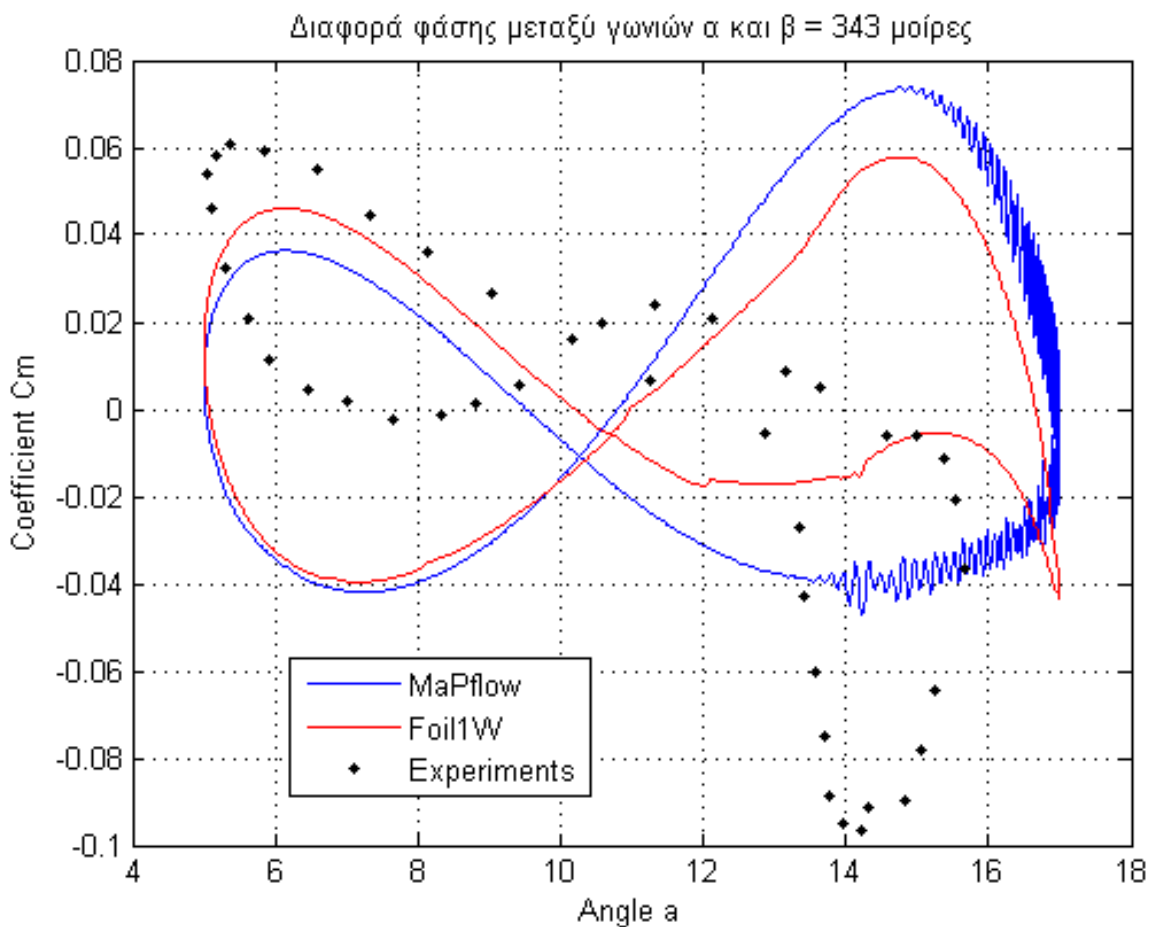
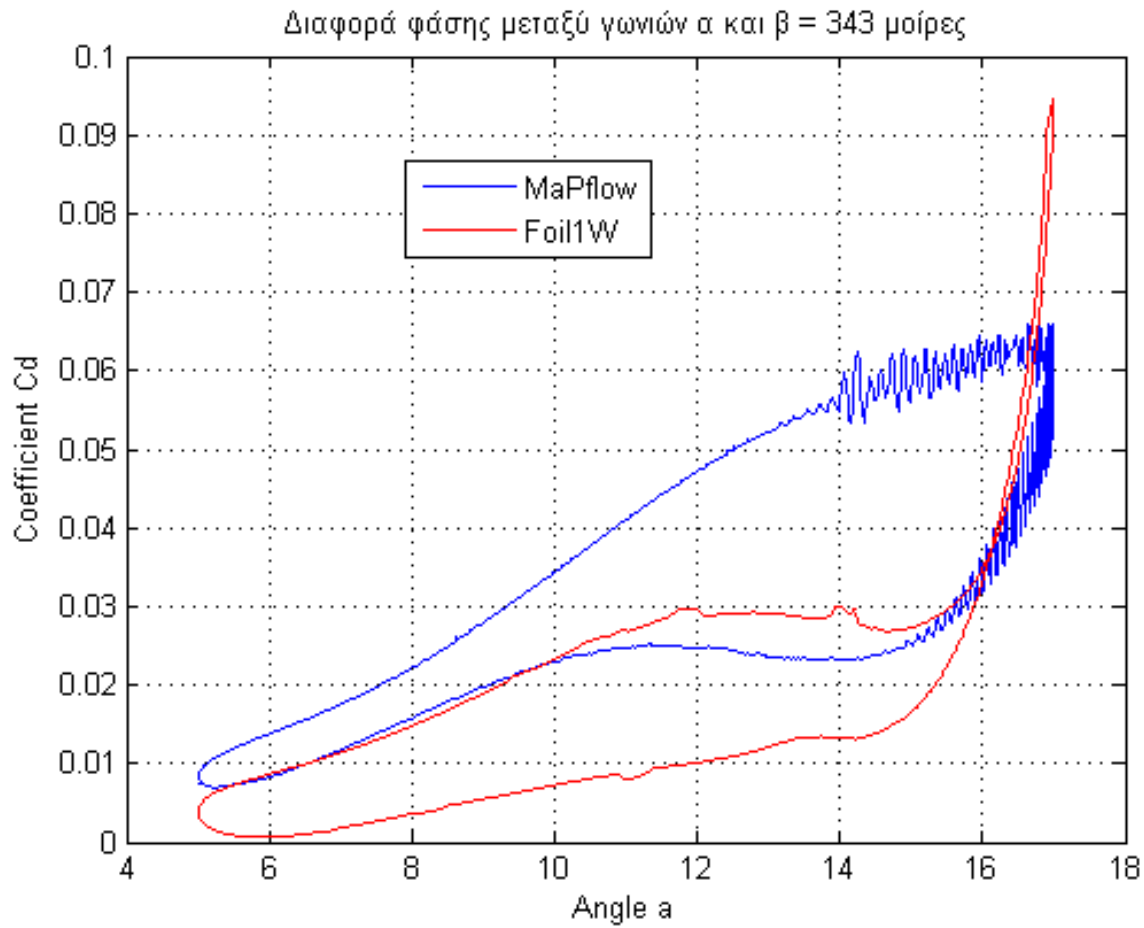
Η τελευταία περίπτωση είναι για  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 343^\circ$ . Επιπλέον, εδώ πια η γωνία  $\alpha$  δεν κυμαίνεται μεταξύ  $-2^\circ$  και  $10^\circ$ , γιατί η μέση τιμή δεν είναι  $\alpha_0 = 4^\circ$ . Αντίθετα είναι  $\alpha_0 = 11^\circ$  οπότε το εύρος των γωνιών είναι  $5^\circ$  και  $17^\circ$ :

Διαφορά φάσης μεταξύ γωνιών  $\alpha$  και  $\beta = 343$  μοίρες



Διαφορά φάσης μεταξύ γωνιών  $\alpha$  και  $\beta = 343$  μοίρες





**Εικόνες 156, 157, 158 και 159: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ ,**

**για**  $\beta_m = 5^\circ$ ,  $\alpha_0 = 11^\circ$ ,  $\alpha_m = 6^\circ$  **και**  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 343^\circ$ .

Επειδή η μέγιστη γωνία αυξάνεται σε σχέση με πριν ( $\alpha = 17^\circ$ ), πρέπει να δούμε αν βρισκόμαστε σε περίπτωση αποκολλημένης ροής ή όχι.

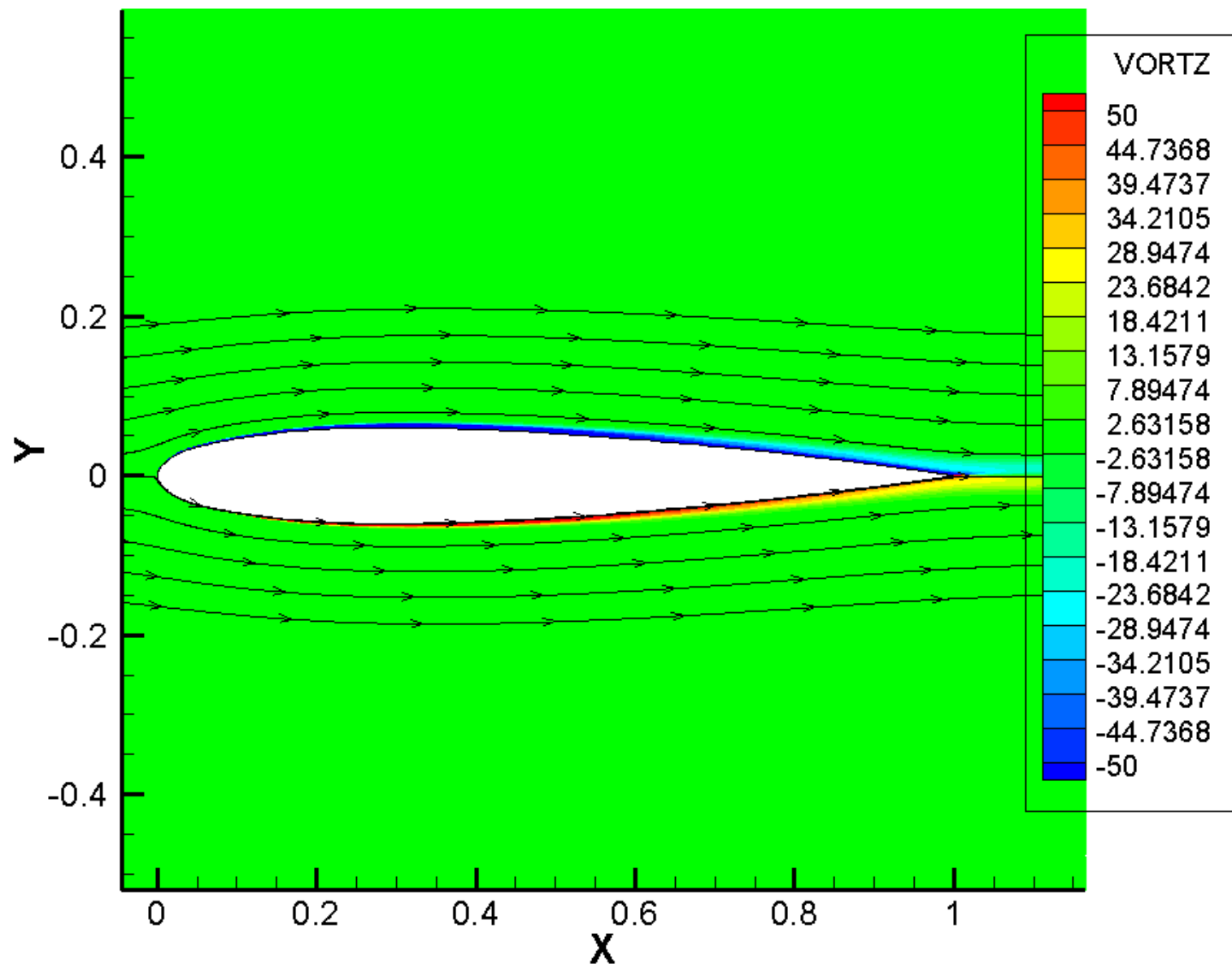
Όπως είδαμε στην καμπύλη  $C_l - \alpha$  για την μόνιμη ροή, έχουμε αποκόλληση της ροής στις  $14^\circ$ , που σημαίνει ότι οι καμπύλες της περίπτωσης  $343^\circ$  βρίσκονται σε αποκολλημένη ροή.

Στην καμπύλη  $C_l - \alpha$  των μετρήσεων αυτών, βλέπουμε ότι οι πειραματικές μετρήσεις, πράγματι, προβλέπουν την αποκόλληση ακριβώς στις  $14^\circ$ . Το ίδιο και η μέθοδος Foil1W.

Δεν μπορεί να ειπωθεί όμως το ίδιο και για το MaPFlow. Δυστυχώς, οι συνθήκες μη-μόνιμης ροής δεν κατάφεραν να προβλέψουν την αποκόλληση στην ίδια γωνία, όπως το κατάφεραν οι συνθήκες της μόνιμης. Μάλλον, αποκόλληση υπάρχει για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης. Δυστυχώς, δεν ξέρουμε που ακριβώς οφείλετε αυτό. Είναι πολύ πιθανό, πάντως να οφείλετε στο φαινόμενο της υστέρησης. Δηλαδή όταν το MaPFlow φτάνει στο σημείο της αποκόλλησης, ερμηνεύει την υστέρηση διαφορετικά από τα πειράματα και από το πρόγραμμα Foil1W, για αυτό και συνεχίζει την άνοδο του  $C_l$  και πέρα από το σημείο της αποκόλλησης. Στη συνέχεια η καμπύλη πέφτει αλλά σε μεγαλύτερες γωνίες από τις προβλεπόμενες.

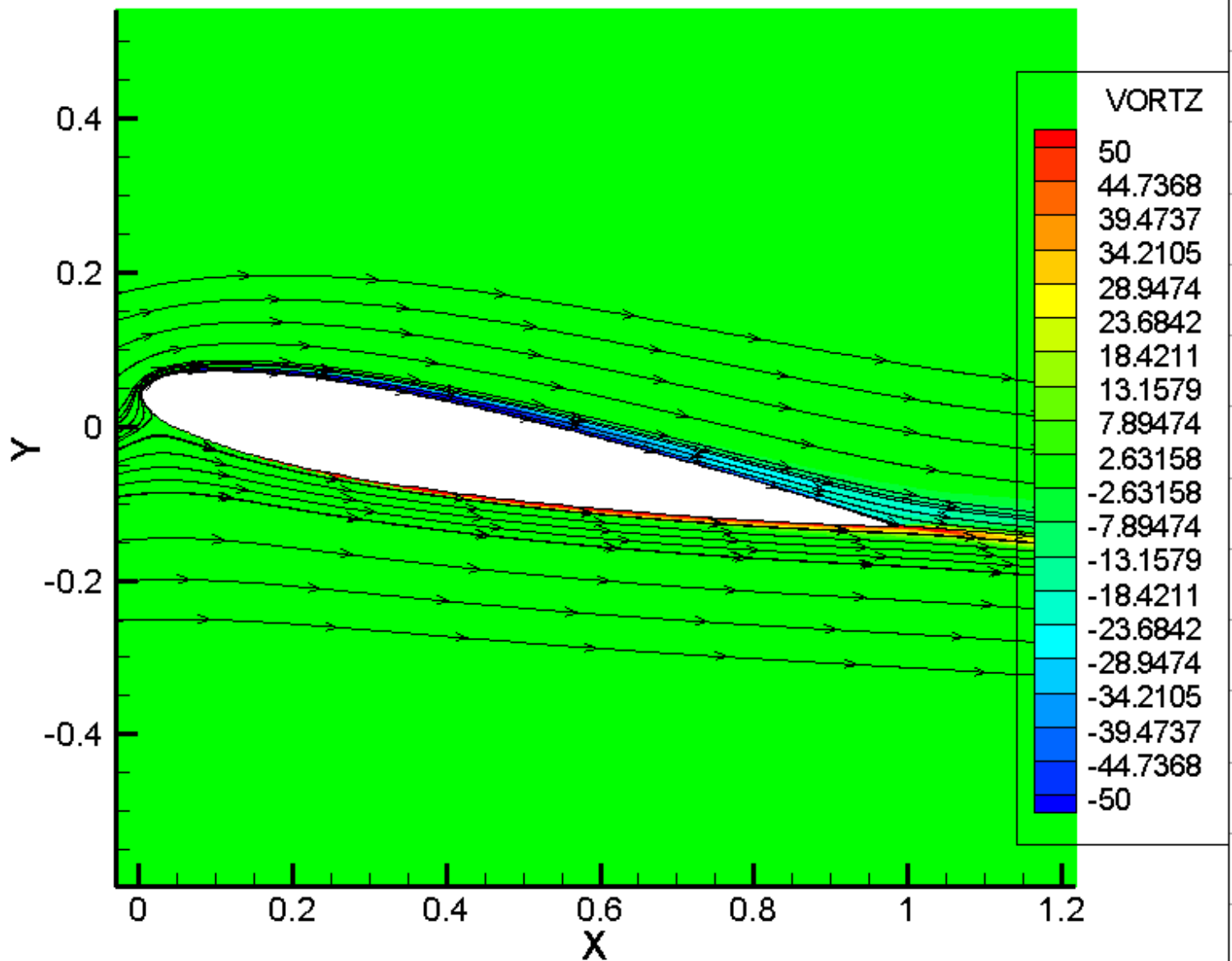
Η περίπτωση της μόνιμης ροής προβλέπει την αποκόλληση στην συγκεκριμένη περίπτωση. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό, βρήκαμε τις γραμμές ροής της συγκεκριμένης αεροτομής για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης  $\alpha$ , θεωρώντας  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 343^\circ$ . Επειδή βέβαια εδώ έχουμε μόνιμη ροή, η διαφορά στη φάση μεταξύ της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha$  και της γωνίας του flap  $\beta$ , δεν προσδιορίζει μία κίνηση συγχρονισμού (έχουμε μηδενική συχνότητα και για τις δύο κινήσεις στην μόνιμη ροή), αλλά μία σχετική σταθερή θέση του flap  $\beta$ , που εξαρτάται από την αντίστοιχη γωνία  $\alpha$ .

Έτσι, στη θέση  $\alpha = 0$ , η ροή είναι:



**Εικόνα 160:** Οι γραμμές ροές γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 0^\circ$ .

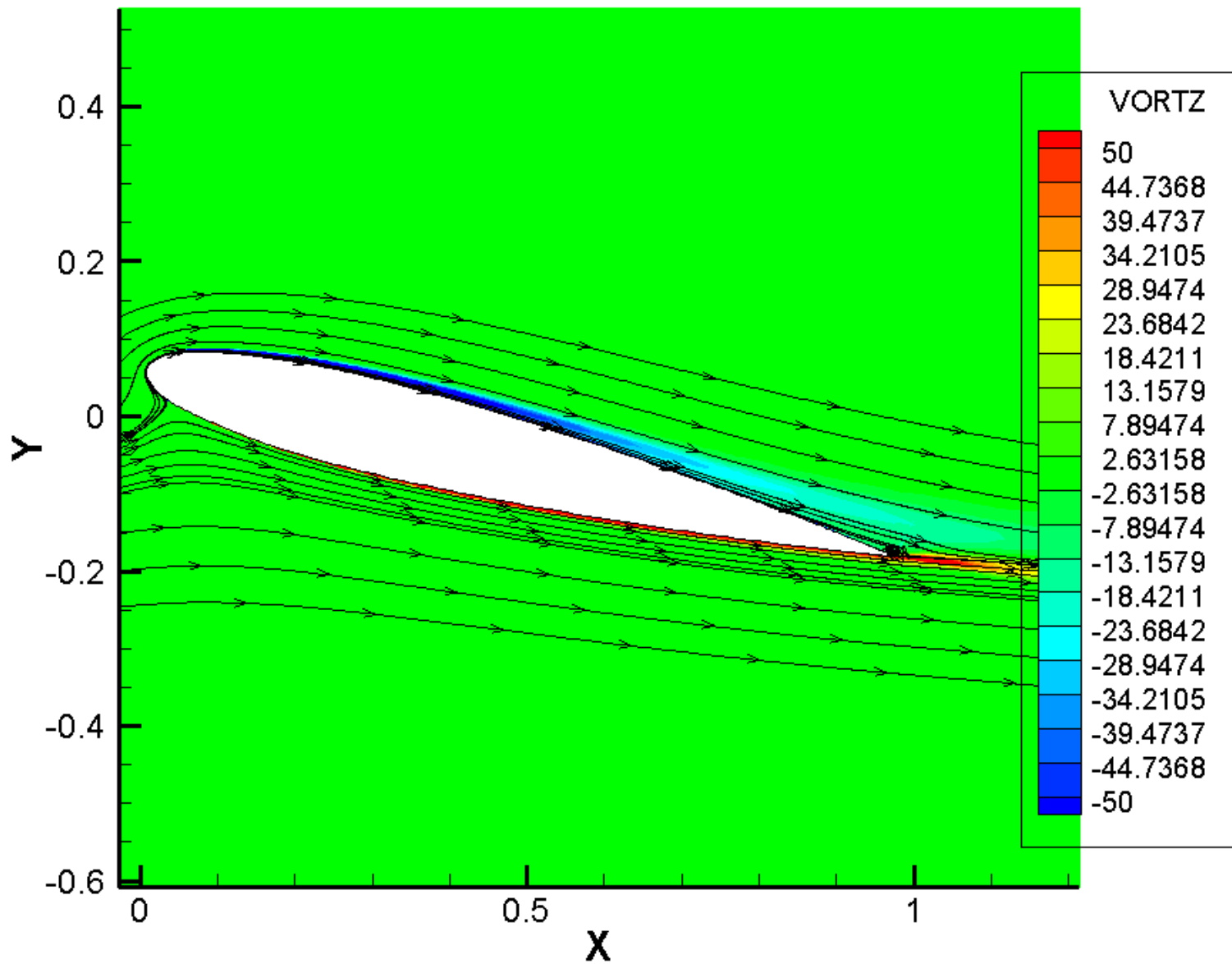
Ας δούμε τις γραμμές ροής για την περίπτωση της γωνίας  $\alpha = 10^\circ$ :



**Εικόνα 161:** Οι γραμμές ροές γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 10^\circ$ .

Πυκνώσαμε λίγο το πλέγμα κοντά στην αεροτομή, ώστε να δείξουμε ότι στις  $\alpha = 10^\circ$  δεν έχουμε αποκόλληση της ροής του αέρα, κάτι που περιμέναμε, αν θυμηθούμε την καμπύλη  $C_l - \alpha$  που είχαμε σχεδιάσει.

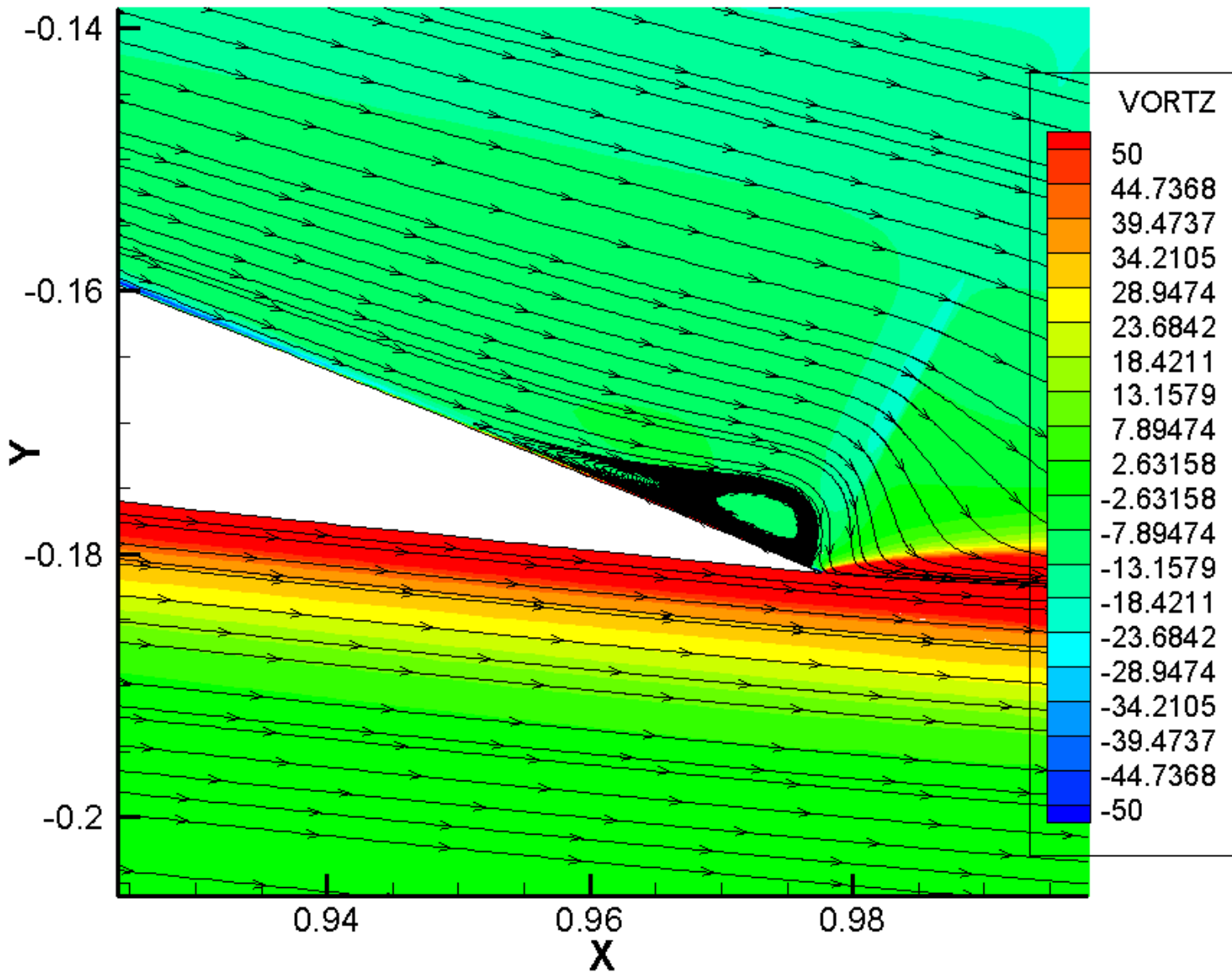
Στην περίπτωση που  $\alpha = 14^\circ$ , με βάση το  $C_l - \alpha$ , αναμένουμε την αρχή της αποκόλλησης. Πράγματι, οι γραμμές ροής δείχνουν την αποκόλληση πολύ κοντά στην ακμή εκφυγής, που σημαίνει ότι μόλις έχει αρχίσει να συμβαίνει:



**Εικόνα 162:** Οι γραμμές ροές γύρω από την αεροτομή για την περίπτωση που  $\alpha = 14^\circ$ .

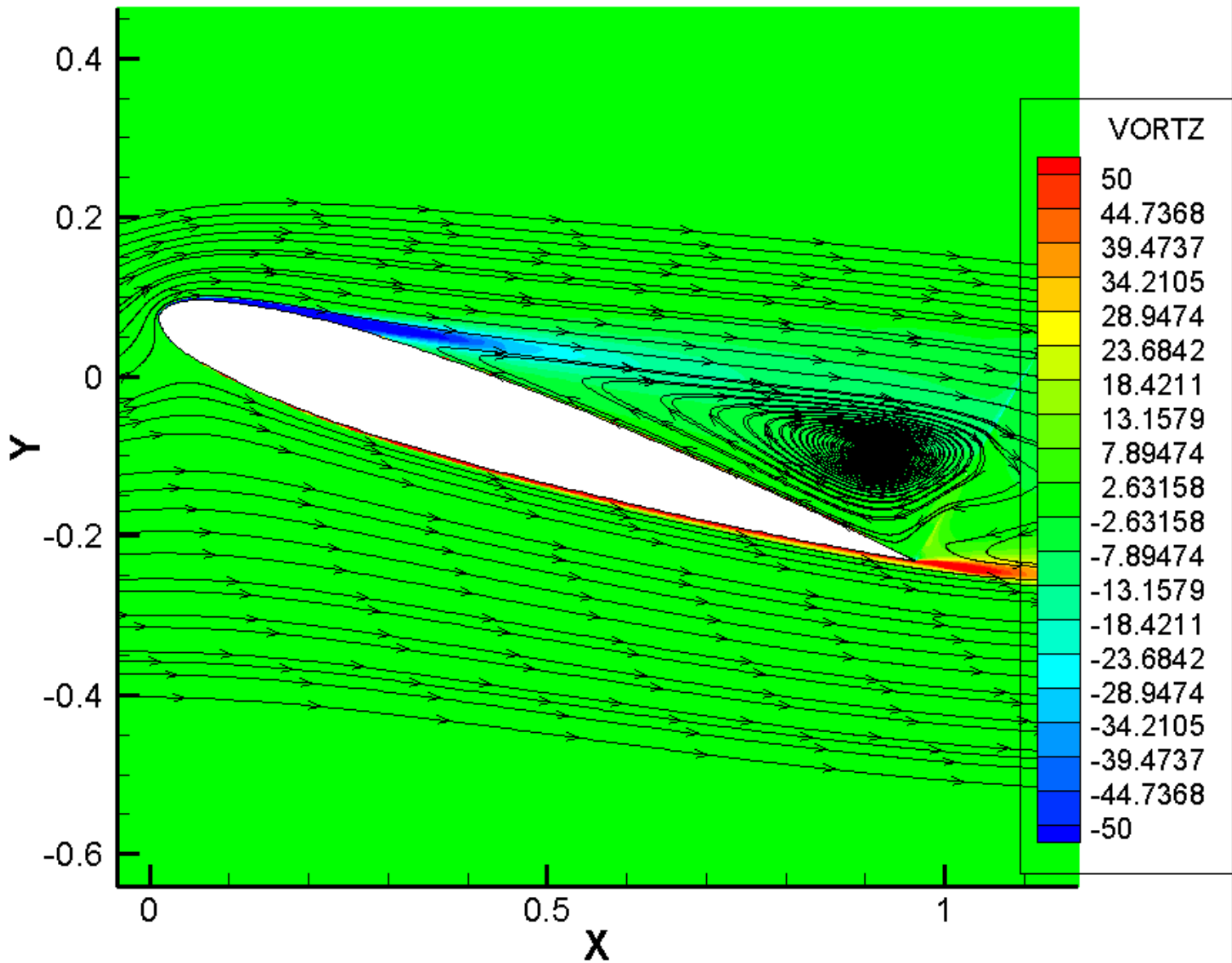
ή μεγεθύνοντας στην ακμή εκφυγής:





**Εικόνα 163: Οι γραμμές ροές γύρω από την αεροτομή, στην περιοχή της ακμής εκφυγής, για την περίπτωση που  $\alpha = 14^\circ$ .**

Επειδή βρισκόμαστε πολύ κοντά στην ακμή εκφυγής, σημαίνει ότι η αποκόλληση μόλις άρχισε να συμβαίνει στις  $\alpha = 14^\circ$ . Πράγματι, αν εξετάσουμε την αεροτομή σε μεγαλύτερες γωνίες, π.χ.  $\alpha = 18^\circ$ :

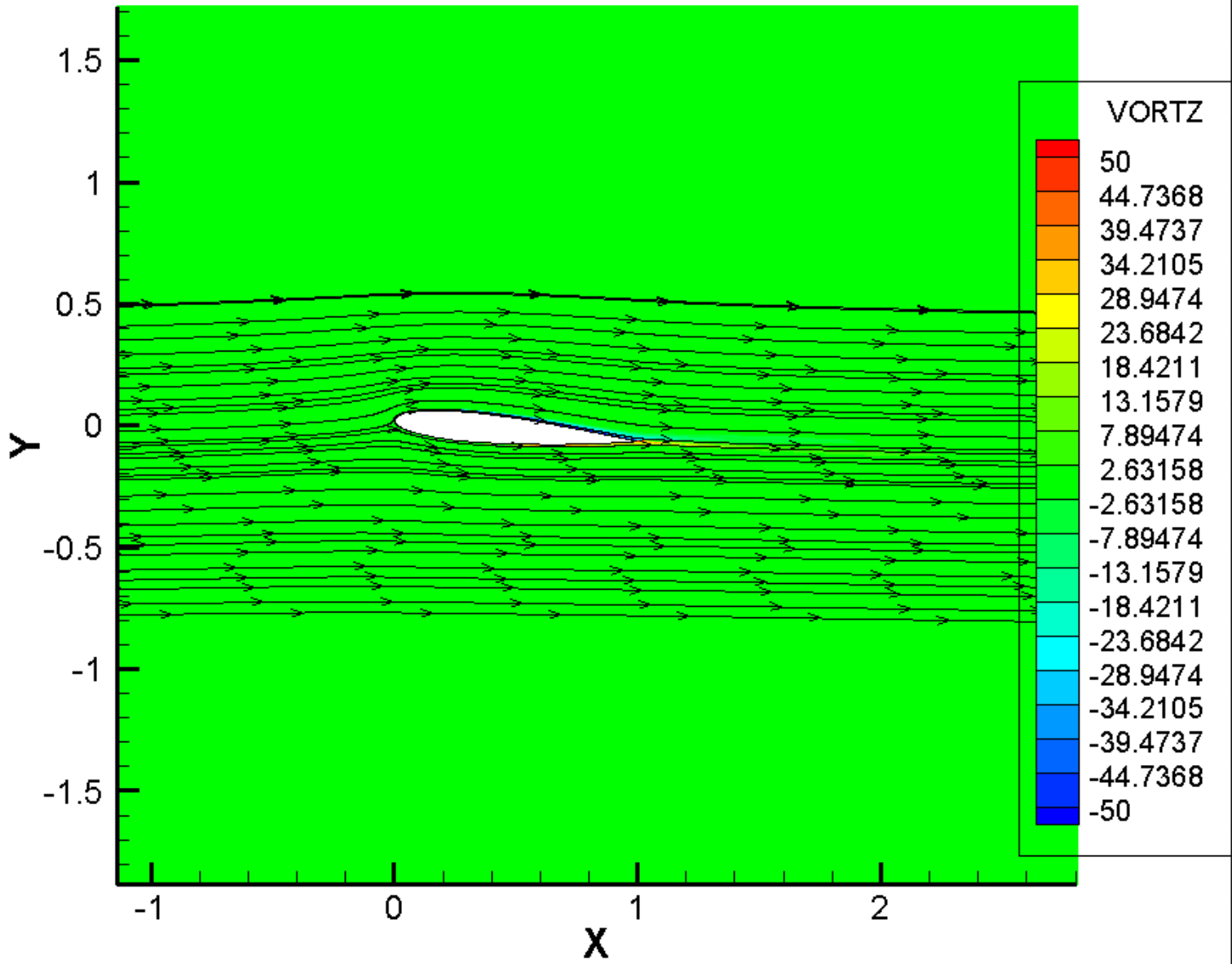


**Εικόνα 164:** Οι γραμμές ροές γύρω από την αεροτομή, στην περιοχή της ακμής εκφυγής, για την περίπτωση που  $\alpha = 14^\circ$ .

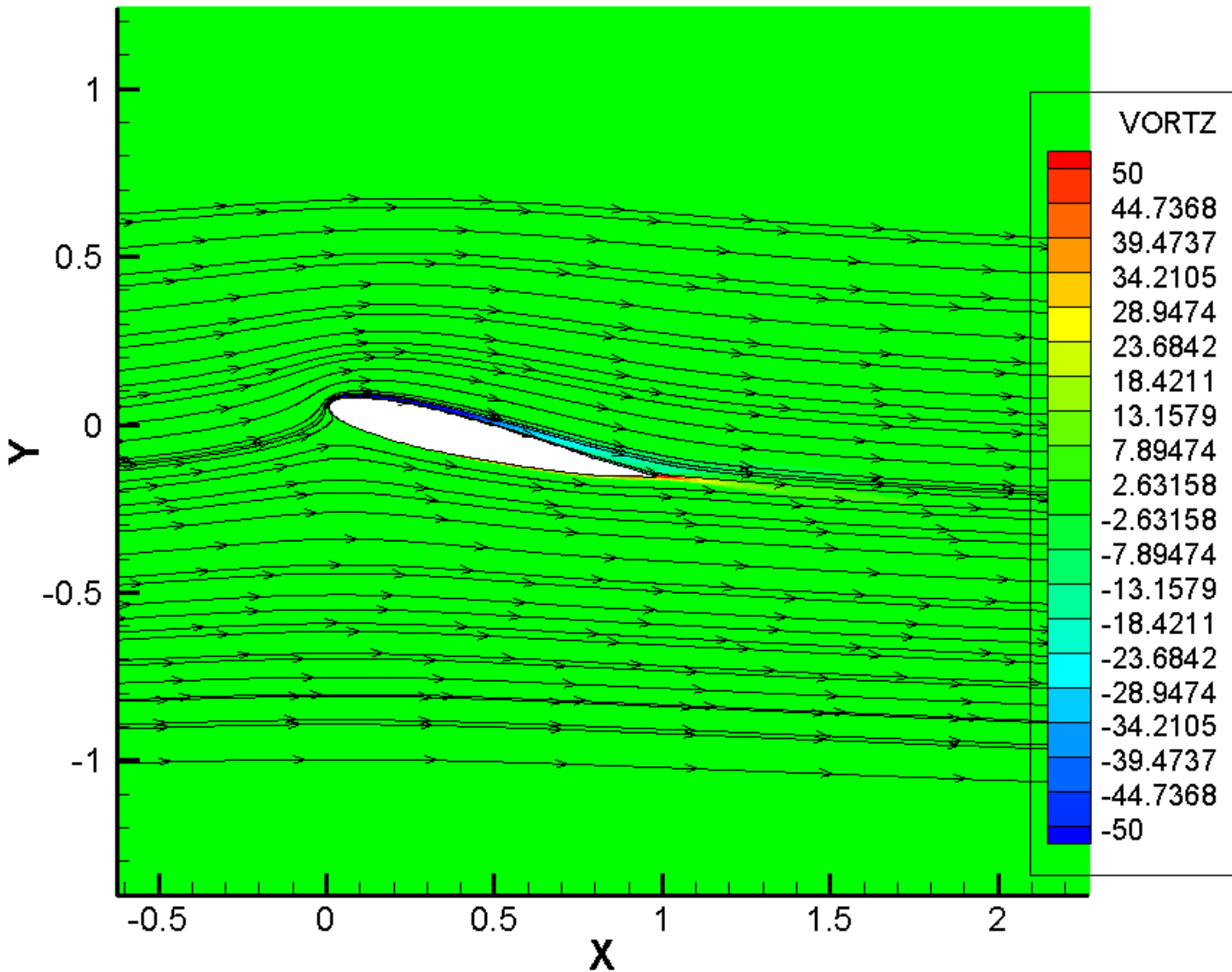
βλέπουμε πόσο πολύ έχει εξαπλωθεί η αποκόλληση.  
 Όλα τα παραπάνω διαγράμματα προέκυψαν για μόνιμη ροή.  
 Ας δούμε την περίπτωση της μη-μονιμότητας.

Θα εξετάσουμε την ροή για μία πλήρη περιστροφή της αεροτομής. Επειδή η συχνότητα περιστροφής είναι  $\omega a = 0.042$ , δηλαδή μισή της συχνότητας κίνησης του flap  $\omega b = 0.084$ , όταν η αεροτομή επιτελεί μία πλήρη περιστροφή, το flap θα έχει πραγματοποιήσει δύο πλήρεις κινήσεις.

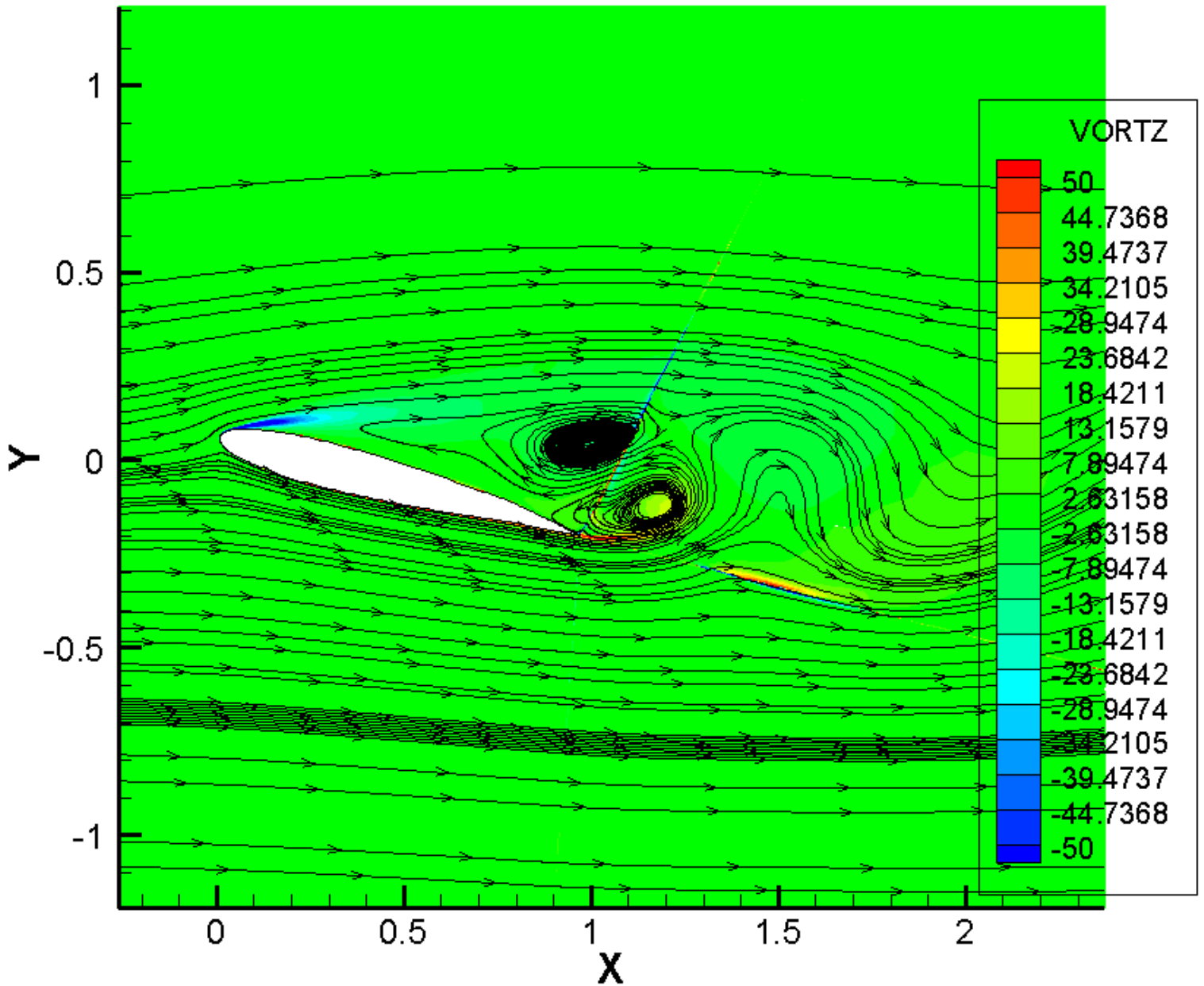
Στα παρακάτω διαγράμματα, βλέπουμε διαδοχικά πως αναπτύσσεται η ροή σε μία περίοδο περιστροφής της αεροτομής:



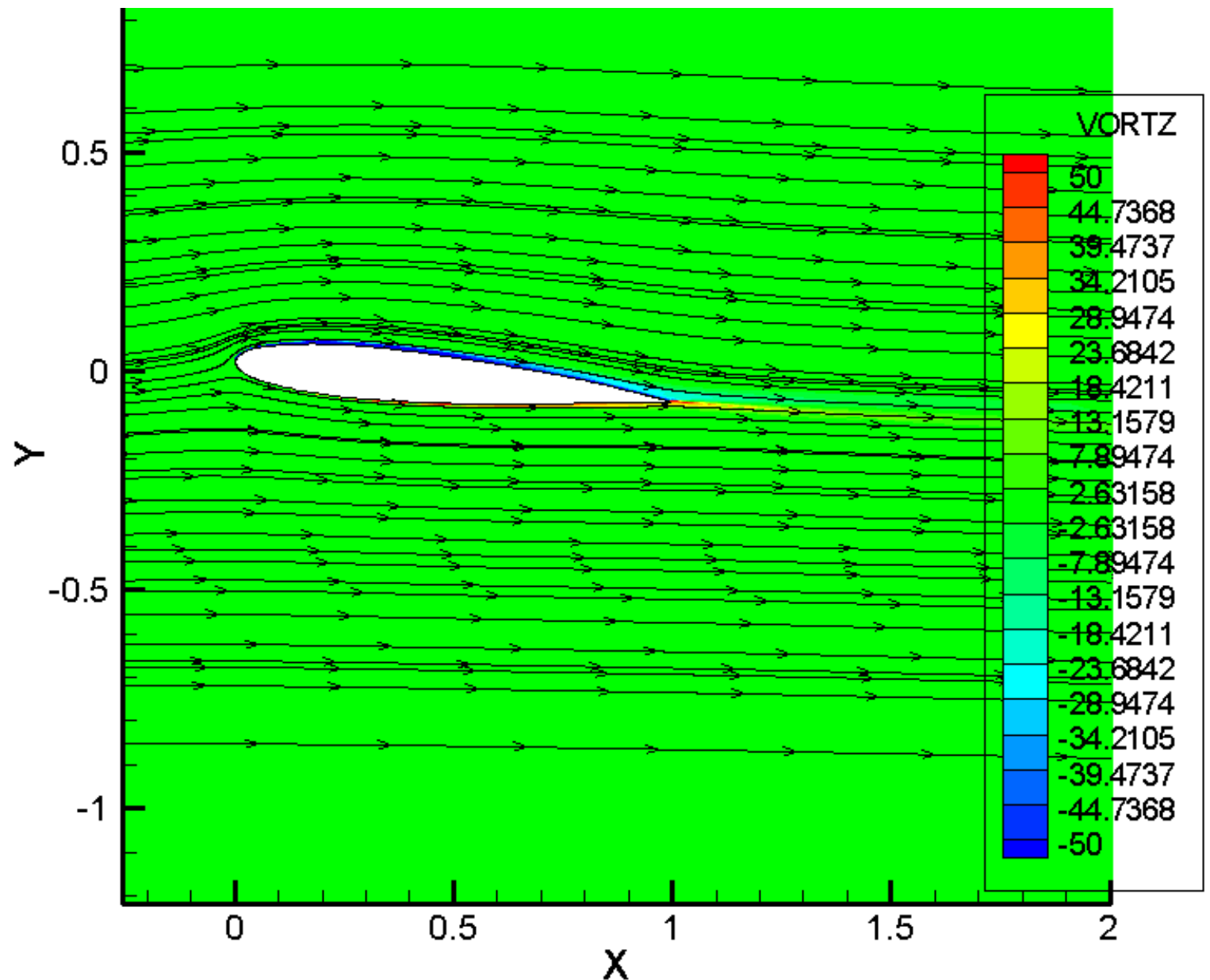
**Εικόνα 165: Στιγμιότυπο 1: Η αεροτομή βρίσκεται στη θέση  $\alpha = 5.204^\circ$  στην ανάβαση.**



**Εικόνα 166: Στιγμιότυπο 2: Η αεροτομή βρίσκεται στη θέση  $\alpha = 13.052^\circ$  στην ανάβαση.**



**Εικόνα 167: Στιγμιότυπο 3: Η αεροτομή βρίσκεται στη θέση  $\alpha = 14.441^\circ$  στην κατάβαση.**



**Εικόνα 168: Στιγμιότυπο 4: Η αεροτομή βρίσκεται στη θέση  $\alpha = 5^\circ$  στην κατάβαση.**

Εξετάζοντας τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε ότι είτε είναι μόνιμη η ροή είτε όχι, σε περιπτώσεις γωνίας  $\alpha$  μικρότερης της αποκόλλησης  $\alpha = 14^\circ$ , όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις των στιγμιότυπων 1,2 και 4, έχουμε μη αποκολλημένη ροή.

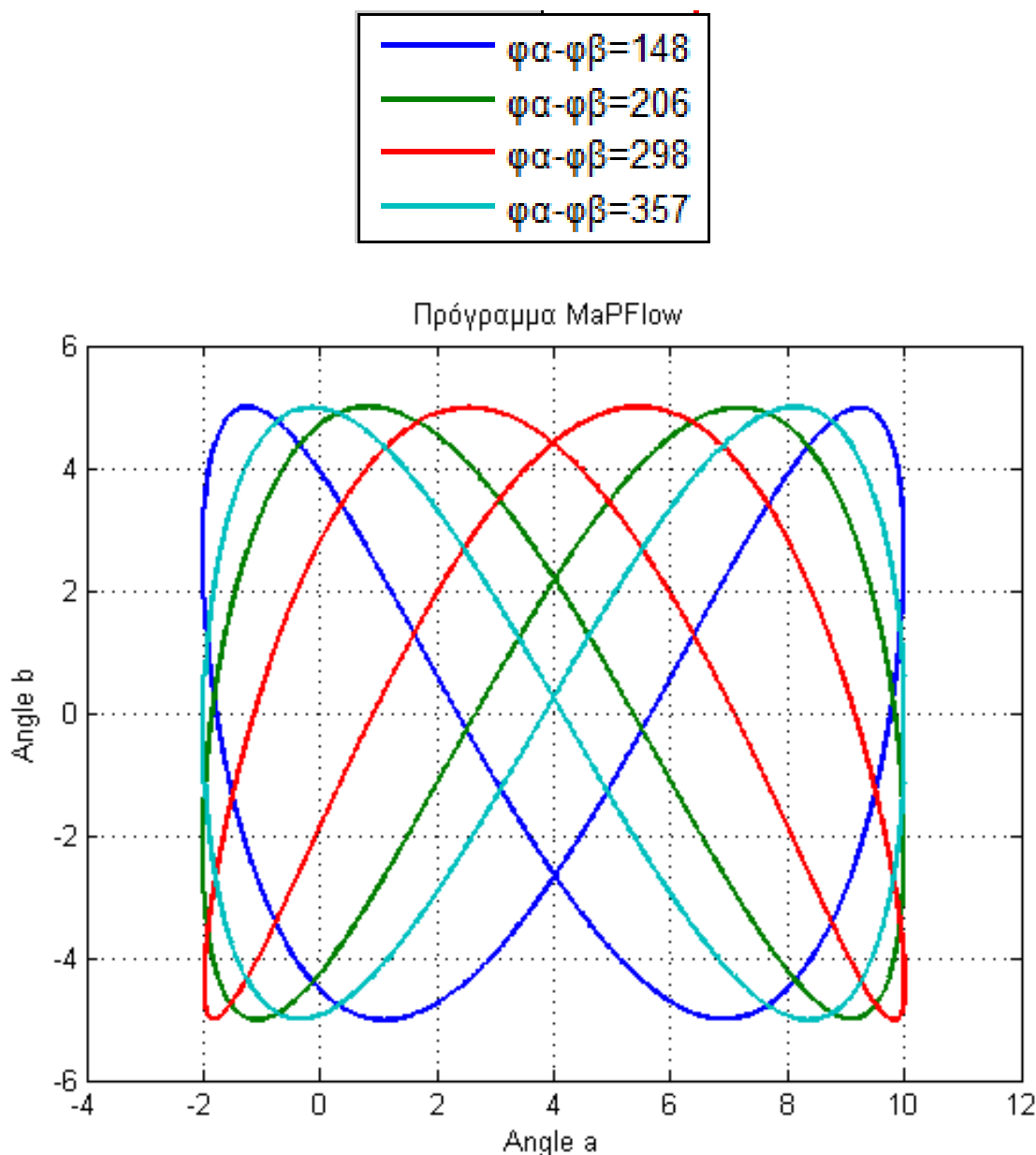
Το πιο ενδιαφέρον από τα παραπάνω τέσσερα διαγράμματα είναι σίγουρα αυτό του στιγμιότυπου 3. Αν και βρισκόμαστε μόλις πάνω από τη γωνία της αποκόλλησης ( $\alpha = 14.441^\circ$ ), έχουμε ροή εντελώς διαφορετική από την περίπτωση της μόνιμης ροής για  $\alpha = 14^\circ$ . Η διαφορετικότητα αυτή οφείλεται στο ότι η αεροτομή την στιγμή 3, βρίσκεται στην φάση της **κατάβασης**. Αυτό σημαίνει ότι αποκόλληση επήλθε κατά την ανάβαση, και παρέμεινε για όσο η αεροτομή βρισκόταν σε τιμές μεγαλύτερες των  $\alpha = 14^\circ$ . Όταν η αεροτομή έφτασε στην μέγιστη τιμή των  $\alpha = 17^\circ$ , σταμάτησε να ανεβαίνει και άρχισε να κατεβαίνει. Κατά την κατάβαση αυτή, εμείς την φωτογραφίσαμε στις  $\alpha = 14.441^\circ$ , που είναι και η ροή του στιγμιότυπου 3.

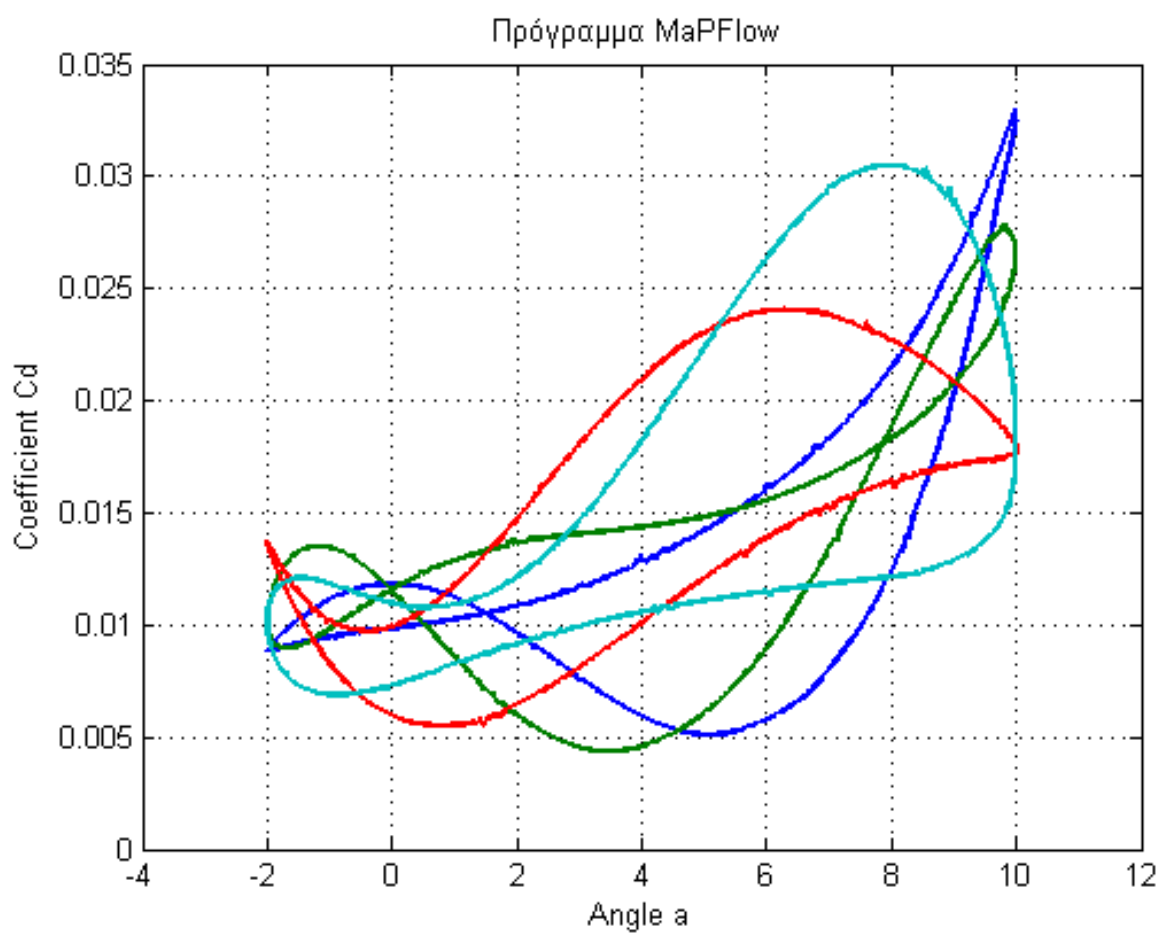
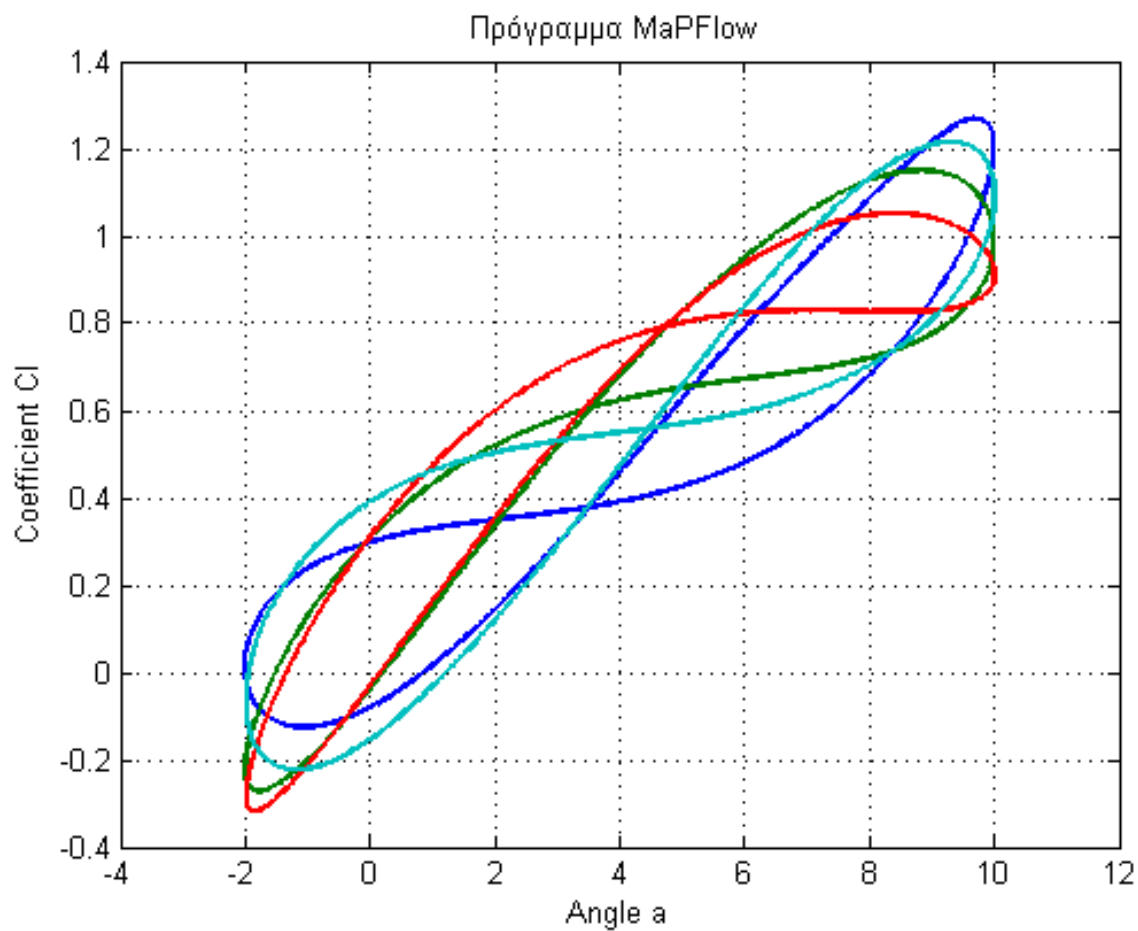
Βλέπουμε λοιπόν πόσο διαφορετικά αποτελέσματα δίνει η μη-μονιμότητα της ροής σε σχέση με την μονιμότητα. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής για  $\alpha = 14^\circ$  η

αποκόλληση μόλις που εμφανιζόταν στην ακμή εκφυγής, ενώ στην περίπτωση της μη-μόνιμης ροής για  $\alpha = 14.441^\circ$  (δηλαδή, για τιμές πολύ κοντινές), η αποκόλληση έχει δημιουργήσει δύο μεγάλες δίνες, απλά και μόνο επειδή η αεροτομή βρίσκεται στην φάση της κατάβασης.

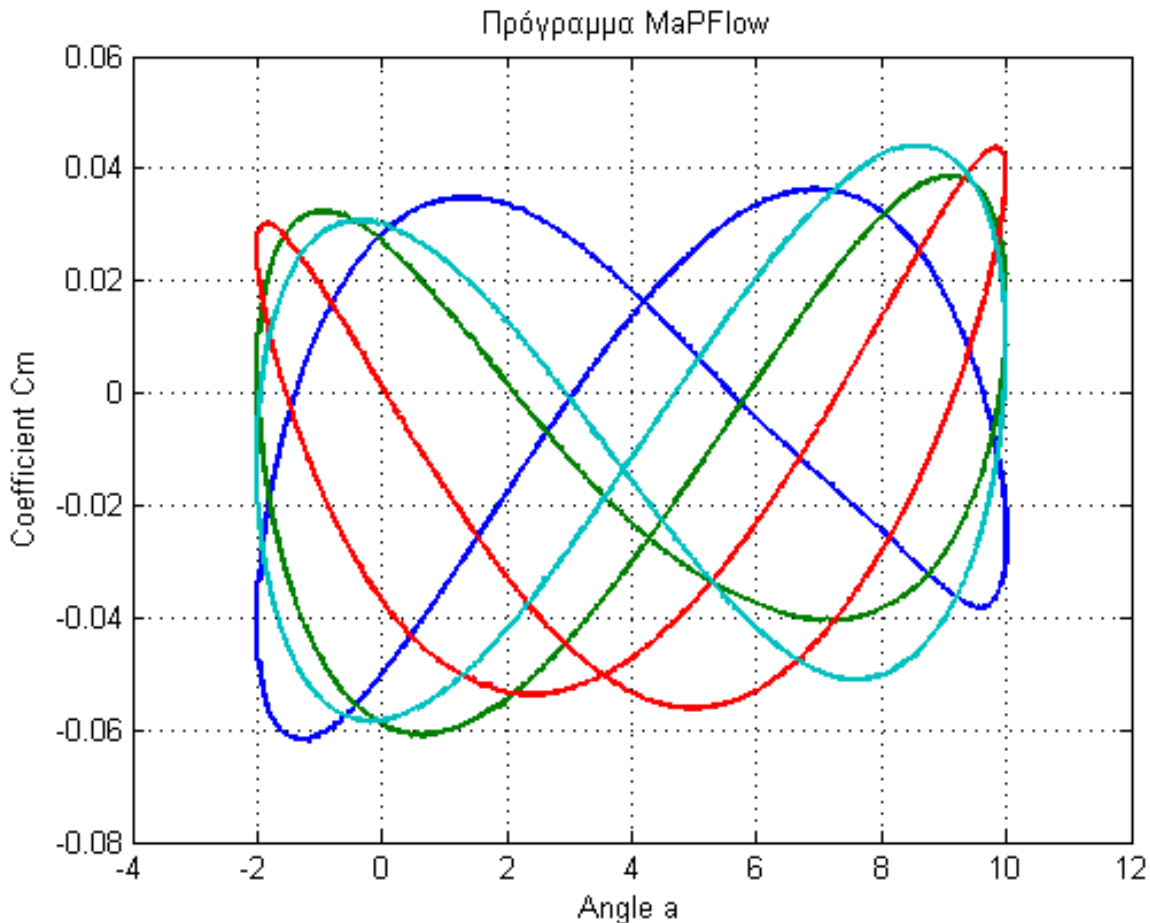
Η διαφοροποίηση αυτή της ροής, είναι ίσως και ο λόγος που δεν μπορέσαμε να προβλέψουμε με αποτέλεσμα τους βρόχους υστέρησης των καμπυλών για την περίπτωση  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 343^\circ$ , όταν δηλαδή η αεροτομή έφτανε σε αποκολλημένες γωνίες πρόσπτωσης.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο και, μαζί με αυτό και την διπλωματική, ας δούμε προσεκτικά πώς επιδρά η διαφορά φάσης μεταξύ των γωνιών  $\beta$  και  $\alpha$ . Για να το εξετάσουμε αυτό, θα απεικονίσουμε όλες τις παραπάνω καμπύλες που προέκυψαν από το πρόγραμμα MaPFlow για διαφορετικές συχνότητες, στο ίδιο διάγραμμα. Έτσι, έχουμε:









**Εικόνες 169, 170, 171 και 172: Οι καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$ ,  $C_d - \alpha$  και  $C_m - \alpha$ , για  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 148^\circ, 206^\circ, 298^\circ, 357^\circ$ , όπως αυτές υπολογίστηκαν από το πρόγραμμα MaPFlow.**

Στις παραπάνω καμπύλες η μηδενική διαφορά φάσης σχεδόν ταυτίζεται με την περίπτωση  $\phi_\alpha - \phi_\beta = 357^\circ$ , μιας και  $357^\circ \simeq 360^\circ = 0^\circ$ . (γαλάζια καμπύλη)

Η μπλε καμπύλη έχει διαφορά φάσης  $148^\circ$ .

Η δε πράσινη καμπύλη έχει διαφορά φάσης  $206^\circ$ .

Παρατηρούμε ότι οι δύο αυτές καμπύλες έχουν αρκετά κοινά. Αυτό συμβαίνει γιατί απέχουν περίπου το ίδιο από τον απόλυτο συγχρονισμό των δύο κινήσεων, δηλαδή τις  $0^\circ$ . Πράγματι είναι  $148^\circ - 0^\circ = 148 \simeq 360^\circ - 206^\circ = 154$ . Αυτό σημαίνει ότι η μπλε και η πράσινη καμπύλη απέχουν από τις  $0^\circ$  κατά περίπου ίδιες αποστάσεις αλλά προς διαφορετικές διευθύνσεις.

Πράγματι, αν συγκρίνουμε τις καμπύλες  $\beta - \alpha$ ,  $C_l - \alpha$  και  $C_m - \alpha$  βλέπουμε ότι μοιάζουν πολύ στην μορφή τους, απλά η μία εμφανίζεται ως κατοπτρική της άλλης.

Η κόκκινη καμπύλη έχει διαφορά φάσης  $298^\circ$ .

Γενικά παρατηρούμε ότι η αλλαγή της διαφοράς φάσης επιδρά καθοριστικά στις καμπύλες των συντελεστών και τις αλλάζει σημαντικά.

Παρατηρούνται αλλαγές όχι μόνο στη μορφή των καμπυλών των συντελεστών, αλλά και στην μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους.

# Συμπεράσματα

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική, μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις δύο περιπτώσεις των flap ήταν ικανοποιητικά.

- Αποδείχτηκε ότι το πρόγραμμα MaPFlow παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα για την ανάλυση αεροτομών με υπεραντωτικές διατάξεις στη ακμή εκφυγής.
- Ο αλγόριθμος παραμόρφωσης του πλέγματος που υλοποιήθηκε ήταν κατάλληλος για το εύρος των γωνιών που μελετήθηκαν. Παρ'όλα αυτά χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση στην περίπτωση μεγαλύτερων παραμορφώσεων.
- Στο σημείο αυτό να πούμε, ότι θα ήταν ενδιαφέρουσα η προσπάθεια χρήσης του προγράμματος αυτού για την τοποθέτηση υπεραντωτικές διατάξεις αυτή τη φορά, στην ακμή πρόσπτωσης, τα λεγόμενα slat.
- Τέλος, θα ήταν χρήσιμη μία αεροελαστική ανάλυση στην περίπτωση κίνησης των flap.

## References

- [1] NUMERICAL COMPUTATION OF INTERNAL & EXTERNAL FLOWS: *CHARLES HIRSCH*. Butterworth-Heinemann, Second Edition, 2007.
- [2] Η ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΠΟΗΧΗΤΙΚΟΥ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ & Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΗΣ ΠΤΗΣΗΣ: *ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΠΕΡΓΕΛΕΣ*. Εκδόσεις Συμεών, 2009.
- [3] ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: *ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΠΕΡΓΕΛΕΣ*. Εκδόσεις Συμεών, 2006.
- [4] ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ: *ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ*. Εκδόσεις Συμεών, 2005.
- [5] ΜΗ ΜΟΝΙΜΗ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ, ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ, ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΗ: *ΣΠΥΡΟΣ ΒΟΥΤΣΙΝΑΣ*. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2005.
- [6] Aerodynamic analysis of airfoil section equipped with a deformable trailing edge airfoil: *Quentin CHANEL*. Universite de Poitiers, National Technical University of Athens-Aerodynamics Department.
- [7] Προσομείωση ροών σε χωρία μεταβλητής γεωμετρίας: *Πρίντζης Μάρκος*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Αθήνα, Ιούνιος 2012.
- [8] Unsteady Viscous-Inviscid Interaction Technique for Wind Turbine Airfoils: *Nestor Ramos Garcia*. DTU Department of Mechanical Engineering, April 2011.
- [9] Comparison of code performance for computation of unsteady 2D aerodynamics of airfoils with deformable trailing edges Deliverable 2.5: *Mac Gaunaa*.
- [10] Εισαγωγή στις πλεγματικές μεθόδους υπολογιστικής ρευστομηχανικής: *Γεώργιος Παπαδάκης*.
- [11] Άρθρα από το διαδίκτυο για πληροφορίες και φωτογραφίες:  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>  
"FLOW OVER BODIES: DRAG AND LIFT" Chapter 15 (cen54261\_ch15.qxd )  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lift\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Lift_coefficient)  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_force](http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_force)  
<http://rotorhead8900.wordpress.com/>  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lift\\_\(force\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lift_(force))  
<http://www.aerostudents.com/files/flightDynamics/theAerodynamicCenter.pdf>  
<http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/fluids/Lectures/f03.pdf>  
<http://computation.llnl.gov/casc/Overture/henshaw/overtureFigures/node5.html>  
<http://luke.eng.uci.edu/msadeghi/project/final/final.html>  
<http://www.grc.nasa.gov/WWW/Acoustics/code/adpac/sample/airfoil.2d/>  
<http://users.ntua.gr/caridis/methodoi/keimena/chap%2011/Chapter%2011.pdf>  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary\\_conditions\\_in\\_CFD](http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_conditions_in_CFD)  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Flap\\_\(aircraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Flap_(aircraft))  
<http://www.anla.gr/greek/books/GenikesTechnikesGnoseis.pdf>