ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η Εξίσωση του Pell

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αντωνιάδης Νικόλαος

Επιβλέπων : Αργύρης Φελλούρης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η εξίσωση του Pell

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Αντωνιάδης

Επιβλέπων : Αργύρης Φελλούρης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31η Μήνα Έτος.

....	....	....
Ανάργυρος Φελλούρης	Κανελλόπουλος Βασίλης	Στεφανέας Πέτρος
Αναπληρωτής Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Λέκτορας

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

....

Νικόλαος Αντωνιάδης

Μαθηματικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η παρουσίαση των λύσεων της εξίσωσης του Pell. Γίνεται μία ιστορική αναδρομή στην πορεία της εξίσωσης μέχρι σήμερα και μία προσπάθεια μοντελοποίησης της λύσης μέσα από τις ήδη υπάρχουσες λύσεις που κυκλοφορούν στον μαθηματικό κόσμο.

Η εξίσωση x^2-ny^2=1 είναι μία Διοφαντική εξίσωση που έχει απασχολήσει τη μαθηματική κοινότητα ως ‘πρόκληση’ για την εύρεση μίας κλειστής, αναλυτικής λύσης (x,y), όταν ο αριθμός n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Παρουσιάζεται συνοπτικά η σημασία της λύσης για τα ινδικά μαθηματικά καθώς και προεκτάσεις και παραλλαγές της συγκεκριμένης εξίσωσης εστιάζοντας κυρίως στη μέθοδο του Βραχμαγκούπτα. Γίνεται μία εμφάνιση της δουλειάς του Fermat για τη συγκεκριμένη εξίσωση. Προτείνονται σύγχρονοι αλγοριθμικοί τρόποι επίλυσης με υπολογιστικά-μαθηματικά πακέτα. Δίνεται ιδιαίτερη βάση στον LMM αλγόριθμο (Lagrange-Matthews-Mollin) καθώς και στο σύστημα αναγωγών του Lagrange.

Τέλος, μέσω της υπολογιστικής πλατφόρμας Matlab δημιουργείται κώδικας που διερευνά τις λύσεις της εξίσωσης.

Λέξεις Κλειδιά

Εξίσωση του Pell, Διοφαντική Εξίσωση, Αλγόριθμος Lagrange-Matthews-Mollin (LMM), Σύστημα αναγωγών του Lagrange, Μέθοδος Βραχμαγκούπτα

Abstract

The purpose of this thesis is the study and the presentation of the solutions of Pell's equations. A chronology takes place that concerns the course of this equation till nowadays and a try of modelling the solution with respect to existing solutions that employ the world of mathematics.

Equation x^2-ny^2=1 is a Diophantine equation that has occupied the mathematical community as a challenge for the discovery of a close, analytical solution (x,y) when number n is not a perfect square.

The significance of the solution is summarized for the Indian mathematics combined with extensions and variations of the specific equation focusing on Brahmagupta's method. In addition to this, there is a presentation of Fermat's work for this equation. There is, also, a proposition of modern algorithmic workarounds with computer math packages. This thesis gives, also, emphasis to the LMM algorithm and to regurgitation system of Lagrange.

In the end, we use Matlab to create code for the discovery of the solutions of the equation.

Keywords

Pell's equation, Diophantine Equations, LMM algorithm, Lagrange regurgitation method, Brahmagupta method

Περιεχόμενα:

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή-Ιστορική Ανασκόπηση

1.1. Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά είναι και παιγνίδι! Τα Μαθηματικά είναι και για παιγνίδι! Τα Μαθηματικά μαθαίνονται και με το παιγνίδι! Οι τρεις προηγούμενες προτάσεις είναι ή θα πρέπει να είναι αληθείς για όλους μας, αφού από πολλούς επιστήμονες έχει υποστηριχθεί ότι η χρήση του παιγνιδιού, επειδή αυτό έλκει ιδιαίτερα τα παιδιά, είναι ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο διδασκαλίας. Δημιουργεί θετική ατμόσφαιρα στην τάξη και ως εκ τούτου αναμένεται ένα θετικό αποτέλεσμα στη διδασκαλία. Οι μαθητές απασχολούνται δημιουργικά και ενθαρρύνεται η συνεργασία μεταξύ τους, ενώ οι συνθήκες γίνονται κατάλληλες, ώστε να ενσωματωθούν συναισθηματικά στην ομάδα και οι πλέον δύσκολοι μαθητές. [2]

Η διδασκαλία αλλά και η εκμάθηση των Μαθηματικών είναι επίπονη και δεν είναι λίγες οι φορές, που η προσπάθεια, εκτός της επιτυχίας, ενίοτε συνοδεύεται και από την αποτυχία. Όμως, στο παιγνίδι η αποτυχία αντί να σε απογοητεύει σε δυναμώνει, ατσαλώνει τη θέλησή σου για επιτυχία και νίκη. Έτσι, αφού το παιγνίδι δίνει χαρά αλλά και δύναμη σε εκείνον που παίζει, η διδασκαλία των Μαθηματικών, μέσα από το παιγνίδι, διώχνει τη «Μαθηματικοφοβία», που είναι ένα παγκόσμιο φαινόμενο και όχι ειδική νόσος των Ελληνοπαίδων.

Γενικά, το παιγνίδι ενέχει δράση, αυτοσχεδιασμό, πρωτοβουλία, οπότε ένα πρόβλημα ή μια δραστηριότητα θαυμάσια συνδυάζονται με αυτό, κάνοντας τη διδασκαλία ελκυστική και αποτελεσματική. Παροτρύνει τους μαθητές να κρατήσουν ψηλά το ενδιαφέρον τους για το μάθημα, αλλά και δίνει στο διδάσκοντα ένα γενικό πλαίσιο, για να εντάξει τη διδασκαλία του όπου το αντικείμενο που διδάσκει γίνεται χρήσιμο και σημαντικό.
Συμπερασματικά, λοιπόν, το παιγνίδι στην τάξη προσφέρει:

- Διακοπή της καθημερινής ρουτίνας της διδασκαλίας, κάνοντας ένα ευχάριστο διάλειμμα.
- Προκαλεί τους μαθητές στη δραστηριοποίηση και τον αυτοσχεδιασμό.
- Ενεργοποιεί αυτούς, ωθώντας τους στη συνεργασία και την ενσωμάτωση στην ομάδα.
- Τους φέρνει σε κατάσταση, ώστε να αποδέχονται και να συγκρατούν τα αποτελέσματα, δηλαδή τη γνώση.[3]

1.2. Η εξίσωση του Pell

Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_1 x^1 y^{n-1} + a_o y^n$$

με $n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$ και $n \geq 2$.

Αν $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση P(x,y) = m έχει άπειρες λύσεις ή δεν έχει καμία στο σύνολο των $\mathbb{Z}$. Η ειδική περίπτωση της προηγούμενης εξίσωσης:

$$P(x,y) = x^2 - \delta y^2 = m,$$

όπου $0 < \delta \in \mathbb{Z}$ και ο δ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, είναι γνωστή ως **εξίσωση του Pell**. Ακόμη πιο απλή μορφή αυτής αποτελεί η επόμενη

$$x^2 - \delta y^2 = 1$$

Ίσως εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε πως οι γνωρίζοντες λένε ότι η εξίσωση αυτή αποδίδεται στον Pell από λάθος του Euler. Οι ίδιοι αποδίδουν την εξίσωση στον Fermat και ότι με τη λύση της ασχολήθηκαν οι Ινδοί Βραχμαγκούπτα (7ος αι. μ.Χ.) και Μπασκάρα ΙΙ (12ος αι. μ.Χ.). Η προηγούμενη διοφαντική εξίσωση εκτός της προφανούς λύσης (x_0 , y_0) (στην περίπτωση όπου έχουμε δ = 2 μια προφανής λύση είναι (3,2)) έχει άπειρες θετικές ακέραιες λύσεις. Πράγματι, αν (x_0 , y_0) είναι μια τέτοια, τότε

$$x_0^2 - \delta y_0^2 = 1.$$

Αλλά τότε ισχύει και η σχέση

$$(x_0 + y_0\sqrt{\delta})(x_0 - y_0\sqrt{\delta}) = 1.$$

Επιπλέον έχουμε ότι ισχύει:

$$(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n = 1 = (x_n + y_n\sqrt{\delta})(x_n - y_n\sqrt{\delta}).$$

Έτσι κάθε ζεύγος (x_n ,y_n) με

$$x_n = \frac{1}{2}[(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n + (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{\delta}}[(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n - (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n]$$,

είναι λύση της εξίσωσης του Pell. Η πρώτη θετική λύση αυτής λέγεται **πρωτεύουσα λύση**.

Στον επόμενο πίνακα αναγράφονται ορισμένες πρωτεύουσες λύσεις για διάφορες τιμές του δ, όπου κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι ορισμένες δεν είναι καθόλου προφανείς, όπως συμβαίνει στην για παράδειγμα στην περίπτωση όπου δ=13 ή δ=19

δ	x_0	y_0	δ	x_0	y_0
2	3	2	11	10	3
3	2	1	12	7	2
5	9	4	13	649	180
7	8	3	17	33	8
8	3	1	19	170	39

Πρωτεύουσες λύσεις για διάφορες τιμές του δ

Με την εύρεση του αλγόριθμου, που βρίσκει μια πρωτεύουσα λύση της διοφαντικής εξίσωσης του Pell, ασχολήθηκαν πολλοί και μεγάλοι μαθηματικοί, μεταξύ των οποίων και οι Lagrange και Euler. [3]

Στην ίδια μορφή και στη λύση αυτής ανάγονται και άλλες, γενικότερες μορφές, όπως

$$x^2 - \delta y^2 = -1$$
$$x^2 - \delta y^2 = k,\ \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$$
$$ax^2 - by^2 = 1,\ \ ab \neq k^2,\ \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}.$$

Κεφάλαιο 2: Διοφαντικές Εξισώσεις

2.1 Ο Διόφαντος

Ποιες νέες ιδέες ο Διόφαντος εισήγαγε στην ανάπτυξη αυτής της περιοχής; Τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν με την εύρεση των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων στην περιοχή των ακέραιων αριθμών είναι γνωστά από την αρχαιότητα. Δεν γνωρίζουμε πως ακριβώς δημιουργήθηκε το θέμα στην αρχαιότητα. Ετυμολογικά, ο όρος προέρχεται από τον Διόφαντο που κατά επικρατέστερη έκδοση έζησε γύρω στο 250 μ.Χ. Κλασσικό σύγγραμμα του, είναι το γνωστό «Τα Αριθμητικά», που σε ελληνική έκδοση περιέχονται τα 6 από τα 13 στα οποία ήταν γραμμένο το πρότυπο. Το 1971 σε Περσική βιβλιοθήκη βρέθηκαν 4 νέα βιβλία.

Ο Διόφαντος ασχολήθηκε με εξισώσεις της μορφής $f(x_{1,}x_{2,\dots,}x_n) = 0$ όπου $f(x_{1,}x_{2,\dots,}x_n)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και ζητούσε λύσεις στους ακεραίους αριθμούς .Οι εξισώσεις αυτές σήμερα ονομάζονται Διοφαντικές εξισώσεις και η μελέτη αυτών των εξισώσεων Διοφαντική Ανάλυση.

Το θέμα των Διοφαντικών εξισώσεων δεν αρχίζει με τον Διόφαντο. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ασχοληθεί με την εξίσωση $\chi^2+\psi^2 = z^2$ για να βρουν πυθαγόρειες τριάδες. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η λύση αυτού του προβλήματος ήταν γνωστή και στους Βαβυλωνίους. Ο Ευκλείδης διατυπώνει το πρόβλημα στη μορφή: «Ευρείν δύο τετραγώνους αριθμούς, ώστε το συγκείμενον εξ αυτών είναι τετράγωνον». Το ίδιο πρόβλημα διατυπώνεται από τον Διόφαντο στα «Αριθμητικά»: «Τον επιταχθέντα τετράγωνον διελείν εις δύο τετραγώνους». Επίσης στα στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχει η εξίσωση χ^2-$2\psi^2$=1.Επίσης ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με την χ^2-$d\psi^2$=1, όπου d δεν είναι τέλειο τετράγωνο στο Βοεικό Πρόβλημα. Θ' ασχοληθούμε με αυτήν παρακάτω.

Για την εξίσωση $a\chi+b\psi = c$ δεν έχουμε στοιχεία, ότι οι αρχαίοι Έλληνες την έλυσαν. Πρέπει όμως να την γνώριζαν όπως συμπεραίνουμε από την μέθοδο της ανθυφαίρεσης που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη, καθώς επίσης και από το γεγονός ότι ο Διόφαντος δεν ασχολείται καθόλου με αυτή, τη θεωρεί γνωστή ,και προχωράει στις εξισώσεις 2ου μέχρι και 6ου βαθμού.[5]

2.2 Εισαγωγή και Ορισμοί των Διοφαντικών Εξισώσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Διοφαντική ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $f(x_1, x_2, \dots x_n)=0$ όπου $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και ζητούμε λύσεις στους ακέραιους αριθμούς.

Μια Διοφαντική εξίσωση θεωρείται ότι έχει λυθεί αν έχει δοθεί απάντηση στα εξής ερωτήματα:

(1) Έχει η εξίσωση τουλάχιστον μία ακέραια λύση
(2) Ο αριθμός των ακεραίων λύσεων είναι πεπερασμένος ή άπειρος
(3) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις

Μερική απάντηση στα προαναφερθέντα ερωτήματα είναι μια μερική λύση του προβλήματος.
Μία n-άδα ακεραίων αριθμών $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τέτοια ώστε $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ καλείται **ρητή ακέραια λύση** της παραπάνω εξίσωσης. [15],[16]

2.3: Παραδείγματα:

1. Η Διοφαντική εξίσωση $2x=2\psi+1$, προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

2. Γνωρίζουμε τέσσερις λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $x^3+\psi^3+z^3=3$. Τις

$$(x, \psi, z)=(1,1,1,), (4,4,-5), (4,-5,4), (-5,4,4).$$

Αλλά δεν γνωρίζουμε πώς να βρούμε όλες τις λύσεις της.

3. Θα προσδιορίσουμε τις ακέραιες και ρητές λύσεις της εξίσωσης $2x^3+x\psi-7=0$.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται $(-2\,x^3 + 7) / x = \psi$.

Επομένως το σύνολο των ρητών λύσεων αποτελείται από τα εξής ζεύγη: $(x,(-2x^3+7)/x)$, όπου x ρητός διάφορος του μηδενός. Αν το ζεύγος (x, ψ) είναι μια ακέραια λύση , τότε θα έχουμε: $x(2x^2+\psi) =7$, οπότε $x \mid 7$ και επομένως $x=1$ ή $x =-1$ ή $x =7$ ή $x = -7$. Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις είναι τα ζεύγη $(1,5),(-1,-9),(7,-97),(-7,-99)$.

4. Θα δείξουμε ότι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $ψ^2 = x^3 - x$ είναι ψ=0,x=0 ή x=1,ψ=0.

Έστω (x, ψ) μία ακέραια λύση. Αν x<-1,τότε έχουμε $x^3 - x < 0$ απ' όπου $ψ^2 < 0$ που είναι άτοπο.

Άρα x≥-1.

Έχουμε $ψ^2 = x(x-1)(x+1)$. Καθώς ο ακέραιος x είναι πρώτος προς τον (x-1)(x+1), υπάρχουν A , B ε Z, έτσι ώστε $x = A^2$ και $(x-1)(x+1)=B^2$.
Αν d=(x-1,x+1),τότε d=1,αν ο x είναι άρτιος και d=2 αν ο x είναι περιττός.

Οπότε υπάρχουν C,Dε Z ώστε:

$x-1=C^2$ $x+1=D^2$ αν ο x είναι άρτιος

$x-1=2C^2$ $x+1=2D^2$ αν ο x είναι περιττός.

Έτσι αν ο x είναι άρτιος έχουμε $1=D^2 - x = D^2 - A^2$ και αν ο x είναι περιττός, $2D^2 - 2C^2 = 2$ απ' όπου $D^2 - C^2 = 1$.

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $u^2 - v^2 = 1$ είναι u=1 και v = 0 ή u = -1 και v = 0.Άρα D=1 ή D=-1 και επομένως x = 0 ή 1 .Συνεπώς οι μόνες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι η ψ=0,x=0 ή x=1, ψ=0.

.

2.4: Γραμμικές Διοφαντικές Εξισώσεις:

Σ' αυτή την παράγραφο γίνεται μελέτη εξισώσεων της μορφής $f(x_1,x_2,\dots x_n) = 0$, όπου $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, βαθμού 1. Τέτοιες εξισώσεις καλούνται γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n, b \in Z$, $n\geq 2$, και $\alpha_i \neq 0$ και ($i= 1,2,\dots n$). Αν $d= (\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$, η εξίσωση $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = b$ έχει ακέραια λύση, αν και μόνο εάν, $d \mid b$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Επειδή $d= (\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$,υπάρχουν $c_1,c_2,\dots c_n \in Z$ έτσι ώστε $\alpha_i=dc_i$ ($i=1,\dots n$).Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραια λύση, δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2,\dots x_n \in Z$ με $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = b$. Τότε ισχύει το εξής: $(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n)d=b$ και κατά συνέπεια $d \mid b$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $d \mid b$. Τότε $b = dd'$, όπου $d' \in Z$. Από πρόταση 1.6.3 θα υπάρχουν ακέραιοι $c_1,c_2,\dots c_n$: $\alpha_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots a_n c_n = d$. Επομένως θα έχουμε: $\alpha_1(d' c_1)+\dots a_n (d' c_n)=dd'=b$. Συνεπώς,οι ακέραιοι $x_i=d' c_i$ ($i=1,2,\dots,n$) είναι μία λύση της εξίσωσης $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = b$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Η εξίσωση $6\chi+8\psi+10z=1$ δεν έχει ακέραια λύση ενώ η $6\chi+8\psi+10z=2$ έχει ακέραια λύση.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω ότι έχουμε την εξίσωση : $\alpha x + b\psi = c$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.

Έστω α, bε Z με $\alpha \neq 0$ και $b \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι το ζεύγος (x_0, ψ_0) είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης αx+bψ = c .Αν d=(α,b) τότε όλες οι ακέραιες λύσης της γραμμικής εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_0+(b/d)t,\ \psi = \psi_0-(\alpha/d)t\ ,\ t \in Z.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Καθώς d=(α, b), υπάρχουν α΄, b΄ ε Z, έτσι ώστε α = dα΄ και b = db΄ με (α ΄,b΄) = 1.Θα δείξουμε πρώτα ότι οι ακέραιοι $x = x_0+b't$, $\psi = \psi_0-\alpha't$, $t \in Z$ είναι λύσεις της εξίσωσης αx+bψ=c. Πραγματικά $\alpha x+b\psi= \alpha(x_0+b't)+b(\psi_0-\alpha't) = \alpha x_0+b\psi_0=c$. Έστω (x΄, ψ΄) μία ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης. Τότε προφανώς έχουμε $\alpha x_0+b\psi_0=c= \alpha x'+b\psi'$ απ' όπου παίρνουμε $\alpha(x'-x_0)=b(\psi_0-\psi')$ και επομένως $\alpha'(x'-x_0)=b'(\psi_0-\psi')$.΄Αρα $\alpha' \mid b'(\psi_0-\psi')$.

Καθώς (α΄,b΄)=1 παίρνουμε $\alpha' \mid \psi_0-\psi'$. Έτσι $\psi_0-\psi'=\alpha't$ και $x'-x_0= b't$,για κάποιο ακέραιο t. Στην περίπτωση όπου η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις μπορούμε εύκολα να τις προσδιορίσουμε. Πιο συγκεκριμένα αν d=(α,b) έχουμε από την πρόταση 1.6.1 c=dc΄ με c΄ε Z. Χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για την εύρεση του d, προσδιορίζουμε x_0, ψ_0 ε Z έτσι ώστε $\alpha x_0+ b\psi_0= c$. Επομένως οι ακέραιοι $x = c'x_0$ και $\psi = c'\psi_0$ είναι μία λύση της παραπάνω εξίσωσης. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της πρότασης 1.6.2 παίρνουμε όλες τις ακέραιες λύσεις. [18]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την εξίσωση 221χ+340ψ=51.Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος δίνει:

340=221+119
221=119+102
119=102+17
102=6*17

Επομένως (340,221 =17. Επειδή το 17 διαιρεί το 51 συνεπάγεται ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις.
Έχουμε 17= 119-102= 119- (221-119)= -221+ 2* 119= -221 + 2* (340-221)= 2*340-3*221 και επομένως 51=-9*221+6*340.Συνεπώς οι ακέραιοι $x_0=-9$ και $\psi_0=6$ είναι μία λύση της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης. οπότε όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις x=-9+20t ,ψ-6-13t ,tε Z.

2. Η διοφαντική εξίσωση 41x+35ψ=8 έχει ακέραιες λύσεις επειδή ισχύει: (41,35)=1.

Από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη προκύπτει ότι 1=41*6-35*7.Ισχύει:

41=35+6
35=6*5+5
6=5+1
5=5*1

Άρα 1=6-5=
6-(35-6*5)
=6*6-35
=6*(41-35)-35
=6*41-7*35

Συνεπώς 8=48*41-56*35
Άρα το ζεύγος (48,-56) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης. Όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι τα ζεύγη (48+35t,-56-41t) με t ακέραιο.

3. Η διοφαντική εξίσωση 6χ+15ψ=4 δεν έχει ακέραια λύση επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 6 και 15 δεν διαιρεί τον 4.

Η επίλυση μίας γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης με περισσότερες από δύο μεταβλητές ανάγεται εύκολα στην επίλυση μίας εξίσωσης δύο μόνο μεταβλητών.

2.5: Η Εξίσωση αx+βψ+γζ= δ όπου α,β,γ,δ ε Z με αβγ≠0.

Έστω ε=(α, β). Τότε υπάρχουν α΄, β΄ε Ζ έτσι ώστε α=εα΄, β=εβ΄, και (α΄, β΄)=1.Θέτουμε α΄x+β΄ψ=w.Οπότε εw+γζ = δ. Έτσι, βλέπουμε ότι η τριάδα ($χ_0$,$ψ_0$,z_0) είναι μία ακέραια λύση της γραμμικής εξίσωσης αν και μόνο εάν οι ακέραιοι w_0=α΄x_0+β΄$ψ_0$ και z_0 επαληθεύουν την εw + γζ = δ. Για να προσδιορίσουμε λοιπόν τις ακέραιες λύσεις της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης τριών μεταβλητών, αρκεί να προσδιορίσουμε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος εw+γζ = δ και α΄x+β΄ψ = w.

Έτσι για κάθε tεZ έχουμε α΄ χ+β΄ ψ = w_0+(γ/d)*t. Καθώς (α΄, β΄)=1,αυτή η εξίσωση έχει ακέραια λύση. Προσδιορίζουμε u,v ε Z έτσι ώστε α΄u+β΄v=1.Οπότε οι ακέραιοι x_0=u [w_0+(γ/d)*t] και $ψ_0$=v*[w_0+(γ/d)*t] αποτελούν μία ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης. Επομένως x=x_0+β΄s και ψ=$ψ_0$-α΄s,s ε Z.Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης αx+βψ+γζ = δ δίνονται από τις σχέσεις

x= u [w_0+(γ/d)*t]+(β/d)*s ,$ψ_0$= v*[w_0+(γ/d)*t]-(α/d)*s, z=z_0-(ε/d)*t, t,s ε Z.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $α_1$,$α_2$,…$α_m$,m>1 ακέραιοι και ένας τουλάχιστον από τους $α_i$, i=1,2 …,m είναι διαφορετικός από το μηδέν. Τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x_1,x_2,…x_m ,τέτοιοι ώστε να ισχύει ($α_1$,$α_2$,…$α_m$) = $α_1x_1$+$α_2x_2$+…+$α_mx_m$. [17]

Κεφάλαιο 3: Η εξίσωση του Pell στα Ινδικά Μαθηματικά

3.1 Ιστορική Ανασκόπηση

Τα Ινδικά μαθηματικά ήταν ένα μίγμα καλού και κακού. Ένα τμήμα, όμως, του καλού ήταν εξαίρετο και στο σημείο αυτό ο Βραχμαγκούπτα αξίζει ιδιαίτερης μνείας. Η ινδική άλγεβρα προώθησε πολύ την αόριστη ανάλυση στην οποία η συνεισφορά του Βραχμαγκούπτα είναι πολύ σημαντική. Οι Ινδοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν συστηματικά θα λέγαμε με την επίλυση απροσδιόριστων εξισώσεων. Μεταγενέστεροι μαθηματικοί, όπως ο Brahmagupta και ο Baskara II ασχολήθηκαν κυρίως με εξισώσεις 2ου βαθμού του τύπου, $Dx^2 \pm b = y^2$. Ειδική κατηγορία των ανωτέρω εξισώσεων, είναι οι εξισώσεις της μορφής, $x^2 = Dy^2 \pm 1$ οι οποίες σήμερα ονομάζονται και εξισώσεις του Pell.(εσφαλμένα πήραν το όνομα του John Pell μετά τον 17ο αιώνα) Πολλοί αξιόλογοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι ασχολήθηκαν με τις εξισώσεις αυτές και μάλιστα από αρχαιοτάτων χρόνων. Όμως ολοκληρωμένη λύση τους δόθηκε πολύ αργότερα, από τον J.L.Lagrange (1736-1813).

Ιστορικά γεγονότα καταμαρτυρούν ότι, η προσπάθεια επίλυσης τέτοιων εξισώσεων άρχισε τουλάχιστον 500 χρόνια προ Χριστού. Όπως αναφέρουν ο Θέων ο Σμυρνεύς (2ος αιώνας μ. Χ.) και ο Πρόκλος (5^{ος} αιώνας μ. Χ.), οι Πυθαγόρειοι για να υπολογίσουν τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, βρήκαν την λύση της εξίσωσης $x^2 + 2y^2 = \pm 1$. Ακόμη ο Πυθαγόρας και ο Πλάτων έδωσαν δύο μεθόδους επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$.

Ένας άλλος μεγάλος μαθηματικός ο Διόφαντος τον 3ο αιώνα μ.Χ. περίπου, ασχολήθηκε εκτενώς με τις απροσδιόριστες εξισώσεις, οι οποίες μάλιστα ονομάστηκαν προς τιμήν του, *Διοφαντικές εξισώσεις* και έχουν συνήθως άπειρες λύσεις. Ο Διόφαντος αποδεχόταν κυρίως μόνο θετικές ρητές λύσεις. Συνήθως ήταν αρκετή γι' αυτόν η εύρεση μιας μόνο λύσης και του ήταν αδιάφορο αν η λύση αυτή ήταν ακέραιη ή κλασματική.

Την γενική λύση των Διοφαντικών εξισώσεων 1ου βαθμού υπέδειξε για πρώτη φορά ο Αριαμπάτα (500 μ.Χ.) και επεξεργάστηκαν στη συνέχεια ο Brahmagupta (625 μ.Χ.) και ο Bhaskara II (1150 μ.Χ.). Ο Bhaskara στο έργο του που φέρει το όνομα BeejaGanita, μεταξύ των άλλων δίνει τις λύσεις των εξισώσεων $67x^2 +1 = y^2$ και $61x^2 +1 = y^2$. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι η εξίσωση $61x^2 +1 = y^2$, προτάθηκε για λύση από τον Fermat στον Frencil σε ένα γράμμα που του έστειλε τον Φεβρουάριο του 1657. Οι δύο αυτοί επιστήμονες συνεργαζόμενοι κατόρθωσαν να λύσουν την εξίσωση με γενικό τύπο $x^2 \pm 1 = Dy^2$, για τιμές του D μικρότερες του 150. Στη συνέχεια ο Fermat στέλνει την εργασία του στον J.Wallis (1616-1703 μ.Χ.), ένα αξιόλογο Άγγλο μαθηματικό της εποχής εκείνης και του ζητά να βρει τις λύσεις για όλες τις τιμές του D. Ο Wallis σε συνεργασία με τον Lord Brouncker έλυσαν την εξίσωση, $x^2 = Dy^2 +1$ για $D \leq 200$ και για D=313. Αργότερα ο Euler (1707-1783 μ.Χ.), έλυσε αυτή την εξίσωση με την μέθοδο των συνεχών κλασμάτων.[7]

3.2 Η επίλυση των εξισώσεων Pell (με την μέθοδο Βραχμαγκούπτα)

Αρχικά θα παραθέσουμε τρία σημαντικά λήμματα του Βραχμαγκούπτα, που είναι απαραίτητα για την περαιτέρω μελέτη του θέματος.

ΛΗΜΜΑ 1 (Βραχμαγκούπτα)

Αν η $(x, y) = (a,b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + k = y^2, \qquad (2)$$

και αν η $(x, y) = (a',b')$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + k' = y^2 \qquad (3)$$

τότε οι

$$(x, y) = (ab' + a'b, bb' + Daa')$$

$$(x, y) = (ab' - a'b, bb' - Daa')$$

είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$Dx^2 + kk' = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αφού οι (a,b), (a',b') είναι λύσεις των εξισώσεων (2) και (3), αντίστοιχα, έχουμε τις σχέσεις:

$$Da^2 + k = b^2 \text{ , } Da'^2 + k' = b'^2$$

Παίρνουμε $(x, y) = (ab' + a'b, bb' + Daa')$ και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} y^2 - Dx^2 &= (bb' + Daa')^2 - D(ab' + a'b)^2 \\ &=(b^2 b'^2 + D^2 a^2 a'^2 + 2bb'Daa') - D(a^2 b'^2 + a'^2 b^2 + 2ab'a'b) \\ &= b'^2 (b^2 - Da^2) - Da'^2 (b^2 - Da^2) \\ &= (b^2 - Da^2) * (b'^2 - Da'^2) = kk' \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το ζευγάρι :

$$(x, y) = (ab' - a'b, bb' - Daa')$$

ικανοποιεί την εξίσωση: $Dx^2 + kk' = y^2$.

ΛΗΜΜΑ 2 (Βραχμαγκούπτα)

Αν η $(x, y) = (a,b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + k = y^2, \qquad (2)$$

τότε η $(x, y)= (2ab,b^2 + Da^2)$ είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$Dx^2 + k^2 = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη αυτή προκύπτει από το Λήμμα 1 θέτοντας

$$k = k' \text{ και } (a',b') = (a,b).$$

Διαφορετικά, άμεσα διαπιστώνουμε ότι:

$$y^2 - Dx^2 = (b^2 + Da^2)^2 - D(2ab)^2 = (b^2 + Da^2)^2 - 4b^2Da^2 = (b^2 - Da^2)^2 = k^2,$$

αφού ισχύει η σχέση $Da^2 + k^2 = b^2$.

ΛΗΜΜΑ 3 (Βραχμαγκούπτα)

Έστω η $(x, y) = (a,b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + k^2 = y^2,$$

Αν k / a και k / b τότε η $(x,y)=\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right)$ είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε τους $a' = a / k$ και $b' = b / k$, ακέραιους και

$$b'^2 - Da'^2 = \frac{b^2}{k^2} - D\cdot\frac{a^2}{k^2} = \frac{1}{k^2}(b^2 - Da^2) = 1$$

αφού $Da^2 + k^2 = b^2$.

Παρατήρηση

Αν στο Λήμμα 2 πάρουμε $k = 1$ τότε:

Αν η (a,b) είναι μια λύση της $Dx^2 - 1 = y^2$ (6), τότε η $(2ab, b^2 + Da^2)$ είναι μια λύση της

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι σε αντίθεση με την εξίσωση $Dx^2+1 = y^2$, η εξίσωση $Dx^2-1 = y^2$, μπορεί να μην έχει ακέραιες λύσεις.

Παράδειγμα 1

Η εξίσωση $3x^2-1 = y^2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση
Αν x ακέραιος, έχουμε:

$$x^2 \equiv \begin{cases} 0(\text{mod}4), \ \textit{για x άρτιο} \\ 1(\text{mod}4), \textit{για x περιττό} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 \equiv \begin{cases} 0(\text{mod}4), \ \textit{για x άρτιο} \\ 3(\text{mod}4), \textit{για x περιττό} \end{cases}$$

και

$$y^2+1 = y^2+1 \equiv \begin{cases} 1(\text{mod}4), \ \textit{για x άρτιο} \\ 2(\text{mod}4), \ \textit{για x περιττό} \end{cases}$$

Συνεπώς, για κάθε ζεύγος ακεραίων (x, y) έχουμε: $3x^2 \neq y^2+1$.

Παρατήρηση.
Το ίδιο ισχύει και όταν αντί του 3 έχουμε οποιοδήποτε αριθμό $D \equiv 3(\text{mod}4)$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι :

Η εξίσωση $Dx^2-1 = y^2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις όταν $\equiv 3(\text{mod}4)$.

Παράδειγμα 2

Ας δούμε ένα πρόβλημα του Brahmagupta, που παρακινεί στην επίλυσή του, ώστε εκείνος που κατορθώσει να βρει τη λύση του μέσα σε έναν χρόνο, χαρακτηρίζεται «μαθηματικός».

« Όποιος κατορθώσει να βρει σε ένα χρόνο, το τετράγωνο (ενός αριθμού)πολλαπλασιασμένο με το 92 και αυξανόμενο κατά 1, ώστε (το αποτέλεσμα αυτό) να είναι τέλειο τετράγωνο, τότε αυτός θα είναι μαθηματικός»

Όμως με την βοήθεια των λημμάτων του Brahmagupta, η λύση του προβλήματος αυτού είναι μια εύκολη υπόθεση. [11]

Λύση

Έχουμε την εξίσωση: $92x^2+1= y^2$, και βρίσκουμε μια βοηθητική εξίσωση αυτής που είναι η:

$92x^2+ 8 = y^2$, με μία λύση της το ζεύγος $(x, y)=(1,10)$.

Το ζευγάρι $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$ είναι μια λύση της εξίσωσης $92x^2+ 2 = y^2$
Από το 2ο λήμμα, έχουμε ότι το $(x, y) =(5,48)$ είναι μία λύση της $92x^2+ 4 = y^2$

Από το 3ο λήμμα, το $(x, y) =(5/2,24)$ είναι μία ρητή λύση της εξίσωσης: $92x^2 +1= y^2$.

Εφαρμόζοντας ξανά το 1ο λήμμα, βρίσκουμε μια ακέραια λύση της αρχικής εξίσωσης που είναι η $(x, y) =(120,1151)$

Τα λήμματα του Brahmagupta έχουν περιγραφεί από τους Bhaskara II (1150 μ.Χ.), Narayana (1350 μ.Χ.), Jnana Raja (1503 μ.Χ.) και Kamalakara (1658 μ.Χ.). Οι Euler(1764 μ.Χ.) και Lagrange(1768μ.Χ.) ανακάλυψαν εκ νέου τα λήμματα του Brahmagupta και αναγνώρισαν την θεμελιώδη σημασία τους. Τα παρακάτω προβλήματα αναφέρονται από τον Bhaskara [II] .

Προβλήματα

(Α) Ποιο τετράγωνο(αριθμού) αν πολλαπλασιαστεί με το 8 και αυξηθεί κατά μία μονάδα , είναι τετράγωνο;

(Β) Ποιό τετράγωνο(αριθμού) αν πολλαπλασιαστεί με το 11 και αυξηθεί κατά μία μονάδα , είναι τετράγωνο;

Λύση
Στην περίπτωση του προβλήματος (Α) αρκεί να επιλύσουμε την γραμμική εξίσωση 2ου βαθμού: $8x^2 +1 = y^2$ και στην περίπτωση του προβλήματος (Β) την: $11x^2 +1 = y^2$.

Λύση της εξίσωσης:

$$8x^2 +1 = y^2 , (D = 8)$$

Αναζητώντας μια λύση της εξίσωσης αυτής, με ευκολία βρίσκουμε την $(x_0 , y_0) = (1,3)$.

Από το 2ο λήμμα παίρνουμε μια δεύτερη λύση αυτής, την:

$$(x_1 , y_1) = (2x_0y_0 , Dx_0^2 + y_0^2) = (6,17)$$

Στη συνέχεια από το 1ο λήμμα επιτυγχάνουμε μια νέα λύση από τις δύο προηγούμενες, $(x_0 , y_0) = (1,3)$ και $(x_1 , y_1) = (6,17)$, ενώ με την σύνθεση (Bhaskara) βρίσκουμε τη λύση:

$$(x_2 , y_2) = (x_0 y_1 + x_1 y_0 ,Dx_0 x_1 + y_0 y_1) = (35,99).$$

Έτσι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε έναν άπειρο αριθμό λύσεων της εξίσωσης.

Λύση της εξίσωσης:

$$11x^2 +1 = y^2 , (D = 11)$$

Παίρνοντας για $x_0 =1$ παρατηρούμε ότι $11x_0^2 = 11 = 3^2+2$, που σημαίνει ότι το ζεύγος $\left(x_0, y_0\right)=\left(1,3\right)$ είναι μια λύση της βοηθητικής εξίσωσης:

$$11x^2 - 2 = y^2$$

Για $(x_0 , y_0) = (1,3)$, από το λήμμα 2, βρίσκουμε ότι:

$$\left(x_1, y_1\right) = (2x_0y_0 , Dx_0^2 + y_0^2) = (6,20)$$

είναι λύση της εξίσωσης

$$11x_1^2 + (-2)^2 = y_1^2 \text{ ή } 11x_1^2 + 4 = y_1^2$$

Παίρνοντας $(x_2 , y_2) = (x_1/2 , y_1/2) = (3,10)$, τότε από την (8) έχουμε:

$$11(2x_2^2) + 4 = (2y_2)^2 \text{ ή } \quad 2\ 11x_2^2 +1 = y_2^2$$

Αφού η $(x_2 , y_2) = (3,10)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, από το λήμμα 2, βρίσκουμε μια νέα λύση την:

$$(x_3 ,y_3)\ (2x_2y_2\ , Dx_2^2 +y_2^2) =(60,199)$$

Από τις δύο λύσεις $(x_0 , y_0) = (1,3)$ και $(x_3 , y_3)=(69,199)$ της εξίσωσης και με εφαρμογή του 1ου και 2ου λήμματος παίρνουμε έναν άπειρο αριθμό λύσεων.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος του Brahmagupta.για την εύρεση ακεραίων λύσεων της εξίσωσης με γενικό τύπο:

$$Dx^2 +1 = y^2 , D \neq a ,$$

όπου a τέλειο τετράγωνο, σχετίζεται με την εύρεση μιας λύσης της βοηθητικής εξίσωσης που είναι της μορφής:

$$Dx_0^2 + k = y_0^2 , (k = \pm1,\pm2,\pm4) ,$$

όπου (x_0 , y_0 φυσικοί αριθμοί)
Έπειτα εφαρμόζοντας κατά περίπτωση τα λήμματα που προαναφέραμε επιτυγχάνουμε την εύρεση άπειρου πλήθους λύσεων.

Το παρακάτω έχει κάποια σχέση με τα προηγούμενα; Αν ναι να βάλουμε τίτλο Πρόβλημα (Γ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II. [***Ρητές λύσεις της εξίσωσης*:** $11x^2 +1 = y^2$]. Αν και το πραγματικό ενδιαφέρον εστιάζεται στην εύρεση θετικών ακεραίων λύσεων, στο παράδειγμα αυτό θα αναζητήσουμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης. Ισχύει ότι, αν m ρητός αριθμός, τότε

$$(x, y)= \left(\frac{2m}{m^2-D}, \frac{m^2+D}{m^2-D}\right)$$

θα είναι πάντοτε μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 +1 = y^2$$

Αυτό αποδεικνύεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$y^2 - Dx^2 = \frac{1}{(m^2-D^2)}\left\{\left(m^2+D^2-D(2m)^2\right)\right\} = \frac{\left(m^2-D\right)^2}{\left(m^2-D\right)^2} = 1$$

Αν θέλουμε να βρούμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης, $11x^2 +1 = y^2$, παίρνουμε $x_0 =1$ και τότε έχουμε τη σχέση:

$$11x_0^2 +5=11+5=4^2 ,$$

οπότε το ζεύγος $(x_0 , y_0) = (1,4)$ θα είναι μια λύση της βοηθητικής εξίσωσης:

$$11x^2 + 5 = y^2$$

Από το 2ο λήμμα βρίσκουμε ότι,

$$(x_1 , y_1) = (2x_0 y_0 , Dx_0^2 + y_0^2)=(8,27),$$

είναι μια λύση της εξίσωσης:$11x^2 + 25 = y^2$

Έστω τώρα το ζεύγος: $\left(x_2, y_2\right) = \left(\frac{x_1}{5}, \frac{y_1}{5}\right)$. Από το 3ο λήμμα παίρνουμε,

Τότε έχουμε,

$$11{x_1}^2 + 25 = {y_1}^2 \Leftrightarrow \ 11(\frac{x_1}{5})^2 + 1 = (\frac{y_1}{5})^2 ,$$

δηλαδή η $\left(x_2, y_2\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{27}{5}\right)$ είναι μια ρητή λύση της εξίσωσης $11x^2 +1 = y^2$.

Μια άλλη λύση της ίδιας εξίσωσης είναι η (3,10). Με συνδυασμό αυτών των δύο λύσεων και κάνοντας χρήση του 1ου λήμματος, βρίσκουμε τις λύσεις (x_3 , y_3)και 3 3 (x_3', y_3') που είναι οι εξής:

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= 3(\frac{27}{5}) + 10(\frac{8}{5}) \\ y_3 &= 10(\frac{27}{5}) + 11\cdot 3(\frac{8}{5}) \end{aligned}\right\} \quad \text{και} \quad \left\{\begin{aligned} x_3' &= 3(\frac{27}{5}) - 10(\frac{8}{5}) \\ y_3' &= 10(\frac{27}{5}) - 11\cdot 3(\frac{8}{5}) \end{aligned}\right\}$$

δηλαδή τα ζευγάρια

$$(x_3, y_3) = (\frac{161}{5}, \frac{534}{5}) \quad \text{και} \quad (x_3', y_3') = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$$

είναι ρητές λύσεις της εξίσωσης $11x^2 +1 = y^2$.

Όπως είδαμε, η μέθοδος Brahmagupta για την εύρεση ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $Dx^2 +1 = y^2$, $D \neq a$, όπου a τετράγωνος ακέραιος βασίζεται στην ύπαρξη μιας βοηθητικής εξίσωσης της μορφής

$$Dx_0^2 + k = y_0^2 , (k = \pm1,\pm2,\pm4) \text{ όπου } (x_0 , y_0 \text{ θετικοί ακέραιοι)}$$

Στη συνέχεια με κατάλληλο συνδυασμό των 3ων λημμάτων του Brahmagupta, επιτυγχάνουμε την εύρεση οποιουδήποτε αριθμού λύσεων επιθυμούμε.

Κεφάλαιο 4: Η δουλειά του Fermat πάνω στην εξίσωση του Pell

4.1 Εισαγωγή

Fermat

Η μαθηματική έρευνα του γάλλου μαθηματικού Fermat έχει άμεση σχέση με τις εξισώσεις του Διόφαντου. Είναι ευρέως αποδεκτή άποψη ότι η έρευνα του Fermat άρχισε ένα νέο στάδιο στην ανάπτυξη της θεωρίας των αριθμών. Το σημαντικότερο τμήμα της εργασίας του είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat, το οποίο δηλώνει ότι η εξίσωση:

$$x^n + y^n = z^n$$

δεν έχει καμία λύση διαφορετική από το μηδέν στην περιοχή των ακέραιων αριθμών για τα $x, y, z,$ όταν n> 2. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατη αυτή η εξίσωση για n > 2.Σημειώνει δε ο Fermat το εξής σχόλιο πάνω στο βιβλίο του Διόφαντου «Αριθμητικά» ,που μεταφράστηκαν και εκδόθηκαν το 1621 από τον Bachet: «Έχω μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει». Από αυτήν την υπόθεση, ένας από τους πιο συναρπαστικούς τομείς των μαθηματικών γεννήθηκε: η ιστορία "του τελευταίου θεωρήματος του Fermat". Ειρωνικά, κανένας δεν έμεινε έκπληκτος από το γεγονός ότι δεν βρέθηκε η απόδειξη αυτού του θεωρήματος, δεδομένου ότι επίσης δεν βρέθηκε οποιαδήποτε απόδειξη των αριθμητικών θεωρημάτων του Fermat.

Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί, όπως οι Euler, Legendre, Kummer, συμμετείχαν στην προσπάθεια να βρεθεί μια γενική λύση στο άλυτο «Τελευταίο θεώρημα του Fermat», αλλά πέτυχαν μόνο την εύρεση των αποδείξεων αλλά για τις ιδιαίτερες μόνο περιπτώσεις. Στα 1985-86 οι FREY, Serre, Ribert απέδειξαν ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat είναι συνέπεια μίας πρότασης της Αλγεβρικής Γεωμετρίας που αποδείχθηκε στις 19 Σεπτεμβρίου του 1994 από τον από τον Άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles. Έτσι οι υποθέσεις του Fermat αποδείχθηκαν μετά από 350 χρόνια.

Στο δέκατο πρόβλημά του, ο Hilbert ζητά μια καθολική μέθοδο για την επίλυση των διοφαντικών εξισώσεων.Το 1950 ο Martin Davis κάνει το πρώτο βήμα για να αποδείξει ότι το δέκατο πρόβλημα δεν λύνεται. Το πρόβλημα λύθηκε το 1970 από τον Yuri Matiyasevich ο οποίος στηρίχτηκε σε σημαντικές παρατηρήσεις της Julia Robinson .Σχετικά με το θεώρημα αυτό θ' ασχοληθούμε παρακάτω. [13], [14], [17].

4.2 *Το τελευταίο θεώρημα του Fermat*

Το πιο διάσημο πρόβλημα στον κλάδο των διοφαντικών εξισώσεων στο οποίο αναφερθήκαμε και πριν είναι το ακόλουθο το: Η διοφαντική εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xyz \neq 0$, για $n \geq 3$.

Θ' αποδείξουμε το τελευταίο θεώρημα του Fermat για κάθε n της μορφής 4m (m=1,2,3…).Αυτό είναι συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Η διοφαντική εξίσωση $\mathbf{x^4 + y^4 = z^2}$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xy \neq 0$

Απόδειξη

Καθώς οι δυνάμεις των x, y και z είναι άρτιες, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z που να ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο S, των ακεραίων λύσεων (x, y, z), με x > 0, y > 0 και z > 0, είναι μη κενό. Αν (x, y, z) ε S, καλούμε **ύψος** της λύσης (x, ψ,z) τον θετικό ακέραιο

$$h(x, \psi, z) = x\psi z.$$

Τα ύψη των στοιχείων του S αποτελούν ένα μη κενό σύνολο από θετικούς ακέραιους. Επομένως, υπάρχει στοιχείο (x_o, y_o, z_o) του S με ελάχιστο ύψος, δηλαδή,

$$h(x_o, y_o, z_o) \leq h(x, y, z), \text{ για κάθε } (x, y, z) \text{ ε S}.$$

Αν $(x_o, y_o) = d > 1$, τότε $d^2 \mid z_0$ και επομένως $(x_o/d, y_o/d, z_0/d^2)$ είναι ένα στοιχείο του S με ύψος

$$h(x_o/d, y_o/d, z_0/d^2) = x_0 y_0 z_o / d^4 < x_o y_o z_o = h(\chi_o, y_o, z_o).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η λύση (x_o, y_o, z_o) είναι ένα στοιχείο του S με ελάχιστο ύψος. Τότε $(x_o, y_o)=1$, απ' όπου έπεται ότι οι ακέραιοι x_0^2, y_0^2, z_0 είναι πρώτοι μεταξύ τους. Συνεπώς, η τριάδα (x_0^2, y_0^2, z_0) είναι μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο x_0^2 είναι άρτιος (οπότε οι y_0^2, z_0 είναι περιττοί). Έχουμε $x_o=2uv$, $y_o^2 = u^2 - v^2$, $z_o = u^2 + v^2$, όπου u, v είναι ακέραιοι όχι και οι δυο περιττοί με u > v > 0 και $(u, v) = 1$. Επομένως ισχύει $u^2 = v^2 + y_o^2$, με $(u, v, y_o) = 1$ και y_o περιττό, οπότε η τριάδα (v, y_0, u) είναι μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα. Επειδή ο ακέραιος y_o είναι περιττός, έπεται ότι ο v είναι άρτιος. Υπάρχουν ακέραιοι r , s, όχι και οι δύο περιττοί, με r > s > 0 και (r, s) = 1 έτσι, ώστε να έχουμε: v = 2rs , $y_o = r - s^2$, $u = r + s^2$.

Άρα ισχύει $x_0^2 = 4rs(r^2 + s^2)$, απ' όπου λαμβάνουμε $(\chi_o/2)^2 = rs(r^2 + s^2)$.

Καθώς (r, s)=1, ισχύει $(r, r^2 + s^2) \leq (r^2, r^2 + s^2) = (r^2, s^2) = (r, s)^2 = 1$. Άρα $(r, r^2 + s^2) = 1$.

Ομοίως παίρνουμε $(s, r + s^2) = 1$.

Επειδή οι ακέραιοι r, s, r^2+s^2 είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο και το γινόμενο τους ισούται με το τετράγωνο ενός ακεραίου, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1, y_1, z_1 \in N$ ώστε $r = x_1^2$, $s = y_1^2$ και $r^2+s^2=z_1^2$. Επομένως έχουμε: $x_1^4+y_1^4=z_1^2$
Η τριάδα (x_1,y_1,z_1) είναι ένα στοιχείο του S με ύψος:

$$h(x_1,y_1,z_1) = x_1y_1z_1=\sqrt{rs(r^2+s^2)} =\sqrt{(x_o)/2^2} =x_0/2 < x_o y_o z_o = h(x_0, y_0, z_0).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η λύση $(x_o y_o z_o)$ είναι ένα στοιχείο του S με ελάχιστο ύψος. Συνεπώς η εξίσωση $x^4+\psi^4=z^2$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xy \neq 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω m θετικός ακέραιος. Η διοφαντική εξίσωση $x^{4m}+y^{4m}=z^{4m}$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xy \neq 0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι (u,v,w) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης $\chi^{4m}+y^{4m}=z^{4m}$ με $uv\neq 0$.Τότε η τριάδα (u^m,v^m,w^{2m}) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης $x^4+y^4=z^2$ και $u^m v^m \neq 0$.Σύμφωνα όμως με το προηγούμενο θεώρημα αυτό είναι άτοπο.[10]

4.3 *Η εξίσωση x^2-dy^2 = 1*

Έστω d ένας ακέραιος > 1 που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Ο Γάλλος μαθηματικός Fermat πρότεινε την διοφαντική εξίσωση $x^2 - dy^2 = 1$ στους άγγλους μαθηματικούς της εποχής του. Διετύπωσε την εικασία ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος ακεραίων $x \neq \pm1$, $y \neq 0$ που την επαληθεύει. Στα 1768 ο Lagrange δημοσίευσε πρώτος μία απόδειξη αυτής της εικασίας.
Συνήθως η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται ως εξίσωση του Pell. Αυτό όμως οφείλεται σε λάθος του Euler. Ο J. Pell δεν είχε καμμιά συνεισφορά στη μελέτη αυτής της εξίσωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω d>1 ένας ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Τότε η παραπάνω διοφαντική εξίσωση έχει άπειρο πλήθος ακεραίων λύσεων. Έστω (x_1,ψ_1) μία ακέραια λύση, με $x_1>1$, $\psi_1>1$, έτσι ώστε για κάθε άλλη ακέραια λύση (x, ψ) με $x>1,\psi>0$ να ισχύει $x > x_1$.
Τότε όλες οι ακέραιες λύσεις (x, ψ) της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από την σχέση

$$x+\psi\sqrt{d} = \pm(x_1+\psi_1\sqrt{d})^n, \ n \in Z.$$

Επομένως για την εύρεση των ακέραιων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης αρκεί να προσδιορίσουμε την ακέραια λύση (x_1,ψ_1) με $x_1>1$, $\psi_1>0$ με την ιδιότητα ο ακέραιος x_1 να είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου S = {u ε N/ u>1} και υπάρχει νεN με $u^2 - dv^2=1$.
Το ζεύγος (x_1, ψ_1) καλείται **βασική λύση** της εξίσωσης. Για πολύ μικρές τιμές του d είναι αρκετά εύκολο να προσδιορίσουμε τη βασική λύση.

Κεφάλαιο 5: Σύγχρονοι Τρόποι και Προτάσεις της Εξίσωσης του Pell

5.1 Εισαγωγικά-Ανασκόπηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τρόπους επίλυσης της γενικευμένης εξίσωσης του Pell $x^2 - Dy^2 = N$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ψάχνουμε ακέραιες λύσεις x, y για D θετικό ακέραιο, όχι τετράγωνο και N μη μηδενικό ακέραιο. Τελείως δειγματοληπτικά παρουσιάζουμε στον επόμενο πίνακα τις μικρότερες δυνατές λύσεις των x, y για την εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ και για $980 \leq D \leq 1005$.

D	x	y
980	51841	1656
981	158070671986249	5046808151700
982	8837	282
983	284088	9061
984	88805	2831
985	332929	10608
986	49299	1570
987	377	12
988	14549450527	462879684
989	550271588560695	17497618534396
990	881	28
991	379516400906811930638014896080	12055735790331359447442538767
992	63	2
993	2647	84
994	1135	36
995	8835999	280120
996	8553815	271038
997	14418057673	456624468
998	984076901	31150410
999	102688615	3248924
1000	39480499	1248483
1001	1060905	33532
1002	206869247	6535248
1003	9026	285
1004	27009633024199	852416459730
1005	2950149761	93059568

Ελάχιστες Θετικές Λύσεις της x^2-Dy^2=1

Μερικές φορές αυτό το ζευγάρι λύσεων x, y είναι αρκετά μικρό και άλλες παρατηρούμε ότι είναι αρκετά μεγάλο. Εκεί, λοιπόν, κρύβεται η δυσκολία προσέγγισης της συγκεκριμένης εξίσωσης: Το να βρούμε έναν συσχετισμό, μία κλειστή αναλυτική σχέση μεταξύ των x, y και του D.

Η κύρια μέθοδος που θα βρούμε για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση είναι ο **LMM αλγόριθμος**. Ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης πηγάζει ουσιαστικά από τον Lagrange, αλλά ‘ανακαλύφθηκε’ και εξετάστηκε εκ’ νέου από τον Keith Matthews και τον Richard Mollin.

Ό,τι παρουσιάζεται στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου είναι επαρκές για μικρές σχετικά τιμές του D και του N. Ειδικότερα θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις:

- $x^2 - Dy^2 = \pm 1$
- $x^2 - Dy^2 = \pm 4$
- $x^2 - Dy^2 = N$, για $N^2 < D$.

Επιπλέον, αξίζει να αναφέρουμε ότι για την γενική εξίσωση του Pell υπάρχουν τουλάχιστον πέντε καλές μέθοδοι:

1. Εξέταση όλων των περιπτώσεων (Brute-force), η οποία είναι καλή μόνο εάν το άνω όριο των λύσεων δεν είναι υπερβολικά μεγάλο
2. Ο αλγόριθμος Lagrange-Matthews-Mollin (LMM) algorithm,
3. Το σύστημα αναγωγών του Lagrange
4. Η κυκλική μέθοδος και
5. Χρήση δυαδικών τετραγωνικών μεθόδων

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής θα ασχοληθούμε ουσιαστικά με τις τρεις πρώτες.

5.2. PQa αλγόριθμος

Αυτός ο αλγόριθμος είναι η καρδιά πολλών μεθόδων για την επίλυση της εξίσωσης του Pell, συμπεριλαμβανομένου και του αλγορίθμου LMM. Υπολογίζει την απλή συνεχή κλασματική επέκταση της τετραγωνικής $(P_0 + \sqrt{D})/Q_0$ για συγκεκριμένα P_0, Q_0, D, και υπολογίζει μερικές βοηθητικές μεταβλητές.

Έστω P_0, Q_0, D ακέραιοι τέτοιοι ώστε $Q_0 \neq 0$, $D>0$ όχι τέλειο τετράγωνο και $P_0^2 = D \pmod{Q_0}$. Θέτω

$$A_{-2} = 0,\ A_{-1} = 1,$$

$$B_{-2} = 1,\ B_{-1} = 0,$$

$$G_{-2} = -P_0, \text{ και } \quad G_{-1} = Q_0.$$

Για $i \geq 0$ θέτω

$$a_i = \left\lfloor (P_i + \sqrt{D})/Q_i \right\rfloor,$$

$$A_i = a_i A_{i-1} + A_{i-2},$$

$$B_i = a_i B_{i-1} + B_{i-2},$$

$$G_i = a_i G_{i-1} + G_{i-2},$$

Και για $i \geq 1$ θέτω

$$P_i = a_{i-1} Q_{i-1} - P_{i-1} \text{ και}$$

$$Q_i = (D - P_i^2)/Q_{i-1}.$$

Ο προβληματισμός πάντα είναι για το πόσο ‘μακριά’ θα πάνε οι παραπάνω υπολογισμοί. Κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές θα είναι ακέραια για κάθε i για το οποίο ορίζεται. Μία σημαντική έξοδος για τον συγκεκριμένο αλγόριθμο είναι η ακολουθία a_0, a_1, a_2, a_3, … η οποία δίνει τη συνεχή κλασματική επέκταση του:

$$\xi_0 = (P_0 + \sqrt{D})/Q_0$$

Έτσι, υπολογίζουμε:

$$(P_0 + \sqrt{D})/Q_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Οι όροι a_i ονομάζονται μερικά πηλίκα του ξ_0.
Επίσης, για $i \geq 0$, έστω $\xi_i = (P_i + \sqrt{D})/Q_i$ έτσι ώστε ο συζυγής του ξ_i να είναι ο $(P_i - \sqrt{D})/Q_i$. Έστω $\xi = \xi_0$. Τα ξ_i είναι τα i- οστά ολοκληρωτικά πηλίκα του ξ. Αυτές οι μεταβλητές εμφανίζουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες από τις οποίες θα απαριθμήσουμε μερικές.

1. Για $i > 0$, $a_i > 0$.

2. Κάθε μία από τις ακολουθίες $\{a_i\}$, $\{P_i\}$ και $\{Q_i\}$ είναι περιοδική. Ειδικότερα, υπάρχει τουλάχιστον ένας μη αρνητικός ακέραιος i_0 και τουλάχιστον ένας θετικός ακέραιος l, το μήκος της ελάχιστης περιόδου, τέτοιοι ώστε για κάθε ακέραιο $i \geq i_0$ και $k > 0$, $a_{i+kl} = a_i$, $P_{i+kl} = P_i$, $Q_{i+kl} = Q_i$ και $\xi_{i+kl} = \xi_i$.

3 Για $i \geq i_0$, $0 < P_i < \sqrt{D}$, $0 < \sqrt{D} - P_i < Q_i$, και $\xi_{i+kl} = \xi_i$

4. Για $i \geq i_0$, αν $Q_{i \neq 1}$ τότε $a_i < \sqrt{D}$, ενώ εάν $Q_i=1$ τότε $\sqrt{D} < a_i < 2\sqrt{D}$.

5. Για $i \geq i_0$, $\xi_i=(P_i+ \sqrt{D})/Q_i$ και $\xi_i>1$ και $-1< \xi_i^*<0$.

6. $_i=\langle a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\rangle$ για $i \geq 0$.

7. Οι όροι $\xi_i=(P_i+ \sqrt{D})/Q_i$ είναι διαφορετικοί για $i_0 \leq i \leq i_0+l-1$.

8. $\gcd(A_i, B_i)=1$ για $i \geq -2$.

9. Οι λόγοι A_i/ B_i για $i \geq 0$ είναι ασύμπτωτες της συνεχούς συνάρτησης $(P_0+ \sqrt{D})/Q_0$

10. $(P_0+\sqrt{D})/Q_0 = \lim_{i\to\infty} \dfrac{A_i}{B_i}$.

11. $A_iB_{i-1} - A_{i-1}B_i = (-1)^{i-1}$ για $i \geq -1$.

12. $A_iB_{i-2} - A_{i-2}B_i = (-1)^i a_i$ για $i \geq 0$.

13. $\xi_i = a_i + \dfrac{1}{\xi_{i+1}}$ για $i \geq 0$.

14. $\dfrac{P_0+\sqrt{D}}{Q_0} = \dfrac{A_i\xi_{i+1}+A_{i-1}}{B_i\xi_{i+1}+B_{i-1}}$ για $i \geq -1$.

15. $P_i^2 \equiv D \pmod{|Q_i|}$ για $i \geq 0$.

16. $Q_i = Q_{i-2} - a_{i-1}(P_i - P_{i-1})$ για $i \geq 2$.

17. $G_i = Q_0A_i - P_0B_i$ για $i \geq -2$.

18. $A_i - B_i\xi = \dfrac{G_i - B_i\sqrt{D}}{Q_0}$; $A_i - B_i\overline{\xi} = \dfrac{G_i + B_i\sqrt{D}}{Q_0}$ για ≥ 0.

19. $(A_i - B_i\xi)\left(A_i - B_i\overline{\xi}\right) = \dfrac{(-1)^{i+1}Q_{i+1}}{Q_0}$ για $i \geq -1$.

20. $G_{i-1}^2 - DB_{i-1}^2 = (-1)^i Q_0 Q_i$ για $i \geq 0$.

21. $\gcd(G_i, B_i) = \gcd(Q_0, B_i)$ για $i \geq -2$.

22. $\gcd(G_i, B_i)$ διαιρεί Q_{i+1} για $i \geq -1$.

23. $\dfrac{1}{B_i+B_{i+1}} \leq \dfrac{a_{i+2}}{B_{i+2}} < |A_i - B_i\xi| < \dfrac{1}{B_{i+1}}$ για $i \geq 0$.

24. $\dfrac{1}{(a_{i+1}+2)B_i} \leq \dfrac{1}{B_i+B_{i+1}}$ για $i \geq 0$; $\dfrac{1}{2B_{i+1}} \leq \dfrac{1}{B_i+B_{i+1}}$ για $i \geq 0$.

25. $|A_i - \xi B_i| < \dfrac{1}{2B_i} \iff |Q_{i+1}| < \sqrt{D}$, για αρκετά μεγάλο i.

26. $\left|\dfrac{G_i - B_i\sqrt{D}}{Q_0}\right| < \dfrac{1}{2B_i} \iff \left|G_i^2 - B_i^2\sqrt{D}\right| < |Q_0|\sqrt{D}$ για αρκετά μεγάλο i.

27. $\lfloor\sqrt{D}\rfloor + \sqrt{D}$ ελαττώνεται.

Η σχέση G_i^2 - DB_i^2 = $(-1)^{i+1}Q_{i+1}Q_0$ είναι πολύ χρήσιμη για εμάς επειδή όλες οι μέθοδοι που εξετάζουμε περιλαμβάνουν την αρχική συνθήκη $Q_0=|N|$ και την ανάγκη εύρεσης εκείνων των i τέτοια ώστε $(-1)^{i+1}Q_{i+1}=N/|N|$. Έπειτα G_i, B_i θα είναι λύση στην εξίσωση που εξετάζουμε. Ωστόσο, από υπολογιστικής άποψης, τα G_i, B_i θα είναι μεγάλα, ενώ τα Q_0 Q_{i+1} θα είναι μικρά. Έτσι, αυτή η εξίσωση μερικές φορές επιτρέπει ακριβή υπολογισμό του αριστερού μέλους της G_i^2-DB_i^2=$(-1)^{i+1}Q_{i+1}Q_0$ όταν οι όροι του αριστερού μέλους ξεπερνούν την εφικτή ακρίβεια του υπολογιστικού μηχανήματος.

Είναι χρήσιμο να διευκρινιστεί πότε φτάνουμε στο τέλος της πρώτης περιόδου. Μία μέθοδος αναφέρεται εδώ. Ενώ έχουν υπολογιστεί τα P_i και Q_i, καθορίζεται το πότε η ποσότητα $(P_i+\sqrt{D})/Q_i$ μειώνεται και έστω i_r το μικρότερο I για το οποίο αυτό επιτυγχάνεται. Τότε βρίσκουμε το μικρότερο j> i_r για το οποίο P_{ir}=P_j και Q_{ir}=Q_j. Αυτό το j σηματοδοτεί την αρχή της δεύτερης περιόδου, έτσι j-1 είναι το τέλος της προηγούμενης.

Για δεδομένα P_0 και Q_0 υπάρχουν τρόποι για να καθοριστεί το πότε κάποιος έχει φτάσει στο μέσο της πρώτης περιόδου, χωρίς να προχωρήσει στον υπολογισμό ολόκληρης της περιόδου. Οι συνθήκες για αυτήν την κατάσταση είναι:

$$P_0 = 0 \text{ και } \quad Q_0 = 1, \text{ ή}$$

$$D \equiv 1 \pmod 4),\ P_0 = 1, \text{και} \quad Q_0 = 2,$$

Έστω τώρα l να είναι ο μικρότερος δείκτης l>0 τέτοιος ώστε Q_l=Q_0 (=1 ή 2). Εάν υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε P_j=P_{j+1} και ο j είναι ο μικρότερος τέτοιος ώστε l=2j και το μήκος της περιόδου είναι άρτιο. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε Q_j=Q_{j+1} και αν το j είναι ο μικρότερος τέτοιος ώστε l=2j+1 και το μήκος της περιόδου είναι περιττό. Για κάθε μία από αυτές τις δύο περιπτώσεις κάποιος μπορεί άμεσα να υπολογίσει το δεύτερο μισό της πρώτης περιόδου χρησιμοποιώντας τις επόμενες σχέσεις που εκφράζουν τις παλινδρομικές ιδιότητες των ακολουθιών Q_i, P_i και a_i: P_i=P_{l+1-I} για i=1, 2, 3, …, l, Q_i=Q_{l-I} για i= 0, 1, 2,…, l και a_i = a_{l-I} για i=1, 2, 3, …, l-1. Επίσης, a_l=$2a_0$ αν P_0=0 και Q_0=1 και a_l=$2a_0$-1 αν P_0=1 και Q_0=2. Αυτό δίνει P_i , Q_i και a_i μέσω i=l, και η περιοδικότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκταθούν αυτές οι ακολουθίες από εδώ. Υπάρχουν επιπλέον παλινδρομικές ιδιότητες από αυτές τις ακολουθίες που φαίνονται εύκολα ένα πάρουμε σαν παραδείγματα μερικές περιπτώσεις όπως (P_0 ,Q_0 , D) = (0, 1, 94), (0, 1, 353), (1, 2, 217), (1, 2, 481).

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τον PQa αλγόριθμο για P_0 = 11, Q_0 = 108 και D=13. Οι υπολογισμοί γίνονται μέχρι ένα σημείο λίγο παραπάνω από το τέλος της δεύτερης περιόδου. Να σημειωθεί ότι κάθε ακολουθία από τις {a_i}, {P_i} και {Q_ι} είναι περιοδικές για i≥3. Μέσα σε κάθε περίοδο υπάρχει ακριβώς ένα Q_i =1 για κάθε περίοδο του {Q_i}. Να παρατηρηθεί ότι οι τιμές των A_i, B_i και G_i αυξάνονται όσο το i αυξάνει. Για να υπολογίσουμε το G_i^2-DB_i^2, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε $(-1)^{i+1}Q_0Q_{i+1}$, ενώ το Q_0 είναι δεδομένο και το Q_{i+1} παραμένει σχετικά μικρό.

The PQa Algorithm

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	-11	
-1				1	0	108	
0	11	108	0	0	1	-11	108
1	-11	-1	7	1	7	31	324
2	4	3	2	2	15	51	-324
3	2	3	1	3	22	82	432
4	1	4	1	5	37	133	-108
5	3	1	6	33	244	880	432
6	3	4	1	38	281	1013	-324
7	1	3	1	71	525	1893	324
8	2	3	1	109	806	2906	-432
9	1	4	1	180	1331	4799	108
10	3	1	6	1189	8792	31700	-432
11	3	4	1	1369	10123	36499	324
12	1	3	1	2558	18915	68199	-324
13	2	3	1	3927	29038	104698	432
14	1	4	1	6485	47953	172897	-108
15	3	1	6	42837	316756	1142080	432
16	3	4	1	49322	364709	1314977	-324

PQa algorithm $P_0 = 11,\ Q_0 = 108, \qquad D = 13.$

5.3 Λύνοντας την x^2-Dy^2 = ± 1

Για να λύσουμε την $x^2-Dy^2 = \pm 1$ εφαρμόζουμε τον PQa αλγόριθμο για $P_0 = 0$ και $Q_0 =1$. Θα υπάρχει το μικρότερο l με $a_l=2a_0$, το οποίο θα είναι επίσης και το μικρότερο $l>0$ τέτοιο ώστε $Q_l =1$. Εδώ, το l είναι το μήκος της περιόδου του συνεχούς αναπτύγματος του $\sqrt{D}$. Εδώ μελετώνται οι δύο προηγούμενες περιπτώσεις: το l να είναι περιττό ή το l είναι άρτιο.

Εάν το l είναι περιττό, η $x^2-Dy^2 = - 1$ έχει λύσεις. Η μικρότερη θετική λύση δίνεται από τα $x= G_{l-1}$, $y=B_{l-1}$. Για κάθε θετικό ακέραιο k, εάν το k είναι περιττό τότε $x= G_{kl-1}$, $y=B_{kl-1}$ είναι μία λύση για την εξίσωση $x^2-Dy^2 = - 1$ και όλες οι λύσεις σε αυτήν την εξίσωση με τα x, y θετικά παράγονται με αυτόν τον τρόπο. Εάν k είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, τότε $x= G_{kl-1}$, $y=B_{kl-1}$ είναι μία λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2 = 1$ και όλες οι λύσεις γι' αυτήν για θετικά x,y παράγονται με αυτόν τον τρόπο. Η ελάχιστη θετική λύση για την $x^2-Dy^2 = 1$ είναι η $x= G_{2l-1}$, $y=B_{2l-1}$.

Αν τώρα λάβουμε υπόψη το μικρότερο l τέτοιο ώστε $a_l=2a_0$ να είναι άρτιο, τότε η εξίσωση $x^2-Dy^2 = -1$ δεν έχει καμία λύση. Για κάθε θετικό ακέραιο k, $x= G_{kl-1}$, $y=B_{kl-1}$ είναι μία λύση στην εξίσωση $x^2-Dy^2 = 1$ και όλες οι λύσεις αυτής της εξίσωσης παράγονται με αυτόν τον τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, η ελάχιστη θετική λύση στην $x^2-Dy^2 = 1$ είναι $x=G_{l-1}$, $y=B_{l-1}$.

Οι ακολουθίες P_i και a_i είναι περιοδικές με περίοδο l μετά το μηδενικό όρο, η πρώτη περίοδος είναι P_1 έως P_l για την ακολουθία P_i και a_1 έως a_l για την ακολουθία a_i. Η ακολουθία Q_i είναι περιοδική ξεκινώντας από το μηδενικό όρο, δηλαδή η πρώτη περίοδος είναι Q_0 έως Q_{l-1}.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι για να παράγουμε όλες τις λύσεις για οποιαδήποτε από τις εξισώσεις $x^2-Dy^2 = \pm 1$ δεδομένου ότι η ελάχιστη λύση είναι γνωστή.

Ας πάρουμε πρώτα την εξίσωση $x^2-Dy^2 = 1$. Έστω τώρα t, u είναι η ελάχιστη δυνατή λύση της εξίσωσης, τότε για την n-οστή λύση θα έχω:

$x_n + y_n\sqrt{D}=(t+u\sqrt{D})^n$ και $x_n - y_n\sqrt{D}=(t-u\sqrt{D})^n$

Ενώ κάθε θετική λύση αντιστοιχεί σε ένα θετικό n, αυτές οι εξισώσεις επίσης έχουν αξία και για $n\leq 0$. Έτσι, υπάρχει μία αναδρομική σχέση:

$x_{n+1}=t\, x_n +u\, y_n\, D$,

$y_{n+1}=t\, y_n + u\, x_n$.

Ένα άλλο ζευγάρι αναδρομικών σχέσεων είναι (δεδομένου ότι $x_0 =1$, $y_0 =0$):

$x_{n+1}= 2\, t\, x_n - x_{n-1}$,

$y_{n+1}=2\, t\, y_n - y_{n-1}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση $x^2-Dy^2 = -1$ και έστω t, u η ελάχιστη θετική λύση και ορίζουμε τα x_n , y_n από την εξίσωση:

$x_n + y_n\sqrt{D}=(t+u\sqrt{D})^n$.

και την

$x_n - y_n\sqrt{D}=(t-u\sqrt{D})^n$.

Εάν το n είναι περιττό, x_n , y_n είναι λύση στην εξίσωση $x^2-Dy^2 = -1$ και αν το n είναι άρτιο τότε , x_n , y_n είναι λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2 = 1$. Όλες οι θετικές λύσεις σε αυτές τις δύο εξισώσεις επίσης παράγονται. Οι αναδρομικές σχέσεις:

$x_{n+1}=t\, x_n +u\, y_n\, D$,

$y_{n+1}=t\, y_n + u\, x_n$

επίσης εναλλακτικά παράγουν τις λύσεις στις εξισώσεις +1 και -1. Μία άλλη αναδρομή είναι (δεδομένου ότι $x_0 =1$, $y_0 =0$):

$x_{n+1}= 2\, t\, x_n - x_{n-1}$,

$y_{n+1}=2\, t\, y_n - y_{n-1}$.

Να σημειωθεί ότι όλες οι λύσεις παίρνονται αν λάβουμε υπόψη τα πρόσημα στις λύσεις $\pm x_n$, $\pm y_n$. Ουσιαστικά ο πιο περιληπτικός τρόπος για να συνοψίσουμε το σύνολο των λύσεων είναι ο παρακάτω. Έστω x, y μία λύση της $x^2-Dy^2 = \pm 1$. Έστω πάλι τώρα t, u η ελάχιστη θετική λύση της $x^2-Dy^2 = \pm 1$. Τότε, για κάποιο πρόσημα ±1 και για κάποιο ακέραιο n, $x+y\sqrt{D}=\pm(t+u\sqrt{D})^n$. Να σημειωθεί επίσης ότι $(t+u\sqrt{D})^{-1}=\pm(t-u\sqrt{D})$.

Ο παρακάτω πίνακας εφαρμόζει τον αλγόριθμο PQa για την επίλυση της $x^2-13y^2 = \pm 1$. Το μήκος της περιόδου l είναι 5, άρα ως περιττός η εξίσωση $x^2-13y^2 = -1$ έχει λύση. Η ελάχιστη δυνατή θετική λύση δίνεται ως x=18, y=5. Από την άλλη, η ελάχιστη θετική λύση για την $x^2-13y^2 = 1$ είναι η x=649, y=180. Αξίζει να σημειωθεί ότι:

$(18+5\sqrt{13})^2=649+180\sqrt{13}$

$(18+5\sqrt{13})^3=23382+6485\sqrt{13}$

$(18+5\sqrt{13})^4=842401+233640\sqrt{13}$.

Η επίλυση της $x^2 - 13y^2 = \pm 1$

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	0	0
-1				1	0	1	1
0	0	1	3	3	1	3	-4
1	3	4	1	4	1	4	3
2	1	3	1	7	2	7	-3
3	2	3	1	11	3	11	4
4	1	4	1	18	5	18	-1
5	3	1	6	119	33	119	4
6	3	4	1	137	38	137	-3
7	1	3	1	256	71	256	3
8	2	3	1	393	109	393	-4
9	1	4	1	649	180	649	1
10	3	1	6	4287	1189	4287	-4
11	3	4	1	4936	1369	4936	3
12	1	3	1	9223	2558	9223	-3
13	2	3	1	14159	3927	14159	4
14	1	4	1	23382	6485	23382	-1
15	3	1	6	154451	42837	154451	4
16	3	4	1	177833	49322	177833	-3
17	1	3	1	332284	92159	332284	3
18	2	3	1	510117	141481	510117	-4
19	1	4	1	842401	233640	842401	1
20	3	1	6	5564523	1543321	5564523	-4

PQa algorithm για $P_0 = 0,\ Q_0 = 1,$ και $D = 13.$

5.4 : Λύνοντας την εξίσωση x^2-$Dy^2 = \pm 4$

Οι λύσεις της εξίσωσης x^2-$Dy^2 = \pm 4$ είναι πιο θεμελιώδεις από τις λύσεις της εξίσωσης x^2-$Dy^2 = \pm 1$. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν D= 1 (mod4), γι' αυτό θα καλύψουμε αυτόν πρώτα.

Όταν D= 1 (mod4), εφαρμόζουμε τον PQa αλγόριθμο με D=D, P_0=1 και Q_0=2. Θα υπάρχει ένα ελάχιστο l>0 τέτοιο ώστε a_l=2a_0-1. Αυτό θα είναι επίσης το μικρότερο l>0 για το οποίο Q_l=2. Το l είναι το μήκος της περιόδου μιας συνεχούς επέκτασης του (1+√D)/2. Με βάση αυτά η ελάχιστη δυνατή λύση της x^2-$Dy^2 = \pm 4$ είναι x= G_{l-1}, y=B_{l-1}. Εάν το l είναι περιττό θα αποτελεί μία λύση για την +4 περίπτωση ενώ, αντιθέτως, η -4 περίπτωση δεν θα έχει λύσεις.

Η περιοδικότητα των ακολουθιών P_i, Q_i και a_i είναι όμοια με την περίπτωση της ±1 εξίσωσης. Εάν D=0(mod 4), τότε για κάθε λύση της x^2-$Dy^2 = \pm 4$, x πρέπει να είναι άρτιο. Αν θέσουμε X=x/2, Y=y και λύσουμε X^2-(D/4)Y^2=±1. Εάν X, Y είναι η ελάχιστη δυνατή θετική λύση της εξίσωσης, τότε x=2X, y=Y είναι η ελάχιστη θετική δυνατή λύση για την x^2-$Dy^2 = \pm 4$. Εναλλακτικά κάποιος μπορεί να εφαρμόσει τον PQa αλγόριθμο για P_0=0 και Q_0=2. Εάν l είναι ο ελάχιστος δείκτης τέτοιος ώστε a_l=2a_0, τότε η ελάχιστη δυνατή λύση είναι η G_{l-1}, B_{l-1}.

Εάν D=2 ή 3 (mod 4), τότε με υπολογισμούς modulo 4 κάποιος μπορεί να δει ότι και το x και το y πρέπει να είναι άρτια. Θέτοντας X=x/2, Y=y/2 και λύνοντας X^2-DY^2=±1. Εάν X, Y είναι η ελάχιστη θετική λύση αυτής της εξίσωσης τότε η x=2X, y=2Y είναι η ελάχιστη θετική λύση της x^2-Dy^2=±4. Εναλλακτικά, και σε αυτήν την περίπτωση είναι εφικτή η λύση του PQa αλγορίθμου με P_0=0 και Q_0=1, τότε θέτω G_{-2}=0, G_{-1}=2, B_{-2}=2 και B_{-1}=0. Εάν l είναι ο μικρότερος δείκτης τέτοιος ώστε a_l=2a_0, τότε η ελάχιστη δυνατή θετική λύση είναι η G_{l-1}, B_{l-1}.

Όπως και με την ±1 εξίσωση, όλες οι λύσεις μπορούν να παραχθούν από την ελάχιστη θετική λύση. Ας θεωρήσουμε πρώτα την εξίσωση x^2-Dy^2= 4. Εάν t, u είναι η ελάχιστη δυνατή θετική λύση της εξίσωσης, τότε για την n-οστή λύση της $x_n + y_n\sqrt{D}=[(t+u\sqrt{D})^n]/(2^{n-1})$ και $x_n - y_n\sqrt{D}=(t-u\sqrt{D})^n$. Επιπλέον, έχουμε τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$x_{n+1}=(1/2)(t\, x_n + u\, y_n\, D)$,

$y_{n+1}=(1/2)(t\, y_n + u\, x_n)$

Μία άλλη αναδρομή είναι (δεδομένου ότι x_0=2, y_0=0):

$x_{n+1}= 2\, t\, x_n - x_{n-1}$,

$y_{n+1}=2\, t\, y_n - y_{n-1}$.

Κατόπιν, ας θεωρήσουμε ότι η εξίσωση x^2-Dy^2= -4 έχει λύσεις, έστω t, u η ελάχιστη θετική λύση και ορίζουμε τα x_n, y_n μέσω της εξίσωσης $x_n + y_n\sqrt{D}=[(t+u\sqrt{D})^n]/(2^{n-1})$. Τότε αν n είναι περιττό, x_n, y_n είναι λύση της εξίσωσης x^2-Dy^2= -4 και αν n είναι άρτιο τότε x_n, y_n είναι μία λύση της εξίσωσης x^2-Dy^2= 4. Όλες οι θετικές λύσεις αυτών των δύο εξισώσεων μπορούν να παραχθούν. Οι αναδρομικές σχέσεις:

$x_{n+1}=(1/2)(t\, x_n + u\, y_n\, D)$,

$y_{n+1}=(1/2)(t\, y_n + u\, x_n)$

επίσης εναλλακτικά παράγουν λύσεις για την +4 και -4 εξίσωση. Μία άλλη αναδρομή (δεδομένου ότι $x_0=2$, $y_0=0$) είναι:

$x_{n+1}= 2\ t\ x_n - x_{n-1}$,

$y_{n+1}=2\ t\ y_n - y_{n-1}$.

Το σύνολο των λύσεων μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: Έστω t, u η ελάχιστη δυνατή λύση των εξισώσεων $x^2-Dy^2= \pm4$. Τότε για κάθε λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2= \pm4$ υπάρχει ένα πρόσημο ±1 και ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $(x+y\sqrt{D})/2=(\pm1)[(t+u\sqrt{D})/2]^n$.

Κατά κάποιον τρόπο, η εξίσωση $x^2-Dy^2= \pm4$ είναι πιο πρωταρχική σε σχέση με την εξίσωση $x^2-Dy^2= \pm1$. Οι αριθμοί 1 και 4 είναι τα μόνα N για τα οποία, για κάθε D, εάν γνωρίζουμε την ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2= \pm N$. Έτσι, μπορώ να παράγω όλες τις λύσεις από εκεί και πέρα και αυτό μπορεί να γίνει χωρίς ουσιαστικά να έχω λύσει την εξίσωση του Pell. Επιπρόσθετα, εάν είναι γνωστή η ελάχιστη θετική λύση της $x^2-Dy^2= \pm4$, μπορούν να παραχθούν όλες οι λύσεις της $x^2-Dy^2= \pm1$. Απλά δεν είναι σίγουρη η σύγκλιση της λύσης. Το καλύτερο, λοιπόν, που μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των λύσεων είναι ότι για D όχι 5 ή 12, οι λύσεις της εξίσωσης $x^2-Dy^2= \pm4$ μπορούν να εξαχθούν από τα ενδιάμεσα βήματα όταν ο PQa αλγόριθμος χρησιμοποιείται για να να λύσουμε την εξίσωση $x^2-Dy^2= \pm1$.

Όταν D=1(mod 4), οι υπολογισμοί modulo4 δείχνουν ότι για κάθε λύση της $x^2-Dy^2= \pm4$, x, y είναι και περιττά και άρτια. Εάν η ελάχιστη λύση έχει και το x και το y άρτιους, τότε όλες οι λύσεις έχουν και το x και το y άρτιους. Σε αυτήν την περίπτωση, κάθε λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2= \pm1$ είναι η μισή λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2= \pm4$. Εάν, ωστόσο η ελάχιστη θετική λύση της $x^2-Dy^2= \pm4$ έχει x, y περιττούς, τότε για D=5(mod 8) κάθε τρίτη λύση έχει τα x, y άρτια και όλες οι άλλες λύσεις τα έχουν περιττά. Σε αυτήν την περίπτωση, κάθε λύση της $x^2-Dy^2= \pm1$ είναι το μισό μιας λύσης της $x^2-Dy^2= \pm4$ που έχει άρτια τα x, y. Όταν D=1(mod 4) η εξίσωση $x^2-Dy^2= -4$ έχει λύσεις μόνο εάν η $x^2-Dy^2= -1$ έχει λύσεις.

Όταν D=0 (mod 4), οι υπολογισμοί modulo 4 δείχνουν ότι για κάθε λύση της $x^2-Dy^2= \pm4$, το x είναι άρτιο. Εάν η ελάχιστη θετική λύση έχει το y άρτιο, τότε όλες οι λύσεις έχουν το y άρτιο (και το x είναι πάντα άρτιο). Αυτό συμβαίνει για D=8, 20, 40, 52 και για πολλές άλλες τιμές. Φυσικά, η εξίσωση $x^2-Dy^2= -1$ δεν έχει λύσεις όταν D=0(mod 4).

Όταν D=2 ή 3 (mod 4), όλες οι λύσεις της $x^2-Dy^2= \pm4$ έχουν x, y άρτια. Κάθε λύση της $x^2-Dy^2= \pm1$ είναι μόλις το μισό μιας λύσης της $x^2-Dy^2= \pm4$. Η εξίσωση $x^2-Dy^2= -4$ έχει εάν και μόνο εάν η εξίσωση $x^2-Dy^2= -1$ έχει λύσεις.

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η χρήση του PQa αλγορίθμου για την λύση της $x^2-13y^2= \pm4$. Το μικρότερο l>0 για το οποίο $a_l=2a_0-1$ και επιπλέον $Q_l=2$ είναι το l=1. Αν το l είναι περιττό, η εξίσωση $x^2-13y^2= -4$ έχει λύσεις και η μικρότερη δυνατή λύση είναι η x=3, y=1. Παρατηρούμε λοιπόν:

$(3+\sqrt{13})^2/2=11+3\sqrt{13}$
$(3+\sqrt{13})^3/4=36+10\sqrt{13}$
$(3+\sqrt{13})^4/8=119+33\sqrt{13}$
$(3+\sqrt{13})^5/16=393+109\sqrt{13}$

και πάει λέγοντας. Τα παραπάνω, εναλλακτικά δίνουν λύσεις στις +4 και -4 εξισώσεις. Κάθε τρίτη λύση έχει και το x και το y άρτιο. Παίρνοντας τα μισά αυτών των λύσεων μπορεί κάποιος να δημιουργήσει κάθε λύση της εξίσωσης $x^2-13y^2= \pm1$.

Η επίλυση της $x^2 - 13y^2 = \pm 4$

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	-1	0
-1				1	0	2	4
0	1	2	2	2	1	3	-4
1	3	2	3	7	3	11	4
2	3	2	3	23	10	36	-4
3	3	2	3	76	33	119	4
4	3	2	3	251	109	393	-4
5	3	2	3	829	360	1298	4
6	3	2	3	2738	1189	4287	-4
7	3	2	3	9043	3927	14159	4
8	3	2	3	29867	12970	46764	-4
9	3	2	3	98644	42837	154451	4
10	3	2	3	325799	141481	510117	-4
11	3	2	3	1076041	467280	1684802	4
12	3	2	3	3553922	1543321	5564523	-4
13	3	2	3	11737807	5097243	18378371	4
14	3	2	3	38767343	16835050	60699636	-4

PQa algorithm για $P_0 = 1,\ Q_0 = 2,$ και $D = 13.$

5.5: Η Διάρθρωση των λύσεων της εξίσωσης x^2-Dy^2= N

Εάν r, s είναι μία λύση της εξίσωσης $x^2-Dy^2= N$ και t, u είναι μία λύση της $x^2-Dy^2= 1$, τότε x=rt +suD, y=ru+st είναι επίσης μία λύση της $x^2-Dy^2= N$. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση $(rt+suD)^2-D(ru+st)^2=(r^2-Ds^2)(t^2-Du^2)$. Αυτό το γεγονός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαχωρίσουμε τις λύσεις της $x^2-Dy^2= N$ σε ισοδύναμες κλάσεις. Οι δύο λύσεις x, y και r, s, είναι ισοδύναμες εάν υπάρχει μία λύση t, u στην $t^2-Du^2= 1$ τέτοιες ώστε x=rt+suD και y=ru+st. Μία ισοδύναμη συνθήκη που είναι ευκολότερο να εφαρμοστεί είναι ότι δύο λύσεις x, y και r, s είναι ισοδύναμες εάν και μόνο εάν οι παραστάσεις (xr-Dys)/N και (xs-yr)/N είναι ακέραιοι. Ενώ r=-1, s=0 ικανοποιεί την $r^2-Ds^2= 1$ για κάθε D, (-x, -y) είναι πάντα ισοδύναμη στην (x, y).

Παράλληλα, είναι βοηθητικό να δούμε το σύνολο των λύσεων γεωμετρικά. Εάν N>0, τότε αν δούμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την εξίσωση $x^2-Dy^2= N$ είναι μία υπερβολή με τον άξονα των y ως άξονα συμμετρίας. Οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $x\pm y\sqrt{D}=0$. Ας θεωρήσουμε t, u την ελάχιστη θετική λύση της $x^2-Dy^2= 1$. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $x^2-Dy^2=N$ στους πραγματικούς. Σημειώνουμε το σημείο $(\sqrt{N}, 0)$, το οποίο είναι πάνω στην γραφική παράσταση. Τώρα σημειώνουμε το σημείο $(t\sqrt{N}, u\sqrt{N})$ το οποίο επίσης είναι πάνω στην γραφική παράσταση. Συνεχίζουμε να σημειώνουμε σημεία έτσι ώστε εάν το (x, y) είναι το πιο πρόσφατο σημειωμένο σημείο, τότε το επόμενο σημείο που σημειώνουμε είναι (xt+yuD, xu+yt). Όλα τα σημεία που έχουν σημειωθεί μέχρι τώρα έχουν x>0, y>0. Τώρα, για κάθε (x, y) που έχει σημειωθεί, σημειώνουμε όλα τα (±x, ±y) που δεν έχουν ακόμα σημειωθεί.

Τα σημειωμένα σημεία χωρίζουν το γράφημα σε δύο διαστήματα. Θεωρούμε το διάστημα $((\sqrt{N}, 0), ((t\sqrt{N}, u\sqrt{N})]$ ανοιχτό στην αρχή και το ίδιο κάνουμε και για τα υπόλοιπα εντάσσοντάς τους πάντα τα τελευταία σημεία. Εάν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της $x^2-Dy^2= N$, τότε τα συμπεράσματα που βγάζουμε είναι:

i. Δεν υπάρχουν δύο ισοδύναμες λύσεις σε ένα ημιανοιχτό διάστημα
ii. Κάθε διάστημα περιέχει μία ακριβώς λύση
iii. Η τάξη των λύσεων είναι ίδια σε κάθε διάστημα.

Αξίζει να τονίσουμε ότι θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το σημείο (r, s) και να συνεχίσουμε σημειώνοντας τα σημεία $(r+s\sqrt{D})(\pm 1)(t+u\sqrt{D})^n$. Τα προηγούμενα συμπεράσματα εξακολουθούν να ισχύουν. Ίδια κατάσταση ισχύει και για N<0 απλά τώρα ο άξονας συμμετρίας είναι ο x.

Εάν η $x^2-Dy^2= -1$ έχει λύσεις, τότε κάθε μία από αυτές τις λύσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσουμε μία αντιστοιχία μεταξύ των λύσεων της $x^2-Dy^2= N$ και –N.

Ταυτόχρονα, μέσα σε κάθε διάστημα-κλάση υπάρχει μία μοναδική λύση με x, y μη αρνητικά, αλλά μικρότερη από κάθε άλλη λύση. Αυτή είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση για τη συγκεκριμένη κλάση. Υπάρχουν, επίσης, μία ή δύο λύσεις τέτοιες ώστε το y να είναι μη αρνητικό και είναι μικρότερο ή ίσο με κάθε άλλο μη αρνητικό y μιας λύσης μέσα στην κλάση. Εάν υπάρχει μία τέτοια λύση, ονομάζεται θεμελιώδης λύση. Εάν υπάρχουν δύο τέτοιες λύσεις, τότε θα είναι ισοδύναμες και θα έχουν αντίθετα x. Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση με το θετικό x ονομάζεται θεμελιώδης λύση. Για N>0 οι θεμελιώδεις λύσεις είναι πάνω στην υπερβολή στα διαστήματα:

$$\left(\sqrt{N},0\right) \text{ to } \left(\sqrt{N(r+1)/2},\sqrt{N(r-1)/(2D)}\right)$$

$$\left(-\sqrt{N},0\right) \text{ to } \left(-\sqrt{N(r+1)/2},\sqrt{N(r-1)/(2D)}\right)$$

Για το πρώτο διάστημα τα δεξιά άκρα μπορούν να συμπεριληφθούν ενώ για το δεύτερο όχι. Για $N<0$, οι θεμελιώδεις λύσεις βρίσκονται στα διαστήματα:

$$\left(-\sqrt{|N|(r-1)/2},\sqrt{|N|(r+1)/(2D)}\right)$$

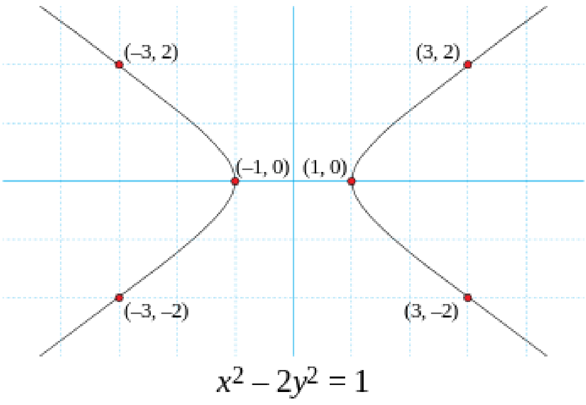
$$\left(\sqrt{|N|(r-1)/2},\sqrt{|N|(r+1)/(2D)}\right)$$

με μέσο το σημείο $(0, \sqrt{-N/D})$. Σε αυτό το διάστημα, το πρώτο σημείο δεν πρέπει να συμπεριληφθεί ενώ το τελευταίο ναι. Το σημαντικότερο συμπέρασμα είναι ότι αν γνωρίζουμε μία οποιαδήποτε λύση μέσα στο διάστημα, μπορούμε να βρούμε τη θεμελιώδη λύση αυτού του διαστήματος.

Για να συνοψίσουμε, δοθείσης μίας οποιασδήποτε λύσης μέσα στην κλάση, όλες οι λύσεις βρίσκονται εφαρμόζοντας λύσεις στην εξίσωση $x^2-Dy^2= 1$. Εάν r, s είναι μία δεδομένη λύση της $x^2-Dy^2= N$, x, y είναι μία άλλη οποιαδήποτε λύση της ίδιας εξίσωσης στην ίδια κλάση όπως τα r, s και εάν t, u είναι η ελάχιστη θετική λύση για την εξίσωση $x^2-Dy^2= 1$ τότε για κάποια επιλογή του πρόσημου ± 1 και για κάποιο ακέραιο n, $x+y\sqrt{D}=\pm(r+s\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})^n$.

Υπάρχουν ανάλογες αναδρομικές σχέσεις όμοιες με εκείνες που παρουσιάστηκαν για τις ± 1 και ± 4 εξισώσεις. Για παράδειγμα έχουμε τα τρία ζευγάρια (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) που είναι λύσεις για την ίδια κλάση σε διαδοχικά διαστήματα και t, u είναι η ελάχιστη θετική λύση της $x^2-Dy^2= 1$, τότε $x_3=2tx_2-x_1$ και $y_3=2ty_2-y_1$.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις λύσεις της $x^2-13y^2= 27$. Η ελάχιστη δυνατή λύση στην εξίσωση $t^2-13u^2= 1$ είναι η $t=649$, $u=180$. Έτσι, πάνω στην υπερβολή $x^2-13y^2=27$ σημειώνουμε διαδοχικά τα διαστήματα που ορίζονται από τα σημεία $(\pm\sqrt{27}, 0)$, $(\pm 649\sqrt{27}, \pm 180\sqrt{27})$, $(\pm 842401\sqrt{27}, \pm 233640\sqrt{27})$, $(\pm 1093435849\sqrt{27}, \pm 303264540\sqrt{27})$ και πάει λέγοντας.



Παράδειγμα Γεωμετρικής Λύσης

5.6: Λύνοντας την x^2-Dy^2= N με τη χρήση του LMM αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί εδώ βρίσκει ακριβώς μία λύση από κάθε οικογένεια λύσεων της συγκεκριμένης εξίσωσης για $N \neq 0$, $D>0$, D όχι τέλειο τετράγωνο.

Φτιάχνοντας μία λίστα των τιμών $f>0$ τέτοιες ώστε το f^2 να διαιρεί το N. Για κάθε f σε αυτήν τη λίστα υπολογίζουμε τα $m=N/f^2$. Κατόπιν βρίσκουμε όλα τα z για τα οποία ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$-|m|/2 < z \leq |m|/2 \text{ και } z^2 \equiv D \pmod{|m|}$$

Για κάθε z, εφαρμόζουμε τον PQa αλγόριθμό με $P_0=z$, $Q_0=|m|$, D=D. Συνεχίζουμε μέχρι ή να βρούμε ένα $i \geq 1$ με $Q_i=\pm 1$ ή να φτάσουμε στο τέλος της πρώτης περιόδου για την ακολουθία a_i. Εάν ικανοποιηθεί η πρώτη συνθήκη, τότε όπως έχουμε ήδη δει ψάχνουμε τις λύσεις στα $r=G_{i-1}$, $s=B_{i-1}$. Εάν $r^2-Ds^2=m$, τότε προσθέτουμε τα $x=fr$, $y=fs$ στη λίστα των λύσεων. Από την άλλη πλευρά, $r^2-Ds^2=-m$. Εάν η εξίσωση $t^2-Du^2=-1$ δεν έχει λύσεις, δοκίμασε το επόμενο z. Εάν η εξίσωση $t^2-Du^2=-1$ έχει λύσεις, θεωρούμε ως ελάχιστη θετική λύση την t, u και εμπλουτίζουμε τον πίνακα των λύσεων μας με τις λύσεις $x=f(rt+sud)$, $y=f(ru+st)$. Εναλλακτικά, επαναλαμβάνουμε τον PQa αλγόριθμο για μία ακόμα περίοδο, μέχρι το επόμενο $Q_i=\pm 1$, παίρνουμε $r=G_{i-1}$, $s=B_{i-1}$ και προσθέτουμε $x=fr$, $y=fs$ στη λίστα των λύσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ΜΚΔ(r, s)=1 , άρα το ζεύγος λύσεων είναι και πρώτες μεταξύ τους.

Όταν τελειώσουμε με την αναζήτηση των f, και των z για κάθε f, η λίστα των λύσεων θα έχει ένα μέλος από κάθε κλάση. Αυτές οι λύσεις θα είναι είτε θεμελιώδεις είτε θα είναι οι ελάχιστες θετικές(θεμελιώδεις) λύσεις.

Βέβαια, αν $|N|$ είναι μεγάλο, θα ήταν χρήσιμο να έχουμε μία αποδοτική μέθοδο για να βρούμε τους διαιρέτες του N με σκοπό να έχουμε τα f^2 που διαιρούν το N. Στη βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα μεθόδων που υλοποιούν αυτήν την διαδικασία. Κάποιες από αυτές είναι: η μέθοδος του Fermat, η Pollard και η Brillhart-Morrison. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα και η μέθοδος του Lagrange (systems of reduction), όταν το N παίρνει μεγάλες τιμές είναι σημαντικό να βρούμε μία αποδοτική μέθοδο για να παραγοντοποιούμε ακέραιους και για να λύσουμε την εξίσωση $x^2= D(\text{mod } |m|)$.

Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν μία εφαρμογή της μεθόδου για την εξίσωση $x^2-13y^2=108$ καθώς και τις ενδιάμεσες τιμές του f.

Μία επανάληψη της LMM λύσης της $x^2 - 13y^2 = 108$

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	-43	
-1				1	0	108	
0	43	108	0	0	1	-43	1836
1	-43	-17	2	1	2	22	432
2	9	4	3	3	7	23	-108
3	3	1	6	19	44	160	432
4	3	4	1	22	51	183	-324
5	1	3	1	41	95	343	324
6	2	3	1	63	146	526	-432
7	1	4	1	104	241	869	108
8	3	1	6	687	1592	5740	-432

PQa algorithm $P_0 = 43,\ Q_0 = 108,$ για $D = 13.$

LMM Algorithm

f	P_0	Q_0	x	y
1	11	108	-11	1
1	-11	108	11	1
1	43	108	869	241
1	-43	108	41	11
2	11	27	440	122
2	-11	27	80	22
3	1	12	141	39
3	-1	12	249	69
3	5	12	-15	3
3	-5	12	15	3
6	1	3	1536	426
6	-1	3	24	6

Αποτελέσματα του LMM αλγορίθμου της $x^2 - 13y^2 = 108.$

5.7 Lagrange's System of Methods

Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί στην εξίσωση $x^2-Dy^2=N$ όταν το $N^2>D$.

Η βασική παρατήρηση είναι ότι εάν $x\geq0$, $y\geq0$ είναι λύση της $x^2-Dy^2=N$ όταν το $N^2>D$, τότε υπάρχουν $0\leq k\leq |N|/2$, X, Y τέτοια ώστε $h=(k^2-D)/N$ να είναι ακέραιος, X, Y είναι μία λύση στην $X^2-DY^2=h$ και έτσι παίρνω τις λύσεις: $x=|(kX+DY)/h|$, $y=|(kY+X)/h|$ ή $x=|(kX-DY)/h|$, $y=|(kY-X)/h|$

Συχνά είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε αυτήν την μείωση (reduction) αναδρομικά. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας από την εξίσωση $x^2-Dy^2=N$ και για κάθε $0\leq k\leq |N|/2$ με $h=(k^2-D)/N$ να είναι ακέραιος, κάποιος παίρνει την εξίσωση $X^2-DY^2=h$. Εάν τώρα στη νέα εξίσωση έχω $h^2>D$ τότε συνεχίζουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου μέχρι να πάρω μία εξίσωση $h^2<D$. Αυτή τώρα η εξίσωση θα λυθεί με μεθόδους από προηγούμενα κεφάλαια. Έτσι, παίρνουμε μία λύση για κάθε κλάση. 'Γυρνώντας' πίσω την αναδρομή βρίσκω τις λύσεις για την αρχική αυθεντική εξίσωση. Για να βρω μία λύση στην αρχική εξίσωση για κάθε κλάση, λύνω την κάθε εξίσωση $x^2-Dy^2=N/f^2$ για κάθε $f>0$ έτσι ώστε N/f^2 να είναι ακέραιος και να πάρω τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης fx, fy. [12],[18],[24],[22]

Lagrange

Κεφάλαιο 6: Ένας κώδικας για την επίλυση της Εξίσωσης σε Matlab και οι λύσεις του Mathematica

6.1 Κώδικας Επίλυσης στο Matlab

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εκθέσουμε έναν κώδικα απλό που με brute force βρίσκει λύσεις της εξίσωσης του Pell. Ο συγκεκριμένος κώδικας που παραθέτουμε παρακάτω χρησιμοποιεί πέρα από την κύρια συνάρτηση και μία βοηθητική με το όνομα QCF που χρησιμεύει για να προσεγγίσει το ανάπτυγμα της ρίζας με κάποιους όρους. Η λειτουργία του προγράμματος επεξηγείται με αναλυτικό τρόπο στα σχόλια που γίνονται στις διάφορες θέσεις του κώδικα. Στο πρόγραμμα το n είναι το πλήθος των λύσεων.

Α)ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ PELL.M

```
% Pell.m το κυρίως πρόγραμμα που επιτυγχάνει
διασύνδεση με το χρήστη.
% Με δεδομένα d, s, και n με d και n θετικούς και d
όχι τέλειο τετράγωνο επιστρέφει την μικρότερη λύση
[x y]
% της εξίσωσης του Pell: x^2 - d*y^2 = (-1)^s.
Υπάρχει πάντα λύση
% για άρτιο s αλλά μπορεί να μην υπάρχει για περιττό
s.

function p = Pell(d,s,n)

% Έλεγχος σφάλματος που μπορεί να κάνει ο χρήστης
κατά την εισαγωγή
% δεδομένων

if ( imag(d) ~= 0 || d ~= floor(d) || d < 0 ||
floor(sqrt(d)) == sqrt(d) )
    error('First argument must be a nonsquare
positive integer.');
    return;
end

% Έλεγχος σφάλματος που μπορέι να κάνει ο χρήστης
κατά την εισαγωγή
% δεδομένων

if ( s ~= floor(s) )
    error('Second argument must be an integer.');
    return;
```

```
end

% Αρχικοποίηση

p = zeros(n,2);
smod2 = mod(s,2);
q = qcf(d,0,1,1); %εδώ καλείται η βοηθητική
συνάρτηση qcf
q1 = q{1};
q2 = q{2};

s1 = size(q1);
s2 = size(q2);
size1 = s1(1);
size2 = s2(1);

if size2 > 1
    x1 = q2(size2-1,2);
    y1 = q2(size2-1,3);
else
    x1 = q1(size1,2);
    y1 = q1(size1,3);
end

% Υπολογισμός θεμελιώδους λύσης εάν αυτή υπάρχει

if mod(size2,2) == 1
    if smod2 == 0
        x = x1^2 + d*y1^2;
        y = 2*x1*y1;
    else
        x = x1;
        y = y1;
    end
else
    if smod2 == 1 %περίπτωση που δεν βρίσκουμε λύση
        ['There are no solutions to the equation x^2
- ', num2str(d),' y^2 = -1.']
        p = [];
        return;
    else
        x = x1;
        y = y1;
    end
end
```

```
p(1,1) = x;
p(1,2) = y;

% Υπολογισμός επιπλέων λύσεων
x0 = x;
y0 = y;

for k = 2:n
    for r = 0:smod2
        x1 = x*x0 + d*y*y0;
        y1 = y*x0 + x*y0;
        x = x1;
        y = y1;
        p(k,1) = x;
        p(k,2) = y;
    end
end
```

B)Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ QCF.M

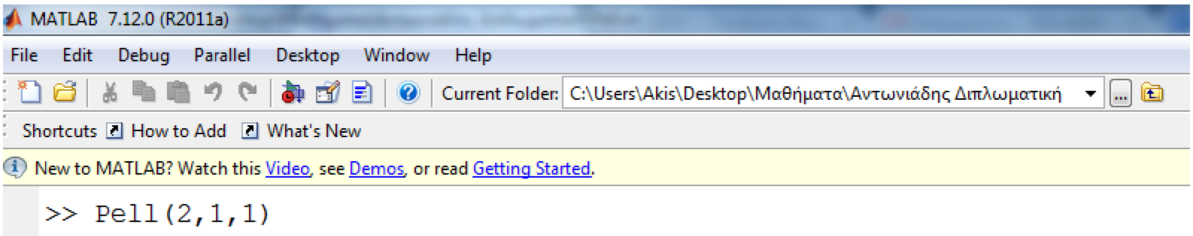
```
% Αυτή η συνάρτηση είναι βοηθητική για το κυρίως
πρόγραμμα Pell.m
% Η QCF(d,u,v) επιστρέφει τη συνεχή επέκταση της
x=(u+sqrt(d))/v
% για ακέραιους d, u, και v, με d και v θετικούς και
d όχι τέλειο τετράγωνο.
% επιστρέφει 2 αριθμούς, τον πρώτο με την προπερίοδο
και
% τον δεύτερο με την περίοδο.


function qc = QCF(d,u,v,quiet)

qc = cell([1 2]); %αρχικοποίηση ενός κελιού

%κελί στην Matlab είναι ένας πίνακας με στοιχεία
πίνακες

% Error checking Έλεγχος για τα σφάλματα που μπορεί
να κάνει ο χρήστης όταν
% τρέχει το πρόγραμμα για να βρει τις ρίζες της
εξίσωσης

if ( imag(d) ~= 0 || imag(u) ~= 0 || imag(v) ~= 0 )
    error('All arguments must be real.');
    return;
end

if ( d ~= floor(d) || u ~= floor(u) || v ~= floor(v)
)
    error('All arguments must be integers.');
    return;
end

if ( floor(sqrt(d)) == sqrt(d) )
    qcf{1}=cfrac(u+sqrt(d)/v,100); % ορισμός του
πρώτου κελιού του πίνακα
    qcf{2}=[]; %αρχικά το δεύτερο κελί είναι κενό
    return;
end

if ( d<0 )
```

```
    error('First argument must be positive.');
%έλεγχος για τη μη αρνητικότητα του d
    return;
end

if ( v<0 )
    error('Third argument must be positive.');
%έλεγχος για τη μη αρνητικότητα του v
    return;
end

% Αρχικοποίηση παραμέτρων
g = gcd( d - u^2, v ); % μέγιστος κοινός διαιρέτης
C = v / g;
k = 1;
D = C^2 * d;
p1 = 1;
p2 = 0;
q1 = 0;
q2 = 1;
u(1) = C * u;
v(1) = C * v;
done = 0; % βοηθητική μεταβλητή για να τρέχει η loop

while ~done
    U0 = u(k);
    V0 = v(k);
    a(k) = floor( ( U0 + sqrt(D) ) / V0 );
    ak = a(k);
    p(k) = ak*p1 + p2;
    q(k) = ak*q1 + q2;
    p2 = p1;
    q2 = q1;
    p1 = p(k);
    q1 = q(k);
    U = a(k) * V0 - U0;
    V = ( D - U^2 ) / V0;
    res(k,1)=a(k);
    res(k,2)=p(k);
    res(k,3)=q(k);
    res(k,4)=u(k);
    res(k,5)=v(k);
```

```
    % Ψάχνει με brute force ελέγχοντας όλες τις
περιπτώσεις λύσεις
    s = 1;

    while s <= k && ~done
        if U == u(s)
            if V == v(s) % αν βρει ταίριασμα κάνει
το done 1 για να λήξει ο βρόγχος
                done = 1;
            end
        end

        s = s + 1;
    end

    if ~done  % εξετάζουμε την περίπτωση να μην βρω
ταίριασμα
        k = k + 1;
        u(k) = U;
        v(k) = V;
    end
end

app = a(1:s-2);
ap = a(s-1:k);
qc{1} = res(1:s-2,:);       % προπερίοδος
qc{2} = res(s-1:k,:);       % περίοδος

if ~quiet
    ['Preperiod: ', num2str(app)]
    ['Period: ', num2str(ap)]
end
```

Γ)ΤΡΕΞΙΜΟ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΧΡΗΣΤΗ

Για να ‘τρέξουμε’ το παραπάνω πρόγραμμα ανοίγουμε την κονσόλα του Matlab και πληκτρολογούμε την εντολή: Pell(d,s,n) βάζοντας όπου d και n θετικούς ακέραιους, το d να μην είναι τέλειο τετράγωνο και ένα s. Για παράδειγμα καλούμε την συνάρτηση Pell(2,1,1) και βλέπουμε το επόμενο αποτέλεσμα: (εφόσον το n=1 περιμένουμε να βρούμε μία λύση)



Και επιστρέφει:

```
> In Pell at 25

ans =

     1     1

>>
```

Βλέπουμε λοιπόν, ότι επιστρέφει x=1, y=1 που είναι η προφανής λύση στην εξίσωση:

$x^2-2y^2=-1$

Τώρα δοκιμάζουμε μία περίπτωση που μοιάζει στην προηγούμενη: Pell(2,2,1) δηλαδή την εξίσωση:

$x^2-2y^2=1$

και παρατηρούμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

```
>> Pell(2,2,1)

ans =

     3     2

>>
```

Δηλαδή x=3, y=2 που μπορεί να επαληθευτεί εύκολα.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη προσομοίωση βάζοντας απλά όπου n=2..13 για να δούμε αν υπάρχουν κι άλλης λύσεις:

```
>> Pell(2,2,2)

ans =

     3     2
    17    12

>> Pell(2,2,3)

ans =

     3     2
    17    12
    99    70

>> Pell(2,2,4)

ans =

     3     2
    17    12
    99    70
   577   408

>> Pell(2,2,5)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
```

```
>> Pell(2,2,6)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860

>> Pell(2,2,7)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782

>> Pell(2,2,8)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782
      665857      470832
```

```
>> Pell(2,2,9)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782
      665857      470832
     3880899     2744210

>> Pell(2,2,10)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782
      665857      470832
     3880899     2744210
    22619537    15994428
```

```
>> Pell(2,2,11)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782
      665857      470832
     3880899     2744210
    22619537    15994428
   131836323    93222358

>> Pell(2,2,12)

ans =

           3           2
          17          12
          99          70
         577         408
        3363        2378
       19601       13860
      114243       80782
      665857      470832
     3880899     2744210
    22619537    15994428
   131836323    93222358
   768398401   543339720
```

```
>> Pell(2,2,13)

ans =

  1.0e+009 *

    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0001    0.0001
    0.0007    0.0005
    0.0039    0.0027
    0.0226    0.0160
    0.1318    0.0932
    0.7684    0.5433
    4.4786    3.1668
```

Για την τελευταία περίπτωση παρατηρούμε ότι για n=13 αρχίζει και χάνεται η ακρίβεια. Ωστόσο, για τις συγκεκριμένες παραμέτρους έχουμε τις 12 πρώτες λύσεις άμεσα εκμεταλλευόμενοι τη σύγχρονη υπολογιστική δύναμη.

Ακολουθούν άλλα 5 παραδείγματα προσομοίωσης του συγκεκριμένου κώδικα για άλλες τιμές των παραμέτρων:

1. d=4, s=1, n=10

```
>> Pell(4,2,10)
??? Error using ==> Pell at 11
First argument must be a nonsquare positive integer.

>>
```

Παρατηρούμε ότι ο κώδικας βγάζει σφάλμα γιατί το d δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

2. d=3, s=2, n=16

```
>> Pell(3,2,16)

ans =

           2           1
           7           4
          26          15
          97          56
         362         209
        1351         780
        5042        2911
       18817       10864
       70226       40545
      262087      151316
      978122      564719
     3650401     2107560
    13623482     7865521
    50843527    29354524
   189750626   109552575
   708158977   408855776
```

3. d=5, s=2, n=7

```
>> Pell(5,2,7)

ans =

           9           4
         161          72
        2889        1292
       51841       23184
      930249      416020
    16692641     7465176
   299537289   133957148
```

4. d=6, s=2, n=9

```
>> Pell(6,2,9)

ans =

           5           2
          49          20
         485         198
        4801        1960
       47525       19402
      470449      192060
     4656965     1901198
    46099201    18819920
   456335045   186298002
```

5. d=101, s=2, n=3

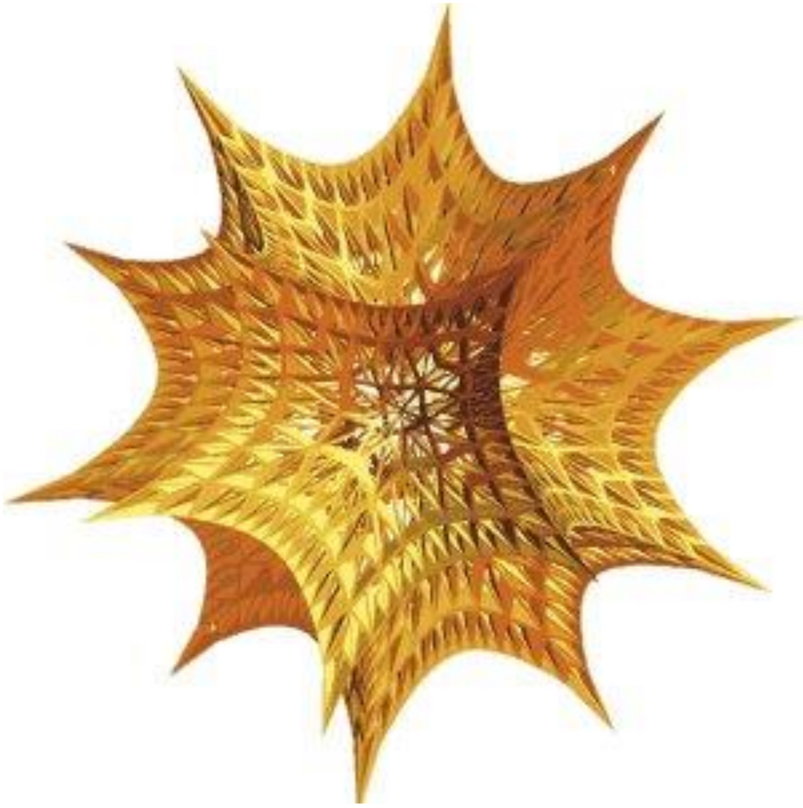
```
>> Pell(101,2,3)

ans =

         201          20
       80801        8040
    32481801     3232060
```

Ειδικά με το τελευταίο παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο κώδικας είναι αποδοτικός και για μεγάλες τιμές του d.

6.2: Οι λύσεις που δίνει η μαθηματική πλατφόρμα Wolfram Mathematica για την εξίσωση του Pell

Ένα άλλο πολύ γνωστό μαθηματικό εργαλείο είναι το Wolfram Mathematica το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε μια σειρά από λύσεις της εξίσωσης του Pell. Το Mathematica είναι μία προγραμματιστική πλατφόρμα άκρως μαθηματικής φύσεως(maths-friendly), που μπορεί να εμφανίσει με απλές εντολές μια σειρά λύσεων της εξίσωσης του Pell. Στην επίσημη ιστοσελίδα της εταιρείας 'mathworld.wolfram.com' η εξίσωση του Pell αναφέρεται ως μία ειδική περίπτωση μιας τετραγωνικής διοφαντικής εξίσωσης με τη γνωστή μορφή x^2-Dy^2 =1 όπου D>0 ένας φυσικός αριθμός που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Για την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης χρησιμοποιείται η εντολή *Reduce* και επισημαίνεται ότι οι αριθμοί x, y είναι ακέραιοι, αφού γνωρίζουμε ότι στη συγκεκριμένη εξίσωση διερευνούμε ακέραιες λύσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να βρούμε μία λύση μέσω αυτού του πακέτου για διάφορες περιπτώσεις του D.



Το λογότυπο του Wolfram Mathematica

Στην αρχή της μελέτης μας με το συγκεκριμένο μαθηματικό πακέτο δεν θα βάλουμε συγκεκριμένες τιμές στο N και στο D για να δούμε τι επιστρέφει το πρόγραμμα.

Γενική λύση της x^2-Dy^2=N στους ακεραίους:

Reduce[x^2-Dy^2=N, {x,y},Integers]

y∈Integers&&Dy∈Integers&&C[1]∈Integers&&N=-Dy^2+C[1]^2&&x=C[1]

Η πρώτη σειρά είναι η εντολή που πληκτρολογούμε για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης. Η δεύτερη σειρά είναι η απάντηση που δίνει το πρόγραμμα και δεν μας ικανοποιεί, αφού βρίσκει μία παραμετρική λύση συναρτήσει μίας σταθερής C1. Αυτό οφείλεται στο ότι έχουμε βάλει 2 παραμέτρους στην εξίσωση: το D και το N και ζητάμε λύσεις για τα x,y. Γι' αυτό συνεχίζουμε την έρευνά μας δίνοντας μία τιμή στο N.

Γενική λύση της x^2-Dy^2=1 στους ακεραίους:

*In[8]:= Reduce[x^2 - D*y^2 == 1, {x, y}, Integers]*

Out[8]= (D | x | y) \[Element]
Integers && ((D <= -1 && ((x == -1 && y == 0) || (x == 0 && (y == -Sqrt[-(1/D)] || y== Sqrt[-(1/D)])) || (x == 1 && y == 0))) || (D == 0 && (x == -1 || x == 1)) || (D >= 1 && ((x <= -1 && (y == -Sqrt[((-1 + x^2)/D)] || y == Sqrt[(-1 + x^2)/D])) || (x >= 1 && (y == -Sqrt[((-1 + x^2)/D)] || y == Sqrt[(-1 + x^2)/D])))))

Παρατηρούμε ότι και αυτή η λύση έχει πολλούς 'παραμετρικούς' περιορισμούς και δεν μας ικανοποιεί. Συνεχίζοντας, λοιπόν, τη διερεύνησή μας, βάζοντας όρια και ανισότητες στο πρόβλημά μας.

Γενική λύση της x^2-Dy^2=1 στους ακεραίους για 0≤y≤10:

*Reduce[x^2-D*y^2=1&&0≤y≤10,{x,y},Integers]*

(D∈Integers&&x=-1&&y=0)||(D∈Integers&&x=1&&y==0)||(C[1]∈Integers&&D=-1+C[1]^2&&x=-C[1]&&y=1)||(C[1]∈Integers&&D=2 (1-3 C[1]+2 C[1]^2)&&x=3-4 C[1]&&y=2)||(C[1]∈Integers&&D=2 (-C[1]+2 C[1]^2)&&x=1-4 C[1]&&y=2)||(C[1]∈Integers&&D=2 (7-15 C[1]+8 C[1]^2)&&x=15-16 C[1]&&y=4)||(C[1]∈Integers&&D=2 (-C[1]+8 C[1]^2)&&x=1-16 C[1]&&y=4)||(C[1]∈Integers&&D=7-16 C[1]+9 C[1]^2&&x=8-9 C[1]&&y=3)||(C[1]∈Integers&&D=-2 C[1]+9 C[1]^2&&x=1-9 C[1]&&y=3)||(C[1]∈Integers&&D=5-18 C[1]+16 C[1]^2&&x=9-16 C[1]&&y=4)||(C[1]∈Integers&&D=3-14 C[1]+16 C[1]^2&&x=7-16 C[1]&&y=4)||(C[1]∈Integers&&D=2 (17-35 C[1]+18 C[1]^2)&&x=35-36 C[1]&&y=6)||(C[1]∈Integers&&D=2 (5-19 C[1]+18 C[1]^2)&&x=19-36 C[1]&&y=6)||(C[1]∈Integers&&D=2 (4-17 C[1]+18 C[1]^2)&&x=17-36 C[1]&&y=6)||(C[1]∈Integers&&D=2 (-C[1]+18 C[1]^2)&&x=1-36 C[1]&&y=6)||(C[1]∈Integers&&D=23-48 C[1]+25 C[1]^2&&x=24-25 C[1]&&y=5)||(C[1]∈Integers&&D=-2 C[1]+25 C[1]^2&&x=1-25 C[1]&&y=5)||(C[1]∈Integers&&D=2 (31-63 C[1]+32 C[1]^2)&&x=63-64 C[1]&&y=8)||(C[1]∈Integers&&D=2 (-C[1]+32 C[1]^2)&&x=1-64

C[1]&&y=8)||(C[1]∈Integers&&D=47-96 C[1]+49 C[1]^2&&x=48-49 C[1]&&y=7)||(C[1]∈Integers&&D=-2 C[1]+49 C[1]^2&&x=1-49 C[1]&&y=7)||(C[1]∈Integers&&D=2 (49-99 C[1]+50 C[1]^2)&&x=99-100 C[1]&&y=10)||(C[1]∈Integers&&D=2 (13-51 C[1]+50 C[1]^2)&&x=51-100 C[1]&&y=10)||(C[1]∈Integers&&D=2 (12-49 C[1]+50 C[1]^2)&&x=49-100 C[1]&&y=10)||(C[1]∈Integers&&D=2 (-C[1]+50 C[1]^2)&&x=1-100 C[1]&&y=10)||(C[1]∈Integers&&D=17-66 C[1]+64 C[1]^2&&x=33-64 C[1]&&y=8)||(C[1]∈Integers&&D=15-62 C[1]+64 C[1]^2&&x=31-64 C[1]&&y=8)||(C[1]∈Integers&&D=79-160 C[1]+81 C[1]^2&&x=80-81 C[1]&&y=9)||(C[1]∈Integers&&D=-2 C[1]+81 C[1]^2&&x=1-81 C[1]&&y=9)

Σε αυτήν την περίπτωση η λύση του προβλήματός μας είναι καθαρά μονοπαραμετρική συναρτήσει του C1 και με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία σειρά λύσεων για το x και για το y. Από εδώ και κάτω στη διερεύνησή μας θα αρχίσουμε να βάζουμε τιμές και στο D για να παίρνουμε διακριτές λύσεις στο πρόβλημα.

<u>Λύσεις της x^2-$2y^2$=1 για 0≤y≤10:</u>

*Reduce[x^2-2*y^2=1&&0≤y≤10,{x,y},Integers]*

(x=-3&&y=2)||(x=-1&&y=0)||(x=1&&y=0)||(x=3&&y=2)

Εδώ φαίνεται η πραγματική δύναμη του Mathematica σε σχέση με το Matlab. Χωρίς ουσιαστικές προγραμματιστικές γνώσεις μπορούμε να βρούμε λύσεις για την εξίσωση άμεσα. Ωστόσο, δεν μπορούμε να παρέμβουμε στον κώδικά με σκοπό να κάνουμε μία αποδοτική βελτίωση της μεθόδου. Ας επιχειρήσουμε τώρα να αλλάξουμε την ανισότητα και να την βάλουμε ως προς x.

<u>Λύσεις της x^2-$2y^2$=1 για 0≤x≤10:</u>

*Reduce[x^2-2*y^2=1&&0≤x≤10,{x,y},Integers]*

(x=1&&y=0)||(x=3&&y=-2)||(x=3&&y=2)

Σε αυτήν την περίπτωση χάνουμε τις αρνητικές λύσεις του x γι' αυτό και παίρνουμε 3 περιπτώσεις λύσεων αντί για 4. Κατόπιν, αυξάνουμε το εύρος για το y για να δούμε πόσο γρήγορα βρίσκει τις λύσεις το πρόγραμμα:

<u>Λύσεις της x^2-$2y^2$=1 για 0≤y≤1000:</u>

*Reduce[x^2-2*y^2=1&&0≤y≤1000,{x,y},Integers]*

(x=-577&&y=408)||(x=-99&&y=70)||(x=-17&&y=12)||(x=-3&&y=2)||(x=1&&y=0)||(x=1&&y=0)||(x=3&&y=2)||(x=17&&y=12)||(x=99&&y=7)||(x=577&&y=408)

Το πρόγραμμα και γι' αυτό το εύρος των λύσεων επιστρέφει άμεσα τις λύσεις. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για το ίδιο εύρος για το x.

Λύσεις της $x^2-2y^2=1$ για $0\leq x\leq 1000$:

Reduce[x^2-2*y^2=1&&0≤x≤1000,{x,y},Integers]

(x=1&&y=0)||(x=3&&y=-2)||(x=3&&y=2)||(x=17&&y=-12)||(x=17&&y=12)||(x=99&&y=-70)||(x=99&&y=70)||(x=577&&y=-408)||(x=577&&y=408)

Το ίδιο άμεσα και αποδοτικά το πρόγραμμα επέστρεψε τις ζητούμενες λύσεις για τη συγκεκριμένη εξίσωση. Αυξάνουμε το εύρος, άρα και το πλήθος των λύσεων:

Λύσεις της $x^2-2y^2=1$ για $0\leq y\leq 1000000$:

Reduce[x^2-2*y^2=1&&0≤y≤1000000,{x,y},Integers]

(x=-665857&&y=470832)||(x=-114243&&y=80782)||(x=-19601&&y=13860)||(x=-3363&&y=2378)||(x=-577&&y=408)||(x=-99&&y=70)||(x=-17&&y=12)||(x=-3&&y=2)||(x=-1&&y=0)||(x=1&&y=0)||(x=3&&y=2)||(x=17&&y=12)||(x=99&&y=70)||(x=577&&y=408)||(x=3363&&y=2378)||(x=19601&&y=13860)||(x=114243&&y=80782)||(x=665857&&y=470832)

Κανένα πρόβλημα και για αυτό το εύρος των λύσεων. Άμεση απάντηση, πράγμα που μας κάνει να πιστεύουμε ότι η συγκεκριμένη πλατφόρμα έχει λύσει με πολύ αποδοτικό τρόπο την εξίσωση του Pell. Ανατρέχοντας στον ιστότοπο της εταιρείας βλέπουμε ότι η πολύπλοκότητα του αλγορίθμου είναι:

$$O\left(c^{1/4}\,(\ln c)^3\,(\ln\ln c)\,(\ln\ln\ln c)\right)$$

για την γενικευμένη εξίσωση $ax^2+by^2=c$ τονίζοντας ότι απαιτείται ουσιαστικά ανάλυση σε παράγοντες του c.[25]
Ακολουθούν κάποιες περιπτώσεις για πιο σύνθετες περιπτώσεις της εξίσωσης του Pell.

Λύσεις της $x^2-5y^2=4$ για $0\leq y\leq 1000000$:

Reduce[x^2-5*y^2=4&&0≤y≤1000000,{x,y},Integers]

(x=-1860498&&y=832040)||(x=-710647&&y=317811)||(x=-271443&&y=121393)||(x=-103682&&y=46368)||(x=-39603&&y=17711)||(x=-15127&&y=6765)||(x=-5778&&y=2584)||(x=-2207&&y=987)||(x=-843&&y=377)||(x=-322&&y=144)||(x=-123&&y=55)||(x=-47&&y=21)||(x=-18&&y=8)||(x=-7&&y=3)||(x=-3&&y=1)||(x=-2&&y=0)||(x=2&&y=0)||(x=3&&y=1)||(x=7&&y=3)||(x=18&&y=8)||(x=47&&y=21)||(x=123&&y=55)||(x=322&&y=144)||(x=843&&y=377)||(x=2207&&y=987)||(x=5778&&y=2584)||(x=15127&&y=6765)||(x=39603&&y=17711)||(x=103682&&y=46368)||(x=271443&&y=121393)||(x=710647&&y=317811)||(x=1860498&&y=832040)

Λύσεις της x^2-$7y^2$=1 για 0≤y≤1000000:

Reduce[x^2-7*y^2=1&&0≤y≤1000000,{x,y},Integers]

_(x=-514088&&y=194307)||(x=-32257&&y=12192)||(x=-2024&&y=765)||(x=-127&&y=48)||(x=-8&&y=3)||(x=-1&&y=0)||(x=1&&y=0)||(x=8&&y=3)||(x=127&&y=48)||(x=2024&&y=765)||(x=32257&&y=12192)||(x=514088&&y=194307)_

Λύσεις της x^2-$3y^2$=22 για 0≤y≤1000000:

Reduce[x^2-3*y^2=22&&0≤y≤100000000,{x,y},Integers]

_(x=-166154063&&y=95929093)||(x=-91713973&&y=52951087)||(x=-44520847&&y=25704123)||(x=-24574685&&y=14188201)||(x=-11929325&&y=6887399)||(x=-6584767&&y=3801717)||(x=-3196453&&y=1845473)||(x=-1764383&&y=1018667)||(x=-856487&&y=494493)||(x=-472765&&y=272951)||(x=-229495&&y=132499)||(x=-126677&&y=73137)||(x=-61493&&y=35503)||(x=-33943&&y=19597)||(x=-16477&&y=9513)||(x=-9095&&y=5251)||(x=-4415&&y=2549)||(x=-2437&&y=1407)||(x=-1183&&y=683)||(x=-653&&y=377)||(x=-317&&y=183)||(x=-175&&y=101)||(x=-85&&y=49)||(x=-47&&y=27)||(x=-23&&y=13)||(x=-13&&y=7)||(x=-7&&y=3)||(x=-5&&y=1)||(x=5&&y=1)||(x=7&&y=3)||(x=13&&y=7)||(x=23&&y=13)||(x=47&&y=27)||(x=85&&y=49)||(x=175&&y=101)||(x=317&&y=183)||(x=653&&y=377)||(x=1183&&y=683)||(x=2437&&y=1407)||(x=4415&&y=2549)||(x=9095&&y=5251)||(x=16477&&y=9513)||(x=33943&&y=19597)||(x=61493&&y=35503)||(x=126677&&y=73137)||(x=229495&&y=132499)||(x=472765&&y=272951)||(x=856487&&y=494493)||(x=1764383&&y=1018667)||(x=3196453&&y=1845473)||(x=6584767&&y=3801717)||(x=11929325&&y=6887399)||(x=24574685&&y=14188201)||(x=44520847&&y=25704123)||(x=91713973&&y=52951087)||(x=166154063&&y=95929093)_

Ακόμα και σε μία τέτοια ‘ακραία’ περίπτωση το πρόγραμμα επιστρέφει τις ακριβείς λύσεις του προβλήματος πάρα πολύ γρήγορα. Προσπαθώντας να ανακαλύψουμε που αρχίζει να ‘δυσκολεύεται’ το πρόγραμμα ζητήσαμε ένα υπερβολικά μεγάλο εύρος τιμών.

Λύσεις της x^2-$3y^2$=22 για -99999999999999≤y≤99999999999999:

Reduce[x^2-3*y^2=22&&-99999999999999≤y≤99999999999999,{x,y},Integers]

_(x=-87093639818645&&y=-50283536393999)||(x=-87093639818645&&y=50283536393999)||(x=-48074080083127&&y=-27755583077037)||(x=-48074080083127&&y=27755583077037)||(x=-23336670455293&&y=-13473432969353)||(x=-23336670455293&&y=13473432969353)||(x=-12881410935143&&y=-7437086070947)||(x=-12881410935143&&y=7437086070947)||(x=-6253042002527&&y=-3610195483413)||(x=-6253042002527&&y=3610195483413)||(x=-3451563657445&&y=-1992761206751)||(x=-3451563657445&&y=1992761206751)||(x=-_

1675497554815&&y=-967348964299)||(x=-1675497554815&&y=967348964299)||(x=-
924843694637&&y=-533958756057)||(x=-924843694637&&y=533958756057)||(x=-
448948216733&&y=-259200373783)||(x=-448948216733&&y=259200373783)||(x=-
247811121103&&y=-143073817477)||(x=-247811121103&&y=143073817477)||(x=-
120295312117&&y=-69452530833)||(x=-120295312117&&y=69452530833)||(x=-
66400789775&&y=-38336513851)||(x=-66400789775&&y=38336513851)||(x=-
32233031735&&y=-18609749549)||(x=-32233031735&&y=18609749549)||(x=-
17792037997&&y=-10272237927)||(x=-17792037997&&y=10272237927)||(x=-
8636814823&&y=-4986467363)||(x=-8636814823&&y=4986467363)||(x=-
4767362213&&y=-2752437857)||(x=-4767362213&&y=2752437857)||(x=-
2314227557&&y=-1336119903)||(x=-2314227557&&y=1336119903)||(x=-
1277410855&&y=-737513501)||(x=-1277410855&&y=737513501)||(x=-
620095405&&y=-358012249)||(x=-620095405&&y=358012249)||(x=-342281207&&y=-
197616147)||(x=-342281207&&y=197616147)||(x=-166154063&&y=-95929093)||(x=-
166154063&&y=95929093)||(x=-91713973&&y=-52951087)||(x=-
91713973&&y=52951087)||(x=-44520847&&y=-25704123)||(x=-
44520847&&y=25704123)||(x=-24574685&&y=-14188201)||(x=-
24574685&&y=14188201)||(x=-11929325&&y=-6887399)||(x=-
11929325&&y=6887399)||(x=-6584767&&y=-3801717)||(x=-
6584767&&y=3801717)||(x=-3196453&&y=-1845473)||(x=-
3196453&&y=1845473)||(x=-1764383&&y=-1018667)||(x=-
1764383&&y=1018667)||(x=-856487&&y=-494493)||(x=-856487&&y=494493)||(x=-
472765&&y=-272951)||(x=-472765&&y=272951)||(x=-229495&&y=-132499)||(x=-
229495&&y=132499)||(x=-126677&&y=-73137)||(x=-126677&&y=73137)||(x=-
61493&&y=-35503)||(x=-61493&&y=35503)||(x=-33943&&y=-19597)||(x=-
33943&&y=19597)||(x=-16477&&y=-9513)||(x=-16477&&y=9513)||(x=-9095&&y=-
5251)||(x=-9095&&y=5251)||(x=-4415&&y=-2549)||(x=-4415&&y=2549)||(x=-
2437&&y=-1407)||(x=-2437&&y=1407)||(x=-1183&&y=-683)||(x=-1183&&y=683)||(x=-
653&&y=-377)||(x=-653&&y=377)||(x=-317&&y=-183)||(x=-317&&y=183)||(x=-
175&&y=-101)||(x=-175&&y=101)||(x=-85&&y=-49)||(x=-85&&y=49)||(x=-47&&y=-
27)||(x=-47&&y=27)||(x=-23&&y=-13)||(x=-23&&y=13)||(x=-13&&y=-7)||(x=-
13&&y=7)||(x=-7&&y=-3)||(x=-7&&y=3)||(x=-5&&y=-1)||(x=-5&&y=1)||(x=5&&y=-
1)||(x=5&&y=1)||(x=7&&y=-3)||(x=7&&y=3)||(x=13&&y=-
7)||(x=13&&y=7)||(x=23&&y=-13)||(x=23&&y=13)||(x=47&&y=-
27)||(x=47&&y=27)||(x=85&&y=-49)||(x=85&&y=49)||(x=175&&y=-
101)||(x=175&&y=101)||(x=317&&y=-183)||(x=317&&y=183)||(x=653&&y=-
377)||(x=653&&y=377)||(x=1183&&y=-683)||(x=1183&&y=683)||(x=2437&&y=-
1407)||(x=2437&&y=1407)||(x=4415&&y=-2549)||(x=4415&&y=2549)||(x=9095&&y=-
5251)||(x=9095&&y=5251)||(x=16477&&y=-
9513)||(x=16477&&y=9513)||(x=33943&&y=-
19597)||(x=33943&&y=19597)||(x=61493&&y=-
35503)||(x=61493&&y=35503)||(x=126677&&y=-
73137)||(x=126677&&y=73137)||(x=229495&&y=-
132499)||(x=229495&&y=132499)||(x=472765&&y=-
272951)||(x=472765&&y=272951)||(x=856487&&y=-
494493)||(x=856487&&y=494493)||(x=1764383&&y=-
1018667)||(x=1764383&&y=1018667)||(x=3196453&&y=-
1845473)||(x=3196453&&y=1845473)||(x=6584767&&y=-
3801717)||(x=6584767&&y=3801717)||(x=11929325&&y=-
6887399)||(x=11929325&&y=6887399)||(x=24574685&&y=-

14188201)||(x=24574685&&y=14188201)||(x=44520847&&y=-
25704123)||(x=44520847&&y=25704123)||(x=91713973&&y=-
52951087)||(x=91713973&&y=52951087)||(x=166154063&&y=-
95929093)||(x=166154063&&y=95929093)||(x=342281207&&y=-
197616147)||(x=342281207&&y=197616147)||(x=620095405&&y=-
358012249)||(x=620095405&&y=358012249)||(x=1277410855&&y=-
737513501)||(x=1277410855&&y=737513501)||(x=2314227557&&y=-
1336119903)||(x=2314227557&&y=1336119903)||(x=4767362213&&y=-
2752437857)||(x=4767362213&&y=2752437857)||(x=8636814823&&y=-
4986467363)||(x=8636814823&&y=4986467363)||(x=17792037997&&y=-
10272237927)||(x=17792037997&&y=10272237927)||(x=32233031735&&y=-
18609749549)||(x=32233031735&&y=18609749549)||(x=66400789775&&y=-
38336513851)||(x=66400789775&&y=38336513851)||(x=120295312117&&y=-
69452530833)||(x=120295312117&&y=69452530833)||(x=247811121103&&y=-
143073817477)||(x=247811121103&&y=143073817477)||(x=448948216733&&y=-
259200373783)||(x=448948216733&&y=259200373783)||(x=924843694637&&y=-
533958756057)||(x=924843694637&&y=533958756057)||(x=1675497554815&&y=-
967348964299)||(x=1675497554815&&y=967348964299)||(x=3451563657445&&y=-
1992761206751)||(x=3451563657445&&y=1992761206751)||(x=6253042002527&&y=-
3610195483413)||(x=6253042002527&&y=3610195483413)||(x=12881410935143&&y=-
7437086070947)||(x=12881410935143&&y=7437086070947)||(x=23336670455293&&y=
13473432969353)||(x=23336670455293&&y=13473432969353)||(x=48074080083127&&
y=27755583077037)||(x=48074080083127&&y=27755583077037)||(x=87093639818645
&&y=-50283536393999)||(x=87093639818645&&y=-50283536393999)

Όσο και να φαίνεται απίστευτο, η διαδικασία υπολογισμού δεν κράτησε παραπάνω από 1 δευτερόλεπτο! Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν, πώς σε έναν 8πύρηνο επεξεργαστή σύγχρονης τεχνολογίας η εξίσωση του Pell είναι ένα πρόβλημα εύκολο στη λύση.

Συμπεράσματα-Επεκτάσεις:

Η εξίσωση του Pell αποτελεί ένα καλά θεμελιωμένο μαθηματικό πρόβλημα στο πέρασμα των αιώνων. Όπως είναι εμφανές από αυτήν τη διπλωματική εργασία, πλήθος καταξιωμένων επιστημόνων ασχολήθηκε με την επίλυσή της. Ενώ ο Fermat θεωρείται δικαιολογημένα ο πρωτοπόρος που προσπάθησε να βρει έναν αναλυτικό τρόπο λύσης και ο χαρακτηρισμός ‘εξίσωση του Pell’ μπορεί να θεωρηθεί εσφαλμένος, ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός αποδίδεται στον Euler.

Βέβαια, η προαναφερθείσα εξίσωση, όπως είδαμε, λύθηκε από τον Ινδό μαθηματικό Βραχμαπούπτα. Η σημασία της εξίσωσης του Pell είναι κομβική για τη Θεωρία Αριθμών και η σημασία της πηγάζει από την ανάγκη για την εύρεση ιδιοτήτων των αριθμών με παραπάνω από έναν τρόπο: τριγωνικό ή τετραγωνικό.

Όλες οι ιστορικές λύσεις που μελετήσαμε έχουν ως επίκεντρο σκέψης την εύρεση ενός αλγορίθμου παραγοντοποίησης που θα παράγει μέχρι ένα όριο ένα ζευγάρι λύσεων για τα x, y. Πάντα στόχος αυτών των μεθόδων είναι ουσιαστικά η εύρεση ενός συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{D}$. Επιπλέον, η εξίσωση λύνεται για προκαθορισμένες τιμές του D. Πιο συγκεκριμένα για τιμές του $D=4n+1$ είναι σίγουρο ότι η εξίσωση του Pell έχει λύση.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν απλά στοιχειώδεις μεθόδους που ‘πάνε περίπατο’ όταν στο παιχνίδι μπαίνει η σύγχρονη υπολογιστική δύναμη. Προφανώς, και ο Pell, ο Lagrange και ο Euler και όλοι οι υποψήφιοι λύτες της εξίσωσης δεν διέθεταν τους υπολογιστικούς πόρους που επιτάσσει το σύγχρονο ‘brute force’. Έτσι, χωρίς καν την ύπαρξη ενός αλγορίθμου λύσης και έχοντας στην υπηρεσία μας μία σειρά υπολογιστών, μπορούμε απλά διερευνώντας τις πιθανές εκδοχές των λύσεων να φτάσουμε με τη βοήθεια ενός σύγχρονου μαθηματικού πακέτου-λογισμικού (Matlab ή Mathematica) στην εύρεση ενός πολύ μεγάλου πλήθους λύσεων της εξίσωσης.

Συμπερασματικά, ο τρόπος προσέγγισης της γνώσης αλλάζει με την πάροδο του χρόνου και πλέον η νέες τεχνολογίες είναι συνεργάτες του επιστήμονα της εποχής μας. Έτσι, άλυτα και δυσνόητα προβλήματα του παρελθόντος καθίστανται άμεσα επιλύσιμα σε όλα τα επίπεδα.

Τα προγράμματα που χρησιμοποιούνται εδώ μπορούν να επεκταθούν και για την επίλυση με τον ίδιο τρόπο σκέψης και κάθε άλλη εξίσωση της Θεωρίας Αριθμών. Σαν τελευταία εικόνα δείχνουμε έναν πίνακα με λύσεις της εξίσωσης του Pell για το παλιό προγραμματιστικό πακέτο Fortran.

N	x	y	N	x	y	N	x	y
2	3	2	37	73	12	69	7775	936
3	2	1	38	37	6	70	251	30
5	9	4	39	25	4	71	3480	413
6	5	2	40	19	3	72	17	2
7	8	3	41	2049	320	73	2281249	267000
8	3	1	42	13	2	74	3699	430
10	19	6	43	3482	531	75	26	3
11	10	3	44	199	30	76	57799	6630
12	7	2	45	161	24	77	351	40
13	649	180	46	24335	3588	78	53	6
14	15	4	47	48	7	79	80	9
15	4	1	48	7	1	80	9	1
17	33	8	50	99	14	82	163	18
18	17	4	51	50	7	83	82	9
19	170	39	52	649	90	84	55	6
20	9	2	53	66249	9100	85	285769	30996
21	55	12	54	485	66	86	10405	1122
22	197	42	55	89	12	87	28	3
23	24	5	56	15	2	88	197	21
24	5	1	57	151	20	89	500001	53000
26	51	10	58	19603	2574	90	19	2
27	26	5	59	530	69	91	1574	165
28	127	24	60	31	4	92	1151	120
29	9801	1820	61	1766319049	226153980	93	12151	1260
30	11	2	62	63	8	94	2143295	221064
31	1520	273	63	8	1	95	39	4
32	17	3	65	129	16	96	49	5
33	23	4	66	65	8	97	62809633	6377352
34	35	6	67	48842	5967	98	99	10
35	6	1	68	33	4	99	10	1

Αποτελέσματα για την εξίσωση του Pell με τη γλώσσα Fortran

Βιβλιογραφία

[1] [Archimedes 1999] Archimedes, The cattle problem, in English verse by S. J. P. Hillion and H. W. Lenstra jr., Mercator, Santpoort, 1999.

[2] Αγάπης,Τ.(1998). *Αριθμοί και άλλα…*.Θεσ/νίκη: Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ.Βαφειάδης.

[3] Δρόσος, Κ. (2000). *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών

[4] Κόσυβας, Γ. (2009). Διαφορά τετραγώνων δυο φυσικών αριθμών.*Το φ:Περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά*, 6:133-160. Αθήνα: Βισκαδουράκης.

[5] Μπρίκας, Μ. (1970).*Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*. Αθήνα.

[6] David M. Bressoud, Factorization and Primality Testing, Springer- Verlag, NY, 1989.

[7] G. Chrystal, Algebra, An Elementary Text-Book (a.k.a. Textbook of Algebra), Part II, Dover, NY, 1961.

[8] Henri Cohen, A Course in Computational Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, 1993.

[9] Richard Crandall and Carl Pomerance, Primes - A Computational Perspective, Springer-Verlag, New York, 2002.

[10] Harold M. Edwards, Fermat's Last Theorem, Springer-Verlag, NY, 1977.

[11] Adolf Hurwitz, Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1986.

[12] H. W. Lenstra Jr., Solving the Pell equation, Notices of the American Mathematical Society, 49 No. 2 (February 2002), pp. 182–192.

[13] William Judson Leveque, Topics in Number Theory, Volume 1, Addison-Wesley, New York , 1956.

[14] G. B. Mathews, Number Theory, Chelsea, New York. A classic treatment of binary quadratic forms.

[15] Keith Matthews, The diophantine equation $ax^2 + bxy + cy^2 = N$, $D = b^2 - 4ac > 0$, J. Theor. Nombres Bordeaux, 14 (2002) 257-270.

[16] Keith Matthews, The diophantine equation x2 − Dy2 = N, D > 1, in integers, Expositiones Mathematicae, 18 (2000), 323- 331.

[17] Richard E. Mollin, Fundamental Number Theory with Applications, CRC Press, Boca Raton, 1998. Chapter 5, pp. 221 to 272

[18] Richard Mollin, Simple Continued Fraction Solutions for Diophantine Equations, Expositiones Mathematicae, 19 (2001), pp. 55–73.

[19] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, and Hugh L. Montgomery (NZM), An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[20] C. D. Olds, Continued Fractions, MAA, 1963. An easy introduction to simple continued fractions, and the Pell equation x2 −Dy2 = ±1.

[21] Carl Pomerance, A Tale of Two Sieves, Notices of the American Mathematical Society, 43 No. 12, December 1996, pages 1473 to 1485.

[22] Andrew M. Rockett and Peter Sz¨usz, Continued Fractions, World Scientific, 1992.

[23] H. E. Rose, A Course in Number Theory, Clarendon Press, 1988.

[24] H. C. Williams, Solving the Pell equation, in Bruce Berndt et al., Surveys in Number Theory: Papers from the Millennial Conference on Number Theory, A. K. Peters, 2002.

[25] http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html